ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Διπλωματική Εργασία

Δευτερεύουσες Διακλαδώσεις σε Απομακρυσμένες Μετακρίσιμες Περιοχές ενός Μη Γραμμικού Διβάθμιου Συστήματος με Στοιχεία της Θεωρίας των Καταστροφών

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ

Ευσταθία Αργυροπούλου

Έλενα Ευαγόρου

Βασιλική Μαρινίδου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Δημήτρης Σοφιανόπουλος

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ

ΒΟΛΟΣ 2005

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.:	3670/1 τ.1
Ημερ. Εισ.:	9-06-2006
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ-ΠΜ
	2005
	ΑΡΓ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄ : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ 1

Α.1. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ 1

Α.1.1. Η έννοια της μη γραμμικότητας 1

Α.1.2. Δρόμοι ισορροπίας, κρίσιμα σημεία και ευστάθεια 1

(α) Γενικές επισημάνσεις 1

(β) Σημεία διακλάδωσης, οριακό σημείο, συνήθης και ακαριαίος λυγισμός 2

(γ) Ευσταθής και ασταθής ισορροπία – θεμελιώδη θεωρήματα 6

Α.1.3. Η ενεργειακή μέθοδος 7

(α) Ενεργειακά κριτήρια και σχετικά θεωρήματα της μεθόδου 7

(β) Κριτήριο $2^{ης}$ μεταβολής – γενικευμένες συνθήκες ευστάθειας κρίσιμου σημείου ισορροπίας 9

Α.1.4. Ο ρόλος των μαθηματικών προσομοιωμάτων (προτύπων) 13

Α.2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ 27

Α.2.1. Γενικές έννοιες – ορισμοί 27

(α) Ιστορικό – βασικές επισημάνσεις 27

(β) Ορισμοί και μαθηματικές έννοιες 28

Α.2.2. Κατάταξη των Καταστροφών 39

(α) Γενικά 39

(β) Στοιχειώδεις Καταστροφές μιας ενεργής συντεταγμένης 40

(γ) Στοιχειώδεις Καταστροφές δύο ενεργών συντεταγμένων 44

(δ) Πέραν των επτά στοιχειωδών καταστροφών 53

(ε) Η καταστροφή τύπου αιχμής: εμβάθυνση 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΔΙΒΑΘΜΙΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΟΡΘΟΤΡΟΠΗΣ ΠΛΑΚΑΣ 59

Β.1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 59

Β.1.1. Γενική περιγραφή του προβλήματος 59

Β.1.2. Μη γραμμική στατική ανάλυση του προσομοιώματος 60

(α) Τέλειο σύστημα – προσεγγιστική ανάλυση 63

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ σελίδα

(β) Τέλειο σύστημα – ακριβής ανάλυση 69

(γ) Ατελές σύστημα – προσεγγιστική ανάλυση 74

1. Συμμετρική αρχική ατέλεια 74
2. Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια 90
3. Πλήρης ατέλεια 105

Β.1.3. Ανάλυση μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών 115

(α) Συναρτήσεις συνολικού δυναμικού του μερικά και πλήρως αρχικά ατελούς συστήματος 115

1. Συσχετισμός με τις 7 θεμελιώδεις καταστροφές 115
2. Πολλαπλά καταστροφής M, διακλαδικά σύνολα B_s και αντίστοιχες γραφικές απεικονίσεις 118

M, B_s του τέλειου συστήματος *121-125*

Πολλαπλά καταστροφής M του μερικά ατελούς συστήματος

συμμετρική αρχική ατέλεια *126-140*
αντισυμμετρική αρχική ατέλεια *141-154*

Διακλαδικά σύνολα Bs του μερικά ατελούς συστήματος

συμμετρική αρχική ατέλεια *155-169*
αντισυμμετρική αρχική ατέλεια *170-178*

Πολλαπλά καταστροφής M του πλήρως ατελούς συστήματος *179-274*

(β) Συσχετισμός με τα ευρήματα της Θεωρίας Διακλαδώσεων 276

1. Γενικά 276
2. Μερικά αρχικά ατελές σύστημα με μόνο συμμετρική αρχική ατέλεια 276
3. Μερικά αρχικά ατελές σύστημα με μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια 280
4. Πλήρως αρχικά ατελές σύστημα 283

Β.2. ΝΕΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ 288

Β.2.1. Νέα ευρήματα και συμπεράσματα της όλης εργασίας 288

Β.2.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα 289

Β.3. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 290

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 291

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : Αρχεία *Mathematica*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄ : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Α.1. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Α.1.1. Η έννοια της μη γραμμικότητας (nonlinearity)

Στη Μηχανική των Παραμορφωσίμων Σωμάτων ***η μη γραμμικότητα*** οφείλεται είτε *στη φύση του υλικού* (σχέση τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης, material nonlinearity) είτε σε καθαρά *γεωμετρικούς λόγους* (geometric nonlinearity). Κατά τα άλλα, *η γραμμική θεωρία ευστάθειας (λυγισμού)* για φορείς από γραμμικώς ελαστικά υλικά (που ακολουθούν το νόμο του Hooke) είναι ουσιαστικά *μη γραμμική ανάλυση* (καλούμενη και στατική $2^{ης}$ τάξης), καθόσον – σε αντίθεση με τη κλασσική στατική $1^{ης}$ τάξης – η ισορροπία αυτών λαμβάνεται στην παραμορφωμένη κατάσταση. Επιπρόσθετα, η ***"μη γραμμικότητα"*** στη *μη γραμμική θεωρία ευστάθειας* συνδέεται με ακριβέστερες εκφράσεις στις σχέσεις που δίδουν την ανηγμένη παραμόρφωση ε και τη καμπυλότητα κ[5,7,23]. Ανάλογα δε με την ακρίβεια των εκφράσεων αυτών, η εν λόγω θεωρία διακρίνεται σε θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων και σε θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων, η τελευταία γνωστή και σαν *θεωρία $3^{ης}$ τάξης*, ενώ διεθνώς αναφέρεται ως *Elastica* και συνδέεται με την έννοια της ευστάθειας σε μεγάλες μετατοπίσεις – διαταραχές (stability in the large).

Α.1.2. Δρόμοι ισορροπίας, κρίσιμα σημεία και ευστάθεια

(α) Γενικές επισημάνσεις

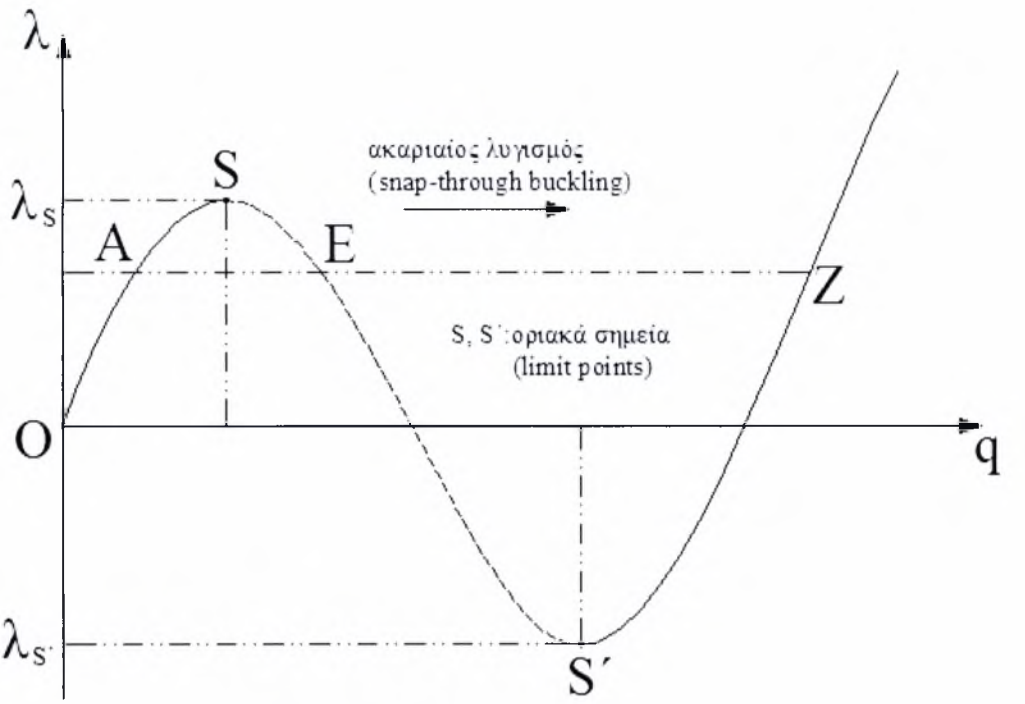
Σε αντίθεση με τη ***γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας***, μέσω της οποίας μπορούν να υπολογιστούν ***μόνο*** άνω φράγματα του φορτίου λυγισμού των φορέων (με την έννοια της ισορροπίας στη παραμορφωμένη μορφή), η αντίστοιχη ***μη γραμμική θεωρία*** *προσφέρει* ***τη δυνατότητα ακριβούς υπολογισμού όλων των δυνατών σχηματισμών ισορροπίας (equilibrium configurations) ενός φορέα ή συστήματος για οποιαδήποτε τιμή της εξωτερικής φόρτισης, την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του καθ΄ όλο το "ιστορικό" φόρτισης, τον προσδιορισμό όλων των κρισίμων σημείων ισορροπίας (όπου το σύστημα εμφανίζει απότομες ποιοτικές αλλαγές στην απόκριση του) αλλά και της ευστάθειας ή αστάθειας των ισορροπιών γενικότερα***.

(β) Σημεία διακλάδωσης, οριακό σημείο, συνήθης και ακαριαίος λυγισμός

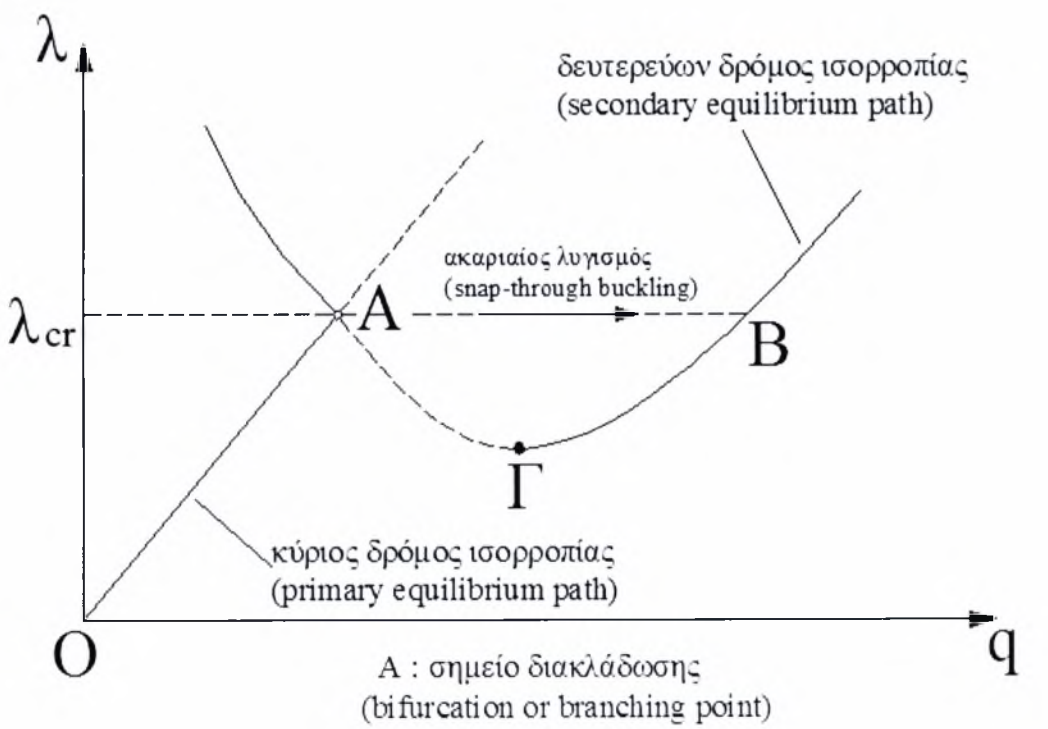
Η συμπεριφορά ενός ελαστικού συστήματος περιγράφεται συνήθως μέσω των λεγόμενων ***δρόμων ισορροπίας*** (equilibrium paths), που ουσιαστικά είναι οι καμπύλες (διαγράμματα) φόρτισης – μετατόπισης αυτού. Δίδοντας έμφαση στα ***διακεκριμένα συντηρητικά συστήματα***[♣], θεωρούμε ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο χαρακτηρίζεται από n γενικευμένες συντεταγμένες q_i, $i=1,2,..n$, που αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας αυτού. Βέβαια, οι πραγματικές κατασκευές είναι συνεχή (απειροβάθμια) συστήματα, πλην όμως μέσω διακριτοποίησης – επιλογής των κατάλληλων μαθηματικών προσομοιωμάτων (προτύπων, μοντέλων), ο ρόλος των οποίων είναι και παραμένει προεξάρχων και καταξιωμένος, όπως θα δειχθεί στο τέλος της τρέχουσας ενότητας Α.1. – η μελέτη της ποσοτικής και ποιοτικής συμπεριφοράς συνεχών συστημάτων δύναται να αναχθεί στη μελέτη ενός μοντέλου με μικρό εν γένει αριθμό βαθμών ελευθερίας. Αν λ είναι η εξωτερική φόρτιση, τότε οι δρόμοι ισορροπίας, απεικονιζόμενοι σε επίπεδο, είναι καμπύλες της μορφής $(q_i, \lambda) \quad \forall i$. Σε περίπτωση που ένας δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τα σχετικά σημεία ισορροπίας καλούνται ***οριακά σημεία*** (limit points), ενώ όταν οι δρόμοι ***δεν*** είναι συνεχείς, αλλά αποτελούνται από διάφορους μεταξύ τους τεμνόμενους κλάδους, τα σημεία τομής καλούνται ***σημεία διακλάδωσης*** (bifurcation points). Ενδεικτική γραφική αναπαράσταση των ανωτέρω δύο ειδών ***κρισίμων σημείων*** απεικονίζεται στα Σχήματα Α1.1 και Α1.2, όπου κανείς διαπιστώνει πως για $\lambda > \lambda_s$ (Σχ.Α1.1) ή για $\lambda > \lambda_{cr}$ (Σχ.Α1.2), παραμορφωσιακή κατάσταση εμφανίζει αιφνίδια άλμα, με αποτέλεσμα αστοχία του φορέα λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Το φαινόμενο αυτό καλείται ***ακαριαίος λυγισμός*** (snap-through buckling) και δύναται να λάβει χώραν είτε μέσω οριακού σημείου είτε μέσω σημείου διακλάδωσης. Όμως, υπάρχει και ο τύπος του καλούμενου ***συνήθους λυγισμού***, κατά τον οποίο ο φορέας παρουσιάζει ***μεταλυγισμική αντοχή*** (postbuckling strength), δηλαδή μπορεί να φέρει φορτίο μεγαλύτερο από το κρίσιμο χωρίς κίνδυνο αστοχίας. Τέτοιου είδους αντοχή εμφανίζεται σε μια κατασκευή ***μόνο***

[♣] πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας, υπό φορτία προερχόμενα από δυναμικό πεδίο (potential forces), δηλαδή φορτιζόμενα από δυνάμεις των οποίων το έργο εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής τους

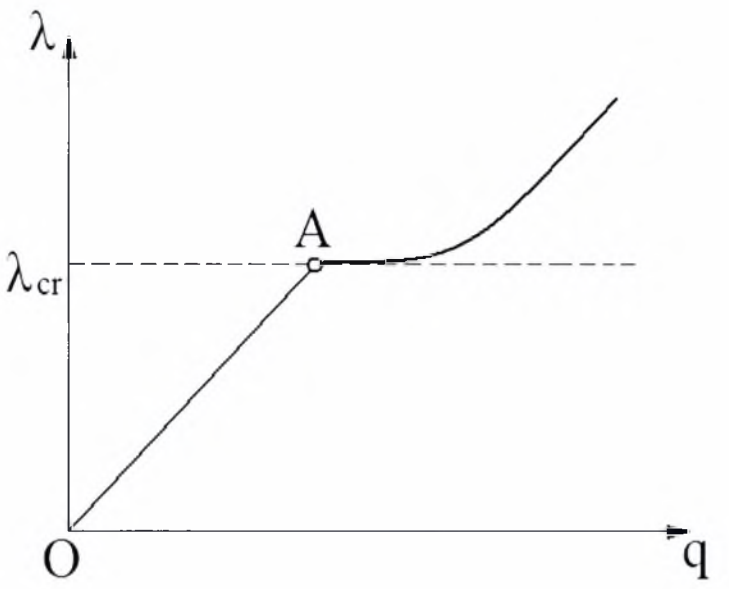
μέσω σημείου διακλάδωσης, με χαρακτηριστικό δρόμο ισορροπίας του φαινομένου αυτού να φαίνεται στο Σχήμα Α1.3.



Σχήμα Α1.1. Δρόμος ισορροπίας συστήματος οριακού σημείου, που σχετίζεται με ακαριαίο λυγισμό.

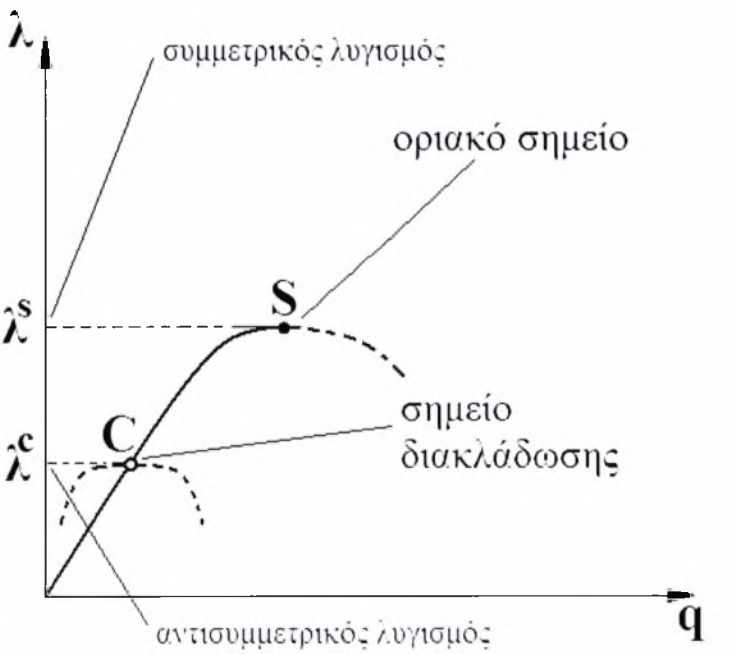


Σχήμα Α1.2. Δρόμος ισορροπίας διακλαδικού συστήματος, που σχετίζεται με ακαριαίο λυγισμό.



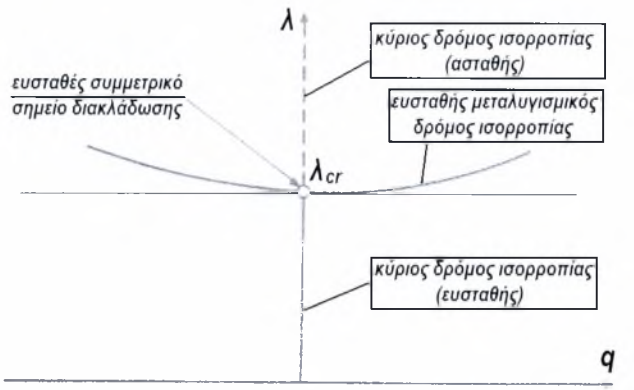
Σχήμα Α1.3. Δρόμος ισορροπίας συστήματος, το οποίο παρουσιάζει μεταλυγισμική αντοχή.

Πρέπει επίσης να μνημονευθεί και ο λεγόμενος ***λυγισμός με μετάθεση*** (sway buckling), είτε συνήθης είτε ακαριαίος, φαινόμενο το οποίο σχετίζεται με την ύπαρξη δυνατότητας τόσον συμμετρικής όσο και αντισυμμετρικής παραμόρφωσης του φορέα, με χαρακτηριστική μορφή των σχετικών δρόμων ισορροπίας να απεικονίζεται στο Σχήμα Α1.4.

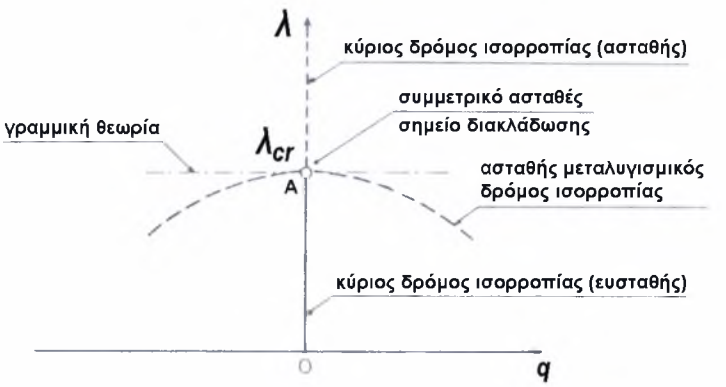


Σχήμα Α1.4. Δρόμοι ισορροπίας συστήματος που σχετίζεται με λυγισμό λόγω μετάθεσης.

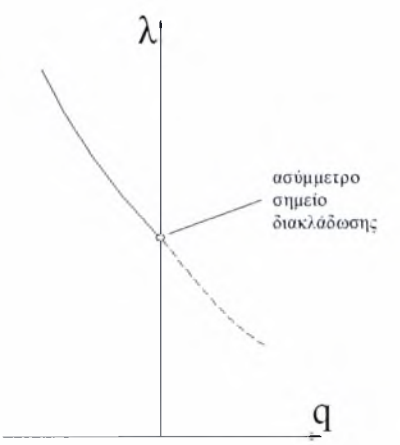
Όσον αφορά δε τους τύπους των απλών διακλαδικών σημείων, αυτοί διακρίνονται σε ***συμμετρικά σημεία διακλάδωσης*** (ευσταθή και ασταθή) και σε ***ασύμμετρα σημεία διακλάδωσης*** (πάντοτε ασταθή), που απεικονίζονται στα Σχήματα Α1.5 – Α1.8.



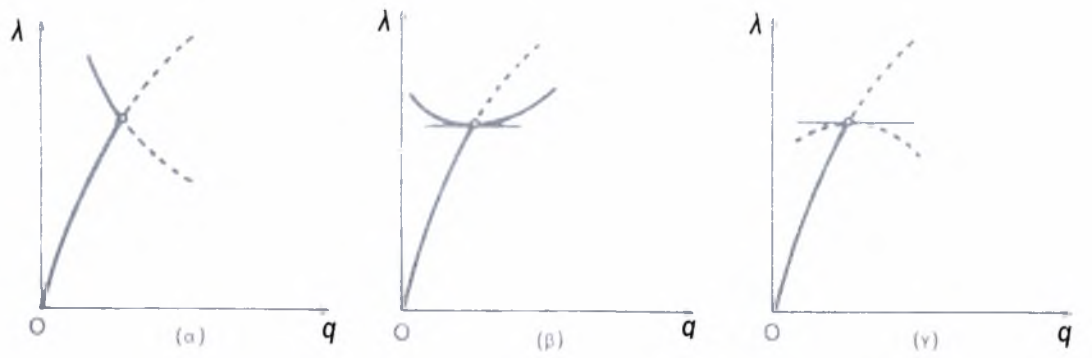
Σχήμα Α1.5. Συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Σχήμα Α1.6. Συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Σχήμα Α1.7. Ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Διάφοροι τύποι απλών σημείων διακλάδωσης: (α) ασύμμετρο, (β) συμμετρικό ευσταθές, (γ) συμμετρικό ασταθές

Σχήμα Α1.8. Οι τρεις τύποι απλών διακλαδικών σημείων επί μονοτονικά αύξοντος κύριου δρόμου ισορροπίας.

Σημειωτέον ότι φαινόμενα διακλαδώσεων σε δευτερεύοντες κλάδους ισορροπίας είναι δυνατόν να συμβούν, παρουσιάζουν δε εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθόσον η κατασκευή σε τέτοιες περιπτώσεις αλλάζει συνεχώς την ποιοτική μεταλυγισμική συμπεριφορά της. Άλλωστε, η μελέτη τέτοιου είδους διακλαδώσεων αποτελεί και το ***κατ΄ εξοχήν αντικείμενο*** της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, όπως διεξοδικά θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο Β΄ αυτής.

(γ) Ευσταθής και ασταθής ισορροπία – θεμελιώδη θεωρήματα

Ορισμένα τμήματα των δρόμων ισορροπίας όλων των προηγούμενων Σχημάτων έχουν χαραχθεί με συνεχή γραμμή και άλλα με διακεκομμένη. Η συνεχής γραμμή συμβολίζει ευσταθή δρόμο και η διακεκομμένη ασταθή, ενώ εκτενής περιγραφή της μετάπτωσης από την ευστάθεια στην αστάθεια των ισορροπιών μέσω των κρισίμων σημείων, αλλά και του ορισμού των εννοιών αυτών μπορεί να ευρεθεί σε πολλά συγγράμματα τόσο της Ελληνικής[23] όσο και της διεθνούς σχετικής βιβλιογραφίας[5,7,14,15]. Πέραν δε της σημαντικής παρατήρησης που διατύπωσε ο αείμνηστος Koiter♦, επιβάλλεται στο σημείο αυτό να αναφερθούν δύο ***θεμελιώδη θεωρήματα*** της ελαστικής ευστάθειας, που ισχύουν τόσο για διακεκριμένα όσο και για συνεχή συστήματα:

- **Θεώρημα 1:** *Ένας αρχικά ευσταθής δρόμος ισορροπίας, ο οποίος αυξάνει μονοτονικά συναρτήσει της φόρτισης,* ***δεν*** *μπορεί να γίνει ασταθής, χωρίς να τμηθεί από έναν άλλο (δευτερεύοντα) δρόμο ισορροπίας.*

♦ το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας είναι ευσταθές (ασταθές), εφόσον το κρίσιμο σημείο είναι ευσταθές (ασταθές)

- **Θεώρημα 2:** *Ένας αρχικά ευσταθής δρόμος ισορροπίας, που αυξάνει συναρτήσει της φόρτισης,* ***δεν*** *μπορεί να φτάσει μια ασταθή κατάσταση ισορροπίας (που θα οδηγούσε σε ακαριαίο λυγισμό μέσω οριακού ή διακλαδικού σημείου), χωρίς προηγούμενα να τμηθεί από έναν (δευτερεύοντα ασταθή) δρόμο ισορροπίας, ο οποίος συνδέεται με τιμές της φόρτισης μικρότερες από αυτή που αντιστοιχεί στην ως άνω ασταθή κατάσταση ισορροπίας.*

Α.1.3. Η ενεργειακή μέθοδος

Για τον προσδιορισμό των κρίσιμων φορτίων των κατασκευών και της προ- αλλά και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αυτών χρησιμοποιούνται με επιτυχία διάφορες μέθοδοι, εντασσόμενες κυρίως στις ακόλουθες τρεις:

- Κλασσική μέθοδος ισορροπίας του Euler (μέθοδος γειτονικής ισορροπίας
- Ενεργειακή μέθοδος
- Δυναμική ή Κινηματική μέθοδος

Από αυτές θα παρατεθεί εκτενέστερη αναφορά στην ***ενεργειακή μέθοδο***, η οποία θα εφαρμοστεί κατά κόρον στην παρούσα Διπλωματική Εργασία.

Η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα και βασίζεται στη μελέτη της συνάρτησης του ***συνολικού δυναμικού*** V_T αυτών. Όπως είναι γνωστό, το συνολικό δυναμικό (total potential) V_T οποιουδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των εσωτερικών δυνάμεων U (δηλαδή της ενέργειας παραμόρφωσης, strain energy) και του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων Ω (που είναι το έργο των δυνάμεων αυτών από την τελική στην αρχική θέση ισορροπίας) : $V_T = U + \Omega$.

(α) Ενεργειακά κριτήρια και σχετικά θεωρήματα της μεθόδου

Η ενεργειακή μέθοδος βασίζεται στα ακόλουθα δύο ύψιστης σημασίας ενεργειακά κριτήρια, που έχουν ως εξής:

1. Κριτήριο ισορροπίας[*]

Ένα συντηρητικό σύστημα υπό στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια θέση, όταν το συνολικό δυναμικό V_T έχει στάσιμη τιμή στη θέση αυτή.

[*] Αρχή της Στάσιμης Τιμής της Δυναμικής Ενέργειας

Πρόκειται συνεπώς για ***ικανή και αναγκαία συνθήκη ισορροπίας***, η οποία (για διακεκριμένα συστήματα) ισοδυναμεί με τον ταυτόχρονο μηδενισμό των $1^{ων}$ παραγώγων του συνολικού δυναμικού ως προς όλες τις γενικευμένες συντεταγμένες, απ' όπου απορρέουν οι ***εξισώσεις ισορροπίας***, οι οποίες γράφονται ως: $\frac{\partial V_T}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,...,n$.

2. *Κριτήριο ευστάθειας (θεώρημα Lagrange – Dirichlet)*

Μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής (για μικρού μεγέθους διαταραχή), αν το συνολικό δυναμικό, που αντιστοιχεί στην κατάσταση αυτή έχει σχετικό (τοπικό) ελάχιστο.

Μια γενίκευση του κριτηρίου αυτού αποτελεί το *θεώρημα του Koiter*, σύμφωνα με το οποίο *η ύπαρξη σχετικού (τοπικού) ελάχιστου της συνολικής δυναμικής ενέργειας, που αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας, αποτελεί πρακτικά ικανή και αναγκαία συνθήκη ευστάθειας (με τη δυναμική έννοια αυτής).* Το αντίστροφο του θεωρήματος των Lagrange – Dirichlet, δηλαδή όταν μια κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, το συνολικό δυναμικό έχει τοπικό ελάχιστο, ΔΕΝ έχει μέχρι στιγμής ΠΛΗΡΩΣ αποδειχθεί[#], παρ' όλα ταύτα έχουν διατυπωθεί ορισμένες *ικανές συνθήκες* για *ασταθή ισορροπία*, που περιέχονται στα ακόλουθα δύο θεωρήματα, που απέδειξε ο Lyapunov:

- *1ο Θεώρημα Lyapunov: Αν η συνολική δυναμική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος, που αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας, δεν έχει σχετικό (τοπικό) ελάχιστο, τότε η εν λόγω κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής.*

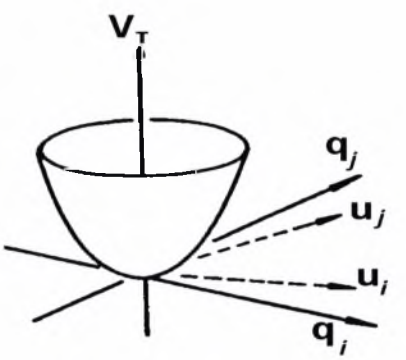
- *2ο Θεώρημα Lyapunov: Αν η συνολική δυναμική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος, που αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας, έχει σχετικό (τοπικό) μέγιστο, τότε η κατάσταση αυτή είναι ασταθής.*

Είναι τέλος γενικά αποδεκτό, ότι τα δύο ενεργειακά κριτήρια, τα δύο θεωρήματα Lyapunov και το θεώρημα του Koiter ισχύουν τόσο για διακεκριμένα όσο και για συνεχή συστήματα.

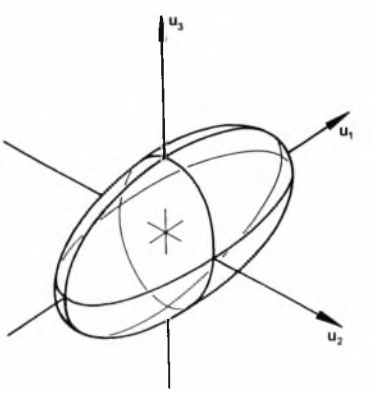
[#] η ισχύς του πάντως έχει γίνει αποδεκτή, οπότε το κριτήριο ευστάθειας χρησιμοποιείται ως αναγκαία και ικανή συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας

(β) Κριτήριο 2ης μεταβολής – γενικευμένες συνθήκες ευστάθειας κρίσιμου σημείου ισορροπίας

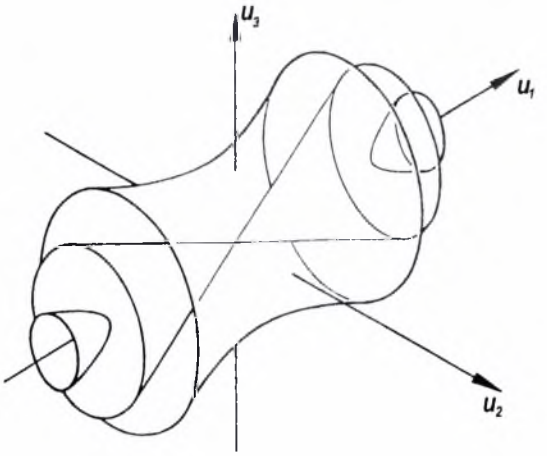
Σύμφωνα με τα όσα εκτέθηκαν προηγούμενα, η μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας (συμπεριλαμβανόμενων και των κρισίμων, δηλαδή των οριακών και διακλαδικών σημείων) έγκειται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης του συνολικού δυναμικού V_T, στην υπό εξέταση θέση ισορροπίας. Η V_T στη περίπτωση διακεκριμένου συστήματος είναι συνήθως μια μη γραμμική μονότιμος συνεχής συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων q_i, $i = 1 \div n$ και επίσης συνήθως γραμμική συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου λ, δηλαδή η $V_T = V_T(q_i; \lambda)$ είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση των q_i και λ. Για τον λόγο αυτό υπάρχει η πιθανότητα ένα σημείο ισορροπίας είτε να παρουσιάζει ευστάθεια ως προς όλες τις γενικευμένες συντεταγμένες είτε ευστάθεια σε σχέση με μερικές από αυτές και αστάθεια ως προς τις υπόλοιπες. Η 1η πιθανότητα παρουσιάζεται γραφικά στα Σχήματα Α1.9 και Α1.10, ενώ η 2η στα Σχήματα Α1.11. και Α1.12 (που αντιστοιχεί στο λεγόμενο σημείο σέλας).



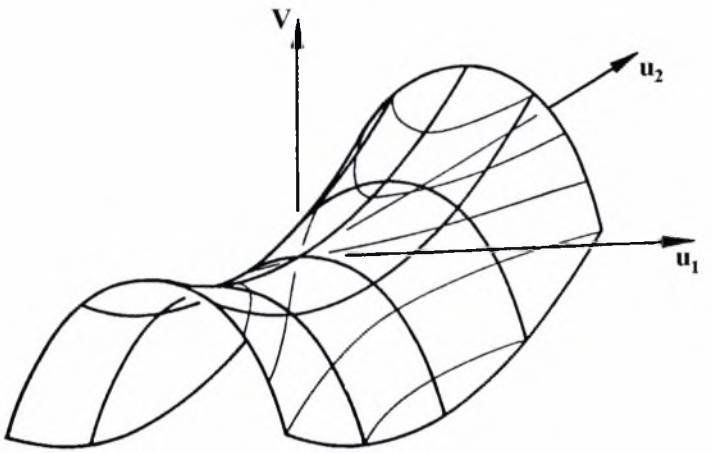
Σχήμα Α1.9. Μια αμετάβλητη επιφάνεια συνολικής ενέργειας ευσταθούς σημείου ισορροπίας έναντι μετασχηματισμού συντεταγμένων.



Σχήμα Α1.10. Ισοβαρείς της συνάρτησης συνολικού δυναμικού περί ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.



Σχήμα Α1.11. Ισοϋψείς της συνάρτησης συνολικού δυναμικού, που επιτρέπουν ευστάθεια ως προς u_2 και u_3 αλλά ευστάθεια ως προς u_1.



Σχήμα Α1.12. Επιφάνεια συνολικού δυναμικού, που εμφανίζει ευστάθεια ως προς u_2 αλλά αστάθεια ως προς u_1 (**σημείο σέλας**, saddle point).

Με βάση τις αρχές τόσο του *Λογισμού των Μεταβολών* όσο και της *Θεωρίας των Μητρώων* διατυπώνεται το λεγόμενο ***κριτήριο της $2^{ης}$ μεταβολής***, σύμφωνα με το οποίο *αν η $2^{η}$ μεταβολή $\delta^2 V_T$ του συνολικού δυναμικού σε θέση ισορροπίας οποιουδήποτε διακεκριμένου συντηρητικού συστήματος είναι θετικά ορισμένη $\left(\delta^2 V_T > 0\right)$, τότε η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής*[⊥]. Το κριτήριο αυτό αποτελεί μια *ικανή* συνθήκη ευστάθειας, αφού το αντίστροφο του, δηλαδή όταν το συνολικό δυναμικό σε μια θέση ισορροπίας έχει τοπικό ελάχιστο, δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι στη θέση αυτή θα ισχύει $\delta^2 V_T > 0$. Αντίστοιχα, αν η $\delta^2 V_T$ είναι αρνητικά ορισμένη $\left(\delta^2 V_T < 0\right)$, τότε το συνολικό δυναμικό έχει σχετικό (τοπικό) μέγιστο και η

[⊥] καθόσον τότε η V_T έχει σχετικό (τοπικό) ελάχιστο

αντίστοιχη θέση ισορροπίας είναι *ασταθής*. Όμοια, η $\delta^2 V_T$ είναι *μη ορισμένη* συνάρτηση, το συνολικό δυναμικό δεν έχει σχετικό ελάχιστο, οπότε σύμφωνα με το $1^{ο}$ θεώρημα *Lyapunov* η σχετική θέση ισορροπίας είναι *ασταθής*. Αν όμως η $\delta^2 V_T$ είναι θετικά *ημιορισμένη* (δηλαδή υπάρχει θέση ισορροπίας για την οποία $\delta^2 V_T = 0$) ή αν ισχύει ότι $\delta^2 V_T \equiv 0$, τότε η V_T μπορεί να έχει ή να μην έχει ελάχιστο στη θέση αυτή, οπότε απαιτείται περαιτέρω έρευνα, μέσω της μελέτης μεταβολών ανώτερης τάξης˜. Τα σημεία ισορροπίας, στα οποία η $\delta^2 V_T$ είναι θετικά ημιορισμένη, είναι *κρίσιμα*, γεγονός που ισοδυναμεί με τον μηδενισμό της ορίζουσας ευστάθειας της τετραγωνικής μορφής της $\delta^2 V_T$. Σε ότι ακολουθεί παρατίθεται η ακριβής βήμα με βήμα μεθοδολογία προσδιορισμού της ευστάθειας κρισίμων (και μη) σημείων ισορροπίας, μέσω γενικευμένων κριτηρίων, για ένα διβάθμιο συντηρητικό σύστημα, η οποία άμεσα δύναται να εφαρμοστεί και για διακεκριμένα συστήματα με $n \geq 3$.

Έστω λοιπόν ένα συντηρητικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας (γενικευμένων συντεταγμένων) q_1, q_2, του οποίου η συνάρτηση συνολικού δυναμικού ισούται με $V_T(q_1, q_2; \lambda)$. Όλα τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial V_T}{\partial q_1} = V_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial V_T}{\partial q_2} = V_2 = 0 \tag{A3.1}$$

Για το προσδιορισμό της ευστάθειας ενός μη κρίσιμου σημείου ισορροπίας E υπολογίζεται το πρόσημο των κυρίων ελασσόνων οριζουσών του μητρώου ευστάθειας $|a_{ij}|$, το οποίο δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V_T}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 V_T}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 V_T}{\partial q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 V_T}{\partial q_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} \tag{A3.2}$$

Υπολογίζεται κατά συνέπεια το πρόσημο των $V_{11}|_E$ και $(V_{11}V_{22} - V_{12}V_{21})|_E$ και εφαρμόζεται ανάλογα το κριτήριο της $2^{ης}$ μεταβολής.

˜ Σύμφωνα με το $1^{ο}$ θεώρημα Lyapunov αν μια περιττής τάξης μεταβολή είναι διάφορη του μηδενός σε κάποιο σημείο ισορροπίας, τότε το σημείο αυτό είναι ***ασταθές***

Τα κρίσιμα σημεία προσδιορίζονται μέσω του ταυτόχρονου μηδενισμού των εξισώσεων ισορροπίας και της ορίζουσας ευστάθειας, οπότε για ένα κρίσιμο σημείο ισορροπίας C ισχύει ότι

$$\frac{\partial V_T}{\partial q_i} = 0 \ , \ i = 1,2 \ \text{και} \ \left(V_{11}V_{22} - V_{12}V_{21}\right) = 0 \tag{A3.3}$$

Για την εύρεση της ευστάθειας του κρίσιμου σημείου C υπολογίζεται το πρόσημο της τρίτης μεταβολής $\delta^3 V_T$ στο σημείο αυτό, η οποία ευρίσκεται μέσω του τύπου[23]

$$\delta^3 V_T\Big|_C = \left[V_{111}^C + 3V_{112}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right) + 3V_{122}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^2 + V_{222}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^3 \right] \delta q_1^3 \tag{A3.4}$$

όπου

$$\frac{\delta q_2}{\delta q_1} = -\frac{V_{11}^C}{V_{12}^C} = -\frac{V_{12}^C}{V_{22}^C} = \zeta \tag{A3.5}$$

Σε περίπτωση που ${\delta^3 V_T}^C = 0$ το κρίσιμο σημείο είναι συμμετρικό σημείο διακλάδωσης, ενώ για οριακά σημεία ή ασύμμετρα σημεία διακλάδωσης ισχύει ${\delta^3 V_T}^C \neq 0$ (ασταθή). Η ευστάθεια του συμμετρικού σημείου διακλάδωσης C θα ευρεθεί μέσω υπολογισμού του πρόσημου της μεταβολής ${\delta^4 V_T}^C$, σύμφωνα με την παρακάτω έκφραση

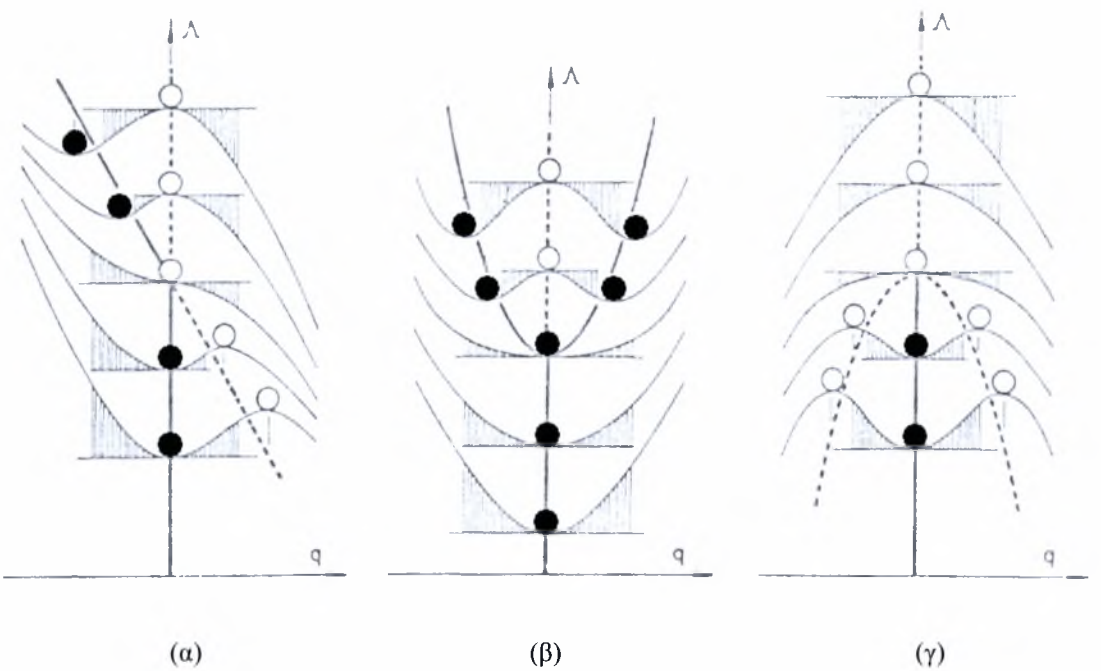
$$ {\delta^4 V_T}^C = \left[\begin{array}{l} V_{1111}^C + 4V_{1112}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right) + 6V_{1122}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^2 + \\ 4V_{1222}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^3 + V_{2222}^C\left(\frac{\delta q_2}{\delta q_1}\right)^4 \end{array} \right] \delta q_1^4 \tag{A3.6}$$

καθώς και του πρόσημου της γενικευμένης 4ης μεταβολής d_{1111}^C ή $\left(\delta^4 \tilde{V}_T^C\right)$ που

δίδεται από τη σχέση

$$d_{1111}^C = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\zeta\right)^4 V_T\Big|_C - \frac{3}{V_{22}^C}\left[\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\zeta\right)^2 V_2\right]^2\right]_C \tag{A3.7}$$

Αν στο σύστημα υφίστανται μη γραμμικότητες τετραγωνικής μορφής, τότε το πρόσημο της d^C_{IIII} και όχι της $\delta^4 V_T{}^C$ είναι αυτό που καθορίζει την ευστάθεια (>0) ή την αστάθεια (<0) του κρισίμου σημείου. Αν δεν υπάρχουν μη γραμμικότητες ή αυτές είναι κυβικού τύπου τότε $d^C_{IIII} \equiv \delta^4 V_T{}^C$, οπότε το πρόσημο της $\delta^4 V_T{}^C$ αρκεί για τον προσδιορισμό της ευστάθειας του *C*. Φυσικά, αν d^C_{IIII}=0, τότε εξετάζονται μεταβολές ακόμα μεγαλύτερης τάξης. Στο Σχήμα Α1.13 απεικονίζεται η μορφή της καμπύλης του συνολικού δυναμικού για τους τρεις τύπους σημείων διακλάδωσης, σε χαρακτηριστικά σημεία του προ- και μεταλυγισμικού κύριου και δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας.

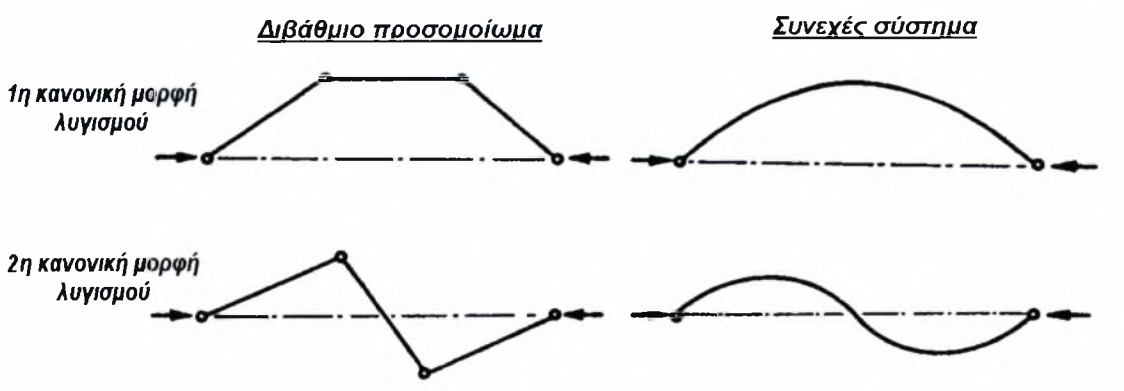


Σχήμα Α1.13. Δρόμοι ισορροπίας και μορφή της συνάρτησης συνολικού δυναμικού για (α) ασύμμετρο, (β) συμμετρικό ευσταθές και (γ) συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης.

Α.1.4. Ο ρόλος των μαθηματικών προσομοιωμάτων (προτύπων)

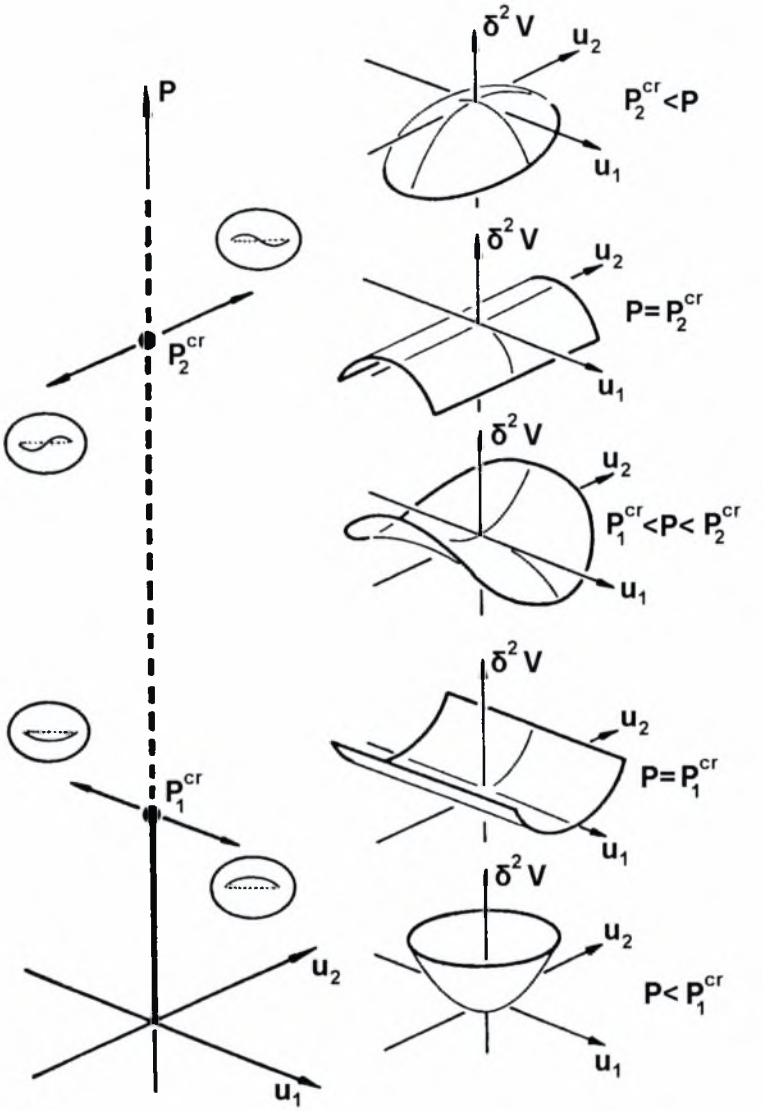
Είναι κοινά παραδεκτό και γνωστό εκ πείρας στην Επιστήμη του Μηχανικού ότι είναι εξαιρετικά δυσχερές να ληφθούν υπ' όψη όλες οι παράμετροι, οι οποίες επηρεάζουν την εντατική κατάσταση μιας κατασκευής και από τις οποίες εξαρτάται η συμπεριφορά αυτής. Καθίσταται ως εκ τούτου αναγκαία η αντικατάσταση της πραγματικής κατασκευής (συνεχούς, απειροβάθμιου συστήματος), μετά από μια σειρά απλοποιητικών παραδοχών, με ένα μαθηματικό προσομοίωμα (πρότυπο, μοντέλο) για τον προσδιορισμό της έντασης και της

παραμόρφωσης, του οποίου λαμβάνονται υπ' όψη μόνον εκείνες οι παράμετροι, που είναι χαρακτηριστικές της συμπεριφοράς της πραγματικής κατασκευής. Αναμφίβολα η αντικατάσταση αυτή με ένα προσομοίωμα εντατικά ισοδύναμο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της όλης μελέτης. Αρχικά καθορίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας, της φόρτισης και των ιδιοτήτων του υλικού της πραγματικής κατασκευής (αναζήτηση του λεγόμενου φυσικού πρότυπου) και στη συνέχεια αναζητείται το εντατικά ισοδύναμο μαθηματικό προσομοίωμα, που θα την αντικαταστήσει. Σε περίπτωση δε κατά την οποία μέσω του προσομοιώματος αυτού είναι επιθυμητός και ο έλεγχος της ευστάθειας της κατασκευής, μια επιπρόσθετη παράμετρος που οπωσδήποτε πρέπει να συμπεριληφθεί – προστεθεί είναι η γεωμετρική μη γραμμικότητα, η οποία είναι αναγκαία για τον καθορισμό της πραγματικής φέρουσας ικανότητας μιας λεπτής κατασκευής. Φυσικά, η προσπάθεια για τον καθορισμό ενός μαθηματικού προτύπου δεν είναι πάντοτε δυνατόν να οδηγήσει σε ένα ακριβές (εντατικά ισοδύναμο) υποκατάστατο της πραγματικής κατασκευής, και συνήθως η προσομοίωση καταλήγει σε κατά προσέγγιση ισοδύναμα μαθηματικά πρότυπα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα προσομοίωσης της συμμετρικής και αντισυμμετρικής συμπεριφοράς σε λυγισμό λόγω αξονικής θλίψης αποτελεί το διβάθμιο μοντέλο εκ τριών αβαρών ράβδων μιας αμφιαρθρωτής δοκού που φαίνεται στο Σχήμα Α1.14α, ο κύριος δρόμος ισορροπίας του οποίου με τα δύο σημεία διακλάδωσης (που αντιστοιχούν σε λυγισμό πρώτης και δεύτερης κανονικής μορφής) φαίνεται στο Σχήμα Α1.14β.



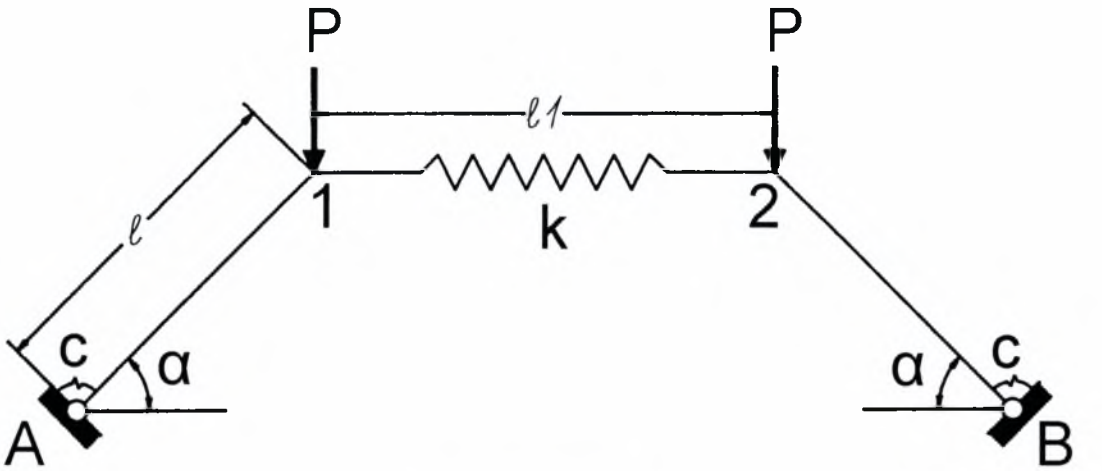
(α)

Σχήμα Α1.14 (συνεχίζεται)

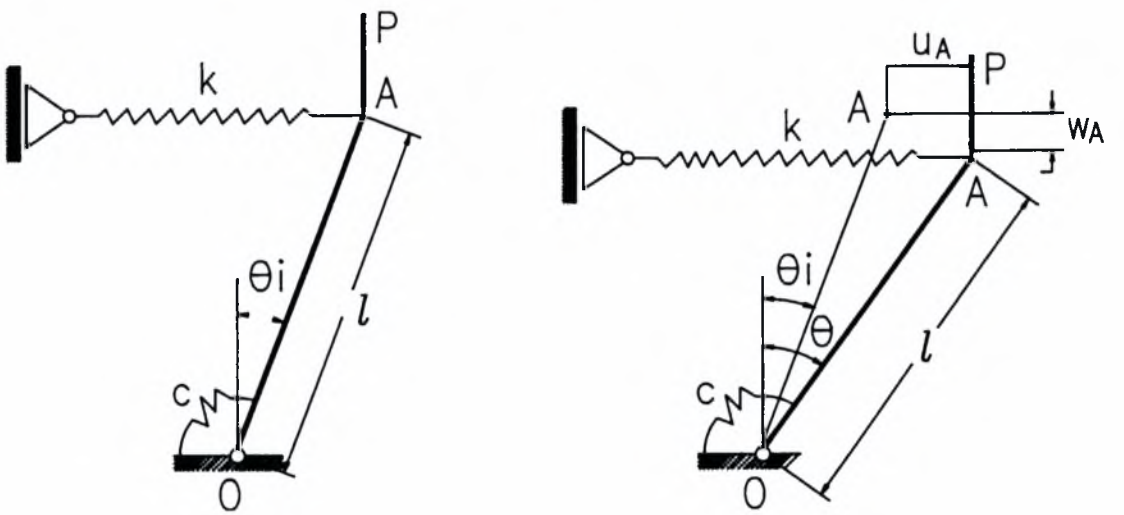


Σχήμα Α1.14. Διβάθμιο προσομοίωμα λυγισμού λόγω αξονικής θλίψης μιας αμφιαρθρωτής δοκού (α) και διακλαδικά σημεία επί του κύριου (τετριμμένου) δρόμου ισορροπίας, που οδηγούν σε συμμετρικό λυγισμό ($1^η$ κανονική μορφή) και αντισυμμετρικό λυγισμό ($2^η$ κανονική μορφή) (β).

Οι θεωρίες αναλύσεων που εφαρμόζονται στη πράξη για κελύφη, πλάκες και δοκούς είναι παραδείγματα, στα οποία – μετά από κάποιες απλοποιητικές παραδοχές – η τρισδιάστατη εντατική κατάσταση ανάγεται σε δισδιάστατη για τους επιφανειακούς φορείς και σε μονοδιάστατοι για τους γραμμικούς. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1960 επινοήθηκαν και μελετήθηκαν πολλά μοντέλα για την προσομοίωση της ανάλυσης σε ευστάθεια ενός μεγάλου αριθμού γραμμικών και επιφανειακών φορέων, μέσω των οποίων καταδείχτηκαν με σαφήνεια όλοι οι τύποι στατικής αστάθειας των κατασκευών. Μεταξύ αυτών τα πλέον αξιόλογα και χαρακτηριστικά παρουσιάζονται στα Σχήματα Α1.15 – Α1.25[1-5,14].

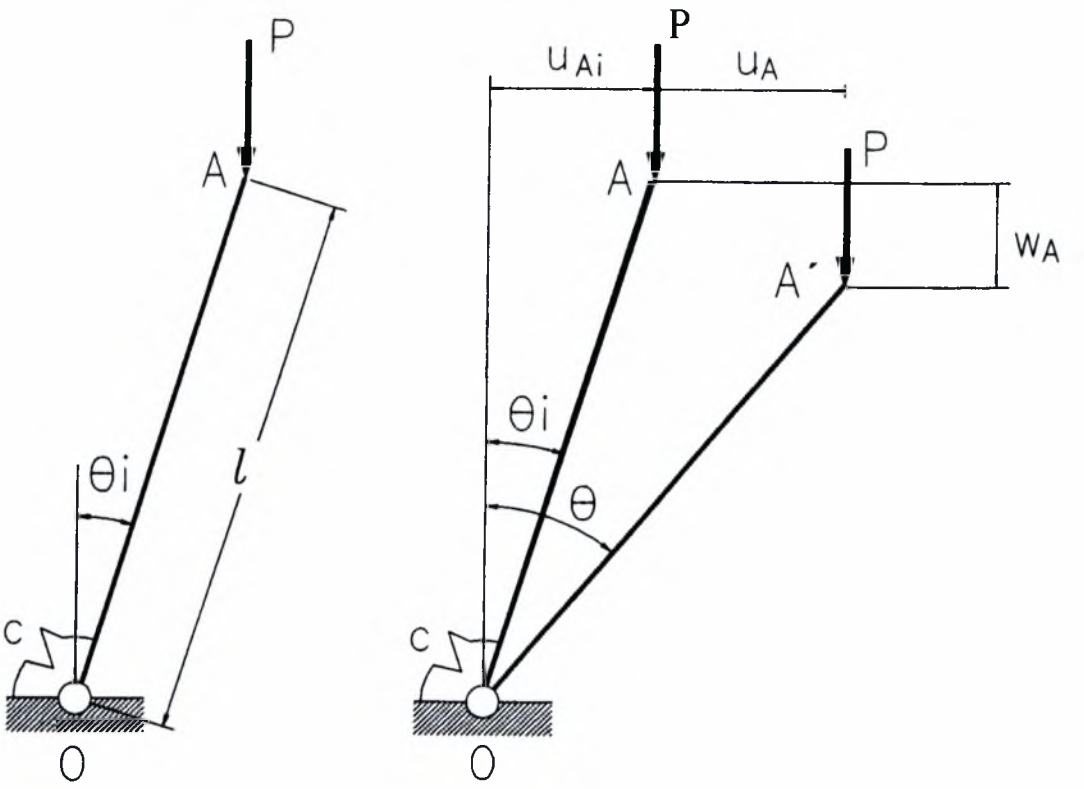


Kerr – Soifer (1969)

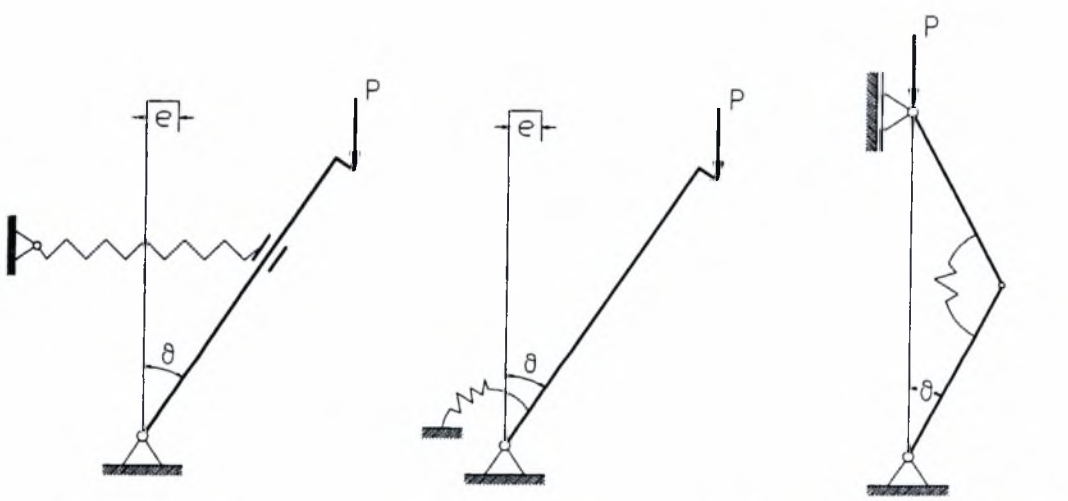


Augusti (1964)

Σχήμα Α1.15. Χαρακτηριστικά προσομοιώματα (μοντέλα) για την μελέτη διάφορων τύπων στατικής αστάθειας.



Augusti (1964)

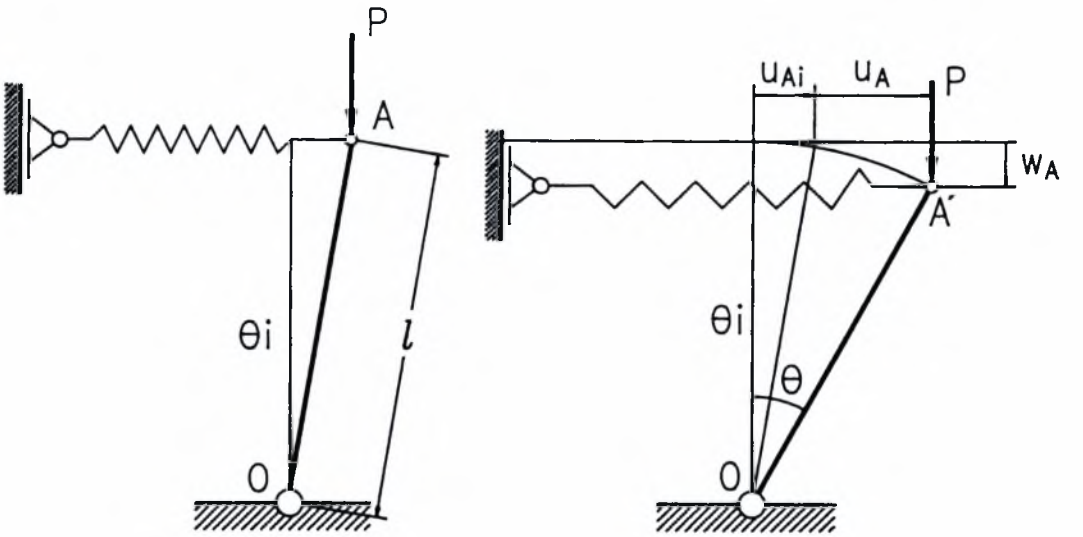


Koiter (1962) *Augusti (1961)* *Croll & Walker (1972)*

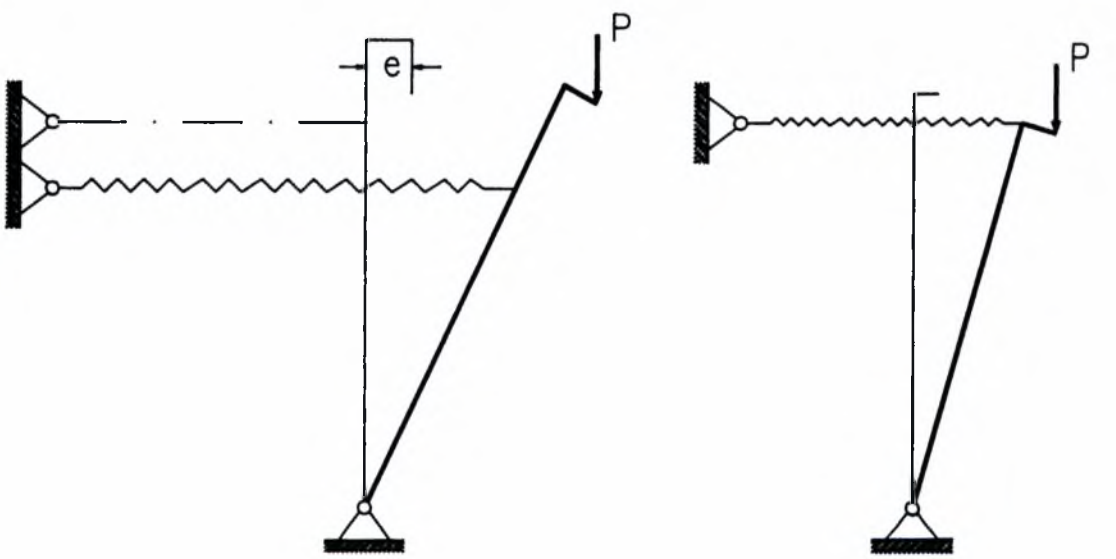
Zaslavsky (1968)

Chajes (1969)

Σχήμα Α1.16. Προσομοιώματα ευσταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης.



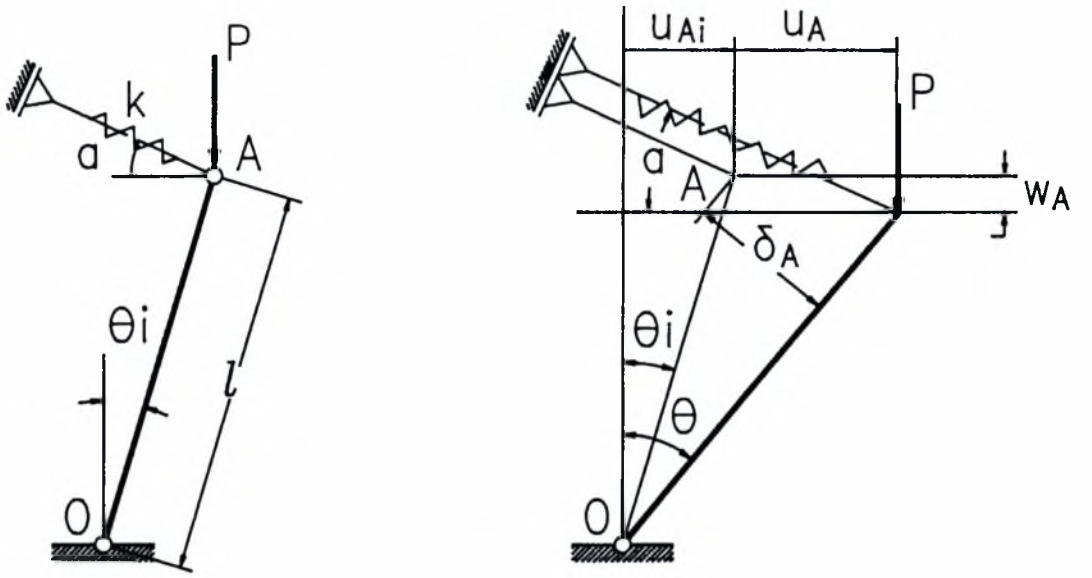
Augusti (1964)



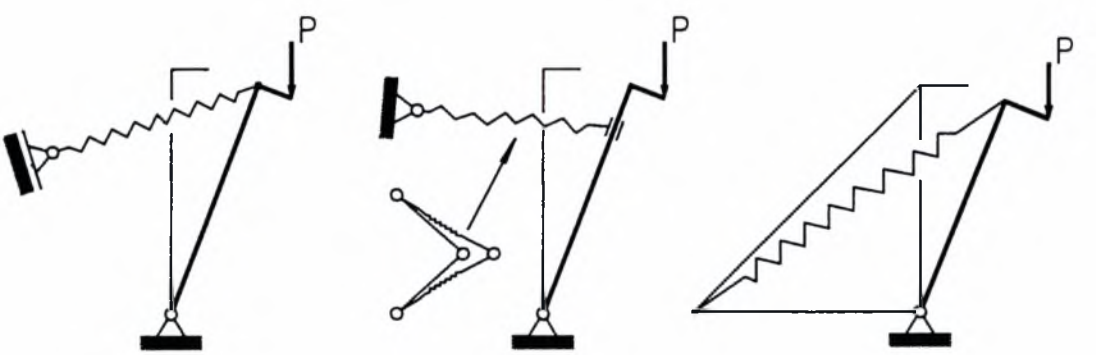
Koiter (1962)

Augusti (1961)

Σχήμα Α1.17. Προσομοιώματα ασταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης.

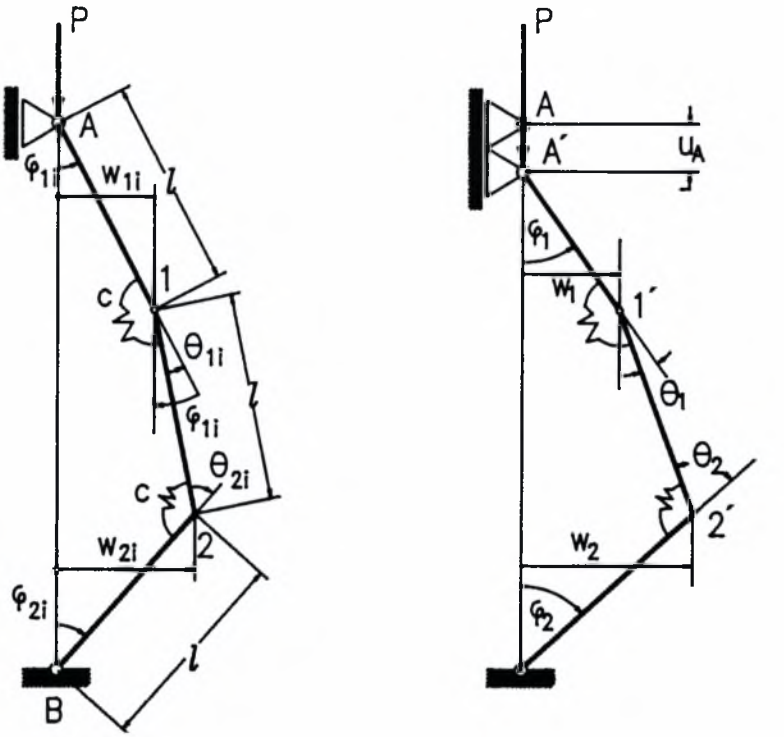


Zanaboni (1961), Augusti (1964)

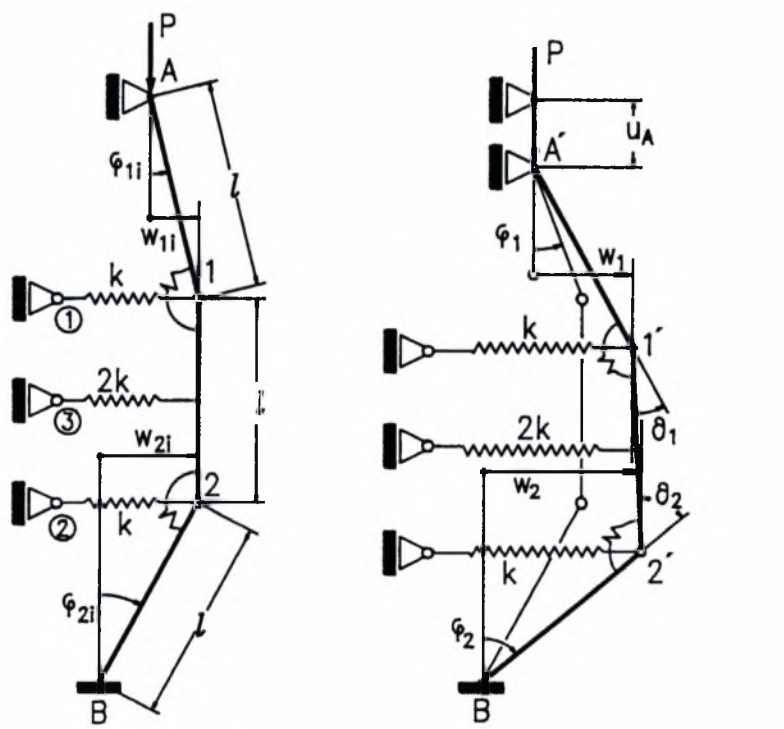


Augusti (1961) *Koiter (1962)* *Thompson (1965)*

Σχήμα Α1.18. Προσομοιώματα ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης.

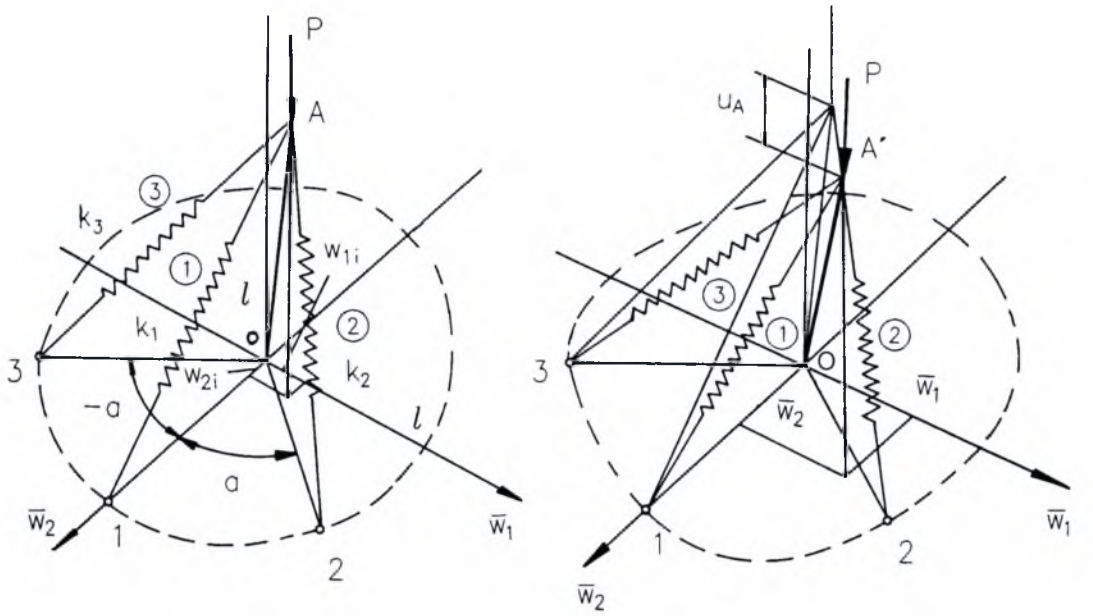


Croll & Walker (1972), Thompson & Hunt (1973)

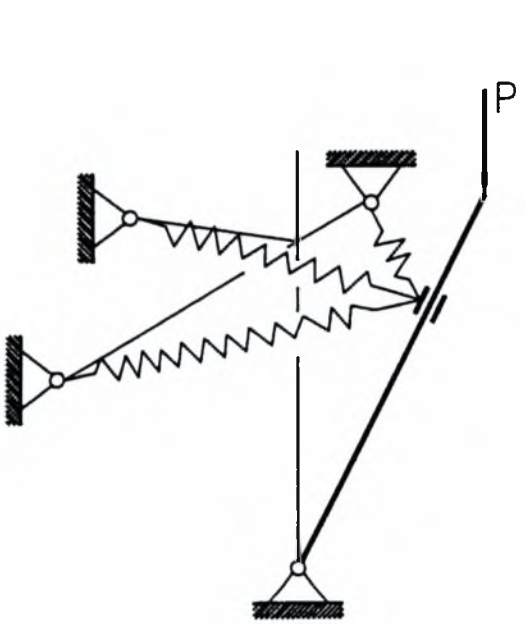


Stein (1959), Supple & Chilver (1967)

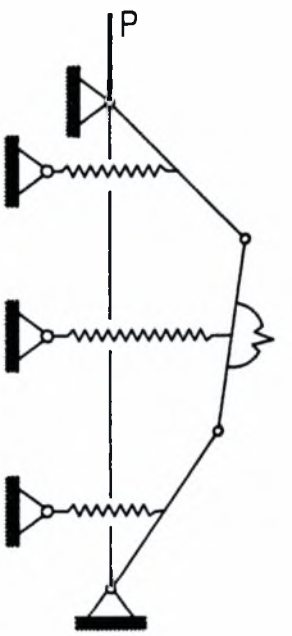
Σχήμα Α1.19. Προσομοιώματα για τη μελέτη συζευγμένων και μη συζευγμένων διακλαδώσεων.



Thompson – Gaspar (1977)



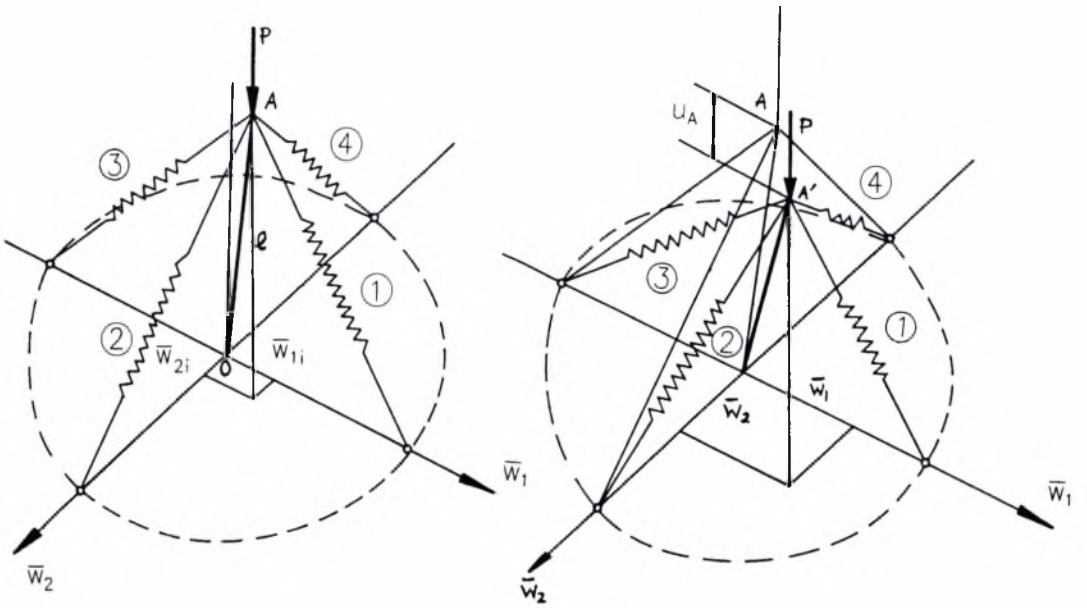
Koiter (1962)



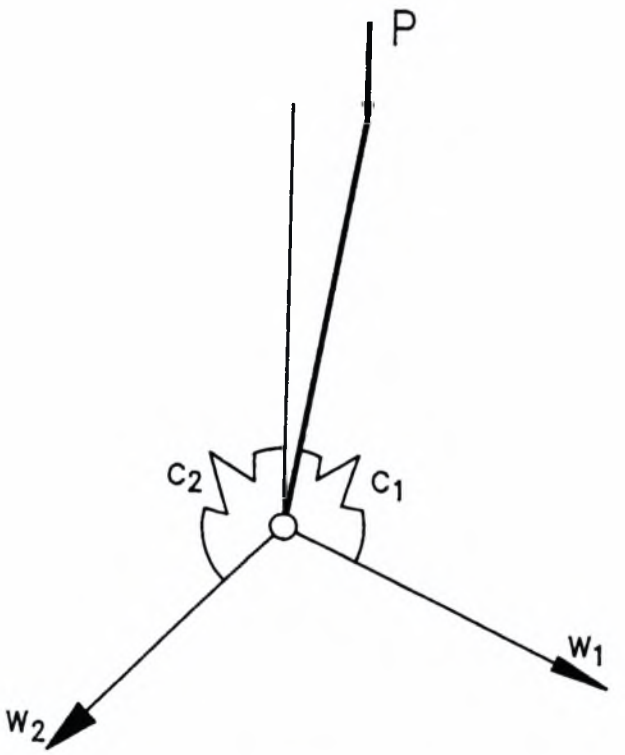
Chilver (1967)

Huseyin (1975)

Σχήμα Α1.20. Προσομοιώματα για η μελέτη ημιταυτόχρονων και ταυτόχρονων ημισυμμετρικών διακλαδώσεων.

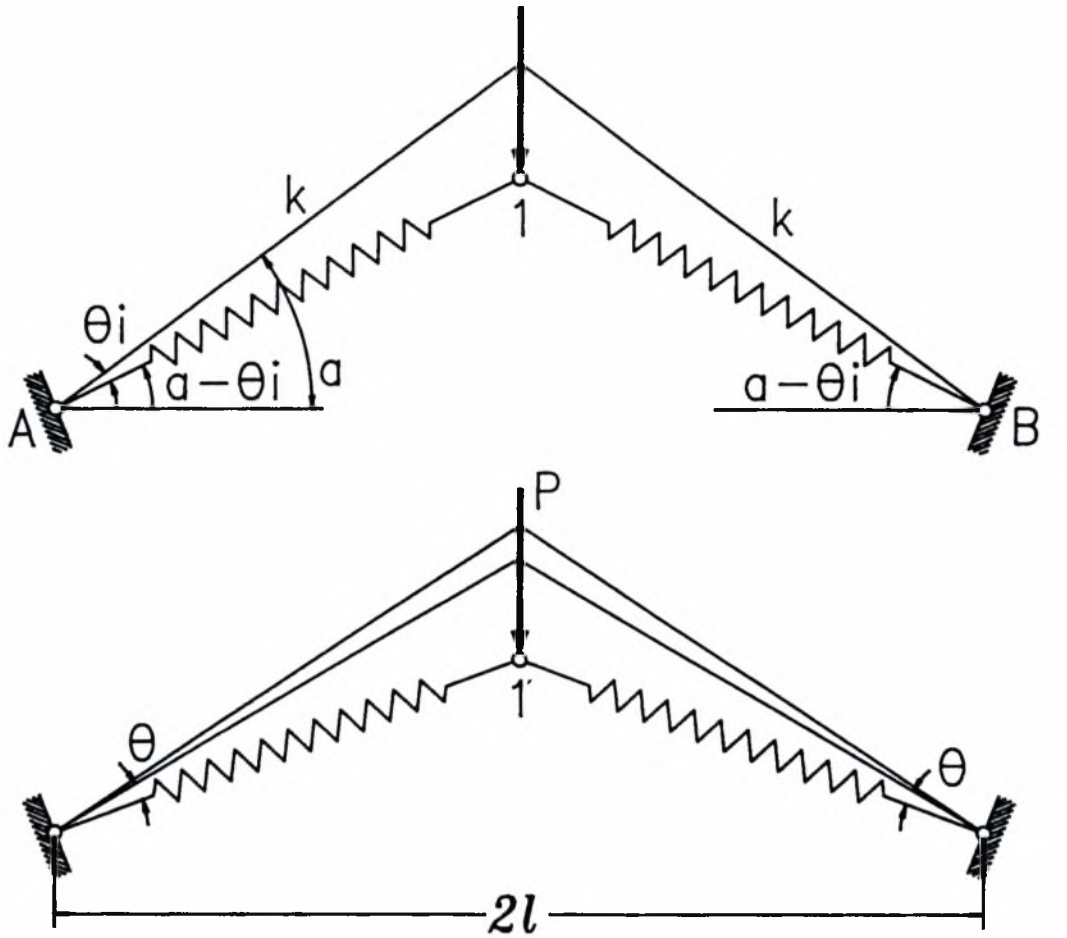


Gaspar (1977), Gioncu & Ivan (1979)

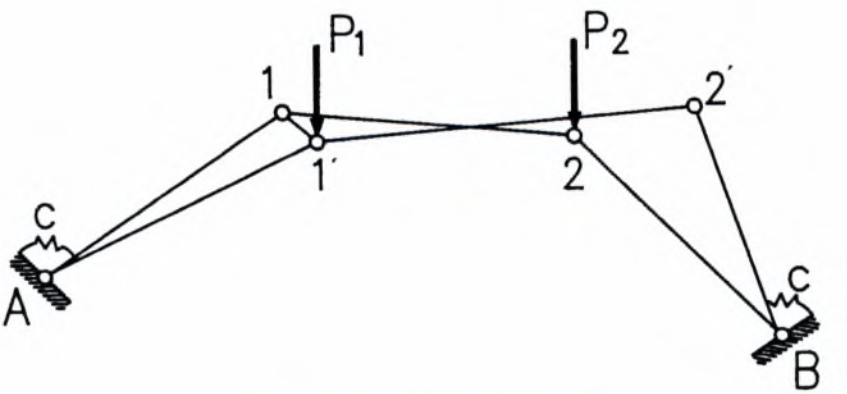


Augusti (1964)

Σχήμα Α1.21. Προσομοιώματα για τη μελέτη ταυτόχρονων διακλαδώσεων διπλής συμμετρίας.

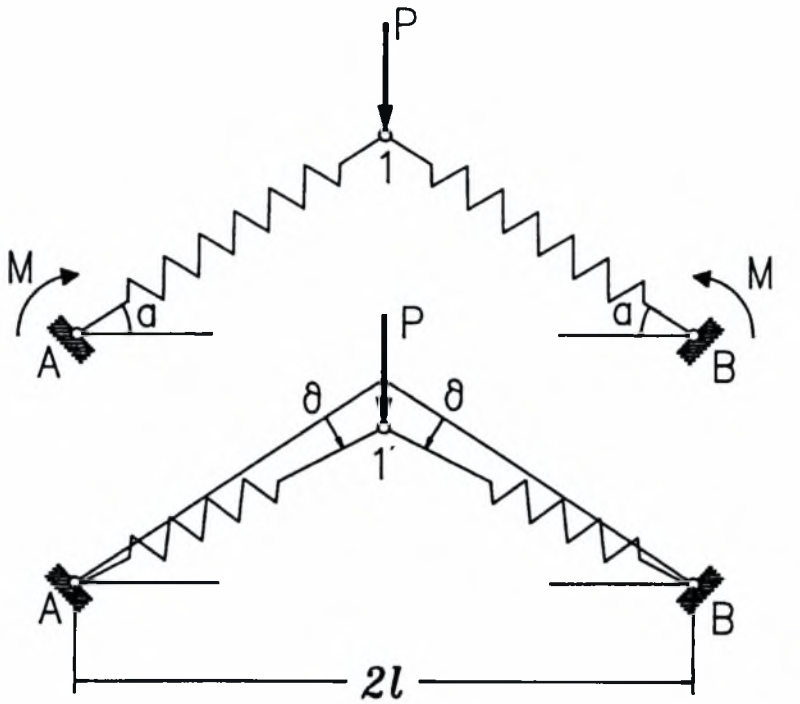


von Mises

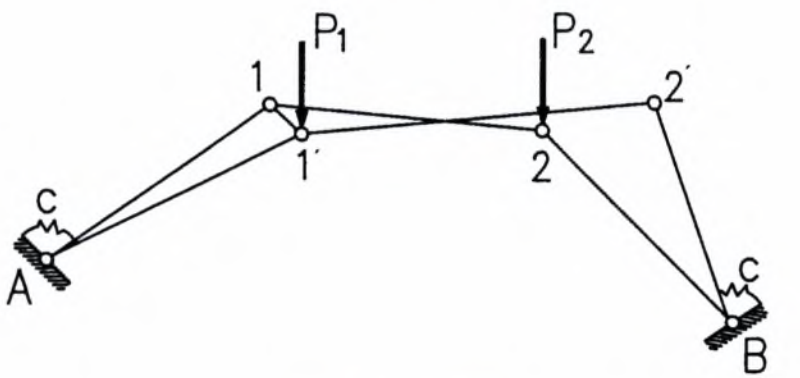


Croll & Walker (1972)

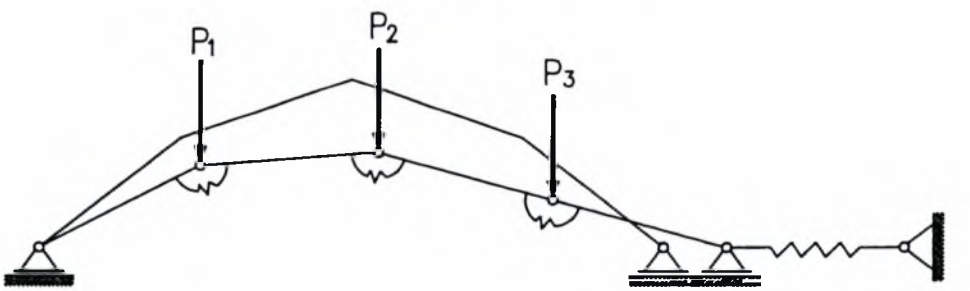
Σχήμα Α1.22. Προσομοιώματα οριακού σημείου.



Huseyin (1975)

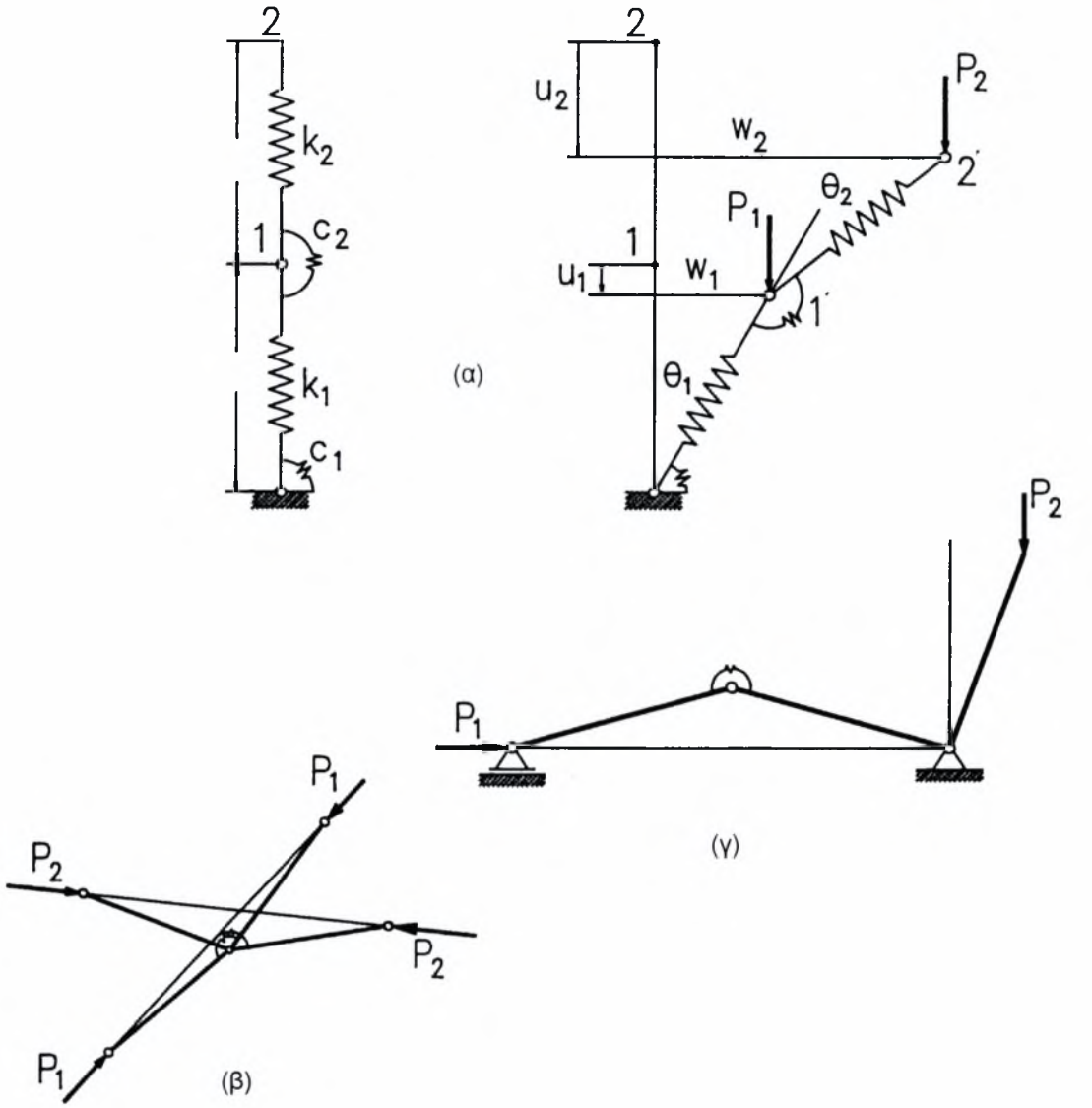


Huseyin (1976)



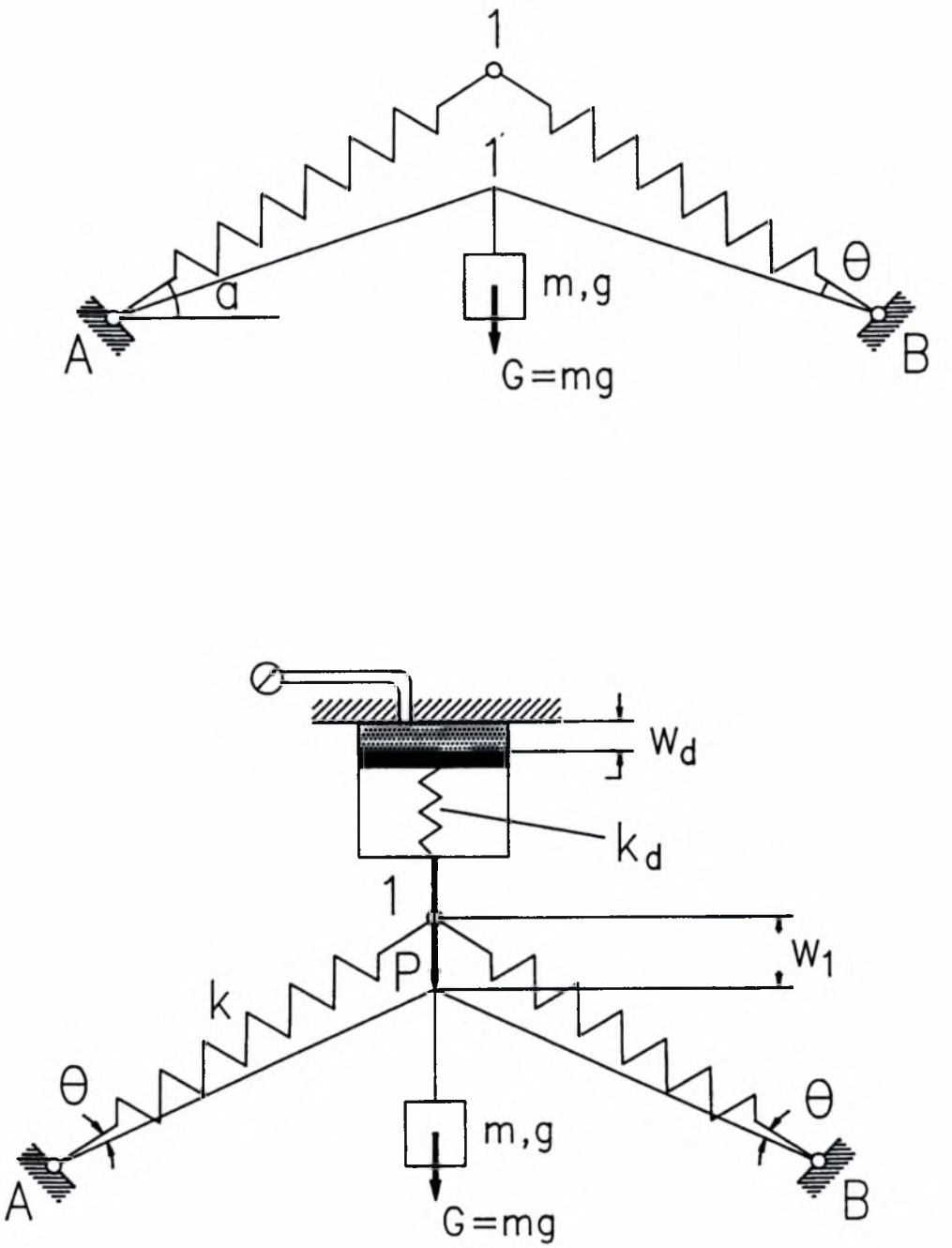
Welton (1978)

Σχήμα Α1.23. Προσομοιώματα για τη μελέτη αστάθειας μέσω γενικών κρισίμων σημείων.



(α) Huseyin (1975) , (β) Croll & Walker (1972), (γ) Zaslavsky (1968)

Σχήμα Α1.24. Προσοιώματα για τη μελέτη αστάθειας μέσω ειδικών κρισίμων σημείων.



Σχήμα Α1.25. Μελέτη ευστάθειας με προσομοιώματα όπου οι δράσεις εξαρτώνται από δομικές παραμορφώσεις.

Η ανάλυση της προ- και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς του 2ου εκ των προσομοιωμάτων που απεικονίζονται στο Σχήμα Α1.19[2-4], αποτελεί το κατ' εξοχήν αντικείμενο του παρόντος πονήματος, όπως διεξοδικά θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο Β΄ αυτού.

Α.2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Α.2.1. Γενικές έννοιες – ορισμοί

(α) Ιστορικό – βασικές επισημάνσεις

Τα φαινόμενα αστάθειας, τα οποία λαμβάνουν χώραν με μια πληθώρα διαφορετικών τρόπων σε όλες της Εφαρμοσμένες Επιστήμες (Μηχανική, Φυσική, Αστρονομία, Βιολογία κλπ.), καταλαμβάνουν ίσως την κορυφαία θέση μεταξύ του ενδιαφέροντος των ερευνών. Την τελευταία τριακονταετία, μια εντυπωσιακή συνεργασία μεταξύ ερευνητών των παραπάνω Επιστημών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είχαν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας ενοποιημένης προσέγγισης όλων των ασταθειών, με την ανάπτυξη των νέων ιδεών της Θεωρίας Διακλαδώσεων[16,17] και της Θεωρίας των Καταστροφών[6]. Ιδιαίτερα όσον αφορά τη δεύτερη εξ αυτών, και παρ' όλες τις διαφορετικές και κατά καιρούς διισταμένες απόψεις για την εφαρμοσιμότητα της στη Βιολογία και τις Κοινωνικές Επιστήμες, αποτελεί αυτή τη στιγμή μια αυστηρά θεμελιωμένη θεωρία, μετά την τελειοποίηση και εξέλιξη της από κορυφαίους μαθηματικούς και τοπολόγους[8,9,12,13,18,20].

Όντως η Θεωρία των Καταστροφών είναι ευρύτατα αποδεκτή, καθόσον προσφέρει μια γενική μέθοδο για τη μελέτη αλμάτων (jumps), ασυνεχειών (discontinuities) και απότομων ποιοτικών αλλαγών (sudden qualitative changes) τόσο στη στατική όσο και στη δυναμική απόκριση των συστημάτων. Πέραν αυτών, οι γνώσεις που αποκτώνται μέσω της Θεωρίας αυτής είναι γενικότατης ισχύος, οπότε δεν υφίσταται ανάγκη σε βάθος ανάλυσης του εκάστοτε συστήματος, παρά μόνο μελέτη οικογενειών συστημάτων, των οποίων η συμπεριφορά διέπεται από την συνήθη (κανονική) μορφή ***συναρτήσεων Συνολικού Δυναμικού***, οι οποίες σύμφωνα με τη Θεωρία αυτή είναι **απόλυτα καταταγμένες** και **συσχετισμένες**, με εκ **των προτέρων γνωστές** ιδιότητες. Κατά συνέπεια, το μέγιστο βήμα στη μελέτη προβλημάτων ευστάθειας με χρήση της Θεωρίας των Καταστροφών έγκειται στην ***κατάταξη*** της συνάρτησης του Συνολικού Δυναμικού του εκάστοτε εξεταζόμενου συστήματος σύμφωνα με την εν λόγω Θεωρία.

(β) Ορισμοί και μαθηματικές έννοιες

1. Δομική Ευστάθεια Συναρτήσεων (structural stability)

Η έννοια της δομικής ευστάθειας συνδέεται άμεσα με την παρουσία και εν γένει απόκριση ενός συστήματος ή φαινομένου στον πραγματικό φυσικό κόσμο. Ο χαρακτηρισμός αυτός δεν έχει καμιά σχέση με την ευστάθεια, όπως αυτή ορίζεται με βάση τη Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας ή τη Θεωρία των Διακλαδώσεων (π.χ. ευστάθεια σημείων ισορροπίας), αλλά αφορά την ποιοτική συμπεριφορά μιας συνάρτησης ΤΟΠΙΚΑ, λόγω μιας ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΜΙΚΡΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ (arbitrary small perturbation).

Μια συνάρτηση καλείται **δομικά ευσταθής**, όταν οι ποιοτικές της ιδιότητες **δεν** μεταβάλλονται **τοπικά**, αν πραγματοποιηθεί σε αυτή μια αυθαίρετη μικρή διαταραχή. Έστω $V(q_1,q_2,...,q_n)$ συνάρτηση συνολικού δυναμικού και $\varepsilon f(q_1,q_2,...,q_n)$ μια μικρή διαταραχή. Η V είναι ***δομικά ευσταθής*** στο σημείο $q_0 \in \Re$, αν $\exists$ ένας ομαλός μετασχηματισμός μεταβλητών (συντεταγμένων) της μορφής $q'_j = q'_j(q_1,q_2,...,q_n)$, $j = 1,2,...,n$ τέτοιος ώστε και η **νέα συνάρτηση** $V' = V + \varepsilon f$, που προκύπτει από την παραπάνω διαταραχή (στο νέο σύστημα συντεταγμένων) να έχει **την ίδια δομή** με αυτή της V (στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων), που συμβολικά γράφεται ως: $V'(q') = V(q)$.

2. Προσδιοριστικότητα K(V) (determinacy)

Η έννοια αυτή βασικά απαντά στο ερώτημα μέχρι ποιας τάξης στο ανάπτυγμα Taylor (περί ένα σημείο π.χ. ισορροπίας) της συνάρτησης συνολικού δυναμικού V πρέπει να διατηρηθούν, προκειμένου να υπάρξει ***πλήρης*** περιγραφή της ***τοπικής*** συμπεριφοράς ***ευστάθειας*** ενός συστήματος. Δηλαδή, ποιος είναι ο ***δεσπόζων*** όρος του αναπτύγματος και πέραν αυτού η σειρά Taylor μπορεί να ***κολοβωθεί*** (truncated).

3. Ανάπτυξη (Ανάπτυγμα: unfolding)

Ανάπτυξη (ή ανάπτυγμα) $V^*(q_j;\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_r)$ μιας συνάρτησης ***σπέρματος*** (γόνου: germ) $V(q_j)$ ορίζεται ως το σύνολο της πλέον γενικής οικογένειας συναρτήσεων γειτονικών της V, οι οποίες διαθέτουν **τοπικά** τις

ίδιες ιδιότητες με αυτή (ακρότατα, σημεία καμπής κλπ.) με τη **μικρότερη δυνατή διάσταση** *r*.

3.1. Πλήρης ανάπτυξη (versal unfolding)

Μια ανάπτυξη $F(q_j;\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r)$ διάστασης r, μιας συνάρτησης σπέρματος $V(q_j)$ είναι **πλήρης**, αν οποιαδήποτε άλλη ανάπτυξη $V'(q'_j;\alpha'_1,\alpha'_2,.....,\alpha'_r)$ της V μπορεί να προκύψει από την F μέσω ομαλής (smooth) αλλαγής των μεταβλητών και των παραμέτρων της.

3.2. Γενική ανάπτυξη (universal unfolding)

Μια ανάπτυξη είναι **γενική**, αν είναι *πλήρης* και διαθέτει τον μικρότερο αριθμό παραμέτρων *r*. Ο αριθμός αυτός καλείται ***συνδιάσταση*** (codimension).

Συμπερασματικά, η μελέτη της ***ποιοτικής συμπεριφοράς*** μιας συνάρτησης Συνολικού Δυναμικού $V(\mathbf{q};\mathbf{c})$ στη γειτονιά ενός ορισμένου σημείου q_0 (π.χ. ενός σημείου ισορροπίας) συνδέεται με το πρόβλημα υπολογισμού της *προσδιοριστικότητας* και της *γενικής ανάπτυξης*.

4. Υπολογισμός προσδιοριστικότητας

Ορίζοντας ως τον *δεσπόζοντα* όρο *k* τάξης (σε δύναμη) της συνάρτησης V στο σημείο q_0 ως $k-jet$, με συμβολισμό $j^kV(q_0)$ ή j^kV, παρατίθεται κατωτέρω ένας αλγόριθμος, ο οποίος μέσω τεσσάρων απλών βημάτων επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της προσδιοριστικότητας μιας συνάρτησης $V(q)$, δηλ. του αριθμού των απαραίτητων όρων του αναπτύγματος Taylor αυτής. Τα βήματα αυτά έχουν συνοπτικά ως εξής:

(α) Υποθέτουμε κατ΄ αρχήν ότι η $V(q_1,q_2,...,q_n)$ έχει προσδιοριστικότητα *k*.

(β) Έστω $m_j(q)$ το σύνολο των μονώνυμων ως προς q_1, $q_2,..,q_n$ με βαθμό 2, 3,.....: $m_j(q) = q_1^2$, $q_1q_2,....,\ q_n^2;\ q_1^3,\ q_1^2q_2,....$, δηλαδή $m_1 = q_1^2$, $m_2 = q_1q_2$ κ.ο.κ.

(γ) Υπολογίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων $Q_{ij}(q)$:

$$Q_{ij}(q) = j^{k+1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i} m_j(q)\right)$$

(δ) Μπορούν όλα τα μονώνυμα βαθμού $k+1$ να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός των Q_{ij} με σταθερούς συντελεστές; Αν ναι, τότε η υπόθεση (α) είναι ***ορθή***, αλλιώς ακολουθούμε τα ίδια βήματα για υποτιθέμενη προσδιοριστικότητα $k+1$ κλπ.

5. Σχέση προσδιοριστικότητας – συνδιάστασης

Ισχύει ότι[17] $K(V) \le co\,dim(V) + 2$

6. Υπολογισμός της γενικής ανάπτυξης

Οι κανόνες που διέπουν τον υπολογισμό της γενικής ανάπτυξης μιας συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}$ μητρώο-διάνυσμα των μεταβλητών $x_1, x_2,..,x_n$) αποτελούν συμπλήρωμα των αντίστοιχων κανόνων υπολογισμού της προσδιοριστικότητας, που προαναφέρθηκαν. Ο σχετικός αλγόριθμος συντίθεται από τα επόμενα απλά βήματα:

(α) Υπολογίζεται η προσδιοριστικότητα k της $f(x)$. Αρκεί δε να εργασθεί κανείς με το πολυώνυμο $\bar{f}(x) = j^k f(x)$.

(β) Έστω $h_j(\mathbf{x})$ η αλληλουχία των μονώνυμων ως προς x_1, $x_2, ...x_n$ βαθμού 0, 1, 2,..... της μορφής $h_j(\mathbf{x})$: $0, x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1^2, x_1x_2, ...$

(γ) Υποτίθεται ότι η $F(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ είναι ανάπτυξη r – διάστασης της $\bar{f}(x)$. Ορίζονται τότε τα $T_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} j^{k+1} F(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})\big|_{\alpha=0}$.

(δ) Καταγράφονται όλα τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τη σχέση:

$$S_{ij} = j^k\left\{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} h_j(\mathbf{x})\right\}$$

(ε) Μπορούν όλα τα μονώνυμα βαθμού $\leq k$ να εκφραστούν με τη μορφή $\sum s_{ij} S_{ij}(\mathbf{x}) + \sum t_j T_j(\mathbf{x})$, όπου s_{ij}, t_j πραγματικοί αριθμοί; Αν ναι, τότε η $F(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ είναι μια **πλήρης ανάπτυξη** της $\bar{f}(x)$.

(στ) Είναι το σύνολο των $T_j(\mathbf{x})$ ελάχιστο, δηλαδή είναι τα πολυώνυμα αυτά γραμμικά ανεξάρτητα; Αν ναι, τότε η $F(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ είναι μια **γενική ανάπτυξη** της $\bar{f}(x)$.

Στο σημείο αυτό δέον όπως τονιστεί ότι ***η γενική ανάπτυξη μιας συνάρτησης*** $\bar{f}(x)$ **ΔΕΝ** ***είναι αναγκαστικά ΜΟΝΑΔΙΚΗ.***

7. Υπολογισμός του σπέρματος

Το γεγονός ότι οι αλγόριθμοι υπολογισμού τόσο της προσδιοριστικότητας όσο και του σπέρματος αλληλοσυμπληρώνονται, οδηγεί χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία σε έναν ενδιάμεσο αυτών αλγόριθμο, βάσει του οποίου υπολογίζεται το ***απλούστερο δυνατό σπέρμα***, το σχετιζόμενο με μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ προσδιοριστικότητας k, που αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

(α) Υπολογίζεται αρχικά η προσδιοριστικότητα k της $f(x)$, αρκεί δε να εργασθεί κανείς με το πολυώνυμο $\bar{f}(x) = j^k f(x)$, όπως ανωτέρω.

(β) Έστω V_k ο γραμμικός διανυσματικός χώρος που ορίζεται από όλα τα μονώνυμα ως προς $x_1, x_2, ..., x_n$ βαθμού $\leq k$. Τότε η διάσταση του V_k ισούται με $dim\, V_k = \dfrac{(k+n)!}{k!\,n!}$.

(γ) Έστω V_D ο γραμμικός διανυσματικός υποχώρος του V_k, που ορίζεται από όλα τα πολυώνυμα R_{ij}, όπως αυτά προκύπτουν από τον αλγόριθμο υπολογισμού της προσδιοριστικότητας.

(δ) Έστω V_U ο γραμμικός διανυσματικός υποχώρος του V_k, που ορίζεται από το ελάχιστο σύνολο των πολυωνύμων T_{ij}, όπως αυτά προκύπτουν μέσω του αλγόριθμου υπολογισμού της ανάπτυξης.

(ε) Κατά συνέπεια θα ισχύει ότι ο ακόλουθος γραμμικός διανυσματικός χώρος

$$V_k - (V_D \oplus V_U) = \frac{V_k}{(V_D \oplus V_U)}$$

ορίζεται από τις πρώτες μερικές παραγώγους του σπέρματος της f.

Για παραδείγματα εφαρμογής των τριών αυτών αλγορίθμων μπορεί ο αναγνώστης να αποταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία[10,12,17,20].

8. Κρίσιμα σημεία – Συσχετισμός με τη Θεωρία Διακλαδώσεων[♠]

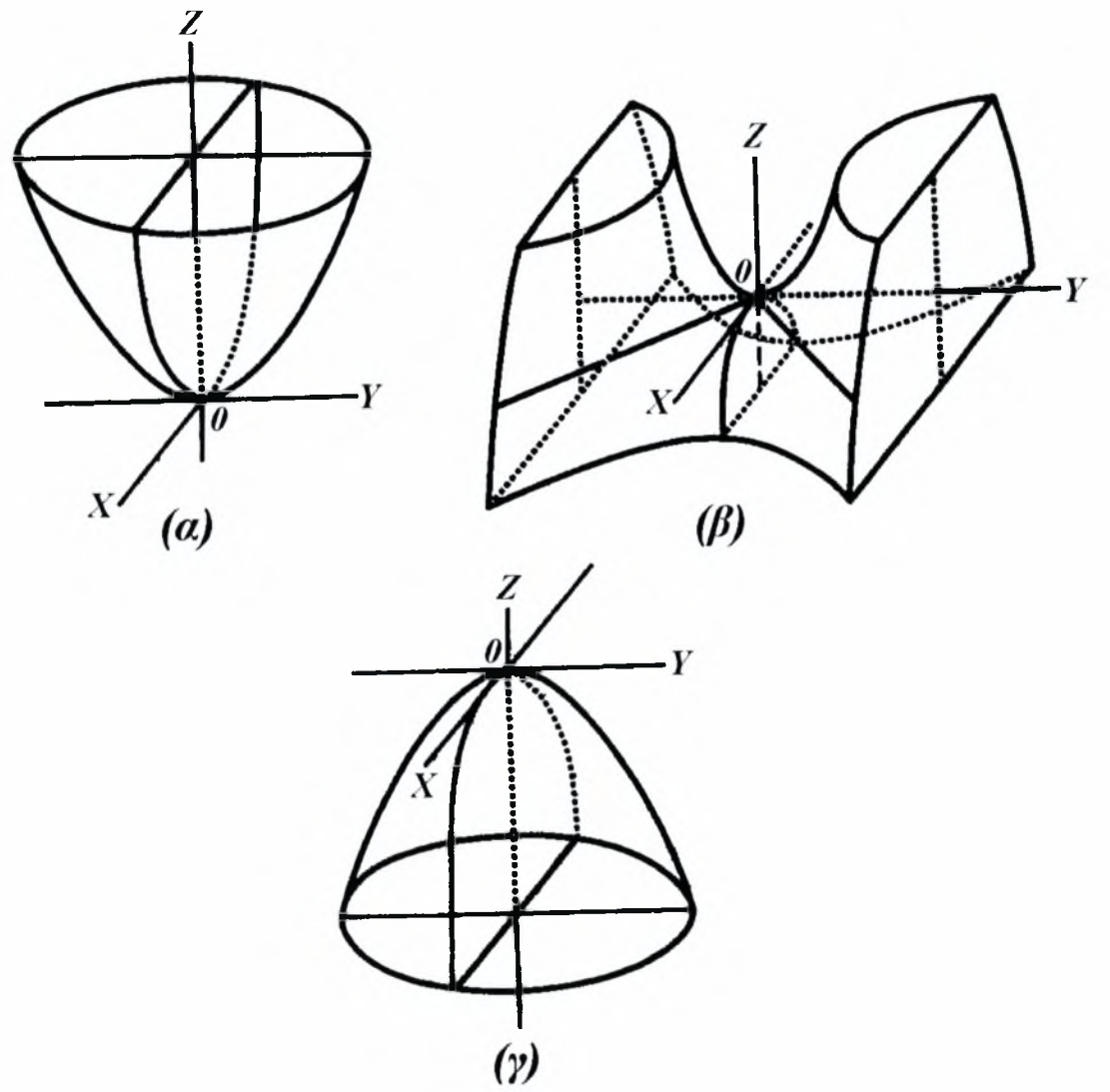
(α) Αν V το συνολικό δυναμικό ενός συστήματος, σύμφωνα με τη Θεωρία των Καταστροφών ένα σημείο στο οποίο μηδενίζονται όλες οι πρώτες παράγωγοι αυτής (ως προς τις ενεργές συντεταγμένες – βαθμούς ελευθερίας του συστήματος) αλλά όχι και η ορίζουσα του μητρώου Hessian (ο μηδενισμός της οποίας υποδηλώνει κρίσιμα σημεία ισορροπίας σύμφωνα με τη Θεωρία Διακλαδώσεων), τότε το σημείο αυτό καλείται ***κρίσιμο σημείο Morse ή μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο*** (non-degenerate critical point).

(β) Ένα κρίσιμο σημείο ισορροπίας (όπου $\delta^2 V = 0$, άρα και η Hessian=0) **ΔΕΝ** είναι κρίσιμο σημείο Morse και καλείται **εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο** (degenerate critical point).

(γ) Συνεπώς, συσχετίζοντας τα μη κρίσιμα σημεία ισορροπίας της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας με τα σημεία Morse, παρατηρούμε ότι στα τελευταία μπορούν να αντιστοιχούν είτε ευσταθή είτε ασταθή σημεία ισορροπίας. Ένα τέτοιο σημείο Morse καλείται **σημείο σέλας Morse** (Morse saddle point), τυπική απεικόνιση των τριών τέτοιων σημείων στο $\Re^2$ φαίνεται στο Σχήμα Α2.1. Άρα τα μη εκφυλισμένα σημεία μπορεί να είναι είτε ευσταθή είτε ασταθή σημεία ισορροπίας, αποδεικνύεται δε[17,23] ότι *στη γειτονιά ενός μη εκφυλισμένου σημείου (Morse) οποιαδήποτε συνάρτηση είναι δομικά ευσταθής*. Στον Πίνακα Π2.1 παρατίθεται η συσχέτιση μεταξύ των κρισίμων και μη σημείων της

♠ Στο Παράρτημα που συνοδεύει την παρούσα Διπλωματική Εργασία παρατίθεται το πρόγραμμα *Mathematica* κρίσιμα σημεία.nb, όπου παρουσιάζονται διάφοροι τύποι απλών και συνθέτων κρισίμων σημείων.

Θεωρίας των Καταστροφών και της Θεωρίας των Διακλαδώσεων-Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας.



Σχήμα Α2.1. Τα τρία σημεία σέλας Morse στο $\Re^2$, εκ των οποίων το (α) έχει τοπικό ελάχιστο, το (β) μορφή σέλας και το (γ) τοπικό μέγιστο.

Ιδιότητα	**Θεωρία Καταστροφών**	**Θεωρία Διακλαδώσεων***
$\nabla V \neq 0$	*Μη κρίσιμο σημείο*	*Σημείο μη ισορροπίας*
$\nabla V = 0, det V_{ij} \neq 0$	*Κρίσιμο σημείο (Morse)*	*Σημείο ισορροπίας*
$\nabla V = 0, det V_{ij} = 0$	*Μη κρίσιμο σημείο Morse, εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο*	*Κρίσιμο σημείο*

Πίνακας Π2.1. Συσχετισμός κρισίμων σημείων της Θεωρίας των Καταστροφών και της Θεωρίας των Διακλαδώσεων (*κατ' ουσία της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας).

9. Ατέλειες και διαταραγμένες διακλαδώσεις

Σε πολλές φυσικές επιστήμες, συμπεριλαμβανόμενης και της Δομικής Μηχανικής (structural engineering) διατηρήθηκε επί μακρόν η υπόθεση ότι οι αστάθειες προκύπτουν από την μεταβολή μιας μοναδικής παραμέτρου ελέγχου, ιδία του φορτίου λ. Δευτερεύουσες παράμετροι ελέγχου, και μερικές φορές ούτε υποχρεωτικά κάποιες ατέλειες, εισάγονται εκ των υστέρων, αφού η βασική συμπεριφορά λόγω μεταβολής του λ έχει αναλυθεί.

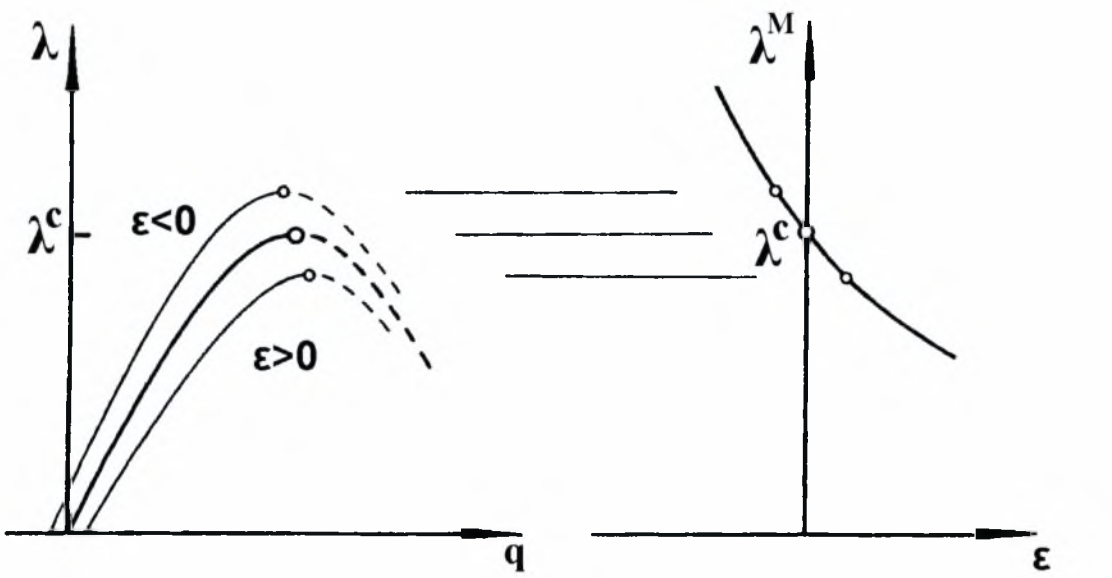
Μια μοναδική παράμετρος ελέγχου οδηγεί φυσικά στην εξέταση των ***δρόμων ισορροπίας*** (equilibrium paths) στο χώρο $\lambda - q_i$ (όπου q_i οι βαθμοί ελευθερίας – ενεργές συντεταγμένες του εξεταζόμενου δομικού συστήματος), και η εισαγωγή δευτερευουσών παραμέτρων «ατελειών», οι οποίες συνήθως έχουν μικρές τιμές, θεωρούνται ως διαταραχές του αρχικού συνόλου των δρόμων ισορροπίας. Η συγκεκριμένη θεώρηση ανήκει στη λεγόμενη *διακλαδική οπτική γωνία*. Πλην όμως, έχει από καιρού αναγνωριστεί πως ***όλες οι παράμετροι ελέγχου*** **μπορούν να θεωρηθούν ως** ***ισοδύναμες***, γεγονός που οδήγησε στην μελέτη των ***επιφανειών ισορροπίας*** στο ***πλήρη χώρο*** $\lambda - q_i$[7,15]. Ιδιαίτερα δε μετά την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Καταστροφών κατέστη η μελέτη-ανάλυση των επιφανειών ισορροπίας πολλή ελκυστική παγκοσμίως. Προς τούτο, η ενοποιημένη προσέγγιση (που αναφέρθηκε ήδη στις αρχές του παρόντος Κεφαλαίου), σύμφωνα με την οποία ***όλες οι παράμετροι ελέγχου θεωρούνται ότι συμμετέχουν με την ίδια σπουδαιότητα στη συμπεριφορά ενός συστήματος***, είναι με απλά λόγια η *οπτική γωνία της Θεωρίας των Καταστροφών*.

Στις επόμενες υποπαραγράφους παρατίθεται μια συνοπτική, πλην όμως κατατοπιστική περιγραφή της ***σχέσης*** μεταξύ της ***ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες*** (imperfection sensitivity) και της (τοπολογικής) ***δομικής ευστάθειας*** ορισμένων ***μορφών διακλαδώσεων***. Για περαιτέρω εμβάθυνση επί θεμάτων σχετιζόμενων με συμμετρίες, βελτιστοποίηση και σχεδιασμό πραγματικών κατασκευών μπορεί κανείς να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία[9,10,18,13,15], στο δε Κεφάλαιο Β΄ της παρούσας, το οποίο πραγματεύεται την ανάλυση ενός μη γραμμικού προσομοιώματος λυγισμού μιας πλάκας θλιβόμενης και στις δύο διευθύνσεις, θα υπάρξει αναλυτική αναφορά και συσχέτιση της διακλαδικής συμπεριφοράς με τη

Θεωρία των Καταστροφών και ιδιαίτερα με ανωμαλίες υψηλότερης τάξης σε δύο γενικευμένες συντεταγμένες (higher order two-mode singularities).

Θεωρούμε – σύμφωνα με τα παραπάνω – ένα σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση δυναμικού $V = V(q, \lambda, \varepsilon)$, όπου q μια μοναδική ενεργός συντεταγμένη (πρόκειται περί μονοβάθμιου συντηρητικού στην ουσία συστήματος) και λ, ε παράμετροι ελέγχου. Υπό τη διακλαδική οπτική γωνία το λ αντιπροσωπεύει το φορτίο και το ε μια παράμετρο ατέλειας, που διαταράσσει το σύστημα. Για παράδειγμα το ε θα μπορούσε να είναι το εύρος μιας αρχικής παραμόρφωσης ή το μέγεθος μιας αρχικής προέντασης. Έτσι, αν $\varepsilon = 0$, η V περιγράφει τη συμπεριφορά κάποιου ***τέλειου συστήματος***, και μεταβάλλοντας το ε παράγεται μια οικογένεια σχετικών ***ατελών συστημάτων***.

Εξετάζεται στη συνέχεια τη περίπτωση που το τέλειο σύστημα αλλά και η οικογένεια των ατελών παρουσιάζει ***οριακό σημείο***, με την όλη εικόνα των δρόμων ισορροπίας και του διαγράμματος φορτίου-ατέλειας να φαίνονται στο Σχήμα Α2.2.

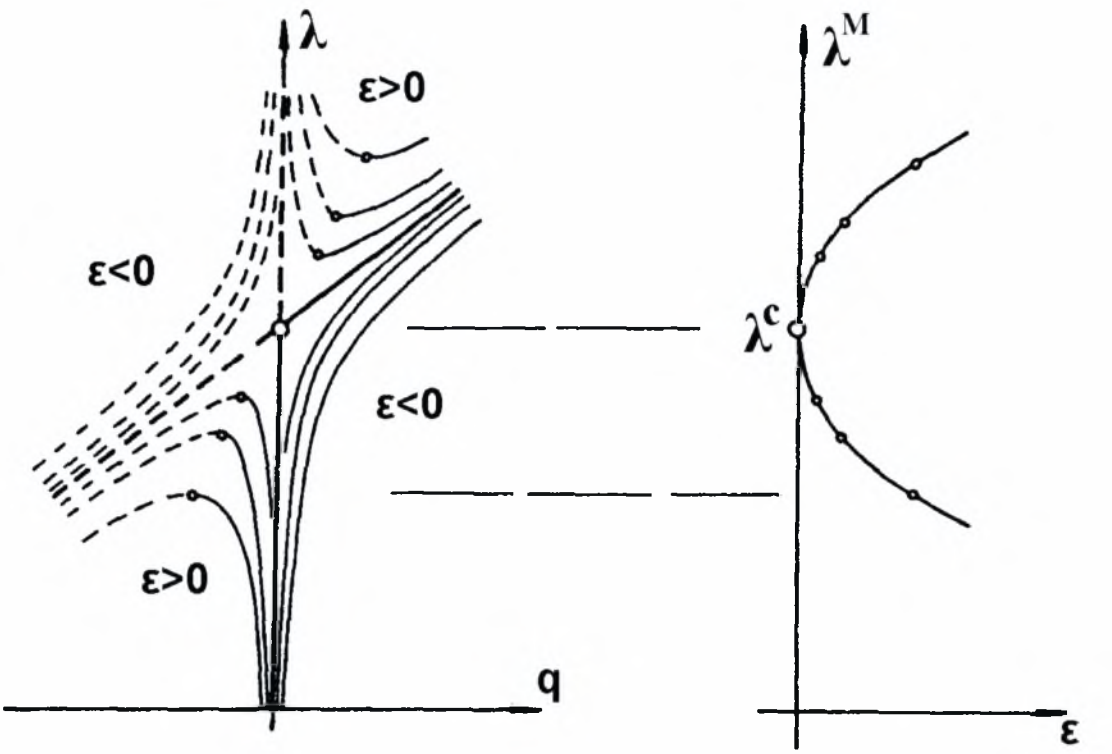


Σχήμα Α2.2. Η επιρροή των αρχικών ατελειών (διαταραχών) στους δρόμους ισορροπίας με οριακό σημείο (πτύχωση). Το δεξί διάγραμμα δείχνει την ήπια, ομαλή ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες.

Παρατηρούμε ότι η παρουσία των ατελειών διαφοροποιεί πολύ λίγο τη συμπεριφορά του συστήματος, καθόσον και το τέλειο αλλά και τα ατελή συστήματα χάνουν την ευστάθεια τους μέσω οριακού σημείο, η δε τοπική τοπολογία παραμένει αναλλοίωτη σε σχέση με το ε. Στο δεξί μέρος του Σχήματος Α2.2 φαίνεται η ευαισθησία σε

αρχικές ατέλειες (μεταβολή των κρισίμων σημείων λόγω της ατέλειας), και ο γεωμετρικός τόπος αστοχίας (failure locus) στο χώρο των παραμέτρων ελέγχου.

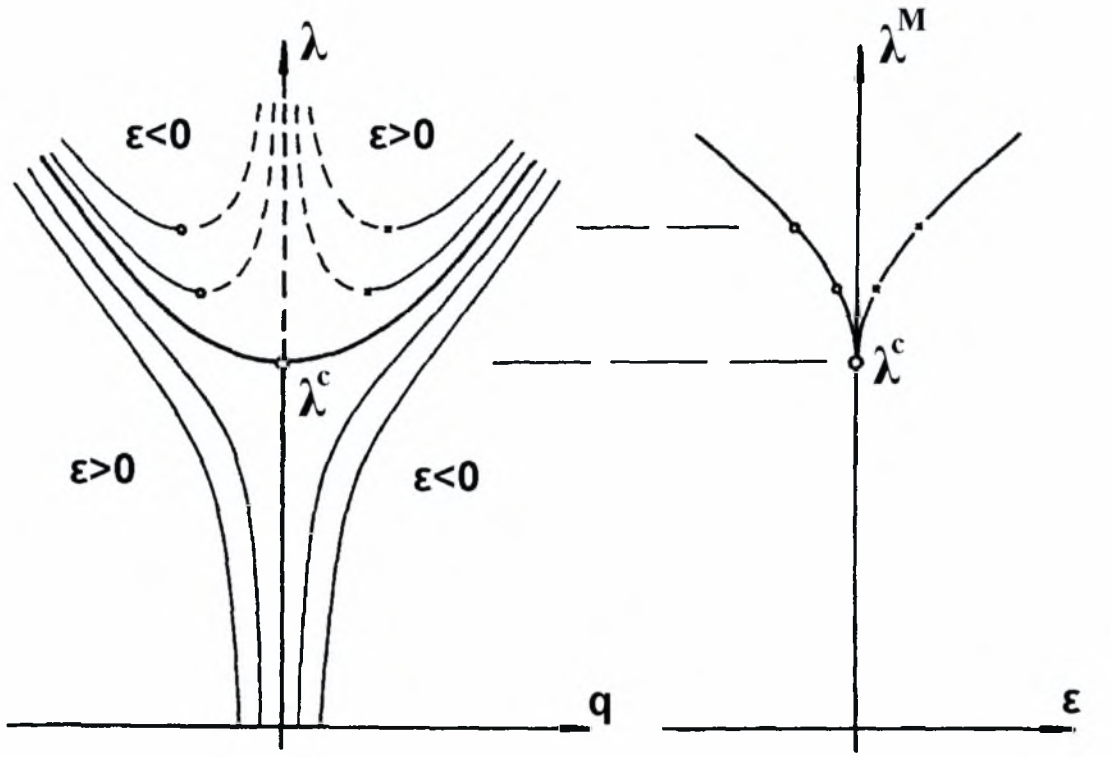
Τούτο δεν συμβαίνει όμως στη περίπτωση του ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης, που απεικονίζεται στο Σχήμα Α2.3. Εδώ η όλη εικόνα αλλάζει δραστικά παρουσία της ατέλειας, και μάλιστα με δύο διαφορετικούς τρόπους.



Σχήμα Α2.3. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης. Αριστερά φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας και δεξιά η ισχυρή ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες.

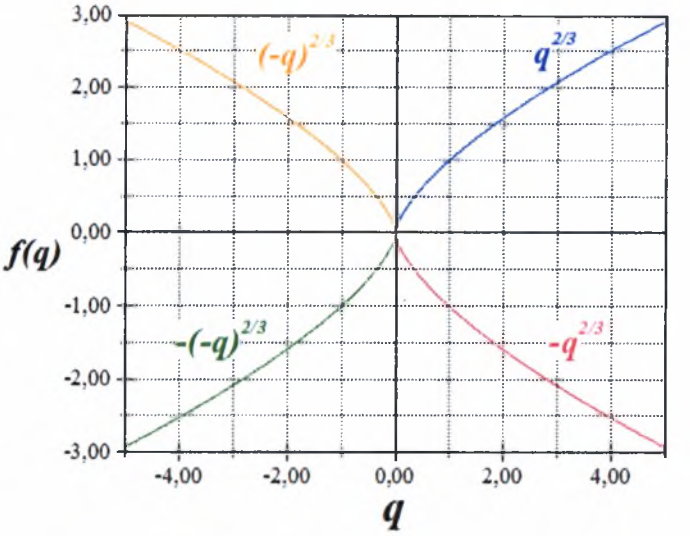
Αναλυτικότερα, για θετικές τιμές του ε, οι τεμνόμενοι δρόμοι του τέλειου συστήματος μεταπίπτουν σε διαχωρισμένους δρόμους, οι οποίοι παρουσιάζουν οριακά σημεία, ενώ για αρνητικά ε οι δρόμοι επίσης διαχωρίζονται, χωρίς όμως να διαθέτουν κρίσιμα σημεία. Η καμπύλη της ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες είναι τοπικά παραβολικής μορφής και έχει άπειρη κλίση για ε=0. Έτσι, η φέρουσα ικανότητα της κατασκευής επηρεάζεται σημαντικά από την παρουσία μιας θετικής αρχικής ατέλειας, ενώ μια αρνητική τοιαύτη επιτρέπει στο σύστημα να "δραπετεύσει" πλήρως προς την ευστάθεια ή την αστάθεια. Συνεπώς, η παράμετρος της ατέλειας είναι πολύ περισσότερο σημαντική στο σύστημα αυτό από ότι στο προηγούμενο, ενώ στο σημείο αυτό αρχίζει να εμφανίζεται με περισσότερη σαφήνεια η έννοια της δομικής ευστάθειας.

Αντίστοιχα, για το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης η τοπολογική εικόνα των τεμνόμενων δρόμων ισορροπίας του τέλειου συστήματος καταστρέφεται από μια ατέλεια ε, η οποία διασπά την συμμετρία (symmetry-breaking), σύμφωνα με το αριστερό διάγραμμα του Σχήματος Α2.4.



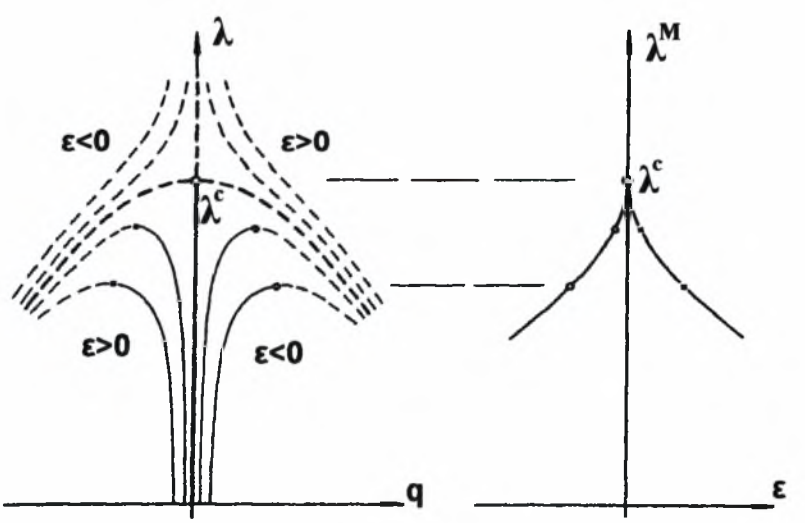
Σχήμα Α2.4. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης, με τη μορφή των δρόμων ισορροπίας και το όριο ευστάθειας λόγω της παρουσίας συμπληρωματικών δρόμων.

Εδώ παρατηρούμε ότι για όλα τα ατελή συστήματα, οι *φυσικοί* δρόμοι ισορροπίας είναι όλοι μονοτονικά αύξοντες και ευσταθείς, οπότε με την φυσιολογικά αποδεκτή έννοια το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης δεν επιδεικνύει ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες. Πλην όμως εμφανίζονται οριακά σημεία στους *συμπληρωματικούς* δρόμους ισορροπίας, με αποτέλεσμα το όριο ευστάθειας (stability boundary) της δεξιάς πλευράς του παραπάνω Σχήματος. Τοπικά πρόκειται περί αιχμής του νόμου δύναμης εις την $^{2/3}$ (two-third power law cusp), για το λόγο σε αυτό το φαινόμενο τούτο καλείται ***καταστροφή τύπου αιχμής***, με την οποία ασχολούνται λεπτομερειακά επόμενες παράγραφοι του παρόντος Κεφαλαίου. Τυπικές καμπύλες συναρτήσεων που ακολουθούν τον ως άνω νόμο απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα Α.2.5, όπου καθίσταται εμφανής η μορφή της αιχμής.



Σχήμα Α2.5. Τυπικές καμπύλες συναρτήσεων, που ακολουθούν το νόμο δύναμης εις την 2/3.

Τέλος, θεωρούμε το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης που φαίνεται στο Σχήμα Α2.6. Πρόκειται περί της αντίθετης κατάστασης, με ευσταθείς δρόμους να αντικαθιστούν ασταθείς (και αντίστροφα). Τα οριακά σημεία εμφανίζονται στους *φυσικούς* δρόμους ισορροπίας των ατελών συστημάτων, και η αιχμή νόμου δύναμης εις την $^{2/3}$ εμφανίζεται και εδώ (δεξί μέρος του Σχήματος) ανεστραμμένη, με άπειρη κλίση για ε=0, γεγονός που υποδηλώνει σημαντική διαφοροποίηση της φέρουσας ικανότητας, τόσο για θετικά όσο και για αρνητικά ε αυτή τη φορά.



Σχήμα Α2.6. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης: δρόμοι ισορροπίας και ισχυρή ευαισθησία τύπου αιχμής.

Α.2.1. Κατάταξη των Καταστροφών

(α) Γενικά

Ο Thom[6] κατέταξε όλες εκείνες τις στοιχειώδεις καταστροφές για συστήματα μέχρι πέντε παραμέτρων ελέγχου, η ονοματολογία των οποίων, η μορφή του σπέρματος και της αντίστοιχης διαταραχής παρουσιάζονται στον διπλανό Πίνακα Πάντως, για ***συντηρητικά συστήματα*** μέχρι ***τεσσάρων παραμέτρων ελέγχου*** και το ***<u>πολύ</u> δύο ενεργών συντεταγμένων***, υπάρχουν ***μόνον*** επτά δυνατές συναρτήσεις δυναμικού για κάθε τύπο ανωμαλίας (καταστροφής) με τον *μικρότερο δυνατό αριθμό παραμέτρων ελέγχου*, έτσι ώστε κάθε συνάρτηση δυναμικού να είναι μια ***γενική ανάπτυξη*** **(δομικά ευσταθής)**. Ο Πίνακας Π2.2. συνδέει τις εν λόγω τυπικές καταστροφές με τα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία ή επιφάνειες κρισίμων σημείων της *Θεωρίας των Διακλαδώσεων*.

Όνομα	k^*	Σπέρμα	Διαταραχή
A_2	1	x^3	a_1x
$A_{\pm3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
A_4	3	x^5	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
A_6	5	x^7	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
D_{-4}	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_{+4}	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_5	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
D_{-6}	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
D_{+6}	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

* *αριθμός παραμέτρων ελέγχου*

Πίνακας Π2.2. Οι επτά στοιχειώδεις καταστροφές

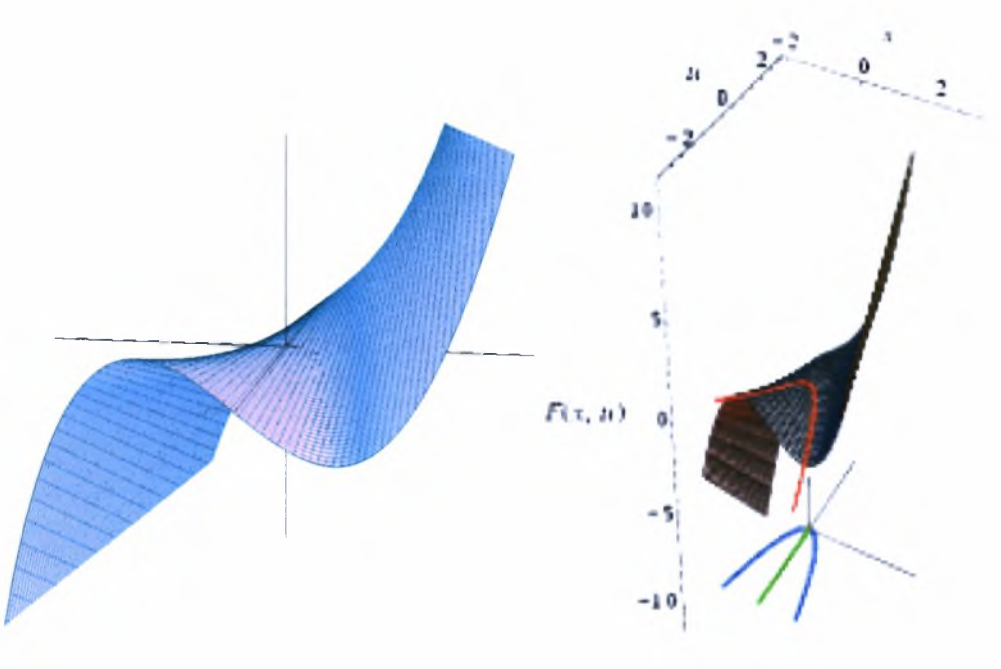
Αριθμός ενεργών συντεταγμένων	**Τύπος καταστροφής**	**Συνάρτηση Δυναμικού**	**Κρίσιμο σημείο ή επιφάνεια κρισίμων σημείων**
m=1	**Πτύχωσης** (*διπλώματος*), **fold**	$x^3 + ux$	***Οριακό σημείο, ασύμμετρο ΣΔ***
	Αιχμής, cusp	$x^4 + ux^2 + vx$	***Συμμετρικό ΣΔ (ασταθές-ευσταθές, σημείο αποκοπής[1])***
	Χελιδονοουράς, swallowtail	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	
	Πεταλούδας, butterfly	$x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$	
m=2	**Υπερβολικός λώρος, hyperbolic umbilic**	$x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$	***Μονοκλινές[2] ΣΔ, Ομοκλινές[3] ΣΔ, Διακλάδωση από οριακό σημείο***
	Ελλειπτικός λώρος, elliptic umbilic	$x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$	***Αντικλινές[4] ΣΔ***
	Παραβολικός λώρος, parabolic umbilic	$x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$	***Παρακλινές[5] ΣΔ***

ΣΔ = σημείο διακλάδωσης
[1] = cut – off point, [2] = monoclinical, [3] = homeoclinical, [4] = anticlinical, [5] = paraclinical

(β) Στοιχειώδεις Καταστροφές μιας ενεργής συντεταγμένης

1. Καταστροφή τύπου πτύχωσης (fold)

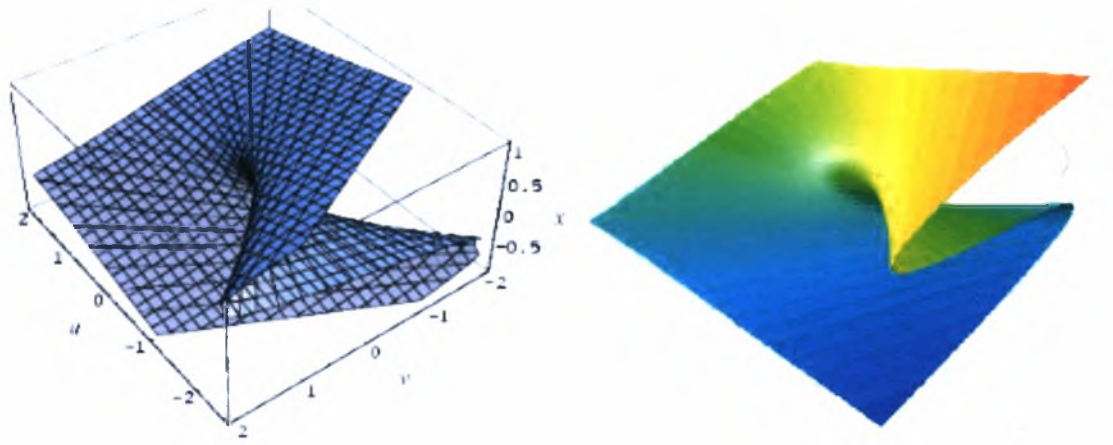
Η συνάρτηση δυναμικού αυτού του (απλούστερου όλων) τύπου καταστροφής είναι η γενική ανάπτυξη του σπέρματος $f(x) = x^3$. Φωτορεαλιστική απεικόνιση της σχετικής επιφάνειας ισορροπίας παρατίθεται Σχήμα Α2.7 που ακολουθεί. Ο συγκεκριμένος τύπος ανωμαλίας δεν πρόκειται να μας απασχολήσει στη συνέχεια, ενώ περαιτέρω εκτεταμένες επ' αυτού πληροφορίες υπάρχουν στη σχετική βιβλιογραφία[8-10,13,15,18,23,26].



Σχήμα Α2.7. Επιφάνεια της ανωμαλίας (καταστροφής) τύπου πτύχωσης.

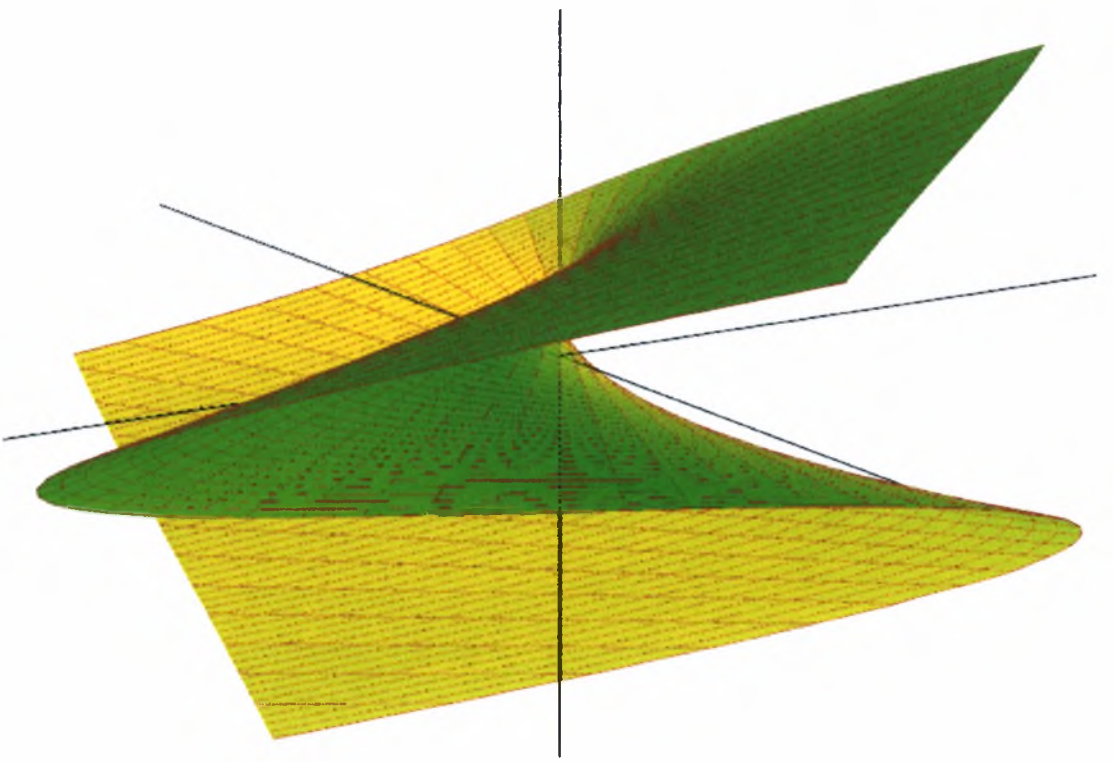
2. Καταστροφή τύπου αιχμής (cusp)

Η συνάρτηση δυναμικού της καταστροφής τύπου αιχμής, που θα μας απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό στη συνέχεια, αποτελεί γενική ανάπτυξη του σπέρματος $f(x)=x^4$, και καθόσον πρόκειται για συνάρτηση τριών μεταβλητών, η απεικόνιση της σχετίζεται με σταθερές τιμές της πρώτης παραγώγου της ως προς τη μοναδική ενεργή συντεταγμένη, δηλαδή με συνάρτηση της μορφής $g(x,u)=3x^3+2ux+v=constant$, τυπικές μορφές της οποίας φαίνονται στα ακόλουθα Σχήματα Α2.8 και Α2.9, προϊόντα διαφόρων προγραμμάτων γραφικής αναπαράστασης επιφανειών.



(α) (β)

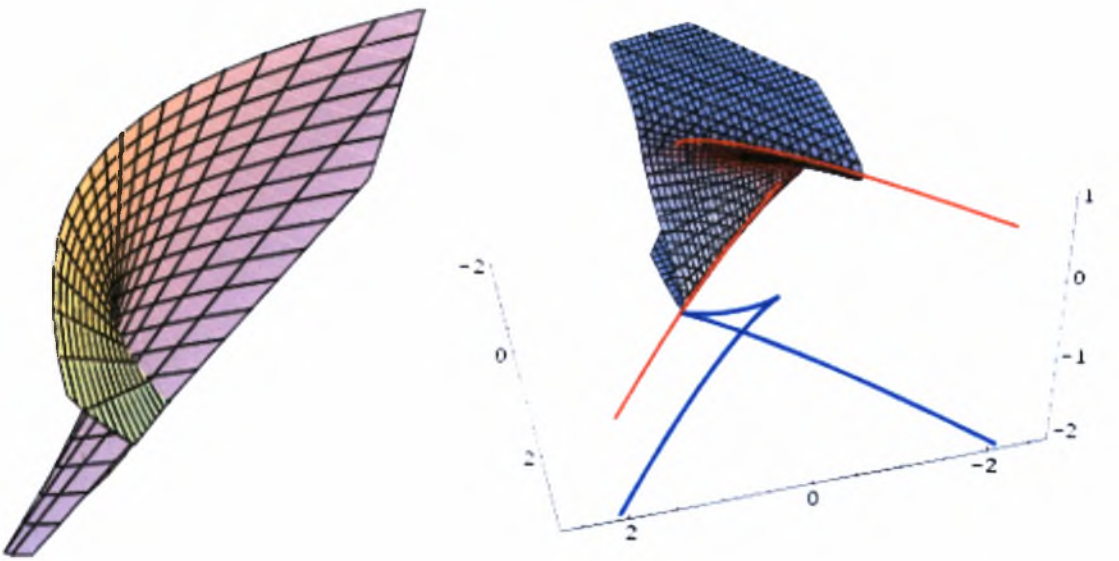
Σχήμα Α2.8. Επιφάνεια κρισίμων σημείων της καταστροφής τύπου αιχμής (α) από Mathematica και (β) από DPGraph



Σχήμα Α2.9. Επιφάνεια κρισίμων σημείων της καταστροφής τύπου αιχμής από 3D Grapher

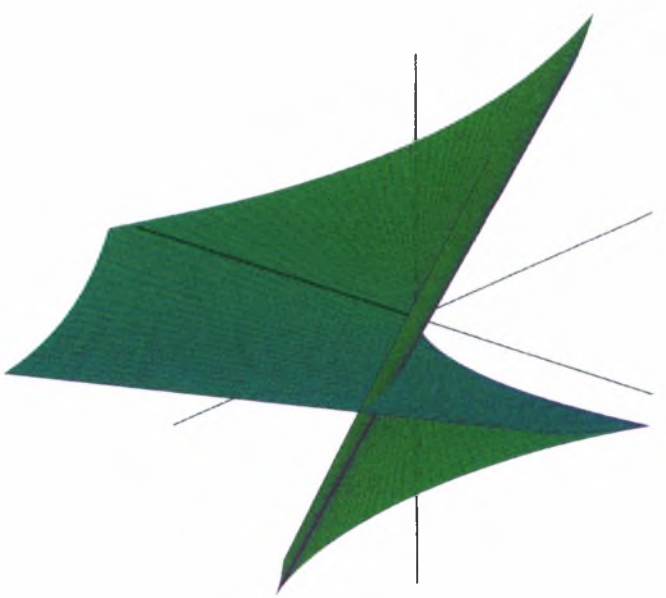
3. Καταστροφή τύπου χελιδονοουράς (swallowtail)

Η καταστροφή τύπου χελινοδονοουράς αποτελεί το γενικό ανάπτυγμα της ανωμαλίας $f(x) = x^5$, με συνδιάσταση 3, και απεικονίζεται γραφικά στο ανωτέρω Σχήμα Α2.10 .

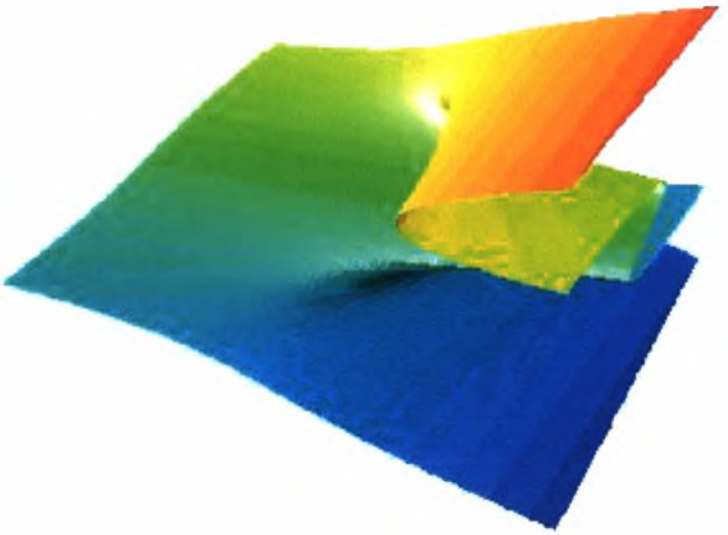


Σχήμα Α2.10. Τυπική τομή της υπερεπιφάνειας κρίσιμων σημείων της ανωμαλίας τύπου χελιδονοουράς

Η συνάρτηση $x = uv^2 + 3v^4$, $y = -2uv - 4v^3$, $z = u$ παρουσιάζει τέτοιο τύπο καταστροφής, ο οποίος φαίνεται στα τρισδιάστατα γραφήματα των Σχημάτων Α2.11 και Α2.12 που έπονται.



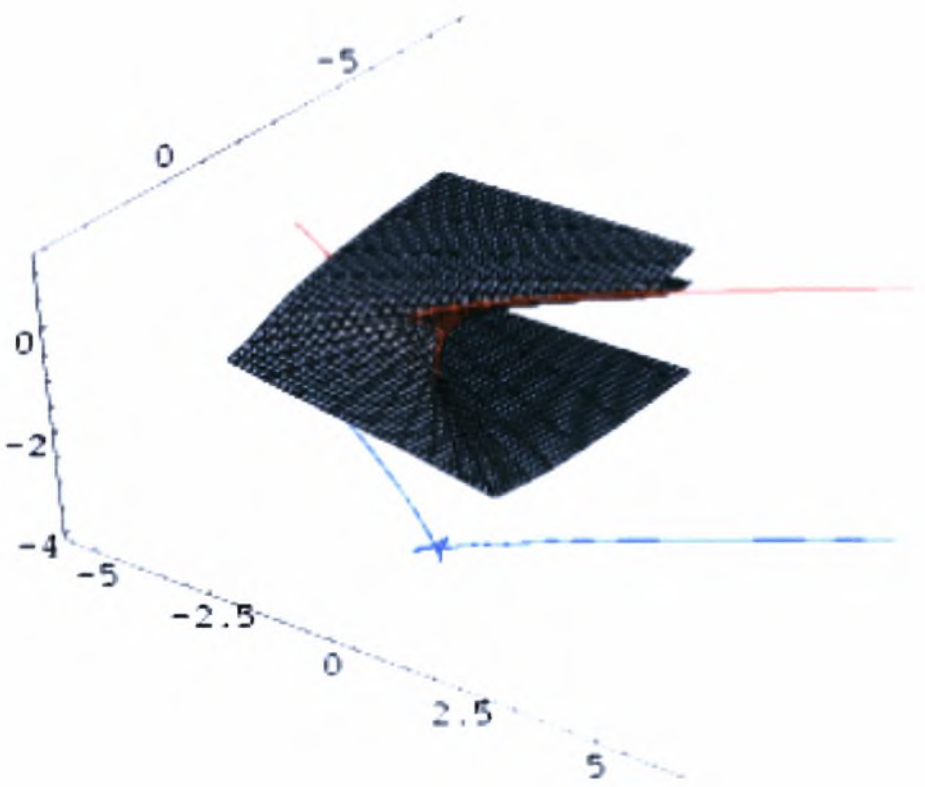
Σχήμα Α2.11. Ανωμαλία τύπου χελιδονοουράς



Σχήμα Α2.12. Τυπική τομή της υπερεπιφάνειας της εν λόγω ανωμαλίας

4. Καταστροφή τύπου πεταλούδας (butterfly)

Πρόκειται για γενική ανάπτυξη του σπέρματος $f(x) = x^6$, συνδιάστασης 4, με τυπική τομή της σχετικής υπερεπιφάνειας κρισίμων σημείων να απεικονίζεται παρακάτω (Σχήμα Α2.13).

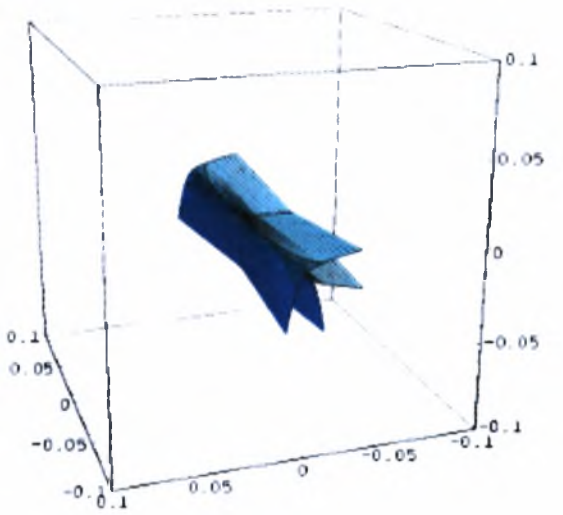


Σχήμα Α2.13. Επιφάνεια ισορροπίας καταστροφής τύπου πεταλούδας

(γ) Στοιχειώδεις Καταστροφές δύο ενεργών συντεταγμένων

1. Καταστροφή τύπου υπερβολικού λώρου (hyperbolic umbilic)

Ο υπερβολικός λώρος αποτελεί τη γενική ανάπτυξη του σπέρματος $f(x,y) = x^3 + y^3$, είναι συνδιάστασης 3, καθόσον δε υπάρχει ουσιαστική αδυναμία άμεσης απεικόνισης της υπερεπιφάνειας των κρίσιμων σημείων με τα οποία σχετίζεται, καταφεύγει κανείς σε τρισδιάστατες απεικονίσεις τομών αυτής, όπως αυτή που φαίνεται στο Σχήμα Α2.14.

