



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

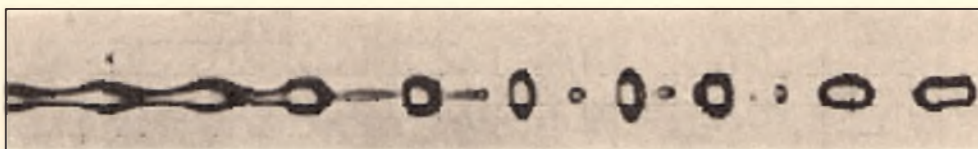
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ**

**Διπλωματική Εργασία:**

**Αριθμητική Προσομοίωση Τυρβώδους Διφασικής Ροής  
Αέρα-Σταγονιδίων Νερού σε Κατακόρυφο Σωλήνα**

**Μαρία Απ. Μουτσικοπούλου**



**Επιβλέπων Καθηγητής: Ν. Σ. Βλάχος**

**Βόλος, Ιούλιος 2007**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5591/1  
Ημερ. Εισ.: 25-07-2007  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ  
2007  
ΜΟΥ

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Βλάχος  
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Ανδρίτσος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Αναστάσιος Σταμάτης  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Πρόλογος

Η παρούσα Διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Επιβλέπων της Διπλωματικής εργασίας μου ήταν ο Καθηγητής κ. Νικόλαος Βλάχος, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα για την υποστήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης.

Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής εξέτασης της Διπλωματικής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Ανδρίτσο και Επίκουρο Καθηγητή κ. Αναστάσιο Σταμάτη για την ανάγνωση της εργασίας μου και την αποδοχή τους να συμμετάσχουν στην παρουσίαση και την αξιολόγησή της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον υποψήφιο Διδάκτορα κ. Χρήστο Δριτσέλη, αφενός για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε στο πρόσωπό μου, αφετέρου για την υπομονή, κατανόηση και γενικά για την αμέριστη βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Ευχαριστώ τους φίλους(ες) μου Άννα Γεωργαντάκη, Χάιδω Μπέλλου, Θωμά Βεντούρη, Μαριλένα Φυτιλή, Ματούλα Μιχαλάκη, Στέλιο Βαρούτη, Γεώργιο Κατσαμά και Σαράντη Πανταζή καθώς και τους συγγενείς μου Βασίλειο και Ελισσάβητ Μπρίζη, για την κατανόηση και την ηθική υποστήριξη που μου προσέφεραν ιδιαίτερα τους τελευταίους μήνες της προσπάθειάς μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τους γονείς μου, Απόστολο και Ευτυχία Μουτσικοπούλου, καθώς και τον αδελφό μου Σπυρίδωνα Μουτσικόπουλο, προς τους οποίους είμαι ευγνώμων για την αγάπη, την υλική και ηθική υποστήριξη που μου προσέφεραν, καθώς και τη συνεχή ενθάρρυνση για να ολοκληρώσω με επιτυχία το όνειρό μου.

*Αφιερώνω την εργασία αυτή*

*στη Μητέρα και τον Πατέρα μου.*

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη τυρβωδών διφασικών ροών, με έμφαση στο φαινόμενο της εναπόθεσης σωματιδίων. Για αυτό το λόγο πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη με χρήση άμεσης αριθμητικής προσομοίωσης (Direct Numerical Simulation - DNS) για τη συνεχή φάση με ταυτόχρονη παρακολούθηση των τροχιών των σωματιδίων με ένα σχήμα κατά Langrange. Ο στόχος της εργασίας είναι η μελέτη της επίδρασης της σύζευξης ορμής των δύο φάσεων πάνω στο φαινόμενο της εναπόθεσης των σωματιδίων στην πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή σε ένα κατακόρυφο σωλήνα. Ο αριθμός Reynolds που μελετήθηκε ήταν περίπου 180 με βάση την ταχύτητα τριβής και τη διάμετρο του σωλήνα. Τα σωματίδια που χρησιμοποιήθηκαν είχαν διάμετρο 0.01056 και χρόνο απόκρισης 200 σε μονάδες τοίχου. Η επίδραση των σωματιδίων πάνω στη συνεχή φάση έγινε με την προσέγγιση της σημειακής δύναμης, ενώ οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων αγνοήθηκαν. Η παραμετρική μελέτη περιλαμβάνει την επίδραση της διαμέτρου, του κλάσματος όγκου των σωματιδίων και την επίδραση της βαρύτητας στην κίνησή τους.

Τα αποτελέσματα της παρούσας Διπλωματικής εργασίας επιβεβαιώνουν τη γραμμική εξάρτηση του συντελεστή εναπόθεσης για μικρά κλάσματα όγκου σωματιδίων καθώς επίσης και την πειραματικά παρατηρούμενη μείωση της εναπόθεσης σε μεγάλα κλάσματα όγκου σωματιδίων. Οι υπολογισμοί χωρίς σύζευξη ορμής μεταξύ των δύο φάσεων αδυνατούν να προβλέψουν αυτή τη συμπεριφορά. Συνεπώς, στην παρούσα εργασία παρέχονται αποτελέσματα που συνδέουν αυτό το φαινόμενο και τις αλλαγές που προκαλούν τα σωματίδια στα τυρβώδη χαρακτηριστικά της ροής. Τα σωματίδια μειώνουν σημαντικά τις r.m.s. ταχύτητες της τυρβώδους ροής στο σωλήνα, γεγονός που μειώνει τη διασπορά των σωματιδίων και την ικανότητα της ροής να στέλνει τα σωματίδια προς τα τοιχώματα και κατά συνέπεια την εναπόθεση αυτών. Παράλληλα, παρατηρείται μείωση της τριβής στα τοιχώματα από την παρουσία των σωματιδίων στη ροή. Υπό την επίδραση της βαρύτητας παρατηρούνται γενικά ίδιες συμπεριφορές με αυτές που παρουσιάζονται με μηδενικό βαρυτικό πεδίο. Η χρήση σωματιδίων με μικρότερη διάμετρο έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του χρόνου απόκρισης άρα και της αδράνειάς τους και

συνεπώς επηρεάζει περισσότερο τη ροή και την εναπόθεσή τους. Τέλος γίνονται προτάσεις για περαιτέρω μελλοντική έρευνα.

## Περιεχόμενα

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
1.1	Αντικείμενο και Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας.....	3
1.2	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας.....	4
2.	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	5
2.1	Διάκριση των διατάξεων διφασικής ροής.....	5
2.2	Φυσικό πρόβλημα.....	9
2.3	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	11
3.	ΦΥΣΙΚΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	22
3.1	Εισαγωγή.....	22
3.2	Εξισώσεις Συνεχούς Φάσης.....	25
3.3	Διακριτή Φάση.....	27
3.3.1	Εισαγωγή.....	27
3.3.2	Δύναμη Οπισθέλκουσας.....	27
3.3.3	Δύναμη Φαινόμενης Μάζας.....	30
3.3.4	Η Δύναμη Basset.....	32
3.4	Δυνάμεις Ανύψωσης.....	32
3.4.1	Η Δύναμη Saffman.....	33
3.4.2	Η Δύναμη Magnus.....	33
3.5	Ροπή.....	34
3.6	Εξίσωση Basset – Boussinesq – Oseen.....	35
3.7	Αριθμός Stokes.....	35
3.8	Αραιές και πυκνές διφασικές ροές.....	36
3.9	Σύζευξη Φάσεων.....	37
4.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.....	41
4.1	Αριθμητικά Μοντέλα Συνεχούς Φάσης.....	41



4.2	Υπολογιστικό Πλέγμα και Διακριτοποίηση.....	43
4.2.1	Χωρική Διακριτοποίηση των Εξισώσεων.....	44
4.2.2	Χρονική Διακριτοποίηση.....	50
4.2.3	Παραγοντοποίηση των εξισώσεων ορμής.....	52
4.2.4	Υπολογισμός της Ψευδοπίεσης ( Εξίσωση Poisson).....	52
4.3	Αριθμητικά Μοντέλα Δυναμικής Σωματιδίων.....	54
4.3.1	Χρονική διακριτοποίηση.....	54
4.4	Αλγόριθμος Επίλυσης.....	56
5.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....	58
5.1	Παραδοχές.....	58
5.2	Αποτελέσματα 1 <sup>ης</sup> Περίπτωσης.....	60
5.3	Αποτελέσματα 2 <sup>ης</sup> Περίπτωσης.....	71
5.4	Αποτελέσματα 3 <sup>ης</sup> Περίπτωσης.....	78
6.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	87
6.1	Συμπεράσματα.....	87
6.2	Προτάσεις.....	88
	<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>89</b>

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Αντικείμενο και Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας

Οι διφασικές ροές παρουσιάζουν έντονο τεχνολογικό και επιστημονικό ενδιαφέρον καθώς παρατηρούνται σε πολλά συστήματα που περιλαμβάνουν βιολογικές, μηχανολογικές, χημικές και πυρηνικές εφαρμογές. Η καλύτερη κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε αυτές τις ροές μπορεί να οδηγήσει στην αύξηση της απόδοσης των εφαρμογών και στη μείωση του κόστους λειτουργίας των σχετικών συσκευών.

Γενικά, η μελέτη της διφασικής ροής αποτελεί δύσκολο θέμα, κυρίως λόγω της πολυπλοκότητας της μορφής της ροής στην οποία δύο ρευστά μπορούν να συνυπάρχουν μέσα σε ένα σύστημα, όπως για παράδειγμα σε ένα σωλήνα. Συνεπώς είναι δύσκολο να κατασκευαστεί ένα γενικό μοντέλο για όλες τις περιπτώσεις, παρά μόνο επιμέρους μοντέλα για τις πιο στοιχειώδεις.

Οι εφαρμογές όπου συναντώνται οι διφασικές ροές, διακρίνονται κυρίως στα παρακάτω συστήματα:

- ▶ Συστήματα αερίου-στερεών σωματιδίων, όπως είναι τα συστήματα πνευματικής μεταφοράς, οι συλλέκτες σκόνης, οι ρευστοποιημένες κλίνες και τα συστήματα καύσης άνθρακα.

- ▶ Συστήματα αερίου-υγρών σταγονιδίων, όπως είναι οι ξηραντήρες, οι απορροφητήρες, οι συσσωρευτές και οι ψεκαστήρες σταγονιδίων σε αεροστρόβιλους.

- ▶ Συστήματα υγρού-αέριων φυσαλίδων που συναντώνται σε εφαρμογές όπως η ομογενοποίηση και η γαλακτωματοποίηση.

- ▶ Συστήματα υγρού-στερεών σωματιδίων, που εμφανίζονται σε εφαρμογές όπως η ρευστοποιημένη κλίνη, ορισμένες μέθοδοι διαχωρισμού μειγμάτων και η ιζηματογένεση.

Η χρήση της υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής τα τελευταία χρόνια επιτρέπει την προσομοίωση στρωτών ή τυρβωδών ροών με πολύπλοκη γεωμετρία που περιλαμβάνουν δύο ή τρεις φάσεις.

Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η άμεση αριθμητική προσομοίωση (Direct Numerical Simulation - DNS) τυρβώδους διαφασικής ροής αέρα - σταγονιδίων νερού σε κατακόρυφο σωλήνα. Στόχος είναι η μελέτη της επίδρασης της σύζευξης των δύο φάσεων πάνω στο φαινόμενο της εναπόθεσης και γενικότερα η κατανόηση της συμπεριφοράς των σωματιδίων σε τυρβώδη διαφασική ροή. Η συμπεριφορά αυτή των σωματιδίων επιχειρείται να διερευνηθεί εξετάζοντας το συντελεστή εναπόθεσης των σταγονιδίων πάνω στα τοιχώματα του σωλήνα καθώς το κλάσμα μάζας τους μεταβάλλεται.

## 1.2 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της Διπλωματικής Εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφονται οι μορφές της διαφασικής ροής και το υπό μελέτη φυσικό πρόβλημα. Στο τέλος του Κεφαλαίου 2 παρατίθεται μια εκτενής Βιβλιογραφική Ανασκόπηση. Κατόπιν, στο Κεφάλαιο 3, αναλύεται η φυσική του προβλήματος και παραβάλλονται οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή της συνεχούς και της διακριτής φάσης, δηλαδή του αέρα και των σταγονιδίων νερού αντίστοιχα. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα Αριθμητικά Μοντέλα που επιλύουν τη συνεχή φάση (αέρας) και τη διακριτή φάση (σταγονίδια νερού). Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται η παρουσίαση της αριθμητικής μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε, τα αποτελέσματα που προέκυψαν καθώς και η ανάλυσή τους. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας και γίνονται προτάσεις για τη βελτίωση της υπολογιστικής προσέγγισης του προβλήματος καθώς και για μελλοντικές μελέτες.

## 2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

### 2.1 Διάκριση των Μορφών Διφασικής Ροής

Οι διφασικές ροές που περιέχουν σωματίδια ή σταγονίδια καλύπτουν μεγάλη ποικιλία εφαρμογών. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει σημαντικές πρόοδοι στην επιστήμη και την τεχνολογία των διφασικών ροών λόγω του εμπλουτισμού των υπολογιστικών και πειραματικών δυνατοτήτων.

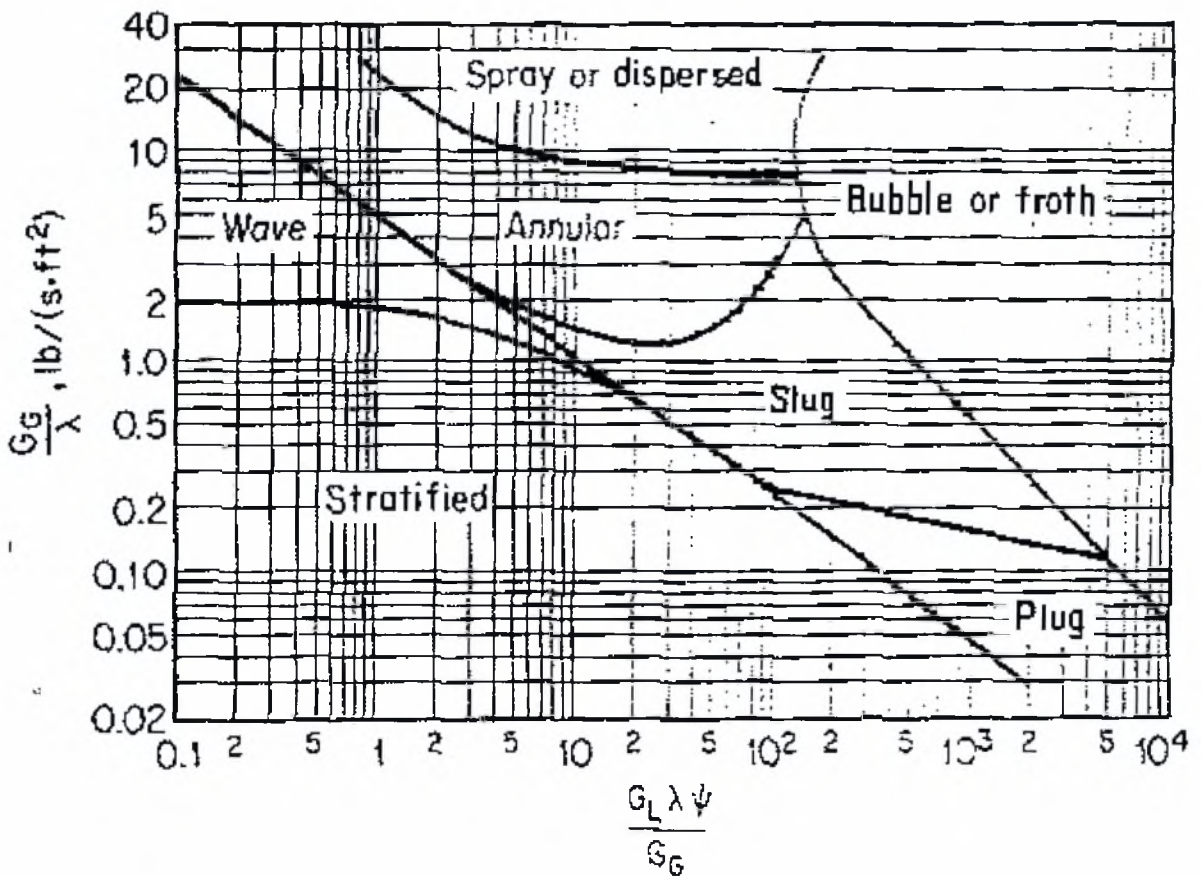
Σε οριζόντιους σωλήνες, μορφές διφασικής ροής έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία και έχουν συσχετιστεί εμπειρικά με τους ρυθμούς ροής και τις ιδιότητες του ρευστού. Τα όρια μεταξύ των διαφορετικών διατάξεων ροής, ωστόσο, δεν είναι αυστηρά καθορισμένα, διότι οι μεταβάσεις είναι σταδιακές και τα κύρια όρια βασίζονται στις ερμηνείες του κάθε ερευνητή και στη διαμόρφωση του σωλήνα και των ρευστών που μελετώνται. Στους παρακάτω γενικούς τύπους των μορφών ροής, οι τιμές των επιφανειακών ταχυτήτων που δίδονται είναι αντιπροσωπευτικές τιμές για ρευστά με ιξώδη μικρότερα από 0.1 Pa·s (100 cP) και πυκνότητες αερίων περίπου ίδιες με του αέρα.

#### α) Ροή με φυσαλίδες (Bubble flow)

Αυτή η μορφή διφασικής ροής, στην οποία βρίσκονται φυσαλίδες αερίου διασκορπισμένες στο υγρό, εμφανίζεται για ταχύτητες υγρού από 1.5 έως 4.5 m/s και για ταχύτητες αερίου 0.3 με 3 m/s (βλ. Σχήμα 2.1).

#### β) Plug flow

Στη μορφή αυτή παρατηρούνται εναλλασσόμενες περιοχές ρευστού και αερίου, που κινούνται μέσα στο σωλήνα. Εμφανίζεται για ταχύτητες υγρού περίπου 0.6 m/s και για ταχύτητες αερίου μικρότερες από 0.9 m/s (Σχήμα 2.1).



**Σχήμα 2.1:** Περιοχές διάφορων τύπων ροής σε συντρέχουσα ροή υγρού αερίου μέσω οριζώντιων αγωγών (Πηγή Perry's Handbook)

### γ) Στρωματοποιημένη ροή (Stratified flow)

Σε αυτή την περίπτωση το υγρό ρέει κατά μήκος του κατώτερου τμήματος του σωλήνα και το αέριο ρέει πάνω από μια επίπεδη διεπιφάνεια υγρού – αερίου. Δημιουργείται όταν υπάρχουν ταχύτητες υγρού μικρότερες από 0.15 m/s και για ταχύτητες αερίου 0.6 με 3 m/s (Σχήμα 2.1).

### δ) Κυματοειδής ροή (Wavy flow)

Αυτή η μορφή ροής είναι παρόμοια με εκείνη της στρωματοποιημένης, με τη διαφορά ότι η διεπιφάνεια υγρού – αερίου είναι κυματοειδούς μορφής. Αυτή εμφανίζεται για ταχύτητες υγρού μικρότερες από 0.3 m/s και για ταχύτητες αερίου περίπου 4.5 m/s (Σχήμα 2.1).

### ε) Slug Flow

Αυτή η ροή δημιουργείται όταν ένα κύμα σχηματίζεται από το απότομα κινούμενο αέριο με αποτέλεσμα μια μάζα υγρού με φυσαλίδες (slug), η οποία κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τη μέση ταχύτητα του υγρού. Σε αυτόν τον τύπο ροής, τα slugs μπορούν να προκαλέσουν σφοδρές και σε πολλές περιπτώσεις επικίνδυνες δονήσεις στον εξοπλισμό εξαιτίας της σύγκρουσης με μάζες υγρού μεγάλων ταχυτήτων πάνω σε εξαρτήματα όπως π.χ. κάμπυεις επιστροφής (Σχήμα 2.1).

### στ) Δακτυλιοειδής ροή (Annular flow)

Στην περίπτωση αυτή, το υγρό ρέει ως μια μεμβράνη γύρω από το εσωτερικό τοίχωμα του αγωγού και το αέριο ρέει στον πυρήνα του σωλήνα. Ένα τμήμα του υγρού εισάγεται ως σταγονίδια από τον κεντρικό πυρήνα αερίου προς τη μεμβράνη. Αυτό το είδος ροής εμφανίζεται για ταχύτητες αερίου μεγαλύτερες από 6 m/s (Σχήμα 2.1).

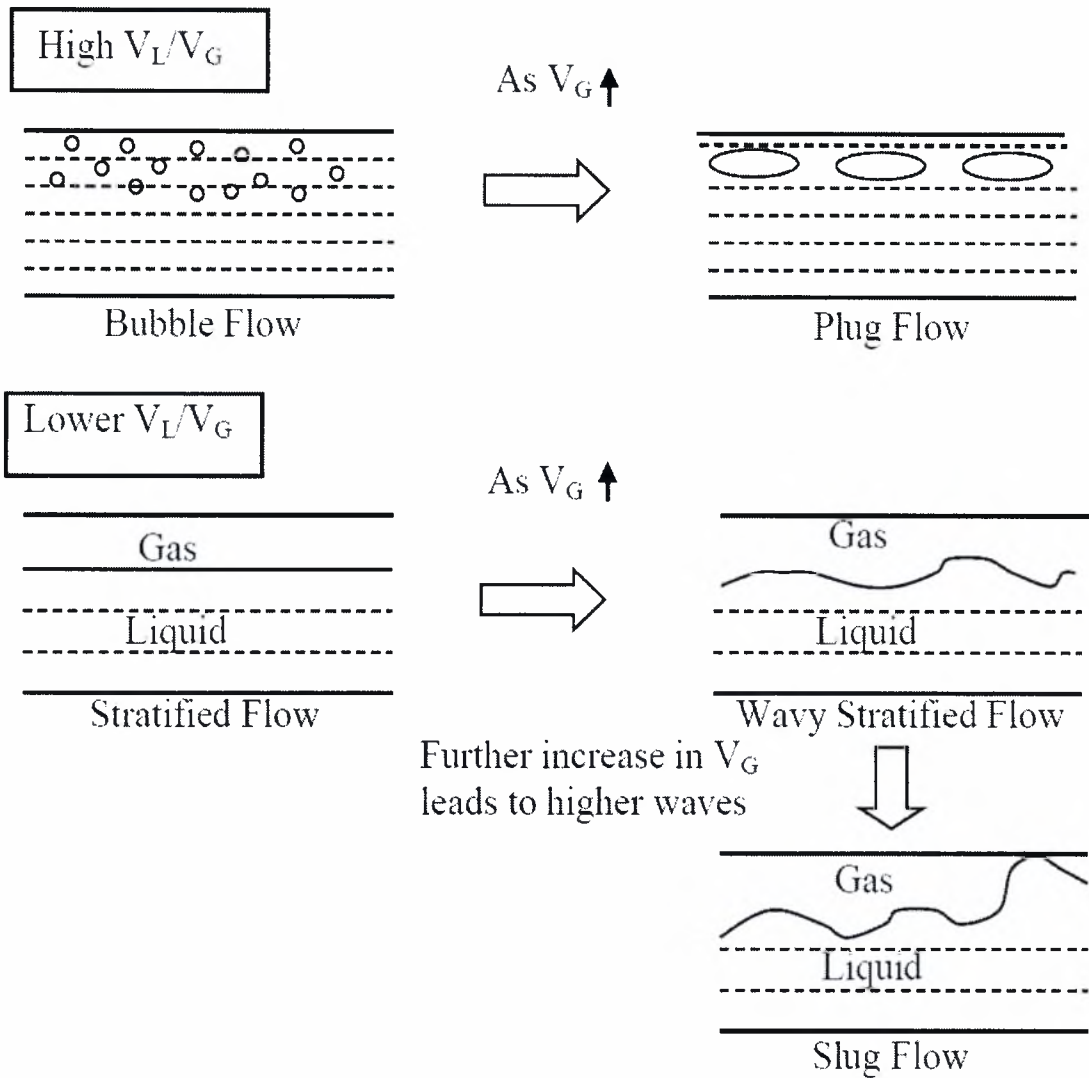
### ζ) Διασκορπισμένη ροή (Spray or dispersed flow)

Εδώ σχεδόν όλο το υγρό εισάγεται ως μικρές σταγόνες μέσα στο αέριο, πιθανότατα εμφανίζεται για ταχύτητες αερίου μεγαλύτερες από 60 m/s (Σχήμα 2.1).

Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζονται οι μορφές διαφασικής ροής που εμφανίζονται σε οριζόντιο αγωγό μέσω του οποίου ρέει μίγμα υγρού - αερίου. Χρησιμοποιήθηκαν τα σύμβολα  $V_L$  και  $V_G$  που αντιστοιχούν στην "επιφανειακή ταχύτητα" (superficial velocity) της υγρής και της αέριας φάσης, αντίστοιχα.

Σε πρώτη φάση, έγινε η θεώρηση ότι το μίγμα είναι σχεδόν εξολοκλήρου υγρό. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος  $V_L / V_G$  είναι πολύ μεγάλος. Τότε, το αέριο βρίσκεται στη μορφή μικρών φυσαλίδων που αυξάνονται στο πάνω τμήμα του σωλήνα, όπως φαίνεται αριστερά στο Σχήμα 2.2. Καθώς ο ρυθμός ροής του αερίου αυξάνεται, οι φυσαλίδες αυξάνονται επίσης σε μέγεθος, όπως φαίνεται δεξιά στο Σχήμα 2.2. Περαιτέρω αύξηση στη  $V_G$  οδηγεί σε δακτυλιοειδή ασαφή (mist) ροή μέσω του ενδιάμεσου σταδίου της slug ροής.

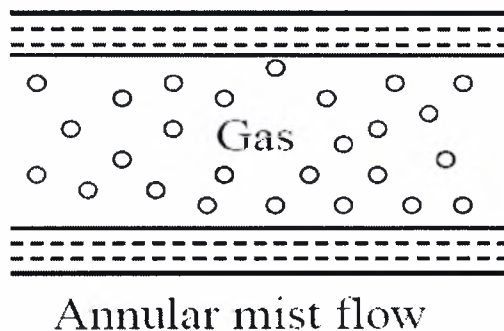




**Σχήμα 2.2:** Σχηματική απεικόνιση των διατάξεων ροής που παρατηρούνται σε διαφασική ροή υγρού – αερίου σε οριζόντιο αγωγό

Στη συνέχεια εξετάστηκαν χαμηλότερες τιμές του ρυθμού  $V_L/V_G$ . Το Σχήμα 2.2 δείχνει τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή. Σε αυτή τη φάση, υπάρχει αρκετό αέριο ώστε να δημιουργηθεί ένα στρώμα στο πάνω μέρος του σωλήνα. Αυτός ο τύπος ροής λέγεται “Στρωματοποιημένη Ροή” (Stratified flow). Καθώς το  $V_G$  αυξάνεται, αρχίζουν να σχηματίζονται κύματα στην επιφάνεια του υγρού. Η ροή αυτή ονομάζεται “Κυματοειδής Στρωματοποιημένη Ροή” (Wavy Stratified Flow). Περαιτέρω αύξηση στην ταχύτητα του αερίου οδηγεί στο σχηματισμό υψηλότερων κυματικών κορυφών που επικοινωνούν με το τοίχωμα του σωλήνα. Το αέριο τότε ρέει με τη μορφή slugs, και η ροή ονομάζεται “Slug flow” (Σχήμα 2.2).

Τελικά, σε μεγάλες τιμές ταχύτητας του αερίου, συναντάται μια διάταξη ροής γνωστή ως “Δακτυλιοειδής ροή” (Annular mist flow). Στην περίπτωση αυτή, το υγρό ρέει με τη μορφή μιας λεπτής μεμβράνης στο τοίχωμα του σωλήνα, με το αέριο να ρέει προς τον πυρήνα του σωλήνα, δημιουργώντας έτσι ένα δακτύλιο. Η μεγαλύτερη μάζα υγρού εισέρχεται στο αέριο με τη μορφή μικρών σταγόνων. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται mist.

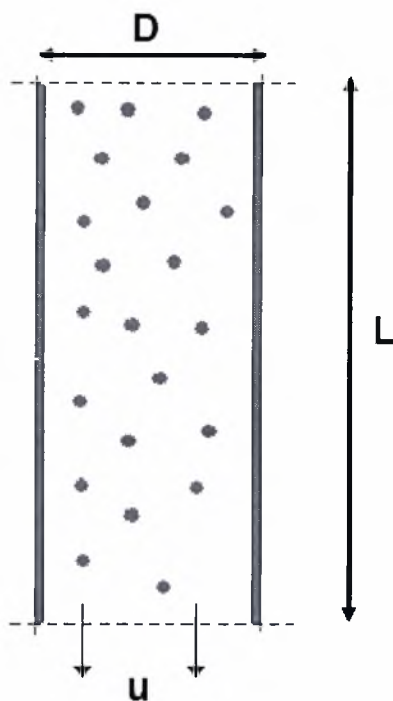


*Σχήμα 2.3* : Δακτυλιοειδής mist ροή

## 2.2 Φυσικό Πρόβλημα

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά την τυρβώδη διαφασική ροή αέρα - σταγονιδίων νερού σε έναν κατακόρυφο σωλήνα. Μέσα στο σωλήνα υπάρχει ροή αέρα, που περιλαμβάνει σταγονίδια νερού, προς τη διεύθυνση της βαρύτητας, δηλαδή προς τα κάτω. Σχετικά με τη γεωμετρία του σωλήνα είναι ευθύγραμμος, μήκους  $L$  και διαμέτρου  $D$  και είναι τοποθετημένος κατακόρυφα. Τα σταγονίδια έχουν μια χαρακτηριστική διάμετρο  $d$ . Η ροή του αέρα θεωρείται ότι έχει μια μέση ταχύτητα  $u$  (Σχήμα 2.4).





