

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
ΜΑΓΝΗΤΟΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΡΟΩΝ**

υπό

Ψωμαδάκη Παναγιώτη

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5028/1
Ημερ. Εισ.: 14-11-2006
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2006
ΨΩΜ

Copyright © 2006 Ψωμαδάκης Παναγιώτης

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Βαλουγεώργης Δημήτρης
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Βλάχος Νικόλαος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Πελεκάσης Νικόλαος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δημήτρη Βαλουγεώργη , για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Βλάχο και Πελεκάση για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ευχαριστώ τους συναδέλφους μου Δημήτρη Παπαπροκοπίου και Τάσο Χοροζίδη για την πολύτιμη βοήθειά τους στον προγραμματισμό και τους Νίκο Χρυσάφη και Κώστα Σοηλεμεζίδη για την συνδρομή τους στις προσομοιώσεις του 3^{ου} Κεφαλαίου. Επίσης, ευχαριστώ την Μαρίνα για την κατανόησή της, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών της προσπάθειάς μου. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Ιωάννη και Αλεξάνδρα Ψωμαδάκη για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στους προαναφερθέντες.

Ψωμαδάκης Παναγιώτης

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΜΑΓΝΗΤΟΥΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΡΟΩΝ

ΨΩΜΑΔΑΚΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2006

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Βαλουγεώργης Δημήτρης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική και υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν πρότυπες μαγνητοϋδροδυναμικές ροές και συγκεκριμένα την ροή Hartmann και την πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε ορθογώνιο αγωγό. Διατυπώνονται και επιλύονται τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά, οι δυο αυτές ροές για τοιχώματα α) μονωμένα ($c = 0$), β) αγωγίμα ($c = \infty$) και γ) ημιαγωγίμα ($0 < c < \infty$). Η επίδραση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου στη ροή εξετάζεται μέσω του αριθμού Hartmann (Ha). Όταν ο αριθμός Ha είναι μεγάλος τότε η αναλυτική επίλυση γίνεται με ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, ενώ η αριθμητική επίλυση με πυκνά πλέγματα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με τα αναλυτικά. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στον ακριβή υπολογισμό των κατανομών εντός των ΜΥΔ στοιβάδων που αναπτύσσονται στα τοιχώματα των αγωγών για όλους τους τύπους των οριακών συνθηκών. Αποτελέσματα παρουσιάζονται για τις κατανομές της ταχύτητας, του μαγνητικού πεδίου και της δύναμης Lorentz, όπως επίσης και για τα μεγέθη των παροχών και της πτώσης πίεσης σε σχέση με διάφορες παραμέτρους της ροής.

Όπως είναι γνωστό η επιβολή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στη ροή έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη της δύναμης Lorentz. Από τα αναλυτικά και υπολογιστικά αποτελέσματα προκύπτει ότι η δύναμη αυτή στο κέντρο του αγωγού είναι πάντα αντίθετη στη διεύθυνση της ροής, ενώ κοντά στα τοιχώματα είναι στη διεύθυνση της ροής όταν τα τοιχώματα είναι πλήρως μονωμένα και μηδενίζεται όταν τα τοιχώματα είναι πλήρως αγωγίμα. Όμως το ολοκλήρωμα της κατανομής της δύναμης Lorentz δίνει μία συνολική δύναμη Lorentz που είναι πάντα αντίθετη στη διεύθυνση της ροής και επομένως την επιβραδύνει. Επίσης, αποδεικνύεται ότι καθώς αυξάνει η ένταση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, δηλαδή ο αριθμός Ha η μείωση της παροχής είναι ανάλογη του Ha για πλήρως μονωμένα τοιχώματα και ανάλογη του Ha^2 για πλήρως αγωγίμα τοιχώματα. Με την αύξηση του αριθμού Hartmann, αυξάνει αντίστοιχα η δύναμη Lorentz στο κέντρο του αγωγού και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αφενός την μείωση και αφετέρου την επιπεδοποίηση της κατανομής της ταχύτητας. Η μείωση της ταχύτητας στο κέντρο του αγωγού, με την αύξηση του αριθμού Ha , είναι αντίστοιχη με αυτήν της παροχής. Παράλληλα κοντά στα τοιχώματα δημιουργούνται οι λεγόμενες στοιβάδες Hartmann και οι πλευρικές στοιβάδες, όπου οι μεταβολές της ταχύτητας είναι ιδιαίτερα απότομες. Σημειώνεται ότι σε μεγάλους αριθμούς Hartmann το πάχος των στοιβάδων Hartmann είναι αντιστρόφως ανάλογο του Ha , ενώ το πάχος των πλευρικών στοιβάδων είναι αντιστρόφως ανάλογο του \sqrt{Ha} . Η επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στην πτώση πίεσης είναι αντιστρόφως ανάλογη από ότι στην παροχή. Δηλαδή, η αύξηση στην πτώση πίεσης είναι ανάλογη του Ha για πλήρως μονωμένα τοιχώματα και ανάλογη του Ha^2 για πλήρως αγωγίμα τοιχώματα. Τέλος, όταν τα τοιχώματα Hartmann είναι ημιαγωγίμα τα αποτελέσματα κυμαίνονται ανάμεσα στα αντίστοιχα αποτελέσματα των δύο οριακών περιπτώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου c παρατηρούμε σημαντική απόκλιση των αποτελεσμάτων από τα αντίστοιχα για μονωμένα τοιχώματα, ενώ για $c = 1$ τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα για πλήρως αγωγίμα τοιχώματα.

Πίνακας Περιεχομένων

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ορισμός και εφαρμογές μαγνητουδροδυναμικής	1
1.2	Βασικές εξισώσεις και οριακές συνθήκες.....	1
1.3	Αντικείμενο διπλωματικής.....	6
2	Ροή Hartmann	7
2.1	Εισαγωγή	7
2.2	Αναλυτικές λύσεις	8
2.2.1	Μονωμένα τοιχώματα (Dirichlet).....	10
2.2.2	Αγώγιμα τοιχώματα (Newmann).....	11
2.2.3	Ημιαγώγιμα τοιχώματα (μεικτές ή Robin)	13
2.2.4	Αναλυτικές κατανομές.....	14
2.3	Οριακό στρώμα Hartmann.....	18
2.4	Αριθμητική λύση	20
2.4.1	Διακριτοποίηση εξισώσεων	20
2.4.2	Επαναληπτικό σχήμα	21
2.4.3	Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών.....	22
2.5	Κατανομές ταχυτήτων και επαγόμενου μαγνητικού πεδίου.....	23
2.5.1	Μονωμένα τοιχώματα ($c = 0$).....	26
2.5.2	Αγώγιμα τοιχώματα ($c \rightarrow \infty$).....	28
2.5.3	Ημιαγώγιμα τοιχώματα ($0 < c < \infty$)	30
2.6	Παροχή.....	34
2.7	Δύναμη Lorentz	36
2.8	Πτώση Πίεσης.....	42
3	Ροή σε ορθογώνιο κανάλι.....	44
3.1.	Διατύπωση προβλήματος.....	44
3.2.	Αναλυτικές λύσεις	46
3.2.1.	Μονωμένα τοιχώματα (Hartmann και πλευρικά).....	49
3.2.2.	Αγώγιμα Hartmann – Μονωμένα τοιχώματα	51
3.2.3.	Ημιαγώγιμα Hartmann – Μονωμένα πλευρικά	57
3.3.	Αριθμητική λύση	63
3.3.1.	Διακριτοποίηση εξισώσεων	63
3.3.2.	Επαναληπτικό σχήμα	63
3.3.3.	Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών.....	64
3.4.	Κατανομές ταχυτήτων και επαγόμενου μαγνητικού πεδίου.....	65
3.4.1.	Μονωμένα τοιχώματα.....	66
3.4.2.	Αγώγιμα Hartmann – Μονωμένα πλευρικά.....	68
3.4.3.	Ημιαγώγιμα Hartmann – Μονωμένα πλευρικά	72
3.5.	Παροχή και Δύναμη Lorentz	78
4	Συμπεράσματα και προτάσεις.....	86
	Βιβλιογραφία	89
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Κατάλογος προγραμμάτων και CD	91

Διαστατικές μεταβλητές

<u>Περιγραφή</u>	<u>Συμβολισμός</u>	<u>Διαστάσεις</u>
Χαρακτηριστικό μήκος	L	[m]
Χαρακτηριστική ταχύτητα	u_0	[ms ⁻¹]
Πυκνότητα του ρευστού	ρ	[kgm ⁻³]
Ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού	σ	[$\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$]
Ηλεκτρική αγωγιμότητα του τοιχώματος	σ_w	[$\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$]
Ηλεκτρική αγωγιμότητα του τοιχώματος Hartmann	$\sigma_{//}$	[$\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$]
Ηλεκτρική αγωγιμότητα των πλευρικών τοιχωμάτων	σ_s	[$\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$]
Ηλεκτρικό πεδίο	E	[Vm ⁻¹]
Κινηματικό Ιξώδες	ν	[m ² s ⁻¹]
Μαγνητική διαπερατότητα	μ	[NA ⁻²]
Μέγεθος του εφαρμοσμένου μαγνητικού πεδίου	B_0	[T]
Πάχος των τοιχωμάτων	t_w	[m]
Χρόνος	t	[s]

Αδιάστατες μεταβλητές

<u>Περιγραφή</u>	<u>Συμβολισμός</u>
Αξονική συντεταγμένη	x
Κάθετη συντεταγμένη	y
Εγκάρσια συντεταγμένη	z
Πάχος του οριακού στρώματος Hartmann	δ_{Ha}
Πάχος του πλευρικού οριακού στρώματος	δ_{side}

Αδιάστατα διανύσματα

Διανύσματα μονάδων	x, y, z
Πυκνότητα ρεύματος στο ρευστό	$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$
Πυκνότητα ρεύματος στον τοίχο	$\mathbf{j}_w = (j_{wx}, j_{wy}, j_{wz})$
Δύναμη Lorentz	$\mathbf{F}_L = (F_{Lx}, F_{Ly}, F_{Lz})$
Μαγνητικό πεδίο	$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$
Ταχύτητα	$\mathbf{u} = (u, v, w)$

Αδιάστατες παράμετροι

Παράμετρος αγωγιμότητας $c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L}$

Αριθμός Hartmann $Ha = LB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$

Παράμετρος αλληλεπίδρασης $N = \frac{\sigma LB_0^2}{\rho \nu_0}$

Αριθμός Reynolds $Pe = \frac{v_0 L}{\nu}$

1 Εισαγωγή

1.1 Ορισμός και εφαρμογές μαγνητοϋδροδυναμικής

Η Μαγνητοϋδροδυναμική (Μαγνητοϋδροδυναμική → ΜΥΔ) συνδυάζει την ρευστοδυναμική και την ηλεκτροδυναμική και εξετάζει τις ροές ηλεκτρικά αγωγίμων ρευστών, με την ταυτόχρονη παρουσία εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Πρόκειται για ένα σχετικά νέο γνωστικό αντικείμενο που ξεκίνησε μετά την πρωτοποριακή εργασία του Hartmann (1937) [1] στην ροή υγρών μετάλλων σε αγωγούς κάτω από την επιρροή ενός ισχυρού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και του Alfven (1950) [2] σε μαγνητοϋδροδυναμικά αερία.

Σήμερα το θεωρητικό σκέλος της μαγνητοϋδροδυναμικής έχει αναπτυχθεί πάρα πολύ με αντίστοιχα μεγάλο εύρος τεχνολογικών εφαρμογών που μπορούν να χωριστούν σε δυο βασικές κατηγορίες. Από την μία πλευρά υπάρχουν ΜΥΔ συσκευές που λειτουργούν βασιζόμενες σε μαγνητοϋδροδυναμικές αρχές και από την άλλη υπάρχουν βιομηχανικές παραγωγικές μέθοδοι και διαδικασίες (Davidson (1999) [3]) που οργανώνονται και εκτελούνται χρησιμοποιώντας τα μαγνητοϋδροδυναμικά φαινόμενα. Ο Πίνακας 1.1 παρουσιάζει μια σύνοψη των εφαρμογών αυτών. Μία από τις πλέον μοντέρνες, φιλόδοξες και απαιτητικές περιοχές εφαρμογής της ΜΥΔ είναι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης όπου το πλάσμα περιορίζεται από ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο. (Hunt and Holroyd (1977) [4])

1.2 Βασικές εξισώσεις και οριακές συνθήκες

Το σύνολο των μαγνητοϋδροδυναμικών εξισώσεων για νευτονική, μόνιμη ροή ενός ρευστού περιλαμβάνει τις κλασσικές εξισώσεις Navier-Stokes κατάλληλα τροποποιημένες, τις εξισώσεις του Maxwell και τον νόμο του Ohm. Στη παρούσα παράγραφο γίνεται μία πολύ σύντομη αναδρομή στις πλέον βασικές εξισώσεις, αφού οι λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν εύκολα στα βασικά εγχειρίδια και βιβλία ΜΥΔ.

Η πλέον βασική εξίσωση στην ασυμπίεστη ΜΥΔ είναι η εξίσωση επαγωγής όπως ονομάζεται που σε αδιάστατη διανυσματική μορφή δίδεται από το σύστημα

Πίνακας 1.1. Πεδία εφαρμογών της ΜΥΔ.

ΜΥΔ σε τεχνολογικά συστήματα	ΜΥΔ σε βελτιστοποίηση διαδικασιών
<ul style="list-style-type: none"> ❖ ΜΥΔ αντλίες βασισμένες στην αγωγιμότητα ❖ ΜΥΔ αναδευτήρες υγρών μετάλλων βασιζόμενοι στο μεταβαλλόμενο επιβληθέν μαγνητικό πεδίο ❖ Συγκόλληση πλάσματος ❖ Συγκόλληση με δέσμες ηλεκτρονίων ❖ Επαγωγικοί φούρνοι ❖ ΜΥΔ γεννήτριες ❖ Περιορισμός του πλάσματος σε αντιδραστήρες σύντηξης 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Έλεγχος μεταφοράς με ΜΥΔ σε <ul style="list-style-type: none"> - συσκευές αύξησης κρυστάλλων - καλύμματα σύντηξης - γαλβανικά λουτρά - ηλεκτρομαγνητική επίπλευση - ομοιογενοποίηση με ΜΥΔ αναδευτήρες. ❖ Τήξη με μετεωρισμό ❖ Κατεργασία επιφανειών

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{Re_m} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} \tag{1.1}$$

Στην (1.1), \mathbf{B} είναι το διάνυσμα του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου, \mathbf{V} το διάνυσμα της ταχύτητας και Re_m ο μαγνητικός αριθμός Reynolds. Σημειώνεται ότι οι μαγνητικές γραμμές είναι κλειστές, δηλαδή $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Στην ΜΥΔ η εξίσωση συνέχειας $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ παραμένει όπως και στην κλασσική ρευστοδυναμική, ενώ οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής για ασυμπίεστο ρευστό τώρα γράφονται στη αδιάστατη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + N(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \tag{1.2}$$

όπου p είναι η πίεση, Re ο αριθμός Reynolds, N η παράμετρος αλληλεπίδρασης και \mathbf{j} το διάνυσμα του ηλεκτρικού ρεύματος, ενώ $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ η δύναμη Lorentz. Η δύναμη Lorentz

συνδυάζει τις ρευστοδυναμικές και ηλεκτροδυναμικές καταστάσεις του συστήματος και δρα κάθετα στο διάνυσμα του ρεύματος και του μαγνητικού πεδίου. Αποδεικνύεται ότι εναλλακτικά γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) + \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) \quad (1.3)$$

Το δυαδικό γινόμενο $(\mathbf{B}\mathbf{B})$ του διανύσματος \mathbf{B} με τον εαυτό του, σε τανυστική μορφή είναι $(\mathbf{B}\mathbf{B}) \doteq [B_i B_k]$. Άρα η δύναμη Lorentz αποτελείται από την κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους που ονομάζουμε μαγνητική πίεση και την απόκλιση του δυαδικού γινομένου που αντιπροσωπεύει τον όρο των τάσεων.

Ο πλέον αντιπροσωπευτικός αριθμός στην ΜΥΔ είναι ο αριθμός Hartmann που ορίζεται από την σχέση

$$Ha = LB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \quad (1.4)$$

και συνδέεται με τον αριθμό Reynolds και την παράμετρο αλληλεπίδρασης με την σχέση

$Ha = \sqrt{N \text{Re}}$. Για λόγους πληρότητας και καλύτερης κατανόησης του κειμένου σημειώνεται ότι

$$\text{Re} = \frac{\rho L u_0}{\mu}$$

$$\text{Re}_m = \mu \sigma L u_0$$

και

$$N = \frac{\sigma L B_0^2}{\rho u_0}$$

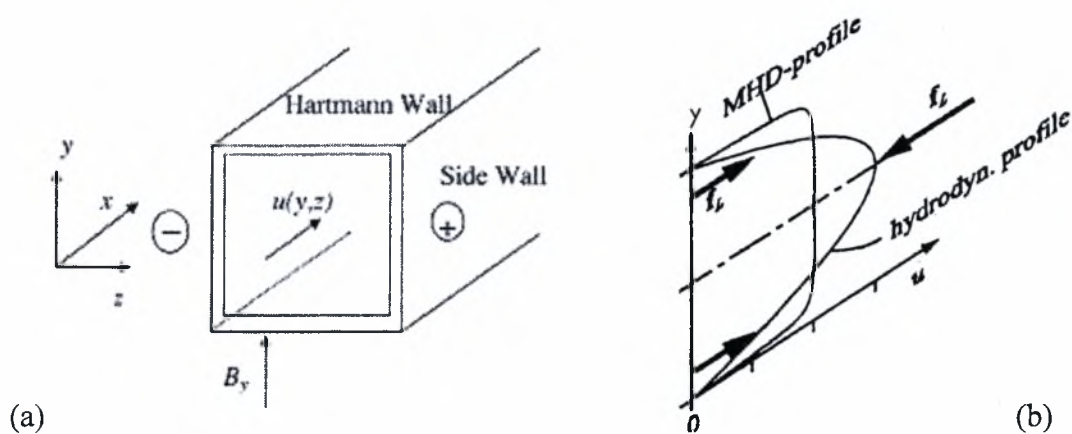
Όταν η ΜΥΔ ροή είναι μόνιμη και πλήρως ανεπτυγμένη και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι αποκλειστικά σε μία διεύθυνση (βλέπε Γράφημα 1.1) τότε οι όροι οι εξισώσεις (1.1) και (1.2) απλουστεύονται σημαντικά. Συγκεκριμένα απαλείφονται οι παράγωγοι ως προς το χρόνο και μηδενίζονται οι μη γραμμικοί όροι συναγωγής. Τέλος τα διανύσματα της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου έχουν μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα. Στη περίπτωση αυτή το ΜΥΔ πρόβλημα περιγράφεται από τις ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις

$$\nabla^2 u + Ha \frac{\partial b}{\partial y} = -1. \tag{1.5}$$

και

$$\nabla^2 b + Ha \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.6}$$

Το σύστημα συντεταγμένων φαίνεται στο Γράφημα 1.1. Τα τοιχώματα που είναι παράλληλα και εφαπτόμενα στο μαγνητικό πεδίο ονομάζονται τοιχώματα Hartmann και τα πλευρικά τοιχώματα αντίστοιχα.



Γράφημα 1.1: a) MHD ροή σε ορθογώνιο αγωγό b) κατανομή ταχύτητας στο επίπεδο $z=0$ και κατευθύνσεις δύναμης Lorentz

Στο σημείο αυτό μερικά σχόλια σχετικά με τη φυσική του προβλήματος είναι χρήσιμα για τον μη μυημένο αναγνώστη. Η αλληλεπίδραση του κινούμενου ρευστού με το μαγνητικό πεδίο προκαλεί ένα ηλεκτρικό πεδίο που έχει σαν αποτέλεσμα την διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλευρικών τοίχων, όπως υποδεικνύεται από τα σύμβολα \oplus και \ominus στο Γράφημα 1.1a. Στη συνέχεια οι συνιστώσες του ρεύματος που είναι κάθετες στις μαγνητικές γραμμές προκαλούν την δύναμη Lorentz. Σημειώνεται ότι κοντά στα τοιχώματα η ταχύτητα μειώνεται αισθητά. Στις περιοχές των χαμηλών ταχυτήτων η κατεύθυνση του ρεύματος είναι αντίθετη από ότι στο κέντρο της ροής και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η κατανομή της δύναμη Lorentz να είναι αυτή που φαίνεται στο Γράφημα 1.1b.

Η παραπάνω ανάλυση αποτελεί μία σύντομη περιγραφή της φυσικής των πλήρως ανεπτυγμένων ΜΥΔ ροών. Βεβαίως, για την επίλυση των (1.5) και (1.6) είναι απαραίτητο να ορίσουμε και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Εν συντομία αναφέρουμε ότι η ταχύτητα στα τοιχώματα υπακούει την κλασσική οριακή συνθήκη μη ολίσθησης. Οι οριακές συνθήκες για το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο ποικίλουν ανάλογα με την ηλεκτρική αγωγιμότητα του τοιχώματος. Αποδεικνύεται ότι στα τοιχώματα $\partial\Omega$ το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο υπακούει στην οριακή συνθήκη μικτού τύπου

$$\frac{\partial b}{\partial n} - \frac{1}{c}b = 0 \text{ στο } \partial\Omega \quad (1.7)$$

όπου \mathbf{n} δηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο πάνω στο $\partial\Omega$ και c είναι η διηλεκτρική σταθερά του τοιχώματος που ορίζεται από την σχέση

$$c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L} \quad (1.8)$$

Στην (1.8) τα μεγέθη σ_w και σ αντιπροσωπεύουν τις ηλεκτρικές αγωγιμότητες του τοιχώματος και του ρευστού.

Από την οριακή συνθήκη (1.7) θέτοντας $c = 0$ και $c \rightarrow \infty$ προκύπτουν οι οριακές συνθήκες

$$b = 0 \text{ στο } \partial\Omega \quad (1.9)$$

και

$$\frac{\partial b}{\partial n} = 0 \text{ στο } \partial\Omega \quad (1.10)$$

που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις των πλήρως μονωμένων και των πλήρως αγωγικών τοιχωμάτων. Όταν τα τοιχώματα είναι αγωγίμα το ρεύμα διαπερνάει την διεπιφάνεια μεταξύ του ρευστού και του τοιχώματος. Αντίθετα, στα μονωμένα τοιχώματα το ρεύμα διέρχεται μέσα από τις οριακές στοιβάδες του ρευστού.

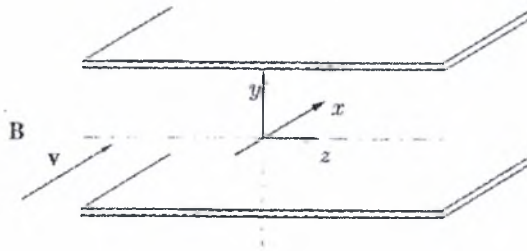
1.3 Αντικείμενο διπλωματικής

Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική και υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν πρότυπες μαγνητοϋδροδυναμικές ροές και συγκεκριμένα την ροή Hartmann (Κεφάλαιο 2) και την πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε ορθογώνιο αγωγό (Κεφάλαιο 3). Στη συνέχεια τα υπολογιστικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αριθμητικά και προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα για την αξιοπιστία των υπολογιστικών σχημάτων. Επίσης αξιοποιώντας τις αναλυτικές λύσεις εξετάζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων για $Ha \ll 1$ και $Ha \gg 1$. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στον ακριβή υπολογισμό των κατανομών εντός των ΜΥΔ στοιβάδων που αναπτύσσονται στα τοιχώματα των αγωγών για όλους τους τύπους των οριακών συνθηκών. Αποτελέσματα παρουσιάζονται για τις κατανομές της ταχύτητας, του μαγνητικού πεδίου και της δύναμης Lorentz, όπως επίσης και για τα μεγέθη των παροχών και της πτώσης πίεσης σε σχέση με διάφορες παραμέτρους της ροής και κυρίως με τον αριθμό Hartmann. Η διπλωματική ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα και τις προτάσεις για μελλοντική δουλειά του 4^{ου} κεφαλαίου, ενώ στο παράρτημα παρουσιάζονται οι πηγαίοι κώδικες Mathematica και Fortran σε CD.

2 Ροή Hartmann

2.1 Εισαγωγή

Ο Hartmann (1937) [1] πρώτος, ερεύνησε πειραματικά και θεωρητικά την ΜΥΔ ροή σε διάκενο μεταξύ δυο παράλληλων πλακών. Αυτή η έρευνα παρείχε θεμελιώδεις γνώσεις για την ανάπτυξη διαφόρων ΜΥΔ συσκευών όπως είναι, οι μαγνητοϋδροδυναμικές αντλίες, γεννήτριες, και μετρητές ροής. Το Γράφημα 2.1 απεικονίζει την γεωμετρία του προβλήματος. Η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη στην κατεύθυνση x και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $B(y)$ είναι κάθετο στα δυο τοιχώματα του καναλιού που βρίσκονται στα σημεία $y = \pm 1$. Τα πλευρικά τοιχώματα του καναλιού είναι απείρου μήκους.



Γράφημα 2.1: Ροή Hartmann

Επομένως οι εξαρτημένες μεταβλητές της ταχύτητας u και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίο $b(y)$, εξαρτώνται μόνο από την ανεξάρτητη μεταβλητή y . Το πρόβλημα περιγράφεται από το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$Ha \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \tag{2.1}$$

και

$$Ha \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{c} b = 0 \quad \text{στο } y = 1$$

και

$$u = 0, \quad -\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{c}b = 0 \quad \text{στο } y = -1$$

Η αδιάστατη ποσότητα c ονομάζεται διηλεκτρική σταθερά και αντιπροσωπεύει το λόγο της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του τοιχώματος προς αυτήν του ρευστού. Όταν το $c = 0$ αναφερόμαστε σε μονωμένα τοιχώματα και όταν $c \rightarrow \infty$ σε πλήρη αγωγή τοιχώματα, ενώ για $0 < c < \infty$ οδηγούμαστε στην περίπτωση των ημιαγώγιμων τοιχωμάτων.

Είναι προφανές ότι η ροή Hartmann αντιπροσωπεύει μια απλοποιημένη ροή που δεν συναντάται ευρέως σε πραγματικές ΜΥΔ διατάξεις. Όμως, παραμένει ιδιαίτερα σημαντική επειδή επιλύεται αναλυτικά και διατυπώνονται κλειστές εκφράσεις για την ταχύτητα και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο. Μετά από κατάλληλη επεξεργασία των αναλυτικών αποτελεσμάτων προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα που ισχύουν και στην περίπτωση σύνθετων ΜΥΔ ροών.

2.2 Αναλυτικές λύσεις

Ξεκινούμε την αναλυτική λύση της ροής Hartmann, παραγωγίζοντας την (2.1) ως προς y

$$Ha \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = -\frac{1}{Ha} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \quad (2.3)$$

και αντικαθιστώντας την (2.3) στην (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} Ha \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Ha} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 &\Leftrightarrow Ha^2 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Ha^2 u \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Ha^2 u = k \end{aligned} \quad (2.4)$$

Η (2.4) περιέχει μόνο την εξαρτημένη μεταβλητή $u(y)$ και k είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Η λύση γράφεται σαν επαλληλία της ομογενούς και της μερικής λύσης στη μορφή $u = u_h + u_p$ με $u(\pm 1) = u_h(\pm 1) + u_p(\pm 1) = 0$. Εύκολα προκύπτει ότι η μερική λύση είναι

$$u_p = c \Rightarrow -Ha^2 c = k \Rightarrow c = -\frac{k}{Ha^2} \Rightarrow u_p = -\frac{k}{Ha^2} \quad (2.5)$$

Στη συνέχεια, η ομογενής λύση προκύπτει από την λύση της

$$u_h'' - Ha^2 u_h = 0 \quad (2.6)$$

με οριακές συνθήκες

$$u_h(\pm 1) = \frac{k}{Ha^2} \quad (2.7)$$

Κάνοντας στην (2.6) την εκθετική αντικατάσταση $u_h = e^{\rho y}$ βρίσκουμε

$$\rho^2 e^{\rho y} - Ha^2 e^{\rho y} = 0 \Leftrightarrow (\rho^2 - Ha^2) e^{\rho y} = 0 \Leftrightarrow \rho = \pm Ha$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες και η γενική ομογενής λύση γράφεται στη μορφή

$$u_h(y) = c_1 \cosh(Hay) + c_2 \sinh(Hay)$$

Εφαρμόζοντας τη γενική λύση στα όρια του προβλήματος έχουμε ότι

$$u_h(1) = c_1 \cosh(Ha) + c_2 \sinh(Ha) = \frac{k}{Ha^2} \quad (2.8)$$

και

$$u_h(-1) = c_1 \cosh(Ha) - c_2 \sinh(Ha) = \frac{k}{Ha^2} \quad (2.9)$$

Στην συνέχεια προσθέτοντας και αφαιρώντας διαδοχικά τις (2.8) και (2.9) βρίσκουμε ότι

$$2c_1 \cosh(Ha) = 2 \frac{k}{Ha^2} \Leftrightarrow c_1 = \frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \quad (2.10)$$

$$2c_2 \sinh(Ha) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \quad (2.11)$$

Μετά την εφαρμογή των υδροδυναμικών οριακών συνθηκών η ταχύτητα γράφεται ως εξής

$$u = u_h + u_p = \frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Hay) - \frac{k}{Ha^2} \Leftrightarrow$$

$$u(y) = -\frac{k}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (2.12)$$

Στην συνέχεια στρέφουμε την προσοχή μας στην εξίσωση του μαγνητικού πεδίου.

Παραγωγίζουμε την (2.12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{Ha} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Hay) \quad (2.13)$$

και αντικαθιστούμε την παράγωγο στην (2.2)

$$(2.2) \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = -\frac{k}{\cosh(Ha)} \sinh(Hay) \quad (2.14)$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές την (2.14) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{k}{Ha} \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Hay) + c_1 \quad (2.15)$$

και

$$b(y) = -\frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Hay) + c_1 y + c_2 \quad (2.16)$$

Η (2.12) και (2.16) αποτελούν τις γενικές λύσεις της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου της ροής Hartmann, αντίστοιχα. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για να προκύψουν οι λύσεις είναι σύμφωνη με τους Chang and Lundgren (1961) [5]. Οι ειδικές λύσεις θα προκύψουν μετά την διατύπωση των οριακών συνθηκών που αντίθετα με τις υδροδυναμικές οριακές συνθήκες, μπορούν να είναι τύπου Dirichlet, Neumann και μεικτές (Robin). Επίσης, στην διαδικασία αυτή θα προσδιοριστεί και η σταθερά k .

2.2.1 Μονωμένα τοιχώματα (Dirichlet)

Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται ως μονωμένα, δηλαδή $c = 0$, οι οριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet

$$b(\pm 1) = 0$$

Εφαρμόζοντας την γενική λύση (2.16) στα όρια $y = 1$ και $y = -1$ έχουμε

$$-\frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Ha) + c_1 + c_2 = 0$$

και

$$\frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Ha) - c_1 + c_2 = 0$$

αντίστοιχα. Προσθέτοντας και αφαιρώντας διαδοχικά τις δύο παραπάνω εκφράσεις βρίσκουμε

$$c_2 = 0$$

και

$$-2 \frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Ha) + 2c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{k}{Ha^2} \frac{1}{\cosh(Ha)} \sinh(Ha)$$

Επομένως, η κλειστή έκφραση για το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο παίρνει την μορφή

$$b(y) = \frac{k}{Ha^2} \frac{\sinh(Ha)}{\cosh(Ha)} y + \left(-\frac{k}{Ha^2} \right) \frac{\sinh(Hay)}{\cosh(Ha)} \quad (2.17)$$

Απομένει ο προσδιορισμός της σταθεράς k που εκτός από την (2.17), εμφανίζεται και στην (2.12). Αυτό επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση των λύσεων (2.12) και (2.17) στην (2.1) και μετά από την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει ότι

$$k = -\frac{Ha}{\tanh(Ha)}$$

Αντικαθιστώντας τέλος, την τιμή της σταθεράς k στις εξισώσεις (2.12) και (2.17), προκύπτουν οι αναλυτικές λύσεις

$$u(y) = \frac{1}{Ha \tanh(Ha)} \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (2.18)$$

και

$$b(y) = -\frac{y}{Ha} - \frac{1}{Ha \tanh(Ha)} \frac{\sinh(Hay)}{\cosh(Ha)} \quad (2.19)$$

Οι εξισώσεις (2.18) και (2.19), για την υδροδυναμική ταχύτητα και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα, αποτελούν τις ειδικές λύσεις της ροής Hartmann με μονωμένα τοιχώματα.

