

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ του
Κορδολέμη Αλέξη

Μελέτη σε διαφορετικές κλίμακες και σχεδιασμός σύνθετων υλικών με βέλτιστες αντοχές



Τριμελής Επιτροπή:

Γιαννακόπουλος Αντώνιος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

Περδικάρης Φίλιππος, Καθηγητής

Νικόλαος Ηλιού, Αναπληρωτής Καθηγητής

Βόλος, 20/07/2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4848/1
Ημερ. Εισ.: 04-10-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2006
ΚΟΡ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	σελ 1
2. ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗΣ	σελ 2
2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ	σελ 2
2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	σελ18
3. ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΟΣΟΣΤΩΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	σελ 21
3.1 ΑΝΑΛΥΣΗ	σελ 21
3.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ –ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	σελ 23
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	σελ36
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ	

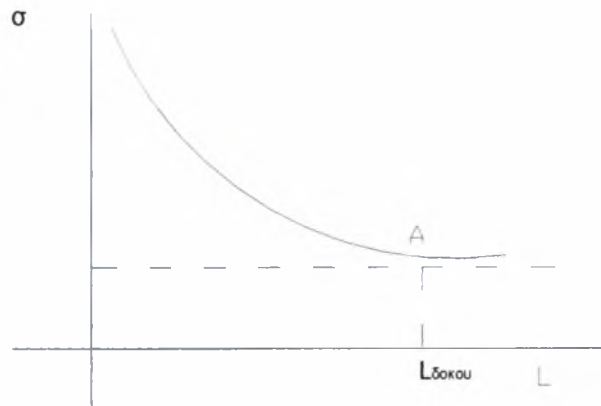
Μελέτη σε διαφορετικές κλίμακες και σχεδιασμός σύνθετων υλικών με βέλτιστες αντοχές

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σαν σύνθετο υλικό μπορεί κανείς να ορίσει οποιοδήποτε υλικό του οποίου η σύσταση αποτελείται από δυο τουλάχιστον επιμέρους υλικά με διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες. Το κρίσιμο ερώτημα που τίθεται κατά την μελέτη και το σχεδιασμό των σύνθετων υλικών είναι με ποιο τρόπο και με ποια αναλογία θα αναμιχθούν τα επιμέρους υλικά (τον οποίων οι ιδιότητες και τα τεχνικά χαρακτηριστικά είναι συνήθως γνωστά), ούτως ώστε να λάβουμε ένα τελικό προϊόν, το οποίο αποκαλείται πλέον σύνθετο υλικό, με τις επιθυμητές βελτιστοποιημένες μηχανικές κυρίως, ιδιότητες. Είναι αποδεδειγμένο ότι ένας σωστός σχεδιασμός σύνθετου υλικού οδηγεί σε προϊόντα με καλύτερη μηχανική συμπεριφορά από ότι τα επιμέρους χρησιμοποιούμενα υλικά. Από τη στιγμή, λοιπόν, που επιδιώκουμε την μελέτη της αντοχής των υλικών, οφείλουμε να λάβουμε υπ' όψιν ορισμένες σταθερές των υλικών που σχετίζονται άμεσα με την αντοχή τους. Οι σταθερές που εμπλέκονται άμεσα στην μηχανική συμπεριφορά των τοπικά ισότροπων σύνθετων υλικών είναι το μέτρο ελαστικότητας, E , και ο λόγος του Poisson ν . Τις δύο αυτές παραμέτρους είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε ή και να υπολογίσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια χρησιμοποιώντας την κλασσική θεωρία των σύνθετων υλικών (π.χ Mori-Tanaka) Στην προσπάθειά μας, λοιπόν, να μελετήσουμε την μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών οφείλουμε να δώσουμε πειστικές απαντήσεις σχετικά με τις τιμές αυτών των παραμέτρων και πως αυτές, εν γένει, επηρεάζονται κατά την σύνθεση του νέου υλικού.

Κάνοντας μια προσπάθεια να εμβαθύνουμε στην μελέτη των σύνθετων υλικών, οφείλουμε να λάβουμε υπ' όψιν μας μια καινούρια σταθερά που χαρακτηρίζει το νέο υλικό, και αυτή η σταθερά είναι το εσωτερικό μήκος του υλικού. Το εσωτερικό μήκος είναι μια σταθερά που χαρακτηρίζει τα σύνθετα υλικά και έχει να κάνει κατά κύριο λόγο με την διάσταση των επιμέρους υλικών. Έτσι για π.χ. στο σκυρόδεμα σαν εσωτερικό μήκος μπορεί να χαρακτηριστεί η διάσταση του αδρανούς, ενώ σε μια οπτοπλινθοδομή η διάσταση του οπτόπλινθου. Πρόκειται ουσιαστικά για ένα μήκος που έχει αποτέλεσμα ένα ζεύγος δυνάμεων, μια μικροροπή, η οποία δρά εσωτερικά στο υλικό και παίζει σημαντικό ρόλο στην μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, όπως θα φανεί και στα επόμενα.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ακόλουθο διάγραμμα από το οποίο μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι όσο το μήκος της δοκού ή γενικότερα του δομικού στοιχείου πλησιάζει το μήκος του αδρανούς, τόσο η αντοχή της δοκού ή του στοιχείου αυξάνει. [Bazant, 2002] Αξίζει να σημειώσουμε ότι από το σημείο A του διαγράμματος και δεξιά ισχύουν οι κλασσικές θεωρίες της Αντοχής των Υλικών.



2.ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗΣ

2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ



Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται ,θεωρώντας ότι έχω έναν πρόβολο , είναι:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (2)$$

(μακροσκοπικές συνθήκες ισορροπίας)

Μ:ροπή κάμψως , V:τέμνουσα , q(x):καταναμημένο φορτίο

Οι τάσεις κατά Cauchy :

$$\tau_x = E * \varepsilon_x \quad (3)$$

(αγνοώντας το εσωτερικό μήκος λόγω επιφάνειας)

E: μέτρο ελαστικότητας, ε_x : αξονική τροπή

οι τάσεις δίπολου(double stresses):

$$\mu_x = g^2 * E * \frac{d^2 \varepsilon_x}{dx^2} \quad (4)$$

το g είναι η παράμετρος εσωτερικού μήκους που αφορά τον όγκο, βρίσκεται στο τετράγωνο μόνο για λόγους διαστάσεων, το δε κ είναι η καμπυλότητα της δοκού κατά μήκος του άξονα x και είναι $\varepsilon_x = \kappa * y$

Η δοκός είναι ομογενής, επομένως, E, και g είναι σταθερά

Η εξίσωση ισορροπίας που ικανοποιεί το πρόβλημα είναι:

$$E * I * (u^{(4)} - g^2 * u^{(6)}) = -q(x) \quad (5)$$

I: Ροπή αδρανείας κατά z της διατομής (συμμετρική ως προς y)

Η εξίσωση αυτή προκύπτει αν λάβει κανείς υπόψιν τις εξής παραδοχές :

Ο άξονας των x θεωρείται ως κεντροβαρικός άρα :

$$\int_A y dA = 0 \quad (6)$$

A: εμβαδόν της διατομής (σταθερό κατά x)

Η ισορροπία δηλώνει ότι το αποτέλεσμα των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενικό (δηλαδή μηδέν αξονική δύναμη) και ότι οι ροπές πρέπει να είναι ίσες με την καμπτική ροπή M, δηλαδή :

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (7)$$

και

$$\int_A \sigma_x * y dA = -M \quad (8)$$

τότε η εξίσωση των πραγματικών τάσεων θα είναι:

$$\sigma_x = \tau_x + \mu_x = E^*(\varepsilon_x - g^2 * \varepsilon_x'') \quad (9)$$

άρα η εξίσωση (8) γίνεται:

$$E^*(\kappa - g^2 * \frac{d^2 \kappa}{dx^2}) * \int_A y^2 dA = -M \quad (10)$$

Σε καλή προσέγγιση η καμπυλότητα συνδέεται με τις μετακινήσεις $u(x)$ του άξονα της δοκού με την ακόλουθη σχέση:

$$\kappa = -\frac{d^2 u}{dx^2} \quad (11)$$

$\int_A y^2 dA$ είναι η ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον κεντροβαρικό άξονα x , και

A είναι το εμβαδό της διατομής της δοκού. Επομένως η εξίσωση (10) γίνεται :

$M = E^* I^* (u'' - g^2 * u^{(4)})$, λαμβάνοντας τώρα υπόψιν την συνδυασμένη εξίσωση

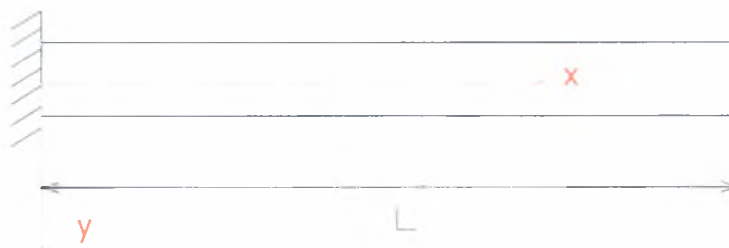
ισορροπίας $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x)$ επιλύοντας καταλήγει στην εξίσωση (5) που αποτελεί και την κύρια εξίσωση ισορροπίας στο πρόβλημα μας. Μια λύση της ομογενούς της

εξίσωσης (5) ($q(x)=0$, δηλαδή συγκεντρωμένα φορτία) είναι η ακόλουθη [S.Papargyri-Beskou, K.G.Tsepoura, D.Polyzos, D.E.Beskos]:

$$u(x) = c_1 * x^3 + c_2 * x^2 + c_3 * x + c_4 + c_5 * g^{-4} * \sinh\left(\frac{x}{g}\right) + c_6 * g^{-4} * \cosh\left(\frac{x}{g}\right) \quad (12)$$

Οι κατωτέρω συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μας οδηγούν σε διάφορες λύσεις του προβλήματος

