

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ
ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΠΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΣΕΩΝ
ΠΟΛΕΜΙΚΩΝ ΑΕΡΟΣΚΑΦΩΝ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΕΠΙΤΕΥΞΗ
ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΤΗΤΑΣ**

υπό

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΣΚΙΠΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4829/1
Ημερ. Εισ.: 16-11-2006
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2006
ΣΚΙ

© 2006 Αθανάσιος Σκίπης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης
(Επιβλέπων) Διδάσκων Π.Δ. 407/80, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Αθανάσιος Ζηλιασκόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας



Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Διδάσκοντα Π.Δ. 407/80 κ. Γεώργιο Κοζανίδη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Η συμπεριφορά του κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας ήταν υποδειγματική.

Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο καθώς και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Αθανάσιο Ζηλιασκόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Ευχαριστώ τους φίλους μου Καρέλη Σπύρο, Λιαρόπουλο Γιάννη, Ασλανίδη Μιχάλη, Τζούμα Άγη, Κοτσοβό Γιώργο, Νικολάου Γιάννη και Βασιλική Δανιήλ για την ηθική υποστήριξή τους και τις ωραίες στιγμές που περάσαμε.

Επίσης, ευχαριστώ την Έλενα για την κατανόησή της, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών της προσπάθειάς μου καθώς και για τις πολλές όμορφες στιγμές που περάσαμε.

Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Ιωάννη και Ελευθερία καθώς και στον αδερφό μου Ξενοφώντα για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Αθανάσιος Σκίπης



ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΠΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΣΕΩΝ ΠΟΛΕΜΙΚΩΝ ΑΕΡΟΣΚΑΦΩΝ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΕΠΙΤΕΥΞΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΙΠΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2006

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Κοζανίδης Γεώργιος, Διδάσκων Π.Δ 407/80

Περίληψη

Κάθε αεροσκάφος, πολεμικό ή πολιτικό, πρέπει να καθλώνεται για συντήρηση μετά από έναν ορισμένο αριθμό ωρών πτήσης από την τελευταία συντήρησή του. Ο σχεδιασμός πτήσεων και συντηρήσεων των πολεμικών αεροσκαφών εξετάζει το πρόβλημα λήψης απόφασης, σχετικά με το ποια διαθέσιμα αεροσκάφη θα πρέπει να πετάξουν και για πόσο χρόνο, καθώς και για το ποια από τα καθλωμένα αεροσκάφη θα πρέπει να εκτελέσουν διαδικασίες συντήρησης, σε μια ομάδα αεροσκαφών που διαμορφώνουν μια μονάδα μάχης. Ο στόχος είναι να επιτευχθεί μέγιστη διαθεσιμότητα της μονάδας εντός του ορίζοντα σχεδιασμού.

Το πρόβλημα Προγραμματισμού Πτήσεων και Συντηρήσεων Πολεμικών Αεροσκαφών προέκυψε ως διοικητικό λειτουργικό πρόβλημα σε μια τυπική πτέρυγα της Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας. Αυτή η πτέρυγα αποτελείται από τρεις μοίρες, κάθε μία από τις οποίες χρησιμεύει ως βάση για αεροσκάφη διάφορων τύπων. Στην αρχή κάθε ορίζοντα σχεδιασμού, η διοίκηση της πτέρυγας εκδίδει ένα πρόγραμμα για κάθε συνδυασμό μοίρας και περιόδου. Αυτό το πρόγραμμα καθορίζει το συνολικό χρόνο που όλα τα αεροσκάφη κάθε μοίρας πρέπει να πετάξουν κατά τη διάρκεια κάθε



χρονικής περιόδου. Για τις ανάγκες συντήρησης της πτέρυγας, υπάρχει ένας σταθμός συντήρησης που είναι επιφορτισμένος με την παροχή των υπηρεσιών συντήρησης στα αεροσκάφη της πτέρυγας. Αυτός ο σταθμός έχει συγκεκριμένη χωρική και χρονική δυναμικότητα. Με βάση το δεδομένο πρόγραμμα για κάθε μοίρα και τους φυσικούς περιορισμούς που προκύπτουν από τη δυναμικότητα του συστήματος, ο στόχος είναι να εκδοθεί ένα πρόγραμμα πτήσεων και συντηρήσεων για κάθε μεμονωμένο αεροσκάφος της μονάδας, έτσι ώστε κάποιο κατάλληλο μέτρο απόδοσης να μεγιστοποιείται.

Σε αυτή την εργασία, αναπτύσσουμε ένα μοντέλο πολυκριτήριας βελτιστοποίησης του Προβλήματος Πτήσεων και Συντηρήσεων Πολεμικών Αεροσκαφών και επεξηγούμε τη χρήση του και επίλυσή του σε μια πραγματική περίπτωση που προέρχεται από την Ελληνική Πολεμική Αεροπορία. Διατυπώνουμε το πρόβλημα ως ένα μεικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα, με δύο αντικειμενικές συναρτήσεις: τον συνολικό αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών και τον συνολικό υπολειπόμενο χρόνο πτήσης όλων των διαθέσιμων αεροσκαφών. Ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός διαθέσιμου αεροσκάφους ορίζεται ως ο συνολικός υπολειπόμενος χρόνος που μπορεί να πετάξει το αεροσκάφος αυτό, μέχρι να καθηλωθεί για έλεγχο συντήρησης.

Εφαρμόζουμε διάφορες μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος, όπως τη μέθοδο σταθμισμένου αθροίσματος (weighted sums approach) και τη μέθοδο περιορισμού του συνόλου εφικτών λύσεων (e-constraint reduced feasible region method). Με την ανάλυση και σύγκριση των λύσεων εξετάζουμε τη συμπεριφορά του μοντέλου. Ερευνάμε επίσης την επίδραση των παραμέτρων του προβλήματος στον υπολογιστικό χρόνο. Ολοκληρώνουμε με αποτελέσματα και προτάσεις σχετικά με τον



τρόπο που μπορεί να επεκταθεί το μοντέλο στο μέλλον.

Μέρος της παρούσας εργασίας παρουσιάστηκε στο “18th International Conference on Multiple Criteria Decision Making” που πραγματοποιήθηκε στα Χανιά μεταξύ 19 και 23 Ιουνίου 2006 (Kozanidis G. & Skipis A., “Flight and Maintenance Planning of Military Aircraft for Maximum Fleet Availability: A Biobjective Model”).



Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	6
1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο.....	7
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	9
1.3 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας.....	12
Κεφάλαιο 2 Περιγραφή Προβλήματος.....	13
Κεφάλαιο 3 Ανάπτυξη και Εφαρμογή Μαθηματικού Μοντέλου.....	19
3.1 Μορφοποίηση και ανάλυση περιορισμών μοντέλου σχεδιασμού πτήσεων και συντηρήσεων αεροσκαφών.....	20
3.2 Εφαρμογή μοντέλου με χρήση της AMPL.....	28
3.2.1 Παράδειγμα πραγματικής εφαρμογής.....	34
3.2.2 Υπολογισμός K	37
Κεφάλαιο 4 Μέθοδος Σταθμισμένου Αθροίσματος.....	39
4.1 Μέθοδος σταθμισμένου αθροίσματος.....	40
4.2 Μαθηματικό Κίνητρο.....	40
4.3 Μελέτη και Σχόλια Περιπτώσεων.....	41
4.3.1 Περίπτωση Α.....	42
4.3.2 Περίπτωση Β.....	43
4.3.3 Περίπτωση Γ.....	45
4.3.4 Περίπτωση Δ.....	47
4.3.5 Περίπτωση Ε.....	48
4.3.6 Περίπτωση ΣΤ.....	49



4.4	Μελέτη καλύτερων λύσεων.....	52
4.5	Εφαρμογή μεθόδου σταθμισμένου αθροίσματος με την ενσωμάτωση και των τεσσάρων αντικειμενικών συναρτήσεων.....	53
4.6	Μέγιστες δυνατές τιμές των z_1, z_2, z_3, z_4	54
Κεφάλαιο 5 Μέθοδος Περιορισμού του Συνόλου των Εφικτών Λύσεων.....		55
5.1	Γενικά.....	56
5.1.1	Μέθοδος περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων.....	56
5.1.2	Τρόπος λειτουργίας μεθόδου περιορισμού συνόλου εφικτών λύσεων...	57
5.2	Μελέτη περιπτώσεων.....	58
5.2.1	Περίπτωση 1 ^η	58
5.2.2	Σχολιασμός	59
5.2.3	Περίπτωση 2 ^η	64
5.2.4	Σχολιασμός.....	65
Κεφάλαιο 6 Υπολογιστική εμπειρία και Αξιολόγηση μοντέλου.....		67
6.1	Διαχωρισμός χρονικού ορίζοντα.....	68
6.2	Σύγκριση μονοκριτήριας-πολυκριτήριας βελτιστοποίησης.....	71
Κεφάλαιο 7 Συμπεράσματα-Προτάσεις.....		73
7.1	Συμπεράσματα.....	74
7.2	Καλύτερες λύσεις πολυκριτήριας βελτιστοποίησης.....	75
7.3	Προτάσεις για μελλοντική βελτίωση.....	75
Βιβλιογραφία.....		77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο

Η πολεμική και η πολιτική αεροπορική βιομηχανία έχουν διάφορες ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές. Η ασφάλεια είναι ο σημαντικότερος παράγοντας και στις δύο βιομηχανίες, εντούτοις, ενώ η μεγιστοποίηση του κέρδους είναι ο κύριος στόχος στην πολιτική αεροπορική βιομηχανία, η μεγιστοποίηση της ετοιμότητας ανταπόκρισης σε εξωτερικές απειλές είναι ο κύριος στόχος στην πολεμική αεροπορία. Συνεπώς, τα λειτουργικά προβλήματα που έχουν να κάνουν με πολεμικά αεροσκάφη πρέπει να αντιμετωπίζονται διαφορετικά από τα παραδοσιακά προβλήματα που προκύπτουν στην πολιτική αεροπορική βιομηχανία.

Ένα σημαντικό μέρος του συνολικού λειτουργικού προϋπολογισμού ενός στόλου διατίθεται για τη συντήρηση των αεροσκαφών που ανήκουν στο στόλο. Στην πολιτική αεροπορική βιομηχανία, υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά επίπεδα συντήρησης, που διαφέρουν μεταξύ τους στη φιλοσοφία, στη διάρκεια και τη συχνότητα που εμφανίζονται. Αυτά είναι:

- **Έλεγχος τύπου Α :** Αυτός ο έλεγχος εκτελείται κάθε 65-100 ώρες πτήσης ή μια φορά την εβδομάδα. Περιλαμβάνει την επιθεώρηση όλων των σημαντικών εξαρτημάτων και των συστημάτων των αεροσκαφών, όπως του συστήματος των προσγείωσης, των κινητήρων και των επιφανειών ελέγχου.
- **Έλεγχος τύπου Β :** Αυτός ο έλεγχος εκτελείται κάθε 300-600 ώρες πτήσης και περιλαμβάνει τη λίπανση όλων των κινούμενων μερών και λεπτομερή οπτική δοκιμή διάφορων εξαρτημάτων, όπως του οπίσθιου φτερού και των επιφανειών κλίσεων. Και οι δύο παραπάνω έλεγχοι εκτελούνται συνήθως τη νύχτα έτσι ώστε το αεροσκάφος να είναι διαθέσιμο το επόμενο πρωί. Εάν ο απαραίτητος εξοπλισμός είναι διαθέσιμος, τότε οι παραπάνω έλεγχοι



εκτελούνται συνήθως στη βάση όπου βρίσκεται το αεροσκάφος.

- **Έλεγχος τύπου C και D :** Αυτοί είναι περισσότερο δαπανηροί έλεγχοι σε κόστος και μεγαλύτεροι σε χρονική διάρκεια και εκτελούνται κάθε ένα και τέσσερα έτη αντίστοιχα. Οι έλεγχοι αυτοί απαιτούν την καθήλωση των αεροσκαφών για αρκετές εβδομάδες. Έλεγχοι τύπου C και D εκτελούνται μόνο σε συγκεκριμένες εγκαταστάσεις όπου υπάρχει απαραίτητος εξοπλισμός και τεχνογνωσία.

Τα πολεμικά αεροσκάφη συνήθως ταξινομούνται σύμφωνα με τον τύπο τους ή την αποστολή που μπορούν να ολοκληρώσουν. Τέτοιες τυπικές αποστολές είναι η αναγνώριση και η αναχαίτιση εχθρικών αεροσκαφών, βομβαρδισμός κ.α. Κάθε αεροσκάφος πρέπει να υποβληθεί σε έναν κανονικό έλεγχο συντήρησης μόλις συμπληρώσει έναν ορισμένο αριθμό ωρών πτήσης από την τελευταία συντήρηση του. Υπάρχουν επίσης περιορισμοί σχετικά με το συνολικό χρονικό πλαίσιο καθώς και με τον αριθμό απογειώσεων αλλά αυτοί χρησιμοποιούνται σπάνια στην πράξη, γιατί οι χρονικοί περιορισμοί πτήσης προκύπτουν συνήθως συντομότερα. Η Ελληνική Πολεμική Αεροπορία υποστηρίζεται από ένα πρόγραμμα συντήρησης τριών επιπέδων ως εξής:

- **1^ο επίπεδο συντήρησης (οργανωτικό επίπεδο) :** Διενεργείται στη βάση και περιλαμβάνει την επιθεώρηση, επισκευή και αντικατάσταση μερών του αεροσκάφους.
- **2^ο επίπεδο συντήρησης (ενδιάμεσο επίπεδο) :** Διενεργείται στη βάση και περιλαμβάνει πιο λεπτομερή επιθεώρηση, επισκευή και αντικατάσταση μερών του αεροσκάφους σε σχέση με το 1^ο επίπεδο συντήρησης.



- **3^ο επίπεδο συντήρησης – συντήρηση του κατασκευαστή (επίπεδο αποθηκών)** : Διενεργείται σε ειδικές εγκαταστάσεις από ειδικά εκπαιδευμένους επαγγελματίες. Περιλαμβάνει μια πιο λεπτομερή διαδικασία επισκευής και αντικατάστασης μερών του αεροσκάφους σε σχέση με τα άλλα δύο επίπεδα.

Ο σχεδιασμός πτήσεων και συντηρήσεων των πολεμικών αεροσκαφών εξετάζει το πρόβλημα απόφασης σχετικά με το ποια διαθέσιμα αεροσκάφη θα πετάξουν και για πόσο καιρό και ποια από τα καθηλωμένα αεροσκάφη θα εκτελέσουν διαδικασίες συντήρησης, σε μια ομάδα αεροσκαφών που διαμορφώνουν μια μονάδα μάχης. Ο στόχος είναι να επιτευχθεί μέγιστη διαθεσιμότητα της μονάδας στον ορίζοντα σχεδιασμού. Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα λήψης αποφάσεων στη πολεμική αεροπορική βιομηχανία. Ο μεγάλος αριθμός των παραμέτρων αυξάνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος και τον χρόνο που είναι απαραίτητος για να βρεθεί η βέλτιστη λύση.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Διάφορα προβλήματα προγραμματισμού αεροσκαφών έχουν διερευνηθεί στο παρελθόν. Οι Kurokawa και Takeshita [19], πρότειναν μια μέθοδο νευρο-δικτύων για τον σχεδιασμό εναέριων μεταφορών της Ιαπωνικής αμυντικής αεροπορίας. Αυτή η μέθοδος χωρίζει το κύριο πρόβλημα σε τρία υποπροβλήματα που λύνονται διαδοχικά.

