



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΣΕΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΩΛΗΝΩΣΕΩΝ
ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ
ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

ΠΑΠΠΑ ΠΑΤΡΙΚΙΑ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Σ. Α. ΚΑΡΑΜΑΝΟΣ

ΒΟΛΟΣ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

| | |
|----------------------|------------|
| Αριθ. Εισ.: | 4833/1 |
| Ημερ. Εισ.: | 08-11-2006 |
| Δωρεά: | Συγγραφέα |
| Ταξιθετικός Κωδικός: | ΠΤ – ΜΜΒ |
| | 2006 |
| | ΠΑΠ |

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006

© 2006 Πατρικία Παππά

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

| | |
|---------------------------------|---|
| Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) | Δρ. Σπύρος Καραμάνος Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας |
|---------------------------------|---|

| | |
|--------------------|--|
| Δεύτερος Εξεταστής | Δρ. Νικόλαος Αράβας Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας |
|--------------------|--|

| | |
|------------------|---|
| Τρίτος Εξεταστής | Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας |
|------------------|---|

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνοντας την προσπάθεια της συγγραφή της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να κάνω μία μικρή παρένθεση για να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που αποτέλεσαν τον κινητήριο μοχλό της προσπάθειας μου.

Η επίτευξη της διπλωματικής μου εργασίας, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την επιστημονική καθοδήγηση, την αμέριστη υποστήριξη και κατανόηση του επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σπ. Καραμάνου, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά. Η ενασχόληση του με τα θέματα που αφορούσαν την εργασία μου και η βοήθεια του, αποτέλεσαν κίνητρο των προσπαθειών μου.

Το άτομο με το οποίο συνεργάστηκα και το οποίο αξίζει ένα μεγάλο ευχαριστώ, είναι η υποψήφια διδάκτορ του τμήματος Σωτηρία Χουλιαρά. Το ενδιαφέρον της καθώς και η υπομονή της στις απορίες μου ήταν αυτά, που με βοήθησαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας. Δε θα μπορούσα να ξεχάσω τον φίλο και συνάδελφο Δανιήλ Βασιλική για τις πολύτιμες υποδείξεις του και το ενδιαφέρον που έδειχνε κάθε φορά που χρειαζόμουν τη βοήθεια του.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τους φίλους μου, για την πολύτιμη επιστημονική και ηθική βοήθεια όλα αυτά τα χρόνια της φοίτησης μου.

Τέλος επιθυμώ να τονίσω την συνεχή ηθική και υλική υποστήριξη της οικογένειας μου, όπου η ευγνωμοσύνη μου είναι η ελάχιστη ανταπόδοση της προσφοράς της. Η εργασία αφιερώνεται σε σας, λοιπόν, που με βοηθήσατε να ανακαλύψω τον εαυτό μου μέσα από σας και να γίνω καλύτερη, ευχαριστώ...

Παππά Πατρικία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Εισαγωγή – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση..... | 8 |
| 1.2 | Σκοπός της Παρούσας Εργασίας..... | 10 |
| 1.3 | Δομή της Παρούσας Εργασίας..... | 11 |

Κεφάλαιο 2 – Αναλυτικές Μέθοδοι στην Ανάλυση Τάσεων Καμπύλων

Σωλήνων

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Εισαγωγή – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση..... | 12 |
| 2.2 | Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σωλήνα..... | 12 |
| 2.3 | Βασικές Εξισώσεις..... | 14 |
| 2.4 | Υπολογισμός του Συντελεστή Ευκαμψίας..... | 19 |
| 2.5 | Υπολογισμός Παραμορφώσεων – Τάσεων..... | 24 |
| 2.5.1 | Παραμορφώσεις..... | 24 |
| 2.5.2 | Τάσεις..... | 25 |
| 2.6 | Παραμόρφωση της διατομής (ovalization)..... | 26 |

Κεφάλαιο 3 – Αριθμητική Προσομοίωση της Παραμόρφωσης Σωλήνων

υπό καμπτικό φορτίο και εσωτερικής πίεσης

| | | |
|---------|---|----|
| 3.1 | Γενικά..... | 28 |
| 3.2 | Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων..... | 29 |
| 3.3 | Παραμετρική Μελέτη..... | 30 |
| 3.3.1 | Περιγραφή Μοντέλων Παραμετρικής Μελέτης..... | 31 |
| 3.3.2 | Αποτελέσματα..... | 32 |
| 3.3.2.1 | Συνεπίπεδη Κάμψη Καμπύλων Σωλήνων και Σύγκριση με τα Αναλυτικά Αποτελέσματα..... | 33 |
| 3.3.2.2 | Αντιεπίπεδη Κάμψη Καμπύλων Σωλήνων και Σύγκριση με τα Αναλυτικά Αποτελέσματα..... | 49 |
| 3.4 | Σύγκριση Πειραμάτων με Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων..... | 58 |
| 3.4.1 | Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης Δοκιμίου 80..... | 58 |
| 3.4.2 | Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων..... | 59 |

Κεφάλαιο 4 – Προσομοίωση του Μοντέλου με Γραμμικό Τρικομβικό

Στοιχείο για Συνεπίπεδη Κάμψη

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Γενικά..... | 64 |
| 4.2 | Περιγραφή της Προσομοίωσης με το “Στοιχείο Σωλήνα”..... | 64 |
| 4.3 | Παραμετρική Μελέτη..... | 68 |
| 4.4 | Σύγκριση με την Αναλυτική Λύση..... | 73 |
| 4.5 | Σύγκλιση του Προγράμματος..... | 77 |
| | <u>Κεφάλαιο 5 – Συμπεράσματα</u> | 83 |
| | <u>Παράρτημα</u> | 85 |
| | <u>Βιβλιογραφία</u> | 90 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγή – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Τα καμπύλα τμήματα σωληνώσεων χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα σε διηλυστήρια, σε χημικές βιομηχανίες, στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, στην μεταφορά πετρελαίου και φυσικού αερίου, και υπόκεινται σε σημαντικά θερμικά και μηχανικά φορτία. Η ανάπτυξη κωδίκων (προδιαγραφών) σχεδιασμού και μέτρων ασφάλειας για τις βιομηχανίες, όπου η δομική ακεραιότητα είναι ύψιστης σημασίας, έχει υπογραμμίσει την ανάγκη για εφαρμόσιμους καθώς και συντηρητικούς τύπους για το σχεδιασμό τους έναντι δομικής αστοχίας. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην ανάλυση τάσεων σε καμπύλα τμήματα σωλήνων (elbows), στον υπολογισμό δεικτών τάσεων και συντελεστών ευκαμψίας που αναπτύσσονται, καθώς και την παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπτικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, και της εσωτερικής πίεσης, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις καθώς και αριθμητικές μεθόδους.

Η ανάλυση των τάσεων σε καμπύλους σωλήνες έχει αποτελέσει το αντικείμενο πολλών θεωρητικών και πειραματικών μελετών. Οι θεωρητικές, αυτές, αναλύσεις τάσεων σε καμπύλους σωλήνες υπό καμπτικά φορτία κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την προσέγγιση που απαιτείται στον καθορισμό του μαθηματικού προβλήματος και στην επίλυση των εξισώσεων του. Αυτές είναι, η προσέγγιση της ελάχιστης

δυναμικής ενέργειας που χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον von Karman (1911) και θα παρουσιαστεί στην παρούσα εργασία, η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε από τους Turner and Ford (1957), και τέλος η θεωρία του λεπτού κελύφους που αναπτύχθηκε από τον Tueda (1936). Διάφορες προεκτάσεις και τροποποιήσεις, σε αυτές τις αναλύσεις, έχουν δημοσιευθεί από τότε και πολυάριθμες πειραματικές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί για να επαληθεύσουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Η πρώτη θεωρητική ανάλυση τάσεων σε καμπύλα τμήματα σωληνώσεων, που υπόκεινται σε κάμψη εντός του επιπέδου τους, με την προσέγγιση της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας, όπως προαναφέρθηκε, αναπτύχθηκε από τον von Karman (1911). Αργότερα ο Vigness (1943) γενίκευσε τη θεωρία του von Karman περιλαμβάνοντας την κάμψη εκτός του επιπέδου των σωλήνων. Οι Kafka and Dunn (1955) ενσωμάτωσαν στην παραπάνω θεωρία και την επιρροή της εσωτερικής πίεσης. Οι Rodabaugh and George (1957) πρότειναν την ευρύτερα χρησιμοποιημένη προσέγγιση στην γραμμική ανάλυση της κάμψης σωλήνα. Οι Dodge and Moore (1972) γενίκευσαν τις αναλύσεις των προαναφερθέντων. Οι ανωτέρω εργασίες αποτελούν τη βάση για τις διατάξεις που ακολουθούνται σήμερα για το σχεδιασμό σωληνώσεων.

Όλες οι παραπάνω θεωρητικές αναλύσεις είναι περιορισμένες, λόγω των διάφορων υποθέσεων και προσεγγίσεων που γίνονται στη διατύπωση του προβλήματος. Εξαιτίας αυτών των προσεγγίσεων και των δυσκολιών, έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικές μέθοδοι, που συνέβαλαν στην αριθμητική προσομοίωση και τον υπολογισμό της απόκρισης των καμπύλων σωλήνων. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων απεικονίζει μια γενική πλήρη προσέγγιση για την λύση του προβλήματος. Ο Marcal (1967), ο Hibbit (1975) και άλλοι πρότειναν το πεπερασμένο στοιχείο για την ανάλυση των τάσεων σε σωλήνες, συνδυάζοντας τη θεωρία καμπύλων δοκών με τη θεωρία κελυφών. Αργότερα οι Ohtsubo and Watanabe (1978) καθώς και οι Hibbit and Leung (1981) παρουσίασαν μία κατηγορία πεπερασμένων στοιχείων, που προτείνονται για μοντέλα λεπτότοιχων σωλήνων, βασιζόμενη σε έναν

συνδυασμό πολυωνυμικών παρεμβολών Fourier και Hermite γύρω και κατά μήκος του σωλήνα, αντίστοιχα. Οι Natarajan and Blomfield (1975) χρησιμοποίησαν ένα αυθαίρετο διαμορφωμένο στοιχείο κυρτού κελύφους, για να αντιγράψουν την συμπεριφορά κατά την κάμψη του σωλήνα. Ο Sobel (1977) χρησιμοποίησε δύο υπολογιστικά πακέτα, ELBOW και MARC, και σύγκρινε αποτελέσματα για τους συντελεστές ευκαμψίας και συγκέντρωσης τάσεων με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Σε πιο πρόσφατες δημοσιεύσεις έχουν αναπτυχθεί αρκετά στοιχεία για ειδικές χρήσεις, τα οποία συνδυάζουν την παραμόρφωση της διατομής με τη διαμήκη παραμόρφωση του ευθύγραμμου τμήματος. Αρκετά από αυτά τα στοιχεία περιλαμβάνονται σήμερα σε εμπορικά υπολογιστικά πακέτα όπως το ABAQUS ή το ADINA.

1.2 Σκοπός της Παρούσας Εργασίας

Το κύριο χαρακτηριστικό ενός καμπύλου σωλήνα κάτω από κάμψη είναι η παραμόρφωση της διατομής του (ovalization) και αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει τη συμπεριφορά των σωλήνων κατά την κάμψη τους. Επίσης για τους σχεδιαστές των συστημάτων σωληνώσεων, όπου απαιτείται υψηλός βαθμός δομικής ακεραιότητας, είναι απαραίτητο να γνωρίζουν την ευκαμψία των καμπύλων σωλήνων που αποτελούν μέρη των συστημάτων.

Η παρούσα μελέτη, λοιπόν, παρουσιάζει την κατανομή των τάσεων και τους συντελεστές ευκαμψίας που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα σωλήνων (elbows), καθώς και την παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπτικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, και της εσωτερικής πίεσης, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις καθώς και σύγκριση των λύσεων αυτών, με πειραματικά αποτελέσματα και αριθμητικά αποτελέσματα από υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων (ABAQUS), καθώς και από ένα πηγαίο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων (LeTuB) που χρησιμοποιεί ένα ειδικό στοιχείο σωλήνα.

1.3 Δομή της Παρούσας Εργασίας

Στην παρούσα εργασία, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρητική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για να προσδιοριστούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα σωλήνων, οι συντελεστές ευκαμψίας και η παραμόρφωση της διατομής του καμπύλου τμήματος σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη και πως επηρεάζει το πάχος του σωλήνα τα παραπάνω.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται προσομοίωση πεπερασμένων στοιχείων της απόκρισης καμπύλων σωλήνων υπό την επίδραση ροπών κάμψης εντός και εκτός του επιπέδου του σωλήνα, σε σωλήνες γωνίας 90° , για διάφορες τιμές D/t και σύγκριση με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Γίνεται, επίσης, σύγκριση με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα και σχολιασμός αυτών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται μια παραμετρική αριθμητική μελέτη για την επίδραση ροπών κάμψης, εντός του επιπέδου του σωλήνα και σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα μέσω ενός πηγαίου κώδικα που χρησιμοποιεί ένα ειδικό πεπερασμένο στοιχείο κελύφους, το οποίο αποτελεί μία γενίκευση της κλασικής θεωρίας.

Τέλος παρουσιάζεται μία περίληψη και παρατίθενται τα βασικά συμπεράσματα που διαπιστώθηκαν κατά την παρούσα μελέτη, καθώς και η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΩΛΗΝΩΝ

2.1 Εισαγωγή

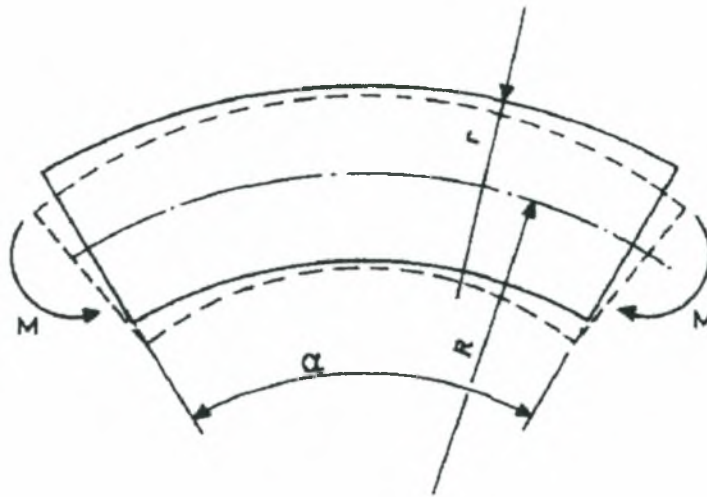
Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις, η κατανομή των τάσεων και οι συντελεστές ευκαμψίας που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα βιομηχανικών σωλήνων (elbows), καθώς και η παραμόρφωση της διατομής των elbows κατά τις επιδράσεις των καμπυλικών φορτίων, εντός και εκτός επιπέδου του σωλήνα, και της εσωτερικής πίεσης, σε σχετικά λεπτούς σωλήνες. Σημειώνουμε πως η παρούσα εργασία βασίζεται στην κλασική επιστημονική δημοσίευση των Rodabaugh and George (1957).

2.2 Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σωλήνα

Το πρόβλημα της ανάλυσης των τάσεων και υπολογισμού των συντελεστών ευκαμψίας για καμπύλους σωλήνες κάτω από φόρτιση είναι πολύ σύνθετο, εάν επιδιώκονται οι ακριβείς λύσεις. Η σημαντικότερη φόρτιση για την δομική επάρκεια των σωλήνων είναι η συνεπίπεδη κάμψη, εξαιτίας των μεγάλων παραμορφώσεων των διατομών του σωλήνα σε σχέση με την αντιεπίπεδη κάμψη.

Η συγκεκριμένη διαμόρφωση του καμπύλου σωλήνα (elbow), που αναλύεται σε αυτό το σημείο, είναι το καμπύλο τμήμα του σωλήνα που απεικονίζεται στο σχήμα 2.1. Το καμπύλο τμήμα που θα μελετήσουμε έχει

ομοιόμορφο πάχος t , μέση ακτίνα σωλήνα r , διαμήκη ακτίνα καμπυλότητας R και ιδιότητες υλικού, το μέτρο ελαστικότητας E και τον λόγο Poisson ν . Το καμπύλο τμήμα καταπονείται σε κάμψη και το επίπεδο φόρτισης είναι τέτοιο ώστε να μη καταπονείται σε στρέψη. Οι λύσεις που προκύπτουν στηρίζονται στις εξής παραδοχές: η διαμήκη καμπυλότητα του σωλήνα είναι ομοιόμορφη, το υλικό του σωλήνα είναι γραμμικό και η ανάλυση που ακολουθεί είναι διδιάστατη (διατομή).



Σχήμα 2.1: Γενική μορφή και χαρακτηριστικά μεγέθη καμπύλου σωλήνα

Οι ίνες του βρίσκονται πάνω από την ουδέτερη ζώνη επιμηκύνονται ανάλογα με την απόστασή τους από αυτήν, ενώ οι ίνες που βρίσκονται κάτω από την ουδέτερη ζώνη συμπιέζονται.

Χρησιμοποιείται η αδιάστατη παράμετρος που υιοθετείται για να περιγράψει την γεωμετρία του σωλήνα,

$$\lambda = \frac{tR}{r^2 \sqrt{(1-\nu)^2}} \quad , \quad (2.1)$$

ενώ όταν περιλαμβάνουμε και εσωτερική πίεση χρησιμοποιείται μία δεύτερη αδιάστατη παράμετρος σχετική με την πίεση,

$$\psi = \frac{PR^2}{Ert} \quad . \quad (2.2)$$

2.3 Βασικές Εξισώσεις

Το κύριο χαρακτηριστικό ενός καμπύλου σωλήνα κάτω από κάμψη είναι η παραμόρφωση της διατομής του (ovalization) και αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει τη συμπεριφορά των σωλήνων κατά την κάμψη τους, ειδικά των καμπύλων τμημάτων.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί η μέθοδος της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας που θα χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη της αναλυτικής λύσης. Στο σχήμα 2.2, που ακολουθεί, παρουσιάζεται η παραμόρφωση της διατομής του καμπύλου σωλήνα. Από το σχήμα 2.2 διακρίνονται οι μετατοπίσεις ενός σημείου, σε πολικές συντεταγμένες, w (ακτινική) και v (εφαπτομενική), υποθέτουμε ότι είναι εκφράσεις τριγωνομετρικής σειράς. Κάθε σημείο της απαραμόρφωτης διατομής έχει συντεταγμένες:

$$x = r \cos \varphi \quad (2.3)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (2.4)$$

ενώ οι συντεταγμένες του στην παραμορφωμένη κατάσταση γίνονται:

$$x^* = (r + w) \cos \varphi - v \sin \varphi \quad (2.5)$$

$$y^* = (r + w) \sin \varphi + v \cos \varphi \quad (2.6)$$

και η ακτινική μετατόπιση u_n , σε σχέση με την κατά μήκος εφαρμοζόμενης καμπυλότητας k ορίζεται ως:

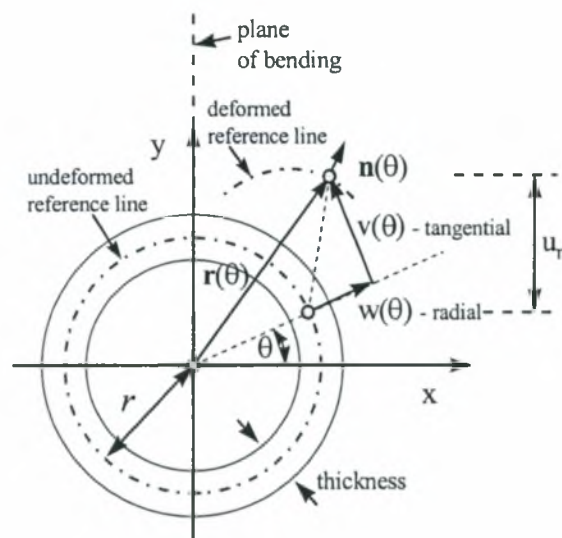
$$u_n = v \cos \varphi + w \sin \varphi \quad (2.7)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια Π , στην περίπτωση που στον καμπύλο σωλήνα εφαρμόζεται εσωτερική πίεση και υποβάλλεται σε κάμψη μπορεί να περιγράφει ως:

$$\Pi = U_L + U_c - U_2 - M \cdot k \quad (2.8)$$

όπου η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης μιας διατομής ενός καμπύλου σωλήνα υπό κάμψη συντίθεται από το διαμήκη U_L και το περιμετρικό U_c μέρος, λόγω της διαμήκης παραμόρφωσης (θεωρία δοκού) και της

παραμόρφωσης της διατομής αντίστοιχα, ενώ μεταβολή του δυναμικού φορτίου αποτελείται από το έργο που παράγεται από την πίεση και την ροπή, που εφαρμόζονται στο καμπύλο σωλήνα.



Σχήμα 2.2: Παραμόρφωση της διατομής του καμπύλου σωλήνα (ovalization)

Οι διαμήκεις και οι περιφερειακές παραμορφώσεις του καμπύλου σωλήνα που υπόκειται σε συνεπίπεδη κάμψη δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις αντίστοιχα.

- Συνεπίπεδη κάμψη (in-plane bending)

Η διαμήκης παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{R} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} r \sin \varphi + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \quad (2.9)$$

όπου $\Delta\alpha/\alpha$ είναι η αλλαγή της καμπυλότητας της ουδέτερης ζώνης λόγω της συνεπίπεδης κάμψης, ενώ η περιμετρική παραμόρφωση:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \zeta \quad (2.10)$$

όπου θεωρούμε ότι η περιμετρική παραμόρφωση είναι μηδέν, οπότε ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 0 \Leftrightarrow w + \frac{dv}{d\theta} = 0 \Rightarrow w = -\frac{dv}{d\theta} \quad (2.11)$$

Για $\zeta = \pm \frac{t}{2}$ (εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια), η περιμετρική παραμόρφωση γίνεται μέγιστη και ίση με:

$$\varepsilon_c = \pm \frac{t}{2r^2} \left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \quad (2.12)$$

Σύμφωνα με την θεωρία δοκού, η διαμήκης ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται:

$$U_L = \frac{E}{2} \int_A \varepsilon_L^2 dA = \frac{Etr}{2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_L^2 d\theta \Rightarrow$$

$$U_L = \frac{Etr}{2R^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r\Delta\alpha}{\alpha} \sin \varphi + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right)^2 d\varphi \quad (2.13)$$

ενώ η περιμετρική ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{Er}{(1-\mu^2)} \int_{A_\theta} \varepsilon_\theta^2 d\theta d\rho = \frac{Et^3}{24(1-\mu^2)r^3} \int_0^{2\pi} (v' + v''') d\theta \quad (2.14)$$

Οι μετατοπίσεις ενός σημείου, σε πολικές συντεταγμένες, είναι w (ακτινική) και v (εφαπτομενική). Στην παρούσα ανάλυση υποθέτουμε ότι είναι εκφράσεις τριγωνομετρικής σειράς, συνεπώς, με βάση τη σχέση (2.11):

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\varphi \quad (2.15)$$

$$w = -\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\varphi \quad (2.16)$$

Συνολικά η ενέργεια παραμόρφωσης εκφράζεται ως:

$$U_1 = \frac{Etr}{2R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{r\Delta\alpha}{\alpha} \sin \varphi + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right)^2 d\varphi + \frac{t^2 R^2}{12r^4(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \right\}$$

$$U_1 = \frac{Etr}{2R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{r\Delta\alpha}{\alpha} \sin \varphi + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\varphi - \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\varphi \right)^2 d\varphi \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{12} \int_0^{2\pi} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} 8n^3 a_n \cos 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n \cos 2n\varphi \right)^2 d\varphi \right\} \quad (2.17)$$

▪ Αντιεπίπεδη κάμψη (out-of-plane bending)

Οι μετατοπίσεις ενός σημείου, σε πολικές συντεταγμένες, για αντιεπίπεδη κάμψη καμπύλου σωλήνα δίνονται:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2n\varphi \quad (2.18)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin 2n\varphi \quad (2.19)$$

Η διαμήκης παραμόρφωση του καμπύλου σωλήνα που υπόκειται σε αντιεπίπεδη κάμψη δίνεται από την εξίσωση:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{R} \left(\frac{R}{\rho} r \cos \varphi + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \quad (2.20)$$

όπου ρ η ακτίνα καμπυλότητας λόγω της αντιεπίπεδης κάμψης που σωλήνα και είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζει η αρχική ακτίνα καμπυλότητας R του σωλήνα, ενώ η περιφερειακή παραμόρφωση είναι ίδια με την εξίσωση της συνεπίπεδης κάμψης. Συνεπώς η ενέργεια παραμόρφωσης διαμορφώνεται ως εξής:

$$U_1 = \frac{Etr}{2R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{R}{\rho} r \cos \varphi + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right)^2 d\varphi + \frac{t^2 R^2}{12r^3(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \right\} \\ U_1 = \frac{Etr}{2R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{rR}{\rho} \cos \varphi + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2n\varphi + \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin 2n\varphi \right)^2 d\varphi \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{12} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 8n^3 b_n \sin 2n\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin 2n\varphi \right)^2 d\varphi \right\} \quad (2.21)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις της ενέργειας για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη μπορούν να ενσωματωθούν σε μία ενιαία εξίσωση,

$$U = \frac{Etr\pi}{2R^2} \left\{ r^2\eta^2 + 3r\eta c_1 + \frac{9}{4}c_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(1-2n)^2 - 2c_nc_{n+1}(2n-1)(2n+3) + c_{n+1}^2(2n+3)^2] + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(8n^3 - 2n)^2 \right\} \quad (2.22)$$

όπου $a_n = b_n = c_n$, $\eta = \Delta a/a$ για συνεπίπεδη κάμψη και $\eta = R/\rho$ για αντιεπίπεδη κάμψη.

Το πρόσθετο έργο που παράγεται από την εσωτερική πίεση P , που ασκείται στον καμπύλο σωλήνα, οφείλεται στην αλλαγή του περικλειόμενου όγκου και πρέπει να ληφθεί υπ' όψη:

$$U_2 = P\Delta A \quad (2.23)$$

όπου ΔA η μεταβολή του εμβαδού της παραμορφωμένης διατομής

$$U_2 = -2\pi P \sum_{n=1}^{\infty} n^2(4n^2 - 1)c_n^2 \quad (2.24)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια αποτελεί συνάρτηση των συντελεστών c_n .

$$\Pi = \frac{Etr\pi}{2R^2} \left\{ r^2\eta^2 + 3r\eta c_1 + \frac{9}{4}c_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(1-2n)^2 - 2c_nc_{n+1}(2n-1)(2n+3) + c_{n+1}^2(2n+3)^2] + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(8n^3 - 2n)^2 + 4\psi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(4n^2 - 1)c_n^2 \right\} - Mk \quad (2.25)$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζεται η αρχή της στάσιμης δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως εξής:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

όπου η εκτέλεση αυτής της μερικής παραγωγίσης δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0 &\Rightarrow 3rn + (5 + 6\lambda^2 + 24\psi)c_1 - \frac{5}{2}c_2 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0 &\Rightarrow -\frac{5}{2}c_1 + (17 + 600\lambda^2 + 480\psi)c_2 - \frac{21}{2}c_3 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} = 0 &\Rightarrow -c_{n-1} \frac{(2n-3)(2n+1)}{2} + c_n \left\{ (4n^2+1) + (8n^3-2n)^2 \frac{\lambda^2}{6} + [8n^2(4n^2-1)\psi] \right\} \\ &\quad - \frac{(2n-1)(2n+3)}{2} c_{n+1} = 0 \end{aligned} \right\} (2.27)$$

οι οποίες δίνουν ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με $(n+1)$ άγνωστους συντελεστές c . Θεωρώντας ότι $c_{n+1} = 0$, όλοι οι συντελεστές c μπορούν να προσδιοριστούν. Για να εξαλειφεί ο όρος c_{n+1} που περιέχεται στο παραπάνω σύστημα, θα εισαχθεί η σχέση αλλαγής μεταβλητής $d_n = c_n / r\eta$.