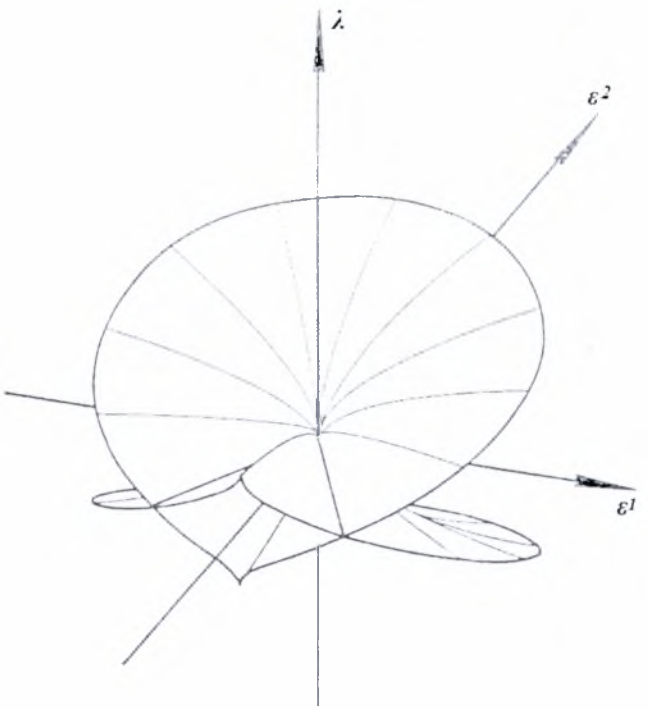


Σχήμα Α2.14. Τρισδιάστατη απεικόνιση μιας τομής της υπερεπιφάνειας κρίσιμων σημείων της καταστροφής τύπου υπερβολικού λώρου.

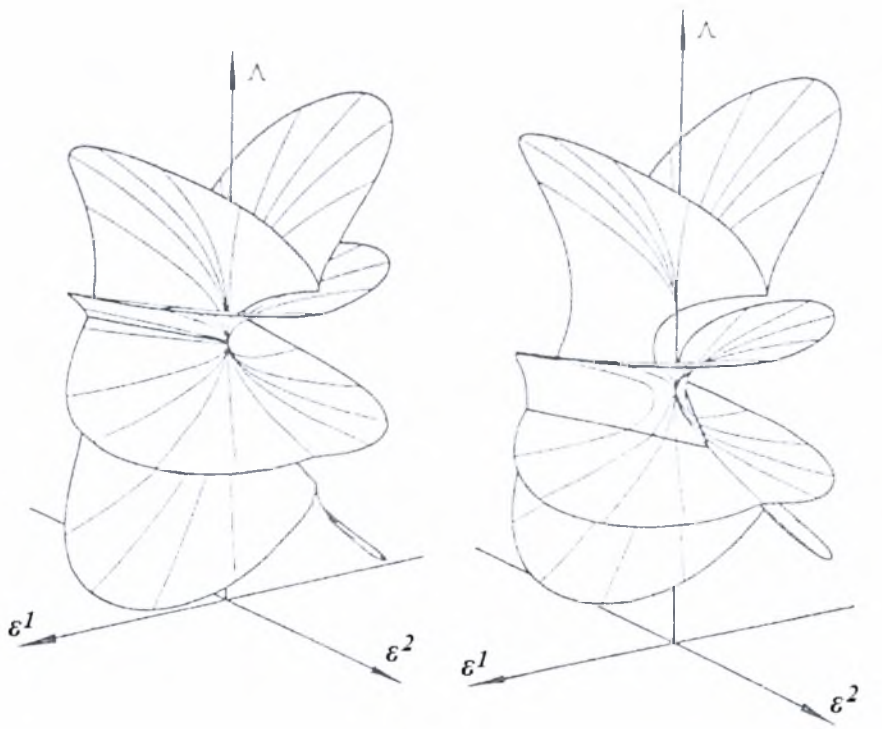
Η εν λόγω μορφή καταστροφής σχετίζεται με τρία είδη (το μονοκλινές, το ομοκλινές και το λεγόμενο διακλαδικό σημείο κορυφής λόφου – *hilltop branching point*) ιδιαζόντων σημείων διακλάδωσης, για τα οποία η επιφάνεια πλήρους ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες[1] (*full imperfection-sensitivity surface*), παρουσιάζει τη μοναδική τοπολογική εικόνα της καταστροφής αυτής τόσο σε κατάσταση πλήρους ταύτισης μορφών (*at complete coincidence*), όσο και σε κατάσταση διαχωρισμού κρίσιμων σημείων (*separation of critical points*). Τούτο φαίνεται γραφικά στα τρισδιάστατα (στον χώρο ελέγχου φορτίου – ατελειών) Σχήματα Α2.15 – Α2.18 που ακολουθούν, ενώ χαρακτηριστικές μορφές των τέλειων και ατελών δρόμων ισορροπίας, οι οποίοι σχετίζονται με τα προαναφερθέντα τρία είδη διακλαδικών σημείων, παρατίθενται στα Σχήματα Α2.19 – Α2.22.

---

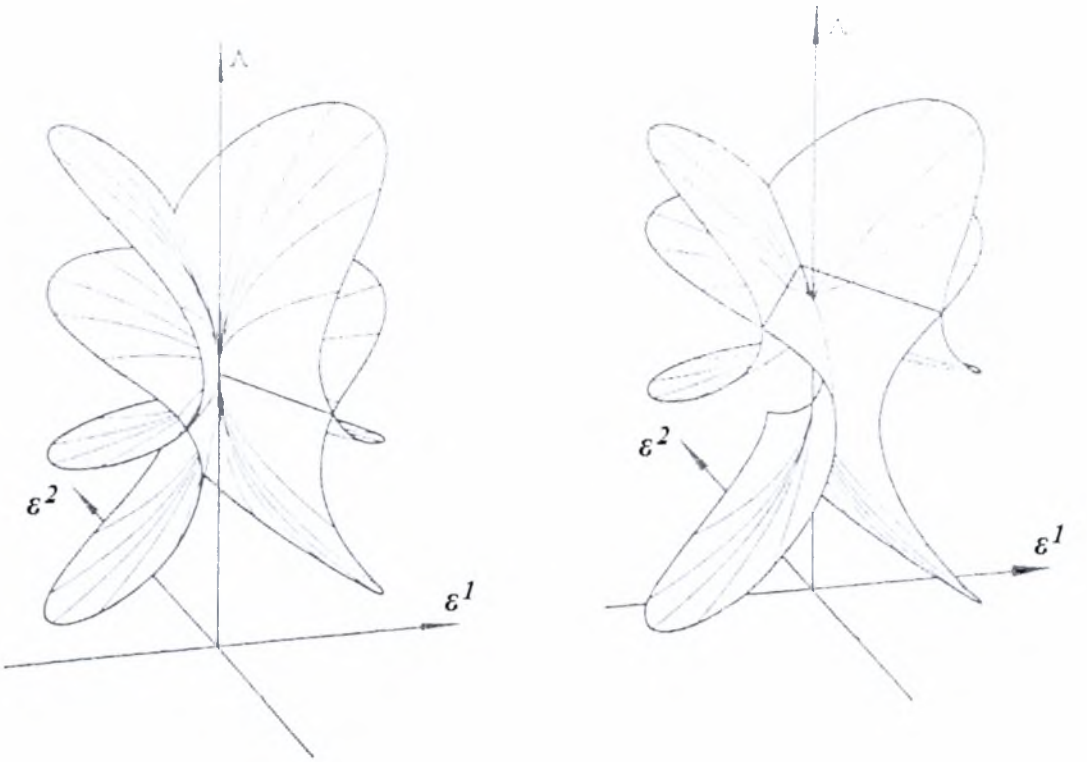
[1] *Στο σημείο αυτό δέον όπως τονιστεί ότι η ανάλυση της πλήρους ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες περιλαμβάνει τον προσδιορισμό όλων των κρίσιμων καταστάσεων περί το σημείο διακλάδωσης C σε παραμετρική μορφή, καθώς και τον υπολογισμό του γεωμετρικού τόπου αυτών, πάνω σε μια γενική αχτίδα ατελειών (general imperfection ray), η οποία ξεκινά από το C.*



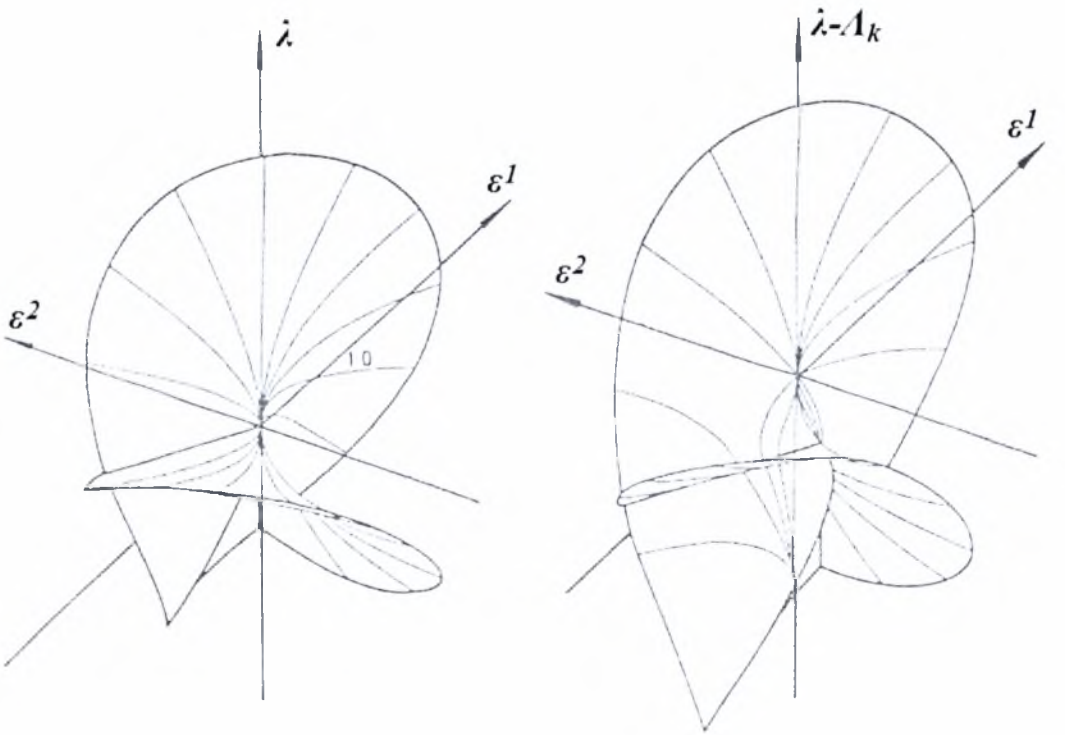
Σχήμα Α2.15. Πλήρης ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες για το μονοκλινές σημείο διακλάδωσης σε πλήρη ταύτιση μορφών, δίδοντας τη πλήρη ανάπτυξη της καταστροφής τύπου υπερβολικού λώρου (εδώ λ = Λ – Λc).



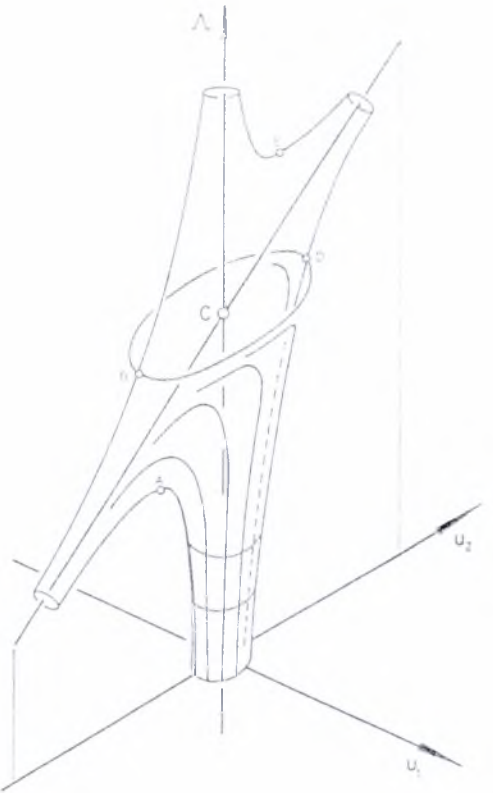
Σχήμα Α2.16. Πλήρης ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες του ομοκλινούς σημείου διακλάδωσης τόσο για πλήρη ταύτιση μορφών όσο και για διαχωρισμό κρίσιμων σημείων, με αμφότερες τις περιπτώσεις να επιδεικνύουν τη μοναδική τοπολογία καταστροφής υπερβολικού λώρου.



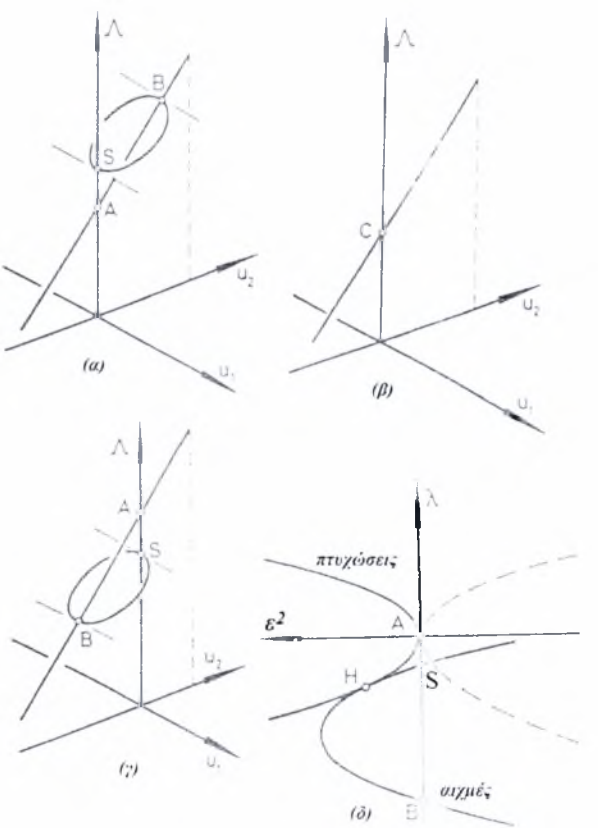
Σχήμα Α2.17. Οπίσθια όψη του προηγουμένου σχήματος.



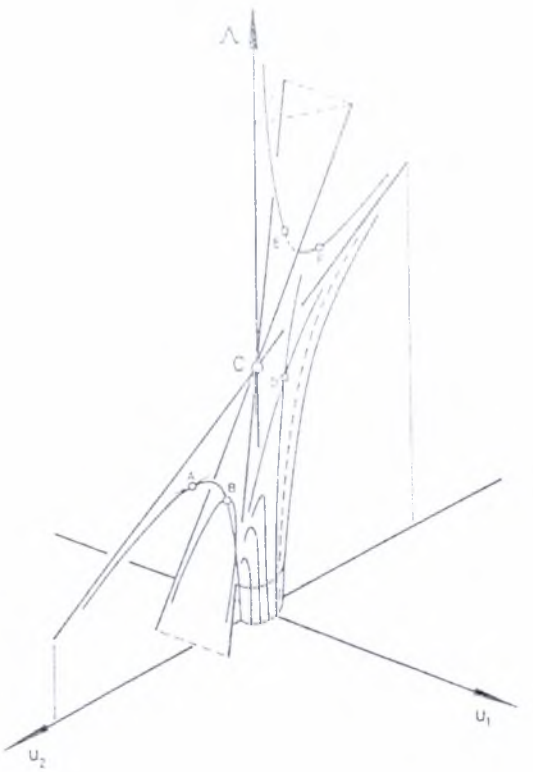
Σχήμα Α2.18. Οπίσθια όψη του σχήματος Α2.16 και για τη περίπτωση διαχωρισμού κρίσιμων σημείων.



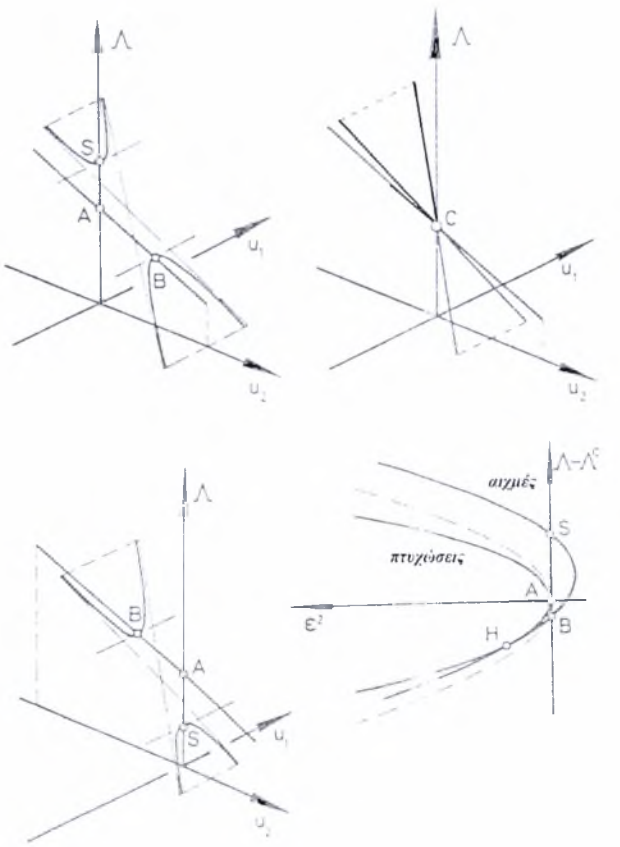
Σχήμα Α2.19 . Τέλειοι και ατελείς δρόμοι ισορροπίας για το μονοκλινές σημείο διακλάδωσης.



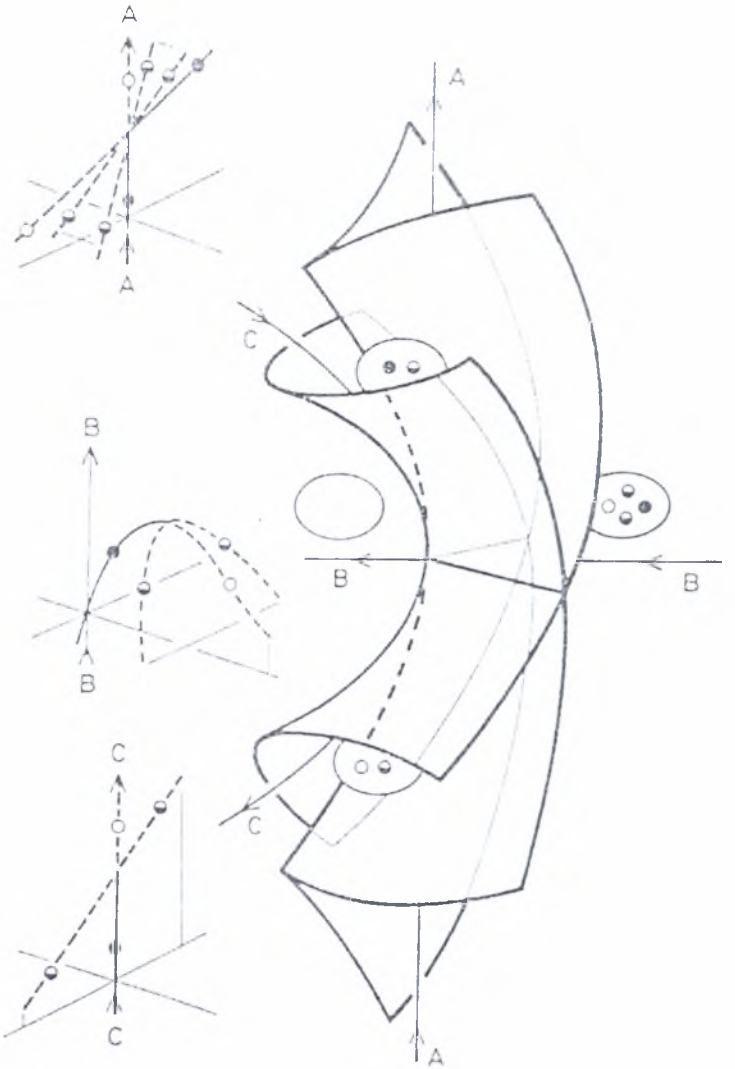
Σχήμα Α2.20. Μονοκλινές σημείο διακλάδωσης : (α) – (γ) μορφές δρόμων ισορροπίας τέλειου συστήματος, (δ) γεωμετρικός τόπος αστοχίας (ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες).



Σχήμα Α2.21. Τέλειοι και ατελείς δρόμοι ισορροπίας για το ομοκλινές σημείο διακλάδωσης.



Σχήμα Α2.22. Ομοκλινές σημείο διακλάδωσης : (α) – (γ) μορφές δρόμων ισορροπίας τέλειου συστήματος, (δ) γεωμετρικός τόπος αστοχίας (ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες).

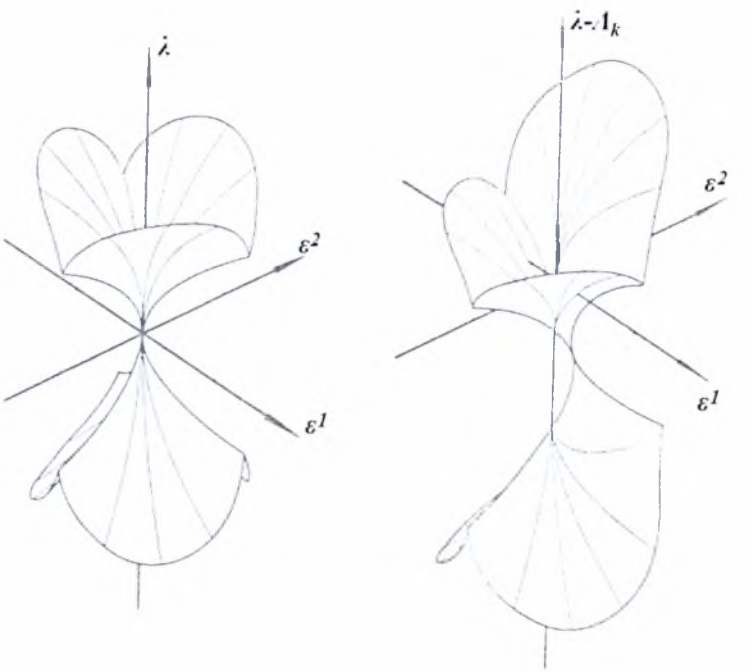


Σχήμα Α2.23. Δρόμοι δια μέσω της καταστροφής υπερβολικού λώρου που καταδεικνύουν το μονοκλινές, το ομοκλινές και το σημείο διακλάδωσης τύπου κορυφής λόφου

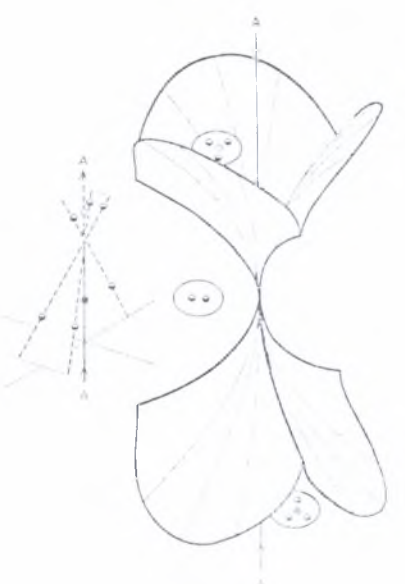
Παρατηρώντας στη συνέχεια το Σχήμα Α2.23, (όπου οι πλήρεις κύκλοι αντιστοιχούν σε ελάχιστα του δυναμικού - ευσταθείς καταστάσεις, οι ημι-πλήρεις σε σημεία σέλας - ασταθή με ένα βαθμό αστάθειας και οι άδειοι κύκλοι σε μέγιστα του δυναμικού - ασταθή με δύο βαθμούς αστάθειας), διαπιστώνουμε πως ο χώρος παραμέτρων ελέγχου χωρίζεται από τις επιφάνειες κρίσιμων σημείων σε τέσσερις περιοχές, με σημειωμένες τις λύσεις ισορροπίας, και πως μια εξ αυτών δεν διαθέτει καθόλου τέτοιες λύσεις. Στη περίπτωση αυτή υπάρχουν τρεις πιθανότητες – οδοί προσέγγισης των αντίστοιχων διακλαδικών σημείων. Η πρώτη (Α) δίδει το ομοκλινές σημείο διακλάδωσης (πάνω αριστερά), η δεύτερη (C) το μονοκλινές σημείο διακλάδωσης (κάτω αριστερά) και η τρίτη (Β) διακλάδωση από οριακό σημείο (διακλαδικό σημείο κορυφής λόφου μέσο αριστερά).

2. Καταστροφή τύπου ελλειπτικού λώρου (elliptic umbilic)

Η καταστροφή του εν λόγω τύπου, συνδιάστασης 3, σχετίζεται με το λεγόμενο αντικλινές σημείο διακλάδωσης, η δε επιφάνεια κρισίμων σημείων στο χώρο παραμέτρων ελέγχου έχει τη μορφή του Σχήματος Α2.24 και του Σχήματος Α2.25 δεξιά.

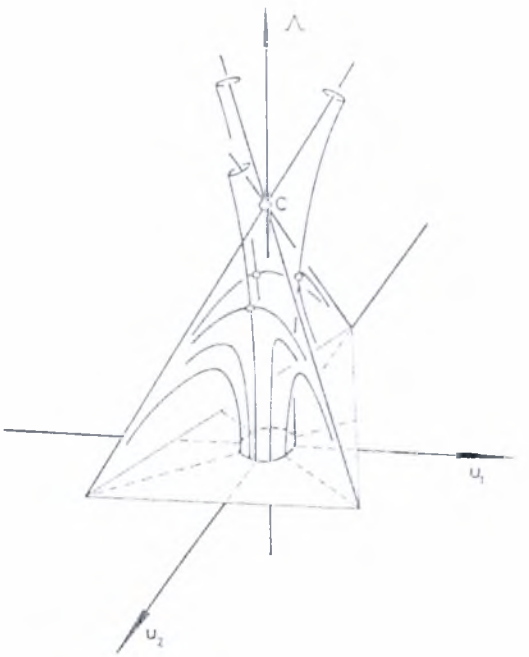


Σχήμα Α2.24. Πλήρης ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες του αντικλινούς σημείου διακλάδωσης τόσο για πλήρη ταύτιση μορφών όσο και για διαχωρισμό κρίσιμων σημείων, με αμφότερες τις περιπτώσεις να επιδεικνύουν τη μοναδική τοπολογία καταστροφής ελλειπτικού λώρου (για λ>0 και λ<0).

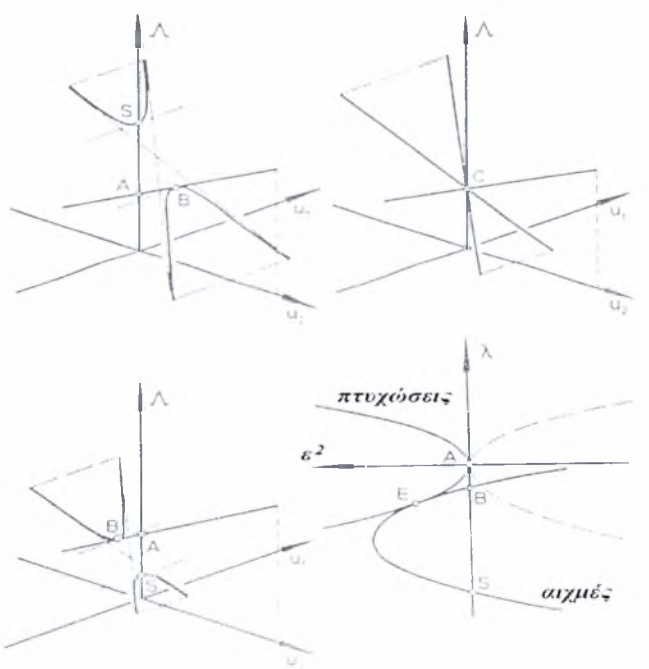


Σχήμα Α2.25. Δρόμοι στο χώρο παραμέτρων ελέγχου της καταστροφής ελλειπτικού λώρου δίδοντας το αντικλινές σημείο διακλάδωσης.

Ο χώρος αυτός χωρίζεται μέσω της επιφάνειας κρίσιμων σημείων (επιφάνειας αστοχίας – *failure surface*) σε τρεις περιοχές, εκ των οποίων μόνο μια περιέχει ευσταθείς καταστάσεις, και μέσω της οποίας οδηγούμεθα στο αντικλινές σημείο διακλάδωσης. Περισσότερες πληροφορίες για τη μορφή των δρόμων ισορροπίας τόσον του τέλειου όσο και του ατελούς συστήματος για την εν λόγω καταστροφή φαίνονται στα Σχήματα Α2.26 και Α2.27.



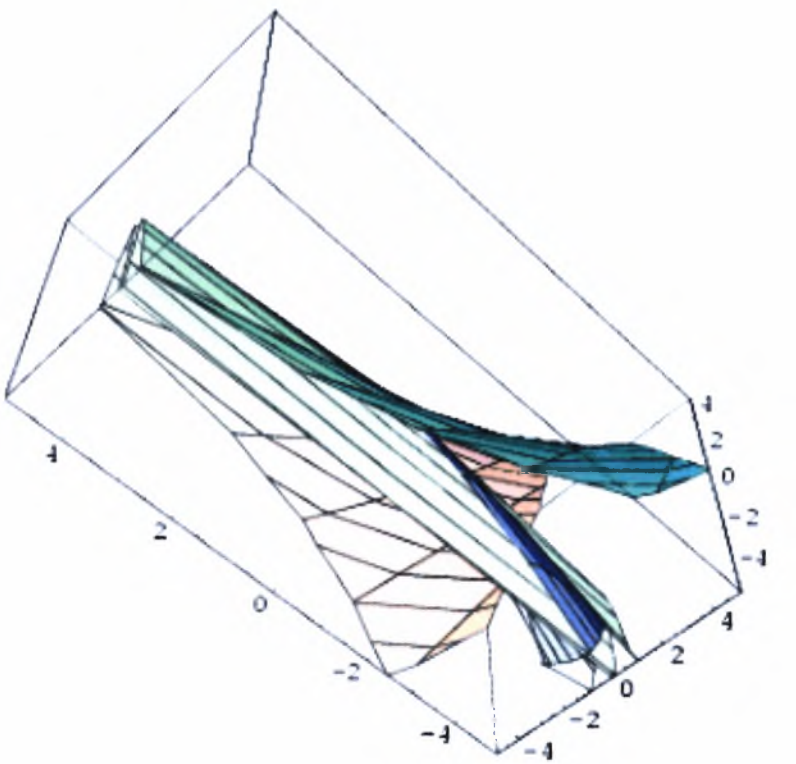
Σχήμα Α2.26. Τέλειοι και ατελείς δρόμοι ισορροπίας για το αντικλινές σημείο διακλάδωσης



Σχήμα Α2.27. Μορφές ισορροπιών του τέλειου συστήματος και ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες για το αντικλινές σημείο διακλάδωσης.

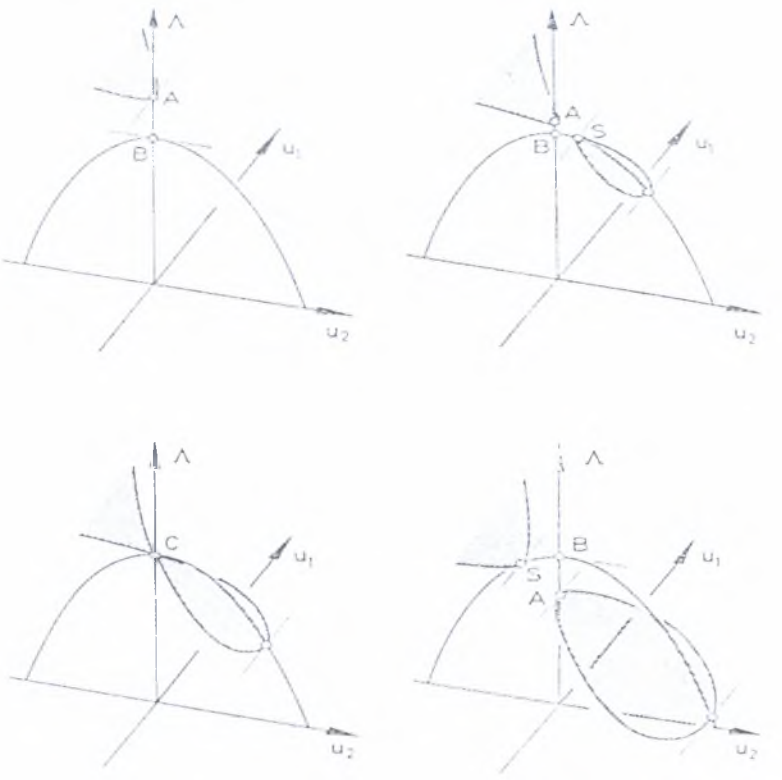
3. Καταστροφή τύπου παραβολικού λώρου (parabolic umbilic)

Πρόκειται για την γενική ανάπτυξη του σπέρματος $f(x,y) = y^4 + x^2y$, με τυπική τρισδιάστατη απεικόνιση μιας προβολής της υπερεπιφάνειας κρίσιμων σημείων να φαίνεται στο Σχήμα Α2.28.



Σχήμα Α2.28. Απεικόνιση της επιφάνειας κρίσιμων σημείων καταστροφής τύπου παραβολικού λώρου.

Στη διεθνή βιβλιογραφία περί λυγισμού φαίνεται πως στη καταστροφή τύπου παραβολικού λώρου έχει δοθεί κάπως λιγότερη προσοχή σε σχέση με τους προηγούμενους δύο τύπους (ελλειπτικού και υπερβολικού λώρου), παρόλη τη μεγάλη σημασία της σε προβλήματα αλληλεπίδρασης μορφών (*mode interaction*). Παραδοσιακά έχει δοθεί έμφαση σε προβλήματα ημισυμμετρίας ή πλήρους συμμετρίας παρά στην υβριδική εκείνη περίπτωση (που αφορά την εν λόγω καταστροφή), κατά την οποία η συμμετρία είναι παρούσα για κάθε συνεισφέρουσα μορφή λαμβανόμενη χωριστά, η οποία όπως σπάει σε σχέση με μια από τις μορφές αυτές, όταν αμφότερες εμφανίζονται συγχρόνως. Η καταστροφή τύπου παραβολικού λώρου σχετίζεται με το παρακλινές σημείο διακλάδωσης, μορφές των ισορροπιών του οποίου – για ένα τέλειο σύστημα – φαίνονται στο Σχήμα Α2.29.



Σχήμα Α2.29. Παρακλινές σημείο διακλάδωσης: Μορφές ισορροπιών του τέλειου συστήματος, που επιδεικνύει καταστροφή τύπου παραβολικού λώρου

Ορισμένες χαρακτηριστικές γραφικές αναπαραστάσεις μερικών στοιχειωδών καταστροφών παρουσιάζονται στο πρόγραμμα *Καταστροφές.nb* του Παραρτήματος.

(δ) Πέραν των επτά στοιχειωδών καταστροφών

Ο διακεκριμένος ερευνητής Arnold[18] προσέφερε συστηματική κατάταξη και ιδιαίτερη ονοματολογία σε καταστροφές πέραν των επτά στοιχειωδών, εκτενής αναφορά επί των οποίων βρίσκεται και στο σύγγραμμα του R. Gilmore[20], από το οποίο για εποπτικούς και μόνο λόγους παραθέτουμε τον επόμενο Πίνακα, που αναφέρεται σε μερικές τέτοιες καταστροφές.

	$m = 1$		$m = 2, \mathbf{a} = a_0 + a_1 y$	
$l = 2$	Z_{11}	$x^3y + y^5 + axy^4$	Z_{17}	$x^3y + y^8 + \mathbf{a}xy^6$
	Z_{12}	$x^3y + xy^4 + ax^2y^3$	Z_{18}	$x^3y + xy^6 + \mathbf{a}y^9$
	Z_{13}	$x^3y + y^6 + axy^5$	Z_{19}	$x^3y + y^9 + \mathbf{a}xy^7$
	W_{12}	$x^4 + y^5 + ax^2y^3$	W_{17}	$x^4 + xy^5 + \mathbf{a}y^7$
	W_{13}	$x^4 + xy^4 + ay^6$	W_{18}	$x^4 + y^7 + \mathbf{a}x^2y^4$
	E_{12}	$x^3 + y^7 + axy^5$	E_{18}	$x^3 + y^{10} + \mathbf{a}xy^7$
	E_{13}	$x^3 + xy^5 + ay^8$	E_{19}	$x^3 + xy^7 + \mathbf{a}y^8$
	E_{14}	$x^3 + y^8 + axy^6$	E_{20}	$x^3 + y^8 + \mathbf{a}xy^8$
$l = 3$	Q_{10}	$x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$	Q_{16}	$x^3 + yz^2 + y^7 + \mathbf{a}xy^5$
	Q_{11}	$x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$	Q_{17}	$x^3 + yz^2 + xy^5 + \mathbf{a}y^8$
	Q_{12}	$x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$	Q_{18}	$x^3 + yz^2 + y^8 + \mathbf{a}xy^6$
	S_{11}	$x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$	S_{16}	$x^2z + yz^2 + xy^4 + \mathbf{a}y^6$
	S_{12}	$x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$	S_{17}	$x^2z + yz^2 + y^6 + \mathbf{a}zy^4$
	U_{12}	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$	U_{16}	$x^3 + xz^2 + y^5 + \mathbf{a}x^2y^2$

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζουν τα λεγόμενα συμμετρικά σπέρματα καταστροφών (symmetric catastrophe germs)[19] και οι αναπτύξεις τους, γιατί σχετίζονται με πολύπλοκες αλλά άκρως δημοφιλείς τελευταία μορφές καταστροφής όπως αυτές του ***συμβολικού λώρου*** (symbolic umbilic, E_6 κατά Arnold) και της καταστροφής ***διπλής μορφής αιχμής*** (double-cusp, X_9 κατά Arnold) που χαρακτηρίζονται αμφότερες από δύο ενεργές συντεταγμένες και περισσότερες των δύο παραμέτρους ελέγχου. *Η αιχμή δε διπλής μορφής σχετίζεται και με ορισμένα προβλήματα λυγισμού πλακών, που όπως θα φανεί στη συνέχεια, απασχολούν και το περιεχόμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.*

Χαρακτηριστικοί τύποι συμμετρικών συναρτήσεων συνολικού δυναμικού για διβάθμια συστήματα (x, y) έχουν ως εξής:

- $$x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + \alpha\left(x^2 + y^2\right)^2 = (\alpha + 1)\left\{x^4 + y^4 - 2\frac{3-\alpha}{1+\alpha}x^2y^2\right\} \qquad (\Sigma 1)$$

  που για $-2 < \alpha < 2$ ισοδυναμεί με τη συνήθη μορφή $x^4 + y^4 + \alpha x^2 y^2$.

- $$x^6 - y^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + \alpha\left(x^2 + y^2\right)^3 = \\ (\alpha + 1)x^6 + (\alpha - 1)y^6 - (15 - 3\alpha)x^4y^2 + (15 + 3\alpha)x^2y^4 \qquad (\Sigma 2)$$

που γράφεται υπό συνήθη κανονική μορφή με τρεις παραμέτρους ελέγχου

- $$x^6 + y^6 + \alpha_1 x^4y^2 + \alpha_2 x^2y^4 + \alpha_3 x^3y^3 \qquad (\Sigma 3)$$

Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ υφίσταται συμμετρία $x \leftrightarrow y$, ενώ αν οι κυβικοί όροι μηδενιστούν (δηλ. αν $\alpha_3 = 0$) τότε μεταπίπτουμε στη συμμετρία τύπου (Σ1), παρατηρώντας ότι η έκφραση

- $$x^6 + y^6 + (\alpha + 1)x^4y^2 + (\alpha - 1)x^2y^4 = \left(x^4 + y^4 + \alpha x^2y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \qquad (\Sigma 4)$$

εμπεριέχει τη συμμετρία του πρώτου παράγοντα της (Σ1). Η γενική τέλος ανάπτυξη του δυναμικού της καταστροφής μορφής διπλής αιχμής (double cusp) περιλαμβάνει (στην πλέον ακραία αναπαράσταση της) τέσσερις όρους ασυμμετρίας και έχει συνδιάσταση 6 (παράμετροι ελέγχου), σύμφωνα με την έκφραση:

- $$\left(x^2 + y^2\right)^2 + c\left(x^3 - 3xy^2\right) + w_1x^2 + w_2y^2 + 2w_{12}xy + ux + \upsilon y$$

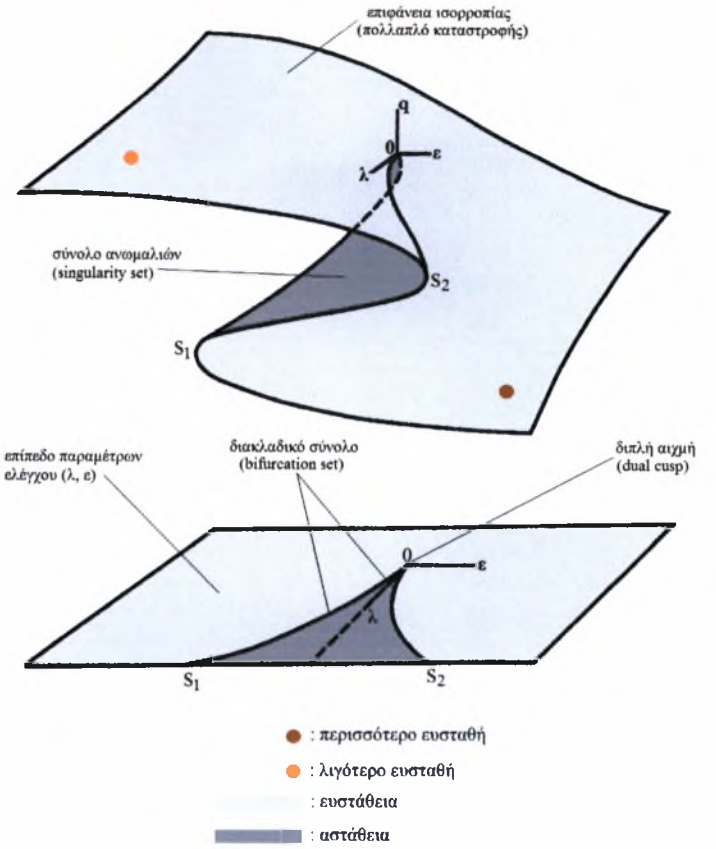
ενώ μια μερική, εξ ίσου περίπλοκη ανάπτυξη της καταστροφής αυτής δίδεται από την ακόλουθη συνάρτηση δυναμικού:

- $x^4 + y^4 + \alpha x^2 y^2 + w_1 x^2 + w_2 y^2$

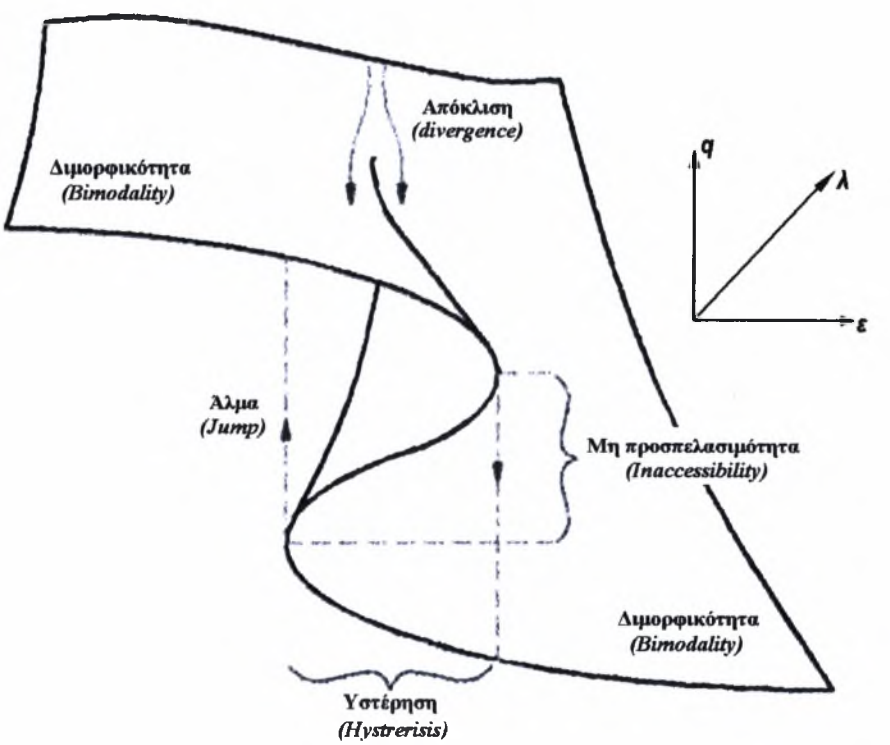
(ε) Η καταστροφή τύπου αιχμής: εμβάθυνση

Η καταστροφή τύπου αιχμής (cusp singularity), σε συνέχεια της συνοπτικής αναφοράς της §A2.1.(β).2, αποτελεί την κατά τεκμήριο πλέον απαντώμενη στα δομικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας, και συνδέεται με συμμετρικά ως επί το πλείστον διακλαδικά σημεία. Η συγκεκριμένη μορφή ανωμαλίας δύναται επιπρόσθετα να συνδεθεί με καταστροφές δύο ενεργών συντεταγμένων υψηλότερης τάξης (higher order two-mode singularities)[13,15], οι οποίες συνδέονται με τη δομική ευστάθεια συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν διπλή συμμετρία.

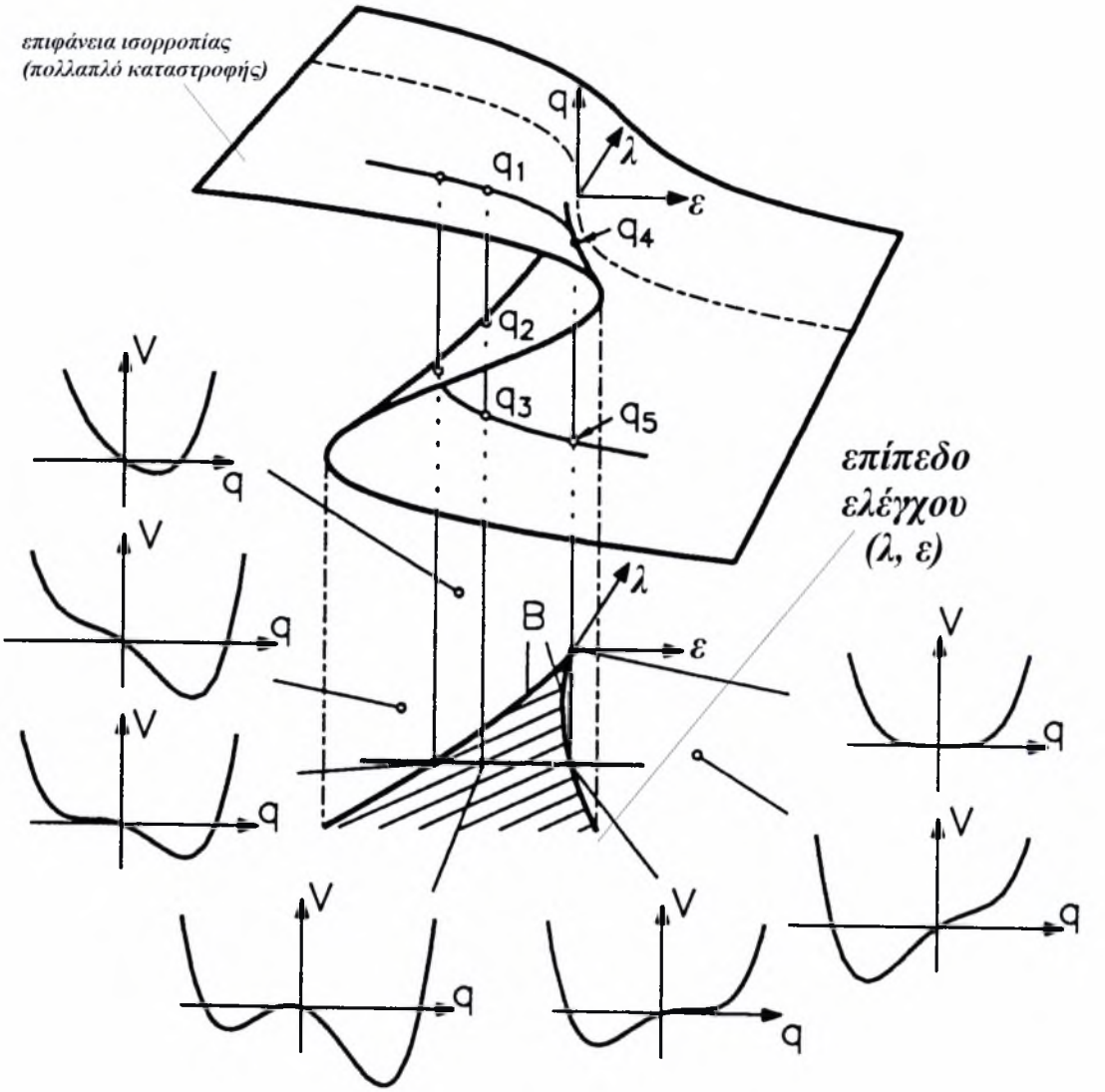
Αν εξαιρεθεί η εν λόγω καταστροφή λαμβάνει χώραν μέσω ***σημείου αποκοπής*** (cut-off point), η οποία οδηγεί στη λεγόμενη ***λοξή αιχμή*** (tilted cusp: μη εκφυλισμένο σημείο υστέρησης χωρίς συμμετρική μοναδικότητα, κυβικοί όροι, ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης του τέλειου συστήματος)[23], η καταστροφή τύπου αιχμής σχετίζεται με μια ενεργό συντεταγμένη και δύο παραμέτρους ελέγχου (codim=2). Στα προβλήματα ελαστικής ευστάθειας οι παράμετροι αυτοί είναι το φορτίο λ και η αρχική ατέλεια ε, οπότε η δομικά ευσταθής γενική ανάπτυξη συνδέεται με την απλούστερη μορφή δυναμικού: $V = q^4 + \lambda q^2 + \varepsilon q$. Στον τρισδιάστατο χώρο η συνάρτηση $M = {dV}/{dq} = 4q^3 + 2\lambda q + \varepsilon$ παριστά την επιφάνεια ισορροπίας, που έχει τη μορφή διπλής πτύχωσης και η γεωμετρία της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα A2.30, ενώ οι πέντε προεξάρχουσες ιδιότητες της αιχμής, σύμφωνα με τον διάσημο μαθηματικό Zeeman[6], οι οποίες αναλύονται στη συνέχεια, φαίνονται στο Σχήμα A2.31. Η μορφή δε της καμπύλης του συνολικού δυναμικού $V(q,\lambda)$ σε διάφορα χαρακτηριστικά σημεία του λεγόμενου πολλαπλού καταστροφής M, παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα A2.32.



Σχήμα Α2.30. Γεωμετρία της επιφάνειας ισορροπίας της καταστροφής τύπου αιχμής.



Σχήμα Α2.31. Οι πέντε προεξάρχουσες ιδιότητες της διπλής αιχμής κατά Zeeman.



Σχήμα Α2.32. Καμπύλες συνολικού δυναμικού για διάφορα χαρακτηριστικά σημεία του πολλαπλού καταστροφής τύπου διπλής αιχμής.

Οι πέντε ιδιότητες της διπλής αιχμής είναι οι ακόλουθες:

- ***(Δι)μορφικότητα (bi-modality):*** Με τον όρο αυτό εννοείται ότι το υπό εξέταση σύστημα διαθέτει *περισσότερα* του ενός *τοπικά ελάχιστα* (δηλαδή *ευσταθή σημεία ισορροπίας)* για κάποιες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, δηλαδή για σημεία εντός του καμπύλου τριγώνου $S_1 0 S_2$ του Σχήματος Α2.30.
- ***Μη προσπελασιμότητα (inaccessibility):*** Η έννοια αυτή συνδέεται με το γεγονός ότι το σύστημα διαθέτει μια *ασταθή* κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή το μεσαίο φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας, που σχετίζεται με *τοπικά μέγιστα*, είναι μη προσπελάσιμο.

- ***Αιφνίδια άλματα (sudden jumps):*** Όποτε η συνάρτηση του συνολικού δυναμικού *V* διαθέτει ένα *ασταθές* σημείο ισορροπίας, λαμβάνουν χώραν *αιφνίδια (καταστροφικά) άλματα*, σε περίπτωση που *μικρές αλλαγές* στις τιμές των *παραμέτρων ελέγχου* οδηγούν σε *μεγάλες αλλαγές* στην τιμή της λεγόμενης *μεταβλητής κατάστασης* (state variable), δηλαδή της ενεργού συντεταγμένης. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει όταν ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο της *V* συγχωνεύονται (coalesce) και κατόπιν αλληλοεκμηδενίζονται (annihilate) και εξαφανίζονται, δηλαδή όταν το σύστημα πραγματοποιεί άλμα από το ένα στο άλλο φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας συμβαίνει ένα αιφνίδιο άλμα και στην τιμή της ενεργού συντεταγμένης.

- ***Απόκλιση (divergence):*** Το συγκεκριμένο φαινόμενο συμβαίνει όταν *μικρές διαφοροποιήσεις του δρόμου ισορροπίας* μπορούν χωρίς αιφνίδια άλματα να παράγουν *μεγάλες διαφοροποιήσεις* στη τιμή της μεταβλητής κατάστασης, ακόμα και όταν δύο τροχιές ξεκινούν και τελειώνουν στα ίδια σημεία ελέγχου. Παραδείγματος χάριν δύο γειτονικές τροχιές (μια στα αριστερά και μια στα δεξιά του άξονα *λ*) που ξεκινούν από ένα σημείο εκτός του καμπύλου τριγώνου και τελειώνουν σε ένα σημείο μέσα σε αυτό μπορούν να παράγουν *ιδιαζόντως διαφορετική συμπεριφορά*.

- ***Υστέρηση (hysterisis):*** Σχετίζεται με την περίπτωση κατά την οποία μια *φυσική διεργασία δεν είναι αυστηρά αναστρέψιμη (αμφίδρομη)*. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται όταν το άλμα από το ένα φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας στο άλλο *δεν* συμβαίνει για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, όπως αυτές του *εναλλακτικού άλματος*, οπότε ***η διαφοροποίηση της τιμής της μεταβλητής κατάστασης ακολουθεί τον χαρακτηριστικό βρόγχο υστέρησης***.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄ : ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΕΝΟΣ ΔΙΒΑΘΜΙΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΟΡΘΟΤΡΟΠΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

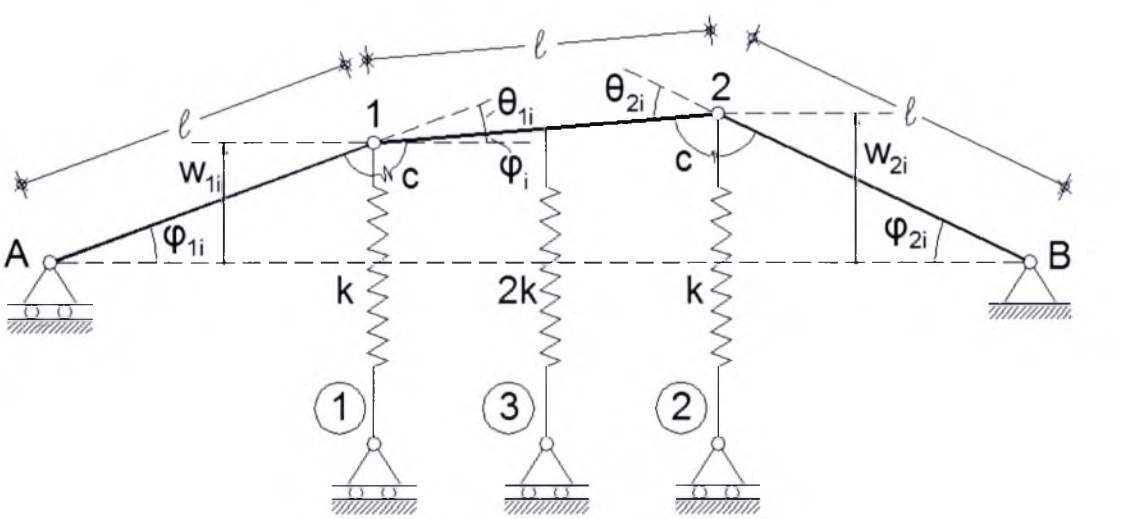
Β.1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Β.1.1. Γενική περιγραφή του προβλήματος

Αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας αποτελεί η ***πλήρης μη γραμμική στατική ανάλυση σε ευστάθεια*** ενός δύο βαθμών ελευθερίας συντηρητικού συστήματος, το οποίο έχει διεθνώς αναγνωριστεί – και ως κάποιο βαθμό ερευνηθεί – ως προσομοίωμα για τη μελέτη συζευγμένων και μη διακλαδώσεων, που εμφανίζονται κατά τον λυγισμό ορθότροπων ορθογωνικών πλακών[2-5,11]. Με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο του Κεφαλαίου Α΄ και χρήση συμβολικών μαθηματικών η όλη ανάλυση εστιάζεται στη ***μελέτη δευτερευουσών διακλαδώσεων***, οι οποίες πιθανόν να εμφανιστούν σε ***απομακρυσμένες μετακρίσιμες περιοχές*** του συστήματος, με αποτέλεσμα την συνεχή εναλλαγή της όλης μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αυτού. Κατ' αρχήν αναλύεται διεξοδικά, με βάση τη Θεωρία των Διακλαδώσεων, η απόκριση του τέλειου συστήματος, τόσον με χρήση των ακριβών μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας, όσον και με χρήση των αντίστοιχων προσεγγιστικών, οι οποίες προκύπτουν μέσω αναπτύγματος κατά Taylor του συνολικού δυναμικού. Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι συνθήκες εκείνες, για τις οποίες υφίστανται συζευγμένες μετακρίσιμες διακλαδώσεις και κατόπιν αναλύεται το αντίστοιχο ατελές σύστημα, όπου αποκαλύπτεται μια πληθώρα νέων μη γραμμικών φαινομένων, η ερμηνεία των οποίων γίνεται μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών. Τούτο καθίσταται εφικτό μέσω ***πλήρους ανάλυσης και κατάταξης*** της συνάρτησης του ***συνολικού δυναμικού*** του προσομοιώματος, όπως αυτό προκύπτει από την προηγηθείσα προσεγγιστική ανάλυση του (τέλειου και ατελούς) συστήματος, σε υψηλότερης τάξης ανωμαλίες δύο μορφών (higher order two-mode singularities), οι οποίες αναλύονται γραφικά μέσω ειδικού λογισμικού. Τα νέα ευρήματα και συμπεράσματα της εργασίας παρουσιάζονται με σαφήνεια στο τέλος του παρόντος Κεφαλαίου, όπου τίθενται στόχοι για περαιτέρω έρευνα (στα πλαίσια μη γραμμικής δυναμικής πλέον ανάλυσης σε ευστάθεια).

B.1.2. Μη γραμμική στατική ανάλυση ευστάθειας του προσομοιώματος

Θεωρούμε το διβάθμιο (εν γένει ατελές) προσομοίωμα του Σχήματος Β1.1, το οποίο αποτελείται από τρεις αβαρείς ράβδους του ιδίου μήκους ℓ, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με αρθρώσεις στα σημεία 1 και 2. Το άκρο Β στηρίζεται σε ανυποχώρητη άρθρωση, ενώ το άκρο Α κυλίεται ελεύθερα επί οριζοντίου επιπέδου. Στις θέσεις των συνδέσμων των ράβδων (αρθρώσεις 1 και 2) το μοντέλο φέρει γραμμικά στροφικά ελατήρια δυσκαμψίας c, ενώ τα σημεία αυτά καθώς και το μέσο της ράβδου 12 συνδέονται με κατακόρυφα εκτατικά ελατήρια με δυσκαμψία ίση με k και $2k$ αντίστοιχα, τα κάτω άκρα των οποίων κυλίονται επίσης ελεύθερα οριζόντια. Τα ελατήρια αυτά σχετίζονται ***με κυβικού τύπου μη γραμμικότητα ελικοειδούς μορφής***, δηλαδή οι δυνάμεις που αναπτύσσονται σε αυτά, όταν παραμορφώνονται κατά δ, ισούνται με:



Σχήμα Β1.1. Αρχικά ατελές διβάθμιο προσομοίωμα στην αρχική θέση ισορροπίας.

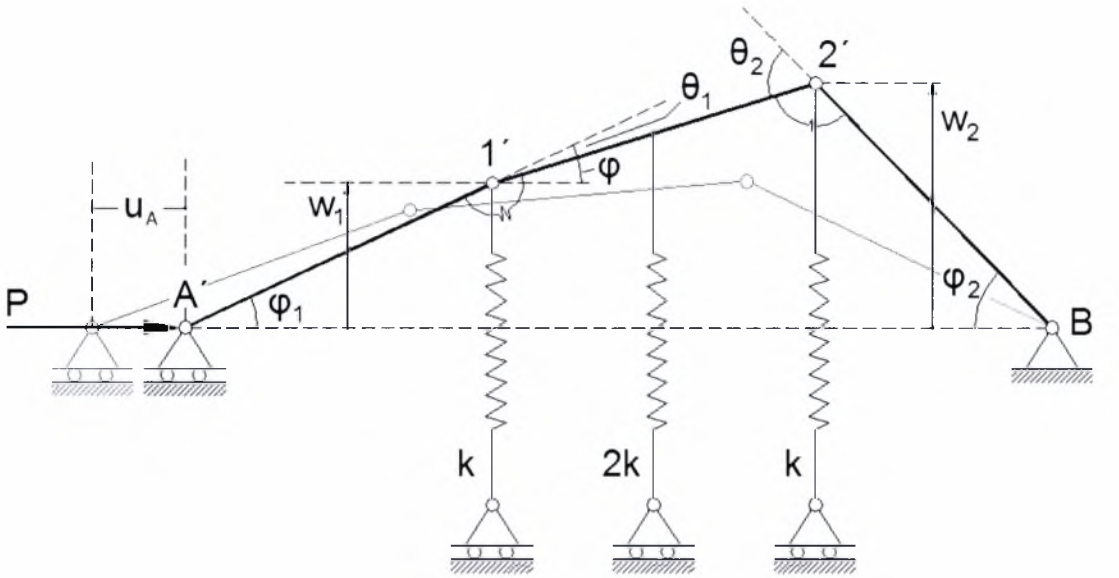
$$F_{1,2} = k\delta_{1,2}^3 \quad , \quad F_3 = 2k\delta_3^3 \tag{B1.1}$$

όπου ο δείκτης αντιστοιχεί στη αρίθμηση εκάστου των ελατηρίων.

Στην απεικονιζόμενη στο παραπάνω Σχήμα αρχική θέση ισορροπίας, η οποία χαρακτηρίζεται από τις αρχικές παραμορφώσεις $W_{1i} = E_1$ και $W_{2i} = E_2$, όλα τα ελατήρια του συστήματος θεωρούνται ευρισκόμενα υπό μηδενική ένταση.

Αν στο άκρο Α επενεργήσει μια οριζόντια θλιπτική δύναμη P, το σύστημα θεωρείται ότι ισορροπεί σε μια νέα θέση, η οποία χαρακτηρίζεται από τις παραμορφώσεις W_1 και W_2, που κατ' ουσία αποτελούν τις γενικευμένες συνθήκες

του συστήματος, σύμφωνα με τη γεωμετρία και σύμβαση προσήμων του Σχήματος Β1.2, στο οποίο απεικονίζεται το παραμορφωμένο πλέον μοντέλο.



Σχήμα Β1.2. Γεωμετρία και σύμβαση προσήμων του παραμορφωμένου μοντέλου.

Μετά την εισαγωγή των ακόλουθων αδιάστατων παραμέτρων

$$w_1 = W_1 / \ell \ , \ w_2 = W_2 / \ell \ , \ e_1 = W_{1i} / \ell \ , \ e_2 = W_{2i} / \ell \ , \ \lambda = \frac{P}{k\ell^3} \ , \ \beta = \frac{c}{k\ell^4} \qquad \text{(B1.2)}$$

(με γεωμετρικά όρια $| w_1 , w_2 , e_1 , e_2 | < 0$) και σε συνδυασμό με τη μη γραμμικότητα των ελατηρίων, όπως περιγράφεται στη σχέση (Β1.1), προκύπτουν οι εκφράσεις της αδιάστατης ενέργειας παραμόρφωσης αυτών, οι οποίες έχουν ως εξής:

Ενέργεια παραμόρφωσης των μη γραμμικών εκτατικών ελατηρίων U_k

$$U_k = \frac{1}{2}\left((w_1 - e_1)^4 + 2\left(\frac{(w_1 - e_1) + (w_2 - e_2)}{2} \right)^4 + (w_2 - e_2)^4 \right) \qquad \text{(B1.3)}$$

Ενέργεια παραμόρφωσης των στροφικών ελατηρίων U_c

$$U_c = \frac{1}{2}\beta\left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 \right) \qquad \text{(B1.4)}$$

όπου

$$\vartheta_1 = \left(arcsin(w_1) - arcsin(e_1) \right) - \left(arcsin(w_2 - w_1) - arcsin(e_2 - e_1) \right) \qquad \text{(B1.5α)}$$

$$\vartheta_2 = \left(arcsin(w_2) - arcsin(e_2)\right) + \left(arcsin(w_2 - w_1) - arcsin(e_2 - e_1)\right) \qquad \text{(B1.5β)}$$

Αντίστοιχα, το αδιάστατο έργο των εξωτερικών δυνάμεων, δηλαδή της P, λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Omega = -\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{1-e_1^2} + \sqrt{1-(e_2-e_1)^2} + \sqrt{1-e_2^2} \\ -\sqrt{1-w_1^2} - \sqrt{1-(w_2-w_1)^2} - \sqrt{1-w_2^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(B1.6)}$$

όπου η τιμή στην παρένθεση αντιπροσωπεύει την αδιαστατοποιημένη οριζόντια μετακίνηση u_A.

Κατά συνέπεια η ακριβής έκφραση του συνολικού δυναμικού $V_{T,exact}$ του ατελούς συστήματος, στη πιο γενική (αδιάστατη) μορφή του θα ισούται με:

$$V_{T,exact} = U_k + U_c + \Omega \qquad \text{(B1.7)}$$

η οποία κατόπιν αντικατάστασης των εκφράσεων των U_k, U_c, Ω, που δίδονται παραπάνω, γράφεται ως

$$V_{T,exact} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (e_1 - w_1)^4 + (e_2 - w_2)^4 + \frac{1}{8}(e_1 + e_2 - w_1 - w_2)^4 - \\ 2\left(\begin{array}{l} \sqrt{1-e_1^2} + \sqrt{1-(e_1-e_2)^2} + \sqrt{1-e_2^2} - \\ \sqrt{1-w_1^2} - \sqrt{1-(w_1-w_2)^2} - \sqrt{1-w_2^2} \end{array} \right)\lambda + \\ \beta\left(\begin{array}{l} \left(arcsin[e_1] + arcsin[e_1 - e_2] - arcsin[w_1] - arcsin[w_1 - w_2]\right)^2 + \\ \left(arcsin[e_1 - e_2] - arcsin[e_2] - arcsin[w_1 - w_2] + arcsin[w_2]\right)^2 \end{array} \right) \end{array} \right] \qquad \text{(B1.8)}$$

Στη συνέχεια εκτελούμε μετασχηματισμό των συντεταγμένων, έτσι ώστε να υπάρχει δυνατότητα άμεσης περιγραφής και εποπτείας της συμμετρικής και της αντισυμμετρικής παραμόρφωσης του συστήματος, ο οποίος έχει ως εξής:

$$w_s = \frac{w_1 + w_2}{2} \;,\; w_a = \frac{w_1 - w_2}{2} \;\Rightarrow\; w_1 = w_s + w_a \;,\; w_2 = w_s - w_a \qquad \text{(B1.9)}$$

οπότε προφανώς θα ισχύει ότι

$$e_s = \frac{e_1 + e_2}{2} \;,\; e_a = \frac{e_1 - e_2}{2} \;\Rightarrow\; e_1 = e_s + e_a \;,\; e_2 = e_s - e_a \qquad \text{(B1.10)}$$

Εφαρμόζοντας τον ως άνω μετασχηματισμό στην έκφραση του συνολικού δυναμικού της (B1.9) λαμβάνουμε την αντίστοιχη έκφραση στο νέο σύστημα συντεταγμένων, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$V_{T,exact}^{transf}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} 2(e_s-w_s)^4+(e_a+e_s-w_a-w_s)^4+(e_a-e_s-w_a+w_s)^4- \\ 2\left(\begin{array}{l}\sqrt{1-4e_a^2}+\sqrt{1-(e_a-e_s)^2}+\sqrt{1-(e_a+e_s)^2}- \\ \sqrt{1-4w_a^2}-\sqrt{1-(w_a-w_s)^2}-\sqrt{1-(w_a+w_s)^2}\end{array}\right)\lambda+ \\ \beta\left(\begin{array}{l}(arcsin[2e_a]+arcsin[e_a-e_s]-arcsin[2w_a]-arcsin[w_a-w_s])^2+ \\ (arcsin[e_a+e_s]+arcsin[2e_a]-arcsin[w_a+w_s]-arcsin[2w_a])^2\end{array}\right)\end{array}\right] \tag{B1.11}$$

(α) Τέλειο σύστημα – προσεγγιστική ανάλυση

Εξετάζεται κατ' αρχήν η μη γραμμική στατική συμπεριφορά σε ευστάθεια του τέλειου (διακλαδικού) συστήματος προσεγγιστικά. Προς τούτο στην έκφραση της αδιάστατης ενέργειας παραμόρφωσης λόγω των στροφικών ελατηρίων U_c αλλά και στην έκφραση του έργου των εξωτερικών δυνάμεων Ω των σχέσεων (B1.4)-(B1.6) αντικαθίστανται οι αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί και τα ριζικά με τα αναπτύγματα τους κατά Taylor μέχρι και όρων $4^{ης}$ τάξης για τις γενικευμένες συντεταγμένες και μέχρι και όρων $2^{ης}$ τάξης για τις αρχικές παραμορφώσεις. Τούτο επιτυγχάνεται με χρήση συμβολικών μαθηματικών[22] (πρόγραμμα *General1.nb* του Παραρτήματος στο τέλος της εργασίας), και προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση για τη συνάρτηση του συνολικού δυναμικού του ατελούς συστήματος:

$$V_{T,appr}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}(e_1-w_1)^4+(e_2-w_2)^4+\frac{1}{8}(e_1+e_2-w_1-w_2)^4+ \\ \left(\begin{array}{l}\left(-2e_1+e_2+2w_1+\dfrac{w_1^3}{6}+\dfrac{(w_1-w_2)^3}{6}-w_2\right)^2+ \\ \left(e_1-2e_2-w_1+2w_2+\dfrac{w_2^3}{6}+\dfrac{(-w_1+w_2)^3}{6}\right)^2\end{array}\right)\beta+ \\ \frac{1}{2}\left(4\left(e_1^2-e_1e_2+e_2^2\right)-\left(w_1^2-w_1w_2+w_2^2\right)\left(4+w_1^2-w_1w_2+w_2^2\right)\right)\lambda\end{array}\right] \tag{B1.12}$$

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων των (Β1.9) και (Β1.10) έχει σαν αποτέλεσμα η ως άνω έκφραση να λάβει την μορφή

$$V_{T,appr}^{transf} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(e_s - w_s)^4 + (e_a + e_s - w_a - w_s)^4 + (e_a - e_s - w_a + w_s)^4 + \\ \left(18e_a^2 + 2e_s^2 - 6e_a w_a\left(6 + 3w_a^2 + w_s^2\right) - \frac{2}{3}e_s w_s\left(6 + 3w_a^2 + w_s^2\right) + \right.\beta + \\ \left.\frac{1}{18}\left(6 + 3w_a^2 + w_s^2\right)^2\left(9w_a^2 + w_s^2\right)\right. \\ \frac{1}{2}\left(12e_a^2 + 4e_s^2 - \left(3w_a^2 + w_s^2\right)\left(4 + w_a^2 + w_s^2\right)\right)\lambda \end{bmatrix} \quad \text{(B1.13)}$$

η οποία για το τέλειο σύστημα γράφεται τελικά ως

$$V_{T,appr}^{transf,p} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (w_a - w_s)^4 + 2w_s^4 + (w_a + w_s)^4 + \\ \frac{1}{18}\left(6 + 3w_a^2 + w_s^2\right)^2\left(9w_a^2 + w_s^2\right)\beta - \\ \frac{1}{2}\left(3w_a^2 + w_s^2\right)\left(4 + 3w_a^2 + w_s^2\right)\lambda \end{bmatrix} \quad \text{(B1.14)}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν άμεσα και δίδονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial V_{T,appr}^{transf,p}}{\partial w_s} = \frac{1}{6}w_s\begin{bmatrix} 21w_a^4\beta + 2w_a^2\left(36 + 24\beta + 5w_s^2\beta - 9\lambda\right) + \\ w_s^2\left(48 + \left(8 + w_s^2\right)\beta - 6\lambda + 12(\beta - \lambda)\right) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(B1.15α)}$$

και

$$\frac{\partial V_{T,appr}^{transf,p}}{\partial w_a} = \begin{bmatrix} \frac{27w_a^2\beta}{2} + w_a^3\left(4 + \left(36 + 7w_s^2\right)\beta - 9\lambda\right) + \\ w_a\left(18\beta + \frac{5w_s^4\beta}{6} + w_s^2(12 + 8\beta - 3\lambda) - 6\lambda\right) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(B1.15β)}$$

ενώ οι εκφράσεις των ελασσόνων οριζουσών του μητρώου ευστάθειας φαίνονται στη λίστα του προγράμματος *General1.nb*.

Πέραν της τετριμμένης λύσης $w_s = w_a = 0$, η οποία αποτελεί πάντοτε συμβατή παραμορφωσιακή κατάσταση του συστήματος $\forall \lambda > 0$, η επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας οδηγεί σε τρεις διακριτές μορφές παραμόρφωσης, οι οποίες έχουν ως εξής:

- **Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (συμμετρική παραμόρφωση):** $w_s \neq 0, w_a = 0$

Στην περίπτωση αυτή η $2^{η}$ των εξισώσεων ισορροπίας εκφυλίζεται, ενώ η $1^{η}$ σχετίζεται με την ακόλουθη αναλυτική λύση, που αποτελεί τον ***πρώτο δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας του συστήματος,*** ο οποίος σχετίζεται με συμμετρική παραμόρφωση:

$$\left.\frac{\partial V_{T,appr}^{transf,p}}{\partial w_s} = 0\right|_{w_a=0} \rightarrow \lambda_1 = \beta + \frac{1}{6} w_s^2 \left(\frac{48+\beta}{2+w_s^2} \right) \tag{B1.16}$$

Ο δευτερεύων αυτός δρόμος ισορροπίας τέμνει τον τετριμμένο στο ***σημείο διακλάδωσης C_1***, που αντιστοιχεί στο ***πρώτο κρίσιμο φορτίο***

$$\lambda_{cr1}^{appr} = \lambda_1 \big|_{w_s=0} = \beta \tag{B1.17}$$

Πρόκειται για ***ευσταθές συμμετρικό σημείο διακλάδωσης***, το οποίο προκύπτει εύκολα μέσω διερεύνησης της ευστάθειας του με χρήση συμβολικών μαθηματικών (Προγράμματα *Ευστάθεια – Προσεγγιστικά – Συμβολικά.nb* και *Ευστάθεια κρισίμων σημείων – προσεγγιστικά.nb* του Παραρτήματος). Ο ***τετριμμένος δρόμος ισορροπίας είναι μέχρι το σημείο C_1 <u>ευσταθής</u>*** (δηλαδή για $\lambda \leq \beta$), ενώ πέραν αυτού καθίσταται ***<u>ασταθής</u>*** (για $\lambda > \beta$).

- **Δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (αντισυμμετρική παραμόρφωση):** $w_s = 0, w_a \neq 0$

Αντίστοιχα, εκφυλίζεται στη περίπτωση αυτή η $1^{η}$ των εξισώσεων ισορροπίας, ενώ η $2^{η}$ οδηγεί στην ακόλουθη επίσης αναλυτική λύση, η οποία αποτελεί τον ***δεύτερο δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας***, που σχετίζεται με αντισυμμετρική παραμόρφωση:

$$\left.\frac{\partial V_{T,appr}^{transf,p}}{\partial w_a} = 0\right|_{w_s=0} \rightarrow \lambda_2 = 3\beta + w_a^2 \left(\frac{4}{6+9w_a^2} + \frac{3\beta}{2} \right) \tag{B1.18}$$

Ο εν λόγω δρόμος τέμνει τον (ασταθή πλέον) τετριμμένο δρόμο ισορροπίας στο ***σημείο διακλάδωσης C_2***, που αντιστοιχεί στο δεύτερο κρίσιμο φορτίο

$$\lambda_{cr2}^{appr} = \lambda_2\big|_{w_a=0} = 3\beta \qquad \text{(B1.19)}$$

Πρόκειται περί ***ασταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης***, η ευστάθεια του οποίου προκύπτει με χρήση συμβολικών μαθηματικών ως άνω. Η ύπαρξη δύο κρίσιμων σημείων επί του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας επαληθεύεται μέσω ταυτόχρονου μηδενισμού των εξισώσεων ισορροπίας και των οριζουσών ευστάθειας (*General1.nb*).

- **Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (γενική παραμόρφωση):** $w_s \neq 0, w_a \neq 0$

Τα σημεία του δρόμου ισορροπίας αυτού προκύπτουν από ταυτόχρονη αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας (B1.15α,β), από την οποία προκύπτει συμβολικά η ακόλουθη σχέση μεταξύ φορτίου και παραμορφώσεων, η οποία είναι ανεξάρτητη του παράγοντα β:

$$\lambda_{gen} = 14 - \frac{2\left(8 + 12w_a^2 + w_a^4\right)}{2 + 3w_a^2 + w_s^2} + \frac{2\left(-18 + 17w_a^2 + w_a^4\right)}{6 + 3w_a^2 + w_s^2} \qquad \text{(B1.20)}$$

Ο ***τρίτος*** αυτός ***δευτερεύων δρόμος*** ισορροπίας διερευνάται στη συνέχεια υπό ποιες συνθήκες τέμνει τον 1ο και 2ο δευτερεύοντα δρόμο, τούτο δε επιτυγχάνεται εκ νέου μέσω συμβολικών μαθηματικών (προγράμματα *Search1.nb*, *Search2.nb* και *limit of beta.nb*) και **προκύπτει ότι για να τέμνονται ο 1ος και ο 2ος με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο, θα πρέπει (εντός των φυσικά αποδεκτών ορίων των παραμορφώσεων, δηλαδή για** $-1 \le w_s \le 1$, $-0.5 \le w_a \le 0.5$**) να ισχύει ότι** $\beta \le 0.526748971$**.** *Ενδιαφερόμενοι ακριβώς για μια τέτοια περίπτωση, επιλέγεται η τιμή* ***β=0.10****, και αναλύεται στη συνέχεια το σύστημα για την τιμή αυτή*.

Για την τιμή αυτή του β, επιλύνοντας αριθμητικά ταυτόχρονα τις εξισώσεις ισορροπίας (*solving approximate perfect.nb*), αλλά και μέσω μηδενισμού των οριζουσών ευστάθειας (*b one.nb*) βρίσκεται ότι ο ***τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας τέμνει*** τον 1ο δευτερεύοντα δρόμο στα κρίσιμα διακλαδικά σημεία C_3 και C_3', όπου ισχύει ότι

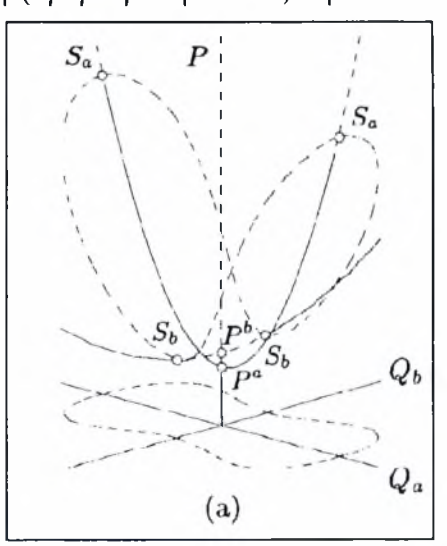
$$C_3, C_3' : \quad w_s = \pm 0.321682,\ w_a = 0,\ \lambda = 0.495279 \qquad \text{(B1.21)}$$

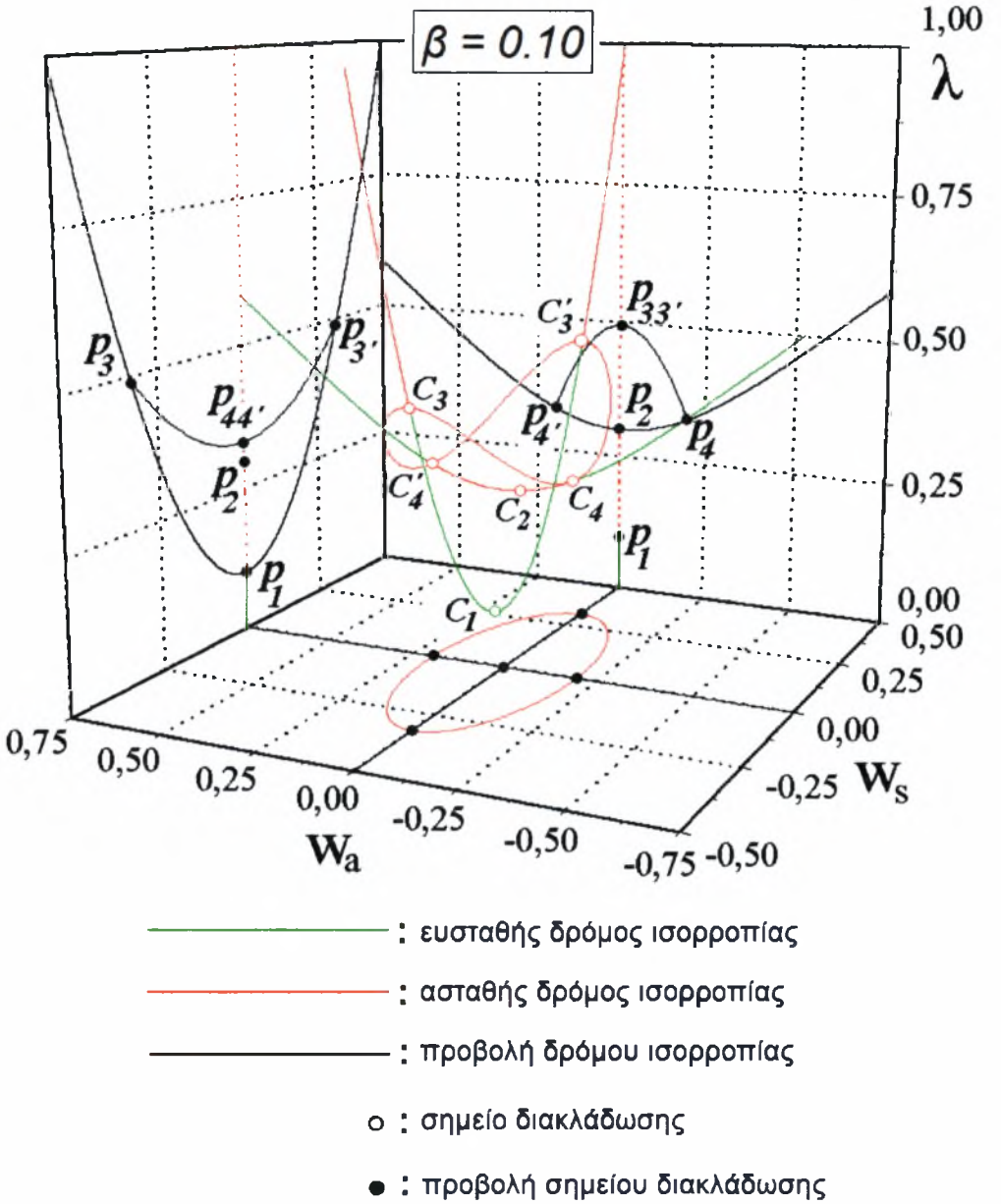
και τον $2^{ο}$ δευτερεύοντα δρόμο στα κρίσιμα διακλαδικά σημεία C_4 και $C_4^{'}$, όπου ισχύει ότι

$$C_4, C_4^{'}: \quad w_s ==, \; w_a = \pm 0.197423, \; \lambda = 0.330395 \qquad \text{(B1.22)}$$

Από πλευράς ευστάθειας των σημείων ισορροπίας του ***3ου δευτερεύοντα δρόμου***, διαπιστώνεται ότι ***αυτός*** είναι συνολικά ***ασταθής***, τα δε κρίσιμα σημεία C_3, $C_3^{'}$, C_4, $C_4^{'}$ είναι ***συμμετρικά ασταθή σημεία διακλάδωσης***. Η παρουσία τους επηρεάζει την ευστάθεια του $1^{ου}$ και $2^{ου}$ δευτερεύοντα δρόμου, καθόσον ο ***1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας*** είναι ***ευσταθής*** από το C_1 μέχρι τα C_3, $C_3^{'}$ συμμετρικά, καθιστάμενος πέραν αυτών ***ασταθής***, ενώ αντίθετα ο ***2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας*** είναι ***ασταθής*** από το C_2 μέχρι τα C_4, $C_4^{'}$ συμμετρικά, καθιστάμενος πέραν αυτών **ευσταθής**. Τέλος η παρουσία του συμμετρικού ασταθούς σημείου διακλάδωσης C_2 επί του τετριμμένου δρόμου ***δεν επηρεάζει*** την ευστάθεια του, καθόσον αυτός παραμένει ασταθής. Οι δρόμοι ισορροπίας του τέλειου συστήματος για $\beta=0.10$ **καθώς και** η ευστάθεια αυτών αλλά και των σημείων διακλάδωσης απεικονίζονται εποπτικά στο τρισδιάστατο διάγραμμα του Σχήματος B1.3, το οποίο παρατίθεται στην επόμενη σελίδα.

Υφίστανται συνεπώς για το τέλειο σύστημα δευτερεύουσες διακλαδώσεις σε απομακρυσμένες μετακρίσιμες περιοχές, οι οποίες μεταβάλλουν δραματικά τόσο την ευστάθεια όσο και τον τρόπο παραμόρφωσης αυτού από συμμετρική σε αντισυμμετρική και αντίστροφα, φαινόμενο μεγάλης σημασίας και ενδιαφέροντος, ιδία για την πραγματική κατασκευή (ορθρότροπη πλάκα) την οποία το σύστημα αυτό προσομοιάζει. Όντως στη διεθνή βιβλιογραφία[11,24] καταγράφονται δρόμοι ισορροπίας ελαστικού λυγισμού λεπτών πλακών όμοιοι με αυτούς του Σχήματος B1.3, οι οποίοι προέκυψαν μέσω ανάλυσης με χρήση των εξισώσεων von Karman (διπλανό σχήμα), γεγονός που υποδηλώνει τόσο την επιτυχή προσομοίωση όσο και την ακρίβεια της διακλαδικής ανάλυσης που προηγήθηκε.





Σχήμα Β1.3. Δρόμοι ισορροπίας του τέλειου συστήματος στο χώρο και προβολές τους, για $\beta=0.10$, προϊόντα προσεγγιστικής ανάλυσης♠.

♠ Παρόμοιοι δρόμοι ισορροπίας έχουν επίσης καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία για το απλό ελαστικό σύστημα μιας αμφιέρειστης ράβδου, η οποία εδράζεται πάνω σε ελαστική θεμελίωση (G.W.Hunt and P.R.Everall, *Arnold tongues and mode-jumping in the supercritical post-buckling of an archetypal elastic structure*, Proc. R. Soc. London Λ [1999] **455**, 125-140).

(β) Τέλειο σύστημα – ακριβής ανάλυση

Χρησιμοποιώντας την ακριβή έκφραση του συνολικού δυναμικού του ατελούς συστήματος, μετά το μετασχηματισμό των συντεταγμένων, που δόθηκε στη σχέση (B1.11), η αντίστοιχη ακριβής έκφραση αυτού για το τέλειο σύστημα είναι

$$V_{T,exact}^{transf.,p}=\begin{cases} w_a^4+6w_a^2w_s^2+2w_s^4+ \\ \left(-3+\sqrt{1-4w_a^2}+\sqrt{1-(w_a-w_s)^2}+\sqrt{1-(w_a+w_s)^2}\right)\lambda+ \\ \beta\,(arcsin[2w_a])^2+\beta\,arcsin[2w_a]\left(arcsin[w_a-w_s]+arcsin[w_a+w_s]\right)+ \\ \frac{1}{2}\beta\left((arcsin[w_a-w_s])^2+(arcsin[w_a+w_s])^2\right) \end{cases} \tag{B1.23}$$

οπότε οι ακριβείς πλέον εξισώσεις ισορροπίας (πρόγραμμα *General2.nb,* όπου επίσης υπολογίζονται και οι ορίζουσες ευστάθειας) έχουν ως εξής:

$$\frac{\partial V_{T,exact}^{transf.,p}}{\partial w_s}=\left\{\begin{array}{l} 4w_s\left(3w_a^2+2w_s^2\right)+ \\ \dfrac{(w_a-w_s)\lambda-\beta\left(arcsin[2w_a]+arcsin[w_a-w_s]\right)}{\sqrt{1-(w_a-w_s)^2}}+ \\ \dfrac{-(w_a+w_s)\lambda-\beta\left(arcsin[2w_a]+arcsin[w_a+w_s]\right)}{\sqrt{1-(w_a+w_s)^2}} \end{array}\right\}=0 \tag{B1.24α}$$

και

$$\frac{\partial V_{T,exact}^{transf.,p}}{\partial w_a}=\left\{\begin{array}{l} 4w_a\left(3w_a^2+2w_s^2\right)+ \\ \dfrac{(-w_a+w_s)\lambda+\beta\left(arcsin[2w_a]+arcsin[w_a-w_s]\right)}{\sqrt{1-(w_a-w_s)^2}}+ \\ \dfrac{-(w_a+w_s)\lambda+\beta\left(arcsin[2w_a]+arcsin[w_a+w_s]\right)}{\sqrt{1-(w_a+w_s)^2}}+ \\ \dfrac{-4w_a\lambda+2\beta\left(2\,arcsin[2w_a]+arcsin[w_a-w_s]+arcsin[w_a+w_s]\right)}{\sqrt{1-4w_a^2}} \end{array}\right\}=0 \tag{B1.24β}$$

Ακολουθώντας διαδικασία παρόμοια με αυτή που εφαρμόστηκε για τη διακλαδική ανάλυση του τέλειου συστήματος, πέραν της τετριμμένης λύσης (η οποία αποτελεί

και εδώ συμβατή μορφή παραμόρφωσης για κάθε τιμή του φορτίου λ) διακρίνουμε τις εξής κατ' αναλογία με τα προηγούμενα περιπτώσεις:

- **Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (συμμετρική παραμόρφωση):** $w_s \neq 0, w_a = 0$

Ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας, σχετιζόμενος με ***συμμετρική παραμόρφωση***, δίδεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$\frac{\partial V_{T,exact}^{transf,p}}{\partial w_s} = 0 \Big|_{w_a=0} \rightarrow \lambda_1 = 4w_s^2\sqrt{1-w_s^2} + \frac{\beta\, arcsin[w_s]}{w_s} \tag{B1.25}$$

Η συνάρτηση $\lambda_1(w_s)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $w_s = 0$, οπότε δεν υφίσταται ουσιαστικά σημείο τομής του συγκεκριμένου δρόμου με τον τετριμμένο. Πλην όμως, το όριο της συνάρτησης αυτής για $w_s \rightarrow 0$ βρίσκεται ίσο με

$$\lambda_{cr1}^{exact} = \lim_{ws\rightarrow 0}(\lambda_1) = \beta \tag{B1.26}$$

που αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο ισορροπίας C_1 της προσεγγιστικής ανάλυσης του τέλειου συστήματος.

- **Δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (αντισυμμετρική παραμόρφωση):** $w_s = 0, w_a \neq 0$

Κατ' αναλογία, ***ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας*** δίδεται από τη συνάρτηση

$$\frac{\partial V_{T,exact}^{transf,p}}{\partial w_a} = 0 \Big|_{w_s=0} \rightarrow \lambda_2 = \begin{cases} \frac{2}{3}w_a^2\left(-2\sqrt{1-4w_a^2}\left(-1+w_a^2\right)+\sqrt{1-w_a^2}\left(-1+4w_a^2\right)\right)+ \\ \frac{\beta(arcsin[w_a]+arcsin[2w_a])}{w_a} \end{cases} \tag{B1.27}$$

η οποία επίσης παρουσιάζει ασυνέχεια για $w_a = 0$ και κατ' ουσία δεν τέμνει τον τετριμμένο δρόμο ισορροπίας. Το όριο της όμως για $w_a \rightarrow 0$ είναι το δεύτερο κρίσιμο σημείο ισορροπίας C_2, αφού ισχύει ότι

$$\lambda_{cr2}^{exact} = \lim_{w_a\rightarrow 0}(\lambda_2) = 3\beta \tag{B1.28}$$

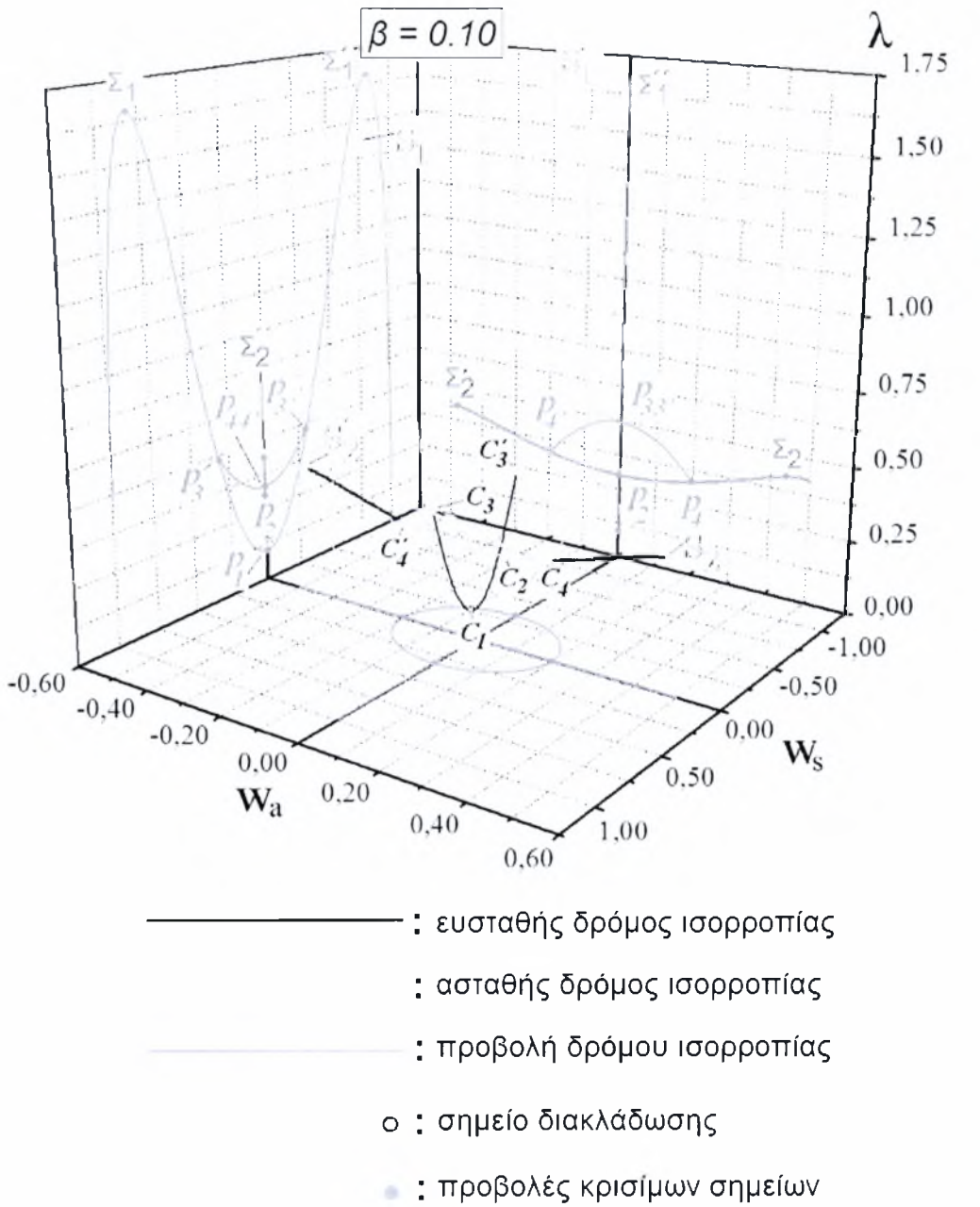
Οι συναρτήσεις $\lambda_1(w_s;\beta)$ και $\lambda_2(w_a;\beta)$ χρήζουν ιδιαίτερης διερεύνησης, η οποία πραγματοποιείται μέσω συμβολικών μαθηματικών και στοιχείων της θεωρίας των πεπλεγμένων συναρτήσεων. Τα αποτελέσματα της πλήρους παραμετρικής διερεύνησης των δύο αυτών δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας φαίνονται στα προγράμματα *Διερεύνηση 1ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb* και *Διερεύνηση 2ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb* του Παραρτήματος, όπου διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις αυτές, ανάλογα με την τιμή του β δυνατόν να παρουσιάσουν και τοπικά μέγιστα – οριακά σημεία. *Πιο συγκεκριμένα βρέθηκε ότι ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (συνάρτηση με ασυνέχεια στη θέση $\lambda=\beta$ και συμμετρική ως προς λ) διαθέτει για $\beta < \beta_1 = 4.69088$ και δύο τοπικά μέγιστα (οριακά σημεία), ενώ για $\beta > \beta_1$ είναι μονοτονικά αύξουσα, παρουσιάζει δε για $\beta = \beta_1$ σημείο καμπής.* Αντίστοιχα, ο 2ος *δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (συνάρτηση με ασυνέχεια στη θέση $\lambda=3\beta$ και συμμετρική ως προς λ) διαθέτει για $\beta < \beta_2 = 0.126161$ και δύο τοπικά μέγιστα (οριακά σημεία), ενώ για $\beta > \beta_2$ είναι μονοτονικά αύξουσα, παρουσιάζει δε για $\beta = \beta_2$ σημείο καμπής.* Για λόγους σύγκρισης με τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής ανάλυσης που προηγήθηκε, αλλά και για να καλυφθεί και η περίπτωση ύπαρξης και οριακών σημείων στους δύο πρώτους δευτερεύοντες δρόμους ισορροπίας επιλέγεται εκ νέου η τιμή $\beta=0.10$.

Για την τιμή αυτή της παραμέτρου β, σύμφωνα με το πρόγραμμα *b one exact.nb*, ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει, πέραν της ασυνέχειας-ανωμαλίας στο σημείο $w_s = 0, \lambda = \beta = 0.10$, δύο *οριακά σημεία* S_1 και S_1' για $w_s = \pm 0.818986, \lambda = 1.65669$, ενώ ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει αντίστοιχα, πέραν της ασυνέχειας-ανωμαλίας στο σημείο $w_a = 0, \lambda = 3\beta = 0.30$, επίσης δύο *οριακά σημεία* S_2 και S_2' για $w_a = \pm 0.480114$, $\lambda = 0.428062$. Ο πρώτος και δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας του τέλειου συστήματος για $\beta=0.10$, τόσον προϊόν της προσεγγιστικής όσον και της ακριβούς ανάλυσης παρατίθενται γραφικά στο πρόγραμμα *paths.nb*.

- **Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (γενική παραμόρφωση):** $w_s \neq 0, w_a \neq 0$

Τα σημεία του ***3ου*** αυτού ***δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας*** προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας των σχέσεων (Β1.24α,β). Η πλήρης παραμετρική διερεύνηση των συνθηκών εκείνων, υπό τις οποίες ο δρόμος αυτός τέμνει τον 1ο και 2ο δευτερεύοντα, καταγράφεται στα προγράμματα *search3.nb*, *search3b.nb*, *search3c.nb* και *search3d.nb*. Σύμφωνα με τη διερεύνηση αυτή, και εντός των φυσικά αποδεκτών ορίων παραμόρφωσης του συστήματος $-1 \le w_s \le 1$, $-0.5 \le w_a \le 0.5$, **για να τέμνονται ο 3ος δευτερεύων δρόμος τόσο με τον 1ο όσο και με τον 2ο θα πρέπει να ισχύει** $\beta < 0.42815$. Κατά συνέπεια η επιλογή της τιμής της παραμέτρου β=0.10 καλύπτει και τη συγκεκριμένη περίπτωση. Για την εν λόγω τιμή του β υπολογίζονται αριθμητικά τα σημεία του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, ο οποίος τέμνει τον 1ο δευτερεύοντα δρόμο στα κρίσιμα σημεία C_3, C_3', που αντιστοιχούν σε $w_s = \pm 0.321205, w_a = 0, \lambda = 0.492627$ και τον δεύτερο δευτερεύοντα δρόμο στα κρίσιμα σημεία C_4, C_4', τα οποία αντιστοιχούν σε $w_s = 0, w_a = \pm 0.197611, \lambda = 0.33060997$. Παρατηρούμε συνεπώς ότι τα εν λόγω κρίσιμα σημεία πρακτικά ταυτίζονται με τα αντίστοιχα της προσεγγιστικής ανάλυσης, επιπρόσθετα δε, όπως προκύπτει από τα προγράμματα *Ευστάθεια - ακριβώς - συμβολικά.nb* και *Ευστάθεια κρισίμων σημείων-ακριβώς.nb*, ισχύει από πλευράς ευστάθειας των σημείων ισορροπίας όλων των δρόμων και από πλευράς είδους και ευστάθειας κρισίμων σημείων ***ακριβώς ότι βρέθηκε*** στην προσεγγιστική ανάλυση του τέλειου συστήματος. Μοναδική φυσικά διαφοροποίηση αποτελεί η ύπαρξη στον μεν πρώτο δευτερεύοντα δρόμο των οριακών σημείων S_1, S_1', τα οποία αντιστοιχούν σε $w_s = \pm 0.818986, w_a = 0, \lambda = 1.65669$, στον δε δεύτερο δευτερεύοντα των οριακών σημείων S_2, S_2', τα οποία αντιστοιχούν σε $w_s = 0$, $w_a = \pm 0.480114, \lambda = 0.428062$. Η παρουσία των S_1, S_1' στον 1ο δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας δεν αλλάζει την ευστάθεια του πέραν των C_3, C_3' *(ο δρόμος παραμένει ασταθής)*, ενώ αντίθετα πέραν των S_2, S_2' ο δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας καθίσταται *ασταθής*. Σημειωτέον ότι αμφότερα τα ζεύγη των οριακών σημείων των δύο πρώτων δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας εμφανίζονται για τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων πλησίον των φυσικά αποδεκτών ορίων τους, οπότε

ουσιαστικά επηρεάζουν ελάχιστα την μεταλυγισμική διακλαδική συμπεριφορά του συστήματος. Οι δρόμοι ισορροπίας του τέλειου συστήματος για $\beta=0.10$, προϊόν πλέον ακριβούς ανάλυσης, **καθώς και** η ευστάθεια αυτών αλλά και όλων των κρισίμων σημείων (οριακών και διακλάδωσης) απεικονίζονται εποπτικά στο τρισδιάστατο διάγραμμα του Σχήματος Β1.4.



Σχήμα Β1.4. Δρόμοι ισορροπίας του τέλειου συστήματος στο χώρο και προβολές τους, για $\beta=0.10$, προϊόντα ακριβούς ανάλυσης.

(γ) Ατελές σύστημα – προσεγγιστική ανάλυση

Με σκοπό την αποφυγή ασυνεχειών, οι οποίες παρουσιάζονται στους δρόμους ισορροπίας, όπως αυτοί προκύπτουν από την ακριβή ανάλυση του τέλειου συστήματος, αλλά κύρια λόγω του γεγονότος ότι η προσεγγιστική ανάλυση είναι εξαιρετικά ακριβής και άκρως αντιπροσωπευτική της όλης προ- και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αυτού, στη συνέχεια η μη γραμμική ανάλυση στατικής ευστάθειας του ατελούς συστήματος θα βασιστεί στην προσεγγιστική έκφραση της συνάρτησης του συνολικού δυναμικού που δόθηκε ήδη στην σχέση (Β1.13).

Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν τη συμπεριφορά του ατελούς συστήματος βρίσκονται συμβολικά (*General3.nb*) και έχουν ως εξής:

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} -8(e_s-w_s)^3-4(e_a+e_s-w_a-w_s)^3+4(e_a-e_s-w_a+w_s)^3- \\ \frac{\beta}{3}\left[6e_s\left(2+w_a^2+w_s^2\right)-w_s\left(-36e_a w_a+\left(6+3w_a^2+w_s^2\right)\left(2+7w_a^2+w_w^2\right)\right)\right]- \\ 2w_s\left(2+3w_a^2+w_s^2\right)\lambda \end{array}\right\}=0$$

(Β1.29α,β)

$$\frac{1}{2}e\left\{\begin{array}{l} -4(e_a+e_s-w_a-w_s)^3-4(e_a-e_s-w_a+w_s)^3+ \\ \left[-6e_a\left(6+9w_a^2+w_s^2\right)+w_a\left(36+27w_a^4-4e_s w_s+16w_s^2+\frac{5}{3}w_s^4+2w_a^2\left(36+7w_s^2\right)\right)\right]\beta- \\ 6w_a\left(2+3w_a^2+w_s^2\right)\lambda \end{array}\right\}=0$$

1. Συμμετρική αρχική ατέλεια $e_s\neq 0, e_a=0$

Για συμμετρική αρχική ατέλεια παραπάνω οι εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνουν την μορφή:

$$1/2\ (-8(e_s-w_s)^3-4(e_a-w_a-w_s)^3-4(e_s+w_a-w_s)^3-$$

$$1/3\ (6e_s(2+w_a^2+w_s^2)-w_s(6+3w_a^2+w_s^2)(2+7w_a^2+w_s^2))\beta-$$

$$2w_s(2+3w_a^2+w_s^2)\lambda)=0$$

(Β1.30α)

$$1/2\ (-4\ (e_s - w_a - w_s)^3 + 4\ (e_s + w_a - w_s)^3 +$$

$$w_a\ (36 + 27\ w_a^4 - 4\ e_s\ w_s + 16\ w_s^2 + (5\ w_s^4 / 3) + 2\ w_a^2\ (36 + 7\ w_s^2))\ \beta -$$

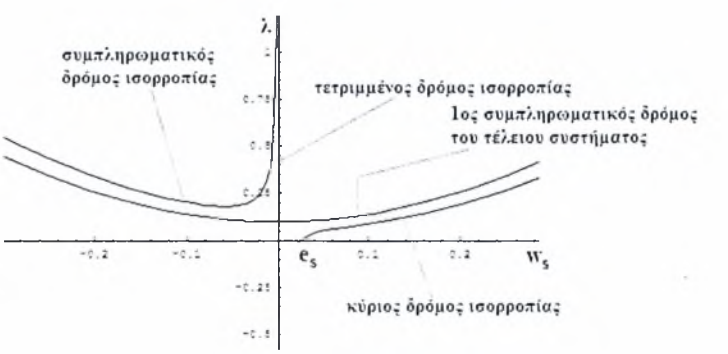
$$6\ w_a\ (2 + 3\ w_a^2 + w_s^2)\ \lambda) = 0 \qquad \text{(B1.30β)}$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις επιδέχονται δύο είδη λύσεων. Το ένα σχετίζεται με μηδενική αντισυμμετρική παραμόρφωση και οδηγεί στην ακόλουθη αναλυτική έκφραση

$$\begin{cases} \lambda_1^{imp} = \dfrac{1}{6w_s}\left\{\dfrac{48(w_s - e_s)^3}{2 + w_s^2} + \beta\left[w_s^3 + 6w_s - 6e_s\right]\right\} \\ w_a = 0 \end{cases} \qquad \text{(B1.31)}$$

ενώ το άλλο, που προκύπτει μόνον αριθμητικά, σχετίζεται με μη μηδενικές τιμές και των δύο γενικευμένων συντεταγμένων.

Η εξίσωση (B1.31) ουσιαστικά περιγράφει τον ***κύριο αλλά και τον συμπληρωματικό (φυσικά μη αποδεκτό) δρόμο ισορροπίας του ατελούς συστήματος***, οι οποίοι σχετίζονται ***μόνο με συμμετρική παραμόρφωση*** και αποτελούν ***διαταραχή του τετριμμένου και του 1ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας*** του τέλειου συστήματος. Τούτο καθόσον η συνάρτηση $\lambda_1^{imp}(w_s)$, για σταθερή τιμή της παραμέτρου β, που στο εξής θα ληφθεί ίση με $\beta=0.10$ (προκειμένου να υπάρξει αντιπροσωπευτική και συγκριτική μελέτη των διαταραγμένων πλέον διακλαδώσεων), για μεν ομόσημα e_s, w_s εκκινεί από το σημείο που περιγράφει την αρχική ατέλεια $w_s = e_s, \lambda = 0$ και είναι μονοτονικά αύξουσα, για δε ετερόσημα e_s, w_s περιγράφει συμπληρωματικό (φυσικά μη αποδεκτό) δρόμο ισορροπίας, όπως ενδεικτικά φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, όπου έχει χαραχθεί και ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορ-



ροπίας του τέλειου συστήματος. Ο συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει ***οριακό σημείο***, το οποίο δύναται να προσδιοριστεί – καθώς και τα υπόλοιπα, εφόσον υπάρχουν, κρίσιμα σημεία τόσον του φυσικού όσον και του συμπληρωματικού δρόμου – μηδενίζοντας τις ελάσσονες ορίζουσες ευστάθειας, σύμφωνα με τα προγράμματα *General3.nb*, *imperf1.nb*, *imperf2.nb*, *imperf11.nb*, *imp quest.nb* και *fully imperfect critical points.nb*. Η ευστάθεια όλων των σημείων ισορροπίας (κρίσιμων και μη) μελετάται μέσω συμβολικών μαθηματικών με τα προγράμματα *Ευστάθεια ατελούς προσεγγιστικά συμβολικά.nb* και *Ευστάθεια κρισίμων σημείων - προσεγγιστικά imp.nb*.

Με σκοπό τη διερεύνηση των διαταραχών των διακλαδώσεων, επιλέγεται μια μεγάλη γκάμα τιμών της συμμετρικής αρχικής ατέλειας $\pm 0.001 \le e_s \le \pm 0.50$ και υπολογίζονται *όλα τα κρίσιμα σημεία* που υφίστανται σε *όλους τους δρόμους ισορροπίας*. Μετά από πλήρη παραμετρική ανάλυση βρέθηκε ότι από τα ανωτέρω εκτεθέντα προκύπτει πως ***η εισαγωγή της διαταραχής*** (*της συμμετρικής αρχικής ατέλειας* e_s) οδηγεί σε ***μερική διάσπαση της συμμετρίας***. Πιο συγκεκριμένα το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης C_1 μεταπίπτει στο οριακό σημείο S_1 του συμπληρωματικού δρόμου του ατελούς συστήματος, και το σύστημα εμφανίζει ***μια ανεξάρτητη καταστροφή τύπου διπλής αιχμής***, η οποία λαμβάνει χώραν για οποιαδήποτε τιμή του e_s.

Πέραν του φαινομένου αυτού, ***το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης*** C_3 ***του τέλειου συστήματος (επί του*** $1^{ου}$ ***δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας) γεννά το επίσης συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης*** C_3^{imp}***, επί του μονοτονικά αύξοντα κύριου δρόμου ισορροπίας του ατελούς συστήματος, διαχωρίζοντας αυτόν από πλευράς ευστάθειας με τον ίδιο τρόπο που το*** C_3 ***διαχωρίζει τον*** $1^{ου}$ ***δευτερεύοντα του τέλειου συστήματος, δηλαδή από την αρχική θέση ισορροπίας μέχρι το*** C_3^{imp}***, ο κύριος δρόμος είναι ευσταθής και μετά καθίσταται ασταθής.***

Εκ νέου συνεπώς παρατηρείται το ***φαινόμενο καταστροφής τύπου διπλής αιχμής*** εκ του C_3, ***η οποία όμως δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά συνδέεται και με άλλες διπλές αιχμές, που προέρχονται από την διαταραχή***

των διακλαδικών σημείων $C_3^{'}$ ***και*** C_2. Πράγματι, ***για μικρές τιμές του*** e_s, ***ο συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας του ατελούς συστήματος, παρουσιάζει εκτός του οριακού σημείου, δύο συμμετρικά ασταθή διακλαδικά σημεία*** $C_3^{'imp}$ ***και*** C_2^{imp}, ***τα οποία γεννώνται από την διαταραχή των επίσης ασταθών συμμετρικών σημείων διακλάδωσης*** $C_3^{'}$ ***και*** C_2 ***του*** $1^{ου}$ ***δευτερεύοντα και του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος αντίστοιχα. Καθώς η τιμή του αυξάνεται απόλυτα, τα κρίσιμα σημεία*** $C_3^{'imp}$, C_2^{imp} ***πλησιάζουν μεταξύ τους, και για*** $e_s^{cr}=\pm 0.0679$ ***ταυτίζονται και εξαφανίζονται, οπότε για*** $\left|e_s^{cr}\right|>0.0679$ ***ο συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας διαθέτει μόνο ένα κρίσιμο σημείο, το οριακό σημείο*** S_1. ***Σαφώς παρουσιάζονται δύο ακόμα βρόγχοι διαταραγμένων διακλαδώσεων αλληλοεξαρτώμενοι, που εκκινούν από το*** C_2 ***και καταλήγουν στα*** $C_3, C_3^{'}$, ***για να συνδεθούν εκεί με την διπλή αιχμή λόγω της διαταραχής του*** C_3 ***στον κύριο δρόμο. Κατά συνέπεια <u>τρεις διπλές αιχμές αλληλεξαρτώνται και συνδέονται</u>, σπουδαιότατο εύρημα που απαντάται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία***[30]. ***Από πλευράς ευστάθειας, όπως άλλωστε και τα αντίστοιχα σημεία διακλάδωσης του τέλειου συστήματος, μόνο το*** $C_3^{'imp}$ ***αλλάζει σε συνδυασμό με το*** S_1 ***την ευστάθεια του συμπληρωματικού δρόμου, ενώ η παρουσία του*** C_2^{imp} ***δεν οδηγεί σε αλλαγή της ευστάθειας***. Φυσικά, ***η ύπαρξη των διακλαδικών σημείων*** C_2^{imp}, C_3^{imp} ***και*** $C_3^{'imp}$ ***οφείλεται σε τομή των κλάδων ισορροπίας στους οποίους ανήκουν με άλλους συμπληρωματικούς δρόμους ισορροπίας***, οι οποίοι ***προέρχονται από την διαταραχή του*** $3^{ου}$ ***δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος***.

Όντως, ***το σύστημα εκτός από τον κύριο και το συμπληρωματικό δρόμο ισορροπίας στο επίπεδο*** (w_s,λ) ***διαθέτει και δύο δευτερεύοντες δρόμους ισορροπίας στο χώρο, οι οποίοι είναι καμπύλες συμμετρικές ως προς το επίπεδο αυτό. Εξ αυτών, ο*** $1^{ος}$ ***δευτερεύων δρόμος ισορροπίας διέρχεται από το*** C_3^{imp}, ***είναι ανοικτή καμπύλη στο χώρο και εμφανίζει δύο οριακά σημεία*** Σ_1 ***και*** $\Sigma_1^{'}$, ***τα οποία αποτελούν διαταραχές των*** C_4 ***και*** $C_4^{'}$ ***αντίστοιχα, μορφώνοντας δύο επί πλέον συμμετρικές διπλές αιχμές στο χώρο. Η***

παρουσία των οριακών αυτών σημείων αλλάζει την ευστάθεια του δρόμου αυτού, ο οποίος από το C_3^{imp} ***μέχρι αυτά είναι ασταθής και πέραν αυτών ευσταθής. Αντίθετα, ο*** $2^{ος}$ ***δευτερεύων δρόμος ισορροπίας του ατελούς συστήματος ναι μεν έχει και αυτός το*** (w_s, λ) ***ως επίπεδο συμμετρίας, πλην όμως είναι κλειστή καμπύλη στο χώρο συνδέουσα τα διακλαδικά σημεία*** C_2^{imp} ***και*** C_3^{imp} ***, και επίσης είναι παντού ασταθής.***

Οι τιμές όλων των κρίσιμων σημείων του κύριου, του συμπληρωματικού αλλά και των δύο δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας παρουσιάζονται στους Πίνακες Β1 και Β2, οι οποίοι ακολουθούν.

e_s	**Οριακά σημεία** Σ_1 **και** Σ'_1 **του** $1^{ου}$ **δευτερεύοντα δρόμου του ατελούς συστήματος. που διέρχεται από το** C_3^{imp}		
	w_s	w_a	λ
0.001	0,0259485	± 0,203455	0,333345
0.005	0,0478853	± 0,214851	0,339072
0.010	0,0642929	± 0,224829	0,34424
0.015	0,0774081	± 0,23308	0,348613
0.020	0,0889495	± 0,240368	0,352545
0.025	0,0995378	± 0,247011	0,356182
0.030	0,109477	± 0,253182	0,359601
0.035	0,11894	± 0,258985	0,362852
0.040	0,128039	± 0,264492	0,365965
0.045	0,136846	± 0,269754	0,368963
0.050	0,134516	± 0,274808	0,371863
0.055	0,153789	± 0,279683	0,374679
0.060	0,161993	± 0,284403	0,37742
0.061	0,163615	± 0,28533	0,37796
0.062	0,165233	± 0,286251	0,378497
0.063	0,166844	± 0,287167	0,379032
0.064	0,168451	± 0,288078	0,379564
0.065	0,170052	± 0,288984	0,380094
0.066	0,171648	± 0,289886	0,380622
0.067	0,17324	± 0,290782	0,381147
0.0675	0,174033	± 0,291229	0,381408

e_s	w_s	w_a	λ
0.0676	0,174192	± 0,291318	0,381461
0.0677	0,174351	± 0,291407	0,381513
0.0678	0,174509	± 0,291496	0,381565
0.0679	0,174668	± 0,291585	0,381617
0.06795	0,174747	± 0,291629	0,381643
0.070	0,177986	± 0,293444	0,382709
0.075	0,185809	± 0,297793	0,385269
0.080	0,193534	± 0,302044	0,387779
0.090	0,208732	± 0,310282	0,392667
0.100	0,223646	± 0,318218	0,397398
0.110	0,238326	± 0,325897	0,401993
0.120	0,25281	± 0,333355	0,406468
0.130	0,267127	± 0,340619	0,410834
0.140	0,281301	± 0,347715	0,415103
0.150	0,29535	± 0,354661	0,419284
0.160	0,309292	± 0,361473	0,423383
0.170	0,32314	± 0,368167	0,427409
0.180	0,336904	± 0,374753	0,431365
0.190	0,350594	± 0,381242	0,435257
0.200	0,36422	± 0,387644	0,43909
0.225	0,398042	± 0,403317	0,448436
0.250	0,43159	± 0,418595	0,457485
0.275	0,464933	± 0,433559	0,466279
0.300	0,498121	± 0,44827	0,474854
0.350	0,564193	± 0,477131	0,491458
0.400	0,630051	± 0,505487	0,5075
0.450	0,695865	± 0,533561	0,523144
0.500	0,76176	± 0,561521	0,538535

Πίνακας Β1. Οριακά σημεία του 1^{ου} δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας του ατελούς συστήματος με συμμετρική αρχική ατέλεια (για e_s<0 ισχύουν ίσες και αντίθετες τιμές του w_s)

e_s	Μονοτονικά αύξων φυσικός δρόμος ισορροπίας (w_s , e_s ομόσημα)		Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_s , e_s ετερόσημα)					
	Σημείο διακλάδωσης C_3^{imp}		*Οριακό σημείο* S_1		*Σημεία διακλάδωσης* C_2^{imp}(*) *και* C_3^{imp}(**)			
	w_s	λ	w_s	λ	w_s (*)	λ (*)	w_s (**)	λ (**)
± 0,001	± 0.324003	0.496728	∓ 0.0226928	0.106759	∓0.00050056	0.300005	∓ 0.319354	0.493825
± 0,005	± 0.333227	0.502489	∓ 0.0373237	0.121539	∓ 0.00250705	0.300113	∓ 0.309974	0.487966
± 0,01	± 0.344628	0.509606	∓ 0.0455215	0.137026	∓ 0.00505678	0.300455	∓ 0.29808	0.480535
± 0,015	± 0.355903	0.516643	∓ 0.0508089	0.151974	∓ 0.0076945	0.301033	∓ 0.285971	0.472968
± 0,02	± 0.367064	0.523605	∓ 0.0547721	0.167049	∓ 0.0104683	0.301862	∓ 0.273611	0.465242
± 0,025	± 0.378123	0.530499	∓ 0.0579807	0.182527	∓ 0.0134368	0.302962	∓ 0.260956	0.457332
± 0,03	± 0.389092	0.537335	∓ 0.0607109	0.198564	∓ 0.016669	0.304367	∓ 0.247945	0.449196
± 0,035	± 0.399977	0.544112	∓ 0.0631195	0.215261	∓ 0.0202539	0.306121	∓ 0.234499	0.440788
± 0,04	± 0.410789	0.55084	∓ 0.0653047	0.232695	∓ 0.0243115	0.308292	∓ 0.220505	0.432032
± 0,045	± 0.421532	0.557518	∓ 0.0673318	0.250925	∓ 0.0290149	0.310981	∓ 0.205797	0.422825
± 0,05	± 0.432215	0.564155	∓ 0.0692463	0.270000	∓ 0.0346352	0.314356	∓ 0.19011	0.412996
± 0,055	± 0.442841	0.570747	∓ 0.0710812	0.289963	∓ 0.0416497	0.318714	∓ 0.172972	0.402244
± 0,06	± 0.453416	0.577301	∓ 0.072861	0.310849	∓ 0.0510755	0.324702	∓ 0.153371	0.389918
± 0,061	± 0.45525	0.578607	∓ 0.073212	0.31514	∓ 0.0534403	0.326217	∓ 0.148966	0.387145

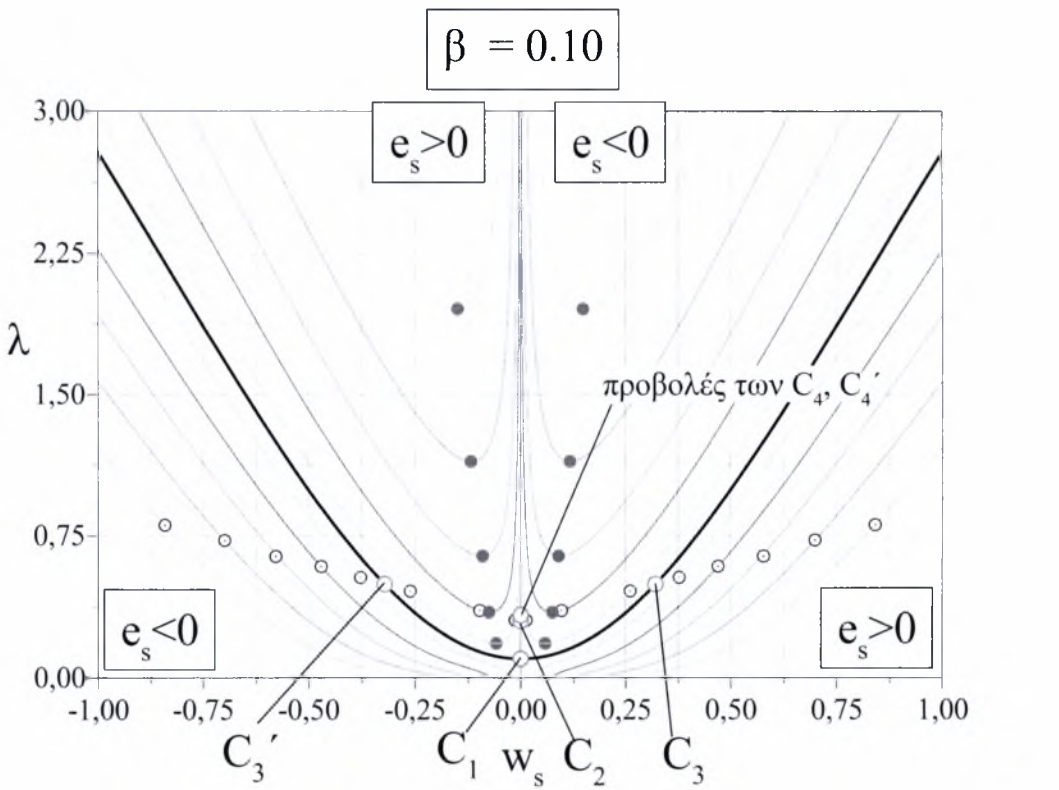
e_s	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_s , e_s ομόσημα)		Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_s , e_s ετερόσημα)					
	Σημείο διακλάδωσης C_3^{imp}		*Οριακό σημείο* S_1		*Σημεία διακλάδωσης* C_2^{imp}(*) *και* C_3^{imp}(**)			
	w_s	λ	w_s	λ	w_s (*)	λ (*)	w_s (**)	λ (**)
± 0,062	± 0.457633	0.579913	∓ 0.0735617	0.31947	∓ 0.0560476	0.32789	∓ 0.144316	0.384213
± 0,063	± 0.459738	0.581215	∓ 0.0739102	0.323839	∓ 0.0589632	0.329764	∓ 0.139355	0.381082
± 0,064	± 0.461842	0.582518	∓ 0.0742576	0.328246	∓ 0.0622894	0.331905	∓ 0.133983	0.377688
± 0,065	± 0.463944	0.583818	∓ 0.074604	0.332693	∓ 0.0661993	0.334422	∓ 0.128025	0.373919
± 0,066	± 0.466045	0.585119	∓ 0.0749495	0.33718	∓ 0.0710363	0.337536	∓ 0.121138	0.369556
± 0,067	± 0.468144	0.586417	∓ 0.0752942	0.341706	∓ 0.0777175	0.341833	∓ 0.112405	0.36401
± 0,0675	± 0.469192	0.587064	∓ 0.0754663	0.343984	∓ 0.0828036	0.3451	∓ 0.106293	0.360121
± 0,0676	± 0.469402	0.587194	∓ 0.0755007	0.34444	∓ 0.0841791	0.345983	∓ 0.104712	0.359114
± 0,0677	± 0.469612	0.587324	∓ 0.0755351	0.344898	∓ 0.0858061	0.3447027	∓ 0.10288	0.357946
± 0,0678	± 0.469821	0.587452	∓ 0.0755695	0.345355	∓ 0.0878867	0.348361	∓ 0.100594	0.356487
± 0,0679	± 0.470031	0.587583	∓ 0.0756038	0.345813	∓ 0.0969428	0.354156	∓ 0.0913322	0.350568
± 0,06795	± 0.470136	0.587648	∓ 0.075621	0.346042	–	–	–	–
± 0,068	± 0.470241	0.587713	∓ 0.075632	0.346272	–	–	–	–
± 0,069	± 0.472336	0.589007	∓ 0.0759816	0.350878	–	–	–	–

e_s	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_s , e_s ομόσημα)		Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_s , e_s ετερόσημα)					
	Σημείο διακλάδωσης C_3^{imp}		*Οριακό σημείο* S_1		*Σημεία διακλάδωσης* C_2^{imp}*(*) και* C_3^{imp}*(**)*			
	w_s	λ	w_s	λ	w_s *(*)*	λ *(*)*	w_s *(**)*	λ *(**)*
± 0,070	± 0.47743	0.590301	∓ 0.0763244	0.355524	–	–	–	–
± 0,080	± 0.495288	0.60317	∓ 0.0797383	0.404252	–	–	–	–
± 0,090	± 0.516015	0.615917	∓ 0.0831641	0.45722	–	–	–	–
± 0,100	± 0.536632	0.628552	∓ 0.0866389	0.514585	–	–	–	–
± 0,110	± 0.557158	0.641083	∓ 0.0901852	0.576478	–	–	–	–
± 0,120	± 0.577607	0.653512	∓ 0.0903816	0.643331	–	–	–	–
± 0,130	± 0.597995	0.66585	∓ 0.0975382	0.714265	–	–	–	–
± 0,140	± 0.618331	0.678094	∓ 0.101355	0.790325	–	–	–	–
± 0,150	± 0.638628	0.690253	∓ 0.105266	0.871247	–	–	–	–
± 0,160	± 0.658892	0.702322	∓ 0.109271	0.957083	–	–	–	–
± 0,170	± 0.679133	0.714308	∓ 0.113367	1.04787	–	–	–	–
± 0,180	± 0.699358	0.72621	∓ 0.117553	1.14364	–	–	–	–
± 0,190	± 0.719573	0.738029	∓ 0.121825	1.24441	–	–	–	–
± 0,200	± 0.739784	0.749766	∓ 0.126181	1.3502	–	–	–	–

e_s	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_s , e_s ομόσημα)		Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_s , e_s ετερόσημα)					
	Σημείο διακλάδωσης C_3^{imp}		*Οριακό σημείο* S_1		*Σημεία διακλάδωσης* C_2^{imp} *(*) και* C_3^{imp} *(**)*			
	w_s	λ	w_s	λ	w_s *(*)*	λ *(*)*	w_s *(**)*	λ *(**)*
± 0,225	± 0.790325	0.778749	∓ 0.137422	1.63671	–	–	–	–
± 0,250	± 0.840938	0.80722	∓ 0.149136	1.9547	–	–	–	–
± 0,275	± 0.891679	0.835182	∓ 0.161303	2.30407	–	–	–	–
± 0,300	± 0.94259	0.862632	∓ 0.17391	2.6846	–	–	–	–
± 0,350	± 1.04506	0.916006	∓ 0.200458	3.53792	–	–	–	–
± 0,400	± 1.14856	0.967366	∓ 0.228898	4.51135	–	–	–	–
± 0,450	± 1.25324	1.01678	∓ 0.259514	5.60049	–	–	–	–
± 0,500	± 1.35923	1.08504	∓ 0.292779	6.79976	–	–	–	–

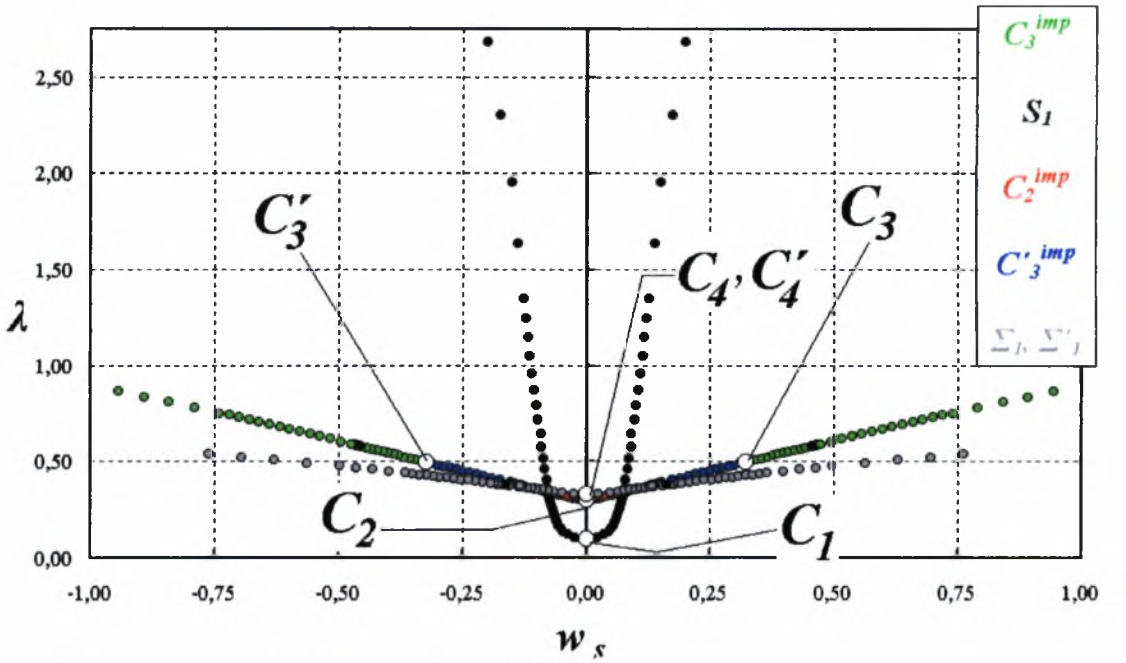
Πίνακας Β2. Κρίσιμα σημεία του κύριου και του συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας του ατελούς συστήματος με *μόνο* συμμετρική παραμόρφωση για διάφορες τιμές της συμμετρικής αρχικής ατέλειας e_s.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται γραφικά μερικοί εκ των κύριων και συμπληρωματικών δρόμων με τα κρίσιμα σημεία τους στο Σχήμα Β1.5, στο οποίο φαίνεται επίσης και ο $1^{ος}$ δευτερεύων δρόμος του τέλειου συστήματος, ο οποίος αντιστοιχεί και αυτός σε συμμετρική παραμόρφωση.

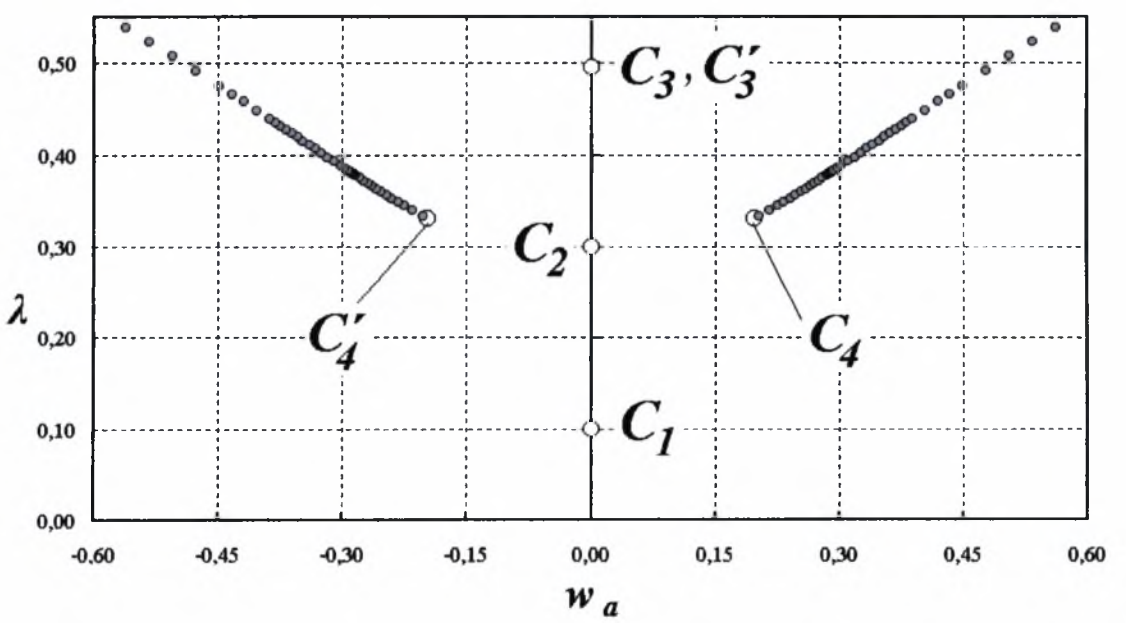


Σχήμα Β1.5. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος για συμμετρική αρχική ατέλεια και *μόνον* συμμετρική παραμόρφωση, με τα κρίσιμα σημεία τους.

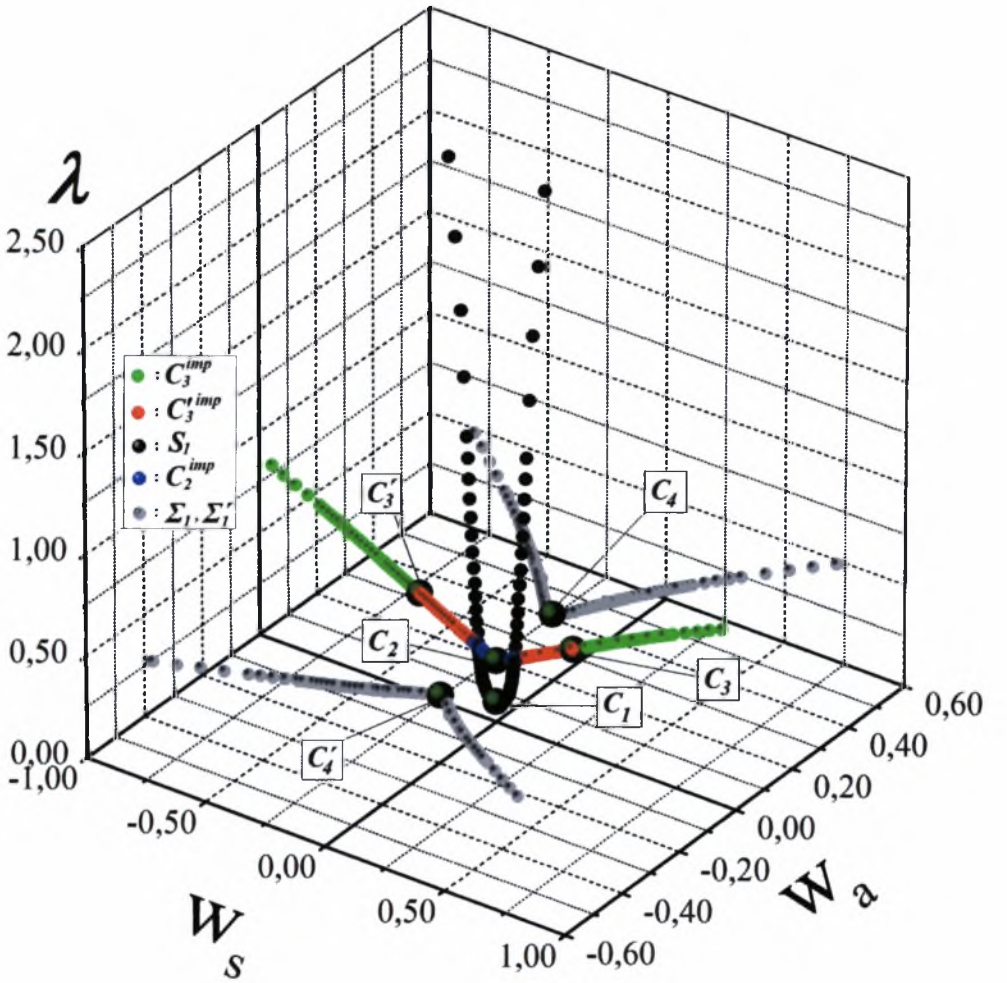
Στη συνέχεια, στο Σχήμα Β1.6α,β,γ αποτυπώνονται όλα τα κρίσιμα σημεία των Πινάκων Β1 και Β2 σε δισδιάστατη και τρισδιάστατη μορφή, ενώ στο μεν Σχήμα Β1.7 φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας (με τους ευσταθείς και ασταθείς κλάδους τους) για δύο χαρακτηριστικές τιμές της συμμετρικής αρχικής ατέλειας e_s, στο δε Σχήμα Β1.8 το διάγραμμα των διαταραγμένων διακλαδώσεων (ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες) όλων των δρόμων των προαναφερθέντων Πινάκων.


C_3^{imp}
S_1
C_2^{imp}
C'^{imp}_3
Σ_1, Σ'_1
C'_3
C_4, C'_4
C_3
C_2
C_1
λ
w_s
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
-1,00
-0,75
-0,50
-0,25
0,00
0,25
0,50
0,75
1,00

(α)

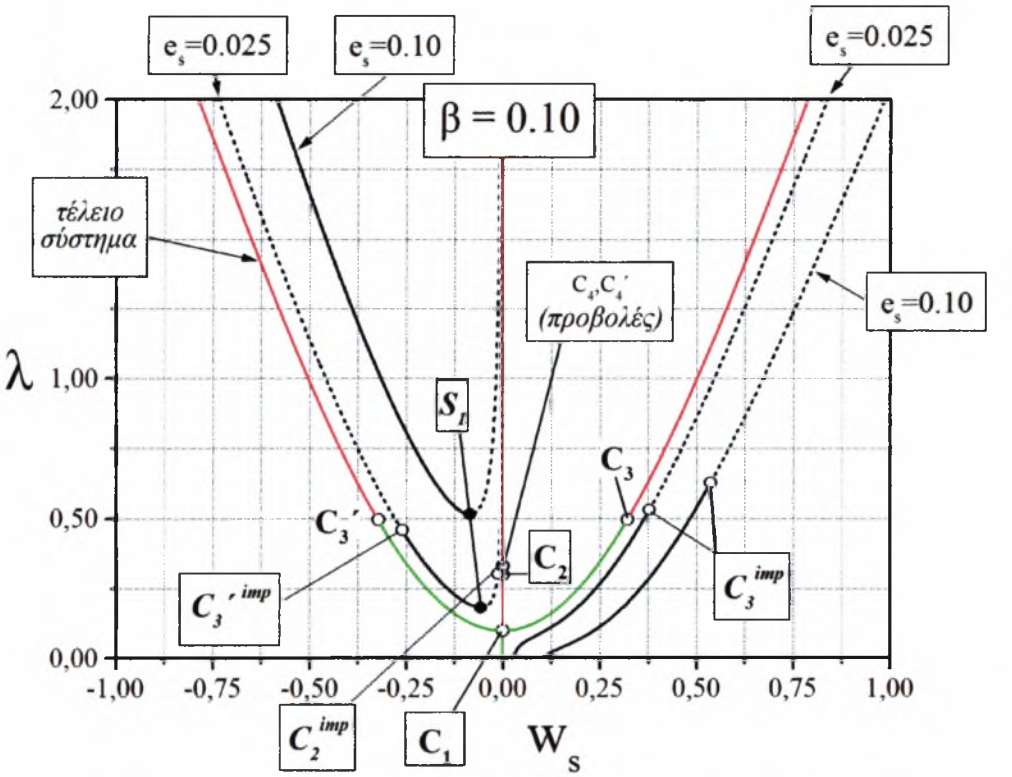

C_3, C'_3
C_2
C'_4
C_4
C_1
λ
w_a
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
-0.60
-0,45
-0,30
-0,15
0,00
0,15
0,30
0,45
0,60

(β)

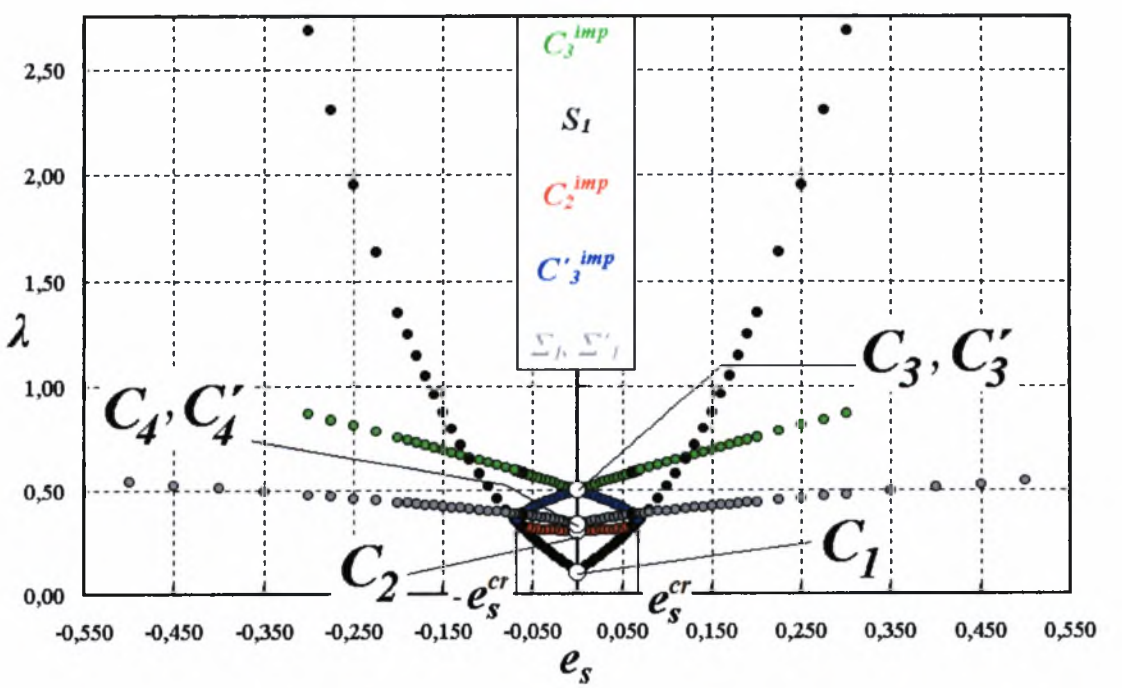


(γ)

Σχήμα Β1.6. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας των Πινάκων Β1, Β2 σε δισδιάστατη (α,β) και τρισδιάστατη (γ) γραφική απεικόνιση.

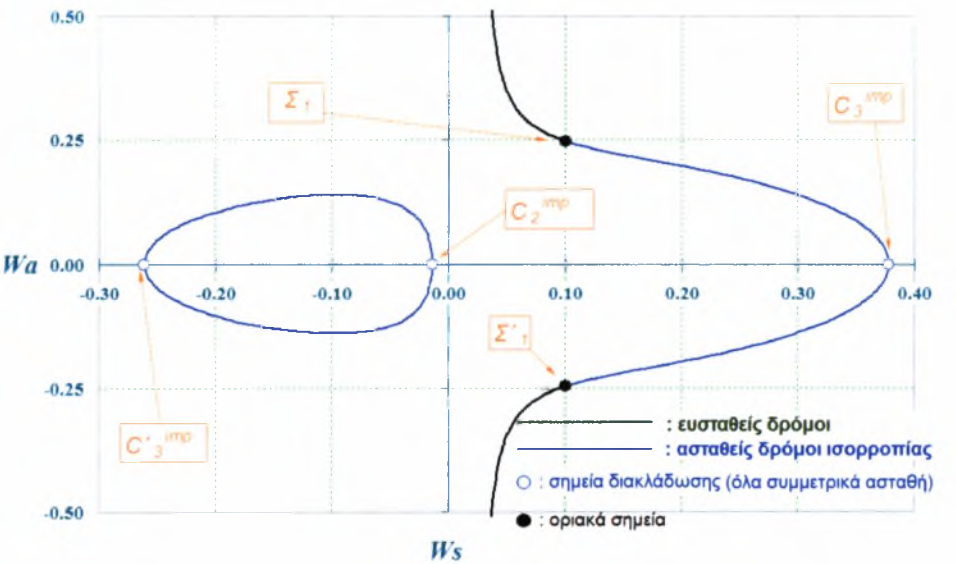


Σχήμα Β1.7. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με *μόνο* συμμετρική παραμόρφωση, για δύο χαρακτηριστικές τιμές της συμμετρικής αρχικής ατέλειας e_s.

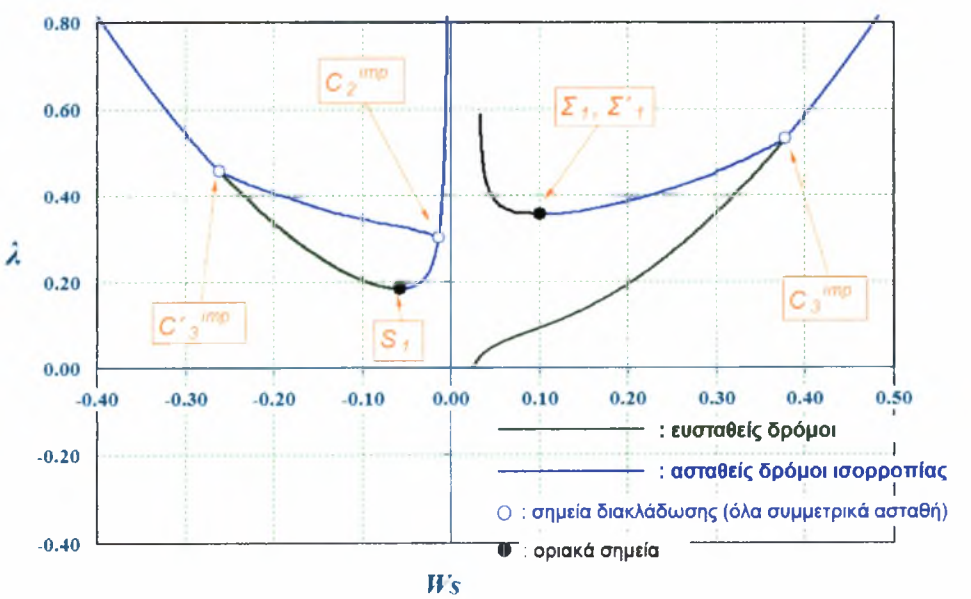


Σχήμα Β1.8. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων (ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες) των Πινάκων Β1 και Β2.

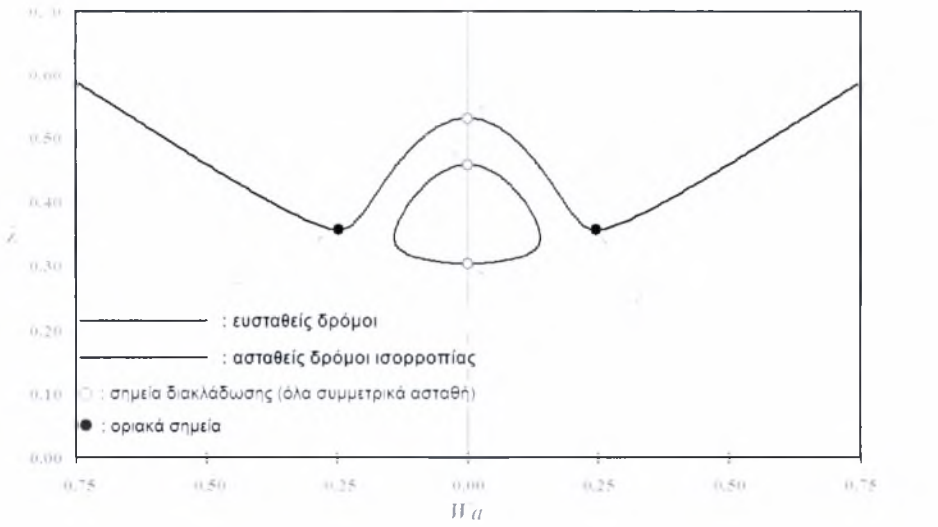
Ως αριθμητική εφαρμογή επιλέγεται η τιμή $e_s = 0.025$, για την οποία υφίστανται διακλαδικά σημεία τόσον στον κύριο όσο και στο συμπληρωματικό δρόμο ισορροπίας του ατελούς συστήματος για *μόνο* συμμετρική παραμόρφωση αυτού. Σύμφωνα με τα ανωτέρω εκτεθέντα, υπολογίστηκαν όλοι οι δρόμοι ισορροπίας (κύριος, συμπληρωματικός και δευτερεύοντες), οι προβολές των οποίων στα τρία σχετικά επίπεδα (w_s, w_a), (w_s, λ), (w_a, λ) και η μορφή τους στο χώρο (w_s, w_a, λ) απεικονίζονται στα Σχήματα Β1.9α,β,γ και Β1.10 αντίστοιχα, όπου καταδεικνύεται και η ευστάθεια τους.



(α)

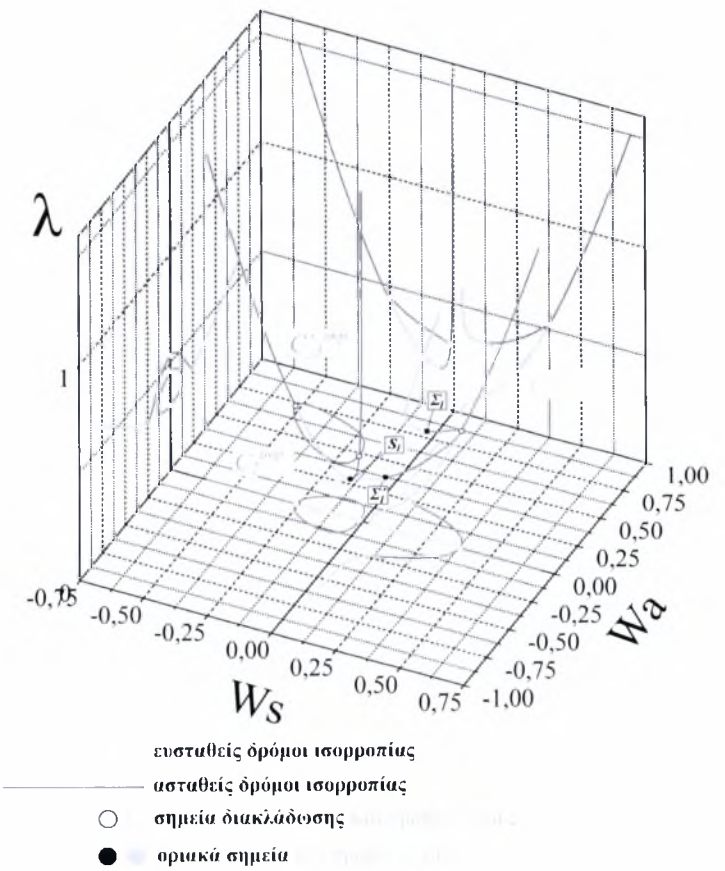


(β)



(γ)

Σχήμα Β1.9. Προβολές των δρόμων ισορροπίας του ατελούς συστήματος για συμμετρική αρχική ατέλεια e_s=0.025.



Σχήμα Β1.10. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος για συμμετρική αρχική ατέλεια e_s=0.025.

Ο 3ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (ασταθής) του τέλειου συστήματος μεταπίπτει συνεπώς σε δύο δευτερεύοντες δρόμους του ατελούς, που διαθέτουν ένα επίπεδο συμμετρίας. Εξ αυτών ο 1ος είναι ανοικτή καμπύλη στο χώρο, διέρχεται από το σημείο διακλάδωσης C_3^{imp} ***του κύριου (φυσικού) δρόμου και παρουσιάζει και δύο οριακά σημεία*** Σ_1 ***και*** Σ'_1***, τα οποία αντιστοιχούν σε*** $w_s = 0.0998124$, $w_a = \pm 0.2468$, $\lambda = 0.356182$ ***και αποτελούν διαταραχή των*** C_4 ***και*** C'_4 ***. Ο δρόμος αυτός είναι ασταθής μεταξύ των οριακών σημείων του και ευσταθής πέραν αυτών. Αντίθετα, ο 2ος δευτερεύων δρόμος συνδέει μεταξύ τους τα διακλαδικά σημεία*** C_2^{imp} ***και*** $C_3'^{imp}$ ***του κύριου και συμπληρωματικού δρόμου αντίστοιχα, είναι δε ασταθής, χωρίς άλλα κρίσιμα σημεία. Οι εν λόγω δρόμοι ευρίσκονται σε διαφορετικό ημίχωρο, η δε μορφή τους δικαιολογεί και την αλληλεξάρτηση – σύνδεση των ανωμαλιών τύπου διπλής αιχμής ως άνω.***

2. Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια $e_s=0, e_a \neq 0$

Εκ νέου με χρήση συμβολικών μαθηματικών, οι εξισώσεις ισορροπίας που δίδονται στις σχέσεις (Β1.29α,β) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$1/2\ (-4\ (e_a - w_a - w_s)^3 + 8\ w_s^3 + 4\ (e_a - w_a + w_s)^3 +$$

$$1/3\ w_s\ (-36\ e_a\ w_a + (6 + 3\ w_a^2 + w_s^2)\ (2 + 7\ w_a^2 + w_s^2))\ \beta -$$

$$2\ w_s\ (2 + 3\ w_a^2 + w_s^2)\ \lambda) = 0$$

(Β1.32α,β)

$$1/2\ (-4\ (e_a - w_a - w_s)^3 - 4\ (e_a - w_a + w_s)^3 +$$

$$(-6\ e_a\ (6 + 9\ w_a^2 + w_s^2) +$$

$$w_a\ (36 + 27\ w_a^4 + 16\ w_s^2 + (5\ w_s^4 / 3) + 2\ w_a^2\ (36 + 7\ w_s^2)))$$

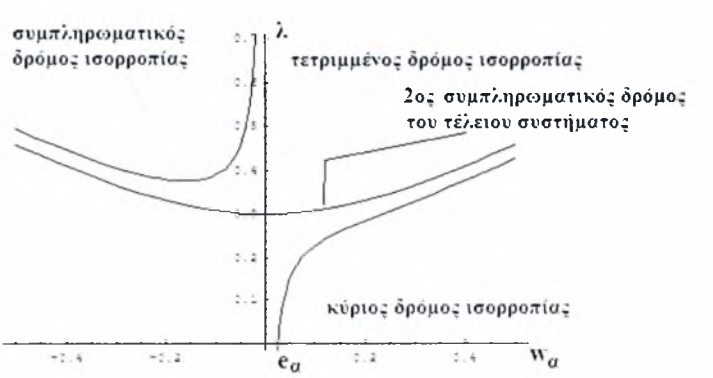
$$\beta - 6\ w_a\ (2 + 3\ w_a^2 + w_s^2)\ \lambda) = 0$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις, όπως και στη περίπτωση συμμετρικής αρχικής ατέλειας, επιδέχονται δύο είδη λύσεων. Το πρώτο σχετίζεται με μηδενική συμμετρική παραμόρφωση και οδηγεί στην ακόλουθη αναλυτική έκφραση

$$\begin{cases} w_s = 0 \\ \lambda_2^{imp} = \dfrac{1}{6w_a}\left\{\dfrac{8(w_a - e_a)^3}{2+3w_a^2} + 9\beta\left[w_a^3 + 2w_a - 2e_a\right]\right\} \end{cases} \qquad \text{(B1.33)}$$

ενώ το δεύτερο, που επίσης προκύπτει μόνον αριθμητικά, σχετίζεται με μη μηδενικές τιμές και των δύο γενικευμένων συντεταγμένων.

Κατ' αναλογία με τη περίπτωση συμμετρικής αρχικής ατέλειας, η εξίσωση (B1.33) ουσιαστικά περιγράφει τον ***κύριο αλλά και τον συμπληρωματικό (φυσικά μη αποδεκτό) δρόμο ισορροπίας του ατελούς συστήματος***, οι οποίοι σχετίζονται ***μόνο με αντισυμμετρική παραμόρφωση*** και αποτελούν ***διαταραχή του τετριμμένου και του 2ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας*** του τέλειου συστήματος. Τούτο καθόσον η συνάρτηση $\lambda_2^{imp}(w_a)$, για σταθερή τιμή της παραμέτρου β, που στο εξής θα ληφθεί ίση με $\beta=0.10$ (προκειμένου να υπάρξει αντιπροσωπευτική και συγκριτική μελέτη των διαταραγμένων πλέον διακλαδώσεων), για μεν ομόσημα e_a, w_a εκκινεί από το σημείο που περιγράφει την αρχική ατέλεια $w_a = e_a, \lambda = 0$ και είναι μονοτονικά αύξουσα, για δε ετερόσημα e_a, w_a περιγράφει συμπληρωματικό (φυσικά μη αποδεκτό) δρόμο ισορροπίας, όπως ενδεικτικά φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, όπου έχει χαραχθεί και ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας του τέλειου συστήματος. Και εδώ ***ο συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας*** διαθέτει ***οριακό*** σημείο, ενώ και για την τρέχουσα περίπτωση προκειμένου υπολογιστούν όλα τα κρίσιμα σημεία αλλά και η ευστάθεια αυτών αλλά και όλων των δρόμων γίνεται χρήση των προγραμμάτων που ήδη έχουν μνημονευθεί.



Με σκοπό τη διερεύνηση των διαταραχών των διακλαδώσεων, επιλέγεται και εδώ μια μεγάλη γκάμα τιμών της αντισυμμετρικής

αρχικής ατέλειας $\pm 0.001 \le e_a \le \pm 0.345$ και υπολογίζονται κατά τα γνωστά όλα τα κρίσιμα σημεία που υφίστανται σε όλους τους υφιστάμενους δρόμους ισορροπίας.

