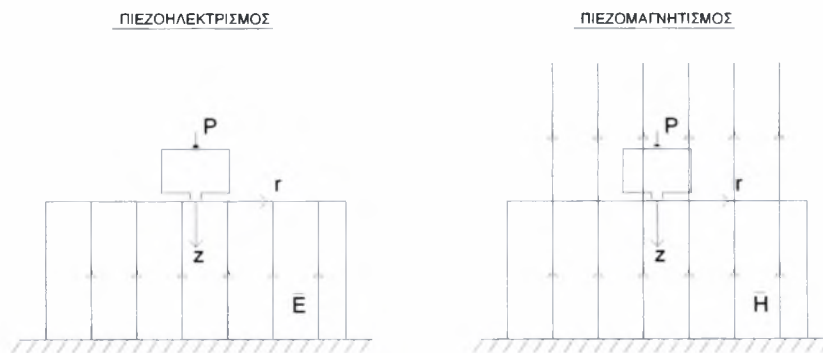




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ ΣΤΑ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



Τριμελής Επιτροπή

Αναπληρωτής Καθηγητής **Α. Γιαννακόπουλος** (Επιβλέπων)

Καθηγητής **Ν. Αράβας**

Επίκουρος Καθηγητής **Π. Παπανικολάου**

ΒΟΛΟΣ ΙΟΥΛΙΟΣ 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4839/1
Ημερ. Εισ.: 09-10-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2006
ΠΑΡ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο I: Εισαγωγή	σελ.3
Κεφάλαιο II: Το πρόβλημα επαφής στα πιεζοηλεκτρικά υλικά	σελ.8
Κεφάλαιο III: Το πρόβλημα επαφής στα πιεζομαγνητικά υλικά	σελ.23
Κεφάλαιο IV: Συμπεράσματα	σελ.43
Βιβλιογραφία	σελ.44
Παράρτημα I: Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel	σελ.47
Παράρτημα II: “The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials”, A. E. Giannakopoulos and A. Z. Parmaklis	σελ.49
Παράρτημα III: Τυπικά δείγματα των αναλυτικών υπολογισμών με το πρόγραμμα Mathematica 4.1	σελ.81

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Εισαγωγή

Γενικά

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται αναλυτικές λύσεις του προβλήματος της επαφής στα πιεζοηλεκτρικά και πιεζομαγνητικά υλικά. Επιλύεται το πρόβλημα της αξονοσυμμετρικής διείδυσης, ενός επίπεδου άκαμπτου κυκλικού διειδυτή ακτίνας a , σε έναν ελαστικό ημιάπειρο χώρο από πιεζοηλεκτρικό ή πιεζομαγνητικό υλικό, υπό την απουσία τριβής και προσκόλλησης (adhesion).

Το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού ή του πιεζομαγνητισμού είναι φαινόμενο συζευγμένων πεδίων. Δηλαδή οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού επηρεάζονται από τις ηλεκτρικές ή τις μαγνητικές ιδιότητες του ίδιου υλικού, και το αντίστροφο. Με άλλα λόγια μεταβολή στην δύναμη διείδυσης δP προκαλεί μεταβολή στην «ηλεκτρική μετατόπιση» (electric displacement) δD ή στην «πυκνότητα μαγνητικής επαγωγής» (magnetic flux density) δB αντίστοιχα, και το αντίστροφο. Επίσης αποδεικνύεται πως το γεγονός της αλληλεπίδρασης έχει σημαντική επίδραση τόσο στην δύναμη διείδυσης αλλά στο «δημιουργούμενο» ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο.

Το φαινόμενο αυτό της αλληλεπίδρασης είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον σε εφαρμογές της μικρο και νάνο κλίμακας. Πιο συγκεκριμένα τα δύο είδη φαινομένων παρατηρούνται σε πολλές τεχνολογικά σημαντικές εφαρμογές όπως κεφαλές εγγραφής σκληρού δίσκου, αισθητήρες, μικρομηχανές, μικρο-ηλεκτρο-μηχανολογικά συστήματα (MEMS), ατομικά μικροσκοπία, υδρόφωνα (sonars), κυψέλες φορτίσεως, δονητές, πυροκροτητές κ.α.

Περιγραφή του προβλήματος

Πρόκειται για ένα πρόβλημα διείδυσης όπου το υλικό προσομοιώνεται σαν γραμμικά ελαστικό. Σημαντικές παράμετροι είναι η ηλεκτρομαγνητική φύση και η ακαμψία του διειδυτή όπως και η αναλογία της διεπιφάνειας του με την επιφάνεια του υλικού υπό διείδυση. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ο διειδυτής θα πρέπει να είναι άκαμπος και από τέτοιο υλικό ώστε να μην αλληλεπιδρά με το πιεζοηλεκτρικό ή πιεζομαγνητικό υλικό για την αποφυγή αλλοίωσης των αποτελεσμάτων. Ακόμη για να εξασφαλίζεται η συνθήκη του ημιάπειρου χώρου, θα πρέπει η επιφάνεια επαφής να είναι σημαντικά μικρότερη από την επιφάνεια του υλικού. Οι παραδοχές αυτές είναι απαραίτητες διότι σε διαφορετική περίπτωση έχουμε ένα διαφορετικό πρόβλημα και οι κλειστές λύσεις που προκύπτουν από την ανάλυση δεν ισχύουν.

Η πορεία επίλυσης ακολουθεί τον κλασικό τρόπο επίλυσης προβλημάτων μηχανικής. Χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας του υπό διείδυση σώματος, οι καταστατικές εξισώσεις αυτού και τέλος απαιτείται ο προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτούνται επιπλέον και δύο ακόμη εξισώσεις. Για την περίπτωση του πιεζοηλεκτρισμού η ηλεκτροστατική εξίσωση του Maxwell, ενώ για τον πιεζομαγνητισμό η μαγνητοστατική εξίσωση του Maxwell. Λόγω της ιδιαίτερα μεγάλης μαθηματικής πολυπλοκότητας που αποκτά το πρόβλημα, επιλέχθηκε η αξονοσυμμετρία του προβλήματος που με τις ιδιότητές της διευκόλυνε την επίλυση.

Χρησιμοποιώντας τις τάσεις (σ_r, σ_z , κλπ.), οι εξισώσεις ισορροπίας για το πιεζοηλεκτρικό ή πιεζομαγνητικό σώμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, z\}$ είναι:

$$\begin{aligned} & \text{Διεύθυνση: } r \\ & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Διεύθυνση: } \theta$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + F_{\theta} = 0$$

$$\text{Διεύθυνση: } z$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z = 0$$

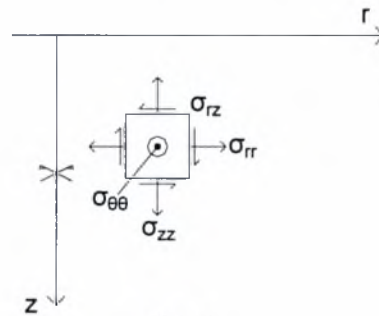
Η αξονοσυμμετρία του προβλήματος όμως επιβάλλει τα ακόλουθα: $\frac{\partial(\)}{\partial \theta} = 0$ & οι τάσεις $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$, και σε συνδυασμό με την απουσία των μαζικών και αδρανειακών δυνάμεων (F_r, F_{θ}, F_z) οι εξισώσεις ισορροπίας για το πιεζοηλεκτρικό ή πιεζομαγνητικό σώμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, z\}$ μετατρέπονται στις ακόλουθες:

$$\text{Διεύθυνση: } r$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\text{Διεύθυνση: } z$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$



Σχ. 1

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, εκτός από τις δύο αυτές εξισώσεις ισορροπίας απαιτείται ακόμη μία εξίσωση. Για τον πιεζοηλεκτρισμό η ηλεκτροστατική εξίσωση του Maxwell και για τον πιεζομαγνητισμό η μαγνητοστατική εξίσωση του Maxwell οι οποίες είναι:

Πιεζοηλεκτρισμός

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

(υπό την απουσία ελεύθερου ηλεκτρικού φορτίου)

Πιεζομαγνητισμός

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Επιπλέον έχουμε και ότι:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

(απουσία ρευμάτων)

Στις περιπτώσεις των συζευγμένων πεδίων οι καταστατικές εξισώσεις περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ τάσεων-τροπών-πεδίων όπως φαίνεται ακολούθως:

Πιεζοηλεκτρισμός

$$\{\sigma\} = [C^E] \cdot \{\varepsilon\} - [e]^T \cdot \{E\}$$

$$\{D\} = [e] \cdot \{\varepsilon\} + [\varepsilon^E] \cdot \{E\}$$

Πιεζομαγνητισμός

$$\{\sigma\} = [C^H] \cdot \{\varepsilon\} - [e]^T \cdot \{H\}$$

$$\{B\} = [e] \cdot \{\varepsilon\} + [\mu^E] \cdot \{H\}$$

όπου $\{\sigma\}$ είναι οι τάσεις, $\{\varepsilon\}$ οι τροπές, $\{E\}$ το ηλεκτρικό πεδίο, $\{D\}$ η «ηλεκτρική μετατόπιση», $\{H\}$ το μαγνητικό πεδίο, $\{B\}$ η «πυκνότητα μαγνητικής επαγωγής»,

$[C^E]$ το μητρώο ελαστικών σταθερών (υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E), $[C^H]$ το μητρώο ελαστικών σταθερών (υπό σταθερό μαγνητικό πεδίο H), $[e]$ το μητρώο πιεζοηλεκτρικών ή πιεζομαγνητικών σταθερών, $[\epsilon^E]$ το μητρώο διηλεκτρικών σταθερών (υπό σταθερή τροπή ϵ) και $[\mu^E]$ το μητρώο σταθερών μαγνητικής διαπερατότητας (υπό σταθερή τροπή ϵ).

Τα μητρώα $[C^E]$ και $[C^H]$ είναι 6×6 , τα $[\epsilon^E]$ και $[\mu^E]$ είναι 3×3 και το $[e]$ είναι 3×6 , που σημαίνει 63 σταθερές για κάθε περίπτωση. Η αξονοσυμμετρία όμως επιβάλλει ότι υπάρχουν μόνο ορισμένες σταθερές και ότι οι υπόλοιπες είναι μηδέν με αποτέλεσμα ο αριθμός των απαιτούμενων σταθερών του υλικού ανά περίπτωση να μειωθεί στις 10. Επιπλέον πρέπει να αναφερθεί ότι όλα τα προαναφερθέντα μητρώα εξαρτώνται σε μια γενικότερη βάση από ένα προϋπάρχον κυρίαρχο ηλεκτρικό πεδίο \tilde{E}_0 ή από ένα κυρίαρχο μαγνητικό πεδίο \tilde{H}_0 . Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}_0 + \delta\tilde{E}$ και $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \delta\tilde{H}$.

Πιεζοηλεκτρισμός

Πιεζομαγνητισμός

$C_{11}^E = C_{22}^E$	$e_{31} = e_{32}$	$\epsilon_{11}^E = \epsilon_{22}^E$	$C_{11}^H = C_{22}^H$	$e_{31} = e_{32}$	$\mu_{11}^E = \mu_{22}^E$
C_{33}^E	e_{33}	ϵ_{33}^E	C_{33}^H	e_{33}	μ_{33}^E
C_{12}^E	$e_{15} = e_{24}$		C_{12}^H	$e_{15} = e_{24}$	
$C_{13}^E = C_{23}^E$			$C_{13}^H = C_{23}^H$		
$C_{44}^E = C_{55}^E$			$C_{44}^H = C_{55}^H$		
$C_{66}^E = 2(C_{11}^E - C_{12}^E)$			$C_{66}^H = 2(C_{11}^H - C_{12}^H)$		

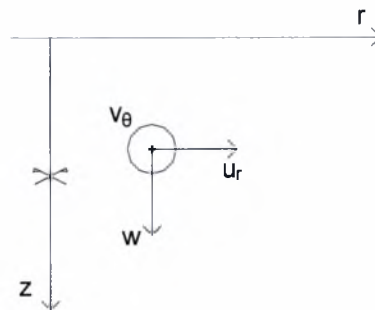
Στόχος είναι να εκφραστούν οι τάσεις συναρτήσει των θεμελιωδών αγνώστων που είναι οι μετατοπίσεις και τα δυναμικά. Αυτό θα πραγματοποιηθεί μέσω των καταστατικών εξισώσεων αφού πρώτα εκφραστούν οι τροπές και τα πεδία συναρτήσει των μετατοπίσεων και των δυναμικών αντίστοιχα. Για τις κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, z\}$ οι τροπές εκφράζονται ως ακολούθως (γεωμετρικές σχέσεις):

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \epsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_{rz} = \epsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$



Σχ. 2

όπου u_r, v_θ & w η ακτινική, η εφαπτομενική και η κατακόρυφη μετατόπιση αντίστοιχα.

Λόγω όμως της αξονοσυμμετρίας του προβλήματος που επιβάλλει ότι $\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0$, οι τροπές που είναι απαραίτητες στην επίλυση θα είναι οι ακόλουθες:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συναρτήσει του αντίστοιχου δυναμικού του μπορεί να εκφραστεί ως:

Πιεζοηλεκτρισμός

$$\mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi$$

Πιεζομαγνητισμός

$$\mathbf{H} = -\nabla \cdot \Phi_m$$

$$\text{όπου } \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Έτσι αντικαθιστώντας τις μετασχηματισμένες σχέσεις των καταστατικών εξισώσεων (με τις θεμελιώδεις μεταβλητές) στις εξισώσεις ισορροπίας και του Maxwell προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα δευτέρας τάξης τριών διαφορικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, τις τρεις θεμελιώδεις μεταβλητές (u_r, w, ϕ) ή (u_r, w, Φ_m). Για την επίλυση του πολύπλοκου αυτού συστήματος θα χρησιμοποιηθούν οι μετασχηματισμοί Hankel (οι ιδιότητες των οποίων παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα I) όπου και θα το απλοποιήσουν. Η λύση του συστήματος σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες θα δώσουν την τελική μορφή των θεμελιωδών μεταβλητών από όπου στη συνέχεια προκύπτουν όλες οι επιθυμητές ποσότητες.

Πιεζοηλεκτρισμός-Πιεζομαγνητισμός

Όπως παρατηρήθηκε, ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος επαφής σε υλικά των δύο αυτών κατηγοριών είναι πανομοιότυπος. Οι διαφορές στους τύπους και στα μητρώα σταθερών παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω:

Πιεζοηλεκτρισμός		Πιεζομαγνητισμός
ε_{ij}	\leftrightarrow	μ_{ij}
ϕ	\leftrightarrow	Φ_m
\mathbf{E}	\leftrightarrow	\mathbf{H}
\mathbf{D}	\leftrightarrow	\mathbf{B}
Q	\leftrightarrow	Φ

Τα δύο αυτά φαινόμενα έχουν πολλές ομοιότητες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε παρόμοιες εφαρμογές. Σε πολλές είναι πιο εύχρηστος ο

πιεζοηλεκτρισμός και σε άλλες ο πιεζομαγνητισμός. Ωστόσο όμως υπάρχουν και πολλές εφαρμογές όπου μπορεί να εφαρμοστεί μόνο το ένα φαινόμενο. Για παράδειγμα το φαινόμενο του πιεζομαγνητισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της μαγνήτισης ενός υλικού (πιεζομαγνητικού).

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα γίνει παρουσίαση την ανάλυσης για τα δύο φαινόμενα ξεχωριστά και πολύ αναλυτικότερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Το πρόβλημα επαφής στα πιεζοηλεκτρικά υλικά

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια γενική θεωρία για το πρόβλημα της αξονοσυμμετρικής διείσδυσης ενός άκαμπτου επίπεδου κυκλικού διεισδυτή σε πιεζοηλεκτρικό υλικό, μέσα στη πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας (Σχ.1, τα σχήματα είναι στο τέλος του κεφαλαίου αυτού). Παρουσιάζονται αναλυτικοί τύποι για την δύναμη διείσδυσης P και το παραγόμενο συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q , καθώς και για όλες τις άλλες παραμέτρους που είναι απαραίτητες για την περιγραφή του προβλήματος. Επίσης παρουσιάζονται και αριθμητικά αποτελέσματα των κλειστών αυτών τύπων για συγκεκριμένα πιεζοηλεκτρικά υλικά, τα οποία θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα των ίδιων υλικών και να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα των κλειστών αυτών εξισώσεων.

Το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού περιγράφει την αλληλεπίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού με τις ηλεκτρικές του. Η μεταβολή στην τάση προκαλεί μεταβολή στο ηλεκτρικό πεδίο και αντίστροφα. Επιπρόσθετα η σύζευξη αυτών των πεδίων έχει σημαντική επίδραση τόσο στην δύναμη διείσδυσης P όσο και στο ηλεκτρικό φορτίο Q . Ο πιεζοηλεκτρισμός οφείλεται κυρίως στην πιεζοηλεκτρική επίδραση των ατομικών κρυστάλλων του στοιχείου και ένα μικρό ποσοστό στην κίνηση των συνοριακών «τοιχών» των κρυστάλλων. Πρόκειται για ένα σχετικά όχι πολύ γνωστό φαινόμενο και βρίσκει εφαρμογές στην μικρο και νάνο κλίμακα, ιδιαίτερα σε μικρο-ηλεκτρο-μηχανολογικά συστήματα (MEMS) και μικροωθητήρες (micro actuators). Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά χαρακτηρίζονται και ως «έξυπνα υλικά» λόγω αυτής της σύζευξης των πεδίων. Τέσσερα τεχνολογικώς σημαντικά πιεζοηλεκτρικά υλικά των οποίων όλες οι σταθερές είναι γνωστές και στα οποία εφαρμόστηκαν οι αναλυτικοί τύποι είναι τα PZT-4, PZT-5A, BaTiO_3 και $(\text{Ba}_{0.917}\text{Ca}_{0.083})\text{TiO}_3$. Η σύζευξη αυτή των ελαστικών και των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των υλικών εκφράζεται καθαρά και μόνο από τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές. Σε περίπτωση που αυτές απουσιάζουν εκμηδενίζεται το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού. Απώλεια της πιεζοηλεκτρικής ιδιότητας επιτυγχάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Για τον λόγο αυτό είναι πολύ σημαντικό όταν δίνονται οι σταθερές ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού να δίδεται επίσης και η θερμοκρασία Currie του υλικού. Η θερμοκρασία αυτή ουσιαστικά δηλώνει την ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία το υλικό παύει να είναι πιεζοηλεκτρικό.

Η εξασθένιση των πιεζοηλεκτρικών σταθερών από την αύξηση της θερμοκρασίας μπορεί πολύ εύκολα να διαπιστωθεί από το απλό πρόβλημα της διείσδυσης και μάλιστα χωρίς να προκαλεί την καταστροφή του υλικού. Συνεπώς προκύπτει ότι η θεωρία που αναλύεται σε αυτό το κεφάλαιο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν ένας μη καταστροφικός ποιοτικός έλεγχος των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Βασικές εξισώσεις του αξονοσυμμετρικού πιεζοηλεκτρικού σώματος

Οι εξισώσεις ισορροπίας υπό την απουσία μαζικών και αδρανειακών δυνάμεων για το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα διείσδυσης σε πιεζοηλεκτρικό υλικό, στις κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, z\}$ είναι:

$$\begin{aligned} & \text{Διεύθυνση: } r \\ & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Διεύθυνση: } z$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (2)$$

και η ηλεκτροστατική εξίσωση του Maxwell:

Ηλεκτροστατική εξίσωση του Maxwell

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

όπου σ_{ij} και D_i είναι η τάση και η «ηλεκτρική μετατόπιση» αντίστοιχα. Η εξίσωση (3) ισχύει εφόσον δεν υπάρχει πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου.

Οι καταστατικές εξισώσεις για γραμμικό, εγκάρσια ισότροπο πιεζοηλεκτρισμό παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα, IEEE standard 319 (1990):

$$\begin{Bmatrix} \delta\sigma_{rr} \\ \delta\sigma_{\theta\theta} \\ \delta\sigma_{zz} \\ \delta\sigma_{rz} \\ \delta D_r \\ \delta D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^H & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & -\epsilon_{11}^e & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & -\epsilon_{33}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_{rr} \\ \delta\epsilon_{\theta\theta} \\ \delta\epsilon_{zz} \\ \delta\gamma_{rz} \\ -\delta E_r \\ -\delta E_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

όπου C_{ij}^E (υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\{E_r, E_z\}$), e_{ij} και ϵ_{ij}^e (υπό σταθερή τροπή ϵ) είναι οι ελαστικές, πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές σταθερές αντίστοιχα. Πρέπει να σημειωθεί ότι στις καταστατικές εξισώσεις χρησιμοποιήθηκε η μεταβολή των μεγεθών, που συμβολίζεται με το “δ”, αντί των ίδιων των μεγεθών. Οι ελαστικές και οι διηλεκτρικές σταθερές έχουν πάντα θετικό πρόσημο. Αντίθετα όμως οι πιεζοηλεκτρικές σταθερές, που εκφράζουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των ελαστικών και των ηλεκτρικών ιδιοτήτων του υλικού, μπορούν να έχουν είτε θετικό πρόσημο είτε αρνητικό.

Θεωρείται ότι η διεύθυνση πόλωσης του υλικού είναι η διεύθυνση z (κατακόρυφη διεύθυνση), ότι το υλικό δεν έχει φορτία και ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Ο τροπές και τα ηλεκτρικά πεδία, στις κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, z\}$, δίδονται από τις γεωμετρικές εξισώσεις και τις εξισώσεις του Gauss αντίστοιχα, ως ακολούθως:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5)$$

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

όπου u_r, w και φ είναι η ακτινική μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση και το ηλεκτρικό δυναμικό αντίστοιχα. Η ύπαρξη του ηλεκτρικού δυναμικού φ απαιτεί την ικανοποίηση της σχέσης $\nabla \times \vec{E} = 0$, Jackson (1962).

Αντικαθιστώντας αρχικά τις εξισώσεις (5) στις εξισώσεις (4) και στη συνέχεια τις μετασχηματισμένες εξισώσεις (4) στις (1),(2) και (3), θα σχηματιστούν τρεις διαφορικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους, τις τρεις θεμελιώδεις μεταβλητές $\{u_r, w, \varphi\}$, οι οποίες είναι:

$$C_{11}^E \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + C_{44}^E \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (C_{13}^E + C_{44}^E) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = 0$$

$$(C_{13}^E + C_{44}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + C_{44}^E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + C_{33}^E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_{15} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$(e_{15} + e_{31}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon_{11} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξης και ως προς r και ως προς z . Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Hankel θα μετατραπεί το σύστημα σε γραμμικό, με διαφορικές εξισώσεις ως προς μία μόνο μεταβλητή, ως προς z , γεγονός που κάνει την επίλυση του συστήματος κατά πολύ ευκολότερη. Η γενική μορφή των μετασχηματισμών Hankel ορίζεται ως εξής:

$$\bar{F}(\xi, z) = \int_0^{\infty} F(r, z) r J_\nu(\xi r) dr$$

$$F(r, z) = \int_0^{\infty} \bar{F}(\xi, z) \xi J_\nu(\xi r) d\xi$$

όπου J_ν είναι το πρώτο είδος των συναρτήσεων Bessel τάξεως ν . Οι ιδιότητες των μετασχηματισμών Hankel παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα I. Το μετασχηματισμένο σύστημα έχει τη μορφή:

$$C_{44}^E \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2} - C_{11}^E \xi^2 \bar{u}_r - (C_{13}^E + C_{44}^E) \xi \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - (e_{15} + e_{31}) \xi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = 0$$

$$(C_{13}^E + C_{44}^E) \xi \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + C_{33}^E \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - C_{44}^E \xi^2 \bar{w} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - e_{15} \xi^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (8)$$

$$(e_{15} + e_{31}) \xi \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - e_{15} \xi^2 \bar{w} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \varepsilon_{11} \xi^2 \bar{\varphi} = 0$$

όπου οι μετασχηματισμένες θεμελιώδεις μεταβλητές ισούνται με:

$$\bar{u}_r(\xi, z) = \int_0^{\infty} u_r(r, z) r J_1(\xi r) dr$$

$$\bar{w}(\xi, z) = \int_0^{\infty} w(r, z) r J_0(\xi r) dr$$

$$\bar{\varphi}(\xi, z) = \int_0^{\infty} \varphi(r, z) r J_0(\xi r) dr$$

Για έναν ημιάπειρο χώρο ($z \geq 0$), η συνθήκη στο άπειρο καθορίζει την μορφή των λύσεων του συστήματος. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται είναι ότι στο άπειρο θα πρέπει οι θεμελιώδεις μεταβλητές να τείνουν στο μηδέν, δηλαδή όταν $\sqrt{z^2 + r^2} \rightarrow \infty$ τα $u_r, w, \varphi \rightarrow 0$. Έτσι οι λύσεις θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r(\xi, z) &= \hat{u}_r(\xi) e^{-\kappa \xi z} \\ \bar{w}(\xi, z) &= \hat{w}(\xi) e^{-\kappa \xi z} \\ \bar{\varphi}(\xi, z) &= \hat{\varphi}(\xi) e^{-\kappa \xi z}\end{aligned}\quad (10)$$

επιπλέον όμως η συνθήκη στο άπειρο επιβάλλει ότι η σταθερά κ μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός αλλά **όχι φανταστικός**.

Αντικαθιστώντας τις ιδιοσυναρτήσεις (10) στο μετασχηματισμένο σύστημα (8), το σύστημα μπορεί να μετατραπεί ως ακολούθως:

$$[a_{ij}] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_r(\xi) \\ \hat{w}(\xi) \\ \hat{\varphi}(\xi) \end{Bmatrix} = \{0\}\quad (11)$$

όπου

$$\begin{aligned}a_{11} &= C_{44}^E \kappa^2 - C_{11}^E, \quad a_{12} = -a_{21} = (C_{13}^E + C_{44}^E) \kappa, \quad a_{13} = -a_{31} = (e_{31} + e_{15}) \kappa \\ a_{22} &= C_{33}^E \kappa^2 - C_{44}^E, \quad a_{23} = a_{32} = e_{33} \kappa^2 - e_{15}, \quad a_{33} = e_{11}^E - e_{33}^E \kappa^2.\end{aligned}\quad (12)$$

Για να μην έχει τετριμμένη λύση το σύστημα (11) θα πρέπει $\det[a_{ij}] = 0$. Η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση 6^{ov} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές καθορίζει τις τιμές της σταθεράς κ και μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση 3^{ov} βαθμού ως προς κ^2 . Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι οι σταθερές του υλικού παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της ανάλυσης διότι σε συνδυασμό με τη συνθήκη στο άπειρο καθορίζουν την μορφή των 3 ριζών ως προς κ^2 . Κατά συνέπεια από τις ρίζες γίνονται δεκτές μόνο αυτές με θετικό πραγματικό μέρος ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη στο άπειρο.

Τα δεδομένα και η εμπειρία μέχρι σήμερα των πιεζοηλεκτρικών υλικών δείχνουν ότι οι σταθερές των υλικών είναι πάντα σε τέτοια αναλογία που δίνουν πάντα 2 πραγματικές ρίζες $\pm \kappa_1$ (1 διπλή πραγματική ρίζα του κ^2) και 4 μιγαδικές ρίζες $\pm \delta \pm i\omega$ (2 διπλές μιγαδικές ρίζες του κ^2).