Οι Clarke et al. [5] εισήγαγαν ένα μοντέλο προγραμματισμού αεροσκαφών που περιλαμβάνει εκτιμήσεις τόσο για τα πληρώματα των αεροσκαφών όσο και για τις συντηρήσεις τους. Οι Rushmeier και Kontogiorgis [21] παρουσίασαν ένα μεικτό ακέραιο μοντέλο ροής πολλαπλών οντοτήτων για την ανάθεση στόλου μεγάλης κλίμακας υποκείμενη σε ποικίλους περιορισμούς. Οι Clarke et al. [6] ανέπτυξαν μια



μαθηματική διατύπωση για το πρόβλημα κυκλικής εναλλαγής αεροσκαφών και το έλυσαν με χαλάρωση Lagrange και την subgradient βελτιστοποίηση.

Οι Dijkstra et al. [7] εξέτασαν τα πρόβλημα του προγραμματισμού του προσωπικού συντήρησης των αεροσκαφών της KLM. Οι Keskinocak και Tayur [15] εξέτασαν ένα πρόβλημα προγραμματισμού αεροσκαφών στο οποίο τα αιτήματα των πελατών καταφτάνουν δυναμικά. Οι Barnhart et al. [3] παρουσίασαν ένα μοντέλο και μια προσεγγιστική λύση για να λύσουν ταυτόχρονα τα προβλήματα δρομολόγησης και ανάθεσης στόλου αεροσκαφών. Οι Gopalan και Talluri [14] ερεύνησαν τα μοντέλα και τις τεχνικές επίλυσης για τα διάφορα προβλήματα αερογραμμών, τα οποία περιλαμβάνουν αποφάσεις για τη δρομολόγηση την ανάθεση και τη συντήρηση στόλου αεροσκαφών.

Οι Feo και Bard [9] διαμόρφωσαν το πρόβλημα της δρομολόγησης της συντήρησης ως καθορισμένο διακριτό πρόβλημα και χρησιμοποίησαν ευρετικούς αλγορίθμους για να διαμορφώσουν τις δρομολογήσεις της συντήρησης. Συνδύασαν επίσης το πρόβλημα δρομολόγησης με το πρόβλημα εντοπισμού των βάσεων συντήρησης. Οι Gopalan και Talluri [13] και ο Talluri [26] ερεύνησαν το πρόβλημα της βέλτιστης δρομολόγησης ενός αεροσκάφους, εξασφαλίζοντας συγχρόνως ότι καλύπτονται ορισμένες βραχυπρόθεσμες απαιτήσεις συντήρησης.

Οι Graves et al. [12] μελέτησαν το πρόβλημα της ανάθεσης μελών του πληρώματος σε προγραμματισμένες πτήσεις. Οι Klabjan et al. [16] εξέτασαν προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν τον σχεδιασμό του προγράμματος, τη δρομολόγηση αεροσκαφών και τον προγραμματισμό του πληρώματος. Στην εργασία τους, ο χρόνος αναχώρησης μιας πτήσης μπορούσε να αλλάξει ελαφρώς, εφόσον παρέμενε μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό περιθώριο. Οι Sriram και Haghani [24]



παρουσίασαν μια διατύπωση για τα προβλήματα προγραμματισμού συντήρησης και μια ευρετική προσέγγιση για να λύσουν το πρόβλημα. Οι Samaranyake et al. [22] τεκμηρίωσαν την εφαρμογή μιας δομής λογισμού για τη διαχείριση των μεγάλης κλίμακας δραστηριοτήτων συντήρησης αεροσκαφών.

Οι Yan και Lin [27] μελέτησαν το πρόβλημα του καθορισμού εναλλακτικών προγραμμάτων αεροσκαφών σε περίπτωση προσωρινού κλεισίματος αερολιμένων. Ο Arguello [1] μελέτησε διάφορα μοντέλα και μεθόδους για δυναμική διαχείριση των διαδικασιών αερογραμμών σε περίπτωση ανώμαλων καταστάσεων.

Οι Ernst et al. [8] ανέπτυξαν ένα εξειδικευμένο αλγόριθμο της μεθόδου simplex για το πρόβλημα του προγραμματισμού των προσγειώσεων των αεροσκαφών σε έναν ή περισσότερους αεροδιαδρόμους με ποινικές ρήτρες καθυστέρησης. Οι Beasley et al. [4] παρουσίασαν μια μικτή ακέραια μορφοποίηση για ένα παρόμοιο πρόβλημα με ένα μόνο αεροδιάδρομο και το επεκτείνανε στην περίπτωση των πολλαπλών αεροδιαδρόμων.

Οι Qi et al. [20] παρουσίασαν ένα μοντέλο για τον προγραμματισμό εκπαίδευσης πιλότων, όπου ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό σταθμισμένο μήκος όλων των κατηγοριών. Το πρόβλημα λύνεται με έναν αλγόριθμο Branch & Bound και μια οικογένεια ευρεστικών αλγορίθμων.

Το πρόβλημα που εξετάζουμε σε αυτή την εργασία, εξετάστηκε πρώτα από τον Πιτσίλκα [29], ο οποίος παρουσίασε ένα μοντέλο μονοκριτήριας βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό πτήσεων και συντηρήσεων αεροσκαφών με στόχο την επίτευξη μέγιστης διαθεσιμότητας, ενώ ο Μπώκος [28] βελτίωσε σημαντικά το παραπάνω μοντέλο.

Από τις παραπάνω αναφορές φαίνεται ότι η βιβλιογραφία που αφορά τις



διαδικασίες αεροσκαφών είναι αρκετά πλούσια. Παρόλα αυτά, καμία από τις ανωτέρω εργασίες δεν εξετάζει το συγκεκριμένο πρόβλημα με χρήση πολυκριτήριας βελτιστοποίησης, όπως στην παρούσα εργασία.

1.3 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Το υπόλοιπο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι δομημένο σε πέντε ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαια 2-6, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2, παραθέτουμε λεπτομερώς την περιγραφή του προβλήματος που μελετάμε.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε τη μορφοποίηση του μοντέλου σχεδιασμού πτήσεων και συντηρήσεων αεροσκαφών, αναλύουμε όλες τις παραμέτρους και τις μεταβλητές απόφασης του μοντέλου, καθώς και εφαρμόζουμε το μοντέλο με τη χρήση της AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming).

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζουμε τη μέθοδο σταθμισμένου αθροίσματος (*weighted-sums approach*) και με τη χρήση αυτής της μεθόδου μελετάμε συγκεκριμένες εφαρμογές του μοντέλου που έχουμε δημιουργήσει.

Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζουμε τη μέθοδο περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων (*e-constraint method*) και με τη χρήση αυτής της μεθόδου μελετάμε και σχολιάζουμε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Στο Κεφάλαιο 6, παρουσιάζουμε τη μέθοδο διαχωρισμού χρονικού ορίζοντα και συγκρίνουμε το μοντέλο πολυκριτήριας βελτιστοποίησης που αναπτύξαμε με το μοντέλο μονοκριτήριας βελτιστοποίησης (Μπώκος Γ, 2005).

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7, παραθέτουμε συμπεράσματα-προτάσεις για μελλοντική βελτίωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ



Το πρόβλημα που εξετάζεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία προέκυψε από τη λειτουργία μιας πτέρυγας μάχης της Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας. Η Ελληνική Πολεμική Αεροπορία διαιρείται σε τέσσερα τμήματα: την Τακτική Πολεμική Αεροπορία, την εναέρια υποστήριξη, την υπηρεσία εκπαίδευσης αέρος και άλλες μονάδες/υπηρεσίες. Όλες οι μονάδες που είναι αρμόδιες για τις επιχειρήσεις και τις αποστολές αέρος ανήκουν στο τμήμα της τακτικής Πολεμικής Αεροπορίας. Περαιτέρω, η οργανωτική δομή της Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας χωρίζεται σε πτέρυγες μάχης, οι οποίες διαιρούνται σε μοίρες. Όλες οι πτέρυγες μάχης ανήκουν στο Τμήμα Τακτικής Πολεμικής Αεροπορίας, αφού όλες χρησιμοποιούν αεροσκάφη.

Η συγκεκριμένη πτέρυγα μάχης που εξετάσαμε αποτελείται από τρεις μοίρες, κάθε μία από τις οποίες χρησιμεύει ως βάση για διάφορα αεροσκάφη διαφόρων τύπων. Αυτή η ιεραρχική δομή είναι κοινή και συναντάται συχνά στην Πολεμική Αεροπορία διαφόρων άλλων χωρών. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον όρο «πτέρυγα» για να αναφερθούμε σε όλες τις μοίρες εξεταζόμενες ως ένα σύνολο.

Στην αρχή κάθε ορίζοντα σχεδιασμού, η διοίκηση της πτέρυγας εκδίδει ένα πρόγραμμα για κάθε συνδυασμό μοίρας και περιόδου. Αυτό το πρόγραμμα καθορίζει το συνολικό χρόνο που όλα τα αεροσκάφη κάθε μοίρας πρέπει να πετάξουν κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου. Ένα χωριστό πρόγραμμα εκδίδεται για κάθε τύπο αεροσκαφών, επειδή διαφορετικοί τύποι αεροσκαφών έχουν διαφορετικές ικανότητες πτήσης και απαιτήσεις συντήρησης. Για αυτόν τον λόγο, το μοντέλο που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, προορίζεται για χρήση σε ένα συγκεκριμένο τύπο αεροσκαφών. Φυσικά, το ίδιο μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί διαδοχικά μέχρι όλα τα προγράμματα να έχουν εκδοθεί, αν υπάρχουν περισσότεροι του ενός τύποι αεροσκαφών. Τα προγράμματα που εκδίδονται από τη



διοίκηση της πτέρυγας περιέχουν τιμές στόχους από τις οποίες μόνο μικρές αποκλίσεις επιτρέπονται.

Για κάθε συγκεκριμένο αεροσκάφος, ορίζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης ως τον συνολικό υπολειπόμενο χρόνο που το αεροσκάφος μπορεί να πετάξει μέχρι να υποβληθεί σε έναν έλεγχο συντήρησης. Ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός αεροσκάφους είναι θετικός αν και μόνο αν αυτό το αεροσκάφος είναι διαθέσιμο να πετάξει. Ομοίως, καθορίζουμε τον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης ενός αεροσκάφους ως τον συνολικό υπολειπόμενο χρόνο που το αεροσκάφος χρειάζεται να συντηρηθεί μέχρι να είναι διαθέσιμο να πετάξει ξανά. Ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης ενός αεροσκάφους είναι θετικός αν και μόνο αν αυτό το αεροσκάφος είναι καθλωμένο για συντήρηση (και άρα δεν είναι διαθέσιμο να πετάξει).

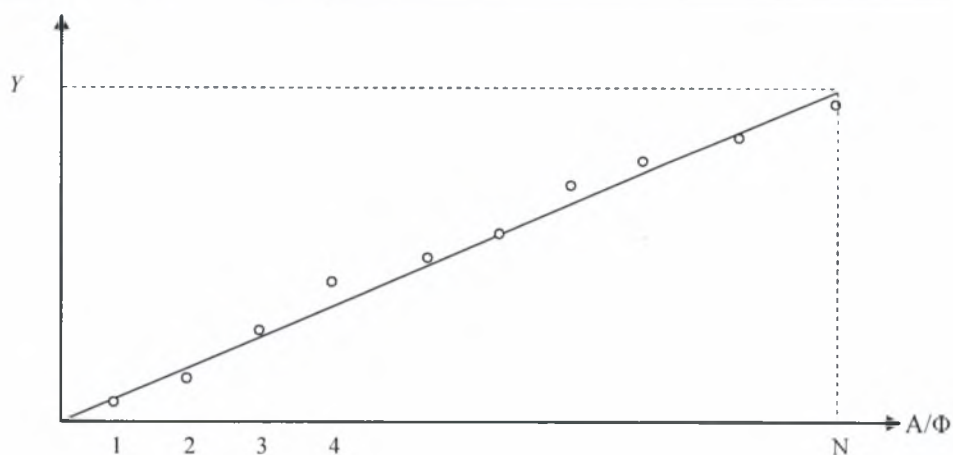
Για τις ανάγκες συντήρησης της πτέρυγας, υπάρχει ένας σταθμός συντήρησης που είναι επιφορτισμένος με την παροχή υπηρεσιών συντήρησης στα αεροσκάφη της πτέρυγας. Αυτός ο σταθμός έχει συγκεκριμένη χωρική και χρονική δυναμικότητα. Με βάση το δεδομένο πρόγραμμα για κάθε μοίρα και τους φυσικούς περιορισμούς που προκύπτουν από τη δυναμικότητα του συστήματος, ο στόχος είναι να εκδοθεί ένα πρόγραμμα πτήσεων και συντηρήσεων για κάθε μεμονωμένο αεροσκάφος, έτσι ώστε κάποιο κατάλληλο μέτρο απόδοσης να βελτιστοποιείται. Όπως αναφέραμε ήδη, η ετοιμότητα ανταπόκρισης σε εξωτερικές απειλές είναι το καταλληλότερο μέτρο απόδοσης για τέτοιες εφαρμογές. Αυτή η ετοιμότητα εξαρτάται από το συνολικό αριθμό αεροσκαφών που είναι διαθέσιμα να πετάξουν και από το συνολικό διαθέσιμο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης. Το μοντέλο που αναπτύξαμε ενσωματώνει και τα δύο αυτά στοιχεία. Επιπλέον, μας επιτρέπει να ελέγχουμε πώς αυτά τα στοιχεία μεταβάλλονται όχι μόνο μέσα στην πτέρυγα αλλά επίσης και σε κάθε μοίρα



ξεχωριστά.

Σε οποιαδήποτε στιγμή, ο συνολικός υπολειπόμενος χρόνος πτήσης μιας μοίρας είναι ίσος με το άθροισμα των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης όλων των αεροσκαφών που ανήκουν σε αυτή την μοίρα. Ο συνολικός υπολειπόμενος χρόνος πτήσης της πτέρυγας είναι ίσος με το σύνολο των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης όλων των μοιρών. Είναι προφανές ότι υπάρχουν πολλοί πιθανοί συνδυασμοί υπολειπόμενων χρόνων πτήσης μεμονωμένων αεροσκαφών που μπορούν να οδηγήσουν στον ίδιο συνολικό υπολειπόμενο χρόνο πτήσης μοιρών ή πτερύγων. Επιπλέον, δεν είναι επαρκές το να ορίζουμε τη διαθεσιμότητα ως το συνολικό αριθμό αεροσκαφών που είναι διαθέσιμα στην πτέρυγα μόνο, επειδή αυτός ο ορισμός δε δίνει καμιά πληροφορία για τον τρόπο που ο συνολικός υπολειπόμενος χρόνος πτήσης κατανέμεται στα αεροσκάφη και τις μοίρες.

Θεωρούμε ένα 2-διάστατο διάγραμμα (σχήμα 1). Ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης που μετριέται σε κάποιες κατάλληλες μονάδες και ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το δείκτη των διαθέσιμων αεροσκαφών κατά αύξουσα σειρά, όσον αφορά με τους υπολειπόμενους χρόνους πτήσης τους, με 1 να είναι ο δείκτης του αεροσκάφους με το μικρότερο υπολειπόμενο χρόνο και N ο δείκτης του αεροσκάφους με το μεγαλύτερο. Θεωρούμε επίσης το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο με συντεταγμένες (N, Y) , όπου Y είναι ο μέγιστος χρόνος που ένα αεροσκάφος μπορεί να πετάξει μεταξύ δύο διαδοχικών συντηρήσεων. Με την απεικόνιση κάθε αεροσκάφους σε αυτήν την γραφική παράσταση, μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τη συνολική διαθεσιμότητα της μοίρας ή της πτέρυγας, ανάλογα σε ποια εκ των δύο αναφέρεται η γραφική παράσταση.