Περίπτωση συγκεντρωμένης ροπής στο άκρο της δοκού:



$$x=0 : u(0) = 0 \quad (\text{I}) \quad (\text{δεν υπάρχει μετακίνηση στην πάκτωση})$$

$$u'(0) = 0 \quad (\text{II}) \quad (\text{κλίση στην πάκτωση})$$

$$u''(0) = 0 \quad (\text{III}) \quad (\text{δεν υπάρχει καμπυλότητα στην πάκτωση})$$

$$x=L: M(L)=M \quad (\text{IV}) \quad (\text{ροπή στο άκρο})$$

$$V(L)=0 \quad (\text{V}) \quad (\text{απουσία τέμνουσας})$$

$$m(L)=0 \quad (\text{VI}) \quad (\text{για μαλακό άκρο της δοκού})$$

$$u''(L) = 0 \quad (\text{VII}) \quad (\text{για σκληρό άκρο της δοκού})$$

Σημείωση: $m = \mu_x$ είναι οι συνοριακές τάσεις διπόλου

Περίπτωση μαλακού άκρου της δοκού

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_4 + g^4 * c_6 = 0, \quad u'(0) = 0 \Rightarrow c_3 + g^3 * c_5 = 0$$

$$u''(0) = 0 \Rightarrow 2 * c_2 + g^2 * c_6 = 0,$$

$$M = E * I * (u'' - g^2 * u^{(4)}) \Rightarrow \dots \Rightarrow M = E * I * (6 * c_1 * \chi + 2 * c_2)$$

$$M(L) = M \Rightarrow M = E * I * (6 * c_1 * L + 2 * c_2) \Rightarrow \frac{M}{E * I} = 6 * c_1 * L + 2 * c_2$$

$$\text{Είναι: } V = E * I * (u''' - g^2 * u^{(5)}) \Rightarrow \dots \Rightarrow V = 6 * E * I * c_1$$

$$\text{Άρα } V(L) = 0 \Rightarrow 6 * E * I * c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ (αφού προφανώς } E * I \neq 0 \text{)}$$

Είναι :

$$m = -E * I * g^2 * u''' \Rightarrow m(x) = -E * I * g^2 * \left[6 * c_1 + g * c_5 * \cosh\left(\frac{x}{g}\right) + g * c_6 * \sinh\left(\frac{x}{g}\right) \right]$$

$$m(L)=0 \Rightarrow 6 * c_1 + g * c_5 * \cosh\left(\frac{L}{g}\right) + g * c_6 * \sinh\left(\frac{L}{g}\right) = 0,$$

από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές όλων των σταθερών

$$c_2 = \frac{M}{2 * E * I}, \quad c_6 = \frac{-M}{g^2 * E * I}, \quad c_5 = \frac{M * \tanh \frac{L}{g}}{g^2 * E * I}$$

$$c_3 = \frac{-M * g * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{E * I}, \quad \text{και} \quad c_4 = \frac{g^2 * M}{E * I}$$

Επομένως η αρχική μας εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$u(x) = \frac{M * x^2}{2 * E * I} - \frac{M * g * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) * x}{E * I} + \frac{g^2 * M}{E * I} + \frac{M * g^2 * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) * \sinh\left(\frac{x}{g}\right)}{E * I} - \frac{M * g^2 * \cosh\left(\frac{x}{g}\right)}{E * I}$$

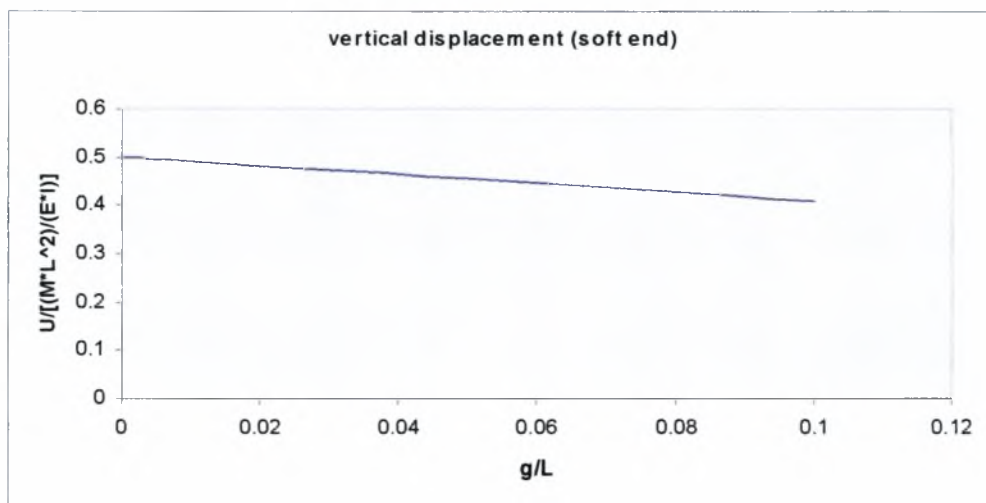
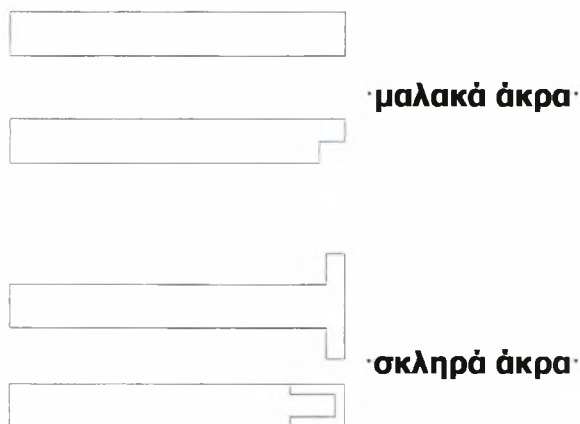
Η παραπάνω εξίσωση για την τιμή $x=L$ παίρνει την μορφή:

$$\frac{E * I}{M * L^2} * U = \frac{1}{2} - \left(\frac{g}{L}\right) * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) + \left(\frac{g}{L}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)^2 * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) * \sinh\left(\frac{L}{g}\right) - \left(\frac{g}{L}\right)^2 * \cosh\left(\frac{L}{g}\right)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι εάν $g=0$ τότε $U = \frac{M * L^2}{2 * E * I}$ που είναι το

βέλος κάμψης στο άκρο του προβόλου από την κλασική θεωρία χωρίς να λάβουμε υπ'οψιν καθόλου την έννοια του εσωτερικού μήκους.

Υλοποίηση 'μαλακού' και 'σκληρού' άκρου:



Το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί την γραφική παράσταση της τελευταίας εξίσωσης. Είναι φανερό από το διάγραμμα ότι όσο το εσωτερικό μήκος λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με το μήκος του δομικού στοιχείου τόσο μικρότερο είναι το βέλος κάμψης στο άκρο του στοιχείου. Έτσι για παράδειγμα, βλέπουμε ότι για λόγο $g/L=0.1$, δηλαδή όταν το εσωτερικό μήκος είναι το 10% του μήκους του στοιχείου, το κανονικοποιημένο βέλος κάμψης από την τιμή 0.5 μειώνεται στην τιμή 0.4, μιλάμε δηλαδή για μια μείωση της τάξεως του 20% (ο πρόβολος είναι πιο άκαμπτος).

Περίπτωση σκληρού άκρου της δοκού:

Οι τιμές των σταθερών στην εξίσωση του βέλους κάμψεως διαφοροποιούνται και γίνονται:

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_4 + g^4 * c_6 = 0, \quad u'(0) = 0 \Rightarrow c_3 + g^3 * c_5 = 0$$

$$u''(0) = 0 \Rightarrow 2 * c_2 + g^2 * c_6 = 0, \quad M(L) = M \Rightarrow 6 * c_1 * L + 2 * c_2 = \frac{M}{E * I}$$

$$V(L) = 0 \Rightarrow 6 * c_1 * E * I = 0, \quad u''(L) = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{M * \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right]}{E * I * g^2 * \sinh\left(\frac{L}{g}\right)}$$

$c_1 = 0$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{M}{2 * E * I}, \quad c_3 = \frac{-M * g * \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right]}{E * I * \sinh\left(\frac{L}{g}\right)}$$

$$c_4 = \frac{g^2 * M}{E * I}, \quad c_5 = \frac{M * \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right]}{E * I * g^2 * \sinh\left(\frac{L}{g}\right)}, \quad c_6 = -\frac{M}{g^2 * E * I}$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση του βέλους κάμψης μορφώνεται τώρα ως εξής:

$$u(x) = \frac{P \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{M \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{-M \cdot g \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right] \cdot x}{E \cdot I \cdot \sinh\left(\frac{L}{g}\right)} - \frac{g^2 \cdot M}{E \cdot I} - \frac{M \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right] \cdot \sinh\left(\frac{x}{g}\right)}{E \cdot I \cdot g^2 \cdot \sinh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{g^2 \cdot M \cdot \cosh\left(\frac{x}{g}\right)}{E \cdot I}$$

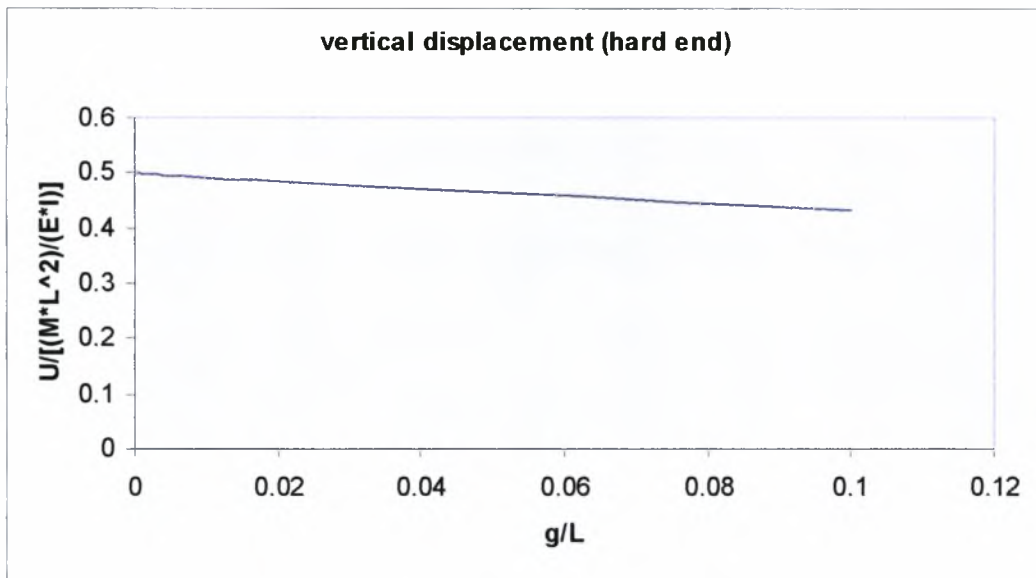
Από την παραπάνω εξίσωση για $x=L$ παίρνουμε την τιμή του βέλους κάμψης στο άκρο της δοκού και θα είναι:

$$u(L) = \frac{-P \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{-M \cdot g \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right] \cdot L}{E \cdot I \cdot \sinh\left(\frac{L}{g}\right)} - \frac{g^2 \cdot M}{E \cdot I} - \frac{M \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right] \cdot \sinh\left(\frac{L}{g}\right)}{E \cdot I \cdot g^2 \cdot \sinh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{g^2 \cdot M \cdot \cosh\left(\frac{L}{g}\right)}{E \cdot I}$$

