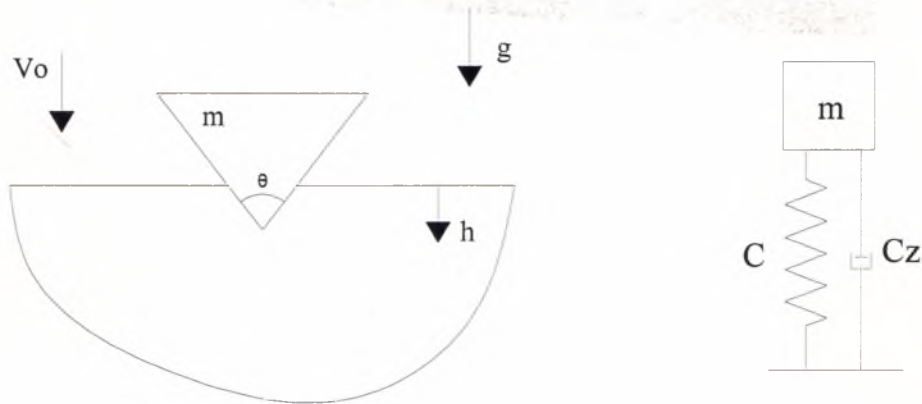




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΙΚΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗ ΑΙΧΜΗΡΟΥ
ΔΙΕΙΣΔΥΤΗ ΣΕ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟ ΥΠΟΣΤΡΩΜΑ



ΦΟΙΤΗΤΕΣ: ΒΑΡΕΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ,
ΡΟΥΜΕΛΙΩΤΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

Βόλος, Ιούνιος 2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5525/1
Ημερ. Εισ.: 28-09-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2007
ΒΑΡ

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα της διπλωματικής μας εργασίας Καθηγητή Αντώνιο Γιαννακόπουλο, για τις πολύτιμες γνώσεις που μας παρείχε. Τον ευχαριστούμε επίσης για τις συμβουλές, την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθειά του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε επίσης όλους τους υπόλοιπους καθηγητές μας που με τις υποδείξεις και παρατηρήσεις τους μας βοήθησαν να ολοκληρώσουμε την παρούσα εργασία.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλουμε στις οικογένειες μας που μας στήριξαν σε όλα μας τα βήματα. Τους αφιερώνουμε την εργασία αυτή ως ελάχιστη ένδειξη ευγνωμοσύνης.

Βαρέλης Γιώργος,
Ρουμελιώτη Αναστασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
Περίληψη – Εισαγωγή	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	4
1.1 Γραμμικός μονοβάθμιος ταλαντωτής χωρίς απόσβεση.	4
1.2 Αποσβενόμενες ταλαντώσεις.	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	20
2.1 Το δυναμικό μοντέλο της διείσδυσης.	20
2.2 Ανάλυση χωρίς απόσβεση	21
2.2.1 Ανάλυση χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης.	21
2.2.2 Ανάλυση υπό την επιρροή της επιτάχυνσης.	24
2.3 Ανάλυση με απόσβεση.	29
2.3.1 Ανάλυση χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης.	29
2.3.2 Ανάλυση υπό την επιρροή της επιτάχυνσης.	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΙΣ	40
3.1 Ανάλυση πειραμάτων από τη βιβλιογραφία	40
3.1.1 Ανάλυση αποτελεσμάτων που προέκυψαν από πεπερασμένα στοιχεία.	40
3.1.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων που προέκυψαν από πειραματική διάταξη.	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	46
4.1 Ανάλυση χωρίς απόσβεση, χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης.	47
4.2 Ανάλυση χωρίς απόσβεση, με την επιρροή της επιτάχυνσης.	49
4.3 Ανάλυση με απόσβεση, χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης.	50
4.4 Ανάλυση με απόσβεση, με την επιρροή της επιτάχυνσης.	51
4.5 Ασυμπτωτική ανάλυση.	52
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	56
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	58
Α. Αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης	58
Β. Αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση αυτόνομων συστημάτων.	60
Γ. Instrumented dynamic indentation of metal substrates by sharp indentors (8 th HSTAM International Congress on Mechanics, Patras, 12-14 July, 2007)	63

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η ανάλυση της δυναμικής επαφής ενός αιχμηρού διεισδυτή (κώνου ή πυραμίδας) με ένα μεταλλικό υπόστρωμα. Η κίνηση του διεισδυτή καθώς αυτός διεισδύει και στην συνέχεια αναπηδά από το υπόστρωμα-στόχο περιγράφεται αναλυτικά. Η ανάλυση βασίζεται σε ένα ισοδύναμο μονοβάθμιο μη γραμμικό σύστημα και περιλαμβάνει την απώλεια της ενέργειας με μορφή ακτινοβολίας εξαιτίας επιφανειακών κυμάτων, την επίδραση της σχετικής επιτάχυνσης (βαρύτητας), την ανάλυση της επαφής με τη θεώρηση μεγάλων παραμορφώσεων, την απώλεια ενέργειας εξαιτίας της ελαστοπλαστικότητας και τα φαινόμενα ταχύτητας παραμόρφωσης.

Αποδεικνύεται ότι σε περιπτώσεις κρούσεων με μεγάλη αρχική ταχύτητα ένα σημαντικό κομμάτι της αρχικής ενέργειας του διεισδυτή χάνεται λόγω της δημιουργίας επιφανειακών κυμάτων και ως εκ τούτου ο συντελεστής απόδοσης του φαινομένου μειώνεται επαρκώς. Η παραπάνω ανάλυση συγκρίνεται με αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων και με διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα αυτής της διερεύνησης αναμένεται να χρησιμεύσουν στη μέτρηση μηχανικών ιδιοτήτων μικρών μεταλλικών όγκων (δυναμική μικροδιείσδυση), στο σχεδιασμό θωρακίσεων αεροσκαφών και διαστημοπλοίων (περιπτώσεις κρούσεων με άγνωστα αντικείμενα, διαστημική σκόνη κτλ.) και σε προβλήματα διάβρωσης. Τέλος, είναι δυνατό τα αποτελέσματα να επεκταθούν και για μη μεταλλικά υποστρώματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι δοκιμές στατικών διεισδύσεων έχουν πρόσφατα γίνει μια χρήσιμη, μη καταστροφική μέθοδος για τον υπολογισμό μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών, ειδικά σε περιπτώσεις μεγεθών μικρής κλίμακας. Είναι ευρέως γνωστό ότι η μηχανική απόκριση ενός υλικού εξαρτάται από την ταχύτητα παραμόρφωσης του και είναι σημαντικό να βρεθούν τρόποι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμών μηχανικών ιδιοτήτων και σε υλικά επηρεαζόμενα από την ταχύτητα παραμόρφωσης με τη χρήση μικρών όγκων υλικού. Μία πολλά υποσχόμενη δοκιμή είναι η διείσδυση στην επιφάνεια του υλικού ενός αιχμηρού διεισδυτή (κώνου ή πυραμίδας). Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην απαραίτητη ανάλυση που απαιτείται για το σχεδιασμό τέτοιων δοκιμών. Θα επικεντρωθούμε κυρίως σε μεταλλικά υποστρώματα, όμως πολλά από τα γενικά συμπεράσματα μπορούν να χρησιμεύσουν και για συγκεκριμένα κεραμικά, γυαλιά και άλλα υλικά.

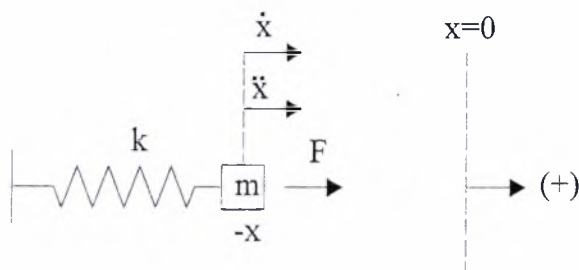
Η δυναμική διείσδυση αιχμηρών βλημάτων δεν είναι καινούρια δοκιμή. Μια απλή αλλά λογική προσομοίωση που προσομοιάζει το φαινόμενο με τη χρήση μονοβάθμιας δυναμικής ανάλυσης βρίσκεται στην εργασία των Davis και Hunter (1960)^[1] που έδειξαν την επιρροή της ευαισθησίας στην ταχύτητα παραμόρφωσης των μετάλλων κάνοντας χρήση διεισδυτών με κωνική αιχμή. Οι Mahtab et al (1965)^[2] ερεύνησαν τη δυναμική διείσδυση μετάλλων με μία περίτεχνη συσκευή δοκιμών, χρησιμοποιώντας κωνικά βλήματα διαφόρων γωνιών. Απέδειξαν ότι η επίδραση των φαινομένων τριβής δεν είναι τόσο σημαντική σε περιπτώσεις υψηλών ταχυτήτων διείσδυσης όπως είναι στην περίπτωση ημι-στατικών διεισδύσεων. Απέδειξαν επίσης ότι η δυναμική μέση πίεση επαφής (σκληρότητα) είναι σταθερή. Οι Kleesattel και Gladwell (1968)^[3] εισήγαγαν έναν επιφανειακό σκληρομετρητή που βασιζόταν στην μέτρηση της αλλαγής στη συχνότητα συντονισμού ενός μηχανικού συντονιστή που

διέθετε μια αιχμηρή άκρη που ήταν σε επαφή με την επιφάνεια. Ο Graham (1973)^[4] εξέτασε την ελαστική κρούση ενός άκαμπτου κώνου σε έναν ελαστικό ημιχώρο χρησιμοποιώντας ένα απλό μοντέλο. Ο Houlsby (1982)^[5] επιχείρησε να εξηγήσει τη δοκιμή πτώσης του κώνου που χρησιμοποιείται ευρέως για την εύρεση του σημείου ρευστοποίησης της αργίλου. Οι Marshall et al (1983)^[6] απέδειξαν ότι κατά τη κρούση μιας κεραμικής επιφάνειας από αιχμηρό βλήμα πυραμίδας Vickers προκαλούνται ελαστοπλαστικές παραμορφώσεις που είναι παρόμοιες σε μορφολογία με αυτές της στατικής διείδυσης. Η σκληρότητα όμως που εξαρτάται από την ταχύτητα επιβολής είναι σταθερή και μεγαλύτερη από αυτήν που μετράται σε στατική διείδυση. Οι Koerppel και Subhash (1999)^[7] απέδειξαν ότι η δυναμική σκληρότητα κατά Vickers για τα μέταλλα έχει μεγαλύτερη τιμή από την αντίστοιχη τιμή της στατικής διείδυσης και συμπέραναν ότι η μελέτη της δυναμικής διείδυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφτούν πλαστικές ιδιότητες υλικών σε υψηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης (της τάξης των 103/s). Οι Andrews et al (2002)^[8] εξέτασαν τα απλά μοντέλα της κρούσης ενός αιχμηρού διειδυτή με λεπτομερή ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (μέγεθος στοιχείου 20 μm), συμπεριλαμβάνοντας στην ανάλυσή τους την πλαστικότητα που εξαρτάται από την ταχύτητα επιβολής. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα απλά μοντέλα λειτουργούν σωστά για χαμηλές ταχύτητες κρούσης. Πρόσφατα, οι Lu et al (2003)^[9] ανέπτυξαν μια συσκευή δοκιμών δυναμικής διείδυσης για να μετρήσουν αναλυτικά σε σχέση με το χρόνο τις αποκρίσεις του βάρους και του φορτίου κατά τη διάρκεια της κρούσης ενός υποστρώματος από χαλκό με έναν αμβλυμένο κωνικό διειδυτή. Εισήγαγαν έναν αποτελεσματικό ρυθμό παραμόρφωσης που κλιμακώνει τα εξαρτώμενα από το ρυθμό παραμόρφωσης μεγέθη. Η παραπάνω εργασία απέδωσε ενδιαφέροντα ευρήματα, αλλά ερεύνησε μόνο μέρος του προβλήματος και παράλληλα άφησε κύρια ζητήματα μη ξεκάθαρα: τη σχετική επιρροή του ρυθμού παραμόρφωσης, την απώλεια ενέργειας εξαιτίας επιφανειακών κυμάτων, την επιρροή της επιτάχυνσης (βαρύτητας), τη φάση αποφόρτισης του φαινομένου και την επιρροή υψηλών ταχυτήτων κρούσης. Σε αυτά που ακολουθούν θα δώσουμε μερικές απαντήσεις στα παραπάνω ζητήματα.

Αναλυτικότερα τα κεφάλαια της παρούσας εργασίας έχουν διαμορφωθεί έτσι ώστε να υπάρχει μια ομαλή μετάβαση από απλούστερες προσεγγίσεις του φαινομένου σε πιο πολύπλοκες. Κατά τη μετάβαση αυτή εξετάζονται όλες οι λεπτομέρειες και προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα που μας βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται ο γραμμικός μονοβάθμιος ταλαντωτής και εξετάζεται η συμπεριφορά του όταν εκτελεί ταλαντώσεις με ή χωρίς απόσβεση. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το δυναμικό μοντέλο του φαινομένου της διείδυσης που προτείνεται. Διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο κατά τη φάση της φόρτισης και της αποφόρτισης και εξετάζεται ξεχωριστά αλλά και συνδυασμένα η επιρροή της απόσβεσης και της σχετικής επιτάχυνσης. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται επαλήθευση πειραματικών αποτελεσμάτων που αντλούνται από τη σχετική με το θέμα βιβλιογραφία. Φαίνεται ότι το μοντέλο που εξετάστηκε διεξοδικά στα προηγούμενα κεφάλαια επαληθεύει ικανοποιητικά τόσο πειραματικά αποτελέσματα όσο και αποτελέσματα που προέκυψαν από ανάλυση με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος στο Κεφάλαιο 4 εξετάζονται τα αυτόνομα συστήματα. Το φαινόμενο της διείδυσης μελετάται υπό τη σκοπιά αυτή και παρουσιάζονται διαγράμματα Poincare που περιγράφουν την πλήρη εξέλιξη του. Το κεφάλαιο συμπληρώνεται με την ενδιαφέρουσα ασυμπτωτική ανάλυση του φαινομένου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ.



Σχήμα 1.1 Μοντέλο ταλαντωτή χωρίς αποσβεστήρα.

Η δύναμη που ασκείται στο σώμα μάζας m όταν αυτό μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας κατά x είναι ίση με:

$F = -kx$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου (N/m).

Η δύναμη αυτή καλείται δύναμη επαναφοράς και τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του (Σχ. 1.1).

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή είναι:

$m\ddot{x} + F = 0$, όπου x η θέση, \dot{x} η ταχύτητα και \ddot{x} η επιτάχυνση.

Η εξίσωση που δίνει τη θέση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου και έχει τη μορφή:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

όπου A : το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ($A = x_{\max}$),

ϕ : η γωνία φάσης (rad)

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, η κυκλική συχνότητα (rad/sec).

Οι εξισώσεις που δίνουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος είναι αντίστοιχα:

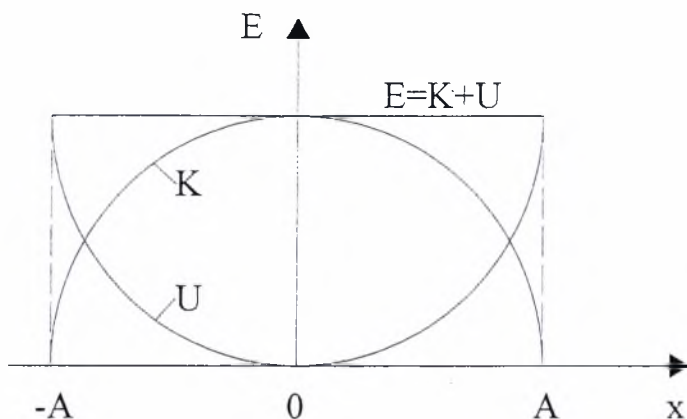
$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Η συνολική ενέργεια E του συστήματος, που ισούται με το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας ($E = K + U$) παραμένει σταθερή κάθε χρονική στιγμή. (Σχ. 1.2)

$$K = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t)]^2$$

$$U = \frac{1}{2} k [x(t)]^2$$



Σχήμα 1.2: Αρμονικός ταλαντωτής. Ολική ενέργεια E συναρτήσει της θέσης x .

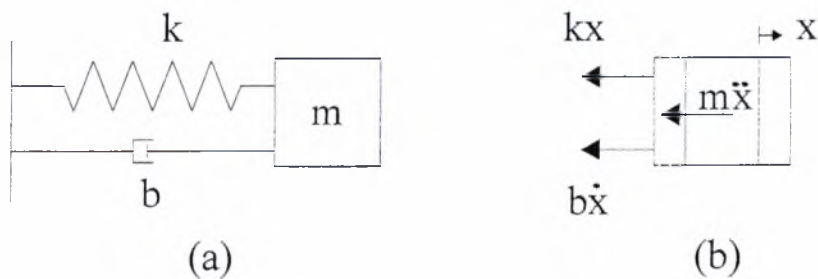
$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t)]^2 + \frac{1}{2} k [x(t)]^2$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι για $x(t)=0$, η μέγιστη ταχύτητα είναι ίση με:
 $\dot{x}_{\max} = \pm \omega A$

Πρόκειται για ένα περιοδικό φαινόμενο με περίοδο επαναφοράς $T = \frac{2\pi}{\omega}$

και συχνότητα $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

1.2 ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



Σχήμα 1.3: α) Μοντέλο ταλαντωτή με αποσβεστήρα
 β) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Η εξίσωση που διέπει την ισοροπία του σώματος είναι:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1.1}$$

Η εξίσωση έχει μία ιδιολύση της μορφής:

$$x(t) = e^{nt}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.1) η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει:

$$mn^2 + bn + k = 0 \quad (1.2)$$

Η διακρίνουσα Δ της σχέσης (1.2) είναι: $\Delta = b^2 - 4mk$

Θέτουμε $b_{cr} = 2\sqrt{km}$ (κρίσιμη τιμή του συντελεστή απόσβεσης).

Διακρίνονται οι εξής τρεις περιπτώσεις:

A) Αν $\Delta > 0 \Rightarrow b > b_{cr}$, Υπερκρίσιμη απόσβεση.

Οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1.2) είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους με μορφή:

$$x_1(t) = e^{n_1 t}, n_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4mk}) / 2m$$

$$x_2(t) = e^{n_2 t}, n_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4mk}) / 2m$$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης (1.2) είναι:

$$x(t) = C_1 e^{n_1 t} + C_2 e^{n_2 t}$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι:

Για $t=0$, $x=0$ και $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$ (γνωστή).

$$\text{Επομένως } C_1 = \dot{x}_{\max} / (n_1 - n_2) \text{ και } C_2 = \dot{x}_{\max} / (n_2 - n_1) = -C_1$$

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου είναι αντίστοιχα:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_{\max}}{n_1 - n_2} (e^{n_1 t} - e^{n_2 t})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}_{\max}}{n_1 - n_2} (n_1 e^{n_1 t} - n_2 e^{n_2 t})$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{\dot{x}_{\max}}{n_1 - n_2} (n_1^2 e^{n_1 t} - n_2^2 e^{n_2 t})$$

Θέτοντας $\dot{x}(t_1) = 0$ υπολογίζουμε τη διάρκεια t_1 της φόρτισης:

$$t_1 = \frac{1}{n_2 - n_1} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) > 0 \rightarrow \ddot{x}(t_1) \neq 0$$

Κατά την αποφόρτιση η γενική λύση της εξίσωσης παραμένει ίδια ενώ οι νέες αρχικές συνθήκες είναι:

Για $t=t_1$, $x(t_1)=A=x_{\max}$ και $\dot{x}(t_1) = 0$.

$$\text{Επομένως: } C_1 = \frac{An_2}{(n_2 - n_1)e^{n_1 t_1}} \text{ και } C_2 = -\frac{An_1}{(n_2 - n_1)e^{n_2 t_1}}$$

Άρα οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου, για την αποφόρτιση είναι:

$$x(t) = \frac{A}{n_2 - n_1} (n_2 e^{n_1(t-t_1)} - n_1 e^{n_2(t-t_1)})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{n_1 n_2 A}{n_2 - n_1} (e^{n_1(t-t_1)} - e^{n_2(t-t_1)})$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{n_1 n_2 A}{n_2 - n_1} (n_1 e^{n_1(t-t_1)} - n_2 e^{n_2(t-t_1)})$$

Στην περίπτωση της υπερκρίσιμης απόσβεσης το κανονικοποιημένο διάγραμμα της μετατόπισης ($x(t)/x_{\max}$) συναρτήσει του κανονικοποιημένου χρόνου ($t^*=t/t_1$) και για διάφορες τιμές του λόγου $r=(b/b_{cr})^2$ ακολουθεί την εξίσωση:

- ΦΟΡΤΙΣΗ

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = \frac{e^{n_1 t} - e^{n_2 t}}{e^{n_1 t_1} - e^{n_2 t_1}} \quad (\text{Διάγραμμα 1.1})$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = \frac{n_1 e^{n_2 t_1 (t^*-1)} - n_2 e^{n_1 t_1 (t^*-1)}}{n_1 - n_2}, \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.2})$$

Η απόδοση $\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{\dot{x}(t^*)}{\dot{x}_{\max}}$ είναι:

$$\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{n_1 n_2 (e^{n_1 t_1} - e^{n_2 t_1}) (e^{n_1 t_1 (t^*-1)} - e^{n_2 t_1 (t^*-1)})}{(n_1 - n_2)^2}, \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.3})$$

Η απόδοση είναι ανεξάρτητη της αρχικής ταχύτητας V_0 και εξαρτάται από το λόγο απόσβεσης (\sqrt{r}). Όσο μεγαλώνει ο λόγος απόσβεσης, η απόδοση τείνει στο μηδέν, δηλαδή το σώμα παύει να ταλαντώνεται.

B) Αν $\Delta=0 \Rightarrow b=b_{cr}$, Κρίσιμη απόσβεση.

Οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1.2) είναι πραγματικές και ίσες μεταξύ τους: $n=-b/2m$.

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης (1.2) είναι:

$$x(t) = e^{nt} (C_1 t + C_2)$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι:

Για $t=0$, $x=0$ και $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$ (γνωστή).

Επομένως: $C_1 = \dot{x}_{\max}$ και $C_2=0$.

Οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου στην κρίσιμη απόσβεση είναι:

$$x(t) = e^{-nt} \dot{x}_{\max} t$$

$$\dot{x}(t) = e^{-nt} \dot{x}_{\max} (1 - nt)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-nt} \dot{x}_{\max} n(2 - nt)$$

Θέτοντας $\dot{x}(t_1) = 0$ υπολογίζουμε τη διάρκεια t_1 της φόρτισης:

$$t_1 = \frac{1}{n} = \frac{2m}{b} > 0 \rightarrow \ddot{x}(t_1) \neq 0$$

Κατά την αποφόρτιση η γενική λύση της εξίσωσης παραμένει ίδια ενώ οι νέες αρχικές συνθήκες είναι:

Για $t=t_1$, $x(t_1)=A=x_{\max}$ και $\dot{x}(t_1) = 0$.

Επομένως $C_1=-Aen$ και $C_2=0$.

