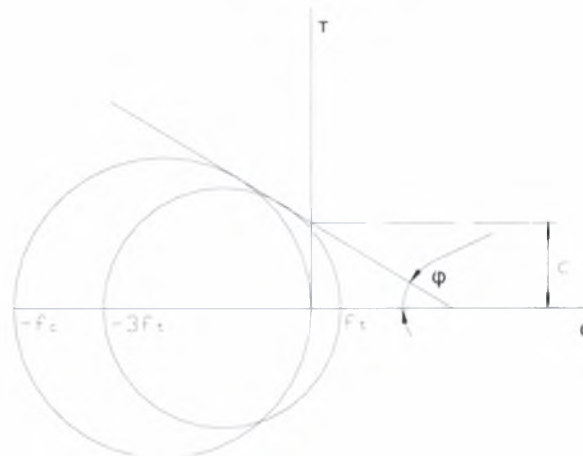
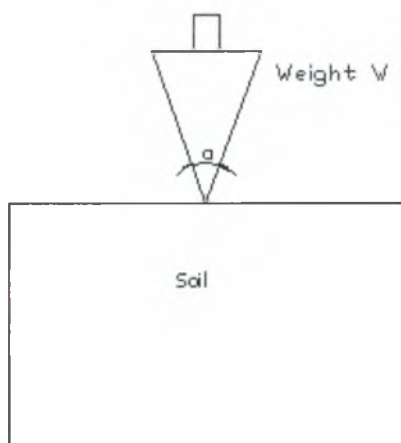




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΒΑΣΙΛΗ



Επιβλέπων: **ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ**, Αναπλ. Καθηγητής
Τριμελής Επιτροπή: **ΦΙΛΙΠΠΟΣ ΠΕΡΔΙΚΑΡΗΣ**, Καθηγητής
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΝΤΑΚΟΥΛΑΣ, Επ. Καθηγητής

ΒΟΛΟΣ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4816/1
Ημερ. Εισ.: 09-10-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ
2006
ΑΘΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	1
ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ.....	3
Μοντέλα εδάφους.....	4
Εργαστηριακός προσδιορισμός παραμέτρων διατμητικής αντοχής.....	6
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ -ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	9
Κεφάλαιο 1^ο : Το 1^ο μοντέλο.....	10
1.1.Μοντέλο 1 ^ο	10
1.2. Σχηματική απεικόνιση μοντέλου.....	10
1.3. Μαθηματική Περιγραφή.....	12
1.4. Αποτελέσματα.....	14
1.5. Συμπεράσματα.....	20
Κεφάλαιο 2^ο : Το 2^ο Μοντέλο.....	21
2.1.Μοντέλο 1 ^ο	21
2.2. Σχηματική απεικόνιση μοντέλου.....	22
2.3. Μαθηματική Περιγραφή.....	22
2.4. Αποτελέσματα.....	24
2.5. Συμπεράσματα.....	25
Κεφάλαιο 3^ο : Το 3^ο Μοντέλο.....	26
3.1.Μοντέλο 1 ^ο	26
3.2. Σχηματική απεικόνιση μοντέλου.....	26
3.3. Μαθηματική Περιγραφή.....	26
3.4. Αποτελέσματα.....	27
3.5. Συμπεράσματα.....	27
Κεφάλαιο 4^ο : Το 4^ο Μοντέλο.....	28
4.1. Περίληψη.....	28
4.2. Εισαγωγή.....	28
4.3. Καταστατικές Εξισώσεις	30
4.3.1 Στερεό Gurson.....	31
4.3.2 FKM model.....	31
4.4.Cavity Expansion model.....	31
4.5. Προβλέψεις.....	33
4.6. Αποτελέσματα.....	38
4.7. Συμπεράσματα.....	39

Κεφάλαιο 5^ο : Παραδείγματα κεραμικών υλικών.....	40
5.1. Περίληψη.....	40
5.2. Εισαγωγή.....	40
5.3. Πειραματική μέθοδος	42
5.4. Το υπολογιστικό μοντέλο.....	42
5.5. Πειραματικά αποτελέσματα και ανάλυση.....	43
5.6. Το παράδειγμα του metallic glass σε αριθμούς.....	44
5.7. Ελαστική ακαμψία διείσδυσης.....	45
5.8. Κεραμικά υλικά που περιλαμβάνουν ζιρκόνιο ZrO ₂ (zirconia-containing ceramics).....	48
Κεφάλαιο 6^ο : Υλικά τύπου Cam-Clay.....	50
6.1. Αφρώδη υλικά (Foam).....	50
6.2 Αριθμητικοί υπολογισμοί.....	51
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	52
Κεφάλαιο 7^ο : Το υλικό.....	53
7.1. Το τσιμέντο γενικά.....	53
7.2. Το τσιμέντο Τύπου IV.....	53
7.3. Υπολογισμός του μίγματος.....	53
7.4 Υπολογισμός γωνίας φ και συνοχής c της τσιμεντόπαστας.....	55
Κεφάλαιο 8^ο : Το πείραμα της διείσδυσης.....	56
8.1. Η δοκιμή της διείσδυσης.....	56
8.2. Ο διεισδυτής.....	56
8.3. Η συσκευή διείσδυσης.....	57
8.4. Χαρακτηριστικά φόρτισης.....	58
8.5. Αποτελέσματα της διείσδυσης.....	59
8.6. Δεύτερη πειραματική διάταξη της διείσδυσης.....	59
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	63
Βιβλιογραφία.....	64
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 ^ο Κεφαλαίου.....	66

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Μοντέλα Εδάφους

Η μηχανική συμπεριφορά στερεών υλικών όπως το τσιμέντο μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια ενός από τα διάφορα μοντέλα εδάφους.

Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος μελέτης των φαινομένων βασίζεται στην αντικατάσταση της πραγματικής μηχανικής συμπεριφοράς με ένα απλοποιημένο πρότυπο το οποίο εξαρτάται από ένα περιορισμένο αριθμό μεταβλητών, αντί να εξαρτάται από τον πολύ μεγάλο ή και άπειρο αριθμό μεταβλητών που χαρακτηρίζουν τα πραγματικά φαινόμενα.

Μοντέλα του εδάφους χρησιμοποιούνται γιατί είναι αδύνατο να μελετηθεί το στερεό όπως πραγματικά είναι σε όλη του την πολυπλοκότητα. Δυστυχώς δεν μπορεί να βρεθεί ένα κατάλληλο μοντέλο αρκετά γενικό, για να επιτρέψει την ανάλυση όλων των προβλημάτων που θέτει η μελέτη του στερεού.

Τα μοντέλα πρέπει να ικανοποιούν δύο βασικές προϋποθέσεις:

- Να επιτρέπουν μια καλή παράσταση των ιδιοτήτων του υλικού, στο πλαίσιο των προβλημάτων για τα οποία γίνονται.
- Να μπορεί να υπολογισθεί ή να εκτιμηθεί, με ικανοποιητική ακρίβεια, η τιμή των συντελεστών που εμφανίζονται στη μαθηματική μορφή του μοντέλου.

Για το έδαφος υπάρχουν μοντέλα που αναφέρονται μόνο στις τάσεις. Πρόκειται κατ'ουσία για κριτήρια θραύσεως.

Υπάρχουν και μοντέλα που επιτρέπουν τη συσχέτιση των τάσεων και των παραμορφώσεων τόσο στην περίπτωση των στατικών όσο και των δυναμικών επιπονήσεων. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούνται ιδίως στους υπολογισμούς με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Οι κυριότερες δυσκολίες για την κατάρτιση ενός μοντέλου εδάφους είναι οι εξής:

- Τα προβλήματα του εδάφους είναι τρισδιάστατα. Πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιούνται οι τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων στη γενική τους μορφή.
- Οι σχέσεις τάσεων και παραμορφώσεων δεν είναι απλές.
- Οι συνθήκες θραύσεως εξαρτώνται πολλές φορές από την ιστορία φόρτισης.
- Το έδαφος είναι ανομοιογενές και ανισότροπο. Αυτό έχει ως συνέπεια να μη μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι θεωρίες της κλίμακας και να είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν οι τιμές των χαρακτηριστικών συντελεστών του μοντέλου.

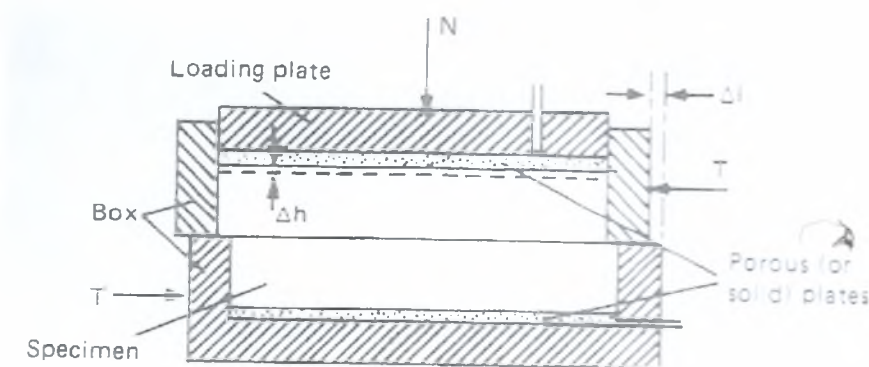
Εργαστηριακός προσδιορισμός των παραμέτρων διατμητικής αντοχής ϕ και c .

- **Δοκιμή απευθείας διάτμησης**

Η γωνία εσωτερικής τριβής ϕ και η συνοχή c , προσδιορίζονται εργαστηριακά κατά τη δοκιμή απευθείας διάτμησης, με διάφορες συσκευές, στις οποίες το δοκίμιο είτε διατέμνεται κατά επιφάνεια τετραγωνική, τοποθετημένο εντός ειδικής συσκευής (συσκευή Casagrande), είτε υπόκειται σε στρέψη κατά κυκλικό δακτύλιο. Χαρακτηριστικό των δοκιμών αυτών είναι ότι η επιφάνεια θραύσης είναι εκ των προτέρων καθορισμένη. Κατά τη δοκιμή στη συνήθη συσκευή Casagrande, το δοκίμιο υποκείμενο σε σταθερή κατακόρυφη τάση σ , υποβάλλεται σε διάτμηση μέχρι τη θραύση.

Η διάτμηση δύναται να λάβει χώρα, είτε με την αύξηση της διατμητικής δύναμης κατά σταθερό βαθμό και σε ίσα χρονικά διαστήματα, είτε με μετακίνηση του κινητού τμήματος της συσκευής διατμήσεως με σταθερή ταχύτητα. Ο δεύτερος τρόπος είναι και ο πλέον συνήθης.

Για κάθε δοκιμή, χαράσσεται διάγραμμα διατμητικών παραμορφώσεων-διατμητικών τάσεων, από το οποίο λαμβάνεται η μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} που αντιστοιχεί στη θραύση. Τα ζεύγη τιμών (σ, τ_{\max}) κάθε δοκιμής φέρονται γραφικά στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, με τεταγμένες τις διατμητικές τάσεις τ και τετμημένες τις κατακόρυφες τάσεις σ . Τα σημεία που αντιστοιχούν στις δοκιμές θα σχηματίζουν ευθεία, της οποίας η γωνία κλίση δίνει τη γωνία εσωτερικής τριβής.



Συσκευή απευθείας διάτμησης [27]

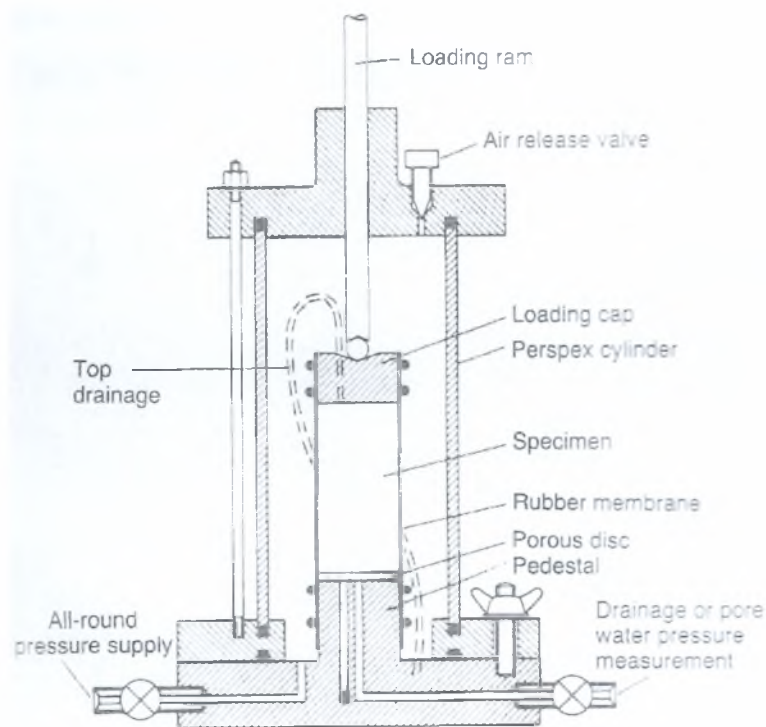
- **Δοκιμή τριαξονικής θλίψης**

Η δοκιμή τριαξονικής θλίψης είναι μία από τις πλέον πολύπλοκες εργαστηριακές δοκιμές της εδαφομηχανικής, λόγω όμως των ευρύτατων δυνατοτήτων της, έχει καθιερωθεί ως η βασική δοκιμή για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς του εδάφους υποκείμενου σε διάφορες εντατικές καταστάσεις. Κατά τη δοκιμή, παρά την επιβαλλόμενη θλιπτική καταπόνηση, τελικά η αστοχία οφείλεται στην

υπέρβαση της διατμητικής αντοχής. Ο συνήθης τύπος τριαξονικής δοκιμής είναι εκείνος κατά τον οποίο επιβάλλονται τάσεις $\sigma_1, \sigma_2=\sigma_3$ και εφαρμόζονται σε κυλινδρικά δοκίμια.

Το κυλινδρικό δοκίμιο, με λόγο ύψους προς διάμετρο συνήθως 1,5 έως 2,5, περιβάλλεται με στεγανή ελαστική μεμβράνη και τοποθετείται εντός κυψέλης η οποία τίθεται υπό καθολική πίεση σ_3 με τη βοήθεια υγρού (συνήθως νερού). Στο επάνω κάλυμμα του δοκιμίου, μέσω εμβόλου, εφαρμόζεται αξονική δύναμη η οποία δημιουργεί την πρόσθετη ορθή τάση $\sigma_1-\sigma_3$ (deviator stress). Το δοκίμιο υπό την παραπάνω εντατική κατάσταση άγεται σε θραύση, είτε με την αύξηση της μέγιστης κύριας τάσης σ_1 , είτε με την ελάττωση της ελάχιστης κύριας τάσης σ_3 .

Για την αξιοποίηση των μετρήσεων των τριαξονικών δοκιμών χαράσσονται οι κύκλοι του Mohr, οι οποίοι απεικονίζουν την εντατική κατάσταση των δοκιμών κατά τη στιγμή της θραύσης και προσδιορίζεται η περιβάλλουσα θραύσης, μέσω της οποίας υπολογίζονται οι παράμετροι διατμητικής αντοχής ήτοι η γωνία εσωτερικής τριβής ϕ και η συνοχή c .



Συσκευή τριαξονικής θλίψης [27]

- Δοκιμή ανεμπόδιστης θλίψης

Η δοκιμή ανεμπόδιστης θλίψης ή δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, θεωρείται ότι αποτελεί μερική περίπτωση της δοκιμής τριαξονικής θλίψης, κατά την οποία το δοκίμιο υπόκειται σε κατακόρυφη θλιπτική τάση $\sigma_1, (\sigma_3=0)$, χωρίς να εμποδίζεται η πλευρική διόγκωση αυτού. Το δοκίμιο έχει κυλινδρική μορφή με λόγο ύψους

προς διάμετρο 1,5 έως 2,5, ενώ τίθεται μεταξύ δύο μεταλλικών πλακών, μέσω των οποίων επιβάλλεται η κατακόρυφη τάση, ενώ παράλληλα μετρώνται οι κατακόρυφες παραμορφώσεις του δοκιμίου με τη βοήθεια μηκυνσιόμετρου.

Η δοκιμή εκτελείται με σταθερή ταχύτητα παραμόρφωσης του δοκιμίου, ενώ με τα αποτελέσματα της δοκιμής χαράσσεται διάγραμμα τάσεων-ανοιγμένων παραμορφώσεων. Από το παραπάνω διάγραμμα δύναται να προσδιορισθεί το μέτρο ελαστικότητας E του υπό δοκιμή υλικού. Η εντατική κατάσταση του δοκιμίου, κατά τη δοκιμή ανεμπόδιστης θλίψης, παρίσταται υπό μορφή κύκλου Mohr. Η θραύση εμφανίζεται κατά επίπεδο που σχηματίζει με την οριζόντια γωνία α , η οποία προσδιορίζεται από το πείραμα.

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$$

Στη συνέχεια άγεται η εφαπτόμενη του κύκλου του Mohr με βάση την οποία προσδιορίζεται η γωνία εσωτερικής τριβής ϕ και η συνοχή c .

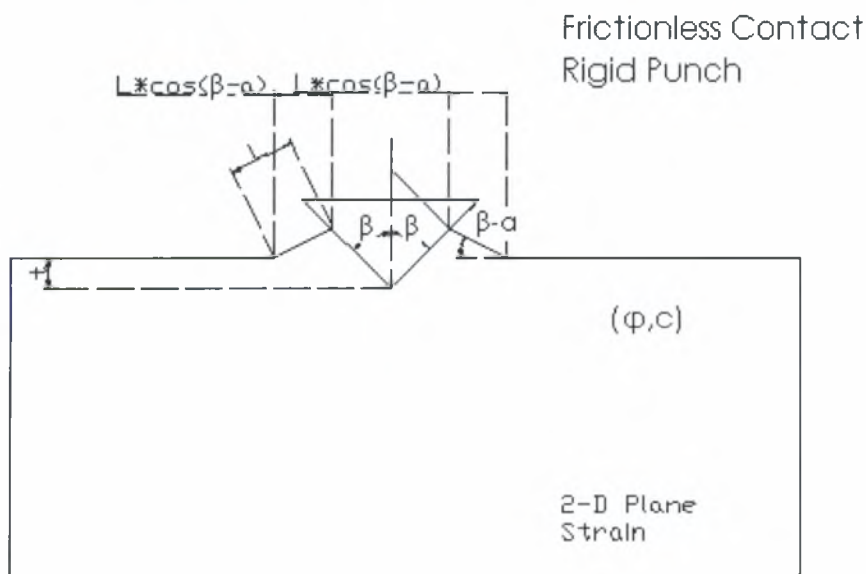
Συμπερασματικά, ο εργαστηριακός προσδιορισμός των δοκιμών των παραμέτρων διατμητικής αντοχής ϕ και c μέσα από τις δοκιμές απευθείας διάτμησης και τριαξονικής θλίψης δεν ενδείκνυται στην περίπτωση του τσιμέντου, αφενός επειδή απαιτούνται πολύ υψηλά μεγέθη δυνάμεων για τη θλίψη και διάτμηση δοκιμίων τσιμεντόπαστας, αφετέρου επειδή αποτελούν ιδιαίτερα δύσκολες και χρονοβόρες δοκιμές.

Κεφάλαιο 1°.

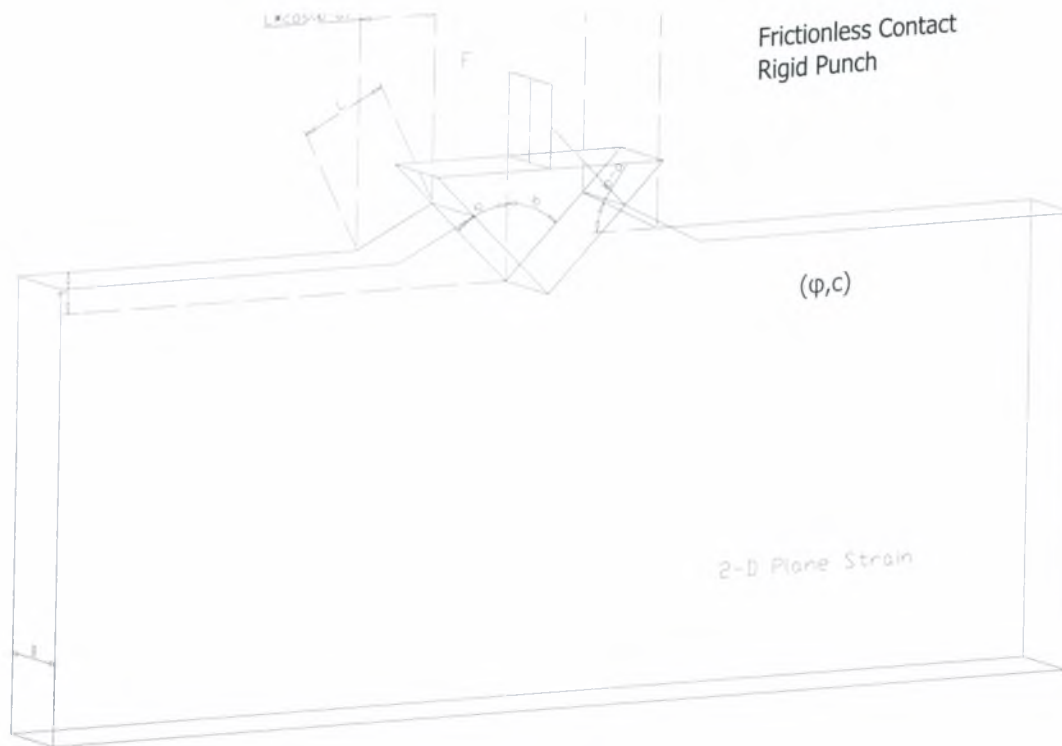
1.1.Μοντέλο 1°

Το πρώτο μοντέλο που αναπτύξαμε βασίστηκε στην εργασία του R.T.Shield [1]. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας κάποια συνθήκη τάσης-παραμόρφωσης για ένα ιδεατό στερεό, αυτό αποκτά εξισώσεις ταχύτητας που περιγράφουν τις χαρακτηριστικές γραμμές διαρροής σε προβλήματα επίπεδης έντασης. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται για να εκτιμήσουμε ένα πρωταρχικό πεδίο ταχυτήτων για την διείσδυση σε μία ημιάπειρη μάζα εδαφικού υλικού. Η διείσδυση πραγματοποιείται με τη βοήθεια μίας λείας, άκαμπτης και άνευ τριβής φρέζας, γωνίας 2β , κάτω από συνθήκες επίπεδης έντασης.

1.2.Σχηματική απεικόνιση μοντέλου.

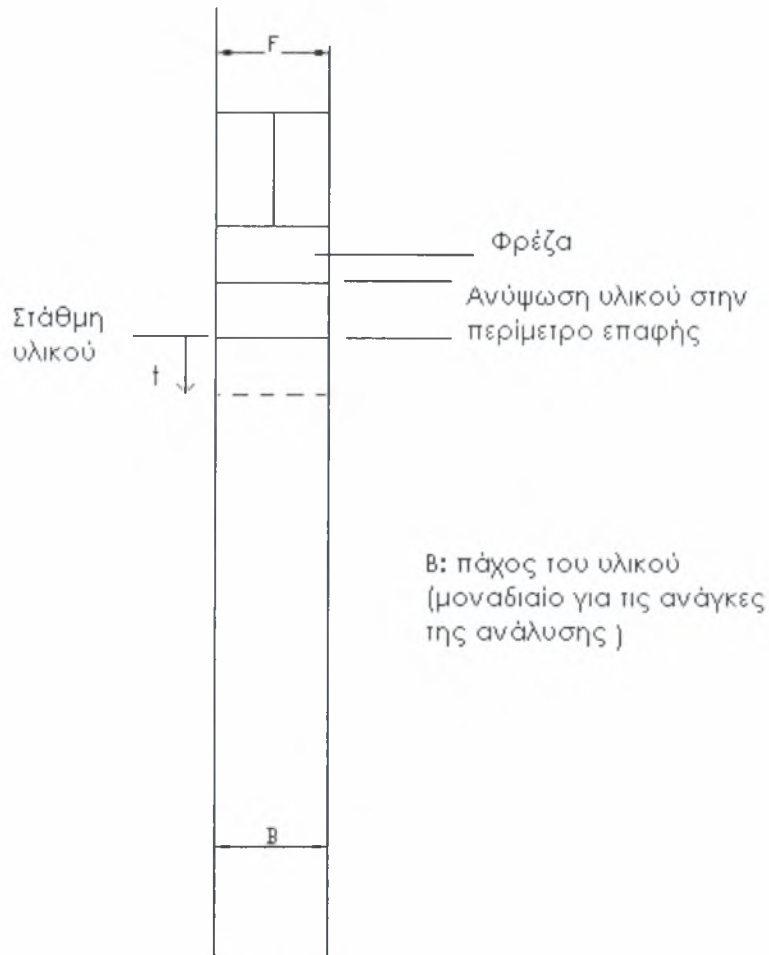


Σχήμα 1.1 Γεωμετρία του μοντέλου



Σχήμα 1.2

Το υλικό είναι τύπου Mohr-Coulomb. Η οριζόντια προβολή της ανύψωσης του υλικού περιμετρικά του διεισδυτή είναι $L \cdot \cos(\beta - \alpha)$. Η προβολή αυτή είναι μετρήσιμο μέγεθος και θα το χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα μεθοδολογία. Οι εξωτερικές διαστάσεις του δοκιμίου πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερες (τουλάχιστον τρεις φορές) από το $L \cdot \cos(\beta - \alpha) + 2t \cdot \tan \beta$. Στην ανάλυση που ακολουθεί, συμπληρώνουμε την υπάρχουσα θεωρία και αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις του προβλήματος έτσι ώστε να μπορούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα (δηλαδή την εκτίμηση των σταθερών του υλικού ϕ και c με τον περιορισμό $c \neq 0$).



Σχήμα 1.3 Πλευρική τομή της δισδιάστατης εικόνας του Σχήματος 1.2

1.3 Μαθηματική Περιγραφή

Οι παράμετροι του υλικού που εμπλέκονται στο πρόβλημα είναι η συνοχή c [N/m^2] (cohesion) και η γωνία διατμητικής αντοχής ϕ [degree]. Η βύθιση του διεισδυτή ορίζεται ως t [m] και α [degree] είναι μία εσωτερική γωνία της γεωμετρίας του προβλήματος. Η γωνία 2β αποτελεί την γωνία του δισδιάστατου διεισδυτή, ενώ ως F [N/m] περιγράφεται η ανά μέτρο μήκους δύναμη που θα ασκήσουμε στο διεισδυτή. Η P [N/m^2] περιγράφει την πλευρική πίεση που αναπτύσσεται στο υλικό και πιο συγκεκριμένα στην περιοχή που ανυψώνεται εκατέρωθεν του διεισδυτή (pile-up area), ενώ L είναι το πλευρικό μήκος της επιφάνειας του υλικού που ανυψώνεται και $L \cdot \cos(\beta - \alpha)$ είναι η οριζόντια προβολή της ανυψωμένης επιφάνειας εδάφους. Όλα όσα περιγράφονται παραπάνω φαίνονται αναλυτικά στο Σχήματα 1.1 και 1.2.

Αρχικά για την εκτίμηση των μηχανικών χαρακτηριστικών, συνοχή c και γωνία διατμητικής αντοχής ϕ , θα πρέπει να αποφασίσουμε σχετικά με τη γεωμετρία του διεισδυτή και συγκεκριμένα για τη γωνία 2β . Στα πλαίσια της εργασίας ερευνήσαμε τις αποκρίσεις του προς μελέτη υλικού για διάφορες γωνίες διεισδυτή όπως 30° , 60° , 70.3° και 80° μοίρες. Να θυμίσουμε ότι η γωνία 70.3° αποτελεί χαρακτηριστική τιμή καθώς η διπλάσιά της δηλαδή $140,6$ είναι η γωνία διεισδυτή τύπου Vickers.

Έχοντας λοιπόν διάφορους τύπος δισδιάστατων διεισδυτών ερευνήσαμε την απόκριση του προς μελέτη υλικού, είτε αυτό είναι έδαφος είτε τσιμεντόπαστα, αφού έχουν κοινά χαρακτηριστικά. Για την επίτευξη της επίλυσης θα έπρεπε να δίνουμε συγκεκριμένες τιμές της γωνίας διατμητικής αντοχής ϕ , όπως και κάναμε δίνοντας τιμές από 1 μοίρα έως 86 μοίρες, με βήμα 5 μοίρες. Με τη βοήθεια των σχέσεων 1.1, 1.2 και 1.3 προέκυψαν τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Το επόμενο βήμα μετά την δοκιμή διείσδυσης δεν είναι άλλο από την παρατήρηση και μέτρηση του μήκους $L \cdot \cos(\beta - \alpha)$ που θυμίζουμε ότι είναι η οριζόντια προβολή της ανυψωμένης επιφάνειας του υλικού όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Αξίζει να πούμε ότι η διείσδυση για την οποία αναφερόμαστε είναι διαρκείας που σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις που θα παρατηρήσουμε είναι κυρίως πλαστικές. Γνωστή παράμετρος του προβλήματος είναι η ανά μονάδα μέτρου δύναμη F [N/m] που επιβάλλουμε στο διεισδυτή.

Η σχέση που συνδέει τις παραμέτρους α , β και ϕ είναι η ακόλουθη:

$$\cos[2\beta - \alpha] = \frac{\cos[\alpha] \{ e^{\alpha \tan[\phi]} (\tan[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}]) + e^{-\alpha \tan[\phi]} \tan[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}] \}}{2 \sin[\alpha] + e^{\alpha \tan[\phi]} \tan[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}] + e^{-\alpha \tan[\phi]} \tan[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}]} \quad (1.1)$$

Η σχέση που συνδέει τα μεγέθη L , t , α και β είναι η ακόλουθη:

$$L = \frac{t}{e^{-\alpha \tan[\phi]} \tan[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}] \cos[\beta] - \sin[\beta - \alpha]} \quad (1.2)$$

Τέλος ανέπτυξα την επόμενη σχέση που θα περιγράψω στη συνέχεια.

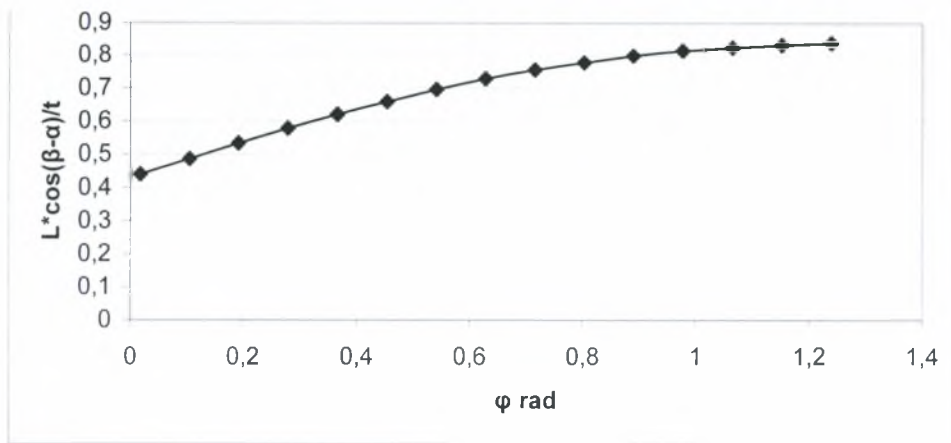
$$\frac{F}{ct} = \frac{2 \cot[\phi] \{ e^{2\alpha \tan[\phi]} (\tan[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}])^2 - 1 \} \sin[\beta] \tan[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}] e^{-\alpha \tan[\phi]}}{e^{-\alpha \tan[\phi]} \tan[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}] \cos[\beta] - \sin[\beta - \alpha]} \quad (1.3)$$

1.4.Αποτελέσματα

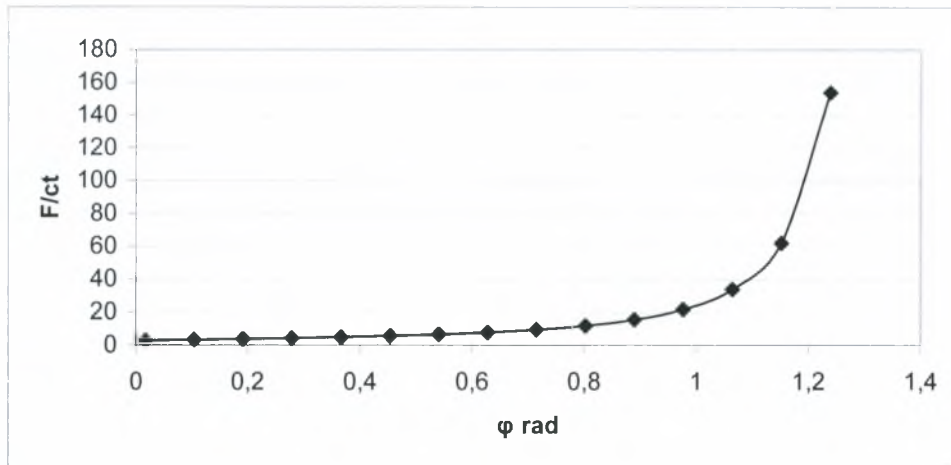
Ο αναλυτικός πίνακας που ακολουθεί δείχνει τα αποτελέσματα των υπολογισμών των μεγεθών $L \cdot \cos(\beta - \alpha) / t$ και F / ct . Ο τρόπος με τον οποίο πρακτικά ελέγχουμε την συνοχή c και τη γωνία διατμητικής αντοχής φ είναι ο ακόλουθος. Με τη βοήθεια του πρώτου διαγράμματος (Σχήμα 1.4) και μετρώντας το αποτύπωμα στο δοκίμιο $L \cdot \cos(\beta - \alpha) / t$ (t βάθος διείσδυσης και $L \cdot \cos(\beta - \alpha)$ η οριζόντια προβολή της ανυψωμένης επιφάνειας όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1) υπολογίζουμε την γωνία διατμητικής αντοχής φ . Με τη βοήθεια του δεύτερου διαγράμματος έχοντας γνωστή πλέον την γωνία φ του υλικού, και την F (N/m) δύναμη που θα εξασκήσουμε στο διεισδυτή, υπολογίζουμε το δεύτερο ζητούμενο μέγεθος, τη συνοχή c [N / m^2]. Μάλιστα εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία ελέγχουμε τα μεγέθη c και φ έχοντας εξασφαλίσει διαφορετική γωνία διείσδυσης β όπως 30° , 60° , $70,3^\circ$ και 80° .

Πίνακας 1.1 Αποτελέσματα Υπολογισμών για τη γωνία $\beta=30^\circ$

φ μοιρες	α μοιρες	$L \cdot \cos(\beta - \alpha) / t$	F / ct
1	17,420	0,441	3,001
6	17,447	0,486	3,360
11	17,557	0,534	3,776
16	17,791	0,578	4,268
21	18,168	0,621	4,868
26	18,528	0,659	5,591
31	19,085	0,696	6,515
36	19,375	0,729	7,728
41	20,655	0,756	9,388
46	21,520	0,779	11,783
51	22,689	0,800	15,471
56	23,974	0,815	21,721
61	25,411	0,825	33,803
66	26,746	0,834	62,086
71	27,439	0,839	153,944



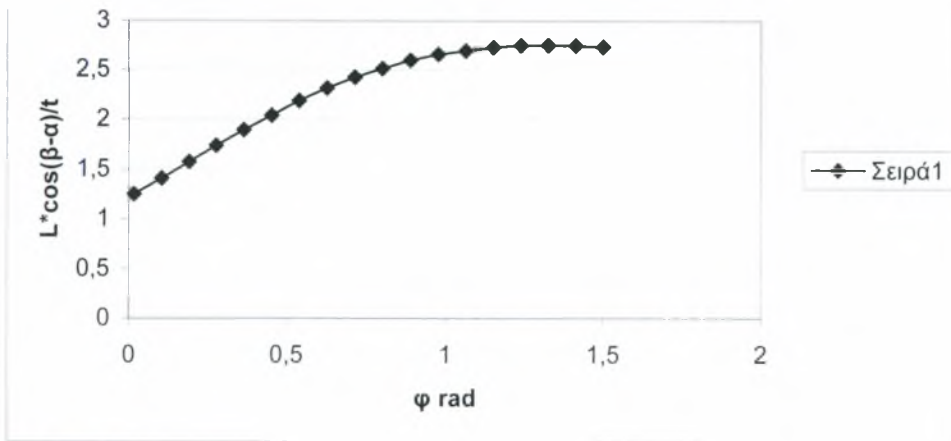
Σχήμα 1.4



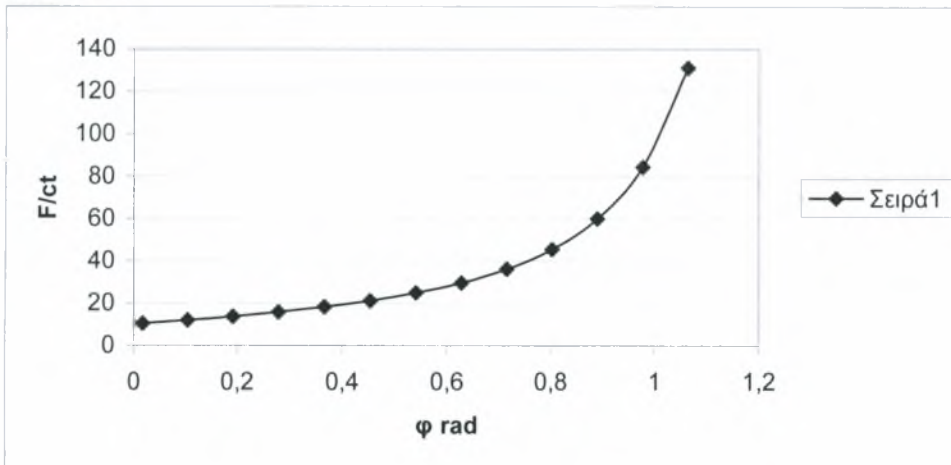
Σχήμα 1.5

Πίνακας 1.2 Αποτελέσματα Υπολογισμών για τη γωνία $\beta=60^\circ$

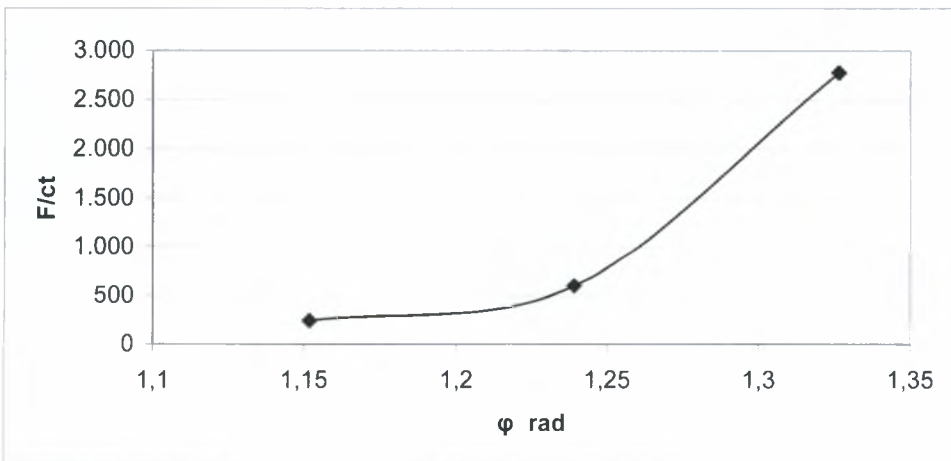
ϕ μοιρες	α μοιρες	$L \cdot \cos(\beta - \alpha) / t$	F/ct
1	50,827	1,250	10,570
6	50,936	1,407	12,028
11	51,205	1,574	13,769
16	51,709	1,736	15,799
21	52,179	1,894	18,226
26	52,867	2,041	21,167
31	53,692	2,186	24,913
36	54,580	2,315	29,751
41	55,594	2,422	36,255
46	56,448	2,511	45,570
51	57,456	2,595	60,023
56	58,155	2,656	84,341
61	58,837	2,694	131,092
66	59,399	2,728	241,060
71	59,702	2,749	598,412
76	59,868	2,752	2776,660