**Σχήμα 2.4** : Ροή αέρα και σταγονιδίων σε κατακόρυφο αγωγό

Στο εσωτερικό του ευθύγραμμου αγωγού θεωρούμε ότι υπάρχει τυρβώδης ροή αέρα, με σταθερό ρυθμό. Αρχικά, τα εσωτερικά τοιχώματα του αγωγού περιβάλλονται από ένα παχύ στρώμα νερού. Λόγω της ροής του αέρα δημιουργούνται κύματα στην επιφάνεια του στρώματος του υγρού, τα οποία έχουν ως άμεση συνέπεια τη δημιουργία σταγονιδίων. Τα σταγονίδια αυτά εξέρχονται από την περιοχή του τυρβώδους στρώματος του τοιχώματος, και εισέρχονται πλέον στη ροή του αέρα μέσα στο σωλήνα.

Στο υπό εξέταση πρόβλημα ροής, τα σταγονίδια επηρεάζουν τη ροή του αέρα μέσα στο σωλήνα. Καθώς τα σταγονίδια κινούνται, ορισμένα από αυτά εναποτίθενται πάνω στο τοίχωμα. Θεωρητικά, θα μπορούσε να υποτεθεί ότι όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των σταγονιδίων που περιέχονται στη ροή, τόσο μεγαλύτερος θα έπρεπε να είναι και ο αριθμός αυτών που εναποτίθενται πάνω στο τοίχωμα, δηλαδή ότι ρυθμός εναπόθεσης συνεχώς αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των σωματιδίων στη ροή. Στην πραγματικότητα όμως δεν συμβαίνει αυτό. Παρατηρείται ότι αρχικά, όσο περισσότερα σταγονίδια έχουμε στη ροή, τόσο περισσότερα εναποτίθενται. Όμως, από μια τιμή του κλάσματος μάζας των σταγονιδίων και μετά, παρόλο που τα σταγονίδια που υπάρχουν στο σωλήνα αυξάνονται, η εναπόθεση δεν

εξακολουθεί να αυξάνεται ακολουθώντας τον ίδιο ρυθμό. Άμεση συνέπεια αποτελεί η μείωση της τύρβης του ρευστού. Το ενδιαφέρον της Διπλωματικής αυτής εργασίας επικεντρώνεται στη συνολική επίδραση που έχει η παρουσία των σταγονιδίων στη ροή και ειδικότερα στο συντελεστή εναπόθεσης των σταγονιδίων στο τοίχωμα.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος έγινε χρησιμοποιώντας Άμεση Αριθμητική Προσομοίωση (Direct Numerical Simulation-DNS) για τη μελέτη της ροής του ρευστού και Langrangian μέθοδο για την παρακολούθηση των τροχιών των σωματιδίων στη ροή, λαμβάνοντας υπόψη την προσέγγιση της σημειακής δύναμης (Point Force Method). Η μεθοδολογία αυτή, που χρησιμοποιεί τις σημειακές δυνάμεις, έχει χρησιμοποιηθεί κατά κόρον σε προηγούμενες μελέτες.

## 2.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Οι διφασικές ροές ρευστού – σωματιδίων παρουσιάζουν έντονο επιστημονικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον, λόγω της πολυπλοκότητας των φαινομένων που παρατηρούνται, και εξαιτίας του γεγονότος ότι συναντώνται σε πολλά συστήματα που περιλαμβάνουν βιολογικές, μηχανολογικές, χημικές και πυρηνικές εφαρμογές. Έτσι, ένας μεγάλος αριθμός μελετών έχει πραγματοποιηθεί πάνω σε αυτό το γνωστικό αντικείμενο. Φαινόμενα όπως η επίδραση των σωματιδίων πάνω στην τύρβη της συνεχούς φάσης, η αλληλεπίδραση της διφασικής ροής με τοιχώματα, αλλά και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν έχουν πλήρως αποσαφηνιστεί και προσελκύουν το ενδιαφέρον των ερευνητών.

Για την περίπτωση της μόνιμης ροής με σταθερούς λόγους υγρού-αερίου, μεγάλος αριθμός μελετών, πειραματικών, θεωρητικών και αριθμητικών έχει γίνει πάνω στην πρόβλεψη της πτώσης πίεσης, των κλασμάτων όγκου και τον προσδιορισμό των μορφών ροής για τη ροή σε σωλήνες. Ωστόσο, μια αξιόπιστη γενική συσχέτιση δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί, παρόλο που συσχετίσεις για συγκεκριμένα συστήματα ροής έχουν δημοσιευτεί.

Οι μελέτες που αναφέρονται στα φαινόμενα της εναπόθεσης που εντοπίζονται στη διφασική ροή, σε αυτή τη Διπλωματική εργασία, ταξινομήθηκαν σε τρεις ευρύτερες κατηγορίες:

(α) Στις πειραματικές εργασίες που αφορούν την εναπόθεση (κυρίως σε σωλήνες)

(β) Στις θεωρητικές εργασίες που ασχολούνται με το φαινόμενο της εναπόθεσης

(γ) Στις αριθμητικές εργασίες που αφορούν την εναπόθεση (σε σωλήνες, channel flow κ.α.)

Στην πρώτη κατηγορία, στις πειραματικές εργασίες, οι διαφασικές ροές μελετώνται βάση κάποιας πειραματικής μεθόδου. Χαρακτηριστικά αναφέρονται η χρήση συστήματος LDA (Laser Doppler Anemometry) ή PDA (Phase Doppler Anemometry) και ανεμομετρίας θερμού φίλμ (HFA) με τα οποία είναι εφικτή η μέτρηση ταχυτήτων της συνεχούς φάσης σε μία διαφασική ροή.

Στη δεύτερη κατηγορία, των θεωρητικών εργασιών, οι διαφασικές ροές αναλύονται με βάση την υπάρχουσα θεωρία καθώς επίσης και τη σχετική βιβλιογραφία που αναφέρεται στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Στην τρίτη κατηγορία, των αριθμητικών εργασιών, δίνονται αναλυτικές λύσεις ή γίνεται χρήση υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Στις μελέτες αυτές γίνεται η επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes για τη συνεχή φάση, ενώ τα σωματίδια μελετώνται χρησιμοποιώντας συνήθως την εξίσωση κίνησης του Newton.

Οι Govan et al. (1988) χρησιμοποίησαν μια πειραματική τεχνική ακτινικής παρακολούθησης (axial-viewing technique) για να μελετήσουν την κίνηση γυάλινων σφαιρών, διαμέτρων 110, 250 και 550  $\mu\text{m}$ , τις οποίες διοχέτευσαν σε συνεχή ροή αέρα σε κατακόρυφο αγωγό μήκους 1m και διαμέτρου 32mm. Η τεχνική αυτή είναι διαφοροποιείται από τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν σε άλλες μελέτες. Εδώ βρέθηκε ότι η κίνηση των σωματιδίων στη ροή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μέθοδο έγχυσης. Επίσης, μέσω ενός αριθμητικού μοντέλου για την προσομοίωση της κίνησης των σωματιδίων, βρέθηκε ότι απαιτείται μια ακτινική απόσταση τουλάχιστον 300 διαμέτρων σωλήνα ώστε τα σωματίδια να επανέρθουν σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Κύριο συμπέρασμα είναι ότι η ακτινική μεταβολή της ταχύτητας του αερίου και της έντασης της τύρβης έχει ελάχιστη επίδραση στην διασπορά και την εναπόθεση των σωματιδίων για τα σχετικά μεγάλα σωματίδια που

χρησιμοποιήθηκαν. Από την άλλη, η δύναμη ανύψωσης που προκαλείται από την κατανομή ταχυτήτων του αερίου προκαλεί μεγάλη μείωση στο ρυθμό εναπόθεσης.

Οι Schadel et al.(1990) μελέτησαν πειραματικά τους ρυθμούς διάσπασης και εναπόθεσης σε κατακόρυφη δακτυλιοειδή διφασική ροή νερού - αέρα. Χρησιμοποιήθηκε η τεχνική ανίχνευσης του Quandt για να προσδιοριστεί ο ρυθμός διάσπασης, ο ρυθμός εναπόθεσης και ο συμπαρασυρμός στον αέρα και το νερό που ρέει κατακόρυφα σε σωλήνες διαμέτρου 2.54, 4.20 και 5.72cm. Ο ρυθμός συμπαρασυρμού βρέθηκε ότι μεταβάλλεται με την ταχύτητα του αερίου και το ρυθμό ροής του ρευστού υμένα. Ο ρυθμός εναπόθεσης μεταβάλλεται επίσης γραμμικά με τη συγκέντρωση των σταγονιδίων σε χαμηλές συγκεντρώσεις αλλά δεν επηρεάζεται από αλλαγές στη συγκέντρωση των σταγονιδίων σε υψηλές συγκεντρώσεις.

Οι Lee et al. (1988) μελέτησαν πειραματικά την εναπόθεση σταγονιδίων με τη χρήση ενός μοντέλου διάχυσης. Οι μετρήσεις που πραγματοποίησαν αφορούσαν σταγονίδια διαμέτρων 50, 90 και 150  $\mu\text{m}$  στο τοίχωμα σωλήνα διαμέτρου 5.08 cm. Τα σταγονίδια εισάχθηκαν μέσω ενός στομίου στο κέντρο του σωλήνα με περίπου ίδια ταχύτητα όπως ο ρέων αέρας προς τα κάτω. Ο ρυθμός εναπόθεσης περιγράφεται από ένα μοντέλο διάχυσης όπου ο συντελεστής διάχυσης των σταγονιδίων είναι σταθερός και το προφίλ ταχύτητας είναι ομοιόμορφο. Στη μελέτη υπογραμμίζεται ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη διατύπωση των συνοριακών συνθηκών στο τοίχωμα.

Τέλος, η επίδραση των ιδιοτήτων του αερίου πάνω σε σταγόνες νερού σε δακτυλιοειδή ροή μελετήθηκε πειραματικά από τους Jepson et al. (1988). Συγκεκριμένα, τα δεδομένα ελήφθησαν για κατακόρυφο σωλήνα διαμέτρου 10.26 mm σε πίεση 1.5 bar και θερμοκρασία περιβάλλοντος. Τα μεγέθη των σταγόνων μετρήθηκαν χρησιμοποιώντας την τεχνική μέτρησης διάθλασης με laser. Η ελάττωση της πυκνότητας του αερίου έχει ως αποτέλεσμα μείωση στο κλάσμα όγκου του υγρού που συμπαρασύρεται, ενώ δεν είναι σίγουρο ότι επιδρά στο μέγεθος των σταγόνων. Οι συνέπειες των μεταβολών της πυκνότητας του αερίου μπορούν να παρατηρηθούν χρησιμοποιώντας τους διαφορετικούς μηχανισμούς συμπαρασυρμού, που κυριαρχούν σε κάθε σύστημα ρευστού: διάσπαση σάκου (bag breakup) σε πειράματα ηλίου – νερού και διάσπαση συνδέσμων (ligament breakup) σε ροή αέρα-νερού. Η

μείωση στην πυκνότητα του αερίου προκαλεί αύξηση στο ρυθμό εναπόθεσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν λαμβάνει χώρα μια προνομιακή (preferential) εναπόθεση σωματιδίων, διαδοχικά με την απομάκρυνση του υμένα υγρού, που βρίσκεται στα εσωτερικά τοιχώματα του σωλήνα. Σε μικρές ταχύτητες αερίου οι μεγαλύτερες σταγόνες εναποτίθενται πρώτα μέσω ενός μηχανισμού ευθείας πρόσκρουσης, ενώ σε μεγαλύτερες ταχύτητες οι μικρότερες σταγόνες εναποτίθενται κυρίως εξαιτίας της διάχυσης.

Οι Mito & Hanratty (2004) πραγματοποίησαν μια στοχαστική περιγραφή των wall sources σε ένα τυρβώδες πεδίο ροής. Οι υπολογισμοί έγιναν για ένα απλοποιημένο μοντέλο οριζόντιων δακτυλιοειδών ροών. Η στοχαστική αυτή προσέγγιση χρησιμοποίησε μια τροποποιημένη εξίσωση Langevin ώστε να υπολογιστούν οι ταχύτητες του ρευστού που «βλέπουν» τα σωματίδια. Στην περίπτωση αυτή εξετάστηκαν οι επιδράσεις της αδράνειας των σωματιδίων και της βαρύτητας πάνω στο ρυθμό εναπόθεσης σε  $Re_\tau = 590$ . Το σύστημα θεωρήθηκε ως μια ιδανική δακτυλιοειδή ροή σε οριζόντιο αγωγό. Οι σταγόνες εισήχθησαν από τα πάνω και κάτω τοιχώματα του αγωγού σε σχετικούς ρυθμούς ώστε να μπορεί να θεωρηθεί πεδίο πλήρους ανεπτυγμένης ροής. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν σειρά σημειακών πηγών. Τα σωματίδια εκτοξεύθηκαν από την πηγή με ταχύτητα  $V_i^0$  σε χρόνο μηδέν. Μετά την ανάμιξη τους με την τύρβη του ρευστού τελικά αναποθέτηκαν στα πάνω και κάτω τοιχώματα. Τα ιδιαίτερο ενδιαφέρον τους εστιάστηκε στην ισχυρή επίδραση των μικρών μεταβολών της βαρύτητας στο ρυθμό εναπόθεσης και στον προσδιορισμό των κατάλληλων συνθηκών ώστε να μπορέσουν τα σωματίδια όταν εκτοξεύονται από το ένα τοίχωμα να φτάνουν στο άλλο, δημιουργώντας έτσι δακτυλιοειδή ροή.

Οι Reeks & Skyrme (1976) μελέτησαν την επίδραση της ταχύτητας εναπόθεσης των σωματιδίων στην αδράνειά τους σε τυρβώδη ροή σε σωλήνα. Οι μετρήσεις των ταχυτήτων εναπόθεσης στα τοιχώματα ενός σωλήνα σε τυρβώδη ροή (Liu & Agarwal, 1974) έδειξαν μείωση με την αύξηση του μεγέθους του σωματιδίου πέρα από μια κρίσιμη τιμή. Στη μελέτη αυτή παρουσιάστηκε ένα στοχαστικό μοντέλο για την εναπόθεση των σωματιδίων προς την ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος. Όπως και στα υπόλοιπα μοντέλα, η διαδικασία της εναπόθεσης συντίθεται από τυρβώδη διάχυση μαζί με αδράνεια μέσω του οριακού στρώματος. Η



παρατηρούμενη μείωση οφειλόταν στην αυξανόμενη διείδυση του οριακού στρώματος με την αύξηση του μεγέθους του σωματιδίου να είναι ανεπαρκής ώστε να μπορεί να εξισορροπήσει το μειωμένο ρυθμό μεταφοράς στην περιοχή αυτή.

Οι Soldati & Andreussi (1995) μελέτησαν την επίδραση της συνένωσης (coalescence) στη μεταφορά σταγονιδίων σε κατακόρυφη δακτυλιοειδή ροή. Στην κατακόρυφη δακτυλιοειδή ροή, η κίνηση των σταγονιδίων στον πυρήνα του αερίου πραγματοποιείται είτε μέσω διάχυσης, όταν το μέγεθος του σταγονιδίου είναι μικρό, είτε μέσω εσωτερικών επιδράσεων όταν τα σταγονίδια είναι μεγάλα. Αυτοί οι δύο μηχανισμοί πρέπει να θεωρηθούν όταν επιθυμείται η πρόβλεψη ρυθμών εναπόθεσης. Επιπλέον, εφόσον οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σταγονιδίων επηρεάζουν την κίνησή τους, ένα μοντέλο εναπόθεσης θα πρέπει να τις λαμβάνει υπόψη του. Έπειτα από διερεύνηση των διαθέσιμων μοντέλων εναπόθεσης, η επίδραση της συνένωσης στην κίνηση των σταγονιδίων αναλύθηκε θεωρητικά. Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι η συνένωση επεκτείνει το χρόνο παραμονής στον πυρήνα του αερίου και έτσι μειώνεται ο συντελεστής εναπόθεσης. Στην βάση των αποτελεσμάτων αυτών, προτάθηκε ένα μοντέλο εναπόθεσης που λαμβάνει υπόψη και τους δύο μηχανισμούς εναπόθεσης και συμπεριλαμβάνει την επίδραση της συνένωσης, το οποίο στη συνέχεια συγκρίθηκε με τα υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα.

Οι Marchioli et al. (2003) μελέτησαν τη μεταφορά και την εναπόθεση σωματιδίων σε τυρβώδη ροή κατακόρυφου σωλήνα. Χρησιμοποίησαν επίσης DNS και μέθοδο Langrange για να μελετήσουν την τυρβώδη μεταφορά και εναπόθεση σωματιδίων σε κατακόρυφο κυκλικό αγωγό. Το αντικείμενο της μελέτης τους είναι η ποσοτικοποίηση της τυρβώδους μεταφοράς βαρέων σωματιδίων κοντά και μακριά από το τοίχωμα και η εξέταση των μηχανισμών μεταφοράς των σωματιδίων σε σχέση με τη δομή της τύρβης στο οριακό στρώμα. Οι δυνάμεις οπισθέλκουσας, ανύψωσης και βαρύτητας χρησιμοποιήθηκαν στην εξίσωση κίνησης για τα σωματίδια, για τα οποία έγινε η παραδοχή ότι δεν έχουν καμία επίδραση πάνω στη ροή της συνεχούς φάσης. Τα σωματίδια συγκρούονται με το τοίχωμα πλήρως ελαστικά. Τα αποτελέσματά τους επιβεβαιώνουν : (α) τη συγκεκριμένη τάση των σωματιδίων να συγκεντρώνονται στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα, (β) τον κρίσιμο ρόλο των στιγμιαίων μεταβολών των τάσεων Reynolds στον προσδιορισμό της ροής των

σωματιδίων προς και μακριά από το τοίχωμα και (γ) τη σπουδαιότητα των μηχανισμών εναπόθεσης της ελεύθερης πτώσης και της διάχυσης.

Οι Mito & Hanratty (2006) στη μελέτη τους ασχολήθηκαν με την επίδραση της σύζευξης ορμής και τις συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων σε ιδανική δακτυλιοειδή ροή υγρού-αερίου. Θεώρησαν ιδανική ροή υγρού-αερίου σε κατακόρυφο δακτυλιοειδή αγωγό. Η μείωση του συντελεστή εναπόθεσης με την αύξηση του κλάσματος όγκου, που παρατηρήθηκε κατά τις εργαστηριακές μελέτες, εξετάστηκε χρησιμοποιώντας προσομοίωση DNS, η οποία ωστόσο δεν επιλύει πλήρως κλίμακες του μεγέθους των σωματιδίων. Η επίδραση των σωματιδίων στη τύρβη του ρευστού μοντελοποιήθηκε απλά εισάγοντας σημειακές δυνάμεις κατά τόπους για τις θέσεις των σωματιδίων. Επίσης λήφθηκαν υπόψη και οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων. Παρατηρήθηκε σημαντική μείωση της τύρβης του ρευστού σε μικρές συγκεντρώσεις σωματιδίων που οφείλεται στη σύζευξη των δύο φάσεων. Οι διατμητικές τάσεις Reynolds διαπιστώθηκε ότι μειώνονται με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων και επαληθεύτηκε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η εναπόθεσης των σωματιδίων μειώνεται. Αυτό οδηγεί στη μείωση της παραγωγής τύρβης του ρευστού και συνεπώς στη μείωση της τύρβης των σωματιδίων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η τύρβη των σωματιδίων αυξάνεται εξαιτίας των ελαστικών συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων και μπορεί να αποσβεστεί μέσω των ανελαστικών συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων. Αντίθετα, η εναπόθεση σωματιδίων αυξάνεται όταν οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων λαμβάνονται υπόψη για μεγάλα κλάσματα όγκου των σωματιδίων.

Οι Andreussi & Azzopardi (1983) στη μελέτη τους παρουσίασαν μια μαθηματική περιγραφή της μεταφοράς και εναπόθεσης σταγονιδίων σε δακτυλιοειδή διφασική ροή. Η περιγραφή αυτή καθιστά δυνατή την ανάλυση και της εναπόθεσης των σταγονιδίων προς μια κατεύθυνση (unidirectional deposition) και των πειραμάτων που αφορούν στις αλληλεπιδράσεις των. Η προσέγγιση αυτή βοηθά την περιγραφή της εναπόθεσης και μέσω του μηχανισμού διάχυσης, που συμβατικά χρησιμοποιείται, καθώς και με τη χρήση του μηχανισμού της άμεσης πρόσκρουσης (direct impaction mechanism), ο οποίος έχει πρόσφατα προσδιοριστεί. Έτσι, έχει εξαχθεί ένα κριτήριο ως προς τη διάκριση των δύο μηχανισμών εναπόθεσης, που βασίζεται στην ισορροπία μεταξύ της αρχικής ορμής των σταγόνων και της δύναμης

οπισθέλκουσας μιας τυρβώδους δίνης. Το κριτήριο μετάβασης έχει επαληθεύτηκε χρησιμοποιώντας και πειραματικά δεδομένα που έχουν εξαχθεί από πειράματα πάνω στην εναπόθεση σωματιδίων προς μια κατεύθυνση.

Οι Wang & Squires (1996) μελέτησαν αριθμητικά την εναπόθεση σωματιδίων σε κατακόρυφη τυρβώδη ροή σε αγωγό (Channel flow). Η εναπόθεση των σωματιδίων σε πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας LES για την επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes. Στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν αριθμοί Reynolds 11160 και 79400, βασισμένοι στην bulk ταχύτητα και την υδραυλική διάμετρο. Οι τάσεις παραμετροποιήθηκαν χρησιμοποιώντας το δυναμικό “μοντέλο ιξωδών δινών”(eddy viscosity model). Η κίνηση των σωματιδίων οφειλόταν στη δύναμη οπισθέλκουσας και τη δύναμη ανύψωσης. Τα αποτελέσματα της LES, τα οποία βρισκόταν σε πλήρη συμφωνία με προηγούμενες μελέτες, έδειξαν ότι τα σωματίδια συγκεντρώνονταν στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα. Τα στατιστικά αποτελέσματα των υπολογισμών της LES για το ρυθμό εναπόθεσης των σωματιδίων έδειξαν ότι συμφωνούσαν απόλυτα με τα αποτελέσματα της DNS του McLaughlin (1989). Ειδικά για τα σωματίδια με ίδιους relaxation times σε μονάδες τοίχου, οι ρυθμοί εναπόθεσης και για τους δύο αριθμούς Reynolds ήταν σχεδόν ταυτόσημοι.

Οι Kallio & Reeks (1988) πραγματοποίησαν μια αριθμητική προσομοίωση της εναπόθεσης σωματιδίων σε τυρβώδη οριακά στρώματα. Για τη μοντελοποίηση της εναπόθεσης σωματιδίων σε τυρβώδεις αγωγούς χρησιμοποιήθηκε μια προσέγγιση Langrange. Η ανομοιογενής τύρβη του οριακού στρώματος προσομοιώθηκε μέσω ενός διακριτού πεδίου (discrete eddy field), το οποίο χαρακτηριζόταν από μια τυχαία κάθετη ταχύτητα (μέσω της κατανομής πιθανοτήτων του Gauss) και μια τυχαία χρονική κλίμακα (μέσω μιας εκθετικής κατανομής πιθανοτήτων). Η τυρβώδης ταχύτητα r.m.s. και τα προφίλ της χρονικής κλίμακας ελήφθησαν από πειραματικά δεδομένα. Οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων περιλαμβάνουν τη δύναμη οπισθέλκουσας και τη δύναμη Saffman. Οι εξισώσεις επιλύθηκαν αριθμητικά για χρόνους απόκρισης των σωματιδίων που κυμαίνονταν από 0.3 έως 1000 και για λόγους πυκνοτήτων σωματιδίων – ρευστού από 500 έως 5000. Προσεγγιστικά, υπολογίζονταν για κάθε περίπτωση 500 με 10000 τροχιές σωματιδίων, προσομοιώνοντας την εναπόθεση των σωματιδίων σε ροή σε σωλήνα με κολλώδες



τοιχώμα. Οι προβλέψεις της ταχύτητας εναπόθεσης σε σύγκριση με τις μετρήσεις έδειξαν ότι η εσωτερική imbraction κυριαρχεί σε χαμηλότερες τιμές. Μια προβλεπόμενη μείωση στην ταχύτητα εναπόθεσης προέκυψε για μεγάλα σωματίδια ( $\tau^+ > 30$ ) λόγω της μείωσης της διακύμανσης της ταχύτητας. Η δύναμη ανύψωσης λόγω της διάτμησης αύξανε το ρυθμό εναπόθεσης, περισσότερο στην περίπτωση που  $1 < \tau^+ < 10$ . Τα προφίλ της συγκέντρωσης των σωματιδίων έδειξαν αποκάλυψαν ότι μικρότερα σωματίδια ( $\tau^+ < 10$ ) έτειναν να συγκεντρώνονται στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα λόγω της ξαφνικής μείωσης της τύρβης του ρευστού.

Οι Mito & Hanratty (2004) εστίασαν τη μελέτη τους στο προφίλ συγκέντρωσης σωματιδίων σε τυρβώδη suspension όταν η βαρύτητα δεν επηρεάζει την εναπόθεση. Στην περίπτωση αυτή γίνεται μια ιδανική απεικόνιση της διασκορπισμένης ροής σε ένα πλήρως ανεπτυγμένο δακτυλιοειδές πρότυπο, θεωρώντας την περίπτωση των συνθηκών μηδενικής βαρύτητας. Τα τοιχώματα ενός διαστάτου αγωγού αναπαρίστανται ως πίνακες απειροελάχιστων πηγών σωματιδίων. Η συμπεριφορά μιας απλής πηγής περιγράφεται μοντελοποιώντας την τύρβη του ρευστού, παρατηρώντας την κίνηση των σωματιδίων με μια τροποποιημένη εξίσωση Langevin. Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς πάνω σε μια ευρεία κλίμακα αδιάστατων χρονικών σταθερών (constants) ακολουθεί η διαδικασία εναπόθεσης. Ανάλογα με το χρόνο απόκρισης, υπάρχει Brownian διάχυση, στη συνέχεια τυρβώδης διάχυση και τέλος ελεύθερη πτήση με μη τυρβώδεις τροχιές προς μια κατεύθυνση. Ο υπολογισμός των τοπικών κύριων επιταχύνσεων των σωματιδίων επέτρεψε μια πρώτη εκτίμηση της ταχύτητας.

Οι Ahmadi & Chen (1998) έλαβαν υπόψη στις προσομοιώσεις τους την επίδραση της ανυψωτικής δύναμης, και μελέτησαν την διασπορά και την εναπόθεση των σωματιδίων σε τυρβώδη ροή σε σωλήνα με διεύρυνση.

Όσον αφορά τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων και τις αλλαγές της τύρβης του ρευστού, αναφέρονται ενδεικτικά δύο μελέτες: των Pan & Banerjee καθώς και των Tanaka et al.

Οι Pan & Banerjee (1996) πραγματοποίησαν αριθμητική προσομοίωση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων με την τύρβη του τοιχώματος. Η μελέτη

αυτή παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας αριθμητικής διερεύνησης των επιδράσεων στερεών σωματιδίων με παραπλήσια πυκνότητα προς το ρευστό σε έναν οριζόντιο ευθύγραμμο αγωγό. Τα σωματίδια που χρησιμοποιήθηκαν είχαν μικρά κλάσματα όγκου στη ροή (μέσο κλάσμα όγκου μικρότερο από  $4 \times 10^{-4}$ ). Η μελέτη του προβλήματος έγινε με απευθείας επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes μέσω μιας ψευδο-φασματικής μεθόδου και επιλύοντας όλες τις σημαντικές κλίμακες της κίνησης. Τα σωματίδια κινούνται σε ένα σχήμα κατά Langrange υπό τη δύναμη της οπισθέλκουσας. Η επίδραση των σωματιδίων στην κίνηση του ρευστού λαμβάνεται υπόψη σε κάθε χρονικό βήμα, με βάση ένα μοντέλο ταχύτητας όπου η ροή γύρω από τα σωματίδια είναι κατά τύπους ροή Stokes. Οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σωματίδια δεν εξετάζονται.

Οι Tanaka et al. (2002) ασχολήθηκαν με τις αλλαγές της τύρβης ομογενούς ροής με μικρά βαριά σωματίδια. Σκοπός των αριθμητικών προσομοιώσεων ήταν να διερευνηθούν οι αλλαγές των δομών της τύρβης σε διατμητικές ροές λόγω των σωματιδίων. Οι επιδράσεις πάνω στις αλλαγές της τύρβης της καθόδου των σωματιδίων λόγω της βαρύτητας κατά τη διεύθυνση της διάτμισης, εξετάζονται για τα σωματίδια των οποίων οι χρόνοι απόκρισης είναι συγκρίσιμοι με τη χρονική κλίμακα τύρβης του Kolmogorov. Βρέθηκε ότι ο ρυθμός αύξησης της ενέργειας της τύρβης του μεταφέροντος υγρού, ο οποίος μειώνεται λόγω της παρουσίας των σωματιδίων σε μηδενική βαρύτητα, αυξάνεται από την επίδραση της ασθενούς βαρύτητας μέσω της ενίσχυσης της διατμητικής τάσης Reynolds. Αντιθέτως, στην περίπτωση της επίδρασης ισχυρής βαρύτητας μέσω της αύξησης της βαρυτικής καθίζησης μειώνεται.

Επίσης, παρατίθενται και δύο μελέτες που ασχολήθηκαν με τις συγκρούσεις των σωματιδίων, παρόλο που δεν λαμβάνονται υπόψη σε αυτή τη Διπλωματική εργασία.

