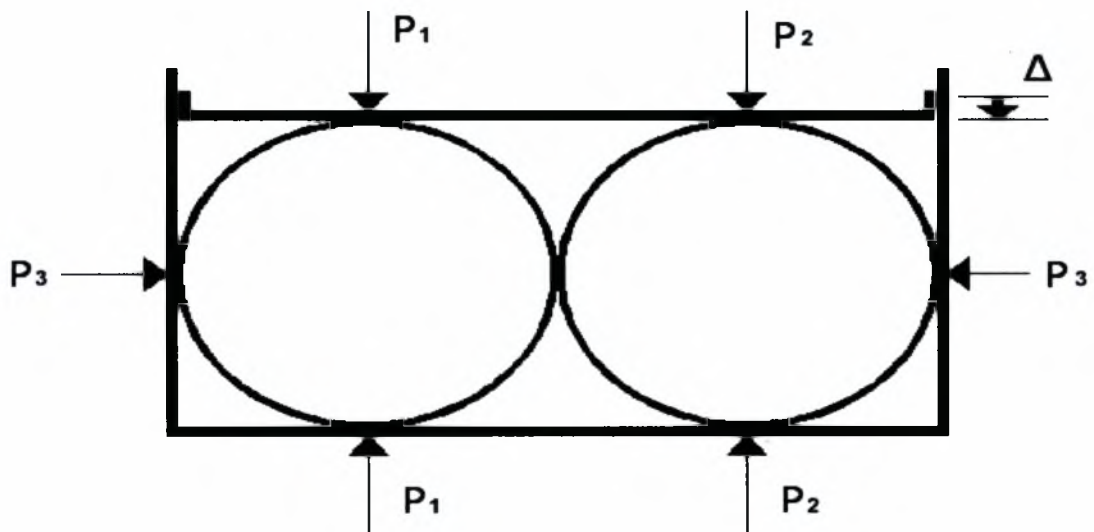




**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**  
**ΜΙΚΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΚΟΚΚΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**



ΦΟΙΤΗΤΕΣ: ΤΑΒΟΥΚΤΣΗ ΕΛΕΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

Βόλος, Μάρτιος 2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3744/1  
Ημερ. Εισ.: 11-04-2008  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2007  
TAB

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1– Φαινόμενα αστάθειας κυκλικών δίσκων κάτω από την επίδραση θλιπτικών φορτίων	
1.1 Σενάριο ενός δίσκου.....	7
1.1.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	7
1.1.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	8
1.2 Σενάριο δύο δίσκων σε οριζόντια διάταξη.....	9
1.2.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	9
1.2.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	11
1.3 Σενάριο τριών δίσκων σε οριζόντια διάταξη(1) .....	16
1.3.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	16
1.3.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	18
1.4 Σενάριο τριών δίσκων σε οριζόντια διάταξη(2).....	20
1.4.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	20
1.4.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	22
1.5 Σενάριο δύο δίσκων σε κατακόρυφη διάταξη.....	24
1.5.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	24
1.5.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	25
1.6 Σενάριο τριών δίσκων σε κατακόρυφη διάταξη.....	27
1.6.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	27
1.6.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Ευστάθεια στήλης συνεχούς μέσου	
2.1 Ανάλυση δυνάμεων.....	33
2.2 Έδραση «κουτιού» .....	37
2.3 Ανάλυση προβλήματος.....	37
2.4 Ειδική περίπτωση με $L=4R$ .....	42
2.5 Ύπαρξη υγρού ανάμεσα στους κυκλικούς δίσκους.....	44
2.6 Άλλοι τρόποι ισοστατικής στηρίξεως.....	53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Ρύθμιση σχήματος και ευστάθειας παγιδευμένης σταγόνας	
3.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	54
3.2 Ορισμός της γεωμετρίας του προβλήματος.....	55
3.3 Ανάλυση του προβλήματος.....	56

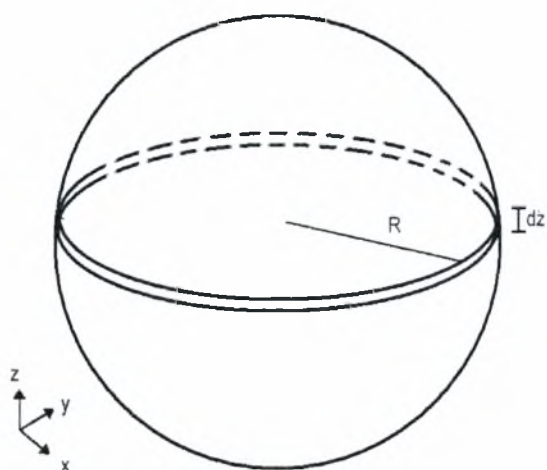
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4- Εξάρτηση των ελαστικών συντελεστών γεωυλικού με ελεγχόμενες τις παραμορφώσεις (τροπές)

4.1 Ισότροπο υλικό .....	62
4.1.1 Έκφραση του E με βάση τις τάσεις .....	62
4.1.1.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	62
4.1.1.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	63
4.1.1.3 Επαλήθευση.....	66
4.1.2 Έκφραση του E με βάση τις τροπές.....	67
4.1.2.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	67
4.1.2.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	68
4.1.2.3 Σχέση μεταξύ αναλλοίωτων.....	72
4.1.2.4 Σύγκριση τελικών εξισώσεων.....	73
4.1.2.5 «Διόρθωση» του προβλήματος.....	74
4.2 Ανισότροπο υλικό .....	77
4.2.1 Έκφραση του E με βάση τις τάσεις.....	77
4.2.2 Έκφραση του E με βάση τις τροπές.....	78
4.1.2.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	78
4.1.2.2 Ανάλυση του προβλήματος.....	79
4.3 Αριθμητικό παράδειγμα μονοαξονικής φόρτισης.....	86
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....	94
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	102
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	104

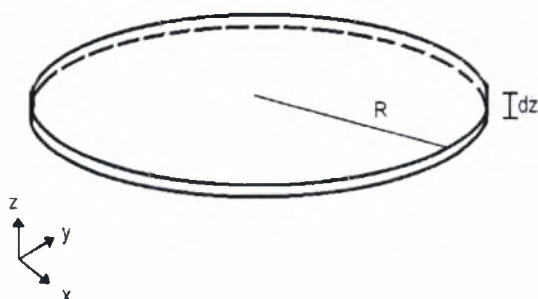
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της παρούσας εργασία είναι η μικρομηχανική ανάλυση κοκκωδών υλικών. Κοκκώδη υλικά είναι κατά κύριο λόγο τα γεωυλικά (άμμος άργιλος κ.λ.π), αλλά μπορεί να είναι και οποιοδήποτε άλλο υλικό που η μικροδομή του αποτελείται από κόκκους.

Στην ανάλυση μας, καταρχήν θεωρούμε το πρόβλημα επίπεδο  $(x,y)$ , όπου η τρίτη διάσταση είναι πάρα πολύ μικρή  $dz$ . Ενώ εξετάζουμε την απλούστερη γεωμετρία για τους κόκκους του υλικού, δηλαδή θεωρούμε κόκκους με κυκλική διατομή ακτίνας  $R$ . Είναι δηλαδή σαν να έχουμε ένα σφαιρικό κόκκο υλικού (σχήμα 1) που κόβουμε μια λεπτή «φέτα» και προκύπτει κυκλικός δίσκος ακτίνας  $R$ (σχήμα 2). Στο εξής θα αναφερόμαστε σε κυκλικούς δίσκους.



Σχήμα 1. Σφαιρικός κόκκος υλικού



Σχήμα 2. Κυκλικός δίσκος

Στα πρώτα 3 κεφάλαια απομονώνουμε έναν, δύο, τρεις ή ακόμη και μια συστοιχία κόκκων για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά τους. Για να περιγράψουμε την αλληλεπίδραση τους, με τους υπόλοιπους κόκκους χρησιμοποιούμε είτε ένα διάφραγμα είτε ένα «κουτί». Με τον όρο «κουτί» θα θεωρούμε αυτό που στη βιβλιογραφία αποκαλείται «αντιπροσωπευτικός όγκος» του υλικού, και περιέχει όλες τις πληροφορίες της μικροδομής που θέλουμε να εξετάσουμε.

Η πορεία που ακολουθούμε στην παρούσα εργασία είναι κλιμακωτή. Αρχικά εστιάζουμε στη μικροδομή του υλικού (σε ένα σημείο του υλικού) και εξετάζουμε την τοπική ισορροπία των κόκκων κάτω από την επίδραση θλιπτικών φορτίων. Βλέπουμε ακόμη τι συμβαίνει όταν υπάρχει υγρό ανάμεσα στους κόκκους. Στη συνέχεια, μελετάμε την ευστάθεια μιας στήλης συνεχούς μέσου σε συνθήκες ισοστατικής στήριξης και τέλος, διερευνούμε την εξάρτηση των ελαστικών συντελεστών ισότροπου και ανισότροπου γεωυλικού σε καθεστώς παραμορφώσεων (τροπών).

Τα αποτελέσματα αυτής της διερεύνησης αναμένεται να χρησιμεύσουν στην εξήγηση φαινομένων αστάθειας, κατολισθήσεων ή μακροσκοπικών καθιζήσεων, στη μέτρηση των μηχανικών ιδιοτήτων των γεωυλικών και των υπόλοιπων κοκκωδών υλικών ή να χρησιμοποιηθούν σε υπολογιστικά προγράμματα, πεπερασμένα στοιχεία κ.λ.π.

Η παρούσα διπλωματική εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει βάση για περαιτέρω μελέτη και διερεύνηση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πιο σύνθετα μοντέλα, εισάγοντας την πλαστικότητα, χρησιμοποιώντας περισσότερες πληροφορίες για τη μικροδομή που εξετάζουμε ή χρησιμοποιώντας πολύπλοκη γεωμετρία.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

## Κεφάλαιο 1

Εισάγουμε διάφορα σενάρια, στα οποία αλλάζει κάθε φορά το μέγεθος και η διάταξη των δίσκων(οριζόντια,κατακόρυφη) στα οποία εξετάζουμε πώς παραμορφώνονται οι δίσκοι καθώς συμπιέζονται και αναζητάμε κρίσιμα σημεία που είναι πιθανόν να έχουμε αστάθεια(τοπικά). Η συμπίεση προσομοιώνεται με ένα διάφραγμα κινείται που προς τα κάτω κατά  $\Delta$ . Τα κρίσιμα σημεία είναι πιθανά σημεία έναρξης ανακατατάξεων των δίσκων, διαρροών ή κατολισθήσεων. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε τη συμπεριφορά των δίσκων μετά την κρίσιμη τιμή, όπου έχουμε διακλάδωση της λύσης, μόνο για το σενάριο των δύο δίσκων σε οριζόντια διάταξη. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, μπορεί ακολουθείται αντίστοιχη διαδικασία.

## Κεφάλαιο 2

Θεωρούμε ένα σωρό από ( $n$ ) όμοιους κυκλικούς δίσκους (τοποθετημένους ο ένας πάνω στον άλλον) που εφάπτονται σημειακά, ώστε και τα κέντρα τους να σχηματίζουν γωνία  $\phi$ . Οι κυκλικοί δίσκοι θεωρούνται απαραμόρφωτοι και ασυμπιεστοί και εξετάζεται η ευστάθεια της στήλης σε συνθήκες ισοστατικής στήριξης. Επικεντρώνουμε στην ισοστατική στήριξης αφού όταν χάνεται η ισοστατικότητα επέρχεται μηχανισμός, δηλαδή η αστοχία. Μελετάμε επίσης πως επηρεάζει η ύπαρξη υγρού την ευστάθεια της στήλης των δίσκων και ορίζουμε τον γεωμετρικό τόπο που μπορούν να βρίσκονται οι στηρίξεις δίχως να έχουμε ανατροπή.

## Κεφάλαιο 3

Εστιάζουμε στη μικροδομή, όπου έχουμε μια μικρή σταγόνα που βρίσκεται παγιδευμένη ανάμεσα σε δύο οριζόντιες πλάκες, που μπορούν να θεωρηθούν κόκκοι υλικού, και περιβάλλεται από αέρα. Εξετάζουμε το σχήμα και την ευστάθεια μιας σταγόνας, σε υδροστατική ισορροπία και παρατηρούμε πώς η απόσταση των πλακών  $D$  επηρεάζει την σταγόνα, σε συνθήκες απουσία της βαρύτητας. Υπάρχει συμμετρία και στους δύο άξονες  $z$  και  $r$  και μπορούμε να περιορίσουμε το πρόβλημα στο πρώτο τεταρτημόριο.

## Κεφάλαιο 4

Στηριζόμαστε στη μελέτη των Dakoulas και Yu (1993), που εξετάζει την γενική εξάρτηση των ελαστικών συντελεστών ενός ανισότροπου γεωυλικού σε καθεστώς τάσεων, και διερευνούμε την εξάρτηση των ελαστικών συντελεστών ισότροπου και ανισότροπου γεωυλικού με ελεγχόμενες τις παραμορφώσεις (τροπές). Αποδεικνύεται ότι η αρχική υπόθεση για τη διατήρηση της ενέργεια κατά τη διάρκεια ενός κύκλου της φόρτωσης, σε οποιασδήποτε αυθαίρετο κλειστό «μονοπάτι» τάσεων, δεν ευσταθεί. Οπότε δεν υπάρχει πλήρη ελαστικότητα και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ελαστικοί συντελεστές του γεωυλικού. Το πρόβλημα είναι περισσότερο έντονο όταν έχουμε κυκλικές φορτίσεις (π.χ. σεισμός) οπότε υπάρχει ο

κίνδυνος το μοντέλο να δημιουργήσει «ψευδοαπόσβεση» ή χειρότερα μια εντελώς αφύσικη συμπεριφορά. Για να επιτύχουμε «διόρθωση» του προβλήματος (για ισότροπο υλικό) στην παρούσα εργασία προτείνεται να χρησιμοποιηθούν «υποβόσκουσες» τροπές (back strains). Θα μπορούσαμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα ακολουθώντας και διαφορετική στρατηγική, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, «υποβόσκουσες» τάσεις (back stress). Η διαδικασία επίλυσης θα ήταν παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε, ωστόσο δεν προτιμήθηκε γιατί η μέθοδος αυτή είναι πιο δύσχρηστη για υπολογισμούς με πεπερασμένα στοιχεία. Τέλος, αποδεικνύουμε την ορθότητα αυτών που ισχυριστήκαμε παραπάνω με ένα απλό παράδειγμα μονοαξονικής φόρτισης (εφελκυσμός/ θλίψη).



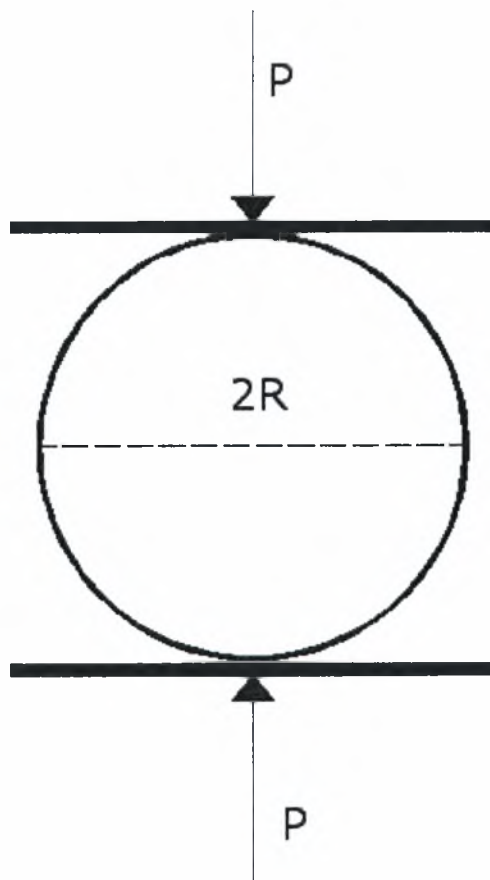
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Φαινόμενα Αστάθειας Κυκλικών Δίσκων Κάτω Από Την Επίδραση Θλιπτικών Φορτίων

### 1.1 ΣΕΝΑΡΙΟ ΕΝΟΣ ΔΙΣΚΟΥ

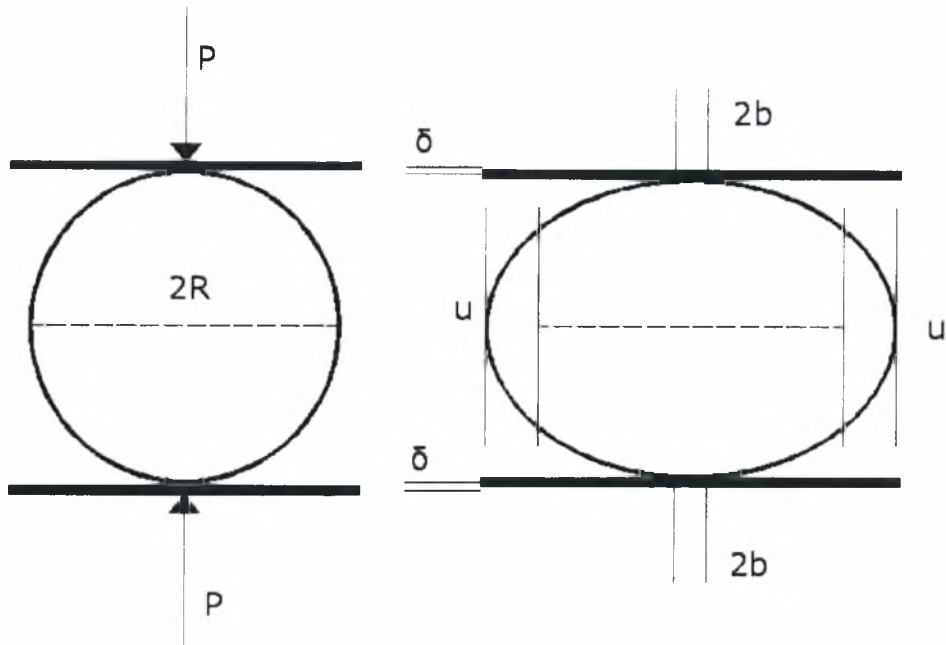
#### 1.1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Αρχικά θα εξεταστεί πώς παραμορφώνεται ένας ισότροπος κυκλικός δίσκος ακτίνας  $R$ , ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα σε δυο συμπαγείς, άκαμπτες και ασυμπίεστες πλάκες και δέχεται συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Ο δίσκος είναι κατασκευασμένος από υλικό που μπορεί να συμπιεστεί με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Η επιφάνεια τόσο του δίσκου όσο και των πλακών είναι λεία. Επίσης, ο κυκλικός δίσκος εφάπτεται πάνω στις πλάκες χωρίς να συγκολλούνται.



Σχήμα 1.1 Κυκλικός δίσκος ανάμεσα σε δύο συμπαγής πλάκες

### 1.1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ



Σχήμα 1.2 Παραμόρφωση του κυκλικού δίσκου

Καθώς δρουν οι δυνάμεις  $P$ , ο κυκλικός δίσκος συμπιέζεται και παραμορφώνεται. Να επισημάνουμε ότι η  $P$  ασκείται ανά μονάδα πάχους του δίσκου.

$2b$  είναι το μήκος της επιφάνειας επαφής που αναπτύσσεται μεταξύ του κυκλικού δίσκου και της κάθε πλάκας.  $\delta$  είναι η μετατόπιση που πλησιάζει κάθε πλάκα το κέντρο του κύκλου. Τέλος  $u$  είναι η οριζόντια μετατόπιση των ελεύθερων πλευρών του κυκλικού δίσκου (βλέπε σχήμα 1.2). Γνωρίζουμε ότι,

$$\delta = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \frac{1}{3} + \ln \frac{4R}{b} \right] \quad (1.1)$$

$$b = \sqrt{\frac{4P(1-\nu^2)R}{E}} \quad (1.2)$$

Κανονικοποιούνται τα μεγέθη ώστε να είναι αδιάστατα, για γενίκευση και μεγαλύτερη ευκολία. Τα μήκη κανονικοποιούνται, διαιρώντας τα με την ακτίνα  $R$  και η δύναμη  $P$  διαιρώντας την με το μέγεθος  $(\pi ER)/4(1-\nu^2)$ .

Οπότε από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) προκύπτουν:

$$2 \frac{\delta}{R} = 2\delta^* = \frac{4P(1-\nu^2)}{\pi ER} \left[ \frac{1}{3} + \ln \frac{4R}{b} \right] = P^* \left[ \frac{1}{3} + \ln \frac{4}{b^*} \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{b}{R} = b^* = \sqrt{\pi \left[ \frac{4P(1-\nu^2)}{\pi ER} \right]} = \sqrt{\pi P^*} \quad (1.4)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει

$$2\delta^* = P^* \left[ \frac{1}{3} + \ln \frac{4}{b^*} \right] = f(P^*) \quad (1.5)$$

Προφανώς ισχύει  $0 \leq 2\delta \leq 2R$ , οπότε  $0 \leq 2\delta^* \leq 2$ .

Ενώ για να υπάρχει μονοτονία ανάμεσα στα  $\delta^*$  και  $P^*$  πρέπει

$$\frac{df}{dP^*} = \ln \frac{4}{\sqrt{\pi P^*}} - \frac{1}{6} > 0 \quad (1.6)$$

δηλαδή

$$0 \leq P^* \leq \frac{16}{\pi e^{1/3}} \approx 3,65 \quad (1.7)$$

Στη συνέχεια κανονικοποιείται το  $u$

$$u = \frac{P(1+\nu)}{\pi E} \left[ 2(1-\nu) - \frac{\pi}{2}(1-2\nu) \right] \quad (1.8)$$

και μετά από πράξεις προκύπτει

$$\frac{u}{R} = u^* = P^* \left[ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \right] = P^* F \quad (1.9)$$

όπου  $F = 1/2 - \pi/8(1-2\nu)/(1-\nu)$  μια σταθερά που εξαρτάται από τον λόγο Poisson,  $\nu$ .

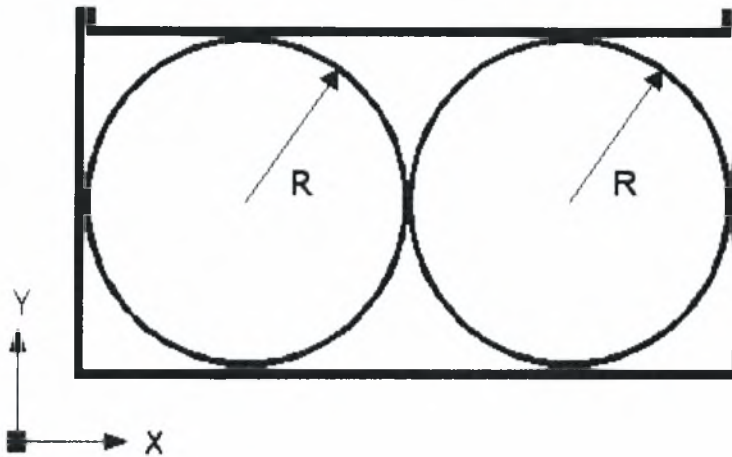
Τα μοντέλα που ακολουθούν περιγράφουν πιθανές επιρροές της μικροδομής σε φαινόμενα αστάθειας του υλικού κάτω από την επίδραση θλιπτικών φορτίων.

## 1.2 ΣΕΝΑΡΙΟ ΔΥΟ ΔΙΣΚΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΑΤΑΞΗ

### 1.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

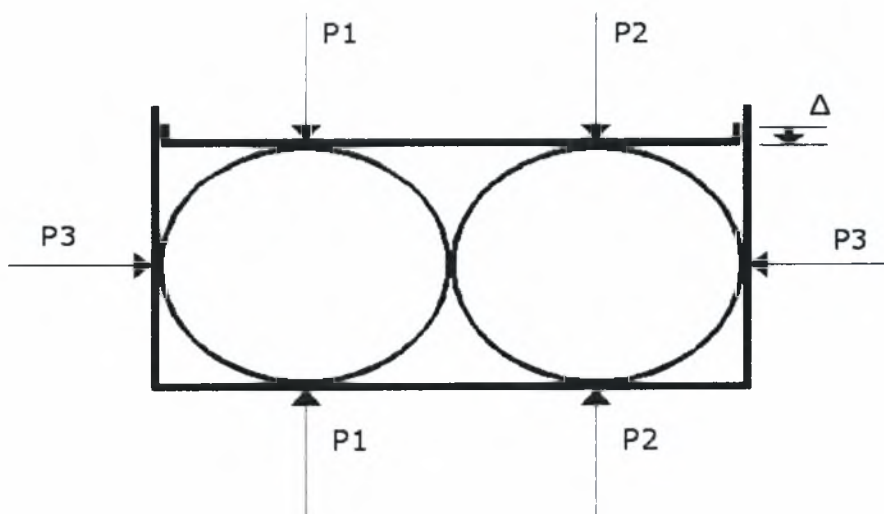
Θεωρούμε δυο όμοιους κυκλικούς δίσκους οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπιέστο «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. «Κουτί» στο εξής θα θεωρούμε αυτό που στη βιβλιογραφία αποκαλείται «αντιπροσωπευτικός όγκος» του υλικού και περιέχει όλες τις πληροφορίες της μικροδομής που θέλουμε να εξετάσουμε. Οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην κορυφή υπάρχει ένα επίσης άκαμπτο διάφραγμα που έχει τη δυνατότητα να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση. Οι δυο κυκλικοί δίσκοι έχουν ίδια ακτίνα  $R$  και είναι κατασκευασμένοι από γραμμικά ελαστικό και

ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Από την κίνηση του διαφράγματος, θεωρούμε ότι οι δύο δίσκοι δέχονται συγκεντρωμένο φορτίο  $P_1$  και  $P_2$  αντίστοιχα. Χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x,y,z)$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3 Δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο κουτί με διάφραγμα στο πάνω μέρος

Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι δυο δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ . Από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και το διάφραγμα προκύπτουν οι δυνάμεις  $P_1, P_2$ , και  $P_3$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Οι δυνάμεις αυτές είναι οι δράσεις (ανά μονάδα μήκους) των τοιχωμάτων στους δίσκους.



Σχήμα 1.4 Παραμόρφωση των δυο όμοιοι δίσκοι, μετακίνηση κατά  $\Delta$

## 1.2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

❖ Πριν τη διακλάδωση της λύσης

Θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $\Delta$  ξεκινά από το μηδέν και αυξάνεται μονοτονικά, ενώ η συμπεριφορά των δίσκων διατηρεί την συμμετρία.

Αρχικά  $P_1=P_2$  και όλες οι δυνάμεις ( $P_1, P_3$ ) αυξάνονται μονοτονικά με τη μετατόπιση  $\Delta$ . Συνεπώς,

$$\frac{dP_1}{dP_3} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\Delta}{dP_3} > 0 \quad (1.10)$$

Όπου, βέβαια,  $0 \leq \Delta \leq 2R$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα είναι μη γραμμικό. Ωστόσο μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού για το σύστημα των δυο δίσκων, βασισμένες στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του ενός δίσκου που συμπιέζεται από δυο άκαμπτες πλάκες.

$$\Delta^* = f(P_1^*) - 2FP_3^* \quad (1.11)$$

$$0 = -f(P_3^*) + 2FP_3^* \quad (1.12)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.12) στην (1.11) πετυχαίνουμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη δύναμη  $P_3^*$ , οπότε

$$P_1^* = \frac{f(P_3^*)}{2F} \quad (1.13)$$

$$\Delta^* = f\left(\frac{f(P_3^*)}{2F}\right) - 2FP_3^* \quad (1.14)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν  $P_3^* = 0$  τότε  $\Delta^* = 0$  και  $P_1^* = 0$
- Η σταθερότητα στο σύστημα διατηρείται όταν

$$\frac{d\Delta^*}{dP_3^*} > 0 \quad \text{που ισχύει όταν } 0 \leq P_3^* \leq P_3^{c*} \quad (1.15)$$

- Η αστάθεια στο σύστημα αναμένεται όταν

$$\frac{d\Delta^*}{dP_3^*} = 0 \quad \text{που ισχύει όταν } P_3^* = P_3^{c*} \quad (1.16)$$

όπου μιλάμε ουσιαστικά για ένα ακρότατο, δηλαδή το μέγιστο σημείο φόρτισης στο οποίο το σύστημα χάνει τη μονοτονία του. Στο σημείο  $P_3^* = P_3^{c*}$  από τις σχέσεις (1.16) και (1.14) έχουμε

$$\left. \frac{df}{dP^*} \right|_{P^* = \frac{f(P_3^*)}{2F}} \bigg/ \left. \frac{df}{dP^*} \right|_{P^* = P_3^*} = 4F^2 \quad (1.17)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.6), η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\left[ \ln \frac{4}{\sqrt{\pi \frac{P_3^*}{2F} \left[ \frac{1}{3} + \ln \frac{4}{\sqrt{\pi P_3^*}} \right]}} - \frac{1}{6} \right] \left[ \ln \frac{4}{\sqrt{\pi P_3^*}} - \frac{1}{6} \right] = 4F^2 \quad (1.18)$$

Επιλύοντας την (1.18) ως προς  $P_3^*$ , προκύπτει η κρίσιμη τιμή  $P_3^{c*}$ . Η εξίσωση (1.18) έχει μόνο μια ρίζα. Μετά την τιμή  $P_3^{c*}$ , στο διάγραμμα απόκρισης(δύναμη-μετατόπιση) θα υπάρχει διακλάδωση.

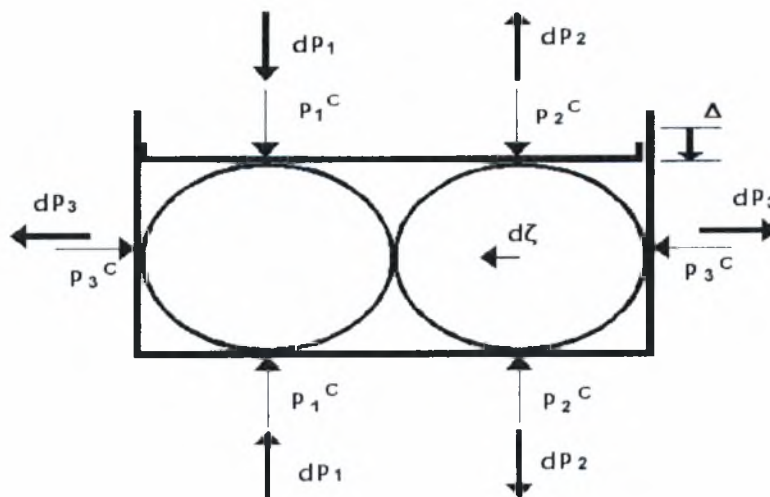
Από την τιμή  $P_3^{c*}$  προκύπτουν και τα υπόλοιπα κρίσιμα μεγέθη

$$P_1^{c*} = \frac{f(P_3^{c*})}{2F} \quad (1.19)$$

$$\Delta^{c*} = f\left(\frac{f(P_3^{c*})}{2F}\right) - 2FP_3^{c*} \quad (1.20)$$

#### ❖ Μετά τη διακλάδωση της λύσης

Είναι λογικό μετά τη διακλάδωση της λύσης, τα κέντρα των κυκλικών δίσκων να μετακινηθούν. Αυτό σπάει τη συμμετρία που υπήρχε στον τρόπο που παραμορφώνονταν οι δυο δίσκοι. Ας υποθέσουμε ότι το κέντρο του δεξιού δίσκου μετακινείται προς το κέντρο του αριστερού δίσκου κατά μια μικρή ποσότητα  $d\zeta$ . Τότε η πλευρική δύναμη  $P_3$  μειώνεται και με τη σειρά της οδηγεί στη άνιση μεταβολή των κατακόρυφων δυνάμεων  $P_1$  και  $P_2$ . Η  $P_1$  αυξάνεται και η  $P_2$  μειώνεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5 Παραμόρφωση των δυο όμοιων δίσκων μετά το διαχωρισμό, μετακίνηση κατά  $\Delta$  και  $d\zeta$

Οι νέες εξισώσεις συμβιβαστού αμέσως μετά τη διακλάδωση είναι

$$FdP_3^* = \frac{df}{dP^*} \Big|_{P^*=P_1^{c^*}} dP_2^* \quad (1.21)$$

$$FdP_3^* = \frac{df}{dP^*} \Big|_{P^*=P_2^{c^*}} dP_1^* \quad (1.22)$$

$$0 = -d\zeta^* + 4 \frac{df}{dP^*} \Big|_{P^*=P_3^{c^*}} dP_3^* + 2FdP_1^* - 2FdP_2^* \quad (1.23)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$dP_1^* = dP_2^* \quad (1.24)$$

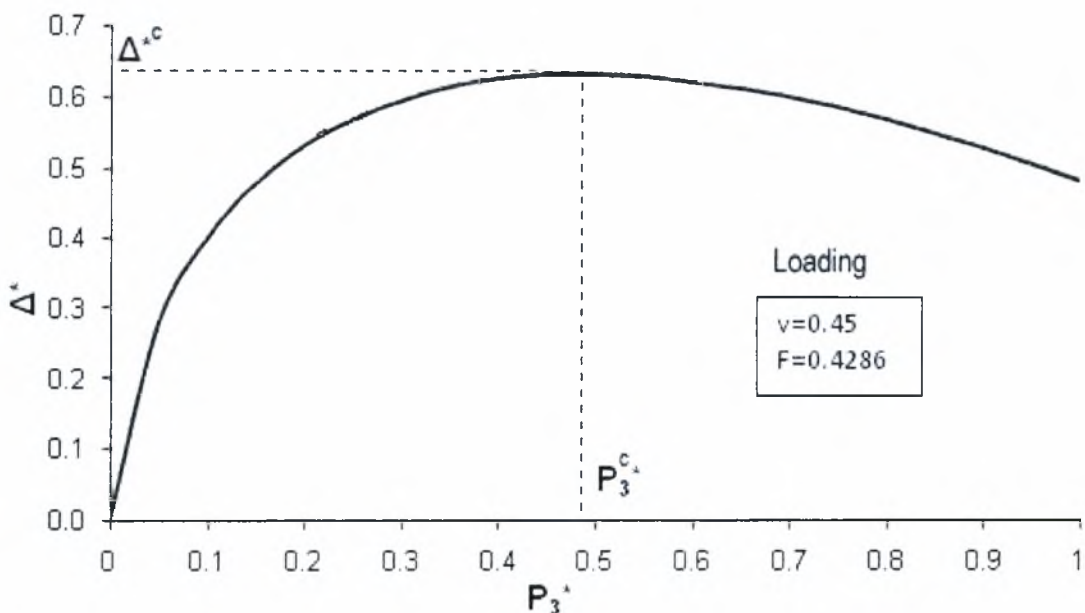
$$d\zeta^* = 4 \frac{df}{dP^*} \Big|_{P^*=P_3^{c^*}} dP_3^* \quad (1.25)$$

#### ❖ Αριθμητικό παράδειγμα

Στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί για τους δύο κυκλικούς δίσκους επιλέγουμε υλικό με λόγο Poisson  $\nu=0.45$  οπότε από τη σχέση (1.9) προκύπτει  $F=0.4286$ .