Από το σύστημα προκύπτει η ακόλουθη σχέση η οποία καθορίζει και την τελική μορφή των μετασχηματισμένων λύσεων.

$$A_i(\xi) = \frac{\hat{u}_r(\xi)}{\alpha} = \frac{\hat{w}(\xi)}{\beta} = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\gamma}\quad (13)$$

όπου $\alpha = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$, $\beta = -a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}$, $\gamma = a_{11} a_{22} + a_{12}^2$.

Η γενική λύση του συστήματος των μετασχηματισμένων διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει να είναι ο γραμμικός συνδυασμός όλων των αποδεκτών λύσεων. Η τελική μορφή των μετασχηματισμένων λύσεων συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_r(\xi, z) \\ \bar{w}(\xi, z) \\ \bar{\varphi}(\xi, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \operatorname{Re} \left\{ \begin{Bmatrix} \alpha_{21} + i \alpha_{22} \\ \beta_{21} + i \beta_{22} \\ \gamma_{21} + i \gamma_{22} \end{Bmatrix} [A_2(\xi) + i A_3(\xi)] e^{-(\delta + i\omega)\xi z} \right\},$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha(k_1) & \alpha_{21} + i \alpha_{22} &= \alpha(\delta + i\omega) \\ \text{όπου } \beta_1 &= \beta(k_1), & \beta_{21} + i \beta_{22} &= \beta(\delta + i\omega) \\ \gamma_1 &= \gamma(k_1) & \gamma_{21} + i \gamma_{22} &= \gamma(\delta + i\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις $A_i(\xi)$ θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες ολοκληρώνοντας έτσι την λύση. Εφαρμόζοντας τώρα ξανά τους μετασχηματισμούς Hankel (αντίστροφη διαδικασία), επανέρχονται οι θεμελιώδεις μεταβλητές ξανά στον αρχικό χώρο λύσεων και παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω:

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \int_0^\infty \left[\alpha_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\alpha_{21} A_2(\xi) - \alpha_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_{22} A_2(\xi) + \alpha_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_1(\xi r) d\xi \\ w(r, z) &= \int_0^\infty \left[\beta_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\beta_{21} A_2(\xi) - \beta_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\ &\quad \left. + (\beta_{22} A_2(\xi) + \beta_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (15) \\ \varphi(r, z) &= \int_0^\infty \left[\gamma_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\gamma_{21} A_2(\xi) - \gamma_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_{22} A_2(\xi) + \gamma_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αρχικά τις σχέσεις (15) στις σχέσεις (5) και μετά στις σχέσεις (4) προκύπτουν οι γενικές λύσεις των ζητούμενων μεγεθών, όπου στην επιφάνεια ($z = 0$) γίνονται:

$$\begin{aligned} u_r(r, 0) &= \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) + \alpha_{21} A_2(\xi) - \alpha_{22} A_3(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \\ w(r, 0) &= \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) + \beta_{21} A_2(\xi) - \beta_{22} A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\ \varphi(r, 0) &= \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) + \gamma_{21} A_2(\xi) - \gamma_{22} A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\ \delta \sigma_{rz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_1 A_1(\xi) + m_2 A_2(\xi) + m_3 A_3(\xi)] \xi J_1(\xi r) d\xi \\ \delta \sigma_{zz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_4 A_1(\xi) + m_5 A_2(\xi) + m_6 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \\ \delta D_z(r, 0) &= \int_0^\infty [m_7 A_1(\xi) + m_8 A_2(\xi) + m_9 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= -C_{44}^E(\alpha_1 k_1 + \beta_1) - e_{15} \gamma_1 \\
m_2 &= -C_{44}^E(\delta \alpha_{21} - \omega \alpha_{22} + \beta_{21}) - e_{15} \gamma_{21} \\
m_3 &= C_{44}^E(\delta \alpha_{22} + \omega \alpha_{21} + \beta_{22}) + e_{15} \gamma_{22} \\
m_4 &= C_{13}^E \alpha_1 - k_1 (C_{33}^E \beta_1 + e_{33} \gamma_1) \\
\text{όπου } m_5 &= C_{13}^E \alpha_{21} - \delta (C_{33}^E \beta_{21} + e_{33} \gamma_{21}) + \omega (C_{33}^E \beta_{22} + e_{33} \gamma_{22}) \\
m_6 &= -C_{13}^E \alpha_{22} + \delta (C_{33}^E \beta_{22} + e_{33} \gamma_{22}) + \omega (C_{33}^E \beta_{21} + e_{33} \gamma_{21}) \\
m_7 &= e_{31} \alpha_1 - k_1 (e_{33} \beta_1 - \varepsilon_{33}^E \gamma_1) \\
m_8 &= e_{31} \alpha_{21} - \delta (e_{33} \beta_{21} - \varepsilon_{33}^E \gamma_{21}) + \omega (e_{33} \beta_{22} - \varepsilon_{33}^E \gamma_{22}) \\
m_9 &= -e_{31} \alpha_{22} + \delta (e_{33} \beta_{22} - \varepsilon_{33}^E \gamma_{22}) + \omega (e_{33} \beta_{21} - \varepsilon_{33}^E \gamma_{21})
\end{aligned} \tag{17}$$

Η τελική μορφή των τύπων θα προκύψει μετά και από τον προσδιορισμό των άγνωστων συναρτήσεων $A_i(\xi)$ μέσα από τις συνοριακές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες διακρίνονται σε δύο είδη, τις μηχανικές και τις ηλεκτρικές, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν ξεχωριστά και τα αποτελέσματά τους να συνδυαστούν. Και στους δύο τύπους συνοριακών συνθηκών έχουμε διαχωρισμό της επιφάνειας σε δύο μέρη, στην εντός διείσδυσης περιοχή ($0 \leq r \leq a$) και στην εκτός διείσδυσης περιοχή ($r > a$), όπου a είναι η ακτίνα του επίπεδου κυκλικού διείσδυτή (βλέπε Σχήμα 1). Πρέπει να σημειωθεί ότι εντός της κάθε περιοχής μπορεί να περιγραφεί μόνο ένα από τα ενεργειακά συζυγή μεγέθη και κατά συνέπεια στην συμπληρωματική περιοχή περιγράφεται το «συζυγές» μέγεθος της πρώτης. Τα συζυγή μεγέθη είναι τα $w - \delta\sigma_{zz}$ για τις μηχανικές συνοριακές συνθήκες και τα $\phi - \delta D_z$ για τις ηλεκτρικές. Συνεπώς δεν μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονη περιγραφή στην ίδια περιοχή το w με το $\delta\sigma_{zz}$ και το ϕ με το δD_z . Τέλος προς αποφυγή παρερμηνεύσεων θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες περιγράφουν τις μεταβολές των μεγεθών. Αναλυτικά οι συνοριακές συνθήκες είναι:

Μηχανικές συνοριακές συνθήκες για κυκλικό, επίπεδο και άκαμπτο διείσδυτή ακτίνας a :

$$\begin{aligned}
w(r,0) &= h \quad 0 \leq r \leq a \quad (h \text{ είναι το βάθος διείσδυσης}) \\
\delta\sigma_{zz}(r,0) &= 0 \quad r > a \\
\delta\sigma_{rz}(r,0) &= 0 \quad r \geq 0 \quad (\text{απουσία τριβής})
\end{aligned} \tag{18}$$

Ηλεκτρικές συνοριακές συνθήκες για κυκλικό, επίπεδο και άκαμπτο διείσδυτή ακτίνας a :

$$\begin{aligned}
\phi(r,0) &= \phi^0 \quad 0 \leq r \leq a \\
\delta D_z(r,0) &= 0 \quad r > a
\end{aligned} \tag{19}$$

Η σταθερά ϕ^0 ισούται με μηδέν, διότι εκφράζει την μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού το οποίο είναι πάντα σταθερό. Ωστόσο χρησιμοποιείται σαν μια σταθερά για να επαληθεύσει στο τέλος αριθμητικά ότι δεν μεταβάλλεται. Επιπλέον για να ισχύει η συνθήκη (19) πρέπει ο διείσδυτής να μην είναι αγωγίμος. Πρακτικά αυτό

σημαίνει να έχει πολύ μικρή ηλεκτρική διαπερατότητα (διηλεκτρικές σταθερές) συγκριτικά με το πιεζοηλεκτρικό υλικό.

Από την τρίτη εξίσωση της ομάδας εξισώσεων (18), η οποία δηλώνει την απουσία τριβής από το πρόβλημα, προκύπτει ότι $A_3(\xi) = -\frac{m_1}{m_3} A_1(\xi) - \frac{m_2}{m_3} A_2(\xi)$ με την προϋπόθεση ότι $m_3 \neq 0$. Από τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες προκύπτουν δύο ζευγάρια ολοκληρωτικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} A_i(\xi) J_0(\xi r) d\xi = f_i(r) & 0 \leq r \leq a \\ \int_0^{\infty} A_i(\xi) \xi J_0(\xi r) d\xi = g_i(r) & r > a \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (20)$$

Σύμφωνα με τον Noble (1963) οι λύσεις των παραπάνω ολοκληρωτικών εξισώσεων δίνονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$A_i(\xi) = \int_0^a \cos(x\xi) F_i(x) dx + \int_a^{\infty} \cos(x\xi) G_i(x) dx \quad (i = 1, 2) \quad (21)$$

όπου

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x f_i(r) \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \\ G_i(x) &= \int_x^{\infty} g_i(r) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \end{aligned} \quad (22)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του επίπεδου κυκλικού διεισδυτή καθορίζουν ότι οι συναρτήσεις $f_i(r)$ είναι σταθερές (f_i) και ότι οι συναρτήσεις $g_i(r)$ είναι μηδέν. Οι σταθερές (f_i) και οι συναρτήσεις $A_i(\xi)$ παρουσιάζονται αναλυτικά ακολούθως:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{M_4 h - M_2 \varphi^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3} & A_1(\xi) &= \pm f_1 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_1 &= \beta_1 + \beta_{22} \frac{m_1}{m_3} \\ f_2 &= \frac{M_3 h - M_1 \varphi^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4} & A_2(\xi) &= \pm f_2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, & \text{όπου} & & M_2 &= \beta_{21} + \beta_{22} \frac{m_2}{m_3} \\ f_3 &= -f_1 \frac{m_1}{m_3} - f_2 \frac{m_2}{m_3} & A_3(\xi) &= \pm f_3 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & & & M_3 &= \gamma_1 + \gamma_{22} \frac{m_1}{m_3} \\ & & & & & & M_4 &= \gamma_{21} + \gamma_{22} \frac{m_2}{m_3} \end{aligned} \quad (23)$$

Όπως φαίνεται από την ανάλυση, προέκυψαν δύο ίσες και αντίθετες εκφράσεις για κάθε μία από τις συναρτήσεις $A_i(\xi)$. Για θερμοδυναμικούς λόγους όμως, θα γίνουν δεκτές οι εκφράσεις εκείνες με τις οποίες το εξωτερικό έργο είναι θετικό $\left(\frac{P h + Q \varphi^0}{2} \geq 0 \right)$, όπου P είναι η συνολικά εφαρμοζόμενη δύναμη διείσδυσης και

Q το συνολικό δημιουργούμενο ηλεκτρικό φορτίο (βλέπε εξισώσεις (30) και (31) αντίστοιχα).

Τελικοί αναλυτικοί τύποι των μεγεθών

Στην προσπάθεια να περιγραφούν οι αναλυτικοί τύποι των μεγεθών όσο πιο συνοπτικά γίνεται χρησιμοποιήθηκαν και κάποιες νέες σταθερές $u_{r0}, \sigma_{zz0}, D_{z0}$ όπου και επεξηγούνται στη συνέχεια. Οι τελικές μορφές των τύπων είναι (Σχ.2):

$$u_r(r,0) = \begin{cases} u_{r0} \frac{a}{r} & r \geq a \\ u_{r0} \frac{r}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} & r \leq a \end{cases} \quad (24)$$

$$w(r,0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{h}{r} \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) & r \geq a \\ h & r \leq a \end{cases} \quad (25) \quad \varphi(r,0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\varphi^0}{r} \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) & r \geq a \\ \varphi^0 & r \leq a \end{cases} \quad (26)$$

$$\delta\sigma_{zz}(r,0) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \rightarrow \infty & r = a \\ \sigma_{zz0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & r < a \end{cases} \quad (27) \quad \delta D_z(r,0) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \rightarrow \infty & r = a \\ D_{z0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & r < a \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_{r0} &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 - \alpha_{22} f_3 \\ h &= \frac{\pi}{2} (\beta_{11} f_1 + \beta_{21} f_2 - \beta_{22} f_3) \\ \text{όπου } \varphi^0 &= \frac{\pi}{2} (\gamma_{11} f_1 + \gamma_{21} f_2 - \gamma_{22} f_3) \\ \sigma_{zz0} &= \sum_{i=1}^3 m_{(i+3)} f_i \\ D_{z0} &= \sum_{i=1}^3 m_{(i+6)} f_i \end{aligned} \quad (29)$$

Τέλος, η συνολικά εφαρμοζόμενη δύναμη διείδυσης P και το συνολικό δημιουργούμενο ηλεκτρικό φορτίο Q (δεσμευμένο φορτίο σε μορφή δίπολων), για έναν άκαμπτο, επίπεδο, κυκλικό διεϊσδυτή ακτίνας a προκύπτουν από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$P = -\int_0^a \delta\sigma_{zz} 2\pi r dr = -2\pi \sigma_{zz0} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = -2\pi a \sigma_{zz0} \quad (30)$$

$$Q = \int_0^a \delta D_z 2\pi r dr = 2\pi D_{z0} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 2\pi a D_{z0} \quad (31)$$

Αριθμητικά αποτελέσματα

Όπως προαναφέρθηκε πραγματοποιήθηκε εφαρμογή των αναλυτικών τύπων σε μία ομάδα πιεζοηλεκτρικών υλικών και πιο συγκεκριμένα στα PZT-4, PZT-5A, BaTiO₃ και (Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO₃ (Παράρτημα III). Ένα από τα πλεονεκτήματα των

αναλυτικών τύπων είναι ότι δίνεται η δυνατότητα, εκμηδενίζοντας τον πιεζοηλεκτρισμό (δηλαδή μηδενίζοντας τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές e_{ij}), να φανεί ξεκάθαρα η επίδραση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου στην δύναμη διείδυσης P και στο ηλεκτρικό φορτίο Q . Οι αριθμητικές εφαρμογές στα τέσσερα αυτά πιεζοηλεκτρικά υλικά τόσο υπό συνθήκες σύζευξης (coupled conditions) όσο και υπό συνθήκες έλλειψης της σύζευξης (uncoupled conditions), βοήθησαν πολύ στο να φανούν χρήσιμα συμπεράσματα τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Τα τέσσερα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι ηλεκτρικά πολωμένα κεραμικά και διακρίνονται ουσιαστικά σε δύο είδη lead zirconate titanate (PZT-4, PZT-5A) και σε δύο είδη barium titanate ($BaTiO_3$, $(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$). Για τα πρώτα δύο είδη, η πυκνότητα μάζας είναι $7.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ και η θερμοκρασία Curie $601 \text{ }^\circ\text{K}$, ενώ για τα υπόλοιπα δύο η πυκνότητα μάζας είναι $5.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ και η θερμοκρασία Curie $388 \text{ }^\circ\text{K}$. Αναλυτικά οι ιδιότητες των συγκεκριμένων πιεζοηλεκτρικών υλικών (σε κανονικές συνθήκες εργαστηρίου) παρουσιάζονται στους Πίνακες 1-3 που ακολουθούν (Α.Ε. Giannakopoulos and S. Suresh (1999), S. Sridhar et al (1999)).

Πίνακας 1: Ελαστικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Ελαστικές σταθερές (GPa)	PZT-4	PZT-5A	$BaTiO_3$	$(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$
C_{11}^E	139.00	121.00	166.00	158.00
C_{33}^E	115.00	111.00	162.00	150.00
C_{44}^E	25.60	21.10	42.90	45.00
C_{12}^E	77.80	75.40	76.60	69.00
C_{13}^E	74.30	75.20	77.50	67.50

Πίνακας 2: Πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Πιεζοηλεκτρικές σταθερές (C/m^2)	PZT-4	PZT-5A	$BaTiO_3$	$(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$
e_{31}	-5.20	-5.40	-4.40	-3.10
e_{33}	15.10	15.80	18.60	13.50
e_{15}	12.70	12.30	11.60	10.90

Πίνακας 3: Ηλεκτρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Διηλεκτρικές σταθερές (nF/m)	PZT-4	PZT-5A	$BaTiO_3$	$(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$
ϵ_{11}^e	6.461	8.107	11.151	8.850
ϵ_{33}^e	5.620	7.346	12.567	8.054

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης (μεταβολές των μεγεθών) για τα τέσσερα πιεζοηλεκτρικά υλικά παρουσιάζονται συνοπτικά στους Πίνακες 4-5 που ακολουθούν. Πρέπει να σημειωθεί ότι η 2^η και η 3^η σχέση της ομάδας εξισώσεων

(29) επαληθεύτηκε και αριθμητικά. Έτσι λοιπόν επιβεβαιώθηκε και η υπόθεση ότι το ηλεκτρικό δυναμικό δεν μεταβάλλεται ($\varphi^0 = 0$).

Πίνακας 4: Αναλυτικά αποτελέσματα των πιεζοηλεκτρικών υλικών (coupled).

Coupled	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃	Μονάδες
$\frac{P}{ah}$	270.2260	229.7302	406.0697	402.6611	(nPa)
$\frac{Q}{ah}$	-67.58	-69.73	-68.27	-52.85	(C/m ²)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1372130	-0.1058380	-0.2438190	-0.2676140	(numeric)

Πίνακας 5: Αναλυτικά αποτελέσματα των πιεζοηλεκτρικών υλικών (uncoupled).

Uncoupled	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃	Μονάδες
$\frac{P}{ah}$	246.2170	209.4000	396.5170	391.2140	(nPa)
$\frac{Q}{ah}$	0.00	0.00	0.00	0.00	(C/m ²)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1952190	-0.1744030	-0.2613290	-0.2811660	(numeric)

Συμπεράσματα

Όπως προαναφέρθηκε, το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού έχει σημαντική επίδραση στην δύναμη διεύθυνση γεγονός που αποδεικνύεται από τις διαφορές στις τιμές των Πινάκων 4 και 5. Παρατηρείται λοιπόν σε πρώτη φάση ότι το υλικό υπό την επίδραση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου γίνεται πιο άκαμπτο. Οι ποσοστιαίες μεταβολές των μεγεθών των πιεζοηλεκτρικών υλικών από coupled σε uncoupled κατάσταση παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6: Ποσοστιαίες μεταβολές (%) των μεγεθών των πιεζοηλεκτρικών υλικών από coupled σε uncoupled κατάσταση.

	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
$\frac{P}{ah}$	-8.88	-8.85	-2.35	-2.84
$\frac{u_{r0}}{h}$	+42.27	+64.78	+7.18	+5.06

Το πρόσημο του μεγέθους $\frac{u_{r0}}{h}$ στους Πίνακες 4 και 5 καθορίζει τη φορά που θα έχει η αξονική μετατόπιση, γι' αυτό και αυξάνεται η απόλυτη τιμή του όταν παύουν να έχουν ισχύ οι πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες των υλικών (Πίνακας 6). Επίσης όπως αναμενόταν το δημιουργούμενο ηλεκτρικό φορτίο Q μηδενίζεται, γεγονός που υποδηλώνει την απουσία του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου.

Για την κατανόηση του τρόπου και του βαθμού επίδρασης όλων των ιδιοτήτων των πιεζοηλεκτρικών υλικών στο φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, παρατίθενται οι μεταβολές των ιδιοτήτων μεταξύ των υλικών (Πίνακες 7-9) καθώς και οι αντίστοιχες μεταβολές των μεγεθών τους (Πίνακες 10-11). Για την σύγκριση αυτή, ως υλικό αναφοράς χρησιμοποιείται το PZT-4.

Πίνακας 7: Ποσοστιαίες μεταβολές (%) στις ελαστικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Ελαστικές σταθερές	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
C_{11}^E	-	-12.95	+19.42	+13.67
C_{33}^E	-	-3.48	+40.87	+30.43
C_{44}^E	-	-17.58	+67.58	+75.78
C_{12}^E	-	-3.08	-1.54	-11.31
C_{13}^E	-	+1.21	+4.31	-9.15

Πίνακας 8: Ποσοστιαίες μεταβολές (%) στις πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Πιεζοηλεκτρικές σταθερές	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
e_{31}	-	+3.85	-15.38	-40.38
e_{33}	-	+4.64	+23.18	-10.60
e_{15}	-	-3.15	-8.66	-14.17

Πίνακας 9: Ποσοστιαίες μεταβολές (%) στις ηλεκτρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Διηλεκτρικές σταθερές	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
ϵ_{11}^E	-	+25.48	+72.59	+36.98
ϵ_{33}^E	-	+30.71	+123.61	+43.31

Πίνακας 10: Ποσοστιαίες μεταβολές (%) στα αποτελέσματα των πιεζοηλεκτρικών υλικών (coupled).

Coupled	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
$\frac{P}{ah}$	-	-14.99	+50.27	+49.01
$\frac{Q}{ah}$	-	+3.18	+1.02	-21.80
$\frac{u_{r0}}{h}$	-	-22.87	+77.69	+95.04

Ένα από τα συμπεράσματα του Πίνακα 6 είναι ότι δύναμη διείδυσης P εξαρτάται κυρίως από την ακαμψία του υλικού (C_{ij}^E), αφού στο 100% της απώλειας

των πιεζοηλεκτρικών σταθερών (e_{ij}) επηρεάζεται μόνο το 10% περίπου της P και προφανώς σε μικρότερες μεταβολές των πιεζοηλεκτρικών σταθερών η επίδραση αυτή θα είναι ακόμη μικρότερη. Το γεγονός αυτό παρατηρείται στους Πίνακες 7 και 10 όπου η μεταβολή της ακαμψίας του υλικού είναι περίπου ανάλογη με την μεταβολή της δύναμη διείδυσης. Από την άλλη όμως η εξάρτηση του ηλεκτρικού φορτίου Q από τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές (e_{ij}) είναι μεγάλη. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι μεταβολές της πιεζοηλεκτρικής σταθεράς e_{31} του Πίνακα 8 είναι μεταβολές των απόλυτων τιμών της διότι με το πρόσημο εκφράζεται η «ένταση» (+) ή η «αποδυνάμωση» (-) της σταθεράς. Επιπλέον επειδή στο πρόβλημα η διείδυση πραγματοποιείται στον άξονα z , η πιεζοηλεκτρική σταθερά e_{33} θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως κύρια πιεζοηλεκτρική σταθερά με λίγο μεγαλύτερη βαρύτητα από τις άλλες πιεζοηλεκτρικές σταθερές. Ωστόσο όμως και οι διηλεκτρικές σταθερές (ϵ_{ij}^E) σε συνδυασμό με τις πιεζοηλεκτρικές επηρεάζουν το Q . Με αυτές τις επισημάνσεις διαπιστώνεται εύκολα στους Πίνακες 8 και 10 ότι οι μεταβολές των πιεζοηλεκτρικών σταθερών οδηγούν προς την ίδια κατεύθυνση και τις μεταβολές του Q . Στην περίπτωση του PZT-5A παρατηρείται μία μικρή υπεροχή των θετικών μεταβολών στις e_{ij} που οδηγεί επίσης σε μικρή αύξηση του Q . Στο $BaTiO_3$ παρόλο που υπάρχει υπεροχή των αρνητικών μεταβολών, η θετική μεταβολή του ισχυρού e_{33} σε συνδυασμό με την επίσης ισχυρή θετική μεταβολή του ϵ_{33}^E υπερिशχύουν με αποτέλεσμα την ισχνή θετική μεταβολή του Q . Τέλος για το $(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$ οι σημαντικές αρνητικές μεταβολές των e_{ij} δικαιολογούν αυτόματα την σημαντική μείωση του Q .

Για την ολοκλήρωση της ανάλυσης των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε ένα γενικότερο κριτήριο σύγκρισης, η ελαστική ανισοτροπία. Η ελαστική ανισοτροπία του κάθε υλικού υπολογίζεται από την σχέση $\left\| \frac{2C_{44}^E + C_{12}^E - C_{11}^E}{C_{33}^E} \right\|$, όπου όσο πιο μικρή είναι η τιμή της τόσο πιο ελαστικά ισότροπο είναι το υλικό. Η ελαστική ανισοτροπία των υλικών παρουσιάζεται στον Πίνακα 11.

Πίνακας 11: Ελαστική ανισοτροπία των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

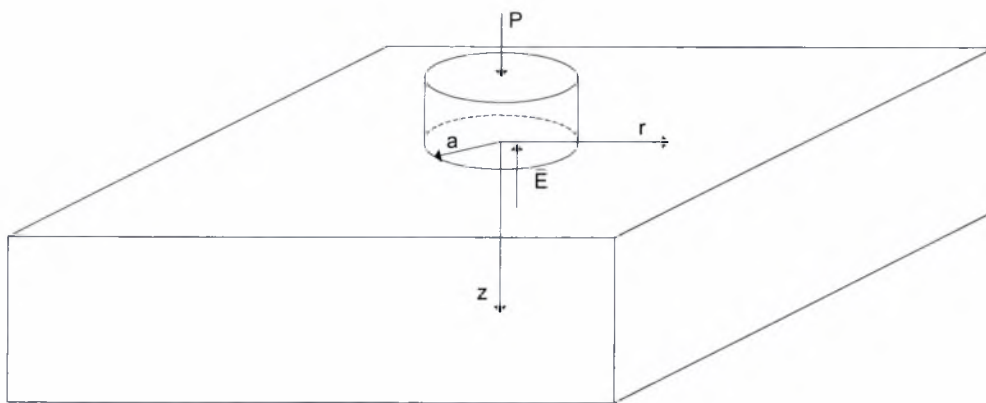
Ελαστική ανισοτροπία (%)	PZT-4	PZT-5A	BaTiO ₃	(Ba _{0.917} Ca _{0.083})TiO ₃
$\left\ \frac{2C_{44}^E + C_{12}^E - C_{11}^E}{C_{33}^E} \right\ $	8.70	3.06	2.22	0.67

Ο Πίνακας 11 πρέπει να ερμηνευτεί σε συνδυασμό με την ηλεκτρική ανισοτροπία των υλικών, κατά πόσο δηλαδή είναι ίδιες οι σταθερές $\epsilon_{11}^E = \epsilon_{33}^E$. Τα συγκεκριμένα υλικά έχουν σχεδόν την ίδια ηλεκτρική ανισοτροπία, με το $BaTiO_3$ να είναι ελαφρώς πιο ανισότροπο από τα άλλα. Συνεπώς διαπιστώνεται ότι το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού λειτουργεί αποδοτικότερα στα πιο ανισότροπα υλικά. Το $(Ba_{0.917}Ca_{0.083})TiO_3$ λόγω του ότι είναι το πιο ισότροπο από τα υλικά, εμφανίζει και το μικρότερο Q .