Οι Founti & Klipfel (1997), ερεύνησαν πειραματικά και υπολογιστικά τις επιδράσεις των συγκρούσεων των σωματιδίων στα χαρακτηριστικά της κίνησης των σωματιδίων σε μια κατακόρυφη ροή προς τα κάτω με απότομη διεύρυνση. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό την τροποποίηση της τύρβης. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι η τυρβώδης κινητική

ενέργεια των σωματιδίων μειώνεται σε περιοχές διάτμησης, όπου η τυρβώδης κινητική ενέργεια της συνεχούς φάσης παρουσιάζει μέγιστο.

Οι Sommerfeld & Huber (1999) παρουσίασαν στη μελέτη τους μια λεπτομερή πειραματική ανάλυση της διαδικασίας των συγκρούσεων μεταξύ σωματιδίων και τοιχώματος σε οριζόντιο αγωγό χρησιμοποιώντας ταχυμετρία εντοπισμού σωματιδίων. Τα σωματίδια που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη αυτή ήταν γυάλινα σφαιρίδια διαμέτρων 100 και 500  $\mu\text{m}$  και σωματίδια χαλαζία μεγέθους περίπου 100  $\mu\text{m}$ . Επιπρόσθετα αναλύθηκε η επίδραση του υλικού του τοιχώματος στη διαδικασία των συγκρούσεων. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην επίδραση της τραχύτητας των τοιχωμάτων και συνεπώς χρησιμοποιήθηκαν ως υλικά ακατέργαστος ανοξείδωτος χάλυβας, στιλβωμένος ανοξείδωτος χάλυβας, πλεξιγκλάς και καουτσούκ. Βρέθηκε ότι η τραχύτητα των τοιχωμάτων μεταβάλλει αισθητά τη συμπεριφορά αναπήδησης των σωματιδίων και προκαλεί κατά μέσο όρο μια επαναδιασπορά των σωματιδίων, παρόλο που η gravitational settling μειώνεται. Παρόμοια επιρροή παρατηρήθηκε και στα μη σφαιρικά σωματίδια χαλαζία σε τοίχωμα στιλβωμένου ανοξείδωτου χάλυβα. Τα πειραματικά αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν για να βελτιώσουν και να ισχυροποιήσουν ένα μοντέλο συγκρούσεων τοιχώματος έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της προσέγγισης Langrange. Στο μοντέλο αυτό η σκληρότητα του τοιχώματος προσομοιώνεται υποθέτοντας ότι η γωνία πρόσκρουσης συντίθεται από τη γωνία της τροχιάς σε σχέση με το επίπεδο τοίχωμα και μια στοχαστική συνιστώσα που προκύπτει από τη σκληρότητα του τοιχώματος. Για τη γωνία κατανομής σκληρότητας θεωρήθηκε μια διαδικασία τροποποιημένης κανονικής κατανομής. Όλες οι παράμετροι για το μοντέλο συγκρούσεων τοιχώματος, όπως ο συντελεστής απόδοσης και ο συντελεστής τριβής ως συναρτήσεις της γωνίας πρόσκρουσης ελήφθησαν από τα πειράματα. Οι προσομοιώσεις έδειξαν καλή συμφωνία με τις μετρήσεις των ιδιοτήτων της αναπήδησης των σωματιδίων.

Όσον αφορά το υπολογιστικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη Διπλωματική εργασία, ακολουθεί τη μέθοδο της μελέτης των Orlandi & Fatica (1997), που ασχολήθηκαν με τη ροή σε κυκλικό αγωγό που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Στην προσομοίωση DNS χρησιμοποιήθηκε σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ακρίβειας δεύτερης τάξης στο χώρο και το χρόνο. Ένα ανομοιόμορφο πλέγμα κατά την ακτινική διεύθυνση αποδίδει

ακριβείς λύσεις για ένα λογικό αριθμό σημείων. Η αριθμητική μέθοδος έχει δοκιμαστεί για μη περιστρεφόμενο σωλήνα στο όριο  $v \rightarrow 0$  ώστε να αποδειχθούν οι ιδιότητες διατήρησης της ενέργειας. Στην περίπτωση του ιξώδους έχει πραγματοποιηθεί έλεγχος τελειοποίησης των σημείων και έχουν φτάσει σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη μείωση της αντίστασης. Οι τυρβώδεις ποσότητες έχουν συγκριθεί με τις μη-τυρβώδεις χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά και πειραματικά στοιχεία για μη περιστρεφόμενο αγωγό του Eggels (1994a,b). Όταν ο αγωγός περιστρέφεται, επιτυγχάνεται ένας βαθμός μείωσης της αντίστασης στις αριθμητικές προσομοιώσεις, ακριβώς όπως και στα πειράματα. Μέσω της οπτικοποίησης του πεδίου της στροβιλώδους ροής, η μείωση της αντίστασης έχει συσχετιστεί με την τροποποίηση των στροβιλωδών ροών κοντά στο τοίχωμα. Μια σύγκριση της στροβιλώδους ροής στις περιπτώσεις μη περιστροφής και υψηλής περιστροφής έδειξε μια σπειροειδή κίνηση που οδηγεί στη μεταφορά της στροβιλώδους ροής με τη φορά της ροής μακριά από το τοίχωμα.

Γενικά, κατά τη μελέτη της διφασικής ροής ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στα φαινόμενα που πρέπει να κατανοηθούν ώστε να παραχθούν φυσικές περιγραφές της ροής. Τα φαινόμενα αυτά είναι η δημιουργία των κυμάτων, η συμπεριφορά των σταγόνων και των φυσαλίδων σε τυρβώδη ροή καθώς και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διάφορων επιφανειών, όπως ο σχηματισμός και η διάσπαση σταγόνων και φυσαλίδων.

Οι μηχανισμοί μετάβασης από ένα τύπο ροής σε ένα άλλο σε οριζόντιο σωλήνα μελετήθηκαν κυρίως από τους Andritso & Williams (1987, 1989). Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον των Lin (1987) και Soleimani (2003) εστιάστηκε στον προσδιορισμό μιας ψευδο- slug διάταξης καθώς και στην ανάπτυξη τεχνικών για τη διαφοροποίηση των slugs από τα ψευδο- slugs. Στη συνέχεια, οι Al-Sarkhi (2001, 2002), Baik (2003) και Soleimani (2002) απέδειξαν ότι η προσθήκη πολύ μικρών ποσοτήτων πολυμερών που μειώνουν την αντίσταση μπορούν ποιοτικά να αλλάξουν το πρότυπο της ροής μετριάζοντας τα κύματα και επίσης μετριάζοντας την τύρβη.

### 3. ΦΥΣΙΚΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 3.1 Εισαγωγή

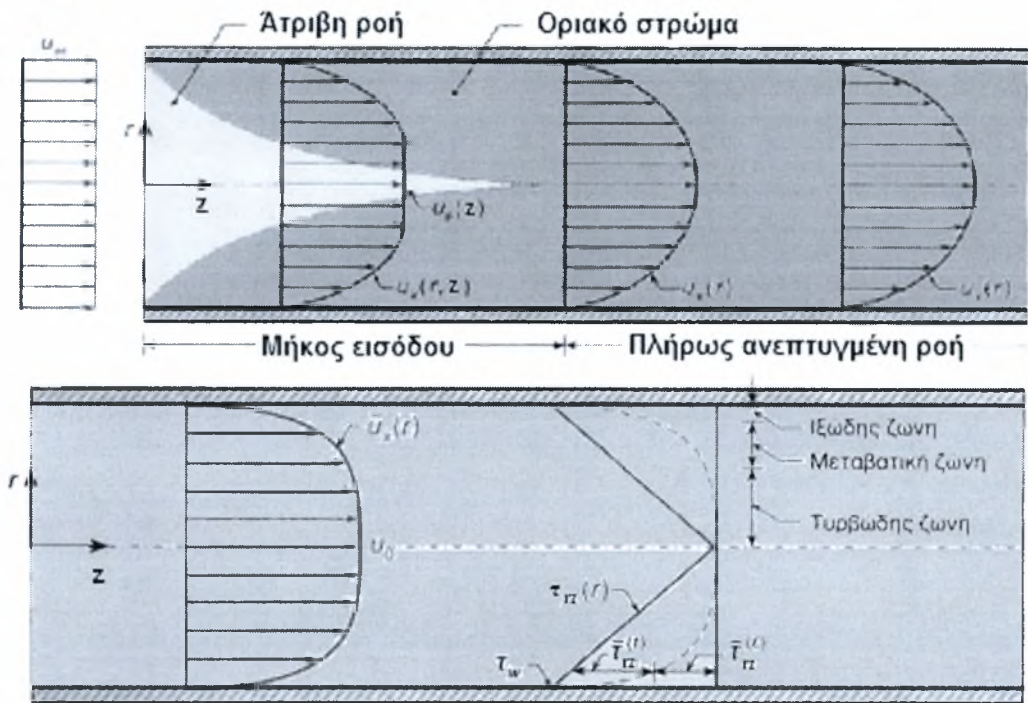
Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η τυρβώδης διφασική ροή αέρα και σφαιρικών σταγονιδίων νερού διαμέτρου  $d$  μέσα σε έναν κατακόρυφο σωλήνα μήκους  $L$  και διαμέτρου  $D$ . Το πρόβλημα αυτό αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση και απλοποίηση της γενικότερης διφασικής ροής αέρα και δακτυλιοειδούς στρώματος νερού κοντά στο τοίχωμα του ρευστού. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ένας μέρος του νερού ρέει κοντά στο τοίχωμα, και ένα άλλο μέρος γίνεται σταγονίδια που μεταφέρεται από την ροή του αέρα. Το ενδιαφέρον στην παρούσα εργασία εστιάζεται στην εναπόθεση των σταγονιδίων πάνω στο τοίχωμα του σωλήνα και δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη το στρώμα νερού στο τοίχωμα.

Πειραματικές μετρήσεις έχουν δείξει ότι με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων σωματιδίων στη ροή ο ρυθμός εναπόθεσης αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με το κλάσμα όγκου σωματιδίων. Παρόλα αυτά, περαιτέρω αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων δεν συνοδεύεται από αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού εναπόθεσης, ο οποίος προσεγγίζει μια σταθερή τιμή. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της επίδρασης των σταγονιδίων στη ροή του αέρα στο σωλήνα, και συγκεκριμένα η μελέτη της επίδρασης της σύζευξης των δύο φάσεων στο φαινόμενο της εναπόθεσης των σταγονιδίων στα εσωτερικά τοιχώματα του αγωγού. Η μελέτη των σταγονιδίων έγινε με τη χρήση Άμεσης Αριθμητικής Προσομοίωσης (Direct Numerical Simulation-DNS) και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Langrange, έτσι ώστε να γίνει η «παρακολούθηση» των τροχιών των σωματιδίων. Παράλληλα, εφαρμόστηκε η προσέγγιση της σημειακής δύναμης ώστε να επιτευχθεί η εξέταση της επίδρασης των σταγονιδίων στη ροή.

Στο *Σχήμα 3.1* παρουσιάζεται η διαμόρφωση της ροής κατά την είσοδο του ρευστού σε έναν σωλήνα κυκλικής διατομής. Το ρευστό εισέρχεται στον αγωγό με ομοιόμορφη ταχύτητα,  $u_\infty$ . Το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται με το μήκος του αγωγού καθώς αναπτύσσεται η ροή μέχρι το σημείο όπου συναντά τον άξονα του σωλήνα. Από το σημείο εκείνο και έπειτα, η ροή παύει να μεταβάλλεται ως προς τη διαμόρφωσή της. Για το λόγο αυτό θεωρείται πλέον πλήρως αναπτυγμένη. Το μήκος



του αγωγού το οποίο απαιτείται για την πλήρη ανάπτυξη της ροής ονομάζεται μήκος εισόδου.



Σχήμα 3.1: α) Διαμόρφωση της ροής στην είσοδο κυκλικού αγωγού

β) Κατανομές της ταχύτητας και των διατμητικών τάσεων στην περίπτωση τυρβώδους ροής σε αγωγό κυκλικής διατομής (Πηγή Α.Θ. Παπαϊωάννου)

Η έννοια του οριακού στρώματος αναπτύχθηκε από τον Prandtl το 1904 και αποτελεί συνδετικό κρίκο μεταξύ της ιδανικής και της πραγματικής ροής. Για ρευστά με σχετικά χαμηλό ιξώδες η επίδραση της εσωτερικής τριβής του ρευστού είναι σημαντική μόνο σ' ένα στενό στρώμα που περιβάλλει τα φυσικά σύνορα του ρευστού. Με αυτή την παραδοχή η ροή πέρα από αυτό το στρώμα, που βρίσκεται κοντά στα στερεά τοιχώματα, μπορεί να θεωρηθεί ως ιδανική ή δυναμική ροή.

Η κατανομή της ταχύτητας στην περιοχή του μήκους εισόδου αποτελείται κυρίως από δύο διαφορετικά τμήματα. Τα τμήματα αυτά μπορούν να διακριθούν σε: α) τμήματα όπου η ταχύτητα παραμένει ομοιόμορφη κεντρικά του αγωγού και

β) τμήματα όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται (εντός των οριακών στρωμάτων). Κατά την ασυμπιεστή ροή, η ομοιόμορφη ταχύτητα  $u_e$  πρέπει να αυξάνεται έτσι ώστε να

ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Αντίθετα, η μέση ταχύτητα θα πρέπει να παραμένει σταθερή και ίση με την ομοιόμορφη ταχύτητα εισόδου του ρευστού στον αγωγό, δηλαδή:

$$\bar{u}_z = \frac{1}{A} \iint_A u_z dA = u_\infty = \text{σταθερό} \quad (3.5)$$

Στην περιοχή της πλήρους αναπτυγμένης ροής, η αξονική ταχύτητα  $u_z$  του ρευστού είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής θέσης  $r$ . Η μορφή της πραγματικής κατανομής  $u_z(r)$  της ταχύτητας εξαρτάται αποκλειστικά από το είδος της ροής. Στο *Σχήμα 3.1(α)* απεικονίζεται η κατανομή της ταχύτητας. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι είναι παραβολική και έτσι αντιστοιχεί σε στρωτή ροή. Η μετάβαση από τη στρωτή ροή στην τυρβώδη, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 3.1(β)*, είναι δυνατόν να συμβεί είτε στην περιοχή του μήκους εισόδου, είτε στην περιοχή της πλήρους αναπτυγμένης ροής ή και να μην υπάρξει καθόλου τυρβώδης ροή.

Διευκρινιστικά, χρήσιμο είναι να παρατεθεί η διάκριση μεταξύ της τυρβώδους και της στρωτής ροής, καθώς και το όριο στο οποίο συμβαίνει η μετάβαση από στρωτή ροή σε τυρβώδη. Στρωτή ονομάζεται η ροή στην οποία το ρευστό κινείται κατά στρώματα ή στοιβάδες και το ένα στρώμα γλιστρά ομαλά πάνω στο προσκείμενο στρώμα με μόνο μοριακή εναλλαγή ορμής. Οι τυχόν τάσεις για αστάθεια ή στροβιλισμό εξουδετερώνονται από τις διατμητικές δυνάμεις του ιξώδους, οι οποίες προκαλούν αντίσταση στη σχετική κίνηση των προσκείμενων στρωμάτων του ρευστού. Στην τυρβώδη ροή όμως, η κίνηση των σωματιδίων είναι πολύ ακατάστατη με βίαια εγκάρσια εναλλαγή ορμής.

Η βασική παράμετρος που χαρακτηρίζει το είδος της ροής σε έναν αγωγό κυκλικής διατομής είναι ο αδιάστατος αριθμός Reynolds, ο οποίος ορίζεται από την σχέση:

$$\text{Re} = \frac{ud}{\nu} \quad (3.6)$$

όπου  $d$  η εσωτερική διάμετρος του αγωγού,  $u$  η μέση ταχύτητα και  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες.

Η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται όταν ο αριθμός Reynolds υπερβεί την κρίσιμη τιμή  $Re_c$ . Η τιμή αυτή εξαρτάται από τη γεωμετρία του αγωγού και έχει εύρος τιμών για κυκλικούς αγωγούς από 2000 έως 3000. Στην περίπτωση που εξετάζεται λαμβάνεται τιμή ίση με 2000.

Για στρωτή ροή, το μήκος εισόδου  $\ell_e$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\ell_e}{d} = 0.0575 Re \quad (3.7)$$

Το μέγιστο μήκος εισόδου στρωτής ροής αντιστοιχεί στον κρίσιμο αριθμό Reynolds ( $Re_c$ ) και είναι ίσο με  $115d$ .

Στην τυρβώδη ροή, το μήκος εισόδου, υπολογίζεται από την προσεγγιστική σχέση:

$$\frac{\ell_e}{d} = 4.4 Re^{1/6} \quad (3.8)$$

Αν το μήκος του αγωγού είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το μήκος εισόδου, η επίδραση της εισόδου στη διαμόρφωση της ροής μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, οπότε η ροή αναλύεται σαν πλήρως ανεπτυγμένη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το κριτήριο μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή δεν είναι απόλυτα προσδιορισμένο. Ωστόσο, για σχεδιαστικούς σκοπούς, η μετάβαση μπορεί να ληφθεί ίδια με αυτή της μονοφασικής ροής. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να θεωρηθεί στρωτή ροή για αριθμούς Reynolds  $N_{Re} \leq 2000$  και τυρβώδης ροή για  $N_{Re} > 2000$ , όπου ο αριθμός  $N_{Re}$  βασίζεται στην επιφανειακή ταχύτητα.

### 3.2 Εξισώσεις Συνεχούς Φάσης

Η ροή της συνεχούς φάσης σε αγωγό κυκλικής διατομής για ασυμπίεστο ρευστό, σταθερού ιξώδους περιγράφεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας της μάζας καθώς και τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής (Navier-Stokes) σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξής:



• Εξίσωση Συνέχειας της Μάζας

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z) = 0 \quad (3.1)$$

• Εξισώσεις Navier - Stokes

r – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \\ + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] &+ f_{pr} \end{aligned} \quad (3.2)$$

θ – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \\ + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] &+ f_{p\theta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

z – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] &+ f_{pz} \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου  $u_r$ ,  $u_\theta$  και  $u_z$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  διευθύνσεις αντίστοιχα,  $p$  είναι η πίεση,  $\mu$  το δυναμικό ιξώδες,  $\rho$  η πυκνότητα της συνεχούς φάσης,  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $f_{p\theta}$ ,  $f_{pr}$  και  $f_{pz}$  συνιστώσες της δύναμης σύζευξης που ασκείται από τα σταγονίδια στον αέρα στις διευθύνσεις  $\theta$ ,  $r$  και  $z$  αντίστοιχα.

## 3.3 Διακριτή Φάση

### 3.3.1 Εισαγωγή

Η διακριτή φάση αφορά τα σωματίδια (σταγονίδια νερού) που υπάρχουν στη διφασική ροή που εξετάζεται. Πάνω στα σωματίδια ασκούνται δυνάμεις, οι οποίες επιδρούν πάνω στην κίνηση των σωματιδίων και ουσιαστικά καθορίζουν τη συμπεριφορά τους στη ροή. Οι δυνάμεις αυτές περιγράφονται στις ακόλουθες παραγράφους.

### 3.3.2 Δύναμη Οπισθέλκουσας

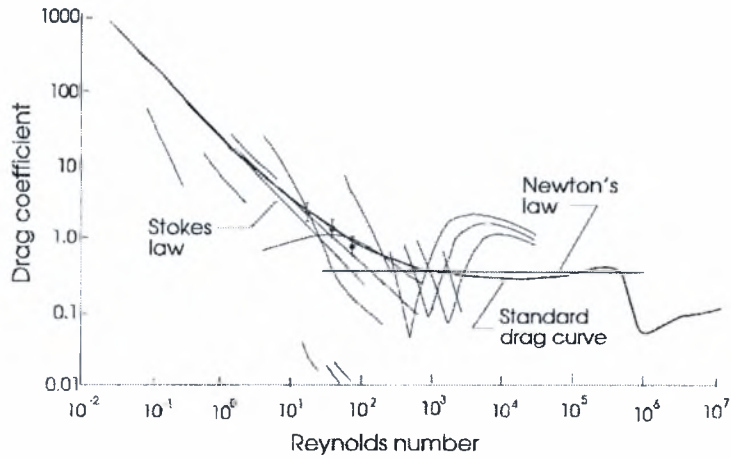
Η αντίσταση σε μόνιμες συνθήκες αποτελεί τη δύναμη οπισθέλκουσας, η οποία δρα πάνω στο σωματίδιο σε ένα ενιαίο πεδίο τάσεων, όπου δεν μεταβάλλεται η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο ρευστό και το σωματίδιο. Προσδιορίζεται ποσοτικά από τον συντελεστή οπισθέλκουσας μέσω της εξίσωσης:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_f C_D A |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

όπου  $\rho_f$  η πυκνότητα της συνεχούς φάσης,  $C_D$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας,  $A$  η μετωπική επιφάνεια του σωματιδίου και  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  οι ταχύτητες της συνεχούς φάσης και του σωματιδίου, αντίστοιχα. Τυπικά, η μετωπική επιφάνεια είναι η προβαλλόμενη επιφάνεια του σωματιδίου κατά τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας.

Γενικά, ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξαρτάται από το σχήμα του σωματιδίου και τον προσανατολισμό του σε σχέση με την ροή, καθώς επίσης και από τις παραμέτρους της ροής (π.χ. από τον αριθμό Reynolds, τον αριθμό Mach, το επίπεδο τύρβης κ.α.).

Η μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας  $C_D$  με τον αριθμό Reynolds για μη περιστρεφόμενες σφαίρες φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Για χαμηλές τιμές Reynolds ισχύει ο νόμος του Stokes και ο συντελεστής οπισθέλκουσας είναι αντίστροφα ανάλογος του αριθμού Reynolds. Με την αύξηση του Reynolds, ο συντελεστής οπισθέλκουσας πλησιάζει σχεδόν την σταθερή τιμή  $C_D = 0.445$ .



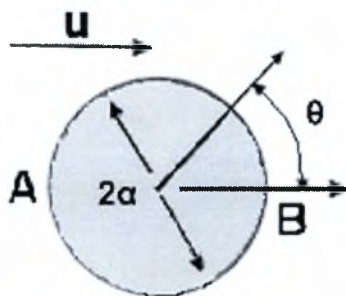
**Σχήμα 3.2:** Εξάρτηση του συντελεστή οπισθέλκουσας σφαίρας από τον αριθμό Reynolds ( Πηγή C. Crowe)

Περαιτέρω αύξηση του αριθμού Reynolds οδηγεί στη δημιουργία κρίσιμης ροής και παρατηρείται απότομη μείωση του συντελεστή  $C_D$ . Στον κρίσιμο αριθμό Reynolds ( $Re_c \approx 3 \times 10^5$ ) το οριακό στρώμα γίνεται τυρβώδες και το σημείο διαχωρισμού μετακινείται, ελαττώνοντας απότομα την τιμή της δύναμης οπισθέλκουσας και μειώνοντας τον συντελεστή της. Το φαινόμενο αυτό, οφείλεται εξολοκλήρου στις επιδράσεις του οριακού στρώματος. Αν η επιφάνεια του σωματιδίου είναι τραχεία, η μετάβαση στην τύρβη συμβαίνει σε χαμηλότερες τιμές Reynolds.

Η ροή Stokes, που παρατηρείται για  $Re < 1$ , θεωρείται ως έρπουσα στην οποία οι αδρανειακοί όροι των εξισώσεων Navier-Stokes δεν είναι σημαντικοί. Έτσι η εξίσωση που ισχύει είναι:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.10)$$

Σημειώνεται ότι η εφαρμογή αυτής της εξίσωσης για ροή γύρω από σφαίρα έγινε αρχικά από τον C.G. Stokes το 1851 σε σφαιρικές συντεταγμένες, Σχήμα 3.3.



**Σχήμα 3.3:** Σύστημα συντεταγμένων για ροή Stokes γύρω από σφαίρα

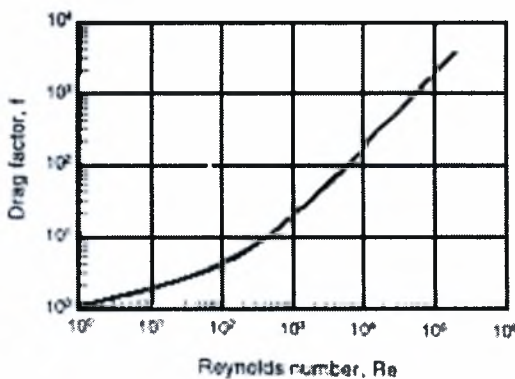
Η εξίσωση της κίνησης για ένα σωματίδιο ή σταγονίδιο με την χρήση του συντελεστή οπισθέλκουσας εκφράζεται ως:

$$m \frac{dv}{dt} = 3\pi\mu Df(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + mg \tag{3.11}$$

όπου το  $g$ : η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $f$ : ο παράγοντας της οπισθέλκουσας ή ο λόγος του συντελεστή οπισθέλκουσας στον Stokes.

$$f = \frac{C_D Re}{24} \tag{3.12}$$

Για ροή Stokes, ο παράγων της οπισθέλκουσας  $f \rightarrow 1$ . Η μεταβολή του  $f$  με τον αριθμό Reynolds φαίνεται στο Σχήμα 3.4:



**Σχήμα 3.4:** Μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας με τον αριθμό Reynolds (Πηγή C. Crowe)

**Πίνακας 3.1** :Συγκεντρωτικές τιμές συντελεστή οπισθέλκουσας

Τιμή $Re$	Νόμος	Τιμή $C_D$
$Re_p < 1$	Stokes	$C_D = 24 Re_p^{-1}$
$1 < Re_p < 10^3$	Van Allen	$C_D = 24 Re_p^{-1} (1 + 0.15 Re_p^{0.687})$
$10^3 < Re_p$	Newton	$C_D = 0.44$

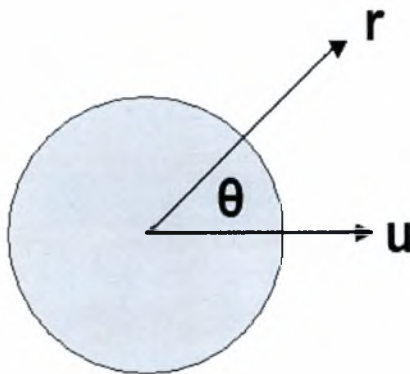
### 3.3.3 Δύναμη Φαινόμενης Μάζας

Οι δυνάμεις που οφείλονται στην επιτάχυνση εξαιτίας της σχετικής ταχύτητας σωματιδίου-ρευστού μπορούν να διαιρεθούν σε δύο μέρη: στη δύναμη της εικονικής ή φαινόμενης μάζας και την δύναμη Basset. Όταν ένα σωματίδιο επιταχύνεται μέσα σε ένα ρευστό παρατηρείται μια επιτάχυνση απόκρισης του ρευστού, η οποία οφείλεται στην κατανάλωση του έργου που παράγεται από το σωματίδιο. Αυτό το επιπρόσθετο έργο σχετίζεται με την πραγματική επίδραση μάζας.

Έστω μια σφαίρα σε ένα ρευστό, όπως αυτή στο Σχήμα 3.5. Τότε η ολική κινητική ενέργεια του ρευστού που περιβάλλει την σφαίρα ισούται με:

$$KE = \frac{1}{2} \rho \int u^2 dV \tag{3.13}$$

όπου το ολοκλήρωμα λαμβάνεται για όλη την ροή.



**Σχήμα 3.5:** Σύστημα συντεταγμένων μιας επιταχυνόμενης σφαίρας σε ένα ρευστό

Γίνεται η παραδοχή ότι το ρευστό είναι ιδανικό, δηλαδή δεν έχει ιξώδες και είναι ασυμπιεστο. Επομένως η ταχύτητά του μπορεί να εκφραστεί ως η παράγωγος μιας συνάρτησης δυναμικού:

$$u = \nabla \phi \quad (3.14)$$

Η συνάρτηση δυναμικού για μια σφαίρα που κινείται με σχετική ταχύτητα  $u$  μέσα στο ρευστό είναι:

$$\phi = -\frac{ua^3}{2r^2} \cos \theta \quad (3.15)$$

όπου:  $\theta$ : η γωνία μεταξύ ταχύτητας και ακτινικής συνιστώσας, και  $a$ : η ακτίνα της σφαίρας. Η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{ua^3}{r^3} \cos \theta \quad (3.16)$$

Η  $u_r$  στην επιφάνεια της σφαίρας μειώνεται σε:

$$u_r = u \cos \theta \quad (3.17)$$

Ο ρυθμός του έργου που απαιτείται για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι:

$$uF_{\text{mm}} = \frac{d\text{KE}}{dt} \quad (3.18)$$

Έτσι, η δύναμη ισούται με:

$$F_{\text{mm}} = \frac{M_f}{2} \frac{du}{dt} \quad (3.19)$$

όπου  $M_f$  η μάζα του ρευστού που εκτοπίζεται από τη σφαίρα. Η δύναμη είναι αυτή που ασκεί το σωματίδιο πάνω στο ρευστό, έτσι ώστε η δύναμη αντίστασης να είναι η αντίθετή της.

Η δύναμη φαινόμενης μάζας πολλές φορές καλείται και δύναμη προφανούς μάζας (apparent mass force) γιατί ισούται με μια προσθήκη μάζας στη σφαίρα.