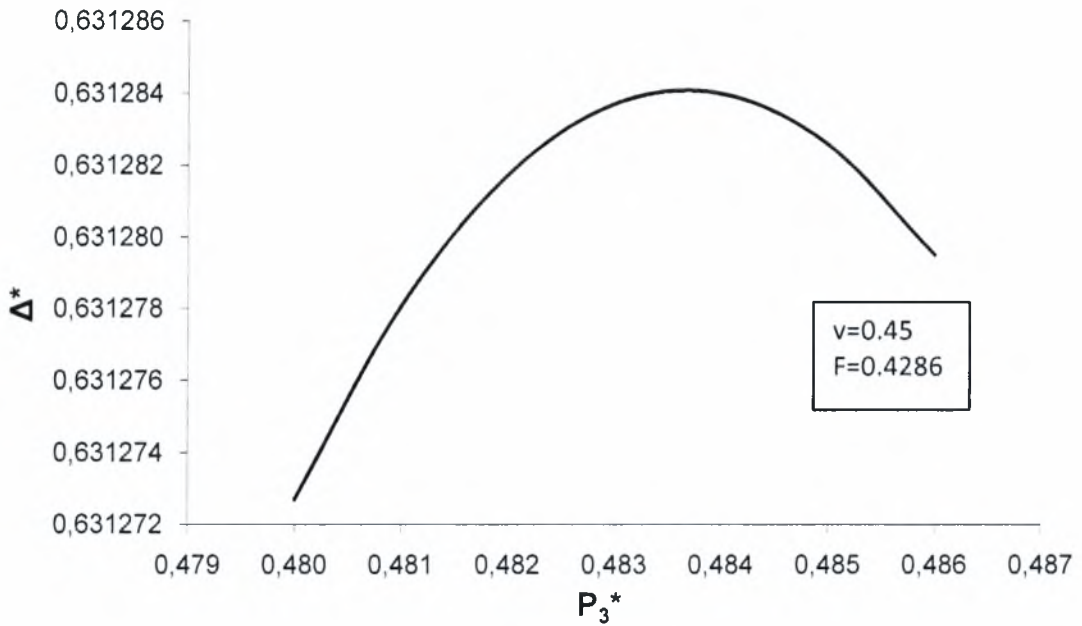
Από την (1.16) προκύπτουν τα κρίσιμα μεγέθη  $P_3^{c^*}=0.484, P_1^{c^*}=0.852, \Delta^{c^*}=0.63184$ .

Η ισοδύναμη τάση της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^{c^*}$ , είναι  $\sigma_x^{c^*} = 2P_1^{c^*}/(4*1)=0.426$  και το πορώδες  $e_\nu=(E_{ολικό}-E_{κύκλου})/E_{ολικό}=0.215$ .

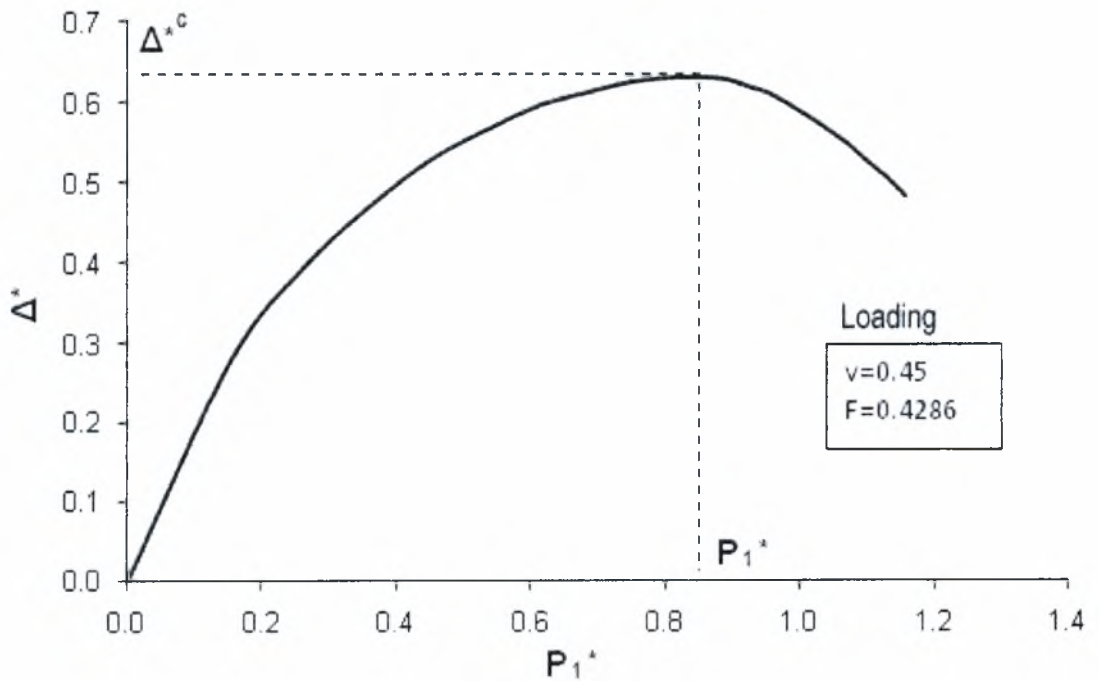


Σχήμα 1.6 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$

Εστιάζουμε στην περιοχή γύρω από το κρίσιμο σημείο και διακρίνουμε πιο έντονα την αλλαγής κλίσης.



Σχήμα 1.7 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$  (εστιασμένο στην γύρω από την περιοχή αλλαγής κλίσης)



Σχήμα 1.8 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^*$



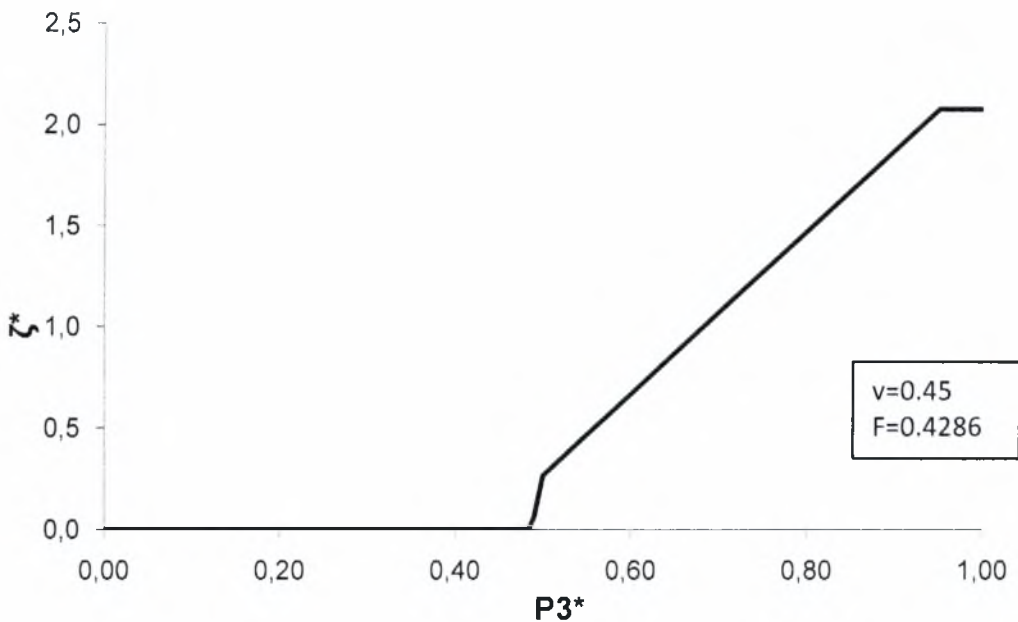
Μετά τη διακλάδωση της λύσης ισχύει η σχέση (1.25), οπότε για  $P_3^{C^*} = 0.484$  προκύπτει

$$4 \left. \frac{df}{dP_3^*} \right|_{P_3^* = P_3^{C^*}} = 4.04039$$

Συνεπώς

$$d\zeta^* = \begin{cases} 0 & \text{για } P_3^* < P_3^{C^*} \\ 4.04039 dP_3^* & \text{για } P_3^* > P_3^{C^*} \end{cases}$$

Οπότε προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα



Σχήμα 1.9 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης του κέντρου του δεξιού κυκλικού δίσκου  $\zeta^*$ , συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$

Θεωρώ ότι στην κατάσταση μετά τη διακλάδωση της λύσης οι κατακόρυφες δυνάμεις υπολογίζονται ως εξής:

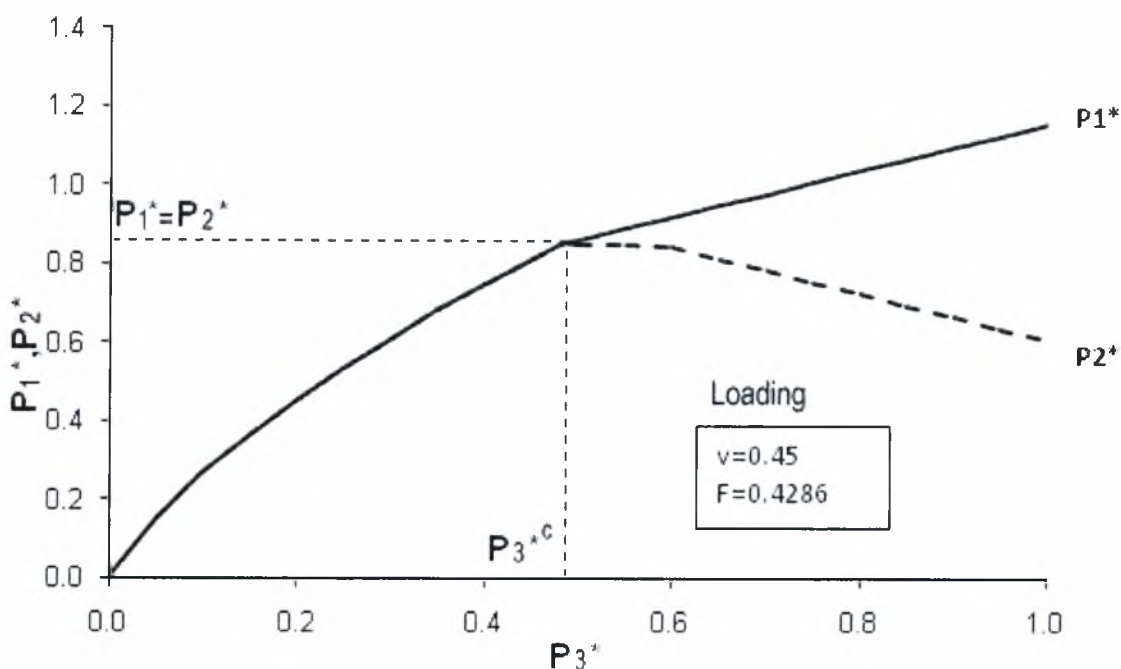
$$P_1^* \Big|_{t+1} = P_1^* \Big|_t + dP_1^* \quad (1.26)$$

$$P_2^* \Big|_{t+1} = P_2^* \Big|_t + dP_2^* \quad (1.27)$$

Όπου  $dP_1^* = dP_2^*$  και υπολογίζονται συμφώνα με τις σχέσεις (1.22) και (1.21)

$$dP_1^* = 0.58955 dP_3^*$$

$$dP_2^* = 0.58955 dP_3^*$$

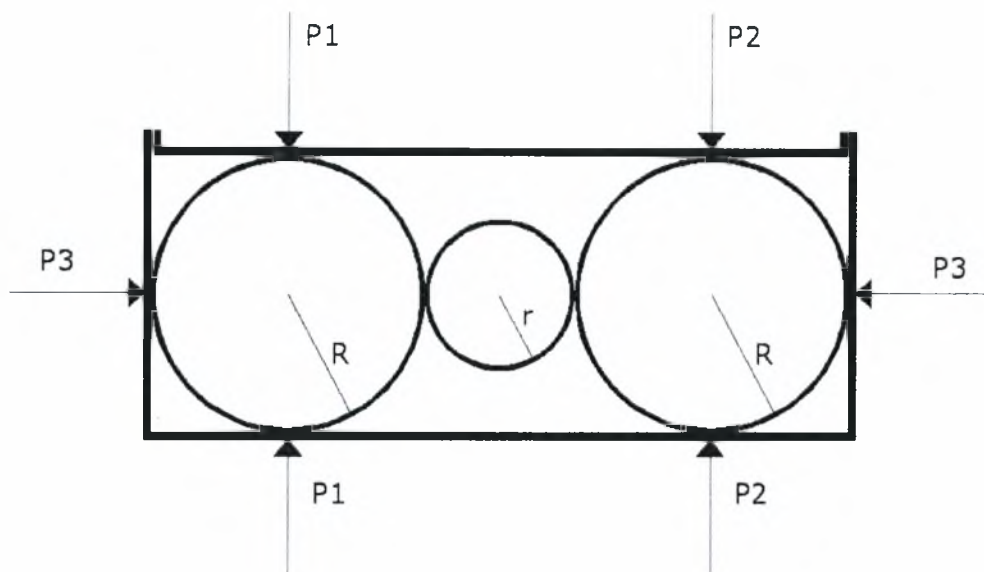


Σχήμα 1.10 Διάγραμμα μεταβολής των κατακόρυφων δυνάμεων  $P_1^*$  και  $P_2^*$ , συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$

### 1.3 ΣΕΝΑΡΙΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΣΚΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΑΤΑΞΗ (1)

#### 1.3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε δυο όμοιους κυκλικούς δίσκους, ακτίνας  $R$ , οριζόντια διατεταγμένους, και ανάμεσά τους ένα δίσκο ακτίνας  $r$ . Οι ακτίνες τους συνδέονται από τη σχέση  $r = \alpha R$ , όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά (αδιάστατο μέγεθος) που παίρνει τιμές  $0 < \alpha < 1$ . Και οι τρεις βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.11. Οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην κορυφή υπάρχει ένα επίσης άκαμπτο διάφραγμα που έχει τη δυνατότητα να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση. Μόνο οι δυο κυκλικοί δίσκοι έχουν ίδια ακτίνα,  $R$  εφάπτονται με το διάφραγμα, ενώ από την κίνηση του διαφράγματος, θεωρούμε ότι οι δύο δίσκοι δέχονται συγκεντρωμένο φορτίο  $P_1$  και  $P_2$  αντίστοιχα. Όλοι οι κυκλικοί δίσκοι είναι κατασκευασμένοι από γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$ , όπως στο σχήμα (1.3).



Σχήμα 1.11 Δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $R$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $r$ , οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο κουτί με διάφραγμα στο πάνω μέρος.

Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι τρεις δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ . Από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και το διάφραγμα προκύπτουν οι δυνάμεις  $P_1, P_2$ , και  $P_3$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.11.

Στο σενάριο που μελετάμε, με τη δεδομένη διάταξη των κόκκων, θεωρούμε ότι ο δίσκος με ακτίνα  $r$  δεν εφάπτεται με το διάφραγμα.

Οπότε το πρόβλημά μας έχει νόημα όταν η απόσταση  $\Delta$  είναι:

$$0 \leq \Delta < 2(R - r) \quad (1.28\alpha)$$

και κανονικοποιώντας τη σχέση προκύπτει

$$0 \leq \Delta^* < 2 \frac{R - r}{R} \quad (1.28\beta)$$

Όταν όμως

$$\Delta^* > 2 \frac{R - r}{R} \quad (1.29)$$

δημιουργείται ένα άλλο πρόβλημα όπου εκτός από τις δυνάμεις  $P_1, P_2$  και  $P_3$  εμφανίζεται και μια τέταρτη,  $P_4$  ανάμεσα στο διάφραγμα και στο μεσαίο δίσκο.

### 1.3.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $\Delta$  ξεκινά από το μηδέν και αυξάνεται μονοτονικά. Αρχικά  $P_1=P_2$  (λόγο συμμετρίας) και όλες οι δυνάμεις ( $P_1, P_3$ ) αυξάνονται μονοτονικά με τη μετατόπιση  $\Delta$ . Συνεπώς,

$$\frac{dP_1}{dP_3} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\Delta}{dP_3} > 0 \quad (1.10)$$

Για να γράψουμε τις μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού για το σύστημα των τριών δίσκων, χρησιμοποιούμε για τους κυκλικούς δίσκους με ακτίνα  $R$ , τις κανονικοποιημένες εξισώσεις (1.3), (1.4) και (1.9).

Ενώ για τον δίσκο ακτίνας  $r$  προκύπτουν καινούργιες χρησιμοποιώντας τις παραπάνω και τη σχέση  $r=\alpha R$ .

$$b^{r*} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi P^*} = \frac{1}{\sqrt{a}} b^* \quad (1.30)$$

$$u^{r*} = P^* \frac{F}{a} = \frac{1}{a} u^* \quad (1.31)$$

$$2\delta^{r*} = \frac{1}{a} 2\delta^* + \frac{\ln \sqrt{a}}{a} P^* \quad \text{ή} \quad f(P^{r*}) = \frac{1}{a} f(P^*) + \frac{\ln \sqrt{a}}{a} P^* \quad (1.32)$$

Οπότε οι μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού:

$$\Delta^* = f(P_1^*) - 2FP_3^* \quad (1.33)$$

$$0 = 4FP_1^* - 2f(P_3^*) - f(P_3^{r*}) \quad (1.34)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.34) στην (1.33) πετυχαίνουμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη δύναμη  $P_3^*$ , οπότε

$$P_1^* = \frac{1}{4Fa} \left[ (2a+1)f(P_3^*) + \frac{\ln a}{2} P_3^* \right] \quad (1.35)$$

$$\Delta^* = f \left\{ \frac{1}{4Fa} \left[ (2a+1)f(P_3^*) + \frac{\ln a}{2} P_3^* \right] \right\} - 2FP_3^* \quad (1.36)$$

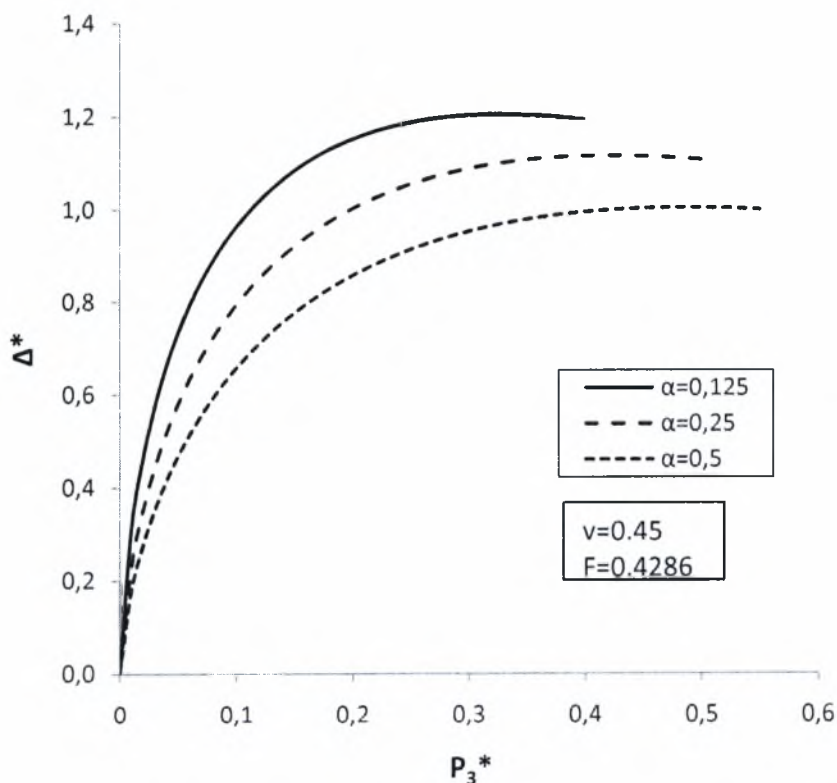
### ❖ Αριθμητικό παράδειγμα

Στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί για τους τρεις κυκλικούς δίσκους επιλέγουμε υλικό με λόγο Poisson  $\nu=0.45$  οπότε από τη σχέση (1.9) προκύπτει  $F=0.4286$ . Επίσης επιλέγουμε τρεις διαφορετικές τιμές για τη σταθερά  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$ . Τα κρίσιμα μεγέθη που προκύπτουν δίνονται στον πίνακα 1.1

Πίνακας 1.1 Κρίσιμες τιμές για σενάριο τριών δίσκων (1).

$\alpha$	$P_3^{c*}$	$P_1^{c*}$	$\sigma_x^{c*}$	$\Delta^{c*}$	$\Delta^{c*}_{\text{όρ}}=2(R-r)/R$	$e_v$
0,125	0,33	1,674	0,788	1,206	1,75	0,255
0,250	0,42	1,645	0,731	1,118	1,50	0,280
0,500	0,49	1,521	0,608	1,006	1,00	0,294

Η γραφική παρουσίαση του αριθμητικού προβλήματος



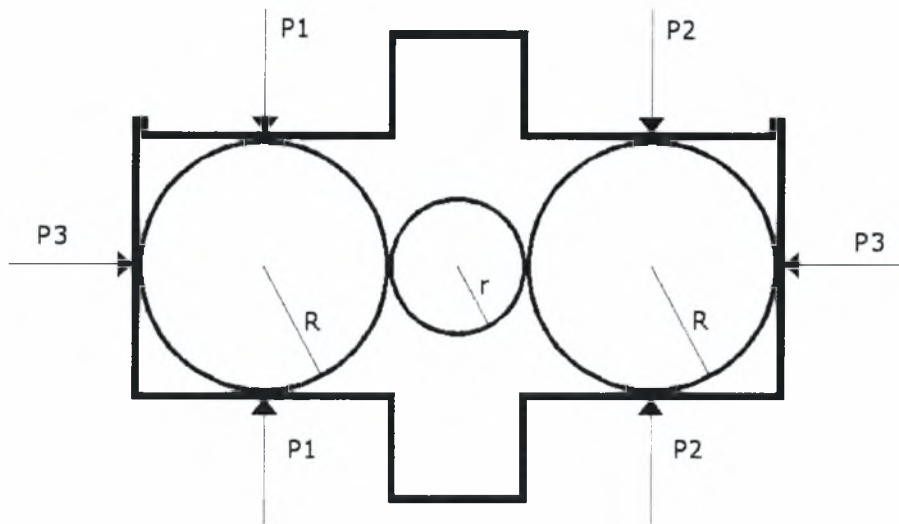
Σχήμα 1.12 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$  για  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$

### Συμπεράσματα

- Παρατηρούμε ότι όσο η ακτίνα του μεσαίου δίσκου μειώνεται (δηλαδή όσο αυξάνεται το πορώδες  $e_v$ ), η κρίσιμη τιμή της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^{c*}$  και η κρίσιμη μετατόπιση  $\Delta^*$  αυξάνονται. Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερος είναι ο

μεσαίος δίσκος τόσο περισσότερο μπορεί να παραμορφωθεί μέχρι να φτάσει το σύστημα στην κρίσιμη τιμή.

- Για  $\alpha=0,125$  και  $\alpha=0,25$ , το σύστημα φτάνει στην κρίσιμη τιμή του μέσα στα όρια του προβλήματος μας, που θέσαμε με τις εξίσωση (1.28). Για  $\alpha=0.5$  το σύστημα δεν προλαβαίνει να πάρει την κρίσιμη τιμή μέσα στα όρια του δεδομένου προβλήματος. Αν θεωρήσουμε ότι η διάταξη των κόκκων είναι διαφορετική, έτσι ώστε ο μεσαίος δίσκος να μπορεί να παραμορφωθεί (με  $0 \leq \Delta^* \leq 2$ ) χωρίς να έρθει ποτέ σε επαφή με το διάφραγμα ή με το «κουτί»



Σχήμα 1.13 Δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $R$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $r$ , ο τελευταίος όσο και να συμπιεστεί δε θα έρθει σε επαφή με το διάφραγμα ή με το «κουτί»

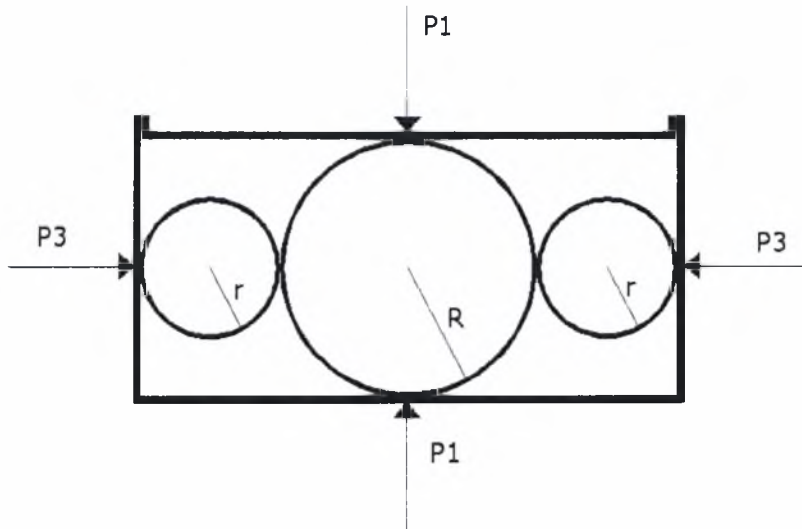
τότε ισχύουν ακριβώς οι ίδιες εξισώσεις, το διάγραμμα του σχήματος 1.12 καθώς και οι κρίσιμες τιμές του πίνακα 1.1. Όποτε και για  $\alpha=0,5$  το σύστημα φτάνει στην κρίσιμη τιμή για  $P_1^{c^*}=1,521$  και  $\Delta^{c^*}=1,006$ .

## 1.4 ΣΕΝΑΡΙΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΣΚΩΝ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΔΙΑΤΑΞΗ(2)

### 1.4.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε δυο όμοιους κυκλικούς δίσκους, ακτίνας  $r$ , οριζόντια διατεταγμένους, και ανάμεσά τους ένα δίσκο ακτίνας  $R$ . Οι ακτίνες τους συνδέονται από τη σχέση  $r=\alpha R$ , όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά που παίρνει τιμές  $0<\alpha<1$ . Και οι τρεις βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14. Οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην κορυφή υπάρχει ένα επίσης άκαμπτο διάφραγμα που έχει τη δυνατότητα να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση. Μόνο ο μεσαίος κυκλικός δίσκος ακτίνας  $R$  εφάπτεται με το διάφραγμα, ενώ από την κίνηση του διαφράγματος, θεωρούμε ότι δέχεται συγκεντρωμένο φορτίο  $P_1$ . Όλοι οι κυκλικοί

δίσκοι είναι κατασκευασμένοι από γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x,y,z)$ , όπως στο σχήμα 1.3. Από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και το διάφραγμα προκύπτουν οι δυνάμεις  $P_1, P_2$ , και  $P_3$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14. Οι δυνάμεις αυτές είναι οι δράσεις(ανά μονάδα μήκους) των τοιχωμάτων στους δίσκους.



Σχήμα 1.14 Δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $r$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $R$ , οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο κουτί με διάφραγμα στο πάνω μέρος

Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι τρεις δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ .

Στο σενάριο που μελετάμε, με τη δεδομένη διάταξη των κόκκων, θεωρούμε ότι οι δίσκοι με ακτίνα  $r$  δεν εφάπτονται με το διάφραγμα.

Οπότε το πρόβλημά μας έχει νόημα όταν η απόσταση  $\Delta$  είναι:

$$0 \leq \Delta < 2(R-r) \quad (1.28\alpha)$$

και κανονικοποιώντας τη σχέση προκύπτει

$$0 \leq \Delta^* < 2 \frac{R-r}{R} \quad (1.28\beta)$$

Όταν όμως

$$\Delta^* > 2 \frac{R-r}{R} \quad (1.29)$$

δημιουργείται ένα άλλο πρόβλημα όπου εκτός από τις δυνάμεις  $P_1$  και  $P_3$  εμφανίζεται και μια τέταρτη,  $P_4$  ανάμεσα στο διάφραγμα και στο μεσαίο δίσκο.

## 1.4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $\Delta$  ξεκινά από το μηδέν και αυξάνεται μονοτονικά. Όλες οι δυνάμεις ( $P_1, P_3$ ) αυξάνονται μονοτονικά με τη μετατόπιση  $\Delta$ . Συνεπώς,

$$\frac{dP_1}{dP_3} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\Delta}{dP_3} > 0 \quad (1.10)$$

Για να γράψουμε τις μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού για το σύστημα των τριών δίσκων, χρησιμοποιούμε για τον κυκλικό δίσκο με ακτίνα,  $R$  τις κανονικοποιημένες εξισώσεις (1.3), (1.4) και (1.9). Ενώ για τους δίσκους ακτίνας  $r$  τις σχέσεις (1.30) έως (1.32).

Οπότε οι μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού:

$$\Delta^* = f(P_1^*) - 2FP_3^* \quad (1.37)$$

$$0 = 2FP_1^* - f(P_3^*) - 2f(P_3^{**}) \quad (1.38)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.38) στην (1.37) πετυχαίνουμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη δύναμη  $P_3^*$ , οπότε

$$P_1^* = \frac{1}{2Fa} \left[ (a+2)f(P_3^*) + (\ln a)P_3^* \right] \quad (1.39)$$

$$\Delta^* = f \left\{ \frac{1}{2Fa} \left[ (a+2)f(P_3^*) + (\ln a)P_3^* \right] \right\} - 2FP_3^* \quad (1.40)$$

### ❖ Αριθμητικό παράδειγμα

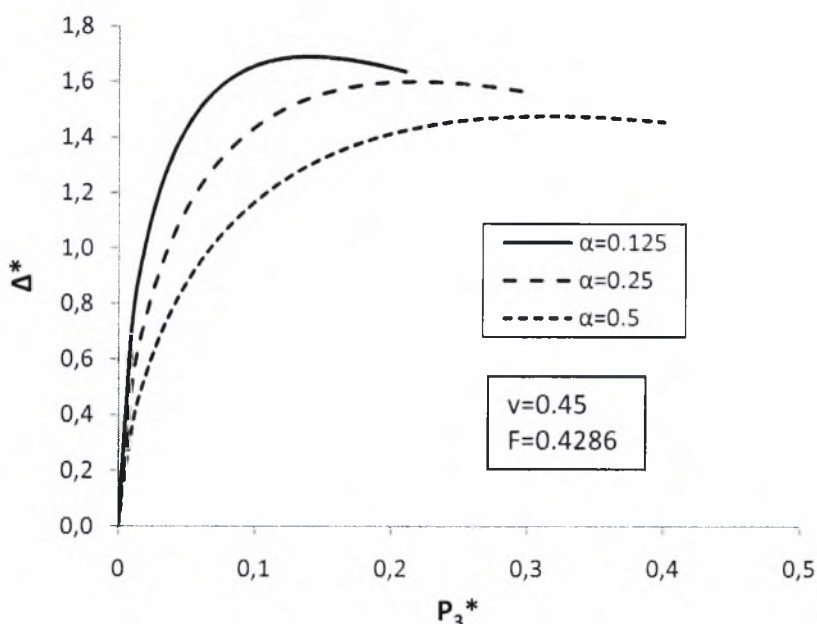
Στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί για τους τρεις κυκλικούς δίσκους επιλέγουμε υλικό με λόγο Poisson  $\nu=0.45$  οπότε από τη σχέση (1.9) προκύπτει  $F=0.4286$ . επίσης επιλέγουμε τρεις διαφορετικές τιμές για τη σταθερά  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$ . Τα κρίσιμα μεγέθη που προκύπτουν δίνονται στον πίνακα 1.2:

Πίνακας 1.2 κρίσιμες τιμές για σενάριο τριών δίσκων (2).

$\alpha$	$P_3^{c^*}$	$P_1^{c^*}$	$\sigma_x^{c^*}$	$\Delta^{c^*}$	$\Delta_{\text{όρ}}^{c^*}=2(R-r)/R$	$e_v$
0,125	0,14	3,198	1,279	1,690	1,75	0.352
0,250	0,22	2,975	1,190	1,603	1,50	0.411
0,500	0,32	2,687	1,075	1,480	1,00	0.411



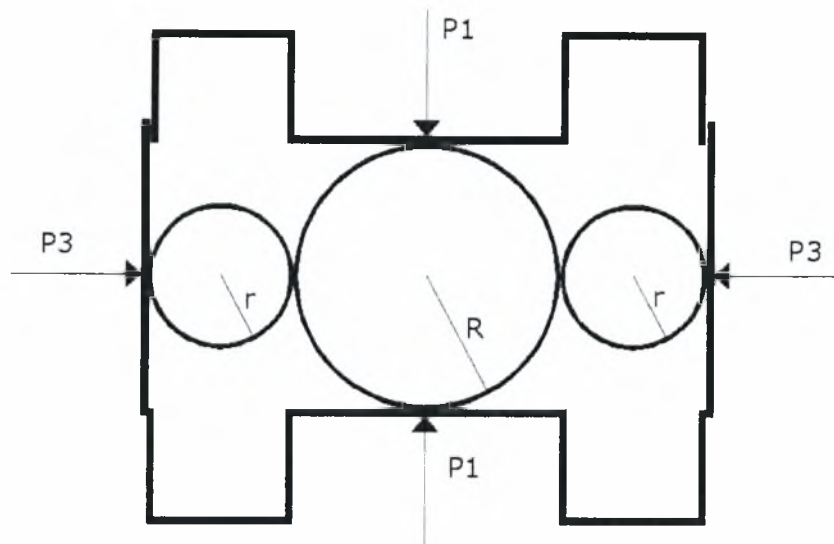
Η γραφική παρουσίαση του αριθμητικού προβλήματος δίνεται στο σχήμα 1.15.