2.4 Υπολογισμός του Συντελεστή Ευκαμψίας

Για τους σχεδιαστές των συστημάτων σωληνώσεων, όπου απαιτείται υψηλός βαθμός δομικής ακεραιότητας, είναι απαραίτητο να γνωρίζουν την ευκαμψία των καμπύλων σωλήνων που αποτελούν μέρη των συστημάτων. Για να υπολογιστεί η ευκαμψία του σωλήνα χρησιμοποιείται η αρχή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \eta} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} &= M \Rightarrow \\ M &= \frac{Etr\pi}{R^2} r^2 \eta \left\{ 1 + 3d_1 + \frac{9}{4}d_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [d_n(1-2n)^2 - 2d_n d_{n+1}(2n-1)(2n+3) \right. \\ &\quad \left. + d_{n+1}^2(2n+3)^2] + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(8n^3-2n)^2 + 4\psi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(4n^2-1)d_n^2 \right\} \Rightarrow \\ \eta &= \frac{MR}{EI} \left\{ 1 + 3d_1 + \frac{9}{4}d_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [d_n(1-2n)^2 - 2d_n d_{n+1}(2n-1)(2n+3) + d_{n+1}^2(2n+3)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(8n^3-2n)^2 + 4\psi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(4n^2-1)d_n^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας της διατομής του σωλήνα και ισούται $I=\pi r^3t$, ενώ στην αγκύλη είναι ο συντελεστής ευκαμψίας που είναι ο ίδιος και για συνεπίπεδη και για αντιεπίπεδη κάμψη, και εξαρτάται από τις αδιάστατες παραμέτρους λ και ψ , που ορίστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου. Σημειώνεται ότι για μία ευθύγραμμη δοκό, με βάση την κλασική θεωρία της δοκού, ο συντελεστής ευκαμψίας είναι:

$$\eta_0 = \frac{MR}{EI} \quad (2.29)$$

Συνεπώς ο συντελεστής ευκαμψίας ορίζεται ως:

$$k = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (2.30)$$

δηλαδή:

$$k = \left\{ 1 + 3d_1 + \frac{9}{4}d_1^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n(1-2n)^2 - 2d_n d_{n+1}(2n-1)(2n+3) + d_{n+1}^2(2n+3)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(8n^3 - 2n)^2 + 4\psi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(4n^2 - 1)d_n^2 \right\} \quad (2.31)$$

Στην συνέχεια παραθέτεται ο πίνακας 2.1, που προσδιορίζει τους συντελεστές ευκαμψίας για $0.01 \leq \lambda \leq 5.0$ και $0 \leq \psi \leq 0.512$, χρησιμοποιώντας τον προαναφερθέντα τύπο.

Βάση των τιμών αυτών, σχεδιάζεται η γραφική απεικόνιση των συντελεστών ευκαμψίας συνάρτηση των παραμέτρων λ και ψ (σχήμα 2.3). Ο συντελεστής ευκαμψίας είναι αντιστρόφως ανάλογος της γεωμετρικής παραμέτρου λ , συνεπώς ο λόγος D/t αυξανόμενος, επηρεάζει θετικά την ευκαμψία του καμπύλου σωλήνα. Η πίεση που ασκείται στο εσωτερικό του σωλήνα μειώνει σημαντικά την ευκαμψία του καμπύλου σωλήνα. Στο σχήμα 2.4 παρουσιάζεται μία μεγέθυνση της περιοχής $\psi=0.08-0.512$ του σχήματος 2.3 και παρατηρείται ότι, η γεωμετρική παράμετρος λ δεν επηρεάζει σημαντικά την ευκαμψία του σωλήνα καθώς αυξάνεται η πίεση στο εσωτερικό του σωλήνα.

| $\begin{matrix} \psi \\ \lambda \end{matrix}$ | 0.0 | 0.001 | 0.002 | 0.004 | 0.008 | 0.016 | 0.032 | 0.064 | 0.128 | 0.512 |
|---|---------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.010 | 173.206 | 55.377 | 35.398 | 21.927 | 13.460 | 8.304 | 5.205 | 3.363 | 2.288 | 1.352 |
| 0.015 | 115.470 | 50.447 | 33.859 | 21.526 | 13.366 | 8.282 | 5.200 | 3.362 | 2.288 | 1.352 |
| 0.020 | 86.602 | 45.719 | 32.124 | 21.020 | 13.239 | 8.252 | 5.193 | 3.360 | 2.288 | 1.352 |
| 0.030 | 57.734 | 37.792 | 28.619 | 19.827 | 12.907 | 8.170 | 5.174 | 3.355 | 2.286 | 1.352 |
| 0.040 | 43.300 | 31.832 | 25.458 | 18.547 | 12.502 | 8.062 | 5.147 | 3.349 | 2.285 | 1.352 |
| 0.050 | 34.639 | 27.341 | 22.756 | 17.292 | 12.055 | 7.933 | 5.114 | 3.340 | 2.283 | 1.352 |
| 0.060 | 28.865 | 23.886 | 20.482 | 16.115 | 11.589 | 7.787 | 5.075 | 3.330 | 2.280 | 1.352 |
| 0.070 | 24.741 | 21.167 | 18.568 | 15.036 | 11.122 | 7.630 | 5.030 | 3.319 | 2.277 | 1.352 |
| 0.080 | 21.647 | 18.980 | 16.949 | 14.056 | 10.663 | 7.464 | 4.981 | 3.305 | 2.273 | 1.351 |
| 0.100 | 17.315 | 15.698 | 14.384 | 12.376 | 9.797 | 7.120 | 4.871 | 3.274 | 2.265 | 1.351 |
| 0.150 | 11.555 | 10.919 | 10.357 | 9.410 | 8.006 | 6.273 | 4.556 | 3.176 | 2.237 | 1.349 |
| 0.200 | 8.675 | 8.352 | 8.055 | 7.529 | 6.684 | 5.523 | 4.222 | 3.056 | 2.200 | 1.346 |
| 0.300 | 5.728 | 5.609 | 5.496 | 5.285 | 4.919 | 4.347 | 3.593 | 2.790 | 2.107 | 1.338 |
| 0.400 | 4.204 | 4.149 | 4.097 | 3.997 | 3.815 | 3.511 | 3.065 | 2.524 | 2.001 | 1.328 |
| 0.500 | 3.293 | 3.265 | 3.238 | 3.185 | 3.088 | 2.916 | 2.646 | 2.284 | 1.892 | 1.315 |
| 0.600 | 2.709 | 2.693 | 2.678 | 2.649 | 2.593 | 2.491 | 2.322 | 2.078 | 1.788 | 1.301 |
| 0.700 | 2.041 | 2.035 | 2.029 | 2.018 | 1.996 | 1.956 | 1.884 | 1.768 | 1.608 | 1.271 |
| 0.800 | 1.693 | 1.691 | 1.688 | 1.683 | 1.673 | 1.655 | 1.620 | 1.561 | 1.471 | 1.240 |
| 1.000 | 1.321 | 1.321 | 1.320 | 1.319 | 1.317 | 1.313 | 1.305 | 1.290 | 1.264 | 1.171 |
| 2.000 | 1.184 | 1.183 | 1.183 | 1.183 | 1.182 | 1.181 | 1.178 | 1.173 | 1.163 | 1.122 |
| 3.000 | 1.083 | 1.082 | 1.082 | 1.082 | 1.082 | 1.082 | 1.081 | 1.080 | 1.078 | 1.067 |
| 5.000 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.030 | 1.029 | 1.028 |

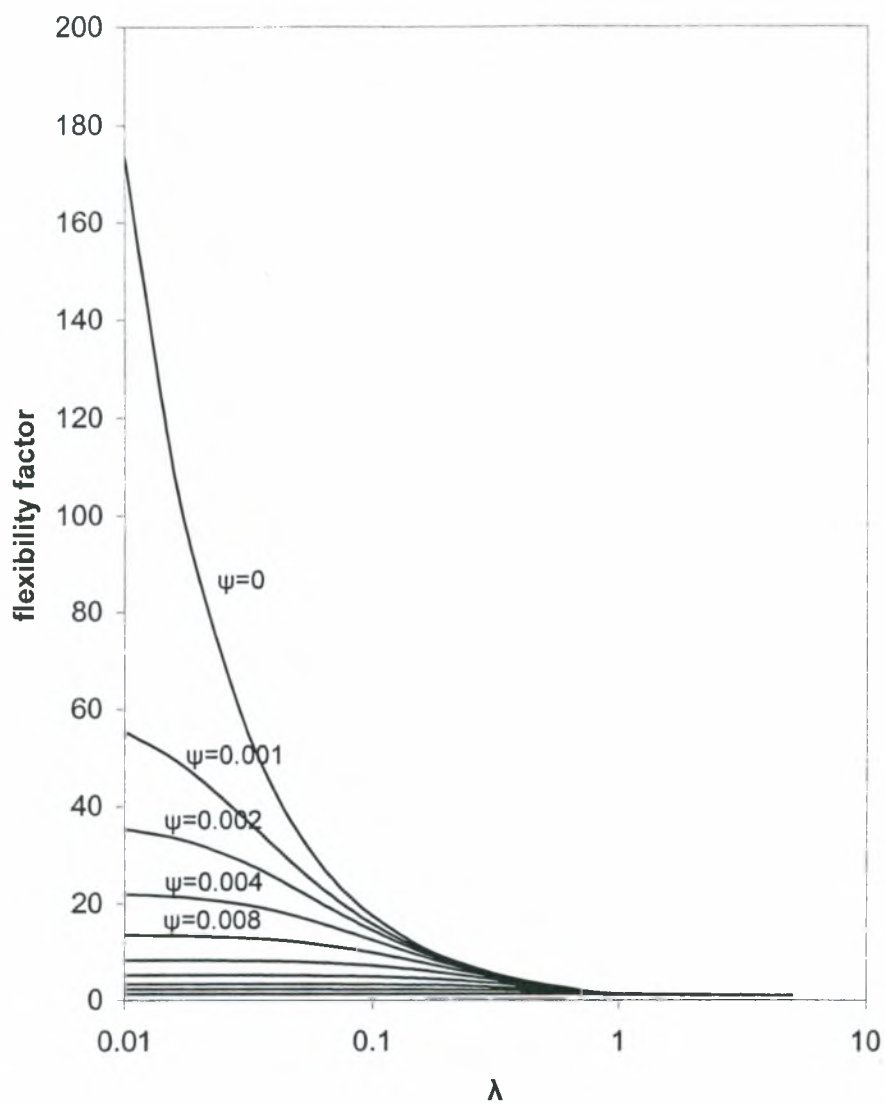
Πίνακας 2.1: Συντελεστές ευκαμψίας, καμπύλων σωλήνων υπό καμπτικά φορτία εντός και εκτός επιπέδου, για $0.01 \leq \lambda \leq 5.0$ και $0 \leq \psi \leq 0.512$

Σε περίπτωση που στον καμπύλο σωλήνα δεν ασκείται εσωτερική πίεση, ο συντελεστής ευκαμψίας εξαρτάται μόνο από την παράμετρο λ . Ο αριθμός των συντελεστών Fourier που χρειάζονται για να προσδιοριστεί ο συντελεστής ευκαμψίας, για διάφορες τιμές του λ , ώστε το αποτέλεσμα που

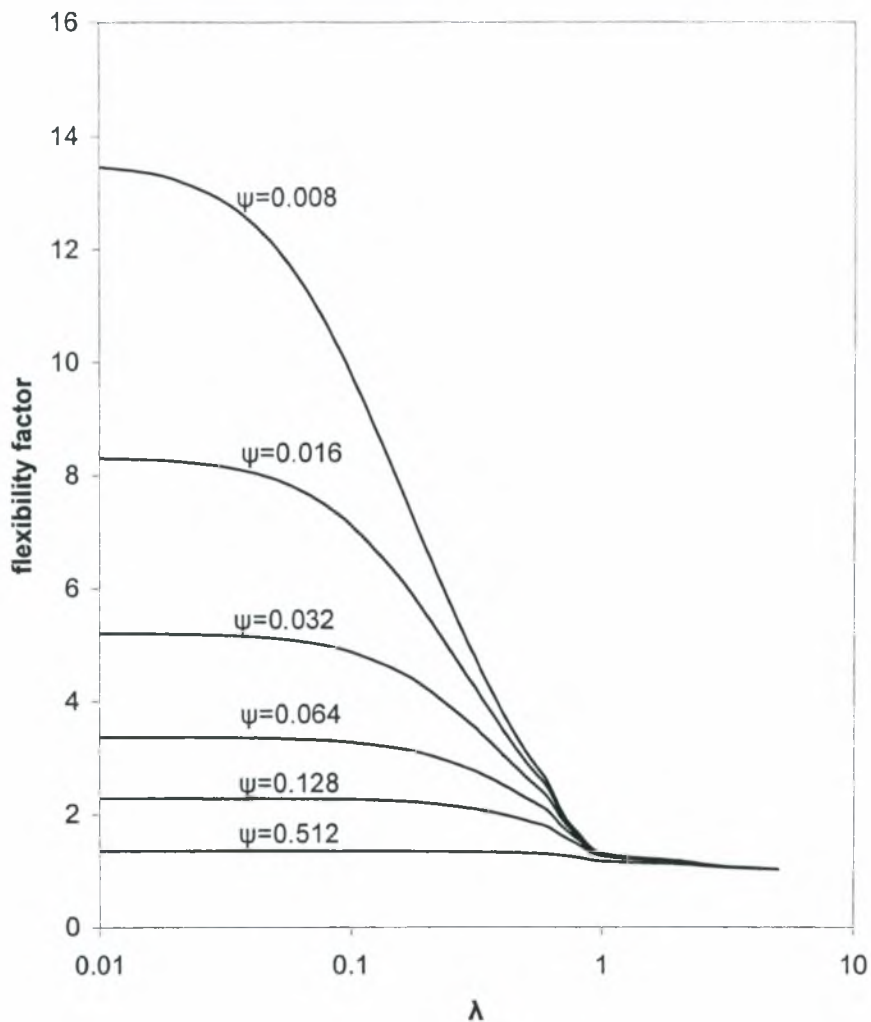
προκύπτει να είναι ακριβές δίνονται στον πίνακα 2.2. Τέλος, αν ασκείται εσωτερική πίεση η σειρά συγκλίνει γρηγορότερα.

| Τιμές του λ | Όροι Fourier που απαιτούνται |
|---------------------|------------------------------|
| >0.5 | 1 |
| $0.4 \sim 0.16$ | 2 |
| $0.12 \sim 0.08$ | 3 |
| $0.06 \sim 0.04$ | 4 |

Πίνακας 2.2: Όροι Fourier που απαιτούνται στον υπολογισμό του συντελεστή ευκαμψίας, για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ



Σχήμα 2.3: Οι συντελεστές ευκαμψίας για τα καμπύλα τμήματα σωλήνων συναρτήσει της γεωμετρικής παραμέτρου λ και της παραμέτρου ψ ($0 \leq \psi \leq 0.512$)



Σχήμα 2.4: Οι συντελεστές ευκαμψίας για τα καμπύλα τμήματα σωλήνων συναρτήσει της γεωμετρικής παραμέτρου λ και της παραμέτρου ψ ($0.008 \leq \psi \leq 0.512$)

2.5 Υπολογισμός Παραμορφώσεων – Τάσεων

2.5.1 Παραμορφώσεις

Στον καμπύλο σωλήνα, καθώς καταπονείται σε κάμψη, εμφανίζονται διαμήκη και περιμετρικά του σωλήνα, παραμορφώσεις, οι οποίες με την

σειρά τους προκαλούν τάσεις. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι παραμορφώσεις αυτές, οι οποίες είναι συνάρτηση των συντελεστών c_i .

Για συνεπίπεδη κάμψη αντικαθιστώντας στη σχέση 2.9 τις τριγωνομετρικές εκφράσεις η διαμήκη παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{R} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} r \sin \varphi + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2n\varphi - \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos 2n\varphi \right) \quad (2.32)$$

ενώ για αντιεπίπεδη κάμψη (σχέση 2.20) είναι:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{R} \left(\frac{R}{\rho} r \cos \varphi + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2n\varphi + \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \sin 2n\varphi \right) \quad (2.33)$$

Η περιφερειακή παραμόρφωση είναι ίδια για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη και δίνεται από τον τύπο 2.12:

$$\varepsilon_c = \pm \frac{t}{2r^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 8n^3 c_n \sin 2n\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n \sin 2n\varphi \right) \quad (2.34)$$

2.5.2 Τάσεις

Η κατανομή των τάσεων, που αναπτύσσονται καθ' ύψος της διατομής του καμπύλου σωλήνα, δεν είναι γραμμική. Οι σχέσεις των τάσεων - παραμορφώσεων κατά την διαμήκη έννοια και περιφερειακά του σωλήνα δίνονται από τον γενικευμένο νόμο του Hooke.

$$\sigma_L = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_L + \nu\varepsilon_c) \quad (2.35)$$

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_c + \nu\varepsilon_L) \quad (2.36)$$

Για συνεπίπεδη κάμψη οι διαμήκεις και περιφερειακές τάσεις είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_L = \frac{Mkr}{I(1-v^2)} \left\{ \left(1 + \frac{3d_1}{2} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n(1-2n) + d_{n+1}(2n+3)\} \sin(2n+1)\varphi \right. \\ \left. \pm \frac{v\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(2n-8n^3) \cos 2n\varphi \right\} \quad (2.37)$$

και

$$\sigma_C = \frac{Mkr}{I(1-v^2)} \left\{ \pm \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(2n-8n^3) \cos 2n\varphi + v \left(1 + \frac{3d_1}{2} \right) \sin \varphi \right. \\ \left. + \frac{v}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n(1-2n) + d_{n+1}(2n+3)\} \sin(2n+1)\varphi \right\} \quad (2.38)$$

Για αντιεπίπεδη κάμψη οι διαμήκεις και περιφερειακές τάσεις είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_L = \frac{Mkr}{I(1-v^2)} \left\{ \left(1 + \frac{3d_1}{2} \right) \cos \varphi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n(1-2n) + d_{n+1}(2n+3)\} \cos(2n+1)\varphi \right. \\ \left. \pm \frac{v\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(8n^3-2n) \sin 2n\varphi \right\} \quad (2.39)$$

και

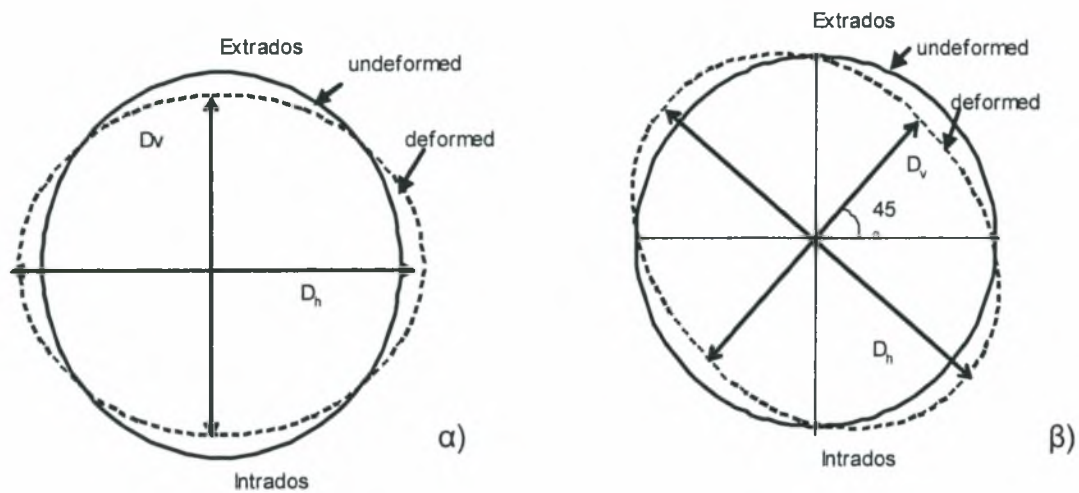
$$\sigma_C = \frac{Mkr}{I(1-v^2)} \left\{ \pm \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(8n^3-2n) \sin 2n\varphi + v \left(1 + \frac{3d_1}{2} \right) \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{v}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n(1-2n) + d_{n+1}(2n+3)\} \cos(2n+1)\varphi \right\} \quad (2.40)$$

2.6 Παραμόρφωση της διατομής (ovalization)

Η παραμόρφωση της διατομής του καμπύλου σωλήνα αποτελεί το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς των σωλήνων κατά την κάμψη τους. Καθώς εφαρμόζεται καμπτική ροπή στον καμπύλο σωλήνα, η διατομή του σωλήνα παίρνει ένα οβάλ σχήμα (“οβαλοποίηση”). Όταν ο σωλήνας κάμπτεται στο επίπεδο, οι διάμετροι που το δημιουργούν αυτό το

σχήμα είναι οι κύριοι άξονες (σχήμα 2.5α). Η “οβαλοποίηση” εκφράζεται συναρτήσει της παραμέτρου ov η οποία ορίζεται ως εξής:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} \quad (2.41)$$



Σχήμα 2.5: “Οβαλοποίηση” της διατομής α) σε συνεπίπεδη κάμψη β) σε αντεπίπεδη κάμψη του σωλήνα

Κατά την αντεπίπεδη κάμψη το καμπύλο μέρος του καμπύλο σωλήνα πάλι παραμορφώνεται και αποκτά ένα οβάλ σχήμα, αλλά τώρα οι διάμετροι που το δημιουργούν αυτό, απέχουν 45° από τους κύριους άξονες (σχήμα 2.5β). Ενώ ο τύπος της “οβαλοποίησης” είναι ίδιος, μόνο που τώρα λαμβάνονται υπ’ όψη οι διάμετροι που αναφέρθηκαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΩΛΗΝΩΝ ΥΠΟ ΚΑΜΠΤΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

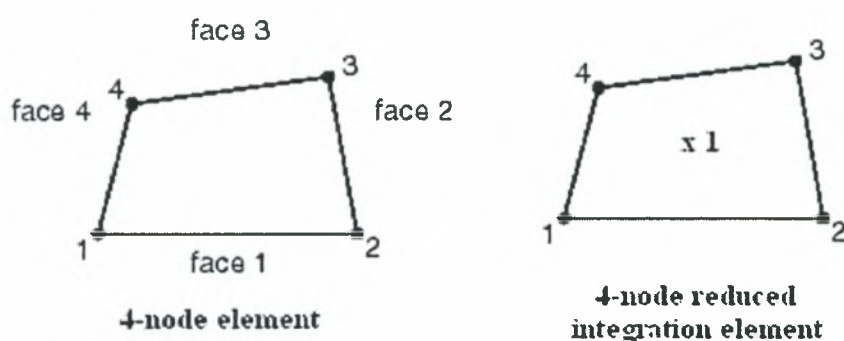
3.1 Γενικά

Οι προηγούμενες θεωρητικές αναλύσεις έχουν μεγάλη εφαρμοσιμότητα αλλά και ορισμένους περιορισμούς στη χρήση τους, λόγω των διαφόρων υποθέσεων και προσεγγίσεων που γίνονται στη διατύπωση του προβλήματος. Συγκεκριμένα αναφέρονται σε σωλήνες σταθερής διαμήκους καμπυλότητας και ουσιαστικά είναι αναλύσεις διδιάστατες. Εξαιτίας των περιορισμών και των δυσκολιών στην θεωρητική ανάλυση, θα ήταν χρήσιμο να υιοθετηθεί μία πιο γενική προσέγγιση, η οποία θα ήταν ικανή να προσομοιώνει κάμψεις σωλήνων με διαφορετικές γεωμετρίες, περιορισμούς και σύνθετους όρους φορτίου. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μία εύρωστη προσέγγιση για την λύση μηχανικών προβλημάτων, όπως το συγκεκριμένο. Είναι μία γενική προσέγγιση για τη λύση των μηχανικών προβλημάτων που σε πρώιμη μορφή εισήχθη τη δεκαετία του 50. Από τότε, έχει υπάρξει μια ταυτόχρονη και γρήγορη ανάπτυξη των μητρωικών μεθόδων δομικής ανάλυσης και των πεπερασμένων στοιχείων, με παράλληλη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Το υπολογιστικό πακέτο που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτό το κεφάλαιο, για την αριθμητική προσομοίωση των καμπύλων σωλήνων με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων, είναι το ABAQUS.

3.2 Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων

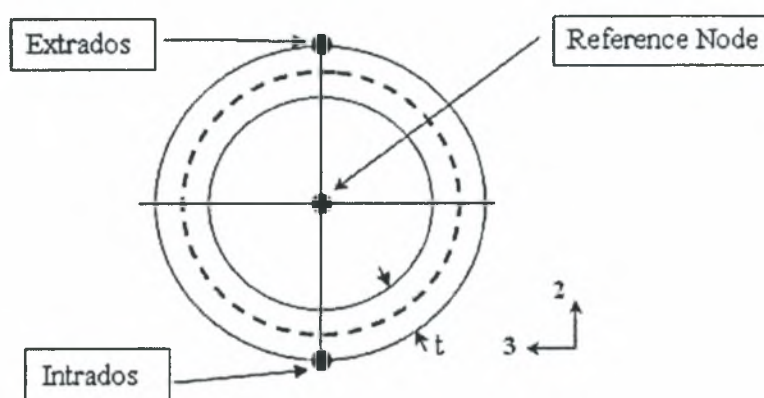
Ο καμπύλος σωλήνας προσομοιώθηκε στο ABAQUS με τετρακομβικά στοιχεία S4R, μειωμένης ολοκλήρωσης με ένα σημείο ολοκλήρωσης στο επίπεδο (σχήμα 3.1). Τα στοιχεία μειωμένης ολοκλήρωσης χρησιμοποιούν λιγότερα σημεία ολοκλήρωσης, από όσα είναι απαραίτητα για να υπολογιστεί η συνεισφορά στο δυνατό έργο, των τασικών πεδίων που προκύπτουν από τις εξισώσεις παρεμβολής που χρησιμοποιεί το κάθε στοιχείο. Αντίθετα οι πίνακες της μάζας και των κατανεμημένων φορτίων υπολογίζονται κανονικά.



Σχήμα 3.1: Τετρακομβικό στοιχείο S4R με έναν σταθμό ολοκλήρωσης

Η ροπή στο σωλήνα εφαρμόζεται σε συνθήκες πειράματος πάνω σε μία άκαμπτη πλάκα στην διατομή 2 (σχήμα 3.3). Συνεπώς για να προσομοιωθεί η πραγματική συνοριακή συνθήκη, χρησιμοποιήθηκε η εντολή “Kinematic Coupling” του ABAQUS, η οποία “συνδέει” όλους τους κόμβους, της ακραίας ελεύθερης διατομής του ευθύγραμμου τμήματος του σωλήνα, σε έναν κόμβο αναφοράς (reference node) του άκρου (σχήμα 3.2). Αυτή η σύνδεση εξαναγκάζει όλους τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων

να κινούνται σύμφωνα με την κίνηση του κόμβου αναφοράς. Η ροπή, συνεπώς, εφαρμόστηκε γύρω από τον άξονα 3, για την συνεπίπεδη κάμψη, και γύρω από τον άξονα 2, για την αντιεπίπεδη κάμψη στον κόμβο αναφοράς. Ο κόμβος αναφοράς έχει δεσμευμένους (ίσους με μηδέν) όλους τους βαθμούς ελευθερίας του εκτός των μετατοπίσεων 1, 2 και της στροφής γύρω από τον άξονα 3 για συνεπίπεδη κάμψη.



