

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

**Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ
ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΣΕΩΝ ΖΕΥΓΟΥΣ**

Διπλωματική Εργασία
Του Αντώνη Καλαντζή

Βόλος, Ιούνιος 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4837/1

Ημερ. Εισ.: 08-10-2007

Δωρεά: Συγγραφέα

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ

2006

ΚΑΛ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αφιερώνω την παρούσα εργασία στον πατέρα μου Γιάννη και στη μητέρα μου Δέσποινα για την αγάπη τους που μου δίνουν καθημερινά αλλά και για όλους τους κόπους που έχουν καταβάλει μέχρι σήμερα για να τελειώσω τις σπουδές μου και να αποκτήσω το πτυχίο του Πολιτικού Μηχανικού.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Ε. Προβίδα, ο οποίος μου πρότεινε αρχικά να ασχοληθώ με το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής και ο οποίος με υπομονή με βοήθησε σε όλη την διάρκεια εκπόνησής της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συνεπιβλέποντες καθηγητές Αιμίλιο Κωμοδρόμο και Αντώνη Διακόπουλο για την βοήθειά τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πρόσφατα πειράματα έχουν δείξει ότι η θεωρία της ελαστικότητας αδυνατεί να προσομοιώσει με ακρίβεια την συμπεριφορά κατασκευών για τις οποίες ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της μικροδομής του υλικού τους είναι της τάξης μεγέθους ενός γεωμετρικού μεγέθους τους.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός εύχρηστου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων της μηχανικής στα πλαίσια της ελαστικότητας τάσεων ζεύγους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	5
2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	
2.1 Διατύπωση των εξισώσεων.....	7
2.2 Η Αρχή της Ελαχιστοποίησης της Δυναμικής Ενέργειας.....	9
2.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων.....	10
2.3.1 Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.....	11
2.4 Έλεγχος συρραφής (patch test).....	14
2.4.1 Πρόβλημα 1.....	15
2.4.2 Πρόβλημα 2.....	16
2.4.3 Πρόβλημα 3.....	16
2.5 Εφαρμογή.....	17
3. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΣΕΩΝ ΖΕΥΓΟΥΣ	
3.1 Διατύπωση των εξισώσεων.....	19
3.2 Η Αρχή της Ελαχιστοποίησης της Δυναμικής Ενέργειας.....	22
3.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων.....	23
3.3.1 Το τριγωνικό στοιχείο 18 βαθμών ελευθερίας.....	23
3.4 Έλεγχος συρραφής (patch test).....	30
3.4.1 Πρόβλημα 1.....	30
3.5 Διάτρητος δίσκος σε εφελκυσμό.....	31
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	35
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	37
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.....	38

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κλασική θεωρία της ελαστικότητας του συνεχούς μέσου φαίνεται ότι είναι επαρκής για την επίλυση των περισσότερων πρακτικών προβλημάτων της επιστήμης του πολιτικού μηχανικού αλλά και γενικότερα της μηχανικής. Πρόσφατα πειράματα όμως έχουν δείξει ότι η θεωρία της ελαστικότητας αδυνατεί να προσομοιώσει με ακρίβεια την συμπεριφορά κατασκευών για τις οποίες ένα χαρακτηριστικό μέγεθος της μικροδομής του υλικού τους είναι της τάξης μεγέθους ενός γεωμετρικού μεγέθους τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κλασική θεωρία δεν λαμβάνει υπόψη την μικροδομή του υλικού.

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται άλλες πιο γενικευμένες θεωρίες, οι οποίες φαίνεται να είναι πιο κατάλληλες για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των γενικευμένων θεωριών είναι ότι περιλαμβάνουν μια ή περισσότερες παραμέτρους, πέραν των γνωστών παραμέτρων της ελαστικότητας, οι οποίες συνδέονται με την μικροδομή του υλικού. Οι αδερφοί Cosserat πρότειναν μια θεωρία βασισμένη στην ιδέα ότι κάθε σημείο του υλικού μπορεί να περιστραφεί ανεξάρτητα των μετατοπίσεων και ότι το υλικό μπορεί να μεταβιβάζει και τάσεις ζεύγους επιπλέον των δυνάμεων. Αυτή η θεωρία στη διεθνή βιβλιογραφία είναι γνωστή ως η θεωρία Cosserat ή micropolar. Στη δεκαετία του εξήντα ο Mindlin σε μια σειρά εργασιών του, παρουσίασε γενικευμένες θεωρίες της ελαστικότητας για τις οποίες η δυναμική ενέργεια του απειροελάχιστου στοιχείου είναι συνάρτηση όχι μόνο των παραμορφώσεων αλλά και των κλίσεων των. Αυτές οι θεωρίες είναι γνωστές ως θεωρίες κλίσεων (gradient theories). Η πιο απλή θεωρία κλίσεων είναι η θεωρία τάσεων ζεύγους (couple stress theory). Η θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας τάσεων ζεύγους, η οποία είναι το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, έχει περιγραφεί από τον Mindlin σε μια κατανοητή μορφή στην εργασία του [5].

Η θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας τάσεων ζεύγους, περιλαμβάνει μια επιπλέον παράμετρο, η οποία είναι γνωστή ως το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του υλικού, καθώς και τάσεις ζεύγους σε συνδυασμό με τις συνηθισμένες δυνάμεις. Επιπλέον, σε αντίθεση με την θεωρία των Cosserat, η στροφή του υλικού σημείου δεν είναι πια ανεξάρτητη αλλά εξαναγκάζεται σε ορισμό σύμφωνα με τις μετατοπίσεις όπως και στην κλασική θεωρία. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η θεωρία τάσεων ζεύγους είναι γνωστή στην διεθνή βιβλιογραφία και ως constrained Cosserat theory.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι πια η κατ' εξοχήν μέθοδος αριθμητικής προσομοίωσης και επίλυσης προβλημάτων στη μηχανική καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς [10, 9, 4, 2]. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την κλασική θεωρία της ελαστικότητας και πλαστικότητας έχει γίνει αντικείμενο πολλών χιλιάδων επιστημονικών εργασιών και έχει εξελιχθεί πάρα πολύ, ενώ υπάρχουν δεκάδες επαγγελματικοί εμπορικοί κώδικες για την επίλυση πολλών κατηγοριών προβλημάτων. Αντίθετα, η επέκταση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στη θεωρία τάσεων ζεύγους και θεωρία κλίσεων έχει γίνει αντικείμενο μελέτης μιας μερίδας επιστημόνων μόνο τα τελευταία χρόνια [6, 7].

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων της μηχανικής στα πλαίσια της ελαστικότητας τάσεων ζεύγους. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ένα τριγωνικό στοιχείο με τους πλέον αναγκαίους βαθμούς ελευθερίας ανά κορυφή, συνολικά δεκαοχτώ βαθμούς ελευθερίας.

Η ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους είναι αρκετά πολύπλοκη και η εμπειρία που έχει αποκτηθεί από την εξέλιξη της μεθόδου στην κλασική θεωρία είναι πολύτιμη. Για αυτό τον λόγο η παρούσα εργασία ξεκινάει με μια σύντομη παρουσίαση της κλασικής θεωρίας και την ανάπτυξη του πιο απλού επίπεδου τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης. Επίσης, παρουσιάζεται ο έλεγχος συρραφής (patch test) και επιλύονται γνωστά προβλήματα.

Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γραμμική επίπεδη ελαστική θεωρία τάσεων ζεύγους (couple stress) δίνοντας τις καταστατικές εξισώσεις, τις εξισώσεις ισορροπίας και τις συνοριακές συνθήκες. Ακολουθεί η διατύπωση της αρχής της ελάχιστης ενέργειας και η παρουσίαση ενός τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου με κόμβους τις τρεις κορυφές του και έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Ο έλεγχος του στοιχείου γίνεται μέσω του ελέγχου συρραφής, ο οποίος επεκτείνεται στην θεωρία τάσεων ζεύγους και επιλύεται το πρόβλημα του διάτρητου δίσκου σε εφελκυσμό.

Στο τελευταίο κεφάλαιο δίνονται τα συμπεράσματα που αφορούν στην αξιολόγηση του προτεινόμενου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων.

Τέλος, στο Παράρτημα I στο τέλος της παρούσας εργασίας παρατίθενται οι υπορουτίνες σε γλώσσα Fortran 90, οι οποίες γράφτηκαν για τον προγραμματισμό τόσο του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης στην κλασική θεωρία όσο και για το νέο τριγωνικό στοιχείο δεκαοχτώ βαθμών ελευθερίας στην ελαστική θεωρία τάσεων ζεύγους. Οι υπορουτίνες αυτές ενσωματώθηκαν στο γενικό κώδικα πεπερασμένων στοιχείων GRADFE [3] για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας αλλά έχει ληφθεί σχετική μέριμνα για την γενικότητα αυτών ώστε με μικρές αλλαγές να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε άλλους επαγγελματικούς κώδικες.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

2.1 Διατύπωση των εξισώσεων

Θεωρούμε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων x, y, z και ένα κυλινδρικό στερεό σώμα, με τις γενέτειρες ευθείες του παράλληλες στον άξονα z , το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης. Έστω μία τομή αυτού του στερεού, κάθετα στον άξονα z , εμβαδού A και περιμέτρου S , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Συμβολίζουμε το διάνυσμα της μετατόπισης ως

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y \quad (1)$$

όπου οι συνιστώσες $u_x = u_x(x, y)$ και $u_y = u_y(x, y)$ είναι οι μετατοπίσεις στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, ενώ τα \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_y υποδηλώνουν τα μοναδιαία διανύσματα βάσης.

Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες της παραμόρφωσης σε αυτή την εντατική κατάσταση είναι οι παρακάτω

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} \quad (2.α)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y} \quad (2.β)$$

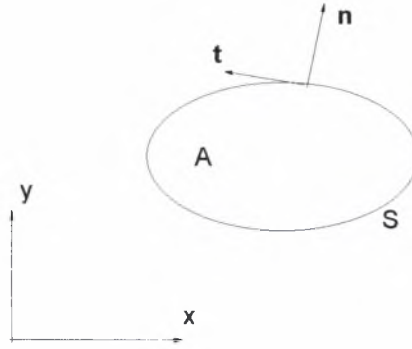
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (2.γ)$$

όπου ε_{xx} είναι η ορθή ανηγμένη παραμόρφωση στη διεύθυνση του άξονα x , ε_{yy} είναι η ορθή ανηγμένη παραμόρφωση στη διεύθυνση του άξονα y και ε_{xy} είναι η διατμητική παραμόρφωση, ενώ το κόμμα μπροστά από ένα δείκτη υποδηλώνει παραγωγή ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή που ακολουθεί. Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης για ομογενές και ιστροπικό υλικό οι σχέσεις που περιγράφουν τις αναπτυσσόμενες τάσεις είναι

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} \right] \quad (3.α)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} \right] \quad (3.β)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \quad (3.γ)$$



Σχήμα 1: Τομή του στερεού και σύστημα συντεταγμένων

όπου σ_{xx} είναι η ορθή τάση που ασκείται στη διεύθυνση του άξονα x , σ_{yy} είναι η ορθή τάση που ασκείται στη διεύθυνση του άξονα y , σ_{xy} είναι η διατμητική τάση, E συμβολίζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού κατά Young και ν είναι ο λόγος του Poisson.

Στο εσωτερικό της περιοχής A οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων είναι

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + b_x = 0 \quad (4.a)$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + b_y = 0 \quad (4.b)$$

όπου b_x , b_y είναι οι μαζικές δυνάμεις στη διεύθυνση x και y αντίστοιχα.