### 3.3.4 Η δύναμη Basset

Η δύναμη Basset σχετίζεται με την επιτάχυνση του σωματιδίου και αντιπροσωπεύει μια αντίσταση στις διάφορες μεταβολές της ταχύτητας. Η δύναμη αυτή αναφέρεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ της στιγμιαίας επιτάχυνσης και του τροποποιημένου πεδίου της ροής. Η δύναμη Basset λαμβάνει υπόψη της την επίδραση του ιξώδους του ρευστού και οφείλεται στην προσωρινή καθυστέρηση της ανάπτυξης του οριακού στρώματος καθώς η σχετική ταχύτητα αλλάζει με τον χρόνο. Η δύναμη Basset είναι ίση με:

$$F_{Basset} = \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t - t'}} dt' \quad (3.20)$$

όπου ο όρος  $t - t'$  εκφράζει την χρονική διαφορά από την στιγμή της επιτάχυνσης του σωματιδίου μέχρι την παρούσα στιγμή. Σημειώνεται ότι ο όρος αυτός είναι συχνά δύσκολος να εκτιμηθεί, παρόλο που είναι σημαντικός σε πολλές ασταθείς εφαρμογές.

Αν υπάρχει αρχική ταχύτητα, τότε η δύναμη Basset δίνεται από τη σχέση:

$$F_{Basset} = \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \left[ \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t - t'}} dt' + \frac{(u - v)_0}{\sqrt{t}} \right] \quad (3.21)$$

όπου  $(u - v)_0$  : η διαφορά των αρχικών ταχυτήτων του σωματιδίου και του ρευστού.

### 3.4 Δυνάμεις Ανύψωσης

Οι δυνάμεις ανύψωσης στα σωματίδια οφείλονται στην περιστροφή τους. Η περιστροφή αυτή μπορεί να οφείλεται σε μεταβολή της ταχύτητας ή μπορεί να ωθείται από κάποια άλλη πηγή όπως επαφή μεταξύ των σωματιδίων ή αναπήδηση από μια επιφάνεια. Ως δυνάμεις ανύψωσης χαρακτηρίζονται δύο επιφανειακές δυνάμεις: η δύναμη Saffman και η δύναμη Magnus. Οι δυνάμεις αυτές δρουν στην κατακόρυφη διεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου.



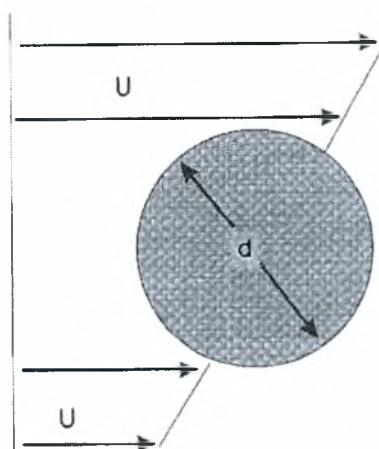
### 3.4.1 Η Δύναμη Saffman

Η δύναμη Saffman οφείλεται στην κατανομή των πιέσεων που αναπτύσσονται πάνω σε ένα σωματίδιο λόγω της περιστροφής του. Η περιστροφή οφείλεται σε μια μεταβολή της ταχύτητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.6. Η υψηλότερη ταχύτητα στο πάνω μέρος του σωματιδίου οδηγεί στη δημιουργία μιας μικρής πίεσης, και η υψηλή πίεση στην πλευρά της χαμηλής ταχύτητας δημιουργεί μια δύναμη ανύψωσης. Ο Saffman ανέλυσε αυτή τη δύναμη για χαμηλούς αριθμούς Reynolds και βρήκε ότι το μέγεθός της είναι:

$$F_{Saff} = 1.61\mu d|u - v|\sqrt{Re_G} \quad (3.22)$$

όπου  $Re_G$  είναι ο αριθμός διάτμησης Reynolds, που ισούται με:

$$Re_G = \frac{d^2}{\nu} \frac{du}{dy} \quad (3.23)$$



Σχήμα 3.6: Σωματίδιο σε διατμητική ροή

### 3.4.2 Η Δύναμη Magnus

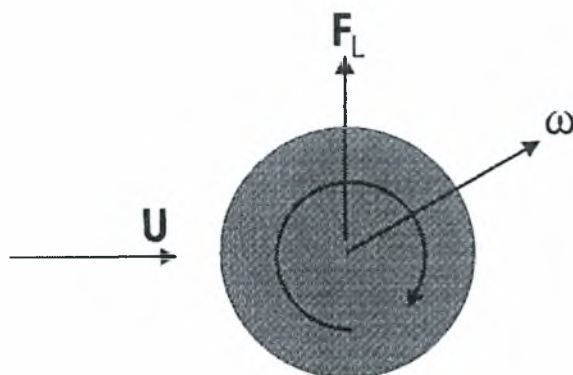
Η δύναμη Magnus είναι η ανύψωση που αναπτύσσεται στο σωματίδιο λόγω της περιστροφής του (Σχήμα 3.7). Η ανύψωση προκαλείται από μια διαφορά πίεσης



ανάμεσα στις δύο πλευρές του σωματιδίου. Οι Rubinow και Keller (1961) απέδειξαν ότι για χαμηλούς αριθμούς Reynolds, η δύναμη Magnus δίνεται από την εξίσωση:

$$F_{Mag} = \frac{\pi}{8} d^3 \rho_c \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times u - \omega_d \right) \times (u - v) \right] \quad (3.24)$$

όπου  $\frac{1}{2} \nabla \times u$  είναι η τοπική περιστροφή του ρευστού και  $\omega_d$  είναι η περιστροφή του σωματιδίου.



Σχήμα 3.7: Δύναμη Magnus σε περιστρεφόμενο σωματίδιο μέσα σε ένα ρευστό

### 3.5 Ροπή

Η ροπή που εφαρμόζεται σε ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε ένα ρευστό οφείλεται στην κατανομή των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια του σωματιδίου. Για χαμηλούς αριθμούς Reynolds (ροή Stokes) η ροπή που εφαρμόζεται σε ένα σφαιρικό σωματίδιο δίνεται από τη σχέση:

$$T = \pi \mu d^3 \left( \frac{1}{2} \nabla \times u - \omega_d \right) \quad (3.25)$$

Μια αναλυτική μελέτη πάνω στη ροπή που απαιτείται για να περιστραφεί μια σφαίρα σε ένα ιζώδες ρευστό που ηρεμεί έγινε από τους Dennis et al. (1980). Για αριθμούς Reynolds που κυμαίνονται από 20 έως 1000 η ροπή δίνεται από τη σχέση:

$$T = -2.01 \mu d^3 \omega_d (1 + 0.201 \text{Re}^{1/2}) \quad (3.26)$$

Όπου ο αριθμός Reynolds βασίζεται στην περιστροφική ταχύτητα της σφαίρας και ισούται με:

$$Re = \frac{\rho_c \omega_d d^2}{4\mu} \quad (3.27)$$

### 3.6 Η εξίσωση Basset – Boussinesq – Oseen

Εισάγοντας όλες τις δυνάμεις στην εξίσωση κίνησης του σωματιδίου προκύπτει η εξίσωση Basset – Boussinesq - Oseen (BBO), :

$$m \frac{dv}{dt} = 3\pi\mu D(u - v) + V_d(-\nabla p + \nabla \tau) + \frac{\rho_c}{2} (\dot{u} - \dot{v}) + \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \left[ \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t-t'}} dt' + \frac{(u-v)_0}{\sqrt{t}} \right] + mg \quad (3.28)$$

### 3.7 Αριθμός Stokes

Ο αριθμός Stokes αποτελεί μια πολύ σημαντική παράμετρο στις ροές ρευστού-σωματιδίων. Σχετίζεται με το μέγεθος του σωματιδίου και ορίζεται ως:

$$St_d = \frac{\tau_d}{\tau_f} \quad (3.29)$$

όπου το  $\tau_f$  είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος του πεδίου ροής και  $\tau_d = \frac{sd_p}{v}$  ο χρόνος

απόκρισης του σωματιδίου, όπου  $s$  ο λόγος πυκνοτήτων  $s = \frac{\rho_p}{\rho_f}$ ,  $d_p$  η διάμετρος του

σωματιδίου και  $v$  το κινηματικό ιξώδες.

Εάν  $St_d \ll 1$ , ο χρόνος απόκρισης των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερος από τον χαρακτηριστικό χρόνο που σχετίζεται με το πεδίο ροής. Έτσι τα σωματίδια θα έχουν ικανό χρόνο να ανταποκριθούν στις αλλαγές της ταχύτητας του ρευστού. Κατά συνέπεια το σωματίδιο και οι ταχύτητες του ρευστού θα είναι σχεδόν ίσες. Εάν  $St_d \gg 1$ , τότε το σωματίδιο δεν θα έχει ουσιαστικά χρόνο να ανταποκριθεί στις

αλλαγές της ταχύτητας του ρευστού και η ταχύτητά του θα επηρεάζεται λιγότερο κατά την κίνησή του ρευστού.

### 3.8 Αραιές και πυκνές διφασικές ροές

Μια περαιτέρω διάκριση των διφασικών ροών μπορεί να γίνει σε αραιές και πυκνές. Αραιή διφασική ροή είναι αυτή στην οποία η κίνηση του σωματιδίου ελέγχεται κυρίως από τις δυνάμεις του ρευστού, ενώ πυκνή είναι αυτή κατά την οποία η κίνηση του σωματιδίου ελέγχεται από τις δυνάμεις του ρευστού αλλά και από τις συγκρούσεις με άλλα σωματίδια. Μια ποιοτική εκτίμηση της φύσης αυτών των ροών μπορεί να γίνει εξετάζοντας το λόγο του χρόνου απόκρισης της ορμής ενός σωματιδίου  $\tau_p$  προς τον χρόνο μεταξύ των συγκρούσεων  $\tau_c$ . Έτσι η ροή μπορεί να θεωρηθεί αραιή εάν:

$$\frac{\tau_d}{\tau_c} < 1 \quad (3.30)$$

Όπου:  $\tau_c$  είναι ο μέσος όρος του χρόνου ανάμεσα στις συγκρούσεις σωματιδίων, διότι τα σωματίδια έχουν συγκεκριμένο χρόνο να αποκριθούν στις τοπικές δυνάμεις του ρευστού πριν την επόμενη σύγκρουση.

Σε περίπτωση που εξετάζεται ισχύει:

$$\frac{\tau_d}{\tau_c} > 1 \quad (3.31)$$

το σωματίδιο δεν έχει χρόνο να ανταποκριθεί στις δυνάμεις του ρευστού πριν την επόμενη σύγκρουση και η ροή χαρακτηρίζεται πυκνή.

Ο χρόνος ανάμεσα στις συγκρούσεις μπορεί να υπολογιστεί από εξισώσεις σχετικές με τη συχνότητα της σύγκρουσης. Έστω μια ομάδα σωματιδίων με ενιαία διάμετρο  $d$ , όπως φαίνεται στο *Σχήμα 3.8*, μέσω της οποίας ένα σωματίδιο ταξιδεύει με σχετική ταχύτητα  $u_r$  σε σχέση με τα άλλα σωματίδια. Σε χρόνο  $\Delta t$ , το ένα

σωματίδιο θα εμποδίσει όλα τα άλλα σωματίδια που βρίσκονται στον αγωγό ακτίνας  $2d$  και μήκους  $v_r \delta t$ . Ο αριθμός των σωματιδίων στον σωλήνα είναι:

$$\delta N = n\pi d^2 v_r \delta t \quad (3.32)$$

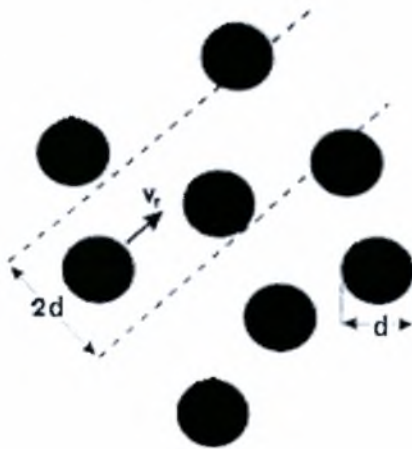
όπου  $n$ : ο αριθμός της πυκνότητας των σωματιδίων.

Έτσι η συχνότητα σύγκρουσης είναι:

$$f_c = n\pi d^2 v_r \quad (3.33)$$

και ο χρόνος ανάμεσα στις συγκρούσεις είναι:

$$\tau_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{n\pi d^2 v_r} \quad (3.34)$$



Σχήμα 3.8: Συγκρούσεις μεταξύ σωματιδίων

Έτσι, ο λόγος του χρόνου  $\tau_d / \tau_c$  εκφράζεται ως:

$$\frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{n\pi\rho_d d^4 v_r}{18\mu} \quad (3.35)$$

### 3.9 Σύζευξη Φάσεων

Ένα λεπτό σημείο κατά την αντιμετώπιση των διφασικών ροών είναι ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των σωματιδίων πάνω στην συνεχή

φάση. Με βάση την αρχή δράσης-αντίδρασης, το σωματίδιο ασκεί δύναμη ίση και αντίθετη με αυτή που ασκείται στο σωματίδιο από το ρευστό. Ο Saffman (1973) έδειξε ότι η διαταραχή στο ρευστό εξαιτίας της παρουσίας των σωματιδίων είναι αποτέλεσμα δύο συνεισφορών, οι οποίες φθίνουν με την απόσταση από το σωματίδιο  $r$ , ο πρώτος όρος ως  $1/r$  (μεγάλης εμβέλειας) και ο δεύτερος ως  $1/r^3$  (μικρής εμβέλειας). Για σωματίδια μικρότερα από τις πιο μικρές κλίμακες μήκους της ροής και τα οποία διαχωρίζονται μεταξύ τους απόσταση  $L$  μεγαλύτερη της διαμέτρου τους, οι πιο σημαντικές αλληλεπιδράσεις είναι αυτές τύπου μεγάλης εμβέλειας (Koch 1990). Η αγνόηση των αλληλεπιδράσεων μικρής εμβέλειας (για παράδειγμα ο ολκός πίσω από το σωματίδιο) δικαιολογείται για σωματίδια με διαμέτρους μικρότερες από την κλίμακα μήκους Kolmogorov, καθώς αυτές οι αλληλεπιδράσεις θα σκεδαστούν από την επίδραση του ιξώδους. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην επίδραση των σωματιδίων στις μεγάλες κλίμακες όπου κυριαρχούν οι αλληλεπιδράσεις μεγάλης εμβέλειας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η σύζευξη των δύο φάσεων πραγματοποιείται υπό τη μορφή δύναμης. Σε ανομοιογενείς ροές με τοιχώματα όμως, τα σωματίδια εμφανίζουν την τάση να παγιδεύονται κοντά στα τοιχώματα, όταν δεν λαμβάνονται υπόψη οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων. Επομένως, η συγκέντρωση των σωματιδίων μπορεί να αυξηθεί τοπικά, ακόμα και σε μικρά συνολικά κλάσματα όγκου σωματιδίων. Η προσέγγιση σημειακής δύναμης ισχύει όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι τουλάχιστον  $L$  της ίδιας τάξης μεγέθους με το υπολογιστικό πλέγμα.

Η δύναμη σύζευξης όμως ασκείται στη θέση του σωματιδίου που δεν συμπίπτει με το υπολογιστικό πλέγμα στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις της συνεχούς φάσης. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την προβολή της δύναμης στα υπολογιστικά σημεία. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προβολής της δύναμης, όπως για παράδειγμα η γραμμική προβολή και η μέθοδος Particle Source-In-Cell (PSI-Cell). Με βάση τον πρώτο τρόπο, η δύναμη αυτή προβάλλεται στα γειτονικά σημεία του υπολογιστικού πλέγματος, συνήθως με μία γραμμική σχέση. Η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα υπολογιστικό σημείο είναι το άθροισμα των προβαλλομένων δυνάμεων των σωματιδίων σε αυτό το σημείο. Με βάση την μέθοδο προβολής, η δύναμη  $F$  που ασκείται από τα σωματίδια στην συνεχή φάση είναι:

$$F_{p,i}^{abc} = -F \frac{[\Delta x - (x - x_a)][\Delta y - (y - y_b)][\Delta z - (z - z_c)]}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (3.36)$$

Ο συντελεστής στην παραπάνω εξίσωση μεταβάλλεται γραμμικά από την θέση του σωματιδίου προς τα γειτονικά σημεία και είναι τέτοιος έτσι ώστε η άθροιση των δυνάμεων στα οκτώ γειτονικά σημεία να δίνει την συνολική δύναμη. Επίσης, αν το σωματίδιο βρίσκεται σε ένα από αυτά τα σημεία, οι συντελεστές στα άλλα σημεία μηδενίζονται.

Με βάση την μέθοδο PSI-Cell, αθροίζονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται από σωματίδια που βρίσκονται μέσα σε έναν υπολογιστικό όγκο με κέντρο ένα υπολογιστικό σημείο και η συνολική δύναμη διαιρείται με την μάζα του ρευστού σε αυτό τον υπολογιστικό όγκο:

$$F_{p,i} = -\frac{1}{V} \sum_{k=1}^N F \quad (3.37)$$

όπου  $V$  είναι ο όγκος του υπολογιστικού κελιού,  $N$  είναι ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται μέσα στο υπολογιστικό κελί, και  $F$  είναι το άθροισμα των δυνάμεων οπισθέλκουσας και ανύψωσης.

Η τοπική στιγμιαία σχετική ταχύτητα μεταξύ του σωματιδίου και του περιβάλλοντος ρευστού που απαιτείται για τον υπολογισμό της δύναμης σύζευξης, απαιτεί την γνώση της ταχύτητας του ρευστού στη θέση του σωματιδίου του τοπικά αδιατάραχτου πεδίου από την παρουσία του σωματιδίου. Για μία ροή που περιέχει  $N$  σωματίδια, η ταχύτητα του ρευστού που απαιτείται είναι αυτή του τοπικά αδιατάραχτου πεδίου από την παρουσία του σωματιδίου  $n$ , αλλά λαμβάνει υπόψη τις διαταραχές που δημιουργούνται από τα υπόλοιπα  $N-1$  σωματίδια. Αυτό στην ουσία απαιτεί γνώση  $N$  πεδίων ροής για κάθε σωματίδιο. Μόνο στο όριο που οι δύο φάσεις δεν είναι συζευγμένες, η ταχύτητα που απαιτείται είναι αυτή του μονοφασικού τυρβώδους πεδίου ροής.

Ένας τρόπος για τον υπολογισμό των τοπικά αδιατάραχτων ταχυτήτων ρευστού είναι να αναλυθεί το πεδίο ροής που επηρεάζεται από όλα τα σωματίδια και μετά να αφαιρεθούν οι τοπικές διαταραχές από την παρουσία του σωματιδίου. Σε



αραιές ροές Stokes, ο Saffman έδειξε ότι η ταχύτητα  $u$  είναι το άθροισμα της  $\tilde{u}_i$  και των τοπικών διαταραχών, που ονομάζονται Stokeslets:

$$u_i^n = \tilde{u}_i^n + \frac{3d}{4r} \left[ (u_i^n - v_i^n) + (u_j^n - v_j^n) \frac{r_i r_j}{r^2} \right], \quad r = |\underline{x} - \underline{x}^n|, \quad \underline{r} = \underline{x} - \underline{x}^n \quad (3.38)$$

Για πρακτικούς λόγους, στο όριο μπορεί να θεωρηθεί ότι η ταχύτητα του τοπικά αδιατάραχτου πεδίου ταχυτήτων προσεγγίζεται από το πεδίο που επιλύεται. Μία εκτίμηση του σφάλματος που υπεισέρχεται είναι:

$$\Delta u_i^n = \tilde{u}_i^n - u_i^n = -\frac{3d}{4r} \left[ (u_i^n - v_i^n) + (u_j^n - v_j^n) \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \quad (3.39)$$

Η απόσταση  $r$  μεταξύ του σωματιδίου και των υπολογιστικών σημείων είναι της τάξης μεγέθους του πλέγματος. Επομένως το σχετικό σφάλμα είναι τάξης  $O(d/\Delta x)$ . Επιπρόσθετα προς τους περιορισμούς της σημειακής προσέγγισης (point-force) αυτή η προσέγγιση απαιτεί επιπλέον ότι  $d \ll \Delta x$ . Στις περισσότερες των περιπτώσεων, κατά την χρήση της μεθόδου DNS, το πλέγμα  $\Delta x$  είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την κλίμακα Kolmogorov, και η τελευταία απαίτηση ικανοποιείται καθώς η σημειακή προσέγγιση των σωματιδίων προϋποθέτει ότι η διάμετρός τους είναι μικρότερη από την κλίμακα Kolmogorov. Συνεπώς, το σφάλμα που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς της παρούσας εργασίας από την μη-θεώρηση της τοπικά αδιατάραχτης ταχύτητας του ρευστού θα είναι μικρό δεδομένου ότι σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $d \ll \Delta x$ , στους DNS υπολογισμούς.

## 4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται λεπτομερώς τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση της συνεχούς και διακριτής φάσης. Η παρουσίαση αυτή περιλαμβάνει δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται τα αριθμητικά μοντέλα της συνεχούς φάσης, η χωρική και χρονική διακριτοποίηση καθώς και ο αλγόριθμος επίλυσης. Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει τα αντίστοιχα μοντέλα της διακριτής φάσης μαζί με τη χρονική ολοκλήρωση, τα σχήματα παρεμβολής και τη σύζευξη των δύο φάσεων.

### 4.1 Αριθμητικά Μοντέλα Συνεχούς Φάσης

Η πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδης ροή σε κατακόρυφο αγωγό περιγράφεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συνέχειας της μάζας και τις εξισώσεις Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (4.2)$$

Οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) έχουν αδιαστατοποιηθεί κατάλληλα χρησιμοποιώντας μία χαρακτηριστική ταχύτητα  $U_0$  και ως χαρακτηριστικό μήκος την απόσταση των πλακών  $h$ . Ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως  $\text{Re} = \frac{U_0 h}{\nu}$ , όπου  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες, και  $f_i$  η  $i$  συνιστώσα όλων των εξωτερικών δυνάμεων, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η δύναμη σύζευξης που ασκούν τα σωματίδια στο ρευστό.

Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, εκφράζοντας την εξίσωση Συνέχειας της μάζας τις εξισώσεις Navier –Stokes σε στοιχειώδεις μεταβλητές μειώνεται ο αριθμός των διεργασιών που είναι απαραίτητες για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Αρκετοί από τους όρους που προκύπτουν απλοποιούνται με αποτέλεσμα τη διευκόλυνση των υπολογισμών. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, εισάγουμε τις

ποσότητες  $q_\theta = r u_\theta$ ,  $q_r = r u_r$ ,  $q_z = u_z$ . Έτσι η εξίσωση της συνέχειας μετασχηματίζεται σε:

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (4.3)$$

Οι εξισώσεις Navier–Stokes χρησιμοποιώντας τις εισαγόμενες ποσότητες μπορούν να μετασχηματιστούν ως:

#### r – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{q_r^2}{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{q_\theta q_r}{r^2} + \frac{\partial q_r q_z}{\partial z} - \frac{q_\theta^2}{r^2} \\ & = -r \frac{\partial p}{\partial r} + \text{Re} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{q_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right) + f_{pr} \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### θ – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{\partial q_\theta / r q_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\theta q_z}{\partial z} + \frac{q_\theta q_r}{r r} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \text{Re} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial q_\theta}{\partial r} - \frac{q_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \right) + f_{p\theta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

#### z – Διεύθυνση

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r q_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_\theta q_z}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z^2}{\partial z} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\overline{\partial P}}{\partial z} + \text{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial q_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} \right) + f_{pz} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Η κλίση της πίεσης στην εξίσωση  $q_r$  διατηρεί την ταχύτητα ανά μονάδα όγκου (bulk velocity-  $U_b = \int q_z dV$ ) σταθερή. Υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας την διακριτοποιημένη εξίσωση  $q_z$ . Επίσης, ο όρος  $\partial P / \partial z$  σχετίζεται με την κύρια ταχύτητα τριβής του τοιχώματος  $u_\tau$  με τη σχέση  $u_\tau = \left( \overline{|\partial P / \partial z|} / 2 \right)^{1/2}$ .

Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων (4.1) και (4.2) γίνεται με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές ακρίβειας δεύτερης τάξης. Η ολοκλήρωση στο χρόνο

πραγματοποιείται σε τρία βήματα με βάση τη ρητή μέθοδο χαμηλής αποθήκευσης (low storage) Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης για τους μη γραμμικούς όρους συναγωγής και για τις επιπλέον εξωτερικές δυνάμεις, ενώ για τους γραμμικούς όρους διάχυσης χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα Crank-Nicolson ακρίβειας 2<sup>ης</sup> τάξης. Οι εξισώσεις ορμής παραγοντοποιούνται και επιλύονται σε τρία στάδια. Η εξίσωση της συνέχειας στο νέο χρονικό βήμα ικανοποιείται μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Poisson για την ψευδοπίεση. Η επίλυση της εξίσωσης Poisson γίνεται με μετασχηματισμό Fourier (FFT) στις περιοδικές διευθύνσεις σε συνδυασμό με την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος στην διεύθυνση κάθετα στα τοιχώματα.

Στην συνέχεια, παρουσιάζεται εκτενώς η χωρική και η χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων, καθώς επίσης και ο αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων (4.1) και (4.2).

## 4.2 Υπολογιστικό Πλέγμα και Διακριτοποίηση

Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι μετατοπισμένο (staggered). Τα βαθμωτά μεγέθη, όπως η πίεση, αποθηκεύονται στα σημεία  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ , η ταχύτητα  $u$  αποθηκεύεται στα σημεία  $(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ , η  $v$  ταχύτητα αποθηκεύεται στα σημεία  $(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$  και η  $w$  ταχύτητα στα σημεία  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)$ , όπου  $u$ ,  $v$  και  $w$  οι αντίστοιχες ταχύτητες κατά τις διευθύνσεις  $\theta$ ,  $r$  και  $z$ . Το πλέγμα στις περιοδικές διευθύνσεις  $\theta$ ,  $z$  είναι ομοιόμορφο, ενώ στην  $r$ -διεύθυνση ανομοιόμορφο.

Η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes γίνεται στα σημεία όπου αποθηκεύεται η αντίστοιχη ταχύτητα. Επομένως απαιτείται η γνώση της ταχύτητας  $u_i$  ή του γινομένου  $u_i u_j$  σε σημεία που το  $u_i$  ή το  $u_j$  δεν ορίζεται. Για το λόγο αυτό πραγματοποιείται παρεμβολή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$u_i = \frac{1}{2} \left[ u \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) + u \left( x_i - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.7\alpha)$$

$$u_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [u(x_i \pm \Delta x) + u(x_i)] + O(\Delta x^2) = \frac{1}{2} [u_{i\pm 1} + u_i] + O(\Delta x^2) \quad (4.7\beta)$$

Όμοια, η πρώτη παράγωγος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ u \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) - u \left( x_i - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] + O(\Delta x^2) = \frac{1}{\Delta x} \left[ u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}} \right] + O(\Delta x^2) \quad (4.7\gamma)$$

και

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i\pm\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_{i\pm\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\Delta x} \left[ \pm u(x \pm \Delta x) - u(x) \right] + O(\Delta x^2) = \pm \frac{1}{\Delta x} \left[ \pm u_{i\pm 1} + u_i \right] + O(\Delta x^2) \quad (4.7\delta)$$

Η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται με συνδυασμό των παραπάνω εκφράσεων ως εξής:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \left. \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right|_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \left. \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right|_{i+\frac{1}{2}} - \left. \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right|_{i-\frac{1}{2}} \right] + O(\Delta x^2) \quad (4.7\epsilon)$$

ή τελικά:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \left. \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right|_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x) \right] + O(\Delta x^2) \quad (4.7\sigma\tau)$$

Τέλος, η παράγωγος του γινομένου υπολογίζεται ως εξής:

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial x} \right|_i = \left. \frac{\delta uv}{\delta x} \right|_i = u_i \left. \frac{\delta v}{\delta x} \right|_i + v_i \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_i + O(\Delta x^2) \quad (4.7\zeta)$$

#### 4.2.1 Χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων

Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων συνέχειας της μάζας και Navier-Stokes οδηγεί στο ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_i} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\delta u_i u_i}{\delta x_j} = \frac{\delta p}{\delta x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\delta^2 u_i}{\delta x_j \delta x_j} + F_i \quad (4.9)$$

όπου  $\delta$  είναι τελεστής διακριτοποίησης κεντρικών διαφορών ακρίβειας δεύτερης τάξης. Η εξίσωση (4.9) μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{\partial q_{1i}}{\partial t} + H_i = \frac{\delta p}{\delta x_i} + \frac{1}{\text{Re}} L_{ij} q_{1i} \quad (4.10)$$

όπου οι μη γραμμικοί όροι συναγωγής συμβολίζονται με  $H_i$ ,  $H_i = \frac{\delta q_{1j} q_{1i}}{\delta x_j} + F_i$ , οι

εξωτερικές επιπλέον δυνάμεις συμβολίζονται με  $H_i = \frac{\delta q_{1j} q_{1i}}{\delta x_j} + F_i$ , ενώ η δεύτερη

χωρική παράγωγος με τον διακριτό τελεστή Laplace  $L_{ij}$ ,  $L_{ij} = \frac{\delta^2 q_{1i}}{\delta x_j \delta x_j}$ .

### Διακριτοποίηση μη γραμμικών όρων συναγωγής

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης της **u-ορμής** διακριτοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial uu}{\partial x} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta uu}{\delta x} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (uu)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (uu)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.11\alpha)$$

όπου

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ u_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right], \quad u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ u_{i-1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.11\beta)$$

$$\frac{\partial wu}{\partial z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \approx \frac{\delta wu}{\delta z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left[ (wu)_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - (wu)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.12\alpha)$$

όπου

$$w_{i,j+\frac{1}{2},k+1} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} + w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \right], \quad u_{i,j+\frac{1}{2},k+1} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.12\beta)$$



και

$$w_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right], \quad u_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.12\gamma)$$

$$\frac{\partial nu}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta nu}{\delta y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y} \left[ (vu)_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (vu)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.13\alpha)$$

όπου

$$v_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ v_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \right], \quad u_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.13\beta)$$

και

$$v_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right], \quad u_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.13\gamma)$$

Η σχέση ισχύει για ομοιόμορφο πλέγμα στην  $y$ -διεύθυνση. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ανομοιόμορφο πλέγμα η σχέση μετατρέπεται σε:

$$\frac{\partial nu}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta nu}{\delta y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y c_j} \left[ (vu)_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (vu)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.13\delta)$$

όπου  $c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}$  είναι μία ποσότητα που λαμβάνει υπόψη το ανομοιόμορφο

πλέγμα.