Σχήμα 3.2: Ακραία διατομή ελεύθερου άκρου του ευθύγραμμου τμήματος δοκιμίου

Τα μοντέλα έχουν 96 στοιχεία περιμετρικά και συνολικά 49920 στοιχεία. Κατά το πάχος χρησιμοποιήθηκαν επτά σημεία ολοκλήρωσης τύπου Simpson. Τέλος θεωρήθηκε γραμμικά - ελαστικό υλικό, μέτρο ελαστικότητας $E=210000$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.3$.

3.3 Παραμετρική Μελέτη

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η παραμετρική μελέτη που έγινε σε μία προσπάθεια να διερευνηθεί πως επηρεάζονται τα αποτελέσματα από το πάχος του σωλήνα και κατά πόσο τα αποτελέσματα που

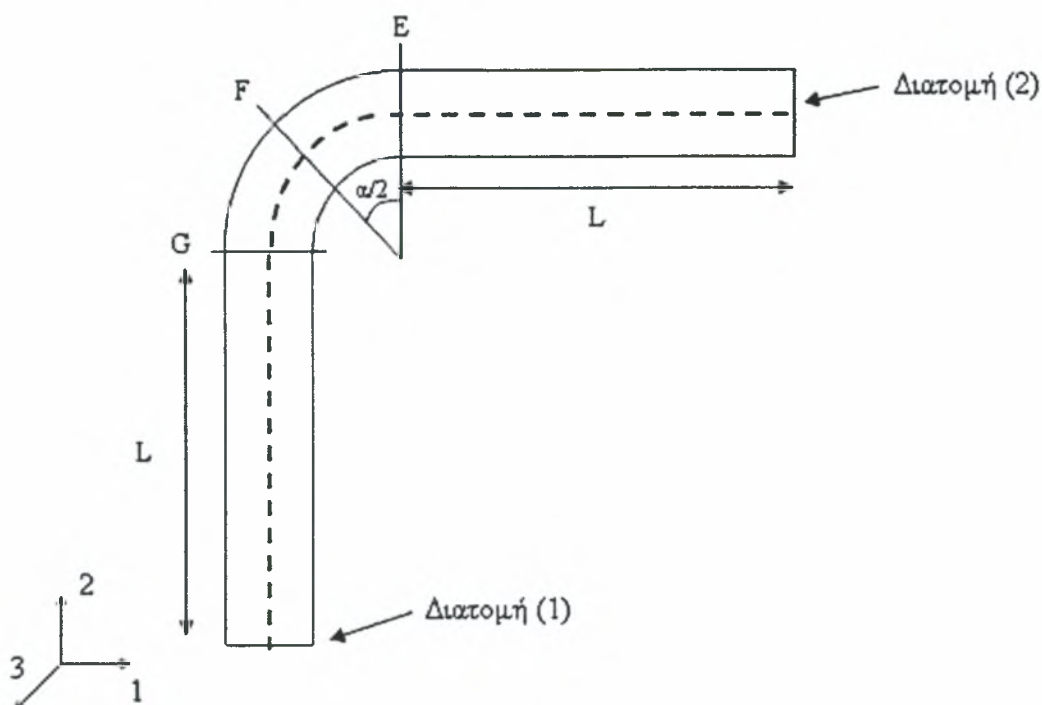
λαμβάνονται από το υπολογιστικό πρόγραμμα συμπίπτουν με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.3.1 Περιγραφή Μοντέλων Παραμετρικής Μελέτης

Σε κάθε περίπτωση έγινε μία γραμμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία που λαμβάνει υπ’ όψη τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των μοντέλων, τα οποία φαίνονται στον πίνακα 3.1. Τα μοντέλα, που αναπτύχθηκαν αποτελούνται από ένα καμπύλο σωλήνα συνολικής γωνίας $\alpha= 90^\circ$ που συνδέεται με δύο ευθύγραμμα τμήματα. Τα ευθύγραμμα και το καμπύλο τμήμα (elbow) των σωλήνων έχουν ομοιόμορφο πάχος t και μέση διάμετρο σωλήνα D_m . Η διαμήκης ακτίνα καμπυλότητας R του άξονα των σωλήνων είναι ίδια για τα δύο μοντέλα και ίση με 480 mm. Το ένα άκρο του σωλήνα είναι πακτωμένο (διατομή 1), ενώ το άλλο άκρο (διατομή 2) υποβάλλεται σε συνεπίπεδη καμπτική ροπή M , η οποία είναι θετική όταν τείνει να μειώσει την ακτίνα καμπυλότητας R , καθώς και σε αντεπίπεδη κάμψη.

| Name | D/t | D (mm) | t (mm) | D _m (mm) | R/r | L (mm) |
|----------|------|--------|--------|---------------------|-------|--------|
| Elbow I | 55 | 165 | 3 | 162 | 5.926 | 990 |
| Elbow II | 27.5 | 165 | 6 | 162 | 5.926 | 990 |

Πίνακας 3.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μοντέλων προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 3.3: Γενική μορφή και χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου προσομοίωσης

Τα δύο δοκίμια μελετήθηκαν στην ελαστική περιοχή και υποβλήθηκαν σε συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες καμπτικές ροπές που εφαρμόστηκαν πάνω στον κεντρικό κόμβο της ελεύθερης διατομής.

3.3.2 Αποτελέσματα

Κατά την προσομοίωση των δύο μοντέλων μελετήθηκαν η παραμόρφωση της διατομής καθώς και το πως αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος του σωλήνα, οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά μήκος και περιμετρικά του σωλήνα και οι συντελεστές ευκαμψίας, όταν τα μοντέλα υποβάλλονται σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη. Τα αποτελέσματα που εξήλθαν από αυτήν την παραμετρική μελέτη παρουσιάζονται στο παρακάτω

κείμενο, σε δύο ενότητες για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη κάμψη και συγκρίνονται με την αναλυτική λύση.

3.3.2.1 Συνεπίπεδη Κάμψη Καμπύλων Σωλήνων και Σύγκριση με τα Αναλυτικά Αποτελέσματα

Καταρχήν, θα πρέπει να αναφερθεί ότι τα δύο δοκίμια υποβλήθηκαν σε καμπτική ροπή μέτρου 10 kN-m που εφαρμόστηκε ως συγκεντρωμένο φορτίο πάνω στον κεντρικό κόμβο της ελεύθερης διατομής, ενώ για αρχή δεν ασκείται εσωτερική πίεση.

➤ Elbow 1

Στο δοκίμιο αυτό, ο χαρακτηριστικός λόγος είναι $D/t=55$ (πίνακας 3.1). Η γεωμετρική παράμετρος είναι:

$$\lambda = \frac{tR}{r^2 \sqrt{(1-\nu)^2}} = 0.23,$$

ενώ η αδιάστατη παράμετρος που σχετίζεται με την πίεση είναι μηδέν,

$$\psi = \frac{PR^2}{Ert} = 0.$$

Σημειώνεται πως η παράμετρος ψ δεν εξαρτάται από το πάχος του δοκιμίου, καθώς αν την πίεση με την τάση διαρροής, έχουμε:

$$\psi = \frac{0.5p_y R^2}{Ert} = 0.5\sigma_y \frac{t}{r} \frac{R^2}{Ert} = 0.5 \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Ο λόγος των ακτινών R και r είναι $\gamma = R/r = 5.926$

➤ Συντελεστής Ευκαμψίας – Σχετική Στροφή των Διαμέτρων

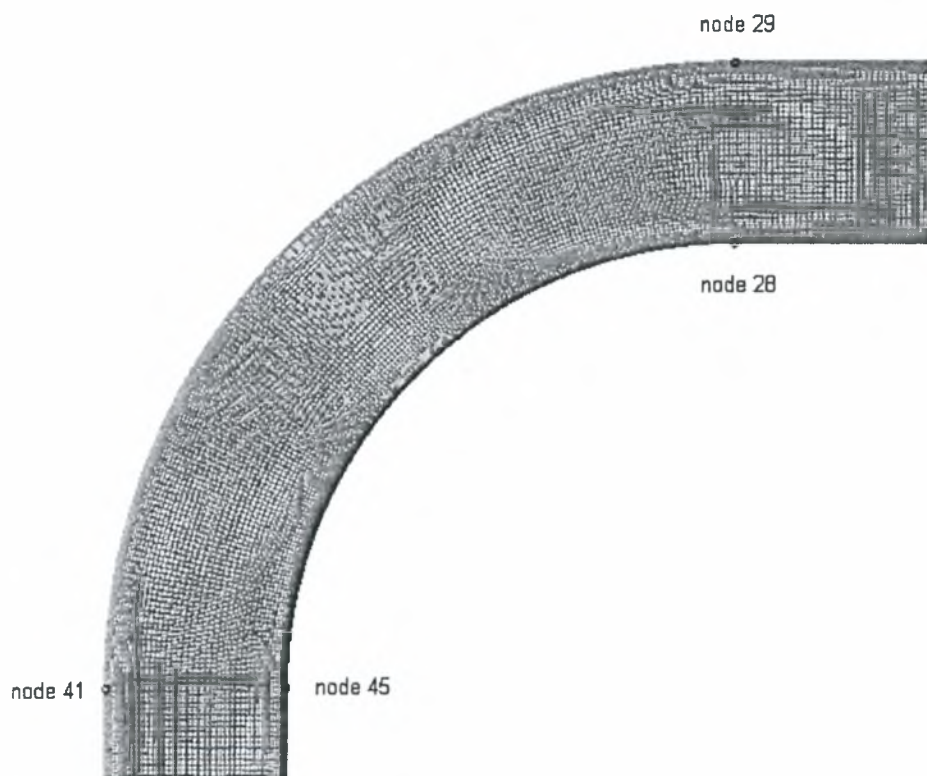
Αρχικά υπολογίζεται η στροφή $\Delta\Phi$ ως η σχετική στροφή των διαμέτρων στις διατομές G και E , που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο της

κάμψης, θεωρώντας τους κόμβους (41,45) και (28,29) αντίστοιχα (σχήμα 3.4).

Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν:

$$\Delta\Phi = 0.051859$$

Αναλυτικά, ο συντελεστής ευκαμψίας, ανατρέχοντας στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπολογίζεται από την σχέση (2.24). Με την βοήθεια ενός υπολογιστικού προγράμματος που αναπτύχθηκε, υπολογίστηκε ίσος με, $k=7.533574$.



Σχήμα 3.4: Σημεία μέτρησης σχετικής στροφής $\Delta\Phi$, για συνεπίπεδη κάμψη

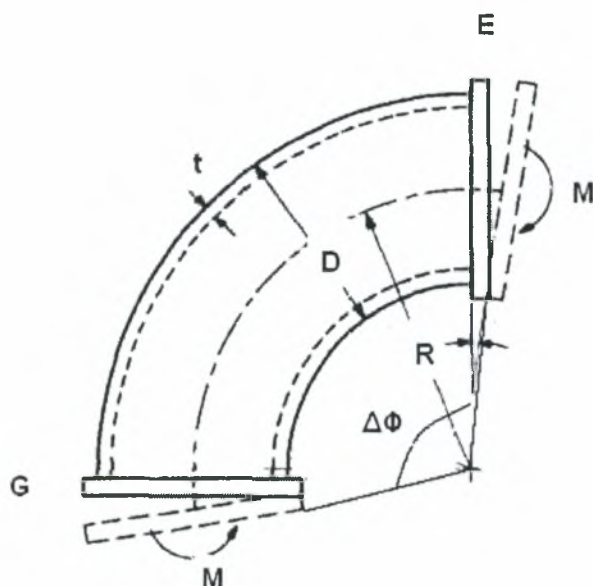
Από την κλασική θεωρία αντοχής των υλικών, η κλίση της ελαστικής γραμμής μιας ευθύγραμμης δοκού υπό σταθερή κάμψη, δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\Phi_{\text{beam}} = \frac{ML}{EI}.$$

Στην περίπτωση του καμπύλου τμήματος σωλήνα με συντελεστή ευκαμψίας k , η σχετική στροφή των διατομών είναι:

$$\Delta\Phi = k\Delta\Phi_{\text{beam}} = k \frac{MR \left(\frac{\pi}{2} \right)}{E\pi r^3 t} = \frac{kMR}{2Er^3 t}$$

$$\Delta\Phi = 0.05402$$



Σχήμα 3.5: Σχετική στροφή των διατομών G, E του καμπύλου σωλήνα

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα των πεπερασμένων στοιχείων με την αναλυτική παρατηρείται απόκλιση 4%. Αυτή η απόκλιση οφείλεται πιθανώς, στο ότι το μοντέλο, που προσομοιώθηκε με πεπερασμένα στοιχεία, έχει και ευθύγραμμο σωλήνα στο άκρο του οποίου ασκείται η καμπτική ροπή. Μπορεί όμως, να θεωρηθεί ότι η αριθμητική λύση του βρέθηκε είναι ικανοποιητική σε σχέση με την αναλυτική λύση.

➤ Παραμόρφωση διατομής (ovalization)

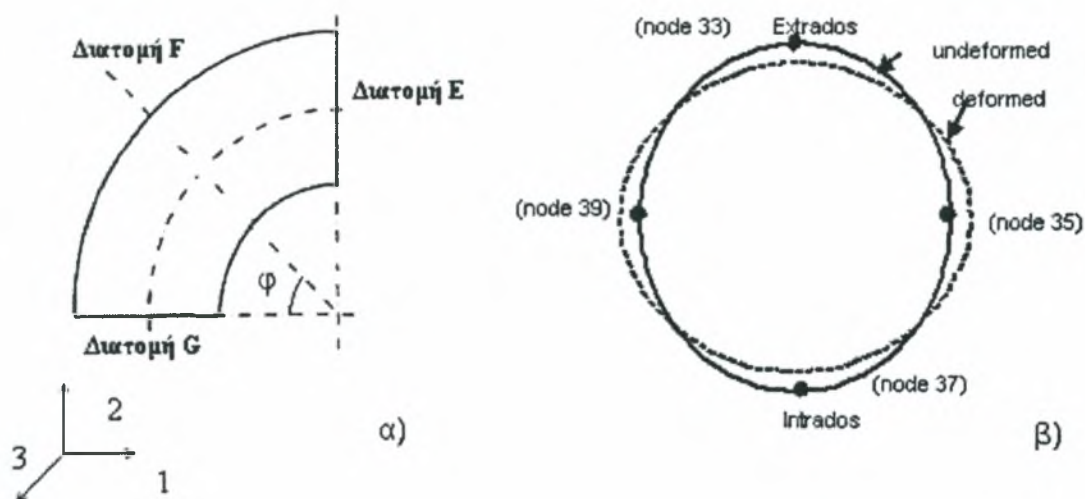
Η διατομή που μελετάται η παραμόρφωση είναι η διατομή F (σχήμα 3.6).

Το πρόγραμμα δίνει τις μετατοπίσεις u_1 , u_2 , u_3 για κάθε κόμβο. Ο κάθε κόμβος μετατοπίζεται κατά την οριζόντια κατεύθυνση κατά

$$u_x = -u_3,$$

ενώ κατά την κατακόρυφη κατά

$$u_y = u_2 \sin \varphi + u_1 \cos \varphi.$$



Σχήμα 3.6: α) Καμπύλο τμήμα σωλήνα και β) διατομή F

Συνεπώς οι συντεταγμένες των κόμβων στην παραμορφωμένη κατάσταση δίνονται:

$$x^* = x + u_x$$

$$y^* = y + u_y$$

Με βάση τα παραπάνω η παραμόρφωση της διατομής, από τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.041683$$

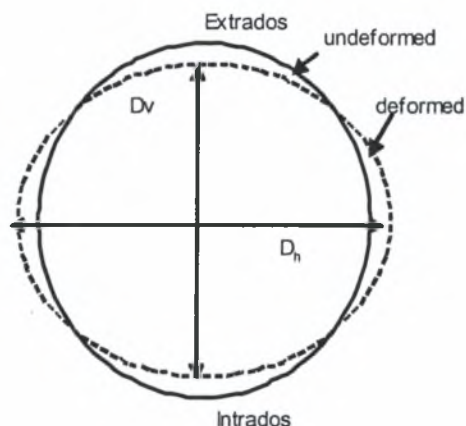
Σύμφωνα με την αναλυτική λύση οι συντεταγμένες των σημείων μετά την παραμόρφωση δίνονται:

$$x^* = (r + w) \cos \varphi - v \sin \varphi \quad \text{για } \varphi = 0, \pi$$

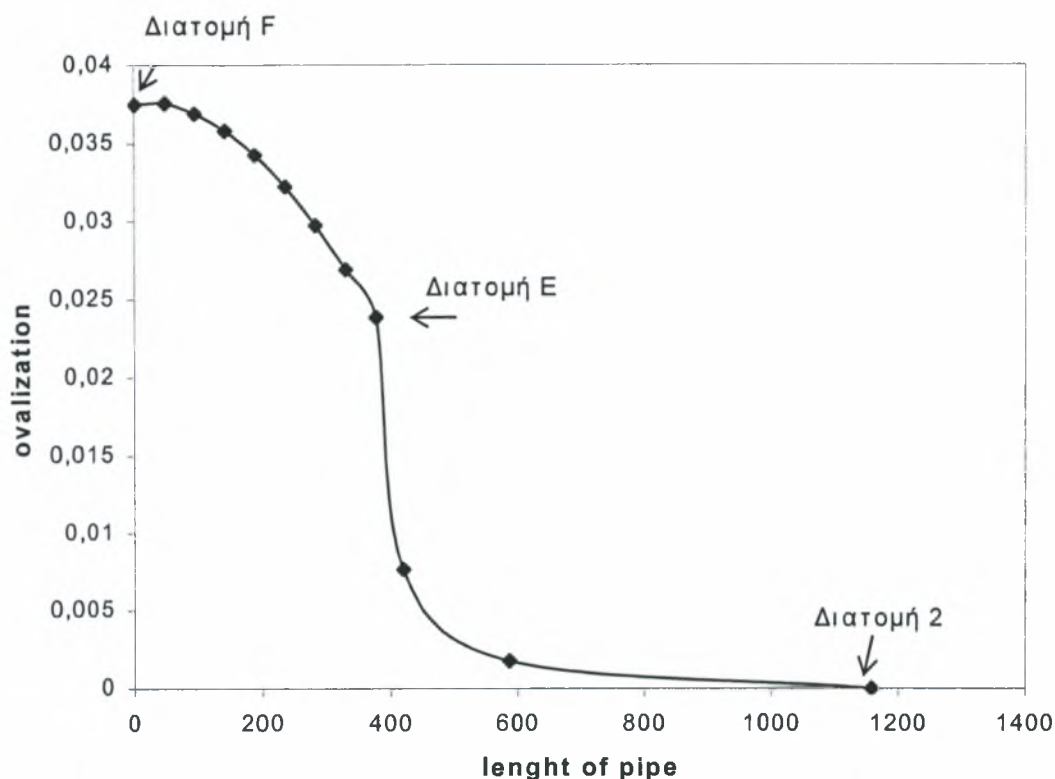
$$y^* = (r + w) \sin \varphi + v \cos \varphi \quad \text{για } \varphi = \pi/2, 3\pi/2$$

Χρησιμοποιώντας 4 όρους Fourier στις τριγωνομετρικές εκφράσεις w (ακτινική μετατόπιση) και v (εφαπτομενική μετατόπιση), υπολογίζονται οι νέες συντεταγμένες των σημείων. Σύμφωνα με τον τύπο (2.41) το ovalization είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.039820$$



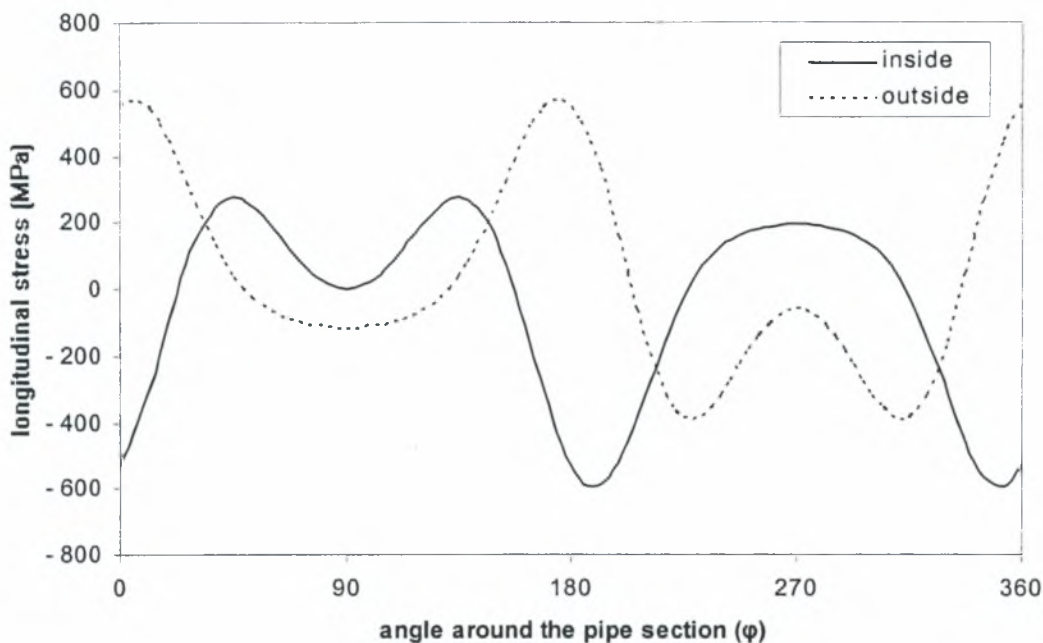
Η “οβαλοποίηση” της διατομής μεταβάλλεται κατά μήκος του κυρτού σωλήνα. Στο σχήμα παρουσιάζεται η μεταβολή του από την διατομή F ($\varphi = 45^\circ$) στην διατομή 2 του σωλήνα. Τα αποτελέσματα υπολογίστηκαν με βάση το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.7 – Γραφική παράσταση του ovalization κατά μήκος του σωλήνα

➤ Διαμήκεις Τάσεις

Με την προσομοίωση των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του μοντέλου. Παρατηρείται ότι οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται σε μία περιοχή κοντά στην διατομή F. Συνεπώς ορίζοντας τους κόμβους της διατομής F ως ένα σύνολο κόμβων, προσδιορίζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται σε αυτήν την διατομή. Η ανάλυση δίνει τιμές και την εσωτερική και για την εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα. Το σχήμα 3.8 παρουσιάζει την μεταβολή των τάσεων στη διατομή F.



Σχήμα 3.8: Γραφική απεικόνιση αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων στη διατομή F για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

Με βάση την αναλυτική λύση οι διαμήκεις τάσεις υπολογίζονται από τον τύπο (2.37). Συγκρίνοντας τις τιμές των τάσεων για διάφορους όρους Fourier, παρατηρήθηκε ότι πάνω από 4 όρους δεν υπήρχαν αλλαγές στις τιμές των τάσεων. Χρησιμοποιήθηκαν, λοιπόν, 4 όροι, τα αποτελέσματα ήταν:

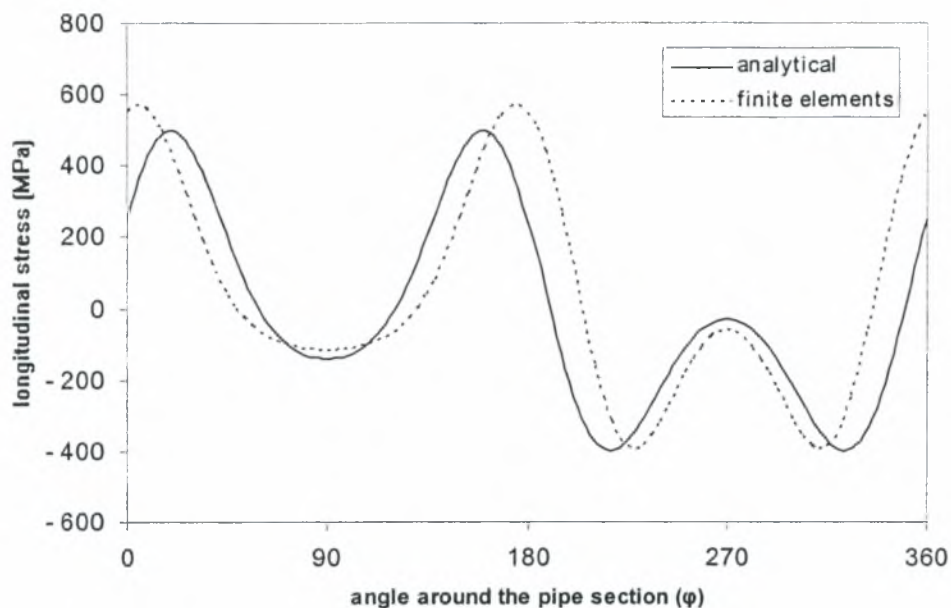
$$d_1 = -0.578203$$

$$d_2 = -0.029816$$

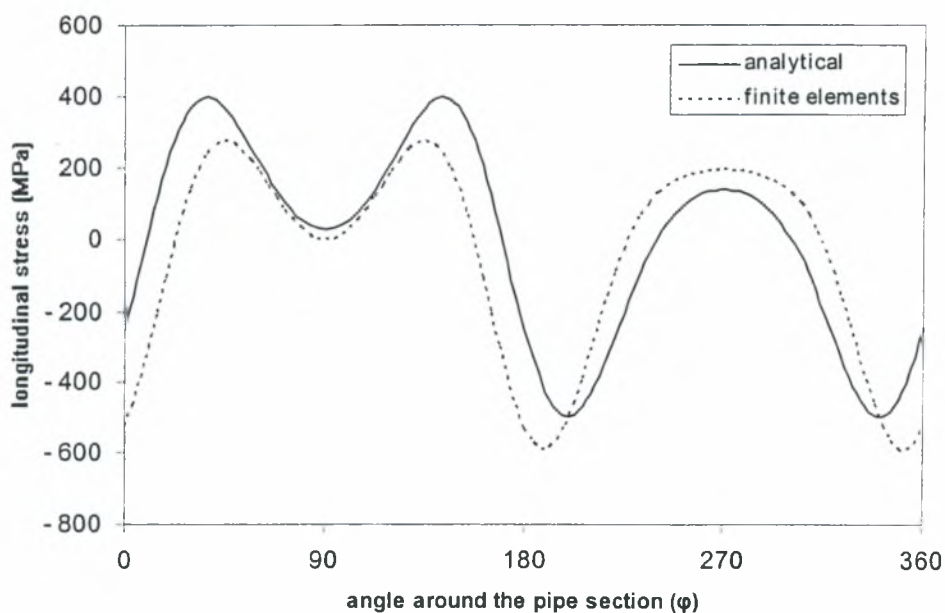
$$d_3 = -0.000735$$

$$d_4 = -0.000007$$

Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων και παρουσιάζονται στο σχήμα



Σχήμα 3.9: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

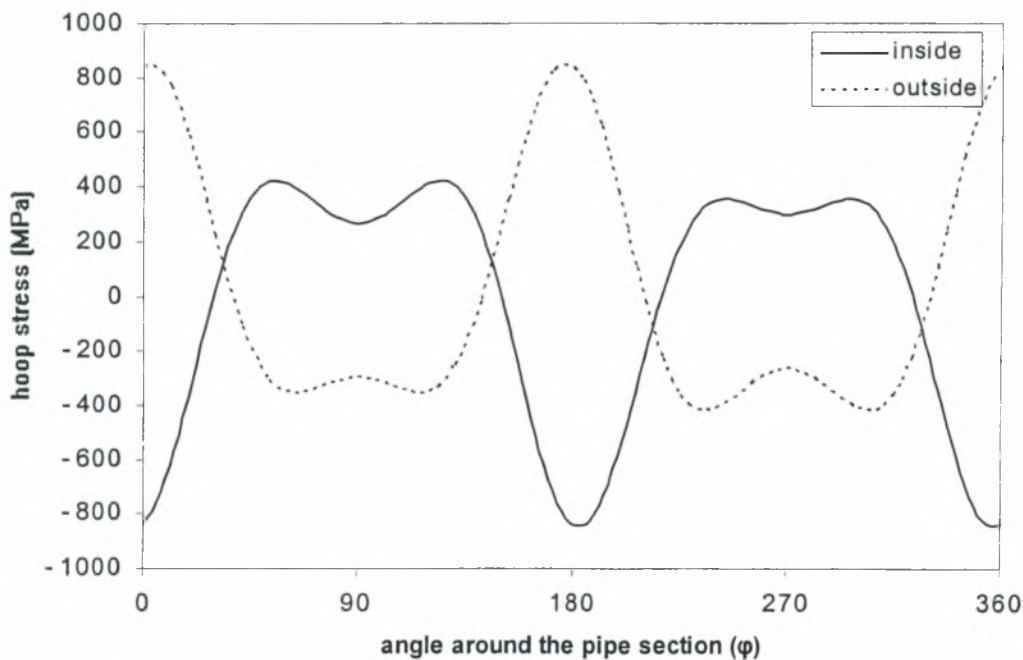


Σχήμα 3.10: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

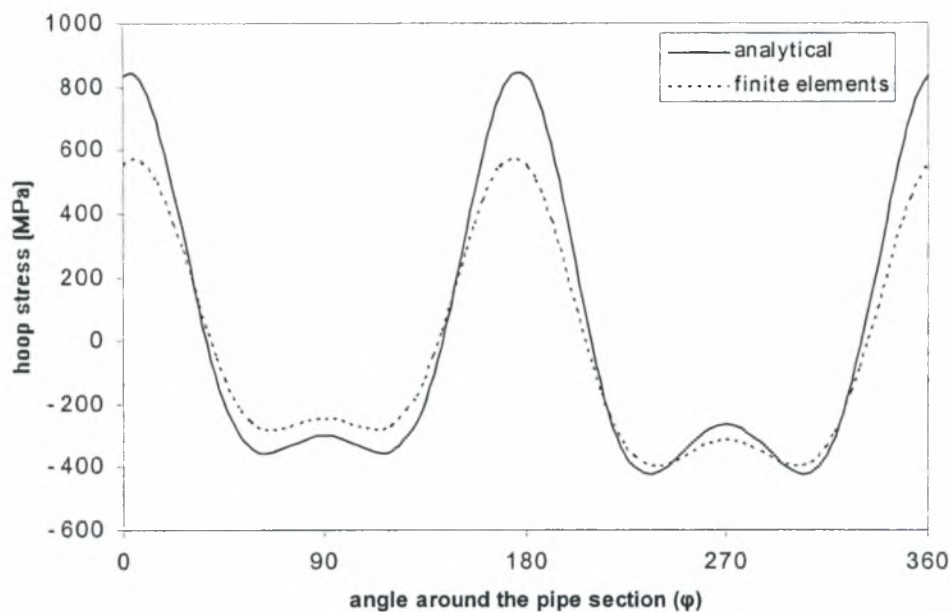
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνουν σε ικανοποιητικό βαθμό με αυτά της αναλυτικής λύσης.