Σχήμα 1.6



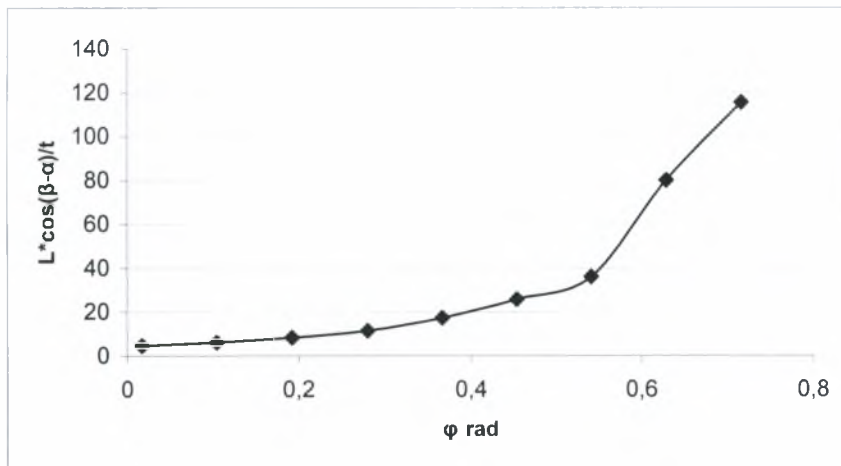
Σχήμα 1.7



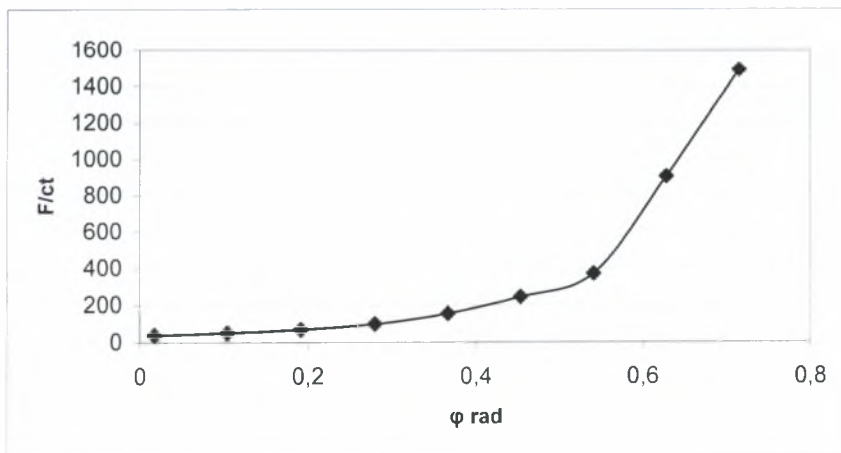
Σχήμα 1.8

Πίνακας 1.3 Αποτελέσματα Υπολογισμών για τη γωνία $\beta=70.3^\circ$

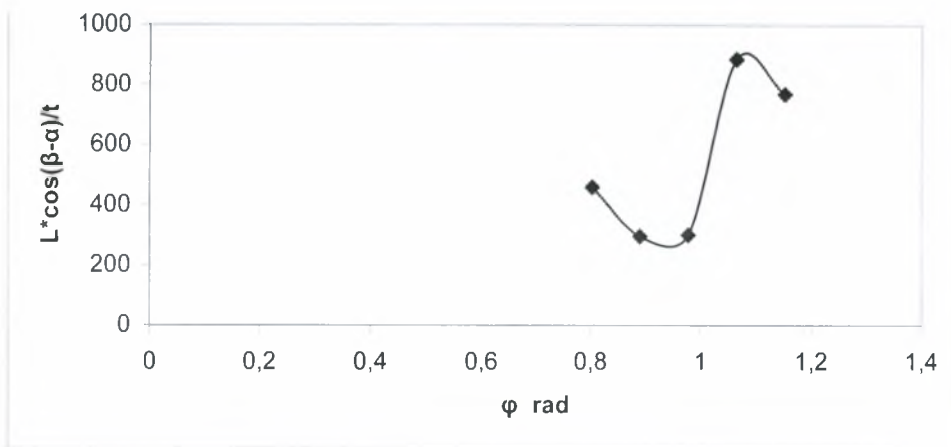
φ μοιρες	α μοιρες	$L \cdot \cos(\beta - \alpha) / t$	F / ct
1	63,779	4,702	37,666
6	63,956	6,234	50,358
11	64,279	8,390	69,129
16	64,744	11,454	97,475
21	64,990	17,364	154,334
26	65,604	25,802	243,856
31	66,436	36,117	370,468
36	66,795	79,918	904,650
41	67,641	115,516	1491,290
46	68,147	459,515	6988,520
51	68,946	296,374	5605,040
56	69,513	300,876	7532,940
61	69,810	885,589	32168,000
66	70,112	768,236	47314,400



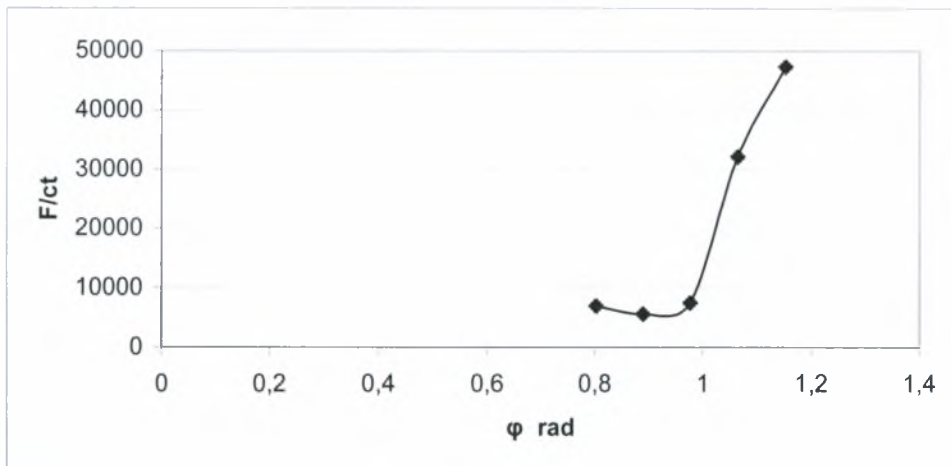
Σχήμα 1.9



Σχήμα 1.10



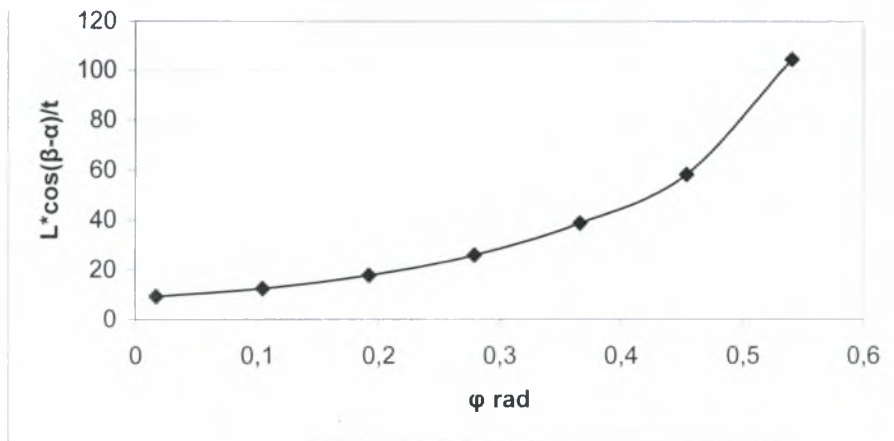
Σχήμα 1.11



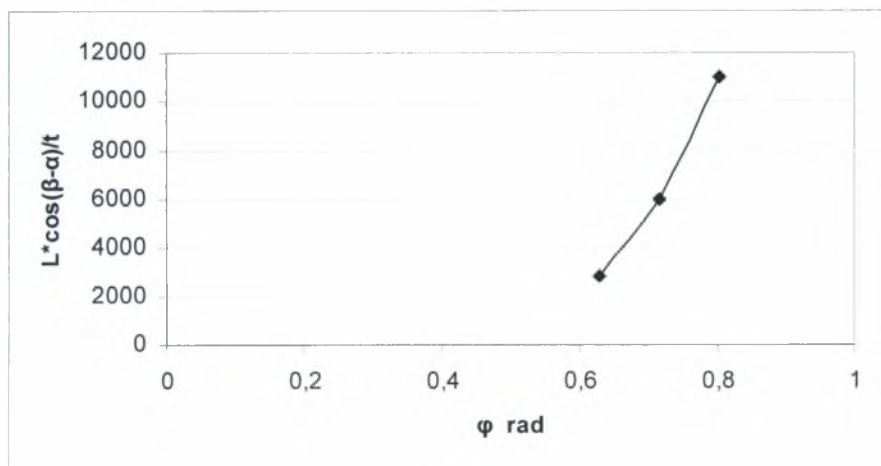
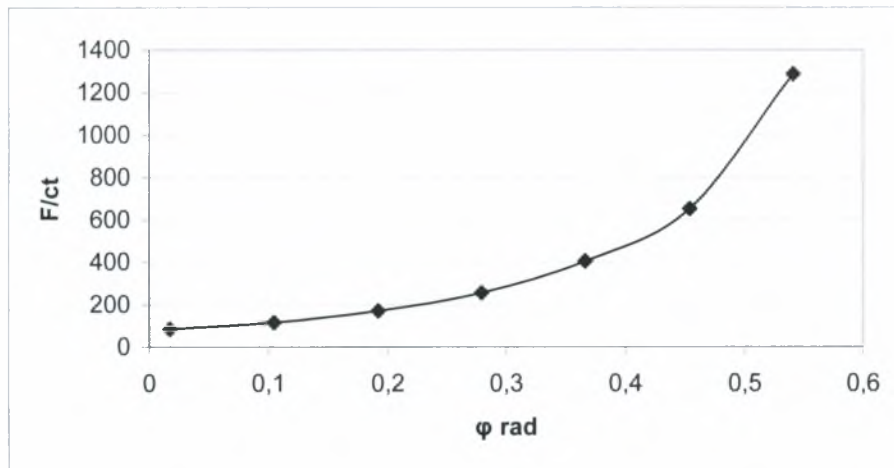
Σχήμα 1.12

Πίνακας 1.4 Αποτελέσματα Υπολογισμών για τη γωνία $\beta=80^\circ$

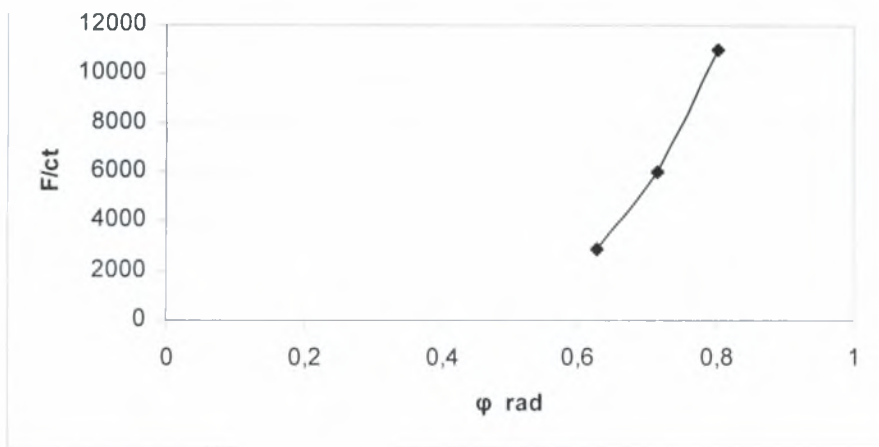
φ μοιρες	α μοιρες	$L^* \cos(\beta-\alpha)/t$	F/ct
1	76,633	9,245	85,299
6	76,822	12,424	115,804
11	76,891	17,818	169,888
16	77,120	25,799	255,479
21	77,407	38,712	404,588
26	77,779	58,057	652,391
31	78,065	104,419	1287,120
36	78,398	209,051	2900,020
41	78,782	372,079	5998,000
46	79,140	564,368	11003,400



Σχήμα 1.14



Σχήμα 1.15



Σχήμα 1.16

1.5.Συμπεράσματα

Η μορφή και τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων που προέκυψαν για τις διάφορες γωνίες διεισδυτών που εξετάσαμε αποδεικνύουν ότι όταν θέλουμε να εξετάσουμε σκληρά υλικά, υλικά υψηλής συνοχής c θα πρέπει η γωνία του διεισδυτή να είναι μικρή ($2\beta=60^\circ$). Αντίθετα για μαλακά υλικά μικρότερης συνεκτικότητας θα πρέπει να προτιμούμε διείσδυση υπό μεγαλύτερες γωνίες ($2\beta=160^\circ$). Αυτό προέκυψε ώστε πρακτικά να είναι ευδιάκριτες οι παραμορφώσεις του δοκιμίου και το αποτύπωμα της διείσδυσης σε συνδυασμό με το επιβαλλόμενο φορτίο. Στην περίπτωση που $\phi=0$, τα αποτελέσματα οδηγούν στις λύσεις της κλασικής ελαστοπλαστικότητας.

Η μεθοδολογία, όπως και οι άλλες που ακολουθούν μπορούν να εφαρμοστούν για πολύ μικρά δοκίμια υλικών, οπότε και οι απαιτήσεις σε φορτίο είναι μικρές. Το υλικό του διεισδυτή πρέπει να είναι πολύ πιο άκαμπτο από το υλικό του δοκιμίου. Για τις περισσότερες περιπτώσεις εδαφών, άμμων, τσιμέντου και άλλων κονιαμάτων ένας χαλύβδινος διεισδυτής επαρκεί. Ο διεισδυτής πρέπει να λιπαίνεται κατάλληλα για την αποφυγή τριβής. Εάν το υλικό δεν παρουσιάζει ανύψωση στην περίμετρο της διείσδυσης, αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο 1 δεν είναι επαρκές και θα χρειαστεί άλλο μοντέλο. Γενικά, εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι E , το παρόν μοντέλο θα είναι αρκετά αξιόπιστο εφόσον $E/(c*\tan\beta)>40$.

Κεφάλαιο 2^ο.

2.1.Μοντέλο 2^ο

Το δεύτερο μοντέλο που αναπτύξαμε βασίστηκε στην εργασία των P.R.Pasley, J.B.Cheatham,Jr, και C.W.G.Fulcher, [2], [3]. Πρόκειται για την ανάλυση πλαστικής ροής βραχωδών υλικών κάτω από την επιρροή ενός άνευ τριβής διεισδυτή έτσι όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

Ο βράχος θεωρείται τέλεια πλαστικός με μία εξάρτηση της δύναμης διαρροής από το υδροστατικό μέρος της τάσης. Η θεωρία της τέλει πλαστικής συμπεριφοράς αναπτύχθηκε για να περιγράψει υλικά όπως τα μέταλλα. Όμως παραμένει αναποτελεσματική για την αναλυτική περιγραφή της ανελαστικής συμπεριφοράς των βραχωδών υλικών και αυτό επειδή θεωρεί :

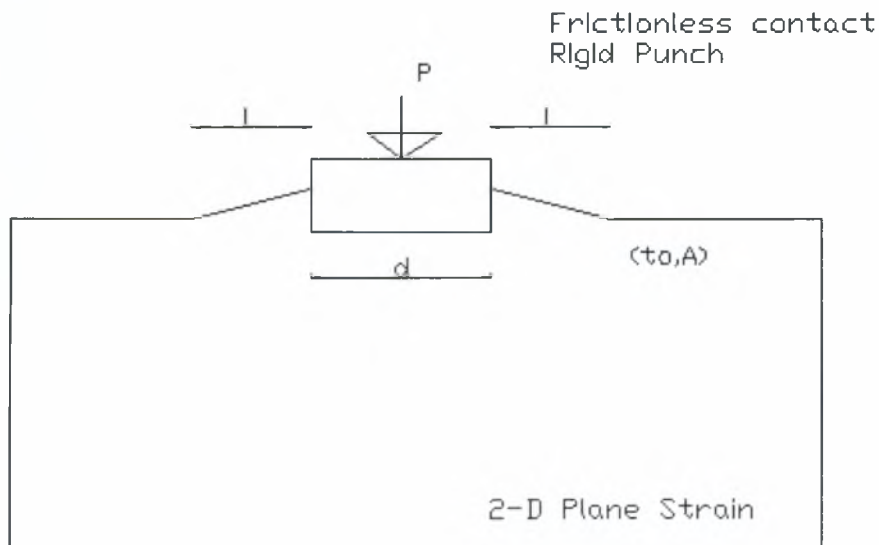
(α) το υλικό είναι ασυμπίεστο

(β) ο υδροστατικός παράγων της τάσης $\sigma_{kk}/3$ δεν έχει επίδραση στην διαρροή.

Επιλύσεις σε προβλήματα μηχανικής των βραχών [2] έχουν λάβει υπόψη τη δεύτερη θεώρηση συνεχίζοντας να χρησιμοποιούν την υπόθεση της ασυμπίεστότητας.

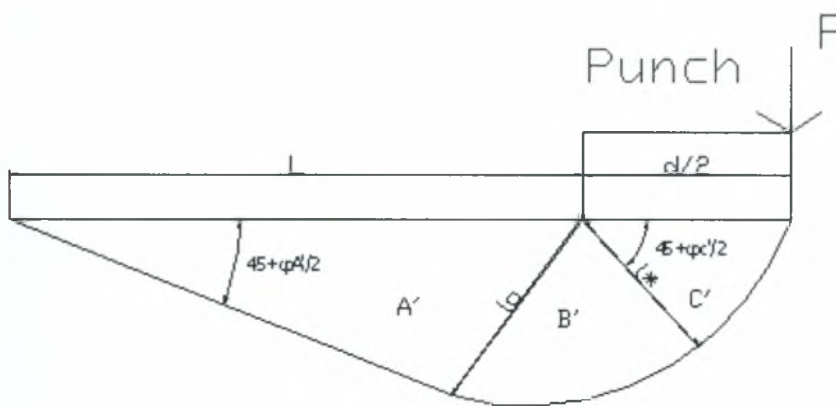
Μία εξάρτηση της τάσης διαρροής στην υδροστατική πίεση, γενικά, θα οδηγήσει σε μία πλαστική ογκομετρική αύξηση σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Drucker [3]. Τα αποτελέσματα πάνω στο παραπάνω σχόλιο είναι γνωστά και ως το 'Αξίωμα του Drucker'.

2.2.Σχηματική απεικόνιση



Σχήμα 2.1 Γεωμετρία του μοντέλου

Σχήμα 2.2 Πλάγια Τομή



Σχήμα 2.3

2.3 Μαθηματική Περιγραφή

Η θεωρία απλουστεύεται και η εφαρμογή της παρουσιάζεται στη συνέχεια στις δύο διαστάσεις. Για την επίλυση του προβλήματος διείσδυσης, θεωρούμε μία ειδική περίπτωση. Μία επιλογή φαίνεται ικανή να ταιριάζει τα αρχικά πειραματικά αποτελέσματα σχετικά με τις επιφάνειες διαρροής και δίνεται στη Σχέση 2.1.

Ισχύει ότι $j^2 = (j(\sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}))$ όμως η ανάλυση έγινε για την ειδικά επιλογή του j^2 :

$$j^2 = t_o^2 - \frac{1}{3} A \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}, A > 0 \quad (2.1)$$

Οι παράμετροι του υλικού που εμπλέκονται στο πρόβλημα είναι η τάση t_o [N/m²] και η παράμετρος του υλικού A [N/m²] έτσι όπως σχετίζονται μέσω της Σχέσης 2.1.

$$t'_a = \frac{1}{2} [A + (\frac{4}{3} A^2 + 4t_o^2)^{0.5}] \quad (2.2)$$

$$\pi = + \frac{[t'_c{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}}{\frac{A}{2}} - \tan^{-1} \frac{[t'_c{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}}{\frac{A}{2}} - \frac{[t'_A{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}}{\frac{A}{2}} + \tan^{-1} \frac{[t'_A{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}}{\frac{A}{2}} \quad (2.3)$$

Το φορτίο που εφαρμόζεται στον επίπεδο διεισδυτή ανά μονάδα βάθους είναι το P [N/m] και δίνεται από τη Σχέση 2.4.

$$P = d(t'_c - \sigma'_c) \quad (2.4)$$

$$\sigma'_c = \frac{1}{A} (t_o^2 + \frac{1}{12} A^2 - t'_c{}^2) \quad (2.5)$$

$$\frac{l^*}{l_0} = \left\{ \frac{t'_A + [t'_A{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}}{t'_c + [t'_c{}^2 - \frac{1}{4} A^2]^{0.5}} \right\}^{0.5} \quad (2.6)$$

$$\phi'_c = \sin^{-1}(A/2t'_c) \quad (2.7)$$

$$\phi'_A = \sin^{-1}(A/2t'_A) \quad (2.8)$$

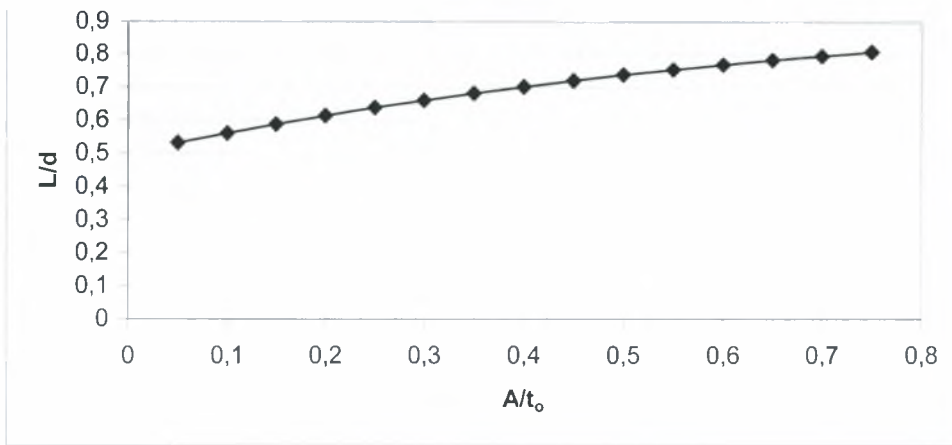
$$\frac{L}{d} = \frac{2l_0}{l^*} \frac{\sin(45 + \frac{1}{2} \phi'_A)}{4 \cos(45 + \frac{1}{2} \phi'_c)} \quad (2.9)$$

2.4 Αποτελέσματα

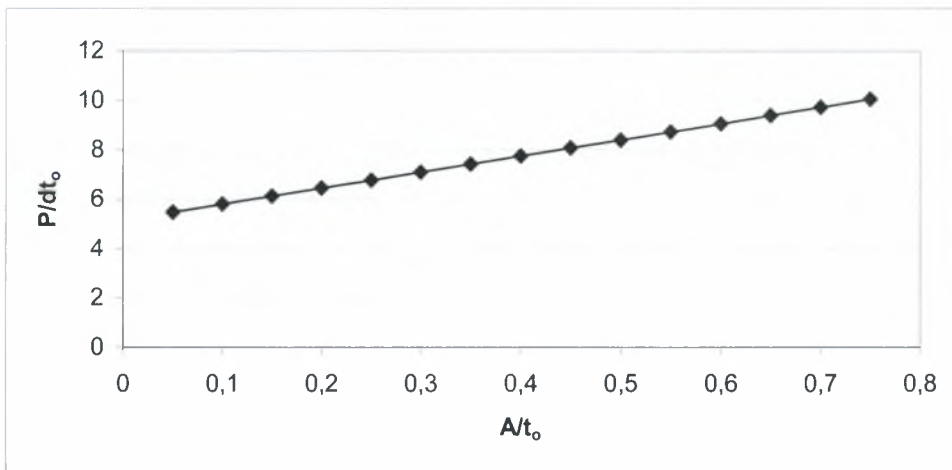
Table 2.1 Analysis of Plastic Flow of Rock under a Lubricated Punch

A/t ₀	t _A /t ₀	t _c /t ₀	σ _c /t ₀	P/dt ₀	φ _α	φ _c	l*/l ₀	L/d
0,05	1,025417	1,10389	-4,3673	5,471203	0,024383	0,022649	0,963791	0,531119
0,1	1,051665	1,208273	-4,5909	5,799175	0,047562	0,041393	0,932881	0,560282
0,15	1,078743	1,312961	-4,8132	6,126236	0,069581	0,057154	0,906249	0,587612
0,2	1,106645	1,417818	-5,0343	6,452184	0,090487	0,07059	0,88312	0,613223
0,25	1,135363	1,522742	-5,2541	6,776876	0,110321	0,082181	0,862899	0,637221
0,3	1,164889	1,627805	-5,4741	7,101972	0,129126	0,09228	0,84508	0,659731
0,35	1,195212	1,732944	-5,6939	7,426905	0,146946	0,101157	0,829302	0,68084
0,4	1,22632	1,838168	-5,9138	7,751988	0,163821	0,10902	0,81526	0,700638
0,45	1,258199	1,943496	-6,1340	8,077503	0,179794	0,116031	0,802707	0,71921
0,5	1,290833	2,048768	-6,3532	8,402005	0,194905	0,122329	0,791473	0,736607
0,55	1,324206	2,154409	-6,5750	8,729443	0,209194	0,127994	0,78131	0,752964
0,6	1,358301	2,260226	-6,7977	9,057929	0,2227	0,133123	0,772124	0,768316
0,65	1,393098	2,366244	-7,0213	9,387634	0,235463	0,137784	0,763793	0,782726
0,7	1,428579	2,472486	-7,2462	9,718706	0,247518	0,142035	0,756218	0,796255
0,75	1,464725	2,578972	-7,4723	10,05127	0,258904	0,145924	0,749312	0,808958

Ο αναλυτικός πίνακας 2.1 που προηγήθηκε παρουσιάζει τα αποτελέσματα των υπολογισμών των ζητούμενων μεγεθών. Ο τρόπος με τον οποίο πρακτικά ελέγχουμε την συνοχή στις παραμέτρους του υλικού A και t₀ είναι ο ακόλουθος. Με τη βοήθεια του πρώτου γραφήματος (Σχήμα 2.4) και παρατηρώντας το αποτύπωμα στο δοκίμιο L (όπου L το οριζόντιο μήκος του υλικού που ανυψώνεται όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.1, 2.2, 2.3) πληροφορούμαστε τον αδιάστατο λόγο των μεγεθών A/ t₀. Βεβαίως είναι γνωστό το πλάτος d του επίπεδου διεισδυτή καθώς επίσης και η δύναμη P ανά μονάδα μήκους του πάχους του διεισδυτή που θα εξασκήσουμε σε αυτόν. Με τη βοήθεια του δεύτερου γραφήματος (Σχήμα 2.5) έχοντας γνωστό πλέον το λόγο A/ t₀, την P [N/m] και d [m] μετρούμε ακριβώς το t₀ και στη συνέχεια το A.



Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.5

2.5 Συμπεράσματα

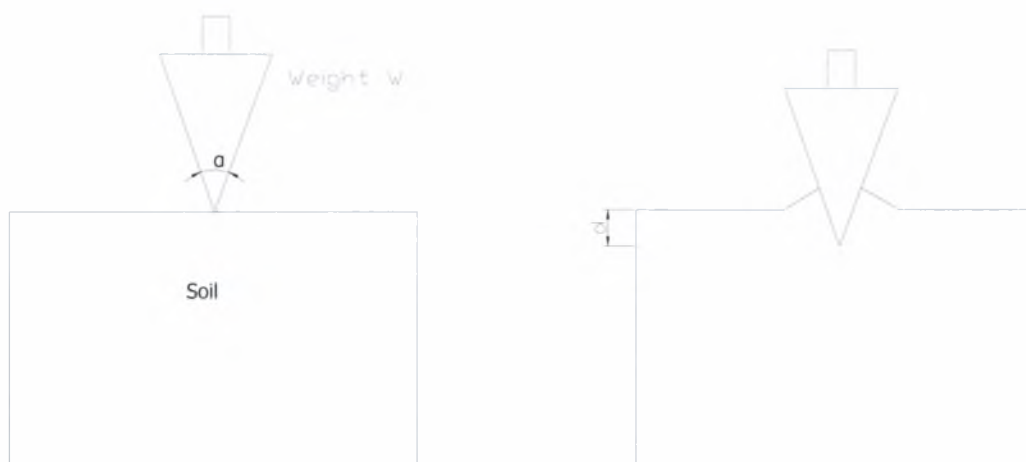
Γενικά η θεωρία στην οποία βασίζεται το μοντέλο των Cheatham et al, προσαρμόζει τις πειραματικές παρατηρήσεις βραχυδών υλικών αλλά και πολλών στερεών υλικών των οποίων η επιφάνεια διαρροής είναι γνωστή. Δεν παίρνει υπόψη την κράτυνση και την ελαστικότητα. Αναμένεται να είναι αποδοτική μέθοδος για σχετικά ψαθυρά υλικά.

Κεφάλαιο 3^ο

3.1.Μοντέλο 3^ο

Το τρίτο μοντέλο βασίζεται στην εργασία του D.M.Wood [4]. Δοκιμές με πτώση κώνου έχουν εδώ και πολλές δεκαετίες διεξαχθεί στη Σκανδιναβία για τον υπολογισμό της αντοχής γενικά συνεκτικών υλικών. Διάφορες παραλλαγές ελέγχων διείσδυσης κώνου έχουν υιοθετηθεί στις Σκανδιναβικές χώρες και στο Ηνωμένο Βασίλειο για τον υπολογισμό του ορίου υδαρότητας σε συνεκτικά υλικά. Σε αυτό το μοντέλο, θα παρουσιασθούν οι θεωρητικές προβλέψεις πάνω σε πειράματα διείσδυσης κώνου διαφορετικών γωνιών σε συνεκτικά υλικά.

3.2. Σχηματική απεικόνιση



Σχήμα 3.1 Γεωμετρία του μοντέλου

3.3Μαθηματική Περιγραφή

Η γεωμετρία του μοντέλου φαίνεται αναλυτικά στο Σχήμα 1. Ένας κώνος γωνίας α και βάρους W [N] αφήνεται να πέσει από κατάσταση ηρεμίας, ακουμπώντας την επιφάνεια υλικού συνοχής c_u [N/m²], και διεισδύει στο υλικό βάθος d [m]. Τέλος μετράται το βάθος διείσδυσης d μετά από πέντε δευτερόλεπτα. Οι παράμετροι του μοντέλου αυτού συνδέονται μέσα από τη Σχέση 3.1.

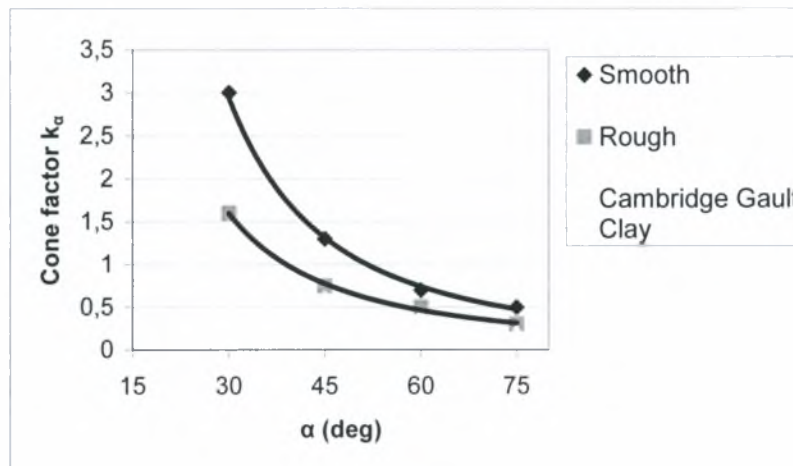
$$\frac{c_u d^2}{W} = k(\alpha, \chi) \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω σχέση, το χ δηλώνει ένα μέτρο τριβής ανάμεσα στο υλικό και τον κώνο. Ωστόσο στο συγκεκριμένο μοντέλο δεν ελήφθη υπόψη η τριβή και επομένως η παράμετρος $k(\alpha, \chi)$ αντικαταστάθηκε από τον συντελεστή k_α (Σχέση 3.2) ο οποίος αναμένεται να λάβει διαφορετικές τιμές για κάθε διαφορετική γωνία α του κώνου. Άρα η τάση συνοχής c_u δίνεται από τον τύπο:

$$c_u = \frac{k_\alpha W}{d^2} \quad (3.2)$$

3.4 Αποτελέσματα

Επιστημονικές εργασίες οι οποίες παρείχαν πληροφορίες και αναλύσεις [4] συνάγουν τις θεωρητικές αντιστοιχίες του συντελεστή k_α με την εκάστοτε γωνία α για τις ακραίες δύο περιπτώσεις, του απολύτως λείου κώνου και του απολύτως τραχέως κώνου. Οι δύο αυτές περιπτώσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2. Experimental and theoretical variation in cone factor k_α .

3.5 Συμπεράσματα

Η σύγκριση των θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων καταδεικνύουν ότι η περιγραφή των μηχανισμών που διέπουν τη διείδυση κώνου σε αυτό το μοντέλο δεν είναι εντελώς ικανοποιητική. Αναμένεται σχετικά καλή εφαρμογή στους μυτερούς κώνους και σε κορεσμένες αργίλους ή σε υλικά με χαμηλό όριο διαρροής και μικρή κράτυνση.

Κεφάλαιο 4ο

4.1. Περίληψη

Η επίδραση του πορώδους στην αντίσταση διείσδυσης ανιχνεύεται για ένα κωνικό διεισδυτή μέσα από δύο μοντέλα. Το μοντέλο του Gurson, το οποίο είναι κατάλληλο για χαμηλά πορώδη όπου υπάρχουνε καλώς διαχωρισμένα κενά τα οποία είναι τραχεία και σφαιρικά στο σχήμα και το μοντέλο των Fleck et al το οποίο είναι κατάλληλο για τη μικροδομή αποτελούμενη από σφαιρικά κενά ενωμένα από διακριτικούς λαιμούς (συγκολλημένοι κόκκοι). Υπολογισμοί με πεπερασμένα στοιχεία και ένα αναλυτικό μοντέλο ονομαζόμενο cavity expansion, ήτοι, επέκτασης κοιλότητας, δείχνουν ότι η πίεση διείσδυσης είναι δύο και τρεις φορές η μονοαξονική τάση διαρροής του πορώδους υλικού, για μικρά πορώδη έως και 0.3. Συμπύκνωση συμβαίνει σε μία πλαστική ζώνη που περιβάλλει τον διεισδυτή. Υψηλή πυκνότητα παρατηρείται κατά μήκος των πλευρών του διεισδυτή για μικρά πορώδη, λιγότερο του 0.1, αλλά όχι για περισσότερο. Και τα δύο μοντέλα, πεπερασμένων στοιχείων και cavity expansion, προτείνουν ότι η μέση πίεση διείσδυσης αυξάνει όσο πιο μικρή γίνεται η γωνία του διεισδυτή, όσο η τάση διαρροής του υλικού μειώνεται και όσο το επίπεδο του αρχικού πορώδους μειώνεται.

Για συγκριτικούς σκοπούς, τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζονται για στερεά υψηλής πυκνότητας. Οι προβλέψεις της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων για ένα πορώδες υλικό επίσης συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα διείσδυσης σε μεταλλικό υλικό. Το αποτέλεσμα είναι ότι υπάρχει συμφωνία και για το φορτίο διείσδυσης και για το πεδίο παραμορφώσεων.

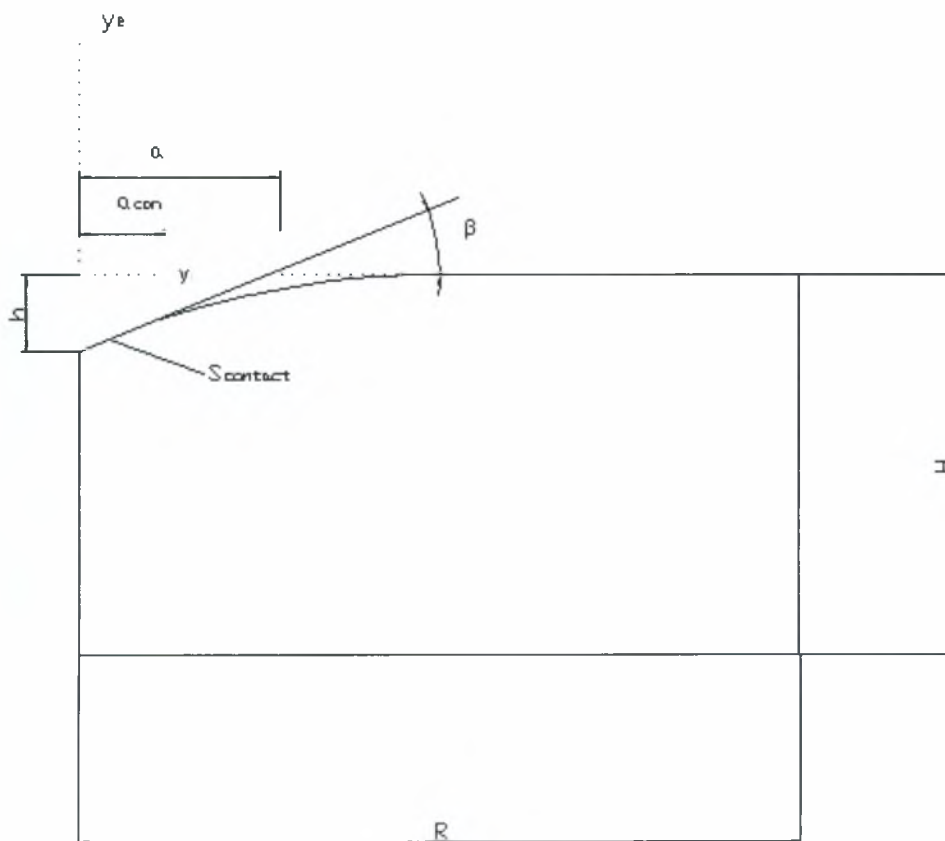
4.2. Εισαγωγή

Μέταλλα, κεραμικά και πολυμερή βρίσκουνε ευρεία χρήση στη βιομηχανία εξαιτίας των πλεονεκτημάτων που προσφέρουν, υπό την έννοια των μηχανικών τους ιδιοτήτων. Δομικά κεραμικά όπως το καρβίδιο του πυριτίου, το νιτρίδιο του πυριτίου και πολυμερή όπως το PTFE κατασκευάζονται με θερμή συμπίκνωση κόκκων, και αποκαλούνται sintered materials. Ένα χαρακτηριστικό αυτών των υλικών είναι το πορώδες που ποικίλει από 0 έως 0.5. Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι η μέση πίεση διείσδυσης χρησιμοποιώντας διεισδυτή Vickers τύπου πυραμίδας είναι ίση με τρεις φορές την μονοαξονική τάση διαρροής ενός sintered material. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι η πίεση διείσδυσης ενός υψηλής πυκνότητας μετάλλου είναι τρεις φορές η τάση διαρροής, ενώ δεν είναι σαφές γιατί αυτή η αναλογία παραμένει για τα πορώδη υλικά.

Σε ακραίες περιπτώσεις υλικών με πορώδες μεγαλύτερο του 0.5, η πίεση διείσδυσης είναι σχεδόν ίση προς την αντίστοιχη τάση διαρροής των. Επίσης τα υλικά αυτά έχουν χαμηλή τιμή του λόγου Poisson [20] με χαρακτηριστικό παράδειγμα τα κυψελλωτά υλικά (cellular materials) όπου $\nu \approx 0$. Σε ένα πείραμα διείσδυσης εμφανίζεται μικρός πλαστικός εξαναγκασμός, ωστόσο η μέση πίεση διείσδυσης σε ένα cellular material είναι σχεδόν ίση με τη μονοαξονική δύναμη διαρροής. Θα δείξουμε ότι για τα υλικά θερμής συμπίκνωσης (συνένωσης κόκκων) το σχήμα της επιφάνειας διαρροής στον χώρο των τάσεων είναι τέτοιο, που σε πείραμα διείσδυσης

εμφανίζεται πλαστικός εξαναγκασμός και η πίεση διείσδυσης ξεπερνά σε τιμή την μονοαξονική τάση διαρροής.

Στην μελέτη [5] η επίδραση του πορώδους στην διείσδυση με κώνο ανιχνεύτηκε χρησιμοποιώντας ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος ενώ επιστρατεύονται δύο καταστατικές εξισώσεις. Το πρώτο μοντέλο βασισμένο στο στερεό του Gurson (1977) και το πιο πρόσφατο μοντέλο για στερεά υψηλού πορώδους των Fleck et al (1992), το οποίο θα αναφέρεται στη συνέχεια ως FKM model. Το μοντέλο Gurson είναι κατάλληλο για στερεά χαμηλού πορώδους όπου υπάρχουν καλώς διαχωρισμένα κενά, τραχέα και σφαιρικά στο σχήμα. Το μοντέλο FKM είναι κατάλληλο σε μεγαλύτερα πορώδη, όπου η μικροδομή αποτελείται από σφαιρικά κενά ενωμένα με διακριτούς λαιμούς και είναι εφαρμόσιμο για πορώδη μέχρι και 0.36. Και για τις δύο καταστατικές εξισώσεις η διείσδυση προσεγγίζεται μέσω ενός μοντέλου, το cavity expansion, το οποίο αποτελεί προέκταση του μοντέλου που πρότεινε ο Johnson (1970) για πλαστικά ασυμπιεστα υλικά. Το μοντέλο cavity expansion, καθίσταται επαρκές στην παρουσίαση της επίδρασης του πορώδους, του μέτρου ελαστικότητας και της γωνίας του διεισδυτή στην πίεση διείσδυσης. Η βασική αιτία επιτυχίας των μοντέλων αυτών είναι ότι οι τάσεις διατηρούν προσεγγιστικά την αναλογικότητα της ελαστικότητας (κάθετο φορτίο σε σημείο ενός ημιάπειρου χώρου).



Σχήμα 4.1 Γεωμετρία του προβλήματος: h είναι το βάθος διείσδυσης, a_{con} είναι η πραγματική ακτίνα επαφής και ως $a = h / \tan \beta$ ορίζεται η ονομαστική ακτίνα επαφής.

4.3 Καταστατικές Εξισώσεις

Δύο καταστατικές περιγραφές χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν την επίδραση του πορώδους επάνω στην αντίσταση διείσδυσης. Μία παραλλαγή της καταστατικής σχέσης του Gurson (1975) και μία τροποποιημένη μορφή της σχέσης διαρροής των Fleck et al (1992).

Για τα δύο μοντέλα θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν σχετίζονται γραμμικά με το πορώδες f (αναλογία όγκου) και σταματούν να συσχετίζονται στην οριακή τιμή $f=0.36$. Η Σχέση 4.1 προσεγγιστικά ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα που συνοψίστηκαν από τον Rice (1977), όπου E_0 το μέτρο ελαστικότητας και ν_0 ο λόγος Poisson για υλικά με μηδενικό πορώδες.

$$\begin{aligned} E &= E_0(\hat{f} - f) / \hat{f} \\ \nu &= \nu_0(\hat{f} - f) / \hat{f}, f = \hat{f} = 0.36 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ο ρυθμός παραμόρφωσης d γράφεται σαν το άθροισμα του ελαστικού και πλαστικού μέρους:

$$d = d^e + d^p \quad (4.2)$$

Οι ελαστικές πιέσεις θεωρούνται ότι παραμένουν μικρές και η ελαστική καταστατική αντίδραση αναπαρίσταται προσεγγιστικά από την υποελαστική σχέση:

$$\hat{\sigma} = L : d^e \quad (4.3)$$

Όπου

$$L = \frac{E}{1+\nu} \left[I' + \frac{\nu}{1-2\nu} II \right] \quad (4.4)$$

Η Σχέση 4.4 παρουσιάζεται με $\hat{\sigma}$ την Jaumann μεταβολή της αληθούς τάσης Cauchy, I δευτέρας τάξης μοναδιαίο τανυστή και I' τετάρτης τάξης μοναδιαίο τανυστή. Αυτό το πλαστικό μέρος d^p αποκτάται από τον κανόνα διαρροής, ο οποίος για τις καταστατικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι της μορφής:

$$d^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.5)$$

Συνδυάζοντας τις 4.2, 4.3 και 4.5 έχουμε:

$$\dot{\sigma} = L : d - \dot{\Lambda} L : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.6)$$

4.3.1 Στερεό Gurson

Ο Gurson πρότεινε την ακόλουθη σχέση διαρροής:

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}, f) = \frac{\sigma_e^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \quad (4.7)$$

Εδώ $\bar{\sigma}$ είναι η αντοχή σε διαρροή του υλικού. Οι παράμετροι q_1 και q_2 εισήχθησαν από τον Tvergaard (1988) που βασισμένος στις μελέτες των Korlik και Needleman (1988) έδωσε $q_1=1.25$ και $q_2=1$.