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης **w-ορμής** διακριτοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial uw}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{\delta uw}{\delta x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (uw)_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - (uw)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.14\alpha)$$

όπου

$$w_{i+1,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k} \right], \quad u_{i+1,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ u_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.14\beta)$$

και

$$w_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right], \quad u_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.14\gamma)$$

$$\frac{\partial ww}{\partial z} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \approx \frac{\delta ww}{\delta z} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta z} \left[ (ww)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (ww)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.15\alpha)$$

όπου

$$w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} + w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.15\beta),$$

και

$$w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-1} \right] \quad (4.15\gamma)$$

$$\frac{\partial vw}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{\delta vw}{\delta x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta y} \left[ (vw)_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - (vw)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.16\alpha)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j+1,k} = \frac{1}{2} \left[ v_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j+1,k-\frac{1}{2}} \right], \quad w_{i+\frac{1}{2},j+1,k} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k} \right] \quad (4.16\beta)$$

και

$$v_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2} \left[ v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right], \quad w_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2} \left[ w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.16\gamma)$$

Όμοια, για μη ανομοιόμορφα πλέγματα στην y-διεύθυνση η σχέση (4.16α) μετατρέπεται σε:

$$\left. \frac{\partial vw}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \left. \frac{\delta vw}{\delta x} \right|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta y c_j} \left[ (vw)_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - (vw)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.17\delta)$$

$$\text{όπου το } c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}$$

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης της **v-ορμής** διακριτοποιούνται ως εξής:

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta uv}{\delta x} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (uv)_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - (uv)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.18\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial wv}{\partial z} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \left. \frac{\delta wv}{\delta z} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left[ (wv)_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (wv)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.18\beta)$$

$$\left. \frac{\partial vv}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \left. \frac{\delta vv}{\delta y} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{c_j}{\Delta y} \left[ (vv)_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (vv)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.18\gamma)$$

Αναλύοντας την πρώτη παράγωγο σε σειρές Fourier και ολοκληρώνοντας τη σχέση προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \iota \left( \frac{2\pi k_1}{L_x} \right) \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{\iota 2\pi k_1 x}{L_x}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \iota \kappa \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{\iota 2\pi k_1 x}{L_x}} \quad (4.19)$$

όπου  $\kappa = \frac{2\pi k_1}{N_1 \Delta x_1}$  είναι ο αναλυτικός κυματαριθμός.

Η χρήση κεντρικών πεπερασμένων διαφορών ακρίβειας δεύτερης τάξης ισοδυναμεί με την αντικατάσταση του αναλυτικού κυματαριθμού με τον ενεργό κυματαριθμό, ο οποίος προκύπτει ως εξής:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| = \left. \frac{\delta \Phi}{\delta x} \right| = \frac{\Phi(x - \Delta x) - \Phi(x + \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\widehat{\Phi}_{k_1} \left( e^{\iota k_1(x+\Delta x)} - e^{\iota k_1(x-\Delta x)} \right)}{\Delta x} = \iota \frac{\sin(k_1 \Delta x)}{\Delta x} \widehat{\Phi}_{k_1} e^{\iota k_1 x} \quad (4.20)$$

Τους μικρούς κυματαριθμούς τους προσεγγίζει καλά σε αντίθεση με τους μεγάλους κυματαριθμούς όπου παρατηρείται απόκλιση.

### Διακριτοποίηση γραμμικών όρων διάχυσης

Η διακριτοποίηση των γραμμικών όρων διάχυσης είναι:

Εξίσωση της u-ορμής:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ u_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.21\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z^2} \left[ u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.21\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{u_{i,j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{y_{j+\frac{3}{2}} - y_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.21\gamma)$$

Εξίσωση της v-ορμής:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ v_{i+\frac{3}{2},j,k+\frac{1}{2}} - 2v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.22\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z^2} \left[ v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{3}{2}} - 2v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.22\beta)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{v_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-1,k+\frac{1}{2}}}{y_j - y_{j-1}} \right] \quad (4.22\gamma)$$

Εξίσωση της w-ορμής:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \left. \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ w_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k} - 2w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.23\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta^2 w}{\delta z^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta z^2} \left[ w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1} - 2w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} + w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-1} \right] \quad (4.23\beta)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}, k} - w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}}{y_{j+\frac{3}{2}} - y_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - w_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k}}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.23\gamma)$$

## 4.2.2 Χρονική Διακριτοποίηση

Η χρονική ολοκλήρωση περιέχει τρεις χρονικές στιγμές, n-1, n και n+1. Το πρώτο βήμα την στιγμή n είναι:

$$\frac{\bar{u}_i^k - u_i^n}{\Delta t} = \gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} + \frac{\alpha^k}{2 \text{Re}} L_{ij} (\bar{u}_i^k + u_i^n) - \alpha^k G_i p^n \sigma_i \quad (4.24)$$

όπου  $\gamma, \rho, \alpha, \sigma_i$  οι σταθερές της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης,  $\rho_1 = 0, \rho_2 = -\frac{17}{60}, \rho_3 = -\frac{5}{12}, \gamma_1 = \frac{8}{15}, \gamma_2 = \frac{5}{12}, \gamma_3 = \frac{3}{4}, \sigma_i = 1$ ,  $H_i$  οι μη γραμμικοί όροι συναγωγής γραμμένοι σε συντηρητική μορφή και οι επιπλέον εξωτερικές δυνάμεις,  $L_{ij}$  ο τελεστής Laplace,  $G_i$  ο τελεστής κλίσης βαθμωτού μεγέθους και k: η ενδιάμεση χρονική στιγμή n και n+1.

Η εξίσωση (4.24) μπορεί να γραφτεί για την διαφορά των ταχυτήτων  $\Delta u_i = (u^k - u^n)_i$ :

$$\Delta u_i - \beta^k L_{ij} \Delta u_i = \left( \gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} - \alpha^k G_i p^n \sigma_i \right) \Delta t + 2\beta^k L_{ij} u_i^n \quad (4.25)$$

$$\text{όπου } \beta = \frac{\alpha}{2 \text{Re}}.$$

Το ενδιάμεσο πεδίο ταχυτήτων, που αναφέρεται στη χρονική στιγμή k, ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας ολικά αλλά όχι τοπικά. Το δεύτερο βήμα της χρονικής ολοκλήρωσης είναι η πρόβλεψη ενός πεδίου ταχυτήτων χωρίς αποκλίσεις (divergence-free). Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας μια βαθμωτή ποσότητα  $\Phi$ , η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας στο χρονικό βήμα n+1, με βάση την εξίσωση:

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i^k}{\Delta t} = -\alpha^k G_i \phi \sigma_2 \quad (4.26)$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση εφαρμοστεί η απόκλιση και χρησιμοποιηθεί ότι  $D_i U_i^{n+1} = 0$  τότε προκύπτει μία εξίσωση ελλειπτικής μορφής που επιτρέπει τον υπολογισμό της ποσότητας  $\phi$ .

$$L_{jj} \phi = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} D_i \hat{u}_i^k \quad (4.27)$$

Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση και αντικαθιστώντας την ποσότητα  $\phi$  στην εξίσωση (4.26) προκύπτει το νέο πεδίο ταχυτήτων τη χρονική στιγμή  $n+1$ , το οποίο ικανοποιεί ταυτόχρονα και την εξίσωση συνέχειας της μάζας.

Καθ' όλη τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας, η πίεση δεν ήταν γνωστή και ο υπολογισμός της δεν ήταν απαραίτητος. Ωστόσο, σε περιπτώσεις που η γνώση της πίεσης είναι απαραίτητη, δίνεται με χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $\phi$  και τη σχέση:

$$p^{n+1} = p^n + \phi - \beta L_{jj} \phi \quad (4.28)$$

Επομένως η πτώση πίεσης στην εξίσωση (4.25) είναι ίση με:

$$-G_i [p^n (\sigma_1 - \sigma_2) + p^{n+1} \sigma_2] \quad (4.29)$$

### 4.2.3 Παραγοντοποίηση των εξισώσεων ορμής

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορεί να γραφούν στη μορφή:

$$[1 - \beta^k (L_{i1} - L_{i2} - L_{i3})] \Delta u_i = \text{RHS}_i \quad (4.30)$$

Η παραγοντοποίηση έγκειται στην αντικατάσταση του αριστερού μέλους της εξίσωσης (4.30) με το γινόμενο τριών πινάκων. Ορίζοντας  $A_{ij} = \beta^k L_{ij}$ , η εξίσωση (4.30) γίνεται:

$$(1 - A_{i1})(1 - A_{i2})(1 - A_{i3}) \Delta u_i = \text{RHS}_i \quad (4.31)$$

Η εξίσωση (4.31) μπορεί να γραφεί και ως:



$$(1 - A_{i1})\Delta u_i^{**} = \text{RHS}_i \quad (4.32\alpha)$$

$$(1 - A_{i3})\Delta u_i^* = \Delta u_i^{**} \quad (4.32\beta)$$

$$(1 - A_{i2})\Delta u_i = \Delta u_i^* \quad (4.32\gamma)$$

όπου  $\Delta u_i^{**}$  και  $\Delta u_i^*$  είναι ενδιάμεσες ποσότητες.

#### 4.2.4 Υπολογισμός της ψευδοπίεσης (Εξίσωση Poisson)

Το πεδίο ταχυτήτων πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας της μάζας σε κάθε χρονικό βήμα. Η εξίσωση για την ψευδοπίεση  $\phi$  είναι:

$$L_{ij}\phi = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} D_i \hat{u}_i^k \quad (4.33)$$

ή

$$(L_{11} + L_{22} + L_{33})\phi_{ijl} = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} F_{ijl} \quad (4.33)$$

όπου  $F_{ijl}$ :

$$F_{i,j,l} = \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \hat{w}^k}{\partial z} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Η εξίσωση (4.33) σε διακριτοποιημένη μορφή, χρησιμοποιώντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας για τις δεύτερες παραγώγους:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} + \\ & \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} = \\ & \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} \left( \frac{\hat{u}^k_{i+1,j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - \hat{u}^k_{i,j+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}^k_{i+\frac{1}{2},j+1,l+\frac{1}{2}} - \hat{v}^k_{i+\frac{1}{2},j,l+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{\hat{w}^k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l+1} - \hat{w}^k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},l}}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Λόγω της περιοδικότητας που παρατηρείται, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σειρές Fourier στις διευθύνσεις  $x$  και  $z$  για τις ποσότητες  $\Phi$  και  $F$ :

$$\Phi_{i,j,l} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x}{L_x}} e^{\frac{i2\pi k_3 z}{L_z}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.36\alpha)$$

$$F_{i,j,l} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \widehat{F}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x}{L_x}} e^{\frac{i2\pi k_3 z}{L_z}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \widehat{F}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.36\beta)$$

Η εξίσωση (4.33) μετατρέπεται τελικά σε:

$$\sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \left[ \widehat{\Phi}(k_1'^2, j, k_3'^2) = \widehat{F}(k_1', j, k_3') \right] e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.37)$$

όπου  $k_1'^2, k_3'^2$  είναι οι τροποποιημένοι κυματαριθμοί που προκύπτουν από τη χρήση των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών για την δεύτερη παράγωγο:

$$k_1'^2 = \frac{2 \left( \cos \frac{2\pi k_1}{N_1} - 1 \right)}{\Delta x_1^2}, \quad k_3'^2 = \frac{2 \left( \cos \frac{2\pi k_3}{N_3} - 1 \right)}{\Delta x_3^2} \quad (4.38)$$

Αναλύοντας την δεύτερη παράγωγο σε σειρές Fourier και ολοκληρώνοντας τη σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_i = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \left( \frac{2\pi k_1}{L_x} \right)^2 \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x}{L_x}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \frac{\kappa^2}{\Delta x_1^2} \widehat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x}{L_x}} \quad (4.39)$$

όπου  $\kappa^2 = \frac{2\pi k_1}{N_1 \Delta x_1^2}$  είναι ο αναλυτικός κυματαριθμός.

Και στην περίπτωση αυτή ο ενεργός κυματαριθμός έχει καλή προσέγγιση για τους μικρούς κυματαριθμούς. Αντίθετα στους μεγάλους κυματαριθμούς παρατηρείται σημαντική απόκλιση.

### 4.3 Αριθμητικά Μοντέλα Δυναμικής Σωματιδίων

Σε αυτή την ενότητα περιγράφονται τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων. Τα μοντέλα αυτά περιλαμβάνουν την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων που διέπουν την δυναμική των σωματιδίων, τις συνοριακές συνθήκες και τα διάφορα σχήματα παρεμβολής που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση της ταχύτητας του ρευστού στη θέση του σωματιδίου. Στο τέλος αυτής της ενότητας παρουσιάζονται διάφορα μοντέλα για την σύζευξη της ορμής των δύο φάσεων.

#### 4.3.1 Χρονική Διακριτοποίηση

Η δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων προσδιορίζεται με βάση την εξίσωση:

$$m_p \frac{dv_i}{dt} = \Sigma F_i \quad (4.40)$$

όπου  $v_i$  είναι η ταχύτητα του σωματιδίου μάζας  $m_p$  και  $\Sigma F_i$  είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\Sigma F_i}{m_p} = f_i \quad (4.41)$$

Η ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης στο χρόνο γίνεται με τις εξισώσεις της συνεχούς φάσης. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται με τη μέθοδο Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης ή Adams-Bashforth 2<sup>ης</sup> τάξης με βάση τις σχέσεις:

$$v' = v^n + \Delta t_{n+1} \{ \gamma_1 \text{RHS}(v^n) + \rho_1 \text{RHS}(v^{n-1}) \} \quad (4.42\alpha)$$

$$v'' = v' + \Delta t_{n+1} \{ \gamma_2 \text{RHS}(v') + \rho_2 \text{RHS}(v^n) \} \quad (4.42\beta)$$

$$v^{n+1} = v'' + \Delta t_{n+1} \{ \gamma_3 \text{RHS}(v'') + \rho_3 \text{RHS}(v') \} \quad (4.42\gamma)$$

όπου  $\rho_i$  και  $\gamma_i$  είναι οι σταθερές της αντίστοιχης μεθόδου.

Η θέση των σωματιδίων υπολογίζεται με βάση την σχέση:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad (4.43)$$

Όμοια, η ολοκλήρωση της σχέσης (4.43) γίνεται είτε με τη μέθοδο Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης ή Adams-Bashforth 2<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας με βάση τις εξισώσεις:

$$x_i' = x_i^n + \Delta t_{n+1} (\gamma_1 v_i^n + \rho_1 v_i^{n-1}) \quad (4.44\alpha)$$

$$x_i'' = x_i' + \Delta t_{n+1} (\gamma_2 v_i' + \rho_2 v_i^n) \quad (4.44\beta)$$

$$x_i^{n+1} = x_i'' + \Delta t_{n+1} (\gamma_3 v_i'' + \rho_3 v_i') \quad (4.44\gamma)$$

### **Σχήματα παρεμβολής**

Κατά την επίλυση των Εξισώσεων (4.41), είναι απαραίτητη η γνώση της ταχύτητας του ρευστού στη θέση του σωματιδίου. Για αυτό τον λόγο πραγματοποιείται παρεμβολή μεταξύ των σημείων του πλέγματος και της θέσης του σωματιδίου. Τα είδη παρεμβολής που χρησιμοποιούνται είναι (1) η γραμμική παρεμβολή σε τρεις διαστάσεις και (2) συνδυασμούς παρεμβολών Lagrangian και Cubic Splines.

### **Συνοριακές συνθήκες διακριτής φάσης**

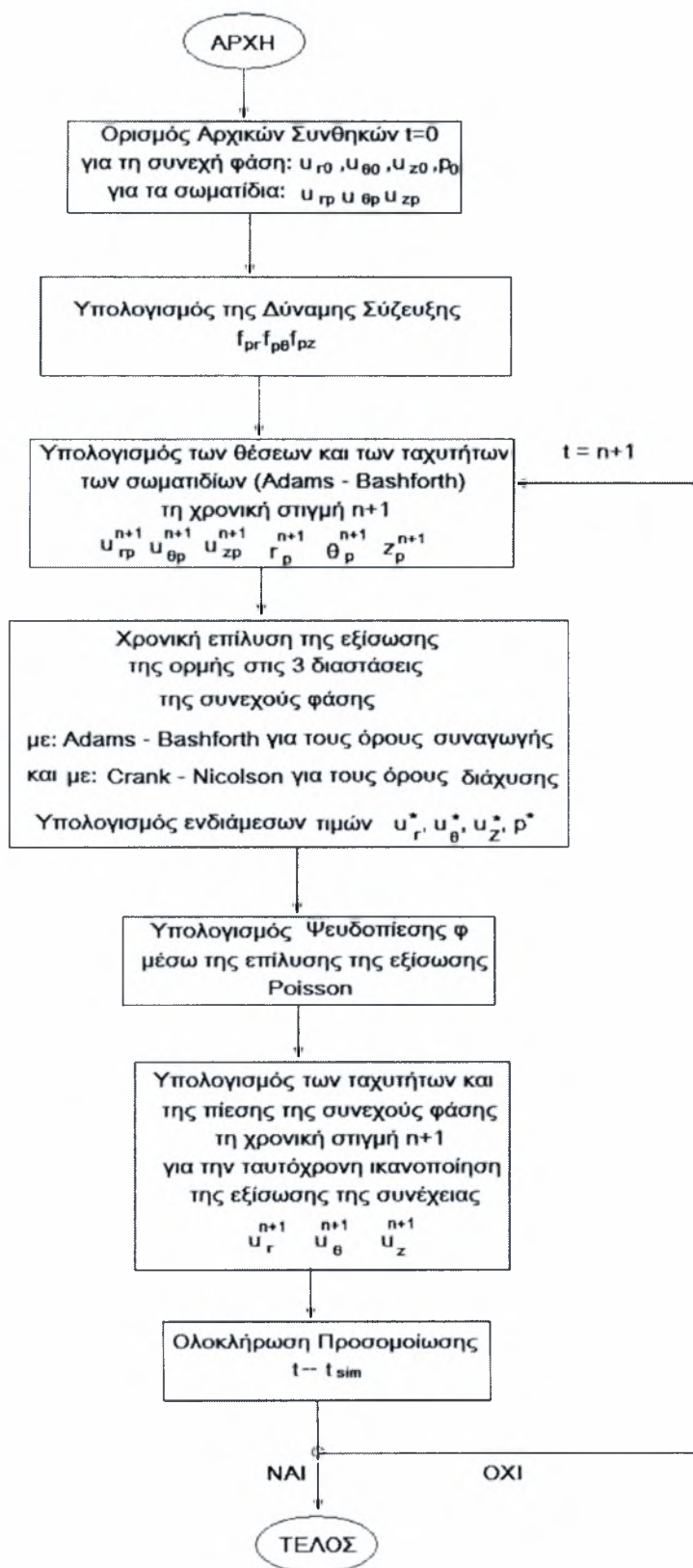
Τα σωματίδια όταν εξέρχονται από ένα επίπεδο στις περιοδικές διευθύνσεις εισέρχονται από το αντίστοιχο και οι υπολογισμοί συνεχίζονται. Όταν ένα σωματίδιο προσκρούει σε ένα τοίχωμα, δίνονται δύο δυνατότητες: (α) το σωματίδιο εναποθέτεται στο τοίχωμα και οι υπολογισμοί σταματούν, και (β) το σωματίδιο αλληλεπιδρά με το τοίχωμα και πραγματοποιείται ελαστική σύγκρουση.

Στην παρούσα Διπλωματική εργασία γίνεται η θεώρηση ότι οι υπολογισμοί σταματούν όταν το σωματίδιο εναποθέτεται στο τοίχωμα.

## **4.4 Αλγόριθμος Επίλυσης**

Ο αλγόριθμος επίλυσης ακολουθεί την παρακάτω διαδοχή. Αρχικά ορίζονται οι αρχικές συνθήκες για τη συνεχή φάση (αέρας) καθώς και για τη διακριτή (σταγονίδια νερού). Στη συνέχεια εισάγεται η δύναμη σύζευξης της ορμής και γίνεται

ο υπολογισμός της. Ακολουθεί ο υπολογισμός των θέσεων και των ταχυτήτων των σωματιδίων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Adams-Bashforth. Κατόπιν, γίνεται η χρονική επίλυση της εξίσωσης της ορμής στις τρεις διαστάσεις, για τη συνεχή φάση, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Adams-Bashforth για τους όρους συναγωγής και τη μέθοδο Crank-Nicolson για τους γραμμικούς όρους διάχυσης. Σε αυτό το στάδιο γίνεται και ο υπολογισμός ενδιάμεσων τιμών για την ταχύτητα και την πίεση. Έπεται ο υπολογισμός της ψευδοπίεσης, μέσω της εξίσωσης Poisson και ακολουθεί ο υπολογισμός των ταχυτήτων και της πίεσης της συνεχούς φάσης, για την ταυτόχρονη ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας. Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνονται οι υπολογισμοί του χρονικού βήματος αυτού και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο επόμενο χρονικό βήμα.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής υπολογισμών



## 5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης DNS για τη μελέτη της τυρβώδους διφασικής ροής αερίου – υγρού σε κατακόρυφο σωλήνα σταθερής διατομής.

### 5.1 Παραδοχές

Κατά τους υπολογισμούς, έγιναν θεωρήθηκε διφασική τυρβώδης ροή αέρα–σταγονιδίων υγρού σε κατακόρυφο αγωγό. Ο σωλήνας είναι ευθύγραμμος με ακτίνα  $R = 1.5915$  (αδιάστατη) και άπειρο μήκος. Κατά μήκος του αγωγού ρέει αέρας με σταθερή ροή μάζας. Ο αριθμός Reynolds είναι ίσος με 4900, με βάση τη μέση ταχύτητα και την ακτίνα του σωλήνα, και ο αριθμός  $Re_\tau = 180$ , βασισμένος στην ταχύτητα τριβής. Η κατεύθυνση της τυρβώδους διφασικής ροής είναι στην κατακόρυφη διεύθυνση  $z$  (διεύθυνση της βαρύτητας), με φορά προς τα κάτω. Το τοίχωμα του αγωγού βρίσκεται στο  $r = R$  και οι διευθύνσεις  $z$  και  $\theta$  είναι περιοδικές. Τέλος,  $u_r$ ,  $u_\theta$  και  $u_z$  είναι οι ταχύτητες του ρευστού στις αντίστοιχες διευθύνσεις. Κατά τους υπολογισμούς, όσον αφορά τη συνεχή φάση, χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικό πλέγμα  $65 \times 65 \times 65$ . Μια σειρά συγκρίσεων αποτελεσμάτων για τη μονοφασική ροή έδειξε καλή ταύτιση με τα αποτελέσματα για πυκνότερο πλέγμα ( $129 \times 129 \times 129$ ), καθώς επίσης και με αντίστοιχα δημοσιευμένα των Orlandi και Fatica (1997) και των Eggels, et al. (1994). Επομένως επιλέχθηκε το αραιότερο πλέγμα προκειμένου να πραγματοποιηθεί η παραμετρική μελέτη του προβλήματος μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα.

Στην παρούσα εργασία οι όροι “σωματίδιο” και “σταγονίδιο” έχουν την ίδια έννοια και χρησιμοποιούνται χωρίς καμία διάκριση. Τα σταγονίδια αναπαρίστανται υπό τη μορφή σφαιρών, σταθερής διαμέτρου  $d^+ = 0.01056$  και  $d_p^+ = \frac{d_p u_0^*}{\nu}$  σε μονάδες τοίχου με λόγο πυκνοτήτων  $\rho_p / \rho_f = 1000$ , όπου  $\rho_p$  και  $\rho_f$  η πυκνότητα του σωματιδίου και του αέρα αντίστοιχα. Αρχικά θεωρείται μονοφασική ροή αέρα στον αγωγό με σταθερή ροή μάζας. Τα σταγονίδια εισάγονται μέσα στην πλήρως ανεπτυγμένη ροή από το τοίχωμα με ταχύτητες  $u_\theta = 0$ ,  $u_r = u_r$  και  $u_z = 15u_r$ , όπου  $u_r$  η ταχύτητα τριβής. Τα σταγονίδια απομακρύνονται από τη ροή όταν χτυπήσουν

πάνω στο τοίχωμα, όπου γίνεται η θεώρηση ότι έχουν εναποτεθεί και μετά την εναπόθεσή τους παραμένουν προσκολλημένα πάνω στο τοίχωμα. Τέλος, οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων έχουν αγνοηθεί.

Στην εργασία αυτή, το κλάσμα όγκου των σωματιδίων δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Επιλέχθηκε να είναι γνωστός ο αριθμός των σωματιδίων που εκτοξεύονται μέσα στη ροή ανά χρονικό βήμα, και συνεπώς ο αριθμός των σωματιδίων που υπάρχουν μέσα στο σωλήνα μεταβάλλεται με το χρόνο. Ένα μέρος από αυτά συμπαρασύρεται με τη ροή και άλλα εναποθέτονται στα τοιχώματα. Μετά από κάποια αρχική μεταβατική περίοδο, ο αριθμός των σωματιδίων που εκτοξεύονται στη ροή είναι ίσος με αυτόν που εναποθέτονται στα τοιχώματα. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει βέβαια στιγμιαία, αλλά η ισορροπία αντιστοιχεί σε μέσες χρονικά στιγμές. Σε αυτήν την κατάσταση υπολογίζεται το κλάσμα όγκου των σωματιδίων (μέση χρονική τιμή) που υπάρχουν μέσα στο σωλήνα.

Στην παρούσα εργασία ενδιαφέρει η πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδης διφασική ροή. Η εξακρίβωση έγινε καταγράφοντας τη χρονική εξέλιξη του κλάσματος όγκου των σωματιδίων, την ιξώδη τριβή στο τοίχωμα και την πτώση πίεσης για κάθε προσομοίωση, επιβεβαιώνοντας ότι αυτές οι παράμετροι δεν εξελίσσονται περαιτέρω στο χρόνο. Οι προσομοιώσεις συνεχίστηκαν έτσι ώστε να γίνουν οι υπολογισμοί των στατιστικών ποσοτήτων που ενδιαφέρουν. Η διάρκεια των υπολογισμών ποικίλλει ανάλογα με το κλάσμα όγκου των σταγονιδίων στη ροή και αυξάνεται με την αύξηση του κλάσματος όγκου αυτών. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η μικρότερη χρονική διάρκεια που εξετάστηκε, (αντιστοιχεί σε κλάσμα όγκου  $\alpha = 3.8542 \times 10^{-6}$ ) ήταν 600 αδιάστατες χρονικές μονάδες ενώ η μεγαλύτερη είχε διάρκεια περίπου 6000 χρονικές μονάδες.

Σε συμφωνία με τους Mito and Hanratty (2006), με περαιτέρω αύξηση του φορτίου όγκου των σωματιδίων η συγκέντρωση των σωματιδίων στη ροή δεν γινότανε ποτέ πλήρως ανεπτυγμένη, και εξελισσόταν συνεχώς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη συνεχή αύξηση του φορτίου όγκου των σωματιδίων με την πάροδο του χρόνου. Παρόλα αυτά, θα παρουσιαστούν κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα για τη ροή για αυτές τις περιπτώσεις.

Σε αυτό το πλαίσιο πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη ως προς τη διάμετρο των σωματιδίων καθώς και τη βαρύτητα στις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων έτσι ώστε να διερευνηθεί η επίδραση αυτών πάνω στους ρυθμούς εναπόθεσης των σωματιδίων. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν δύο διαμέτροι σωματιδίων, με  $d^+ = 0.01056$  και  $d^+ = 0.00528$ , σε μονάδες τοίχου. Για τη μεγαλύτερη διάμετρο οι υπολογισμοί επαναλήφθηκαν λαμβάνοντας υπόψη τη βαρύτητα στην κατακόρυφη διεύθυνση κίνησης. Συνοπτικά, οι παράμετροι που εξετάστηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1.

**Πίνακας 5.1:** Περιγραφή των υπό εξέταση παραμέτρων

Περιπτώσεις	Διάμετρος Σωματιδίου $d^+$ (αδιάστατη)	Επίδραση της βαρύτητας
1 <sup>η</sup>	0.01056	Δεν λαμβάνεται υπόψη
2 <sup>η</sup>	0.00528	Δεν λαμβάνεται υπόψη
3 <sup>η</sup>	0.01056	Λαμβάνεται υπόψη

## 5.2 Αποτελέσματα 1<sup>ης</sup> Περίπτωσης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται αποτελέσματα από την παραμετρική μελέτη ως προς το κλάσμα όγκου των σωματιδίων, για τη μεγαλύτερη διάμετρο του σωματιδίου  $d^+ = 0.01056$  και μηδενικό βαρυτικό πεδίο. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να φανεί η επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής μεταξύ των δύο φάσεων πάνω στη μέση χρονικά ταχύτητα του ρευστού στην ταχύτητα της ροής και τις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού, καθώς επίσης και στους ρυθμούς εναπόθεσης των σωματιδίων. Τέλος, θα παρουσιαστούν αποτελέσματα σχετικά με τη μείωση της τριβής στα τοιχώματα εξαιτίας της παρουσίας των σωματιδίων στη ροή.