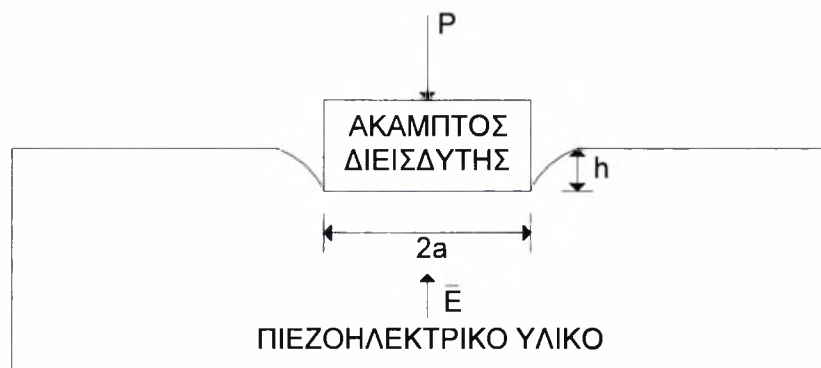
Σχήματα

Σχήμα 1. Γεωμετρικές παράμετροι της επίπεδης διείσδυσης. Ο διεισδυτής δεν πρέπει να είναι αγωγός, δηλαδή η ηλεκτρική του διαπερατότητα ϵ_{ij}^e να είναι πολύ μικρή.

Σχήμα 2. Κανονικοποιημένες σχέσεις για: (a) την ακτινική μετατόπιση (u_r), (b) την κατακόρυφη μετατόπιση (w), (c) το ηλεκτρικό δυναμικό (ϕ), (d) την αξονική τάση ($\delta\sigma_{zz}$), (e) την ηλεκτρική μετατόπιση (δD_z).

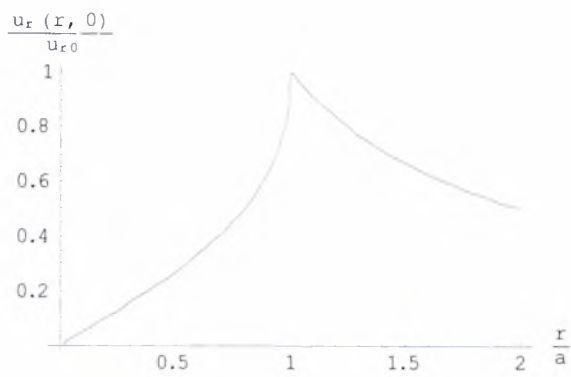


(a)

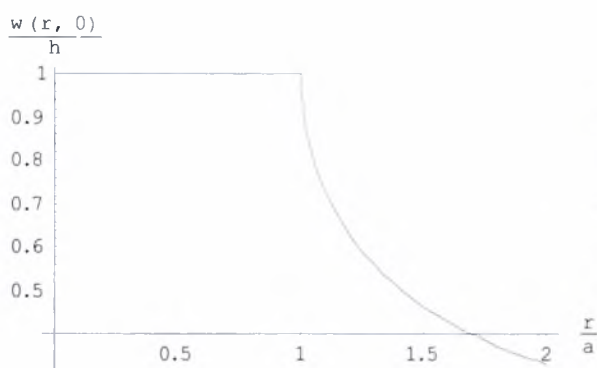


(b)

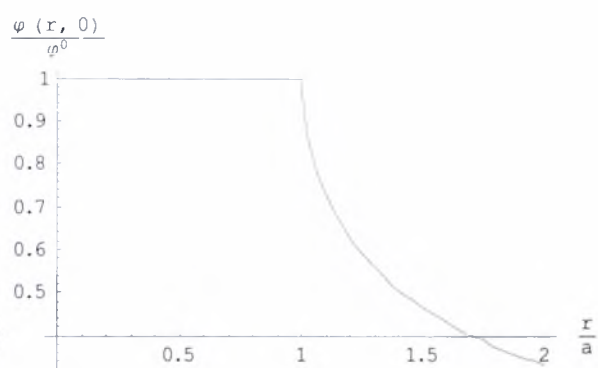
Σχήμα 1. Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



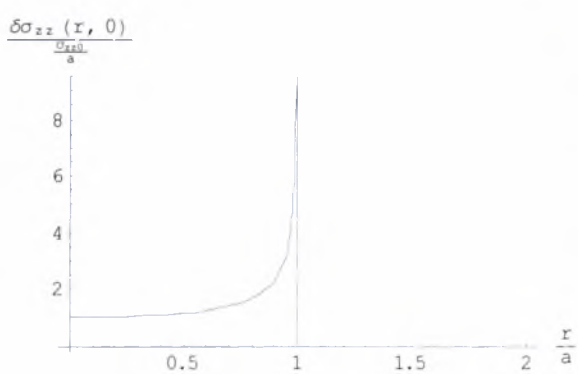
(a)



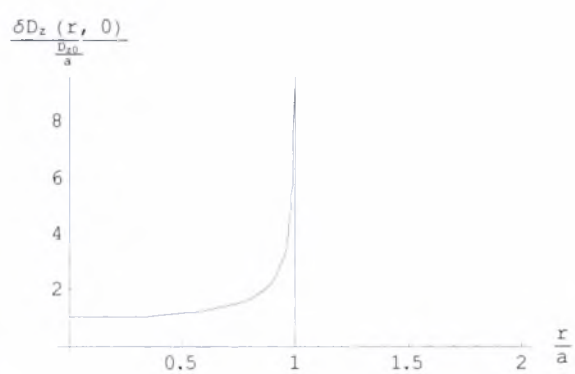
(b)



(c)



(d)



(e)

Σχήμα 2: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Το πρόβλημα επαφής στα πιεζομαγνητικά υλικά

Συνοπτική περιγραφή

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία γενική θεωρία της αξονοσυμμετρικής διείσδυσης στα πιεζομαγνητικά στερεά, από επίπεδο, άκαμπτο διείσδυτή, μέσα στα πλαίσια του γραμμικά συζευγμένου μοντέλου (fully coupled linear model), υπό την απουσία τριβής ή προσκόλλησης (adhesion). Αποδεικνύεται ότι η σύζευξη αυτή (couple effect) έχει σημαντική επίδραση στην δύναμη διείσδυσης P και στην μαγνητική επαγωγή (magnetic flux) Φ , στην περιοχή επαφής. Επιπλέον πραγματοποιείται και ένα πείραμα στο πιεζομαγνητικό υλικό Terfenol-D για να επιβεβαιώσει τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Το φαινόμενο του πιεζομαγνητισμού (η σύζευξη μεταξύ του μαγνητικού και του μηχανικού φαινομένου) μπορεί να εμφανιστεί σχεδόν σε όλα τα φερρομαγνητικά υλικά τα οποία απαντώνται ως μονοί κρύσταλλοι, ισοτροπικά πολυκρυσταλλικά μέταλλα ή κεραμικά υλικά. Τα τεχνολογικώς σημαντικά πιεζομαγνητικά υλικά είναι μίγματα σπανίων γαιών με σίδηρο, κοβάλτιο και νικέλιο. Το Terfenol-D είναι ένα εξαιρετικά πιεζομαγνητικό κράμα από τις σπάνιες γαίες τέρβιο και δυσπρόσιο σε συνδυασμό με σίδηρο ($Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$), και είναι ένα σημαντικό πιεζομαγνητικό υλικό εξαιτίας της μεγάλης πιεζομαγνητικότητας και των μεγάλων σταθερών σύζευξης (πιεζομαγνητικών σταθερών e_{ij}) που το διακρίνουν. Ο πιεζομαγνητισμός χρησιμοποιείται σε πολλές τεχνολογικά σημαντικές εφαρμογές όπως οι σκληροί δίσκοι (head recorders), οι αισθητήρες (sensors), τα μικρο-ηλεκτρο-μηχανολογικά συστήματα (MEMS), τα ατομικά μικροσκόπια κ.τ.λ. και είναι σημαντικός για πολλές εφαρμογές της τριβολογίας.

Σε μία πρώτη προσέγγιση, ο πιεζομαγνητισμός θεωρείται ως ένα γραμμικό μαγνητομηχανικό αποτέλεσμα, ανάλογο του αντίστοιχου ηλεκτρομηχανικού στον πιεζοηλεκτρισμό. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο ΙΙ, στην περίπτωση του πιεζοηλεκτρισμού, το φαινόμενο οφείλεται κυρίως στην πιεζοηλεκτρική επίδραση των ατομικών κρυστάλλων του στοιχείου και μόλις ένα μικρό ποσοστό στην κίνηση των «τοιχών» του κρυστάλλου. Από την άλλη όμως στην περίπτωση του πιεζομαγνητισμού, λόγω του ότι το φαινόμενο δεν παρατηρείται σε μονούς φερρομαγνητικούς κρυστάλλους, οφείλεται μόνο στην κίνηση των «τοιχών» του κρυστάλλου. Τέλος έχει αποδειχθεί ότι το φαινόμενο του πιεζομαγνητισμού είναι εφικτό στις 29 από τις 32 κρυσταλλικές ομάδες.

Τα πολυκρυσταλλικά υλικά, τα οποία είναι μακροσκοπικά ισότροπα όταν δεν είναι πολωμένα, γίνονται ανισότροπα με εγκάρσια ισοτροπία ή περιστροφική συμμετρία στην διεύθυνση του διανύσματος πόλωσης. Αυτό το διάνυσμα μαγνητικής πόλωσης πολώνει το υλικό σε μία μόνο διεύθυνση (κάτι ανάλογο γίνεται και στα πιεζοηλεκτρικά υλικά). Για το συγκεκριμένο πρόβλημα διείσδυσης ως διεύθυνση πόλωσης του υλικού επιλέχθηκε ο άξονας z ο οποίος είναι και ο άξονας συμμετρίας τόσο για το μηχανικό μέρος όσο και για το μαγνητοστατικό μέρος του προβλήματος.

Βασισμένη στην μηχανική επαφής (contact mechanics), η διείσδυση ως ένα απλό πείραμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της έντασης της μαγνήτισης των πιεζομαγνητικών υλικών (μία μη καταστροφική μέθοδος ποιοτικού ελέγχου). Συνοπτικά, η επαφή επιφέρει μεταβολή στην τάση ($\delta\sigma_{zz}$) η οποία με την σειρά της προκαλεί μεταβολή στην πυκνότητα μαγνητικής επαγωγής (δB_z), και αντίστροφα. Έτσι λοιπόν η διεξαγωγή του πειράματος διείσδυσης σε δύο διαφορετικές στιγμές, στο ίδιο πιεζομαγνητικό υλικό, μπορεί να δίνει διαφορετικές τιμές για την δύναμη

διείσδυσης P για δεδομένο βάθος διείσδυσης h , γεγονός που θα οφείλεται στην μεταβολή των ιδιοτήτων του υλικού. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται συγκεκριμένα το πρόβλημα επαφής ενός επίπεδου, κυκλικού και άκαμπτου διεισδυτή (από διαμαγνητικό υλικό) στα πιεζομαγνητικά υλικά.

Η πορεία επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος είναι παρόμοια με την πορεία του αντίστοιχου προβλήματος στον πιεζοηλεκτρισμό (κεφάλαιο II). Η ανάλυση και γενικά η ολοκληρωμένη μορφή του συγκεκριμένου κεφαλαίου (κεφάλαιο III) της εργασίας παρουσιάζεται στο Παράρτημα II, στην υπό δημοσίευση εργασία των **A. E. Giannakopoulos και A. Z. Parmaklis “The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials”**.

Η ιδιαιτερότητα στον πιεζομαγνητισμό είναι ότι λόγω της φύσης των υλικών (σταθερές υλικών) γίνεται διάκριση των γενικών αναλυτικών λύσεων σε τέσσερις κατηγορίες. Η διάκριση αυτή οφείλεται στις διαφορετικές μορφές λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det[a_{ij}] = 0$ που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι κατηγορίες αυτές έχουν τις ακόλουθες λύσεις:

- I. 6 πραγματικές ρίζες $\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3$ ($k_i > 0$)
- II. 2 πραγματικές ρίζες $\pm k_1$ και 4 φανταστικές ρίζες $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($k_1, \omega_i > 0$)
- III. 2 πραγματικές ρίζες $\pm k_1$ και 4 μιγαδικές ρίζες $\pm \delta \pm i\omega$ ($k_1, \delta, \omega > 0$)
- IV. 2 φανταστικές ρίζες $\pm i\omega_1$ και 4 μιγαδικές ρίζες $\pm \delta \pm i\omega$ ($\omega_1, \delta, \omega > 0$).

Ωστόσο όμως για να έχουν ισχύ οι γενικοί αναλυτικοί τύποι θα πρέπει οπωσδήποτε να πληρούν οι σταθερές των υλικών τον περιορισμό $(C_{44}^H \mu_{11}^e + e_{15}^2) \cdot (C_{33}^H \mu_{33}^e + e_{33}^2) > 0$. Σημειώνουμε emphaticά ότι στα πιεζοηλεκτρικά υλικά, λόγω της συγκεκριμένης συμμετρίας τους, κυριαρχεί η λύση III.

Αριθμητικά αποτελέσματα

Αριθμητικές εφαρμογές των αναλυτικών τύπων έγιναν κυρίως μόνο για το υλικό Terfenol-D για να υπάρχει και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι για τις αριθμητικές εφαρμογές, η συλλογή των δεδομένων για το Terfenol-D ήταν ιδιαίτερα δύσκολη. Μάλιστα επειδή για την σταθερά μ_{11}^e δεν βρέθηκαν τιμές στην βιβλιογραφία, το πρόβλημα λύθηκε

παραμετρικά θεωρώντας ότι $\mu_{11}^e = \mu_{33}^e$, $\mu_{11}^e = \frac{1}{2} \mu_{33}^e$, $\mu_{11}^e = \frac{3}{2} \mu_{33}^e$. Η συλλογή όλων

των σταθερών δεν ήταν δυνατό να γίνει από την ίδια πηγή, γεγονός που μειώνει την αξιοπιστία των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από πολλές πηγές και συνδυασμός αυτών ώστε να δημιουργηθεί ένα μεγάλο εύρος αποτελεσμάτων που θα έδινε και τη δυνατότητα για καλύτερη ερμηνεία του τρόπου επιρροής των σταθερών των υλικών στο φαινόμενο. Εκτός των αριθμητικών αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στην εργασία του Παραρτήματος II πραγματοποιήθηκαν και επιπλέον εφαρμογές που παρουσιάζονται στους Πίνακες 2-3 του κεφαλαίου III. Από το ανισότροπο ελαστικό μητρώο (1) και τα δεδομένα του Πίνακα 1 αυτού του κεφαλαίου, προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα των Πινάκων 2d-2i (κεφάλαιο III) για το Terfenol-D.

$$[C_{ij}^H] = \begin{pmatrix} 107 & 74.8 & 82.1 & 0 & 0 & 0 \\ 74.8 & 107 & 82.1 & 0 & 0 & 0 \\ 82.1 & 82.1 & 98.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.1 \end{pmatrix} \quad (\text{GPa}) \quad (1)$$

Οι περιπτώσεις (4)-(9) του Πίνακα 1 (κεφάλαιο III) είναι συνέχεια των περιπτώσεων του Πίνακα 1. (Table 1.) του Παραρτήματος II, και κατά συνέπεια οι Πίνακες 2d-2i (κεφάλαιο III) είναι συνέχεια των Πινάκων 2. (Table 2.) του ίδιου Παραρτήματος. Όλοι οι νέοι Πίνακες παρατίθενται στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Κατά αναλογία των αποτελεσμάτων των Πινάκων 4. (Table 4.) του Παραρτήματος II, όπου για ένα ισότροπο δείγμα Terfenol-D με μέτρο ελαστικότητας 55GPa και λόγο Poisson 0.4 δίνεται παραμετρική διάσταση στις σταθερές e_{33}, e_{31} και e_{15} $\left(e_{31} = -\frac{e_{33}}{2} \right)$, στους Πίνακες 3a-3d (κεφάλαιο III) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το ίδιο ελαστικό μητρώο (2) και για την ομάδα δεδομένων (3) ενώ στους Πίνακες 3e-3h (κεφάλαιο III) τα αποτελέσματα για το ελαστικό μητρώο (2) και για την ομάδα δεδομένων (4), δημιουργώντας έτσι οχτώ νέες περιπτώσεις.

$$[C_{ij}^H] = \begin{pmatrix} 55.0 & 43.0 & 43.0 & 0 & 0 & 0 \\ 43.0 & 55.0 & 43.0 & 0 & 0 & 0 \\ 43.0 & 43.0 & 55.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 \end{pmatrix} \quad (\text{GPa}) \quad (2)$$

$$\mu_{33}^{\varepsilon} = 6.283 \times 10^{-6} \left(\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right) \quad (\alpha) \rightarrow 854.0 \quad (3)$$

$$e_{33} = 90 \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{31} = -45 \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{15} = \begin{matrix} (\beta) \rightarrow 200.0 \\ (\gamma) \rightarrow 0.0 \\ (\delta) \rightarrow 500.0 \end{matrix} \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right)$$

$$\mu_{33}^{\varepsilon} = 6.283 \times 10^{-6} \left(\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right) \quad (\varepsilon) \rightarrow 90.0$$

$$e_{15} = 0.0 \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{31} = -\frac{e_{33}}{2} \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{33} = \begin{matrix} (\sigma\tau) \rightarrow 64.0 \\ (\zeta) \rightarrow 40.0 \\ (\eta) \rightarrow 16.0 \end{matrix} \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad (4)$$

Πειράματα

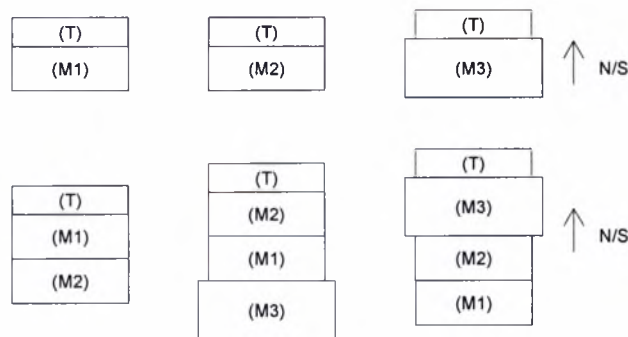
Για την παρατήρηση του φαινομένου του πιεζομαγνητισμού αλλά και για την επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε το πείραμα της διεϊσδυσης στο πιεζομαγνητικό υλικό Terfenol-D. Το πείραμα διεξήχθη στο Εργαστήριο Αντοχής των Υλικών και Μικρομηχανικής, του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και εντάσσεται στην κατηγορία πειραμάτων μικρο κλίμακας. Ο εξοπλισμός του εργαστηρίου ήταν κατάλληλος για την διεξαγωγή του πειράματος στην μικρο κλίμακα αλλά όχι και για την νάνο κλίμακα. Η διάταξη του πειράματος και γενικά το πείραμα περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο *Πειράματα (Experiments)* του Παραρτήματος II.

Για την εμφάνιση του φαινομένου του πιεζομαγνητισμού, είναι απαραίτητο το πιεζομαγνητικό υλικό να βρίσκεται μέσα σε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο το οποίο και θα το ενεργοποιήσει. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν διαφόρων ειδών εξωτερικά μαγνητικά πεδία με την βοήθεια τριών μόνιμων μαγνητών όπου και παρουσιάζονται ακολούθως. Οι διατάξεις των διαθέσιμων μαγνητικών πεδίων παρουσιάζονται στα Σχ.1&2 του παρόντος κεφαλαίου ενώ τα χαρακτηριστικά τους στους Πίνακες 4a και 4b (κεφάλαιο III). Οι τιμές των μαγνητικών πεδίων μετρήθηκαν με την βοήθεια του μαγνητόμετρου GM05, όπου και αποτελεί το τελευταίο μοντέλο στην κατηγορία των μαγνητομέτρων της εταιρίας Hirst Magnetic Instruments Ltd. Επιπλέον τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι μάζες του δοκιμίου, των μαγνητών και των πρόσθετων βαριδιών μετρήθηκαν με όργανα υψηλής ακρίβειας. Οι τελικές τιμές όλων των μετρούμενων μεγεθών αποτελούν τον μέσο όρο των τριών μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν σε κάθε περίπτωση για την ελαχιστοποίηση των τυχαίων σφαλμάτων. Τα χαρακτηριστικά των υπόλοιπων στοιχείων του πειράματος (δοκίμιο, μαγνήτες) (Σχ.1) παρουσιάζονται στον Πίνακα 4a (κεφάλαιο III) ενώ η περιγραφή του διεϊσδυτή γίνεται στις εικόνες 4&5 (Figures 4&5) του Παραρτήματος II.



Σχ.1

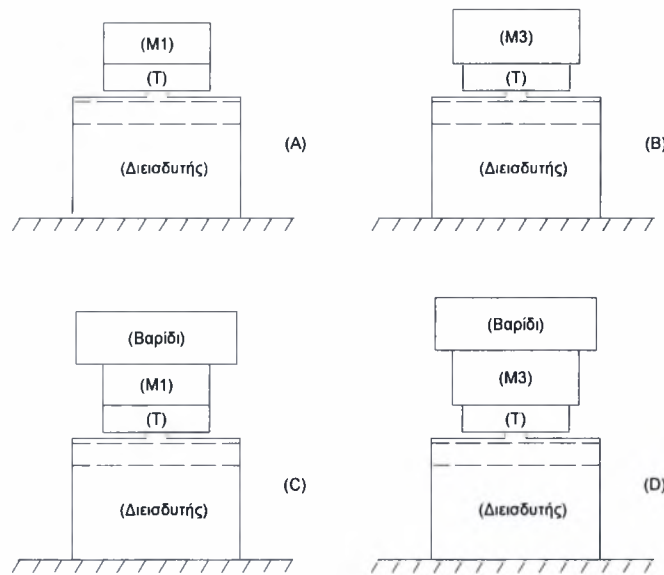
Τα υπόλοιπα διαθέσιμα μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται από τα στοιχεία του Σχ.1 παρουσιάζονται στο ακόλουθο Σχ.2 ενώ οι τιμές αυτών στον Πίνακα 4b (κεφάλαιο III).



Σχ.2

Από τα διαθέσιμα μαγνητικά πεδία, για τα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν μόνο δύο διατάξεις, η (T)+(M1) και η (T)+(M3). Ωστόσο η προσθήκη χαλύβδινου βαριδιού

(σιδηρομαγνητικό υλικό) στις προηγούμενες διατάξεις είχε σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ακόμη δύο διατάξεων (Σχ.3) συμπληρώνοντας έτσι τα τέσσερα διαφορετικά πειράματα που εκτελέστηκαν για το ίδιο δοκίμιο του Terfenol-D. Οι συνθήκες φόρτισης και τα μετρούμενα μεγέθη για τα τέσσερα πειράματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3. (Table 3.) του Παραρτήματος II. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι οι μετρήσεις των διαθέσιμων μαγνητικών πεδίων έγιναν στην επιφάνεια του δοκιμίου πριν από την διείσδυση. Η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου μετά την διείσδυση δεν ήταν δυνατό να μετρηθεί ακριβώς στην επιφάνεια επαφής μεταξύ δοκιμίου και διεισδυτή, αλλά σε απόσταση 2.082a από την διεπιφάνεια. Για το λόγο αυτό έγινε αναγωγή των μετρούμενων αποτελεσμάτων από την απόσταση 2.082a στην διεπιφάνεια με την βοήθεια της εξίσωσης $\nabla^2 \cdot \mathbf{B} = 0$. Από την σχέση αυτή προκύπτει ο τύπος αναγωγής $B_z(0, -2.082a) = 0.2851 B_z(0, 0)$, όπου και παρατηρείται η σημαντική μείωση της πυκνότητας μαγνητικής επαγωγής B_z με την αύξηση της απόστασης από την επιφάνεια.



Σχ.3

Για τις συνθήκες φόρτισης των τεσσάρων πειραμάτων, τα θεωρητικά αποτελέσματα των πρόσθετων περιπτώσεων παρουσιάζονται στους Πίνακες 5a-5d (κεφάλαιο III), οι οποίοι θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως συνέχεια των Πινάκων 5a-5d (Tables 5.) του Παραρτήματος II, αντίστοιχα.

Στην συνέχεια παρατίθενται επιπλέον εικόνες του πειράματος και των στοιχείων αυτού.

Πίνακες

Πίνακας 1: Τρεις πρόσθετες περιπτώσεις για το Terfenol-D με ελαστικό μητρώο που δίνεται από την (1).

Πίνακας 2d: Αποτελέσματα για την περίπτωση (4) του Πίνακα 1.

Πίνακας 2e: Αποτελέσματα για την περίπτωση (5) του Πίνακα 1.

Πίνακας 2f: Αποτελέσματα για την περίπτωση (6) του Πίνακα 1.

Πίνακας 2g: Αποτελέσματα για την περίπτωση (7) του Πίνακα 1.

Πίνακας 2h: Αποτελέσματα για την περίπτωση (8) του Πίνακα 1.

Πίνακας 2i: Αποτελέσματα για την περίπτωση (9) του Πίνακα 1.

Πίνακας 3a: Αποτελέσματα για την περίπτωση (α) της (3) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3b: Αποτελέσματα για την περίπτωση (β) της (3) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3c: Αποτελέσματα για την περίπτωση (γ) της (3) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3d: Αποτελέσματα για την περίπτωση (δ) της (3) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3e: Αποτελέσματα για την περίπτωση (ε) της (4) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3f: Αποτελέσματα για την περίπτωση (στ) της (4) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3g: Αποτελέσματα για την περίπτωση (ζ) της (4) και του μητρώου (2).

Πίνακας 3h: Αποτελέσματα για την περίπτωση (η) της (4) και του μητρώου (2).

Πίνακας 4a: Γεωμετρικά και μαγνητικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου και των μαγνητών.

Πίνακας 4b: Διαθέσιμα μαγνητικά πεδία.

Πίνακας 5a: Αποτελέσματα για το πείραμα A (δB_z σε mTesla).

Πίνακας 5b: Αποτελέσματα για το πείραμα B (δB_z σε mTesla).

Πίνακας 5c: Αποτελέσματα για το πείραμα C (δB_z σε mTesla).

Πίνακας 5d: Αποτελέσματα για το πείραμα D (δB_z σε mTesla).

Πίνακας 1: Τρεις πρόσθετες περιπτώσεις για το Terfenol-D με ελαστικό μητρώο που δίνεται από την (1).

Case	$e_{15} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$e_{31} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$e_{33} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$\mu_{33}^{\varepsilon} \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$
(4)	854.0	-604.40	2088.4	-290.146×10^{-6}
(5)	854.0	-450.00	910.0	5.000×10^{-6}
(6)	500.0	-29.04	52.8	3.374×10^{-6}
(7)	854.0	-604.40	2088.4	-275.318×10^{-6}
(8)	0.0	-26.40	48.0	1.900×10^{-6}
(9)	0.0	-29.04	52.8	3.374×10^{-6}

Πίνακας 2d: Αποτελέσματα για την περίπτωση (4) του Πίνακα 1.

(4)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	77.6001	64.4971	80.7354	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 5249.54	± 5853.10	± 4889.79	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.2193990	-0.3450870	-0.1843740	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 2e: Αποτελέσματα για την περίπτωση (5) του Πίνακα 1.

(5)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	148.431	150.193	146.773	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 6230.00	± 6369.64	± 6098.19	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	0.2820900	0.2924700	0.2723200	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 2f: Αποτελέσματα για την περίπτωση (6) του Πίνακα 1.

(6)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	198.8240	215.1000	186.5640	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 1059.06	± 1187.89	± 960.894	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.0560522	-0.0508442	-0.0599346	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 2g: Αποτελέσματα για την περίπτωση (7) του Πίνακα 1.

(7)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	76.6153	61.0945	80.1020	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-5134.13	-5608.91	-4799.76	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.2314820	-0.3843000	-0.1925530	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 2h: Αποτελέσματα για την περίπτωση (8) του Πίνακα 1.

(8)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	89.3348	89.4646	89.2797	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-99.1169	-95.2298	-99.1450	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.0737280	-0.0741297	-0.0736759	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 2i: Αποτελέσματα για την περίπτωση (9) του Πίνακα 1.