Στο σύνορο S της περιοχής A ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$u_x = \tilde{u}_x \text{ και } u_y = \tilde{u}_y \text{ στο } S_1 \quad (5.a)$$

$$f_x = \tilde{f}_x \text{ και } f_y = \tilde{f}_y \text{ στο } S_2 \quad (5.b)$$

όπου S_1 και S_2 είναι τα τμήματα του συνόρου όπου περιγράφονται οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις αντίστοιχα, τα \tilde{u}_x και \tilde{u}_y δηλώνουν τις μετατοπίσεις που περιγράφονται στο σύνορο S_1 και \tilde{f}_x , \tilde{f}_y συμβολίζουν τις ασκούμενες δυνάμεις στο S_2 , ενώ

$$f_x = \sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{xy} \sin \theta \quad (6.a)$$

$$f_y = \sigma_{xy} \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \quad (6.b)$$

Εναλλακτικά, οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να γραφούν με αναφορά σε ένα τοπικό μετακινούμενο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα \mathbf{n} και \mathbf{t} , κάθετα και εφαπτομενικά στο σύνορο αντίστοιχα. Με αναφορά σε αυτό το τοπικό σύστημα το διάνυσμα των μετατοπίσεων (1) γράφεται ως

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t} \quad (7)$$

όπου

$$u_n = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (8.α)$$

$$u_t = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \quad (8.β)$$

και θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{n} με τον άξονα x . Με αναφορά σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να γραφούν ως εξής

$$u_n = \tilde{u}_n \text{ και } u_t = \tilde{u}_t \text{ στο } S_1 \quad (9.α)$$

$$f_n = \tilde{f}_n \text{ και } f_t = \tilde{f}_t \text{ στο } S_2 \quad (9.β)$$

όπου

$$f_n = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (10.α)$$

$$f_t = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (10.β)$$

2.2 Η Αρχή της Ελαχιστοποίησης της Δυναμικής Ενέργειας

Για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων απαιτείται ο υπολογισμός της συνολικής δυναμικής ενέργειας, η οποία μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi(u_x, u_y) = & \frac{1}{2} \iint_A (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{xy}) dA \\ & - \iint_\Lambda (b_x u_x + b_y u_y) dA \\ & - \int_{S_2} (\tilde{f}_n u_n + \tilde{f}_t u_t) ds \end{aligned} \quad (11)$$

Η αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας απαιτεί

$$\delta \Pi(u_x, u_y) = 0 \quad (12)$$

όπου οι ανεξάρτητες ποσότητες υποκείμενες σε μεταβολή είναι οι μετατοπίσεις u_x , u_y με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι εξισώσεις (2), (3) και (5.α). Δηλαδή

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(u_x, u_y) &= \frac{1}{2} \iint_A (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \varepsilon_{xx}\delta\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \varepsilon_{yy}\delta\sigma_{yy} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xy}\delta\sigma_{xy}) dA \\
&\quad - \iint_A (\delta u_x b_x + \delta u_y b_y) dA \\
&\quad - \int_{S_2} (\delta u_n \tilde{f}_n + \delta u_t \tilde{f}_t) ds \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Gauss-Green και μετά από πράξεις η παραπάνω εξίσωση παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(u_x, u_y) &= - \iint_A \left[\delta u_x (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + b_x) + \delta u_y (\sigma_{yy,y} + \sigma_{xy,x} + b_y) \right] dA \\
&\quad + \int_{S_2} \left[\delta u_n (f_n - \tilde{f}_n) + \delta u_t (f_t - \tilde{f}_t) \right] ds \\
&\quad + \int_{S_1} (\delta u_n f_n + \delta u_t f_t) ds \\
&= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Επειδή δu_x και δu_y είναι οποιεσδήποτε μικρές παραμορφώσεις, από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας κατά Euler (4) και οι εξισώσεις που περιγράφουν τις συνθήκες στο σύνορο δηλαδή οι εξισώσεις (5).

2.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί την υποδιαίρεση της περιοχής A σε n μικρότερα νοητά τριγωνικά, τετραγωνικά ή πολυγωνικά στοιχεία των οποίων έкаστο στοιχείο e έχει εμβαδόν A^e . Επομένως η συνολική δυναμική ενέργεια (11) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$\Pi(u_x, u_y) = \sum_{i=1}^n \Pi^e(u_x, u_y) \tag{15}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\Pi^e(u_x, u_y) &= \frac{1}{2} \iint_{A^e} (\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + 2\varepsilon_{xy}\sigma_{xy}) dA \\
&\quad - \iint_{A^e} (b_x u_x + b_y u_y) dA \\
&\quad - \int_{S_2} (\tilde{f}_n u_n + \tilde{f}_t u_t) ds
\end{aligned} \tag{16}$$

συμβολίζει την συνολική δυναμική ενέργεια του στοιχείου e . Στην εξίσωση (16) και κάτω από το διπλό ολοκλήρωμα εμφανίζονται οι πρώτης τάξης παράγωγοι των μετατοπίσεων και για αυτό για να ισχύει η ισότητα (15) θα πρέπει οι συναρτήσεις σχήματος για τις μετατοπίσεις u_x και u_y να είναι τουλάχιστον C^0 -συμβιβαστές, δηλαδή κατά μήκος του κοινού συνόρου μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων οι μετατοπίσεις θα πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις [10, 4, 2].

2.3.1 Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης

Θεωρούμε ένα τριγωνικό στοιχείο με κόμβους τις τρεις κορυφές του και με τους ελάχιστους δύο βαθμούς ελευθερίας u_x και u_y ανά κόμβο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό του στοιχείου περιγράφονται με τη χρήση γραμμικών πολυωνύμων της μορφής

$$u_x = a_0 + a_1x + a_2y \quad (17.a)$$

$$u_y = b_0 + b_1x + b_2y \quad (17.β)$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ θα πρέπει να οριστούν καταλλήλως. Για αυτό το σκοπό γράφουμε, για παράδειγμα, τις μετατοπίσεις u_x στους τρεις κόμβους του στοιχείου

$$u_{x1} = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 \quad (18.a)$$

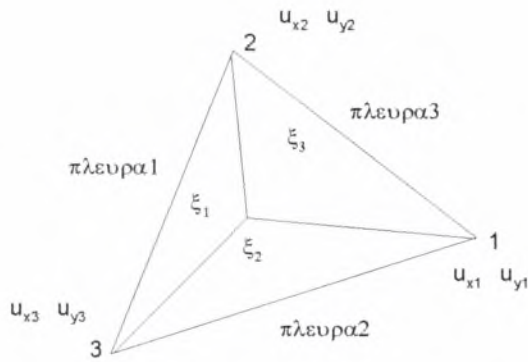
$$u_{x2} = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 \quad (18.β)$$

$$u_{x3} = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 \quad (18.γ)$$

όπου u_{xi} , $i=1,2,3$ συμβολίζει τη τιμή της μετακίνησης u_x στον κόμβο i του στοιχείου. Το παραπάνω σύστημα είναι τριών εξισώσεων με αγνώστους τους τρεις συντελεστές a_0, a_1, a_2 , το οποίο μπορεί να επιλυθεί και να εκφραστούν οι συντελεστές a_0, a_1, a_2 συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας u_{x1}, u_{x2}, u_{x3} . Παρόμοια μπορούν να εκφραστούν και οι συντελεστές b_0, b_1, b_2 συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας u_{y1}, u_{y2}, u_{y3} .

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε χρήση των επιφανειακών συντεταγμένων

$$\xi_i = \frac{A_i^e}{A^e} \quad (i=1,2,3) \quad (19)$$



Σχήμα 2: Τριγωνικό στοιχείο έξι βαθμών ελευθερίας

όπου τα A_i^e είναι τα εμβαδά των τριγώνων στο εσωτερικό του στοιχείου όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 2 και $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$. Οι επιφανειακές συντεταγμένες εισήχθησαν από τον Zienkiewicz [10] και έχουν βοηθήσει τα μέγιστα στην ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων. Ειδικότερα, η σχέση που συνδέει τις επιφανειακές συντεταγμένες με τις Καρτεσιανές είναι

$$\xi_1 = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - x(y_3 - y_2) + y(x_3 - x_2)] \quad (20.α)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} [(x_1 y_3 - x_3 y_1) - x(y_3 - y_1) + y(x_3 - x_1)] \quad (20.β)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - x(y_2 - y_1) + y(x_2 - x_1)] \quad (20.γ)$$

Οι μετατοπίσεις (17) τώρα μπορούν να γραφούν ως εξής

$$u_x = \xi_1 u_{x1} + \xi_2 u_{x2} + \xi_3 u_{x3} \quad (21.α)$$

$$u_y = \xi_1 u_{y1} + \xi_2 u_{y2} + \xi_3 u_{y3} \quad (21.β)$$

ενώ οι παραμορφώσεις μπορεί να υπολογισθούν παραγωγίζοντας τις σχέσεις (21)

$$\varepsilon_{xx} = u_{x1} \xi_{1,x} + u_{x2} \xi_{2,x} + u_{x3} \xi_{3,x} \quad (22.α)$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y1} \xi_{1,y} + u_{y2} \xi_{2,y} + u_{y3} \xi_{3,y} \quad (22.β)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{y1} \xi_{1,x} + u_{y2} \xi_{2,x} + u_{y3} \xi_{3,x} + u_{x1} \xi_{1,y} + u_{x2} \xi_{2,y} + u_{x3} \xi_{3,y}) \quad (22.γ)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις σε μητρική μορφή έχουμε

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (23)$$

όπου

$$\mathbf{u} = \{u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{x3} \quad u_{y3}\}^T \quad (24)$$

είναι το διάνυσμα των έξι βαθμών ελευθερίας του στοιχείου,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\}^T \quad (25)$$

είναι το διάνυσμα των παραμορφώσεων, ενώ

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \xi_{1,x} & 0 & \xi_{2,x} & 0 & \xi_{3,x} & 0 \\ 0 & \xi_{1,y} & 0 & \xi_{2,y} & 0 & \xi_{3,y} \\ \frac{1}{2}\xi_{1,y} & \frac{1}{2}\xi_{1,x} & \frac{1}{2}\xi_{2,y} & \frac{1}{2}\xi_{2,x} & \frac{1}{2}\xi_{3,y} & \frac{1}{2}\xi_{3,x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Για ένα ομογενές και ιστροπικό υλικό, η κατανομή των τάσεων στο εσωτερικό του υπολογίζονται βάση της εξίσωσης (3) ή σε μητρική μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (27)$$

όπου

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (28)$$

είναι το διάνυσμα των τάσεων και

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (29)$$

είναι το μητρώο ελαστικότητας.

Εισάγοντας τώρα την παραπάνω σημειολογία στην εξίσωση (16) και ολοκληρώνοντας, η συνολική δυναμική ενέργεια του στοιχείου e μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi^e(\underline{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \underline{\mathbf{u}}\mathbf{f} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{A}\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}\mathbf{f} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

όπου οι μαζικές δυνάμεις b_x και b_y θεωρήθηκαν ίσες με μηδέν για την απλούστευση των υπολογισμών, το \mathbf{f} συμβολίζει το διάνυσμα φόρτισης και οι μόνες ποσότητες

που υπόκεινται σε μεταβολή είναι το διάνυσμα \underline{u} , το οποίο ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (5.α).

Εφαρμόζοντας την αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta\Pi^e &= \frac{1}{2} A \delta \underline{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \underline{u} + \frac{1}{2} A \underline{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta \underline{u} - \delta \underline{u}^T \mathbf{f} \\ &= \delta \underline{u}^T \mathbf{K} \underline{u} - \delta \underline{u}^T \mathbf{f} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

όπου ο 6×6 πίνακας

$$\mathbf{K} = A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (32)$$

είναι το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου. Επειδή το $\delta \underline{u}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, συνεπάγεται από την (25) ότι

$$\mathbf{K} \underline{u} = \mathbf{f} \quad (33)$$

2.4 Έλεγχος συρραφής (patch test)

Το παραπάνω πεπερασμένο στοιχείο έχει προγραμματιστεί σε γλώσσα Fortran 90 και έχει ενσωματωθεί στο γενικευμένο κώδικα GRADFE [3]. Οι σχετικές υπορουτίνες του στοιχείου παρατίθενται στο Παράρτημα Ι στο τέλος της εργασίας για εύκολη αναζήτηση.