Η εισαγωγή της ***αντισυμμετρικής αρχικής ατέλειας – διαταραχής*** e_a οδηγεί και στη περίπτωση αυτή σε ***μερική διάσπαση της συμμετρίας***. Αναλυτικότερα, ***το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης*** C_2 ***του τετριμμένου δρόμου ισορροπίας μεταπίπτει στο οριακό σημείο*** S_2 ***του συμπληρωματικού δρόμου του ατελούς και το σύστημα εμφανίζει μια ανεξάρτητη καταστροφή τύπου διπλής αιχμής***, η οποία λαμβάνει χώραν για *οποιαδήποτε τιμή του* e_a. ***Ο εν λόγω δρόμος ισορροπίας εκτός από το*** S_2 ***παρουσιάζει για κάθε τιμή του*** e_a ***άλλο ένα κρίσιμο σημείο, το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης*** $C_4'^{imp}$, ***το οποίο γεννάται από τη διαταραχή του επίσης ασταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης*** C_4' ***του*** $2^{ου}$ ***συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος. Η νέα διπλή αιχμή που προκύπτει εκ του*** C_4' ***δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά όπως θα δειχθεί παρακάτω συνδέεται με άλλες δύο ανωμαλίες του ίδιου τύπου, που γεννώνται από τα κρίσιμα σημεία*** C_1 ***και*** C_4. Όντως, ***για μικρές τιμές της αρχικής αντισυμμετρικής ατέλειας*** e_a, ***ο μονοτονικά αύξων (και αρχικά ευσταθής) κύριος δρόμος ισορροπίας του ατελούς συστήματος διαθέτει δύο κρίσιμα διακλαδικά σημεία, το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης*** C_1^{imp}, ***προϊόν της διαταραχής του επίσης συμμετρικά ευσταθούς σημείου διακλάδωσης*** C_1 ***του τετριμμένου δρόμου του τέλειου συστήματος, και το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης*** C_4^{imp}, ***προϊόν της διαταραχής του επίσης συμμετρικού ασταθούς διακλαδικού σημείου*** C_4 ***του*** $2^{ου}$ ***συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος. Αυξανόμενης της τιμής του*** e_a, ***τα σημεία*** C_1^{imp} ***και*** C_4^{imp} ***πλησιάζουν μεταξύ τους, μέχρι την τιμή*** $e_a^{cr} = \pm 0.101163$ ***για την οποία ταυτίζονται και μετά εξαφανίζονται, με αποτέλεσμα για*** $|e_a| > 0.101163$ ***ο κύριος δρόμος ισορροπίας να μην διαθέτει κρίσιμα σημεία. Οι δύο διπλές αιχμές που προκύπτουν από τα*** C_1 ***και*** C_4 ***είναι συνεπώς αλληλοσυνδεόμενες, και καταλήγουν στα*** C_4, C_4', ***όπου συναντούν τη διπλή αιχμή λόγω του*** C_4'. ***Κατά συνέπεια <u>τρεις διπλές αιχμές αλληλεξαρτώνται και συνδέονται</u>, εκ νέου σπουδαιότατο εύρημα που***

απαντάται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία[30]. ***Από πλευράς ευστάθειας η παρουσία του διακλαδικού σημείου*** $C_4'^{imp}$ ***στο συμπληρωματικό δρόμο ισορροπίας του ατελούς συστήματος είναι αυτή που τον διαχωρίζει σε ευσταθές και ασταθές μέρος, χωρίς η σχετική θέση του οριακού σημείου*** S_2 ***να επηρεάζει την ευστάθεια του δρόμου αυτού. Αντίθετα, τα διακλαδικά σημεία*** C_1^{imp} ***και*** C_4^{imp} ***αποτελούν τα όρια εντός των οποίων ο κύριος δρόμος ισορροπίας του ατελούς συστήματος είναι ασταθής***, ενώ πριν το C_1^{imp} ***και πέραν του*** C_4^{imp} ***ο εν λόγω δρόμος είναι ασταθής.*** Φυσικά, ***η ύπαρξη των διακλαδικών σημείων*** C_1^{imp}, C_4^{imp} ***και*** $C_4'^{imp}$ ***οφείλεται σε τομή των κλάδων ισορροπίας στους οποίους ανήκουν με άλλους συμπληρωματικούς δρόμους ισορροπίας***, και ***προέρχονται και εδώ από την διαταραχή του*** $3^{ου}$ ***δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος.***

Πράγματι, ***το σύστημα εκτός από τον κύριο και το συμπληρωματικό δρόμο ισορροπίας στο επίπεδο*** (w_a, λ) ***διαθέτει και δύο δευτερεύοντες δρόμους ισορροπίας στο χώρο, οι οποίοι είναι καμπύλες συμμετρικές ως προς το επίπεδο αυτό. Εξ αυτών, ο*** $1^{ος}$ ***δευτερεύων δρόμος ισορροπίας διέρχεται από το*** $C_4'^{imp}$, ***είναι ανοικτή καμπύλη στο χώρο και δεν διαθέτει κρίσιμα σημεία, είναι δε παντού ασταθής. Αντίθετα ο*** $2^{ος}$ ***συμπληρωματικός δρόμος είναι κλειστή καμπύλη στο χώρο συνδέουσα τα σημεία*** C_1^{imp} ***και*** C_4^{imp} ***- όταν αυτά υφίστανται - και εμφανίζει δύο οριακά σημεία*** Σ_2 ***και*** Σ_2', ***τα οποία αποτελούν διαταραχές των*** C_3 ***και*** C_3' ***αντίστοιχα, μορφώνοντας δύο επί πλέον συμμετρικές διπλές αιχμές στο χώρο. Οι αιχμές αυτές εκκινούν από τα*** C_3 ***και*** C_3' ***και φθάνουν ασυμπτωτικά στη κατάσταση εκείνη του συστήματος, όπου για*** $e_a = \pm e_a^{cr}$ ***τα*** C_1^{imp} ***και*** C_4^{imp} ***ταυτίζονται και εξαφανίζονται. Η παρουσία των οριακών αυτών σημείων αλλάζει την ευστάθεια του δρόμου αυτού, ο οποίος από το*** C_1^{imp} ***μέχρι αυτά είναι ευσταθής και πέραν αυτών μέχρι το*** C_4^{imp} ***ασταθής.***

Οι τιμές όλων των κρίσιμων σημείων του κύριου, του συμπληρωματικού αλλά και των δύο δευτερευόντων δρόμων ισορροπίας παρουσιάζονται στους Πίνακες Β3 και Β4, οι οποίοι ακολουθούν, κατ' αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση της συμμετρικής αρχικής ατέλειας.

e_a	Οριακά σημεία Σ_2 και Σ'_2 του 2ου δευτερεύοντα δρόμου του ατελούς συστήματος. που συνδέει τα σημεία C_1^{imp} και C_4^{imp}		
	w_s	w_a	λ
0.0001	± 0.317779	0.0224495	0.488899
0.001	± 0.303761	0.0484197	0.466574
0.0025	± 0.289026	0.0658369	0.444121
0.005	± 0.270495	0.0832236	0.417396
0.0075	± 0.255239	0.0956056	0.396687
0.01	± 0.24179	0.105621	0.379418
0.015	± 0.218106	0.121865	0.3513
0.02	± 0.196993	0.13525	0.328745
0.025	± 0.177345	0.146955	0.309909
0.03	± 0.158468	0.15755	0.293785
0.035	± 0.139806	0.167358	0.279743
0.04	± 0.12078	0.176581	0.267358
0.045	± 0.100609	0.185353	0.256328
0.05	± 0.0778622	0.19377	0.246426
0.055	± 0.0484047	0.201901	0.237482
0.056	± 0.040438	0.203498	0.235795
0.057	± 0.0306263	0.205086	0.23414
0.058	± 0.00353426	0.207192	0.232515
0.06	± 0.00267763	0.207359	0.229317
0.065	± 0.00145702	0.207652	0.221371
0.07	± 0.000362479	0.207748	0.213267
0.075	± 0.000293691	0.207583	0.205104
0.08	± 0.000198974	0.207076	0.19674
0.085	± 8.83557E-05	0.206077	0.188028
0.09	± 7.53528E-05	0.204307	0.178694
0.095	± 6.87823E-05	0.2011	0.168079
0.1	± 0.000064988	0.193389	0.15314
0.1011635	0	0.185265	0.143371

Πίνακας Β3. Οριακά σημεία του 2ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας του ατελούς συστήματος με αντισυμμετρική αρχική ατέλεια (για $e_a<0$ ισχύουν ίσες και αντίθετες τιμές του w_a).

e_a	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_a , e_a ομόσημα)				Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_a , e_a ετερόσημα)			
	Σημεία διακλάδωσης C_4^{imp} (*) και C_1^{imp} (**)				*Οριακό σημείο* S_2		*Σημείο διακλάδωσης* C'^{imp}_4	
	w_a (*)	λ (*)	w_a (**)	λ (**)	w_a	λ	w_a	λ
± 0,001	± 0,197633	0,328567	± 0,00150001	0,100002	∓ 0,0565895	0,308021	∓ 0,197213	0,332229
± 0,005	± 0,198465	0,321317	± 0,00750114	0,10004	∓ 0,0959706	0,324065	∓ 0,196368	0,339628
± 0,01	± 0,19949	0,312388	± 0,0150092	0,100162	∓ 0,12008	0,339107	∓ 0,195302	0,349022
± 0,015	± 0,200493	0,3036	± 0,0225312	0,100366	∓ 0,136709	0,352283	∓ 0,194229	0,358582
± 0,02	± 0,201471	0,294948	± 0,0300745	0,100654	∓ 0,149781	0,364498	∓ 0,193151	0,368314
± 0,025	± 0,202417	0,286422	± 0,0376471	0,10103	∓ 0,160712	0,37612	∓ 0,19207	0,378222
± 0,03	± 0,203324	0,278012	± 0,0452576	0,101498	∓ 0,170195	0,387345	∓ 0,190989	0,388312
± 0,035	± 0,204185	0,269711	± 0,0529156	0,102063	∓ 0,178628	0,398292	∓ 0,189908	0,398587
± 0,04	± 0,20499	0,261504	± 0,0606322	0,102733	∓ 0,186262	0,409038	∓ 0,188831	0,409054
± 0,045	± 0,205728	0,25338	± 0,0684204	0,103517	∓ 0,193267	0,419639	∓ 0,187757	0,419714
± 0,05	± 0,206384	0,245321	± 0,0762956	0,104427	∓ 0,199766	0,430135	∓ 0,186689	0,430573
± 0,055	± 0,206941	0,237309	± 0,0842768	0,105478	∓ 0,205847	0,440558	∓ 0,185627	0,441635
± 0,06	± 0,207376	0,229319	± 0,092388	0,106692	∓ 0,211581	0,450932	∓ 0,184573	0,452904
± 0,065	± 0,207659	0,221319	± 0,10066	0,108094	∓ 0,217021	0,461276	∓ 0,183527	0,464383

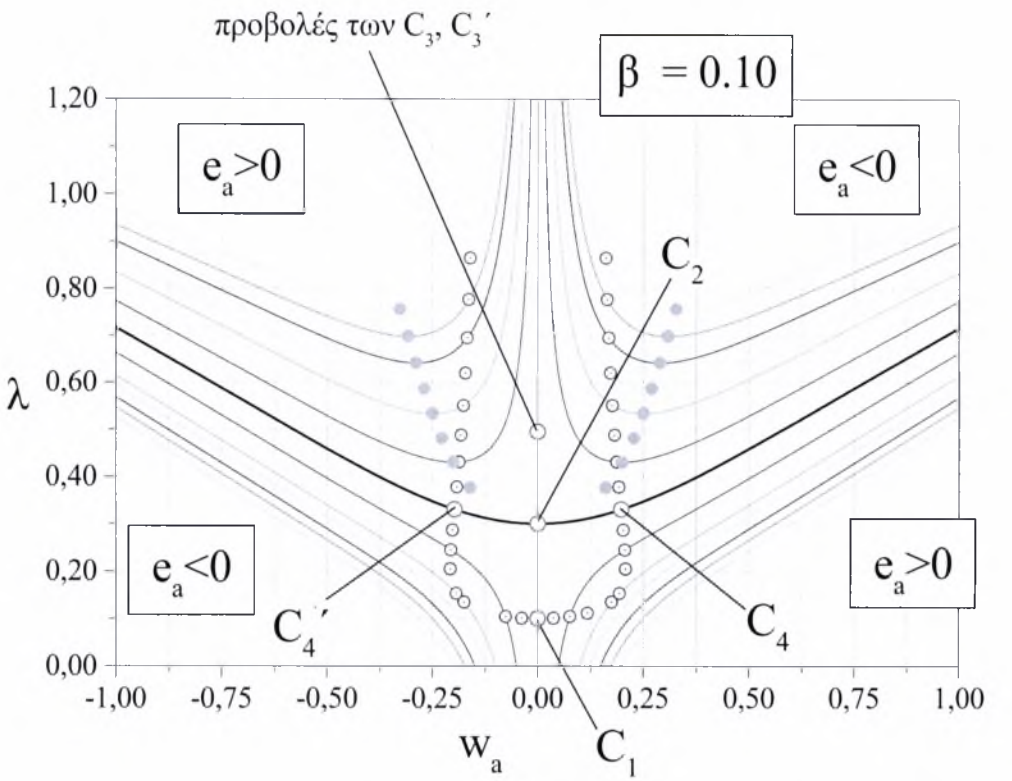
e_a	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_a , e_a ομόσημα)				Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_a , e_a ετερόσημα)			
	Σημεία διακλάδωσης C_4^{imp} (*) και C_1^{imp} (**)				*Οριακό σημείο S_2*		*Σημείο διακλάδωσης C'^{imp}_4*	
	w_a (*)	λ (*)	w_a (**)	λ (**)	w_a	λ	w_a	λ
± 0,07	± 0,207748	0,213267	± 0,109137	0,109728	∓ 0,222212	0,471606	∓ 0,182491	0,476076
± 0,075	± 0,207584	0,205104	± 0,117876	0,111642	∓ 0,227188	0,481936	∓ 0,181465	0,487986
± 0,08	± 0,207076	0,19674	± 0,12697	0,113928	∓ 0,231979	0,492276	∓ 0,180449	0,500118
± 0,085	± 0,206077	0,188028	± 0,136568	0,116729	∓ 0,23661	0,502636	∓ 0,179446	0,512473
± 0,09	± 0,204307	0,178694	± 0,146949	0,120314	∓ 0,241103	0,513023	∓ 0,178454	0,525057
± 0,095	± 0,2011	0,168079	± 0,158781	0,125339	∓ 0,245475	0,523445	∓ 0,177474	0,537872
± 0,1	± 0,193389	0,153141	± 0,17513	0,134843	∓ 0,249742	0,533908	∓ 0,176508	0,550921
± 0,101	± 0,188543	0,146878	± 0,181705	0,140036	∓ 0,250584	0,536006	∓ 0,176316	0,553559
± 0,1011	± 0,187343	0,145538	± 0,183078	0,141271	∓ 0,250668	0,536216	∓ 0,176297	0,553824
± 0,10115	± 0,186242	0,144366	± 0,184265	0,142388	∓ 0,25071	0,536321	∓ 0,176288	0,553955
± 0,10116	± 0,185775	0,143885	± 0,184749	0,142371	∓ 0,250719	0,536342	∓ 0,176286	0,553982
± 0,101163	± 0,185487	0,143593	± 0,185043	0,143149	∓ 0,250721	0,536348	∓ 0,176285	0,55399
± 0,105	–	–	–	–	∓ 0,253919	0,544417	∓ 0,175555	0,564207
± 0,11	–	–	–	–	∓ 0,258018	0,554976	∓ 0,174616	0,577734

e_a	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_a , e_a ομόσημα)				Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_a , e_a ετερόσημα)			
	Σημεία διακλάδωσης C_4^{imp} (*) και C_1^{imp} (**)				*Οριακό σημείο S_2*		*Σημείο διακλάδωσης C'^{imp}_4*	
	w_a (*)	λ (*)	w_a (**)	λ (**)	w_a	λ	w_a	λ
± 0,115	–	–	–	–	∓ 0,26205	0,56559	∓ 0,17369	0,591505
± 0,12	–	–	–	–	∓ 0,266025	0,576263	∓ 0,17278	0,605522
± 0,125	–	–	–	–	∓ 0,269953	0,586997	∓ 0,171883	0,619788
± 0,13	–	–	–	–	∓ 0,273841	0,597795	∓ 0,171002	0,634306
± 0,135	–	–	–	–	∓ 0,277697	0,608659	∓ 0,170136	0,649079
± 0,14	–	–	–	–	∓ 0,28153	0,619593	∓ 0,169284	0,664111
± 0,145	–	–	–	–	∓ 0,285344	0,630598	∓ 0,168449	0,679401
± 0,15	–	–	–	–	∓ 0,289148	0,641675	∓ 0,167628	0,694956
± 0,155	–	–	–	–	∓ 0,292946	0,652826	∓ 0,166823	0,710775
± 0,16	–	–	–	–	∓ 0,296745	0,664053	∓ 0,166034	0,726862
± 0,165	–	–	–	–	∓ 0,30055	0,675356	∓ 0,16526	0,74322
± 0,17	–	–	–	–	∓ 0,304367	0,686737	∓ 0,164502	0,759851
± 0,175	–	–	–	–	∓ 0,3082	0,698195	∓ 0,16376	0,776756
± 0,18	–	–	–	–	∓ 0,312056	0,709733	∓ 0,163034	0,793938

e_a	Μονοτονικά αύξων κύριος δρόμος ισορροπίας (w_a , e_a ομόσημα)				Συμπληρωματικός δρόμος ισορροπίας (φυσικά μη αποδεκτός, w_a , e_a ετερόσημα)			
	Σημεία διακλάδωσης C_4^{imp} (*) *και* C_1^{imp} (**)				*Οριακό σημείο* S_2		*Σημείο διακλάδωσης* C'^{imp}_4	
	w_a (*)	λ (*)	w_a (**)	λ (**)	w_a	λ	w_a	λ
± 0,185	–	–	–	–	∓ 0,315939	0,721349	∓ 0,162323	0,8114
± 0,19	–	–	–	–	∓ 0,319854	0,733045	∓ 0,161628	0,829144
± 0,195	–	–	–	–	∓ 0,323806	0,74482	∓ 0,160948	0,847173
± 0,2	–	–	–	–	∓ 0,327801	0,756675	∓ 0,160285	0,865485
± 0,225	–	–	–	–	∓ 0,348601	0,817132	∓ 0,157197	0,961411
± 0,25	–	–	–	–	∓ 0,371313	0,879497	∓ 0,154486	1,06477
± 0,275	–	–	–	–	∓ 0,39683	0,943607	∓ 0,152139	1,17577
± 0,3	–	–	–	–	∓ 0,426392	1,00919	∓ 0,150137	1,29459
± 0,31	–	–	–	–	∓ 0,439741	1,03576	∓ 0,149429	1,34434
± 0,32	–	–	–	–	∓ 0,454191	1,06246	∓ 0,148772	1,39538
± 0,33	–	–	–	–	∓ 0,469946	1,08927	∓ 0,148164	1,44771
± 0,34	–	–	–	–	∓ 0,487259	1,11613	∓ 0,147606	1,50134
± 0,345	–	–	–	–	∓ 0,496595	1,12956	∓ 0,147344	1,52865

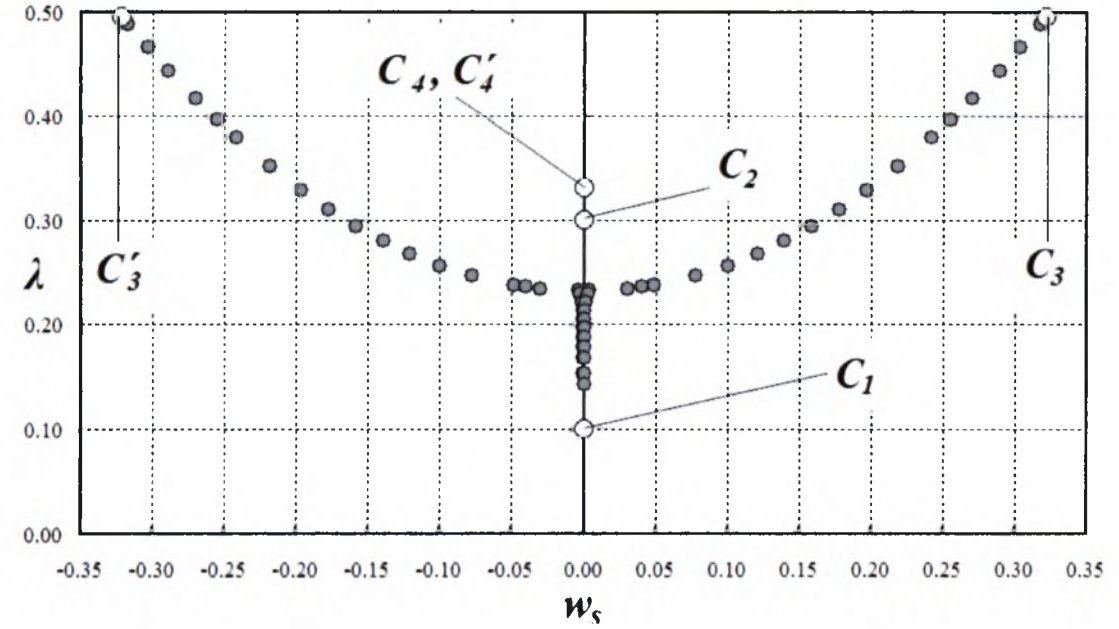
Πίνακας Β4. Κρίσιμα σημεία του κύριου και του συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας του ατελούς συστήματος με *μόνο* αντισυμμετρική παραμόρφωση για διάφορες τιμές της αντισυμμετρικής αρχικής ατέλειας e_a.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται γραφικά μερικοί εκ των κύριων και συμπληρωματικών δρόμων με τα κρίσιμα σημεία τους στο Σχήμα Β1.11, στο οποίο φαίνεται επίσης και ο $1^{ος}$ δευτερεύων δρόμος του τέλειου συστήματος, ο οποίος αντιστοιχεί και αυτός σε αντισυμμετρική παραμόρφωση.

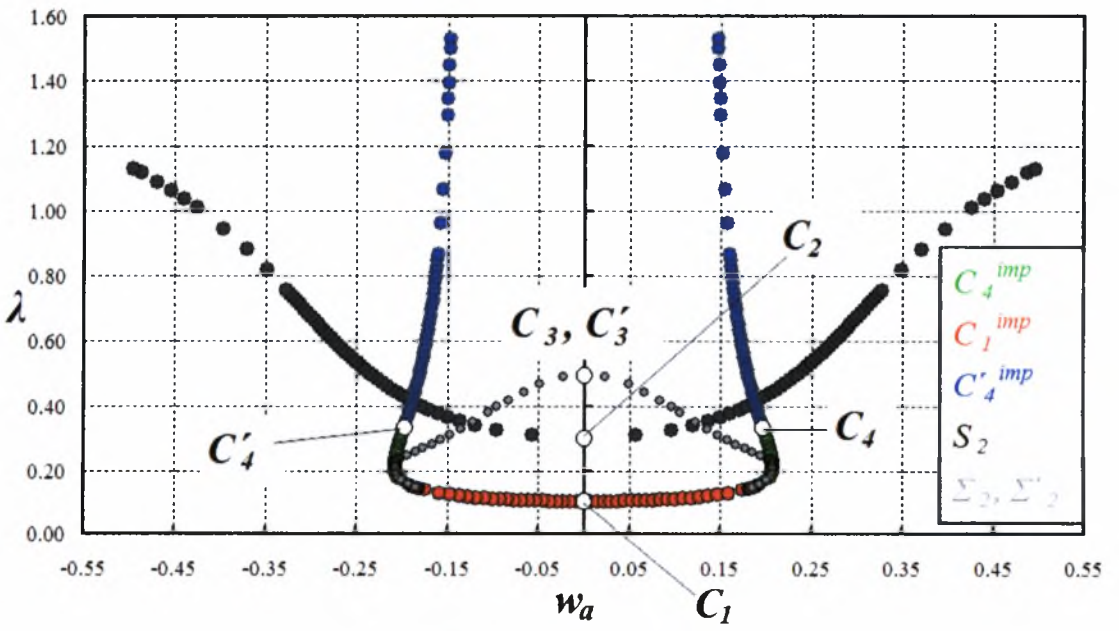


Σχήμα Β1.11. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος για συμμετρική αρχική ατέλεια και *μόνον* αντισυμμετρική παραμόρφωση, με τα κρίσιμα σημεία τους.

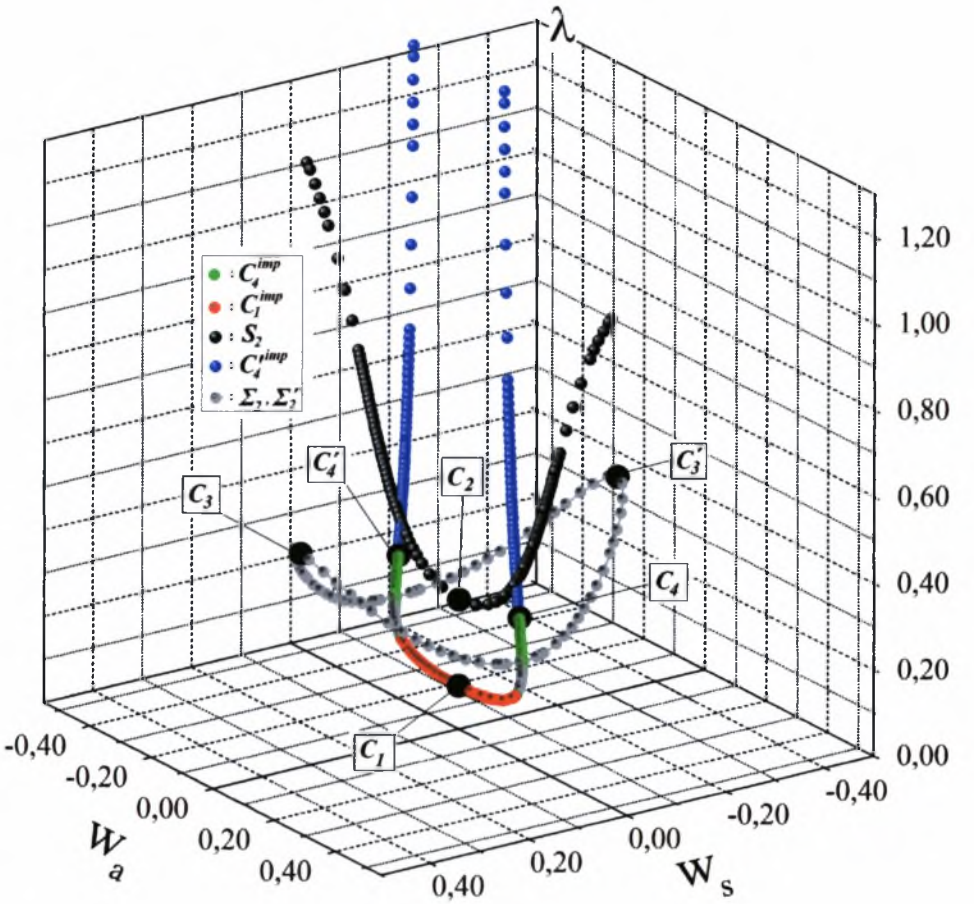
Στη συνέχεια, στο Σχήμα Β1.12α,β,γ αποτυπώνονται όλα τα κρίσιμα σημεία των Πινάκων Β3 και Β4 σε δισδιάστατη και τρισδιάστατη μορφή, ενώ στο μεν Σχήμα Β1.13 φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας (με τους ευσταθείς και ασταθείς κλάδους τους) για δύο χαρακτηριστικές τιμές της συμμετρικής αρχικής ατέλειας e_a, στο δε Σχήμα Β1.14 το διάγραμμα των διαταραγμένων διακλαδώσεων (ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες) όλων των δρόμων των προαναφερθέντων Πινάκων.


0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
λ
C 4, C′4
C2
C′3
C3
C1
-0.35 -0.30 -0.25 -0.20 -0.15 -0.10 -0.05 0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35
ws

(α)

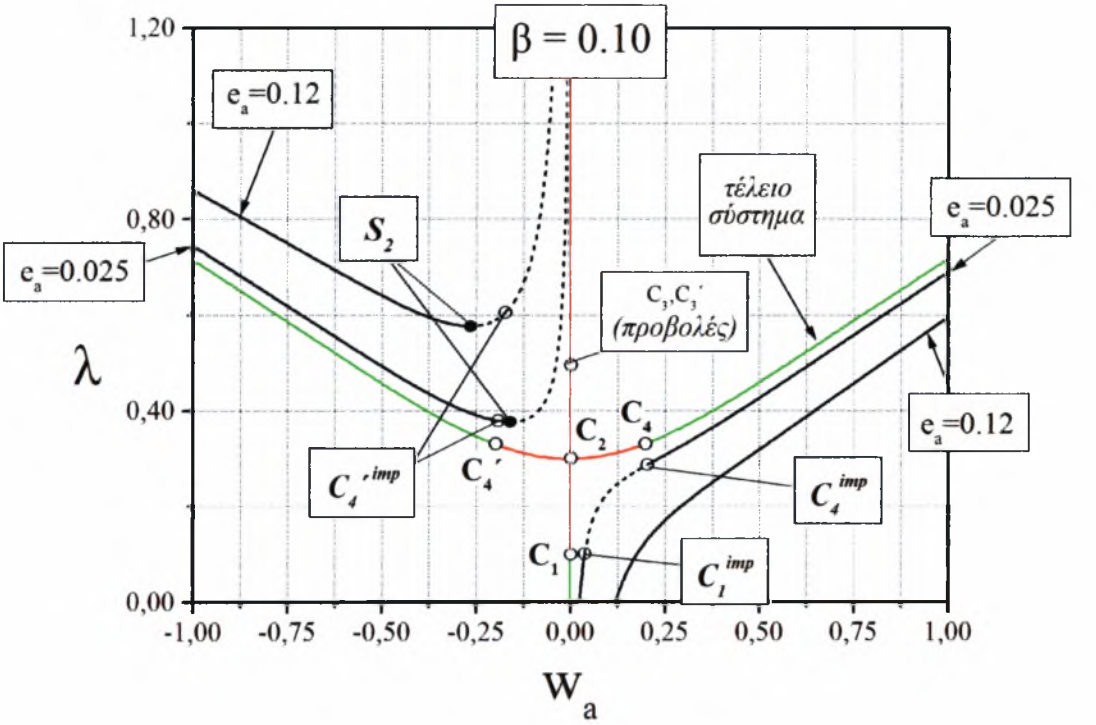

1.60
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
λ
C2
C3, C′3
C′4
C4
C1
C 4 imp
C 1 imp
C′4 imp
S2
-0.55 -0.45 -0.35 -0.25 -0.15 -0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55
wa

(β)

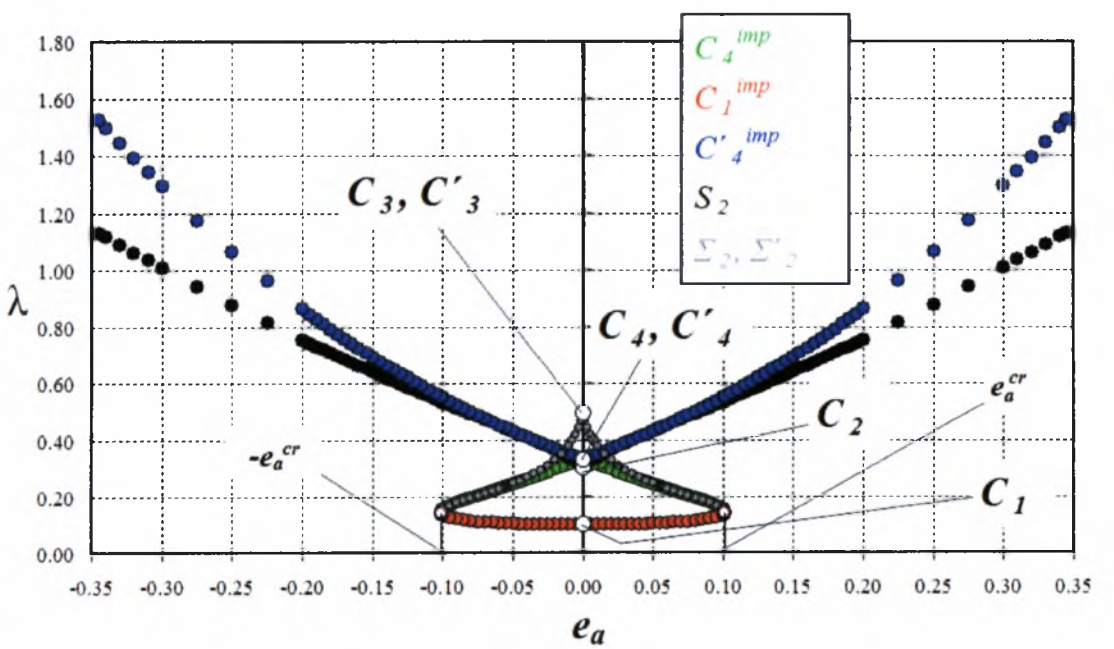


(γ)

Σχήμα Β1.12. Κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας των Πινάκων Β3, Β4 σε δισδιάστατη (α,β) και τρισδιάστατη (γ) γραφική απεικόνιση.

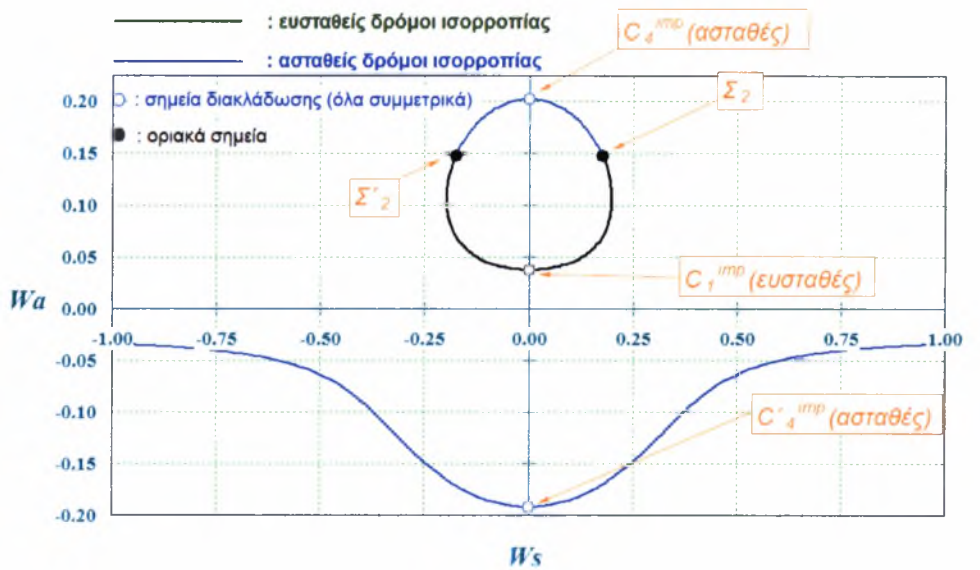


Σχήμα Β1.13. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με *μόνο* αντισυμμετρική παραμόρφωση, για δύο χαρακτηριστικές τιμές της αντισυμμετρικής αρχικής ατέλειας e_a.

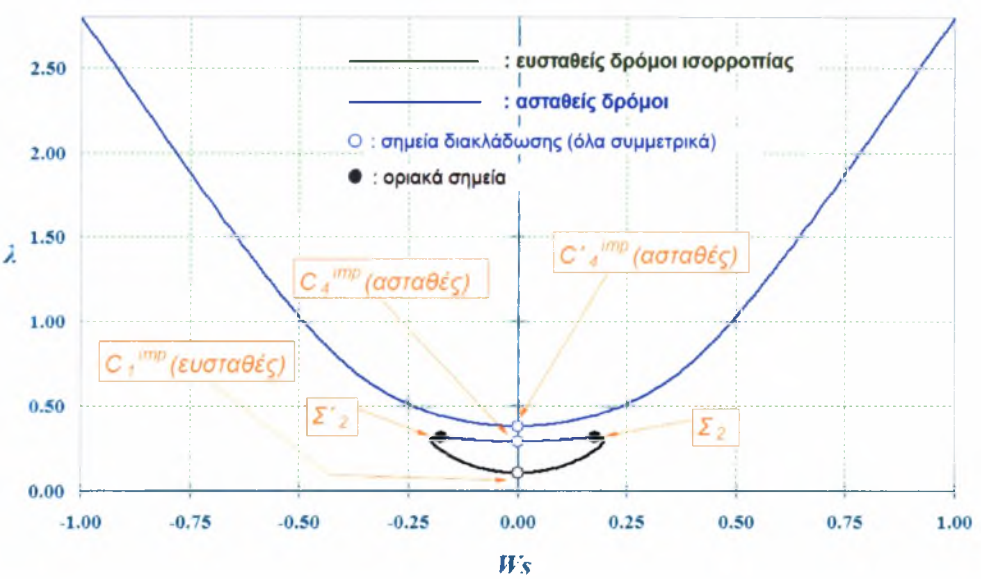


Σχήμα Β1.14. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων (ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες) των Πινάκων Β3 και Β4

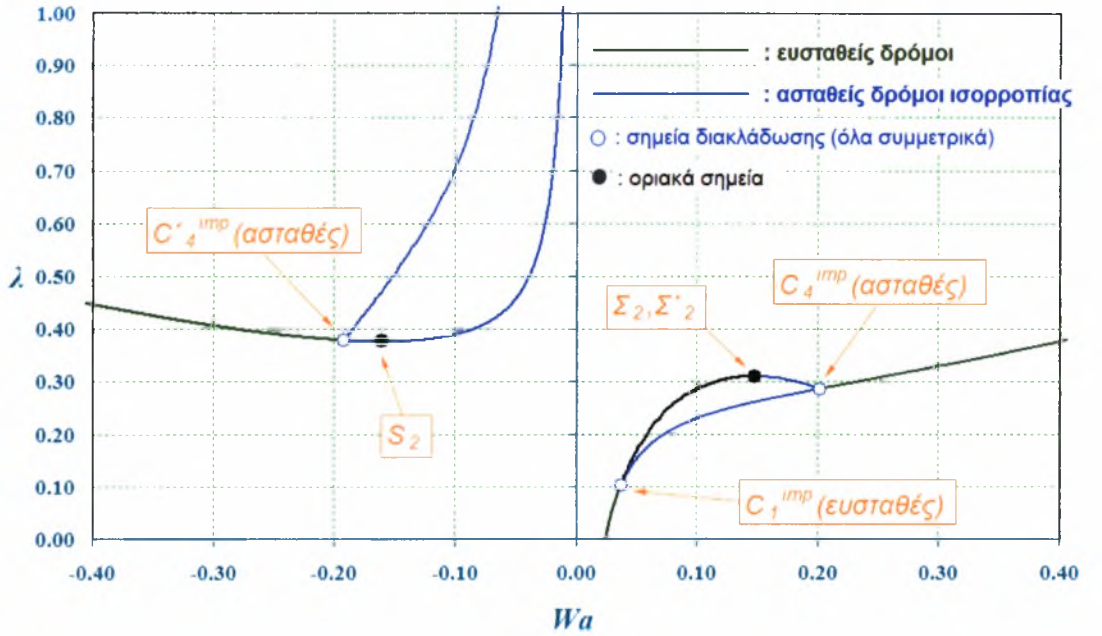
Ως αριθμητική εφαρμογή επιλέγεται η τιμή $e_a = 0.025$, για την οποία υφίστανται διακλαδικά σημεία τόσον στον κύριο όσο και στο συμπληρωματικό δρόμο ισορροπίας του ατελούς συστήματος για *μόνο* αντισυμμετρική παραμόρφωση αυτού. Σύμφωνα με τα ανωτέρω εκτεθέντα, υπολογίστηκαν όλοι οι δρόμοι ισορροπίας (κύριος, συμπληρωματικός και δευτερεύοντες), οι προβολές των οποίων στα τρία σχετικά επίπεδα (w_s, w_a), (w_s, λ), (w_a, λ) και η μορφή τους στο χώρο (w_s, w_a, λ) απεικονίζονται στα Σχήματα Β1.15α,β,γ και Β1.16 αντίστοιχα, όπου καταδεικνύεται και η ευστάθεια τους.



(α)

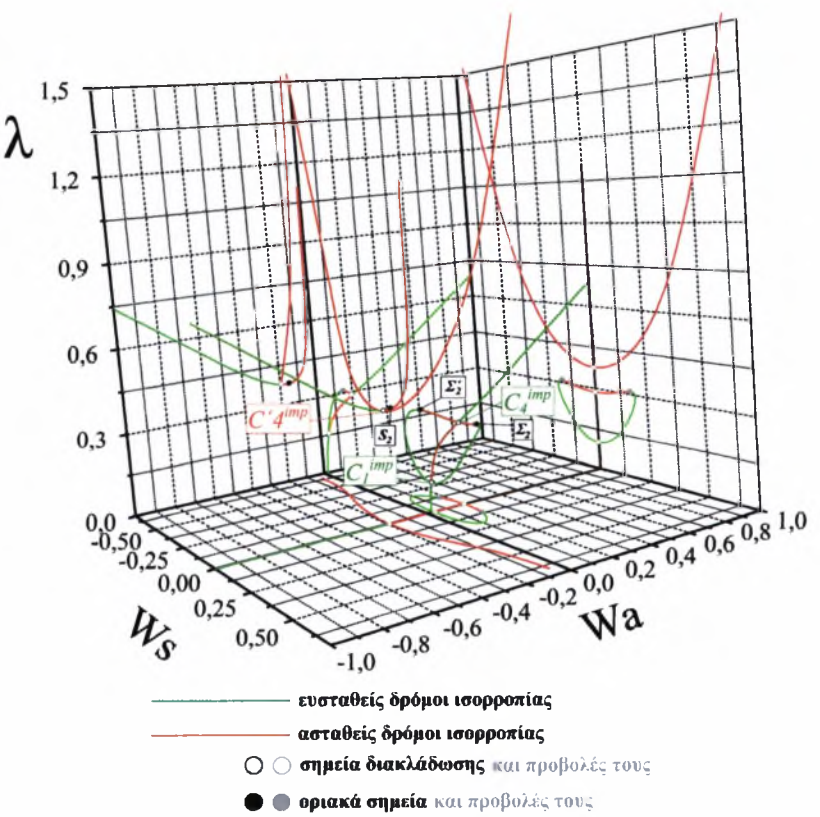


(β)



(γ)

Σχήμα Β1.15. Προβολές των δρόμων ισορροπίας του ατελούς συστήματος για αντισυμμετρική αρχική ατέλεια e_a=0.025.



Σχήμα Β1.16. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος για αντισυμμετρική αρχική ατέλεια e_a=0.025.

Ο 3ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (ασταθής) του τέλειου συστήματος μεταπίπτει συνεπώς στη περίπτωση αυτή επίσης σε δύο δευτερεύοντες δρόμους του ατελούς, που διαθέτουν και εδώ ένα επίπεδο συμμετρίας, το (w_a, λ)***. Εξ αυτών ο 1ος είναι ανοικτή καμπύλη στο χώρο, διέρχεται από το σημείο διακλάδωσης*** C_4^{imp} ***του συμπληρωματικού δρόμου, είναι δε ασταθής, χωρίς άλλα κρίσιμα σημεία. Αντίθετα, ο 2ος δευτερεύων δρόμος είναι κλειστή καμπύλη στο χώρο, η οποία συνδέει τα κρίσιμα σημεία*** C_1^{imp} ***και*** C_4^{imp} ***του κύριου και συμπληρωματικού δρόμου αντίστοιχα, παρουσιάζει δε και δύο οριακά σημεία Σ2 και Σ΄2, τα οποία αντιστοιχούν σε*** $w_s = \pm 0.177345$, $w_a = 0.146955$, $\lambda = 0.309909$ ***και αποτελούν διαταραχή των*** C_3 ***και*** C_3' ***αντίστοιχα. Από το*** C_1^{imp} ***μέχρι τα οριακά αυτά σημεία δρόμος αυτός είναι ευσταθής, καθιστάμενος ασταθής πέραν αυτών και μέχρι το κρίσιμο σημείο*** C_4^{imp}***, ενώ υφίσταται για*** $|ws| \le 0.198368$***. Οι εν λόγω δρόμοι ευρίσκονται σε διαφορετικό ημίχωρο, η δε μορφή τους δικαιολογεί και την αλληλεξάρτηση – σύνδεση των ανωμαλιών τύπου διπλής αιχμής που αναφέρθηκε προηγούμενα.***

3. Πλήρης ατέλεια $e_s, e_a \neq 0$

Η γενική αυτή περίπτωση, η οποία αποτελεί στην ουσία ***διπλή*** διαταραχή του τέλειου συστήματος, ***δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί συστηματικά*** με βάση τη Θεωρία των Διακλαδώσεων και μέσα στα πλαίσια της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας, καθόσον οι εξισώσεις ισορροπίας ***δεν επιδέχονται*** αναλυτικών λύσεων, και οι δρόμοι ισορροπίας δύνανται να ευρεθούν ***μόνο*** μέσω αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας, η μορφή των οποίων έχει ως εξής:

$$1/2\ (- 8 (e_s - w_s)^3 - 4 (e_a + e_s - w_a - w_s)^3 + 4 (e_a - e_s - w_a + w_s)^3 -$$

$$1/3\ (6 e_s (2 + w_a^2 + w_s^2) - w_s (-36 e_a w_a + (6 + 3 w_a^2 + w_s^2) (2 + 7 w_a^2 + w_s^2))) \beta -$$

$$2 w_s (2 + 3 w_a^2 + w_s^2) \lambda) = 0$$

(B1.34α)

$$1/2\ \ (-4\,(e_a + e_s - w_a - w_s)^3 - 4\,(e_a - e_s - w_a + w_s)^3 +$$

$$(-6\,e_a\,(6 + 9\,w_a^2 + w_s^2)\ +$$

$$w_a\,(36 + 27\,w_a^4 - 4\,e_s\,w_s + 16\,w_s^2 + (5\,w_s^4/3) + 2\,w_a^2\,(36 + 7\,w_s^2)))$$

$$\beta - 6\,w_a\,(2 + 3\,w_a^2 + w_s^2)\,\lambda) = 0 \qquad \text{(B1.34β)}$$

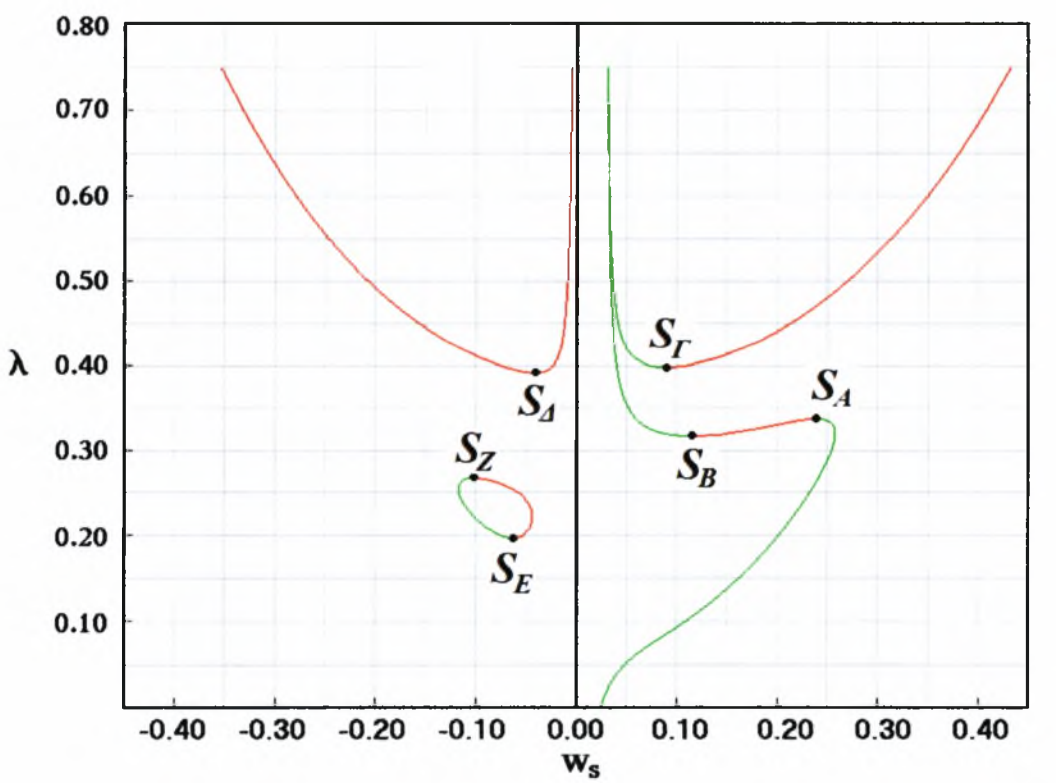
Πάντως, λόγω του γεγονότος ότι πρόκειται περί πολυωνυμικών εκφράσεων, δύναται να χρησιμοποιηθεί η ενσωματωμένη στο *Mathematica* εντολή NSolve, όπως φαίνεται στο πρόγραμμα *solving fully imperfect.nb*. Όμως, τα κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν απ' ευθείας, αφού η Hessian είναι μη γραμμική συνάρτηση των υπεισερχόμενων παραμέτρων της μορφής

$$\begin{aligned}
\text{Hessian} = {} & 144\,ea^4 + 288\,es^4 + 144\,wa^4 - 144\,wa^2\,ws^2 + 288\,ws^4 + 240\,wa^2\,\beta + 1392\,wa^4\,\beta + \\
& 852\,wa^6\,\beta + 456\,ws^2\,\beta + 2064\,wa^2\,ws^2\,\beta + 1302\,wa^4\,ws^2\,\beta + 240\,ws^4\,\beta + 424\,wa^2\,ws^4\,\beta + \\
& 30\,ws^6\,\beta + 36\,\beta^2 + 360\,wa^2\,\beta^2 + 1062\,wa^4\,\beta^2 + 918\,wa^6\,\beta^2 + \frac{945\,wa^8\,\beta^2}{4} + 88\,ws^2\,\beta^2 + \\
& 372\,wa^2\,ws^2\,\beta^2 + 558\,wa^4\,ws^2\,\beta^2 + 215\,wa^6\,ws^2\,\beta^2 + \frac{146\,ws^4\,\beta^2}{3} + 114\,wa^2\,ws^4\,\beta^2 + \\
& \frac{425}{6}\,wa^4\,ws^4\,\beta^2 + 10\,ws^6\,\beta^2 + \frac{95}{9}\,wa^2\,ws^6\,\beta^2 + \frac{25\,ws^8\,\beta^2}{36} - 72\,es^3\,ws\,(16 + \beta) - \\
& 144\,ea^3\,wa\,(4 + 5\,\beta) - 96\,wa^2\,\lambda - 360\,wa^4\,\lambda - 168\,ws^2\,\lambda - 468\,wa^2\,ws^2\,\lambda - 108\,ws^4\,\lambda - \\
& 48\,\beta\,\lambda - 372\,wa^2\,\beta\,\lambda - 696\,wa^4\,\beta\,\lambda - 297\,wa^6\,\beta\,\lambda - 100\,ws^2\,\beta\,\lambda - 360\,wa^2\,ws^2\,\beta\,\lambda - \\
& 243\,wa^4\,ws^2\,\beta\,\lambda - \frac{128}{3}\,ws^4\,\beta\,\lambda - 63\,wa^2\,ws^4\,\beta\,\lambda - 5\,ws^6\,\beta\,\lambda + 12\,\lambda^2 + 72\,wa^2\,\lambda^2 + \\
& 81\,wa^4\,\lambda^2 + 24\,ws^2\,\lambda^2 + 54\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2 + 9\,ws^4\,\lambda^2 - \\
& 2\,ea\,wa\,\big(5\,ws^4\,(-12 + \beta)\,\beta + 12\,es^2\,(-12 + 53\,\beta) + \\
& \quad 3\,\beta\,\big(36\,\beta + 4\,wa^2\,(146 + 45\,\beta) + wa^4\,(284 + 99\,\beta)\big) + \\
& \quad 8\,es\,ws\,\big(\big(-105 + 42\,wa^2 + 10\,ws^2 - 6\,\beta\big)\,\beta - 18\,(-2 + \lambda)\big) + \\
& \quad 6\,ws^2\,\big(\beta\,\big(50 + 6\,\beta + wa^2\,(-4 + 19\,\beta) - 9\,\lambda\big) + 12\,(-2 + \lambda)\big) + 48\,\big(6\,wa^2 + 5\,\beta - 2\,\lambda\big) - \\
& \quad 18\,\big(4\,\beta + wa^2\,(20 + 9\,\beta)\big)\,\lambda\big) + \\
& 2\,es^2\,\big(831\,wa^4\,\beta + 15\,ws^4\,\beta + 2\,ws^2\,\big(432 + 96\,\beta + \beta^2 - 27\,\lambda\big) + 12\,(19\,\beta - 7\,\lambda) - \\
& \quad 2\,wa^2\,\big(36 - 3\,\big(216 + 47\,ws^2\big)\,\beta + \beta^2 + 171\,\lambda\big)\big) - \\
& 4\,ea^2\,\big(36\,es^2 - 60\,\beta - 213\,wa^4\,\beta - 12\,es\,ws\,(6 + 5\,\beta) - \\
& \quad 3\,wa^2\,\big(72 + \beta\,\big(236 + 26\,ws^2 + 27\,\beta\big) - 30\,\lambda\big) + 24\,\lambda + ws^2\,\big(\beta\,\big(36 - 5\,ws^2 + 9\,\beta\big) + 18\,(2 + \lambda)\big)\big) - \\
& \frac{2}{3}\,es\,ws\,\big(5\,ws^4\,\beta\,(18 + \beta) + 12\,\beta\,(114 + 5\,\beta) + 3\,wa^4\,\beta\,(1326 + 43\,\beta) - 24\,(21 + \beta)\,\lambda + \\
& \quad 18\,ws^2\,(2\,(48 + \beta\,(23 + \beta)) - (18 + \beta)\,\lambda) + \\
& \quad 2\,wa^2\,\big(\beta\,\big(ws^2\,(726 + 29\,\beta) + 9\,(380 + 14\,\beta - 3\,\lambda)\big) - 54\,(4 + 15\,\lambda)\big)\big);
\end{aligned}$$

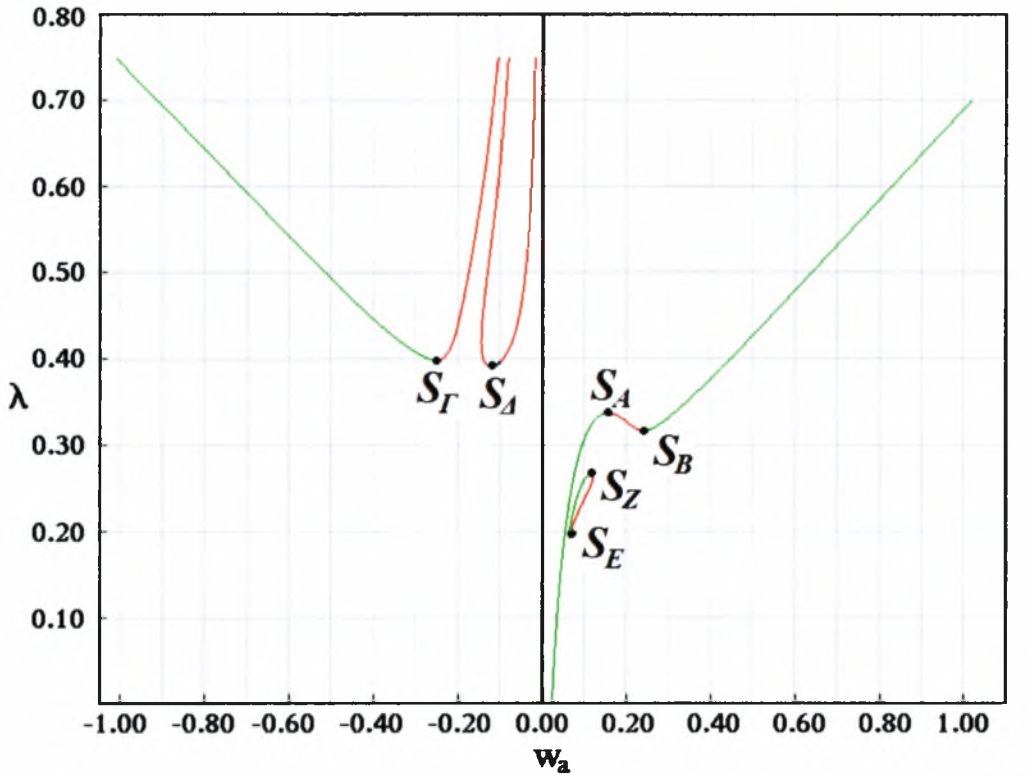
οπότε ***χρειάζεται ικανοποιητική αρχική προσέγγιση τους, η οποία δύναται να επιτευχθεί μόνον αν είναι γνωστά τα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία των απλούστερων ατελών συστημάτων (δηλαδή αυτών με μόνο συμμετρική ή μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια), των οποίων αυτά αποτελούν διαταραχή***. Άρα, ***μόνον αν είναι***

δεδομένες οι τιμές των αρχικών ατελειών υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης σημείων ισορροπίας (κρίσιμων και μη). Ως εκ τούτου η αναγκαιότητα προσέγγισης της όλης διακλαδικής (μέχρι στιγμής) ανάλυσης μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών είναι πλέον επιβεβλημένη, που αποτελεί αντικείμενο του τρίτου μέρους του παρόντος Κεφαλαίου Β.

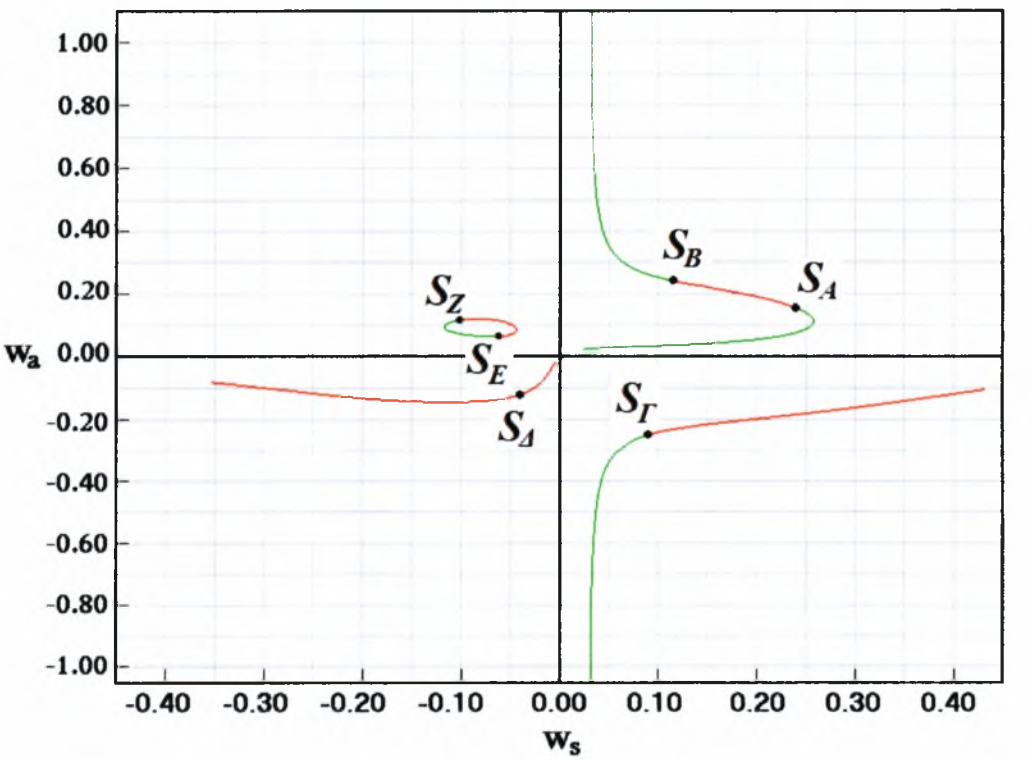
Σύμφωνα με τα μέχρι στιγμής εκτεθέντα, υπάρχει η ***περιορισμένη*** *δυνατότητα ανάλυσης μιας μόνο (άκρως ενδεικτικής) περίπτωσης πλήρως ατελούς συστήματος, αυτού για το οποίο θα ισχύει ότι* $\beta = 0.10, e_s = e_a = 0.025$, *καθόσον έχει πλήρως αναλυθεί τόσον παραμετρικά όσον και αριθμητικά το μερικά ατελές σύστημα με μόνο συμμετρική και μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια. Προς τούτο επιλύονται αριθμητικά οι εξισώσεις ισορροπίας (Β1.34) και υπολογίζονται οι δρόμοι ισορροπίας του αντίστοιχου συστήματος, ευρίσκονται τα κρίσιμα σημεία τους (πρόγραμμα fully imperfect critical points.nb) και προσδιορίζεται και η ευστάθεια όλων των δρόμων (Ευστάθεια κρισίμων σημείων - προσεγγιστικά imp.nb). Τα σχετικά αποτελέσματα απεικονίζονται γραφικά στα Σχήματα Β1.17α,β,γ και Β1.18.*



(α)

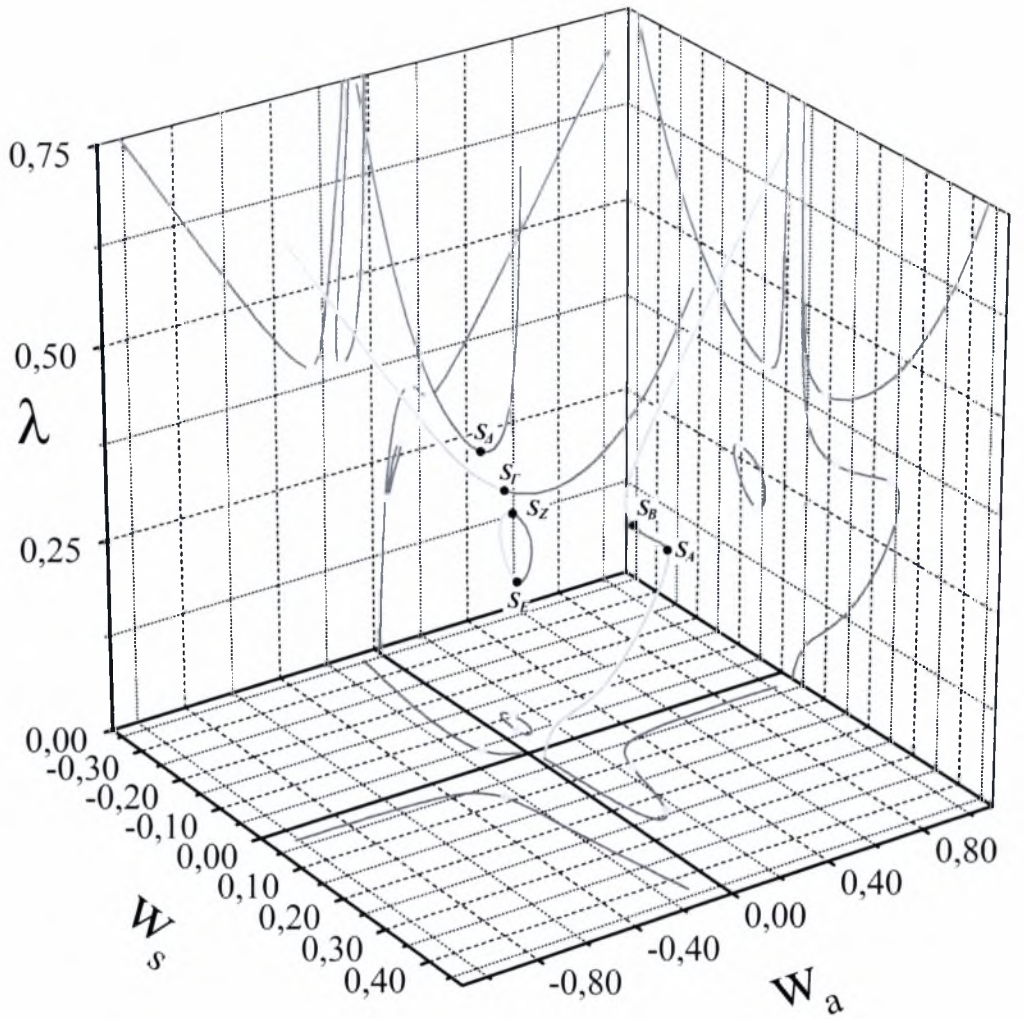


(β)



(γ)

Σχήμα Β1.17. Προβολές των δρόμων ισορροπίας του πλήρως ατελούς συστήματος για $e_s = e_a = 0.025$ και $\beta = 0.10$ (πράσινες καμπύλες=ευστάθεια, κόκκινες=αστάθεια).



Σχήμα Β1.18. Τρισδιάστατη απεικόνιση των δρόμων ισορροπίας του πλήρως ατελούς συστήματος για $e_s = e_a = 0.025$ και $\beta = 0.10$ (πράσινες καμπύλες=ευστάθεια, κόκκινες=αστάθεια).

Το πλήρως ατελές σύστημα για τις επιλεγείσες τιμές των αρχικών ατελειών και του αδιάστατου λόγου δυσκαμψιών β εμφανίζει τέσσερις ανεξάρτητους μεταξύ τους δρόμους ισορροπίας, οι οποίοι αντιστοιχούν σε όλους τους δυνατούς – από πλευράς προσήμων – συνδυασμούς των παραμορφώσεων w_s και w_a. Αναλυτικότερα, ο κύριος δρόμος ισορροπίας, ο οποίος εκκινεί από το σημείο $w_s = e_s (= 0.025)$, $w_a = e_a (= 0.025)$ ***αντιστοιχεί σε θετικές τιμές τόσον της συμμετρικής όσο και της αντισυμμετρικής παραμόρφωσης και διαθέτει δύο οριακά σημεία S_A και S_B, για τα οποία ισχύει ότι:***

$S_A : w_s = 0.238889, w_a = 0.156946, \lambda = 0.337131$ ***(τοπικό μέγιστο)***

$S_B : w_s = 0.114464, w_a = 0.242, \lambda = 0.316499$ ***(τοπικό ελάχιστο)***

Ο εν λόγω δρόμος είναι ευσταθής από την αρχή του μέχρι το οριακό σημείο S_A ***και πέραν του οριακού σημείου*** S_B***, ενώ είναι ασταθής μεταξύ αυτών.***

Οι υπόλοιποι τρεις δρόμοι ισορροπίας του πλήρως ατελούς συστήματος είναι συμπληρωματικοί (φυσικά μη αποδεκτοί) με τα ακόλουθα επί μέρους χαρακτηριστικά:

<u>1ος συμπληρωματικός δρόμος</u>

Κλειστή καμπύλη στο χώρο, με $w_s < 0, w_a > 0$ ***και με δύο οριακά σημεία*** S_E ***(καθολικό ελάχιστο) και*** S_Z ***(καθολικό μέγιστο) που αντιστοιχούν στις ακόλουθες τιμές παραμορφώσεων και φορτίου:***

$S_E : w_s = -0.062643, w_a = 0.0657519, \lambda = 0.196841$

$S_Z : w_s = -0.102152, w_a = 0.117424, \lambda = 0.267512$

Τα οριακά αυτά σημεία διαχωρίζουν τον δρόμο αυτό σε δύο κλάδους, εκ των οποίων ο ένας είναι ευσταθής και ο άλλος ασταθής, όπως φαίνεται στα παραπάνω Σχήματα.

<u>2ος συμπληρωματικός δρόμος</u>

Ανοικτή καμπύλη στο χώρο, για την οποία ισχύει ότι $w_s < 0, w_a < 0$***, με ένα οριακό σημείο (καθολικό ελάχιστο)*** S_Δ ***που αντιστοιχεί σε***

$S_\Delta : w_s = -0.0408281, w_a = -0.120112, \lambda = 0.391407$

αμφότεροι δε οι κλάδοι του είναι ασταθείς.

<u>3ος συμπληρωματικός δρόμος</u>

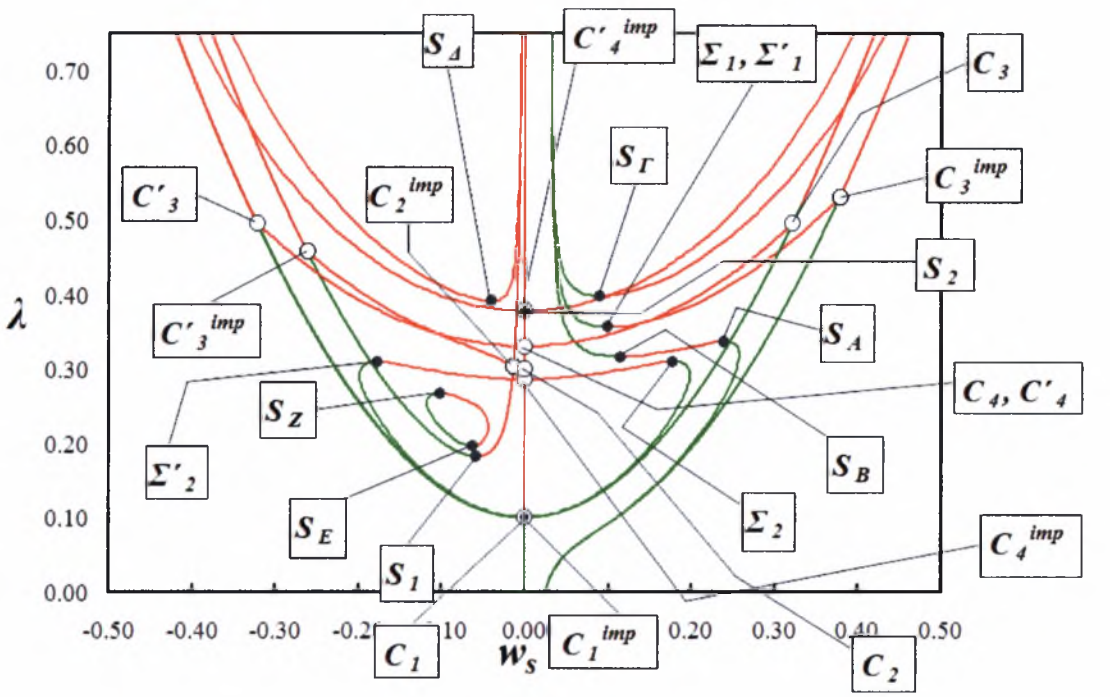
Ανοικτή καμπύλη στο χώρο, για την οποία ισχύει ότι $w_s > 0, w_a < 0$***, με ένα οριακό σημείο (καθολικό ελάχιστο)*** S_Γ***, που αντιστοιχεί σε***

$S_\Gamma = w_s = 0.0888872, w_a = -0.249915, \lambda = 0.397815$

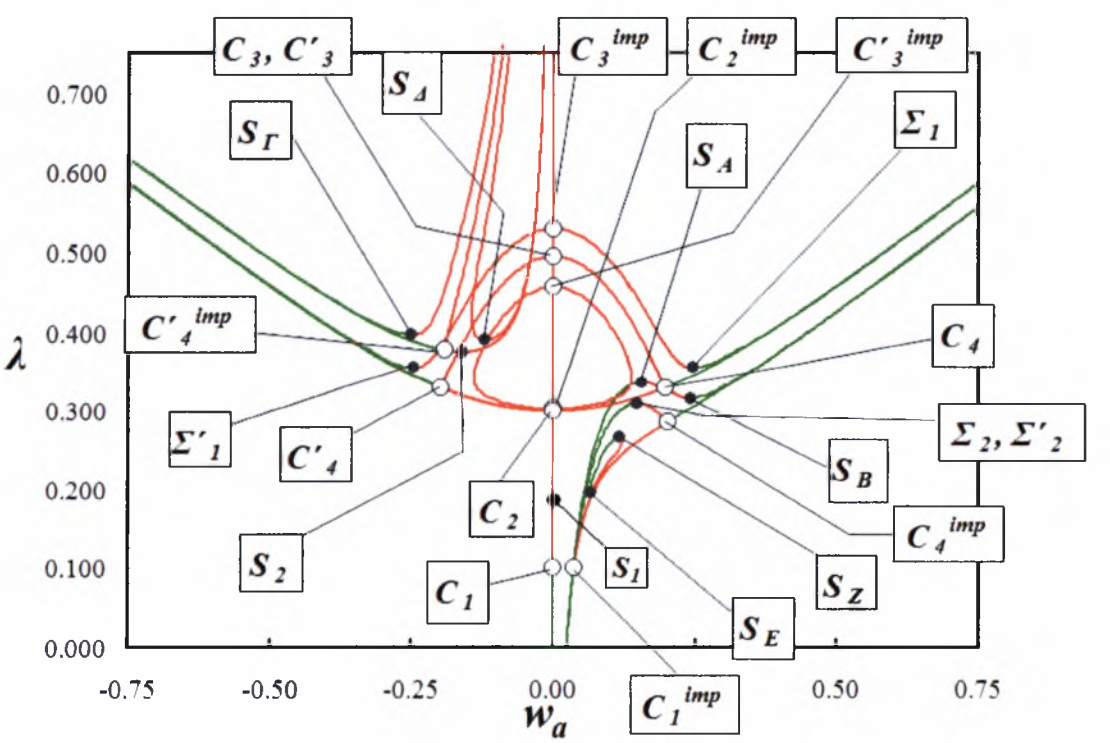
Εκ των δύο κλάδων του δρόμου αυτού ο ένας είναι ευσταθής και ο άλλος ασταθής, σύμφωνα με τα παραπάνω Σχήματα.

Με σκοπό την ποιοτική (αλλά και ως ένα βαθμό ποσοτική) εξέταση του "μηχανισμού - διαδικασίας" μετάπτωσης των δρόμων ισορροπίας των μερικά ατελών συστημάτων (με την έννοια της ύπαρξης ***μόνο*** συμμετρικής ή ***μόνο*** αντισυμμετρικής αρχικής ατέλειας) σε αυτά του πλήρως ατελούς συστήματος (και των κρίσιμων σημείων τους), χαράσσονται οι προβολές όλων των δρόμων στα επίπεδα (w_s, λ), (w_a, λ) και (w_s, w_a), και παρουσιάζονται σε γραφική

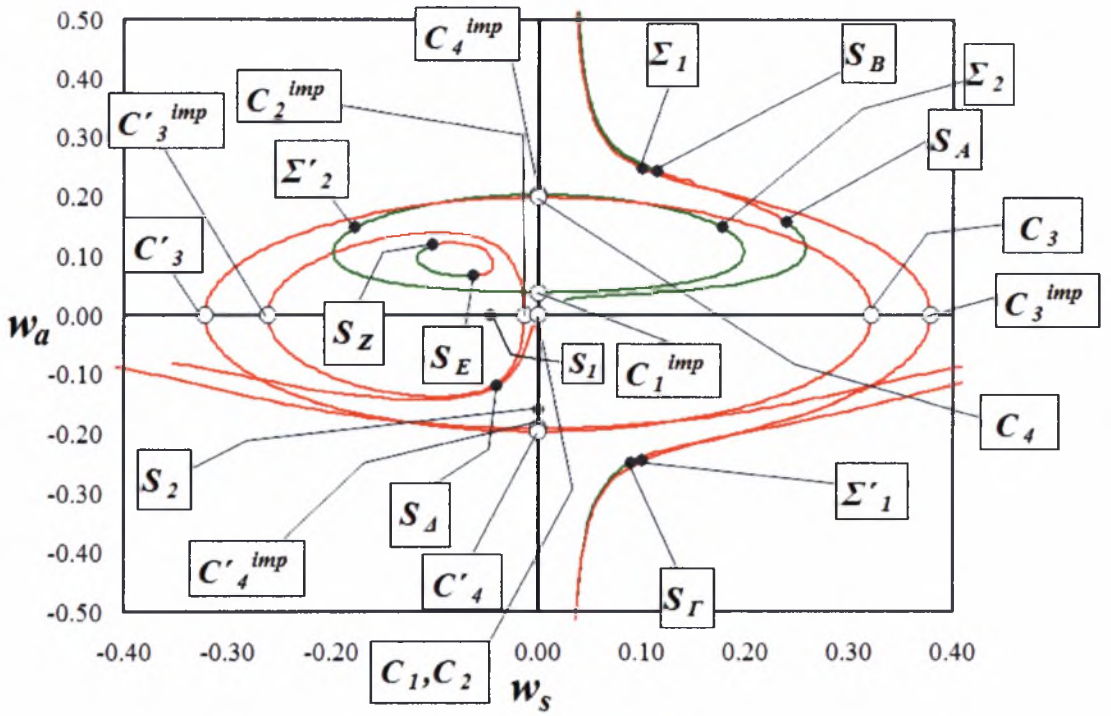
μορφή στα Σχήματα Β1.19α,β,γ, τα οποία αποτελούν σύνθεση των Σχημάτων Β1.9, Β1.15 και Β1.17, ενώ απεικονίζονται σε αυτά και οι δρόμοι ισορροπίας του τέλειου συστήματος.



(α)



(β)



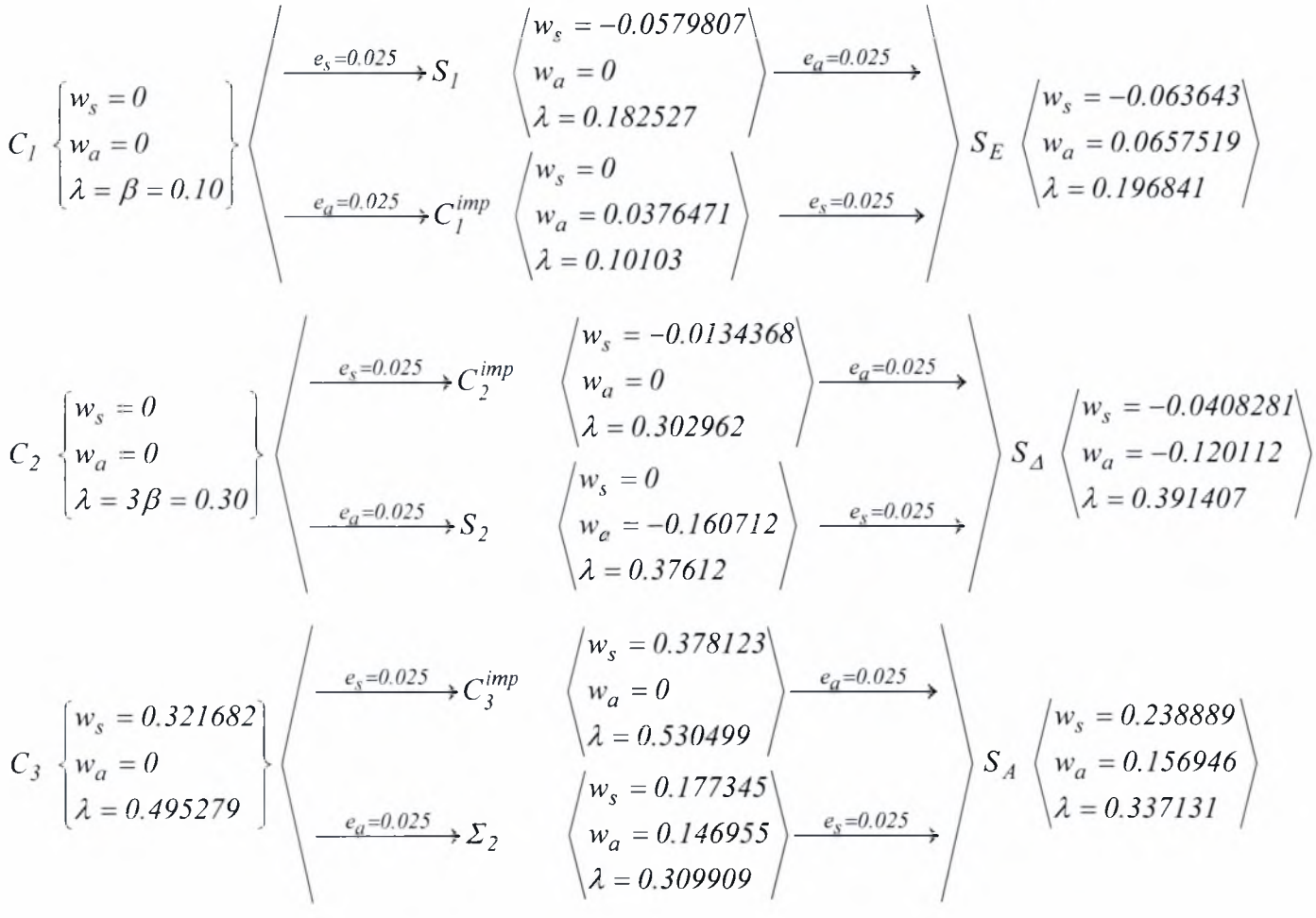
(γ)

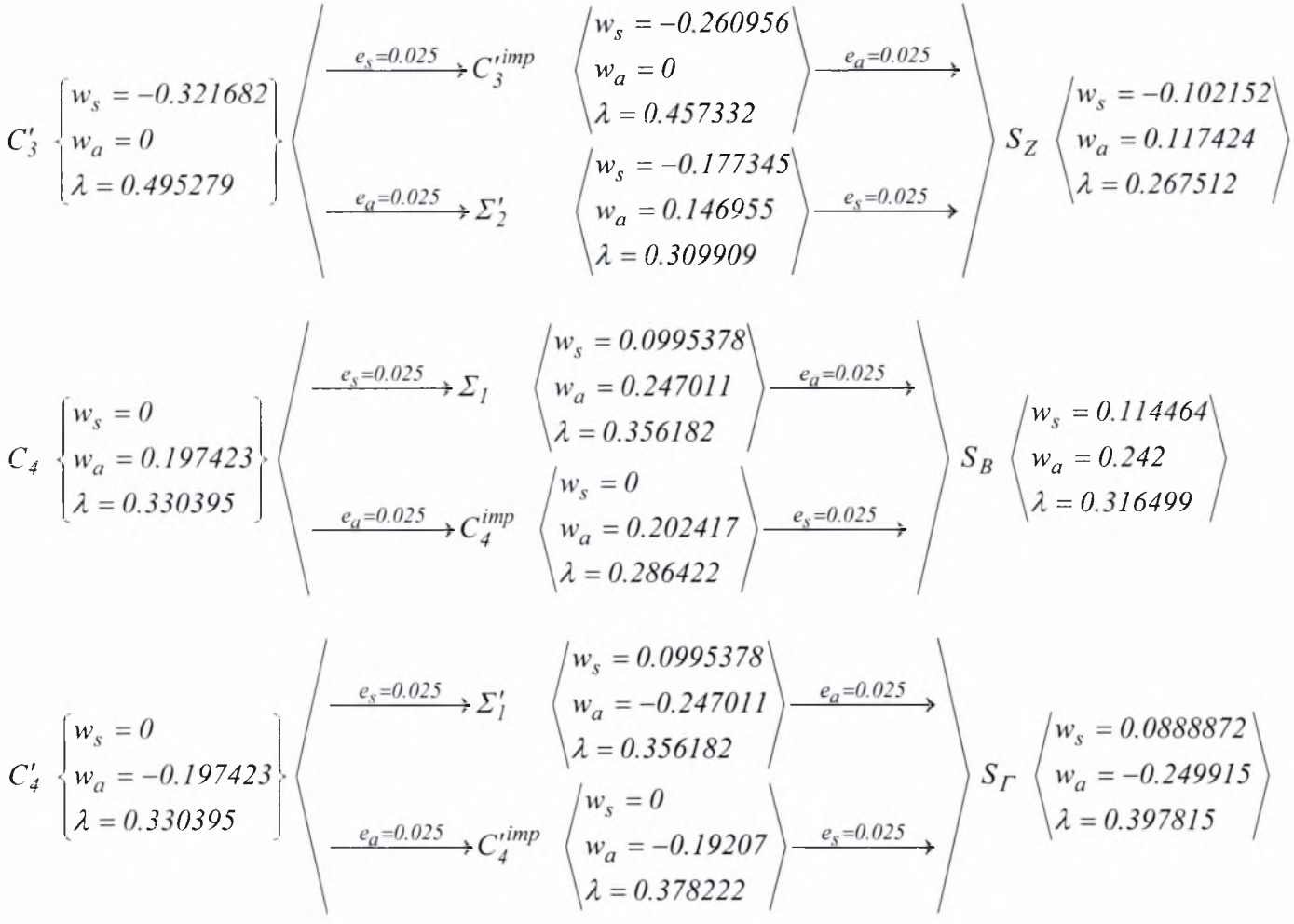
Σχήμα Β.19. Προβολές των δρόμων ισορροπίας του τέλειου, του μερικά ατελούς (για *μόνο* συμμετρική ή *μόνο* αντισυμμετρική αρχική ατέλεια) και του πλήρως ατελούς συστήματος, όπου οι πράσινες καμπύλες αντιστοιχούν σε ευσταθείς και οι ερυθρές σε ασταθείς δρόμους ισορροπίας, ενώ η ευστάθεια των κρίσιμων σημείων έχει ήδη καταγραφεί σε προηγούμενα Σχήματα.

Από τις παραπάνω γραφικές απεικονίσεις, σε συνδυασμό με τα όσα έχουν διεξοδικά αναφερθεί για τις διακλαδώσεις και τα κρίσιμα σημεία τόσο του τέλειου όσο και του ατελούς συστήματος, ***η εισαγωγή και της δεύτερης αρχικής ατέλειας συνεπάγεται πλήρη διάσπαση της συμμετρίας. Τα έξι (6) κρίσιμα σημεία των δρόμων ισορροπίας του τέλειου συστήματος, μετά την εισαγωγή είτε μόνο συμμετρικής είτε μόνο αντισυμμετρικής αρχικής ατέλειας μεταπίπτουν σε επίσης έξι κρίσιμα σημεία των ισορροπιών του αντίστοιχου ατελούς συστήματος και αφού εισαχθεί (θεωρούμενη σαν δεύτερη διαταραχή) και η αρχική ατέλεια της αντίθετης συμμετρίας (στο μερικά ατελές σύστημα) γεννώνται επίσης έξι κρίσιμα σημεία (του πλήρως ατελούς πλέον συστήματος) τα οποία είναι όλα οριακά σημεία***. Αντίστοιχη είναι και η μετάπτωση των δρόμων ισορροπίας του συστήματος, που γίνεται άμεσα αντιληπτή μελετώντας το Σχήμα Β.19, ενώ στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται αναλυτικά η ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες των κρίσιμων σημείων του συστήματος.

Διαταραγμένες διακλαδώσεις – ευαισθησία κρίσιμων σημείων σε αρχικές ατέλειες

Τέλειο σύστημα | **Μερικά ατελές σύστημα** | **Πλήρως ατελές σύστημα**




C_3'
$w_s = -0.321682$
$w_a = 0$
$\lambda = 0.495279$
$e_s=0.025 \rightarrow C_3'^{imp}$
$e_a=0.025 \rightarrow \Sigma_2'$
$w_s = -0.260956$
$w_a = 0$
$\lambda = 0.457332$
$w_s = -0.177345$
$w_a = 0.146955$
$\lambda = 0.309909$
$e_a=0.025$
$e_s=0.025$
S_Z
$w_s = -0.102152$
$w_a = 0.117424$
$\lambda = 0.267512$
C_4
$w_s = 0$
$w_a = 0.197423$
$\lambda = 0.330395$
$e_s=0.025 \rightarrow \Sigma_1$
$e_a=0.025 \rightarrow C_4^{imp}$
$w_s = 0.0995378$
$w_a = 0.247011$
$\lambda = 0.356182$
$w_s = 0$
$w_a = 0.202417$
$\lambda = 0.286422$
$e_a=0.025$
$e_s=0.025$
S_B
$w_s = 0.114464$
$w_a = 0.242$
$\lambda = 0.316499$
C_4'
$w_s = 0$
$w_a = -0.197423$
$\lambda = 0.330395$
$e_s=0.025 \rightarrow \Sigma_1'$
$e_a=0.025 \rightarrow C_4'^{imp}$
$w_s = 0.0995378$
$w_a = -0.247011$
$\lambda = 0.356182$
$w_s = 0$
$w_a = -0.19207$
$\lambda = 0.378222$
$e_a=0.025$
$e_s=0.025$
S_Γ
$w_s = 0.0888872$
$w_a = -0.249915$
$\lambda = 0.397815$

Β.1.3. Ανάλυση μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών

(α) Συναρτήσεις συνολικού δυναμικού του μερικά και του πλήρως αρχικά ατελούς συστήματος

1. Συσχετισμός με τις 7 θεμελιώδεις καταστροφές

Όπως είναι άμεσα αντιληπτό, το αρχικά μερικά ατελές σύστημα (είτε για *μόνο* συμμετρική είτε για *μόνο* αντισυμμετρική αρχική ατέλεια) χαρακτηρίζεται από **δύο *κύριες* (*ενεργές*)** συντεταγμένες w_s, w_a και επίσης **δύο *παραμέτρους ελέγχου***, το φορτίο λ και την αρχική ατέλεια e_s ή e_a κατά περίπτωση. Το συνολικό δυναμικό του συνεπώς ***δεν*** ανήκει σε καμία από τις στοιχειώδεις καταστροφές ***δύο ενεργών συντεταγμένων*** του Πίνακα Π2.2. Όσον δε αφορά το αρχικά *πλήρως ατελές σύστημα*, τούτο διαθέτει **δύο *ενεργές συντεταγμένες*** (τις ίδιες με προηγούμενα) και **τρεις *παραμέτρους ελέγχου*** λ, e_s, e_a. Στις επτά στοιχειώδεις καταστροφές συστήματα με τον ίδιο αριθμό συντεταγμένων και παραμέτρων (2, 3) είναι αυτά που σχετίζονται με τις ανωμαλίες τύπου ***υπερβολικού*** και ***ελλειπτικού λώρου***. Με χρήση εκ νέου συμβολικών μαθηματικών και αντικαθιστώντας (για λόγους αφ' ενός ομοιομορφίας και αφ' ετέρου διεθνώς παραδεκτής σημειολογίας) τις μεν ενεργές συντεταγμένες $w_s, w_a \mapsto x, y$ αντίστοιχα, τις δε παραμέτρους ελέγχου λ, e_s ή $e_a \mapsto \alpha_0, \alpha_1$ - $\lambda, e_s, e_a \mapsto \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ αντίστοιχα, οι εκφράσεις των συναρτήσεων συνολικού δυναμικού κατά περίπτωση έχουν σε συνεπτυγμένη, ανεπτυγμένη και παραγοντοποιημένη μορφή, σύμφωνα με τα προγράμματα *Vt symm.nb*, *Vt asymm.nb* και *Vt general.nb*, ως εξής:

- **Μόνο συμμετρική αρχική ατέλεια**

$$V_t^{symm} = 1/2\ ((x - y - \alpha_1)^4 + 2(-x + \alpha_1)^4 + (-x - y + \alpha_1)^4 + 1/2\ \alpha_0(-(x^2 + 3y^2)(4 + x^2 + 3y^2) + 4\alpha_1^2) + (1/18\ (6 + x^2 + 3y^2)^2 (x^2 + 9y^2) - 2/3\ x(6 + x^2 + 3y^2)\alpha_1 + 2\alpha_1^2)\beta)$$

ή $$V_t^{symm} = 2x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - x^2\alpha_0 - (x^4\alpha_0/4) - 3y^2\alpha_0 - 3/2\ x^2y^2\alpha_0 - (9y^4\alpha_0/4) - 8x^3\alpha_1 - 12xy^2\alpha_1 + 12x^2\alpha_1^2 + 6y^2\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_1^2 - 8x\alpha_1^3 + 2\alpha_1^4 + x^2\beta + (x^4\beta/3) + (x^6\beta/36) + 9y^2\beta + 4x^2y^2\beta + 5/12\ x^4y^2\beta + 9y^4\beta + 7/4\ x^2y^2\beta + (9y^6\beta/4) - 2x\alpha_1\beta - 1/3\ x^3\alpha_1\beta - xy^2\alpha_1\beta + \alpha_1^2\beta$$

ή

$$V_t^{symm} = 1/2\, x^4 (4 - \alpha_o / 2 + 2\beta / 3) + (x^6 \beta / 36) + 5/12\, x^4 y^2 \beta + 7/4\, x^2 y^4 \beta + 9\, y^6 \beta / 4 +$$
$$1/2\, x^2 (-2\, \alpha_o + 24\, \alpha_1^2 + 2\beta) + 1/2\, x^2 y^2 (12 - 3\, \alpha_o + 8\, \beta) +$$
$$1/2\, y^4 (2 - 9\, \alpha_o / 2 + 18\beta) + 1/2\, y^2 (-6\, \alpha_o + 12\, \alpha_1^2 + 18\beta) +$$
$$1/2\, x (-16\, \alpha_1^3 - 4\, \alpha_1 \beta) + 1/2\, x\, y^2 (- 24\, \alpha_1 - 2\, \alpha_1 \beta) +$$
$$1/2\, x^3 (-16\, \alpha_1 - 2\, \alpha_1 \beta / 3) + 1/2\, (2\, \alpha_o \alpha_1^2 + 4\, \alpha_1^4 + 2\, \alpha_1^2 \beta)$$

(B1.35α,β,γ)

- **<u>Μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια</u>**

$$V_i^{asymm} = 1/2\, (2\, x^4 + (- x - y + \alpha_1)^4 + (x - y + \alpha_1)^4 +$$
$$1/2\, \alpha_o (- (x^2 + 3\, y^2) (4 + x^2 + 3\, y^2) + 12\, \alpha_1^2) +$$
$$(1/18\, (6 + x^2 + 3\, y^2)^2 (x^2 + 9\, y^2) - 6\, y (6 + x^2 + 3\, y^2) \alpha_1 + 18\, \alpha_1^2)$$

ή

$$V_i^{asymm} = 2\, x^4 + 6\, x^2 y^2 + y^4 - x^2 \alpha_o - (x^4 \alpha_o / 4) - 3\, y^2 \alpha_o - 3/2\, x^2 y^2 \alpha_o - 9\, y^4 \alpha_o -$$
$$12\, x\, y^2 \alpha_1 - 4\, y^3 \alpha_1 + 6\, x^2 \alpha_1^2 + 6\, y^2 \alpha_1^2 + 3\, \alpha_o \alpha_1^2 - 4\, y\, \alpha_1^3 +$$
$$\alpha_1^4 + x^2 \beta + (x^4 \beta / 3) + (x^6 \beta / 36) + 9\, y^2 \beta + 4\, x^2 y^2 \beta + 5/12\, x^4 y^2 \beta + 9\, y^4 \beta +$$
$$7/4\, x^2 y^4 \beta + (9\, y^6 \beta / 4) - 18\, y\, \alpha_1 \beta - 3\, x^2 y\, \alpha_1 \beta - 9\, y^3 \alpha_1 \beta + 9\, \alpha_1^2 \beta$$

ή

$$V_i^{asymm} = 1/2\, x^4 (4 - \alpha_o / 2 + 2\, \beta / 3) + (x^6 \beta / 36) + 5/12\, x^4 y^2 \beta + 7/4\, x^2 y^4 \beta + 9\, y^6 \beta / 4 +$$
$$1/2\, x^2 (-2\, \alpha_o + 12\, \alpha_1^2 + 2\, \beta) + 1/2\, x^2 y^2 (12 - 3\, \alpha_o + 8\, \beta) +$$
$$1/2\, y^4 (2 - 9\, \alpha_o / 2 + 18\, \beta) + 1/2\, y^2 (- 6\, \alpha_o + 12\, \alpha_1^2 + 18\, \beta) +$$
$$1/2\, y (- 8\, \alpha_1^3 - 36\, \alpha_1 \beta) + 1/2\, y^3 (- 8\, \alpha_1 - 18\, \alpha_1 \beta) +$$
$$1/2\, x^2 y (- 24\, \alpha_1 - 6\, \alpha_1 \beta) + 1/2\, (6\, \alpha_o \alpha_1^2 + 2\, \alpha_1^4 + 18\, \alpha_1^2 \beta)$$

(B1.36α,β,γ)

- **Πλήρης αρχική ατέλεια**

$$V_t^{gen} = 1/2\,(\,2\,(\,-x+\alpha_1\,)^4 + (\,x-y-\alpha_1+\alpha_2\,)^4 + (\,-x-y+\alpha_1+\alpha_2\,)^4 +$$

$$1/2\;\alpha_o\,(\,-(\,x^2+3\,y^2\,)+4\,\alpha_1^{\,2}+12\,\alpha_2^{\,2}\,) +$$

$$(\,1/18\,(\,6+x^2+3\,y^2\,)^2\,(x^2+9\,y^2\,) - 2/3\;x\,(\,6+x^2+3\,y^2\,)\,\alpha_1 +$$

$$2\,\alpha_1^{\,2} - 6\,y\,(\,6+x^2+3\,y^2\,)\,\alpha_2 + 18\,\alpha_2^{\,2}\,)\,\beta\,)$$

ή

$$V_t^{gen} = 2\,x^4 + 6\,x^2\,y^2 + y^4 - x^2\,\alpha_o - (\,x^4\,\alpha_o/4\,) - 3\,y^2\,\alpha_o - 3/2\,x^2\,y^2\,\alpha_o -$$

$$(\,9\,y^4\,\alpha_o/4\,) - 8\,x^3\,\alpha_1 - 12\,x\,y^2\,\alpha_1 + 12\,x^2\,\alpha_1^{\,2} + 6\,y^2\,\alpha_1^{\,2} + \alpha_o\,\alpha_1^{\,2} -$$

$$8\,x\,\alpha_1^{\,3} + 2\,\alpha_1^{\,4} - 12\,x^2\,y\,\alpha_2 - 4\,y^3\,\alpha_2 + 24\,x\,y\,\alpha_1\,\alpha_2 - 12\,y\,\alpha_1^{\,2}\,\alpha_2 +$$
$$6\,x^2\,\alpha_2^{\,2} + 6\,y^2\,\alpha_2^{\,2} + 3\,\alpha_o\,\alpha_2^{\,2} - 12\,x\,\alpha_1\,\alpha_2^{\,2} + 6\,\alpha_1^{\,2}\,\alpha_2^{\,2} -$$

$$4\,y\,\alpha_2^{\,3} + \alpha_2^{\,4} + x^2\,\beta + (\,x^4\,\beta/3\,) + (\,x^6\,\beta/36\,) + 9\,y^2\,\beta + 4\,x^2\,y^2\,\beta +$$

$$5/12\;x^4\,y^2\,\beta + 9\,y^4\,\beta + 7/4\;x^2\,y^4\,\beta + (\,9\,y^6\,\beta/4\,) - 2\,x\,\alpha_1\,\beta - 1/3\;x^3\,\alpha_1\,\beta -$$

$$x\,y^2\,\alpha_1\,\beta + \alpha_1^{\,2}\,\beta - 18\,y\,\alpha_2\,\beta - 3\,x^2\,y\,\alpha_2\,\beta - 9\,y^3\,\alpha_2\,\beta + 9\,\alpha_2^{\,2}\,\beta$$

ή

$$V_t^{gen} = 24\,x\,y\,\alpha_1\,\alpha_2 + 1/2\;x^4\,(\,4-\alpha_o/2+2\,\beta/3\,) + (\,x^6\,\beta/36\,) + 5/12\;x^4\,y^2\,\beta + 7/4\;x^2\,y^4\,\beta +$$

$$(\,9\,y^6\,\beta/4\,) + 1/2\;x^2\,(\,-2\,\alpha_o + 24\,\alpha_1^{\,2} + 12\,\alpha_2^{\,2} + 2\,\beta\,) + 1/2\;x^2\,y^2\,(\,12 - 3\,\alpha_o + 8\,\beta\,) +$$

$$1/2\;y^4\,(\,2 - 9\,\alpha_o/2 + 18\,\beta\,) + 1/2\;y^2\,(\,-6\,\alpha_o + 12\,\alpha_1^{\,2} + 12\,\alpha_2^{\,2} + 18\,\beta\,) +$$

$$1/2\;x\,(\,-16\,\alpha_1^{\,3} - 24\,\alpha_1\,\alpha_2^{\,2} - 4\,\alpha_1\,\beta\,) + 1/2\;x\,y^2\,(\,-24\,\alpha_1 - 2\,\alpha_1\,\beta\,) +$$

$$1/2\;x^3\,(\,-16\,\alpha_1 - (\,2\,\alpha_1\,\beta/3\,) + 1/2\;y\,(\,-24\,\alpha_1^{\,2}\,\alpha_2 - 8\,\alpha_2^{\,3} - 36\,\alpha_2\,\beta\,) +$$

$$1/2\;y^3\,(\,-8\,\alpha_2 - 18\,\alpha_2\,\beta\,) + 1/2\;x^2\,y\,(\,-24\,\alpha_2 - 6\,\alpha_2\,\beta\,) +$$

$$1/2\,(\,2\,\alpha_o\,\alpha_1^{\,2} + 4\,\alpha_1^{\,4} + 6\,\alpha_o\,\alpha_2^{\,2} + 12\,\alpha_1^{\,2}\,\alpha_2^{\,2} + 2\,\alpha_2^{\,4} + 2\,\alpha_1^{\,2}\,\beta + 18\,\alpha_2^{\,2}\,\beta$$

(B1.37α,β,γ)

*Σημειωτέον ότι σε όλες τις προηγηθείσες εκφράσεις η παράμετρος **β** θεωρείται ως αριθμητική σταθερά, η δε ανάλυση που θα ακολουθήσει **δεν** συμπεριλαμβάνει την παράμετρο αυτή ως μια επί πλέον πιθανή διαταραχή (που ουσιαστικά είναι), αφού το ενδιαφέρον της εργασίας εστιάζεται στις τιμές εκείνες του **β**, για τις οποίες λαμβάνουν χώραν όλα τα ήδη αναφερθέντα διακλαδικά φαινόμενα, με αντιπροσωπευτική τιμή αυτή του **β=0.10**.*

Κατ' αναλογία (πρόγραμμα *Vt perf.nb*) το συνολικό δυναμικό του ***τέλειου συστήματος (σπέρμα)*** δίδεται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$V_t^{perf} = 1/2\,(\,2\,x^4 + (\,-x-y\,)^4 + (\,x-y\,)^4 \;-$$

$$1/2\;(x^2 + 3\,y^2\,)\;(\,4 + x^2 + 3\,y^2\,)\;\alpha_o +$$

$$1/18\,(\,6 + x^2 + 3\,y^2\,)^2\;(\,x^2 + 9\,y^2\,)\,\beta\,)$$

ή

$$V_t^{perf} = 2\,x^4 + 6\;x^2\,y^2 + y^4 - x^2\,\alpha_o - (\,x^4\,\alpha_o / 4\,) - 3\,y^2\,\alpha_o -$$

$$3/2\,x^2\,y^2\,\alpha_o - (\,9\,y^4\,\alpha_o / 4\,) + x^2\,\beta + (\,x^4\,\beta / 3\,) + (\,x^6\,\beta / 36\,) + 9\,y^2\,\beta +$$

$$4\,x^2\,y^2\,\beta + 5/12\,x^4\,y^2\,\beta + 9\,y^4\,\beta + 7/4\,x^2\,y^4\,\beta + (\,9\,y^6\,\beta / 4\,)$$

ή

$$V_t^{perf} = 1/2\,x^4\,(\,4 - \alpha_o / 2 + 2\,\beta/3\,) + (x^6\,\beta / 36\,) +$$

$$5/12\,x^4\,y^2\,\beta + 7/4\,x^2\,y^4\,\beta + (\,9\,y^6\,\beta / 4\,) +$$

$$1/2\,x^2\,(\,-2\,\alpha_o + 2\,\beta\,) + 1/2\,x^2\,y^2\,(\,12 - 3\,\alpha_o + 8\,\beta\,) +$$

$$1/2\,y^2\,(\,-6\,\alpha_o + 18\,\beta\,) + 1/2\,y^4\,(\,2 - (\,9\,\alpha_o/2\,) + 18\,\beta\,)$$

(Β1.38α,β,γ)

2. Πολλαπλά καταστροφής Μ, διακλαδικά σύνολα Bs και αντίστοιχες γραφικές απεικονίσεις

Τα πολλαπλά καταστροφής Μ *(catastrophe manifolds)* των ανωτέρω συστημάτων υπολογίζονται σύμφωνα με την προηγηθείσα θεωρητική ανάλυση συμβολικά ***και αποτελούν τις (υπερ)επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας***, δίδονται δε από τις ακόλουθες εκφράσεις:

- **Μόνο συμμετρική αρχική ατέλεια**

$$(\,x^5\,\beta/6\,) - x^2\,\alpha_1\,(\,24 + \beta\,) + x^3\,(\,8 - \alpha_o + 1/3\,(\,4 + 5\,y^2\,)\,\beta\,) -$$

$$\alpha_1\,(\,y^2\,(\,12 + \beta\,) + 2\,(\,4\,\alpha_1^2 + \beta\,)\,) +$$

$$x\,(\,-2\,\alpha_o + 24\,\alpha_1^2 + 2\,\beta + (\,7\,y^4\,\beta / 2\,) + y^2\,(\,12 - 3\,\alpha_o + 8\,\beta\,)\,) = 0$$

(Β1.39α)

$$- 6\, y\, (\alpha_o - 2\, \alpha_1^2 - 3\, \beta) + 5 / 6\, x^4\, y\, \beta + (27\, y^5\, \beta) / 2 - 2\, x\, y\, \alpha_1\, (12 + \beta) +$$

$$y^3\, (4 - 9\, \alpha_o + 36\, \beta) + x^2\, y\, (12 - 3\, \alpha_o + 8\, \beta + 7\, y^2\, \beta) = 0$$

(B1.39β)

- **<u>Μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια</u>**

$$1 / 6\, x\, (x^4\, \beta + 2\, x^2\, (24 - 3\, \alpha_o + 4\, \beta + 5\, y^2\, \beta) +$$

$$3\, (7\, y^4\, \beta - 12\, y\, \alpha_1\, (4 + \beta) + 4\, (- \alpha_o + 6\, \alpha_1^2 + \beta) +$$

$$y^2\, (24 - 6\, \alpha_o + 16\, \beta))) = 0$$

(B1.40α)

$$1 / 2\, (- 6\, y\, (2 + x^2 + 3\, y^2)\, \alpha_o + 4\, (x + y - \alpha_1)^3 - 4\, (x - y + \alpha_1)^3 +$$

$$((36 + 16\, x^2 + (5\, x^4) / 3)\, y + 2\, (36 + 7\, x^2)\, y^3 + 27\, y^5 -$$

$$6\, (6 + x^2)\, \alpha_1 - 54\, y^2\, \alpha_1)\, \beta) = 0$$

(B1.40β)

- **<u>Πλήρης αρχική ατέλεια</u>**

$$1 / 2\, (- 2\, x\, (2 + x^2 + 3\, y^2)\, \alpha_o + 8\, (x - \alpha_1)^3 +$$

$$4\, (x + y - \alpha_1 - \alpha_2)^3 + 4\, (x - y - \alpha_1 + \alpha_2)^3 +$$

$$1 / 3\, (x^5 + 2\, x^3\, (4 + 5\, y^2) - 6\, x^2\, \alpha_1 - 6\, (2 + y^2)\, \alpha_1 +$$

$$3\, x\, (4 + 16\, y^2 + 7\, y^4 - 12\, y\, \alpha_2))\, \beta) = 0$$

(B1.41α)

$$1 / 2\, (- 6\, y\, (2 + x^2 + 3\, y^2)\, \alpha_o + 4\, (x + y - \alpha_1 - \alpha_2)^3 -$$

$$4\, (x - y - \alpha_1 + \alpha_2)^3 +$$

$$(2\, (36 + 7\, x^2)\, y^3 + 27\, y^5 +$$

$$y\, (36 + 16\, x^2 + (5\, x^4) / 3 - 4\, x\, \alpha_1) - 6\, (6 + x^2)\, \alpha_2 -$$

$$54\, y^2\, \alpha_2)\, \beta) = 0$$

(B1.41β)

- **Τέλειο σύστημα**

$$1 / 6 \, x \, (\, x^4 \, \beta + 2 \, x^2 \, (\, 24 - 3 \, \alpha_o + 4 \, \beta + 5 \, y^2 \, \beta \,) +$$

$$3 \, (\, - 4 \, \alpha_o + 4 \, \beta + 7 y^4 \, \beta + y^2 \, (\, 24 - 6 \, \alpha_o + 16 \, \beta \,) \,) \,) = 0$$

(B1.42α)

$$y^3 \, (\, 4 - 9 \, \alpha_o \,) - 3 \, x^2 \, y \, (\, - 4 + \alpha_o \,) - 6 \, y \, \alpha_o +$$

$$1 / 6 \, y \, (\, 6 + x^2 + 3 \, y^2 \,) \, (\, 18 + 5 \, x^2 + 27 \, y^2 \,) \, \beta = 0$$

(B1.42β)

Τα **διακλαδικά σύνολα *Bs*** *(bifurcation sets)* ορίζονται από τον ***<u>ταυτόχρονο μηδενισμό</u>*** των ***εξισώσεων ισορροπίας*** και ***της ορίζουσας ευστάθειας Hessian***. Η σχετική τρίτη εξίσωση έχει ανά σύστημα ως εξής:

- **<u>Μόνο συμμετρική αρχική ατέλεια</u>**

$$\begin{aligned} Hessian^{symm} = & - 4 / 9 \, y^2 \, (\, 5 \, x^3 \, \beta - 3 \, \alpha_1 \, (\, 12 + \beta \,) + 3 \, x \, (\, 12 - 3 \, \alpha_o + 8 \, \beta + 7 \, y^2 \, \beta \,) \,)^2 + \\ & (\, - 2 \, \alpha_o + 24 \, \alpha_1^{\,2} + 2 \, \beta + (\, 5 \, x^4 \, \beta \,) / 6 + (\, 7 \, \, y^4 \, \beta \,) / 2 - 2 \, x \, \alpha_1 \, (\, 24 + \beta \,) + \\ & y^2 \, (\, 12 - 3 \, \alpha_o + 8 \, \beta \,) + x^2 \, (\, 24 - 3 \, \alpha_o + 4 \, \beta + 5 \, y^2 \, \beta \,) \,) \\ & (\, - 6 \, (\, \alpha_o - 2 \, \alpha_1^{\,2} - 3 \, \beta \,) + (\, 5 \, x^4 \, \beta \,) / 6 + (\, 135 \, y^4 \, \beta \,) / 2 - 2 \, x \, \alpha_1 \, (\, 12 + \beta \,) + \\ & y^2 \, (\, 12 - 27 \, \alpha_o + 108 \, \beta \,) + x^2 \, (\, 12 - 3 \, \alpha_o + 8 \, \beta + 21 \, y^2 \, \beta \,) \,) = 0 \end{aligned}$$

(B1.39γ)

- **<u>Μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια</u>**

$$\begin{aligned} Hessian^{asymm} = & - 4/9 \, x^2 \, (\, 21 \, y^3 \, \beta - 9 \, \alpha_1 \, (\, 4 + \beta \,) + y \, (\, 36 - 9 \, \alpha_o + 24 \, \beta + 5 \, x^2 \, \beta \,) \,)^2 + \\ & 1/2 \, \, ((\, 5 \, x^4 \, \beta \,) / 6 + (\, 7 \, \, y^4 \, \beta \,) / 2 - 6 \, y \, \alpha_1 \, (\, 4 + \beta \,) + 2 \, (\, - \alpha_o + 6 \, \alpha_1^{\,2} + \beta \,) + \\ & y^2 \, (\, 12 - 3 \, \alpha_o + 8 \, \beta \,) + x^2 \, (\, 24 - 3 \, \alpha_o + 4 \, \beta + 5 \, y^2 \, \beta \,) \,) \\ & (\, -6 \, (\, 2 \, \alpha_o + \, y^2 \, (\, - 4 + 9 \, \alpha_o \,) + 8 \, y \, \alpha_1 - 4 \, \alpha_1^{\,2} \,) + \, (\, 5 \, x^4 \, \beta \,) / 3 + \\ & 9 \, (\, 4 + 3 \, y \, (\, 8 \, y + 5 \, y^3 - 4 \, \alpha_1 \,) \,) \, \beta + \\ & x^2 \, (\, 24 - 6 \, \alpha_o + 16 \, \beta + 42 \, y^2 \, \beta \,) \,) = 0 \end{aligned}$$

(B1.40γ)

- **Πλήρης αρχική ατέλεια**

$$Hessian^{gen} = 1/4\,(\,(\,(5\,x^4\,\beta/3\,) + 7\,y^4\,\beta - 12\,y\,\alpha_2\,(\,4+\beta\,) - 4\,x\,\alpha_1\,(\,24+\beta\,) +$$
$$4\,(\,-\alpha_o + 12\,\alpha_1^{\,2} + 6\,\alpha_2^{\,2} + \beta\,) + y^2\,(\,24 - 6\,\alpha_o + 16\,\beta\,)$$
$$+ 2\,x^2\,(\,24 - 3\,\alpha_o + 4\,\beta + 5\,y^2\,\beta\,(\,(\,5\,x^4\,\beta/3\,) + 135\,y^4\,\beta - 4\,x\,\alpha_1\,(\,12+\beta\,) +$$
$$12\,(\,-\alpha_o + 2\,(\,\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2}\,) + 3\,\beta\,) - 12\,y\,\alpha_2\,(\,4+9\,\beta\,) + y^2\,(\,24 - 54\,\alpha_o + 216\,\beta\,) +$$
$$x^2\,(\,24 - 6\,\alpha_o + 16\,\beta + 42\,y^2\,\beta\,)\,) - 16/9\,(\,5\,x^3\,y\,\beta - 3\,\alpha_1\,(\,-12\,\alpha_2 + y\,(\,12+\beta\,)\,) +$$
$$3\,x\,(\,7\,y^3\,\beta - 3\,\alpha_2\,(\,4+\beta\,) + y\,(\,12 - 3\,\alpha_o + 8\,\beta\,)\,)\,\hat{}\,2\,) = 0$$

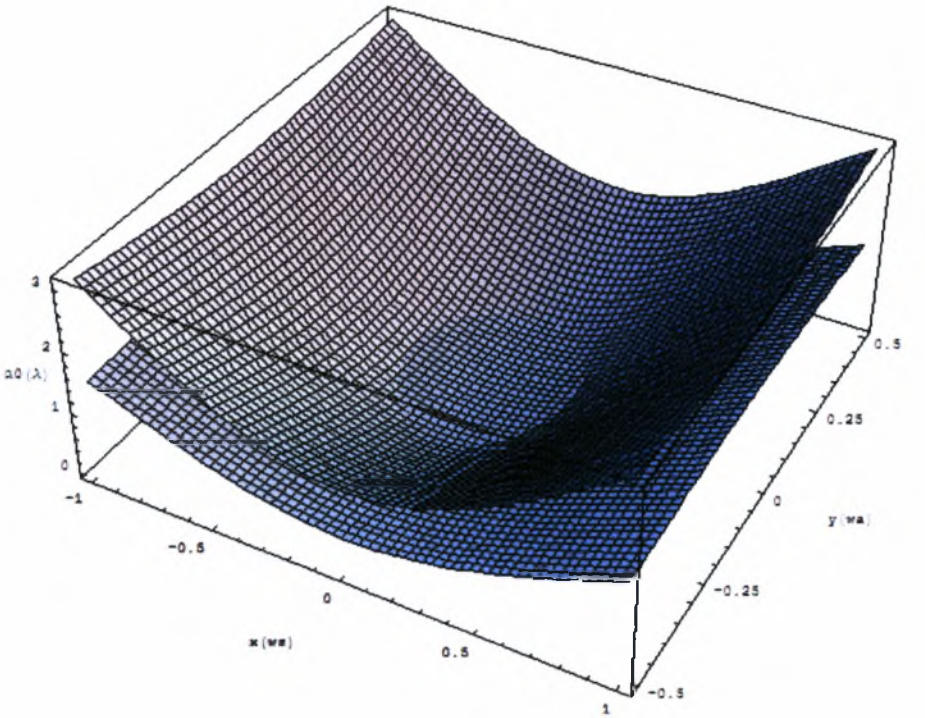
(B1.41γ)

- **Τέλειο σύστημα**

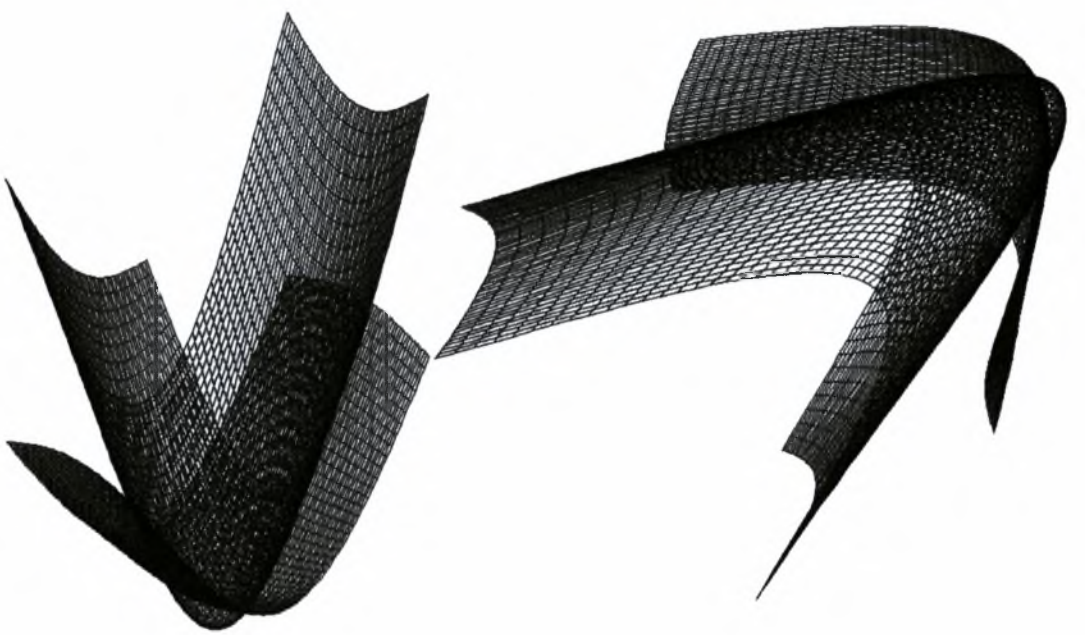
$$Hessian^{perf} = 1/36\,(\,-16\,x^2\,y^2\,(\,36 - 9\,\alpha_o + (\,24 + 5\,x^2 + 21\,y^2\,)\,\beta\,)^2 +$$
$$(\,-36\,(\alpha_o - 3\,\beta\,) + 5\,x^4\,\beta + 6\,x^2\,(\,12 - 3\,\alpha_o + 8\,\beta + 21\,y^2\,\beta\,) +$$
$$9\,y^2\,(\,8 - 18\,\alpha_o + 72\,\beta + 45\,y^2\,\beta\,)\,)$$
$$(\,5\,x^4\,\beta - 6\,x^2\,(\,-24 + 3\,\alpha_o - 4\,\beta - 5\,y^2\,\beta\,) +$$
$$3\,(\,-4\,\alpha_o + 4\,\beta + 7\,y^4\,\beta + y^2\,(\,24 - 6\,\alpha_o + 16\,\beta\,)\,)\,)\,) = 0$$

(B1.42γ)

Εκκινώντας τον υπολογισμό και την γραφική αναπαράσταση των επιφανειών των πολλαπλών καταστροφής και των διακλαδικών συνόλων, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ισορροπίας του τέλειου συστήματος (όπως προκύπτει από εφαρμογές τρισδιάστατων γραφικών του *Mathematica* σε συνδυασμό με τον *AutoCAD*, που φαίνονται στα προγράμματα *Mperfect cont.nb* και *MBsperf.nb*) προέρχεται από τον ταυτόχρονο μηδενισμό των εξισώσεων ισορροπίας B1.42 α,β και παρουσιάζεται γραφικά στα Σχήματα B1.20, B1.21α,β και B1.22. Κατ' αναλογία, μηδενίζοντας επίσης και την *Hessian* του συστήματος, καταλήγουμε στο γεωμετρικό τόπο των (κρίσιμων) διακλαδικών σημείων, ο οποίος παρουσιάζεται στο Σχήμα B1.23. ***Η μορφή όλων των ως άνω γραφικών απεικονίσεων είναι πλήρως εναρμονισμένη και σε εξαιρετική συμφωνία με την διακλαδική ανάλυση που προηγήθηκε*** (§ B1.2.9 και Σχήμα B1.3).

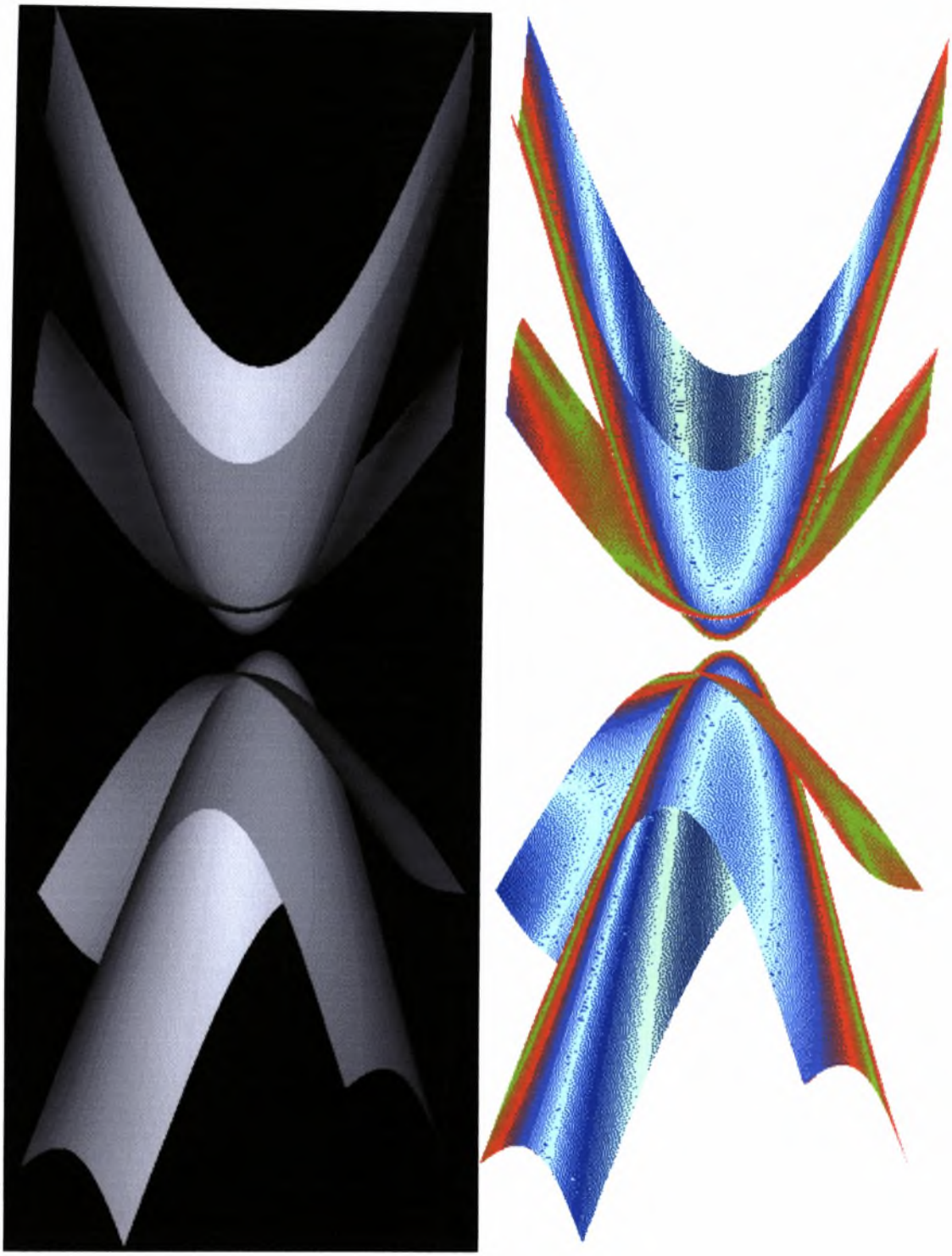


Σχήμα Β1.20. Επιφάνεια των σημείων ισορροπίας του τέλειου συστήματος, προϊόν του *Mathematica* (τα επίπεδα $[w_s,\lambda]$ και $[w_a,\lambda]$ δεν φαίνονται προς απλούστευση της αναπαράστασης)



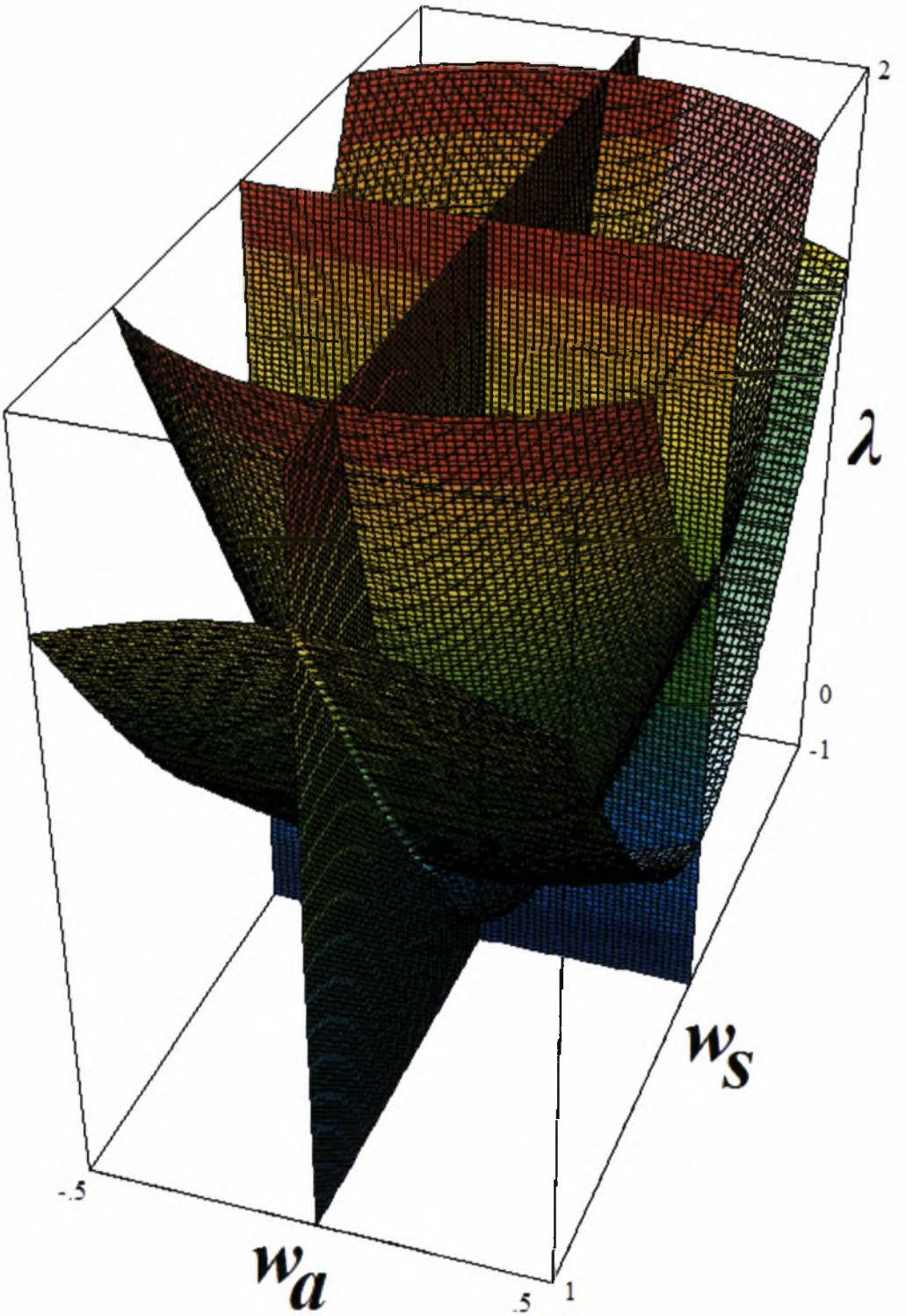
(α)

Σχήμα Β1.21 (συνεχίζεται)

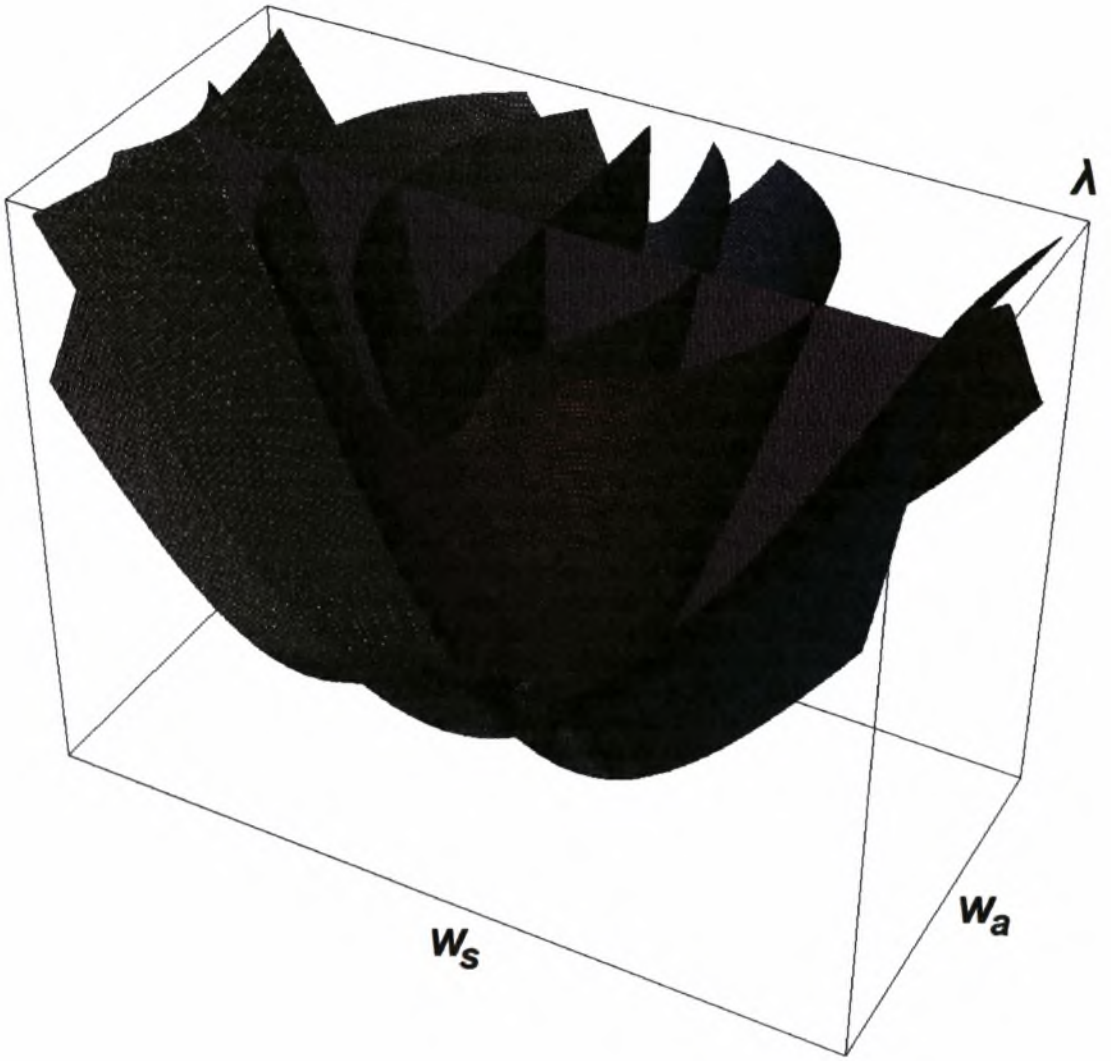


(β)

Σχήμα Β1.21. Επιφάνεια των σημείων ισορροπίας του τέλειου συστήματος, προϊόν συνδυασμού των *Mathematica* και *AutoCAD* (και εδώ τα επίπεδα $[w_s,\lambda]$ και $[w_a,\lambda]$ δεν φαίνονται προς απλούστευση της αναπαράστασης).



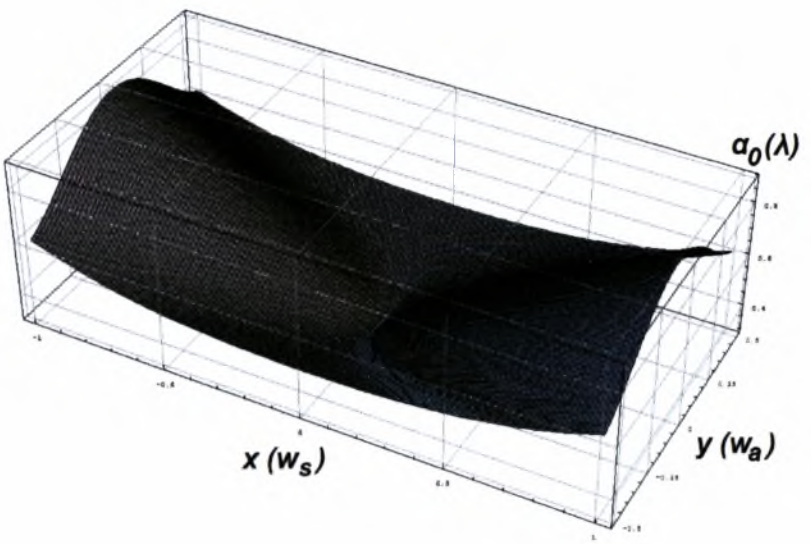
Σχήμα Β1.22. Επιφάνεια των σημείων ισορροπίας του τέλειου συστήματος, προϊόν του προγράμματος *γραφικών DPGraph*.



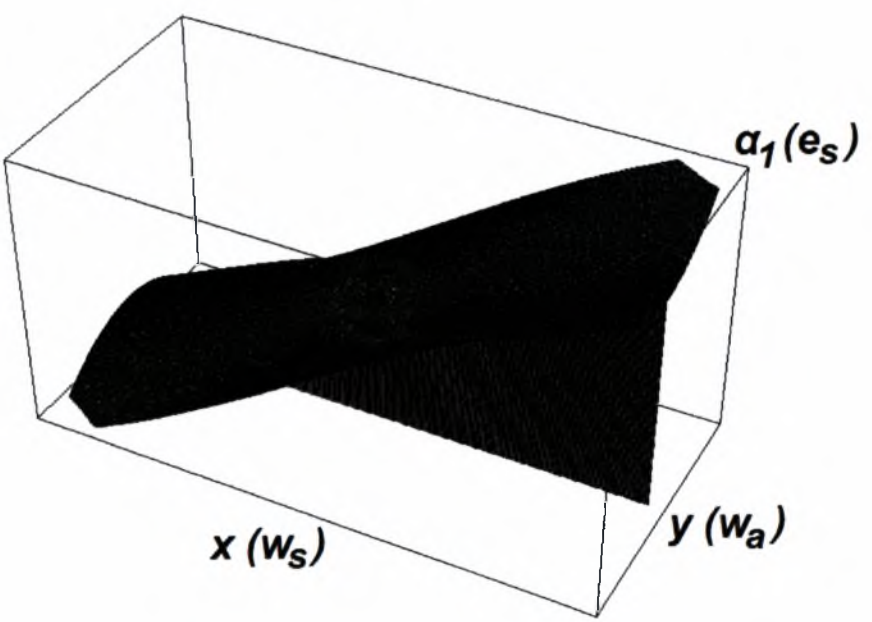
Σχήμα Β1.23. Γεωμετρικός τόπος των (κρισίμων) σημείων διακλάδωσης του τέλειου συστήματος, προϊόν του *Mathematica*.

Όσον αφορά το αρχικά μερικά ατελές σύστημα (είτε με *μόνο συμμετρική* είτε με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια), λόγω του γεγονότος ότι υφίστανται δύο ενεργές συντεταγμένες (x, y) και δύο παράμετροι ελέγχου $\left(\alpha_0 \leftrightarrow \lambda, \alpha_1 \leftrightarrow \begin{matrix} e_s \\ e_a \end{matrix}\right)$ και επειδή το εκάστοτε πολλαπλό καταστροφής ορίζεται από τον ταυτόχρονο μηδενισμό δύο εξισώσεων της μορφής $M_i(x, y, \alpha_0, \alpha_1) = 0, \quad i = 1,2$, η χρήση συμβολικών μαθηματικών δύναται να οδηγήσει ***σε δύο είδη επιφανειών πολλαπλών καταστροφής***. Το ***1ο είδος*** αποτελεί επιφάνεια στο χώρο $(w_s, w_a, \lambda) \Leftrightarrow (x, y, \alpha_0)$, η οποία προκύπτει μετά από απαλοιφή της παραμέτρου ελέγχου α_1 (e_s ή e_a κατά περίπτωση). Αντίστοιχα, ***το 2ο είδος*** επιφάνειας πολλαπλού καταστροφής, προϊόν απαλοιφής της παραμέτρου ελέγχου α_0 (δηλαδή του φορτίου

λ), ορίζεται στο χώρο $(x, y, \alpha_1) \Leftrightarrow (w_s, w_a, e_s \, \acute{\eta} \, e_a)$. Πράγματι, όπως αναλυτικά παρουσιάζεται στο περιεχόμενο των ομάδων προγραμμάτων [*Vtsym surf.nb*, *MBssymm.nb*, *ManifSymm.nb*] και [*Vtasym surf.nb*, *MBsAsymm.nb*, *ManifAsymm.nb*], τα δύο είδη επιφανειών πολλαπλών καταστροφής υπολογίζονται συμβολικά και παρουσιάζονται στις αντίστοιχες ομάδες Σχημάτων [B1.24 – B1.28] και [B1.29 – B1.33], σε συνδυασμό με τις δυνατότητες φωτοσκίασης του *AutoCAD*.

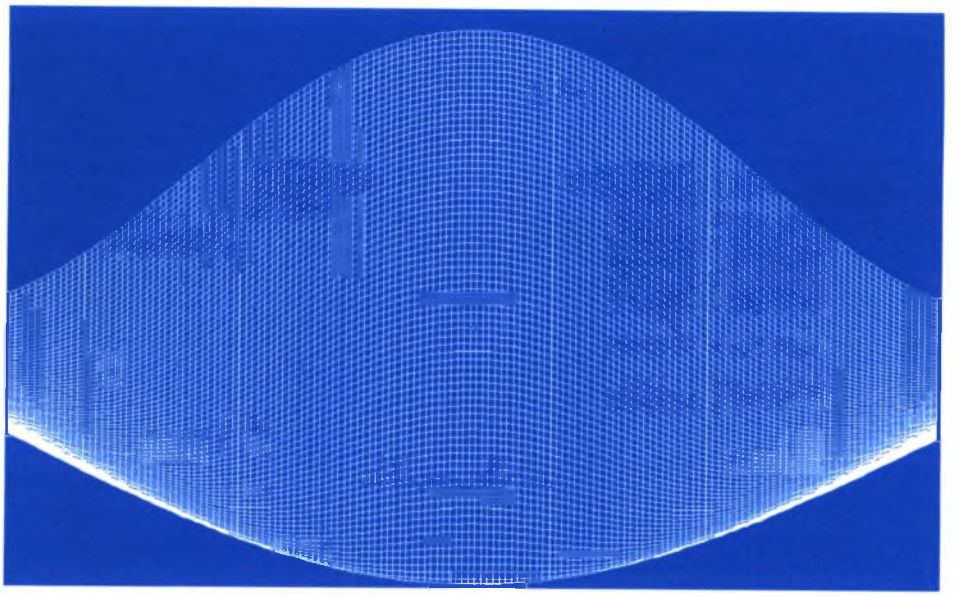


(α)

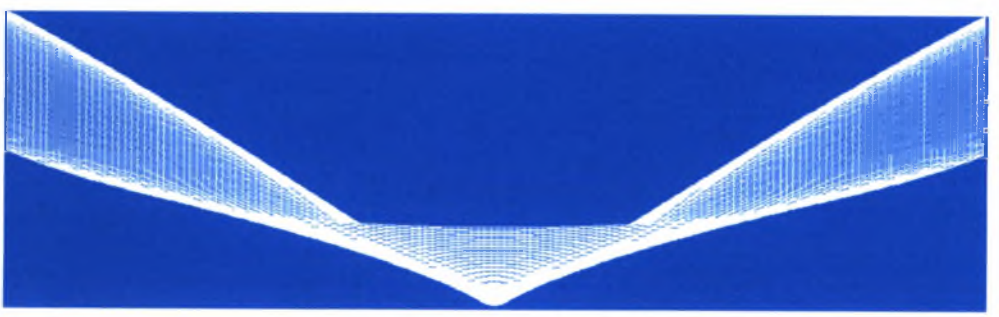


(β)

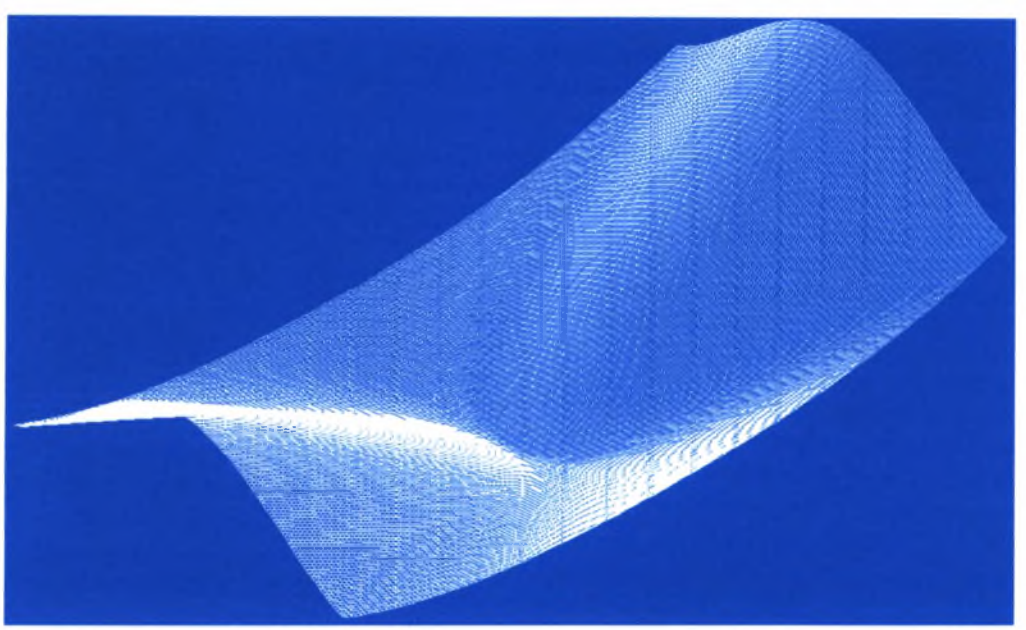
Σχήμα B1.24. Πρώτο (α) και δεύτερο (β) είδος επιφάνειας πολλαπλού καταστροφής του μερικά ατελούς συστήματος , με *μόνο συμμετρική* αρχική ατέλεια (το επίπεδο [w_s,λ] δεν φαίνεται στο πρώτο είδος για λόγους απλούστευσης).



(α) *Εμπρόσθια όψη*

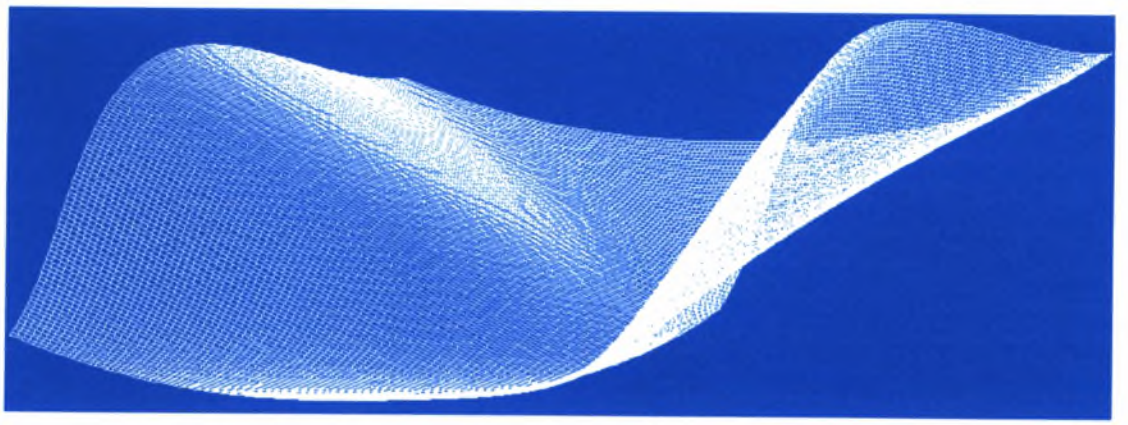


(β) *Πλαϊνή όψη*



(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

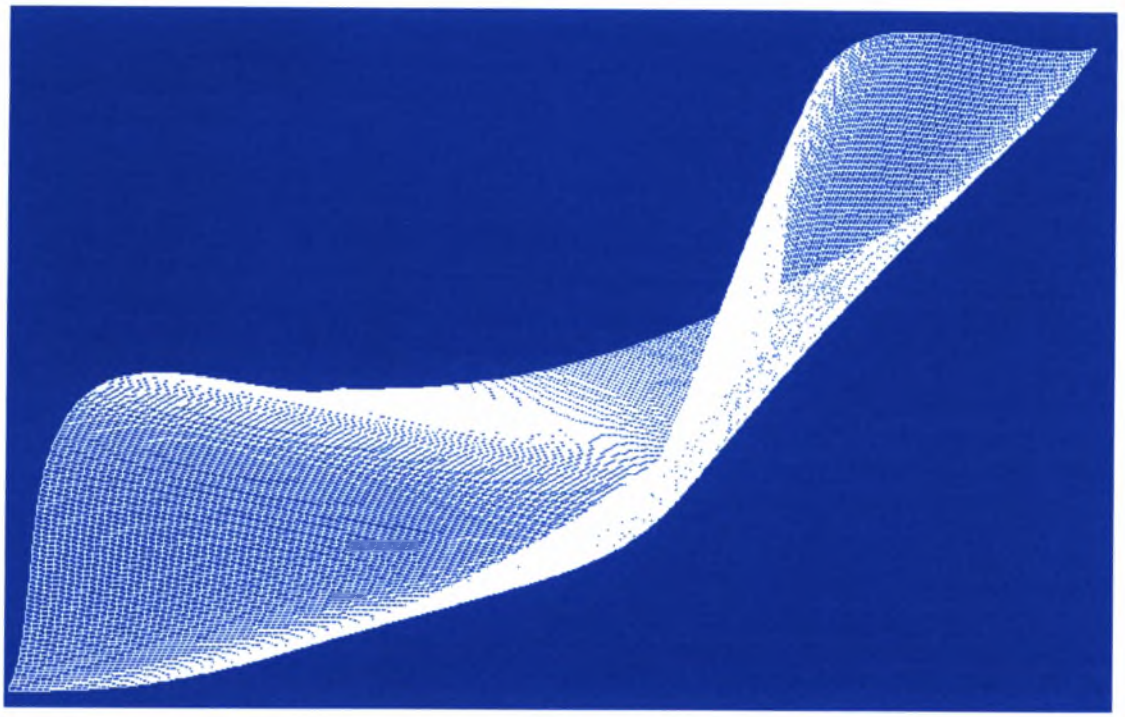
Σχήμα Β1.25 (συνεχίζεται)



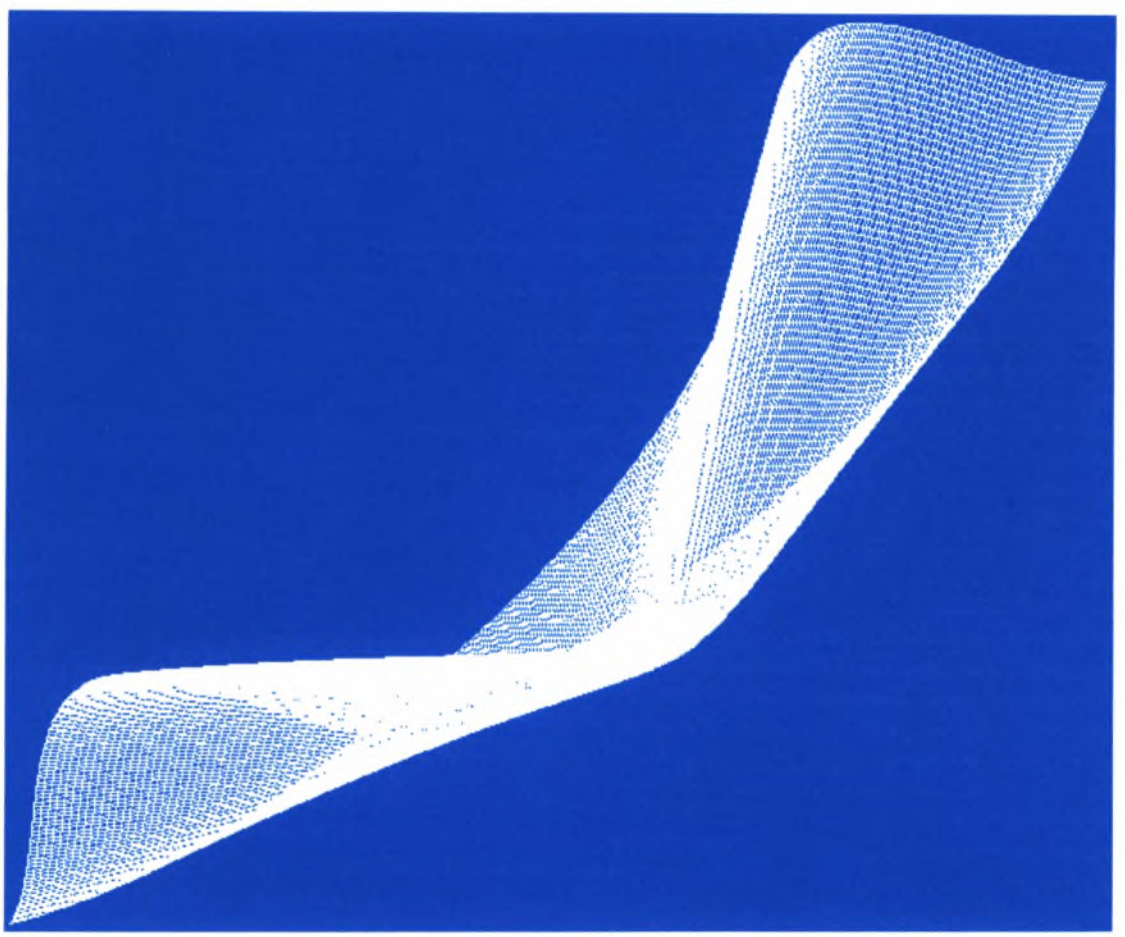
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

(ε) *Τρισδιάστατες απεικονίσεις 3 και 4*

Σχήμα Β1.25 (συνεχίζεται)

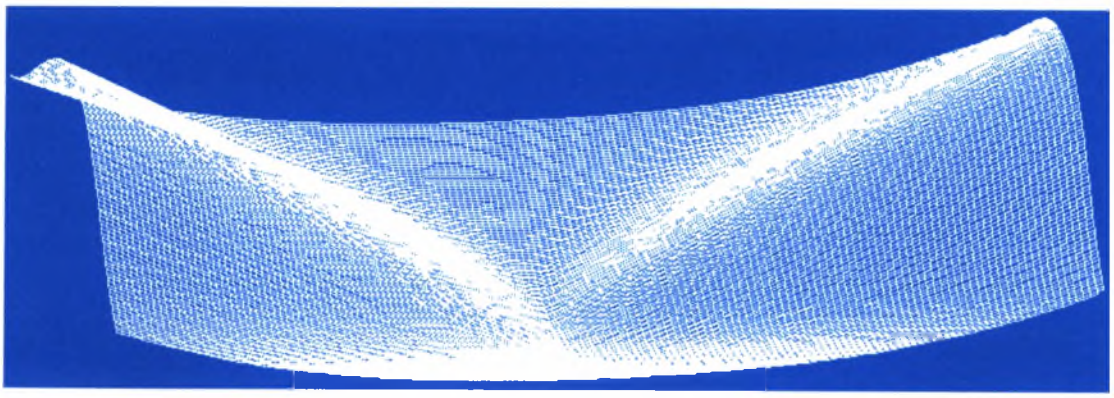


(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

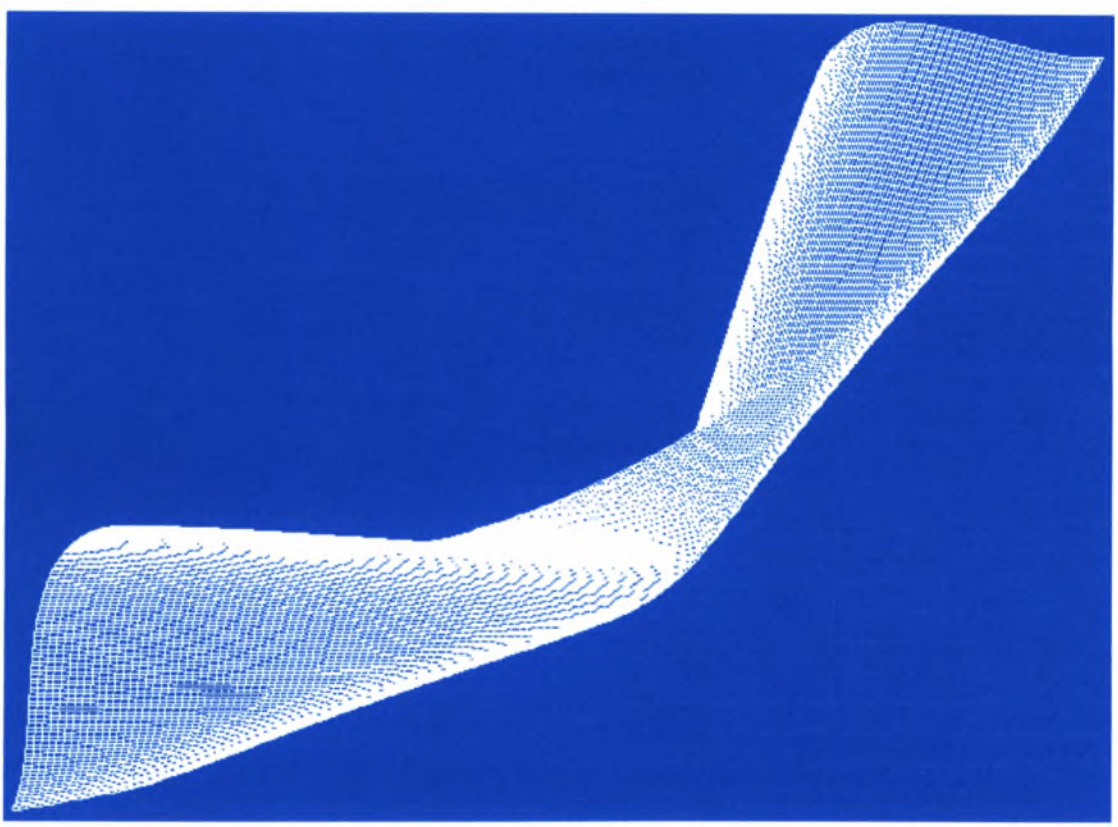


(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 6*

Σχήμα Β1.25 (συνεχίζεται)

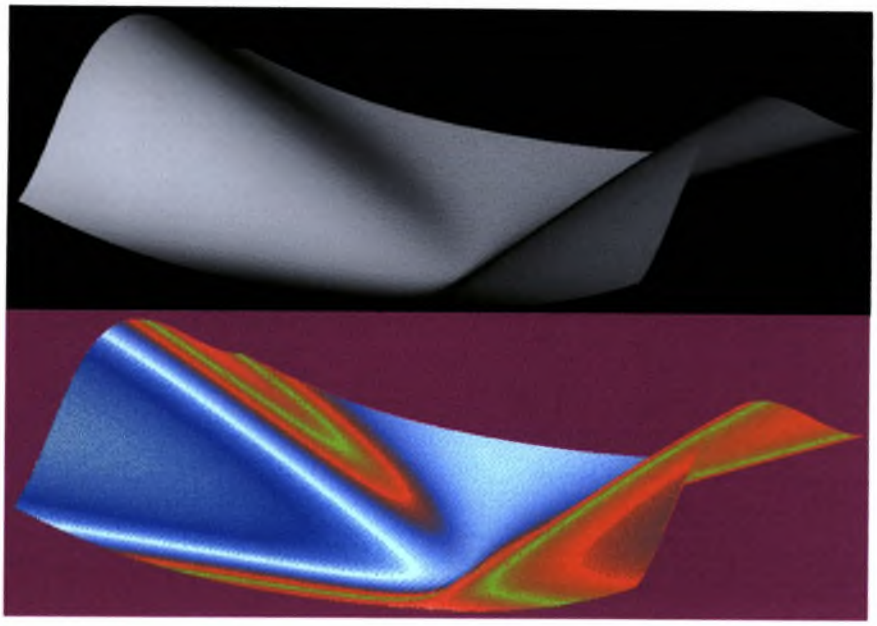


(η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 7*

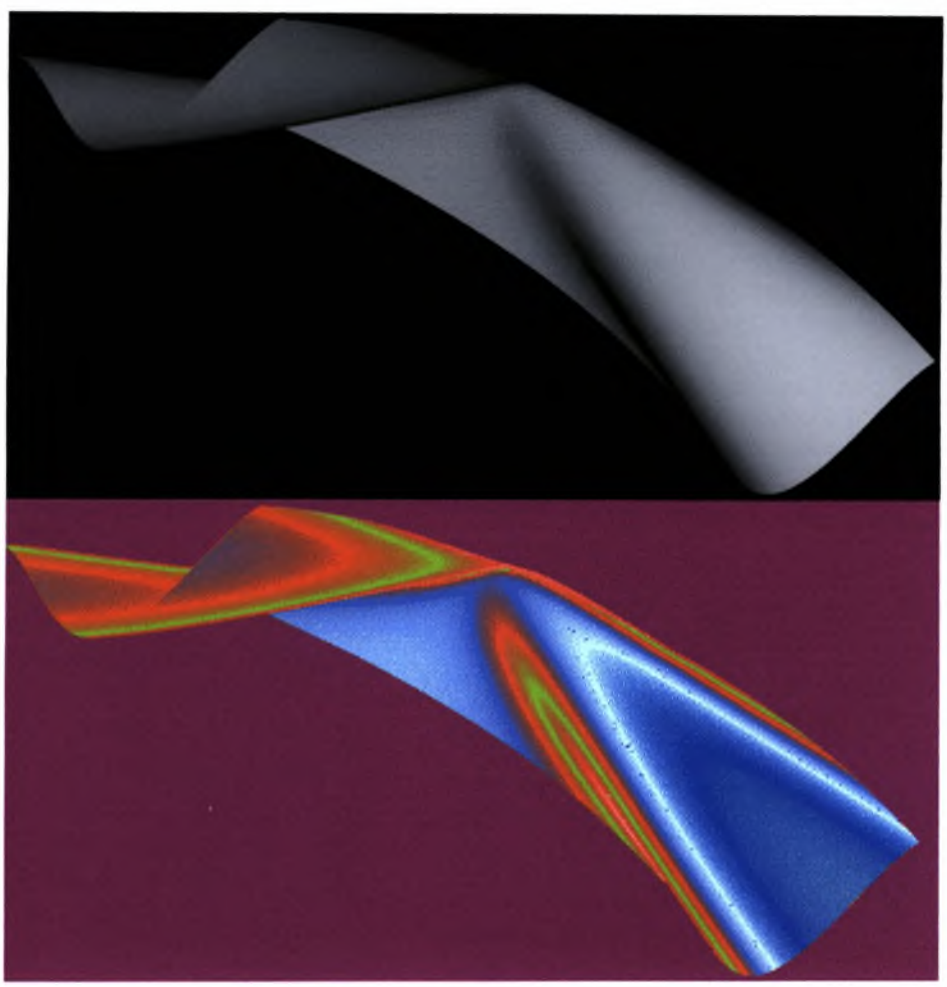


(θ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 8*

Σχήμα Β1.25. Πολλαπλό καταστροφής 1^{ου} είδους του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο συμμετρική* αρχική ατέλεια, υπό μορφή επιφάνειας πλέγματος.