Σχήμα 1: Οπτική αναπαράσταση του υπολειπόμενου χρόνου πτήσης των αεροσκαφών

Ένας δείκτης χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ομαλότητα της κατανομής του συνολικού υπολειπόμενου χρόνου πτήσης μεταξύ των αεροσκαφών. Αυτός ο δείκτης είναι ίσος με το άθροισμα των κάθετων αποστάσεων (αποκλίσεις) κάθε σημείου που απεικονίζει ένα μεμονωμένο αεροσκάφος από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο (N, Y) . Όσο μικρότερο είναι αυτό το άθροισμα, τόσο ομαλότερη είναι η κατανομή του συνολικού υπολειπόμενου χρόνου πτήσης. Ιδανικά, ο δείκτης αυτός είναι ίσος με 0, όταν όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα. Κατά την έκδοση των μεμονωμένων προγραμμάτων, η πρόθεση είναι να κρατηθεί κάθε σημείο όσο το δυνατόν πιο κοντά στο ευθύγραμμο τμήμα, έτσι ώστε η τιμή του δείκτη να κρατηθεί όσο το δυνατόν μικρότερη. Μέχρι σήμερα αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για να εκδοθεί το πρόγραμμα πτήσεων και συντηρήσεων των μεμονωμένων αεροσκαφών στην πτέρυγα μάχης που μελετούμε.

Η λογική πίσω από την τεχνική που περιγράφεται παραπάνω είναι σχετικά απλή. Καταρχάς, παρέχεται πάντα ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών υπολειπόμενων



χρόνων πτήσεων αεροσκαφών. Επιπλέον, καθιερώνεται μια ομαλή ακολουθία, που καθορίζει τη σειρά με την οποία τα αεροσκάφη πρέπει να επισκεφτούν το σταθμό συντήρησης. Αυτό μας εξυπηρετεί γιατί αποφεύγεται η συμφόρηση στο σταθμό συντήρησης και εξασφαλίζεται μια ομαλή χρησιμοποίησή του.

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η χρονική διαθεσιμότητα πτήσης είναι ίση με το άθροισμα όλων των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης των αεροσκαφών μεν, αλλά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί υπολειπόμενων χρόνων πτήσεων που μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια συνολική διαθεσιμότητα. Για να κατανοηθεί αυτό καλύτερα, έστω ένα πρόβλημα με τέσσερα αεροσκάφη κάθε ένα από τα οποία μπορεί να πετάξει ένα μέγιστο 120 ωρών μεταξύ δύο διαδοχικών συντηρήσεων. Για μια συνολική χρονική διαθεσιμότητα πτήσης 300 ωρών, ένας πιθανός συνδυασμός των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης είναι 30-30-120-120 και άλλος ένας είναι 30-60-90-120. Για την τεχνική που περιγράφεται παραπάνω, η δεύτερη κατανομή είναι προτιμότερη επειδή εξασφαλίζει ομαλότερη ροή των αεροσκαφών, δηλαδή ομαλότερη χρησιμοποίηση των χρόνων πτήσης των αεροσκαφών και του σταθμού συντήρησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ



3.1 Μορφοποίηση και Ανάλυση Περιορισμών Μοντέλου Σχεδιασμού Πτήσεων και Συντηρήσεων A/Φ

Η μαθηματική μορφοποίηση του μοντέλου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ακόλουθη :

α. Μεταβλητές απόφασης μοντέλου :

- Z_1 : ελάχιστος αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών πτέρυγας σε κάθε περίοδο
- Z_2 : ελάχιστος αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών οποιασδήποτε μοίρας σε κάθε περίοδο
- Z_3 : ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης πτέρυγας σε κάθε περίοδο
- Z_4 : ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης οποιασδήποτε μοίρας σε κάθε περίοδο
- x_{mnt} : χρόνος πτήσης του αεροσκάφους n της μοίρας m κατά την περίοδο t
- y_{mnt} : Υπολειπόμενος χρόνος πτήσης του αεροσκάφους n της μοίρας m στην αρχή της περιόδου t
- g_{mnt} : Υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης του αεροσκάφους n της μοίρας m στην αρχή της περιόδου t
- h_{mnt} : Χρόνος συντήρησης του αεροσκάφους n της μοίρας m κατά την περίοδο t
- a_{mnt} : Δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν το αεροσκάφος n της μοίρας m είναι διαθέσιμο στην αρχή της περιόδου t και 0 αν όχι
- d_{mnt} : Δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν το αεροσκάφος n της μοίρας m εξέρχεται από το σταθμό συντήρησης στην αρχή της περιόδου t και 0 αν όχι
- f_{mnt} : Δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν το αεροσκάφος n



της μοίρας m εισέρχεται στο σταθμό συντήρησης στην αρχή της περιόδου t και 0 αν όχι

- q_t, p_{mnt}, r_{mnt} : Βοηθητικές δυαδικές μεταβλητές απόφασης

β. Παράμετροι μοντέλου :

- T : αριθμός περιόδων χρονικού ορίζοντα
- A_{mt} : Προγραμματισμένες ώρες πτήσης της μοίρας m κατά την περίοδο t
- B_t : Χρονική δυναμικότητα του σταθμού συντήρησης κατά την περίοδο t
- Y : Υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός αεροσκάφους αμέσως μετά την έξοδο του από το σταθμό συντήρησης
- G : Υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης ενός αεροσκάφους αμέσως μετά την είσοδο του στο σταθμό συντήρησης
- $A1_{mn}$: Κατάσταση του αεροσκάφους n της μοίρας m την πρώτη περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού ($= a_{mnl}$)
- $Y1_{mn}$: Υπολειπόμενος χρόνος πτήσης του αεροσκάφους n της μοίρας m την πρώτη περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού ($= y_{mnl}$)
- $G1_{mn}$: Υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης του αεροσκάφους n της μοίρας m την πρώτη περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού ($= g_{mnl}$)
- C : Ο μέγιστος αριθμός των αεροσκαφών που μπορεί να εξυπηρετηθεί ταυτόχρονα από το σταθμό συντήρησης
- X_{max} : Μέγιστος χρόνος πτήσης ενός αεροσκάφους κατά τη διάρκεια μίας περιόδου
- Y_{min} : Ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός διαθέσιμου αεροσκάφους
- G_{min} : Ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης ενός μη διαθέσιμου



αεροσκάφους

- L, U : Πραγματικοί αριθμοί που υποδηλώνουν την μέγιστη απόκλιση από το A_{mt}
- K : Ένας πολύ μεγάλος αριθμός

Ακολουθεί η αναλυτική μορφοποίηση του μοντέλου.

$$\text{Max } z_1 \tag{1}$$

$$\text{Max } z_2 \tag{2}$$

$$\text{Max } z_3 \tag{3}$$

$$\text{Max } z_4 \tag{4}$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mnt} \geq z_1, \quad \forall t=2, \dots, T+1 \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^N a_{mnt} \geq z_2, \quad \forall m, t=2, \dots, T+1 \tag{6}$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_{mnt} \geq z_3, \quad \forall t=2, \dots, T+1 \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^N y_{mnt} \geq z_4, \quad \forall m, t=2, \dots, T+1 \tag{8}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (1) μεγιστοποιεί το z_1 , το οποίο από τους περιορισμούς (5) δηλώνει τον ελάχιστο αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών της πτέρυγας σε κάθε περίοδο. Ομοίως, η αντικειμενική συνάρτηση (2) μεγιστοποιεί το z_2 , το οποίο από τους περιορισμούς (6) δηλώνει τον ελάχιστο αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών οποιασδήποτε μοίρας σε κάθε περίοδο. Η αντικειμενική συνάρτηση (3) μεγιστοποιεί το z_3 , το οποίο από τους περιορισμούς (7) δηλώνει τον ελάχιστο



υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της πτέρυγας σε κάθε περίοδο. Η αντικειμενική συνάρτηση (4) μεγιστοποιεί το z_4 , το οποίο από τους περιορισμούς (8) δηλώνει τον ελάχιστο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης οποιασδήποτε μοίρας σε κάθε περίοδο. Η διαθεσιμότητα της πρώτης περιόδου είναι καθορισμένη, άρα δεν εμπεριέχεται στην αντικειμενική συνάρτηση. Προκειμένου να επιτευχθεί μια ομαλή εφαρμογή του μοντέλου για τον επόμενο χρονικό ορίζοντα, οι εκφράσεις για τα z_i επεκτείνονται επίσης στην πρώτη περίοδο εκείνου του ορίζοντα. Το ίδιο ισχύει και για άλλους περιορισμούς του μοντέλου.

$$y_{mnl+1} = y_{mnl} - x_{mnl} + Y * d_{mnl+1}, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$a_{mnl+1} - a_{mnl} - d_{mnl+1} \leq 0, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (10)$$

$$a_{mnl+1} - a_{mnl} + 1.1(1 - d_{mnl+1}) \geq 0.1, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (11)$$

$$g_{mnl+1} = g_{mnl} - h_{mnl} + G * f_{mnl+1}, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (12)$$

$$a_{mnl} - a_{mnl+1} - f_{mnl+1} \leq 0, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (13)$$

$$a_{mnl} - a_{mnl+1} + 1.1 * (1 - f_{mnl+1}) \geq 0.1, \quad \forall m, n, t = 1, \dots, T \quad (14)$$

Οι περιορισμοί (9) χρησιμοποιούνται για να ανανεώσουν τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης κάθε αεροσκάφους στο τέλος κάθε περιόδου, με βάση τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης του στην αρχή αυτής της περιόδου και το χρόνο που πέταξε κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Η δυαδική μεταβλητή d παίρνει την τιμή 1 μόνο όταν το αντίστοιχο αεροσκάφος εξέρχεται από το σταθμό της συντήρησης. Με αυτό τον τρόπο, ένα αεροσκάφος που εξέρχεται από το σταθμό συντήρησης είναι διαθέσιμο να



πετάξει ξανά με το μέγιστο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης Y . Ομοίως, οι περιορισμοί (12) χρησιμοποιούνται για να ανανεώσουν τον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης κάθε αεροσκάφους στο τέλος κάθε περιόδου, με βάση τον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης του στην αρχή αυτής της περιόδου και το χρόνο που συντηρήθηκε κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Η δυαδική μεταβλητή f παίρνει την τιμή 1 μόνο όταν το αντίστοιχο αεροσκάφος εισέρχεται στο σταθμό συντήρησης για να συντηρηθεί. Με αυτό τον τρόπο, ένα αεροσκάφος που εισέρχεται στο σταθμό συντήρησης είναι έτοιμο για να δεχθεί συντήρηση για το μέγιστο υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης G .

Οι περιορισμοί (10), (11), (13) και (14) εξασφαλίζουν ότι οι μεταβλητές d και f θα πάρουν τις σωστές τιμές, με βάση τις τιμές των μεταβλητών a . Έστω το n^{th} αεροσκάφος της m^{th} μοίρας. Οι μεταβλητές (a_{mnt}, a_{mnt+1}) μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε από τις τιμές $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ και η διαφορά $a_{mnt+1} - a_{mnt}$ είναι ίση με $1, 0, -1, 0$ αντίστοιχα. Η μεταβλητή d_{mnt+1} πρέπει να πάρει την τιμή 1 όταν $(a_{mnt}, a_{mnt+1}) = (0,1)$ και αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (13). Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η d_{mnt+1} πρέπει να είναι 0 και αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (11). Ομοίως, η μεταβλητή f_{mnt+1} πρέπει να πάρει την τιμή 1 όταν $(a_{mnt}, a_{mnt+1}) = (1,0)$ και αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (13). Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η f_{mnt+1} πρέπει να είναι 0 και αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς (14).

$$L A_{mt} \leq \sum_{n=1}^N X_{mnt} \leq U A_{mt}, \quad \forall m, n, t=1, \dots, T \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_{mnt} \leq B_t, \quad \forall t=1, \dots, T \quad (16)$$



$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N g_{mnt} \leq \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_{mnt} + K^*q_t, \forall t= 1, \dots, T \quad (17)$$

$$B_t \leq \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_{mnt} + K^*(1-q_t), \forall t= 1, \dots, T \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (1-a_{mnt}) \leq C, \forall t= 2, \dots, T+1 \quad (19)$$

Οι περιορισμοί (15) εξασφαλίζουν ότι το πρόγραμμα για κάθε μοίρα ικανοποιείται. Οι μεταβλητές L και U καθορίζουν ένα διάστημα $[LA_{mt}, UA_{mt}]$, στο οποίο πρέπει να ανήκει ο πραγματικός χρόνος πτήσης μοιρών για τη συγκεκριμένη περίοδο. Παραδείγματος χάριν, όταν $L=0.95$ και $U=1.05$, επιτρέπεται μια μέγιστη απόκλιση 5% από το πρόγραμμα. Οι περιορισμοί (16) και (19) εξασφαλίζουν ότι οι περιορισμοί για τη χρονική και χωρική δυναμικότητα του σταθμού συντήρησης δεν παραβιάζονται, σε οποιαδήποτε περίοδο. Οι περιορισμοί (17) και (18) εισάγονται για να εξασφαλίσουν ότι η συντήρηση δεν θα είναι άεργη οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα αεροσκάφος που περιμένει να συντηρηθεί. Με την εισαγωγή της βοηθητικής δυαδικής μεταβλητής q_t , εξασφαλίζεται ότι ο συνολικός χρόνος συντήρησης που παρέχεται από το σταθμό στην περίοδο t θα είναι ίσος είτε με τη συνολική χρονική δυναμικότητα του σταθμού κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είτε με τις συνολικές απαιτήσεις συντήρησης αυτής της περιόδου, ανάλογα με το ποια από αυτές τις δύο ποσότητες είναι μικρότερη.

$$y_{mnt} \leq Y^* a_{mnt}, \forall m, n, t= 2, \dots, T+1 \quad (20)$$

$$g_{mnt} \leq G^*(1-a_{mnt}), \forall m, n, t= 2, \dots, T+1 \quad (21)$$



$$x_{mnl} \leq X_{\max} * a_{mnl}, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (22)$$

$$y_{mnl} \geq Y_{\min} * a_{mnl}, \forall m, n, t= 2, \dots, T+1 \quad (23)$$

$$g_{mnl} \geq G_{\min} * (1 - a_{mnl}), \forall m, n, t= 2, \dots, T+1 \quad (24)$$

$$h_{mnl} \leq g_{mnl}, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (25)$$

$$x_{mnl} \leq y_{mnl}, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (26)$$

Οι περιορισμοί (20) δηλώνουν ότι ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός αεροσκάφους δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη τιμή, Y , και εξασφαλίζουν ότι θα είναι 0 οπότε αυτό το αεροσκάφος δεν είναι διαθέσιμο. Ομοίως, οι περιορισμοί (21) δηλώνουν ότι ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης ενός αεροσκάφους δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη τιμή, G , και εξασφαλίζουν ότι θα είναι 0 οπότε αυτό το αεροσκάφος είναι διαθέσιμο. Οι περιορισμοί (22) επιβάλλει ένα ανώτερο όριο στο μέγιστο χρόνο που κάθε αεροσκάφος μπορεί να πετάξει κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Ένας τέτοιος περιορισμός μπορεί να είναι απαραίτητος για τεχνικούς λόγους. Οι περιορισμοί (23) και (24) επιβάλλουν κατώτερες τιμές στους υπολειπόμενους χρόνους πτήσης και συντήρησης κάθε αεροσκάφους. Εισάγονται για να εξαλείψουν την περίπτωση όπου ένα αεροσκάφος έχει ένα αμελητέο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης ή συντήρησης. Οι περιορισμοί (26) εξασφαλίζουν ότι ο συνολικός χρόνος που ένα αεροσκάφος πετά κατά τη διάρκεια μίας περιόδου δεν υπερβαίνει τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης αυτού του αεροσκάφους στην αρχή της ίδιας περιόδου. Ομοίως, οι περιορισμοί (25) εξασφαλίζουν ότι ο συνολικός χρόνος που το πλήρωμα της συντήρησης εργάζεται σε ένα αεροσκάφος κατά τη διάρκεια μίας περιόδου δεν



υπερβαίνει τον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης αυτού του αεροσκάφους στην αρχή της ίδιας περιόδου.

$$y_{mnt} + K^* p_{mnt} \leq K, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (27)$$

$$a_{mnt+1} \leq (y_{mnt} - x_{mnt}) * K + K^* p_{mnt}, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (28)$$

$$g_{mnt} + K^* r_{mnt} \leq K, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (29)$$

$$1 - a_{mnt+1} \leq (g_{mnt} - h_{mnt}) * K + K^* r_{mnt}, \forall m, n, t= 1, \dots, T \quad (30)$$

Οι περιορισμοί (27) και (28) εισάγονται για να εξασφαλίσουν ότι η διαθεσιμότητα του αεροσκάφους τερματίζει όταν μειώνεται ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης του σε 0. Εάν $y_{mnt} > 0$, η βοηθητική μεταβλητή απόφασης p_{mnt} στους περιορισμούς (27) είναι ίση με 0. Σε εκείνη την περίπτωση, οι περιορισμοί (28) υποχρεώνουν την μεταβλητή a_{mnt+1} να πάρει την τιμή 0 εάν $y_{mnt} = x_{mnt}$, αφού ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης αυτού του αεροσκάφους μειώνεται σε 0 κατά τη διάρκεια της περιόδου t . Ομοίως, οι περιορισμοί (29) και (30) εξασφαλίζουν ότι ένα αεροσκάφος γίνεται διαθέσιμο όταν ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης του μειώνεται σε 0. Εάν $g_{mnt} > 0$, η βοηθητική μεταβλητή απόφασης r_{mnt} στους περιορισμούς (29) είναι ίση με 0. Σε εκείνη την περίπτωση, οι περιορισμοί (30) ωθούν την a_{mnt+1} στην τιμή 1 εάν $g_{mnt} = h_{mnt}$, αφού ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης αυτού του αεροσκάφους μειώνεται σε 0 κατά τη διάρκεια της περιόδου t .

$$a_{mnl} = A1_{mn}, \forall m, n \quad (31)$$

$$y_{mnl} = Y1_{mn}, \forall m, n \quad (32)$$



$$g_{mnl} = G1_{mn}, \forall m, n \quad (33)$$

Οι περιορισμοί 31, 32 και 33 χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν την κατάσταση του συστήματος την πρώτη περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού.