2.2.2 Αγωγήμα τοιχώματα (Newmann)

Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται ως αγωγήμα, δηλαδή $c \rightarrow \infty$, οι οριακές συνθήκες είναι τύπου Newmann

$$u = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } y = 1$$

και

$$u = 0, \quad -\frac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } y = -1$$

Εφαρμόζοντας την γενική λύση (2.16) στα όρια $y = 1$ και $y = -1$ έχουμε

$$-\frac{k}{Ha} \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Ha) + c_1 = 0$$

και

$$\frac{k}{Ha} \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Ha) - c_1 = 0$$

και επομένως $c_1 = \frac{k}{Ha}$.

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στη (2.16) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{k}{Ha} \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Hay) + \frac{k}{Ha} \tag{2.20}$$

$$b(y) = -\frac{k}{Ha^2} \frac{\sinh(Hay)}{\cosh(Ha)} + \frac{k}{Ha} y + c_2 \tag{2.21}$$

Έχουμε δυο σταθερές που παραμένουν απροσδιόριστες. Αντικαθιστώντας την (2.20) και την (2.12) στην (2.1) προκύπτει ότι $k = -1$. Επομένως οι αναλυτικές λύσεις του προβλήματος είναι

$$u(y) = \frac{1}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] \tag{2.22}$$

και

$$b(y) = -\frac{y}{Ha} + \frac{1}{Ha^2} \frac{\sinh(Hay)}{\cosh(Ha)} + c_2 \tag{2.23}$$

Η σταθερά c_2 παραμένει απροσδιόριστη. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο και οφείλεται στον ορισμό του προβλήματος που περιλαμβάνει ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις συνδέονται με οριακές συνθήκες τύπου Newmann. Άρα το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά.

2.2.3 Ημιαγώγιμα τοιχώματα (μεικτές ή Robin)

Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται ως μερικώς αγώγιμα, δηλαδή $0 < c < \infty$, οι οριακές συνθήκες είναι μικτού τύπου (Robin)

$$u = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{c}b = 0 \quad \text{στο } y = 1$$

$$u = 0, \quad -\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{c}b = 0 \quad \text{στο } y = -1$$

Εφαρμόζοντας την γενική λύση (2.16) στα όρια $y = 1$ και $y = -1$ έχουμε

$$-\frac{k}{Ha} + c_1 + \frac{1}{c} \left[-\frac{k}{Ha^2} \tanh(Ha) + c_1 + c_2 \right] = 0 \quad (2.24)$$

και

$$\frac{k}{Ha} - c_1 + \frac{1}{c} \left[+\frac{k}{Ha^2} \tanh(Ha) - c_1 + c_2 \right] = 0 \quad (2.25)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις βρίσκουμε

$$c_1 = \frac{c}{c+1} \frac{k}{Ha} \left[1 + \frac{1}{c} \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right]. \quad (2.26)$$

και

$$c_2 = 0 \quad (2.27)$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές c_1 και c_2 στις (2.12) και (2.16) τις προκύπτουσες εκφράσεις στην (2.1) προκύπτει ότι στην περίπτωση των μερικώς αγώγιμων τοιχωμάτων η σταθερά

$$k = -Ha \frac{c+1}{cHa + \tanh(Ha)} \quad (2.28)$$

και στην συνέχεια οι αναλυτικές λύσεις προκύπτουν από τις κλειστές εκφράσεις

$$u = \frac{1}{Ha} \frac{c+1}{cHa + \tanh(Ha)} \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (2.29)$$

και

$$b(y) = -\frac{y}{Ha} - \frac{1}{Ha} \frac{c+1}{cHa + \tanh(Ha)} \frac{\sinh(Hay)}{\cosh(Ha)} \quad (2.30)$$

2.2.4 Αναλυτικές κατανομές

Με βάση τις αναλυτικές λύσεις της παραγράφου 2.2 προχωρούμε στην απεικόνιση των κατανομών της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου. Οι κατανομές των ταχυτήτων και του μαγνητικού πεδίου παρατίθενται στα Γραφήματα 2.2 και 2.3 για διάφορες τιμές του αριθμού Ha και για $c=0$ και $c \rightarrow \infty$, που αντιπροσωπεύουν τις περιπτώσεις των πλήρως μονωμένων και πλήρως αγωγίμων τοιχωμάτων του καναλιού, αντίστοιχα.

Παρατηρώντας το Γράφημα 2.2 βλέπουμε ότι οι ταχύτητες είναι σαφώς μικρότερες, για τους ίδιους αριθμούς Ha , στα αγωγήμα τοιχώματα εν συγκρίσει με τα μονωμένα. Επίσης, παρατηρούμε πως η αύξηση του αριθμού Ha επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο τις κατανομές των ταχυτήτων στις δυο περιπτώσεις. Γίνεται πιο έντονα αισθητή στα αγωγήμα τοιχώματα, όπου η αύξηση του αριθμού Ha κατά μια τάξη, ελαττώνει την ταχύτητα του ρευστού κατά δυο τάξεις. Βέβαια, και στις δυο περιπτώσεις, όσο αυξάνεται ο Ha , παρατηρείται σταδιακή επιπεδοποίηση της κατανομής, στην περιοχή του πυρήνα του καναλιού. Παράλληλα, στα τοιχώματα έχουμε την δημιουργία λεπτού οριακού στρώματος, μέσα στο οποίο η κλίση της ταχύτητας είναι πολύ απότομη, κάτι που είναι ιδιαίτερα έντονο στα μονωμένα τοιχώματα.

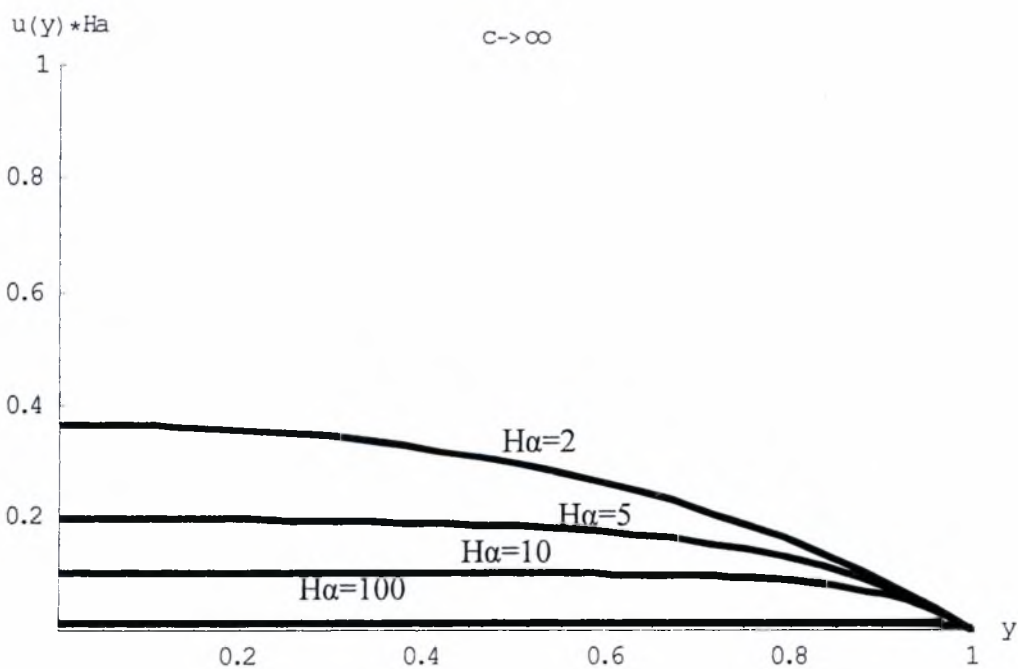
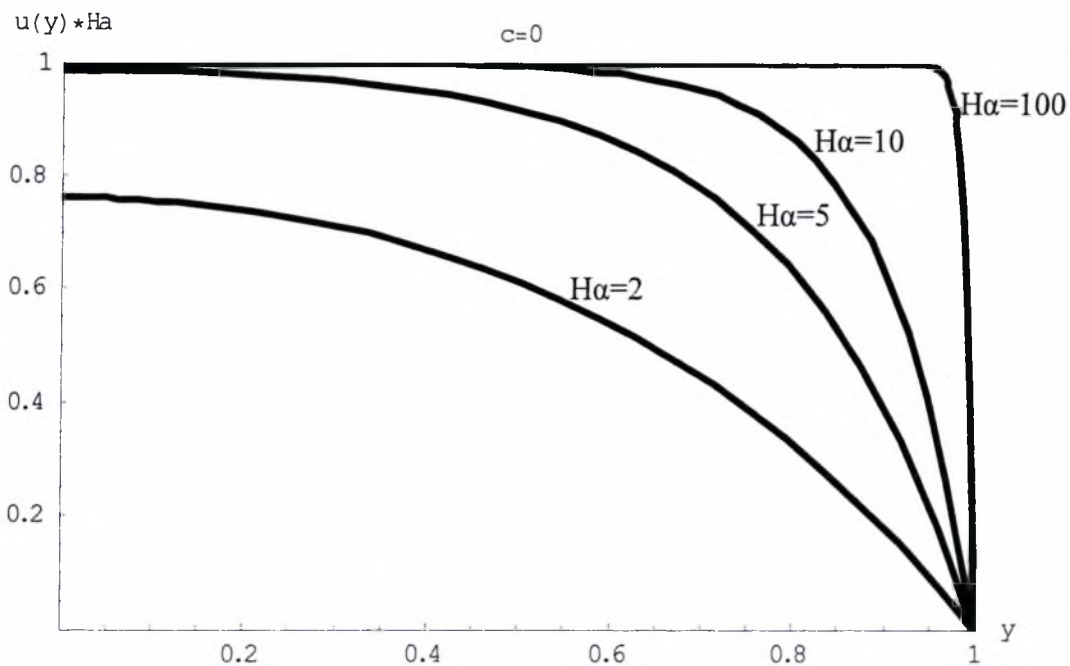
Οι κατανομές του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου παρουσιάζονται στο Γράφημα 2.3 για διάφορους αριθμούς Ha , και τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς c . Στην περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων, βλέπουμε πως η ένταση του πεδίου αυξάνεται γραμμικά κατά μήκος του αγωγού, ενώ καθώς πλησιάζουμε το τοίχωμα μειώνεται απότομα και μηδενίζεται στο όριο. Αντίστοιχη γραμμική αύξηση έχουμε και στην περίπτωση των πλήρως αγωγίμων τοιχωμάτων, αλλά εδώ το μαγνητικό πεδίο καταλήγει κάθετα στο τοίχωμα. Αυτές οι διαφορετικές συμπεριφορές στο τοίχωμα του καναλιού οφείλονται στις συνοριακές συνθήκες που διέπουν τις δυο καταστάσεις.

Οι λεπτές οριακές στοιβάδες κατά μήκος των τοιχωμάτων, όπου παρατηρούνται οι μεγάλες αλλαγές στις κλίσεις της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου, είναι

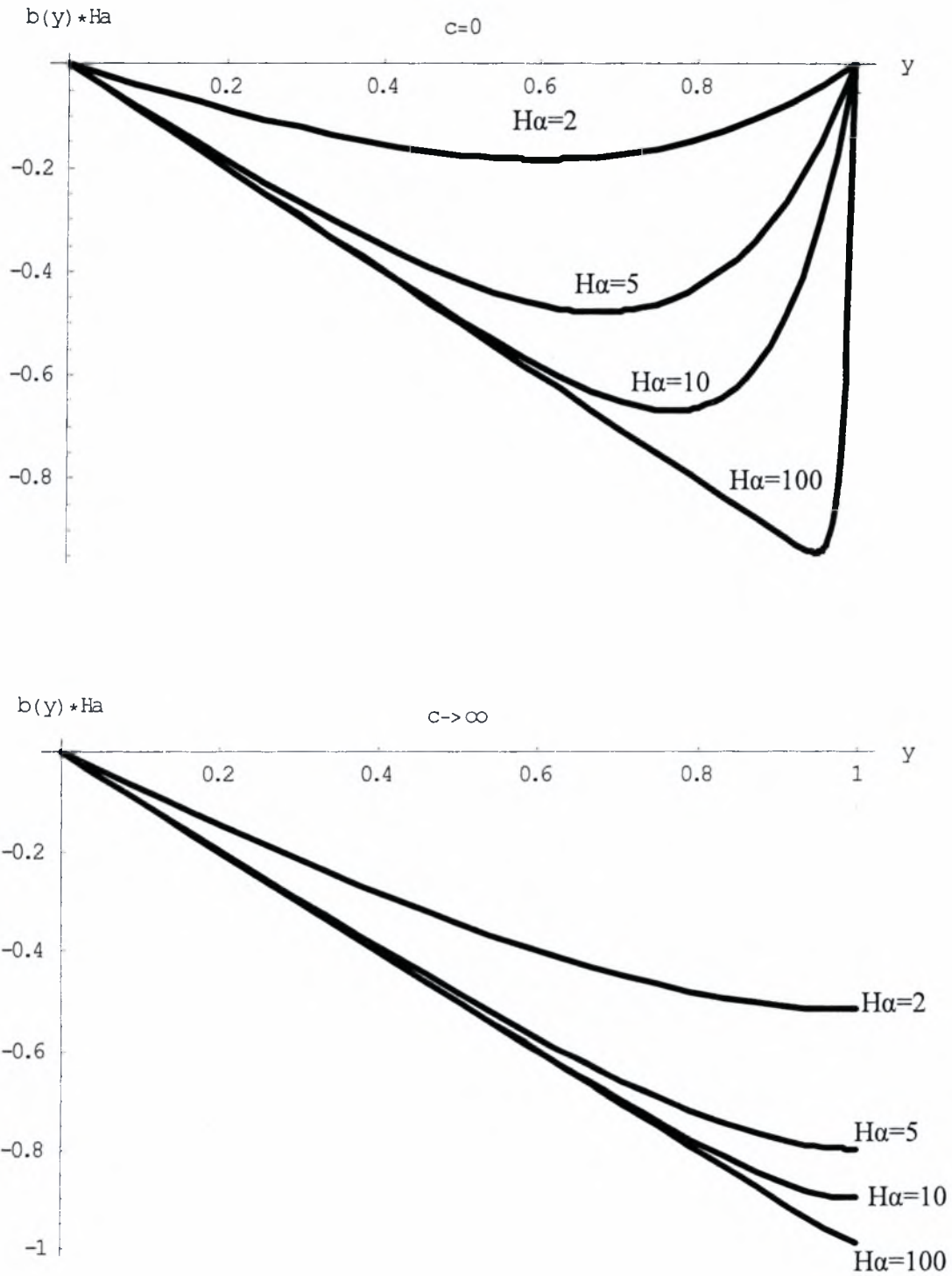
γνωστές στη βιβλιογραφία σαν στοιβάδες Hartmann. Σημειώνεται ότι, από την μαθηματική σκοπιά, η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ταχύτητα του ρευστού προκύπτει διάμεσου της σταθεράς k .

Κλείνοντας τη παράγραφο των αναλυτικών αποτελεσμάτων, συνοπτικά αναφέρονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

- ❖ Για σταθερές τιμές της αγωγιμότητας των τοιχωμάτων η ταχύτητα μειώνεται αυξάνοντας τον αριθμό Hartmann διότι αυξάνεται η επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.
- ❖ Αυξάνοντας τον αριθμό Hartmann το προφίλ της ταχύτητας γίνεται επίπεδο στον πυρήνα του καναλιού και δημιουργεί λεπτό οριακό στρώμα κοντά στα τοιχώματα Hartmann.
- ❖ Για τον ίδιο αριθμό Hartmann η ταχύτητα αυξάνει καθώς η διηλεκτρική σταθερά μειώνεται.



Γράφημα 2.2: Κατανομές ταχυτήτων ροής Hartmann με πλήρως μονωμένα (επάνω) και πλήρως αγωγίμα (κάτω) τοιχώματα. και $Ha = 2, 5, 10, 100$.



Γράφημα 2.3: Κατανομές επαγόμενου μαγνητικού πεδίου ροής με πλήρως μονωμένα (επάνω) και πλήρως αγωγίμα (κάτω) τοιχώματα. και $Ha = 2, 5, 10, 100$.

2.3 Οριακό στρώμα Hartmann

Στην συνέχεια, αξιοποιώντας τις αναλυτικές λύσεις της ροής Hartmann, εξετάζονται οι δυο ακραίες περιπτώσεις των αριθμών Ha , δηλαδή $Ha \ll 1$ και $Ha \gg 1$. Είναι προφανές ότι καθώς ο Ha τείνει στο μηδέν θα πρέπει να αναπαράγεται η κλασική υδροδυναμική ροή, ενώ καθώς ο Ha παίρνει πολύ μεγάλες τιμές η ροή θα μηδενίζεται.

Όταν ο $Ha \rightarrow 0$ χρησιμοποιούμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις

$$\sinh(Hay) = Hay - \frac{1}{6}(Hay)^3 + O[(Hay)^5]$$

$$\cosh(Hay) = 1 + \frac{1}{2}(Hay)^2 + O[(Hay)^4]$$

$$\tanh(Ha) = Ha - \frac{1}{3}Ha^3 + O(Ha^5)$$

Εφαρμόζοντας ασυμπτωτική ανάλυση στα αναλυτικά αποτελέσματα εύκολα προκύπτει ότι για $Ha \rightarrow 0$ παίρνουμε για την ταχύτητα το αντίστοιχο αναλυτικό αποτέλεσμα της ροής Poiseuille

$$\lim_{Ha \rightarrow 0} u(y) = \frac{1}{2}(1 - y^2) \quad (2.31)$$

και για το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο $\lim_{Ha \rightarrow 0} b(y) = 0$.

Όταν ο $Ha \gg 1$ χρησιμοποιούμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις

$$\sinh(Ha) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(Ha), \quad \cosh(Ha) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(Ha), \quad \tanh(Ha) \rightarrow 1. \quad (2.32)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.32) στις (2.12) και (2.16), προκύπτει ότι

$$u(y) = u_c [1 - \exp[Ha(|y| - 1)]] \quad (2.33)$$

και

$$b(y) = -\frac{y}{Ha} \pm u_c \exp[Ha(|y| - 1)], \quad (2.34)$$

για $y \in (-1, 1)$ και

$$u_c \rightarrow \frac{1}{Ha} \frac{c + 1}{cHa + 1} \quad (2.35)$$

Οι εξισώσεις (2.33) και (2.34), που ισχύουν για μεγάλους αριθμούς Ha , αποδεικνύουν πως τόσο η ταχύτητα όσο και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο μειώνονται εκθετικά κοντά στα τοιχώματα του καναλιού. Αυτό προκαλεί ένα λεπτό οριακό στρώμα, του οποίου το πάχος δ είναι της τάξης

$$\delta = O(Ha^{-1})$$

Αυτό το οριακό στρώμα με την εκθετική συμπεριφορά που απεικονίζεται ποιοτικά στο Γράφημα 2.4 ονομάζεται οριακό στρώμα Hartmann. Εμφανίζεται στο τοίχωμα του καναλιού όταν το μαγνητικό πεδίο έχει μη μηδενική συνιστώσα κάθετη στο τοίχωμα.

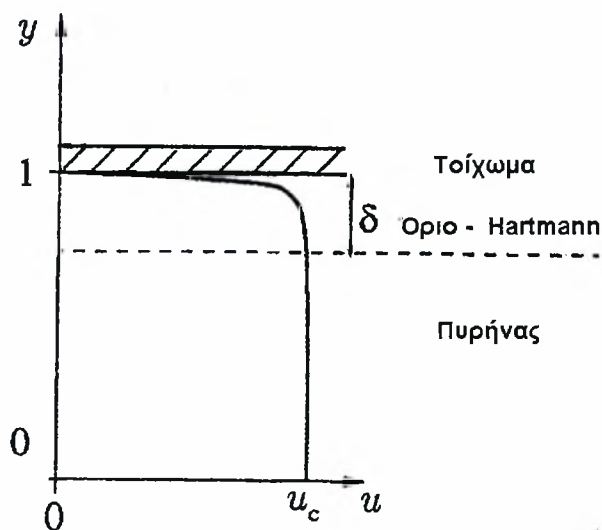
Από τις εξισώσεις (2.33) και (2.34) μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι η ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο έχουν συμπεριφορά στο κέντρο του καναλιού ($y=0$) σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u_c \rightarrow \frac{1}{Ha} \frac{c+1}{cHa+1} \quad (2.36)$$

και

$$b_c = -\frac{1}{Ha} y \quad (2.37)$$

Οι εκφράσεις (2.36) και (2.37) συχνά αναφέρονται σαν ταχύτητα πυρήνα (core) και μαγνητικό πεδίο πυρήνα (βλέπε Γράφημα 2.4).



Γράφημα 2.4: Οριακό στρώμα Hartmann

Για τις περιπτώσεις, των πλήρως μονωμένων και των πλήρως αγωγίμων τοιχωμάτων η ταχύτητα πυρήνα παίρνει τις τιμές $u_c = Ha^{-1}$ και $u_c = Ha^{-2}$ για $c = 0$ και $c \rightarrow \infty$ αντίστοιχα.

2.4 Αριθμητική λύση

Έχοντας ολοκληρώσει την αναλυτική λύση της ροής Hartmann, στρεφόμαστε στην αριθμητική λύση του ίδιου προβλήματος εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το συνεχές χωρίο $y \in [-1, 1]$ αντικαθίσταται με το αριθμητικό πλέγμα που προκύπτει από τον διαχωρισμό του χωρίου σε N ίσα διαστήματα μήκους Δy . Η αρχή και το τέλος του κάθε διαστήματος αποτελούν τους κόμβους $i = 1, \dots, N$ του πλέγματος. Οι κόμβοι $i = 1$ και $i = N$ είναι οι δύο οριακοί κόμβοι, ενώ οι κόμβοι $i = 2, \dots, N - 1$ είναι οι εσωτερικοί κόμβοι του πλέγματος.

2.4.1 Διακριτοποίηση εξισώσεων

Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις (2.1) και (2.2) σε έναν τυχαίο εσωτερικό κόμβο i , προσεγγίζοντας τις παραγώγους με κεντρώες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών 2^{ης} τάξης. Τότε οι διαφορικές εξισώσεις για την ταχύτητα και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο αντικαθίστανται με τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta y^2} + Ha \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2\Delta y} = -1 \quad (2.38)$$

$$\frac{b_{i+1} - b_i + b_{i-1}}{\Delta y^2} + Ha \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta y} = 0 \quad (2.39)$$

για $i = 2, \dots, N - 1$. Οι εξισώσεις (2.38) και (2.39) αποτελούν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων που επιλύεται αριθμητικά.

2.4.2 Επαναληπτικό σχήμα

Το αλγεβρικό σύστημα (2.38) και (2.39) επιλύεται με ένα επαναληπτικό σχήμα διαδοχικής υπερχαλάρωσης (S.O.R). Αρχικά το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$u^{(n+1)} = \frac{\Delta y Ha}{4} (b_{i+1}^{(n)} - b_{i-1}^{(n)}) + \frac{1}{2} (u_{i+1}^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}) + \frac{\Delta y^2}{2} \quad (2.40)$$

$$b^{(n+1)} = \frac{\Delta y Ha}{4} (u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}) + \frac{1}{2} (b_{i+1}^{(n)} + b_{i-1}^{(n)}) \quad (2.41)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει το αριθμό επανάληψης. Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις (2.40) και (2.41) αντιπροσωπεύουν τον επαναληπτικό αλγόριθμο Gauss Seidel. Στη συνέχεια ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου επιταχύνεται εφαρμόζοντας τις επαναληπτικές σχέσεις

$$u_i^{(n+1)} = \omega u_i^{(n+1)} + (1 - \omega) u_i^{(n)} \quad (2.42)$$

$$b_i^{(n+1)} = \omega b_i^{(n+1)} + (1 - \omega) b_i^{(n)}$$

όπου ω είναι η παράμετρος χαλάρωσης. Οι επαναληπτικές σχέσεις (2.40)-(2.42) αντιπροσωπεύουν το επαναληπτικό σχήμα S.O.R. Οι τιμές που δίνονται στο συντελεστή χαλάρωσης ω είναι μεταξύ 1.4 και 1.9. Σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω υπολογίζεται πειραματικά. Σημειώνεται ότι καθώς αυξάνουμε τον αριθμό Ha χρειαζόμαστε και πυκνότερο πλέγμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνει το πλήθος των εξισώσεων που επιλύονται και σε αυτές τις περιπτώσεις το ω μεταβάλλεται. Οι αντιστοιχίες που προκύπτουν δίδονται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1: Τιμές συντελεστή χαλάρωσης ω σε σχέση με την τιμή του αριθμού Ha

Ha	2	10	100	1000
ω	1,4	1,5	1,6	1,9

Σε κάθε επανάληψη και σε κάθε κόμβο του πλέγματος υπολογίζεται η απόλυτη τιμή του σχετικού σφάλματος της ταχύτητας $\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{u_i^{(n+1)}}$ και η επαναληπτική διαδικασία

τερματίζεται όταν $\left| \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{u_i^{(n+1)}} \right| < \varepsilon$, για $i=1, \dots, N$, όπου $\varepsilon=10^{-6}$ είναι το κριτήριο τερματισμού.

2.4.3 Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών

Η διακριτοποίηση των οριακών συνθηκών γίνεται με εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

Η περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων είναι η απλούστερη όλων αφού στη περίπτωση αυτή οι ποσότητες u και b είναι γνωστές στα τοιχώματα. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(1) = 0, b(1) = 0 \\ \text{και} \\ u(N) = 0, b(N) = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Αντίθετα στη περίπτωση των αγωγίμων τοιχωμάτων γνωρίζουμε μόνο την παράγωγο του b στα τοιχώματα.. Διακριτοποιώντας την αντίστοιχη οριακή συνθήκη στους κόμβους, με πεπερασμένες διαφορές 1^{ης} τάξης, $i = 1$ και $i = N$ έχουμε ότι

$$\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \Rightarrow \frac{b_2 - b_1}{\Delta y} = 0 \Rightarrow b_1^{(n+1)} = b_2^{(n)} \tag{2.44}$$

$$\left. -\frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=-1} = 0 \Rightarrow -\frac{b_N - b_{N-1}}{\Delta y} = 0 \Rightarrow b_N^{(n+1)} = b_{N-1}^{(n)} \tag{2.45}$$

ενώ με πεπερασμένες διαφορές 2^{ης} τάξης έχουμε

$$\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=1} = \frac{-3b_1 + 4b_2 - b_3}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow b_1^{(n+1)} = \frac{1}{3}(4b_2^{(n)} - b_3^{(n)}) \tag{2.46}$$

$$\left. -\frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=-1} = -\frac{-3b_N + 4b_{N-1} - b_{N-2}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow b_N^{(n+1)} = \frac{1}{3}(4b_{N-1}^{(n)} - b_{N-2}^{(n)}) \tag{2.47}$$

Τέλος στη περίπτωση των ημιαγωγίμων τοιχωμάτων, η διαδικασία είναι αντίστοιχη. Οι οριακές συνθήκες 1^{ης} τάξης είναι

$$\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=1} + \frac{1}{c} b(y=1) = 0 \Rightarrow \frac{b_2 - b_1}{\Delta y} + \frac{1}{c} b_1 = 0 \Rightarrow b_1^{(n+1)} = -\frac{c}{\Delta y} b_2^{(n)} \frac{1}{\left(1 - \frac{c}{\Delta y}\right)} \quad (2.48)$$

και

$$-\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=-1} + \frac{1}{c} b(y=-1) = 0 \Rightarrow \frac{b_N - b_{N-1}}{\Delta y} + \frac{1}{c} b_N = 0 \Rightarrow b_N^{(n+1)} = -\frac{c}{\Delta y} b_{N-1}^{(n)} \frac{1}{\left(1 - \frac{c}{\Delta y}\right)} \quad (2.49)$$

ενώ και οι 2^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=1} + \frac{1}{c} b(y=1) = 0 \Rightarrow b_1^{(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{1 - \frac{2}{3} \Delta y} \right) (4b_2^{(n)} - b_3^{(n)}) \quad (2.50)$$

και

$$-\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=-1} + \frac{1}{c} b(y=-1) = 0 \Rightarrow b_N^{(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{1 - \frac{2}{3} \Delta y} \right) (4b_{N-1}^{(n)} - b_{N-2}^{(n)}) \quad (2.51)$$

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες 2^{ης} τάξης με αποτέλεσμα όλο το αριθμητικό σχήμα να είναι ακρίβειας $O[\Delta x^2 + \Delta y^2]$.

2.5 Κατανομές ταχυτήτων και επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται με λεπτομέρεια οι αναλυτικές και αριθμητικές κατανομές της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για διάφορες περιπτώσεις της ροής Hartmann.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα βασίζονται στις αναλυτικές εκφράσεις ενώ τα αριθμητικά προκύπτουν από πηγαίο κώδικα σε Fortran αφού πρώτα διακριτοποιηθούν σύμφωνα με την Παράγραφο 2.4 οι μαγνητοϋδροδυναμικές εξισώσεις. Το πλέγμα που χρησιμοποιούμε ξεκινά από 200 κόμβους και φτάνει έως 40000. Ο Πίνακας 2.2, δίνει ενδεικτικά τον αριθμό κόμβων που χρησιμοποιείται σε σχέση με τον αριθμό Ha , όπως επίσης και τον αναγκαίο αριθμό

επαναλήψεων και τον χρόνο επεξεργασίας (CPU time) για μονωμένα και αγώγιμα τοιχώματα. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει σε υπολογιστή με επεξεργαστή AMD ονομαστικής ταχύτητας 2800MHz και πραγματικής ταχύτητας 2088MHz.

Πίνακας 2.2: Τυπικές υπολογιστικές παράμετροι σε σχέση με τον αριθμό Ha

Αριθμός Hartmann	Αριθμός κόμβων	Επαναλήψεις		Τιμή ω		CPU Time(sec)	
		$c = 0$	$c \rightarrow \infty$	$c = 0$	$c \rightarrow \infty$	$c = 0$	$c \rightarrow \infty$
2	200	8439	10626	1,4	1,4	0,562	0,812
10	400	6914	29621	1,4	1,6	0,937	4.484
100	2500	8109	79826	1,7	1,7	6,812	98
1000	20000	42485	-	1,8	-	285	-
1000	40000	-	326570	-	1.8	-	1245

Από τον Πίνακα 2.2. γίνεται σαφές ότι καθώς ο αριθμός Ha μεγαλώνει αυξάνει αντίστοιχα και ο αριθμός των κόμβων. Σε κάθε κόμβο ο κώδικας επιλύει δυο εξισώσεις, άρα ο αριθμός των εξισώσεων που λύνουμε είναι διπλάσιος από τον αριθμό των κόμβων. Προκειμένου να πάρουμε τιμές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου, που βρίσκονται μέσα στο οριακό στρώμα Ha είμαστε αναγκασμένοι να αυξήσουμε την διακριτοποίηση μας, κατά μήκος του καναλιού και συνεπώς τον αριθμό των κόμβων, ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε επαρκή αριθμό κόμβων μέσα στην στοιβάδα Hartmann. Αυτό επιτυγχάνεται μόνο όταν ο αριθμός των κόμβων είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγαλύτερος από τον αριθμό Ha . Το πρόβλημα γίνεται πιο εμφανές για $Ha = 100$ και $Ha = 1000$. Εξαιτίας των διαφορετικών οριακών συνθηκών που εφαρμόζουμε στις περιπτώσεις των μονωμένων και αγώγιμων τοιχωμάτων, παρατηρούμε πως ο κώδικας χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις στην δεύτερη περίπτωση.