➤ Περιμετρικές Τάσεις

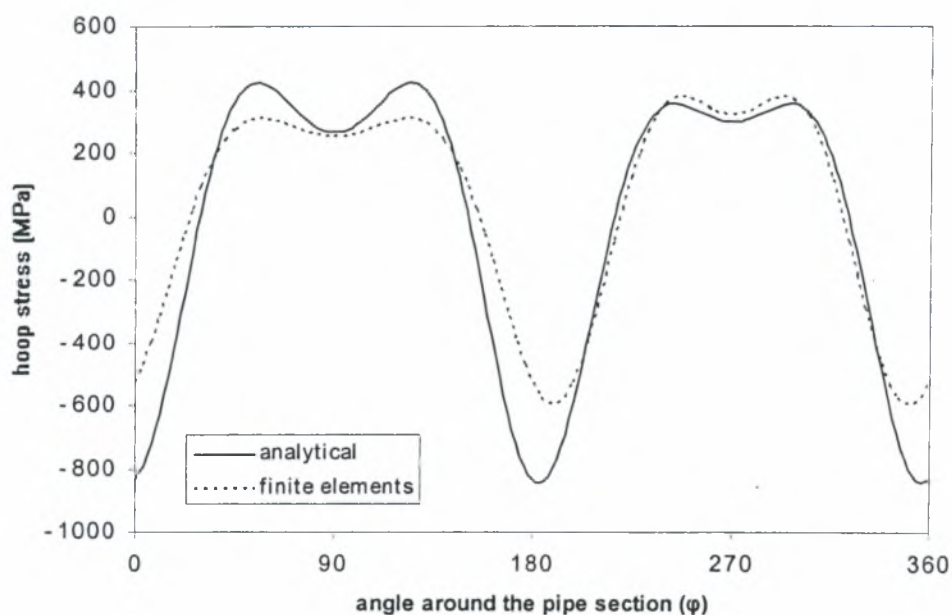
Οι περιμετρικές τάσεις που αναπτύσσονται στην διατομή F, με βάση την ανάλυση με πεπερασμένα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.11, για την εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα. Διαπιστώνεται ότι η μέγιστη περιμετρική τάση για ελαστικούς καμπύλους σωλήνες κάτω από συνεπίπεδη κάμψη εμφανίζεται κοντά στην κύρια διάμετρο ($0^\circ - 180^\circ$). Ενώ η αναλυτική λύση δίνεται από τον τύπο (2.38), όπου οι όροι Fourier δόθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 3.11: Γραφική απεικόνιση αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων στη διατομή F για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 3.12: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 3.13: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

➤ Elbow 2

Στο δοκίμιο αυτό, ο χαρακτηριστικός λόγος είναι $D/t=27.5$ (πίνακας 3.1). Η γεωμετρική παράμετρος είναι $\lambda=0.46$, η οποία είναι διπλάσια από την προηγούμενη περίπτωση, σαν αποτέλεσμα, η αναλυτική λύση να συγκλίνει γρηγορότερα. Ενώ και σε αυτήν την περίπτωση δεν ασκείται εσωτερική πίεση και συνεπώς η αδιάστατη παράμετρος που σχετίζεται με την πίεση είναι ίση με μηδέν ($\psi=0$). Όμοια με προηγουμένως μελετώνται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων με τα αναλυτικά αποτελέσματα.

➤ Συντελεστής Ευκαμψίας – Σχετική Στροφή των Διαμέτρων

Η στροφή $\Delta\Phi$ μελετώντας τους κόμβους (41,45) και (28,29) αντίστοιχα (σχήμα 3.4) ισούται με:

$$\Delta\Phi = 0.012928$$

Με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης υπολογίστηκε $k=3.6069$. Και αναλυτικά η στροφή των διατομών ισούται με:

$$\Delta\Phi = 0.012165$$

Παρατηρούμε, σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα, πως η στροφή $\Delta\Phi$ με την αύξηση του πάχους του καμπύλου σωλήνα, μειώνεται.

➤ Παραμόρφωση διατομής (ovalization)

Η παραμόρφωση της διατομής με την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων είναι ίση με:

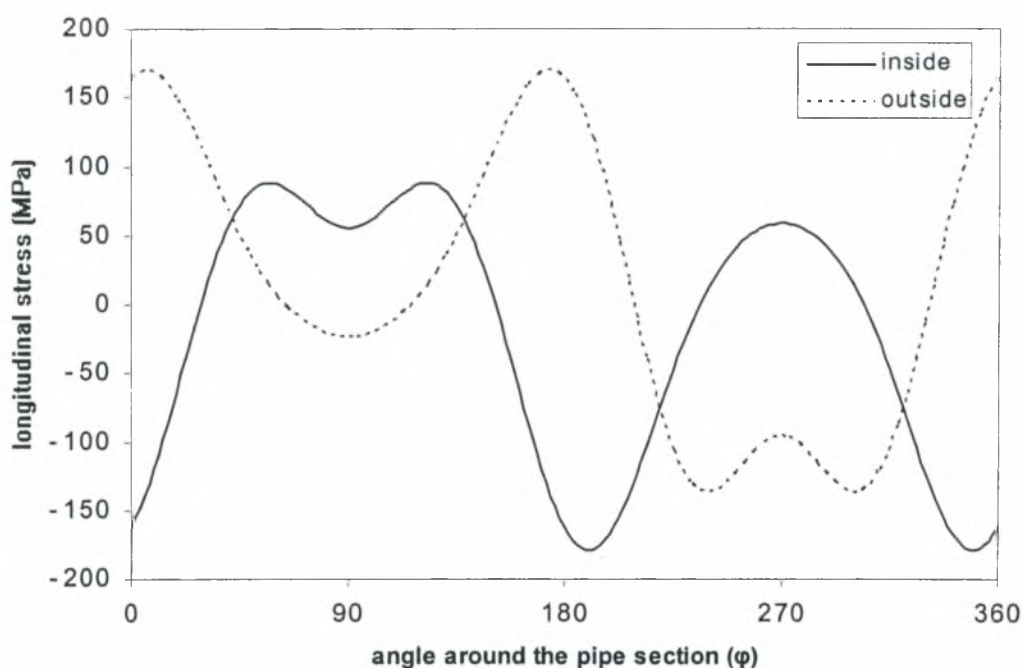
$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.008344$$

και από την αναλυτική λύση δίνεται:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.007932$$

➤ Διαμήκειες Τάσεις

Οι διαμήκειες τάσεις που αναπτύσσονται στο μοντέλο πάχους $t=6\text{ mm}$ από το υπολογιστικό πακέτο, παρουσιάζονται στο σχήμα 3.14. Οι τάσεις που αναπτύσσονται είναι συναρτήσει του συντελεστή ευκαμψίας, που λογικά είναι μικρότερος λόγω της μεγαλύτερης δυσκαμψίας του παχύτερου σωλήνα. Οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στην διατομή F .



Σχήμα 3.14: Γραφική απεικόνιση αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων στη διατομή F για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$

Με βάση την αναλυτική λύση οι διαμήκειες τάσεις υπολογίζονται από τον τύπο (2.31). Χρησιμοποιήθηκαν 4 όροι Fourier:

$$d_1 = -0.481837600$$

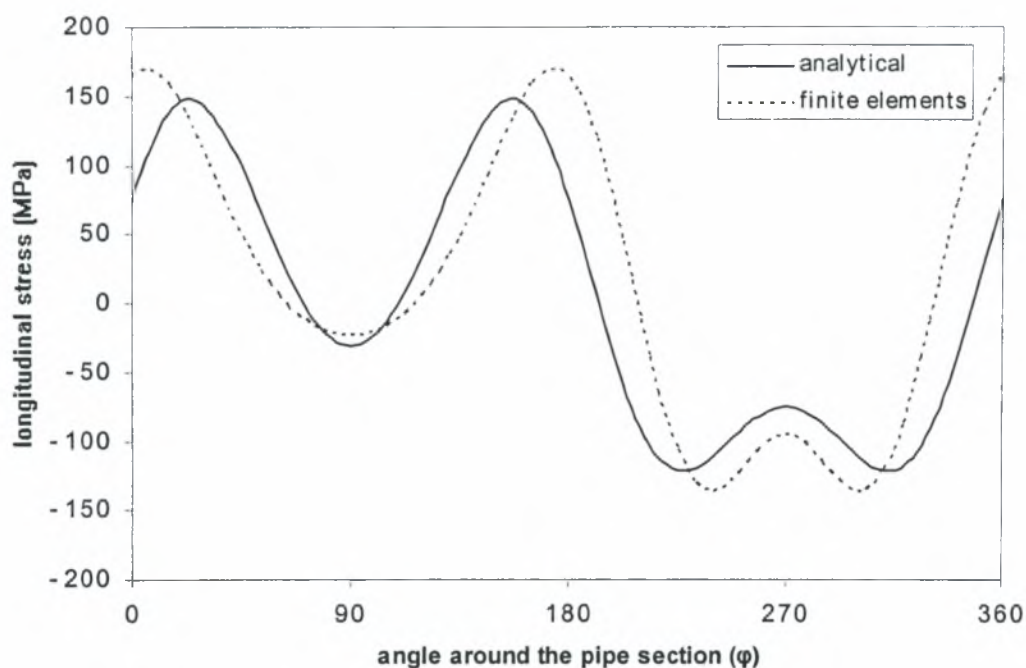
$$d_2 = -0.008371587$$

$$d_3 = -0.000055208$$

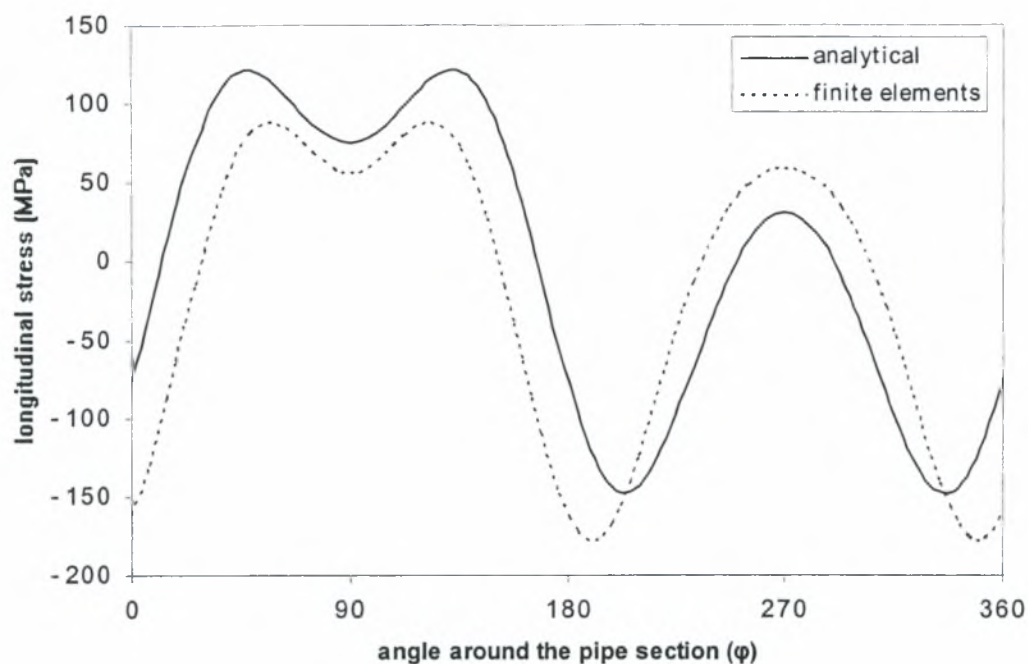
$$d_4 = -0.000000138$$

η λύση δεν μεταβάλλεται σημαντικά χρησιμοποιώντας και 2 όρους Fourier.

Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά των πεπερασμένων στοιχείων και παρουσιάζονται στα σχήματα για την εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια αντίστοιχα (σχ. 3.15-3.16).



Σχήμα 3.15: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

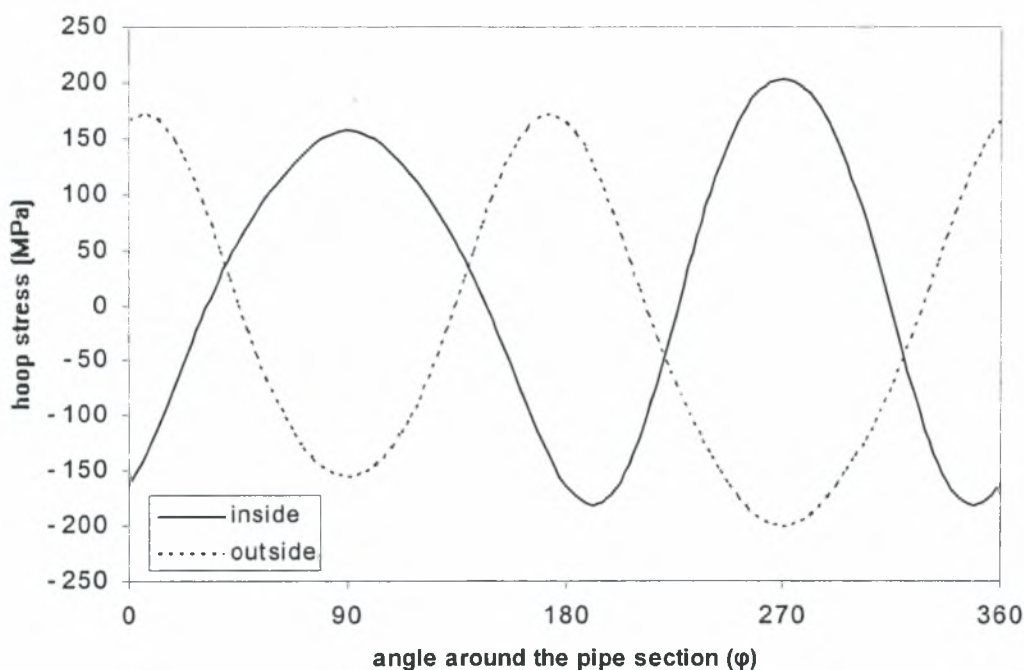


Σχήμα 3.16: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

Η ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία προέβλεψε με καλή ακρίβεια τη συμπεριφορά του δοκιμίου.

➤ Περιμετρικές Τάσεις

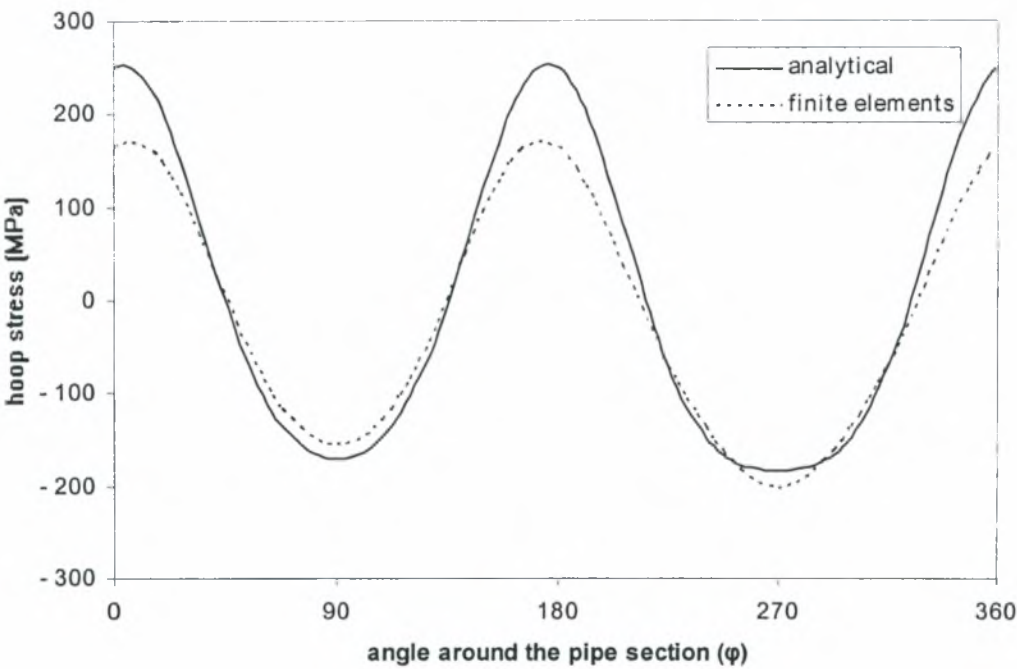
Οι περιμετρικές τάσεις που αναπτύσσονται στην διατομή F , με βάση την ανάλυση με πεπερασμένα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.17, για την εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα (σχ. 3.18-3.19). Ενώ η αναλυτική λύση δίνεται από τον τύπο (2.38), όπου οι όροι Fourier δόθηκαν παραπάνω.



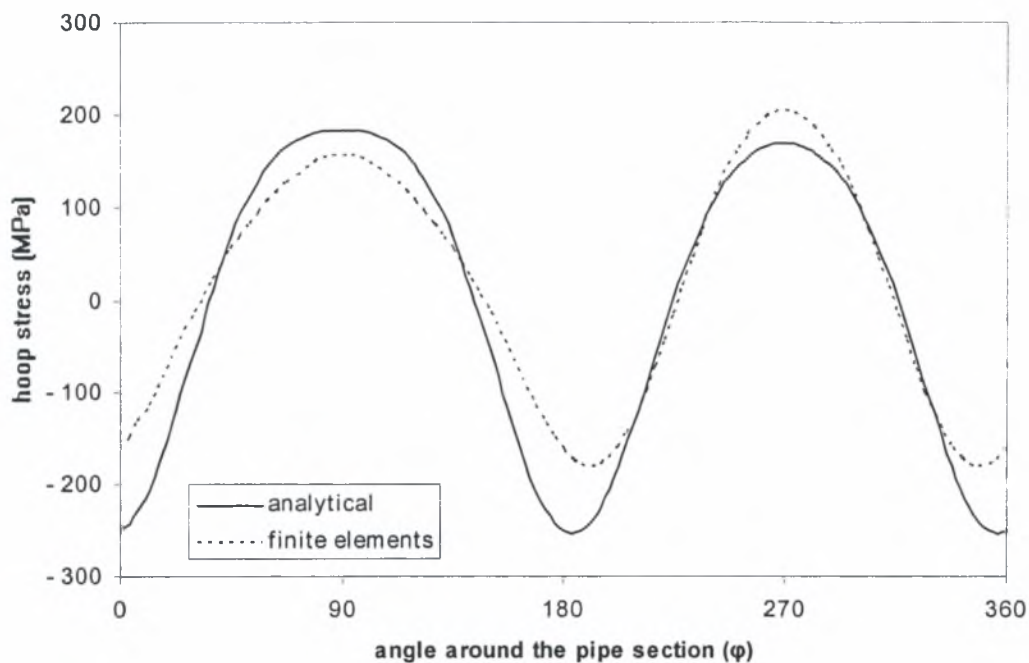
Σχήμα 3.17: Γραφική απεικόνιση αριθμητικών αποτελεσμάτων πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων στη διατομή F για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

Στο παραπάνω κείμενο έγινε μία παραμετρική μελέτη δύο μοντέλων, όπου παρουσιάστηκαν οι τάσεις που αναπτύσσονται σε μία διατομή του κυρτού σωλήνα και συγκρίθηκαν με την αναλυτική λύση που αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο. Από τα αποτελέσματα αυτά, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη περιμετρική τάση εμφανίζεται κοντά στους κόμβους 35,39 ($\varphi=0,\pi$), και η οποία είναι πάντα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέγιστη διαμήκη τάση που αναπτύσσεται. Το μέγεθος και η περιμετρική μεταβολή της διαμήκου τάσης είναι διαφορετική από αυτήν που αναπτύσσεται στην ευθύγραμμη δοκό. Η τάση στο εσωτερικό και εξωτερικό της καμπτόμενης – αρχικά ευθύγραμμης δοκού είναι μέγιστη σε αντίθεση με τον καμπύλο σωλήνα που είναι μικρή, και αυξάνεται στα σημεία όπου η περιμετρική τάση είναι μέγιστη. Όπως αναμένεται, η αύξηση του πάχους μειώνει την

ευκαμψία του σωλήνα, κατά συνέπεια η διατομή να παραμορφώνεται λιγότερο.



Σχήμα 3.18: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 3.19: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

3.3.2.2 Αντιεπίπεδη Κάμψη Καμπύλων Σωλήνων και Σύγκριση με τα Αναλυτικά Αποτελέσματα

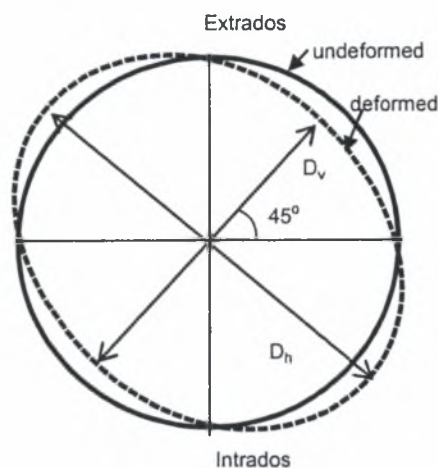
Τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα υποβλήθηκαν και σε αντιεπίπεδη κάμψη, τα αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται στην παρούσα ενότητα. Κατά την αντιεπίπεδη κάμψη το κυρτό μέρος του καμπύλο σωλήνα πάλι παραμορφώνεται και αποκτά ένα οβάλ σχήμα, αλλά τώρα οι διάμετροι που το δημιουργούν αυτό, απέχουν 45° από τους κύριους άξονες (σχήμα 3.20).

➤ Παραμόρφωση διατομής (ovalization)

Θεωρώντας τα ίδια στοιχεία με πριν, το αναλυτικό ovalization είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.039719, \text{ όταν } t=3 \text{ mm και}$$

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.0079302, \text{ όταν } t=6 \text{ mm.}$$



Σχήμα 3.20: “Οβαλοποίηση” διατομής σε αντεπίπεδη κάμψη

Με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου το ovalization για τα δύο μοντέλα είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.027587, \text{ όταν } t=3 \text{ mm και}$$

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.0056004, \text{ όταν } t=6 \text{ mm}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία σημαντική απόκλιση, συγκρίνοντας τα υπολογιστικά αποτελέσματα με τα αναλυτικά. Αυτό οφείλεται στο ότι, καθώς εφαρμόζουμε την καμπτική ροπή, στην διατομή F που μελετάμε την παραμόρφωση μεταφέρεται και μία στρεπτική ροπή M_2 , η οποία επηρεάζει το αποτέλεσμα. Αυτό το γεγονός πρέπει να ληφθεί υπ’ όψη όταν υπολογίζονται οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και το “ovalization”.

Υπολογίζοντας, λοιπόν τις τάσεις με την αναλυτική μέθοδο ως καμπτική ροπή υπολογίζεται μόνο η M_1 :

$$M_1 = M \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} M ,$$

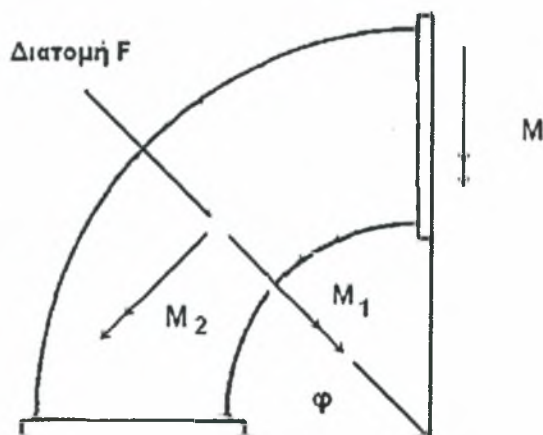
για την διατομή F ($\varphi=45^\circ$), (σχήμα3.21).