(9)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	89.2452	89.3342	89.2074	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-109.0540	-104.8740	-109.0230	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.0746738	-0.0749459	-0.0746415	-0.0767946	(numeric)

Πίνακας 3α: Αποτελέσματα για την περίπτωση (α) της (3) και του μητρώου (2).

(α)	$\mu_{11}^e = \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{1}{2} \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{3}{2} \mu_{33}^e$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	152.7340	159.4560	147.2530	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-1061.21	-1147.72	-989.70	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1744150	-0.1761970	-0.172934	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3β: Αποτελέσματα για την περίπτωση (β) της (3) και του μητρώου (2).

(β)	$\mu_{11}^e = \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{1}{2} \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{3}{2} \mu_{33}^e$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	98.0458	100.3540	96.6409	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-660.77	-772.97	-587.91	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1148920	-0.1029750	-0.1217240	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3γ: Αποτελέσματα για την περίπτωση (γ) της (3) και του μητρώου (2).

(γ)	$\mu_{11}^e = \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{1}{2} \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{3}{2} \mu_{33}^e$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	90.9848	91.3239	90.8303	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-237.05	-224.62	-237.64	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1427480	-0.1439320	-0.1424560	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3δ: Αποτελέσματα για την περίπτωση (δ) της (3) και του μητρώου (2).

(δ)	$\mu_{11}^e = \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{1}{2} \mu_{33}^e$	$\mu_{11}^e = \frac{3}{2} \mu_{33}^e$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	125.2200	131.6270	120.5670	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	-1009.84	-1142.09	-911.30	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1209750	-0.1129420	-0.1264980	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3ε: Αποτελέσματα για την περίπτωση (ε) της (4) και του μητρώου (2).

(ε)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	90.9848	91.3239	90.8303	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 237.05	± 224.62	± 237.64	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1427480	-0.1439320	-0.1424560	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3f: Αποτελέσματα για την περίπτωση (στ) της (4) και του μητρώου (2).

(στ)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	90.6048	90.7796	90.5252	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 168.66	± 160.20	± 168.83	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1445190	-0.1451170	-0.1443810	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3g: Αποτελέσματα για την περίπτωση (ζ) της (4) και του μητρώου (2).

(ζ)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	90.3621	90.4312	90.3306	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 105.44	± 100.31	± 105.45	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1457020	-0.1459350	-0.1456500	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 3h: Αποτελέσματα για την περίπτωση (η) της (4) και του μητρώου (2).

(η)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Διαστάσεις
$\frac{P}{ah}$	90.2294	90.2406	90.2244	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 42.18	± 40.16	± 42.16	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1463650	-0.1464030	-0.1463570	-0.1464940	(numeric)

Πίνακας 4a: Γεωμετρικά και μαγνητικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου και των μαγνητών.

Στοιχείο	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά		Μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια		Μάζα (kg)
	Διάμετρος (mm)	Πάχος (mm)	Διάμετρος (mm)	Πάχος (mm)	
Terfenol-D (T)	25.40	6.32	0.00	0.00	0.029
Μαγνήτης 1 (M1)	25.43	9.60	-57.0	+45.0	0.036
Μαγνήτης 2 (M2)	25.45	9.59	-54.0	+60.0	-
Μαγνήτης 3 (M3)	30.04	12.78	-134.0	+100.0	0.046

Πίνακας 4b: Διαθέσιμα μαγνητικά πεδία.

Διάταξη	Μαγνητικό πεδίο	
	N/S (mTesla)	S/N (mTesla)
(T)+(M1)	-28.1	+27.1
(T)+(M2)	-28.1	+28.5
(T)+(M3)	-54.1	+48.4
(T)+(M1)+(M2)	-42.3	+42.3
(T)+(M3)+(M2)+(M1)	-67.0	+63.4
(T)+(M2)+(M1)+(M3)	-56.0	+56.1

Πίνακας 5a: Αποτελέσματα για το πείραμα A (δB_z σε mTesla).

Περίπτωση	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$
(4)	1078.40	1446.67	965.49
(5)	669.09	676.06	662.33
(6)	84.91	88.04	82.11
(7)	1068.25	1463.52	955.21
(8)	17.69	16.97	17.70
(9)	19.48	18.71	19.48
(α)	110.76	114.74	107.14
(β)	107.43	122.79	96.98
(γ)	41.53	39.21	41.71
(δ)	128.56	138.32	120.49
(ϵ)	41.53	39.21	41.71
($\sigma\tau$)	29.67	28.13	29.73
(ζ)	18.60	17.68	18.61
(η)	7.45	7.09	7.45

Πίνακας 5b: Αποτελέσματα για το πείραμα B (δB_z σε mTesla).

Περίπτωση	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$
(4)	1244.31	1669.23	1114.03
(5)	772.03	780.07	764.23
(6)	97.98	101.58	94.74
(7)	1232.60	1688.68	1102.16
(8)	20.41	19.58	20.43
(9)	22.48	21.59	22.48
(α)	127.80	132.39	123.63
(β)	123.96	141.68	111.90
(γ)	47.92	45.24	48.12
(δ)	148.34	159.60	139.03
(ϵ)	47.92	45.24	48.12
($\sigma\tau$)	34.24	32.46	34.30
(ζ)	21.46	20.40	21.47
(η)	8.60	8.19	8.60

Πίνακας 5c: Αποτελέσματα για το πείραμα C (δB_z σε mTesla).

Περίπτωση	$\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$	$\mu_{11}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\epsilon}$	$\mu_{11}^{\epsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\epsilon}$
(4)	17038.78	22857.33	15254.77
(5)	10571.65	10681.81	10464.88
(6)	1341.63	1390.96	1297.26
(7)	16878.38	23123.52	15092.31
(8)	279.45	268.10	279.70
(9)	307.78	295.69	307.82
(α)	1750.03	1812.90	1692.84
(β)	1697.46	1940.03	1532.25
(γ)	656.21	619.51	658.98
(δ)	2031.23	2185.42	1903.76
(ϵ)	656.21	619.51	658.98
($\sigma\tau$)	468.85	444.47	469.74
(ζ)	293.90	279.37	294.02
(η)	117.75	112.09	117.70

Πίνακας 5d: Αποτελέσματα για το πείραμα D (δB_z σε mTesla).

Περίπτωση	$\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$	$\mu_{11}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\epsilon}$	$\mu_{11}^{\epsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\epsilon}$
(4)	17171.50	23035.38	15373.60
(5)	10654.00	10765.01	10546.40
(6)	1352.08	1401.80	1307.37
(7)	17009.86	23303.75	15209.87
(8)	281.63	270.19	281.88
(9)	310.17	297.99	310.22
(α)	1763.66	1827.02	1706.03
(β)	1710.68	1955.14	1544.19
(γ)	661.33	624.33	664.11
(δ)	2047.05	2202.44	1918.59
(ϵ)	661.33	624.33	664.11
($\sigma\tau$)	472.51	447.94	473.40
(ζ)	296.19	281.55	296.31
(η)	118.67	112.97	118.62

Εικόνες

Εικόνα 1: Κάτοψη της διάταξης του διεισδυτή και του μετρητικού οργάνου.

Εικόνα 2: Πλάγια όψη της διάταξης του διεισδυτή και του μετρητικού οργάνου.

Εικόνα 3: Η θέση του μετρητικού οργάνου μέσα στον διεισδυτή.

Εικόνα 4: Η διάταξη του διεισδυτή και του μετρητικού οργάνου.

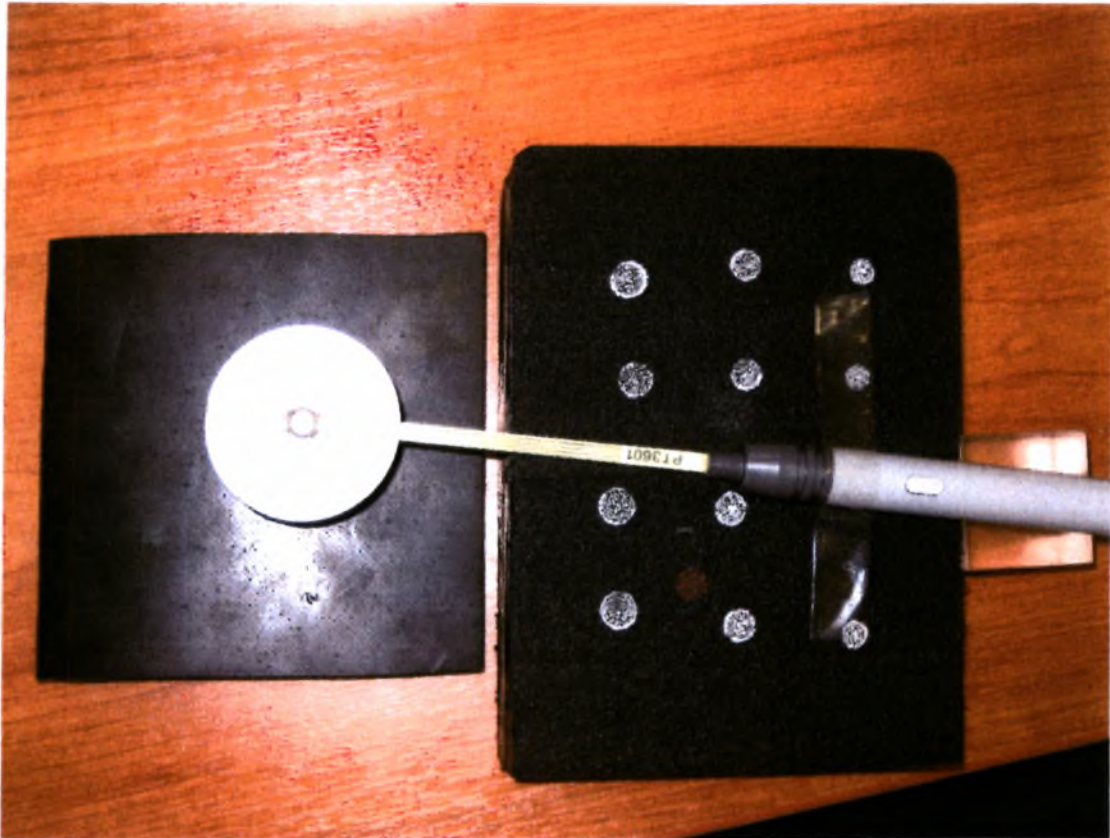
Εικόνα 5: Η τοποθέτηση του δοκιμίου στην διάταξη του πειράματος.

Εικόνα 6: Πλάγια όψη της θέσης του δοκιμίου στην διάταξη του πειράματος.

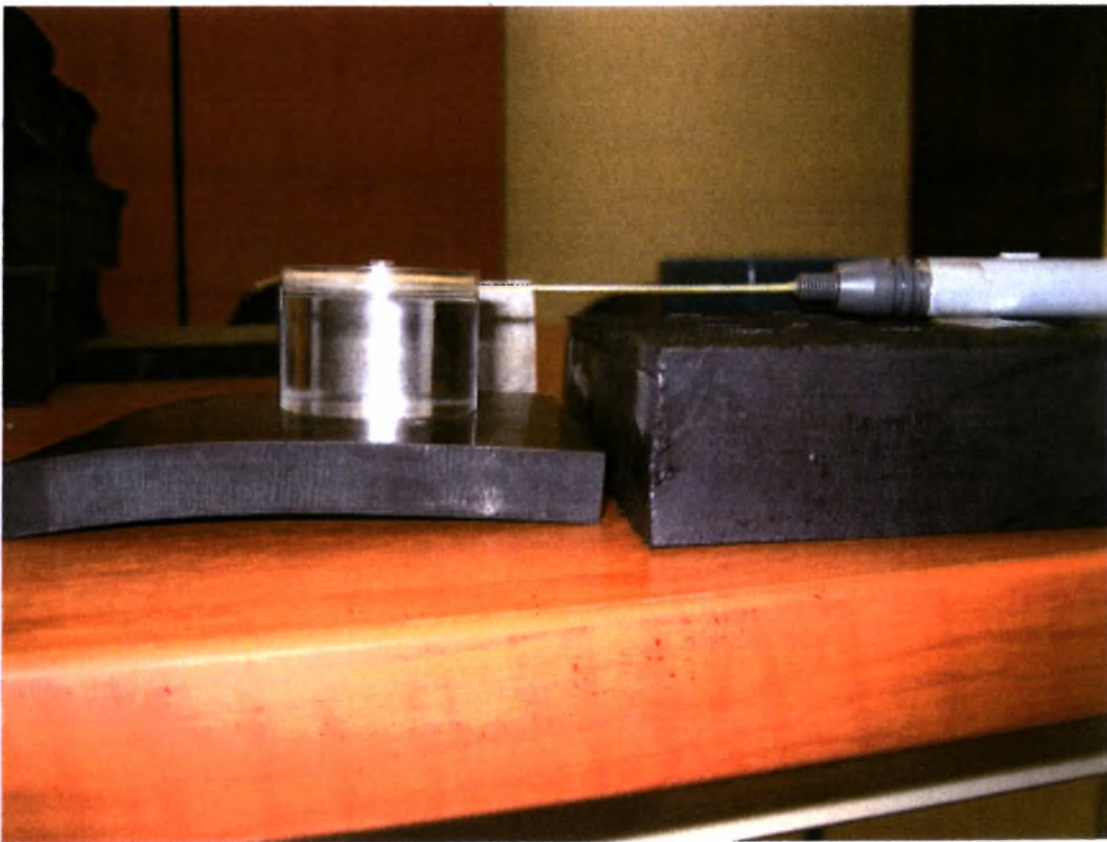
Εικόνα 7: Πλάγια όψη της διάταξης των πειραμάτων A και B (χωρίς το βαρίδι).

Εικόνα 8: Διάταξη των πειραμάτων C και D (προσθήκη βαριδιού).

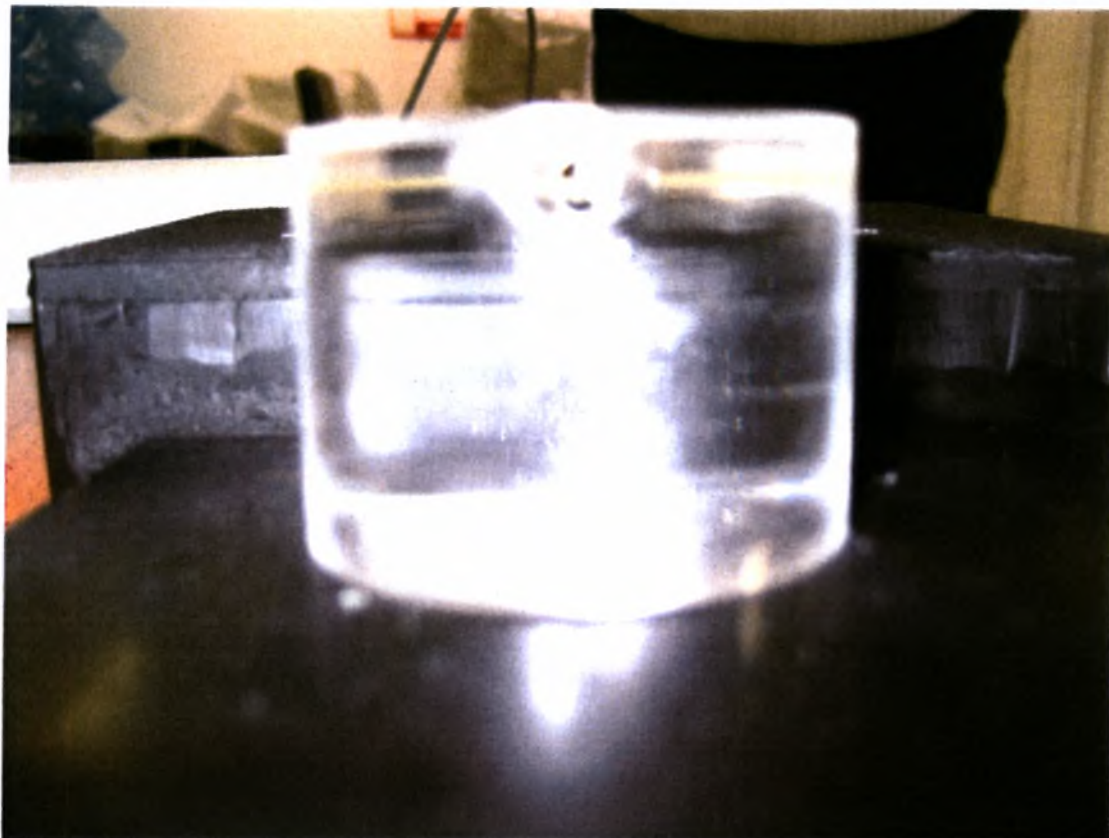
Εικόνα 9: Πλάγια όψη της διάταξης των πειραμάτων C και D (προσθήκη βαριδιού).



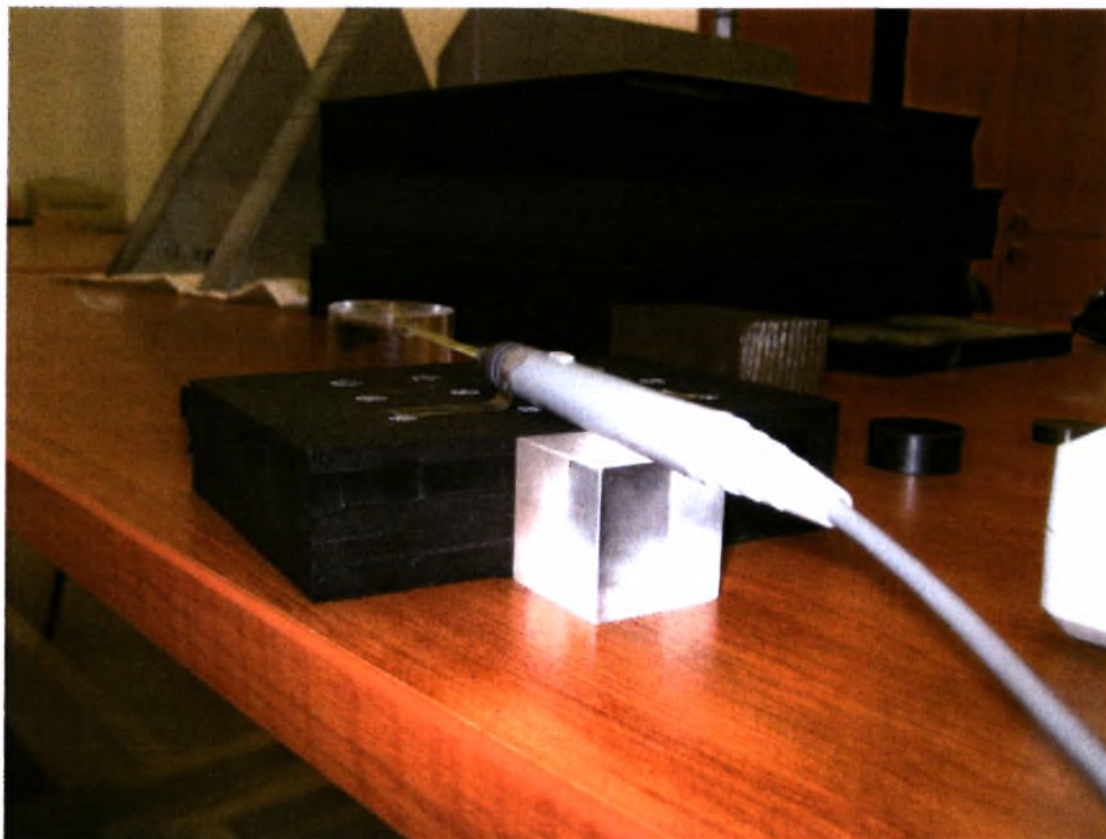
Εικόνα 1: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



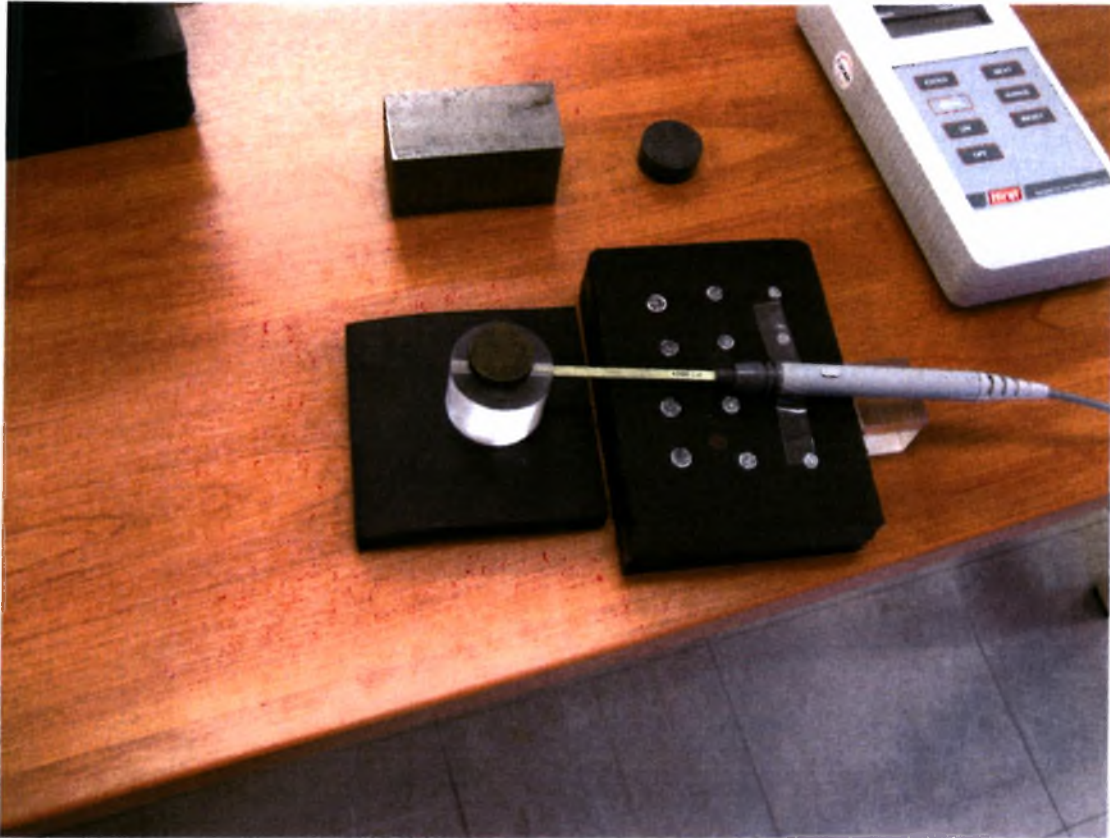
Εικόνα 2: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



Εικόνα 3: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



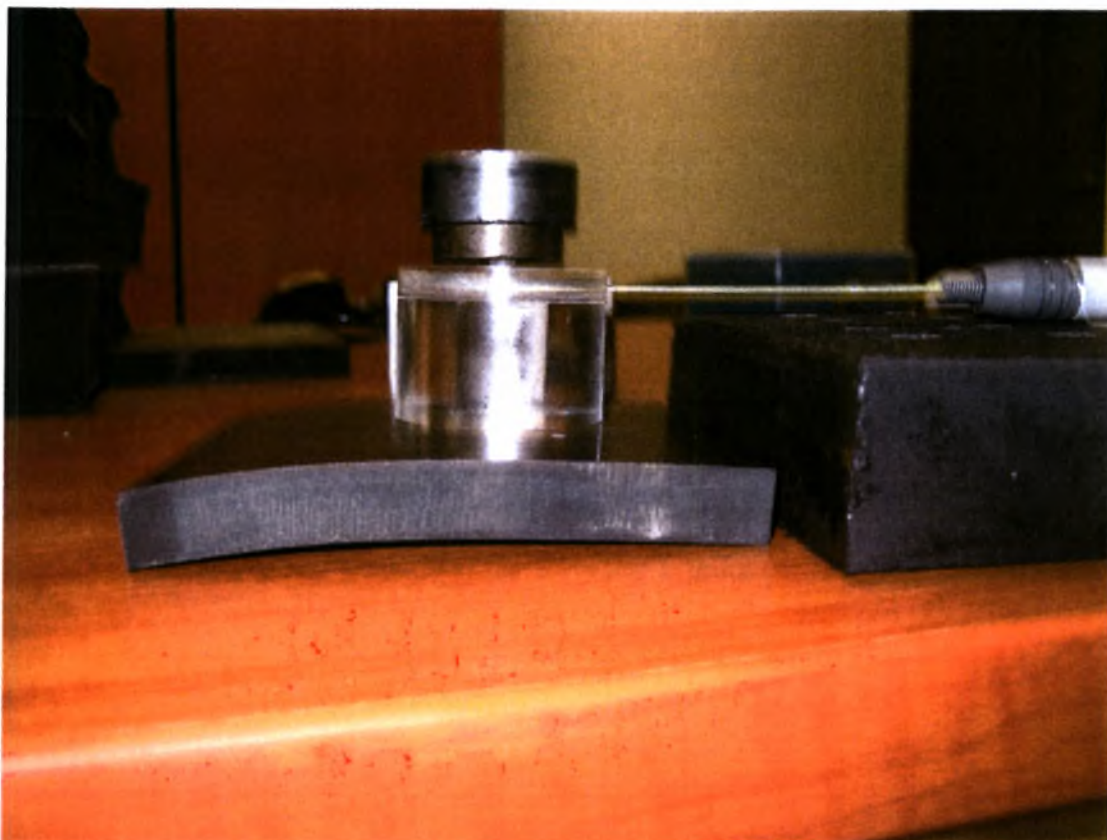
Εικόνα 4: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



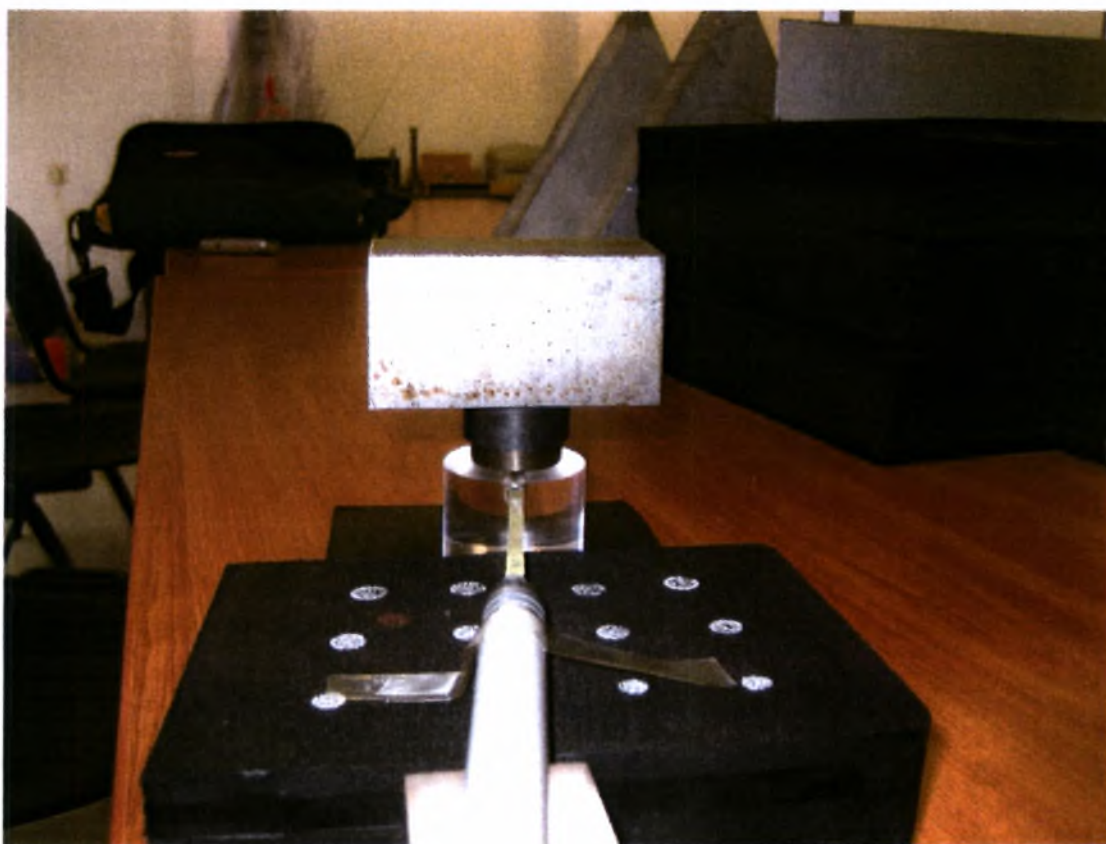
Εικόνα 5: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