Το μοντέλο είναι ακριβές, δεδομένου ότι ενσωματώνει όλες τις πτυχές του προβλήματος, όπως τη χωρική και χρονική δυναμικότητα του σταθμού συντήρησης, τις απαιτήσεις πτήσης, τις ανάγκες συντήρησης, κ.λπ... Ο μεγάλος αριθμός μεταβλητών απόφασης ενισχύει την ευελιξία του και καθιστά την εισαγωγή των πρόσθετων περιορισμών απλή.

3.2 Εφαρμογή μοντέλου με χρήση της AMPL

Για την εφαρμογή του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Η αναλυτική περιγραφή του μοντέλου, όπως αυτή διατυπώνεται στην AMPL είναι η ακόλουθη:

Sets

set M; # Αριθμός μοιρών

set N; # Αριθμός αεροσκαφών

Παράμετροι

param T; # Χρονικός ορίζοντας

param A {M,1..T}; # Προγραμματισμένες ώρες πτήσης την περίοδο T

param B {1..T}; # Δυνατότητα παροχής συντήρησης

param Y; # Μέγιστος αριθμός υπολειπόμενων ωρών πτήσης (μετά την έξοδο του



A/Φ από την συντήρηση) για κάθε περίοδο T

param G ; # Μέγιστος αριθμός υπολειπόμενων εργατωρών συντήρησης (μετά την είσοδο του A/Φ στη συντήρηση) για κάθε περίοδο T

param A1 {M,N}; # Αρχικές τιμές του a για κάθε A/Φ την χρονική περίοδο t=1

param Y1 {M,N}; # Αρχικές τιμές του y για κάθε A/Φ την χρονική περίοδο t=1

param G1 {M,N}; # Αρχικές τιμές του g για κάθε A/Φ την χρονική περίοδο t=1

param C; # Αριθμός σταθμών συντήρησης

param Xmax; # Μέγιστος αριθμός ωρών πτήσης ανά A/Φ κατά τη διάρκεια μίας περιόδου εφόσον αυτό δύναται να πετάξει

param Ymin; # Ελάχιστος αριθμός υπολειπόμενων ωρών πτήσης ανά A/Φ κατά τη διάρκεια μίας περιόδου εφόσον αυτό δύναται να πετάξει

param Gmin; # Ελάχιστος υπολειπόμενος αριθμός εργατωρών συντήρησης ανά A/Φ όταν αυτό βρίσκεται στη συντήρηση

param L; # Πραγματικός αριθμός που δηλώνει την κάτω απόκλιση από την τιμή A_{mt}

param U; # Πραγματικός αριθμός που δηλώνει την άνω απόκλιση από την τιμή A_{mt}

param K; # Ένας αρκούντως μεγάλος αριθμός

Μεταβλητές Απόφασης

var z₁; # Αντικειμενική συνάρτηση

var z₂; # Αντικειμενική συνάρτηση

var z₃; # Αντικειμενική συνάρτηση



```
var z4; # Αντικειμενική συνάρτηση

var x {M,N,1..T} >=0; # Ώρες πτήσης ανά Α/Φ για κάθε περίοδο T

var y {M,N,1..T+1} >=0; # Υπολειπόμενες ώρες πτήσης ανά Α/Φ για κάθε περίοδο T

var g {M,N,1..T+1} >=0; # Υπολειπόμενες ώρες συντήρησης ανά Α/Φ για κάθε
περίοδο T

var h {M,N,1..T} >=0; # Ώρες συντήρησης ανά Α/Φ για κάθε περίοδο T

var a {M,N,1..T+1} binary; # Διαθεσιμότητα Α/Φ 1 – 0( πτήσιμο ή όχι ) για κάθε
περίοδο T

var d {M,N,1..T+1} binary; # Βοηθητική μεταβλητή ( προσθέτει 300 ώρες πτήσης )

var f {M,N,1..T+1} binary; # Βοηθητική μεταβλητή (προσθέτει 320 ώρες
συντήρησης)

var q {1..T} binary; # Βοηθητική μεταβλητή

var p {M,N,1..T} binary; # Βοηθητική μεταβλητή

var r {M,N,1..T} binary; # Βοηθητική μεταβλητή

var Sy {M,1..T} >=0; # Συνολικός αριθμός υπολειπόμενων ωρών πτήσης ανά μοίρα
m για κάθε περίοδο T

var Sa {M,1..T} >=0; # Συνολικός αριθμός διαθέσιμων Α/Φ ανά μοίρα m για κάθε
περίοδο T

var Sx {M,1..T} >=0; # Συνολικός αριθμός ωρών πτήσης ανά μοίρα m για κάθε
περίοδο T

var Ty {1..T} >=0; # Συνολικός αριθμός ωρών πτήσης για κάθε περίοδο T
```



var Ta {1..T} >=0; # Συνολικός αριθμός διαθέσιμων Α/Φ για κάθε περίοδο T

#Αντικειμενική συνάρτηση

maximize: z1 ; # (ή z2 ή z3 ή z4)

#Περιορισμοί

subject to aer pter {t in 2..T+1}:

sum {m in M,n in N} a[m,n,t] >= z1; # ελάχιστος αριθμός Α/Φ πτέρυγας

subject to aer moiras {m in M,t in 2..T+1}:

sum {n in N} a[m,n,t] >= z2; # ελάχιστος αριθμός Α/Φ μοίρας

subject to wres pter {t in 2..T+1}:

sum {m in M,n in N} y[m,n,t] >= z3; # ελάχιστος αριθμός υπολειπομένων ωρών

subject to wres moiras {m in M,t in 2..T+1}:

sum {n in N} y[m,n,t] >= z4; # ελάχιστος αριθμός υπολειπομένων μοίρας

subject to flight_hrs {m in M, n in N, t in 1..T}:

y[m,n,t+1] = y[m,n,t] - x[m,n,t] + Y*d[m,n,t+1]; # Υπολειπόμενες ώρες πτήσης

subject to d_constr1 {m in M, n in N, t in 1..T}:

a[m,n,t+1] - a[m,n,t] - d[m,n,t+1] <= 0;

subject to d_constr2 {m in M, n in N, t in 1..T}:

a[m,n,t+1] - a[m,n,t] + 1.1*(1-d[m,n,t+1]) >= 0.1;

subject to maint_hrs {m in M, n in N, t in 1..T}:

g[m,n,t+1] = g[m,n,t] - h[m,n,t] + G*f[m,n,t+1]; # Υπολειπόμενες εργατοώρες συντήρησης

subject to f_constr1 {m in M, n in N, t in 1..T}:

a[m,n,t] - a[m,n,t+1] - f[m,n,t+1] <= 0;

subject to f_constr2 {m in M, n in N, t in 1..T}:

a[m,n,t] - a[m,n,t+1] + 1.1*(1-f[m,n,t+1]) >= 0.1;



subject to progr_hrs {m in M, t in 1..T}:

$L * A[m,t] \leq \sum \{n \text{ in } N\} x[m,n,t] \leq U * A[m,t]$; # Περιορισμός προγραμματισμού ωρών πτήσεων

subject to maint_capacity {t in 1..T}:

$\sum \{m \text{ in } M, n \text{ in } N\} h[m,n,t] \leq B[t]$; # Δυνατότητα παροχής εργατοωρών συντήρησης

subject to constr_g_h {t in 1..T}:

$\sum \{m \text{ in } M, n \text{ in } N\} g[m,n,t] \leq \sum \{m \text{ in } M, n \text{ in } N\} h[m,n,t] + K * q[t]$;

subject to constr_h {t in 1..T}:

$B[t] \leq \sum \{m \text{ in } M, n \text{ in } N\} h[m,n,t] + K * (1 - q[t])$;

subject to numb_maint {t in 2..T+1}:

$\sum \{m \text{ in } M, n \text{ in } N\} (1 - a[m,n,t]) \leq C$; # Χωρητικότητα σταθμού συντήρησης

subject to check_fl_hrs {m in M, n in N, t in 2..T+1}:

$y[m,n,t] \leq Y * a[m,n,t]$;

subject to check_maint_hrs {m in M, n in N, t in 2..T+1}:

$g[m,n,t] \leq G * (1 - a[m,n,t])$;

subject to upper_x {m in M, n in N, t in 1..T}:

$x[m,n,t] \leq X_{\max} * a[m,n,t]$; # Μέγιστος αριθμός ωρών πτήσης

#subject to lower_x {m in M, n in N, t in 1..T}:

$x[m,n,t] \geq X_{\min} * a[m,n,t]$; # Ελάχιστος αριθμός ωρών πτήσης

subject to lower_y {m in M, n in N, t in 2..T+1}:

$y[m,n,t] \geq Y_{\min} * a[m,n,t]$; # Ελάχιστος αριθμός υπολειπόμενων ωρών πτήσης

subject to lower_g {m in M, n in N, t in 2..T+1}:

$g[m,n,t] \geq G_{\min} * (1 - a[m,n,t])$; # Ελάχιστος αριθμός υπολειπόμενων ωρών συντήρησης



subject to h_g {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$h[m,n,t] \leq g[m,n,t];$$

subject to x_y {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$x[m,n,t] \leq y[m,n,t];$$

subject to initial_a {m in M, n in N}:

$$a[m,n,1] = A1[m,n];$$

subject to initial_y {m in M, n in N}:

$$y[m,n,1] = Y1[m,n];$$

subject to initial_g {m in M, n in N}:

$$g[m,n,1] = G1[m,n];$$

subject to p_constr {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$y[m,n,t] + K * p[m,n,t] \leq K; \quad \# \text{ if } y[m,n,t] > 0 \text{ then } p[m,n,t] = 0$$

subject to y_drop {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$a[m,n,t+1] \leq (y[m,n,t] - x[m,n,t]) * K + K * p[m,n,t];$$

subject to r_constr {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$g[m,n,t] + K * r[m,n,t] \leq K; \quad \# \text{ if } g[m,n,t] > 0 \text{ then } r[m,n,t] = 0$$

subject to g_drop {m in M, n in N, t in 1..T}:

$$1 - a[m,n,t+1] \leq (g[m,n,t] - h[m,n,t]) * K + K * r[m,n,t];$$

subject to S_y {m in M, t in 1..T+1}:

$$S_y[m,t] = \sum\{n \in N\} y[m,n,t]; \quad \# \text{ Υπολειπόμενες ώρες πτήσης ανά μοίρα και περίοδο}$$

subject to S_a {m in M, t in 1..T+1}:

$$S_a[m,t] = \sum\{n \in N\} a[m,n,t]; \quad \# \text{ Αριθμός διαθέσιμων Α/Φ ανά μοίρα και περίοδο}$$

subject to S_x {m in M, t in 1..T}:

$$S_x[m,t] = \sum\{n \in N\} x[m,n,t]; \quad \# \text{ Ωρες πτήσης ανά μοίρα και ανά περίοδο}$$



subject to $T_y \{t \text{ in } 1..T+1\}$:

$Ty[t] = \text{sum}\{m \text{ in } M\} Sy[m,t]$; # Συνολικές υπολειπόμενες ώρες πτήσης ανά περίοδο

subject to $T_a \{t \text{ in } 1..T+1\}$:

$Ta[t] = \text{sum}\{m \text{ in } M\} Sa[m,t]$; # Συνολικός αριθμός διαθέσιμων Α/Φ ανά περίοδο

3.2.1 Παράδειγμα πραγματικής εφαρμογής

Στο παράδειγμα που μελετάμε έχουμε μία μονάδα Α/Φ που αποτελείται από **3** μοίρες, κάθε μία από τις οποίες έχει **8** αεροσκάφη, ενώ ο χρονικός ορίζοντας είναι **6** περιόδων (μήνες). Στην αρχή του ορίζοντα σχεδιασμού υπάρχουν 3 αεροσκάφη στο σταθμό συντήρησης, ένα από κάθε μοίρα. Τα υπόλοιπα δεδομένα του προβλήματος φαίνονται παρακάτω σε τέτοια μορφή ώστε να χρησιμοποιηθεί η AMPL.

set M:= m1 m2 m3 ;

set N:= n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 ;

param T:= 6;

param G:= 320;

param Y:= 300;

param C:= 3;

param L:= 0.9;

param U:= 1.1;

param Xmax:= 50;

param Xmin:= 0.5;

param Ymin:= 0.1;

param Gmin:= 0.1;



param K:= 960;

param B:=

1 480

2 470

3 480

4 460

5 490

6 450 ;

param S:

	1	2	3	4	5	6	:=
m1	150	130	150	140	150	160	
m2	140	150	140	160	150	140	
m3	140	160	150	140	160	130	;

param A1:

	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	:=
m1	1	1	0	1	1	1	1	1	
m2	1	0	1	1	1	1	1	1	
m3	1	1	0	1	1	1	1	1	;



param Y1:

	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	:=
m1	100	123	0	263	90	300	40	10	
m2	133	0	150	34	10	150	114	218	
m3	250	150	0	140	100	50	10	152	;

param G1:

	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	:=
m1	0	0	320	0	0	0	0	0	
m2	0	200	0	0	0	0	0	0	
m3	0	0	100	0	0	0	0	0	;



3.2.2 Υπολογισμός K

Η ποιότητα της μορφοποίησης εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου K . Η τιμή αυτή θα πρέπει από τη μια μεριά να είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να εξασφαλίζεται η ορθότητα όλων των περιορισμών στους οποίους εμφανίζεται το K , και από την άλλη μεριά όσο το δυνατόν μικρότερη για να περιοριστεί η περιοχή του συνόλου των εφικτών λύσεων. Παρακάτω, περιγράφεται η ακριβής διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εύρεση της κατάλληλης τιμής της παραμέτρου K .

- Για τον περιορισμό 17, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $\sum \sum h_{mni} = 0$ και $q_i=1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 17 γίνεται: $K \geq \sum \sum g_{mni}$

Επειδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $\sum \sum g_{mni}$ είναι $C \cdot G$, η ελάχιστη τιμή του K είναι $C \cdot G$. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, $C \cdot G = 3 \cdot 320 = 960$.