Τα αποτελέσματα δίδονται σε πινακοποιημένη μορφή σε τρεις υποπαραγράφους εκ των οποίων η 2.5.1 είναι για μόνιμα ($c = 0$), η 2.5.2 για αγώγιμα ($c \rightarrow \infty$) και η 2.5.3 για ημιαγώγιμα τοιχώματα ($0 < c < \infty$). Στην τρίτη υποπαραγράφο παρουσιάζονται αποτελέσματα για διάφορες τιμές του c , για να γίνει επαρκώς κατανοητή η μεταβολή από μονωμένα σε πλήρως αγώγιμα τοιχώματα.

Ο κάθε πίνακας αφορά και έναν αριθμό Ha . Εξετάζονται οι ροές Hartmann με $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 . Τονίζεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις η κατανομή της ταχύτητας είναι

συμμετρική, ενώ η κατανομή του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου αντί-συμμετρική ως προς τον άξονα $y = 0$. Η πρώτη στήλη κάθε πίνακα είναι η απόσταση $0 < y < 1$ ανάμεσα στις πλάκες. Η 2^η και 3^η στήλη απεικονίζουν την αναλυτική και αριθμητική κατανομή ταχύτητων αντίστοιχα. Η αναλυτική λύση συμβολίζεται με $u(y)$ ενώ η αριθμητική με $u_N(y)$. Η αναλυτική και αριθμητική κατανομή του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου δίδονται στις στήλες 4 και 5 αντίστοιχα. Η αναλυτική κατανομή συμβολίζεται με $b(y)$ ενώ η αριθμητική με $b_N(y)$. Τέλος οι διάφορες ανάμεσα στα αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα δίδονται για την ταχύτητα στη στήλη 6 και για το μαγνητικό πεδίο στη στήλη 7. Τα σφάλματα στις στήλες 6 και 7 ορίζονται από τις σχέσεις $|u(y) - u_N(y)|$ και $|b(y) - b_N(y)|$ αντίστοιχα. Επίσης, για την καλύτερη (κομψότερη) απεικόνιση των αποτελεσμάτων, σε κάθε πίνακα τα αποτελέσματα πολλαπλασιάζονται με τον αντίστοιχο αριθμό Ha , ενώ τα σφάλματα με τον αριθμό 10^3 .

Παρατηρούμε ότι για $0.9 < y < 1$, δηλαδή κοντά στο τοίχωμα, τόσο η ταχύτητα όσο και το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλονται απότομα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σε συμφωνία με τα αναλυτικά αποτελέσματα, όπου αποδεικνύεται ότι το πάχος του οριακού στρώματος Hartmann είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού Ha . Δηλαδή, για $Ha = 100$, έχουμε την ανάπτυξη οριακού στρώματος της τάξης του 0.01. Σε κάθε υποπαράγραφο η λεπτομερής μεταβολή των κατανομών της ταχύτητας εντός των στοιβάδων Hartmann παρουσιάζεται σε ειδικούς πίνακες για $Ha = 100$ και $Ha = 1000$.

2.5.1 Μονωμένα τοιχώματα ($c = 0$)

Πίνακας 2.3α: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.7607	0.7616	0.0000	0.0000	0.9700	0.0060
0.1	0.7552	0.7561	-0.0444	-0.0445	0.9450	0.0830
0.2	0.7384	0.7392	-0.0866	-0.0868	0.8880	0.1640
0.3	0.7096	0.7105	-0.1242	-0.1245	0.7966	0.2280
0.4	0.6678	0.6686	-0.1549	-0.1551	0.7093	0.2800
0.5	0.6112	0.6119	-0.1757	-0.1760	0.6850	0.3080
0.6	0.5375	0.5381	-0.1835	-0.1838	0.6564	0.3140
0.7	0.4438	0.4443	-0.1747	-0.1750	0.5775	0.2930
0.8	0.3263	0.3267	-0.1448	-0.1450	0.4611	0.2310
0.9	0.1803	0.1805	-0.0887	-0.0888	0.2320	0.1300
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.3β: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.9998	0.9999	0.0000	0.0000	0.0620	0.0080
0.1	0.9998	0.9999	-0.0999	-0.0999	0.0630	0.0130
0.2	0.9996	0.9997	-0.1996	-0.1997	0.0730	0.0420
0.3	0.9990	0.9991	-0.2990	-0.2991	0.0920	0.0730
0.4	0.9974	0.9975	-0.3974	-0.3975	0.1210	0.1090
0.5	0.9931	0.9933	-0.4931	-0.4933	0.1570	0.1530
0.6	0.9815	0.9817	-0.5815	-0.5817	0.1960	0.1960
0.7	0.9500	0.9502	-0.6500	-0.6502	0.2350	0.2330
0.8	0.8644	0.8647	-0.6644	-0.6647	0.2390	0.2440
0.9	0.6320	0.6321	-0.5320	-0.5321	0.1660	0.1660
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.3γ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	1.0001	1.0000	0.0000	0.0000	0.0900	0.0040
0.1	1.0001	1.0000	-0.1000	-0.1000	0.0900	0.0020
0.2	1.0001	1.0000	-0.2000	-0.2000	0.0890	0.0010
0.3	1.0001	1.0000	-0.3000	-0.3000	0.0880	0.0050
0.4	1.0001	1.0000	-0.4000	-0.4000	0.0640	0.0090
0.5	1.0000	1.0000	-0.5000	-0.5000	0.0390	0.0160
0.6	1.0000	1.0000	-0.6000	-0.6000	0.0380	0.0190
0.7	1.0000	1.0000	-0.7000	-0.7000	0.0400	0.0200
0.8	1.0000	1.0000	-0.8000	-0.8000	0.0300	0.0120
0.9	1.0000	1.0000	-0.9000	-0.9000	0.0070	0.0020
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.3δ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0100	0.0010
0.1	1.0000	1.0000	-0.1000	-0.1000	0.0100	0.0020
0.2	1.0000	1.0000	-0.2000	-0.2000	0.0100	0.0030
0.3	1.0000	1.0000	-0.3000	-0.3000	0.0100	0.0140
0.4	1.0000	1.0000	-0.4000	-0.4000	0.0100	0.0140
0.5	1.0000	1.0000	-0.5000	-0.5000	0.0090	0.0160
0.6	1.0000	1.0000	-0.6000	-0.6000	0.0090	0.0060
0.7	1.0000	1.0000	-0.7000	-0.7000	0.0100	0.0030
0.8	1.0000	1.0000	-0.8000	-0.8000	0.0070	0.0015
0.9	1.0000	1.0000	-0.9000	-0.9000	0.0063	0.0010
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.4α: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.990	0.6324	0.6321	0.2880
0.991	0.5937	0.5934	0.2880
0.992	0.5510	0.5507	0.2840
0.993	0.5037	0.5034	0.2750
0.994	0.4514	0.4512	0.2610
0.995	0.3937	0.3935	0.2420
0.996	0.3299	0.3297	0.2140
0.997	0.2594	0.2592	0.1780
0.998	0.1814	0.1813	0.1320
0.999	0.0952	0.0952	0.0720
1.000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.4β: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.9990	0.631757	0.632121	0.3640
0.9991	0.593105	0.593430	0.3250
0.9992	0.550386	0.550671	0.2850
0.9993	0.503170	0.503415	0.2450
0.9994	0.450985	0.451188	0.2030
0.9995	0.393305	0.393469	0.1640
0.9996	0.329555	0.329680	0.1250
0.9997	0.259093	0.259182	0.0890
0.9998	0.181213	0.181269	0.0560
0.9999	0.095136	0.095163	0.0270
1.0000	0.000000	0.000000	0.0000

2.5.2 Αγώγιμα τοιχώματα ($c \rightarrow \infty$)

Πίνακας 2.5α: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.3682	0.3671	0.0000	0.0000	1.0730	0.0010
0.1	0.3655	0.3644	-0.0730	-0.0732	1.0620	0.1950
0.2	0.3574	0.3563	-0.1450	-0.1454	1.0270	0.3930
0.3	0.3434	0.3425	-0.2148	-0.2154	0.9660	0.5770
0.4	0.3231	0.3223	-0.2812	-0.2820	0.8810	0.7420
0.5	0.2957	0.2949	-0.3429	-0.3438	0.7750	0.8780
0.6	0.2600	0.2594	-0.3984	-0.3994	0.6500	1.0070
0.7	0.2147	0.2141	-0.4458	-0.4469	0.5070	1.1200
0.8	0.1578	0.1575	-0.4831	-0.4843	0.3500	1.1900
0.9	0.0872	0.0870	-0.5077	-0.5090	0.1800	1.2480
1.0	0.0000	0.0000	-0.5167	-0.5180	0.0000	1.2920

Πίνακας 2.5β. Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.1007	0.1000	0.0000	0.0000	0.6910	0.0010
0.1	0.1007	0.1000	-0.1000	-0.0999	0.6840	0.0250
0.2	0.1006	0.1000	-0.1999	-0.2000	0.6620	0.0310
0.3	0.1005	0.0999	-0.2999	-0.2999	0.6260	0.0370
0.4	0.1003	0.0998	-0.3997	-0.3998	0.5760	0.0390
0.5	0.0998	0.0993	-0.4993	-0.4993	0.5140	0.0450
0.6	0.0986	0.0982	-0.5981	-0.5982	0.4420	0.0390
0.7	0.0954	0.0950	-0.6950	-0.6950	0.3610	0.0400
0.8	0.0867	0.0865	-0.7864	-0.7865	0.2670	0.0510
0.9	0.0634	0.0632	-0.8632	-0.8632	0.1540	0.0490
1.0	0.0000	0.0000	-0.8999	-0.9000	0.0000	0.0950

Πίνακας 2.5γ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.0100	0.0100	0.0000	0.0000	0.0310	0.0360
0.1	0.0100	0.0100	-0.1002	-0.1000	0.0300	0.2010
0.2	0.0100	0.0100	-0.2004	-0.2000	0.0030	0.3690
0.3	0.0100	0.0100	-0.3005	-0.3000	0.0290	0.5300
0.4	0.0100	0.0100	-0.4007	-0.4000	0.0290	0.6910
0.5	0.0100	0.0100	-0.5008	-0.5000	0.0290	0.8460
0.6	0.0100	0.0100	-0.6010	-0.6000	0.0290	0.9870
0.7	0.0100	0.0100	-0.7011	-0.7000	0.0290	1.0950
0.8	0.0100	0.0100	-0.8012	-0.8000	0.0290	1.1660
0.9	0.0100	0.0100	-0.9012	-0.9000	0.0290	1.2080
1.0	0.0000	0.0000	-0.9912	-0.9900	0.0000	1.2040

Πίνακας 2.5δ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0100	0.0010
0.1	0.0001	0.0001	-0.1000	-0.1000	0.0100	0.0020
0.2	0.0001	0.0001	-0.2000	-0.2000	0.0100	0.0030
0.3	0.0001	0.0001	-0.3000	-0.3000	0.0100	0.0080
0.4	0.0001	0.0001	-0.4000	-0.4000	0.0100	0.0110
0.5	0.0001	0.0001	-0.5000	-0.5000	0.0090	0.0120
0.6	0.0001	0.0001	-0.6000	-0.6000	0.0090	0.0080
0.7	0.0001	0.0001	-0.7000	-0.7000	0.0100	0.0060
0.8	0.0001	0.0001	-0.8000	-0.8000	0.0150	0.0040
0.9	0.0001	0.0001	-0.9990	-0.9990	0.0110	0.0010
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.6α : Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.990	0.0066	0.0063	0.3078
0.991	0.0062	0.0063	0.0972
0.992	0.0058	0.0055	0.2693
0.993	0.0053	0.0050	0.2469
0.994	0.0047	0.0045	0.2211
0.995	0.0041	0.0039	0.1933
0.996	0.0035	0.0033	0.1622
0.997	0.0027	0.0026	0.1272
0.998	0.0019	0.0018	0.0893
0.999	0.0010	0.0010	0.0474
1.000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.6β : Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.9990	0.0011	0.0010	0.0200
0.9991	0.0010	0.0010	0.0200
0.9992	0.0009	0.0009	0.0150
0.9993	0.0008	0.0008	0.0140
0.9994	0.0007	0.0007	0.0130
0.9995	0.0006	0.0006	0.0130
0.9996	0.0005	0.0005	0.0110
0.9997	0.0004	0.0004	0.0110
0.9998	0.0003	0.0003	0.0100
0.9999	0.0002	0.0002	0.0100
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

2.5.3 Ημιαγωγία τοιχώματα ($0 < c < \infty$)

Πίνακας 2.7α: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2$ και $c = 0.01$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.7525	0.7536	0.0000	0.0000	1.1210	0.0230
0.1	0.7470	0.7481	-0.0450	-0.0451	1.1000	0.0840
0.2	0.7304	0.7315	-0.0878	-0.0879	1.0610	0.1850
0.3	0.7020	0.7030	-0.1260	-0.1263	0.9990	0.2740
0.4	0.6606	0.6615	-0.1574	-0.1577	0.9140	0.3430
0.5	0.6046	0.6054	-0.1790	-0.1794	0.8050	0.3880
0.6	0.5317	0.5324	-0.1878	-0.1882	0.6840	0.4010
0.7	0.4390	0.4396	-0.1801	-0.1805	0.5460	0.3810
0.8	0.3228	0.3232	-0.1516	-0.1519	0.3860	0.3250
0.9	0.1784	0.1786	-0.0971	-0.0973	0.2050	0.2290
1.0	0.0000	0.0000	-0.0104	-0.0105	0.0000	0.0940

Πίνακας 2.7β: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10$ και $c = 0.01$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.9179	0.9181	-0.0001	0.0000	0.1500	0.0710
0.1	0.9179	0.9181	-0.0999	-0.0999	0.1110	0.0270
0.2	0.9179	0.9179	-0.1996	-0.1997	0.0430	0.0670
0.3	0.9175	0.9173	-0.2991	-0.2992	0.2000	0.0230
0.4	0.9163	0.9159	-0.3978	-0.3977	0.3460	0.0740
0.5	0.9125	0.9120	-0.4940	-0.4938	0.5010	0.2010
0.6	0.9020	0.9014	-0.5835	-0.5832	0.6690	0.3330
0.7	0.8733	0.8725	-0.6547	-0.6543	0.8100	0.4540
0.8	0.7948	0.7939	-0.6762	-0.6757	0.8920	0.5040
0.9	0.5811	0.5804	-0.5625	-0.5622	0.7270	0.2810
1.0	0.0000	0.0000	-0.0813	-0.0818	0.0000	0.4870

Πίνακας 2.7γ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$ και $c = 0.01$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.5112	0.5050	0.0000	0.0000	6.2110	0.0100
0.1	0.5112	0.5050	-0.1000	-0.1000	6.2330	0.0190
0.2	0.5112	0.5050	-0.2000	-0.2000	6.2270	0.0240
0.3	0.5112	0.5050	-0.3000	-0.3000	6.2200	0.0220
0.4	0.5112	0.5050	-0.4000	-0.4000	6.2070	0.0060
0.5	0.5112	0.5050	-0.5000	-0.5000	6.1910	0.0030
0.6	0.5112	0.5050	-0.6000	-0.6000	6.1770	0.0090
0.7	0.5112	0.5050	-0.7000	-0.7000	6.1610	0.0180
0.8	0.5111	0.5050	-0.8000	-0.8000	6.1430	0.0130
0.9	0.5111	0.5050	-0.9000	-0.9000	6.1260	0.0150
1.0	0.0000	0.0000	-0.4950	-0.4950	0.0000	0.0109

Πίνακας 2.7δ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=1000$ και $c = 0.01$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.0916	0.0918	0.0000	0.0000	0.1844	0.0100
0.1	0.0916	0.0918	-0.1000	-0.1000	0.1832	0.0190
0.2	0.0916	0.0918	-0.2000	-0.2000	0.1828	0.0240
0.3	0.0916	0.0918	-0.3000	-0.3000	0.1824	0.0220
0.4	0.0916	0.0918	-0.4000	-0.4000	0.1820	0.0060
0.5	0.0916	0.0918	-0.5000	-0.5000	0.1817	0.0030
0.6	0.0916	0.0918	-0.6000	-0.6000	0.1819	0.0090
0.7	0.0916	0.0918	-0.7000	-0.7000	0.1814	0.0180
0.8	0.0916	0.0918	-0.8000	-0.8000	0.1813	0.0130
0.9	0.0916	0.0918	-0.9000	-0.9000	0.1810	0.0094
1.0	0.0000	0.0000	-0.9082	-0.9082	0.0000	0.0023

Πίνακας 2.8α: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.990	0.3272	0.3192	7.9459
0.991	0.3071	0.2997	7.4690
0.992	0.2850	0.2781	6.9391
0.993	0.2606	0.2542	6.3525
0.994	0.2336	0.2279	5.7006
0.995	0.2037	0.1987	4.9778
0.996	0.1707	0.1665	4.1773
0.997	0.1342	0.1309	3.2885
0.998	0.0939	0.0915	2.3036
0.999	0.0493	0.0481	1.2113
1.000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.8β: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.9990	0.0581	0.0580	5.0290
0.9991	0.0545	0.0545	4.7248
0.9992	0.0506	0.0506	4.3882
0.9993	0.0463	0.0462	4.0153
0.9994	0.0415	0.0414	3.6007
0.9995	0.0362	0.0361	3.1428
0.9996	0.0303	0.0303	2.6351
0.9997	0.0238	0.0238	2.0728
0.9998	0.0167	0.0166	1.4514
0.9999	0.0087	0.0087	0.7618
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.9α: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2$ και $c = 0.1$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.6935	0.6938	-0.0001	0.0000	0.3330	0.1120
0.1	0.6885	0.6888	-0.0494	-0.0494	0.3120	0.0180
0.2	0.6732	0.6734	-0.0967	-0.0968	0.2820	0.1440
0.3	0.6470	0.6472	-0.1398	-0.1401	0.2480	0.2620
0.4	0.6088	0.6091	-0.1766	-0.1769	0.2070	0.3690
0.5	0.5572	0.5574	-0.2044	-0.2048	0.1690	0.4600
0.6	0.4901	0.4902	-0.2203	-0.2209	0.1330	0.5360
0.7	0.4046	0.4047	-0.2211	-0.2217	0.0960	0.5960
0.8	0.2975	0.2976	-0.2027	-0.2033	0.0600	0.6440
0.9	0.1644	0.1645	-0.1600	-0.1610	0.0270	0.6800
1.0	0.0000	0.0000	-0.0883	-0.0890	0.0000	0.7050

Πίνακας 2.9β: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10$ και $c = 0.1$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.5503	0.5500	-0.0002	0.0000	0.3310	0.1760
0.1	0.5503	0.5499	-0.1000	-0.0999	0.3580	0.4240
0.2	0.5503	0.5498	-0.2005	-0.1998	0.4500	0.6810
0.3	0.5501	0.5495	-0.3004	-0.2995	0.5710	0.9370
0.4	0.5494	0.5486	-0.3999	-0.3986	0.7310	1.2390
0.5	0.5472	0.5463	-0.4979	-0.4963	0.9320	1.5930
0.6	0.5411	0.5399	-0.5918	-0.5899	1.1770	1.9170
0.7	0.5240	0.5226	-0.6748	-0.6726	1.4170	2.1450
0.8	0.4771	0.4756	-0.7277	-0.7256	1.5470	2.1210
0.9	0.3490	0.3477	-0.6992	-0.6977	1.2930	1.5680
1.0	0.0000	0.0000	-0.4499	-0.4500	0.0000	0.0950

Πίνακας 2.9γ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$ και $c = 0.1$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.0973	0.1000	-0.0015	0.0000	4.6700	1.3300
0.1	0.0960	0.1000	-0.1004	-0.1000	4.0410	0.9000
0.2	0.0950	0.1000	-0.2010	-0.2000	5.0500	0.9710
0.3	0.0944	0.1000	-0.3010	-0.3000	5.6130	0.9580
0.4	0.0944	0.1000	-0.4009	-0.4000	5.6480	0.9060
0.5	0.0948	0.1000	-0.5007	-0.5000	5.1660	0.7190
0.6	0.0957	0.1000	-0.6008	-0.6000	4.2530	0.7930
0.7	0.0971	0.1000	-0.7008	-0.7000	2.8550	0.7700
0.8	0.0989	0.1000	-0.8009	-0.8000	1.0990	0.8720
0.9	0.1009	0.1000	-0.9007	-0.9000	0.9360	0.6550
1.0	0.0000	0.0000	-0.9001	-0.9000	0.0000	0.0550

Πίνακας 2.9δ: Κατανομές ταχυτήτων και μαγνητικού πεδίου για $Ha=1000$ και $c = 0.1$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$Hab_N(y)$	$Hab(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$	$ b(y) - b_N(y) 10^3$
0.0	0.0108	0.0109	-0.0011	0.0000	0.1340	1.1235
0.1	0.0107	0.0109	-0.1022	-0.1000	0.2000	2.2346
0.2	0.0108	0.0109	-0.2043	-0.2000	0.1500	4.3123
0.3	0.0107	0.0109	-0.3050	-0.3000	0.1800	4.9832
0.4	0.0107	0.0109	-0.4072	-0.4000	0.2015	7.2360
0.5	0.0108	0.0109	-0.5078	-0.5000	0.1340	7.8121
0.6	0.0107	0.0109	-0.6070	-0.6000	0.1846	7.0212
0.7	0.0107	0.0109	-0.7050	-0.7000	0.1700	5.0154
0.8	0.0108	0.0109	-0.8047	-0.8000	0.0940	4.6540
0.9	0.0108	0.0109	-0.9033	-0.9000	0.0988	3.2644
1.0	0.0000	0.0000	-0.9880	-0.9891	0.0000	1.0790

Πίνακας 2.10α: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=100$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.990	0.0661	0.0632	2.8919
0.991	0.0621	0.0593	2.7168
0.992	0.0576	0.0551	2.5226
0.993	0.0526	0.0503	2.3081
0.994	0.0472	0.0451	2.0703
0.995	0.0412	0.0393	1.8066
0.996	0.0345	0.0330	1.5151
0.997	0.0271	0.0259	1.1922
0.998	0.0190	0.0181	0.8348
0.999	0.0100	0.0095	0.4385
1.000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 2.10β: Κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα για $Ha=1000$

y	$Hau_N(y)$	$Hau(y)$	$ u(y) - u_N(y) 10^3$
0.9990	0.0058	0.0069	1.0745
0.9991	0.0055	0.0065	0.9831
0.9992	0.0047	0.0060	1.2874
0.9993	0.0040	0.0055	1.4827
0.9994	0.0032	0.0049	1.7139
0.9995	0.0025	0.0043	1.7653
0.9996	0.0019	0.0036	1.6506
0.9997	0.0012	0.0028	1.6628
0.9998	0.0008	0.0020	1.1742
0.9999	0.0002	0.0010	0.8256
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

2.6 Παροχή

Γνωρίζοντας την κατανομή της ταχύτητας στο κανάλι η αδιάστατη ογκομετρική παροχή υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$Q = \int_{-1}^1 u(y) dy$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την αναλυτική έκφραση για την κατανομή της ταχύτητας έχουμε

$$Q = \int_{-1}^1 -\frac{k}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] dy = \frac{2k[-Ha + \tanh(Ha)]}{Ha^3} \quad (2.52)$$

Για την περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων όπου $c = 0$ η σταθερά $k = -\frac{Ha}{\tanh(Ha)}$, οπότε η παροχή δίδεται από την αναλυτική έκφραση

$$Q = \frac{2}{Ha} \left(\frac{1}{\tanh(Ha)} - \frac{1}{Ha} \right) \quad (2.53)$$

Στην περίπτωση των πλήρως αγωγίων τοιχωμάτων του καναλιού, όπου $c \rightarrow \infty$, η σταθερά $k = -1$, οπότε ο τύπος της παροχής γράφεται

$$Q = \frac{2[Ha - \tanh(Ha)]}{Ha^3} \quad (2.54)$$

Τέλος όταν τα τοιχώματα του καναλιού είναι ημιαγωγιμα με $0 < c < \infty$, η σταθερά

$k = -Ha \frac{c+1}{cHa + \tanh(Ha)}$ και η παροχή παίρνει την μορφή

$$Q = \frac{2(1+c)[Ha - \tanh(Ha)]}{Ha^2[cHa + \tanh(Ha)]} \quad (2.55)$$

Την πλήρως ανεπτυγμένη ΜΥΔ ροή σε κανάλια με μικρή αγωγιμότητα ($c < 0.1$) ερευνήθηκε από τον Walker (1981) [6].

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της παροχής για $Ha \ll 1$ και $Ha \gg 1$. Στην πρώτη περίπτωση, $Ha \ll 1$, χρησιμοποιούμε τα αναπτύγματα

$$\sinh(Hay) = Ha + \frac{1}{6}(Hay)^3 + O[(Hay)^5]$$

$$\cosh(Hay) = 1 + \frac{1}{2}(Hay)^2 + O[(Hay)^4]$$

$$\tanh(Ha) = Ha - \frac{1}{3}Ha^3 + O(Ha^5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (2.52) έχουμε

$$Q = \frac{2k \left(-Ha + Ha - \frac{1}{3}Ha^3 \right)}{Ha^3} = -\frac{2k}{3} \quad (2.56)$$

Σημειώνεται ότι και στις δυο περιπτώσεις των μονωμένων και αγώγιμων τοιχωμάτων, αν και η σταθερά k παίρνει διαφορετικές τιμές, η σχέση (2.56) μας δίνει την αδιάστατη υδροδυναμική παροχή που ισούται με $2/3$.

Για $Ha \gg 1$, οι υπερβολικές εκφράσεις προσεγγίζονται ασυπτωτικά από τις εκφράσεις

$$\sinh(Ha) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(Ha), \quad \cosh(Ha) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(Ha), \quad \tanh(Ha) \rightarrow 1.$$

και (2.52) παίρνει την μορφή

$$Q = \frac{2k(1 - Ha)}{Ha^3} \quad (2.57)$$

Στην περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων η (2.57) γράφεται στη μορφή

$$Q = \frac{2 \left(-\frac{Ha}{1} \right) (1 - Ha)}{Ha^3} = 2 \frac{Ha^2 - Ha}{Ha^3} = 2 \frac{Ha - 1}{Ha^2} \quad (2.58)$$

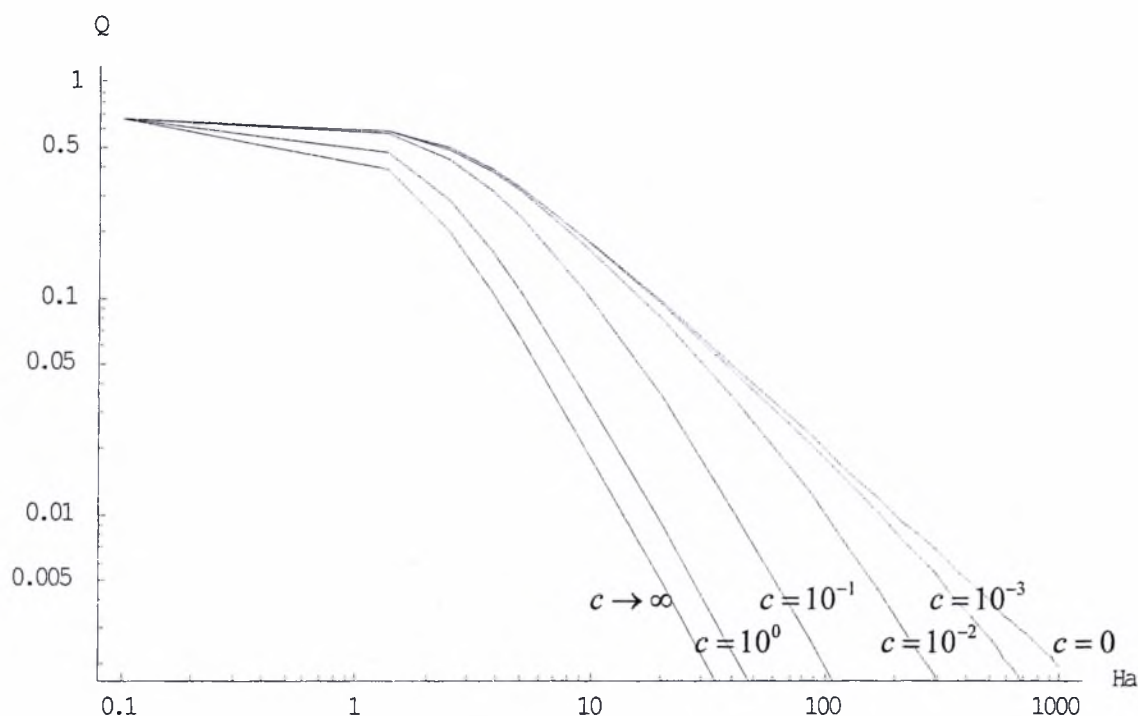
ενώ η αντίστοιχη σχέση για πλήρως αγώγιμα τοιχώματα είναι

$$Q = \frac{2(-1)(1 - Ha)}{Ha^3} = 2 \frac{Ha - 1}{Ha^3} \quad (2.59)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση των μεγάλων αριθμών Ha η παροχή στα μονωμένα τοιχώματα είναι αντιστρόφως ανάλογη του Ha , ενώ στα πλήρως αγώγιμα τοιχώματα είναι αντιστρόφως ανάλογη του Ha^2

Στο Γράφημα 2.5 δίδεται η αδιάστατη παροχή σε σχέση με τον αριθμό Ha για διάφορες τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ . Βλέπουμε, όπως θα περιμέναμε ότι η παροχή ελαττώνεται καθώς ο Ha αυξάνει. Επίσης, παρατηρούμε ότι για τον ίδιο αριθμό Ha η

παροχή μειώνει καθώς αυξάνεται η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς. Τέλος, σημειώνεται ότι η παροχή μεταβάλλεται σημαντικά με πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου c , ειδικά για $Ha \geq 3$, ενώ τα αποτελέσματα για $c > 1$ είναι πρακτικά ταυτόσημα με τα αντίστοιχα για $c \rightarrow \infty$.



Γράφημα 2.5: Αδιάστατη ΜΥΔ παροχή ως προς τον αριθμό Ha και $0 \leq c \leq \infty$

2.7 Δύναμη Lorentz

Είναι προφανές ότι η κατανομή της ταχύτητας εξαρτάται από τις δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό. Στη περίπτωση που εξετάζουμε μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η δράση της δύναμης Lorentz. Όταν η ροή είναι πλήρως αναπτυγμένης, όπως στην ροή Hartmann, η δύναμη Lorentz έχει μόνο μία συνιστώσα στη διεύθυνση της ροής και γράφεται στη μορφή $f_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = f\mathbf{x}$, όπου x δηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της ροής και $f = -j_z B_y$.