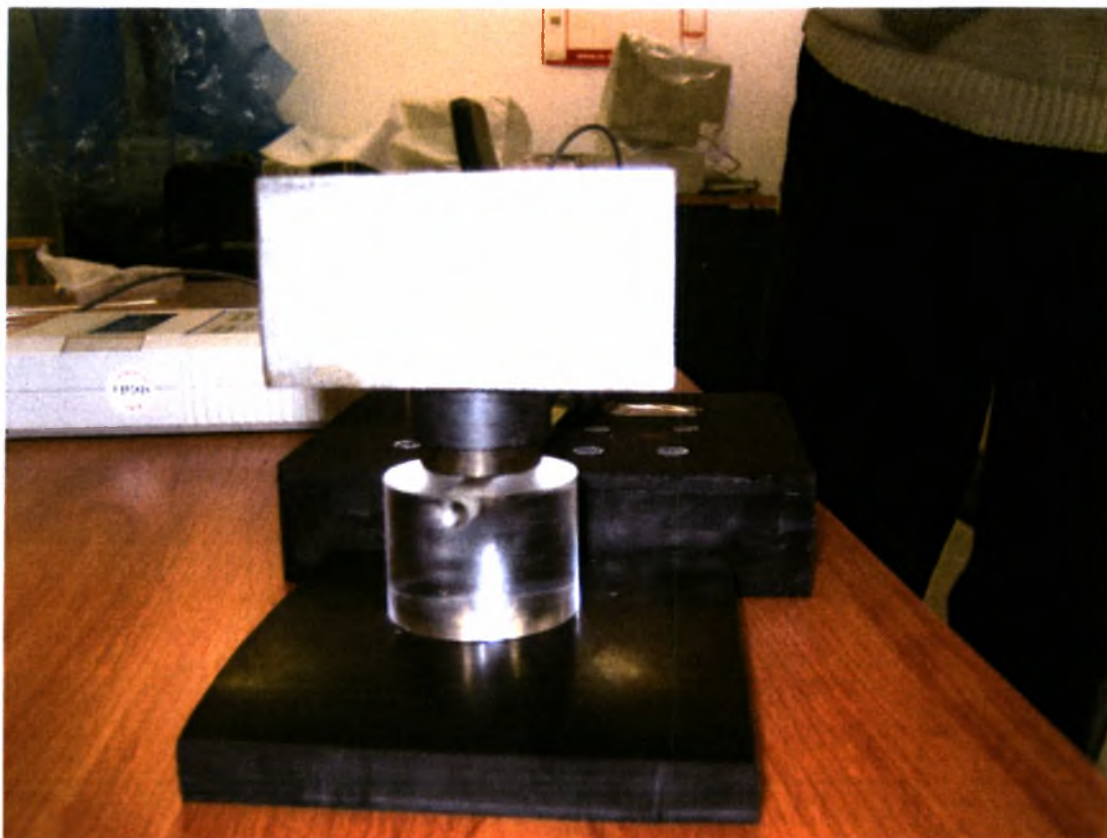
Εικόνα 6: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



Εικόνα 7: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



Εικόνα 8: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής



Εικόνα 9: Αναστάσιος Ζ. Παρμακλής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των δύο προηγούμενων κεφαλαίων (II & III), διαπιστώνονται κυρίως οι πολλές ομοιότητες μεταξύ των δύο φαινομένων (πιεζοηλεκτρισμός – πιεζομαγνητισμός). Πέρα όμως από τις σημαντικές ομοιότητες υπάρχουν και εξίσου σημαντικές διαφορές. Στα συμπεράσματα που ακολουθούν συνοψίζονται όλες οι ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των δύο φαινομένων.

- Η πορεία επίλυσης του προβλήματος διείσδυσης ακολουθεί ακριβώς την ίδια πορεία και στα δύο φαινόμενα.
- Παρόλο που τα δύο φαινόμενα ακολουθούν την ίδια πορεία επίλυσης, ο πιεζοηλεκτρισμός έχει μία ομάδα λύσεων ενώ στον πιεζομαγνητισμό υπάρχουν περισσότερες. Από φυσικής άποψης ο λόγος της διαφοροποίησης αυτής είναι ότι η ανισοτροπία στα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι πιο έντονη από ότι στα πιεζομαγνητικά, η οποία και ορίζει μόνο μία ομάδα λύσεων. Από την άλλη, στα πιεζομαγνητικά υλικά η λιγότερο έντονη ανισοτροπία καθιστά το υλικό «λιγότερο δεσμευμένο» και του επιτρέπει να έχει περισσότερες ομάδες λύσεων για το συγκεκριμένο πρόβλημα.
- Τα δύο φαινόμενα είναι φαινόμενα σύζευξης δύο διαφορετικών φυσικών ιδιοτήτων του υλικού, στον πιεζοηλεκτρισμό υπάρχει σύζευξη των μηχανικών και των ηλεκτρικών ιδιοτήτων του υλικού και στον πιεζομαγνητισμό των μηχανικών και των μαγνητικών ιδιοτήτων. Η σύζευξη αυτή προκαλεί και στα δύο φαινόμενα αύξηση της ακαμψίας του υλικού, η οποία μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.
- Σε θέματα εφαρμογών και οι δύο θεωρίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο στη μικρο κλίμακα όσο και στη νάνο κλίμακα. Τέλος οι θεωρίες αυτές βρίσκουν εφαρμογή στον ποιοτικό έλεγχο των πιεζοηλεκτρικών και πιεζομαγνητικών υλικών (μη καταστροφικές μέθοδοι ποιοτικού ελέγχου).
- Συνδυασμένη ανάλυση με πειράματα μπορούν να καταλήξουν σε προσέγγιση σταθερών του υλικού όπου δεν υπάρχουν δεδομένα ή είναι δύσκολη η μέτρησή τους με πιο κλασικά πειράματα.
- Η επίδραση της θερμοκρασίας και της ποσόστωσης των πιεζομαγνητικών κραμάτων είναι εύκολο να ανιχνευτούν με την παρούσα μεθοδολογία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] C.M. van der Burgt, Dynamical physical parameters of the magnetostrictive excitation of extensional and torsional vibrations in ferrites, Philips Res. Rep., 8, 91-132, 1953.
- [2] A.E. Clark, “Magnetostrictive Rare Earth – Fe₂ Compounds”, Ferromagnetic Materials, vol.1, chapter 7, North – Holland Publishing Company, pp. 531-589, 1980.
- [3] A.E. Clark, J.P. Teter, M. Wun-Fogle, M. Moffet and J. Lindberg, “Magnetomechanical coupling in Bridgman-growth Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.9} at high drive levels”, Journal of Applied Physics, vol.67, No.9, pp. 5007-5009, 1990.
- [4] M.J. Dapino, F.T. Calkins, A.B. Flatau and D.L. Hall, “Measured Terfenol-D material properties under varied applied magnetic field levels”, SPIE, Vol. 2717, pp. 697-708, 1996.
- [5] M.J. Dapino, A.B. Flatau, and F.T. Calkins, “Statistical analysis of Terfenol-D material properties”, SPIE, Vol. 3041, 1997.
- [6] N. Galloway, R.D. Greenough, A.G. Jenner and M.P. Schulze, “Pressure dependencies of magnetostrictive strain and d coefficient in Terfenol-D after thermal or magnetic annealing”, Journal of Applied Physics, Vol. 76, No. 10, pp. 7163-7165, 1994.
- [7] A.E. Giannakopoulos and S. Suresh, “Theory of Indentation of Piezoelectric Materials”, Acta Materialia, Vol. 47, No. 7, pp. 2153-2164, 1999.
- [8] R.D. Greenough and A.D. Wharton, “Methods and techniques to characterize Terfenol-D”, Journal of Alloys and Compounds, 258, pp. 114-117, 1997.
- [9] J.H. Huang and W-S Kuo, “The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusions”, Journal of Applied Physics, Vol. 81, No. 3, 1997.
- [10] IEEE Standards Committee, “IEEE Standard on Magnetostrictive Materials: Piezomagnetic Nomenclature”, Standard 319, IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control Society, 1990.
- [11] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, 1962.
- [12] K.S. Kannan and A. Dasgupta, “A nonlinear Galerkin finite-element theory for modeling magnetostrictive smart structures”, Smart Mater. Struct., Vol. 6, pp. 341-350, 1997, UK.
- [13] M. Labardi, C. Polop, V. Likodimos, L. Pardi, M. Allegrini, E. Vasco and C. Zaldo, “Surface deformation and ferroelectric domain switching induced by a force microscope tip on La-modified PbTiO₃ thin film”, Applied Physics Letters, Vol. 83, No. 10, pp. 2028-2030, 2003.

- [14] W.P. Mason (1966) *Crystal Physics of Interaction Processes*, Academic Press, New York and London.
- [15] M.B. Moffet, A.E. Clark, M. Wun-Fogle, J. Linberg, J.P. Teter, and E.A. McLaughlin, "Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 89, No. 3, 1991.
- [16] Ch.V. Mohan, "Detailed magnetostriction and magnetomechanical studies on aluminium substituted alloy", *Journal of Alloys and Compounds*, 238, pp. 86-89, 1996.
- [17] R.E. Newnham, "Molecular Mechanisms in Smart Materials", *MRS Bulletin*, pp. 20-34, 1997.
- [18] B. Noble (1963), "The solution of Bessel functions dual integral equations by a multiplying-factor method", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 59, No. 351, Great Britain.
- [19] D.T. Peterson, J.D. Verhoeven, O.D. McMasters and W.A. Spitzig, "Strength of Terfenol-D", *Journal of Applied Physics*, Vol. 65, No. 9, pp. 3712-3713, 1989.
- [20] H.E. Pettermann and S. Suresh, "A Comprehensive Unit Cell Model: Study of Coupled Effects in Piezoelectric 1-3 Composites", *International Journal of Solids and Structures*, 1999, in press.
- [21] K. Prajapati, R.D Greenough and A.G. Jenner, "Device oriented Magnetoelastic properties of $Tb_x Dy_{1-x} Fe_{1.95}$ ($x = 0.27, 0.3$) at elevated temperatures", *Journal of Applied Physics*, Vol. 76, No. 10, pp. 7154-7156, 1994.
- [22] K. Prajapati, A.G. Jenner and R.D Greenough, "Magnetoelastic Behaviour Of Aluminium Substituted Terfenol-D at Elevated Temperatures", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 6, pp. 3976-3978, 1995.
- [23] U. Ramamurty, S. Sridhar, A.E. Giannakopoulos and S. Suresh, " An Experimental Study of Spherical Indentation on Piezoelectric Materials", *Acta Materialia*, Vol. 47, No. 8, pp. 2417-2430, 1999.
- [24] I.M. Reed, R.D. Greenough and A.G. Jenner, "Frequency Dependence Of The Piezomagnetic Strain Coefficient", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 6, pp. 4038-4040, 1995.
- [25] J. Ryu, S. Priya, A.V. Carazo, K. Uchino, and H-E Kim, "Effect of the Magnetostrictive Layer on Magnetoelectric Properties in Lead Zirconate Titanate/Terfenol-D Laminate Composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 84, No. 12, pp. 2905-908, 2001.
- [26] A. Saigal, A.E. Giannakopoulos, H.E. Pettermann and S. Suresh, " Electrical Response During Indentation of a 1-3 Piezoelectric Ceramic-Polymer Composite", *Journal of Applied Physics*, Vol. 86, No. 1, pp. 603-606, 1999.

- [27] M.P. Schulze, R.D. Greenough and N. Galloway, "The Stress Dependence of k_{33} , d_{33} , λ and μ in $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.95}$ ", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 5, pp. 3159-3161, 1992.
- [28] I.N. Sneddon, The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, New York, 1972.
- [29] S. Sridhar, A.E. Giannakopoulos and S. Suresh, "Mechanical and Electrical Responses of Piezoelectric Solids to Conical Indentation", MIT Report P-3-99, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1999.
- [30] S. Sridhar, A.E. Giannakopoulos, S. Suresh and U. Ramamurty, "Electrical Response During Indentation of Piezoelectric Materials: A New Method for Material Characterization", Journal of Applied Physics, Vol. 85, No. 1, pp. 380-387, 1999.
- [31] E. du Trémolet de Lacheisserie, Magnetostriction Theory and Application of Magnetoelasticity, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
- [32] M. Wada, H. Uchida and H. Kaneko, "Effect of substrate temperature on the microstructure and magnetostrictive characteristics of the $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$ film", Journal of Alloys and Compounds, 258, pp. 143-148, 1997.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel

Μετασχηματισμοί Hankel

$$\bar{\varphi}_\nu(\rho) = H_\nu[\varphi(r); \rho]$$

$$\varphi(r) = H_\nu[\bar{\varphi}_\nu(\rho); r]$$

$$\bar{f}_\nu(\xi) = H_\nu[f(x); \xi] = \int_0^\infty f(x) x J_\nu(\xi x) dx$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel

$$H_\nu[f(ax); \xi] = a^{-2} H_\nu[f(x); \xi/a]$$

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad \& \quad J'_0(x) = -J_1(x)$$

$$H_\nu[x^{-1}f(x); \xi] = \frac{\xi}{2\nu} \{\bar{f}_{\nu-1}(\xi) + \bar{f}_{\nu+1}(\xi)\}$$

$$H_\nu[f(x-a)G(x-a); \xi] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \bar{f}_m(\xi) \quad \text{όπου} \quad a_m = \frac{a\xi}{2(\nu-m)} \left[\frac{\nu+1}{m+1} J_{\nu-m-1}(a\xi) + \frac{\nu-1}{m-1} J_{\nu-m+1}(a\xi) \right]$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel παραγώγων 1^{ης} τάξης

$$H_\nu[x^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial x} \{x^{1-\nu} f(x)\}; \xi] = -\xi H_{\nu-1}[f(x); \xi]$$

$$H_1[f'(x); \xi] = -\xi H_0[f(x); \xi]$$

$$H_\nu[x^{-\nu-1} \frac{\partial}{\partial x} \{x^{\nu+1} f(x)\}; \xi] = \xi H_{\nu+1}[f(x); \xi]$$

$$H_0\left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \{x f(x)\}; \xi\right] = \xi H_1[f(x); \xi]$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel παραγώγων 2^{ης} τάξης

$$B_\nu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu^2}{x^2}$$

$$H_\nu[B_\nu\{f(x)\}; \xi] = -\xi^2 H_\nu[f(x); \xi]$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel παραγώγων 2^{ης} τάξης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$H_\nu[\Delta_3\{f(x, z)\} e^{i\nu\theta}; x \rightarrow \xi] = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \bar{f}_\nu(\xi, z) e^{i\nu\theta}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών Hankel παραγώγων 2^{ης} τάξης σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα

$$\Delta_a = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$H_0[\Delta_a\{f(x, z)\}; x \rightarrow \xi] = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \bar{f}_0(\xi, z)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

“The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials”

A. E. Giannakopoulos and A. Z. Parmaklis

The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials

A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

*Laboratory for Strength of Materials and Micromechanics,
Department of Civil Engineering,
University of Thessaly,
Volos 38336, Greece*

Abstract

In this project a general theory for the axisymmetric indentation of piezomagnetic solids by a flat rigid punch is presented within the context of fully coupled linear model, in the absence of friction or adhesion. It is shown that the coupling has a significant effect on the indentation force and the magnetic flux through the contact area. In addition, an experiment on the material Terfenol-D was carried out to confirm the theoretical results.

Key words: piezomagnetic materials, contact mechanics, Terfenol-D

Introduction

Piezomagnetism considers the coupling between magnetic and mechanical phenomena and may appear in almost all ferromagnetic materials which exist as single crystals, isotropic polycrystalline metals, or ceramic materials, Mason (1966). Technologically important magnetostrictive materials are rare earth alloys with iron, cobalt and nickel. Terfenol-D is a highly piezomagnetic alloy of the rare earth elements terbium and dysprosium ($Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$) and is an important magnetostrictive material due to its high magnetostriction and coupling constants. Piezomagnetism is used in many technologically important applications such as head recorders, sensors, micro-electro-mechanical systems (MEMS), atomic microscopes etc and is important in tribology.

To a first approximation, piezomagnetism can be modeled as a linear magnetomechanical effect, analogous to the linear electromechanical effect of piezoelectricity. In the case of piezoelectricity most of the effective piezoelectric constants are due to the piezoelectric effects in the individual crystals and only a smaller amount are due to the motion of the domain walls. Since piezomagnetism has not been demonstrated for a single-domain ferromagnetic crystal, all of the effect must be due to domain-wall motion. It has been shown that a true piezomagnetic effect is possible in 29 of the 32 crystal classes.

Polycrystalline materials, which are macroscopically isotropic when unpolarized, become anisotropic with transverse isotropy or rotary symmetry about the direction of the induced macroscopic polarization vector. This magnetic polarization vector defines one material direction uniquely. The z-axis is chosen for this direction and is taken as the polar axis of axisymmetry in both mechanical and magnetic response.

Based on contact mechanics, indentation is a simple experiment, which can be used to assess the strength of the magnetization of a piezomagnetic material (a non destructive method of quality control). In brief, contact induces an alteration in stress ($\delta\sigma_{zz}$), which in turn causes an alteration in the magnetic flux density (δB_z) and

vice versa. The present work examines the quasistatic contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials.

Basic equations of axisymmetric piezomagnetic body

In the absence of body and inertia forces, the equilibrium equations for the axisymmetric problems of piezomagnetic body can be expressed in the cylindrical coordinates $\{r, \theta, z\}$ as:

$$\begin{aligned} & \text{Direction: } r \\ & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Direction: } z \\ & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Maxwell magnetostatic equation

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

where σ_{ij} and B_i are the stress and magnetic flux density, respectively (Fig. 1 shows the overall geometry of the problem). Equation (3) implies conservation of the magnetic flux.

The constitutive equations of linear, transversely isotropic piezomagneticity can be summed up as, IEEE standard 319 (1990):

$$\begin{Bmatrix} \delta\sigma_{rr} \\ \delta\sigma_{\theta\theta} \\ \delta\sigma_{zz} \\ \delta\sigma_{rz} \\ \delta B_r \\ \delta B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^H & C_{12}^H & C_{13}^H & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{12}^H & C_{11}^H & C_{13}^H & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{13}^H & C_{13}^H & C_{33}^H & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^H & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & -\mu_{11}^\varepsilon & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & -\mu_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{rr} \\ \delta\varepsilon_{\theta\theta} \\ \delta\varepsilon_{zz} \\ \delta\gamma_{rz} \\ -\delta H_r \\ -\delta H_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where C_{ij}^H (at constant magnetic field $\{H_r, H_z\}$), e_{ij} and μ_{ij}^ε (at constant strain ε) are elastic, piezomagnetic and permeability constants, respectively, Mason (1966). Note the small variation symbol “ δ ”. The elastic constants have only positive values. The piezomagnetic constants show the interaction between the elastic and the magnetic properties of the material and can have either positive or negative values. For all paramagnetic crystals and for ferromagnetic crystals at low magnetic field strengths, the permeability constants can be described from the relation $\mu_{ij}^\varepsilon = \mu_0 (\delta_{ij} + \psi_{ij})$, where ψ_{ij} are constants called magnetic susceptibilities and μ_0 is the permeability of the

vacuum $\left\{ \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right) \right\}$. It can be proved from the form of the magnetic energy

that $\mu_{ij}^\varepsilon = \mu_{ji}^\varepsilon$. A crystal is said to be paramagnetic along one of the principal axes, if ψ

is positive for this particular axis and diamagnetic, if ψ is negative along this axis. The principal susceptibilities of such crystals are in the order of $+10^{-5}$ and -10^{-5} respectively. Modern ferromagnetic materials have susceptibilities up to 10^6 . All magnetostrictive constants depend on the magnetic field, however we will assume a dominant magnetic field that is applied by inserting the substrate in a coil or attaching to the substrate a permanent magnet.

The poling direction is assumed in this work to be along the z-direction. We will also assume that the material has no free currents and the strains are small. The strain and magnetic fields are given by the geometric equations and the Gauss equations, respectively, as:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ H_r &= -\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}, \quad H_z = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

where u_r and w are displacements in the r and z directions respectively and Φ_m is the magnetic potential. These principal variables of the problem are functions of r and z . The existence of Φ_m implies $\nabla \times \tilde{H} = 0$, Jackson (1962), which is a particular form of Ampere's circuital law and assumes that no currents are developed in the material.

Substituting firstly the geometric and the Gauss equations into the constitutive equations and then the substituted constitutive equations into the governing equilibrium equations, we obtain the equilibrium equations in terms of the principal quantities (u_r, w, Φ_m):

$$\begin{aligned} C_{11}^H \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + C_{44}^H \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (C_{13}^H + C_{44}^H) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r \partial z} &= 0 \\ (C_{13}^H + C_{44}^H) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + C_{44}^H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + C_{33}^H \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_{15} \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} &= 0 \\ (e_{15} + e_{31}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{15} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \mu_{11}^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) - \mu_{33}^\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Following a similar approach with Giannakopoulos and Suresh (1999), the Hankel transforms are used to transform this complicated system of partial differential equations into a simpler one of ordinary differential equations with respect to z . The Hankel integral transform pair is defined as:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\xi, z) &= \int_0^\infty F(r, z) r J_\nu(\xi r) dr \\ F(r, z) &= \int_0^\infty \bar{F}(\xi, z) \xi J_\nu(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

where J_ν is the 1st kind Bessel's function of order ν .

The transformed linear system can be written as:

$$\begin{aligned}
C_{44}^H \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2} - C_{11}^H \xi^2 \bar{u}_r - (C_{13}^H + C_{44}^H) \xi \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - (e_{15} + e_{31}) \xi \frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial z} &= 0 \\
(C_{13}^H + C_{44}^H) \xi \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + C_{33}^H \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - C_{44}^H \xi^2 \bar{w} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_m}{\partial z^2} - e_{15} \xi^2 \bar{\Phi}_m &= 0 \\
(e_{15} + e_{31}) \xi \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - e_{15} \xi^2 \bar{w} - \mu_{33}^\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_m}{\partial z^2} + \mu_{11}^\varepsilon \xi^2 \bar{\Phi}_m &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

where the transformed principal variables are:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(\xi, z) &= \int_0^\infty u_r(r, z) r J_1(\xi r) dr \\
\bar{w}(\xi, z) &= \int_0^\infty w(r, z) r J_0(\xi r) dr \\
\bar{\Phi}_m(\xi, z) &= \int_0^\infty \Phi_m(r, z) r J_0(\xi r) dr
\end{aligned} \tag{9}$$

For a semi-infinite space ($z \geq 0$), the conditions at infinity define the type of the system's solutions. The conditions which must be satisfied when $\sqrt{z^2 + r^2} \rightarrow \infty$ are $u_r, w, \Phi_m \rightarrow 0$. So the solutions can be described as:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(\xi, z) &= \hat{u}_r(\xi) e^{-\kappa \xi z} \\
\bar{w}(\xi, z) &= \hat{w}(\xi) e^{-\kappa \xi z} \\
\bar{\Phi}_m(\xi, z) &= \hat{\Phi}_m(\xi) e^{-\kappa \xi z}
\end{aligned} \tag{10}$$

and the conditions at infinity impose that the κ coefficient can be real or complex but not imaginative.

Substituting the eigenfunctions (10) into (8), a system can be formed as:

$$[a_{ij}] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_r(\xi) \\ \hat{w}(\xi) \\ \hat{\Phi}_m(\xi) \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{11}$$

where

$$\begin{aligned}
a_{11} &= C_{44}^H \kappa^2 - C_{11}^H, \quad a_{12} = -a_{21} = (C_{13}^H + C_{44}^H) \kappa, \quad a_{13} = -a_{31} = (e_{31} + e_{15}) \kappa \\
a_{22} &= C_{33}^H \kappa^2 - C_{44}^H, \quad a_{23} = a_{32} = e_{33} \kappa^2 - e_{15}, \quad a_{33} = \mu_{11}^\varepsilon - \mu_{33}^\varepsilon \kappa^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

The κ coefficient is defined from the characteristic equation $\det[a_{ij}] = 0$. This condition is indispensable because of the absence of singularity of the solutions. The characteristic equation, a bi-cubic equation with real coefficients, has six roots. The

problem itself (material coefficients) and the conditions at infinity define that these six roots can be distinguished in the following categories, provided that the condition $(C_{44}^H \mu_{11}^E + e_{15}^2) \cdot (C_{33}^H \mu_{33}^E + e_{33}^2) > 0$ is satisfied. Four cases are then meaningful for the problem:

- I. 6 real roots $\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3$ ($k_i > 0$)
- II. 2 real roots $\pm k_1$ and 4 imaginative roots $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($k_1, \omega_i > 0$)
- III. 2 real roots $\pm k_1$ and 4 complex roots $\pm \delta \pm i\omega$ ($k_1, \delta, \omega > 0$)
- IV. 2 imaginative roots $\pm i\omega_1$ and 4 complex roots $\pm \delta \pm i\omega$ ($\omega_1, \delta, \omega > 0$).

It can be inferred that the κ number depends on the material's coefficients and has a crucial role in the development of the solution. In each case only the roots with positive real part are accepted. So there are four kinds of solutions, one for each of the above problem case. Which of the four cases is applicable has to do with the particular constants of the piezomagnetic material and the constants depend on the background magnetic field. Using real piezomagnetic material properties under realistic magnetic fields, we conclude that all four cases are possible (see Tables 1, 2 and 4 in the sequence). This outcome is substantially different from the predictions of the piezoelectric analysis where material data imply case III only.

From the transformed system results the following relationship, which defines the final form of the transformed solutions.

$$A_i(\xi) = \frac{\hat{u}_r(\xi)}{\alpha} = \frac{\hat{w}(\xi)}{\beta} = \frac{\hat{\Phi}_m(\xi)}{\gamma} \quad (13)$$

where $\alpha = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, $\beta = -a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}$, $\gamma = a_{11}a_{22} + a_{12}^2$.