Πριν από την χρησιμοποίηση κάποιου πεπερασμένου στοιχείου, είναι απαραίτητη η δοκιμασία του στον έλεγχο συρραφής (patch test), δηλαδή θα πρέπει να αποδειχθεί ότι το πεπερασμένο στοιχείο μπορεί να δώσει ακριβείς απαντήσεις για ένα πρόβλημα με γνωστές σταθερές παραμορφώσεις και τάσεις. Τη συγκεκριμένη δοκιμασία εφάρμοσε για πρώτη φορά ο Zienkiewicz [10] και από τότε έχει υιοθετηθεί η χρήση του για τη δοκιμή όλων των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι αν ένα στοιχείο «περάσει» τον έλεγχο συρραφής τότε αυτό μπορεί να δώσει λύσεις οι οποίες συγκλίνουν στις πραγματικές καθώς ο αριθμός των στοιχείων του καννάβου μεγαλώνει και το μέγεθος των στοιχείων τείνει στο μηδέν.

Παρακάτω χρησιμοποιούμε τρία διαφορετικά προβλήματα για την εφαρμογή του ελέγχου συρραφής. Επίσης, για κάθε πρόβλημα θεωρούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών.

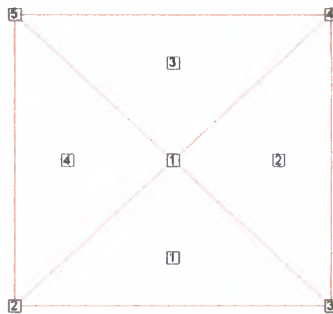
2.4.1 Πρόβλημα 1

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό επίπεδο φορέα πλευράς 10cm, ο οποίος υπόκειται στην εξής παραμόρφωση

$$u_x = 0.003x \quad (34.α)$$

$$u_y = 0.001y \quad (34.β)$$

για να πάρει τελικά το σχήμα ενός ρόμβου. Το μέτρο ελαστικότητας του Young είναι 2500Μpa και ο λόγος του Poisson 0.25. Χρησιμοποιούμε τον κάνναβο όπως στο Σχήμα 3, ο οποίος αποτελείται συνολικά από 4 ορθογώνια τριγωνικά στοιχεία.



Σχήμα 3: Κάνναβος τεσσάρων κανονικών στοιχείων

Το πρόβλημα επιλύθηκε για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών:

α) Στη πρώτη περίπτωση περιγράφηκαν σε όλους τους κόμβους στο σύνορο του φορέα μόνο οι μετατοπίσεις \tilde{u}_x , \tilde{u}_y σύμφωνα με την αναλυτική λύση (34).

β) Στη δεύτερη περίπτωση εφαρμόστηκαν κατά μήκος όλων των πλευρών του φορέα μόνο οι δυνάμεις \tilde{f}_x και \tilde{f}_y , σύμφωνα πάντα με την αναλυτική λύση (34), ενώ περιγράφηκαν και τρεις μετατοπίσεις για να εμποδιστεί η μετακίνηση και στροφή του φορέα ως απολύτως στερεό σώμα.

γ) Στη τρίτη περίπτωση εφαρμόστηκαν συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου, δηλαδή στις δύο απέναντι πλευρές περιγράφηκαν οι μετατοπίσεις \tilde{u}_x και \tilde{u}_y , ενώ στις άλλες δύο πλευρές εφαρμόστηκαν οι δυνάμεις \tilde{f}_x και \tilde{f}_y .

Και στις τρεις περιπτώσεις το συγκεκριμένο μοντέλο του πεπερασμένου στοιχείου έδωσε την ακριβή λύση, ήτοι τις ακριβείς τιμές για τις μετατοπίσεις, παραμορφώσεις και τάσεις σε κάθε κόμβο του κάνναβου, στην υψηλότερη δυνατή ακρίβεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

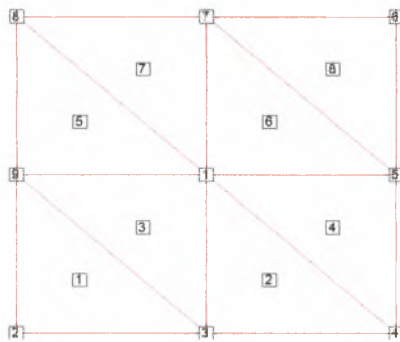
2.4.2 Πρόβλημα 2

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό επίπεδο φορέα πλευράς 10cm, ο οποίος υπόκειται στην εξής παραμόρφωση

$$u_x = 0.0020x + 0.0020y \quad (35.α)$$

$$u_y = 0.0010x - 0.0005y \quad (35.β)$$

για να παραμορφωθεί τελικά σε παραλληλόγραμμο. Το μέτρο ελαστικότητας του Young είναι 2500Mpa και ο λόγος του Poisson 0.25. Χρησιμοποιούμε τον κάρναβο όπως στο Σχήμα 4 ο οποίος αποτελείται συνολικά από 8 πεπερασμένα στοιχεία.



Σχήμα 4: Κάρναβος οκτώ κανονικών στοιχείων

Το πρόβλημα επιλύθηκε πάλι θεωρώντας τρεις διαφορετικούς τύπους συνοριακών συνθηκών όπως παραπάνω. Το συγκεκριμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων έδωσε σε όλες τις περιπτώσεις την ακριβή λύση στην υψηλότερη δυνατή ακρίβεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

2.4.3 Πρόβλημα 3

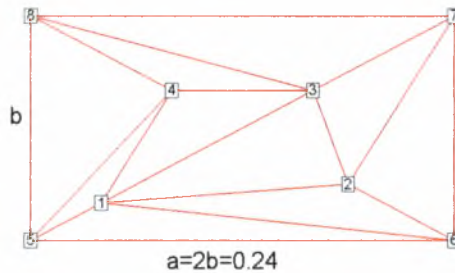
Θεωρούμε έναν ορθογωνικό παραλληλόγραμμο επίπεδο φορέα με πλευρές μήκους 24cm και 12cm αντίστοιχα, ο οποίος υπόκειται στην εξής παραμόρφωση

$$u_x = 0.001x + 0.0005y \quad (36.α)$$

$$u_y = 0.001x + 0.001y \quad (36.β)$$

Το μέτρο ελαστικότητας του Young είναι 1750Mpa και ο λόγος του Poisson 0.3. Χρησιμοποιούμε τον κάρναβο όπως στο Σχήμα 5, ο οποίος αποτελείται συνολικά από 10 πεπερασμένα στοιχεία με οξείες και αμβλείες γωνίες. Σκοπός αυτού του ελέγχου είναι να διαπιστωθεί ότι το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να αναπαράγει την ακριβή λύση ακόμη και στην περίπτωση που τα στοιχεία έχουν οποιοδήποτε ακανόνιστο σχήμα. Έχει δειχθεί στην βιβλιογραφία [10] ότι ορισμένα

πεπερασμένα στοιχεία δουλεύουν καλά μόνο όταν έχουν κανονική γεωμετρία όπως, για παράδειγμα, ορθογώνια ή ισόπλευρα τρίγωνα.



Σχήμα 5: Κάνναβος με δέκα ακανόνιστα στοιχεία

Για άλλη μία φορά το συγκεκριμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων έδωσε την ακριβή λύση στην υψηλότερη δυνατή ακρίβεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή για κάθε περίπτωση συνοριακών συνθηκών.

2.5 Εφαρμογή

Ένα πρόβλημα που εμφανίζεται συχνά στην βιβλιογραφία και έχει πρακτική σημασία για ένα μηχανικό είναι αυτό του διάτρητου δίσκου που υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Σκοπός της ανάλυση αυτού του προβλήματος είναι κυρίως ο υπολογισμός των τάσεων σε μια μικρή ζώνη γύρω από την οπή καθώς και η γνώση της διανομής των τάσεων και σε άλλα σημεία του δίσκου. Η γνώση της συγκέντρωσης των τάσεων γύρω από την οπή είναι πολύ μεγάλης σημασίας για το σωστό σχεδιασμό αντίστοιχων κατασκευών με οπές.

Η αναλυτική λύση του παρόντος προβλήματος δίνεται στο κλασικό βιβλίο του Timoshenko και Goodier [8], ενώ μπορεί κανείς εύκολα να την αναζητήσει, για παράδειγμα, και στην αναφορά [1]. Σύμφωνα με τις παραπάνω αναφορές η αναλυτική λύση για τις τάσεις σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\sigma_r = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{P}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (37.a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{P}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (37.β)$$

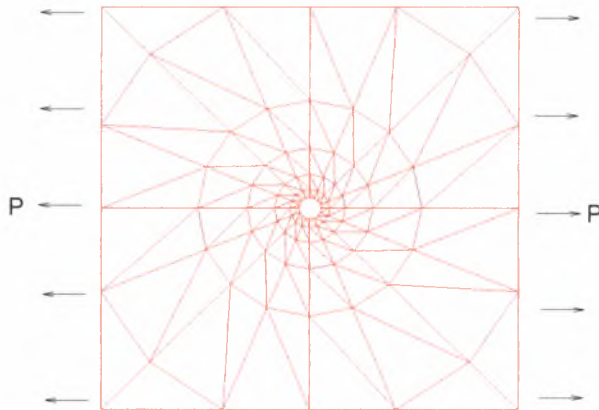
$$\sigma_{r\theta} = -\frac{P}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (37.γ)$$

όπου P η εφαρμοστέα δύναμη, R η ακτίνας της οπής, r η απόσταση από το κέντρο της οπής και θ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας x με τον νοητό άξονα που ενώνει το εκάστοτε σημείο με το κέντρο της οπής.

Κατόπιν ολοκλήρωσης των παραπάνω σχέσεων, προκύπτει ότι η αναλυτική έκφραση για τις μετατοπίσεις είναι

$$u_r = \frac{P(1+\nu)}{2Er} \left\{ (1-2\nu)r^2 + R^2 + \left[4R^2(1-\nu) + r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (38.\alpha)$$

$$u_\theta = -\frac{P(1+\nu)}{2Er} \left\{ 2R^2(1-2\nu) + r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right\} \sin 2\theta \quad (38.\beta)$$



Σχήμα 6: Διάτρητος δίσκος σε εφελκυσμό

Ο τύπος του καννάβου που χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη ανάλυση φαίνεται στο Σχήμα 6, όπου γύρω από την οπή χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 16 τριγωνικά στοιχεία, ενώ κατά μήκος των δυο αξόνων τοποθετήθηκαν 10 συνολικά στοιχεία με αυξανόμενο μέγεθος καθώς μεγαλώνει η απόσταση r από την οπή. Στη δεύτερη ανάλυση διπλασιάστηκε ο αριθμός των στοιχείων. Στο Πίνακα 1 παρατίθενται τα αποτελέσματα για την τιμή της μέγιστης συγκεντρωμένης τάσης.

Πίνακας 1	
Στοιχεία στο τέταρτο της οπής	σ_{\max} (σ_θ/P , $\theta=90^\circ$)
4	2,411
8	3,044
Αναλυτική λύση	3,000

3 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΣΕΩΝ ΖΕΥΓΟΥΣ

3.1 Διατύπωση των εξισώσεων

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων x, y, z και ένα κυλινδρικό στερεό σώμα, με τις γενέτειρες ευθείες του παράλληλες στον άξονα z , το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης. Έστω μία τομή αυτού του στερεού, κάθετα στον άξονα z , εμβαδού A και περιμέτρου S , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Συμβολίζουμε το διάνυσμα της μετατόπισης ως

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y \quad (39)$$

όπου οι συνιστώσες $u_x = u_x(x, y)$ και $u_y = u_y(x, y)$ είναι οι μετατοπίσεις στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, ενώ τα \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_y υποδηλώνουν τα μοναδιαία διανύσματα βάσης. Η στροφή στη συγκεκριμένη θεωρία δίνεται από την εξής σχέση

$$\omega = \frac{1}{2}(u_{y,x} - u_{x,y}) \quad (40)$$

Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες της παραμόρφωσης είναι οι γενικευμένες παραμορφώσεις που ορίζονται ως εξής

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad (41.α)$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} \quad (41.β)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (41.γ)$$

$$k_x = \omega_{,x} = \frac{1}{2}(u_{y,xx} - u_{x,xy}) \quad (41.δ)$$

$$k_y = \omega_{,y} = \frac{1}{2}(u_{y,xy} - u_{x,yy}) \quad (41.ε)$$

όπου ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} είναι οι παραμορφώσεις όπως στην κλασική θεωρία, ενώ k_x , k_y είναι οι καμπυλότητες ως προς τις διευθύνσεις x και y .

Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης για ένα ομογενές και ιστροπικό υλικό, οι παραπάνω γενικευμένες παραμορφώσεις συνδέονται με τις γενικευμένες τάσεις ως εξής

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (42.α)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (42.β)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{(xy)} \quad (42.\gamma)$$

$$k_x = \frac{1}{4Gl^2} m_x \quad (42.\delta)$$

$$k_y = \frac{1}{4Gl^2} m_y \quad (42.\varepsilon)$$

όπου σ_{xx} και σ_{yy} είναι οι τάσεις όπως στην κλασική θεωρία, ενώ $\sigma_{(xy)}$, και $\sigma_{[xy]}$ συμβολίζουν το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος αντίστοιχα του μη συμμετρικού τανυστή των τάσεων σ

$$\sigma_{(xy)} = \frac{1}{2} (\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) \quad (43.\alpha)$$

$$\sigma_{[xy]} = \frac{1}{2} (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) \quad (43.\beta)$$

Επίσης, m_x και m_y είναι οι τάσεις ζεύγους ως προς τις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, G το μέτρο διάτμησης του υλικού και l η παράμετρος η οποία σχετίζεται με ένα χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του υλικού. Αντιστρέφοντας τις εξισώσεις (42) έχουμε

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \quad (44.\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \quad (44.\beta)$$

$$\sigma_{(xy)} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (44.\gamma)$$

$$m_x = 4Gl^2 k_x \quad (44.\delta)$$

$$m_y = 4Gl^2 k_y \quad (44.\varepsilon)$$

Στο εσωτερικό της περιοχής A οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων είναι

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0 \quad (45.\alpha)$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \quad (45.\beta)$$

$$m_{x,x} + m_{y,y} + \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0 \quad (45.\gamma)$$

όπου οι μαζικές δυνάμεις b_x , b_y στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα θεωρήθηκαν ότι είναι μηδενικές για απλούστευση των υπολογισμών. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (43) στις (45) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (45.γ) για την απαλοιφή του αντισυμμετρικού μέρους των τάσεων $\sigma_{[xy]}$, οι παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας μειώνονται στις εξής δύο

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{(xy),y} + \frac{1}{2} m_{x,xy} + \frac{1}{2} m_{y,yy} = 0 \quad (46.α)$$

$$\sigma_{(xy),x} + \sigma_{yy,y} - \frac{1}{2} m_{x,xx} - \frac{1}{2} m_{y,jx} = 0 \quad (46.β)$$

Στο σύνορο S της περιοχής A ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$u_x = \tilde{u}_x, u_y = \tilde{u}_y \text{ και } \omega = \tilde{\omega} \text{ στο } S_1 \quad (47.α)$$

$$f_x = \tilde{f}_x, f_y = \tilde{f}_y \text{ και } m = \tilde{m} \text{ στο } S_2 \quad (47.β)$$

όπου S_1 και S_2 είναι τα τμήματα του συνόρου όπου περιγράφονται οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις αντίστοιχα, τα \tilde{u}_x και \tilde{u}_y δηλώνουν τις μετατοπίσεις που περιγράφονται στο S_1 , $\tilde{\omega}$ συμβολίζει την περιγραφόμενη στροφή στο S_1 , ενώ

$$f_x = \sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{yx} \sin \theta \quad (48.α)$$

$$f_y = \sigma_{xy} \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \quad (48.β)$$

$$m = m_x \cos \theta + m_y \sin \theta \quad (48.γ)$$

και \tilde{f}_x, \tilde{f}_y συμβολίζουν τις δυνάμεις που εφαρμόζονται στο S_2 και \tilde{m} συμβολίζει τη τάση ζεύγους η οποία εφαρμόζεται στο S_2 . Εναλλακτικά, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να γραφούν με αναφορά σε ένα τοπικό μετακινούμενο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα βάσης τα \mathbf{n} και \mathbf{t} , κάθετα και εφαπτομενικά στο σύνορο αντίστοιχα, όπως δείχνεται στο Σχήμα 1. Με αναφορά σε αυτό το τοπικό σύστημα, το διάνυσμα των μετατοπίσεων (39) γράφεται ως

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t} \quad (49.α)$$

όπου

$$u_n = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (50.β)$$

$$u_t = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \quad (50.γ)$$

και θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{n} με τον άξονα x . Έτσι οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να γραφούν ως εξής

$$u_n = \tilde{u}_n, u_t = \tilde{u}_t \text{ και } \omega = \tilde{\omega} \text{ στο } S_1 \quad (51.α)$$

$$f_n = \tilde{f}_n, f_t = \tilde{f}_t \text{ και } m = \tilde{m} \text{ στο } S_2 \quad (51.β)$$

όπου

$$f_n = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{(xy)} \cos \theta \sin \theta \quad (52. \alpha)$$

$$f_t = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} \cos^2 \theta - \sigma_{yx} \sin^2 \theta \quad (52. \beta)$$

3.2 Η Αρχή της Ελαχιστοποίησης της Δυναμικής Ενέργειας

Η συνολική δυναμική ενέργεια στην παρούσα γενικευμένη θεωρία μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi(u_x, u_y) = & \frac{1}{2} \iint_A (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{(xy)} + k_x m_x + k_y m_y) dA \\ & - \int_{S_2} (\tilde{f}_n u_n + \tilde{f}_t u_t + \tilde{m} \omega) ds \end{aligned} \quad (53)$$

Η αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας απαιτεί

$$\delta \Pi(u_x, u_y) = 0 \quad (54)$$

όπου οι ανεξάρτητες ποσότητες υποκειμένες σε μεταβολή είναι οι μετατοπίσεις u_x , u_y με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι εξισώσεις (40), (41), (44), και (47.α). Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} \delta \Pi(u_x, u_y) = & \frac{1}{2} \iint_A (\delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \varepsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + 2\delta \varepsilon_{xy} \sigma_{(xy)} + 2\varepsilon_{xy} \delta \sigma_{(xy)}) dA \\ & + \frac{1}{2} \iint_A (\delta k_x m_x + k_x \delta m_x + \delta k_y m_y + k_y \delta m_y) dA \\ & - \int_{S_2} (\tilde{f}_n \delta u_n + \tilde{f}_t \delta u_t + \tilde{m} \delta \omega) ds \\ = & 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Gauss-Green και μετά από πράξεις η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= -\iint_A \left[\delta u_x \left(\sigma_{xx,x} + \sigma_{(xy),y} + \frac{1}{2} m_{x,xy} + \frac{1}{2} m_{y,yy} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta u_y \left(\sigma_{(xy),x} + \sigma_{yy,y} - \frac{1}{2} m_{x,xx} - \frac{1}{2} m_{y,yy} \right) \right] dA \\
&\quad + \int_{S_1} (\delta u_n f_n + \delta u_t f_t + \delta \omega m) ds \\
&\quad + \int_{S_2} \left[\delta u_n (f_n - \tilde{f}_n) + \delta u_t (f_t - \tilde{f}_t) + \delta \omega (m - \tilde{m}) \right] ds \\
&= 0
\end{aligned} \tag{56}$$

Επειδή δu_x και δu_y είναι οποιεσδήποτε μικρές παραμορφώσεις, από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας κατά Euler (46) και οι εξισώσεις που περιγράφουν τις συνθήκες στο σύνορο δηλαδή οι εξισώσεις (47).

3.3 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί την υποδιαίρεση της περιοχής A σε n μικρότερα νοητά τριγωνικά, τετραγωνικά ή πολυγωνικά στοιχεία των οποίων έкаστο στοιχείο e έχει εμβαδόν A^e . Επομένως η συνολική δυναμική ενέργεια (53) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$\Pi(u_x, u_y) = \sum_n \Pi^e(u_x, u_y) \tag{57}$$

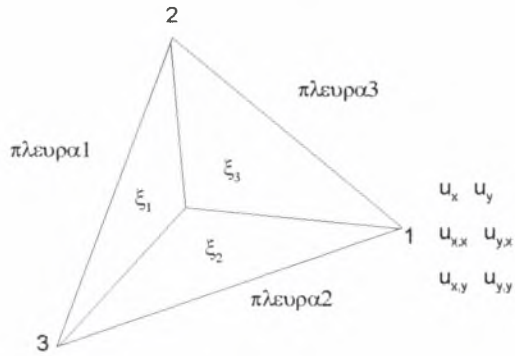
όπου

$$\begin{aligned}
\Pi^e(u_x, u_y) &= \frac{1}{2} \iint_{A^e} \left(\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{(xy)} + k_x m_x + k_y m_y \right) dA \\
&\quad - \int_{S_2} (\tilde{f}_n u_n + \tilde{f}_t u_t + \tilde{m} \omega) ds
\end{aligned} \tag{58}$$

συμβολίζει την συνολική δυναμική ενέργεια του στοιχείου e . Στην εξίσωση (58) και κάτω από το διπλό ολοκλήρωμα εμφανίζονται οι δεύτερης τάξης παράγωγοι των μετατοπίσεων και για αυτό για να ισχύει η ισότητα (57) θα πρέπει οι συναρτήσεις σχήματος για τις μετατοπίσεις u_x και u_y να είναι τουλάχιστον C^1 -συμβιβαστές, δηλαδή κατά μήκος του κοινού συνόρου μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων τόσο οι μετατοπίσεις όσο και οι πρώτης τάξης παράγωγοι των να είναι συνεχείς [10, 4, 2].

3.3.1 Το τριγωνικό στοιχείο 18 βαθμών ελευθερίας

Θεωρούμε ένα τριγωνικό στοιχείο με κόμβους τις τρεις κορυφές του και με τους παρακάτω έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7,



Σχήμα 7: Τριγωνικό στοιχείο 18-βαθμών ελευθερίας

$$\mathbf{v}_1^e = \left\{ u_{x1} \quad u_{y1} \quad (u_{x,x})_1 \quad (u_{y,x})_1 \quad (u_{x,y})_1 \quad (u_{y,y})_1 \right\}^T \quad (59.α)$$

$$\mathbf{v}_2^e = \left\{ u_{x2} \quad u_{y2} \quad (u_{x,x})_2 \quad (u_{y,x})_2 \quad (u_{x,y})_2 \quad (u_{y,y})_2 \right\}^T \quad (59.β)$$

$$\mathbf{v}_3^e = \left\{ u_{x3} \quad u_{y3} \quad (u_{x,x})_3 \quad (u_{y,x})_3 \quad (u_{x,y})_3 \quad (u_{y,y})_3 \right\}^T \quad (59.γ)$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στα πολυώνυμα τρίτου βαθμού για τις μεταβολές των μετατοπίσεων u_x και u_y στο εσωτερικό του στοιχείου. Κάνοντας χρήση των επιφανειακών συντεταγμένων τα u_x και u_y μπορούν να γραφούν ως εξής

$$u_x = N_1 u_{x1} + N_2 u_{x2} + N_3 u_{x3} + N_4 a_{x4} + N_5 a_{x5} + N_6 a_{x6} + N_7 a_{x7} + N_8 a_{x8} + N_9 a_{x9} \quad (60.α)$$

$$u_y = N_1 u_{y1} + N_2 u_{y2} + N_3 u_{y3} + N_4 a_{y4} + N_5 a_{y5} + N_6 a_{y6} + N_7 a_{y7} + N_8 a_{y8} + N_9 a_{y9} \quad (60.β)$$

όπου

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1, \quad N_2 = \xi_2, \quad N_3 = \xi_3 \\ N_4 &= \xi_2 \xi_3, \quad N_5 = \xi_1 \xi_3, \quad N_6 = \xi_1 \xi_2 \\ N_7 &= \xi_2 \xi_3 (\xi_3 - \xi_2), \quad N_8 = \xi_1 \xi_3 (\xi_3 - \xi_1), \quad N_9 = \xi_1 \xi_2 (\xi_2 - \xi_1) \end{aligned} \quad (61)$$