Άρα οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$x(t) = -Ane^{-(1+nt)}$$

$$\dot{x}(t) = -Ane^{-(1+nt)}(1 + nt)$$

$$\ddot{x}(t) = -An^2e^{-(1+nt)}(2 + nt)$$

Στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης ($r=1$) το κανονικοποιημένο διάγραμμα της μετατόπισης ($x(t)/x_{\max}$) συναρτήσει του κανονικοποιημένου χρόνου ($t^*=t/t_1$) και για διάφορες τιμές του λόγου $r=(b/b_{cr})^2$ ακολουθεί την εξίσωση:

- ΦΟΡΤΙΣΗ $t^* \leq 1$

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = t^* e^{-(1-t^*)} \quad (\text{Διάγραμμα 1.4})$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ $t^* > 1$

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = t^* e^{-(1-t^*)}, \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.5})$$

Η απόδοση $\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{\dot{x}(t^*)}{\dot{x}_{\max}}$ είναι:

$$\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{(1-t^*)}{e^{t^*}}, \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.6})$$

Στην κρίσιμη απόσβεση η απόδοση εξαρτάται μόνο από το χρόνο, η μέγιστη τιμή της εμφανίζεται σε χρόνο $2t_1$ και είναι ίση με: $V_{reb}/V_0=0.135$.

Γ) Αν $\Delta < 0 \Rightarrow b < b_{cr}$, Υποκρίσιμη απόσβεση.

Οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1.2) είναι συζυγείς μιγαδικές:

$$X_1 = e^{(a+i\omega)t}, \quad X_2 = e^{(a-i\omega)t}, \quad \text{όπου } a = b/2m \text{ και } \omega = \frac{\sqrt{-(b^2 - 4mk)}}{2m}.$$

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό του Euler η γενική λύση της εξίσωσης (1.2) είναι:

$$x(t) = e^{-at}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι:

Για $t=0$, $x=0$ και $\dot{x} = \dot{x}_{\max}$ (γνωστή).

Επομένως: $C_1 = 0$ και $C_2 = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega}$.

Οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της φόρτισης στην υποκρίσιμη απόσβεση είναι:

$$x(t) = e^{-at} \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-at} \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega} [\omega \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)]$$

$$\ddot{x}(t) = -e^{-at} [a(\dot{x}_{\max} + \omega) \cos(\omega t) + (\dot{x}_{\max} \omega - a^2) \sin(\omega t)]$$

Θέτοντας $\dot{x}(t_1) = 0$ και $x(t_1) = A$ υπολογίζουμε τη διάρκεια t_1 της φόρτισης:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccot\left(\frac{a}{\omega}\right) > 0, \quad \omega t_1 \neq k\pi \quad \text{όπου } k=0,1,2,\dots \rightarrow \ddot{x}(t_1) \neq 0$$

Κατά την αποφόρτιση η γενική λύση της εξίσωσης παραμένει ίδια ενώ οι νέες αρχικές συνθήκες είναι:

Για $t=t_1$, $x(t_1) = A = x_{\max}$ και $\dot{x}(t_1) = 0$.

Επομένως $C_1 = 0$ και $C_2 = A/e^{-at_1} \sin(\omega t_1)$.

Άρα οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$x(t) = e^{-a(t-t_1)} A \frac{\sin(\omega t)}{\sin(\omega t_1)}$$

$$\dot{x}(t) = e^{-a(t-t_1)} \frac{A}{\sin(\omega t_1)} (\omega \cos(\omega t) - a \sin(\omega t))$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-a(t-t_1)} \frac{A}{\sin(\omega t_1)} [(a^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2a\omega \cos(\omega t)]$$

Στην περίπτωση της υποκρίσιμης απόσβεσης ($r < 1$) το κανονικοποιημένο διάγραμμα της μετατόπισης ($x(t)/x_{\max}$) συναρτήσει του κανονικοποιημένου χρόνου ($t^* = t/t_1$) και για διάφορες τιμές του λόγου $r = (b/b_{cr})^2$ ακολουθεί την εξίσωση:

- ΦΟΡΤΙΣΗ $t^* \leq 1$

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = e^{-at_1(t^*-1)} \frac{\sin(\omega t_1 t^*)}{\sin(\omega t_1)} \quad (\text{Διάγραμμα 1.7})$$

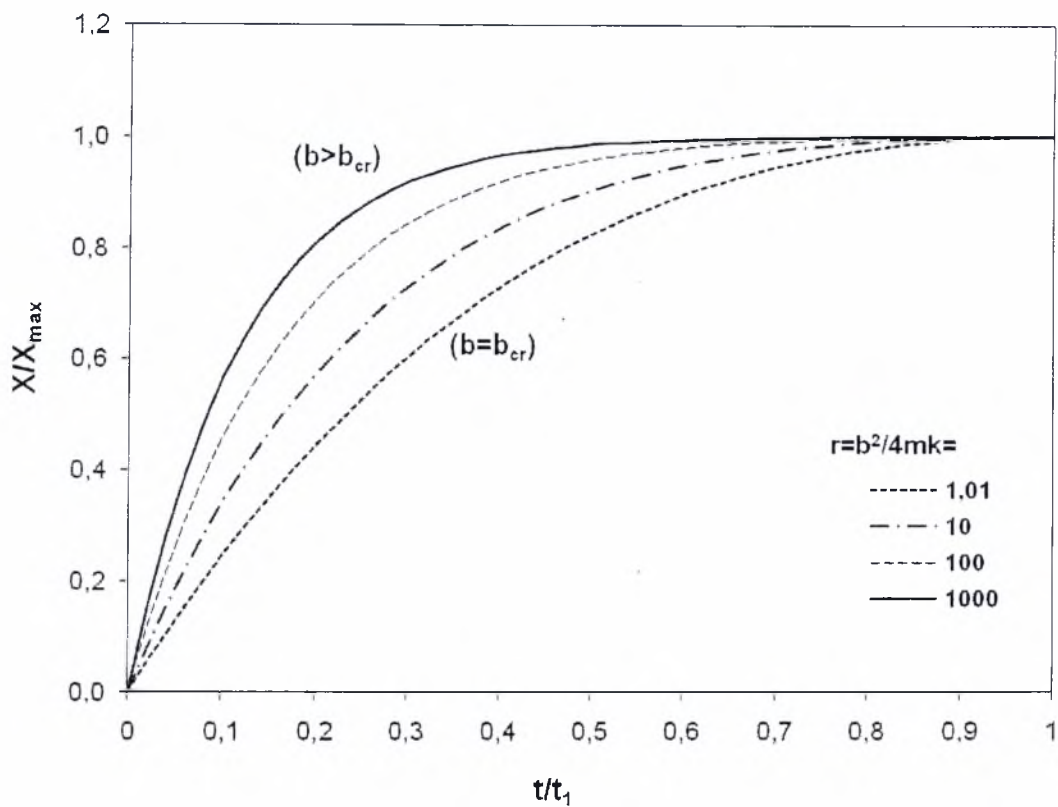
- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ $t^* > 1$

$$\frac{x(t)}{x_{\max}} = e^{-at_1(t^*-1)} \frac{\sin(\omega t_1 t^*)}{\sin(\omega t_1)}, \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.8})$$

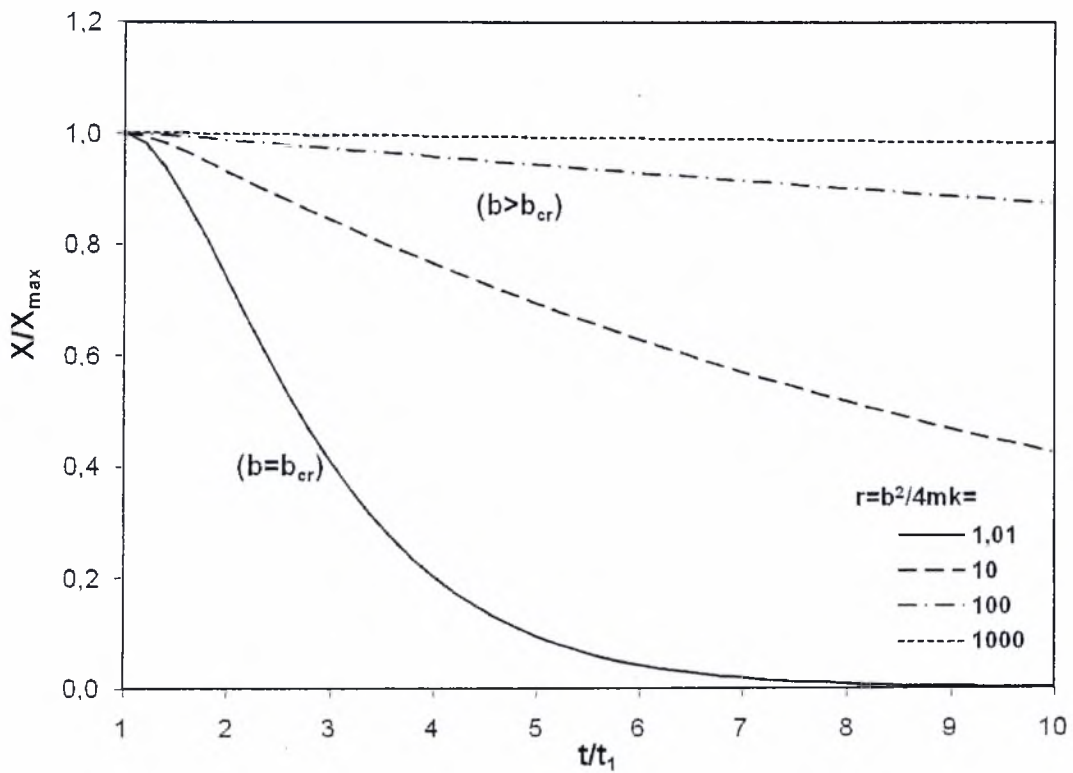
Η απόδοση $\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{\dot{x}(t^*)}{\dot{x}_{\max}}$ είναι:

$$\frac{V_{reb}}{V_0} = \frac{e^{-at_1 t^*}}{\omega} [\omega \cos(\omega t_1 t^*) - a \sin(\omega t_1 t^*)], \quad t^* > 1 \quad (\text{Διάγραμμα 1.9})$$

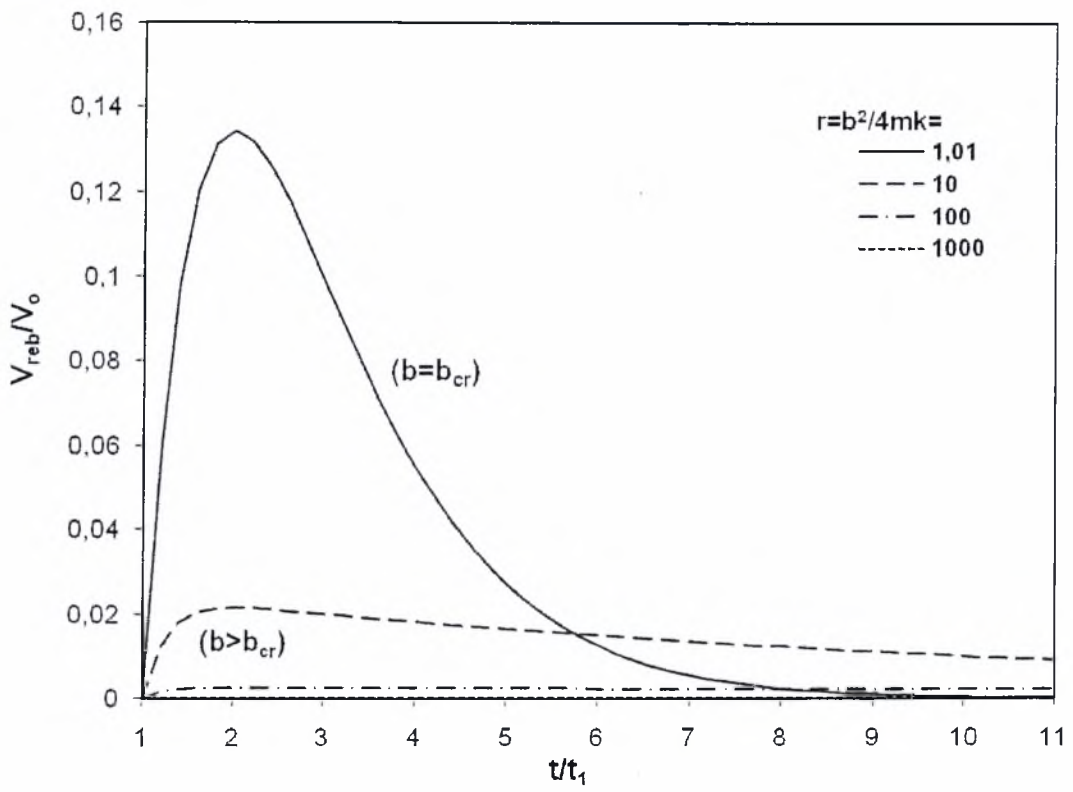
Όταν $r \rightarrow 0$ το σώμα κάνει ταλάντωση.



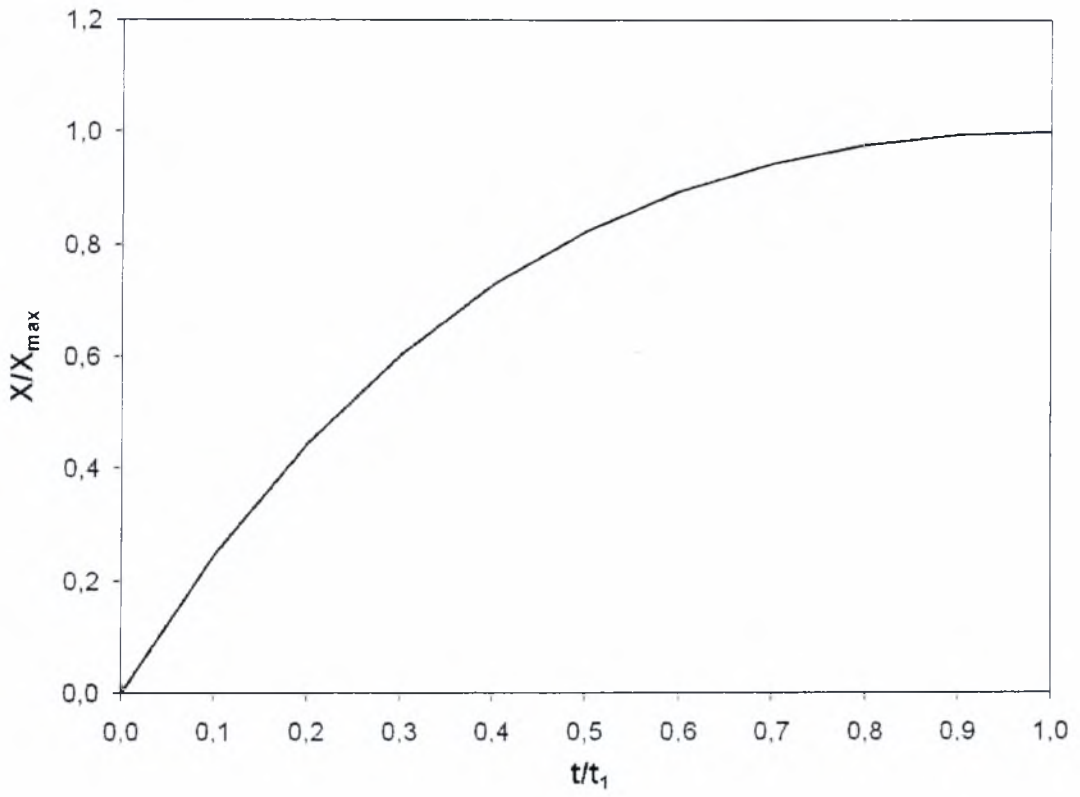
Διάγραμμα 1.1 Υπερκρίσιμη Απόσβεση ($b > b_{cr}$) – Φόρτιση.



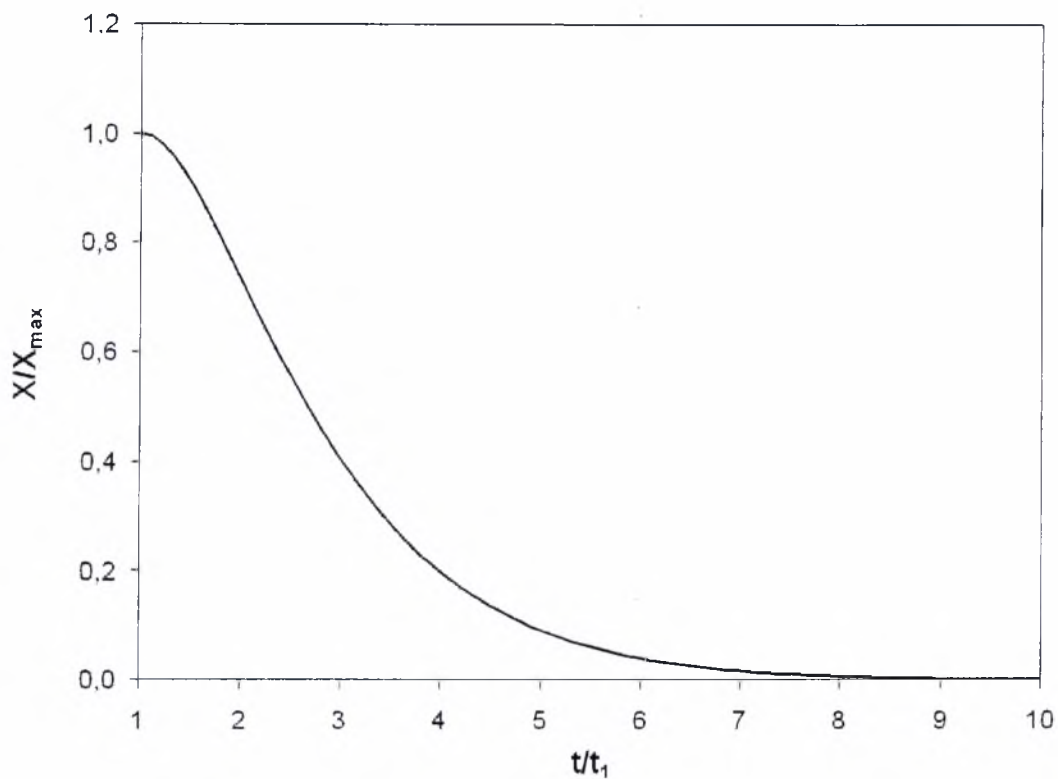
Διάγραμμα 1.2 Υπερκρίσιμη Απόσβεση ($b > b_{cr}$) – Αποφόρτιση.



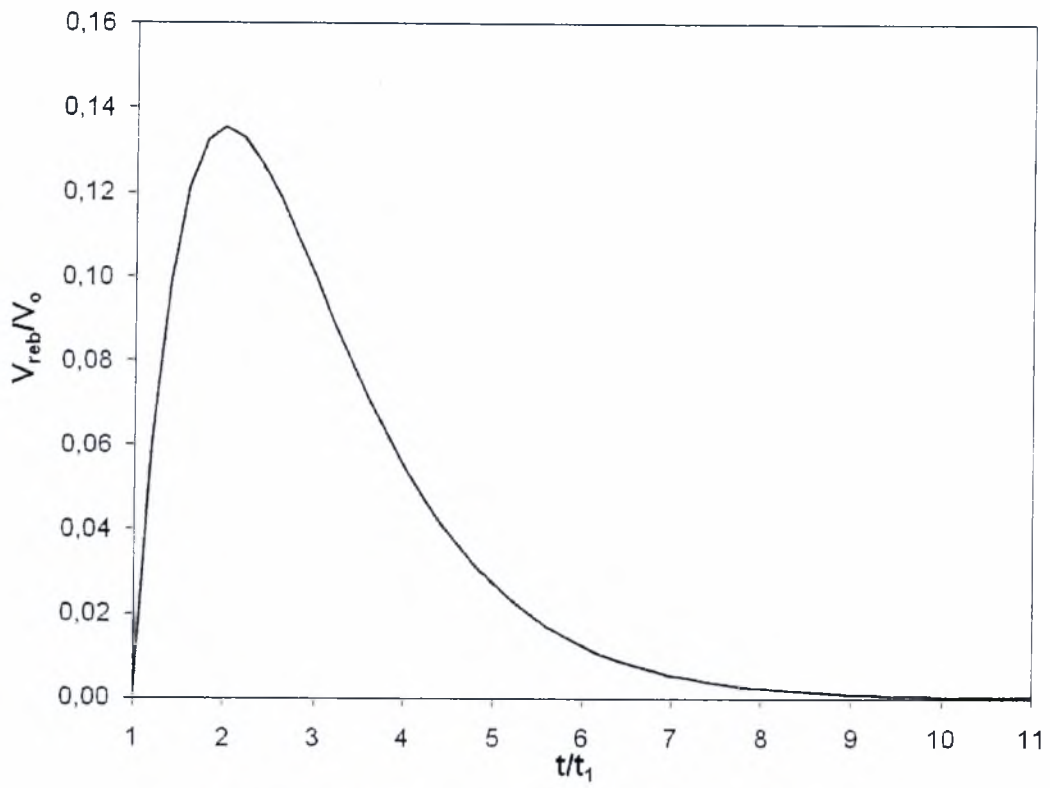
Διάγραμμα 1.3 Υπερκρίσιμη Απώσβεση ($b > b_{cr}$) – Απόδοση.



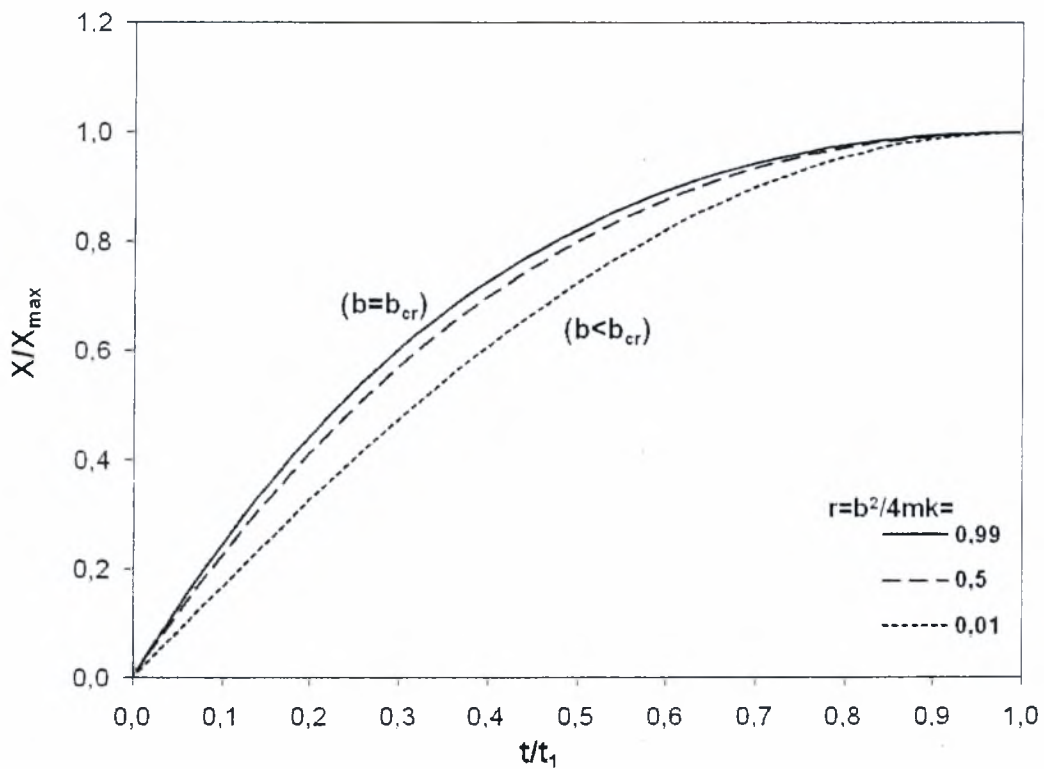
Διάγραμμα 1.4 Κρίσιμη Απόσβεση ($b=b_{cr}$) – Φόρτιση.