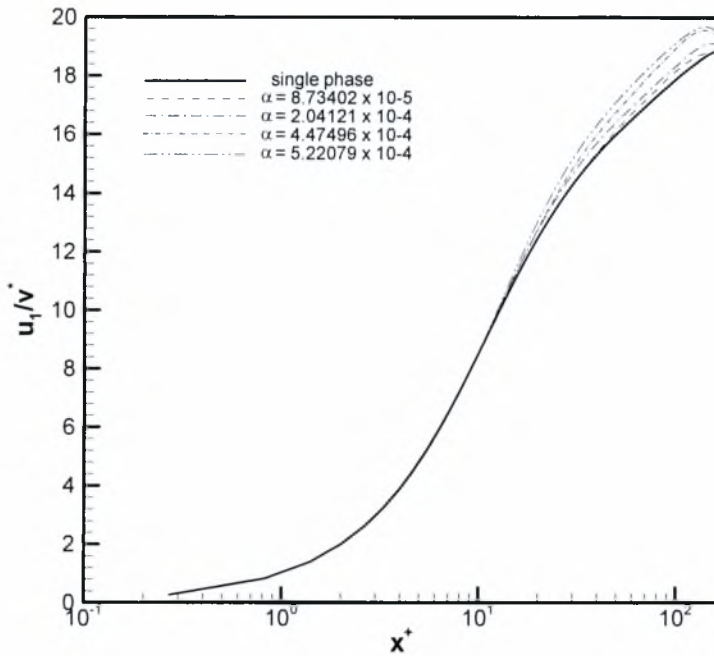
Στα Σχήματα 5.1 και 5.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα της χρονικά μέσης ταχύτητας του ρευστού στη διεύθυνση της ροής σε συνάρτηση με την απόσταση από το τοίχωμα σε μονάδες τοίχου, αδιαστατοποιώντας με την ταχύτητα τριβής και το

ιξώδες. Συγκεκριμένα, το *Σχήμα 5.1* δείχνει τις κατανομές της μέσης ταχύτητας για διάφορες ενδεικτικές περιπτώσεις κλασμάτων όγκου σωματιδίων και οι οποίες συγκρίνονται με την αντίστοιχη για τη μονοφασική ροή. Τα κλάσματα όγκου  $\alpha = 8.73 \times 10^{-5}$ ,  $2.04 \times 10^{-4}$ ,  $4.47 \times 10^{-4}$  και  $5.22 \times 10^{-4}$ , αντιστοιχούν σε ρυθμούς εκτόξευσης σωματιδίων 4, 8, 12 και 13 σωματίδια ανά χρονικό βήμα. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η διφασική ροή κατέληγε σε κατάσταση ισορροπίας.

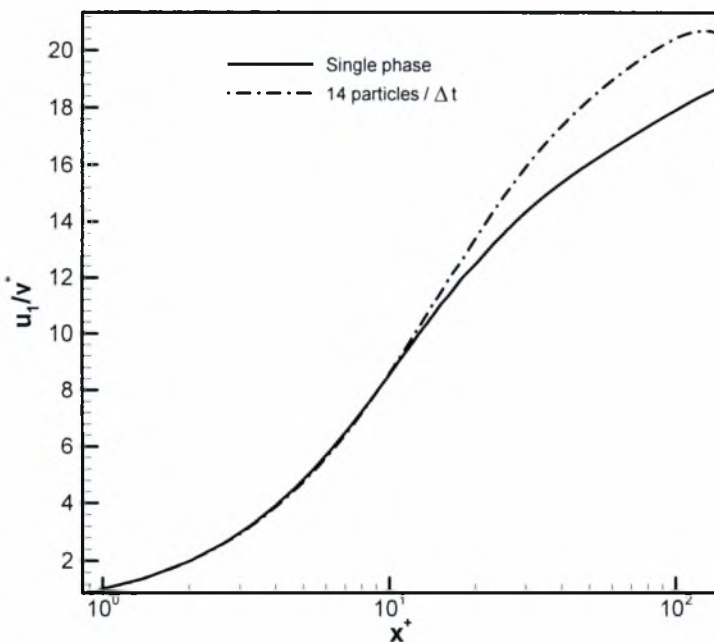
Το *Σχήμα 5.1* δείχνει ότι η χρονικά μέση ταχύτητα κατά τη διεύθυνση z στην περίπτωση της μονοφασικής ροής είναι μικρότερη σε σύγκριση με αυτές των διφασικών ροών, κυρίως στην κεντρική περιοχή του σωλήνα. Η προσθήκη των σωματιδίων έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας του ρευστού μακριά από το τοίχωμα και γίνεται μεγαλύτερη με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων. Το γεγονός ότι όλες οι καμπύλες συμπίπτουν μεταξύ τους για  $x^+ < 10$  οφείλεται στο ότι η αδιαστατοποίηση έχει γίνει με βάση την αντίστοιχη ταχύτητα τριβής σε κάθε περίπτωση. Δεδομένου ότι όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν διατηρώντας σταθερή την ροή μάζας διαμέσου του σωλήνα, η αύξηση της ταχύτητας, όπως φαίνεται με βάση το *Σχήμα 5.1*, δείχνει ότι η ταχύτητα τριβής μειώνεται με την προσθήκη των σωματιδίων και αυτή η μείωση αυξάνεται με το φορτίο όγκου των σωματιδίων. Σε μικρά φορτία όγκου σωματιδίων παρατηρούνται μικρές διαφορές στην ταχύτητα του ρευστού λόγω της παρουσίας των σωματιδίων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, από ένα ρυθμό εκτόξευσης σωματιδίων στη ροή και παραπάνω η συγκέντρωση των σωματιδίων αυξάνεται συνεχώς στην εξέλιξη του χρόνου. Δηλαδή σε αυτές τις περιπτώσεις δεν επιτυγχάνονται στο σωλήνα συνθήκες μόνιμης κατάστασης. Για το λόγο αυτό δεν ήταν εφικτός ο υπολογισμός του συντελεστή εναπόθεσης ούτε του κλάσματος όγκου των σωματιδίων στη ροή. Παρόλα αυτά η επίδραση των σωματιδίων στα χαρακτηριστικά της ροής είναι μεγάλη εξαιτίας του γεγονότος ότι καταλαμβάνουν σημαντικό τμήμα της μάζας και της ορμής του συστήματος. Στο *Σχήμα 5.2* παρουσιάζεται ενδεικτικά η μεταβολή της ταχύτητας σε συνάρτηση με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα για την περίπτωση της μονοφασικής ροής σε σύγκριση με τη διφασική ροή, για την περίπτωση που εγχύονται στο σωλήνα 14 σωματίδια ανά χρονικό βήμα. Και σε αυτή την περίπτωση οι αλλαγές που προκαλούνται στην κατανομή της μέσης χρονικά

ταχύτητας στη διεύθυνση της ροής είναι ίδιες με αυτές που περιγράφηκαν προηγουμένως.



Σχήμα 5.1: Μεταβολή της ταχύτητας με την απόσταση από το τοίχωμα για διάφορα κλάσματα όγκου



Σχήμα 5.2: Σύγκριση της κατανομής της ταχύτητας με/χωρίς σωματίδια

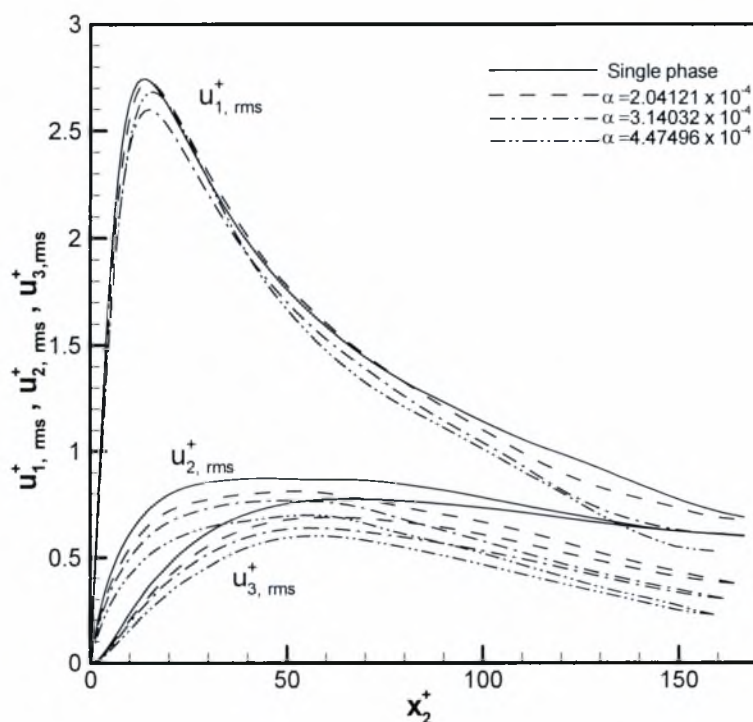


Στο *Σχήμα 5.3* παρουσιάζονται οι συνιστώσες της r.m.s. ταχύτητας σε συνάρτηση με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες για τη μονοφασική ροή, για κλάσματα όγκου σωματιδίων  $\alpha = 2.04121 \times 10^{-4}$ ,  $3.14032 \times 10^{-4}$  και  $4.47496 \times 10^{-4}$ . Το *Σχήμα 5.3* δείχνει ότι οι τιμές των τριών συνιστωσών της r.m.s. ταχύτητας μειώνονται με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σταγονιδίων μέσα στη ροή. Η επίδραση των σωματιδίων είναι περισσότερο έντονη στις  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  συνιστώσες, οι οποίες μειώνονται σε σχέση με τη μονοφασική ροή σε όλη την περιοχή του σωλήνα, και είναι μεγαλύτερη κυρίως στην κεντρική περιοχή του σωλήνα. Η συνιστώσα  $u_{1,rms}$  μειώνεται σε μικρότερο βαθμό σε σχέση με τις άλλες δύο, και η μεγαλύτερη μείωση σε σχέση με τη μονοφασική ροή παρατηρείται κυρίως κοντά στο τοίχωμα και στο κέντρο του σωλήνα. Τα τοπικά μέγιστα της  $u_{1,rms}$  μετατοπίζονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το τοίχωμα, ενώ το μέγιστό της μειώνεται λίγο σε σχέση με τη μονοφασική ροή.

Και οι τρεις συνιστώσες  $u_{1,rms}$ ,  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$ , στις αντίστοιχες διευθύνσεις 1, 2 και 3 (ή z, θ και r αντίστοιχα) αυξάνονται στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα, λαμβάνουν μια μέγιστη τιμή και μετέπειτα οι κατανομές των r.m.s. ταχυτήτων μειώνονται. Ειδικότερα για την ταχύτητα  $u_{1,rms}$ , οι καμπύλες ξεκινούν από την τιμή μηδέν, αποκτούν μέγιστο στην περιοχή  $11.5 < x_2^+ < 15.3$  με τιμές  $2.70 < u_{1,rms} < 2.75$  και στη συνέχεια μειώνονται απότομα. Η μείωση αυτή συνεχίζεται έως ότου η ταχύτητα φτάσει σε μια ορισμένη τιμή, χωρίς να λάβει ποτέ μηδενικές τιμές. Από την τιμή αυτή και πέραν τείνει να μειώνεται ελάχιστα. Η συνιστώσα  $u_{2,rms}$ , αυξάνεται κοντά στο τοίχωμα, αποκτά μέγιστο στην περιοχή με  $36 < x_2^+ < 70$  με τιμές που κυμαίνονται στην περιοχή  $0.65 < u_{2,rms} < 0.86$ , και έπειτα μειώνεται επίσης ελάχιστα. Σε ότι αφορά στην ταχύτητα  $u_{3,rms}$ , οι καμπύλες ξεκινούν επίσης από την τιμή μηδέν στο τοίχωμα και αυξάνονται έως ότου φτάσουν ένα μέγιστο στην περιοχή με  $50 < x_2^+ < 80$ . Από εκεί και πέραν παραμένει για λίγο σχεδόν σταθερή και στη συνέχεια αρχίζει να μειώνεται. Γενικά, παρατηρείται ότι η  $u_{1,rms}$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες, ενώ οι  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  παρουσιάζουν μικρότερες αποκλίσεις μεταξύ τους με τη  $u_{2,rms}$  να είναι μεγαλύτερη από τη  $u_{3,rms}$ . Οι τιμές τους όμως δεν παρουσιάζουν μεταξύ τους τόσο μεγάλες αποκλίσεις όσο με τη  $u_{1,rms}$ .

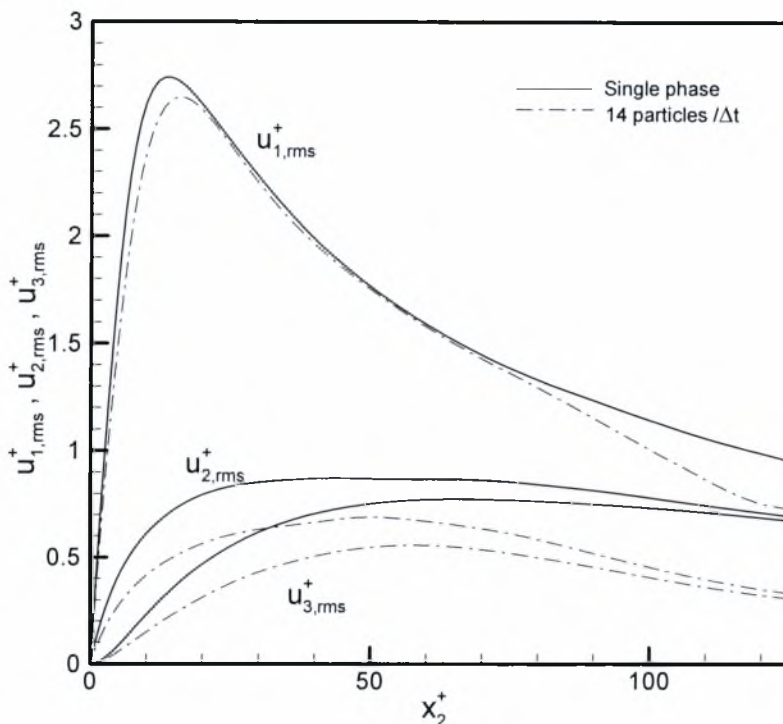
Το *Σχήμα 5.4* δείχνει τις συνιστώσες της ταχύτητας r.m.s. σε συνάρτηση με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα στην περίπτωση όπου εγχύονται στο

σωλήνα 14 σωματίδια ανά χρονικό βήμα και συγκρίνονται με τη μονοφασική ροή. Υπενθυμίζεται ότι για αυτή την περίπτωση η συγκέντρωση των σωματιδίων αυξάνεται με το χρόνο και δεν φτάνει σε μια κατάσταση ισορροπίας. Αυτό είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Mito και Hanratty (2006). Συνεπώς οι κατανομές των r.m.s. ταχυτήτων του Σχήματος 5.4 δεν αντιστοιχούν σε κάποιο συγκεκριμένο φορτίο όγκου σωματιδίων και συζητούνται μόνο ποιοτικά. Η επίδραση των σωματιδίων πάνω στις χρονικά μέσες τιμές των r.m.s. ταχυτήτων των σωματιδίων είναι ίδια όπως περιγράφηκε προηγουμένως για μικρότερα κλάσματα όγκου σταγονιδίων στο Σχήμα 5.3. Και σε αυτή την περίπτωση οι συνιστώσες  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  της ταχύτητας είναι σαφώς μικρότερες από την  $u_{1,rms}$  της περίπτωσης μονοδιάστατης ροής αέρα μέσα στον κατακόρυφο σωλήνα.



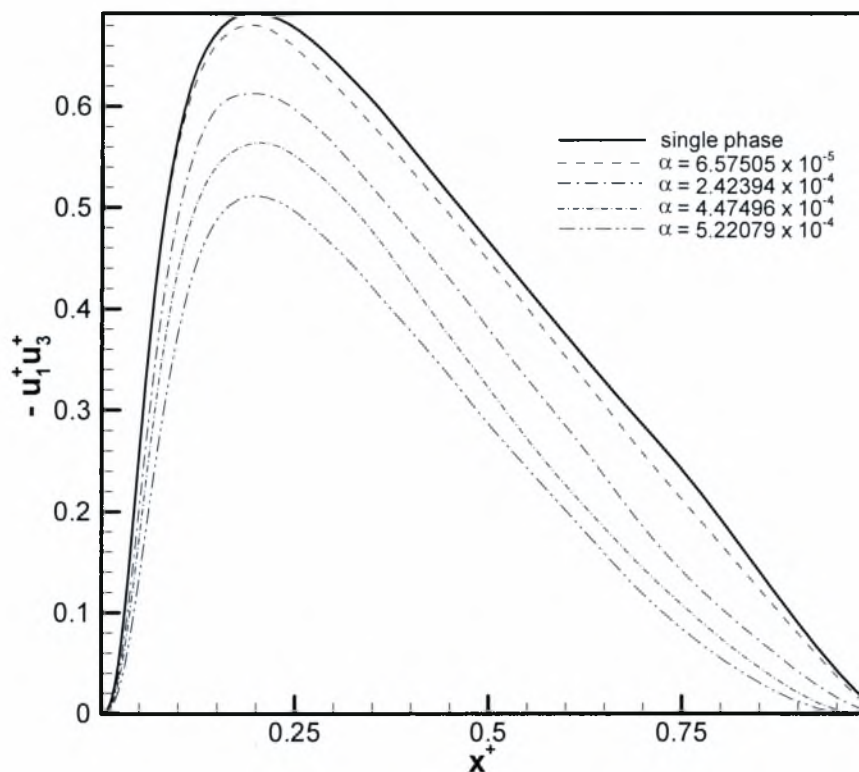
Σχήμα 5.3: Μεταβολή της ταχύτητας r.m.s. σε συνάρτηση με την απόσταση από το τοίχωμα





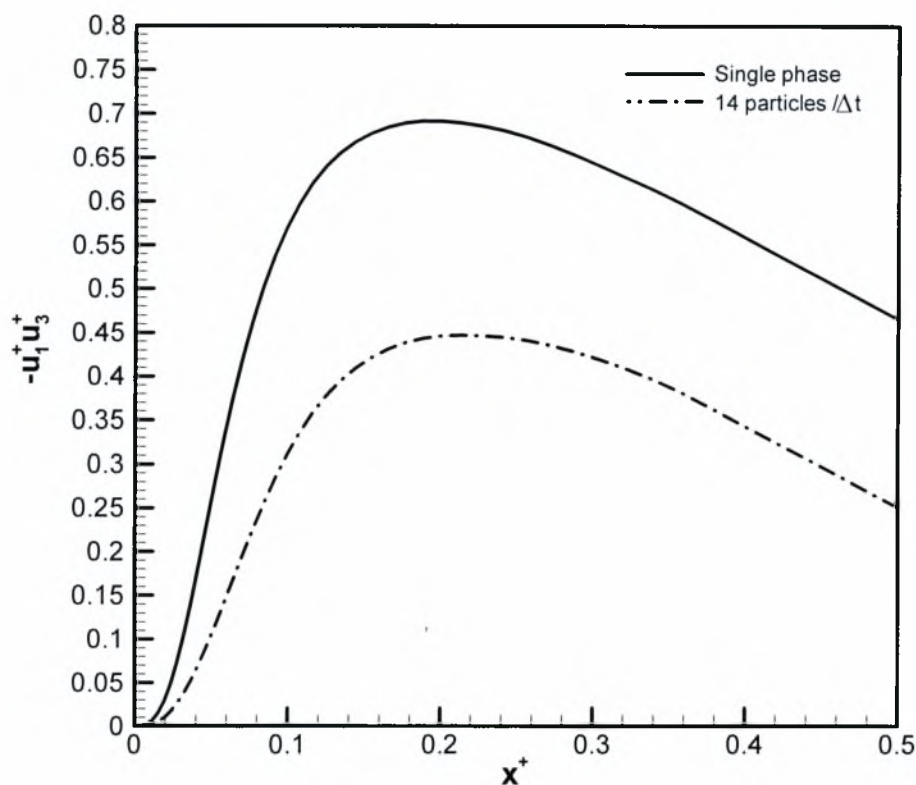
**Σχήμα 5.4:** Μεταβολή της ταχύτητας r.m.s. με την απόσταση από το τοίχωμα

Στη συνέχεια το ενδιαφέρον εστιάζεται στη επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής στη διατμητική τάση Reynolds του ρευστού  $-u_1^+ u_3^+$ , παρουσία σωματιδίων. Το Σχήμα 5.5 δείχνει την κατανομή  $-u_1^+ u_3^+$  για διάφορα κλάσματα όγκου σωματιδίων και συγκρίνονται με εκείνη για τη μονοφασική ροή,  $\alpha = 6.57 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 2.42 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha = 4.47 \times 10^{-4}$  και  $\alpha = 5.22 \times 10^{-4}$ . Σε πρώτη φάση, η προσθήκη των σωματιδίων έχει ως αποτέλεσμα η διατμητική τάση Reynolds να μειώνεται σε σχέση με τη μονοφασική ροή με το κλάσμα όγκου των σωματιδίων. Για όλες τις περιπτώσεις, οι τάσεις αυξάνονται στην περιοχή  $0 < x^+ < 0.15$ , αποκτούν ένα μέγιστο και από εκεί και πέρα μειώνονται συνεχώς μέχρις ότου πάρουν την τιμή μηδέν στο κέντρο του σωλήνα. Επίσης, το μέγιστο των κατανομών του  $-u_1^+ u_3^+$  εμφανίζεται στην περιοχή με  $0.19 < x^+ < 0.21$ . Το μέγεθος του τοπικού μεγίστου του  $-u_1^+ u_3^+$  μειώνεται με την προσθήκη των σωματιδίων. Συγκεκριμένα, η μέγιστη τιμή είναι 0.691 για τη μονοφασική ροή, ενώ για  $\alpha = 6.57 \times 10^{-5}$  είναι 0.679, για  $\alpha = 2.42 \times 10^{-4}$  είναι 0.612, για  $\alpha = 4.47 \times 10^{-4}$  είναι 0.563 και τέλος για  $\alpha = 5.22 \times 10^{-4}$  η μέγιστη τιμή είναι 0.511.



**Σχήμα 5.5:** Επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής παρουσία σωματιδίων στη διατμητική τάση Reynolds του ρευστού  $-u_1^+u_3^+$

Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζεται η αντίστοιχη κατανομή του  $-u_1^+u_3^+$  για την περίπτωση που εκτοξεύονται 14 σωματίδια ανά χρονικό βήμα και συγκρίνονται με τη μονοφασική ροή. Παρόμοια σχόλια και συμπεράσματα προκύπτουν και για αυτή την περίπτωση.



**Σχήμα 5.6:** Επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής διατμητική τάση Reynolds του ρευστού  $-u_1^+ u_3^+$

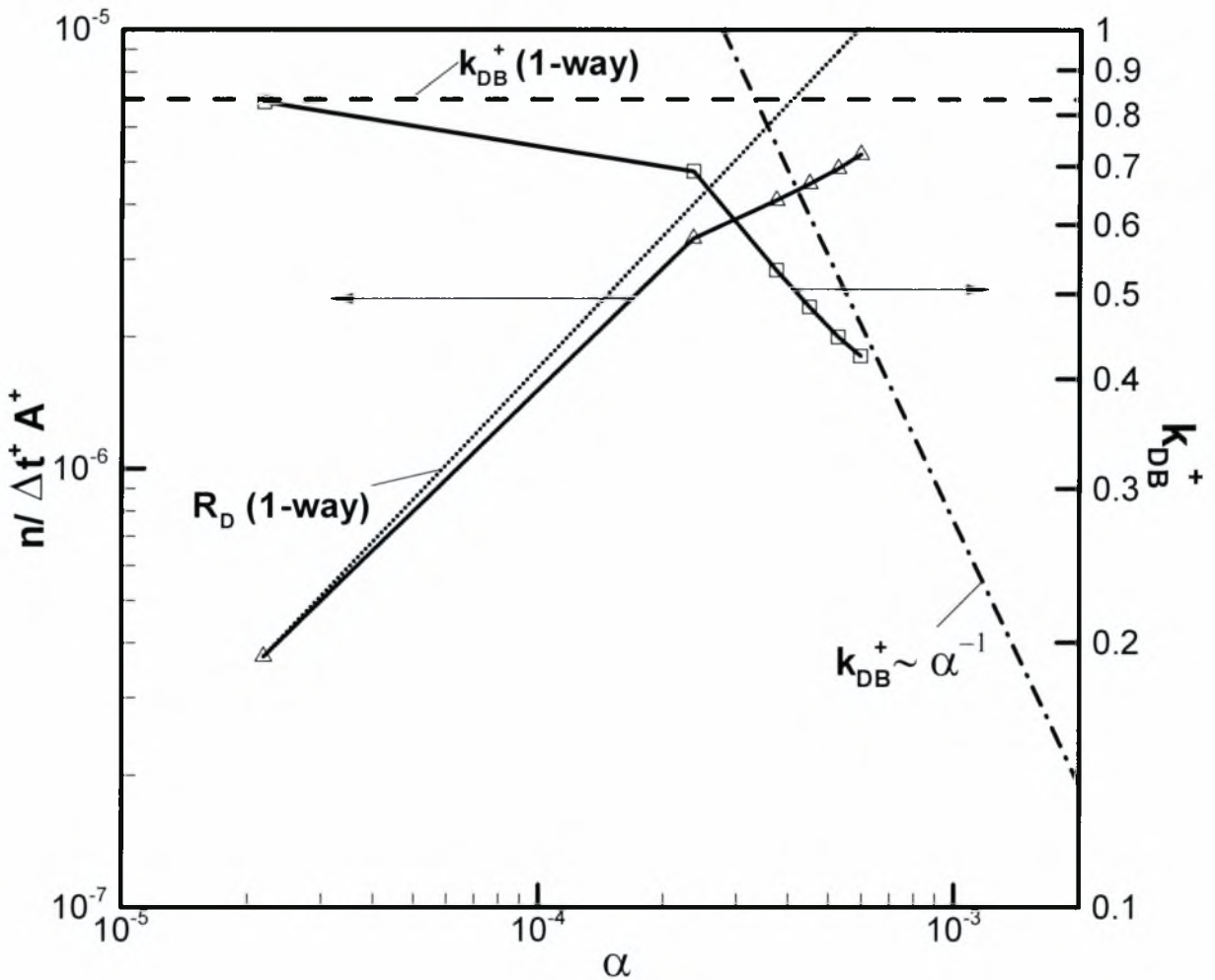
Στη συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα που αναδεικνύουν την επίδραση της δύναμης σύζευξης μεταξύ των δύο φάσεων, παρουσία σωματιδίων, και της αλλαγής που αυτή προκαλεί στα χαρακτηριστικά της ροής πάνω στο ρυθμό και το συντελεστή εναπόθεσης. Το Σχήμα 5.7 δείχνει το ρυθμό εναπόθεσης  $n / \Delta t^+ A^+$  καθώς και στο συντελεστή εναπόθεσης σωματιδίων  $k_{DB}^+$  για διάφορα κλάσματα όγκου σωματιδίων. Τα αποτελέσματα αφορούν στην περίπτωση όπου λαμβάνεται υπόψη η δύναμη σύζευξης (συνεχείς γραμμές) και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα όπου η σύζευξη ορμής των δύο φάσεων έχει αγνοηθεί (διακεκομμένες γραμμές). Η τετμημένη αντιστοιχεί στο κλάσμα όγκου των σωματιδίων, ενώ στην τεταγμένη αριστερά παρουσιάζεται ο ρυθμός εναπόθεσης και δεξιά ο συντελεστής εναπόθεσης των σωματιδίων. Τα αποτελέσματα περιορίζονται για περιπτώσεις που έχει επιτευχθεί μόνιμη κατάσταση και ισορροπία στο ρυθμό με τον οποίο τα σωματίδια εναποθέτονται στο τοίχωμα.

Ο ρυθμός εναπόθεσης των σωματιδίων  $R_D$  ισούται με  $R_D = n / \Delta t^+ A^+$ , όπου  $n$  ο αριθμός των σταγονιδίων που εισάγονται στη ροή ανά χρονικό βήμα  $\Delta t^+$  και  $A^+$  η αδιάστατη επιφάνεια του τοιχώματος. Στην πλήρως ανεπτυγμένη περιοχή της ροής πρέπει να είναι ίσος (μέση χρονικά τιμή) με το ρυθμό έγχυσης των σωματιδίων στη ροή και το *Σχήμα 5.7* δείχνει ότι ο ρυθμός εναπόθεσης  $R_D$  μεταβάλλεται γραμμικά με το κλάσμα όγκου στη ροή για μικρά κλάσματα όγκου. Συγκεκριμένα, ξεκινά από την τιμή  $R_D = 3.7 \times 10^{-7}$  που αντιστοιχεί σε κλάσμα όγκου  $\alpha = 2.2 \times 10^{-5}$  για ρυθμό εκτόξευσης σωματιδίων στη ροή 1 σωματίδιο ανά χρονικό βήμα. Η γραμμική εξάρτηση του ρυθμού εναπόθεσης με το κλάσμα όγκου των σωματιδίων παρατηρείται έως κλάσμα όγκου  $\alpha = 2.342 \times 10^{-4}$ , όπου ο ρυθμός εναπόθεσης λαμβάνει την τιμή  $R_D = 3.33 \times 10^{-6}$ . Από εκεί και πέραν η καμπύλη του  $R_D$  αλλάζει κλίση, η οποία είναι μικρότερη σε σχέση με τη γραμμική περιοχή. Αυτό υποδηλώνει ότι η αύξηση του ρυθμού με τον οποίο τα σωματίδια εναποθέτονται πάνω στην επιφάνεια μειώνεται σε σχέση με τη γραμμική περιοχή. Το μέγιστο φορτίο το οποίο εξετάστηκε ήταν  $\alpha = 5.76 \times 10^{-4}$  για το οποίο αντιστοιχεί ρυθμός εναπόθεσης  $R_D = 5.12 \times 10^{-6}$ . Αν και οι υπολογισμοί για μεγαλύτερα κλάσματα όγκου δεν έχουν πραγματοποιηθεί εξαιτίας υπολογιστικών περιορισμών το σχήμα δίνει μια σαφή εντύπωση ότι για μεγαλύτερα κλάσματα όγκου ο ρυθμός εναπόθεσης προσεγγίζει μια σταθερή τιμή. Το *Σχήμα 5.7* δείχνει επίσης τους ρυθμούς εναπόθεσης που προκύπτουν για διάφορα κλάσματα όγκου (τα οποία είναι διαφορετικά σε σχέση με πριν) αγνοώντας τη δύναμη σύζευξης ορμής μεταξύ των δύο φάσεων (1-way). Είναι εμφανές ότι ο ρυθμός εναπόθεσης είναι γραμμικός για όλο το εύρος των κλασμάτων όγκου που μελετήθηκαν. Συνεπώς οι υπολογισμοί στην παρούσα διπλωματική εργασία δείχνουν ότι ένας πιθανός λόγος για την πειραματικά παρατηρούμενη συμπεριφορά του συντελεστή εναπόθεσης, και η οποία επιβεβαιώνεται και με τους παρόντες DNS υπολογισμούς, είναι η σύζευξη ορμής μεταξύ των δύο φάσεων και οι αλλαγές που προκαλούν τα σωματίδια πάνω στη ροή. Βέβαια είναι δυνατό (αν όχι σίγουρο) ότι υπάρχουν και άλλοι λόγοι που μπορούν να εξηγήσουν τις αλλαγές της εναπόθεσης των σωματιδίων.