4.3.2 Μοντέλο FKM

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{5}{18} \frac{\sigma_e}{p_y} + 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \frac{\sigma_h}{p_y}\right)^2 - 1 = 0 \quad (4.8)$$

Όπου η τάση διαρροής κάτω από υδροστατική φόρτιση p_y είναι:

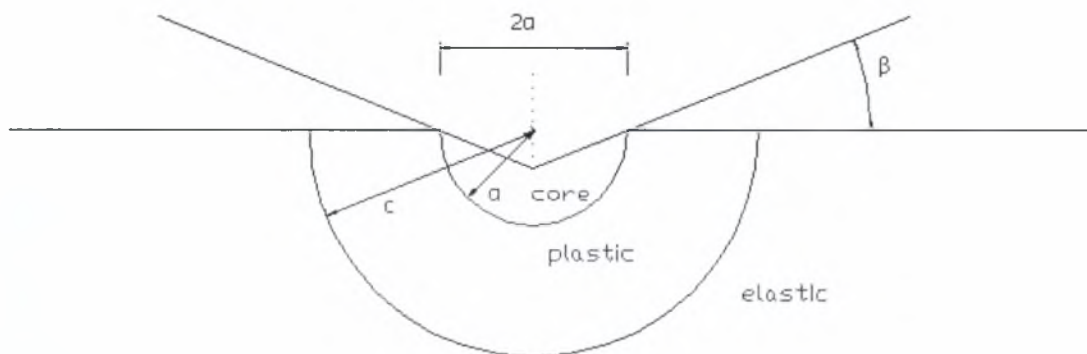
$$p_y = \frac{2.97}{\hat{f}} (1-f)^2 (\hat{f} - f) \bar{\sigma} \quad (4.9)$$

και $\bar{f}=0.36$ είναι το μέγιστο πορώδες των διατεταγμένων σφαιρικών κόκκων.

4.4 Μοντέλο Cavity Expansion

Οι Marsh (1964) και Johnson (1970) έχουν ιδανικεύσει τη διαδικασία της κωνικής διείδυσης μέσω της ελαστικής απολύτως πλαστικής επέκτασης μιας σφαιρικής κοιλότητας (cavity expansion). Η διαδικασία διείδυσης ιδανικεύεται με το κλείσιμο του διειδυτή μέσα σε ένα άκαμπτο ημισφαιρικό πυρήνα υλικού, ακτίνας a , και υπό εσωτερική πίεση ίση με το μέγεθος της μέσης πίεσης διείδυσης \bar{p} (Σχήμα 4.2). Όπως φαίνεται στο γράφημα το cavity expansion model προϋποθέτει ότι δε θα συμβεί ανύψωση (pile-up) ή βύθιση (sink-in) του υλικού γύρω από το διειδυτή, έτσι ώστε το a_{con}/a (Σχήμα 4.1) να παραμείνει μονάδα. Επιλύσεις έδειξαν ότι αυτή είναι μία πολύ καλή προσέγγιση για τα πορώδη υλικά. Έξω από τον πυρήνα θεωρείται ότι τα

πεδία τάσης και παραμόρφωσης έχουν ακτινική συμμετρία και ότι είναι το ίδιο όπως σε ένα άπειρο, ασυμπίεστο, ελαστικό-τελείως πλαστικό σώμα που περιλαμβάνει ένα κενό ακτίνας a υπό πίεση \bar{p} .



Σχήμα 4.2 Geometry of the cavity expansion model.

Το υλικό εντός του ελαστοπλαστικού συνόρου ακτίνας $c > a$ βρίσκεται σε πλαστική κατάσταση. Υλικό εκτός του ελαστοπλαστικού συνόρου συμπεριφέρεται ελαστικά. Ο Johnson (1970) θεωρεί ότι στο σύνορο του πυρήνα η ακτινική μετατόπιση σημείων του υλικού κατά τη διάρκεια αύξησης της διείσδυσης πρέπει να διατηρήσουν τον όγκο του υλικού που μετατοπίστηκε από το διεισδυτή. Στο εξωτερικό ελαστοπλαστικό σύνορο $r=c$ μετατοπίσεις και τάσεις είναι συνεχείς. Αυτές οι θεωρήσεις είναι επαρκείς για να επιλύσουν το πρόβλημα αναλυτικά:

$$\frac{\bar{p}}{Y} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \ln \left(\frac{1}{3} \frac{E}{Y} \tan \beta \right) \right\} \quad (4.10)$$

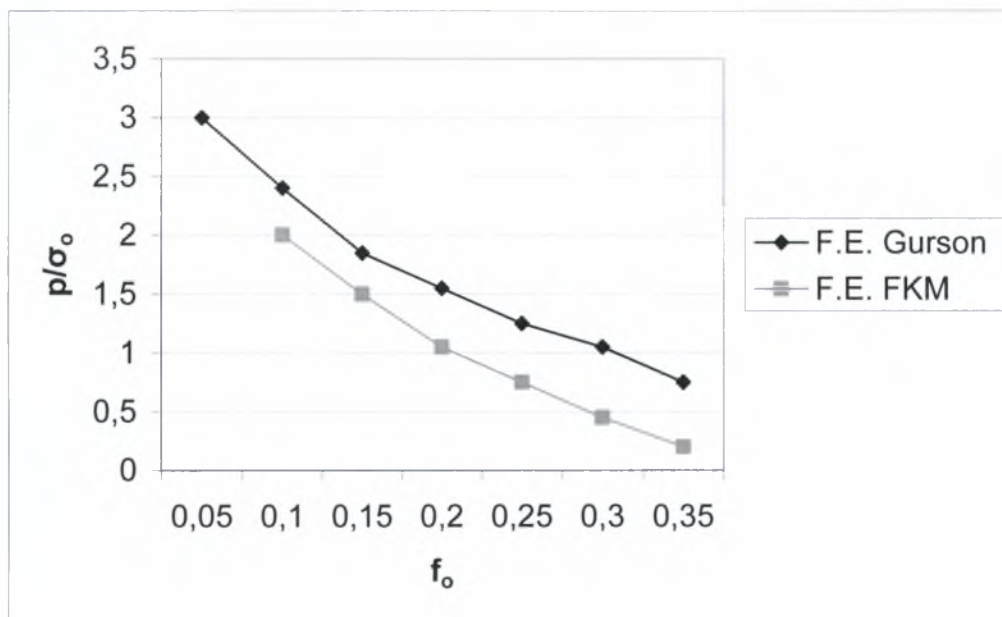
με Y την τάση διαρροής.

Ο Johnson έδειξε ότι αυτό το ελαστικό-τελείως πλαστικό μοντέλο παρουσιάζει συμφωνία με τις παρατηρηθείς τάσεις διείσδυσης για ένα εύρος υλικών και γωνίες κώνου, δεδομένου $2 < (E \tan \beta) / Y < 30$. Στην περίπτωση όπου $(E \tan \beta) / Y < 2$ η διείσδυση είναι τελείως ελαστική ενώ για $(E \tan \beta) / Y > 30$ η ελαστικότητα δεν παίζει κανένα ρόλο και κατά τη διείσδυση του κώνου έχουμε pile-up όπως και στην άκαμπτη-τελείως πλαστική θεωρία.

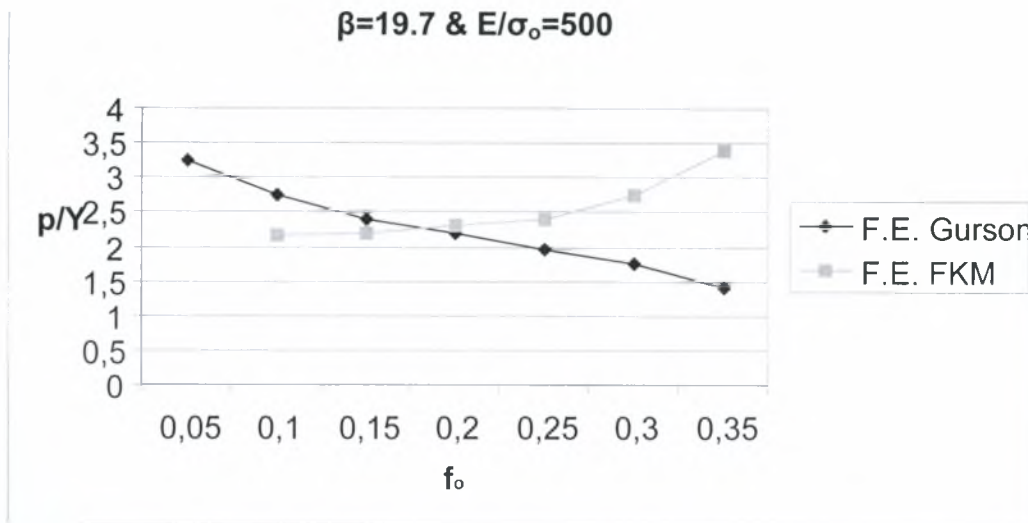
Ο Johnson (1970) χρησιμοποίησε το μοντέλο cavity expansion για να επιδείξει την επίδραση της ελαστικότητας στην πίεση διείσδυσης \bar{p} . Εδώ χρησιμοποιούμε το μοντέλο για να δείξουμε την επίδραση ενός ενιαίου αρχικού πορώδους f_0 πάνω στην \bar{p} . Θεωρούμε ότι η περιοχή του πυρήνα $r < a$ είναι άκαμπτη και βρίσκεται υπό υδροστατική πίεση (Σχήμα 4.2). Το υλικό στο ημισφαιρικό κέλυφος $a < r < c$ βρίσκεται κάτω από ελαστική-πλαστική ένταση και υπόκειται σε συμπίεση $f' < 0$ ενώ το υλικό πέρα από το ελαστικό-πλαστικό σύνορο είναι υπό ελαστική ένταση. Η καταστατική περιγραφή του υλικού προέρχεται είτε από το μοντέλο FKM, είτε από το στερεό του Gurson. Σε χρόνο t , ο πυρήνας που περιβάλλει το διεισδυτή είναι ακτίνας a και ένα στοιχείο του υλικού αρχικά ακτίνας r_0 , έχει μετατοπιστεί ακτινικά σε απόσταση u , με ακτίνα πλέον $r = r_0 + u$.

4.5 Προβλέψεις

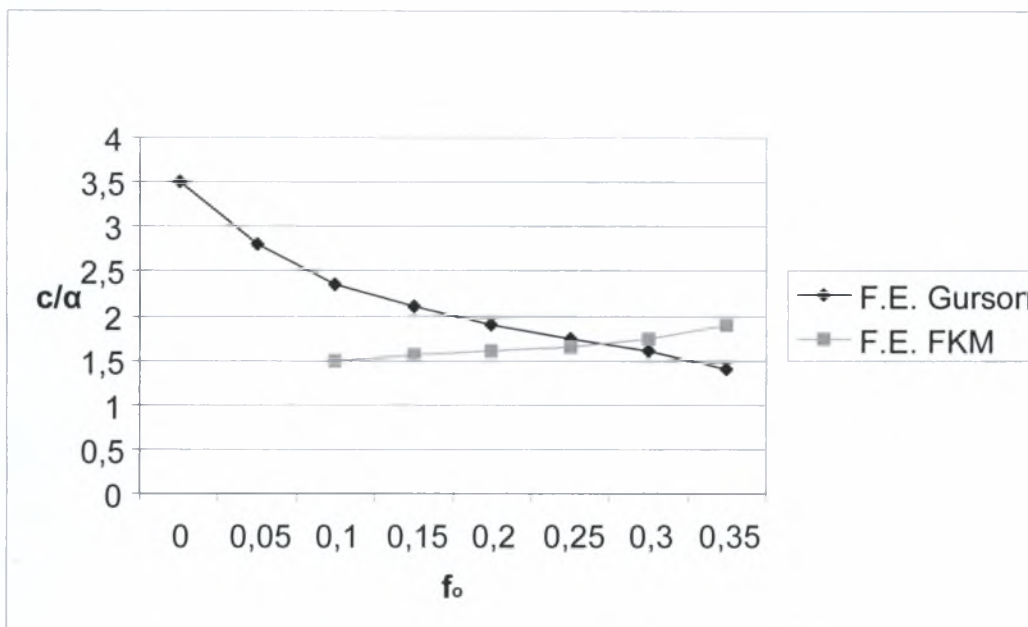
Η επίδραση του πορώδους στην πίεση διείσδυσης που προβλέπεται από το μοντέλο cavity expansion δίνεται στα Σχήματα 4.3, 4.4. Η γωνία β θεωρήθηκε ίση με 19.7° έτσι ώστε να αναφερόμαστε πλέον στον διεισδυτή κατά Vickers. Επίσης θέσαμε $E_0/\sigma_0=500$ και $\nu_0=0.3$. Σημειώνουμε ότι η πίεση διείσδυσης κανονικοποιημένη από το μητρώο τάσης διαρροής σ_0 μειώνεται με την αύξηση του αρχικού πορώδους f_0 και για τα δύο μοντέλα FKM, Gurson (Σχήμα 4.3). Όταν η πίεση διείσδυσης κανονικοποιείται από την μονοαξονική τάση διαρροής Y , η επίδραση της αύξησης του πορώδους είναι να μειωθεί η κανονικοποιημένη πίεση για το Gurson αλλά να αυξηθεί για το FKM. Το cavity expansion model και για το Gurson και για το FKM, δείχνει ότι η ζώνη συμπίεσης συγκεντρώνεται γύρω από το διεισδυτή πιο πολύ παρά για το υψηλής πυκνότητας στερεό (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.3. Πίεση διείσδυσης κανονικοποιημένη από την αντοχή διαρροής του υλικού σ_0 σε σχέση με το πορώδες f_0 .



Σχήμα 4.4 Πίεση διείσδυσης κανονικοποιημένη από την μονοαξονική τάση διαρροής γ σε σχέση με το πορώδες f_0 .



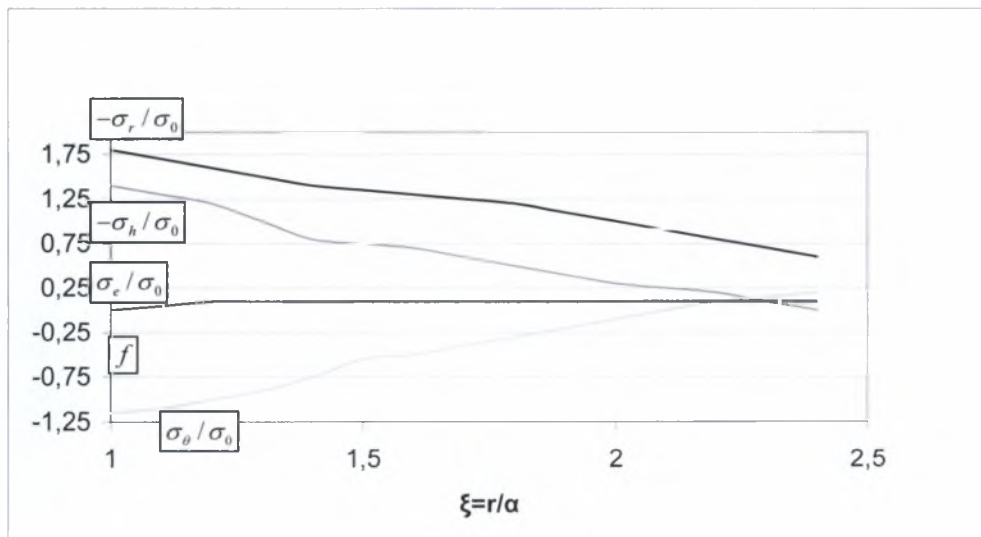
Σχήμα 4.5 Ακτίνα της πλαστικής ζώνης c κανονικοποιημένη από το ημιπλάτος επαφής a σε σχέση με το πορώδες f_0 .

Για $0.10 < f_0 < 0.35$ το cavity expansion model δίνει $c/a = 1.5 \div 2.5$ και για τους δύο καταστατικούς νόμους. Η πλαστική συμπίεση οδηγεί σε γεωμετρική σκληρότητα και στη διάχυση πλαστικής έντασης εντός της πλαστικής ζώνης γύρω από τον κώνο. Μία τυπική απεικόνιση της έντασης και του πορώδους μέσα στη ζώνη συμπίεσης φαίνεται στο Σχήμα 4.6 για το στερεό του Gurson με αρχικό πορώδες $f_0 = 0.1$. Με τη μείωση της απόστασης από τον κώνο, το πορώδες μειώνεται στην τιμή 0.040 όταν $r = a$, ενώ το απόλυτο πλάτος της ακτινικής τάσης μειώνεται. Η απόλυτη τιμή του f' και του

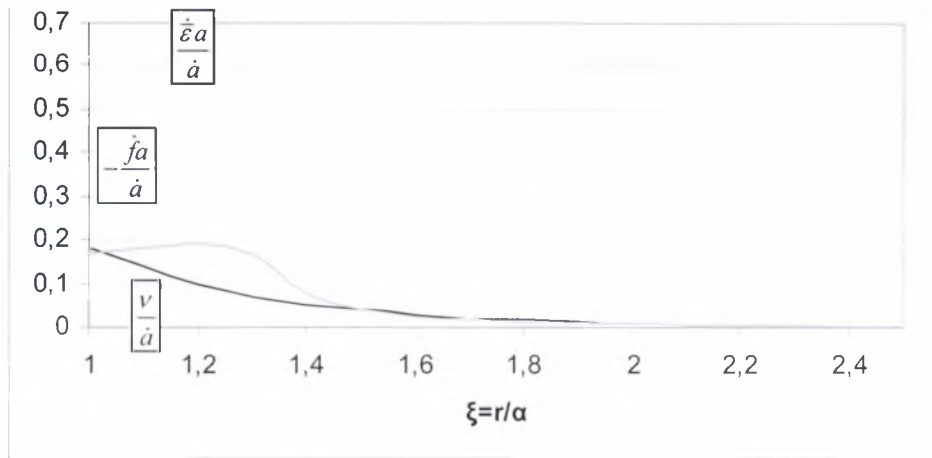
μητρώου του ρυθμού μεταβολής πλαστικής έντασης $\bar{\epsilon}'$ είναι μεγαλύτερα κοντά στον κώνο όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Η παραμόρφωση των στοιχείων του υλικού είναι αξονοσυμμετρική με μία μεταβλητή υδροστατική πίεση εντός της πλαστικής ζώνης. Αποτελέσματα για το FKM με αρχικό πορώδες $f_0=0.3$ δίνονται στα Σχήματα 4.8,4.9. Το cavity expansion model προβλέπει ότι το πορώδες μειώνεται στην τιμή 0.227 στη θέση $r=a$. Η κυλινδρική τάση είναι κοντά στο μηδέν εντός της πλαστικής ζώνης και το φορτίο του διεισδυτή αναλαμβάνεται κυρίως από την ακτινική τάση. Το ποσοστό συμπίεσης μεγιστοποιείται ακριβώς στην επαφή του διεισδυτή. Στην παρακάτω σχέση όπως προβλέπει το μοντέλο cavity expansion, η πίεση διείσδυσης \bar{p} μπορεί να γραφτεί στην αδιάστατη μορφή της ως:

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_0} = F\left\{\frac{E}{\sigma_0}, \tan \beta, f, \nu\right\} \quad (4.11)$$

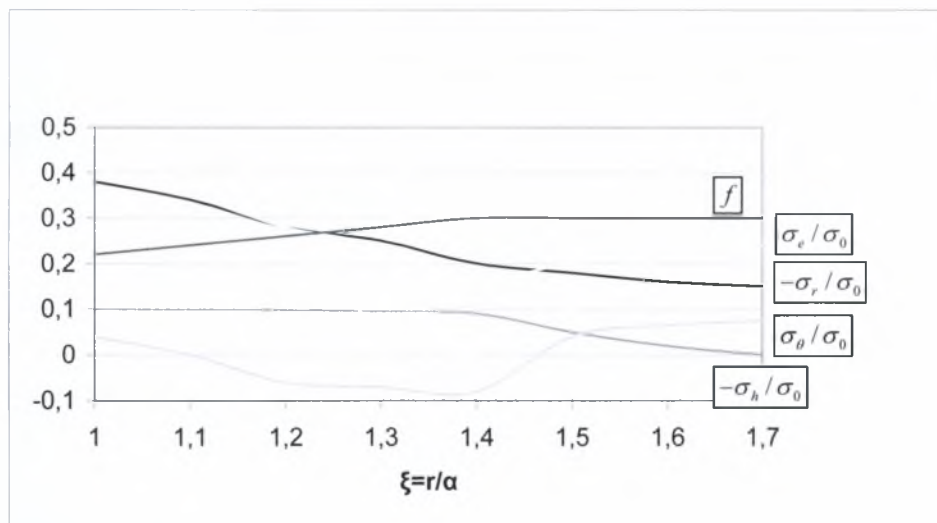
όπου σ_0 η τάση διαρροής και το ν είναι ελάχιστης σημασίας. Στα επόμενα σχήματα ως σ_r, σ_θ αναφέρονται οι τάσεις σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, και οι υδροστατικές πιέσεις στο χώρο (σ_h, σ_e). Τα επόμενα σχήματα αποτελούν τις προβλέψεις του cavity expansion model για $\beta=19.7^\circ$, $E_0/\sigma_0=500$ και $\nu_0=0.3$.



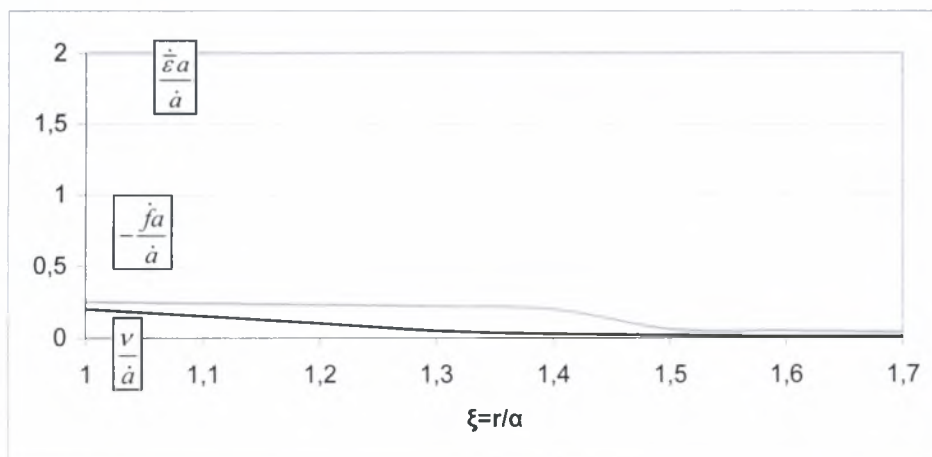
Σχήμα 4.6 Συσχέτιση τάσεων και πορώδους.



Σχήμα 4.7 Ρυθμοί μεταβολής των μεγεθών του στερεού Gurson σε σχέση με το αρχικό πορώδες $f_0=0.1$.

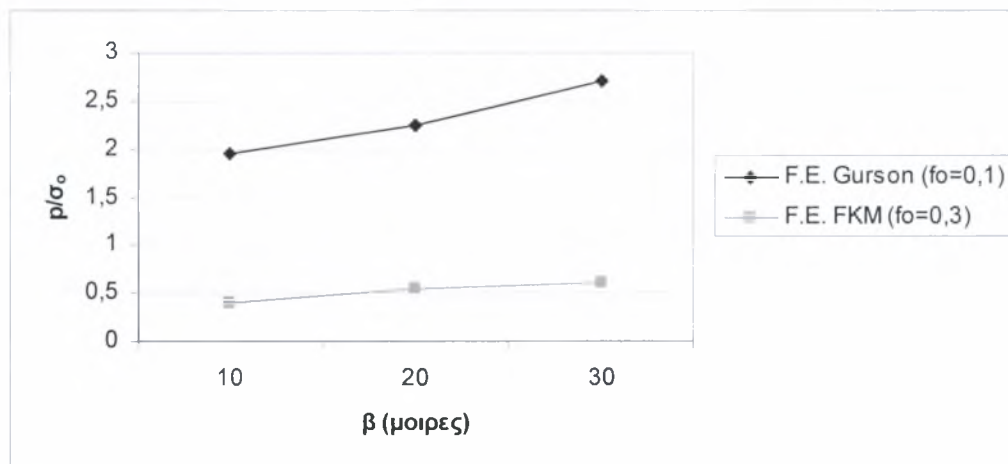


Σχήμα 4.8 Συσχέτιση τάσεων και πορώδους.

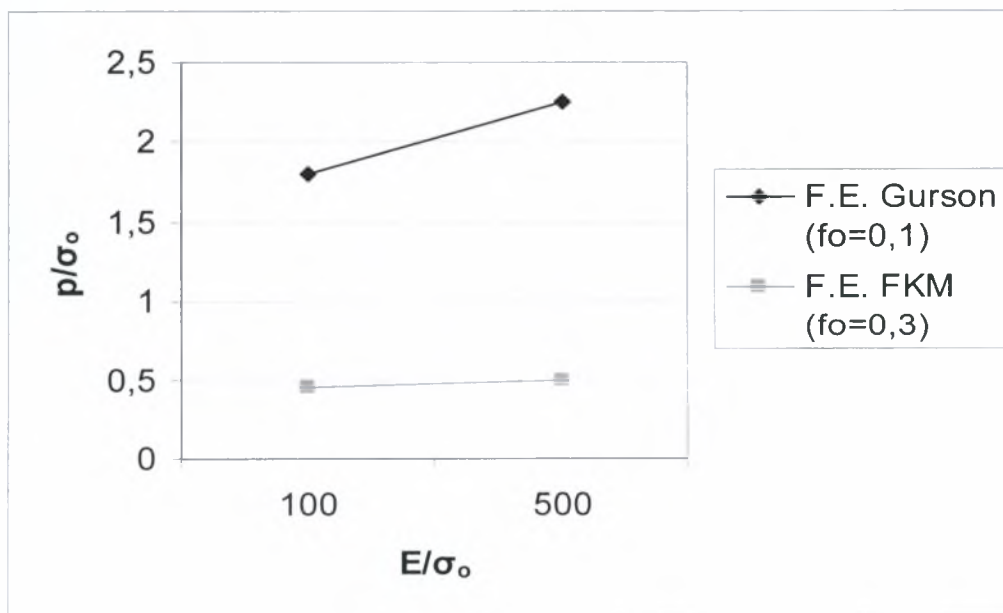


Σχήμα 4.9 Ρυθμοί μεταβολής των μεγεθών του στερεού FKM σε σχέση με το αρχικό πορώδες $f_0=0.3$.

Στην ασυμπίεστη κατάσταση $f=0$ και $\nu=0.5$ το cavity expansion model οδηγείται στην έκφραση που δόθηκε από τον Johnson (Σχέση 4.10). Η επίδραση της γωνίας του διείσδυτή β και του μέτρου ελαστικότητας E_0 στην μέση πίεση διείσδυσης φαίνεται στα Σχήματα 4.10, 4.11. Το cavity expansion model δείχνει να έχει την ίδια ποιοτική τάση όπως και τα αποτελέσματα της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η p αυξάνεται με την αύξηση του β και με την αύξηση του E_0/σ_0 . Η επίδραση του μέτρου ελαστικότητας E_0 στην πίεση διείσδυσης μειώνεται με την αύξηση του πορώδους. Το cavity expansion model θεωρεί ότι η πίεση που απαιτείται για να επεκταθεί μία σφαιρική κοιλότητα σε ένα απεριόριστο ελαστικό-πλαστικό στερεό είναι προσεγγιστικά ίση με την μέση πίεση διείσδυσης.



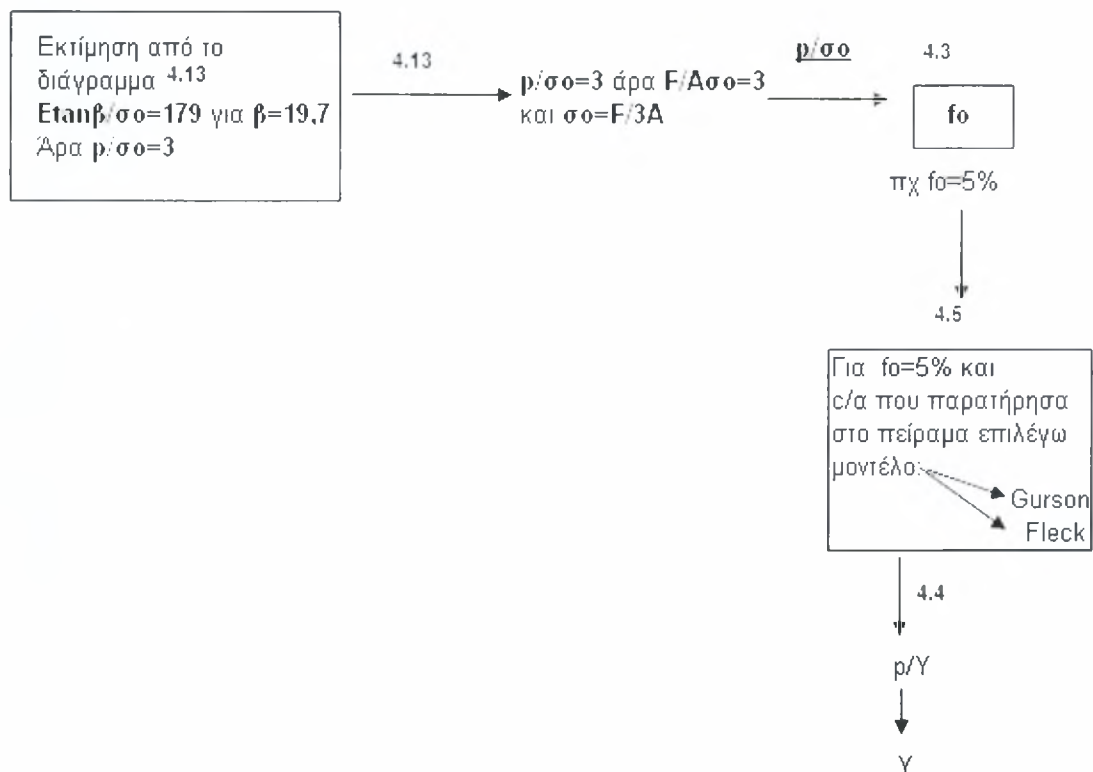
Σχήμα 4.10 Επίδραση της γωνίας διείσδυσης στην μέση πίεση διείσδυσης όπως προβλέπεται από το μοντέλο cavity expansion, $E_0/\sigma_0=500$.



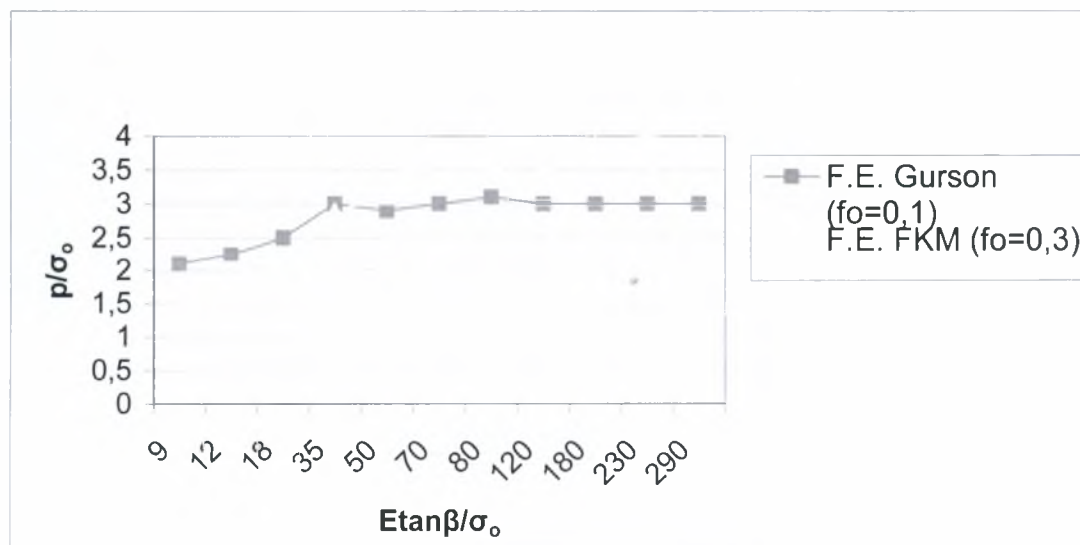
Σχήμα 4.11 Επίδραση του μέτρου του Young στην μέση πίεση διείσδυσης όπως προβλέπεται από το μοντέλο cavity expansion, $\beta=19,7^\circ$ και $\nu_0=0.3$.

4.6 Αποτελέσματα

Ο τρόπος με τον οποίο πρακτικά μπορούμε να εργαστούμε φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 4.12 και περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.



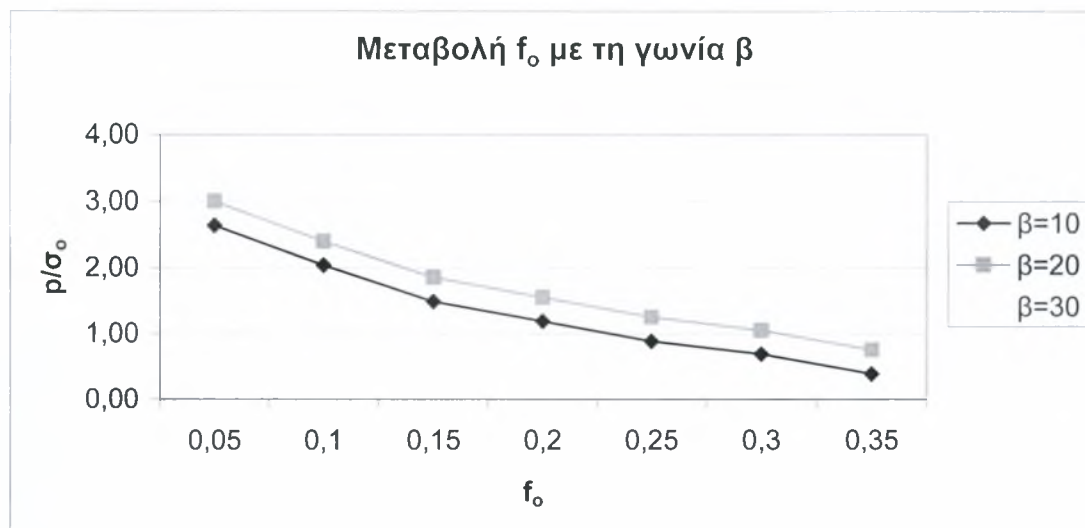
Σχήμα 4.12



Σχήμα 4.13 Κανονικοποιημένες πιέσεις διείσδυσης για το fully dense, elastic-perfectly plastic solid.

Αρχικά μέσα από το διάγραμμα του Σχήματος 4.13 θα εκτιμήσουμε τον λόγο $E \tan \beta / \sigma_0$ για τη συγκεκριμένη γωνία διείσδυσης $\beta = 19.7^\circ$ και έτσι θα πάρουμε την

τιμή p/σ_0 . Στη συνέχεια γνωρίζοντας την p/σ_0 από το Σχήμα 4.3 διαβάζουμε το πορώδες f_0 . Για το f_0 που έχουμε υπολογίσει και σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του πειράματος, δηλαδή το λόγο c/a επιλέγουμε το καταλληλότερο για το υπό εξέταση υλικό από τα δύο μοντέλα Gurson ή FKM μέσα από το Σχήμα 4.5. Τέλος με το Σχήμα 4.4 διαβάζουμε τον λόγο p/Y και έχουμε γνωστή πλέον την τάση διαρροής του υλικού Y (yield stress).



Σχήμα 4.14 Κανονικοποιημένη πίεση διείσδυσης για διάφορες γωνίες διείσδυσης β ανάλογα με το πορώδες f_0 .

Τέλος δημιουργήσαμε το παραπάνω διάγραμμα για να συσχετίσουμε τα αποτελέσματα για διάφορες γωνίες διείσδυσης β .

4.7 Συμπεράσματα

Τα μοντέλα Gurson και Fleck είναι αρκετά λεπτομερή διότι λαμβάνουν υπόψη τις ελαστικές παραμορφώσεις και το ποσοστό των κενών. Έχουν εφαρμοστεί επιτυχώς σε μέταλλα κυρίως και σε πολλά κεραμικά υλικά. Όμως, τα μοντέλα αυτά δεν παίρνουν υπόψη την πιθανή κράτυνση του υλικού (είναι ουσιαστικά ελαστικά-τελείως πλαστικά μοντέλα). Η κράτυνση του υλικού μπορεί να ληφθεί υπόψη προσεγγιστικά αν στη θέση του Y (μονοαξονική τάση διαρροής) βάλουμε την τάση $\sigma_{0,033}$ (μονοαξονική τάση σε πλαστική τροπή 3.3%) που αντιστοιχεί σε $\beta=20^\circ$. Η ύπαρξη και η επιρροή χαρακτηριστικών τροπών στο πρόβλημα της διείσδυσης θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης στο μέλλον.

5.1 Περίληψη

Πειράματα με αιχμηρό διεισδυτή στις νανο και μικρο κλίμακες διεξήχθησαν από ερευνητές στο M.I.T. σε μία προσπάθεια να υπολογισθούν ποσοτικά οι παραμορφώσεις του Vitreloy ITM metallic glass (μεταλλικού γυαλιού). Τα πειράματα συνοδεύτηκαν από λεπτομερή τρισδιάστατη προσομοίωση πεπερασμένων στοιχείων της διείσδυσης ώστε να τυποποιηθεί μια ενιαία καταστατική απόκριση. Συγκρίνοντας τις πειραματικές παρατηρήσεις με τις προβλέψεις των πεπερασμένων στοιχείων, η γενική καταστατική περιγραφή Mohr-Coulomb ελήφθη υπόψη για να συλλάβει την εξάρτηση της πολυαξονικής παραμόρφωσης και στις δύο -ορθή και διατμητική- τάσεις. Αυτή η καταστατική απόκριση είναι ικανή να δώσει ικανές προβλέψεις της εξέλιξης των διατμητικών ζωνών που φαίνονται στις δοκιμές μονοαξονικής συμπίεσης. Η ανάλυση είναι επίσης ικανή να προβλέψει το βαθμό της ανύψωσης (pile up) του υλικού που παρατηρείται γύρω από το διεισδυτή. Η επιφάνεια παραμόρφωσης συστήνεται από μηχανισμούς όπως τοπική διατμητική ροή (serrated yielding and adiabatic heating), οι οποίοι παρατηρούνται κατά τη διάρκεια μακροσκοπικών μηχανικών δοκιμών. Στην παρούσα εργασία έγινε μία πιο συστηματική θεώρηση και προέκυψαν πολύ γενικά συμπεράσματα.

5.2 Εισαγωγή

Έρευνες πάνω στη μηχανική απόκριση του μεταλλικού γυαλιού χρονολογούν πίσω στη δεκαετία του 1960 όταν αποδείχθηκε ότι λεπτές ταινίες, καλώδια ή μεταλλικά φύλλα σε άμορφη ή υαλοποιημένη κατάσταση μπορούσαν να παραχθούν σε πολύ υψηλή ταχύτητα ψύξης (πάνω από 10^5 K/s). Η γρήγορη ψύξη απαραίτητα περιόρισε τις διαστάσεις του μεταλλικού γυαλιού σε λεπτά cross sections (τυπικά μικρότερα από 50 μm). Μία σημειωτέα πρόοδος έγινε από τον Chen ο οποίος έδειξε ότι mm-κλίμακας ράβδοι από μεταλλικό γυαλί μπορούσαν να παραχθούν σε ταχύτητα ψύξης 10^3 K/s. Πιο πρόσφατα στις δεκαετίες 1980 και 1990, συμβατικές θεμελιώδεις τεχνικές χρησιμοποιήθηκαν για να συνθέσουν σε κλίμακα εκατοστών, μαζικά μεταλλικό γυαλί. Από τότε που μπόρεσε να παραχθεί μαζικά μεταλλικό γυαλί, οι μηχανικές ιδιότητες άμορφων κραμάτων έγιναν θέμα σημαντικών ερευνών για πιθανές κατασκευαστικές εφαρμογές. Από αυτά τα κράματα το μεταλλικό γυαλί με κυρίαρχο στοιχείο τον ψευδάργυρο, έχει εμπορικά αναπτυχθεί σαν μηχανολογικό υλικό. Δεδομένης της χρήσης του ως μηχανολογικό υλικό υπάρχει η ανάγκη να αναλυθούν οι μηχανικές του ιδιότητες. Παρόλο το μεγάλο ενδιαφέρον στις μηχανικές ιδιότητες του μεταλλικού γυαλιού, τα συστηματικά πειράματα και αναλύσεις κάτω από γενικά πολυαξονικές φορτίσεις, δεν έχει ακόμη συνταχθεί η καταστατική συμπεριφορά του.

Οι παραμορφώσεις πολυκρυσταλλικών μετάλλων και κραμάτων χαρακτηρίζονται γενικά από τη von Mises θεωρία πλαστικότητας. Οι μηχανισμοί μικροσκοπικής

πλαστικής παραμόρφωσης σε κρυσταλλικά κράματα κυρίως επηρεάζονται από τις τοπικές διατμητικές τάσεις, χωρίς αρχική επιρροή της τοπικής υδροστατικής τάσης στις παραμορφώσεις. Τα χαρακτηριστικά των παραμορφώσεων του μεταλλικού γυαλιού διαφέρουν από πολλές απόψεις. Πρώτον, τα άμορφα μέταλλα δεν παρουσιάζουν καθόλου κράτυνση. Δεύτερον, πειράματα υπονοούν ότι η απόκριση ελαστοπλαστικής παραμόρφωσης επηρεάζεται τόσο από τις διατμητικές όσο και από τις ορθές συνιστώσες της τοπικής έντασης και πιθανώς από τις υδροστατικές τάσεις. Τρίτον, οι παραμορφώσεις του μεταλλικού γυαλιού συμβαίνει να είναι σημαντικά ανομοιογενείς κατά τη συγκέντρωση των ανελαστικών παραμορφώσεων στη ζώνη διάτμησης. Στις ελεύθερες γεωμετρίες, όπως σε μία δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού, η κυρίαρχη ζώνη διάτμησης θα μπορούσε να διασχίσει ολόκληρη την εγκάρσια τομή του δοκιμίου, ενώ πολλαπλές ζώνες διάτμησης θα αναπτύσσονταν σε γεωμετρίες υπό περιορισμούς, όπως στη δοκιμή εγκλωβισμένης μονοαξονικής συμπίεσης, δίνοντας αύξηση στις μεγάλης κλίμακας ανελαστικές παραμορφώσεις και την απόκριση ελαστικής-τελείως πλαστικής παραμόρφωσης.