είναι οι συναρτήσεις βάσης και δίνονται στο βιβλίο του Zienkiewicz [10]. Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (60) προκύπτει

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \xi_{1,x} u_{x1} + \xi_{2,x} u_{x2} + \xi_{3,x} u_{x3} \\ &+ N_{4,x} a_{x4} + N_{5,x} a_{x5} + N_{6,x} a_{x6} + N_{7,x} a_{x7} + N_{8,x} a_{x8} + N_{9,x} a_{x9} \end{aligned} \quad (62.α)$$

$$\begin{aligned}
N_{7,x} &= \xi_{2,x}\xi_3(\xi_3 - \xi_2) + \xi_2\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_2) + \xi_2\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) \\
N_{7,y} &= \xi_{2,y}\xi_3(\xi_3 - \xi_2) + \xi_2\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_2) + \xi_2\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) \\
N_{8,x} &= \xi_{1,x}\xi_3(\xi_3 - \xi_1) + \xi_1\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_1) + \xi_1\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{8,y} &= \xi_{1,y}\xi_3(\xi_3 - \xi_1) + \xi_1\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_1) + \xi_1\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{1,y}) \\
N_{9,x} &= \xi_{1,x}\xi_2(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1\xi_{2,x}(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1\xi_2(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{9,y} &= \xi_{1,y}\xi_2(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1\xi_{2,y}(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1\xi_2(\xi_{2,y} - \xi_{1,y})
\end{aligned} \tag{66}$$

Οι συντελεστές του διανύσματος \mathbf{a} μπορούν να γραφούν, σύμφωνα με την αναφορά [6] ως εξής

$$\begin{aligned}
a_{x4} &= \frac{l_1}{2} \left[-n_y^1(u_{x,x})_2 + n_x^1(u_{x,y})_2 - n_y^1(u_{x,x})_3 + n_x^1(u_{x,y})_3 \right] \\
a_{y4} &= \frac{l_1}{2} \left[-n_y^1(u_{y,x})_2 + n_x^1(u_{y,y})_2 - n_y^1(u_{y,x})_3 + n_x^1(u_{y,y})_3 \right] \\
a_{x5} &= \frac{l_2}{2} \left[-n_y^2(u_{x,x})_1 + n_x^2(u_{x,y})_1 - n_y^2(u_{x,x})_3 + n_x^2(u_{x,y})_3 \right] \\
a_{y5} &= \frac{l_2}{2} \left[-n_y^2(u_{y,x})_1 + n_x^2(u_{y,y})_1 - n_y^2(u_{y,x})_3 + n_x^2(u_{y,y})_3 \right] \\
a_{x6} &= \frac{l_3}{2} \left[-n_y^3(u_{x,x})_1 + n_x^3(u_{x,y})_1 - n_y^3(u_{x,x})_2 + n_x^3(u_{x,y})_2 \right] \\
a_{y6} &= \frac{l_3}{2} \left[-n_y^3(u_{y,x})_1 + n_x^3(u_{y,y})_1 - n_y^3(u_{y,x})_2 + n_x^3(u_{y,y})_2 \right] \\
a_{x7} &= -u_{x2} + u_{x3} - \frac{l_1}{2} \left[-n_y^1(u_{x,x})_2 + n_x^1(u_{x,y})_2 - n_y^1(u_{x,x})_3 + n_x^1(u_{x,y})_3 \right] \\
a_{y7} &= -u_{y2} + u_{y3} - \frac{l_1}{2} \left[-n_y^1(u_{y,x})_2 + n_x^1(u_{y,y})_2 - n_y^1(u_{y,x})_3 + n_x^1(u_{y,y})_3 \right] \\
a_{x8} &= -u_{x1} + u_{x3} - \frac{l_2}{2} \left[-n_y^2(u_{x,x})_1 + n_x^2(u_{x,y})_1 - n_y^2(u_{x,x})_3 + n_x^2(u_{x,y})_3 \right] \\
a_{y8} &= -u_{y1} + u_{y3} - \frac{l_2}{2} \left[-n_y^2(u_{y,x})_1 + n_x^2(u_{y,y})_1 - n_y^2(u_{y,x})_3 + n_x^2(u_{y,y})_3 \right] \\
a_{x9} &= -u_{x1} + u_{x2} - \frac{l_3}{2} \left[-n_y^3(u_{x,x})_1 + n_x^3(u_{x,y})_1 - n_y^3(u_{x,x})_2 + n_x^3(u_{x,y})_2 \right] \\
a_{y9} &= -u_{y1} + u_{y2} - \frac{l_3}{2} \left[-n_y^3(u_{y,x})_1 + n_x^3(u_{y,y})_1 - n_y^3(u_{y,x})_2 + n_x^3(u_{y,y})_2 \right]
\end{aligned} \tag{67}$$

όπου l_i συμβολίζει το μήκος της πλευράς του τριγωνικού στοιχείου που είναι απέναντι από το κόμβο i ($i=1,2,3$), όπως παραστατικά εξηγείται στο Σχήμα 7, και n_x^i, n_y^i είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος \mathbf{n} , το οποίο είναι κάθετο στη πλευρά i του στοιχείου.

Παρόμοια υπολογίζονται και οι καμπυλότητες

$$k_{xx} = \frac{1}{2} \left(N_{4,xx} a_{y4} + N_{5,xx} a_{y5} + N_{6,xx} a_{y6} + N_{7,xx} a_{y7} + N_{8,xx} a_{y8} + N_{9,xx} a_{y9} \right) - \frac{1}{2} \left(N_{4,yx} a_{x4} + N_{5,yx} a_{x5} + N_{6,yx} a_{x6} + N_{7,yx} a_{x7} + N_{8,yx} a_{x8} + N_{9,yx} a_{x9} \right) \quad (68.α)$$

$$k_{yy} = \frac{1}{2} \left(N_{4,yy} a_{y4} + N_{5,yy} a_{y5} + N_{6,yy} a_{y6} + N_{7,yy} a_{y7} + N_{8,yy} a_{y8} + N_{9,yy} a_{y9} \right) - \frac{1}{2} \left(N_{4,yy} a_{x4} + N_{5,yy} a_{x5} + N_{6,yy} a_{x6} + N_{7,yy} a_{x7} + N_{8,yy} a_{x8} + N_{9,yy} a_{x9} \right) \quad (68.β)$$

οι οποίες σε μητρική μορφή μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{a} \quad (69)$$

όπου

$$\mathbf{k} = \{k_{xx} \quad k_{yy}\}^T \quad (70)$$

και

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -N_{4,yx} & N_{4,xx} & -N_{5,yx} & N_{5,xx} & -N_{6,yx} & N_{6,xx} \\ -N_{4,yy} & N_{4,xy} & -N_{5,yy} & N_{5,xy} & -N_{6,yy} & N_{6,xy} \\ -N_{7,yx} & N_{7,xx} & -N_{8,yx} & N_{8,xx} & -N_{9,yx} & N_{9,xx} \\ -N_{7,yy} & N_{7,xy} & -N_{8,yy} & N_{8,xy} & -N_{9,yy} & N_{9,xy} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Τα στοιχεία του πίνακα $\hat{\mathbf{B}}$ είναι σταθερές ή γραμμικές συναρτήσεις και ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} N_{4,xx} &= 2\xi_{2,x}\xi_{3,x} \\ N_{4,xy} &= \xi_{2,x}\xi_{3,y} + \xi_{2,y}\xi_{3,x} \\ N_{4,yx} &= \xi_{2,x}\xi_{3,y} + \xi_{2,y}\xi_{3,x} \\ N_{4,yy} &= 2\xi_{2,y}\xi_{3,y} \\ N_{5,xx} &= 2\xi_{1,x}\xi_{3,x} \\ N_{5,xy} &= \xi_{1,x}\xi_{3,y} + \xi_{1,y}\xi_{3,x} \\ N_{5,yx} &= \xi_{1,x}\xi_{3,y} + \xi_{1,y}\xi_{3,x} \\ N_{5,yy} &= 2\xi_{1,y}\xi_{3,y} \\ N_{6,xx} &= 2\xi_{1,x}\xi_{2,x} \\ N_{6,xy} &= \xi_{1,x}\xi_{2,y} + \xi_{1,y}\xi_{2,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{6,xx} &= \xi_{1,x}\xi_{2,y} + \xi_{1,y}\xi_{2,x} \\
N_{6,yy} &= 2\xi_{1,y}\xi_{2,y} \\
N_{7,xx} &= 2\xi_{2,x}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_2) + 2\xi_{2,x}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) + 2\xi_2\xi_{3,x}(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) \\
N_{7,xy} &= \xi_{2,x}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_2) + \xi_{2,x}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + \xi_{2,y}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_2) \\
&\quad + \xi_2\xi_{3,x}(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + \xi_{2,y}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) + \xi_2\xi_{3,y}(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) \\
N_{7,yx} &= \xi_{2,x}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_2) + \xi_{2,x}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + \xi_{2,y}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_2) \\
&\quad + \xi_2\xi_{3,x}(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + \xi_{2,y}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) + \xi_2\xi_{3,y}(\xi_{3,x} - \xi_{2,x}) \\
N_{7,yy} &= 2\xi_{2,y}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_2) + 2\xi_{2,y}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + 2\xi_2\xi_{3,y}(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) \\
N_{8,xx} &= 2\xi_{1,x}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_1) + 2\xi_{1,x}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) + 2\xi_1\xi_{3,x}(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{8,xy} &= \xi_{1,x}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_1) + \xi_{1,x}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_1) \\
&\quad + \xi_1\xi_{3,x}(\xi_{3,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) + \xi_1\xi_{3,y}(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{8,yx} &= \xi_{1,x}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_1) + \xi_{1,x}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_{3,x}(\xi_3 - \xi_1) \\
&\quad + \xi_1\xi_{3,x}(\xi_{3,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_3(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) + \xi_1\xi_{3,y}(\xi_{3,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{8,yy} &= 2\xi_{2,y}\xi_{3,y}(\xi_3 - \xi_2) + 2\xi_{2,y}\xi_3(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) + 2\xi_2\xi_{3,y}(\xi_{3,y} - \xi_{2,y}) \\
N_{9,xx} &= 2\xi_{1,x}\xi_{2,x}(\xi_2 - \xi_1) + 2\xi_{1,x}\xi_2(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) + 2\xi_1\xi_{2,x}(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{9,xy} &= \xi_{1,x}\xi_{2,y}(\xi_2 - \xi_1) + \xi_{1,x}\xi_2(\xi_{2,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_{2,x}(\xi_2 - \xi_1) \\
&\quad + \xi_1\xi_{2,x}(\xi_{2,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_2(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) + \xi_1\xi_{2,y}(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{9,yx} &= \xi_{1,x}\xi_{2,y}(\xi_2 - \xi_1) + \xi_{1,x}\xi_2(\xi_{2,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_{2,x}(\xi_2 - \xi_1) \\
&\quad + \xi_1\xi_{2,x}(\xi_{2,y} - \xi_{1,y}) + \xi_{1,y}\xi_2(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) + \xi_1\xi_{2,y}(\xi_{2,x} - \xi_{1,x}) \\
N_{9,yy} &= 2\xi_{1,y}\xi_{2,y}(\xi_2 - \xi_1) + 2\xi_{1,y}\xi_2(\xi_{2,y} - \xi_{1,y}) + 2\xi_1\xi_{2,y}(\xi_{2,y} - \xi_{1,y})
\end{aligned} \tag{72}$$

Για ένα ομογενές και ιστροπικό υλικό οι καταστατικές εξισώσεις των τάσεων στο εσωτερικό του στοιχείου δίνονται από τις εξισώσεις (44) οι οποίες σε μητρωική μορφή μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{73}$$

όπου

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{(xy)} \right\}^T \tag{74}$$