Άρα $K \geq 960$.

- Για τον περιορισμό 18, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $\sum \sum h_{mni} = 0$ και $(1 - q_i) = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 18 γίνεται: $K \geq \max B_i$.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα $\max B_i = 490$. Άρα $K \geq 490$.

- Για τον περιορισμό 32, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $p_{mni} = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 32 γίνεται: $y_{mni} \leq K$.

Η μέγιστη τιμή του y_{mni} είναι Y . Δηλαδή έχουμε $K \geq Y$. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $Y = 300$. Άρα $K \geq 300$

- Για τον περιορισμό 33, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $p_{mni} = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 33 γίνεται:



$$\alpha_{mnt+1} \leq (y_{mnt} - x_{mnt}) * K \Rightarrow 1 \leq 0.1 * K \Rightarrow K \geq 10.$$

- Για τον περιορισμό 34, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $r_{mnt}=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 34 γίνεται: $g_{mnt} \leq K$.

Η μέγιστη τιμή του g_{mnt} είναι G . Δηλαδή έχουμε $K \geq G$. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $G=320$.

Άρα $K \geq 320$

- Για τον περιορισμό 35, η ελάχιστη τιμή του K ορίζεται όταν $r_{mnt}=0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο περιορισμός 35 γίνεται:

$$1 - \alpha_{mnt+1} \leq (g_{mnt} - h_{mnt}) * K \Rightarrow 1 \leq 0.1 * K \Rightarrow K \geq 10.$$

Συνεπώς, $K = \max \{ C * G, \max B_t, 10, Y, G \} = 960$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟΥ

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ



4.1 Μέθοδος σταθμισμένου αθροίσματος (weighted-sums approach)

Μια πολύ χρήσιμη μέθοδος στον πολυκριτήριο γραμμικό προγραμματισμό είναι η μέθοδος σταθμισμένου αθροίσματος. Η μέθοδος είναι η ακόλουθη. Κάθε αντικειμενική συνάρτηση $c^i x$ πολλαπλασιάζεται με ένα αυστηρά θετικό βάρος λ_i . Κατόπιν, οι k αντικειμενικές συναρτήσεις αθροίζονται για να διαμορφώσουν μια σταθμισμένη αντικειμενική συνάρτηση. Αν C ο πίνακας $k \times n$ του οποίου οι σειρές είναι τα c^i , η σταθμισμένη αντικειμενική συνάρτηση γράφεται $\lambda^T Cx$ όπου $\lambda \in R^k$ είναι το διάνυσμα των αυστηρά θετικών βαρών. Το διάνυσμα- λ είναι πάντα ομαλοποιημένο έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων του να είναι ίσο με τη μονάδα.

Έστω Λ το σύνολο όλων των διανυσμάτων- λ όπου

$$\Lambda = \{ \lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \}$$

Κατόπιν, η βέλτιστη λύση του μονοκριτηρίου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει

$$\max \{ \lambda^T Cx \mid x \in S \}$$

είναι αποτελεσματική (efficient) για το αρχικό πρόβλημα πολυκριτηριας βελτιστοποίησης. Με αυτόν τον τρόπο, οι τεχνικές σταθμισμένου αθροίσματος μπορούν να αντιμετωπιστούν ως μέθοδοι που πειραματίζονται με τους αυστηρά θετικούς συνδυασμούς των αντικειμενικών συναρτήσεων.

4.2 Μαθηματικό κίνητρο

Το μαθηματικό ενδιαφέρον για τη μέθοδο σταθμισμένου αθροίσματος προκύπτει από τα ακόλουθα δύο θεωρήματα (Steuer, 1986).

Θεώρημα 1

Έστω ένα πρόβλημα πολυκριτήριας γραμμικής βελτιστοποίησης με σύνολο εφικτών λύσεων S . Έστω επίσης μία λύση $\bar{x} \in S$ που μεγιστοποιεί ένα σταθμισμένο άθροισμα $\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in S\}$ όπου $\bar{\lambda} \in \Lambda$. Τότε η \bar{x} είναι αποτελεσματική (efficient) λύση.

Θεώρημα 2

Έστω ένα πρόβλημα πολυκριτήριας γραμμικής βελτιστοποίησης με σύνολο εφικτών λύσεων S . Έστω $\bar{x} \in S$ μία αποτελεσματική λύση. Τότε υπάρχει $\bar{\lambda} \in \Lambda$ τέτοιο ώστε το \bar{x} να μεγιστοποιεί το πρόβλημα των σταθμισμένων αθροισμάτων $\max\{\bar{\lambda}^T Cx \mid x \in S\}$.

4.3 Μελέτη περιπτώσεων

Υπενθυμίζουμε τις μεταβλητές μεταβλητές z_1, z_2, z_3, z_4 όπου:

z_1 = αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών πτέρυγας

z_2 = αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών κάθε μοίρας

z_3 = υπολειπόμενος χρόνος πτήσης πτέρυγας

z_4 = υπολειπόμενος χρόνος πτήσης κάθε μοίρας

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σταθμισμένων αθροισμάτων, μελετήσαμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

A) $\max w_1 * z_1 + 3 * w_2 * z_2$

B) $\max 150 * w_1 * z_1 + w_3 * z_3$

Γ) $\max 150 * w_1 * z_1 + 3 * w_4 * z_4$

Δ) $\max 3 * 150 * w_2 * z_2 + w_3 * z_3$

E) $\max 3 * 150 * w_2 * z_2 + 3 * w_4 * z_4$

ΣΤ) $\max w_3 * z_3 + 3 * w_4 * z_4$



Επειδή η πτέρυγα αποτελείται από 3 μοίρες και $Y/2=150$, σε κάθε περίπτωση έχει γίνει η κατάλληλη τροποποίηση ώστε να εξισοροποιηθούν οι αντικειμενικές συναρτήσεις

Οι συντελεστές βαρύτητας w_i, w_j ($i, j=1,2,3,4$) παίρνουν τις τιμές 0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95 και ισχύει $w_i + w_j = 1$. Τονίζεται ότι οι λύσεις που παίρνουμε σε κάθε περίπτωση δεν είναι απαραίτητα αποτελεσματικές για το αρχικό πρόβλημα με τις τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις. Η ανάλυση αυτή γίνεται όμως με σκοπό μία εξονυχιστική αναζήτηση για την εύρεση μιας όσο το δυνατόν καλύτερης λύσης.

4.3.1 Περίπτωση Α

$$\text{Max } w_1 * z_1 + 3 * w_2 * z_2$$

Πίνακας 4.1 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_1 και w_2

w_1	w_2	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	23	7	1088,4	309,1
0,2	0,8	23	7	1088,4	309,1
0,35	0,65	23	7	1088,4	309,1
0,5	0,5	23	7	1046,8	309,1
0,65	0,35	23	7	1046,8	309,1
0,8	0,2	23	7	1046,8	309,1
0,95	0,05	23	7	1026,7	289

Με μια πρώτη ματιά στον πίνακα 4.1 φαίνεται ότι οι 3 πρώτες λύσεις κυριαρχούν επί των υπολοίπων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, επιτυγχάνονται οι μέγιστες δυνατές τιμές για τα δύο κριτήρια που μπαίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση (z_1 και z_2), που είναι 23 και 7 αντίστοιχα. Οι τιμές για τα άλλα δύο κριτήρια (z_3 και z_4) είναι πολύ χαμηλές. Όμως παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το w_1 μειώνονται τα z_3 και z_4 .



Η λύση που παίρνουμε για $w_1=0.05$ $w_1=0.2$ και $w_1=0.35$ είναι ακριβώς η ίδια και φαίνεται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2 Αναλυτική λύση πρώτης περίπτωσης

	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0
2	1076,3	675,1	1026	2777,4
3	959,3	840,1	882	2681,4
4	824,3	714,1	747	2285,4
5	698,3	570,1	621	1889,4
6	563,3	435,1	477	1475,4
7	419,3	309,1	360	1088,4

	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21
2	8	7	8	23
3	8	8	8	24
4	8	8	8	24
5	8	8	8	24
6	8	8	8	24
7	8	8	8	24

Άρα η καλύτερη λύση είναι η $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=1088.4$, $z_4=309.1$.

4.3.2 Περίπτωση Β

$$\text{Max } 150 \cdot w_1 \cdot z_1 + w_3 \cdot z_3$$

Πίνακας 4.3 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_1 και w_3

w_1	w_3	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	22	7	2800	575
0,2	0,8	22	7	2800	581
0,35	0,65	22	7	2800	556,9
0,5	0,5	22	7	2800	581
0,65	0,35	22	6	2800	578
0,8	0,2	23	7	2311	360
0,95	0,05	23	7	2311	660



Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του συντελεστή βάρους επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή τιμή για το z_1 . Όταν επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή του z_1 για $w_1=0.8$ πέφτει πολύ απότομα η βέλτιστη τιμή του z_3 . Οι λύσεις με $w_1=0.05$, $w_1=0.35$, $w_1=0.65$ κυριαρχούνται από τις λύσεις με $w_1=0.2$ και $w_1=0.5$. Επίσης η λύση με $w_1=0.8$ κυριαρχείται από τη λύση με $w_1=0.95$.

Για να επιλέξουμε την καλύτερη λύση από τον Πίνακα 4.3 θα μελετήσουμε περαιτέρω τις τρεις καλύτερες λύσεις που εντοπίσαμε και φαίνονται στον Πίνακα 4.4.

Αυτές είναι οι:

α) $w_1=0.2$, $w_3=0.8$, $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=581$

β) $w_1=0.95$, $w_3=0.05$, $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2311$, $z_4=660$

γ) $w_1=0.5$, $w_3=0.5$, $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=581$

Πίνακας 4.4 Σύγκριση λύσεων για $w_1=0.2$, $w_1=0.95$ και $w_1=0.5$

	για $w_1=0.2$				για $w_1=0.95$				για $w_1=0.5$			
	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	926	809	852	2587,0	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0	1091	683	1026	2800,0	791	983	1026	2800,0
3	974	848	1182	3004,0	974	848	882	2704,0	1274	848	882	3004,0
4	839	1022	1047	2908,0	839	1022	747	2608,0	1139	1010	747	2896,0
5	1007	872	921	2800,0	713	878	921	2512,0	1313	866	621	2800,0
6	1172	707	1045	2924,0	878	743	777	2398,0	1478	731	777	2986,0
7	1022	581	1202	2805,0	734	917	660	2311,0	1628	581	660	2869,0

	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	7	7	7	21	7	7	7	21
2	7	8	7	22	8	7	8	23	6	8	8	22
3	7	7	8	22	8	7	8	23	7	7	8	22
4	7	8	7	22	8	8	7	23	7	8	7	22
5	7	8	7	22	7	8	8	23	7	8	7	22
6	7	8	7	22	8	7	8	23	7	7	8	22
7	7	8	8	23	7	8	8	23	8	7	7	22

Παρατηρώντας προσεχτικά τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι καλύτερη λύση έχουμε για $w_1=0.2$, $w_3=0.8$, $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=581$. Η τιμή του z_1 είναι



μικρότερη βέβαια από την περίπτωση με $w_1=0.95$, αλλά πρόκειται για μόνο ένα λιγότερο διαθέσιμο αεροσκάφος της πτέρυγας, ενώ είναι λίγο καλύτερη της λύσης με $w_1=0.5$. Αντίθετα ο συνολικός υπολειπόμενος χρόνος πτήσης της πτέρυγας είναι πολύ μεγαλύτερος στην περίπτωση που επιλέξαμε σε σχέση με την λύση με $w_1=0.95$, ενώ σε σχέση με την λύση με $w_1=0.5$ σε άλλες περιόδους η λύση μας είναι καλύτερη και σε άλλες χειρότερη. Συνολικά θεωρούμε ότι είναι καλύτερη.

4.3.3 Περίπτωση Γ

$$\text{Max } 150 \cdot w_1 \cdot z_1 + 3 \cdot w_4 \cdot z_4$$

Πίνακας 4.5 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_1 και w_4

w_1	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	22	6	2800	791
0,2	0,8	22	6	2784	791
0,35	0,65	22	7	2724	791
0,5	0,5	22	7	2708,3	791
0,65	0,35	22	7	2788	791
0,8	0,2	23	7	2311	660
0,95	0,05	23	7	2258	660

Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του συντελεστή βάρους w_1 επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή τιμή για το z_1 . Αντίθετα ο ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης μιας μοίρας (z_4) μειώνεται με την αύξηση του w_1 . Επίσης παρατηρείται και αύξηση του z_2 , δηλαδή η αύξηση του συντελεστή βαρύτητας του κριτηρίου z_1 συμπαρασύρει σε αύξηση και τον ελάχιστο αριθμό των διαθέσιμων αεροσκαφών μιας μοίρας (z_2).

Για να επιλέξουμε την καλύτερη λύση του Πίνακα 4.5 θα μελετήσουμε περαιτέρω τις δύο καλύτερες λύσεις που εντοπίσαμε και φαίνονται στον Πίνακα 4.6. Αυτές είναι οι:

α) $w_1=0.65$, $w_4=0.35$, $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2788$, $z_4=791$

β) $w_1=0.8$, $w_4=0.2$, $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2311$, $z_4=660$

**Πίνακας 4.6 Σύγκριση λύσεων για $w_1=0.65$ και $w_1=0.8$**

για $w_1=0.65$					για $w_1=0.8$				
	m1	m2	m3	Ty		m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	1	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0	2	791	983	1026	2800,0
3	974	848	1182	3004,0	3	974	848	882	2704,0
4	839	1022	1047	2908,0	4	839	1022	747	2608,0
5	989	878	921	2788,0	5	713	878	921	2512,0
6	838,9	1043	1077	2958,9	6	878	743	777	2398,0
7	994,9	917	960	2871,9	7	734	917	660	2311,0

	m1	m2	m3	Ta		m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	1	7	7	7	21
2	7	8	7	22	2	7	8	8	23
3	8	7	7	22	3	8	7	8	23
4	7	8	7	22	4	8	8	7	23
5	8	7	7	22	5	7	8	8	23
6	7	7	8	22	6	8	7	8	23
7	8	7	8	23	7	8	8	8	24

Παρατηρώντας προσεχτικά τον παραπάνω πίνακα επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $w_1=0.65$, $w_4=0.35$, $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2788$, $z_4=791$. Παρατηρούμε πάντως ότι αν μας ενδιέφερε περισσότερο η βελτιστοποίηση του αριθμού διαθέσιμων αεροσκαφών θα επιλέγαμε την άλλη περίπτωση. Όμως η λύση που πήραμε ως καλύτερη μας καλύπτει πολύ περισσότερο , καθώς καλύπτει σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών της πτέρυγας, αλλά και μεγιστοποιεί τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της μοίρας.

**4.3.4 Περίπτωση Δ**

$$\text{Max } 450 \cdot w_2 \cdot z_2 + w_3 \cdot z_3$$

Πίνακας 4.7 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_2 και w_3

w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	21	7	2800	566
0,2	0,8	21	7	2800	566
0,35	0,65	21	7	2800	713
0,5	0,5	21	7	2800	713
0,65	0,35	21	7	2800	713
0,8	0,2	21	7	2800	605
0,95	0,05	21	7	2800	605

Με μια πρώτη ματιά στον πίνακα 4.7 φαίνεται ότι όλες οι λύσεις παρουσιάζουν την ίδια τιμή για τα τρία πρώτα κριτήρια. Επίσης είναι η πρώτη περίπτωση που δεν έχουμε το z_1 στην αντικειμενική και βλέπουμε ότι η τιμή του πέφτει στο 21.

Παρατηρούμε ότι η επιλογή της καλύτερης λύσης θα γίνει για $w_2=0.35$, $w_2=0.5$ και $w_2=0.65$, των οποίων οι λύσεις είναι ίδιες.

Ενδεικτικά φαίνονται οι τιμές για τα παραπάνω w_i στον πίνακα 4.8.