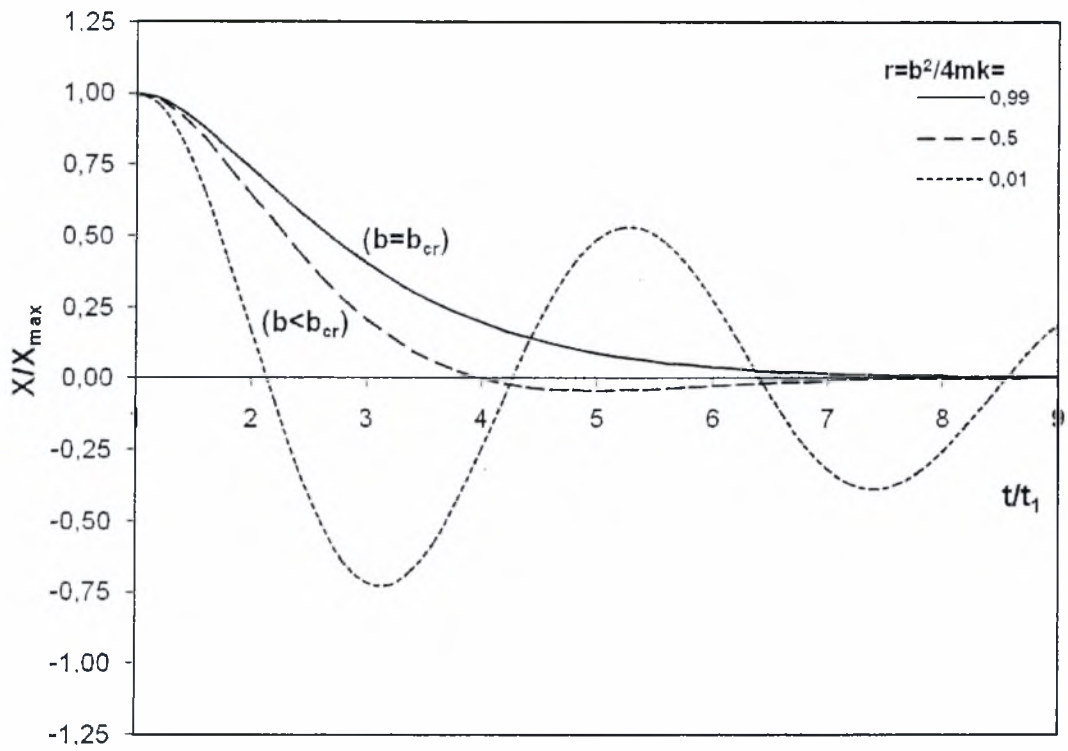
Διάγραμμα 1.5 Κρίσιμη Απόσβεση ($b=b_{cr}$) – Αποφόρτιση.



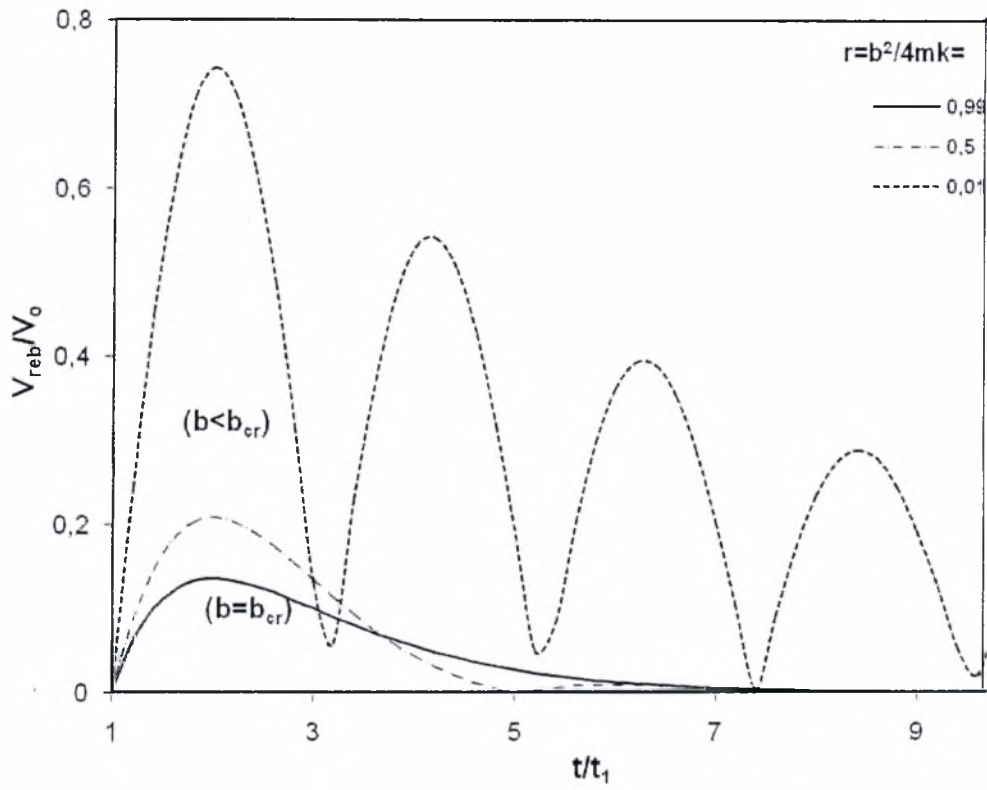
Διάγραμμα 1.6 Κρίσιμη Απόσβεση ($b=b_{cr}$) – Απόδοση.



Διάγραμμα 1.7 Υποκρίσιμη Απόσβεση ($b < b_{cr}$) – Φόρτιση.



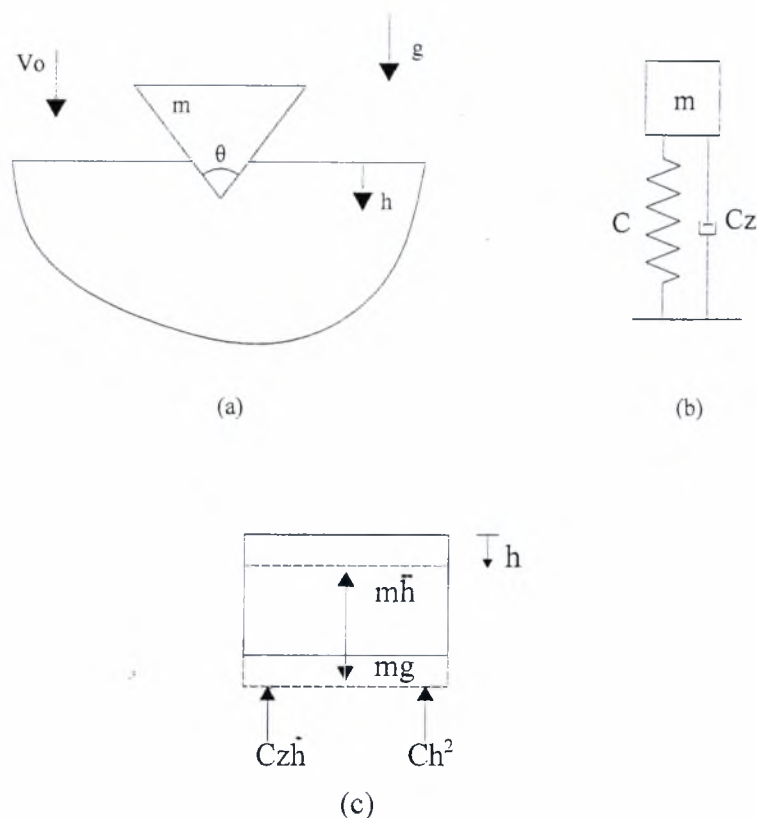
Διάγραμμα 1.8 Υποκρίσιμη Απόσβεση ($b < b_{cr}$) – Αποφόρτιση.



Διάγραμμα 1.9 Υποκρίσιμη Απόσβεση ($b < b_{cr}$) – Απόδοση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗΣ.



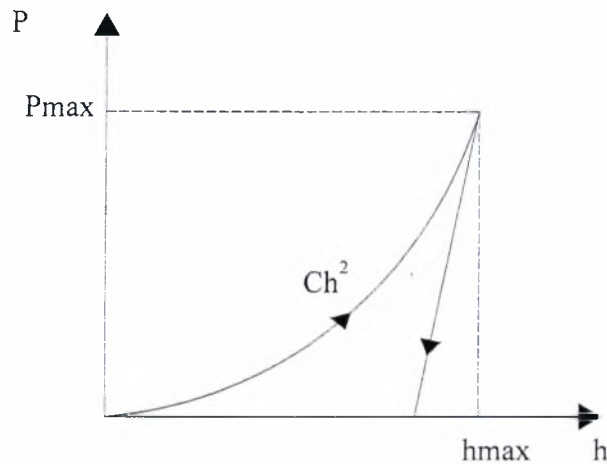
Σχήμα 2.1 α) Φυσικό πρόβλημα
 β) Δυναμικό μοντέλο διείσδυσης
 γ) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Ο αιχμηρός διεισδυτής (π.χ. κώνος) σχηματίζει στην αιχμή του γωνία θ (τυπική γωνία για την πυραμίδα Vickers είναι $\theta=140^\circ$). Έχει μάζα m και προσβάλλει το στόχο με αρχική ταχύτητα V_0 . Το φαινόμενο λαμβάνει χώρα εντός πεδίου επιτάχυνσης (π.χ. βαρύτητας) έντασης g (Σχ. 2.1.α). Το μοντέλο που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση του φαινομένου αποτελείται από ένα μη γραμμικό ελατήριο σταθεράς C (KN/m^2) το οποίο εισάγει τη δύναμη P που ασκεί ο διεισδυτής στο μεταλλικό στρώμα. Η καμπύλη δύναμης – μετατόπισης (P - h) ακολουθεί παραβολική μορφή κατά τη διάρκεια της φόρτισης σύμφωνα με τη σχέση $P=Ch^2$ (νόμος Kick). Στο μοντέλο υπάρχει επίσης ένας αποσβεστήρας σταθεράς C_z (kNsec/m), που ασκεί δύναμη $C_z \dot{h}$ στο σώμα και αντιπροσωπεύει την ενέργεια που χάνεται λόγω ακτινοβολίας (Σχ. 2.1.β,γ).

Κατά τη διάρκεια της φόρτισης η δυναμική ισορροπία του συστήματος περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + Ch^2 = mg \quad (2.1)$$

Κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης η καμπύλη δύναμης – μετατόπισης (P-h) είναι σε μεγάλη προσέγγιση γραμμική με σταθερή κλίση C_e (KN/m²) όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2



Σχήμα 2.2

Η σχέση που συνδέει τη δύναμη με τη μετατόπιση κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης δίνεται από την εξίσωση:

$$P = C_e h_{\max} h + (C - C_e) h_{\max}^2$$

Θερμοδυναμικά θα πρέπει: $2C < C_e \Rightarrow C/C_e < 1/2$.

Κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης η δυναμική ισορροπία του συστήματος περιγράφεται από τη παρακάτω εξίσωση:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + C_e h_{\max} h + (C - C_e) h_{\max}^2 = mg \quad (2.2)$$

2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ.

2.2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

• ΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + Ch^2 = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος στο χρόνο $t=0$ ισχύουν: $h=0$, $\dot{h} = V_0$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει η εξίσωση ενεργειακής ισορροπίας:

$$\frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{3}Ch^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{3}Ch^3 = \frac{1}{2}mV_0^2 \quad (2.4)$$

Από την εξίσωση (2.4) φαίνεται ότι η συνολική ενέργεια E του συστήματος παραμένει σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή ($E=K+U$) και ίση με την αρχική κινητική ενέργεια.

$$\text{Κινητική Ενέργεια: } K = \frac{1}{2}m\dot{h}^2$$

$$\text{Δυναμική Ενέργεια: } U = \frac{1}{2}Ch^3$$

$$\text{Συνολική Ενέργεια: } E = K + U = \frac{1}{2}mV_0^2$$

Το μέγιστο βάθος διείδυσης (h_{\max}) προκύπτει από την εξίσωση (2.4) θέτοντας $\dot{h} = 0$ και λύνοντας ως προς h :

$$h_{\max} = \left(\frac{3mV_0^2}{2C} \right)^{1/3} \quad (2.5)$$

Η μέγιστη δύναμη που ασκεί ο διείδυτής στο μεταλλικό στρώμα είναι:

$$P_{\max} = Ch_{\max}^2 = \left(\frac{3mV_0^2 C^{1/2}}{2} \right)^{2/3}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.4) ως προς το χρόνο, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάρκεια της διείδυσης t_1 , μέχρι να επιτευχθεί το μέγιστο βάθος διείδυσης h_{\max} :

$$t_1 = \int_0^{h_{\max}} \left(V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} \right)^{-1/2} dh = 1,402 \left(\frac{3m}{2CV_0} \right)^{1/3} \quad (2.6)$$

• ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.2) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + C_e h_{\max} \dot{h} + (C - C_e)h_{\max}^2 = 0, t \geq t_1 \quad (2.7)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες για $t=t_1$: $h=h_{\max}$, $\dot{h}=0$, είναι:

$$h(t) = h_{\max} \left(\frac{C}{C_e} \right) [\cos(\omega t - \omega t_1) - 1] + h_{\max}, \quad (2.8)$$

όπου $\omega = \left(\frac{C_e h_{\max}}{m} \right)^{1/2}$ (ψευδοσυχνότητα)

Κατά την εξέλιξη της αποφόρτισης ο διεισδυτής αποκολλάται από το μεταλλικό στρώμα όταν η δύναμη επαφής P γίνει ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει σε βάθος h_2 , το οποίο εκφράζει το τελικό ή παραμένον βάθος διείσδυσης.

$$P = C_e h_{\max} h_2 + (C - C_e) h_{\max}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$h_2 = h_{\max} \left[1 - \frac{C}{C_e} \right] \quad (2.9)$$

Επειδή $C/C_e < 1/2$ προκύπτει ότι: $1/2 < h_2/h_{\max} < 1$.

Η διαφορά μεταξύ h_{\max} και h_2 αντιπροσωπεύει την ελαστική επαναφορά του δοκιμίου. Θέτοντας $h(t) = h_2$ στην εξίσωση (2.8) υπολογίζουμε το χρόνο t_2 κατά τον οποίο $P=0$:

$$h(t_2) = h_2 \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2} \left[\frac{m}{C_e h_{\max}} \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

Κατά την τελική φάση ο διεισδυτής απομακρύνεται από το στρώμα με σταθερή ταχύτητα, καθώς δεν ασκείται καμία δύναμη πάνω του. Η ταχύτητα V_{reb} προκύπτει διαφορίζοντας την εξίσωση (2.8) και θέτοντας $t=t_2$:

$$V_{reb} = -V_0 \left[\frac{3C}{2C_e} \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

Άρα ο συντελεστής απόδοσης είναι:

$$\left| \frac{V_{reb}}{V_0} \right| = \left(\frac{3C}{2C_e} \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής απόδοσης είναι ανεξάρτητος της αρχικής ταχύτητας πρόσκρουσης V_0 . Μάλιστα παίρνει τιμές $0 < \left| V_{reb}/V_0 \right| < \sqrt{3}/2$

Η ανωτέρω ανάλυση έχει ισχύ σε περιπτώσεις κρούσης σε απουσία βαρύτητας ή σε κρούση σε διεύθυνση κάθετη στο πεδίο βαρύτητας.

Παρατηρήσεις

Μια πρώτη προσέγγιση για την επιρροή του ρυθμού μεταβολής της τροπής γίνεται από τον Andrews, Giannakopoulos [8] όπου αναφέρεται ότι η μεταβολή της παραμέτρου C εξαρτάται από το λόγο \dot{h}/h σύμφωνα με τη σχέση:

$$C = C_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{h}/h}{40\dot{\epsilon}_0 b} \right)^b \right]$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση του προβλήματος διαμορφώνεται εκ νέου:

$$\ddot{h} + \frac{C_0}{m} h^2 + \frac{C_0}{m(40\dot{\epsilon}_0 b)^b} h^{2-b} \dot{h}^b = 0$$

Η τελευταία εξίσωση επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται αναλυτικά στο παράρτημα.

Πιο συγκεκριμένα για το υλικό AL 1100 γνωρίζουμε τις τιμές των παραμέτρων $b=1/3$ και $\dot{\epsilon}_o = 250000 \text{ sec}^{-1}$. Η μάζα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση ήταν $m=10 \text{ mg}$ και η αρχική ταχύτητα $V_o=3 \text{ m/sec}$, όπως ακριβώς έγινε και στην προαναφερθείσα εργασία. Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων Φορτίου – Μετατόπισης παρατηρούμε ότι με τη νέα προσέγγιση της παραμέτρου C ακολουθείται η αναμενόμενη μορφή με αυξημένη κλίση αφού $C > C_o$. Όμως η προσέγγιση αυτή οδηγεί σε υπερεκτίμηση του μέγιστου βάθους διείδυσης και ως εκ τούτου του μέγιστου φορτίου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι μη συμβατά με την ανάλυση που έγινε με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων, γεγονός που μας ωθεί στο να απορρίψουμε αυτήν την προσέγγιση.

2.2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

• ΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + Ch^2 = mg, \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

Ισχύει:

$$\ddot{h} = \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{d\dot{h}}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{d\dot{h}}{dh} \dot{h} = \dot{h} \frac{d\dot{h}}{dh}$$

Επομένως η (2.13) γράφεται:

$$mg - Ch^2 = m\dot{h} \frac{d\dot{h}}{dh} \Rightarrow (mg - Ch^2)dh = m\dot{h}d\dot{h}$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι: Για $t=0$ ισχύουν: $h=0, \dot{h} = V_o$.

Με βάση τις αρχικές συνθήκες και ολοκληρώνοντας προκύπτει εκ νέου η ενεργειακή ισοροπία:

$$\int_0^h (mg - Ch^2) d\dot{h} = \int_{V_o}^{\dot{h}} m\dot{h} d\dot{h} \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}mV_o^2 - mgh + \frac{Ch^3}{3} = 0 \Rightarrow \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{3}Ch^3 - mgh = \frac{1}{2}mV_o^2$$

όπου ο όρος mgh εκφράζει τη δυναμική ενέργεια λόγω βάρους.

Για $t=t_1$ ισχύουν: $h=h_{\max}, \dot{h} = 0$.

Η σχέση (2.14) γράφεται:

$$h_{\max}^3 - \frac{3mg}{C}h_{\max} - \frac{3mV_0^2}{2C} = 0 \quad (2.15)$$

Από την επίλυση της τελευταίας εξίσωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγιστο βάθος διείδυσης (h_{\max}). Για την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφεται στο παράρτημα του βιβλίου (Τεχνική Μηχανική Ι, Βαρδουλάκης, Γιαννακόπουλος-σελ.190). Κατά τη μέθοδο αυτή προκύπτει η χαρακτηριστική τιμή D:

$$D = \frac{m^2}{16C^3}(9V_0^4C - 16mg^3)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\mu\epsilon \lambda = \frac{3V_0^2}{4g} \sqrt{\frac{C}{mg}}$$

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- Αν $D > 0 \rightarrow \lambda > 1$.

Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις h_1, h_2, h_3 :

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{mg}{C}} \cosh\left(\frac{\ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}{3}\right) = h_{\max} \quad (2.16)$$

Οι λύσεις h_2, h_3 είναι μιγαδικές και απορρίπτονται.

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h_{\max} > 2\sqrt{\frac{mg}{C}} \Rightarrow Ch_{\max}^2 = P_{\max} > 4mg$$

- Αν $D \leq 0 \rightarrow 0 < \lambda \leq 1$.

Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις h_1, h_2, h_3 . Λόγω του περιορισμού $0 < \lambda \leq 1$, δεκτή γίνεται μόνο η h_1 :

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{mg}{C}} \cos\left(\frac{\arccos \lambda}{3}\right) = h_{\max} \quad (2.17)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \sqrt{\frac{3mg}{2C}} < h_{\max} \leq 2\sqrt{\frac{mg}{C}} \Rightarrow 3mg < P_{\max} \leq 4mg$$

Υπολογισμός της διάρκειας φόρτισης t_1 :

Γνωρίζοντας ότι για $t=t_1$ ισχύει $h=h_{\max}$ από την εξίσωση (2.14) προκύπτει ότι:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \left(V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} + 2gh \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$dt = \left(V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} + 2gh \right)^{-\frac{1}{2}} dh \Rightarrow t_1 = \int_0^{h_{\max}} \frac{dh}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} + 2gh}} \quad (2.18)$$

Γνωρίζοντας από την παράγραφο 2.2.1 ότι το h_{\max} είναι ίσο με:

$$h_{\max}^{g=0} = \left(\frac{3V_0^2 m}{2C} \right)^{1/3} \text{ και θέτοντας } \alpha = \frac{3}{(2\lambda)^{2/3}}, \quad y = \frac{h_{\max}}{h_{\max}^{g=0}}$$

Η (2.18) γράφεται:

$$t_1 = \frac{h_{\max}^{g=0}}{V_0} \int_0^y \frac{dy^*}{\sqrt{1 + \alpha y^{*3} - y^{*3}}} = \left(\frac{3m}{2CV_0} \right)^{1/3} \int_0^y \frac{dy^*}{\sqrt{1 + \alpha y^{*3} - y^{*3}}} \quad (2.19)$$

Το ολοκλήρωμα επιλύεται αριθμητικά και με τη βοήθεια υπολογιστικού προγράμματος. Οι τιμές του για διάφορες τιμές του λ φαίνονται στον πίνακα 2.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

λ	y	α	Integral
0,001	13,7499	188,9882	0,6967
0,010	6,3932	40,7163	0,9903
0,020	5,0839	25,6496	1,0930
0,030	4,4496	19,5743	1,1494
0,040	4,0503	16,1583	1,1910
0,050	3,7670	13,9248	1,2228
0,060	3,5514	12,3311	1,2483
0,070	3,3797	11,1268	1,2695
0,080	3,2385	10,1791	1,2874
0,090	3,1194	9,4104	1,3028
0,100	3,0172	8,7721	1,3163
0,200	2,4365	5,5260	1,3954
0,300	2,1632	4,2172	1,4317
0,400	1,9956	3,4812	1,4521
0,500	1,8794	3,0000	1,4646
0,600	1,7929	2,6566	1,4727
0,700	1,7253	2,3972	1,4781
0,800	1,6708	2,1930	1,4817
0,900	1,6256	2,0274	1,4841
1,000	1,5874	1,8899	1,4856
2,000	1,3833	1,1906	1,4842
3,000	1,2962	0,9086	1,4770
4,000	1,2460	0,7500	1,4704
5,000	1,2128	0,6463	1,4649
6,000	1,1889	0,5724	1,4604
7,000	1,1707	0,5165	1,4565
8,000	1,1564	0,4725	1,4533
9,000	1,1447	0,4368	1,4505
10,000	1,1350	0,4072	1,4480
20,000	1,0853	0,2565	1,4338
30,000	1,0652	0,1957	1,4272
40,000	1,0538	0,1616	1,4233
50,000	1,0464	0,1392	1,4206

Από τον πίνακα 2.1 παρατηρούμε ότι ασυμπτωτικά όταν $g \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow Integral \rightarrow 1.402$ τιμή η οποία επαληθεύεται από την εξίσωση 2.6 όπως προκύπτει από την ανάλυση χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης.