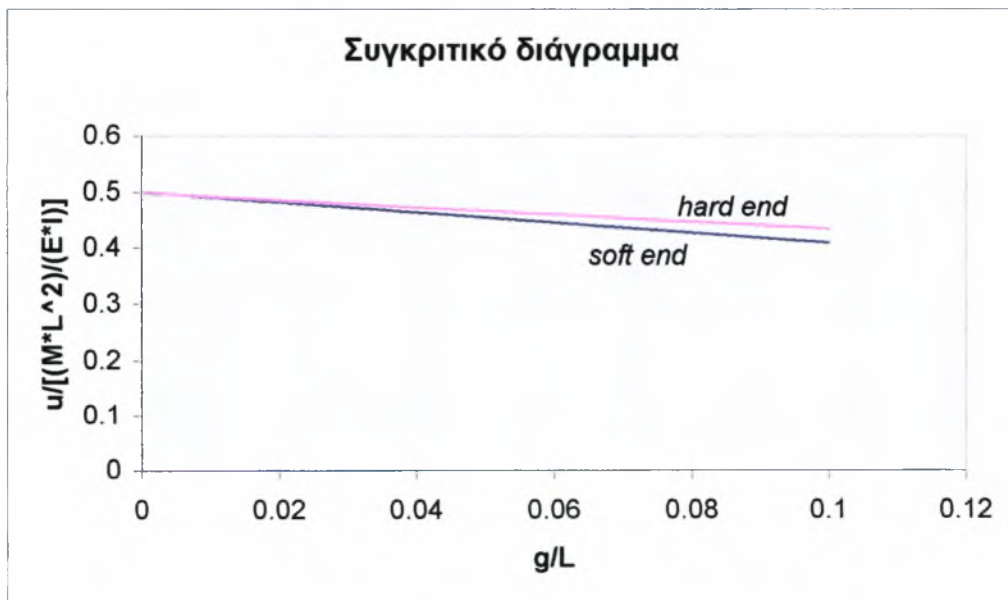
η οποία μετά τις απλοποιήσεις γίνεται:

$$u(L) = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\frac{g}{L} \cdot \frac{1}{\sinh\left(\frac{L}{g}\right)} \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right] \right] + \frac{M \cdot L^2}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{g}{L}\right)^2 + \frac{M \cdot L^2}{E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{g}{L}\right)^2 \cdot \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) - 1 \right]\right] - \frac{M \cdot L^2}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{g}{L}\right)^2 \cdot \cosh\left(\frac{L}{g}\right)$$

Η γραφική παράσταση της προηγούμενης σχέσης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

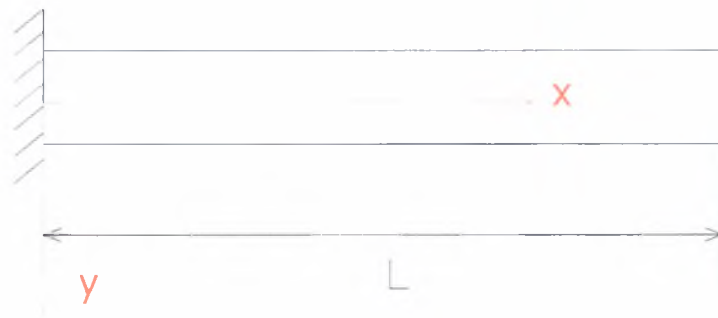


Ένα συγκριτικό διάγραμμα των δυο περιπτώσεων (μαλακού και σκληρού άκρου) είναι το ακόλουθο:



Παρατηρούμε ότι η ακαμψία αυξάνει λίγο περισσότερο για το μαλακό άκρο

Περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου στο άκρο της δοκού:



$x=0$	$u(0) = 0$	(δεν υπάρχει μετακίνηση στην πάκτωση)
	$u'(0) = 0$	(κλίση στην πάκτωση)
	$u''(0) = 0$	(δεν υπάρχει καμπυλότητα στην πάκτωση)
$x=L$	$M(L)=0$	(απουσία ροπής στο άκρο)
	$V(L)=P$	(τέμνουσα ίση με την συγκεντρωμένη δύναμη)
	$m(L)=0$	(για μαλακό άκρο της δοκού)
	$u''(L) = 0$	(για σκληρό άκρο της δοκού)

Περίπτωση μαλακού άκρου της δοκού

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_4 + g^4 * c_6 = 0, \quad u'(0) = 0 \Rightarrow c_3 + g^3 * c_5 = 0$$

$$u''(0) = 0 \Rightarrow 2 * c_2 + g^2 * c_6 = 0, \quad M(L)=0 \Rightarrow 6 * c_1 * L + 2 * c_2 = 0$$

$$V(L) = P \Rightarrow c_1 = \frac{P}{6 * E * I}, \quad m(L)=0 \Rightarrow c_5 = \frac{-P}{g * E * I} * \left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των σταθερών, οι οποίες είναι:

$$c_1 = \frac{P}{6 * E * I}, \quad c_2 = \frac{-P * L}{2 * E * I}, \quad c_4 = \frac{-g^2 * P * L}{E * I}, \quad c_6 = \frac{P * L}{g^2 * E * I}$$

$$c_3 = \frac{g^2 * P}{E * I} * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right], \quad c_5 = \frac{-P}{g * E * I} * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right]$$

Έτσι η εξίσωση του βέλους κάμψης διαμορφώνεται ως εξής:

$$u(x) = \frac{P * x^3}{6 * E * I} - \frac{P * L * x^2}{2 * E * I} + \frac{g^2 * P}{E * I} * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right] * x - \frac{g^2 * P * L}{E * I} -$$

$$- \frac{g^3 * P * \sinh\left(\frac{x}{g}\right)}{E * I} * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right] + \frac{g^2 * P * L * \cosh\left(\frac{x}{g}\right)}{E * I}$$

Για να υπολογίσουμε το βέλος στην άκρη της δοκού βάζουμε στην προηγούμενη εξίσωση $x=L$ και θα έχουμε :

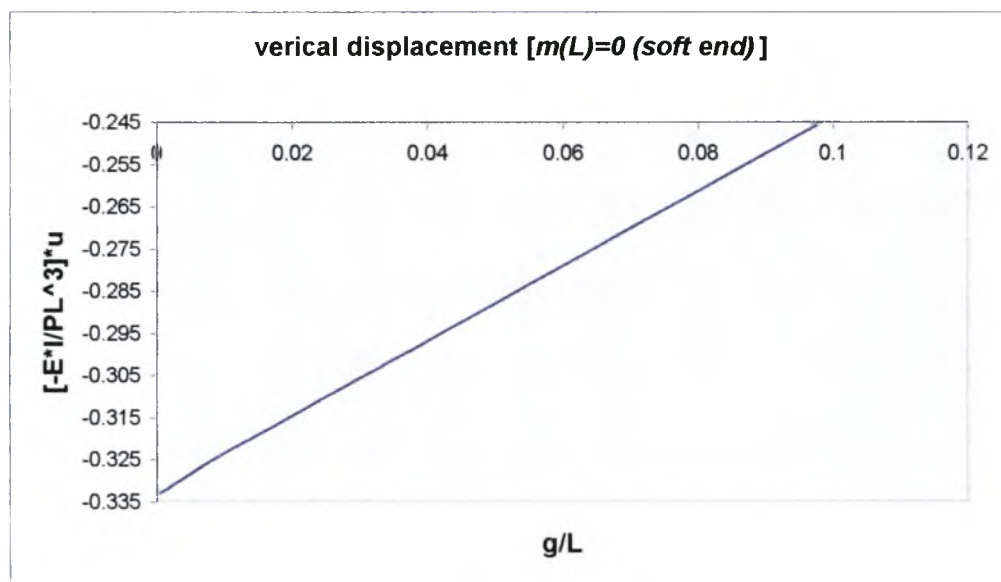
$$u(L) = \frac{-P * L^3}{3 * E * I} + \frac{g^2 * P * L}{E * I} * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{L * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{g} \right] - \frac{g^2 * P * L}{E * I} -$$

$$\frac{g^3 * P}{E * I} * \left[\tanh\left(\frac{L}{g}\right) + \frac{L * \sinh\left(\frac{L}{g}\right)}{g * \cosh\left(\frac{L}{g}\right)} \right] + \frac{g^2 * P * L * \cosh\left(\frac{L}{g}\right)}{E * I}$$

Παρατηρούμε ότι στο όριο $g \rightarrow 0$, παίρνουμε την κλασική λύση του βέλους κάμψης

$$u(L) = \frac{-P * L^3}{3 * E * I}$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Περίπτωση σκληρού άκρου της δοκού

Οι τιμές των σταθερών στην εξίσωση του βέλους κάμψης τώρα είναι:

$$c_1 = \frac{P}{6 * E * I}, \quad c_2 = \frac{-P * L}{2 * E * I}, \quad c_3 = \frac{g * P * L}{E * I * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)},$$

$$c_4 = \frac{-g^2 * P * L}{E * I}, \quad c_5 = \frac{-P * L}{g^2 * E * I} * \frac{1}{\tanh\left(\frac{L}{g}\right)}, \quad c_6 = \frac{P * L}{g^2 * E * I}$$

Επομένως η εξίσωση του βέλους κάμψης παίρνει την μορφή:

$$u(x) = \frac{P \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot L \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{g \cdot P \cdot L \cdot x}{E \cdot I \cdot \tanh\left(\frac{L}{g}\right)} - \frac{g^2 \cdot P \cdot L}{E \cdot I} - \frac{g^2 \cdot P \cdot L \cdot \sinh\left(\frac{x}{g}\right)}{E \cdot I \cdot \tanh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{g^2 \cdot P \cdot L \cdot \cosh\left(\frac{x}{g}\right)}{E \cdot I}$$