Σχήμα 1.15 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$  για  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$ .

### Συμπεράσματα

- Παρατηρούμε ότι όσο η ακτίνα του μεσαίου δίσκου μειώνεται (δηλαδή όσο αυξάνεται το πορώδες  $e_v$ ), η κρίσιμη τιμή της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^{c*}$  και κρίσιμη μετατόπιση  $\Delta^*$  αυξάνονται. Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότεροι είναι οι ακραίοι δίσκοι τόσο περισσότερο μπορούν να παραμορφωθούν μέχρι να φτάσει το σύστημα στην κρίσιμη τιμή του.
- Για  $\alpha=0.125$ , το σύστημα φτάνει στην κρίσιμη τιμή του ενώ βρίσκεται μέσα στα όρια του προβλήματος μας που θέσαμε με τις εξίσωση (1.28). Για  $\alpha=0.25$  και  $\alpha=0.5$  το σύστημα δεν προλαβαίνει να πάρει την κρίσιμη τιμή μέσα στα όρια του δεδομένου προβλήματος. Αν θεωρήσουμε ότι η διάταξη των κόκκων είναι διαφορετική, έτσι ώστε ο μεσαίος δίσκος να μπορεί να παραμορφωθεί (με  $0 \leq \Delta^* \leq 2$ ) χωρίς να έρθει ποτέ σε επαφή με το διάφραγμα ή με το «κουτί»



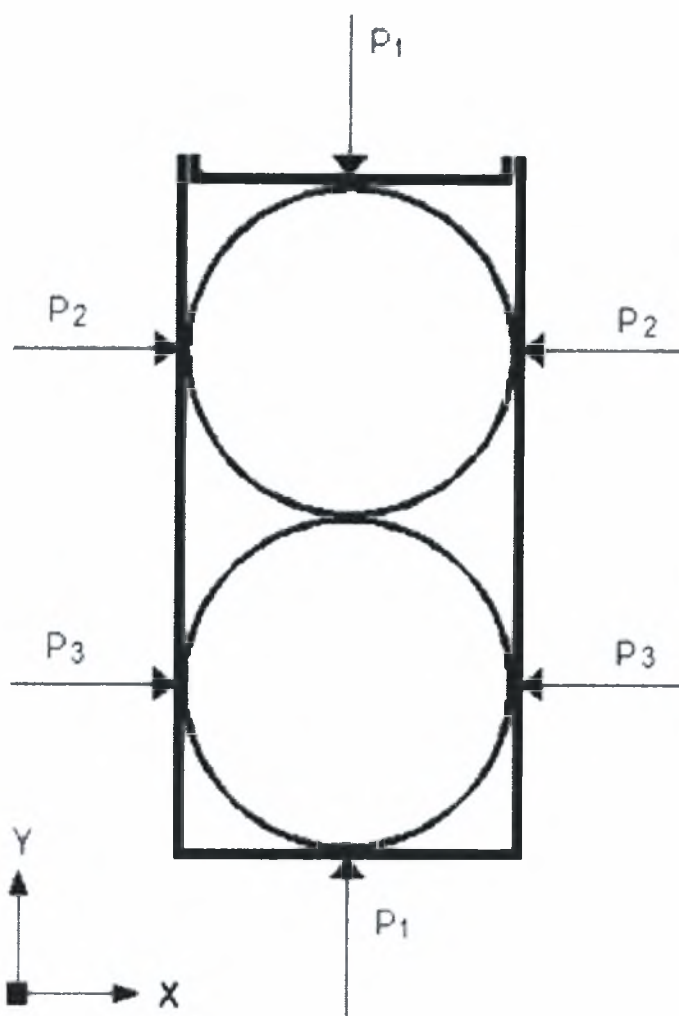
Σχήμα 1.16 Δυο όμοιοι κυκλικόι δίσκοι ακτίνας  $r$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $R$ , οι δυο πρώτοι όσο και να συμπιεστούν δε θα έρθουν σε επαφή με το διάφραγμα ή με το «κουτί»

τότε ισχύουν ακριβώς οι ίδιες εξισώσεις, το διάγραμμα του σχήματος 1.15 καθώς και οι κρίσιμες τιμές του πίνακα 1.2. Όποτε για  $\alpha=0.25$  το σύστημα φτάνει στην κρίσιμη τιμή για  $P_1^{c^*}=2,975$  και  $\Delta^{c^*}=1,603$  και για  $\alpha=0.5$  το σύστημα φτάνει στην κρίσιμη τιμή για  $P_1^{c^*}=2,687$  και  $\Delta^{c^*}=1,480$ .

## 1.5 ΣΕΝΑΡΙΟ ΔΥΟ ΔΙΣΚΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

### 1.5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε δυο όμοιους κυκλικούς δίσκους οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.17. Οι κυκλικόι δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην κορυφή υπάρχει ένα επίσης άκαμπτο διάφραγμα που έχει τη δυνατότητα να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση. Οι δυο κυκλικόι δίσκοι έχουν ίδια ακτίνα  $R$  και είναι κατασκευασμένοι από γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Από την κίνηση του διαφράγματος, θεωρούμε ότι οι δύο δίσκοι δέχονται συγκεντρωμένο φορτίο  $P_1$  και  $P_2$  αντίστοιχα. Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι δυο δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ . Από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και το διάφραγμα προκύπτουν οι δυνάμεις  $P_1, P_2$ , και  $P_3$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.17. Χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$ .



Σχήμα 1.17 Δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι κατακόρυφα διατεταγμένοι, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο κουτί με διάφραγμα στο πάνω μέρος.

Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι δυο δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ , όπου  $0 \leq \Delta < 4R$ .

### 1.5.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $\Delta$  ξεκινά από το μηδέν και αυξάνεται μονotonικά. Αρχικά  $P_3 = P_2$  και όλες οι δυνάμεις ( $P_1, P_3$ ) αυξάνονται μονotonικά με τη μετατόπιση  $\Delta$ . Συνεπώς,

$$\frac{dP_1}{dP_3} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\Delta}{dP_3} > 0 \quad (1.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα είναι μη γραμμικό. Για να γράψουμε τις μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού για το σύστημα, χρησιμοποιούμε τις κανονικοποιημένες εξισώσεις (1.3),(1.4) και (1.9).

$$\Delta^* = 2f(P_1^*) - 4FP_3^* \quad (1.41)$$

$$0 = -f(P_3^*) + 2FP_1^* \quad (1.42)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.42) στην (1.41) πετυχαίνουμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη δύναμη  $P_3^*$ , οπότε

$$P_1^* = \frac{f(P_3^*)}{2F} \quad (1.43)$$

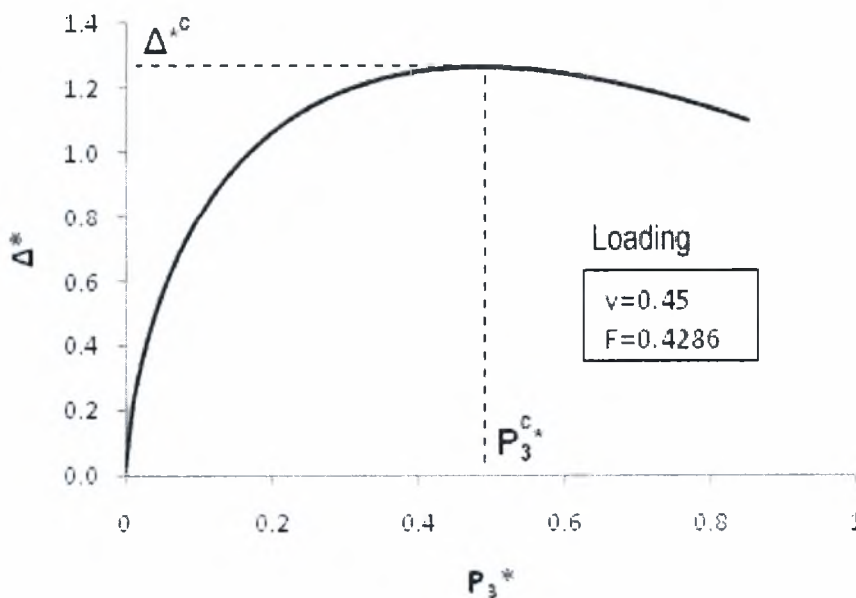
$$\Delta^* = 2f\left(\frac{f(P_3^*)}{2F}\right) - 4FP_3^* \quad (1.44)$$

#### ❖ Αριθμητικό παράδειγμα

Στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί για τους δύο κυκλικούς δίσκους επιλέγουμε υλικό με λόγο Poisson  $\nu=0.45$  οπότε από τη σχέση (1.9) προκύπτει  $F=0.4286$ .

Οπότε προκύπτουν τα κρίσιμα μεγέθη  $P_3^{c^*}=0.484, P_1^{c^*}=0.8525, \Delta^{c^*}=1,262$ . Η ισοδύναμη τάση της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^{c^*}$ , είναι  $\sigma_x^{c^*} = P_1^{c^*}/(2*1) = 0.426$  και το πορώδες  $e_\nu=0.215$ .

Η γραφική παρουσίαση του αριθμητικού προβλήματος δίνεται στο σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$

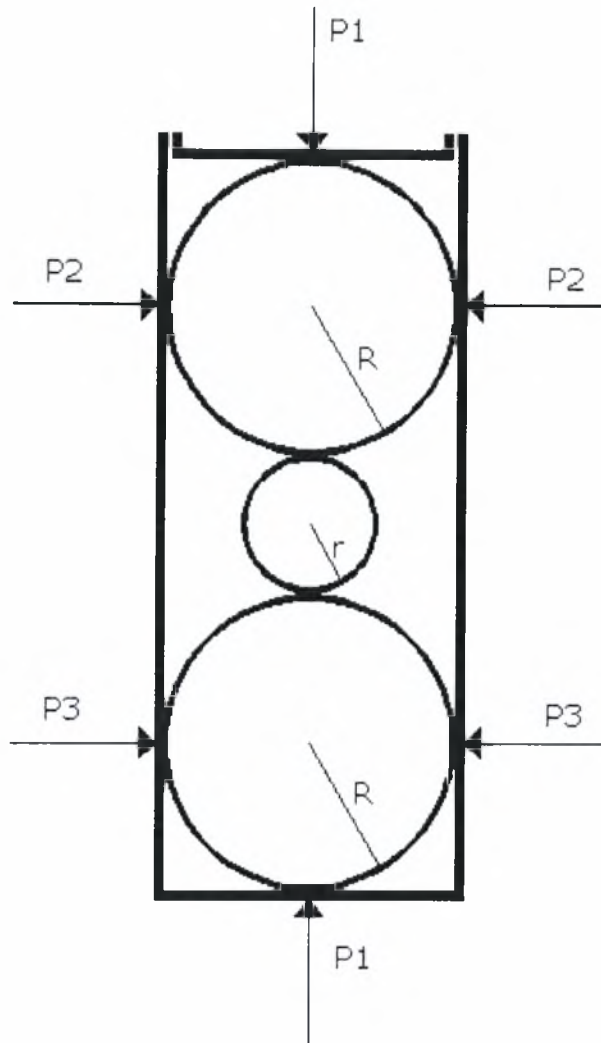
## Συμπεράσματα

- Παρατηρούμε ότι στο σενάριο αυτό ότι οι τιμές  $P_3^{c^*}$  και  $P_1^{c^*}$  είναι ίδιες με τις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές που προέκυψαν για το σύστημα των 2 οριζόντια διατεταγμένων δίσκων. Ενώ η κρίσιμη μετατόπιση εδώ παίρνει την διπλάσια περίπου τιμή. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι δίσκοι σε κατακόρυφη διάταξη για την ίδια δύναμη δέχονται μεγαλύτερη παραμόρφωση  $\Delta^*$  από ότι δίσκοι σε οριζόντια διάταξη.

## 1.6 ΣΕΝΑΡΙΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΣΚΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

### 1.6.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε δυο όμοιους κυκλικούς δίσκους, ακτίνας  $R$ , οριζόντια διατεταγμένους, και ανάμεσά τους ένα δίσκο ακτίνας  $r$ . Οι ακτίνες τους συνδέονται από τη σχέση  $r = \alpha R$ , όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά (αδιάστατο μέγεθος) που παίρνει τιμές  $0 < \alpha < 1$ . Και οι τρεις βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.11. Οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην κορυφή υπάρχει ένα επίσης άκαμπτο διάφραγμα που έχει τη δυνατότητα να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση. Μόνο ο πάνω κυκλικός δίσκος εφάπτεται με το διάφραγμα, ενώ από την κίνηση του διαφράγματος, θεωρούμε ότι δέχεται συγκεντρωμένο φορτίο  $P_1$ . Λόγω της  $P_1$  εμφανίζονται και οι πλευρικές δυνάμεις  $P_2$  και  $P_3$  στον πρώτο και τελευταίο δίσκο αντίστοιχα, όπως φαίνονται και στο σχήμα 1.19. Όλοι οι κυκλικοί δίσκοι είναι κατασκευασμένοι από γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ . Χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$ , όπως στο σχήμα 1.17.



Σχήμα 1.19 Δύο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $R$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $r$ , οι οποίοι βρίσκονται σε κατακόρυφη διάταξη, μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο κουτί με διάφραγμα στο πάνω μέρος

Θα εξεταστεί, στη συνέχεια, πώς παραμορφώνονται οι τρεις δίσκοι καθώς το διάφραγμα κινείται προς τα κάτω κατά  $\Delta$ . Από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και το διάφραγμα προκύπτουν οι δυνάμεις  $P_1, P_2$ , και  $P_3$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.19. Οι δυνάμεις αυτές είναι οι δράσεις (ανά μονάδα μήκους) των τοιχωμάτων στους δίσκους.

Στο σενάριο που μελετάμε, με τη δεδομένη διάταξη των κόκκων, θεωρούμε ότι ο δίσκος με ακτίνα  $r$  δεν εφάπτεται με το διάφραγμα.

Οπότε το πρόβλημά μας έχει νόημα όταν η απόσταση  $\Delta$  είναι:

$$0 \leq 2u'_r < 2(R-r) \tag{1.45a}$$

και κανονικοποιώντας τη σχέση προκύπτει

$$0 \leq u_{P_1}^* \leq \frac{R-r}{R} \quad (1.45\beta)$$

Όμως λόγω της σχέσης (1.31) η (1.45β) γίνεται:

$$0 \leq P_1^* \leq \frac{a-a^2}{F} \quad (1.46)$$

Όταν όμως

$$u_{P_1}^* > \frac{R-r}{R} \quad \text{ή} \quad P_1^* > \frac{a-a^2}{F} \quad (1.47)$$

δημιουργείται ένα άλλο πρόβλημα όπου εκτός από τις δυνάμεις  $P_1$ ,  $P_2$  και  $P_3$  εμφανίζεται και μια τέταρτη,  $P_4$  ανάμεσα στο διάφραγμα και στο μεσαίο δίσκο.

## 1.6.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ότι η μετατόπιση  $\Delta$  ξεκινά από το μηδέν και αυξάνεται μονοτονικά. Αρχικά  $P_3=P_2$  (λόγο συμμετρίας) και όλες οι δυνάμεις ( $P_1, P_3$ ) αυξάνονται μονοτονικά με τη μετατόπιση  $\Delta$ . Συνεπώς,

$$\frac{dP_1}{dP_3} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\Delta}{dP_3} > 0 \quad (1.10)$$

Για να γράψουμε τις μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού για το σύστημα των τριών δίσκων, χρησιμοποιούμε για τους κυκλικούς δίσκους με ακτίνα  $R$ , τις κανονικοποιημένες εξισώσεις (1.3), (1.4) και (1.9), ενώ για τον δίσκο με ακτίνα  $r$  τις σχέσεις (1.30), (1.31) και (1.32),  $r=aR$ .

Οπότε οι μακροσκοπικές εξισώσεις συμβιβαστού:

$$\Delta^* = 2f(P_1^*) - 4FP_3^* + f(P_1^*) \quad (1.48)$$

$$0 = 2FP_1^* - f(P_3^*) \quad (1.49)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.34) στην (1.33) πετυχαίνουμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη δύναμη  $P_3^*$ , οπότε

$$P_1^* = \frac{f(P_3^*)}{2F} \quad (1.50)$$

$$\Delta^* = \frac{(2a+1)}{a} f\left(\frac{f(P_3^*)}{2F}\right) - 4FP_3^* + \frac{\ln a}{2a} \frac{f(P_3^*)}{2F} \quad (1.51)$$

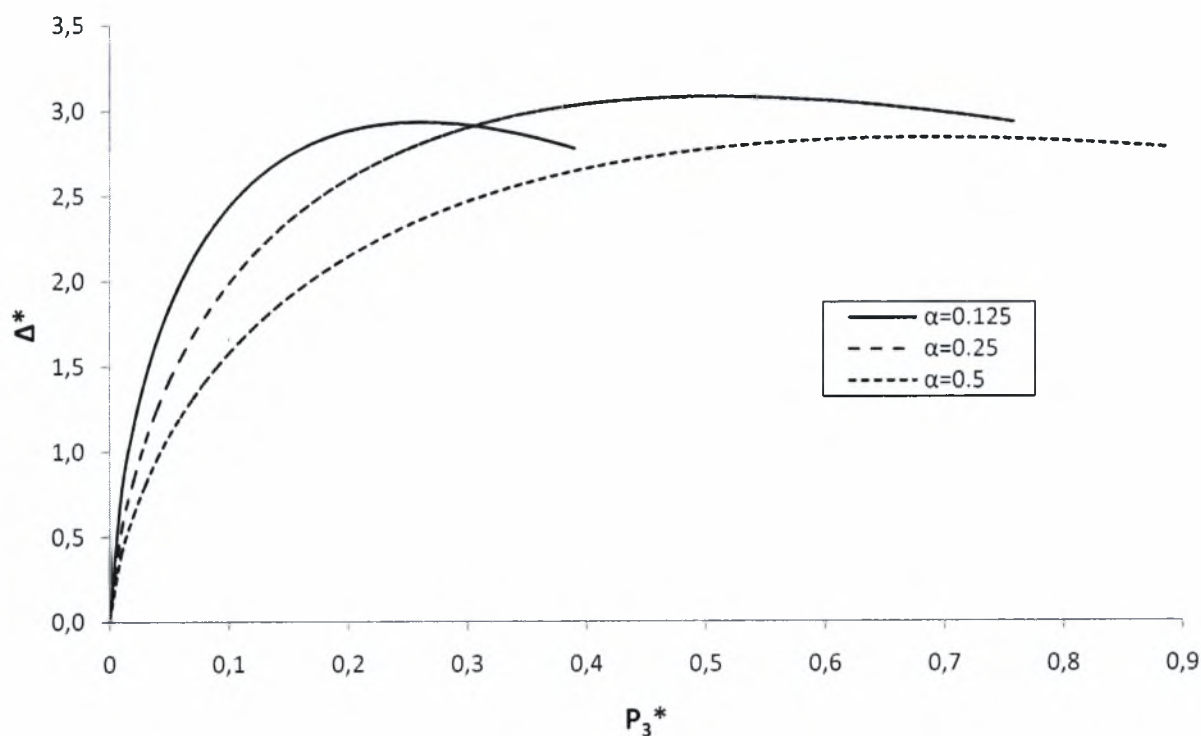
### ❖ Αριθμητικό παράδειγμα

Στο αριθμητικό παράδειγμα που ακολουθεί για τους τρεις κυκλικούς δίσκους επιλέγουμε υλικό με λόγο Poisson  $\nu=0.45$  οπότε από τη σχέση (1.9) προκύπτει  $F=0.4286$ . επίσης επιλέγουμε τρεις διαφορετικές τιμές για τη σταθερά  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$ . τα κρίσιμα μεγέθη προκύπτουν που δίνονται στον πίνακα 1.3.

Πίνακας 1.3 κρίσιμες τιμές για σενάριο τριών δίσκων (1).

$\alpha$	$P_3^{c^*}$	$P_1^{c^*}$	$\sigma_x^{c^*}$	$\Delta^{c^*}$	$P_1^{c^*} \delta_p = (\alpha - \alpha^2)/F$	$e_v$
0,125	0,260	0,798	0,399	2,936	0,255	0,255
0,250	0,510	0,883	0,442	3,085	0,437	0,280
0,500	0,690	1,073	0,537	2,846	0,583	0,294

Η γραφική παρουσίαση του αριθμητικού προβλήματος δίνεται στο σχήμα 1.20.

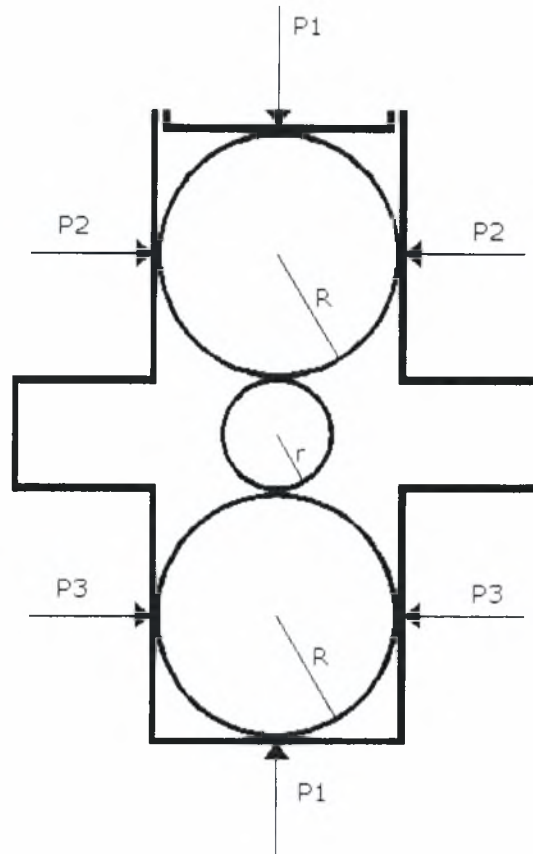


Σχήμα 1.20 Διάγραμμα μεταβολής της μετακίνησης,  $\Delta^*$  συνάρτηση της πλευρικής δύναμης  $P_3^*$  για  $\alpha=0.125, 0.25$  και  $0.5$ .

### Συμπεράσματα

- Παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές του  $\alpha$ , το σύστημα δεν προλαβαίνει να έρθει στην κρίσιμη κατάσταση εντός του ορίου που θέσαμε στο πρόβλημα μας (1.46). Ωστόσο, αν θεωρήσουμε ότι η διάταξη των κόκκων είναι διαφορετική, έτσι ώστε ο μεσαίος δίσκος να μπορεί να παραμορφωθεί (με  $0 \leq \Delta^* \leq (4+2\alpha)$ ) χωρίς να έρθει ποτέ σε επαφή με το «κουτί», όπως φαίνεται στο σχήμα 1.21, τότε ισχύουν ακριβώς οι ίδιες εξισώσεις, το διάγραμμα του σχήματος 1.20 καθώς και η κρίσιμες τιμές του πίνακα 1.3





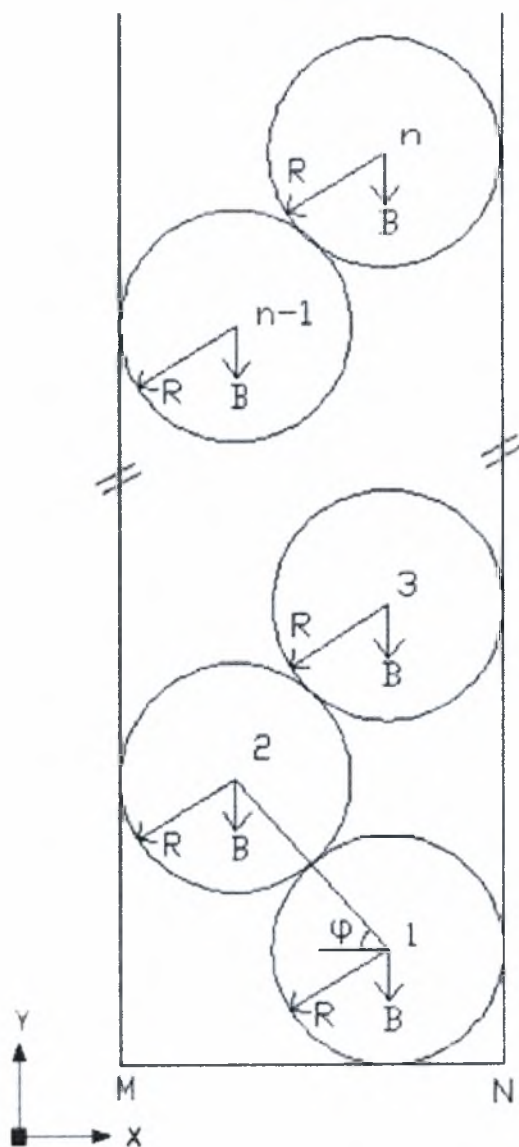
Σχήμα 1.13 δυο όμοιοι κυκλικοί δίσκοι ακτίνας  $R$  και ένας τρίτος ανάμεσα τους ακτίνας  $r$ , όπου ο τελευταίος όσο και να συμπιεστεί δε θα έρθει σε επαφή με το διάφραγμα ή με το «κουτί»

Επίσης για τις κρίσιμες τιμές του πίνακα 1.3 παρατηρούμε ότι όσο η ακτίνα του μεσαίου δίσκου αυξάνεται (δηλαδή όσο αυξάνεται το πορώδες  $e_v$ ), η κρίσιμη τιμή της κατακόρυφης δύναμης  $P_1^{c*}$  και της πλευρικής  $P_3^{c*}$  αυξάνονται. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο μεσαίος δίσκος τόσο μεγαλύτερη δύναμη μπορεί να δεχτεί μέχρι να φτάσει το σύστημα στην κρίσιμη τιμή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Ευστάθεια Στήλης Συνεχούς Μέσου

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ένα σωρό από  $(n)$  κυκλικούς δίσκους-κόκκους υλικού, τοποθετημένους ο ένας πάνω στον άλλον. Οι δίσκοι βρίσκονται μέσα σε ένα άκαμπτο και ασυμπίεστο «κουτί» και εφάπτονται σημειακά, ώστε και τα κέντρα τους να σχηματίζουν γωνία  $\phi$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Όλοι έχουν ίδια ακτίνα  $R$  και βάρος  $B$ , ενώ θεωρούμε ότι είναι άκαμπτοι και ασυμπίεστοι. Οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται με τα τοιχώματα του «κουτιού» και μεταξύ τους χωρίς να συγκολλούνται και δίχως να δημιουργείται τριβή, αφού οι επιφάνειες θεωρούνται λείες. Στην επίλυση θα χρησιμοποιηθεί καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x,y,z)$ . Οι δίσκοι θεωρούνται απαραμόρφωτοι και το πρόβλημα θεωρείται επίπεδο (στο  $x,y$ ).



Σχήμα 2.1 Σωρός  $(n)$  κυκλικών δίσκων

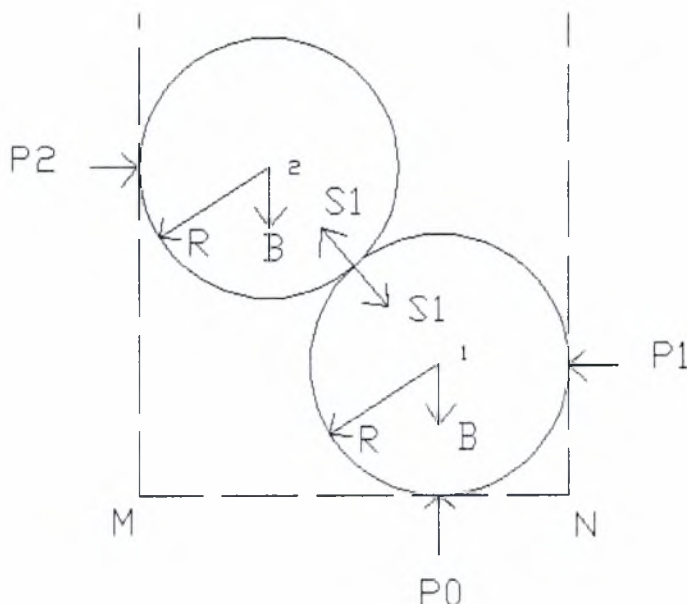
Το μοντέλο αυτό περιγράφει πιθανές επιρροές της μικροδομής σε φαινόμενα μακροσκοπικής καθίζησης εδάφους.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ευστάθεια αυτού του συστήματος ανάλογα με το πλήθος των δίσκων και τις συνθήκες έδρασης. Εξετάζουμε πάντα ισοστατικές συνθήκες έδρασης, καθώς η ισοστατικότητα είναι η τελευταία κατάσταση πριν το μηχανισμό, δηλαδή την αστοχία.

## 2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

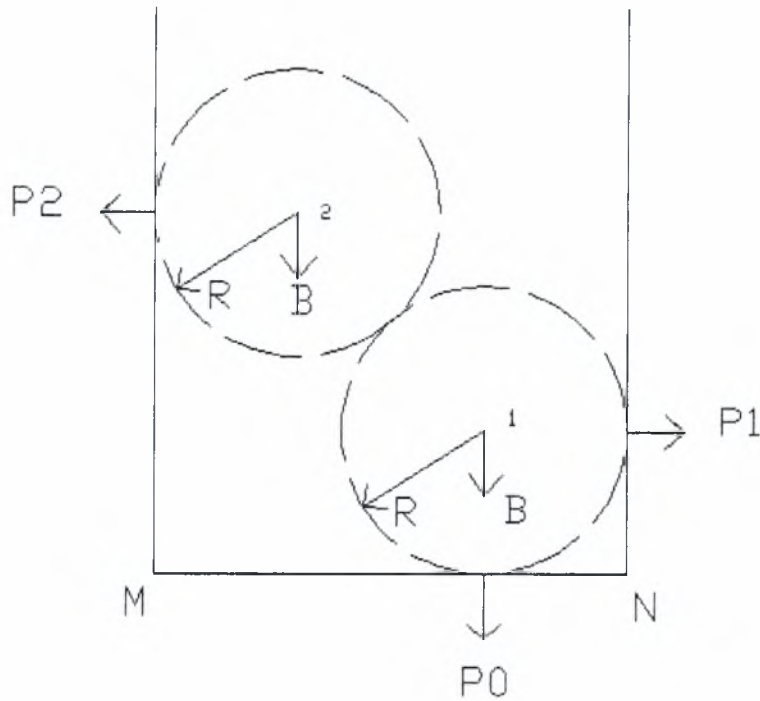
Αρχικά εξετάζουμε τους δυο δίσκους( $n=2$ ).

Στον κάθε δίσκο, εκτός από το βάρος του  $B$  ασκούνται ακόμη η πλευρική δύναμη  $P_k$ , όπου  $k=1,2$  αντίστοιχα από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» και η δύναμη επαφής  $S_1$  από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στους δίσκους. Επιπλέον ο δίσκος που βρίσκεται στη βάση δέχεται τη δύναμη  $P_0$  από την αλληλεπίδραση του με το «κουτί».



Σχήμα 2.2 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος των κυκλικών δίσκων

Στο «κουτί» ασκούνται οι πλευρικές δυνάμεις  $P_k$ , όπου  $k=1,2$  αντίστοιχα από την αλληλεπίδραση των δίσκων με τα τοιχώματα του «κουτιού» καθώς τη κατακόρυφη δύναμη  $P_0$ .



Σχήμα 2.3 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος του «κουτιού»

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά x,y προκύπτουν:

$$P_0 = 2B \quad (2.1)$$

$$P_1 = P_2 = \frac{B}{\tan \varphi} \quad (2.2)$$

$$S_1 = \frac{B}{\cos \varphi} \quad (2.3)$$

Η ροπή στη βάση του «κουτιού» για τις συγκεκριμένες δυνάμεις είναι:

$$\Sigma M_{(M)} = -2BR(1 + \cos \varphi) \quad (2.4)$$

$$\Sigma M_{(N)} = 2BR(1 + \cos \varphi) \quad (2.5)$$

Εξετάζουμε με τον ίδιο τρόπο συστήματα τριών, τεσσάρων, πέντε κ.λ.π. δίσκων και τελικά καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις που περιγράφουν τις δυνάμεις

$$P_0 = nB \quad (2.6)$$

$$P_1 = (n-1) \frac{B}{\tan \varphi} \quad (2.7)$$

$$P_k = (2n - 2k + 1) \frac{B}{\tan \varphi} \quad \text{για } k=2,3,4,5,\dots,n-1,n \quad (2.8)$$

όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των κυκλικών δίσκων και  $k$  είναι ο δείκτης που περιγράφει σε ποιο δίσκο αναφερόμαστε.