Επίσης παρατηρούμε ότι όταν $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty \Rightarrow Integral \rightarrow 0$.

• ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.2) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\ddot{h} + \frac{C_e h_{\max}}{m} h = g - \frac{(C - C_e)}{m} h_{\max}^2, \quad t \geq t_1 \quad (2.20)$$

Η λύση της εξίσωσης (2.20) προκύπτει από το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μιας μερικής λύσης:

$$h(t) = h_H(t) + h_P(t)$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η:

$$h_H(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

και η μερική λύση:

$$h_P(t) = \frac{g}{\omega^2} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max}, \quad \text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{C_e h_{\max}}{m}}.$$

Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

$$\text{Για } t=t_1: h=h_{\max}, \quad \dot{h} = 0.$$

$$\text{Επομένως: } C_1 = \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}\right) \cos(\omega t_1), \quad C_2 = \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}\right) \sin(\omega t_1)$$

Άρα οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου για την αποφόρτιση είναι:

$$h(t) = \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}\right) \cos(\omega t - \omega t_1) + \frac{g}{\omega^2} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max} \quad (2.21)$$

$$\dot{h}(t) = -\omega \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}\right) \sin(\omega t - \omega t_1) \quad (2.22)$$

$$\ddot{h}(t) = -\omega^2 \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}\right) \cos(\omega t - \omega t_1) \quad (2.23)$$

Κατά την εξέλιξη της αποφόρτισης ο διεισδυτής ενδεχομένως αποκολλάται από το μεταλλικό στρώμα όταν η δύναμη επαφής P γίνει ίση με μηδέν (ισοδύναμα όταν $\ddot{h} = g$). Αυτό συμβαίνει σε βάθος h_2 , το οποίο εκφράζει το τελικό ή παραμένον βάθος διεΐσδυσης.

$$P = C_e h_{\max} h_2 + (C - C_e) h_{\max}^2 = 0 \Rightarrow h_2 = h_{\max} \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) \quad (2.24)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή απαιτεί:

$$\frac{C}{C_e} h_{\max} > \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{C_e h_{\max}} \Rightarrow Ch_{\max}^2 > mg \Rightarrow P_{\max} > mg \text{ που ισχύει.}$$

Θέτοντας $h(t)=h_2$ στην εξίσωση (2.21) υπολογίζουμε το χρόνο t_2 κατά τον οποίο $P=0$.

$$h(t_2) = h_2 \Rightarrow \cos(\omega t_2 - \omega t_1) = \frac{-\frac{g}{\omega^2}}{-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max}}$$

$$\text{Ισχύει} \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max} \right) \neq 0.$$

Δηλαδή $P_{\max} \neq mg$ το οποίο ισχύει αφού η βαρυτική δύναμη δε μπορεί να γίνει ίση με την $P_{\max} = Ch_{\max}^2$ λόγω της ύπαρξης της αρχικής ταχύτητας V_0 . Επίσης πρέπει:

$$-1 \leq \cos(\omega t_2 - \omega t_1) \leq 1 \Rightarrow 2mg \leq P_{\max} = Ch_{\max}^2 \quad (2.25)$$

Το h_{\max} είναι γνωστό από την διαδικασία της φόρτισης και παίρνει τις εξής μορφές ανάλογα με την τιμή του λ (σχέσεις (2.16), (2.17)).

Αν $\lambda > 1$ προκύπτει ότι $P_{\max} > 4mg$ το οποίο υπερκαλύπτει τη (2.25).

Αν $0 < \lambda \leq 1$ για να ισχύει η (2.25) θα πρέπει: $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right]$, όπου $\phi = \frac{\arccos(\lambda)}{3}$. Με βάση τα παραπάνω όρια της γωνίας ϕ προκύπτουν δύο οριακές τιμές h_{\max} :

$$\text{Για } \phi=0 \rightarrow h_{\max} = 2\sqrt{\frac{mg}{C}}.$$

$$\text{Για } \phi=\pi/6 \rightarrow h_{\max} = \sqrt{\frac{3mg}{2C}}.$$

Επομένως $3mg < P_{\max} \leq 4mg$ που επίσης υπερκαλύπτει την (2.25).

$$\text{Άρα προκύπτει: } t_2 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{-\kappa}{-\kappa+1}\right) + t_1 \quad (2.26)$$

όπου $\kappa = mg/P_{\max}$.

Παρατηρήσεις

- Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (2.9), (2.10), (2.24), (2.26) ενώ το σχετικό βάθος αποκόλλησης είναι το ίδιο ανεξάρτητα αν υπάρχει επιτάχυνση, ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει η αποκόλληση διαφοροποιείται.
- Επίσης παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το μέγιστο δυναμικό φορτίο είναι τουλάχιστον τριπλάσιο του βάρους ($P_{\max} > 3mg$). Μάλιστα στην περίπτωση όπου $\lambda > 1$ το μέγιστο δυναμικό φορτίο είναι τουλάχιστον τετραπλάσιο του βάρους ($P_{\max} > 4mg$). Το λ γίνεται μεγαλύτερο του 1 όταν η αρχική ταχύτητα (V_0) είναι μεγάλη ή η μάζα είναι μικρή.
- Όπως προκύπτει από λεπτομερέστερη ανάλυση της εξίσωσης (2.26), όταν δεν υπάρχει επιρροή της επιτάχυνση, άρα $\kappa=0$, επαληθεύεται η εξίσωση (2.10).

2.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

2.3.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

• ΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + Ch^2 = 0 \quad (2.27)$$

Το C_z είναι γνωστό (Foundation Vibrations, George Gazetas) και ισούται με:

$$C_z = \rho V_{La} A_b \tilde{c}_z, \text{ όπου:}$$

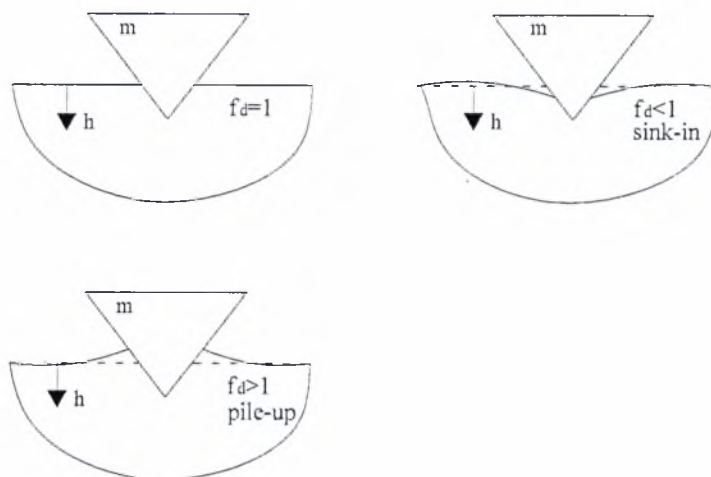
ρ = πυκνότητα στρώματος

$$V_{La} = \text{χαρακτηριστική ταχύτητα κύματος κατά Lysmer } V_{La} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s$$

$$V_s = \text{ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων } V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{μέτρο διάτμησης, } E = \text{μέτρο Young, } \nu = \text{λόγος Poisson.}$$

$A_b =$ εμβαδόν της επιφάνειας επαφής κώνου $= Ah^2$, $A = 24.5f_d$ για την τυπική πυραμίδα Vickers ($\theta=140^\circ$), όπου f_d συντελεστής που δείχνει τη λεπτομέρεια βύθισης στην περίμετρο επαφής (σχήμα 2.3) και παίρνει τιμές: $0,44 < f_d < 1,75$. Τυπικά επιλέγουμε τιμή $f_d=1$.



Σχήμα 2.3

$\tilde{C}_z =$ συντελεστής απόσβεσης ακτινοβολίας που υπολογίζεται από νομογραφήματα (Foundation Vibrations, George Gazetas), $\tilde{C}_z = 0.9$.

Τελικά προκύπτει ότι: $C_z = \mu h^2$, όπου $\mu = 22,05 \rho f_d V_{La}$ συντελεστής που εξαρτάται από το υλικό του στρώματος.

Άρα η εξίσωση (2.27) γράφεται:

$$m\ddot{h} + \mu h^2 \dot{h} + Ch^2 = 0 \quad (2.28)$$

όπου εμφανίζεται για πρώτη φορά ο όρος της ακτινοβολίας $h^2 \dot{h}$.

Η εξίσωση (2.28) επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται αναλυτικά στο παράρτημα.

Ο πίνακας 2.3 είναι ένας συγκριτικός πίνακας μεταξύ της τιμής του μέγιστου βάθους διείσδυσης χωρίς την επιρροή της ακτινοβολίας (σχέση 2.5) και αυτής που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση για διεισδυτή μάζας $m=10$ gr που προσκρούει σε μπρούτζο με χαρακτηριστικά που φαίνονται στον πίνακα 2.2.

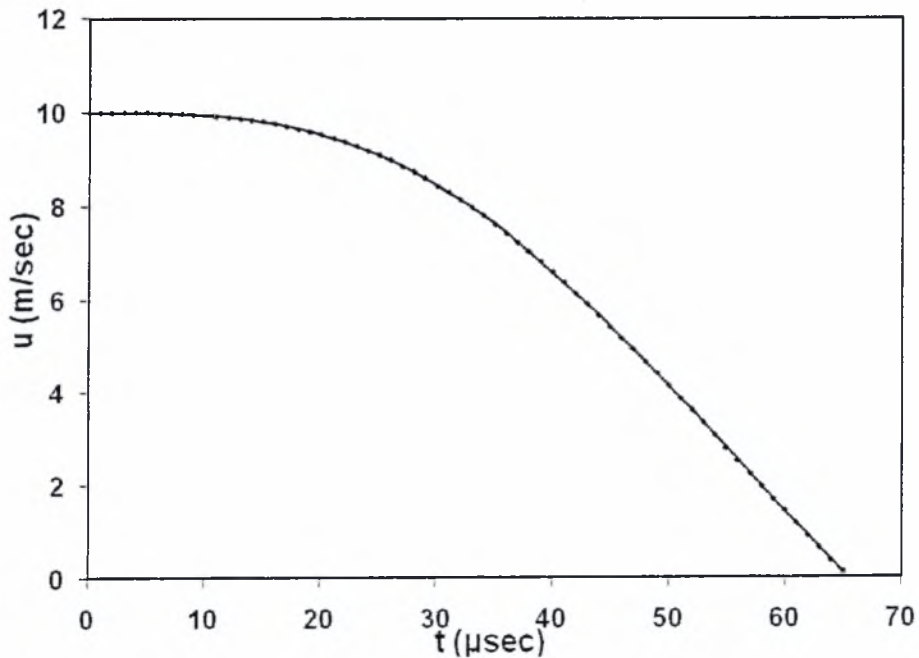
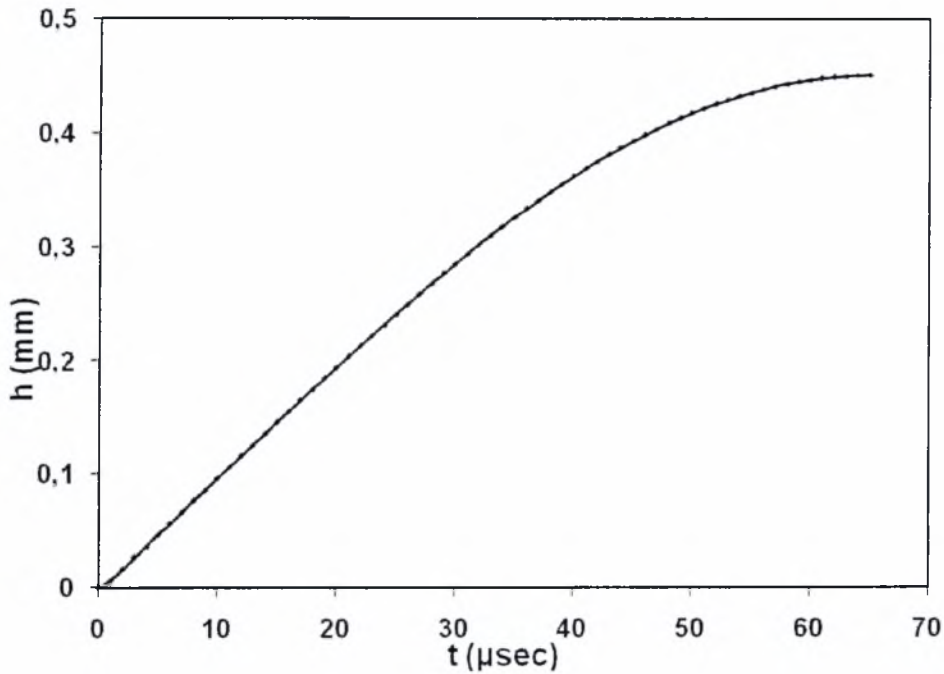
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2

ΥΛΙΚΟ:	BRASS		
Μάζα:	m=	0,01	kg
Πυκνότητα στόχου:	ρ =	8500	kg/m ³
Συντελεστής Poisson:	ν =	0,35	
	C=	1,25E+10	Pa
	C_e =	7,02E+11	Pa
	C/C_e =	0,017814	
Μέτρο Ελαστικότητας:	E=	1,01E+11	Pa
Μέτρο Διάτμησης:	G=	3,74E+10	Pa
Συντελεστής:	f_d =	1	
Ταύτητα διάδοσης s κυματων:	V_s =	2097,825	m/s
Ταχύτητα κατά Lysmer:	V_{Lo} =	3492,891	m/s
	μ =	6,55E+08	
	V_I =	1212,678	m/s
	h_I =	0,01208	m

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3

V_0 (m/sec)	h^{theory} (m)	$h^{num.}$ (m)	$h^{num.}/h^{theory}$
0	0	0	0
0,1	2,29E-05	2,29E-05	0,999
0,15	0,00003	3E-05	0,999
0,2	3,63E-05	3,63E-05	0,998
1,5	0,000139	0,000137	0,984
5	0,000311	0,000295	0,949
12	0,000557	0,000497	0,892
20	0,000783	0,00066	0,842
40	0,001243	0,000937	0,754
80	0,001973	0,001292	0,655
130	0,002727	0,001589	0,583
180	0,003388	0,001814	0,535
300	0,004762	0,002213	0,465
500	0,006694	0,002678	0,400
700	0,008378	0,003025	0,361
800	0,009158	0,003174	0,347
1000	0,010627	0,003436	0,323
1100	0,011324	0,003553	0,314

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της ταχύτητας πρόσκρουσης V_0 οι δύο τιμές σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι η απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας είναι ασήμαντη. Όσο όμως η ταχύτητα πρόσκρουσης V_0 αυξάνεται τόσο αυτές οι δύο τιμές διαφοροποιούνται και το μέγιστο βάθος διείσδυσης, αν και αυξάνεται κατά απόλυτη τιμή, μειώνεται σε σχέση με το θεωρητικό.



Διάγραμμα 2.1: Βάθος διείσδυσης και ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου κατά τη δυναμική διείσδυση σε μπρούντζο με αρχική ταχύτητα $V_0=10$ m/s (Αριθμητικά αποτελέσματα).

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Κατά τη φάση της αποφόρτισης η απόσβεση παραμένει σταθερή και είναι ίση με:

$C_e = \mu h_{\max}^2$, όπου h_{\max} το βάθος διείδυσης το οποίο έχει υπολογιστεί αριθμητικά από τη φόρτιση.

Άρα η εξίσωση (2.2) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + \mu h_{\max}^2 \dot{h} + C_e h_{\max} h + (C - C_e)h_{\max}^2 = 0 \quad (2.29)$$

Η ειδική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι: $h_e = \left(1 - \frac{C}{C_e}\right)h_{\max} = h_2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η:

$$\kappa^2 + \frac{\mu h_{\max}^2}{m} \kappa + \frac{C_e h_{\max}}{m} = 0 \quad (2.30)$$

Η διακρίνουσα Δ της σχέσης (2.30) είναι: $\Delta = \frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}$

Διακρίνονται οι εξής 3 περιπτώσεις:

A) Αν $\Delta > 0$ τότε $\frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} > 4C_e$

Από την ανάλυση χωρίς απόσβεση έχει υπολογιστεί το μέγιστο βάθος διείδυσης (σχέση (2.5)) το οποίο είναι ίσο με: $h_{\max} = \left(\frac{3mV_0^2}{2C}\right)^{1/3}$. Λόγω της απόσβεσης το μέγιστο βάθος διείδυσης κατά τη φόρτιση αναμένεται να είναι μικρότερο, δηλαδή

$$h_{\max} < \left(\frac{3mV_0^2}{2C}\right)^{1/3} \Rightarrow h_{\max}^3 < \frac{3mV_0^2}{2C}$$

Άρα ισχύει: $\frac{3\mu^2 V_0^2}{2C} > \frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} > 4C_e$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.29) είναι η :

$$h = C_1 e^{\kappa_1 t} + C_2 e^{\kappa_2 t} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max}$$

Όπου:

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} + \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} - \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$$

Προφανώς $\kappa_2 < \kappa_1 < 0$

Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

Για $t=t_1$: $h=h_{\max}$ και $\dot{h}=0$.

Επομένως: $C_1 = -\frac{\kappa_2 C h_{\max}}{(\kappa_1 - \kappa_2) C_e e^{\kappa_1 t_1}}$ και $C_2 = -\frac{\kappa_1 C h_{\max}}{(\kappa_1 - \kappa_2) C_e e^{\kappa_2 t_1}}$

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = \frac{h_{\max} C}{(\kappa_1 - \kappa_2) C_e} (\kappa_1 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_1)}) + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max} \quad (2.31)$$

$$\dot{h} = h_{\max} \frac{C}{C_e} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} (e^{\kappa_2(t-t_1)} - e^{\kappa_1(t-t_1)}) \quad (2.32)$$

$$\ddot{h} = h_{\max} \frac{C}{C_e} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} (\kappa_2 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_1 e^{\kappa_1(t-t_1)}) \quad (2.33)$$

Θέτοντας $\ddot{h}=0$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης:

$$t_2 = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \ln \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + t_1 \quad (2.34)$$

B) Αν $\Delta=0$ τότε $\frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} = 4C_e$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.29) είναι η:

$$h = e^{\kappa t} (C_1 t + C_2) + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max}$$

Όπου $\kappa = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m} < 0$. Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

Για $t=t_1$: $h=h_{\max}$ και $\dot{h} = 0$.

Επομένως: $C_1 = -\frac{\kappa C h_{\max}}{C_e e^{\kappa t_1}}$ και $C_2 = \frac{(\kappa t_1 + 1) C h_{\max}}{C_e e^{\kappa t_1}}$.

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} (\kappa(t-t_1) + 1) + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max} \quad (2.35)$$

$$\dot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} \kappa^2 (t-t_1) \quad (2.36)$$

$$\ddot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} \kappa^2 (\kappa(t-t_1) - 1) \quad (2.37)$$

Θέτοντας $\ddot{h} = 0$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης:

$$t_2 = t_1 - \frac{1}{\kappa} \quad (2.38)$$

Γ) Αν $\Delta < 0$ τότε $\frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} < 4C_e$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.29) είναι η:

$$h = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max}$$

όπου $a = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m}$ και $b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} + \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$.

Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

Για $t=t_1$: $h=h_{\max}$ και $\dot{h} = 0$.

Επομένως: $C_1 = \frac{h_{\max} C}{e^{at_1} b C_e} (a \sin(bt_1) + b \cos(bt_1))$ και

$$C_2 = -\frac{h_{\max} C}{e^{at_1} b C_e} (a \cos(bt_1) - b \sin(bt_1)).$$

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = \frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C}{b C_e} (b \cos(b(t-t_1)) - a \sin(b(t-t_1))) + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max} \quad (2.39)$$

$$\dot{h} = -\frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C}{b C_e} (a^2 + b^2) \sin(b(t-t_1)) \quad (2.40)$$

$$\ddot{h} = -\frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C (a^2 + b^2)}{b C_e} (a \sin(b(t-t_1)) + b \cos(b(t-t_1))) \quad (2.41)$$

Θέτοντας $\ddot{h} = 0$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{b} \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) \quad (2.42)$$

2.3.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

- ΦΟΡΤΙΣΗ

Η εξίσωση (2.1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + Ch^2 = mg \quad \text{ή} \quad m\ddot{h} + \mu h^2 \dot{h} + Ch^2 = mg \quad (2.43)$$

Η εξίσωση (2.43) επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται αναλυτικά στο παράρτημα.

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Κατά τη φάση της αποφόρτισης η απόσβεση παραμένει σταθερή και είναι ίση με:

$C_z = \mu h_{\max}^2$, όπου h_{\max} το βάθος διείδυσης το οποίο έχει υπολογιστεί αριθμητικά από τη φόρτιση.

Άρα η εξίσωση (2.2) διαμορφώνεται ως εξής:

$$m\ddot{h} + \mu h_{\max}^2 \dot{h} + C_e h_{\max} h + (C - C_e)h_{\max}^2 = mg \quad (2.44)$$

Η ειδική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι: $h_e = \left(1 - \frac{C}{C_e}\right)h_{\max} + \frac{mg}{C_e h_{\max}}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η:

$$\kappa^2 + \frac{\mu h_{\max}^2}{m} \kappa + \frac{C_e h_{\max}}{m} = 0 \quad (2.45)$$

Η διακρίνουσα Δ της σχέσης (2.30) είναι: $\Delta = \frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}$

Διακρίνονται οι εξής 3 περιπτώσεις:

A) Αν $\Delta > 0$ τότε $\frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} > 4C_e$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.44) είναι η :

$$h = C_1 e^{\kappa_1 t} + C_2 e^{\kappa_2 t} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right)h_{\max} + \frac{mg}{C_e h_{\max}}$$

Όπου:

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} + \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} - \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$$

Προφανώς $\kappa_2 < \kappa_1 < 0$

Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

Για $t=t_1$: $h=h_{\max}$ και $\dot{h} = 0$.