The solution for each case can be represented as:

$$\text{I. } \begin{cases} \overline{u_r(\xi, z)} \\ \overline{w(\xi, z)} \\ \overline{\Phi_m(\xi, z)} \end{cases} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} A_i(\xi) e^{-k_i \xi z}, \quad \text{where } \begin{cases} \alpha_i = \alpha(k_i) \\ \beta_i = \beta(k_i) \\ \gamma_i = \gamma(k_i) \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{II. } \begin{cases} \overline{u_r(\xi, z)} \\ \overline{w(\xi, z)} \\ \overline{\Phi_m(\xi, z)} \end{cases} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z}, \quad \text{where } \begin{cases} \alpha_1 = \alpha(k_1) \\ \beta_1 = \beta(k_1) \\ \gamma_1 = \gamma(k_1) \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{III. } \begin{cases} \overline{u_r(\xi, z)} \\ \overline{w(\xi, z)} \\ \overline{\Phi_m(\xi, z)} \end{cases} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{21} + i\alpha_{22} \\ \beta_{21} + i\beta_{22} \\ \gamma_{21} + i\gamma_{22} \end{bmatrix} [A_2(\xi) + iA_3(\xi)] e^{-(\delta+i\omega)\xi z} \right\},$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha(k_1) & \alpha_{21} + i\alpha_{22} &= \alpha(\delta + i\omega) \\ \text{where } \beta_1 &= \beta(k_1), & \beta_{21} + i\beta_{22} &= \beta(\delta + i\omega) \\ \gamma_1 &= \gamma(k_1) & \gamma_{21} + i\gamma_{22} &= \gamma(\delta + i\omega) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\text{IV. } \left\{ \begin{array}{l} \overline{u_r}(\xi, z) \\ \overline{w}(\xi, z) \\ \overline{\Phi_m}(\xi, z) \end{array} \right\} &= \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} + i\alpha_{12} \\ \beta_{11} + i\beta_{12} \\ \gamma_{11} + i\gamma_{12} \end{array} \right\} [A_1(\xi) + iA_2(\xi)] e^{-(\delta+i\omega)\xi z}, \\
\alpha_{11} + i\alpha_{12} &= \alpha(\delta + i\omega) \\
\text{where } \beta_{11} + i\beta_{12} &= \beta(\delta + i\omega) \\
\gamma_{11} + i\gamma_{12} &= \gamma(\delta + i\omega)
\end{aligned} \tag{17}$$

The functions $A_i(\xi)$ have to be determined from the boundary conditions. Applying inverse Hankel integral transforms, the general solutions of the system satisfying the conditions at infinity can be given in the form:

$$\begin{aligned}
\text{I. } u_r(r, z) &= \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \alpha_2 A_2(\xi) e^{-k_2 \xi z} + \alpha_3 A_3(\xi) e^{-k_3 \xi z}] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, z) &= \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \beta_2 A_2(\xi) e^{-k_2 \xi z} + \beta_3 A_3(\xi) e^{-k_3 \xi z}] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, z) &= \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \gamma_2 A_2(\xi) e^{-k_2 \xi z} + \gamma_3 A_3(\xi) e^{-k_3 \xi z}] J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{18}$$

The solution at the surface ($z = 0$) is:

$$\begin{aligned}
u_r(r, 0) &= \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) + \alpha_2 A_2(\xi) + \alpha_3 A_3(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, 0) &= \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) + \beta_2 A_2(\xi) + \beta_3 A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, 0) &= \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) + \gamma_2 A_2(\xi) + \gamma_3 A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\delta\sigma_{rz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_1 A_1(\xi) + m_2 A_2(\xi) + m_3 A_3(\xi)] \xi J_1(\xi r) d\xi \\
\delta\sigma_{zz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_4 A_1(\xi) + m_5 A_2(\xi) + m_6 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \\
\delta B_z(r, 0) &= \int_0^\infty [m_7 A_1(\xi) + m_8 A_2(\xi) + m_9 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= -C_{44}^H (\alpha_1 k_1 + \beta_1) - e_{15} \gamma_1 \\
m_2 &= -C_{44}^H (\alpha_2 k_2 + \beta_2) - e_{15} \gamma_2 \\
m_3 &= -C_{44}^H (\alpha_3 k_3 + \beta_3) - e_{15} \gamma_3 \\
m_4 &= C_{13}^H \alpha_1 - k_1 (C_{33}^H \beta_1 + e_{33} \gamma_1) \\
\text{where } m_5 &= C_{13}^H \alpha_2 - k_2 (C_{33}^H \beta_2 + e_{33} \gamma_2) \\
m_6 &= C_{13}^H \alpha_3 - k_3 (C_{33}^H \beta_3 + e_{33} \gamma_3) \\
m_7 &= e_{31} \alpha_1 - k_1 (e_{33} \beta_1 - \mu_{33}^E \gamma_1) \\
m_8 &= e_{31} \alpha_2 - k_2 (e_{33} \beta_2 - \mu_{33}^E \gamma_2) \\
m_9 &= e_{31} \alpha_3 - k_3 (e_{33} \beta_3 - \mu_{33}^E \gamma_3)
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\text{II. } u_r(r, z) &= \int_0^{\infty} [\alpha_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z}] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, z) &= \int_0^{\infty} [\beta_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z}] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, z) &= \int_0^{\infty} [\gamma_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z}] J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{21}$$

The solution at the surface ($z = 0$) is:

$$\begin{aligned}
u_r(r, 0) &= \int_0^{\infty} [\alpha_1 A_1(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, 0) &= \int_0^{\infty} [\beta_1 A_1(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, 0) &= \int_0^{\infty} [\gamma_1 A_1(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\delta\sigma_{rz}(r, 0) &= \int_0^{\infty} [m_1 A_1(\xi)] \xi J_1(\xi r) d\xi \\
\delta\sigma_{zz}(r, 0) &= \int_0^{\infty} [m_2 A_1(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \\
\delta B_z(r, 0) &= \int_0^{\infty} [m_3 A_1(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= -C_{44}^H (\alpha_1 k_1 + \beta_1) - e_{15} \gamma_1 \\
\text{where } m_2 &= C_{13}^H \alpha_1 - k_1 (C_{33}^H \beta_1 + e_{33} \gamma_1) \\
m_3 &= e_{31} \alpha_1 - k_1 (e_{33} \beta_1 - \mu_{33}^E \gamma_1)
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } u_r(r, z) &= \int_0^\infty \left[\alpha_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\alpha_{21} A_2(\xi) - \alpha_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_{22} A_2(\xi) + \alpha_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, z) &= \int_0^\infty \left[\beta_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\beta_{21} A_2(\xi) - \beta_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\beta_{22} A_2(\xi) + \beta_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (24) \\
\Phi_m(r, z) &= \int_0^\infty \left[\gamma_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\gamma_{21} A_2(\xi) - \gamma_{22} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_{22} A_2(\xi) + \gamma_{21} A_3(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned}$$

The solution at the surface ($z = 0$) is:

$$\begin{aligned}
u_r(r, 0) &= \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) + \alpha_{21} A_2(\xi) - \alpha_{22} A_3(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, 0) &= \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) + \beta_{21} A_2(\xi) - \beta_{22} A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, 0) &= \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) + \gamma_{21} A_2(\xi) - \gamma_{22} A_3(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\delta \sigma_{rz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_1 A_1(\xi) + m_2 A_2(\xi) + m_3 A_3(\xi)] \xi J_1(\xi r) d\xi \\
\delta \sigma_{zz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_4 A_1(\xi) + m_5 A_2(\xi) + m_6 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \\
\delta B_z(r, 0) &= \int_0^\infty [m_7 A_1(\xi) + m_8 A_2(\xi) + m_9 A_3(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= -C_{44}^H (\alpha_1 k_1 + \beta_1) - e_{15} \gamma_1 \\
m_2 &= -C_{44}^H (\delta \alpha_{21} - \omega \alpha_{22} + \beta_{21}) - e_{15} \gamma_{21} \\
m_3 &= C_{44}^H (\delta \alpha_{22} + \omega \alpha_{21} + \beta_{22}) + e_{15} \gamma_{22} \\
m_4 &= C_{13}^H \alpha_1 - k_1 (C_{33}^H \beta_1 + e_{33} \gamma_1) \\
\text{where } m_5 &= C_{13}^H \alpha_{21} - \delta (C_{33}^H \beta_{21} + e_{33} \gamma_{21}) + \omega (C_{33}^H \beta_{22} + e_{33} \gamma_{22}) \\
m_6 &= -C_{13}^H \alpha_{22} + \delta (C_{33}^H \beta_{22} + e_{33} \gamma_{22}) + \omega (C_{33}^H \beta_{21} + e_{33} \gamma_{21}) \\
m_7 &= e_{31} \alpha_1 - k_1 (e_{33} \beta_1 - \mu_{33}^E \gamma_1) \\
m_8 &= e_{31} \alpha_{21} - \delta (e_{33} \beta_{21} - \mu_{33}^E \gamma_{21}) + \omega (e_{33} \beta_{22} - \mu_{33}^E \gamma_{22}) \\
m_9 &= -e_{31} \alpha_{22} + \delta (e_{33} \beta_{22} - \mu_{33}^E \gamma_{22}) + \omega (e_{33} \beta_{21} - \mu_{33}^E \gamma_{21})
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\text{IV. } u_r(r, z) &= \int_0^\infty \left[(\alpha_{11} A_1(\xi) - \alpha_{12} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_{12} A_1(\xi) + \alpha_{11} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, z) &= \int_0^\infty \left[(\beta_{11} A_1(\xi) - \beta_{12} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\beta_{12} A_1(\xi) + \beta_{11} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, z) &= \int_0^\infty \left[(\gamma_{11} A_1(\xi) - \gamma_{12} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos(\omega \xi z) \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_{12} A_1(\xi) + \gamma_{11} A_2(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin(\omega \xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{27}$$

The solution at the surface ($z = 0$) is:

$$\begin{aligned}
u_r(r, 0) &= \int_0^\infty [\alpha_{11} A_1(\xi) - \alpha_{12} A_2(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \\
w(r, 0) &= \int_0^\infty [\beta_{11} A_1(\xi) - \beta_{12} A_2(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\Phi_m(r, 0) &= \int_0^\infty [\gamma_{11} A_1(\xi) - \gamma_{12} A_2(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \\
\delta \sigma_{rz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_1 A_1(\xi) + m_2 A_2(\xi)] \xi J_1(\xi r) d\xi \\
\delta \sigma_{zz}(r, 0) &= \int_0^\infty [m_3 A_1(\xi) + m_4 A_2(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi \\
\delta B_z(r, 0) &= \int_0^\infty [m_5 A_1(\xi) + m_6 A_2(\xi)] \xi J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= C_{44}^H (\omega \alpha_{12} - \delta \alpha_{11} - \beta_{11}) - e_{15} \gamma_{11} \\
m_2 &= C_{44}^H (\delta \alpha_{12} + \omega \alpha_{11} + \beta_{12}) + e_{15} \gamma_{12} \\
\text{where } m_3 &= C_{13}^H \alpha_{11} - \delta (C_{33}^H \beta_{11} + e_{33} \gamma_{11}) + \omega (C_{33}^H \beta_{12} + e_{33} \gamma_{12}) \\
m_4 &= -C_{13}^H \alpha_{12} + \delta (C_{33}^H \beta_{12} + e_{33} \gamma_{12}) + \omega (C_{33}^H \beta_{11} + e_{33} \gamma_{11}) \\
m_5 &= e_{31} \alpha_{11} - \delta (e_{33} \beta_{11} - \mu_{33}^E \gamma_{11}) + \omega (e_{33} \beta_{12} - \mu_{33}^E \gamma_{12}) \\
m_6 &= -e_{31} \alpha_{12} + \delta (e_{33} \beta_{12} - \mu_{33}^E \gamma_{12}) + \omega (e_{33} \beta_{11} - \mu_{33}^E \gamma_{11})
\end{aligned} \tag{29}$$

Boundary conditions are distinguished in mechanical and magnetic type.

The mechanical boundary conditions for a circular rigid flat punch with radius a are:

$$\begin{aligned}
w(r, 0) &= h \quad 0 \leq r \leq a \quad (\text{h is the indentation depth}) \\
\delta \sigma_{zz}(r, 0) &= 0 \quad r > a \\
\delta \sigma_{rz}(r, 0) &= 0 \quad r \geq 0 \quad (\text{absence of friction})
\end{aligned} \tag{30}$$

The magnetic boundary conditions are:

$$\begin{aligned}
\Phi_m(r, 0) &= \Phi_m^0 \quad 0 \leq r \leq a \\
\delta B_z(r, 0) &= 0 \quad r > a
\end{aligned} \tag{31}$$

Note that the mechanical and magnetic boundary conditions can be applied separately and the results can be superposed. Conditions (31) imply a non-conducting indenter with a very small permeability constant in comparison to that of the substrate. The general magnetic boundary conditions require that the normal component of the magnetic flux density B_z and the tangential component of the magnetic field H_r are continuous across the interface. The last condition, together with the condition that $\mu_{ind} \ll \mu_{11}^E$ (μ_{ind} is the magnetic permeability of the indenter), gives approximately $B_r \approx 0$, as eq. (31a) implies.

From the boundary conditions we obtain two pairs dual integral equations regarding eqs. (30a) and (30b),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A_i(\xi) J_0(\xi r) d\xi &= f_i(r) & 0 \leq r \leq a \\ \int_0^{\infty} A_i(\xi) \xi J_0(\xi r) d\xi &= g_i(r) & r > a \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (32)$$

and equation (30c) implies that $A_3(\xi) = -\frac{m_1}{m_3} A_1(\xi) - \frac{m_2}{m_3} A_2(\xi)$, provided that $m_3 \neq 0$.

According to Noble (1963) the solutions of the integral equations can be given as:

$$A_i(\xi) = \int_0^a \cos(x\xi) F_i(x) dx + \int_a^{\infty} \cos(x\xi) G_i(x) dx \quad (i = 1, 2) \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x f_i(r) \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \\ G_i(x) &= \int_x^{\infty} g_i(r) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \end{aligned} \quad (34)$$

The boundary conditions of a circular flat punch predict that $f_i(r)$ are constants (f_i) and that $g_i(r) = 0$ for all of the categories we distinguished before.

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3} & A_1(\xi) &= \pm f_1 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_1 &= \beta_1 - \beta_3 \frac{m_1}{m_3} \\ I. \quad f_2 &= \frac{M_3 h - M_1 \Phi_m^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4} & A_2(\xi) &= \pm f_2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, \text{ where} & M_2 &= \beta_2 - \beta_3 \frac{m_2}{m_3} \\ f_3 &= -f_1 \frac{m_1}{m_3} - f_2 \frac{m_2}{m_3} & A_3(\xi) &= \pm f_3 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_3 &= \gamma_1 - \gamma_3 \frac{m_1}{m_3} \\ & & & & M_4 &= \gamma_2 - \gamma_3 \frac{m_2}{m_3} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{h}{\beta_1} \\ II. \quad \text{or} & & A_1(\xi) &= \pm f_1 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \\ f_1 &= \frac{\Phi_m^0}{\gamma_1} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } f_1 &= \frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3} & A_1(\xi) &= \pm f_1 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_1 &= \beta_1 + \beta_{22} \frac{m_1}{m_3} \\
f_2 &= \frac{M_3 h - M_1 \Phi_m^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4} & A_2(\xi) &= \pm f_2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, \text{ where} & M_2 &= \beta_{21} + \beta_{22} \frac{m_2}{m_3} \\
f_3 &= -f_1 \frac{m_1}{m_3} - f_2 \frac{m_2}{m_3} & A_3(\xi) &= \pm f_3 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_3 &= \gamma_1 + \gamma_{22} \frac{m_1}{m_3} \\
& & & & M_4 &= \gamma_{21} + \gamma_{22} \frac{m_2}{m_3}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV. } f_1 &= \frac{h}{M_1} & A_1(\xi) &= \pm f_1 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & M_1 &= \beta_{11} + \beta_{12} \frac{m_1}{m_2} \\
\text{or } f_2 &= -f_1 \frac{m_1}{m_2} & A_2(\xi) &= \pm f_2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, \text{ where} & M_2 &= \gamma_{11} + \gamma_{12} \frac{m_1}{m_2} \\
f_1 &= \frac{\Phi_m^0}{M_2} & & & &
\end{aligned} \tag{38}$$

Note: In cases II and IV the constant f_1 should be determined either from the first relation or the second one and not be combined with each other. The first relation is used when the mechanical boundary condition is given (and not the magnetic one) and the second relation only if the magnetic boundary condition is given (and not the mechanical one). In these cases, the mechanical and the magnetic boundary condition can be solved separately and their results can be superposed.

As we can see, $A_i(\xi)$ have 2 equal and opposite values from which we accept the ones that give positive external work $\left(\frac{P h + \Phi \Phi_m^0}{2} \geq 0 \right)$, where P is the total applied force and Φ is the total magnetic flux (see eqs. (44) and (45) respectively).

Final results

The forms of the solutions are the same for all categories, they differ from each other in the constants $u_{r0}, \sigma_{zz0}, B_{z0}$. Figure 2 shows the spatial shapes of the solutions at the surface. We summarize the analytic results in the following forms:

$$u_r(r,0) = \begin{cases} u_{r0} \frac{a}{r} & r \geq a \\ u_{r0} \frac{r}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} & r \leq a \end{cases} \tag{39}$$

$$w(r,0) = \begin{cases} \frac{2 h}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) & r \geq a \\ h & r \leq a \end{cases} \tag{40} \quad \Phi_m(r,0) = \begin{cases} \frac{2 \Phi_m^0}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) & r \geq a \\ \Phi_m^0 & r \leq a \end{cases} \tag{41}$$

$$\delta\sigma_{zz}(r,0) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \rightarrow \infty & r = a \\ \sigma_{zz0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & r < a \end{cases} \tag{42} \quad \delta B_z(r,0) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \rightarrow \infty & r = a \\ B_{z0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & r < a \end{cases} \tag{43}$$

The applied indentation force P and the total magnetic flux Φ for a circular flat punch of radius a can be obtained as:

$$P = -\int_0^a \delta\sigma_{zz} 2\pi r dr = -2\pi \sigma_{zz0} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = -2\pi a \sigma_{zz0} \quad (44)$$

$$\Phi = \pm \int_0^a \delta B_z 2\pi r dr = \pm 2\pi B_{z0} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \pm 2\pi a B_{z0} \quad (45)$$

In eq. (45) the sign \pm depends on whether the surface is magnetized as “North” or “South”.

The constants u_{r0} , h , Φ_m^0 , σ_{zz0} , B_{z0} for each of the four problem cases we defined in the previous section are:

$$\begin{aligned} & u_{r0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i & u_{r0} &= \alpha_1 f_1 \\ & h = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^3 \beta_i f_i & h &= \frac{\pi}{2} \beta_1 f_1 \\ \text{I. } & \Phi_m^0 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^3 \gamma_i f_i & \text{II. } & \Phi_m^0 = \frac{\pi}{2} \gamma_1 f_1 \\ & \sigma_{zz0} = \sum_{i=1}^3 m_{(i+3)} f_i & & \sigma_{zz0} = m_2 f_1 \\ & B_{z0} = \sum_{i=1}^3 m_{(i+6)} f_i & & B_{z0} = m_3 f_1 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & u_{r0} = \alpha_1 f_1 + \alpha_{21} f_2 - \alpha_{22} f_3 & u_{r0} &= \alpha_{11} f_1 - \alpha_{12} f_2 \\ & h = \frac{\pi}{2} (\beta_1 f_1 + \beta_{21} f_2 - \beta_{22} f_3) & h &= \frac{\pi}{2} (\beta_{11} f_1 - \beta_{12} f_2) \\ \text{III. } & \Phi_m^0 = \frac{\pi}{2} (\gamma_1 f_1 + \gamma_{21} f_2 - \gamma_{22} f_3) & \text{IV. } & \Phi_m^0 = \frac{\pi}{2} (\gamma_{11} f_1 - \gamma_{12} f_2) \\ & \sigma_{zz0} = \sum_{i=1}^3 m_{(i+3)} f_i & & \sigma_{zz0} = \sum_{i=1}^2 m_{(i+2)} f_i \\ & B_{z0} = \sum_{i=1}^3 m_{(i+6)} f_i & & B_{z0} = \sum_{i=1}^2 m_{(i+4)} f_i \end{aligned} \quad (48) \quad (49)$$

Numerical results

From the two different expressions of the constitutive equations of piezomagnetism can be inferred the following relations between the material's coefficients which will be useful in our effort of collecting data for piezomagnetic materials.

$$\begin{aligned} \{\delta\sigma\} &= [C^H] \cdot \{\delta\varepsilon\} - [e]^T \cdot \{\delta H\} & \{\delta\varepsilon\} &= [S^H] \cdot \{\delta\sigma\} + [d]^T \cdot \{\delta H\} \\ \{\delta B\} &= [e] \cdot \{\delta\varepsilon\} + [\mu^\varepsilon] \cdot \{\delta H\} & \{\delta B\} &= [d] \cdot \{\delta\sigma\} + [\mu^\sigma] \cdot \{\delta H\} \end{aligned} \quad \& \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
[C^H] &= [S^H]^{-1} \\
[e] &= [d] \cdot [C^H] \\
[\mu^\varepsilon] &= [\mu^\sigma] - [d] \cdot [C^H] \cdot [d]^T
\end{aligned} \tag{51}$$

where C_{ij}^H & S_{ij}^H (at constant magnetic field H), e_{ij} & d_{ij} and μ_{ij}^ε & μ_{ij}^σ (at constant strain ε or at constant stress σ) are elastic, piezomagnetic and permeability constants, respectively, Mason (1966). In addition, $\delta\sigma_{ij}$, $\delta\varepsilon_{ij}$, δB_i , δH_i are the alterations in stress, in strain, in magnetic flux density and in magnetic field, respectively. In our case the initial stress is zero. For a cubic crystal system $d_{31} = d_{32} \cong -0.5 d_{33}$, $d_{15} = 0$.

It is difficult to find a complete set of all the coefficients of most piezomagnetic materials in bibliography. The data we used come from different sources which may be inconsistent and hence give wrong final results. Especially the permeability in the radial direction (μ_{11}^ε or μ_{11}^σ) is not given anywhere, so to overcome this difficulty we decided to solve the problem parametrically, assuming that $\left(\mu_{11}^\varepsilon = \mu_{33}^\varepsilon, \mu_{11}^\sigma = \frac{1}{2}\mu_{33}^\sigma, \mu_{11}^\sigma = \frac{3}{2}\mu_{33}^\sigma\right)$, satisfying of course the condition $(C_{44}^H \mu_{11}^\varepsilon + e_{15}^2) \cdot (C_{33}^H \mu_{33}^\varepsilon + e_{33}^2) > 0$. In the present work, we focused on Terfenol-D.

Because of the lack and the uncertainty of the coefficients of Terfenol-D, we grouped the data from different sources (van der Burgt (1953), Dapino et al (1997), Kannan and Dasgupta (1997), Moffet et al (1991) and Ryu et al (2001)) in six examples, which all have the same elastic coefficients and differ in the piezomagnetic and permeability constants. In each example the uncoupled results are shown too, revealing the effect of the coupling phenomenon. In all examples, the magnetic boundary condition is taken as $\Phi_m^0 = 0$. Note that the material symmetry implies

(approximately) $e_{31} = -\frac{e_{33}}{2}$, Kannan and Dasgupta (1997). Regarding units, we

remind that $1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}}$.

The axisymmetry defines the form of the following elasticity matrix:

$$[C_{ij}^H] = \begin{pmatrix} 107 & 74.8 & 82.1 & 0 & 0 & 0 \\ 74.8 & 107 & 82.1 & 0 & 0 & 0 \\ 82.1 & 82.1 & 98.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.1 \end{pmatrix} \text{ (GPa)} \tag{52}$$

We examined three cases with data given in Table 1 and the elasticity matrix given by (52). The results for the three cases are synopsized in Tables 2a to 2c. The computations showed that the contact stiffness, $P/(a h)$, is higher when the piezomagnetic coupling is strong. The anisotropy in the magnetic permeability seems to influence very little the macroscopic response. An unexpected result comes from

the influence of the material constant e_{15} when it is not zero, as it is usually assumed. Such constant could enhance the magnetic flux considerably.

Experiments

In order to observe the piezomagnetic phenomenon and to confirm the theoretical results, we decided to carry out experiments on the piezomagnetic material Terfenol-D. These experiments fall into the category of micro-indentation, however the procedure can be scaled down to nano-indentation.

Necessary for the experiments were: a base of rubber, a sample of Terfenol-D, an indenter of plexiglass (PMMA), a Gaussmeter, permanent magnets and of course a loading device to apply the necessary force (e.g. a heavy steel object). A schematic view of the experiment is presented in Figs. 5-7. The constants of the specific sample of Terfenol-D ($Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$) are partly known. We measured its mass density to be $\rho = 9.06 \text{ gr/cm}^3$. Its reported compressive strength is 700MPa and its reported Curie temperature is 653 °K. The material was obtained from ETPEMA Products Inc., USA, one of few industries that produce Terfenol-D. We used two kinds of permanent magnets. The magnetic flux density of the first magnet was measured to be about ± 28 mTesla and the other about ± 52 mTesla (the + and – sign imply “North” and “South” magnet poles respectively). For the measurements we used the GM05 Gaussmeter, by Hirst Magnetic Instruments Ltd. The magnets and the specimens were cylindrical and their dimensions are shown in Fig. 5. The compressive strength of PMMA is 62 MPa, which gives an upper limit of the applied load (max $P = 1.22 \text{ kN}$) and its elastic modulus is 2.8 GPa.

We designed a simple experiment of indentation with a circular flat rigid indenter of PMMA on a sample of Terfenol-D. The radius of the punch was 2.5 mm. The temperature was in 24.4 °C and the moisture was 55%. We used the permanent

magnets to put the sample into a magnetic field $\left(H_z = -\frac{B_z}{\mu_0} \right)$, which “activated” the

piezomagnetic properties of Terfenol-D and so we were able to observe the magnetoelastic phenomenon. Four different experiments were carried out, each with different magnetic field (H_z, B_z) and applied indentation force (P) . The applied force was essentially a dead weigh, which was measured very accurately ($\pm 10^{-2} \text{ kN}$). As it is inferred from the arrangement of the experiments (Fig.5), the applied indentation forces are the weights of the sample and the magnets. The alteration of the magnetic flux density (δB_z) was measured with the GM05 Gaussmeter, not at the contact surface but at a certain (constant) distance. The distance of the Gaussmeter’s probe from the point $\{0,0\}$ of the surface is $2.082a$ (a is the radius of the circular indenter) and the relation of the magnetic flux density between these points can be described from the potential theory as: $B_z(0, -2.082a) = 0.2851 B_z(0,0)$. As we can see the distance causes about 70% decrease of the surface values. So if one could put the probe just over the surface, there would be no need for this adjustment. The experimental results are summarized in Table 3. Note that when experiments were conducted without the permanent magnets triggering the piezomagnetic behavior of the material, no change of the magnetic flux density was recorded.

We solved the problem using data from Clark (1980), Clark et al (1990), Moffet et al (1991) and Trémolet de Lacheisserie (1993), taking the elasticity matrix isotropic and using appropriate values of the material constants according to the measured magnetic fields of the permanent magnets used in the experiments.

For an isotropic sample of Terfenol-D we used an elastic modulus of 55 GPa and Poisson's ratio 0.4:

$$[C_{ij}^H] = \begin{pmatrix} 55.0 & 43.0 & 43.0 & 0 & 0 & 0 \\ 43.0 & 55.0 & 43.0 & 0 & 0 & 0 \\ 43.0 & 43.0 & 55.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 \end{pmatrix} \quad (\text{GPa}) \quad (53)$$

$$\mu_{33}^e = 6.283 \times 10^{-6} \left(\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right)$$

$$(I) \rightarrow 90.0$$

$$e_{15} = 0.0 \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{31} = -\frac{e_{33}}{2} \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \quad e_{33} = \begin{matrix} (II) \rightarrow 64.0 \\ (III) \rightarrow 40.0 \\ (IV) \rightarrow 16.0 \end{matrix} \left(\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right) \rightarrow \begin{matrix} \left(d_{33} = 8 \frac{\text{nm}}{\text{A}} \right) \\ \left(d_{33} = 2 \frac{\text{nm}}{\text{A}} \right) \end{matrix}$$

Table 4 shows the theoretical results for each of the four cases (I), (II), (III) and (IV), each case corresponding to the value of e_{33} shown above. Note that the contact stiffness $P/(a h)$ is not very different for cases (I) to (IV) and an increase from the uncoupled case starts to be noticeable at high values of e_{33} .