Με σκοπό να διασαφηνίσουμε τα χαρακτηριστικά της πολυαξονικής παραμόρφωσης του μεταλλικού γυαλιού, απαιτούνται συστηματικά πολυαξονικά πειράματα που περιλαμβάνουν διάφορους συνδυασμούς ορθής και διατμητικής φόρτισης. Η σπανιότητα τέτοιας πληροφόρησης, ωστόσο, είναι κυρίως λόγω της έλλειψης επαρκών ποσοτήτων μεταλλικού γυαλιού ώστε να γίνουν έγκυρα μηχανικά πειράματα σε δοκίμια μεγάλων διαστάσεων και λόγω του κόστους και χρόνου που σχετίζονται με τη διεξαγωγή τέτοιων δοκιμών. Τέτοιες δυσκολίες θα μπορούσαν να παρακαμφθούν τουλάχιστον εν μέρει, συνθέτοντας δοκιμές διείδυσης σε πολλαπλές κλίμακες, με τις οποίες θα μπορούσαν να προσδιοριστούν συστηματικά τα χαρακτηριστικά παραμόρφωσης του μεταλλικού γυαλιού. Δοκιμές διείδυσης πολλαπλής κλίμακας, στις οποίες καταγράφεται το φορτίο διείδυσης ως συνάρτηση του βάθους διείδυσης κατά τη διάρκεια φόρτισης και αποφόρτισης, δίνουν τη δυνατότητα να εξετάσουμε μικρού όγκου δοκίμια. Επιπρόσθετα, η περιοχή πλαστικής παραμόρφωσης γύρω από το διείδυτη περιορίζεται γύρω από το περιβάλλοντα ελαστικό υλικό, καταστέλλοντας την ασταθή επέκταση των κυρίαρχων ζωνών διάτμησης. Οι καμπύλες φόρτισης-μετατόπισης που προκύπτουν από τη δοκιμή παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά μακροσκοπικών παραμορφώσεων του μεταλλικού γυαλιού, όπου μάλιστα οι περιοχές, διαστάσεις και σχήματα των ζωνών διάτμησης όπως και το μέγεθος της ανυψωμένης επιφάνειας μας οδηγούν σε συμπεράσματα σχετικά με τις μικροσκοπικές παραμορφώσεις του υλικού. Πολλαπλής κλίμακας δοκιμές διείδυσης μέσα από την μικρο και μακρο κλίμακας παρατήρηση, σε συνδυασμό με τρισδιάστατους υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων, μπορούν να προσφέρουν στην καταγραφή της καταστατικής απόκρισης του μεταλλικού γυαλιού και του κριτηρίου διαρροής του.

5.3 Πειραματική Μέθοδος

Το υλικό που διερευνήθηκε είναι ένα εντελώς άμορφο κράμα ($Zr_{41.25}Ti_{13.75}Cu_{12.5}Ni_{10}Be_{22.5}$ (ονομαστική ποσοστιαία σύσταση) με την εμπορική ονομασία Vitreloy 1. Τα πειράματα έγιναν στο M.I.T. με την πειραματική συσκευή διείσδυσης Nanoindenters Nanoindenter II TM, Tennessee, USA. Δεδομένης της ανάγκης απόκτησης ικανών δεδομένων για ποσοτικούς υπολογισμούς, τα αποτελέσματα του Nanoindenter II TM συγκρίθηκαν με αυτά που μετρήθηκαν με τη συσκευή NanoTest 600 TM, Wrexham, UK. Επιπρόσθετα, ένας συνδυασμός πολλαπλών διεισδύσεων (τουλάχιστον τέσσερα) σε πολλά δείγματα (άνω των δύο) χρησιμοποιήθηκε ώστε να ελεγχθεί η ακρίβεια και η διασπορά των δεδομένων. Ένας διαμαντένιος Berkovich διεισδυτής, με ακμή ακτίνας 40 με 50 nm χρησιμοποιήθηκε σε πειράματα με μέγιστο φορτίο 10N. Για τις χαμηλής φόρτισης διεισδύσεις (κάτω από 10 mN), ένας μετρητής δύναμης Dynamic Contact Module TM (DCM) τοποθετήθηκε σε σειρά με τη συσκευή φόρτισης ώστε να αποκτηθούν υψηλότερης ανάλυσης αποτελέσματα φορτίου-βύθισης. Οι φάσεις φόρτισης και αποφόρτισης διεξήχθησαν υπό τον έλεγχο φορτίου (0.01 mN/s). Οι διαστάσεις των δοκιμίων ήταν 2cm*0.7cm*0.3cm και η καθεμία περιοχή διείσδυσης απείχε τουλάχιστον 10μm από τις υπόλοιπες. Τα αποτυπώματα της διείσδυσης εξετάστηκαν από το προφίλομετρο Tencor P-10 TM Profiler και από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο (SEM).

5.4 Το υπολογιστικό μοντέλο

Δύο ελαστοπλαστικοί καταστατικοί νόμοι χρησιμοποιήθηκαν, το μοντέλο του von Mises και το μοντέλο Mohr-Coulomb. Το von Mises κριτήριο διαρροής, όπου οι παραμορφώσεις θεωρούνται ανεξάρτητες της πίεσης γράφεται ως:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 = 2\sigma_y^2 \quad (5.1)$$

Όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι οι κύριες τάσεις και $k = \sigma_y / \sqrt{3}$, με σ_y να είναι η τάση διαρροής μετρημένη σε δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού. Μερικά παλαιότερα πειράματα παίρνουν ως δεδομένο ότι το von Mises κριτήριο, μοντελοποιεί επαρκώς τα χαρακτηριστικά παραμόρφωσης του μεταλλικού γυαλιού. Εναλλακτικά, στο κριτήριο Mohr-Coulomb η πλαστική ροή θεωρείται πως επηρεάζεται από τις τοπικές ορθές τάσεις, γράφεται για το μεταλλικό γυαλί ως :

$$\tau_c = k_0 - \alpha \sigma_n \quad (5.2)$$

Όπου τ_c η διατμητική τάση στην επιφάνεια ολίσθησης κατά τη διαρροή, k_0 και α είναι σταθερές και σ_n η συνιστώσα τάση σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια ολίσθησης.

Στην παρούσα ανάλυση και τα δύο κριτήρια διαρροής επικαλέστηκαν με σκοπό να προβλέψουν την απόκριση φορτίου-παραμόρφωσης καθώς επίσης τα πεδία έντασης και παραμόρφωσης γύρω από την περιοχή διείσδυσης. Αντιστοιχώντας τις προβλέψεις με τις πειραματικές μετρήσεις της απόκρισης φορτίου-παραμόρφωσης και τα χαρακτηριστικά της ζώνης διάτμησης, οι παράμετροι των κριτηρίων διαρροής αποκτήθηκαν από τα αριθμητικά μοντέλα. Για τα δύο μοντέλα διαρροής, το υλικό θεωρήθηκε ότι είναι ισότροπο. Η μέγιστη ολική παραμόρφωση κάτω από το διεισδυτή αναμένεται να υπερβεί το 10-20%.

5.5 Πειραματικά αποτελέσματα και ανάλυση

Τα αποτελέσματα της νανοδιείσδυσης [20] διαβεβαιώνουν ότι για μικρά φορτία (βάθος διείσδυσης 35nm), μόνο ελαστικές παραμορφώσεις προκαλούνται στο μεταλλικό γυαλί. Για το διεισδυτή Berkovich η σχέση μεταξύ φορτίου P και βύθισης h συνδέεται με την ελαστική ακαμψία διείσδυσης C ως εξής [20] :

$$P = Ch^2 = 2.1891(1 - 0.21\nu_i - 0.01\nu_i^2 - 0.41\nu_i^3)E^* h^2 \quad (5.3)$$

Όπου ν_s ο λόγος Poisson του υπό δοκιμή υλικού, ν_i λόγος Poisson του διεισδυτή και E^* το συνδυασμένο μέτρο ελαστικότητας. Αυτό το συνδυασμένο μέτρο ελαστικότητας εμπεριέχει το μέτρο ελαστικότητας του υπό δοκιμή υλικού (E_s) αλλά και του υλικού του διεισδυτή (E_i):

$$E^* = \left[\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right]^{-1} \quad (5.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις τιμές $E_i = 1000\text{GPa}$ και $\nu_i = 0.07$ για τον διαμαντένιο διεισδυτή, και $E_s = 96\text{ GPa}$ και $\nu_s = 0.36$ για το μεταλλικό γυαλί, η τιμή του συνδυασμένου μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από τη Σχέση 5.4 ήταν 100 GPa . Η αντίστοιχη ελαστική ακαμψία διείσδυσης C είναι 200 GPa από τη Σχέση 5.3.

Βασιζόμενοι είτε στο κριτήριο του von Mises είτε στο κριτήριο Mohr-Coulomb και χρησιμοποιώντας ελαστικές ιδιότητες και δεδομένα αντοχής διαρροής για το μεταλλικό γυαλί (π.χ. $E_s = 96\text{ GPa}$, $\nu_s = 0.36$ και $\sigma_y = 1.9\text{ GPa}$) στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων προβλέφθηκαν οι καμπύλες φορτίου-βάθους διείσδυσης. Για το Mohr-Coulomb οι σταθερές επιλέχθηκαν ώστε να ικανοποιηθεί μακροσκοπικά η διαρροή σε εφελκυσμό στα 1.9 GPa . Το μεταλλικό γυαλί δεν ακολουθεί το von Mises κριτήριο διαρροής. Η πρόβλεψη φόρτισης-βάθους χρησιμοποιώντας το κριτήριο Mohr-Coulomb ($\alpha = 0.13$) ακολουθεί τα πειραματικά αποτελέσματα πιο πιστά, υπονοώντας την επιρροή της ορθής τάσης στη διαρροή. Η τιμή $\alpha = 0.13$ που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση είναι κοντά στην τιμή 0.11 ± 0.05 που προτάθηκε παλαιότερα από τον Donovan 1989, για το $\text{Pd}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{20}$ μεταλλικό γυαλί.

5.6 Το παράδειγμα του metallic glass σε αριθμούς.

Με την προϋπόθεση ότι το μεταλλικό γυαλί υπακούει στο κριτήριο διαρροής Mohr-Coulomb, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.4, και σύμφωνα με τη Σχέση 5.2, έχουμε:

$$\tau + \sigma_n \sin \phi = c \cos \phi \quad (5.5)$$

Στο υπολογιστικό μοντέλο, χρησιμοποιήθηκε η τιμή $\alpha = 0.13$ (σταθερά Coulomb), επομένως

$$\alpha = 0.13$$

$$\sin \phi = \alpha$$

$$\phi = \sin^{-1} 0.13$$

$$\phi = 7.47^\circ$$

Σύμφωνα με τη Σχέση 5.6 η οποία συνδέει τη γωνία τριβής κατά Drucker Prager με τη γωνία τριβής ϕ του υλικού κατά Mohr-Coulomb υπολογίσαμε για την $\phi=7.47^\circ$ την αντίστοιχη β που είναι 12.6° .

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 \phi}} \quad (5.6)$$

$$\frac{P_{av}^{Mises}}{\sigma_y} = 0.4667 \left(1 + \ln \frac{E^*}{\sigma_y} \right) \leq 3 \quad (5.7)$$

Η Σχέση 5.7 συνδέει το λόγο της κατά Mises μέσης πίεσης διείσδυσης προς την τάση διαρροής σ_y σε θλίψη με τον λόγο του ειδικού μέτρου ελαστικότητας E^* προς την τάση διαρροής σε θλίψη σ_y .

Επομένως, για $E=96$ GPa, $\nu=0.36$ και $\sigma_y=1.9$ GPa, προκύπτει από την Σχέση 5.4 $E^*=110.29$ GPa και $E^*/\sigma_y=58.08$. Από τη Σχέση 5.7 τώρα η τιμή $\frac{P_{av}^{Mises}}{\sigma_y}$ που προκύπτει είναι 2.36. Αυτό σημαίνει ότι $p_{av}^{Mises} = 2.36\sigma_y$ δηλαδή $p_{av}^{Mises} = 4.48$ GPa.

Η Σχέση 5.8 που ακολουθεί και αναπτύξαμε σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, συνδέει την κατά Mises μέση πίεση με τη μέση πίεση p_{av} την οποία εκτιμούμε μέσα από την πειραματική διαδικασία διείσδυσης,

μετρώντας τη διάμετρο του αποτυπώματος. Η γωνία β είναι η κατά Drucker Prager γωνία τριβής σε μοίρες.

$$\frac{p_{av}}{p_{av}^{Mises}} = 1 + \frac{\beta}{20^0} 0.5 \quad (5.8)$$

Για την τιμή λοιπόν $\beta = 12.6^\circ$, προκύπτει $\frac{p_{av}}{p_{av}^{Mises}} = 1.315$ και $p_{av} = 1.315 p_{av}^{Mises} = 5.89 \text{ GPa}$. Το επόμενο βήμα είναι να ελέγξουμε την μέση πίεση διείδυσης που έδωσαν τα πειραματικά αποτελέσματα.

Η τιμή που προέκυψε πειραματικά είναι $p_{av} = 5.65 \text{ GPa}$, ενώ εμείς προβλέψαμε τιμή $p_{av} = 5.89 \text{ GPa}$, πράγμα που σημαίνει ότι επαληθεύονται πολύ καλά οι προβλέψεις, μέσα από τις σχέσεις που αναπτύξαμε.

5.7 Ελαστική ακαμψία διείδυσης (C).

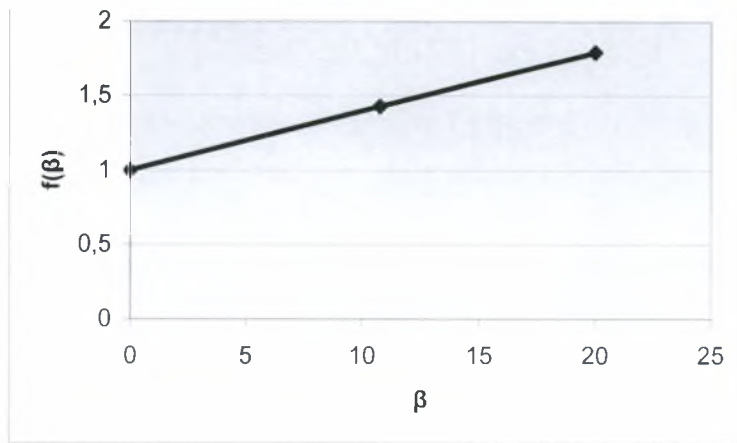
Η ακαμψία διείδυσης $C = P/h^2$ για την περίπτωση ενός von Mises υλικού, δηλαδή όταν η κατά Drucker Prager γωνία τριβής β είναι ίση με το μηδέν, υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{C_{Mises}}{\sigma_y} = 102.2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \Gamma \left[\frac{1}{0.29}, \left(\frac{E^*}{\sigma_y} \right)^{0.29} \right] \right\} \quad (5.9)$$

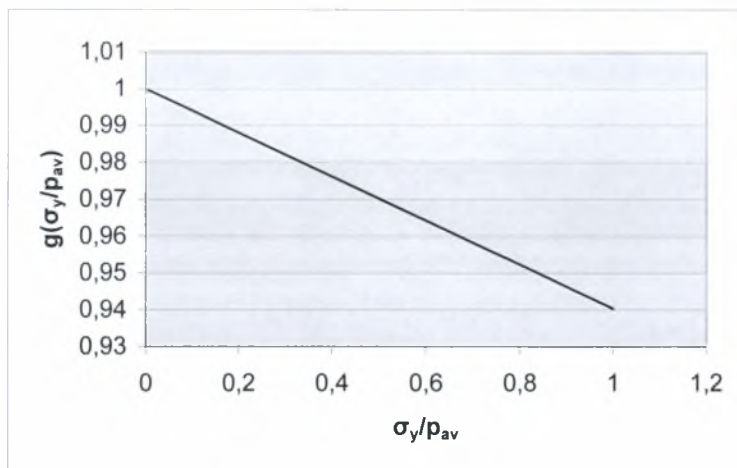
Με τη βοήθεια δεδομένων από υλικά με διαφορετικά χαρακτηριστικά όπως β , σ_y , C , E^* και p_{av} δημιουργήσαμε μία νέα συνάρτηση C/C_{Mises} η οποία αποτελείται από:

$$\frac{C}{C_{Mises}} = f(\beta) g\left(\frac{\sigma_y}{p_{av}}\right) \quad (5.10)$$

Μελετώντας την επίδραση των β και σ_y/p_{av} και θεωρώντας γραμμική την $f(\beta)$ και δευτέρου βαθμού την $g(\sigma_y/p_{av})$ κατασκευάσαμε τις δύο συναρτήσεις, των οποίων τα γραφήματα φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 5.1 Η συνάρτηση $f(\beta)$



Σχήμα 5.2 Η συνάρτηση $g(\sigma_y/p_{av})$

Τελικά, με το β σε μοίρες και σ_y το όριο διαρροής σε θλίψη,

$$f(\beta) = 1 - 0.0595\beta$$

$$g\left(\frac{\sigma_y}{p_{av}}\right) = 1 + 0.0398\frac{\sigma_y}{p_{av}} - 10^{-5}\left(\frac{\sigma_y}{p_{av}}\right)^2$$

και η ζητούμενη σχέση είναι:

$$\frac{C}{C_{Mises}} = [1 - 0.0595\beta][1 + 0.0398\frac{\sigma_y}{p_{av}} - 10^{-5}\left(\frac{\sigma_y}{p_{av}}\right)^2] \quad (5.11)$$

Ειδικά για το μεταλλικό γυαλί για το οποίο έχουμε προβλέψεις από ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων θα υπολογίσουμε την ελαστική ακαμψία διείδυσης. Για δύναμη P ίση με 3 N το h είναι 5 μm . Επομένως,

$$C = \frac{P}{h^2} = \frac{3N}{(5\mu m)^2} = 120GPa$$

Στην παράγραφο 5.6 υπολογίσαμε τα ακόλουθα:

$$\beta = 12.6^\circ$$

$$p_{av}^{Mises} = 4.48GPa$$

$$\frac{E^*}{\sigma_y} = 58.08$$

$$\frac{\sigma_y}{p_{av}} = \frac{1.9GPa}{5.89GPa} = 0.3225$$

Από τη Σχέση 5.9 προκύπτει $C_{Mises}=102.64$ GPa. και από τη Σχέση 5.11 έχουμε ότι $C=150.99$ GPa, αρκετά κοντά στο πειραματικό αποτέλεσμα ($C=120$ GPa) με σφάλμα της τάξης του 20 τοις εκατό.

Συνοψίζοντας την μετατροπή των παραμέτρων β , k και α των Drucker-Prager [6] για την επίπεδη παραμόρφωση, σε παράμετρους c και ϕ των Mohr-Coulomb έχουμε:

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 \phi}} \quad (5.6)$$

$$\frac{k}{c} = \left[1 - 12 \frac{\sin^2 \phi}{9 + \sin^2 \phi} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

$$\alpha = \left[\frac{\sin^2 \phi}{9 + 3 \sin^2 \phi} \right]^{1/2} \quad (5.13)$$

5.8 Κεραμικά υλικά που περιλαμβάνουν ζirkόνιο ZrO_2 (zirconia-containing ceramics).

Σύμφωνα με το κριτήριο διαρροής Drucker-Prager όπως έχουμε περιγράψει και παραπάνω, στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης όπου $\sigma_2=\sigma_3=0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} a\sigma_1 + J_2^{1/2} &= k \\ a\sigma_1 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{3}} &= k \\ a\sigma_1 + \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}} &= k \\ \frac{3a\sqrt{3}\sigma_1}{3} + |\sigma_1| &= k\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ο νόμος που προτείνεται [26] για τα κεραμικά υλικά που περιλαμβάνουν ζirkόνιο είναι της μορφής:

$$Y = Y_0 + \alpha P$$

με φανερή την ομοιότητα εάν θέσουμε $\alpha = 3\sqrt{3}a$, $Y_0 = \sigma_y$ και $P = \frac{|\sigma_1|}{3}$.

Επίσης προτείνει ότι η μέση πίεση θα είναι συνάρτηση της Y_0 :

$$p_{av} = (3 + 2\alpha)Y_0 \text{ και δεδομένου ότι } p_{avMises} = 3Y_0 \text{ έχουμε :}$$

$$\frac{p_{av}}{p_{avMises}} = 1 + \frac{2}{3}\alpha, \text{ που συσχετίζει την κατά Mises μέση πίεση με την } p_{av}.$$

Για ένα κεραμικό υλικό (Mg-PSZ) με τα χαρακτηριστικά:

$$\sigma_y = 1.4 \text{ GPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.31$$

$$\alpha = 2$$

βρέθηκε με το μοντέλο για κεραμικά υλικά [26] $p_{av} = H = 9.8 \text{ GPa}$. Ενώ πειραματικά μετρήθηκε η $p_{av} = 11.5 \text{ GPa}$. Θα υπολογίσουμε την μέση πίεση ως ακολούθως:

$$\alpha = \frac{a}{3\sqrt{3}} = 0.3849 \text{ που αντιστοιχεί μέσω της σχέσης 5.13 σε } \varphi = \pi/2, \text{ η οποία με τη}$$

σειρά της μέσω της 5.6 αντιστοιχεί σε $\beta = 1 \text{ rad}$. Από την 5.8 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{p_{av}}{p_{av}^{Mises}} &= 1 + \frac{\beta}{20^0} 0.5 = 2.432 \\ p_{av}^{Mises} &= 3\sigma_y = 4.2 \text{ GPa} \\ p_{av} &= 2.432 p_{av}^{Mises} = 10.2 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Συμπερασματικά, σε υλικά όπως το μεταλλικό γυαλί και κεραμικά που περιλαμβάνουν ζirkόνιο ελέγχθηκε η απόκρισή τους υπό το πρίσμα του γενικότερου μοντέλου θραύσεως των Drucker-Prager. Σε συνδυασμό με τις σχέσεις μετατροπής των παραμέτρων Mohr-Coulomb σε παραμέτρους Drucker-Prager, οι σχέσεις που συνδέουν τη μέση πίεση με την von Mises μέση πίεση ($\beta=0$) μας οδήγησαν σε τιμές πιέσεων που πειραματικά επαληθεύθηκαν. Επίσης η ακαμψία διείδυσης συσχετίστηκε ικανοποιητικά με αυτήν ενός von Mises υλικού με σφάλμα της τάξης του είκοσι τοις εκατό.

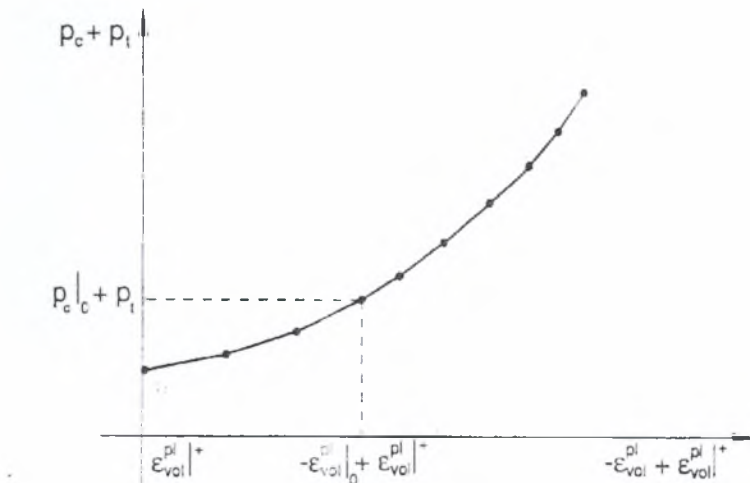
6^ο Κεφάλαιο

6.1 Αφρώδη υλικά (Foam).

Ένα μοντέλο αφρώδους πλαστικότητας (foam plasticity model) βασίζεται σε κριτήριο κρίσιμης κατάστασης, ευρέως χρησιμοποιούμενο στην Εδαφομηχανική. Περιγράφει ικανοποιητικά ένα υλικό με υψηλό πορώδες το οποίο δείχνει τάση συρρίκνωσης καθώς επιβάλλονται οι θλιπτικές φορτίσεις. Οι παράμετροι που περιγράφουν ένα τέτοιο μοντέλο είναι η αντοχή διαρροής σε υδροστατική συμπίεση p_c , η αντοχή διαρροής σε υδροστατικό εφελευσμό p_t και η κλίση M σε επίπεδο $\sqrt{J_2} - \sigma_m$. Η παράμετρος M μπορεί να μετατραπεί σε μονοαξονική τάση διαρροής σ_0 , για μία δεδομένη εντατική κατάσταση.

$$M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_t p_c^0 - \frac{1}{3} \sigma_0 (p_t - p_c^0) - \frac{1}{9} \sigma_0^2}} \quad (6.1)$$

Η επιφάνεια διαρροής έχει ελλειπτικό σχήμα. Ο τρόπος πλαστικοποίησης του μοντέλου που περιγράφεται συμπληρώνεται από ένα νόμο κράτυνσης (hardening) που προκύπτει από μία δοκιμή υδροστατικής συμπίεσης. Συσχετίζει την ογκομετρική πλαστική παραμόρφωση ε_{vol}^{pl} και την κρίσιμη πίεση. Η σχέση είναι συνήθως γραμμική και χαρακτηρίζεται από την κλίση α μέχρι την μέγιστη πλαστική ογκομετρική παραμόρφωση $\varepsilon_{vol,max}^{pl}$, πέρα από την οποία δεν είναι δυνατή περαιτέρω συμπίκνωση.



Σχήμα 6.1 Typical piecewise linear foam hardening.

Στην περίπτωση ενός πειράματος διεύθυνσης, σε στερεό το οποίο υπακούει στην πλαστική θεωρία των αφρώδων υλικών (foam plasticity model), το αποτέλεσμα κυριαρχείται από τις παραμέτρους που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

$$\begin{pmatrix} [L] & [M] & [T] \\ h & 1 & 0 & 0 \\ P & 1 & 1 & -2 \\ p_c & -1 & 1 & -2 \\ E & -1 & 1 & -2 \\ \nu & - & - & - \\ \sigma_0 & -1 & 1 & -2 \\ \varepsilon_{vol,max}^{pl} & - & - & - \\ a & -1 & 1 & -2 \\ \theta & - & - & - \end{pmatrix}$$

Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν χαρακτηρίζουν το ελαστικό μέρος της συμπεριφοράς του υλικού. Εφαρμόζοντας το θεώρημα-Π βρίσκουμε ότι ο πίνακας έχει τρεις τάξεις με έξι διαστατές παραμέτρους. Μπορούμε ωστόσο, να ορίσουμε τέσσερις αδιάστατες παραμέτρους (εκτός από τις ήδη αδιάστατες ν και $\varepsilon_{vol,max}^{pl}$).

$$\frac{P}{\sigma_0 h^2} = f\left(\frac{E}{\sigma_0}, \frac{p_c}{\sigma_0}, \varepsilon_{vol,max}^{pl}\right) \quad (6.2)$$

Ο λόγος Poisson ν έχει πολύ μικρή επιρροή, για αυτό το λόγο και δεν περιλαμβάνεται. Το μοντέλο επίσης ακολουθεί το νόμο του Kick, που οδηγεί στη σχέση $P=Ch^2$, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, αλλά έχει ένα μεγάλο αριθμό παραμέτρων που επηρεάζουν τη διείδυση.

6.2 Αριθμητικοί υπολογισμοί.

Για να ελέγξουμε την επιρροή των διαφόρων παραμέτρων, αριθμητικά πειράματα διείδυσης πραγματοποιήθηκαν με ένα μοντέλο 'foam plasticity' στο ABAQUS που ακολουθεί τα χαρακτηριστικά του πλαστικού μοντέλου που περιγράφηκε ανωτέρω. Το μέτρο του Young και ο λόγος Poisson θεωρήθηκαν σταθερά στα 400 MPa και 0.25 αντίστοιχα. Όλες οι άλλες παράμετροι ποίκιλιανε ώστε να μελετήσουμε την επιρροή τους στην καμπύλη P-h ενός πειράματος διείδυσης.

C/σ ₀	E* (GPa)	ρ _{av} (GPa)	C (GPa)	a	σ ₀ (MPa)	ρ _c (MPa)	ρ _t (MPa)	E (GPa)	ν	ε _{vol,pl,max}	ρ _c /σ ₀	ρ _{av} /σ ₀
28328	426,67	2,58	70,82	0,3	2,5	12	6	400	0,25	>0,3	4,8	1,032
27665	426,67	4,13	110,66	0,3	4	12	6	400	0,25	>0,3	3	1,0325
29308	426,67	2,59	73,27	0,6	2,5	12	6	400	0,25	>0,3	4,8	1,036
34260	426,67	3,12	85,65	0,3	2,5	12	6	400	0,25	0,3	4,8	1,248
28328	426,67	2,58	70,82	0,15	2,5	12	6	400	0,25	>0,3	4,8	1,032
28700	426,67	2,61	71,75	0,3	2,5	12	6	400	0,25	>0,3	4,8	1,044
28532	426,67	2,6	71,33	0,3	2,5	12	6	400	0,25	>0,3	4,8	1,04
30012	426,67	2,73	75,03	0,3	2,5	12	6	400	0,25	0,5	4,8	1,092
56644	426,67	5,19	141,61	0,3	2,5	12	6	400	0,25	0,1	4,8	2,076
34272	426,67	3,12	85,68	0,15	2,5	12	6	400	0,25	0,3	4,8	1,248
34272	426,67	3,12	85,68	0,6	2,5	12	6	400	0,25	0,3	4,8	1,248
34572	426,67	3,15	86,43	0,3	2,5	12	6	400	0,25	0,3	4,8	1,26
33228	426,67	3,1	83,07	0,3	2,5	12	6	400	0,25	0,3	4,8	1,24

Πίνακας 6.1 Ομαδοποίηση των παραμέτρων.

Συμπεράσματα

1. Η διείδυση αποδείχθηκε ευαίσθητη όσον αφορά τη μονοαξονική τάση διαρροής σ_0 και τη μέγιστη πλαστική ογκομετρική παραμόρφωση $\varepsilon_{vol,pl,max}^{pl}$. Για ένα δεδομένο σετ αυτών των δύο παραμέτρων η παραλλαγή των υπόλοιπων παραμέτρων έχει ουσιαστικά καμία επίδραση στις παράγωγες μεταβλητές της καμπύλης P-h, P_{max} , h_{max} , h_{res} και $\left. \frac{dP}{dh} \right|_{h_{max}}$.
2. Η μέση πίεση βρίσκεται πολύ κοντά στη μονοαξονική τάση διαρροής $p_{av} \approx 1.02\sigma_0$.
3. Η διείδυση έχει μία χαρακτηριστική παραμόρφωση στο 0.6, συνδεδεμένη με την συμπίεση κάτω από το διειδυτή, δεδομένου ότι η μέγιστη πλαστική ογκομετρική παραμόρφωση είναι μικρότερη από αυτή την τιμή. Η χαρακτηριστική παραμόρφωση μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από το γράφημα του παραμορφωμένου πλέγματος.
4. Η κλίση στην αποφόρτιση αποδείχθηκε πολύ σταθερή, καταδεικνύοντας ότι το μέτρο ελαστικότητας μπορεί σωστά να καθορισθεί από αυτή την τιμή.
5. Κατά τη διάρκεια της διείδυσης, δεν παρατηρήθηκε βύθιση ή ανύψωση του υλικού στην περίμετρο επαφής του με το διειδυτή. Η περιοχή επαφής επομένως σχετίζεται με το βάθος διείδυσης με μία απλή γεωμετρική σχέση που περιλαμβάνει μόνο τη γωνία του διειδυτή ($A=24.5h^2$)
6. Επιπρόσθετες εκτιμήσεις είναι απαραίτητες για να αποσπάσουμε την παράμετρο M ενός πειράματος διείδυσης. Η παράμετρος M περιγράφει την ευαισθησία της συμπίεστος του υλικού και σχετίζεται με την κρίσιμη πίεση. Όπως αναφέρθηκε στα ανωτέρω, οι τέσσερις παράμετροι της καμπύλης διείδυσης δε δίνουν καμία πληροφόρηση για την κρίσιμη πίεση. Ένας τρόπος να αποκτήσουμε επιπρόσθετη πληροφορία από το πείραμα διείδυσης είναι να προεντείνουμε το δοκίμιο ακτινικά με τάση σ_R . Σε αυτή τη διείδυση αντιμετωπίζεται μία διαφορετική μονοαξονική τάση διαρροής σ'_0 . Καθώς η

επιφάνεια διαρροής παρέμενε ίδια και στις δύο περιπτώσεις η κλίση M είναι η ίδια και υπολογίζεται από:

$$M = \frac{\sigma_0'}{\sqrt{p_t p_c^0 - \sigma_R^2 + \sigma_R (p_t - p_c^0) - \frac{1}{3} \sigma_0 (p_t - p_c^0 - 2\sigma_R) - \frac{1}{9} \sigma_0^2}} \quad (6.3)$$

Με την εφαρμογή μίας σειράς τιμών σ_R , αποκτάται η κλίση M .

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 7ο

7.1 Το τσιμέντο γενικά.

Η πρώτη ύλη παρασκευής τσιμέντου είναι κυρίως μίγμα αβεστόλιθων (ενώσεων οξειδίου του ασβεστίου και του πυριτίου) και αργίλου (οξείδια αργίλου). Ειδικότερα η αναλογία είναι τρία μέρη αβεστόλιθων CaCO_3 και ένα μέρος αργίλου, η οποία περιέχει μια σειρά από οξείδια ανάλογα με τον τύπο του τσιμέντου. Ο Ελληνικός Κανονισμός Τσιμέντων προβλέπει την κατηγοριοποίηση των διαφόρων τύπων, καθώς επίσης και τη σύστασή τους.

7.2 Το τσιμέντο Τύπου IV.

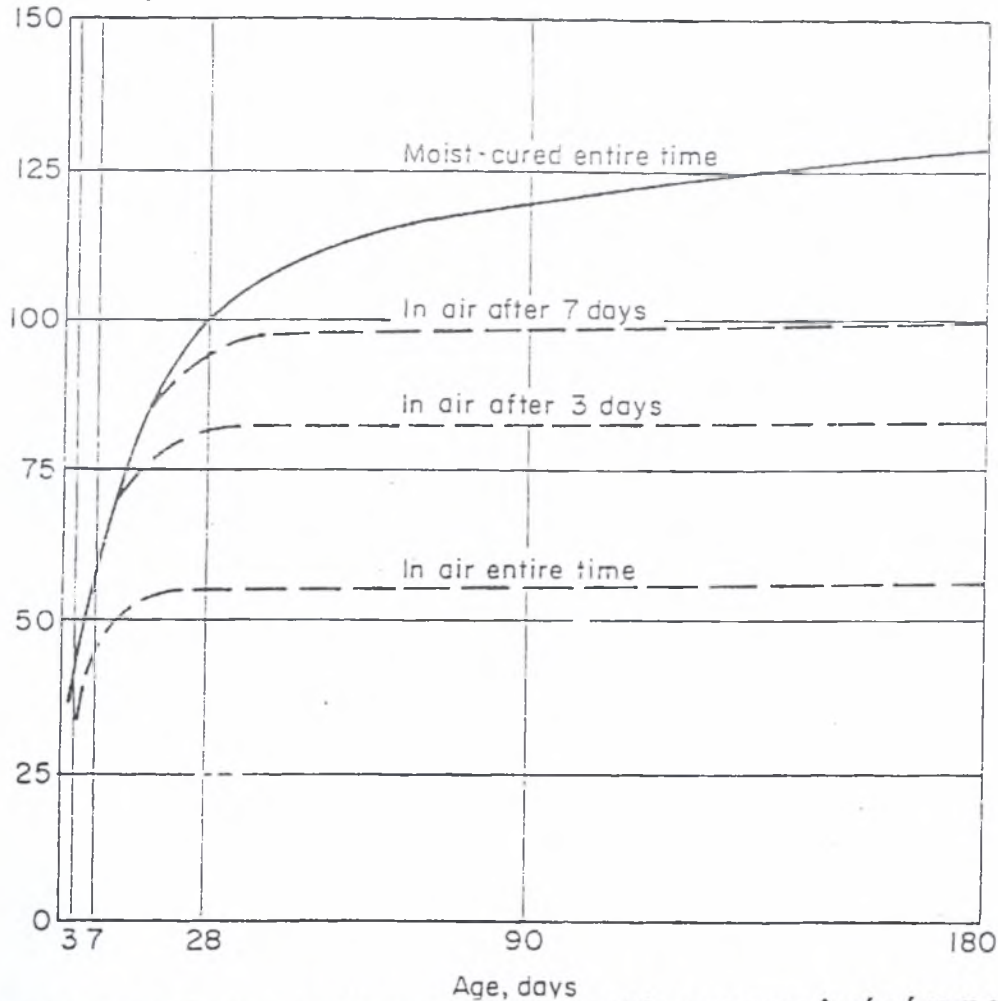
Το τσιμέντο τύπου IV ή αλλιώς CEM IV/B Ποζολανικό, χρησιμοποιήθηκε για την παρασκευή της τσιμεντόπαστας και στη συνέχεια των δοκιμίων. Μάλιστα το τσιμέντο αυτό ήταν αντοχής σε θλίψη 32,5 MPa και προερχόταν από την Τσιμεντοβιομηχανία ΗΡΑΚΛΗΣ Lafarge. Αναλυτικά, η περιεκτικότητά του σε Κλίνκερ είναι μεταξύ 45 και 64 τοις εκατό ($45\% < K < 64\%$), ενώ επίσης περιέχει συστατικά όπως φυσική ποζολάνη (20% με 30%), φυσική ποζολάνη ψημένη, ιπτάμενη τέφρα πυριτική, ιπτάμενη τέφρα ασβεστούχα και πυριτική παιπάλη. Επίσης, περιέχει αργιλικό τριασβέστιο (C_3A) σε ποσοστό κάτω από 5 %, filler 3% και γύψο (2% με 3%). Το τσιμέντο τύπου IV χαρακτηρίζεται ως ανθεκτικό στα θειικά άλατα.

Ως filler (πρόσθετα) χαρακτηρίζονται στην παραγωγή τσιμέντου, τα αδρανή υλικά που δρουν ευνοϊκά στο εργάσιμο και την υδατοπερατότητα. Οι ποζολάνες είναι πυριτικά ή αργιλοπυριτικά υλικά που ενώνονται με την υδράσβεστο $\text{Ca}(\text{OH})_2$ και σχηματίζουν ένυδρες ασβεστοπυριτικές ενώσεις.

7.3 Υπολογισμός του μίγματος.

Για την παρασκευή της τσιμεντόπαστας έπρεπε να ορίσουμε τον λόγο V_N/V_T δηλαδή τον λόγο νερού προς τσιμέντο του μίγματος. Θέλοντας κατά το δυνατό περισσότερο να μειώσουμε την θλιπτική αντοχή των δοκιμίων που πρόκειται να παρασκευάσουμε επιλέξαμε τον λόγο V_N/V_T ίσο με 0.65. Αυτό γιατί είναι γνωστό πως όσο μειώνεται ο λόγος νερού προς τσιμέντο τόσο αυξάνεται η αντοχή του υλικού, είτε πρόκειται για σκυρόδεμα είτε για τσιμεντόπαστα. Ακολουθεί ο υπολογισμός του μίγματος για την παρασκευή υλικού έξι κυβικών δοκιμίων και επτά και μισού κυλινδρικών δοκιμίων. Έτσι παρασκευάσαμε έξι κυβικά δοκίμια και τρία κυλινδρικά δοκίμια, όσα και τα καλούπια που είχαμε διαθέσιμα. Τα δοκίμια δεν συντηρήθηκαν σε λεκάνη με νερό, έτσι ώστε να αποκτήσουν μικρότερη αντοχή σε σχέση με αυτή που θα αποκτούσαν εάν τα τοποθετούσαμε σε νερό [21].

Compressive strength, percent
of 28-day moist-cured concrete



Σχήμα 7.1 Αύξηση αντοχής σκυροδέματος αυξάνει με την ηλικία όσο η υγρασία παραμένει παρούσα στην ενυδάτωση του τσιμέντου.

Τα κυβικά δοκίμια ήταν διαστάσεων $15 \times 15 \times 15 \text{ cm}^3$ και τα κυλινδρικά διαμέτρου (d) 15 cm και ύψους (Y) 30 cm. Δηλαδή ο ένας κύβος έχει όγκο $V = 0.003375 \text{ m}^3$ και ο ένας κύλινδρος $V = (\pi d^2/4) \cdot Y = 0.0052987 \text{ m}^3$.

$$V_{ολικό} = 6V_{κύβων} + 7.5V_{κυλίνδρων}$$

$$V_{ολικό} = 6 * 0.003375 * 10^3 + 7.5 * 0.0052987 * 10^3 = 60lt$$

$$V_{τσιμέντου} + V_{νερού} = 60lt$$

$$V_{τσιμέντου} + 0.65V_{τσιμέντου} = 60lt$$

$$1.65V_{τσιμέντου} = 60lt$$

$$V_{τσιμέντου} = 36.36lt$$

$$m_{τσιμέντου} = \rho * V_{τσιμέντου} = 1.2(kg / lt) * 36.36lt = 43.64kg$$

$$V_{νερού} = V_{ολικό} - V_{τσιμέντου} = 60 - 36.36 = 23.64kg$$

Έλεγχος μίγματος σχετικά με την πυκνότητα και τον λόγο νερού προς τσιμέντο.

$$V_{τσιμέντου} = 36.36lt$$

$$V_{νερού} = 23.64kg$$

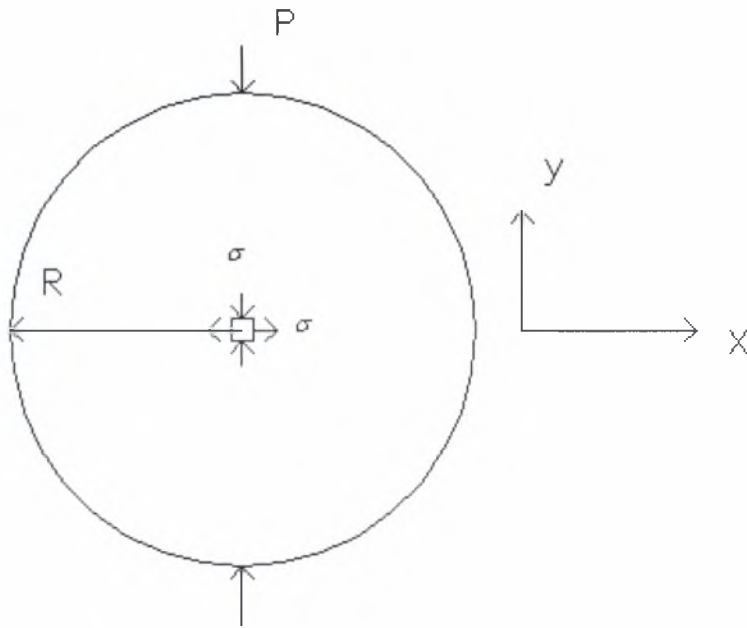
$$m_{τσιμέντου} = 43.64kg$$

$$\frac{V_{νερού}}{V_{τσιμέντου}} = \frac{23.64}{36.36} = 0.65$$

$$\rho_{τσιμέντου} = \frac{m_{τσιμέντου}}{V_{τσιμέντου}} = \frac{43.64}{36.36} = 1.2kg / lt$$

7.4 Υπολογισμός γωνίας φ και συνοχής c της τσιμεντόπαστας.