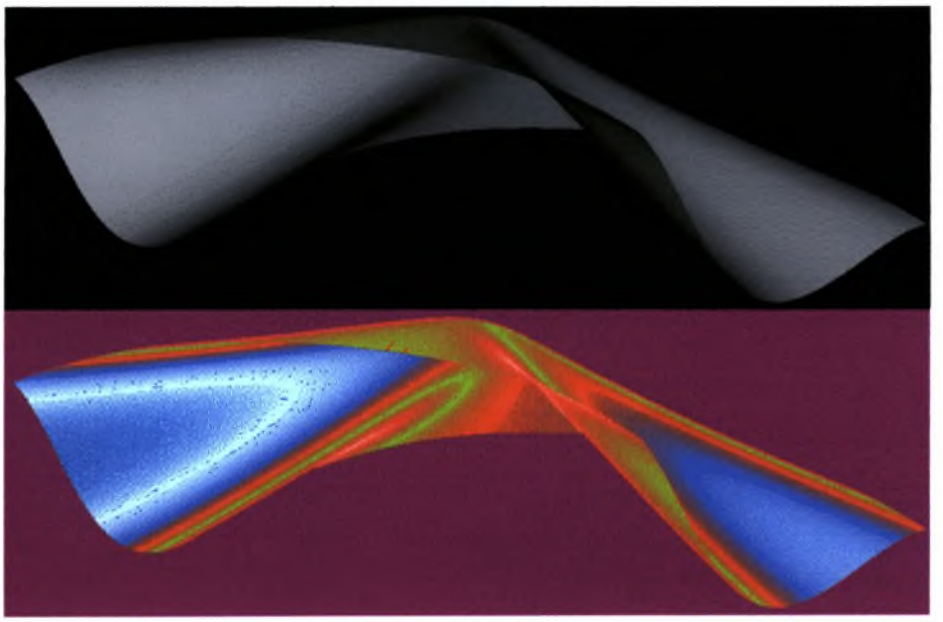


(α)

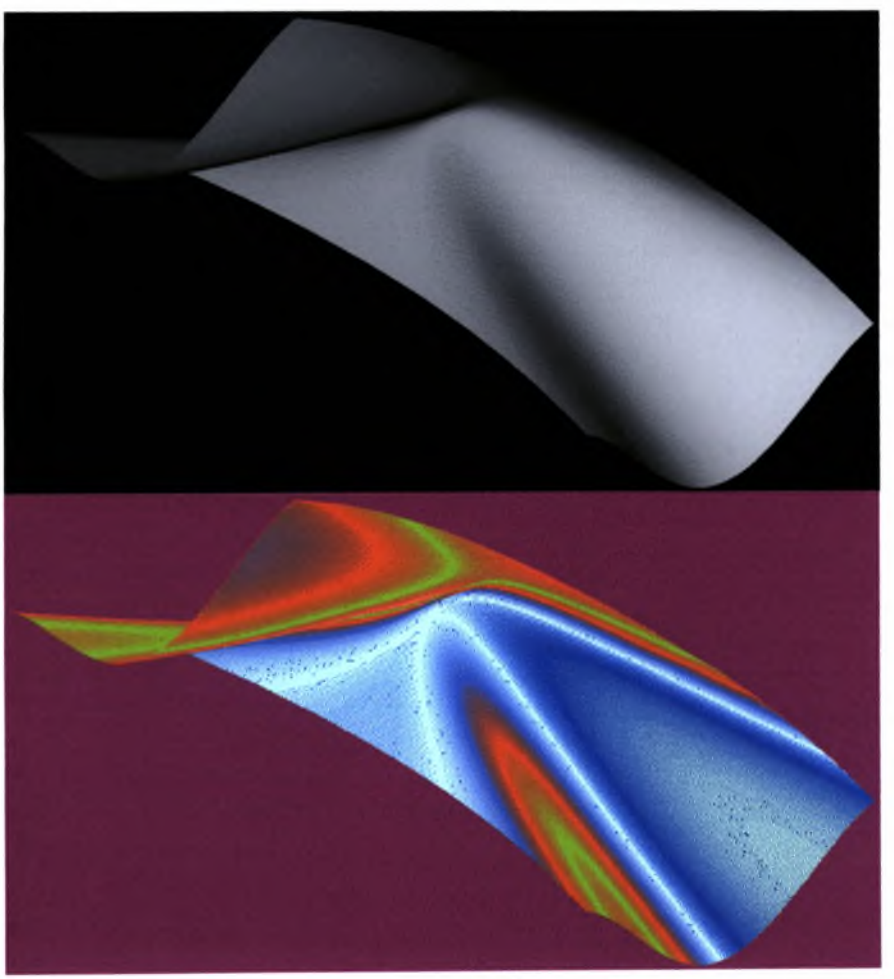


(β)

Σχήμα Β1.26 (συνεχίζεται)



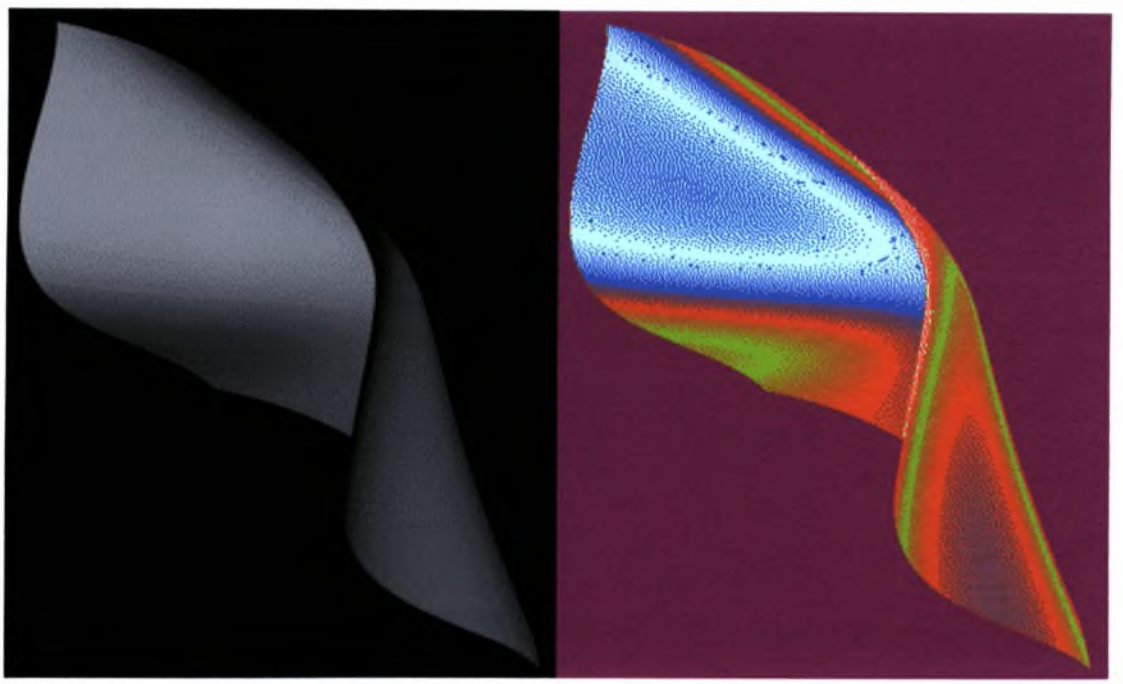
(γ)



(δ)

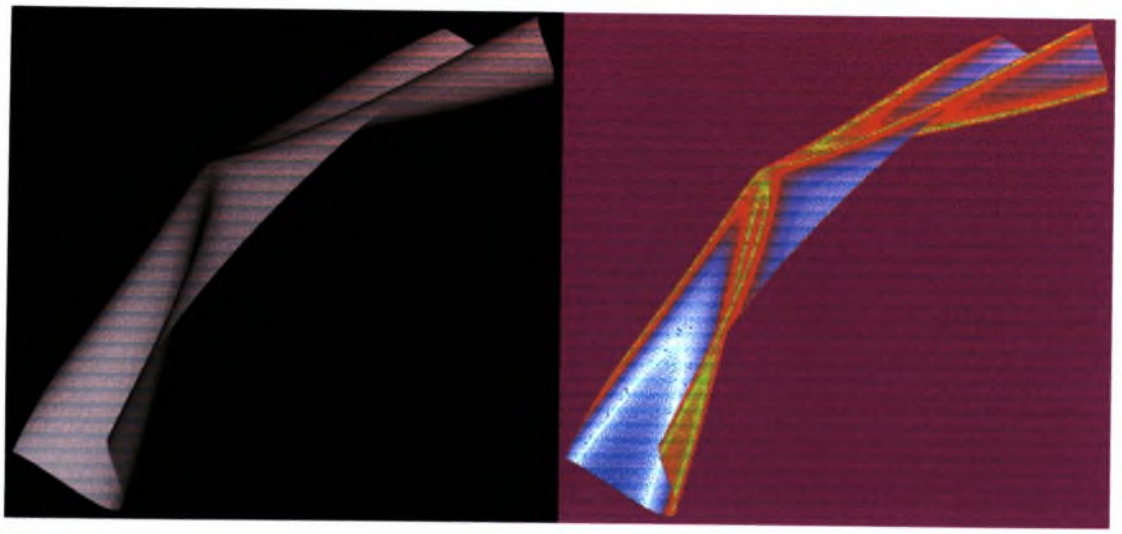
Σχήμα Β1.26 (συνεχίζεται)

(ε)

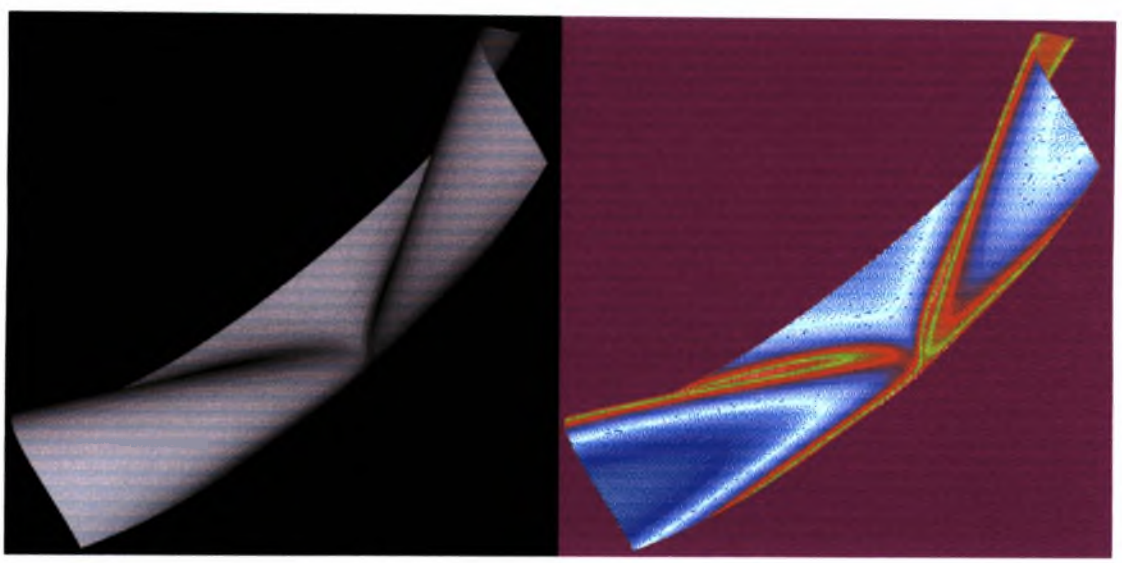


(στ)

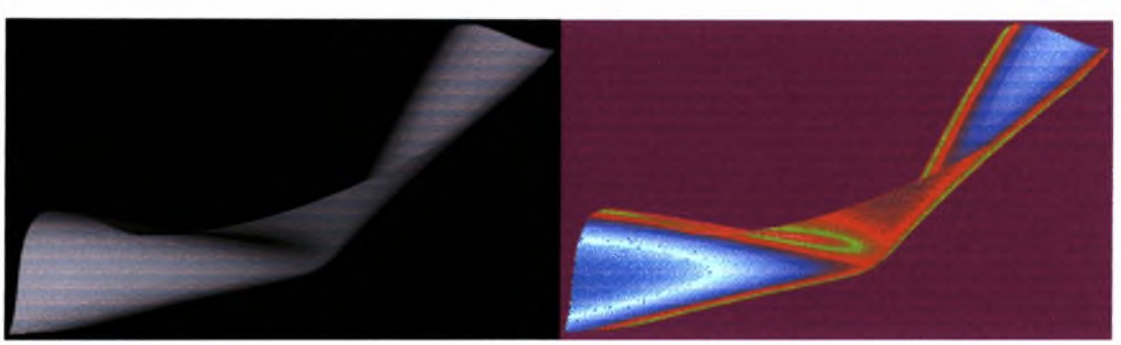
Σχήμα Β1.26 (συνεχίζεται)



(ζ)

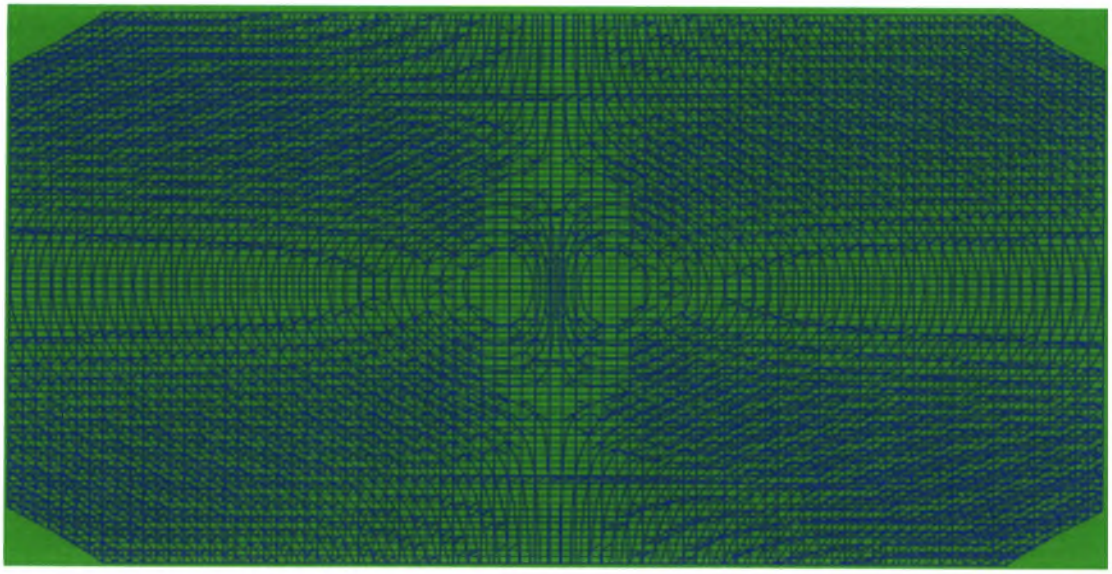


(η)

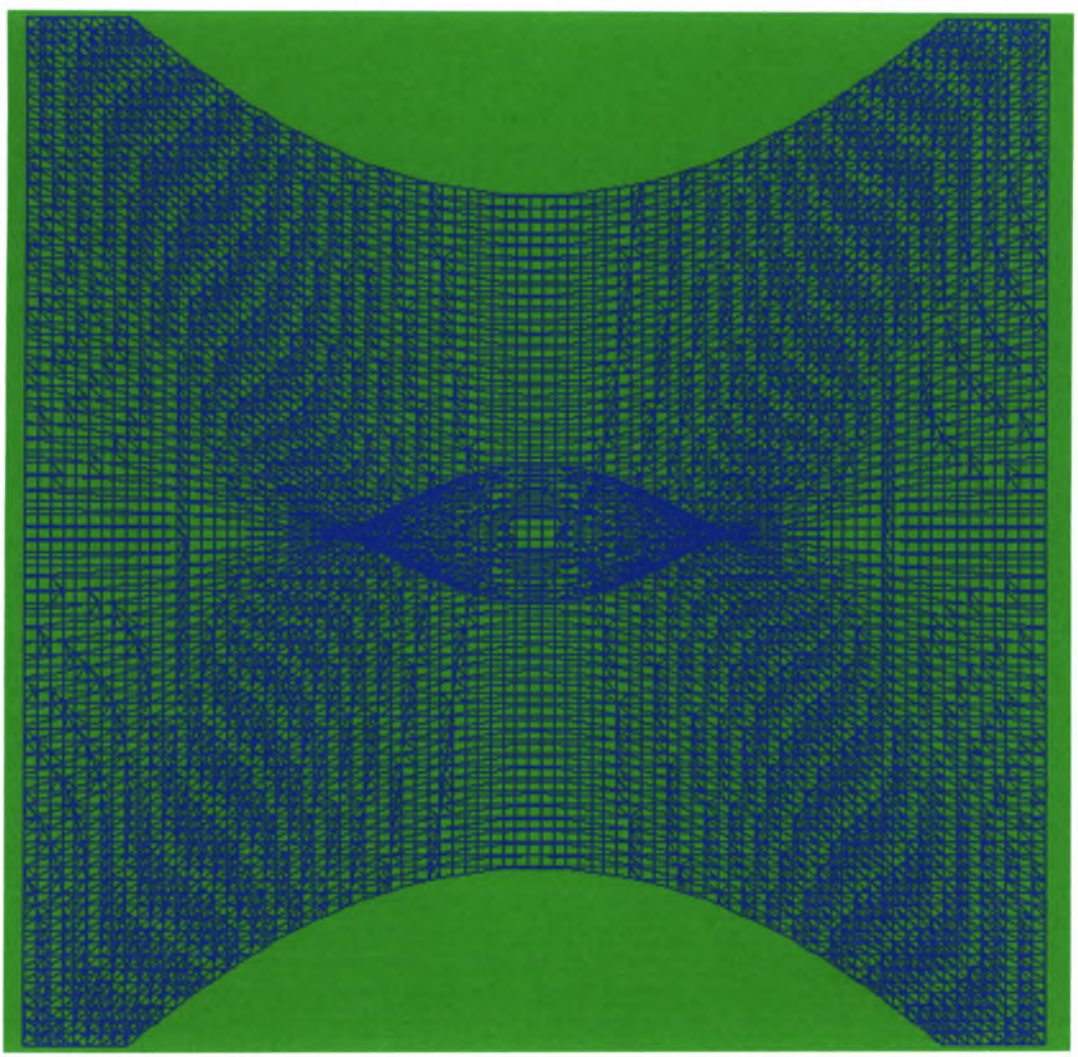


(θ)

Σχήμα Β1.26. Φωτοσκιασμένες απεικονίσεις του πολλαπλού καταστροφής του προηγούμενου σχήματος, τόσο σε αποχρώσεις του γκρι όσο και έγχρωμες.

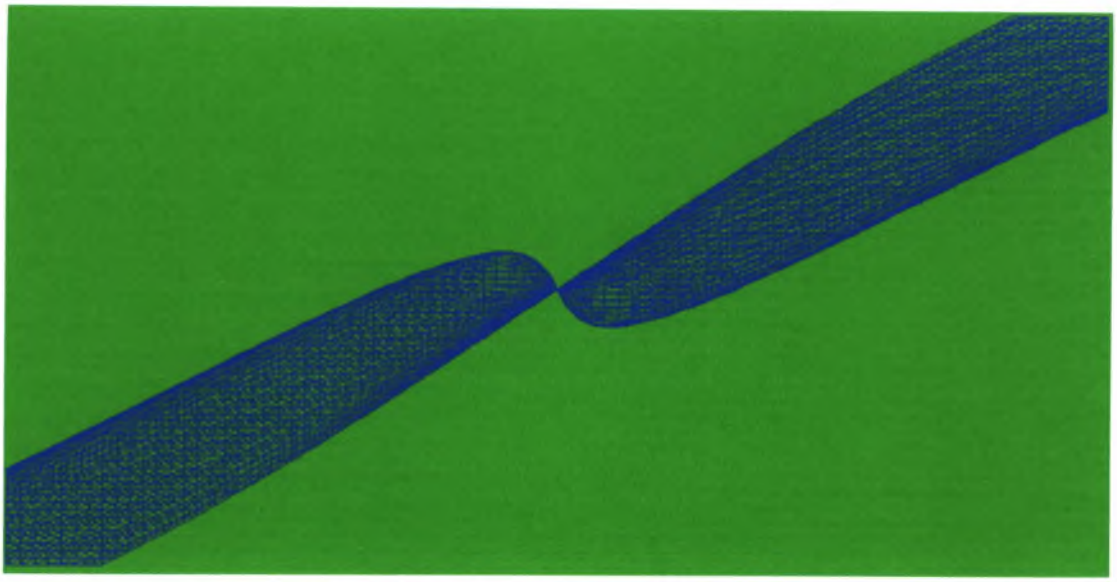


(α) *Κάτοψη*

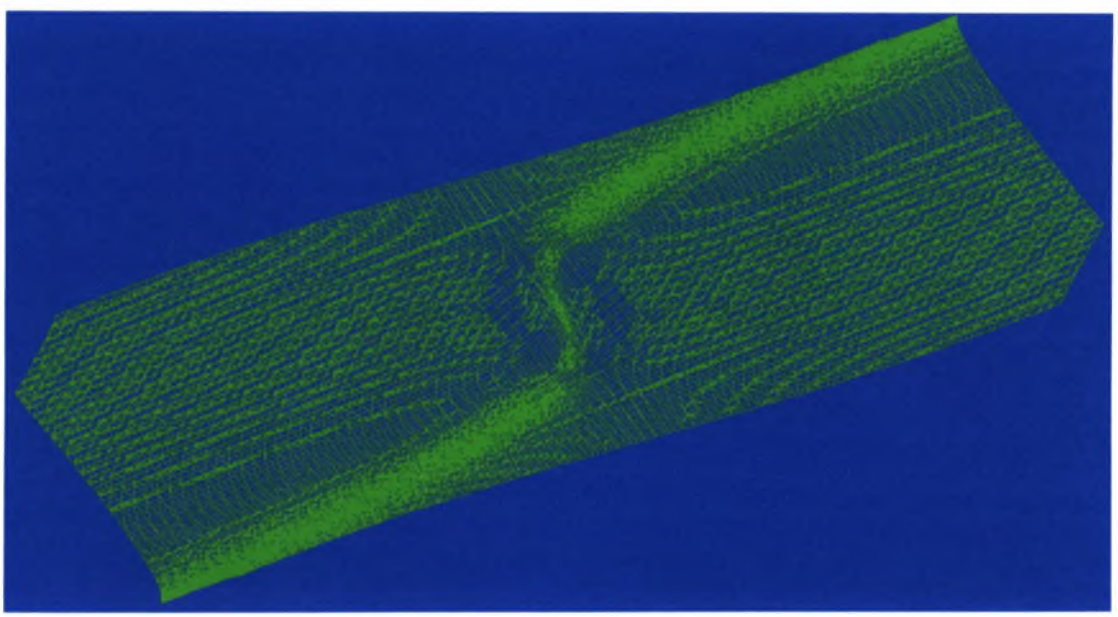


(β) *Πλαϊνή όψη 1*

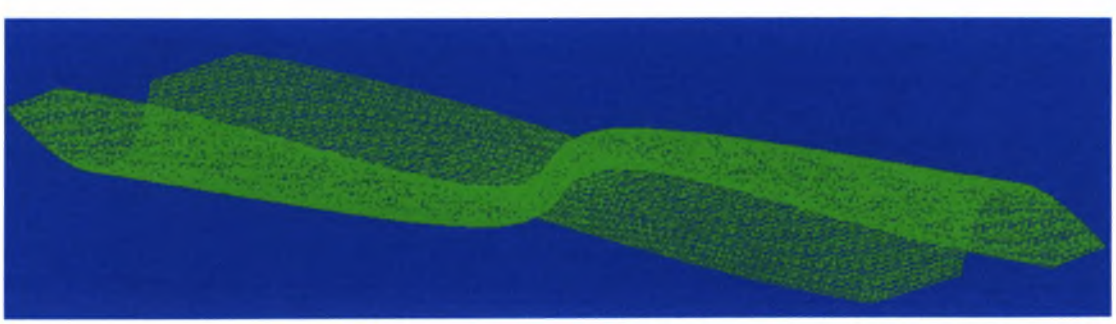
Σχήμα Β1.27 (συνεχίζεται)



(γ) *Πλαϊνή όψη 2*

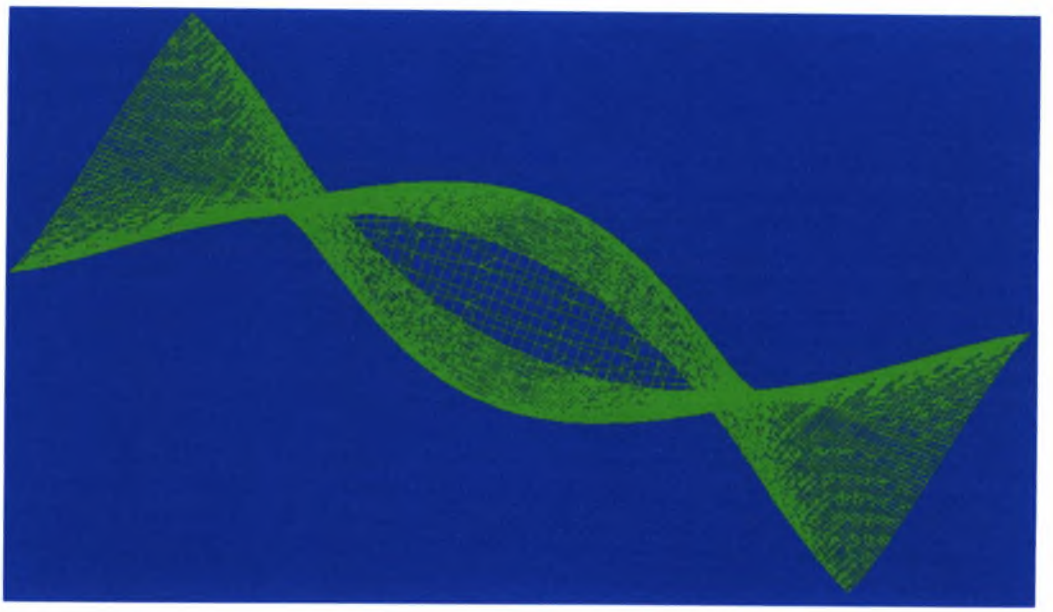


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

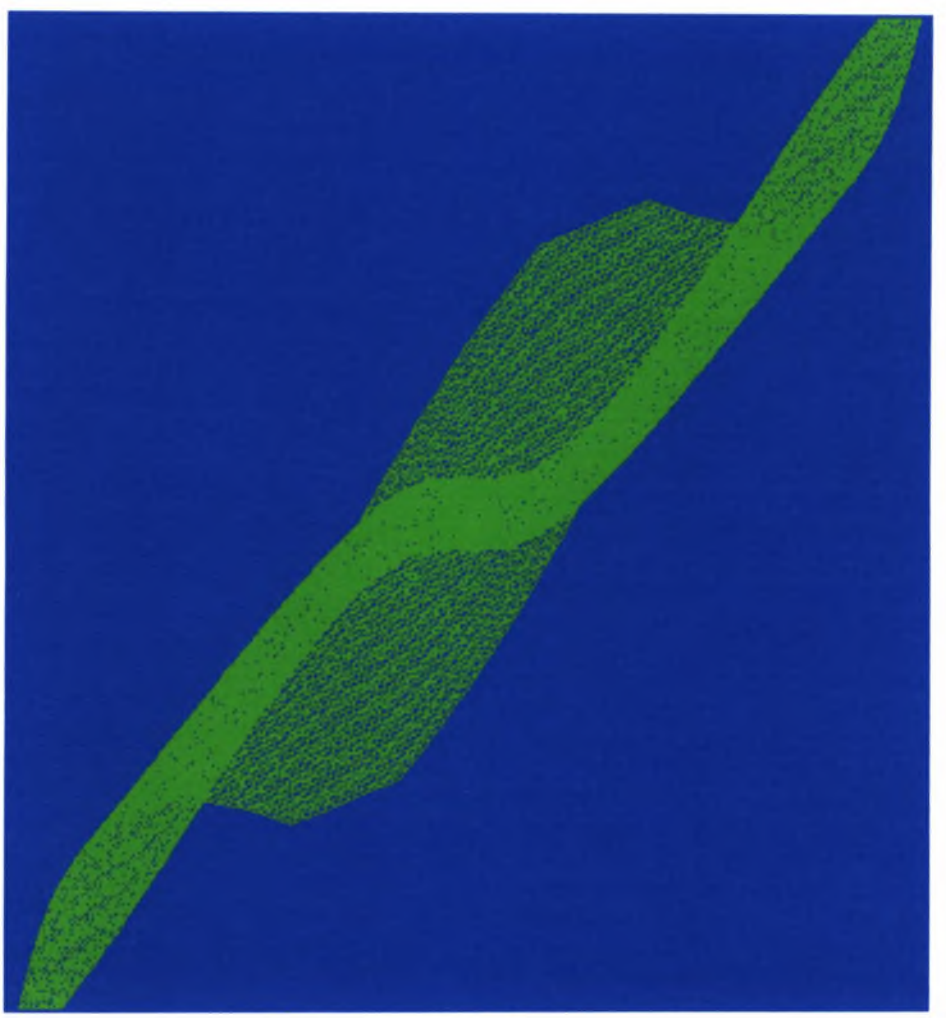


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.27 (συνεχίζεται)

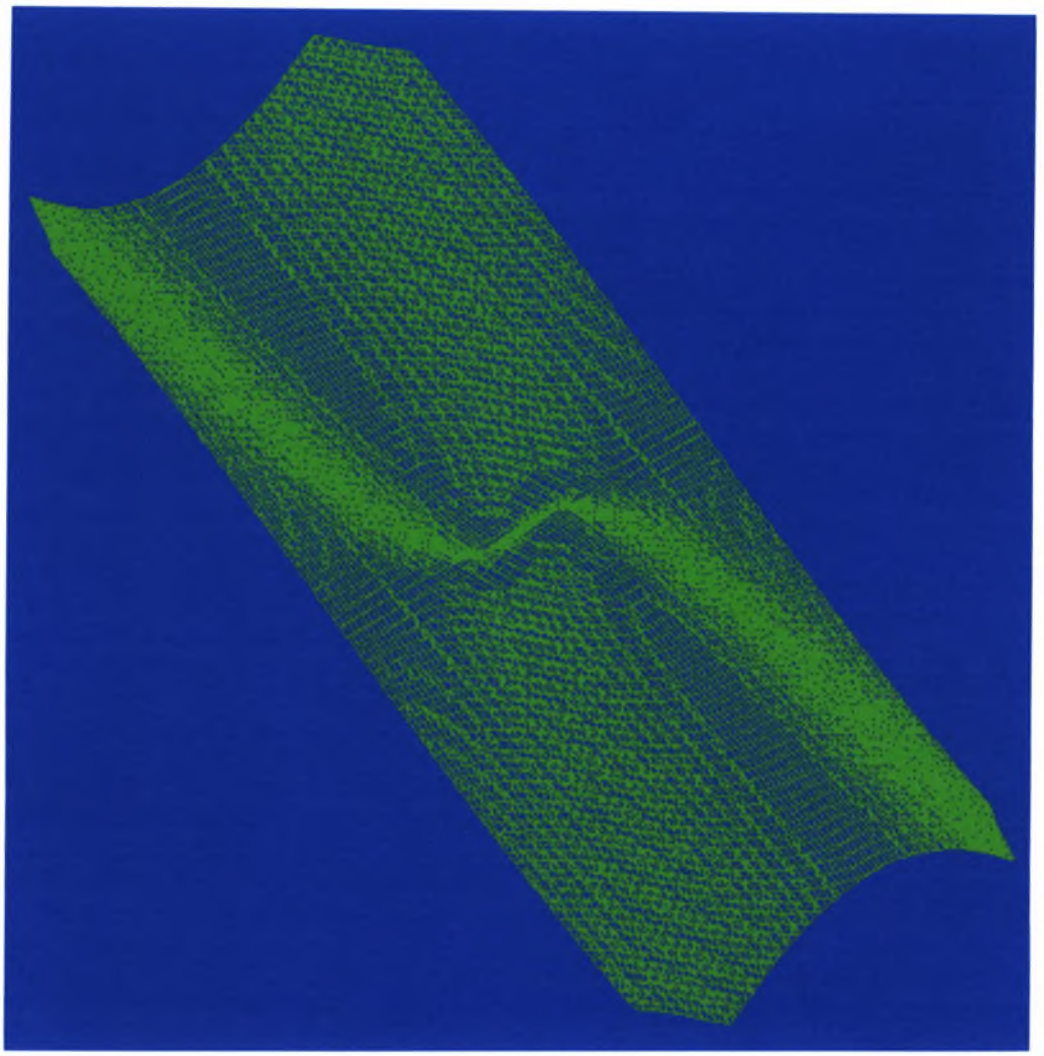


(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*



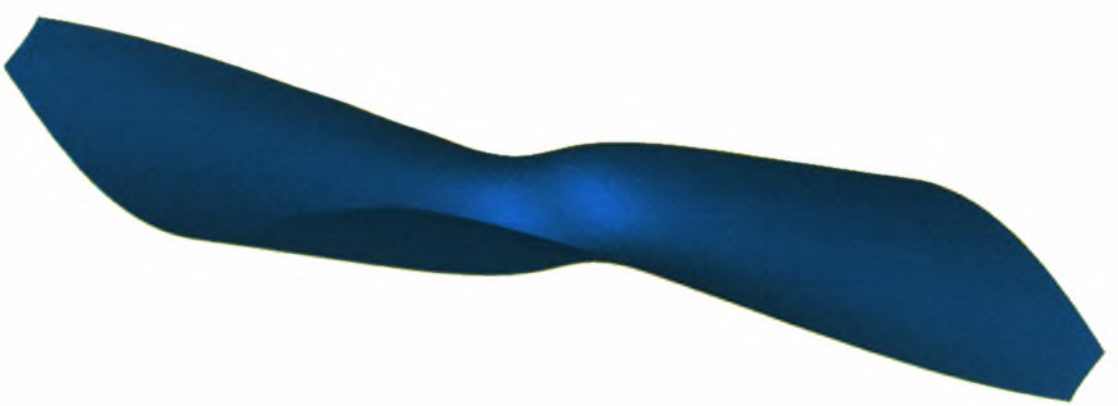
(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.27 (συνεχίζεται)



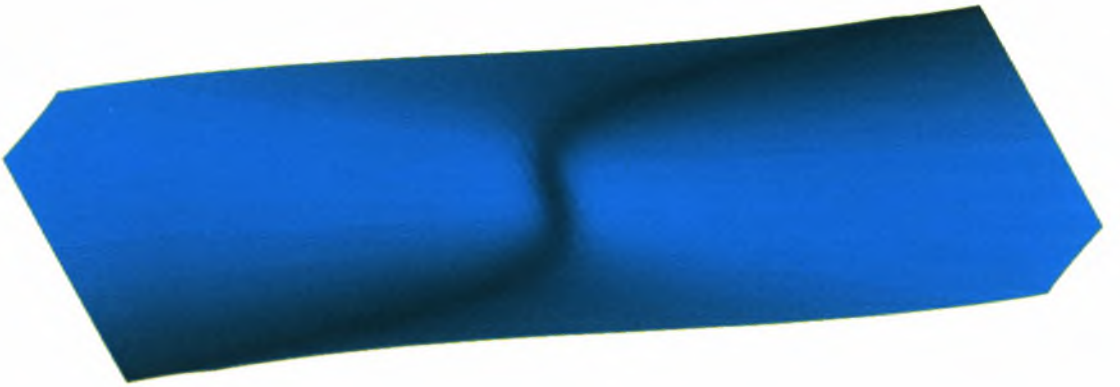
(η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

Σχήμα Β1.27. Πολλαπλό καταστροφής 2^{ου} είδους του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο συμμετρική* αρχική ατέλεια, υπό μορφή επιφάνειας πλέγματος.

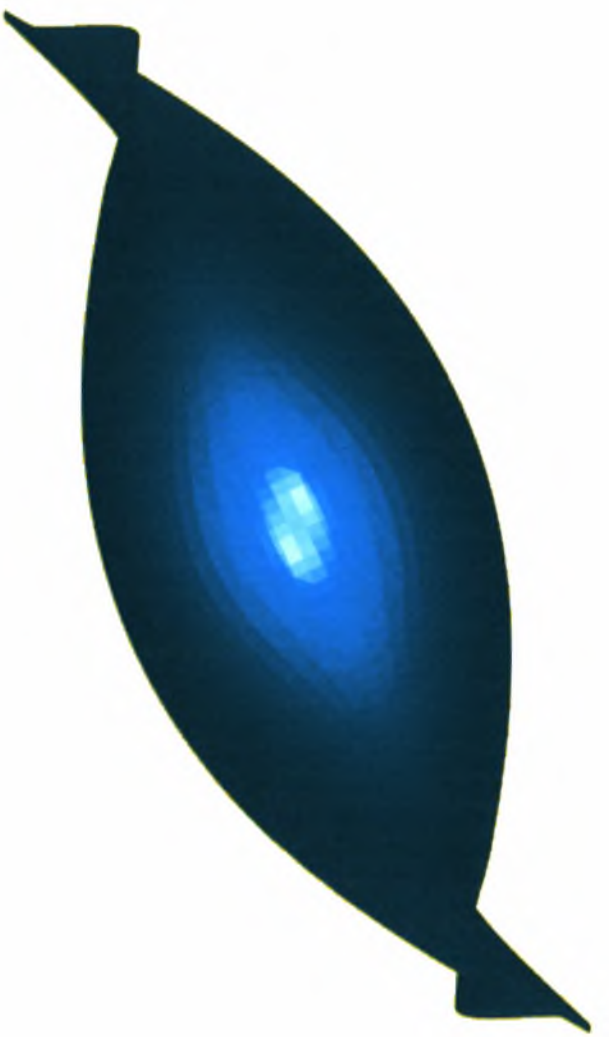


(α)

Σχήμα Β1.28 (συνεχίζεται)

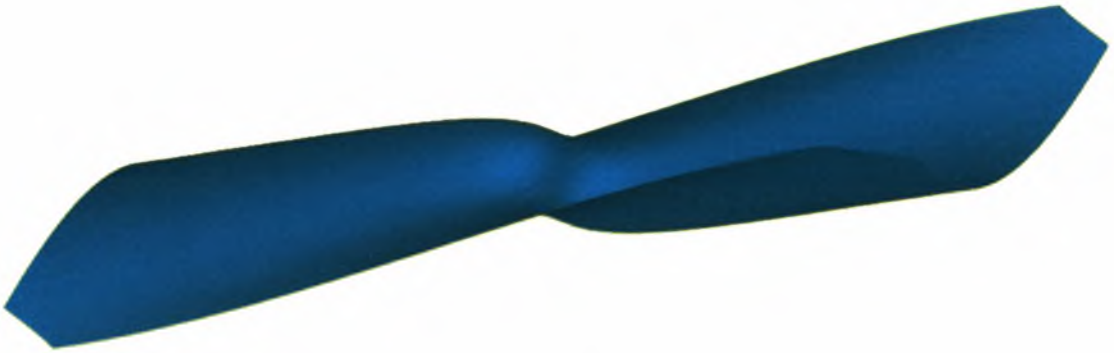


(β)

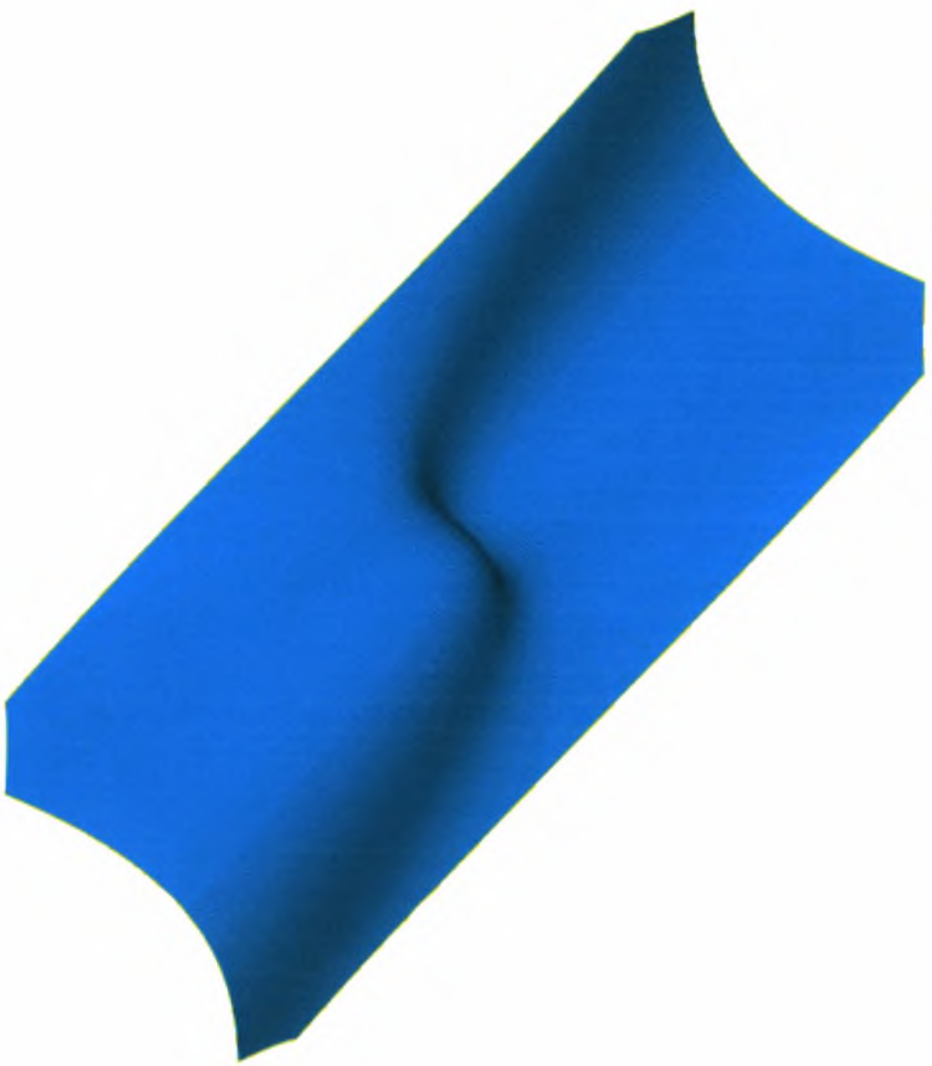


(γ)

Σχήμα Β1.28 (συνεχίζεται)

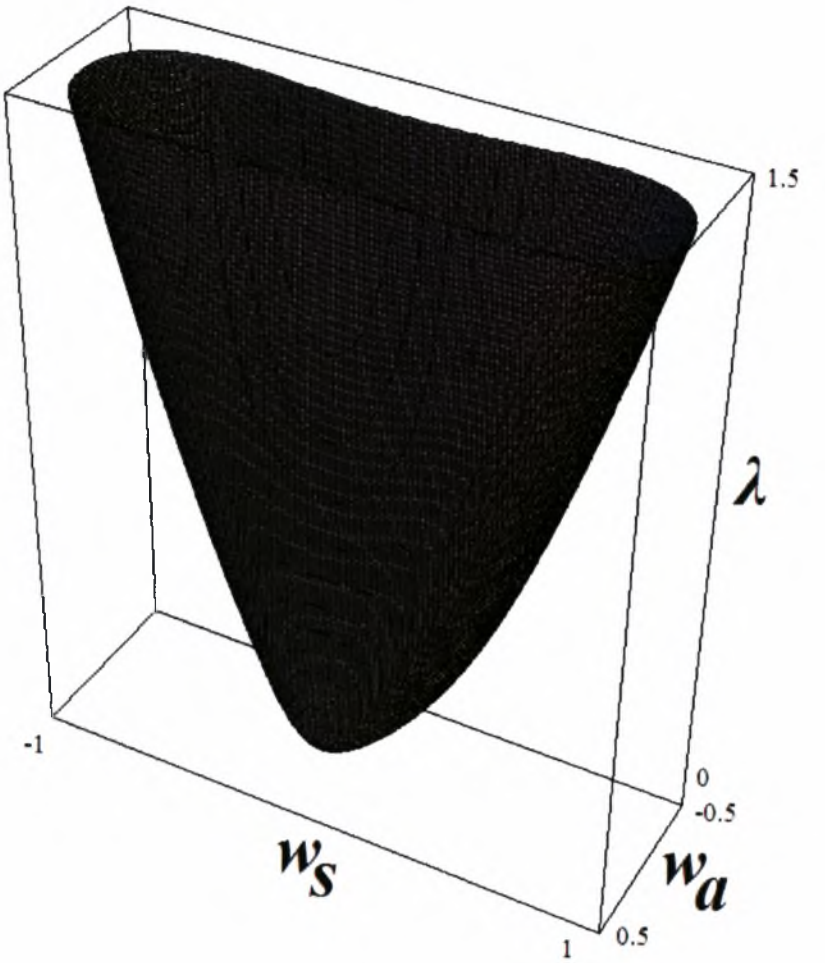


(δ)

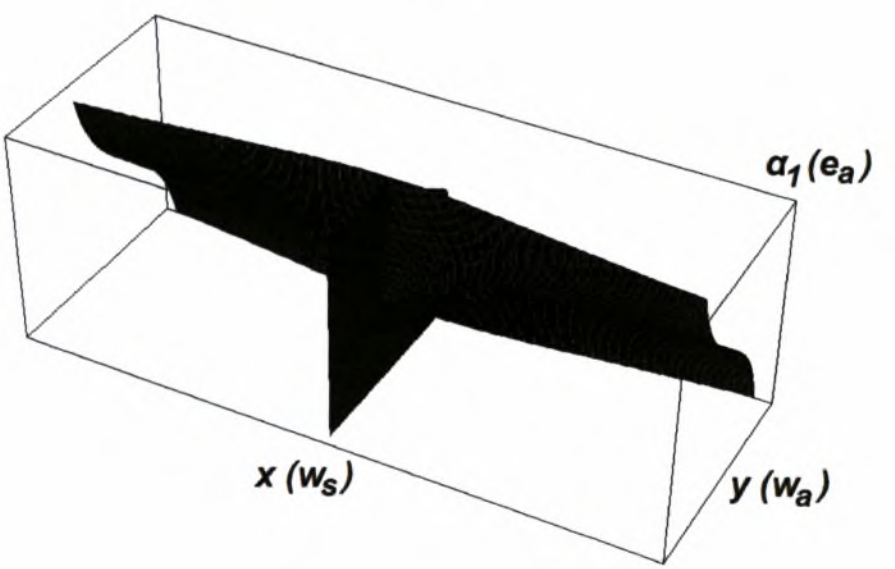


(ε)

Σχήμα Β1.28. Φωτοσκιασμένες απεικονίσεις του πολλαπλού καταστροφής του προηγούμενου σχήματος.

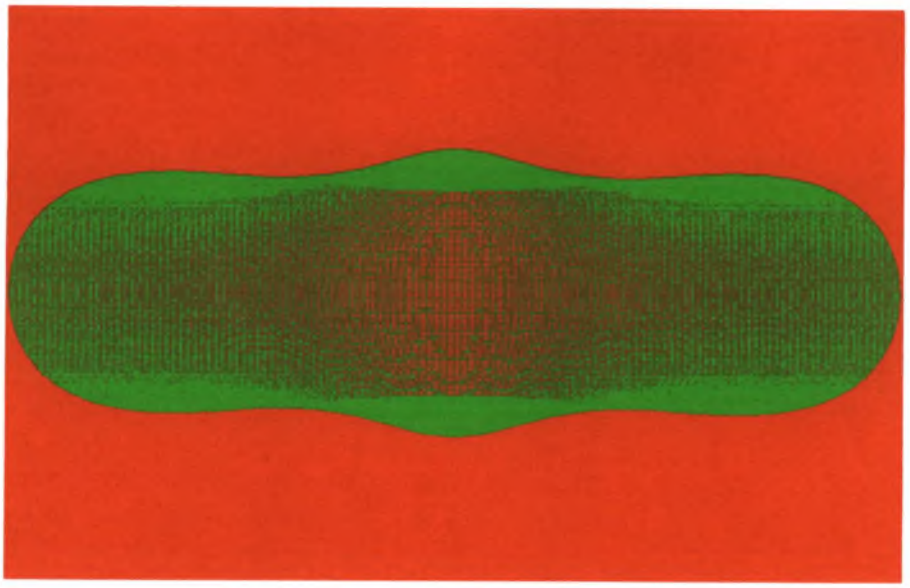


(α)

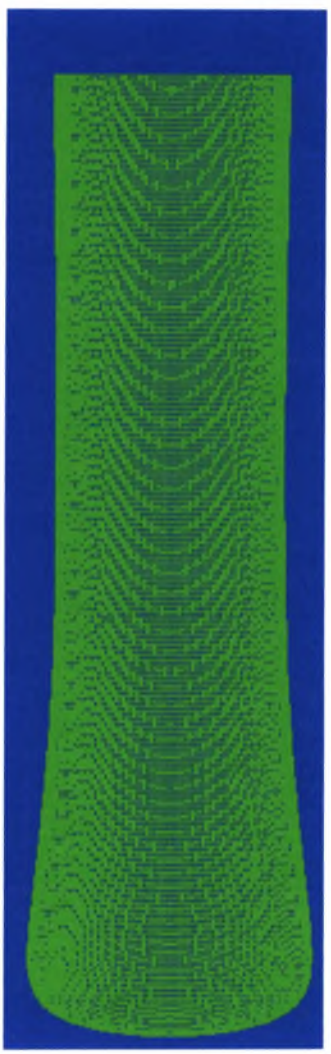


(β)

Σχήμα Β1.29. Πρώτο (α) και δεύτερο (β) είδος επιφάνειας πολλαπλού καταστροφής του μερικά ατελούς συστήματος , με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια (το επίπεδο [w_a,λ] δεν φαίνεται στο πρώτο είδος για λόγους απλούστευσης).

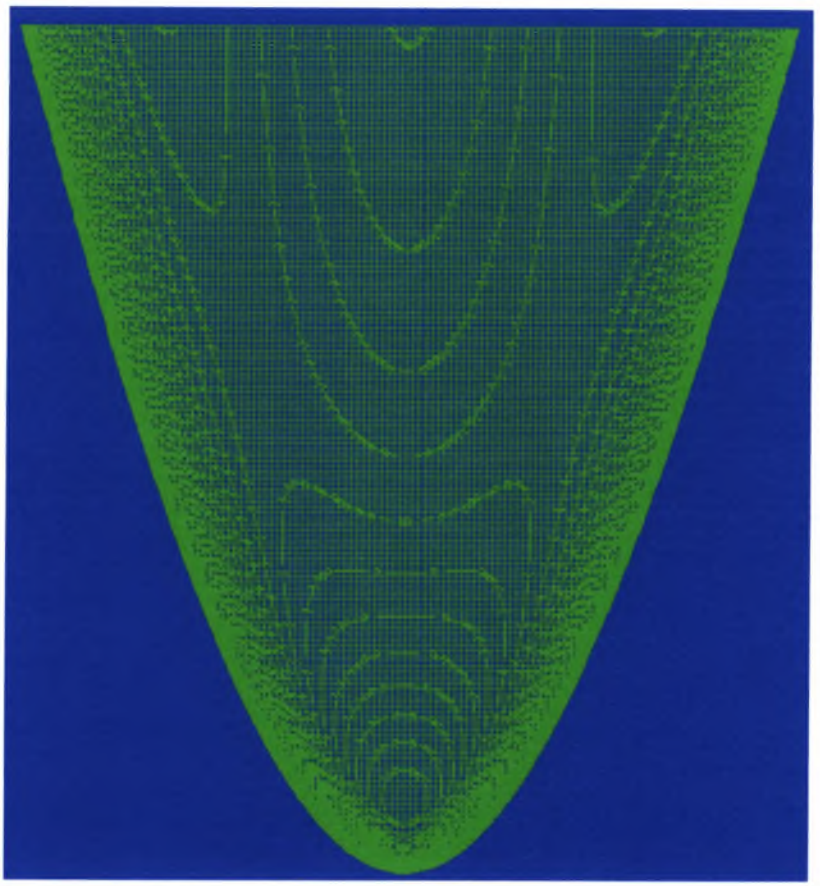


(α) *Κάτοψη*

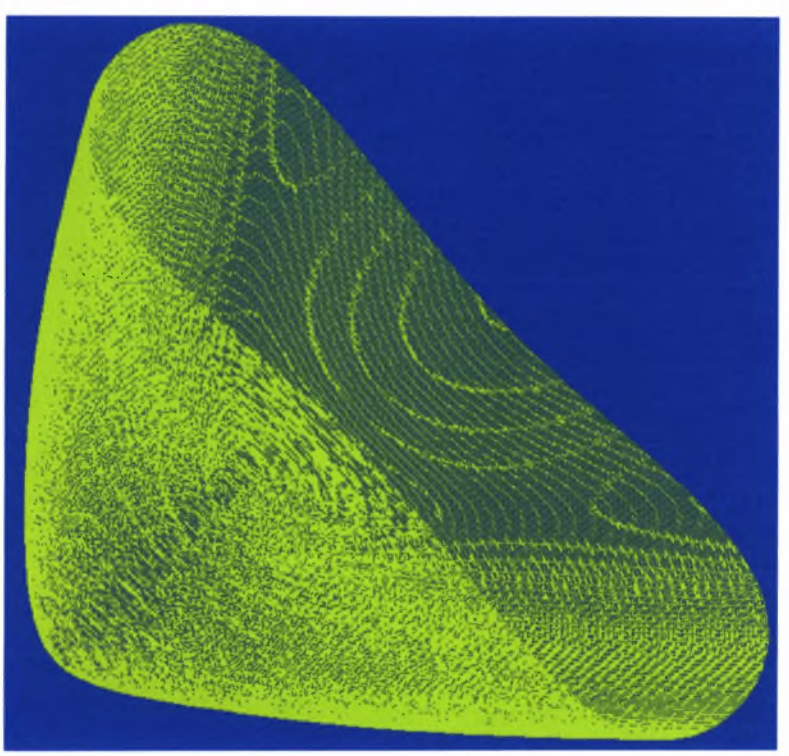


(β) *Πλαϊνή όψη 1*

Σχήμα Β1.30 (συνεχίζεται)

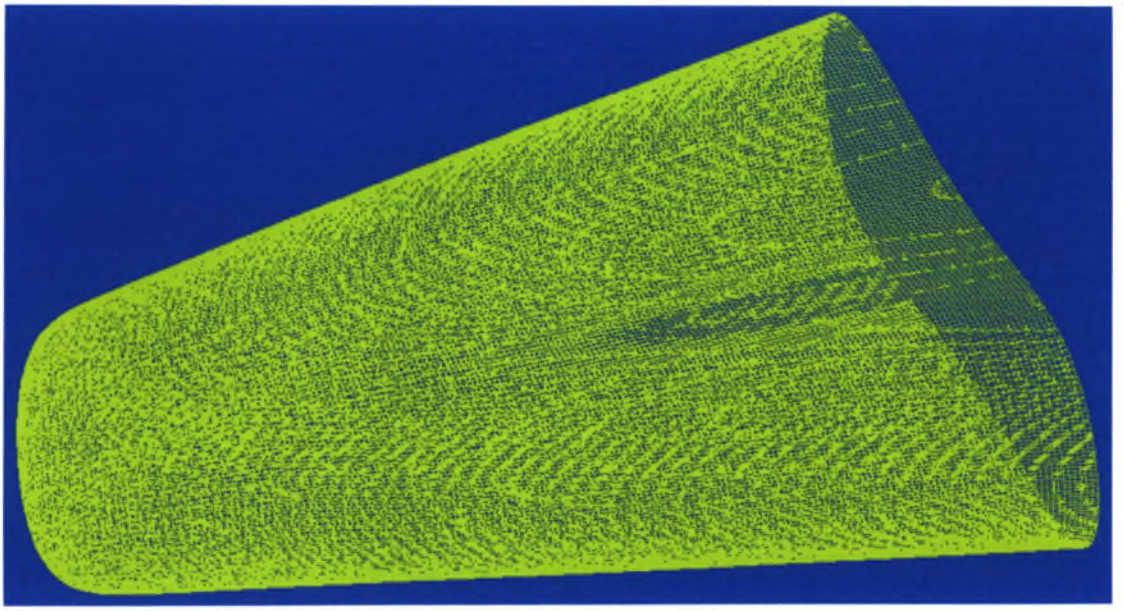


(γ) *Πλαϊνή όψη 2*

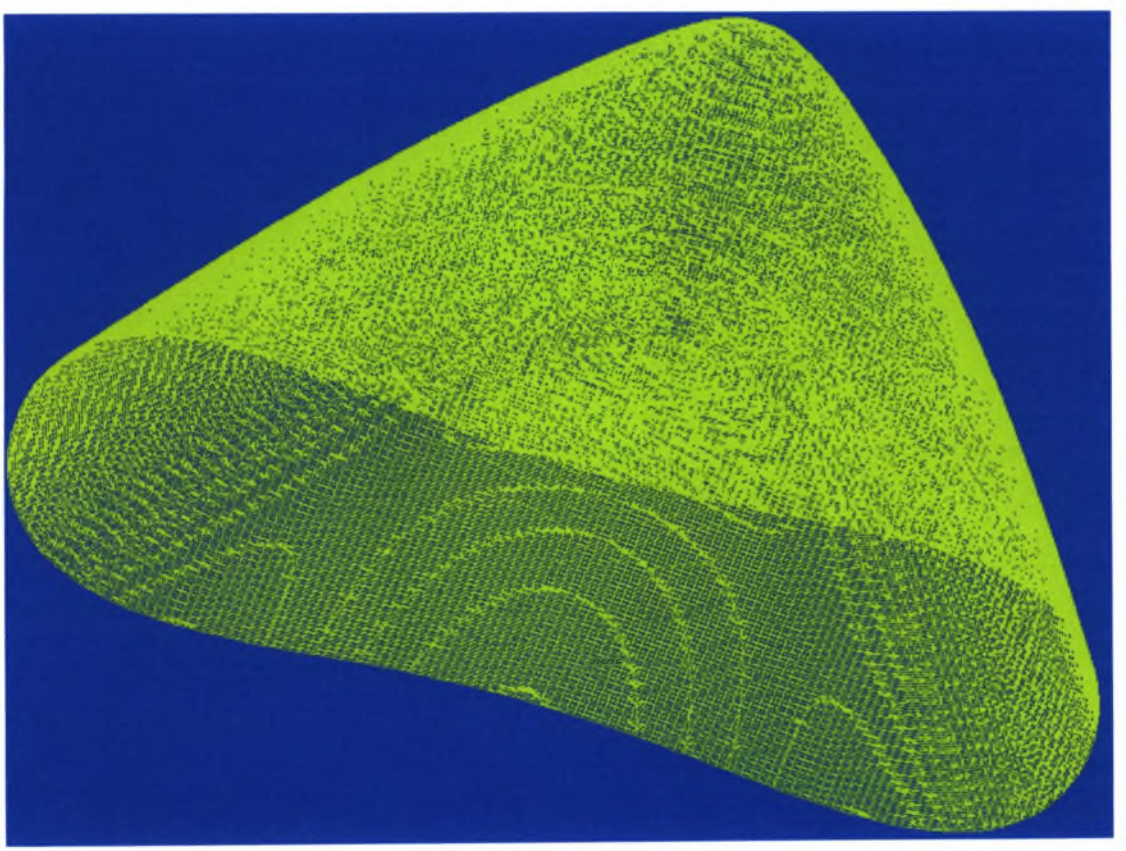


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

Σχήμα Β1.30 (συνεχίζεται)

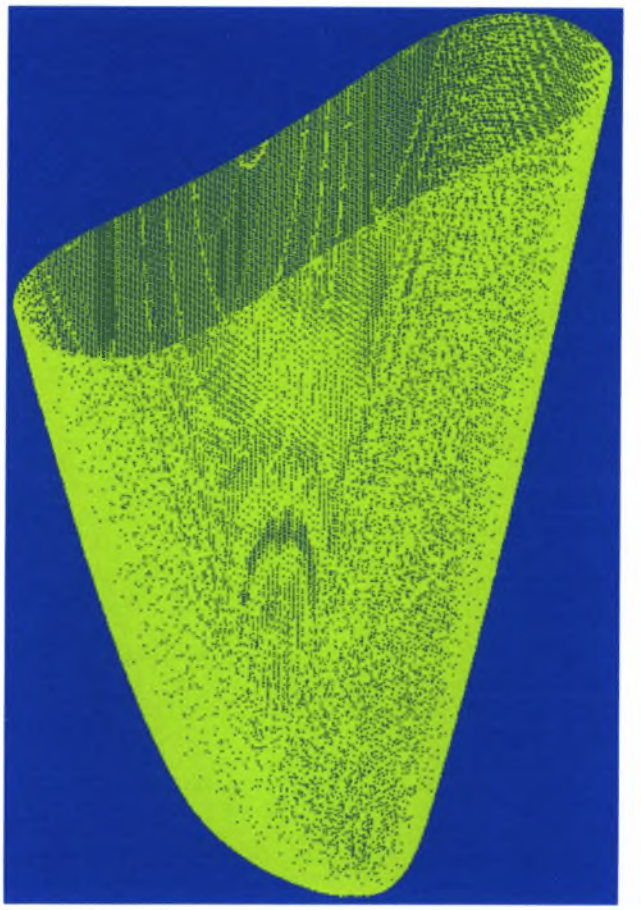


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

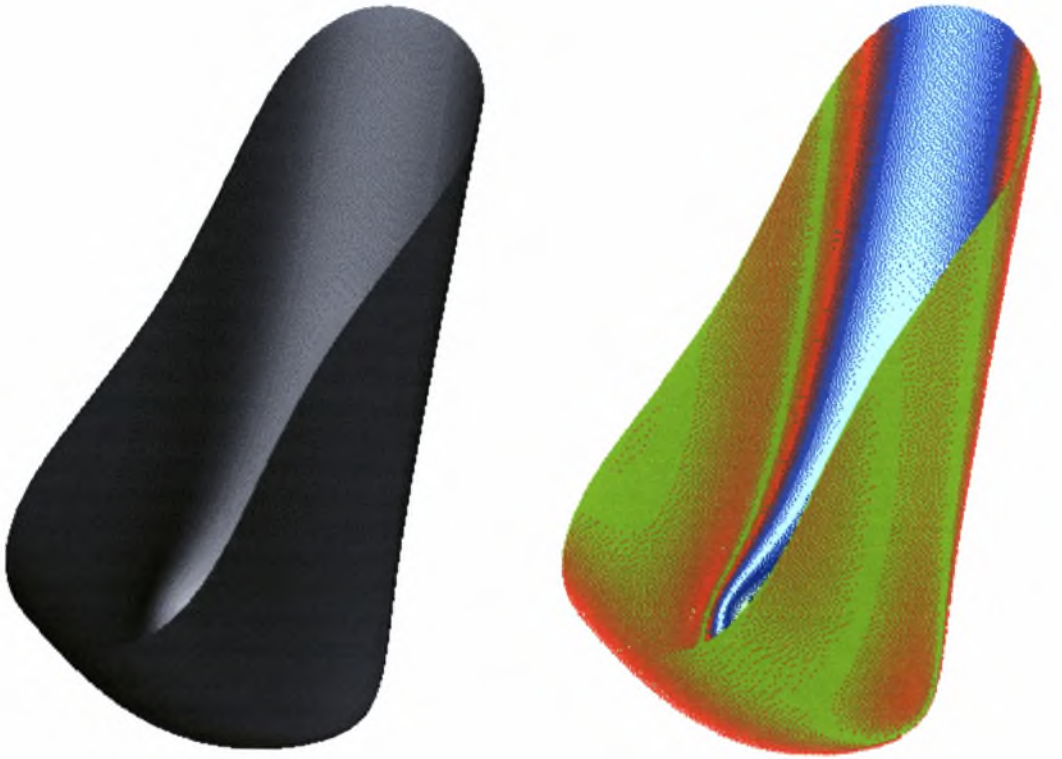
Σχήμα Β1.30 (συνεχίζεται)



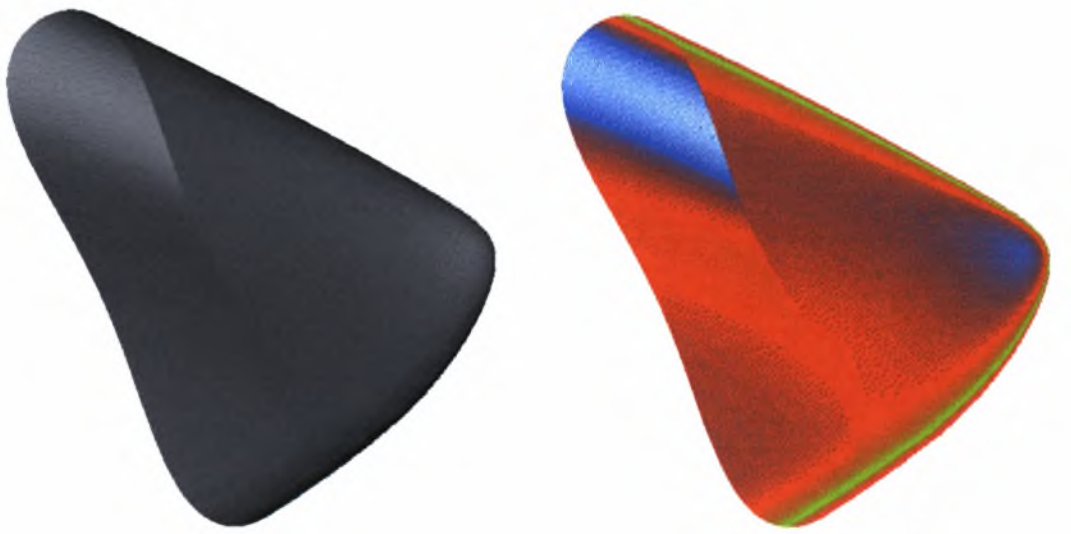
(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

Σχήμα Β1.30. Πολλαπλό καταστροφής 1ου είδους του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια, υπό μορφή επιφάνειας πλέγματος.

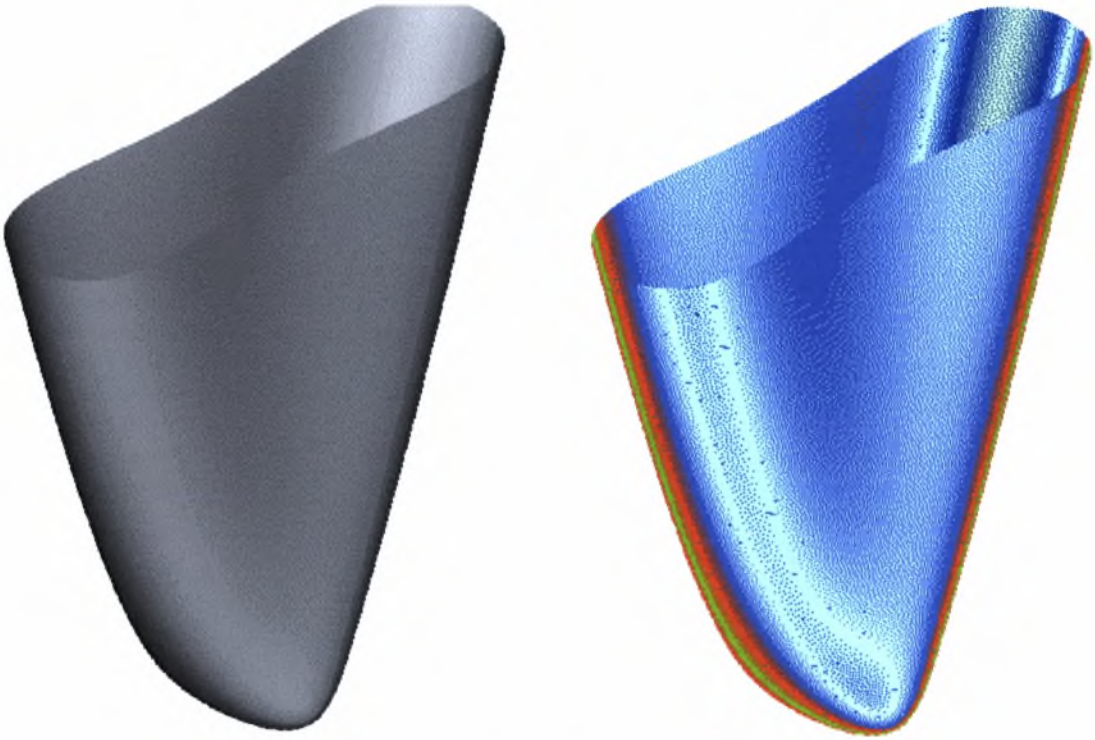


(α)

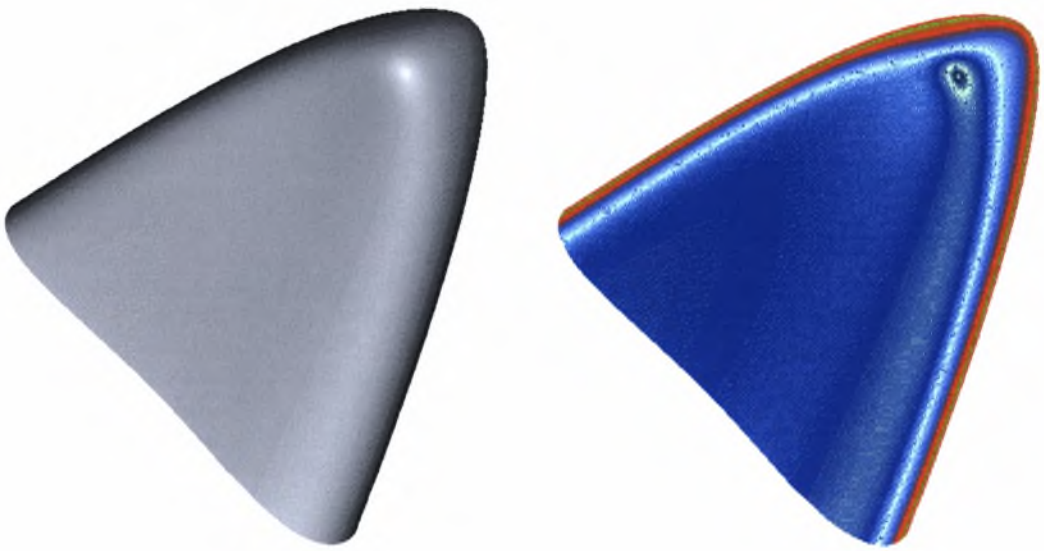


(β)

Σχήμα Β1.31 (συνεχίζεται)

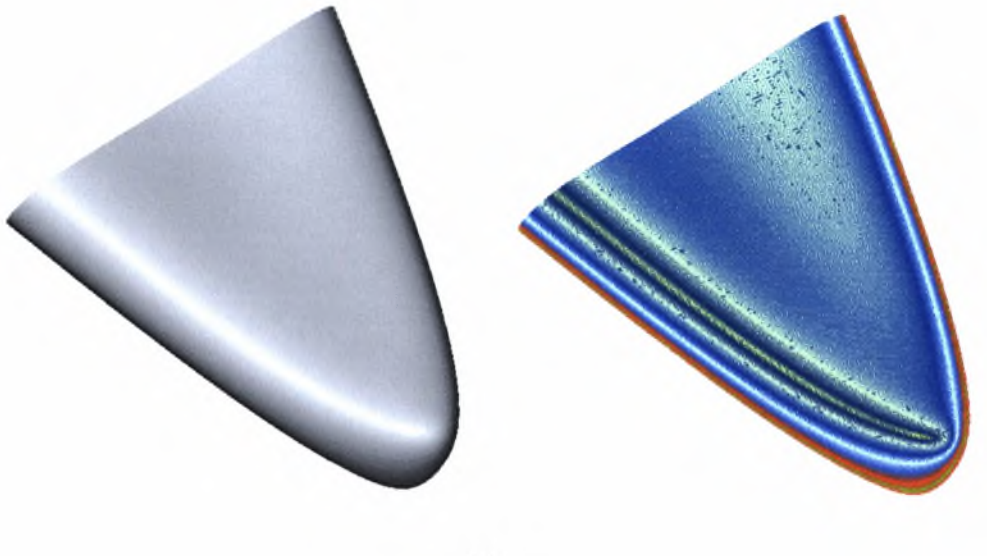


(γ)

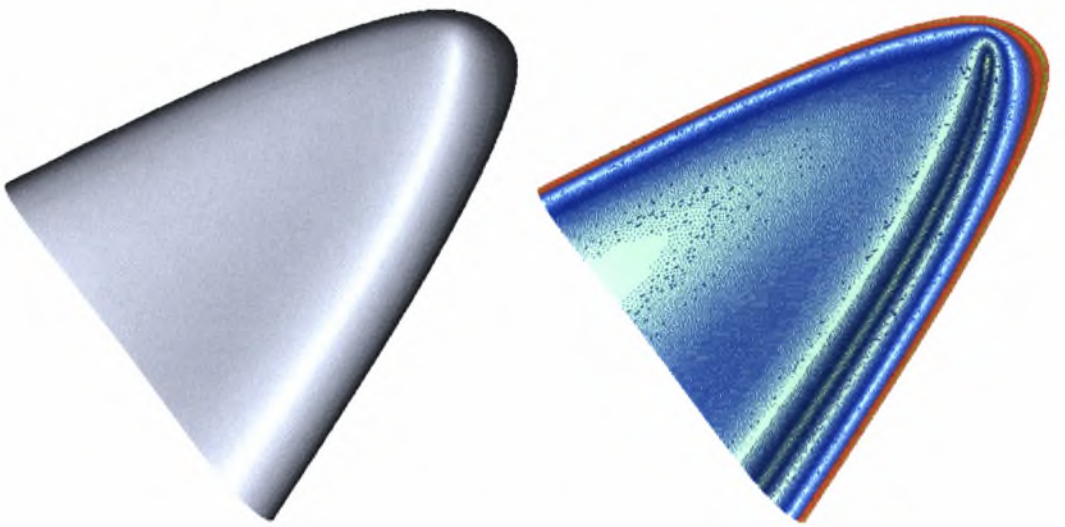


(δ)

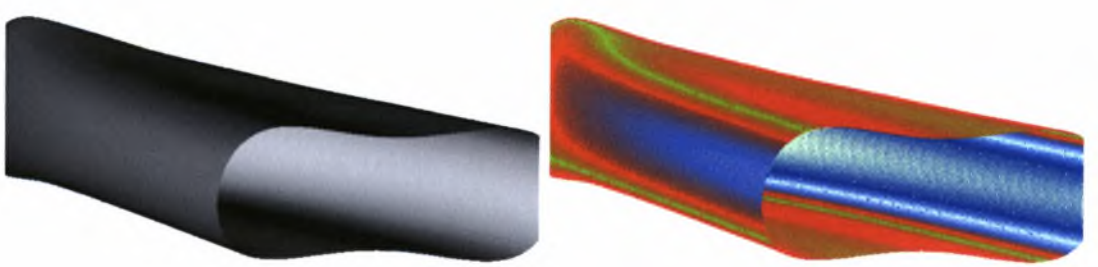
Σχήμα Β1.31 (συνεχίζεται)



(ε)

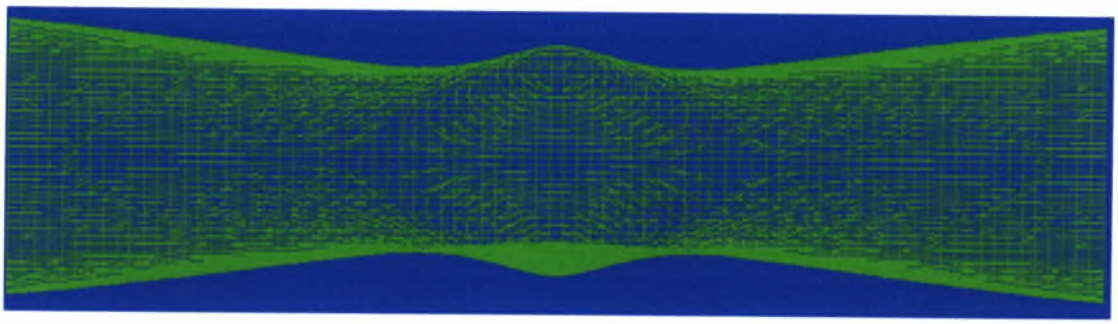


(στ)

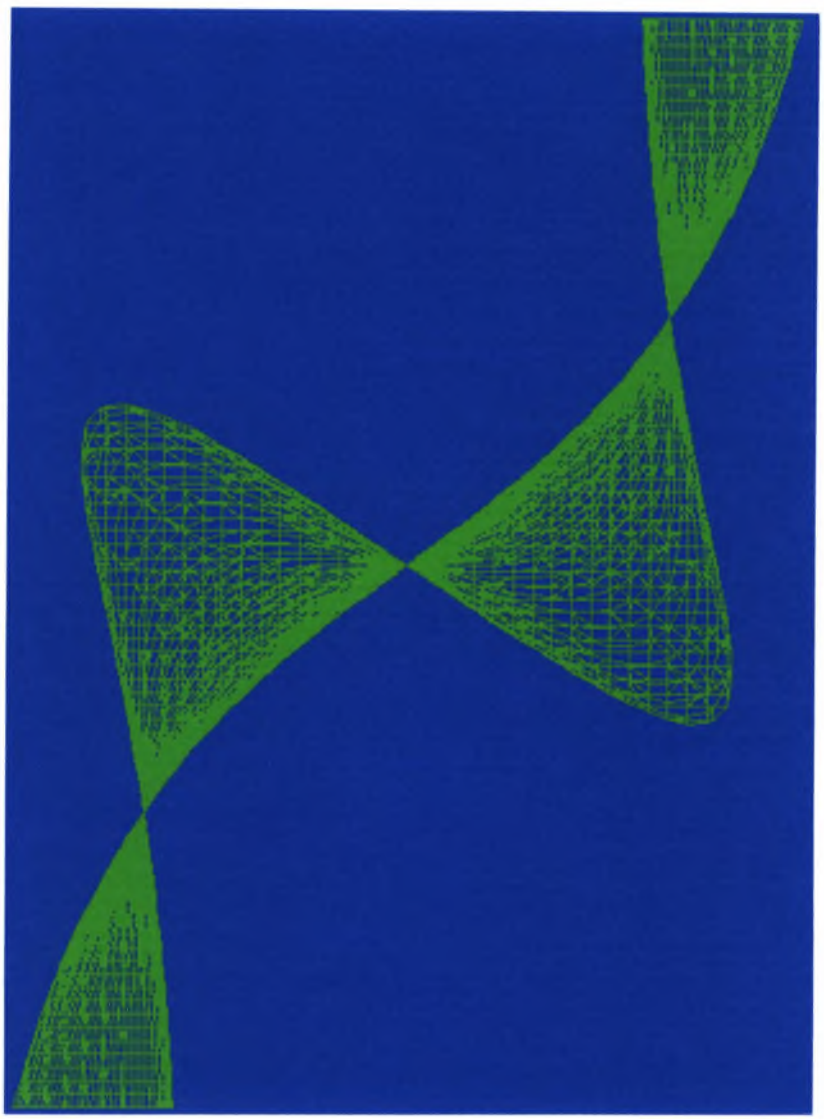


(ζ)

Σχήμα Β1.31. Φωτοσκιασμένες απεικονίσεις του πολλαπλού καταστροφής του προηγούμενου σχήματος, τόσο σε αποχρώσεις του γκρι όσο και έγχρωμες.

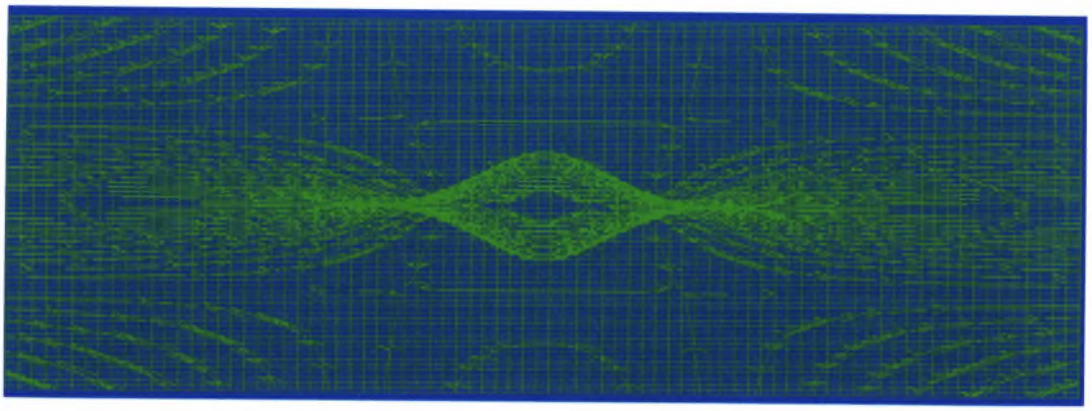


(α) *Κάτοψη*

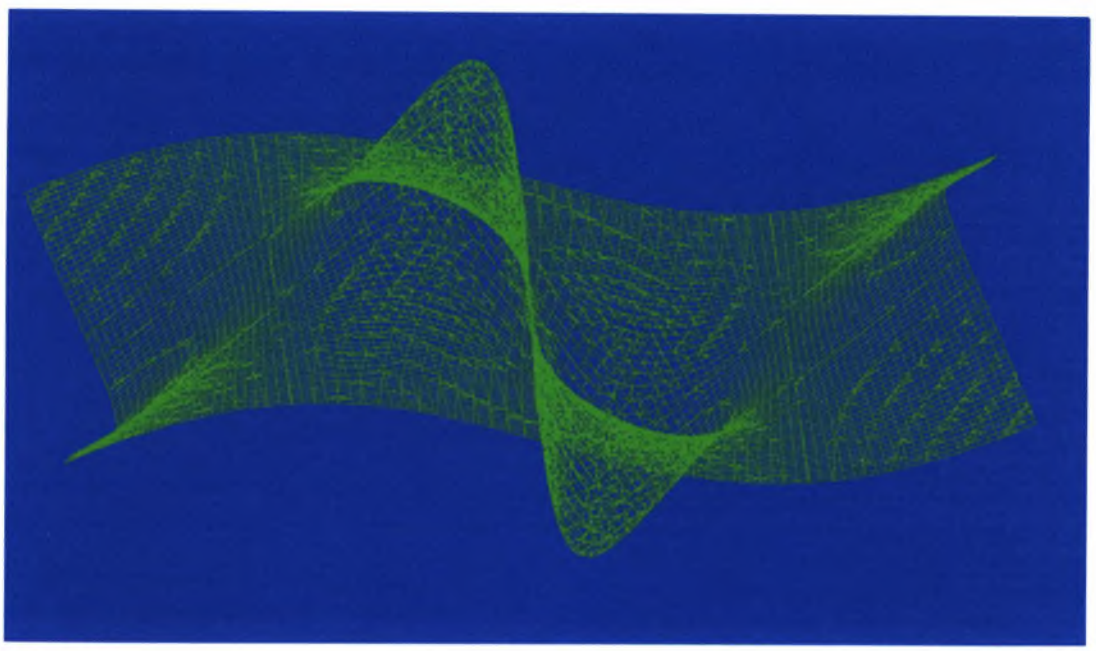


(β) *Πλαϊνή όψη 1*

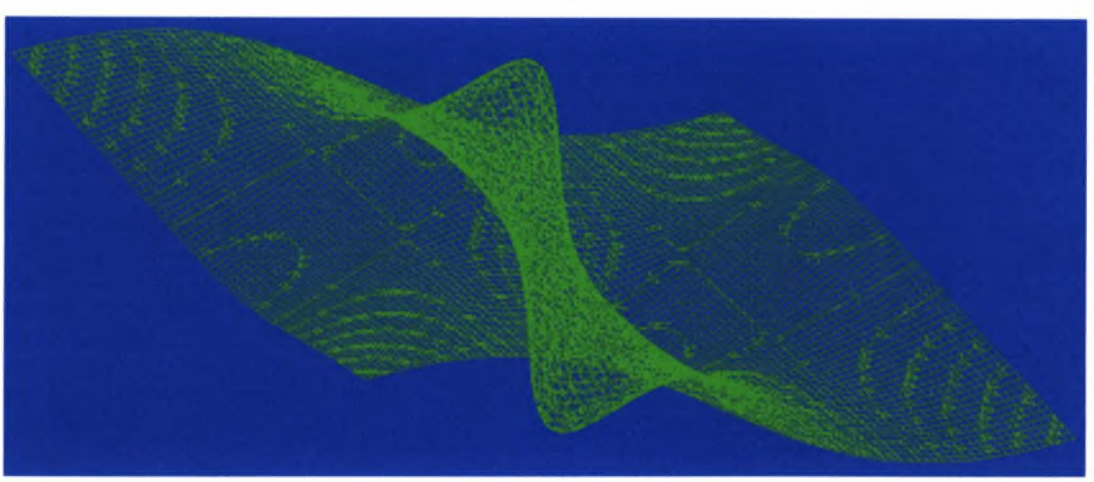
Σχήμα Β1.32 (συνεχίζεται)



(γ) *Πλαϊνή όψη 2*

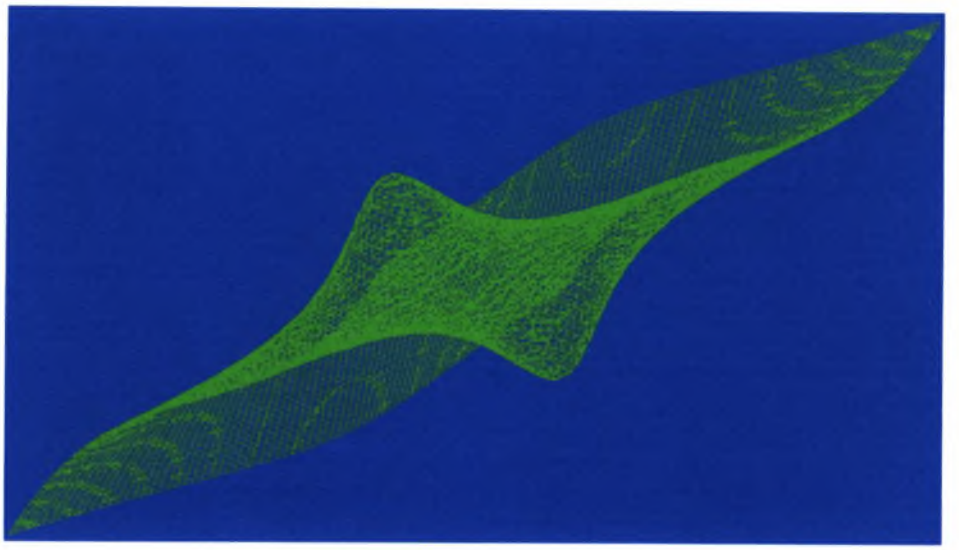


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

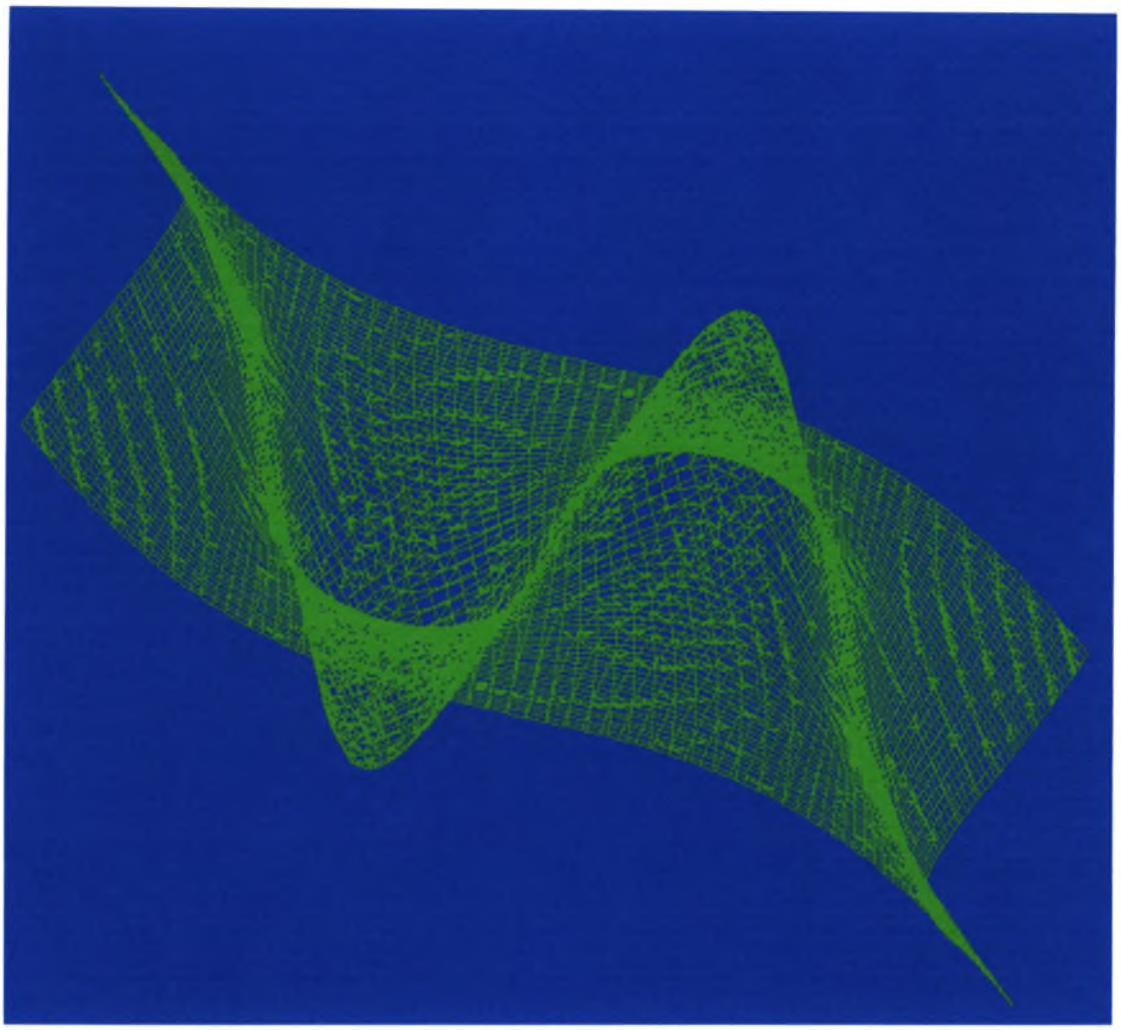
Σχήμα Β1.32 (συνεχίζεται)



(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.32 (συνεχίζεται)



(η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

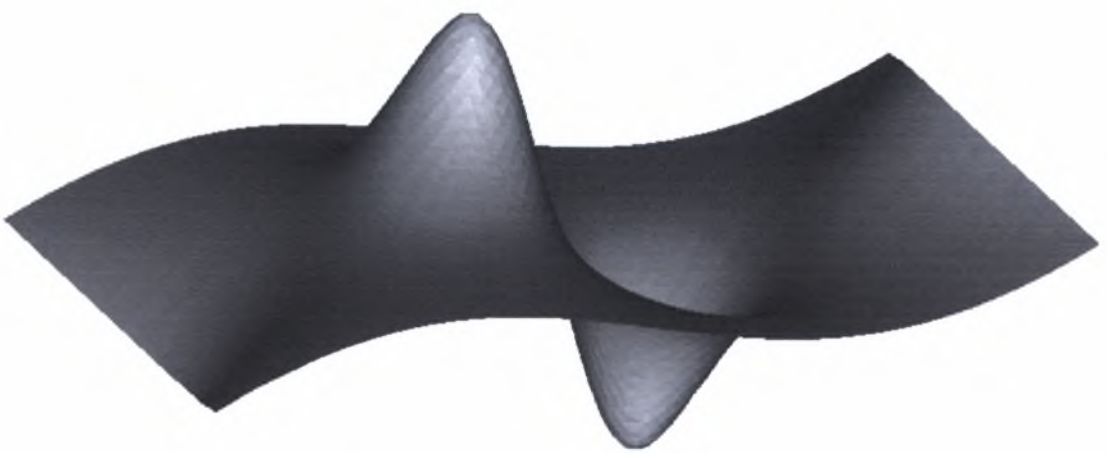
Σχήμα Β1.32. Πολλαπλό καταστροφής 2^{ου} είδους του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια, υπό μορφή επιφάνειας πλέγματος.

(α)

Σχήμα Β1.33 (συνεχίζεται)

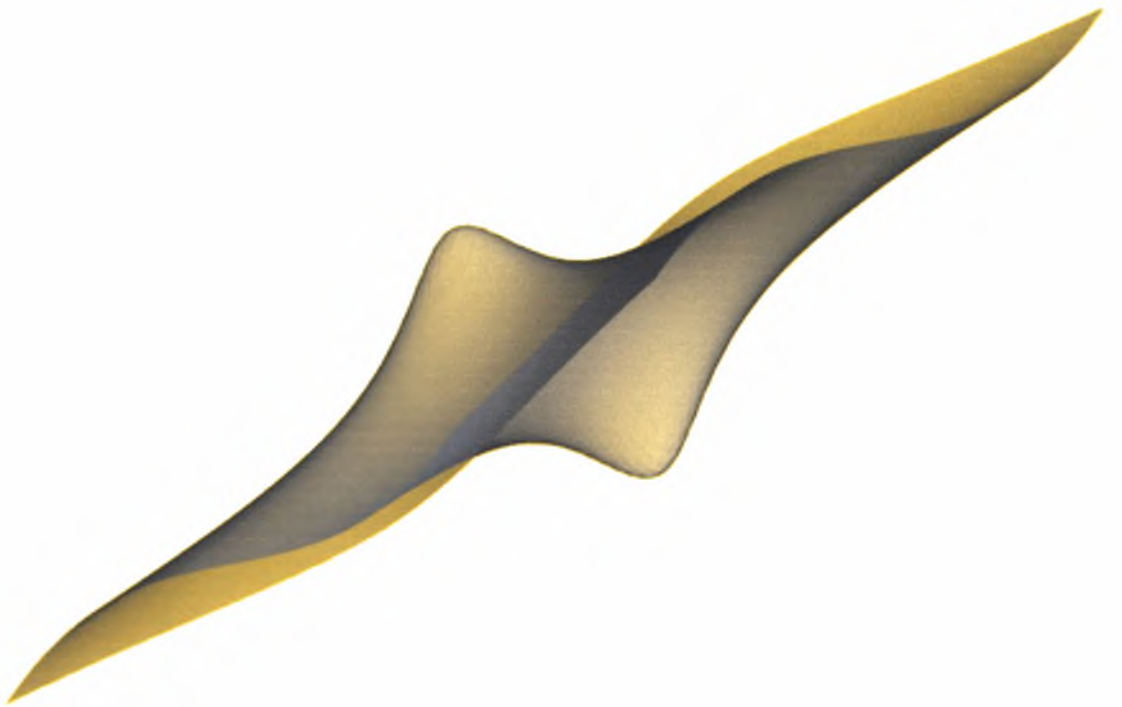
(β)

(γ)



(δ)

Σχήμα Β1.33 (συνεχίζεται)



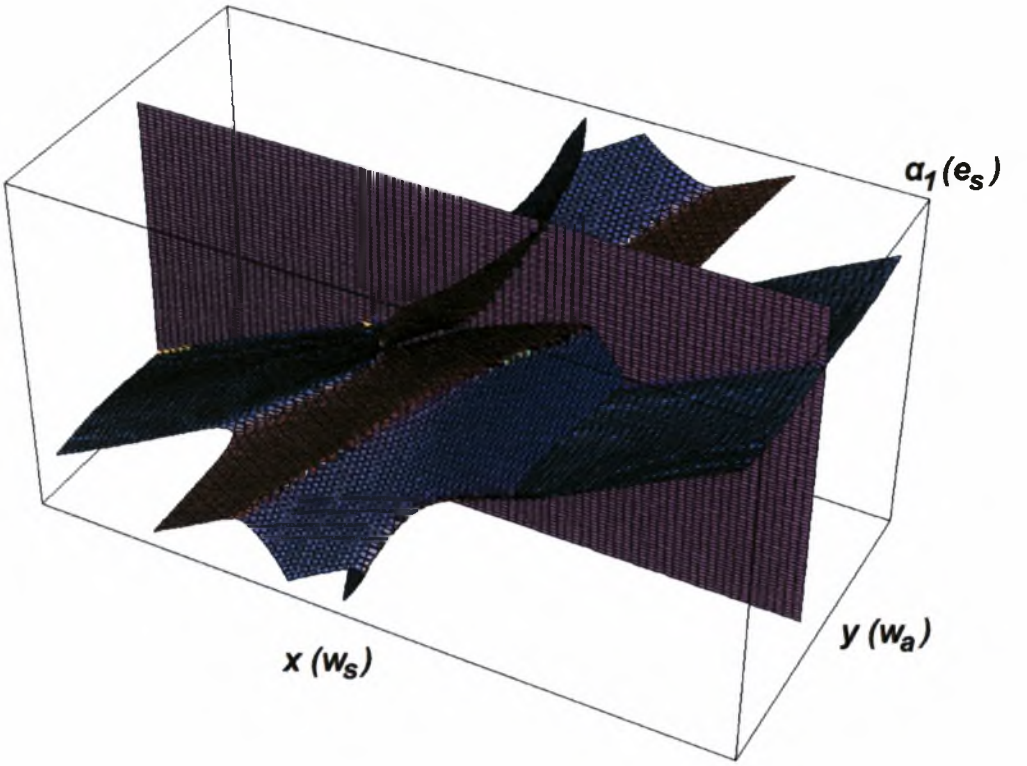
(ε)

Σχήμα Β1.33. Φωτοσκιασμένες απεικονίσεις του πολλαπλού καταστροφής του προηγούμενου σχήματος.

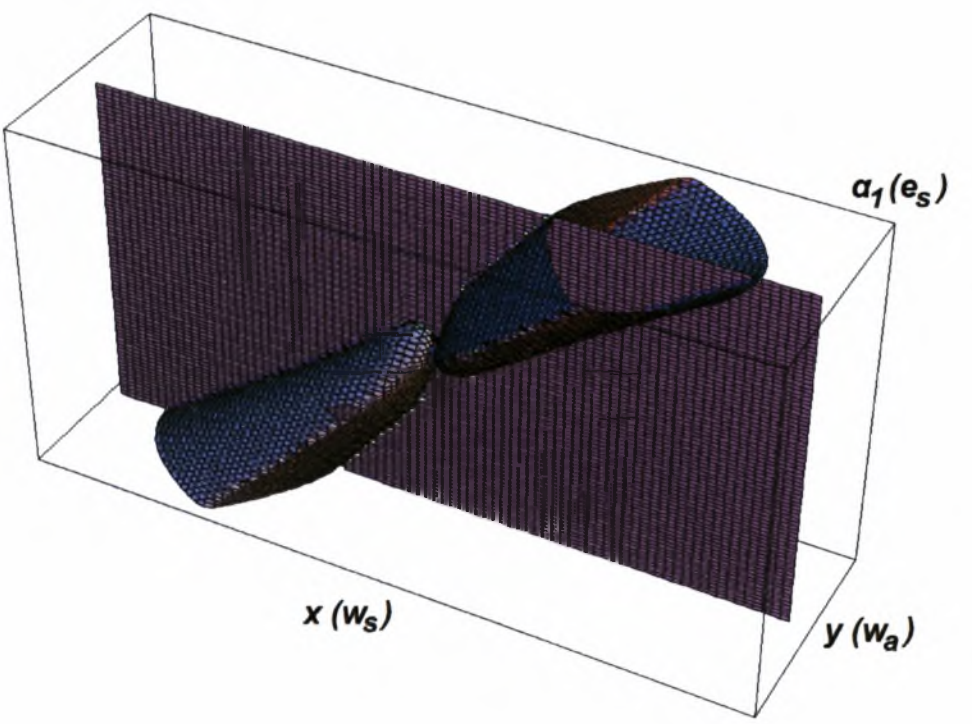
Τα διακλαδικά σύνολα B_s, λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων που χρειάζεται να μηδενιστούν ταυτόχρονα για να τα ορίσουν, δύνανται να υπολογιστούν ***μόνον*** υπό μορφή επιφάνειας στο χώρο (x, y, α_1). Τούτο καθίσταται εφικτό μέσω συνδυασμού απαλοιφής και αριθμητικής συμβολικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, με χρήση ενσωματωμένων διαδικασιών του *Mathematica*. Για το μερικά ατελές σύστημα με $e_s \neq 0, e_a = 0$ τα σχετικά προγράμματα είναι τα *Bssymm1.nb* και *Bssymm2.nb*, ενώ για το σύστημα με $e_s = 0, e_a \neq 0$ τα *BsAsymm1.nb* και *BsAsymm2.nb*. ***Καθόσον*** [♣] ***η εξίσωση μηδενισμού της Hessian δίδει δύο συμβολικές εκφράσεις – ρίζες ως προς την παράμετρο ελέγχου*** $\alpha_0 = f_i(x, y, \alpha_1)$, ***i=1,2, έκαστη των οποίων αντικαθίσταται στην συμβολική εξίσωση, η οποία αποτελεί προϊόν απαλοιφής του*** α_1 ***από τις δύο εξισώσεις ισορροπίας, παράγεται ένα ζεύγος επιφανειών*** B_s, ***η ένωση των οποίων μορφώνει τη συνολική επιφάνεια του κάθε διακλαδικού συνόλου***. Οι εν λόγω τελικές σύνθετες επιφάνειες, αλλά και εκείνες που τις παράγουν, αναπαρίστανται

[♣] και για τις δύο περιπτώσεις μερικά αρχικά ατελούς συστήματος

γραφικά στα Σχήματα Β1.34 – Β1.37 και Β1.38 – Β1.41 για συστήματα με μόνο συμμετρική και μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια αντίστοιχα.

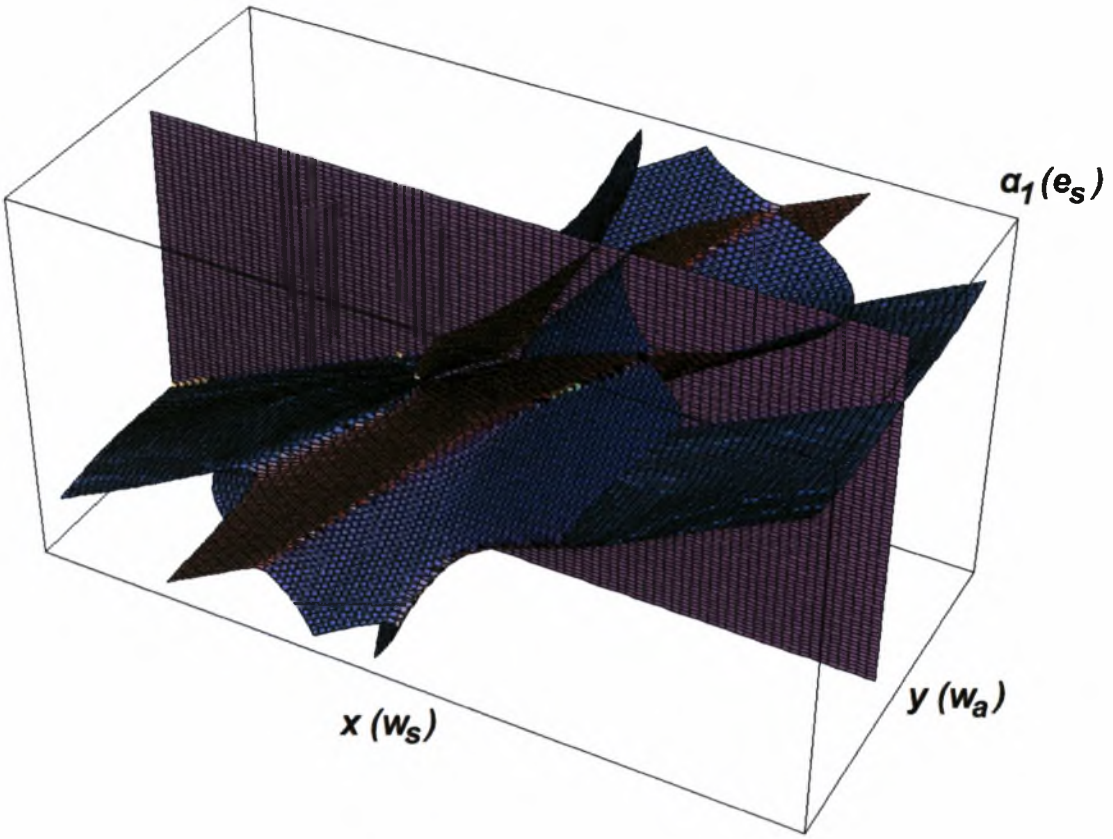


(α) *Πρώτη επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*



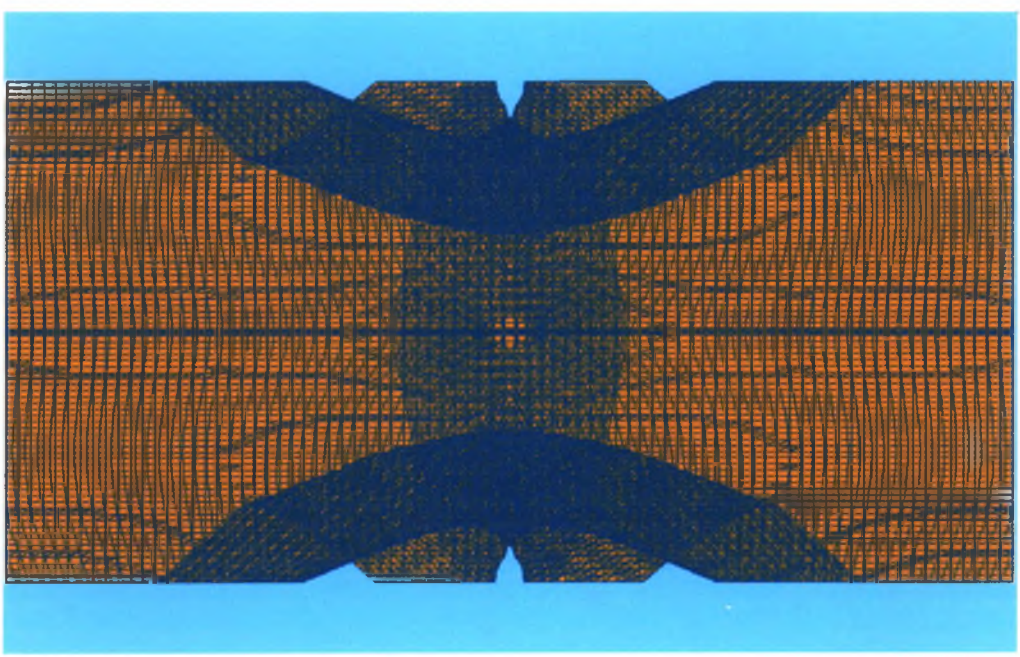
(β) *Δεύτερη επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*

Σχήμα Β1.34 (συνεχίζεται)



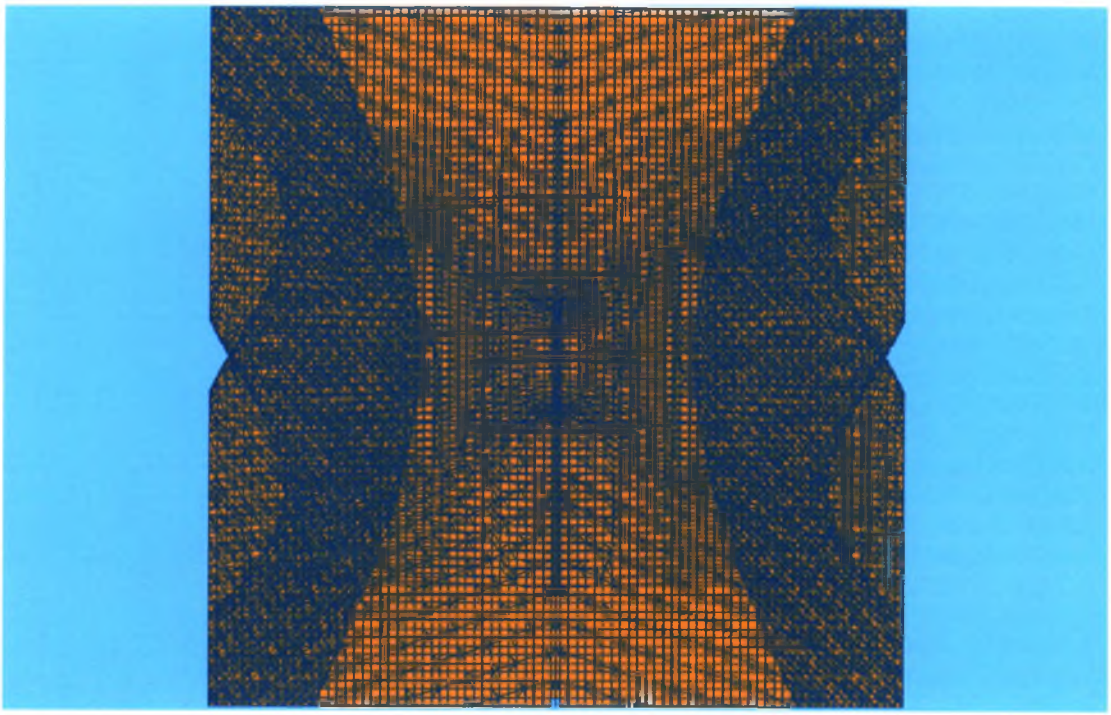
(γ) *Πλήρης επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*

Σχήμα Β1.34. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του μερικά αρχικά ατελούς συστήματος με *μόνο συμμετρική* αρχική ατέλεια.

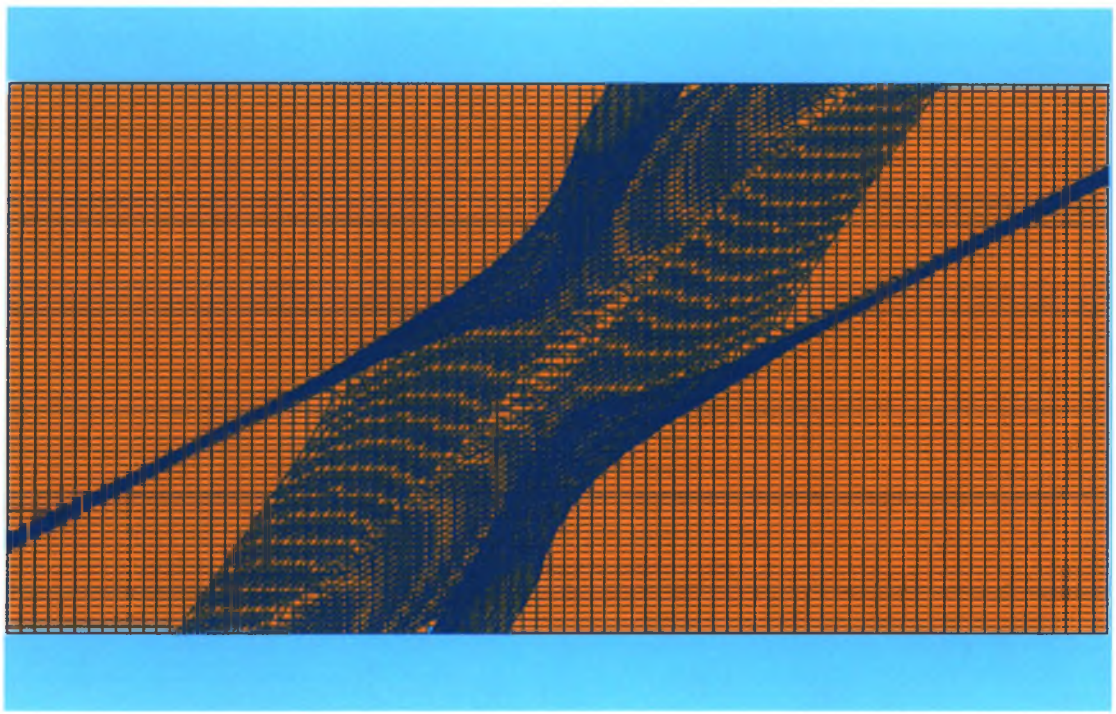


(α) *Κάτοψη*

Σχήμα Β1.35 (συνεχίζεται)

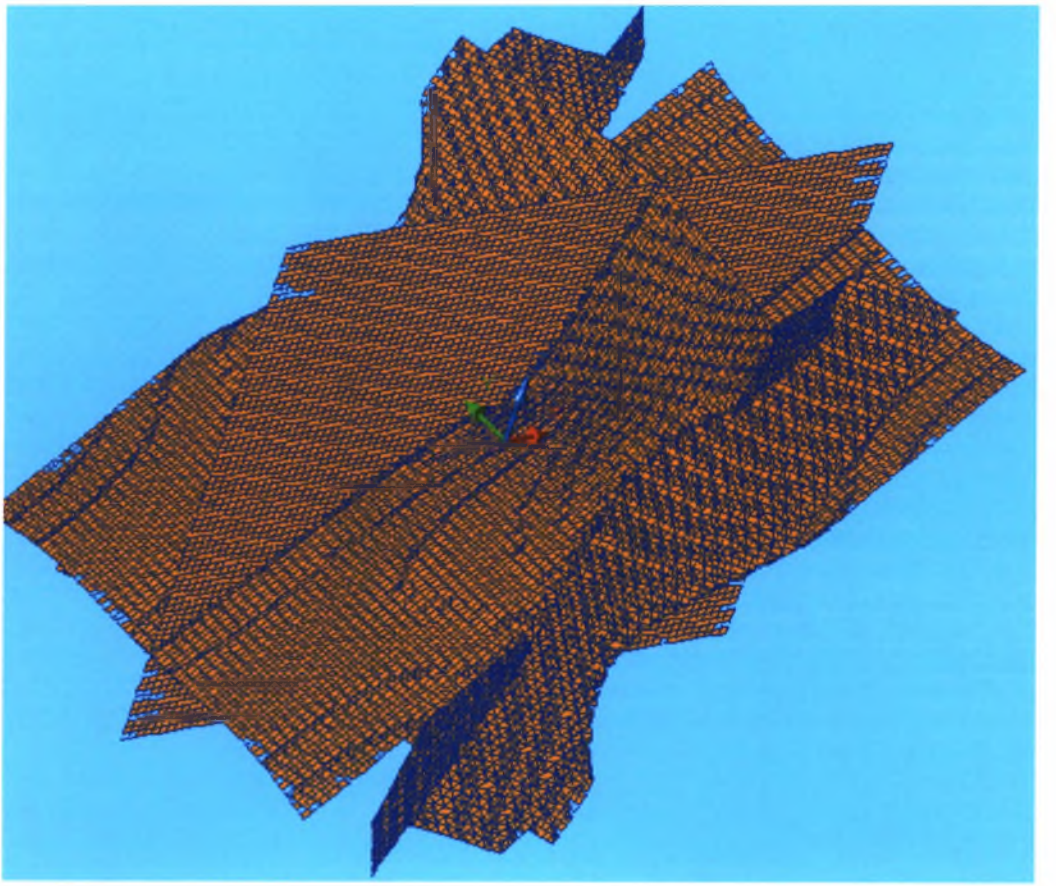


(β) *Πλαϊνή όψη 1*

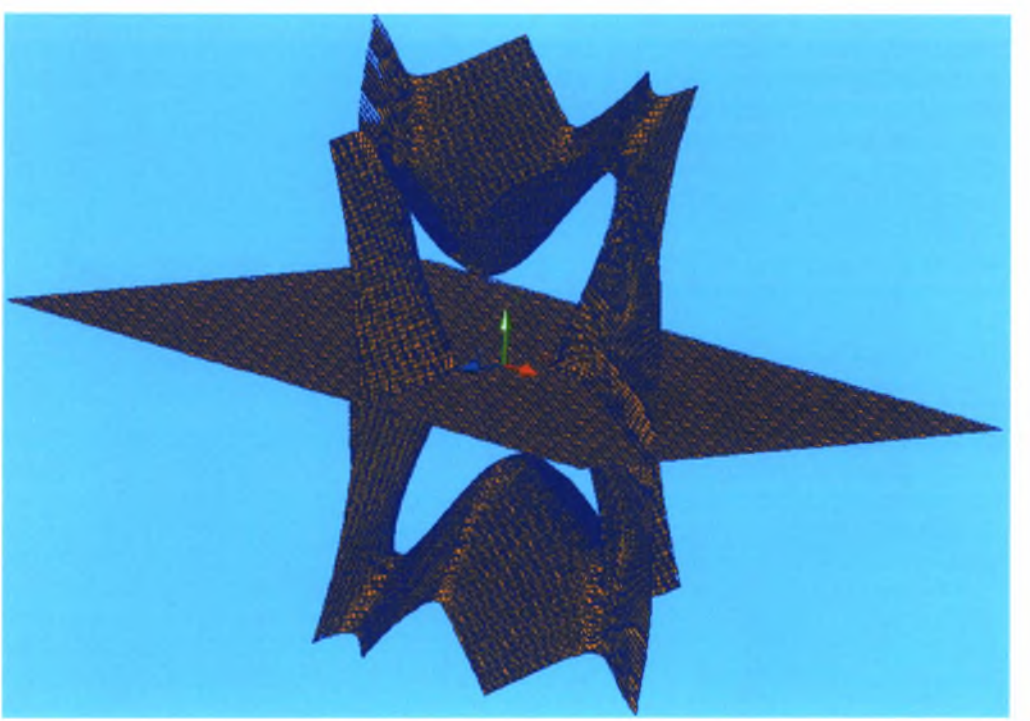


(γ) *Πλαϊνή όψη 2*

Σχήμα Β1.35 (συνεχίζεται)

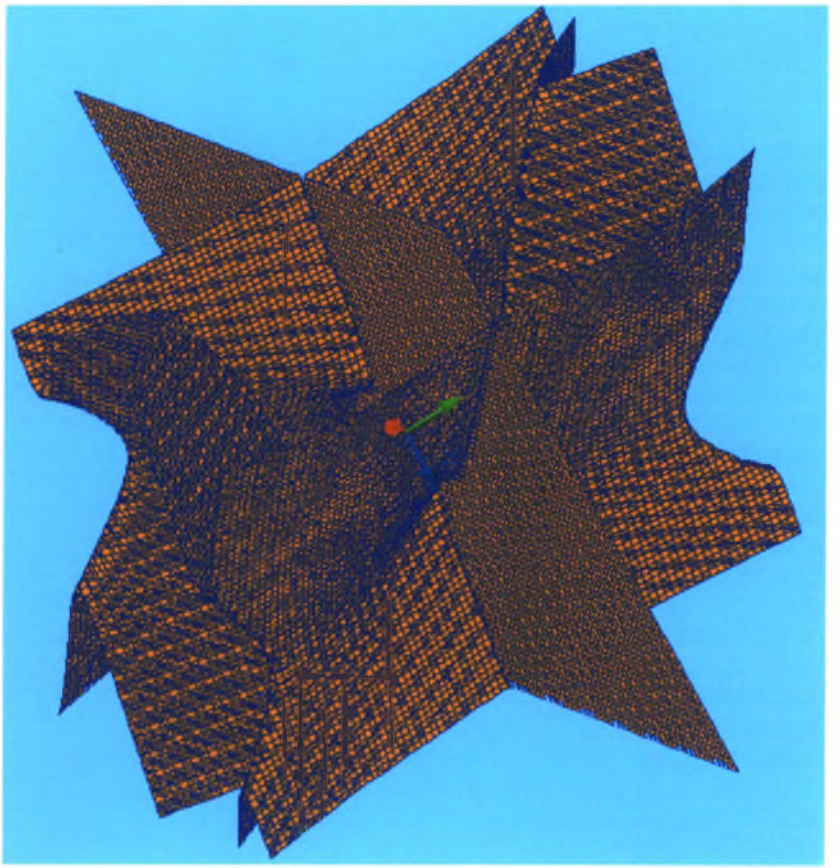


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

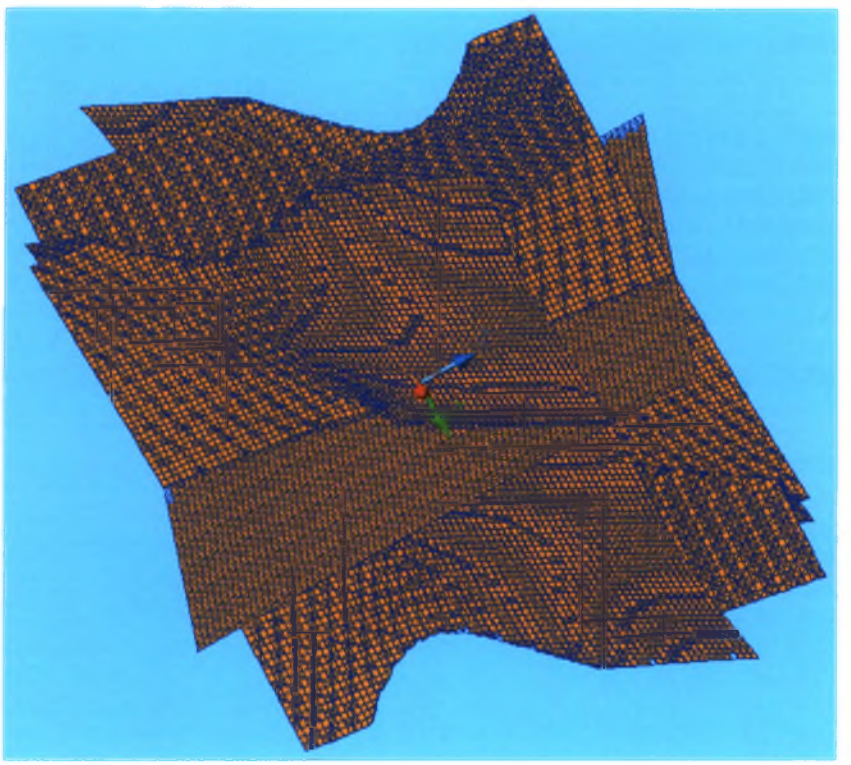


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.35 (συνεχίζεται)

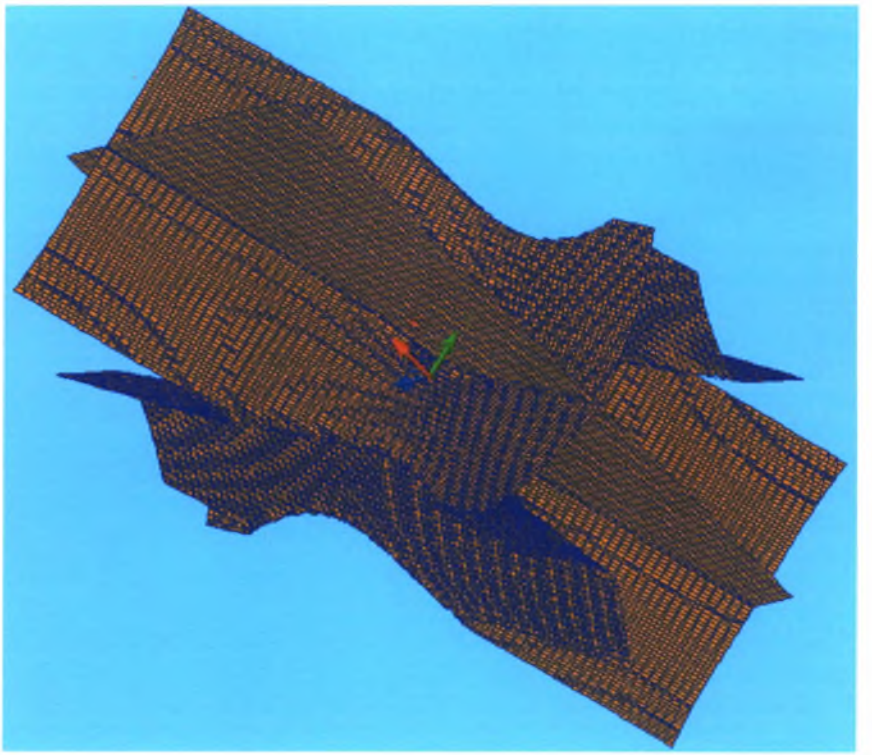


(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

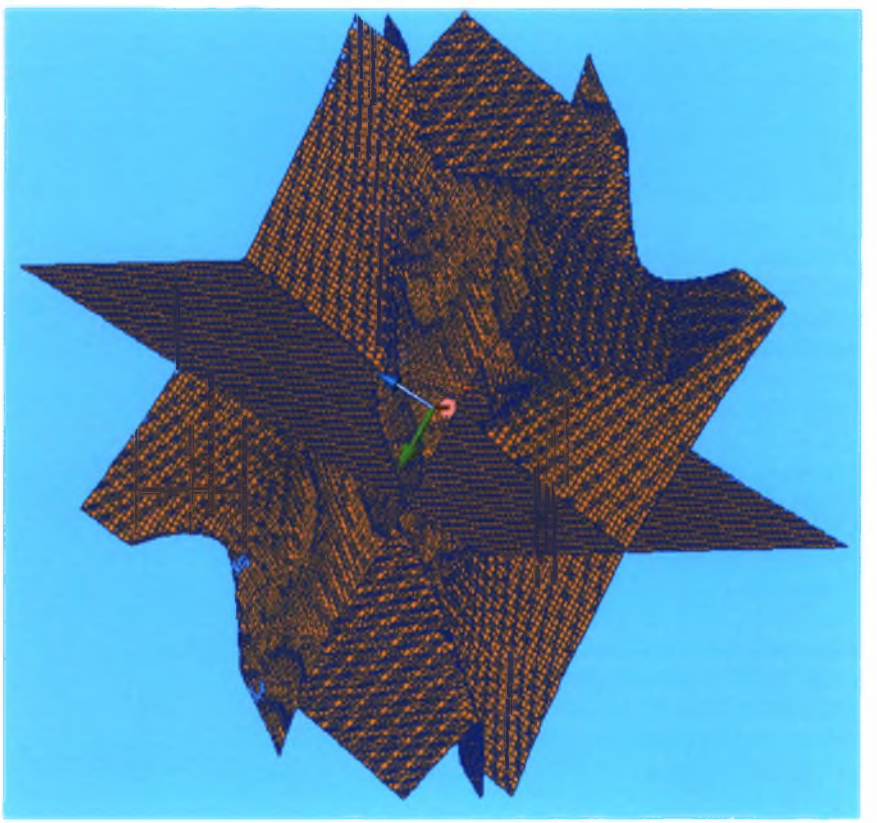


(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.35 (συνεχίζεται)

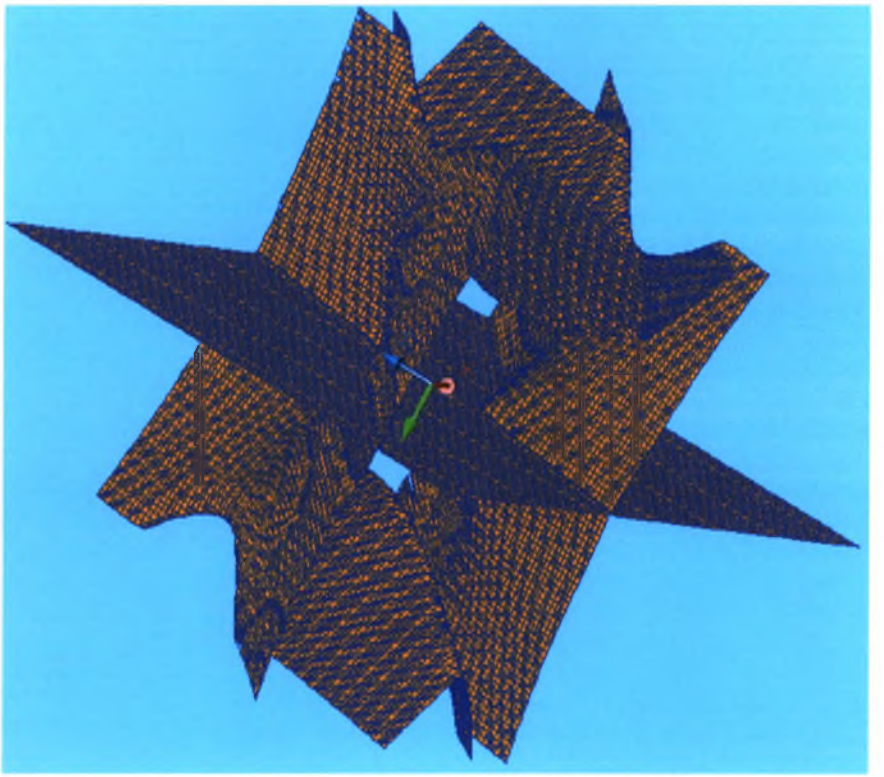


(η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

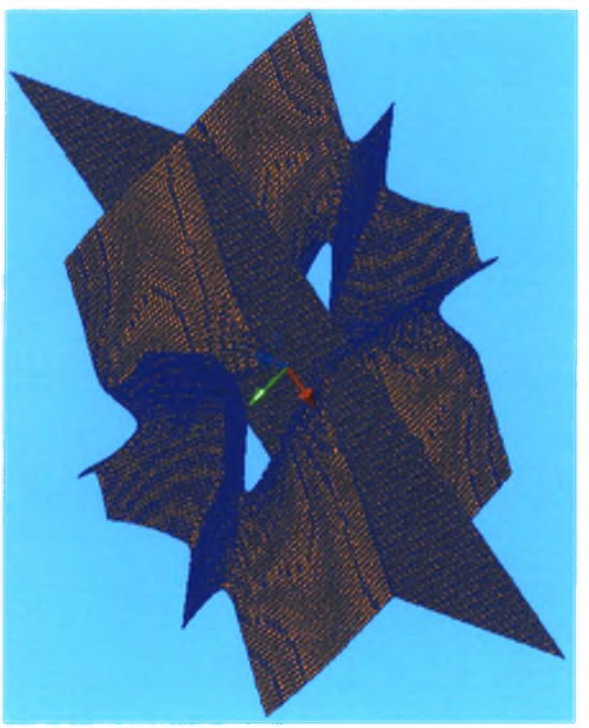


(θ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 6*

Σχήμα Β1.35 (συνεχίζεται)

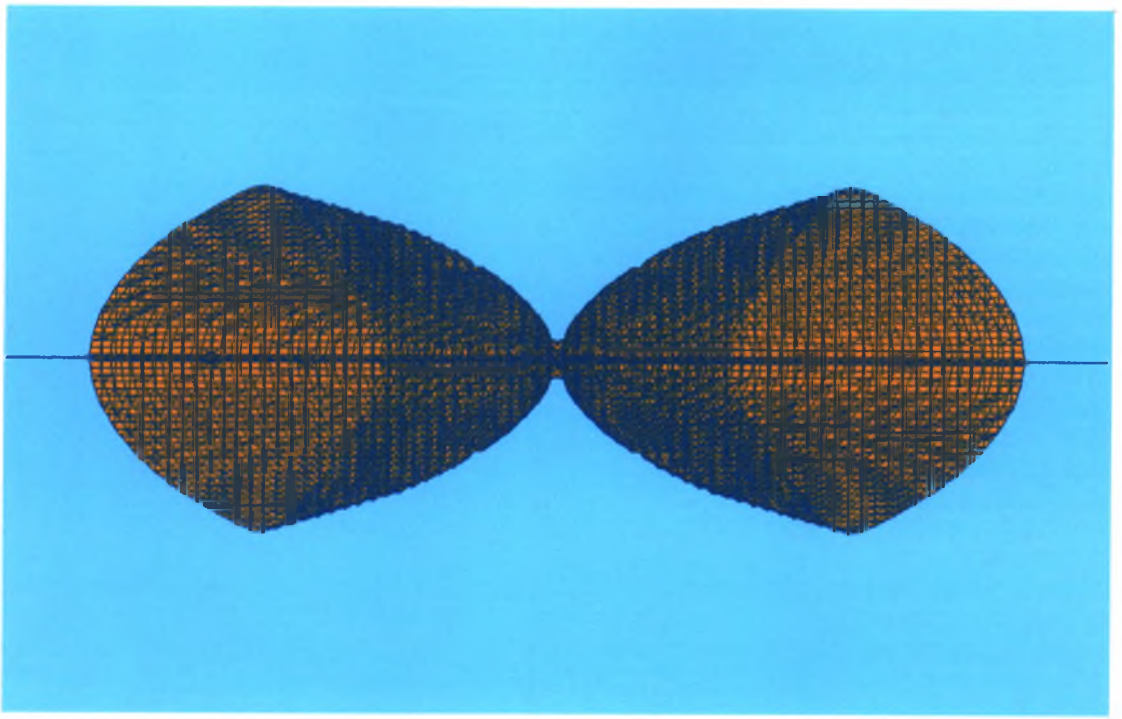


(ι) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 7*

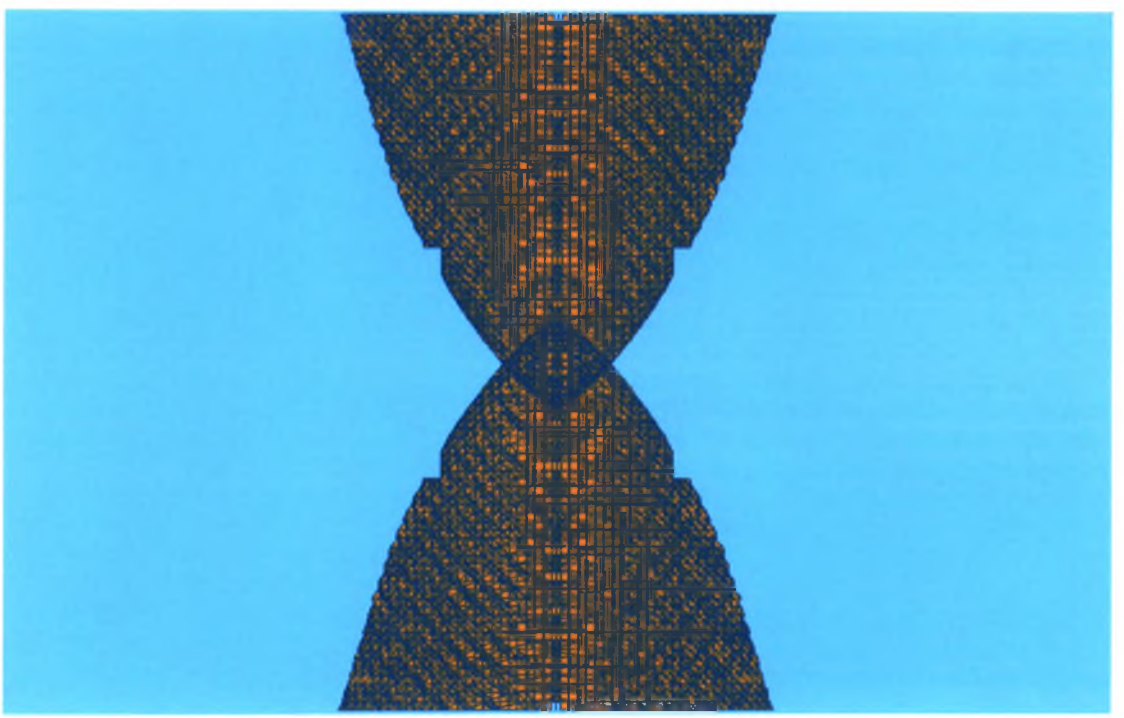


(ια) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 8*

Σχήμα Β1.35. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του σχήματος Β1.34α υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

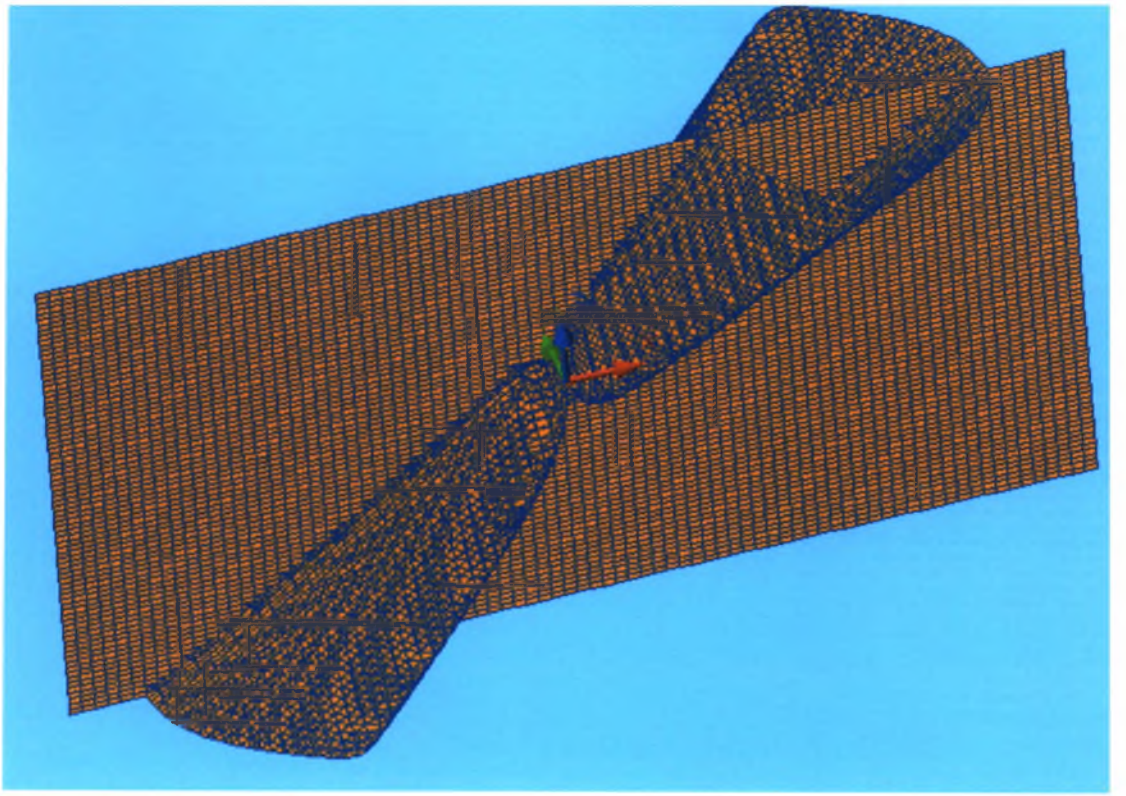


(α) *Κάτοψη*

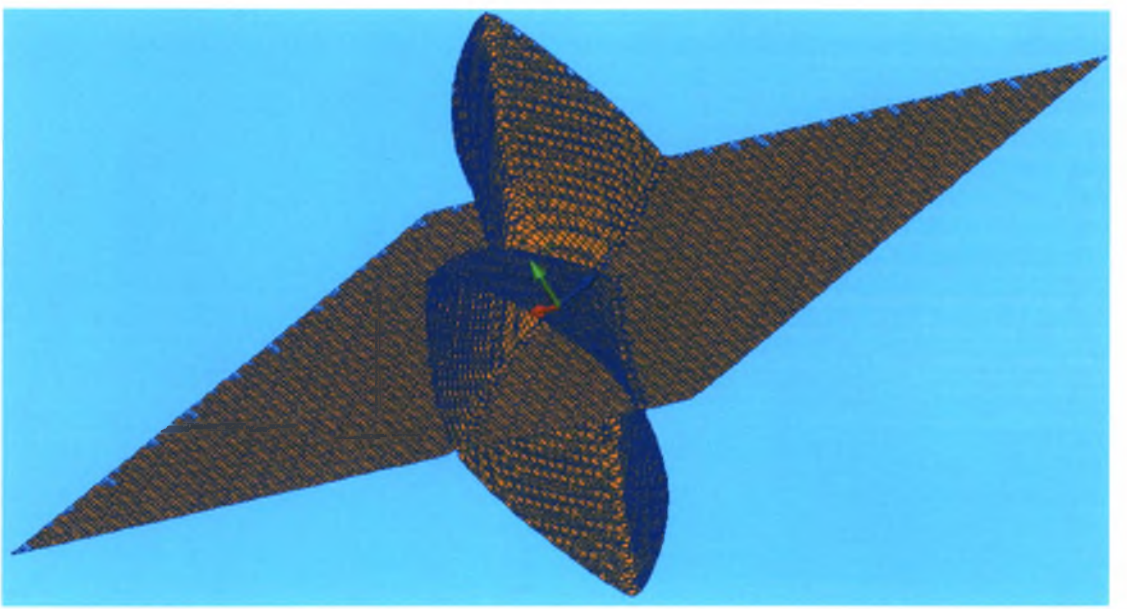


(β) *Πλαϊνή όψη*

Σχήμα Β1.36 (συνεχίζεται)

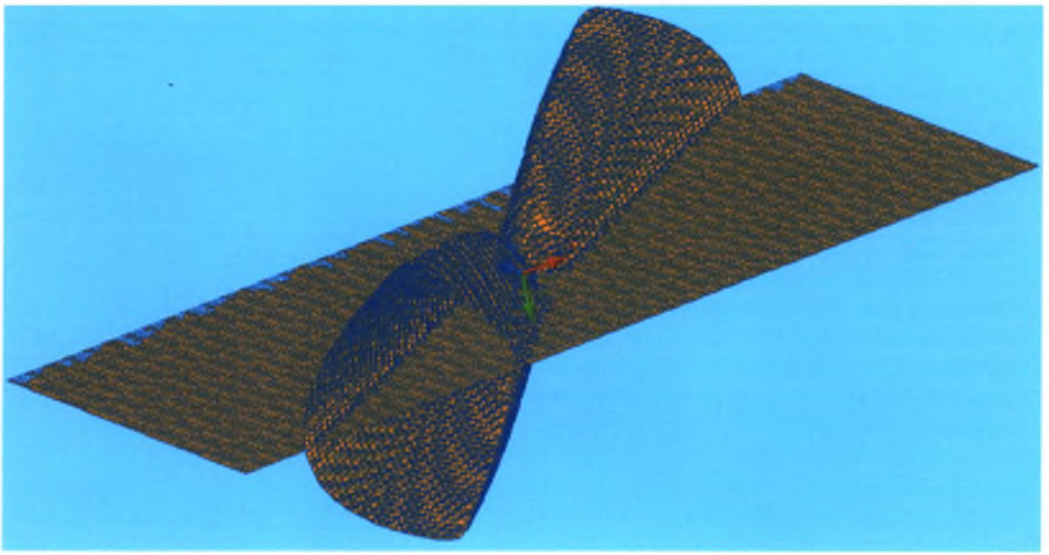


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

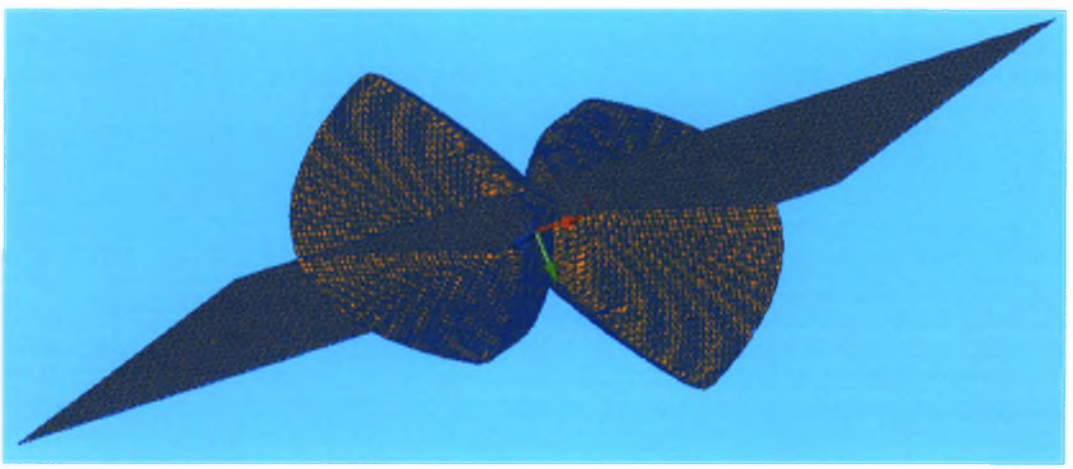


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

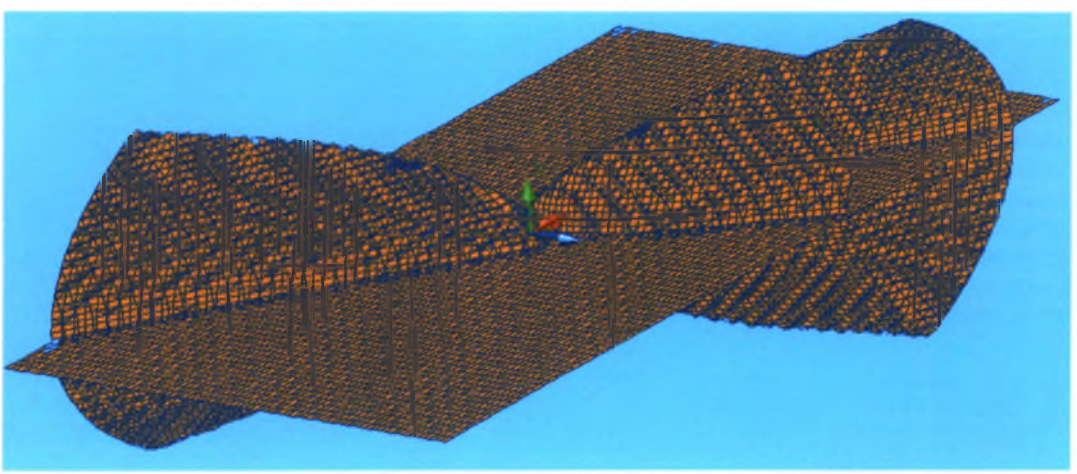
Σχήμα Β1.36 (συνεχίζεται)



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

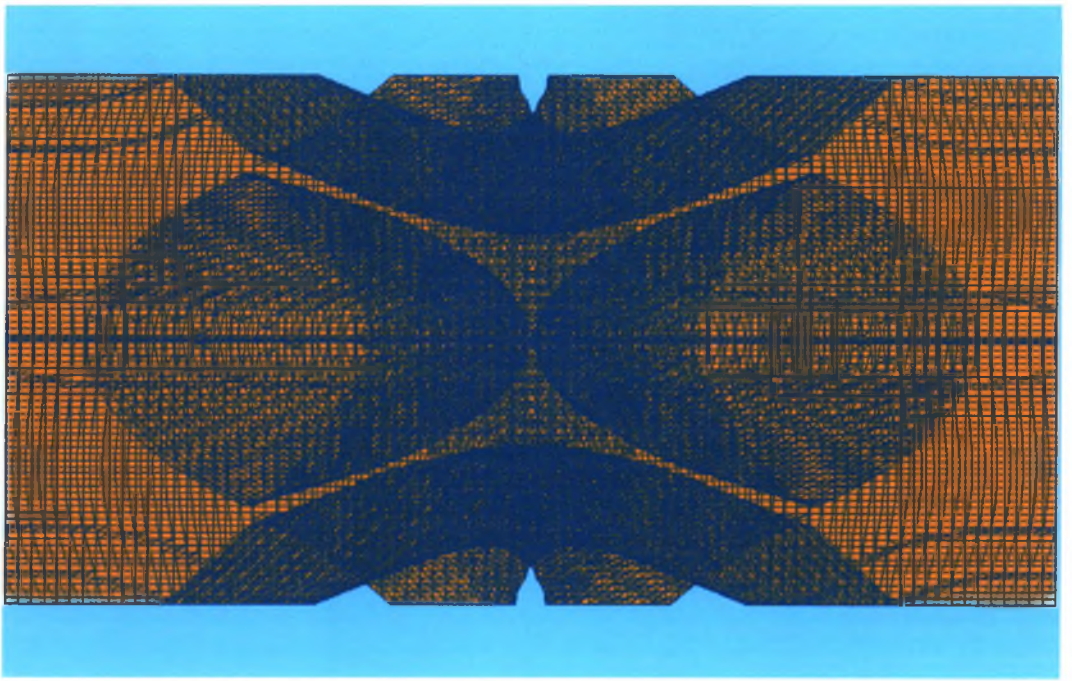


(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

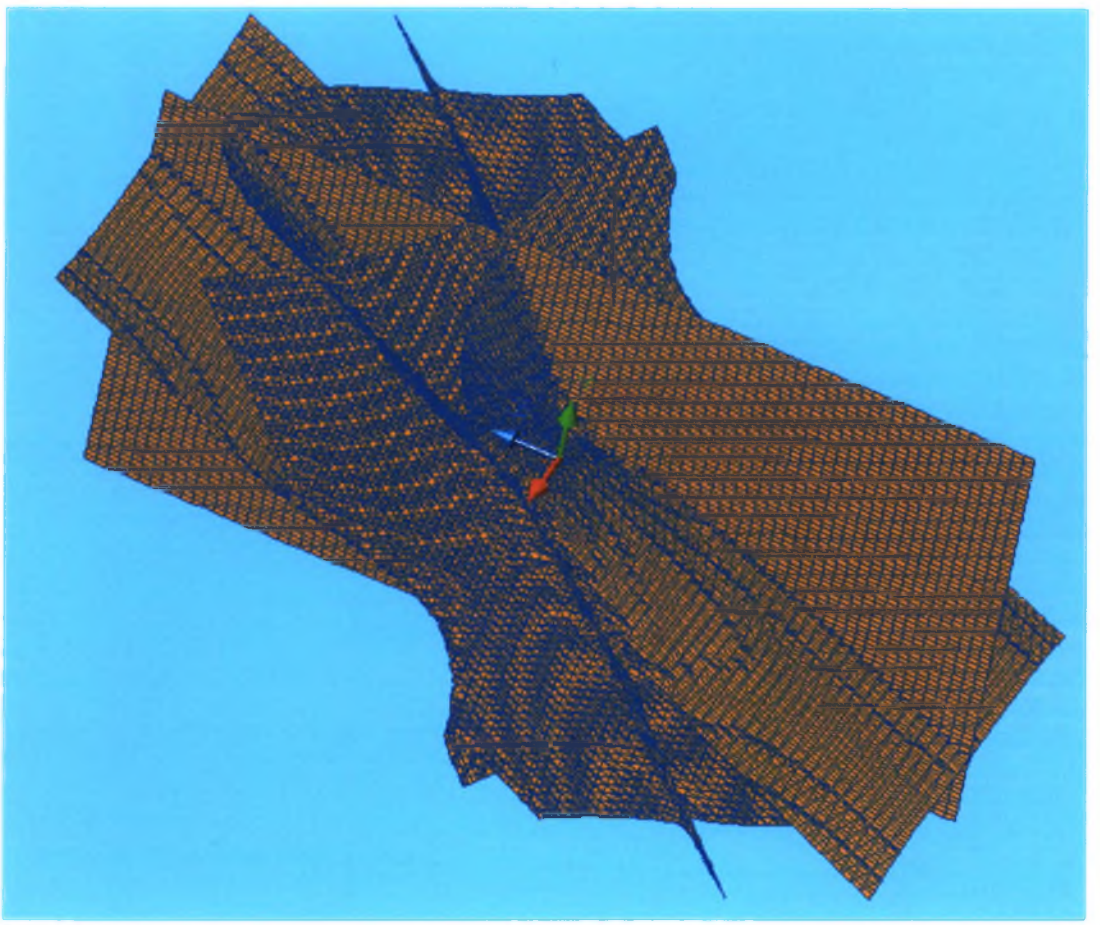


(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

Σχήμα Β1.36. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του σχήματος Β1.34β υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

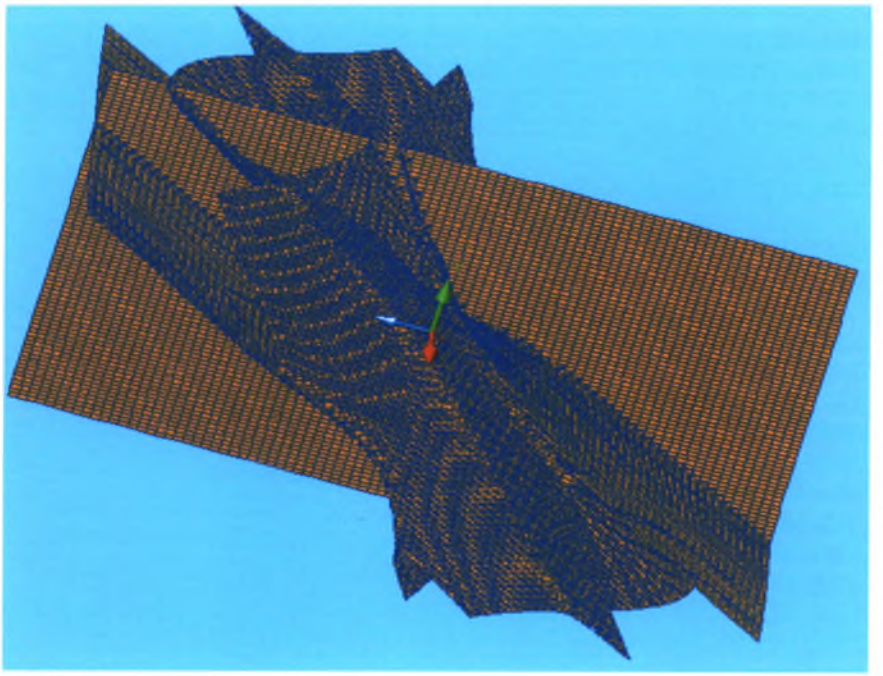


(α) *Κάτοψη*

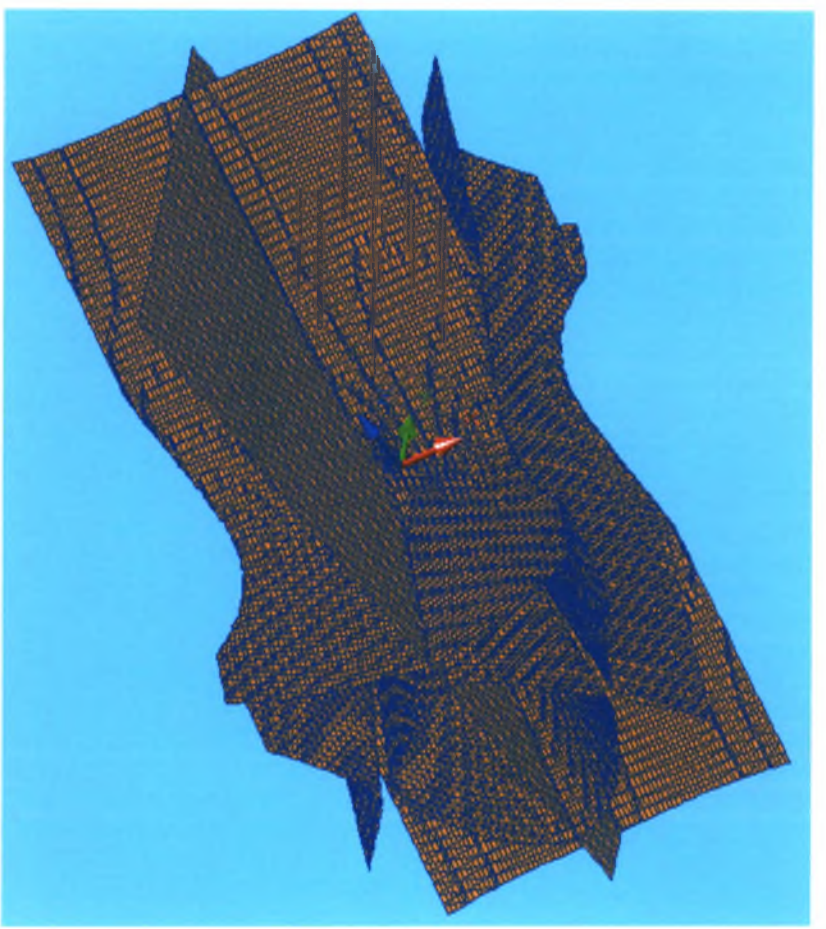


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

Σχήμα Β1.37 (συνεχίζεται)

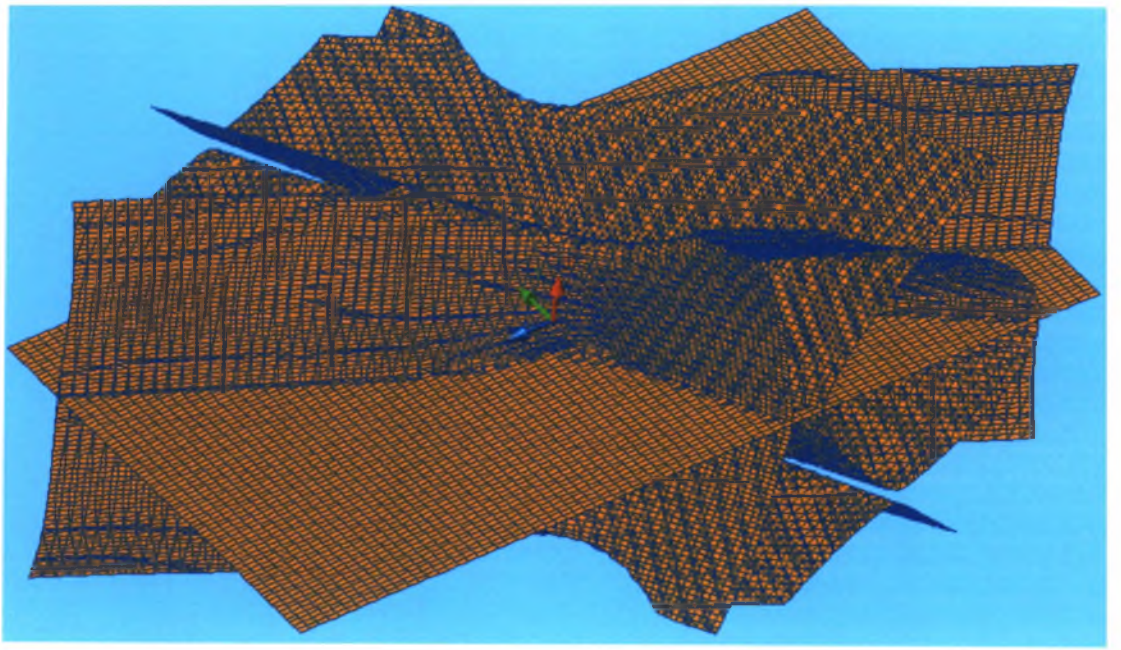


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

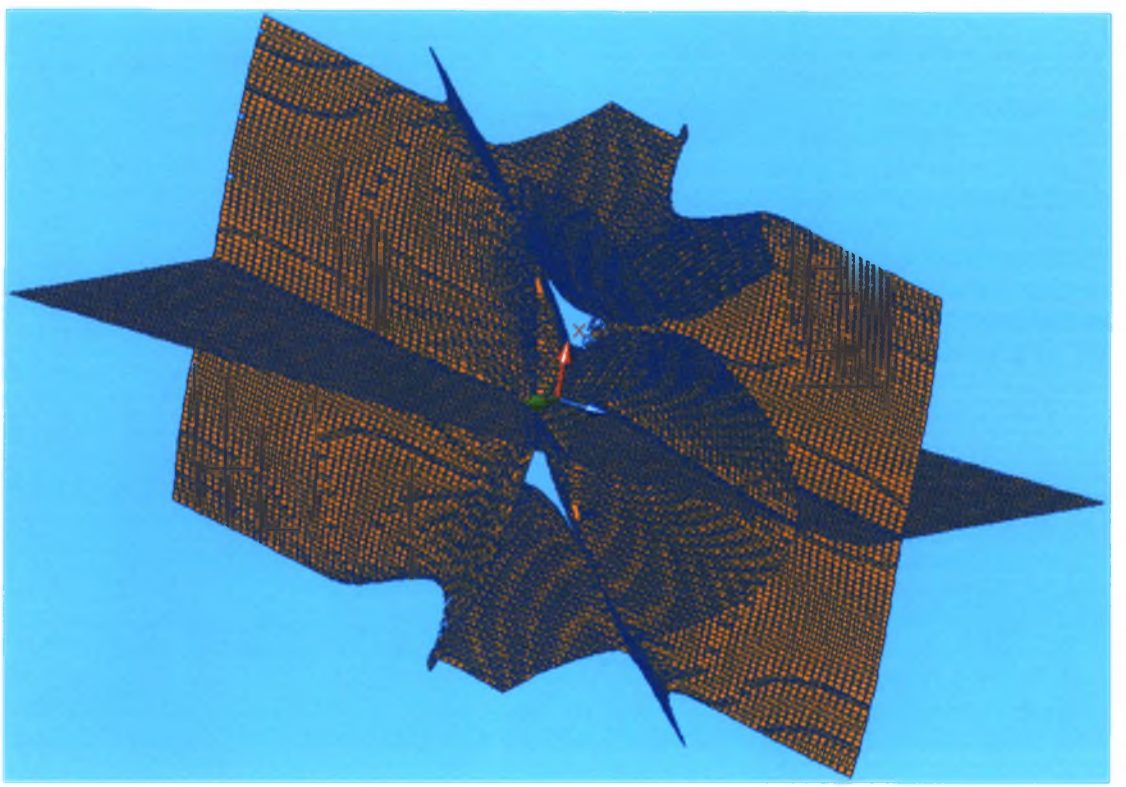


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.37 (συνεχίζεται)

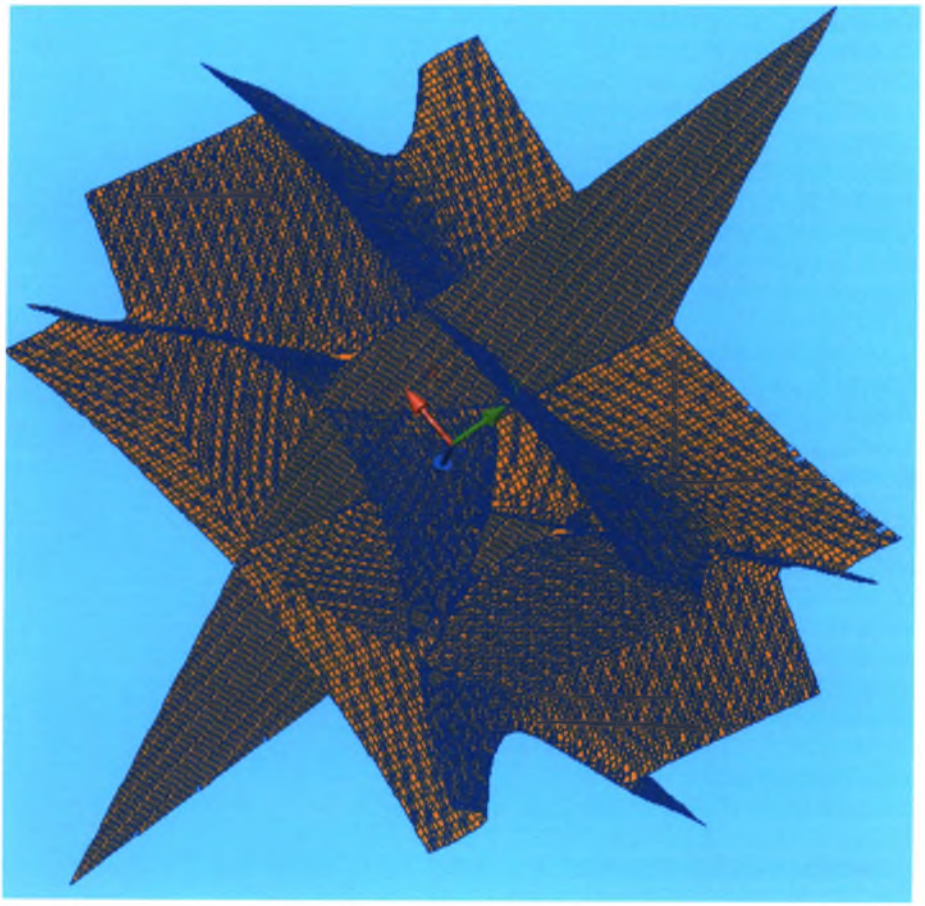


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

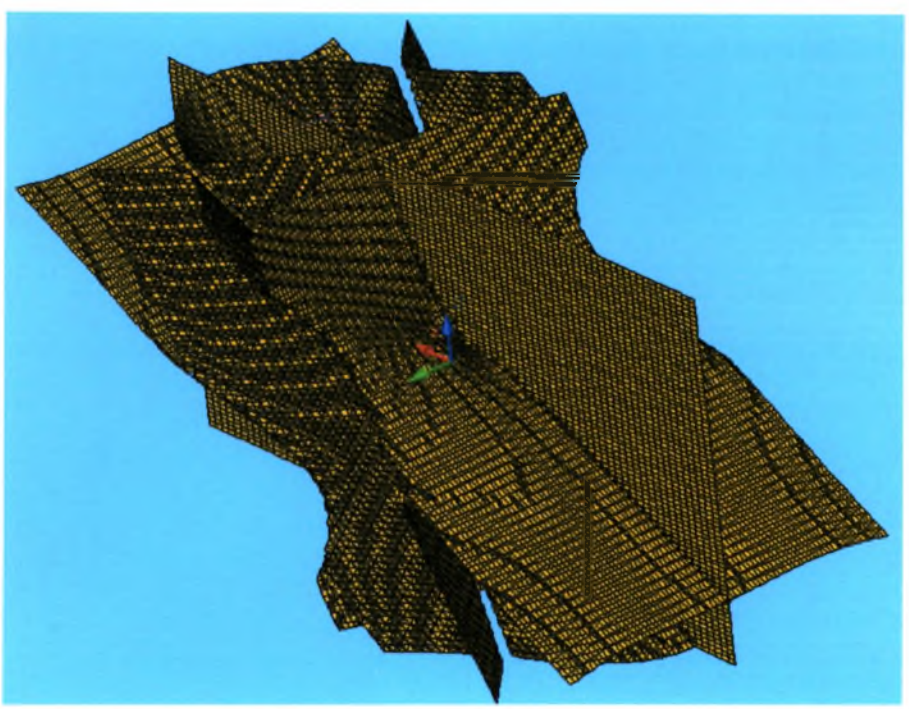


(στ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 5*

Σχήμα Β1.37 (συνεχίζεται)

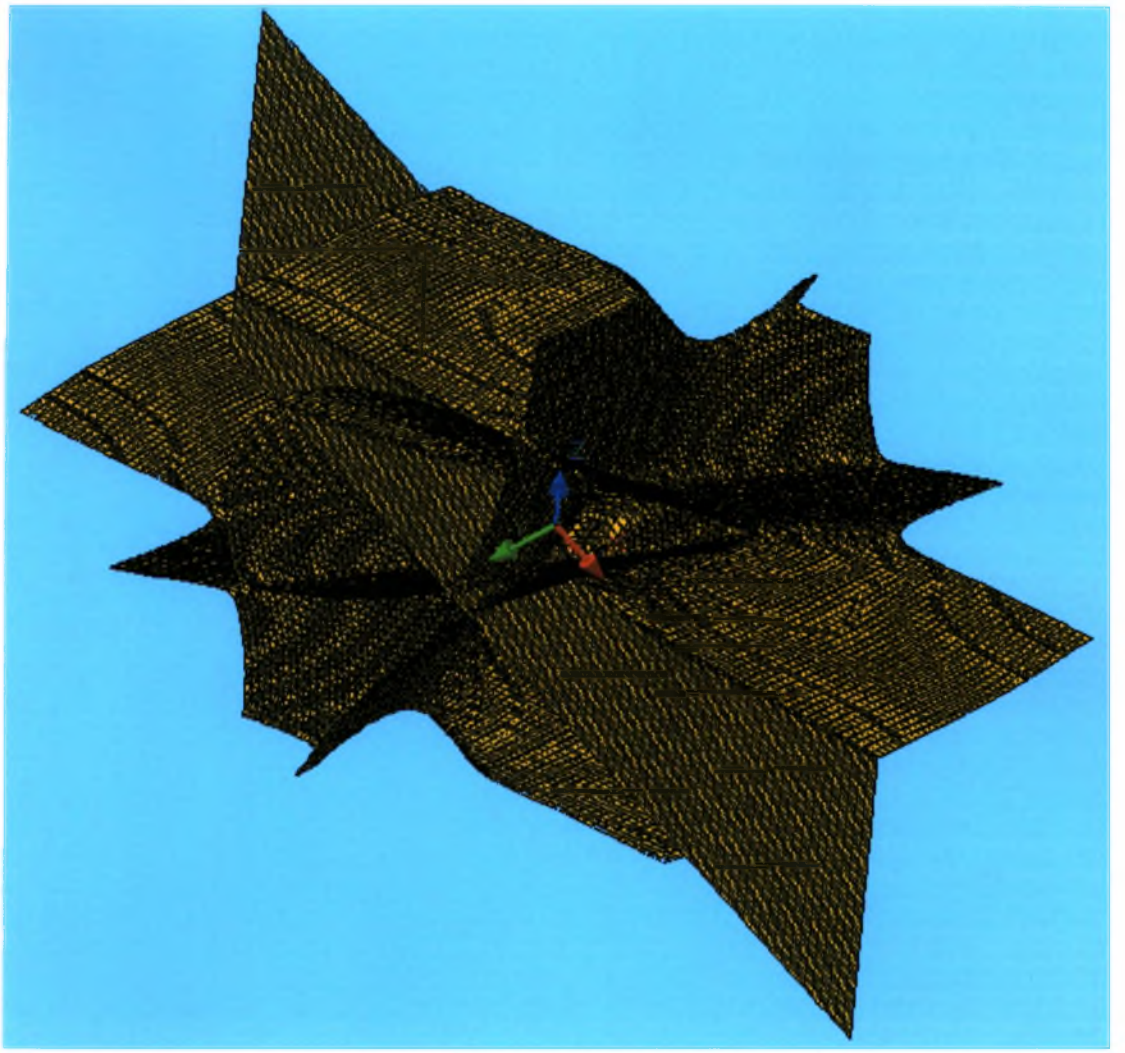


(ζ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 6*



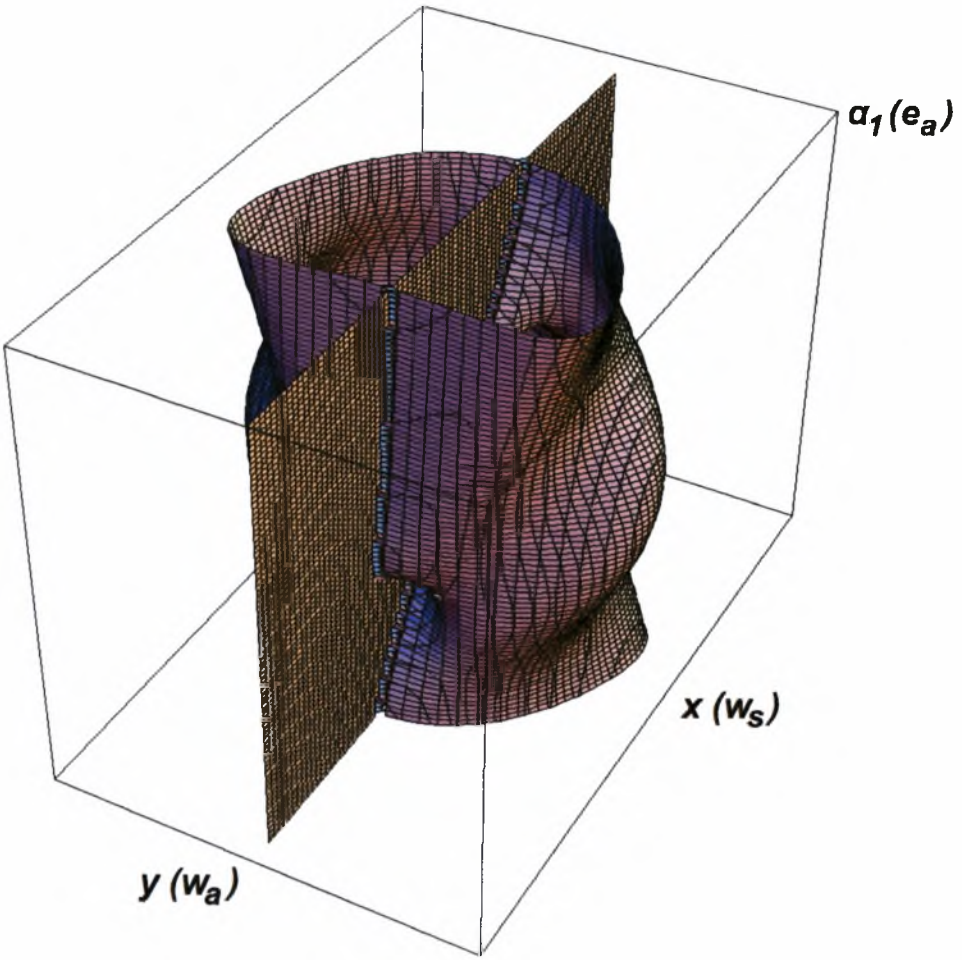
(η) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 7*

Σχήμα Β1.37 (συνεχίζεται)

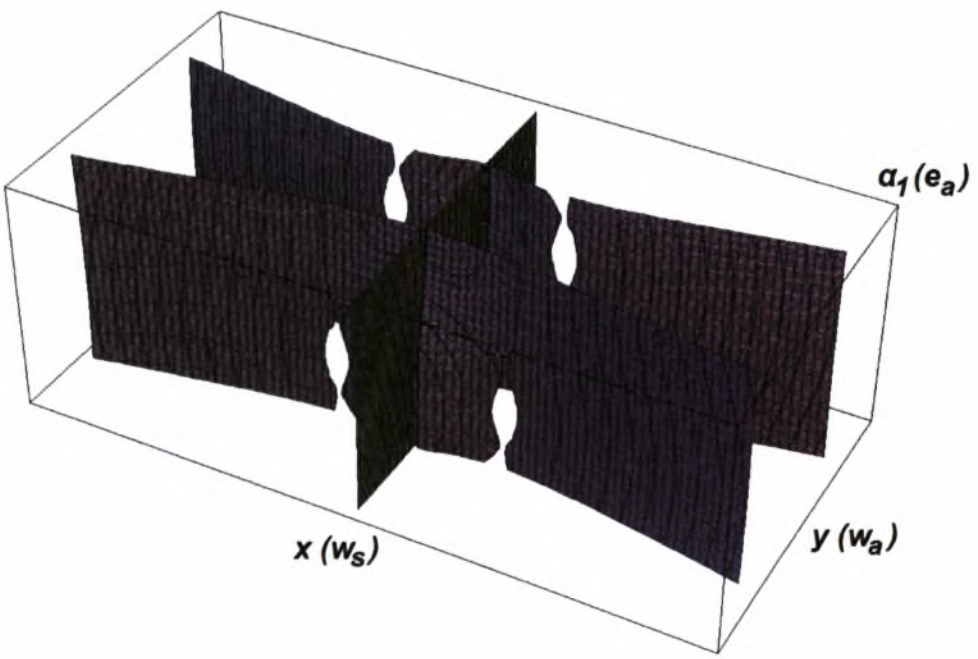


(θ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 8*

Σχήμα Β1.37. Πλήρης επιφάνεια διακλαδικού συνόλου (του σχήματος Β1.34γ) υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

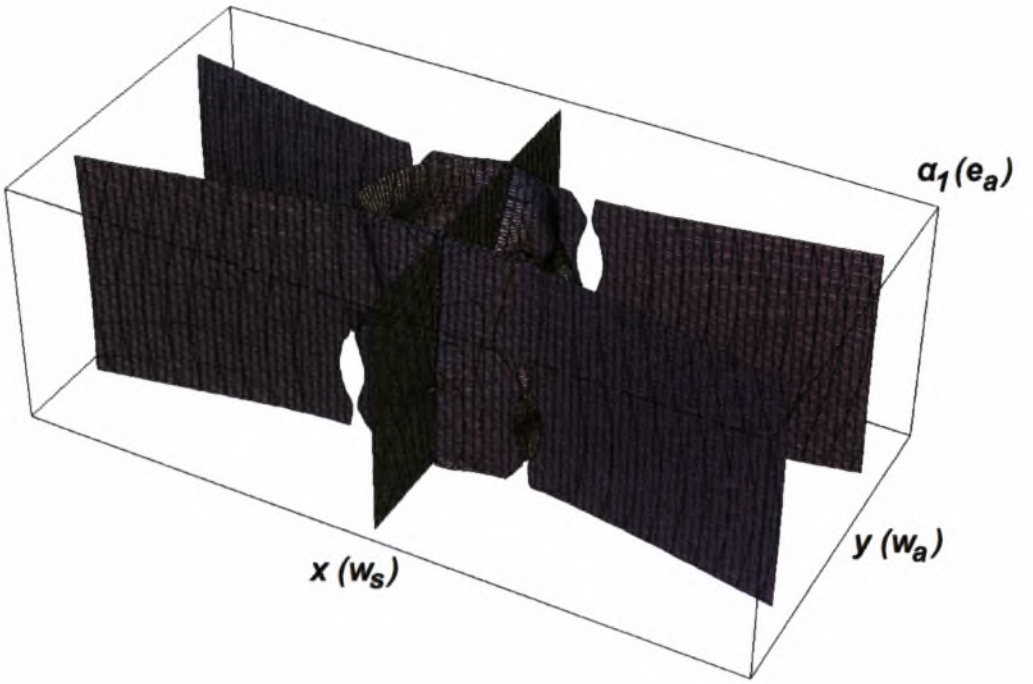


(α) *Πρώτη επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*



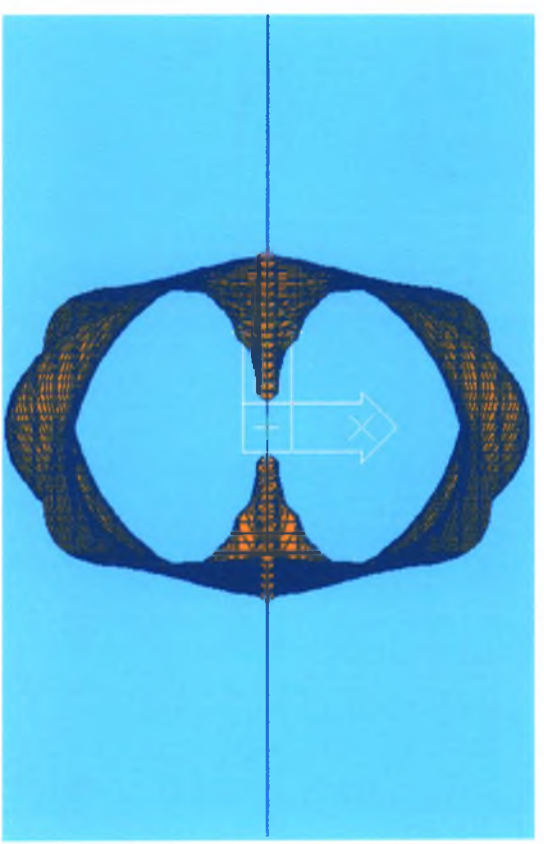
(β) *Δεύτερη επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*

Σχήμα Β1.38 (συνεχίζεται)



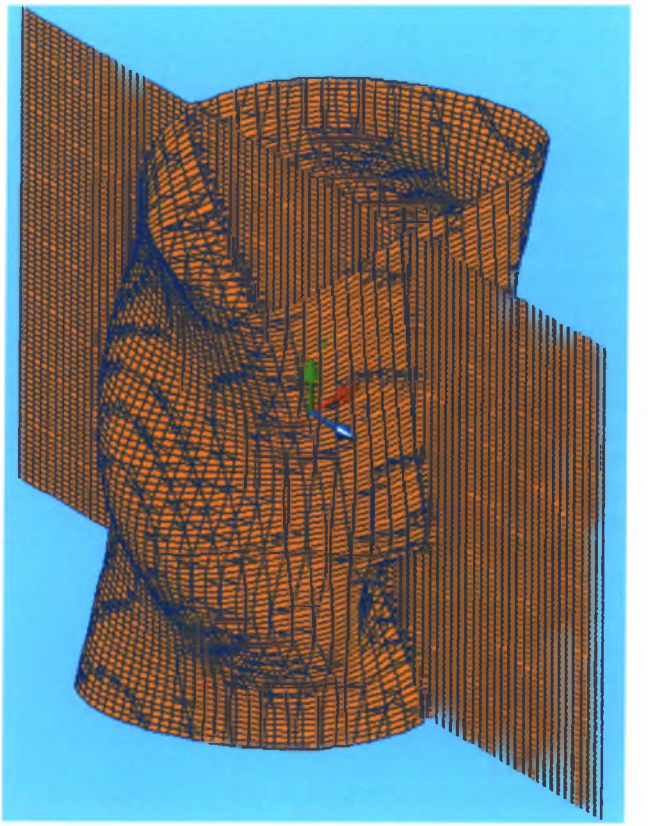
(γ) *Πλήρης επιφάνεια διακλαδικού συνόλου*

Σχήμα Β1.38. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του μερικά αρχικά ατελούς συστήματος με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια.