Finally, for all of the examples (cases (1) to (3) discussed in the previous section and (I) to (IV) of this section) and for the particular indentation forces P of the experiments, the theoretical results of the alteration of the magnetic flux density (δB_z) in mTesla are presented in Tables 5a – 5d respectively for the loading conditions of experiments A, B, C, D given in Table 3.

The lack of complete data for Terfenol-D and the fact that we are uncertain of how worthy are the ones we collected from the different sources, explain partly why the experimental results are different from the theoretical ones. Other sources of discrepancies with the theory are that the punch is not as rigid as the theory requires and that the field singularities at the contact perimeter may give rise to non-linear material behavior. However we did not observe signs of damage at the contact surfaces of the indenter or the substrate. The experiments proved the phenomenon and in certain cases the analytic values were very close to the experimental ones, indicating that e_{33} is close to 16 N/(Am) and the elastic stiffness is close to (53), for the particular material and applied magnetic field used in this work.

Conclusions

We have examined in detail the linear response of the axisymmetric indentation of piezomagnetic solids by a flat rigid punch under specific magnetic boundary conditions. We found that the solution is quite complex, certainly more complex than the corresponding solution for the piezoelectric solids. The reason is that piezomagnetic materials show different degree of anisotropy in the elastic, magnetic and coupling properties, whereas piezoelectric materials appear to have the same degree of anisotropy. The analysis gave explicit results regarding the force-depth and the force-magnetic flux density responses.

Experiments were conducted, using Terfenol-D as a piezomagnetic material and a flat punch of PMMA. Permanent magnets were used to trigger the coupling effects. The analytic results that were obtained using the limited data available in the literature confirmed reasonably well the experimental results regarding the magnetic flux density. We find that the most important constants that affect the macroscopic results of this problem are C_{33}^H , e_{33} and μ_{33}^E , in order of importance. The piezomagnetic coupling constant e_{15} , if not zero, as it is typically assumed in most cases, can have a profound effect in the contact behavior, increasing the magnetic flux at the contact region. The indentation stiffness is increasing with e_{33} . Anisotropy in the magnetic permeability does not influence the macroscopic results.

New types of indenters which incorporate Hall-effect probes at the indenter's tip, like the one we constructed, can give valuable information of the material properties of piezomagnetic materials. The present analysis can be used to obtain piezomagnetic constants that may be difficult to be obtained by other classic methods, e.g. e_{15} . Yet another use of indentation could be the confirmation of the piezomagnetic potency with time and temperature, serving as quality control for piezomagnetic materials, even at small volumes. Extending the method to the nano-scale will be quite challenging regarding the new equipments that will have to be developed.

The examination of different magnetic boundary conditions and different punch configurations will be addressed in future work.

REFERENCES

- [1] van der Burgt, C.M., 1953, Dynamical physical parameters of the magnetostrictive excitation of extensional and torsional vibrations in ferrites, Philips Res. Rep. 8, 91-132.
- [2] Clark, A.E., 1980, "Magnetostrictive Rare Earth - Fe₂ Compounds", Ferromagnetic Materials, vol.1, chapter 7, North - Holland Publishing Company, pp. 531-589.
- [3] Clark, A.E., Teter, J.P., Wun-Fogle, M., Moffet, M. and Lindberg, J., 1990, Magnetomechanical coupling in Bridgman-growth Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.9} at high drive levels, J. Appl. Physics, vol.67, No.9, pp. 5007-5009, 1990.
- [4] Dapino, M.J., Flatau, A.B., and F.T. Calkins, F.T., 1997, Statistical analysis of Terfenol-D material properties, SPIE 3041, 256-267.
- [5] Giannakopoulos, A.E. and Suresh, S., 1999, Theory of Indentation of Piezoelectric Materials, Acta Materialia 47, 2153-2164.
- [6] Huang, J.H. and Kuo, W.-S., 1997, The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusions, J. Appl. Phys. 81, 1378-1386.
- [7] IEEE Standards Committee, "IEEE Standard on Magnetostrictive Materials: Piezomagnetic Nomenclature", Standard 319, IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control Society, 1990.
- [8] Jackson, J.D., 1962, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons.
- [9] Kannan, K.S. and Dasgupta, A., 1997, A nonlinear Galerkin finite-element theory for modeling magnetostrictive smart structures, Smart Mater. Struct. 6, 341-350.
- [10] Mason, W.P., 1966, Crystal Physics of Interaction Processes, Academic Press, New York and London.
- [11] Moffet, M.B., Clark, A.E., Wun-Fogle, M., Linberg, J., Teter, J.P., and McLaughlin, E.A., 1991, Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers, J. Acoust. Soc. Am. 89, 1448-1445.
- [12] Noble, B., 1963, The solution of Bessel functions dual integral equations by a multiplying-factor method, Proc. Camb. Phil. Soc. 59, 351-362.
- [13] Ryu, J., Priya, S., Carazo, A.V., Uchino, K., and Kim, H.-E., 2001, Effect of the Magnetostrictive Layer on Magnetoelectric Properties in Lead Zirconate Titanate/Terfenol-D Laminate Composites, J. Am. Ceram. Soc. 84, 2905-908.
- [14] I.N. Sneddon, The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, New York, 1972.
- [15] du Trémolet de Lacheisserie, E., 1993, Magnetostriction Theory and Application of Magnetoelasticity, CRC Press, Boca Raton, Florida.

Table captions

Table 1. Data used for the two cases solved with elasticity matrix given by (52).

Table 2a. Results for case (1), as given by Table 1.

Table 2b. Results for case (2), as given by Table 1.

Table 2c. Results for case (3), as given by Table 1.

Table 3. Experimental results for a flat punch of PMMA of radius 2.5 mm.

Table 4a. Results for case (I), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$.

Table 4b. Results for case (II), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$.

Table 4c. Results for case (III), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$.

Table 4d. Results for case (IV), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$.

Table 5a. Results for experiment A (δB_z in mTesla).

Table 5b. Results for experiment B (δB_z in mTesla)

Table 5c. Results for experiment C (δB_z in mTesla).

Table 5d. Results for experiment D (δB_z in mTesla).

Table1. Data used for the six cases solved with elasticity matrix given by (52).

Case	$e_{15} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$e_{31} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$e_{33} \left[\frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$	$\mu_{33}^e \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$
(1)	200.0	-200.00	400.0	1.900×10^{-6}
(2)	0.0	-28.16	51.2	5.000×10^{-6}
(3)	0.0	-217.36	395.2	3.342×10^{-6}

Table 2a. Results for case (1), as given by Table 1.

(1)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	107.8590	109.1520	106.7580	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 1910.67	± 1988.02	± 1843.30	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	0.1540080	0.1678050	0.1421120	-0.0767946	(numeric)

Table 2b. Results for case (2), as given by Table 1.

(2)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	89.1744	89.2311	89.1503	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 105.7680	± 101.7890	± 105.6900	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.0754328	-0.0756046	-0.0754140	-0.0767946	(numeric)

Table 2c. Results for case (3), as given by Table 1.

(3)	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \frac{3}{2} \mu_{33}^{\varepsilon}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	96.1768	99.3476	94.7868	89.0497	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 768.6300	± 700.9860	± 796.5950	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.0382920	-0.0496007	-0.0332517	-0.0767946	(numeric)

Table 3. Experimental results for a flat punch of PMMA of radius 2.5 mm.

Experiment	$B_z(0,0)$ before indentation (mTesla)	Indentation force P (N)	$B_z(0,0)$ after indentation (mTesla)	δB_z (mTesla)
A	-28.1	0.64	-78.9	50.8
B	+48.4	0.74	+150.5	102.1
C	-42	10.07	-121.4	79.4
D	+67	10.15	+194.7	127.7

Table 4a. Results for case (I), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$.

(I)	$e_{15} = 0$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{10}$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{2}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	90.9848	90.8773	90.8984	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 237.05	± 257.26	± 338.43	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1427480	-0.1414910	-0.1362010	-0.1464940	(numeric)

Table 4b. Results for case (II), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$.

(II)	$e_{15} = 0$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{10}$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{2}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	90.6048	90.5505	90.5637	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 168.66	± 182.75	± 239.22	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1445190	-0.1438750	-0.1411530	-0.1464940	(numeric)

Table 4c. Results for case (III), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$.

(III)	$e_{15} = 0$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{10}$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{2}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	90.3621	90.3409	90.3467	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 105.44	± 114.13	± 148.93	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1457020	-0.1454480	-0.1443730	-0.1464940	(numeric)

Table 4d. Results for case (IV), with elasticity matrix given by (53) and $\mu_{11}^{\epsilon} = \mu_{33}^{\epsilon}$.

(IV)	$e_{15} = 0$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{10}$	$e_{15} = \frac{e_{33}}{2}$	Uncoupled	Dimensions
$\frac{P}{ah}$	90.2294	90.2261	90.2270	90.2040	(nPa)
$\frac{\Phi}{ah}$	± 42.18	± 45.63	± 59.44	0.00	(Tesla)
$\frac{u_{r0}}{h}$	-0.1463650	-0.1463250	-0.1461520	-0.1464940	(numeric)

Table 5a. Results for experiment A (δB_z in mTesla).

Example	$\mu_{11}^\varepsilon = \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{1}{2} \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{3}{2} \mu_{33}^\varepsilon$
(1)	282.39	290.34	275.24
(2)	18.91	18.18	18.90
(3)	127.40	112.48	133.97
(I)	41.53	39.21	41.71
(II)	29.67	28.13	29.73
(III)	18.60	17.68	18.61
(IV)	7.45	7.09	7.45

Table 5b. Results for experiment B (δB_z in mTesla).

Example	$\mu_{11}^\varepsilon = \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{1}{2} \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{3}{2} \mu_{33}^\varepsilon$
(1)	325.84	335.01	317.59
(2)	21.82	20.98	21.81
(3)	147.00	129.78	154.58
(I)	47.92	45.24	48.12
(II)	34.24	32.46	34.30
(III)	21.46	20.40	21.47
(IV)	8.60	8.19	8.60

Table 5c. Results for experiment C (δB_z in mTesla).

Example	$\mu_{11}^\varepsilon = \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{1}{2} \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{3}{2} \mu_{33}^\varepsilon$
(1)	4461.79	4587.42	4348.86
(2)	298.74	287.32	298.60
(3)	2012.92	1777.18	2116.75
(I)	656.21	619.51	658.98
(II)	468.85	444.47	469.74
(III)	293.90	279.37	294.02
(IV)	117.75	112.09	117.70

Table 5d. Results for experiment D (δB_z in mTesla).

Example	$\mu_{11}^\varepsilon = \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{1}{2} \mu_{33}^\varepsilon$	$\mu_{11}^\varepsilon = \frac{3}{2} \mu_{33}^\varepsilon$
(1)	4496.54	4623.15	4382.73
(2)	301.07	289.56	300.93
(3)	2028.60	1791.02	2133.24
(I)	661.33	624.33	664.11
(II)	472.51	447.94	473.40
(III)	296.19	281.55	296.31
(IV)	118.67	112.97	118.62

Figure captions

Figure 1. Geometrical parameters for flat indentation. (a) 3D view, (b) 2D view. The indenter is non-conducting, with very low magnetic permeability ($\mu_{\text{ind}} \ll \mu_{11}^{\varepsilon}$).

Figure 2. Normalized relations for: (a) radial displacement (u_r), (b) vertical displacement (w), (c) magnetic potential (Φ_m), (d) axial stress ($\delta\sigma_{zz}$), (e) axial magnetic flux density (δB_z).

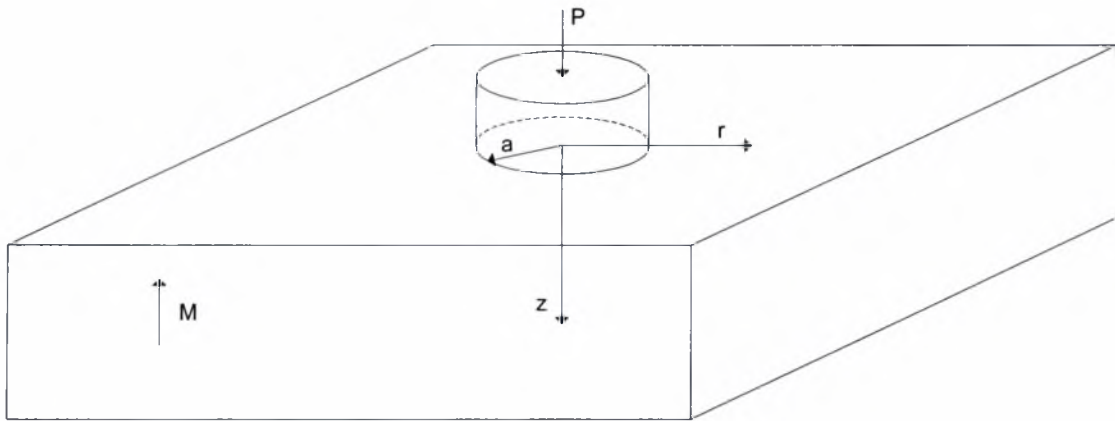
Figure 3. Hall-effect for the plate used in the magnetometer in our experiments. The schematic shows the direction of the current flow I_i , the Hall voltage E_i , and the magnetic flux B_z .

Figure 4. The detail of the indenter used in our experiments.

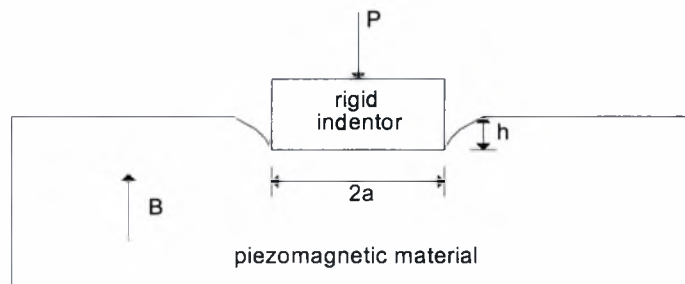
Figure 5. Analytical description of the arrangement of the experiment.

Figure 6. Photograph of the parts of the experiment.

Figure 7. Photograph of a side view of the experiment.

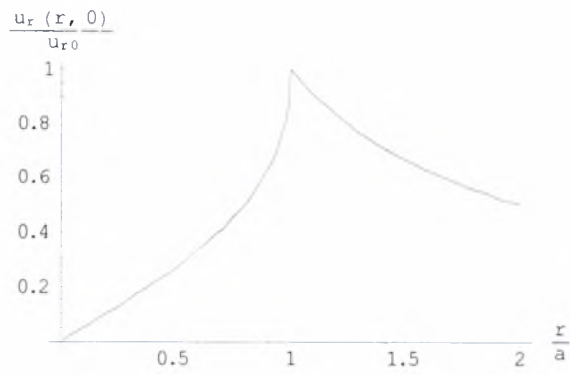


(a)

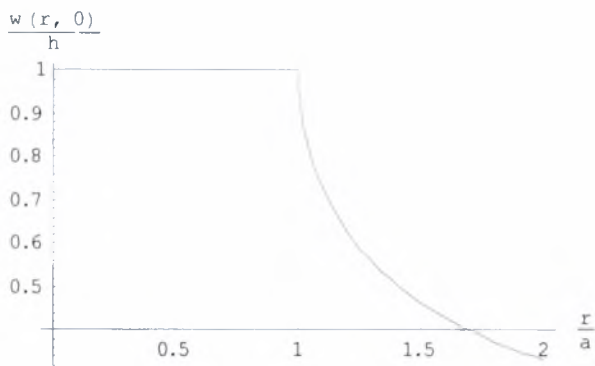


(b)

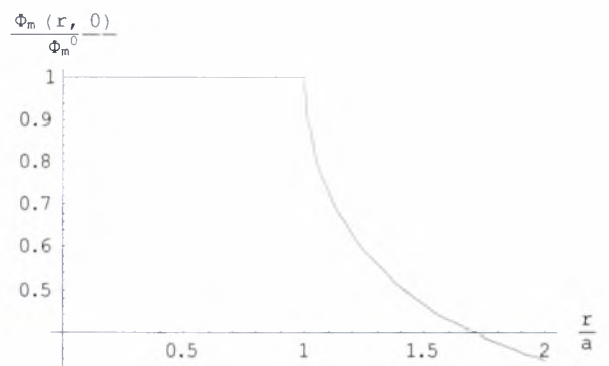
Fig1. A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis



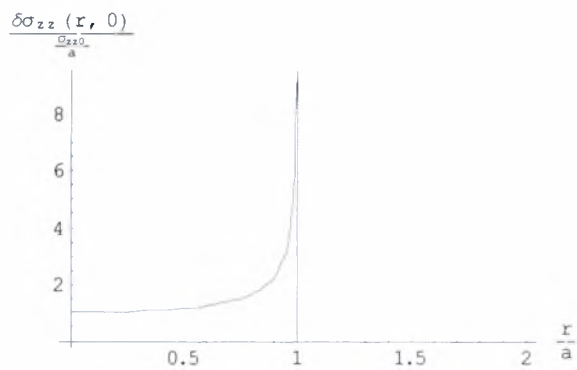
(a)



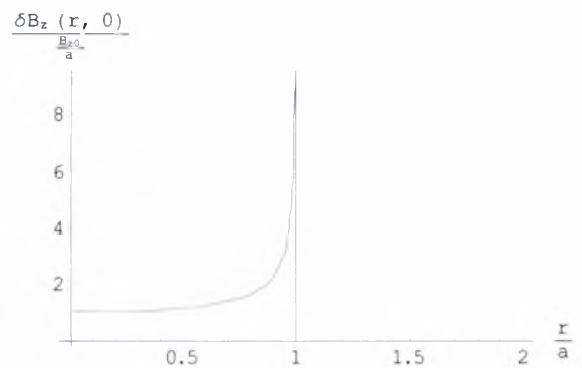
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig.2 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