Επομένως: $C_1 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{e^{\kappa_1 t_1}} \left(h_{\max} \frac{C}{C_e} - \frac{mg}{C_e h_{\max}} \right)$

και $C_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{e^{\kappa_2 t_1}} \left(h_{\max} \frac{C}{C_e} - \frac{mg}{C_e h_{\max}} \right)$

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = \left(\frac{h_{\max} C}{C_e} - \frac{mg}{C_e h_{\max}} \right) \left(\frac{\kappa_1 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_1)}}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) + \frac{mg}{C_e h_{\max}} + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max} \quad (2.46)$$

$$\dot{h} = \left(h_{\max} \frac{C}{C_e} - \frac{mg}{C_e h_{\max}} \right) \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \left(e^{\kappa_2(t-t_1)} - e^{\kappa_1(t-t_1)} \right) \quad (2.47)$$

$$\ddot{h} = \left(h_{\max} \frac{C}{C_e} - \frac{mg}{C_e h_{\max}} \right) \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \left(\kappa_2 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_1 e^{\kappa_1(t-t_1)} \right) \quad (2.48)$$

Θέτοντας $\ddot{h} = g$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης αριθμητικά.

B) Αν $\Delta=0$ τότε $\frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} = 4C_e$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.29) είναι η:

$$h = e^{\kappa t} (C_1 t + C_2) + \frac{mg}{C_e h_{\max}} + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max}$$

Όπου $\kappa = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m} < 0$. Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

Για $t=t_1$: $h=h_{\max}$ και $\dot{h} = 0$.

Επομένως: $C_1 = \frac{\kappa}{C_e e^{\kappa t_1}} \left(\frac{mg}{h_{\max}} - C h_{\max} \right)$ και $C_2 = -\frac{(\kappa t_1 + 1)}{C_e e^{\kappa t_1}} \left(\frac{mg}{h_{\max}} - C h_{\max} \right)$.

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = e^{\kappa(t-t_1)} \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e} \right) (\kappa(t-t_1) - 1) + \frac{mg}{C_e h_{\max}} + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max} \quad (2.49)$$

$$\dot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} \kappa^2 \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e} \right) (t-t_1) \quad (2.50)$$

$$\ddot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} \kappa^2 \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e} \right) (\kappa(t-t_1) + 1) \quad (2.51)$$

Θέτοντας $\ddot{h} = g$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης αριθμητικά.

$$\Gamma) \text{ Αν } \Delta < 0 \text{ τότε } \frac{\mu^2 h_{\max}^3}{m} < 4C_e$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (2.29) είναι η:

$$h = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) + \frac{mg}{C_e h_{\max}} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max}$$

$$\text{όπου } a = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m} \text{ και } b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} + \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right).$$

Οι συντελεστές C_1, C_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης που είναι:

$$\text{Για } t=t_1: h=h_{\max} \text{ και } \dot{h} = 0.$$

$$\text{Επομένως: } C_1 = -\left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e}\right) \frac{(a \sin(bt_1) + b \cos(bt_1))}{b e^{at_1}} \text{ και}$$

$$C_2 = \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e}\right) \frac{(a \cos(bt_1) - b \sin(bt_1))}{b e^{at_1}}.$$

Από τα παραπάνω οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά την αποφόρτιση είναι:

$$h = \frac{e^{a(t-t_1)}}{b} \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e}\right) (a \sin(b(t-t_1)) - b \cos(b(t-t_1))) + \frac{mg}{C_e h_{\max}} + \left(1 - \frac{C}{C_e}\right) h_{\max} \quad (2.52)$$

$$\dot{h} = \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e}\right) \frac{e^{a(t-t_1)}}{b} (a^2 + b^2) \sin(b(t-t_1)) \quad (2.53)$$

$$\ddot{h} = \left(\frac{mg}{C_e h_{\max}} - \frac{C h_{\max}}{C_e}\right) \frac{e^{a(t-t_1)}}{b} (a^2 + b^2) [a \sin(b(t-t_1)) + b \cos(b(t-t_1))] \quad (2.54)$$

Θέτοντας $\ddot{h} = g$ προκύπτει ο χρόνος αποκόλλησης αριθμητικά.

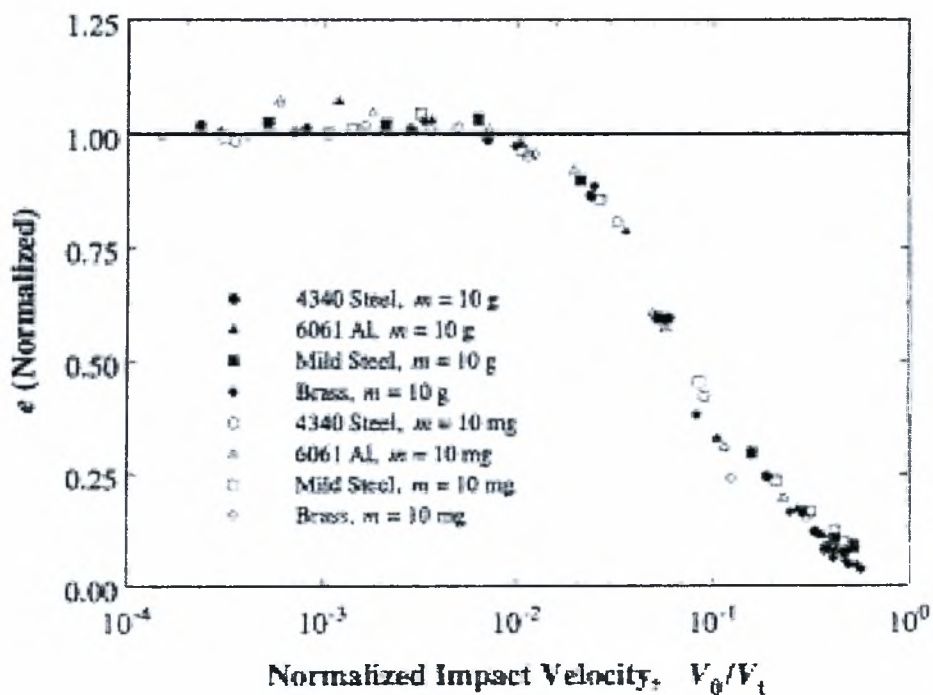
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΕΙΣ

3.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

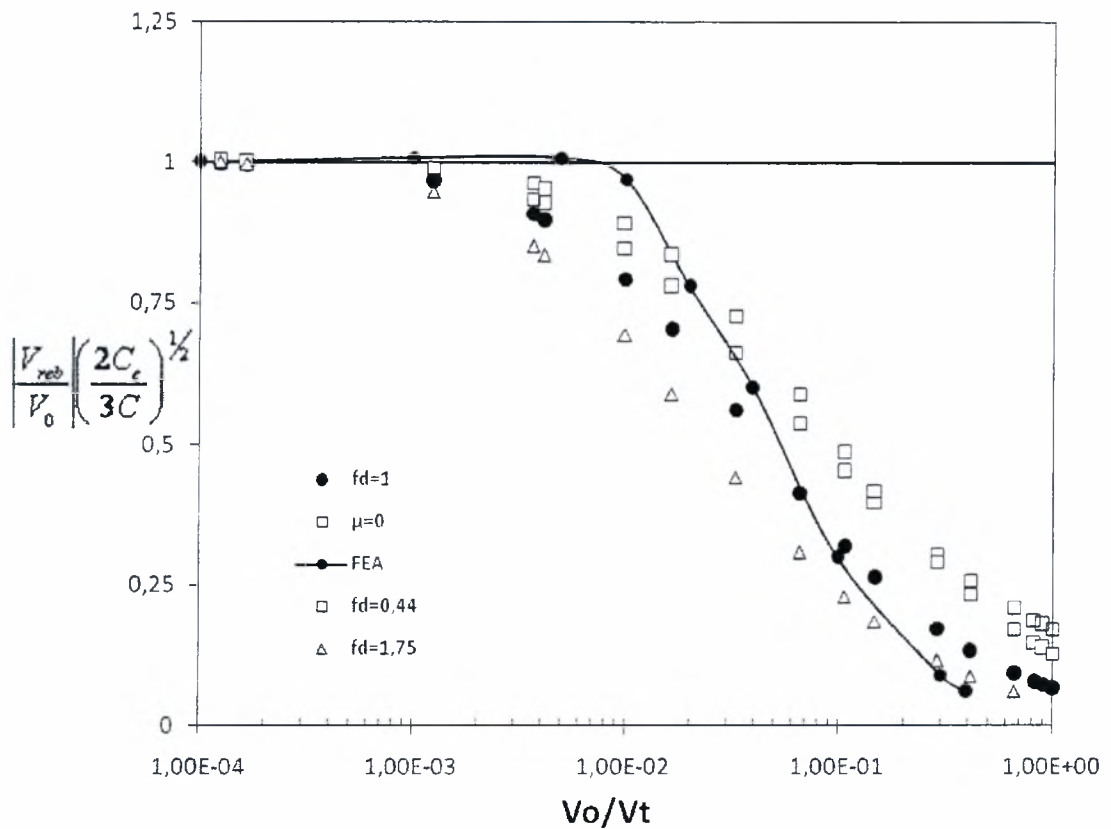
Αρκετές πειραματικές μελέτες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια στο αντικείμενο της στατικής και δυναμικής διείδυσης. Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να επαληθεύσουμε ορισμένα πειραματικά αποτελέσματα με βάση τη θεωρία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν είτε από καθαρά πειραματικές διατάξεις είτε από ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία.

3.1.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουν ληφθεί από την εργασία «Analysis of the impact of a sharp indenter» [8]. Πρόκειται για ανάλυση διείδυσης χωρίς την επιρροή επιτάχυνσης.



Διάγραμμα 3.1 Συντελεστής απόδοσης σε σχέση με την κανονικοποιημένη ταχύτητα πρόσκρουσης (Πεπερασμένα Στοιχεία).

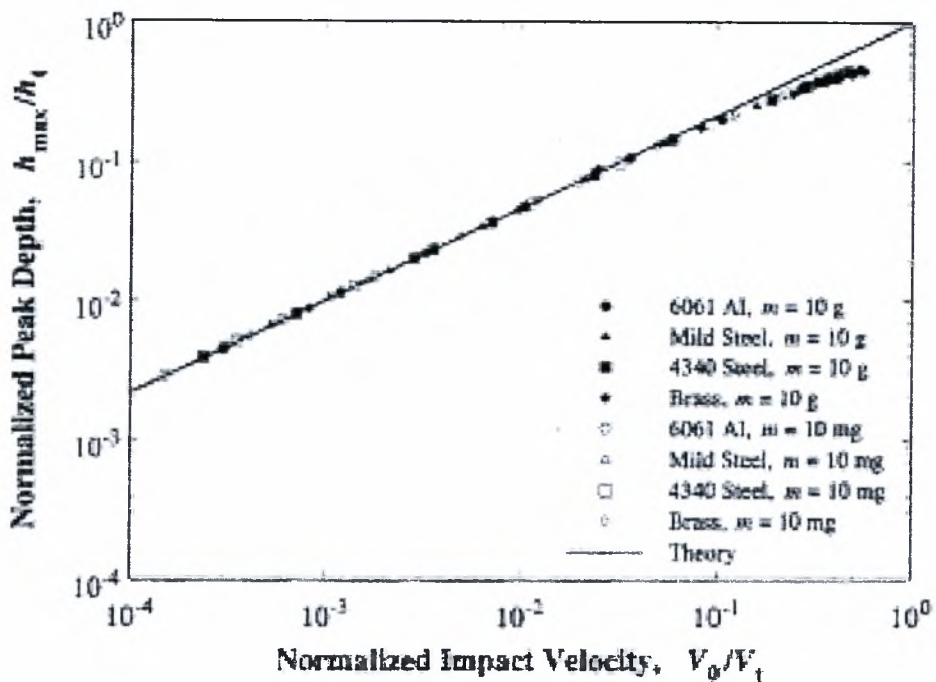


Διάγραμμα 3.2 Συντελεστής απόδοσης σε σχέση με την κανονικοποιημένη ταχύτητα πρόσκρουσης (Επαλήθευση).

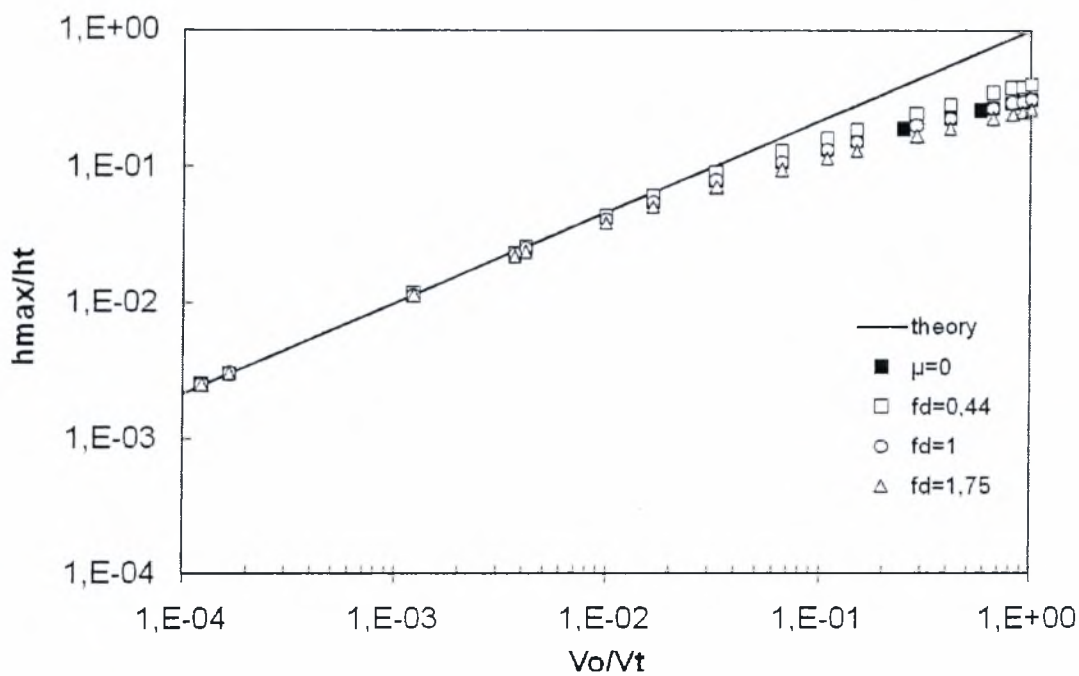
Από τη σύγκριση των δύο παραπάνω διαγραμμάτων παρατηρούμε ότι οι καμπύλες διαφοροποιούνται ελαφρά αλλά διατηρούν την ίδια μορφή. Παρατηρούμε από τα αποτελέσματα της ανάλυσης με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων ότι όταν η ταχύτητα πρόσκρουσης αυξάνεται, κυρίως για μεγάλες τιμές της ταχύτητας, ο συντελεστής απόδοσης e συνεχώς μειώνεται σε σχέση με το θεωρητικό συντελεστή e_{theory} . Η μείωση αυτή οφείλεται στην απώλεια ενέργειας με τη μορφή ακτινοβολίας και επαληθεύεται από τη θεωρία που αναπτύξαμε (Διάγραμμα 3.2).

$$Vt = \left(\frac{C}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$ht = \left(\frac{3m}{2\rho} \right)^{1/3}$$



Διάγραμμα 3.3 Κανονικοποιημένο βάθος διείσδυσης σε σχέση με την κανονικοποιημένη ταχύτητα πρόσκρουσης (Πεπερασμένα Στοιχεία).

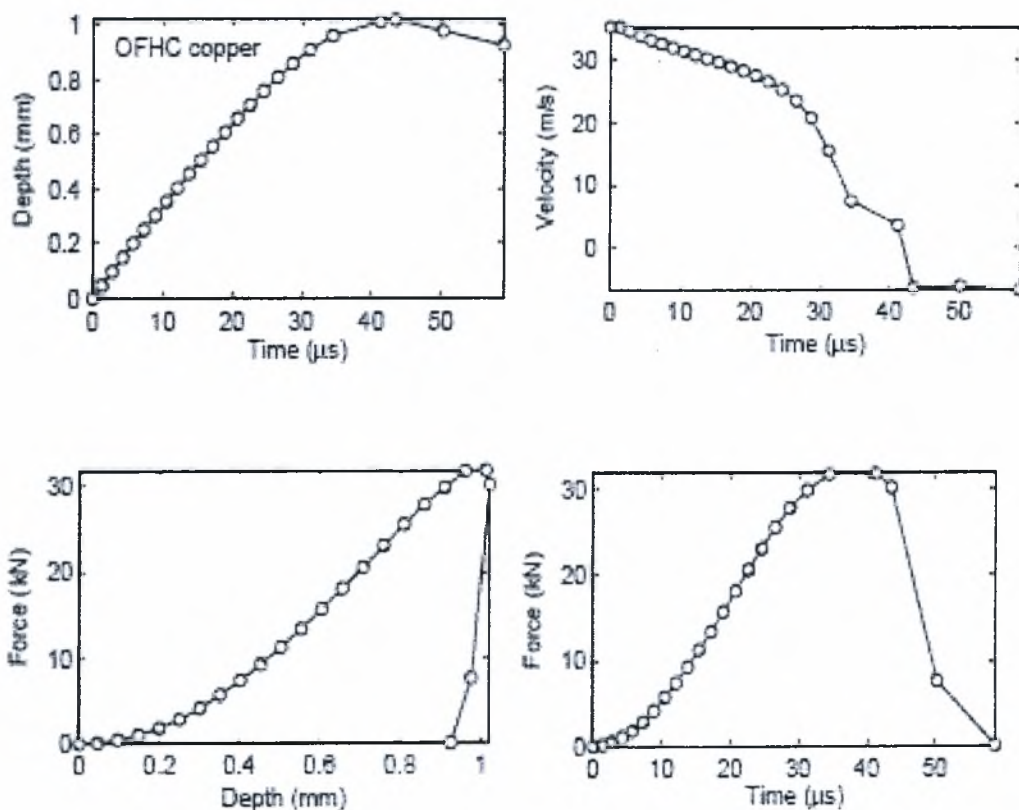


Διάγραμμα 3.4 Κανονικοποιημένο βάθος διείσδυσης σε σχέση με την κανονικοποιημένη ταχύτητα πρόσκρουσης (Επαλήθευση).

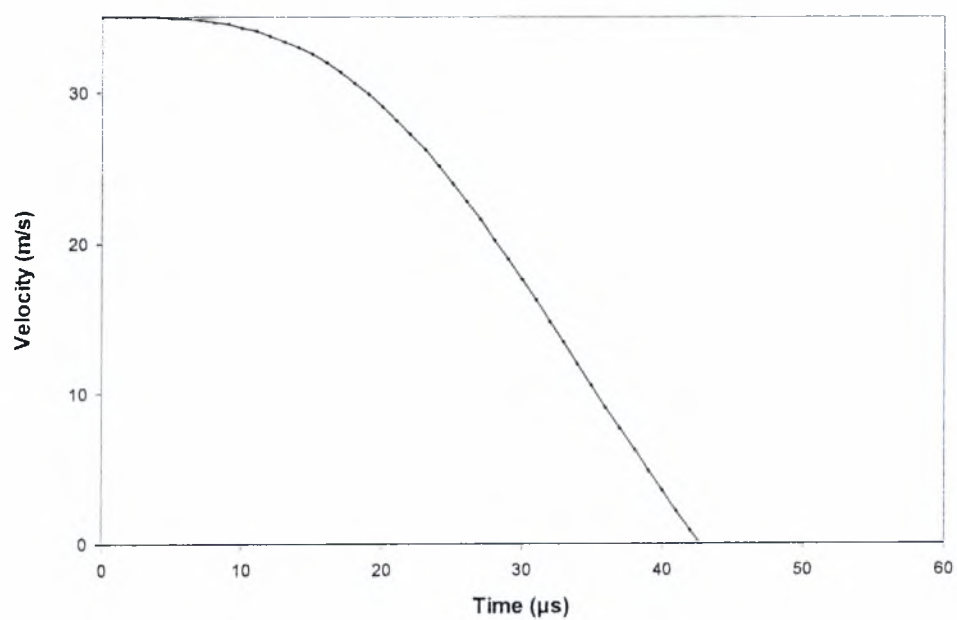
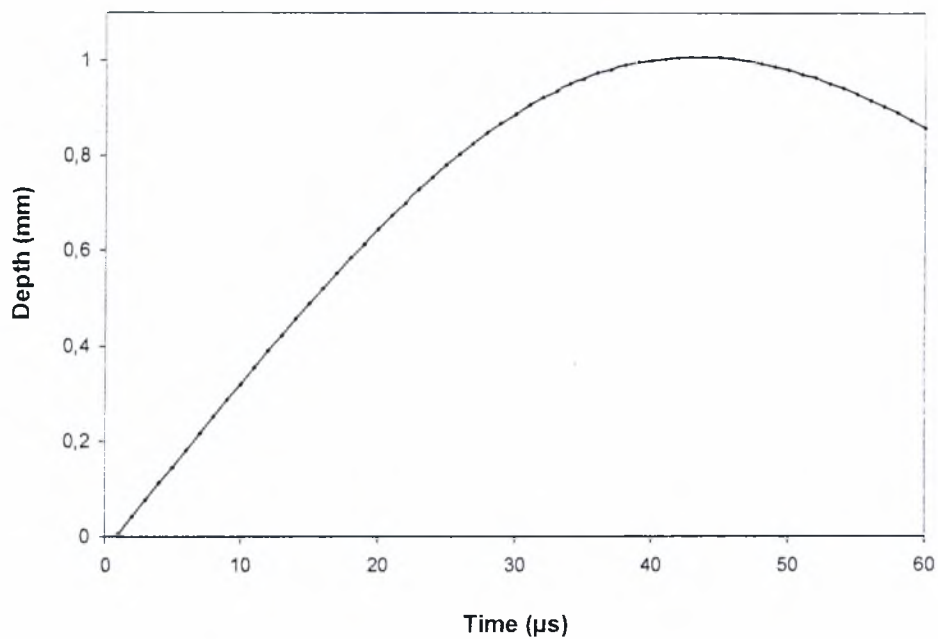
Από τη σύγκριση των δύο παραπάνω διαγραμμάτων παρατηρούμε και πάλι ότι οι καμπύλες διαφοροποιούνται ελαφρά αλλά διατηρούν την ίδια μορφή. Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται και πάλι στην απώλεια ενέργειας λόγω της ύπαρξης ακτινοβολίας.

3.1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ.