Η μοναδική συνιστώσα της δύναμης Lorentz σε αδιάστατη μορφή παίρνει την απλή μορφή

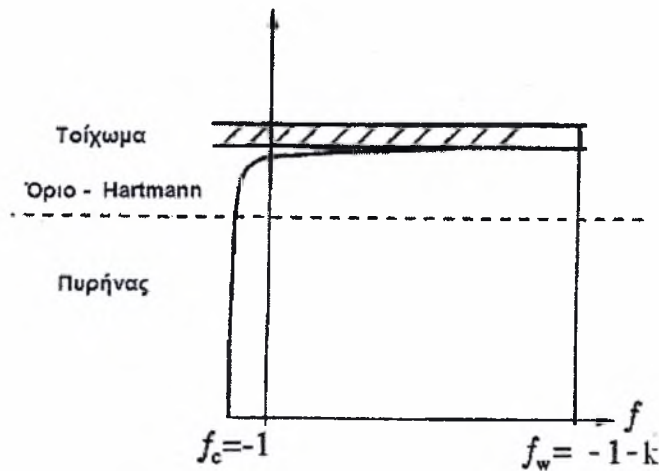
$$f = Ha \frac{\partial b}{\partial y}$$

Αντικαθιστώντας την αναλυτική έκφραση (2.15) για την βαθμίδα του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου στη παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$f = -1 - \left[Ha \frac{k}{Ha \cosh(Ha)} \cosh(Hay) \right] \Leftrightarrow f = -1 - \frac{k}{\cosh(Ha)} \cosh(Hay) \quad (2.60)$$

Από την (2.60), εύκολα προκύπτει ότι για $y=0$ και $y=\pm 1$ προκύπτει ότι $f=-1$ και $f=-1-k$ αντίστοιχα. Επομένως, η γενική σχέση που δίνει την δύναμη Lorentz ανεξάρτητα από τις οριακές συνθήκες περιλαμβάνει δύο όρους. Ο πρώτος όρος, $f_c = -1$, που εξισορροπεί την κλίση της πίεσης, αντιπροσωπεύει την λύση στον κέντρο (πυρήνα) της ροής,. Ο δεύτερος όρος ενεργεί ουσιαστικά στο στρώμα Hartmann, και δίνει την ιξώδη διόρθωση στη δύναμη Lorentz, ως ισορροπία με την ιξώδη διατμητική τάση.

Μία ποιοτική εικόνα της δύναμης Lorentz μεταξύ των τοιχωμάτων παρουσιάζεται στο γράφημα 2.6. Η γραφική παράσταση δείχνει ότι η δύναμη Lorentz παίρνει αρνητικές τιμές στον πυρήνα του καναλιού και θετικές τιμές κοντά στα τοιχώματα . Αυτό προέρχεται από το ηλεκτρικό ρεύμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση στην περιοχή του πυρήνα από ότι στα τοιχώματα. Η δύναμη Lorentz όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.60) εξαρτάται από την παράμετρο k που παίρνει τιμές ανάλογα με την αγωγιμότητα των τοιχωμάτων και του ρευστού. Με την αύξηση της αγωγιμότητας των τοιχωμάτων του καναλιού, το σημαντικότερο μέρος του προσκληθέντος ρεύματος βραχυκυκλώνεται απότομα κατά μήκος των τοιχωμάτων.



Γράφημα 2.6: Κατανομή δύναμης Lorentz για $Ha \gg 1$, όπου το πάχος δ του οριακού στρώματος Hartmann είναι της τάξης του Ha^{-1} .

Επίσης είναι εφικτό να διατυπώσουμε μια έκφραση για την δύναμη Lorentz που δρά μέσα στα τοιχώματα Hartmann. Η ανάλυση αποδεικνύει ότι η κατανομή της πυκνότητας της δύναμης Lorentz εντός του τοιχώματος, πάχους t_w , είναι σταθερή. Η συνολική δύναμη μέσα στο τοίχωμα προκύπτει από το ολοκλήρωμα.

$$F_w = \int_1^{1+t_w} Ha \frac{\partial b_w}{\partial y} dy = -k \frac{1}{\cosh(Ha)} \left[-\frac{\sinh(Ha)}{Ha} + \frac{\sinh[Ha(1+t_w)]}{Ha} \right] \quad (2.61)$$

Η δύναμη Lorentz εντός του τοιχώματος είναι η δύναμη αντίδρασης στην συνολική δύναμη Lorentz που αναπτύσσεται εντός του ρευστού.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της δύναμης Lorentz για $Ha \ll 1$ και $Ha \gg 1$. Η σχέση (2.60), ανεξάρτητα της σταθεράς c , όταν ο αριθμός Ha τείνει στο μηδέν, δίνεται από την σχέση

$$f = -1 - \frac{k}{1 + \frac{1}{2} Ha^2} \left(1 + \frac{1}{2} (Hay)^2 \right) \Rightarrow f = -1 - k \quad (2.62)$$

Στην περίπτωση που έχουμε μονωμένα τοιχώματα ($c \rightarrow 0$) η σταθερά

$$k = \frac{-Ha}{\tan(Ha)} = \frac{-Ha}{Ha - \frac{1}{3} Ha^3} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{3} Ha^2}$$

Άρα, στη περίπτωση αυτή, όπως αναμένεται δύναμη Lorentz μηδενίζεται. Επίσης, όταν τα τοιχώματα του καναλιού είναι πλήρως αγωγία ($c \rightarrow \infty$), δηλαδή $k = -1$ τότε και πάλι $f = 0$. Και τα δυο αποτελέσματα συμβαδίζουν με την θεωρία, καθώς με τον μηδενισμό του αριθμού Ha δεν υφίσταται πλέον μαγνητικό πεδίο και κατά συνέπεια ούτε δύναμη Lorentz..

Για μεγάλους αριθμούς Ha , κάνοντας αντίστοιχη επεξεργασία έχουμε ότι

$$f = -1 - \frac{k}{\exp(Ha)} \exp(Ha|y|) = -1 - k \exp[-Ha(1-|y|)] \quad (2.63)$$

Είναι προφανές ότι, όταν ο $Ha \gg 1$, ανεξαρτήτως της τιμής του k , η κατανομή της δύναμης Lorentz γίνεται σταθερή και τείνει στην αδιάστατη τιμή -1 .

Στη συνέχεια εξετάζονται γραφικά οι κατανομές της δύναμης Lorentz για όλους τους τύπους των τοιχωμάτων. Στις περιπτώσεις των πλήρως μονωμένων και αγωγίων τοιχωμάτων η δύναμη Lorentz δίνεται από τις σχέσεις

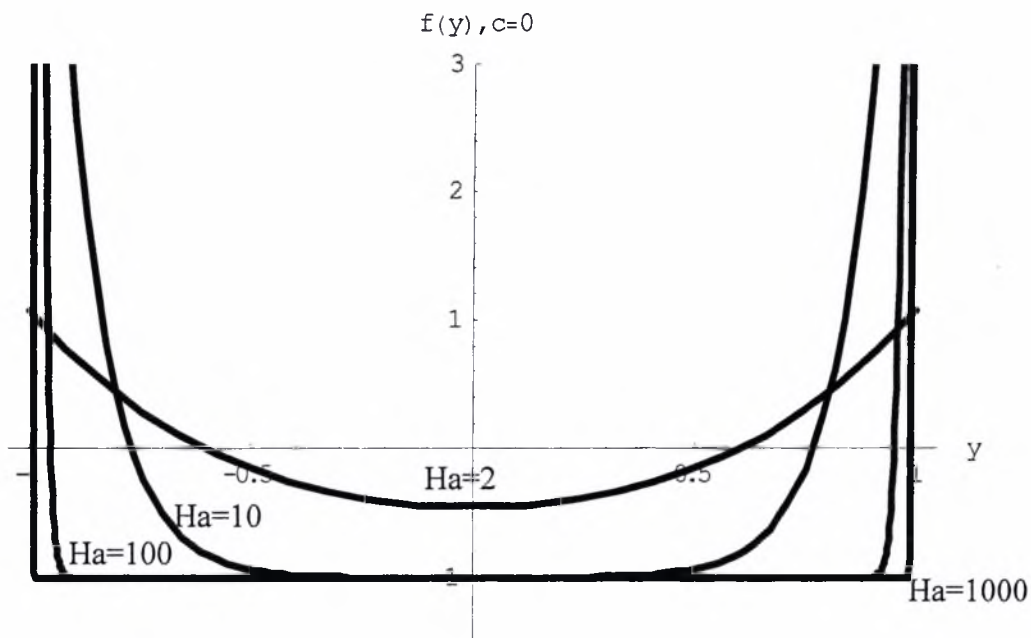
$$f = -1 + Ha \frac{1}{\sinh(Ha)} \cosh(Hay) \quad (2.64)$$

και

$$f = -1 + \frac{1}{\cosh(Ha)} \cosh(Hay) \quad (2.65)$$

αντίστοιχα. Στο γράφημα 2.7 απεικονίζεται η κατανομή της δύναμης Lorentz, κατά μήκος του καναλιού για την περίπτωση των πλήρως μονωμένων τοιχωμάτων, για αριθμούς $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 . Παρατηρούμε, ότι η δύναμη αλλάζει πρόσημο. Στον πυρήνα του καναλιού είναι αρνητική και η ροή επιβραδύνεται, ενώ στα τοιχώματα είναι θετική και η ροή επιταχύνεται. Μάλιστα για $Ha \gg 1$ η δύναμη στα τοιχώματα είναι ανάλογη του αριθμού Ha και για την ακρίβεια ίση με $-1 + Ha$.

Αντίστοιχα, για την περίπτωση των πλήρως αγωγίων τοιχωμάτων, η δύναμη απεικονίζεται στο γράφημα 2.8. Γίνεται εμφανές πως τώρα, η δύναμη Lorentz έχει το ίδιο πρόσημο και είναι αντίθετη στη ροή σε όλο το μήκος του καναλιού. Η συμπεριφορά αυτή αιτιολογεί το γεγονός ότι οι τιμές της ταχύτητας και της παροχής στην περίπτωση των αγωγίων τοιχωμάτων, είναι κατά πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες των μονωμένων τοιχωμάτων.



Γράφημα 2.7: Κατανομές δύναμης Lorentz για μονωμένα τοιχώματα και $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 .

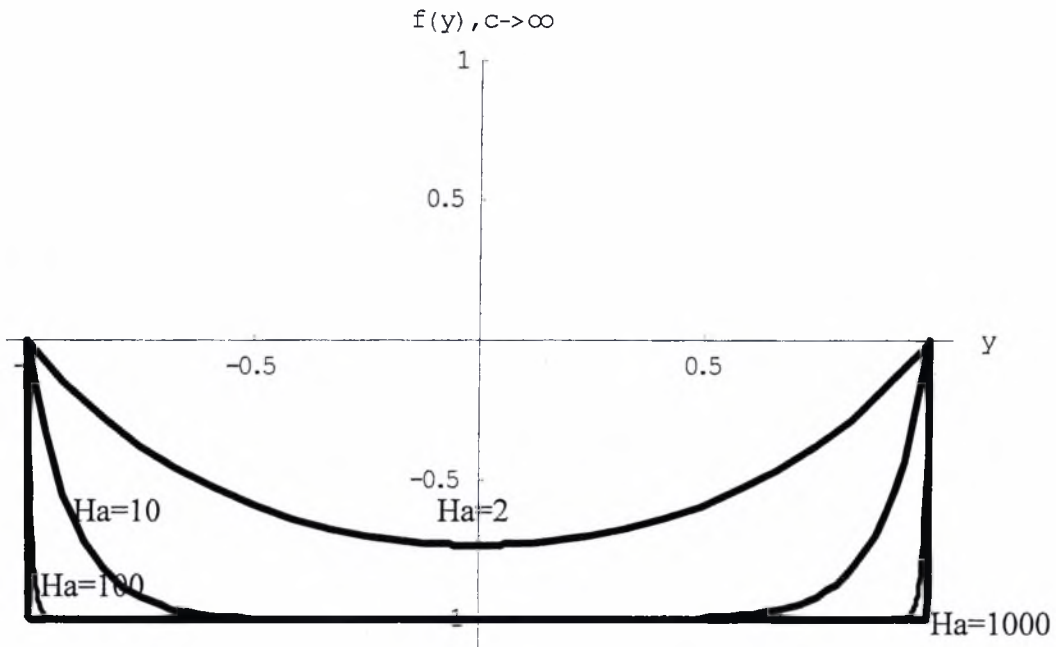
Τέλος, όταν τα τοιχώματα είναι ημιαγώγιμα τότε η σταθερά

$$k = -Ha \frac{c+1}{cHa + \tanh(Ha)}$$

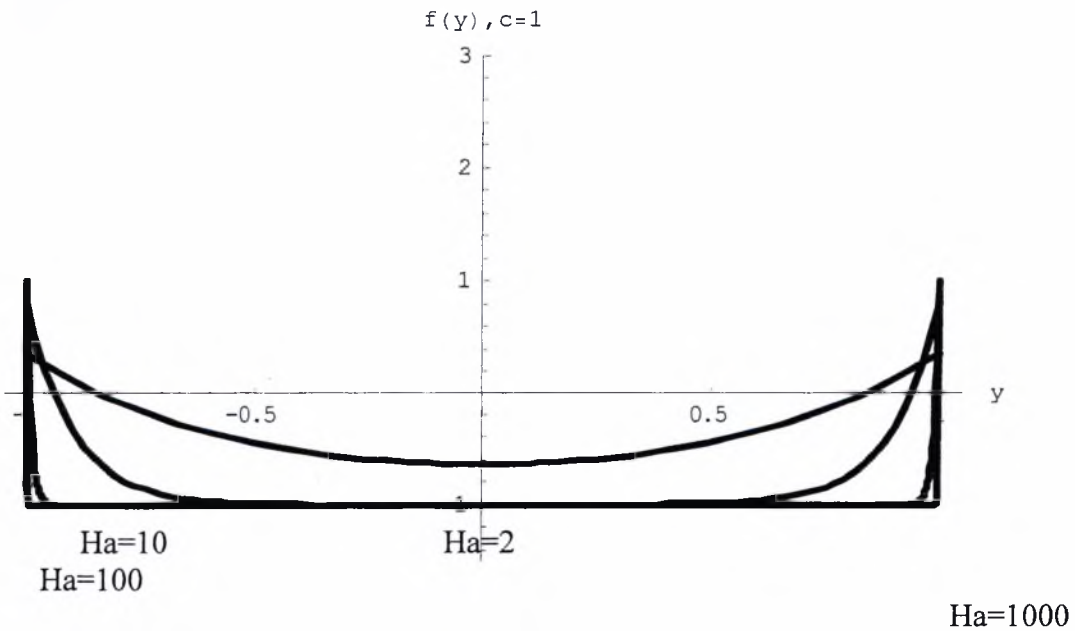
Και η δύναμη Lorentz δίνεται από την σχέση

$$f = -1 + \frac{Ha(c+1)}{[cHa + \tanh(Ha)] \cosh(Ha)} \cosh(Hay) \tag{2.66}$$

Το γράφημα 2.9 παρουσιάζει την κατανομή της δύναμης Lorentz, κατά μήκος του καναλιού για την περίπτωση των ημιαγώγιμων τοιχωμάτων, για αριθμούς Ha 2, 10, 100 και 1000. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ορίσουμε μια τιμή και για την σταθερά c . Ενδεικτικά χρησιμοποιούμε την τιμή 1.



Γράφημα 2.8: Κατανομές δύναμης Lorentz για πλήρως αγώγιμα τοιχώματα και $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 .



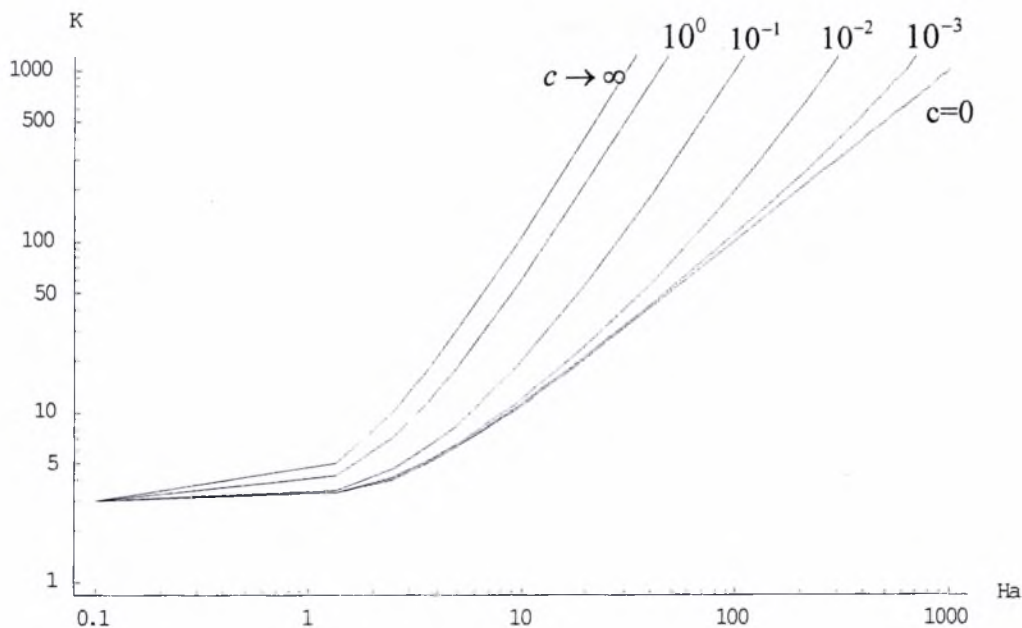
Γράφημα 2.9: Κατανομές δύναμης Lorentz για ημιαγώγιμα τοιχώματα και $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 .

2.8 Πτώση Πίεσης

Σε πολλές εφαρμογές, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την πτώση πίεσης που απαιτείται για να πετύχουμε μια συγκεκριμένη παροχή. Τότε χρειαζόμαστε να έχουμε μια έκφραση για την παροχή σε διαστατική μορφή, ώστε να περιλαμβάνει και την βαθμίδα πίεσης. Στη συνέχεια λύνουμε για την βαθμίδα πίεσης και την αδιαστατοποιούμε με την ποσότητα $\frac{u_0 \rho \nu}{L^2}$. Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή προκύπτει η αδιάστατη κλίση της πίεσης

$$K = \frac{2}{Q} = \frac{Ha^3}{k[-Ha + \text{Tanh}(Ha)]} \quad (2.67)$$

Στο Γράφημα 2.10 περιγράφεται η εξάρτηση της αδιάστατης πτώσης πίεσης σε σχέση με τον αριθμό Hartmann και την παράμετρο αγωγιμότητας των τοιχωμάτων. Για μικρούς αριθμούς Hartmann η πτώση πίεσης είναι καθαρά υδροδυναμική και επομένως ανεξάρτητη από την παράμετρο αγωγιμότητας των τοιχωμάτων.



Γράφημα 2.10: Αδιάστατη μαγνητοϋδροδυναμική πτώση πίεσης ως προς τον αριθμό Ha και $0 \leq c \leq \infty$

Για μεγάλους αριθμούς Hartmann η εξίσωση (2.67) δίνει $K \sim \frac{1}{k}$ με τα εξής δύο όρια:

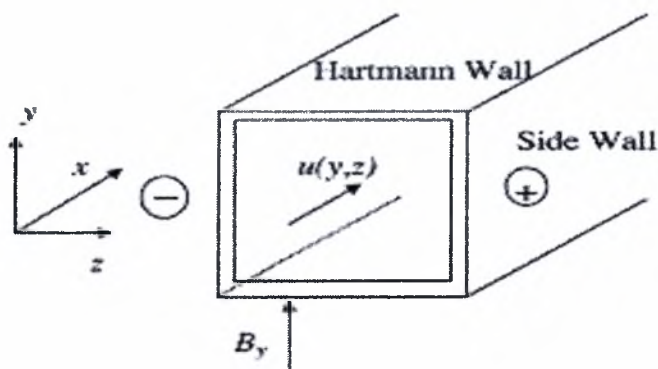
Όταν $c \ll Ha^{-1}$ τότε $K \rightarrow Ha$, ενώ όταν $c \gg Ha^{-1}$ τότε $K = \frac{c}{c+1} Ha^2$. Στην πρώτη

περίπτωση η λύση είναι παρόμοια με αυτήν των μονωμένων τοιχωμάτων με $c = 0$. Η δεύτερη περίπτωση αντιπροσωπεύει καλά την περίπτωση των αγωγίμων τοιχωμάτων. Βλέπουμε λοιπόν ότι με την αύξηση του αριθμού Hartmann αυξάνεται και η κλίση της πτώσης πίεσης και επομένως μειώνεται η παροχή. Επίσης, η πτώση πίεσης σε ένα κανάλι με αγωγίμα τοιχώματα είναι μεγαλύτερη από ότι σε ένα κανάλι με μερικώς αγωγίμα τοιχώματα για τον ίδιο αριθμό Hartmann.

3 Ροή σε ορθογώνιο κανάλι

3.1. Διατύπωση προβλήματος

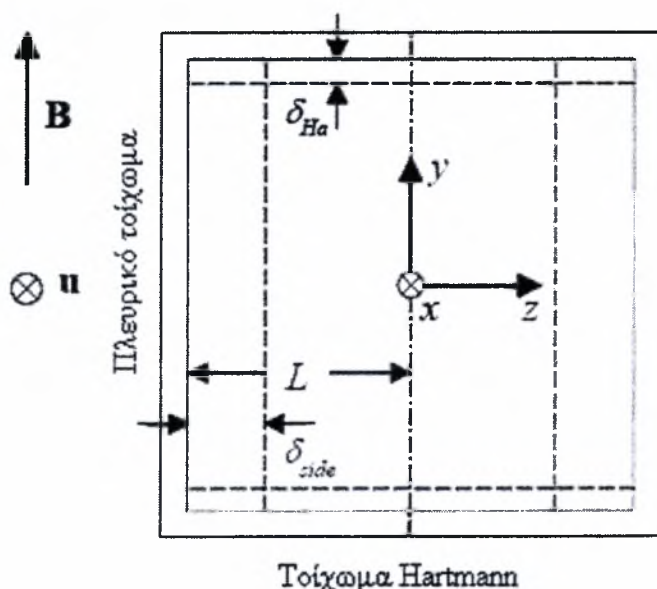
Εξετάσουμε την πλήρως αναπτυγμένη ροή σε έναν αγωγό με ορθογωνική διατομή όπως φαίνεται στο Γράφημα 3.1. Ένα ηλεκτροαγώγιμο ρευστό ρέει εντός του αγωγού λόγω σταθερής κλίσης πίεσης με ταχύτητα $V = u(y, z)x$, όπου x δηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση x της ροής. Ο αγωγός και το ρευστό εκτίθενται σε ένα εξωτερικά εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο B_y στη διεύθυνση y . Τα τοιχώματα στα οποία το μαγνητικό πεδίο έχει κάθετη κατεύθυνση ονομάζονται τοιχώματα Hartmann, και τα τοιχώματα που είναι εφαπτόμενα στο πεδίο ονομάζονται πλευρικά τοιχώματα. Για υψηλούς αριθμούς Hartmann η ροή διαμορφώνει έναν ιξώδη πυρήνα όπου η δύναμη Lorentz ισορροπεί τις δυνάμεις πίεσης και τα λεπτά οριακά στρώματα των διάφορων περιπτώσεων.



Γράφημα 3.1: ΜΥΔ ροή σε ορθογώνιο αγωγό

Κοντά στα τοιχώματα Hartmann δημιουργούνται οριακά στρώματα με υψηλές κλίσεις ταχύτητας για να ικανοποιούν την οριακή συνθήκη μη-ολίσθησης. Αυτά τα στρώματα καλούνται στρώματα Hartmann και το πάχος τους δ_{Ha} είναι ανάλογο του Ha^{-1} . Σε αυτά τα οριακά στρώματα, η κατανομή της ταχύτητα καθορίζεται από την ισορροπία μεταξύ της δύναμης Lorentz και των ιξωδών δυνάμεων. Επίσης τα ηλεκτρικά ρεύματα που προκαλούνται στον πυρήνα μπορούν να κλείσουν την τροχία τους μέσω αυτών των οριακών στρωμάτων. Η ηλεκτρική αγωγιμότητα των τοιχωμάτων του αγωγού επηρεάζει τη διανομή του ρεύματος και καθορίζει την μορφή του πυρήνα.

Κοντά στους πλευρικούς τοίχους ένα διαφορετικό είδος οριακού στρώματος εμφανίζεται, του οποίου πάχος δ_{side} είναι ανάλογο με $Ha^{-1/2}$. Σε αυτά τα οριακά στρώματα η ταχύτητα είναι σημαντικά ψηλότερη από αυτήν στον πυρήνα και για μεγάλους αριθμούς Hartmann στο κέντρο του αγωγού ή στον πυρήνα της ροής παρουσιάζεται ένα τοπικό ελάχιστο (Γράφημα 3.1α)



Γράφημα 3.1α: Σχεδιάγραμμα ορθογώνιας διατομής αγωγού όπου δ_{Ha} και δ_{side} δηλώνουν το πάχος των τοιχωμάτων Hartmann και των πλευρικών τοιχωμάτων.

Τώρα, οι εξαρτημένες μεταβλητές της ταχύτητας $u = u(y, z)$ και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίο $b = b(y, z)$, εξαρτώνται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές $-1 \leq y \leq 1$ και $-d \leq z \leq d$, όπου $2d$ είναι ο λόγος των δύο πλευρών του ορθογωνίου αγωγού. Το πρόβλημα περιγράφεται από το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Ha \frac{\partial b}{\partial y} = -1 \tag{3.1}$$

και

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + Ha \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

Στα τοιχώματα η ταχύτητα είναι πάντα μηδενική. Το ίδιο ισχύει και για το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο στα πλευρικά τοιχώματα $z = \pm d$. Αντίθετα στα τοιχώματα Hartmann, το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο υπακούει σε οριακές συνθήκες Dirichlet, Newmann και μικτές ανάλογα με την αγωγιμότητα του τοιχώματος.

Ακολουθούμε την μεθοδολογία που προτάθηκε από τον Dragos (1975) [7] και εισάγουμε τις αποκαλούμενες μεταβλητές Elsasser

$$A = u + b \text{ και } A' = u - b \tag{3.3}$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν δύο διαφορικές εξισώσεις για τις νέες εξαρτημένες μεταβλητές

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + Ha \frac{\partial A}{\partial y} = -1 \tag{3.4}$$

και

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial z^2} - Ha \frac{\partial A'}{\partial y} = -1 \tag{3.5}$$

Σημειώνεται ότι οι νέες διαφορικές εξισώσεις είναι αποσυσζευγμένες και αυτό είναι το βασικό πλεονέκτημα της μεθοδολογίας του Dragos. Στόχος καταρχήν η αναλυτική και στη συνέχεια η αριθμητική λύση αυτών των εξισώσεων.

3.2. Αναλυτικές λύσεις

Η κατανομή της ταχύτητας είναι συμμετρική και ως προς τους δύο άξονες συμμετρίας. Αντίστοιχα το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα z και αντισυμμετρικό ως προς τον άξονα y . Επομένως, είναι προφανές ότι

$$A(y, z) = A'(-y, z) \tag{3.6}$$

Άρα είναι αρκετό να επιλύσουμε μόνο (3.2) για την μεταβλητή $A(y, z)$ και στην συνέχεια η $A'(-y, z)$ θα προκύψει από την (3.6). Με βάση τη συμμετρία ως προς z γράφουμε τη γενική λύση σε ανάπτυγμα Fourier της μορφής

$$A(y, z) = A'(-y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y) \cos(\lambda_i z) \quad (3.7)$$

Όπως αναφέραμε οι οριακές συνθήκες στα πλευρικά τοιχώματα είναι πάντα

$$u(y, \pm d) = b(y, \pm d) = 0 \Rightarrow A(y, \pm d) = 0 \quad (3.8)$$

Εφαρμόζοντας τη λύση (3.7) στα πλευρικά τοιχώματα έχουμε

$$A(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y) \cos(\lambda_i d) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda_i d) = 0 \Rightarrow \lambda_i d = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως η λύση (3.7) ξαναγράφεται στη μορφή

$$A(y, z) = A'(-y, z) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i(y) \cos(\lambda_i z) \quad (3.9)$$

όπου

$$\lambda_i = \frac{\pi}{2d} \quad (3.10)$$

είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.10) στην (3.4) προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} \cos(\lambda_i z) - \lambda_i^2 a_i(y) \cos(\lambda_i z) + Ha \frac{\partial a_i}{\partial y} \cos(\lambda_i z) \right\} = -1 \quad (3.11)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.11) με $\cos(\lambda_j z)$, $j = 1, 3, 5, \dots$ και ολοκληρώνουμε ως προς

$z \in [-d, d]$ εφαρμόζοντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int_{-d}^d \cos(\lambda_i z) dz = \frac{1}{\lambda_i} \sin(\lambda_i z) \Big|_{-d}^d = \frac{2}{\lambda_i} \sin(\lambda_i d)$$

και

$$\int_{-d}^d \cos(\lambda_i z) \cos(\lambda_j z) dz = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ d, & i = j \end{cases}$$

Μετά από μία τυπική επεξεργασία προκύπτει το μη-συζευγμένο σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} - \lambda_i^2 a_i + Ha \frac{\partial a_i}{\partial y} = -k_i \quad (3.12)$$

όπου

$$k_i = \frac{2 \sin(\lambda_i d)}{\lambda_i d} \quad (3.12\alpha)$$

για $i = 1, 3, 5, \dots$ Επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις (3.12) θα βρούμε τις άγνωστες συναρτήσεις $a_i(y)$ και την λύση του προβλήματος.

Η λύση γράφεται σαν επαλληλία της ομογενούς και της μερικής λύσης στη μορφή

$$a_i = a_i^{(H)} + a_i^{(P)} \quad (3.13)$$

Στη συνέχεια, η ομογενής λύση προκύπτει από την λύση της

$$\frac{d^2 a_i^{(H)}}{dy^2} + Ha \frac{da_i^{(H)}}{dy} - \lambda_i^2 a_i^{(H)} = 0 \quad (3.14)$$

και εισάγοντας στην (3.14) την εκθετική αντικατάσταση $a_i^{(H)} = e^{p_i y}$ προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση 2^{ης} τάξης (χαρακτηριστική εξίσωση)

$$p_i^2 + Ha p_i - \lambda_i p_i = 0 \Rightarrow p_i^{1,2} = \frac{1}{2} (-Ha \pm \sqrt{Ha^2 + 4\lambda_i^2}) \quad (3.15)$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες και η γενική ομογενής λύση γράφεται στην μορφή

$$a_i^{(H)} = c_i^1 \exp(p_i^1 y) + c_i^2 \exp(p_i^2 y) \quad (3.16)$$

Με τη μέθοδο των συντελεστών εύκολα βρίσκουμε την μερική (μη ομογενή λύση) $a_i^P = A_i$ και αντικαθιστώντας στην (3.12) βρίσκουμε τις μερικές λύσεις

$$-\lambda_i^2 A_i = -k_i \Rightarrow A_i = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \Rightarrow a_i^{(P)} = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \quad (3.17)$$

Άρα οι γενικές λύσεις των άγνωστων συναρτήσεων $a_i(y)$ είναι

$$a_i(y) = \frac{k_i}{\lambda_i^2} + c_i \left[\sinh(p_i^1 y) + \cosh(p_i^1 y) \right] + c_2 \left[\sinh(p_i^2 y) + \cosh(p_i^2 y) \right] \quad (3.18)$$

Από τις μεταβλητές Elsasser λύνοντας έχουμε ότι $u = (A + A')/2$ και $b = (A - A')/2$. Επίσης λόγω των συνθηκών συμμετρίας ως προς z και αντισυμμετρίας ως προς y έχουμε ότι

$$A(y, z) = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} a_i(y) \cos(\lambda_i z) \quad (3.19)$$

$$A'(y, z) = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} a_i(-y) \cos(\lambda_i z)$$

Άρα, με βάση τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τις γενικές λύσεις για τις κατανομές της ταχύτητας

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} [a_i(y) + a_i(-y)] \cos(\lambda_i z) \Rightarrow$$

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{k_i}{\lambda_i^2} + c_i^1 \cosh(p_i^1 y) + c_i^2 \cosh(p_i^2 y) \right] \cos(\lambda_i z) \quad (3.20)$$

και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

$$b = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} [a_i(y) + a_i(-y)] \cos(\lambda_i z) \Rightarrow$$

$$b = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} [c_i^1 \sinh(p_i^1 y) + c_i^2 \sinh(p_i^2 y)] \cos(\lambda_i z) \quad (3.21)$$

Σημειώνεται ότι οι οριακές συνθήκες στα πλευρικά τοιχώματα έχουν ληφθεί υπόψη και ικανοποιούνται, ενώ οι άγνωστες σταθερές c_i^1 και c_i^2 θα εκτιμηθούν ικανοποιώντας τις οριακές συνθήκες, ανάλογα με τη περίπτωση, στα τοιχώματα Hartmann. Υπενθυμίζεται ότι οι ιδιοτιμές λ_i και οι σταθερές k_i για $i=1,3,5,\dots$ δίδονται από τις (3.10) και (3.12α) αντίστοιχα.