είναι το διάνυσμα των τάσεων και

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (75)$$

είναι το μητρώο ελαστικότητας. Όμοια εισάγουμε το διάνυσμα τάσεων ζεύγους

$$\mathbf{m} = \{m_x \quad m_y\}^T \quad (76)$$

και γράφουμε τις σχέσεις (44.δ, 44.ε) σε μητρική ως εξής

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{k} \quad (77)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{D}} = 4GI^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Εισάγοντας τώρα την παραπάνω σημειολογία στην εξίσωση (58), η συνολική δυναμική ενέργεια του στοιχείου e μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi^e(\underline{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \iint_{A^e} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{a}) dA \\ &\quad - \int_{S_2} (\tilde{f}_n u_n + \tilde{f}_t u_t + \tilde{m} \omega) ds \end{aligned} \quad (79)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta \Pi^e &= \iint_{A^e} \left\{ \delta \mathbf{u}^T \quad \delta \mathbf{a}^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} dA \\ &\quad - \int_{S_2} (\tilde{f}_n \delta u_n + \tilde{f}_t \delta u_t + \tilde{m} \delta \omega) ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

από όπου προκύπτουν οι εξισώσεις του πεπερασμένου στοιχείου

$$\mathbf{K}_s^e \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{f} \quad (81)$$

όπου

$$\mathbf{K}_g^c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{ua} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \quad (82)$$

είναι το μητρώο στιβαρότητας και \mathbf{f} το διάνυσμα φόρτισης. Ειδικότερα,

$$\mathbf{K}_u = A(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \quad (83.α)$$

$$\mathbf{K}_{ua} = \iint_{A^*} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}) dA \quad (83.β)$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \iint_{A^*} (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}}) dA \quad (83.γ)$$

3.4 Έλεγχος συρραφής (patch test)

Όπως και στην κλασική θεωρία το παραπάνω πεπερασμένο στοιχείο δοκιμάστηκε στον έλεγχο συρραφής (patch test) για να ελεγχθεί αν μπορεί να αναπαράγει τις ακριβείς απαντήσεις για ένα πρόβλημα με γνωστές σταθερές παραμορφώσεις και τάσεις. Για αυτό το λόγο επιλύθηκαν τα ίδια προβλήματα, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τους τρεις τύπους συνοριακών συνθηκών κατάλληλα προσαρμοσμένους στα δεδομένα της θεωρίας τάσεων ζεύγους.

Σημειώνουμε ότι ο συμβατικός έλεγχος συρραφής (patch test) δεν είναι αρκετός για την αξιολόγηση ενός πεπερασμένου μοντέλου στα πλαίσια της παρούσας γενικευμένης θεωρίας της ελαστικότητας. Ο έλεγχος συρραφής μπορεί να επεκταθεί συμπεριλαμβάνοντας ένα επιπλέον πρόβλημα όπου οι μετατοπίσεις είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας (46) και τις συνοριακές συνθήκες (47). Σε αυτή την περίπτωση οι παραμορφώσεις και τάσεις μεταβάλλονται γραμμικά, ενώ οι καμπυλότητες και οι τάσεις ζεύγους είναι σταθερές.

3.4.1 Πρόβλημα 1

Θεωρούμε έναν ορθογωνικό παραλληλόγραμμο επίπεδο φορέα με πλευρές μήκους 24cm και 12cm αντίστοιχα, ο οποίος υπόκειται σε παραμόρφωση σύμφωνα τις εξισώσεις

$$u_x = -3xy \quad (84.α)$$

$$u_y = y^2 \quad (84.β)$$

Το μέτρο ελαστικότητας του Young είναι 2500Mpa και ο λόγος του Poisson 0.3. Χρησιμοποιούμε τον κάνναβο όπως στο Σχήμα 5, ο οποίος αποτελείται από δέκα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία με ακανόνιστο σχήμα. Περιγράφουμε τις μετατοπίσεις \tilde{u}_x , \tilde{u}_y και τις στροφές $\tilde{\omega}$ στο σύνορο σύμφωνα με τις εξισώσεις (84) και επιλύουμε. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τις αποκτηθείσες τιμές των μετατοπίσεων και στροφών καθώς και τις τιμές των συμβατικών τάσεων και τάσεων ζεύγους στους

εσωτερικούς κόμβους με τις ακριβείς τιμές. Και σε αυτή την περίπτωση το συγκεκριμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων έδωσε την ακριβή λύση στην υψηλότερη δυνατή ακρίβεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στην περίπτωση που περιγράψαμε δυνάμεις στο σύνορο ή θεωρήσαμε μεικτού τύπου συνοριακές συνθήκες. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το παρόν πεπερασμένο στοιχείο ικανοποιεί πλήρως τον αναβαθμισμένο έλεγχο συρραφής (couple stress patch test).

3.5 Διάτρητος δίσκος σε εφελκυσμό

Στη συνέχεια θεωρούμε το πρόβλημα του διάτρητου δίσκου που υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε με ακρίβεια το εντατικό πεδίο γύρω από την οπή όπου υπάρχει υψηλή συγκέντρωση τάσεων. Το πρόβλημα έχει επιλυθεί αναλυτικά από τον Mindlin [5], ο οποίος δίνει την λύση για τις γενικευμένες τάσεις ως εξής

$$\sigma_r = \frac{P}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{A}{r^2} - \left(\frac{6B}{r^4} + \frac{4C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (85.α)$$

$$+ \frac{2E}{lr} \left[\frac{3l}{r} K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \left(1 + \frac{6l^2}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{A}{r^2} + \left(\frac{6B}{r^4} - \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (85.β)$$

$$- \frac{2E}{lr} \left[\frac{3l}{r} K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \left(1 + \frac{6l^2}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = - \left(\frac{P}{2} + \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (85.γ)$$

$$+ \frac{E}{lr} \left[\frac{6l}{r} K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \left(1 + \frac{12l^2}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta r} = - \left(\frac{P}{2} + \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (85.δ)$$

$$+ \frac{E}{l^2} \left[\left(1 + \frac{6l^2}{r^2} \right) K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \left(\frac{3l}{r} + \frac{12l^3}{r^3} \right) K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$m_r = - \frac{2D}{r^3} \sin 2\theta \quad (85.ε)$$

$$- \frac{E}{l} \left[\frac{2l}{r} K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \left(1 + \frac{4l^2}{r^2} \right) K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$m_\theta = \left\{ \frac{2D}{r^3} + \frac{2E}{r} \left[K_0 \left(\frac{r}{l} \right) + \frac{2l}{r} K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right] \right\} \cos 2\theta \quad (85.στ)$$

όπου $K_0\left(\frac{r}{l}\right)$ και $K_1\left(\frac{r}{l}\right)$ είναι οι συναρτήσεις του Bessel, ενώ

$$A = -\frac{PR^2}{2}, \quad B = -\frac{PR^4(1-F)}{4(1+F)}, \quad C = \frac{PR^2}{2(1+F)}, \quad D = \frac{4P(1-\nu)R^2l^2}{1+F},$$

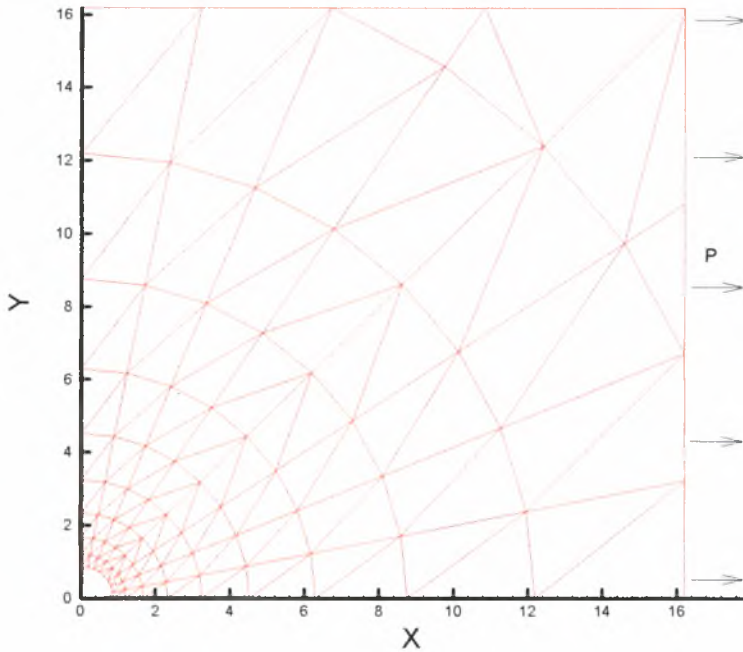
$$E = \frac{PRlF}{(1+F)K_1\left(\frac{R}{l}\right)}, \quad F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{R^2}{l^2} + \frac{2R}{l} \frac{K_0\left(\frac{R}{l}\right)}{K_1\left(\frac{R}{l}\right)}}$$
(86)

Μετά από την ολοκλήρωση των παραπάνω γενικευμένων τάσεων και πολλές πράξεις μπορεί να αποδειχθεί ότι οι μετατοπίσεις δίνονται αναλυτικά ως εξής

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{Pr}{2}(1-\cos 2\theta) - \frac{A}{r} + \left(\frac{3B}{r^3} + \frac{4C}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \cos 2\theta \right. \\ \left. - 2E \left(\frac{1}{r} K_0\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{2l}{r^2} K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right) \cos 2\theta - \nu \left(Pr + \frac{4C}{r} \cos 2\theta \right) \right]$$
(87.α)

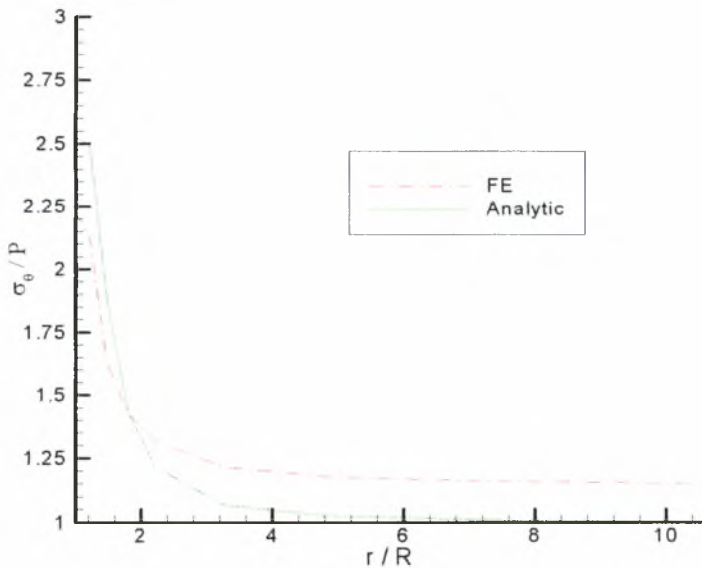
$$u_\theta = \frac{1+\nu}{E} \left[-\frac{Pr}{2} + \left(\frac{2B}{r^3} - \frac{2C}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \right. \\ \left. - E \left(\frac{2}{r} K_0\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{1}{l} K_1\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{4l}{r^2} K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right) + \frac{4\nu C}{r} \right] \sin 2\theta$$
(87.β)

Συγκρίνοντας τώρα την παραπάνω λύση με την αντίστοιχη στην κλασική θεωρία ελαστικότητας παρατηρούμε ότι η παρούσα λύση εξαρτάται από το χαρακτηριστικό μήκος l . Συγκεκριμένα καθώς $R/l \rightarrow \infty$ (ή ισοδύναμα $l \rightarrow 0$) η παραπάνω λύση εκφυλίζεται στην αντίστοιχη κλασική (37, 38), ενώ αντίθετα καθώς $R/l \rightarrow 1$ η επίδραση των τάσεων ζεύγους γίνεται όλο και πιο ισχυρή και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μείωση των τιμών του εντατικού πεδίου γύρω από την οπή. Ειδικότερα για $R/l = 3$ και για τιμές του ν μεταξύ του 0 και 0.5, η τιμή της μέγιστης τάσης, η οποία εμφανίζεται στην ακμή της οπής στο σημείο $\theta = 90^\circ$, από 3 που είναι στην κλασική θεωρία μειώνεται σε τιμές μεταξύ του 2,4 και 2,6.