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση το “ovalization” προκύπτει:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.02807 , \text{ όταν } t=3 \text{ mm και}$$

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.005604 , \text{ όταν } t=6 \text{ mm}$$

που είναι πολύ πιο κοντά στο αποτέλεσμα των πεπερασμένων στοιχείων. Ακολουθούν τα διαγράμματα για το μοντέλο, με $D/t= 55$, με την συνθήκη ότι η ροπή που θα χρησιμοποιηθεί για την αναλυτική λύση είναι 70.71% της ροπής που θεωρείται στη λύση των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.21: Στη διατομή F μεταφέρεται μια καμπτική ροπή M_1 και μία στρεπτική ροπή M_2 , κατά την αντιεπίπεδη κάμψη του δοκιμίου

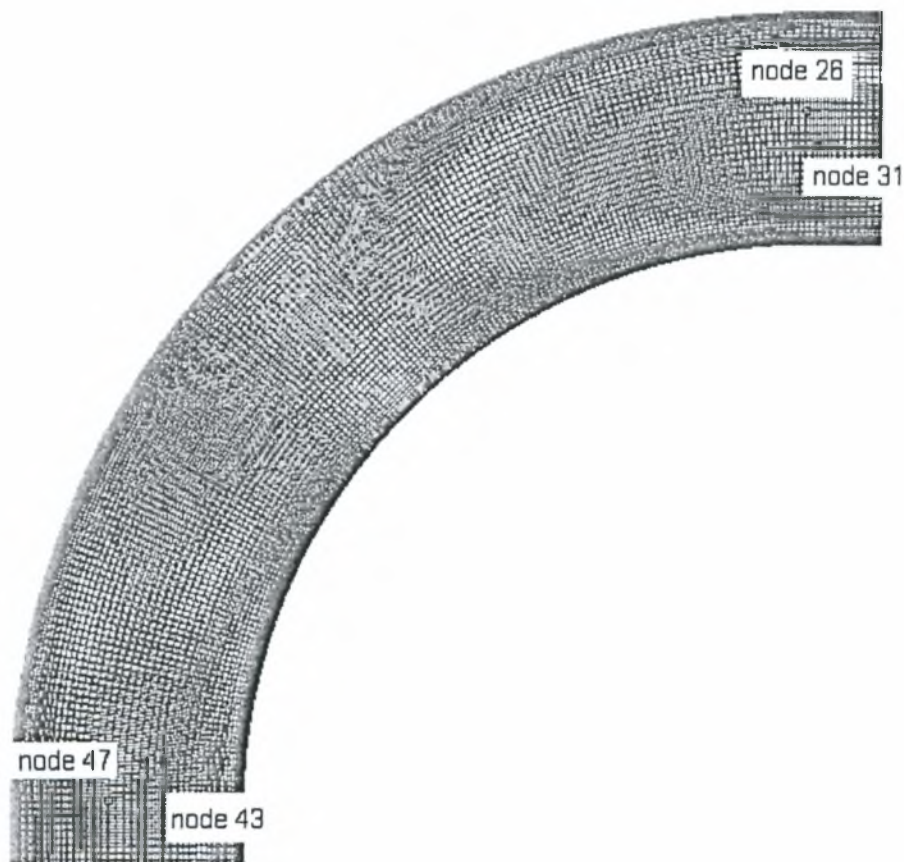
➤ Συντελεστής Ευκαμψίας – Σχετική Στροφή των Διαμέτρων

Η στροφή $\Delta\Phi$ είναι η σχετική στροφή των διαμέτρων G, E μελετώντας τους κόμβους (47,43) και (26,31) αντίστοιχα (σχήμα 3.22) και ισούται με:

$$\Delta\Phi = 0.040382$$

Αναλυτικά ο συντελεστής ευκαμψίας, είναι ίδιος με την συνεπίπεδη κάμψη και ίσος με:

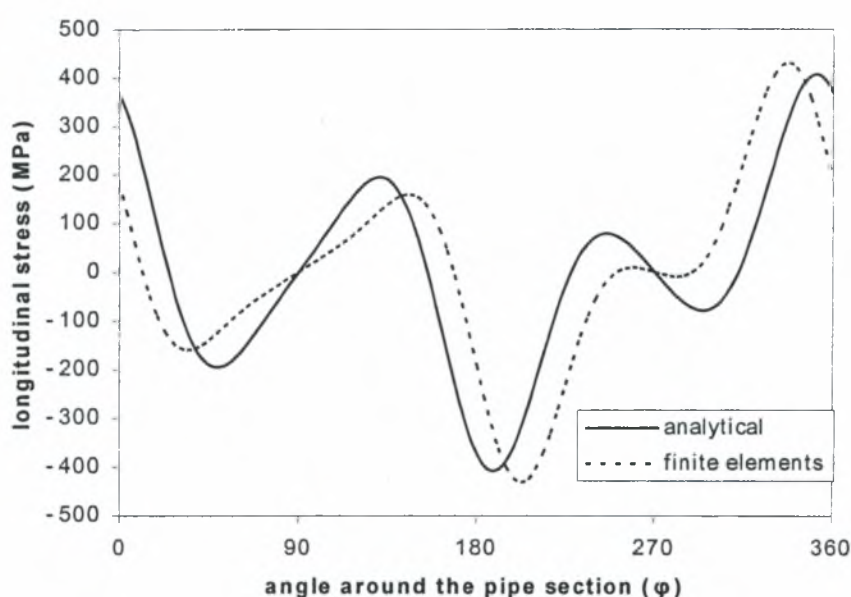
$$\Delta\Phi = 0.05402$$



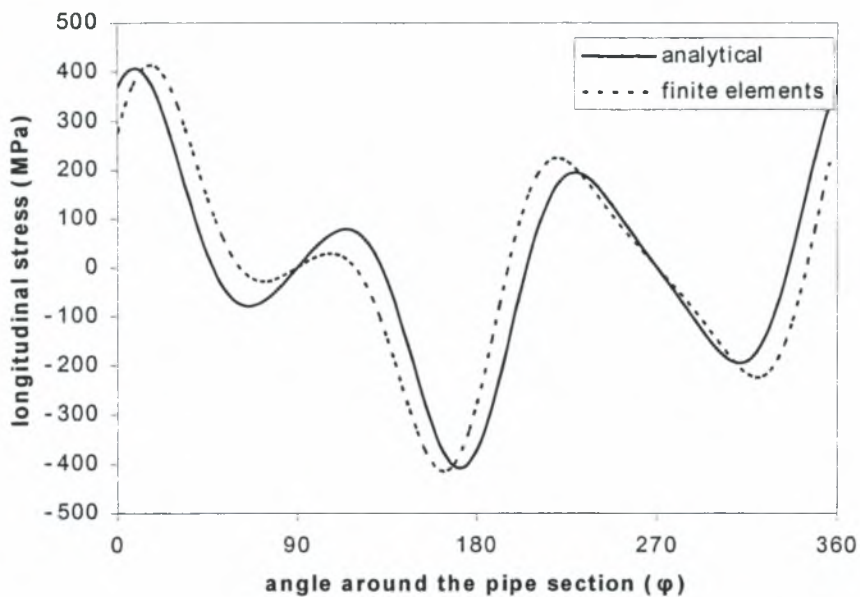
Σχήμα 3.22: Σημεία μέτρησης σχετικής στροφής $\Delta\Phi$, για αντεπίπεδη κάμψη

➤ Διαμήκεις Τάσεις

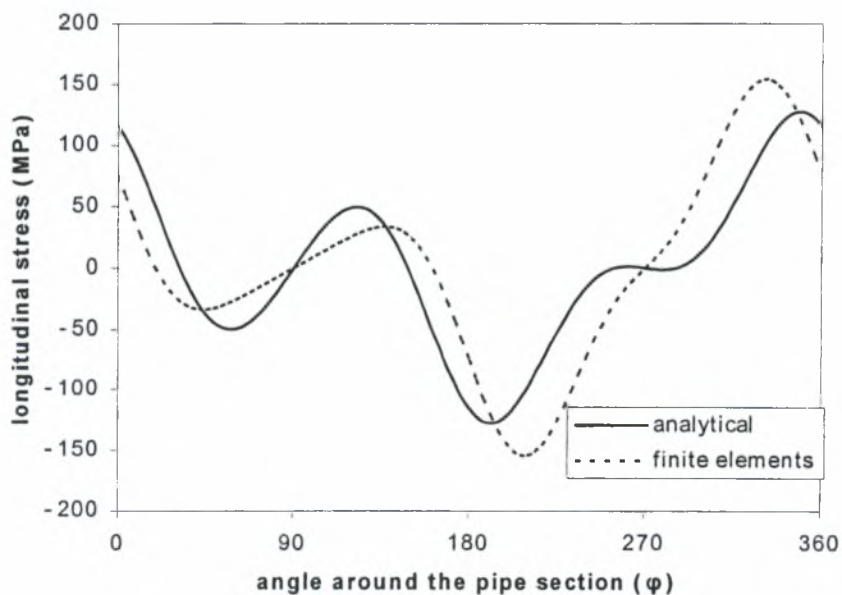
Οι διαμήκεις τάσεις, όπως μπορεί να παρατηρηθεί και στα σχήματα, στον κατακόρυφο άξονα της διατομής είναι μηδέν, ενώ αποκτούν μέγιστη τιμή στην οριζόντια διάμετρο. Παρατηρείται μία αρκετά καλή συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα από την προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία.



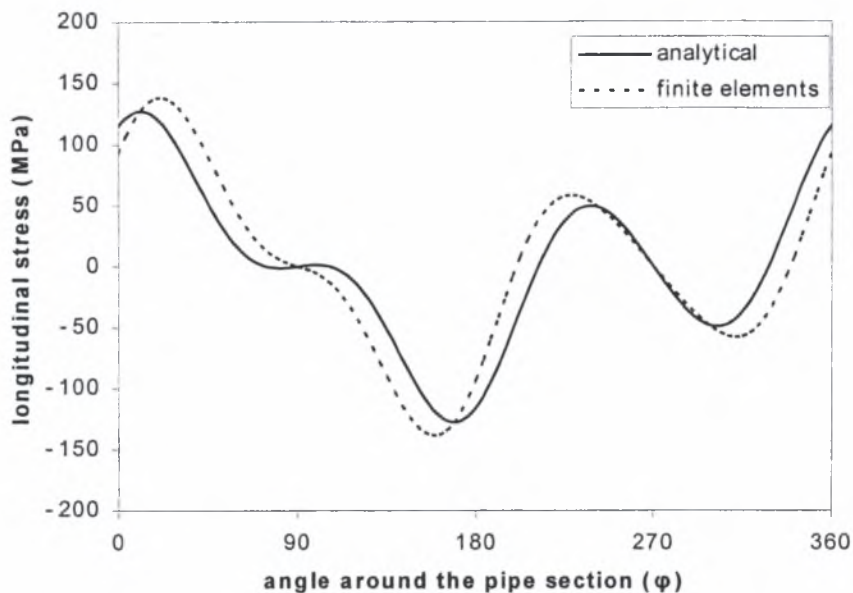
Σχήμα 3.23: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=3\text{ mm}$, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$



Σχήμα 3.24: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=3$ mm, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10$ kN-m



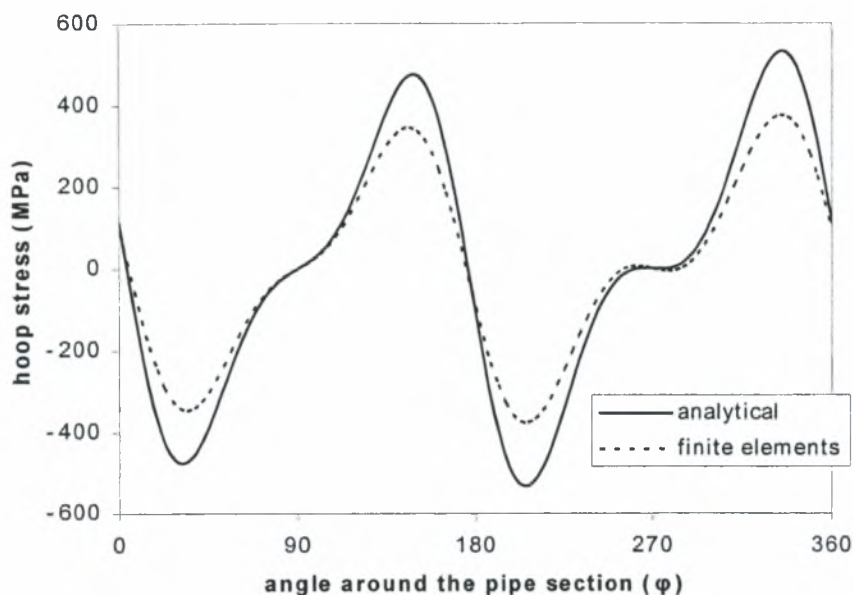
Σχήμα 3.25: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=6$ mm, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10$ kN-m



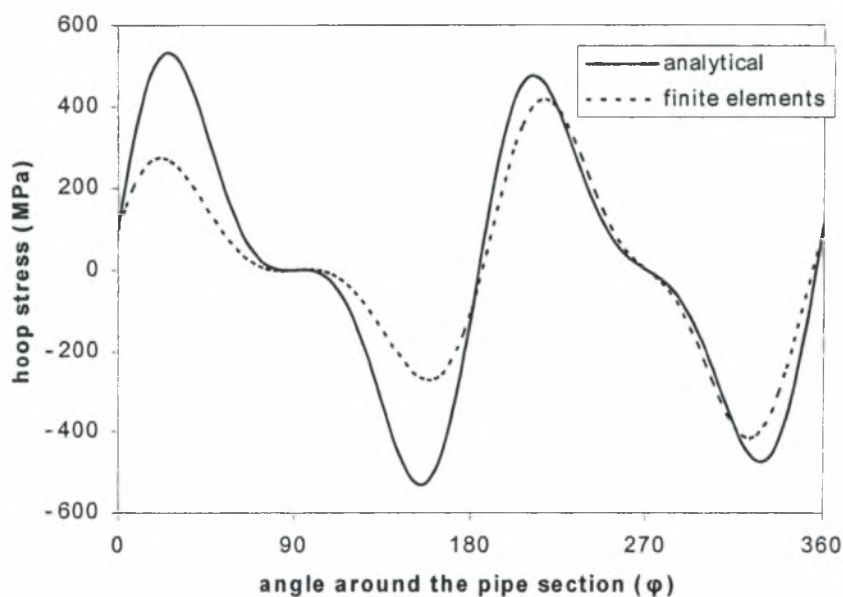
Σχήμα 3.26: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=6$ mm, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10$ kN-m

➤ Περιμετρικές Τάσεις

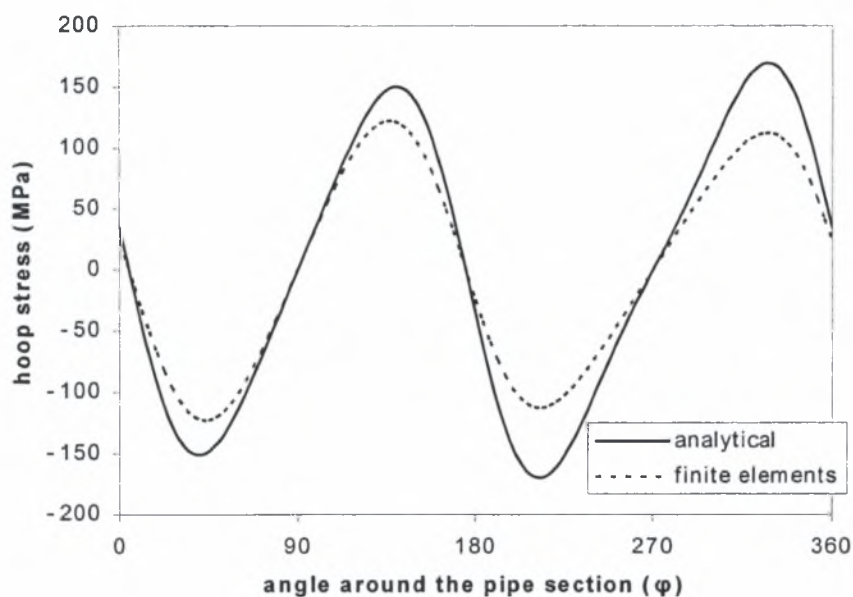
Οι περιμετρικές τάσεις που αναπτύσσονται στο καμπύλο σωλήνα αποκτούν μέγιστες τιμές στις διαμέτρους που απέχουν 45° από τους κύριους άξονες, ενώ στα σημεία των κυρίων αξόνων οι τάσεις μηδενίζονται. Τα αποτελέσματα έρχονται σε σύμφωνη γνώμη με το σχήμα της παραμορφωμένης διατομής που παρουσιάστηκε παραπάνω.



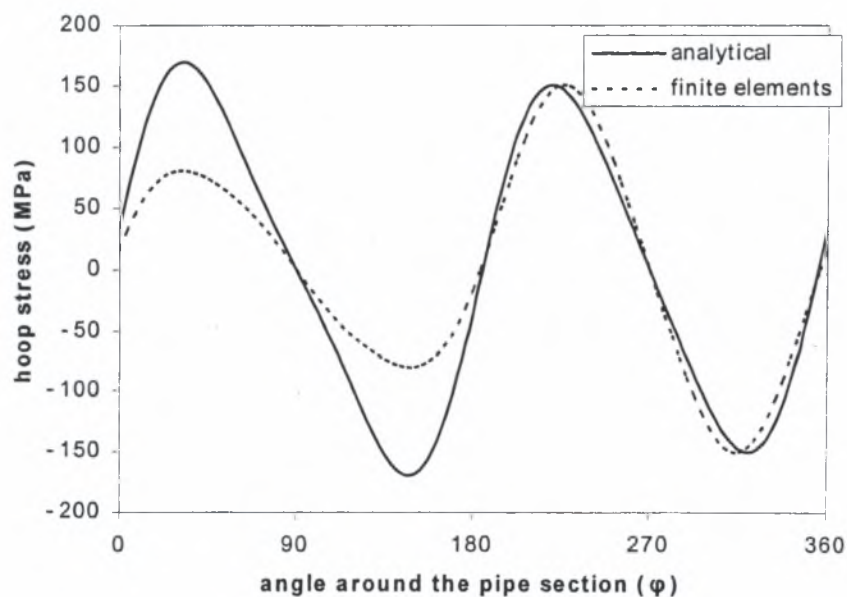
Σχήμα 3.27: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=3\text{ mm}$, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$



Σχήμα 3.28: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=3\text{ mm}$, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$



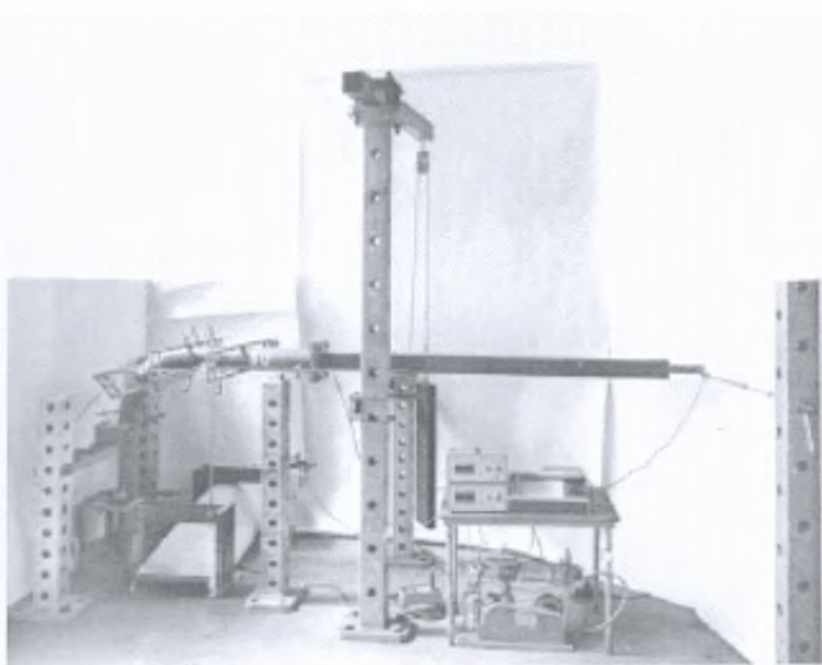
Σχήμα 3.29: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=6\text{ mm}$, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$



Σχήμα 3.30: Σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα πεπερασμένων στοιχείων των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα, πάχους $t=6\text{ mm}$, για αντιεπίπεδη κάμψη, $M=10\text{ kN-m}$

3.4 Σύγκριση Πειραμάτων με Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο Institute of Building Materials and Structures του TNO (κρατικό ερευνητικό ίδρυμα της Ολλανδίας) πραγματοποιήθηκε μία σειρά πειραμάτων καμπύλων σωλήνων συνολικής γωνίας 90° , σε συνεπίπεδη κάμψη υπό ταυτόχρονη επίδραση εσωτερικής πίεσης. Στην παράγραφο αυτή γίνεται προσομοίωση ενός δοκιμίου (tube 80) με πεπερασμένα στοιχεία, και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά.



Σχήμα 3.27: Πειραματική διάταξη δοκιμίου Tube 80

3.4.1 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης Δοκιμίου 80

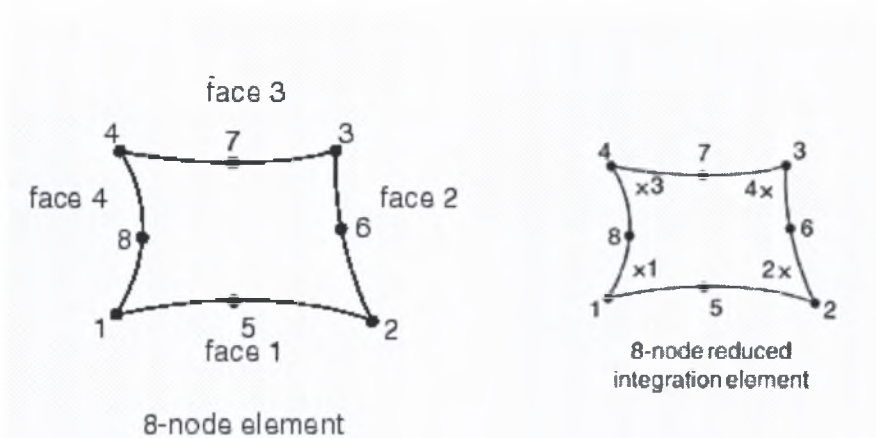
Το δοκίμιο (tube 80) της πειραματικής διάταξης (σχήμα 3.27) αποτελείται από έναν καμπύλο σωλήνα συνολικής γωνίας 90° που συνδέεται με δύο ευθύγραμμα τμήματα. Το ένα άκρο του σωλήνα (διατομή H) είναι πακτωμένο, ενώ στο άλλο (διατομή B) έχει ενωθεί πρόβολος μήκους $L = 2660 \text{ mm}$ και στο ελεύθερο άκρο (A) του προβόλου, εφαρμόζεται κατακόρυφη δύναμη Q (σχήμα 2). Το πάχος των δύο ευθύγραμμων

σωλήνων είναι $t=3$ mm, ενώ το πάχος του καμπύλου σωλήνα είναι $t=2.9$ mm και χρησιμοποιούνται 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά αυτό. Τα δοκίμια υποβλήθηκαν σε συνεπίπεδη κάμψη με ταυτόχρονη επίδραση εσωτερικής πίεσης που έλαβε τιμές 0, 29, 58, 86, 115 atm για να μελετηθεί η απόκριση τους στην ελαστική περιοχή.

3.4.2 Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων

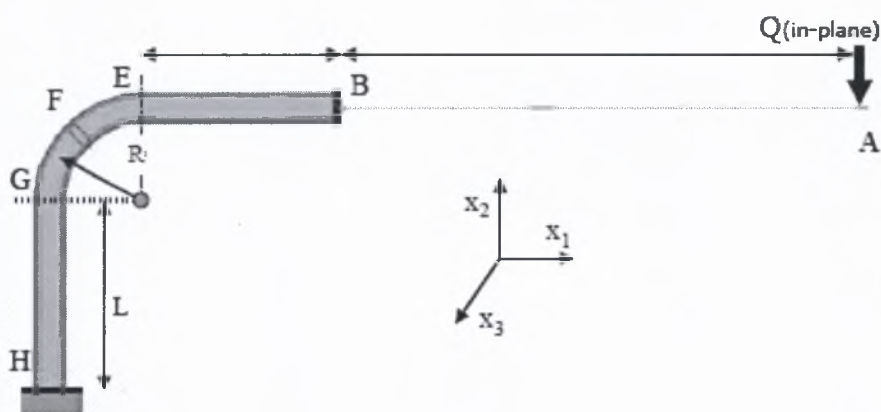
Το δοκίμιο tube 80 προσομοιώθηκε στο ABAQUS με οχτακομβικά στοιχεία S8R5, μειωμένης ολοκλήρωσης και πέντε βαθμών ελευθερίας (3 μετατοπίσεις και 2 στροφές πάνω στην επιφάνεια του) καθώς και τέσσερις σταθμούς ολοκλήρωσης (σχήμα 3.28). Τα στοιχεία μειωμένης ολοκλήρωσης χρησιμοποιούν τόσα σημεία ολοκλήρωσης, σε κάθε κόμβο, όσα είναι απαραίτητα για τον υπολογιστεί η συνεισφορά στο δυνατό έργο, των τασικών πεδίων που είναι μία τάξη μεγέθους χαμηλότερη από τις εξισώσεις παρεμβολής που χρησιμοποιεί το κάθε στοιχείο. Αντίθετα οι πίνακες της μάζας και των κατανεμημένων φορτίων υπολογίζονται κανονικά. Κατά το πάχος χρησιμοποιήθηκαν πέντε σημεία ολοκλήρωσης τύπου Simpson. Τέλος θεωρήθηκε γραμμικά - ελαστικό υλικό, μέτρο ελαστικότητας $E=210000$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.3$.

Ο πρόβολος, μήκους $L = 2660$ mm, ο οποίος στα πειράματα ήταν ένα σχετικά άκαμπο στέλεχος συγκολλημένο πάνω στο ελεύθερο άκρο του σωλήνα προσομοιώθηκε με δύο στοιχεία “σωλήνα” ELBOW32, τα οποία

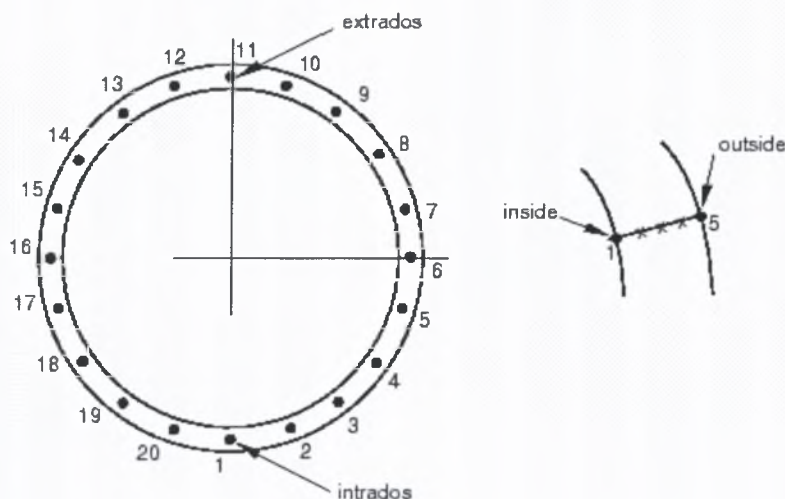


Σχήμα 3.28: Οκτακομβικό στοιχείο S8R5 με τέσσερις σταθμούς ολοκλήρωσης

χρησιμοποιούν πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού για να περιγράψουν την διαμήκη παραμόρφωση και αναπτύγματα Fourier μέχρι 6^{ου} βαθμού για να περιγράψουν την αλλαγή της γεωμετρίας του σωλήνα. Η εξωτερική ακτίνα του προβόλου είναι 78.55 mm και το πάχος του 10 mm, σχετικά μεγάλο πάχος σε σύγκριση με το πάχος του δοκιμίου, για να επιτευχθεί η αυξημένη δυσκαμψία του προβόλου. Τέλος υπάρχουν 5 σημεία ολοκλήρωσης κατά το πάχος του προβόλου και 20 σημεία ολοκλήρωσης (σχήμα 3.30).



Σχήμα 3.29: Γενική μορφή του μοντέλου προσομοίωσης



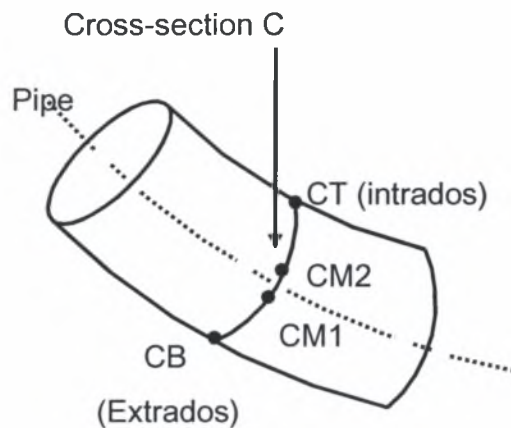
Σχήμα 3.30 : Σημεία ολοκλήρωσης: 20 στην περιφέρεια και 5 κατά το μήκος του προβόλου

Μεταξύ άλλων χρησιμοποιήθηκε η εντολή “Kinematic Coupling” του ABAQUS, για την προσομοίωση της συγκολλημένης πλάκας στο ελεύθερο άκρο του σωλήνα, η οποία “συνδέει” όλους τους κόμβους της ελεύθερης διατομής του ευθύγραμμου τμήματος του σωλήνα, σε έναν κόμβο αναφοράς (reference node) του άκρου.