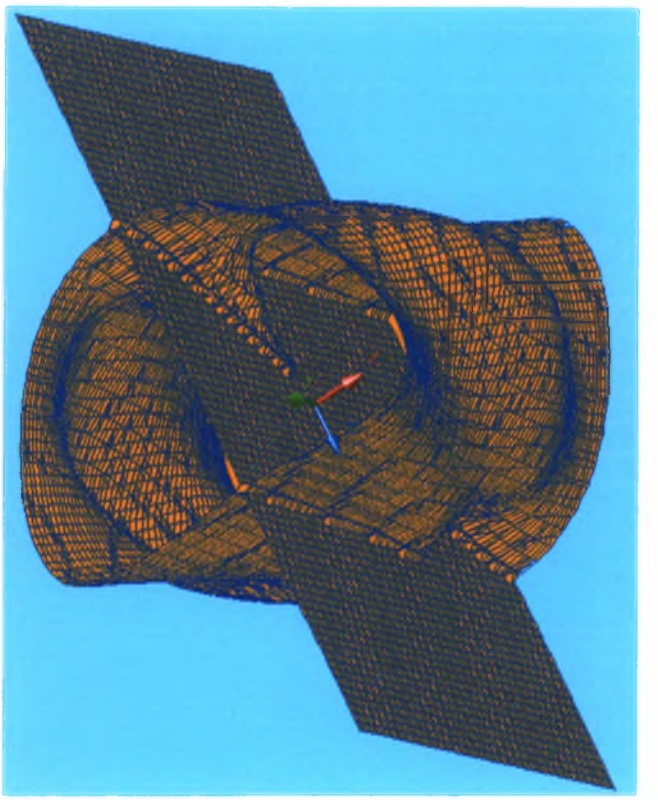


(α) *Κάτοψη*

Σχήμα Β1.39 (συνεχίζεται)

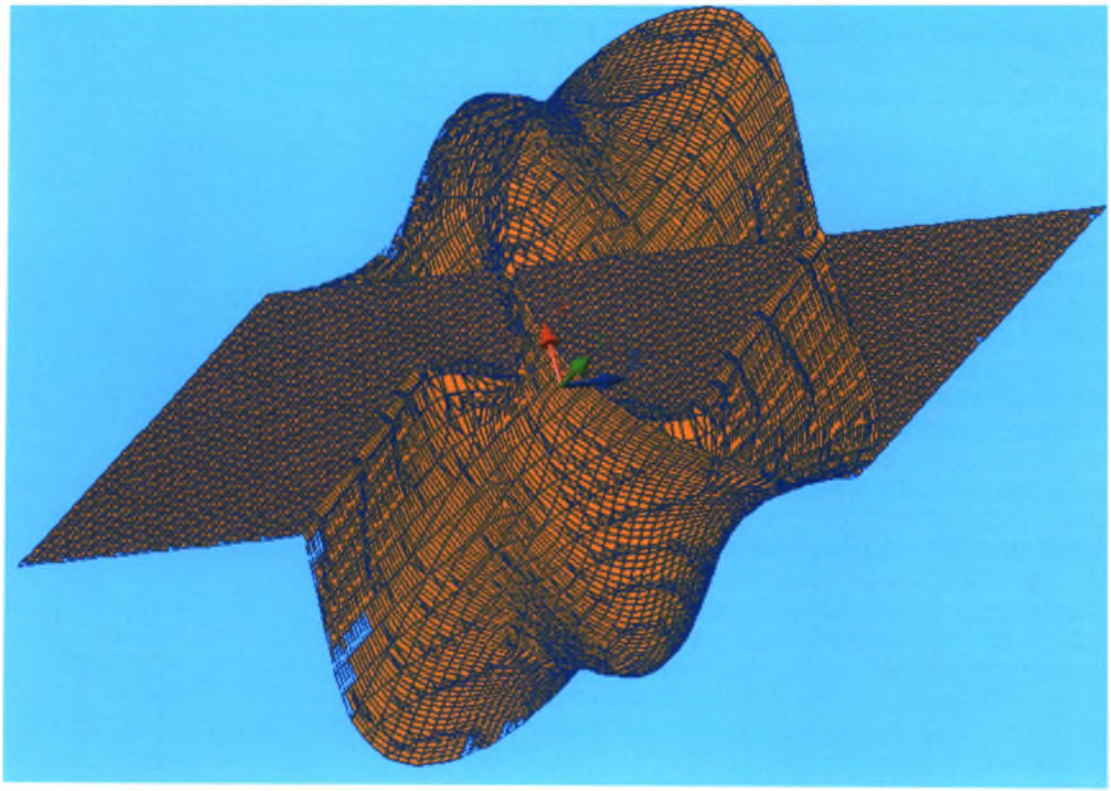


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

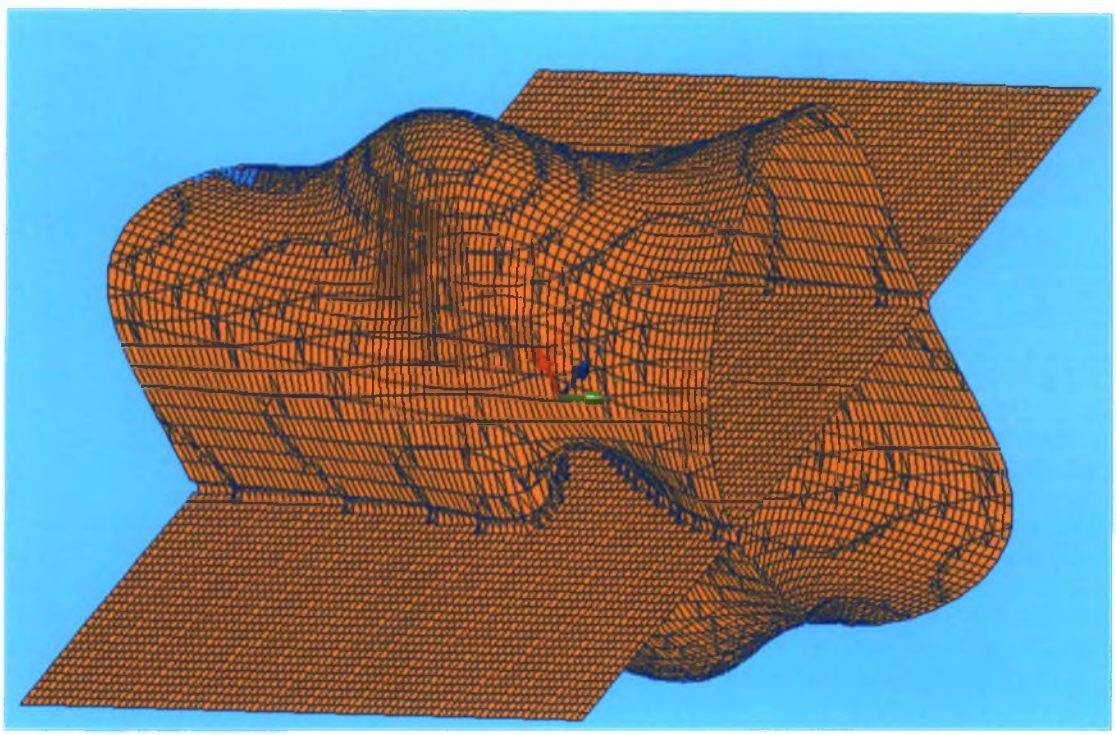


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.39 (συνεχίζεται)

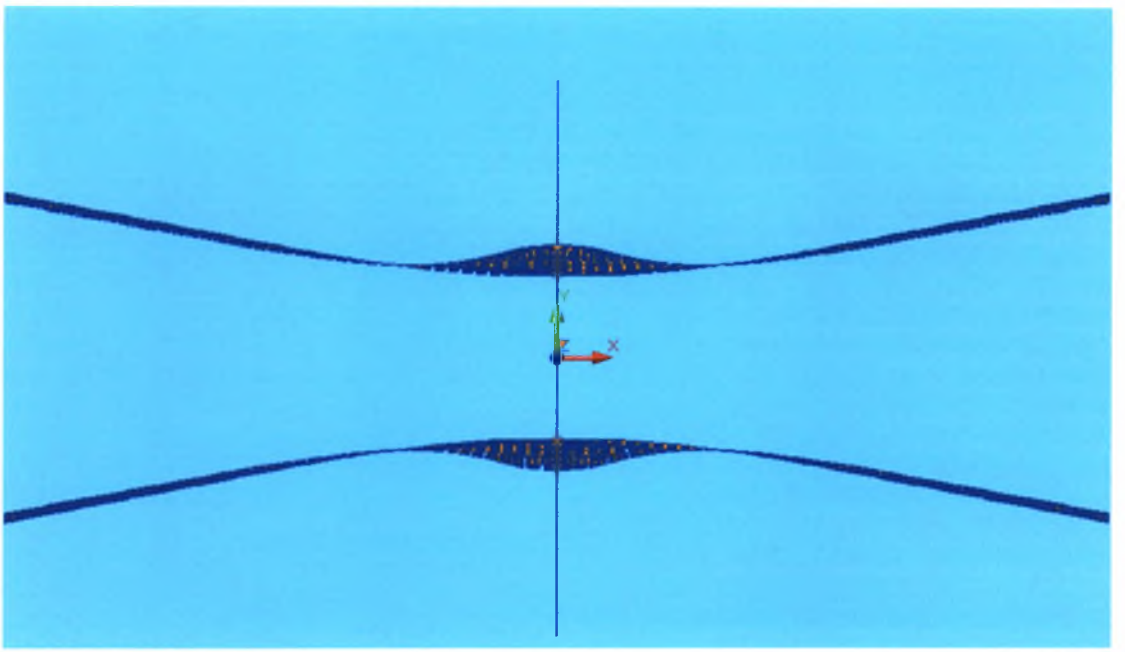


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

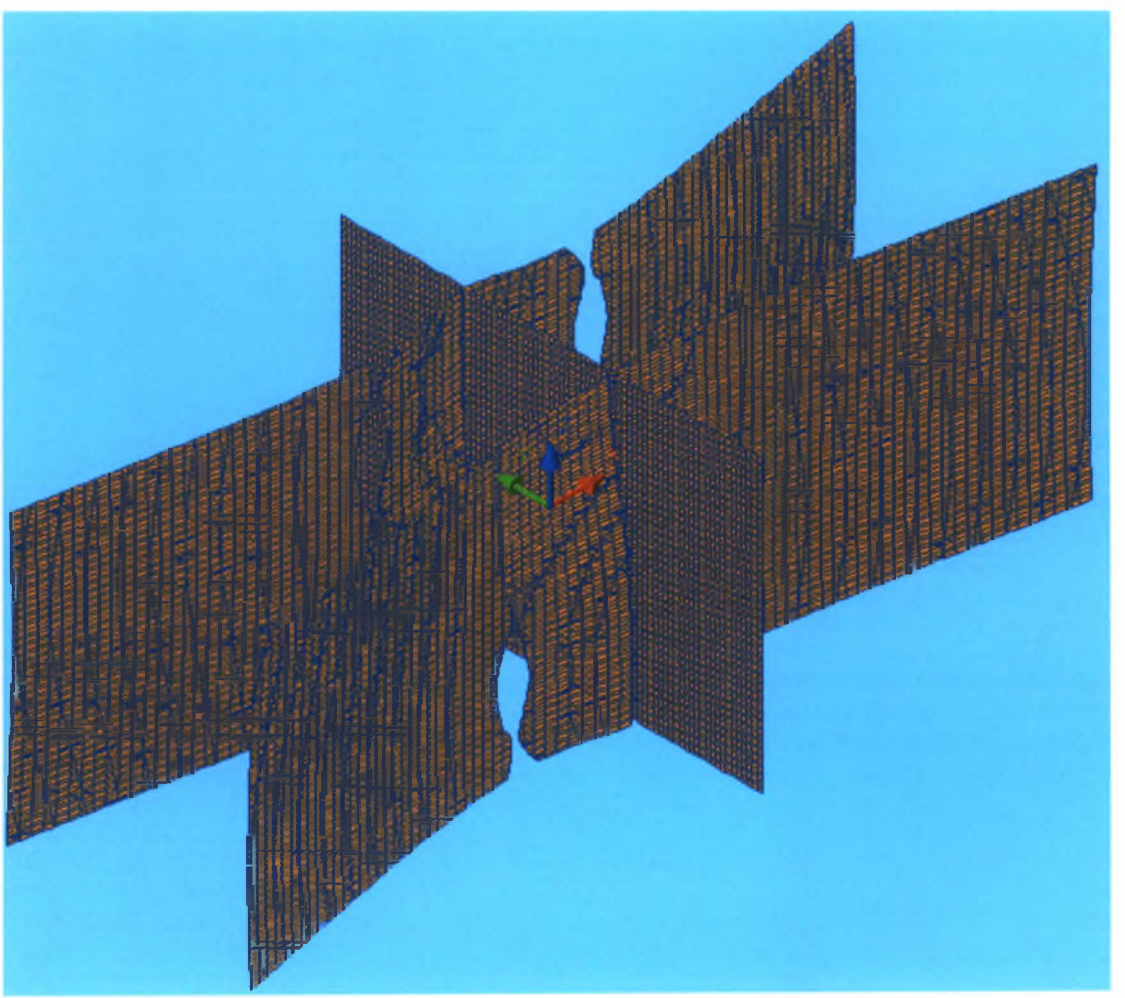


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.39. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του σχήματος Β1.38α υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

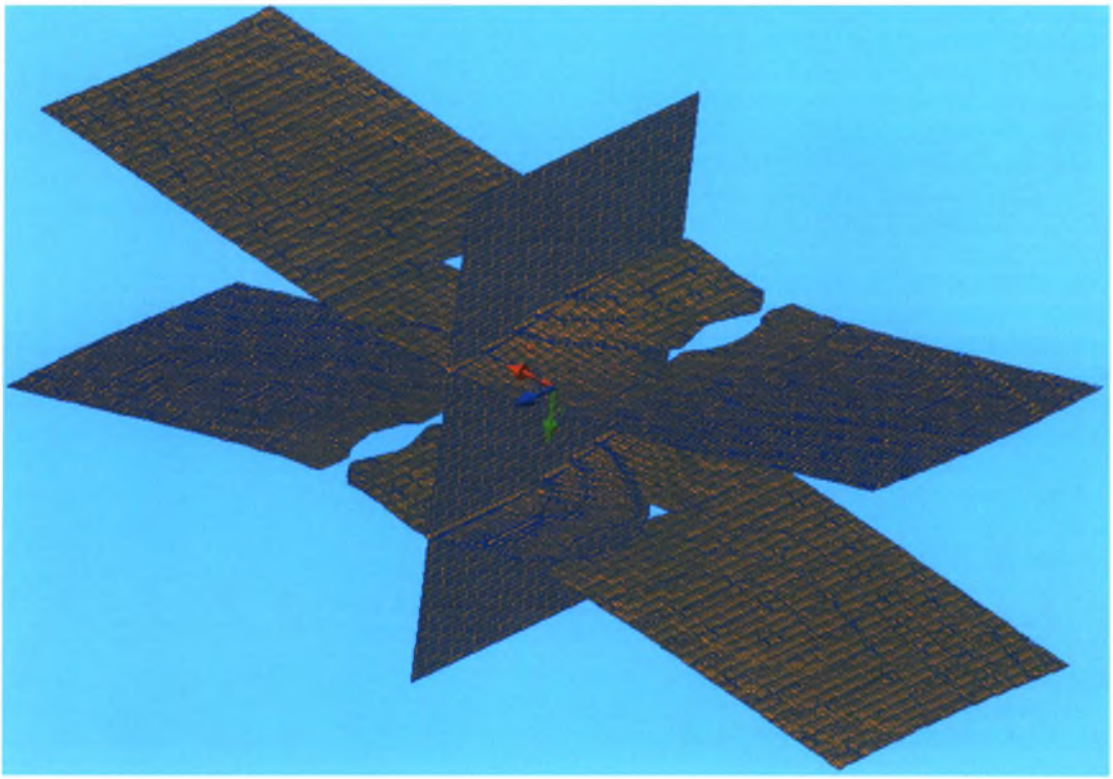


(α) *Κάτοψη*

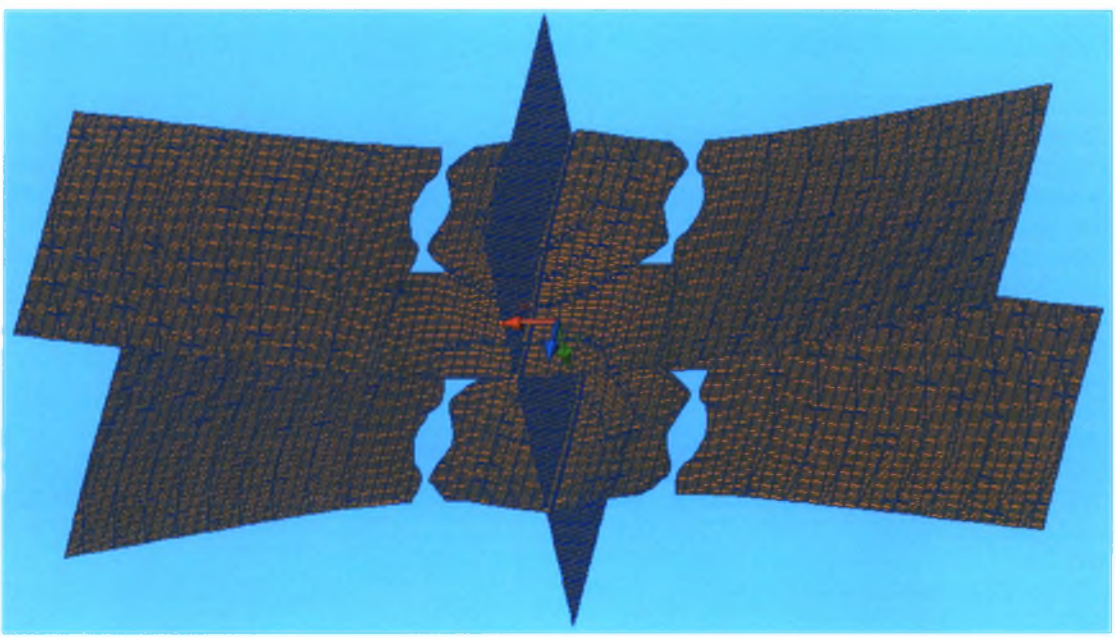


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

Σχήμα Β1.40 (συνεχίζεται)

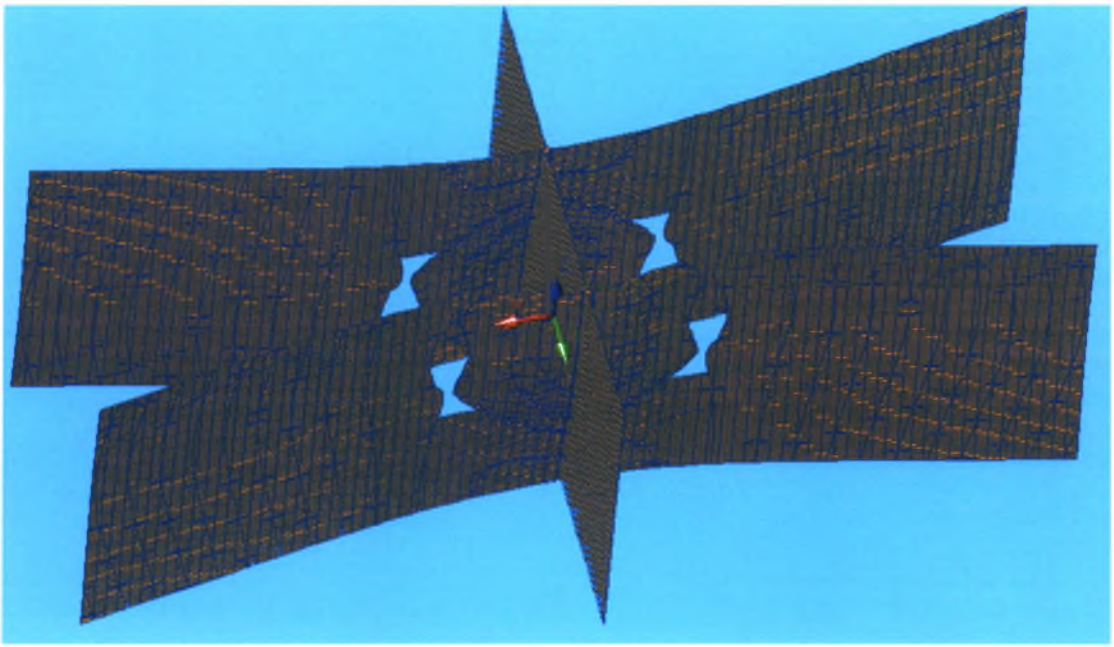


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



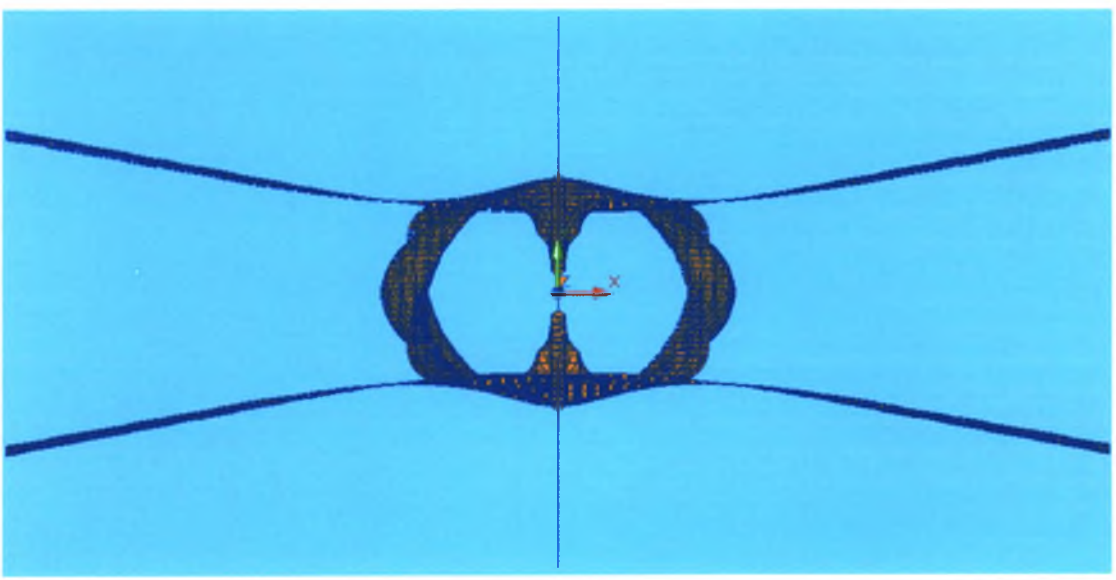
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.40 (συνεχίζεται)



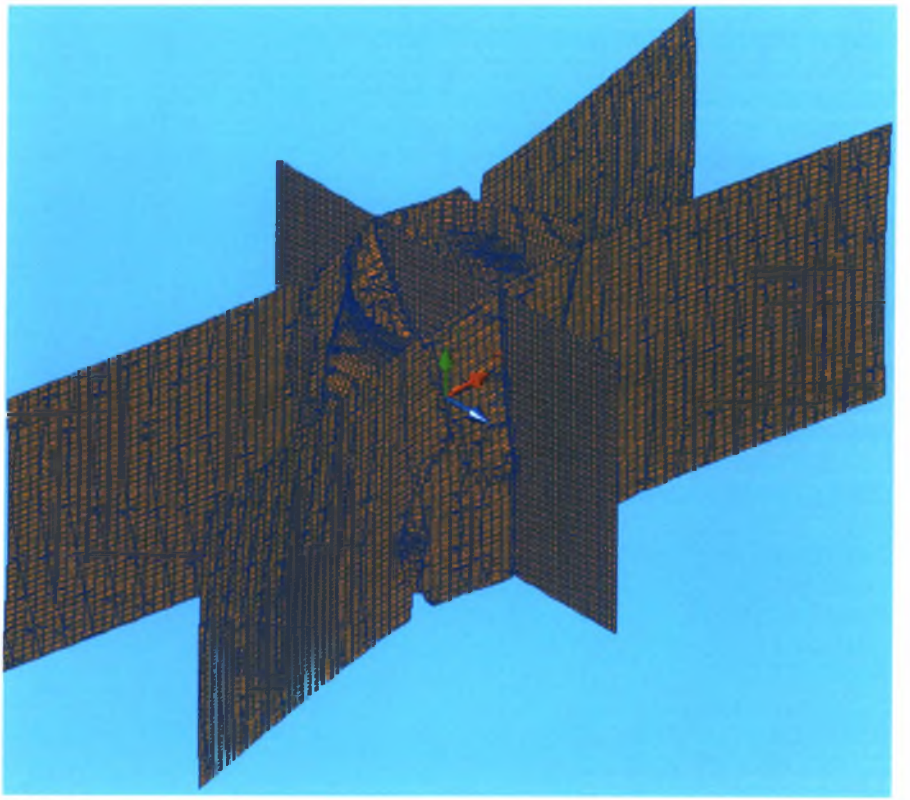
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.40. Επιφάνεια διακλαδικού συνόλου του σχήματος Β1.38β υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

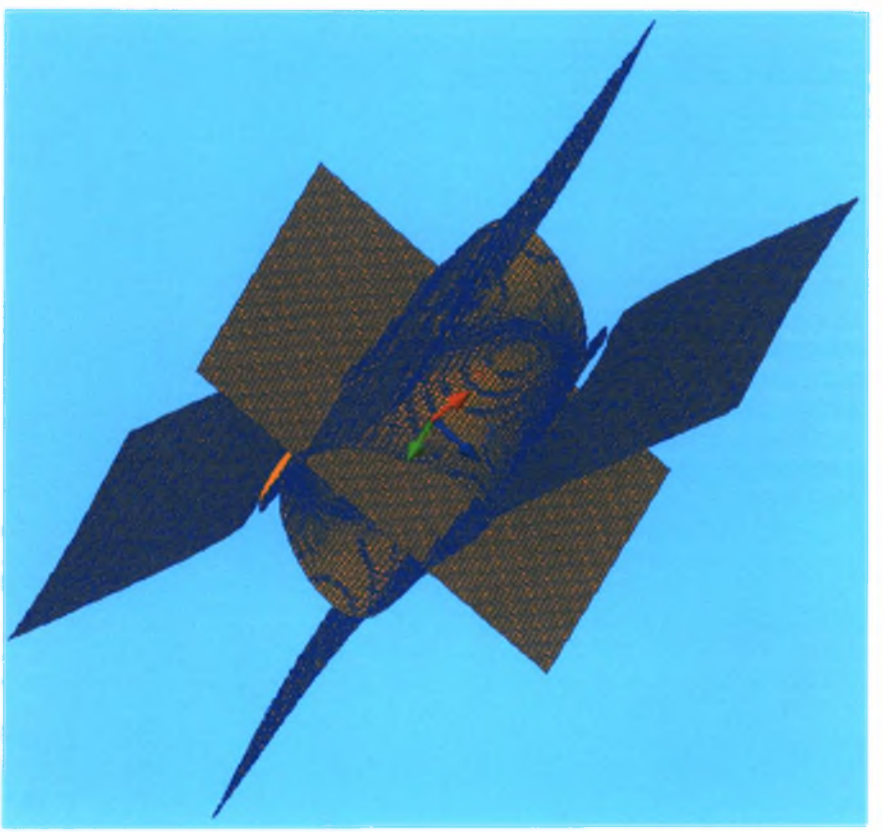


(α) *Κάτοψη*

Σχήμα Β1.41 (συνεχίζεται)

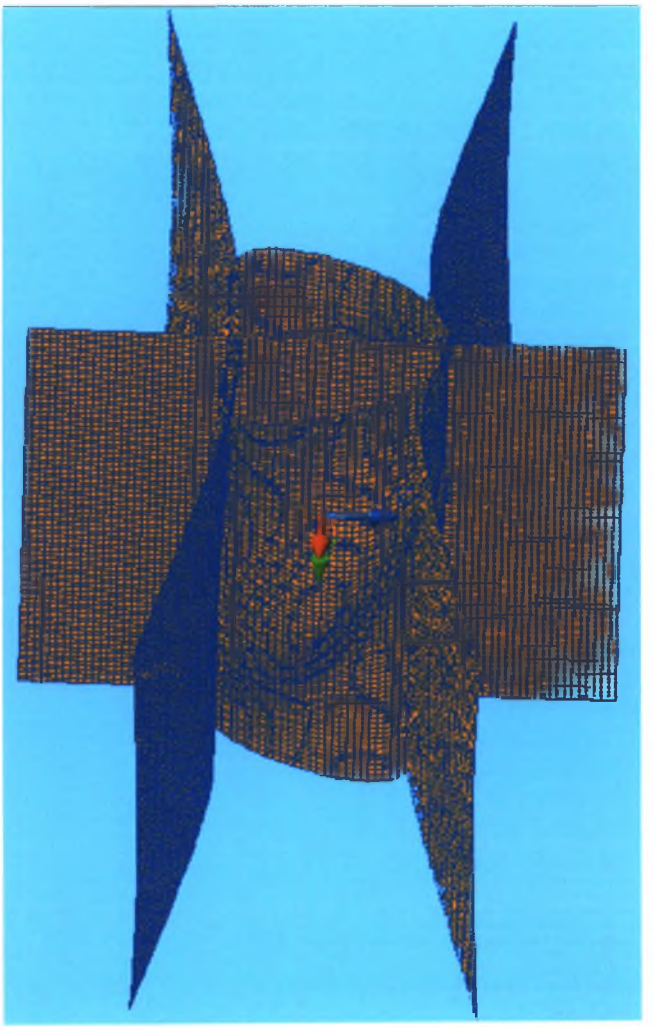


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1*

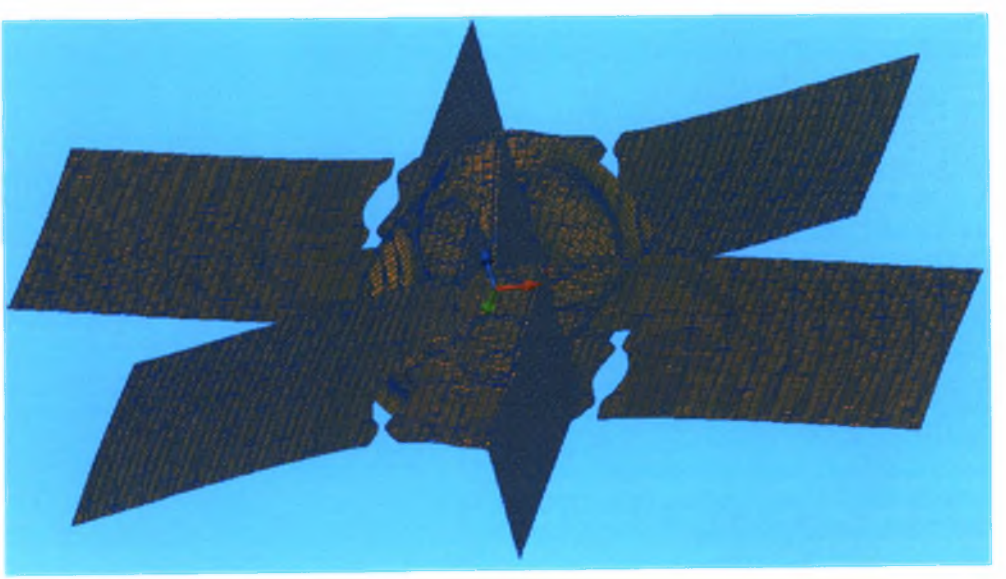


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.41 (συνεχίζεται)



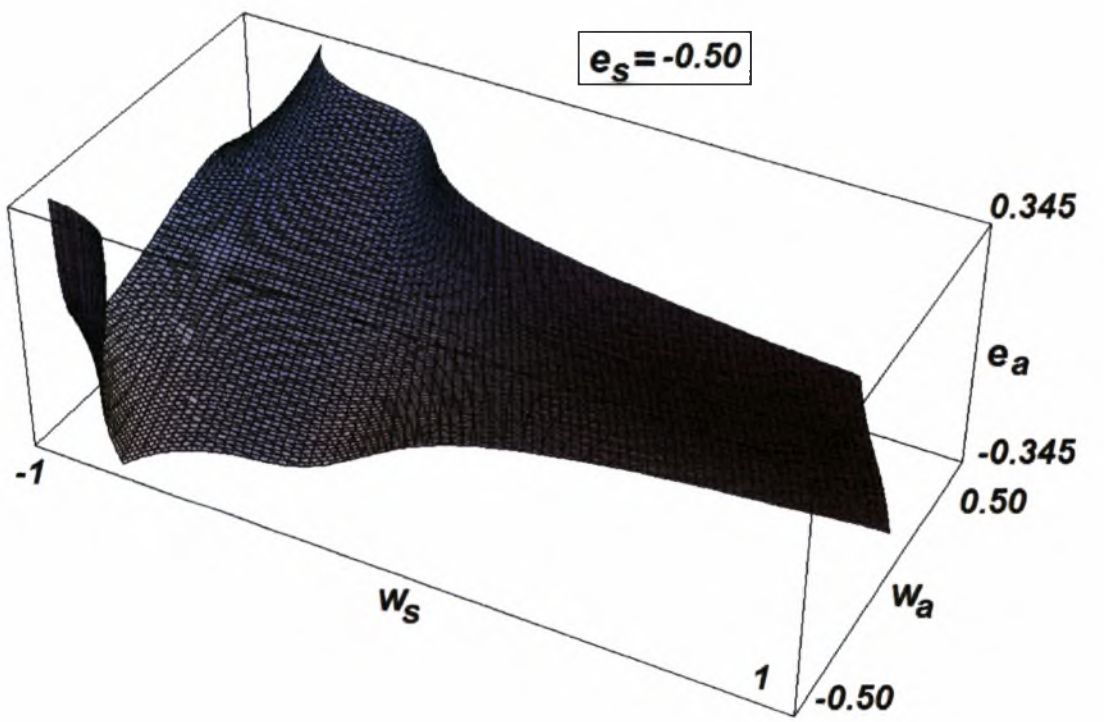
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

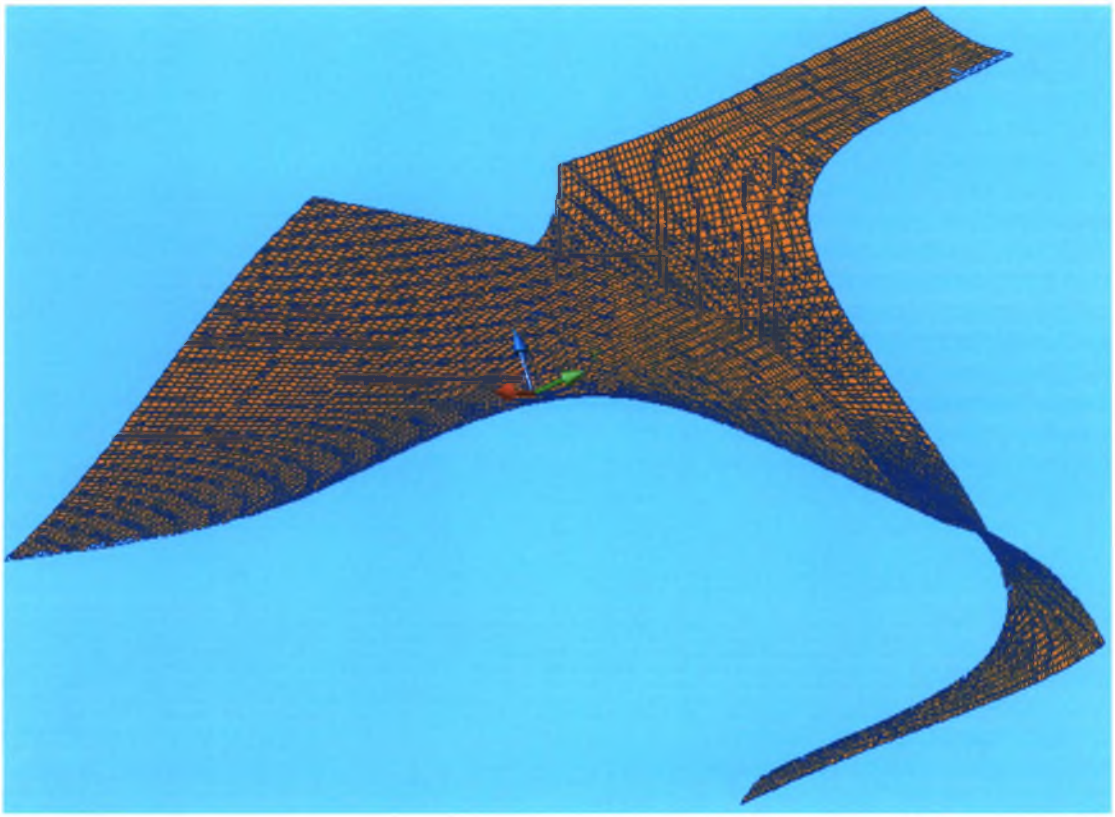
Σχήμα Β1.41. Πλήρης επιφάνεια διακλαδικού συνόλου (του σχήματος Β1.38γ) υπό μορφή τρισδιάστατης απεικόνισης πλέγματος με απόκρυψη μη ορατών γραμμών.

Το πολλαπλό καταστροφής του *πλήρως ατελούς* συστήματος, οριζόμενο από τις σχέσεις (Β1.41α,β), που ουσιαστικά είναι της μορφής $M_i(x,y,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=0,\quad i=1,2$, αποτελεί ***υπερεπιφάνεια*** στον ***τετραδιάστατο χώρο***, οπότε ***μόνο προβολές*** αυτής σε κάποιο ***χώρο τριών διαστάσεων*** είναι δυνατόν να απεικονιστούν. Σε συνδυασμό δε με το γεγονός αδυναμίας απαλοιφής μιας εκ των μεταβλητών $x(w_s)$, $y(w_a)$, $\alpha_1(e_s)$ ή $\alpha_2(e_\alpha)$ από τις ανωτέρω σχέσεις (λόγω πολυπλοκότητας αυτών), υφίσταται εκ των πραγμάτων ως μοναδική δυνατότητα αυτή της απεικόνισης προβολών του πολλαπλού αυτού *είτε στο χώρο* $(x,y,a_1)\Leftrightarrow(w_s,w_a,e_s)$, *είτε στο χώρο* $(x,y,a_2)\Leftrightarrow(w_s,w_a,e_\alpha)$ για διάφορες τιμές των α_2 ή α_1 αντίστοιχα. Τούτο επιτυγχάνεται μέσω απαλοιφής της παραμέτρου ελέγχου του φορτίου $\alpha_0(\lambda)$, κατόπιν δε - σύμφωνα με τα περιεχόμενα των προγραμμάτων *MBsgeneral.nb*, *mg.nb*, *mga.nb* και *mgb.nb* του Παραρτήματος - αποκτώνται τρισδιάστατες προβολές του εν λόγω πολλαπλού, οι οποίες αναπαρίστανται γραφικά στα Σχήματα Β1.42-Β1.63 και Β1.64-Β1.79.

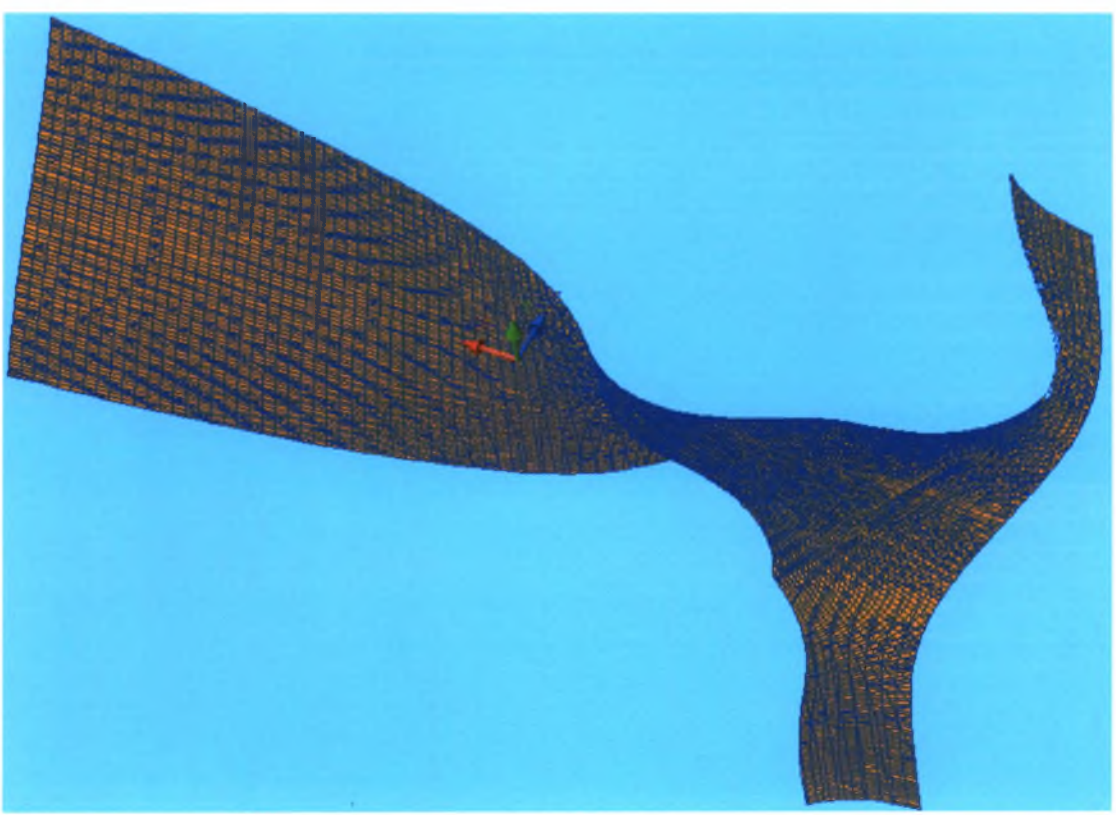


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.42 (συνεχίζεται)

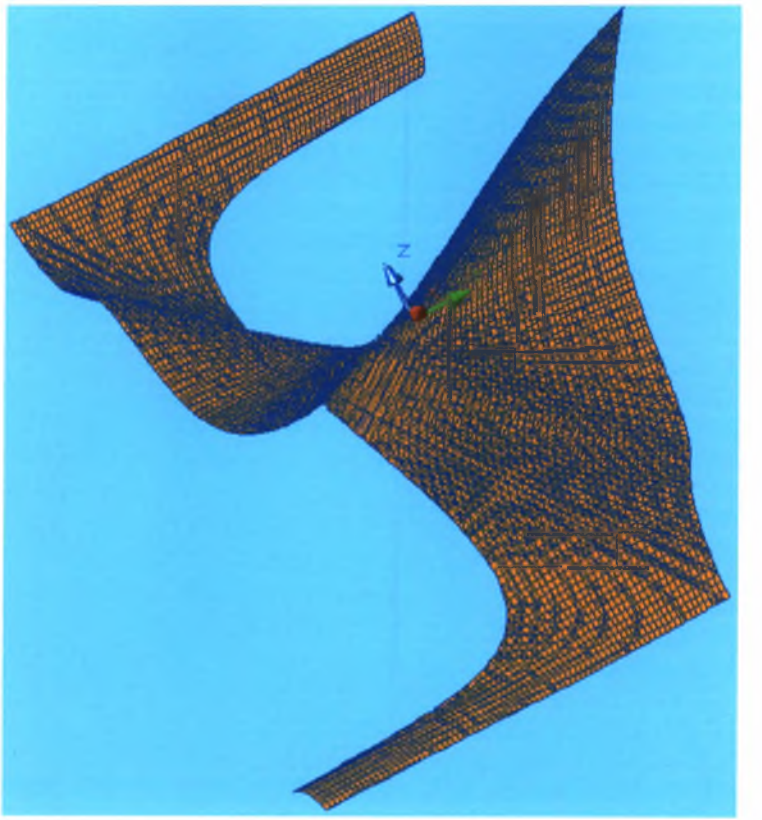


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1 (συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

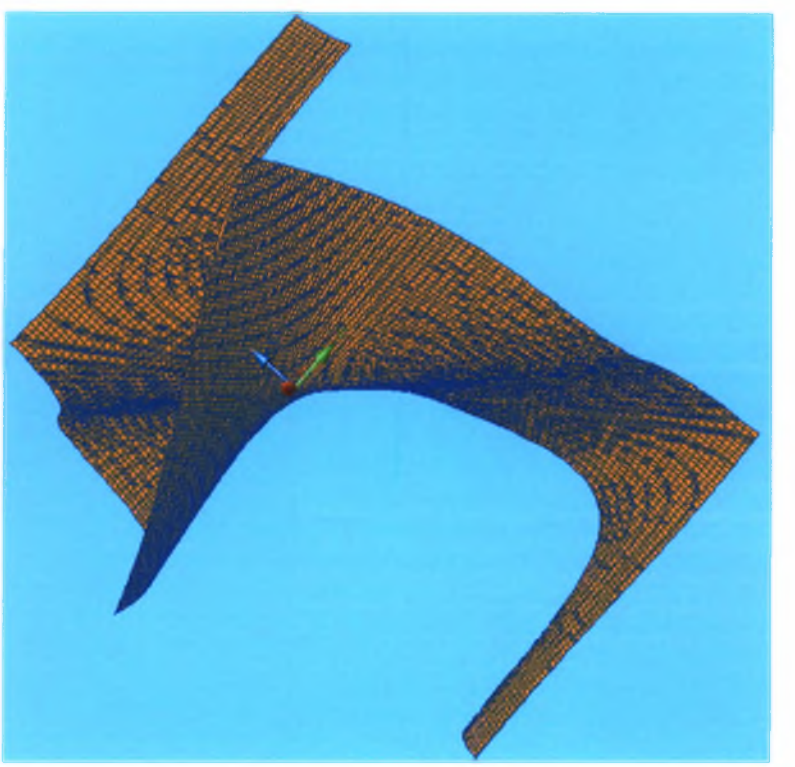


(γ)) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.42 (συνεχίζεται)

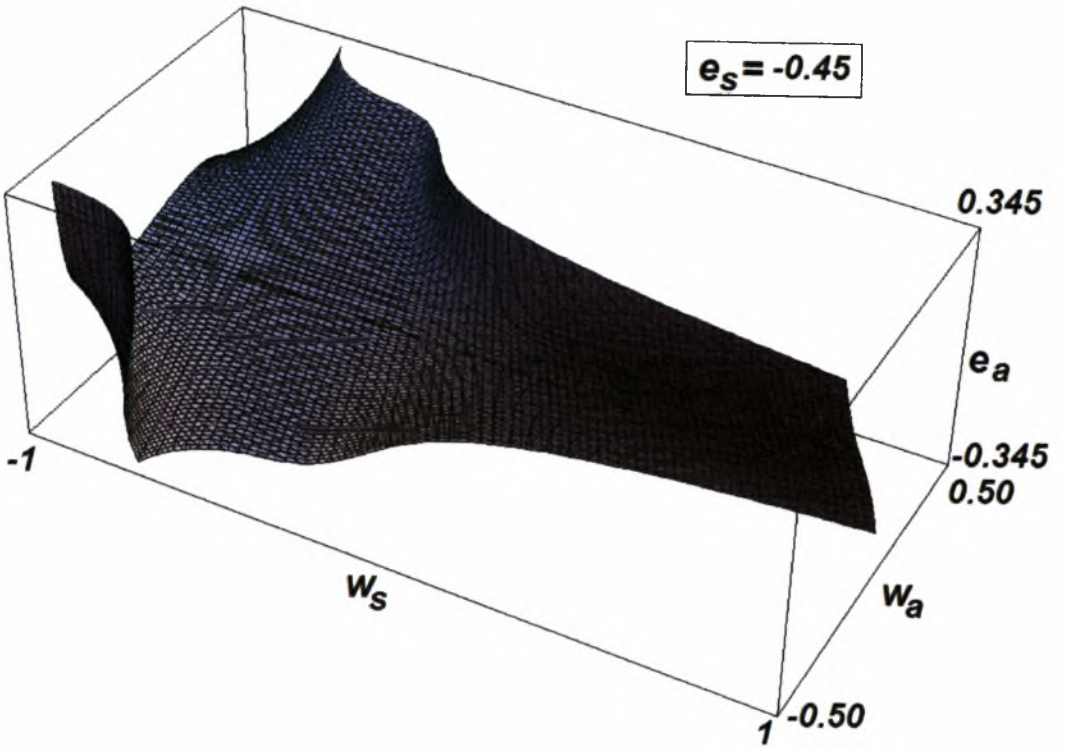


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

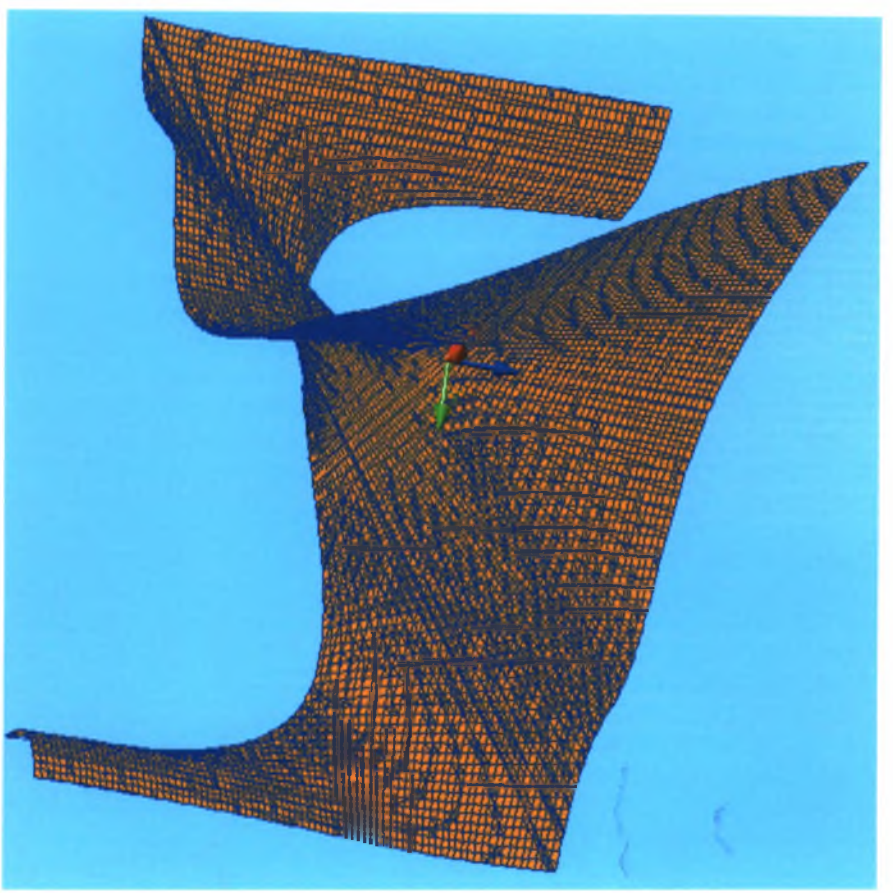


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.42. Προβολή του πολλαπλού καταστροφής του πλήρως ατελούς συστήματος στο χώρο $[w_s, w_a, e_a]$ για $e_s = -0.50$.

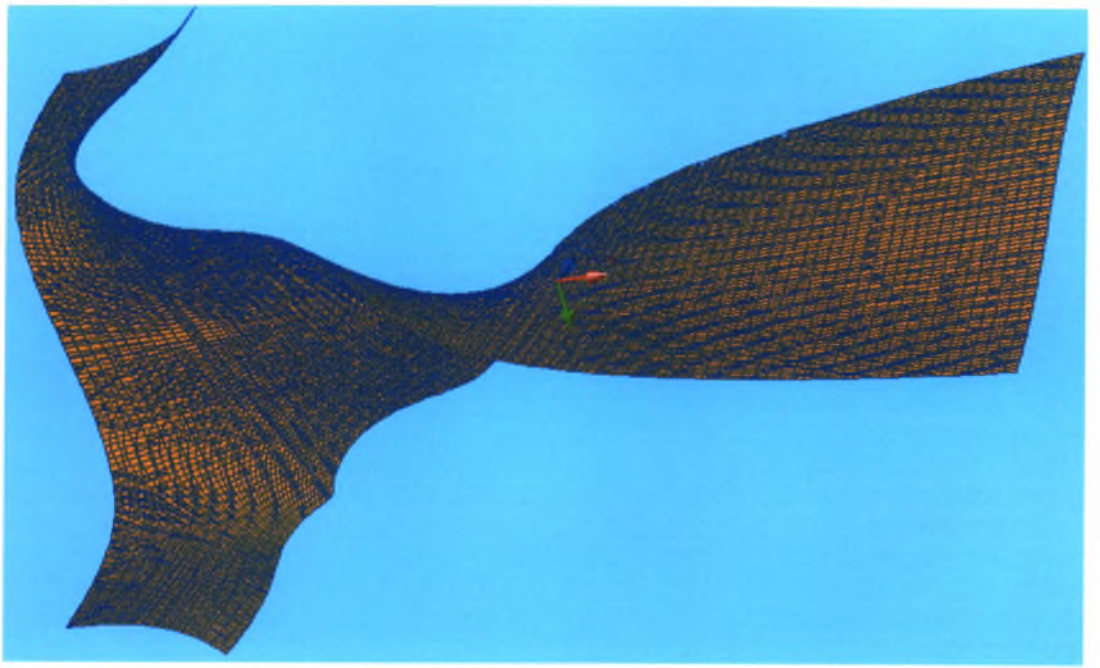


(α) *Προϊόν του Mathematica*

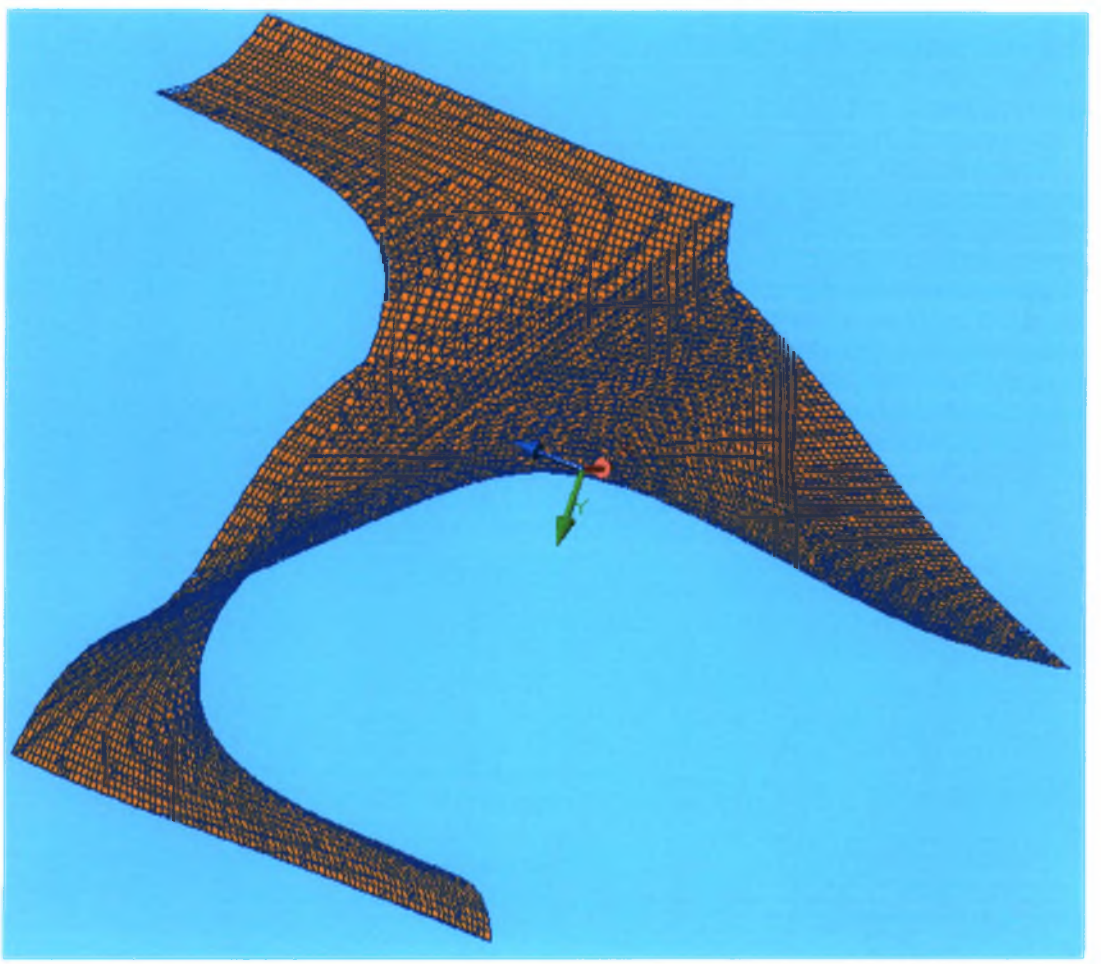


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.43 (συνεχίζεται)

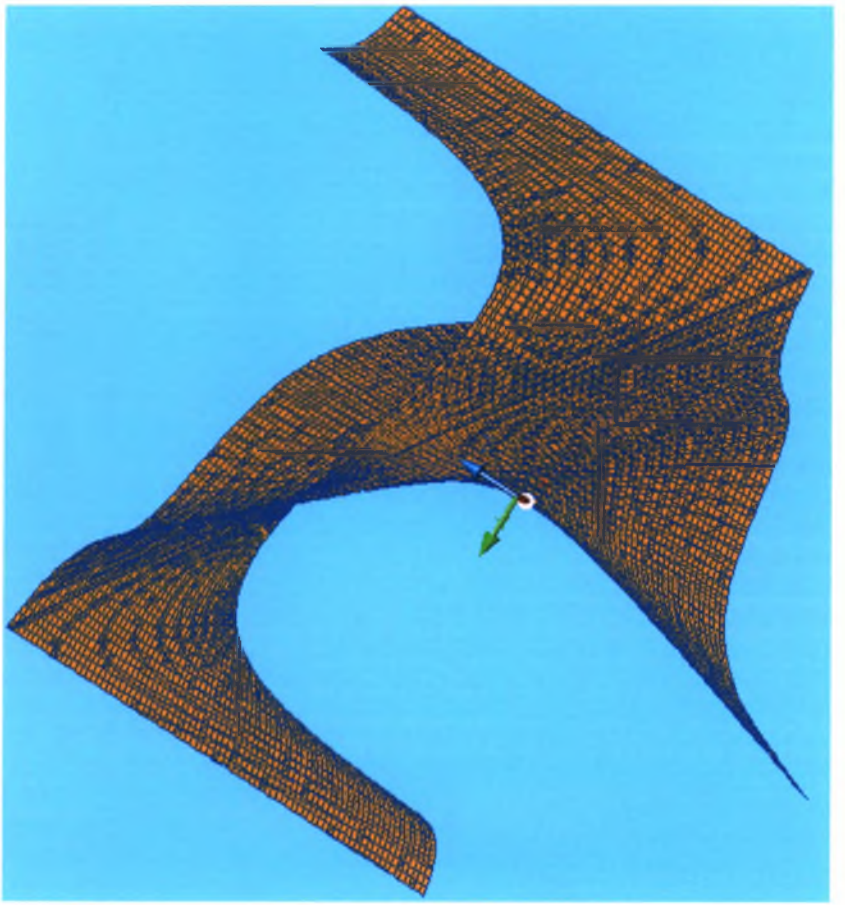


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



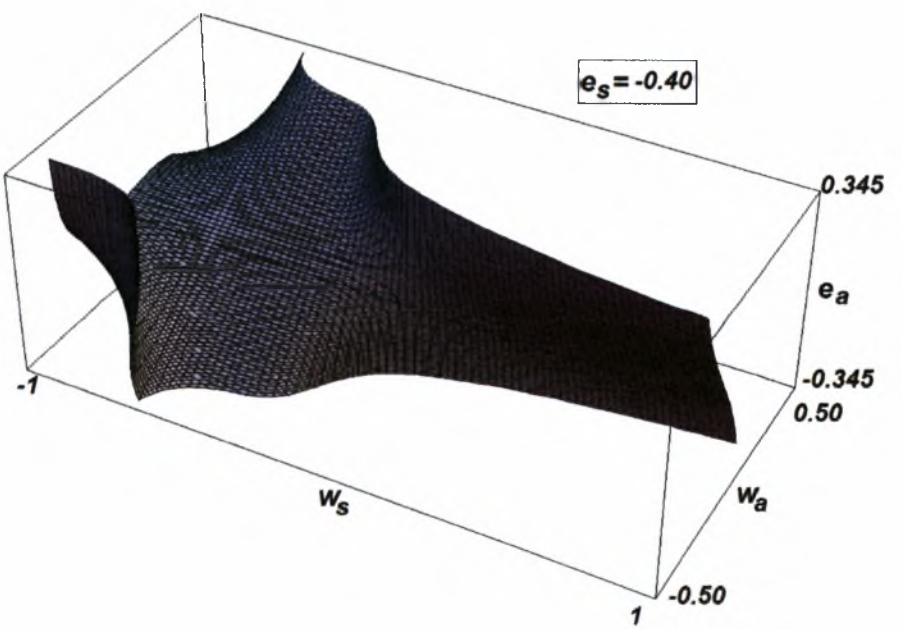
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.43 (συνεχίζεται)



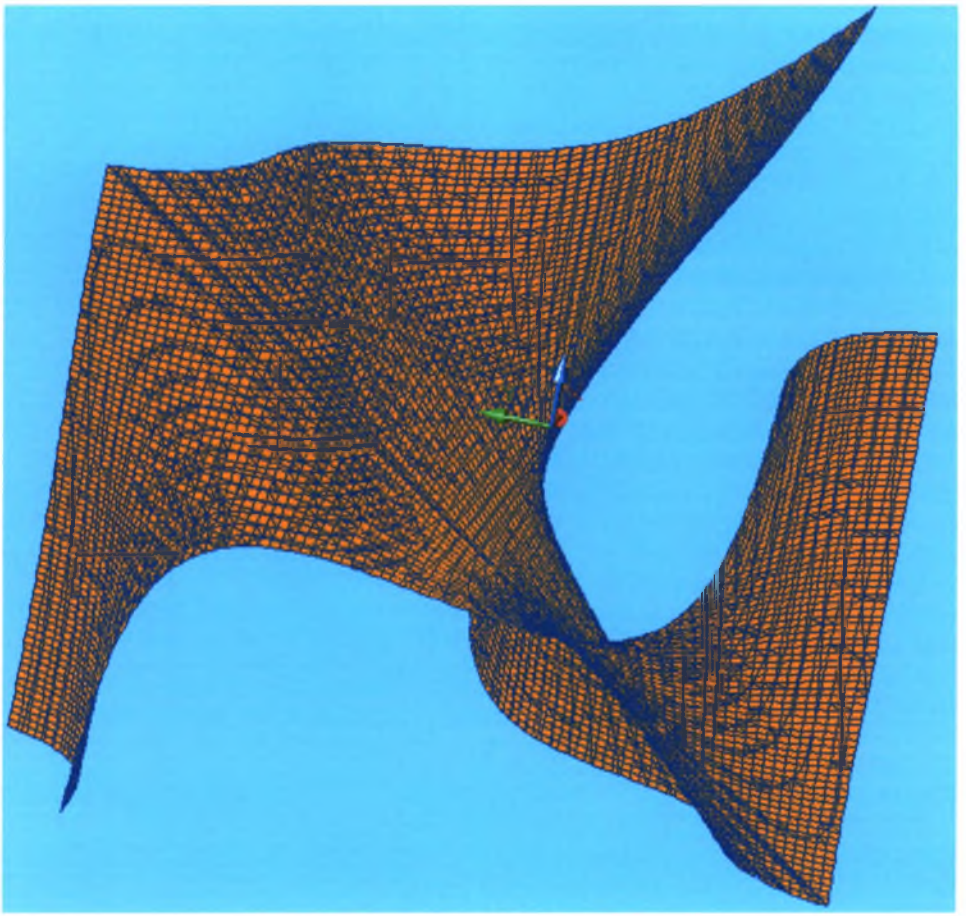
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.43. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.45*.

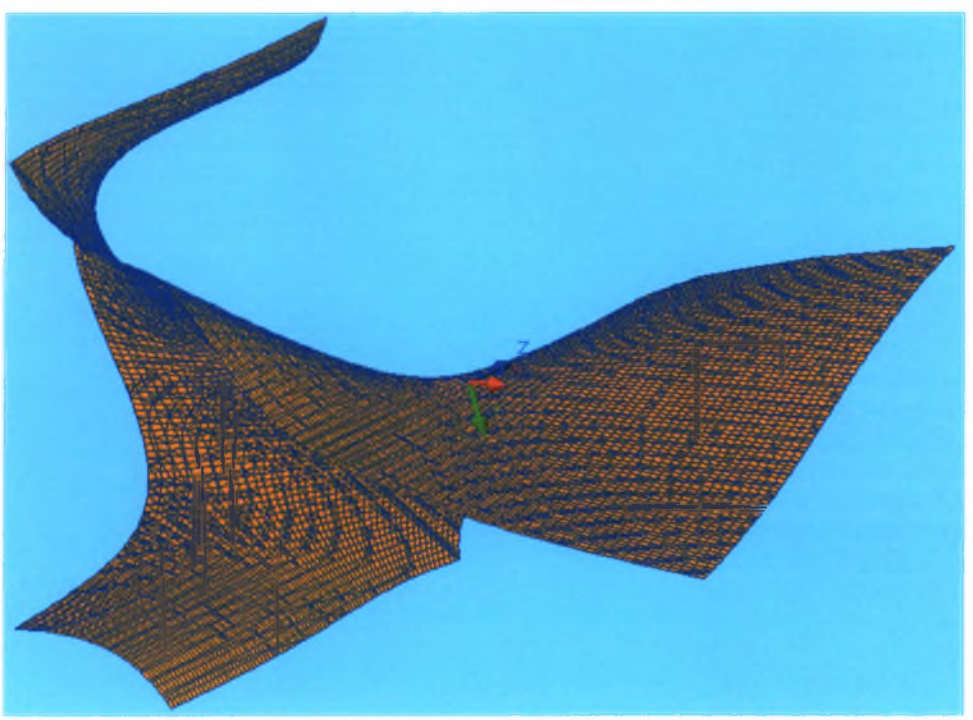


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.44 (συνεχίζεται)

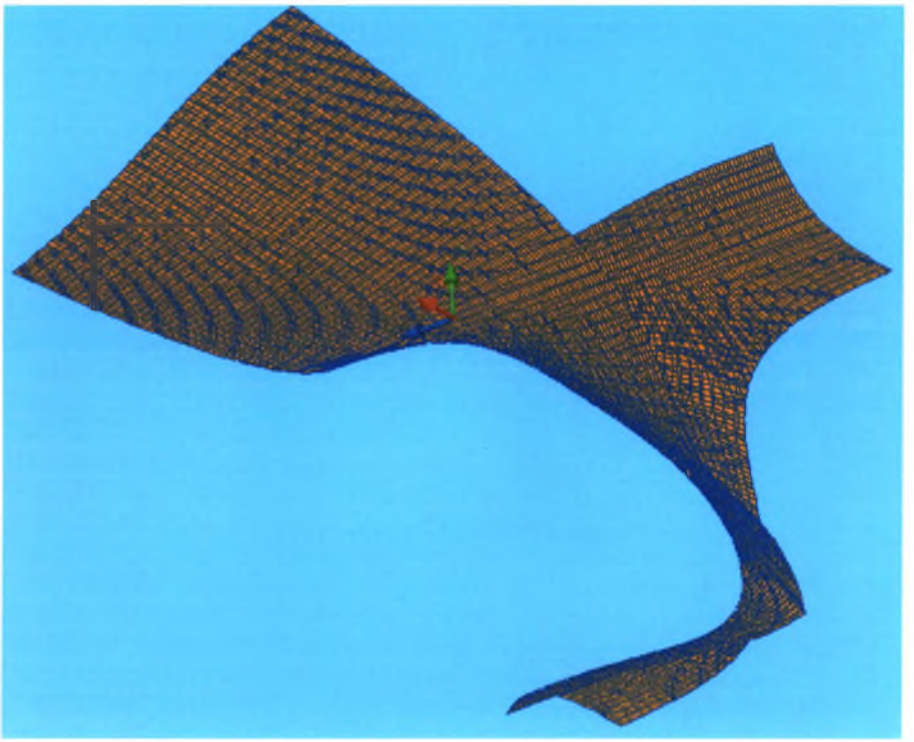


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

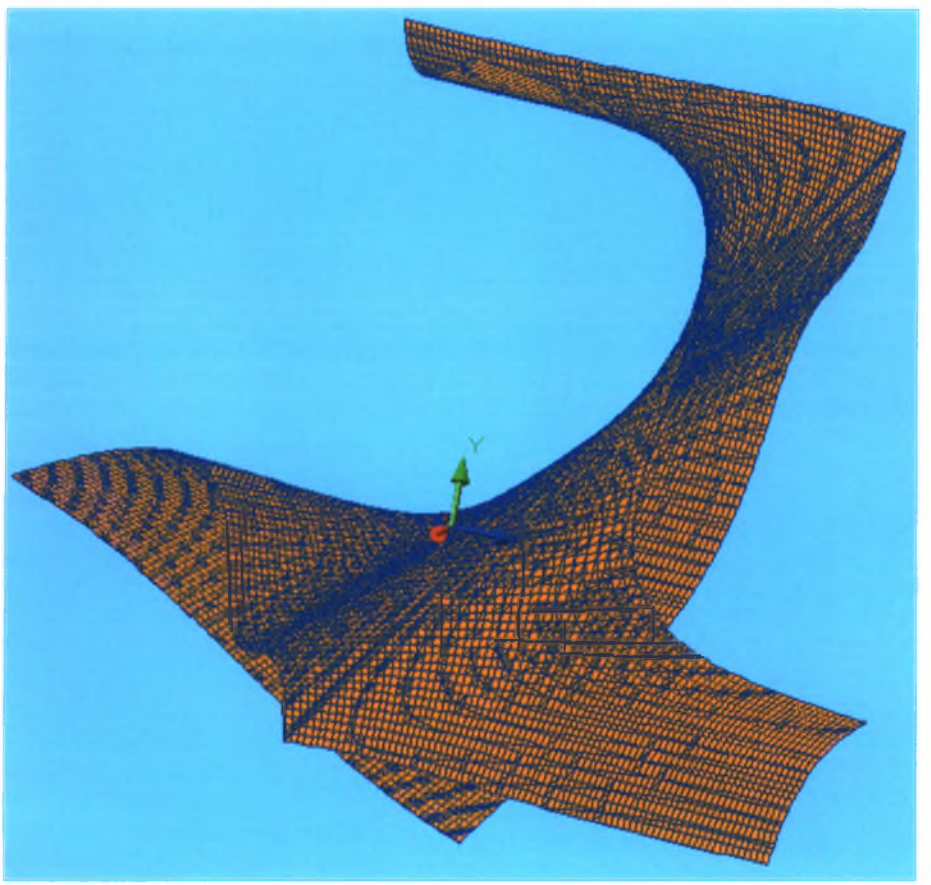


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.44 (συνεχίζεται)

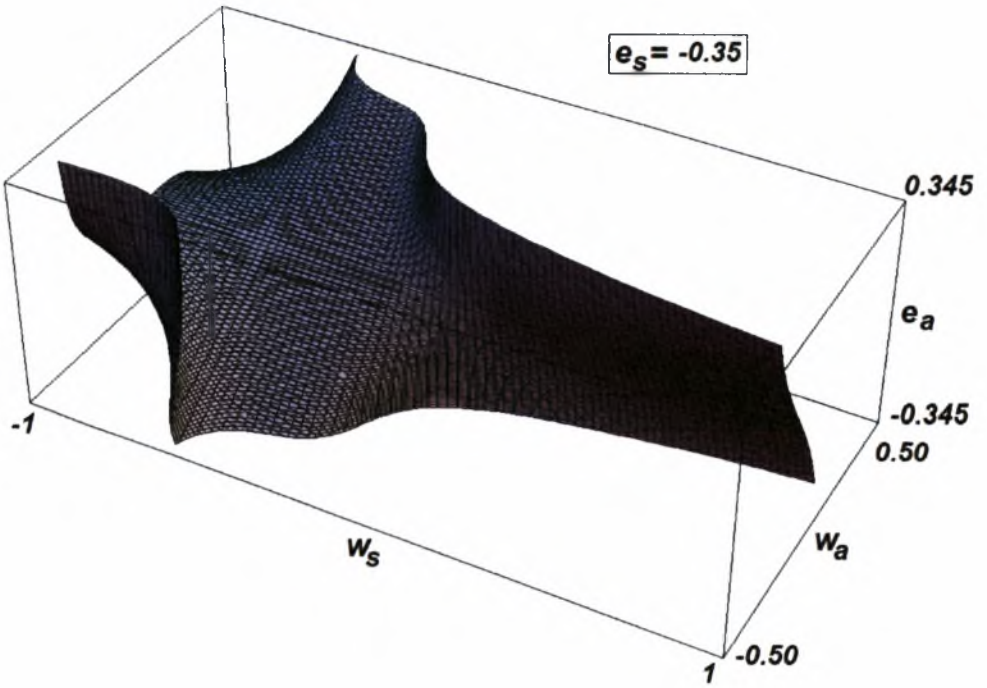


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

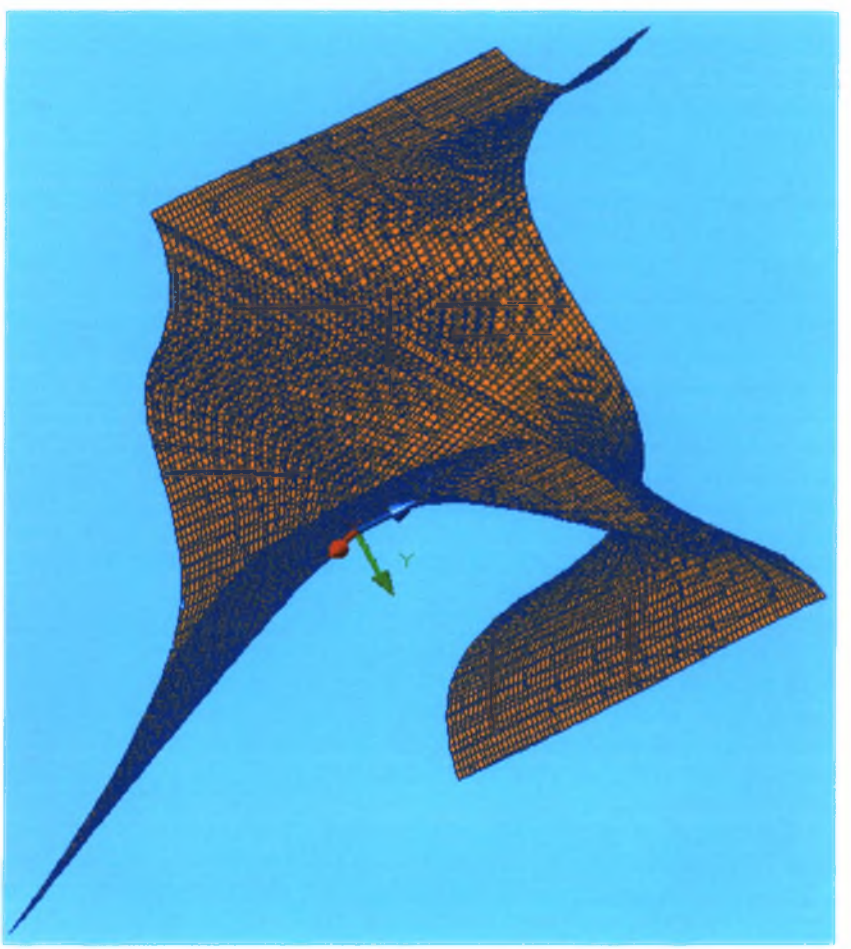


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.44. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.40*.



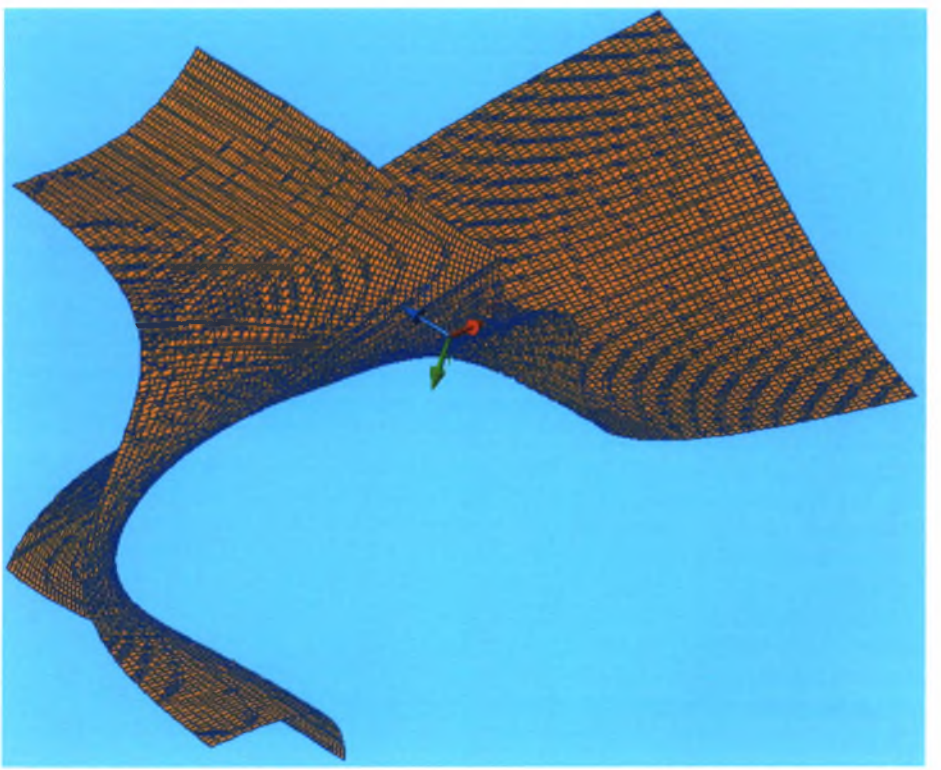
(α) *Προϊόν του Mathematica*



(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

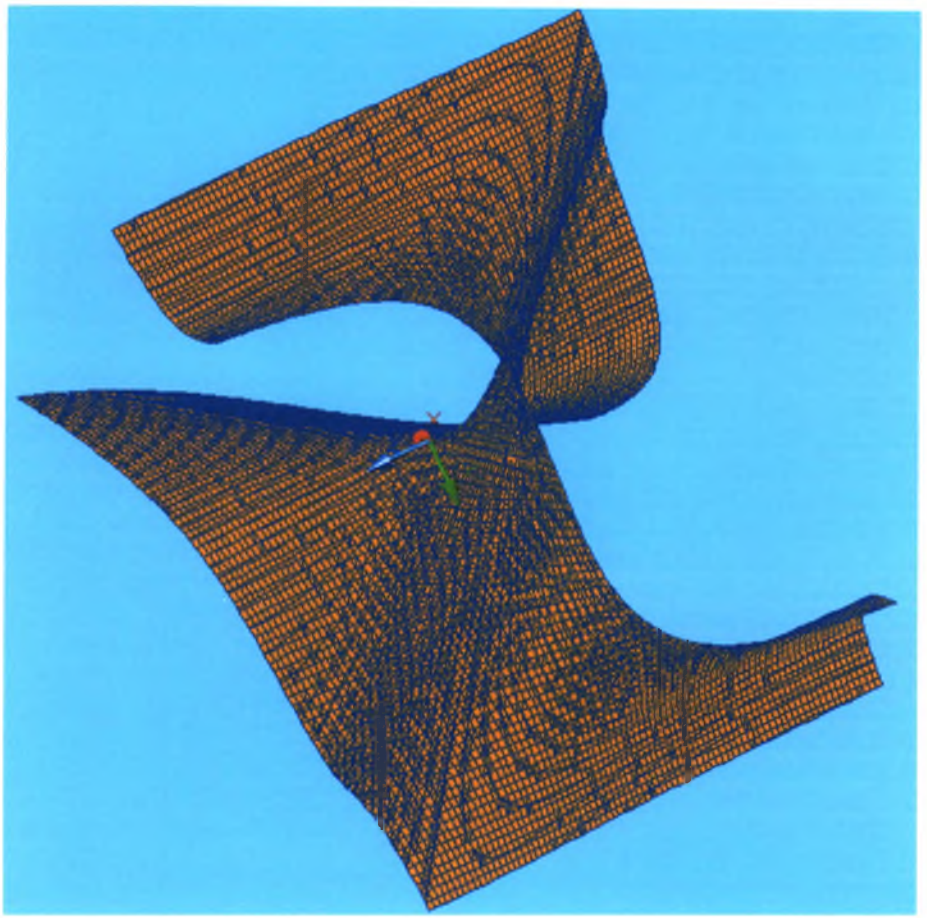
Σχήμα Β1.45 (συνεχίζεται)

(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



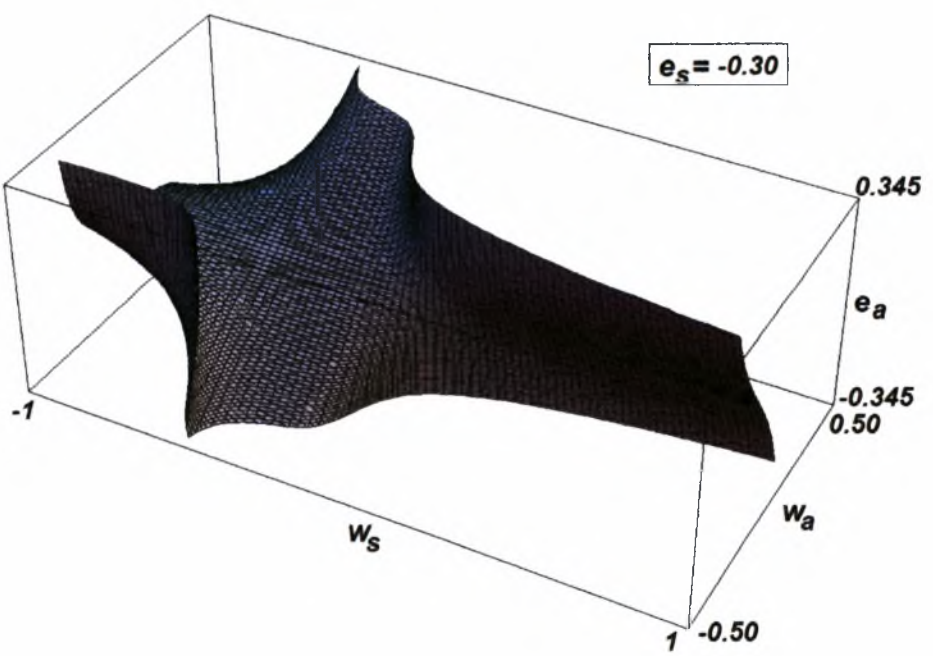
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.45 (συνεχίζεται)



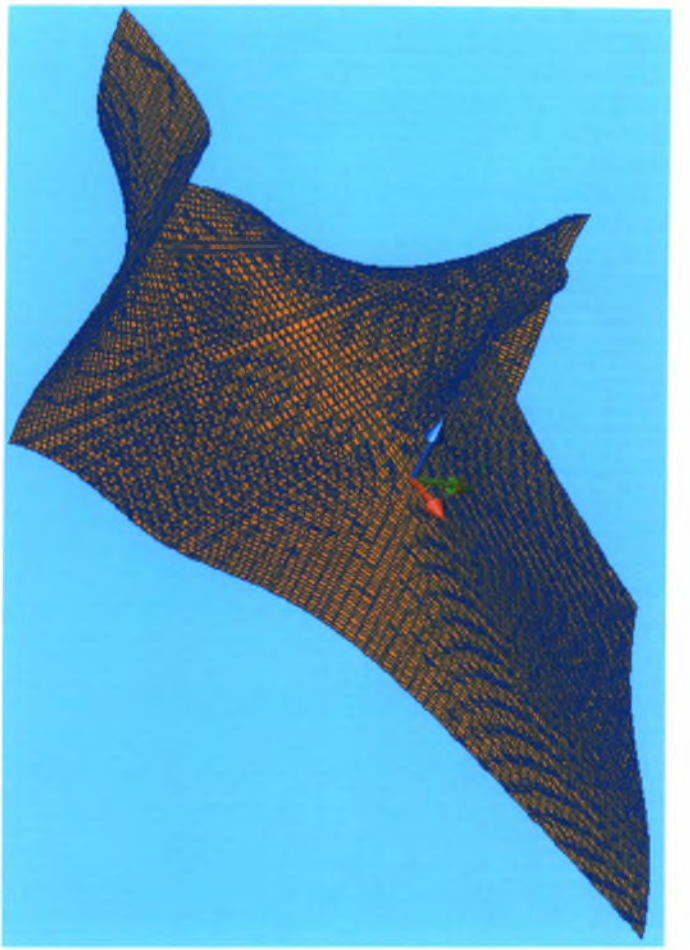
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.45. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.35*.

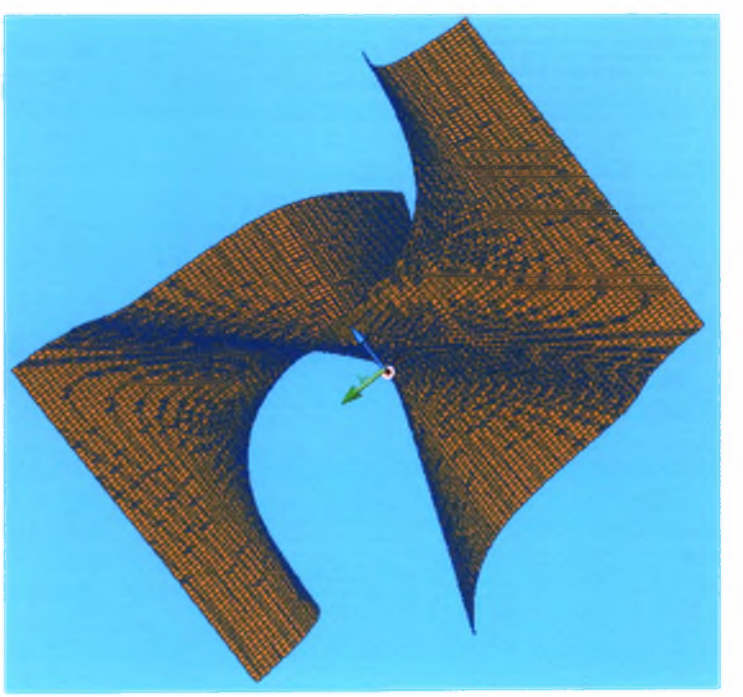


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.46 (συνεχίζεται)

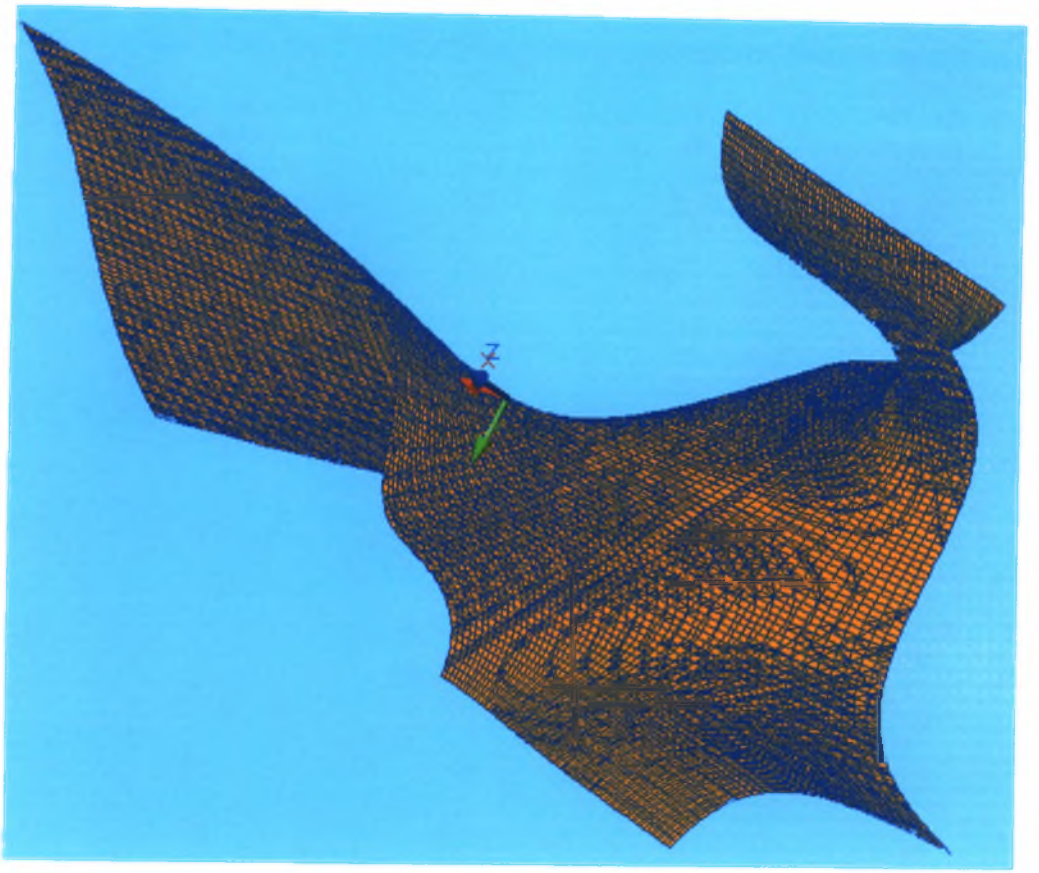


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

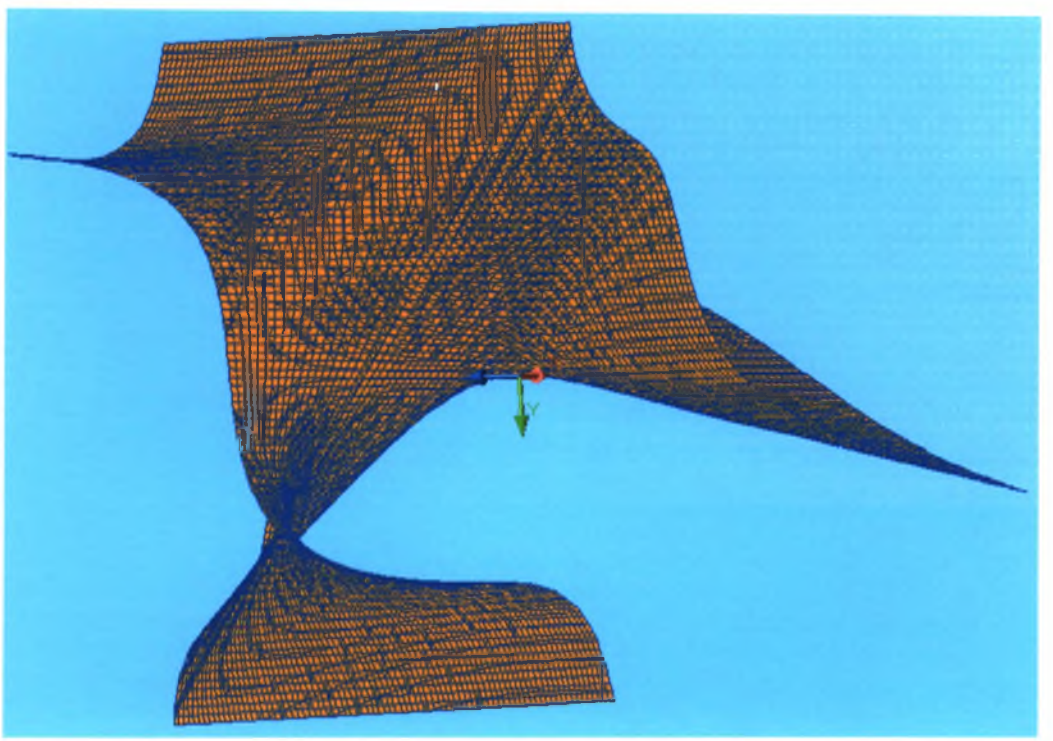


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.46 (συνεχίζεται)

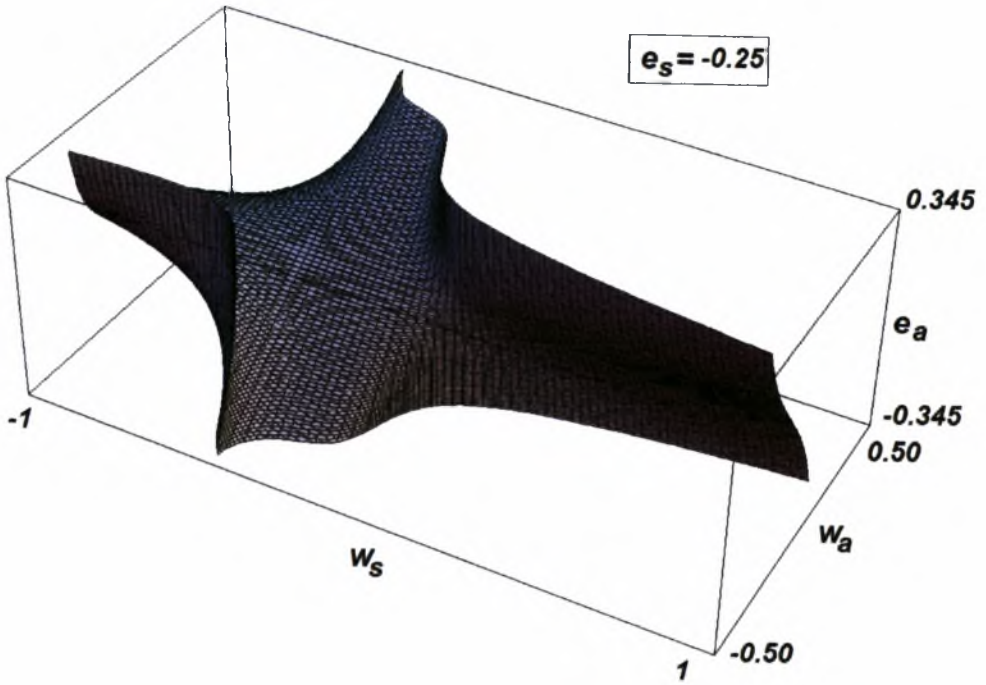


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

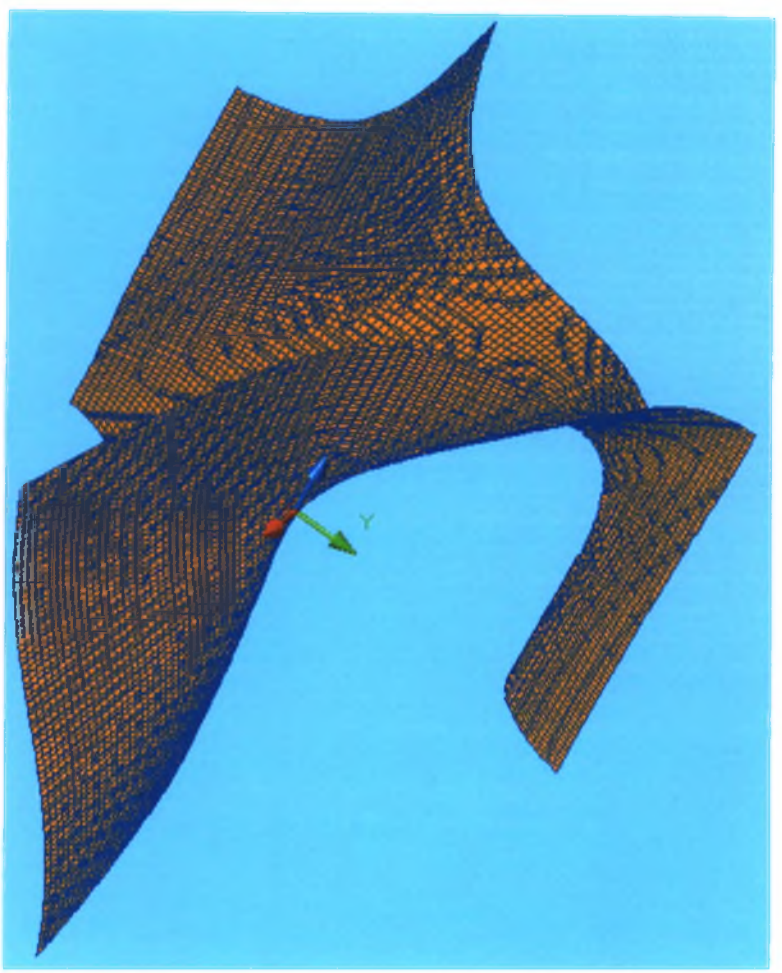


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.46. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.30*.



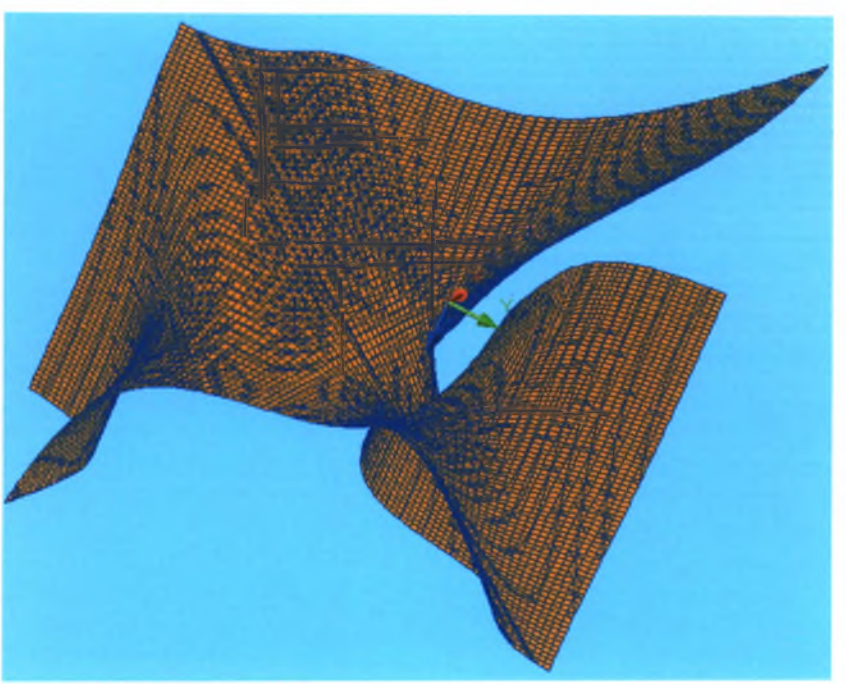
(α) *Προϊόν του Mathematica*



(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

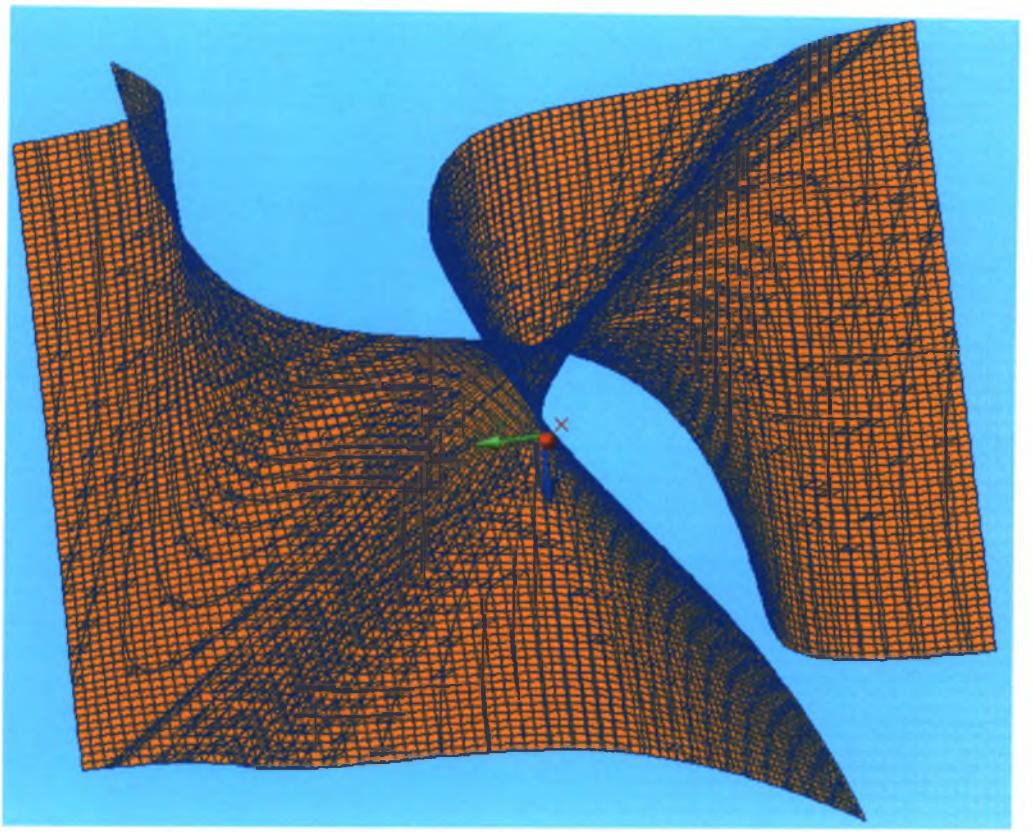
Σχήμα Β1.47 (συνεχίζεται)

(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



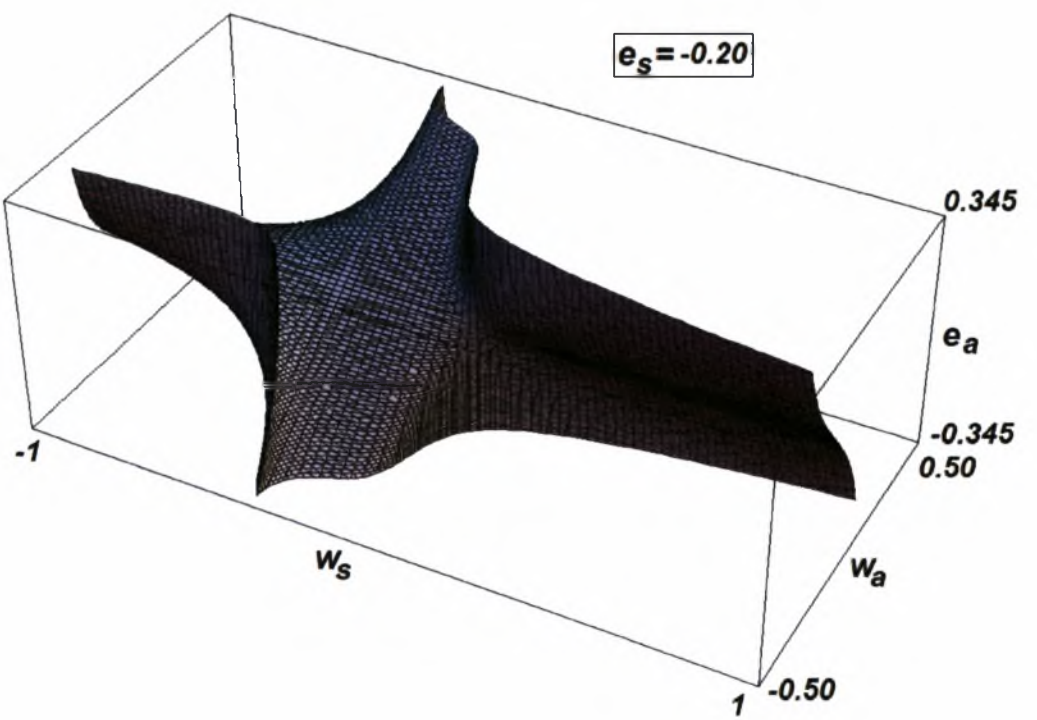
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.47 (συνεχίζεται)



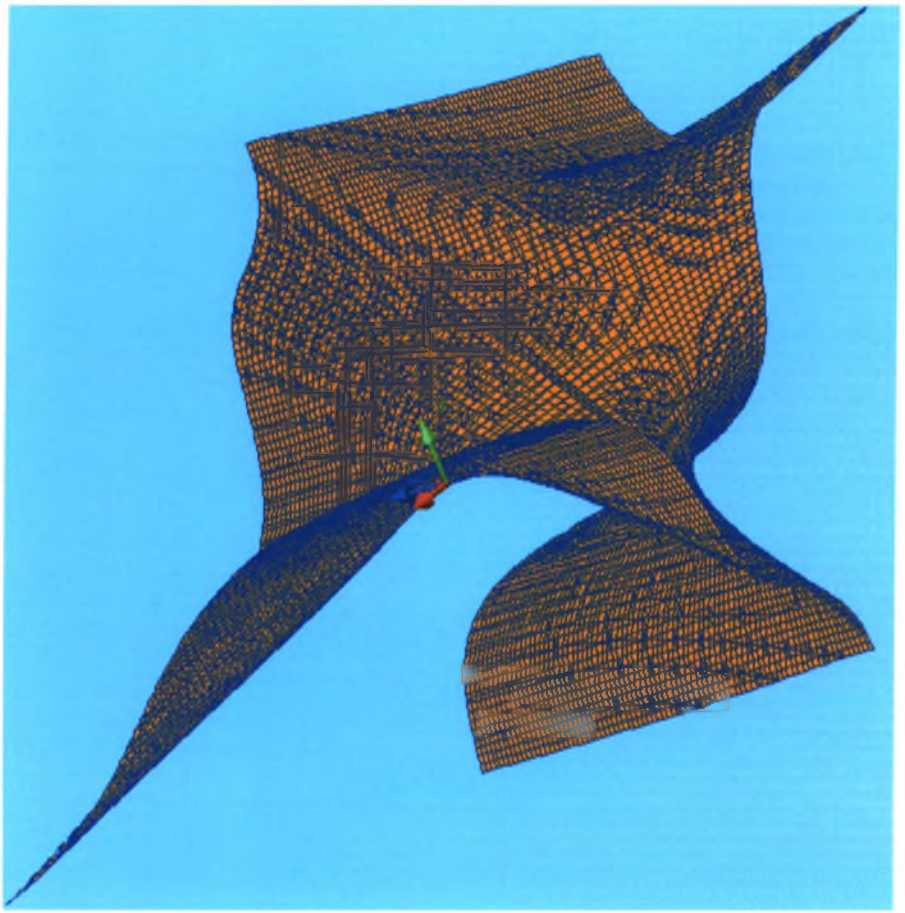
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.47. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.25*.

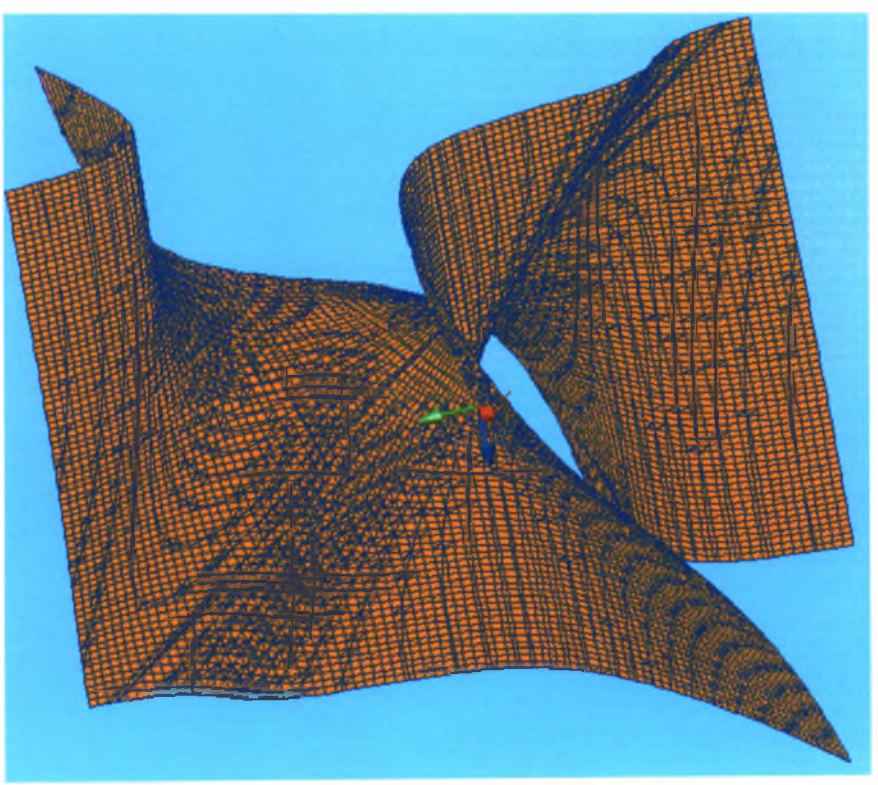


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.48 (συνεχίζεται)

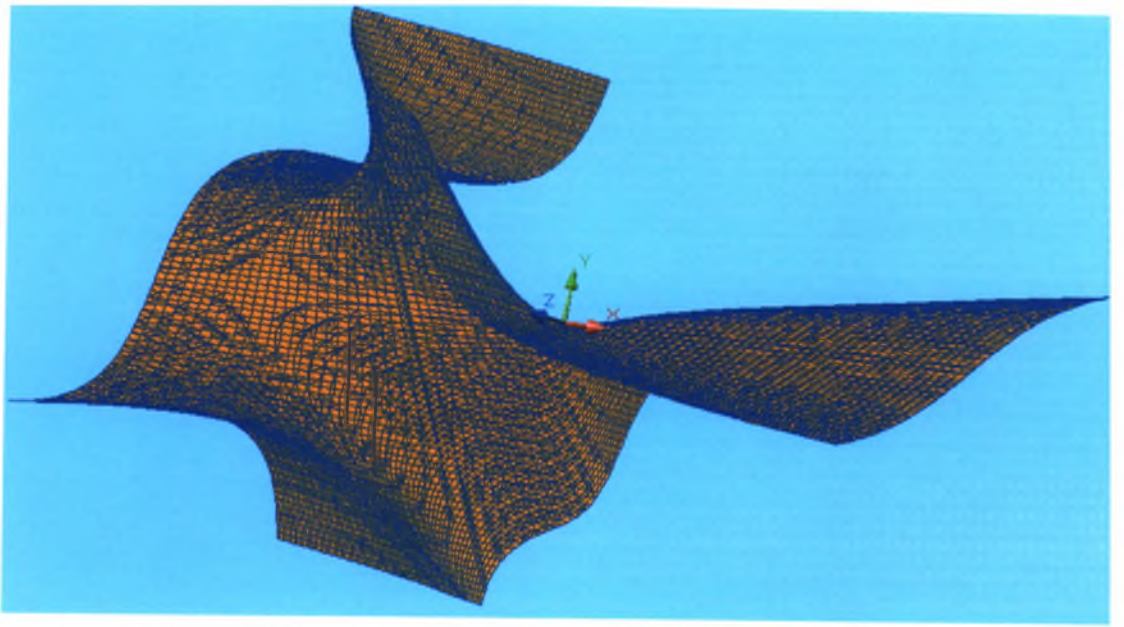


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

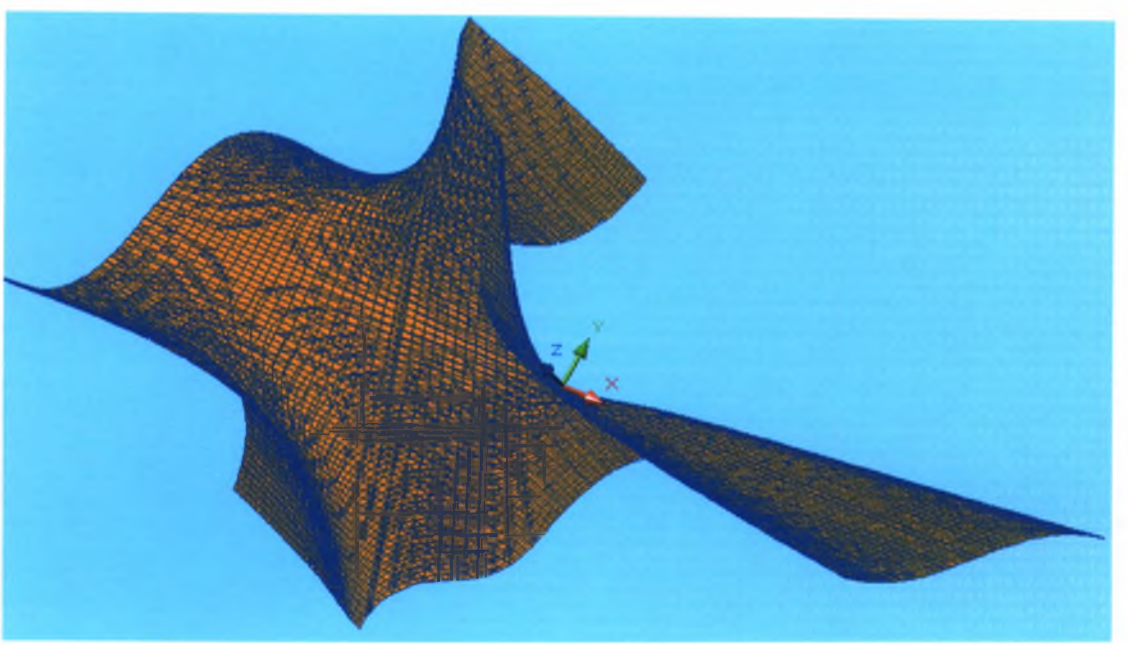


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.48 (συνεχίζεται)

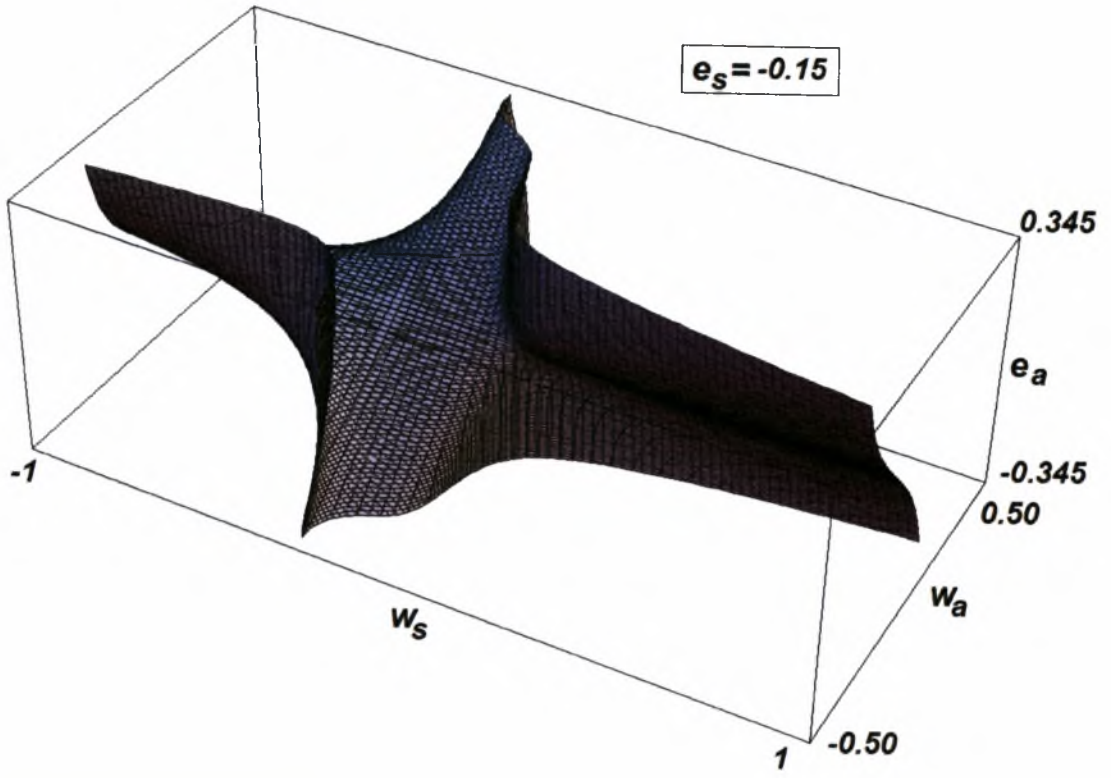


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

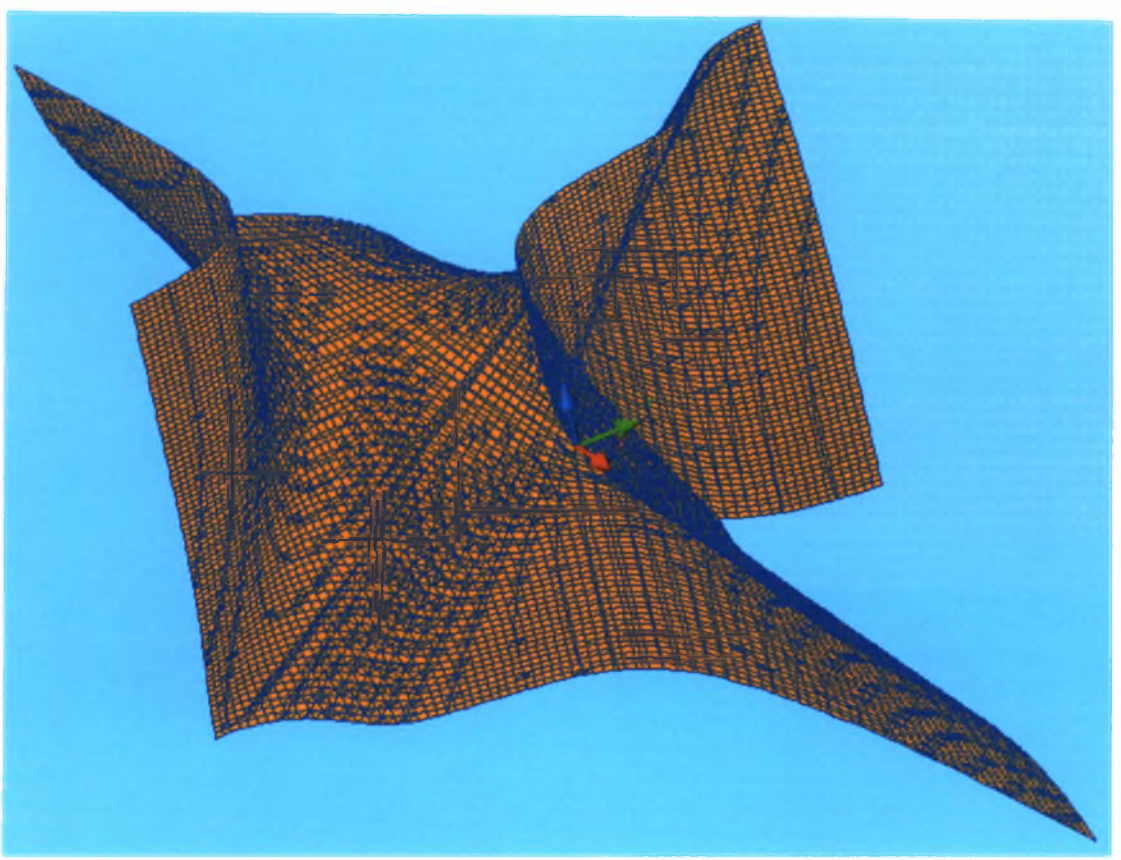


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.48. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.20*.

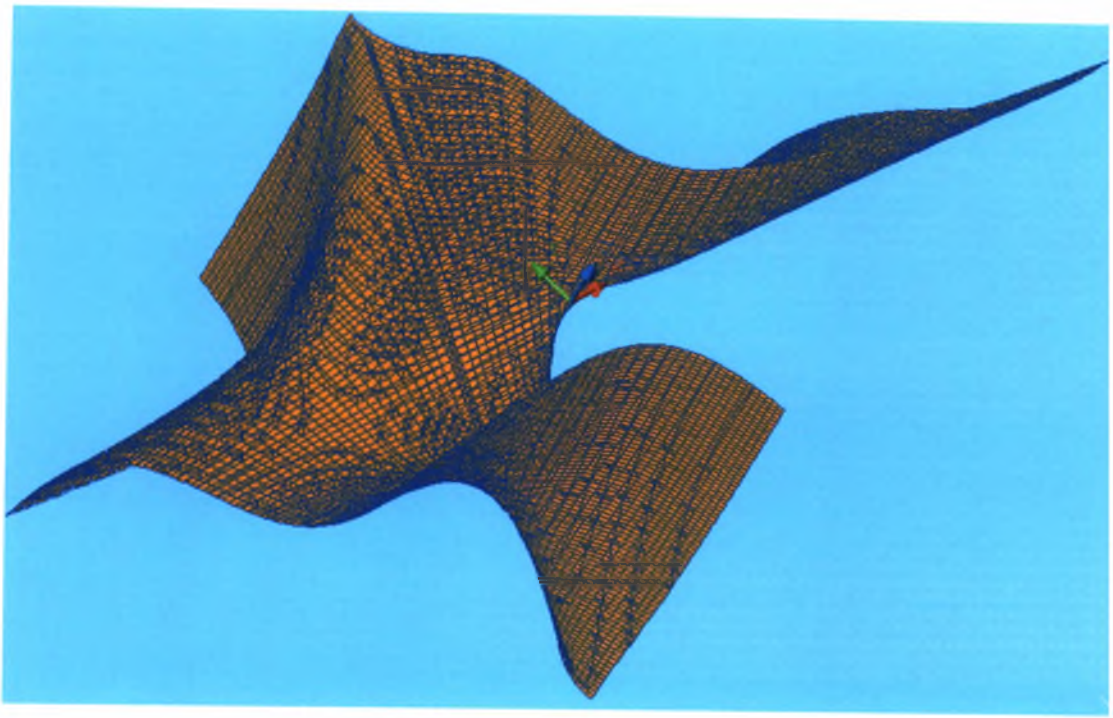


(α) *Προϊόν του Mathematica*

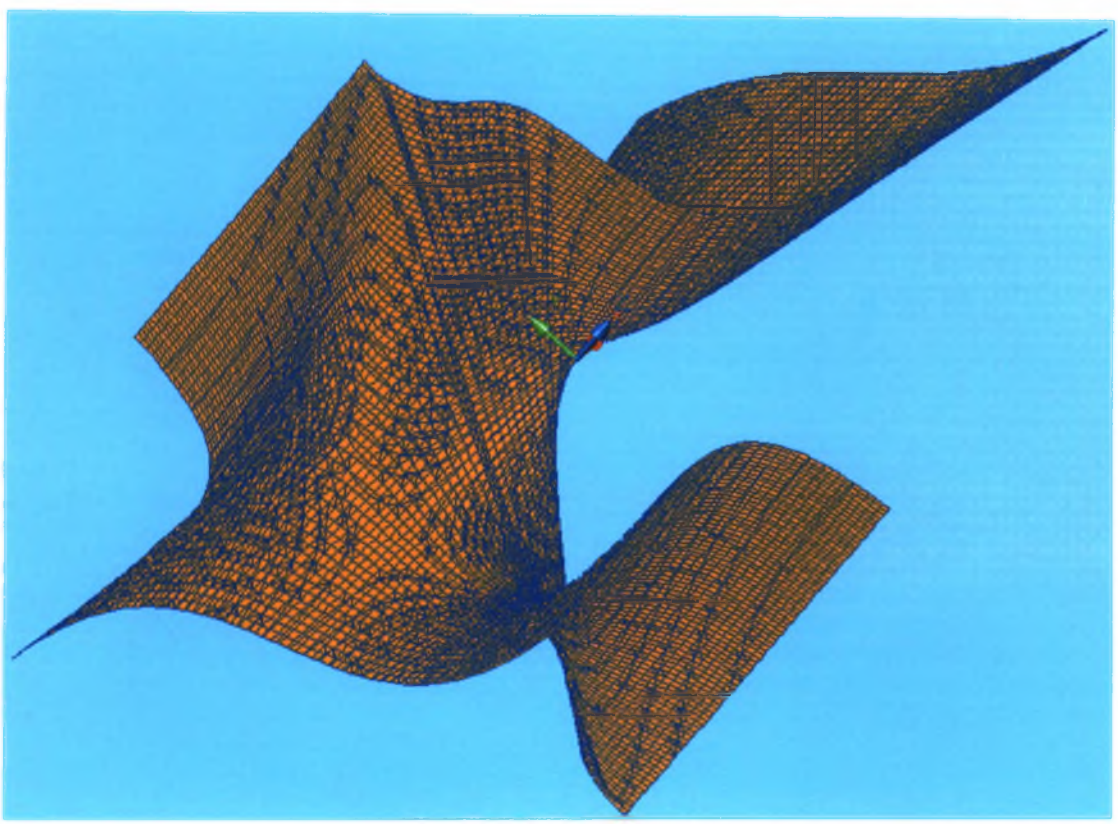


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.49 (συνεχίζεται)

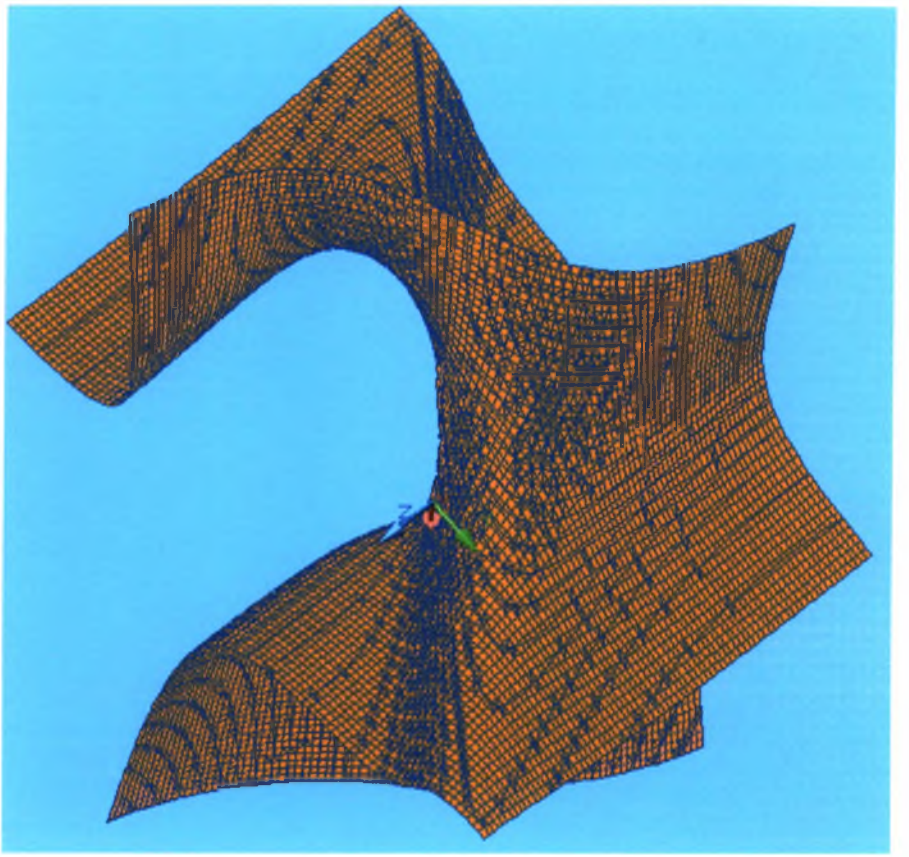


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



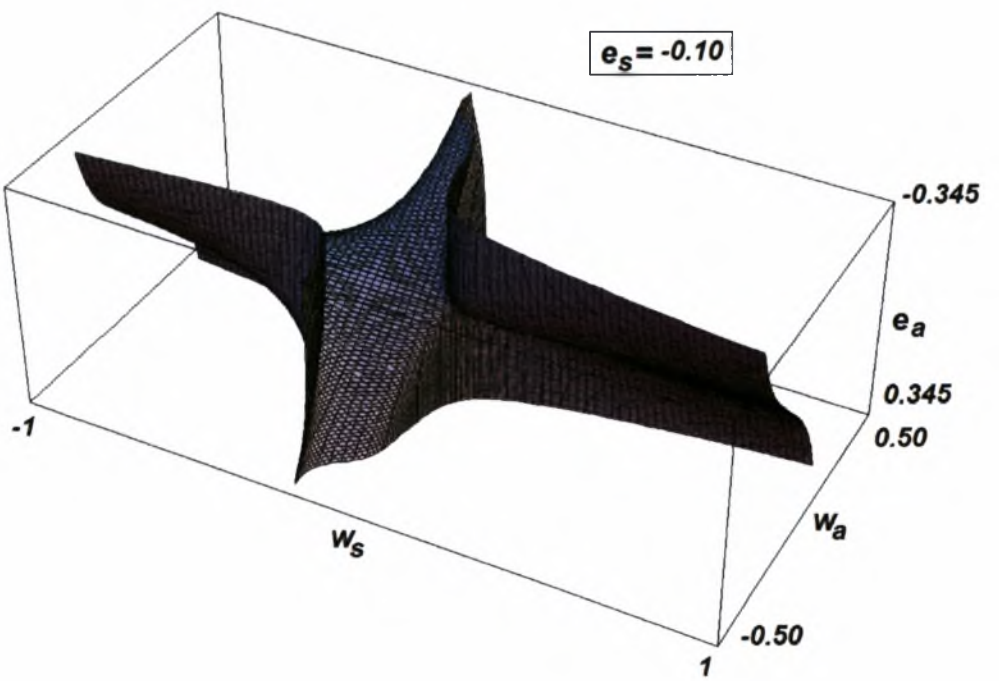
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.49 (συνεχίζεται)



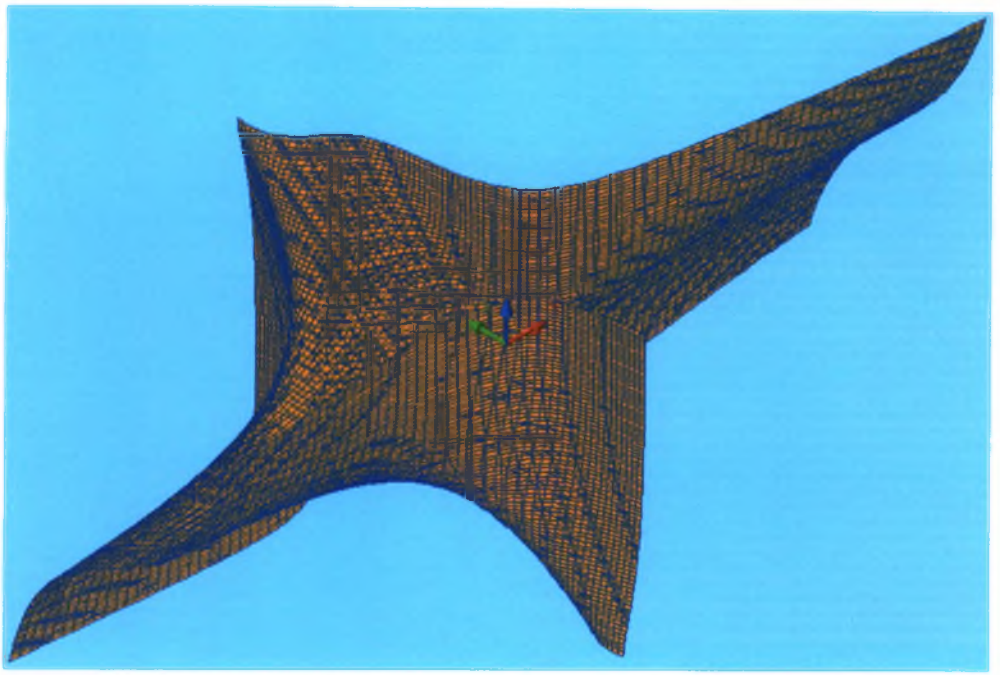
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.49. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = -0.15$.

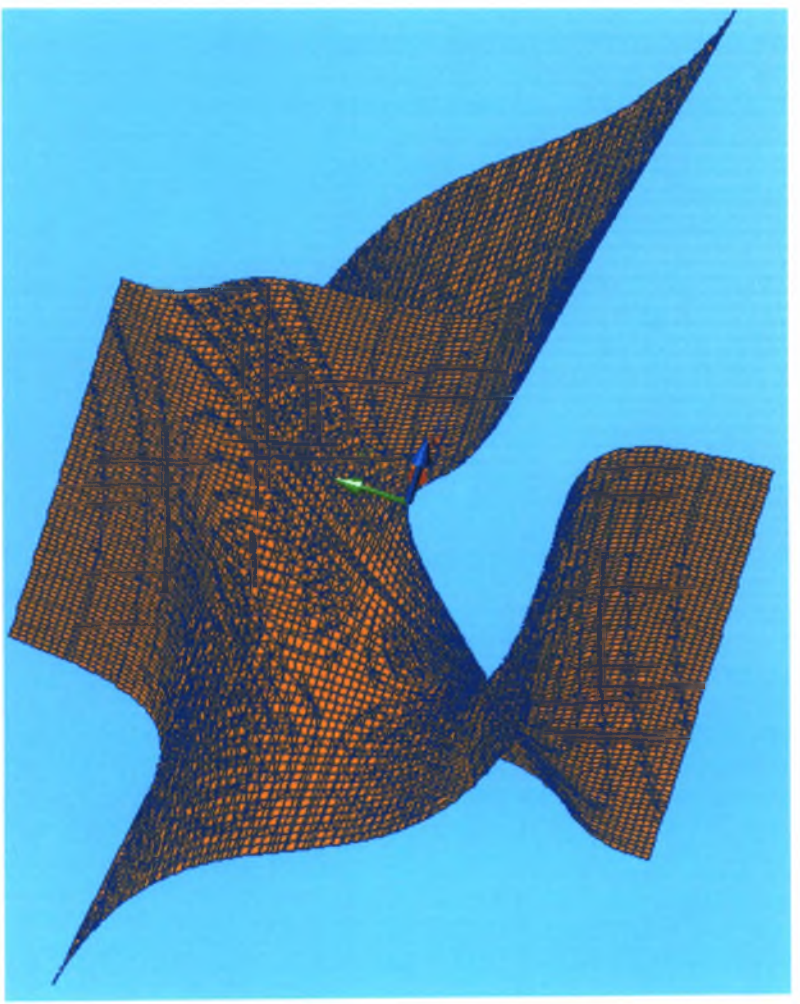


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.50 (συνεχίζεται)

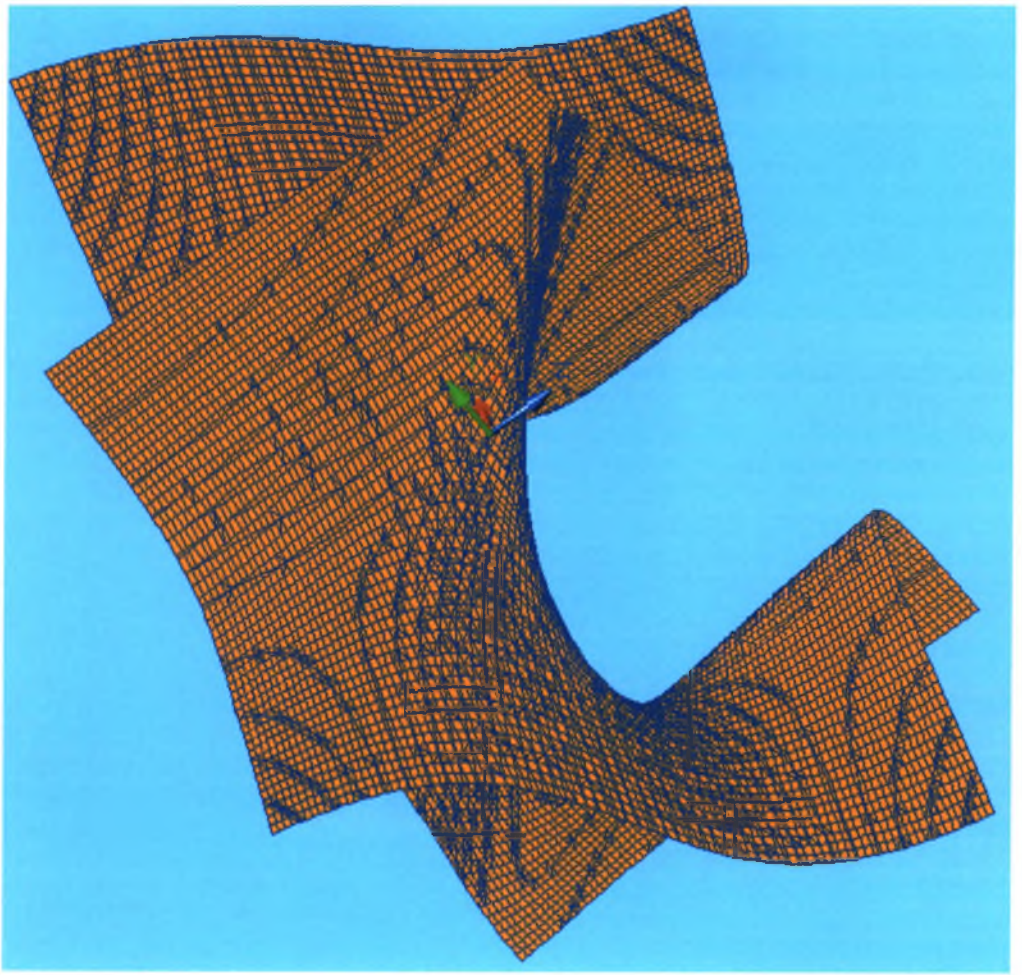


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

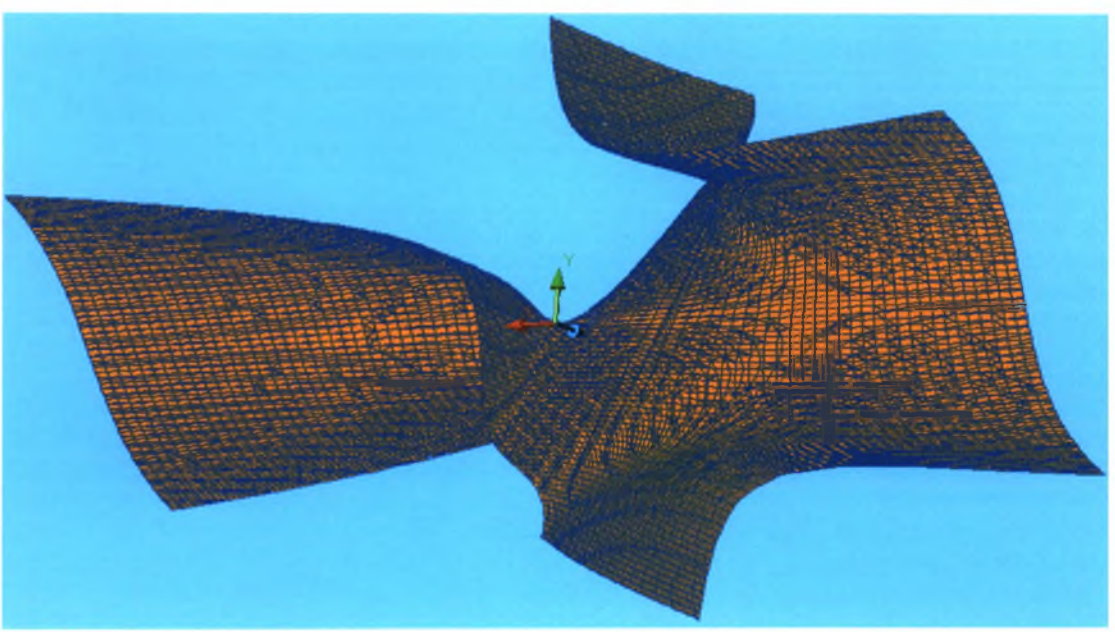


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.50 (συνεχίζεται)

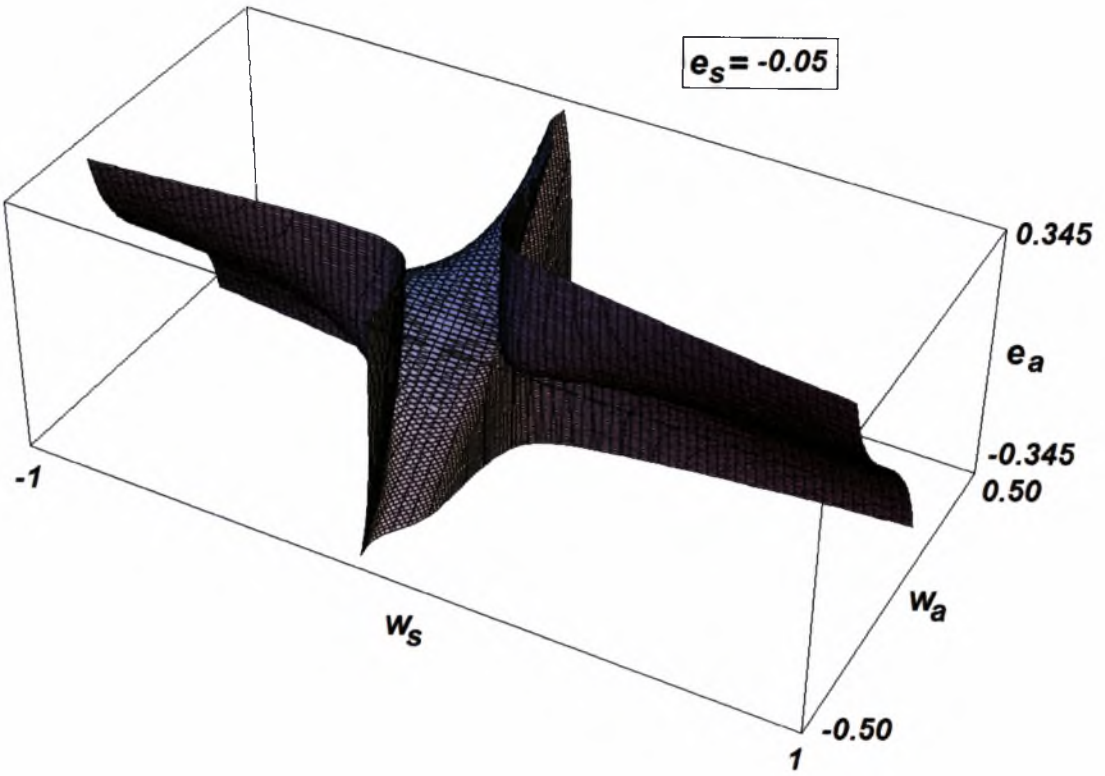


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

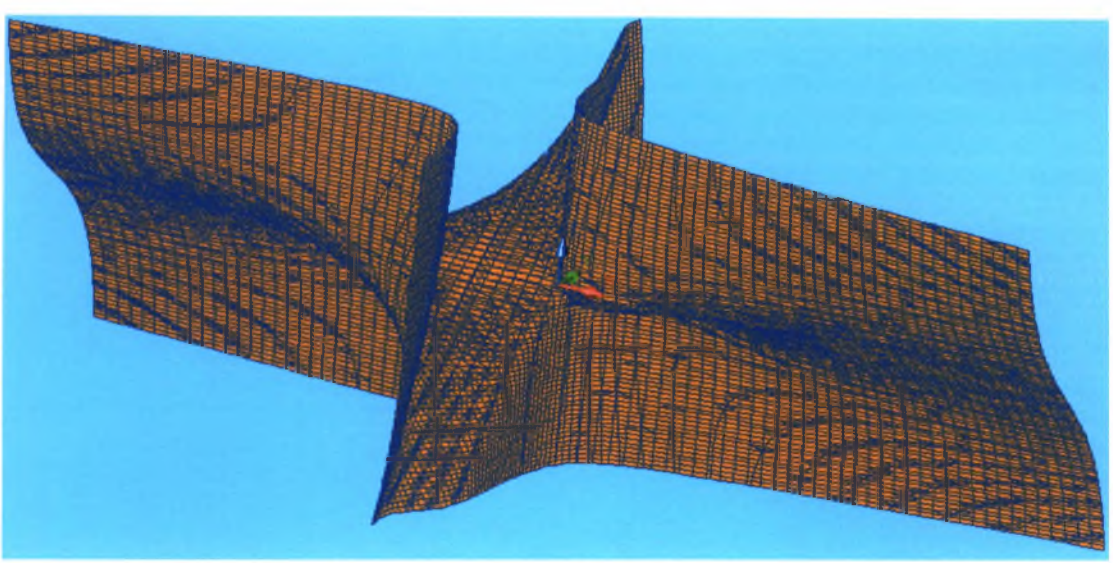


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.50. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = -0.10$.