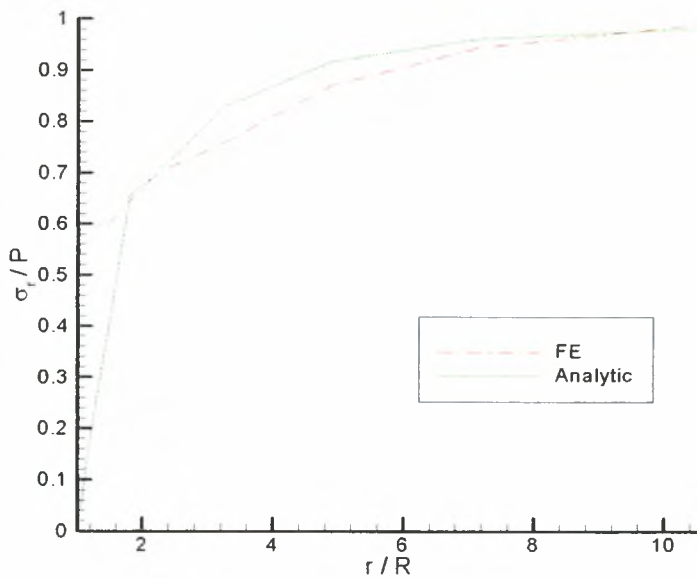


Σχήμα 8: Κάνναβος για το ένα τέταρτο του δίσκου

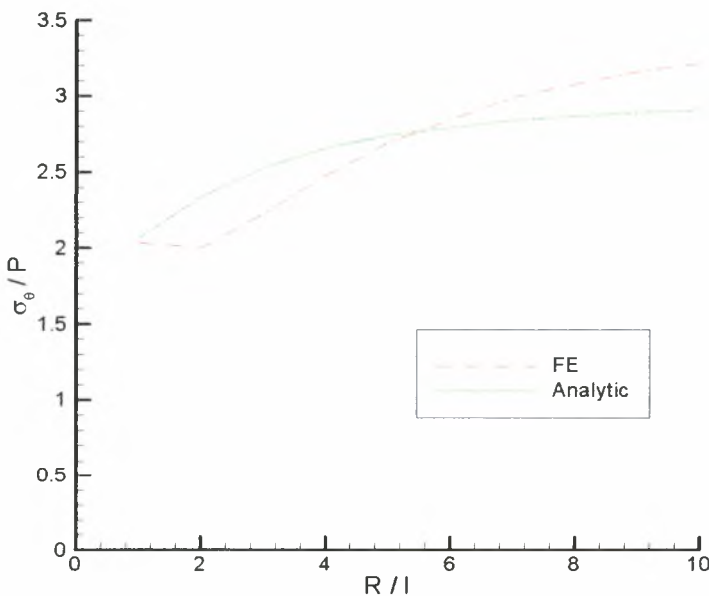
Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος μόνο ένα τέταρτο του δίσκου μοντελοποιήθηκε με πεπερασμένα στοιχεία όπως στο Σχήμα 8. Στο Σχήμα 9 παρατίθενται γραφικά η κατανομή της τάσης κατά μήκος τού άξονα y ($\theta = 90^\circ$), ενώ στο Σχήμα 10 δίνεται η κατανομή της τάσης κατά μήκος του άξονα x ($\theta = 0^\circ$) για $\nu = 0,3$ και $R/l = 3$.



Σχήμα 9: Κατανομή της τάσης κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα



Σχήμα 10: Κατανομή της τάσης κατά μήκος του οριζόντιου άξονα



Σχήμα 11: Η αλλαγή του εντατικού πεδίου με μεταβολή του l

Τέλος, στο Σχήμα 11 απεικονίζεται η μεταβολή της μέγιστης τάσης σε συνάρτηση με τις τιμές του χαρακτηριστικού μήκους l καθώς αυτό μεταβάλλεται από $R/l=1$ μέχρι $R/l=10$. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι το παρόν πεπερασμένο στοιχείο γενικά ακολουθεί την ακριβή λύση σε ικανοποιητικό βαθμό. Καλύτερη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί με ένα πιο πυκνό κάρναβο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε η κλασική θεωρία της επίπεδης ελαστικότητας και το τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης. Αναπτύχθηκε ο αντίστοιχος κώδικας σε γλώσσα Fortran 90 και έγινε η διεπαφή με τον γενικότερο κώδικα πεπερασμένων στοιχείων GRADFE [3]. Εφαρμόστηκε ο έλεγχος συρραφής (patch test) για την αξιολόγηση του συγκεκριμένου στοιχείου, το οποίο ικανοποίησε πλήρως όλα τα προβλήματα ελέγχου. Στη συνέχεια το στοιχείο χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος του διάτρητου δίσκου σε εφελκυσμό για τον υπολογισμό του εντατικού πεδίου γύρω από την οπή. Τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία φαίνεται να προσεγγίζουν την αναλυτική λύση καθώς ο κάναβος γίνεται όλο και πιο πυκνός και το μέγεθος των στοιχείων μικραίνει.

Παρουσιάστηκε αναλυτικά η επίπεδη ελαστική θεωρία τάσεων ζεύγους του Mindlin [5] και αναπτύχθηκε ένα τριγωνικό στοιχείο με δεκαοχτώ βαθμούς ελευθερίας. Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων είναι πολύ μεγαλύτερη σε σύγκριση με τις αντίστοιχες στην κλασική θεωρία. Παρόλα αυτά πραγματοποιήθηκαν όλοι οι απαραίτητοι υπολογισμοί και μάλιστα για την απόκτηση του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου όλοι οι υπολογισμοί έγιναν αναλυτικά. Αναπτύχθηκε ο αντίστοιχος κώδικας και ενσωματώθηκε στον γενικότερο κώδικα GRADFE [3]. Εφαρμόστηκε ο έλεγχος συρραφής (patch test) όπως στην κλασική θεωρία και όπως αναμενόταν το συγκεκριμένο στοιχείο ικανοποίησε όλα τα προβλήματα ελέγχου. Επιπλέον επεκτάθηκε ο έλεγχος συρραφής ώστε να καλύψει όλες τις απαιτήσεις της γενικευμένης θεωρίας τάσεων ζεύγους. Συγκεκριμένα, προστέθηκε άλλο ένα πρόβλημα με τις μετατοπίσεις να είναι τετραγωνικά πολώνυμα και τις συνήθεις τάσεις να μεταβάλλονται γραμμικά, ενώ οι τάσεις ζεύγους να είναι σταθερές. Το προτεινόμενο στοιχείο έδωσε και σε αυτή την περίπτωση την ακριβή λύση ικανοποιώντας έτσι το σύνολο του αναβαθμισμένου ελέγχου συρραφής (couple stress patch test). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην κλασική θεωρία η ικανοποίηση του συνόλου του ελέγχου συρραφής από ένα πεπερασμένο στοιχείο σημαίνει ότι το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να δώσει αξιόπιστες λύσεις για κάθε πρόβλημα, οι οποίες συγκλίνουν στην πραγματική απάντηση καθώς ο αριθμός των στοιχείων στον κάναβο μεγαλώνει και το μέγεθος των στοιχείων τείνει στο μηδέν.

Το προτεινόμενο στοιχείο τάσεων ζεύγους χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη του εντατικού πεδίου γύρω από μια μικρή οπή σε ένα επίπεδο φορέα ο οποίος υπόκειται σε εφελκυσμό. Σύμφωνα με την αναλυτική λύση του Mindlin [5] η διανομή των συγκεντρωμένων τάσεων γύρω από την οπή εξαρτάται από το χαρακτηριστικό μήκος l , το οποίο συνδέεται με την μικροδομή του υλικού. Όταν η τιμή του χαρακτηριστικού μήκους l πλησιάζει την τιμή της διαμέτρου της οπής τότε η μέγιστη τάση που προκύπτει είναι περίπου 20% μικρότερη αυτής που δίνει η κλασική θεωρία. Επίσης, η λύση εξαρτάται, σε λιγότερο βαθμό όμως, και από την τιμή του λόγου Poisson ν . Τα αποτελέσματα που έδωσε η ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία φαίνεται να συμφωνούν αρκετά καλά με την αναλυτική λύση.

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι επιδόσεις του προτεινόμενου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων κρίνονται ικανοποιητικές. Πέραν τούτου όμως το

στοιχείο θα πρέπει να δοκιμασθεί περισσότερο επιλύοντας και άλλα πρακτικά προβλήματα. Επίσης μελλοντικές εργασίες στο μέλλον θα πρέπει να αναζητήσουν ένα πεπερασμένο στοιχείο με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια και αν είναι δυνατόν με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας ώστε να είναι ακόμη πιο οικονομικό και εύχρηστο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ε. Ε. Γδούτος, Θεωρία Ελαστικότητας, Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη Α.Ε., Θεσσαλονίκη, 1995.
- [2] Μ. Παπαδρακάκης, Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2001.
- [3] Ε. Προβίδας, GRADFE: Κώδικας Πεπερασμένων Στοιχείων Κλίσεων, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2004.
- [4] Γ. Ι. Τσαμασφύρος, Ε. Θεοτόκογλου, Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, Αθήνα, 1994.
- [5] R. D. Mindlin, Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations, *Exp. Mech.*, 1, 1-7, 1963.
- [6] E. Providas, An assessment of displacement finite element for couple stress elasticity, *Proc. of 7th Int. Conf. on Computational Structures Technology*, eds. B.H.V. Topping and C.A. Mota Soares, Lisbon 7-9 Sept. 2004, Civil-Comp Press, 2004.
- [7] E. Providas, M. A. Kattis, Finite element method in plane Cosserat elasticity, *Computers & Structures*, 80, 2059-2069.
- [8] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw-Hill, 1987.
- [9] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*, Third Edition, Pergamon Press, 1982.
- [10] O. C. Zienkiewicz., *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill, 1986.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