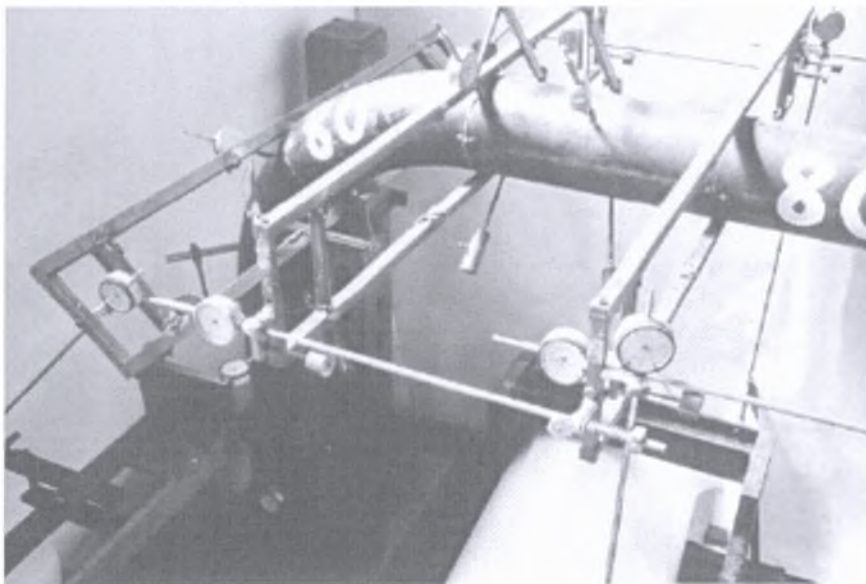
Η πίεση επιβλήθηκε μαζί με την δύναμη που εξομοίωνε την αξονική επίδραση της στην άκαμπτη ακραία πλάκα. Η δύναμη αυτή εφαρμόστηκε στον κεντρικό κόμβο αναφοράς σαν ένα συγκεντρωμένο φορτίο με φορά έξω από τον σωλήνα. Τέλος στο άκρο A του προβόλου εφαρμόστηκε ένα εγκάρσιο φορτίο.

Για να υπάρχει ακριβής σύγκριση μεταξύ των μετρήσεων στα στοιχεία κελύφους και της πειραματικής διάταξης, χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία κοντά στον άξονα CM1 και CM2, τα οποία φαίνονται στο σχήμα 3.31 και αντιπροσωπεύουν τη στροφή που μέτρησαν τα πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα. Σημειώνεται πως τα στοιχεία ELBOW32

δίνουν αποτελέσματα για τη στροφή της διατομής από τον στροφικό βαθμό ελευθερίας που διαθέτουν και έτσι δίνουν μια αντιπροσωπευτική τιμή της στροφής της διατομής. Η στροφή αυτή αναμένεται να συμπίπτει με τη στροφή που υπολογίζεται από τα σημεία CT και CB της διατομής.

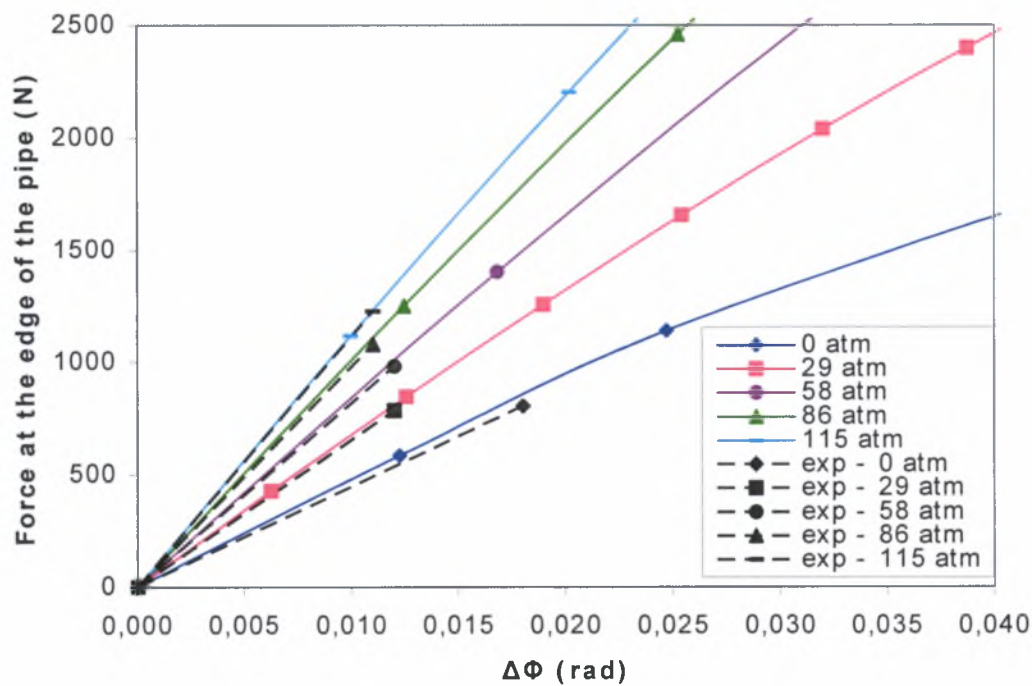


Σχήμα 3.31: Σημεία μέτρησης $\Delta\Phi$



Σχήμα 3.32: Σημεία μέτρησης στροφής $\Delta\Phi$ στα πειράματα του δοκιμίου tube 80

Στο σχήμα 3.33 φαίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την ελαστική περιοχή. Παρατηρείται μια πολύ καλή συμφωνία της προσομοίωσης με τα πειραματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 3.33: Διάγραμμα σχετικής στροφής διαμέτρων G-C σε σχέση με τη δύναμη στο άκρο του προβόλου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΤΡΙΚΟΜΒΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΓΙΑ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΗ ΚΑΜΨΗ

4.1 Γενικά

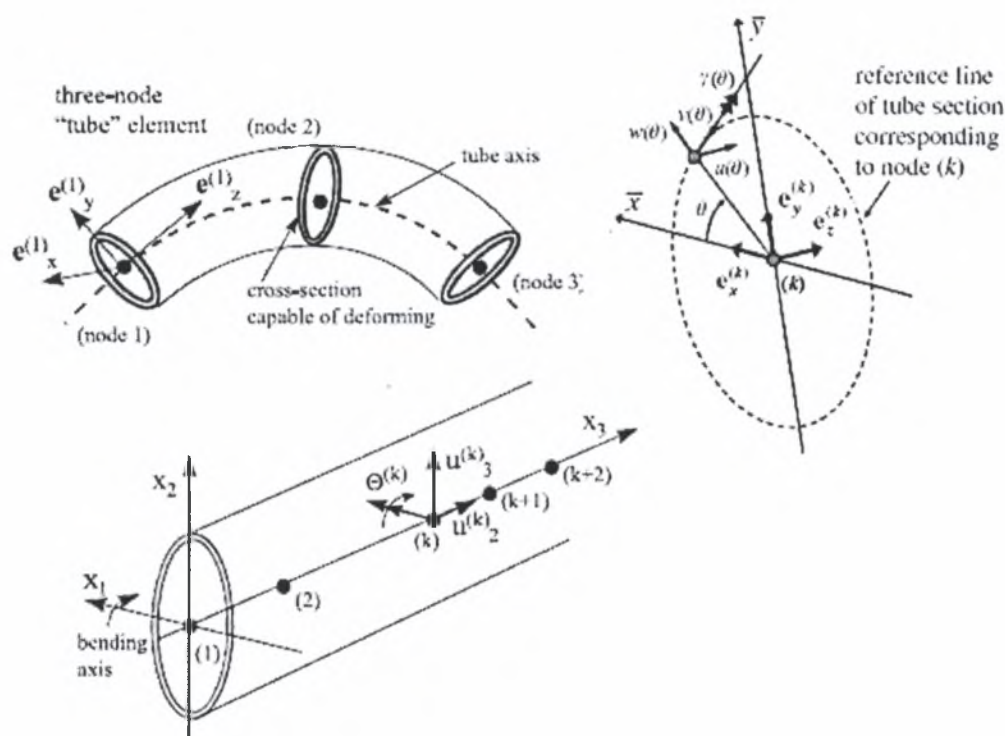
Το παρόν κεφάλαιο στοχεύει στην ανάλυση του καμπύλου σωλήνα κάτω από συνεπίπεδη κάμψη μέσω γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων “σωλήνα”, ένα ειδικό πεπερασμένο στοιχείο για τέτοιες κατασκευές. Η ανάλυση αυτή, βασίζεται σε ένα γραμμικό τρικομβικό στοιχείο σωλήνα ικανό να περιγράφει, με ακριβή έκφραση, τις παραμορφώσεις, λαμβάνοντας υπ’ όψη την γραμμικότητα του υλικού και την γεωμετρία του.

Το μοντέλο, που αναπτύχθηκε στο τρίτο κεφάλαιο, προσομοιώθηκε με τρικομβικά γραμμικά στοιχεία και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά από την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων στο ABAQUS, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης γίνεται σύγκριση ενός τρικομβικού στοιχείου που υποβάλλεται σε συνεπίπεδη κάμψη με την αναλυτική λύση που αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο.

4.2 Περιγραφή της Προσομοίωσης με το “Στοιχείο Σωλήνα”

Υιοθετείται μια γραμμική ανάλυση για λεπτούς ελαστικούς καμπύλους σωλήνες με βάση ένα πηγαίο πρόγραμμα (LeTuB). Το κύριο χαρακτηριστικό της ανάλυσης είναι ότι χρησιμοποιείται το στοιχείο σωλήνα (“tube element”), ένα ειδικής χρήσης στοιχείο για την ανάλυση των σωλήνων, το οποίο συνδυάζει την διαμήκη και την περιμετρική

παραμόρφωση. Η καμπτική ροπή εφαρμόζεται για ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το επίπεδο της κάμψης να το δημιουργούν οι άξονες X_2 και X_3 (σχήμα 4.1). Οι κόμβοι βρίσκονται στον άξονα του σωλήνα, στο επίπεδο της κάμψης και κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας (δύο μετασχηματιστικοί κατά μήκος των X_2 και X_3 και ένας περιστροφικός για τον X_1).



Σχήμα 4.1: Τρικομβικό “στοιχείο σωλήνα” και παράμετροι παραμορφώσεις

Με βάση τα παραπάνω τον κόμβο στη διατομή B, ο οποίος μπορεί να μετατοπίζεται και να περιστρέφεται χωρίς να παραμορφώνεται ή να στρεβλώνεται η διατομή, εφαρμόζεται μία καμπτική ροπή M , ενώ στον κόμβο που βρίσκεται στην διατομή F, στον οποίο δεν επιτρέπεται στροφή ή μετατόπιση στους άξονες, παρατηρείται πως παραμορφώνεται η διατομή του

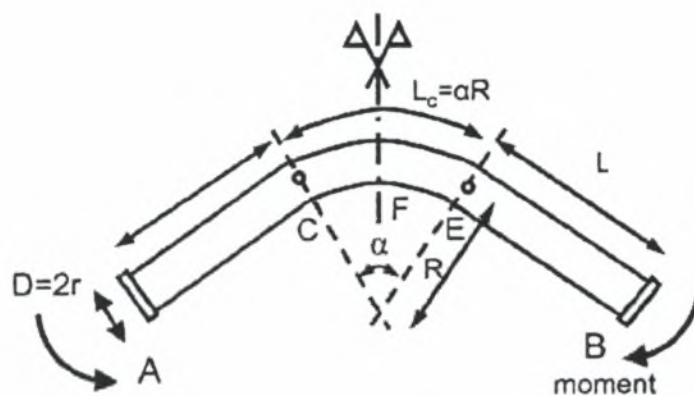
και τις τάσεις που αναπτύσσονται. Οι συντεταγμένες της παραμορφωμένης διατομής δίνονται:

$$\begin{aligned}x^* &= (r + w) \cos \theta - v \sin \theta \\y^* &= (r + w) \sin \theta + v \cos \theta \\z^* &= u\end{aligned}\tag{5.1}$$

όπου w , v και u είναι οι μετατοπίσεις της γραμμής αναφοράς στη διαμήκη, περιμετρική και εκτός του επιπέδου κατεύθυνση και γ η γωνία που περιστρέφεται στην εκτός του επιπέδου κατεύθυνση (σχήμα 4.1) και τα οποία δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}w(\theta) &= \sum_{n=0,2,4,6,\dots} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1,3,5,7,\dots} \alpha_n \sin n\theta \\v(\theta) &= -\alpha_1 \sin \theta + \sum_{n=2,4,6,\dots} b_n \sin n\theta + \sum_{n=3,5,7,\dots} b_n \cos n\theta \\u(\theta) &= \sum_{n=2,4,6,\dots} c_n \cos n\theta + \sum_{n=3,5,7,\dots} c_n \sin n\theta \\\gamma(\theta) &= \sum_{n=0,2,4,6,\dots} \gamma_n \cos n\theta + \sum_{n=1,3,5,7,\dots} \gamma_n \sin n\theta\end{aligned}\tag{5.2}$$

όπου a_n και b_n είναι οι “ovalization” παράμετροι (οβαλοποίηση) και c_n , γ_n “warping” παράμετροι (στρέβλωση). Στην ανάλυση με το τρικομβικό στοιχείο σωλήνα μπορεί να χρησιμοποιηθούν μέχρι 16 όροι Fourier στις παραμέτρους μετατοπίσεις και στροφής. Στην συνέχεια εξετάζεται κατά πόσο επηρεάζουν οι όροι Fourier που χρησιμοποιούνται, στην παραποίηση του αποτελέσματος. Επίσης πρέπει να επισημανθεί ότι υπάρχουν 19 ισαπέχοντα σημεία ολοκλήρωσης (Gauss) γύρω από το μισή περιφέρεια, 5 και 2 σημεία ολοκλήρωσης κατά την ακτινική διεύθυνση (πάχος σωλήνα) και στη διαμήκη διεύθυνση αντίστοιχα (σχήμα 4.3). Το πρόγραμμα έχει δημιουργηθεί ώστε να χρησιμοποιεί μέχρι 101 κόμβους, που αυτό σημαίνει 50 στοιχεία, στην πορεία ελέγχεται κατά πόσο επηρεάζεται η λύση και από τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται.

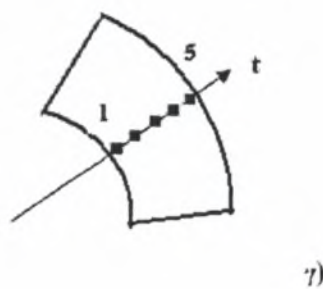
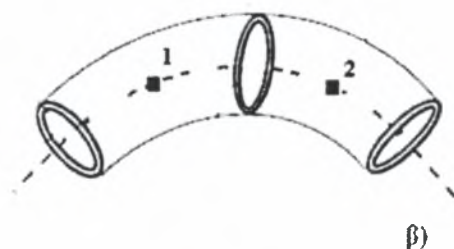


Σχήμα 4.2: Γενική μορφή και χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου

Intrados



Extrados

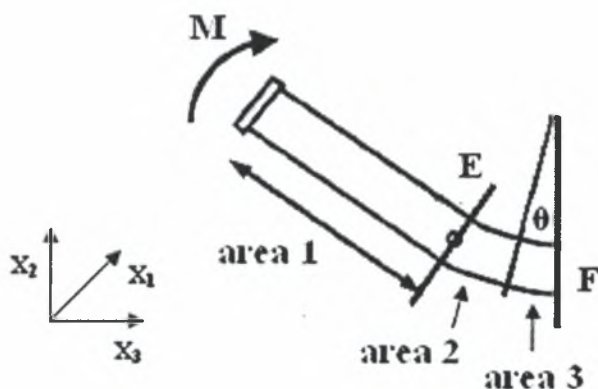


Σχήμα 4.3: Σημεία ολοκλήρωσης στο “στοιχείο σωλήνα” α) κατά τη μισή

περιφέρεια, β) κατά μήκος του στοιχείου και γ) κατά την ακτινική διεύθυνση του

4.3 Παραμετρική Μελέτη

Σε μία προσπάθεια να διερευνηθεί το πρόγραμμα έγινε μία παραμετρική μελέτη, η οποία συγκρίθηκε με τα αποτελέσματα από την παραμετρική μελέτη πεπερασμένων στοιχείων στο ABAQUS (κεφάλαιο 3) καθώς και με την αναλυτική λύση (κεφάλαιο 2). Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2, ο καμπύλος σωλήνας είναι συμμετρικός, συνεπώς αρκεί να μελετηθεί το τμήμα F-B. Το μοντέλο (σχήμα 4.4) που προσομοιώθηκε έχει γεωμετρικά χαρακτηριστικά, μήκος ευθύγραμμου σωλήνα $L=990$ mm, ακτίνα καμπυλότητας $R=480$ mm, ακτίνα σωλήνα (εσωτερική) $r=79.5$ mm, ομοιόμορφο πάχος $t=3$ mm και τέλος ιδιότητες υλικού, το μέτρο ελαστικότητας $E = 210000$ N/mm² και τον λόγο Poisson $\nu=0.3$.



Σχήμα 4.4 : Το μοντέλο που προσομοιώθηκε με το “στοιχείο σωλήνα”

Το μοντέλο έχει χωριστεί σε τρεις περιοχές, μία περιοχή αποτελεί ο ευθύγραμμος σωλήνας (area 1), και ο καμπύλος σωλήνας έχει χωριστεί σε δύο περιοχές (area 2 και area 3) με σκοπό περισσότερα στοιχεία κοντά στην διατομή F, που μελετάται.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας 12 όρους Fourier για τις μετατοπίσεις, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την παραμόρφωση της διατομής F, τις τάσεις που αναπτύσσονται σε αυτή καθώς και η σχετική στροφή των διαμέτρων F-E. Τα οποία αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία στο ABAQUS. Πρέπει να αναφερθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν 50 στοιχεία, εκ των οποίων τα 16 στην περιοχή 1 και 17 σε κάθε μία από τις περιοχές 2 και 3.

➤ Σχετική Στροφή των Διαμέτρων

Η στροφή $\Delta\Phi$ για το ABAQUS είναι η σχετική στροφή των διαμέτρων στις διατομές G και E όπως είχε αναφερθεί και ισούται με:

$$\Delta\Phi = 0.051859$$

Η στροφή με βάση το τρικομβικό στοιχείο (στοιχείο 16 - κόμβος 33) είναι:

$$\Delta\Phi = 0.024784$$

για το μισό καμπύλο τμήμα G-E, λόγω συμμετρίας. Η στροφή για όλο το καμπύλο τμήμα είναι:

$$\Delta\Phi = 0.0495678$$

Παρατηρείται μία πολύ καλή συμφωνία των δύο αριθμητικών λύσεων με απόκλιση κοντά στο 5%.

➤ Παραμόρφωση διατομής (ovalization)

Το ovalization της διατομής με βάση την ανάλυση στο ABAQUS είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.041683$$

Το ovalization της διατομής F υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \frac{D_h - D_v}{2D_m} = \frac{D + 2w(0) - D - w\left(\frac{\pi}{2}\right) - w\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2D_m} \\ &= \frac{2w(0) - w\left(\frac{\pi}{2}\right) - w\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2D_m} = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{10})}{D_m} \end{aligned}$$

όπου, στην περίπτωση αυτή, τα α_2 , α_6 και α_{10} είναι:

$$\alpha_2 = 3.35508$$

$$\alpha_6 = 0.010489$$

$$\alpha_{10} = -0.23948 \cdot 10^{-5}$$

Συνεπώς το ovalization είναι ίσο με:

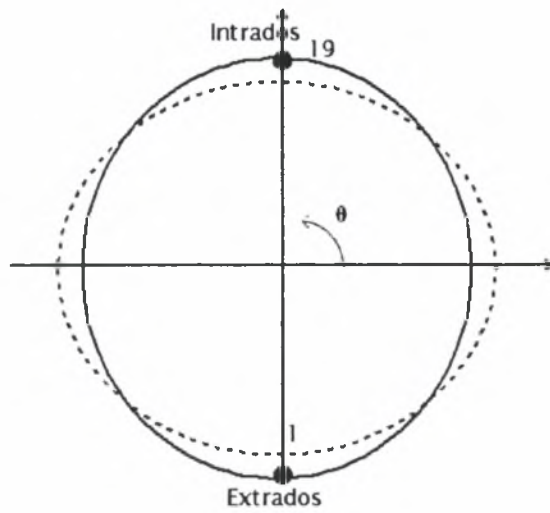
$$\sigma_v = 0.041539$$

Τα αποτελέσματα συμφωνούν.

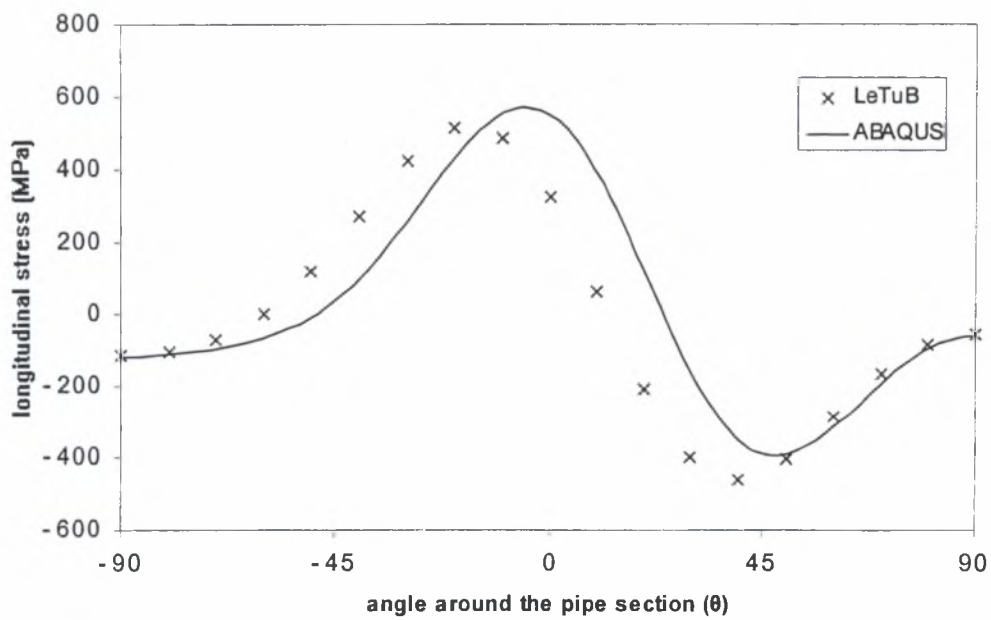
➤ Τάσεις

Οι τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή F (σχήμα 4.5) παρουσιάζονται σε αυτή την παράγραφο και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα από την ανάλυση που έγινε στο ABAQUS. Στα σχήματα που ακολουθούν (σχ. 4.6-4.9) παρουσιάζεται η σύγκριση των δύο προγραμμάτων για τις διαμήκεις και περιμετρικές τάσεις στην εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα αντίστοιχα.

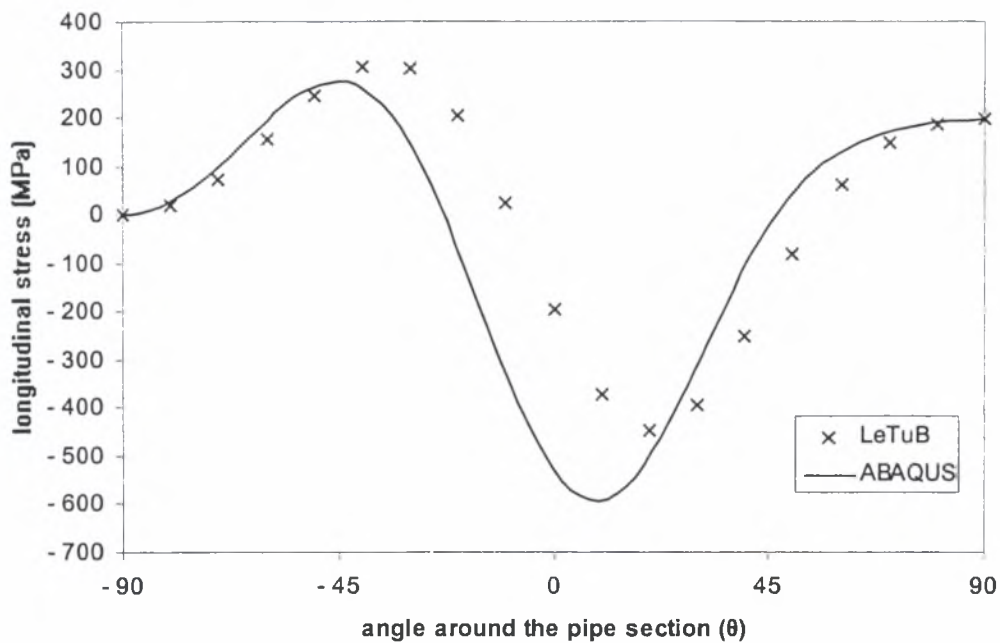
Από τις γραφικές παραστάσεις των τάσεων παρατηρείται ότι οι περιμετρικές τάσεις που εξάγονται από το πρόγραμμα LeTuB σε σύγκριση με αυτές από το ABAQUS είναι μεγαλύτερες, κυρίως κοντά στη διάμετρο που αναπτύσσονται οι μέγιστες τάσεις ($\varphi=0^\circ$). Μπορεί να θεωρηθεί ότι η ανάλυση με το “στοιχείο σωλήνα” δίνει ασφαλέστερα αποτελέσματα για τις μέγιστες τάσεις που αναπτύσσονται σε μία διατομή, ενώ στην επόμενη παράγραφο γίνεται και μία σύγκριση με την αναλυτική λύση που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2.