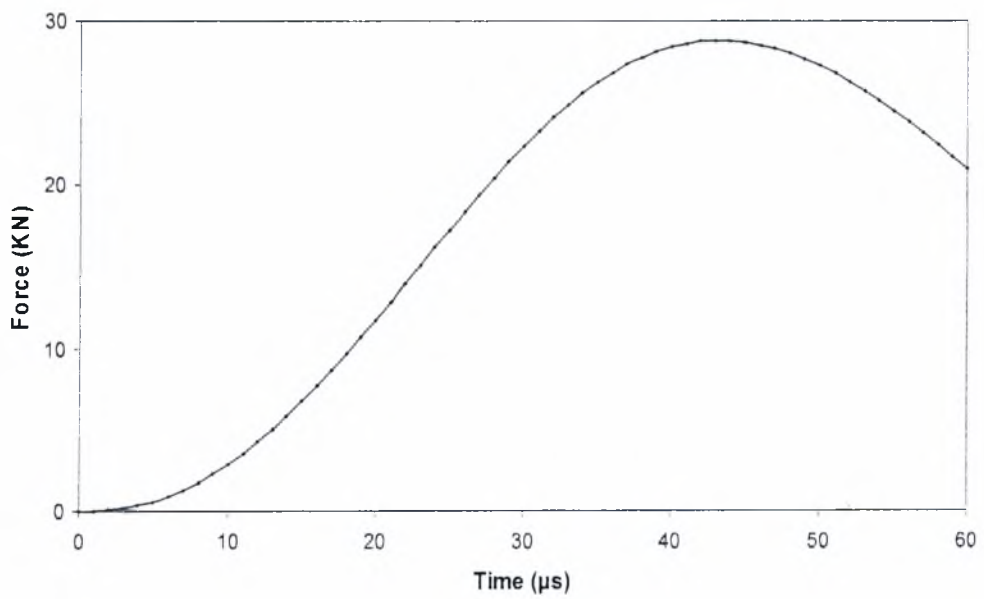
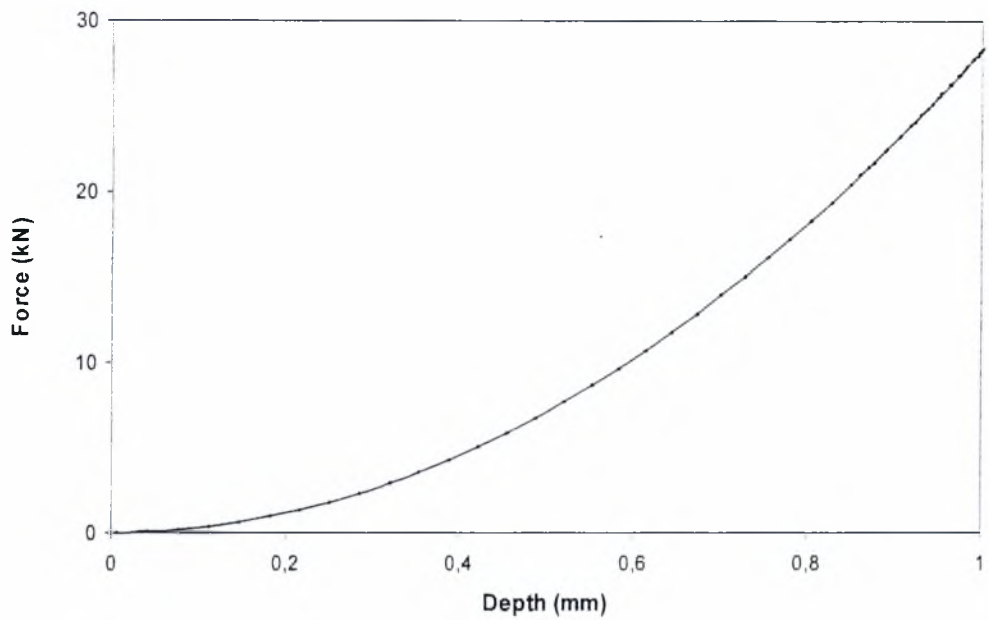
Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα εέχουν ληφθεί από την εργασία «Dynamic indentation for determining the strain rate sensitivity of metals» [9]. Πρόκειται για ανάλυση διείσδυσης χωρίς την επιρροή επιτάχυνσης με τη βοήθεια πειραματικής διάταξης όπως περιγράφεται αναλυτικότερα στην ίδια εργασία.



Διάγραμμα 3.5 Μετρήσεις για το φορτίο, το βάθος και την ταχύτητα κατά τη δυναμική διείσδυση σε OFHC χαλκό με αρχική ταχύτητα $V_0=35$ m/s



Διάγραμμα 3.7 Επαληθεύσεις μετρήσεων για το βάθος και την ταχύτητα κατά τη δυναμική διείσδυση σε OFHC χαλκό με αρχική ταχύτητα $V_0=35$ m/s



Διάγραμμα 3.8 Επαληθεύσεις μετρήσεων για το φορτίο κατά τη δυναμική διείσδυση σε OFHC χαλκό με αρχική ταχύτητα $V_0=35$ m/s

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόκειται για διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.) οι οποίες δεν περιλαμβάνουν το χρόνο με προφανή τρόπο. Συνήθως οι φυσικοί νόμοι αποτελούν αυτόνομα συστήματα οπότε και παρουσιάζονται σχέσεις που δηλώνουν την ευστάθεια και τη διατήρηση της ενέργειας. Το φαινόμενο που μελετάμε διέπεται από Δ.Ε. δευτέρας τάξης.

Τρόπος αντιμετώπισης αυτόνομων συστημάτων.

Η Δ.Ε. διασπάται σε δύο άλλες Δ.Ε. πρώτου βαθμού ($\frac{dh}{dt} = \dot{h} = y$, χώρος ταχυτήτων) και η Δ.Ε. γράφεται με όρους y . Μας ενδιαφέρουν οι λύσεις της μορφής $(y, h) = (\dot{h}, h)$ που είναι ο χώρος ταχύτητας-μετατόπισης. Στην απεικόνιση κατά Poincare οι λύσεις παρουσιάζονται σε ένα επίπεδο όπου ο οριζόντιος άξονας είναι η μετατόπιση (h) και ο κατακόρυφος είναι η ταχύτητα \dot{h} . Έτσι σε ένα διάγραμμα μπορούν να απεικονιστεί η μεταβολή της ταχύτητας σε σχέση με τη βύθιση τόσο κατά τη φάση της φόρτισης όσο και της αποφόρτισης. Ο χρόνος ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του τροχιακού. ($t = \oint \frac{dh}{y}$).

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια η γενική Δ.Ε. κατά τη φόρτιση είναι:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + Ch^2 = mg$$

Λαμβάνοντας υπόψη το μετασχηματισμό $\frac{dh}{dt} = \dot{h} = y$ και $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ προκύπτει η εξίσωση:

$$m\dot{y} + C_z y + Ch^2 = mg \quad (4.1)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.1) προκύπτει η εξίσωση τροχιακών:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_z}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y} \quad (4.2)$$

Η εξίσωση (4.2) δίνει λύση είτε με κλειστή μορφή είτε αριθμητικά. Σαφώς η επίλυσή της είναι ευκολότερη δεδομένου ότι είναι πρώτου βαθμού.

Όμοια κατά την αποφόρτιση η γενική Δ.Ε. είναι:

$$m\ddot{h} + C_z \dot{h} + C_e h_{\max} h + (C - C_e) h_{\max}^2 = mg$$

Λαμβάνοντας υπόψη το μετασχηματισμό $\frac{dh}{dt} = \dot{h} = y$ και $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ προκύπτει η εξίσωση:

$$m\dot{y} + C_z y + C_e h_{\max} h + (C - C_e) h_{\max}^2 = mg \quad (4.3)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.3) προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_e}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y} \quad (4.4)$$

Όμοια με πριν, η εξίσωση (4.4) δίνει λύση είτε με κλειστή μορφή είτε αριθμητικά. Σαφώς η επίλυσή της είναι ευκολότερη δεδομένου ότι είναι πρώτου βαθμού. Ακολουθούν οι τέσσερις περιπτώσεις που εξετάστηκαν και στα προηγούμενα κεφάλαια. Όλες οι λεπτομέρειες για τις ιδιότητες του υλικού και την ταχύτητα πρόσκρουσης με βάση τα οποία υπολογίστηκαν τα διαγράμματα παρακάτω αναφέρονται στον πίνακα που ακολουθεί:

ΥΛΙΚΟ:	BRASS		
Μάζα:	m=	0,01	kg
Πυκνότητα στόχου:	ρ=	8500	kg/m ³
Συντελεστής Poisson:	ν=	0,35	
	C=	1,25E+10	Pa
	C _e =	7,02E+11	Pa
	C/C _e =	0,017814	
Μέτρο Ελαστικότητας:	E=	1,01E+11	Pa
Μέτρο Διάτμησης:	G=	3,74E+10	Pa
Συντελεστής:	f _d =	1	
Ταχύτητα διάδοσης s κυμάτων:	V _s =	2097,825	m/s
Ταχύτητα κατά Lysmer:	V _{LD} =	3492,891	m/s
	μ=	6,55E+08	
	V _t =	1212,678	m/s
	h _t =	0,01208	m
	V _o =	10	m/s
Επιτάχυνση βαρύτητας:	g=	9,81	m/s ²

4.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ.

- ΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.2) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = -\frac{Ch^2}{m y}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει η εξίσωση ενεργειακής ισορροπίας που συναντήσαμε και στο κεφάλαιο 2 (εξίσωση 2.4):

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{3}Ch^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{3}Ch^3 = \frac{1}{2}mV_0^2$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

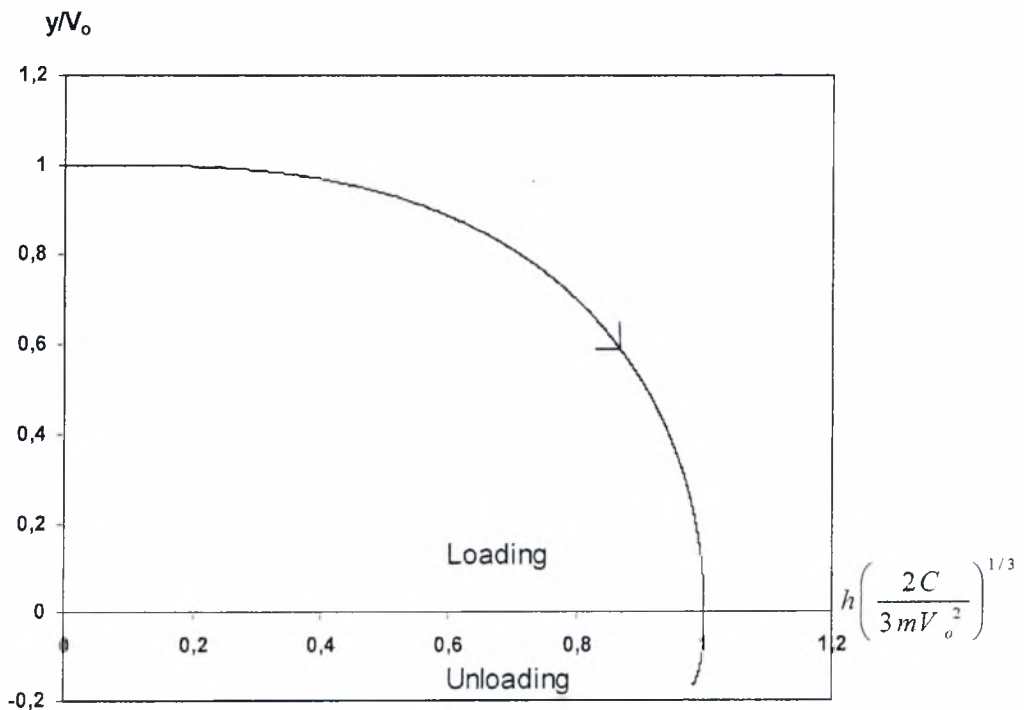
Η σχέση (4.4) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{-\frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e)h_{\max}^2}{m}}{y}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει η σχέση:

$$\frac{my^2}{2} = -C_e h_{\max} \frac{h^2}{2} - (C - C_e)h_{\max}^2 h + \left(C - \frac{C_e}{2}\right)h_{\max}^3$$

Η τελική απεικόνιση του φαινομένου φαίνεται στο διάγραμμα 4.1 που ακολουθεί.



Διάγραμμα 4.1 Απεικόνιση τροχιακού για φόρτιση – αποφόρτιση χωρίς την επιρροή της απόσβεσης και της επιτάχυνσης.

4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ.

- ΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.2) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{Ch^2}{m}}{y}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει η εξίσωση ενεργειακής ισορροπίας που συναντήσαμε και στο κεφάλαιο 2 (εξίσωση 2.14):

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = mgh - \frac{1}{3}Ch^3$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

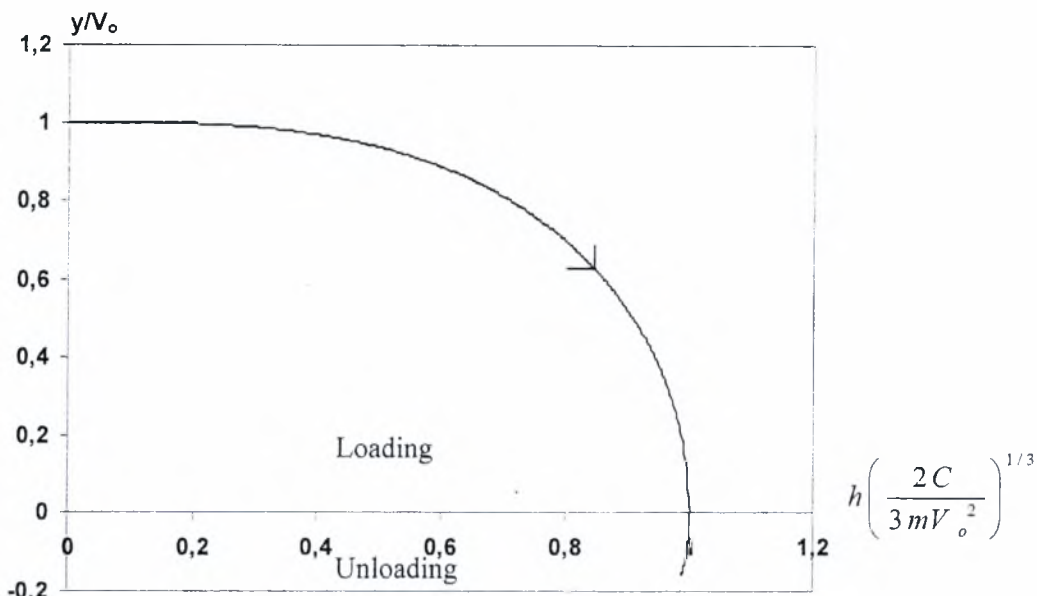
Η σχέση (4.4) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e)h_{\max}^2}{m}}{y}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει η σχέση:

$$\frac{my^2}{2} = mgh - C_e h_{\max} \frac{h^2}{2} - (C - C_e)h_{\max}^2 h - mgh_{\max} + \left(C - \frac{C_e}{2}\right)h_{\max}^3$$

Η τελική απεικόνιση του φαινομένου φαίνεται στο διάγραμμα 4.2 που ακολουθεί.



Διάγραμμα 4.2 Απεικόνιση τροχιακού για φόρτιση – αποφόρτιση χωρίς την επιρροή της απόσβεσης, με επιτάχυνση.

4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΧΩΡΙΣ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ.

- ΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.2) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{-\frac{C_e}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει η εξίσωση :

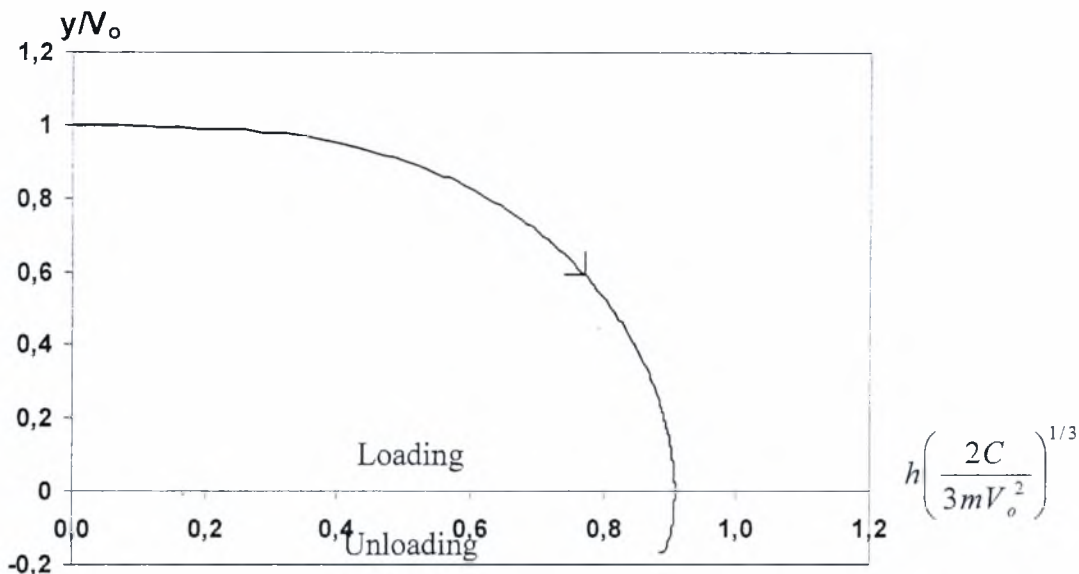
$$\frac{1}{\mu} (y - V_0) + \frac{C}{\mu^2} \ln \left(\frac{C + V_0 \mu}{C + y \mu} \right) = -\frac{h^3}{3m}$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.4) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y}$$

Η τελευταία εξίσωση επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται στο παράρτημα.



Διάγραμμα 4.3 Απεικόνιση τροχιακού για φόρτιση – αποφόρτιση με απόσβεση, χωρίς την επιρροή επιτάχυνσης.

4.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ.

- ΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.2) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_e}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y}$$

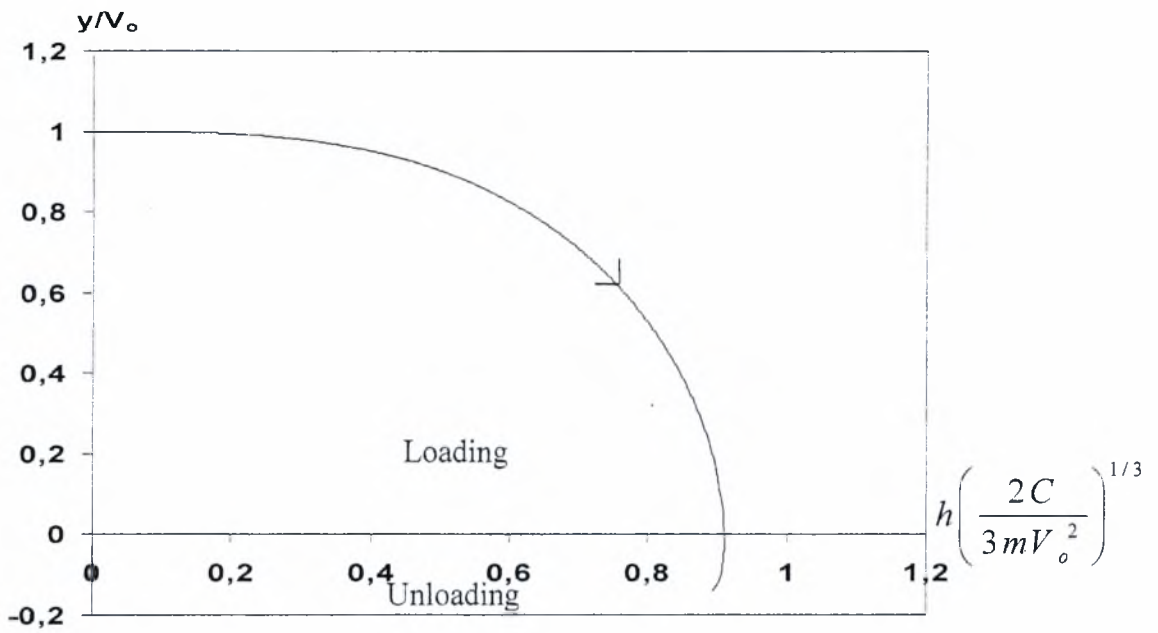
Η τελευταία εξίσωση επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται στο παράρτημα.

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.4) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y}$$

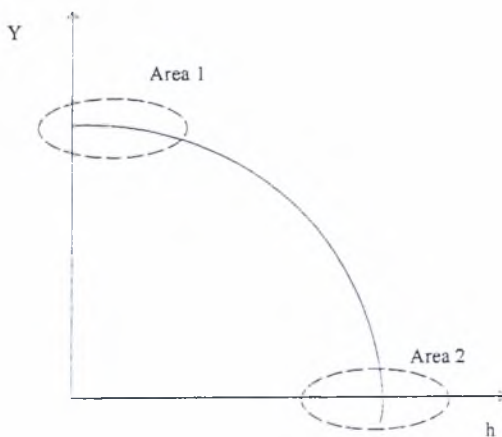
Η τελευταία εξίσωση επιλύεται αριθμητικά όπως περιγράφεται στο παράρτημα.



Διάγραμμα 4.4 Απεικόνιση τροχιακού για φόρτιση – αποφόρτιση με απόσβεση, με επιτάχυνση.

4.5 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασυμπτωτική ανάλυση του φαινομένου σε συγκεκριμένες περιοχές. Η ανάλυση αυτή μας δίνει μια πρώτη εικόνα για το πώς θα εξελιχθεί το φαινόμενο. Για τον παραπάνω σκοπό ορίζουμε δύο περιοχές που φαίνονται στο παρακάτω γράφημα:



Στην περιοχή 1 η βύθιση $h \rightarrow 0$ και στην περιοχή 2 η ταχύτητα $y \rightarrow 0$. Αυτό απλοποιεί αρκετά τις πολύπλοκες εξισώσεις και μας επιτρέπει να βρούμε την τάση εξέλιξης του φαινομένου στις περιοχές αυτές. Ακολουθούν οι αναλυτικοί υπολογισμοί.

- ΦΟΡΤΙΣΗ (ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Η σχέση (4.2) στη γενική περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_z}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y}, C_z = \mu h^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{\mu h^2}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y}$$

Στην περιοχή 1 η βύθιση $h \rightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g}{y} \Rightarrow \int_{V_0}^{y^*} y dy = \int_0^{h^*} g dh \Rightarrow \frac{my^{*2}}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mgh^*$$

Προκύπτει δηλαδή η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

Στην περιοχή 2 η ταχύτητα $y \rightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{Ch^2}{m}}{y} \Rightarrow \int_{y^*}^0 y dy = \int_{h^*}^{h_{\max}} (g - \frac{Ch^2}{m}) dh \Rightarrow -\frac{my^{*2}}{2} = mg(h_{\max} - h^*) - \frac{C}{3}(h_{\max}^3 - h^{*3})$$

- ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ (ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Η σχέση (4.4) για αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y}$$

Στην περιοχή 2 η ταχύτητα $y \rightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y} \Rightarrow$$

$$\int_0^{y^*} y dy = \int_{h_{\max}}^{h^*} \left(g - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m} \right) dh \Rightarrow$$

$$\frac{my^{*2}}{2} = mg(h^* - h_{\max}) - \frac{C_e h_{\max}}{2} (h^{*2} - h_{\max}^2) - (C - C_e) h_{\max}^2 (h^* - h_{\max})$$

Στην περίπτωση που $g=Cz=0$ προκύπτει κατά τη φόρτιση στην περιοχή 1 η σχέση $y^*=V_0$, δηλαδή για μικρές τιμές της βύθισης η ταχύτητα δε μεταβάλλεται.

Στην περιοχή 2 προκύπτει ότι: $h^{*3} = h_{\max}^3 - \frac{2my^{*2}}{3C}$

Κατά την αποφόρτιση προκύπτει ότι:

$$\frac{my^{*2}}{2} = -\frac{C_e h_{\max}}{2} (h^{*2} - h_{\max}^2) - (C - C_e) h_{\max}^2 (h^* - h_{\max})$$

Τα ίδια ισχύουν και για την περίπτωση $g=0, Cz \neq 0$ αφού ο όρος της απόσβεσης απλοποιείται.