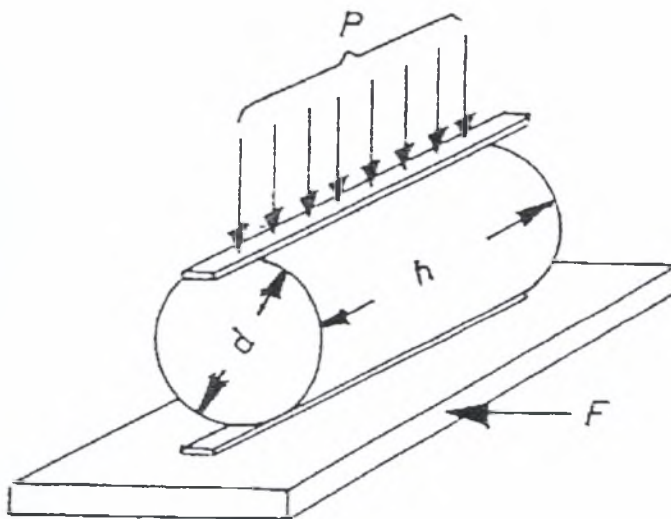
Η διαδικασία που προτείνουμε για τον υπολογισμό της γωνίας διατμητικής αντοχής φ και της συνοχής c, κονιαμάτων γενικότερα είναι η ακόλουθη. Αρχικά θα υπολογίσουμε την θλιπτική αντοχή f_c κυβικού δοκιμίου του υλικού που μας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την εφελκυστική αντοχή f_t κυλινδρικού δοκιμίου αποτελούμενο από το ίδιο υλικό, το οποίο υποβάλουμε σε δοκιμή έμμεσου εφελκυσμού (Brazilian test). Δημιουργούμε έτσι τους αντίστοιχους κύκλους Mohr και χαράσσουμε την περιβάλλουσα η οποία θα μας δώσει τα ζητούμενα c και φ. Σε μία δοκιμή έμμεσου εφελκυσμού η θλιπτική τάση είναι τριπλάσια της εφελκυστικής τάσης [19] Hondros G. (1959).



Σχήμα 7.2 Δοκιμή έμμεσου εφελκυσμού (Brazilian Test)

$$f_t = \frac{2P}{\pi h d}, d = 2r \quad (7.1)$$

Εφελκυστική αντοχή (h το ύψος του κυλίνδρου και P το φορτίο του κυλίνδρου).

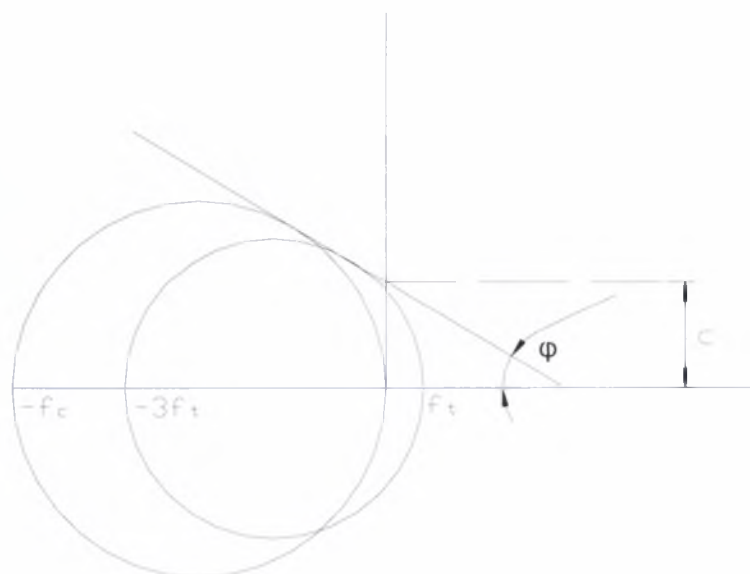


Σχήμα 7.3 Σχηματική απεικόνιση δοκιμής έμμεσου εφελκυσμού [27]

Σχήμα 7.4 Δοκιμή μονοαξονικής συμπίεσης.

$$f_c = \frac{P_{\max}}{A} \quad (7.2)$$

Θλιπτική αντοχή κυβικού δοκιμίου



Σχήμα 7.5 Περιβάλλουσα Mohr-Coulomb ($f_t > 0$, $f_c > 0$, $f_c > 5f_t$)

$$\tan^2(45 + \phi/2) = \frac{f_c - 3f_t}{f_t} \quad (7.3)$$

Υπολογισμός της γωνίας ϕ σε μοίρες.

$$c = \frac{f_c}{2} \sqrt{\frac{f_t}{f_c - 3f_t}} \quad (7.4)$$

Υπολογισμός της συνοχής c .

Εάν $\phi=0$, (Mises plasticity) τότε:

$$1 = \frac{f_c - 3f_t}{f_t} \rightarrow f_c = 4f_t$$

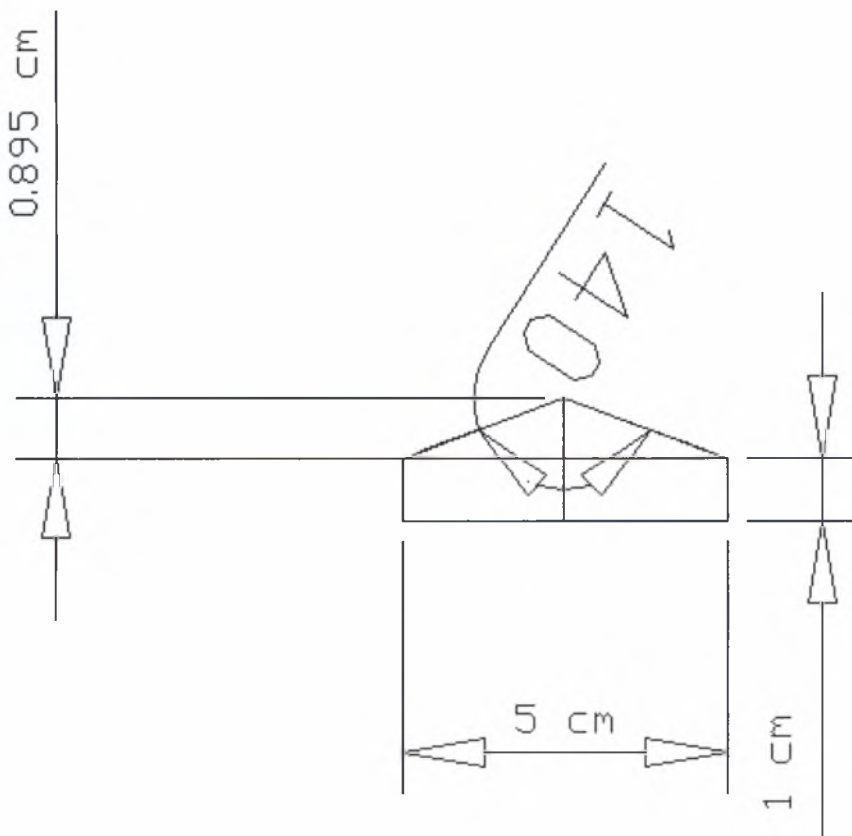
8^ο Κεφάλαιο

8.1 Η δοκιμή της διείδυσης.

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στη διείδυση προέρχονταν από το ίδιο μίγμα τσιμεντόπαστας που περιγράψαμε λεπτομερώς στο 6^ο Κεφάλαιο. Χρησιμοποιήσαμε ένα κυβικό δοκίμιο.

8.2 Ο διεισδυτής.

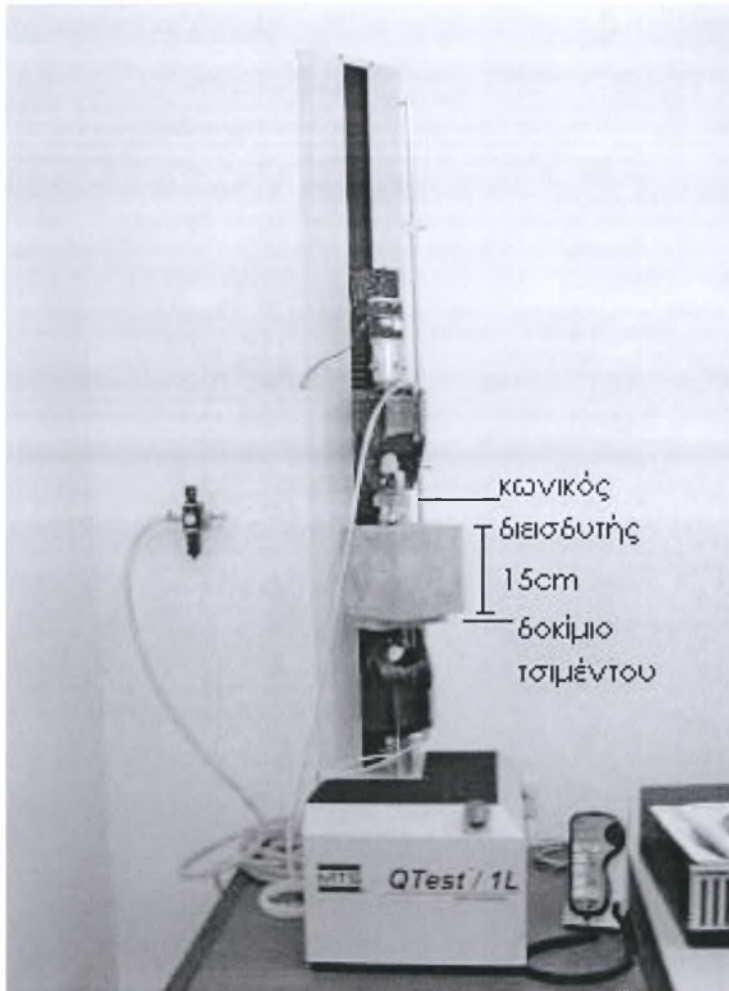
Ο διεισδυτής φτιάχτηκε με δική μας πρωτοβουλία και προσαρμόστηκε κατάλληλα σε συσκευή μονοαξονικού εφελκυσμού / θλίψης. Πρόκειται για κωνικό διεισδυτή από χάλυβα St303 ($E=209\text{GPa}$, $\nu=0.3$), με τις ακόλουθες διαστάσεις: διάμετρος πέντε εκατοστών, ύψος 0.895 εκατοστών, έτσι ώστε η γωνία του κώνου να είναι 140.6 μοίρες και επομένως να είναι συμβατός με τον διεισδυτή τετραγωνικής πυραμίδας κατά Vickers. Η κατασκευή του διεισδυτή έγινε από έμπειρο μηχανουργείο, Παπαπαναγιώτου Β. –Μαράνογλου Π. Ο.Ε. στο Διμήνι Βόλου.



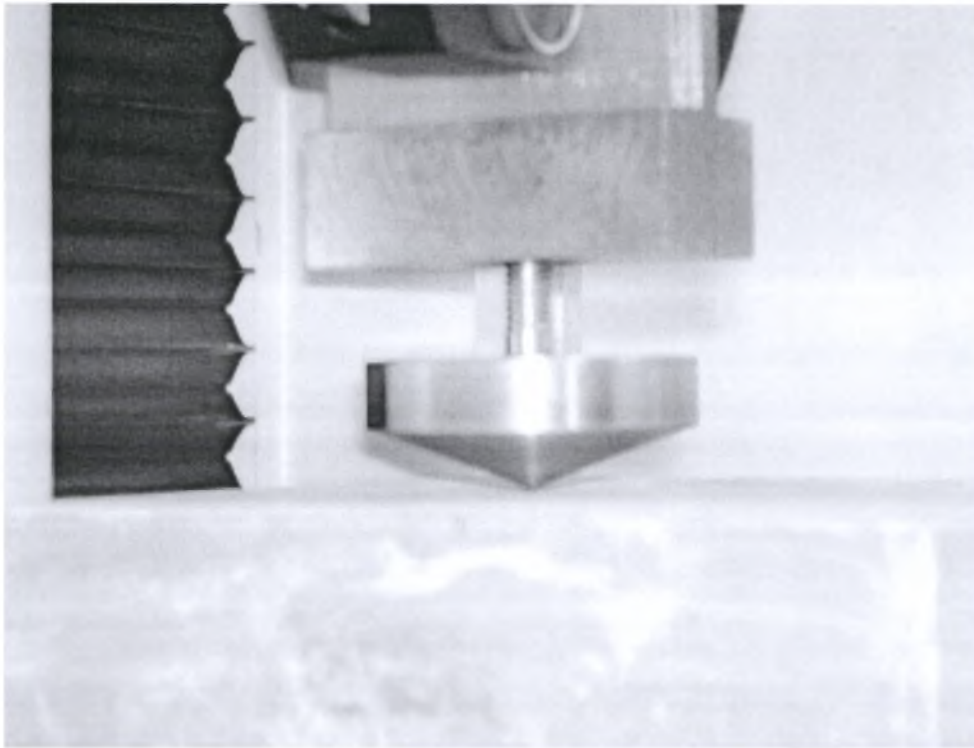
Σχήμα 8.1 Γεωμετρία του διεισδυτή.

8.3 Η συσκευή διείσδυσης.

Η συσκευή που χρησιμοποιήσαμε ονομάζεται MTS QTest™ / 1L , *Elite Controller* και βρίσκεται στο Εργαστήριο Μικρομηχανικής του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.



Σχήμα 8.2 Πειραματική διάταξη της διείσδυσης.



Σχήμα 8.3 Λεπτομέρεια του διεισδυτή.

Ο διεισδυτής που κατασκευάσαμε με πρώτη ύλη χάλυβα υψηλής αντοχής (St 303), προσαρμόστηκε κατάλληλα στη συσκευή MTS QTest™ 1/L με τη βοήθεια συγκεκριμένης διάταξης. Η συσκευή MTS QTest™ 1/L μπορεί να εφαρμόσει θλιπτικό φορτίο έως και 1000N, φορτίο που αποδείχθηκε μικρό για την τσιμεντόπαστα που παρασκευάσαμε.

8.4 Χαρακτηριστικά φόρτισης.

Data Rate = 10 Hz : δηλαδή με πυκνότητα συλλογής 10 σημείων (φορτίο, μετατόπιση) το δευτερόλεπτο θα εξαχθούν τα αποτελέσματα

Platen Separation = 10 mm : να απέχει αρχικά από το δοκίμιο ο διεισδυτής 1 cm

Pre Load = 0 N : μηδενική αρχική φόρτιση

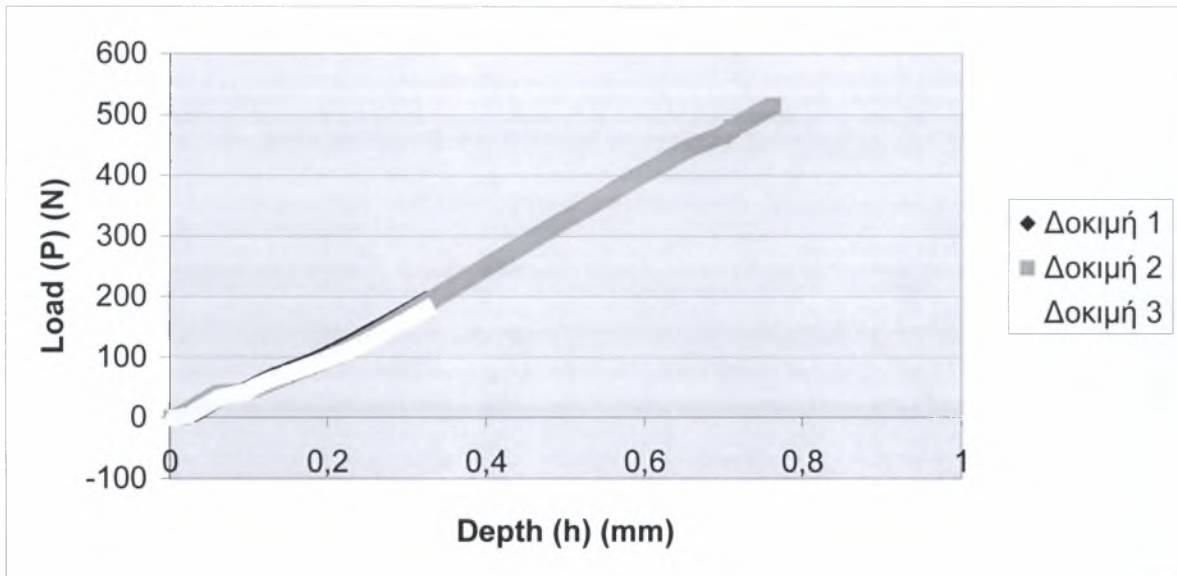
Strain Endpoint : $0.05 \cdot 10 (= \text{Platen Separation}) = 0.5$ mm : βάθος που θα σταματήσει η δοκιμή

Pre Load Speed = 10 mm/min : η ταχύτητα μέχρι να έρθει σε επαφή ο διεισδυτής με το δοκίμιο

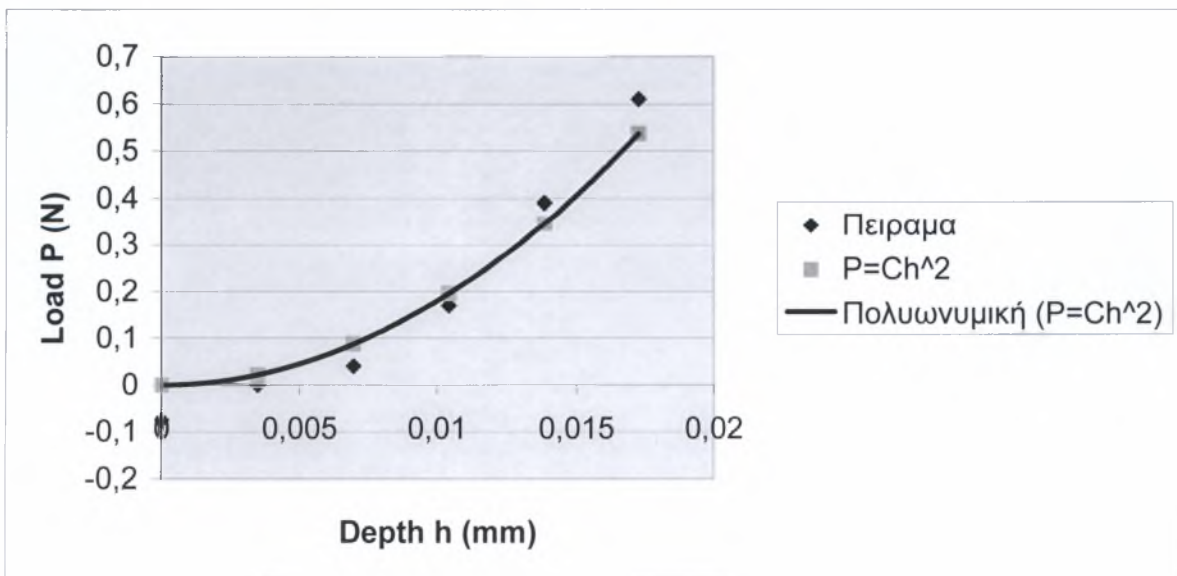
Test Speed = 1 mm/min : ταχύτητα διεισδυτή

8.5 Αποτελέσματα της διείσδυσης.

Πραγματοποιήθηκαν τρεις δοκιμές διείσδυσης. Η απόκριση ανάμεσα σε αυτές τις τρεις όπως φαίνεται και στο γράφημα του Σχήματος 7.4 είναι πανομοιότυπη, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει πολύ καλή επαναληψιμότητα στο πείραμα.



Σχήμα 8.4 Απόκριση δύναμης βύθισης



Σχήμα 8.5 Απόκριση δύναμης βύθισης σε μικρότερη κλίμακα

Η ακαμψία διείσδυσης C όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.5 προκύπτει:

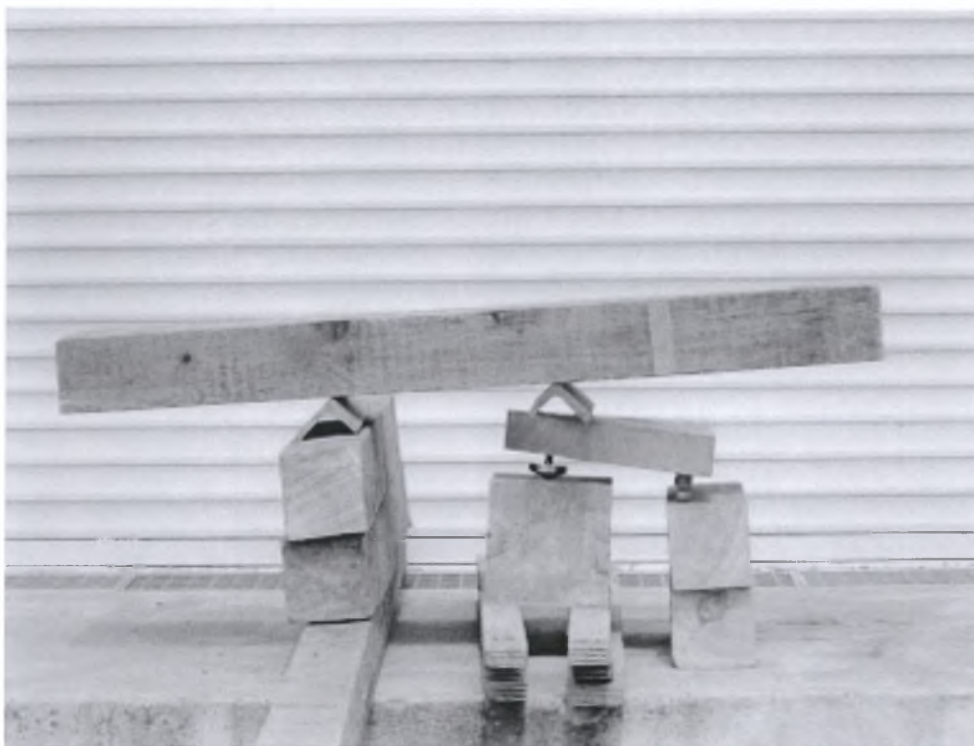
$$C = \frac{0.54N}{(0.017mm)^2} = 1.87GPa$$

Και το μέτρο ελαστικότητας $E^*=E=0.85GPa$ από την ακόλουθη σχέση:

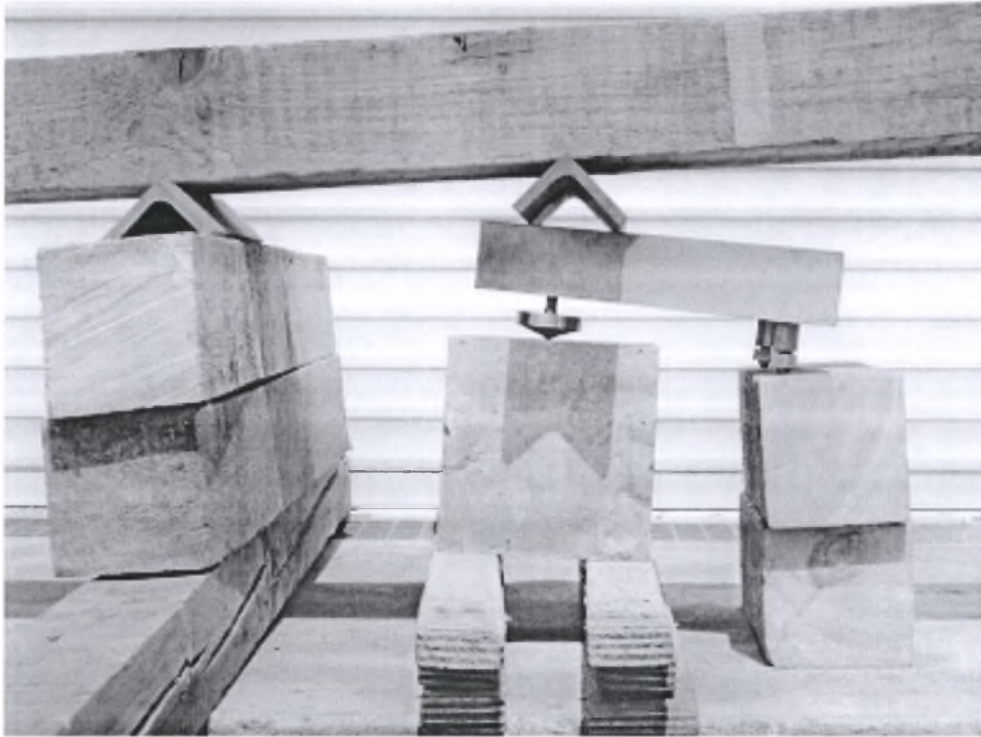
$$P = Ch^2 = 2.1891(1 - 0.21\nu_i - 0.01\nu_i^2 - 0.41\nu_i^3)E^*h^2$$

8.6 Δεύτερη Πειραματική διάταξη της διείσδυσης.

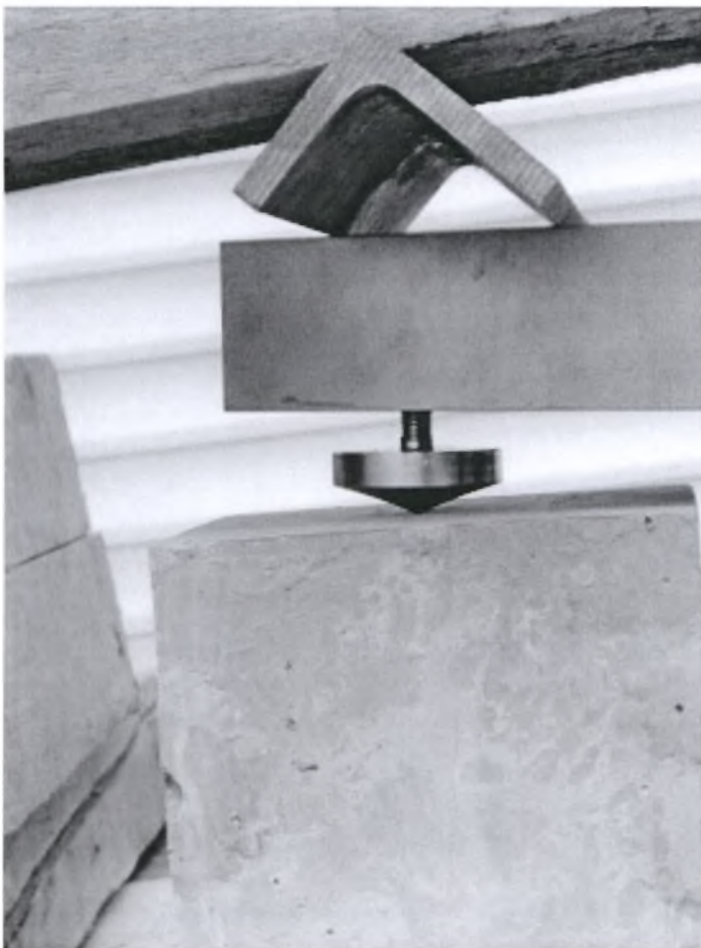
Στην προηγούμενη προσπάθεια διείσδυσης, εφαρμόζοντας φορτίο περίπου 500 N δηλαδή 50 kg, το αποτύπωμα της διείσδυσης ήταν δυσδιάκριτο. Η ανάγκη για την επιβολή μεγαλύτερων φορτίων ήταν φανερή. Το πείραμα με μεγάλης κλίμακας φορτία, έγινε στις 2 Ιουνίου 2006 και σε θερμοκρασία 31°C. Κατασκευάσαμε μία πειραματική διάταξη ώστε με τον ίδιο διεισδυτή να εξασκήσουμε φορτίο ίσο με 300 kg δηλαδή 2943 N. Έτσι χρησιμοποιήσαμε έξι σάκους τσιμέντου που ο καθένας ζύγιζε 50 kg, δηλαδή συνολικά 300 kg, σαν φορτίο διείσδυσης. Το αποτέλεσμα ήταν ένα περιτύπωμα επαφής κύκλου διαμέτρου 6 mm. Δεν παρατηρήθηκε ανύψωση (pile-up) ή καθίζηση (sink-in) του υλικού περιμετρικά της επαφής του δοκιμίου με το διεισδυτή.



Σχήμα 8.6 Πειραματική διάταξη της διείσδυσης (1).



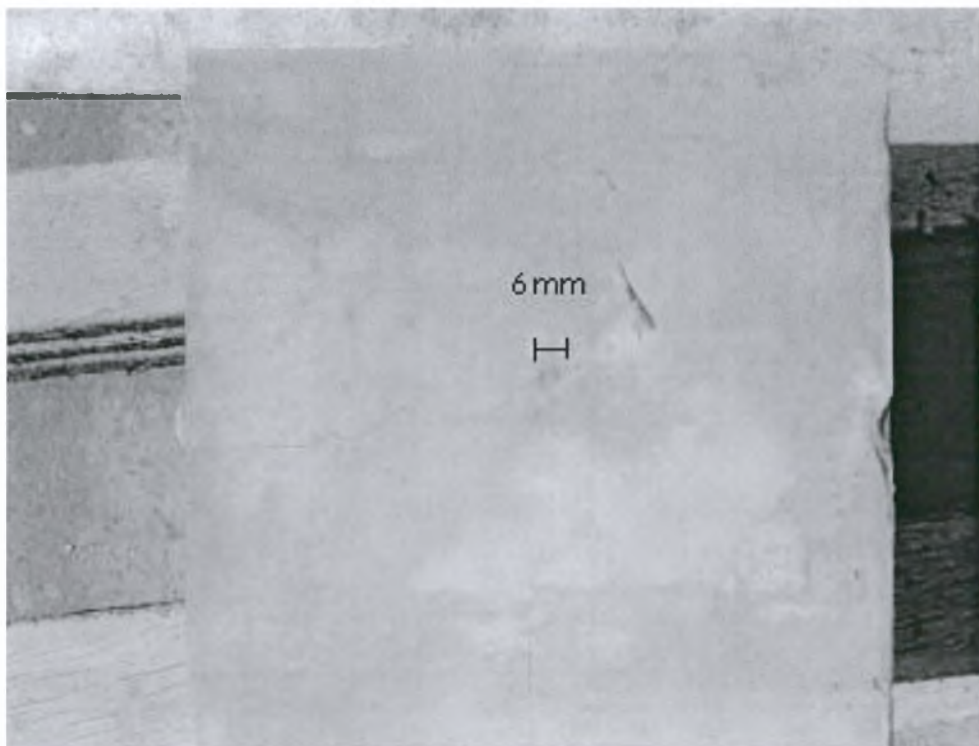
Σχήμα 8.7 Πειραματική διάταξη της διεύθυνσης (2).



Σχήμα 8.8 Λεπτομέρεια του διευσδυτή.



Σχήμα 8.9 Επιβολή φορτίων στο δοκίμιο.



Σχήμα 8.10 Αποτύπωμα διείσδυσης.



Σχήμα 8.11 Αποτύπωμα διείσδυσης (Λεπτομέρεια).

Από τη δοκιμή διείσδυσης και μετρώντας το αποτύπωμα για τη συγκεκριμένη φόρτιση υπολογίσαμε την μέση πίεση.

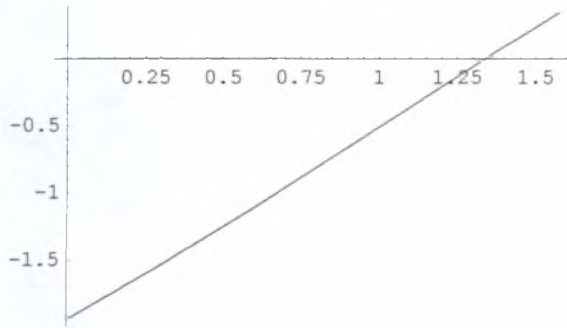
$$P_{av} = \frac{P}{A} = \frac{2943N}{\frac{\pi(6mm)^2}{4}} = 104.14MPa \approx 3\sigma_y = 3 * 32.5MPa = 97.5MPa$$

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 80^\circ$

Αντιστοίχιση των τιμών της γωνίας α για κάθε τιμή της γωνίας φ από 1 έως 86 μοίρες.

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 1^\circ = 0.017453$ rads

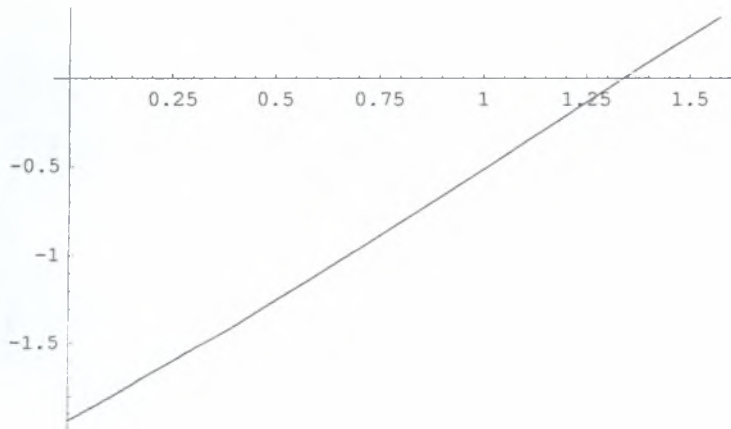
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.017453] Tan[π / 4 + 0.017453 / 2] + e-α Tan[0.017453] Tan[π / 4 - 0.017453 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.017453] Tan[π / 4 + 0.017453 / 2] + e-α Tan[0.017453] Tan[π / 4 - 0.017453 / 2]}
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 6^\circ = 0.10472$ rads

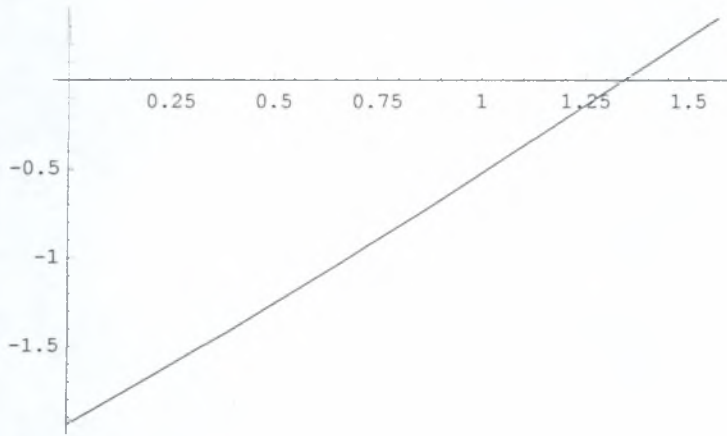
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.10472] Tan[π / 4 + 0.10472 / 2] + e-α Tan[0.10472] Tan[π / 4 - 0.10472 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.10472] Tan[π / 4 + 0.10472 / 2] + e-α Tan[0.10472] Tan[π / 4 - 0.10472 / 2]}
      , {α,
      0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 11^\circ = 0.191986$ rads

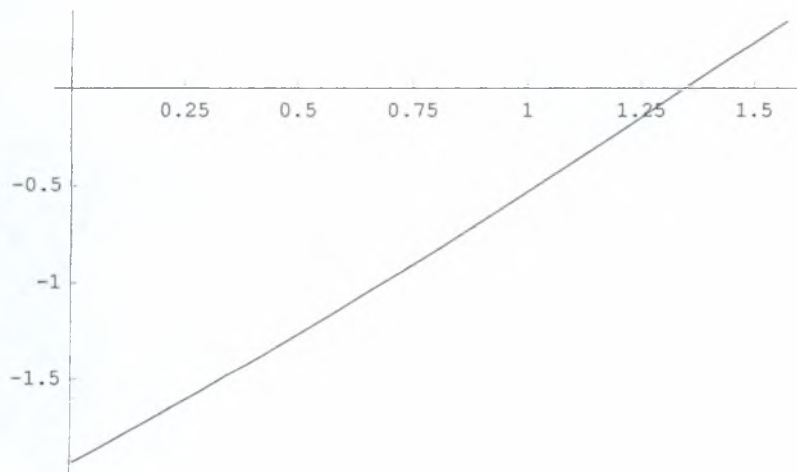
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 16^\circ = 0.279253$ rads

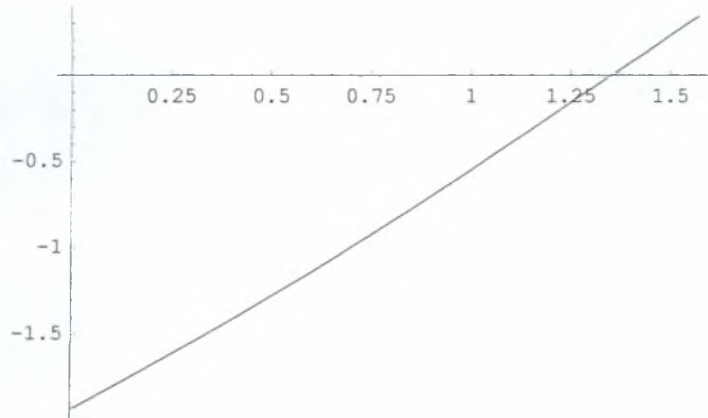
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 21^\circ = 0.366519$ rads

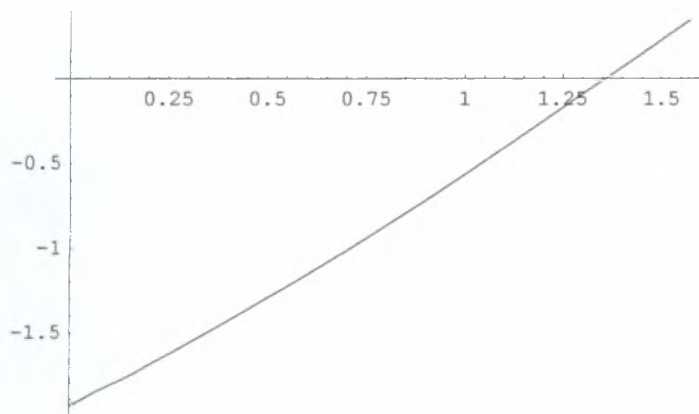
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.366519] Tan[π / 4 + 0.366519 / 2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π / 4 - 0.366519 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.366519] Tan[π / 4 + 0.366519 / 2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π / 4 - 0.366519 / 2])
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 26 ° = 0.453786 rads

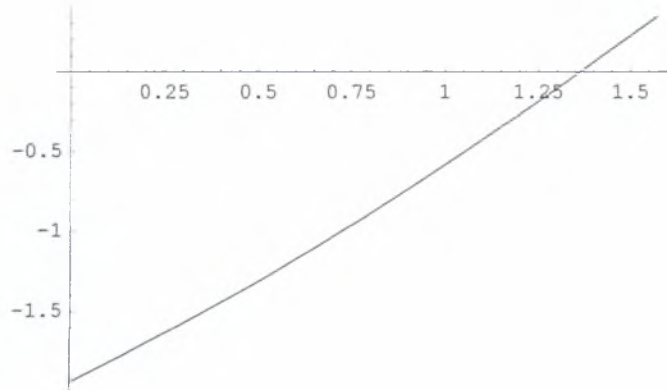
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.453786] Tan[π / 4 + 0.453786 / 2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π / 4 - 0.453786 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.453786] Tan[π / 4 + 0.453786 / 2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π / 4 - 0.453786 / 2])
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 31 ° = 0.541052 rads

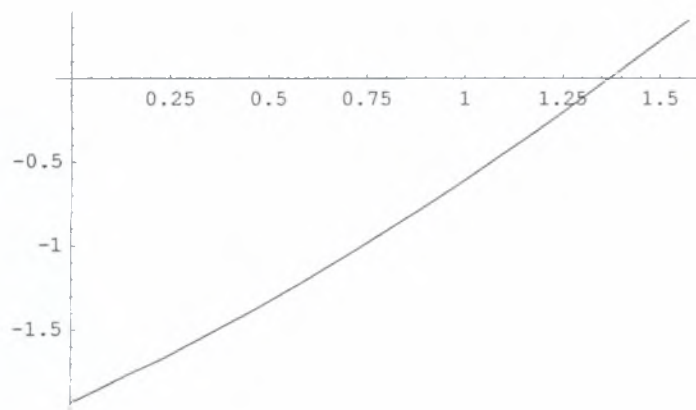
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.541052] Tan[π / 4 + 0.541052 / 2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π / 4 - 0.541052 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.541052] Tan[π / 4 + 0.541052 / 2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π / 4 - 0.541052 / 2]) ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 36 ° = 0.628319 rads

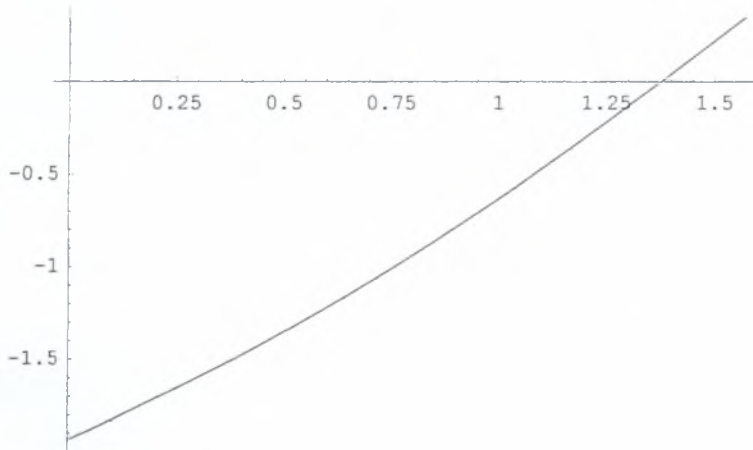
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.628319] Tan[π / 4 + 0.628319 / 2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π / 4 - 0.628319 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.628319] Tan[π / 4 + 0.628319 / 2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π / 4 - 0.628319 / 2]) ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 41 ° = 0.715585 rads