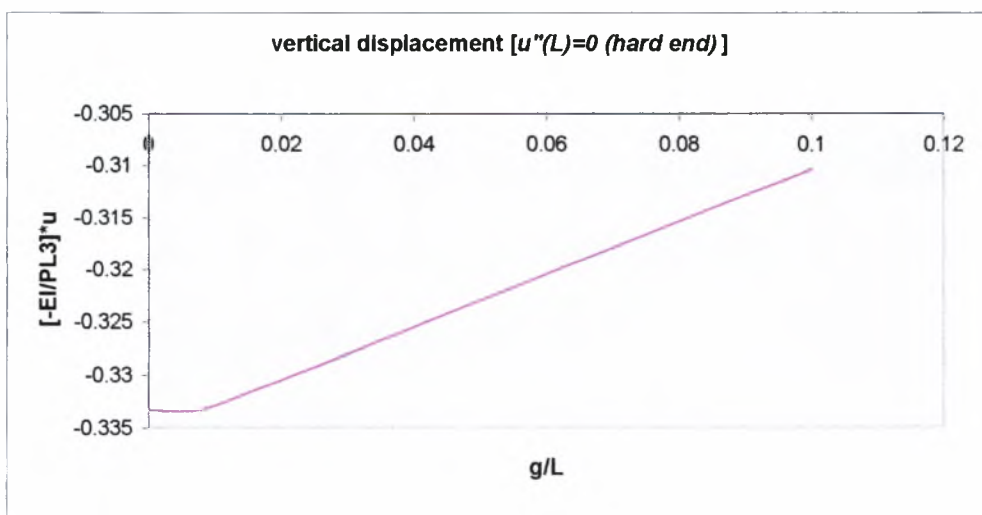
ενώ για το βέλος κάμψης στην άκρη της δοκού, έχουμε από την παραπάνω για $x=L$:

$$u(L) = \frac{-P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{g \cdot P \cdot L^2}{E \cdot I \cdot \tanh\left(\frac{L}{g}\right)} - \frac{g^2 \cdot P \cdot L}{E \cdot I} - \frac{g^2 \cdot P \cdot L \cdot \cosh\left(\frac{L}{g}\right)}{E \cdot I} + \frac{g^2 \cdot P \cdot L \cdot \cosh\left(\frac{L}{g}\right)}{E \cdot I}$$

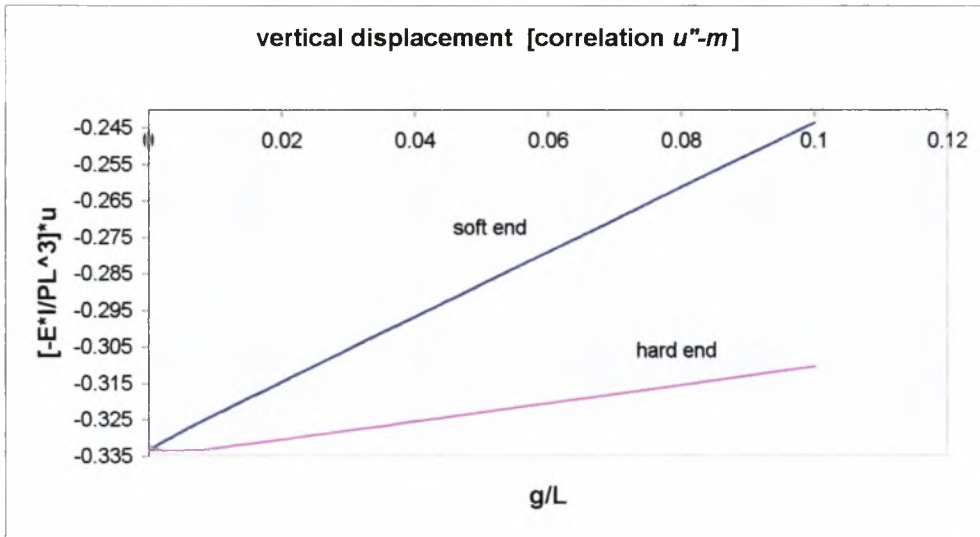
ή απλούστερα:

$$u(L) = \frac{-P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{g \cdot P \cdot L^2}{E \cdot I \cdot \tanh\left(\frac{L}{g}\right)} - \frac{g^2 \cdot P \cdot L}{E \cdot I}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Το συγκριτικό διάγραμμα των δυο περιπτώσεων είναι το εξής:



Σχόλιο: Είναι φανερό ότι το μαλακό άκρο επηρεάζεται περισσότερο από τις τάσεις διπόλου. (εμφανίζει μεγαλύτερη ακαμψία)

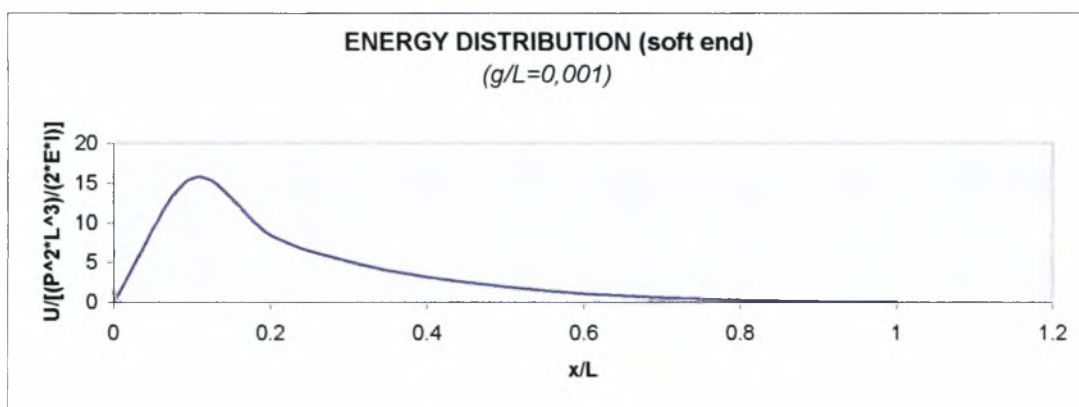
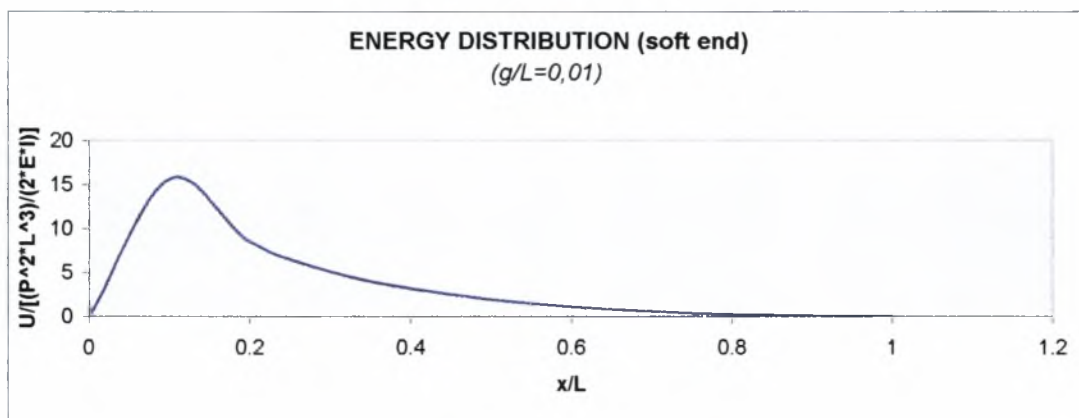
Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον να δούμε σε αυτό το σημείο με ποιο τρόπο κατανέμεται η ενέργεια μέσα στο δομικό στοιχείο κατά μήκος του κεντροβαρικού του άξονα καθώς επίσης και με ποιο ρυθμό συμβαίνει αυτό. Έτσι θα έχουμε ότι η ενέργεια ανα μονάδα μήκους της δοκού που αποθηκεύεται μέσα στο δομικό στοιχείο δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$U_E = \frac{1}{2} * \int_0^L E * I * [(u'')^2 + g^2 * (u''')^2] dx$$

γνωρίζοντας την σχέση του βέλους κάμψης της δοκού η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2 * E * I}{P^2 * L^3} * U_E(x) = \left[\frac{x}{L} - 1 - \left(\frac{g}{L}\right) * \sinh\left(\frac{x}{g}\right) * \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \left(\frac{L}{g}\right) * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) + \cosh\left(\frac{x}{g}\right) \right]^2 + \left[\frac{g}{L} - \left(\frac{g}{L}\right) * \left[1 + \left(\frac{L}{g}\right) * \sinh\left(\frac{L}{g}\right) \right] + \sinh\left(\frac{x}{g}\right) \right]^2 \right]$$

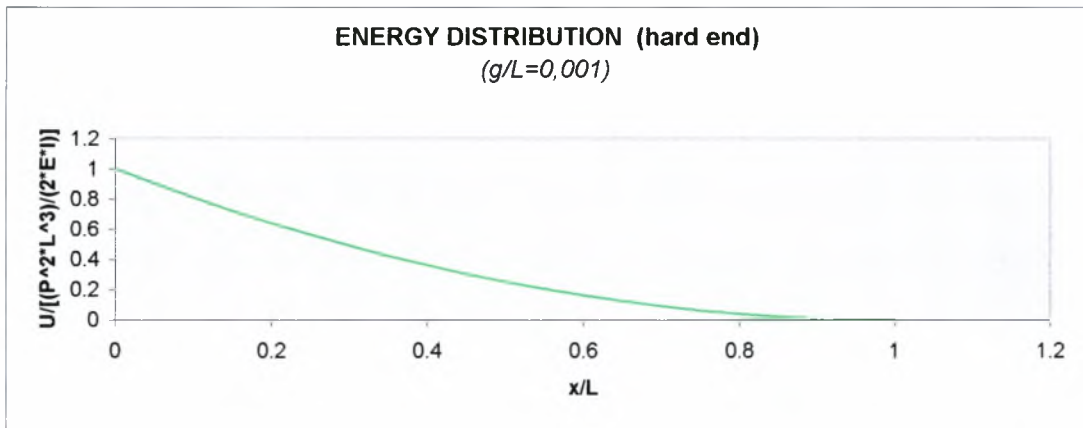
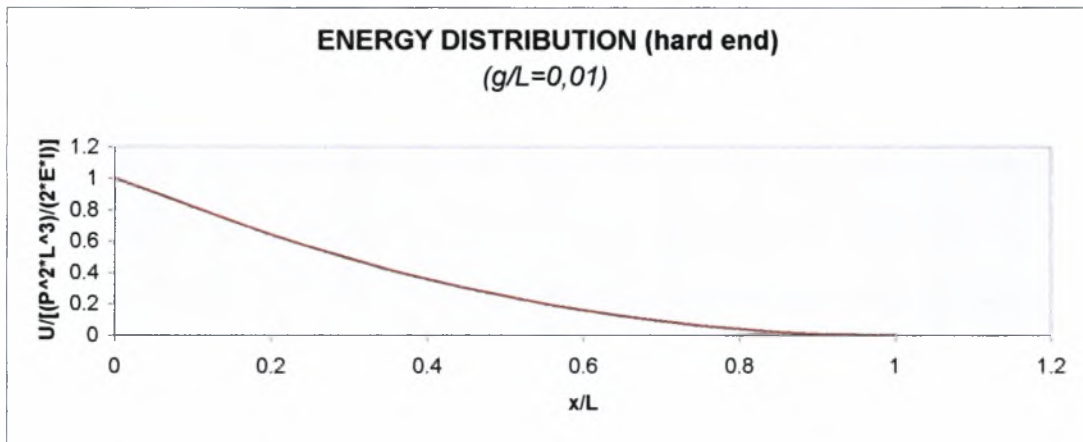
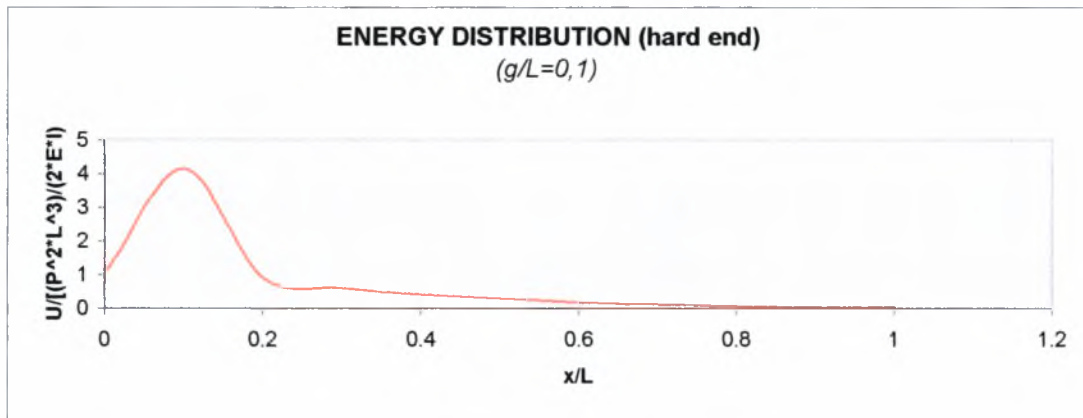
η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα για διάφορες τιμές του λόγου g/L . Σημειώνουμε ότι $x/L=0$ είναι το σημείο πάκτωσης και $x/L=1$ είναι το ελεύθερο άκρο της δοκού.