3.2.1. Μονωμένα τοιχώματα (Hartmann και πλευρικά)

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση των μονωμένων τοιχωμάτων Hartmann που έχει μελετηθεί πρώτα από τον Shercliff (1953) [8]. Όπως έχει προαναφερθεί στην περίπτωση των

μονωμένων τοιχωμάτων το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται στο τοίχωμα. Για να προκύψουν οι δυο άγνωστες σταθερές c_i^1 και c_i^2 εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες

$$u(\pm 1) = b(\pm 1) = 0 \quad (3.22)$$

στις σχέσεις (3.20) και (3.21). Από την σχέση της ταχύτητας (3.20) έχουμε

$$\frac{k_i}{\lambda_i^2} + c_i^1 \cosh(p_i^1) + c_i^2 \cosh(p_i^2) = 0$$

και από την σχέση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

$$c_i^1 \sinh(p_i^1) + c_i^2 \sinh(p_i^2) = 0$$

Για να λυθεί το σύστημα των δυο εξισώσεων πιο εύκολα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $\sinh(p_i^1)$ και την δεύτερη με $-\cosh(p_i^1)$ και στη συνέχεια τις προσθέτουμε κατά μέλη. Έτσι έχουμε

$$c_i^1 = \frac{-\frac{k_i}{\lambda_i^2} \sinh(p_i^2)}{\cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2) - \cosh(p_i^2) \sinh(p_i^1)} = \frac{\frac{k_i}{\lambda_i^2} \sinh(p_i^2)}{\sinh(p_i^1 - p_i^2)} \quad (3.23)$$

και

$$c_i^2 = \frac{-\frac{k_i}{\lambda_i^2} \sinh(p_i^1)}{\cosh(p_i^2) \sinh(p_i^1) - \cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2)} = \frac{-\frac{k_i}{\lambda_i^2} \sinh(p_i^1)}{\sinh(p_i^1 - p_i^2)} \quad (3.24)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3.23) και (3.24) στις (3.20) και (3.21) έχουμε τις αναλυτικές εκφράσεις της ταχύτητας

$$u = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[1 + \frac{-\sinh(p_i^2) \cosh(p_i^1 y) + \sinh(p_i^1) \cosh(p_i^2 y)}{\cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2) - \sinh(p_i^1) \cosh(p_i^2)} \right] \cos(\lambda_i z) \quad (3.25)$$

και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

$$b = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[\frac{\sinh(p_i^1) \sinh(p_i^2 y) - \sinh(p_i^2) \sinh(p_i^1 y)}{\cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2) - \sinh(p_i^1) \cosh(p_i^2)} \right] \cos(\lambda_i z) \quad (3.26)$$

για έναν αγωγό με μονωμένα πλευρικά τοιχώματα και μονωμένα τοιχώματα Hartmann.

Στα Γραφήματα 3.2 και 3.3 δίνεται μια ποιοτική εικόνα της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για αριθμούς $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 . Στο πρώτο γράφημα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες της ταχύτητας. Η διεύθυνση της ταχύτητας είναι κάθετη

στο επίπεδο (y, z) . Είναι φανερό, από την πύκνωση των καμπυλών στα τοιχώματα, πως με την αύξηση του H_a η κλίση της ταχύτητας στα τοιχώματα αυξάνει ραγδαία. Αυτή η πύκνωση των ισοϋψών συμβαίνει με πιο έντονο ρυθμό στα τοιχώματα Hartmann από ότι στα πλευρικά τοιχώματα. Το δεύτερο γράφημα, μας παρουσιάζει μια αντίστοιχη ποιοτική εικόνα για τη μορφή του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου και πως αυτό μεταβάλλεται σε σχέση με τον αριθμό H_a . Όσο ο H_a αυξάνεται το μαγνητικό πεδίο γίνεται πιο ισχυρό και παράλληλα η κλίση του στα πλευρικά τοιχώματα, πολύ απότομη. Λόγω της αντισυμμετρίας που διέπει το μαγνητικό πεδίο ως προς τον άξονα $y = 0$, προβάλλουμε την περιοχή που ορίζεται από τον άξονα συμμετρίας $y = 0$ έως το κάτω τοίχωμα, $y = -1$.

3.2.2. Αγωγήμα Hartmann – Μονωμένα τοιχώματα

Τώρα, εξετάζεται η περίπτωση όπου τα πλευρικά τοιχώματα είναι μονωμένα $\sigma_s = 0$, ενώ τα τοιχώματα Hartmann είναι πλήρως αγωγήμα $\sigma_H = \infty$. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η αναλυτική λύση δόθηκε από τον Hunt (1965) [9].

Για την αναλυτική επίλυση του προβλήματος εφαρμόζουμε τις (3.20) και (3.21) στις οριακές συνθήκες

$$u(\pm 1) = 0 \quad (3.27)$$

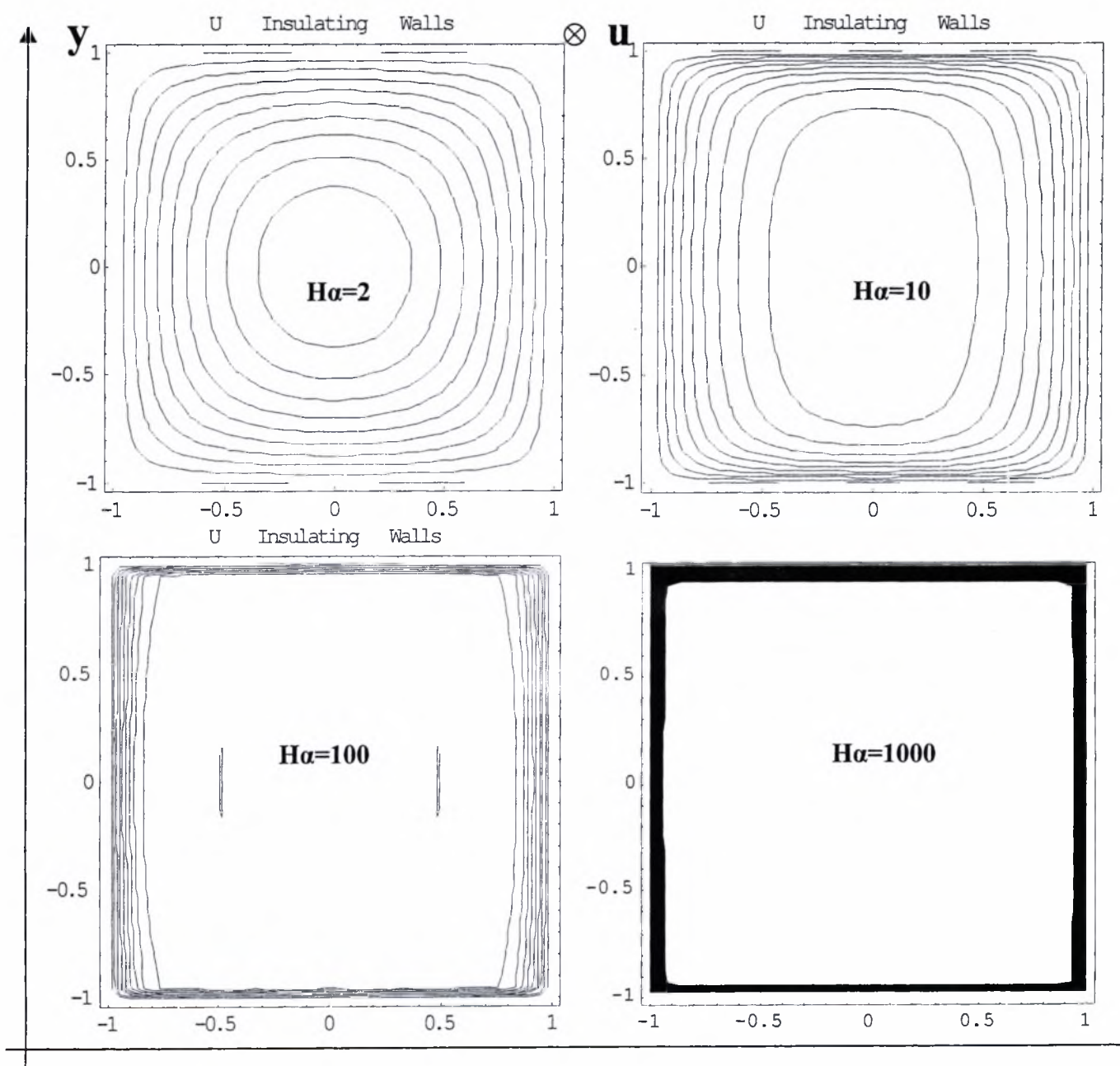
και

$$\left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} = 0 \quad (3.28)$$

Το σύστημα που προκύπτει για τους άγνωστους συντελεστές c_i^1 και c_i^2 είναι

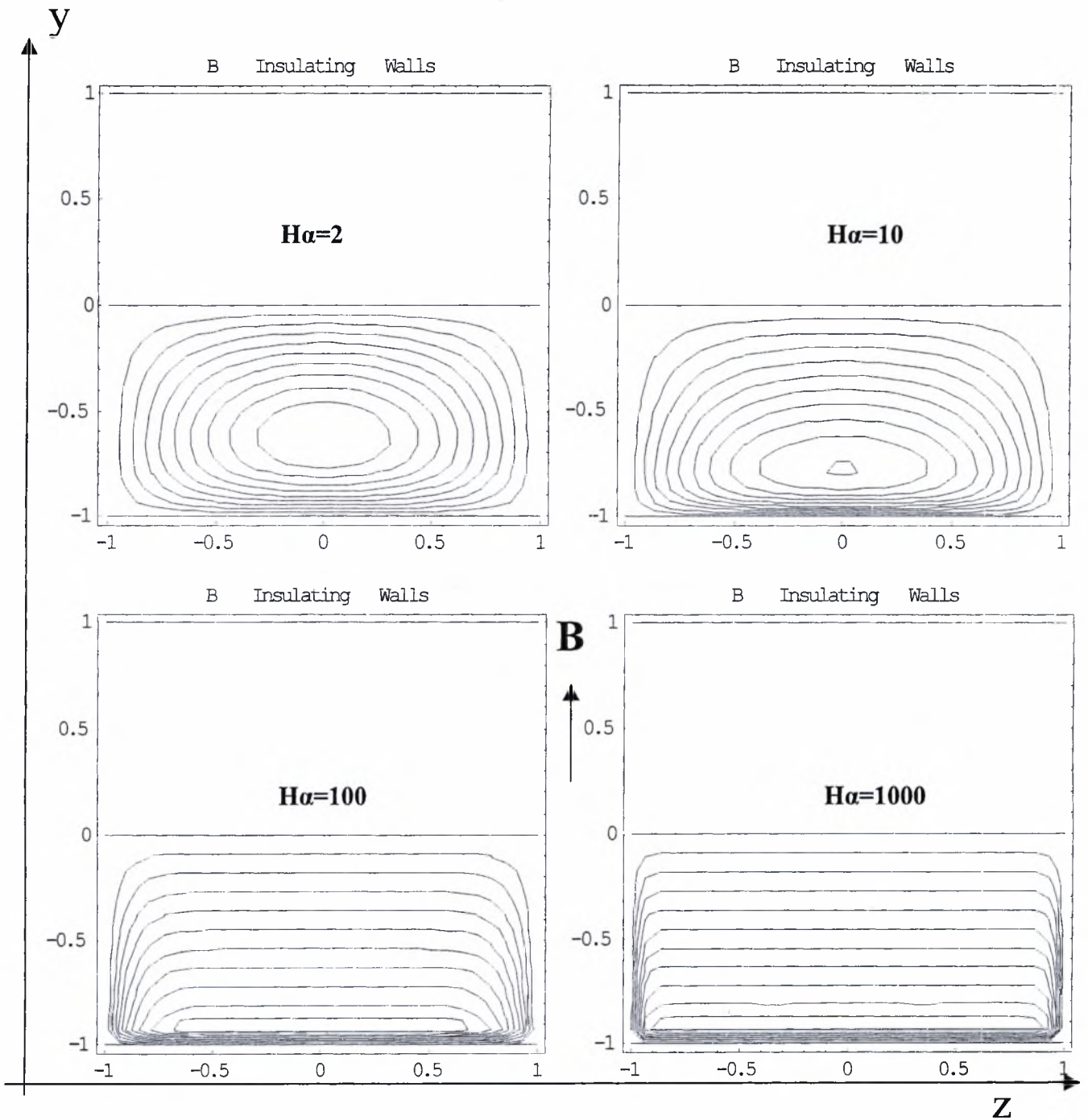
$$\frac{k_i}{\lambda_i^2} + c_i^1 \cosh(p_i^1) + c_i^2 \cosh(p_i^2) = 0$$

$$c_i^1 p_i^1 \cosh(p_i^1) + c_i^2 p_i^2 \cosh(p_i^2) = 0$$



Z

Γράφημα 3.2: Ισοϋψείς καμπύλες της ταχύτητας σε αγωγό με μονωμένα πλευρικά τοιχώματα και μονωμένα τοιχώματα Hartmann, για $Ha= 2, 10, 100$ και 1000 .



Γράφημα 3.3. Ισοϋψείς καμπύλες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου σε αγωγό με μονωμένα πλευρικά τοιχώματα και μονωμένα τοιχώματα Hartmann, για $Ha= 2, 10, 100$ και 1000 .

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$c_i^1 = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \frac{p_i^2}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1)} \quad (3.29)$$

και

$$c_i^2 = -\frac{k_i}{\lambda_i^2} \frac{p_i^1}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^2)} \quad (3.30)$$

Εφαρμόζοντας τις εκφράσεις (3.29) και (3.30) στις εξισώσεις (3.20) και (3.21) προκύπτουν οι εκφράσεις της ταχύτητας

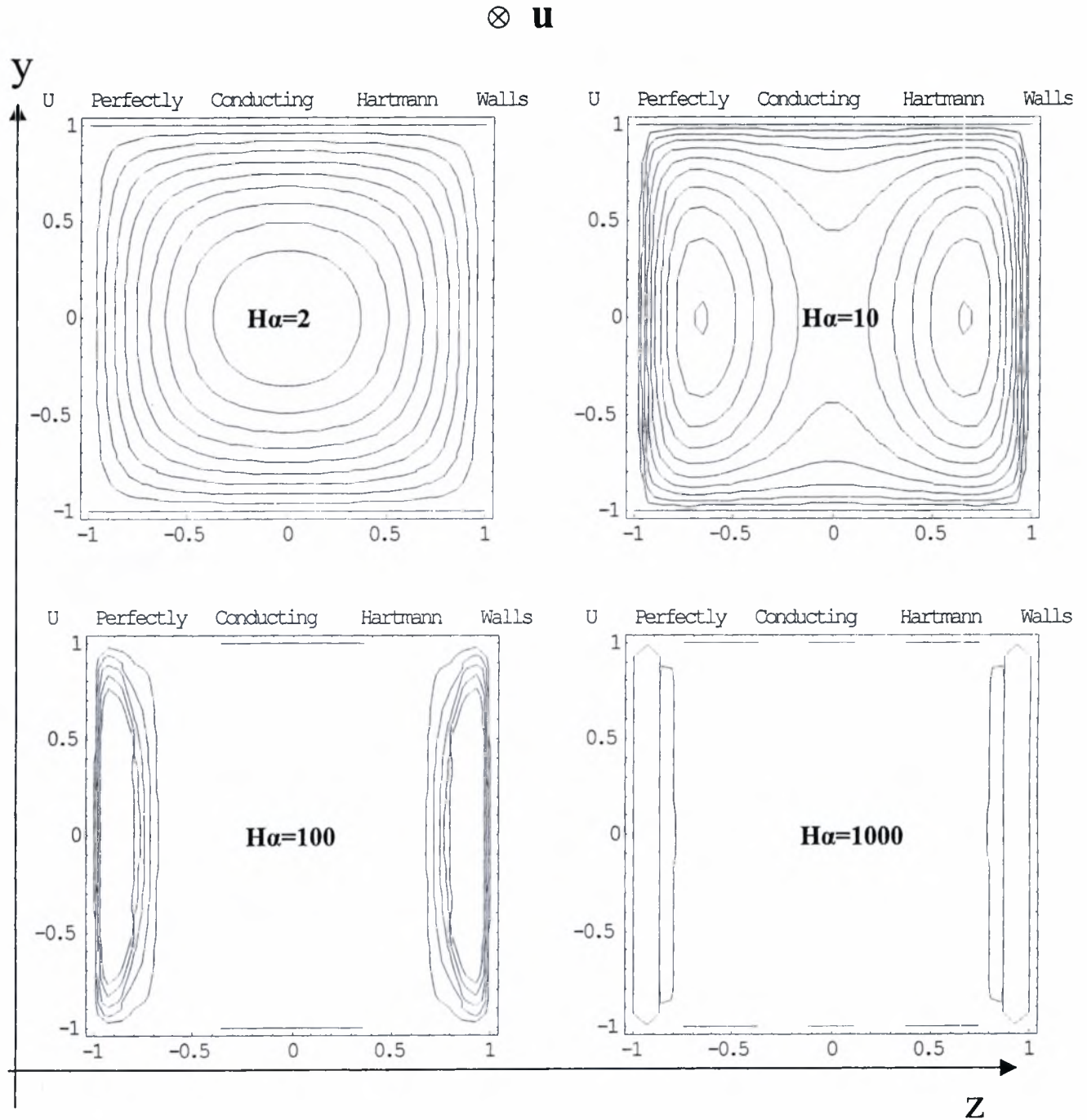
$$u = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[1 + \frac{p_i^2 \cosh(p_i^1 y)}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1)} - \frac{p_i^1 \cosh(p_i^2 y)}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^2)} \right] \cos(\lambda_i z) \quad (3.31)$$

και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

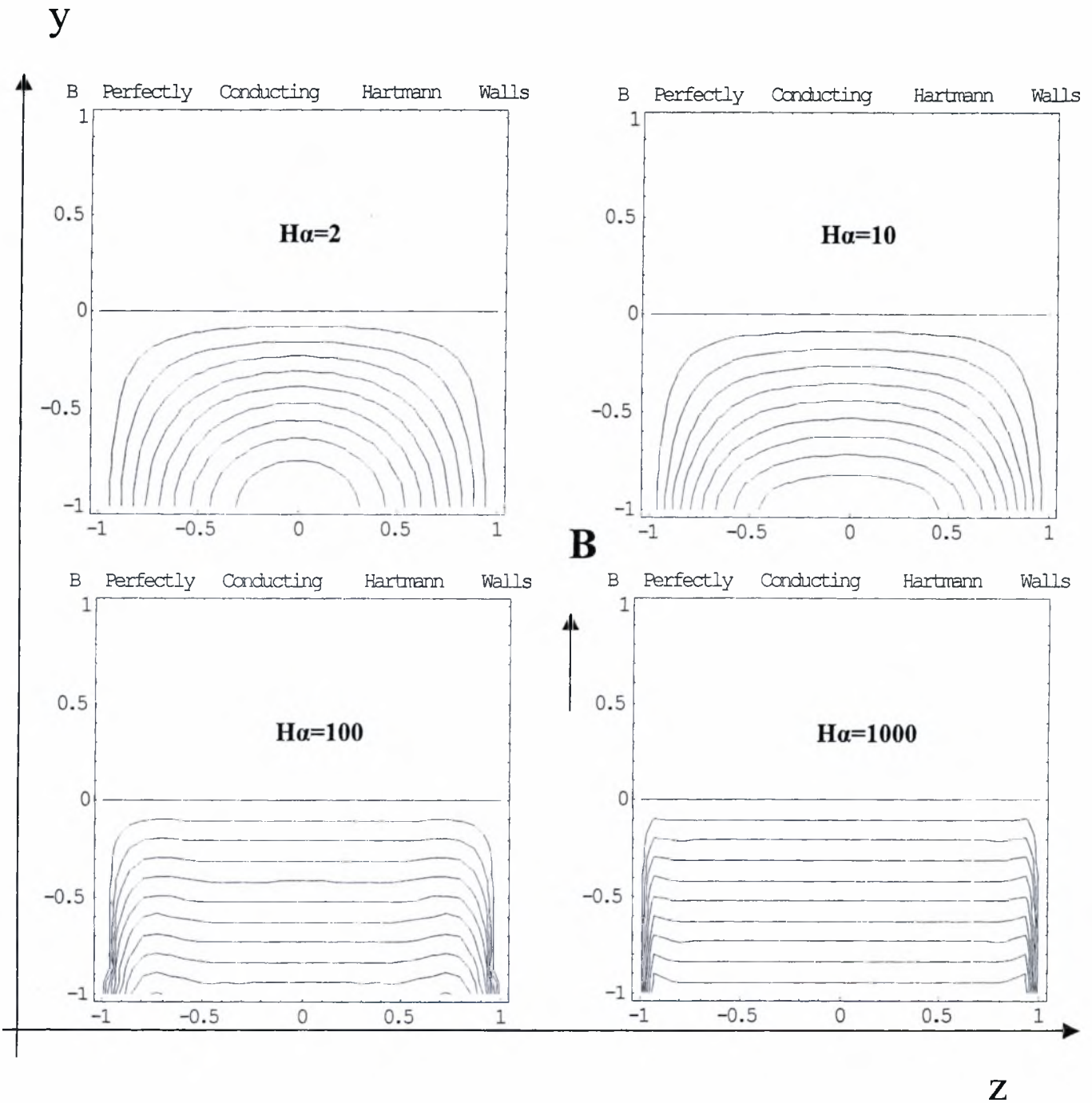
$$b = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[\frac{p_i^2 \sinh(p_i^1 y)}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1)} - \frac{p_i^1 \sinh(p_i^2 y)}{(p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^2)} \right] \cosh(\lambda_i z) \quad (3.32)$$

για έναν αγωγό με μονωμένα πλευρικά τοιχώματα και πλήρως αγωγίμα τοιχώματα Hartmann.

Στα Γραφήματα 3.4 και 3.5 δίνεται μια ποιοτική εικόνα της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για αριθμούς $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 . Τώρα, τα ρεύματα κλείνουν μέσω των τοιχωμάτων Hartmann και των πλευρικών στοιβάδων (όχι τοιχωμάτων). Στο πρώτο γράφημα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες της ταχύτητας. Στον πυρήνα της ροής η κλίση πίεσης εξισορροπείται από τη δύναμη Lorentz αλλά κοντά στα πλευρικά τοιχώματα σχετικά μικρές δυνάμεις Lorentz επιτρέπουν την ανάπτυξη υψηλών ταχυτήτων. Κατά συνέπεια ένα σημαντικό ποσό του συνολικού όγκου της ροής μπορεί να μεταφερθεί στα πλευρικά οριακά στρώματά. Η κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος του z-άξονα, κάθετου στο B, έχει τη μορφή του γράμματος M και ονομάζεται κατανομή M-τύπου. Όπως θα δούμε παρακάτω στο περιοχή των πλευρικών στοιβάδων είναι δυνατόν να δημιουργηθούν και περιοχές ανάστροφης ροής.



Γράφημα 3.4: Ισοϋψείς καμπύλες της ταχύτητας σε αγωγό με αγωγίμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά, για $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 .



Γράφημα 3.5: Ισοϋψείς καμπύλες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου σε αγωγό με αγώγιμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα, για $Ha = 2, 10, 100$ και 1000 .

3.2.3. Ημιαγώγιμα Hartmann – Μονωμένα πλευρικά

Τέλος, εξετάζεται η πλέον γενική περίπτωση όπου τα πλευρικά τοιχώματα είναι μονωμένα $\sigma_s = 0$, ενώ τα τοιχώματα Hartmann είναι ημιαγώγιμα. Είναι προφανές, ότι η αναλυτική λύση για $c_H = 0$ και $c_H \rightarrow \infty$ θα πρέπει να αναπαράγει τις αναλυτικές λύσεις των μονωμένων τοιχωμάτων και των πλήρως αγώγιμων τοιχωμάτων αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε τις (3.20) και (3.21) στις οριακές συνθήκες

$$u(\pm 1) = 0 \tag{3.33}$$

και

$$\pm \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{y=\pm 1} + \frac{1}{c} b(\pm 1) = 0 \tag{3.34}$$

Το σύστημα που προκύπτει για τους άγνωστους συντελεστές c_i^1 και c_i^2 είναι

$$\frac{k_i}{\lambda_i^2} + c_i^1 \cosh(p_i^1) + c_i^2 \cosh(p_i^2) = 0$$

$$c_i^1 c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) + c_i^2 c_H p_i^2 \cosh(p_i^2) + c_i^1 \sinh(p_i^1) + c_i^2 \sinh(p_i^2) = 0$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$c_i^1 = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \frac{p_i^2 c_H \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^2)}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} \tag{3.35}$$

$$c_i^2 = - \frac{k_i}{\lambda_i^2} \frac{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) + \sinh(p_i^1)}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} \tag{3.36}$$

Εφαρμόζοντας τις εκφράσεις (3.35) και (3.36) στις εξισώσεις (3.20) και (3.21) προκύπτουν οι εκφράσεις της ταχύτητας

$$u = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh(p_i^2 y) [c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) + \sinh(p_i^1)]}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} + \frac{\cosh(p_i^1 y) [c_H p_i^2 \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^2)]}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} \right\} \cos(z \lambda_i) \tag{3.37}$$

και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

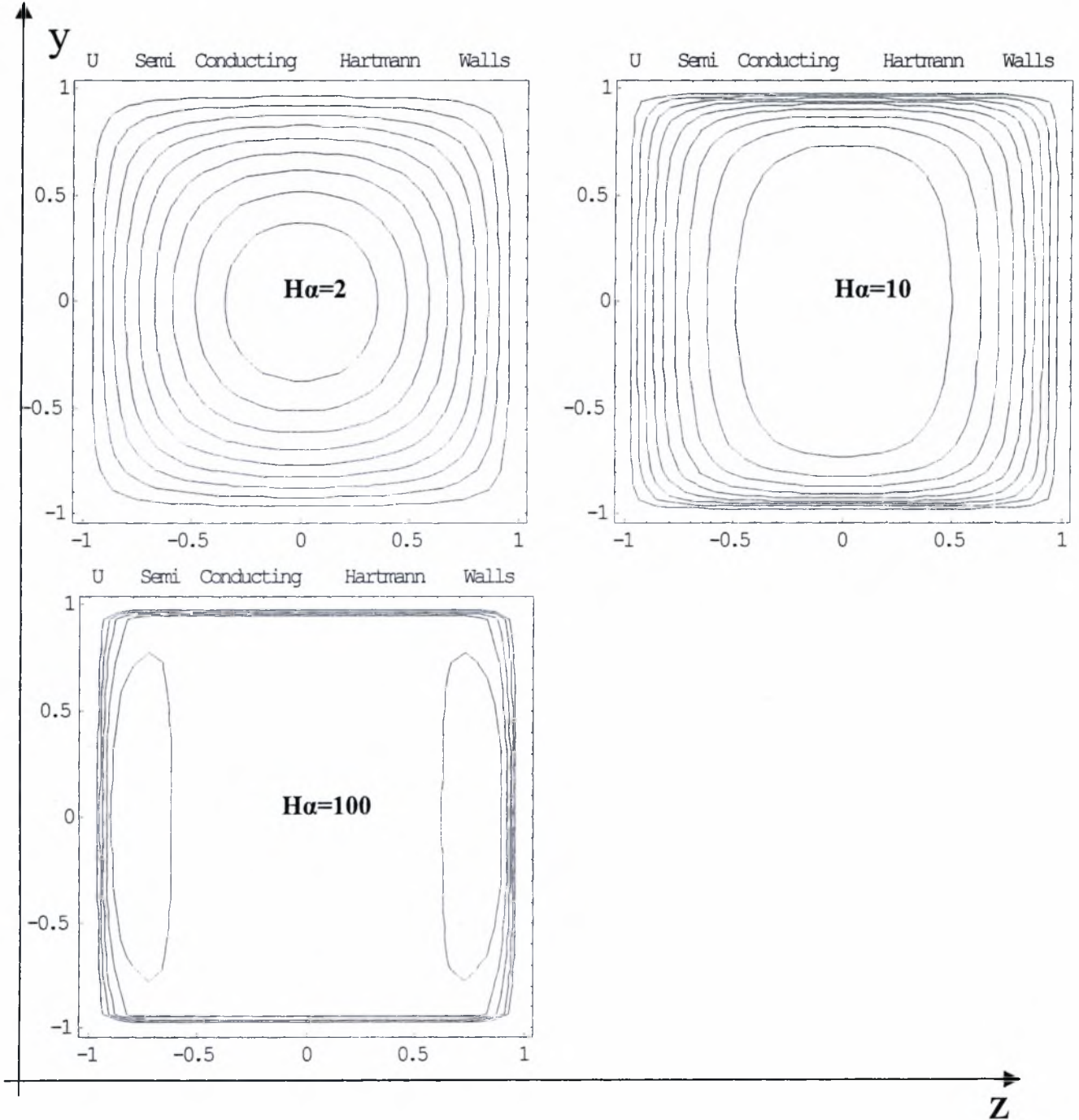
$$b = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left\{ \frac{\sinh(p_i^1 y) [c_h p_i^2 \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^2)]}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} - \frac{\sinh(p_i^2 y) [c_h p_i^1 \cosh(p_i^1) + \sinh(p_i^1)]}{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) - c_H p_i^2 \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)} \right\} \cos(z \lambda_i) \quad (3.38)$$

για έναν αγωγό με μονωμένα πλευρικά τοιχώματα και ημιαγώγιμα τοιχώματα Hartmann.

Στα Γραφήματα 3.6 - 3.9 δίνεται μια ποιοτική εικόνα της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για αριθμούς $Ha = 2, 10$ και 100 και c_H ίσο με 0.01 και 0.1 .