Κανονικοποιώ τις παραπάνω σχέσεις και προκύπτει:

$$\frac{P_0}{B} = P_0^* = n \quad (2.9)$$

$$\frac{P_1}{B} = P_1^* = \frac{n-1}{\tan \varphi} \quad (2.10)$$

$$\frac{P_k}{B} = P_k^* = \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} \quad \text{για } k=2,3,4,5,\dots,n-1,n \quad (2.11)$$

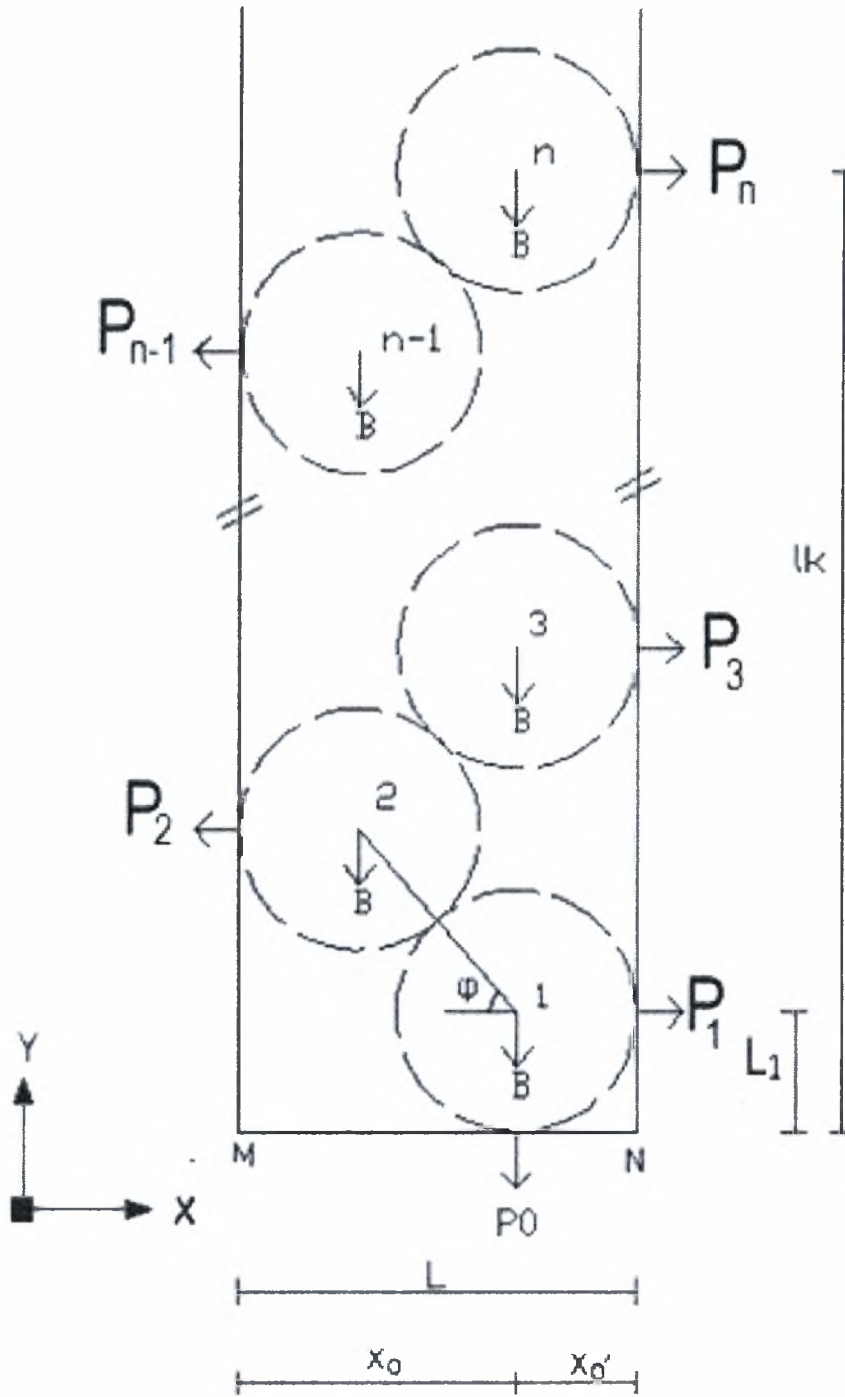
Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η εξίσωση που περιγράφει την κάθετη απόσταση ανάμεσα στη βάση του κουτιού και το κέντρο κάθε κυκλικού δίσκου.

$$l_k = R [1 + 2(k-1)\sin \varphi] \quad \text{για } k=1,2,3,\dots,n-1,n \quad (2.12)$$

Κανονικοποιώντας

$$l_k^* = 1 + 2(k-1)\sin \varphi \quad \text{για } k=1,2,3,\dots,n-1,n \quad (2.13)$$

Στο σχήμα 2.4 φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο «κουτί» που περιέχει τους κυκλικούς δίσκους,



Σχήμα 2.4 Απεικόνιση δυνάμεων σε σωρό \$n\$ κυκλικών δίσκων

όπου

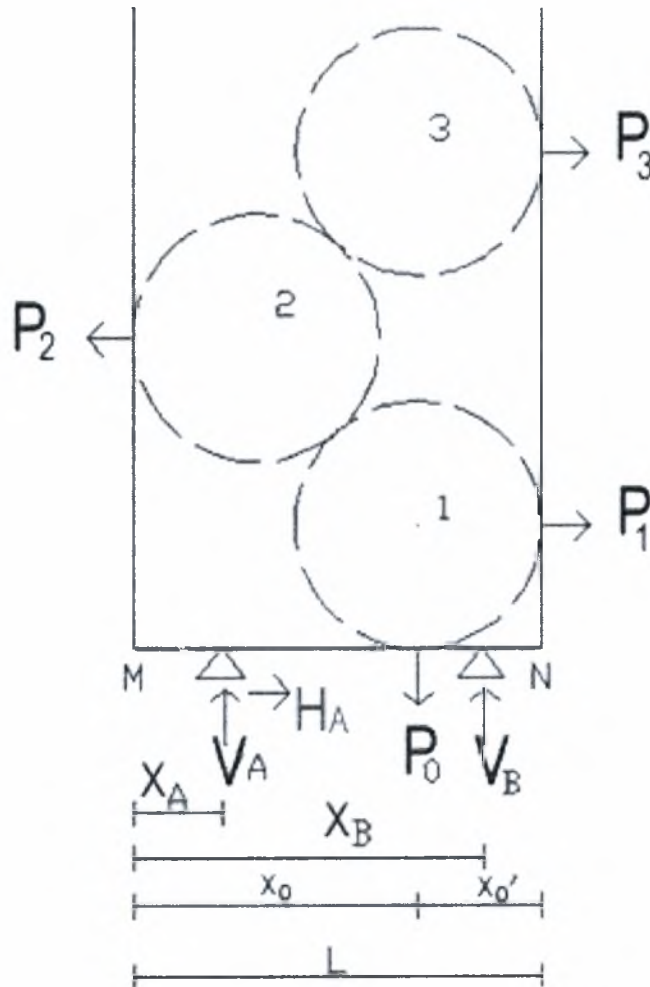
$$x_0 = R + 2R \cos \phi \quad \text{ή} \quad x_0^* = 1 + 2 \cos \phi \quad (2.14)$$

$$x_0' = R \quad \text{ή} \quad x_0'^* = 1 \quad (2.15)$$

$$L = x_0 + x_0' = 2R + 2R \cos \phi \quad \text{ή} \quad L^* = 2 + 2 \cos \phi \quad (2.16)$$

## 2.2 ΕΔΡΑΣΗ «ΚΟΥΤΙΟΥ»

Θεωρώ ότι το κουτί εδράζεται πάνω σε δύο στηρίξεις A και B, τυχαία τοποθετημένες στη βάση του, σε απόσταση  $x_A$  και  $x_B$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Οι στηρίξεις θεωρούνται μονόπλευροι σύνδεσμοι, δηλαδή δέχονται μόνο θλιπτικά φορτία, διότι θεωρούμε τις έδραση χαλαρή. Μια από τις στηρίξεις παραλαμβάνει την οριζόντια αντίδραση για να διατηρηθεί η ισοστατικότητα του συστήματος, προς το παρόν θα μας απασχολήσουν μόνο τα κατακόρυφα φορτία και οι κατακόρυφες αντιδράσεις.

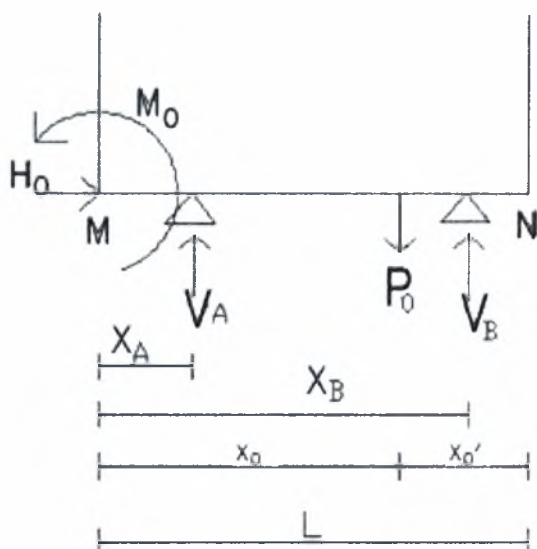


Σχήμα 2.5 Έδραση «κουτιού»

Για τις αντιδράσεις των στηρίξεων πρέπει να ισχύει  $V_A \geq 0$  και  $V_B \geq 0$  για να μη δημιουργηθούν ολόνομοι σύνδεσμοι.

## 2.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μεταφέρω τη συνισταμένη όλων το οριζόντιων πλευρικών δυνάμεων καθώς και τη συνισταμένη ροπή που δημιουργούν στο σημείο M, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 Δυνάμεις μετά τη μεταφορά των πλευρικών φορτίων του «κουτιού»

Οπότε

$$H_0 = P_1 - \sum_{k=2}^n P_k (-1)^k = \frac{B}{\tan \varphi} \left[ (n-1) - \sum_{k=2}^n (2n-2k+1)(-1)^k \right]$$

$$\frac{H_0}{B} = H_0^* = \frac{1}{\tan \varphi} \left[ (n-1) - \sum_{k=2}^n (2n-2k+1)(-1)^k \right] \quad (2.17)$$

και

$$M_0 = -P_1 l_1 + \sum_{k=2}^n (P_k l_k (-1)^k) = -\frac{n-1}{\tan \varphi} BR + \sum_{k=2}^n \left( \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} [1 + 2(k-1) \sin \varphi] (-1)^k BR \right)$$

$$\frac{M_0}{BR} = M_0^* = \frac{1-n}{\tan \varphi} + \sum_{k=2}^n \left( \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} [1 + 2(k-1) \sin \varphi] (-1)^k \right) \quad (2.18)$$

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_0^* = V_A^* + V_B^* \quad (2.19)$$

$$\Sigma M_M = 0 \Rightarrow M_0^* - P_0^* x_0^* + V_A^* x_A^* + V_B^* x_B^* = 0 \quad (2.20)$$

Από (2.19) και (2.20) προκύπτει



$$V_A^* = \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_B^*) - M_0^*}{x_A^* - x_B^*} \quad (2.21)$$

$$V_B^* = \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_A^*) - M_0^*}{x_B^* - x_A^*} \quad (2.22)$$

Όμως πρέπει  $V_A \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_B^*) - M_0^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_B^*) - M_0^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_B^* \leq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^*} \\ \text{και} \\ x_B^* \leq x_A^* \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_B^* \geq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^*} \\ \text{και} \\ x_B^* \geq x_A^* \end{cases} \quad (2.23)$$

Επίσης ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει  $V_B \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_A^*) - M_0^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} P_0^* (1 + 2 \cos \varphi - x_A^*) - M_0^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_A^* \leq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^*} \\ \text{και} \\ x_A^* \leq x_B^* \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_A^* \geq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^*} \\ \text{και} \\ x_A^* \geq x_B^* \end{cases} \quad (2.24)$$

Μελετήσαμε αναλυτικά τις περιπτώσεις για  $\varphi = \pi/6$  και  $\varphi = \pi/3$  για να βρούμε τις πιθανές θέσεις που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί το σύστημα. Οι αναλυτικοί πίνακες παρατίθενται στο παράρτημα Α.

Από την ανάλυση προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν ο συνολικός αριθμός κυκλικών δίσκων,  $n$ , είναι άρτιος αριθμός τότε ανεξάρτητα από το πλήθος των δίσκων οι στηρίξεις πρέπει να βρίσκονται στην ίδια περιοχή για μην ανατραπεί το σύστημα δηλαδή

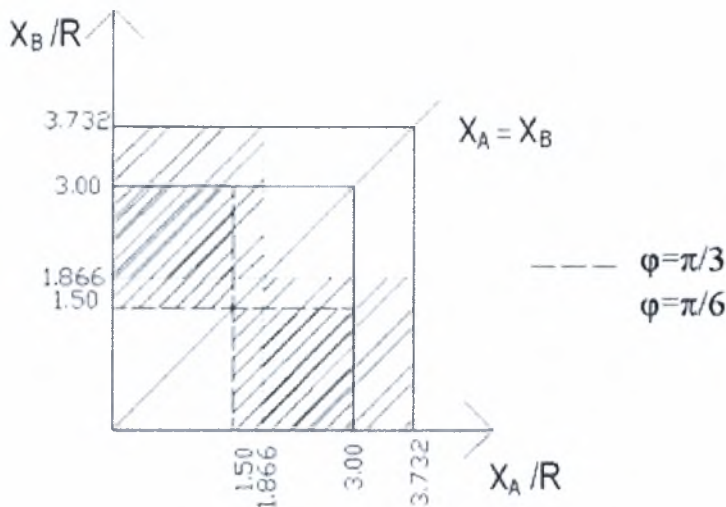
Για  $\varphi = \pi/6$ , όπου  $L^* = 3,732$ , πρέπει να ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B^* \leq 1,866 \\ \text{και} \\ x_B^* \leq x_A^* \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_B^* \geq 1,866 \\ \text{και} \\ x_B^* \geq x_A^* \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_A^* \leq 1,866 \\ \text{και} \\ x_A^* \leq x_B^* \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_A^* \geq 1,866 \\ \text{και} \\ x_A^* \geq x_B^* \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Ενώ για  $\phi = \pi/3$ , όπου  $L^* = 3,00$ , πρέπει να ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B^* \leq 1,5 \\ \text{και} \\ x_B^* \leq x_A^* \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_B^* \geq 1,5 \\ \text{και} \\ x_B^* \geq x_A^* \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_A^* \leq 1,5 \\ \text{και} \\ x_A^* \leq x_B^* \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_A^* \geq 1,5 \\ \text{και} \\ x_A^* \geq x_B^* \end{array} \right. \quad (2.26)$$

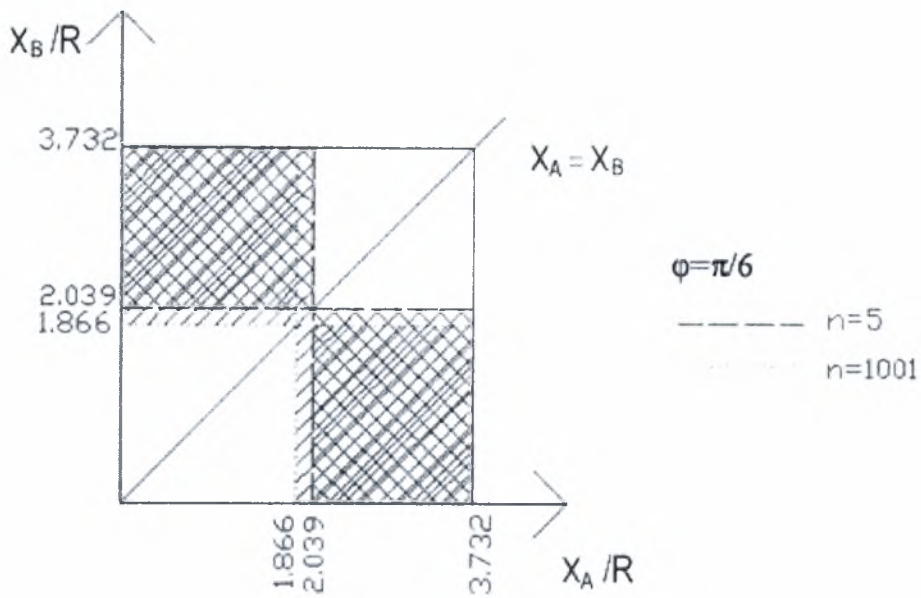
Στο σχήμα 2.7 παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων οι σχέσεις (2.25) και (2.26). Ο γραμμοσκιασμένος αποτελεί το κοινό γεωμετρικό τόπο όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων.



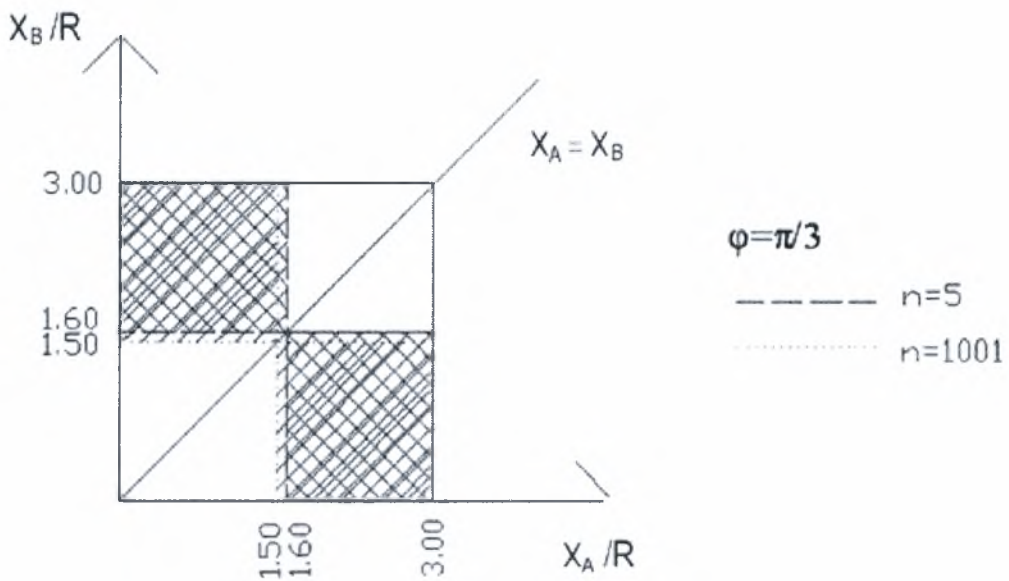
Σχήμα 2.7 Συγκριτικό διάγραμμα για η άρτιο, για τις περιπτώσεις  $\phi = \pi/6$  και  $\phi = \pi/3$

- Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η γωνία  $\phi$  τόσο μειώνεται το συνολικό εμβαδό του γεωμετρικού τόπου όπου μπορούν να βρίσκονται οι στηρίξεις δίχως να ανατραπεί ο σωρός.
- Όταν ο συνολικός αριθμός κυκλικών δίσκων,  $n$  είναι περιττός αριθμός τότε η παράσταση  $\frac{P_0^* (1 + 2 \cos \phi) - M_0^*}{P_0^*}$  ξεκινά από μια τιμή και όσο αυξάνεται το πλήθος των δίσκων η τιμή της παράστασης μειώνεται, μέχρι να σταθεροποιηθεί στην τιμή 1,866 για  $\phi = \pi/6$  και 1,5 για  $\phi = \pi/3$

Στα σχήματα 2.8 και 2.9 φαίνονται συγκριτικά οι γεωμετρικοί τόποι για μικρό και για πολύ μεγάλο αριθμό κυκλικών δίσκων όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων.



Σχήμα 2.8 Συγκριτικό διάγραμμα για  $n$  άρτιο και  $\phi = \pi/6$ , για τις περιπτώσεις  $n=5$  και  $n=1001$

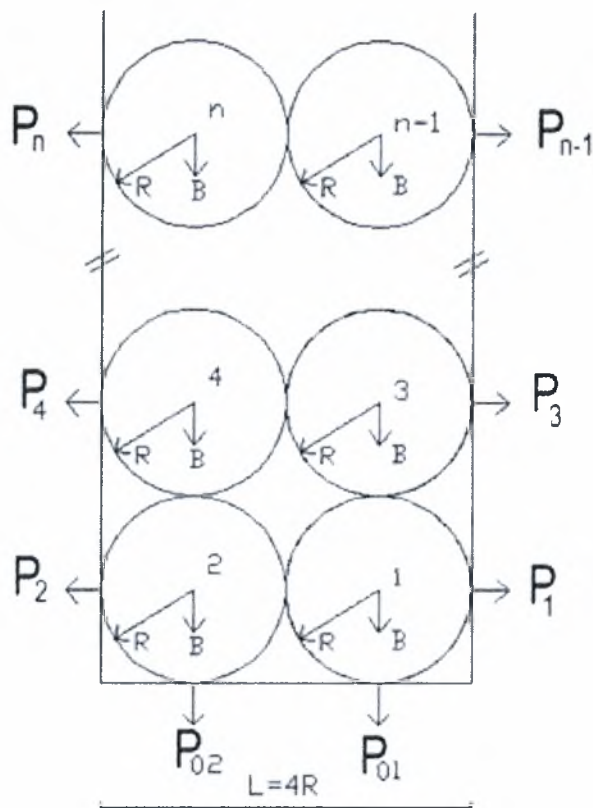


Σχήμα 2.9 Συγκριτικό διάγραμμα για  $n$  άρτιο και  $\phi = \pi/3$ , για τις περιπτώσεις  $n=5$  και  $n=1001$

Όσο αυξάνεται το πλήθος των δίσκων αυξάνεται και ο γεωμετρικός τόπος όπου μπορούν να βρίσκονται οι στηρίξεις δίχως να ανατραπεί το σύστημα.

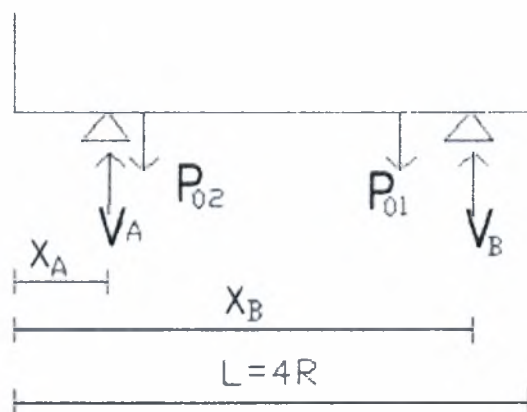
## 2.4 ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕ $L=4R$

Στην περίπτωση που το «κουτί» έχει βάση μήκους  $L=4R$  τότε έχουμε δύο στήλες από κυκλικούς δίσκους.



Σχήμα 2.10 Απεικόνιση δυνάμεων σε σωρό  $n$  κυκλικών δίσκων στην ειδική περίπτωση με  $l=4r$

Θεωρώ πάλι ότι το κουτί εδράζεται πάνω σε δύο στηρίξεις  $A$  και  $B$ , τυχαία τοποθετημένες στη βάση του, σε απόσταση  $x_A$  και  $x_B$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι στηρίξεις θεωρούνται μονόπλευροι σύνδεσμοι.



Σχήμα 2.11 Δυνάμεις στη βάση του «κουτιού» στην ειδική περίπτωση με  $l=4r$

Από την ισορροπία δυνάμεων κατά x,y προκύπτουν:

$$P_{0_1} = P_{0_2} = \frac{n}{2}B \quad \text{ή} \quad P_{0_1}^* = P_{0_2}^* = \frac{n}{2} \quad (2.27)$$

$$V_A^* + V_B^* = 2P_{0_1}^* \quad (2.28)$$

$$V_A^* x_A^* + V_B^* x_B^* - 3P_{0_1}^* - P_{0_2}^* = 0 \quad (2.29)$$

Οι πλευρικές δυνάμεις σε κάθε στάθμη είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται, οπότε δε συμμετέχουν στην αναλυτική λύση.

Από (2,28) και (2.29) προκύπτει

$$V_A^* = \frac{n(2-x_B^*)}{x_A^* - x_B^*} \quad (2.30)$$

$$V_B^* = \frac{n(2-x_A^*)}{x_B^* - x_A^*} \quad (2.31)$$

Όμως πρέπει  $V_A \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} 2-x_B^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2-x_B^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

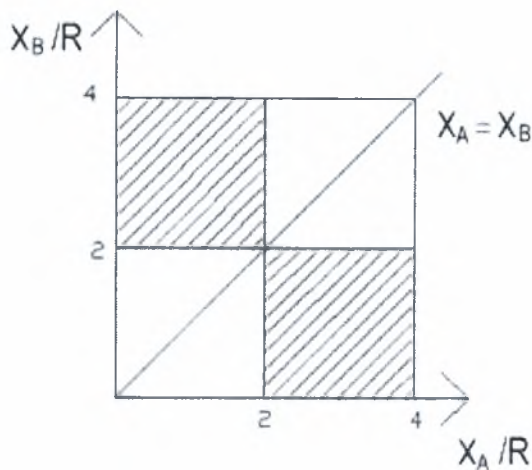
$$\begin{cases} x_B^* \leq 2 \\ \text{και} \\ x_B^* \leq x_A^* \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_B^* \geq 2 \\ \text{και} \\ x_B^* \geq x_A^* \end{cases} \quad (2.32)$$

Επίσης ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει  $V_B \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} 2-x_A^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2-x_A^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_A^* \leq 2 \\ \text{και} \\ x_A^* \leq x_B^* \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_A^* \geq 2 \\ \text{και} \\ x_A^* \geq x_B^* \end{cases} \quad (2.33)$$

Στο σχήμα 2.12 παρουσιάζονται σε διάγραμμα οι σχέσεις (2.32) και (2.33). Ο γραμμοσκιασμένος αποτελεί το κοινό γεωμετρικό τόπο όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων.



Σχήμα 2.12 Διάγραμμα για την ειδική περίπτωση με  $L=4R$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση ο γεωμετρικό τόπος που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί το σύστημα είναι ανεξάρτητος και από το πλήθος των κυκλικών δίσκων και από την ακτίνα τους.

## 2.5 ΥΠΑΡΞΗ ΥΓΡΟΥ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΥΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥΣ ΔΙΣΚΟΥΣ

Θεωρούμε ότι το «κουτί» είναι πληρωμένο με υγρό πυκνότητας  $\rho_{υγρ}$ . Οπότε εμφανίζονται εκτός από τις δυνάμεις που προϋπήρχαν και υδροστατικές δυνάμεις στα τοιχώματα του «κουτιού», όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13. Ενώ σε κάθε δίσκο εκτός από το βάρος του ασκείται και η άνωση  $A$ , (θεωρούμε ότι η άνωση  $A$  είναι μικρότερη από το βάρος  $B$ ,  $B > A$ ).

$$A = V_{\delta\text{ισκου}} g \rho_{υγρ} \quad (2.34)$$

Όπου  $V_{\delta\text{ισκου}}$  = ο όγκος του κάθε κυκλικού δίσκου,  $g$  = η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\rho_{υγρ}$  = η πυκνότητα του υγρού.



$$W = V_{\text{δίσκου}} g (\rho_{\text{στερ}} - \rho_{\text{υγρ}}) \quad (2.39)$$

$$\frac{W}{B} = W^* = 1 - \frac{\rho_{\text{υγρ}}}{\rho_{\text{στερ}}} \quad (2.40)$$

Οι πλευρικές υδροστατικές πιέσεις είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται οπότε δε συμμετέχουν στην αναλυτική λύση.

Οι υπόλοιπες δυνάμεις σύμφωνα με τις σχέσεις (2.6) έως (2.11) διαμορφώνονται ως εξής:

$$P_0 = nW \quad \text{ή} \quad P_0^* = \frac{P_0}{B} = n \left( 1 - \frac{\rho_{\text{υγρ}}}{\rho_{\text{στερ}}} \right) \quad (2.41)$$

$$P_1 = (n-1) \frac{W}{\tan \varphi} \quad \text{ή} \quad P_1^* = \frac{(n-1)}{\tan \varphi} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{υγρ}}}{\rho_{\text{στερ}}} \right) \quad (2.42)$$

$$P_k = (2n-2k+1) \frac{W}{\tan \varphi} \quad \text{ή} \quad P_k^* = \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{υγρ}}}{\rho_{\text{στερ}}} \right) \quad \text{για } k=2,3,4,5,\dots,n-1,n \quad (2.43)$$

ενώ η εξίσωση που περιγράφει την κάθετη απόσταση ανάμεσα στη βάση του «κουτιού» και το κέντρο κάθε κυκλικού δίσκου παραμένει ίδια

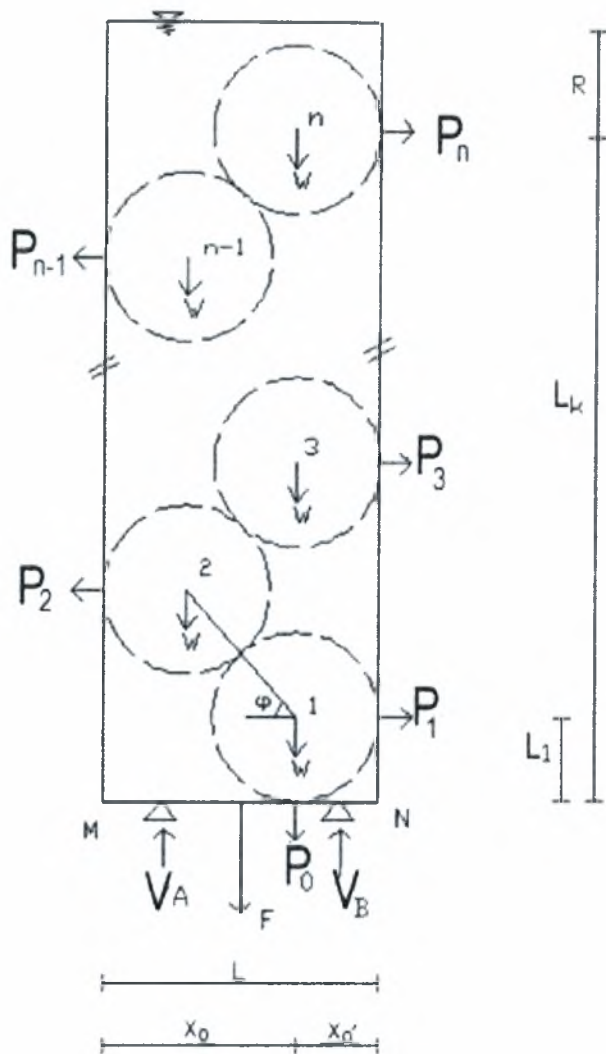
$$l_k = R [1 + 2(k-1) \sin \varphi] \quad \text{για } k=1,2,3,\dots,n-1,n \quad (2.44)$$

όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των κυκλικών δίσκων και  $k$  είναι ο δείκτης που περιγράφει σε ποιο δίσκο αναφερόμαστε.

Θεωρώ ότι το κουτί εδράζεται πάνω σε δύο στηρίξεις Α και Β, τυχαία τοποθετημένες στη βάση του, σε απόσταση  $x_A$  και  $x_B$  αντίστοιχα.

Οπότε οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο «κουτί» και συμμετέχουν στη λύση φαίνεται στο σχήμα 2.14.





Σχήμα 2.14 Έδραση «κουτιού», δυνάμεις που δρουν

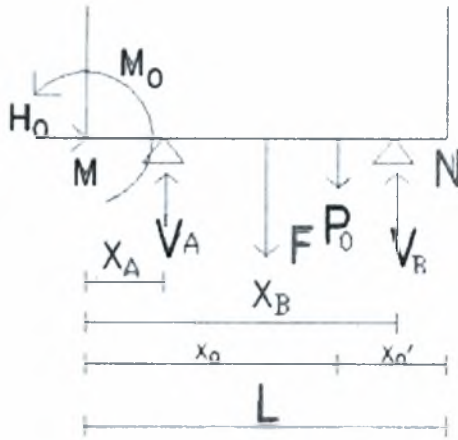
Την υδροστατική πίεση στη βάση του κουτιού την θεωρώ ως συγκεντρωμένο φορτίο  $F$ , που ασκείται στη μέση της βάσης, όπου

$$F = \rho_{υγρ} g (l_n + R) L = 4 \rho_{υγρ} g R^2 (1 + (n-1) \sin \varphi) (1 + \cos \varphi) \quad (2.45)$$

$$\frac{F}{B} = F^* = \frac{4}{\pi} \frac{\rho_{υγρ}}{\rho_{στερ}} (1 + (n-1) \sin \varphi) (1 + \cos \varphi) \quad (2.46)$$

Για τις αντιδράσεις των στηρίξεων πρέπει να ισχύει  $V_A \geq 0$  και  $V_B \geq 0$ , για να μη δημιουργηθούν ολόνομοι σύνδεσμοι.

Μεταφέρω τη συνισταμένη όλων το οριζόντιων πλευρικών δυνάμεων καθώς και τη συνισταμένη ροπή που δημιουργούν στο σημείο  $M$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15 Δυνάμεις στη βάση του «κουτιού» μετά τη μεταφορά

Όπου

$$H_0 = P_1 - \sum_{k=2}^n P_k (-1)^k = \frac{W}{\tan \varphi} \left[ (n-1) - \sum_{k=2}^n (2n-2k+1)(-1)^k \right]$$

$$\frac{H_0}{B} = H_0^* = \left( 1 - \frac{\rho_{υγ\rho}}{\rho_{\sigma\tau\epsilon\rho}} \right) \frac{1}{\tan \varphi} \left[ (n-1) - \sum_{k=2}^n (2n-2k+1)(-1)^k \right] \quad (2.47)$$

και

$$M_0 = -P_1 l_1 + \sum_{k=2}^n (P_k l_k (-1)^k) = -\frac{n-1}{\tan \varphi} BR + \sum_{k=2}^n \left( \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} [1 + 2(k-1)\sin \varphi] (-1)^k BR \right)$$

$$\frac{M_0}{BR} = M_0^* = \left( 1 - \frac{\rho_{υγ\rho}}{\rho_{\sigma\tau\epsilon\rho}} \right) \left[ \frac{1-n}{\tan \varphi} + \sum_{k=2}^n \left( \frac{(2n-2k+1)}{\tan \varphi} [1 + 2(k-1)\sin \varphi] (-1)^k \right) \right] \quad (2.48)$$

Ισορροπία δυνάμεων:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F^* + P_0^* = V_A^* + V_B^* \quad (2.49)$$

$$\Sigma M_M = 0 \Rightarrow M_0^* - F^* \frac{L}{2} - P_0^* x_0^* + V_A^* x_A^* + V_B^* x_B^* = 0 \quad (2.50)$$

Από (2.48) και (2.49) προκύπτει

$$V_A^* = \frac{F^* (1 + \cos \varphi) + P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*) x_B^*}{x_A^* - x_B^*} \quad (2.51)$$

$$V_B^* = \frac{F^*(1 + \cos \varphi) + P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*)x_A^*}{x_B^* - x_A^*} \quad (2.50)$$

Όμως πρέπει  $V_A \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} F^*(1 + \cos \varphi) + P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*)x_B^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} F^*(1 + \cos \varphi) + P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*)x_B^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_A^* - x_B^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_B^* \leq \frac{P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) + F^*(1 + \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^* + F^*} \\ \text{και} \\ x_B^* \leq x_A^* \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} x_B^* \geq \frac{P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) + F^*(1 + \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^* + F^*} \\ \text{και} \\ x_B^* \geq x_A^* \end{cases} \quad (2.52)$$

Επίσης ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει  $V_B \geq 0$ , δηλαδή

$$\begin{cases} F^*(1 + \cos \varphi) + P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*)x_A^* \geq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} F^*(1 + \cos \varphi) + P_0^*(1 + 2 \cos \varphi) - M_0^* - (F^* + P_0^*)x_A^* \leq 0 \\ \text{και} \\ x_B^* - x_A^* \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}
 x_A^* \leq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) + F^* (1 + \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^* + F^*} \\
 \text{και} \\
 x_A^* \leq x_B^*
 \end{cases}
 \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases}
 x_A^* \geq \frac{P_0^* (1 + 2 \cos \varphi) + F^* (1 + \cos \varphi) - M_0^*}{P_0^* + F^*} \\
 \text{και} \\
 x_A^* \geq x_B^*
 \end{cases}
 \quad (2.53)$$

Μελετήσαμε αναλυτικά τις περιπτώσεις  $\varphi = \pi/6$  και  $\varphi = \pi/3$ , για λόγο  $\rho_{\text{υγρ}}/\rho_{\text{στερ}} = 0.5$ , για να βρούμε τις πιθανές θέσεις που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί το σύστημα. Οι αναλυτικοί πίνακες παρατίθενται στο παράρτημα Α.