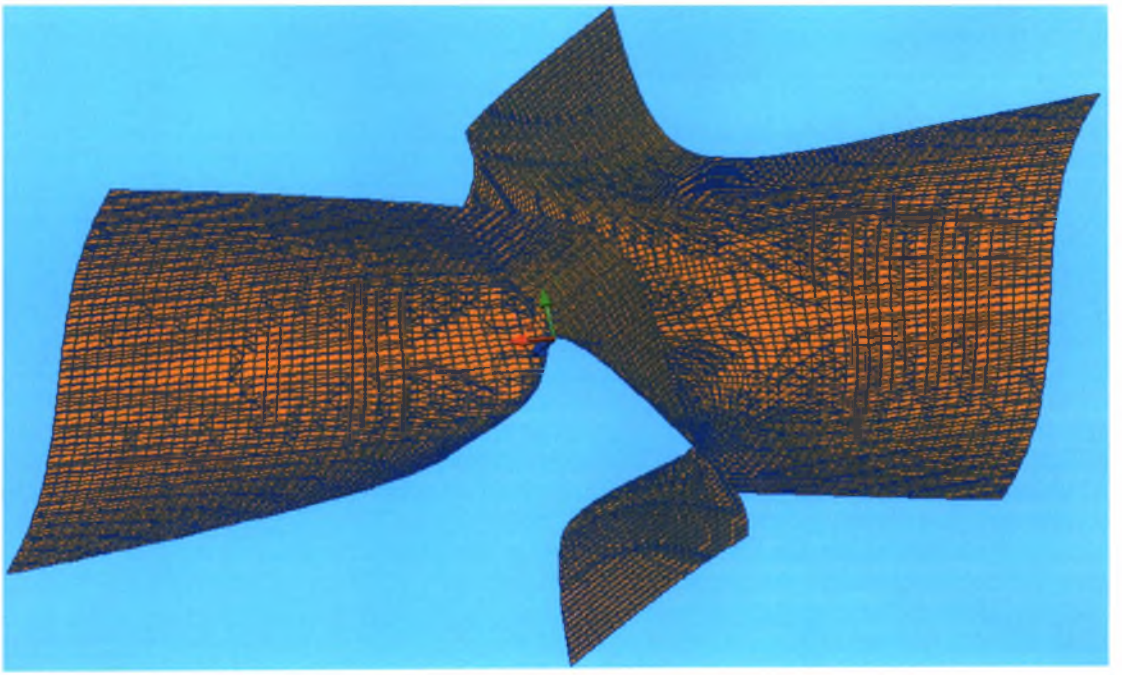


(α) *Προϊόν του Mathematica*

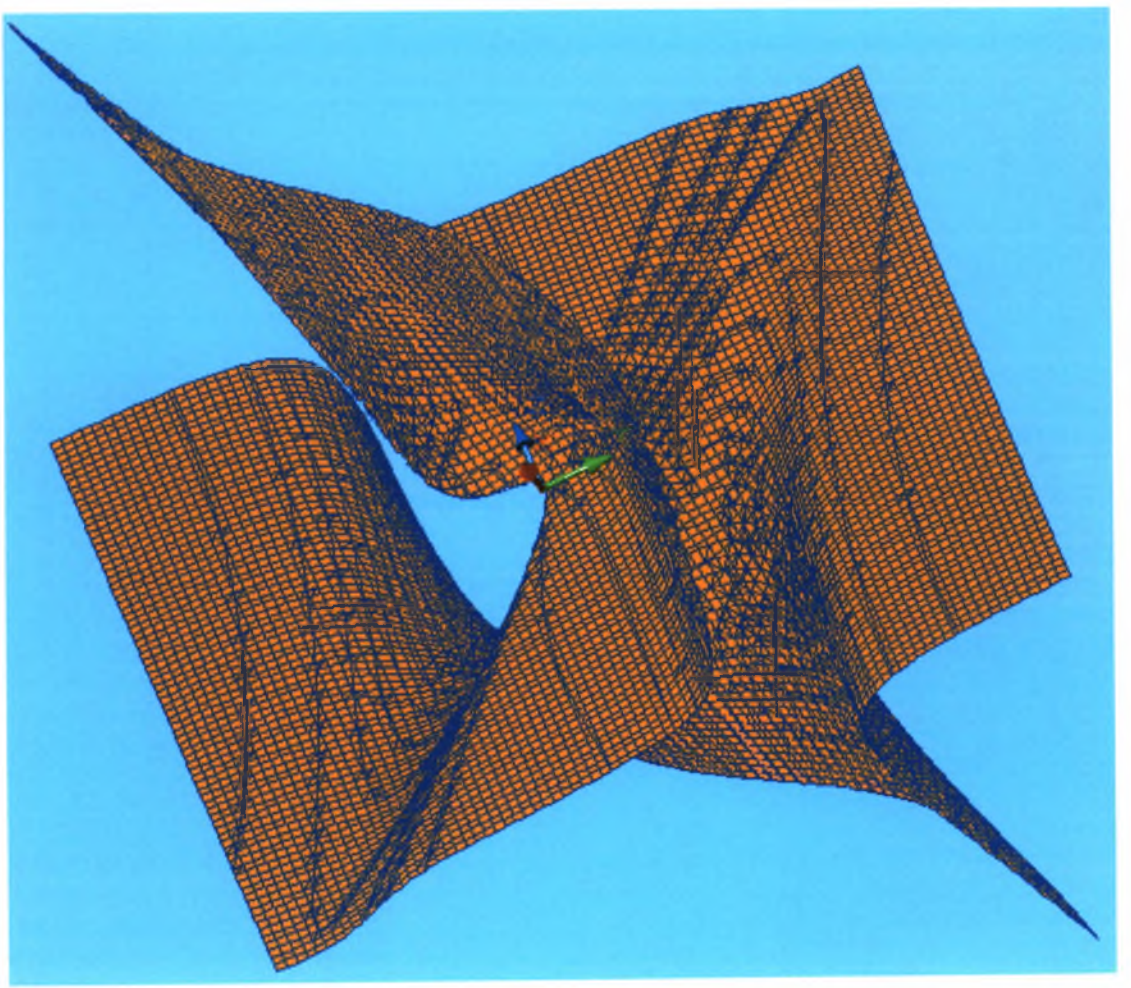


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.51 (συνεχίζεται)

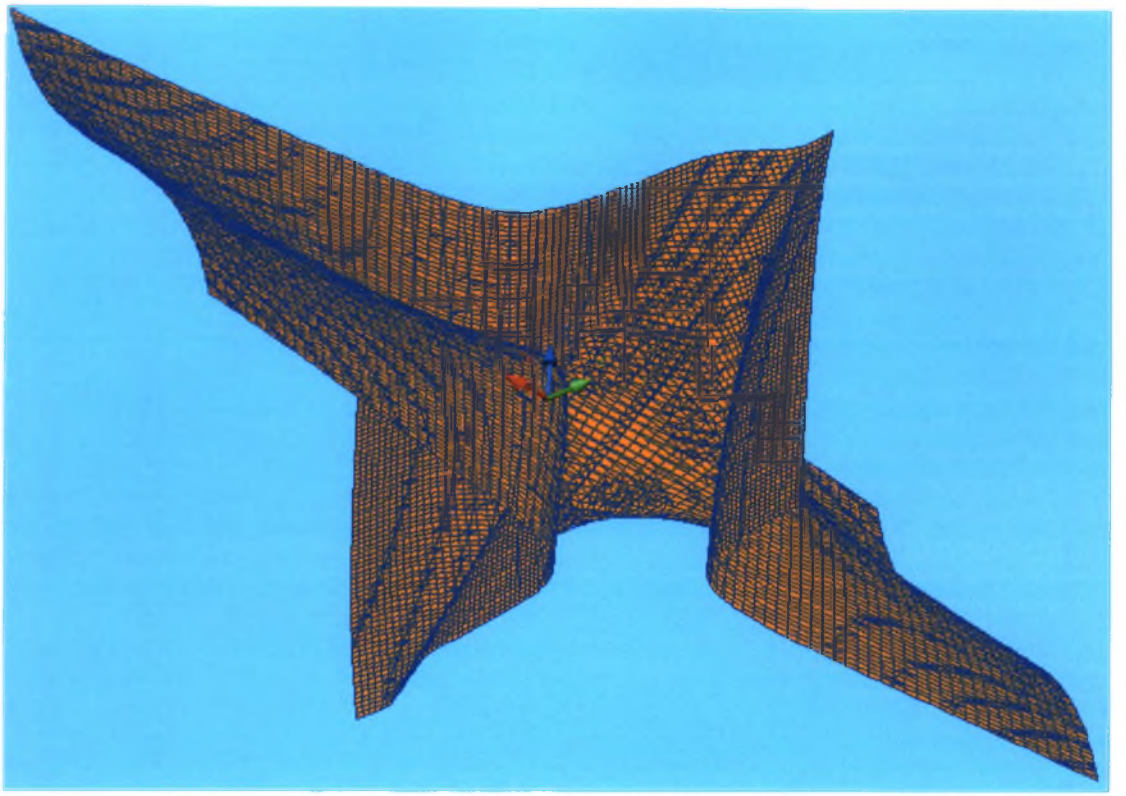


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



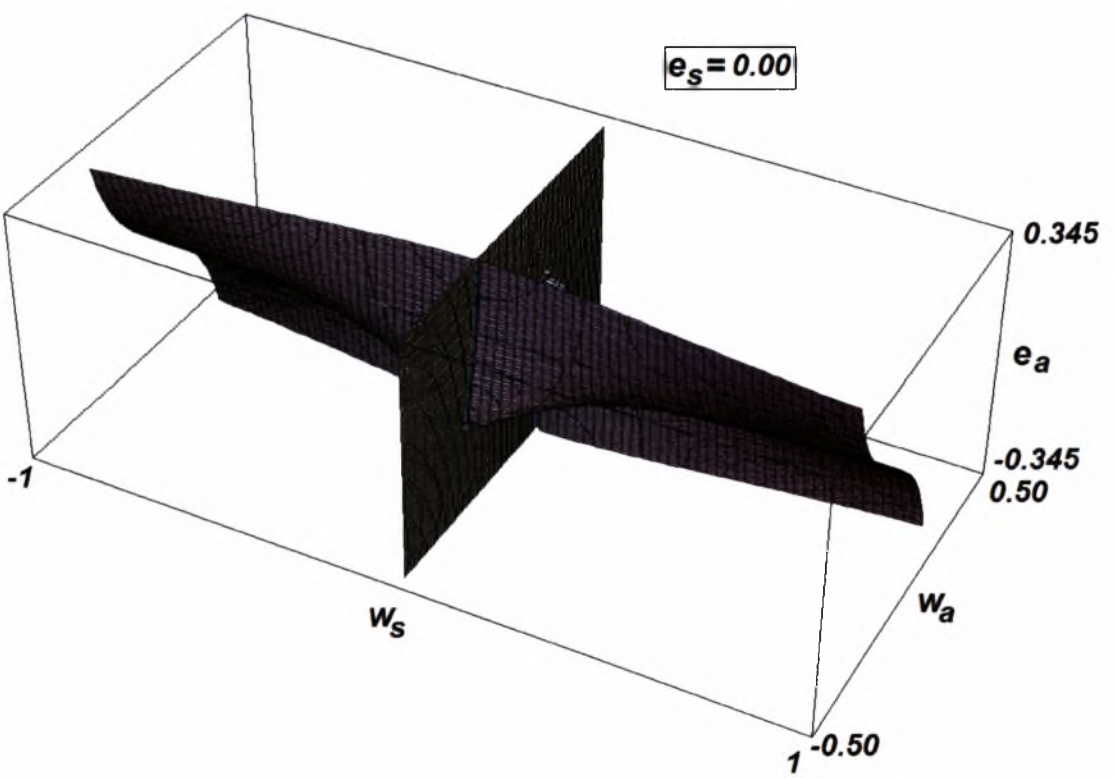
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.51 (συνεχίζεται)



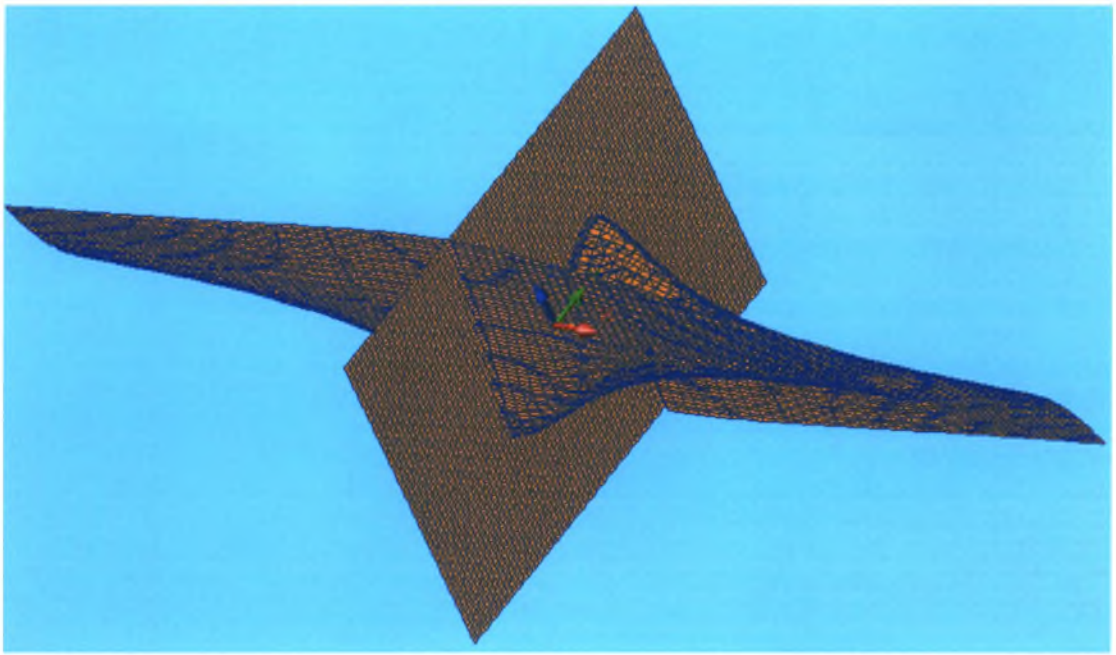
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.51. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = -0.05$.

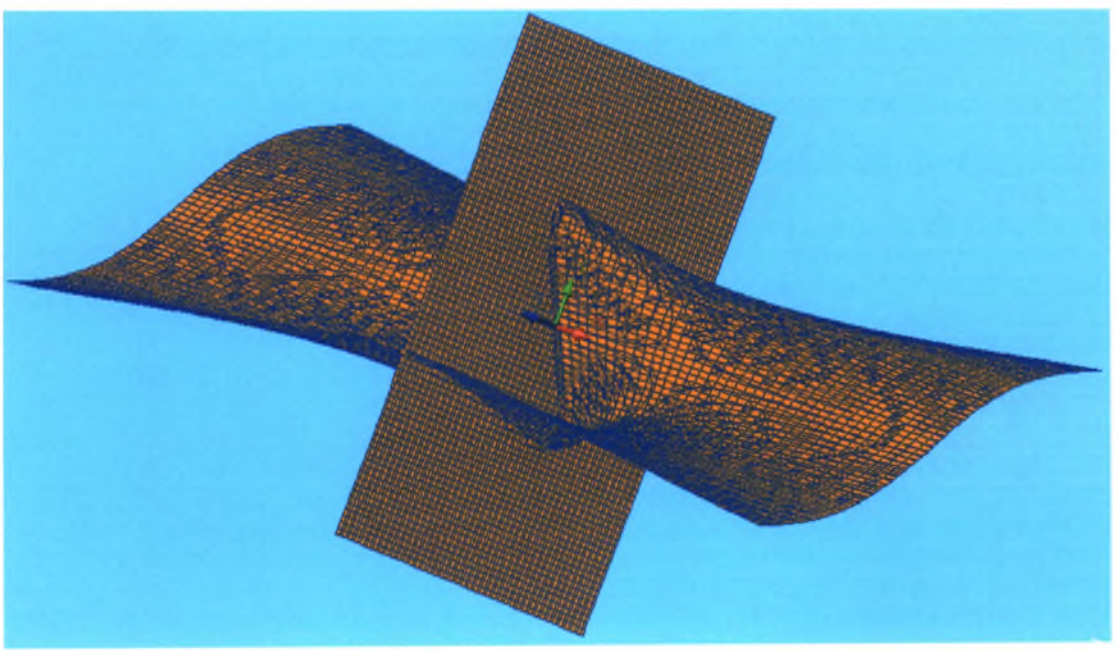


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.52 (συνεχίζεται)

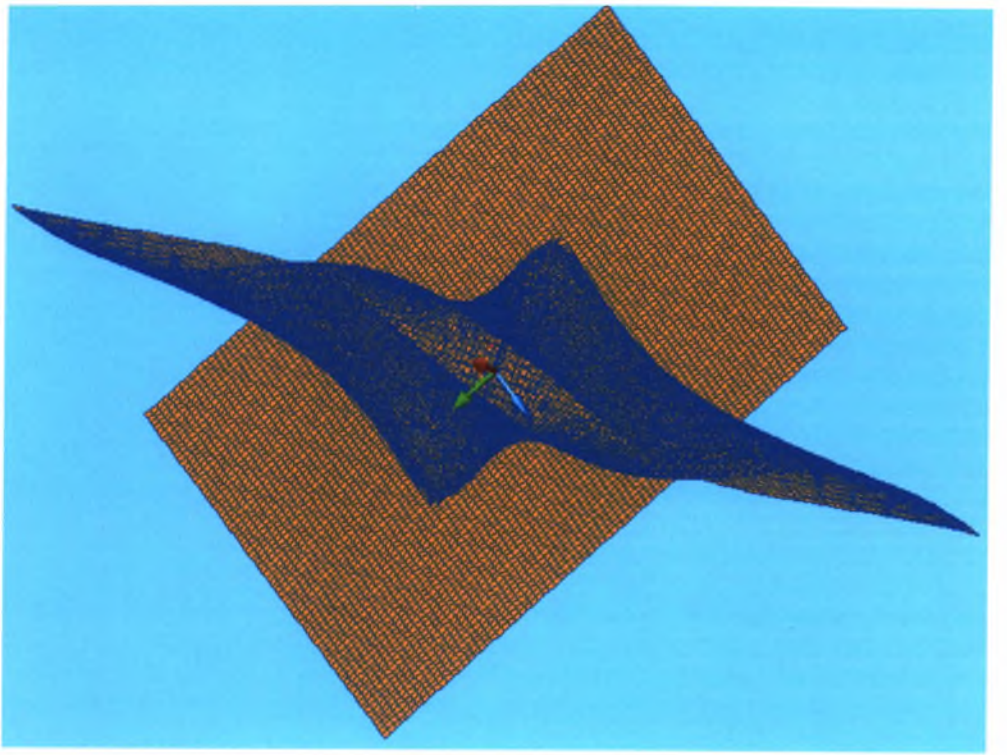


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

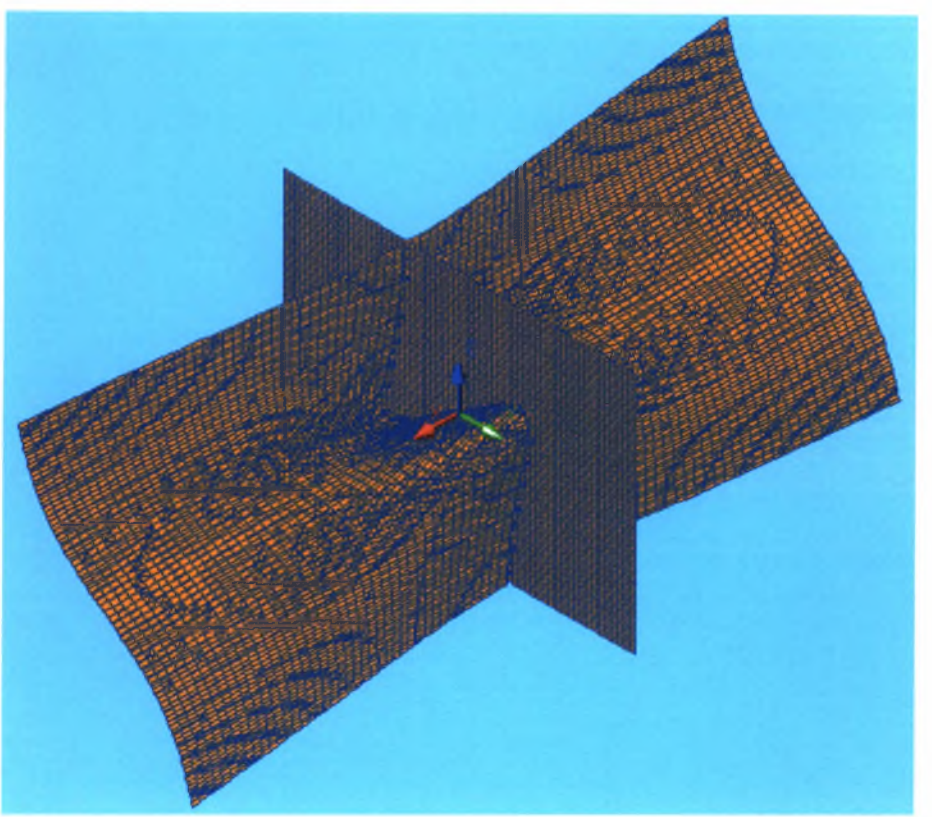


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.52 (συνεχίζεται)

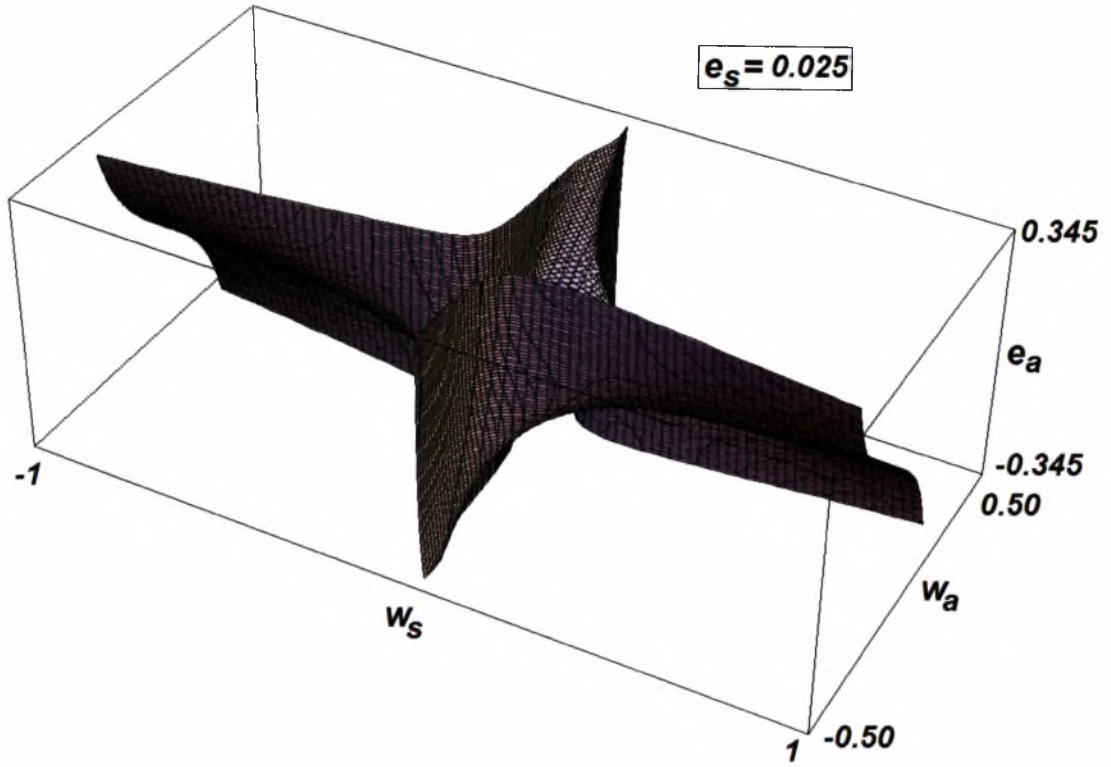


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

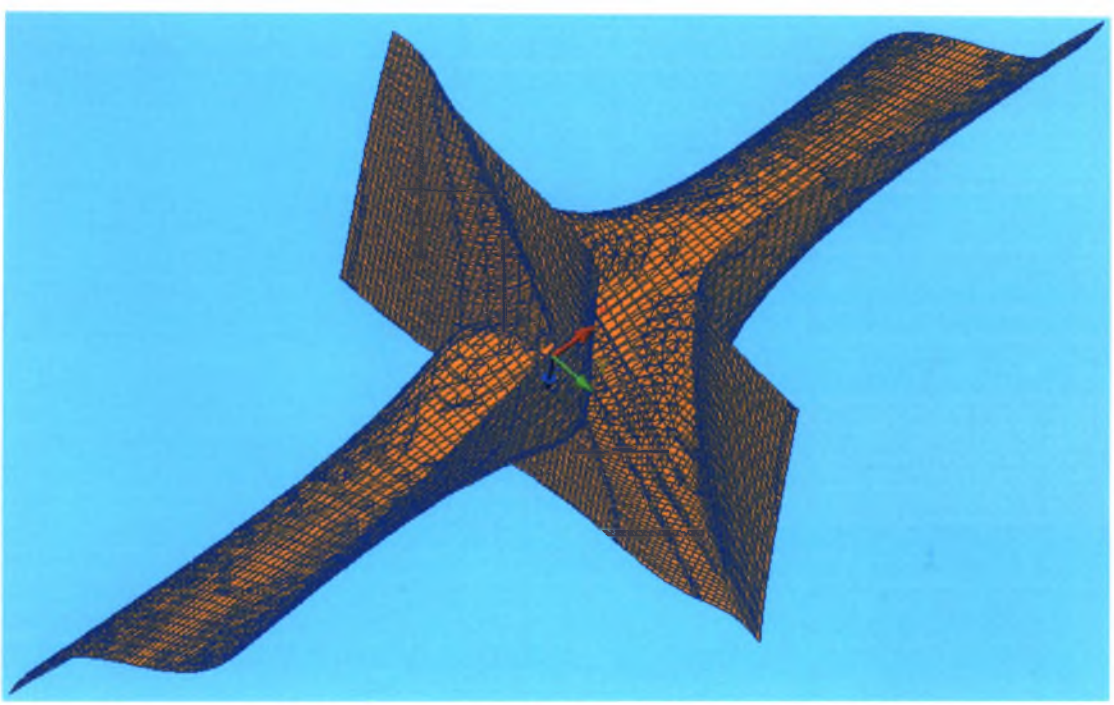


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.52. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για e_s = *-0.00* (πολλαπλό καταστροφής του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο αντισυμμετρική* αρχική ατέλεια).

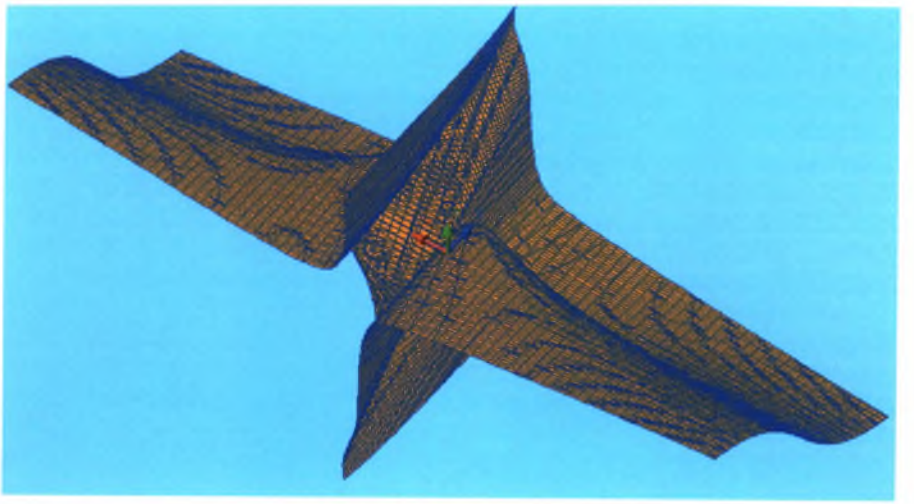


(α) *Προϊόν του Mathematica*

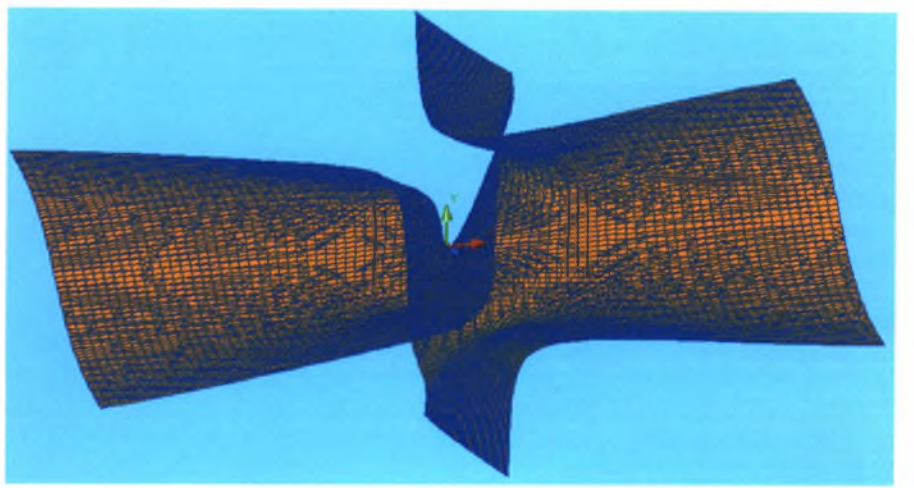


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

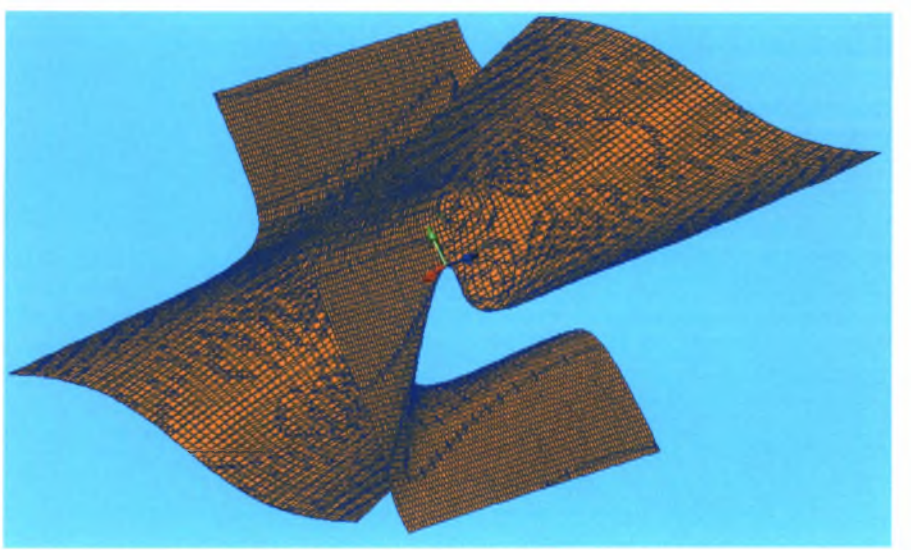
Σχήμα Β1.53 (συνεχίζεται)



(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

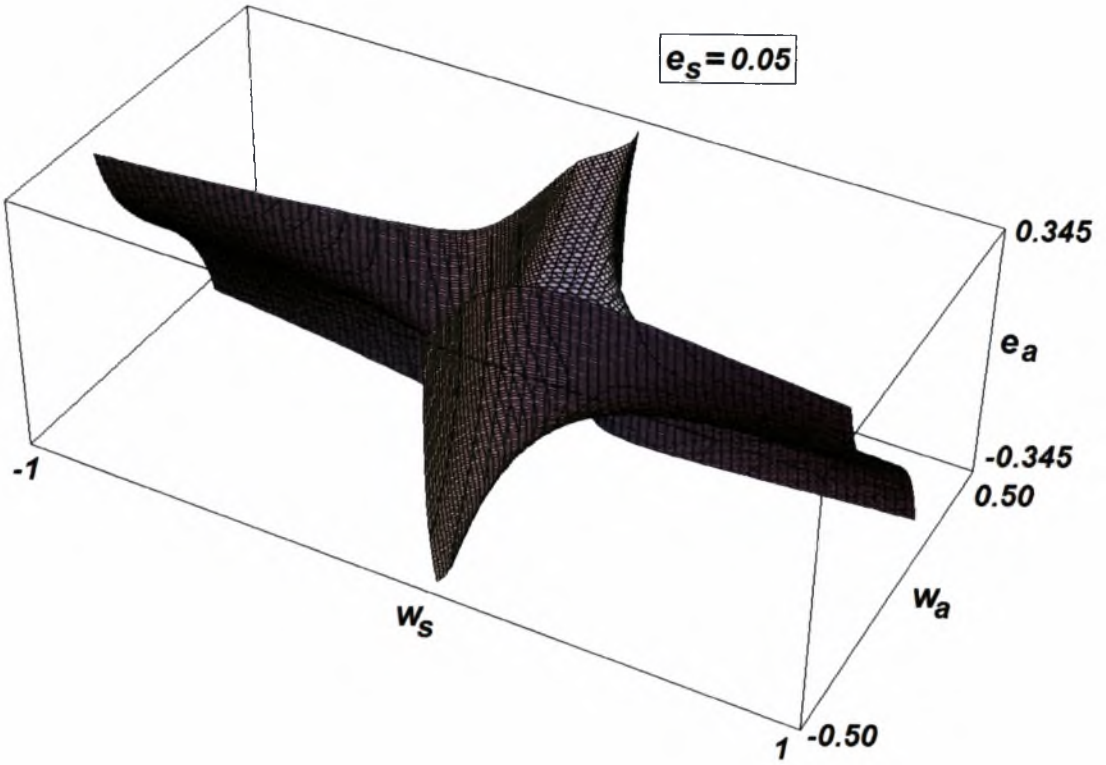


(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

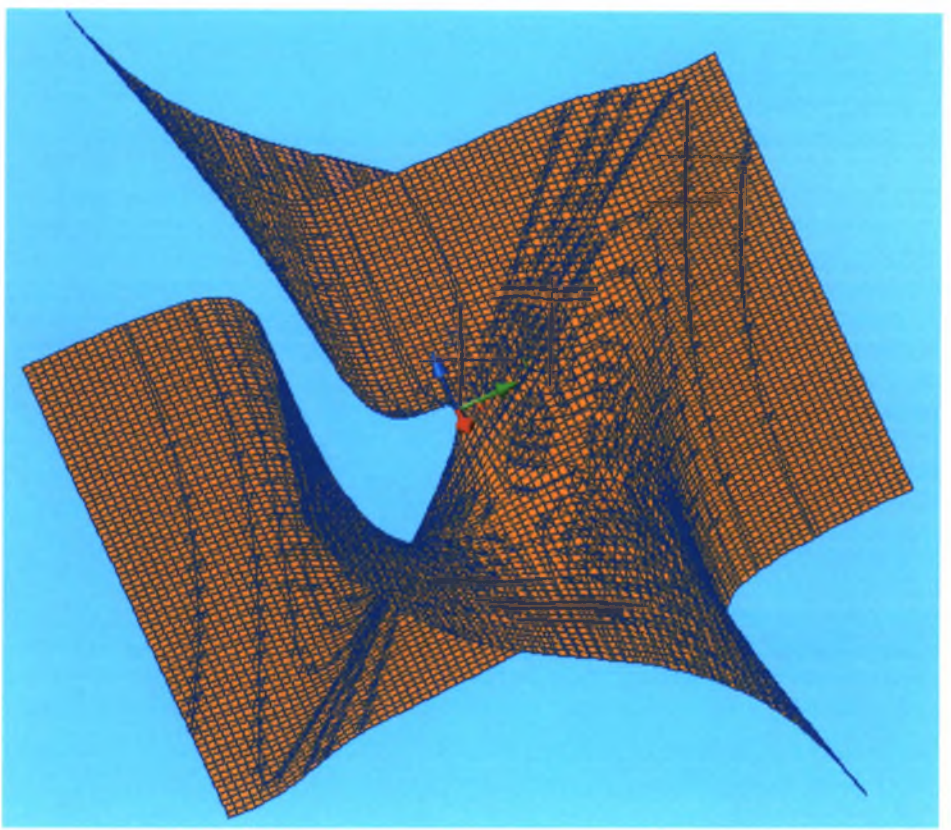


(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.53. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.025$.

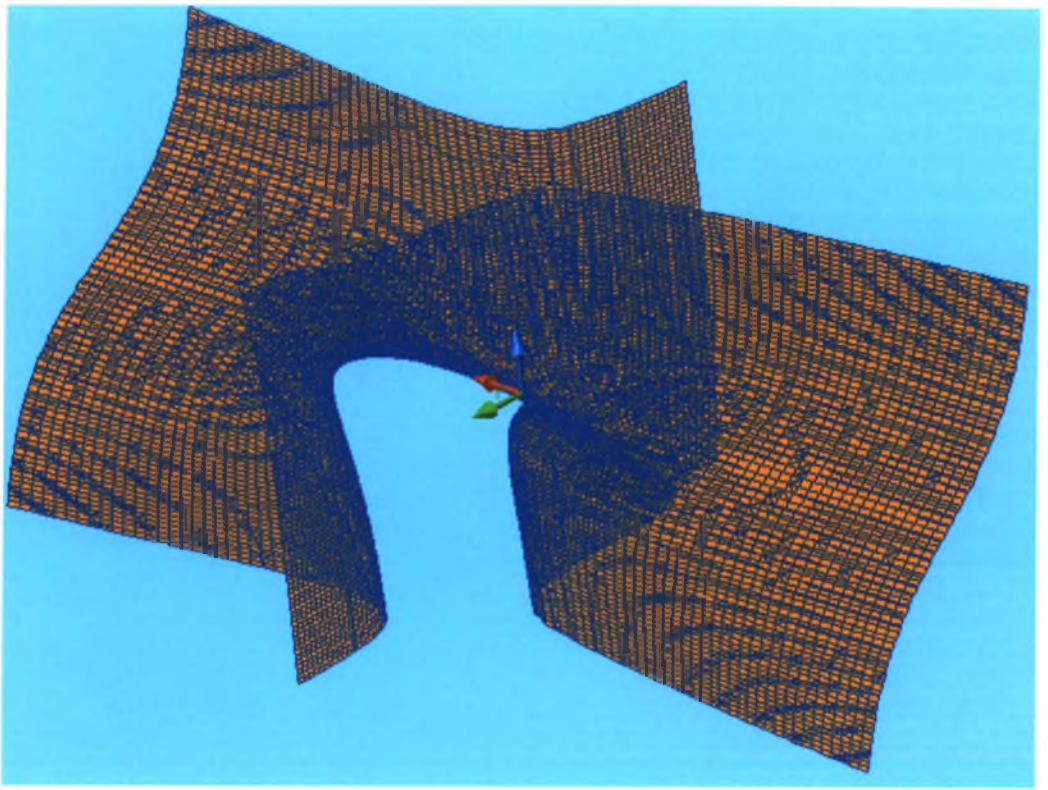


(α) *Προϊόν του Mathematica*

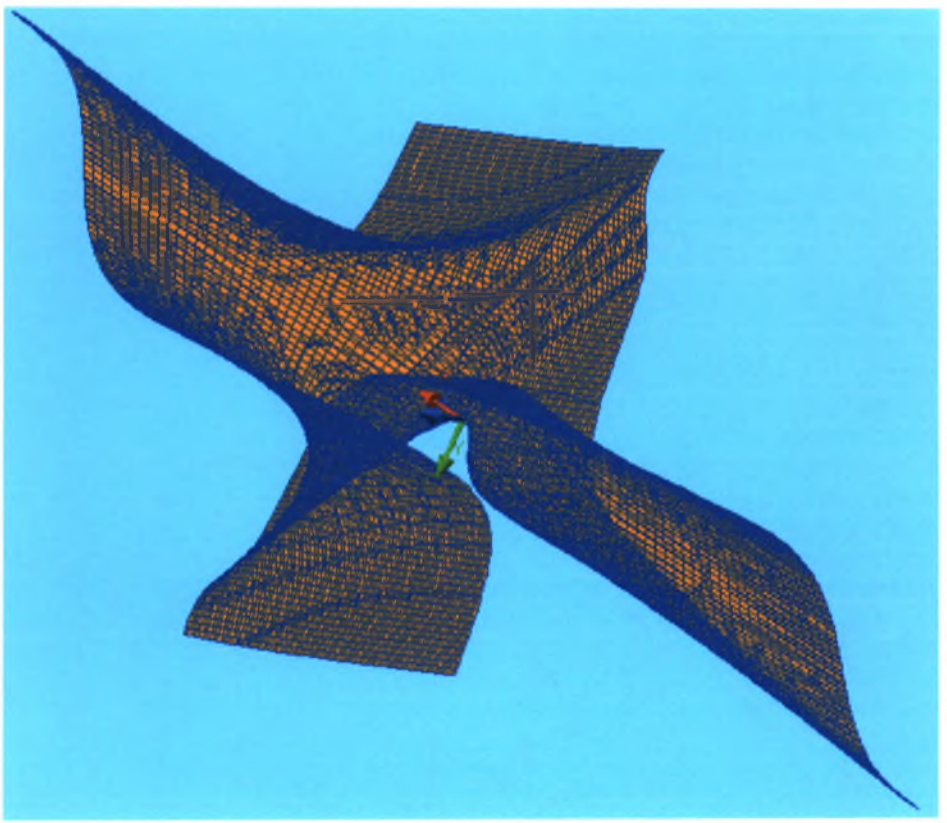


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.54 (συνεχίζεται)

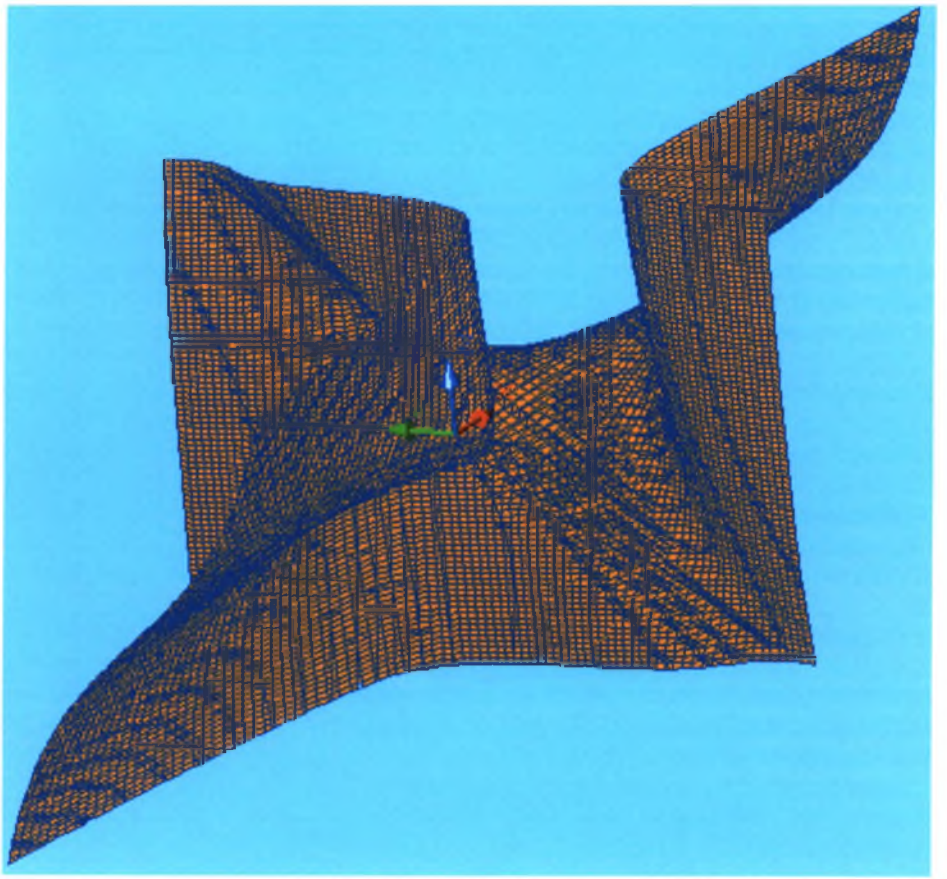


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



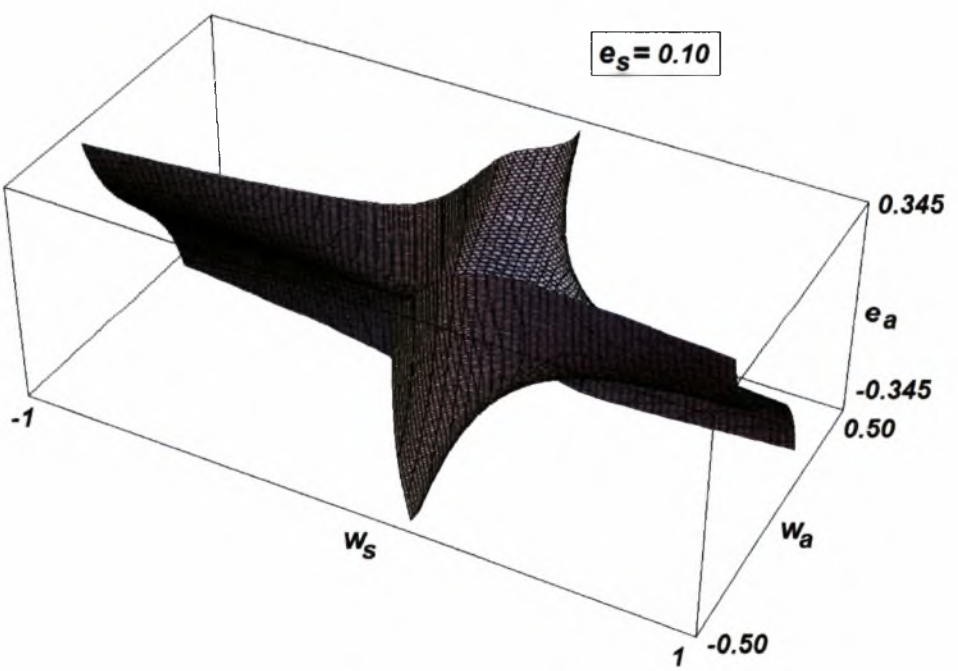
(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.54 (συνεχίζεται)



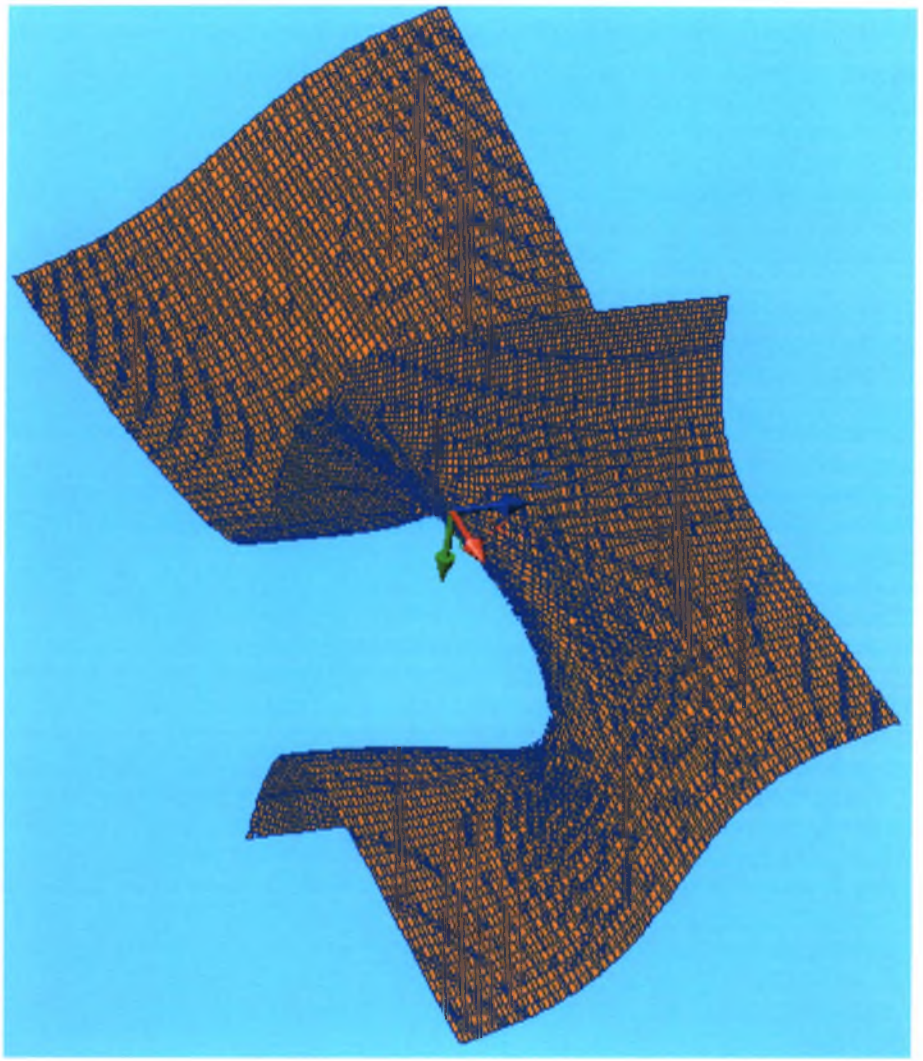
(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.54. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.05$.

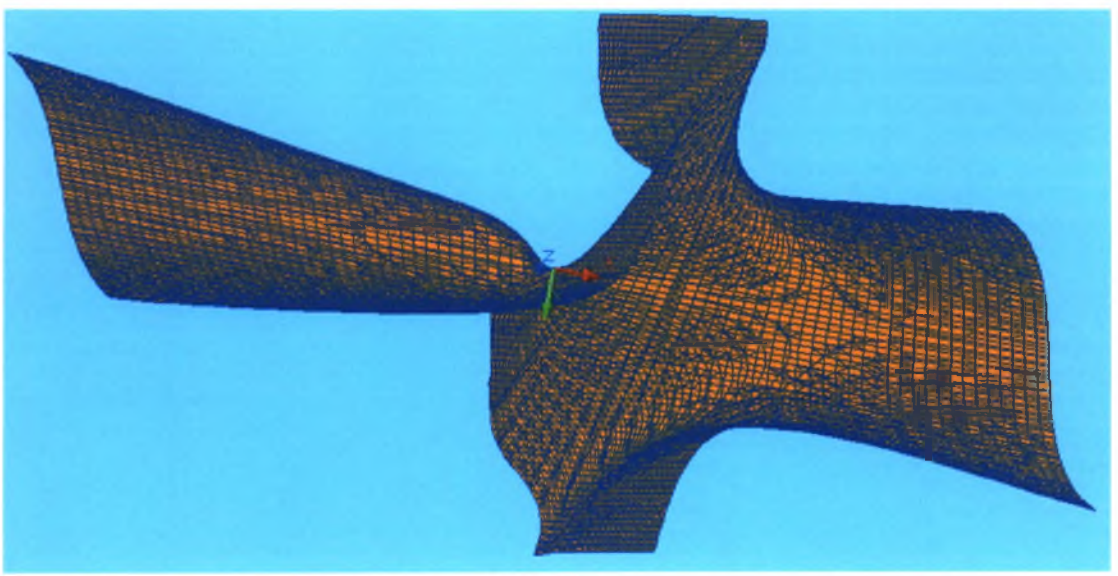


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.55 (συνεχίζεται)

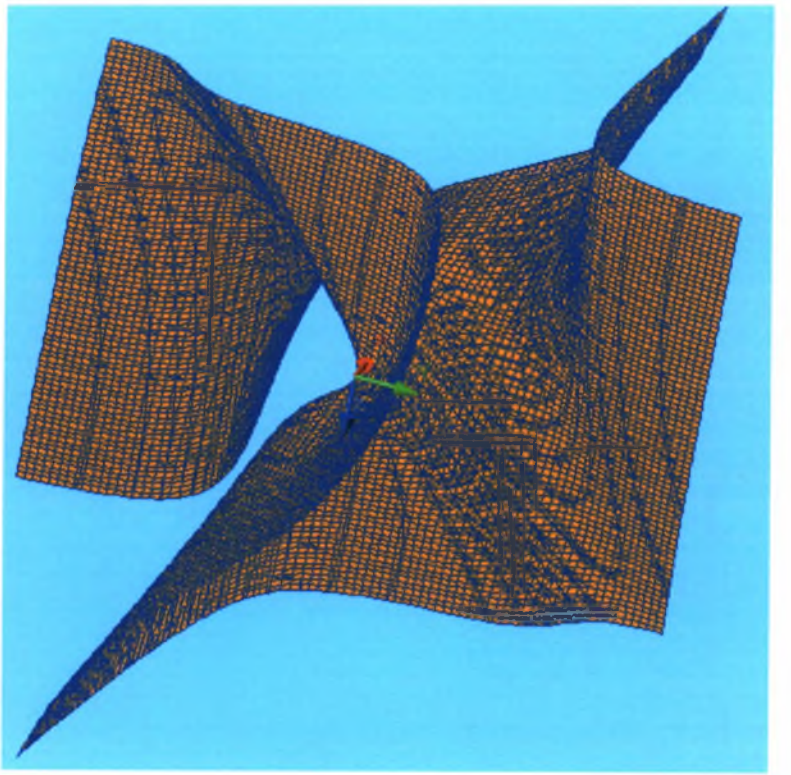


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*



(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

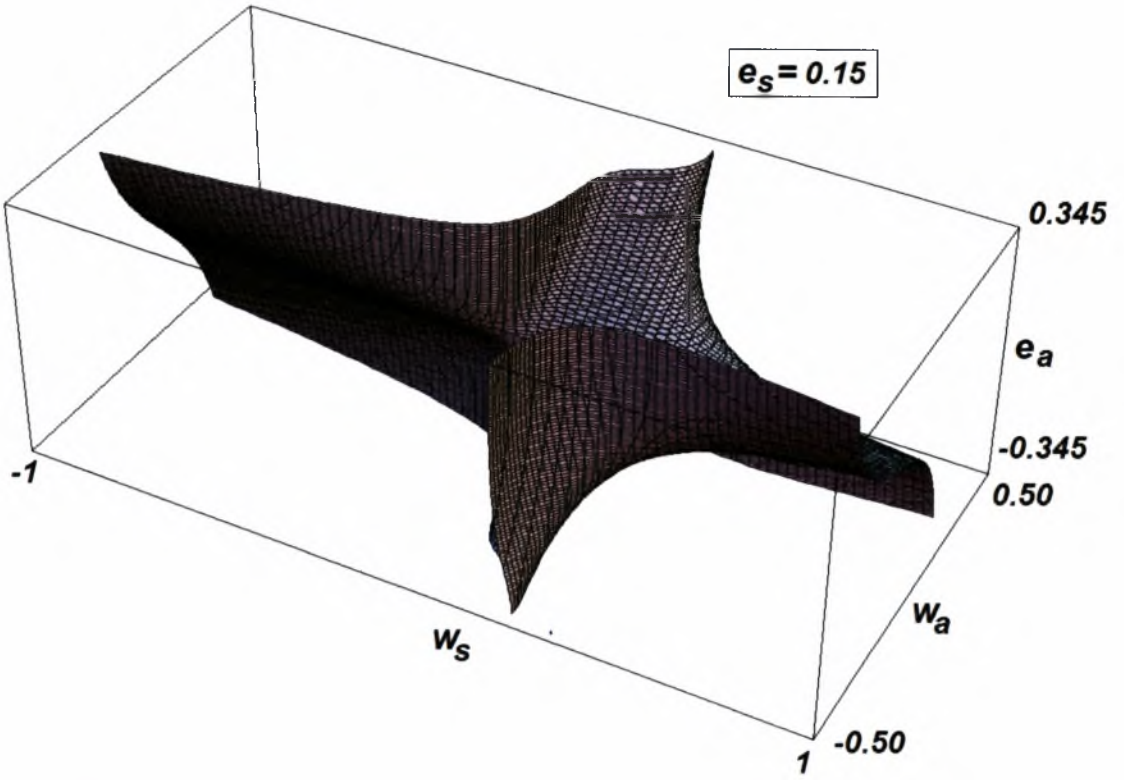
Σχήμα Β1.55 (συνεχίζεται)



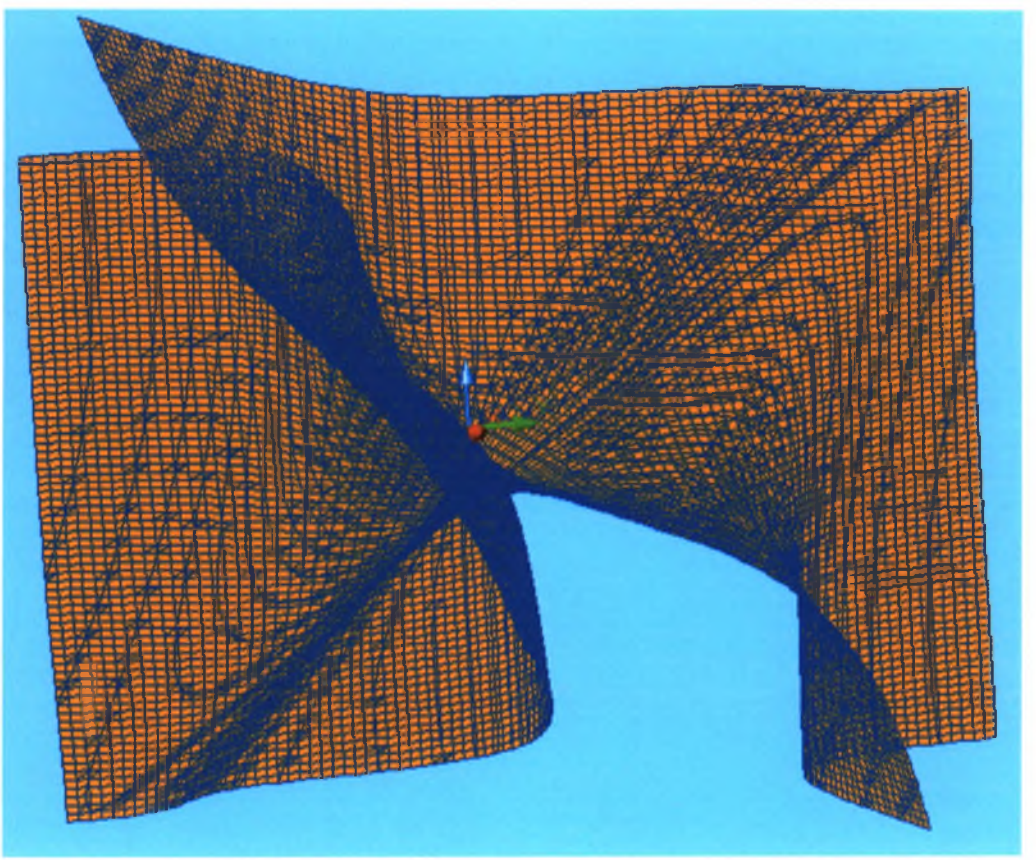
(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.55. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.10$.



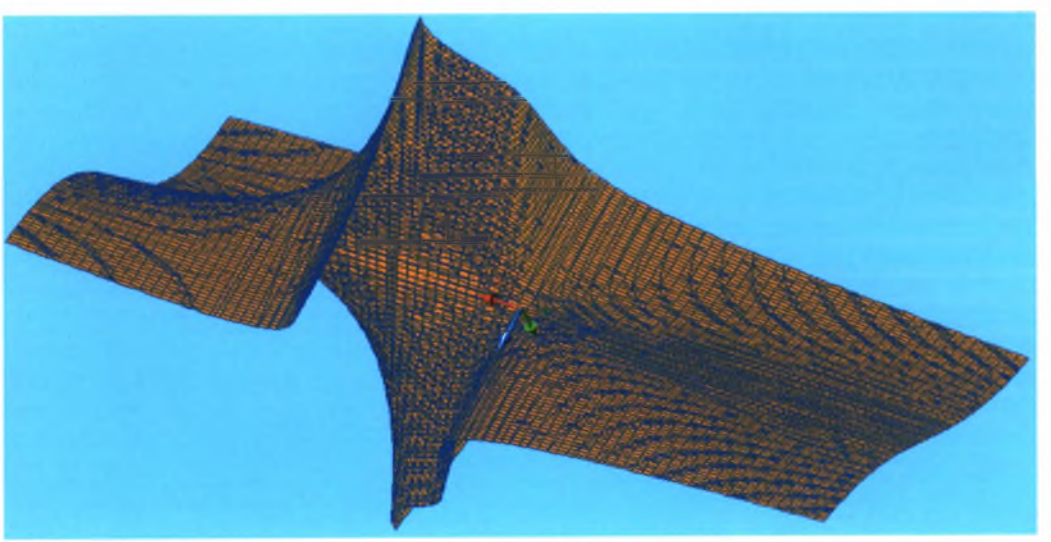
(α) *Προϊόν του Mathematica*



(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

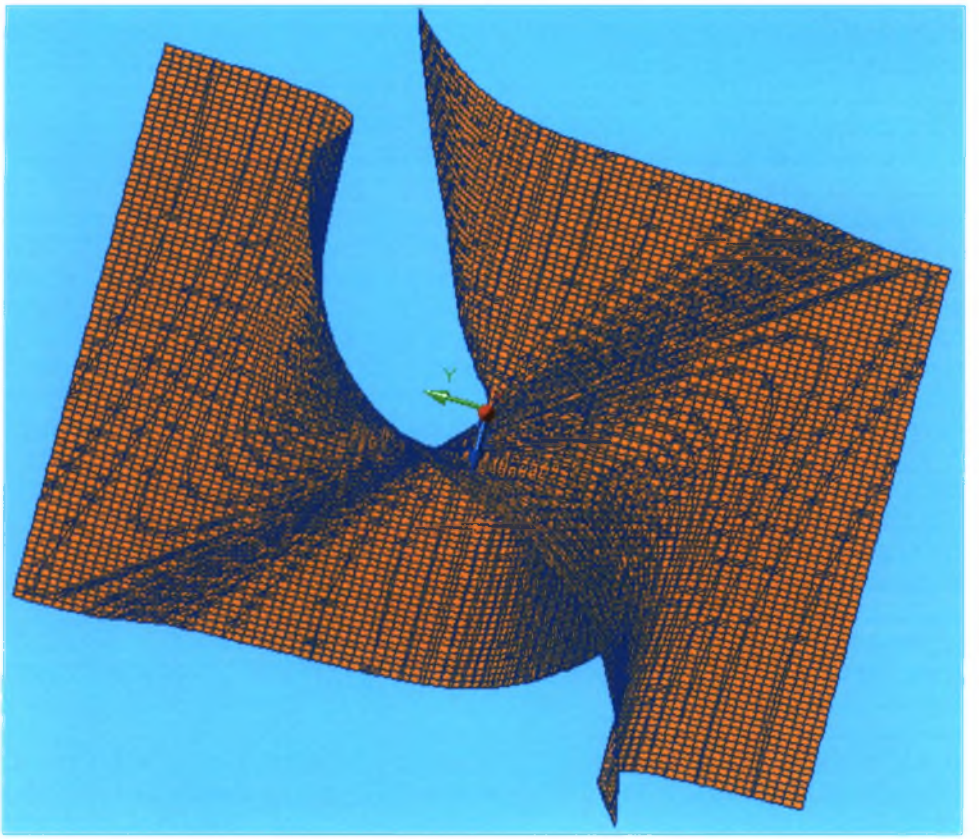
Σχήμα Β1.56 (συνεχίζεται)

(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



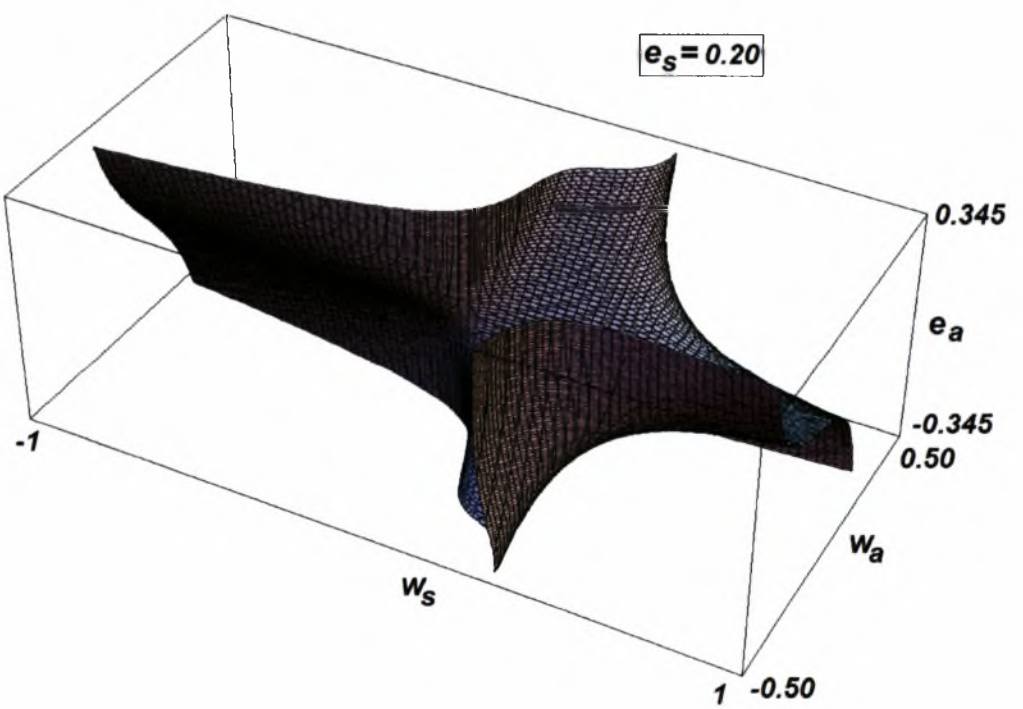
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.56 (συνεχίζεται)



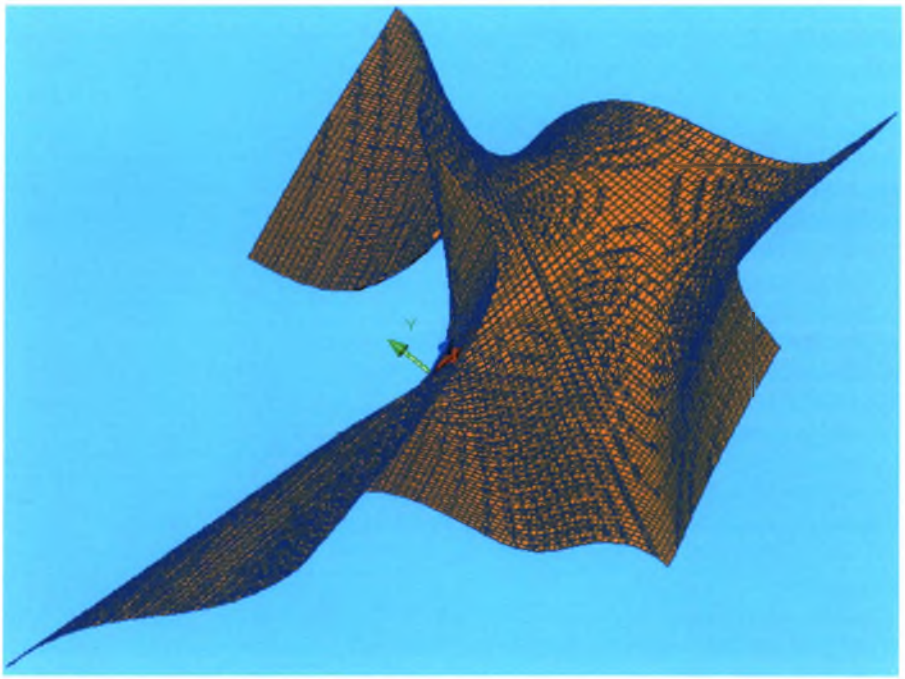
(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.56. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.15$.

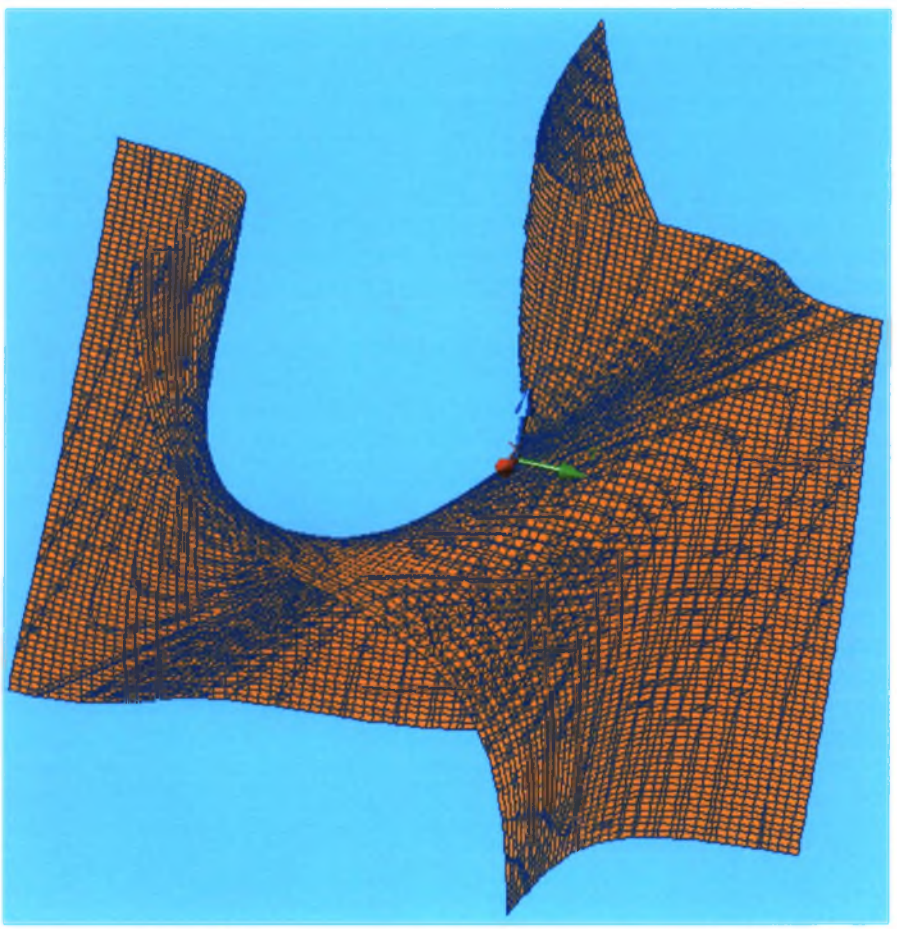


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.57 (συνεχίζεται)

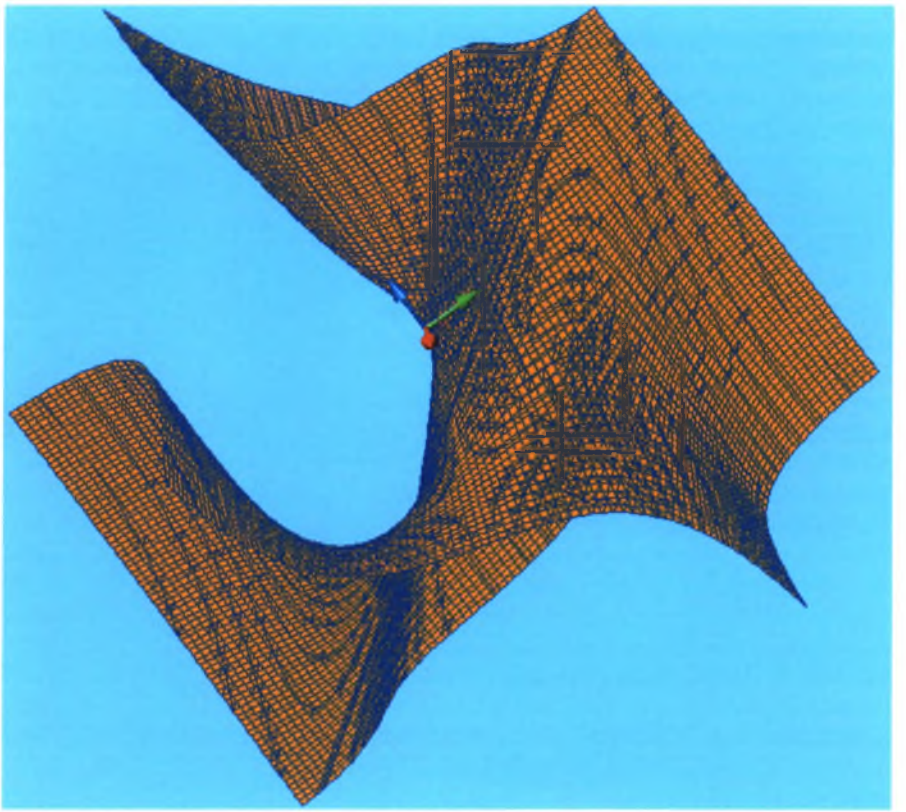


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

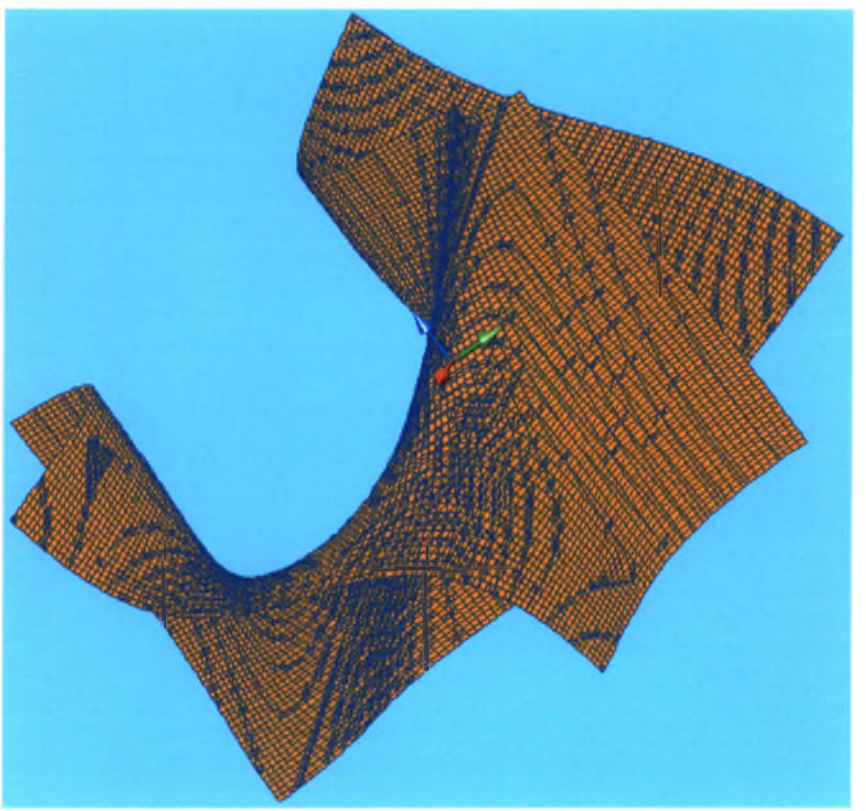


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.57 (συνεχίζεται)

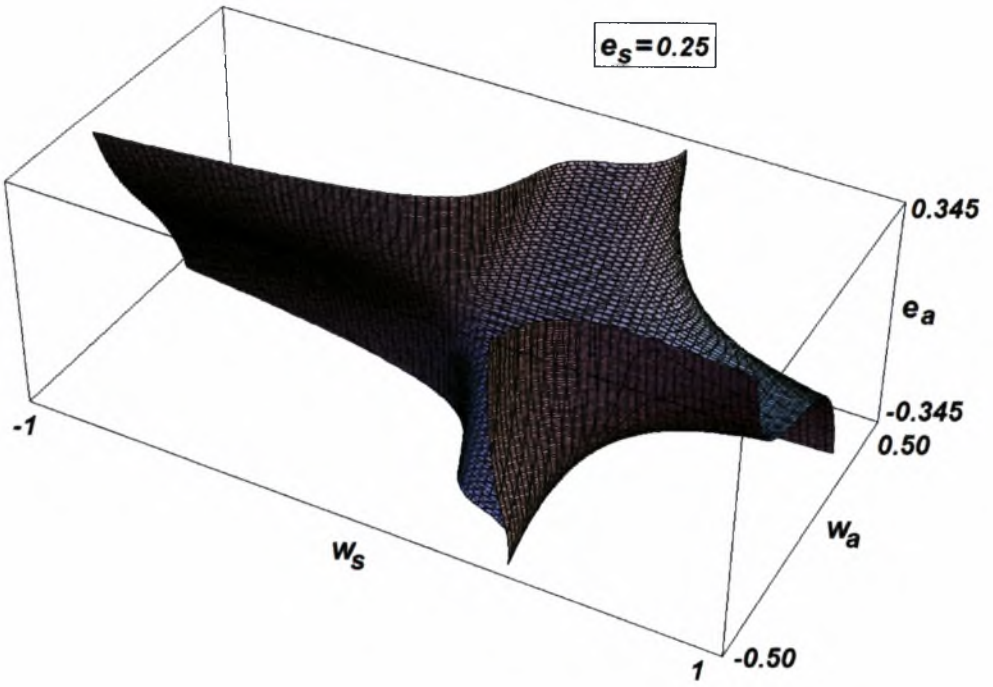


(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

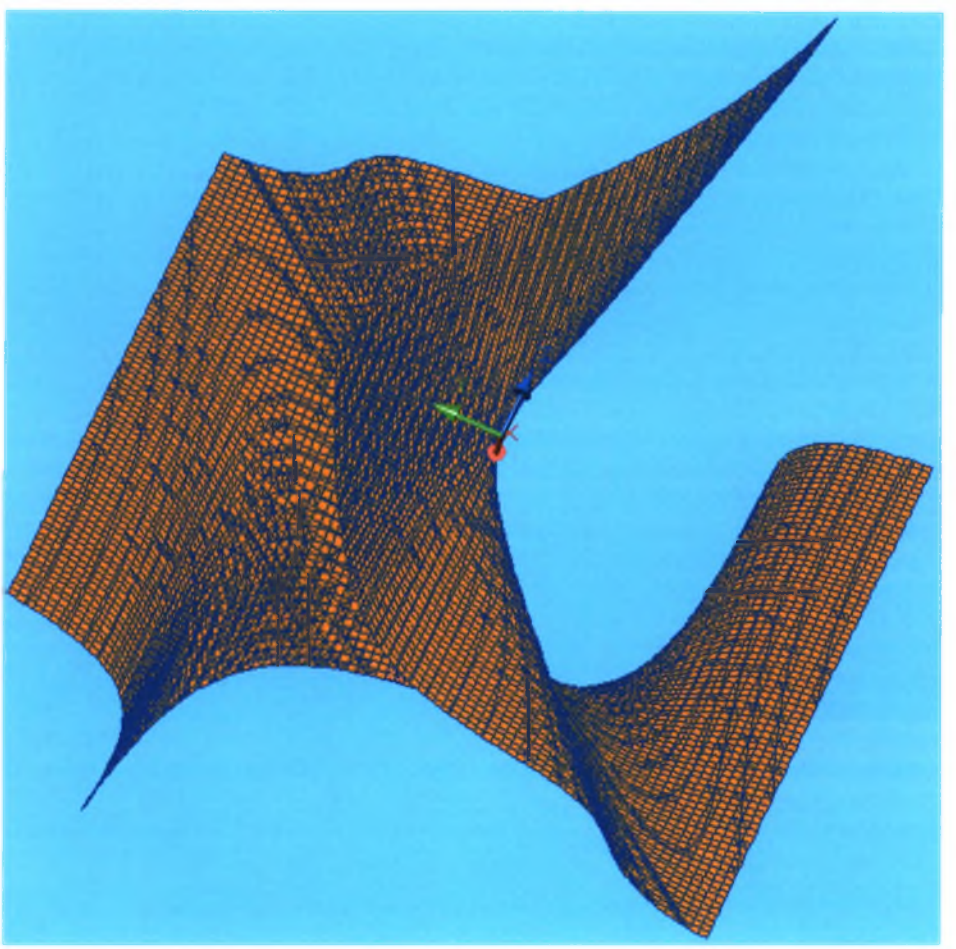


(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.57. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.20$.

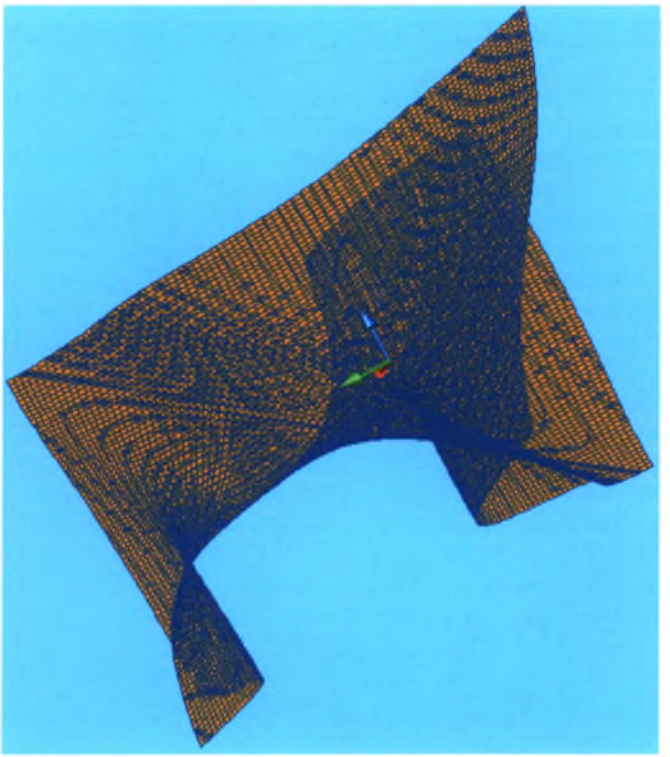


(α) *Προϊόν του Mathematica*

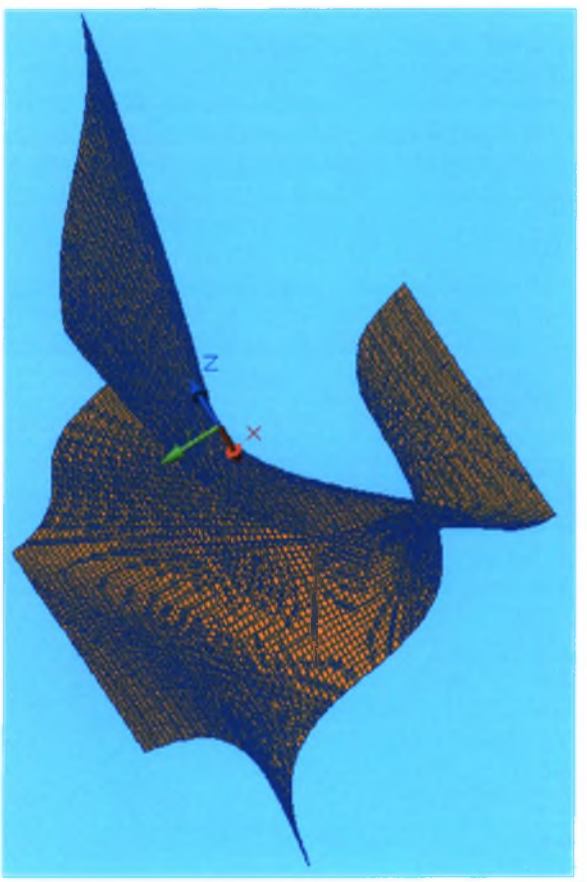


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.58 (συνεχίζεται)

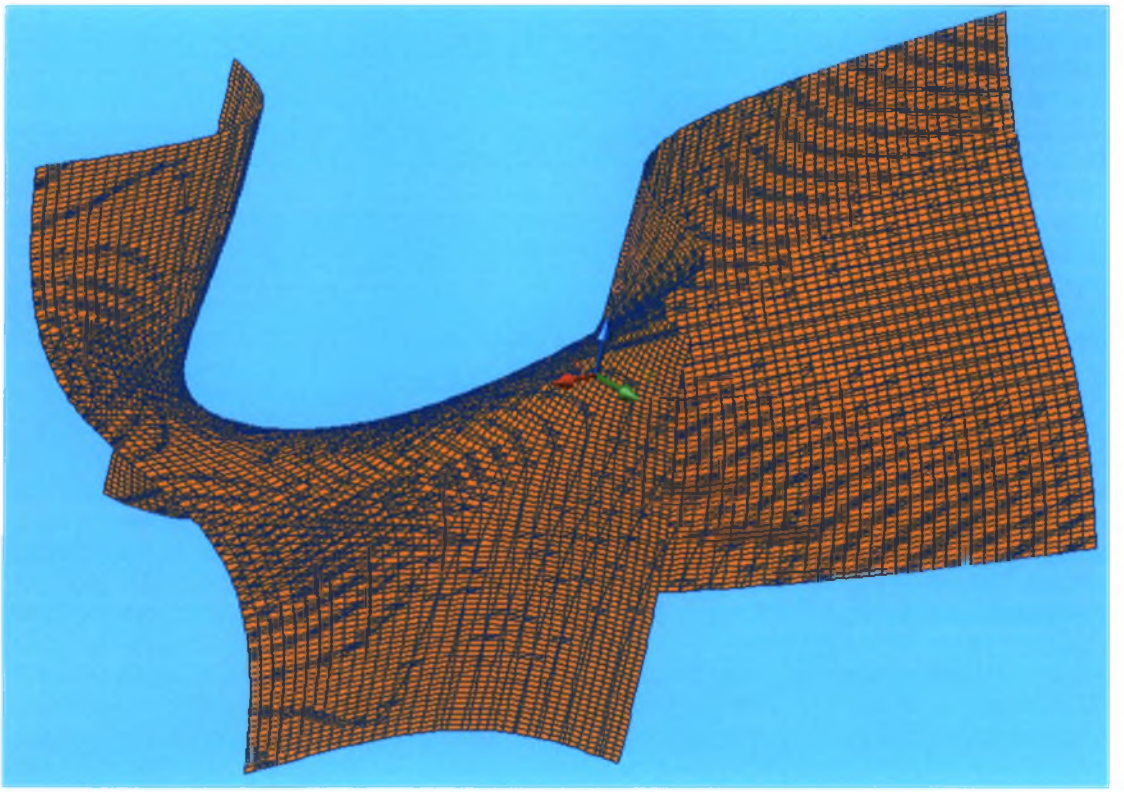


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



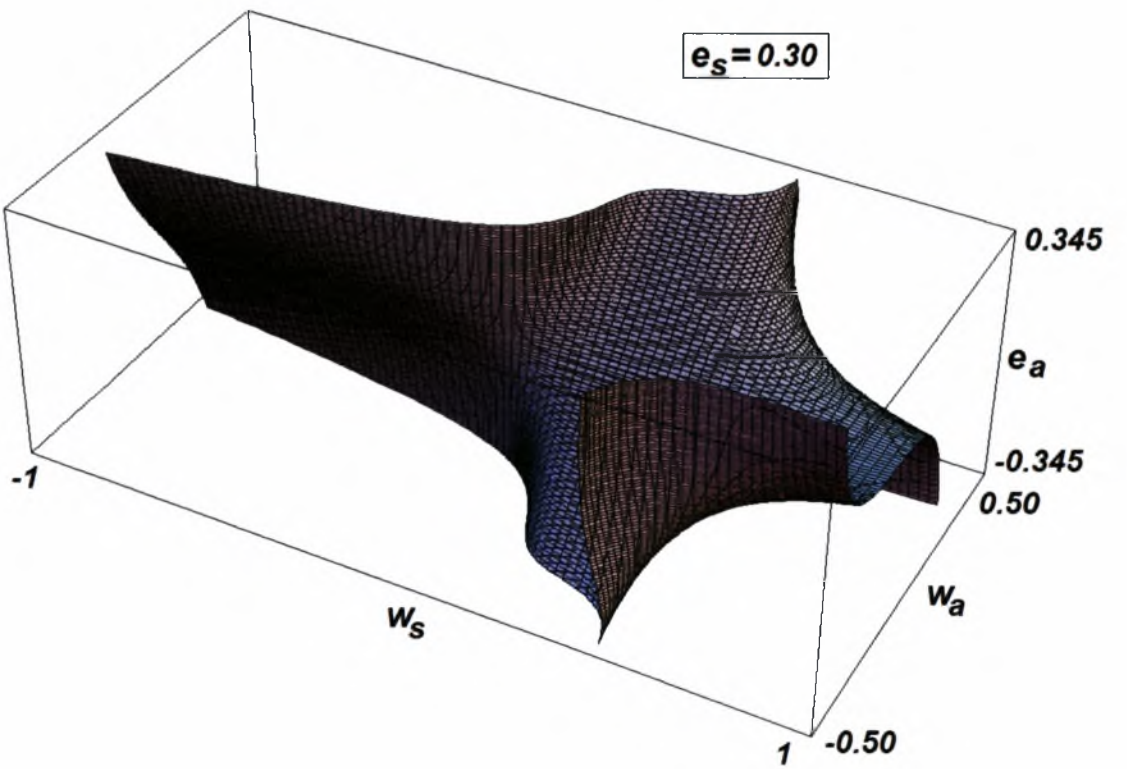
(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.58 (συνεχίζεται)



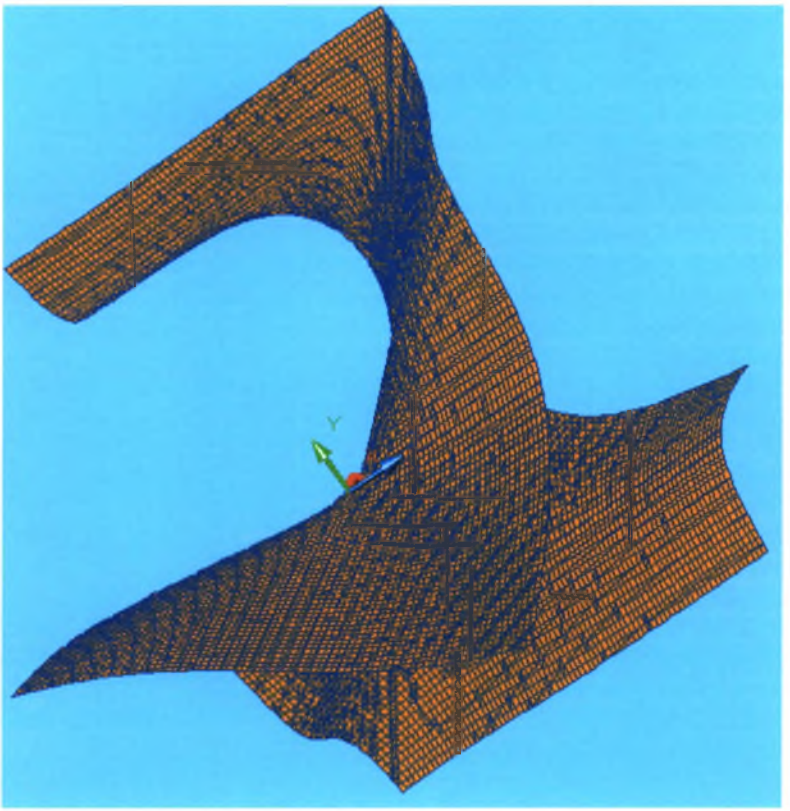
(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.58. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.25$.

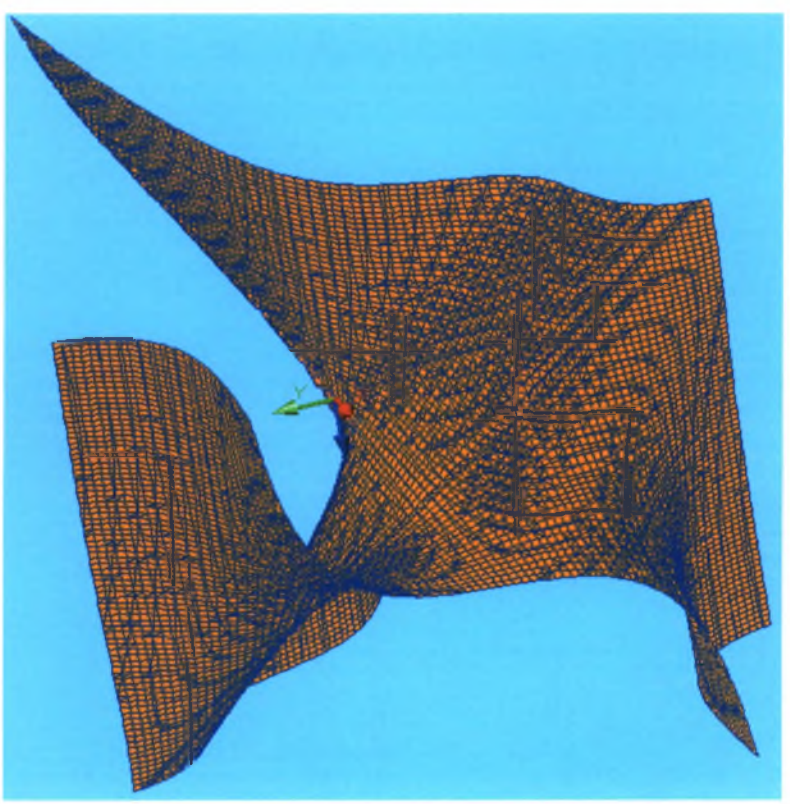


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.59 (συνεχίζεται)

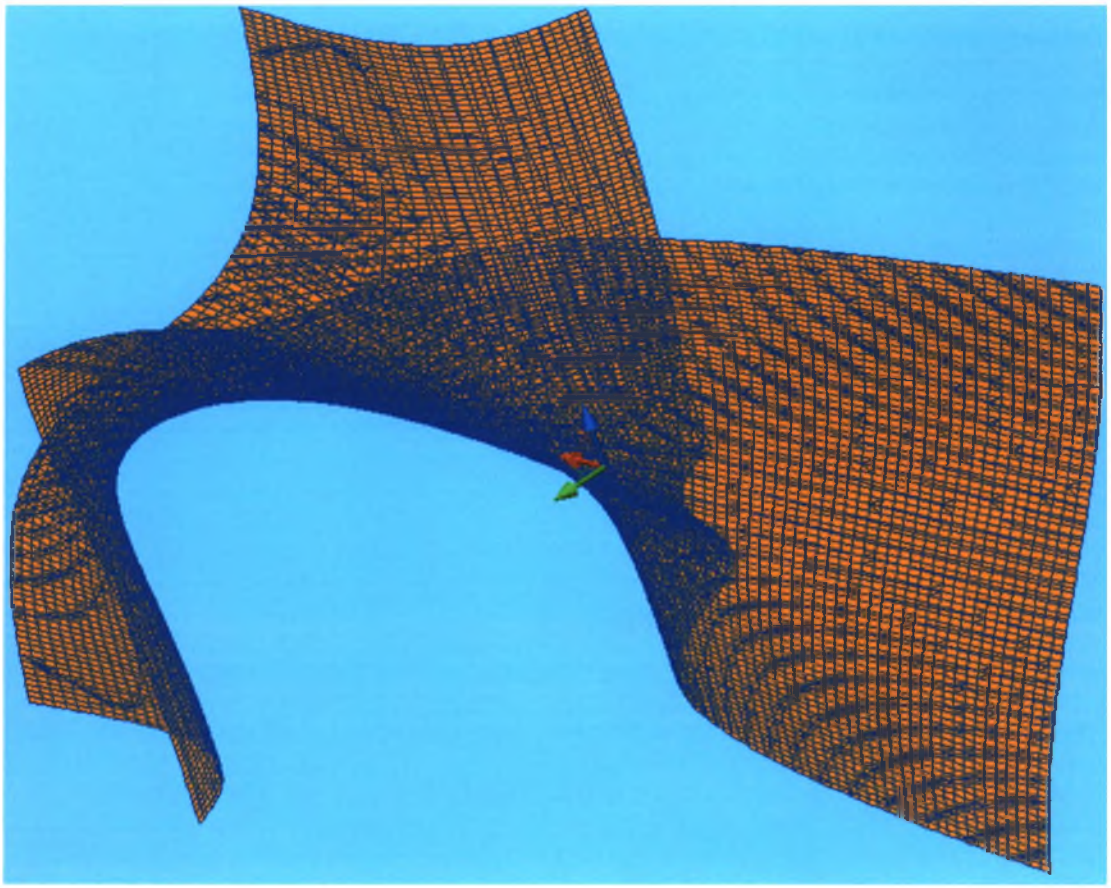


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

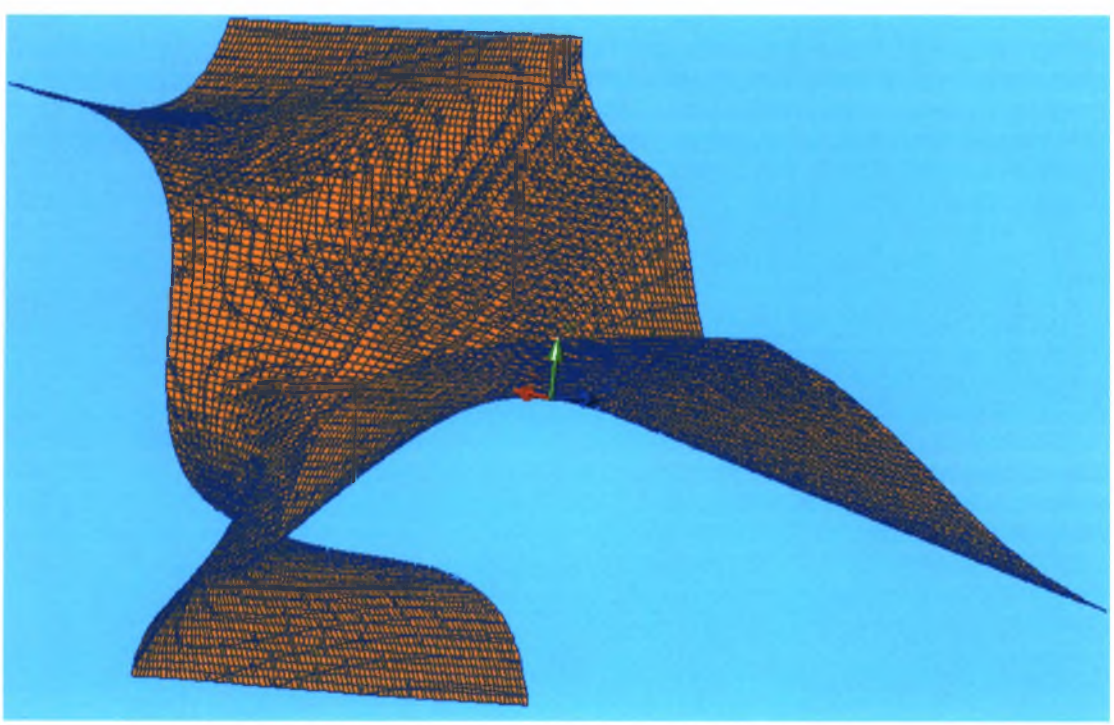


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.59 (συνεχίζεται)

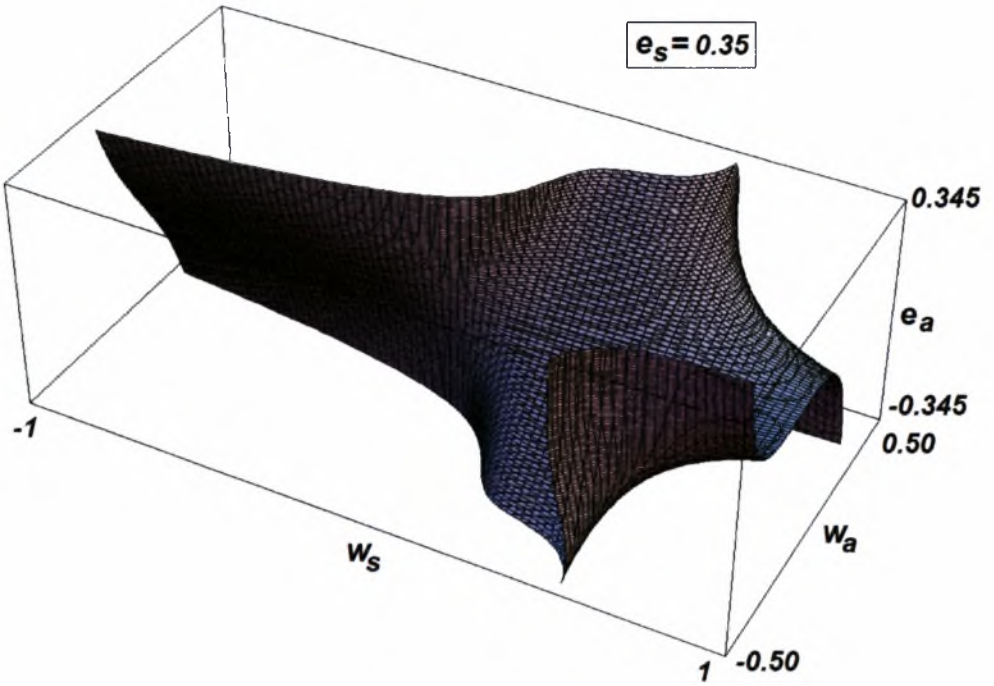


(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*



(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

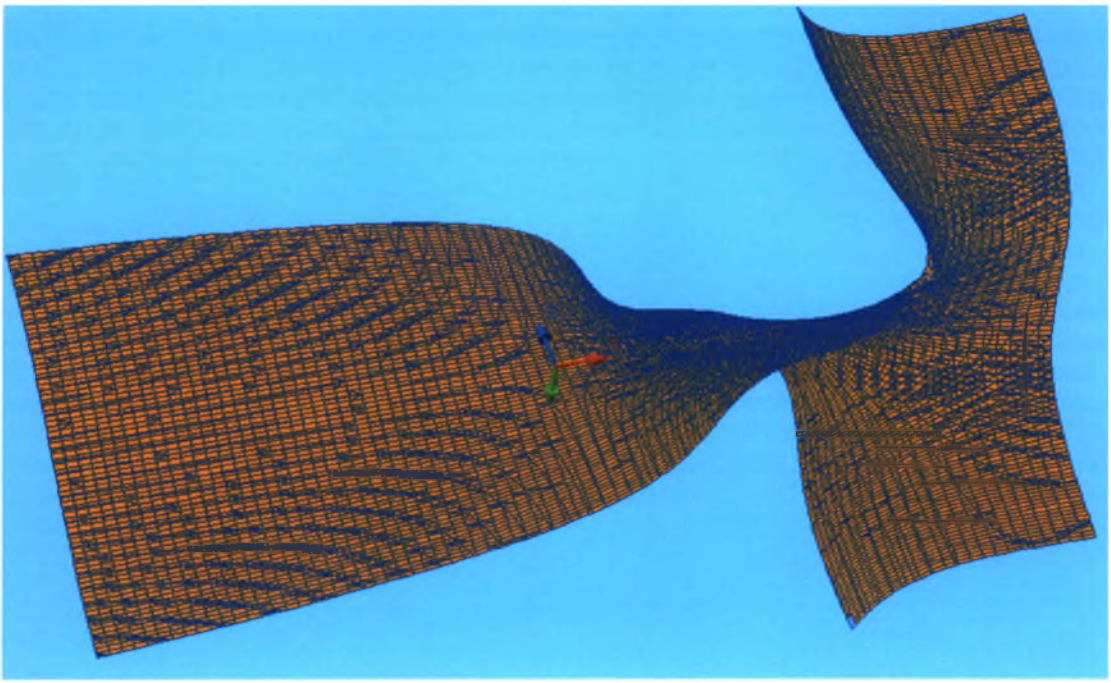
Σχήμα Β1.59. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.30$.



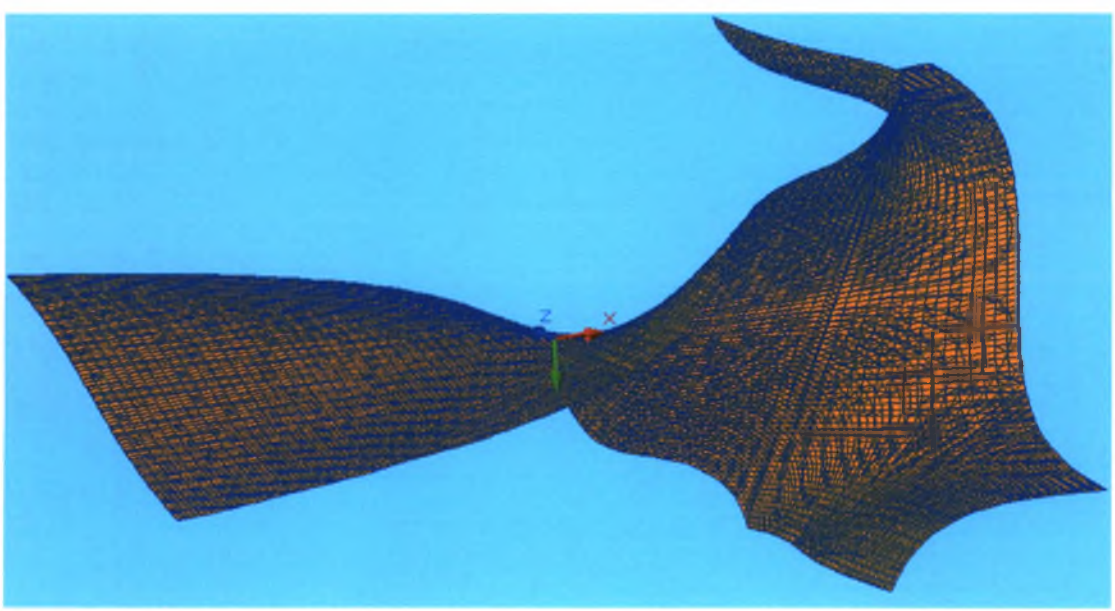
(α) *Προϊόν του Mathematica*

(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.60 (συνεχίζεται)

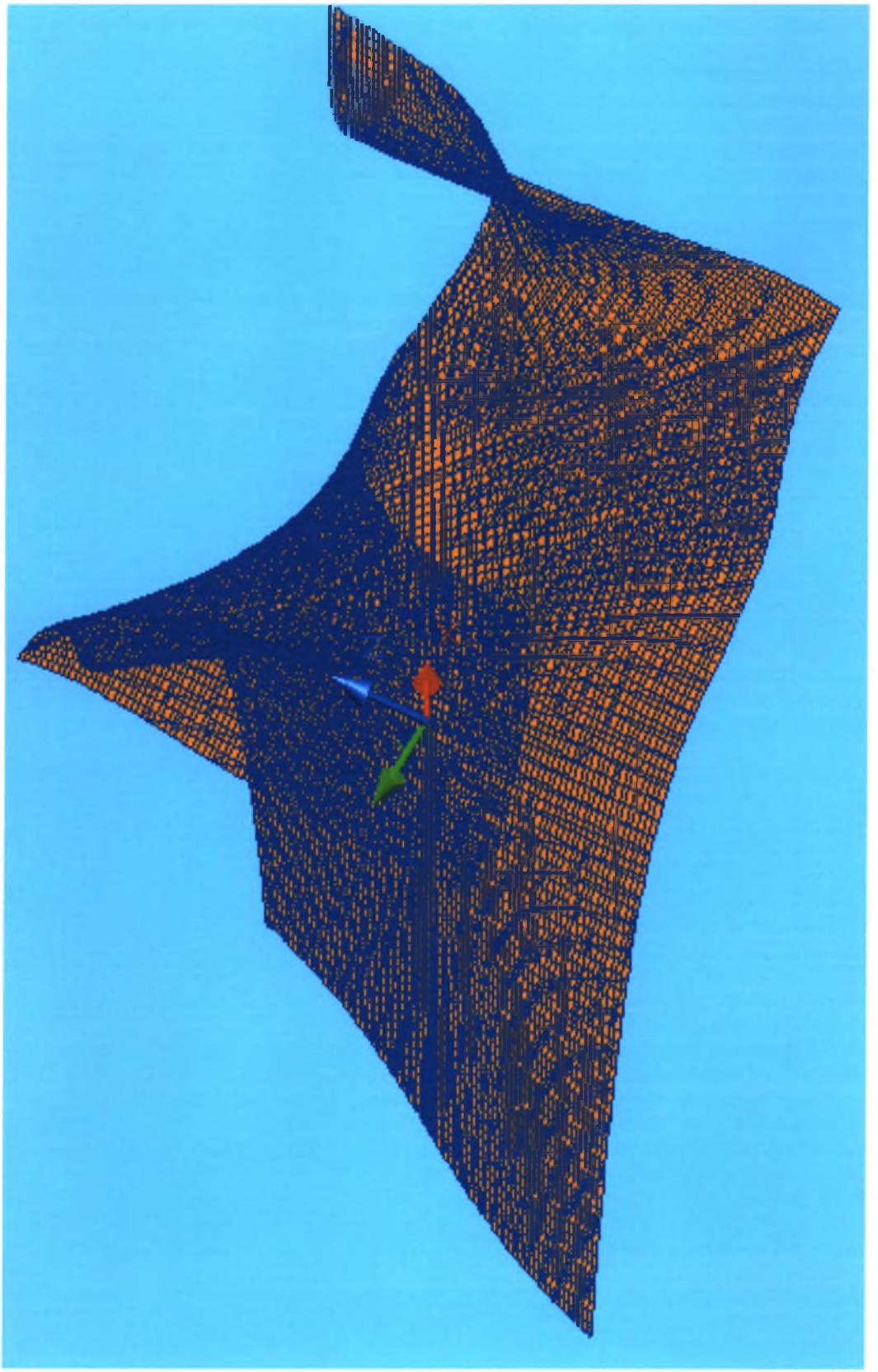


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



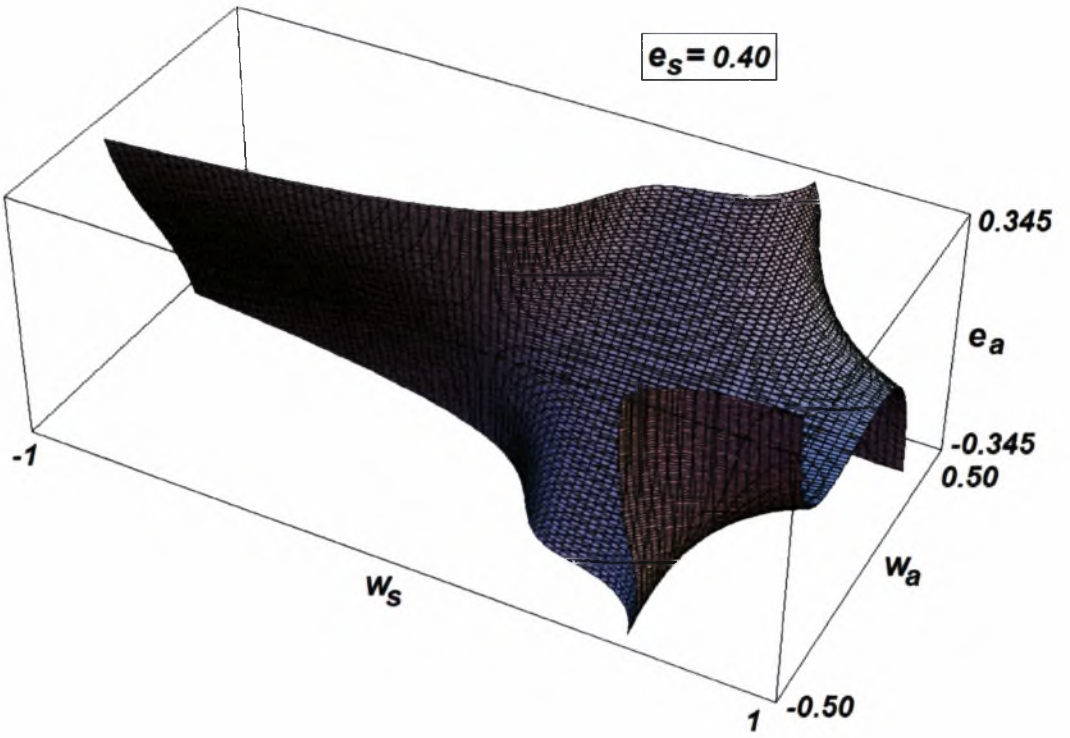
(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.60 (συνεχίζεται)

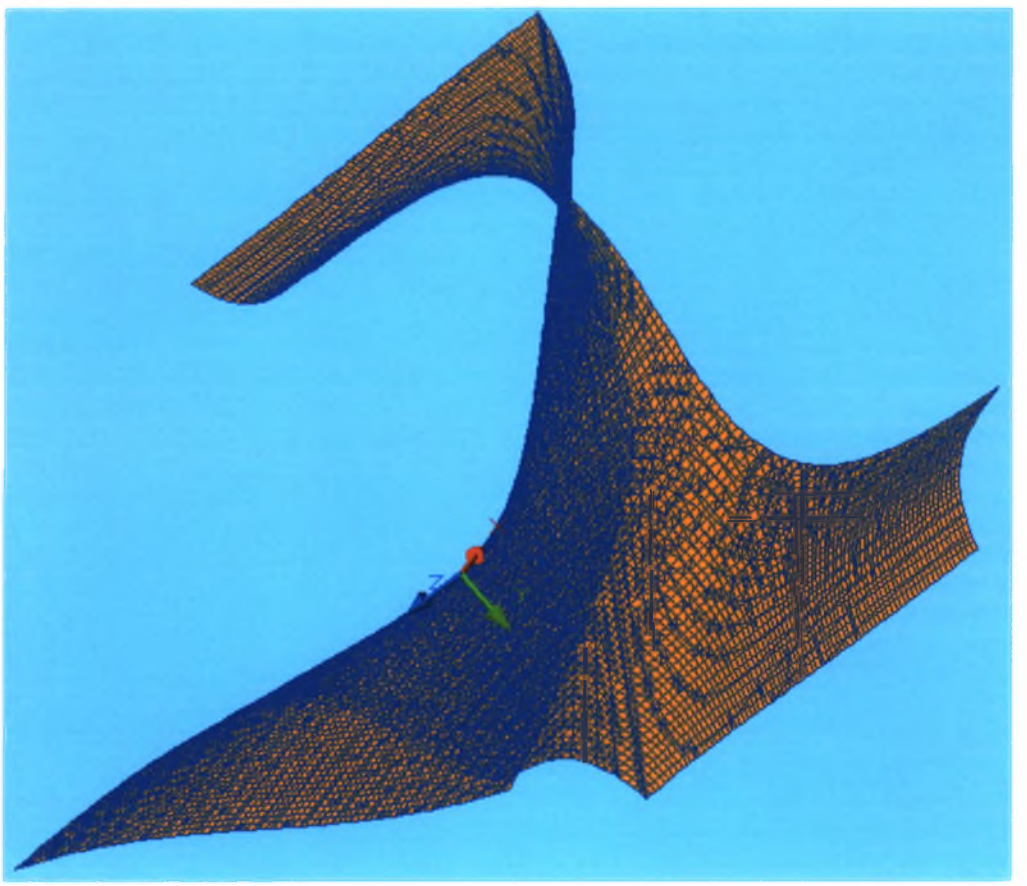


(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.60. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.35$.

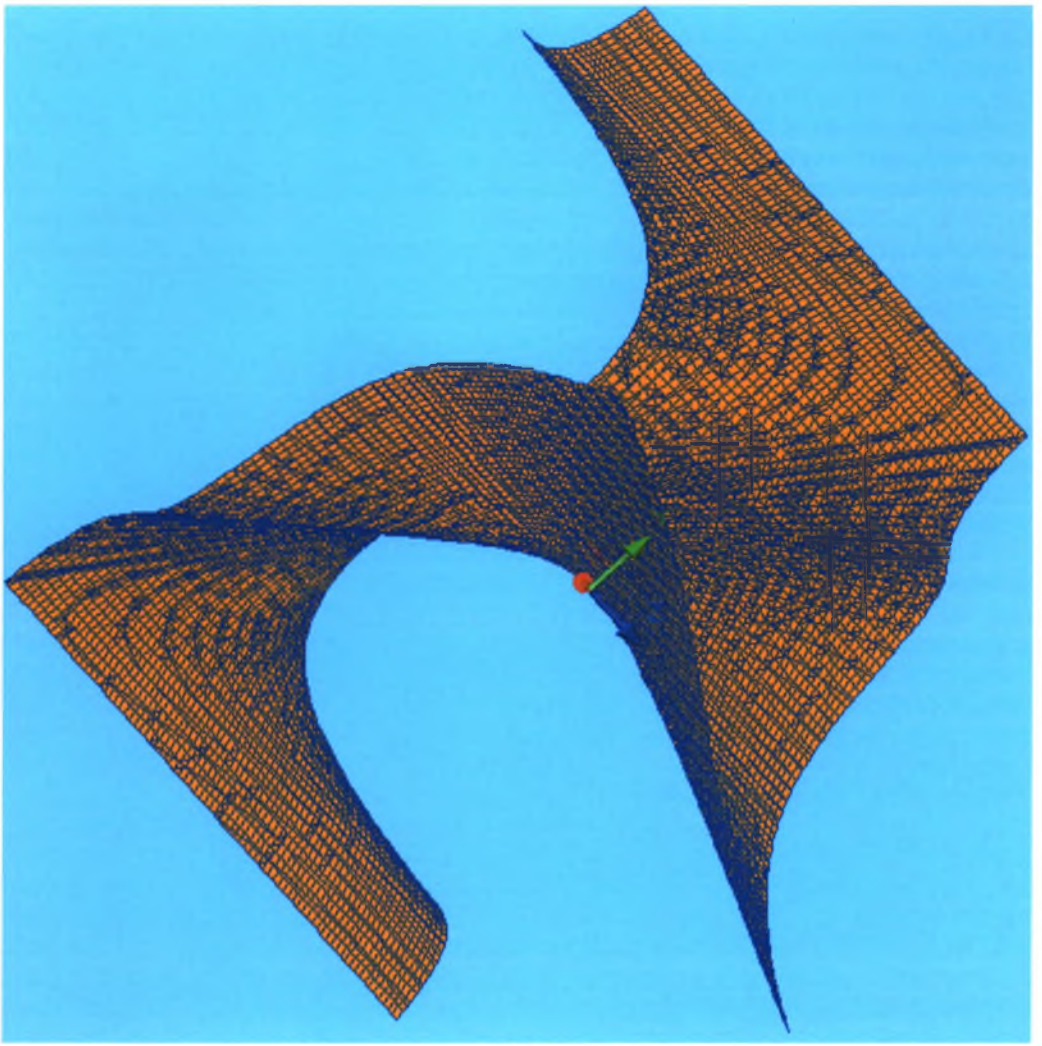


(α) *Προϊόν του Mathematica*

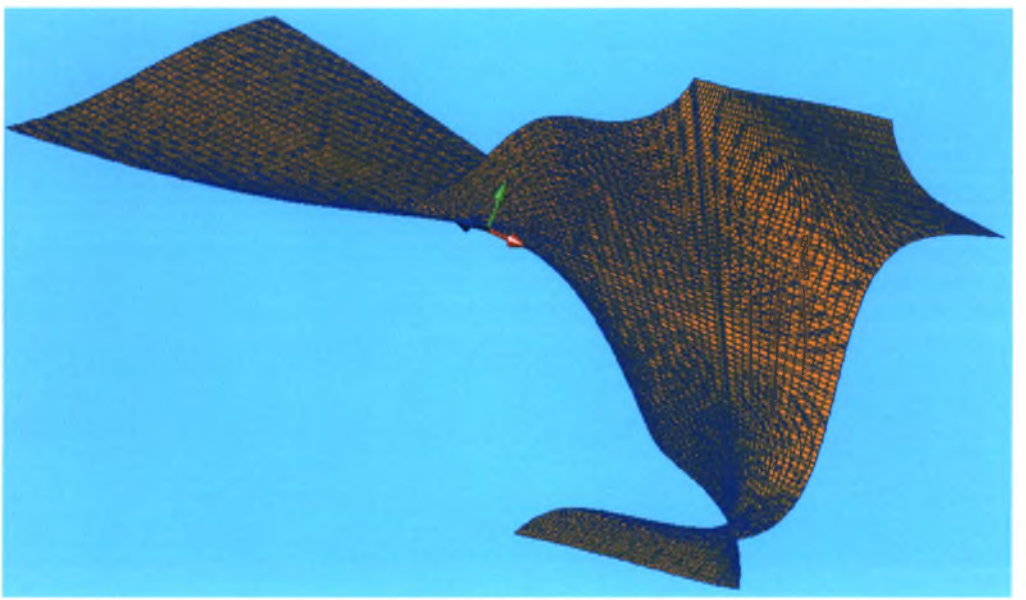


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.61 (συνεχίζεται)

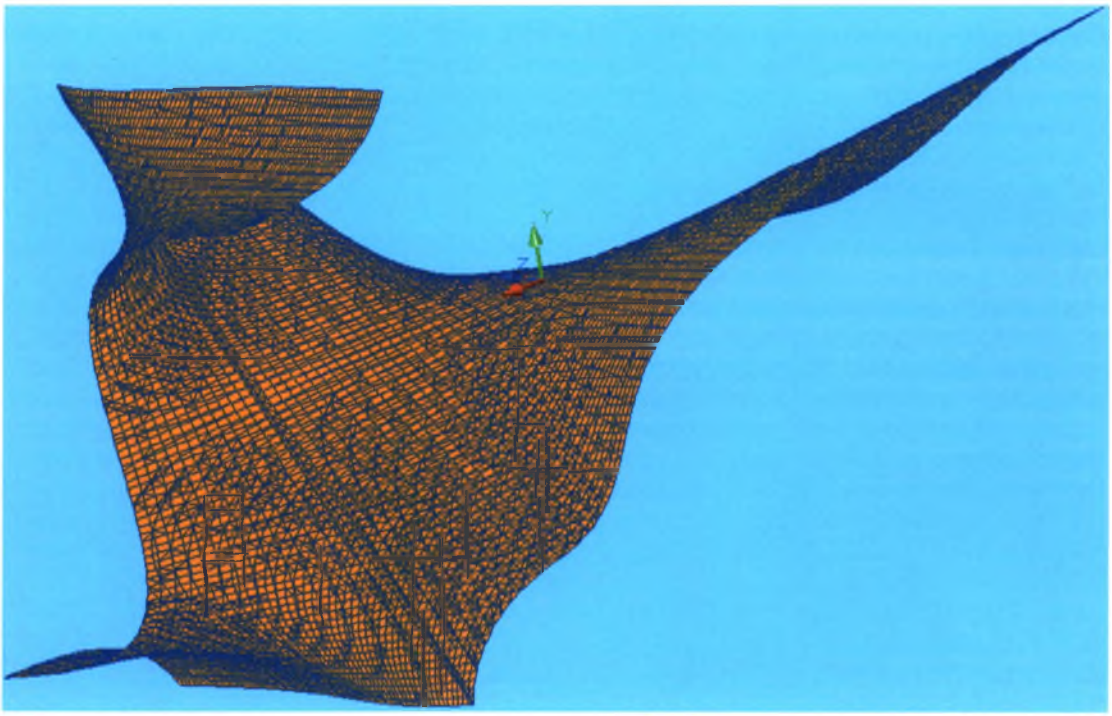


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



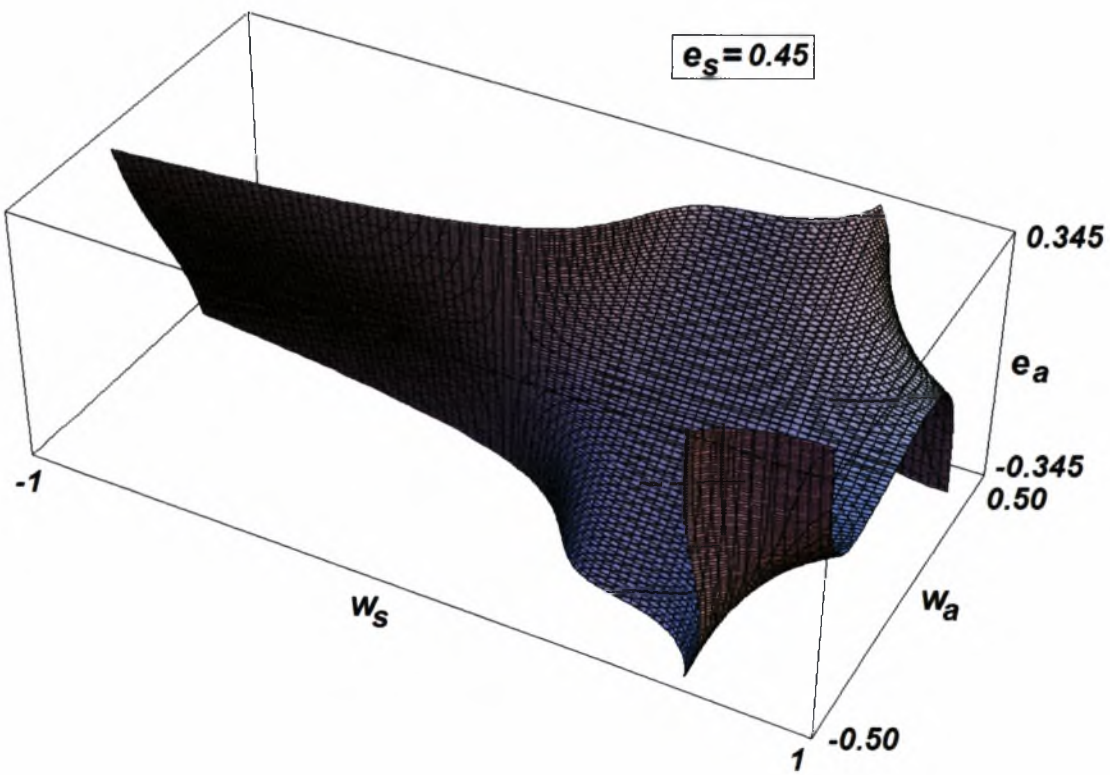
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.61 (συνεχίζεται)



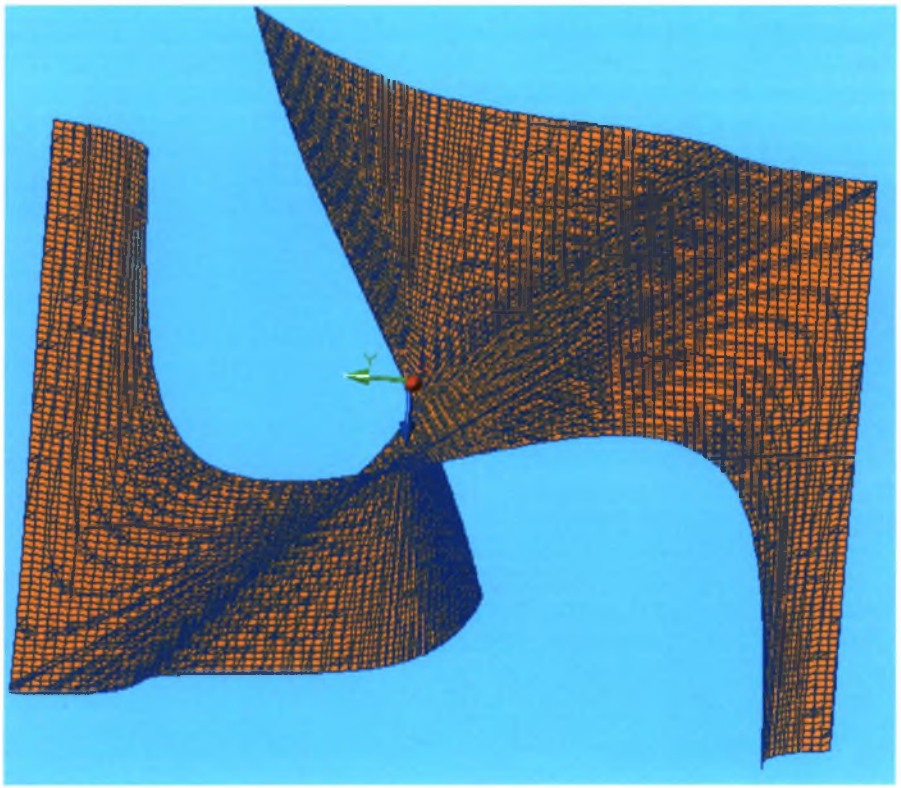
(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.61. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.40$.

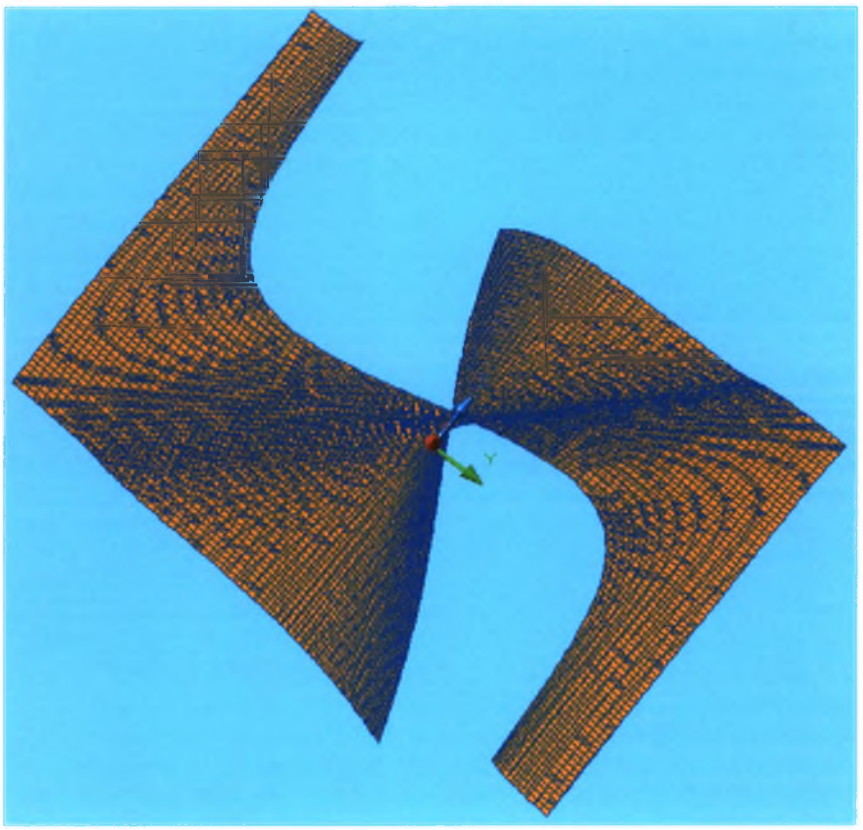


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.63 (συνεχίζεται)

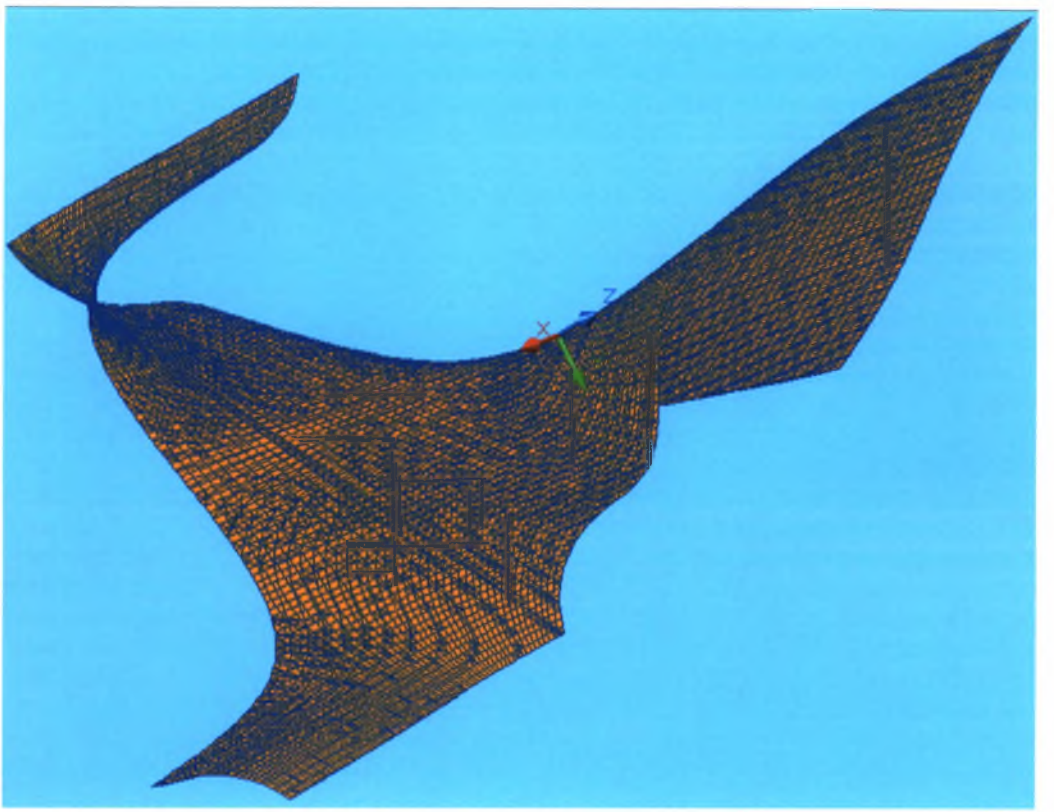


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

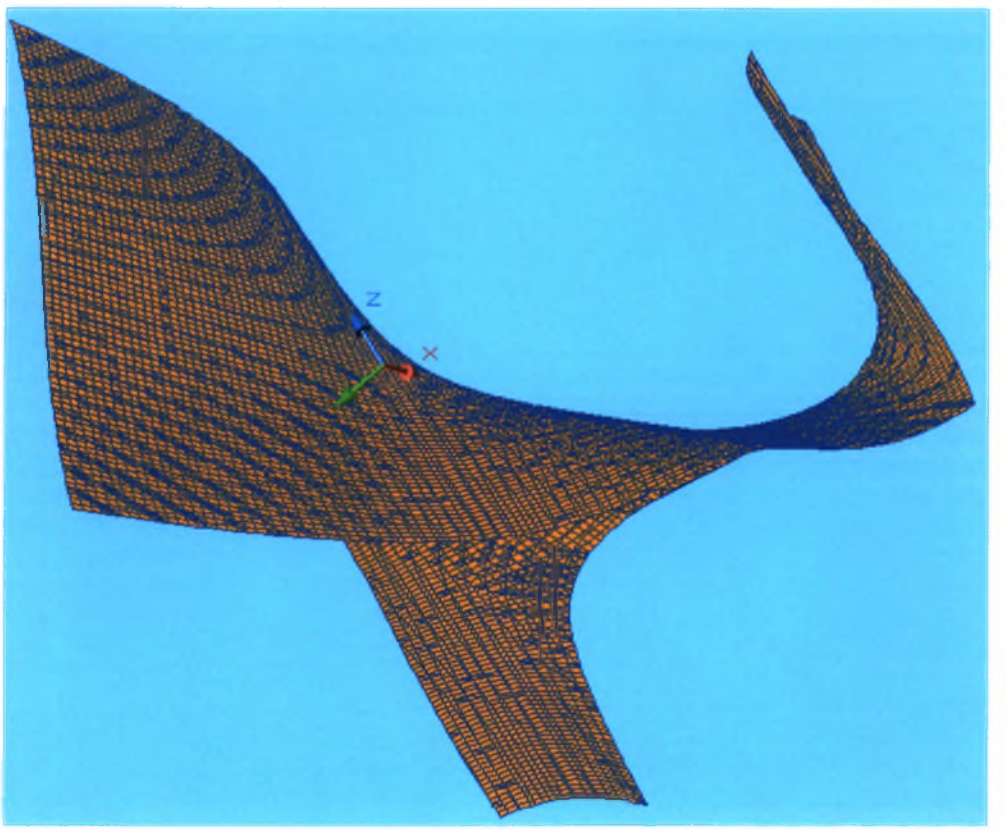


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.62 (συνεχίζεται)

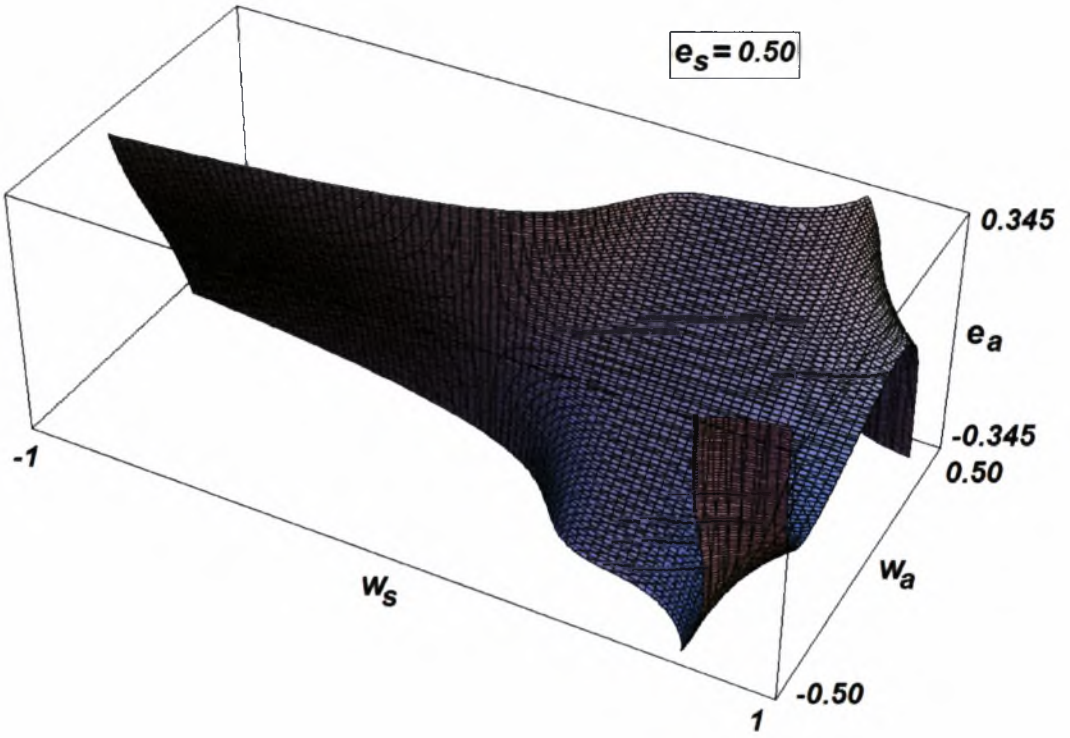


(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

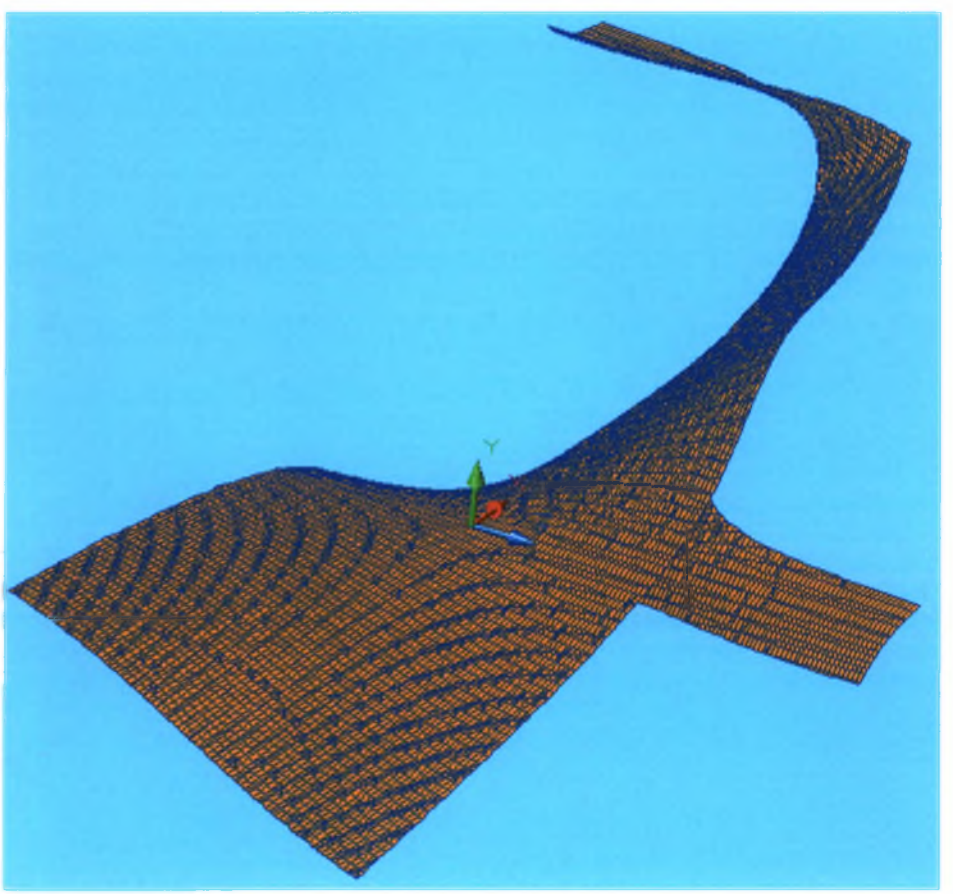


(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.62. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.45$.

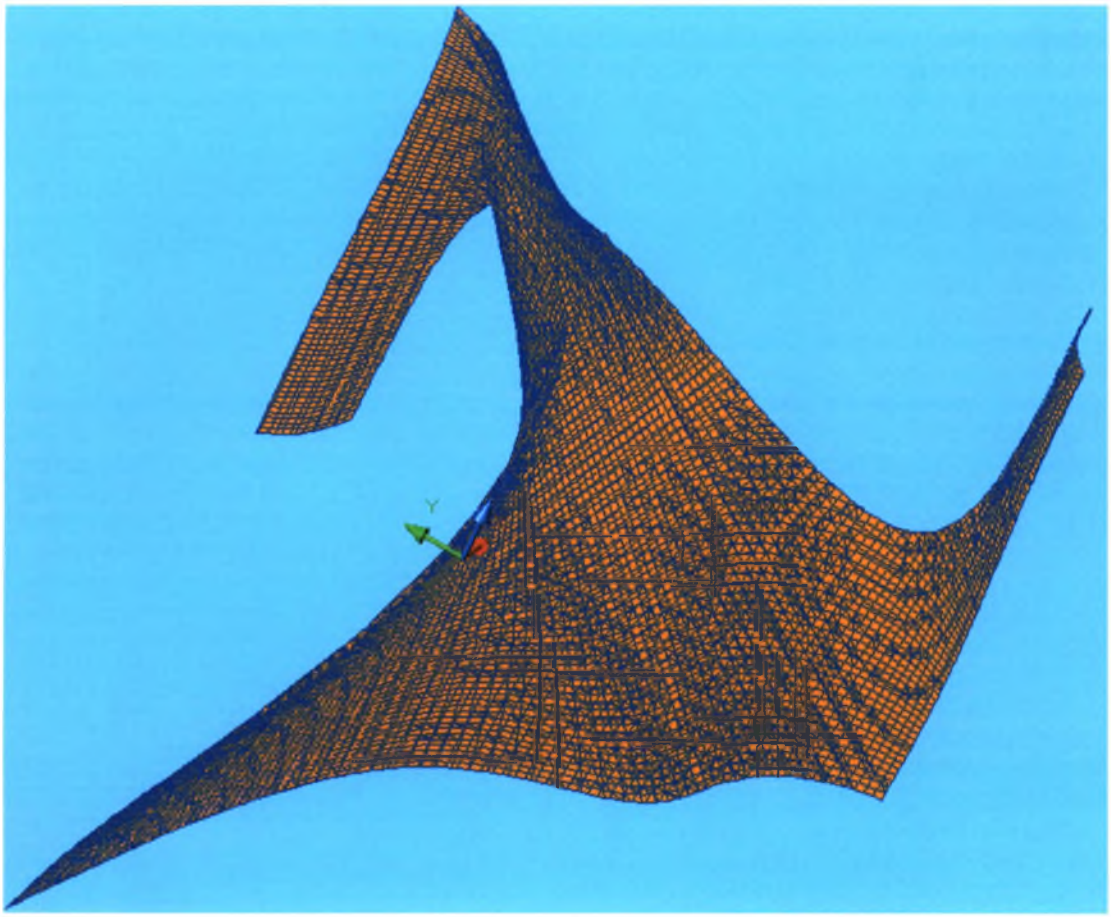


(α) *Προϊόν του Mathematica*

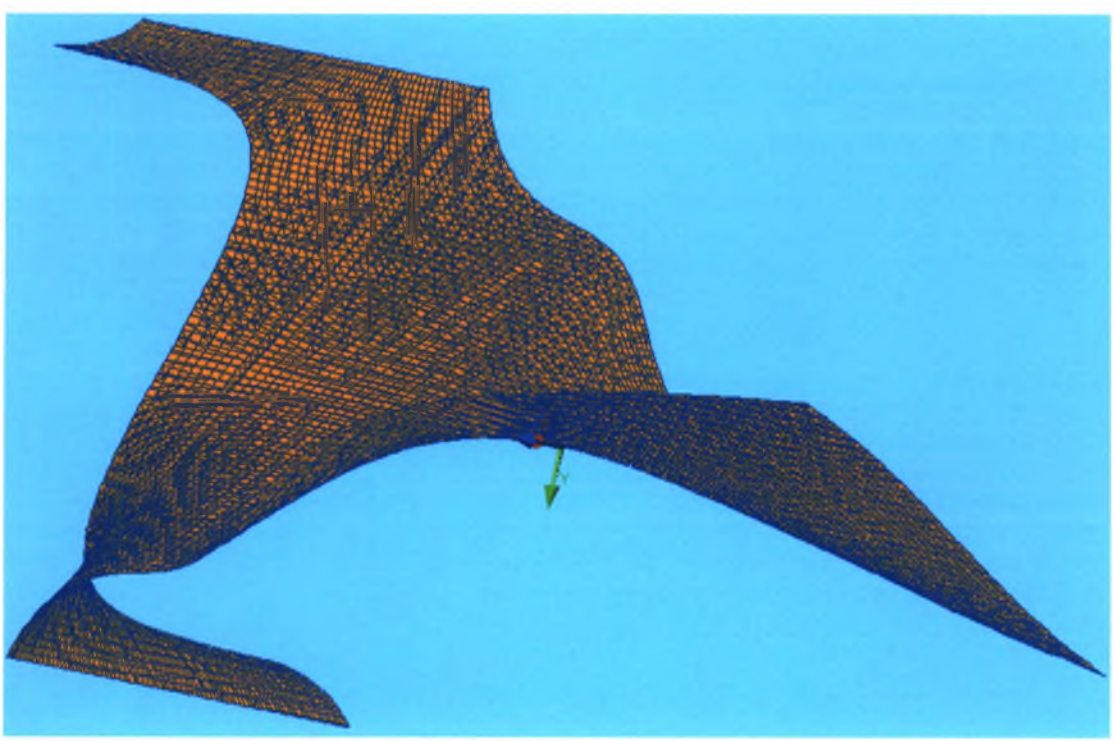


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.63 (συνεχίζεται)

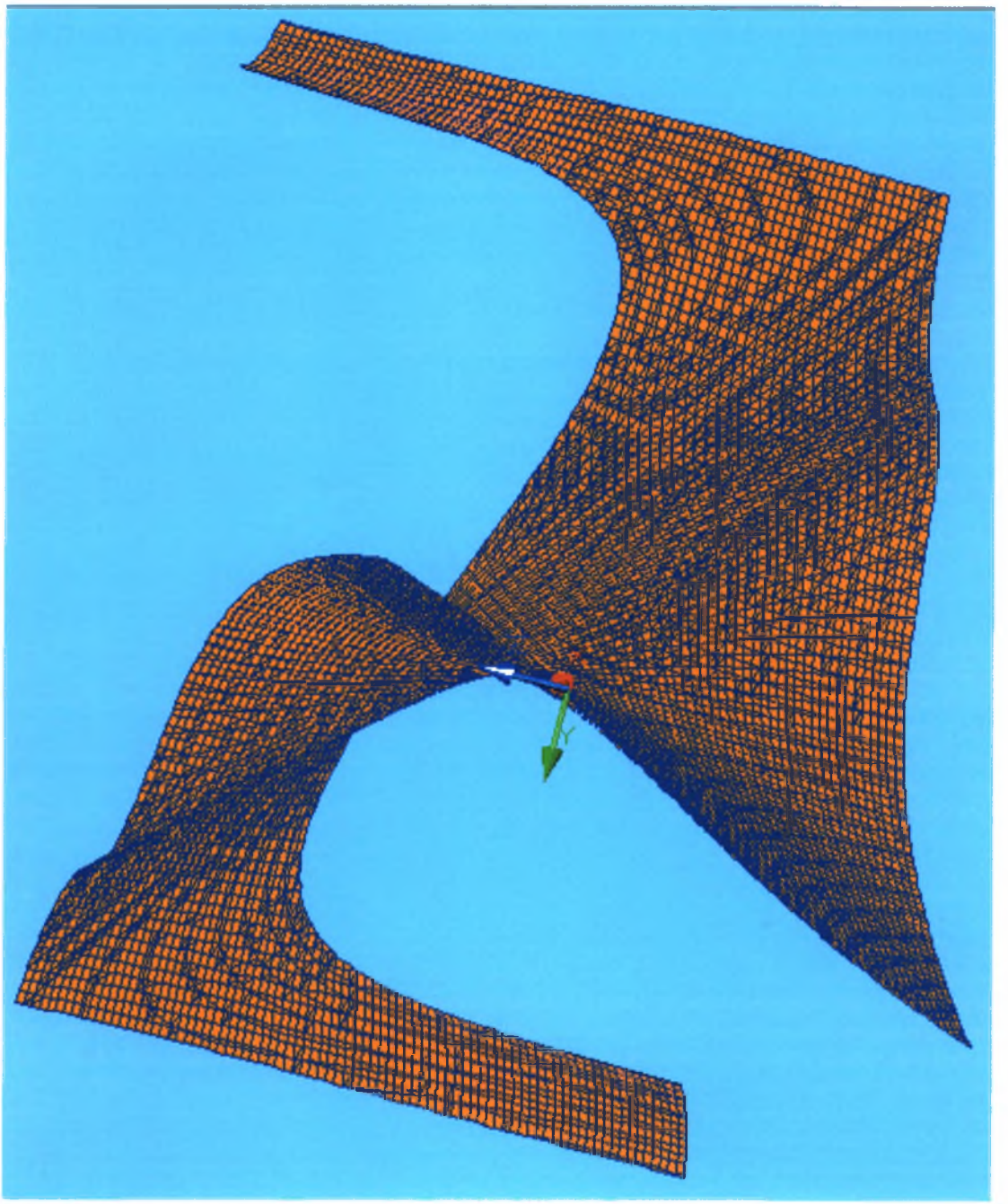


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



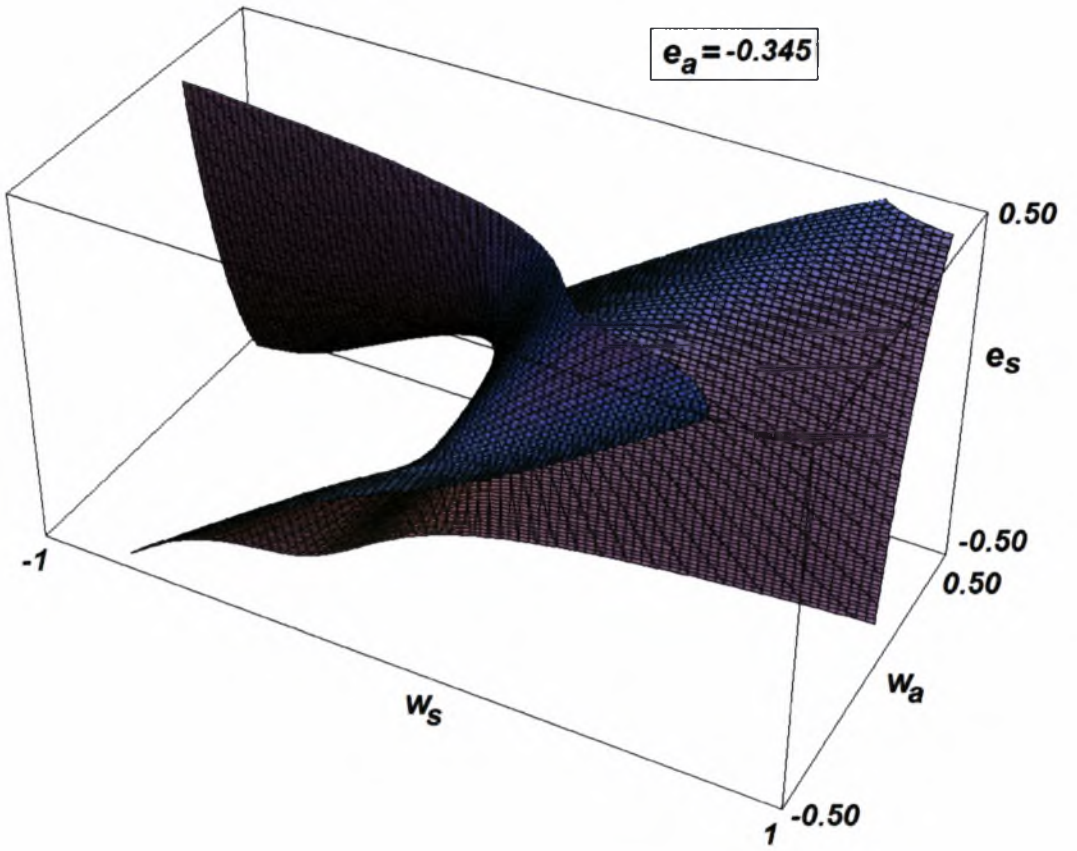
(δ) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.63 (συνεχίζεται)

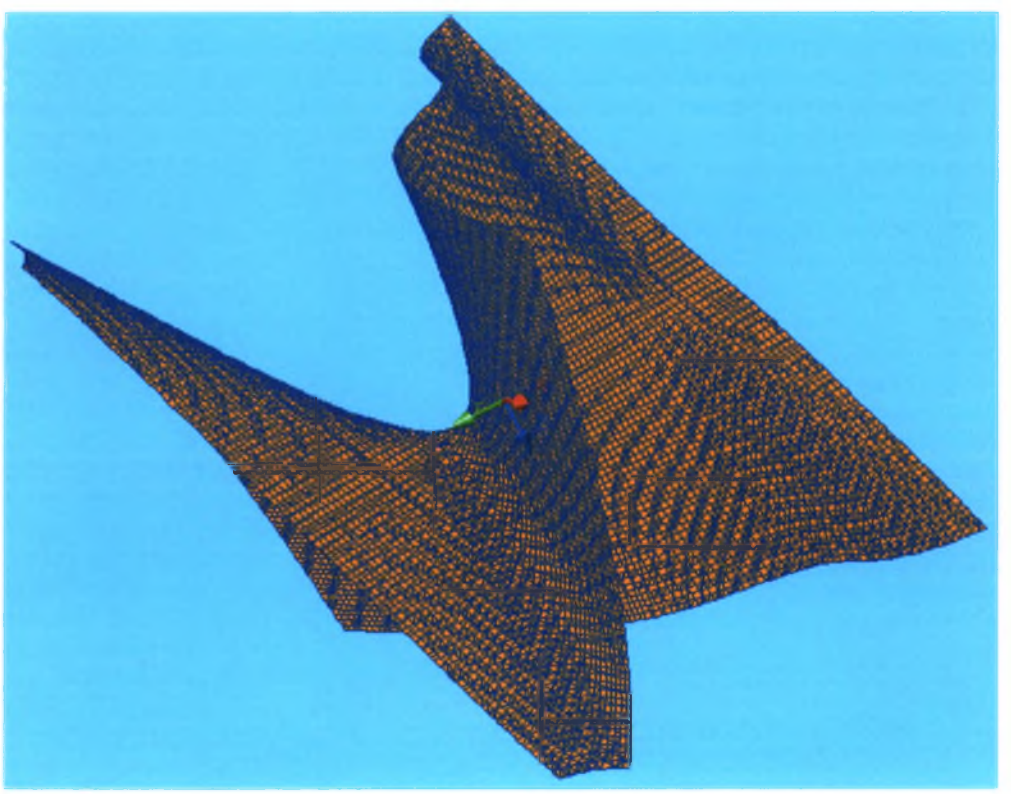


(ε) Τ*ρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.63. Ως Σχήμα Β1.42 αλλά για $e_s = 0.50$.