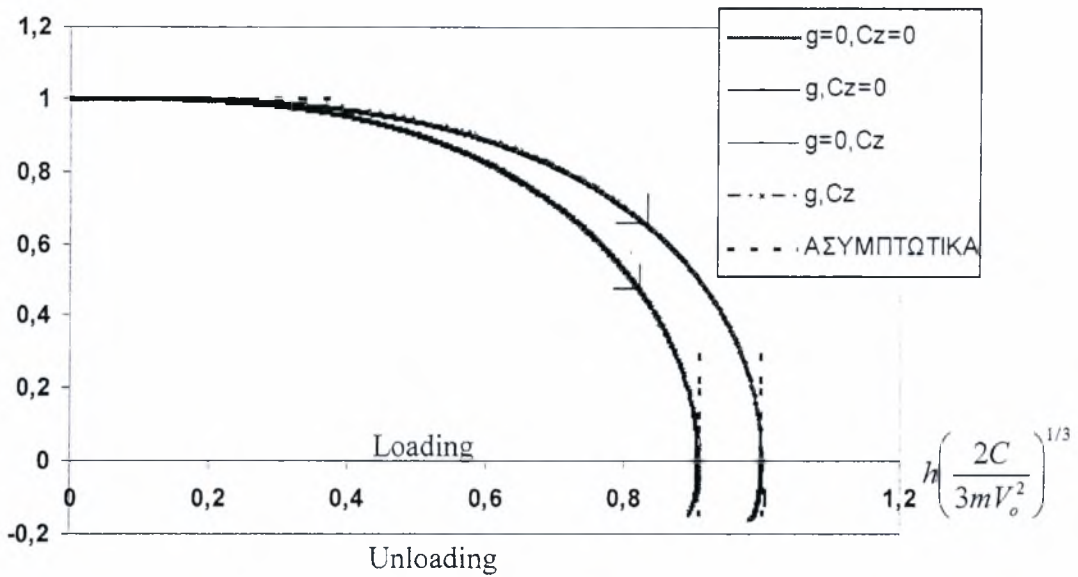
Στην περίπτωση που $g \neq 0, Cz=0$ ή $Cz \neq 0$ προκύπτει κατά τη φόρτιση στην περιοχή 1 η σχέση: $y^{*2} = V_0^2 + 2gh^*$ Η ταχύτητα δηλαδή για μικρές τιμές της βύθισης προκύπτει μεγαλύτερη της V_0 , κάτι που παρατηρήσαμε και κατά την επίλυση του παραδείγματος της προηγούμενης παραγράφου.

Στην περιοχή 2 προκύπτει ότι: $-\frac{my^{*2}}{2} = mg(h_{\max} - h^*) - \frac{C}{3}(h_{\max}^3 - h^{*3})$

Κατά την αποφόρτιση προκύπτει ότι:

$$\frac{my^{*2}}{2} = mg(h^* - h_{\max}) - \frac{C_e h_{\max}}{2} (h^{*2} - h_{\max}^2) - (C - C_e) h_{\max}^2 (h^* - h_{\max})$$

Συγκεντρωτικά όλα τα παραπάνω φαίνονται στο διάγραμμα 4.5 που ακολουθεί.



Διάγραμμα 4.5 Συνολική απεικόνιση τροχιακών και ασυμπτωτικών λύσεων για φόρτιση – αποφόρτιση για κάθε περίπτωση.

Στο συγκεντρωτικό διάγραμμα 4.5 παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των περιπτώσεων ανά δύο συμπίπτουν για το δεδομένο παράδειγμα. Ειδικότερα, έχουμε συμφωνία αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις $(g=0, Cz=0) - (g \neq 0, Cz=0)$ και $(g=0, Cz \neq 0) - (g \neq 0, Cz \neq 0)$. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η επιρροή της επιτάχυνσης βαρύτητας είναι αμελητέα. Θα παρατηρούσαμε κάποια αισθητή διαφορά στη τιμή της μέγιστης βύθισης της τάξης του 3% αν η επιτάχυνση ήταν τουλάχιστον 1000 φορές μεγαλύτερη για την συγκεκριμένη μάζα του διεισδυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Davis, C.D. and Hunter, S.C. (1960), "Assessment of the strain-rate sensitivity of metals by indentation with conical indenters," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, pp. 253-254.
- [2] Mahtab, F.U., Johnson, W. and Slater, R.A. (1965), "Dynamic indentation of copper, an aluminium alloy and mild steel with conical projectiles and dynamic tip flattening," *Int. J. Mech. Science* 7, pp. 685-719.
- [3] Kleesattel, C. and Gladwell, G.M.L. (1968), "The contact-impedance meter -1," *Ultrasonics* 6, pp. 175-180.
- [4] Graham, G.A.C. (1973), "A contribution to Hertz's theory of elastic impact," *International Journal of Engineering Science* 11, pp. 409-413.
- [5] Houlsby, G.T. (1982), "Theoretical analysis of the fall-cone test," *Geotechnique* 32, pp. 111-118.
- [6] Marshall, D.B., Evans, A.G. and Nisenholz, Z. (1983), "Measurement of dynamic hardness by controlled sharp-projectile impact," *Journal of the American Ceramic Society* 66, pp. 580-585.
- [7] Koeppel, B.J. and Subhash, G. (1999), "Characteristics of residual plastic zone under static and dynamic Vickers indentation," *Wear* 224, pp. 56-67.
- [8] Andrews, E.W., Giannakopoulos, A.E., Plisson, E. and Suresh, S. (2002), "Analysis of the impact of a sharp indenter," *International Journal of Solids and Structures* 39, pp. 281-295.
- [9] Lu, J., Suresh, S. and Ravichandran, G. (2003), "Dynamic indentation for determining the strain-rate sensitivity of metals," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51, pp. 1923-1938.
- [10] Bedding, R.J. and Willis, J.R. (1973), "The dynamic indentation of an elastic half-space," *Journal of Elasticity* 3, pp. 289-309.
- [11] Wang, L. and Rokhlin, S.I. (2005), "Universal scaling functions for continuous stiffness nanoindentation with sharp indenters," *International Journal of Solids and Structures* 42, pp. 3807-3832.
- [12] Gazetas, G. (1987), "*Simple physical methods for foundation impedances*", *Dynamic Behavior of Foundations and Buried Structures*, Elsevier Applied Science, NY, chapter 2, pp. 45-94.

[13] Tabor, D. (1951), *The Hardness of Metals*, Clarendon Press, Oxford.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις (2.28) και (2.29) είναι της μορφής:

$$\ddot{h} + Ah^2\dot{h} + Bh^2 = D,$$

όπου $D=0$ στην περίπτωση ανάλυσης χωρίς την επιρροή της επιτάχυνσης και $D \neq 0$ στην περίπτωση ανάλυσης με την επιρροή της επιτάχυνσης.

A1. ΕΥΘΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται με βάση την εξής ρουτίνα αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta h}{\Delta t}, \quad \ddot{h} = \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{\Delta \dot{h}}{\Delta t} \quad \text{όπου το χρονικό βήμα } \Delta t \text{ είναι καθορισμένο.}$$

Ισχύει ότι $\ddot{h} = (\dot{h})'$ και θέτοντας $\dot{h} = u$ η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$\dot{u} + Ah^2u + Bh^2 = D$$

$$\text{Από υπόθεση } \dot{h} = u \Rightarrow h = \int_0^t u dt + h(0) \text{ με } h(0)=0.$$

Επειδή το χρονικό βήμα Δt είναι πολύ μικρό το ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί μέσω του αθροίσματος, όπου για το βήμα i ισχύει:

$$h_{i+1} = \sum u \Delta t = h_i + u_i \Delta t$$

Έχοντας ως δεδομένο ότι $h_0=0$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$h_1 = h_0 + u_0 \Delta t = u_0 \Delta t$$

$$h_2 = h_1 + u_1 \Delta t = u_0 \Delta t + u_1 \Delta t$$

$$h_3 = h_2 + u_2 \Delta t = u_0 \Delta t + u_1 \Delta t + u_2 \Delta t$$

⋮
⋮
⋮

Αναλύοντας την παραπάνω σχέση περαιτέρω έχουμε:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + Ah^2u + Bh^2 = D \Rightarrow$$

$$\Delta u = -\Delta t [Ah^2u + Bh^2 - D]$$

Με μορφή βημάτων η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Delta u_{i+1}^* = -\Delta t [Ah_i^2 u_i^* + B^* h_i^2 - D^*],$$

όπου $u = V_0 \dot{u}^*$ (για $u_0 = V_0$ είναι $u_0^* = 1$), $B^* = B/V_0$ και $D^* = D/V_0$.

$$u_{i+1}^* = u_i^* + \Delta u_i^*$$

Τελικά η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\dot{u}^* + Ah^2u^* + B^*h^2 = D^*$$

Όταν το $u_i^* = 0$ τότε το αντίστοιχο t_i αντιστοιχεί στο χρόνο φόρτισης.

Για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος χρειάζεται να δοθούν από το χρήστη τα παρακάτω αρχικά στοιχεία:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{3m(V_0^2 - \dot{h}_1^2)}{2C}} \text{ που αποτελεί λύση της εξίσωσης (2.4),}$$

$$\Delta u_0^* = \Delta u_1^* \leq 10^{-5}.$$

A2. ΔΙΒΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Θέτοντας $\dot{h} = u, \ddot{h} = \dot{u}$ η αδιαστατοποιημένη εξίσωση γράφεται:

$$\dot{u} + Ah^2u + Bh^2 = D$$

Αν $u=V_0u^*$ τότε η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\dot{u}^* + Ah^2u^* + B^*h^2 = D^*$$

Όμοια με πριν: $\dot{u}^* = -[Ah^2u^* + B^*h^2 - D^*]$.

Άρα:

$$\frac{u_{n+1}^* - u_{n-1}^*}{2\Delta t} = -[Ah_n^2u_n^* + B^*h_n^2 - D^*] \Rightarrow$$

$$u_{n+1}^* = u_{n-1}^* - 2\Delta t[Ah_n^2u_n^* + B^*h_n^2 - D^*]$$

Ισχύει επίσης ότι: $|\Delta h_n = u_n \Delta t \Rightarrow h_{n+1} = h_n + u_n \Delta t$, για $n=1, \dots, N-1$.

Οι αρχικές τιμές που χρειάζεται η ρουτίνα για να λειτουργήσει είναι:

$$u_0^* = 1 \text{ και από την επίλυση της εξίσωσης (2.4) προκύπτει ότι } u_1^* = \sqrt{V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m}}.$$

Παρατηρούμε ότι η διβηματική μέθοδος δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα και απαιτεί ο χρήστης να δώσει λιγότερα δεδομένα.

B. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΥΤΟΝΟΜΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο 4 όπου περιγράφεται η προσέγγιση του φαινομένου μέσα από την ανάλυση αυτόνομων συστημάτων προέκυψαν οι σχέσεις (4.2) και (4.4) που περιγράφουν το φαινόμενο κατά τη διάρκεια της φόρτισης και της αποφόρτισης αντίστοιχα. Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τη γενικότερη περιγραφή του φαινομένου καθώς με τις κατάλληλες τροποποιήσεις και απαλείψεις όρων προκύπτουν όλες οι περιπτώσεις που περιγράφονται αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 4. Ακολουθούν οι αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης των παραπάνω σχέσεων κατά τη διάρκεια της φόρτισης και της αποφόρτισης.

B1. ΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.2) είναι της μορφής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_z}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y}, C_z = \mu h^2$$

Επιλύοντας ως προς dy έχουμε:

$$dy = \frac{g - \frac{\mu h^2}{m} y - \frac{Ch^2}{m}}{y} dh$$

Έτσι λοιπόν καθορίζοντας το βήμα ολοκλήρωσης $dh > 0$ εξ ορισμού, από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι τιμές για τα h, y, dy . Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι:

Για το βήμα $i=0$ έχουμε $h_0=0$ και $y_0=V_0$, όπου V_0 η αρχική ταχύτητα με την οποία ο δεισδυτής προσβάλλει το μεταλλικό υπόστρωμα.

Επειδή το βήμα dh είναι πολύ μικρό, οι ποσότητες h, y, dy μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Για το βήμα } i=0: h_0 &= 0 \\ \text{Για το βήμα } i=1: h_1 &= h_0 + dh = dh \\ \text{Για το βήμα } i=2: h_2 &= h_1 + dh = 2dh \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \text{Για το βήμα } i=n: h_n &= ndh \end{aligned}$$

Όμοια για την ποσότητα y ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Για το βήμα } i=0: y_0 &= V_0 \\ \text{Για το βήμα } i=1: y_1 &= y_0 + dy_0 \\ \text{Για το βήμα } i=2: y_2 &= y_1 + dy_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \text{Για το βήμα } i=n: y_n &= y_{n-1} + dy_{n-1} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη για την ποσότητα dy έχουμε:

$$\text{Για το βήμα } i=0: dy_0 = \frac{g - \frac{\mu h_0^2}{m} y_0 - \frac{C h_0^2}{m}}{y_0} dh = \frac{g}{V_0} dh$$

$$\text{Για το βήμα } i=1: dy_1 = \frac{g - \frac{\mu h_1^2}{m} y_1 - \frac{C h_1^2}{m}}{y_1} dh$$

⋮

$$\text{Για το βήμα } i=n: dy_n = \frac{g - \frac{\mu h_n^2}{m} y_n - \frac{C h_n^2}{m}}{y_n} dh$$

Η παραπάνω διαδικασία σταματά στο βήμα $i=k$ όπου και $y_k=0$.

Για να υπάρχει συνέπεια μεταξύ του πραγματικού φαινομένου και της αριθμητικής προσέγγισης αναμένουμε $dy < 0$ έτσι ώστε η ταχύτητα y να μειώνεται σταδιακά. Όμως για το βήμα 0 όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση έχουμε ότι:

$$dy_0 = \frac{g}{V_0} dh > 0$$

Προφανώς επειδή το βήμα dh είναι αρκετά μικρό ο όρος dy_0 μπορεί να θεωρηθεί ότι τείνει στο μηδέν. Την ελαφρά τάση αύξησης της ταχύτητας για τα πρώτα βήματα dh επιβεβαιώνει και η ασυμπτωτική ανάλυση του φαινομένου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο όρος της απόσβεσης $C_z = \mu h^2$ γίνεται σημαντικός όταν και η βύθιση h αρχίζει να μεγαλώνει, δηλαδή μετά από μερικά βήματα dh .

B2. ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ

Η σχέση (4.4) είναι της μορφής:

$$\frac{dy}{dh} = \frac{g - \frac{C_z}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}}{y}, C_z = \mu h_{\max}^2$$

Επιλύοντας ως προς dh έχουμε:

$$dh = \frac{y}{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y - \frac{C_e h_{\max}}{m} h - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}} dy$$

Έτσι λοιπόν καθορίζοντας το βήμα ολοκλήρωσης $dy < 0$ εξ ορισμού, από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι τιμές για τα y, h, dh . Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης είναι:

Για το βήμα $i=0$ έχουμε $h_0 = h_{\max}$ και $y_0 = 0$.

Επειδή το βήμα dy είναι πολύ μικρό, οι ποσότητες h, y, dh μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Για το βήμα } i=0: h_0 &= h_{\max} \\ \text{Για το βήμα } i=1: h_1 &= h_0 + dh_0 \\ \text{Για το βήμα } i=2: h_2 &= h_1 + dh_1 \end{aligned}$$

⋮

$$\text{Για το βήμα } i=n: h_n = h_{n-1} + dh_{n-1}$$

Όμοια για την ποσότητα y ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Για το βήμα } i=0: y_0 &= 0 \\ \text{Για το βήμα } i=1: y_1 &= y_0 + dy \\ \text{Για το βήμα } i=2: y_2 &= y_1 + dy = 2dy \end{aligned}$$

⋮

$$\text{Για το βήμα } i=n: y_n = ndy$$

Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη για την ποσότητα dh έχουμε:

$$\text{Για το βήμα } i=0: dh_0 = \frac{y_0}{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y_0 - \frac{C_e h_{\max}}{m} h_0 - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}} dy = 0$$

$$\text{Για το βήμα } i=1: dh_1 = \frac{y_1}{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y_1 - \frac{C_e h_{\max}}{m} h_1 - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}} dy$$

⋮

$$\text{Για το βήμα } i=n: dh_n = \frac{y_n}{g - \frac{\mu h_{\max}^2}{m} y_n - \frac{C_e h_{\max}}{m} h_n - \frac{(C - C_e) h_{\max}^2}{m}} dy$$

Η παραπάνω διαδικασία σταματά στο βήμα $i=k$ όπου $h=h_k$ και η δύναμη επαφής μεταξύ του διεισδυτή και του υποστρώματος $P=C_e h_{\max} h_k + (C - C_e) h_{\max}^2$ γίνει ίση με το βάρος mg ή ίση με 0 σε περίπτωση απουσίας βαρύτητας.

Όπως αναμενόταν για να υπάρχει συνέπεια μεταξύ του πραγματικού φαινομένου και της αριθμητικής προσέγγισης η ποσότητα dh είναι αρνητική καθ' όλη τη διάρκεια της αποφόρτισης.

INSTRUMENTED DYNAMIC INDENTATION OF METAL SUBSTRATES BY SHARP INDENTORS

A. E. Giannakopoulos¹, G. E. Varelis¹ and A. D. Roumelioti¹

¹Department of Civil Engineering

Laboratory for Strength of Materials and Micromechanics

University of Thessaly

Volos 38336, Greece

e-mail: agiannak@uth.gr

Keywords: Impact, sharp indentation, strain-rate sensitivity.

Abstract. *We present the analysis of the dynamic contact of a rigid sharp indenter (cone or pyramid) on a flat metal substrate. The motion of the indenter, as it first indents and then rebounds from the target surface, is described analytically. The analysis is based on an equivalent one-degree-of-freedom, non-linear dynamic system that includes radiation of energy due to surface waves, relative acceleration (gravity), contact analysis with large deformations, energy dissipation due to elastoplasticity and strain-rate effects. It is shown that, in cases of high velocity impacts, a substantial part of the initial energy of the indenter is lost due to the creation of surface waves and therefore the coefficient of restitution is reduced considerably. The analysis is compared with available finite element results and with available experimental results. The results of the work are expected to be useful in the measurement of mechanical properties of small metal volumes (dynamic micro-indentation), in the design of armor plates of aircrafts and spacecrafts (foreign object impacts, space dust etc) and in problems of erosion. It is possible to extend the results to dynamic indentation of non-metal substrates.*

1 INTRODUCTION

Static instrumented indentation tests have recently become a useful, non-destructive method for extracting mechanical material properties, especially at very small size scales. It is well known that mechanical response depends on the strain-rate and it is important to find ways of extracting strain rate depending material properties from very small volumes of material. A promising test is the impact of the material surface by a sharp indenter (cone or pyramid). The present work focuses on the analysis that is necessary to design and interpret such tests. We will consider mainly metal substrates, however much of the general conclusions can be useful for certain ceramics, glasses and other materials.

Dynamic impact by sharp projectiles is not a new test. Simple but reasonable modeling that approximates the phenomenon by one degree of freedom dynamic analysis goes back to the work of Davis and Hunter (1960)^[1] who showed the influence of the strain-rate sensitivity of metals by indentation with conical tips. Mahtab et al (1965)^[2] investigated the dynamic indentation of metals with an elaborate impact tester, using conical projectiles of different angles. They found that frictional effects are not so important at high indentation speeds, as they are for quasi-static indentations. They also showed that the dynamic average contact pressure (hardness) is constant. Kleesattel and Gladwell (1968)^[3] introduced a surface hardness tester based on the measurement of the change in the resonance frequency of a mechanical resonator with a sharp tip brought in contact with the surface. Graham (1973)^[4] examined the elastic impact of a rigid cone on an elastic half space using a simple model. Houlsby (1982)^[5] attempted to explain the fall-cone test, which is widely used as a method for determining the liquid limit of clays. Marshall et al (1983)^[6] showed that the impact of a ceramic surface by a sharp Vickers pyramid projectile causes elastic-plastic deformation that is similar in morphology to static indentation, but the hardness is rate-dependent, constant and higher than the static one. Koeppel and Subhash (1999)^[7] showed that the dynamic Vickers hardness for metals is greater than their static values and concluded that the dynamic indentation investigation can be used to predict plastic properties of materials at high strain rates (in the range of 103/s). Andrews et al (2002)^[8] examined the simple models of the impact of a sharp indenter with detailed finite element analysis (element size 20 μm), including strain-rate dependent plasticity. They concluded that simple models work for low impact velocities. Most recently, Lu et al (2003)^[9] developed a dynamic indentation testing device to measure time-resolved depth and load responses during the impact of a copper substrate by a blunt cone indenter. They introduced an effective strain-rate, which scales the rate-dependent aspects of the impact. The

above work has given interesting findings, but investigated only parts of the problem and left certain issues unclear: the relative influence of the strain-rate effect, the energy loss of energy due to surface waves, the effect of gravity, the unloading phase and the effect of high impact velocities. In what follows we will give some answers to these issues.

2 ANALYSIS

2.1 Problem formulation

We are investigating the dynamic response of a rigid projectile of known mass m , with a cone tip of angle θ , that hits the material surface vertically with relative velocity V_0 and a relative acceleration g . Most of the kinetic energy $mV_0^2/2$ is dissipated as plastic deformation, surface wave radiation and heat (which is accounted for as strain-rate effect). Figure 1 shows a schematic of the problem. The properties of the material that are important in this problem are: the density ρ , the elastic modulus E , the Poisson's ratio ν and the uniaxial tensile flow stress, which is typically given as a function of the plastic strain ε_p and the plastic strain rate $\dot{\varepsilon}_p$:

$$\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p) = \sigma_0(\varepsilon_p) \left\{ 1 + (\dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_0)^b \right\} \quad (1)$$

where $\sigma_0(\varepsilon_p)$ is the static flow stress, $\dot{\varepsilon}_0 > 0$ is a reference strain rate and $0 < b < 1$ is the strain rate exponent. For many metals, $\sigma_0(\varepsilon_p) = \sigma_y(\varepsilon_p / \varepsilon_y)^n$, for $\varepsilon_p \geq \varepsilon_y$, $0 \leq n < 1$ is the strain hardening exponent, σ_y is the yield strength and $\varepsilon_y = \sigma_y / E$ is the yield strain. Elasto-dynamics give three characteristic wave speeds for the material substrate: the shear wave speed c_s , the dilatational wave speed c_d and the Rayleigh wave speed c_R :

$$\begin{aligned} c_s &= \sqrt{E / (2(1 + \nu)\rho)} \quad , \quad c_p / c_s = \sqrt{2(1 - \nu) / (1 - 2\nu)} \quad , \\ (c_s^{-2} - 2c_R^{-2})^2 + 4c_R^{-2}(c_d^{-2} - c_R^{-2})^{1/2}(c_s^{-2} - c_R^{-2})^{1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Note that $c_d > c_s > c_R$ and for $\nu = 1/3$, $c_R = 0.9194c_s$. Bedding and Willis (1973)^[10] solved exactly the dynamic problem of a rigid cone indenter that enters an elastic substrate with a constant velocity $\dot{h} = V_0$. They found that there is little influence of friction and that the contact area expands with a velocity $\dot{a} > V_0 \tan(\theta/2)$ for subsonic impacts $\dot{a} < c_R$. They estimated that, for $\nu = 1/3$ and $\theta = 168.6^\circ$, the applied force P is increasing with time $t \geq 0$ as $P = 66.5E(c_s t)^2 (V_0 / c_s)^3$. Because the surface is stress-free, the faster traveling dilatational wave generates second cylindrical rotational (head) waves whose wave front envelopes define a wedge-like region. In addition, Rayleigh waves propagate along the surface away from the contact area.