Από την ανάλυση προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν ο συνολικός αριθμός κυκλικών δίσκων,  $n$  είναι άρτιος αριθμός τότε ανεξάρτητα από το πλήθος των δίσκων οι στηρίξεις πρέπει να βρίσκονται στην ίδια περιοχή για μην ανατραπεί το σύστημα δηλαδή

Για  $\varphi = \pi/6$ , όπου  $L^* = 3,732$ , πρέπει να ισχύει

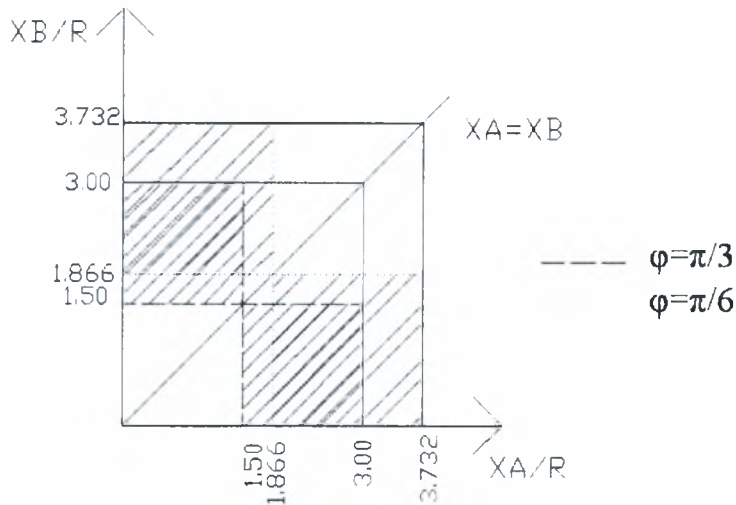
$$\begin{cases}
 x_B^* \leq 1,866 \\
 \text{και} \\
 x_B^* \leq x_A^*
 \end{cases}
 \quad \text{ή} \quad
 \begin{cases}
 x_B^* \geq 1,866 \\
 \text{και} \\
 x_B^* \geq x_A^*
 \end{cases}
 \quad \text{και} \quad
 \begin{cases}
 x_A^* \leq 1,866 \\
 \text{και} \\
 x_A^* \leq x_B^*
 \end{cases}
 \quad \text{ή} \quad
 \begin{cases}
 x_A^* \geq 1,866 \\
 \text{και} \\
 x_A^* \geq x_B^*
 \end{cases}
 \quad (2.54)$$

Ενώ για  $\varphi = \pi/3$ , όπου  $L^* = 3,00$ , πρέπει να ισχύει

$$\begin{cases}
 x_B^* \leq 1,5 \\
 \text{και} \\
 x_B^* \leq x_A^*
 \end{cases}
 \quad \text{ή} \quad
 \begin{cases}
 x_B^* \geq 1,5 \\
 \text{και} \\
 x_B^* \geq x_A^*
 \end{cases}
 \quad \text{και} \quad
 \begin{cases}
 x_A^* \leq 1,5 \\
 \text{και} \\
 x_A^* \leq x_B^*
 \end{cases}
 \quad \text{ή} \quad
 \begin{cases}
 x_A^* \geq 1,5 \\
 \text{και} \\
 x_A^* \geq x_B^*
 \end{cases}
 \quad (2.55)$$

Παρατηρούμε ότι ο γεωμετρικός τόπος όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων, είναι ο ίδιος ανεξάρτητα από το αν υπάρχει υγρό ή όχι.

Στο σχήμα 2.16 παρουσιάζονται σε διάγραμμα οι σχέσεις (2.54) και (2.55). Ο γραμμοσκιασμένος αποτελεί το κοινό γεωμετρικό τόπο όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων.



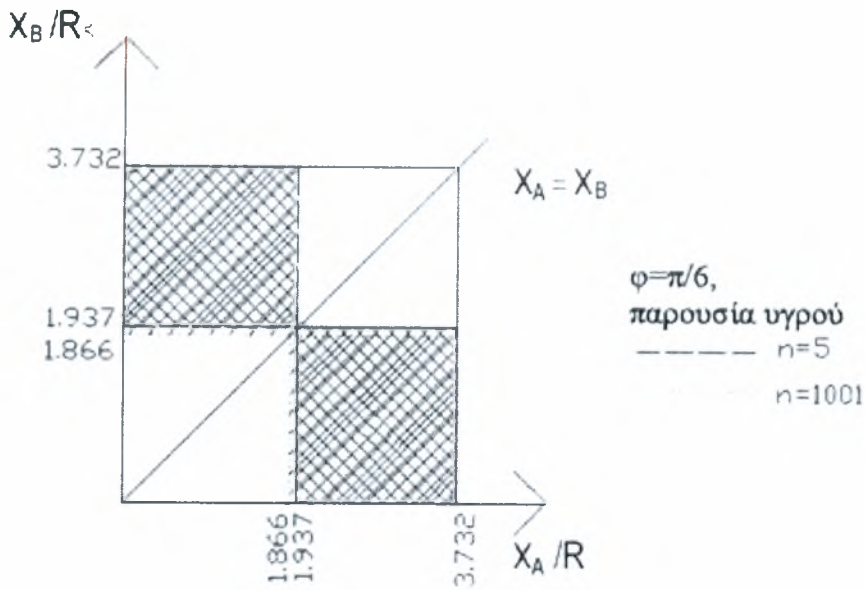
Σχήμα 2.16 Συγκριτικό διάγραμμα για η άρτιο και παρουσία υγρού ανάμεσα στους κυκλικούς δίσκους, για τις περιπτώσεις  $\phi = \pi/6$  και  $\phi = \pi/3$

- Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η γωνία  $\phi$  τόσο μειώνεται το συνολικό εμβαδό του γεωμετρικού τόπου όπου μπορούν να βρίσκονται οι στηρίξεις δίχως να ανατραπεί το σύστημα.

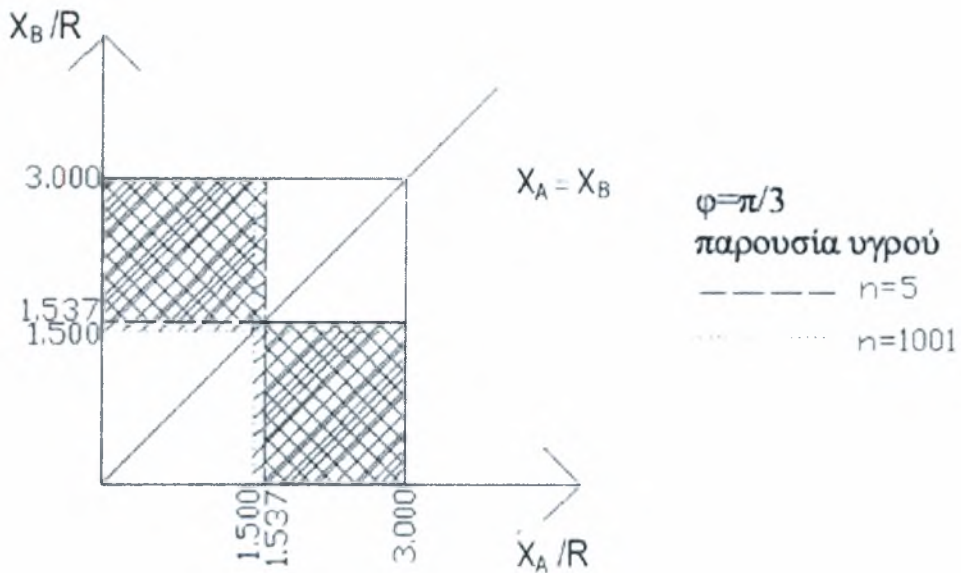
- Όταν ο συνολικός αριθμός κυκλικών δίσκων,  $n$  είναι περιττός αριθμός τότε η παράσταση 
$$\frac{P_0^* (1 + 2 \cos \phi) + F^* (1 + \cos \phi) - M_0^*}{P_0^* + F^*}$$
 ξεκινά από μια τιμή και όσο

αυξάνεται το πλήθος των δίσκων μειώνεται, μέχρι να σταθεροποιηθεί στην τιμή 1,866 για  $\phi = \pi/6$  και 1,5 για  $\phi = \pi/3$ . Όσο αυξάνεται το πλήθος των δίσκων αυξάνεται και ο γεωμετρικός τόπος όπου μπορούν να βρίσκονται οι στηρίξεις δίχως να ανατραπεί το σύστημα.

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται συγκριτικά οι γεωμετρικοί τόποι για μικρό και για πολύ μεγάλο αριθμό κυκλικών δίσκων όπου μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να ανατραπεί ο σωρός των δίσκων.



Σχήμα 2.17 Συγκριτικό διάγραμμα για  $n$  άρτιο και  $\varphi = \pi/6$ , για τις περιπτώσεις  $n=5$  και  $n=1001$

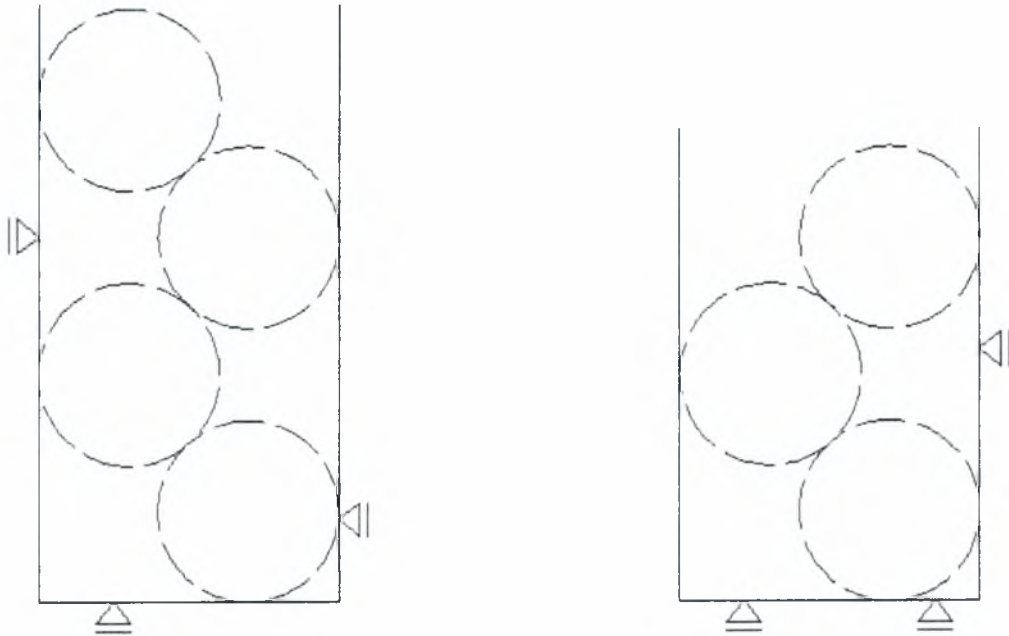


Σχήμα 2.18 Συγκριτικό διάγραμμα για  $n$  άρτιο και  $\varphi = \pi/3$ , για τις περιπτώσεις  $n=5$  και  $n=1001$

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα των σχημάτων (2.8) και (2.9) με (2.17) και (2.18) παρατηρούμε ότι η παρουσία υγρού ανάμεσα στους κυκλικούς δίσκους αυξάνει τον γεωμετρικό τόπο όπου μπορούν να βρισκονται οι στηρίξεις δίχως να ανατραπεί το σύστημα.

## 2.6 ΑΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΕΩΣ

Εκτός από τον συνηθισμένο τρόπο ισοστατικής στήριξης, που χρησιμοποιήσαμε στην μέχρι τώρα ανάλυση, αποτελούμενο από μια άρθρωση και μια κύλιση, θα μπορούσαν να εξεταστούν και άλλοι, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.19.



Σχήμα 2.19 Διάφοροι τρόποι ισοστατικής στήριξης

Οι τρόποι αυτή δεν εξετάστηκαν στο στάδιο της παρούσας εργασίας. Αναμένεται, όμως, να δώσουν πολύ ενδιαφέρουσες καταστάσεις αστάθειας.

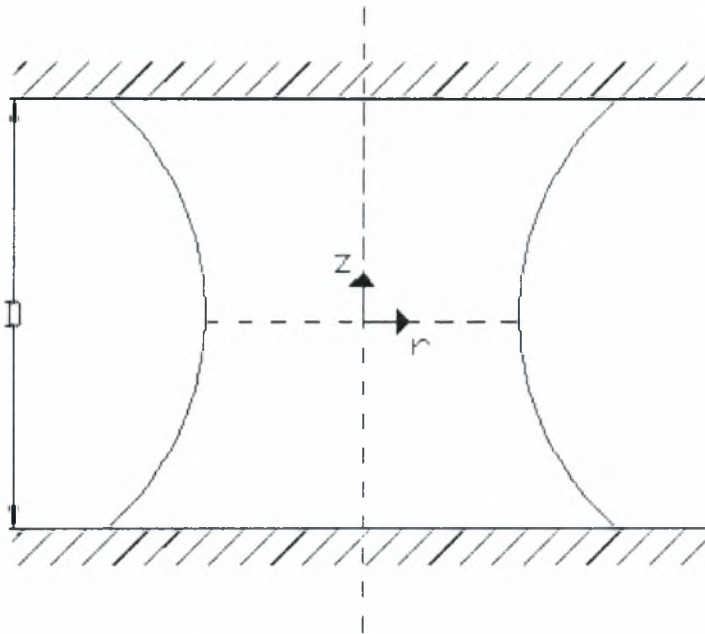
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ρύθμιση Σχήματος Και Ευστάθειας Παγιδευμένης Σταγόνας

#### 3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τα κοκκώδη υλικά και κυρίως τα γεωυλικά είναι πολλές φορές πληρωμένα με κάποιο υγρό (νερό, πετρέλαιο κ.λ.π). Τότε το υγρό παγιδεύεται ανάμεσα στους κόκκους του υλικού και σχηματίζονται μηνίσκοι, οι οποίοι ασκούν ελκτικές δυνάμεις στους κόκκους.

Εστιάζουμε στη μικροδομή, οπότε έχουμε μια μικρή σταγόνα που ισορροπεί στατικά ανάμεσα σε δύο κόκκους υλικού και περιβάλλεται από αέρα. Για μεγαλύτερη ευκολία θεωρούμε τους κόκκους ως δύο οριζόντιες πλάκες χωρίς καθόλου καμπυλότητα (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Παγιδευμένη σταγόνα

$D$  είναι η απόσταση μεταξύ των κόκκων.

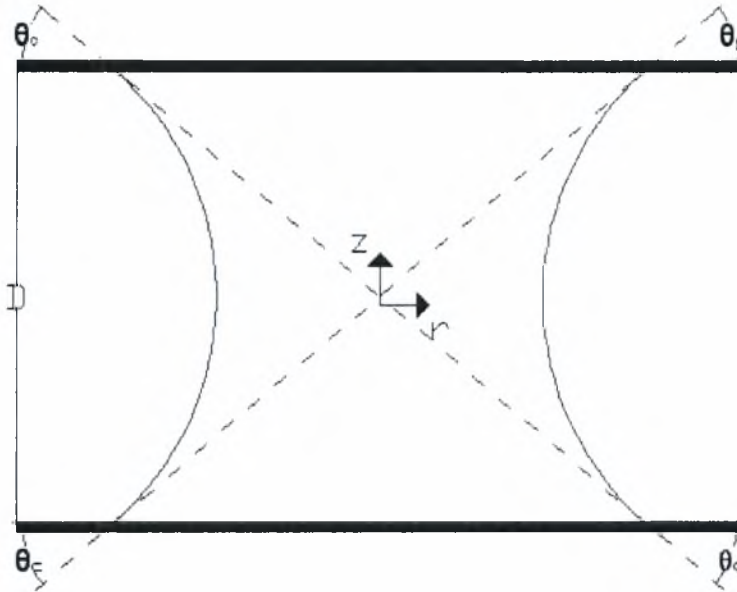
Επειδή το υγρό εφάπτεται με στερεό τοίχωμα (τους κόκκους υλικού) η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο σημείο που συναντά το στερεό δεν παραμένει επίπεδη αλλά γίνεται κοίλη ή κυρτή, δηλαδή δημιουργείται τριχοειδές φαινόμενο.

Η ρύθμιση του σχήματος και της ευστάθειας υγρών μηνίσκων είναι απαραίτητη. Για να γίνει αυτό απαιτείται ανάλυση ευαισθησίας της ισορροπίας των μηνίσκων σε μεταβολές των τιμών φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων που υπεισέρχονται στις εξισώσεις ισορροπίας και τις συνοριακές συνθήκες.



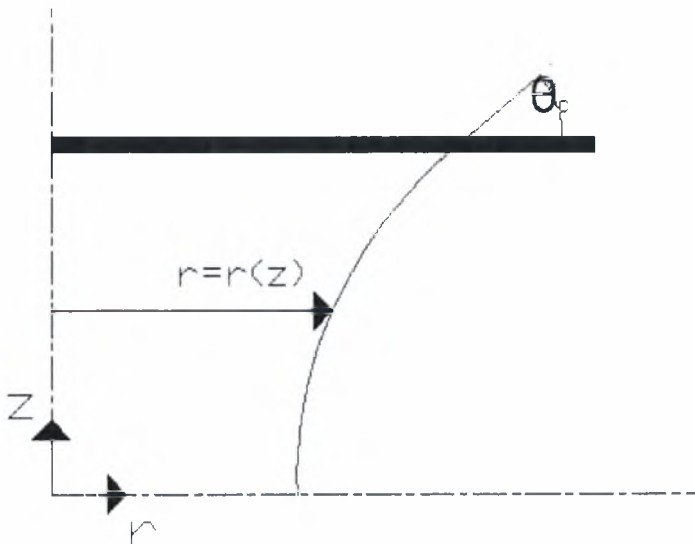
## 3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η γωνία επαφής που δημιουργείται, λόγω τριχοειδούς ανύψωσης, εξαρτάται από το υλικό της κάθε πλάκας, το υγρό της σταγόνας και το περιβάλλον αέριο. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ατμοσφαιρικό αέρα ενώ θεωρούμε ότι υπάρχει ομοιογένεια του κοκκώδες υλικού, άρα όλες οι επαπτόμενες έχουν την ίδια κλίση, επομένως έχουμε παντού  $\theta_c$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2 Παγιδευμένη σταγόνα- γεωμετρία του προβλήματος

Οπότε η σταγόνα θεωρείται αξονοσυμμετρική. Υπάρχει συμμετρία και στους δύο άξονες  $z$  και  $r$  και μπορούμε να περιορίσουμε το πρόβλημα στο πρώτο τεταρτημόριο (σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3 Τελική περιοχή ανάλυσης

Ενώ η θέση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού ορίζεται από την απόσταση,  $r=r(z)$ , κάθε σημείου της από τον άξονα συμμετρίας. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι καμπύλη, θεωρώ  $r=a+bz+cz^2+dz^3$ .

### 3.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η ισορροπία της σταγόνας διατυπώνεται από την εξίσωση Young-Laplace

$$-N_g z + 2N = K \quad (3.1)$$

Όπου

$z$  είναι η κατακόρυφη θέση ενός σημείου της ελεύθερης επιφάνειας,

$2N$  είναι η τοπική μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας,

$K$  μια πίεση αναφοράς στην ελεύθερη επιφάνεια και

$N_g$  ο αδιάστατος αριθμός Bond

$$N_g = \frac{g \Delta \rho R_o^2}{\sigma} \quad (3.2)$$

Όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $\Delta \rho$  η διαφορά πυκνοτήτων του υγρού και του αέρα και  $\sigma$  η επιφανειακή τάση.

Τα μεγέθη που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.1) και (3.2) και σε όσες ακολουθούν είναι αδιάστατα.

Η ποσότητα  $N_g z$  στην παρούσα εργασία αγνοείται (δεν λαμβάνουμε υπόψη τη βαρύτητα) αφού έχει νόημα μόνο όταν αναφερόμαστε σε μεγάλες σταγόνες, δηλαδή μεγάλα  $D$ .

Οπότε η σχέση (3.1) γίνεται:

$$2N = K \quad (3.3)$$

όπου

$$K = \frac{\Delta P}{\sigma} \quad (3.4)$$

$\sigma$  είναι η επιφανειακή τάση του υγρού

$\Delta P$  η μεταβολή της πίεσης των δύο υλικών, υγρού και αέρα. Στην παρακάτω ανάλυση λαμβάνεται  $\Delta P = P_{atm}$ , όμως ενδέχεται να είναι και διαφορετικό του  $P_{atm}$ , για παράδειγμα όταν έχουμε εισαγωγή πεπιεσμένου αέρα.

Οπότε η σχέση (3.3) γίνεται:

$$2N = \frac{\Delta P}{\sigma} \quad (3.5)$$

Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή της πίεσης δημιουργεί καμπυλότητα.

Η καμπυλότητα κατά Gauss δίνεται από τη σχέση (3.6)

$$2N = -\frac{1}{r(1+r_z^2)^{1/2}} + \frac{r_{zz}}{(1+r_z^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

και χρησιμοποιείται αποκλειστικά για αξονοσυμμετρικά πρόβλημα. Ο δείκτης  $z$  δηλώνει την παραγωγή ως προς  $z$ .

Από τις σχέσεις (3.5) και (3.6) προκύπτει:

$$\frac{\Delta P}{\sigma} = -\frac{1}{r(1+r_z^2)^{1/2}} + \frac{r_z}{(1+r_z^2)^{3/2}} \quad (3.7)$$

(Η σχέση αυτή μας παραπέμπει στο «ανάλογο της μεμβράνης».)

Οι συνοριακές συνθήκες, έτσι όπως διαμορφώθηκε το πρόβλημα είναι οι εξής

$$\text{για } z=0, r_z=0 \text{ και για } z=D/2, r_z=\cot\theta_c \quad (3.8)$$

Τέλος, υπάρχει και η συνθήκη ασυμπίεστότητας του υγρού, δηλαδή την απαίτηση ότι ο όγκος παραμένει σταθερός σε κάθε παραμόρφωση, οπότε:

$$\int_0^{D/2} r^2(z) dz = 1 \quad (3.9)$$

## ❖ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$\text{Από την εξίσωση (3.8) για } z=0 \text{ προκύπτει } b=0. \quad (3.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.3) και (3.6) προκύπτουν τα ζεύγη λύσεων

$$c = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - K^2} \right) \text{ και } a = \frac{1 + \sqrt{1 - K^2}}{K^2} \quad (3.11)$$

ή

$$c = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - K^2} \right) \text{ και } a = \frac{1 - \sqrt{1 - K^2}}{K^2} \quad (3.12)$$

επειδή  $c \geq 0$  και  $a > 0$  απορρίπτουμε την πρώτο ζεύγος λύσεων.

Επίσης για το  $K$  προκύπτει ότι:  $0 < K \leq 1$ .

Από την εξίσωση (3.8) για  $z=D/2$  έχουμε

$$cD + \frac{3}{4} dD^2 = \cot \theta_c \quad (3.13)$$

λύνοντας ως προς  $D$  προκύπτει

$$D = \frac{0.667 \left( -c \pm \sqrt{c^2 + 3d \cot \theta_c} \right)}{d} \quad (3.14)$$

όμως πρέπει  $D > 0$  αφού είναι μέγεθος που δηλώνει απόσταση.

Ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει ότι  $c^2 + 3d \cot \theta_c \geq 0$  ενώ λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος (σχήμα 3.3) η γωνία  $\theta_c$  παίρνει τιμές από 0 έως  $\pi/2$ , άρα  $d \geq 0$ . Οπότε για το D αποδεχόμαστε μόνο τη λύση:

$$D = \frac{0.667 \left( -c + \sqrt{c^2 + 3d \cot \theta_c} \right)}{d} \quad (3.15)$$

Στην συνέχεια για διάφορες τιμές του K και του d προκύπτει η απόσταση ανάμεσα στους κόκκους D. Οι τιμές που παίρνει το D παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1.

Από τις τιμές που προκύπτουν υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή για το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.9) όπως φαίνονται στον πίνακα 3.2. Παρατηρούμε ότι για τιμές του K > 0,99 τότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι κοντά στο 1.

Για την παρούσα εργασία θεωρούμε αποδεκτή μια απόκλιση στην τιμή του ολοκληρώματος της τάξης του  $\pm 15\%$ , Στον πίνακα 3.2 είναι γραμμοσκιασμένες οι τιμές του ολοκληρώματος μεταξύ 0,85÷1,15.

Στο παράρτημα Β παρουσιάζονται περισσότεροι πίνακες για διάφορες τιμές του K και του d.



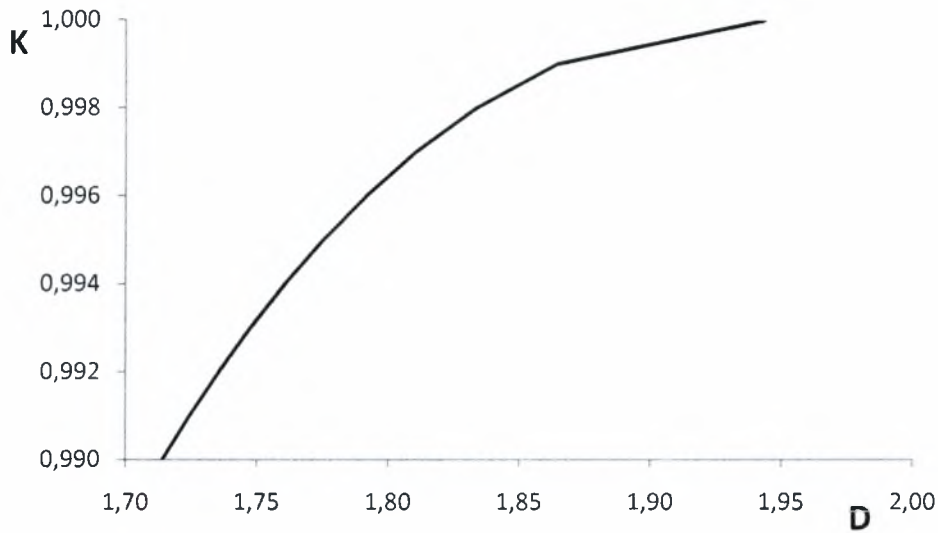
Πίνακας 3.1 Τιμές της απόστασης των δύο κόκκων D.

1/K	c	a	K	d	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1,0101	0,5705	0,8764	0,990	1,7141	1,6787	1,6459	1,6155	1,5872	1,5606	1,5357	1,5122	1,4901	1,4690	
1,0091	0,5669	0,8819	0,991	1,7245	1,6885	1,6552	1,6243	1,5955	1,5686	1,5433	1,5195	1,4970	1,4758	
1,0081	0,5631	0,8879	0,992	1,7357	1,6989	1,6651	1,6336	1,6044	1,5771	1,5514	1,5273	1,5045	1,4829	
1,0070	0,5591	0,8944	0,993	1,7477	1,7102	1,6757	1,6437	1,6140	1,5862	1,5601	1,5356	1,5125	1,4906	
1,0060	0,5547	0,9014	0,994	1,7609	1,7226	1,6873	1,6547	1,6244	1,5961	1,5696	1,5447	1,5212	1,4990	
1,0050	0,5499	0,9092	0,995	1,7754	1,7362	1,7001	1,6668	1,6359	1,6071	1,5801	1,5547	1,5308	1,5082	
1,0040	0,5447	0,9180	0,996	1,7917	1,7515	1,7145	1,6804	1,6488	1,6193	1,5917	1,5659	1,5415	1,5185	
1,0030	0,5387	0,9282	0,997	1,8107	1,7692	1,7311	1,6961	1,6637	1,6334	1,6052	1,5787	1,5538	1,5303	
1,0020	0,5316	0,9405	0,998	1,8337	1,7906	1,7513	1,7151	1,6816	1,6505	1,6214	1,5942	1,5686	1,5445	
1,0010	0,5224	0,9572	0,999	1,8645	1,8194	1,7782	1,7404	1,7056	1,6732	1,6431	1,6149	1,5884	1,5634	
1,0000	0,5000	1,0000	1,000	1,9434	1,8925	1,8466	1,8046	1,7661	1,7305	1,6975	1,6667	1,6379	1,6108	

Πίνακας 3.2 Τιμές που παίρνει το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.9).

1/Κ	c	a	K	d	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1,0101	0,5705	0,8764	0,990	0,9013	0,8745	0,8502	0,8281	0,8077	0,7889	0,7715	0,7553	0,7402	0,7261	
1,0091	0,5669	0,8819	0,991	0,9183	0,8907	0,8657	0,8429	0,8219	0,8027	0,7848	0,7682	0,7527	0,7382	
1,0081	0,5631	0,8879	0,992	0,9366	0,9081	0,8824	0,8589	0,8374	0,8175	0,7992	0,7822	0,7662	0,7514	
1,0070	0,5591	0,8944	0,993	0,9567	0,9273	0,9006	0,8764	0,8542	0,8338	0,8149	0,7974	0,7810	0,7657	
1,0060	0,5547	0,9014	0,994	0,9790	0,9484	0,9209	0,8958	0,8728	0,8517	0,8323	0,8142	0,7973	0,7816	
1,0050	0,5499	0,9092	0,995	1,0040	0,9722	0,9435	0,9175	0,8937	0,8719	0,8517	0,8330	0,8156	0,7993	
1,0040	0,5447	0,9180	0,996	1,0327	0,9995	0,9695	0,9424	0,9176	0,8949	0,8739	0,8545	0,8364	0,8196	
1,0030	0,5387	0,9282	0,997	1,0667	1,0316	1,0002	0,9717	0,9458	0,9220	0,9001	0,8798	0,8610	0,8434	
1,0020	0,5316	0,9405	0,998	1,1089	1,0716	1,0382	1,0081	0,9807	0,9556	0,9325	0,9112	0,8914	0,8729	
1,0010	0,5224	0,9572	0,999	1,1674	1,1270	1,0908	1,0583	1,0288	1,0019	0,9772	0,9543	0,9332	0,9135	
1,0000	0,5000	1,0000	1,000	1,3267	1,2771	1,2332	1,1940	1,1587	1,1266	1,0973	1,0703	1,0455	1,0224	

Η γραφική παράσταση της απόστασης ανάμεσα στους κόκκους  $D$  με την πίεση αναφοράς  $K$ , δίνεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4 Διάγραμμα μεταβολής της απόστασης ανάμεσα στους κόκκους  $D$  με την πίεση αναφοράς  $K$ , για  $d=0,01$

Παρατηρούμε ότι η καθώς η απόσταση ανάμεσα στους κόκκους  $D$  μεγαλώνει, αυξάνεται και η πίεση αναφοράς  $K$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Εξάρτηση Των Ελαστικών Συντελεστών Γεωυλικού Με Ελεγχόμενες Τις Παραμορφώσεις (Τροπές)

#### 4.1 ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΥΛΙΚΟ

##### 4.1.1 ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ Ε ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΤΑΣΕΙΣ

###### 4.1.1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βασιζόμενοι στη μελέτη των Dakoulas και Yu (1992) μελετάμε ένα ισότροπο γεωυλικό. Η ελαστική συμπεριφορά του υλικού εκφράζεται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές το μέτρο ελαστικότητας,  $E$  και το λόγο Poisson  $\nu$ . Επίσης, θα μπορούσε να εκφραστεί και από το μέτρο διάτμησης,  $G$  και το μέτρο διόγκωσης  $B$  ή  $K$ .

Για το μέτρο ελαστικότητας ελαστικού ισότροπου υλικού, λοιπόν, οι Lade και Nelson(1987) διαμόρφωσαν τη σχέση

$$E = Mp_a \left[ \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{J_2}{p_a} \right]^\lambda \quad (4.1)$$

όπου  $I_1, J_2$  δύο ανεξάρτητες αναλλοίωτες. Η πρώτη  $I_1$  ισούται με

$$I_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (4.2)$$

όπου  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  είναι οι ορθές, ενεργές τάσεις, ενώ η δεύτερη  $J_2$  ισούται με

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (4.3)$$

$\nu$  είναι ο λόγος Poisson,  $p_a$  η ατμοσφαιρική πίεση ενώ  $M$  και  $\lambda$  είναι σταθερές του υλικού οι οποίες μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με τριαξονικές δοκιμές.

Τέλος το μέτρο διάτμησης  $G$  και το μέτρο διόγκωσης  $B$  ή  $K$  υπολογίζονται με βάση τη σχέση (4.1) από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.4)$$

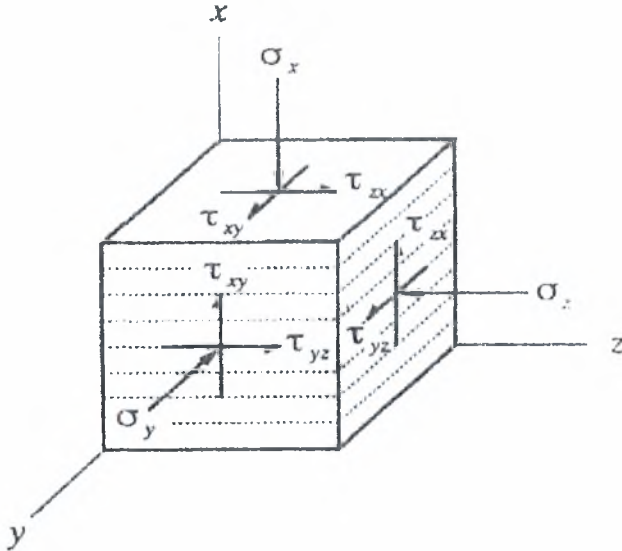
$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.5)$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η σχέση (4.1) παρουσιάζει έντονη μη γραμμικότητα.