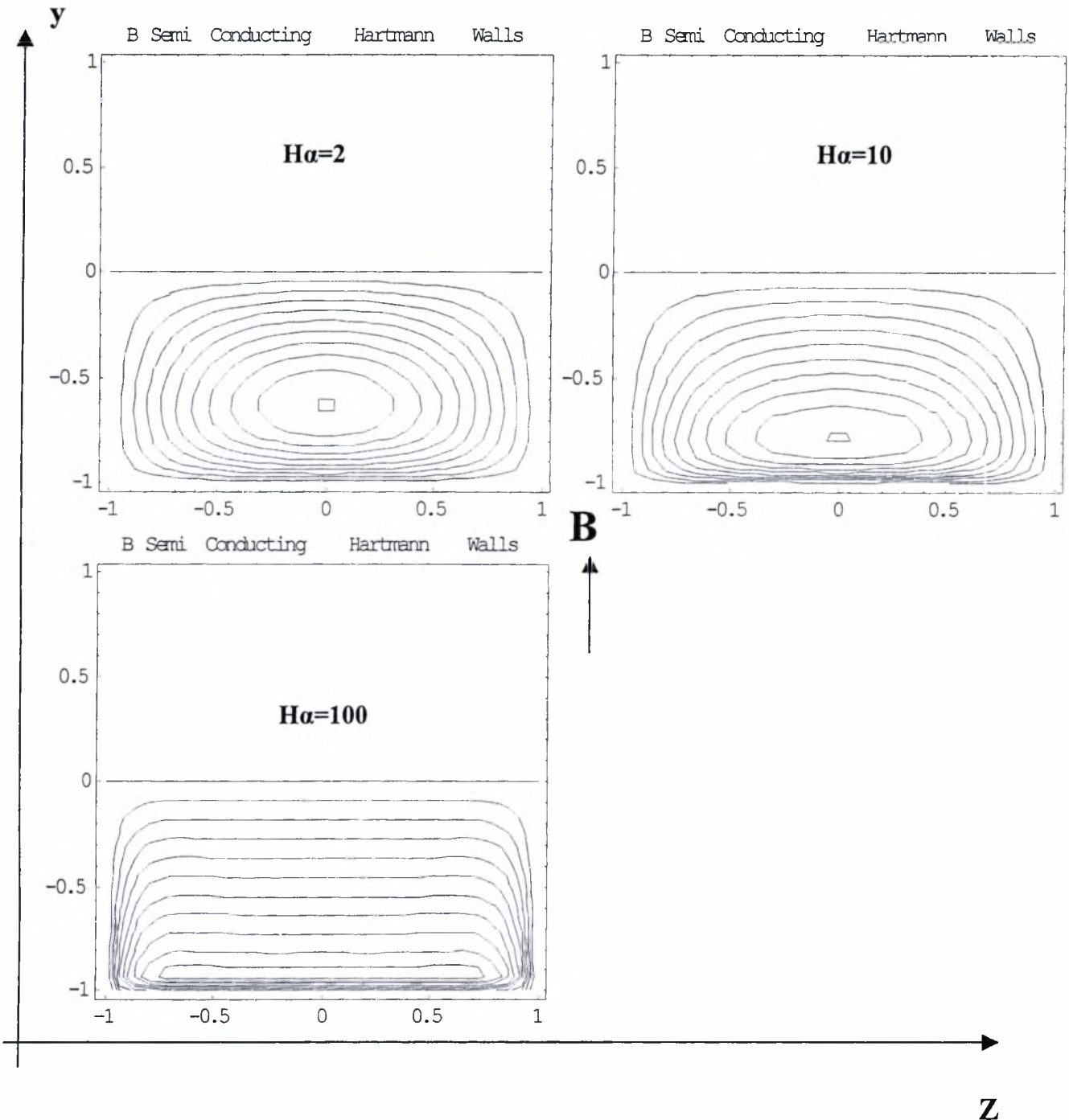
$$c_H = 0.01$$

⊗ **u**



Γράφημα 3.6: Ισοϋψείς καμπύλες της ταχύτητας σε αγωγό με ημιαγώγιμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα, για $Ha = 2, 10$ και 100 .

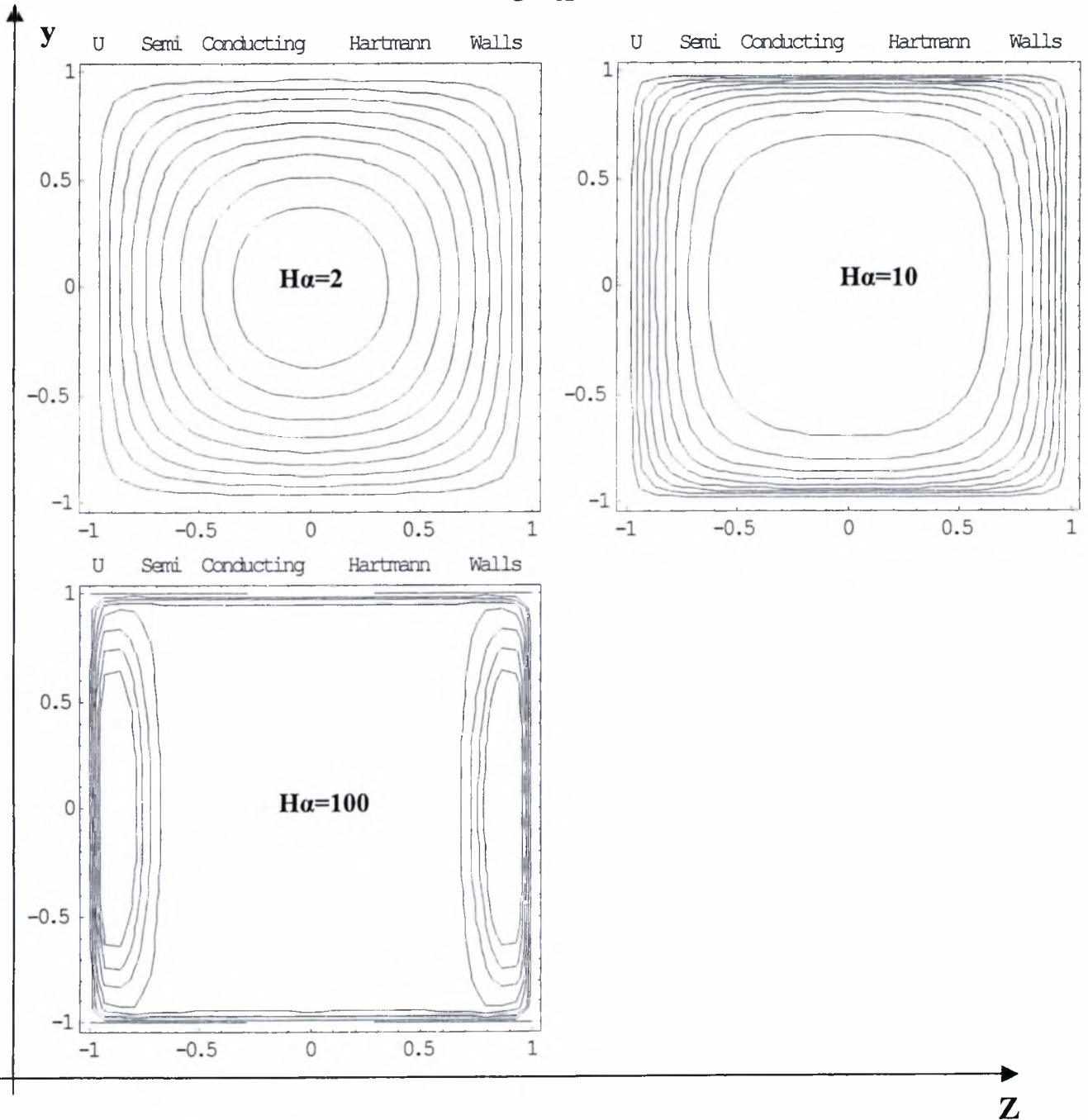
$$c_H = 0.01$$



Γράφημα 3.7: Ισοϋψείς καμπύλες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου σε αγωγό με αγωγίμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα, για $Ha = 2, 10$ και 100 .

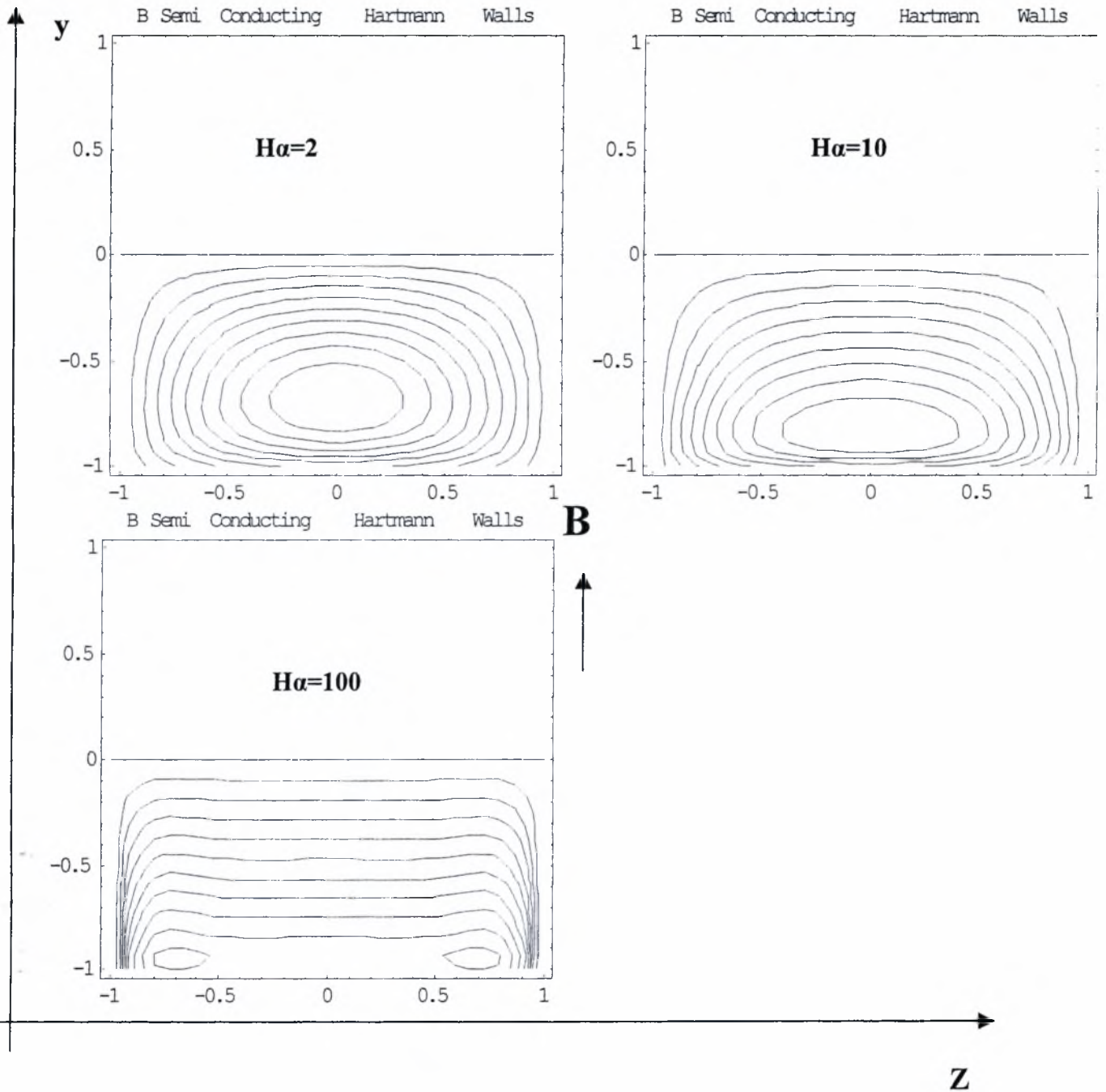
$$c_H = 0.1$$

⊗ **u**



Γράφημα 3.8: Ισοϋνείς καμπύλες της ταχύτητας σε αγωγό με ημιαγώγιμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα, για $Ha = 2, 10$ και 100 .

$c_H = 0.1$



Γράφημα 3.9: Ισοϋψείς καμπύλες του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου σε αγωγό με αγωγίμα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα, για $Ha = 2, 10$ και 100 .

3.3. Αριθμητική λύση

Έχοντας ολοκληρώσει την αναλυτική λύση της ροής σε ορθογώνιο αγωγό, στρεφόμαστε στην αριθμητική λύση του ίδιου προβλήματος εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το συνεχές χωρίο που ορίζεται από $z \in [-d, d]$ και $y \in [-1, 1]$ αντικαθίσταται με το αριθμητικό πλέγμα που προκύπτει από τον διαχωρισμό του χωρίου σε ίσα $J \times I$ ορθογώνια με πλευρές $\Delta z \times \Delta y$. Οι κόμβοι του πλέγματος ορίζονται σαν $(j \times i)$, όπου $j = 1, \dots, J$ και $i = 1, \dots, I$.

3.3.1. Διακριτοποίηση εξισώσεων

Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) σε έναν τυχαίο εσωτερικό κόμβο $j \times i$, προσεγγίζοντας τις παραγώγους με κεντρικές εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών 2^{ης} τάξης. Τότε οι διαφορικές εξισώσεις για την ταχύτητα και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο αντικαθίστανται με τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + Ha \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{2\Delta y} = -1 \quad (3.39)$$

$$\frac{b_{i+1,j} - b_{i,j} + b_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j} + b_{i,j-1}}{\Delta y^2} + Ha \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0 \quad (3.40)$$

για $i = 2, \dots, I-1$ και $j = 2, \dots, J-1$. Οι εξισώσεις (3.39) και (3.40) αποτελούν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων που επιλύεται αριθμητικά.

3.3.2. Επαναληπτικό σχήμα

Το αλγεβρικό σύστημα (3.39) και (3.40) επιλύεται με ένα επαναληπτικό σχήμα διαδοχικής υπερχαλάρωσης (S.O.R). Αρχικά το σύστημα γράφεται στην μορφή

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4(\Delta y^2 + \Delta z^2)} \left[2\Delta y^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2\Delta z^2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + Ha\Delta z^2 \Delta y^2 (b_{i,j+1} - b_{i,j-1}) + 2\Delta z^2 \Delta y^2 \right]^n \quad (3.41)$$

$$b_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4(\Delta y^2 + \Delta z^2)} \left[2\Delta y^2 (b_{i+1,j} + b_{i-1,j}) + 2\Delta z^2 (b_{i,j+1} - b_{i,j-1}) + Ha\Delta z^2 \Delta y^2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right]^n \quad (3.42)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει το αριθμό επανάληψης. Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις (3.41) και (3.42) αντιπροσωπεύουν τον επαναληπτικό αλγόριθμο Gauss Seidel. Στη συνέχεια ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου επιταχύνεται εφαρμόζοντας τις επαναληπτικές σχέσεις

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= \omega u_{i,j}^{(n+1)} + (1 - \omega) u_{i,j}^{(n)} \\ b_{i,j}^{(n+1)} &= \omega b_{i,j}^{(n+1)} + (1 - \omega) b_{i,j}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

όπου ω είναι η παράμετρος χαλάρωσης. Οι επαναληπτικές σχέσεις (3.41)-(3.43) αντιπροσωπεύουν το επαναληπτικό σχήμα S.O.R. Οι τιμές που δίνονται στο συντελεστή χαλάρωσης ω είναι μεταξύ 1.7 και 1.9. Σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω υπολογίζεται πειραματικά. Σημειώνεται ότι καθώς αυξάνουμε τον αριθμό Ha χρειαζόμαστε και πυκνότερο πλέγμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνει το πλήθος των εξισώσεων που επιλύονται και σε αυτές τις περιπτώσεις το ω μεταβάλλεται.

Σε κάθε επανάληψη και σε κάθε κόμβο του πλέγματος υπολογίζεται η απόλυτη τιμή του σχετικού σφάλματος της ταχύτητας $\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{u_{i,j}^{(n+1)}}$ και η επαναληπτική διαδικασία

τερματίζεται όταν $\left| \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{u_i^{(n+1)}} \right| < \varepsilon$, για $i = 1, \dots, N$, όπου $\varepsilon = 10^{-6}$ είναι το κριτήριο τερματισμού.

3.3.3. Διακριτοποίηση οριακών συνθηκών

Η διακριτοποίηση των οριακών συνθηκών γίνεται με εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών 1^{ης} και 2^{ης} τάξης όπως στη ροή Hartmann. (βλέπε Παράγραφο 2.4.3)

3.4. Κατανομές ταχυτήτων και επαγόμενου μαγνητικού πεδίου

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται με λεπτομέρεια οι αναλυτικές και αριθμητικές κατανομές της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου για διάφορες περιπτώσεις της ροής στον τετραγωνικό αγωγό. Τα αποτελέσματα δίδονται σε πινακοποιημένη μορφή σε τρεις υποπαραγράφους εκ των οποίων η 3.4.1 είναι για πλήρως μονωμένα τοιχώματα ($\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$), η 3.4.2 για αγωγή τοιχώματα Hartman και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα ($\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$) και η 3.4.3 για ημιαγωγή τοιχώματα Hartmann και μονωμένα πλευρικά τοιχώματα ($\sigma_H \neq 0, \sigma_s = 0$).

Σε κάθε αριθμό Ha αντιστοιχούν δυο πίνακες. Ο πρώτος παρουσιάζει την κατανομή της ταχύτητας και του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα $z = 0$ και ο δεύτερος την κατανομή της ταχύτητας ως προς τον άξονα $y = 0$. Εξετάζονται οι ροές με Ha 2, 10 και 100. Τα υπόλοιπα στοιχεία των πινάκων είναι όπως στην αντίστοιχη παράγραφο της ροής Hartmann.

Αφού παρουσιαστούν τα αποτελέσματα σε πινακοποιημένη μορφή, ακολουθεί η γραφική τους απεικόνιση. Στα Γραφήματα 3.10 και 3.11 απεικονίζονται οι περιπτώσεις των μονωμένων και αγωγικών τοιχωμάτων Hartmann, ενώ στα Γραφήματα 3.12 - 3.13 τα τοιχώματα Hartmann έχουν ημιαγωγή συμπεριφορά με $c_H = 0.01$ και $c_H = 0.1$, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, σε κάθε γράφημα, η αριστερή και κεντρώα γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τις κατανομές της ταχύτητας ως προς τους άξονες $z = 0$ και $y = 0$, αντίστοιχα. Η δεξιά γραφική παράσταση δείχνει την κατανομή του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα $z = 0$. Επισημαίνουμε ότι τα αποτελέσματα είναι πάντα πολλαπλασιασμένα με τον αντίστοιχο αριθμό Ha .

Τα αναλυτικά αποτελέσματα βασίζονται στις αναλυτικές εκφράσεις ενώ τα αριθμητικά προκύπτουν από πηγαίο κώδικα σε Fortran. Το πλέγμα που χρησιμοποιούμε ξεκινά από 200×200 και φτάνει έως 500×500 . Ο Πίνακας 3.1 δίνει ενδεικτικά τον αριθμό κόμβων που χρησιμοποιούμε για συγκεκριμένους αριθμούς Ha , τις επαναλήψεις που κάνει το πρόγραμμα και τον χρόνο που διαρκεί ο υπολογισμός για τοιχώματα Hartmann πλήρως μονωμένα και αγωγή με τα πλευρικά τοιχώματα πάντα μονωμένα.

Πίνακας 3.1: Παράμετροι υπολογιστικής λύσης

Αριθμός Hartmann	Πλέγμα	Επαναλήψεις		Τιμή ω		CPU Time(sec)	
		$\sigma_H = 0$	$\sigma_H \rightarrow \infty$	$\sigma_H = 0$	$\sigma_H \rightarrow \infty$	$\sigma_H = 0$	$\sigma_H \rightarrow \infty$
		$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 0$
2	200x200	4992	5133	1.7	1.7	118.5	148
10	200x200	1672	12688	1.8	1.8	39.25	364.7
100	500x500	2025	18789	1.9	1.9	306	782.6

3.4.1. Μονωμένα τοιχώματα

Πίνακας 3.2α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2, z = 0$ και $\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5177	0.5179	0.0000	0.0000	0.1670	0.0020
0.1	0.5142	0.5143	-0.0232	-0.0232	0.1640	0.0070
0.2	0.5034	0.5036	-0.0455	-0.0455	0.1610	0.0140
0.3	0.4849	0.4850	-0.0659	-0.0659	0.1530	0.0200
0.4	0.4578	0.4579	-0.0832	-0.0832	0.1440	0.0250
0.5	0.4208	0.4210	-0.0959	-0.0959	0.1330	0.0270
0.6	0.3722	0.3723	-0.1022	-0.1022	0.1180	0.0270
0.7	0.3094	0.3095	-0.0995	-0.0995	0.1020	0.0240
0.8	0.2294	0.2295	-0.0846	-0.0846	0.0840	0.0180
0.9	0.1280	0.1281	-0.0532	-0.0532	0.0640	0.0090
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.2β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=2, y = 0$ και $\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5177	0.5179	0.1670
0.1	0.5135	0.5136	0.0710
0.2	0.5010	0.5011	0.1520
0.3	0.4796	0.4797	0.0770
0.4	0.4488	0.4489	0.1090
0.5	0.4076	0.4077	0.0940
0.6	0.3550	0.3551	0.0340
0.7	0.2897	0.2898	0.1320
0.8	0.2099	0.2098	0.0970
0.9	0.1140	0.1142	0.2410
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.3α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10, z = 0$ και $\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.9734	0.9737	0.0000	0.0000	0.2800	0.0000
0.1	0.9726	0.9729	-0.0923	-0.0923	0.2790	0.0060
0.2	0.9704	0.9706	-0.1845	-0.1845	0.2760	0.0110
0.3	0.9664	0.9667	-0.2761	-0.2761	0.2670	0.0090
0.4	0.9603	0.9605	-0.3667	-0.3667	0.2450	0.0070
0.5	0.9506	0.9508	-0.4546	-0.4545	0.1930	0.0530
0.6	0.9333	0.9334	-0.5356	-0.5355	0.0820	0.1610
0.7	0.8974	0.8973	-0.5987	-0.5983	0.1410	0.3820
0.8	0.8120	0.8115	-0.6125	-0.6118	0.5090	0.7470
0.9	0.5915	0.5907	-0.4917	-0.4907	0.8340	1.0610
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.3β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=10, y = 0$ και $\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.9734	0.9737	0.2800
0.1	0.9703	0.9701	0.1850
0.2	0.9603	0.9605	0.2470
0.3	0.9415	0.9414	0.0810
0.4	0.9104	0.9106	0.1370
0.5	0.8619	0.8620	0.1280
0.6	0.7882	0.7881	0.0980
0.7	0.6793	0.6798	0.4700
0.8	0.5223	0.5217	0.6070
0.9	0.3018	0.3029	1.1420
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.4α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100, z = 0$ και $\sigma_H = 0, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	1.0000	1.0024	0.0000	0.0000	2.4060	0.0080
0.1	1.0000	1.0024	-0.1000	-0.1000	2.4060	0.0020
0.2	1.0000	1.0024	-0.2000	-0.2000	2.4060	0.0000
0.3	1.0000	1.0024	-0.3000	-0.3000	2.4070	0.0020
0.4	1.0000	1.0024	-0.4000	-0.4000	2.4090	0.0070
0.5	1.0000	1.0024	-0.5000	-0.5000	2.4130	0.0180
0.6	1.0000	1.0024	-0.6000	-0.6000	2.4070	0.0340
0.7	1.0000	1.0024	-0.7000	-0.7000	2.3820	0.0720
0.8	1.0000	1.0023	-0.8000	-0.8001	2.2970	0.1700
0.9	0.9999	1.0020	-0.8999	-0.9004	2.0330	0.4390
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.4β Κατανομή ταχύτητας για $Ha=100$, $y=0$ και $\sigma_H=0, \sigma_s=0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	1.0000	1.0024	2.4059
0.1	1.0000	0.9977	2.2721
0.2	1.0000	1.0020	1.9859
0.3	1.0000	0.9986	1.4071
0.4	1.0000	1.0006	0.6463
0.5	0.9999	1.0004	0.4482
0.6	0.9990	0.9971	1.8634
0.7	0.9911	0.9949	3.8710
0.8	0.9411	0.9344	6.7012
0.9	0.7179	0.7290	11.0783
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

3.4.2. Αγωγή Hartmann – Μονωμένα πλευρικά

Πίνακας 3.5α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2$, $z=0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s=0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.4057	0.4051	0.0000	0.0000	0.5510	0.0040
0.1	0.4045	0.4020	-0.0405	-0.0408	2.5440	0.3210
0.2	0.3949	0.3924	-0.0807	-0.0814	2.5240	0.6610
0.3	0.3787	0.3762	-0.1201	-0.1212	2.4840	1.0310
0.4	0.3552	0.3528	-0.1584	-0.1598	2.4180	1.4470
0.5	0.3239	0.3216	-0.1947	-0.1966	2.3120	1.9280
0.6	0.2836	0.2814	-0.2282	-0.2307	2.1480	2.4950
0.7	0.2330	0.2311	-0.2577	-0.2608	1.9000	3.1760
0.8	0.1704	0.1689	-0.2814	-0.2854	1.5330	4.0030
0.9	0.0937	0.0927	-0.2973	-0.3023	0.9780	5.0160
1.0	0.0000	0.0000	-0.3024	-0.3087	0.0000	6.2670

Πίνακας 3.5β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=2$, $y = 0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.4057	0.4051	0.5510
0.1	0.4048	0.4027	2.1370
0.2	0.3963	0.3943	1.9250
0.3	0.3814	0.3791	2.2960
0.4	0.3596	0.3577	1.8850
0.5	0.3296	0.3284	1.2230
0.6	0.2811	0.2814	0.2790
0.7	0.2325	0.2311	1.4040
0.8	0.1697	0.1689	0.8340
0.9	0.0927	0.0927	0.0330
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.6α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10$, $z = 0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.1510	0.1486	0.0000	0.0000	2.3800	0.0010
0.1	0.1504	0.1480	-0.1090	-0.1090	2.3790	0.0230
0.2	0.1485	0.1461	-0.2178	-0.2179	2.3760	0.0430
0.3	0.1454	0.1430	-0.3262	-0.3263	2.3720	0.0620
0.4	0.1411	0.1387	-0.4340	-0.4340	2.3660	0.0780
0.5	0.1355	0.1332	-0.5406	-0.5407	2.3580	0.0910
0.6	0.1284	0.1260	-0.6456	-0.6457	2.3480	0.0980
0.7	0.1185	0.1162	-0.7474	-0.7475	2.3240	0.1020
0.8	0.1027	0.1004	-0.8425	-0.8427	2.2380	0.1080
0.9	0.0717	0.0698	-0.9214	-0.9216	1.8610	0.1580
1.0	0.0000	0.0000	-0.9583	-0.9589	0.0000	0.6050

Πίνακας 3.6β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=10$, $y = 0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$

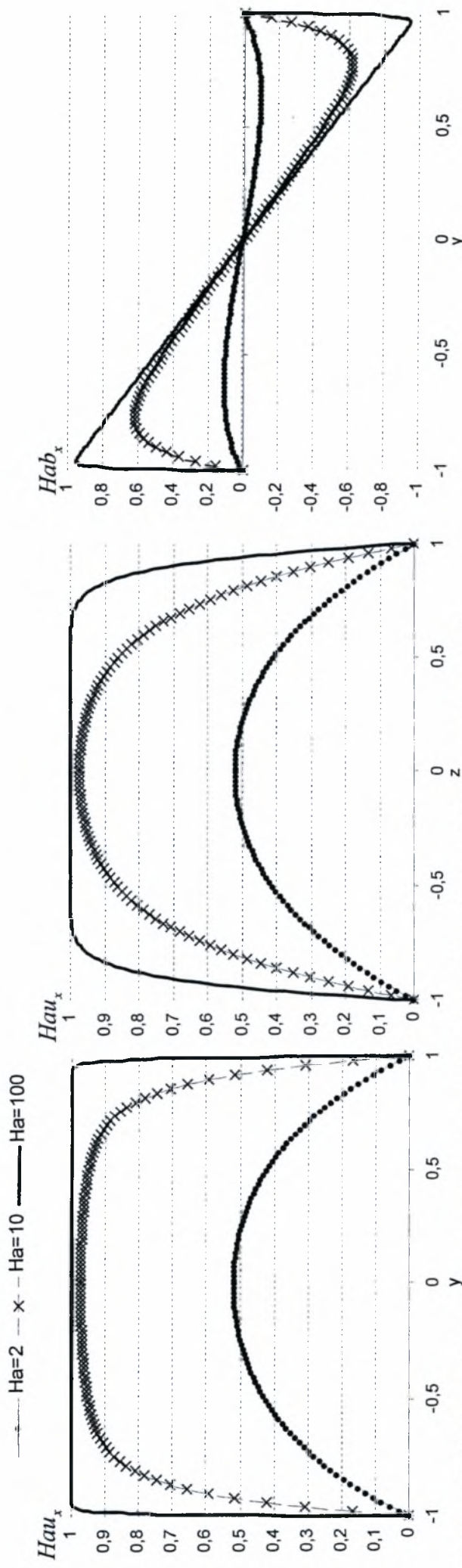
z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.1510	0.1486	2.3800
0.1	0.1562	0.1557	0.4350
0.2	0.1711	0.1713	0.2400
0.3	0.1944	0.1921	2.2460
0.4	0.2231	0.2221	1.0400
0.5	0.2522	0.2534	1.2180
0.6	0.2739	0.2720	1.8790
0.7	0.2768	0.2749	1.8940
0.8	0.2454	0.2488	3.3690
0.9	0.1606	0.1579	2.7260
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.7α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100, z = 0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$

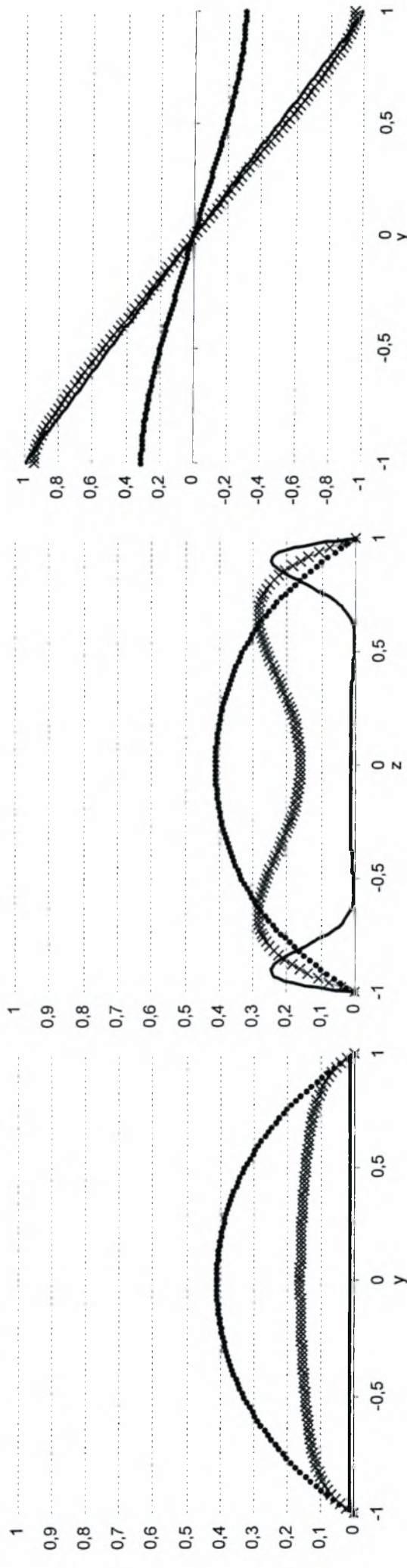
y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.0135	0.0099	0.0000	0.0000	3.5190	0.0000
0.1	0.0135	0.0099	-0.1000	-0.1000	3.5190	0.0010
0.2	0.0135	0.0099	-0.2001	-0.2001	3.5180	0.0030
0.3	0.0135	0.0099	-0.3001	-0.3001	3.5180	0.0030
0.4	0.0134	0.0099	-0.4001	-0.4001	3.5180	0.0040
0.5	0.0134	0.0099	-0.5001	-0.5001	3.5180	0.0060
0.6	0.0134	0.0099	-0.6001	-0.6001	3.5180	0.0060
0.7	0.0134	0.0099	-0.7001	-0.7002	3.5170	0.0070
0.8	0.0134	0.0099	-0.8002	-0.8002	3.5170	0.0070
0.9	0.0134	0.0099	-0.9002	-0.9002	3.5160	0.0060
1.0	0.0000	0.0000	-0.9868	-0.9901	0.0000	3.2450

Πίνακας 3.7β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=100, y = 0$ και $\sigma_H \rightarrow \infty, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.0135	0.0099	3.5190
0.1	0.0136	0.0103	3.2710
0.2	0.0137	0.0106	3.1610
0.3	0.0131	0.0096	3.4720
0.4	0.0101	0.0067	3.3970
0.5	0.0046	0.0014	3.2280
0.6	0.0058	0.0019	3.8490
0.7	0.0420	0.0380	4.0140
0.8	0.1457	0.1434	2.3500
0.9	0.2481	0.2467	1.3550
1.0	0.0000	0.0000	0.0000