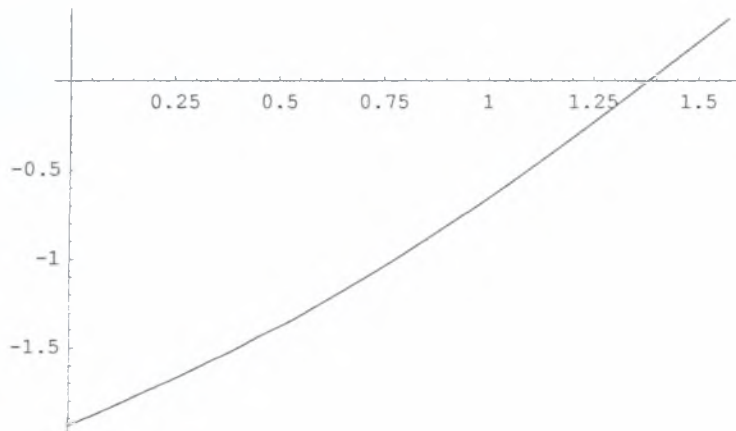

```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.715585] Tan[π/4 + 0.715585/2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π/4 - 0.715585/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.715585] Tan[π/4 + 0.715585/2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π/4 - 0.715585/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 46^\circ = 0.802851$ rads

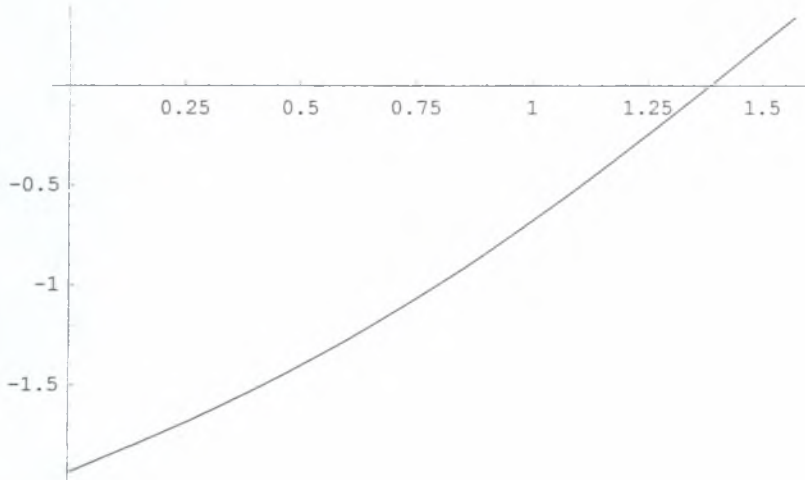
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.802851] Tan[π/4 + 0.802851/2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π/4 - 0.802851/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.802851] Tan[π/4 + 0.802851/2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π/4 - 0.802851/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 51^\circ = 0.890118$ rads

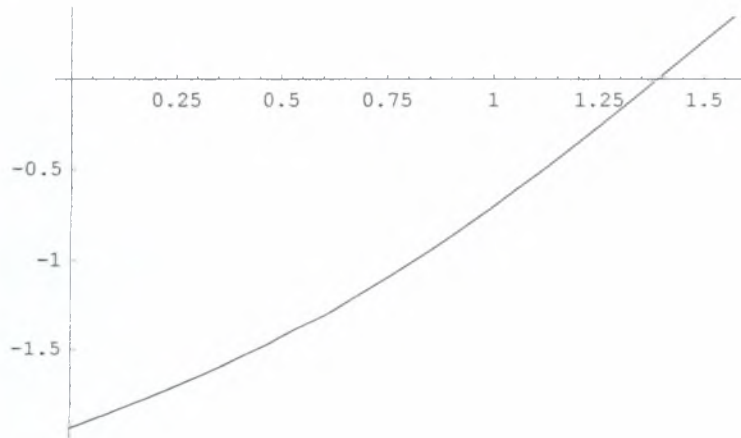
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.890118] Tan[π / 4 + 0.890118 / 2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π / 4 - 0.890118 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.890118] Tan[π / 4 + 0.890118 / 2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π / 4 - 0.890118 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 56^\circ = 0.977384$ rads

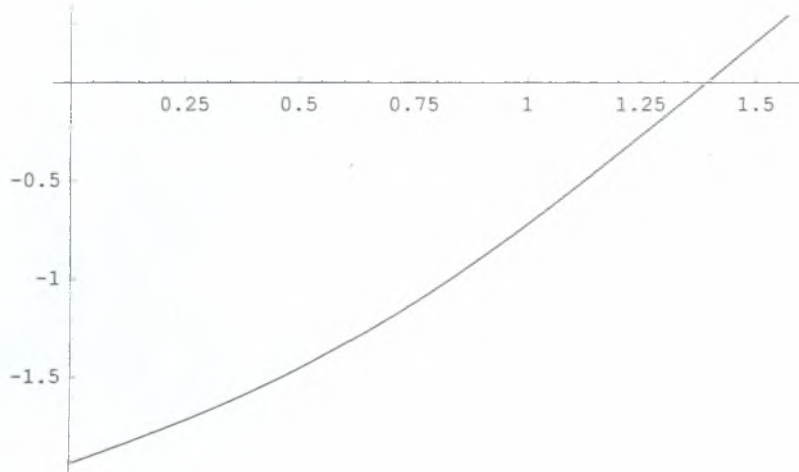
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.977384] Tan[π / 4 + 0.977384 / 2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π / 4 - 0.977384 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.977384] Tan[π / 4 + 0.977384 / 2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π / 4 - 0.977384 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 61^\circ = 1.064651$ rads

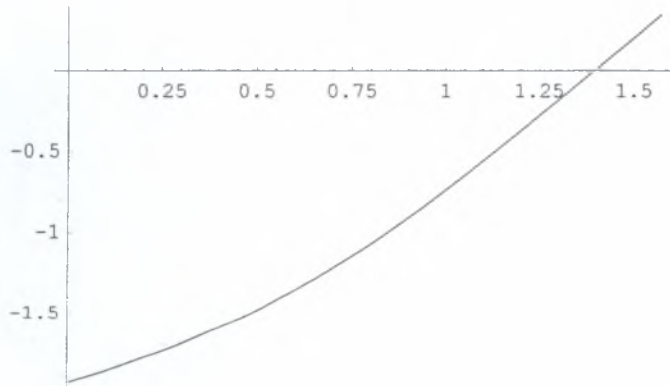
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]}',
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 66^\circ = 1.151917$ rads

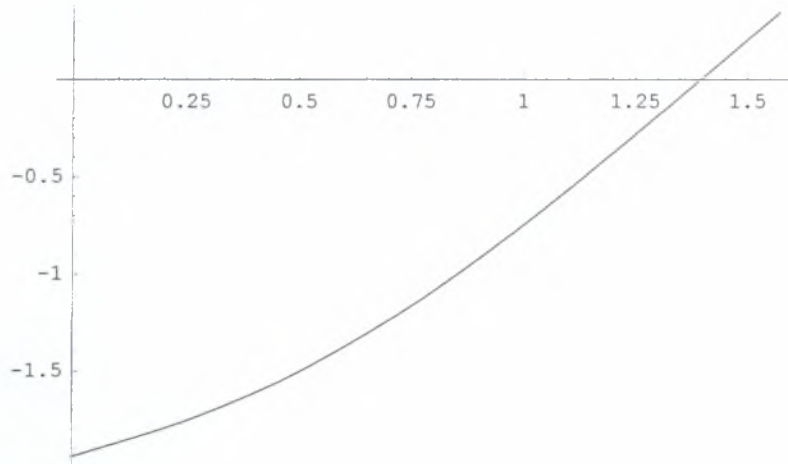
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.151917] Tan[π / 4 + 1.151917 / 2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π / 4 - 1.151917 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.151917] Tan[π / 4 + 1.151917 / 2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π / 4 - 1.151917 / 2]}',
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 71^\circ = 1.239184$ rads

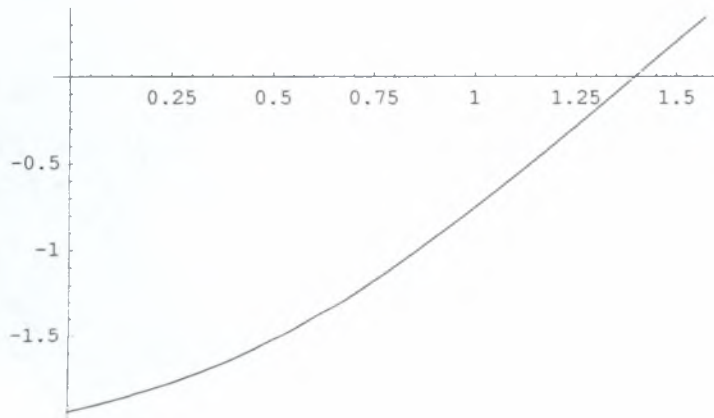
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
  Cos[α] {eα Tan[1.239184] Tan[π/4 + 1.239184/2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π/4 - 1.239184/2]}
  2 Sin[α] + eα Tan[1.239184] Tan[π/4 + 1.239184/2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π/4 - 1.239184/2]} ,
  {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 76^\circ = 1.32645$ rads

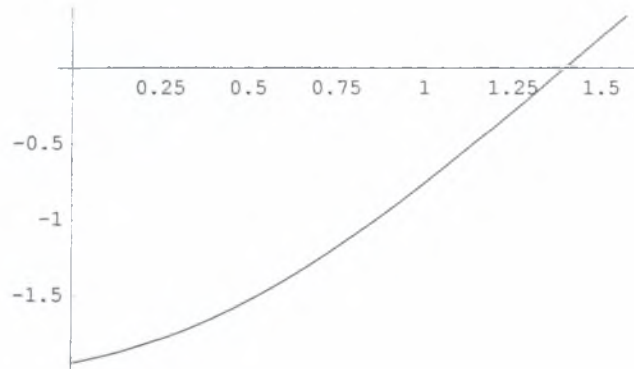
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
  Cos[α] {eα Tan[1.32645] Tan[π/4 + 1.32645/2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π/4 - 1.32645/2]}
  2 Sin[α] + eα Tan[1.32645] Tan[π/4 + 1.32645/2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π/4 - 1.32645/2]} , {α,
  0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 81^\circ = 1.413717$ rads

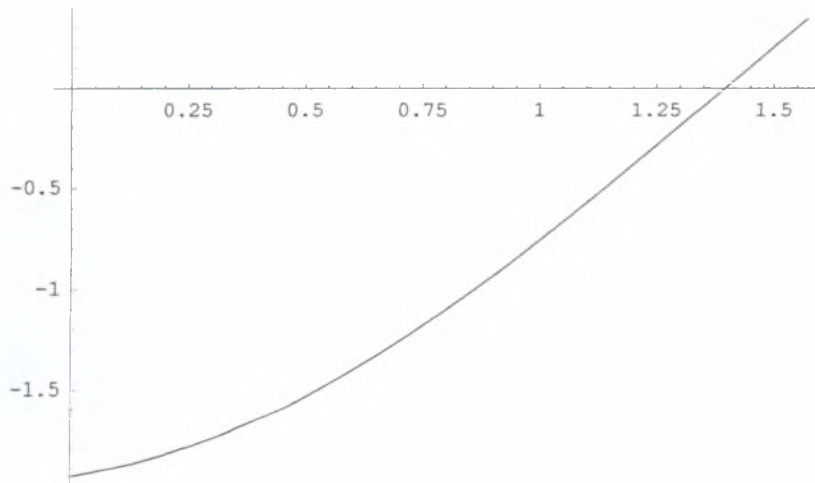
```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 86° = 1.500983 rads

```
Plot[Cos[2.792527 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 80^\circ$

Υπολογισμός του λόγου F / ct .

$$9.26122 \text{ Cot}[0.017453] \{e^{2 \cdot 1.3375 \text{ Tan}[0.017453]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.017453 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.017453 / 2] e^{-1.3375 \text{ Tan}[0.017453]}$$

{85.2987}

$$12.44292 \text{ Cot}[0.10472] \{e^{2 \cdot 1.3408 \text{ Tan}[0.10472]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.10472 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.10472 / 2] e^{-1.3408 \text{ Tan}[0.10472]}$$

{115.804}

$$17.84412 \text{ Cot}[0.191986] \{e^{2 \cdot 1.342 \text{ Tan}[0.191986]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.191986 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.191986 / 2] e^{-1.342 \text{ Tan}[0.191986]}$$

{169.888}

$$25.83172 \text{ Cot}[0.279253] \{e^{2 \cdot 1.346 \text{ Tan}[0.279253]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.279253 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.279253 / 2] e^{-1.346 \text{ Tan}[0.279253]}$$

{255.479}

$$38.7522 \text{ Cot}[0.366519] \{e^{2 \cdot 1.351 \text{ Tan}[0.366519]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.366519 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.366519 / 2] e^{-1.351 \text{ Tan}[0.366519]}$$

{404.588}

$$58.10072 \text{ Cot}[0.453786] \{e^{2 \cdot 1.3575 \text{ Tan}[0.453786]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.453786 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.453786 / 2] e^{-1.3575 \text{ Tan}[0.453786]}$$

{652.391}

$$104.4782 \text{ Cot}[0.541052] \{e^{2 \cdot 1.3625 \text{ Tan}[0.541052]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.541052 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.541052 / 2] e^{-1.3625 \text{ Tan}[0.541052]}$$

{1287.12}

$$209.1332 \text{ Cot}[0.628319] \{e^{2 \cdot 1.3683 \text{ Tan}[0.628319]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.628319 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.628319 / 2] e^{-1.3683 \text{ Tan}[0.628319]}$$

{2900.02}

$$372.1632 \text{ Cot}[0.715585] \{e^{2 \cdot 1.375 \text{ Tan}[0.715585]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.715585 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.715585 / 2] e^{-1.375 \text{ Tan}[0.715585]}$$

{5998.}

$$564.4322 \text{ Cot}[0.802851] \{e^{2 \cdot 1.38125 \text{ Tan}[0.802851]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.802851 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.802851 / 2] e^{-1.38125 \text{ Tan}[0.802851]}$$

{11003.4}

$$-21733.92 \text{ Cot}[0.890118] \{e^{2 \cdot 1.3851 \text{ Tan}[0.890118]} (\text{Tan}[\pi / 4 + 0.890118 / 2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.396263] \text{Tan}[\pi / 4 - 0.890118 / 2] e^{-1.3851 \text{ Tan}[0.890118]}$$

{-539259.}

$$-2034.442 \cot[0.977384] \{e^{2 \cdot 1.389 \tan[0.977384]} (\tan[\pi/4 + 0.977384/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 0.977384/2] e^{-1.389 \tan[0.977384]}$$

{-69206.3}

$$5653.442 \cot[1.064651] \{e^{2 \cdot 1.3928 \tan[1.064651]} (\tan[\pi/4 + 1.064651/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.064651/2] e^{-1.3928 \tan[1.064651]}$$

{294334.}

$$-2214.062 \cot[1.151917] \{e^{2 \cdot 1.3942 \tan[1.151917]} (\tan[\pi/4 + 1.151917/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.151917/2] e^{-1.3942 \tan[1.151917]}$$

{-209219.}

$$-946.092 \cot[1.239184] \{e^{2 \cdot 1.3947 \tan[1.239184]} (\tan[\pi/4 + 1.239184/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.239184/2] e^{-1.3947 \tan[1.239184]}$$

{-220185.}

$$-1462.152 \cot[1.32645] \{e^{2 \cdot 1.3955 \tan[1.32645]} (\tan[\pi/4 + 1.32645/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.32645/2] e^{-1.3955 \tan[1.32645]}$$

{-1.57675 × 10⁶}

$$-16401.22 \cot[1.413717] \{e^{2 \cdot 1.3962 \tan[1.413717]} (\tan[\pi/4 + 1.413717/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.413717/2] e^{-1.3962 \tan[1.413717]}$$

{-4.37937 × 10⁸}

$$650.6182 \cot[1.500983] \{e^{2 \cdot 1.3978 \tan[1.500983]} (\tan[\pi/4 + 1.500983/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.396263] \tan[\pi/4 - 1.500983/2] e^{-1.3978 \tan[1.500983]}$$

{1.23187 × 10¹²}

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 80^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L}{t}$.

$$\frac{1}{e^{-1.3375 \tan[0.017453]} \tan[\pi/4 - 0.017453/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3375]}$$

9.26122

$$\frac{1}{e^{-1.3408 \tan[0.10472]} \tan[\pi/4 - 0.10472/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3408]}$$

12.4429

$$\frac{1}{e^{-1.342 \tan[0.191986]} \tan[\pi/4 - 0.191986/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.342]}$$

17.8441

$$\frac{1}{e^{-1.346 \tan[0.279253]} \tan[\pi/4 - 0.279253/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.346]}$$

25.8317

$$\frac{1}{e^{-1.351 \tan[0.366519]} \tan[\pi/4 - 0.366519/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.351]}$$

38.752

$$\frac{1}{e^{-1.3575 \tan[0.453786]} \tan[\pi/4 - 0.453786/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3575]}$$

58.1007

$$\frac{1}{e^{-1.3625 \tan[0.541052]} \tan[\pi/4 - 0.541052/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3625]}$$

104.478

$$\frac{1}{e^{-1.3683 \tan[0.628319]} \tan[\pi/4 - 0.628319/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3683]}$$

209.133

$$\frac{1}{e^{-1.375 \tan[0.715585]} \tan[\pi/4 - 0.715585/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.375]}$$

372.163

$$\frac{1}{e^{-1.38125 \tan[0.802851]} \tan[\pi/4 - 0.802851/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.38125]}$$

564.432

$$\frac{1}{e^{-1.3851 \tan[0.890118]} \tan[\pi/4 - 0.890118/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3851]}$$

-21733.9

$$\frac{1}{e^{-1.389 \tan[0.977384]} \tan[\pi/4 - 0.977384/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.389]}$$

-2034.44

$$\frac{1}{e^{-1.3928 \tan[1.064651]} \tan[\pi/4 - 1.064651/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3928]}$$

5653.44

$$\frac{1}{e^{-1.3942 \tan[1.151917]} \tan[\pi/4 - 1.151917/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3942]}$$

-2214.06

$$\frac{1}{e^{-1.3947 \tan[1.239184]} \tan[\pi/4 - 1.239184/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3947]}$$

-946.09

$$\frac{1}{e^{-1.3955 \tan[1.32645]} \tan[\pi/4 - 1.32645/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3955]}$$

-1462.15

$$\frac{1}{e^{-1.3962 \tan[1.413717]} \tan[\pi/4 - 1.413717/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3962]}$$

-16401.2

$$\frac{1}{e^{-1.3978 \tan[1.500983]} \tan[\pi/4 - 1.500983/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3978]}$$

650.618

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 80^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L \cos(\beta - \alpha)}{t}$.

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3375]}{e^{-1.3375 \tan[0.017453]} \tan[\pi/4 - 0.017453/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3375]}$$

9.24523

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3408]}{e^{-1.3408 \tan[0.10472]} \tan[\pi/4 - 0.10472/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3408]}$$

12.4237

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.342]}{e^{-1.342 \tan[0.191986]} \tan[\pi/4 - 0.191986/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.342]}$$

17.8178

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.346]}{e^{-1.346 \tan[0.279253]} \tan[\pi/4 - 0.279253/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.346]}$$

25.7991

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.351]}{e^{-1.351 \tan[0.366519]} \tan[\pi/4 - 0.366519/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.351]}$$

38.7123

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3575]}{e^{-1.3575 \tan[0.453786]} \tan[\pi/4 - 0.453786/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3575]}$$

58.057

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3625]}{e^{-1.3625 \tan[0.541052]} \tan[\pi/4 - 0.541052/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3625]}$$

104.419

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3683]}{e^{-1.3683 \tan[0.628319]} \tan[\pi/4 - 0.628319/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3683]}$$

209.051

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.375]}{e^{-1.375 \tan[0.715585]} \tan[\pi/4 - 0.715585/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.375]}$$

372.079

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.38125]}{e^{-1.38125 \tan[0.802851]} \tan[\pi/4 - 0.802851/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.38125]}$$

564.368

$$\frac{\cos[1.396263 - 1.3851]}{e^{-1.3851 \tan[0.890118]} \tan[\pi/4 - 0.890118/2] \cos[1.396263] - \sin[1.396263 - 1.3851]}$$

-21732.6

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.389]}{e^{-1.389 \text{Tan}[0.977384]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.977384 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.389]}$$

-2034.39

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3928]}{e^{-1.3928 \text{Tan}[1.064651]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.064651 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3928]}$$

5653.4

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3942]}{e^{-1.3942 \text{Tan}[1.151917]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.151917 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3942]}$$

-2214.05

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3947]}{e^{-1.3947 \text{Tan}[1.239184]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.239184 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3947]}$$

-946.088

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3955]}{e^{-1.3955 \text{Tan}[1.32645]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.32645 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3955]}$$

-1462.15

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3962]}{e^{-1.3962 \text{Tan}[1.413717]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.413717 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3962]}$$

-16401.2

$$\frac{\text{Cos}[1.396263 - 1.3978]}{e^{-1.3978 \text{Tan}[1.500983]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.500983 / 2] \text{Cos}[1.396263] - \text{Sin}[1.396263 - 1.3978]}$$

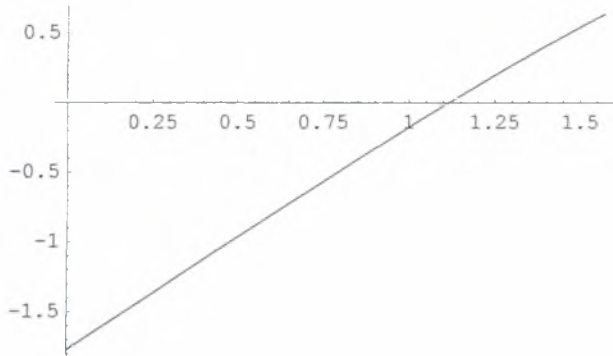
650.618

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 70.3^\circ$

Αντιστοίχιση των τιμών της γωνίας α για κάθε τιμή της γωνίας φ από 1 έως 86 μοίρες.

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 1^\circ = 0.017453$ rads

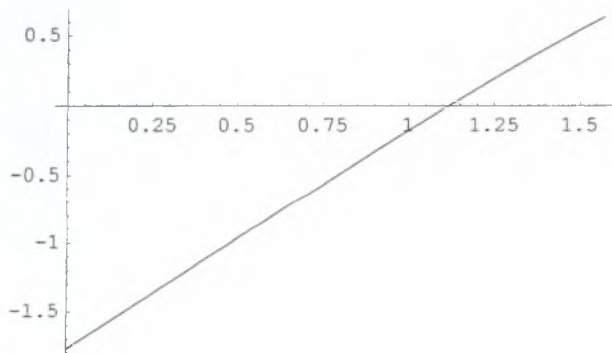
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.017453] Tan[π / 4 + 0.017453 / 2] + e-α Tan[0.017453] Tan[π / 4 - 0.017453 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.017453] Tan[π / 4 + 0.017453 / 2] + e-α Tan[0.017453] Tan[π / 4 - 0.017453 / 2]
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -
- Graphics -
- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 6^\circ = 0.10472$ rads

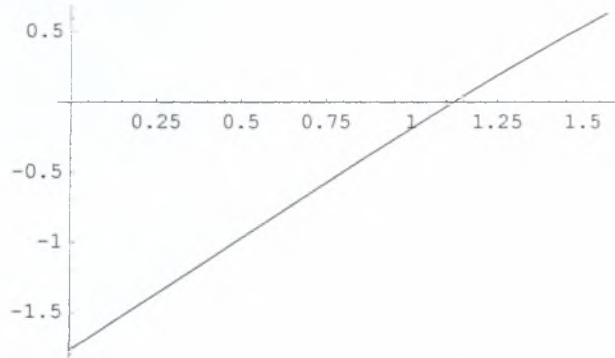
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.10472] Tan[π / 4 + 0.10472 / 2] + e-α Tan[0.10472] Tan[π / 4 - 0.10472 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.10472] Tan[π / 4 + 0.10472 / 2] + e-α Tan[0.10472] Tan[π / 4 - 0.10472 / 2]
      , {α,
      0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 11^\circ = 0.191986$ rads

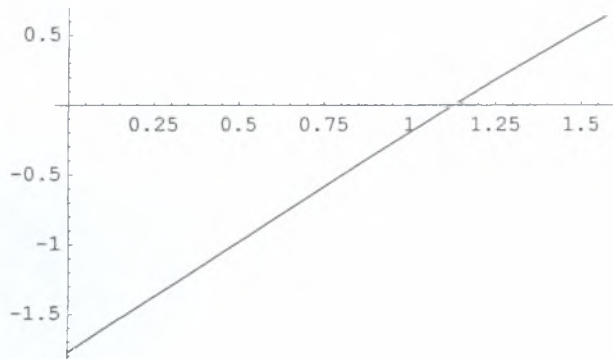
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 16 ° = 0.279253 rads

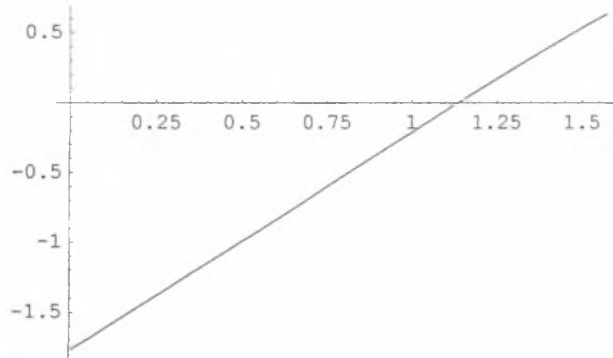
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 21 ° = 0.366519 rads

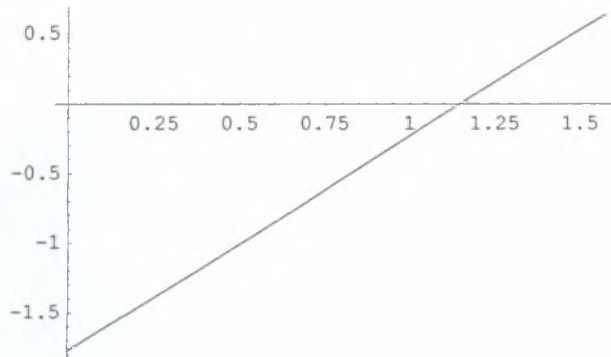
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.366519] Tan[π / 4 + 0.366519 / 2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π / 4 - 0.366519 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.366519] Tan[π / 4 + 0.366519 / 2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π / 4 - 0.366519 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 26^\circ = 0.453786$ rads

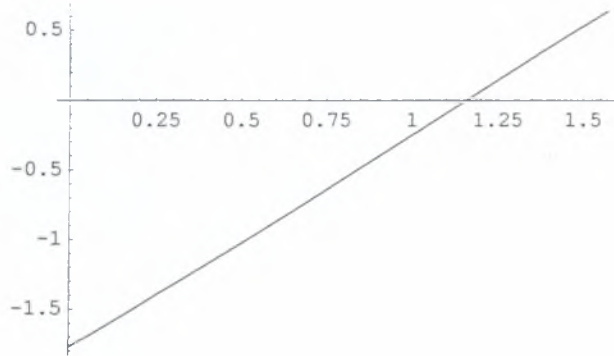
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.453786] Tan[π / 4 + 0.453786 / 2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π / 4 - 0.453786 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.453786] Tan[π / 4 + 0.453786 / 2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π / 4 - 0.453786 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 31^\circ = 0.541052$ rads

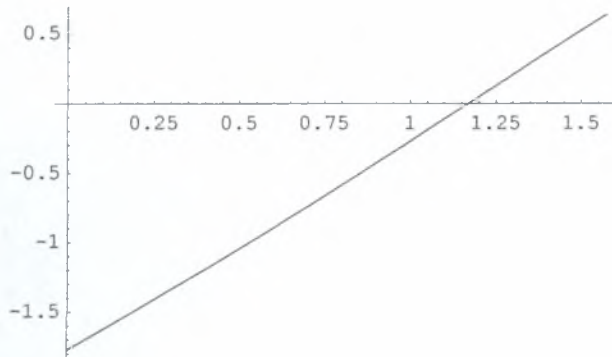
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.541052] Tan[π / 4 + 0.541052 / 2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π / 4 - 0.541052 / 2]} /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.541052] Tan[π / 4 + 0.541052 / 2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π / 4 - 0.541052 / 2]} ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 36 ° = 0.628319 rads

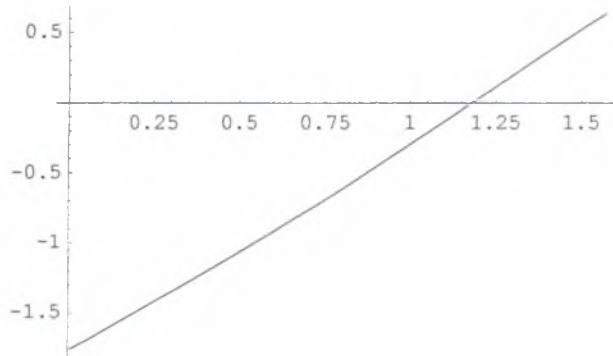
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.628319] Tan[π / 4 + 0.628319 / 2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π / 4 - 0.628319 / 2]} /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.628319] Tan[π / 4 + 0.628319 / 2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π / 4 - 0.628319 / 2]} ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 41 ° = 0.715585 rads

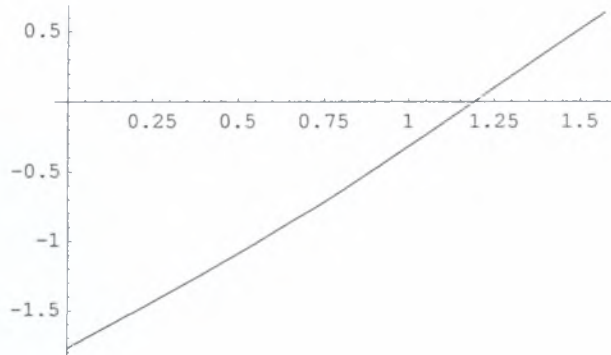
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.715585] Tan[π / 4 + 0.715585 / 2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π / 4 - 0.715585 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.715585] Tan[π / 4 + 0.715585 / 2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π / 4 - 0.715585 / 2])
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 46^\circ = 0.802851$ rads

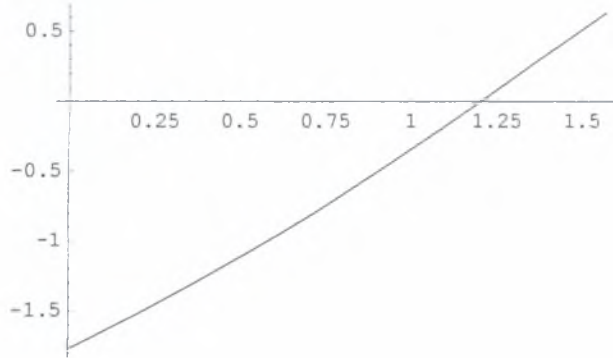
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.802851] Tan[π / 4 + 0.802851 / 2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π / 4 - 0.802851 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.802851] Tan[π / 4 + 0.802851 / 2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π / 4 - 0.802851 / 2])
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 51^\circ = 0.890118$ rads

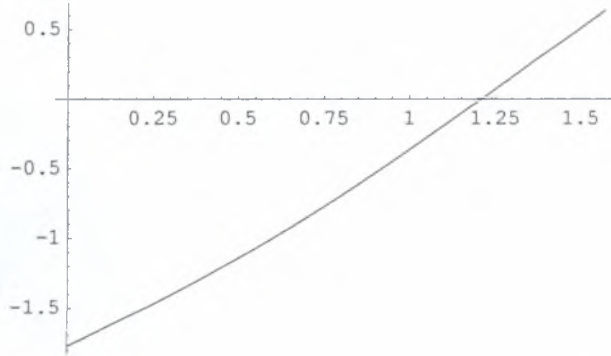

```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.890118] Tan[π / 4 + 0.890118 / 2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π / 4 - 0.890118 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.890118] Tan[π / 4 + 0.890118 / 2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π / 4 - 0.890118 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 56 ° = 0.977384 rads

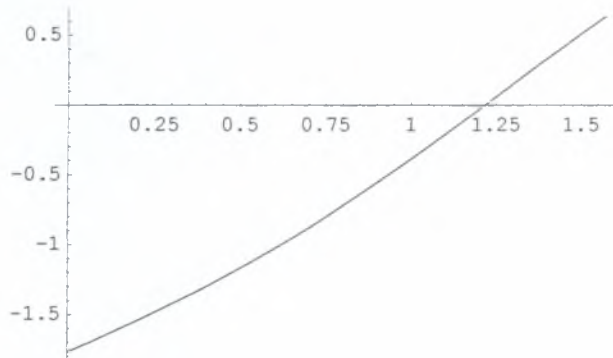
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.977384] Tan[π / 4 + 0.977384 / 2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π / 4 - 0.977384 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.977384] Tan[π / 4 + 0.977384 / 2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π / 4 - 0.977384 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 61 ° = 1.064651 rads

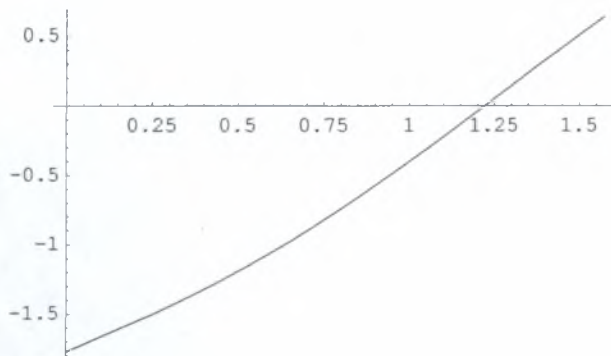
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 66 ° = 1.151917 rads

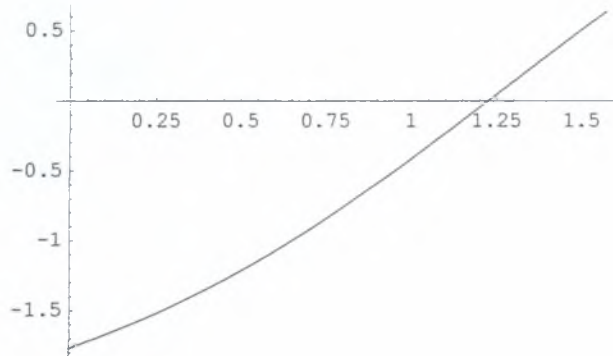
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.151917] Tan[π / 4 + 1.151917 / 2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π / 4 - 1.151917 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.151917] Tan[π / 4 + 1.151917 / 2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π / 4 - 1.151917 / 2]
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 71 ° = 1.239184 rads

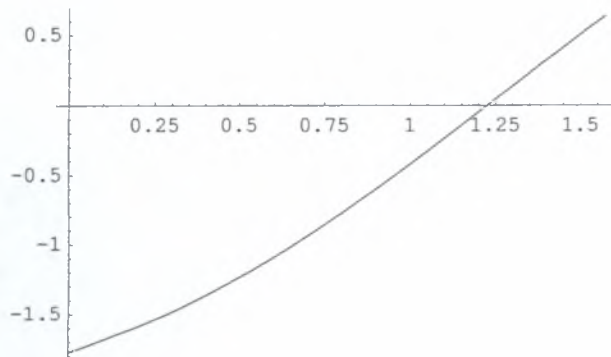
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]
      , {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 76^\circ = 1.32645$ rads

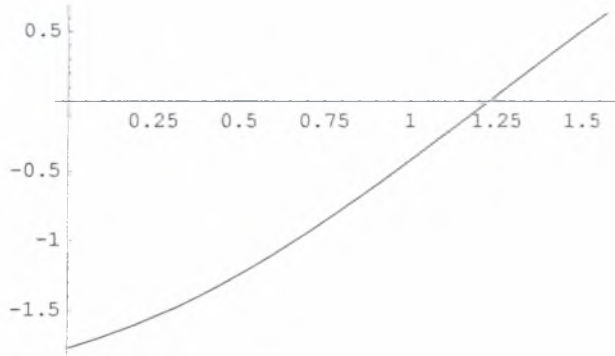
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]
      , {α,
      0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 81^\circ = 1.413717$ rads

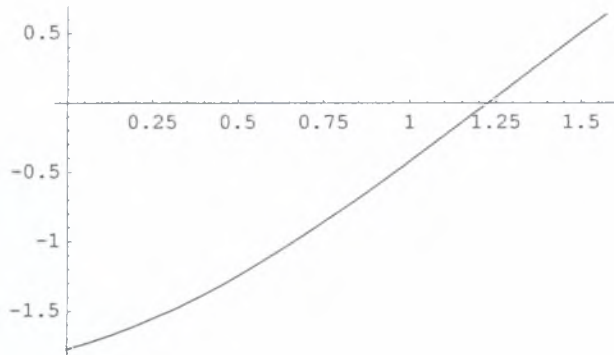
```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.413717] Tan[π / 4 + 1.413717 / 2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π / 4 - 1.413717 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[1.413717] Tan[π / 4 + 1.413717 / 2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π / 4 - 1.413717 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 86 ° = 1.500983 rads

```
Plot[Cos[2.453933 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.500983] Tan[π / 4 + 1.500983 / 2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π / 4 - 1.500983 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[1.500983] Tan[π / 4 + 1.500983 / 2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π / 4 - 1.500983 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 70.3^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L}{t}$.

$$1 / (e^{-1.113158 \tan[0.017453]} \tan[\pi / 4 - 0.017453 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.113158])$$

4.73219

$$1 / (e^{-1.11625 \tan[0.10472]} \tan[\pi / 4 - 0.10472 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.11625])$$

6.27255

$$1 / (e^{-1.121875 \tan[0.191986]} \tan[\pi / 4 - 0.191986 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.121875])$$

8.43663

$$1 / (e^{-1.13 \tan[0.279253]} \tan[\pi / 4 - 0.279253 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.13])$$

11.5081

$$1 / (e^{-1.134286 \tan[0.366519]} \tan[\pi / 4 - 0.366519 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.134286])$$

17.4389

$$1 / (e^{-1.145 \tan[0.453786]} \tan[\pi / 4 - 0.453786 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.145])$$

25.889

$$1 / (e^{-1.159524 \tan[0.541052]} \tan[\pi / 4 - 0.541052 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.159524])$$

36.1998

$$1 / (e^{-1.165789 \tan[0.628319]} \tan[\pi / 4 - 0.628319 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.165789])$$

80.0676

$$1 / (e^{-1.18055 \tan[0.715585]} \tan[\pi / 4 - 0.715585 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.18055])$$

115.641

$$1 / (e^{-1.189393 \tan[0.802851]} \tan[\pi / 4 - 0.802851 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.189393])$$

459.839

$$1 / (e^{-1.20333 \tan[0.890118]} \tan[\pi / 4 - 0.890118 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.20333])$$

296.457

$$1 / (e^{-1.213235 \tan[0.977384]} \tan[\pi / 4 - 0.977384 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.213235])$$

300.905

$$1 / (e^{-1.218421 \tan[1.064651]} \tan[\pi / 4 - 1.064651 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.218421])$$

885.622

$$1 / (e^{-1.223684 \tan[1.151917]} \tan[\pi / 4 - 1.151917 / 2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.223684])$$

768.24

$$1 / (e^{-1.22583 \operatorname{Tan}[1.239184]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.239184 / 2] \operatorname{Cos}[1.22697] - \operatorname{Sin}[1.22697 - 1.22583])$$

2154.64

$$1 / (e^{-1.226351 \operatorname{Tan}[1.32645]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.32645 / 2] \operatorname{Cos}[1.22697] - \operatorname{Sin}[1.22697 - 1.226351])$$

-3159.82

$$1 / (e^{-1.22667 \operatorname{Tan}[1.413717]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.413717 / 2] \operatorname{Cos}[1.22697] - \operatorname{Sin}[1.22697 - 1.22667])$$

-3466.03

$$1 / (e^{-1.227272 \operatorname{Tan}[1.500983]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.500983 / 2] \operatorname{Cos}[1.22697] - \operatorname{Sin}[1.22697 - 1.227272])$$

3311.26

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 70.3^\circ$

Υπολογισμός του λόγου F/ct .

$$4.73219 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.017453] \{e^{2 \cdot 1.113158 \cdot \text{Tan}[0.017453]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.017453/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.017453/2] e^{-1.113158 \cdot \text{Tan}[0.017453]}$$

{37.666}

$$6.27255 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.10472] \{e^{2 \cdot 1.11625 \cdot \text{Tan}[0.10472]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.10472/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.10472/2] e^{-1.11625 \cdot \text{Tan}[0.10472]}$$

{50.3583}

$$8.43663 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.191986] \{e^{2 \cdot 1.121875 \cdot \text{Tan}[0.191986]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.191986/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.191986/2] e^{-1.121875 \cdot \text{Tan}[0.191986]}$$

{69.129}

$$11.5081 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.279253] \{e^{2 \cdot 1.13 \cdot \text{Tan}[0.279253]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.279253/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.279253/2] e^{-1.13 \cdot \text{Tan}[0.279253]}$$

{97.4751}

$$17.4389 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.366519] \{e^{2 \cdot 1.134286 \cdot \text{Tan}[0.366519]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.366519/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.366519/2] e^{-1.134286 \cdot \text{Tan}[0.366519]}$$

{154.334}

$$25.889 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.453786] \{e^{2 \cdot 1.145 \cdot \text{Tan}[0.453786]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.453786/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.453786/2] e^{-1.145 \cdot \text{Tan}[0.453786]}$$

{243.856}

$$36.1998 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.541052] \{e^{2 \cdot 1.159524 \cdot \text{Tan}[0.541052]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.541052/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.541052/2] e^{-1.159524 \cdot \text{Tan}[0.541052]}$$

{370.468}

$$80.0676 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.628319] \{e^{2 \cdot 1.165789 \cdot \text{Tan}[0.628319]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.628319/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.628319/2] e^{-1.165789 \cdot \text{Tan}[0.628319]}$$

{904.65}

$$115.516 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.715585] \{e^{2 \cdot 1.18055 \cdot \text{Tan}[0.715585]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.715585/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.715585/2] e^{-1.18055 \cdot \text{Tan}[0.715585]}$$

{1491.29}

$$459.515 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.802851] \{e^{2 \cdot 1.189393 \cdot \text{Tan}[0.802851]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.802851/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.802851/2] e^{-1.189393 \cdot \text{Tan}[0.802851]}$$

{6988.52}

$$296.457 \cdot 2 \cdot \text{Cot}[0.890118] \{e^{2 \cdot 1.20333 \cdot \text{Tan}[0.890118]} (\text{Tan}[\pi/4 + 0.890118/2])^2 - 1\} \\ \text{Sin}[1.22697] \text{Tan}[\pi/4 - 0.890118/2] e^{-1.20333 \cdot \text{Tan}[0.890118]}$$

{5605.04}

$$300.9052 \cot[0.977384] \{e^{2 \cdot 1.213235 \tan[0.977384]} (\tan[\pi/4 + 0.977384/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 0.977384/2] e^{-1.213235 \tan[0.977384]}$$

{7532.94}

$$885.5892 \cot[1.064651] \{e^{2 \cdot 1.218421 \tan[1.064651]} (\tan[\pi/4 + 1.064651/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.064651/2] e^{-1.218421 \tan[1.064651]}$$

{32168.}

$$768.242 \cot[1.151917] \{e^{2 \cdot 1.223684 \tan[1.151917]} (\tan[\pi/4 + 1.151917/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.151917/2] e^{-1.223684 \tan[1.151917]}$$

{47314.4}

$$2154.642 \cot[1.239184] \{e^{2 \cdot 1.22583 \tan[1.239184]} (\tan[\pi/4 + 1.239184/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.239184/2] e^{-1.22583 \tan[1.239184]}$$

{293553.}

$$-3159.822 \cot[1.32645] \{e^{2 \cdot 1.226351 \tan[1.32645]} (\tan[\pi/4 + 1.32645/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.32645/2] e^{-1.226351 \tan[1.32645]}$$

$\{-1.65294 \times 10^6\}$

$$-3466.032 \cot[1.413717] \{e^{2 \cdot 1.22667 \tan[1.413717]} (\tan[\pi/4 + 1.413717/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.413717/2] e^{-1.22667 \tan[1.413717]}$$

$\{-3.03366 \times 10^7\}$

$$3311.262 \cot[1.500983] \{e^{2 \cdot 1.227272 \tan[1.500983]} (\tan[\pi/4 + 1.500983/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.22697] \tan[\pi/4 - 1.500983/2] e^{-1.227272 \tan[1.500983]}$$

$\{5.23109 \times 10^{11}\}$

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 70.3^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L \cos(\beta - \alpha)}{t}$.