I. 1 Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης

```
      SUBROUTINE ELEMT (IE, IELEQ, N, NG, NSPACE, NPROP, NSLD, NELFRE,
1      COORD, ELPROP, ELSLD, S, C, D, NUO, NUS3)
C      * * * * *
C      GENERATE ELEMENT EQUATIONS
C      * * * * *
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
      DIMENSION COORD (N, NSPACE), ELPROP (NPROP), ELSLD (NSLD),
1      S (NELFRE, NELFRE), C (NELFRE), D (NELFRE),
2      B (3, NELFRE), DP (3, 3),
8      COVE (3), CONT (3)
C DIMENSION FW (9), FZ (9, 9), FV1 (9), FV2 (9)
      COMMON /ELDATA/ AREA, SL (3), CS (3, 2),
1      Z11, Z21, Z31, Z12, Z22, Z32
C
C      AREA = Element area
C      SL (I) = Length of I-side
C      CS (I, 1), CS (I, 2) = Directional cosines for side I
C      dofs: [ u11 u21 u12 u22 u13 u23 ]
C
C      Compute element geometry
C
      CALL ELGEOM (N, NSPACE, COORD)
C
C      Assign element properties
C
      E = ELPROP (1)
      V = ELPROP (2)
      G = E / (2.0D0 * (1.0D0 + V))
C
C      Define strain-displacement matrix B
C
      B (1, 1) = Z11
      B (1, 2) = 0.d0
      B (1, 3) = Z21
      B (1, 4) = 0.d0
      B (1, 5) = Z31
      B (1, 6) = 0.d0
      B (2, 1) = 0.d0
      B (2, 2) = Z12
      B (2, 3) = 0.d0
      B (2, 4) = Z22
      B (2, 5) = 0.d0
      B (2, 6) = Z32
      B (3, 1) = 0.5d0 * Z12
      B (3, 2) = 0.5d0 * Z11
      B (3, 3) = 0.5d0 * Z22
      B (3, 4) = 0.5d0 * Z21
      B (3, 5) = 0.5d0 * Z32
      B (3, 6) = 0.5d0 * Z31
C
C      Define constitutive matrix with ref. to Cartesian coord.
C      Plane strain
C
      FC = E / ((1.0D0 - 2.0D0 * V) * (1.0D0 + V))
```

```

DP(1,1) = FC*(1.D0-V)
DP(1,2) = FC*V
DP(1,3) = 0.D0
DP(2,2) = FC*(1.D0-V)
DP(2,3) = 0.D0
DP(3,3) = E/(1.D0+V)
CALL MFULSY(DP,3,0)
C
C   ***   Equilibrium equations   ***
C
C   IF (IELEQ.EQ.0) THEN
C
C       Compute the 6x6 element stiffness matrix
C
C       CALL BTDB(DP,B,S,3,NELFRE,0,1.D0)
C       CALL MSMULT(AREA,S,NELFRE,NELFRE)
C
C   ***   Post solution calculations   ***
C
C   ELSEIF (IELEQ.EQ.1) THEN
C
C       Compute strains and stresses
C
C-Element centroidal point
Z1 = 1.D0/3.D0
Z2 = Z1
CALL STR(Z1,Z2,B,3,NELFRE,D,DP,COVE,CONT,
2      COORD,N,NSPACE,XC,YC)
IF (IE.EQ.1) THEN
WRITE(NUO,5000) NSPACE
ENDIF
WRITE(NUO,5020) IE,XC,YC,(COVE(I),I=1,3),(CONT(I),I=1,3)
C-Element node 1
Z1 = 1.D0
Z2 = 0.D0
CALL STR(Z1,Z2,B,3,NELFRE,D,DP,COVE,CONT,
2      COORD,N,NSPACE,XC,YC)
WRITE(NUS3) XC+D(1),YC+D(2),(COVE(I),I=1,3),(CONT(I),I=1,3)
C-Element node 2
Z1 = 0.D0
Z2 = 1.D0
CALL STR(Z1,Z2,B,3,NELFRE,D,DP,COVE,CONT,
2      COORD,N,NSPACE,XC,YC)
WRITE(NUS3) XC+D(3),YC+D(4),(COVE(I),I=1,3),(CONT(I),I=1,3)
C-Element node 3
Z1 = 0.D0
Z2 = 0.D0
CALL STR(Z1,Z2,B,3,NELFRE,D,DP,COVE,CONT,
2      COORD,N,NSPACE,XC,YC)
WRITE(NUS3) XC+D(5),YC+D(6),(COVE(I),I=1,3),(CONT(I),I=1,3)
121 CONTINUE
C
C   ELSE
C
C   ENDIF
C
C   RETURN
5000 FORMAT('0*** OUTPUT OF STRAINS AND STRESSES ***'/

```



```

1      ' ELEM ', I2, ' CENTROIDAL COORDINATES '/
3      ' ', ' 3 STRESSES -' )
5020 FORMAT(' ', I4, 1X, 2(1X, F10.4), 1X, 3(1X, E13.6)/
1      28X, 1X, 3(1X, E13.6) )
END

```

I.2 Το τριγωνικό στοιχείο τάσεων ζεύγους

```

SUBROUTINE ELEM(IE, IELEQ, N, NG, NSPACE, NPROP, NSLD, NELFRE,
1      COORD, ELPROP, ELSLD, S, C, D, NUO, NUS3 )
C      * * * * *
C      GENERATE ELEMENT EQUATIONS
C      * * * * *
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H, O-Z)
DIMENSION COORD(N, NSPACE), ELPROP(NPROP), ELSLD(NSLD),
1      S(NELFRE, NELFRE), C(NELFRE), D(NELFRE),
2      B(3, 6), BH(2, 12),
3      DP(3, 3), DH(2, 2),
4      BRI(3, 12), BRITDP(12, 3),
5      SKU(6, 6), SKUA(12, 6), SKR(12, 12), SKH(12, 12),
6      TM(18, 18),
7      SO(18, 18), CO(18), DLO(18),
8      COVE(3), CONT(3), COVK(2), CONM(2)
C      DIMENSION FW(18), FZ(18, 18), FV1(18), FV2(18)
COMMON /ELDATA/ AREA, SL(3), CS(3, 2),
1      Z11, Z21, Z31, Z12, Z22, Z32
C
C      AREA = Element area
C      SL(I) = Length of I-side
C      CS(I, 1), CS(I, 2) = Directional cosines for side I
C      coefs: [ a41 a42 a51 a52 a61 a62 a71 a72 a81 a82 a91 a92 ]
C      dofs: [ u11 u21 w1 u12 u22 w2 u13 u23 w3 ]
C
NCOEFS = 12
NODOF = 18
C
C      Compute element geometry
C
CALL ELGEOM(N, NSPACE, COORD)
C
C      Compute generalized dof to real dof transformation matrix
C
CALL TRANSF(TM, NODOF, NELFRE)
C
C      Assign element properties
C
E = ELPROP(1)
V = ELPROP(2)
FL = ELPROP(3)
G = E / (2.D0 * (1.D0 + V))
C
C      Define generalised strain-displacement matrices, B, Bcurl, Bhat
C
B(1, 1) = Z11
B(1, 2) = 0.d0
B(1, 3) = Z21
B(1, 4) = 0.d0
B(1, 5) = Z31

```

```

B(1,6) = 0.d0
B(2,1) = 0.d0
B(2,2) = Z12
B(2,3) = 0.d0
B(2,4) = Z22
B(2,5) = 0.d0
B(2,6) = Z32
B(3,1) = 0.5d0*Z12
B(3,2) = 0.5d0*Z11
B(3,3) = 0.5d0*Z22
B(3,4) = 0.5d0*Z21
B(3,5) = 0.5d0*Z32
B(3,6) = 0.5d0*Z31
C      Bcurl and Bhat are not used explicitly here
C
C      Define micropolar constitutive matrices D and Dhat
C      with reference to Cartesian coordinates
C      Plane strain
C
FC = E/((1.D0-2.D0*V)*(1.D0+V))
DP(1,1) = FC*(1.D0-V)
DP(1,2) = FC*V
DP(1,3) = 0.D0
DP(2,2) = FC*(1.D0-V)
DP(2,3) = 0.D0
DP(3,3) = E/(1.D0+V)
CALL MFULSY(DP,3,0)
C
FC = 4.D0*G*FL*FL
DH(1,1) = FC
DH(1,2) = 0.D0
DH(2,1) = 0.D0
DH(2,2) = FC
C
C      *** Equilibrium equations ***
C
IF (IELEQ.EQ.0) THEN
C
C      Compute the 18x18 generalized element stiffness matrix
C      | Ku      Kua|
C      | sym.    Kaa|
C      Transfer to the 18x18 element stiffness matrix.
C
1. Compute BTDB
C
CALL BTDB(DP,B,SKU,3,6,0,1.D0)
CALL MSMULT(AREA,SKU,6,6)
C
2. Compute BTDBcurl
C
FC = AREA/3.D0
FCD2 = 0.5D0*FC
BRI(1,1) = FC*(Z21+Z31)
BRI(1,2) = 0.D0
BRI(1,3) = FC*(Z31+Z11)
BRI(1,4) = 0.D0
BRI(1,5) = FC*(Z11+Z21)
BRI(1,6) = 0.D0

```

```

BRI(1,7) = 0.D0
BRI(1,8) = 0.D0
BRI(1,9) = 0.D0
BRI(1,10) = 0.D0
BRI(1,11) = 0.D0
BRI(1,12) = 0.D0
C
BRI(2,1) = 0.D0
BRI(2,2) = FC*(Z22+Z32)
BRI(2,3) = 0.D0
BRI(2,4) = FC*(Z32+Z12)
BRI(2,5) = 0.D0
BRI(2,6) = FC*(Z12+Z22)
BRI(2,7) = 0.D0
BRI(2,8) = 0.D0
BRI(2,9) = 0.D0
BRI(2,10) = 0.D0
BRI(2,11) = 0.D0
BRI(2,12) = 0.D0
C
BRI(3,1) = FCD2*(Z22+Z32)
BRI(3,2) = FCD2*(Z21+Z31)
BRI(3,3) = FCD2*(Z32+Z12)
BRI(3,4) = FCD2*(Z31+Z11)
BRI(3,5) = FCD2*(Z12+Z22)
BRI(3,6) = FCD2*(Z11+Z21)
BRI(3,7) = 0.D0
BRI(3,8) = 0.D0
BRI(3,9) = 0.D0
BRI(3,10) = 0.D0
BRI(3,11) = 0.D0
BRI(3,12) = 0.D0
CALL MTMULT(BRI,DP,BRITDP,3,NCOEFS,3)
CALL MMULT(BRITDP,B,SKUA,NCOEFS,3,6)
C
C 3. Compute (Bcurl)T*D*Bcurl and (Bhat)T*(Dhut)*Bhat
C
CALL KCURL(DP,3,SKR,NCOEFS,NCOEFS)
CALL KHAT(DH,2,SKH,NCOEFS,NCOEFS)
C
C Form generalized stiffness matrix
C
DO 30 I=1,6
DO 30 J=1,I
30 SO(I,J) = SKU(I,J)
DO 32 I=1,12
DO 32 J=1,6
32 SO(6+I,J) = SKUA(I,J)
DO 34 I=1,12
DO 34 J=1,I
34 SO(6+I,6+J) = SKR(I,J) + SKH(I,J)
CALL MFULSY(SO,NODOF,1)
C
C Form final stiffness matrix by transformation
C
CALL BTDB(SO,TM,S,NODOF,NELFRE,0,1.D0)
C
C *** Post solution calculations ***

```

```

C
ELSEIF (IELEQ.EQ.1) THEN
C
C      Compute Cartesian components of strains and stresses
C
      CALL MVMULT(TM,D,DLO,NODOF,NELFRE)
C-Element node 1
      COVE(1) = D(3)
      COVE(2) = D(6)
      COVE(3) = 0.5*(D(4)+D(5))
      Z1 = 1.D0
      Z2 = 0.D0
      CALL STR(Z1,Z2,3,BH,2,NCOEFS,DLO,NODOF,DP,DH,
1          COVE,COVK,CONT,CONM,
2          COORD,N,NSPACE,XC,YC)
      WRITE(NUS3) XC,YC,(COVE(I),I=1,3),(COVK(I),I=1,2),
1          (CONT(I),I=1,3),(CONM(I),I=1,2)
C-Element node 2
      COVE(1) = D(9)
      COVE(2) = D(12)
      COVE(3) = 0.5*(D(10)+D(11))
      Z1 = 0.D0
      Z2 = 1.D0
      CALL STR(Z1,Z2,3,BH,2,NCOEFS,DLO,NODOF,DP,DH,
1          COVE,COVK,CONT,CONM,
2          COORD,N,NSPACE,XC,YC)
      WRITE(NUS3) XC,YC,(COVE(I),I=1,3),(COVK(I),I=1,2),
1          (CONT(I),I=1,3),(CONM(I),I=1,2)
C-Element node 3
      COVE(1) = D(15)
      COVE(2) = D(18)
      COVE(3) = 0.5*(D(16)+D(17))
      Z1 = 0.D0
      Z2 = 0.D0
      CALL STR(Z1,Z2,3,BH,2,NCOEFS,DLO,NODOF,DP,DH,
1          COVE,COVK,CONT,CONM,
2          COORD,N,NSPACE,XC,YC)
      WRITE(NUS3) XC,YC,(COVE(I),I=1,3),(COVK(I),I=1,2),
1          (CONT(I),I=1,3),(CONM(I),I=1,2)
      if (ie.eq.1) then
          do 123 i=1,3
              print *, cs(i,1), cs(i,2)
123          continue
          do 133 i=1,18
133              write(*,*) i, d(i), dlo(i)
          endif
C
ELSE
C
ENDIF
C
5000 FORMAT('0*** OUTPUT OF GENERALIZED STRAINS AND STRESSES ***'/
1 ' ELEM ',I2,' CENTROIDAL COORDINATES '/
3 ' ',', ' 3 STRESSES -', ' 2 COUPLES' )
5020 FORMAT(' ',I4,2X,2(1X,F10.4)/
1 ' ',6X,3(1X,E13.6),2X,2(1X,E13.6)/
2 ' ',6X,3(1X,E13.6),2X,2(1X,E13.6) )
C

```

RETURN
END



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085944