Γράφημα 3.10: Κατανομές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου για $Ha = 2, 10$ και 100 με $\sigma_H = 0$ και $\sigma_s = 0$



Γράφημα 3.11: Κατανομές της x συνιστώσας της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου για $Ha = 2, 10$ και 100 με $\sigma_H \rightarrow \infty$ και $\sigma_s = 0$

3.4.3. Ημιαγώγιμα Hartmann – Μονωμένα πλευρικά

Πίνακας 3.8α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2, z = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5153	0.5154	0.0000	0.0000	0.0419	0.0010
0.1	0.5118	0.5119	-0.0236	-0.0236	0.0406	0.0010
0.2	0.5011	0.5011	-0.0463	-0.0463	0.0387	0.0030
0.3	0.4826	0.4827	-0.0671	-0.0671	0.0351	0.0040
0.4	0.4556	0.4556	-0.0848	-0.0848	0.0299	0.0060
0.5	0.4188	0.4188	-0.0981	-0.0981	0.0244	0.0060
0.6	0.3703	0.3703	-0.1049	-0.1049	0.0178	0.0060
0.7	0.3078	0.3078	-0.1029	-0.1029	0.0111	0.0060
0.8	0.2282	0.2282	-0.0888	-0.0888	0.0043	0.0060
0.9	0.1273	0.1273	-0.0585	-0.0585	0.0011	0.0070
1.0	0.0000	0.0000	-0.0065	-0.0065	0.0000	0.0100

Πίνακας 3.8β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=2, y = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5153	0.5154	0.0420
0.1	0.5112	0.5113	0.0460
0.2	0.4987	0.4988	0.0470
0.3	0.4775	0.4775	0.0380
0.4	0.4468	0.4469	0.0380
0.5	0.4060	0.4060	0.0410
0.6	0.3537	0.3537	0.0280
0.7	0.2886	0.2886	0.0180
0.8	0.2092	0.2092	0.0270
0.9	0.1136	0.1136	0.0080
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.9α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10, z = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.9093	0.9088	0.0000	0.0000	0.5240	0.0170
0.1	0.9086	0.9081	-0.0937	-0.0937	0.5280	0.0080
0.2	0.9063	0.9058	-0.1872	-0.1872	0.5360	0.0290
0.3	0.9024	0.9019	-0.2802	-0.2802	0.5480	0.0430
0.4	0.8964	0.8958	-0.3721	-0.3721	0.5730	0.0430
0.5	0.8870	0.8864	-0.4615	-0.4615	0.6230	0.0130
0.6	0.8705	0.8698	-0.5445	-0.5445	0.7270	0.0730
0.7	0.8366	0.8356	-0.6107	-0.6104	0.9230	0.2540
0.8	0.7565	0.7553	-0.6310	-0.6305	1.2210	0.5410
0.9	0.5508	0.5494	-0.5260	-0.5253	1.3830	0.6930
1.0	0.0000	0.0000	-0.0760	-0.0767	0.0000	0.6770

Πίνακας 3.9β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=10$, $y = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.9093	0.9088	0.5240
0.1	0.9069	0.9064	0.4930
0.2	0.8989	0.8984	0.4620
0.3	0.8835	0.8830	0.4570
0.4	0.8572	0.8568	0.3960
0.5	0.8147	0.8144	0.3030
0.6	0.7485	0.7483	0.2730
0.7	0.6483	0.6481	0.2200
0.8	0.5011	0.5010	0.0710
0.9	0.2909	0.2909	0.0610
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.10α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$, $z = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5058	0.5048	0.0000	0.0000	1.8600	0.0050
0.1	0.5058	0.5048	-0.1000	-0.1000	1.8620	0.0000
0.2	0.5058	0.5048	-0.2000	-0.2000	1.8620	0.0050
0.3	0.5058	0.5048	-0.3000	-0.3000	1.8650	0.0100
0.4	0.5058	0.5048	-0.4000	-0.4000	1.8660	0.0160
0.5	0.5058	0.5048	-0.5000	-0.5000	1.8670	0.0200
0.6	0.5058	0.5048	-0.5999	-0.6000	1.8680	0.0240
0.7	0.5058	0.5048	-0.6999	-0.7000	1.8690	0.0260
0.8	0.5058	0.5048	-0.7999	-0.8000	1.8700	0.0270
0.9	0.5058	0.5048	-0.8999	-0.8999	1.8830	0.0130
1.0	0.0000	0.0000	-0.4913	-0.4949	0.0000	3.6710

Πίνακας 3.10β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=100$, $y = 0$ και $\sigma_H = 0.01, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5058	0.5048	1.8600
0.1	0.5057	0.5050	0.6200
0.2	0.5057	0.5050	0.6670
0.3	0.5053	0.5043	0.9110
0.4	0.5054	0.5041	1.3221
0.5	0.5066	0.5058	0.7850
0.6	0.5153	0.5142	1.0830
0.7	0.5406	0.5399	0.6930
0.8	0.5751	0.5746	0.4933
0.9	0.5067	0.5060	0.7460
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.11α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=2, z = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.4975	0.4975	0.0000	0.0000	0.0091	0.0050
0.1	0.4941	0.4941	-0.0264	-0.0264	0.0084	0.0020
0.2	0.4835	0.4835	-0.0519	-0.0519	0.0061	0.0080
0.3	0.4654	0.4654	-0.0758	-0.0758	0.0042	0.0150
0.4	0.4390	0.4390	-0.0969	-0.0969	0.0010	0.0220
0.5	0.4031	0.4031	-0.1140	-0.1140	0.0023	0.0290
0.6	0.3560	0.3560	-0.1252	-0.1252	0.0064	0.0350
0.7	0.2955	0.2955	-0.1283	-0.1284	0.0092	0.0440
0.8	0.2187	0.2187	-0.1204	-0.1204	0.0113	0.0520
0.9	0.1218	0.1218	-0.0975	-0.0976	0.0101	0.0620
1.0	0.0000	0.0000	-0.0547	-0.0548	0.0000	0.0760

Πίνακας 3.11β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=2, y = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.4975	0.4975	0.0090
0.1	0.4936	0.4936	0.0140
0.2	0.4818	0.4818	0.0160
0.3	0.4616	0.4616	0.0090
0.4	0.4324	0.4324	0.0120
0.5	0.3933	0.3933	0.0170
0.6	0.3431	0.3431	0.0090
0.7	0.2804	0.2804	0.0030
0.8	0.2036	0.2036	0.0170
0.9	0.1108	0.1108	0.0040
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.12α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=10, z = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5951	0.5947	0.0000	0.0000	0.3490	0.0310
0.1	0.5944	0.5940	-0.1002	-0.1002	0.3560	0.0180
0.2	0.5922	0.5919	-0.2002	-0.2002	0.3710	0.0060
0.3	0.5886	0.5882	-0.2997	-0.2997	0.3940	0.0040
0.4	0.5832	0.5828	-0.3983	-0.3984	0.4250	0.0120
0.5	0.5752	0.5748	-0.4951	-0.4951	0.4620	0.0130
0.6	0.5624	0.5619	-0.5874	-0.5874	0.5080	0.0070
0.7	0.5382	0.5376	-0.6685	-0.6685	0.5620	0.0060
0.8	0.4844	0.4838	-0.7201	-0.7201	0.6020	0.0070
0.9	0.3510	0.3504	-0.6918	-0.6919	0.5390	0.0930
1.0	0.0000	0.0000	-0.4457	-0.4463	0.0000	0.6440

Πίνακας 3.12β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=10$, $y = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

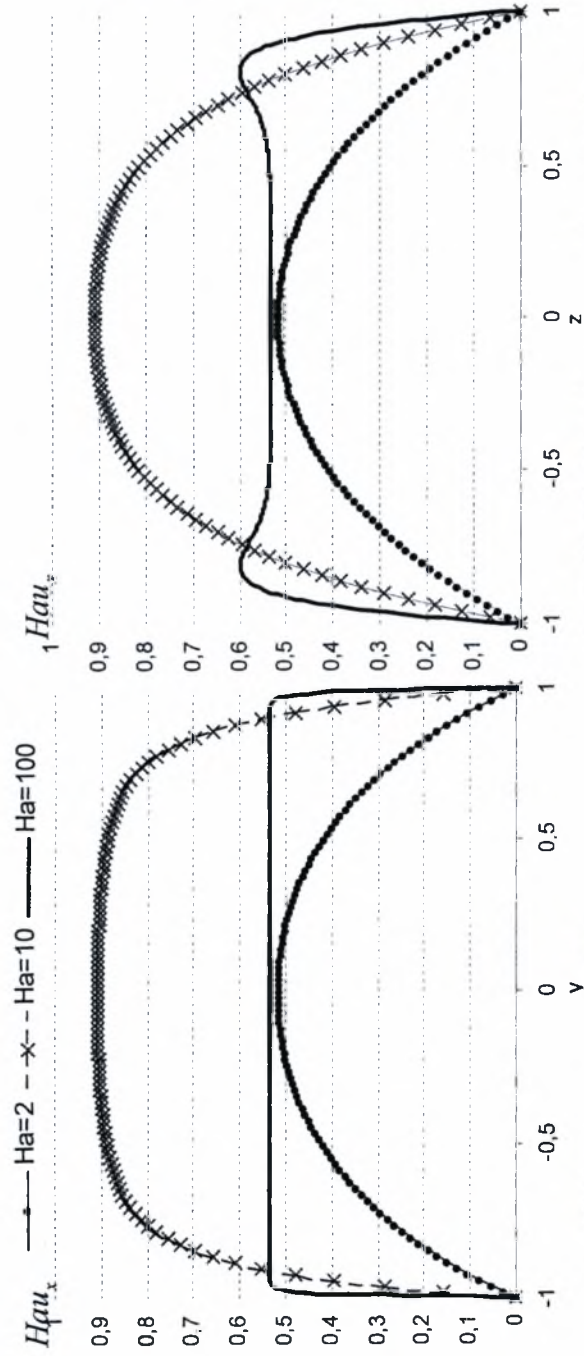
z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.5951	0.5947	0.3490
0.1	0.5958	0.5955	0.3230
0.2	0.5976	0.5973	0.3060
0.3	0.5985	0.5982	0.3240
0.4	0.5953	0.5950	0.2910
0.5	0.5828	0.5826	0.2290
0.6	0.5531	0.5529	0.2280
0.7	0.4956	0.4954	0.2000
0.8	0.3961	0.3960	0.0660
0.9	0.2375	0.2374	0.0610
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας 3.13α: Κατανομή ταχύτητας και μαγνητικού πεδίου για $Ha=100$, $z = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

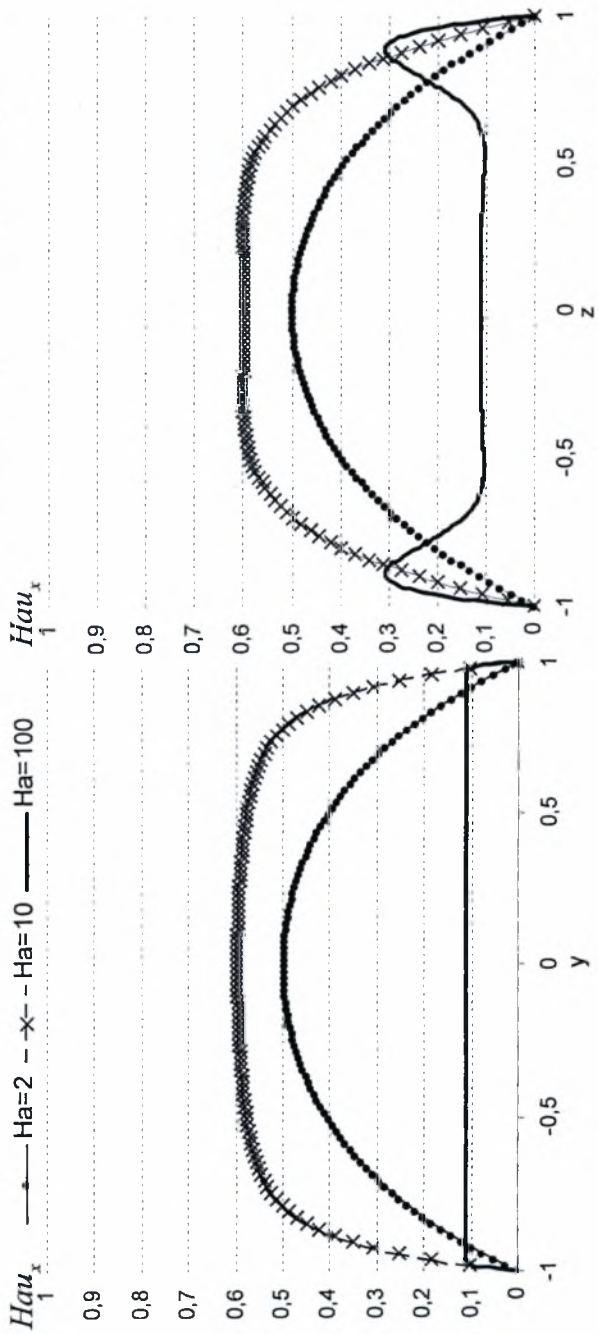
y	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$Hab_N(y, z)$	$Hab(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$	$ b(y, z) - b_N(y, z) 10^3$
0.0	0.1013	0.1000	0.0000	0.0000	1.3920	0.0020
0.1	0.1013	0.1000	-0.1000	-0.1000	1.3930	0.0010
0.2	0.1013	0.1000	-0.2000	-0.2000	1.3950	0.0030
0.3	0.1013	0.0999	-0.3000	-0.3000	1.3960	0.0060
0.4	0.1013	0.0999	-0.4000	-0.4001	1.3980	0.0080
0.5	0.1013	0.0999	-0.5001	-0.5001	1.4000	0.0110
0.6	0.1013	0.0999	-0.6001	-0.6001	1.4030	0.0130
0.7	0.1013	0.0999	-0.7001	-0.7001	1.4070	0.0140
0.8	0.1013	0.0999	-0.8001	-0.8001	1.4100	0.0160
0.9	0.1013	0.0998	-0.9001	-0.9001	1.4160	0.0130
1.0	0.0000	0.0000	-0.8888	-0.9000	0.0000	11.1660

Πίνακας 3.13β: Κατανομή ταχύτητας για $Ha=100$, $y = 0$ και $\sigma_H = 0.1, \sigma_s = 0$

z	$Hau_N(y, z)$	$Hau(y, z)$	$ u(y, z) - u_N(y, z) 10^3$
0.0	0.1013	0.1000	1.3920
0.1	0.1014	0.1003	1.1440
0.2	0.1014	0.1004	1.0330
0.3	0.1006	0.0993	1.3490
0.4	0.0988	0.0968	2.0062
0.5	0.0955	0.0934	2.0951
0.6	0.0990	0.0970	1.9881
0.7	0.1350	0.1339	1.1520
0.8	0.2291	0.2282	0.8320
0.9	0.2991	0.2988	0.2580
1.0	0.0000	0.0000	0.0000



Γράφημα 3.12: Κατανομές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου για $Ha = 2, 10$ και 100 με $\sigma_H = 0.01$ και $\sigma_s = 0$



Γράφημα 3.13: Κατανομές της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου για $Ha = 2, 10$ και 100 με $\sigma_H = 0.1$ και $\sigma_s = 0$

3.5. Παροχή και Δύναμη Lorentz

Η παροχή προκύπτει από το ολοκλήρωμα

$$Q = \int_{-d}^d \int_{-d}^d u(y, z) dy dz \quad (3.44)$$

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των κατανομών ταχύτητας βρίσκουμε ότι όταν τα τοιχώματα Hartmann είναι μονωμένα τότε

$$Q = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4k_i}{p_i^1 p_i^2 \lambda_i^3} \csc h(p_i^1 - p_i^2) \sin(\lambda_i) \left[p_i^1 p_i^2 \cosh(p_i^2) \sinh(p_i^1) - [p_i^1 p_i^2 \cosh(p_i^1) + (p_i^1 - p_i^2) \sinh(p_i^1)] \sinh(p_i^2) \right] \quad (3.45)$$

ενώ όταν είναι πλήρως αγωγίμα τότε

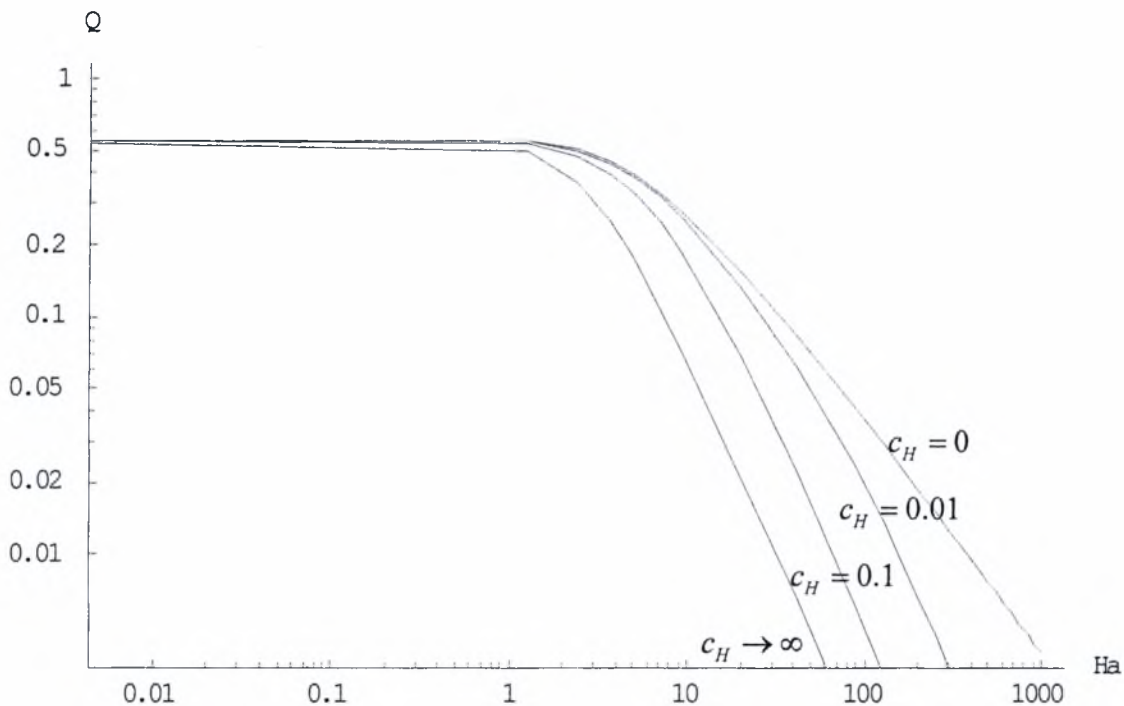
$$Q = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4k_i \sin(\lambda_i)}{p_i^1 p_i^2 (p_i^2 - p_i^1) \lambda_i^3} \left\{ p_i^1 (p_i^2)^2 - (p_i^2)^2 \tanh(p_i^1) + (p_i^1)^2 [-p_i^2 + \tanh(p_i^2)] \right\} \quad (3.46)$$

Τέλος στην γενική περίπτωση των ημιαγωγίμων τοιχωμάτων Hartmann η παροχή δίδεται από την σχέση

$$Q = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4k_i \sin(\lambda_i)}{\lambda_i^3} \left\{ 1 + \frac{c_H p_i^2 \cosh(p_i^2) \sinh(p_i^1)}{p_i^1 [c_H (p_i^1 - (p_i^2)^2) \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} - \frac{c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2)}{p_i^2 [c_H (p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} - \frac{\sinh(p_i^1) \sinh(p_i^2)}{p_i^2 [c_H (p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} + \frac{\sinh(p_i^1) \sinh(p_i^2)}{p_i^1 [c_H (p_i^1 - p_i^2) \cosh(p_i^1) \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} \right\} \quad (3.47)$$

Στο Γράφημα 3.14 δίδεται η αδιάστατη παροχή σε σχέση με τον αριθμό Ha για διάφορες τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς c_H . Πρακτικά μεταβάλουμε την αγωγιμότητα των τοιχωμάτων Hartmann, ενώ τα πλευρικά είναι μονωμένα. Όπως και στην ροή Hartmann, βλέπουμε, ότι η παροχή ελαττώνεται καθώς ο Ha αυξάνει. Επίσης, παρατηρούμε ότι για τον

ίδιο αριθμό Ha η παροχή αυξάνει καθώς αυξάνεται η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς. Τέλος, σημειώνεται ότι η παροχή μεταβάλλεται σημαντικά με πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου c_H , ειδικά για $Ha \geq 10$, ενώ τα αποτελέσματα για $c_H > 1$ είναι πρακτικά ταυτόσημα με τα αντίστοιχα για $c_H \rightarrow \infty$.

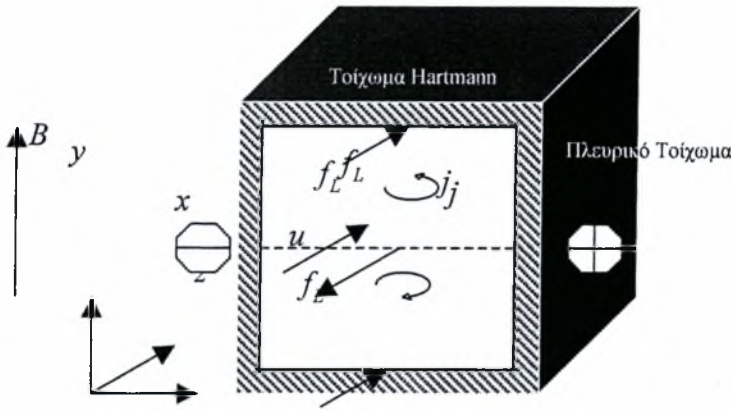


Γράφημα 3.14: Αδιάστατη ΜΥΔ παροχή ως προς τον αριθμό Ha με ημιαγωγία Hartmann ($0 \leq c \leq \infty$) και μονωμένα πλευρικά.

Η δύναμη Lorentz δίδεται από την έκφραση

$$F_L(y, z) = Ha \frac{\partial}{\partial y} b(y, z) \quad (3.48)$$

Μία ποιοτική εικόνα της δύναμης Lorentz μεταξύ των τοιχωμάτων του αγωγού παρουσιάζεται στο γράφημα 3.15. Το γράφημα δείχνει ότι η δύναμη Lorentz παίρνει αρνητικές τιμές στον πυρήνα του καναλιού και θετικές τιμές κοντά στα τοιχώματα Hartmann. Αυτό προέρχεται από το ηλεκτρικό ρεύμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση στην περιοχή του πυρήνα από ότι στα τοιχώματα Hartmann. Με την αύξηση της αγωγιμότητας των τοιχωμάτων Hartmann του καναλιού, το σημαντικότερο μέρος του προσκληθέντος ρεύματος βραχυκυκλώνεται απότομα κατά μήκος των τοιχωμάτων.



Γράφημα 3.15: Σχεδιάγραμμα με τις βασικές αρχές μαγνητοϋδροδυναμικής ροής σε αγωγό

Παραγωγίζοντας τις αναλυτικές εκφράσεις των κατανομών του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου βρίσκουμε ότι για $c_H = 0$, $c_H = \infty$ και $0 < c_H < \infty$ προκύπτουν αντίστοιχα οι παρακάτω εκφράσεις κλειστής μορφής για τη δύναμη Lorentz:

$$F_L = Ha \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k_i \cos(\lambda_i z)}{\lambda_i^2} \frac{p_i^2 \cosh(p_i^2 y) \sinh(p_i^1) - p_i^1 \cosh(p_i^1 y) \sinh(p_i^2)}{\cosh(p_i^1) \sinh(p_i^2) - \cosh(p_i^2) \sinh(p_i^1)} \quad (3.49)$$

$$F_L = Ha \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \cos(\lambda_i z) \left[-\frac{\cosh(p_i^2 y) \csc h(p_i^1 - p_i^2) - k_i p_i^2 \sinh(p_i^1)}{\lambda_i^2} + \frac{\cosh(p_i^1 y) \csc h(p_i^1 - p_i^2) - k_i p_i^1 \sinh(p_i^2)}{\lambda_i^2} \right] \quad (3.50)$$

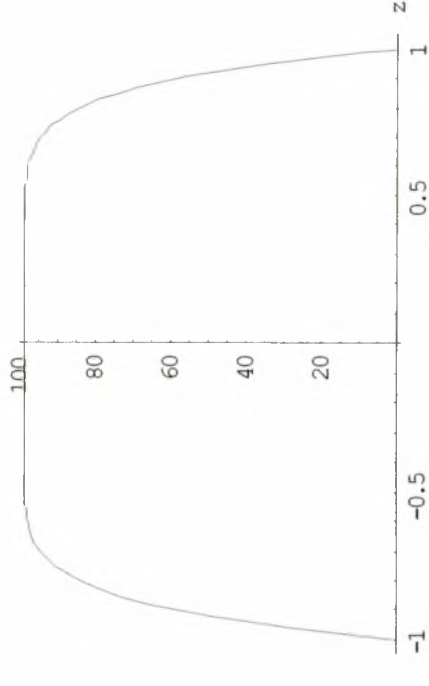
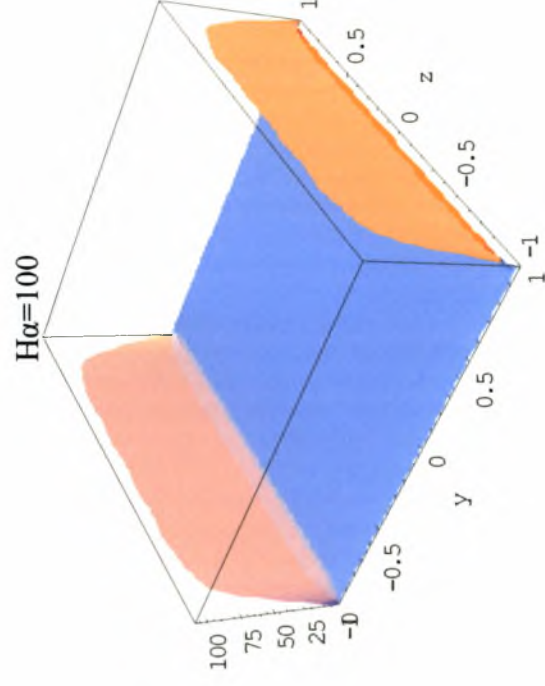
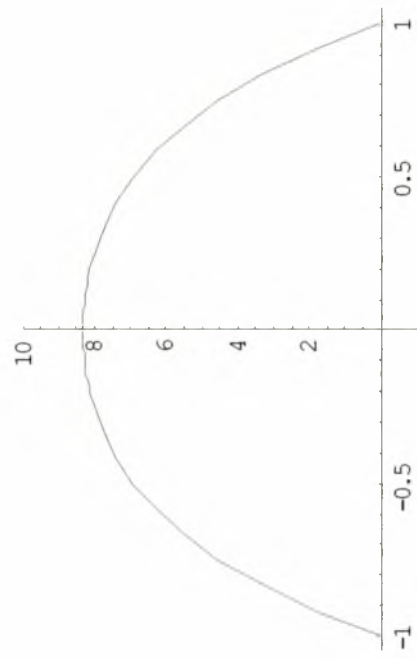
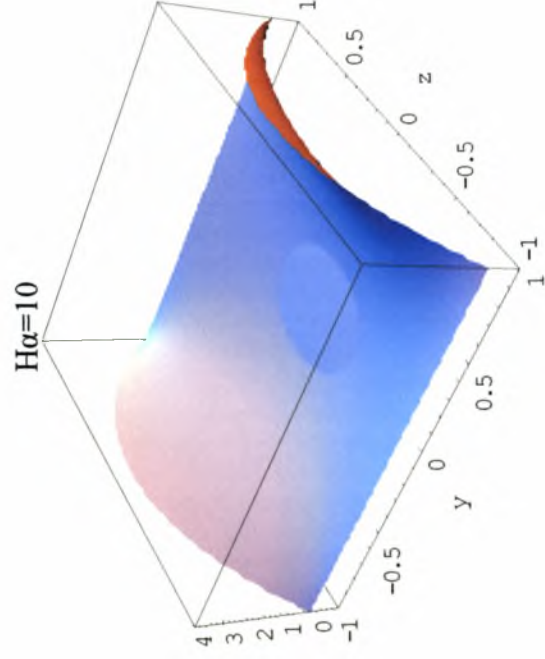
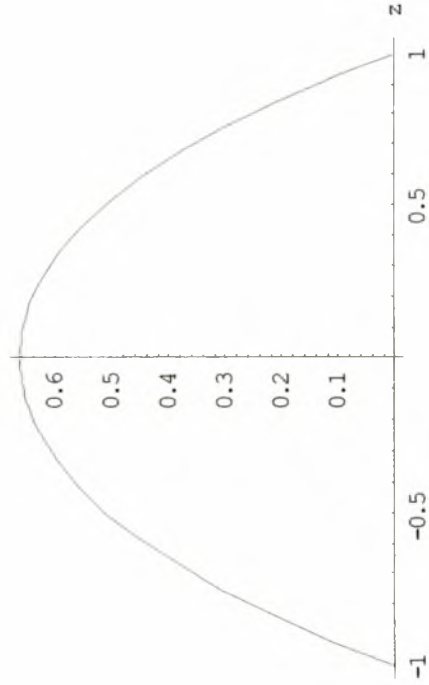
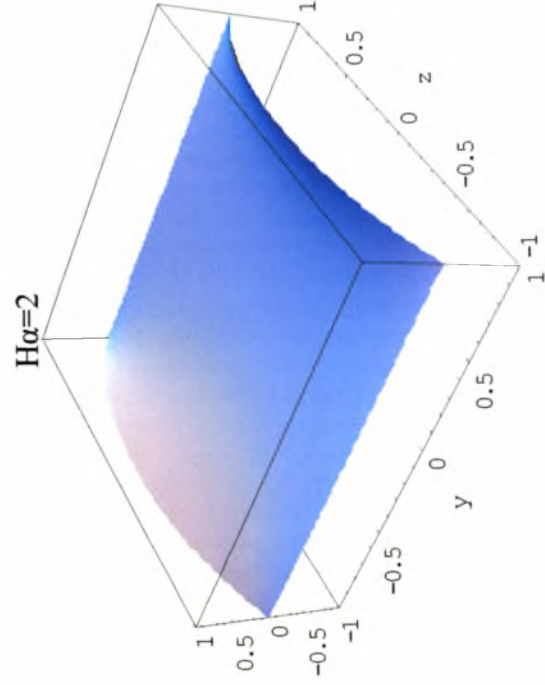
$$F_L = Ha \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \cosh(\lambda_i z) \left\{ -\frac{p_i^2 k_i \cosh(p_i^2 y) [c_H p_i^1 \cosh(p_i^1) + \sinh(p_i^1)]}{\lambda_i^2 [c_H \cosh(p_i^1) p_i^1 \cosh(p_i^2) - c_H \cosh(p_i^1) p_i^2 \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} + \frac{p_i^1 k_i \cosh(p_i^1 y) [c_H p_i^2 \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^2)]}{\lambda_i^2 [c_H \cosh(p_i^1) p_i^1 \cosh(p_i^2) - c_H \cosh(p_i^1) p_i^2 \cosh(p_i^2) + \sinh(p_i^1 - p_i^2)]} \right\} \quad (3.51)$$

Σημειώνεται ότι όλα τα παραπάνω αποτελέσματα για τις παροχές και τις δυνάμεις Lorentz ισχύουν για μονωμένα πλευρικά τοιχώματα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται γραφήματα των αναλυτικών κατανομών των δυνάμεων Lorentz για διάφορες παραμέτρους της ροής.