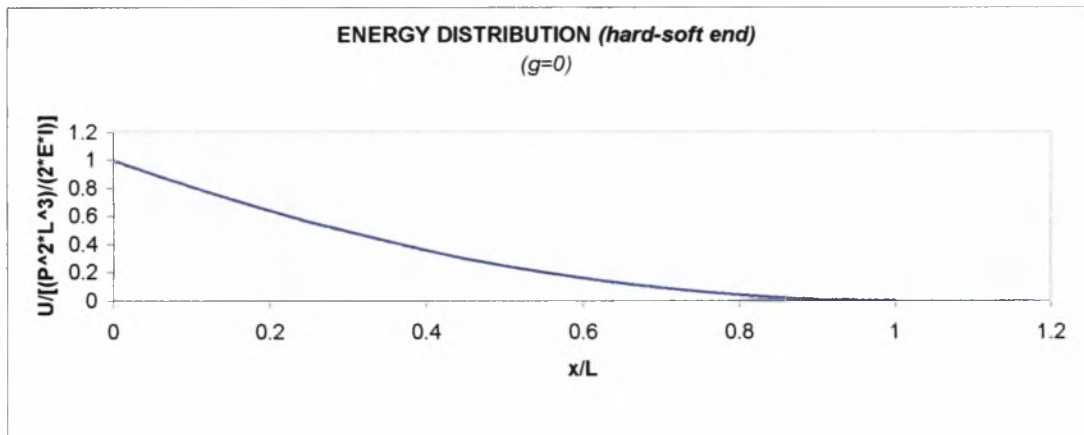
Η κατανομή της ενέργειας κατά μήκος του άξονα x της δοκού στην περίπτωση του σκληρού άκρου θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{2 * E * I}{P^2 * L^3} * U_E(x) = \left[\frac{x}{L} - 1 - \frac{\sinh\left(\frac{x}{g}\right)}{\tanh\left(\frac{L}{g}\right)} + \cosh\left(\frac{x}{g}\right) \right]^2 + \left[\frac{g}{L} - \frac{\cosh\left(\frac{x}{g}\right)}{\tanh\left(\frac{L}{g}\right)} + \sinh\left(\frac{x}{g}\right) \right]^2$$

η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, για διάφορες τιμές του λόγου g/L



Αξίζει σε αυτό το σημείο να παραθέσουμε και το διάγραμμα κατανομής της ενέργειας στην περίπτωση που αγνοήσουμε την ύπαρξη της σταθεράς g , δηλαδή για $g=0$



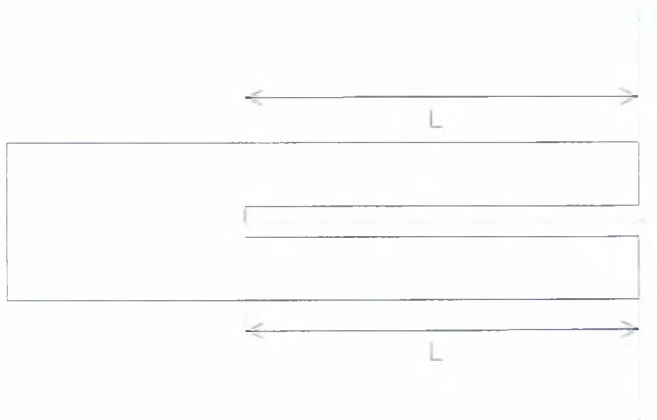
2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΝΤΟΧΗΣ

Στην συνέχεια προχωρήσαμε στον υπολογισμό του ρυθμού έκλυσης της ενέργειας (energy release rate) χρησιμοποιώντας τον τύπο του Griffith.

$$G = \frac{1}{\beta} * \frac{\partial \bar{U}}{\partial L},$$

όπου $\bar{U} = -P * u(L)$ και β το πάχος της δοκού.

Το μοντέλο της κατασκευής με ρωγή είναι ο διπλός πρόβολος :



Στην περίπτωση αυτή το L είναι το μήκος της ρωγμής
Από τα προηγούμενα όμως γνωρίζουμε την εξίσωση του $u(L)$, για την περίπτωση του σκληρού άκρου

$$\frac{\partial U(L)}{\partial L} = \frac{-P^*L^2}{E^*I} + \frac{P^*g}{E^*I} * \left[\frac{L * \sinh\left(\frac{2*L}{g}\right) - \frac{L^2}{g}}{\sinh^2\left(\frac{L}{g}\right)} \right] - \frac{g^2 * P}{E^*I}$$

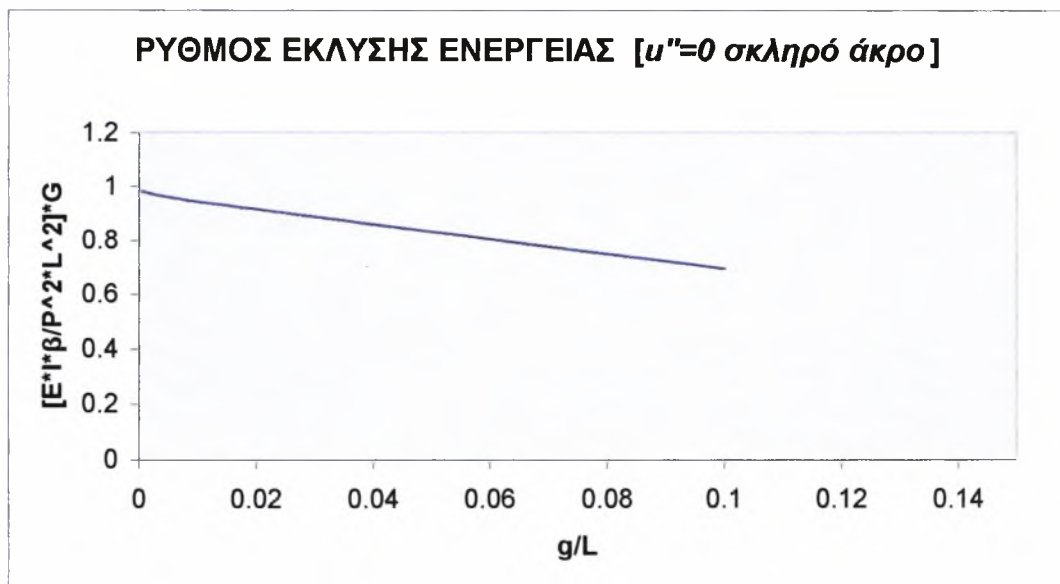
και

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial L} = \frac{P^2 * L^2}{E^*I} - \frac{P^2 * g * L}{E^*I} * \left[\frac{\sinh\left(\frac{2*L}{g}\right) - \frac{L}{g}}{\sinh^2\left(\frac{L}{g}\right)} \right] + \frac{g^2 * P^2}{E^*I}$$

επομένως η εξίσωση του ρυθμού έκλυσης της ενέργειας μέσα στη δοκό παίρνει την τελική της μορφή:

$$\frac{G * \beta * E^*I}{P^2 * L^2} = 1 - \left(\frac{g}{L}\right) * \left[\frac{\sinh\left(\frac{2*L}{g}\right) - \frac{L}{g}}{\sinh^2\left(\frac{L}{g}\right)} \right] + \left(\frac{g}{L}\right)^2,$$

η γραφική απεικόνιση της οποίας φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Παρατηρούμε ότι για $g=0$ είναι $G = \frac{P * L^2}{\beta * E * I}$ που είναι η κλασσική σχέση του

ρυθμού έκλυσης της ενέργειας ρωγμής διπλού προβόλου.