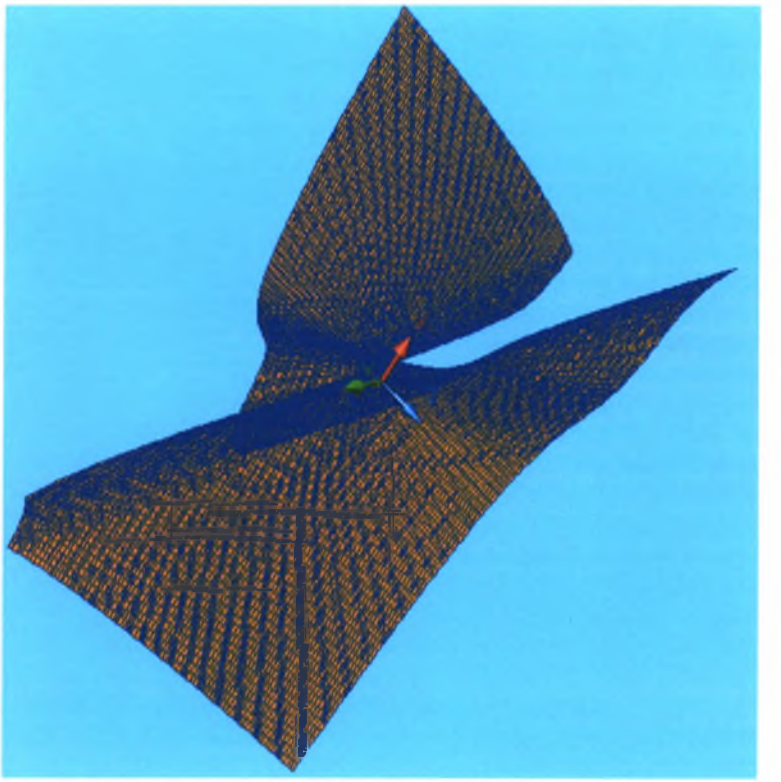


(α) *Προϊόν του Mathematica*



(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

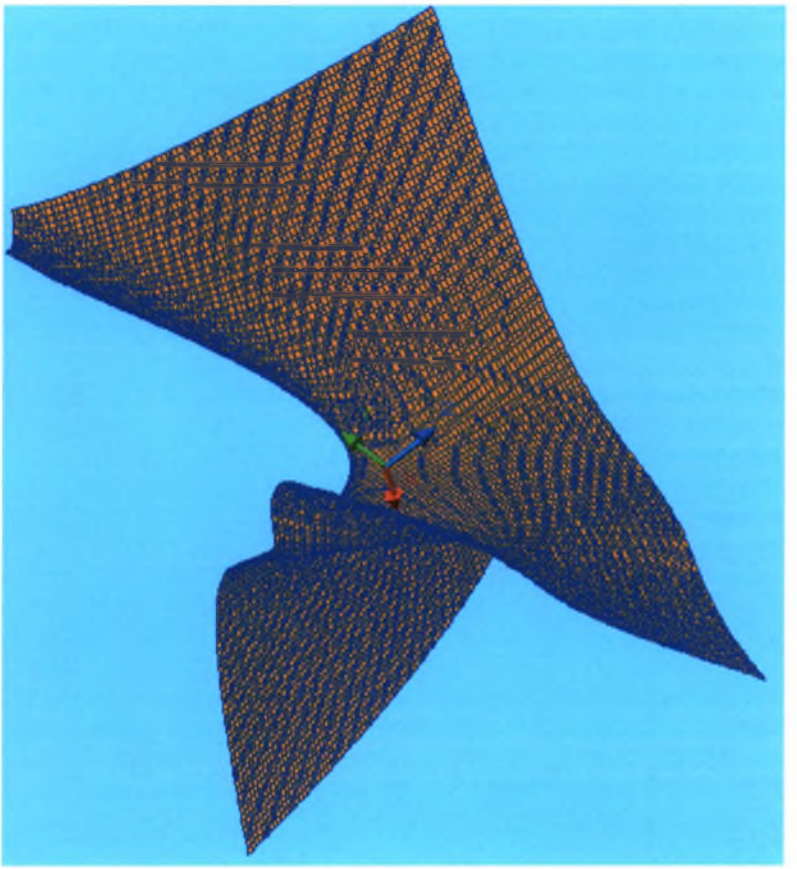
Σχήμα Β1.64 (συνεχίζεται)



(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

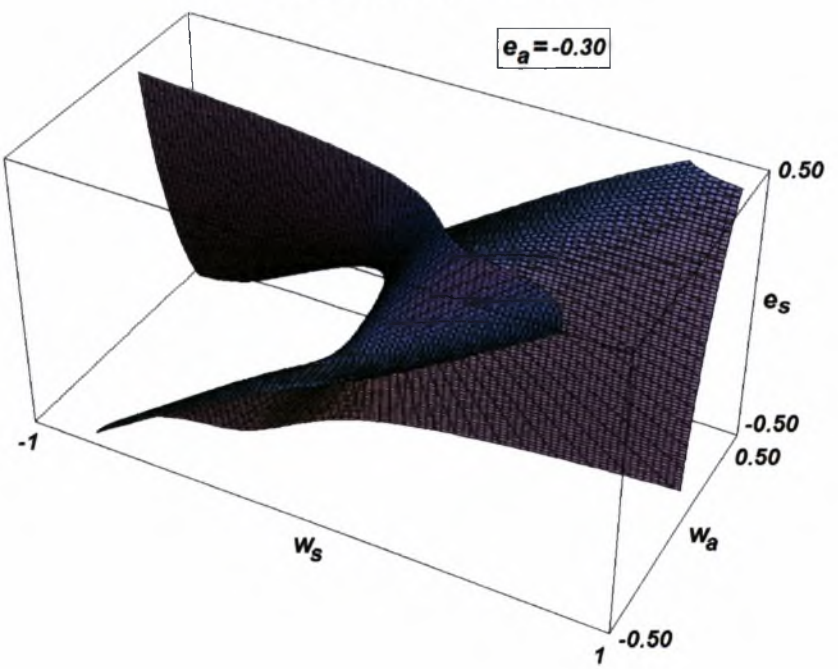
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.64 (συνεχίζεται)



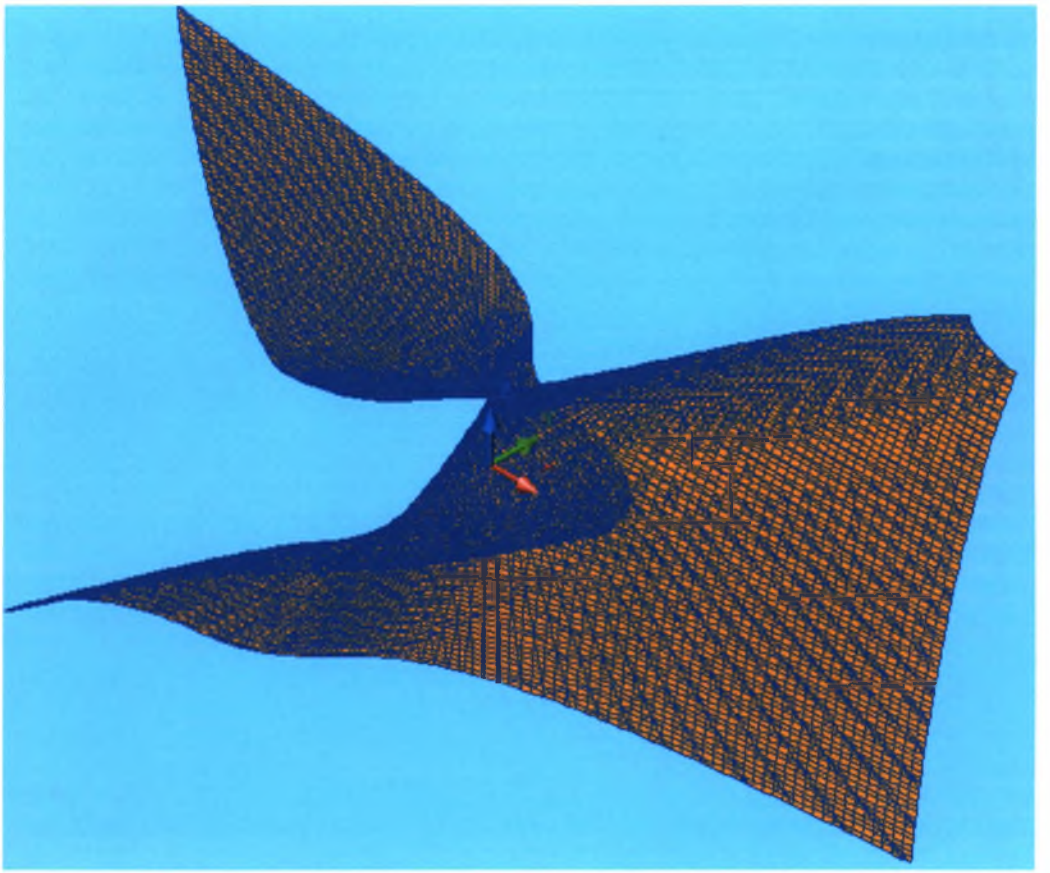
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.64. Προβολή του πολλαπλού καταστροφής του πλήρως ατελούς συστήματος στο χώρο $[w_s, w_a, e_s]$ για $e_a = -0.345$.

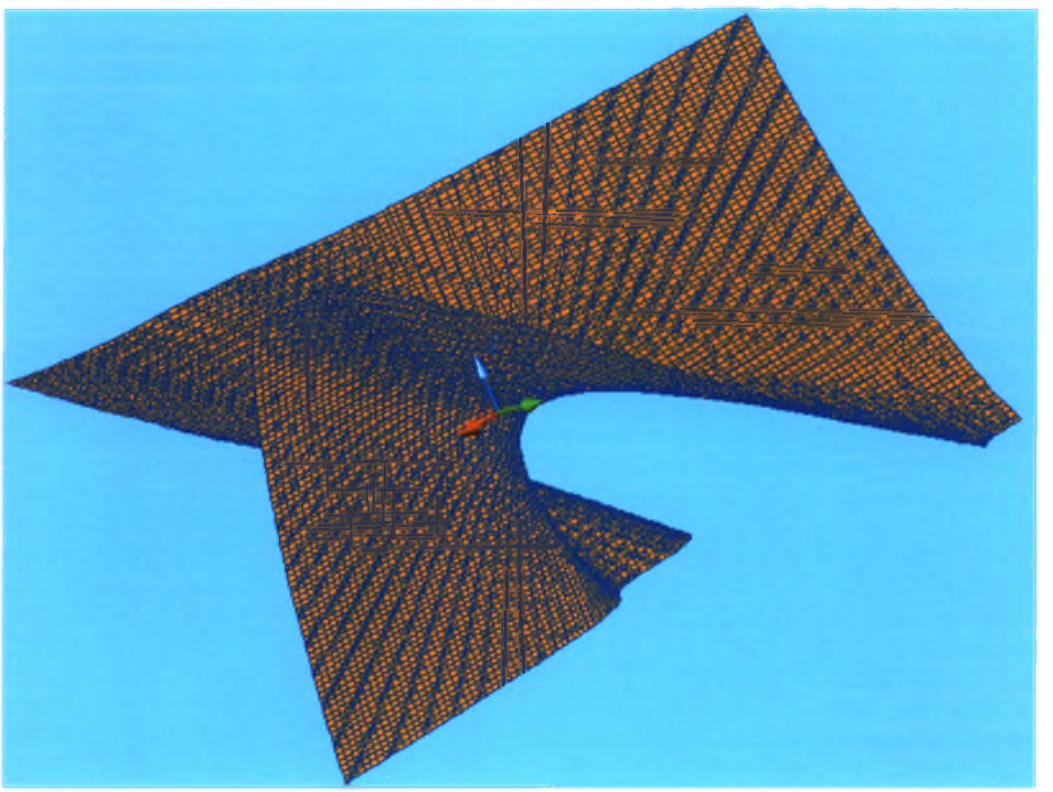


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.65 (συνεχίζεται)

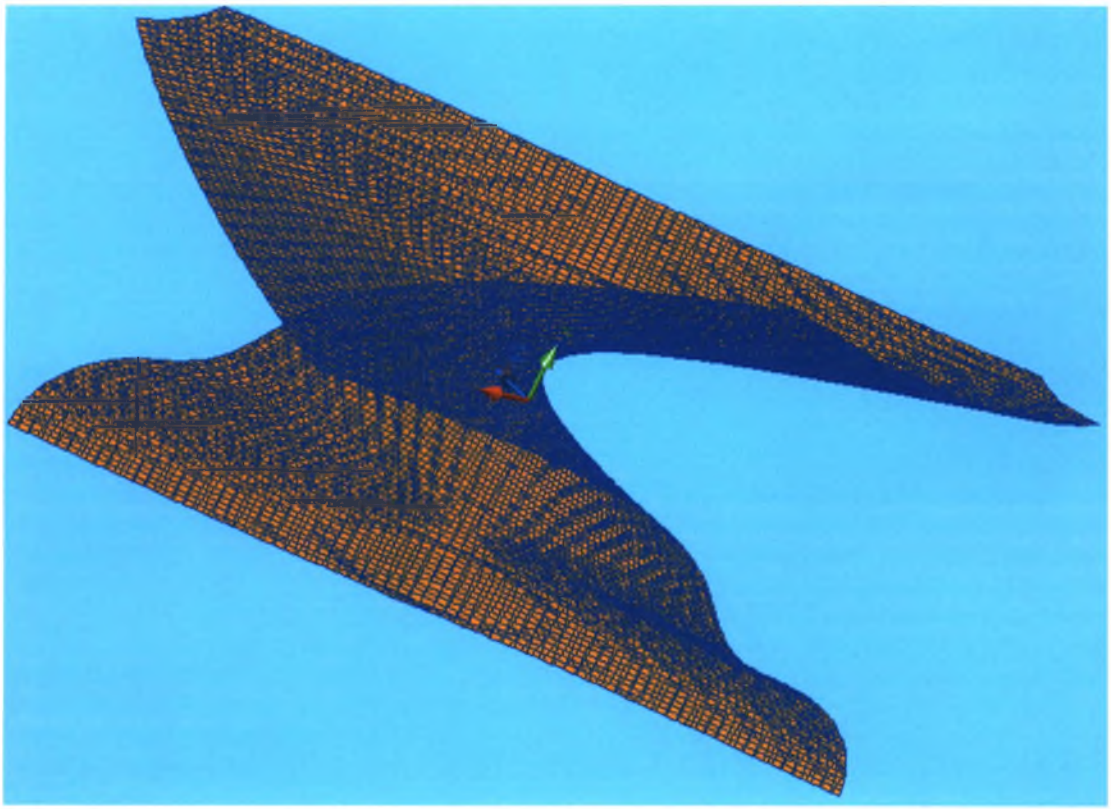


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

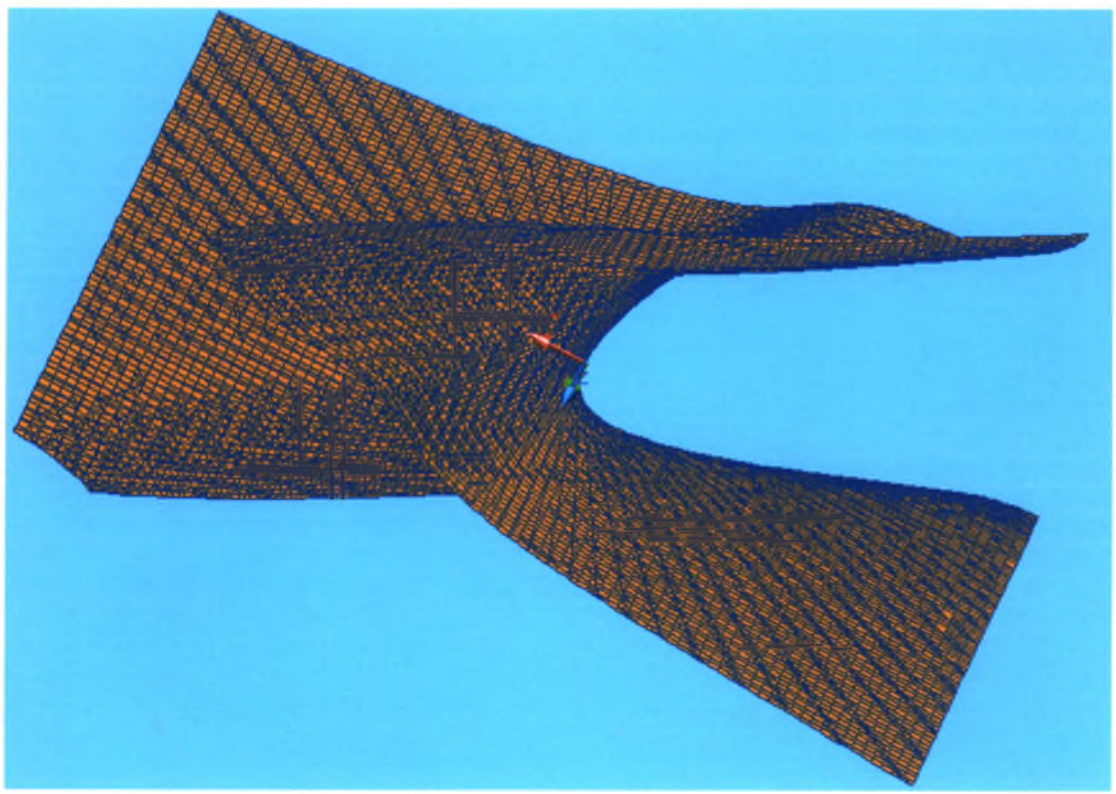


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.65 (συνεχίζεται)

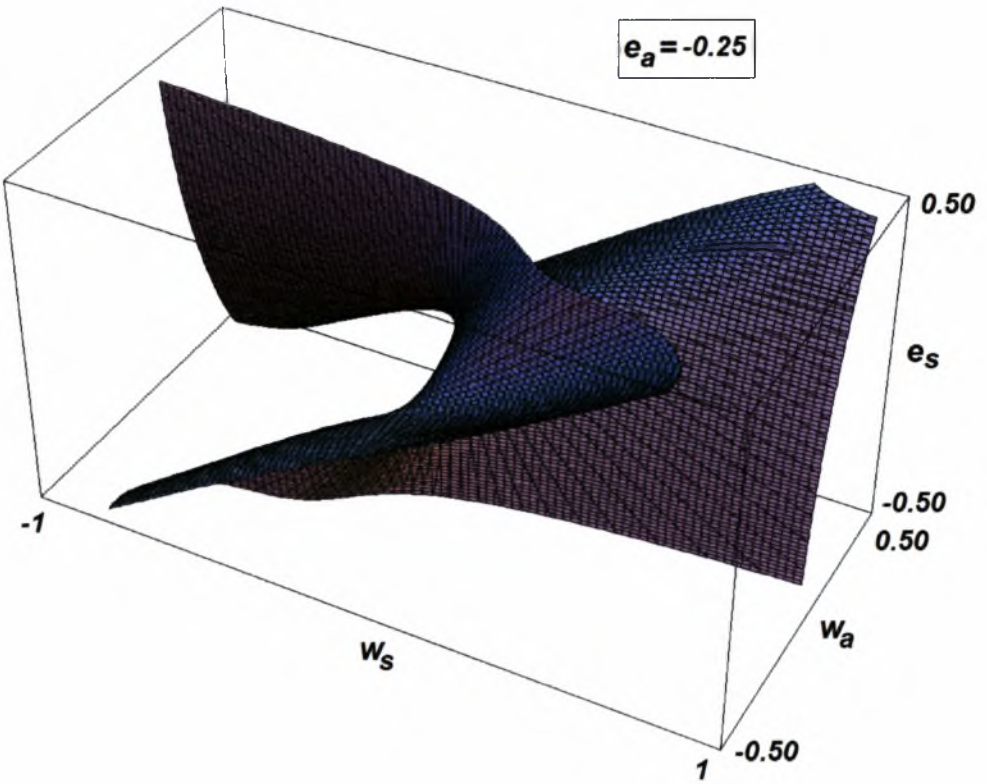


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

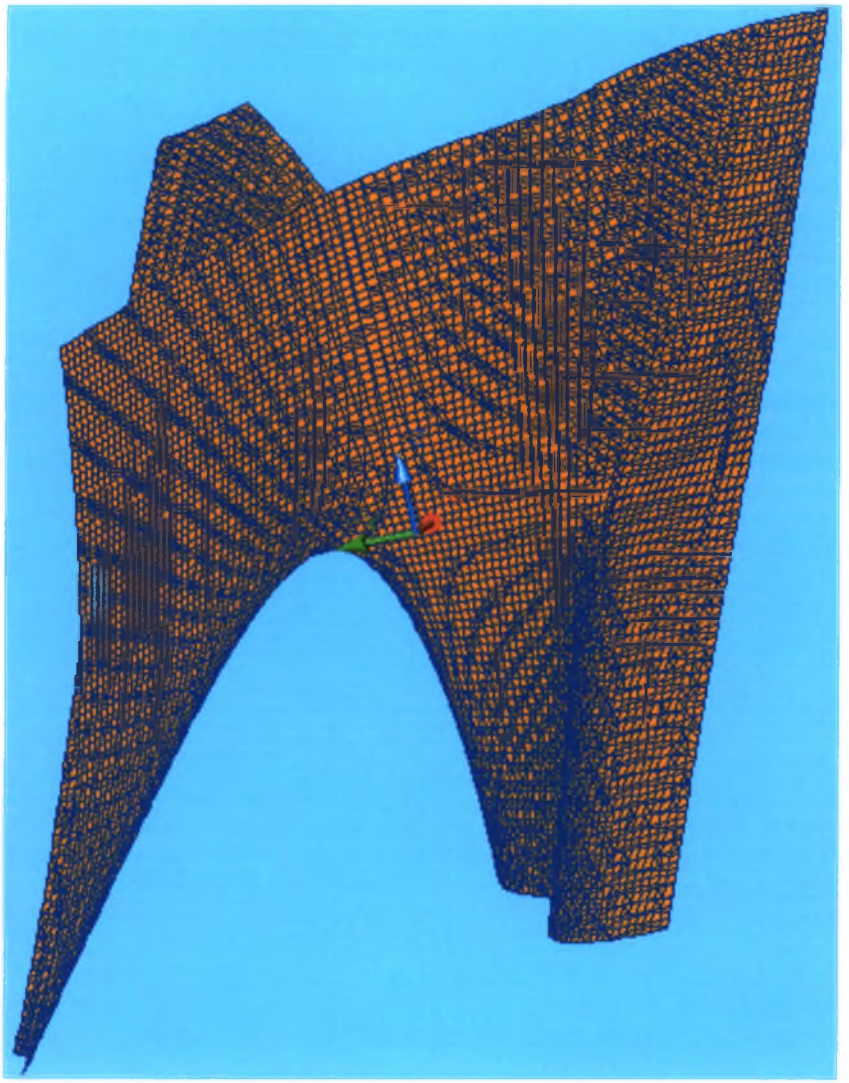
Σχήμα Β1.65. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για e_a = *-0.30*.



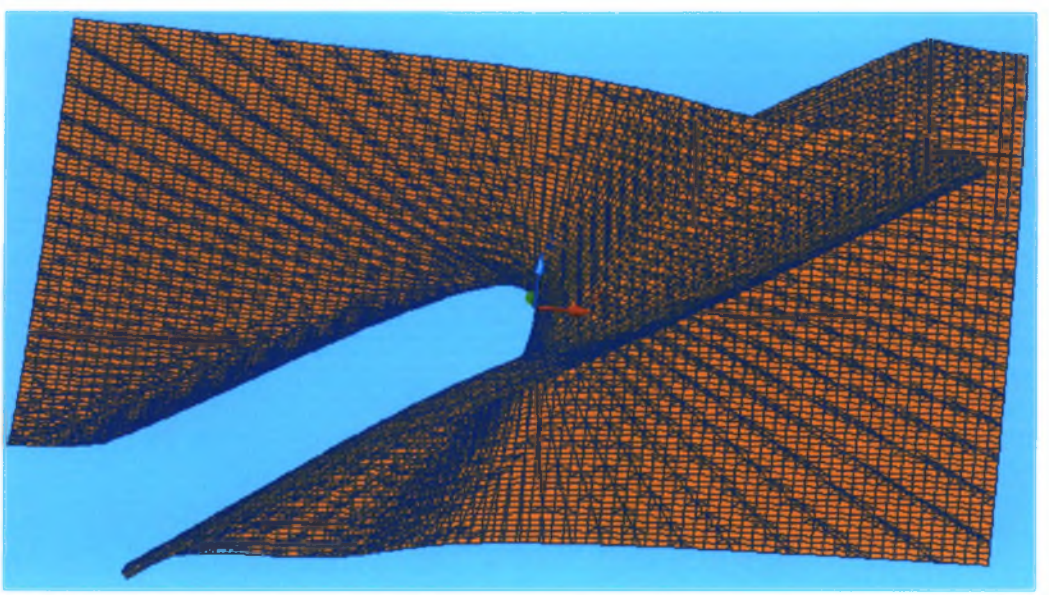
(α) *Προϊόν του Mathematica*

(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.66 (συνεχίζεται)

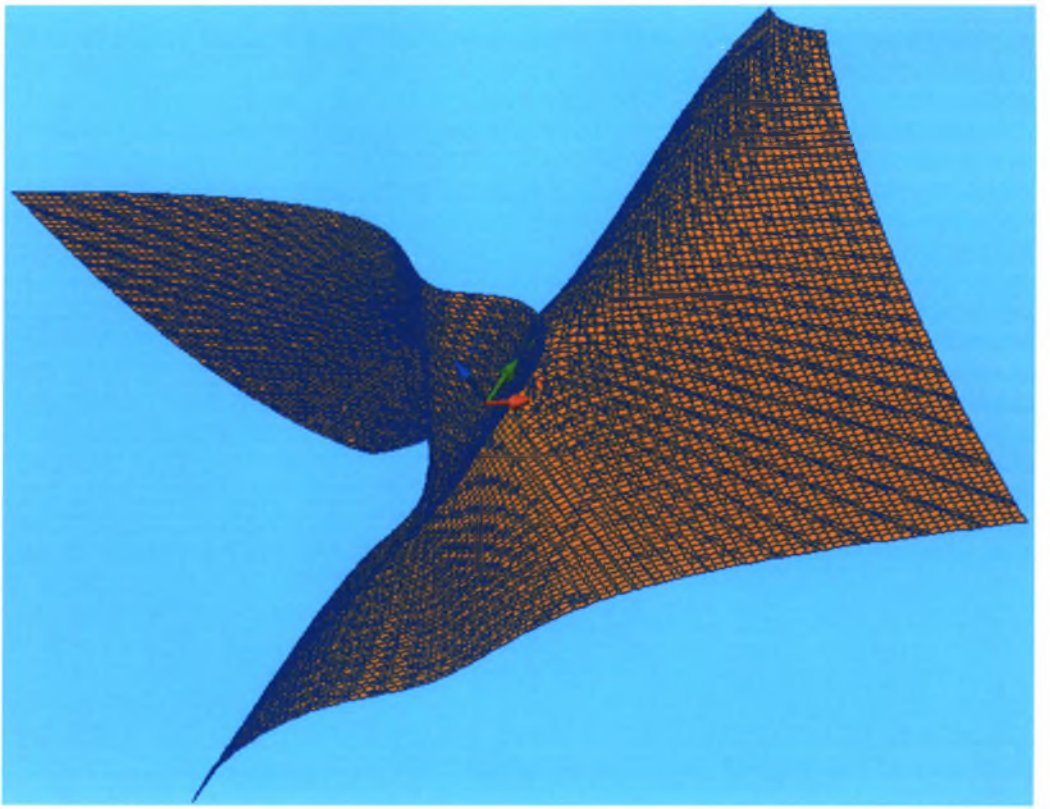


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



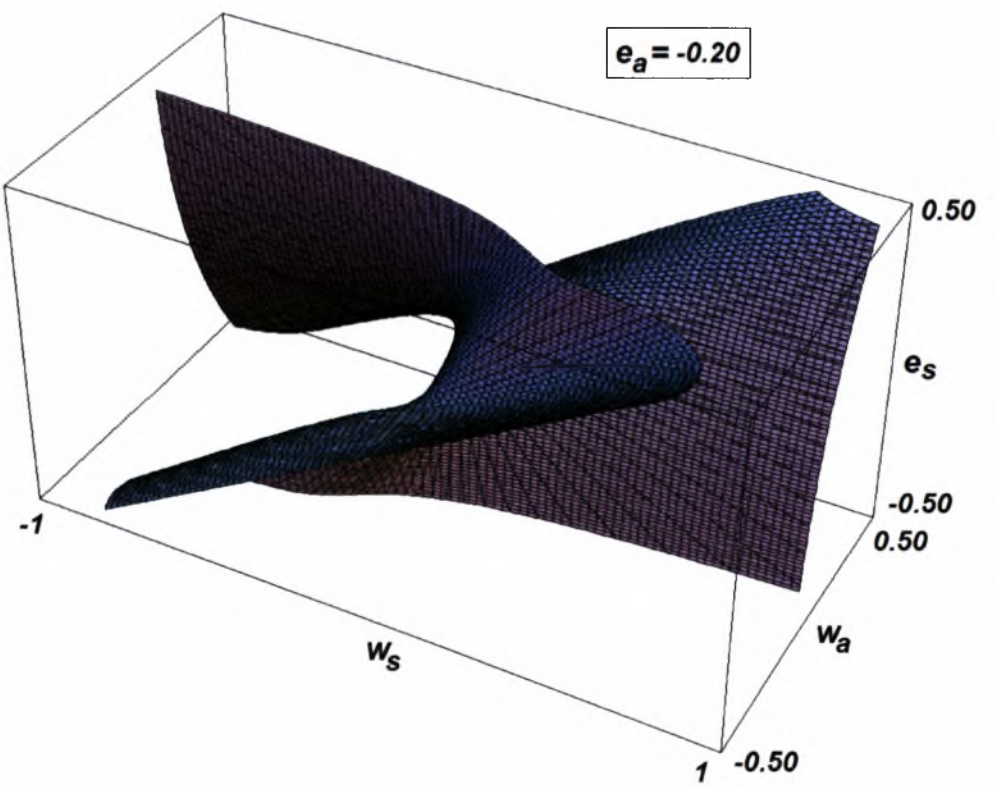
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.66 (συνεχίζεται)



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

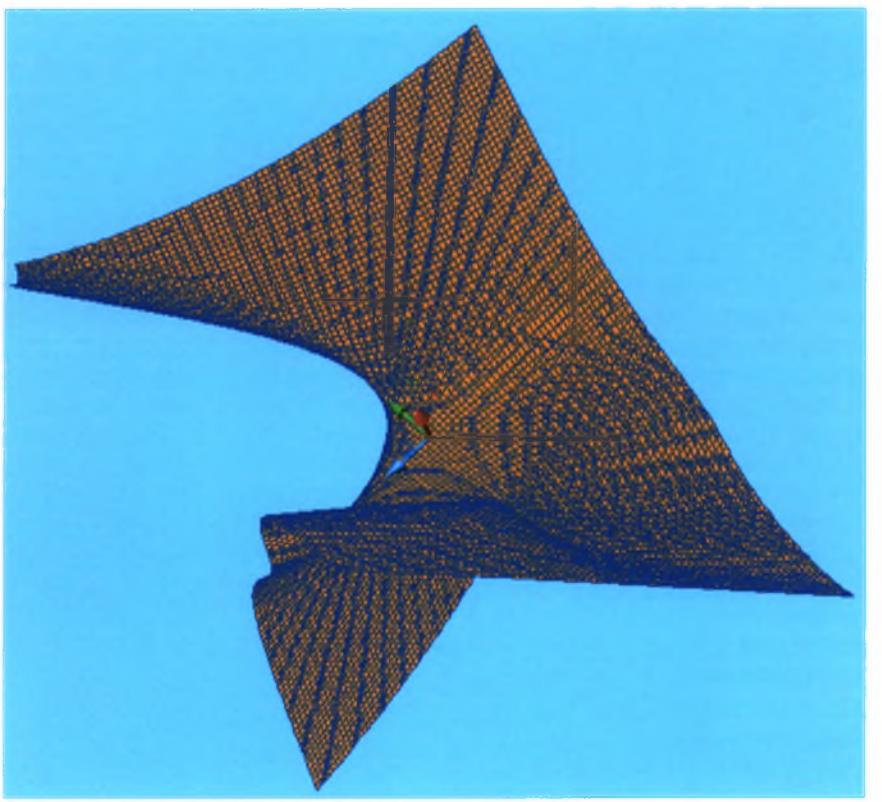
Σχήμα Β1.66. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για e_a = *-0.25*.



(α) *Προϊόν του Mathematica*

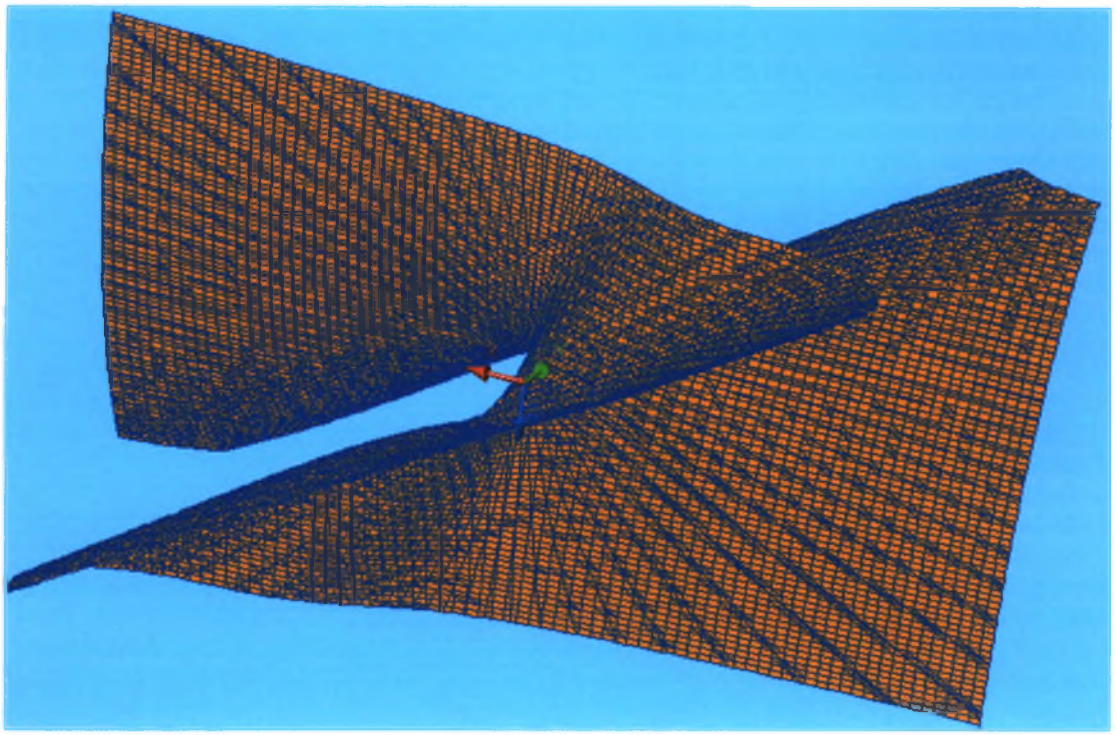
Σχήμα Β1.67 (συνεχίζεται)

(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

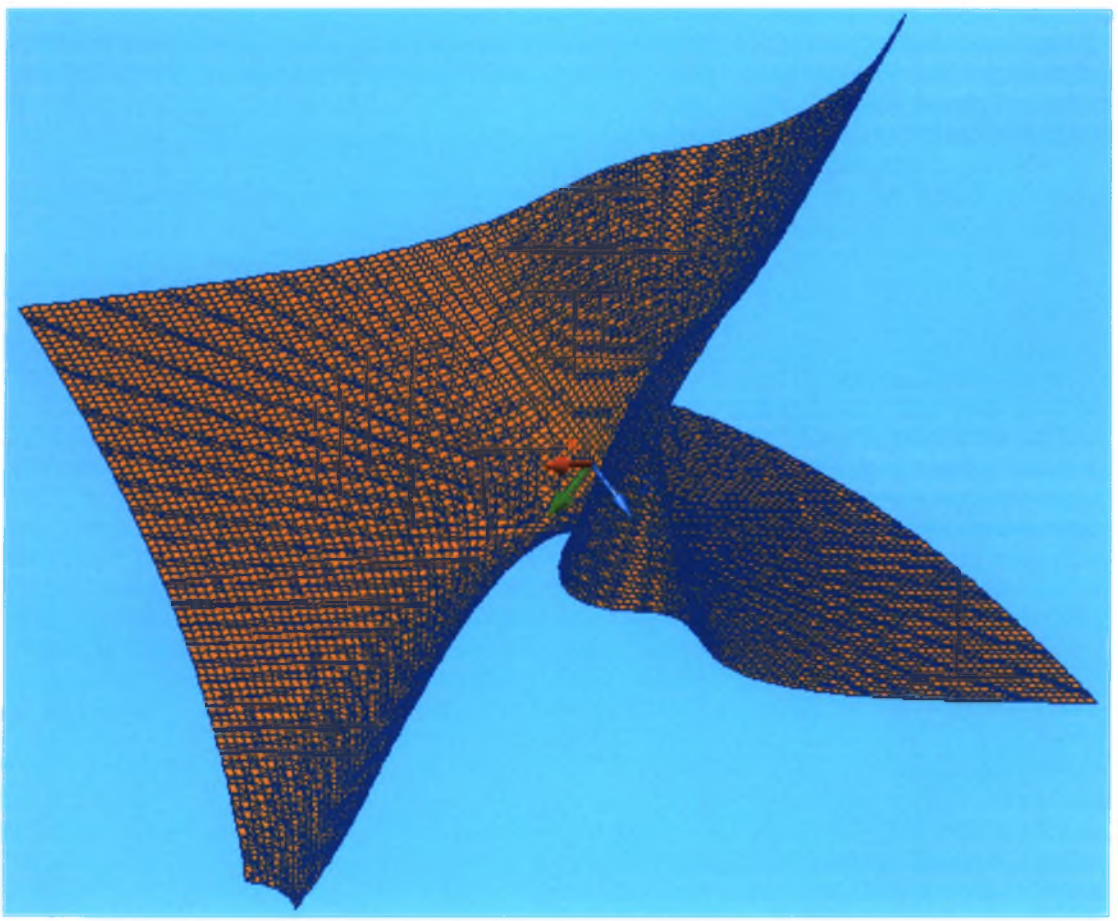


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.67 (συνεχίζεται)

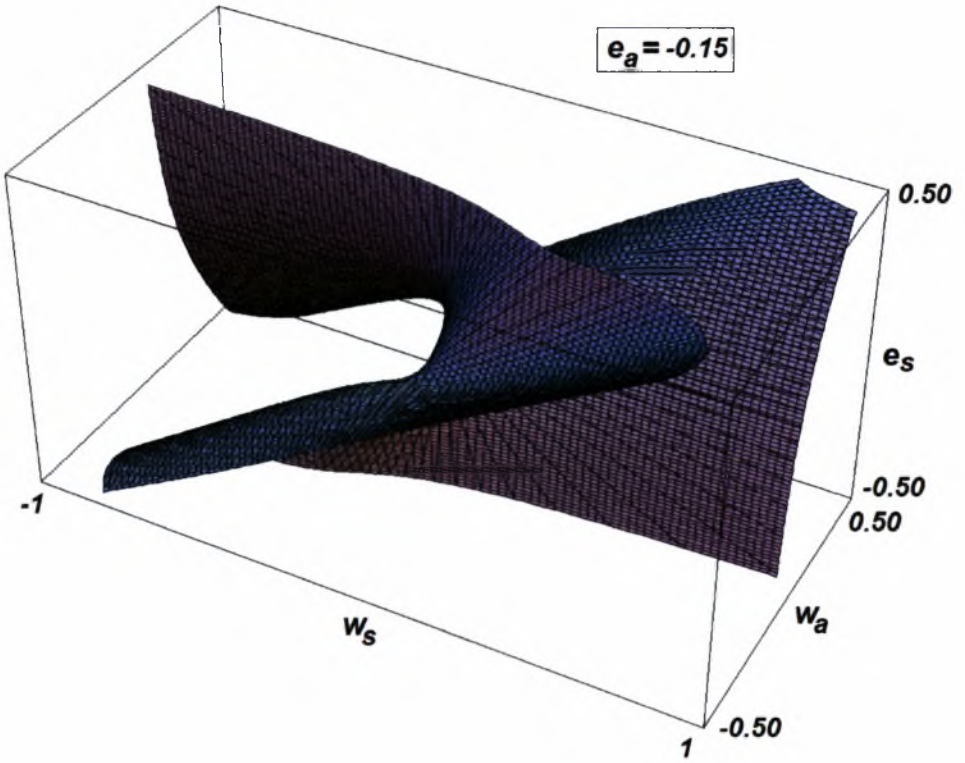


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

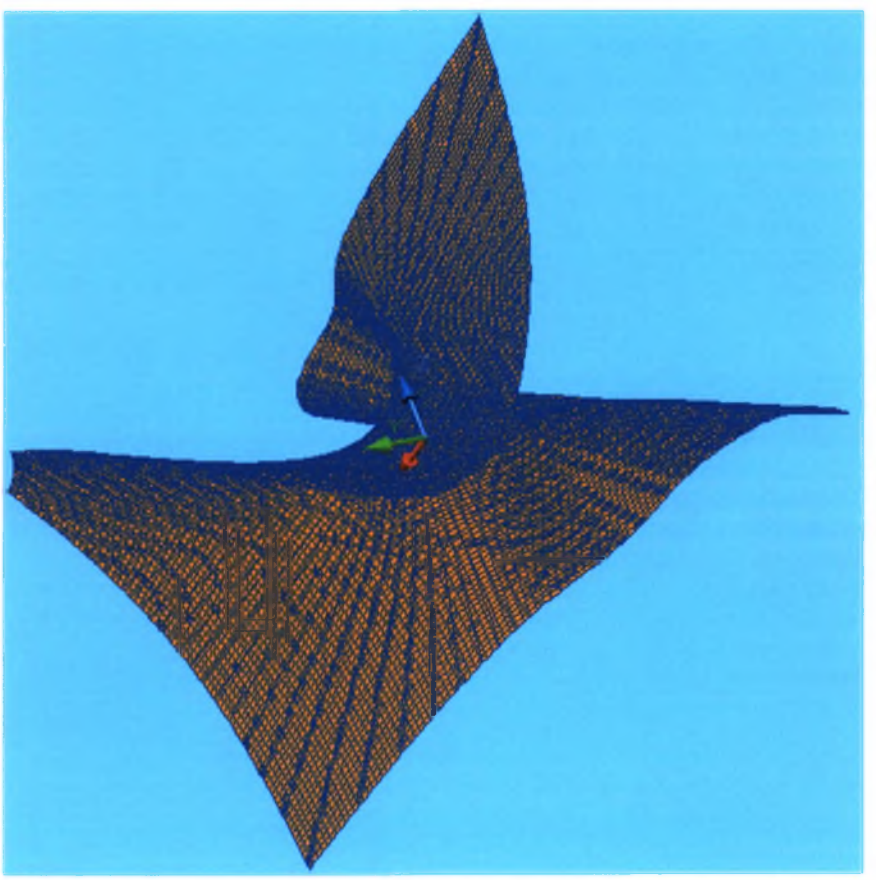


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.67. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = -0.20$.

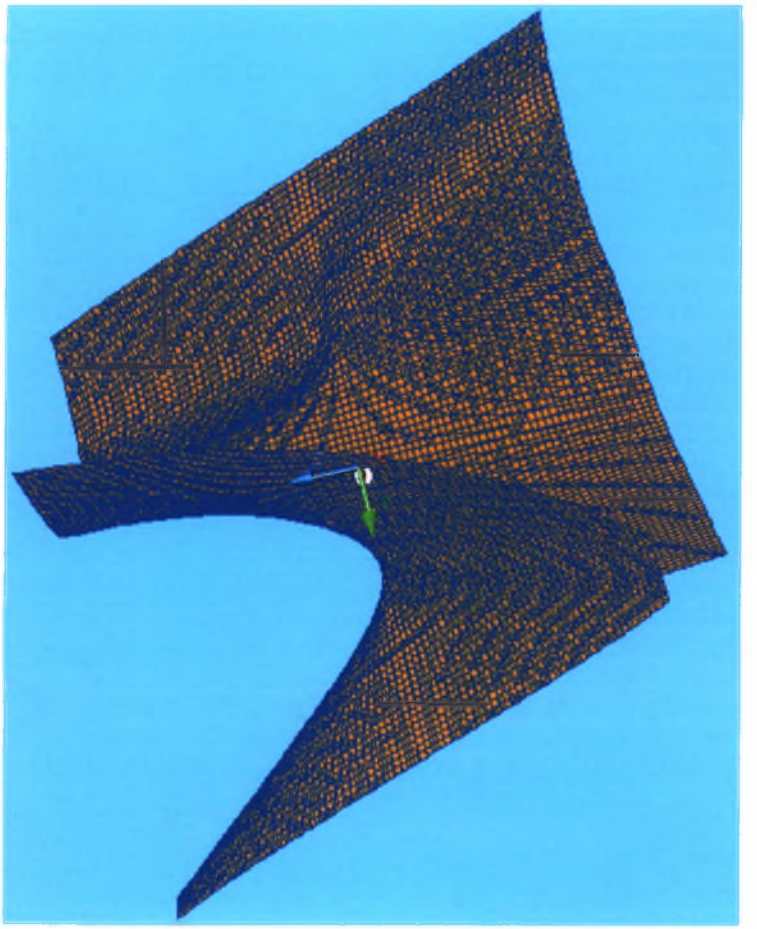


(α) *Προϊόν του Mathematica*

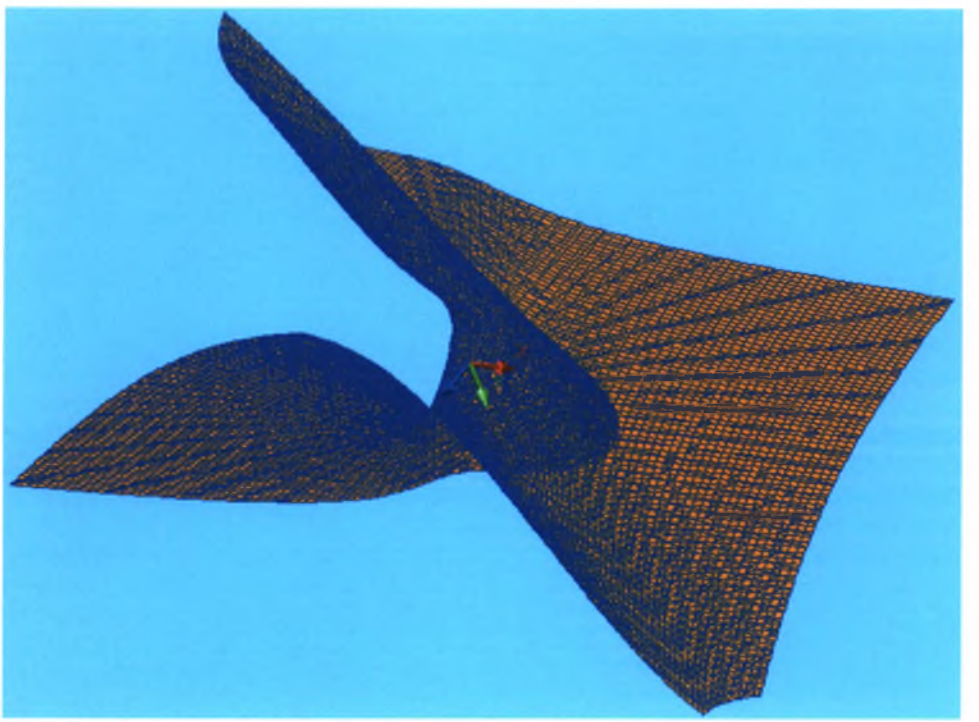


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.68 (συνεχίζεται)

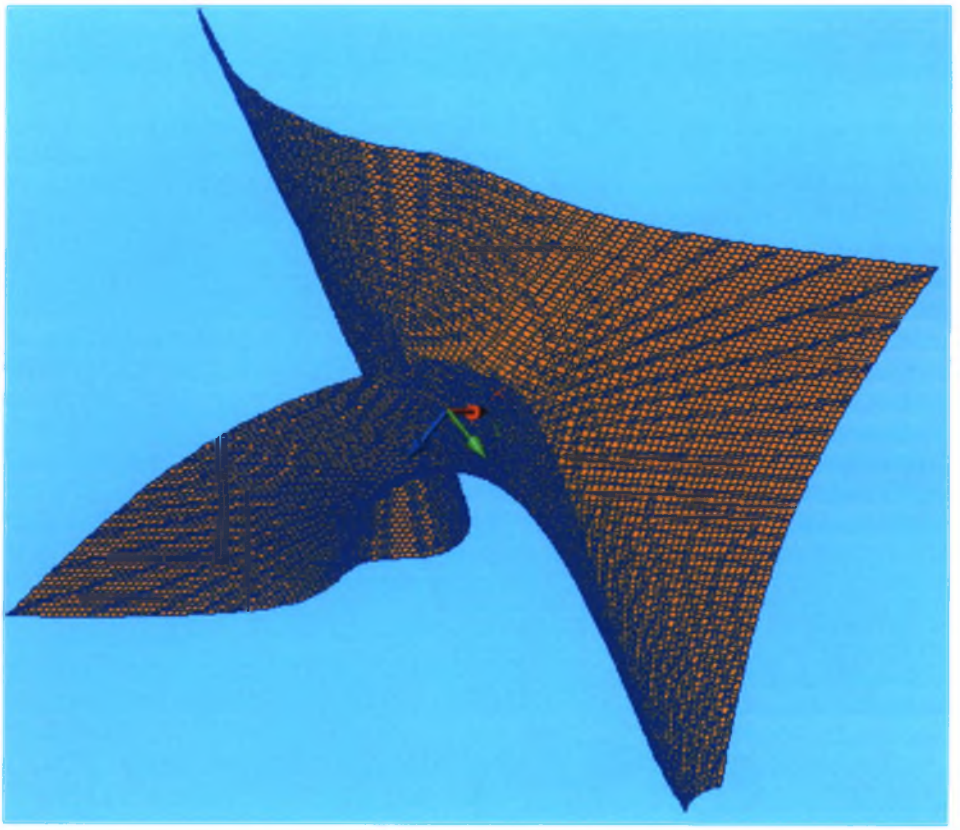


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



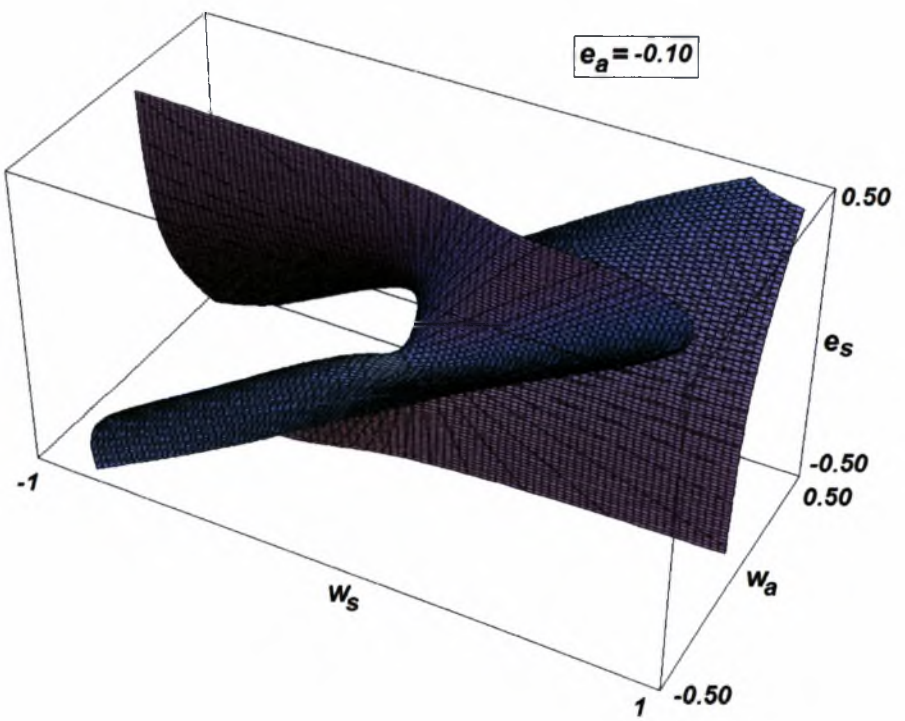
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.68 (συνεχίζεται)



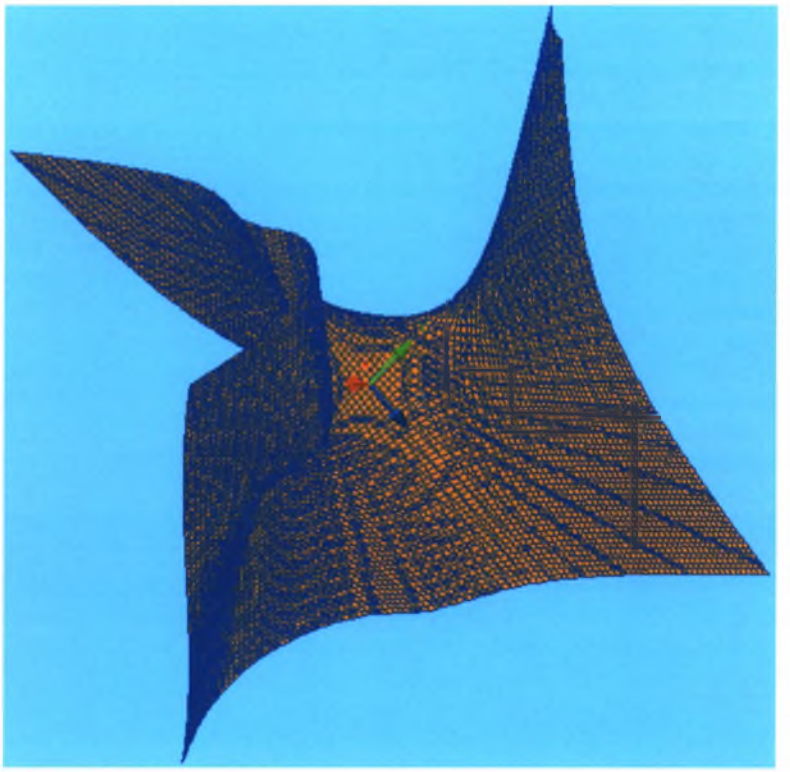
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.68. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = -0.15$.



(α) *Προϊόν του Mathematica*

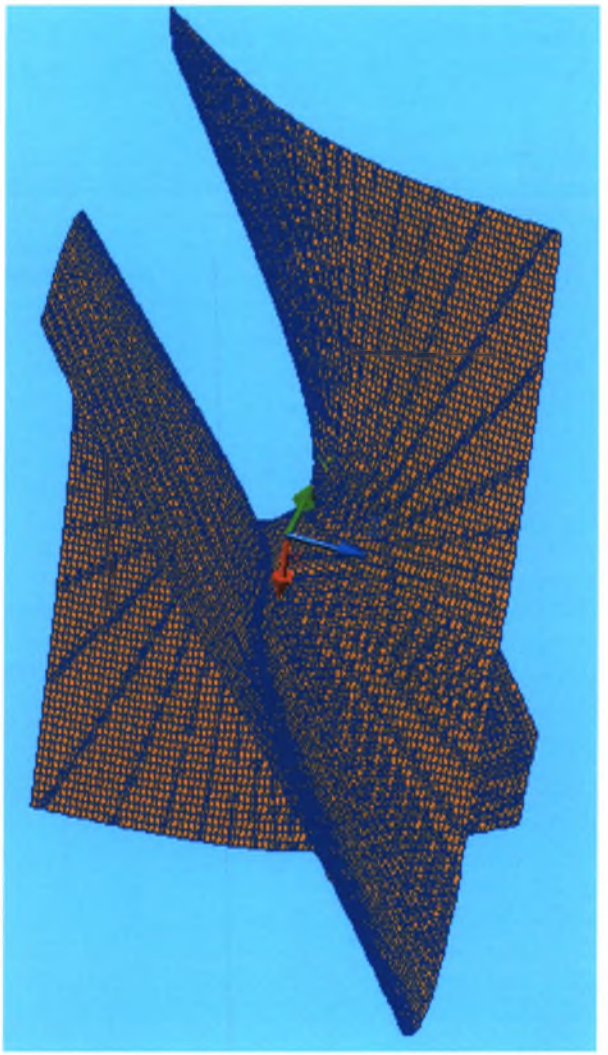
Σχήμα Β1.69 (συνεχίζεται)



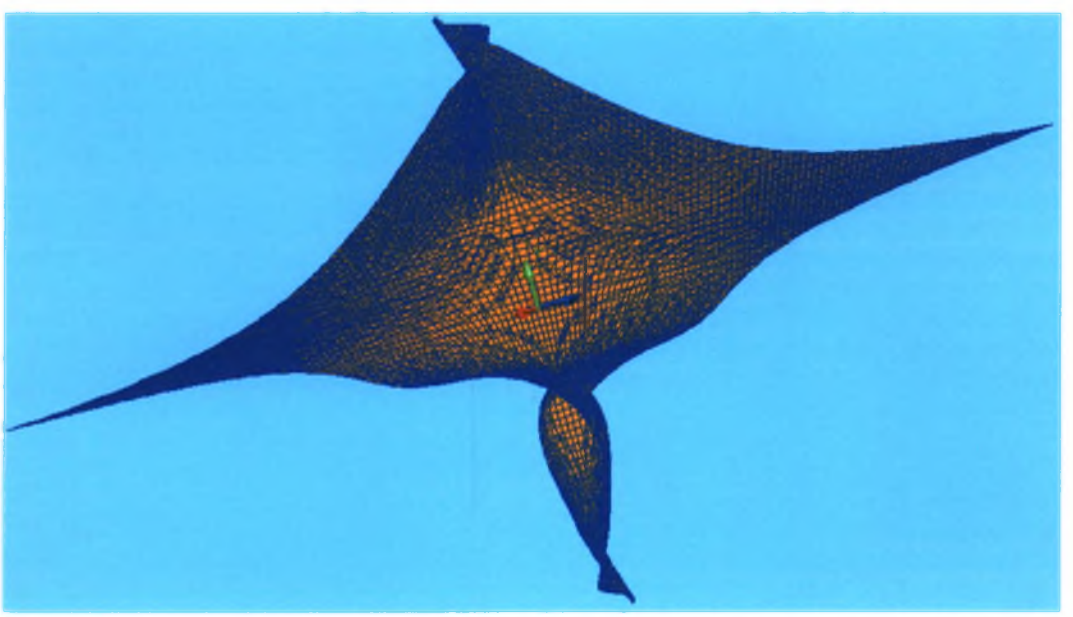
(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.69 (συνεχίζεται)

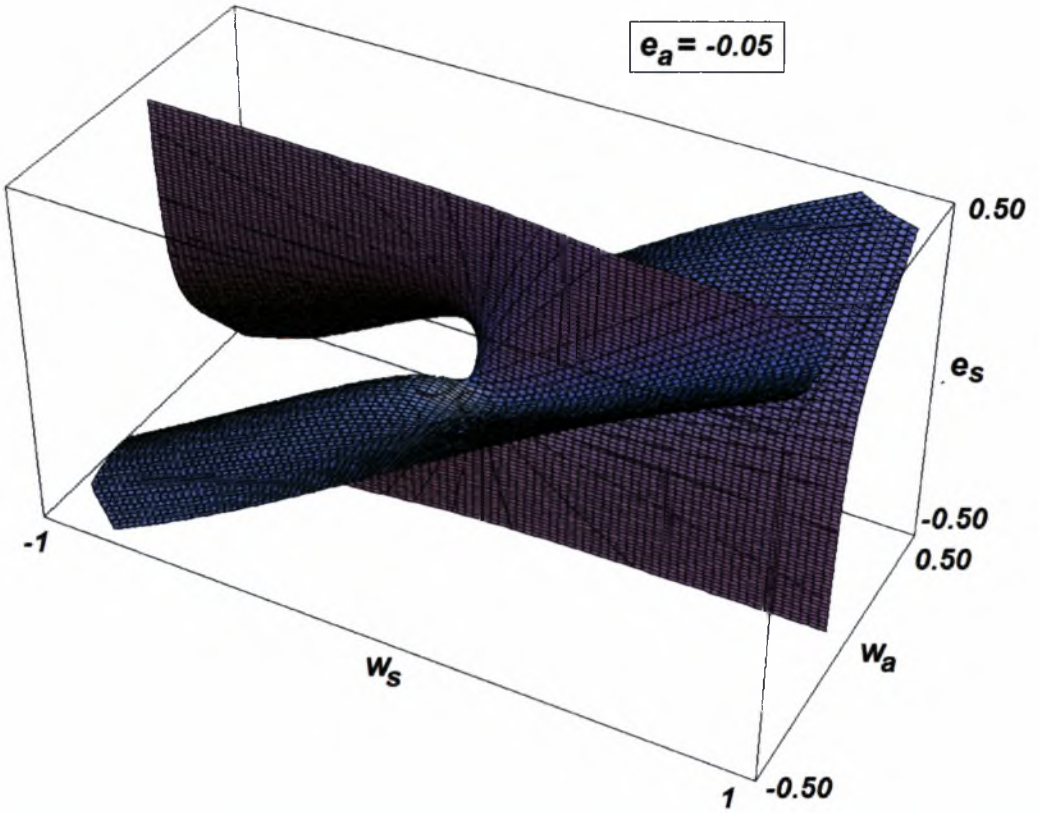


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

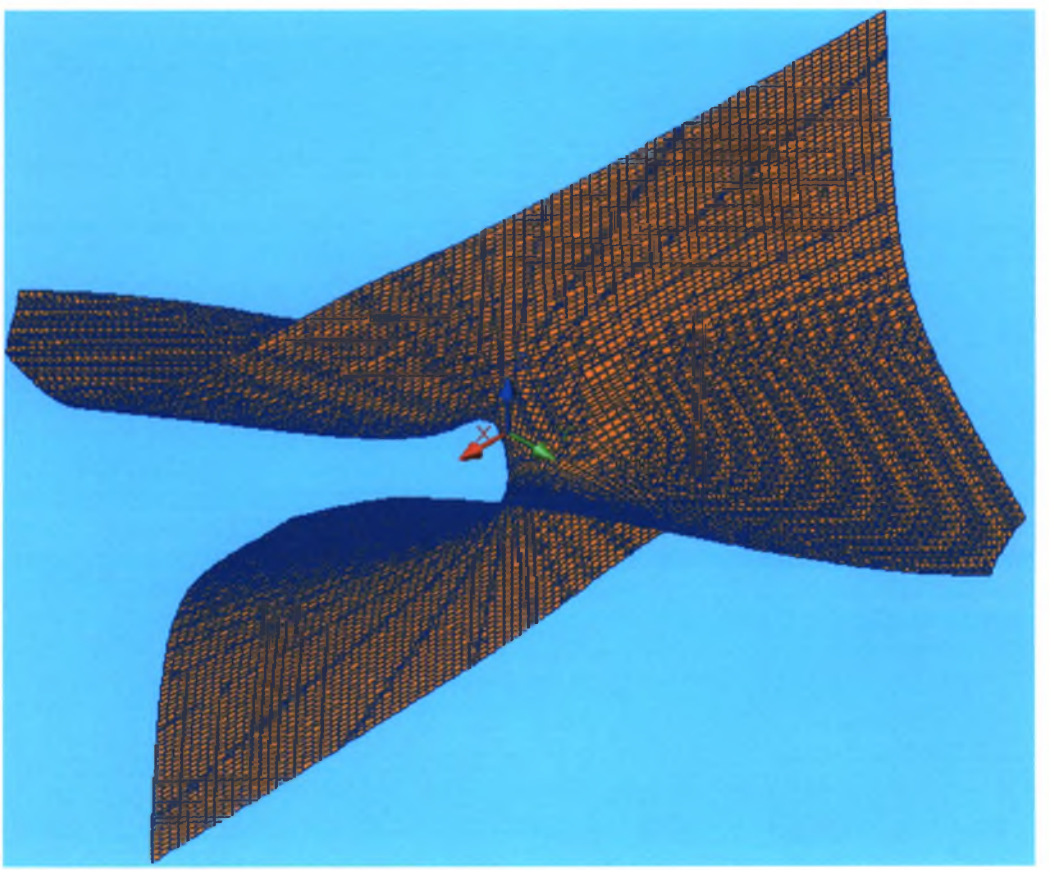


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.69. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για e_a = *-0.10*.

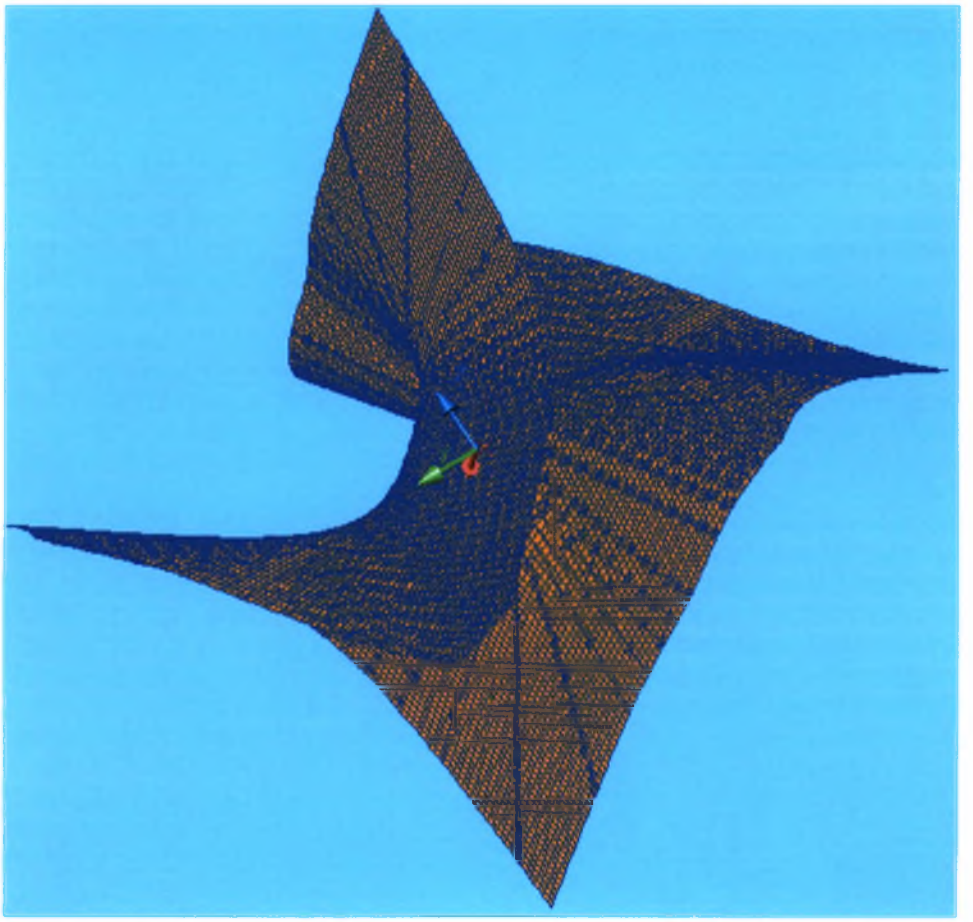


(α) *Προϊόν του Mathematica*

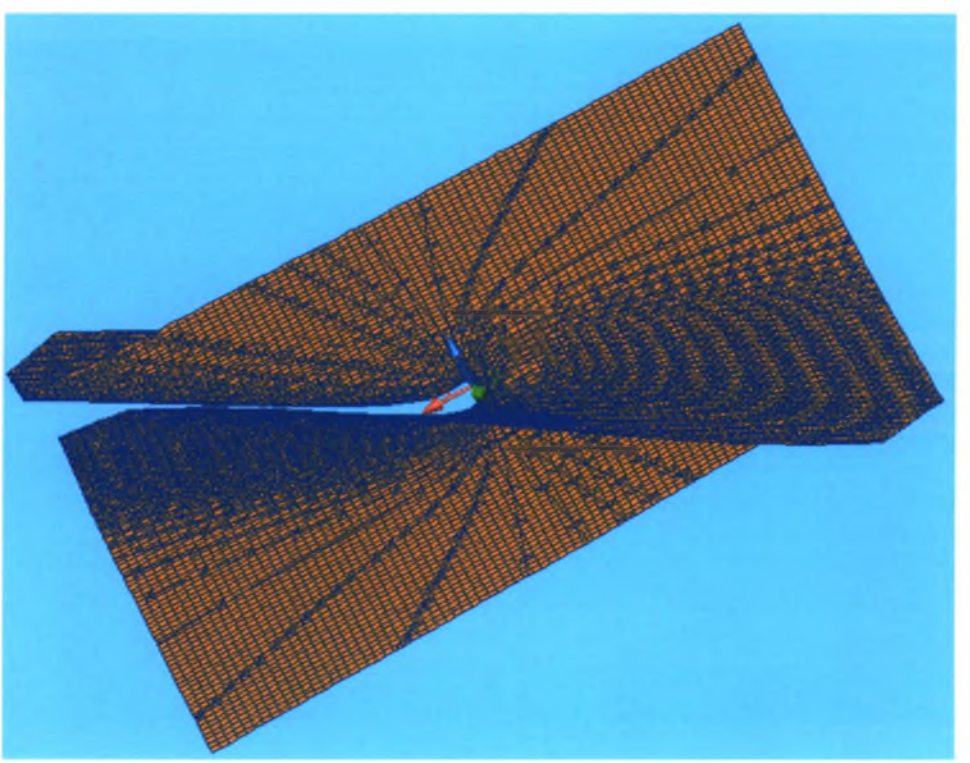


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.70 (συνεχίζεται)

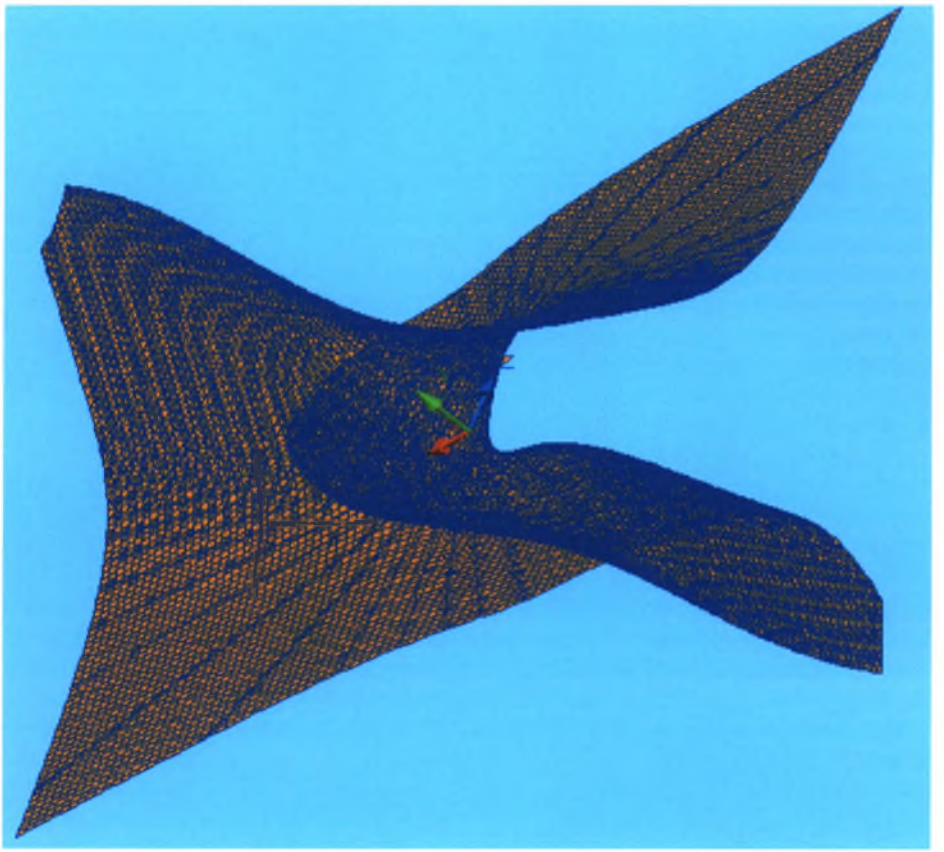


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



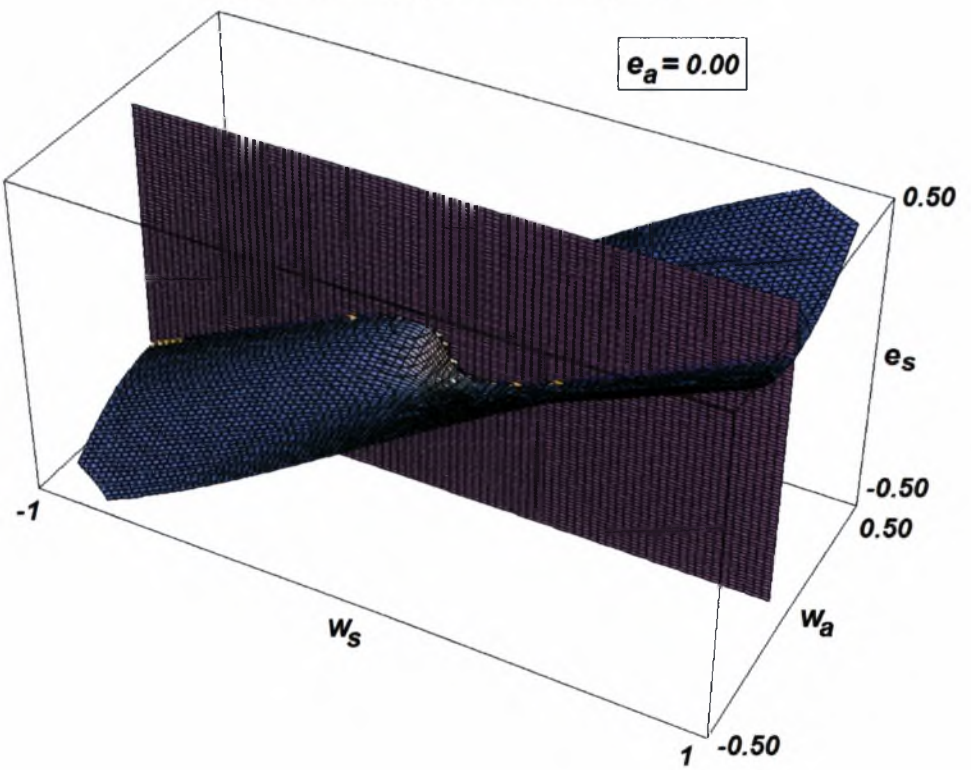
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.70 (συνεχίζεται)



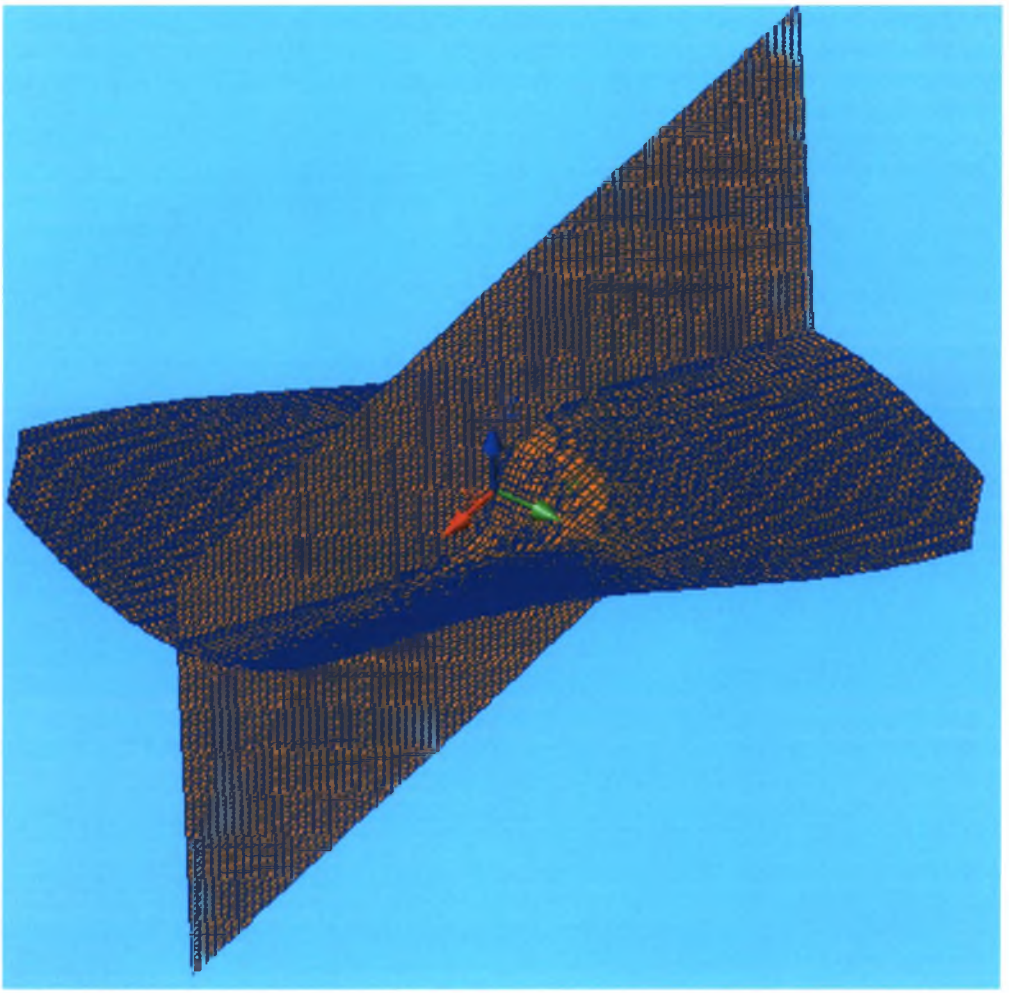
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.70. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = -0.05$.

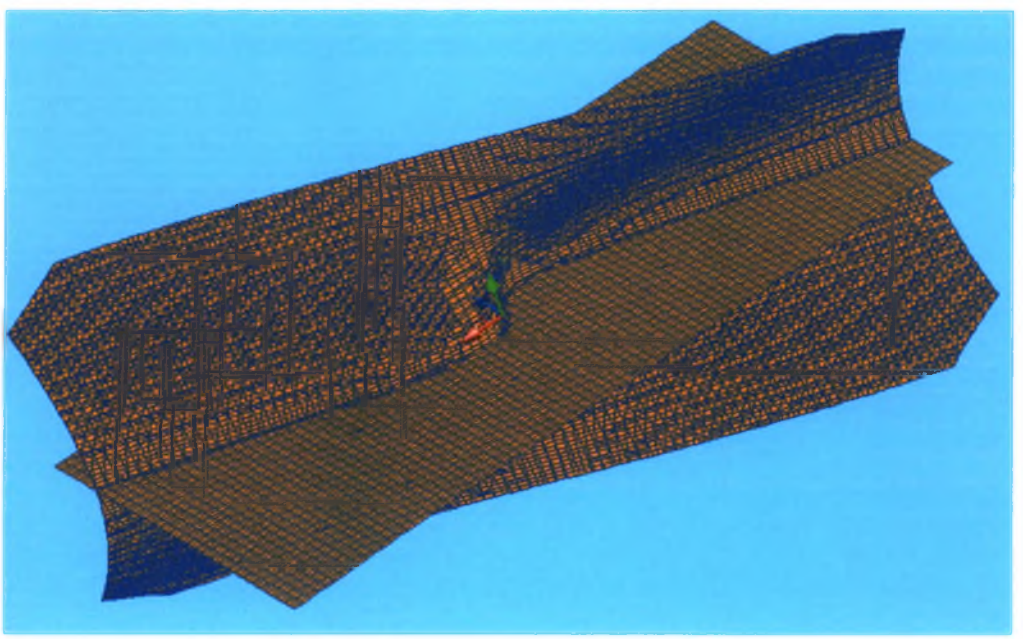


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.71 (συνεχίζεται)

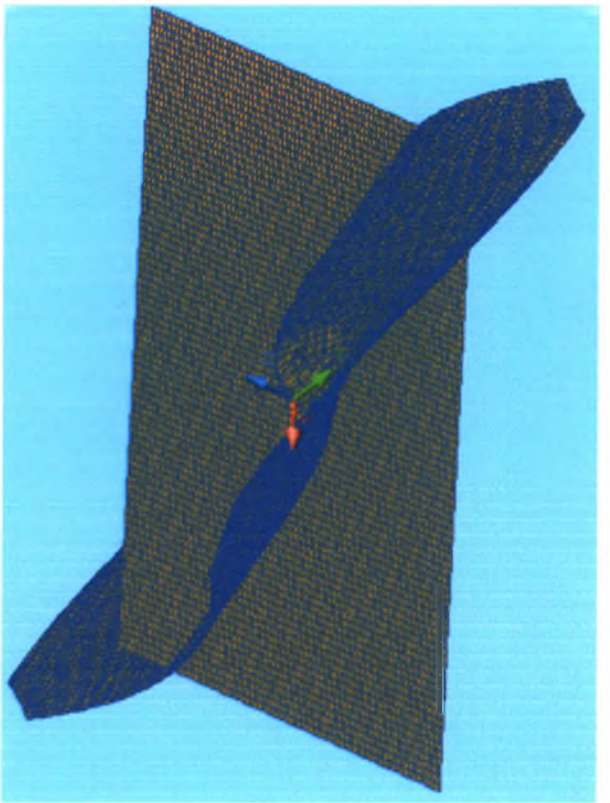


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

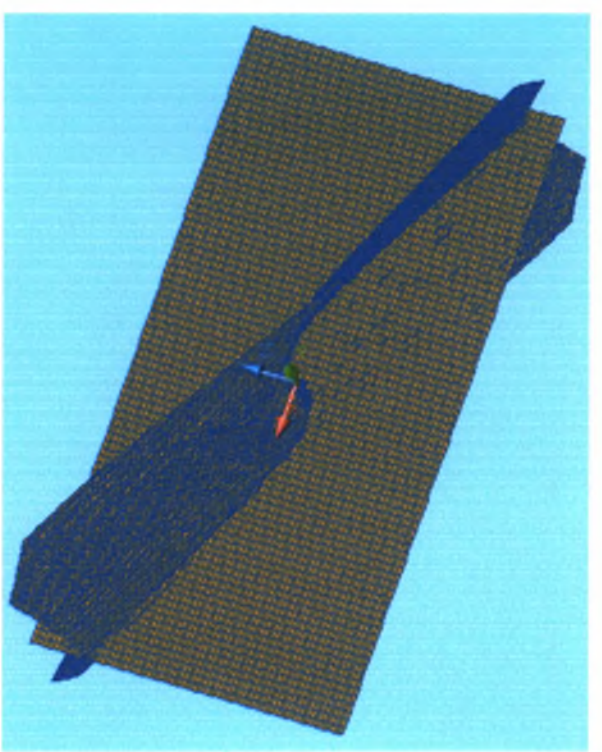


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.71 (συνεχίζεται)

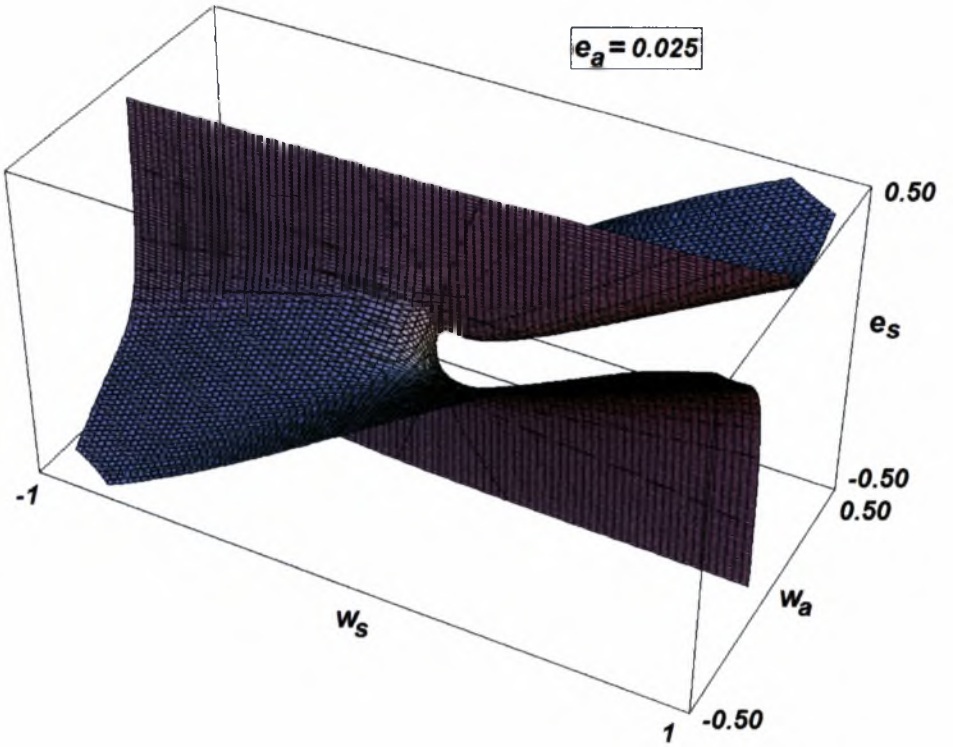


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

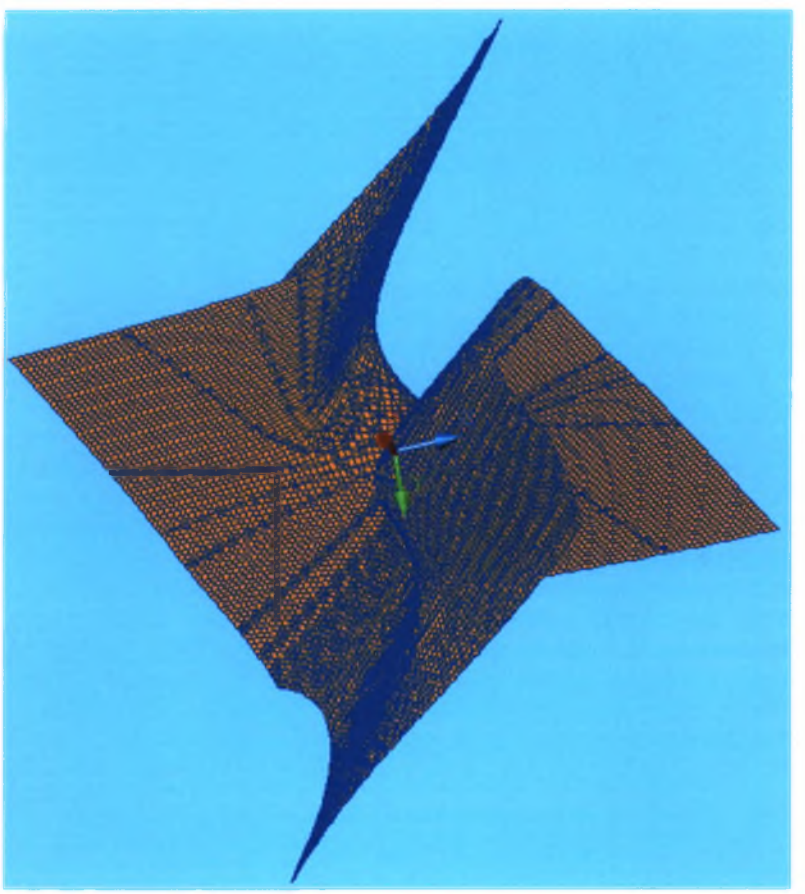


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.71. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για e_a = *-0.00* (πολλαπλό καταστροφής του μερικά ατελούς συστήματος με *μόνο συμμετρική* αρχική ατέλεια).

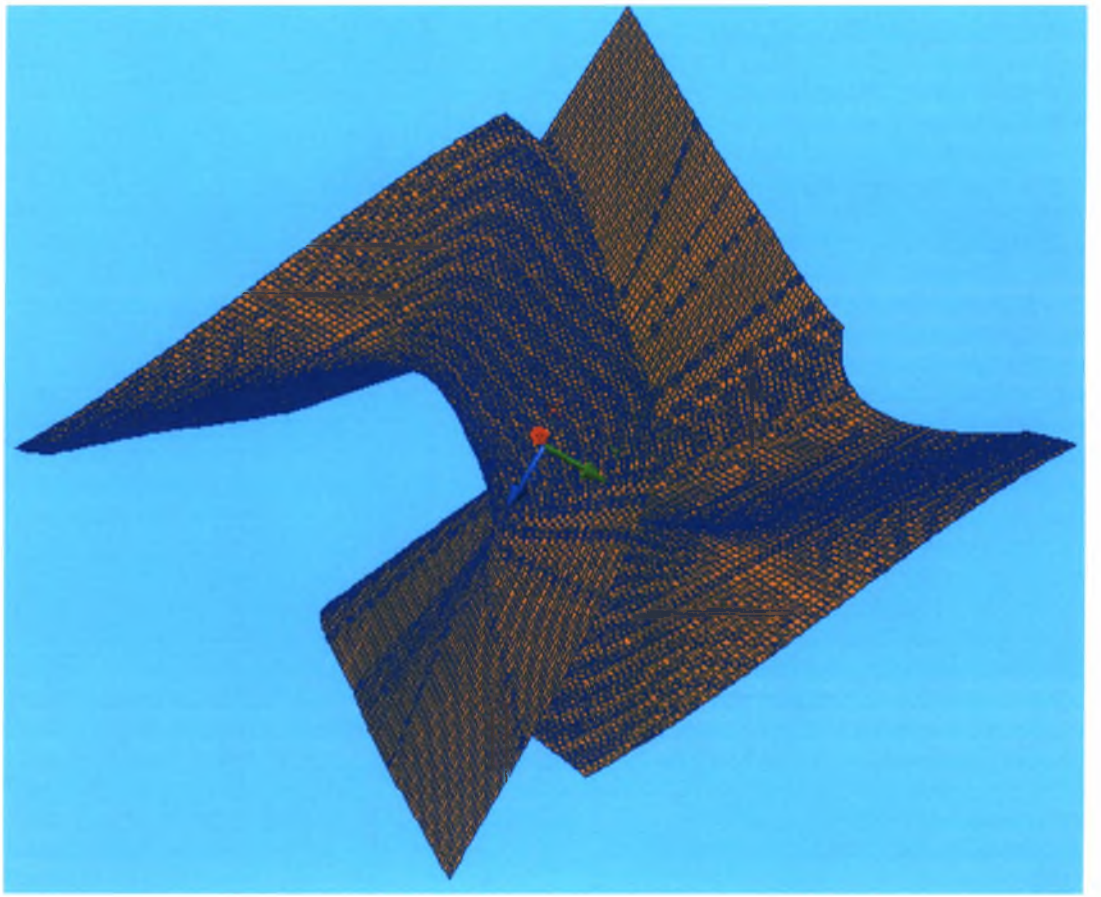


(α) *Προϊόν του Mathematica*

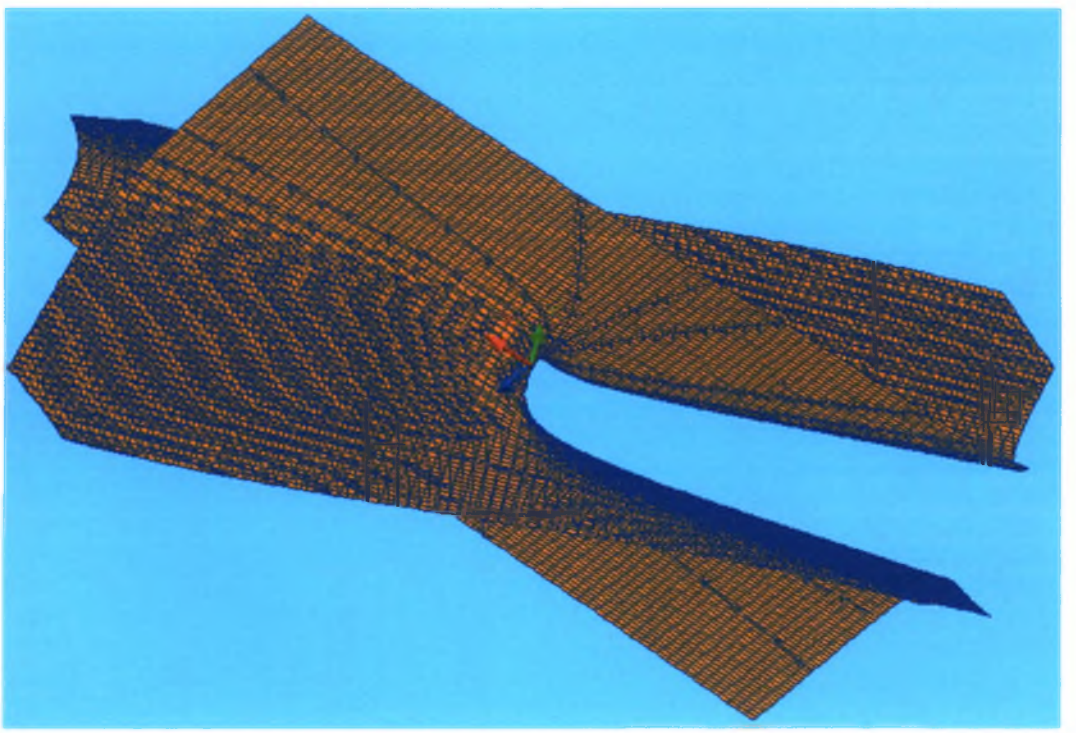


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.72 (συνεχίζεται)

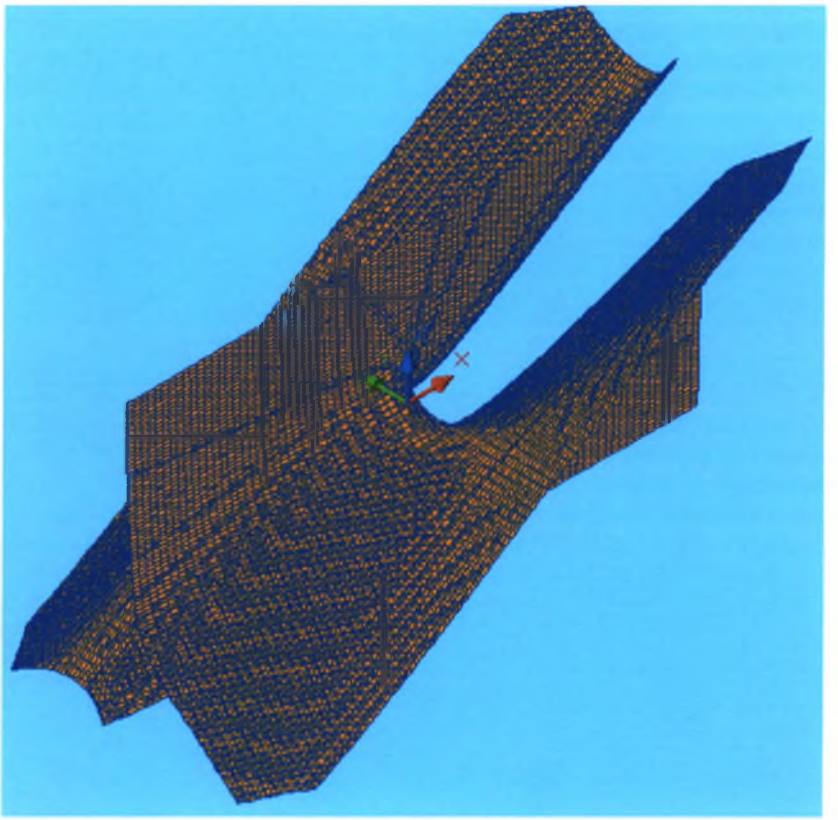


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



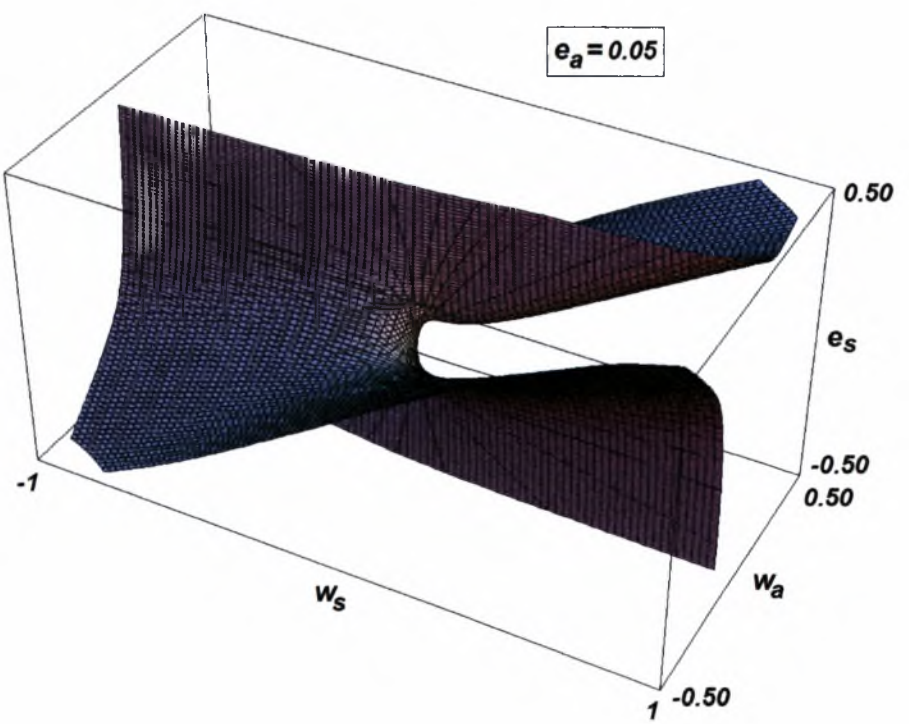
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.72 (συνεχίζεται)



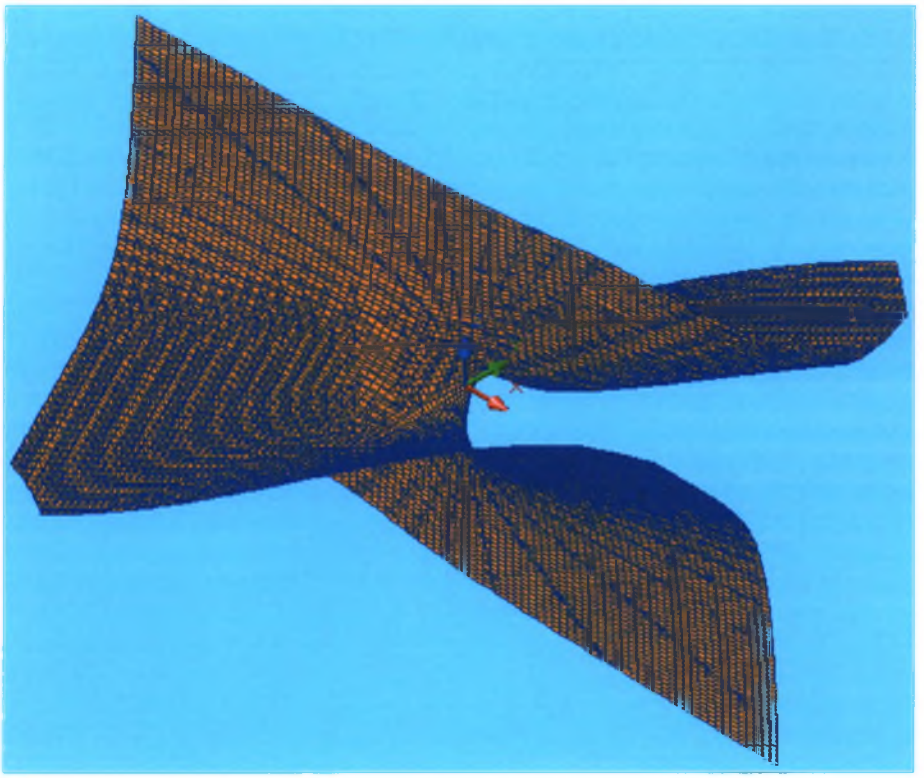
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.72. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.025$.

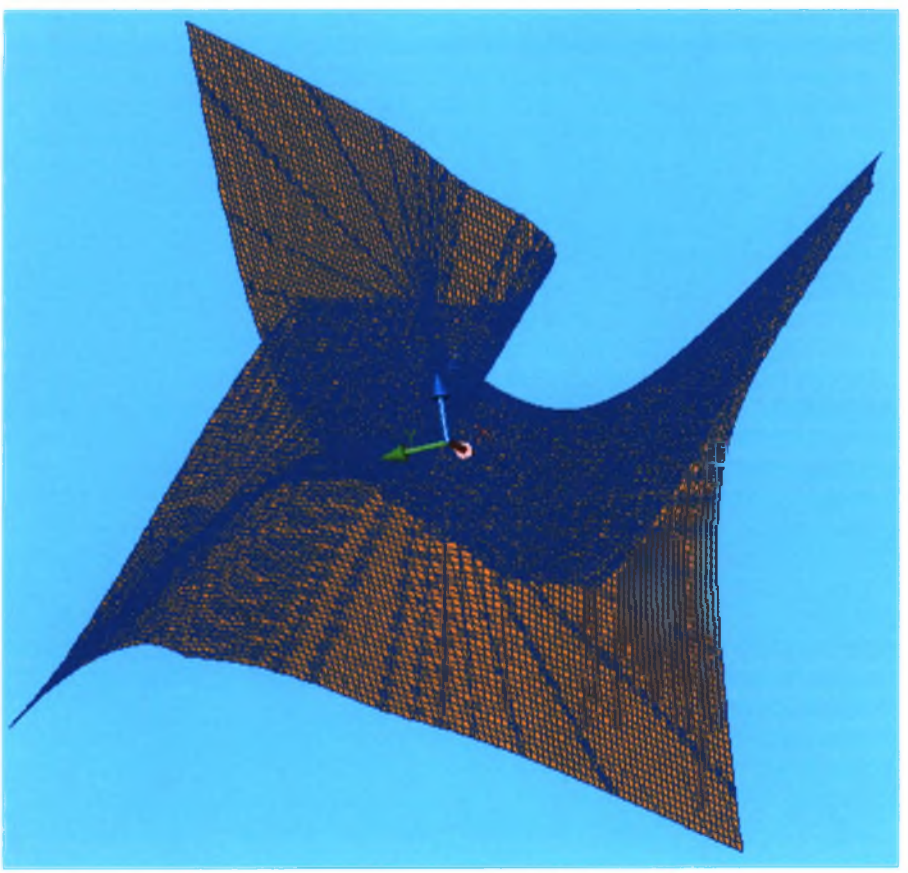


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.73 (συνεχίζεται)

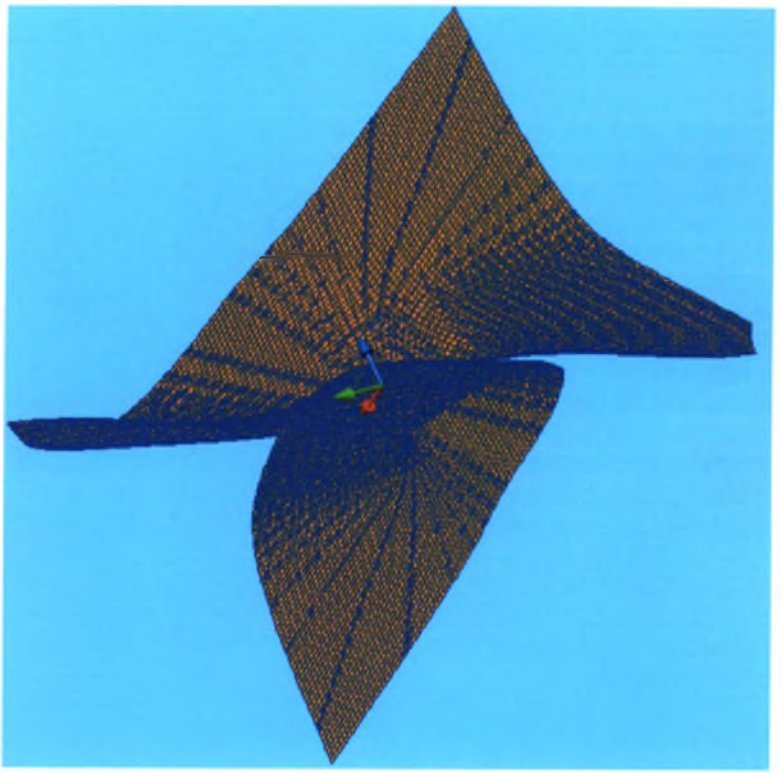


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

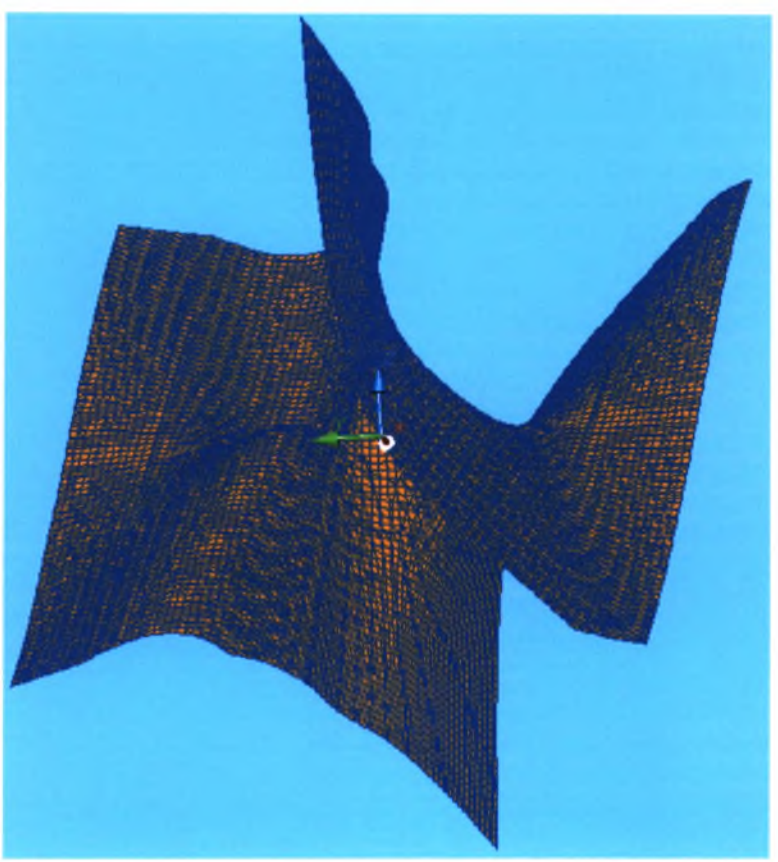


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.73 (συνεχίζεται)

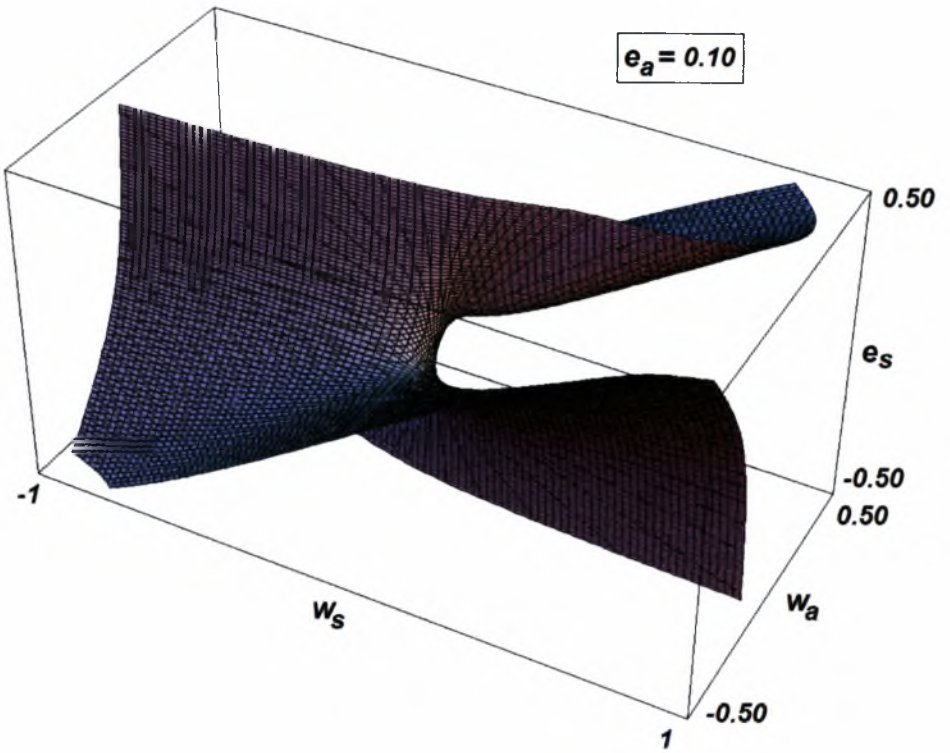


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

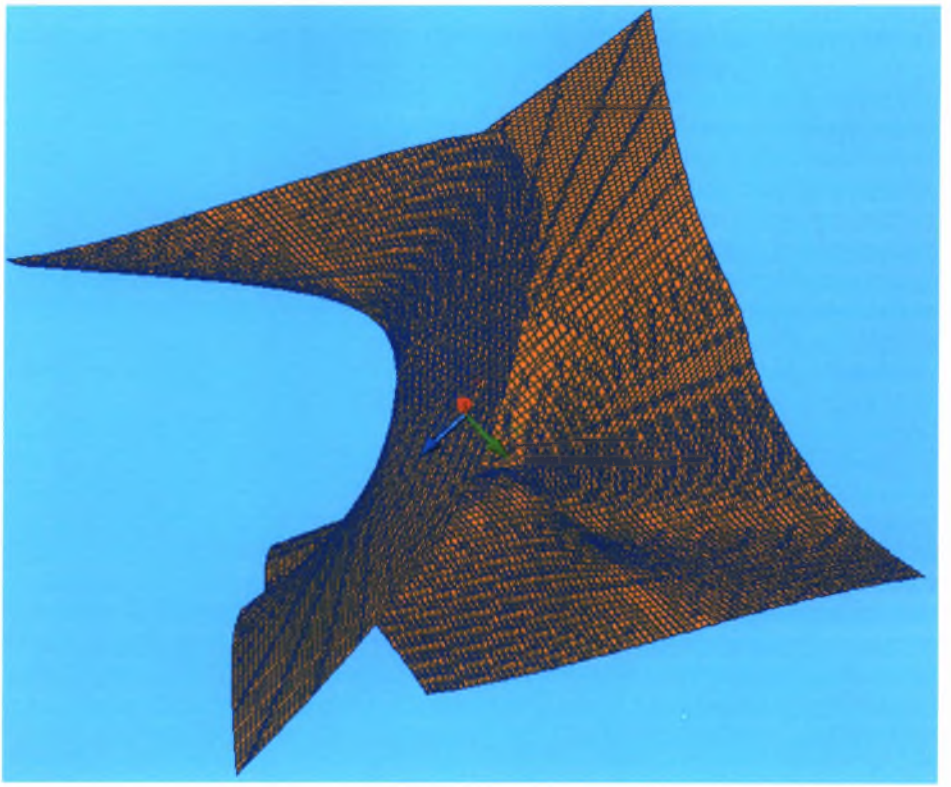
Σχήμα Β1.73. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.05$.



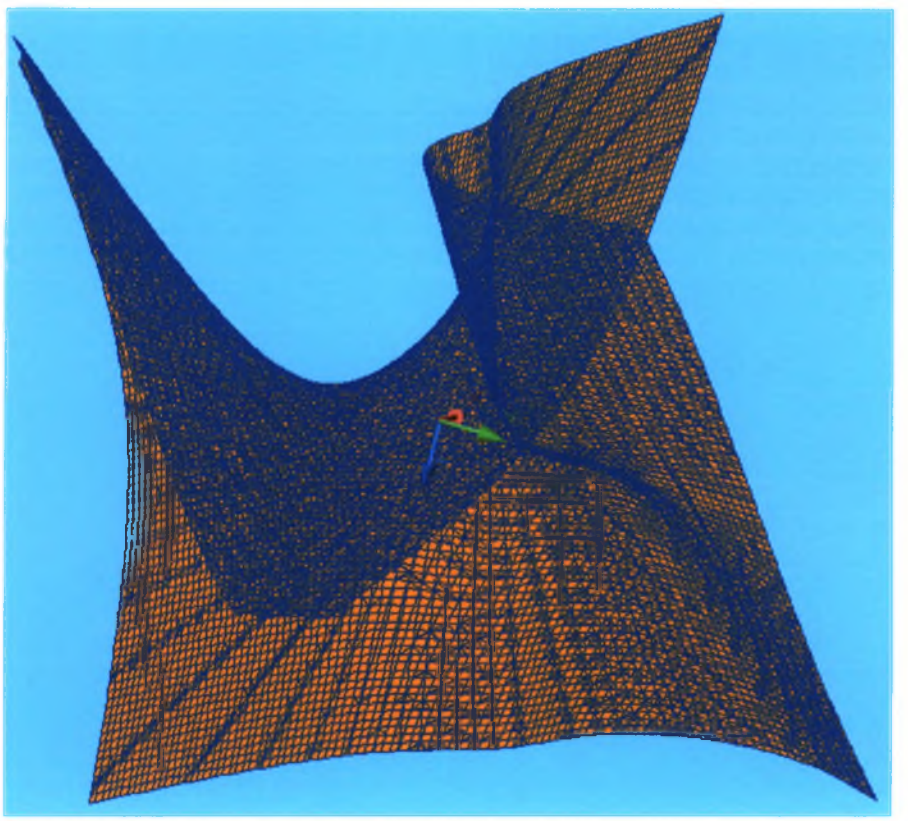
(α) *Προϊόν του Mathematica*

(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.74 (συνεχίζεται)

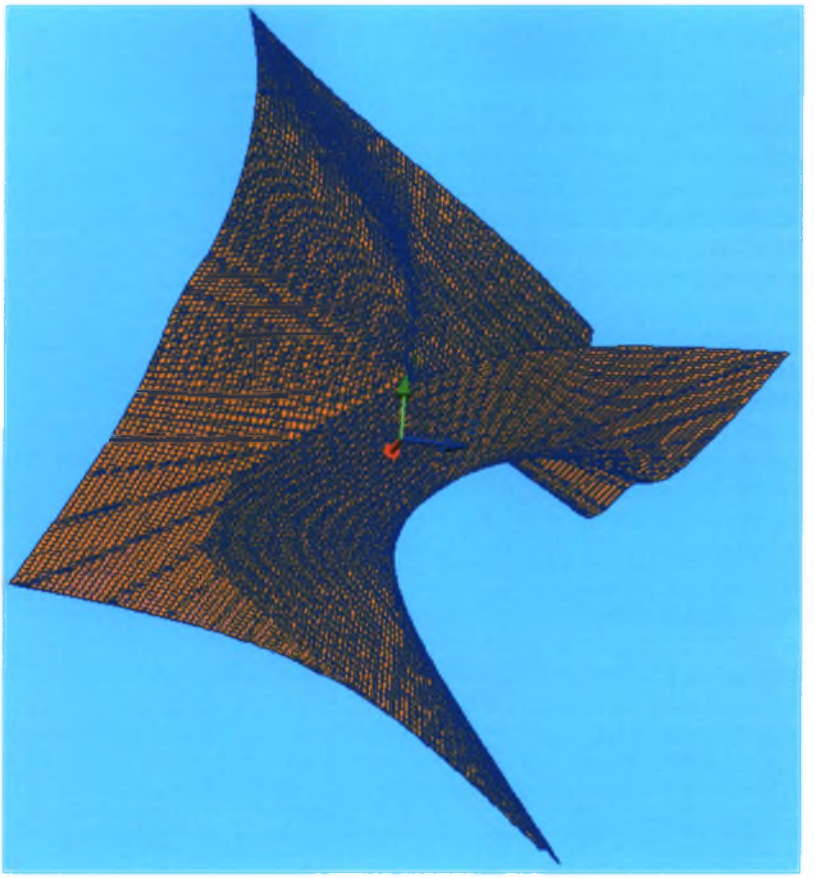


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



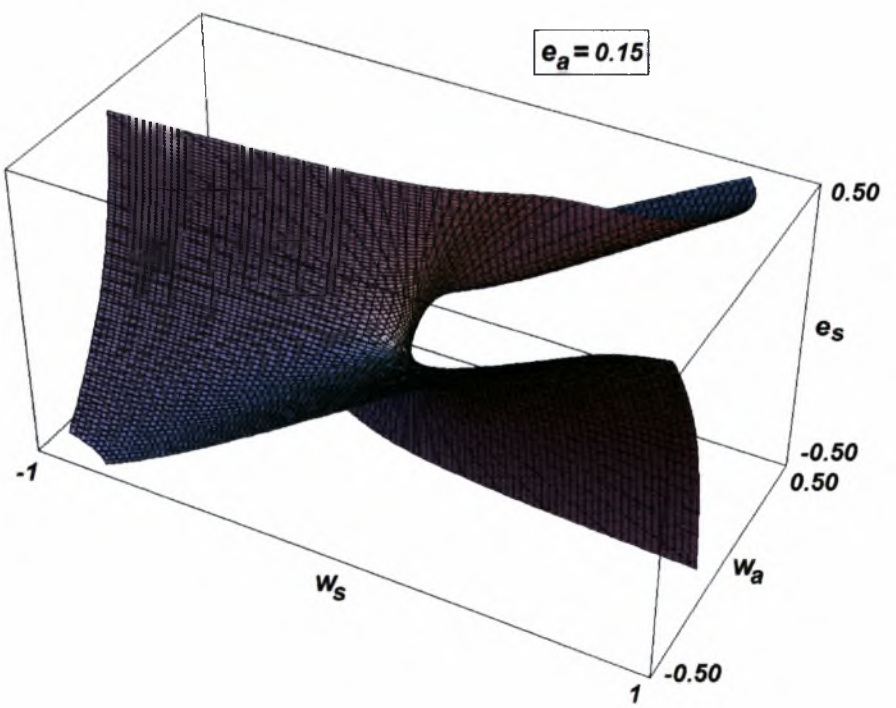
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.74 (συνεχίζεται)



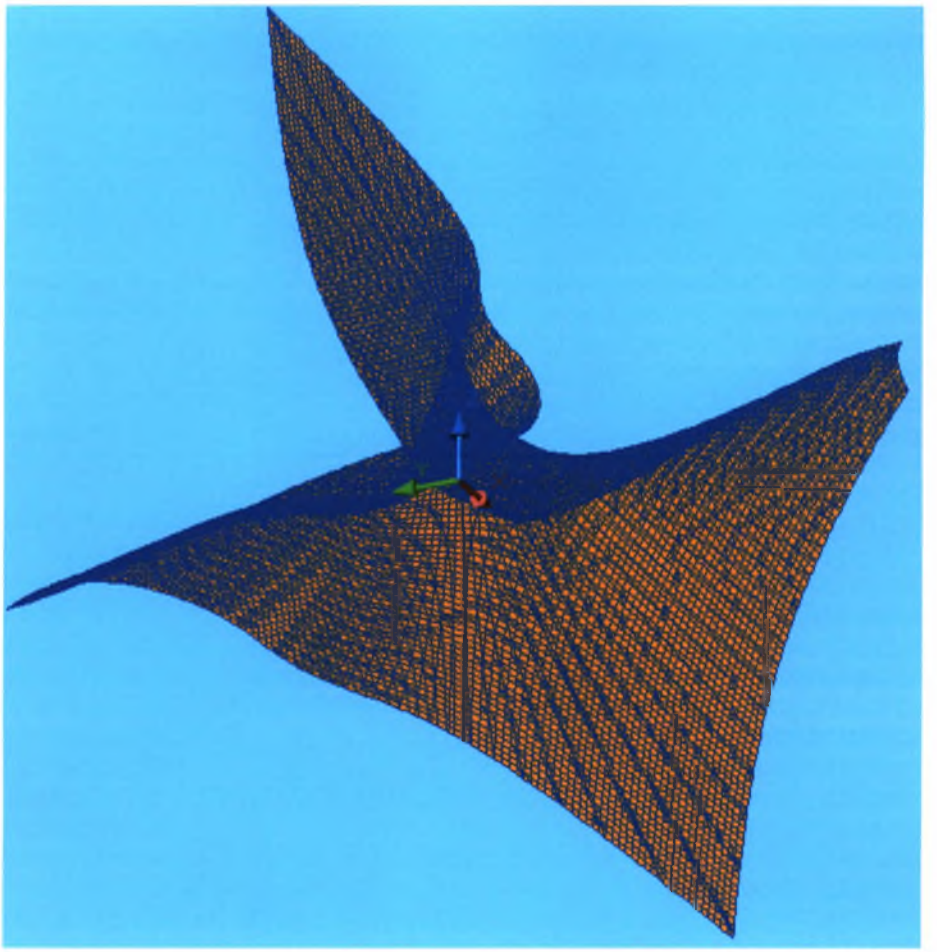
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.74. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.10$.

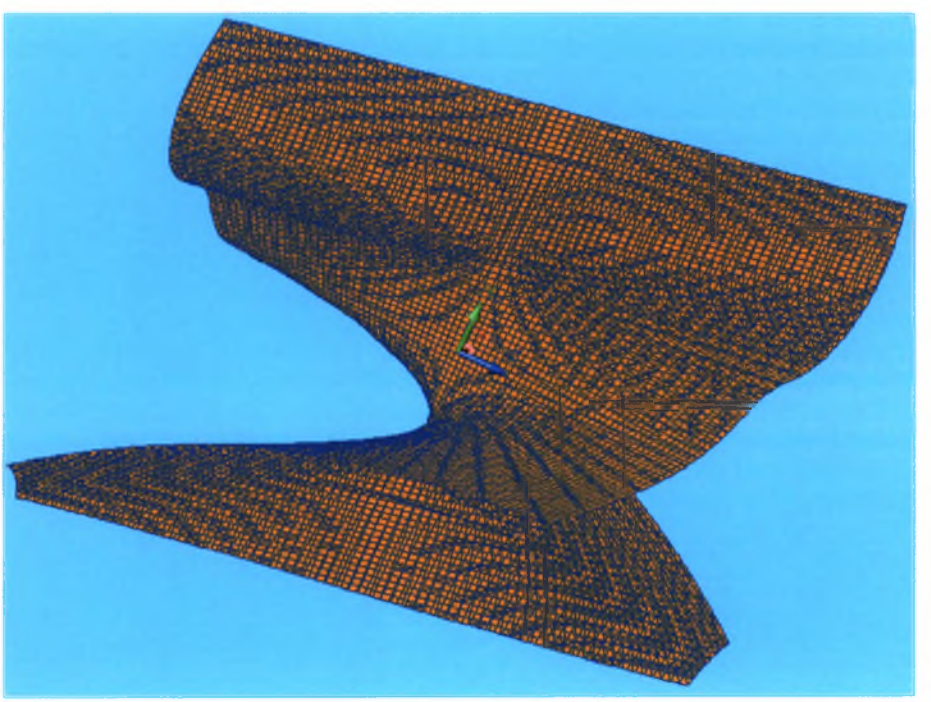


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.75 (συνεχίζεται)

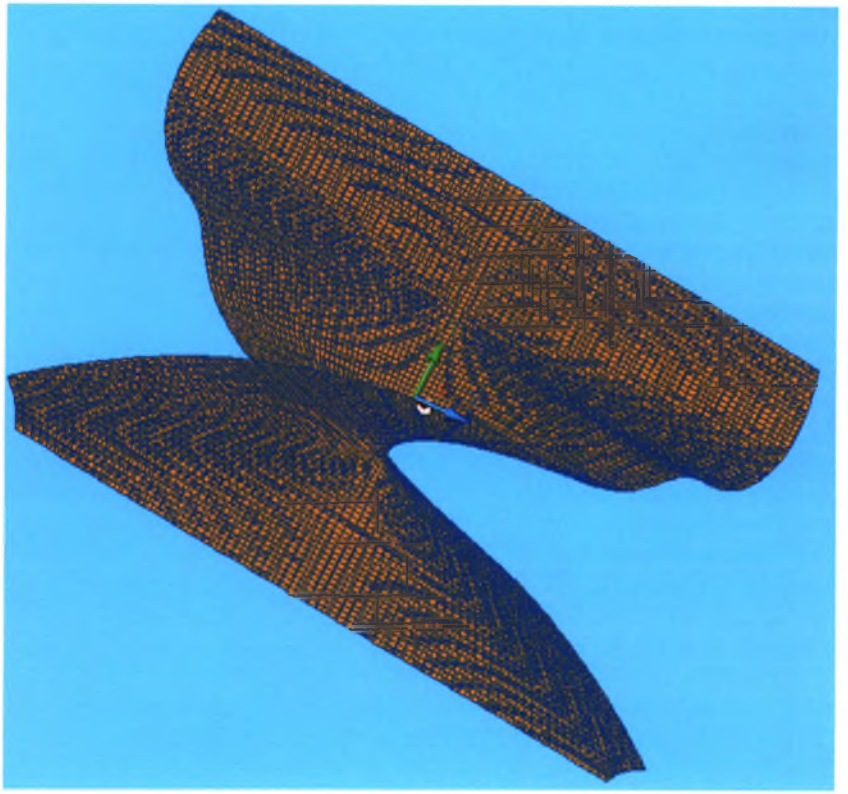


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

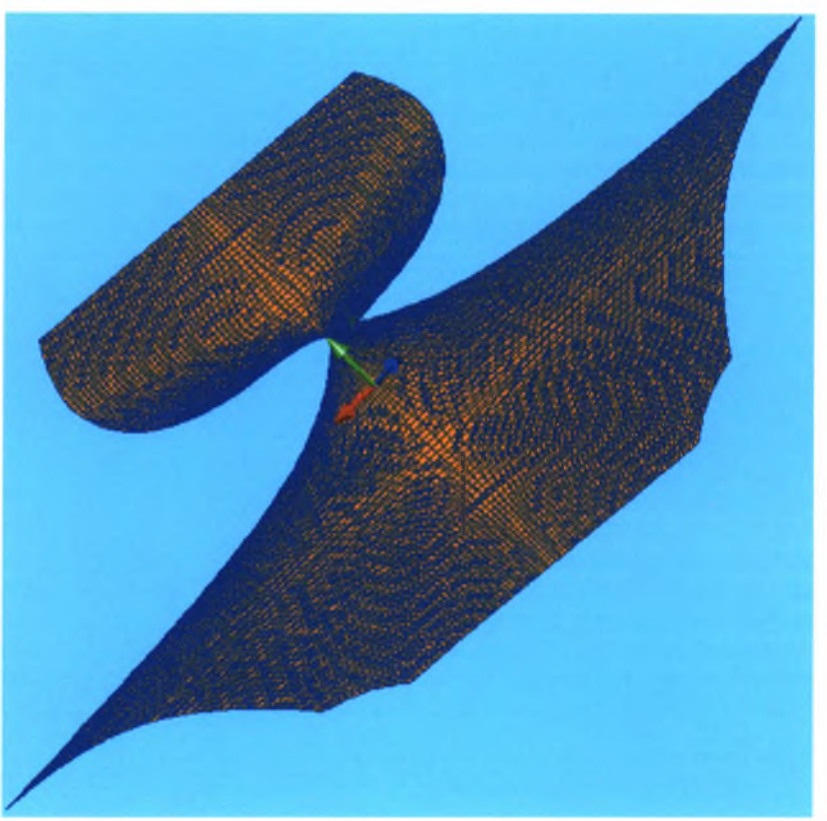


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.75 (συνεχίζεται)

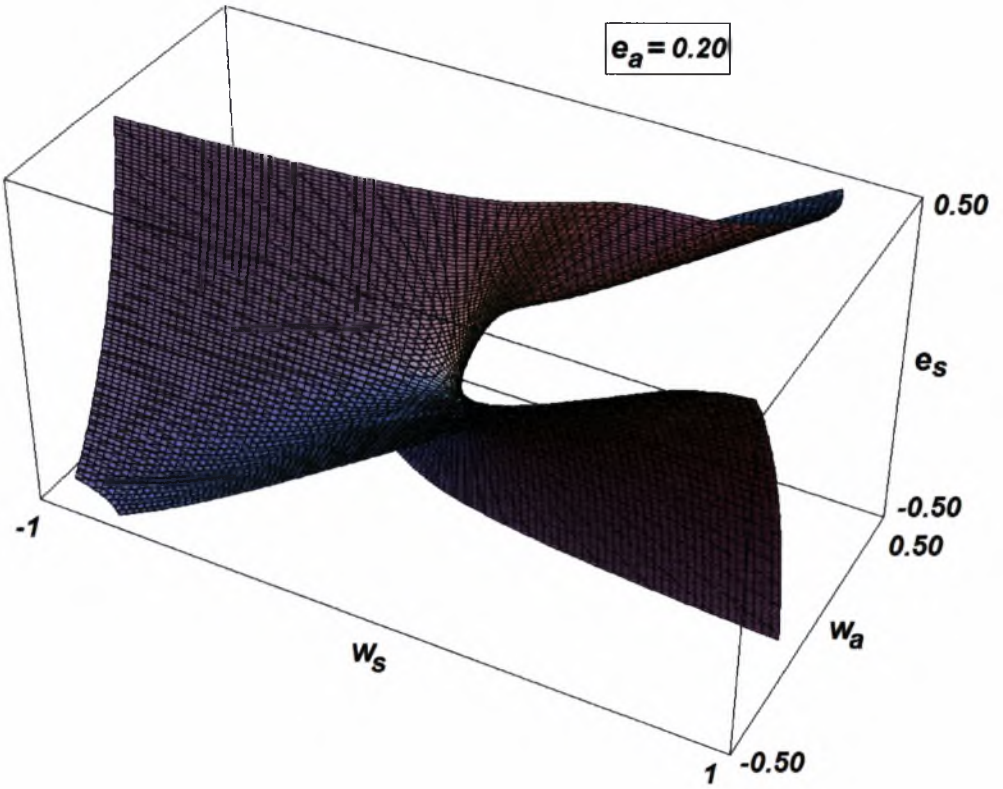


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

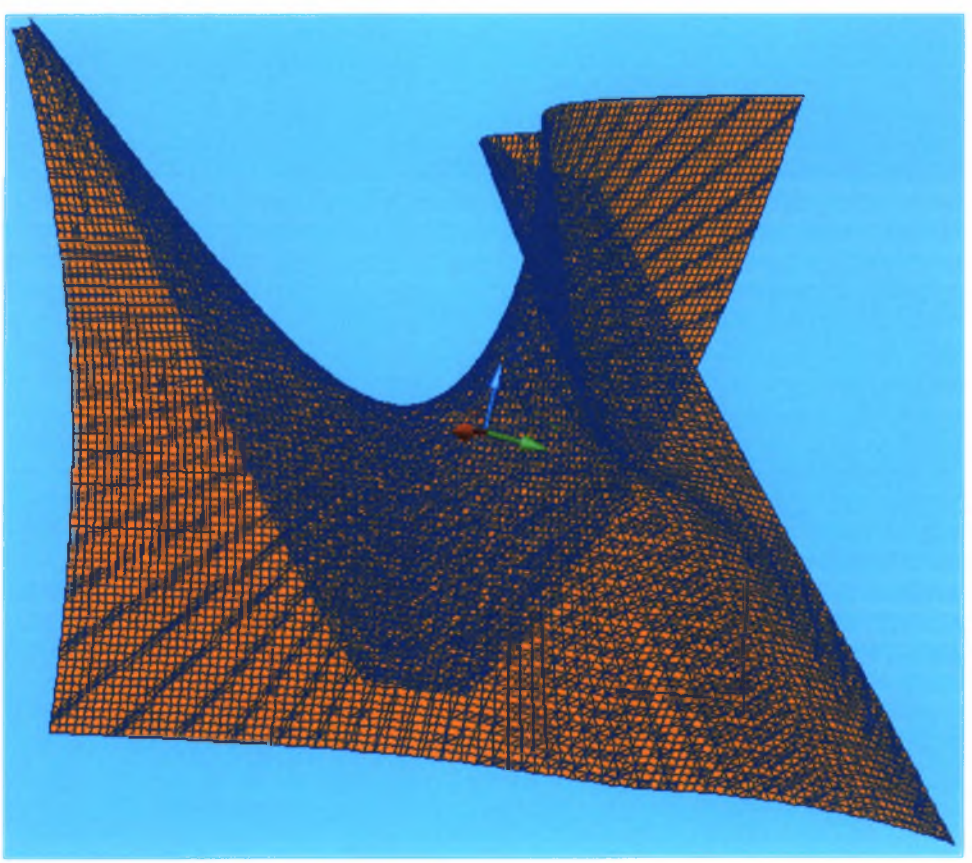


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.75. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.15$.

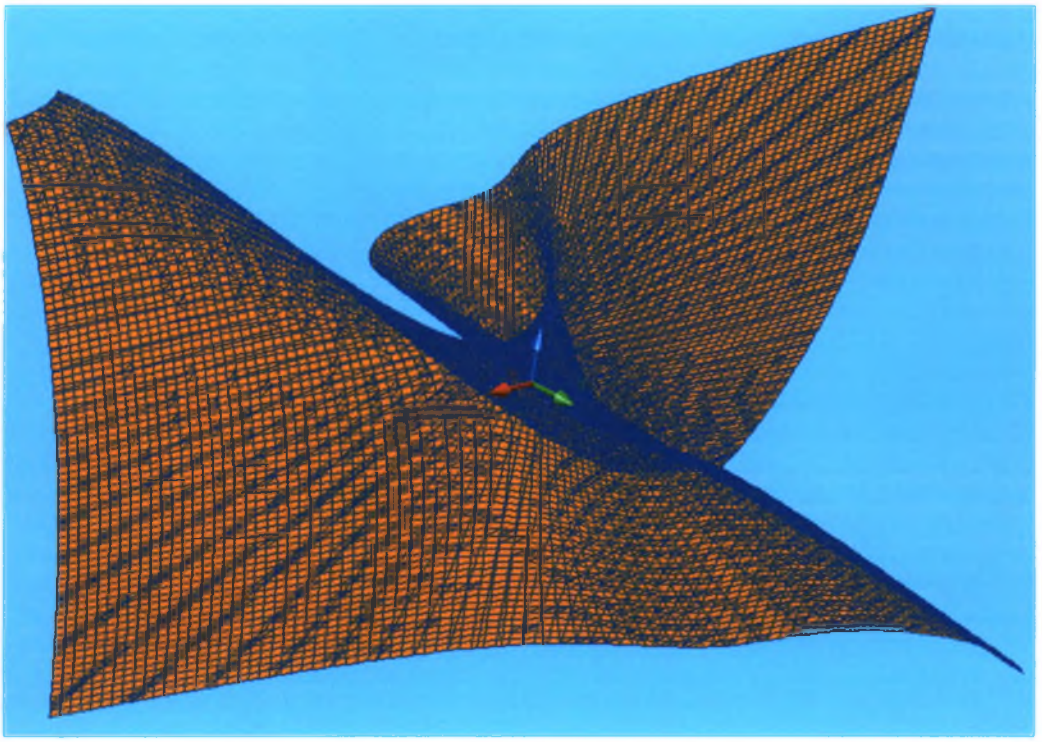


(α) *Προϊόν του Mathematica*

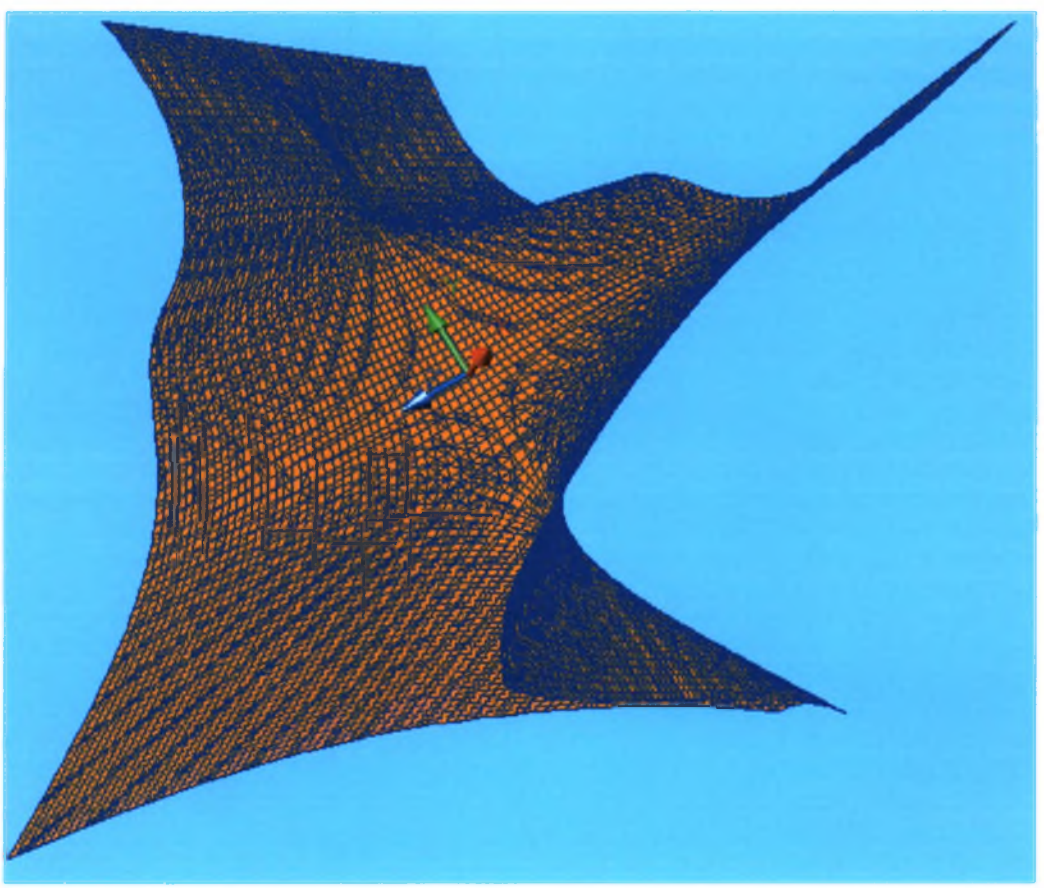


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

Σχήμα Β1.76 (συνεχίζεται)

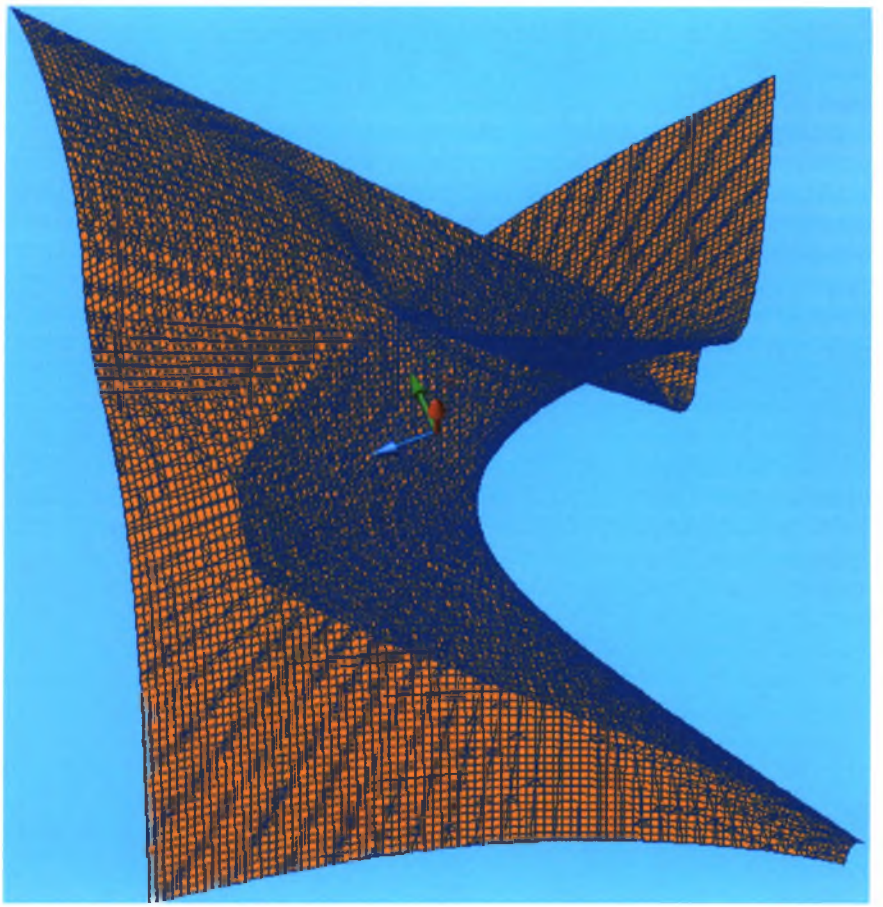


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*



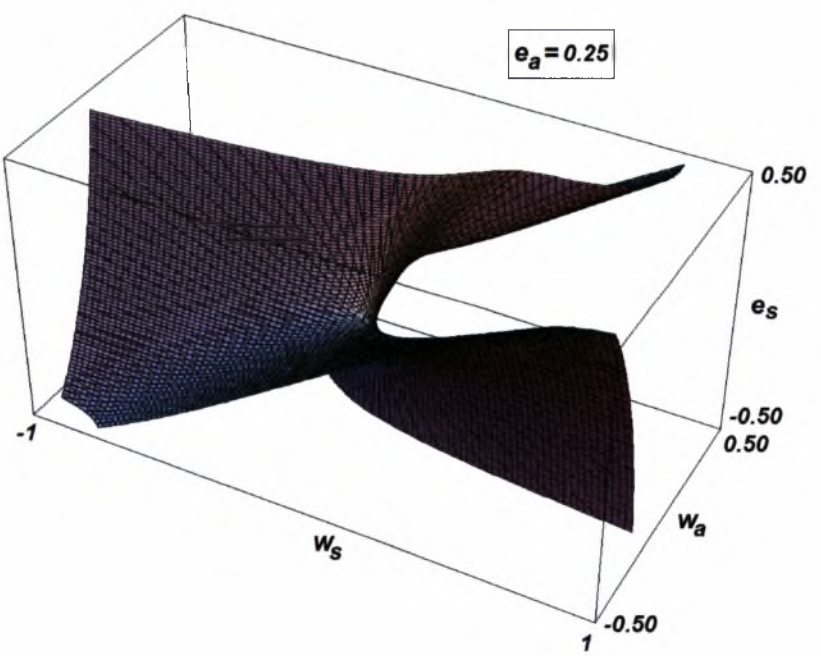
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.76 (συνεχίζεται)



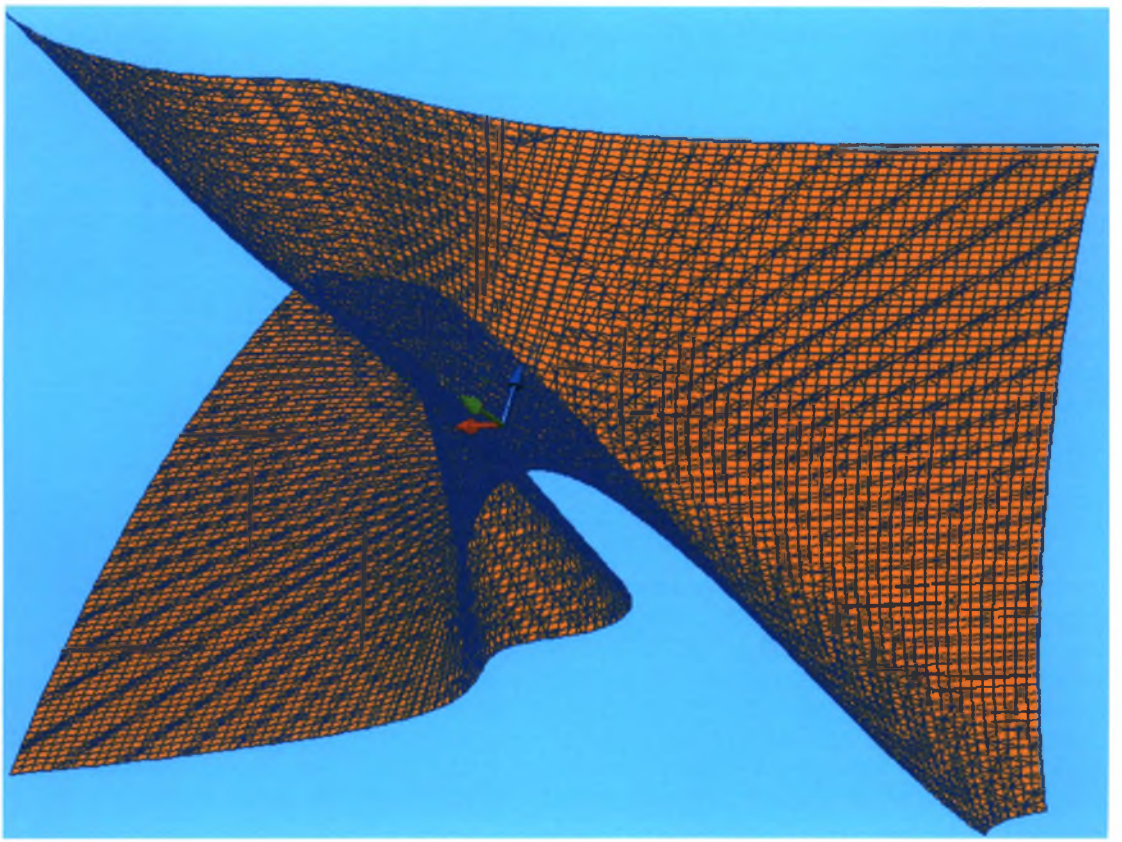
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.76. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.20$.

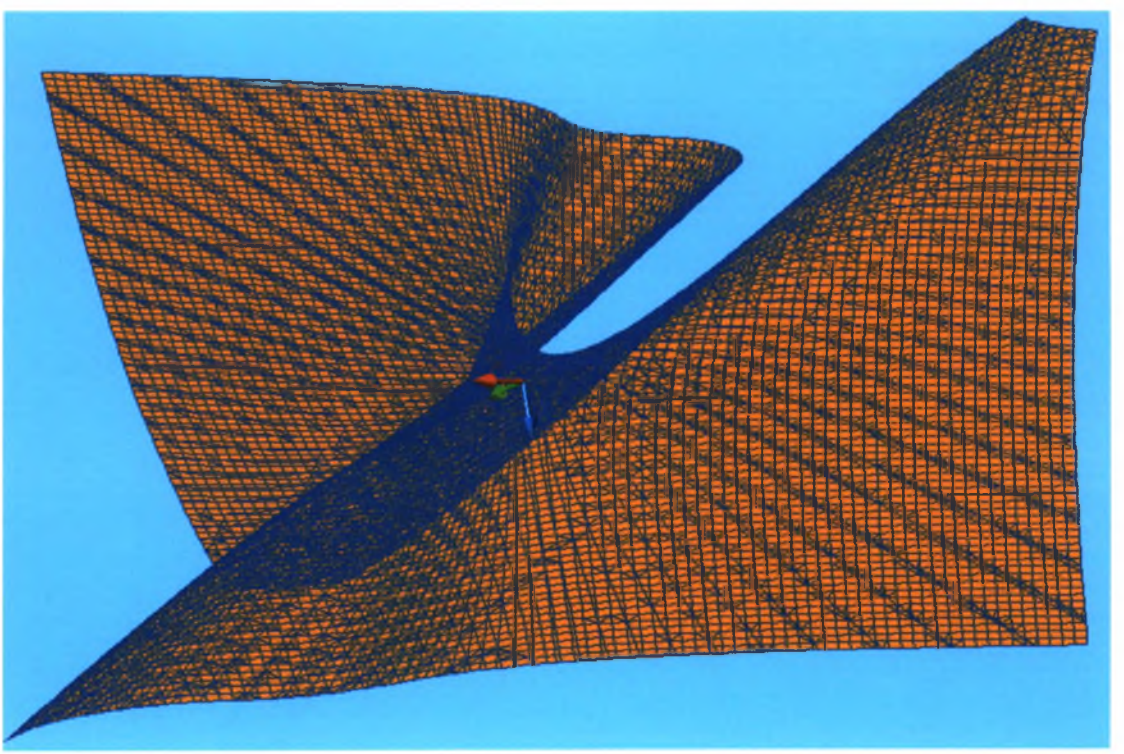


(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.77 (συνεχίζεται)

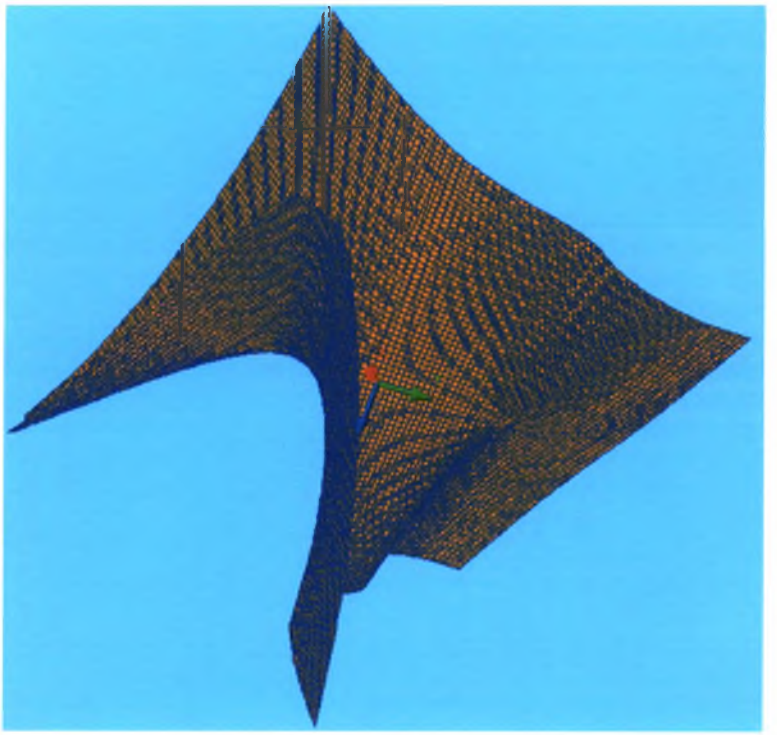


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

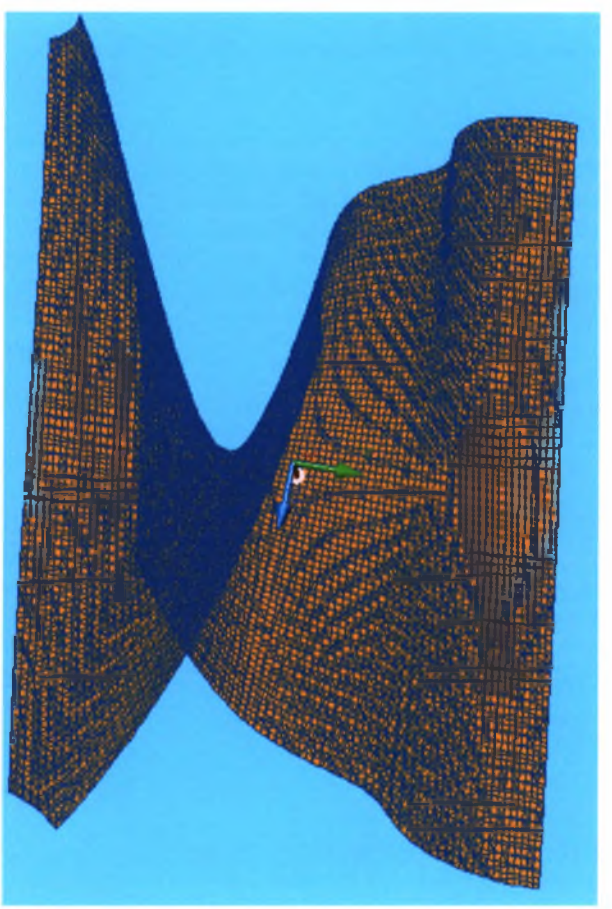


(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.77 (συνεχίζεται)

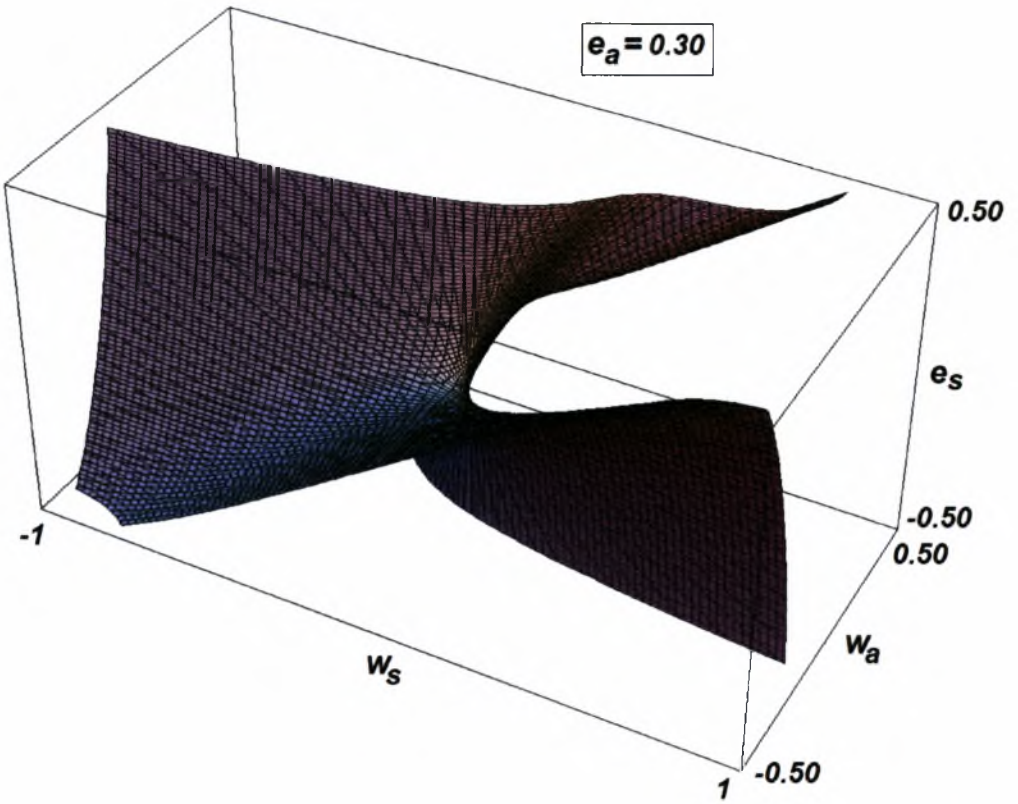


(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

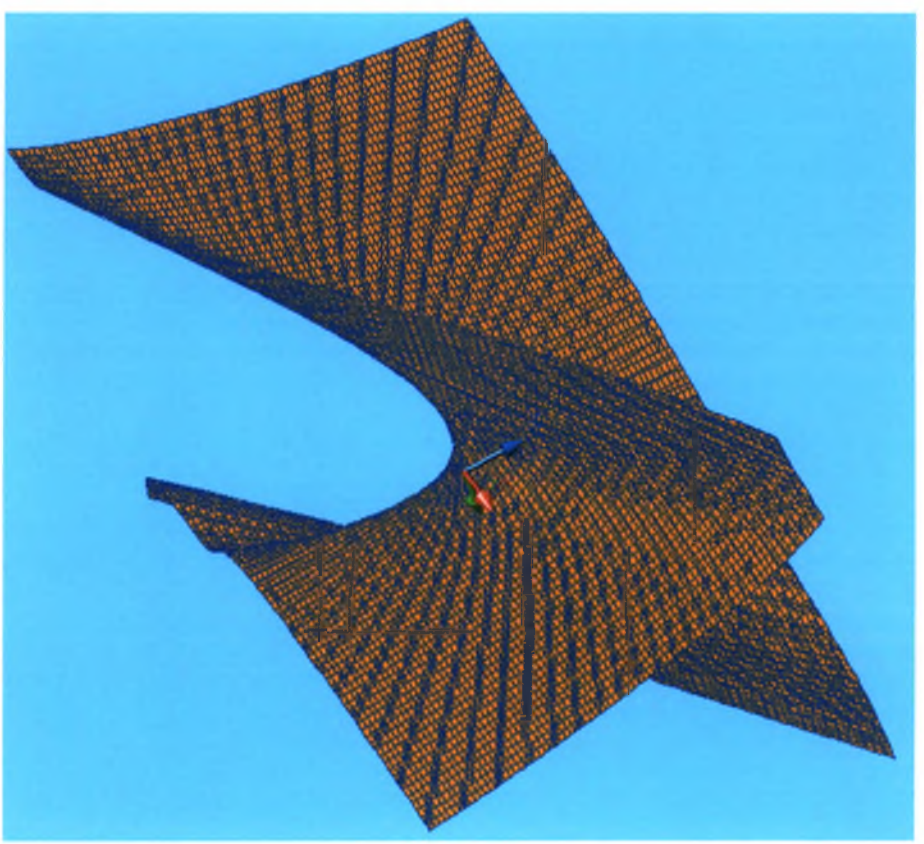


(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.77. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.25$.