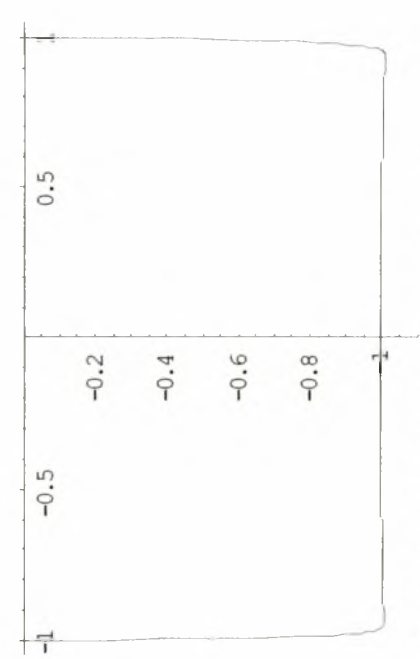
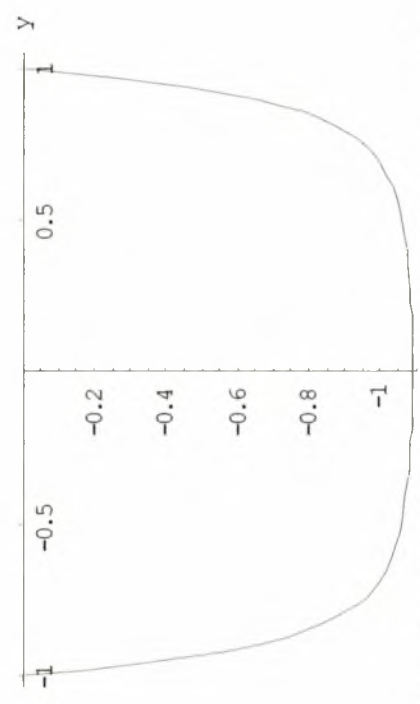
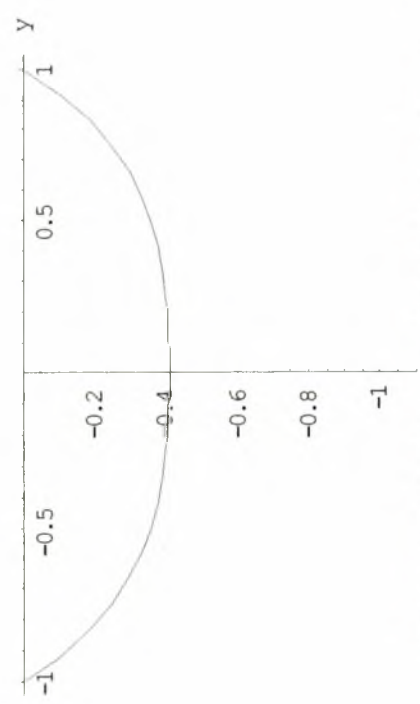
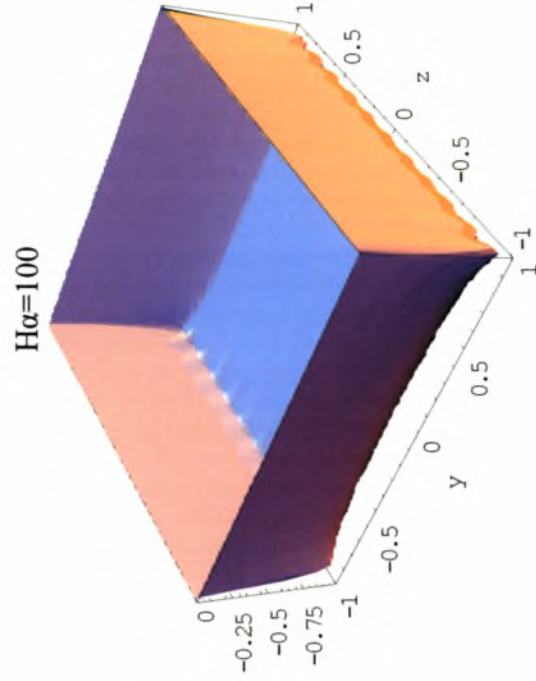
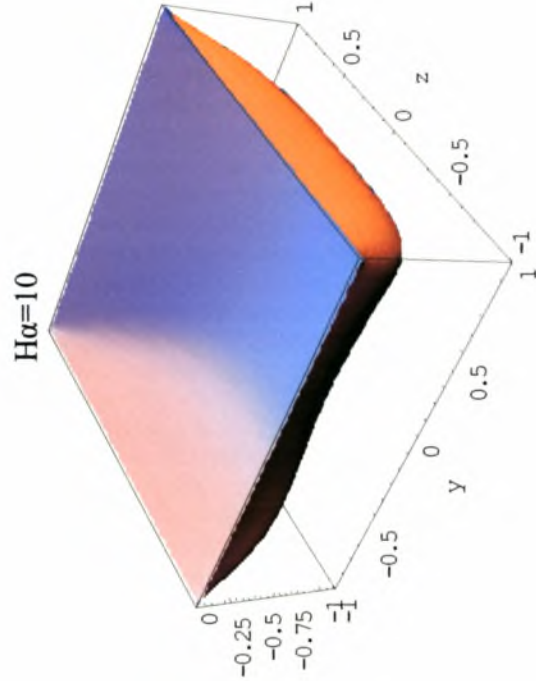
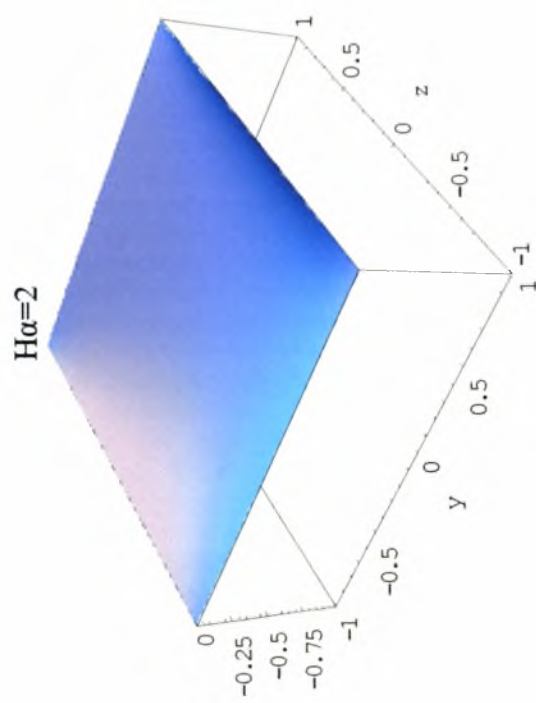
Στα τρισδιάστατα σχεδιαγράμματα του Γραφήματος 3.16 απεικονίζεται η κατανομή της δύναμης Lorentz εγκάρσια της ροής για την περίπτωση των πλήρως μονωμένων τοιχωμάτων, για αριθμούς $Ha = 2, 10$ και 100 . Παρατηρούμε, ότι η δύναμη αλλάζει πρόσημο κατά μήκος του άξονα y . Στον πυρήνα του καναλιού είναι αρνητική, ίση με -1 και η ροή επιβραδύνεται, ενώ στα τοιχώματα Hartmann είναι θετική και η ροή επιταχύνεται. Μάλιστα για $Ha \gg 1$ η δύναμη στα τοιχώματα Hartmann είναι ανάλογη του αριθμού Ha και για την ακρίβεια ίση με $-1 + Ha$. Επίσης, στα δυσδιάστατα σχεδιαγράμματα του Γραφήματος 3.16 φαίνεται η κατανομή της δύναμης Lorentz κατά μήκος των πλευρικών τοιχωμάτων στο $z = \pm d$.

Αντίστοιχες απεικονίσεις δίδονται στο γράφημα 3.17, για την περίπτωση των πλήρως αγωγίμων τοιχωμάτων Hartmann με μονωμένα τα πλευρικά. Γίνεται εμφανές πως τώρα, η δύναμη Lorentz έχει το ίδιο πρόσημο και είναι αντίθετη στη ροή σε όλο το μήκος του αγωγού. Η συμπεριφορά αυτή αιτιολογεί το γεγονός ότι οι τιμές της ταχύτητας και της παροχής στην περίπτωση των αγωγίμων τοιχωμάτων Hartmann, είναι κατά πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες των πλήρως μονωμένων τοιχωμάτων. Κοντά στα πλευρικά τοιχώματα η δύναμη Lorentz μειώνεται έντονα. Εξαιτίας αυτού, στα τοιχώματα έχουμε ανάπτυξη υψηλών ταχυτήτων. Κατά συνέπεια μια σημαντική ποσότητα του συνολικού όγκου της ροής μεταφέρεται στα πλευρικά οριακά στρωματά. Στο σύνορο των πλευρικών οριακών στρωμάτων είναι δυνατόν να δημιουργηθούν και περιοχές ανάστροφης ροής καθώς ο Ha παίρνει μεγάλες τιμές, όπως φαίνεται και από το γράφημα 3.11. Σε αυτήν την περίπτωση επιλέγουμε να απεικονίσουμε, στα δυσδιάστατα σχεδιαγράμματα, την κατανομή της δύναμης κατά μήκος του άξονα $z = 0$.

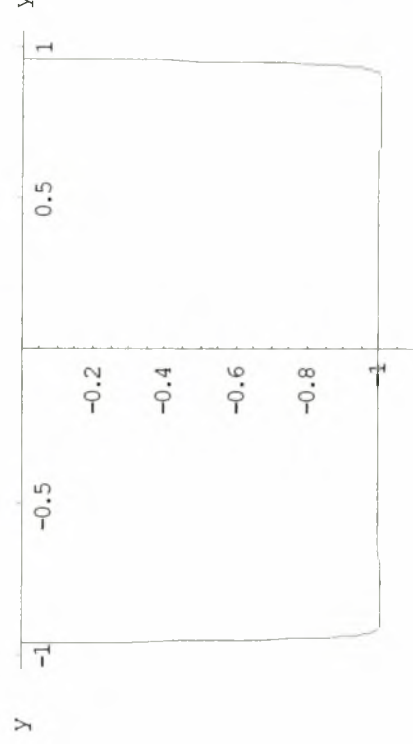
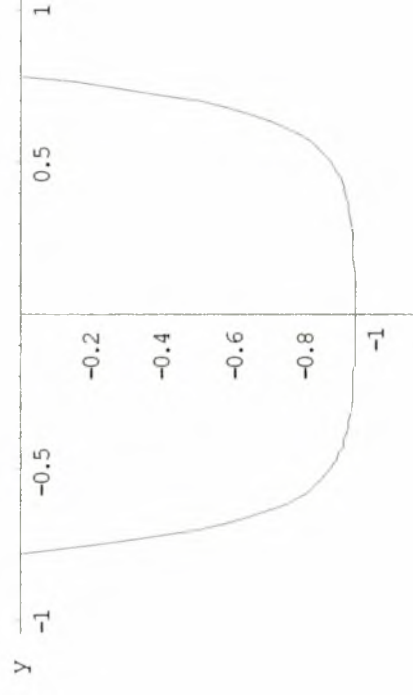
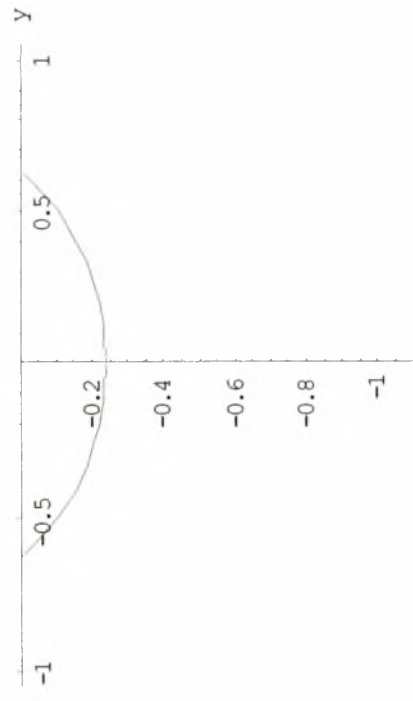
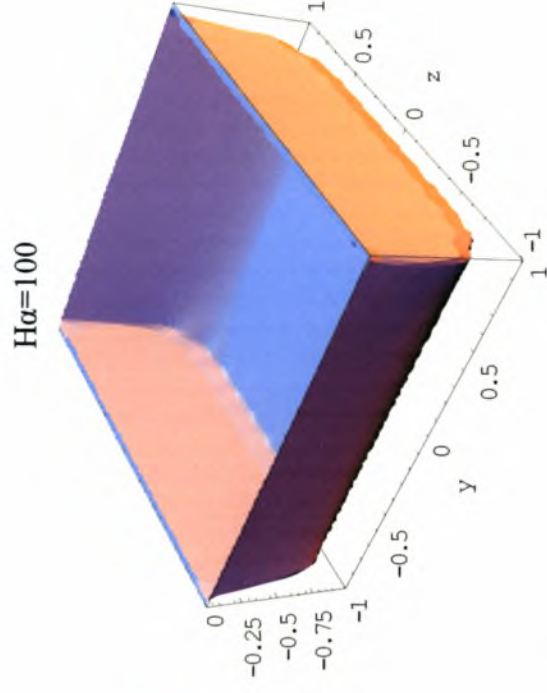
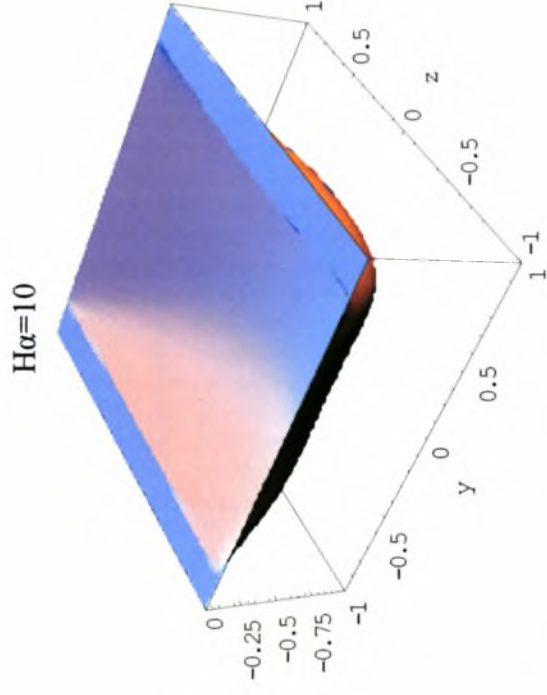
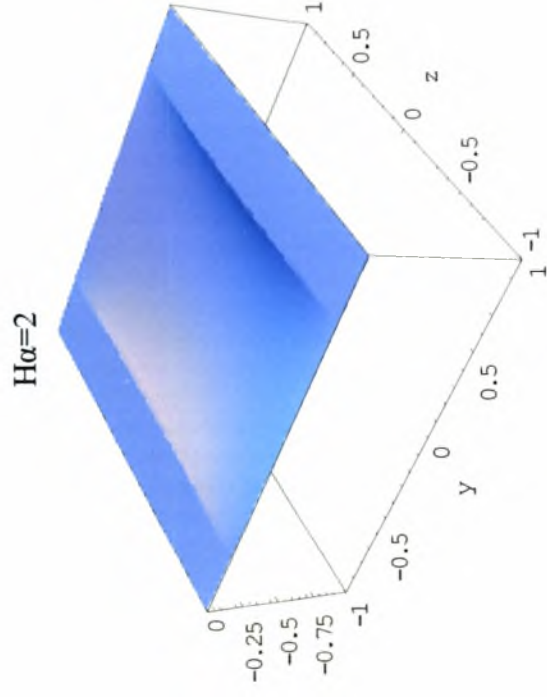
Τέλος στα γραφήματα 3.18 – 3.19 απεικονίζεται η δύναμη για την γενική περίπτωση των ημιαγωγίμων τοιχωμάτων Hartmann με μονωμένα τα πλευρικά τοιχώματα του αγωγού. Ενδεικτικά παρουσιάζονται τα σχεδιαγράμματα της δύναμης Lorentz για $c_H = 0.01$ και $c_H = 0.1$ για $Ha = 2, 10$ και 100 .



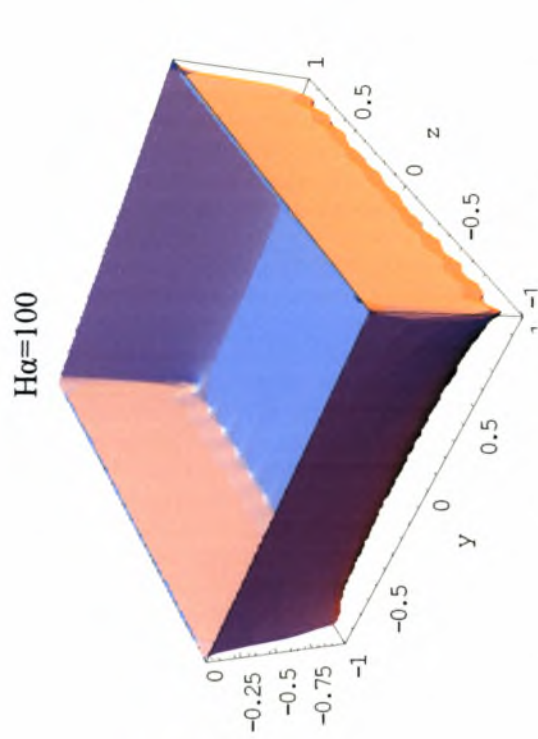
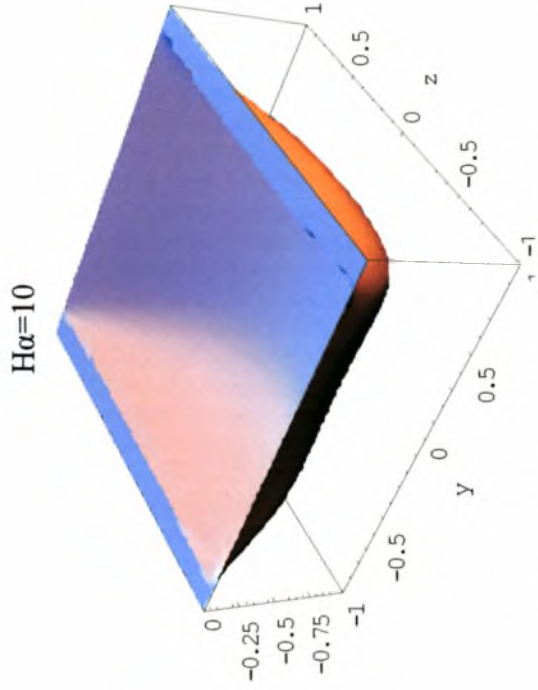
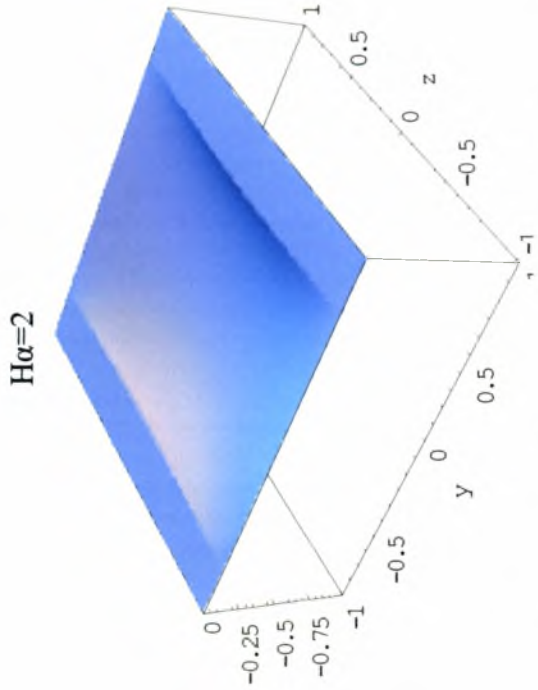
Γράφημα 3.16: Κατανομές της δύναμης Lorentz για $Ha = 2, 10$ και 100 με πλήρως μονωμένα τοιχώματα, α) εγκάρσια μονωμένα τοιχώματα, α) εγκάρσια της ροής (επάνω) και β) στα επίπεδα $z = \pm d$ (κάτω).



Γράφημα 3.17: Κατανομές της δύναμης Lorentz για $Ha = 2, 10$ και 100 με αγώγιμα Hartmann και μονωμένα πλευρικά α) εγκάρσια της ροής (επάνω) και β) στο επίπεδο $z = 0$ (κάτω).



Γράφημα 3.18: Κατανομές της δύναμης Lorentz για $Ha = 2, 10$ και 100 με ημιαγωγίμια τοιχώματα Hartmann ($c_H = 0.01$) και μονωμένα πλευρικά α) εγκάρσια της ροής (επάνω) και β) στο επίπεδο $z = 0$ (κάτω).



Γράφημα 3.19: Κατανομές της δύναμης Lorentz για $H\alpha = 2, 10$ και 100 με ημιαγωγιμα τοιχώματα Hartmann ($c_H = 0.1$) και μονωμένα πλευρικά α) εγκάρσια της ροής (επάνω) και β) στο επίπεδο $z = 0$ (κάτω).

4 Συμπεράσματα και προτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η ροή ενός αγωγίμου ρευστού διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (ροή Hartmann) και διαμέσου ορθογωνίου αγωγού με ταυτόχρονη επιβολή σταθερού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Διατυπώθηκαν και λύθηκαν τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά, οι δυο αυτές ροές για τοιχώματα α) μονωμένα ($c = 0$), β) αγωγή ($c = \infty$) και γ) ημιαγωγή ($0 < c < \infty$). Η επίδραση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου στη ροή εξετάζεται μέσω του αριθμού Hartmann. Αποτελέσματα παρουσιάζονται για τις κατανομές ταχύτητας, του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου και των δυνάμεων Lorentz, όπως επίσης για τις παροχές και την πτώση πίεσης. Τα τοιχώματα στα οποία το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο και παράλληλο ονομάζονται τοιχώματα Hartmann και πλευρικά αντίστοιχα.. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στις λεγόμενες στοιβάδες Hartmann. Όταν ο αριθμός Hartmann είναι μεγάλος τότε η αναλυτική επίλυση γίνεται με ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, ενώ η αριθμητική επίλυση με πυκνά πλέγματα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με τα αναλυτικά. Τα γενικά συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας για πρότυπες ΜΥΔ ροές έχουν ως εξής:

- ❖ Η επιβολή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στη ροή έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη της δύναμης Lorentz. Η δύναμη αυτή στο κέντρο του αγωγού είναι πάντα αντίθετη στη διεύθυνση της ροής, ενώ κοντά στα τοιχώματα είναι στη διεύθυνση της ροής όταν τα τοιχώματα είναι πλήρως μονωμένα και μηδενίζεται όταν τα τοιχώματα είναι πλήρως αγωγή. Όμως το ολοκλήρωμα της κατανομής της δύναμης Lorentz δίδει μία συνολική δύναμη Lorentz που είναι πάντα αντίθετη στη διεύθυνση της ροής και επομένως την επιβραδύνει.
- ❖ Αποδεικνύεται αναλυτικά ότι καθώς αυξάνει η ένταση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, δηλαδή ο αριθμός Hartmann, η μείωση της παροχής είναι ανάλογη του Ha για πλήρως μονωμένα τοιχώματα και ανάλογη του Ha^2 για πλήρως αγωγή τοιχώματα.

- ❖ Με την αύξηση του αριθμού Hartmann, αυξάνει αντίστοιχα η δύναμη Lorentz στο κέντρο του αγωγού και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα αφενός την μείωση και αφετέρου την επιπεδοποίηση της κατανομής της ταχύτητας. Η μείωση της ταχύτητας στο κέντρο του αγωγού, με την αύξηση του αριθμού Ha , είναι αντίστοιχη με αυτήν της παροχής. Παράλληλα κοντά στα τοιχώματα δημιουργούνται οι λεγόμενες στοιβάδες Hartmann και οι πλευρικές στοιβάδες, όπου οι μεταβολές της ταχύτητας είναι ιδιαίτερα απότομες. Σημειώνεται ότι σε μεγάλους αριθμούς Hartmann το πάχος των στοιβάδων Hartmann είναι αντιστρόφως ανάλογο του Ha , ενώ το πάχος των πλευρικών στοιβάδων είναι αντιστρόφως ανάλογο του \sqrt{Ha} .
- ❖ Η επίδραση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στην πτώση πίεσης είναι αντιστρόφως ανάλογη από ότι στην παροχή. Δηλαδή, η αύξηση στην πτώση πίεσης είναι ανάλογη του Ha για πλήρως μονωμένα τοιχώματα και ανάλογη του Ha^2 για πλήρως αγωγίμα τοιχώματα.
- ❖ Αν και έχει αναφερθεί παραπάνω επαναλαμβάνεται ότι η κατανομή της δύναμης Lorentz στην περίπτωση των πλήρως μονωμένων τοιχωμάτων αλλάζει πρόσημο. Στον πυρήνα του καναλιού είναι αρνητική και η ροή επιβραδύνεται, ενώ στα τοιχώματα είναι θετική και η ροή επιταχύνεται. Αντίθετα, στην περίπτωση των πλήρως αγωγίμων τοιχωμάτων έχει το ίδιο πρόσημο και είναι αντίθετη στη ροή σε όλο το μήκος του καναλιού. Η συμπεριφορά αυτή αιτιολογεί το γεγονός ότι οι τιμές της ταχύτητας και της παροχής στην περίπτωση των αγωγίμων τοιχωμάτων, είναι κατά πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες των μονωμένων τοιχωμάτων.
- ❖ Όταν τα τοιχώματα Hartmann είναι ημιαγωγίμα τα αποτελέσματα κυμαίνονται ανάμεσα στα αντίστοιχα αποτελέσματα των δύο οριακών περιπτώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου c παρατηρούμε σημαντική απόκλιση των αποτελεσμάτων από τα αντίστοιχα για μονωμένα τοιχώματα, ενώ για

$c=1$ τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα για πλήρως αγωγίμα τοιχώματα.

Η αριθμητική μεθοδολογία της διπλωματικής εργασίας θεωρείται αποτελεσματικό εργαλείο για μικρούς και μεσαίους αριθμούς. Για ΜΥΔ ροές όπου ο αριθμός $Ha > 1000$ τότε το πάχος των στοιβάδων Hartmann αλλά και των πλευρικών στοιβάδων είναι πάρα πολύ μικρό και είναι αναγκαίο να εφαρμοσθούν αριθμητικά πλέγματα με διαφορετική πύκνωση κόμβων στα τοιχώματα από ότι στο κέντρο του αγωγού. Αυτά τα πλέγματα ονομάζονται προσαρμοζόμενα πλέγματα και μπορούν να εφαρμοσθούν με διάφορες τεχνικές. Η προσπάθεια επίλυσης ΜΥΔ ροών με $Ha > 1000$, όπως αυτών που πιθανώς εμανίζονται στην τεχνολογίας ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης θα μπορούσε να αποτελέσει και μία πρώτη επέκταση της παρούσας εργασίας. Άλλες ενδιαφέρουσες περιοχές για περαιτέρω ερευνητική δουλειά είναι οι αναπτυσσόμενες ΜΥΔ ροές, όπως επίσης και ΜΥΔ ροές με μεταβαλλόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Βιβλιογραφία

- [1] Hartmann, J.: 1937, Hg-Dynamics I Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field, *Det Ggl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser*. **XV** (6), 1-27.
- [2] Alfvén, H.: 1950, *Cosmical electrodynamics.*, Oxford University Press, London, New York.
- [3] Davidson, P. A.: 1999, Magnetohydrodynamics in materials processing, *Annual Reviews of Fluid Mechanics* **31**, 273—300.
- [4] Hunt, J. C. R. and Holroyd, R. J.: 1977, Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion reactor technology, Technical Report CLM-R169, Culham Laboratory.
- [5] Chang, C. and Lundgren, S.:1961, Duct flow in magnetohydrodynamics, *Zeitschrift für angewandte Mathematic und Physik* **XII**, 100-114.
- [6] Walker, J. S.: 1981, Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls, *Journal de Mécanique* **20**(1), 79—112.
- [7] Dragoş, L.: 1975, *Magnetofluid Dynamics*, Abacus Press.
- [8] Shercliff, J. A.:1953, Steady motion of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields, *Proc.Camb.Phil.Soc.* **49**, 136-144.
- [9] Hunt, J. C. R.: 1965, Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, *Journal of Fluid Mechanics* **21**, 577-590.
- [10] U. Müller and L. Bühler, *Magnetofluidynamics in Channels and Containers* Springer, Berlin, 2001.
- [11] Ting, A. L., Walker, J. S., Moon, T. J., Reed, C. B. and Picologlou, B. F.: 1991, Linearstability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows, *Int. J. Engng. Sci.* **29**(8), 939—948.
- [12] Burr, U., Barleon, L., Müller, U. and Tsinober, A. B.: 2000, Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong side wall jets, *Journal of Fluid Mechanics* **406**, 247—279.
- [13] Biskamp D., *Nonlinear magnetohydrodynamics*. 1993. Cambridge University Press.

- [14] Moffatt H. K., *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, 1978. Cambridge University Press.
- [15] Moreau R., *Magnetohydrodynamics*, 1990. Kluwer Acad. Pud.
- [16] Roberts P. H., *An introduction to magnetohydrodynamics*, 1967, Longmans.
- [17] Barleon, L., Mack, K.-J. and Stieglitz, R.: 1996, The MEKKA-facility - a flexible tool to investigate MHD-flow phenomena, *Technical Report FZKA 5821*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- [18] Hunt, J. C. R. and Stewartson, K.: 1965, Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, *Journal of Fluid Mechanics* **23**, 563—581.
- [19] Walker, J. S.: 1981, Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls, *Journal de Mécanique* **20**(1), 79—112.
- [20] Davidson, P. A.: *An introduction to magnetohydrodynamics*, 2001, Cambridge University Press.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Κατάλογος προγραμμάτων και CD

Στο CD που δίνεται μαζί με την εργασία περιέχονται οι κώδικες Fortran από τους οποίους προέκυψαν τα αριθμητικά αποτελέσματα, και κώδικες Mathematica που βοήθησαν στην παραγωγή των αναλυτικών λύσεων. Το CD έχει δυο φακέλους, ο ένας αφορά την ροή Hartmann και ο δεύτερος την ροή σε τετραγωνικό αγωγό.

Στον φάκελο με την ονομασία *Hartmann flow* περιέχονται τα εξής αρχεία:

- ❖ Hartmann Flow - insulating walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή Hartmann με μονωμένα τοιχώματα)
- ❖ Hartmann Flow - conducting walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή Hartmann με αγωγή τοιχώματα)
- ❖ Hartmann Flow - semi conducting walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή Hartmann με ημιαγωγή τοιχώματα)
- ❖ Hartmann Flow - Numerical results (Αναλυτικά αποτελέσματα για ροή Hartmann με την βοήθεια του Mathematica, για τις τρεις προαναφερόμενες περιπτώσεις αγωγιμότητας των τοιχωμάτων)

Στον φάκελο με την ονομασία *Flow in rectangular channels* περιέχονται τα εξής αρχεία:

- ❖ Flow in rectangular channels - Insulating walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή σε τετραγωνικό αγωγό με μονωμένα τοιχώματα)
- ❖ Flow in rectangular channels - Conducting Hartmann walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή σε τετραγωνικό αγωγό με πλήρως αγωγή τα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα τα πλευρικά)
- ❖ Flow in rectangular channels - Semi conducting Hartmann walls.f90 (Κώδικας Fortran 90/95 για ροή σε τετραγωνικό αγωγό με ημιαγωγή τα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα τα πλευρικά)
- ❖ Numerical results - Insulating walls (Αναλυτικά αποτελέσματα για ροή σε τετραγωνικό αγωγό, με την βοήθεια του Mathematica, με μονωμένα τοιχώματα)
- ❖ Numerical results - Conducting Hartmann Walls (Αναλυτικά αποτελέσματα για ροή σε τετραγωνικό αγωγό, με την βοήθεια του Mathematica, με πλήρως αγωγή τα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα τα πλευρικά)

- ❖ Numerical results - Semi conducting Hartmann Walls (Αναλυτικά αποτελέσματα για ροή σε τετραγωνικό αγωγό, με την βοήθεια του Mathematica, με πλήρως αγώγιμα τα τοιχώματα Hartmann και μονωμένα τα πλευρικά)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000089100