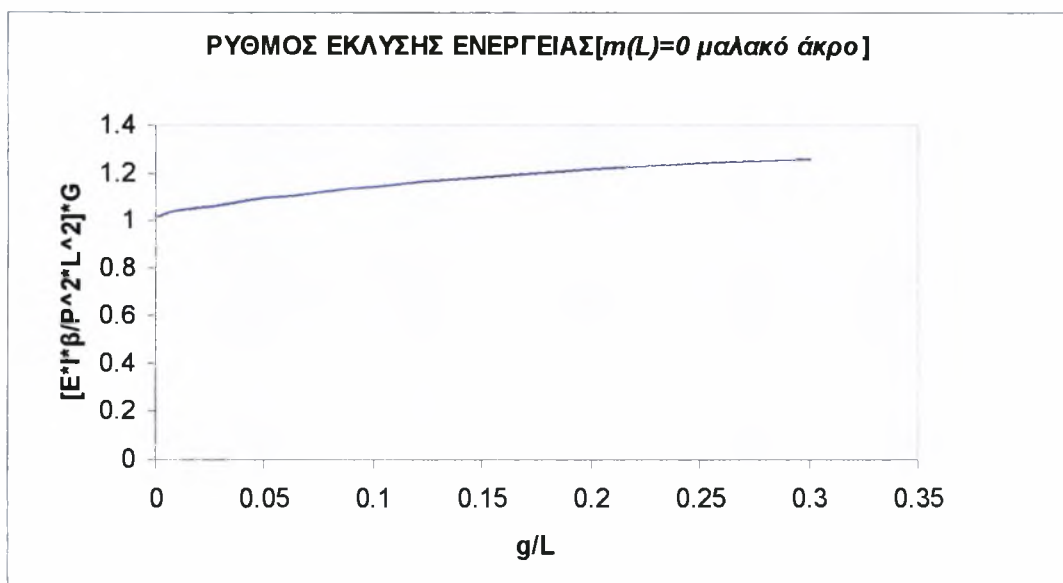
Η εξίσωση του ρυθμού έκλυσης της ενέργειας για το μαλακό άκρο τροποποιείται και παίρνει την μορφή:

$$\frac{E * I * \beta}{P^2 * L^2} * G = 1 - \left(\frac{g}{L}\right)^2 * \left[\frac{1 + \left(\frac{L}{g}\right) * \tanh\left(\frac{L}{g}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \frac{2 * L}{g} * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) + \left(\frac{L}{g}\right)^2 * \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{L}{g}\right)} \right] +$$

$$+ \left(\frac{g}{L}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)^2 * \tanh\left(\frac{L}{g}\right) * \left[\sinh\left(\frac{L}{g}\right) + \left(\frac{L}{g}\right) * \frac{1}{\cosh\left(\frac{L}{g}\right)} + \left(\frac{L}{g}\right) * \cosh\left(\frac{L}{g}\right) \right] + \frac{\left(\frac{g}{L}\right)^2}{\cosh^2\left(\frac{L}{g}\right)} -$$

$$- \left(\frac{g}{L}\right)^2 * \left[\cosh\left(\frac{L}{g}\right) + \left(\frac{L}{g}\right) * \sinh\left(\frac{L}{g}\right) \right]$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Παρατηρούμε ότι για μαλακά άκρα ο ρυθμός έκλυσης της ενέργειας αυξάνει με το εσωτερικό μήκος g , σε αντίθεση με τα σκληρά άκρα. Αυτό σημαίνει ότι η ρωγμή γίνεται πιο κρίσιμη με τα μαλακά άκρα από ότι για τα σκληρά, στα οποία παρατηρούμε έναν μηχανισμό αύξησης της αντοχής. Η ρωγμή αντιλαμβάνεται κατά κάποιο τρόπο το G και αν αυτό μικραίνει σημαίνει ότι ενισχύουμε την αντοχή.

3. ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΟΣΟΣΤΩΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

3.1 ΑΝΑΛΥΣΗ

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει ένα σύνθετο υλικό αποτελείται από επιμέρους υλικά των οποίων γνωρίζουμε τα μηχανικά χαρακτηριστικά όπως για παράδειγμα το μέτρο ελαστικότητας τους E , και το λόγο Poisson ν . Το ερώτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο της μελέτης μας είναι πως επηρεάζεται το μέτρο ελαστικότητας E κυρίως του νέου-σύνθετου υλικού μιας και ο λόγος Poisson δεν επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό και θεωρούμε ότι παραμένει σταθερός. Θέλοντας να προχωρήσουμε την μελέτη μας κάνουμε την υπόθεση ότι το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το βάθος από την επιφάνεια του δομικού στοιχείου σύμφωνα με τη σχέση:

$E = \frac{A}{y}$, όπου A είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό και y είναι οι διάφορες τιμές κατά τον άξονα των y .

Οι τύποι που μας προσφέρει η κλασική θεωρία όσον αφορά τις τάσεις και τις παραμορφώσεις ισχύουν στην γενική περίπτωση όπου το μέτρο ελαστικότητας E παραμένει σταθερό καθ' όλη την έκταση του υλικού. Στην περίπτωση ενός σύνθετου υλικού είναι προφανές ότι οι τύποι αυτοί δεν μπορούν να δώσουν ακριβή αποτελέσματα, παρά μόνο αν τροποποιηθούν κατάλληλα, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την μεταβλητότητα του E . Οι τύποι που ισχύουν από την Μηχανική είναι:

$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$ εξισώσεις ισορροπίας, όπου δεν λαμβάνονται υπ' όψιν οι μαζικές δυνάμεις

Οι καταστατικές εξισώσεις στην γραμμική ελαστικότητα σε δύο διαστάσεις (x,y) είναι

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} * (\varepsilon_{xx} + \nu * \varepsilon_{yy}) = \frac{E}{1-\nu^2} * \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu * \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2 * (1+\nu)} * \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \text{ και } \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} * \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu * \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

ενώ η εξίσωση συμβιβαστού είναι η γνωστή σχέση:

$$2 * \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

Στις ανωτέρω σχέσεις $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ είναι οι καρτεσιανές τάσεις και $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ οι καρτεσιανές τροπές

Η κύρια επιδίωξη μας είναι λαμβάνοντας υπ'οψιν την μεταβλητότητα του E να υπολογίσουμε την νέα μορφή που αποκτά η εξίσωση συμβιβαστού. Έτσι θα έχουμε: (για επίπεδη ένταση, δηλαδή $\sigma_{zz} = 0$)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{2}{E^3} * \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 * [\sigma_{xx} - \nu * \sigma_{yy}] - \frac{1}{E^2} * \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} * [\sigma_{xx} - \nu * \sigma_{yy}] - \frac{2}{E^2} * \frac{\partial E}{\partial y} * \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \nu * \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{1}{E} * \left[\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu * \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} * \left[\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu * \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right], \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{-(1+\nu)}{E^2} * \frac{\partial E}{\partial y} * \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{(1+\nu)}{E} * \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται με μια κατάλληλη συνάρτηση Airy, $\Phi(x,y)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

άμεση συνέπεια αυτών είναι:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \frac{-\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις στην γνωστή εξίσωση συμβιβαστού προκύπτει:

$$\frac{2*(1+\nu)}{E^2} * \frac{\partial E}{\partial y} * \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{2*(1+\nu)}{E} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{E} * \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \nu * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \frac{2}{E^3} * \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 * \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu * \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]$$

$$- \frac{1}{E^2} * \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} * \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu * \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] - \frac{2}{E^2} * \frac{\partial E}{\partial y} * \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu * \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{E} * \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \nu * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right]$$

Κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις στην παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε στην σχέση:

$$\nabla^4 \Phi - \frac{2}{E} * \frac{\partial E}{\partial y} * \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{2}{E} * \frac{\partial E}{\partial y} * \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} = 0,$$

από την σχέση αυτή λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την αρχική μας υπόθεση ότι

$$E = \frac{A}{y} \text{ προκύπτει η τελική μας σχέση:}$$

Η ασυμπτωτική ανάλυση των τάσεων κοντά σε επιφανειακό σημείο που φορτίζεται από συγκεντρωμένες δυνάμεις δίνεται στο Παράρτημα Α. Το σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι η κατανομή $E = \frac{A}{y}$ είναι απολύτως ευνοϊκή για τα διατμητικά φορτία

$$\nabla^4 \Phi + \frac{2}{y} * \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla^4 \Phi + \frac{2}{y} * \frac{\partial (\nabla^2 \Phi)}{\partial y} = 0$$

Η τελευταία αποτελεί την εξίσωση συμβιβαστού για μέτρο ελαστικότητας που μεταβάλλεται με το βάθος y , $E = \frac{A}{y}$. Στην κλασσική περίπτωση $E = \text{σταθερά}$,

παίρνουμε την κλασσική διαρμονική σχέση $\nabla^4 \Phi = 0$

3.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ.- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η πειραματική διαδικασία στηρίζεται στην κατασκευή δυο ορθογωνικών δοκιμίων διαστάσεων 1500*500*300(mm³). Στο Παράρτημα Β δίνονται λεπτομερώς οι φωτογραφίες της διαδικασίας κατασκευής των δοκιμίων. Τα δυο δοκίμια κατασκευάστηκαν με ξυλότυπο τύπου MDF πάχους 20mm. Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αδρανή με μέση διάμετρο 10 mm και ασφατικό γαλάκτωμα τύπου 40/50 το οποίο προμηθευτήκαμε από τα διυλιστήρια Ασπρόπυργου. Οι ποσότητες των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν είναι: 220 Kgr* ασφατικού γαλακτώματος και 480 Kgr* αδρανών. Να σημειώσουμε ότι η χρησιμοποιούμενη

ποσότητα των αδρανών υπέστη ελαφριά πρόπλυση προκειμένου να απαλλαγούμε από την περιεχόμενη παιπάλη αν και το αδρανές ήταν ικανοποιητικά καθαρό. Εν συνεχεία άρχισε η κατασκευή του πρώτου δοκιμίου, το οποίο είναι σταθερού μέτρου ελαστικότητας E καθ'όλο το ύψος των 480 mm. Το δοκίμιο κατασκευάστηκε δημιουργώντας 6 στρώσεις πάχους 80 mm η καθεμία. Σε κάθε στρώση χρησιμοποιήθηκαν ακριβώς οι ίδιες ποσότητες των αδρανών και του ασφαλτικού γαλακτώματος προκειμένου να επιτύχουμε την ομοιόμορφη κατανομή του μέτρου ελαστικότητας E σε όλο το ύψος. Συγκεκριμένα, οι ποσότητες είναι:

Μάζα αδρανών (σε κιλά βάρους) : 129,6 (16,2 Kgr* ανα στρώμα)

Μάζα ασφαλτικού γαλακτώματος (σε κιλά βάρους) : 66,56 (8,32 Kgr* στρώμα)

Λόγω των δυσκολιών στην ανάμειξη των αδρανών με το ασφαλτικό προκειμένου να επιτύχουμε την καλύτερη δυνατή ανάμειξη μεταξύ αυτών, κάναμε την διάστρωση σε δυο μέρη. Συγκεκριμένα, για την κατασκευή ενός στρώματος πάχους 80 mm γινόταν πρώτα διαστρωμάτωση της μισής ποσότητας αδρανών σε όλο το μήκος του δοκιμίου και σε ύψος 30 mm, ακολουθούσε συμπύκνωση χρησιμοποιώντας ξύλινη δοκό διαστάσεων 100*100*1000mm³ και βάρους 4,135 Kgr* με ρυθμό 25 χτύπων την κάθε στρώση. (βλέπε εικόνα 9). Έπειτα ακολουθούσε διαστρωμάτωση του ασφαλτικού. Να σημειώσουμε ότι το γαλάκτωμα το παραλάβαμε από τα διυλιστήρια σε υγρή μορφή και θερμοκρασία που ξεπερνούσε τους 180 βαθμούς Κελσίου. Η αποθήκευση του έγινε σε μεταλλικά δοχεία του εμπορίου. Το ασφαλτικό γαλάκτωμα όταν απέκτησε την θερμοκρασία περιβάλλοντος απέκτησε στερεή μορφή πάστας. Προκειμένου να γίνει μια σωστή διαστρωμάτωση στο δοκίμιο μας, απαιτείτο μια επαναθέρμανση στην ίδια θερμοκρασία των 180 βαθμών, γεγονός που πραγματοποιήθηκε με τη χρήση μικρών κλιβάνων. Έτσι, σπάζοντας τα μεταλλικά δοχεία και θρυμματίζοντας κατά κάποιο τρόπο το στέρεο πλέον ασφαλτικό και βάζοντάς το μέσα σε μεταλλικά δοχεία (κατσαρόλες), με γνωστό το βάρος τους και τον όγκο τους, προχωρούσε η διαδικασία. (Η πυκνότητα του ασφαλτικού είναι 2400 Kgr/m³)