Όπως έχει φανεί από τα *Σχήματα 5.1* έως και *5.6* τα σωματίδια μειώνουν σημαντικά τη μέση χρονικά ταχύτητα του ρευστού καθώς και τις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού. Από τις τελευταίες, μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ακτινική συνιστώσα, η οποία μειώνεται σε όλο το σωλήνα από την παρουσία των σωματιδίων.

Αυτό σημαίνει ότι μειώνεται και η ικανότητα της τύρβης να μεταφέρει τα σωματίδια και συνεπώς η διασπορά των σωματιδίων μειώνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σωματίδια να διαγράφουν σχεδόν ευθύγραμμες κατακόρυφες τροχιές μέσα στο σωλήνα και να μειώνεται ο αριθμός των σωματιδίων που κινούνται προς το τοίχωμα, επομένως και η εναπόθεση των σωματιδίων.

Το *Σχήμα 5.7* δείχνει το συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$ . Η διαφορετική συμπεριφορά του σχέση με το ρυθμό εναπόθεσης οφείλεται στον ορισμό της ποσότητας. Έτσι, για παράδειγμα, σε μικρά φορτία όγκου σωματιδίων όπου ο συντελεστής εναπόθεσης δεν μεταβάλλεται σημαντικά και είναι ίδιος, αφού οι ρυθμοί εναπόθεσης αυξάνονται περίπου γραμμικά. Από την άλλη, σε μεγάλα φορτία όγκου σωματιδίων ο συντελεστής εναπόθεσης μειώνεται, γεγονός που σημαίνει ότι ο ρυθμός εναπόθεσης των σωματιδίων προσεγγίζει μια σταθερή τιμή, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Το *Σχήμα 5.7* συγκρίνει τους συντελεστές εναπόθεσης όταν λαμβάνεται υπόψη και αγνοείται η δύναμη σύζευξης μεταξύ των δύο φάσεων. Για μικρά κλάσματα όγκου σωματιδίων οι συντελεστές εναπόθεσης είναι οι ίδιοι, γεγονός που είναι λογικό καθώς δεν υπάρχει σημαντική εναλλαγή ορμής μεταξύ των δύο φάσεων εξαιτίας του μικρού κλάσματος όγκου που τα σωματίδια καταλαμβάνουν. Αντίθετα, με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων οι διαφορές μεταξύ των δύο γραμμών είναι περισσότερο εμφανείς, γεγονός που οφείλεται στην σύζευξη ορμής των δύο φάσεων. Τέλος, σε μεγάλα φορτία όγκου σωματιδίων το *Σχήμα 5.7* δείχνει ότι ο συντελεστής εναπόθεσης μειώνεται περίπου ως  $\alpha^{-1}$ , σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

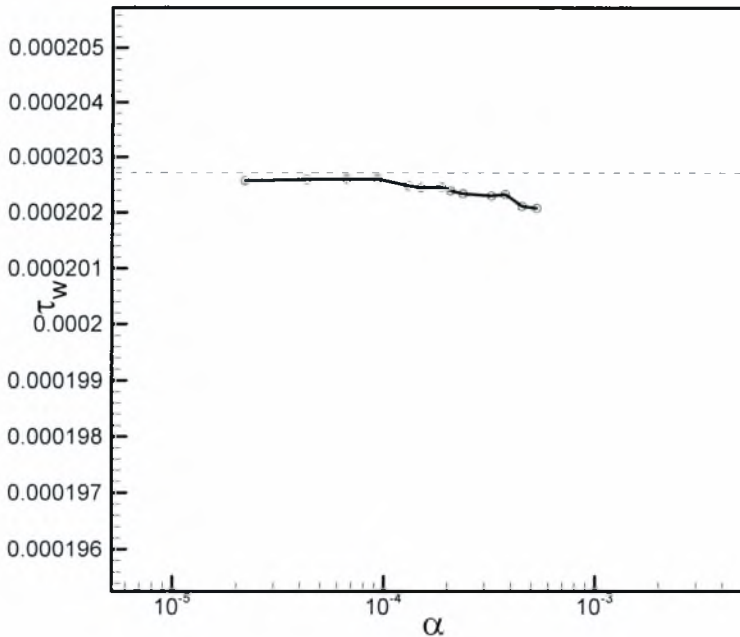


**Σχήμα 5.7 :** Επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής, παρουσία σωματιδίων, στο ρυθμό εναπόθεσης  $n / \Delta t^+ A^+$  καθώς και στο συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$

Τέλος, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις αλλαγές που παρατηρούνται στην ιξώδη διατμητική τάση στο τοίχωμα από την προσθήκη των σωματιδίων. Το Σχήμα 5.8 δείχνει την κατανομή της ιξώδους διατμητικής τάσης στο τοίχωμα για διάφορα κλάσματα όγκου σωματιδίων. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις διφασικών ροών χωρίς τη δύναμη σύζευξης των δύο φάσεων και η οποία συμπίπτει με τη μονοφασική ροή. Το Σχήμα 5.8 δείχνει επίσης ότι η διατμητική τάση στο τοίχωμα μειώνεται λίγο με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων στη



ροή και λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της  $\tau_w = 2.020 \times 10^{-4}$  για κλάσμα όγκου  $\alpha = 5.23 \times 10^{-4}$ .



**Σχήμα 5.8 :** Επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής παρουσία σωματιδίων στη διατμητική τάση του τοιχώματος, μεταβαλλόμενο με το κλάσμα όγκου  $\alpha$ .

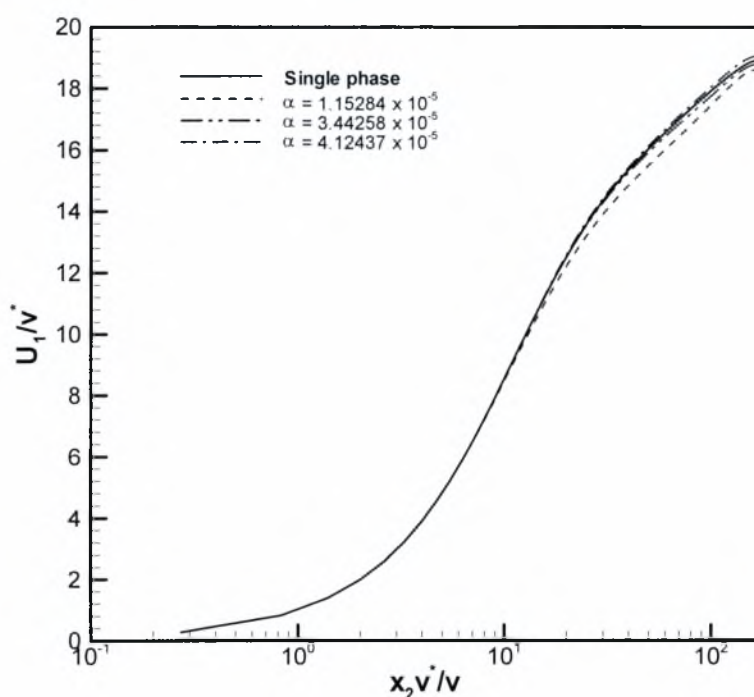
### 5.3 Αποτελέσματα 2<sup>ης</sup> Περίπτωσης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται αποτελέσματα από την παραμετρική μελέτη ως προς το κλάσμα όγκου των σωματιδίων, για τη μικρότερη διάμετρο του σωματιδίου  $d^+ = 0.00528$  και μηδενικό βαρυτικό πεδίο. Και σε αυτήν την περίπτωση, τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδειχθούν οι διαφορές που οφείλονται στη σύζευξη ορμής μεταξύ των δύο φάσεων και θα περιοριστούν στη μέση χρονικά και στις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού και στους ρυθμούς εναπόθεσης των σωματιδίων.

Στο *Σχήμα 5.9* παρουσιάζεται η μεταβολή της χρονικά μέσης ταχύτητας του ρευστού στη διεύθυνση της ροής με την απόσταση από το τοίχωμα για διάφορες τιμές



κλάσματος όγκου των σωματιδίων  $\alpha = 1.15 \times 10^{-5}$ ,  $3.44 \times 10^{-5}$  και  $4.12 \times 10^{-5}$ . Ίδιες παρατηρήσεις μπορεί να γίνουν όπως και στην περίπτωση των σωματιδίων με μεγαλύτερη διάμετρο. Εξαιτίας του μικρού φορτίου μάζας των σωματιδίων, οι αλλαγές στη χρονικά μέση ταχύτητα της συνεχούς φάσης είναι πολύ μικρές σε σχέση με την κατανομή της ταχύτητας για τη μονοφασική ροή. Η ταχύτητα στο Σχήμα 5.9 έχει αδιαστατοποιηθεί με την ταχύτητα τριβής και το ιξώδες, και η απόσταση με την ταχύτητα τριβής.



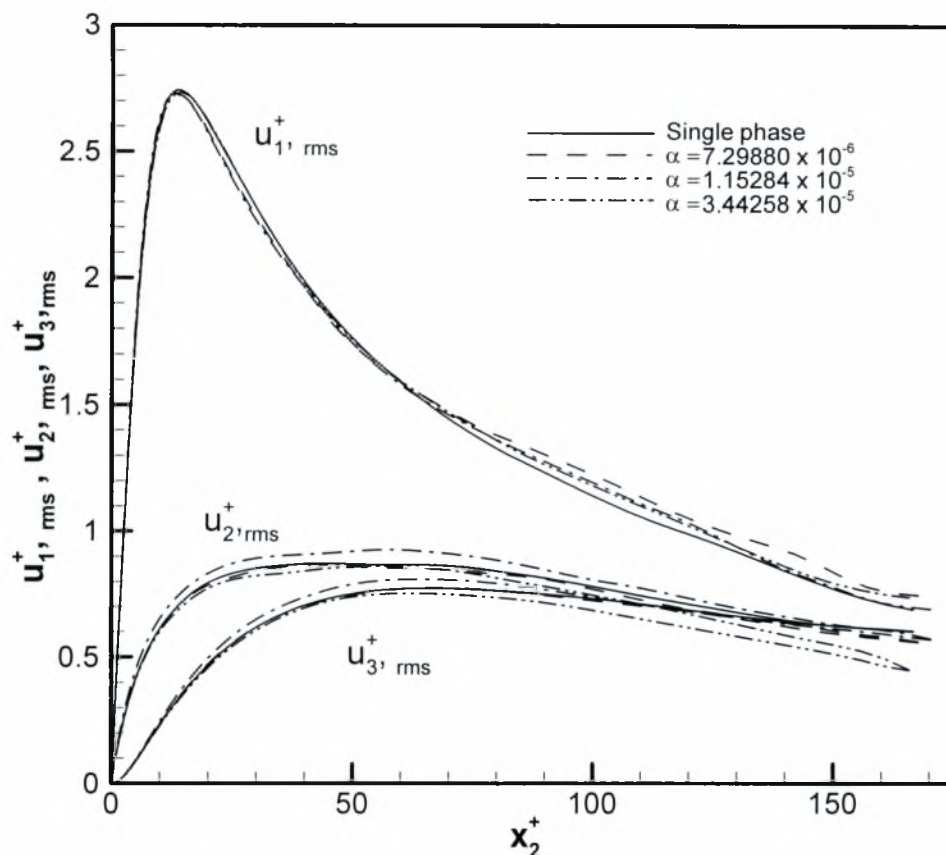
Σχήμα 5.9: Μεταβολή της ταχύτητας με την απόσταση από το τοίχωμα

Στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζονται οι τιμές των συνιστωσών της r.m.s. ταχύτητας με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες για τη μονοφασική ροή. Τα κλάσματα όγκου που παρουσιάζονται στο σχήμα είναι ίσα με  $\alpha = 7.298 \times 10^{-6}$ ,  $1.152 \times 10^{-5}$  και  $3.442 \times 10^{-5}$ , και αντιστοιχούν σε ρυθμούς εκτόξευσης 2, 3 και 8 σωματιδίων ανά χρονικό βήμα, αντίστοιχα. Το μεγαλύτερο κλάσμα όγκου που έχει προσομοιωθεί είναι αρκετά χαμηλό και ως εκ τούτου δεν έχει παρατηρηθεί η συνεχόμενη αύξηση της συγκέντρωσης των

σωματιδίων μέσα στο σωλήνα, όπως είχε παρατηρηθεί στην προηγούμενη περίπτωση παραμετρικής μελέτης και σε μεγάλα κλάσματα όγκου σωματιδίων.

Γενικά, ισχύουν οι ίδιες διαπιστώσεις για την επίδραση των σωματιδίων πάνω στις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού. Το σχήμα αυτό δείχνει ότι σε σύγκριση με τη μονοφασική ροή, οι r.m.s. ταχύτητες μειώνονται με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σταγονιδίων στη ροή. Όλες οι συνιστώσες αυξάνονται κοντά στο τοίχωμα, παίρνουν μια μέγιστη τιμή και μειώνονται στο κέντρο του σωλήνα. Συγκεκριμένα, για την ταχύτητα  $u_{1,rms}$ , οι καμπύλες ξεκινούν από μηδενικές τιμές, αποκτούν μέγιστο στην περιοχή  $12 < x_2^+ < 16$  με τιμές  $2.71 < u_{1,rms} < 2.73$  και στη συνέχεια μειώνονται. Όσον αφορά συνιστώσα  $u_{2,rms}$  του ρευστού, οι καμπύλες ξεκινούν από μηδενικές τιμές και αυξάνονται επίσης κοντά στο τοίχωμα. Αποκτούν μέγιστο στην περιοχή περίπου  $40 < x_2^+ < 60$ , και οι τοπικά μέγιστες τιμές κυμαίνονται μεταξύ  $0.71 < u_{2,rms} < 0.86$ , και έπειτα μειώνονται επίσης ελάχιστα. Τέλος, οι καμπύλες της ταχύτητας  $u_{3,rms}$  ξεκινούν επίσης από μηδενικές τιμές και αυξάνονται έως ότου φτάσουν ένα μέγιστο στην περιοχή με  $60 < x_2^+ < 88$  με τιμές που κυμαίνονται  $0.62 < u_{3,rms} < 0.77$ . Από εκεί και πέρα παραμένει για λίγο σχεδόν σταθερή και στη συνέχεια αρχίζει να μειώνεται.

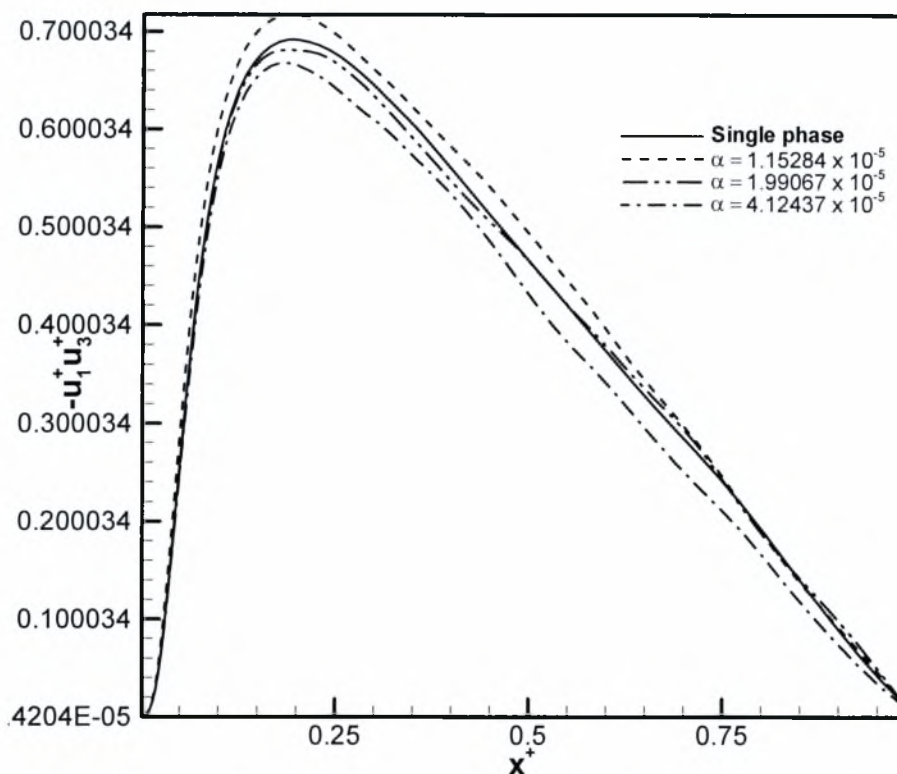
Και σε αυτή την παραμετρική μελέτη, παρατηρείται ότι η  $u_{1,rms}$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες, ενώ οι  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  παρουσιάζουν μικρότερες αποκλίσεις μεταξύ τους με τη  $u_{2,rms}$  να είναι μεγαλύτερη από τη  $u_{3,rms}$ . Το Σχήμα 5.10 δείχνει επίσης ότι η μικρότερη διάμετρος έχει μεγαλύτερη επίδραση στις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού για περίπου παραπλήσια φορτία όγκου σωματιδίων σε σχέση με τα σωματίδια μεγαλύτερης διαμέτρου. Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.10 με το Σχήμα 5.3, η βασική διαφορά που προκύπτει είναι η εξής. Οι καμπύλες των συνιστωσών  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  που αντιστοιχούν στο κλάσμα όγκου σωματιδίου  $\alpha = 1.15 \times 10^{-5}$  είναι μεγαλύτερες των αντίστοιχων καμπυλών της μονοφασικής ροής. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στην πρώτη περίπτωση παραμετρικής μελέτης. Το πιθανότερο είναι ότι οφείλεται στο μικρό χρόνο που υπολογίστηκαν οι στατιστικές ποσότητες του ρευστού.



**Σχήμα 5.10:** Μεταβολή των τιμών των συνιστωσών της ταχύτητας r.m.s. με την απόσταση από το τοίχωμα

Στο Σχήμα 5.11 παρουσιάζονται οι κατανομές της διατμητικής τάσης Reynolds  $-u_1^+ u_3^+$  του ρευστού όπως προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της δύναμης σύζευξης ορμής μεταξύ των δύο φάσεων. Οι καμπύλες του σχήματος αντιστοιχούν στη μονοφασική ροή και σε κλάσματα όγκου των σωματιδίων  $\alpha = 1.15 \times 10^{-5}$ ,  $1.99 \times 10^{-5}$  και  $4.12 \times 10^{-5}$ . Η προσθήκη των σωματιδίων έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της διατμητικής τάσης Reynolds  $-u_1^+ u_3^+$  σε σχέση με τη μονοφασική ροή, και η μείωση αυτή αυξάνεται με το κλάσμα όγκου των σωματιδίων. Και σε αυτή την περίπτωση, οι τάσεις αυξάνονται κοντά στο τοίχωμα  $0 < x^+ < 0.12$ , αποκτούν ένα μέγιστο και από εκεί και πέρα μειώνονται συνεχώς μέχρις ότου πάρουν την τιμή μηδέν στο κέντρο του σωλήνα. Στην περίπτωση της μονοφασικής ροής, το μέγιστο παρουσιάζεται στη θέση  $x^+ \approx 0.20$  και η τιμή του είναι 0.691. Αντίστοιχα, για  $\alpha = 1.15 \times 10^{-5}$  η μέγιστη τιμή είναι 0.717, για  $\alpha = 1.99 \times 10^{-5}$  είναι 0.681 και για  $\alpha =$

$4.12 \times 10^{-5}$  είναι 0.666. Είναι προφανές με βάση τις παραπάνω τιμές ότι η σύζευξη της ορμής μεταξύ των δύο φάσεων είναι μεγαλύτερη για κλάσμα όγκου σωματιδίων  $\alpha = 1.15 \times 10^{-5}$ .



**Σχήμα 5.11:** Επίδραση του κλάσματος μάζας στη διατμητική τάση του ρευστού –  $u_1^+ u_3^+$

Στο Σχήμα 5.12 απεικονίζεται η επίδραση της δύναμης σύζευξης της ορμής παρουσία σωματιδίων στο ρυθμό εναπόθεσης  $n / \Delta t^+ A^+$  καθώς και στο συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$ . Τα αποτελέσματα είναι σε ποιοτική συμφωνία με τα αντίστοιχα της 1ης Περίπτωσης παραμετρικής μελέτης. Συγκεκριμένα, το Σχήμα 5.12 δείχνει ότι ο ρυθμός εναπόθεσης  $R_D$  μεταβάλλεται γραμμικά με το κλάσμα όγκου στη ροή για μικρά κλάσματα όγκου. Συγκεκριμένα, ξεκινά από την τιμή  $R_D = 3.7 \times 10^{-7}$  που αντιστοιχεί σε κλάσμα όγκου  $\alpha = 3.86 \times 10^{-6}$  για ρυθμό εκτόξευσης σωματιδίων στη ροή 1 σωματίδιο ανά χρονικό βήμα. Ωστόσο, παρατηρούνται κάποιες ποσοτικές διαφοροποιήσεις. Η γραμμική εξάρτηση του ρυθμού εναπόθεσης με το κλάσμα όγκου

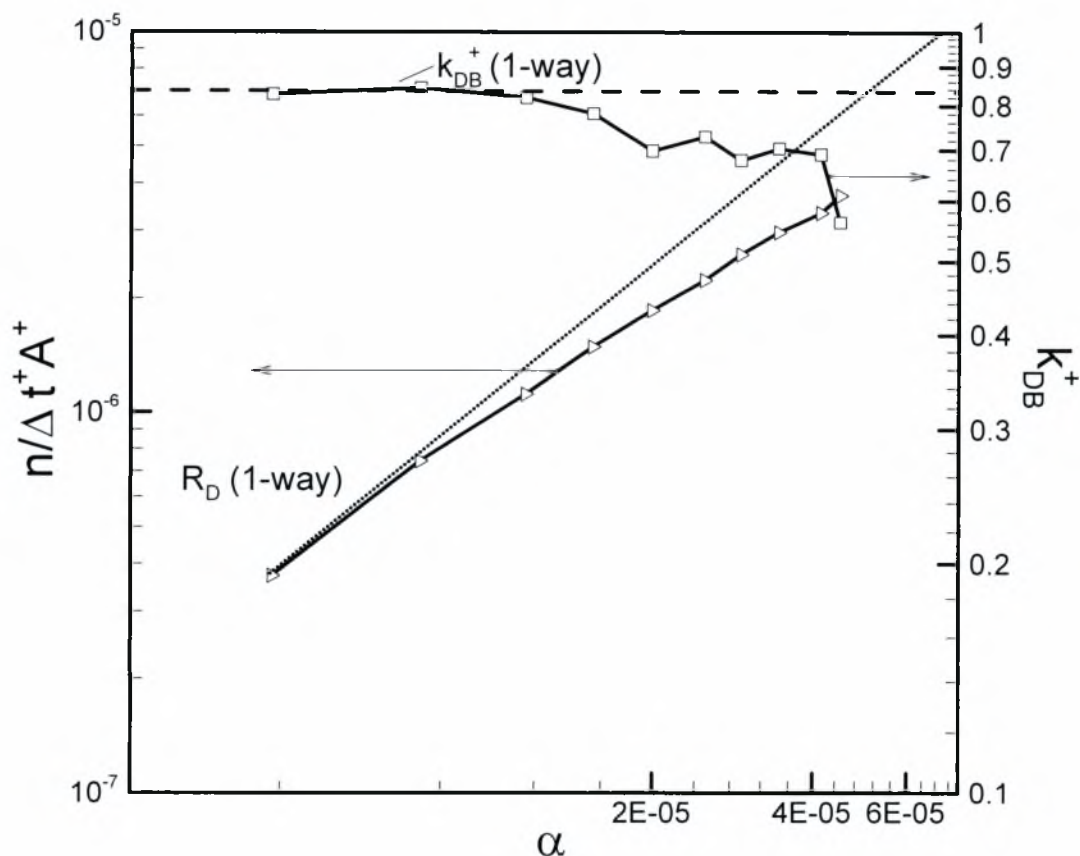
των σωματιδίων παρατηρείται έως κλάσμα όγκου  $\alpha = 4.23 \times 10^{-5}$ , όπου ο ρυθμός εναπόθεσης λαμβάνει την τιμή  $R_D = 3.47 \times 10^{-6}$ . Από εκεί και πέρα η καμπύλη του  $R_D$  αλλάζει κλίση, η οποία είναι μικρότερη σε σχέση με τη γραμμική περιοχή. Αυτό υποδηλώνει ότι η αύξηση του ρυθμού με τον οποίο τα σωματίδια εναποθέτονται πάνω στην επιφάνεια μειώνεται σε σχέση με τη γραμμική περιοχή. Το μέγιστο φορτίο το οποίο εξετάστηκε ήταν  $\alpha = 4.63 \times 10^{-5}$  για το οποίο αντιστοιχεί ρυθμός εναπόθεσης  $R_D = 4.28 \times 10^{-6}$ .

Αν και οι υπολογισμοί για μεγαλύτερα κλάσματα όγκου δεν έχουν πραγματοποιηθεί, εξαιτίας υπολογιστικών περιορισμών, το σχήμα δείχνει μια σαφή εντύπωση ότι για μεγαλύτερα κλάσματα όγκου ο ρυθμός εναπόθεσης προσεγγίζει μια σταθερή τιμή. Το Σχήμα 5.12 δείχνει επίσης τους ρυθμούς εναπόθεσης που προκύπτουν για διάφορα κλάσματα όγκου (τα οποία είναι διαφορετικά σε σχέση με πριν) αγνοώντας τη δύναμη σύζευξης ορμής μεταξύ των δύο φάσεων. Είναι εμφανές ότι ο ρυθμός εναπόθεσης είναι κατά προσέγγιση γραμμικός για όλο το εύρος των κλασμάτων όγκου που μελετήθηκαν.

Το Σχήμα 5.12 δείχνει ακόμη το συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$ . Σε αντιστοιχία με την 1<sup>η</sup> Περίπτωση παραμετρικής μελέτης σε μικρά φορτία όγκου σωματιδίων, ο συντελεστής εναπόθεσης δεν μεταβάλλεται σημαντικά και είναι σχεδόν ίδιος, αφού όπως δείχνει το σχήμα οι ρυθμοί εναπόθεσης αυξάνονται περίπου γραμμικά. Εξαιτίας περιορισμών σε υπολογιστικούς πόρους και σε χρόνο, το μεγαλύτερο κλάσμα το οποίο προσομοιώθηκε σε αυτή την παραμετρική μελέτη ανήκει περίπου στη γραμμική περιοχή των ρυθμών εναπόθεσης και συνεπώς στο σχήμα δεν παρατηρείται σημαντική μείωση του συντελεστή εναπόθεσης. Παρόλα αυτά, σε μεγάλα φορτία όγκου σωματιδίων το πιο πιθανό είναι ο συντελεστής εναπόθεσης να μειώνεται και παράλληλα ο ρυθμός εναπόθεσης των σωματιδίων να προσεγγίζει μια σταθερή τιμή. Στο ίδιο σχήμα συγκρίνονται επίσης οι συντελεστές εναπόθεσης όταν λαμβάνεται υπόψη και αγνοείται η δύναμη σύζευξης μεταξύ των δύο φάσεων. Παρατηρείται ότι ακόμη και για μικρά κλάσματα όγκου σωματιδίων υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ των καμπυλών, γεγονός που υποδηλώνει μεγαλύτερη επίδραση σε αυτές τις ποσότητες για τη μικρότερη διάμετρο των σωματιδίων που χρησιμοποιήθηκε. Εν κατακλείδι, η μείωση της διαμέτρου έχει ως αποτέλεσμα μεγάλη μείωση στο ρυθμό



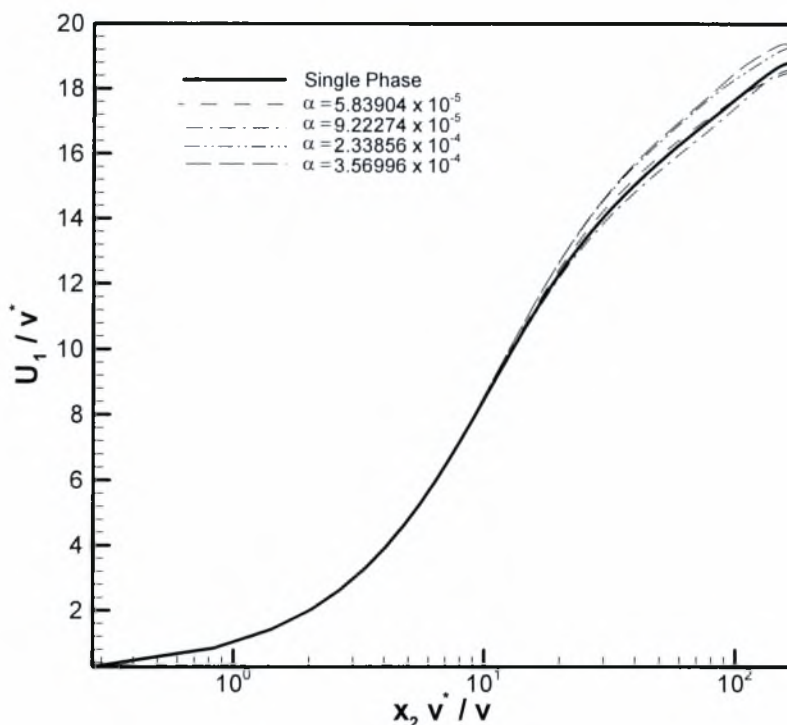
εναπόθεσης και στο συντελεστή εναπόθεσης των σωματιδίων, τουλάχιστον για μικρά φορτία μάζας σωματιδίων, για τα οποία μπορεί να γίνει άμεση σύγκριση.