#### 4.1.1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην ανάλυση χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων  $(x,y,z)$  όπου οι οριζόντιοι άξονες  $(y,z)$  είναι παράλληλοι με τις ορθές τάσεις ενώ ο κατακόρυφος άξονας  $x$  έχει αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με το σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 Σύστημα συντεταγμένων για ελαστικό ισότροπο υλικό

Η σχέση ανάμεσα στις μεταβολές των τροπών  $\Delta\epsilon_{ij}$  και των τάσεων  $\Delta\sigma'_{ij}$ , μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας το νόμο του Hooke

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_x \\ \Delta\epsilon_y \\ \Delta\epsilon_z \\ \Delta\epsilon_{xy} \\ \Delta\epsilon_{yz} \\ \Delta\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

(4.6)

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.4) στον μητρώο της σχέσης (4.6) προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \varepsilon_{xy} \\ \Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \\ \Delta \tau_{xy} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Η απειροστή ορθή τροπή  $d\varepsilon_x$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των απειροστών ορθών τάσεων ( $d\sigma'_x, d\sigma'_y, d\sigma'_z$ ),

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [d\sigma'_x - \nu(d\sigma'_y + d\sigma'_z)] \quad (4.8\alpha)$$

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma'_x - \nu(d\sigma'_x + d\sigma'_y + d\sigma'_z)] \quad (4.8\beta)$$

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma'_x - \nu dI_1] \quad (4.8\gamma)$$

Ομοίως οι υπόλοιπες απειροστές τροπές μπορούν να γραφτούν

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\nu d\sigma'_x + d\sigma'_y - \nu d\sigma'_z] \quad (4.9\alpha)$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma'_y - \nu(d\sigma'_x + d\sigma'_y + d\sigma'_z)] \quad (4.9\beta)$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma'_y - \nu dI_1] \quad (4.9\gamma)$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma'_z - \nu dI_1] \quad (4.10)$$

$$d\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} d\tau_{xy} \quad (4.11)$$

$$d\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} d\tau_{yz} \quad (4.12)$$

$$d\varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} d\tau_{zx} \quad (4.13)$$

Για καθαρή ισόθερμη ελαστική συμπεριφορά, το ελαστικό έργο ανά μονάδα όγκου που δημιουργείται ή εκλύεται σε ένα κλειστό «μονοπάτι» τάσεων θα πρέπει να

είναι ίσο με το μηδέν. «Μονοπάτι» τάσεων θεωρούμε την συνεχή μεταβολή των τάσεων σε κάποιο σημείο του σώματος λόγω διαδοχικής(συνεχούς) μεταβολής των ασκούμενων φορτίων στην επιφάνεια του σώματος.

$$W = \oint_C dW = 0 \quad (4.14)$$

Όπου η απειροστή αύξηση του ελαστικού έργου  $dW$  για κάθε μονοπάτι τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση

$$dW = \sigma'_x d\varepsilon_x + \sigma'_y d\varepsilon_y + \sigma'_z d\varepsilon_z + 2\tau'_{xy} d\varepsilon_{xy} + 2\tau'_{yz} d\varepsilon_{yz} + 2\tau'_{zx} d\varepsilon_{zx} \quad (4.15)$$

Η σχέση (4.15) υπονοεί ότι το έργο παράγεται με ελεγχόμενες τροπές(μετακινήσεις).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.8)-(4.13) στη σχέση (4.15) προκύπτει

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma'_x d\sigma'_x - \nu\sigma'_x dI_1] + \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma'_y d\sigma'_y - \nu\sigma'_y dI_1] \\ &+ \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma'_z d\sigma'_z - \nu\sigma'_z dI_1] \\ &+ \frac{2(1+\nu)}{E} [\tau'_{xy} d\tau'_{xy} + 2\tau'_{yz} d\tau'_{yz} + 2\tau'_{zx} d\tau'_{zx}] \end{aligned} \quad (4.16\alpha)$$

$$dW = -\frac{\nu}{E} I_1 dI_1 + \frac{1+\nu}{E} dJ \quad (4.16\beta)$$

όπου

$$J = \frac{1}{2} \sigma'^2_x + \frac{1}{2} \sigma'^2_y + \frac{1}{2} \sigma'^2_z + \tau'^2_{xy} + \tau'^2_{yz} + \tau'^2_{zx} \quad (4.17)$$

οπότε

$$dJ = \sigma'_x d\sigma'_x + \sigma'_y d\sigma'_y + \sigma'_z d\sigma'_z + 2\tau'_{xy} d\tau'_{xy} + 2\tau'_{yz} d\tau'_{yz} + 2\tau'_{zx} d\tau'_{zx} \quad (4.18)$$

Ισχύει ότι

$$\frac{d\sqrt{J}}{dJ} = \frac{1}{2\sqrt{J}} \Rightarrow dJ = 2\sqrt{J} d\sqrt{J} \quad (4.19)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τη σχέση (4.19) στη σχέση (4.16β) προκύπτει

$$dW = -\frac{\nu}{E} I_1 dI_1 + \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{J} d\sqrt{J} \quad (4.20)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να επισημάνουμε ότι το ελαστικό έργο είναι ανεξάρτητο από τις τροπές και είναι συνάρτηση των δύο αναλλοίωτων  $I_1, \sqrt{J}$ .

Επίσης, παρατηρούμε ότι το ελαστικό έργο μπορεί να εκφραστεί ως τέλειο διαφορικό των αναλλοίωτων των τάσεων.

$$dW = \frac{\partial W}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial W}{\partial(\sqrt{J})} d(\sqrt{J}) \quad (4.21)$$

Η σχέση αυτή περιέχει μέσα της την ισορροπία στοιχειώδους υλικού σωματιδίου.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.20) και (4.21)

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = -\nu \frac{I_1}{E} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sqrt{J}} = 2(1+\nu) \frac{\sqrt{J}}{E} \quad (4.23)$$

όπου το μέτρο ελαστικότητας  $E$  είναι συνάρτηση των  $I_1, J_2$ .

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes μεταφερόμαστε από μία επιφάνεια  $C$  στην καμπύλη που την περιβάλλει  $S$ , δηλαδή το ολοκλήρωμα (4.14) γίνεται

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial(\sqrt{J})} - \frac{\partial^2 W}{\partial(\sqrt{J}) \partial I_1} \right) n_1 dS = 0 \quad (4.24)$$

στην οποία

$$dS = dI_1 d(\sqrt{J}) \quad (4.25)$$

και  $n_1$  ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$ .

Η εξίσωση (4.24) πρέπει να ισχύει για κάθε «μονοπάτι»  $C$ , άρα και για κάθε επιφάνεια  $S$ . Τότε προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial(\sqrt{J})} = \frac{\partial^2 W}{\partial(\sqrt{J}) \partial I_1} \quad (4.26)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.22) και (4.23) στην (4.26) προκύπτει

$$\nu \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial(\sqrt{J})} = -2(1+\nu) \frac{1}{I_1} \frac{\partial E}{\partial I_1} \quad (4.27)$$

#### 4.1.1.3 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν η εξίσωση που περιγράφει το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , επαληθεύει τη σχέση (4.27).

Η σχέση (4.1) μπορεί να γραφτεί

$$E = Mp_a \left[ -\frac{3\nu}{1-2\nu} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\sqrt{J}}{p_a} \right)^2 \right]^{\lambda} \quad (4.28)$$

δεδομένου ότι

$$J = \frac{1}{6} I_1^2 + J_2 \Rightarrow J_2 = (\sqrt{J})^2 - \frac{1}{6} I_1^2 \quad (4.29)$$

Παραγωγίζοντας το E ως προς την πρώτη αναλλοίωτη  $I_1$  έχουμε

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} = -\lambda M \left( \frac{6\nu}{1-2\nu} \frac{I_1}{p_a} \right) \left[ -\frac{3\nu}{1-2\nu} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\sqrt{J}}{p_a} \right)^2 \right]^{\lambda-1} \quad (4.30)$$

και αντίστοιχα παραγωγίζοντας το E ως προς τη δεύτερη αναλλοίωτη  $\sqrt{J}$  έχουμε

$$\frac{\partial E}{\partial (\sqrt{J})} = \lambda M \left( 12 \frac{\nu+1}{1-2\nu} \frac{\sqrt{J}}{p_a} \right) \left[ -\frac{3\nu}{1-2\nu} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\sqrt{J}}{p_a} \right)^2 \right]^{\lambda-1} \quad (4.31)$$

Τοποθετώντας, λοιπόν τις σχέσεις αυτές στην τελική εξίσωση (4.27) προκύπτει

$$12 \frac{\nu+1}{1-2\nu} \frac{1}{p_a} = 12 \frac{\nu+1}{1-2\nu} \frac{1}{p_a}$$

Δηλαδή η εξίσωση που εκφράζει το μέτρο ελαστικότητας, E, ταυτοποιείται.

## 4.1.2 ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ Ε ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΤΡΟΠΕΣ

### 4.1.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη παράγραφο μελετάμε τώρα το ισότροπο γεωυλικό από τη σκοπιά των τροπών.

Η ελαστική συμπεριφορά του υλικού εξακολουθεί να εκφράζεται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, το μέτρο ελαστικότητας E και τον λόγο Poisson  $\nu$ . Επίσης, θα μπορούσε να εκφραστεί και από το μέτρο διάτμησης, G και το μέτρο διόγκωσης B ή K.

Για το ελαστικό ισότροπο υλικό θα υποθέσουμε ότι συνεχίζει να ισχύει η σχέση που διαμόρφωσαν οι Lade και Nelson(1987), όπως τυπικά εφαρμόζεται στην πράξη (υπολογισμοί, πεπερασμένα στοιχεία κ.λ.π.).

$$E = Mp_a \left[ \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{J_2}{p_a} \right]^{\lambda} \quad (4.1)$$

$I_1, J_2$  δύο ανεξάρτητες αναλλοίωτες. Η πρώτη  $I_1$  ισούται με

$$I_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (4.2)$$

όπου  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  είναι οι ορθές, ενεργές τάσεις, ενώ η δεύτερη  $J_2$  ισούται με

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (4.3)$$

Στη σχέση (4.1),  $\nu$  είναι ο λόγος Poisson,  $p_a$  η ατμοσφαιρική πίεση ενώ  $M$  και  $\lambda$  είναι σταθερές του υλικού οι οποίες μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με τριαξονικές δοκιμές.

Τέλος το μέτρο διάτμησης  $G$  και μέτρο διόγκωσης  $B$  ή  $K$  υπολογίζονται με βάση τη σχέση (4.1) από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.4)$$

$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

(4.5)

Για την ανάλυση που ακολουθεί θα εισάγουμε καινούργιες αναλλοίωτες που θα είναι συναρτήσεις των τροπών. Οι αναλλοίωτες είναι αντίστοιχες με αυτές που εισάγαμε στην παράγραφο 4.1.1. Η πρώτη αναλλοίωτη  $\tilde{I}_1$  ισούται με

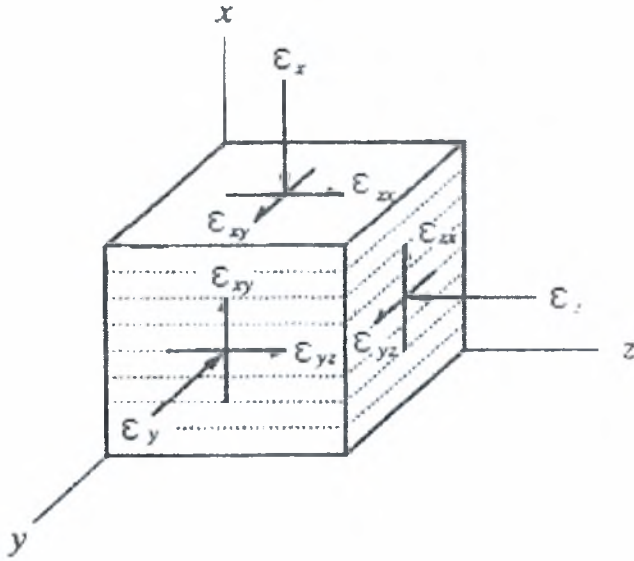
$$\tilde{I}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4.32)$$

και η δεύτερη αναλλοίωτη  $\tilde{J}_2$

$$\tilde{J}_2 = \frac{1}{6} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \quad (4.33)$$

#### 4.1.2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην επίλυση θα χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$  όπου οι οριζόντιοι άξονες  $(y, z)$  είναι παράλληλοι με τις ορθές τροπές ενώ ο κατακόρυφος άξονας  $x$  έχει αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με το σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Σύστημα συντεταγμένων για ελαστικό ισότροπο υλικό

Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα, μόνο που αυτή τη φορά θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τα πάντα συναρτήσει των τροπών.

Η σχέση ανάμεσα στις μεταβολές των τάσεων  $\Delta\sigma'_{ij}$  και στις μεταβολές των τροπές  $\Delta\varepsilon_{ij}$ , προκύπτει αντιστρέφοντας τον μητρώο τις σχέσης (4.6). Οπότε

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau'_{xy} \\ \Delta\tau'_{yz} \\ \Delta\tau'_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\varepsilon_{xy} \\ \Delta\varepsilon_{yz} \\ \Delta\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, η απειροστή ενεργός ορθή τάση  $d\sigma'_x$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των απειροστών ορθών τροπών ( $d\varepsilon'_x$ ,  $d\varepsilon'_y$ ,  $d\varepsilon'_z$ ),

$$d\sigma'_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)d\varepsilon_x + \nu(d\varepsilon_y + d\varepsilon_z) \right] \quad (4.35\alpha)$$

$$d\sigma'_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-2\nu)d\varepsilon_x + \nu(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z) \right] \quad (4.35\beta)$$

$$d\sigma'_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-2\nu)d\varepsilon_x + \nu d\tilde{I}_1 \right] \quad (4.36\gamma)$$

$$d\sigma'_x = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} d\tilde{I}_1 \quad (4.36\delta)$$

Ομοίως οι υπόλοιπες απειροστές τάσεις μπορούν να γραφτούν

$$d\sigma_y' = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} d\tilde{I}_1 \quad (4.37)$$

$$d\sigma_z' = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} d\tilde{I}_1 \quad (4.38)$$

$$d\tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_{xy} \quad (4.39)$$

$$d\tau_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_{yz} \quad (4.40)$$

$$d\tau_{zx} = \frac{E}{(1+\nu)} d\varepsilon_{zx} \quad (4.41)$$

Για καθαρή ισόθερμη ελαστική συμπεριφορά, το συμπληρωματικό ελαστικό έργο ανά μονάδα όγκου που δημιουργείται ή εκλύεται σε ένα κλειστό «μονοπάτι» τροπών θα πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν.

$$W^c = \oint_C dW^c = 0 \quad (4.42)$$

όπου η απειροστή αύξηση του συμπληρωματικού ελαστικού έργου  $dW^c$  για κάθε μονοπάτι τροπών υπολογίζεται από τη σχέση

$$dW^c = \varepsilon_x d\sigma_x' + \varepsilon_y d\sigma_y' + \varepsilon_z d\sigma_z' + 2\varepsilon_{xy} d\tau_{xy} + 2\varepsilon_{yz} d\tau_{yz} + 2\varepsilon_{zx} d\tau_{zx} \quad (4.43)$$

Η σχέση (4.43) υπονοεί ότι το συμπληρωματικό έργο παράγεται με ελεγχόμενες τάσεις (φορτία).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.36)-(4.41) στη σχέση (4.43) προκύπτει

$$\begin{aligned} dW^c &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z \right] + \\ &\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} d\tilde{I}_1 [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z] + \\ &+ \frac{2E}{(1+\nu)} \left[ \varepsilon_{xy} d\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} d\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zx} d\varepsilon_{zx} \right] \end{aligned} \quad (4.43\alpha)$$

$$dW^c = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tilde{I}_1 d\tilde{I}_1 + \frac{2E}{(1+\nu)} d\tilde{J} \quad (4.43\beta)$$

όπου

$$\tilde{J} = \frac{1}{6} \tilde{I}_1^2 + \tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 \right] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \quad (4.44)$$



$$d\tilde{J} = \varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} d\varepsilon_{xy} + 2\varepsilon_{yz} d\varepsilon_{yz} + 2\varepsilon_{zx} d\varepsilon_{zx} \quad (4.45)$$

Ισχύει ότι

$$\frac{d\sqrt{\tilde{J}}}{d\tilde{J}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}}} \Rightarrow d\tilde{J} = 2\sqrt{\tilde{J}} d\sqrt{\tilde{J}} \quad (4.46)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τη σχέση (4.46) στη σχέση (4.43β) προκύπτει

$$dW^c = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tilde{I}_1 d\tilde{I}_1 + \frac{4E}{(1+\nu)} \sqrt{\tilde{J}} d(\sqrt{\tilde{J}}) \quad (4.47)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να επισημάνουμε ότι το συμπληρωματικό ελαστικό έργο είναι συνάρτηση των δύο αναλλοίωτων  $\tilde{I}_1, \sqrt{\tilde{J}}$ .

Επίσης, παρατηρούμε ότι και το συμπληρωματικό ελαστικό έργο μπορεί να εκφραστεί ως τέλειο διαφορικό των αναλλοίωτων των τροπών.

$$dW^c = \frac{\partial W^c}{\partial \tilde{I}_1} d\tilde{I}_1 + \frac{\partial W^c}{\partial (\sqrt{\tilde{J}})} d(\sqrt{\tilde{J}}) \quad (4.48)$$

Μέσα στη σχέση αυτή ουσιαστικά εμπεριέχεται η ισορροπία στοιχειώδους υλικού σωματιδίου.

Συγκρίνοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις

$$\frac{\partial W^c}{\partial \tilde{I}_1} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tilde{I}_1 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial (\sqrt{\tilde{J}})} = \frac{4E}{(1+\nu)} \sqrt{\tilde{J}} \quad (4.50)$$

Όπου το μέτρο ελαστικότητας E είναι έμμεση συνάρτηση των δύο αναλλοίωτων  $\tilde{I}_1, \sqrt{\tilde{J}}$ .

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes μεταφερόμαστε από μία επιφάνεια C στην καμπύλη που την περιβάλλει S δηλαδή το ολοκλήρωμα (4.42) γίνεται:

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 W^c}{\partial \tilde{I}_1 \partial (\sqrt{\tilde{J}})} - \frac{\partial^2 W^c}{\partial (\sqrt{\tilde{J}}) \partial \tilde{I}_1} \right) \tilde{n}_1 dS = 0 \quad (4.51)$$

στην οποία

$$dS = d\tilde{I}_1 d(\sqrt{\tilde{J}}) \quad (4.52)$$

και  $\tilde{n}_1$  ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S.

Οπότε αφού η εξίσωση (4.51) ισχύει για κάθε S, προκύπτει η σχέση

$$\frac{\partial^2 W^c}{\partial \tilde{I}_1 \partial (\sqrt{\tilde{J}})} = \frac{\partial^2 W^c}{\partial (\sqrt{\tilde{J}}) \partial \tilde{I}_1} \quad (4.53)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.49) και (4.50) στην (4.53) προκύπτει

$$\nu \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}}} \frac{\partial E}{\partial (\sqrt{\tilde{J}})} = 4(1-2\nu) \frac{1}{\tilde{I}_1} \frac{\partial E}{\partial \tilde{I}_1} \quad (4.54)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.27) και (4.54) παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ τους. Ωστόσο οι συντελεστές δεν είναι όμοιοι, και το γεγονός αυτό δημιουργεί την υποψία ότι δεν υπάρχει αντιστρεπτότητα. Εάν χρησιμοποιηθεί η σχέση (4.1) για το μέτρο ελαστικότητας, το υλικό φαίνεται να μην είναι ελαστικό. Όμως για να γίνουν απόλυτα συγκρίσιμες οι σχέσεις (4.27) και (4.54) θα πρέπει να βρεθούν οι εξισώσεις που συνδέουν τις αναλλοιώτες  $I_1$  με  $\tilde{I}_1$  και  $J_2$  με  $\tilde{J}_2$  αντίστοιχα.

#### 4.1.2.3 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΩΝ

Η αναλλοιώτη  $\tilde{I}_1$  εκφράζεται με ορθές τροπές από την (4.32)

$$\tilde{I}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις σχέσεις (4.8) έως (4.10) προκύπτει

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{1}{E} \left[ (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) - 2\nu (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) \right] \\ &= \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) \end{aligned} \quad (4.55)$$

με βάση τη σχέση (4.2)

$$\tilde{I}_1 = \frac{(1-2\nu)}{E} I_1 \quad (4.56)$$

Η δεύτερη αναλλοιώτη δίνεται από τη σχέση (4.33) που επαναδιατυπώνεται:

$$\tilde{J}_2 = \frac{1}{6} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \quad (4.57\alpha)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.8) έως (4.13) προκύπτει

Οπότε αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.8) έως (4.13) προκύπτει

$$\tilde{J}_2 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)^2 \left\{ \frac{1}{6} \left[ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\} \quad (4.57\beta)$$

$$\tilde{J}_2 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)^2 J_2 \quad (4.58)$$

Οι αναλλοίωτες  $J$  και  $\tilde{J}$  δεν είναι ποσότητες απευθείας ανάλογες. Το  $\tilde{J}$  όμως μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των  $I_1$  και  $J_2$ , και το  $J$  ως συνάρτηση των  $\tilde{I}_1$  και  $\tilde{J}_2$  με βάση τις σχέσεις (4.56) και (4.58)

$$\tilde{J} = \frac{1}{6} \tilde{I}_1^2 + \tilde{J}_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)^2 I_1^2 + \left(\frac{1+\nu}{E}\right)^2 J_2 \quad (4.59\alpha)$$

ή

$$\tilde{J} = \frac{1}{54} \frac{1}{K^2} I_1^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{G^2} J_2 \quad (4.59\beta)$$

$$J = \frac{1}{6} I_1^2 + J_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{E}{1-2\nu}\right)^2 \tilde{I}_1^2 + \left(\frac{E}{1+\nu}\right)^2 \tilde{J}_2 \quad (4.60)$$

#### 4.1.2.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Το πρόβλημα φαίνεται να μην είναι αντιστρεπτό. Αυτό θα το επισφραγίσουμε συγκρίνοντας τις τελικές σχέσεις, που προέκυψαν ύστερα από την ανάλυση με τάσεις και τροπές αντίστοιχα, (4.27) και (4.54). Έχουμε, λοιπόν,

$$\nu \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial(\sqrt{J})} = -2(1+\nu) \frac{1}{I_1} \frac{\partial E}{\partial I_1} \quad (4.27)$$

και

$$\nu \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}}} \frac{\partial E}{\partial(\sqrt{\tilde{J}})} = 4(1-2\nu) \frac{1}{\tilde{I}_1} \frac{\partial E}{\partial \tilde{I}_1} \quad (4.54)$$

Όπου

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{I}_1} = \frac{\partial E}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{I}_1} + \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \frac{\partial \sqrt{J}}{\partial \tilde{I}_1} = \frac{E}{(1-2\nu)} \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{1}{6} \frac{I_1}{\sqrt{J}} \frac{E}{(1-2\nu)} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \sqrt{\tilde{J}}} = \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \frac{\partial \sqrt{J}}{\partial \sqrt{\tilde{J}}} + \frac{\partial E}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sqrt{\tilde{J}}} = 6 \frac{\sqrt{\tilde{J}}}{I_1} \left(\frac{E}{(1-2\nu)}\right)^2 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\sqrt{\tilde{J}}}{\sqrt{J}} \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \quad (4.62)$$

Όμως

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{J}} = \frac{\partial J}{\partial I_1} \frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial \tilde{J}} + \frac{\partial J}{\partial J_2} \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial \tilde{J}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{J}} = \frac{E^2}{(1-2\nu)^2} + \frac{E^2}{(\nu+1)^2} \quad (4.63)$$

Οπότε η σχέση (4.62) γίνεται:

$$\frac{\partial E}{\partial \sqrt{\tilde{J}}} = 6 \frac{\sqrt{\tilde{J}}}{I_1} \left( \frac{E}{(1-2\nu)} \right)^2 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\sqrt{\tilde{J}}}{\sqrt{J}} \left( \frac{E^2}{(1-2\nu)^2} + \frac{E^2}{(\nu+1)^2} \right) \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \quad (4.64)$$

Οπότε η σχέση (4.54) μετατρέπεται

$$\left( \frac{\nu}{(1-2\nu)^2} + \frac{\nu}{(1+\nu)^2} - \frac{2}{3(1-2\nu)} \right) \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} = \left( \frac{4}{(1-2\nu)} - \frac{6\nu}{(1-2\nu)^2} \right) \frac{1}{I_1} \frac{\partial E}{\partial I_1} \quad (4.65)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο τελικές σχέσεις, εκφρασμένες και οι δυο συναρτήσεις των  $I_1$  και  $J_2$  αν και έχουν παρόμοια δομή δεν είναι ίδιες. Άρα στην περίπτωση όπου εφαρμόζουμε παραμορφώσεις στο υλικό, δηλαδή τροπές, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (4.1) για το μέτρο ελαστικότητας. Αυτό φανερώνει περίτρανα ότι το υλικό δεν είναι απολύτως ελαστικό και προφανώς δεν υπάρχει αντιστρεπτότητα χωρίς απώλεια ή κέρδος ενέργειας. Ακόμη μεγαλύτερο πρόβλημα υπάρχει στην περίπτωση κυκλικής φόρτισης (πχ σεισμός).

#### 4.1.2.5 «ΔΙΟΡΘΩΣΗ» ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για να διορθώσουμε το πρόβλημα που προέκυψε θα εισάγουμε τις λεγόμενες «υποβόσκουσες» τροπές (back strains)  $\alpha_i^e$  όπου  $i=x,y,z$ . Οι «υποβόσκουσες» τροπές (back strains) εμφανίζονται μόνο στην αποφόρτιση και όχι στη φόρτιση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις αγκύλες Macauley, οπότε οι «υποβόσκουσες» τροπές (back strain) είναι σχέσεις της μορφής:

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

Δημιουργούμε έναν αποκλίνοντα τανυστή, οπότε διαμορφώνεται ένα νέο μητρώο παραμορφώσεων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x^e & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \alpha_y^e & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \alpha_z^e \end{bmatrix}$$

Οπότε οι αναλλοίωτες των τροπών διαμορφώνονται ως εξής

$$\tilde{I}_1^{new} = \varepsilon_x - a_x^\varepsilon + \varepsilon_y - a_y^\varepsilon + \varepsilon_z - a_z^\varepsilon = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_1^a \quad (4.67)$$

όπου βέβαια

$$\tilde{I}_1 = \frac{(1-2\nu)}{E} I_1 \quad (4.68)$$

$$\tilde{I}_1^a = a_x^\varepsilon + a_y^\varepsilon + a_z^\varepsilon \quad (4.69)$$

$$\tilde{I}_1^{new} = \frac{(1-2\nu)}{E} I_1 - \tilde{I}_1^a \quad (4.70)$$

και

$$\tilde{J}^{new} = \tilde{J}_2 + \frac{1}{6} \left( \tilde{I}_1^{new} \right)^2 = \tilde{J}_2 + \frac{1}{6} \left( \tilde{I}_1 - \tilde{I}_1^a \right)^2 \quad (4.71)$$

Η αναλλοίωτη  $J_2$  δεν επηρεάζεται γιατί έχουμε τις διαφορές των ορθών τροπών στο τετράγωνο.

Η αρχική αναλλοίωτη γίνεται:

$$J = \frac{1}{6} I_1^2 + J_2 = \frac{1}{6} \left[ \frac{E}{1-2\nu} \left( \tilde{I}_1^{new} + \tilde{I}_1^a \right) \right]^2 + J_2 \quad (4.72)$$

Στη συνέχεια, η ανάλυση γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως στην παράγραφο 4.1.2., οπότε προκύπτει η τελική σχέση

$$\nu \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}^{new}}} \frac{\partial E}{\partial \left( \sqrt{\tilde{J}^{new}} \right)} = 4(1-2\nu) \frac{1}{\tilde{I}_1^{new}} \frac{\partial E}{\partial \left( \tilde{I}_1^{new} \right)} \quad (4.73)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \left( \tilde{I}_1^{new} \right)} &= \frac{\partial E}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \tilde{I}_1^{new}} + \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \frac{\partial \sqrt{J}}{\partial \tilde{I}_1^{new}} \Rightarrow \\ \frac{\partial E}{\partial \left( \tilde{I}_1^{new} \right)} &= \frac{E}{1-2\nu} \left( \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{1}{6} \frac{I_1}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \left( \sqrt{\tilde{J}^{new}} \right)} = \frac{\partial E}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sqrt{\tilde{J}^{new}}} + \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \frac{\partial \sqrt{J}}{\partial \sqrt{\tilde{J}^{new}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E}{\partial(\sqrt{\tilde{J}^{new}})} = 6\sqrt{\tilde{J}^{new}} \frac{E}{1-2\nu} \frac{1}{\left(\frac{1-2\nu}{E} I_1 - \tilde{I}_1^a\right)} \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}^{new}} \frac{\sqrt{\tilde{J}^{new}}}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \quad (4.75)$$

Τοποθετώντας τις σχέσεις (4.74) και (4.75) στην (4.73) προκύπτει

$$\frac{14\nu-4}{1-2\nu} \frac{1}{\left(\frac{1-2\nu}{E} I_1 - \tilde{I}_1^a\right)} E \frac{\partial E}{\partial I_1} = \left[ \frac{2}{3} \frac{I_1}{\left(\frac{1-2\nu}{E} I_1 - \tilde{I}_1^a\right)} E - \nu \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}^{new}} \right] \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial E}{\partial \sqrt{J}} \quad (4.76)$$

όμως

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}^{new}} &= \frac{\partial J}{\partial \tilde{I}_1} \frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial \tilde{J}^{new}} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}_2} \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial \tilde{J}^{new}} \Rightarrow \\ \frac{\partial J}{\partial \tilde{J}^{new}} &= \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_1^a} \frac{E^2}{(1-2\nu)^2} + \frac{E^2}{(1+\nu)^2} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Από τις σχέσεις (4.76),(4.77),(4.30) και (4.31) προκύπτει

$$\frac{I_1}{\left(\frac{1-2\nu}{E} I_1 - \tilde{I}_1^a\right)} = \frac{3\nu}{(1+\nu)(2-7\nu)} E \quad (4.78)$$

οπότε

$$\tilde{I}_1^a = \frac{3\nu(1-2\nu) - (1+\nu)(2-7\nu)}{3\nu} \frac{I_1}{E} \quad (4.79)$$

Και τελικά επιμερίζοντας έχουμε:

$$a_x^e = \frac{\varepsilon_x}{\tilde{I}_1} \tilde{I}_1^a = \frac{3\nu(1-2\nu) - (1+\nu)(2-7\nu)}{3\nu(1-2\nu)} \varepsilon_x \quad (4.80)$$

$$a_y^e = \frac{\varepsilon_y}{\tilde{I}_1} \tilde{I}_1^a = \frac{3\nu(1-2\nu) - (1+\nu)(2-7\nu)}{3\nu(1-2\nu)} \varepsilon_y \quad (4.81)$$

$$a_z^e = \frac{\varepsilon_z}{\tilde{I}_1} \tilde{I}_1^a = \frac{3\nu(1-2\nu) - (1+\nu)(2-7\nu)}{3\nu(1-2\nu)} \varepsilon_z \quad (4.82)$$

Για να επιτύχουμε «διόρθωση» του προβλήματος στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τις «υποβόσκουσες» τροπές( back strains),θα μπορούσαμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα ακολουθώντας και διαφορετική στρατηγική. Χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, «υποβόσκουσες» τάσεις (back stress). Η

διαδικασία επίλυσης θα ήταν παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε, ωστόσο δεν προτιμήθηκε γιατί η μέθοδος αυτή είναι πιο δύσχρηστη για υπολογισμούς με πεπερασμένα στοιχεία.