Πίνακας 4.8 Αναλυτική λύση τέταρτης περίπτωσης

	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0
3	974	848	1182	3004,0
4	839	1022	1035	2896,0
5	713	1178	909	2800,0
6	878	1028	1065	2971,0
7	734	902	1248	2884,0

	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21
2	7	7	7	21
3	8	7	7	22
4	8	7	7	22
5	7	7	7	21
6	8	7	7	22
7	7	7	8	22



Άρα επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=21$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=713$.

4.3.5 Περίπτωση E

$$\text{Max } 450 \cdot w_2 \cdot z_2 + 3 \cdot w_4 \cdot z_4$$

Πίνακας 4.9 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_2 και w_4

w_2	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	21	7	2666,1	791
0,2	0,8	21	7	2665	791
0,35	0,65	21	7	2719,3	791
0,5	0,5	21	7	2753	791
0,65	0,35	21	7	2752,5	791
0,8	0,2	21	7	2745	791
0,95	0,05	21	7	2720,1	791

Παρατηρώντας προσεχτικά τον πίνακα 4.9 διαπιστώνουμε ότι οι τιμές των κριτηρίων 1,2 και 4 είναι ακριβώς οι ίδιες για κάθε w_2 και w_4 που μελετάμε. Επειδή στην περίπτωση αυτή τα βασικά κριτήρια είναι το 1^ο και το 4^ο ,η επιλογή της καλύτερης λύσης θα εξαρτηθεί από το κριτήριο 3 που είναι το μόνο με διαφορετικές τιμές.

Για να επιλέξουμε την καλύτερη λύση σε αυτό τον πίνακα θα μελετήσουμε περαιτέρω τις δύο καλύτερες λύσεις που κυριαρχούν τις υπόλοιπες και φαίνονται στον πίνακα 4.10. Αυτές είναι οι:

α) $w_2=0.5$, $w_4=0.5$, $z_1=21$, $z_2=7$, $z_3=2753$, $z_4=791$

β) $w_2=0.65$, $w_4=0.35$, $z_1=21$, $z_2=7$, $z_3=2752.5$, $z_4=791$

Αν και η λύση με $w_2=0.5$ είναι καλύτερη καθώς κυριαρχεί της άλλης λύσης, η διαφορά της τιμής του z_3 είναι πάρα πολύ μικρή και για αυτό θα παραθέσουμε και τις αναλυτικές λύσεις για να μπορεί ο χρήστης να βγάλει ασφαλή συμπεράσματα.

**Πίνακας 4.10 Σύγκριση λύσεων για $w_2=0.5$ και $w_2=0.65$**

για $w_2=0.5$					για $w_2=0.65$				
	m1	m2	m3	Ty		m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	1	926	809	852	2587,0
2	791	960	1026	2777,0	2	791	967,2	1026	2784,2
3	974	825	1182	2981,0	3	974	1132,2	868,3	2974,5
4	839	999	1017	2855,0	4	839	1006,2	1003,3	2848,5
5	1013	849	891	2753,0	5	1013	862,2	877,3	2752,5
6	878	1014	1047	2939,0	6	878	1027,2	1033,3	2938,5
7	1034	860	930	2824,0	7	1034	873,2	916,3	2823,5

	m1	m2	m3	Ta		m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	1	7	7	7	21
2	7	8	7	22	2	7	7	8	22
3	7	7	8	22	3	7	8	7	22
4	7	7	7	21	4	7	8	7	22
5	7	7	7	21	5	7	7	7	21
6	7	8	8	23	6	7	8	8	23
7	8	7	8	23	7	8	7	8	23

4.3.6 Περίπτωση ΣΤ

$$\text{Max } w_3 \cdot z_3 + 3 \cdot w_4 \cdot z_4$$

Πίνακας 4.11 Βέλτιστες λύσεις για διάφορους συνδυασμούς των w_3 και w_4

w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,95	21	6	2800	791
0,2	0,8	21	6	2800	791
0,35	0,65	21	6	2800	791
0,5	0,5	21	6	2800	791
0,65	0,35	21	6	2800	791
0,8	0,2	21	6	2800	791
0,95	0,05	21	6	2800	791

Με μια απλή παρατήρηση του πίνακα 4.11 φαίνεται ότι όλες οι τιμές των τεσσάρων κριτηρίων είναι ίδιες για όλα τα w_i που μελετήσαμε.

Για να επιλέξουμε την καλύτερη λύση σε αυτό τον πίνακα θα μελετήσουμε περαιτέρω όλες τις λύσεις και φαίνονται στους Πίνακες 4.12, 4.13 και 4.14. Αναλυτικότερα:

Πίνακας 4.12 Σύγκριση λύσεων για $w_3=0.05$, $w_3=0.2$ και $w_3=0.35$

Για $w_3=0.05$				για $w_3=0.2$				για $w_3=0.35$				
	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	926	809	852	2587,0	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0	791	983	1026	2800,0	791	983	1026	2800,0
3	962	848	1182	2992,0	974	1148	882	3004,0	974	848	1176	2998,0
4	827	1022	1047	2896,0	839	1022	1047	2908,0	839	1016	1041	2896,0
5	1001	878	921	2800,0	1001	878	921	2800,0	1013	872	915	2800,0
6	866	1043	1077	2986,0	866	1043	1077	2986,0	878	1037	1071	2986,0
7	1011,1	917	960	2888,1	1016	917	934	2867,0	1034	911	928	2873,0

	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	7	7	7	21	7	7	7	21
2	7	8	7	22	6	7	8	21	7	8	7	22
3	7	6	8	21	7	8	6	21	8	6	7	21
4	7	7	7	21	6	8	7	21	7	7	7	21
5	8	7	6	21	7	7	7	21	8	6	7	21
6	7	7	7	21	6	8	7	21	7	7	7	21
7	8	7	6	21	7	8	6	21	8	7	6	21

Πίνακας 4.13 Σύγκριση λύσεων για $w_3=0.5$ και $w_3=0.65$

Για $w_3=0.5$				Για $w_3=0.65$					
	m1	m2	m3	Ty		m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	1	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0	2	791	983	1026	2800,0
3	974	1148	882	3004,0	3	974	1148	882	3004,0
4	839	1010	1047	2896,0	4	839	1010	1047	2896,0
5	1013	866	921	2800,0	5	1013	866	921	2800,0
6	873	1031	1077	2981,0	6	878	1016	1077	2970,9
7	1029	905	960	2894,0	7	1028	889,9	934	2851,9

	m1	m2	m3	Ta		m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	1	7	7	7	21
2	7	7	7	21	2	7	7	7	21
3	7	7	7	21	3	8	8	6	22
4	7	6	8	21	4	7	7	7	21
5	8	6	7	21	5	8	7	6	21
6	6	7	8	21	6	7	7	7	21
7	7	6	8	21	7	7	7	7	21

Πίνακας 4.14 Σύγκριση λύσεων για $w_3=0.8$ και $w_3=0.95$

Για $w_3=0.8$					Για $w_3=0.95$				
	m1	m2	m3	Ty		m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587,0	1	926	809	852	2587,0
2	791	983	1026	2800,0	2	791	983	1026	2800,0
3	974	1148	876	2998,0	3	974	848	1178	3000,0
4	839	1022	1041	2902,0	4	839	1022	1043	2904,0
5	1013	878	909	2800,0	5	1013	878	909	2800,0
6	878	1043	1033	2954,0	6	878	1043	1065	2986,0
7	1034	917	916	2867,0	7	1034	917	948	2899,0

	m1	m2	m3	Ta		m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	1	7	7	7	21
2	7	6	8	21	2	6	8	7	21
3	7	7	7	21	3	6	7	8	21
4	6	7	8	21	4	6	7	8	21
5	7	7	7	21	5	7	7	7	21
6	7	8	6	21	6	6	8	7	21
7	7	8	6	21	7	7	8	6	21

Παρατηρώντας προσεχτικά τους παραπάνω πίνακες επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $w_3=0.65$, $w_4=0.35$, $z_1=21$, $z_2=6$, $z_3=2800$, $z_4=791$, γιατί επιτυγχάνεται σε μία χρονική περίοδο μεγαλύτερος αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών πτέρυγας, ενώ παράλληλα επιτυγχάνεται στις περισσότερες χρονικές περιόδους μεγαλύτερος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης.



4.4 Μελέτη καλύτερων λύσεων

Οι λύσεις που επιλέξαμε από τις περιπτώσεις που μελετήσαμε συνοψίζονται στον πίνακα 4.15.

Πίνακας 4.15 Καλύτερη λύση κάθε περίπτωσης

Περίπτωση	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
A	23	7	1088,4	309,1
B	22	7	2800	581
Γ	22	7	2788	791
Δ	21	7	2800	713
E	21	7	2752,5	791
ΣΤ	21	6	2800	791

Είναι προφανές ότι η λύση της περίπτωσης E κυριαρχείται από τη λύση της περίπτωσης Γ. Παρατηρώντας προσεχτικά τις υπόλοιπες λύσεις θα ξεχωρίσουμε αμέσως ως τις δύο καλύτερες τις B και Γ. Με μία πρώτη ματιά φαίνεται ότι τα δύο πρώτα κριτήρια δίνουν την ίδια μέγιστη τιμή και για τις 2 περιπτώσεις. Παρουσιάζουν όμως διαφοροποίηση στο 3^ο και στο 4^ο κριτήριο. Αν επιθυμούμε μεγαλύτερο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της πτέρυγας θα επιλέγαμε ως καλύτερη λύση, αυτή της περίπτωση B. Αντιθέτως αν επιθυμούσαμε μεγαλύτερο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της μοίρας θα επιλέγαμε ως καλύτερη λύση, αυτή της περίπτωσης Γ. Όμως το κέρδος είναι πολύ μεγαλύτερο στην περίπτωση Γ ($791-581=210$, $2800-2788=12$), οπότε επιλέγουμε ως συνολικά καλύτερη μάλλον την Γ. Παρόλα αυτά η τελική επιλογή γίνεται πάντα από τον χρήστη, ανάλογα με τι τον ενδιαφέρει περισσότερο.



4.5 Εφαρμογή μεθόδου σταθμισμένου αθροίσματος με την ενσωμάτωση και των τεσσάρων αντικειμενικών συναρτήσεων

Για τη λύση αυτού του προβλήματος, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο σταθμισμένου αθροίσματος, με τους διάφορους συνδυασμούς των βαρών, όπου $w_1=w_3$ και $w_2=w_4$. Για λόγους εξισορρόπησης της αντικειμενικής συνάρτησης, πολλαπλασιάσαμε την πρώτη αντικειμενική με 150, την τρίτη αντικειμενική με 3 ($150 \cdot 3 = 450$), και την τέταρτη με 3. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.16. Παρατηρούμε σε αυτόν τον πίνακα ότι όλες οι λύσεις δίνουν τις ίδιες ακριβώς τιμές για τις τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις. Η λύση που παίρνουμε σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι πολύ ικανοποιητική.

Πίνακας 4.16 Λύσεις αντικειμενικής με 4 κριτήρια

w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4
0,05	0,45	0,05	0,45	22	7	2800	791
0,1	0,4	0,1	0,4	22	7	2800	791
0,15	0,35	0,15	0,35	22	7	2800	791
0,2	0,3	0,2	0,3	22	7	2800	791
0,25	0,25	0,25	0,25	22	7	2800	791
0,3	0,2	0,3	0,2	22	7	2800	791
0,35	0,15	0,35	0,15	22	7	2800	791
0,4	0,1	0,4	0,1	22	7	2800	791
0,45	0,05	0,45	0,05	22	7	2800	791



4.6 Μέγιστες δυνατές τιμές των z_1, z_2, z_3, z_4

Όταν μεγιστοποιούμε κάθε ένα από τα τέσσερα κριτήρια μόνο του χωρίς να αλλάξουμε το σύνολο των εφικτών λύσεων ($\max z_1, \max z_2, \max z_3, \max z_4$) παίρνουμε $z_1=23, z_2=7, z_3=2800$ και $z_4=791$. Αυτές είναι οι μέγιστες τιμές που μπορεί να πάρει κάθε ένα από τα τέσσερα κριτήρια που μελετάμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΕΦΙΚΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ



5.1 Γενικά

5.1.1 Μέθοδος περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων (*e-Constraint method*)

Η μέθοδος περιορισμού προσπαθεί να «παγιδέψει» μια βέλτιστη λύση σε μια μειωμένη εφικτή περιοχή. Όπως και η μέθοδος σταθμισμένου αθροίσματος (*weighted-sums approach*), έτσι και η μέθοδος περιορισμού είναι παραδοσιακή υπό την έννοια ότι είναι μια διαισθητική προσέγγιση, της οποίας την προέλευση κανείς δεν είναι σε θέση να επισημάνει. Έστω ένα πολυκριτήριο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max \{c^1 x = z_1\}$$

.

.

$$\max \{c^k x = z_k\}$$

$$\text{s.t } x \in S$$

Σε αυτήν τη μέθοδο, μία από τις αντικειμενικές επιλέγεται για μεγιστοποίηση με περιορισμό το χαμηλότερο όριο e_j των άλλων αντικειμενικών, για να διαμορφωθεί το πρόγραμμα περιορισμού.

$$\max \{c^i x = z_i\}$$

$$\text{s.t } c^j x \geq e_j, j \neq i$$

$$x \in S$$

Λόγω της μετατροπής $k-1$ αντικειμενικών σε περιορισμούς, η εφικτή περιοχή ενός προγράμματος περιορισμού είναι ένα υποσύνολο της αρχικής εφικτής περιοχής S . Κατόπιν, επί της μειωμένης εφικτής περιοχής, η επιλεγμένη αντικειμενική μεγιστοποιείται.



5.1.2 Τρόπος λειτουργίας της μεθόδου περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων

Δεν υπάρχει κανένα καθιερωμένο πρωτόκολλο για την υιοθέτηση της μεθόδου περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος είναι ειδική επειδή δεν είναι ποτέ ακριβώς σαφές πώς να διαμορφώσει κανείς το πρόβλημα. Κάποιος πρέπει να προχωρήσει με το ένστικτο. Ποιες αντικειμενικές πρόκειται να μετατραπούν σε περιορισμούς καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την αίσθηση του χρήστη του πειράματος.

Βασικά, η ιδέα είναι να διαμορφώσουμε το πρόβλημα για να παράγει μια καλή υποψήφια λύση. Μετά, από τη λύση που παράγεται, αναμένεται ότι μια άλλη διαμόρφωση θα προταθεί που θα οδηγήσει σε μια καλύτερη λύση. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, ο χρήστης σύντομα ή αργότερα θα φτάσει σε μια κρίσιμη στιγμή όπου θα σταματήσει (ίσως χάνοντας την υπομονή με τη διαδικασία). Κατόπιν από τη σειρά λύσεων που παράγονται, ο χρήστης θα επιλέξει το σημείο με το οποίο αισθάνεται πιο άνετα ως τελική επιλογή. Αν και η μέθοδος περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων έχει τις αδυναμίες της, είναι οικεία επειδή είναι εύκολο να την καταλάβει κανείς και επειδή χρησιμοποιεί απλό συμβατικό λογισμικό.

Τονίζεται ότι οι λύσεις που παίρνουμε με αυτή τη μέθοδο δεν είναι απαραίτητα αποτελεσματικές (efficient) για το πρόβλημα με τις τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις.



5.2 Μελέτη περιπτώσεων

5.2.1 Περίπτωση 1^η

$$\text{Max } z_1$$

$$\text{s.t } \sum_{n=1}^N a_{mnt} \geq z_2, \forall m, t=2, \dots, T+1$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_{mnt} \geq z_3, \forall t=2, \dots, T+1$$

$$\sum_{n=1}^N y_{mnt} \geq z_4, \forall m, t=2, \dots, T+1$$

...

...

...