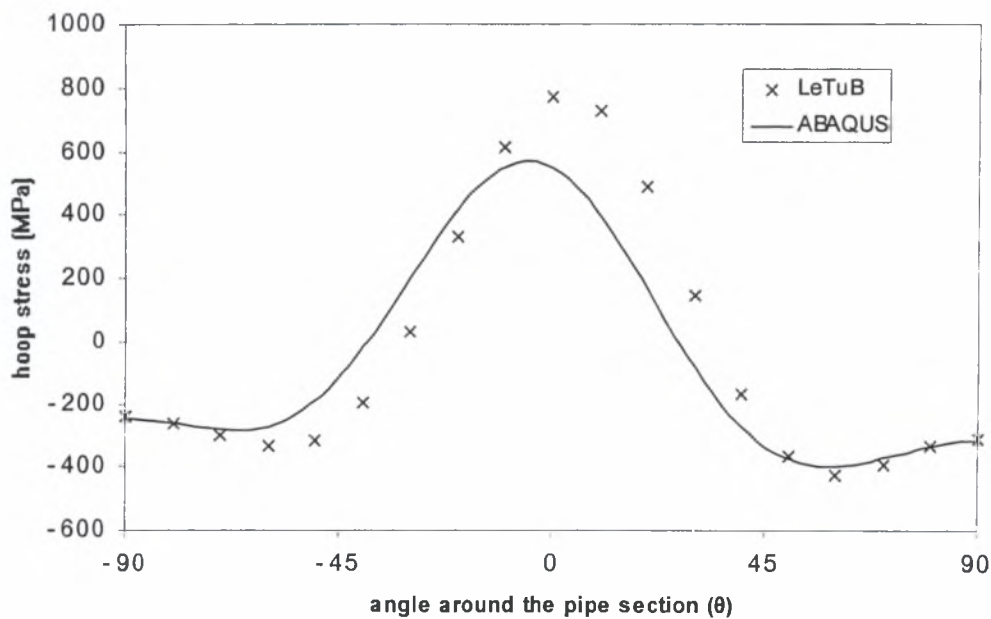
Σχήμα 4.5: Η διατομή F όπου εξετάζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται για $\theta=\pm 90^\circ$ (στα σημεία ολοκλήρωσης 1-19)



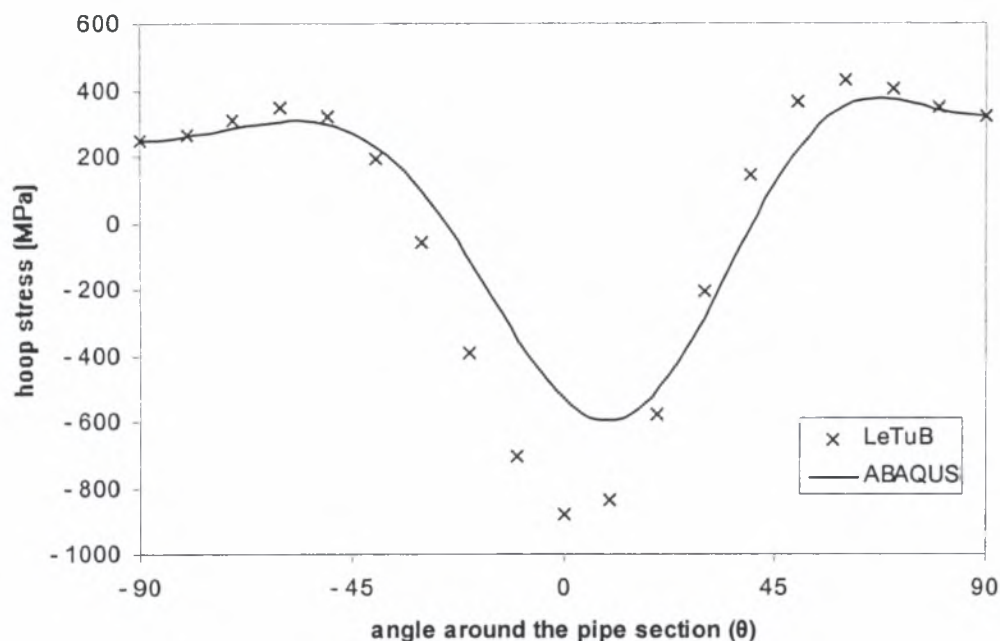
Σχήμα 4.6: Γραφική απεικόνιση διαμήκων τάσεων στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.7: Γραφική απεικόνιση διαμήκων τάσεων στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.8: Γραφική απεικόνιση περιμετρικών τάσεων στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.9: Γραφική απεικόνιση περιμετρικών τάσεων στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

Στις διαμήκεις τάσεις παρατηρείται μία απόκλιση $\pm 10\%$ των αποτελεσμάτων των δύο προγραμμάτων.

4.4 Σύγκριση με την Αναλυτική Λύση

Το αποτέλεσμα από το πρόγραμμα LeTuB συγκρίθηκαν με αυτά από την αναλυτική λύση που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιώντας ένα τρικομβικό στοιχείο για ένα πολύ μικρό καμπύλο τμήμα σωλήνα προσομοιώνεται ένας σωλήνας (εσωτερικής ακτίνας $r=79.5 \text{ mm}$, πάχους $t=3 \text{ mm}$ και σταθερής κατά μήκος ακτίνας καμπυλότητας $R=480 \text{ mm}$), στο οποίο ασκείται στον έναν κόμβο ροπή ενώ ο άλλος είναι στερεωμένος με κύλιση, μελετήθηκε η παραμόρφωση της διατομής καθώς και οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά την διαμήκη έννοια και περιμετρικά του καμπύλου τμήματος.

Το ovalization της διατομής, σύμφωνα με την αναλυτική λύση είναι:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = 0.039820$$

Το ovalization της διατομής με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, υπολογίζεται ως εξής:

$$ov = \frac{D_h - D_v}{2D_m} = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{10})}{D_m}$$

όπου, στην περίπτωση αυτή, τα α_2 , α_6 και α_{10} είναι:

$$\alpha_2 = 3.20179$$

$$\alpha_6 = 0.0112927$$

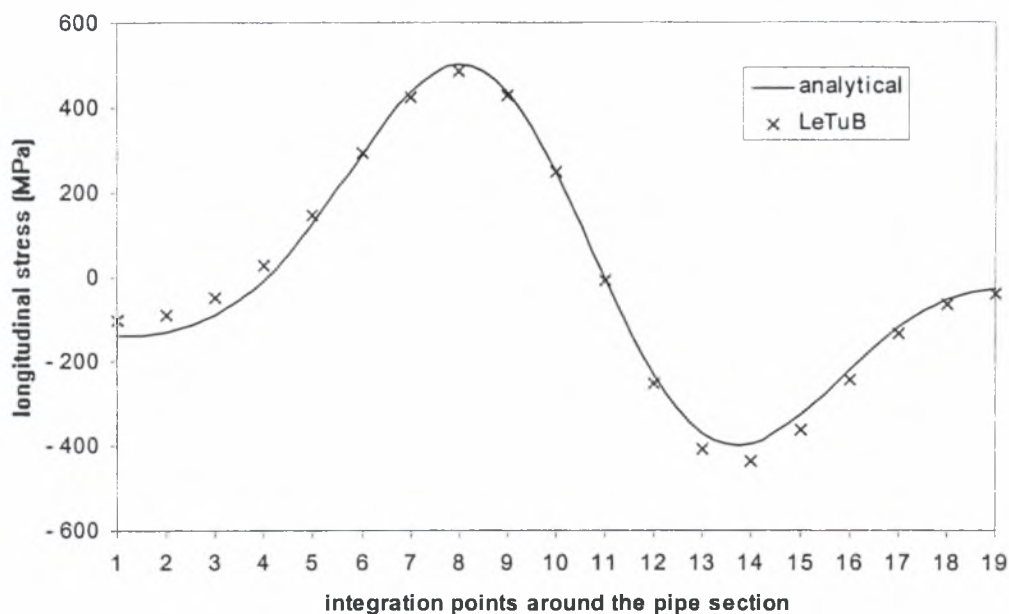
$$\alpha_{10} = -0.227748 \cdot 10^{-5}$$

Συνεπώς το ovalization είναι ίσο με:

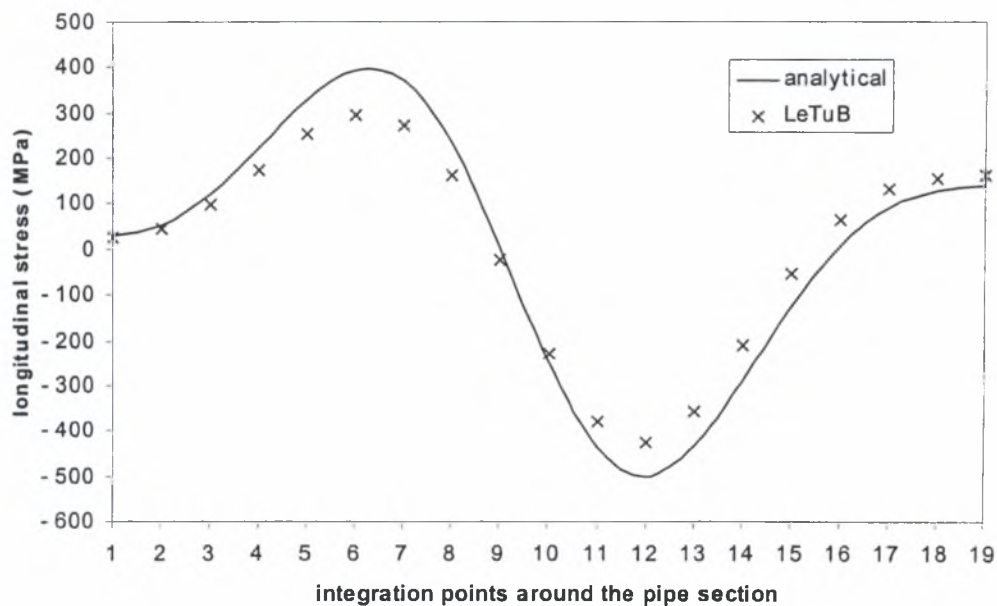
$$ov = 0.039667$$

Παρατηρείται μία πολύ καλή συμφωνία των δύο αποτελεσμάτων.

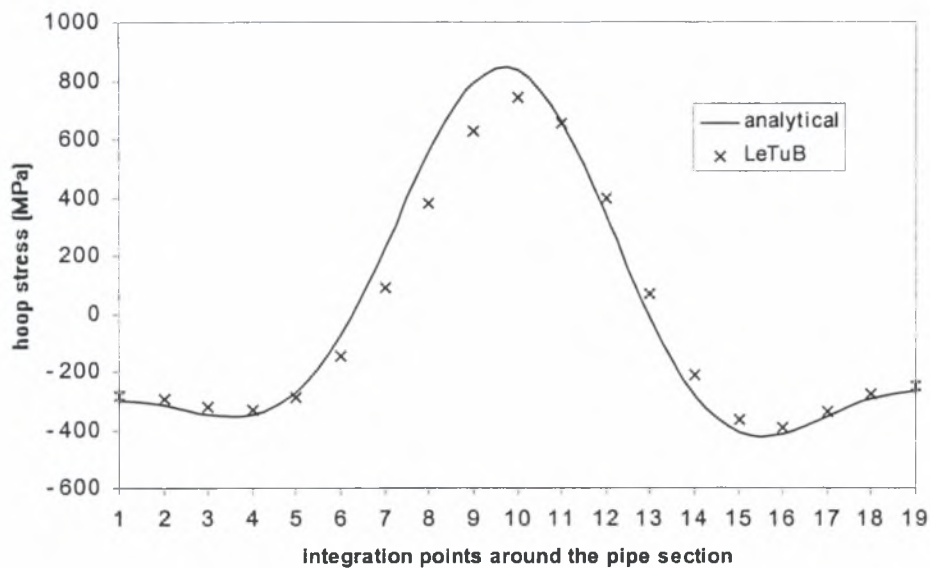
Στην συνέχεια ακολουθούν οι συγκρίσεις των διαμήκων και περιμετρικών τάσεων στην εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια του καμπύλου σωλήνα (σχ. 4.10-4.13).



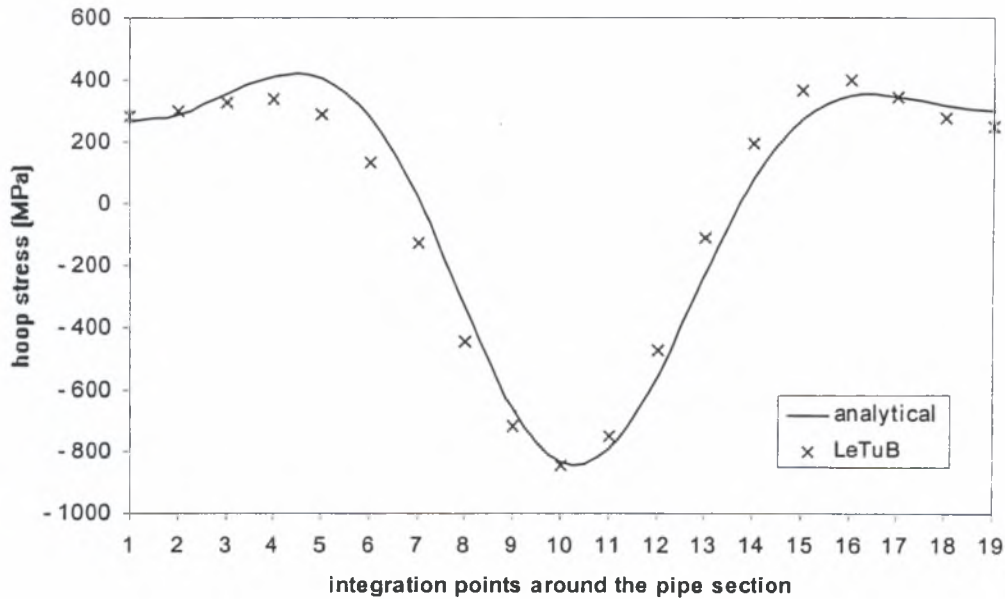
Σχήμα 4.10: Γραφική απεικόνιση διαμήκων τάσεων στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.11: Γραφική απεικόνιση διαμήκων τάσεων στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.12: Γραφική απεικόνιση περιμετρικών τάσεων στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$



Σχήμα 4.13: Γραφική απεικόνιση περιμετρικών τάσεων στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα, για συνεπίπεδη κάμψη, $M=10 \text{ kN-m}$

Παρατηρείται μία πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων από το πρόγραμμα με αυτά από την αναλυτική λύση.

4.5 Σύγκλιση του Προγράμματος

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήθηκαν οι μέγιστες δυνατότητες του προγράμματος. Χρησιμοποιήθηκαν δηλαδή 12 όρους Fourier καθώς και 50 στοιχεία (101 κόμβους). Στην πορεία θα εξεταστεί κατά πόσο επηρεάζεται η λύση από τους δύο παραπάνω παράγοντες.

Για αρχή θα εξεταστεί αν επηρεάζονται τα αποτελέσματα για λιγότερους όρους Fourier. Έγινε, λοιπόν, μία προσομοίωση του μοντέλου με 4, 6, 8, 10 όρους και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά με 12 όρους Fourier. Ακολουθούν τα ονάλιζα της διατομής για κάθε περίπτωση:

$$\text{Για 4 όρους Fourier: } \sigma_v = \frac{2\alpha_2}{D} = 0.041155,$$

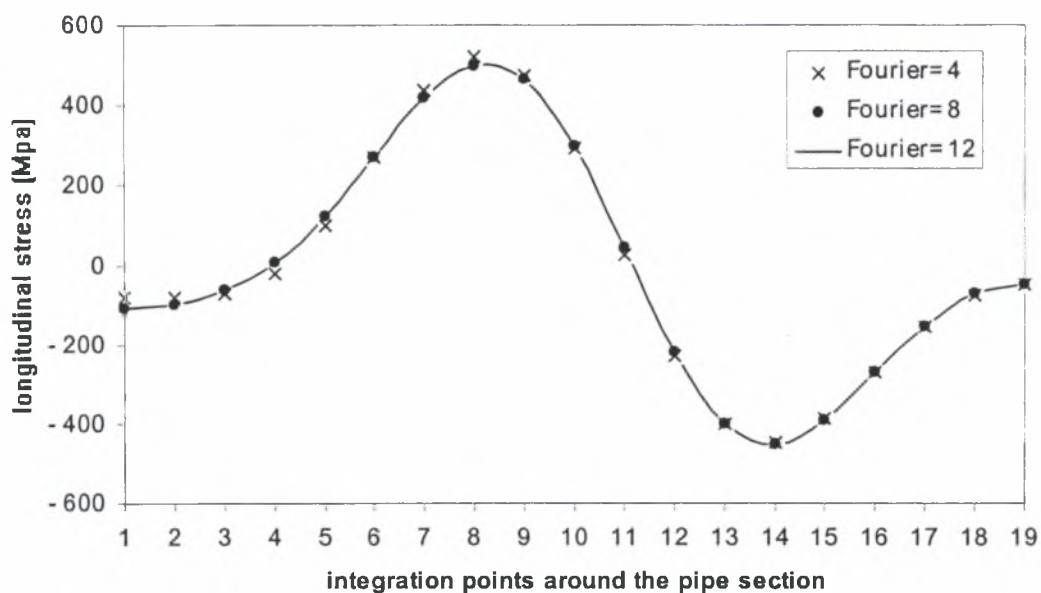
$$\text{για 6 όρους Fourier: } \sigma_v = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6)}{D} = 0.041305,$$

$$\text{για 8 όρους Fourier: } \sigma_v = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6)}{D} = 0.041539,$$

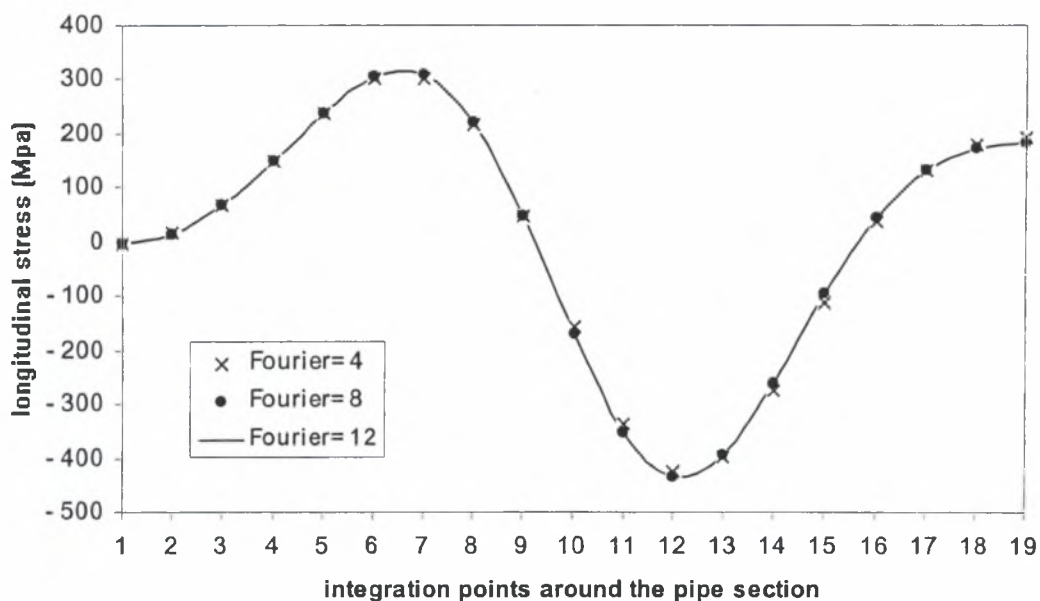
$$\text{για 10 όρους Fourier: } \sigma_v = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{10})}{D} = 0.041539,$$

$$\text{ενώ για 12 όρους Fourier: } \sigma_v = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_{10})}{D} = 0.041539$$

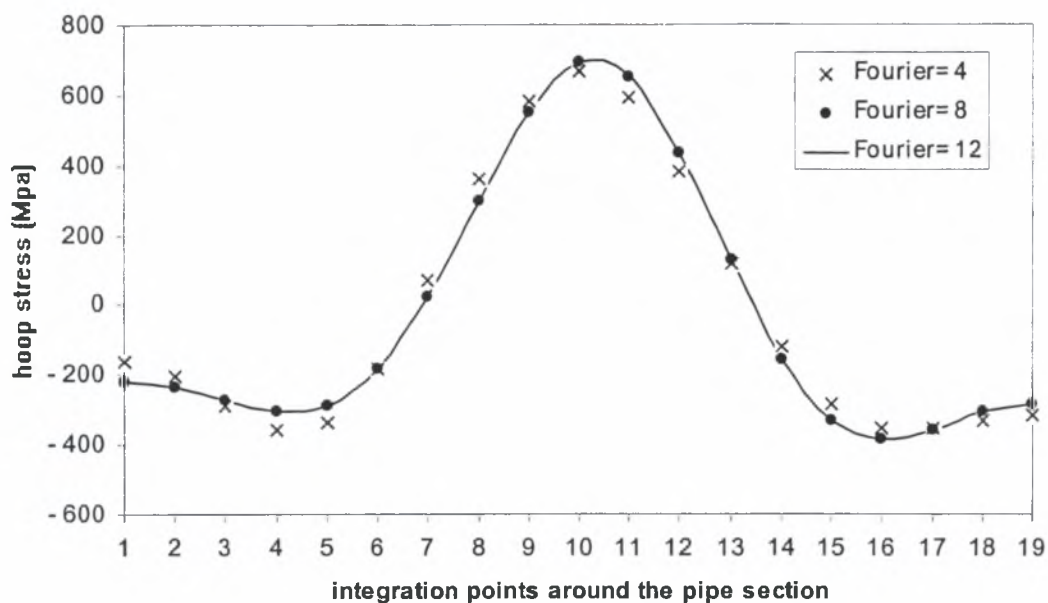
Παρατηρείται ότι για λιγότερους όρους Fourier το αποτέλεσμα δεν αλλάζει. Αξιοσημείωτο είναι ότι ακόμα και όταν χρησιμοποιούμε μόνο τέσσερις όρους η απόκλιση είναι μικρότερη του 1%. Στα σχήματα 4.14-4.17 παρουσιάζονται οι διαμήκεις και οι περιμετρικές τάσεις για $n=4,8,12$.



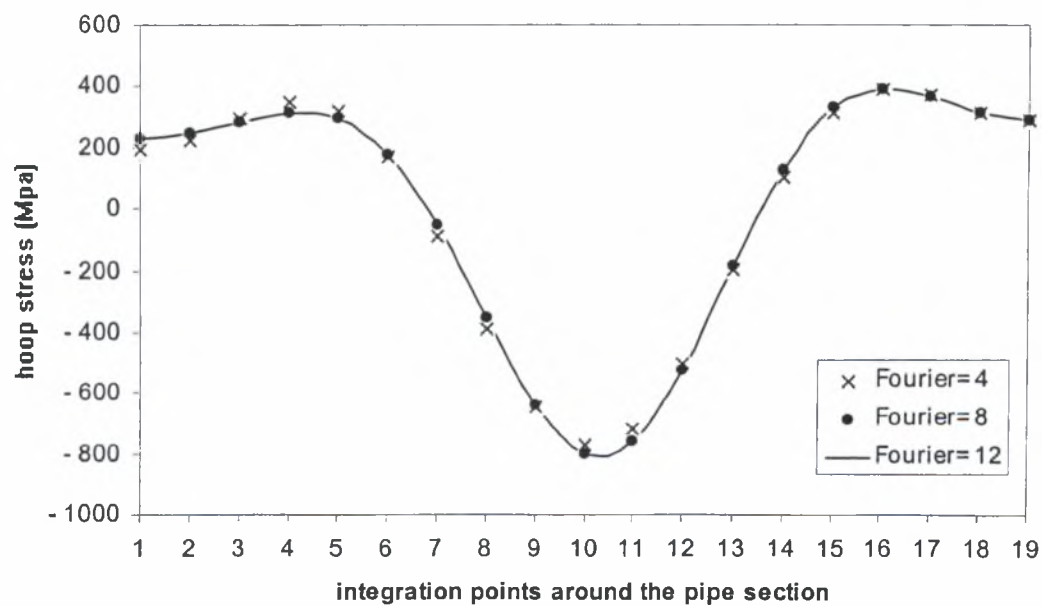
Σχήμα 4.14: Σύγκλιση των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα για $n = 4, 8, 12$



Σχήμα 4.15: Σύγκλιση των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα για $n = 4, 8, 12$



Σχήμα 4.16: Σύγκλιση των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα για $n = 4, 8, 12$



Σχήμα 4.17: Σύγκλιση των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα για $n = 4, 8, 12$

Το πρόγραμμα, δίνει πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και αν χρησιμοποιηθούν μόνο τέσσερις όροι Fourier.

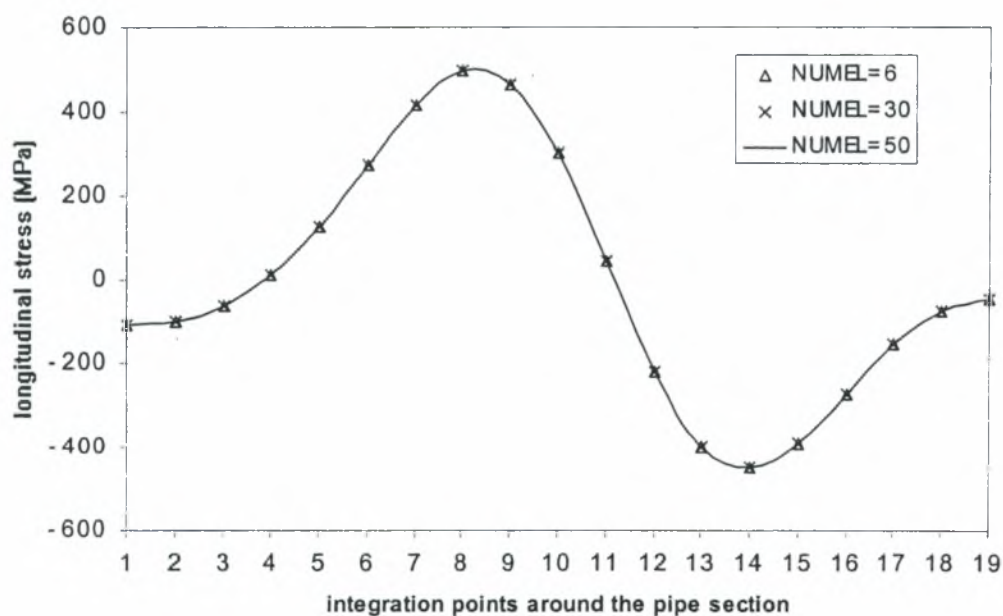
Στην συνέχεια το μοντέλο προσομοιώνεται για διαφορετικό αριθμό στοιχείων κάθε φορά, ώστε να διαπιστωθεί κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα από τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται. Γίνεται προσομοίωση του μοντέλου με 6, 30 στοιχεία και σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά των 50 στοιχείων. Συνεπώς το ovalization της διατομής F για διαφορετικό αριθμό στοιχείων είναι:

Για 6 στοιχεία: $\sigma_n = 0.041550$,

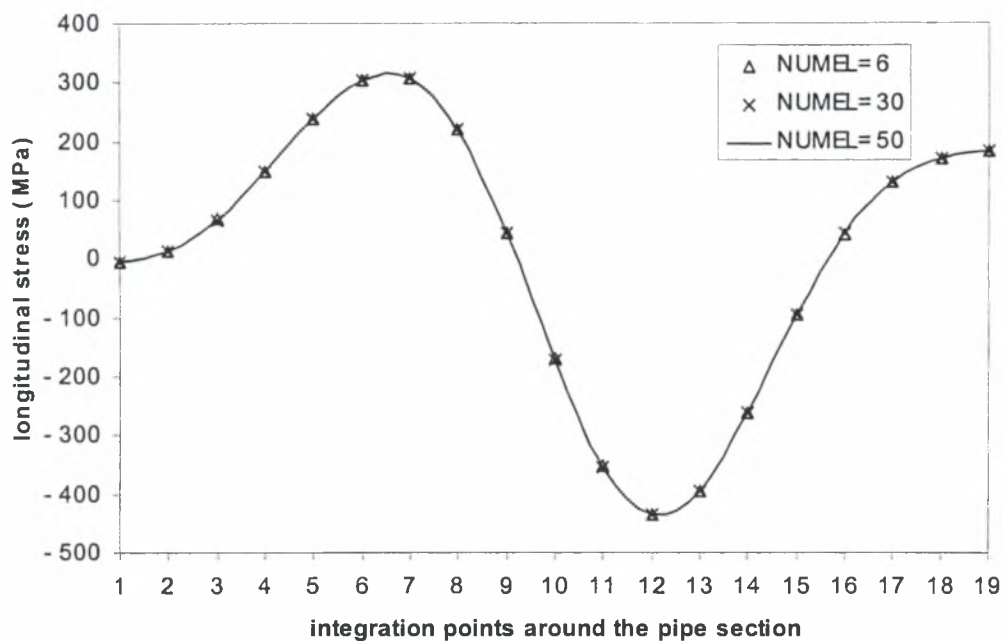
για 30 στοιχεία: $\sigma_n = 0.041539$,

ενώ για 50 στοιχεία: $\sigma_n = 0.041539$

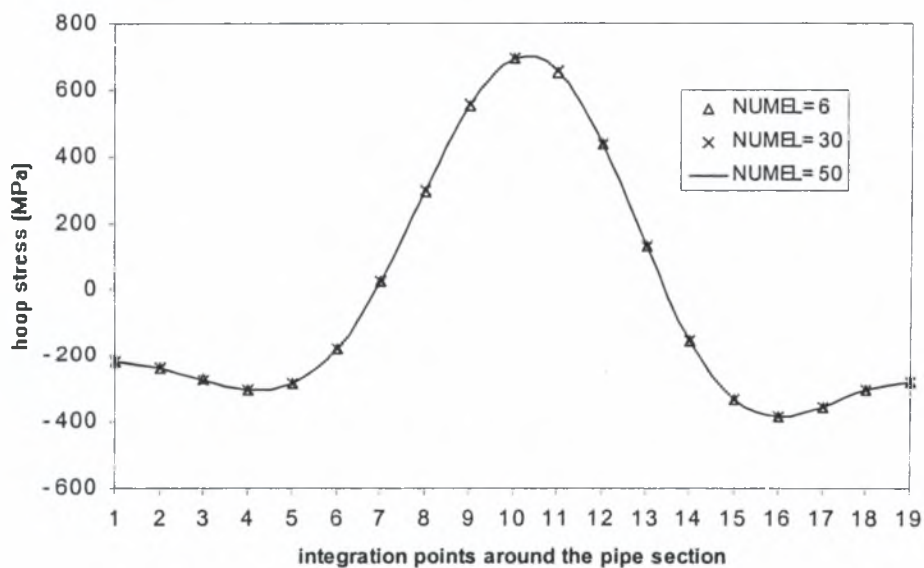
Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβή ακόμα και για λίγα στοιχεία.