## 4.2 ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΥΛΙΚΟ

### 4.2.1 ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ Ε ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΤΑΣΕΙΣ

Οι Dakoulas και Yu (1992) μελέτησαν εκτενέστατα ένα ορθότροπο γεωυλικό. Η ελαστική συμπεριφορά του υλικού εκφράζεται από πέντε μεταβλητές,  $E_v$  είναι το μέτρο ελαστικότητας στην κατακόρυφη διεύθυνση,  $E_h$  είναι το μέτρο ελαστικότητας στην οριζόντια διεύθυνση,  $\nu_{hv}$  είναι ο λόγος Poisson στην κατακόρυφη διεύθυνση που προκαλείται από τροπές στην οριζόντια διεύθυνση,  $\nu_{vh}$  είναι ο λόγος Poisson στην οριζόντια διεύθυνση που προκαλείται από τροπές στην κατακόρυφη διεύθυνση,  $\nu_{hh}$  είναι ο λόγος Poisson στην οριζόντια διεύθυνση που προκαλείται από τροπές στην οριζόντια διεύθυνση. Επίσης θα μπορούσε να εκφραστεί και από το  $G_{hv}$  είναι μέτρο διάτμησης σε κατακόρυφο επίπεδο και το  $G_{hh}$  είναι μέτρο διάτμησης σε οριζόντιο ισότροπο επίπεδο, με

$$G_{hh} = \frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})} \quad (4.83)$$

Οι Dakoulas και Yu (1992) χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes κατέληξαν σε τρεις τελικές σχέσεις που πρέπει να πληρεί το ελαστικό υλικό:

$$-\left(\frac{n}{m^2}-1\right)\frac{1}{I_1^*}\frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} = \nu_{hh}\frac{1}{m\sigma_x^*}\frac{\partial E_h}{\partial(m\sigma_x^*)} \quad (4.84)$$

$$\nu_{hh}\frac{1}{\sqrt{J^*}}\frac{\partial E_h}{\partial(\sqrt{J^*})} = -2(1+\nu_{hh})\frac{1}{I_1^*}\frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} \quad (4.85)$$

$$\left(\frac{n}{m^2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{J^*}}\frac{\partial E_h}{\partial(\sqrt{J^*})} = 2(1+\nu_{hh})\frac{1}{m\sigma_x^*}\frac{\partial E_h}{\partial(m\sigma_x^*)} \quad (4.86)$$

όπου

$$n = \frac{E_h}{E_v} = \frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} \quad (4.87)$$

$$m = \frac{\nu_{hv}}{\nu_{hh}} \quad (4.88)$$

$$a^2 = \frac{G_{hh}}{G_{hv}} \quad (4.89)$$

και  $I_1^*$ ,  $J^*$  οι δύο ανεξάρτητες αναλλοίωτες.

$$I_1^* = m\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (4.90)$$

όπου  $m\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  είναι οι ορθές, ενεργές τάσεις για το νέο μητρώο

$$\sigma^* = m\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z + \tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx} \quad (4.91)$$

και

$$J^* = \frac{1}{2}(m\sigma'_x)^2 + \frac{1}{2}(\sigma'_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma'_z)^2 + (\alpha\tau_{xy})^2 + \tau_{yz}^2 + (\alpha\tau_{zx})^2 \quad (4.92)$$

Με βάση τις εξισώσεις (4.84) έως (4.86) διαμόρφωσαν οι σχέσεις για τα μέτρα ελαστικότητας

$$E_h = nMp_a \left[ \left( \frac{I_1^*}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu_{hh}}{1-2\nu_{hh}} \frac{J_2^*}{p_a^2} + 3 \frac{n-m^2}{1-2\nu_{hh}} \left( \frac{\sigma'_x}{p_a} \right)^2 \right]^2 \quad (4.93)$$

$$E_h = Mp_a \left[ \left( \frac{I_1^*}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu_{hh}}{1-2\nu_{hh}} \frac{J_2^*}{p_a^2} + 3 \frac{n-m^2}{1-2\nu_{hh}} \left( \frac{\sigma'_x}{p_a} \right)^2 \right]^2 \quad (4.94)$$

όπου  $I_1^*, J_2^*$  δύο ανεξάρτητες αναλλοίωτες. Η πρώτη  $I_1^*$  ισούται με

$$I_1^* = m\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (4.95)$$

ενώ η δεύτερη  $J_2^*$  ισούται με

$$J_2^* = \frac{1}{6} \left[ (m\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - m\sigma'_x)^2 \right] + (\alpha\tau_{xy})^2 + \tau_{yz}^2 + (\alpha\tau_{zx})^2 \quad (4.96)$$

M και λ είναι σταθερές του υλικού οι οποίες μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με τριαξονικές δοκιμές και  $p_a$  η ατμοσφαιρική πίεση.

## 4.2.2 ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ Ε ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΙΣ ΤΡΟΠΕΣ

### 4.1.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βασιζόμενοι στη μελέτη των Dakoulas και Υυ (1992) μελετάμε τώρα το ορθότροπο γεωυλικό από την οπτική γωνία των τροπών.

Η ελαστική συμπεριφορά του υλικού εξακολουθεί να εκφράζεται από πέντε ελαστικές παραμέτρους.

Αρχικά θα δεχτούμε ότι ισχύουν οι εξισώσεις που προέκυψαν από τη μελέτη των Dakoulas και Υυ (1992), για μέτρα τα ελαστικότητας  $E_h$  και  $E_v$

$$E_h = nMp_a \left[ \left( \frac{I_1^*}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu_{hh}}{1-2\nu_{hh}} \frac{J_2^*}{p_a^2} + 3 \frac{n-m^2}{1-2\nu_{hh}} \left( \frac{\sigma'_x}{p_a} \right)^2 \right]^2 \quad (4.97)$$

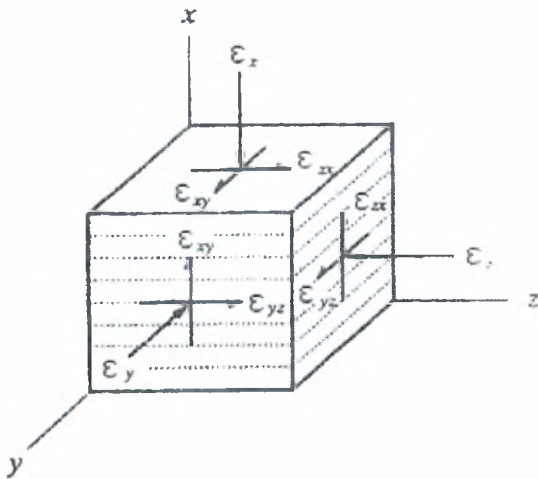


$$E_h = Mp_a \left[ \left( \frac{I_1^*}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1 + \nu_{hh}}{1 - 2\nu_{hh}} \frac{J_2^*}{p_a^2} + 3 \frac{n - m^2}{1 - 2\nu_{hh}} \left( \frac{\sigma_x^i}{p_a} \right)^2 \right]^{\lambda} \quad (4.98)$$

Αν καταλήξουμε στις ίδιες τελικές εξισώσεις, προφανώς η υπόθεση μας θα είναι σωστή. Σε αντίθετη περίπτωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις σε ένα πρόβλημα που έχουμε «έλεγχο» από τροπές. Συνεπώς δεν μπορούμε να μιλάμε για ελαστικότητα.

#### 4.1.2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην επίλυση θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$  όπου οι οριζόντιοι άξονες  $(y, z)$  είναι παράλληλοι με τις τροπές ενώ ο κατακόρυφος άξονας  $x$  έχει αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με το σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 Σύστημα συντεταγμένων για ελαστικό ισότροπο υλικό

Η σχέση ανάμεσα στις μεταβολές των τροπών  $\Delta \varepsilon_{ij}$  και στις μεταβολές των τάσεων  $\Delta \sigma'_{ij}$  δίνεται από το νόμο του Hooke και είναι

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \varepsilon_{xy} \\ \Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_v} & \frac{-\nu_{hv}}{E_h} & \frac{-\nu_{hv}}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{vh}}{E_v} & \frac{1}{E_h} & \frac{-\nu_{hh}}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{vh}}{E_v} & \frac{-\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hv}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hh}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hv}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma'_x \\ \Delta \sigma'_y \\ \Delta \sigma'_z \\ \Delta \tau_{xy} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.99)$$

όπου λόγω συμμετρίας του μητρώου ισχύει

$$\frac{v_{vh}}{E_v} = \frac{v_{hv}}{E_h} \quad (4.100)$$

οπότε το μητρώο διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \varepsilon_{xy} \\ \Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_v} & \frac{-v_{hv}}{E_h} & \frac{-v_{hv}}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{hv}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & \frac{-v_{hh}}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{hv}}{E_h} & \frac{-v_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hv}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hh}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{hv}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \\ \Delta \tau_{xy} \\ \Delta \tau_{yz} \\ \Delta \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται τρεις παράμετροι προκειμένου το μητρώο της σχέσης (4.101) να γίνει πιο εύχρηστο,

$$n = \frac{E_h}{E_v} = \frac{v_{hv}}{v_{vh}} \quad (4.102)$$

$$m = \frac{v_{hv}}{v_{hh}} \quad (4.103)$$

$$a^2 = \frac{G_{hh}}{G_{hv}} \quad (4.104)$$

Όποτε προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \varepsilon_z \\ \Delta \varepsilon_{xy} \\ \Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_h} \begin{bmatrix} n/m & -v_{hh}m & -v_{hh}m & 0 & 0 & 0 \\ -v_{hh} & 1 & -v_{hh} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{hh} & -v_{hh} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+v_{hh})a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+v_{hh}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+v_{hh})a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m\Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \\ a\Delta \tau_{xy} \\ \Delta \tau_{yz} \\ a\Delta \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

Στη συνέχεια, ύστερα από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων και πράξεις, οι σχέσεις των απειροστών τάσεων ως συνάρτηση των απειροστών τροπών και της πρώτης αναλλοίωτης,

$$I_1^* = m\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' \quad (4.106)$$

διαμορφώνονται ως εξής:

$$d\sigma_x' = \frac{E_h d\varepsilon_x + m v_{hh} dI_1^*}{n + m^2 v_{hh}} \quad (4.107)$$

$$d\sigma_y' = \frac{E_h d\varepsilon_y + v_{hh} dI_1^*}{1 + v_{hh}} \quad (4.108)$$

$$d\sigma_z' = \frac{E_h d\varepsilon_z + v_{hh} dI_1^*}{1 + v_{hh}} \quad (4.109)$$

$$d(\alpha\tau_{xy}) = \frac{E_h}{\alpha(1 + v_{hh})} d\varepsilon_{xy} \quad (4.110)$$

$$d\tau_{yz} = \frac{E_h}{(1 + v_{hh})} d\varepsilon_{yz} \quad (4.111)$$

$$d(\alpha\tau_{zx}) = \frac{E_h}{\alpha(1 + v_{hh})} d\varepsilon_{zx} \quad (4.112)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι δεν θα ορίσουμε καινούργιες αναλλοιώτες για αυτό το πρόβλημα. Θα χρησιμοποιήσουμε τις  $I_1^*$  και  $J^*$  που ορίστηκαν στην παράγραφο 4.2.1, ωστόσο θα τις εκφράσουμε συναρτήσει των τρόπων με την βοήθεια των σχέσεων (4.107) έως (4.112). Οπότε:

$$\begin{aligned} dI_1^* &= d(m\sigma_x') + d\sigma_y' + d\sigma_z' \\ &= E_h f_1 \left[ m(1 + v_{hh}) d\varepsilon_x + (n + m^2 v_{hh})(d\varepsilon_y + d\varepsilon_z) \right] \end{aligned} \quad (4.113)$$

και

$$\begin{aligned} dJ^* &= \frac{m^2 E_h^2}{(n + m^2 v_{hh})^2} \varepsilon_x d\varepsilon_x + \frac{E_h^2}{(1 + v_{hh})^2} (\varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) \\ &+ \left[ \frac{m^3 v_{hh} E_h}{(n + m^2 v_{hh})^2} d\varepsilon_x + \frac{v_{hh} E_h}{(1 + v_{hh})^2} (d\varepsilon_y + d\varepsilon_z) \right] I_1^* \\ &+ \left[ \frac{m^3 v_{hh} E_h}{(n + m^2 v_{hh})^2} \varepsilon_x + \frac{v_{hh} E_h}{(1 + v_{hh})^2} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] dI_1^* + \left[ \frac{m^4 v_{hh}^2}{(n + m^2 v_{hh})^2} + \frac{2v_{hh}^2}{(1 + v_{hh})^2} \right] I_1^* dI_1^* \\ &+ \frac{2E_h^2}{(1 + v_{hh})^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} \varepsilon_{xy} d\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} d\varepsilon_{yz} + \frac{1}{\alpha^2} \varepsilon_{zx} d\varepsilon_{zx} \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Για καθαρή ισόθερμη ελαστική συμπεριφορά, το συμπληρωματικό ελαστικό έργο ανά μονάδα όγκου που δημιουργείται ή εκλύεται σε ένα κλειστό «μονοπάτι» τροπών θα πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν.

$$W^C = \oint_C dW^C = 0 \quad (4.115)$$

όπου η αύξηση του συμπληρωματικού ελαστικού έργου  $dW^C$  για κάθε μονοπάτι τάσεις υπολογίζεται από τη σχέση

$$dW^C = \varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \varepsilon_z d\sigma_z + 2\varepsilon_{xy} d\tau_{xy} + 2\varepsilon_{yz} d\tau_{yz} + 2\varepsilon_{zx} d\tau_{zx} \quad (4.116)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.107)-(4.112) στη σχέση (4.116) προκύπτει

$$\begin{aligned} dW^C &= \frac{E_h}{(n+m^2\nu_{hh})} \varepsilon_x d\varepsilon_x + \frac{E_h}{(1+\nu_{hh})} (\varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &\left[ \frac{m\nu_{hh}}{(n+m^2\nu_{hh})} \varepsilon_x + \frac{\nu_{hh}}{(1+\nu_{hh})} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] dI_1^* + \\ &\frac{2E_h}{(1+\nu_{hh})} \left( \frac{1}{a^2} \varepsilon_{xy} d\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} d\varepsilon_{yz} + \frac{1}{a^2} \varepsilon_{zx} d\varepsilon_{zx} \right) \end{aligned} \quad (4.117\alpha)$$

από όπου μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} dW^C &= -\frac{(1+\nu_{hh})}{E_h} \left[ \frac{m^4\nu_{hh}^2}{(n+m^2\nu_{hh})^2} + \frac{2\nu_{hh}^2}{(1+\nu_{hh})^2} \right] I_1^* dI_1^* \\ &+ \frac{(1+\nu_{hh})}{E_h} dJ^* + \frac{E_h(n-m^2)}{(n+m^2\nu_{hh})} \varepsilon_x d \left( \varepsilon_x + \frac{m\nu_{hh}}{E_h} I_1^* \right) \\ &- I_1^* d \left[ \frac{m^3\nu_{hh}(1-\nu_{hh})}{(n+m^2\nu_{hh})^2} \varepsilon_x + \frac{\nu_{hh}}{(1+\nu_{hh})} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \end{aligned} \quad (4.117\beta)$$

Ορίζω

$$\Pi_1 = \varepsilon_x + \frac{m\nu_{hh}}{E_h} I_1^* \quad (4.118)$$

$$\Pi_2 = \frac{m^3\nu_{hh}(1-\nu_{hh})}{(n+m^2\nu_{hh})^2} \varepsilon_x + \frac{\nu_{hh}}{(1+\nu_{hh})} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (4.119)$$

$$f_2 = \frac{m^4\nu_{hh}^2}{(n+m^2\nu_{hh})^2} + \frac{2\nu_{hh}^2}{(1+\nu_{hh})^2} \quad (4.120)$$

και με δεδομένο ότι ισχύει

$$\frac{d\sqrt{J^*}}{dJ^*} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J^*}} \Rightarrow dJ^* = 2\sqrt{J^*} d\sqrt{J^*} \quad (4.121)$$

αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.118) έως (4.121) στη σχέση (4.117β) προκύπτει

$$\begin{aligned} dW^C = & -\frac{(1+\nu_{hh})}{E_h} f_2 I_1^* dI_1^* + \frac{2(1+\nu_{hh})}{E_h} \sqrt{J^*} d(\sqrt{J^*}) \\ & + \frac{E_h(n-m^2)}{(n+m^2\nu_{hh})} \varepsilon_x d\Pi_1 - I_1^* d\Pi_2 \end{aligned} \quad (4.122)$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να επισημάνουμε ότι το συμπληρωματικό ελαστικό έργο είναι συνάρτηση των τεσσάρων αναλλοίωτων  $\hat{I}_1, \sqrt{J^*}, \Pi_1$  και  $\Pi_2$ .

Επίσης, παρατηρούμε ότι και το συμπληρωματικό ελαστικό έργο μπορεί να εκφραστεί ως τέλειο διαφορικό των τεσσάρων αναλλοίωτων,

$$dW^C = \frac{\partial W^C}{\partial I_1^*} dI_1^* + \frac{\partial W^C}{\partial(\sqrt{J^*})} d(\sqrt{J^*}) + \frac{\partial W^C}{\partial \Pi_1} d\Pi_1 + \frac{\partial W^C}{\partial \Pi_2} d\Pi_2 \quad (4.123)$$

Μέσα στη σχέση αυτή ουσιαστικά εμπεριέχεται η ισορροπία στοιχειώδους σωματιδίου.

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παρατηρούμε

$$\frac{\partial W^C}{\partial I_1^*} = -\frac{(1+\nu_{hh})}{E_h} f_2 I_1^* \quad (4.124)$$

$$\frac{\partial W^C}{\partial(\sqrt{J^*})} = \frac{2(1+\nu_{hh})}{E_h} \sqrt{J^*} \quad (4.125)$$

$$\frac{\partial W^C}{\partial \Pi_1} = \frac{E_h(n-m^2)}{(n+m^2\nu_{hh})} \varepsilon_x \quad (4.126)$$

$$\frac{\partial W^C}{\partial \Pi_2} = -I_1^* \quad (4.127)$$

όπου τα μέτρα ελαστικότητας  $E_h$  και  $E_v$  είναι συνάρτηση των δύο αναλλοίωτων  $I_1, J_2$  και  $\mu_{\alpha'}$ .

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes μεταφερόμαστε από μία «επιφάνεια»  $S$  στην «καμπύλη»  $C$  που την περιβάλλει. Δηλαδή η (4.115) μετασχηματίζεται στην:

$$\iint_S \left[ \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial (\sqrt{J^*})} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial I_1^*} \right) n_1 + \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial \Pi_1} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial (\sqrt{J^*})} \right) n_2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial \Pi_2} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial (\sqrt{J^*})} \right) n_3 + \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial \Pi_1} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial I_1^*} \right) n_4 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial \Pi_2} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial I_1^*} \right) n_5 + \left( \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial \Pi_2} - \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial \Pi_1} \right) n_6 \right] dS = 0 \quad (4.128)$$

στην οποία

$$dS = dI_1^* d(\sqrt{J^*}) d\Pi_1 d\Pi_2 \quad (4.129)$$

Επειδή η (4.128) πρέπει να ισχύει για κάθε  $S$ , προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial (\sqrt{J^*})} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial I_1^*} \quad (4.130)$$

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial \Pi_1} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial (\sqrt{J^*})} \quad (4.131)$$

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial (\sqrt{J^*}) \partial \Pi_2} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial (\sqrt{J^*})} \quad (4.132)$$

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial \Pi_1} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial I_1^*} \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial I_1^* \partial \Pi_2} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial I_1^*} \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_1 \partial \Pi_2} = \frac{\partial^2 W^C}{\partial \Pi_2 \partial \Pi_1} \quad (4.135)$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.130) τις σχέσεις (4.124) και (4.125) προκύπτει

$$-2 \frac{1}{I_1^*} \frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} = f_2 \frac{1}{\sqrt{J^*}} \frac{\partial E_h}{\partial (\sqrt{J^*})} \quad \text{ή}$$

$$-2(1+v_{hh}) \frac{1}{I_1^*} \frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} = \left[ v_{hh} (1+v_{hh}) \left( \frac{m^4}{(n+m^2 v_{hh})^2} + \frac{2}{(1+v_{hh})^2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{J^*}} \frac{\partial E_h}{\partial (\sqrt{J^*})} \quad (4.136)$$

Η σχέση (4.136) είναι διαφορετική από την (4.85) της παραγράφου 4.2.1. Για να είναι ίδιες, θα πρέπει:

$$(1+v_{hh}) \left( \frac{m^4}{(n+m^2 v_{hh})^2} + \frac{2}{(1+v_{hh})^2} \right) = 1 \quad (4.137)$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.131) τις σχέσεις (4.125) και (4.126) προκύπτει

$$\frac{\varepsilon_x (n-m^2)}{n+m^2 v_{hh}} \frac{\partial E_h}{\partial (\sqrt{J^*})} = 0 \quad (4.138)$$

Η σχέση (4.138) δεν έχει καμία σχέση με τις εξισώσεις της παραγράφου 4.2.1 για να είναι ίδιες θα πρέπει

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \text{ή} \\ n = m^2 \Rightarrow \frac{E_h}{E_v} = \left( \frac{v_{hh}}{v_{vh}} \right)^2 \end{cases} \quad (4.139)$$

αφού έχουμε υποθέσει ότι το μέτρο ελαστικότητας είναι συνάρτηση του  $\sqrt{J^*}$ ,

$$\text{συνεπώς } \frac{\partial E_h}{\partial (\sqrt{J^*})} \neq 0$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.132) τις σχέσεις (4.125) και (4.127) προκύπτει η ταυτότητα:

$$0=0 \quad (4.140)$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.133) τις σχέσεις (4.124) και (4.126) προκύπτει

$$\frac{\varepsilon_x (n-m^2)}{n+m^2 v_{hh}} \frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} = 0 \quad (4.141)$$

Ομοίως με προηγουμένως, η (4.141) δίνει

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0 \\ \dot{\eta} \\ n = m^2 \Rightarrow \frac{E_h}{E_v} = \left( \frac{v_{hh}}{v_{vh}} \right)^2 \end{array} \right. \quad (4.142)$$

Αφού έχουμε υποθέσει ότι το μέτρο ελαστικότητας είναι συνάρτηση του  $I_1^*$ ,

$$\text{συνεπώς } \frac{\partial E_h}{\partial I_1^*} \neq 0$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.134) τις σχέσεις (4.124) και (4.127) προκύπτει

$$-1 = 0 \quad (4.143)$$

κάτι που είναι άτοπο.

- Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.135) τις σχέσεις (4.126) και (4.127) προκύπτει η ταυτότητα:

$$0 = 0 \quad (4.144)$$

Συγκρίνοντας τις έξι τελικές σχέσεις που προέκυψαν από την παραπάνω ανάλυση με αυτές που προκύπτουν από τη μελέτη των Dakoulas και Yu (1992) παρατηρούμε ότι καταρχήν δεν είναι όμοιες. Κάποιες από αυτές θα μπορούσαν να είναι συμβατές υπό προϋποθέσεις [σχέσεις (4.137), (4.139) και (4.142)]. Ενώ η σχέση (4.143) είναι εντελώς άτοπη. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αντιστρεπτότητα. Συνεπώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (4.93) και (4.94) για τα μέτρα ελαστικότητας και το υλικό δεν μπορεί να θεωρηθεί ελαστικό.

### 4.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε την ορθότητα αυτών που ισχυριστήκαμε παραπάνω με ένα παράδειγμα. Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση, δηλαδή με το μονοαξονικής φόρτισης (εφελκυσμός/θλίψη).

Γενικά σε ένα μονοαξονικό πρόβλημα για τις τάσεις ισχύουν τα εξής:

$$\sigma_x \neq 0 \quad (4.145)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (4.146)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (4.147)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (4.148)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (4.149)$$

$$\tau_{zx} = 0 \quad (4.150)$$

Ενώ για τις παραμορφώσεις ισχύουν



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (4.151)$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\nu}{E} \sigma_x \quad (4.152)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} \sigma_x \quad (4.153)$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 \quad (4.154)$$

$$\varepsilon_{yz} = 0 \quad (4.155)$$

$$\varepsilon_{zx} = 0 \quad (4.156)$$

Αρχικά θα φορτίσουμε με τάσεις (δηλαδή θεωρούμε ότι ασκούνται δυνάμεις στο υλικό) και στη συνέχεια θα αποφορτίσουμε με τροπές (θεωρούμε ότι ασκούνται παραμορφώσεις στο υλικό).

Για να είναι ελαστικό το υλικό θα πρέπει το διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων που θα προκύψει και από τις δυο περιπτώσεις να είναι το ίδιο. Με άλλα λόγια το ελαστικό υλικό φορτίζεται και να αποφορτίζεται διασχίζοντας το ίδιο μονοπάτι χωρίς να χάνει ή να κερδίζει ενέργεια.

Κανονικοποιούμε το μέτρο ελαστικότητας που δίνεται από τη σχέση (4.1) και προκύπτει

$$\frac{E}{p_a} = M \left[ \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{J_2}{p_a^2} \right] \quad (4.157)$$

Σε μονοαξονικό πρόβλημα η πρώτη αναλλοίωτη είναι

$$I_1 = \sigma_x \quad (4.158)$$

και κανονικοποιώντας την προκύπτει

$$\frac{I_1}{p_a} = \frac{\sigma_x}{p_a} \quad (4.159)$$

Ομοίως η δεύτερη αναλλοίωτη είναι

$$J_2 = \frac{\sigma_x^2}{3} \quad (4.160)$$

ή

$$\frac{J_2}{p_a} = \frac{\sigma_x^2}{3p_a} \quad (4.161)$$

για λόγο Poisson  $\nu=0.45$  και για σταθερές του υλικού  $\lambda=2.125$  και  $M=0.4476$  για ισότροπο υλικό (Dakoulas και Yu (1993)), έχουμε

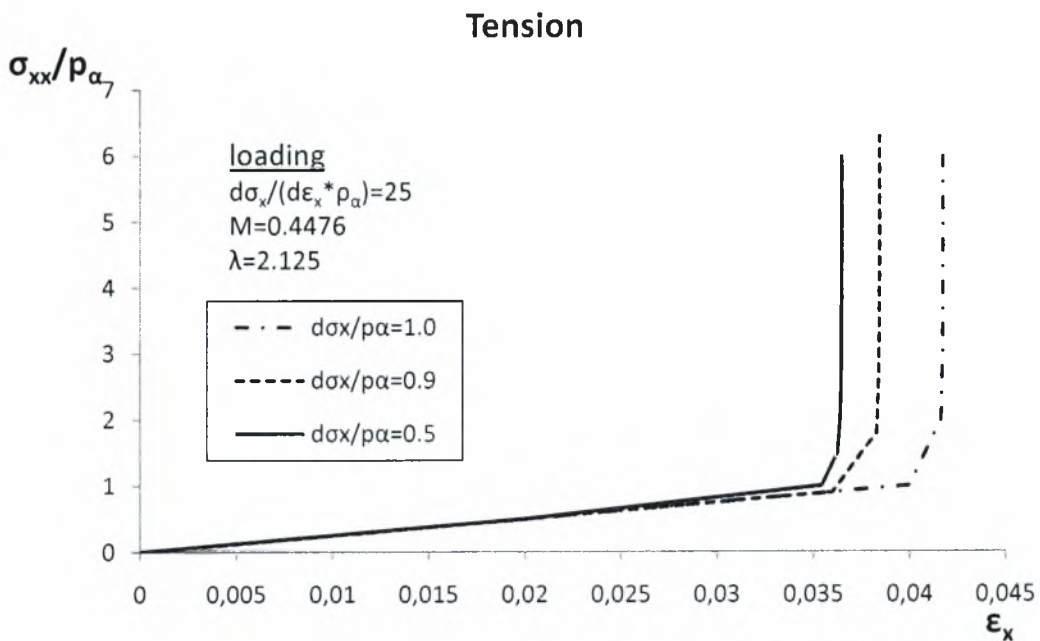
$$\frac{E}{p_a} = 0,4476 \left[ 30 \left( \frac{\sigma_x}{p_a} \right)^2 \right]^{2,125} \quad (4.162)$$

❖ Φόρτιση

Φορτίζουμε επομένως χρησιμοποιώντας κανονικοποιημένο βήμα φόρτισης  $d\sigma_x/p_a$  και προκύπτει η αύξηση της παραμόρφωσης

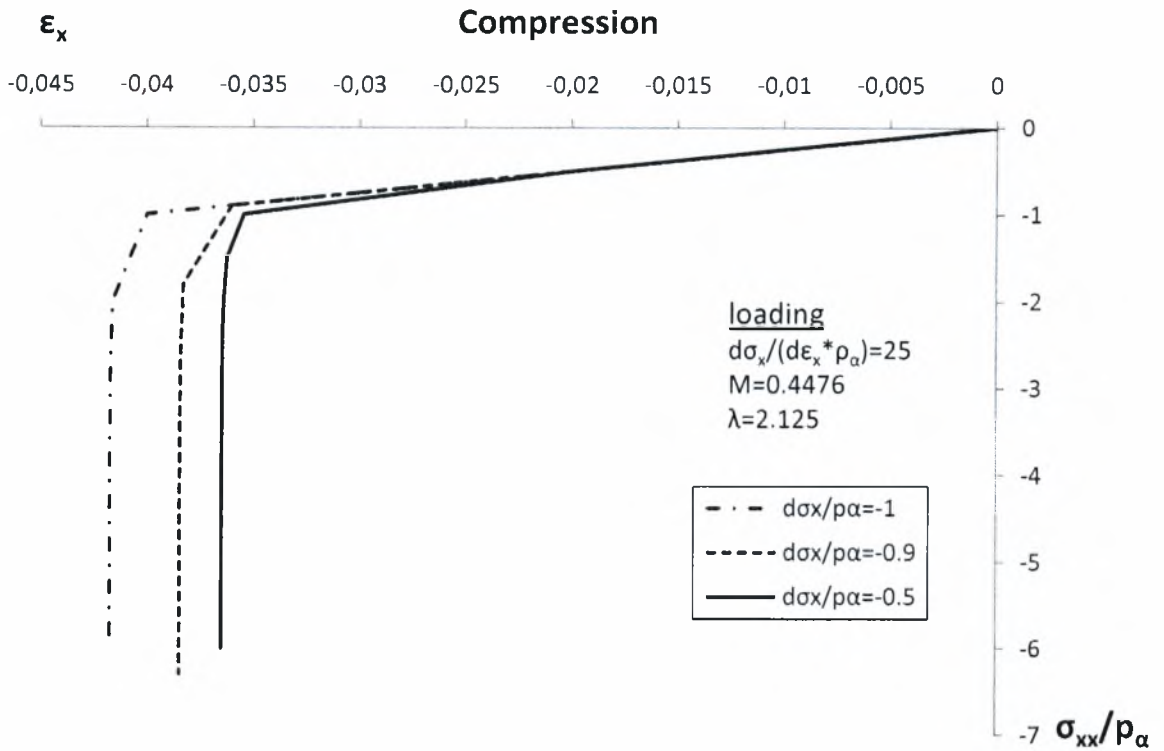
$$d\varepsilon_x = \frac{1}{\left( \frac{E}{p_a} \right) p_a} d\sigma_x \quad (4.163)$$

Θεωρούμε ότι εξετάζουμε το ίδιο υλικό πάντα, οπότε ορίζουμε αρχική κλίση για όλα τα διαγράμματα φόρτισης  $d\sigma_x/(d\varepsilon_x * p_a) = 25$ . Εξετάζουμε πρώτα τον εφελκυσμό. Στο παρακάτω διάγραμμα ξεκινάμε από βήμα φόρτισης  $d\sigma_x/p_a = 1$  και παρατηρούμε ότι καθώς μειώνεται το βήμα φόρτισης, η καμπύλες φόρτισης συγκλίνουν. «ισοροπία».



Σχήμα 4.4 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων σε εφελκυσμό

Αν υποθέσουμε ότι το υλικό συμπιέζεται, τότε ασκούνται θλιπτικές τάσεις και για διάφορα βήματα φόρτισης έχουμε:



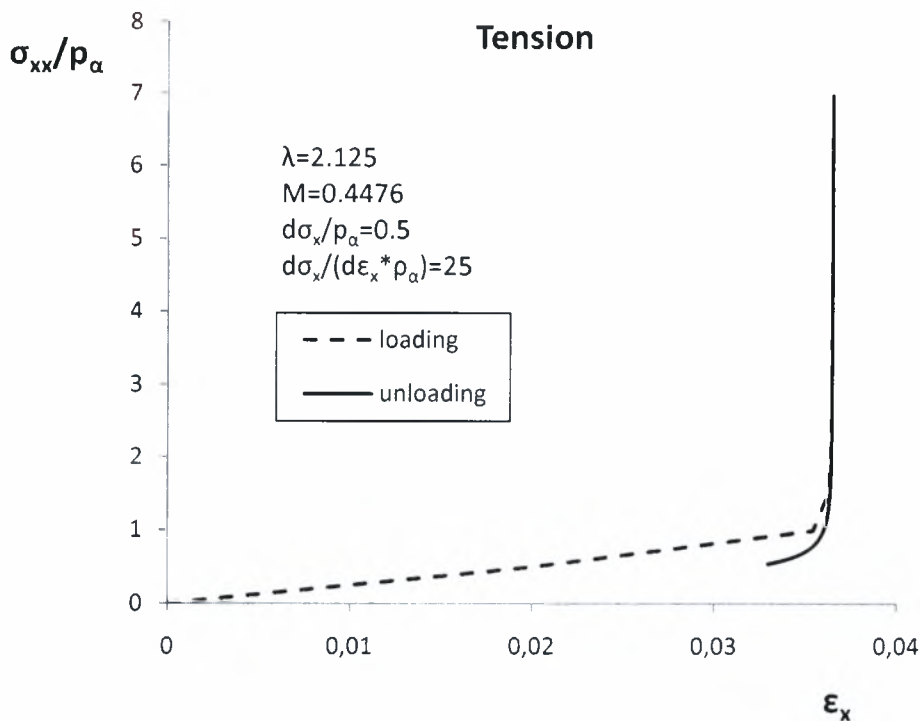
Σχήμα 4.5 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων σε θλίψη  
 ❖ Αποφόρτιση

Στη συνέχεια θα αποφορτίσουμε το υλικό χρησιμοποιώντας βήμα φόρτισης  $d\epsilon_x$  και προκύπτει η αύξηση τάσης

$$\frac{d\sigma_x}{\rho_\alpha} = \left( \frac{E}{\rho_\alpha} \right) d\epsilon_x \quad (4.164)$$

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να αποφορτίσουμε το διάγραμμα φόρτισης με βήμα  $d\sigma_x/\rho_\alpha = 0.50$ .

Στην αποφόρτιση ξεκινάμε με πρώτο βήμα ( $d\epsilon_x$ ) το τελευταίο βήμα της φόρτισης και συνεχίζουμε με σταθερό βήμα  $d\epsilon_x = 0.000001$ , οπότε έχουμε:



Σχήμα 4.6 Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης σε εφελκυσμό

#### Συμπεράσματα

- Εξετάσαμε διάφορες περιπτώσεις αποφόρτισης και παρατηρήσαμε ότι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται το βήμα αποφόρτισης επηρεάζει και την καμπύλη αποφόρτισης.
- Στο σχήμα 4.6 ενώ αρχικά καμπύλες φόρτισης-αποφόρτισης ταυτίζονται, στη συνέχεια το σύστημα φαίνεται να χάνει ενέργεια αφού η καμπύλη φόρτισης βρίσκεται πάνω από την καμπύλη αποφόρτισης, κάτι που είναι θερμοδυναμικά «αποδεκτό» σαν ένα είδος «απόσβεσης» (πιθανόν αλλάζοντας το βήμα αποφόρτισης θα μπορούσε το σύστημα να φαίνεται ότι «κερδίζει» ενέργεια, δηλαδή η καμπύλη αποφόρτισης να βρίσκεται πάνω από την καμπύλη φόρτισης, θερμοδυναμικά «απαράδεκτο».) Σε κάθε περίπτωση είτε το σύστημα «χάνει» ενέργεια, είτε «κερδίζει» δεν είναι ελαστικό, υπάρχει ανελαστικότητα και προφανώς υπάρχει κάποια παραμένουσα τάση ή τροπή.