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.113158]}{e^{-1.113158 \tan[0.017453]} \tan[\pi/4 - 0.017453/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.113158]}$$

4.70157

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.11625]}{e^{-1.11625 \tan[0.10472]} \tan[\pi/4 - 0.10472/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.11625]}$$

6.23414

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.121875]}{e^{-1.121875 \tan[0.191986]} \tan[\pi/4 - 0.191986/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.121875]}$$

8.39008

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.13]}{e^{-1.13 \tan[0.279253]} \tan[\pi/4 - 0.279253/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.13]}$$

11.454

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.134286]}{e^{-1.134286 \tan[0.366519]} \tan[\pi/4 - 0.366519/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.134286]}$$

17.364

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.145]}{e^{-1.145 \tan[0.453786]} \tan[\pi/4 - 0.453786/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.145]}$$

25.8021

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.159524]}{e^{-1.159524 \tan[0.541052]} \tan[\pi/4 - 0.541052/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.159524]}$$

36.1174

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.165789]}{e^{-1.165789 \tan[0.628319]} \tan[\pi/4 - 0.628319/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.165789]}$$

79.9178

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.18055]}{e^{-1.18055 \tan[0.715585]} \tan[\pi/4 - 0.715585/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.18055]}$$

115.516

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.189393]}{e^{-1.189393 \tan[0.802851]} \tan[\pi/4 - 0.802851/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.189393]}$$

459.515

$$\frac{\cos[1.22697 - 1.20333]}{e^{-1.20333 \tan[0.890118]} \tan[\pi/4 - 0.890118/2] \cos[1.22697] - \sin[1.22697 - 1.20333]}$$

296.374

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.213235]}{e^{-1.213235 \text{Tan}[0.977384]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.977384/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.213235]}$$

300.876

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.218421]}{e^{-1.218421 \text{Tan}[1.064651]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.064651/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.218421]}$$

885.589

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.223684]}{e^{-1.223684 \text{Tan}[1.151917]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.151917/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.223684]}$$

768.236

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.22583]}{e^{-1.22583 \text{Tan}[1.239184]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.239184/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.22583]}$$

2154.64

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.226351]}{e^{-1.226351 \text{Tan}[1.32645]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.32645/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.226351]}$$

-3159.82

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.22667]}{e^{-1.22667 \text{Tan}[1.413717]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.413717/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.22667]}$$

-3466.03

$$\frac{\text{Cos}[1.22697 - 1.227272]}{e^{-1.227272 \text{Tan}[1.500983]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.500983/2] \text{Cos}[1.22697] - \text{Sin}[1.22697 - 1.227272]}$$

3311.26

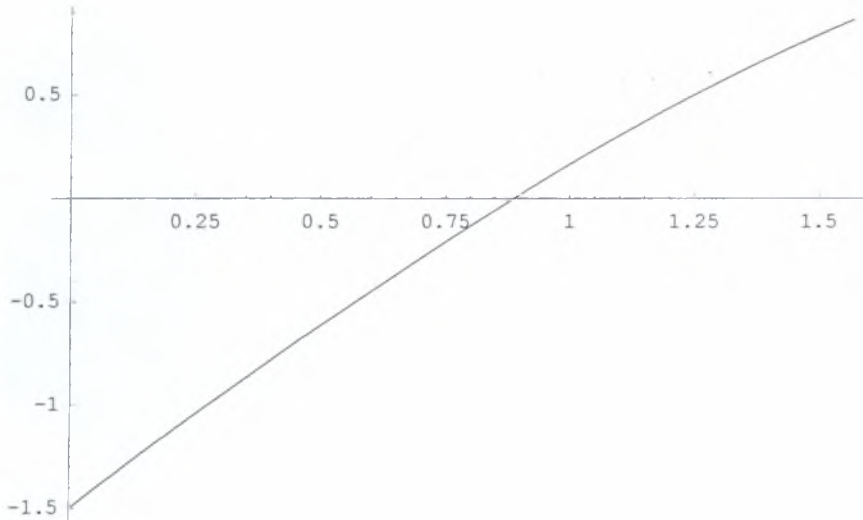
ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 60^\circ$

Αντιστοίχιση των τιμών της γωνίας α για κάθε τιμή της γωνίας φ από 1 έως 86 μοίρες.

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 1^\circ = 0.017453$ rads

Plot[Cos[2.094395 - α] -

$$\frac{\text{Cos}[\alpha] \{e^{\alpha \text{Tan}[0.017453]} \text{Tan}[\pi/4 + 0.017453/2] + e^{-\alpha \text{Tan}[0.017453]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.017453/2]\}}{2 \text{Sin}[\alpha] + e^{\alpha \text{Tan}[0.017453]} \text{Tan}[\pi/4 + 0.017453/2] + e^{-\alpha \text{Tan}[0.017453]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.017453/2]}, \{\alpha, 0, \pi/2\}]$$

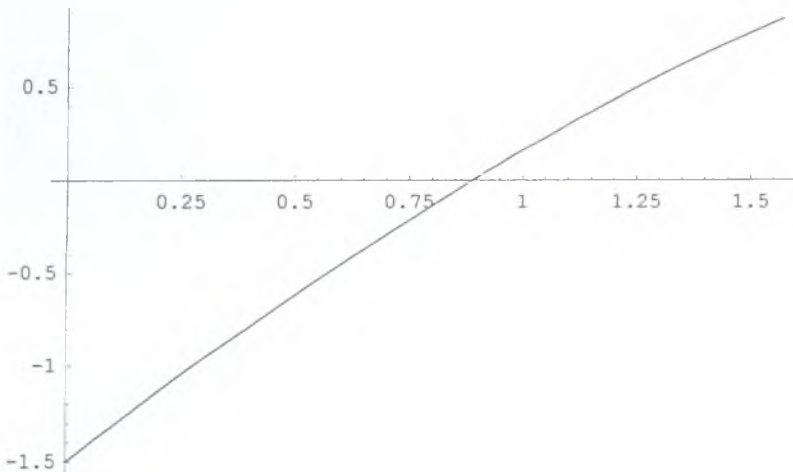


- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 6^\circ = 0.10472$ rads

Plot[Cos[2.094395 - α] -

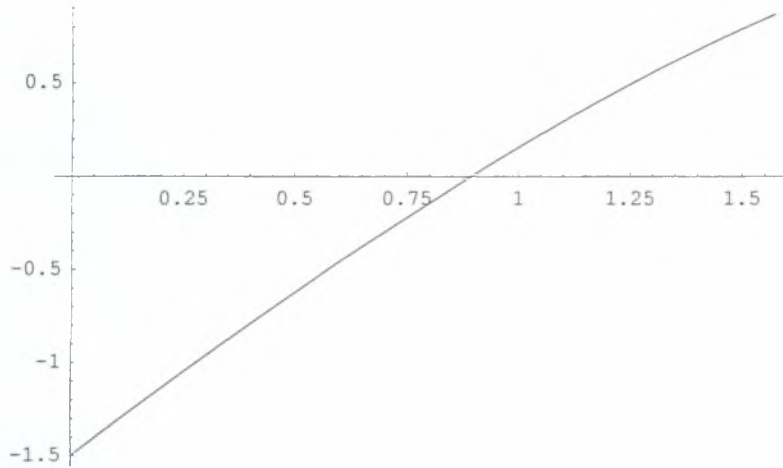
$$\frac{\text{Cos}[\alpha] \{e^{\alpha \text{Tan}[0.10472]} \text{Tan}[\pi/4 + 0.10472/2] + e^{-\alpha \text{Tan}[0.10472]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.10472/2]\}}{2 \text{Sin}[\alpha] + e^{\alpha \text{Tan}[0.10472]} \text{Tan}[\pi/4 + 0.10472/2] + e^{-\alpha \text{Tan}[0.10472]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.10472/2]}, \{\alpha, 0, \pi/2\}]$$



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 11^\circ = 0.191986$ rads

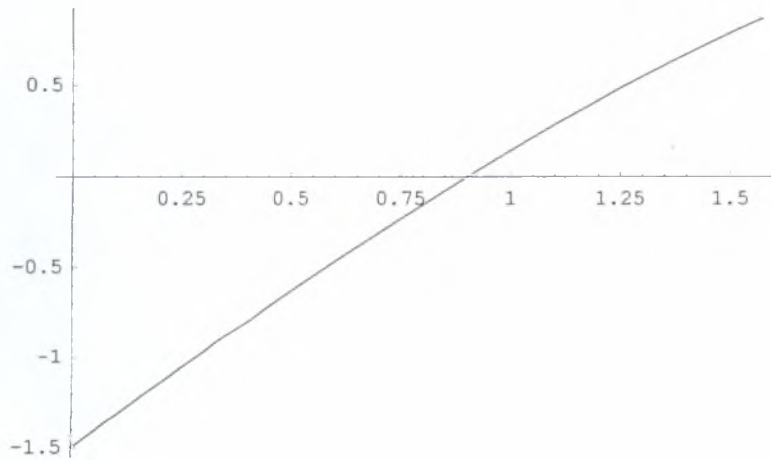
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.191986] Tan[π/4 + 0.191986/2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π/4 - 0.191986/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.191986] Tan[π/4 + 0.191986/2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π/4 - 0.191986/2])
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 16^\circ = 0.279253$ rads

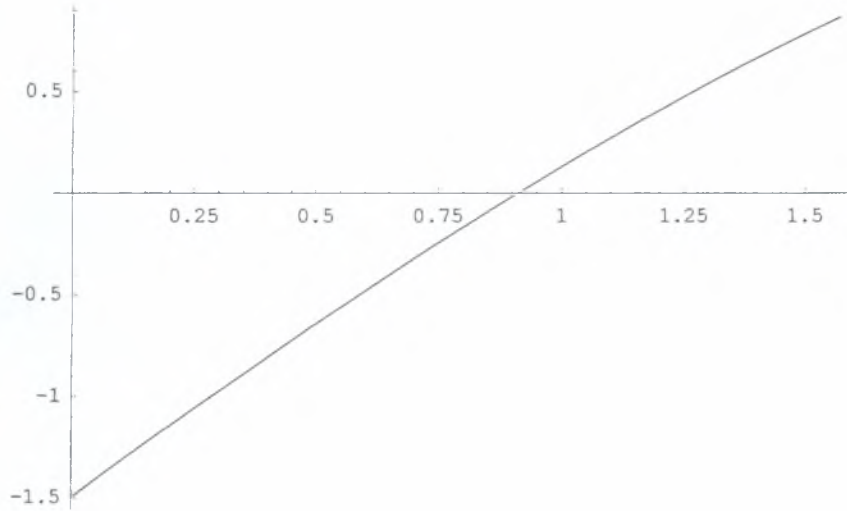
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.279253] Tan[π/4 + 0.279253/2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π/4 - 0.279253/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.279253] Tan[π/4 + 0.279253/2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π/4 - 0.279253/2])
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 21^\circ = 0.366519$ rads

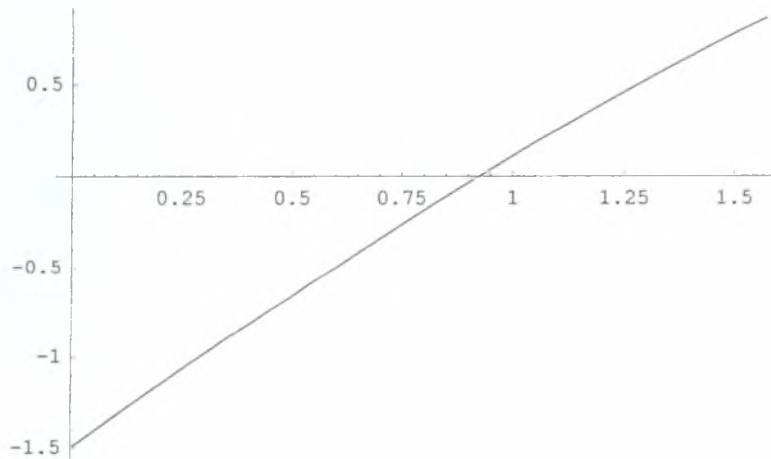
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.366519] Tan[π/4 + 0.366519/2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π/4 - 0.366519/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.366519] Tan[π/4 + 0.366519/2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π/4 - 0.366519/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 26^\circ = 0.453786$ rads

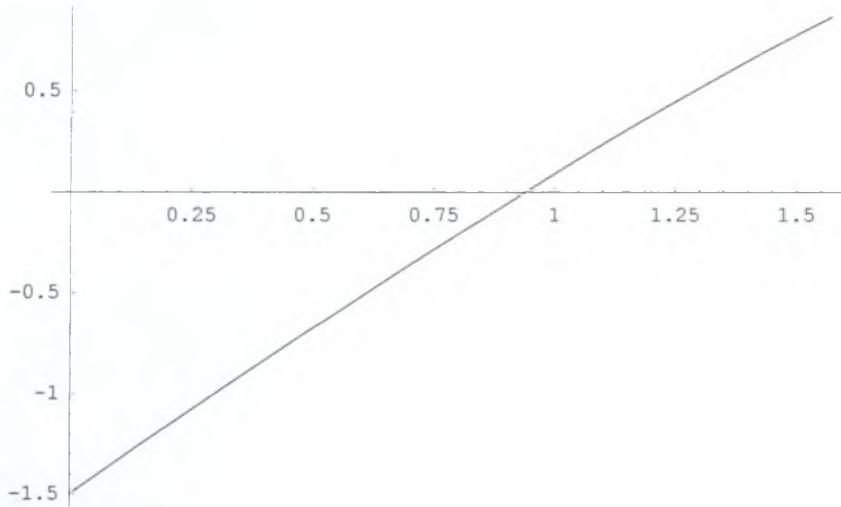
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.453786] Tan[π/4 + 0.453786/2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π/4 - 0.453786/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.453786] Tan[π/4 + 0.453786/2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π/4 - 0.453786/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 31^\circ = 0.541052$ rads

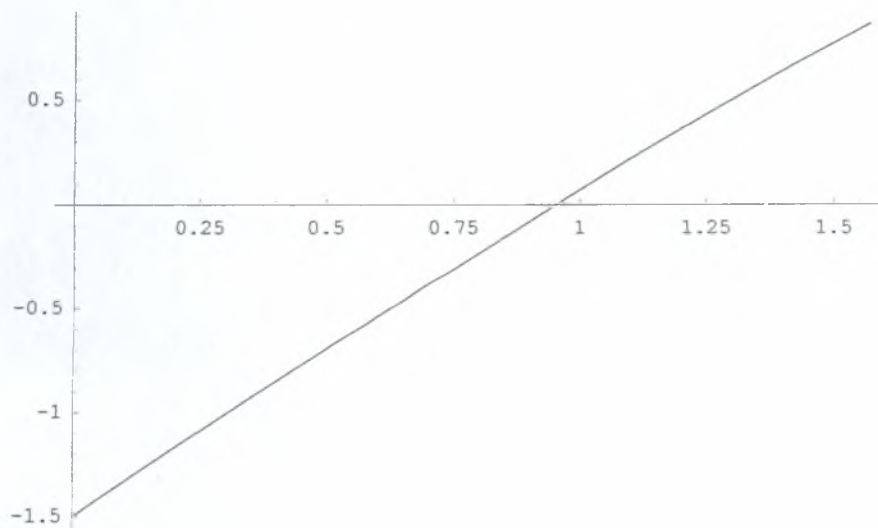
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.541052] Tan[π/4 + 0.541052/2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π/4 - 0.541052/2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.541052] Tan[π/4 + 0.541052/2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π/4 - 0.541052/2]
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 36^\circ = 0.628319$ rads

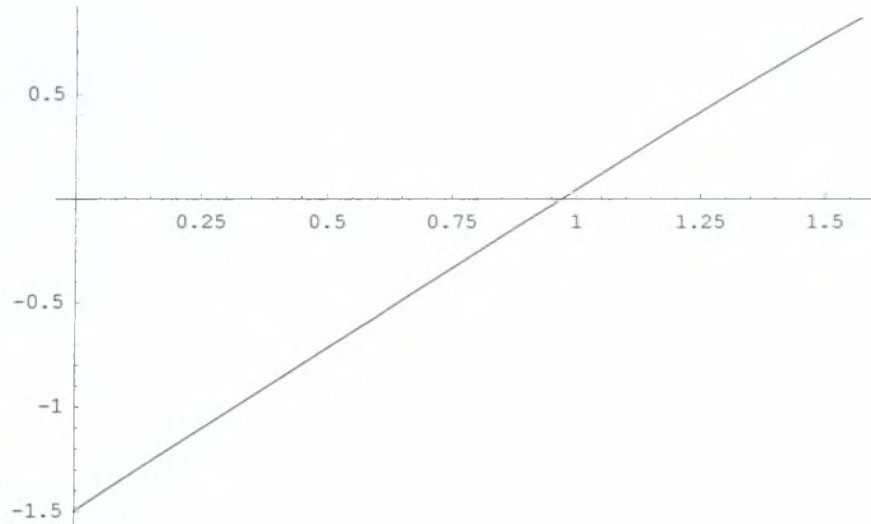
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.628319] Tan[π/4 + 0.628319/2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π/4 - 0.628319/2]}
      /
      2 Sin[α] + eα Tan[0.628319] Tan[π/4 + 0.628319/2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π/4 - 0.628319/2]
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 41^\circ = 0.715585$ rads

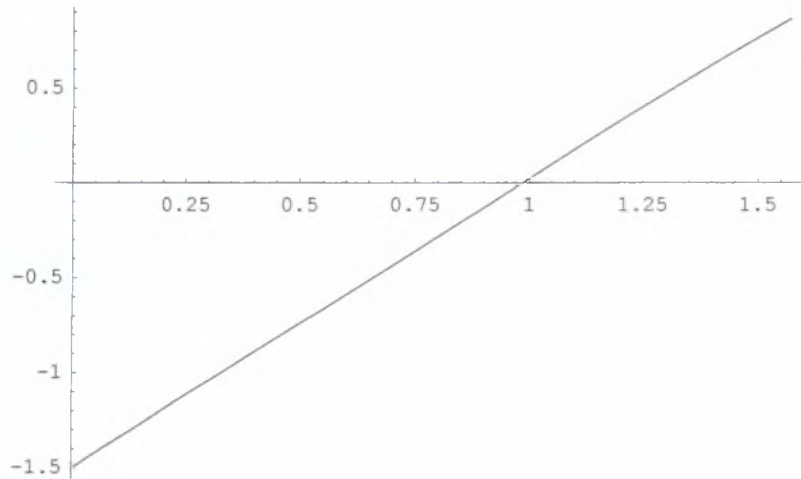
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.715585] Tan[π/4 + 0.715585/2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π/4 - 0.715585/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.715585] Tan[π/4 + 0.715585/2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π/4 - 0.715585/2])
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 46^\circ = 0.802851$ rads

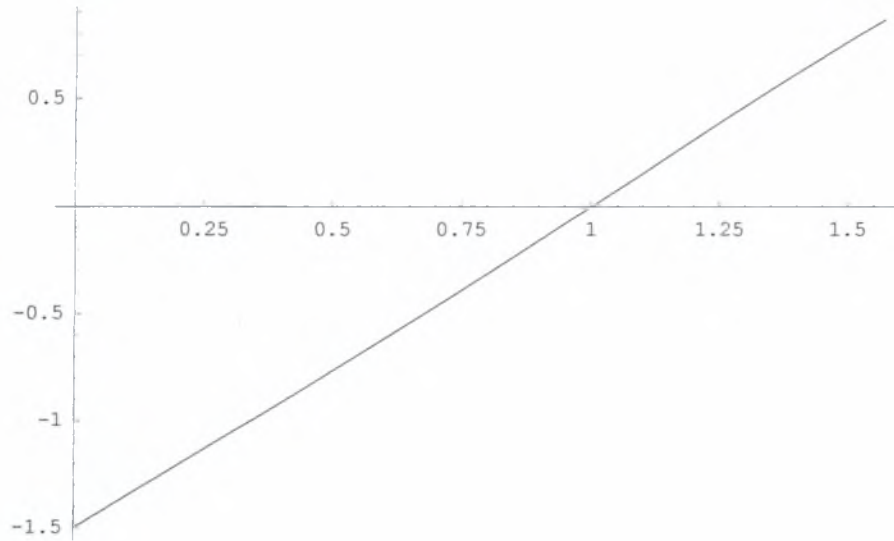

```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.802851] Tan[π/4 + 0.802851/2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π/4 - 0.802851/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.802851] Tan[π/4 + 0.802851/2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π/4 - 0.802851/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 51 ° = 0.890118 rads

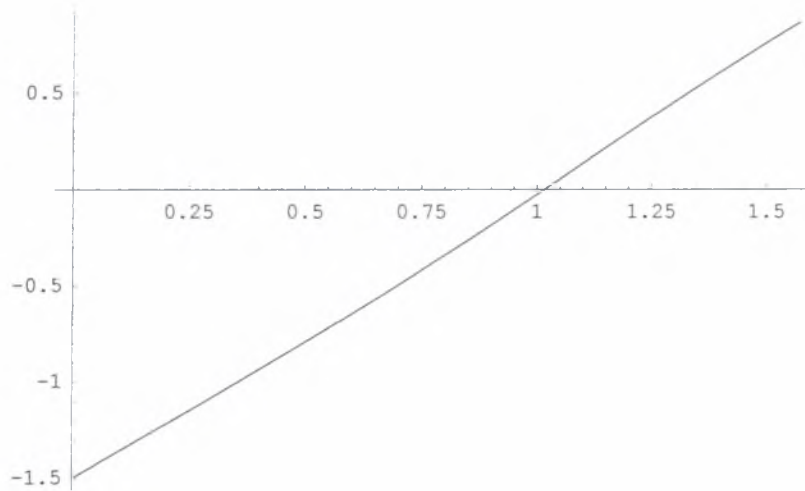
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.890118] Tan[π/4 + 0.890118/2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π/4 - 0.890118/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.890118] Tan[π/4 + 0.890118/2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π/4 - 0.890118/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 56^\circ = 0.977384$ rads

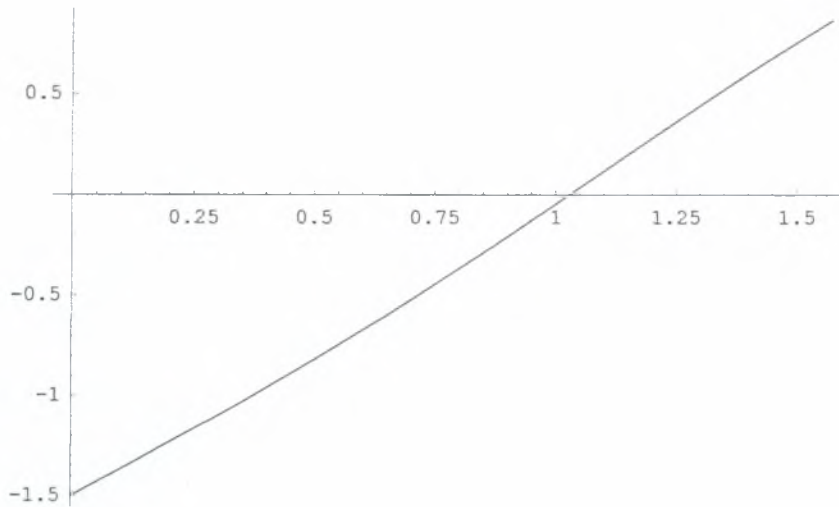
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.977384] Tan[π/4 + 0.977384/2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π/4 - 0.977384/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.977384] Tan[π/4 + 0.977384/2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π/4 - 0.977384/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 61 ° = 1.064651 rads

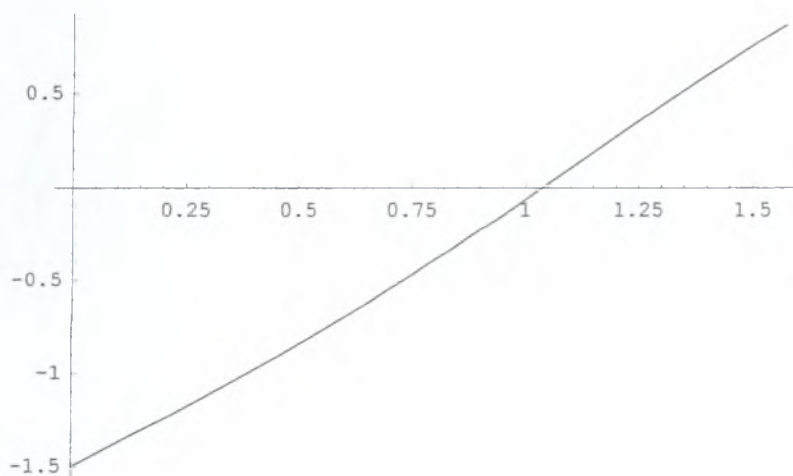
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.064651] Tan[π/4 + 1.064651/2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π/4 - 1.064651/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.064651] Tan[π/4 + 1.064651/2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π/4 - 1.064651/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 66^\circ = 1.151917$ rads

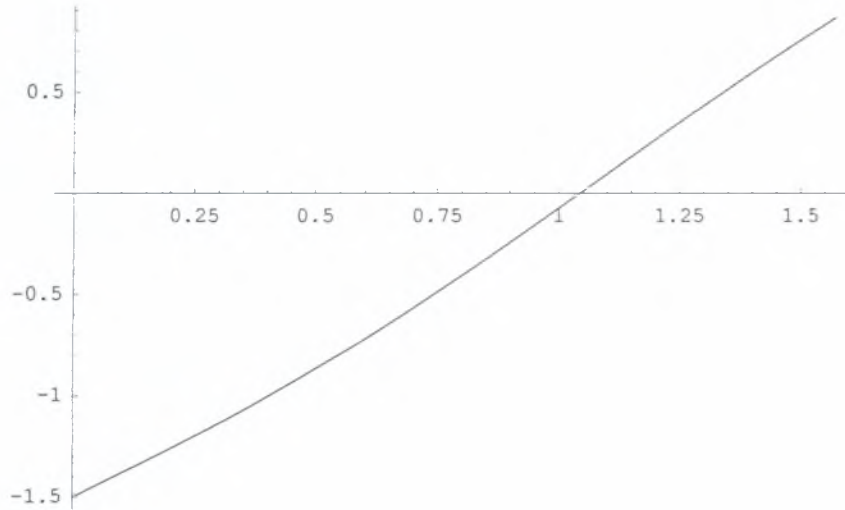
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.151917] Tan[π/4 + 1.151917/2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π/4 - 1.151917/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.151917] Tan[π/4 + 1.151917/2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π/4 - 1.151917/2]) ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 71^\circ = 1.239184$ rads

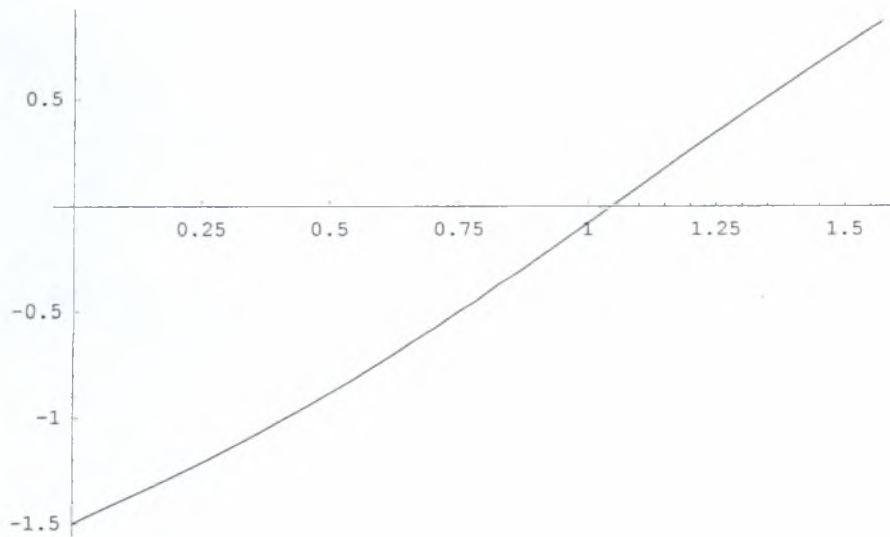
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]),
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 76^\circ = 1.32645$ rads

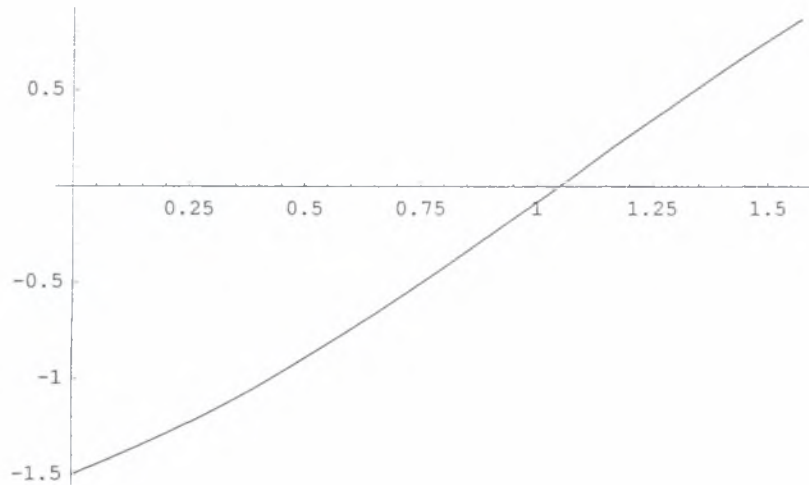
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]), {α,
      0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 81^\circ = 1.413717$ rads

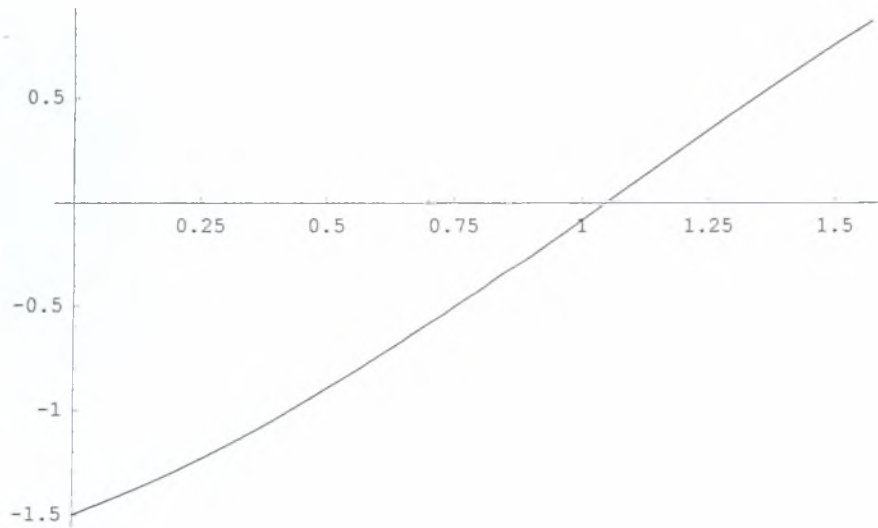
```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]}
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 86^\circ = 1.500983$ rads

```
Plot[Cos[2.094395 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]}
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 60^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L}{t}$.

$$1 / (e^{-1.3375 \text{Tan}[0.017453]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.017453 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3375])$$

1.30505

$$1 / (e^{-1.3408 \text{Tan}[0.10472]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.10472 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3408])$$

1.46967

$$1 / (e^{-1.342 \text{Tan}[0.191986]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.191986 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.342])$$

1.64452

$$1 / (e^{-1.346 \text{Tan}[0.279253]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.279253 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.346])$$

1.81651

$$1 / (e^{-1.351 \text{Tan}[0.366519]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.366519 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.351])$$

1.98516

$$1 / (e^{-1.3575 \text{Tan}[0.453786]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.453786 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3575])$$

2.14367

$$1 / (e^{-1.3625 \text{Tan}[0.541052]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.541052 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3625])$$

2.29958

$$1 / (e^{-1.3683 \text{Tan}[0.628319]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.628319 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3683])$$

2.4397

$$1 / (e^{-1.375 \text{Tan}[0.715585]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.715585 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.375])$$

2.55807

$$1 / (e^{-1.38125 \text{Tan}[0.802851]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.802851 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.38125])$$

2.65815

$$1 / (e^{-1.3851 \text{Tan}[0.890118]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.890118 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3851])$$

2.7509

$$1 / (e^{-1.389 \text{Tan}[0.977384]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.977384 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.389])$$

2.81942

$$1 / (e^{-1.3928 \text{Tan}[1.064651]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.064651 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3928])$$

2.86333

$$1 / (e^{-1.3942 \text{Tan}[1.151917]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.151917 / 2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3942])$$

2.90091

$$\frac{1}{e^{-1.3947 \tan[1.239184]} \tan[\pi/4 - 1.239184/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3947]}$$

2.92392

$$\frac{1}{e^{-1.3955 \tan[1.32645]} \tan[\pi/4 - 1.32645/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3955]}$$

2.928

$$\frac{1}{e^{-1.3962 \tan[1.413717]} \tan[\pi/4 - 1.413717/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3962]}$$

2.92427

$$\frac{1}{e^{-1.3978 \tan[1.500983]} \tan[\pi/4 - 1.500983/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3978]}$$

2.91152

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 60^\circ$

Υπολογισμός του λόγου F / ct .

$$1.305052 \cot[0.017453] \{e^{2 \cdot 1.3375 \tan[0.017453]} (\tan[\pi/4 + 0.017453/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.017453/2] e^{-1.3375 \tan[0.017453]}$$

{10.5701}

$$1.469672 \cot[0.10472] \{e^{2 \cdot 1.3408 \tan[0.10472]} (\tan[\pi/4 + 0.10472/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.10472/2] e^{-1.3408 \tan[0.10472]}$$

{12.0282}

$$1.644522 \cot[0.191986] \{e^{2 \cdot 1.342 \tan[0.191986]} (\tan[\pi/4 + 0.191986/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.191986/2] e^{-1.342 \tan[0.191986]}$$

{13.7685}

$$1.816512 \cot[0.279253] \{e^{2 \cdot 1.346 \tan[0.279253]} (\tan[\pi/4 + 0.279253/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.279253/2] e^{-1.346 \tan[0.279253]}$$

{15.7986}

$$1.985162 \cot[0.366519] \{e^{2 \cdot 1.351 \tan[0.366519]} (\tan[\pi/4 + 0.366519/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.366519/2] e^{-1.351 \tan[0.366519]}$$

{18.2261}

$$2.143672 \cot[0.453786] \{e^{2 \cdot 1.3575 \tan[0.453786]} (\tan[\pi/4 + 0.453786/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.453786/2] e^{-1.3575 \tan[0.453786]}$$

{21.1672}

$$2.299582 \cot[0.541052] \{e^{2 \cdot 1.3625 \tan[0.541052]} (\tan[\pi/4 + 0.541052/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.541052/2] e^{-1.3625 \tan[0.541052]}$$

{24.9128}

$$2.43972 \cot[0.628319] \{e^{2 \cdot 1.3683 \tan[0.628319]} (\tan[\pi/4 + 0.628319/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.628319/2] e^{-1.3683 \tan[0.628319]}$$

{29.7505}

$$2.558072 \cot[0.715585] \{e^{2 \cdot 1.375 \tan[0.715585]} (\tan[\pi/4 + 0.715585/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.715585/2] e^{-1.375 \tan[0.715585]}$$

{36.2548}

$$2.658152 \cot[0.802851] \{e^{2 \cdot 1.38125 \tan[0.802851]} (\tan[\pi/4 + 0.802851/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.802851/2] e^{-1.38125 \tan[0.802851]}$$

{45.5695}

$$2.75092 \cot[0.890118] \{e^{2 \cdot 1.3851 \tan[0.890118]} (\tan[\pi/4 + 0.890118/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.890118/2] e^{-1.3851 \tan[0.890118]}$$

{60.0225}

$$2.819422 \cot[0.977384] \{e^{2 \cdot 1.389 \tan[0.977384]} (\tan[\pi/4 + 0.977384/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 0.977384/2] e^{-1.389 \tan[0.977384]}$$

{84.3413}

$$2.863332 \cot[1.064651] \{e^{2 \cdot 1.3928 \tan[1.064651]} (\tan[\pi/4 + 1.064651/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.064651/2] e^{-1.3928 \tan[1.064651]}$$

{131.092}

$$2.900912 \cot[1.151917] \{e^{2 \cdot 1.3942 \tan[1.151917]} (\tan[\pi/4 + 1.151917/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.151917/2] e^{-1.3942 \tan[1.151917]}$$

{241.06}

$$2.923922 \cot[1.239184] \{e^{2 \cdot 1.3947 \tan[1.239184]} (\tan[\pi/4 + 1.239184/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.239184/2] e^{-1.3947 \tan[1.239184]}$$

{598.412}

$$2.9282 \cot[1.32645] \{e^{2 \cdot 1.3955 \tan[1.32645]} (\tan[\pi/4 + 1.32645/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.32645/2] e^{-1.3955 \tan[1.32645]}$$

{2776.66}

$$2.924272 \cot[1.413717] \{e^{2 \cdot 1.3962 \tan[1.413717]} (\tan[\pi/4 + 1.413717/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.413717/2] e^{-1.3962 \tan[1.413717]}$$

{68664.6}

$$2.911522 \cot[1.500983] \{e^{2 \cdot 1.3978 \tan[1.500983]} (\tan[\pi/4 + 1.500983/2])^2 - 1\} \\ \sin[1.047198] \tan[\pi/4 - 1.500983/2] e^{-1.3978 \tan[1.500983]}$$

{4.84772 × 10⁹}

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 60^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L \cos(\beta - \alpha)}{t}$.

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3375]}{(e^{-1.3375 \tan[0.017453]} \tan[\pi/4 - 0.017453/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3375])}$$

1.25045

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3408]}{(e^{-1.3408 \tan[0.10472]} \tan[\pi/4 - 0.10472/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3408])}$$

1.40678

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.342]}{(e^{-1.342 \tan[0.191986]} \tan[\pi/4 - 0.191986/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.342])}$$

1.57357

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.346]}{(e^{-1.346 \tan[0.279253]} \tan[\pi/4 - 0.279253/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.346])}$$

1.73602

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.351]}{(e^{-1.351 \tan[0.366519]} \tan[\pi/4 - 0.366519/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.351])}$$

1.89425

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3575]}{(e^{-1.3575 \tan[0.453786]} \tan[\pi/4 - 0.453786/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3575])}$$

2.04129

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3625]}{(e^{-1.3625 \tan[0.541052]} \tan[\pi/4 - 0.541052/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3625])}$$

2.18622

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3683]}{(e^{-1.3683 \tan[0.628319]} \tan[\pi/4 - 0.628319/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3683])}$$

2.315

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.375]}{(e^{-1.375 \tan[0.715585]} \tan[\pi/4 - 0.715585/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.375])}$$

2.42186

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.38125]}{(e^{-1.38125 \tan[0.802851]} \tan[\pi/4 - 0.802851/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.38125])}$$

2.51121

$$\frac{\cos[1.047198 - 1.3851]}{(e^{-1.3851 \tan[0.890118]} \tan[\pi/4 - 0.890118/2] \cos[1.047198] - \sin[1.047198 - 1.3851])}$$

2.59534

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.389]}{e^{-1.389 \text{Tan}[0.977384]} \text{Tan}[\pi/4 - 0.977384/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.389]}$$

2.65632

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3928]}{(e^{-1.3928 \text{Tan}[1.064651]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.064651/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3928])}$$

2.69403

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3942]}{(e^{-1.3942 \text{Tan}[1.151917]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.151917/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3942])}$$

2.728

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3947]}{(e^{-1.3947 \text{Tan}[1.239184]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.239184/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3947])}$$

2.74914

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3955]}{(e^{-1.3955 \text{Tan}[1.32645]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.32645/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3955])}$$

2.75218

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3962]}{(e^{-1.3962 \text{Tan}[1.413717]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.413717/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3962])}$$

2.74798

$$\frac{\text{Cos}[1.047198 - 1.3978]}{(e^{-1.3978 \text{Tan}[1.500983]} \text{Tan}[\pi/4 - 1.500983/2] \text{Cos}[1.047198] - \text{Sin}[1.047198 - 1.3978])}$$

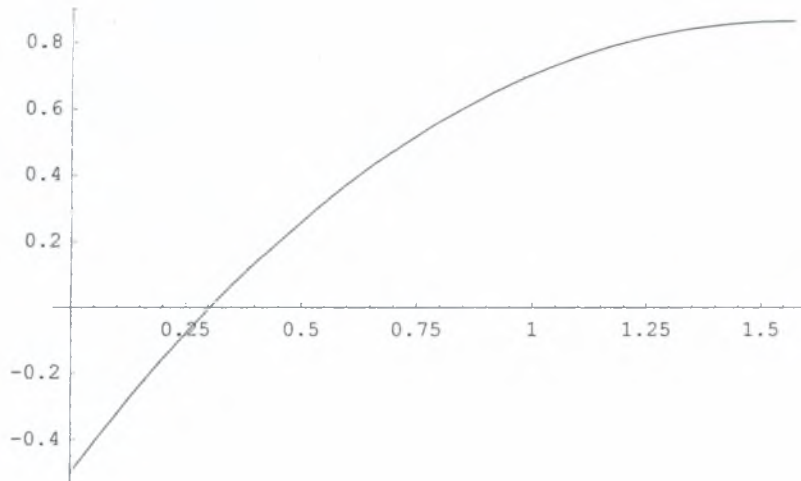
2.7344

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 30^\circ$

Αντιστοίχιση των τιμών της γωνίας α για κάθε τιμή της γωνίας φ από 1 έως 86 μοίρες.

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 1^\circ = 0.017453$ rads

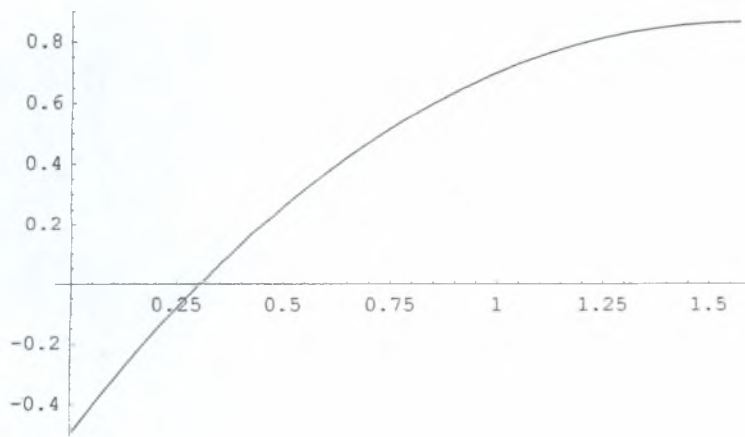
```
Plot[Cos[1.047198 -  $\alpha$ ] -
      Cos[ $\alpha$ ] {e $\alpha$  Tan[0.017453] Tan[ $\pi/4 + 0.017453/2$ ] + e- $\alpha$  Tan[0.017453] Tan[ $\pi/4 - 0.017453/2$ ]}
      / (2 Sin[ $\alpha$ ] + e $\alpha$  Tan[0.017453] Tan[ $\pi/4 + 0.017453/2$ ] + e- $\alpha$  Tan[0.017453] Tan[ $\pi/4 - 0.017453/2$ ]}
      , { $\alpha$ , 0,  $\pi/2$ }]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 6^\circ = 0.10472$ rads