Στην συνέχεια γινόταν η διαστρωμάτωση της υπόλοιπης μισής ποσότητας των αδρανών, καλή συμπύκνωση με τον ίδιο τρόπο και ακολούθως διαστρώναμε και το υπόλοιπο ασφαλτικό. Πρέπει να σημειώσουμε ότι στα άκρα του ξυλότυπου με τα οποία ερχόταν σε επαφή το ασφαλτικό γαλάκτωμα, τοποθετήθηκε γαλβανισμένη λαμαρίνα μικρού πάχους η οποία προηγουμένως είχε επαλειφθεί με ειδικό λιπαντικό προκειμένου να είναι εύκολη η μετέπειτα αποκόλληση του ξυλότυπου. Επίσης το πάχος του κάθε στρώματος επαληθευόταν επί τόπου χρησιμοποιώντας προκαθορισμένη κλίμακα επί του ξυλότυπου.

Στην συνέχεια, περάσαμε στην κατασκευή του δεύτερου δοκιμίου το οποίο έχει μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας E καθ' ύψος ($E = \frac{A}{y}$). Και αυτό το δοκίμιο έχει

συνολικό ύψος 480 mm. Η διαδικασία διαστρωμάτωσης των δυο υλικών, αδρανών και γαλακτώματος, έγινε ακριβώς με την ίδια μέθοδο που ακολουθήθηκε και στο πρώτο δοκίμιο. Η διάφορα στο δοκίμιο αυτό είναι στις χρησιμοποιούμενες αναλογίες των υλικών, αναλογίες που χρησιμοποιήθηκαν για να επιτευχθεί η επιθυμητοί μεταβλητότητα στο E. Για να υπάρξει ομοιομορφία στην αντοχή, η επιφανειακή

στρώση του δεύτερου δοκιμίου είχε την ίδια ποσότητα αδρανών με το ομογενές πρώτο δοκίμιο. Συγκεκριμένα:

	Ασφαλτικό Γαλάκτωμα (Kgr)	Αδρανή (Kgr)	Θέση (mm)
1 ^η στρώση:	10,18	26,00	80
2 ^η στρώση:	11,37	24,23	160
3 ^η στρώση:	12,22	23,27	240
4 ^η στρώση:	12,80	22,47	320
5 ^η στρώση:	13,19	21,80	400
6 ^η στρώση:	13,67	21,126	480

Οι εξισώσεις των σύνθετων υλικών που χρησιμοποιήθηκαν είναι [V.S.Despande,D.Cebon,2000]:

$$\frac{E_{mix}}{E_{bit}} = \left[1 + \frac{2.5}{p} * \frac{C_v}{1 - C_v} \right]^p$$

όπου E_{mix} , E_{bit} η σκληρότητα του μίγματος και του ασφαλτικού γαλακτώματος αντίστοιχα και C_v το ποσοστό των αδρανών στο μίγμα. και

$$p = 0.83 * \log \left[\frac{4 * 10^{10}}{E_{bit} (Pa)} \right]$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την θέρμανση του γαλακτώματος μέσα στα δοχεία, με όγκους 0,044m³, 0,0225m³ και καθαρά βάρη 2,515kgr, 2,200kgr αντίστοιχως, απαιτούνταν ένα μέσο χρονικό διάστημα 2 ωρών. Γι' αυτό ακριβώς το λόγο η κατασκευή του κάθε δοκιμίου διήρκησε μια σχεδόν ημέρα, από 8π.μ-8μμ. Κατά την κατασκευή των δυο δοκιμίων η θερμοκρασία κυμαίνονταν μεταξύ 9-13°C (από μέτρηση επί τόπου με ηλεκτρονικό θερμόμετρο)

Μετά το σχεδιασμό και την κατασκευή των δοκιμίων το επόμενο στάδιο του πειράματος ήταν ο πειραματικός έλεγχος αυτών. Στο Παράρτημα Γ δίνονται οι φωτογραφίες των φορτίσεων των δοκιμίων και των θραύσεων που εμφανίστηκαν. Ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίσαμε ήταν ο τύπος και ο τρόπος φόρτισης των δοκιμίων προκειμένου να λάβουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Βάσει αυτού, λοιπόν, επιλέξαμε να κάνουμε την φόρτιση χρησιμοποιώντας ένα δικτύωμα αυτοέντασης (εικόνα 2). Ο τρόπος στησίματος του δικτυώματος ήταν τέτοιος που μας έδινε την δυνατότητα να εφαρμόσουμε φορτία, τα οποία ήταν σε μέγεθος αλλά και σε εφαρμογή ιδανικά. (μεγάλες οριζόντιες και μικρές κάθετες δυνάμεις σε σημεία της επιφάνειας της δοκού)

Για να υλοποιηθεί η 'σημειακή' φόρτιση των δοκιμίων χρησιμοποιήθηκαν μεταλλικά ελάσματα διατομής T. Τα ελάσματα τοποθετήθηκαν εντός των δοκιμίων με έμπηξη. Η λειτουργία του δικτυώματος φαίνεται καθαρά στις φωτογραφίες 2 και 5, και αρκεί να επισημάνουμε ότι η τιμή του φορτίου που εφαρμόζαμε στην άκρη της ξύλινης δοκού επταπλασιάζονταν στο άκρο το οποίο είχε μπηχθεί μέσα στο δοκίμιο. Λόγω της κλίσης των μεταλλικών ραβδών διαμέτρου 8 mm, Φ8, που χρησιμοποιήθηκαν για την σύνδεση των δυο ακρών το δοκίμιο μας φορτιζόταν κυρίως σε διατμητικά φορτία, γεγονός επιθυμητό μιας και οι επικίνδυνες καταπονήσεις των οδοστρωμάτων είναι διατμητικές. Παρατηρήσαμε ότι το δοκίμιο σταθερού καθ' ύψος E άρχισε να ρηγματώνεται υπό το πολύ μικρό φορτίο του ίδιου βάρους του δικτυώματος (ξύλινη δοκός: 4,135 Kgr*, ράβδος Φ8: 3,815 Kgr*) δηλαδή για δύναμη βάρους $F=10\text{Kgr}^*$, για μοχλοβραχίονα 1,10m. Όταν ασκήθηκε επιπρόσθετο φορτίο 50Kgr* (τοποθετώντας μια σακούλα τσιμέντου) το δοκίμιο αστόχησε εντελώς, με τη μορφή που φαίνεται στις φωτογραφίες 7,8,9. Η ρωγμή προχώρησε σε βάθος (κατά μήκος όλου του πλάτους της) όσο και κατά μήκος με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια επιφάνεια ολίσθησης και να γίνει τελικά αποκόλληση του τμήματος του δοκιμίου. Η διαδικασία φόρτισης επαναλήφθηκε στο ίδιο δοκίμιο και σε απόσταση 500mm από την προηγούμενη θέση και η μορφή αστοχίας ήταν ακριβώς ίδια με τα ίδια φορτία.

Όσον αφορά το δεύτερο δοκίμιο μεταβλητού E, μετά την έμπηξη των μεταλλικών ελασμάτων όπως και στο πρώτο δοκίμιο προχωρήσαμε στη φόρτισή του. Υπό την επίδραση του ίδιου βάρους του δικτυώματος το δοκίμιο δεν επέδειξε ουδεμία ρωγμή προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Προχωρώντας στην περαιτέρω φόρτιση του, τοποθετώντας 50Kgr* στο άκρο της ξύλινης δοκού, παρατηρήσαμε την δημιουργία μιας ρωγμής, η οποία όμως δεν επεκτάθηκε καθόλου κατά το βάθος, αλλά είχαμε μια μικρή οριζόντια μετακίνηση στην επιφάνεια του δοκιμίου. Στο τέλος τα ελάσματα συστράφηκαν χωρίς καμιά άλλη επίπτωση στην δοκό (φωτογραφίες 25,26). Τα πειράματα αυτά έγιναν περίπου 40 ημέρες μετά την κατασκευή των δοκιμίων σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 22 βαθμών Κελσίου. Αξιομνημόνευτη είναι η παρατήρηση ότι, ενώ και τα δύο δοκίμια κατασκευάστηκαν έτσι ώστε το άνω επιφανειακό στρώμα να έχει την ίδια σύσταση (άρα και τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες), η δυσκολία έμπηξης ήταν σαφώς πολύ μεγαλύτερη στο δοκίμιο μεταβλητού E από ότι στο δοκίμιο σταθερού E

Οδοστρώματα: Μία καινούρια προσέγγιση με λειτουργικά διαβαθμισμένα σύνθετα υλικά

Ν . Ηλιού , Α . Κορδολέμης , Α . Γιαννακόπουλος

Στο επίπεδο πρόβλημα με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y), οι τάσεις, όπως είναι γνωστό, μπορούν να βρεθούν από την τασική συνάρτηση του Airy, $f(x,y)$,

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

Έτσι ικανοποιούνται αυτόματα οι εξισώσεις ισορροπίας (απουσία μαζικών δυνάμεων)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις της γραμμικής, ισότροπης ελαστικότητας στην επίπεδη τάση είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}}{E} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}(1+\nu)}{E}$$

Για να μετατρέψουμε τα αποτελέσματα σε εκείνα της επίπεδης παραμόρφωσης, κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$E \longrightarrow \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu \longrightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$$

E : μέτρο ελαστικότητας, ν : συντελεστής Poisson

Σε αντίθεση με τυπικές λύσεις που δέχονται ότι το E είναι τμηματικά σταθερό, υποθέτουμε ότι το E μεταβάλλεται συνεχώς κατά y , ενώ το ν παραμένει σταθερό

$$E = E(y) \quad \nu = \text{σταθερό}$$

Το γεγονός ότι το ν γενικά μεταβάλλεται δεν παίζει ουσιώδη ρόλο στα αποτελέσματα, όπως αποδεικνύουν και αναλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία.