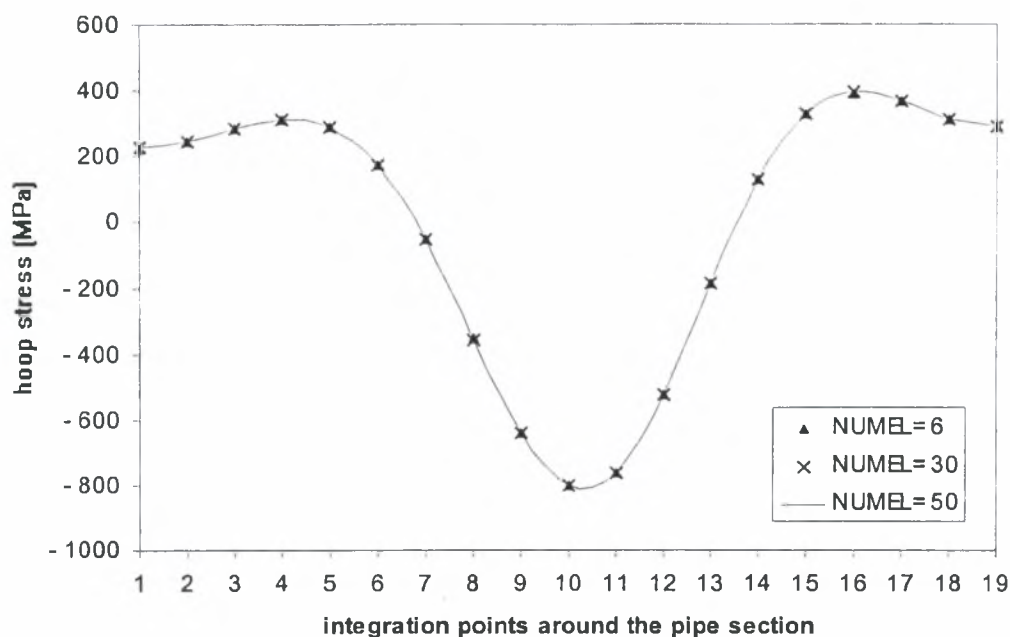
Σχήμα 4.18: Σύγκλιση των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα για αριθμό στοιχείων 6, 30 και 50



Σχήμα 4.19: Σύγκλιση των διαμήκων τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα για αριθμό στοιχείων 6, 30 και 50



Σχήμα 4.20: Σύγκλιση των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα για αριθμό στοιχείων 6, 30 και 50



Σχήμα 4.21: Σύγκλιση των περιμετρικών τάσεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό μέρος του σωλήνα για αριθμό στοιχείων 6, 30 και 50

Τέλος και οι τάσεις που αναπτύσσονται διαμήκη και περιμετρικά του σωλήνα (σχ. 4.18-4.21) δεν επηρεάζονται από τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση του μοντέλου.

Συνεπώς το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων LeTuB μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει ακριβή αποτελέσματα ακόμα και με λίγα στοιχεία καθώς και με δύο μόνο όρους Fourier. Επίσης παρατηρείται μία πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων από την προσομοίωση με αυτά της αναλυτικής λύσης. Το πρόγραμμα LeTuB, συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ένα πολύ καλό εργαλείο για την αριθμητική προσομοίωση και τον υπολογισμό της απόκρισης των καμπύλων σωλήνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το πρόβλημα της κάμψης καμπύλων σωλήνων με ελαστική συμπεριφορά υπό την παρουσία εσωτερικής πίεσης. Αναπτύσσονται αναλυτικές μέθοδοι για τις κατανομές των τάσεων, τους συντελεστές ευκαμψίας και τις παραμορφώσεις των διατομών των καμπύλων σωλήνων κατά τις επιδράσεις καπτικών φορτίων, εντός και εκτός του επιπέδου του σωλήνα. Επίσης γίνεται αριθμητική προσομοίωση των μοντέλων, με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS, καθώς και με την βοήθεια ενός πηγαίου προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων LeTuB που χρησιμοποιεί ένα ειδικό “στοιχείο σωλήνα”.

Από την εργασία μπορούν να βγουν κάποια ενδιαφέροντα γενικά συμπεράσματα. Το κύριο χαρακτηριστικό ενός καμπύλου σωλήνα κάτω από κάμψη είναι η παραμόρφωση της διατομής του (ovalization) και αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει τη συμπεριφορά των σωλήνων κατά την κάμψη τους, ειδικά των καμπύλων τμημάτων.

Είναι εμφανές ότι κατά την κάμψη καμπύλων σωληνώσεων οι τάσεις που αναπτύσσονται στα καμπύλα τμήματα είναι μεγαλύτερες από αυτές που αναπτύσσονται στα ευθύγραμμα τμήματα των σωλήνων και η κατανομή τους είναι μη-γραμμική. Επίσης, η σημαντικότερη φόρτιση για την δομική επάρκεια των σωλήνων είναι η συνεπίπεδη κάμψη, εξαιτίας των μεγάλων παραμορφώσεων των διατομών του σωλήνα σε σχέση με την αντιεπίπεδη κάμψη.

Ο συντελεστής ευκαμψίας είναι αντιστρόφως ανάλογος της γεωμετρικής παραμέτρου λ , συνεπώς ο λόγος D/t αυξανόμενος, επηρεάζει θετικά την ευκαμψία του καμπύλου σωλήνα. Η πίεση που ασκείται στο εσωτερικό του σωλήνα μειώνει σημαντικά την ευκαμψία του καμπύλου σωλήνα καθώς επίσης αναστέλλει και την παραμόρφωση της διατομής.

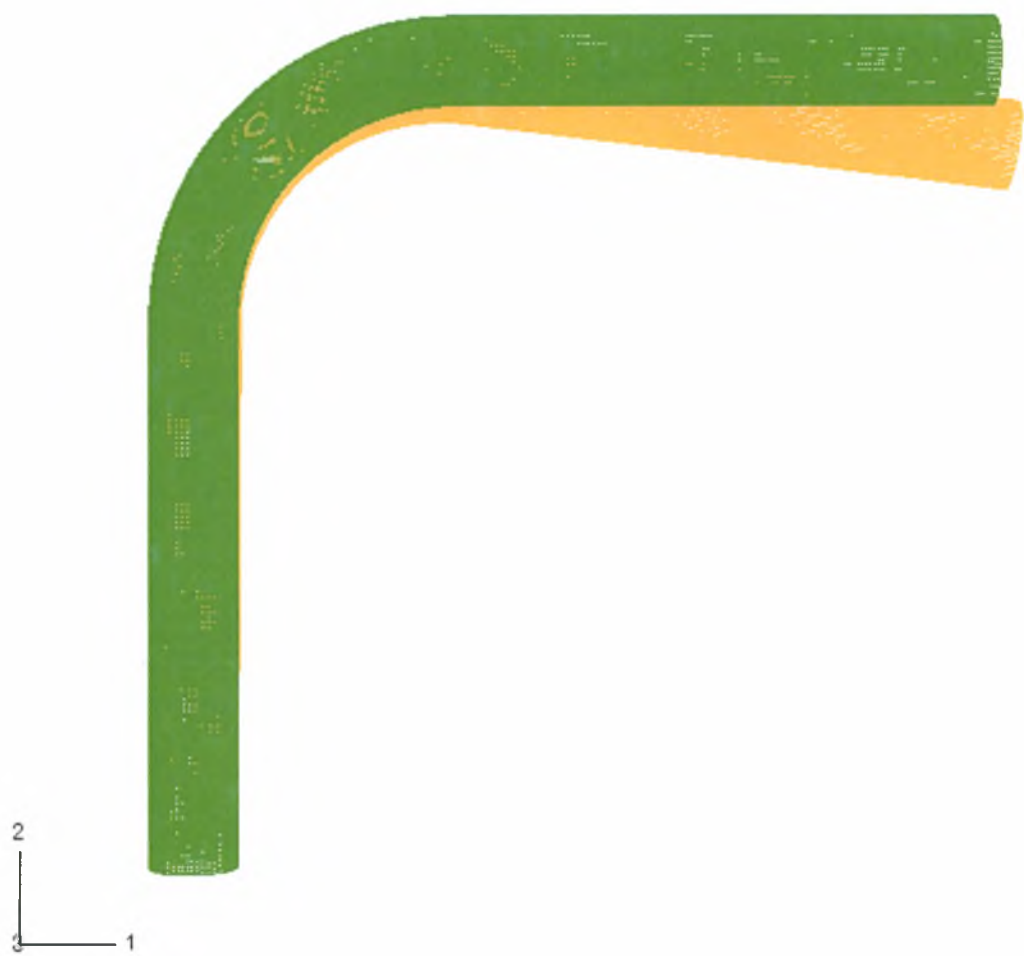
Μια άλλη σημαντική μελέτη είναι η επιρροή του παράγοντα D/t στη μεταβολή της διατομής. Γενικά παρατηρούμε ότι όσο πιο παχύ (D/t μικρό) είναι το δοκίμιο τόσο λιγότερο παραμορφώνεται.

Στη συνέχεια, έγινε σύγκριση των αναλυτικών με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Πρέπει να αναφερθεί ότι η αναλυτική λύση λαμβάνει υπ' όψη μόνο τα καμπύλα τμήματα των σωλήνων, πράγμα που σημαίνει ότι δεν λαμβάνει τις επιρροές των σωλήνων που συνδέονται με αυτά, και γι' αυτό το λόγο υπάρχει απόκλιση μεταξύ των αναλυτικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

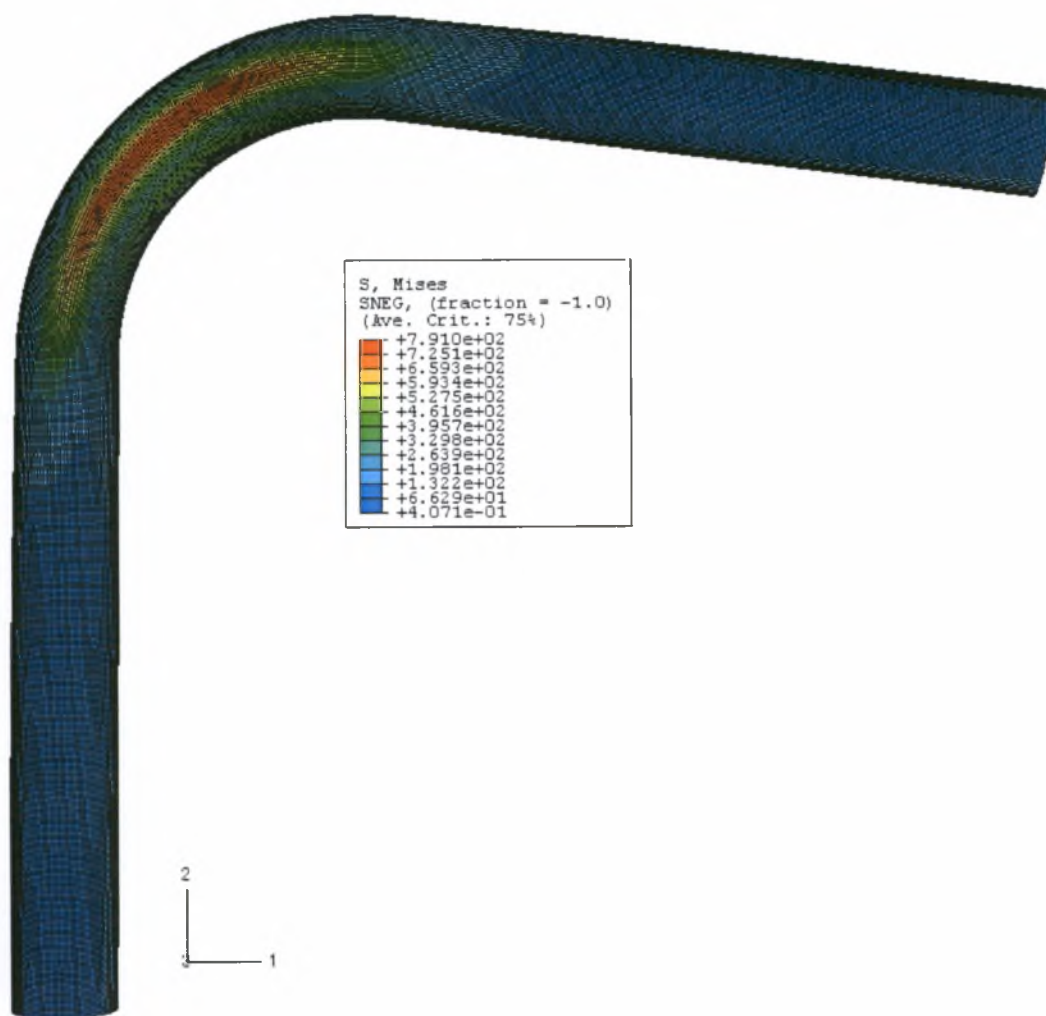
Τέλος, από την σύγκριση που πραγματοποιήθηκε μεταξύ των δύο προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση της συνεπίπεδης κάμψης, παρατηρήθηκε πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

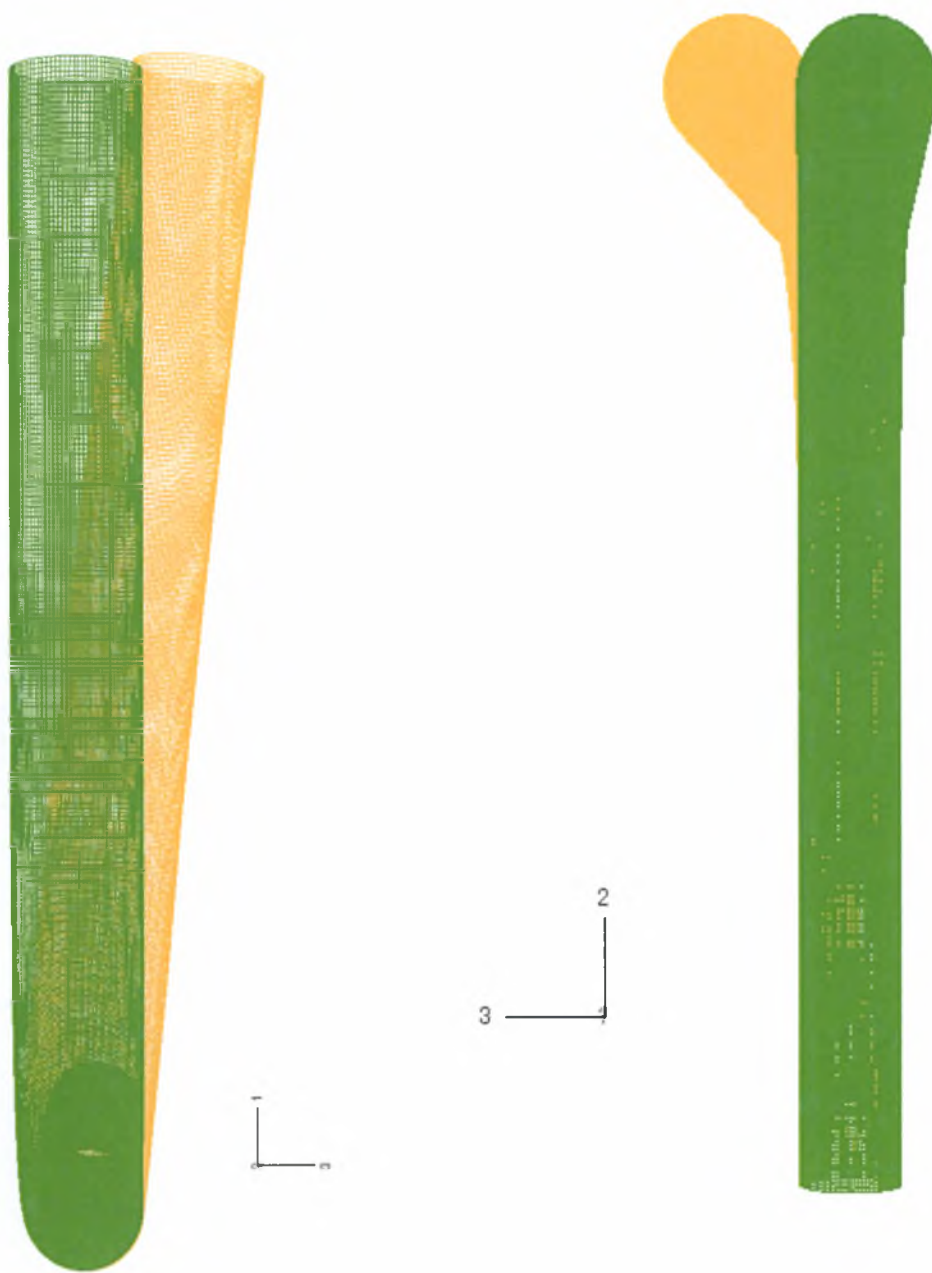
Στο σημείο αυτό, παρατίθενται τα μοντέλα που προσομοιώθηκαν με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων στο ABAQUS.



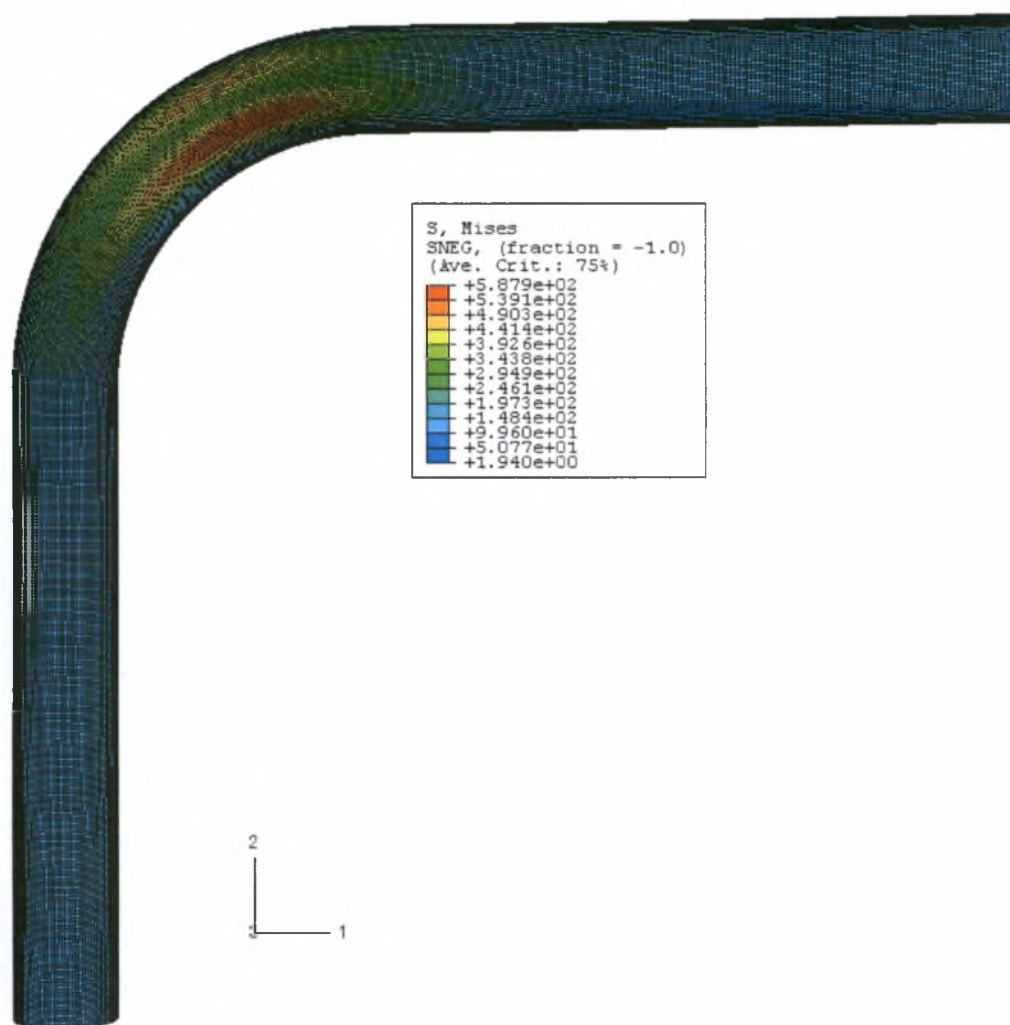
Σχήμα 1: Υπέρθεση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης μορφής του μοντέλου προσομοίωσης, σε συνεπίπεδη κάμψη



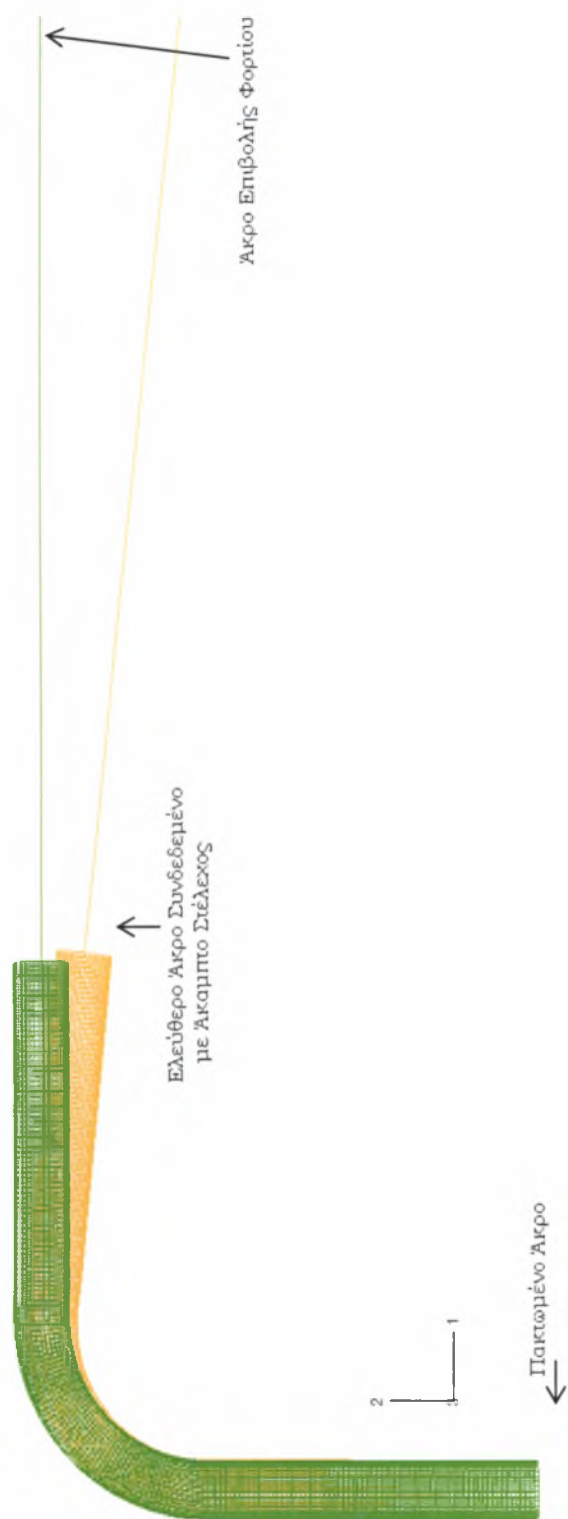
Σχήμα 2: Κατανομή τάσεων που αναπτύσσονται κατά την συνεπίπεδη κάμψη του μοντέλου, πάχους $t=3\text{ mm}$



Σχήμα 3: Υπέρθεση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης μορφής του μοντέλου προσομοίωσης, σε αντιεπίπεδη κάμψη



Σχήμα 4: Κατανομή τάσεων που αναπτύσσονται κατά την αντιεπίπεδη κάμψη του μοντέλου, πάχους $t=3\text{ mm}$



Σχήμα 5: Μοντέλο προσομοίωσης πειραμάτων συνεπίπεδης κάμψης δοκιμίου 80

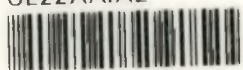
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Dodge W. G. and Moore S. E., "Stress indices and flexibility factors for moment loadings on elbows and curved pipes". *Weld. Res. Cows. Bull.* 197, (1972).
- Hibbit H.D., Karlsson B.I., and Sorensen, Theory Manual, ABAQUS, version 6.2, (2001).
- Hibbitt H. D. and Leung E. K., "An approach to detailed inelastic analysis of the thin walled pipelines. In *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*", AMD 48, pp. 83-118 (1981).
- Hibbitt H. D., Sorensen E. P. and Marcal P. V., "The elastic-plastic and creep analysis of pipelines by finite elements". *ASME, 2nd International Conference on Pressure Vessel Technology*, Paper No. 1-18 (1973).
- Kafka P. G. and Dunn M. B., "Stiffness of curved circular tubes with internal pressure". *J. appl. Mech.* 78, 247-254 (1956).
- Karamanos S.A., Bending instabilities of elastic tubes", *Int. J. Solids Struct.* 39 (8) (2002) 2059-2085.
- Karamanos S.A., Tassoulas J.L., "Tubular members I: stability analysis and preliminary results", *J. Eng. Mech. ASCE* 122 (1) (1996) 64-71.
- Marcal, P. V., "Elastic-Plastic behavior of Pipe Bends with In-plane Bending", *J. Strain Analysis*, Vol. 2, No. 1, pp. 84-90, (1967).
- Natarajan R., "A finite element for analysis of elbows subjected to different loads and end constraints". *Com- DUL Struct.* 26. 561-574 (1987).
- Natarajan R. and Blomfield J. A., "Stress analysis of curved pipes with end restraints". *Comput. Struct.* 5, 187-196 (1975).
- Ohstubo, H. and Watanabe, O., "Stress Analysis of Pipe Bends by Ring Elements", *J. Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 100, pp. 112-122, (1978).

- Rodabaugh, E. C., and George, H. H., "Effect of internal pressure on the flexibility and stress intensification factors of curved pipe or welding elbows", Transactions of the ASME Vol. 79, 939-948, (1957).
- Sobel, L. H., "*In-Plane Bending of Elbows*", Computers & Structures, 7, 701-715, (1977).
- Vigness , I., "Elastic Properties Of Curved Tubes", Trans, ASME, 65, pp 105-120, (1943).
- Von Karman, Th., "Über die formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre", Z. Ver. Deutsch. Ingen., 55, pp. 1889-1895, (1911).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000089098