#### ❖ «Διόρθωση»

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να «διορθώσουμε» την καμπύλη της αποφόρτισης έτσι ώστε να πλησιάζει περισσότερο στην καμπύλη φόρτισης και εισάγουμε τις λεγόμενες «υποβόσκουσες» τροπές (back strains).

Η αναλλοίωτη των «υποβόσκουσών» τροπών για  $\nu=0,45$

$$\tilde{I}_1^a = 1.3352 \frac{I_1}{P_a} \frac{1}{\left(\frac{E}{P_a}\right)} \quad (1.165)$$

και λόγω της σχέσης (4.159)

$$\tilde{I}_1^a = 1.3352 \frac{\sigma_x'}{P_a} \frac{1}{\left(\frac{E}{P_a}\right)} \quad (1.166)$$

Η αναλλοίωτη των τροπών λόγω των σχέσεων (4.151), (4.152), (4.153) γίνεται

$$\tilde{I}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - 2\nu) \varepsilon_x \quad (1.167)$$

και για  $\nu=0,45$  προκύπτει

$$\tilde{I}_1 = 0.1 \varepsilon_x \quad (1.169)$$

Η σχέση (4.80) γίνεται

$$a_x^\varepsilon = \frac{\varepsilon_x}{\tilde{I}_1} \tilde{I}_1^a = \frac{\tilde{I}_1^a}{0.1} \quad (1.170)$$

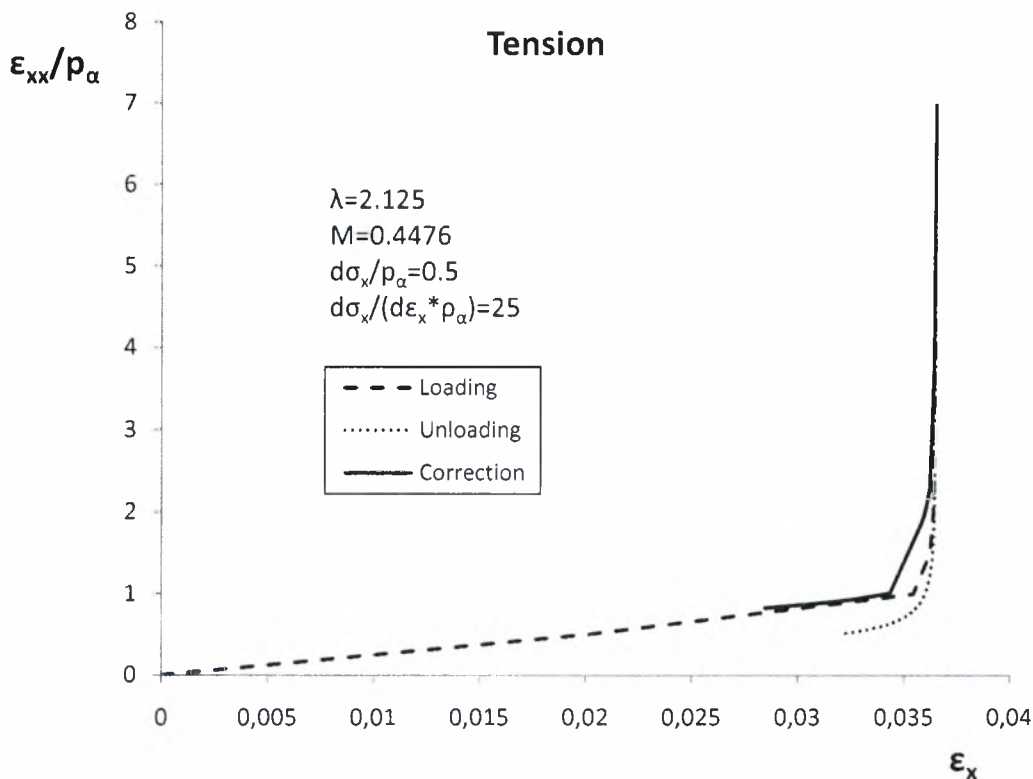
και προφανώς η μεταβολή της υποβόσκουσας τροπής  $a_x^\varepsilon$

$$da_x^\varepsilon = \frac{d\varepsilon_x}{d\tilde{I}_1} \tilde{I}_1^a = \frac{d\tilde{I}_1^a}{0.1} \quad (1.171)$$

Στη συνέχεια θα αποφορτίσουμε το διάγραμμα φόρτισης με βήμα  $d\sigma_x/p_a=0.50$ . χρησιμοποιώντας βήμα φόρτισης  $d\varepsilon_x-d a_x^\varepsilon$  και προκύπτει η αύξηση τάσης

$$\frac{d\sigma_x'}{P_a} = \left(\frac{E}{P_a}\right) (d\varepsilon_x - da_x^\varepsilon) \quad (4.172)$$

οπότε έχουμε:



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης σε εφελκυσμό, μετά την «διόρθωση»

Παρατηρούμε ότι μετά τη «διόρθωση» η καμπύλη αποφόρτισης πλησιάζει ακόμη περισσότερο την καμπύλη φόρτισης. Εξακολουθεί, βέβαια να υπάρχει μια απόκλιση η οποία φαίνεται να είναι σαφώς μικρότερη από πριν.

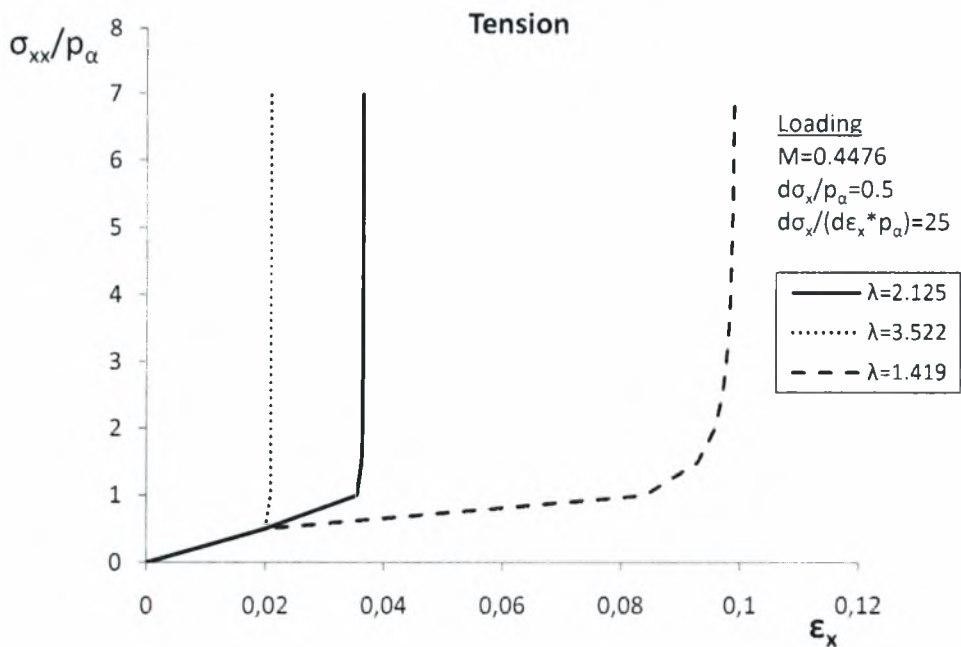
#### 4.3.1 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ λ ΚΑΙ Μ

Όπως έχει αναφερθεί τα λ και Μ στη σχέση (4.157) είναι σταθερές του υλικού

$$\frac{E}{\rho_a} = M \left[ \left( \frac{I_1}{\rho_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{J_2}{\rho_a^2} \right]^2 \quad (4.157)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πώς οι σταθερές αυτές επηρεάζουν το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε τιμές που προέκυψαν από μετρήσεις των Dakoulas και Yu (1993). Δεν αντιστοιχούν όλες αυτές οι τιμές σε ισότροπο υλικό, ωστόσο λόγω έλλειψης άλλων δεδομένων θα τις χρησιμοποιήσουμε για να έχουμε μία παραμετρική ανάλυση.

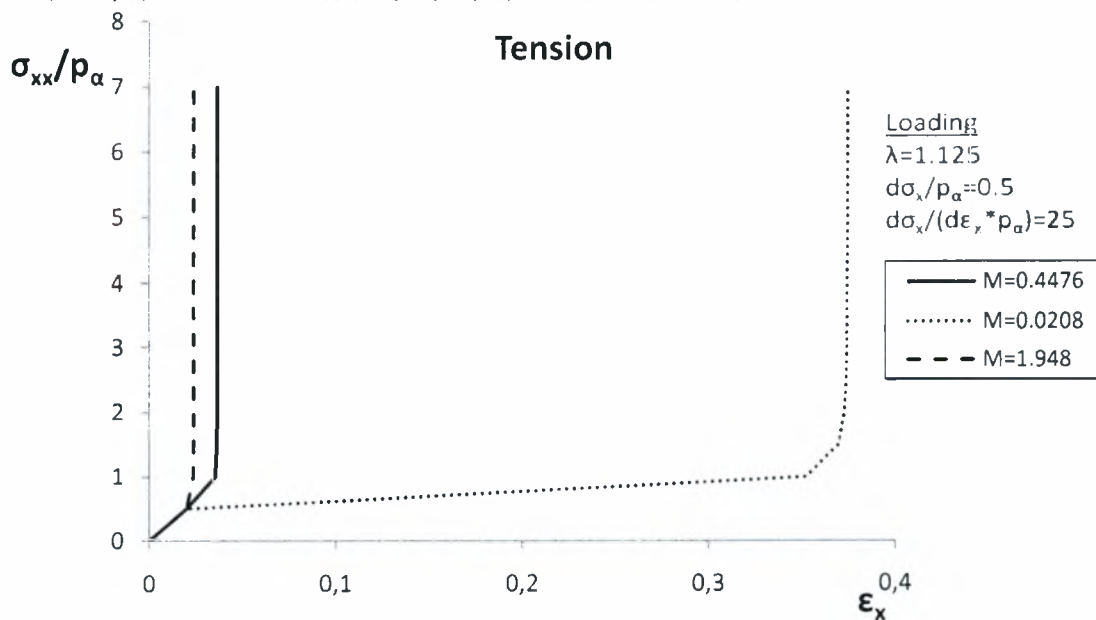
Έτσι διατηρώντας σταθερή την τιμή του Μ=0.4476 και μεταβάλλοντας τη τιμή του λ προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων. Στο διαγράμματα φόρτισης, όπως και προηγουμένως, ορίζουμε αρχική κλίση  $d\sigma_x/(d\varepsilon_x \cdot \rho_a)=25$  και συνεχίζουμε με βήμα φόρτισης  $d\sigma_x/\rho_a=0.50$ .



Σχήμα 4.8 Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης σε εφελκυσμό για σταθερό M και μεταβαλλόμενο  $\lambda$

Παρατηρούμε ότι καθώς η σταθερά  $\lambda$  μειώνεται, οι τροπές αυξάνονται σημαντικά.

Στη συνέχεια, διατηρώντας σταθερή την τιμή του  $\lambda=2.125$  και μεταβάλλοντας τη τιμή του M προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων. Στο διάγραμμα φόρτισης, όπως και προηγουμένως, ορίζουμε αρχική κλίση  $d\sigma_x/(d\epsilon_x*\rho_\alpha)=25$  και συνεχίζουμε με βήμα φόρτισης  $d\sigma_x/\rho_\alpha=0.50$ .



Σχήμα 4.8 Διάγραμμα φόρτισης-αποφόρτισης σε εφελκυσμό για σταθερό  $\lambda$  και μεταβαλλόμενο M

Παρατηρούμε ότι καθώς η σταθερά M μειώνεται, οι τροπές αυξάνονται σημαντικά.

Πίνακας ΠΑ.1 Γεωμετρικός τύπος που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να έχουμε ανατροπή για  $\phi=\pi/3$ .

$L=3$  και  $\chi_0=2$

n	Μο*	Ρο*	$V_B^* > 0$		$V_A^* > 0$					
			$X_A^* < X_B^*$	$X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < X_A^*$	$X_B^* > X_A^*$				
3	1	3	$X_A^* < 1,667$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,667$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,667$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,667$	και $X_B^* > X_A^*$
4	2	4	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
5	2	5	$X_A^* < 1,600$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,600$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,600$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,600$	και $X_B^* > X_A^*$
6	3	6	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
7	3	7	$X_A^* < 1,571$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,571$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,571$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,571$	και $X_B^* > X_A^*$
8	4	8	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
9	4	9	$X_A^* < 1,556$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,556$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,556$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,556$	και $X_B^* > X_A^*$
10	5	10	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
11	5	11	$X_A^* < 1,545$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,545$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,545$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,545$	και $X_B^* > X_A^*$
12	6	12	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
13	6	13	$X_A^* < 1,538$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,538$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,538$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,538$	και $X_B^* > X_A^*$
14	7	14	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
15	7	15	$X_A^* < 1,533$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,533$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,533$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,533$	και $X_B^* > X_A^*$
16	8	16	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
17	8	17	$X_A^* < 1,529$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,529$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,529$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,529$	και $X_B^* > X_A^*$
18	9	18	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
19	9	19	$X_A^* < 1,526$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,526$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,526$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,526$	και $X_B^* > X_A^*$
20	10	20	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
21	10	21	$X_A^* < 1,524$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,524$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,524$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,524$	και $X_B^* > X_A^*$
22	11	22	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
23	11	23	$X_A^* < 1,522$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,522$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,522$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,522$	και $X_B^* > X_A^*$
24	12	24	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
25	12	25	$X_A^* < 1,520$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,520$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,520$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,520$	και $X_B^* > X_A^*$
26	13	26	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$



n	Mo*	Po*	$V_B^* > 0$		$V_A^* > 0$					
27	13	27	$X_A^* < 1,519$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,519$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,519$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,519$	και $X_B^* > X_A^*$
28	14	28	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
29	14	29	$X_A^* < 1,517$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,517$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,517$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,517$	και $X_B^* > X_A^*$
30	15	30	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
31	15	31	$X_A^* < 1,516$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,516$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,516$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,516$	και $X_B^* > X_A^*$
100	50	100	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
101	50	101	$X_A^* < 1,505$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,505$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,505$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,505$	και $X_B^* > X_A^*$
1000	500	1000	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
1001	500	1001	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
10000	5000	10000	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
10001	5000	10001	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
100000	50000	100000	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
100001	50000	100001	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
1000000	500000	1000000	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$
1000001	500000	1000001	$X_A^* < 1,500$	και $X_A^* < X_B^*$	ή $X_A^* > 1,500$	και $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$	και $X_B^* < X_A^*$	ή $X_B^* > 1,500$	και $X_B^* > X_A^*$



n	Mo*	Po*	$V_B^* > 0$		$V_A^* > 0$			
			$X_A^* < X_B^*$	$X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < X_A^*$	$X_B^* > X_A^*$		
27	22,517	27	$X_A^* < 1,898$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,898$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,898$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,898$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
28	24,249	28	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
29	24,249	29	$X_A^* < 1,896$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,896$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,896$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,896$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
30	25,981	30	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
31	25,981	31	$X_A^* < 1,894$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,894$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,894$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,894$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
100	86,603	100	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
101	86,603	101	$X_A^* < 1,875$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,875$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,875$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,875$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
1000	866,025	1000	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
1001	866,025	1001	$X_A^* < 1,867$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,867$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,867$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,867$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
10000	8660,25	10000	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
10001	8660,25	10001	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
100000	86603	100000	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
100001	86603	100001	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
1000000	866025	1000000	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$
1000001	866025	1000001	$X_A^* < 1,866$	καὶ $X_A^* < X_B^*$ ἢ $X_A^* > 1,866$	καὶ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,866$	καὶ $X_B^* < X_A^*$ ἢ $X_B^* > 1,866$	καὶ $X_B^* > X_A^*$

Πίνακας ΠΑ.3 Γεωμετρικός τόπος που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να έχουμε ανατροπή για  $\phi = \pi/3$  και παρουσία υγρού.

$l = 3$  και  $x_0 = 2$

n	Mo*	Po*	F*	V <sub>B</sub> * > 0				V <sub>A</sub> * > 0			
				x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
3	0,500	1,5	2,609	x <sub>A</sub> * < 1,561	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,561	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,561	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,561	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
4	1,000	2,0	3,436	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
5	1,000	2,5	4,263	x <sub>A</sub> * < 1,537	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,537	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,537	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,537	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
6	1,500	3,0	5,090	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
7	1,500	3,5	5,917	x <sub>A</sub> * < 1,527	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,527	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,527	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,527	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
8	2,000	4,0	6,744	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
9	2,000	4,5	7,571	x <sub>A</sub> * < 1,521	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,521	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,521	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,521	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
10	2,500	5,0	8,398	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
11	2,500	5,5	9,225	x <sub>A</sub> * < 1,517	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,517	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,517	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,517	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
12	3,000	6,0	10,052	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
13	3,000	6,5	10,879	x <sub>A</sub> * < 1,514	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,514	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,514	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,514	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
14	3,500	7,0	11,706	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
15	3,500	7,5	12,533	x <sub>A</sub> * < 1,512	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,512	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,512	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,512	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
16	4,000	8,0	13,360	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
17	4,000	8,5	14,187	x <sub>A</sub> * < 1,511	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,511	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,511	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,511	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
18	4,500	9,0	15,014	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
19	4,500	9,5	15,841	x <sub>A</sub> * < 1,510	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,510	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,510	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,510	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
20	5,000	10,0	16,668	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
21	5,000	10,5	17,495	x <sub>A</sub> * < 1,509	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,509	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,509	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,509	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
22	5,500	11,0	18,322	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
23	5,500	11,5	19,149	x <sub>A</sub> * < 1,508	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,508	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,508	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,508	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
24	6,000	12,0	19,976	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
25	6,000	12,5	20,803	x <sub>A</sub> * < 1,508	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,508	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,508	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,508	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
26	6,500	13,0	21,630	x <sub>A</sub> * < 1,500	καί x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,500	καί x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,500	καί x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,500	καί x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *

n	Mo*	Po*	F*	$V_B^* > 0$		$V_A^* > 0$	
				$X_A^* < X_B^*$	$X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < X_A^*$	$X_B^* > X_A^*$
27	6,500	13,5	22,457	$X_A^* < 1,507$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,507$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,507$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,507$ καλ $X_B^* > X_A^*$
28	7,000	14,0	23,284	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
29	7,000	14,5	24,111	$X_A^* < 1,506$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,506$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,506$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,506$ καλ $X_B^* > X_A^*$
30	7,500	15,0	24,938	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
31	7,500	15,5	25,765	$X_A^* < 1,506$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,506$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,506$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,506$ καλ $X_B^* > X_A^*$
100	25,000	50,0	82,827	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
101	25,000	50,5	83,654	$X_A^* < 1,502$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,502$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,502$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,502$ καλ $X_B^* > X_A^*$
1000	250,000	500,0	827,12	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
1001	250,000	500,5	827,95	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
10000	2500,00	5000,0	8270	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
10001	2500,00	5000,5	8271	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
100000	25000	50000	82699	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
100001	25000	50001	82700	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
1000000	250000	500000	826993	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$
1000001	250000	500001	826994	$X_A^* < 1,500$	καλ $X_A^* < X_B^*$ ή $X_A^* > 1,500$	καλ $X_A^* > X_B^*$	$X_B^* < 1,500$ καλ $X_B^* < X_A^*$ ή $X_B^* > 1,500$ καλ $X_B^* > X_A^*$

n	Mo*	Po*	F*	$V_B^{* > 0}$	$V_A^{* > 0}$
27	11,258	13,5	16,037	$x_A^* < 1,881$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,881$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,881$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,881$ και $x_B^* > x_A^*$
28	12,124	14,0	16,631	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
29	12,124	14,5	17,225	$x_A^* < 1,880$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,880$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,880$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,880$ και $x_B^* > x_A^*$
30	12,990	15,0	17,819	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
31	12,990	15,5	18,413	$x_A^* < 1,879$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,879$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,879$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,879$ και $x_B^* > x_A^*$
100	43,301	50,0	59,397	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
101	43,301	50,5	59,991	$x_A^* < 1,870$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,870$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,870$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,870$ και $x_B^* > x_A^*$
1000	433,013	500,0	593,974	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
1001	433,013	500,5	594,568	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
10000	4330,13	5000	5939,743	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
10001	4330,13	5001	5940,337	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
100000	43301	50000	59397,4	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
100001	43301	50001	59398,0	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
1000000	433013	5E+05	593974,3	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$
1000001	433013	5E+05	593974,9	$x_A^* < 1,866$ και $x_A^* < x_B^*$ ή $x_A^* > 1,866$ και $x_A^* > x_B^*$	$x_B^* < 1,866$ και $x_B^* < x_A^*$ ή $x_B^* > 1,866$ και $x_B^* > x_A^*$

Πίνακας ΠΑ.4 Γεωμετρικός τύπος που μπορούν να τοποθετηθούν οι στηρίξεις χωρίς να έχουμε ανατροπή για  $\phi = \pi/6$  και παρουσία υγρού.  
 $L^* = 3,732$  και  $x_0 = 2,732$

n	Mo*	Po*	F*	V <sub>B</sub> * > 0				V <sub>A</sub> * > 0			
				x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
3	0,866	1,5	1,782	x <sub>A</sub> * < 1,998	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,998	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,998	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,998	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
4	1,732	2,0	2,376	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
5	1,732	2,5	2,970	x <sub>A</sub> * < 1,945	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,945	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,945	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,945	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
6	2,598	3,0	3,564	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
7	2,598	3,5	4,158	x <sub>A</sub> * < 1,923	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,923	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,923	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,923	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
8	3,464	4,0	4,752	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
9	3,464	4,5	5,346	x <sub>A</sub> * < 1,910	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,910	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,910	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,910	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
10	4,330	5,0	5,940	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
11	4,330	5,5	6,534	x <sub>A</sub> * < 1,902	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,902	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,902	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,902	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
12	5,196	6,0	7,128	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
13	5,196	6,5	7,722	x <sub>A</sub> * < 1,896	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,896	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,896	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,896	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
14	6,062	7,0	8,316	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
15	6,062	7,5	8,910	x <sub>A</sub> * < 1,892	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,892	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,892	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,892	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
16	6,928	8,0	9,504	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
17	6,928	8,5	10,098	x <sub>A</sub> * < 1,889	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,889	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,889	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,889	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
18	7,794	9,0	10,692	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
19	7,794	9,5	11,286	x <sub>A</sub> * < 1,887	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,887	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,887	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,887	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
20	8,660	10,0	11,879	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
21	8,660	10,5	12,473	x <sub>A</sub> * < 1,885	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,885	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,885	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,885	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
22	9,526	11,0	13,067	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
23	9,526	11,5	13,661	x <sub>A</sub> * < 1,883	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,883	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,883	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,883	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
24	10,392	12,0	14,255	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
25	10,392	12,5	14,849	x <sub>A</sub> * < 1,882	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,882	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,882	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,882	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *
26	11,258	13,0	15,443	x <sub>A</sub> * < 1,866	και x <sub>A</sub> * < x <sub>B</sub> *	ή x <sub>A</sub> * > 1,866	και x <sub>A</sub> * > x <sub>B</sub> *	x <sub>B</sub> * < 1,866	και x <sub>B</sub> * < x <sub>A</sub> *	ή x <sub>B</sub> * > 1,866	και x <sub>B</sub> * > x <sub>A</sub> *

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Πίνακας ΠΒ.1 Οι τιμές της απόστασης ανάμεσα στους κόκκους D

1/Κ	c	a	K \ d	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
100,0000	1,0000	0,5000	0,01	0,9926	0,9855	0,9785	0,9717	0,9651	0,9587	0,9524	0,9463	0,9403	0,9345
10,0000	0,9975	0,5013	0,1	0,9951	0,9878	0,9808	0,9740	0,9673	0,9609	0,9546	0,9484	0,9424	0,9366
5,0000	0,9899	0,5051	0,2	1,0026	0,9952	0,9880	0,9810	0,9742	0,9676	0,9612	0,9549	0,9488	0,9429
3,3333	0,9770	0,5118	0,3	1,0157	1,0080	1,0005	0,9933	0,9862	0,9794	0,9727	0,9662	0,9599	0,9537
2,5000	0,9583	0,5218	0,4	1,0352	1,0270	1,0192	1,0115	1,0041	0,9969	0,9899	0,9831	0,9764	0,9699
2,0000	0,9330	0,5359	0,5	1,0627	1,0539	1,0454	1,0372	1,0292	1,0215	1,0139	1,0066	0,9995	0,9926
1,6667	0,9000	0,5556	0,6	1,1010	1,0913	1,0819	1,0728	1,0639	1,0554	1,0471	1,0391	1,0313	1,0238
1,4286	0,8571	0,5834	0,7	1,1551	1,1439	1,1331	1,1226	1,1126	1,1029	1,0935	1,0844	1,0756	1,0671
1,2500	0,8000	0,6250	0,8	1,2357	1,2220	1,2089	1,1963	1,1843	1,1727	1,1615	1,1507	1,1403	1,1302
1,1111	0,7179	0,6964	0,9	1,3732	1,3545	1,3369	1,3201	1,3040	1,2888	1,2741	1,2602	1,2467	1,2338
1,0000	0,5000	1,0000	1,0	1,9434	1,8925	1,8466	1,8046	1,7661	1,7305	1,6975	1,6667	1,6379	1,6108

Πίνακας ΠΒ.2 Τιμή για το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.9)

1/Κ	c	a	K \ d	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
100,0000	1,0000	0,5000	0,01	0,1711	0,1693	0,1675	0,1658	0,1642	0,1626	0,1611	0,1596	0,1582	0,1568
10,0000	0,9975	0,5013	0,1	0,1723	0,1705	0,1688	0,1671	0,1654	0,1638	0,1623	0,1608	0,1593	0,1579
5,0000	0,9899	0,5051	0,2	0,1763	0,1744	0,1726	0,1708	0,1691	0,1675	0,1659	0,1643	0,1628	0,1614
3,3333	0,9770	0,5118	0,3	0,1833	0,1813	0,1794	0,1775	0,1757	0,1739	0,1722	0,1706	0,1690	0,1675
2,5000	0,9583	0,5218	0,4	0,1942	0,1920	0,1899	0,1878	0,1858	0,1839	0,1820	0,1803	0,1785	0,1768
2,0000	0,9330	0,5359	0,5	0,2103	0,2077	0,2053	0,2030	0,2007	0,1986	0,1965	0,1945	0,1925	0,1906
1,6667	0,9000	0,5556	0,6	0,2340	0,2310	0,2282	0,2254	0,2227	0,2202	0,2177	0,2153	0,2131	0,2109
1,4286	0,8571	0,5834	0,7	0,2706	0,2668	0,2632	0,2597	0,2564	0,2532	0,2501	0,2472	0,2443	0,2416
1,2500	0,8000	0,6250	0,8	0,3321	0,3268	0,3217	0,3169	0,3123	0,3080	0,3038	0,2998	0,2960	0,2924
1,1111	0,7179	0,6964	0,9	0,4576	0,4487	0,4402	0,4323	0,4249	0,4178	0,4112	0,4048	0,3988	0,3931
1,0000	0,5000	1,0000	1,0	1,3267	1,2771	1,2332	1,1940	1,1587	1,1266	1,0973	1,0703	1,0455	1,0224



Πίνακας ΠΒ.1 Οι τιμές της απόστασης ανάμεσα στους κόκκους D

1/K	c	a	K \ d	0,01	0,04	0,07	0,1	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25
1,0101	0,5705	0,8764	0,990	1,7141	1,6155	1,5357	1,4690	1,4120	1,3624	1,3185	1,2794	1,2441
1,0091	0,5669	0,8819	0,991	1,7245	1,6243	1,5433	1,4758	1,4181	1,3679	1,3236	1,2840	1,2484
1,0081	0,5631	0,8879	0,992	1,7357	1,6336	1,5514	1,4829	1,4245	1,3737	1,3289	1,2890	1,2530
1,0070	0,5591	0,8944	0,993	1,7477	1,6437	1,5601	1,4906	1,4314	1,3800	1,3347	1,2943	1,2580
1,0060	0,5547	0,9014	0,994	1,7609	1,6547	1,5696	1,4990	1,4389	1,3868	1,3409	1,3001	1,2633
1,0050	0,5499	0,9092	0,995	1,7754	1,6668	1,5801	1,5082	1,4471	1,3942	1,3477	1,3064	1,2692
1,0040	0,5447	0,9180	0,996	1,7917	1,6804	1,5917	1,5185	1,4563	1,4026	1,3554	1,3134	1,2757
1,0030	0,5387	0,9282	0,997	1,8107	1,6961	1,6052	1,5303	1,4669	1,4121	1,3641	1,3215	1,2832
1,0020	0,5316	0,9405	0,998	1,8337	1,7151	1,6214	1,5445	1,4796	1,4236	1,3746	1,3311	1,2922
1,0010	0,5224	0,9572	0,999	1,8645	1,7404	1,6431	1,5634	1,4964	1,4388	1,3885	1,3439	1,3040
1,0000	0,5000	1,0000	1,000	1,9434	1,8046	1,6975	1,6108	1,5385	1,4767	1,4229	1,3756	1,3333

Πίνακας ΠΒ.2 Τιμή για το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.9)

1/K	c	a	K \ d	0,01	0,04	0,07	0,1	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25
1,0101	0,5705	0,8764	0,990	0,9013	0,8281	0,7715	0,7261	0,6884	0,6565	0,6289	0,6048	0,5835
1,0091	0,5669	0,8819	0,991	0,9183	0,8429	0,7848	0,7382	0,6997	0,6670	0,6389	0,6143	0,5926
1,0081	0,5631	0,8879	0,992	0,9366	0,8589	0,7992	0,7514	0,7118	0,6784	0,6497	0,6245	0,6023
1,0070	0,5591	0,8944	0,993	0,9567	0,8764	0,8149	0,7657	0,7252	0,6909	0,6614	0,6357	0,6130
1,0060	0,5547	0,9014	0,994	0,9790	0,8958	0,8323	0,7816	0,7398	0,7046	0,6744	0,6480	0,6247
1,0050	0,5499	0,9092	0,995	1,0040	0,9175	0,8517	0,7993	0,7562	0,7200	0,6888	0,6617	0,6378
1,0040	0,5447	0,9180	0,996	1,0327	0,9424	0,8739	0,8196	0,7750	0,7375	0,7054	0,6774	0,6527
1,0030	0,5387	0,9282	0,997	1,0667	0,9717	0,9001	0,8434	0,7970	0,7581	0,7248	0,6958	0,6703
1,0020	0,5316	0,9405	0,998	1,1089	1,0081	0,9325	0,8729	0,8243	0,7836	0,7488	0,7185	0,6919
1,0010	0,5224	0,9572	0,999	1,1674	1,0583	0,9772	0,9135	0,8618	0,8185	0,7817	0,7497	0,7216
1,0000	0,5000	1,0000	1,000	1,3267	1,1940	1,0973	1,0224	0,9621	0,9120	0,8696	0,8329	0,8009

# Βιβλιογραφία

- T.T. Loo (1958), "Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact", *J. Appl. Mech*, vol. 25, pp. 122-124.
- N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, translated by J. R. M. Radock, P. Noordhoof Ltd, Groningen-Holland, pp. 324-328.
- H. Herz (1896), *Contact of Elastic Solids*, English translation in *Miscellaneous Papers*, Macmillan Company, London, England, pp. 146-183.
- G. M. L. Gladwell, "On some unbonded contact problems in plane elastic theory", *J. Appl. Mech*, vol. 43, 1976, pp.263-267.
- N. A. Fleck, L. T. Kuhn and R. M. McMeeking (1992), "Yielding of metal power bonded by isolated contacts", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 40, pp. 1139-1162.
- B.Storakers, N. A. Fleck and R. M. McMeeking (1999), "Viscoplastic compaction of composite powders", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 47, pp. 1139-1162.
- G. Hondros (1959), "The evaluation of Poisson's ration and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete", *Aust. J. Appl. Sci.*, vol. 10, pp. 243-264.
- A. A. Helle, K. E. Easterling and M. F. Ashby (1985), "Hot-isostatic pressing diagrams: New developments", *Acta Metall.*, vol. 33, pp. 2163-2174.
- I. Shridhar, N. A. Fleck and A. R. Akisanya, "Cold compaction of an array of cylindrical powder particles", *Int. J. of Mechanical Sciences*, vol.43, 2001, pp. 715-742.
- J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi and S. Nemat-Nasser (1981), "A micromechanical description of granular material behavior", *J. Appl. Mech*, vol. 48, pp. 339-344.
- E.Sternberg and M. J. Turteltaub (1972), "Compression of an elastic roller between two rigid plates", *Muskhelishvili Anniversary Volume*, Moscow, pp. 495-515.
- Andrzej Niemunis and Marcin Cudny (1998), "On hyperelasticity for clays", *Computers and Geotechnics*, vol. 23, pp.221-236.
- G. Gudehus(1996), "Constitutive relations for granulate-liquid mixtures with a pectic constituent", *Mechanics of Materials*, vol.22, 1996, pp.93-103.
- H. Yoshizawa, Y. L. Chen and J. Israelachvili(1993), "Fundamental mechanisms of interfacial friction, relation between adhesion and friction", *J. Physical Chemistry*, vol. 96, pp. 4128-4140.

Μ. Χ. Γιαννακούρου, Π. Σ. Γεωργιάδου, Α. Γ. Παπαθανασίου και Α. Γ. Μπουντουβής (1997), «Ρύθμιση σχήματος και ευστάθειας παγιδευμένων σταγόνων», Πρακτικά 1<sup>ου</sup> Πανελληνίου Επιστημονικού Συνεδρίου Χημικής Μηχανικής, σελ 813-818.

S. Yu and P. Dakoulas(1993), “General stress-dependent elastic moduli for cross-anisotropic soils”, Journal of Geotechnical Engineering, vol. 119.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000097063