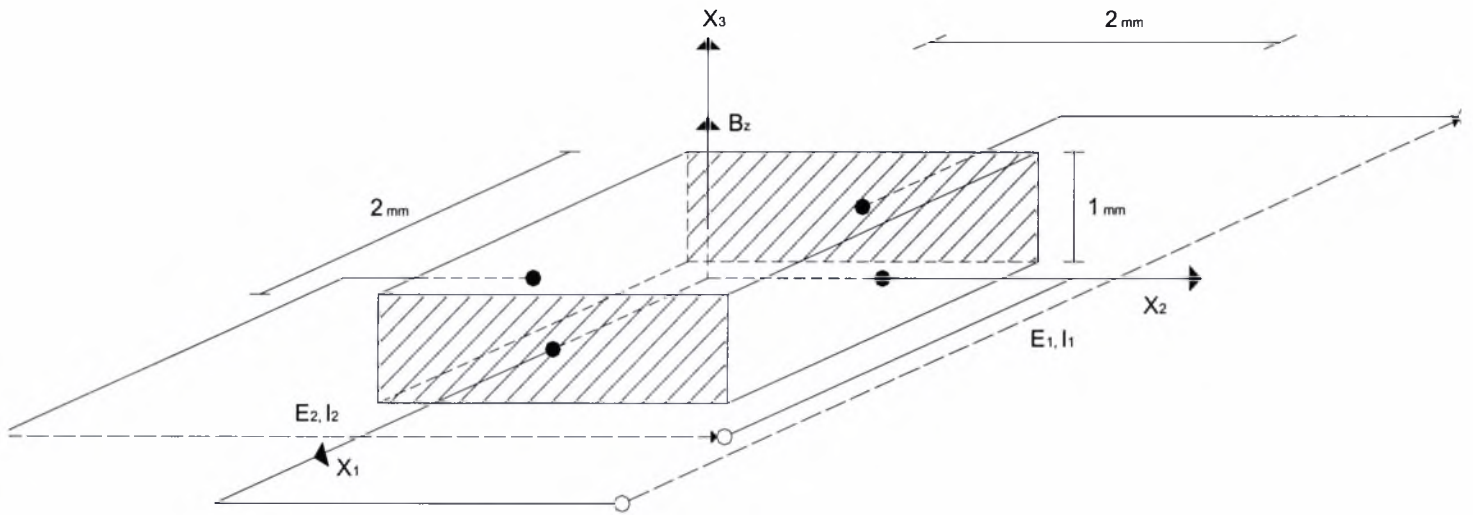


Fig.3 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

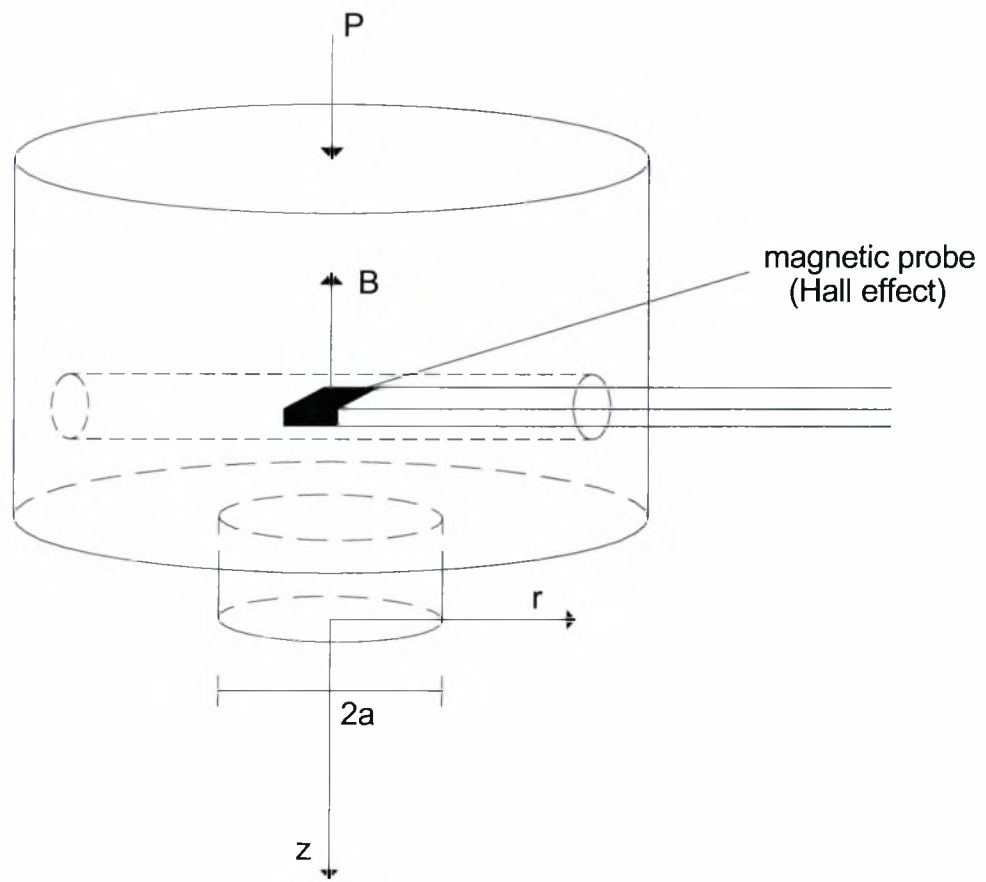


Fig.4 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

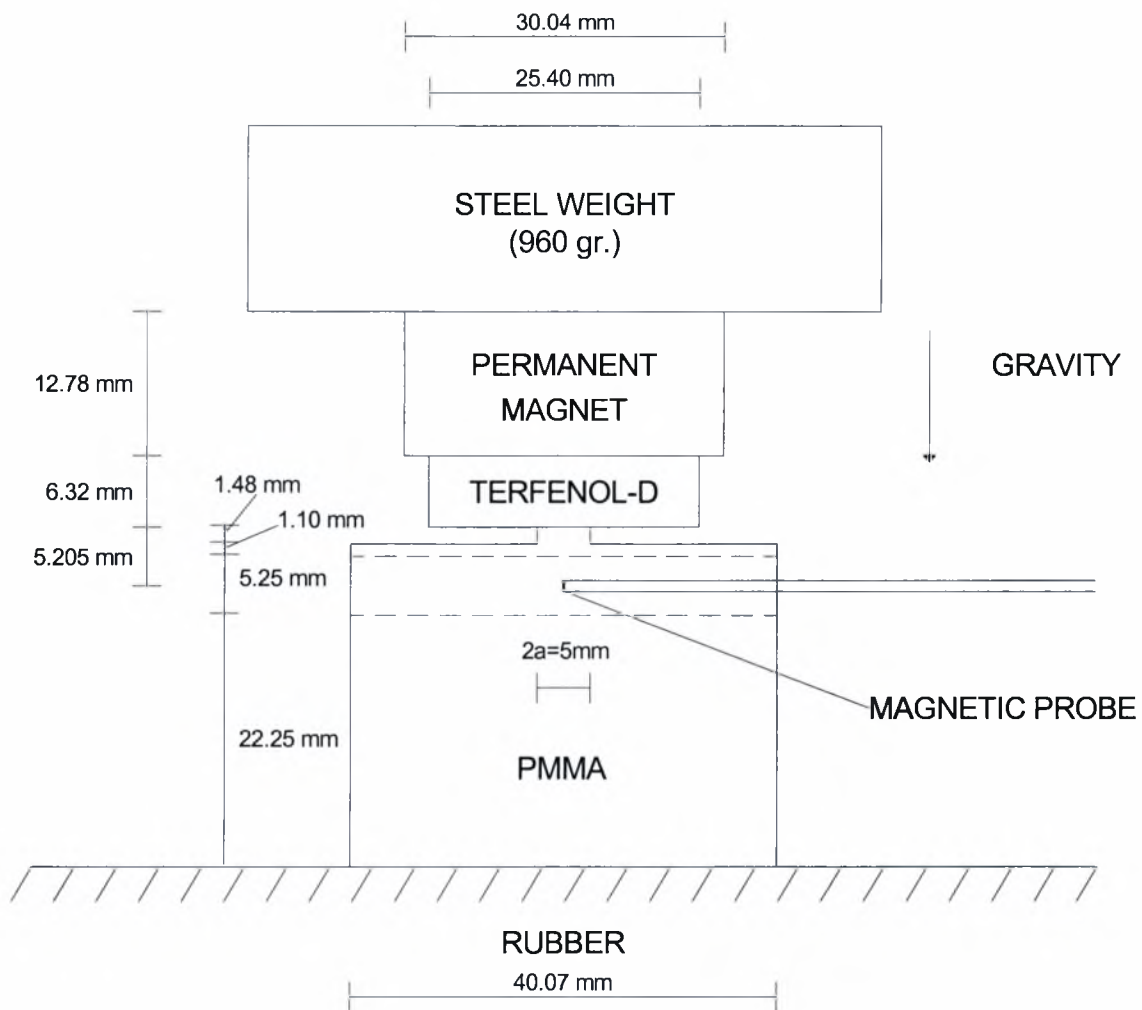


Fig.5 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

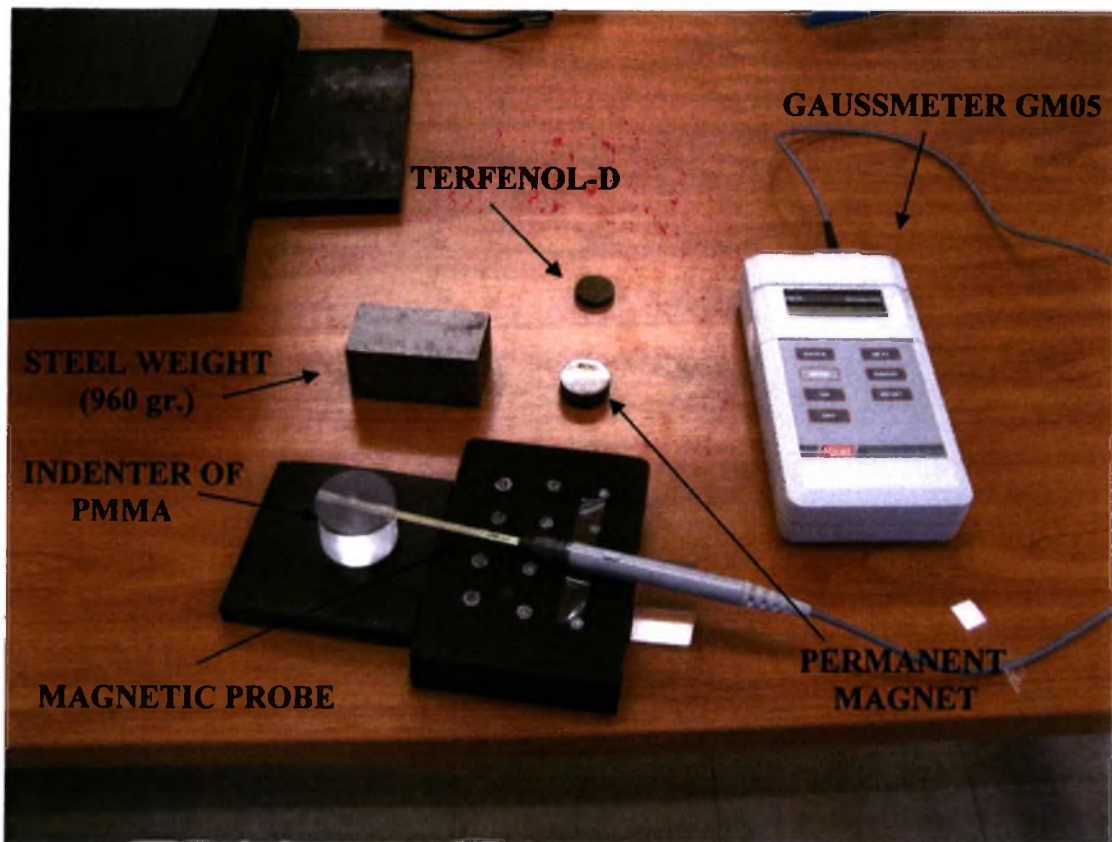


Fig.6 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

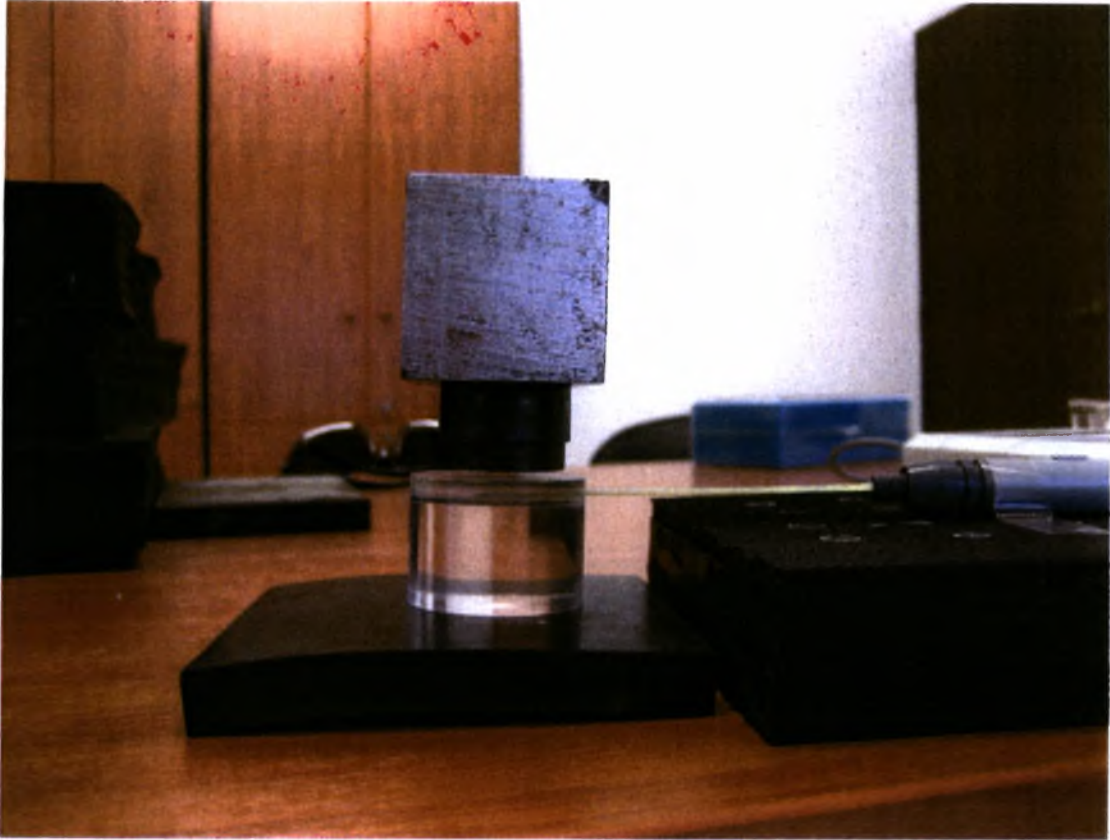


Fig.7 A.E. Giannakopoulos and A.Z. Parmaklis

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

*Τυπικά δείγματα των αναλυτικών υπολογισμών με το πρόγραμμα
Mathematica 4.1*

Υπολογισμός των k, δ, ω

$$C_{11}^E = 139 \cdot 10^9$$

$$C_{33}^E = 115 \cdot 10^9$$

$$C_{44}^E = 25.6 \cdot 10^9$$

$$C_{12}^E = 77.8 \cdot 10^9$$

$$C_{13}^E = 74.3 \cdot 10^9$$

$$e_{33} = 15.1$$

$$e_{31} = -5.2$$

$$e_{15} = 12.7$$

$$\epsilon_{11}^\epsilon = 6.461 \cdot 10^{-9}$$

$$\epsilon_{33}^\epsilon = 5.62 \cdot 10^{-9}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 \cdot C_{44}^E - C_{11}^E & k \cdot (C_{13}^E + C_{44}^E) & k \cdot (e_{15} + e_{31}) \\ -k \cdot (C_{13}^E + C_{44}^E) & k^2 \cdot C_{33}^E - C_{44}^E & k^2 \cdot e_{33} - e_{15} \\ -k \cdot (e_{15} + e_{31}) & k^2 \cdot e_{33} - e_{15} & \epsilon_{11}^\epsilon - k^2 \cdot \epsilon_{33}^\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{Solve}[\text{Det}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right] = 0, k]$$

k /. %

Out [13]:

{-1.2038, -1.06914 - 0.200419 i, -1.06914 + 0.200419 i, 1.06914 - 0.200419 i, 1.06914 + 0.200419 i, 1.2038}

Υπολογισμός των $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], -1]$$

$$a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}$$

$$-a_{11} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{13}$$

$$a_{11} \cdot a_{22} + a_{12}^2$$

$$\text{Out [15]: } \{-1.69254 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [16]: } \{-1.50102 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [17]: } \{8.90421 \times 10^9\}$$

$$\alpha_1 = \text{Out}[15]$$

$$\beta_1 = \text{Out}[16]$$

$$\gamma_1 = \text{Out}[17]$$

Υπολογισμός των $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], \{5, 5, 1\}]$$

$$\text{Re}[a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}]$$

$$\text{Im}[a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}]$$

$$\text{Re}[-a_{11} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{13}]$$

$$\text{Im}[-a_{11} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{13}]$$

$$\text{Re}[a_{11} \cdot a_{22} + a_{12}^2]$$

$$\text{Im}[a_{11} \cdot a_{22} + a_{12}^2]$$

$$\text{Out [19]: } \{-4.44943 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [20]: } \{2.22974 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [21]: } \{-3.17415 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [22]: } \{3.52314 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [23]: } \{-7.46937 \times 10^{20}\}$$

$$\text{Out [24]: } \{-7.1363 \times 10^{19}\}$$

$$\alpha_{21} = \text{Out}[19]$$

$$\alpha_{22} = \text{Out}[20]$$

$$\beta_{21} = \text{Out}[21]$$

$$\beta_{22} = \text{Out}[22]$$

$$\gamma_{21} = \text{Out}[23]$$

$$\gamma_{22} = \text{Out}[24]$$

Υπολογισμός των $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9$

$$\alpha_1 = \text{Out}[15]$$

$$\beta_1 = \text{Out}[16]$$

$$\gamma_1 = \text{Out}[17]$$

$$\alpha_{21} = \text{Out}[19]$$

$$\alpha_{22} = \text{Out}[20]$$

$$\beta_{21} = \text{Out}[21]$$

$$\beta_{22} = \text{Out}[22]$$

$$\gamma_{21} = \text{Out}[23]$$

$$\gamma_{22} = \text{Out}[24]$$

$$k_1 = \text{Take}[\text{Out}[13], -1]$$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], \{5, 5, 1\}]$$

$$-e_{15} * \gamma_1 - C_{44}^E * (k_1 * \alpha_1 + \beta_1)$$

$$-e_{15} * \gamma_{21} - C_{44}^E * (\text{Re}[k] * \alpha_{21} - \text{Im}[k] * \alpha_{22} + \beta_{21})$$

$$e_{15} * \gamma_{22} + C_{44}^E * (\text{Re}[k] * \alpha_{22} + \text{Im}[k] * \alpha_{21} + \beta_{22})$$

$$C_{13}^E * \alpha_1 - k_1 * (C_{33}^E * \beta_1 + e_{33} * \gamma_1)$$

$$C_{13}^E * \alpha_{21} - \text{Re}[k] * (C_{33}^E * \beta_{21} + e_{33} * \gamma_{21}) + \text{Im}[k] * (C_{33}^E * \beta_{22} + e_{33} * \gamma_{22})$$

$$-C_{13}^E * \alpha_{22} + \text{Re}[k] * (C_{33}^E * \beta_{22} + e_{33} * \gamma_{22}) + \text{Im}[k] * (C_{33}^E * \beta_{21} + e_{33} * \gamma_{21})$$

$$e_{31} * \alpha_1 - k_1 * (e_{33} * \beta_1 - \epsilon_{33}^e * \gamma_1)$$

$$e_{31} * \alpha_{21} - \text{Re}[k] * (e_{33} * \beta_{21} - \epsilon_{33}^e * \gamma_{21}) + \text{Im}[k] * (e_{33} * \beta_{22} - \epsilon_{33}^e * \gamma_{22})$$

$$-e_{31} * \alpha_{22} + \text{Re}[k] * (e_{33} * \beta_{22} - \epsilon_{33}^e * \gamma_{22}) + \text{Im}[k] * (e_{33} * \beta_{21} - \epsilon_{33}^e * \gamma_{21})$$

$$\text{Out [36]: } \{7.92773 \times 10^{21}\}$$

$$\text{Out [37]: } \{3.0934 \times 10^{22}\}$$

$$\text{Out [38]: } \{1.19328 \times 10^{22}\}$$

$$\text{Out [39]: } \{6.58557 \times 10^{21}\}$$

$$\text{Out [40]: } \{2.59301 \times 10^{22}\}$$

$$\text{Out [41]: } \{1.6022 \times 10^{22}\}$$

$$\text{Out [42]: } \{4.21099 \times 10^{21}\}$$

$$\text{Out [43]: } \{4.09663 \times 10^{21}\}$$

$$\text{Out [44]: } \{7.15672 \times 10^{21}\}$$

$$m_1 = \text{Out}[36]$$

$$m_2 = \text{Out}[37]$$

$$m_3 = \text{Out}[38]$$

$$m_4 = \text{Out}[39]$$

$$m_5 = \text{Out}[40]$$

$$m_6 = \text{Out}[41]$$

$$m_7 = \text{Out}[42]$$

$$m_8 = \text{Out}[43]$$

$$m_9 = \text{Out}[44]$$

Υπολογισμός των M_1, M_2, M_3, M_4

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{Out}[15] \\ \beta_1 &= \text{Out}[16] \\ \gamma_1 &= \text{Out}[17] \\ \alpha_{21} &= \text{Out}[19] \\ \alpha_{22} &= \text{Out}[20] \\ \beta_{21} &= \text{Out}[21] \\ \beta_{22} &= \text{Out}[22] \\ \gamma_{21} &= \text{Out}[23] \\ \gamma_{22} &= \text{Out}[24] \\ k_1 &= \text{Take}[\text{Out}[13], -1] \\ k &= \text{Take}[\text{Out}[13], \{5, 5, 1\}] \\ m_1 &= \text{Out}[36] \\ m_2 &= \text{Out}[37] \\ m_3 &= \text{Out}[38] \\ \beta_1 + \beta_{22} * \frac{m_1}{m_3} \\ \beta_{21} + \beta_{22} * \frac{m_2}{m_3} \\ \gamma_1 + \gamma_{22} * \frac{m_1}{m_3} \\ \gamma_{21} + \gamma_{22} * \frac{m_2}{m_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out [59]:} & \{8.39623 \times 10^{10}\} \\ \text{Out [60]:} & \{5.95903 \times 10^{11}\} \\ \text{Out [61]:} & \{4.16312 \times 10^{19}\} \\ \text{Out [62]:} & \{-9.31935 \times 10^{20}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{Out}[59] \\ M_2 &= \text{Out}[60] \\ M_3 &= \text{Out}[61] \\ M_4 &= \text{Out}[62] \end{aligned}$$

Υπολογισμός των f_1, f_2, f_3

$$\begin{aligned} h &= h \\ \varphi^0 &= 0 \\ M_1 &= \text{Out}[59] \\ M_2 &= \text{Out}[60] \\ M_3 &= \text{Out}[61] \\ M_4 &= \text{Out}[62] \\ m_1 &= \text{Out}[36] \\ m_2 &= \text{Out}[37] \\ m_3 &= \text{Out}[38] \\ \frac{M_4 * h - M_2 * \varphi^0}{M_1 * M_4 - M_2 * M_3} \\ \frac{M_3 * h - M_1 * \varphi^0}{M_2 * M_3 - M_1 * M_4} \\ - \frac{m_1}{m_3} \frac{M_4 * h - M_2 * \varphi^0}{M_1 * M_4 - M_2 * M_3} - \frac{m_2}{m_3} \frac{M_3 * h - M_1 * \varphi^0}{M_2 * M_3 - M_1 * M_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out [72]:} & \{9.04303 \times 10^{-12} h\} \\ \text{Out [73]:} & \{4.03968 \times 10^{-13} h\} \\ \text{Out [74]:} & \{-7.05508 \times 10^{-12} h\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \text{Out}[72] \\ f_2 &= \text{Out}[73] \\ f_3 &= \text{Out}[74] \end{aligned}$$

Η δύναμη P για επίπεδο διεισδυτή ακτίνας a

m₄ = Out[39]

m₅ = Out[40]

m₆ = Out[41]

f₁ = Out[72]

f₂ = Out[73]

f₃ = Out[74]

-2 π a (m₄ * f₁ + m₅ * f₂ + m₆ * f₃)

{8.60156 × 10⁰ h πα}

Το ηλεκτρικό φορτίο Q (Cb) για επίπεδο διεισδυτή ακτίνας a

m₇ = Out[42]

m₈ = Out[43]

m₉ = Out[44]

f₁ = Out[72]

f₂ = Out[73]

f₃ = Out[74]

2 π a (m₇ * f₁ + m₈ * f₂ + m₉ * f₃)

{-21.5125 h πα}

Υπολογισμός των σταθερών u_{r0}, w₀, φ⁰

α₁ = Out[15]

β₁ = Out[16]

γ₁ = Out[17]

α₂₁ = Out[19]

α₂₂ = Out[20]

β₂₁ = Out[21]

β₂₂ = Out[22]

γ₂₁ = Out[23]

γ₂₂ = Out[24]

f₁ = Out[72]

f₂ = Out[73]

f₃ = Out[74]

α₁ f₁ + α₂₁ f₂ - α₂₂ f₃

β₁ f₁ + β₂₁ f₂ - β₂₂ f₃

γ₁ f₁ + γ₂₁ f₂ - γ₂₂ f₃

{-0.137213 h}

{1. h}

{0. h}

Υπολογισμός των k_i

$$C_{11}^H = 107 * 10^9$$

$$C_{33}^H = 98.1 * 10^9$$

$$C_{44}^H = 6.1 * 10^9$$

$$C_{12}^H = 74.8 * 10^9$$

$$C_{13}^H = 82.1 * 10^9$$

$$e_{33} = 52.8$$

$$e_{31} = -29.04$$

$$e_{15} = 0$$

$$\mu_{11}^\epsilon = \mu_{33}^\epsilon$$

$$\mu_{33}^\epsilon = 3.37418 * 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 * C_{44}^H - C_{11}^H & k * (C_{13}^H + C_{44}^H) & k * (e_{15} + e_{31}) \\ -k * (C_{13}^H + C_{44}^H) & k^2 * C_{33}^H - C_{44}^H & k^2 * e_{33} - e_{15} \\ -k * (e_{15} + e_{31}) & k^2 * e_{33} - e_{15} & \mu_{11}^\epsilon - k^2 * \mu_{33}^\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{Solve}[\text{Det}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right] = 0, k]$$

k /. %

Out [13]: {-2.17502, -0.942571, -0.507294, 0.507294, 0.942571, 2.17502}

Υπολογισμός των $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], -1]$$

$$a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22}$$

$$-a_{11} * a_{23} - a_{12} * a_{13}$$

$$a_{11} * a_{22} + a_{12}^2$$

$$\text{Out [15]: } \{7.68444 \times 10^{13}\}$$

$$\text{Out [16]: } \{3.16354 \times 10^{13}\}$$

$$\text{Out [17]: } \{1.01331 \times 10^{21}\}$$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], \{5, 5, 1\}]$$

$$a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22}$$

$$-a_{11} * a_{23} - a_{12} * a_{13}$$

$$a_{11} * a_{22} + a_{12}^2$$

$$\text{Out [19]: } \{6.1185 \times 10^{12}\}$$

$$\text{Out [20]: } \{7.04069 \times 10^{12}\}$$

$$\text{Out [21]: } \{-1.32232 \times 10^{21}\}$$

$$k = \text{Take}[\text{Out}[13], \{4, 4, 1\}]$$

$$a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22}$$

$$-a_{11} * a_{23} - a_{12} * a_{13}$$

$$a_{11} * a_{22} + a_{12}^2$$

$$\text{Out [23]: } \{8.9002 \times 10^{11}\}$$

$$\text{Out [24]: } \{2.09173 \times 10^{12}\}$$

$$\text{Out [25]: } \{-1.65748 \times 10^{19}\}$$

$$\alpha_1 = \text{Out}[15]$$

$$\beta_1 = \text{Out}[16]$$

$$\gamma_1 = \text{Out}[17]$$

$$\alpha_2 = \text{Out}[19]$$

$$\beta_2 = \text{Out}[20]$$

$$\gamma_2 = \text{Out}[21]$$

$$\alpha_3 = \text{Out}[23]$$

$$\beta_3 = \text{Out}[24]$$

$$\gamma_3 = \text{Out}[25]$$

Υπολογισμός των $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9$

```
 $\alpha_1 = \text{Out}[15]$   
 $\beta_1 = \text{Out}[16]$   
 $\gamma_1 = \text{Out}[17]$   
 $\alpha_2 = \text{Out}[19]$   
 $\beta_2 = \text{Out}[20]$   
 $\gamma_2 = \text{Out}[21]$   
 $\alpha_3 = \text{Out}[23]$   
 $\beta_3 = \text{Out}[24]$   
 $\gamma_3 = \text{Out}[25]$   
 $k_1 = \text{Take}[\text{Out}[13], -1]$   
 $k_2 = \text{Take}[\text{Out}[13], \{5, 5, 1\}]$   
 $k_3 = \text{Take}[\text{Out}[13], \{4, 4, 1\}]$   
 $-C_{44}^H * (\alpha_1 * k_1 + \beta_1) - e_{15} * \gamma_1$   
 $-C_{44}^H * (\alpha_2 * k_2 + \beta_2) - e_{15} * \gamma_2$   
 $-C_{44}^H * (\alpha_3 * k_3 + \beta_3) - e_{15} * \gamma_3$   
 $C_{13}^H * \alpha_1 - k_1 * (C_{33}^H * \beta_1 + e_{33} * \gamma_1)$   
 $C_{13}^H * \alpha_2 - k_2 * (C_{33}^H * \beta_2 + e_{33} * \gamma_2)$   
 $C_{13}^H * \alpha_3 - k_3 * (C_{33}^H * \beta_3 + e_{33} * \gamma_3)$   
 $e_{31} * \alpha_1 - k_1 * (e_{33} * \beta_1 - \mu_{33}^e * \gamma_1)$   
 $e_{31} * \alpha_2 - k_2 * (e_{33} * \beta_2 - \mu_{33}^e * \gamma_2)$   
 $e_{31} * \alpha_3 - k_3 * (e_{33} * \beta_3 - \mu_{33}^e * \gamma_3)$ 
```

```
Out [38]:  $\{-1.21252 \times 10^{24}\}$   
Out [39]:  $\{-7.81276 \times 10^{22}\}$   
Out [40]:  $\{-1.55137 \times 10^{22}\}$   
Out [41]:  $\{-5.57475 \times 10^{23}\}$   
Out [42]:  $\{-8.28878 \times 10^{22}\}$   
Out [43]:  $\{-3.05813 \times 10^{22}\}$   
Out [44]:  $\{1.57198 \times 10^{16}\}$   
Out [45]:  $\{-4.73359 \times 10^{16}\}$   
Out [46]:  $\{-1.10244 \times 10^{14}\}$ 
```

```
 $m_1 = \text{Out}[38]$   
 $m_2 = \text{Out}[39]$   
 $m_3 = \text{Out}[40]$   
 $m_4 = \text{Out}[41]$   
 $m_5 = \text{Out}[42]$   
 $m_6 = \text{Out}[43]$   
 $m_7 = \text{Out}[44]$   
 $m_8 = \text{Out}[45]$   
 $m_9 = \text{Out}[46]$ 
```

Υπολογισμός των M_1, M_2, M_3, M_4

$$\beta_1 = \text{Out}[16]$$

$$\gamma_1 = \text{Out}[17]$$

$$\beta_2 = \text{Out}[20]$$

$$\gamma_2 = \text{Out}[21]$$

$$\beta_3 = \text{Out}[24]$$

$$\gamma_3 = \text{Out}[25]$$

$$m_1 = \text{Out}[38]$$

$$m_2 = \text{Out}[39]$$

$$m_3 = \text{Out}[40]$$

$$\beta_1 - \beta_3 * \frac{m_1}{m_3}$$

$$\beta_2 - \beta_3 * \frac{m_2}{m_3}$$

$$\gamma_1 - \gamma_3 * \frac{m_1}{m_3}$$

$$\gamma_2 - \gamma_3 * \frac{m_2}{m_3}$$

$$\text{Out [56]: } \{-1.31849 \times 10^{14}\}$$

$$\text{Out [57]: } \{-3.49334 \times 10^{12}\}$$

$$\text{Out [58]: } \{2.30876 \times 10^{21}\}$$

$$\text{Out [59]: } \{-1.23885 \times 10^{21}\}$$

$$M_1 = \text{Out}[56]$$

$$M_2 = \text{Out}[57]$$

$$M_3 = \text{Out}[58]$$

$$M_4 = \text{Out}[59]$$

Υπολογισμός των f_1, f_2, f_3

$$h = h$$

$$\Phi_m^0 = 0$$

$$M_1 = \text{Out}[56]$$

$$M_2 = \text{Out}[57]$$

$$M_3 = \text{Out}[58]$$

$$M_4 = \text{Out}[59]$$

$$m_1 = \text{Out}[38]$$

$$m_2 = \text{Out}[39]$$

$$m_3 = \text{Out}[40]$$

$$\frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3}$$

$$\frac{M_3 h - M_1 \Phi_m^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4}$$

$$-\left(\frac{m_1}{m_3} \frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3} + \frac{m_2}{m_3} \frac{M_3 h - M_1 \Phi_m^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4} \right)$$

$$\frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3}$$

$$-\left(\frac{m_1}{m_3} \frac{M_4 h - M_2 \Phi_m^0}{M_1 M_4 - M_2 M_3} + \frac{m_2}{m_3} \frac{M_3 h - M_1 \Phi_m^0}{M_2 M_3 - M_1 M_4} \right)$$

$$\text{Out [69]: } \{-7.22754 \times 10^{-6} h\}$$

$$\text{Out [70]: } \{-1.34695 \times 10^{-14} h\}$$

$$\text{Out [71]: } \{6.32722 \times 10^{-13} h\}$$

$$f_1 = \text{Out}[69]$$

$$f_2 = \text{Out}[70]$$

$$f_3 = \text{Out}[71]$$

Η δύναμη P για επίπεδο διεισδυτή ακτίνας a

$$m_4 = \text{Out}[41]$$

$$m_5 = \text{Out}[42]$$

$$m_6 = \text{Out}[43]$$

$$f_1 = \text{Out}[69]$$

$$f_2 = \text{Out}[70]$$

$$f_3 = \text{Out}[71]$$

$$-2 * \pi * a * (m_4 * f_1 + m_5 * f_2 + m_6 * f_3)$$

$$\{8.92452 \times 10^0 \text{ a h}\}$$

Η μαγνητική επαγωγή B (Wb) για επίπεδο διεισδυτή ακτίνας a

$$m_7 = \text{Out}[44]$$

$$m_8 = \text{Out}[45]$$

$$m_9 = \text{Out}[46]$$

$$f_1 = \text{Out}[69]$$

$$f_2 = \text{Out}[70]$$

$$f_3 = \text{Out}[71]$$

$$-2 * \pi * a * (m_7 * f_1 + m_8 * f_2 + m_9 * f_3)$$

$$2 * \pi * a * (m_7 * f_1 + m_8 * f_2 + m_9 * f_3)$$

$$\{109.054 \text{ a h}\}$$

$$\{-109.054 \text{ a h}\}$$

Υπολογισμός των σταθερών u_{r0} , w_0 , Φ_m^0

$$\alpha_1 = \text{Out}[15]$$

$$\beta_1 = \text{Out}[16]$$

$$\gamma_1 = \text{Out}[17]$$

$$\alpha_2 = \text{Out}[19]$$

$$\beta_2 = \text{Out}[20]$$

$$\gamma_2 = \text{Out}[21]$$

$$\alpha_3 = \text{Out}[23]$$

$$\beta_3 = \text{Out}[24]$$

$$\gamma_3 = \text{Out}[25]$$

$$f_1 = \text{Out}[69]$$

$$f_2 = \text{Out}[70]$$

$$f_3 = \text{Out}[71]$$

$$\alpha_1 * f_1 + \alpha_2 * f_2 + \alpha_3 * f_3$$

$$\beta_1 * f_1 + \beta_2 * f_2 + \beta_3 * f_3$$

$$\gamma_1 * f_1 + \gamma_2 * f_2 + \gamma_3 * f_3$$

$$\{-0.0746738 \text{ h}\}$$

$$\{1. \text{ h}\}$$

$$\{-3.72529 \times 10^{-9} \text{ h}\} \{0. \text{ h}\}$$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085949