Οι τιμές που δόθηκαν στις μεταβλητές z_2, z_3 και z_4 στο παραπάνω πρόβλημα είναι:

- $z_2 = 5, 6, 7$
- $z_3 = 2800, 2400, 2000$
- $z_4 = 791, 700, 600$

Για το παραπάνω πρόβλημα τρέξαμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών. Χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Τα αποτελέσματα που πήραμε φαίνονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1. Αποτελέσματα 1^{ης} περίπτωσης

Περιορισμοί			Βέλτιστες τιμές			
z_2	z_3	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4
7	2800	791	22	7	2800	791
7	2800	700	22	7	2800	700
7	2800	600	22	7	2800	660
6	2800	791	22	6	2800	791
6	2800	700	22	7	2800	722
6	2800	600	22	6	2800	710
5	2800	791	22	7	2800	791
5	2800	700	22	6	2800	722
5	2800	600	22	6	2800	617
7	2400	791	22	7	2693,3	791
7	2400	700	22	7	2795,1	708,1
7	2400	600	22	7	2800	660
6	2400	791	22	7	2776,1	791
6	2400	700	22	7	2692,2	713
6	2400	600	22	7	2445,1	600
5	2400	791	22	6	2739,2	791
5	2400	700	22	7	2770,5	700
5	2400	600	22	6	2538	600,9
7	2000	791	22	7	2695,5	791
7	2000	700	22	7	2485,3	709,1
7	2000	600	23	7	2047,5	602,4
6	2000	791	22	7	2685	791
6	2000	700	22	6	2468	700
6	2000	600	23	7	2259	621
5	2000	791	22	6	2770,1	791
5	2000	700	22	7	2312	700
5	2000	600	23	7	2219,5	600

5.2.2 Σχολιασμός

- Αρχικά επιλέγουμε για τις μεταβλητές z_2, z_3, z_4 τις ελάχιστες τιμές 7, 2800, 791 αντίστοιχα και μεταβάλλουμε τις τιμές της z_4 . Από τον πίνακα 1 φαίνεται ότι από αυτές τις εφαρμογές παίρνουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22, z_2=7, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.

- Κατόπιν μεταβάλλουμε την ελάχιστη τιμή της μεταβλητής z_2 σε 6, η z_3 παραμένει σταθερή και η z_4 παίρνει τις 3 τιμές που έχουμε επιλέξει. Σε αυτήν την εφαρμογή



επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22, z_2=7, z_3=2800, z_4=722$, επειδή θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών.

- Όταν $z_2=5, z_3=2800$ και η μεταβλητή z_4 παίρνει τις 3 διαφορετικές τιμές επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22, z_2=7, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.

- Όταν $z_2=7, z_3=2400$ και η μεταβλητή z_4 μεταβάλλεται, η επιλογή της καλύτερης λύσης δεν είναι προφανής. Για αυτό τον λόγο θα κάνουμε περαιτέρω μελέτη των λύσεων.

	$z_4=791$				$z_4=700$				$z_4=600$			
	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587	926	809	852	2587	926	809	852	2587
2	791	965,1	1026	2782,1	786,1	983	1026	2795,1	1091	683	1026	2800
3	956	1130,1	882	2968,1	969,1	848	1182	2999,1	1274	848	882	3004
4	791	1004,1	1047	2842,1	834,1	1022	1047	2903,1	1139	722	1047	2908
5	937	860,1	896,2	2693,3	708,1	1178	921	2807,1	1013	878	921	2812
6	793	1025,1	1052	2870,3	873,1	1043	1077	2993,1	1178	1018	777	2973
7	949	877,3	909,2	2735,5	1029,1	917	960	2906,1	1028	1168	660	2856

	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21	7	7	7	21	7	7	7	21
2	7	7	8	22	7	8	7	22	7	7	8	22
3	7	8	7	22	8	7	7	22	7	8	7	22
4	7	7	8	22	8	7	7	22	7	7	8	22
5	8	7	7	22	7	8	7	22	7	7	8	22
6	7	8	7	22	7	8	8	23	8	7	8	23
7	7	8	7	22	8	7	8	23	8	8	7	23

Στο πρόβλημα μας επιθυμούμε όσο το δυνατό μεγαλύτερο αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών και παρατηρώντας τις λύσεις για $z_4=700$ και 600 , φαίνεται στην 6^η και 7^η χρονική περίοδο ότι επιτυγχάνεται για το z_1 η τιμή 23. Από τις δύο αυτές λύσεις καλύτερη φαίνεται ότι είναι η $z_1=22, z_2=7, z_3=2795.1, z_4=708.1$.



- Όταν η z_2 παίρνει την ελάχιστη τιμή 6, η μεταβλητή z_3 παίρνει ελάχιστη τιμή 2400 και η z_4 μεταβάλλεται, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2776.1$, $z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.

- Όταν η ελάχιστη τιμή της μεταβλητής z_2 είναι 5, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2770.5$, $z_4=700$, γιατί επιτυγχάνουμε μεγαλύτερο αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών.

- Όταν η ελάχιστη τιμή της z_2 είναι 7, της z_3 είναι 2000 και η z_4 μεταβάλλεται, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2695.5$, $z_4=791$, οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.

- Στην περίπτωση όπου οι ελάχιστες τιμές είναι $z_2=6$, $z_3=2770.5$, $z_4=791,700,600$ πρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο λύσεις. Αυτές είναι:

i) $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2685$, $z_4=791$

ii) $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2259$, $z_4=621$

Επειδή σε αυτή την περίπτωση επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση του z_1 , επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την ii). Αν επιθυμούσαμε μεγαλύτερο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης είναι προφανές ότι η λύση i) είναι καλύτερη.

- Ομοίως για την τελευταία περίπτωση επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2219.5$, $z_4=600$.

- Παρατηρώντας προσεχτικά επιλέγουμε ως καλύτερες για αυτή τη μέθοδο τις παρακάτω τρεις λύσεις, που κυριαρχούν τις υπόλοιπες:

1. (7,2800,791) - $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=791$

2. (5,2800,791) - $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=791$

3. (6,2000,600) - $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2259$, $z_4=621$



Αναλυτικότερα:

Όταν οι ελάχιστες τιμές των μεταβλητών είναι(7,2800,791) τότε η καλύτερη λύση είναι $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=791$. Αυτή φαίνεται λεπτομερώς παρακάτω:

	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587
2	791	983	1026	2800
3	974	848	1182	3004
4	839	1022	1047	2908
5	1013	872	921	2806
6	878	1037	1077	2992
7	1034	911	960	2905

	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21
2	7	8	7	22
3	7	7	8	22
4	7	7	8	22
5	8	7	7	22
6	7	8	7	22
7	8	7	7	22

Όταν οι ελάχιστες τιμές των μεταβλητών είναι(5,2800,791) τότε η καλύτερη λύση είναι $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=791$. Αυτή φαίνεται λεπτομερώς παρακάτω:

	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587
2	791	983	1026	2800
3	974	1136,8	882	2992,8
4	839	1010,8	1046,2	2896
5	1013	866,8	920,2	2800
6	878	1001,8	1076,2	2956
7	1034	875,8	959,2	2869

	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21
2	7	7	8	22
3	7	8	7	22
4	7	7	8	22
5	8	7	7	22
6	7	7	8	22
7	8	7	7	22



Όταν οι ελάχιστες τιμές των μεταβλητών είναι(6,2000,600) τότε η καλύτερη λύση είναι $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2259$, $z_4=621$. Αυτή φαίνεται λεπτομερώς παρακάτω:

	m1	m2	m3	Ty
1	926	809	852	2587
2	791	955	1026	2772
3	974	820	882	2676
4	1139	670	747	2556
5	1013	826	621	2460
6	878	691	777	2346
7	734	865	660	2259

	m1	m2	m3	Ta
1	7	7	7	21
2	7	8	8	23
3	7	8	8	23
4	8	7	8	23
5	8	8	7	23
6	8	7	8	23
7	8	7	8	23

Πλέον ο χρήστης έχοντας αυτή την ανάλυση, είναι δυνατό να επιλέξει μεταξύ αυτών των λύσεων, την καλύτερη που θεωρεί αυτός .

5.2.3 Περίπτωση 2^ηMax z_3

$$\text{s.t } \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mnt} \geq z_1, \quad \forall t=2, \dots, T+1$$

$$\sum_{n=1}^N a_{mnt} \geq z_2, \quad \forall m, t=2, \dots, T+1$$

$$\sum_{n=1}^N y_{mnt} \geq z_4, \quad \forall m, t=2, \dots, T+1$$

...

...

...

Οι τιμές που δόθηκαν στις μεταβλητές z_1, z_2 και z_4 στο παραπάνω πρόβλημα είναι:

- $z_1 = 23, 22, 21$
- $z_2 = 7, 6, 5$
- $z_4 = 791, 700, 600$

Για το παραπάνω πρόβλημα τρέξαμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών. Χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Τα αποτελέσματα που πήραμε φαίνονται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα 2^{ης} περίπτωσης

Περιορισμοί			Βέλτιστες τιμές			
z_1	z_2	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4
23	7	791	infeasible			
23	7	700	infeasible			
23	7	600	23	7	2311	617
23	6	791	infeasible			
23	6	700	infeasible			
23	6	600	23	7	2311	617
23	5	791	infeasible			
23	5	700	infeasible			
23	5	600	23	7	2311	617
22	7	791	22	7	2800	791
22	7	700	22	7	2800	719,3
22	7	600	22	7	2800	683
22	6	791	22	6	2800	791
22	6	700	22	6	2800	741,1
22	6	600	22	6	2800	609
22	5	791	22	6	2800	791
22	5	700	22	6	2800	741,1
22	5	600	22	6	2800	609
21	7	791	21	7	2800	791
21	7	700	21	7	2800	713
21	7	600	21	7	2800	713
21	6	791	21	6	2800	791
21	6	700	21	6	2800	700
21	6	600	21	6	2800	617
21	5	791	21	6	2800	791
21	5	700	21	5	2800	734
21	5	600	21	5	2800	621

5.2.4 Σχολιασμός

- Παρατηρούμε ότι στις εννέα πρώτες εφαρμογές που πραγματοποιούμε ή έχουμε μη εφικτή λύση ή έχουμε ως λύση την $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2311$, $z_4=617$. Οι μη εφικτές λύσεις είναι αναμενόμενες και θα μπορούσαμε εξ' αρχής να μην πραγματοποιήσουμε αυτές τις εφαρμογές, επειδή είναι προφανές το αποτέλεσμα που πήραμε.



- Όταν δίνουμε στους δύο πρώτους περιορισμούς τις τιμές 22 και 7 αντίστοιχα και αφήνουμε τον τρίτο να μεταβάλλεται, τότε η καλύτερη λύση που παίρνουμε είναι η $z_1=22, z_2=7, z_3=2800, z_4=791$. Αυτή η λύση κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.
 - Ομοίως όταν δίνουμε στους δύο πρώτους περιορισμούς τις τιμές 22 και 6 αντίστοιχα και μεταβάλλεται ο τρίτος, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=22, z_2=6, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.
 - Ακριβώς ίδια καλύτερη λύση έχουμε όταν δίνουμε ελάχιστες τιμές στις μεταβλητές $z_1=22, z_2=5$ και μεταβάλλεται η μεταβλητή z_4 .
 - Όταν οι μεταβλητές z_1, z_2 παίρνουν ελάχιστες τιμές 21 και 7 αντίστοιχα και η z_4 μεταβάλλεται, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=21, z_2=7, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.
 - Όταν οι μεταβλητές z_1, z_2 παίρνουν ελάχιστες τιμές 21 και 6 αντίστοιχα και η z_4 μεταβάλλεται, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=21, z_2=6, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.
 - Ομοίως όταν οι μεταβλητές z_1, z_2 παίρνουν ελάχιστες τιμές 21 και 5 αντίστοιχα και η z_4 μεταβάλλεται, τότε επιλέγουμε ως καλύτερη λύση την $z_1=21, z_2=6, z_3=2800, z_4=791$, η οποία κυριαρχεί τις άλλες δύο λύσεις.
 - Παρατηρώντας προσεχτικά τις καλύτερες λύσεις που έχουμε επιλέξει είναι προφανές ότι οι δύο καλύτερες λύσεις της 2^{ης} περίπτωσης είναι:
 - ι) $z_1=22, z_2=7, z_3=2800, z_4=791$, η οποία μεγιστοποιεί τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης.
 - ιι) $z_1=23, z_2=7, z_3=2311, z_4=617$, η οποία μεγιστοποιεί τον αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών.
- Αυτές οι δύο είναι οι λύσεις που δεν κυριαρχούνται από καμία σε αυτή την περίπτωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ



6.1 Διαχωρισμός χρονικού ορίζοντα

Το μοντέλο που παρουσιάσαμε είναι ένα πρόγραμμα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού και ο χρόνος επίλυσης του εξαρτάται από το μέγεθος του προβλήματος. Επειδή ο χρόνος αυτός αυξάνεται εκθετικά καθώς μεγαλώνει το μέγεθος του προβλήματος, η εφαρμογή του μοντέλου για προβλήματα πολύ μεγάλου μεγέθους είναι απαγορευτική.

Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων παρουσιάζουμε μία απλή τεχνική, η οποία βασίζεται στον χωρισμό ενός μεγάλου χρονικού ορίζοντα σε μικρότερους και στην διαδοχική εφαρμογή του μοντέλου. Χωρίζουμε το T σε μικρότερες χρονικές περιόδους (έστω $T/2$ και $T/2$) και εφαρμόζουμε αρχικά το πρόβλημα με $T/2$ και την αρχική κατάσταση του προβλήματος. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε για την τελική κατάσταση αυτής της περιόδου αποτελούν την νέα αρχική κατάσταση της περιόδου που θα εφαρμόσουμε. Αφού εφαρμόσουμε και τη δεύτερη χρονική περίοδο επιλέγουμε στο τέλος τη βέλτιστη λύση κάθε κριτηρίου που παίρνουμε και από τις δύο περιόδους.

Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα είχαμε δώσει στον χρονικό ορίζοντα την τιμή $T=6$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου θα «σπάσουμε» τον χρονικό ορίζοντα σε $T=3+3$ και $T=2+2+2$. Στον πίνακα 6.1 φαίνονται οι βέλτιστες λύσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαχωρισμού του χρονικού ορίζοντα για κάθε μία από τις περιπτώσεις που μελετήσαμε στο 4^ο κεφάλαιο.

**Πίνακας 6.1 Βέλτιστες λύσεις με αλλαγή χρονικού ορίζοντα**

Περίπτωση	T	z_1	z_2	z_3	z_4	Time
A	6	23	7	1088,4	309,1	0,069
	3+3	23	7	972,5	278,3	0,036
	2+2+2	23	7	1059,6	312,4	0,021
B	6	22	7	2800	581	5,98
	3+3	22	7	2311	617	25,55
	2+2+2	22	7	2011	317	0,183
Γ	6	22	7	2788	791	49,26
	3+3	23	7	1979	578	0,142
	2+2+2	23	7	1877,5	578	0,062
Δ	6	21	7	2800	713	2,05
	3+3	22	7	2611	360	6,733
	2+2+2	22	7	2011	360	0,154
E	6	21	7	2752,5	791	6,23
	3+3	22	7	2768,1	434	1,602
	2+2+2	23	7	1067,5	317	0,077
ΣΤ	6	21	6	2800	791	8,19
	3+3	22	7	2611	734	42,36
	2+2+2	21	6	2670	715	0,208

Στην περίπτωση A ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=1088.4$, $z_4=309.1$, όταν $T=6$.

Στην περίπτωση B συνολικά ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=581$, όταν $T=6$. Σε αυτή την περίπτωση αν επιθυμούσαμε μεγαλύτερο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της μοίρας(z_4) θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει την λύση όπου $T=3$.

Στην περίπτωση Γ ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2788$, $z_4=791$ με $T=6$, αν και παρατηρούμε ότι όταν $T=3$ υπάρχει ένα περισσότερο διαθέσιμο αεροσκάφος, αλλά πολύ μικρότερος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης.

Στην περίπτωση Δ ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=21$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=713$ με $T=6$.