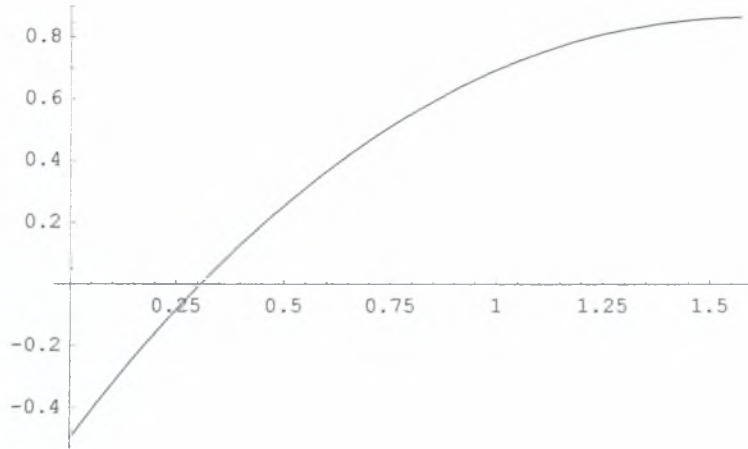
```
Plot[Cos[1.047198 -  $\alpha$ ] -
      Cos[ $\alpha$ ] {e $\alpha$  Tan[0.10472] Tan[ $\pi/4 + 0.10472/2$ ] + e- $\alpha$  Tan[0.10472] Tan[ $\pi/4 - 0.10472/2$ ]}
      / (2 Sin[ $\alpha$ ] + e $\alpha$  Tan[0.10472] Tan[ $\pi/4 + 0.10472/2$ ] + e- $\alpha$  Tan[0.10472] Tan[ $\pi/4 - 0.10472/2$ ]}
      , { $\alpha$ ,
      0,  $\pi/2$ }]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 11^\circ = 0.191986$ rads

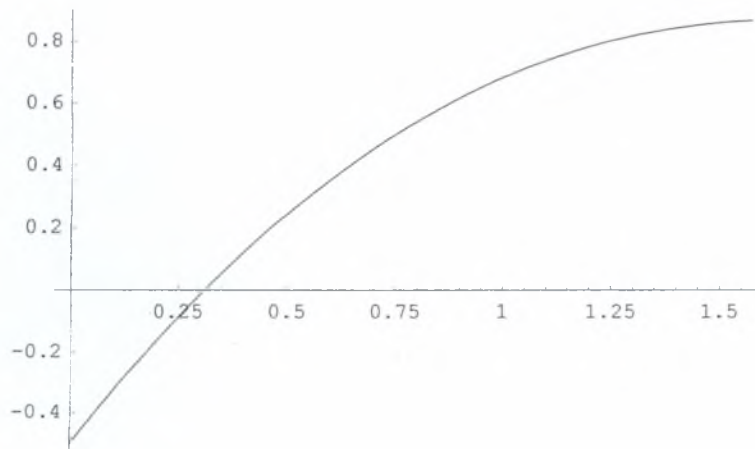
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.191986] Tan[π / 4 + 0.191986 / 2] + e-α Tan[0.191986] Tan[π / 4 - 0.191986 / 2])
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 16^\circ = 0.279253$ rads

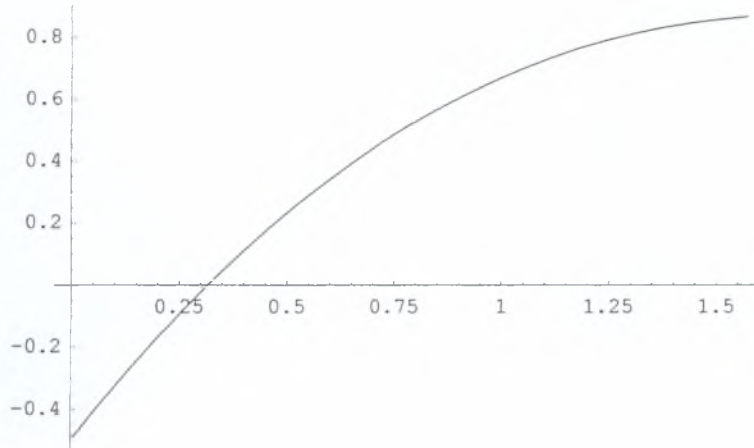
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.279253] Tan[π / 4 + 0.279253 / 2] + e-α Tan[0.279253] Tan[π / 4 - 0.279253 / 2])
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 21^\circ = 0.366519$ rads

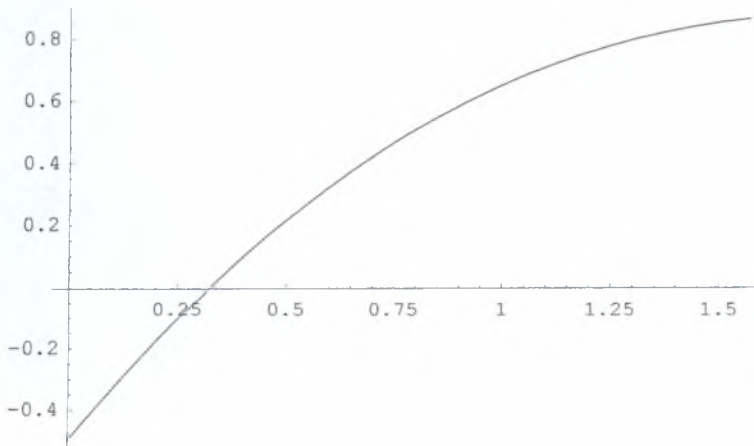
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.366519] Tan[π/4 + 0.366519/2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π/4 - 0.366519/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.366519] Tan[π/4 + 0.366519/2] + e-α Tan[0.366519] Tan[π/4 - 0.366519/2]}
      , {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 26^\circ = 0.453786$ rads

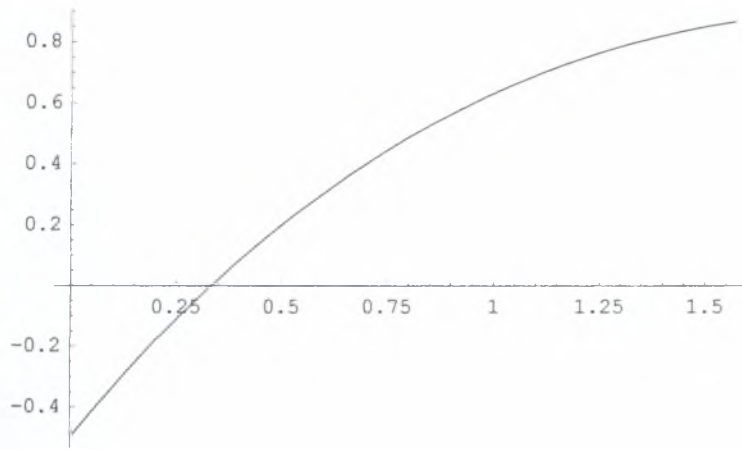
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.453786] Tan[π/4 + 0.453786/2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π/4 - 0.453786/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.453786] Tan[π/4 + 0.453786/2] + e-α Tan[0.453786] Tan[π/4 - 0.453786/2]}
      , {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 31^\circ = 0.541052$ rads

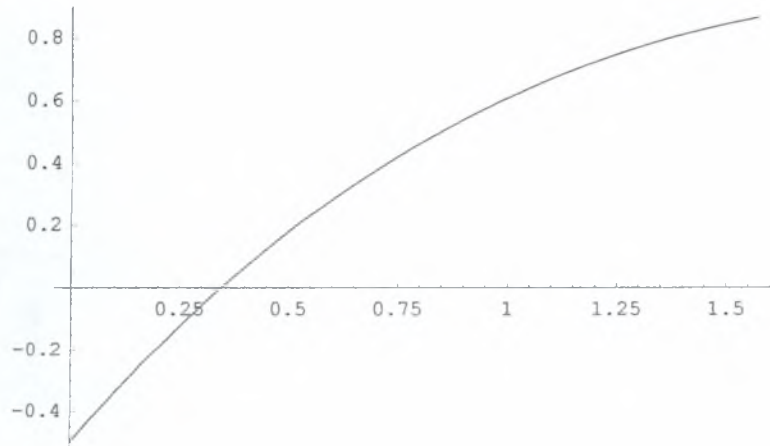
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.541052] Tan[π/4 + 0.541052/2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π/4 - 0.541052/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.541052] Tan[π/4 + 0.541052/2] + e-α Tan[0.541052] Tan[π/4 - 0.541052/2]}
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 36^\circ = 0.628319$ rads

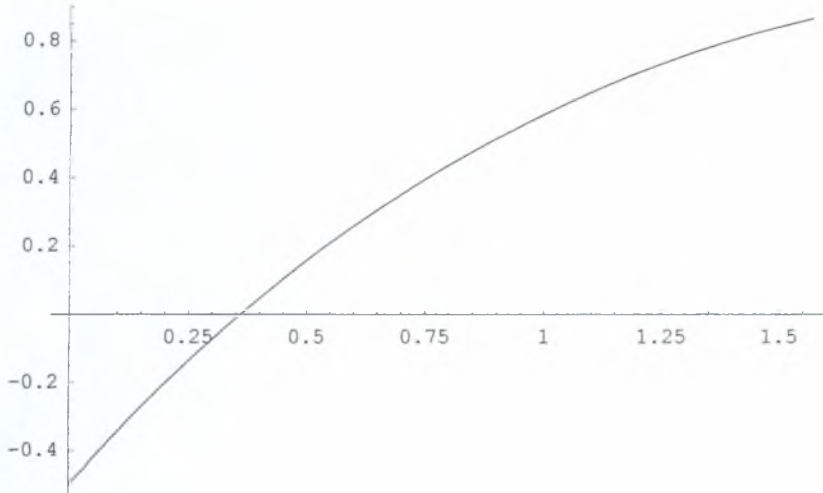
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.628319] Tan[π/4 + 0.628319/2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π/4 - 0.628319/2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.628319] Tan[π/4 + 0.628319/2] + e-α Tan[0.628319] Tan[π/4 - 0.628319/2]}
      ,
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 41^\circ = 0.715585$ rads

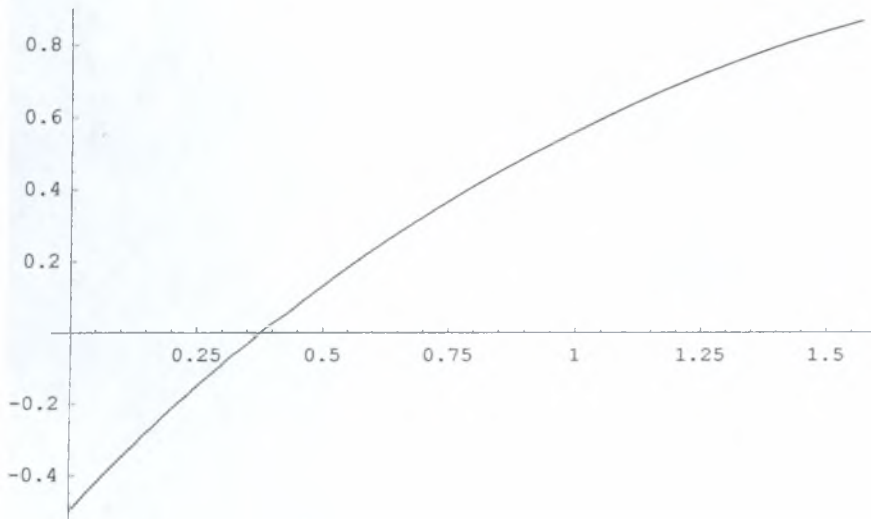

```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.715585] Tan[π / 4 + 0.715585 / 2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π / 4 - 0.715585 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.715585] Tan[π / 4 + 0.715585 / 2] + e-α Tan[0.715585] Tan[π / 4 - 0.715585 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 46^\circ = 0.802851$ rads

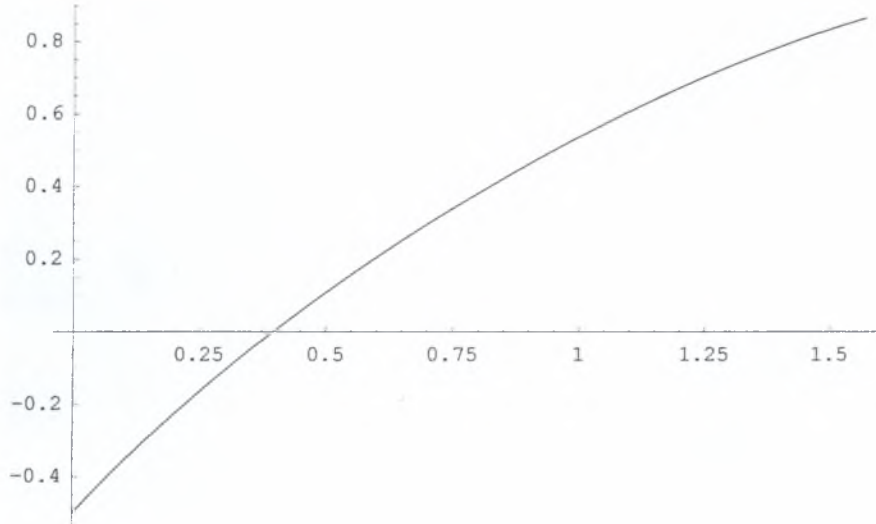
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.802851] Tan[π / 4 + 0.802851 / 2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π / 4 - 0.802851 / 2]}
      /
      {2 Sin[α] + eα Tan[0.802851] Tan[π / 4 + 0.802851 / 2] + e-α Tan[0.802851] Tan[π / 4 - 0.802851 / 2]}
      ,
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 51^\circ = 0.890118$ rads

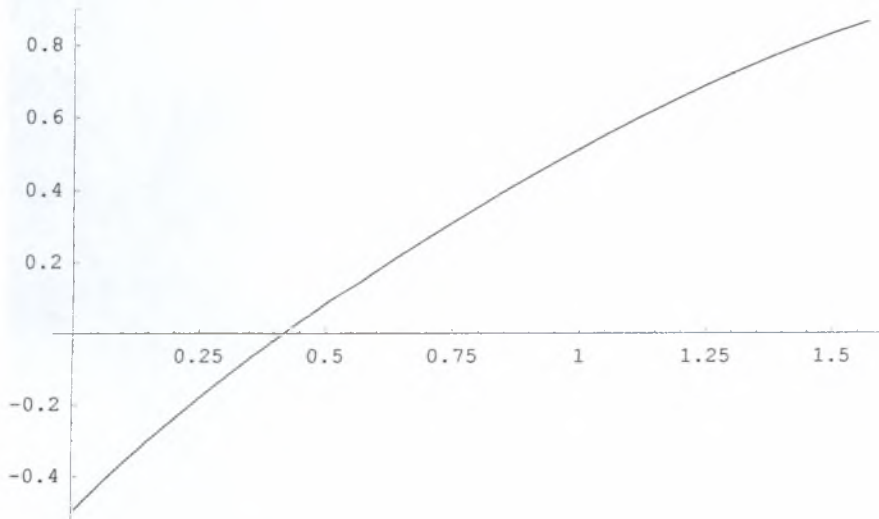
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.890118] Tan[π/4 + 0.890118/2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π/4 - 0.890118/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.890118] Tan[π/4 + 0.890118/2] + e-α Tan[0.890118] Tan[π/4 - 0.890118/2])
      , {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 56^\circ = 0.977384$ rads

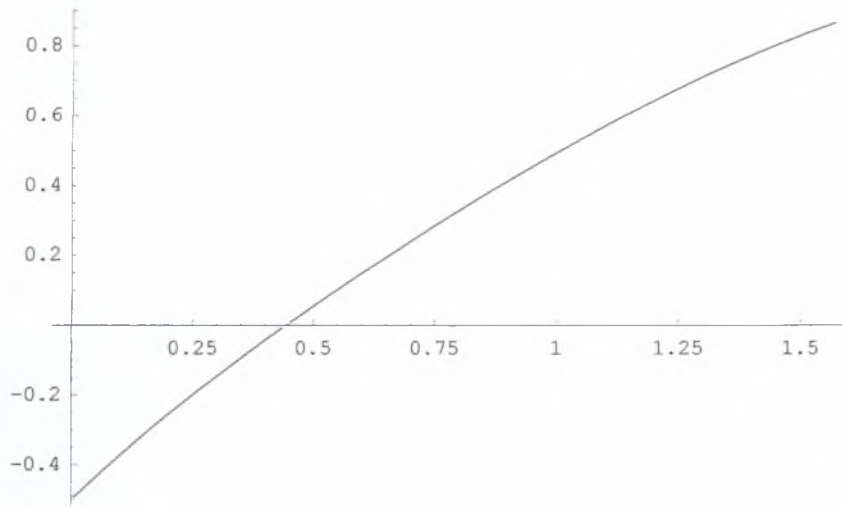
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[0.977384] Tan[π/4 + 0.977384/2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π/4 - 0.977384/2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[0.977384] Tan[π/4 + 0.977384/2] + e-α Tan[0.977384] Tan[π/4 - 0.977384/2])
      , {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 61^\circ = 1.064651$ rads

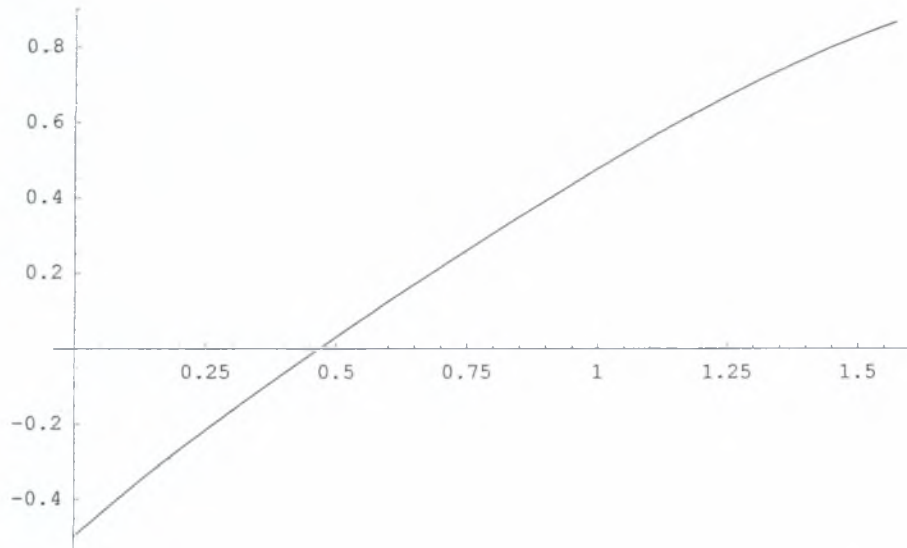
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.064651] Tan[π / 4 + 1.064651 / 2] + e-α Tan[1.064651] Tan[π / 4 - 1.064651 / 2]),
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 66^\circ = 1.151917$ rads

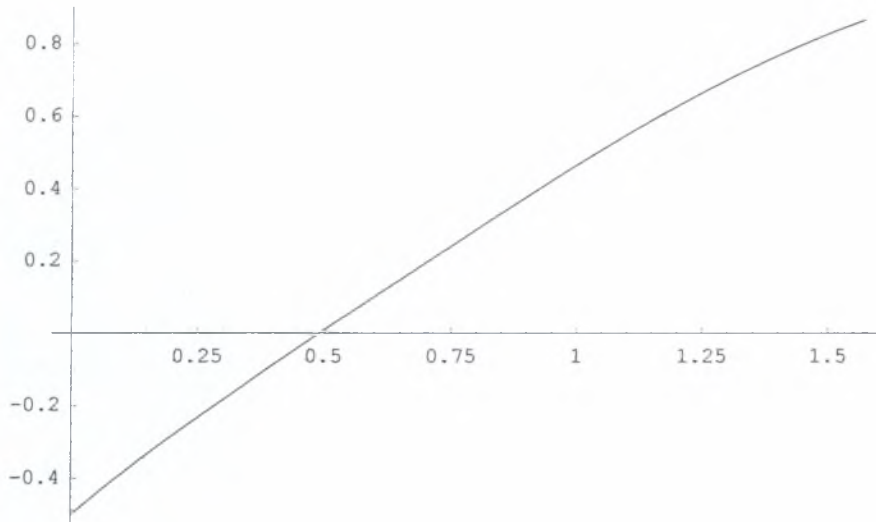
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.151917] Tan[π/4 + 1.151917/2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π/4 - 1.151917/2]}
      /
      (2 Sin[α] + eα Tan[1.151917] Tan[π/4 + 1.151917/2] + e-α Tan[1.151917] Tan[π/4 - 1.151917/2])
      , {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 71^\circ = 1.239184$ rads

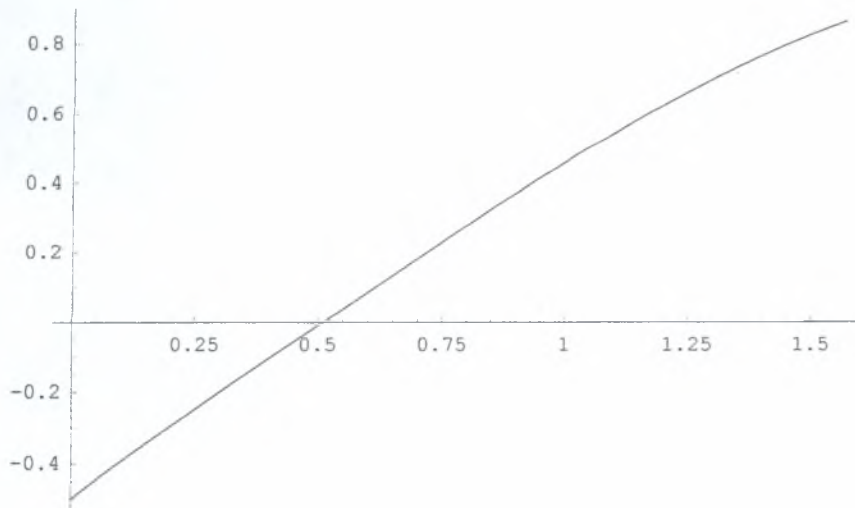
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.239184] Tan[π / 4 + 1.239184 / 2] + e-α Tan[1.239184] Tan[π / 4 - 1.239184 / 2]),
      {α, 0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 76^\circ = 1.32645$ rads

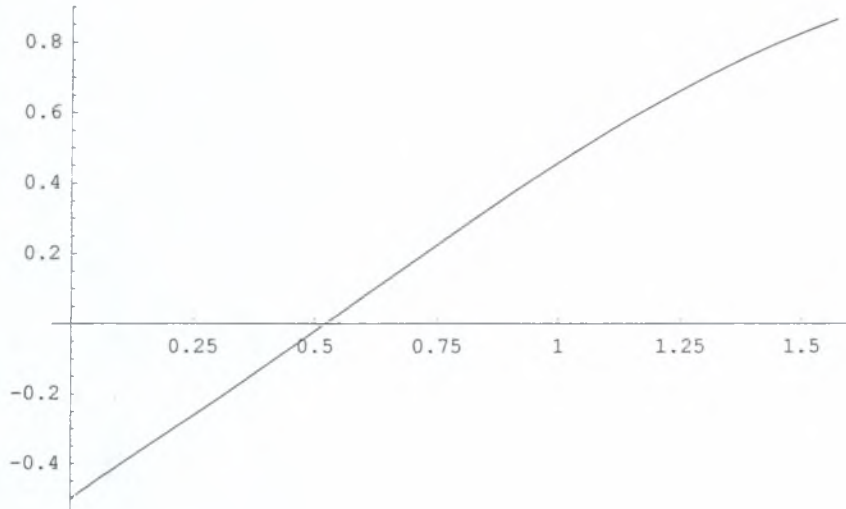
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]}
      / (2 Sin[α] + eα Tan[1.32645] Tan[π / 4 + 1.32645 / 2] + e-α Tan[1.32645] Tan[π / 4 - 1.32645 / 2]), {α,
      0, π / 2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο $\varphi = 81^\circ = 1.413717$ rads

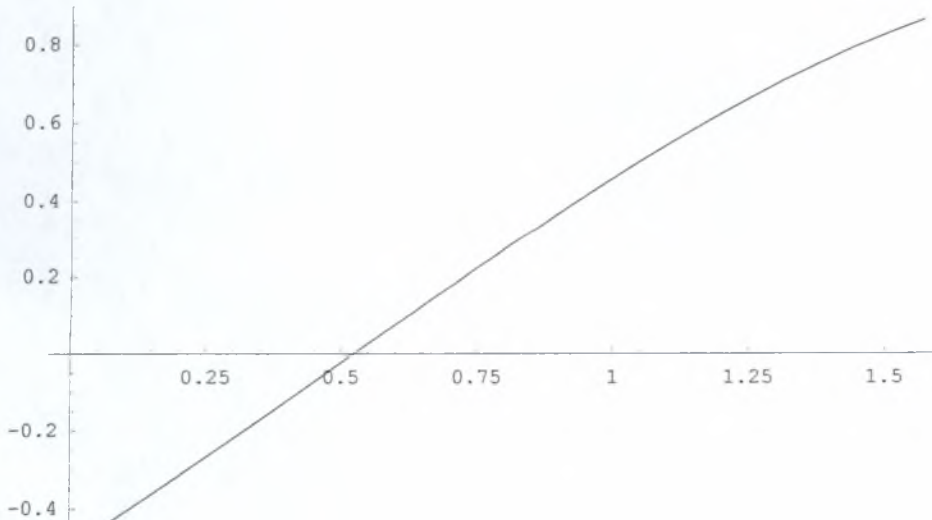
```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      Cos[α] {eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]}
      /
      (2 Sin[α] + eα Tan[1.413717] Tan[π/4 + 1.413717/2] + e-α Tan[1.413717] Tan[π/4 - 1.413717/2]),
      {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Για διάφορα α και δεδομένο φ = 86 ° = 1.500983 rads

```
Plot[Cos[1.047198 - α] -
      (Cos[α] {eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] + e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]}) /
      (2 Sin[α] + eα Tan[1.500983] Tan[π/4 + 1.500983/2] +
      e-α Tan[1.500983] Tan[π/4 - 1.500983/2]), {α, 0, π/2}]
```



- Graphics -

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 30^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L}{t}$.

$$1 / (e^{-1.3375 \tan[0.017453]} \tan[\pi / 4 - 0.017453 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3375])$$

0.641694

$$1 / (e^{-1.3408 \tan[0.10472]} \tan[\pi / 4 - 0.10472 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3408])$$

0.71098

$$1 / (e^{-1.342 \tan[0.191986]} \tan[\pi / 4 - 0.191986 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.342])$$

0.78123

$$1 / (e^{-1.346 \tan[0.279253]} \tan[\pi / 4 - 0.279253 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.346])$$

0.85004

$$1 / (e^{-1.351 \tan[0.366519]} \tan[\pi / 4 - 0.366519 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.351])$$

0.916985

$$1 / (e^{-1.3575 \tan[0.453786]} \tan[\pi / 4 - 0.453786 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3575])$$

0.980712

1

$$e^{-1.3625 \tan[0.541052]} \tan[\pi / 4 - 0.541052 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3625]$$

1.04167

1

$$e^{-1.3683 \tan[0.628319]} \tan[\pi / 4 - 0.628319 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3683]$$

1.09762

1

$$e^{-1.375 \tan[0.715585]} \tan[\pi / 4 - 0.715585 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.375]$$

1.14726

1

$$e^{-1.38125 \tan[0.802851]} \tan[\pi / 4 - 0.802851 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.38125]$$

1.19046

1

$$e^{-1.3851 \tan[0.890118]} \tan[\pi / 4 - 0.890118 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3851]$$

1.2281

1

$$e^{-1.389 \tan[0.977384]} \tan[\pi / 4 - 0.977384 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.389]$$

1.25766

$$1 / (e^{-1.3928 \tan[1.064651]} \tan[\pi / 4 - 1.064651 / 2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3928])$$

1.27883

$$1 / (e^{-1.3942 \operatorname{Tan}[1.151917]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.151917 / 2] \operatorname{Cos}[0.523599] - \operatorname{Sin}[0.523599 - 1.3942])$$

1.29408

$$1 / (e^{-1.3947 \operatorname{Tan}[1.239184]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.239184 / 2] \operatorname{Cos}[0.523599] - \operatorname{Sin}[0.523599 - 1.3947])$$

1.30283

$$1 / (e^{-1.3955 \operatorname{Tan}[1.32645]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.32645 / 2] \operatorname{Cos}[0.523599] - \operatorname{Sin}[0.523599 - 1.3955])$$

1.30557

$$1 / (e^{-1.3962 \operatorname{Tan}[1.413717]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.413717 / 2] \operatorname{Cos}[0.523599] - \operatorname{Sin}[0.523599 - 1.3962])$$

1.30546

$$1 / (e^{-1.3978 \operatorname{Tan}[1.500983]} \operatorname{Tan}[\pi / 4 - 1.500983 / 2] \operatorname{Cos}[0.523599] - \operatorname{Sin}[0.523599 - 1.3978])$$

1.30373

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 30^\circ$

Υπολογισμός του λόγου F / ct .

$$0.641694 \cdot 2 \cot[0.017453] \{e^{2 \cdot 1.3375 \tan[0.017453]} (\tan[\pi/4 + 0.017453/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.017453/2] e^{-1.3375 \tan[0.017453]}$$

{3.00069}

$$0.71098 \cdot 2 \cot[0.10472] \{e^{2 \cdot 1.3408 \tan[0.10472]} (\tan[\pi/4 + 0.10472/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.10472/2] e^{-1.3408 \tan[0.10472]}$$

{3.35952}

$$0.78123 \cdot 2 \cot[0.191986] \{e^{2 \cdot 1.342 \tan[0.191986]} (\tan[\pi/4 + 0.191986/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.191986/2] e^{-1.342 \tan[0.191986]}$$

{3.7763}

$$0.85004 \cdot 2 \cot[0.279253] \{e^{2 \cdot 1.346 \tan[0.279253]} (\tan[\pi/4 + 0.279253/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.279253/2] e^{-1.346 \tan[0.279253]}$$

{4.26836}

$$0.916985 \cdot 2 \cot[0.366519] \{e^{2 \cdot 1.351 \tan[0.366519]} (\tan[\pi/4 + 0.366519/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.366519/2] e^{-1.351 \tan[0.366519]}$$

{4.86071}

$$0.980712 \cdot 2 \cot[0.453786] \{e^{2 \cdot 1.3575 \tan[0.453786]} (\tan[\pi/4 + 0.453786/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.453786/2] e^{-1.3575 \tan[0.453786]}$$

{5.59097}

$$1.04167 \cdot 2 \cot[0.541052] \{e^{2 \cdot 1.3625 \tan[0.541052]} (\tan[\pi/4 + 0.541052/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.541052/2] e^{-1.3625 \tan[0.541052]}$$

{6.51543}

$$1.09762 \cdot 2 \cot[0.628319] \{e^{2 \cdot 1.3683 \tan[0.628319]} (\tan[\pi/4 + 0.628319/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.628319/2] e^{-1.3683 \tan[0.628319]}$$

{7.72769}

$$1.14726 \cdot 2 \cot[0.715585] \{e^{2 \cdot 1.375 \tan[0.715585]} (\tan[\pi/4 + 0.715585/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.715585/2] e^{-1.375 \tan[0.715585]}$$

{9.38759}

$$1.19046 \cdot 2 \cot[0.802851] \{e^{2 \cdot 1.38125 \tan[0.802851]} (\tan[\pi/4 + 0.802851/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.802851/2] e^{-1.38125 \tan[0.802851]}$$

{11.7828}

$$1.2281 \cdot 2 \cot[0.890118] \{e^{2 \cdot 1.3851 \tan[0.890118]} (\tan[\pi/4 + 0.890118/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.890118/2] e^{-1.3851 \tan[0.890118]}$$

{15.4708}

$$1.257662 \cot[0.977384] \{e^{2 \cdot 1.389 \tan[0.977384]} (\tan[\pi/4 + 0.977384/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 0.977384/2] e^{-1.389 \tan[0.977384]}$$

{21.7212}

$$1.278832 \cot[1.064651] \{e^{2 \cdot 1.3928 \tan[1.064651]} (\tan[\pi/4 + 1.064651/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.064651/2] e^{-1.3928 \tan[1.064651]}$$

{33.8033}

$$1.294082 \cot[1.151917] \{e^{2 \cdot 1.3942 \tan[1.151917]} (\tan[\pi/4 + 1.151917/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.151917/2] e^{-1.3942 \tan[1.151917]}$$

{62.0857}

$$1.302832 \cot[1.239184] \{e^{2 \cdot 1.3947 \tan[1.239184]} (\tan[\pi/4 + 1.239184/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.239184/2] e^{-1.3947 \tan[1.239184]}$$

{153.944}

$$1.305572 \cot[1.32645] \{e^{2 \cdot 1.3955 \tan[1.32645]} (\tan[\pi/4 + 1.32645/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.32645/2] e^{-1.3955 \tan[1.32645]}$$

{714.81}

$$1.305462 \cot[1.413717] \{e^{2 \cdot 1.3962 \tan[1.413717]} (\tan[\pi/4 + 1.413717/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.413717/2] e^{-1.3962 \tan[1.413717]}$$

{17697.8}

$$1.303732 \cot[1.500983] \{e^{2 \cdot 1.3978 \tan[1.500983]} (\tan[\pi/4 + 1.500983/2])^2 - 1\} \\ \sin[0.523599] \tan[\pi/4 - 1.500983/2] e^{-1.3978 \tan[1.500983]}$$

{1.25327 × 10⁹}

ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ $\beta = 30^\circ$

Υπολογισμός του λόγου $\frac{L \cos(\beta - \alpha)}{t}$.

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3375]}{(e^{-1.3375 \tan[0.017453]} \tan[\pi/4 - 0.017453/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3375])}$$

0.440631

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3408]}{(e^{-1.3408 \tan[0.10472]} \tan[\pi/4 - 0.10472/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3408])}$$

0.486499

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.342]}{(e^{-1.342 \tan[0.191986]} \tan[\pi/4 - 0.191986/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.342])}$$

0.533884

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.346]}{(e^{-1.346 \tan[0.279253]} \tan[\pi/4 - 0.279253/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.346])}$$

0.578421

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.351]}{(e^{-1.351 \tan[0.366519]} \tan[\pi/4 - 0.366519/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.351])}$$

0.620607

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3575]}{(e^{-1.3575 \tan[0.453786]} \tan[\pi/4 - 0.453786/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3575])}$$

0.65903

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3625]}{(e^{-1.3625 \tan[0.541052]} \tan[\pi/4 - 0.541052/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3625])}$$

0.696129

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3683]}{(e^{-1.3683 \tan[0.628319]} \tan[\pi/4 - 0.628319/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3683])}$$

0.728772

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.375]}{(e^{-1.375 \tan[0.715585]} \tan[\pi/4 - 0.715585/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.375])}$$

0.755965

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.38125]}{(e^{-1.38125 \tan[0.802851]} \tan[\pi/4 - 0.802851/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.38125])}$$

0.778815

$$\frac{\cos[0.523599 - 1.3851]}{(e^{-1.3851 \tan[0.890118]} \tan[\pi/4 - 0.890118/2] \cos[0.523599] - \sin[0.523599 - 1.3851])}$$

0.799864

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.389]}{e^{-1.389 \text{Tan}[0.977384]} \text{Tan}[\pi / 4 - 0.977384 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.389]}$$

0.815386

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3928]}{(e^{-1.3928 \text{Tan}[1.064651]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.064651 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3928])}$$

0.825403

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3942]}{(e^{-1.3942 \text{Tan}[1.151917]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.151917 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3942])}$$

0.83386

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3947]}{(e^{-1.3947 \text{Tan}[1.239184]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.239184 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3947])}$$

0.839

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3955]}{(e^{-1.3955 \text{Tan}[1.32645]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.32645 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3955])}$$

0.839969

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3962]}{(e^{-1.3962 \text{Tan}[1.413717]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.413717 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3962])}$$

0.839197

$$\frac{\text{Cos}[0.523599 - 1.3978]}{(e^{-1.3978 \text{Tan}[1.500983]} \text{Tan}[\pi / 4 - 1.500983 / 2] \text{Cos}[0.523599] - \text{Sin}[0.523599 - 1.3978])}$$

0.836485

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] R.T.Shield, *Mixed boundary value problems in soil mechanics.*
- [2] P.R.Pasley, J.B.Cheatham,Jr, C.W.G.Fulcher, *Plastic Flow of Rock Under a Pointed Punch in Plane Strain.*
- [3] P.R.Pasley, J.B.Cheatham,Jr, C.W.G.Fulcher, *Analysis of the Plastic Flow of Rock Under a Lubricated Punch.*
- [4] D.M.Wood, *Some fall-cone tests.*
- [5] N.A.Fleck, H.Otoyo, A.Needleman, *Indentation of Porous Solids.*
- [6] D.C.Drucker and W.Prager, *Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design.*
- [7] N.A.Fleck, *On the cold compaction of Powders.*
- [8] A.L.Gurson. *Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media.*
- [9] R.J.Anton, G.Subhash, *Dynamic Vickers indentation of brittle materials.*
W.Zhang, G.Subhash, *An elastic-plastic-cracking model for finite element analysis of indentation cracking in brittle materials.*
- [10] R.Risnes, *Deformation and Yield in High Porosity Outcrop Chalk.*
- [11] Per-Lennart Larsson, Antonios E. Giannakopoulos, *Tensile stresses and their implication to cracking at pyramid indentation of pressure-sensitive hard metals and ceramics.*
- [12] F.H.Heukamp,F.J.Ulm,J.T.Germaine, *Mechanical properties of calcium-leached cement paste. Triaxial stresses and the influence of the pore pressures.*
- [13] M.Mainguy, F.H.Heukamp, F.J.Ulm, *Similarity properties of demineralization and degradation of cracked porous materials.*
- [14] D.Roshan Kumar,R.Krishna Kumar, P.K.Philip, *Numerical Investigations of Pyramid Indentation on Powder Compacts.*
- [15] Tadeusz Niezgoda, Jerzy Malachowski, Marek Boniecki, *Finite Element Simulation of Vickers Microindentation on Alumina Ceramics.*
- [16] Karine Velez,Sandrine Maximilien,Denis Damidot,Gilbert Fantozzi,Francois Sorrentino, *Determination by nanoindentation of elastic modulus and hardness of pure constituents of Portland cement clinker.*
- [17] Konstantinos K. Sideris, *Technology of constructive materials.*
- [18] Hondros G. (1959), *The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (Indirect tensile) Test with particular reference to concrete, Australian Journal of Applied Science, Vol.10, p.243-264.*
- [19] R.Vaidyanathan, M.Dao, G.Ravichandran, S.Suresh (2001), *Study of Mechanical Deformation in Bulk Metallic Glass through Instrumented Indentation.*
- [20] P.KumarMehta, Paulo J.M. Monteiro, *Cement, Structure, properties and material.*
- [21] Dimitrios Th. Balala (1981), *Soil Mechanics.*
- [22] Antonios Loizos (1977), *Soil Mechanics.*