Static indentation by sharp cone results in the following macroscopic relations. The applied force P and the resulting depth of indentation h at loading is: $P = Ch^2$, where C includes the elasto-plastic properties of the material and the cone angle θ . The contact area A at loading is increasing with depth h as: $A/h^2 = \pi \tan^2(\theta/2) / F_d^2$ where $F_d = \tan(\theta/2) \sqrt{\pi p_{av} / C}$ and $p_{av} = P/A$ is the average contact pressure. For power law strain hardening without strain-rate effect, Wang and Rokhlin (2005)^[11] have concluded that:

$$C = C_0 = \pi \sigma_y \tan^2(\theta/2) F_p / (2F_d^2) \quad (3)$$

where F_p is a universal function of n and $\varepsilon_y^* = \sigma_y \tan(\theta/2) / E^*$, with $E^* = E / (1 - \nu^2)$ the reduced elastic modulus. If $1/\varepsilon_y^* < 1$, the response is almost elastic and so $F_d = \pi/2$, $F_p = 1/\varepsilon_y^*$. If $1/\varepsilon_y^* > 4400$, the response is almost rigid-plastic and so $F_d = 0.6523n + 0.7682$, $F_p = 5.6(0.22/\varepsilon_y^*)^n$. The initial unloading slope at maximum loading is:

$$C_e = 2\beta E^* \tan(\theta/2) / F_d \quad (4)$$

where h_{\max} is the maximum indentation depth and $\beta = 1.052$ for $\theta = 140.6^\circ$.

The model used for the simulation of the phenomenon consists of one non-linear spring with constant C (kN/m²) that describes the load P that the indenter applies on the target. The force – depth of indentation curve

($P-h$) follows a parabolic relation during loading, i.e. $P=Ch^2$ (Kick's law). In this model there is also a damper, described by C_z (kNsec/m), that exerts a dumping force proportional to the velocity $C_z\dot{h}$ and describes the energy loss due to surface waves (see Fig. 1). During the loading phase ($0 \leq t \leq t_1$), the dynamic balance of the system is described by the following equation:

$$m\ddot{h} + C_z\dot{h} + Ch^2 = mg \quad (5)$$

During the unloading phase ($t_1 \leq t \leq t_2$) the dynamic balance is described by the following equation:

$$m\ddot{h} + C_z\Big|_{h_{\max}}\dot{h} + C_e h_{\max} h + (C - C_e)h_{\max}^2 = mg \quad (6)$$

Gazetas (1987)^[12] showed that $C_z=0.9\rho AV_{La}$. In the loading phase, for $\theta=140.6^\circ$ the contact area is $A=24.5h^2f_d$ with f_d between 0.44 (maximum pile-up of the contact perimeter) and 1.78 (minimum sink-in of the contact perimeter), with a typical value of 1. In the unloading phase, for $\theta=140.6^\circ$ the contact area is $A=24.5h^2f_d$. The Lysmer velocity is $V_{La}=3.4c_s/(\pi(1-\nu))$ and $C_z\Big|_{h_{\max}}=0.9\rho 24.5h_{\max}^2 f_d V_{La}$. Unless stated otherwise, $\theta=140.6^\circ$.

2.2 The strain-rate effect

The idea of the representative strain ε_r and its meaning to the static hardness (average contact pressure) are well established, Tabor (1951)^[13]. Along these lines, Lu et al. (2003)^[9] introduced the representative strain-rate. In case when $g=0$ and $V_0 < 0.01\sqrt{C/\rho}$, a generalization of the representative strain-rate can be stated as the ratio of the representative strain and a characteristic time t^* which estimates the loading duration:

$$\dot{\varepsilon}_r = \varepsilon_r / t^*, \quad \varepsilon_r = \frac{0.22}{(1-\nu^2)\tan^2\theta}, \quad t^* = 1.402\left(\frac{3m}{2C_0V_0}\right)^{1/3} \quad (7)$$

For $\nu=0.3$ and $\theta=140.6^\circ$, $\varepsilon_r=8.65\%$. We can then approximate the influence of the strain-rate effect on C in relation to eqs. (1) and (3) as:

$$C/C_0 \approx \left\{1 + (\dot{\varepsilon}_r / \dot{\varepsilon}_0)^b\right\} \quad (8)$$

Finite elements calculations^[8] show that for Al-1100-O, $b=1/3$, $\rho=2700$ kg/m³ and static $C_0=6.17$ GPa, a cone of $\theta=140.6^\circ$, mass $m=10^{-5}$ kg and initial velocity $V_0=3$ m/s, gives a dynamic $C/C_0=1.52$. Equations (7) and (8) predict $t^*=13.1$ μ s, $\dot{\varepsilon}_r=0.0662$ 1/s and $C/C_0=1.30$. Experiments^[9] show that for Cu-OFHC, $b=0.35$, $\rho=8940$ kg/m³ and static $C_0=28.3$ GPa, a cone of $\theta=140.6^\circ$, mass $m=25\times 10^{-3}$ kg and initial velocity $V_0=29.6$ m/s, gives a dynamic $C/C_0=1.24$. Equations (7) and (8) predict $t^*=49.8$ μ s and $C/C_0=1.39$.

3 RESULTS WITHOUT DUMPING ($C_z=0$)

3.1 Absence of gravity ($g=0$)

The first integration of the loading equation results to the simple conservation of the sum of kinetic and dynamic energy:

$$\frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{3}Ch^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{3}Ch^3 = \frac{1}{2}mV_0^2 \quad (9)$$

The maximum indentation depth, the corresponding maximum load and the duration of the loading phase are obtained when the velocity becomes zero, giving the classic results:

$$h_{\max} = \left(\frac{3mV_0^2}{2C} \right)^{1/3} \quad P_{\max} = Ch_{\max}^2 = \left(\frac{3mV_0^2 C^{1/2}}{2} \right)^{2/3} \quad t_1 = \int_0^{h_{\max}} \left(V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} \right)^{-1/2} dh = 1.402 \left(\frac{3m}{2CV_0} \right)^{1/3} \quad (10)$$

At unloading:

$$h(t) = h_{\max} \left(\frac{C}{C_e} \right) [\cos(\omega t - \omega t_1) - 1] + h_{\max}, \quad \omega = \left(\frac{C_e h_{\max}}{m} \right)^{1/2} \quad (11)$$

When the acceleration becomes zero, then the mass rebounds and leaves a residual depth $h_2 = h_{\max} \left[1 - \frac{C}{C_e} \right]$ ($C/C_e < 1/2$ then $1/2 < h_2/h_{\max} < 1$), at time $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2} \left[\frac{m}{C_e h_{\max}} \right]^{1/2}$. The rebound

velocity is then $V_{reb} = -V_0 \left[\frac{3C}{2C_e} \right]^{1/2}$ and the coefficient of restitution is $\left| \frac{V_{reb}}{V_0} \right| = \left(\frac{3C}{2C_e} \right)^{1/2}$ which is between 0 and $\sqrt{3}/2$.

3.2 Presence of gravity

The first integration of the loading equation reduces to the simple conservation of the sum of the kinetic and the dynamic energy; the last includes in this case the effect of gravity, $-mgh$. There is an important characteristic quantity $D = m^2(9V_0^4 C - 16mg^3)/(16C^3)$ and a characteristic parameter $\lambda = \frac{3V_0^2}{4g} \sqrt{\frac{C}{mg}}$ that control the

solution of the problem. If $D > 0$, then $\lambda > 1$ and the maximum indentation depth is $2\sqrt{\frac{mg}{C}} \cosh\left(\frac{\ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}{3}\right) = h_{\max}$. If $D < 0$, then $0 < \lambda < 1$ and the maximum indentation depth is

$2\sqrt{\frac{mg}{C}} \cos\left(\frac{\arccos \lambda}{3}\right) = h_{\max}$. The velocity at loading is given by $\dot{h} = \left(V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} + 2gh \right)^{1/2}$ and the

duration of loading is given by the integral $t_1 = \int_0^{h_{\max}} \frac{dh}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2Ch^3}{3m} + 2gh}}$. The integral approaches 0 for $\lambda = 0$

and 1.402 for $g=0$ and is maximum (1.4856) for $\lambda=1$. The maximum load that appears at the end of loading is $P_{\max} > 4mg$ for $\lambda > 1$ (large initial velocity or small mass) and $4mg > P_{\max} > 3mg$ for $0 < \lambda < 1$.

When the acceleration becomes equal to g , then the mass disconnects from the surface and leaves a residual depth $h_2 = h_{\max} \left[1 - \frac{C}{C_e} \right]$ at time $t_2 = t_1 + \omega^{-1} \arccos(-mg/(-mg + P_{\max}))$. The equations that describe the rebound phase ($t_1 \leq t \leq t_2$) are:

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max} \right) \cos(\omega t - \omega t_1) + \frac{g}{\omega^2} + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max} \\ \dot{h}(t) &= -\omega \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max} \right) \sin(\omega t - \omega t_1), \\ \ddot{h}(t) &= -\omega^2 \left(-\frac{g}{\omega^2} + \frac{C}{C_e} h_{\max} \right) \cos(\omega t - \omega t_1) \end{aligned} \quad (12)$$

4 RESULTS WITH DUMPING

4.1 Absence of gravity ($g=0$)

For high values of the initial velocity ($V_0 < 0.01\sqrt{C/\rho}$) there will be energy loss due to the surface wave radiation, reducing the maximum indentation depth. At the beginning of the loading, the acceleration is small and the velocity is the initial, thus the response resembles the previous case with C replaced by $0.9\rho 24.5f_d V_{Lo} V_0$. For later times, no closed form solution can be found. A second order finite difference scheme was developed for solving numerically the problem; an example is given in Tables 1 and 2 for brass.

During the rebound phase ($t_1 \leq t \leq t_2$), we can get closed form analytical solution depending on the characteristic quantity $\Delta = \frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - 4 \frac{C_e h_{\max}}{m}$ and $\mu^2 = C_e \big|_{\max} / h_{\max}^2$. If $\Delta > 0$, then the solution is:

$$h = \frac{h_{\max} C}{(\kappa_1 - \kappa_2) C_e} \left(\kappa_1 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_1)} \right) + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max} \quad (13)$$

$$\dot{h} = h_{\max} \frac{C}{C_e} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \left(e^{\kappa_2(t-t_1)} - e^{\kappa_1(t-t_1)} \right), \quad \ddot{h} = h_{\max} \frac{C}{C_e} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \left(\kappa_2 e^{\kappa_2(t-t_1)} - \kappa_1 e^{\kappa_1(t-t_1)} \right)$$

with $\kappa_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} + \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$ and $\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\mu h_{\max}^2}{m} - \sqrt{\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} - \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$. The time for

the loss of contact is $t_2 = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \ln \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + t_1$, where t_1 is the duration of loading (as computed from the loading solution). For most metals, the material constants are such that eqs. (13) do not materialize.

If $\Delta = 0$, then the solution is:

$$h = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} (\kappa(t_1 - t) + 1) + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max}$$

$$\dot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} \kappa^2 (t_1 - t), \quad \ddot{h} = e^{\kappa(t-t_1)} h_{\max} \frac{C}{C_e} \kappa^2 (\kappa(t_1 - t) - 1) \quad (14)$$

with $\kappa = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m}$. The time for the loss of contact is $t_2 = t_1 - \frac{1}{\kappa}$.

If $\Delta < 0$, then the solution is:

$$h = \frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C}{b C_e} (b \cos(b(t-t_1)) - a \sin(b(t-t_1))) + \left(1 - \frac{C}{C_e} \right) h_{\max}$$

$$\dot{h} = -\frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C}{b C_e} (a^2 + b^2) \sin(b(t-t_1))$$

$$\ddot{h} = -\frac{e^{a(t-t_1)} h_{\max} C (a^2 + b^2)}{b C_e} (a \sin(b(t-t_1)) + b \cos(b(t-t_1))) \quad (15)$$

where $a = -\frac{\mu h_{\max}^2}{2m}$ and $b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{\mu^2 h_{\max}^4}{m^2} + \frac{4C_e h_{\max}}{m}} \right)$. The time for the loss of contact is

$t_2 = t_1 + \frac{1}{b} \arctan \left(-\frac{b}{a} \right)$. The numerical results of a multitude of material substrates, initial velocities and masses fall into a single curve as shown in Fig. 2, where the normalized restitution coefficient (rebound/initial velocity) is plotted as a function of the normalized impact velocity. The indenter is a rigid cone with $\theta=140.6^\circ$.

Note that for low impact velocities, the effect of radiation of the surface waves is small. The results from detailed finite element analysis^[8] are also shown (without strain rate effects). The time resolved signals for load, depth and velocity during dynamic indentation of OFHC copper are shown in Fig. 3, together with the material parameters and the impact conditions. The results of Fig. 3 are in good agreement with experiments^[9].

4.2 Presence of gravity

The presence of gravity can be solved in closed forms only for the unloading case. The differences from the above solutions are: a) the term $mg/(C_e h_{\max})$ should be added to the depth found in section 4.1, b) the time for the loss of contact is given by $\ddot{h} = g$. Therefore, the values of t_2 should change accordingly.

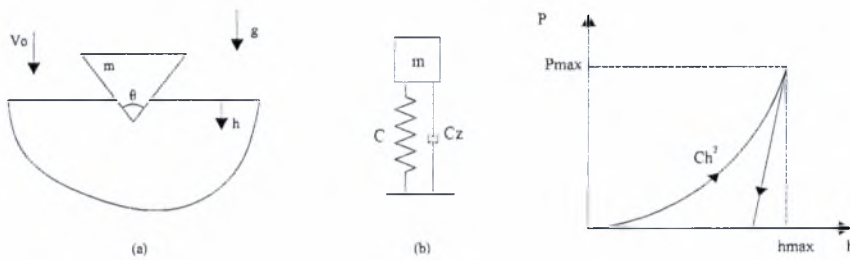


Figure 1. a) Physical problem. b) One-dimensional dynamic model. The static force-depth relation.

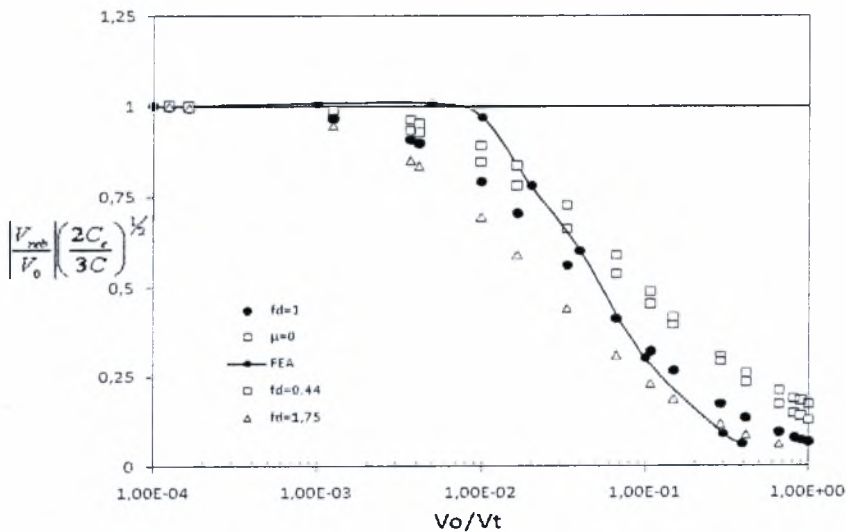


Figure 2. The normalized restitution coefficient (rebound/initial velocity), as a function of the normalized initial velocity by $V_0/V_t = V_0/\sqrt{C/\rho}$, in the absence of gravity and with no strain-rate effects. The best fit with finite elements is with the assumption of no pile-up or sink-in ($f_d = 1$). The radiation of the surface waves is important in the unloading phase of the solution also, but less important than in the loading phase.

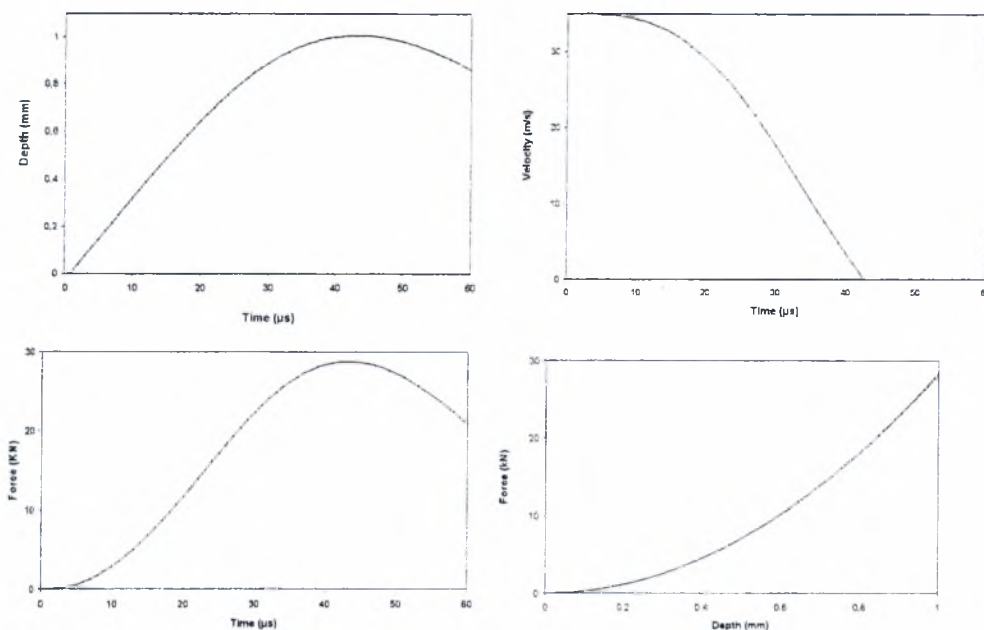


Figure 3. Dynamic impact of OFHC copper with a rigid cone of $\theta=140.6^\circ$, mass $m=25$ g, initial velocity $V_0=35$ m/s. The substrate has: density 8940 kg/m³, Young's modulus 116 GPa. Poisson's ratio 0.31 , yield stress 302 MPa, reference strain rate 25100 1/s, rate sensitivity parameter 0.35 and $C=35$ GPa.

Material:	BRASS	
Mass:	m=	0,01 kg
Density:	ρ =	8500 kg/m ³
Poisson ratio:	ν =	0,35
	C=	1,25E+10 Pa
	C_e =	7,02E+11 Pa
	C/C_e =	0,017814
Elastic modulus:	E=	1,01E+11 Pa
Area coefficient:	f_d =	1
Shear wave velocity:	V_s =	2097,825 m/s
Lysmer velocity:	V_{L_s} =	3492,891 m/s
Plastic velocity	V_f =	1212,678 m/s

Table 1: Input data for Brass (effect of surface wave radiation). The cone is $\theta=140.6^\circ$.

V_0 (m/sec)	No dumping h_{max} (m)	Dumping h_{max} (m)	Ratio
0.1	2,29E-05	2,29E-05	0,999
12	0,000557	0,000497	0,892
80	0,001973	0,001292	0,655
1100	0,011324	0,003553	0,314

Table 2: Results for Brass (input from Table 1).

11 CONCLUSIONS

We have investigated the impact of a substrate by a cone indenter and treated it as a dynamic indentation problem. We have introduced approximate models for capturing the radiation of the surface waves, the gravity and the strain-rate effects. We obtained closed form solutions that approximate well the complications of three-dimensional, rate-dependent, elastoplastic deformation under dynamic conditions. A characteristic wave velocity V_1 is connected with the sharp indentation. For velocities more than 1% of it ($V_0 < 0.01\sqrt{C/\rho}$), the surface waves absorb considerable amount of the initial kinetic energy and has to be taken into consideration when interpreting instrumented dynamic indentation experimental results. Gravity can be important for low initial velocities, or for high mass of the indenter. Note that dropping of pointed bodies on the substrate, means a dynamic multiplication of the applied maximum force by a factor of at least 3 and in some cases by more than 4. This means that the typical factor of 2 that is used in many applications to account dynamic phenomena via static loading underestimates the dynamic stressing of the substrate. The maximum indentation depth can be used for the estimation of the dynamic hardness. In cases when the strain-rate effects are not important, the dynamic hardness is almost the same with the static hardness. However, strain-rate effects lead to higher hardness because of the higher load and the smaller contact area. It seems that the dynamic impact does not create considerable pile-up or sink-in of the material at the contact perimeter, thus making the hardness interpretations simple. The present results suggest that the ratio of the dynamic/static hardness is approximately C/C_0 , eq. (8). A representative strain rate can describe the whole impact phenomenon and seems that it is simply related with a characteristic time of the elastoplastic wave propagation and a characteristic strain of the static indentation. Finite element results and available experimental data support the present investigation.

REFERENCES

- [1] Davis, C.D. and Hunter, S.C. (1960), "Assessment of the strain-rate sensitivity of metals by indentation with conical indenters," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, pp. 253-254.
- [2] Mahtab, F.U., Johnson, W. and Slater, R.A. (1965), "Dynamic indentation of copper, an aluminium alloy and mild steel with conical projectiles and dynamic tip flattening," *Int. J. Mech. Science* 7, pp. 685-719.
- [3] Kleesattel, C. and Gladwell, G.M.L. (1968), "The contact-impedance meter -1," *Ultrasonics* 6, pp. 175-180.
- [4] Graham, G.A.C. (1973), "A contribution to Hertz's theory of elastic impact," *International Journal of Engineering Science* 11, pp. 409-413.
- [5] Houlsby, G.T. (1982), "Theoretical analysis of the fall-cone test," *Geotechnique* 32, pp. 111-118.
- [6] Marshall, D.B., Evans, A.G. and Nisenholz, Z. (1983), "Measurement of dynamic hardness by controlled sharp-projectile impact," *Journal of the American Ceramic Society* 66, pp. 580-585.
- [7] Koeppel, B.J. and Subhash, G. (1999), "Characteristics of residual plastic zone under static and dynamic Vickers indentation," *Wear* 224, pp. 56-67.
- [8] Andrews, E.W., Giannakopoulos, A.E., Plisson, E. and Suresh, S. (2002), "Analysis of the impact of a sharp indenter," *International Journal of Solids and Structures* 39, pp. 281-295.
- [9] Lu, J., Suresh, S. and Ravichandran, G. (2003), "Dynamic indentation for determining the strain-rate sensitivity of metals," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51, pp. 1923-1938.
- [10] Bedding, R.J. and Willis, J.R. (1973), "The dynamic indentation of an elastic half-space," *Journal of Elasticity* 3, pp. 289-309.
- [11] Wang, L. and Rokhlin, S.I. (2005), "Universal scaling functions for continuous stiffness nanoindentation with sharp indenters," *International Journal of Solids and Structures* 42, pp. 3807-3832.
- [12] Gazetas, G. (1987), "Simple physical methods for foundation impedances", *Dynamic Behavior of Foundations and Buried Structures*, Elsevier Applied Science, NY, chapter 2, pp. 45-94.
- [13] Tabor, D. (1951), *The Hardness of Metals*, Clarendon Press, Oxford.





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085930