Η εξίσωση συμβιβαστού είναι :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις προκύπτει η διαφορική εξίσωση για τις τάσεις

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})}{\alpha^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})}{\beta^2} + 2 \frac{\partial (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})}{\partial y} \frac{\partial 1}{\partial y E} + (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \frac{\partial^2 1}{\partial y^2 E} =$$

$$= 2 \frac{(1+\nu) \partial^2 \sigma_{xy}}{E \partial \alpha \partial \beta} + 2(1+\nu) \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \alpha} \frac{\partial 1}{\partial \beta E}$$

Συγκεντρώνοντας τους όρους και αντικαθιστώντας τις τάσεις προκύπτει η διαφορική εξίσωση για την τασική συνάρτηση f

$$\nabla^4 f = -E \left\{ 2(1+\nu) \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \frac{\partial 1}{\partial \beta E} + 2 \frac{\partial 1}{\partial \beta E} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} - \nu \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right] + \frac{\partial^2 1}{\partial \beta^2 E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right] \right\}$$

Προφανώς, αν E = σταθερό, η ανωτέρω εξίσωση γίνεται η πολύ γνωστή διαρμονική

$$\nabla^4 f = 0 \quad (5)$$

Η πιο γενική θεώρηση της ανωτέρω λύσεως γίνεται σε άλλη δημοσίευση. Επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε μια ιδεατή κατανομή του τύπου

$$E = \frac{y_0}{y} E_0 = \frac{A}{y} \quad (6)$$

Μετά την σχετική άλγεβρα παίρνουμε την διαφορική εξίσωση

$$\nabla^4 f = -\frac{2}{y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right) \right] = -\frac{2}{y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 f) \quad (7)$$

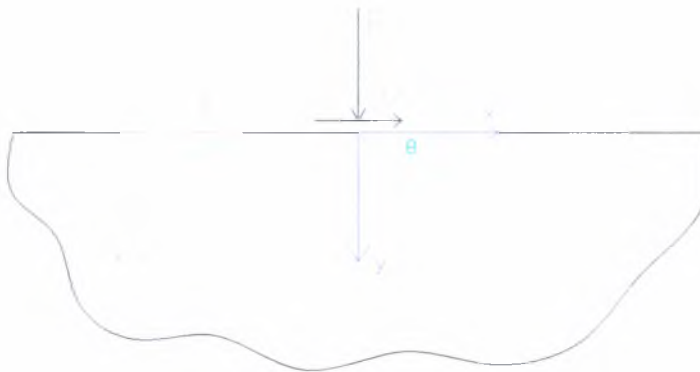
Υπενθυμίζουμε ότι ο διαρμονικός τελεστής είναι

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\alpha^4} + \frac{\partial^4}{\beta^4} + 2 \frac{\partial^4}{\alpha^2 \beta^2}$$

και ο αρμονικός τελεστής είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα του ημιάπειρου επιπέδου, με συγκεντρωμένα γραμμικά φορτία $P(N/m)$ και $Q(N/m)$ στην αρχή των συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1

Σχήμα 1: Ελαστικός ημίχωρος με $E(y) = \frac{A}{y}$, $\nu = \text{σταθερό}$

Τότε αναγκαστικά οι τάσεις, άρα και η τασική συνάρτηση f πρέπει να έχουν λύση της μορφής των 'χωριζόμενων μεταβλητών', ως προς τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) , δηλαδή

$$f(r, \theta) = f_1(r)f_2(\theta) \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (8)$$

Στην περίπτωση αυτή υπενθυμίζουμε ότι

$$y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Επειδή η ελαστική ενέργεια (ανα μονάδα μήκους της τρίτης διάστασης, z) πρέπει να είναι φραγμένη, οι τάσεις θα πρέπει να τείνουν στο μηδέν (όταν $V \longrightarrow \infty$) όχι πιο αργά από $\frac{1}{r}$.

Οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια απαιτούν

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \theta = 0, \pi$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \theta = 0, \pi$$

όπου

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{r} \cos 2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{2r} \sin 2\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

και

$$\sigma_{yy} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \quad \theta = 0, \pi$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = 0 \quad \theta = 0, \pi$$

ή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \theta = 0, \pi \quad (y=0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \theta = 0, \pi \quad (y=0)$$

Όταν $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, τότε οι τάσεις τείνουν στο μηδέν, με ρυθμό $1/r$.

Εάν υποθέσουμε ότι οι τάσεις είναι ακτινικές, τότε

$$f(r, \theta) = r\Phi(\theta)$$

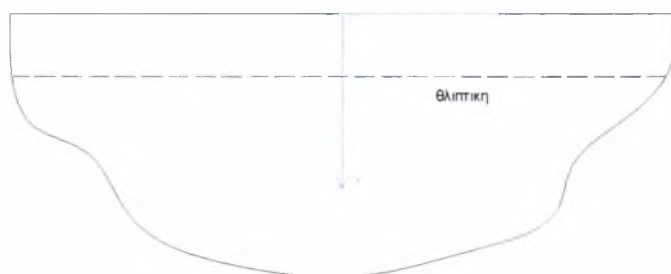
Επομένως, οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{r}(\Phi + \Phi'')$$

Τότε, η διαφορική εξίσωση για την $\Phi(\theta)$ είναι

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [(\Phi' + \Phi)\sin\theta] = 0 \Rightarrow \Phi' + \Phi = \frac{c_1 + c_2\theta}{\sin\theta} \quad \text{όπου } C_1 \text{ και } C_2 \text{ σταθερές}$$

Παρατηρούμε ότι εάν η σ_{rr} είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x , τότε $C_2=0$



Σχήμα 2

Σχήμα 2 : Ισοβαρής $\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi * l}$

_____ E = σταθερό

----- $E = \frac{A}{y}$



Σχήμα 3

Σχήμα 3 : $\sigma_{rr} = -\frac{2Q}{\pi * l}$

_____ E = σταθερό

$$\text{(δεν υπάρχει)} \quad E = \frac{A}{y}$$

$$\text{και } \sigma_{rr} = \frac{c_1}{r \sin \theta} .$$

Η σταθερά μπορεί να βρεθεί από την ολική ισορροπία

$$-P = \int_0^\pi \sigma_{rr} \sin \theta r d\theta = c_1 \pi$$

$$\text{Επομένως } \sigma_{rr} = \frac{-P}{\pi r \sin \theta} = \frac{-P}{\pi y}$$

Στην περίπτωση που υπάρχει η Q, η σ_{rr} θα πρέπει να είναι αντισυμμετρική ως προς τον άξονα x. Αυτό όμως είναι αδύνατον!! Επομένως, δεν υπάρχει ακτινικό πεδίο τάσεων το οποίο να υποστηρίζει εφαπτόμενη δύναμη Q

4.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για 'μικρές' κατασκευές από σύνθετα υλικά το εσωτερικό μήκος g ,παιζει σημαντικό ρόλο

1. Ακαμψία. Η ακαμψία αυξάνει με το g και οι μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες ('σκληρό' - 'μαλακό' άκρο) παίζουν σημαντικό ρόλο
2. Αντοχή. Η αντοχή συνήθως αυξάνει με το g ,όχι όμως πάντοτε Η σημαντική αυτή παρατήρηση επιτρέπει την εξήγηση των φαινομένων κλίμακας στην αντοχή των υλικών (δυσθραυστότητα). Απαιτείται όμως περισσότερη διερεύνηση για το κατά πόσον αυτό είναι αληθές για όλες τις κατασκευές

Για 'μεγαλύτερες' κατασκευές,εσωτερικά μήκη εμφανίζονται στην κατανομή της ανομοιογένειας των μηχανικών ιδιοτήτων

3. Ανομοιογένεια. Ανομοιογενή σύνθετα υλικά μπορούν να κατασκευαστούν με κατάλληλη και 'συνεχή' μεταβολή της ποσόστωσης των επιμέρους υλικών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ζητήθηκαν η βελτιστοποίηση της αντοχής επιφανειών που καταπονούνται από σημειακά φορτία πάνω στις επιφάνειες. Αποδείχθηκε θεωρητικά ότι μια κατανομή των επιμέρους υλικών που οδηγεί σε κατανομή του μέτρου ελαστικότητας που μεταβάλλεται (μειώνεται) υπερβολικά με το βάθος από την επιφάνεια, οδηγεί σε μηδενικές εφελκυστικές τάσεις .

Πειραματική επαλήθευση

4.Ειδικότερα η ανάλυση της βελτιστοποίησης των αντοχών φορτιζόμενων επιφανειών με συγκεκριμένη ανομοιογένεια ελέγχθηκε πειραματικά σε δοκίμια από άσφαλτο και αδρανή σε πραγματική κλίμακα. Τα πειραματικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν πλήρως την ανάλυση.

5.Εφαρμογές. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας βρίσκουν εφαρμογή σε μικρο-σύνθετα και νανο-σύνθετα υλικά που χρησιμοποιούνται σε μικρο-ηλεκτρο-μηχανικά συστήματα. (MEMS). Εφαρμογές και επεκτάσεις αναμένονται στα εμβιο-υλικά(δόντια, αρθρώσεις) και στα ελαστομερή(ελαστικά αυτοκινήτων). Τέλος, άμεσες εφαρμογές υπάρχουν σε μακροσκοπικές κατασκευές όπως οδοστρώματα, διάδρομοι αεροδρομίων, πλάκες θωρακίσεως που υποφέρουν από ισχυρές επιφανειακές δυνάμεις (δυνάμεις τριβής από τροχοπέδηση ή επιτάχυνση, δυνάμεις από πλάγια πρόσκρουση κλπ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bazant,Z.P.,2002,Scaling and Structural Strength,Hermes Ienton Science,London

Daniel I.M and Ishai O.,2005 Engineering Mechanics of Composite Materials,Oxford University Press

P.Ponte Castaneda,1991,The effective mechanical properties of nonlinear isotropic solids, J.Mech.Phys.Solids, vol 39, pp45-71

L.J.Walpole,1996,On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems –I and II.,J.Mech.Phys.Solids,vol 14,pp. 151-162 and pp.289-301

T.L.Anderson,1991,Fracture Mechanics Fundamentals and Applications,CRC Press,Boca Raton,Florida

Z.Hashin and S.Strickman,1963,A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, J.Mech.Phys.Solids,vol. 11,pp.127-140

S.Papargyri-Beskou,Bending and stability analysis of gradient elastic beams

J.D.Eshelby,1957,The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems,Proc.Roy.Soc.Lonndon. A241,pp.376-396



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085934