Στην περίπτωση E ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=21$, $z_2=7$, $z_3=2752.5$, $z_4=791$ με $T=6$, αν και η λύση με $T=3$ είναι πάρα πολύ καλή. Όμως η λύση που



πήραμε ως καλύτερη μας καλύπτει πολύ περισσότερο , καθώς είναι καλύτερη όσον αφορά τον αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών της μοίρας, αλλά και μεγιστοποιεί τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης ανά μοίρα.

Στην περίπτωση ΣΤ ως καλύτερη λύση επιλέγουμε την $z_1=21, z_2=6, z_3=2800, z_4=791$ με $T=6$, αν και η λύση με $T=3$ είναι πάρα πολύ καλή. Όμως η λύση που πήραμε ως καλύτερη μας καλύπτει πολύ περισσότερο, καθώς μεγιστοποιεί τόσο τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της πτέρυγας, όσο και τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της μοίρας που μας ενδιαφέρουν.

Μία απλή παρατήρηση όσον αφορά τους χρόνους επίλυσης κάθε περίπτωσης είναι ότι ο χρόνος επίλυσης φαίνεται πολύ μικρότερος όταν $T = 2+2+2$, αν και οι λύσεις που παίρνουμε για το συγκεκριμένο T δεν είναι τόσο καλές. Επίσης είναι χαρακτηριστικό ότι παραδόξως, κάποιες φορές ο χρόνος επίλυσης αυξάνεται όταν πάμε από $T=6$ σε $T=3+3$. Αυτό πιθανώς να οφείλεται στο ότι το μέγεθος του συνόλου των εφικτών λύσεων αντί να περιορίζεται, αυξάνεται.

Επίσης μελετήσαμε τι συμβαίνει όταν ενσωματώνονται και οι τέσσερις αντικειμενικές συναρτήσεις, ισχύει $w_1=w_2=w_3=w_4=0.25$ και ο χρονικός ορίζοντας T παίρνει τις τιμές 6, 3+3, 2+2+2. Παρατηρούμε τις βέλτιστες λύσεις στον πίνακα 6.2 και συμπεραίνουμε ότι την καλύτερη λύση την παίρνουμε όταν $T=6$.

Πίνακας 6.2 Λύσεις με διάφορες τιμές χρονικού ορίζοντα

	z_1	z_2	z_3	z_4
$T=6$	22	7	2800	791
$T=3+3$	22	7	2311	660
$T=2+2+2$	23	7	1111	317

6.2 Σύγκριση μονοκριτήριας – πολυκριτήριας βελτιστοποίησης

Θα κάνουμε μία σύγκριση του μοντέλου που μελετήσαμε με αυτό της μονοκριτήριας βελτιστοποίησης (Μπώκος, 2005) που έχει μελετηθεί στο παρελθόν. Με m και M συμβολίζονται τα μοντέλα της μονοκριτήριας και πολυκριτήριας βελτιστοποίησης αντίστοιχα. Στους πίνακες 6.3 και 6.4 φαίνονται τα αποτελέσματα κάθε μοντέλου.

Πίνακας 6.3 Αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών

	1	2	3	4	5	6	7
m1	7	7	8	8	7	7	8
M1	7	7	8	7	8	7	8
m2	7	8	7	7	8	8	8
M2	7	7	7	7	7	8	7
m3	7	7	8	7	7	7	6
M3	7	8	7	8	7	8	8
Σm	21	22	22	22	22	22	22
ΣM	21	22	22	22	22	23	23

Παρατηρούμε στον πίνακα 6.3 ότι στην πρώτη μοίρα τα αποτελέσματα είναι σχεδόν τα ίδια και για τα δύο μοντέλα, με μια διαφοροποίηση στις περιόδους 4 και 5. Στη δεύτερη μοίρα το μοντέλο της μονοκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στην 2^η, 5^η και 7^η περίοδο. Στην τρίτη μοίρα το μοντέλο της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στις περιόδους 2, 4, 6 και 7, ενώ αυτό της μονοκριτήριας στην 3^η περίοδο. Μάλιστα στην 7^η περίοδο στην πολυκριτήρια βελτιστοποίηση έχουμε 8 διαθέσιμα αεροσκάφη, έναντι 6 διαθέσιμων της μονοκριτήριας. Όσον αφορά τον αριθμό διαθέσιμων αεροσκαφών μοίρας η πολυκριτήρια βελτιστοποίηση υπερτερεί στην 6^η και 7^η χρονική περίοδο.

**Πίνακας 6.4 Υπολειπόμενος χρόνος πτήσης**

	1	2	3	4	5	6	7
m1	926	791	974	839	700	865	1021
M1	926	791	974	839	1013	869,3	1025,3
m2	809	983	848	1022	1178	1043	917
M2	809	983	1148	1022	872,1	1037,1	911,1
m3	852	1026	1177,1	1042,1	916,1	751,1	934,1
M3	852	1026	876,1	1041,1	914,9	1070,9	953,9
Σm	2587	2800	2999,1	2903,1	2794,1	2659,1	2872,1
ΣM	2587	2800	2998,1	2902,1	2800	2977,3	2890,3

Παρατηρούμε στον πίνακα 6.4 ότι στην πρώτη μοίρα το μοντέλο της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στην 5^η, 6^η και 7^η περίοδο. Στη δεύτερη μοίρα το μοντέλο της μονοκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στην 5^η, 6^η και 7^η περίοδο, ενώ αυτό της πολυκριτήριας στην 3^η περίοδο. Στην τρίτη μοίρα το μοντέλο της μονοκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στην 3^η και 5^η περίοδο, ενώ αυτό της πολυκριτήριας βελτιστοποίησης υπερτερεί στις περιόδους 6 και 7. Όσον αφορά τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης της μοίρας, η πολυκριτήρια βελτιστοποίηση υπερτερεί στις χρονικές περιόδους 5,6 και 7, ενώ στην 3^η και 4^η περίοδο τα αποτελέσματα είναι σχεδόν τα ίδια.

Άρα η ενσωμάτωση των z_1, z_2, z_3, z_4 ως αντικειμενικές συναρτήσεις και η χρήση πολυκριτήριας βελτιστοποίησης βελτιώνει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ



7.1 Συμπεράσματα

- Ο διαχωρισμός του χρονικού ορίζοντα σε μικρότερους γενικά χειροτερεύει την ποιότητα της λύσης που παίρνουμε και άρα θα πρέπει να αναζητηθούν εναλλακτικές λύσεις για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων (π.χ heuristics)
- Το σπάσιμο του χρονικού ορίζοντα μερικές φορές μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του συνολικού υπολογιστικού χρόνου, κάτι το οποίο είναι μη αναμενόμενο. Αυτό πιθανώς να οφείλεται στο ότι το μέγεθος του συνόλου των εφικτών λύσεων αντί να περιορίζεται, αυξάνεται.
- Ο υπολογιστικός χρόνος παρουσιάζει πολύ μεγάλη μεταβλητότητα ακόμη και για προβλήματα ίδιου μεγέθους. Επομένως, το μέγεθος του προβλήματος δεν είναι από μόνο του ενδεικτικό του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.
- Τα τέσσερα κριτήρια δεν είναι αντικρουόμενα (αφού πολλές φορές παίρνουν τις ίδιες τιμές για διαφορετικά βάρη w_i). Απαιτείται όμως η ενσωμάτωση όλων γιατί αλλιώς παίρνουμε λύσεις που δεν είναι καλές ως προς το αντίστοιχο κριτήριο που έχει παραληφθεί.
- Η πολυκριτήρια βελτιστοποίηση φαίνεται να είναι καλύτερη από την μονοκριτήρια, χωρίς όμως η υπεροχή της να είναι καθολική.
- Μία σωστή και διεξοδική αναζήτηση λύσεων χρησιμοποιώντας τεχνικές πολυκριτήριας βελτιστοποίησης μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις εξαιρετικής ποιότητας.



7.2 Καλύτερες λύσεις πολυκριτήριας βελτιστοποίησης

Μεταξύ των καλύτερων λύσεων και των δύο μεθόδων καταλήξαμε στις παρακάτω δύο καλύτερες λύσεις:

α) $z_1=23$, $z_2=7$, $z_3=2311$, $z_4=660$

β) $z_1=22$, $z_2=7$, $z_3=2800$, $z_4=791$

Αυτές είναι οι δύο λύσεις που δεν κυριαρχούνται από καμία άλλη λύση (από αυτές που βρήκαμε) και μεταξύ αυτών πρέπει ο χρήστης να επιλέξει, ανάλογα με τι τον ενδιαφέρει περισσότερο.

7.3 Προτάσεις για μελλοντική βελτίωση

Εισαγάγαμε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης μεικτών ακεραίων για το σχεδιασμό πτήσεων και συντηρήσεων πολεμικών αεροσκαφών. Το μοντέλο αναπτύχθηκε προς χρήση από την Ελληνική Πολεμική Αεροπορία. Η ετοιμότητα ανταπόκρισης σε εξωτερικές απειλές μεγιστοποιείται στην αντικειμενική συνάρτηση. Όλες οι πτυχές του προβλήματος ενσωματώνονται και ο μεγάλος αριθμός μεταβλητών απόφασης ενισχύει την ευελιξία του μοντέλου.

Παρουσιάσαμε μια πραγματική εφαρμογή του μοντέλου πολυκριτήριας βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό πτήσεων και συντηρήσεων πολεμικών αεροσκαφών, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σταθμισμένου αθροίσματος (weighted sums approach) και τη μέθοδο περιορισμού του συνόλου των εφικτών λύσεων (e-constraint method).

Πιστεύουμε ότι η μελλοντική έρευνα πρέπει να κατευθυνθεί αποδοτικών ευρετικών αλγορίθμων (heuristics) για τη λύση αυτού του προβλήματος, προκειμένου να καταστεί η λύση μεγαλύτερων προβλημάτων πιο προσιτή.



Επίσης, μπορεί να γίνει μοντελοποίηση επιπρόσθετων στοιχείων (π.χ. επίπεδα συντήρησης, εργατοώρες, ωράριο προσωπικού).

Αυτό είναι ένα από τα πολλά προβλήματα που προκύπτουν σε πολεμικές εφαρμογές τα οποία αντιμετωπίζονται στην πράξη με απλούς κανόνες απόφασης, μη βασισμένους σε αναλυτικές μεθοδολογίες. Πιστεύουμε ότι η μελλοντική έρευνα πρέπει να κατευθυνθεί πιο εντατικά προς την εύρεση των αναλυτικών εργαλείων για τέτοια προβλήματα, λόγω της σημασίας των σχετικών ζητημάτων και του σοβαρού αντίκτυπου που οι σχετικές αποφάσεις μπορούν να έχουν. Στην πραγματικότητα, απ' όσο γνωρίζουμε, αυτή είναι μία από τις λίγες προσπάθειες, που αναφέρονται στη βιβλιογραφία και εξετάζουν ένα κοινό πρόβλημα λήψης απόφασης σχετικά με τον προγραμματισμό πολεμικών αεροσκαφών κατά αναλυτικό τρόπο.



Βιβλιογραφία

- [1] Arguello MF, Bard J.F. and Yu G. (1997) “Models and methods for managing airline irregular operations aircraft routing” *Operations Research in the Airline Industry* ed. G. Yu, pp. 1-45. Kluwer Academic Publishers, Boston
- [2] Barnhart C, Belobaba P and Odoni AR. (2003) “Applications of operations research in the air transport industry” *Transportation Science*, 37(4), 368-391.
- [3] Barnhart C, Boland NL, Clarke LW, Johnson EL, Nemhauser GL and Shenoi RG (1998). “Flight string models for aircraft fleet and routing”, *Transportation Science* 32 (3): 208-220
- [4] Beasley JE, Krishnamoorthy M, Sharaiha YM and Abramson D (2000). “Scheduling aircraft landings – The static case”, *Transportation Science* 34 (2): 180-197
- [5] Clarke LW, Hane CA, Johnson EL and Nemhauser GL (1996). “Maintenance and Crew Considerations in Fleet Assignment”, *Transportation Science* 30 (3): 249-260
- [6] Clarke L, Johnson E, Nemhauser G and Zhongxi Z (1997). “The aircraft rotation problem”, *Annals of Operations Research* 69: 33-46
- [7] Dijkstra MC, Kroon LG, Salomon M, Vannunen J and Vanwassenhove LN (1994). “Planning for size and organization of KLM’s Aircraft Maintenance Personnel”, *Interfaces* 24 (6): 47-58
- [8] Ernst AT, Krishnamoorthy M and Storer RH (1999). “Heuristic and exact algorithms for scheduling aircraft landings”, *Networks* 34 (3): 229-241
- [9] Feo TA and Bard JF (1989). “Flight scheduling and maintenance base planning”, *Management Science* 35: 1415-1432
- [10] Fourer R, Gay DM and Kernighan BW (2002) *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, Duxbury Press.



- [11] Friend CH (1995). Aircraft Maintenance Management, Longman-Scientific Technical, England
- [12] Graves GW, McBride RD, Gershkoff I, Anderson D and Mahidhara D (1993) “Flight Crew Scheduling”, *Management Science* 39 (6): 736-745
- [13] Gopalan R and Talluri KT (1998a). “The aircraft maintenance routing problem”, *Operations Research* 46 (2): 260-271
- [14] Gopalan R and Talluri KT (1998b) “Mathematical models in airline schedule planning: A survey”, *Annals of Operations Research*, 76, 155-185.
- [15] Keskinocak P and Tayur S (1998). “Scheduling of Time-Shared Jet Aircraft”, *Transportation Science* 32 (3): 277-294
- [16] Klabjan D, Johnson EL, Nemhauser GL, Gelman E and Ramaswamy S (2002). “Airline crew scheduling with time windows and plane-count constraints”, *Transportation Science* 36 (3): 337-348
- [17] Kozanidis, G., G. Liberopoulos, C. Pitsilkas (2005). Flight and maintenance planning of military aircraft for maximum fleet availability. Working Paper, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Thessaly.
- [18] Kozanidis G., A. Skipis (2006). Flight and maintenance planning of military aircraft for maximum fleet availability: A biobjective model. *Proceedings of the 18th International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Chania, Crete, June 19-23.
- [19] Kurokawa T and Takeshita K (2004). “Air Transportation Planning Using Neural Networks as an Example of the Transportation Squadron in the Japan Air Self-Defense Force”, *Systems and Computers in Japan* 35 (12): 1223-1232
- [20] Qi XT, Bard JF and Yu G (2004). “Class scheduling for pilot training”, *Operations Research* 52 (1): 148-162



- [21] Rushmeier RA and Kontogiorgis SA (1997). “Advances in the optimization of airline fleet assignment”, *Transportation Science* 31 (2): 159-169
- [22] Samaranayake P, Lewis GS, Woxvold ERA and Toncich D (2002). “Development of engineering structures for scheduling and control of aircraft maintenance”, *International Journal of Operations & Production Management* 22 (8): 843-867
- [23] Solanki RS and Southworth F (1991). “An Execution Planning Algorithm for Military Airlift”, *Interfaces* 21 (4): 121-131
- [24] Sriram C and Haghani A (2003). “An optimization model for aircraft maintenance scheduling and re-assignment”, *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 37 (1): 29-48
- [25] Steuer RE (1986). “Multiple Criteria Optimization: theory, computation and application”, New York: Wiley.
- [26] Talluri KT (1998). “The four-day aircraft maintenance routing problem”, *Transportation Science* 32 (1): 43-53
- [27] Yan S and Lin CG (1997). “Airline scheduling for the temporary closure of airports”, *Transportation Science* 31 (1): 72-82
- [28] Μπώκος Γ(2005), “Σχεδιασμός Πτήσεων και Συντηρήσεων πολεμικών αεροσκαφών για μέγιστη διαθεσιμότητα”, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας
- [29] Πιτσιλάκας Χ(2004), “Προγραμματισμός συντήρησης αεροσκαφών και ανάθεση της σε εξωτερικό φορέα”, Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000089108