**Σχήμα 5.12 :** Επίδραση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων στο ρυθμό εναπόθεσης  $n / \Delta t^+ A^+$  και στο συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$ .

Τέλος, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις αλλαγές που παρατηρούνται στη μέση χρονικά διαμητική τάση στο τοίχωμα από την προσθήκη των σωματιδίων. Το Σχήμα 5.13 δείχνει τη μεταβολή της ιξώδους διαμητικής τάσης στο τοίχωμα ως προς το κλάσμα όγκου των σωματιδίων. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις διφασικών ροών χωρίς τη δύναμη σύζευξης των δύο φάσεων και η οποία συμπίπτει με τη μονοφασική ροή. Το αυτό δείχνει ότι η διαμητική τάση στο τοίχωμα μειώνεται λίγο με την αύξηση του κλάσματος όγκου στη ροή και λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της  $\tau_w = 2.024 \times 10^{-4}$  για κλάσμα όγκου  $\alpha = 4.48 \times 10^{-5}$ . Δεν μπορούν

σωματιδίων. Τα αποτελέσματα υπό την επίδραση της βαρύτητας είναι σε αντιστοιχία με τα αυτά που προκύπτουν από την παραμετρική μελέτη της 1<sup>ης</sup> Περίπτωσης.



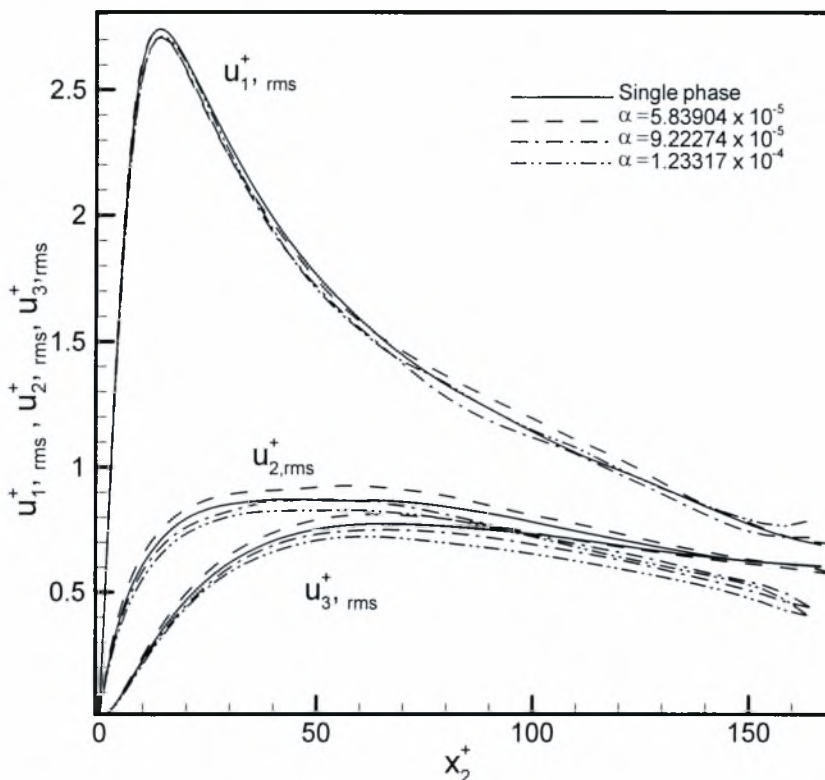
**Σχήμα 5.14:** Μεταβολή της ταχύτητας με την αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα με παρουσία βαρύτητας

Στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζονται οι μεταβολές των r.m.s. συνιστωσών της ταχύτητας, με παρουσία βαρύτητας, με την απόσταση από το τοίχωμα και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες για τη μονοφασική ροή. Τα κλάσματα όγκου που παρουσιάζονται στο σχήμα είναι ίσα με  $\alpha = 5.839 \times 10^{-5}$ ,  $9.222 \times 10^{-5}$  και  $1.233 \times 10^{-4}$ , και αντιστοιχούν σε ρυθμούς εκτόξευσης 2, 3 και 4 σωματιδίων ανά χρονικό βήμα, αντίστοιχα. Υπό την επίδραση της βαρύτητας είναι δυνατό να διατυπωθούν οι ίδιες διαπιστώσεις με τις προηγούμενες περιπτώσεις για την επίδραση των σωματιδίων πάνω στις r.m.s. ταχύτητες του ρευστού. Το σχήμα δείχνει ότι σε σύγκριση με τη μονοφασική ροή, οι r.m.s. ταχύτητες μειώνονται με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σταγονιδίων στη ροή. Όλες οι συνιστώσες αυξάνονται κοντά στο τοίχωμα, παίρνουν μια μέγιστη τιμή και μειώνονται στο κέντρο του σωλήνα.



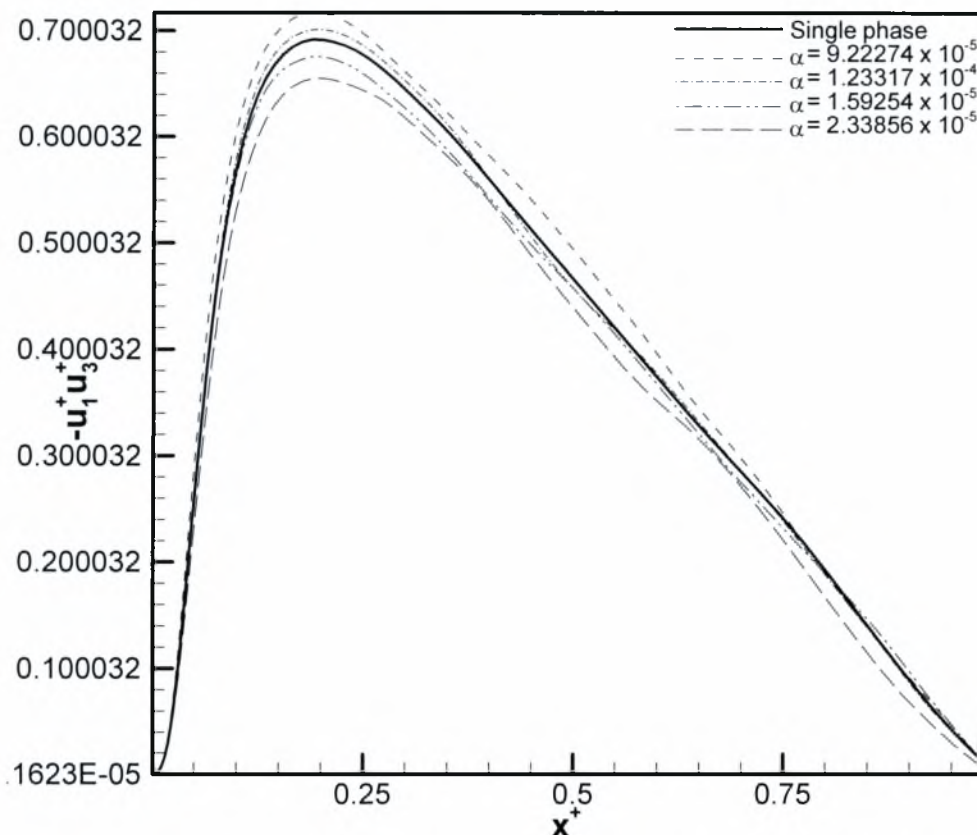
Συγκεκριμένα, για την ταχύτητα  $u_{1,rms}$ , οι καμπύλες ξεκινούν από μηδενικές τιμές, αποκτούν μέγιστο στην περιοχή  $13 < x_2^+ < 15$  με τιμές  $2.70 < u_{1,rms} < 2.73$  και στη συνέχεια μειώνονται. Όσον αφορά τη συνιστώσα  $u_{2,rms}$ , οι καμπύλες ξεκινούν από μηδενικές τιμές και αυξάνονται επίσης κοντά στο τοίχωμα. Αποκτούν μέγιστο στην περιοχή περίπου  $35 < x_2^+ < 65$ , και οι τοπικά μέγιστες τιμές κυμαίνονται μεταξύ  $0.80 < u_{2,rms} < 0.90$  και έπειτα μειώνεται επίσης ελάχιστα. Τέλος, οι καμπύλες της ταχύτητας  $u_{3,rms}$  ξεκινούν επίσης από μηδενικές τιμές και αυξάνονται έως ότου φτάσουν ένα μέγιστο στην περιοχή με  $60 < x_2^+ < 88$  με τιμές που κυμαίνονται  $0.60 < u_{3,rms} < 0.80$ . Από εκεί και πέρα παραμένει για λίγο σχεδόν σταθερή και στη συνέχεια αρχίζει να μειώνεται.

Και σε αυτή την παραμετρική μελέτη, παρατηρείται ότι η  $u_{1,rms}$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες, ενώ οι  $u_{2,rms}$  και  $u_{3,rms}$  παρουσιάζουν μικρότερες αποκλίσεις μεταξύ τους με τη  $u_{2,rms}$  να είναι μεγαλύτερη από τη  $u_{3,rms}$ , οι τιμές τους όμως δεν παρουσιάζουν μεταξύ τους τόσο μεγάλες αποκλίσεις όσο με τη  $u_{1,rms}$ . Το Σχήμα 5.15 δείχνει επίσης ότι η υπό την επίδραση της βαρύτητας μειώνονται περισσότερο οι μέσες χρονικά r.m.s. ταχύτητες της συνεχούς φάσης για περίπου παραπλήσια φορτία όγκου σωματιδίων σε σχέση την 1<sup>η</sup> Περίπτωση, όπου το βαρυτικό πεδίο δεν λαμβάνεται υπόψη.



**Σχήμα 5.15:** Μεταβολή των ταχυτήτων r.m.s. με την απόσταση από το τοίχωμα για διάφορα κλάσματα όγκου

Το Σχήμα 5.16 δείχνει τις κατανομές της διατμητικής τάσης Reynolds για τη μονοφασική ροή και για ενδεικτικά κλάσματα όγκου σωματιδίων  $\alpha=9.22 \times 10^{-5}$ ,  $1.233 \times 10^{-4}$ ,  $1.592 \times 10^{-5}$  και  $2.338 \times 10^{-5}$  της 3<sup>ης</sup> περίπτωσης παραμετρικής μελέτης. Υπό την επίδραση της βαρύτητας, η διατμητική τάση Reynolds  $-u_1^+ u_3^+$  για τις διφασικές ροές μειώνεται σε σχέση με τη μονοφασική ροή. Και σε αυτές τις περιπτώσεις, η μείωση είναι μεγαλύτερη για το μεγαλύτερο κλάσμα όγκου που μελετήθηκε. Το Σχήμα 5.16 δείχνει ότι η διατμητική τάση Reynolds αυξάνεται κοντά στο τοίχωμα για  $0 < x^+ < 0.15$ , όπου αποκτά τοπικό μέγιστο και στη συνέχεια μειώνεται και λαμβάνει μηδενική τιμή στο κέντρο του σωλήνα. Στην περίπτωση της μονοφασικής ροής, το μέγιστο παρουσιάζεται  $x^+ \approx 0.20$  και η τιμή του είναι 0.691. Για  $\alpha = 9.222 \times 10^{-5}$  αντίστοιχα, η μέγιστη τιμή είναι 0.691, για  $\alpha = 1.233 \times 10^{-4}$  είναι 0.717, για  $\alpha = 1.592 \times 10^{-5}$  είναι 0.675, και για  $\alpha = 2.338 \times 10^{-5}$  είναι 0.655.

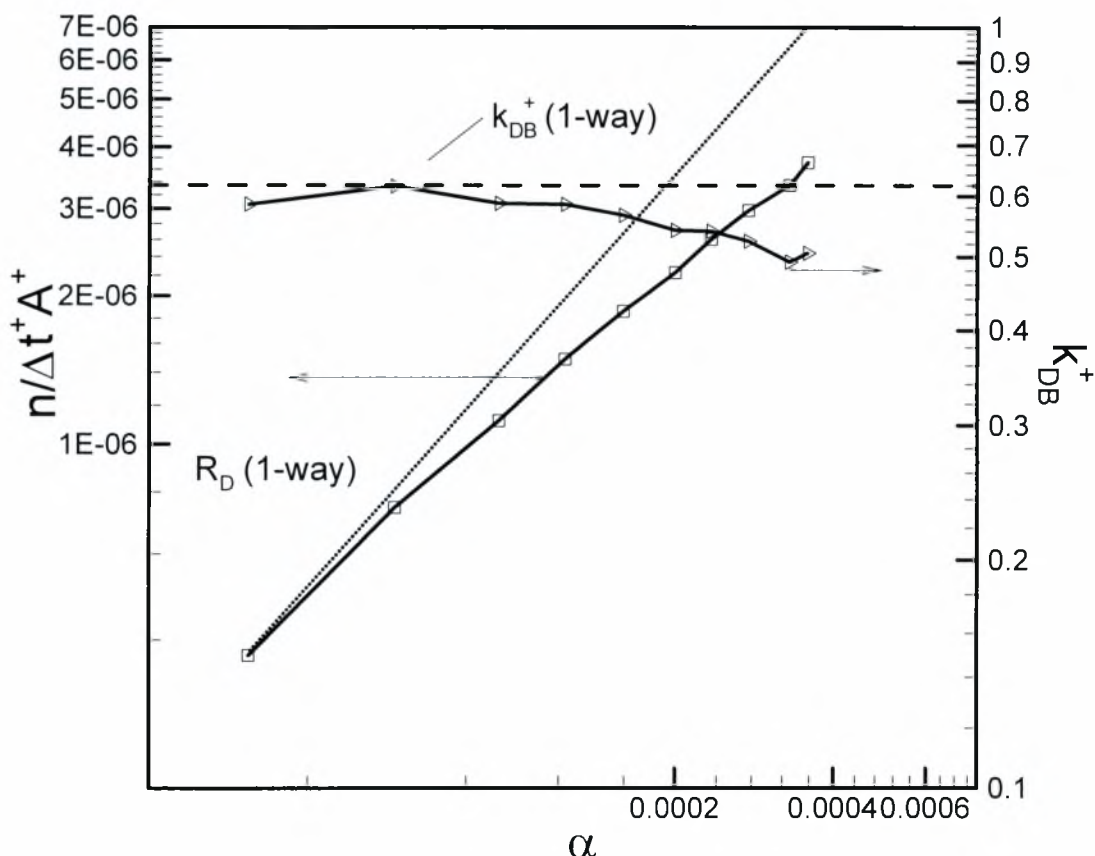


**Σχήμα 5.16:** Επίδραση του κλάσματος όγκου στη διατμητική τάση Reynolds του ρευστού  $-u_1^+ u_3^+$

Το Σχήμα 5.17 δείχνει τις αλλαγές, εξαιτίας της σύζευξης της ορμής μεταξύ των δύο φάσεων, στο ρυθμό  $n / \Delta t^+ A^+$  και στο συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$  για τις περιπτώσεις που λαμβάνεται υπόψη η βαρύτητα στην εξίσωση κίνηση των σωματιδίων. Και αυτές τις περιπτώσεις, οι ρυθμοί και οι συντελεστές εναπόθεσης των σωματιδίων είναι σε ποιοτική συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της 1<sup>ης</sup> περίπτωσης παραμετρικής μελέτης και οι διαφορές είναι κυρίως ποσοτικής φύσης. Συγκεκριμένα, το Σχήμα δείχνει ότι ο ρυθμός εναπόθεσης  $R_D$  μεταβάλλεται γραμμικά σχεδόν σε όλα τα κλάσματα όγκου σωματιδίων που προσομοιώθηκαν και δεν υπάρχει κάποια ένδειξη για αλλαγή της κλίσης της καμπύλης, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό ίσως σε μεγαλύτερα κλάσματα όγκου. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 5.17 και 5.7, είναι εμφανές ότι υπό την επίδραση της βαρύτητας, η εναπόθεση των σωματιδίων μειώνεται σημαντικά σε σχέση με τις

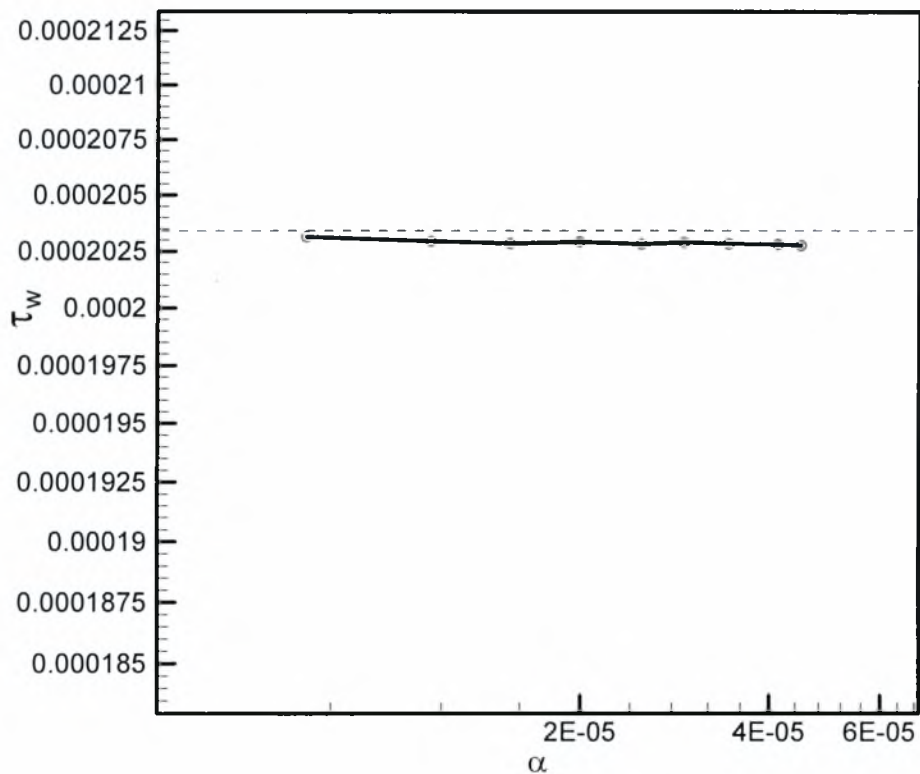
περιπτώσεις με μηδενικό βαρυτικό πεδίο. Η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ αυτών των περιπτώσεων έγκειται στο γεγονός ότι για τον ίδιο ρυθμό εκτόξευσης των σωματιδίων από τον τοίχο του σωλήνα, η τελική μέση χρονικά συγκέντρωση των σωματιδίων είναι μεγαλύτερη για την περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη η βαρύτητα στην εξίσωση κίνησης των σωματιδίων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι τα σωματίδια διαγράφουν σχεδόν ευθύγραμμες τροχιές μέσα στο σωλήνα και επηρεάζονται λιγότερο από τη ροή της συνεχούς φάσης. Συνεπώς, λιγότερα σωματίδια είναι ικανά να προσεγγίσουν τον τοίχο και να πραγματοποιηθεί εναπόθεσή τους.

Το *Σχήμα 5.17* δείχνει επίσης το συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$  για τις αντίστοιχες περιπτώσεις υπό την επίδραση της βαρύτητας. Η μείωση του συντελεστή εναπόθεσης είναι εμφανής καθώς χωρίς τη βαρύτητα είναι ίσος με 0.84, ενώ υπό την επίδραση της βαρύτητας είναι ίσος με 0.62 για μικρά κλάσματα όγκου σωματιδίων. Η δύναμη σύζευξης ορμής μειώνει επιπλέον το συντελεστή εναπόθεσης ως προς τα αποτελέσματα χωρίς τη δύναμη σύζευξης και απουσία της βαρύτητας από την εξίσωση κίνησης των σωματιδίων.



**Σχήμα 5.17 :** Επίδραση του κλάσματος όγκου στο ρυθμό εναπόθεσης  $n / \Delta t^+ A^+$  καθώς και στο συντελεστή εναπόθεσης  $k_{DB}^+$

Τέλος, το ενδιαφέρον εστιάζεται στις αλλαγές που παρατηρούνται στην ιξώδη διατμητική τάση στο τοίχωμα από την προσθήκη των σωματιδίων υπό την επίδραση της βαρύτητας. Το Σχήμα 5.18 δείχνει την κατανομή της ιξώδους διατμητικής τάσης στο τοίχωμα για διάφορα κλάσματα όγκου σωματιδίων για την τρίτη περίπτωση παραμετρικής μελέτης. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις διφασικών ροών χωρίς τη δύναμη σύζευξης των δύο φάσεων και η οποία όπως είναι αναμενόμενο συμπίπτει με τη μονοφασική ροή. Το σχήμα αυτό δείχνει ότι η διατμητική τάση στο τοίχωμα μειώνεται πολύ λίγο με την αύξηση του κλάσματος όγκου των σωματιδίων στη ροή.



**Σχήμα 5.18 :** Επίδραση του κλάσματος όγκου  $\alpha$  στη διατμητική τάση του τοιχώματος, λαμβάνοντας υπόψη τη βαρύτητα

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα όπως προέκυψαν από την παρουσίαση και τη συζήτηση των αποτελεσμάτων με χρήση άμεσης αριθμητικής προσομοίωσης της τυρβώδους ροής σε κατακόρυφο σωλήνα με ταυτόχρονη παρουσία σταγονιδίων. Στο τέλος του Κεφαλαίου γίνονται ορισμένες προτάσεις για τη συμπλήρωση της παρούσας εργασίας.

### 6.1 Συμπεράσματα

Από την παραμετρική μελέτη που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο είναι δυνατό να διατυπωθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η παρουσία των σταγονιδίων στην τυρβώδη ροή στο σωλήνα έχει ως αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση των r.m.s. ταχυτήτων της συνεχούς φάσης, η οποία αυξάνεται με αντίστοιχη αύξηση του φορτίου όγκου των σωματιδίων. Η μείωση της  $u_{r,rms}$  στη διεύθυνση κάθετα στο τοίχωμα έχει ως αποτέλεσμα την αντίστοιχη μείωση της ικανότητας της τυρβώδους ροής να επηρεάζει και να μεταβάλλει την κίνηση των σωματιδίων, τα οποία διαγράφουν σχεδόν ευθύγραμμες τροχιές μέσα στο σωλήνα και συνεπώς μειώνεται ο αριθμός των σωματιδίων που προσεγγίζουν το τοίχωμα, και η εναπόθεσή τους πάνω σε αυτό.
2. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης για τη μικρότερη διάμετρο των σωματιδίων που χρησιμοποιήθηκαν, έδειξαν ότι οι ρυθμοί εναπόθεσής τους είναι μικρότεροι σε σχέση με τους αντίστοιχους για τη μεγαλύτερη διάμετρο ακόμη και σε μικρά κλάσματα όγκου σωματιδίων.
3. Η βαρύτητα μειώνει τους ρυθμούς και το συντελεστή εναπόθεσης των σωματιδίων, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι τα σωματίδια διαγράφουν κατακόρυφες τροχιές μέσα στο σωλήνα και μειώνεται η διασπορά τους και η κίνηση τους προς τον τοίχο.
4. Η προσθήκη των σωματιδίων στην τυρβώδη ροή σε σωλήνα μειώνει επίσης την ιξώδη διατμητική τάση στον τοίχο, και η μείωση είναι μεγαλύτερη με την αύξηση του κλάσματος όγκου τους.



## 6.2 Προτάσεις

Για την περαιτέρω μελέτη πάνω στο θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας προτείνεται να γίνουν τα παρακάτω:

1. Μελέτη της επίδρασης του υπολογιστικού πλέγματος στα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης και η χρήση ενός πυκνότερου πλέγματος για τη μελέτη DNS ή εισαγωγή ενός μοντέλου LES.
2. Να ληφθούν υπόψη οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων (ελαστικές ή πλαστικές).

## **Βιβλιογραφία**

1. Ahmadi G. and Q. Chen, 1998, “Dispersion and deposition of particles in a turbulent pipe flow with sudden expansion”, *Aerosol Science Journal*, Vol. 29, pp. 1097-1116
2. Andreussi P. and B. Azzopardi, 1983, “Droplet deposition and interchange in annular two-phase flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 9, pp. 681-695
3. Crowe C., Sommerfeld M. and Y. Tsuji, 1997, “Multiphase flows with droplets and particles”, CRC Press, New York
4. Δριτσέλης Χρ., 2007, “Μελέτη τυρβωδών διφασικών ροών αέρα – σωματιδίων σε αγωγούς”, Διδακτορική Διατριβή, Παν. Θεσσαλίας, υπό κρίση
5. Dritselis C.D. and N.S. Vlachos, 2007, “Numerical study of educed coherent structures in the near wall region of a particle-laden channel flow”, *Intl. Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, 9-12 July 2007, Leipzig, Germany*
6. Founti M. and A. Klipfel, 1998, “Experimental and computational investigations of nearly dense two-phase sudden expansion flows”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 17, pp. 27-36
7. Govan A., Hewitt G. and C. Ngan, 1988, “Particle motion in a turbulent pipe flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 15, pp. 471-481
8. Holland F.A. and R. Bragg, 1995, “Fluid Flow for Chemical Engineers”, Edward Arnold Publishers, London
9. Jepson D., Azzopardi B. and P. Whalley, 1988, “The effect of gas properties on drops in annular flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 15, pp. 327-339
10. Kallio G. and M. Reeks, 1988, “A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 15, pp. 433-446
11. Kulick J.D., Fessler J.R and J.K. Eaton, 1994, “Particle response and turbulence modification in fully developed channel flow”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 5, pp. 109-134
12. Lee M., Hanratty T. and R. Andrian, 1988, “The interpretation of droplet deposition measurements with a diffusion model”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 15, pp. 459-469
13. Marchioli C., Giusti A., Salvetti M.V. and A. Soldati, 2003, “Direct numerical simulation of particle wall transfer and deposition in upward turbulent pipe flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 29, pp. 1017-1038

14. Mito Y. and T. Hanratty, 2004, “Concentration profiles in a turbulent suspension when gravity is not affecting deposition”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 30, pp. 1311-1336
15. Mito Y. and T. Hanratty, 2004, “A stochastic description of wall sources in a turbulent field: Part II. Calculation for a simplified model of horizontal annular flows”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 30, pp. 803–825
16. Mito Y. and T. Hanratty, 2004, “A stochastic description of wall sources in a turbulent field. Part III: Effect of gravitational settling on the concentration profiles”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 31, pp. 155-178
17. Mito Y. and T. Hanratty, 2006, “Effect of feedback and inter-particle collisions in an idealized gas-liquid annular flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 32, pp. 692-716
18. Orlandi P. and M. Fatica, 1997, “Simulations of turbulent rotating pipe flow”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 343, pp. 43–72
19. Pan Y. and S. Banerjee, 1996, “Numerical simulation of particle interactions with wall turbulence”, *Physics of Fluids*, Vol. 8, pp. 2733–2755
20. Παπαϊωάννου Α.Θ., “Μηχανική των Ρευστών”, 2<sup>η</sup> Έκδοση, 1996, Εκδόσεις Κοράλλι
21. Perry’s Chemical Engineers Handbook, 6<sup>th</sup> Edition, 1997, McGraw-Hill, New York
22. Reeks M. and G. Skyrme, 1976, “The dependence of particle deposition velocity on particle inertia in turbulent pipe flow”, *J. Aerosol Science*, Vol. 7, pp. 485–495
23. Schadel S., Leman G., Binder J. and T. Hanratty, 1990, “Rates of atomization in vertical annular flow”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 16, pp. 363–374
24. Soldati A. and P. Andreussi, 1995, “The influence of coalescence on droplet transfer in vertical annular flow”, *Chemical Engineering Science*, Vol. 51, pp. 353–363
25. Sommerfeld M. and N. Huber, 1999, “Experimental analysis and modeling of particle-wall collisions”, *Intl. J. of Multiphase Flow*, Vol. 25, pp. 1457–1489
26. Subramanian R.S., “Elementary aspects of two-phase flow in pipes”, ([www.clarkson.edu/subramanian/ch301/notes/twophase.pdf](http://www.clarkson.edu/subramanian/ch301/notes/twophase.pdf))

27. Tanaka M., Maeda Y. and Y. Hagiwara, 2002, “Turbulence modification in a homogeneous turbulent shear flow laden with small heavy particles”, Intl. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, pp. 615-626
28. Wang Q. and K. Squires, 1996, “Large eddy simulation of particle deposition in a vertical turbulent channel flow”, Intl. J. of Multiphase Flow, Vol. 22, pp. 667–683



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085852