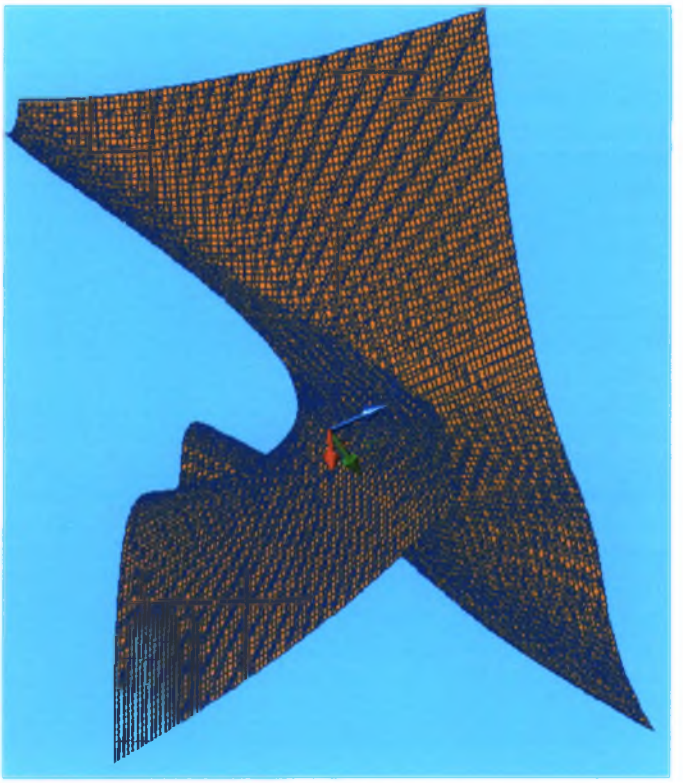


(α) *Προϊόν του Mathematica*



(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

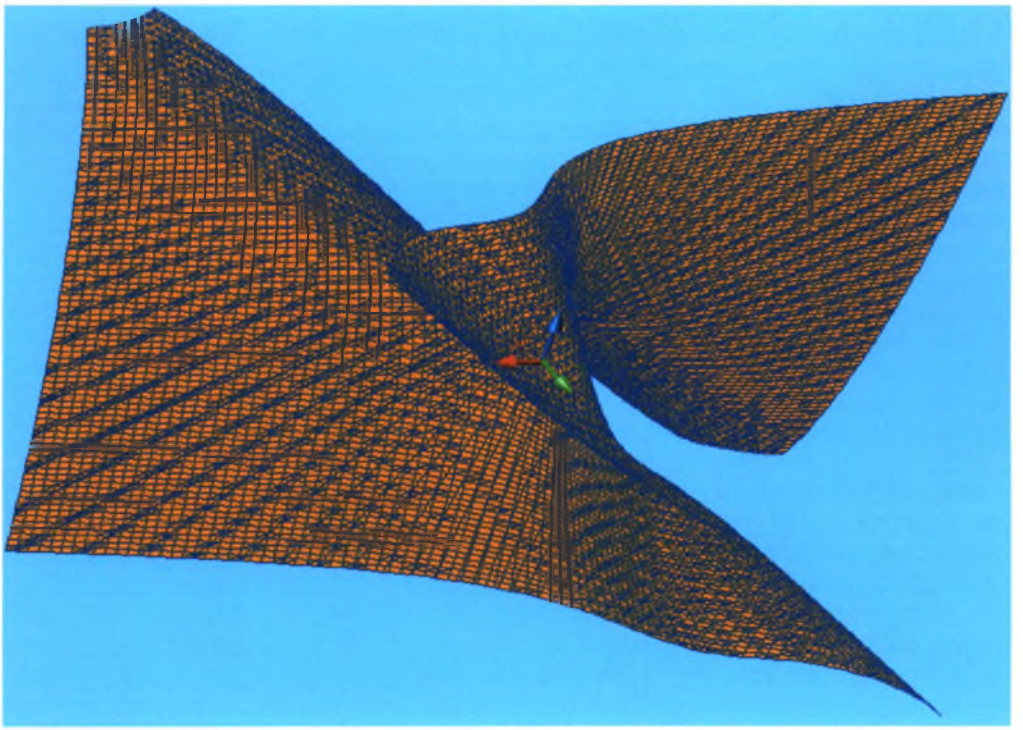
Σχήμα Β1.78 (συνεχίζεται)



(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

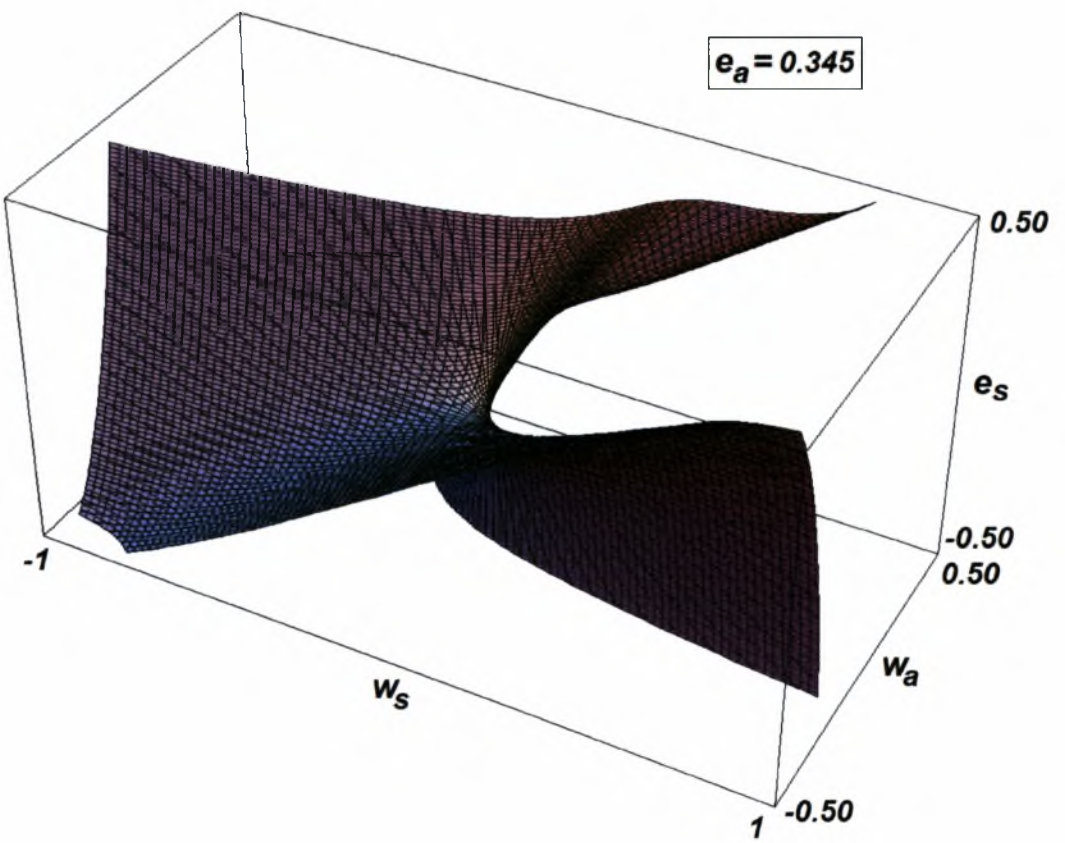
(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*

Σχήμα Β1.78 (συνεχίζεται)



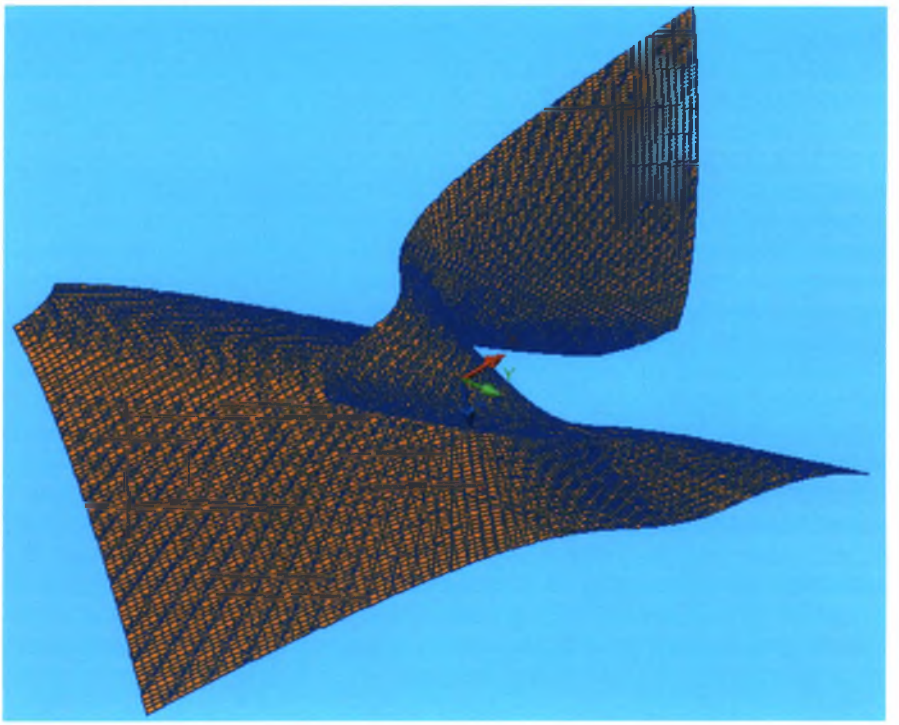
(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.78. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.30$.



(α) *Προϊόν του Mathematica*

Σχήμα Β1.79 (συνεχίζεται)

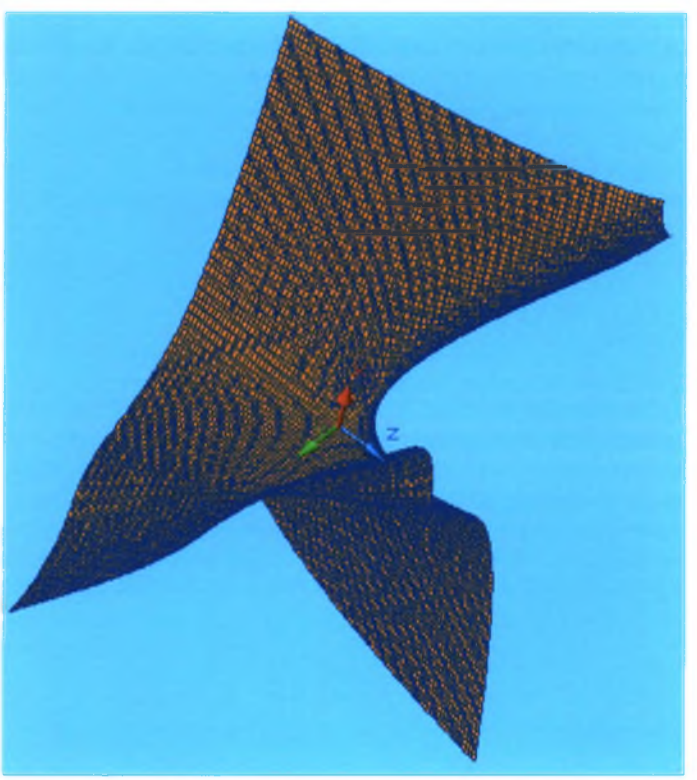


(β) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 1(συνδυασμός Mathematica και AutoCAD)*

(γ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 2*

Σχήμα Β1.79 (συνεχίζεται)

(δ) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 3*



(ε) *Τρισδιάστατη απεικόνιση 4*

Σχήμα Β1.79. Ως Σχήμα Β1.64 αλλά για $e_a = 0.345$.

Τέλος, τα διακλαδικά σύνολα *Bs* του πλήρως ατελούς συστήματος ορίζονται από τις σχέσεις (Β1.41α-γ), που είναι της μορφής

$$B_{si}(x,y,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \equiv B_{si}(w_s,w_a,\lambda,e_s,e_a) = 0 \quad , \quad i = 1 \div 3$$

Πρόκειται περί ιδιαίτερα πολύπλοκων – πεπλεγμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων των ***δύο ενεργών συντεταγμένων*** και των ***τριών παραμέτρων ελέγχου***, οι οποίες για καθαρά εποπτικούς λόγους επαναλαμβάνονται κατωτέρω:

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} -2x\left(2+x^2+3y^2\right)\alpha_0 + 8\left(x-\alpha_1\right)^3 + 4\left(x+y-\alpha_1-\alpha_2\right)^3 + 4\left(x-y-\alpha_1+\alpha_2\right)^3 + \\ \frac{1}{3}\left(x^5+2x^3\left(4+5y^2\right)-6x^2\alpha_1-6\left(2+y^2\right)\alpha_1+3x\left(4+16y^2+7y^4 12y\alpha_2\right)\right)\beta \end{array}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} -6y\left(2+x^2+3y^2\right)\alpha_0 + 4\left(x+y-\alpha_1-\alpha_2\right)^3 - 4\left(x-y-\alpha_1+\alpha_2\right)^3 + \\ \left(2\left(36+7x^2\right)y^3+27y^5+y\left(36+16x^2+\frac{5x^4}{3}-4x\alpha_1\right)-6\left(6+x^2\right)\alpha_2-54y^2\alpha_2\right)\beta \end{array}\right] = 0$$

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \frac{5x^4\beta}{3}+7y^4\beta-12y\alpha_2(4+\beta) \\ +4\left(-\alpha_0+12\alpha_1^2+6\alpha_2^2+\beta\right) \\ +y^2(24-6\alpha_0+16\beta) \\ +2x^2\left(24-3\alpha_0+4\beta+5y^2\beta\right) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{5x^4\beta}{3}+135y^4\beta-4x\alpha_1(12+\beta) \\ +12\left(-\alpha_0+2\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)+3\beta\right)-12y\alpha_2(4+9\beta) \\ +y^2(24-54\alpha_0+216\beta) \\ +x^2\left(24-6\alpha_0+16\beta+42y^2\beta\right) \end{array}\right\} - \\ \frac{16}{9}\left(5x^3y\beta-3\alpha_1\left(-12\alpha_2+y(12+\beta)\right)+3x\left(7y^3\beta-3\alpha_2(4+\beta)+y(12-3\alpha_0+8\beta)\right)\right)^2 \end{array}\right] = 0$$

Σύμφωνα και με τα περιεχόμενα της §2 του Κεφαλαίου Α, και ιδιαίτερα σε ότι αφορά τις Καταστροφές Υπερβολικού και Ελλειπτικού Λώρου, η πιο εύχρηστη και ταυτόχρονα ιδεώδης – από πλευράς δυνατότητας ποιοτικής ανάλυσης – απεικόνιση παρόμοιων επιφανειών διακλαδικών συνόλων, είναι αυτή στο χώρο των παραμέτρων ελέγχου $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \equiv (\lambda,e_s,e_a)$. Προς επίτευξη του σκοπού αυτού, για την παρούσα περίπτωση, θα πρέπει κανείς να προβεί σε απαλοιφή των ενεργών συντεταγμένων από τις ως άνω εξισώσεις, μέσω της οποίας το τελικό προϊόν θα ήταν μια έκφραση της μορφής $B_s(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) = 0$, που θα αντιπροσώπευε την επιθυμητή επιφάνεια στον χώρο των παραμέτρων ελέγχου. Όμως, κάτι τέτοιο δεν κατέστη δυνατόν, με χρήση των υπολογιστικών δυνατοτήτων ενός προσωπικού Η/Υ σε συνδυασμό με το *Mathematica*, λόγω της πολυπλοκότητας των ως άνω σχέσεων. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν μέθοδοι και ειδικό λογισμικό απεικόνισης παρόμοιων

πεπλεγμένων επιφανειών, αλλά ανεπτυγμένο σε άλλα υπολογιστικά περιβάλλοντα, βασισμένα στο Unix (όπως OSF Motif, X-Windows, Irix), πρόσβαση στα οποία δεν κατέστη εφικτή, αλλά και εκφεύγει κατά πολύ των σκοπών της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

(β) Συσχετισμός με τα ευρήματα της Θεωρίας Διακλαδώσεων

1. Γενικά

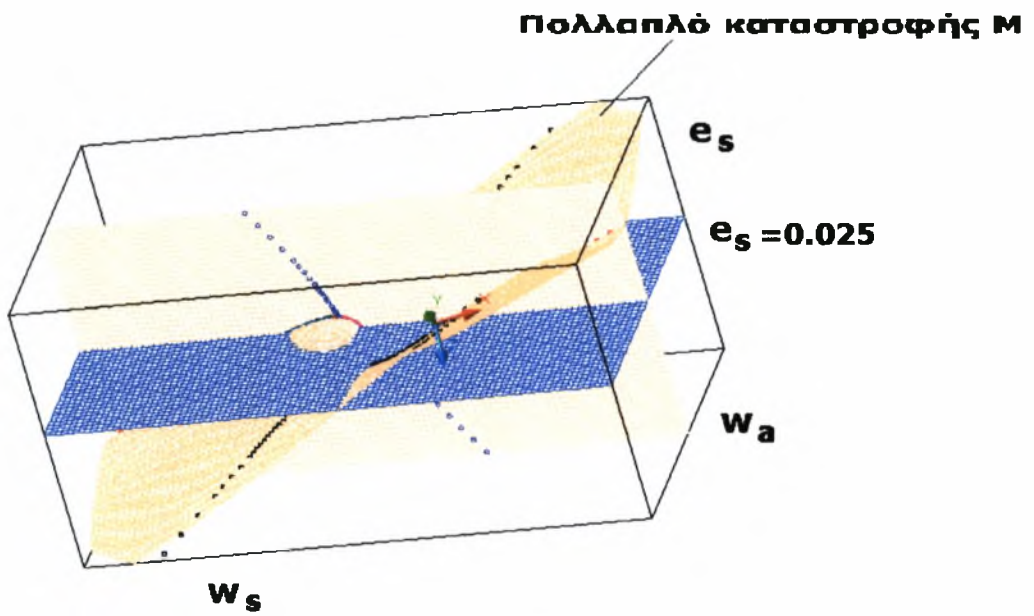
Με το εδάφιο αυτό ολοκληρώνεται η ανάλυση του όλου προβλήματος μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών, με τον συσχετισμό των ευρημάτων αυτής με τα αντίστοιχα της Διακλαδικής Θεωρίας (δηλ. της μη γραμμικής στατικής ανάλυσης ευστάθειας). Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο αρχικά μερικά ατελές σύστημα (τόσο με μόνο συμμετρική όσο και με μόνο αντισυμμετρική αρχική ατέλεια), για το οποίο έχει προηγηθεί ***πλήρως παραμετροποιημένη*** ανάλυση, ενώ παρατίθενται και ορισμένες ποιοτικές επισημάνσεις, που αφορούν το πλήρως αρχικά ατελές προσομοίωμα.

2. Μερικά αρχικά ατελές σύστημα με ΜΟΝΟ συμμετρική αρχική ατέλεια ($e_s \neq 0$, $e_a = 0$)

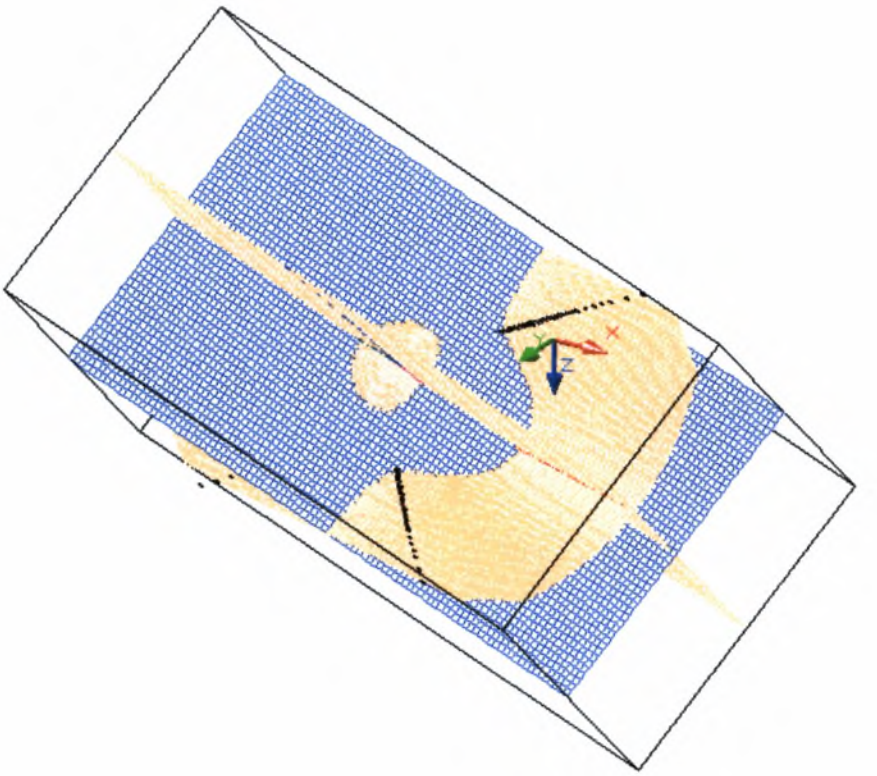
Επιλέγεται το δεύτερο είδος επιφάνειας πολλαπλού καταστροφής M – στο χώρο $[w_s, w_a, e_s]$ – του Σχήματος Β1.24β και αναπαρίσταται εκ νέου γραφικά μέσω τρισδιάστατων γραφικών απεικονίσεων, στις οποίες επίσης σημειώνονται τόσο τα κρίσιμα σημεία Σ_1, Σ'_1, C_3^{imp}, S_1, C_2^{imp}, C_3^{imp} των Πινάκων Β1 και Β2 (καθώς και τα κρίσιμα σημεία του τέλειου συστήματος), όσο και τα χαρακτηριστικά επίπεδα $e_s = e_s^{cr}$=0.0697, $e_s = -e_s^{cr}$=-0.0679 και e_s = 0.025. Οι απεικονίσεις αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα Β1.80, απ' όπου προκύπτουν ατα ακόλουθα συμπεράσματα – διαπιστώσεις, τα οποία επιβεβαιώνουν πλήρως την ορθότητα των αποτελεσμάτων της Διακλαδικής ανάλυσης της §Β1.2γ(1) της παρούσας.

- Καταδεικνύονται με σαφήνεια οι αλληλοσυνδεόμενες και μη διπλές αιχμές και διαπιστώνεται άμεσα η πολλαπλή ύπαρξη των πέντε χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της στοιχειώδους ανωμαλίας τύπου διπλής αιχμής (§Α2.2ε).
- Υφίσταται έκδηλη η μερική διάσπαση της συμμετρίας και η εξ αυτής γένεση διακλαδώσεων εντός και εκτός επιπέδου.

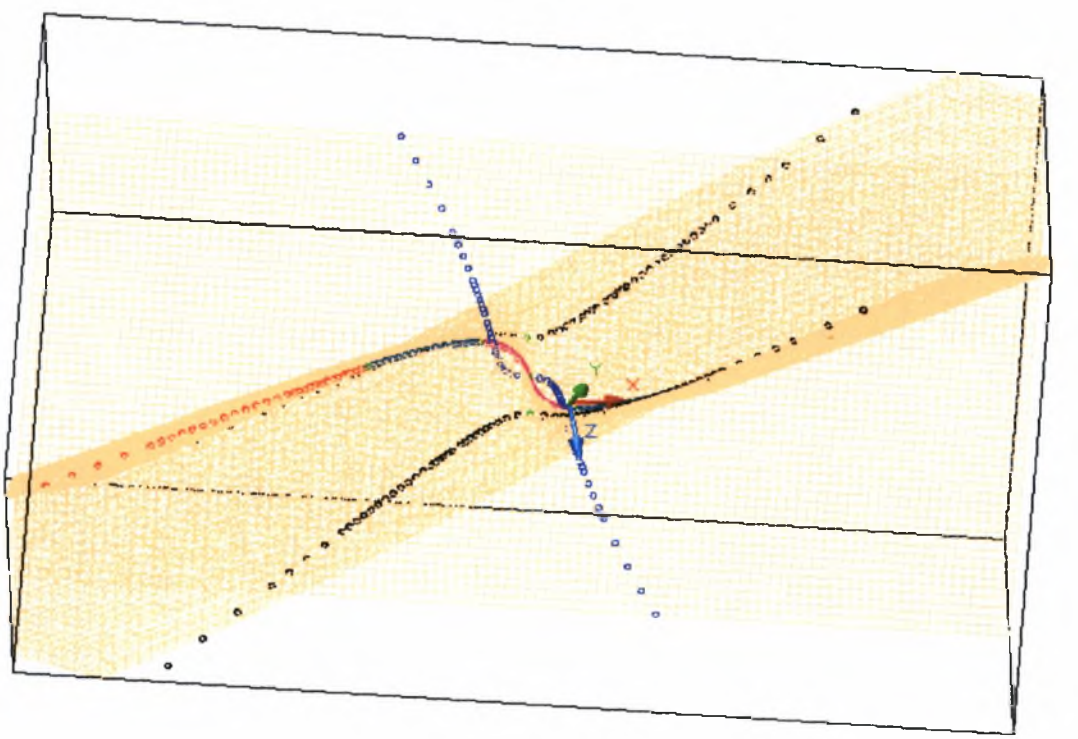
- Υπάρχει πλήρης ταύτιση των προϊόντων της τομής του πολλαπλού καταστροφής M με το επίπεδο $es = 0.025$ με τους δρόμους ισορροπίας των Σχημάτων Β1.9α και Β1.10.
- Τα επίπεδα $e_s = e_s^{cr}$ και $e_s = -e_s^{cr}$ εφάπτονται της επιφάνειας M και μεταξύ αυτών περικλείονται οι διακλαδώσεις που προέρχονται από τη συμμετρική διαταραχή των κρίσιμων σημείων C_2 και C_3 του τέλειου συστήματος.



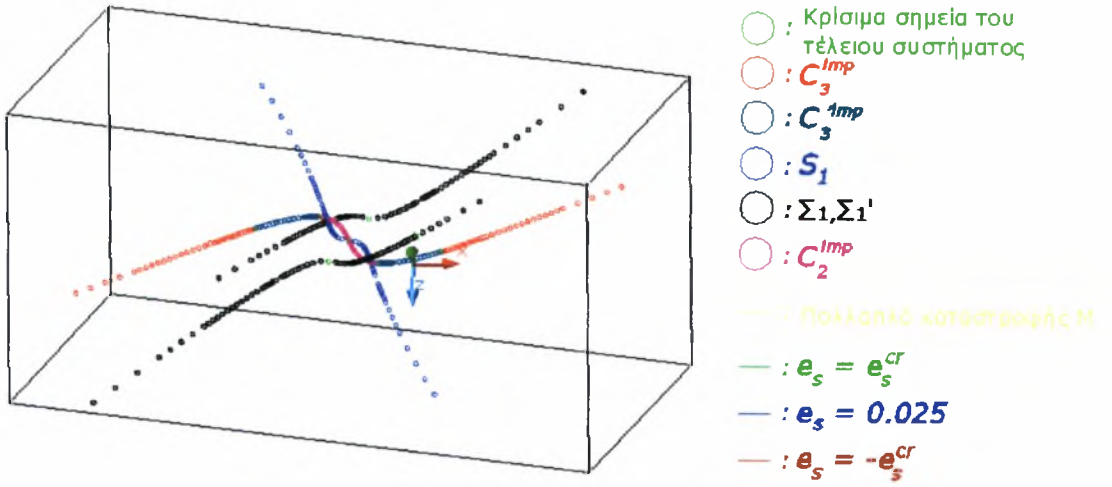
(α) Τρισδιάστατη απεικόνιση 1



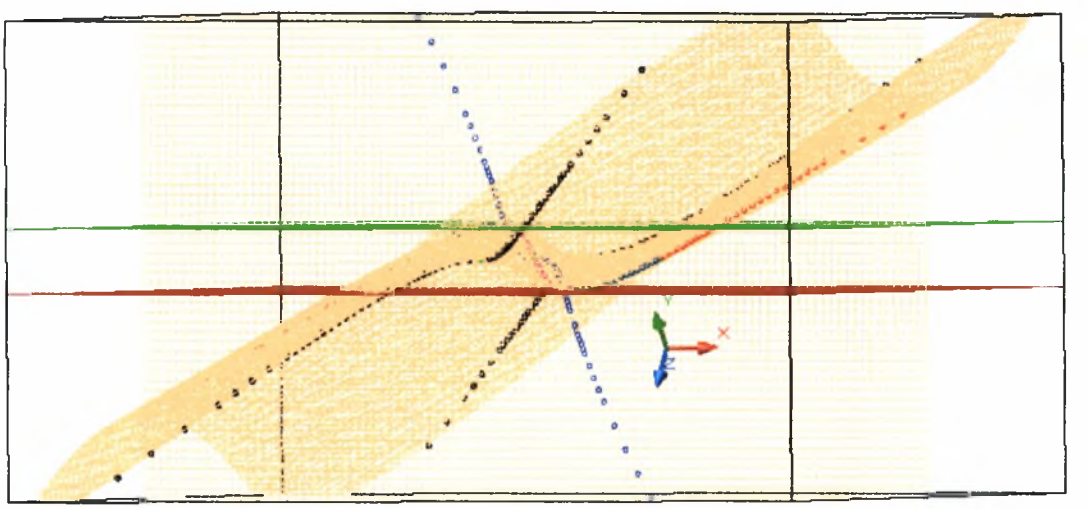
(β) Τρισδιάστατη απεικόνιση 2



(γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση 3



(δ) Τρισδιάστατη απεικόνιση 4



(ε) Τρισδιάστατη απεικόνιση 5

Σχήμα Β 1.80. Επιφάνεια του πολλαπλού καταστροφής του Σχήματος Β 1.24.β με τα κρίσιμα σημεία (Σ_1, Σ'_1, C_3^{imp}, S_1, C_2^{imp}, $C_3^{\prime imp}$) και τα χαρακτηριστικά επίπεδα ($e_s = e_s^{cr}$, $e_s = -e_s^{cr}$ και $e_s = 0.025$).

3. *Μερικά αρχικά ατελές σύστημα με ΜΟΝΟ αντισυμμετρική αρχική ατέλεια ($e_s=0$, $e_a\neq 0$)*

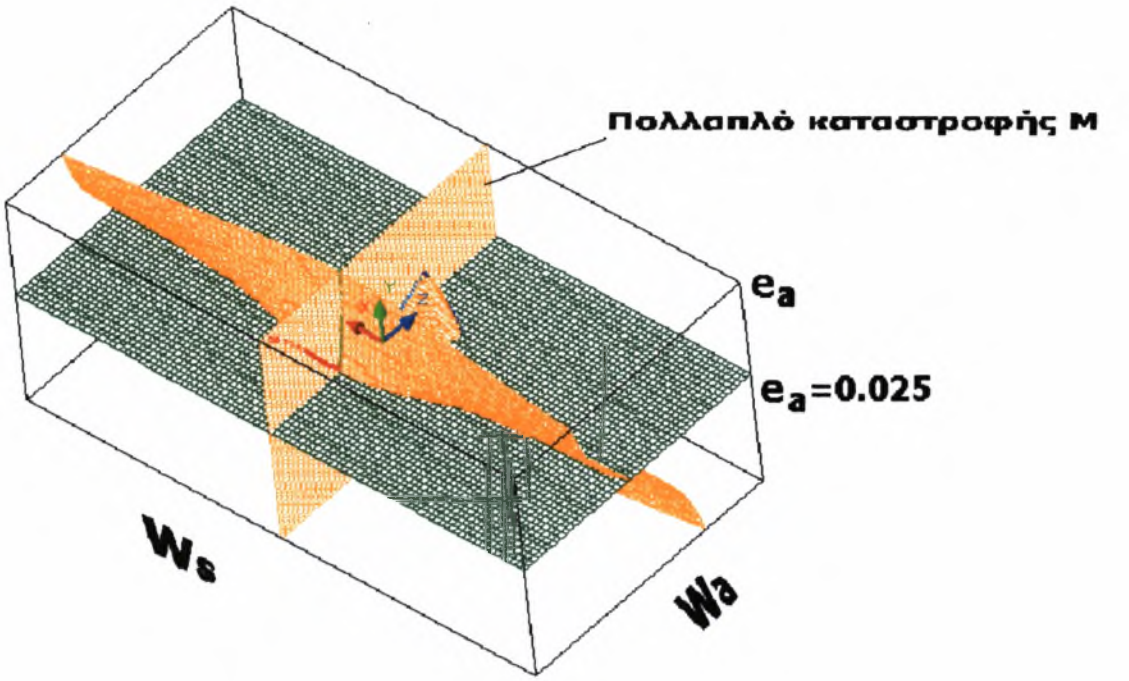
Κατ' αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση, αναπαρίσταται εκ νέου γραφικά το 2ο είδος επιφάνειας πολλαπλού καταστροφής M (στο χώρο $[w_s,\ w_a,\ e_a]$) του Σχήματος Β1.29β. Στις τρισδιάστατες γραφικές απεικονίσεις αυτού σημειώνονται και εδώ τόσον τα κρίσιμα σημεία του τέλειου συστήματος, τα κρίσιμα σημεία Σ_2, Σ'_2, C_4^{imp}, C_1^{imp}, S_2, $C_4^{'imp}$ των Πινάκων Β3 και Β4, όσον και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά επίπεδα $e_a = e_a^{cr} = 0.101163$, $e_a = -e_a^{cr} = -0.101163$ και $e_a = 0.025$. Όπως δε προκύπτει από το Σχήμα Β1.81, που παρουσιάζονται οι εν λόγω απεικονίσεις, επιβεβαιώνονται πλήρως τα αποτελέσματα της Διακλαδικής ανάλυσης της §Β1.2γ(2) της παρούσας, καθόσον ισχύει ότι:

- Οι αλληλοσυνδεόμενες και μη διπλές αιχμές καταδεικνύονται σαφώς, ενώ άμεσα διαπιστώνει κανείς την πολλαπλή ύπαρξη των πέντε χαρακτηριστικών ιδιοτήτων της στοιχειώδους καταστροφής τύπου διπλής αιχμής, όπως αυτές παρατέθηκαν στην §Α2.2ε της παρούσας.

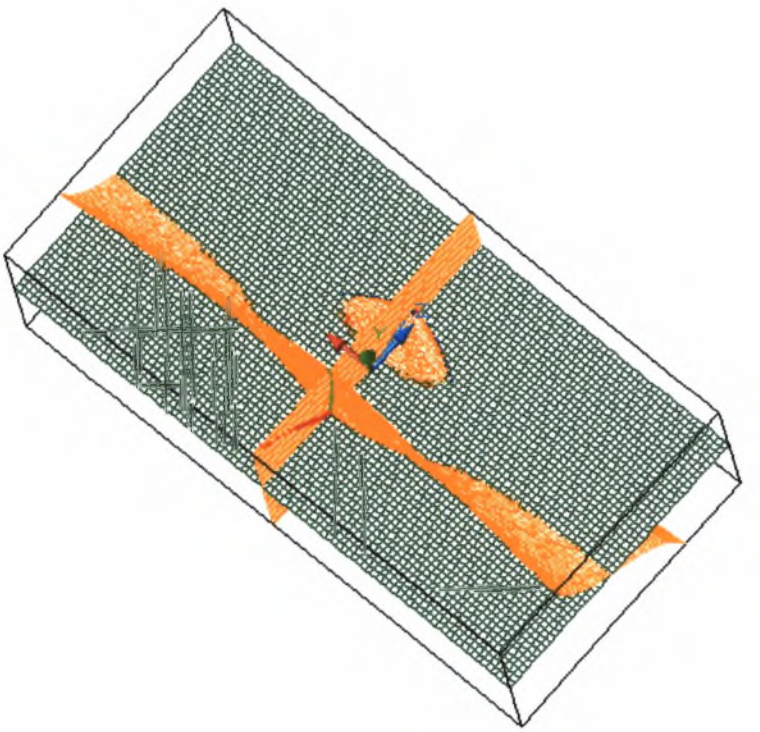
- Παρατηρείται η μερική διάσπαση της συμμετρίας και η εξ αυτής γένεση διακλαδώσεων εντός και εκτός επιπέδου.

- Η τομή του πολλαπλού καταστροφής M με το επίπεδο $e_a = 0.025$ παράγει καμπύλες, οι οποίες ταυτίζονται με τους δρόμους ισορροπίας των Σχημάτων Β1.15α και Β1.16.

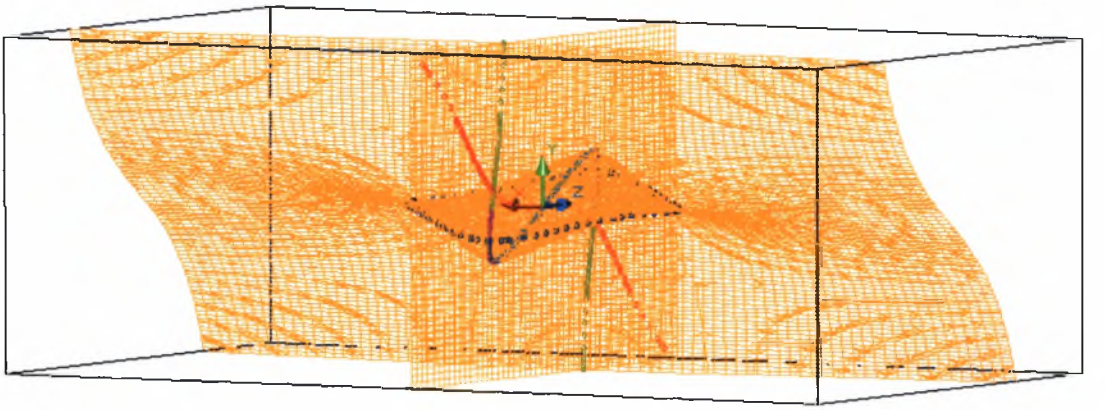
- Τα επίπεδα $e_a = e_a^{cr}$ και $e_a = -e_a^{cr}$ εφάπτονται της επιφάνειας M και περικλείουν τις διακλαδώσεις οι οποίες προέρχονται από την αντισυμμετρική διαταραχή των κρίσιμων σημείων C_1 και C_4 του τέλειου συστήματος.



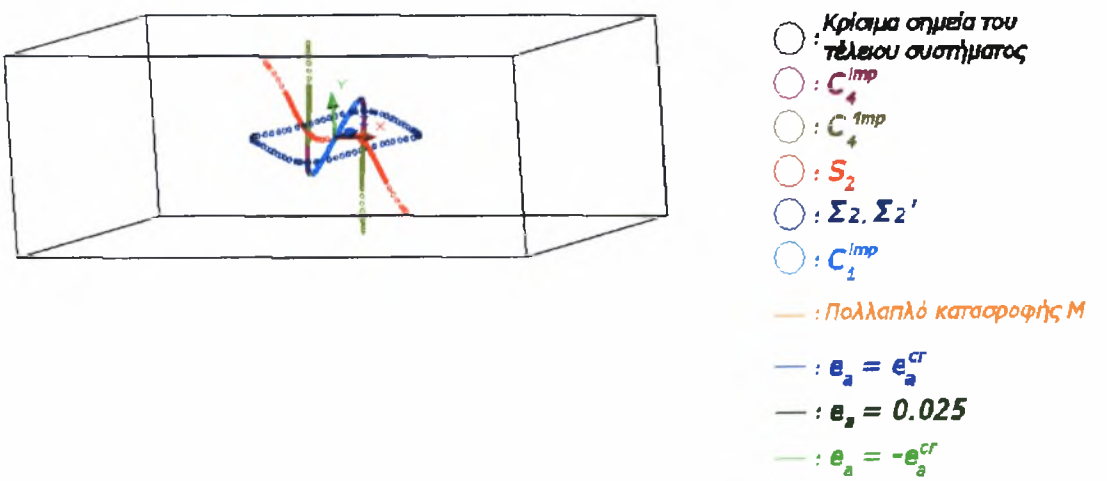
(α) Τρισδιάστατη απεικόνιση 1



(β) Τρισδιάστατη απεικόνιση 2



(γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση 3



(δ) Τρισδιάστατη απεικόνιση 4

Β.2. ΝΕΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Β.2.1. Νέα ευρήματα και συμπεράσματα της όλης εργασίας

Τα σπουδαιότερα νέα ευρήματα και συμπεράσματα της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι τα ακόλουθα:

1. Το μη γραμμικό διβάθμιο προσομοίωμα που αναλύθηκε διεξοδικά παρουσιάζει ιδιάζουσα μεταλυγισμική συμπεριφορά, η οποία για ορισμένες τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται, σχετίζεται με απομακρυσμένες μετακρίσιμες διακλαδώσεις, οι οποίες συνδέουν τους δευτερεύοντες συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς κλάδους ισορροπίας και επηρεάζουν την ευστάθεια αυτών. Υφίσταται συνεπώς ο κίνδυνος αιφνίδιας (μη αναμενόμενης) μετάβασης – άλματος από λυγισμό μιας κανονικής μορφής σε λυγισμό δύο κανονικών μορφών και αντίστροφα, που αποτελεί σπουδαιότατο εύρημα για λόγους δομοστατικού σχεδιασμού. Μάλιστα, η πιθανότητα εμφάνισης παρόμοιων φαινομένων έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία, όσον αφορά το λυγισμό ορθότροπων ορθογωνικών πλακών (και άλλων απλών δομικών στοιχείων), γεγονός που καταδεικνύει τόσο την ορθότητα επιλογής του συγκεκριμένου προσομοιώματος, όσο και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της Διακλαδικής (τόσο ακριβούς όσο και προσεγγιστικής) ανάλυσης αυτού.

2. Η εισαγωγή αρχικών ατελειών στο όλο σύστημα (είτε μόνο συμμετρικών είτε μόνο αντισυμμετρικών) οδηγεί σε μερική διάσπαση της συμμετρίας, η οποία γεννά περίπλοκες διακλαδώσεις, οι οποίες σχετίζονται με πολλαπλές αλληλοσυνδεόμενες και μη ανωμαλίες τύπου διπλής αιχμής, ανάλογα με την τιμή της εισαχθείσας αρχικής ατέλειας. Και εδώ συνεπώς υφίσταται, παρόλη την ύπαρξη αρχικής ατέλειας, ο κίνδυνος αιφνίδιων μετακρίσιμων αλλαγών της συμπεριφοράς του συστήματος, φαινόμενο που δεν απαντάται σε άλλα ατελή συστήματα (που συνήθως σχετίζονται με απώλεια της ευστάθειας τους μέσω μόνο οριακών σημείων). Η πλήρως παραμετρική μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας του μερικά αρχικά ατελούς προσομοιώματος παρήγαγε αποτελέσματα, τα οποία επιβεβαιώνονται πλήρως από την ανάλυση μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών, η οποία κατέδειξε ανωμαλίες μη κατατασσόμενες σε μια από τις στοιχειώδεις επτά, παρόλη την ύπαρξη δύο ενεργών συντεταγμένων και δύο παραμέτρων ελέγχου.

3. Η εισαγωγή μιας τυχαίας πλήρους αρχικής ατέλειας, θεωρούμενης είτε ως συνολική διαταραχή του τέλειου συστήματος, είτε ως μερική διαταραχή του μερικά αρχικά ατελούς συστήματος, οδηγεί στην μετάπτωση των σημείων διακλάδωσης σε οριακά σημεία, μέσω πλήρους διάσπασης της συμμετρίας. Μέσω μιας χαρακτηριστικής αριθμητικής εφαρμογής καταδείχτηκε εκ νέου πλήρης ταύτιση των αποτελεσμάτων της Διακλαδικής Ανάλυσης με αυτά της Θεωρίας των Καταστροφών, με την τελευταία να αποκαλύπτει την ύπαρξη μιας σύνθετης υψηλότερης τάξης ανωμαλίας, που διαθέτει όλα τα χαρακτηριστικά της αντίστοιχης ανωμαλίας διπλής μορφής αιχμής (double cusp), η οποία έχει αναφερθεί σχετιζόμενη με τον λυγισμό πλακών. Τούτο επαληθεύει και πάλι την ορθότητα τόσο της επιλεγείσας προσομοίωσης όσο και της όλης ανάλυσης.

4. Η χρήση συμβολικών μαθηματικών (σε συνδυασμό με ειδικό λογισμικό τρισδιάστατης απεικόνισης επιφανειών) έδωσε την δυνατότητα άμεσου υπολογισμού της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας και των κρισίμων σημείων του συστήματος, αλλά και της αναπαραγωγής και γραφικής παράστασης των διαταγμένων διακλαδώσεων, των επιφανειών πολλαπλών καταστροφής και διακλαδικών συνόλων αυτού, μέσω των οποίων κατέστη εφικτή η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της μη γραμμικής στατικής ανάλυσης ευστάθειας καθώς και ο αποτελεσματικός έλεγχος της αξιοπιστίας όλων των ευρημάτων, σε σχέση με υπάρχοντα αποτελέσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας.

B.2.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Με βάση όλα τα ανωτέρω εκτεθέντα, οι υπεύθυνες για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας και ο επιβλέπων αυτής προτείνουν τα ακόλουθα, όσον αφορά μελλοντική έρευνα, η οποία απορρέει από το περιεχόμενο της διπλωματικής:

1. Μη γραμμική στατική ανάλυση ευστάθειας και εν παραλλήλω μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών του όλου συστήματος, θεωρούμενης ***και*** της αδιάστατης παραμέτρου $\boldsymbol{\beta}$ ως επιπρόσθετης παραμέτρου ελέγχου.

2. Πλήρως μη γραμμική δυναμική ανάλυση της συμπεριφοράς του προσομοιώματος υπό φορτίο της μορφής $P(t) = Pf(t)$, όπου η συνάρτηση $f(t)$ λαμβάνει είτε σταθερή τιμή (φορτίο βήματος άπειρης διάρκειας), είτε αποτελεί ημιτονοειδή διέγερση. Μελέτη και κατάταξη των τροχιών, εύρεση των μη γραμμικών κανονικών μορφών (nonlinear normal modes) και ανάλυση διαταραχών, με σκοπό

την εξέταση πιθανής ύπαρξης εσωτερικών ή παραμετρικών συντονισμών, που οδηγούν σε χαοτικής μορφής κινήσεις.

3. Τοπική και καθολική δυναμική διακλαδική ανάλυση με απώτερο σκοπό τη διερεύνηση της συμπεριφοράς σταθερής κατάστασης του συστήματος αλλά και την αναγνώριση διακλαδώσεων περιοδικών τροχιών και άλλων περίπλοκων δυναμικών φαινομένων, όπως ελλειπτικών τροχιών, ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ μορφών κλπ.

Β.3. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι υπεύθυνες για την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας και ο Επιβλέπων αυτής ευχαριστούν θερμά τον Αν. Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστήμιου Θεσσαλίας κ. Αντώνη Γιαννακόπουλο για την συμπαράσταση του και τις εύστοχες παρατηρήσεις του καθώς και τον Ακαδημαϊκό και Ομότιμο Καθηγητή ΕΜΠ κ. Α. Ν. Κουνάδη για την ενθάρρυνση και την βοήθεια που προσέφερε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Augusti, G.** *Stabilita di strutture elastiche elemantari in presenza di grandi spostamenti.* Atti Accad. Sci. fis. mat., Napoli, Serie 3ª, **4**, No.5, 1964.
2. **Supple, W. J.** *Coupled branching configurations in the elastic buckling of symmetric structural systems.* Int. J. Mech. Sci. **9**, 97 - 112, 1967.
3. **Supple, W. J.** and **Chilver, A. H.**, *Elastic post-buckling of compressed rectangular plates, in Thin-Walled Structures*, A.H. Chilver (Ed.), Chatto and Windus, London, 1967.
4. **Supple, W. J.** *Changes of waveform of plates in the post-buckling range.* Int. J. Solids Structures **6**, 1243 – 1258, 1970.
5. **Croll, J. G.** and **Walker, A.C.** *Elements of Structural Stability.* Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York – Toronto, 1972.
6. **Thom, R.** *Stabilité Structurelle et Morphogénése: Essai d' une Théorie Générale des Modéles.* Reading, Massachusetts: W.A. Benjamin, 1972.
7. **Huseyin, K.** *Nonlinear Theory of Elastic Stability.* Noordhoff, Leyden, 1975.
8. **Lu, Y.-C.** *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory.* New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1976
9. **Zeeman, E. C.** *Catastrophe Theory-Selected Papers 1972-1977.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1977.
10. **Poston, T.** and **Stewart, I.** *Catastrophe Theory and its Applications.* Pitman: London, 1978.
11. **Nakamura, T., Uetani, K.** *The secondary buckling and post-secondary buckling behaviours of rectangular plates.* Int. J. Mech. Sci. **21**, 265 - 286, 1979.
12. **Saunders, P. T.** *An Introduction to Catastrophe Theory.* Cambridge University Press, U.K., 1980.
13. **Thompson, J. M. T.** *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering.* New York: Wiley, 1982.
14. **Gioncu, V.** and **Ivan, M.**, *Theory of critical and postcritical behaviour of elastic structures.* Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1984.
15. **Thompson, J. M. T.** and **Hunt, G.W.** *Elastic Instability Phenomena.* Wiley: Chichester, 1984.

16. **Golubitsky, M.** and **Schaeffer, D. G.** *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, New York, 1985.
17. **Troger, H.** and **Steindl, A.**, *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory: An Introduction for Engineers and Applied Scientists.* Springer-Verlag, Wien, New York, 1991.
18. **Arnold, V. I.** *Catastrophe Theory, 3rd ed.* Berlin: Springer-Verlag, 1992.
19. **Gaite, J.** *Symmetry in catastrophe theory, phase diagrams and two-dimensional conformal field theories.* J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 3051 - 3062, 1992.
20. **Gilmore, R.** *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers.* Dover, 1993.
21. **von Seggern, D.** *CRC Standard Curves and Surfaces.* Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
22. **Bahder, T. B.**, *Mathematica for Scientists and Engineers.* Addison-Wesley, New York 1995.
23. **Kounadis, A.N.** *Nonlinear Elastic Stability with Elements of Catastrophe Theory.* Symeon, Athens, 1999.
24. **Everall, P. R., Hunt, G. W.** *Arnold tounge predictions of secondary buckling in thin elastic plates.* J.Mech. Phys. Solids 47, 2187 - 2206, 1999.
25. **Kounadis, A. N.** *Dynamic buckling of autonomous systems having potential energy universal unfoldings of cuspoid catastrophe.* Nonlinear Dyn. **18**, 235–252, 1999.
26. **Kounadis, A. N.** *Catastrophe theory: A modern mathematical method widely applied of philosophical nature,* Proceedings of the Academy of Athens, 75(B') 2000; 275 - 323.
27. **Sanns, W.** *Catastrophe Theory with Mathematica: A Geometric Approach.* Germany: DAV, 2000.
28. **Ball, R.** *Understanding critical behaviour through visualisation: A walk around the pitchfork.* Computer Physics Communications **142**, 71 - 75, 2001.
29. **Lignos, X. A., Parke, G. A. R., Harding, J. E.** and **Kounadis, A. N.** *A comprehensive catastrophe theory for non-linear buckling of simple systems exhibiting fold and cusp catastrophes.* Int. J. Numer. Meth. Engng **54**, 175 - 193, 2002.
30. **Sophianopoulos, D. S., Argyropoulou, L., Evagorou, E.** and **Marinithou, V.** *Secondary Bifurcations in Postcritical Domains of a Two Degree of Freedom Nonlinear System with Elements of Catastrophe Theory.* Proceedings of the 7th National Congress on Mechanics (A.N. Kounadis, C. Providakis and G. Exadaktylos eds.), Chania, Crete, Greece, June 24 - 26, 2004, Technical University of Crete, Vol. I, pp. 244 - 249.

1. ***3-D Grapher, Ver. 1.2.*** *: Calculation and Graphing Software for Business and Academia,* Copyright © 2000-2003 **RomanLab Software, www.romanlab.com.**

2. ***DPGraph :*** *Dynamic Photorealistic 3D Graphing Software for Math and Physics Visualization,* Copyright © 1997-2003 by **David Parker**, 4542 West 4985 South, Kearn UT 84118 - 8424, USA, **www.dgraph.com.**

3. ***Origin, Ver. 7.5.*** *: Data Analysis & Graphing Software,* Copyright © 2004 ***OriginLab Corporation***, One Roundhouse Plaza, Northampton, MA 0160, USA, **www.microcal.com.**

4. ***Mathematica*** **5** : *A System of Doing Mathematics by Computer,* Copyright © 2004 **Wolfram Research, Inc.**, 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA, **www.wolfram.com.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
004000074845

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Διπλωματική Εργασία

Δευτερεύουσες Διακλαδώσεις σε Απομακρυσμένες Μετακρίσιμες Περιοχές ενός Μη Γραμμικού Διβάθμιου Συστήματος με Στοιχεία της Θεωρίας των Καταστροφών

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – Αρχεία Mathematica

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΕΣ

Ευσταθία Αργυροπούλου

Έλενα Ευαγόρου

Βασιλική Μαρινίδου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Δημήτρης Σοφιανόπουλος

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ

ΒΟΛΟΣ 2005

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

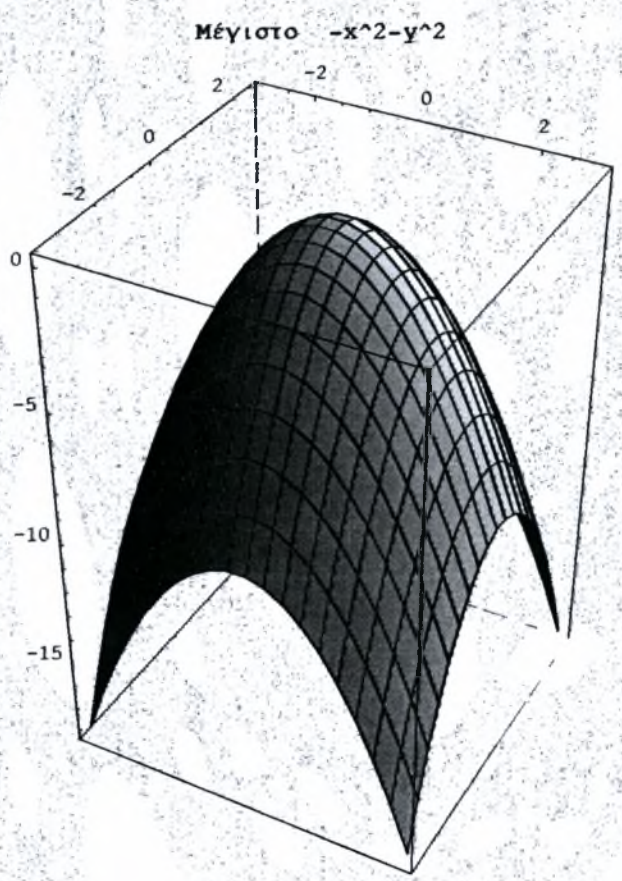
Αριθ. Εισ.:	3670/2 τ.2
Ημερ. Εισ.:	9-06-2006
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ-ΠΜ
	2005
	ΑΡΓ

Περιεχόμενα Παραρτήματος

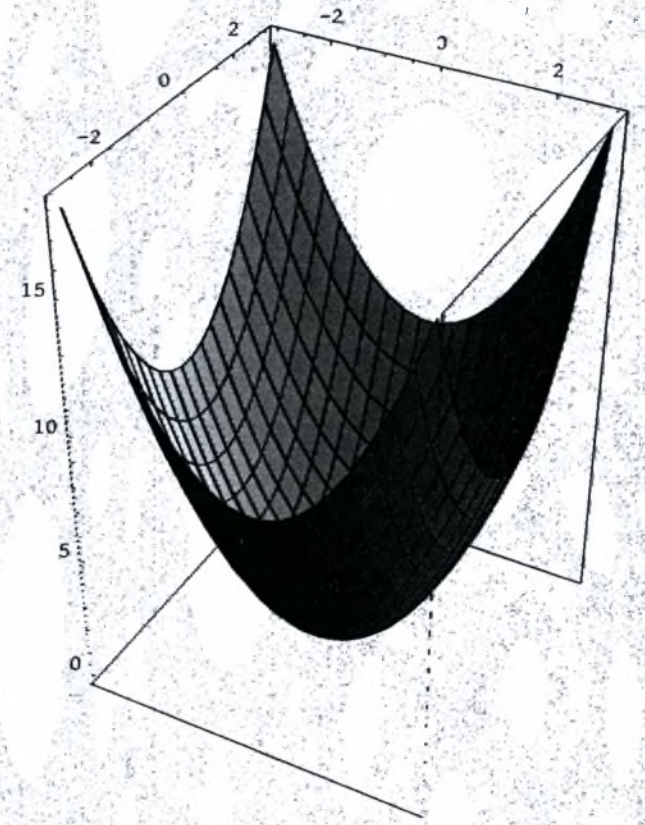
α/α	Όνομα Αρχείου Mathematica (.nb)	Σελίδες
1	Κρίσιμα σημεία	1 – 4
2	Καταστροφές	5 – 15
3	General1	16 – 21
4	Ευστάθεια – προσεγγιστικά – συμβολικά	22 – 23
5	Ευστάθεια κρισίμων σημείων – προσεγγιστικά	24 – 26
6	search1	27 – 28
7	search2	29
8	limit of beta	30 – 31
9	solving approximate perfect	32
10	b one	33 – 35
11	General2	36 – 45
12	Exact perfect 3rd 1	46
13	exact perfect 3rd 2	47
14	Διερεύνηση 1ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου	48 – 51
15	Διερεύνηση 2ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου	52 – 54
16	b one exact	55 – 60
17	b one exact 2	61 – 68
18	Paths	69 – 71
19	maxmin	72 – 73
20	search3	74 – 79
21	search3b	80 – 83
22	search3c	84 – 89
23	search3d	90
24	Ευστάθεια – ακριβώς – συμβολικά	91 – 103
25	Ευστάθεια κρισίμων σημείων – ακριβώς	104 – 128
26	General3	129 – 134
27	imperf1	135 – 137
28	imperf2	138
29	imperf11	139 – 141
30	imp quest	142
31	fully imperfect critical points	143
32	Ευστάθεια ατελούς προσεγγιστικά συμβολικά	144 – 146
33	Ευστάθεια κρισίμων σημείων – προσεγγιστικά imp	147 – 148
34	solving fully imperfect	149
35	Vt perf	150 – 151
36	Vt symm	152 – 153
37	Vt asymm	154 – 155
38	Vt general	156 – 157
39	Mperfcont	158
40	Mbsperf	159
41	Vtsym surf	160 – 169
42	MBssymm	170 – 171
43	ManifSymm	172 – 185
44	Vtasym surf	186 – 196
45	MBsAsymm	197 – 198
46	ManifAsymm	199 – 200
47	BsSymm1	201 – 202
48	BsSymm2	203 – 206
49	BsAsymm1	207 – 208
50	BsAsymm2	209 – 235
51	MBsgeneral	236 – 237
52	mg	238
53	mga	239
54	mgb	240 – 241

```
ClearAll[x, y, c1, c2, c3, c4, c5, c6]
StylePrint["Διάφοροι τύποι κρισίμων σημείων", "Section"]
c1 = ParametricPlot3D[{x, y, -x^2 - y^2}, {x, -3, 3},
    {y, -3, 3}, PlotLabel → StyleForm["Μέγιστο  -x^2-y^2\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1, 1, 1.5}];
c2 = ParametricPlot3D[{x, y, x^2 + y^2}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
    PlotLabel → StyleForm["Ελάχιστο x^2+y^2\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1, 1, 1.5}];
c3 = ParametricPlot3D[{x, y, x^2 - y^2}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
    PlotLabel → StyleForm["Σημείο σέλας x^2-y^2\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1, 1, 1.5}];
c4 = ParametricPlot3D[{x, y, x^3 - 3 * x * y^2}, {x, -1, 1.5}, {y, -1, 1},
    PlotLabel → StyleForm["Σύνθετη Σέλα x^3 -3 x y^2\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1, 1, 1.5}];
c5 = ParametricPlot3D[{x, y, x^2}, {x, -1, 1}, {y, -2, 2},
    PlotLabel → StyleForm["Απλό κρίσιμο σημείο x^2\n\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1.5, 1, 1.5}];
c6 = ParametricPlot3D[{x, y, x^2 * y^2}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
    PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}, {0, 2}}, PlotPoints → 30,
    PlotLabel → StyleForm["Σύνθετο κρίσιμο σημείο x^2 y^2\n",
      FontSize → 12, FontWeight → Bold], BoxRatios → {1, 1, 0.35}];
```

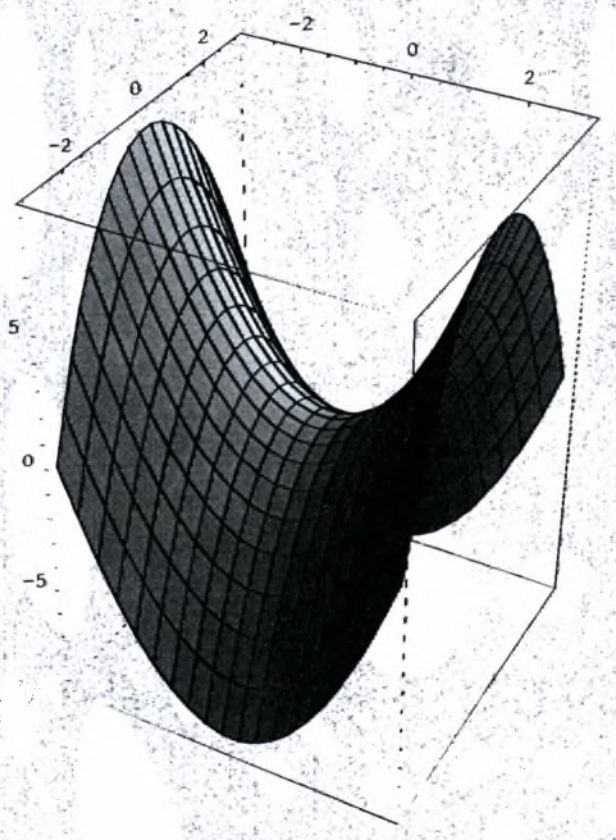
■ Διάφοροι τύποι κρισίμων σημείων



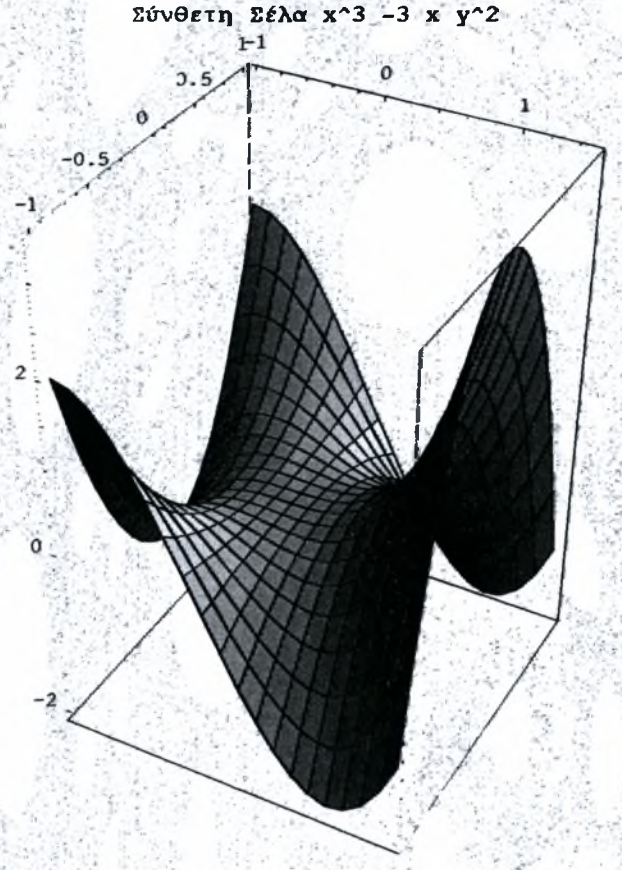
Ελάχιστο x^2+y^2



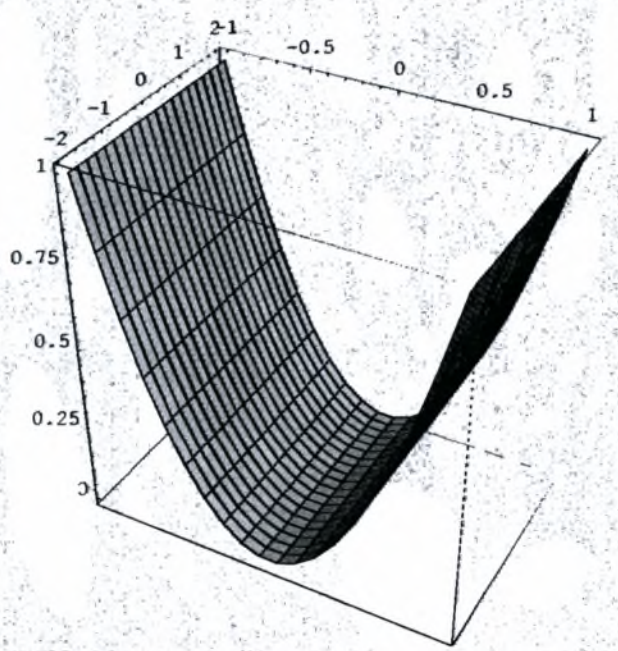
Σημείο σέλας x^2-y^2



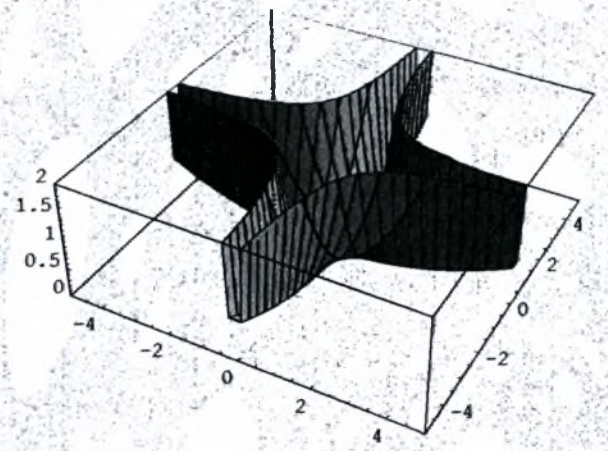
Σύνθετη Σέλα x^3 -3 x y^2



Απλό κρίσιμο σημείο x^2



Σύνθετο κρίσιμο σημείο x^2 y^2



```
StylePrint["Διάφοροι τύποι στοιχειωδών καταστροφών", "Title"]
StylePrint["1. Καταστροφή τύπου πτύχωσης (fold) - A2", "Subtitle"]
Germ = 1/3 x^3;
Perturbation = a x;
CatFold = Germ + Perturbation;
FixedPointList[D[#1, x] &, CatFold]
PCatFold1 = Plot[Germ, {x, -2, 2}, PlotLabel ->
    StyleForm["Σπέρμα της καταστροφής\n τύπου πτύχωσης - A+2\n\n", FontSize → 16,
     FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"x", "F(x,y)"}, TextStyle ->
    {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.8], FontSize -> 14}];
PCatFold2 = ParametricPlot3D[{a, CatFold, x}, {a, -20, 20},
 {x, -10, 10}, PlotPoints -> 50, BoxRatios -> {1, 1, 1.},
 PlotRange -> {{-10, 10}, {-25, 25}, {-10, 10}}, ViewPoint -> {-4.000, 1.330, 2.220},
 PlotLabel -> StyleForm["  Καταστροφή A+2\n Πτύχωση Whitney",
   FontSize → 16, FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"a", "b", "x"},
 TextStyle -> {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}]

StylePrint["2. Καταστροφή τύπου αιχμής (cusp) - A3", "Subtitle"]
Germ = 1/4 x^4;
Perturbation = 1/2 a x^2 + b x;
CatCusp = Germ + Perturbation;
PCatCusp = Plot[Germ, {x, -2, 2}, PlotLabel ->
    StyleForm["  Σπέρμα της καταστροφής\n τύπου αιχμής (cusp) - A+3\n\n",
     FontSize → 16, FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]],
   AxesLabel -> {"x", "F(x,y)"}, TextStyle -> {FontWeight -> "Bold",
     FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}];
PCatCusp = ParametricPlot[{b, -3 ((b/2)^2)^(1/3)}, {b, -2, 2},
   PlotLabel -> StyleForm["Καταστροφή - A+3\n    Διπλή Αιχμή\n\n", FontSize → 16,
     FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"x", "F(x,y)"}, TextStyle ->
    {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}];
StylePrint["3. Καταστροφή τύπου χελιδονοουράς (swallowtail) - A4", "Subtitle"]
Germ = 1/5 x^5;
Perturbation = 1/3 a x^3 + 1/3 b x^2 + c x;
CatSwallowTail = Germ + Perturbation;
FixedPointList[D[#1, x] &, CatSwallowTail]
Plot[Germ, {x, -2, 2}, PlotLabel ->
  StyleForm["  Σπέρμα της καταστροφής \n τύπου χελιδονοουράς - A+4\n\n",
   FontSize → 16, FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"x", "F(x,y)"},
 TextStyle -> {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}]
PCatSwallowTail = ParametricPlot3D[{-4 x^3 - 2 a x, a, 3 x^4 + a x^2},
   {x, -1, 1}, {a, -1, 1}, PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-.3, 1}},
   PlotLabel -> StyleForm["    Καταστροφή A+4\n τύπου χελιδονοουράς", FontSize → 16,
     FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"b", "a", "c"}, TextStyle ->
    {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}];
TCatSwallowTail = Table[ParametricPlot[{-4 x^3 - 2 a x, 3 x^4 + a x^2},
    {x, -1, 1}, PlotRange -> {{-.8, .8}, {-.2, .8}},
    Axes -> False, Frame -> True], {a, -1, .6, .2}];
```

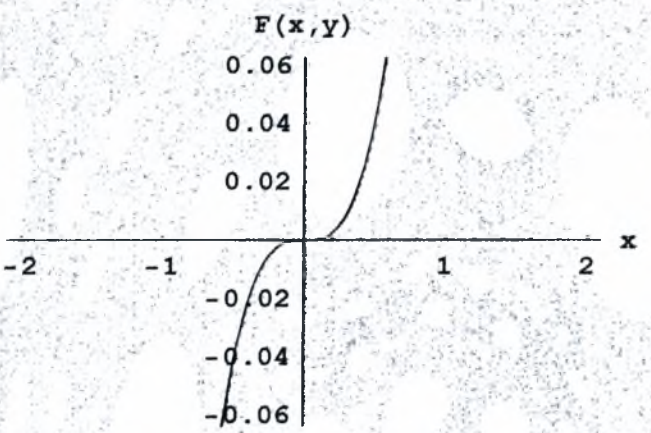
```
StylePrint["4. Καταστροφή τύπου wallet - D+4", "Subtitle"]
Germ = x^2 y + 1/3 y^3;
Perturbation = a (y^3 - x^2) + b x + c y;
CatWallet = Germ + Perturbation;
Plot3D[Germ, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, BoxRatios -> {1, 1, 1.3},
 PlotLabel -> StyleForm[" Σπέρμα καταστροφής \n τύπου wallet - D4\n\n",
   FontSize → 16, FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"x", "y", "F(x,y)"},
 TextStyle -> {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}]
D[CatWallet, x]
D[CatWallet, y]
PCatWallet =
  ParametricPlot3D[{{-a^2 (Sinh[2 t] + 2 Sinh[t]), a, -a^2 (Cosh[2 t] - 2 Cosh[ t])},
    {-a^2 (Sinh[2 t] - 2 Sinh[t]), a, -a^2 (Cosh[2 t] + 2 Cosh[ t])}},
   {t, -Pi, Pi}, {a, -1, 1}, BoxRatios -> {1, 2, 1.3},
   PlotLabel -> StyleForm[" Καταστροφή D4\ \n τύπου wallet", FontSize → 16,
     FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"b", "a", "c"}, TextStyle ->
    {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}];
StylePrint["5. Καταστροφή τύπου πυραμίδας - D-4", "Subtitle"]
Germ = x^2 y - 1/3 y^3;
Perturbation = a (y^3 + x^2) + b x + c y;
CatPyramid = Germ + Perturbation;
Plot3D[Germ, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, BoxRatios -> {1, 1, 1},
 PlotLabel -> StyleForm["  Σπέρμα καταστροφής\n τύπου πυραμίδας - D-4\ \n\n",
   FontSize → 16, FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"x", "y", "F(x,y)"},
 TextStyle -> {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}]
D[CatPyramid, x]
D[CatPyramid, y]
PCatPyramid =
  ParametricPlot3D[{a^2 (Sin[2 t] - 2 Sin[t]), a, a^2 (Cos[2 t] + 2 Cos[ t])},
   {t, -Pi, Pi}, {a, -1, 1}, BoxRatios -> {1, 2, 1.3}, PlotRange -> All,
   PlotLabel -> StyleForm["  Καταστροφή D-4\ \n τύπου πυραμίδας\n", FontSize → 16,
     FontColor -> RGBColor[0, 2, 0]], AxesLabel -> {"b", "a", "c"}, TextStyle ->
    {FontWeight -> "Bold", FontColor -> RGBColor[0, 0, 0.6], FontSize -> 14}];
```

Διάφοροι τύποι στοιχειωδών καταστροφών

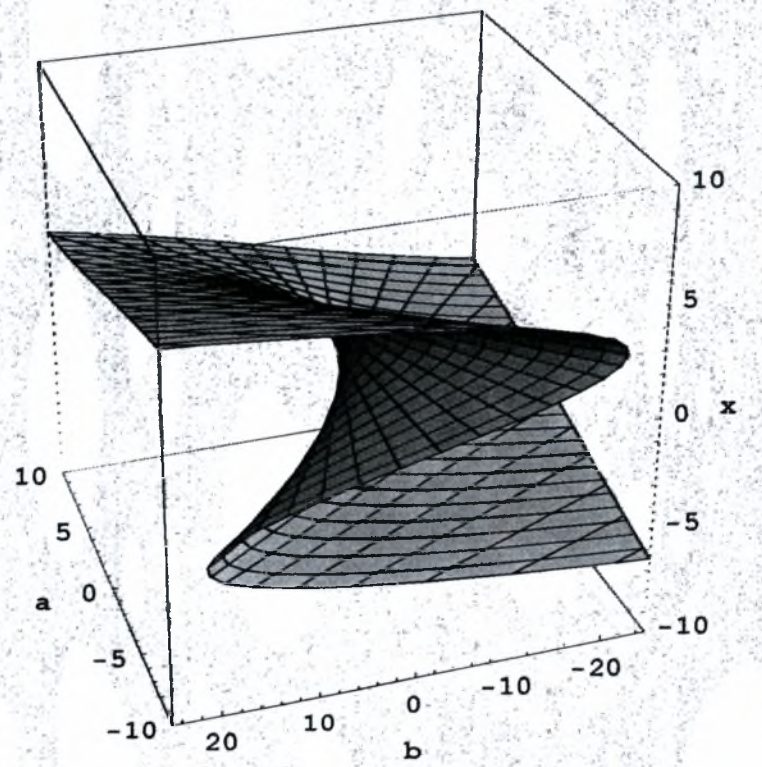
1. Καταστροφή τύπου πτύχωσης (fold) - A2

$$\left\{a\,x + \frac{x^3}{3},\ a + x^2,\ 2\,x,\ 2,\ 0,\ 0\right\}$$

Σπέρμα της καταστροφής
τύπου πτύχωσης - A_{+2}

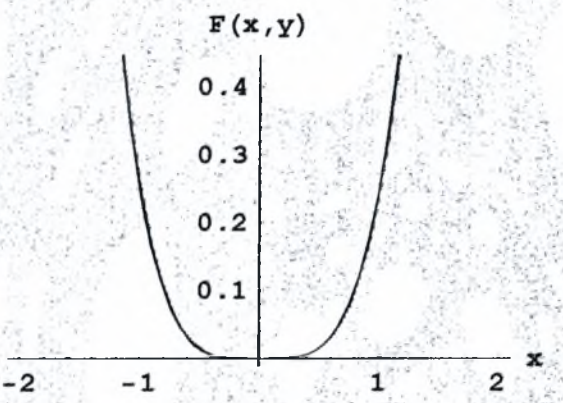


Καταστροφή A_{+2}
Πτύχωση Whitney

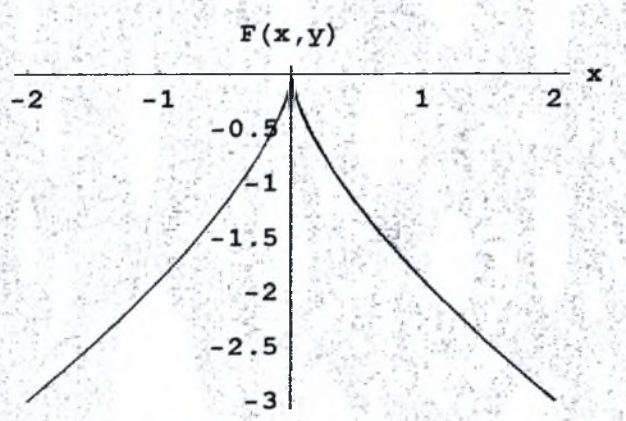


2. Καταστροφή τύπου αιχμής (cusp) - A3

Σπέρμα της καταστροφής
τύπου αιχμής (cusp) - A_{+3}



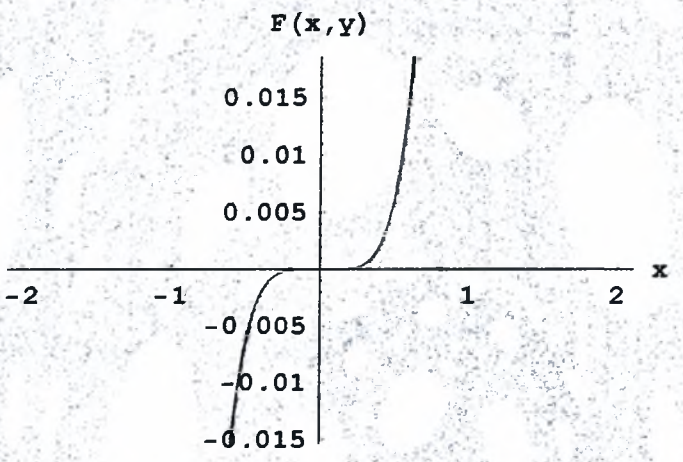
Καταστροφή - A_{+3}
Διπλή Αιχμή



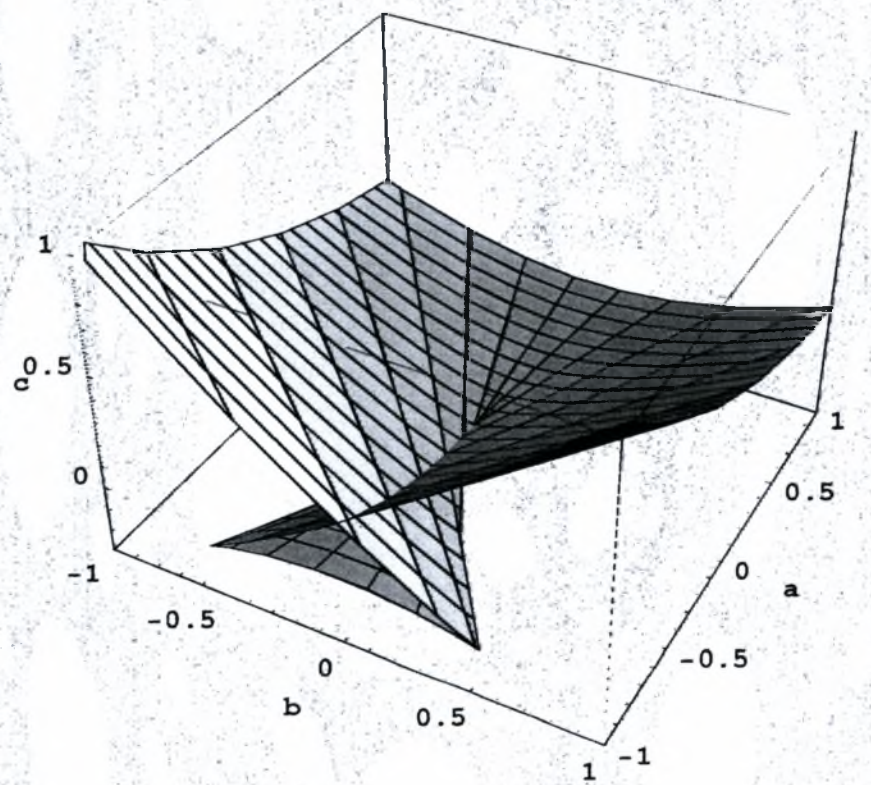
3. Καταστροφή τύπου χελιδονοουράς (swallowtail) - A4

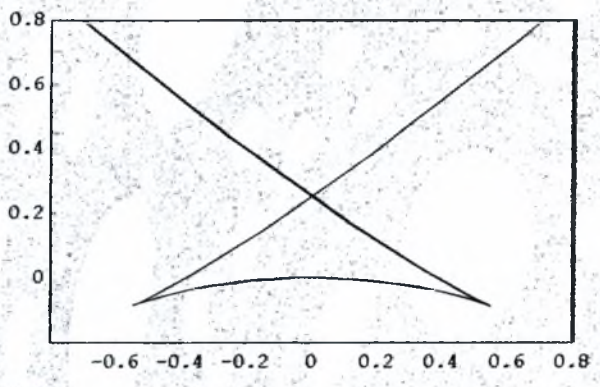
$$\left\{c x+\frac{b x^2}{3}+\frac{a x^3}{3}+\frac{x^5}{5},\ c+\frac{2 b x}{3}+a x^2+x^4,\ \frac{2 b}{3}+2 a x+4 x^3,\ 2 a+12 x^2,\ 24 x,\ 24,\ 0,\ 0\right\}$$

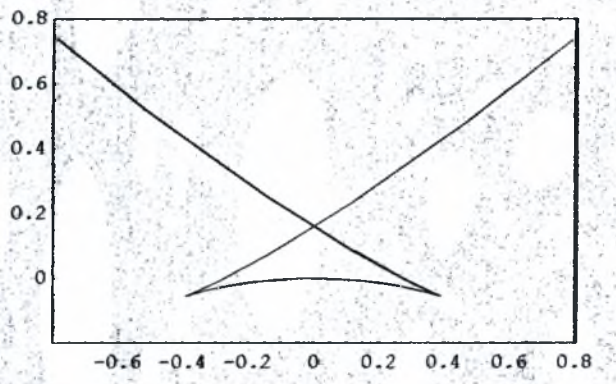
Σπέρμα της καταστροφής
τύπου χελιδονοουράς - A_{+4}

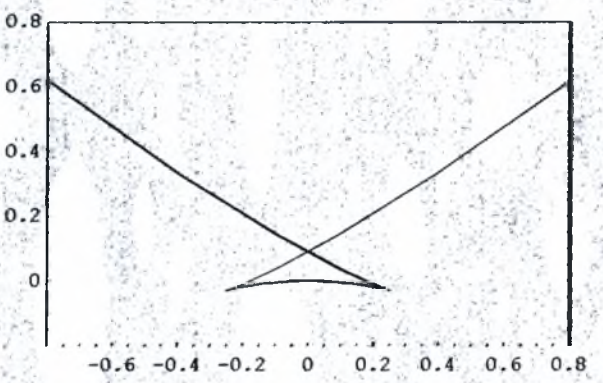


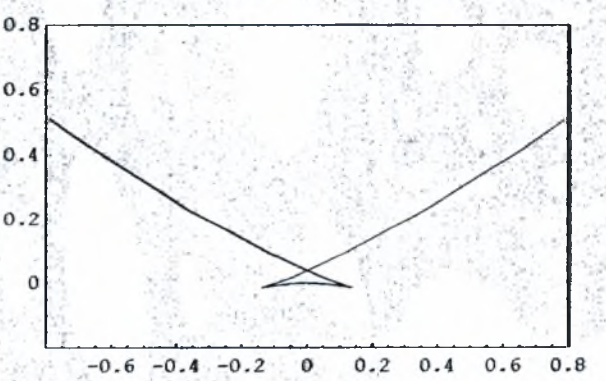
Καταστροφή A_{+4}
τύπου χελιδονοουράς

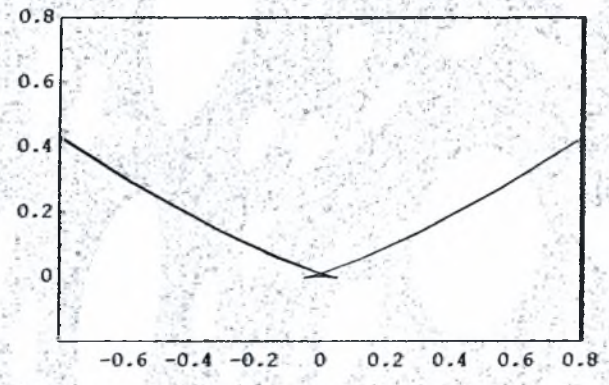


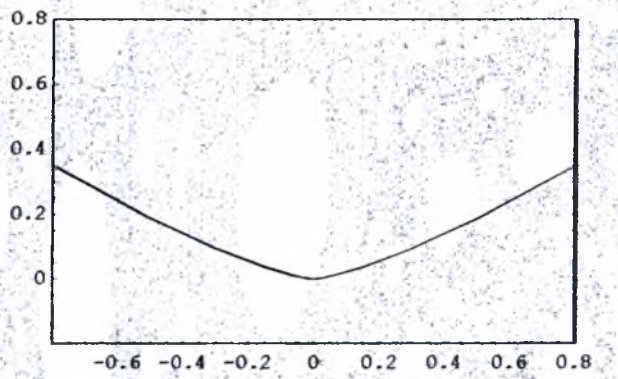

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8

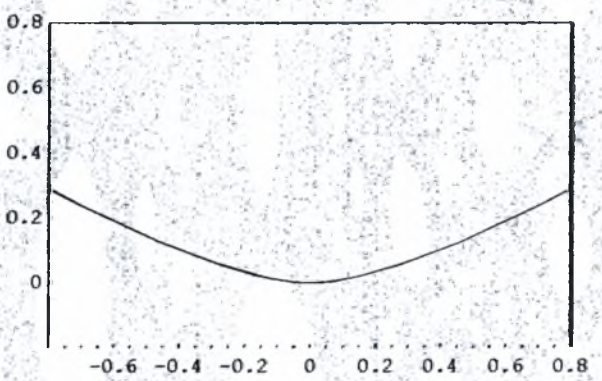

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8

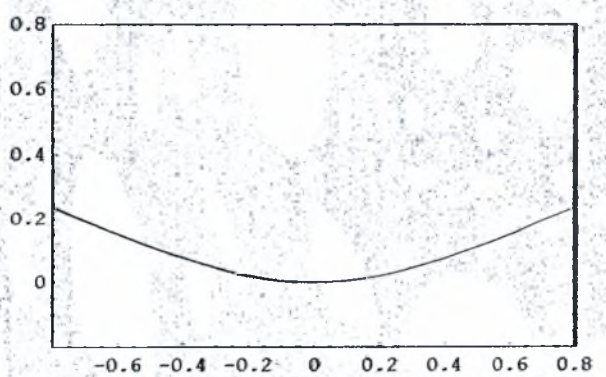

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8

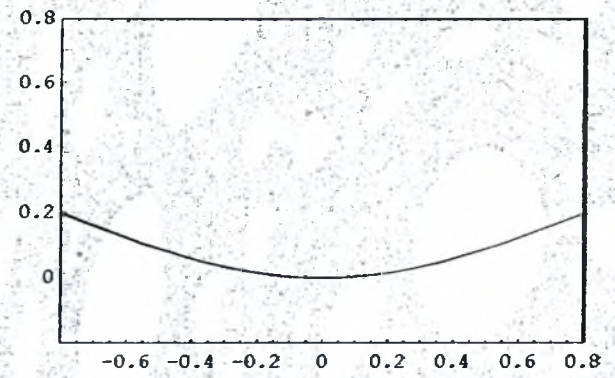

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8

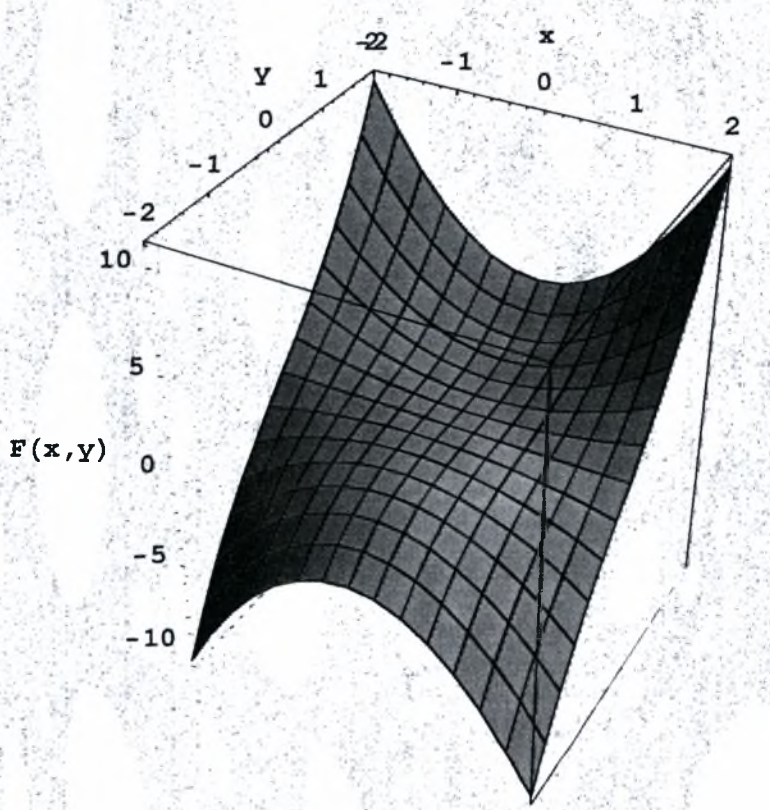

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8



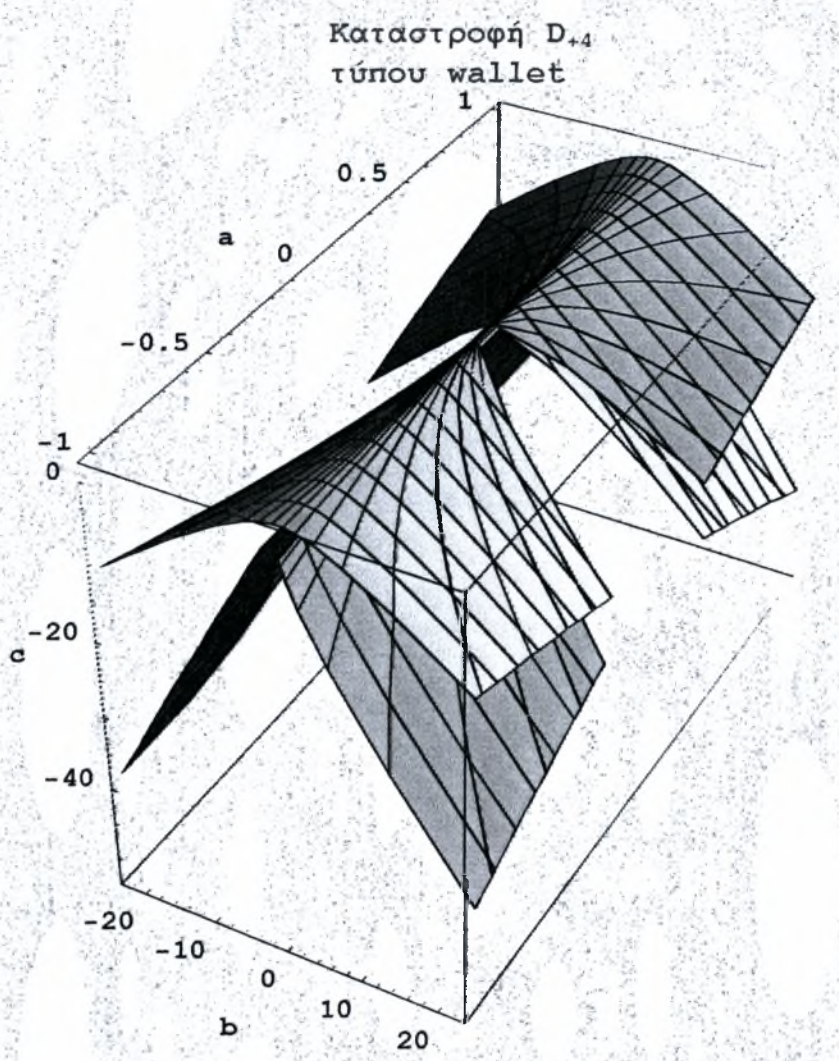
4. Καταστροφή τύπου wallet - D+4

Σπέρμα καταστροφής
τύπου wallet - D_{+4}



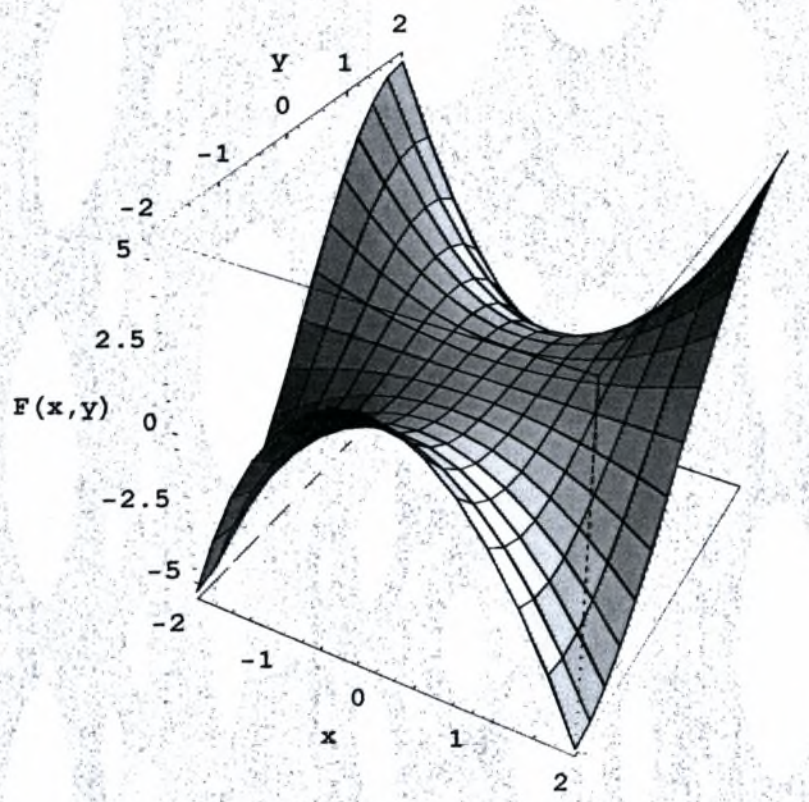
$b - 2 a x + 2 x y$

$c + x^2 + y^2 + 3 a y^2$


Καταστροφή D_{+4}
τύπου wallet
1
0.5
a
0
-0.5
-1
0
-20
c
-40
-20
-10
0
10
20
b

5. Καταστροφή τύπου πυραμίδας - D-4

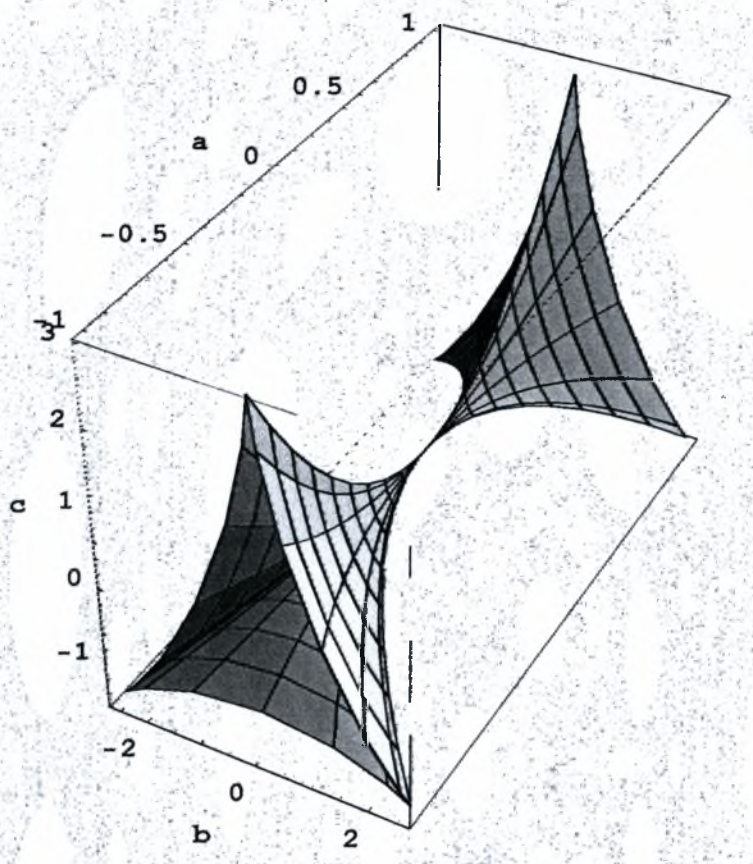
Σπέρμα καταστροφής
τύπου πυραμίδας - D_{-4}



$b + 2ax + 2xy$

$c + x^2 - y^2 + 3ay^2$

Καταστροφή D_{-4}
τύπου πυραμίδας



```
ClearAll[θ1, θ2, β, w1, w2, e1, e2, Uc, Uk, λ, Ω, z, ca, cb, c1, c2, c3, c4, c5,
 c6, ma, mb, s1, s2, s3, s4, s5, s6, Ω, Ξ, ws, wa, es, ea, Vsa, Vp, Vps, Vpa,
 V11, V12, V21, V22, M, StDet, SePath1, St1, Pcr1, SePath2, St2, Pcr2, tt]
StylePrint["Α. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος", "Title"]
StylePrint["Φορτίο : P", "Section"]
StylePrint["Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k", "Section"]
StylePrint["Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2", "Section"]
StylePrint["Αρχικές ατέλειες : E1 , E2", "Section"]
StylePrint["Α δ ι ά σ τ α τ ο π ο ί η σ η", "Subtitle"]
StylePrint["λ=P/(kℓ^3) , β=c/(kℓ^4) , Ξ=V2/(kℓ^4) , w1=W1/ℓ , w2=W2/ℓ , e1=E1/ℓ , e2=E2/ℓ",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β. Μη γραμμική προσεγγιστική ανάλυση ευστάθειας", "Title"]
StylePrint["Β.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος", "Subtitle"]
StylePrint[
 "Β.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk",
 "Subsubtitle"]
StylePrint["Uk = 1/2 ((w1-e1)^4+2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4+(w2-e2)^4)",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης
   λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc", "Subsubtitle"]
StylePrint["Uc = 1/2 β(θ1^2 +θ2^2)", "DisplayFormula"]
Print["όπου"]
StylePrint[
 "θ1 = (arcsin(w1)-arcsin(e1))-(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))", "DisplayFormula"]
StylePrint["θ2 = (arcsin(w2)-arcsin(e2))+(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω", "Subsubtitle"]
StylePrint["Ω = -λ(√(1 - e1^2) +√(1 - (e2 - e1)^2) +√(1 - e2^2) -
   √(1 - w1^2) -√(1 - (w2 - w1)^2) -√(1 - w2^2) )", "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω", "Subsubtitle"]
ca = Normal[Series[ArcSin[z], {z, 0, 4}]];
cb = Normal[Series[ArcSin[z], {z, 0, 2}]];
c1 = ca /. z → w1;
c2 = cb /. z → e1;
c3 = ca /. z → (w2 - w1);
c4 = cb /. z → (e2 - e1);
c5 = ca /. z → w2;
c6 = cb /. z → e2;
θ1 = c1 - c2 - c3 + c4;
θ2 = c5 - c6 + c3 - c4;
Uc = 1/2 β (θ1^2 + θ2^2);
ma = Normal[Series[√(1 - x^2), {x, 0, 4}]];
mb = Normal[Series[√(1 - x^2), {x, 0, 2}]];
s1 = mb /. x → e1;
s2 = mb /. x → (e2 - e1);
s3 = mb /. x → e2;
```

```
s4 = ma /. x → w1;
s5 = ma /. x → (w2 - w1);
s6 = ma /. x → w2;
Ω = -λ (s1 + s2 + s3 - s4 - s5 - s6);
Uk = 1/2 ((w1 - e1)^4 + 2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4 + (w2 - e2)^4);
Σ = FullSimplify[Uc + Uk + Ω]
StylePrint["B.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων
   σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
StylePrint["ws = (w1 + w2)/2 , wa = (w1 - w2)/2 οπότε w1 = ws + wa  και w2 = ws - wa",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["es = (e1 + e2)/2 , ea = (e1 - e2)/2 οπότε e1 = es + ea  και e2 = es - ea",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό",
 "Subsubtitle"]
Vsa = FullSimplify[Σ /. {w1 → ws + wa, w2 → ws - wa, e1 → es + ea, e2 → es - ea}]
StylePrint[
 "B.1.7. Συνολικό Δυναμικό Τέλειου Συστήματος Vp μετά τον μετασχηματισμό",
 "Subsubtitle"]
Vp = FullSimplify[Vsa /. {es → 0, ea → 0}]
StylePrint["B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσες ευστάθειας", "Subtitle"]
StylePrint["B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας", "Subsubtitle"]
StylePrint["1η εξίσωση : ∂Vp/∂ws=0  , 2η εξίσωση : ∂Vp/∂wa=0 ", "DisplayFormula"]
Vps = FullSimplify[∂ws Vp]
Vpa = FullSimplify[∂wa Vp]
StylePrint["B.2.2. Ορίζουσες Ευστάθειας", "Subsubtitle"]
V11 = FullSimplify[∂ws Vps]
V12 = ∂wa Vps;
V21 = ∂ws Vpa;
V22 = ∂wa Vpa;
M = (V11  V12
     V21  V22);
StDet = FullSimplify[Det[M]]
StylePrint[
 "B.2.3. Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws≠0,wa=0(συμμετρική παραμόρφωση)
   και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης", "Subsubtitle"]
SePath1 = FullSimplify[Vps /. wa → 0]
St1 = FullSimplify[Solve[SePath1 = 0, λ]]
Pcr1 = St1 /. ws → 0
StylePrint["B.2.4. Δεύτερος δευτερεύων δρόμος
   ισορροπίας ws=0,wa≠0(αντισυμμετρική παραμόρφωση) και
   υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης", "Subsubtitle"]
SePath2 = FullSimplify[Vpa /. ws → 0]
St2 = FullSimplify[Solve[SePath2 = 0, λ]]
Pcr2 = St2 /. wa → 0
StylePrint["B.2.5. Εύρεση των σημείων διακλάδωσης επί του τετριμμένου
   δρόμου μέσω της ορίζουσας ευστάθειας - επαλήθευση", "Subsubtitle"]
Solve[(V11 /. {ws → 0, wa → 0}) = 0, λ]
Solve[(StDet /. {ws → 0, wa → 0}) = 0, λ]
StylePrint["B.2.6. Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (
   γενική παραμόρφωση στο χάρο), ws≠0 , wa≠0", "Subsubtitle"]
```

```
FullSimplify[Solve[Eliminate[{Vps = 0, Vpa = 0}, β], λ]]
FullSimplify[Solve[Eliminate[{Vps = 0, Vpa = 0}, λ], β]]
StylePrint["B.2.7. Περαιτέρω Ανάλυση - Αναζήτηση
   τιμών του β για τις οποίες υπάρχει πιθανότητα τομής του τρίτου
   δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας με τους άλλους δύο", "Subsubtitle"]
Print["Τα αποτελέσματα φαίνονται στα προγράμματα Search1.nb,
   Search2.nb και limit of beta.nb, που ακολουθούν,"]
Print["από όπου προκύπτει ότι για να τέμνονται ο 1ος και
   2ος με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας"]
Print["θα πρέπει, για συμβατές τιμές των παραμορφωσεων, δηλαδή -
   1 ≤ ws ≤ 1 , -0.5 ≤ wa ≤ 0.50, να ισχύει β≤0.5267489711934157"]
```

Α. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος

- **Φορτίο : P**
- **Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ**
- **Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c**
- **Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k**
- **Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2**
- **Αρχικές ατέλειες : E1 , E2**

Αδιαστατοποίηση

$$\lambda=\frac{P}{k\ell^3}\ ,\ \beta=\frac{c}{k\ell^4}\ ,\ \Xi=\frac{V_T}{k\ell^4}\ ,\ w1=\frac{W1}{\ell}\ ,\ w2=\frac{W2}{\ell}\ ,\ e1=\frac{E1}{\ell}\ ,\ e2=\frac{E2}{\ell}$$

Β. Μη γραμμική προσεγγιστική ανάλυση ευστάθειας

Β.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος

Β.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk

$$Uk = \frac{1}{2}\left((w1-e1)^4+2\left(\frac{(w1-e1)+(w2-e2)}{2}\right)^4+(w2-e2)^4\right)$$

Β.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc

$$Uc = \frac{1}{2}\beta(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

όπου

$$\theta_1 = (\arcsin(w1)-\arcsin(e1))-(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

$$\theta_2 = (\arcsin(w2)-\arcsin(e2))+(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

Β.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω

$$\Omega = -\lambda\left(\sqrt{1-e1^2}+\sqrt{1-(e2-e1)^2}+\sqrt{1-e2^2}-\sqrt{1-w1^2}-\sqrt{1-(w2-w1)^2}-\sqrt{1-w2^2}\right)$$

Β.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω

$$\frac{1}{2}\left((e1-w1)^4+(e2-w2)^4+\frac{1}{8}(e1+e2-w1-w2)^4+\left(\left(-2e1+e2+2w1+\frac{w1^3}{6}+\frac{1}{6}(w1-w2)^3-w2\right)^2+\left(e1-2e2-w1+2w2+\frac{w2^3}{\epsilon}+\frac{1}{6}(-w1+w2)^3\right)^2\right)\beta+\frac{1}{2}(4(e1^2-e1\,e2+e2^2)-(w1^2-w1\,w2+w2^2)(4+w1^2-w1\,w2+w2^2))\lambda\right)$$

Β.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση

$$ws = \frac{w1+w2}{2},\quad wa = \frac{w1-w2}{2} \quad \text{οπότε } w1 = ws + wa \text{ και } w2 = ws - wa$$

$$es = \frac{e1 + e2}{2} \text{ , } ea = \frac{e1 - e2}{2} \text{ οπότε } e1 = es + ea \text{ και } e2 = es - ea$$

B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό

$$\frac{1}{2}\left(2\,(es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 + (ea - es - wa + ws)^4 + \left(18\,ea^2 + 2\,es^2 - 6\,ea\,wa\,(6 + 3\,wa^2 + ws^2) - \frac{2}{3}\,es\,ws\,(6 + 3\,wa^2 + ws^2) + \frac{1}{18}\,(6 + 3\,wa^2 + ws^2)^2\,(9\,wa^2 + ws^2)\right)\beta + \frac{1}{2}\,(12\,ea^2 + 4\,es^2 - (3\,wa^2 + ws^2)\,(4 + 3\,wa^2 + ws^2))\,\lambda\right)$$

B.1.7. Συνολικό Δυναμικό Τέλειου Συστήματος Vp μετά τον μετασχηματισμό

$$\frac{1}{2}\left((wa - ws)^4 + 2\,ws^4 + (wa + ws)^4 + \frac{1}{18}\,(6 + 3\,wa^2 + ws^2)^2\,(9\,wa^2 + ws^2)\,\beta - \frac{1}{2}\,(3\,wa^2 + ws^2)\,(4 + 3\,wa^2 + ws^2)\,\lambda\right)$$

B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσες ευστάθειας

B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας

$$1η\ εξίσωση : \frac{\partial Vp}{\partial ws} = 0 \text{ , } 2η\ εξίσωση : \frac{\partial Vp}{\partial wa} = 0$$

$$\frac{1}{6}\,ws\,(21\,wa^4\,\beta + 2\,wa^2\,(36 + 24\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 9\,\lambda) + ws^2\,(48 + (8 + ws^2)\,\beta - 6\,\lambda) + 12\,(\beta - \lambda))$$

$$\frac{27\,wa^5\,\beta}{2} + wa^3\,(4 + (36 + 7\,ws^2)\,\beta - 9\,\lambda) + wa\left(18\,\beta + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} + ws^2\,(12 + 8\,\beta - 3\,\lambda) - 6\,\lambda\right)$$

B.2.2. Ορίζουσες Ευστάθειας

$$\frac{7\,wa^4\,\beta}{2} + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} + ws^2\,(24 + 4\,\beta - 3\,\lambda) + wa^2\,(12 + 8\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 3\,\lambda) + 2\,(\beta - \lambda)$$

$$\frac{945\,wa^8\,\beta^2}{4} + \frac{1}{36}\,(5\,ws^4\,\beta + 6\,ws^2\,(24 + 4\,\beta - 3\,\lambda) + 12\,(\beta - \lambda))\,(5\,ws^4\,\beta + 6\,ws^2\,(12 + 8\,\beta - 3\,\lambda) + 36\,(3\,\beta - \lambda)) + wa^6\,\beta\,(852 + (918 + 215\,ws^2)\,\beta - 297\,\lambda) + wa^2\left(\frac{95\,ws^6\,\beta^2}{9} + ws^4\,\beta\,(424 + 114\,\beta - 63\,\lambda) + 12\,(10\,\beta\,(2 + 3\,\beta) - (8 + 31\,\beta)\,\lambda + 6\,\lambda^2) + 6\,ws^2\,(-24 + 344\,\beta + 62\,\beta^2 - 78\,\lambda - 60\,\beta\,\lambda + 9\,\lambda^2)\right) + wa^4\left(\left(1062 + 558\,ws^2 + \frac{425\,ws^4}{6}\right)\beta^2 + 9\,(-4 + \lambda)\,(-4 + 9\,\lambda) - 3\,\beta\,(232\,(-2 + \lambda) + ws^2\,(-434 + 81\,\lambda))\right)$$

B.2.3. Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws≠0,wa=0(συμμετρική παραμόρφωση) και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης

$$\frac{1}{6}\,ws\,(ws^2\,(48 + (8 + ws^2)\,\beta - 6\,\lambda) + 12\,(\beta - \lambda))$$

$$\left\{\left\{\lambda \to \beta + \frac{1}{6}\,ws^2\left(\frac{48}{2 + ws^2} + \beta\right)\right\}\right\}$$

$$\{\{\lambda \to \beta\}\}$$

B.2.4. Δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws=0,wa≠0(αντισυμμετρική παραμόρφωση) και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης

$$\frac{27\,wa^5\,\beta}{2} + wa^3\,(4 + 36\,\beta - 9\,\lambda) + 6\,wa\,(3\,\beta - \lambda)$$

$$\left\{\left\{\lambda \to 3\,\beta + wa^2\left(\frac{4}{6 + 9\,wa^2} + \frac{3\,\beta}{2}\right)\right\}\right\}$$

$$\{\{\lambda \to 3\,\beta\}\}$$

B.2.5. Εύρεση των σημείων διακλάδωσης επί του τετριμμένου δρόμου μέσω της ορίζουσας ευστάθειας - επαλήθευση

$$\{\{\lambda \to \beta\}\}$$

$$\{\{\lambda \to \beta\},\ \{\lambda \to 3\,\beta\}\}$$

B.2.6. Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (γενική παραμόρφωση στο χώρο), ws≠0 , wa≠0

$$\left\{\left\{\lambda \to 14 - \frac{2\,(8 + 12\,wa^2 + wa^4)}{2 + 3\,wa^2 + ws^2} + \frac{2\,(-18 + 17\,wa^2 + wa^4)}{6 + 3\,wa^2 + ws^2}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\beta \to \frac{12\,(8\,wa^2 + 3\,ws^2)}{(6 + 3\,wa^2 + ws^2)^2}\right\}\right\}$$

B.2.7. Περαιτέρω Ανάλυση - Αναζήτηση τιμών του β για τις οποίες υπάρχει πιθανότητα τομής του τρίτου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας με τους άλλους δύο

Τα αποτελέσματα φαίνονται στα προγράμματα
Search1.nb, Search2.nb και limit of beta.nb, που ακολουθούν,

από όπου προκύπτει ότι για να τέμνονται ο 1ος και 2ος με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας

θα πρέπει, για συμβατές τιμές των παραμορφωσεων,
δηλαδή $-1 \le ws \le 1$, $-0.5 \le wa \le 0.50$, να ισχύει $\beta \le 0.5267489711934157$

```
ClearAll[Vp, V11, V12, V21, V22, MM, wa, ws, λ, β, dd,
 VV2, V111, V112, V122, V222, V3, V1111, V1122, V1222, V2222, V4]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών
   ευστάθειας, οριζουσών, και μεταβολών 3ης και 4ης τάξης -
   προσεγγιστική ανάλυση - τέλειο σύστημα", "Subtitle"]
```

$$Vp = \frac{1}{2}\left((wa-ws)^4 + 2\,ws^4 + (wa+ws)^4 + \frac{1}{18}(6+3\,wa^2+ws^2)^2\,(9\,wa^2+ws^2)\,\beta - \frac{1}{2}(3\,wa^2+ws^2)\,(4+3\,wa^2+ws^2)\,\lambda\right);$$

```
StylePrint["Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11", "Section"]
V1 = δws Vp;
V2 = δwa Vp;
V11 = FullSimplify[δws V1]
V12 = δwa V1;
V21 = δws V2;
V22 = δwa V2;
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
VV2 = FullSimplify[V11 V22 - V12 V21]
V111 = δws V11;
V112 = δwa V11;
V122 = δwa V12;
V121 = δws V12;
V222 = δwa V22;
```

$$dd = -\frac{V12}{V22};$$

```
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
V1111 = δws V111;
V1112 = δwa V111;
V1122 = δwa V112;
V1222 = δwa V122;
V2222 = δwa V222;
V3 = FullSimplify[V111 + 3 V112 dd + 3 V122 dd^2 + V222 dd^3]
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
V4 = FullSimplify[V1111 + 4 V1112 dd + 6 V1122 dd^2 + 4 V1222 dd^3 + V2222 dd^4]
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
```

$$d1111 = \text{FullSimplify}\left[V1111 - \frac{3\,V121^2}{V22}\right]$$

Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών ευστάθειας, οριζουσών, και μεταβολών 3ης και 4ης τάξης - προσεγγιστική ανάλυση - τέλειο σύστημα

■ Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11

$$\frac{7\,wa^4\,\beta}{2} + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} + ws^2\,(24 + 4\,\beta - 3\,\lambda) + wa^2\,(12 + 8\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 3\,\lambda) + 2\,(\beta - \lambda)$$

■ Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21

$$\frac{1}{36}\left((21\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+6\,ws^2\,(24+4\,\beta-3\,\lambda)+6\,wa^2\,(12+8\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda)+12\,(\beta-\lambda))\right.$$
$$(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))-$$
$$\left.16\,wa^2\,ws^2\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^2\right)$$

■ Τρίτη μεταβολή δV3

$$10\,wa^2\,ws\,\beta+\frac{10\,ws^3\,\beta}{3}+$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws^3\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^2\,((24+63\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^2}-$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))\,((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))}{405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda)}-$$
$$\frac{384\,wa^4\,ws^3\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^3\,(4+(36+45\,wa^2+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^3}+$$
$$2\,ws\,(24+4\,\beta-3\,\lambda)$$

■ Τέταρτη μεταβολή δV4

$$2\left(24+4\,\beta+5\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-\right.$$
$$\frac{160\,wa^2\,ws^2\,\beta\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))}{405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda)}-$$
$$\frac{10752\,wa^4\,ws^4\,\beta\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^3}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^3}+$$
$$\frac{96\,wa^2\,ws^2\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^2\,((8+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^2}+$$
$$\frac{768\,wa^4\,ws^4\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^4\,(4+(36+135\,wa^2+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^4}-$$
$$\left.3\,\lambda\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων

$$2\left(24+4\,\beta+5\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-\right.$$
$$\left.\frac{36\,wa^2\,((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))^2}{405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda)}-3\,\lambda\right)$$

```
ClearAll[Vp, V11, wa, ws, λ, β, dd, Hessian, V3, V4, d1111]
(*β=0.10;
 ws=.........;
 wa=.........;
 λ=.........;*)
StylePrint[
 "Ευστάθεια κρισίμων σημείων - τέλειο σύστημα - προσεγγιστική ανάλυση", "Title"]
StylePrint["με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας",
 "Title"]
StylePrint["Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11", "Section"]
V11 = 7 wa^4 β/2 + 5 ws^4 β/6 + ws^2 (24 + 4 β - 3 λ) + wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 2 (β - λ)
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
Hessian =
 1/36 ((21 wa^4 β + 5 ws^4 β + 6 ws^2 (24 + 4 β - 3 λ) + 6 wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 12 (β - λ))
     (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) -
    16 wa^2 ws^2 ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^2)
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
V3 = 10 wa^2 ws β + 10 ws^3 β/3 +
  (32 wa^2 ws^3 ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^2 ((24 + 63 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ)))/
   (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ))^2 -
  (24 wa^2 ws ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ)) ((8 + 7 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ)))/
   (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) -
  (384 wa^4 ws^3 ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^3 (4 + (36 + 45 wa^2 + 7 ws^2) β - 9 λ))/
   (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ))^3 + 2
  ws (24 + 4 β - 3 λ)
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
V4 = 2 (24 + 4 β + 5 wa^2 β + 5 ws^2 β - (160 wa^2 ws^2 β ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ)))/
     (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) -
    (10752 wa^4 ws^4 β ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^3)/
     (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ))^
      3 + (96 wa^2 ws^2 ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^2 ((8 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ)))/
     (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ))^
      2 + (768 wa^4 ws^4 ((24 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))^4 (4 + (36 + 135 wa^2 + 7 ws^2) β - 9 λ))/
     (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ))^
      4 - 3 λ)
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
d1111 = 2 (24 + 4 β + 5 wa^2 β + 5 ws^2 β -
    36 wa^2 ((8 + 7 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ))^2 /
    (405 wa^4 β + 5 ws^4 β + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) -
   3 λ)
```

Ευστάθεια κρισίμων σημείων - τέλειο σύστημα - προσεγγιστική ανάλυση

με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας

■ Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11

$$\frac{7\,wa^4\,\beta}{2}+\frac{5\,ws^4\,\beta}{6}+ws^2\,(24+4\,\beta-3\,\lambda)+wa^2\,(12+8\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda)+2\,(\beta-\lambda)$$

■ Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21

$$\frac{1}{36}\Big((21\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+6\,ws^2\,(24+4\,\beta-3\,\lambda)+6\,wa^2\,(12+8\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda)+12\,(\beta-\lambda))\,(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))-16\,wa^2\,ws^2\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^2\Big)$$

■ Τρίτη μεταβολή δV3

$$10\,wa^2\,ws\,\beta+\frac{10\,ws^3\,\beta}{3}+\frac{32\,wa^2\,ws^3\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^2\,((24+63\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^2}-\frac{24\,wa^2\,ws\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))\,((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))}{405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda)}-\frac{384\,wa^4\,ws^3\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda))^3\,(4+(36+45\,wa^2+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)}{(405\,wa^4\,\beta+5\,ws^4\,\beta+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+6\,ws^2\,(12+8\,\beta-3\,\lambda)+36\,(3\,\beta-\lambda))^3}+2\,ws\,(24+4\,\beta-3\,\lambda)$$

■ Τέταρτη μεταβολή δV4

$$2\left(24+4\beta+5\,wa^2\beta+5\,ws^2\beta-\frac{160\,wa^2\,ws^2\beta\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\beta-9(-4+\lambda))}{405\,wa^4\beta+5\,ws^4\beta+18\,wa^2(4+(36+7\,ws^2)\beta-9\lambda)+6\,ws^2(12+8\beta-3\lambda)+36(3\beta-\lambda)}-\frac{10752\,wa^4\,ws^4\beta\,((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\beta-9(-4+\lambda))^3}{(405\,wa^4\beta+5\,ws^4\beta+18\,wa^2(4+(36+7\,ws^2)\beta-9\lambda)+6\,ws^2(12+8\beta-3\lambda)+36(3\beta-\lambda))^5}+\frac{96\,wa^2\,ws^2((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\beta-9(-4+\lambda))^2((8+21\,wa^2+5\,ws^2)\beta-3(-4+\lambda))}{(405\,wa^4\beta+5\,ws^4\beta+18\,wa^2(4+(36+7\,ws^2)\beta-9\lambda)+6\,ws^2(12+8\beta-3\lambda)+36(3\beta-\lambda))^2}+\frac{768\,wa^4\,ws^4((24+21\,wa^2+5\,ws^2)\beta-9(-4+\lambda))^4(4+(36+135\,wa^2+7\,ws^2)\beta-9\lambda)}{(405\,wa^4\beta+5\,ws^4\beta+18\,wa^2(4+(36+7\,ws^2)\beta-9\lambda)+6\,ws^2(12+8\beta-3\lambda)+36(3\beta-\lambda))^4}-3\lambda\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων

$$2\left(24+4\beta+5\,wa^2\beta+5\,ws^2\beta-\frac{36\,wa^2((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\beta-3(-4+\lambda))^2}{405\,wa^4\beta+5\,ws^4\beta+18\,wa^2(4+(36+7\,ws^2)\beta-9\lambda)+6\,ws^2(12+8\beta-3\lambda)+36(3\beta-\lambda)}-3\lambda\right)$$

```
(*Search1.nb*)
ClearAll[StabDet, wa, ws, β, λ, x1, x2, x3, v]
V11 = 7 wa^4 β/2 + 5 ws^4 β/6 + ws^2 (24 + 4 β - 3 λ) + wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 2 (β - λ);
StabDet = 945 wa^8 β^2/4 + 1/36 (5 ws^4 β + 6 ws^2 (24 + 4 β - 3 λ) + 12 (β - λ))
    (5 ws^4 β + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) + wa^6 β (852 + (918 + 215 ws^2) β - 297 λ) +
  wa^2 (95 ws^6 β^2/9 + ws^4 β (424 + 114 β - 63 λ) + 12 (10 β (2 + 3 β) - (8 + 31 β) λ + 6 λ^2) +
      6 ws^2 (-24 + 344 β + 62 β^2 - 78 λ - 60 β λ + 9 λ^2)) + wa^4 ((1062 + 558 ws^2 + 425 ws^4/6) β^2 +
      9 (-4 + λ) (-4 + 9 λ) - 3 β (232 (-2 + λ) + ws^2 (-434 + 81 λ)));
x1 = FullSimplify[V11 /. {wa → 0, λ → β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)}]
x2 = FullSimplify[StabDet /. {wa → 0, λ → β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)}]
Solve[x2 == 0, ws]
x3 = FullSimplify[V11 /. {ws → 0, λ → 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + 3 β/2)}]
x4 = FullSimplify[StabDet /. {ws → 0, λ → 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + 3 β/2)}]
Solve[x4 == 0, wa]
```

$$\frac{ws^2\left(96+(2+ws^2)^2\beta\right)}{3(2+ws^2)}$$

$$\frac{ws^2\left(96+(2+ws^2)^2\beta\right)\left(-36\,ws^2+(6+ws^2)^2\beta\right)}{9(2+ws^2)}$$

$$\left\{\{ws\to 0\},\ \{ws\to 0\},\ \left\{ws\to -\sqrt{6}\sqrt{-1+\frac{3}{\beta}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-2\beta}}{\beta}}\right\},\right.$$

$$\left\{ws\to \sqrt{6}\sqrt{-1+\frac{3}{\beta}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-2\beta}}{\beta}}\right\},\ \left\{ws\to -\sqrt{6}\sqrt{-1+\frac{3}{\beta}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-2\beta}}{\beta}}\right\},$$

$$\left\{ws\to \sqrt{6}\sqrt{-1+\frac{3}{\beta}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-2\beta}}{\beta}}\right\},\ \left\{ws\to -\sqrt{2}\sqrt{-1-\frac{2\,i\sqrt{6}}{\sqrt{\beta}}}\right\},$$

$$\left\{ws\to \sqrt{2}\sqrt{-1-\frac{2\,i\sqrt{6}}{\sqrt{\beta}}}\right\},\ \left\{ws\to -\sqrt{2}\sqrt{-1+\frac{2\,i\sqrt{6}}{\sqrt{\beta}}}\right\},\ \left.\left\{ws\to \sqrt{2}\sqrt{-1+\frac{2\,i\sqrt{6}}{\sqrt{\beta}}}\right\}\right\}$$

$$\frac{32\,wa^2}{3}-(2+wa^2)^2\beta$$

$$-\frac{wa^2\left(-32\,wa^2+3(2+wa^2)^2\beta\right)\left(16+9(2+3\,wa^2)^2\beta\right)}{6+9\,wa^2}$$

$$\left\{\{wa \to 0\},\ \{wa \to 0\},\ \left\{wa \to -\sqrt{-2+\frac{16}{3\beta}-\frac{8\sqrt{4-3\beta}}{3\beta}}\right\},\ \left\{wa \to \sqrt{-2+\frac{16}{3\beta}-\frac{8\sqrt{4-3\beta}}{3\beta}}\right\},\right.$$

$$\left\{wa \to -\sqrt{-2+\frac{16}{3\beta}+\frac{8\sqrt{4-3\beta}}{3\beta}}\right\},\ \left\{wa \to \sqrt{-2+\frac{16}{3\beta}+\frac{8\sqrt{4-3\beta}}{3\beta}}\right\},\ \left\{wa \to -\sqrt{-\frac{2}{3}-\frac{4\,i}{9\sqrt{\beta}}}\right\},$$

$$\left.\left\{wa \to \sqrt{-\frac{2}{3}-\frac{4\,i}{9\sqrt{\beta}}}\right\},\ \left\{wa \to -\sqrt{-\frac{2}{3}+\frac{4\,i}{9\sqrt{\beta}}}\right\},\ \left\{wa \to \sqrt{-\frac{2}{3}+\frac{4\,i}{9\sqrt{\beta}}}\right\}\right\}$$

```
(*Search2.nb*)
ClearAll[λ, β, ws, wa, a1, a2, a3, a4]
a1 = 14 - 2 (8 + 12 wa^2 + wa^4)/(2 + 3 wa^2 + ws^2) + 2 (-18 + 17 wa^2 + wa^4)/(6 + 3 wa^2 + ws^2) /. wa → 0
a2 = β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)
a3 = 14 - 2 (8 + 12 wa^2 + wa^4)/(2 + 3 wa^2 + ws^2) + 2 (-18 + 17 wa^2 + wa^4)/(6 + 3 wa^2 + ws^2) /. ws → 0
a4 = 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + 3 β/2)
NSolve[{a1 = a2, ws = -1}, β]
NSolve[{a1 = a2, ws = 1}, β]
NSolve[{a3 = a4, wa = -1}, β]
NSolve[{a3 = a4, wa = +1}, β]
NSolve[{a3 = a4, wa = -0.5}, β]
NSolve[{a3 = a4, wa = 0.5}, β]
```

$$14 - \frac{16}{2 + ws^2} - \frac{36}{6 + ws^2}$$

$$\beta + \frac{1}{6} ws^2 \left(\frac{48}{2 + ws^2} + \beta\right)$$

$$14 - \frac{2 (8 + 12 wa^2 + wa^4)}{2 + 3 wa^2} + \frac{2 (-18 + 17 wa^2 + wa^4)}{6 + 3 wa^2}$$

$$3 \beta + wa^2 \left(\frac{4}{6 + 9 wa^2} + \frac{3 \beta}{2}\right)$$

$$\{\{\beta \to 0.734694\}\}$$

$$\{\{\beta \to 0.734694\}\}$$

$$\beta = 0.7346938775510204$$

$$\{\{\beta \to 1.18519\}\}$$

$$\{\{\beta \to 1.18519\}\}$$

$$\beta = 1.1851851851851851$$

$$\{\{\beta \to 0.526749\}\}$$

$$\{\{\beta \to 0.526749\}\}$$

$$\beta = 0.5267489711934157$$

```
(*Limit of Beta.nb*)
ClearAll[StabDet, wa, ws, β, λ, x1, x2, x3, v]
β = 0.5267489711934157
```

$$V11 = \frac{7\,wa^4\,\beta}{2} + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} + ws^2\,(24 + 4\,\beta - 3\,\lambda) + wa^2\,(12 + 8\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 3\,\lambda) + 2\,(\beta - \lambda);$$

$$StabDet = \frac{945\,wa^8\,\beta^2}{4} + \frac{1}{36}\,(5\,ws^4\,\beta + 6\,ws^2\,(24 + 4\,\beta - 3\,\lambda) + 12\,(\beta - \lambda))$$
$$(5\,ws^4\,\beta + 6\,ws^2\,(12 + 8\,\beta - 3\,\lambda) + 36\,(3\,\beta - \lambda)) + wa^6\,\beta\,(852 + (918 + 215\,ws^2)\,\beta - 297\,\lambda) +$$
$$wa^2\left(\frac{95\,ws^6\,\beta^2}{9} + ws^4\,\beta\,(424 + 114\,\beta - 63\,\lambda) + 12\,(10\,\beta\,(2 + 3\,\beta) - (8 + 31\,\beta)\,\lambda + 6\,\lambda^2) + \right.$$
$$\left. 6\,ws^2\,(-24 + 344\,\beta + 62\,\beta^2 - 78\,\lambda - 60\,\beta\,\lambda + 9\,\lambda^2)\right) + wa^4\left(\left(1062 + 558\,ws^2 + \frac{425\,ws^4}{6}\right)\beta^2 + \right.$$
$$\left. 9\,(-4 + \lambda)\,(-4 + 9\,\lambda) - 3\,\beta\,(232\,(-2 + \lambda) + ws^2\,(-434 + 81\,\lambda))\right);$$

```
x1 = FullSimplify[V11 /. {wa → 0, λ → β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)}]
x2 = FullSimplify[StabDet /. {wa → 0, λ → β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)}]
NSolve[x2 == 0, ws]
x3 = FullSimplify[V11 /. {ws → 0, λ → 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + (3 β)/2)}]
x4 = FullSimplify[StabDet /. {ws → 0, λ → 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + (3 β)/2)}]
NSolve[x4 == 0, wa]
```

```
0.526749
```

$$0. + \frac{32.7023\,ws^2 + 0.702332\,ws^4 + 0.175583\,ws^6}{2 + ws^2}$$

$$0. + \frac{1}{(2 + ws^2)^2}$$
$$(ws^2\,(413.422 - 431.459\,ws^2 - 319.278\,ws^4 - 3.32379\,ws^6 - 1.55207\,ws^8 + 0.0308294\,ws^{10}))$$

```
{{ws → 7.46307}, {ws → -7.46307}, {ws → 2.41323 + 2.79708 i},
 {ws → 2.41323 - 2.79708 i}, {ws → -2.41323 + 2.79708 i},
 {ws → -2.41323 - 2.79708 i}, {ws → 0.803959}, {ws → -0.803959}, {ws → 0.}}
```

```
{{ws → 7.463069091413412`}, {ws → -7.463069091413411`},
 {ws → 2.4132285494702117` + 2.7970827717423883` i},
 {ws → 2.4132285494702117` - 2.7970827717423883` i},
 {ws → -2.41322854947021` + 2.797082771742388` i},
 {ws → -2.41322854947021` - 2.797082771742388` i},
 {ws → 0.8039587904798138`}, {ws → -0.8039587904798131`}, {ws → 0.`}}
```

$$\frac{-4.21399 + 10.7984\,wa^2 + 24.6255\,wa^4 - 1.58025\,wa^6}{2 + 3\,wa^2}$$

$$0. + \frac{1}{(2 + 3\,wa^2)^2}$$
$$(wa^2\,(-147.334 + 137.813\,wa^2 + 1295.49\,wa^4 + 1806.4\,wa^6 + 960.79\,wa^8 - 67.4239\,wa^{10}))$$

```
{{wa → -4.}, {wa → 4.}, {wa → 0.345373 + 0.886538 i},
 {wa → 0.345373 - 0.886538 i}, {wa → -0.345373 + 0.886538 i},
 {wa → -0.345373 - 0.886538 i}, {wa → 0.5}, {wa → -0.5}, {wa → 0.}}
```

```
{{wa → -3.9999999999999925`}, {wa → 3.9999999999999925`},
 {wa → 0.3453730164136673` + 0.8865377527964295` i},
 {wa → 0.3453730164136673` - 0.8865377527964295` i},
 {wa → -0.3453730164136675` + 0.8865377527964281` i},
 {wa → -0.3453730164136675` - 0.8865377527964281` i},
 {wa → 0.5000000000000003`}, {wa → -0.5000000000000001`}, {wa → 0.`}}
```

```
ClearAll[ws, wa, β, λ, equ1, equ2]
β = 0.1;
wa = -0.0025
equ1 =
  1/6 ws (21 wa^4 β + 2 wa^2 (36 + 24 β + 5 ws^2 β - 9 λ) + ws^2 (48 + (8 + ws^2) β - 6 λ) + 12 (β - λ));
equ2 = 27 wa^5 β/2 + wa^3 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + wa (18 β + 5 ws^4 β/6 + ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) - 6 λ);
FindRoot[{equ1 == 0, equ2 == 0}, {ws, .31}, {λ, 0.49}]
```

```
-0.0025
```

```
{ws → 0.321656, λ → 0.495252}
```

```
ClearAll[ws, wa, β, λ, equ1, equ2, x1, StabDet, wsstart1,
 ws1, rr1, wast1, λstart1, wsstart2, ws2, rr2, wast2, λstart2, x2]
(*Προσεγγιστική ανάλυση*)
StylePrint[
 "Εύρεση του 3ου συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας για β = 0.10", "Section"]
β = 0.10;
StylePrint["Εξισώσεις ισορροπίας", "Subsection"]
equ1 = 1/6 ws (21 wa^4 β + 2 wa^2 (36 + 24 β + 5 ws^2 β - 9 λ) + ws^2 (48 + (8 + ws^2) β - 6 λ) + 12 (β - λ))
equ2 = (27 wa^5 β)/2 + wa^3 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + wa (18 β + (5 ws^4 β)/6 + ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) - 6 λ)
StylePrint["Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον
   υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας,
   εκκινώντας από την τομή του 1ου και 3ου δρόμου", "Subsubsection"]
StabDet = (945 wa^8 β^2)/4 + 1/36 (5 ws^4 β + 6 ws^2 (24 + 4 β - 3 λ) + 12 (β - λ))
    (5 ws^4 β + 6 ws^2 (12 + 8 β - 3 λ) + 36 (3 β - λ)) + wa^6 β (852 + (918 + 215 ws^2) β - 297 λ) +
   wa^2 ((95 ws^6 β^2)/9 + ws^4 β (424 + 114 β - 63 λ) + 12 (10 β (2 + 3 β) - (8 + 31 β) λ + 6 λ^2) +
      6 ws^2 (-24 + 344 β + 62 β^2 - 78 λ - 60 β λ + 9 λ^2)) + wa^4 (((1062 + 558 ws^2 + (425 ws^4)/6) β^2 +
      9 (-4 + λ) (-4 + 9 λ) - 3 β (232 (-2 + λ) + ws^2 (-434 + 81 λ)));
x1 = FullSimplify[StabDet /. {wa → 0, λ → β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)}];
rr1 = NSolve[x1 == 0, ws];
ws1 = Part[rr1][[7]];
StylePrint["Συμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
wsstart1 = Evaluate[ws /. ws1]
StylePrint["Αντισυμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
wast1 = 0
StylePrint["Φορτίο", "Subsubtitle"]
λstart1 = β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β) /. ws → wsstart1
StylePrint["Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον
   υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας,
   εκκινώντας από την τομή του 2ου και 3ου δρόμου", "Subsubsection"]
x2 = FullSimplify[StabDet /. {ws → 0, λ → 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + (3 β)/2)}];
rr2 = NSolve[x2 == 0, wa];
ws2 = Part[rr2][[7]];
StylePrint["Συμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
wsstart2 = 0
StylePrint["Αντισυμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
wast2 = Evaluate[wa /. ws2]
StylePrint["Φορτίο", "Subsubtitle"]
λstart2 = 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + (3 β)/2) /. wa → wast2
```

■ Εύρεση του 3ου συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας για β = 0.10

■ Εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{1}{6}\, ws\, (2.1\, wa^4 + 2\, wa^2\, (38.4 + 0.5\, ws^2 - 9\, \lambda) + ws^2\, (48 + 0.1\, (8 + ws^2) - 6\, \lambda) + 12\, (0.1 - \lambda))$$

$$1.35\, wa^5 + wa^3\, (4 + 0.1\, (36 + 7\, ws^2) - 9\, \lambda) + wa\, (1.8 + 0.0833333\, ws^4 + ws^2\, (12.8 - 3\, \lambda) - 6\, \lambda)$$

■ Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, εκκινώντας από την τομή του 1ου και 3ου δρόμου

Συμμετρική παραμόρφωση

```
0.321682
```

```
0.32168159059345697`
```

Αντισυμμετρική παραμόρφωση

```
0
```

Φορτίο

```
0.495279
```

```
0.49527854306051733`
```

■ Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, εκκινώντας από την τομή του 2ου και 3ου δρόμου

Συμμετρική παραμόρφωση

```
0
```

Αντισυμμετρική παραμόρφωση

```
0.197423
```

```
0.19742298635944283`
```

Φορτίο

```
0.330395
```

```
0.3303950575897674`
```

```
ClearAll[θ1, θ2, β, w1, w2, e1, e2, Uc, Uk, λ, Ω, z, ca, cb, c1, c2, c3, c4, c5,
 c6, ma, mb, s1, s2, s3, s4, s5, s6, Ω, Ξ, ws, wa, es, ea, Vsa, Vp, Vps, Vpa,
 V11, V12, V21, V22, M, StDet, SePath1, St1, Pcr1, SePath2, St2, Pcr2, tt]
StylePrint["Α. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος", "Title"]
StylePrint["Φορτίο : P", "Section"]
StylePrint["Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k", "Section"]
StylePrint["Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2", "Section"]
StylePrint["Αρχικές ατέλειες : E1 , E2", "Section"]
StylePrint["Α δ ι α σ τ α τ ο π ο ί η σ η", "Subtitle"]
StylePrint["λ=P/(k ℓ^3) , β=c/(kℓ^4) , Ξ=V_T/(kℓ^4) , w1=W1/ℓ , w2=W2/ℓ , e1=E1/ℓ , e2=E2/ℓ",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β. Μη γραμμική ακριβής ανάλυση ευστάθειας", "Title"]
StylePrint["Β.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος", "Subtitle"]
StylePrint[
 "Β.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk",
 "Subsubtitle"]
StylePrint["Uk = 1/2 ((w1-e1)^4+2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4+(w2-e2)^4)",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης
   λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc", "Subsubtitle"]
StylePrint["Uc = 1/2 β(θ1^2 +θ2^2)", "DisplayFormula"]
Print["όπου"]
StylePrint[
 "θ1 = (arcsin(w1)-arcsin(e1))-(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))", "DisplayFormula"]
StylePrint["θ2 = (arcsin(w2)-arcsin(e2))+(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω", "Subsubtitle"]
StylePrint["Ω = -λ(√(1 - e1^2) +√(1 - (e2 - e1)^2) +√(1 - e2^2) -
   √(1 - w1^2) -√(1 - (w2 - w1)^2) -√(1 -w2^2) )", "DisplayFormula"]
StylePrint["Β.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω", "Subsubtitle"]
θ1 = (ArcSin[w1] - ArcSin[e1]) - (ArcSin[w2 - w1] - ArcSin[e2 - e1]);
θ2 = (ArcSin[w2] - ArcSin[e2]) + (ArcSin[w2 - w1] - ArcSin[e2 - e1]);
Uc = 1/2 β (θ1^2 + θ2^2);
Ω = -λ
    (√(1 - e1^2) + √(1 - (e2 - e1)^2) + √(1 - e2^2) - √(1 - w1^2) - √(1 - (w2 - w1)^2) - √(1 - w2^2));
Uk = 1/2 ((w1 - e1)^4 + 2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4 + (w2 - e2)^4);
Ξ = Simplify[Uc + Uk + Ω]
StylePrint["Β.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων
   σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
StylePrint["ws = (w1 + w2)/2 , wa = (w1 - w2)/2 οπότε w1 = ws + wa και w2 = ws - wa",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["es = (e1 + e2)/2 , ea = (e1 - e2)/2 οπότε e1 = es + ea και e2 = es - ea",
```

```
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό",
 "Subsubtitle"]
Vsa = Simplify[Σ /. {w1 → ws + wa, w2 → ws - wa, e1 → es + ea, e2 → es - ea}]
StylePrint[
 "B.1.7. Συνολικό Δυναμικό Τέλειου Συστήματος Vp μετά τον μετασχηματισμό",
 "Subsubtitle"]
Vp = Simplify[Vsa /. {es → 0, ea → 0}]
StylePrint["B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσα ευστάθειας", "Subtitle"]
StylePrint["B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας", "Subsubtitle"]
StylePrint["1η εξίσωση : ∂Vp/∂ws=0  , 2η εξίσωση : ∂Vp/∂wa=0 ", "DisplayFormula"]
Vps = FullSimplify[∂ws Vp]
Vpa = FullSimplify[∂wa Vp]
StylePrint["B.2.2. Ορίζουσα Ευστάθειας", "Subsubtitle"]
V11 = ∂ws Vps
V12 = ∂wa Vps;
V21 = ∂ws Vpa;
V22 = ∂wa Vpa;
M = {{V11, V12}, {V21, V22}};
StDet = Det[M]
StylePrint[
 "B.2.3. Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws≠0,wa=0(συμμετρική παραμόρφωση)
   και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης", "Subsubtitle"]
SePath1 = FullSimplify[Vps /. wa → 0]
St1 = FullSimplify[Solve[SePath1 = 0, λ]]
Pcr1 = Limit[St1, ws → 0]
StylePrint["B.2.4. Δεύτερος δευτερεύων δρόμος
   ισορροπίας ws=0,wa≠0(αντισυμμετρική παραμόρφωση) και
   υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης", "Subsubtitle"]
SePath2 = FullSimplify[Vpa /. ws → 0]
St2 = FullSimplify[Solve[SePath2 = 0, λ]]
Pcr2 = Limit[St2, wa → 0]
StylePrint["Στα προγράμματα 'Διερεύνηση 1ου ακριβούς
   2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb' και 'Διερεύνηση 2ου
   ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb'", "Subsubtitle"]
StylePrint["παρατίθεται η πλήρης παραμετρική διερεύνηση
   των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας", "Subsubtitle"]
StylePrint["και υπολογίζονται οι τιμές του β για τις οποίες
   αυτοί έχουν οριακό σημείο ή όχι", "Subsubtitle"]
StylePrint["B.2.5. Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (γενική
   παραμόρφωση στο χάρο), ws≠0 , wa≠0", "Subsubtitle"]
StylePrint["Η απαλοιφή των λ και β από τις γενικές εξισώσεις
   του δρόμου αυτού περιέχεται στα προγράμματα 'Exact perfect
   3rd 1.nb' και 'exact perfect 3rd 2.nb'", "Subsubtitle"]
```

Α. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος

■ **Φορτίο : P**

■ **Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ**

■ **Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c**

■ **Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k**

■ **Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2**

■ **Αρχικές ατέλειες : E1 , E2**

Αδιαστατοποίηση

$$\lambda=\frac{P}{k\,\ell^3}\ ,\ \beta=\frac{c}{k\ell^4}\ ,\ \Xi=\frac{V_T}{k\ell^4}\ ,\ w1=\frac{W1}{\ell}\ ,\ w2=\frac{W2}{\ell}\ ,\ e1=\frac{E1}{\ell}\ ,\ e2=\frac{E2}{\ell}$$

Β. Μη γραμμική ακριβής ανάλυση ευστάθειας

Β.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος

Β.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk

$$Uk = \frac{1}{2}\left((w1-e1)^4+2\left(\frac{(w1-e1)+(w2-e2)}{2}\right)^4+(w2-e2)^4\right)$$

Β.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc

$$Uc = \frac{1}{2}\beta(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

όπου

$$\theta_1 = (\arcsin(w1)-\arcsin(e1))-(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

$$\theta_2 = (\arcsin(w2)-\arcsin(e2))+(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

B.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω

$$\Omega = -\lambda\left(\sqrt{1-e1^2}+\sqrt{1-(e2-e1)^2}+\sqrt{1-e2^2}-\sqrt{1-w1^2}-\sqrt{1-(w2-w1)^2}-\sqrt{1-w2^2}\right)$$

B.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω

$$\frac{1}{2}\Big((e1-w1)^4+(e2-w2)^4+\frac{1}{8}(e1+e2-w1-w2)^4-2\left(\sqrt{1-e1^2}+\sqrt{1-(e1-e2)^2}+\sqrt{1-e2^2}-\sqrt{1-w1^2}-\sqrt{1-(w1-w2)^2}-\sqrt{1-w2^2}\right)\lambda+\beta\left((\text{ArcSin}[e1]+\text{ArcSin}[e1-e2]-\text{ArcSin}[w1]-\text{ArcSin}[w1-w2])^2+(\text{ArcSin}[e1-e2]-\text{ArcSin}[e2]-\text{ArcSin}[w1-w2]+\text{ArcSin}[w2])^2\right)\Big)$$

B.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση

$ws = \frac{w1+w2}{2}$, $wa = \frac{w1-w2}{2}$ οπότε $w1 = ws + wa$ και $w2 = ws - wa$

$es = \frac{e1+e2}{2}$, $ea = \frac{e1-e2}{2}$ οπότε $e1 = es + ea$ και $e2 = es - ea$

B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό

$$\frac{1}{2}\Big(2(es-ws)^4+(ea+es-wa-ws)^4+(ea-es-wa+ws)^4-2\left(\sqrt{1-4ea^2}+\sqrt{1-(ea-es)^2}+\sqrt{1-(ea+es)^2}-\sqrt{1-4wa^2}-\sqrt{1-(wa-ws)^2}-\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)\lambda+\beta\left((\text{ArcSin}[2ea]+\text{ArcSin}[ea-es]-\text{ArcSin}[2wa]-\text{ArcSin}[wa-ws])^2+(\text{ArcSin}[2ea]+\text{ArcSin}[ea+es]-\text{ArcSin}[2wa]-\text{ArcSin}[wa+ws])^2\right)\Big)$$

B.1.7. Συνολικό Δυναμικό Τέλειου Συστήματος Vp μετά τον μετασχηματισμό

$$wa^4+6wa^2ws^2+2ws^4-3\lambda+\sqrt{1-4wa^2}\lambda+\sqrt{1-(wa-ws)^2}\lambda+\sqrt{1-(wa+ws)^2}\lambda+\beta\,\text{ArcSin}[2wa]^2+\frac{1}{2}\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2+\frac{1}{2}\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2+\beta\,\text{ArcSin}[2wa](\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])$$

B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσα ευστάθειας

B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας

1η εξίσωση : $\frac{\partial Vp}{\partial ws}=0$, 2η εξίσωση : $\frac{\partial Vp}{\partial wa}=0$

$$4\,ws\,(3\,wa^2+2\,ws^2)+\frac{(wa-ws)\,\lambda-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{-(wa+ws)\,\lambda+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}$$

$$4\,wa\,(wa^2+3\,ws^2)+\frac{(-wa+ws)\,\lambda+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{-(wa+ws)\,\lambda+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{-4\,wa\,\lambda+2\,\beta\,(2\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{\sqrt{1-4\,wa^2}}$$

B.2.2. Ορίζουσα Ευστάθειας

$$16\,ws^2+4\,(3\,wa^2+2\,ws^2)+\frac{\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{(wa-ws)\,((wa-ws)\,\lambda-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{(wa+ws)\,(-(wa+ws)\,\lambda+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}$$

$$144\,wa^4-144\,wa^2\,ws^2+288\,ws^4+\frac{96\,wa^2\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{24\,wa^2\,\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{192\,ws^2\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{36\,ws^2\,\beta}{1-(wa-ws)^2}+$$
$$\frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{24\,wa^2\,\beta}{1-(wa+ws)^2}-\frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{36\,ws^2\,\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$
$$\frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)}+\frac{4\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,\beta^2}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)}+$$
$$\frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{8\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{192\,wa^4\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{48\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{384\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{96\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)}-$$
$$\frac{8\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{8\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{16\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa^4\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{32\,wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^4\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^4\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{32\,wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws^4\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{192\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}$$

B.2.3. Πρώτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws≠0,wa=0(συμμετρική παραμόρφωση) και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης

$$8\,ws^3+\frac{-2\,ws\,\lambda+2\,\beta\,\text{ArcSin}[ws]}{\sqrt{1-ws^2}}$$

$$\left\{\left\{\lambda\to 4\,ws^2\,\sqrt{1-ws^2}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[ws]}{ws}\right\}\right\}$$

$$\{\{\lambda\to\beta\}\}$$

B.2.4. Δεύτερος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ws=0,wa≠0(αντισυμμετρική παραμόρφωση) και υπολογισμός του αντίστοιχου σημείου διακλάδωσης

$$4\,wa^3+\frac{2\,(-wa\,\lambda+\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa]))}{\sqrt{1-wa^2}}+\frac{-4\,wa\,\lambda+4\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{\sqrt{1-4\,wa^2}}$$

$$\left\{\left\{\lambda\to\frac{2}{3}\,wa^2\left(-2\sqrt{1-4\,wa^2}\,(-1+wa^2)+\sqrt{1-wa^2}\,(-1+4\,wa^2)\right)+\frac{\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{wa}\right\}\right\}$$

$$\{\{\lambda\to 3\,\beta\}\}$$

Στα προγράμματα 'Διερεύνηση 1ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb' και 'Διερεύνηση 2ου ακριβούς 2οντος δρόμου ισορροπίας τέλειου.nb'

παρατίθεται η πλήρης παραμετρική διερεύνηση των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας

και υπολογίζονται οι τιμές του β για τις οποίες αυτοί έχουν οριακό σημείο ή όχι

B.2.5. Τρίτος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (γενική παραμόρφωση στο χώρο), ws≠0 , wa≠0

Η απαλοιφή των λ και β από τις γενικές εξισώσεις του δρόμου αυτού περιέχεται στα προγράμματα 'Exact perfect 3rd 1.nb' και 'exact perfect 3rd 2.nb'

```
ClearAll[ws, wa, λ, β, Eq1, Eq2, fs, ss, Eq11, EqA, Eq22, EqB, R1, R2, R3, S1, S2, S3]
```

$$Eq1 = 4\,ws\,(3\,wa^2 + 2\,ws^2) + \frac{(wa - ws)\,\lambda - \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{-(wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}};$$

$$Eq2 = 4\,wa\,(wa^2 + 3\,ws^2) + \frac{(-wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{-(wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}}\,(-4\,wa\,\lambda + 2\,\beta\,(2\,\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws] + \text{ArcSin}[wa + ws]));$$

$$(*fs=8\ ws^3+\frac{-2\ ws\ \lambda+2\ \beta\ \text{ArcSin}[ws]}{\sqrt{1-ws^2}};$$

$$ss=4\ \ wa^3+\frac{2\ (-wa\ \lambda+\beta\ (\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\ wa]))}{\sqrt{1-wa^2}}+\frac{-4\ wa\ \lambda+4\ \beta\ (\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\ wa])}{\sqrt{1-4\ wa^2}};*)$$

```
Eq11 = Collect[Eq1, λ];
EqA =
  Collect[Eq11, β] /. {4 ws (3 wa^2 + 2 ws^2) -> R1, (wa - ws)/Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (-wa - ws)/Sqrt[1 - (wa + ws)^2] -> R2,
   -ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws]/Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws])/Sqrt[1 - (wa + ws)^2] -> R3};
Eq22 = Collect[Eq2, λ];
EqB = Collect[Eq22, β] /.
  {4 wa (wa^2 + 3 ws^2) -> S1, -4 wa/Sqrt[1 - 4 wa^2] + (-wa + ws)/Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (-wa - ws)/Sqrt[1 - (wa + ws)^2] -> S2,
   ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws]/Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws])/Sqrt[1 - (wa + ws)^2] +
    2 (2 ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws] + ArcSin[wa + ws])/Sqrt[1 - 4 wa^2] -> S3};
Solve[Eliminate[{EqA = 0, EqB = 0}, β], λ]
Solve[Eliminate[{EqA = 0, EqB = 0}, λ], β]
```

$$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{R3\,S1 - R1\,S3}{R3\,S2 - R2\,S3}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\beta \to -\frac{R2\,S1 - R1\,S2}{-R3\,S2 + R2\,S3}\right\}\right\}$$

```
ClearAll[ws, wa, λ, β, Eq1, Eq2, fs, ss, Eq11, EqA, Eq22, EqB, R1, R2, R3, S1, S2, S3]
fs = 8 ws^3 + (-2 ws λ + 2 β ArcSin[ws]) / Sqrt[1 - ws^2];
ss = 4 wa^3 + (2 (-wa λ + β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]))) / Sqrt[1 - wa^2] +
   (-4 wa λ + 4 β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])) / Sqrt[1 - 4 wa^2];
R1 = 4 ws (3 wa^2 + 2 ws^2);
R2 = (wa - ws) / Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (-wa - ws) / Sqrt[1 - (wa + ws)^2];
R3 = -(ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws]) / Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws]) / Sqrt[1 - (wa + ws)^2];
S1 = 4 wa (wa^2 + 3 ws^2);
S2 = -(4 wa) / Sqrt[1 - 4 wa^2] + (-wa + ws) / Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (-wa - ws) / Sqrt[1 - (wa + ws)^2];
S3 = (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws]) / Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws]) / Sqrt[1 - (wa + ws)^2] +
   1 / Sqrt[1 - 4 wa^2] (2 (2 ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws] + ArcSin[wa + ws]));

λ = FullSimplify[-(R3 S1 - R1 S3) / (R3 S2 - R2 S3)]
β = FullSimplify[-(R2 S1 - R1 S2) / (-R3 S2 + R2 S3)]

-(Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - (wa - ws)^2] Sqrt[1 - (wa + ws)^2]
   (-(4 (wa + 2 ws) (wa^2 + wa ws + ws^2) (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws])) / Sqrt[1 - (wa - ws)^2] +
    (4 (wa - 2 ws) (wa^2 - wa ws + ws^2) (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws])) / Sqrt[1 - (wa + ws)^2] -
    (8 ws (3 wa^2 + 2 ws^2) (2 ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws] + ArcSin[wa + ws])) / Sqrt[1 - 4 wa^2])) /
  (2 (Sqrt[1 - 4 wa^2] + Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + Sqrt[1 - (wa + ws)^2])
    (2 ws ArcSin[2 wa] + (wa + ws) ArcSin[wa - ws] + (-wa + ws) ArcSin[wa + ws]))

(-2 Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - (wa - ws)^2] (wa - 2 ws) (wa + ws) (wa^2 - wa ws + ws^2) +
  2 Sqrt[1 - 4 wa^2] (wa - ws) (wa + 2 ws) (wa^2 + wa ws + ws^2) Sqrt[1 - (wa + ws)^2] +
  8 wa Sqrt[1 - (wa - ws)^2] ws (3 wa^2 + 2 ws^2) Sqrt[1 - (wa + ws)^2]) /
 ((Sqrt[1 - 4 wa^2] + Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + Sqrt[1 - (wa + ws)^2])
   (2 ws ArcSin[2 wa] + (wa + ws) ArcSin[wa - ws] + (-wa + ws) ArcSin[wa + ws]))
```

```
ClearAll[ws, wa, λ, β, λ1e, λ0, l1, l2, g, h]
```

```
StylePrint["Διερεύνηση και υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων των
   συναρτήσεων του 1ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας", "Subsection"]
```

```
StylePrint[
 "1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
```

```
StylePrint["λ1e(ws,β)=4 ws^2 √(1 - ws^2) + β ArcSin[ws]/ws", "DisplayFormula"]
```

$$\lambda 1e[ws_] := 4\, ws^2 \sqrt{1 - ws^2} + \frac{\beta\, \text{ArcSin}[ws]}{ws};$$

```
StylePrint["Η συνάρτηση αυτή θεωρείται μιας μεταβλητής, της ws, και υπολογίζονται
   τα ακρότατα της μέσω μηδενισμού της 1ης παραγώγου της", "Subsubtitle"]
```

```
StylePrint["1η παράγωγος", "Subsubsection"]
```

```
g = FullSimplify[∂ws λ1e[ws]]
```

```
StylePrint["τιμή του β που την μηδενίζει", "Subsubsection"]
```

```
Solve[g = 0, β]
```

$$h = \frac{4\,(-2\,ws^3 + 3\,ws^5)}{ws - \sqrt{1 - ws^2}\ \text{ArcSin}[ws]}$$

```
StylePrint["με γράφημα", "Subsubsection"]
```

```
Plot[h, {ws, -1, 1}]
```

```
StylePrint["η οποία έχει μέγιστο για την ακόλουθη τιμή του ws", "Subsubsection"]
```

```
h2 = ∂ws h;
```

```
FindRoot[h2 = 0, {ws, 0.9}]
```

```
StylePrint["που οδηγεί στη τιμή του β πέραν της οποίας ο
   1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ΔΕΝ έχει οριακό σημείο. Στην
   τιμή του β που ακολουθεί υπάρχει σημείο ΚΑΜΠΗΣ", "Subsubsection"]
```

```
h /. ws → 0.9808099961038675
```

```
StylePrint[
 "Τούτο διαπιστώνεται από χαρακτηριστικά γραφήματα της συνάρτησης ως κατωτέρω",
 "Subsubsection"]
```

```
β = 4.5
```

```
q1 = Plot[λ1e[ws], {ws, 0.9, 1}]
```

```
β = 4.69088015526771
```

```
q2 = Plot[λ1e[ws], {ws, 0.9, 1}]
```

```
β = 5
```

```
q3 = Plot[λ1e[ws], {ws, 0.9, 1}]
```

- **Διερεύνηση και υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων των συναρτήσεων του 1ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας**

1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση

$$\lambda 1e(ws,\beta) = 4\ ws^2\ \sqrt{1 - ws^2} + \frac{\beta \setminus \text{ArcSin}[ws]}{ws}$$

Η συνάρτηση αυτή θεωρείται μιας μεταβλητής, της ws, και υπολογίζονται τα ακρότατα της μέσω μηδενισμού της 1ης παραγώγου της

- **1η παράγωγος**

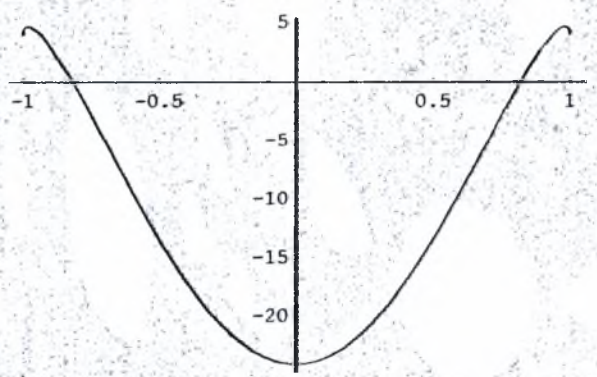
$$\frac{8\,ws^3 - 12\,ws^5 + ws\,\beta - \sqrt{1 - ws^2}\,\beta\,\text{ArcSin}[ws]}{ws^2\,\sqrt{1 - ws^2}}$$

- **τιμή του β που την μηδενίζει**

$$\left\{\left\{\beta \to \frac{4\,(-2\,ws^3 + 3\,ws^5)}{ws - \sqrt{1 - ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]}\right\}\right\}$$

$$\frac{4\,(-2\,ws^3 + 3\,ws^5)}{ws - \sqrt{1 - ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]}$$

- **με γράφημα**



- Graphics -

- **η οποία έχει μέγιστο για την ακόλουθη τιμή του ws**

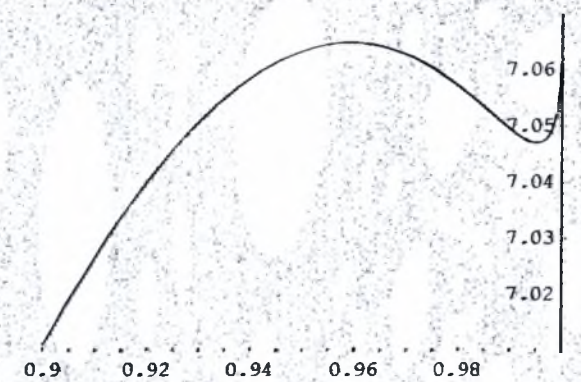
```
{ws → 0.98081}
```

- **που οδηγεί στη τιμή του β πέραν της οποίας ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ΔΕΝ έχει οριακό σημείο. Στην τιμή του β που ακολουθεί υπάρχει σημείο ΚΑΜΠΗΣ**

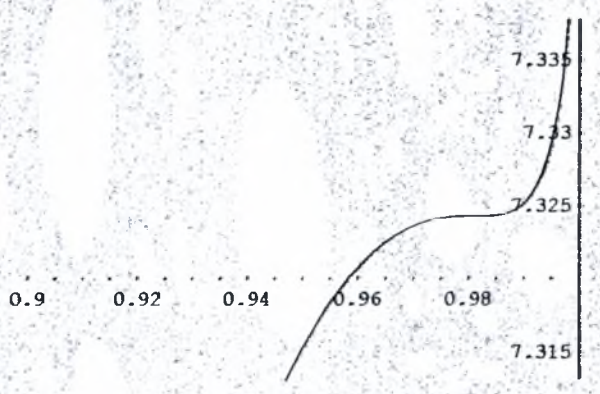
```
4.69088
```

- **Τούτο διαπιστώνεται από χαρακτηριστικά γραφήματα της συνάρτησης ως κατωτέρω**

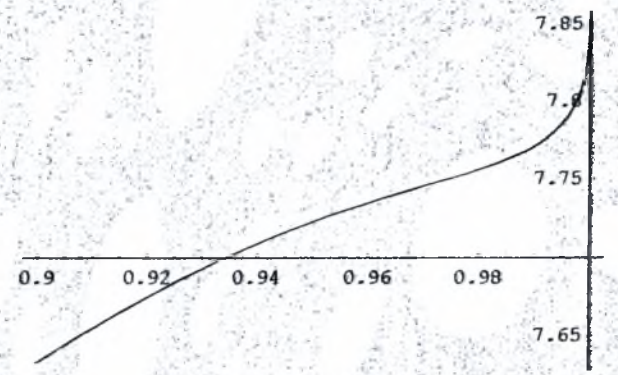
```
4.5
```




```
- Graphics -

4.69088
```




```
- Graphics -

5
```



- Graphics -

```
ClearAll[ws, wa, λ, β, λ1e, λ0, l1, l2, g, h]
StylePrint["Διερεύνηση και υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων των
   συναρτήσεων του 2ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας", "Subsection"]
StylePrint["2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση",
 "Subsubtitle"]
StylePrint["λ2e(wa,β)=2/3 wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1+wa^2)+√(1 - wa^2)
   (-1+4 wa^2))+β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa", "DisplayFormula"]
```

$$\lambda 2e[wa] = \frac{2}{3} wa^2 \left(-2\sqrt{1-4\,wa^2}\,(-1+wa^2)+\sqrt{1-wa^2}\,(-1+4\,wa^2)\right)+\frac{\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{wa}$$

```
StylePrint["Η συνάρτηση αυτή θεωρείται επίσης μιας
   μεταβλητής, της wa, και υπολογίζονται τα ακρότατα της
   μέσω μηδενισμού της 1ης παραγώγου της", "Subsubtitle"]
StylePrint["1η παράγωγος", "Subsubsection"]
g = FullSimplify[∂wa λ2e[wa]]
StylePrint["τιμή του β που την μηδενίζει", "Subsubsection"]
Solve[g = 0, β]
```

$$h = -\frac{\frac{2\,wa\,(4\,wa^2-32\,wa^4+40\,wa^5)}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{-4\,wa^3+36\,wa^5-40\,wa^7}{\sqrt{1-wa^2}}}{\frac{6\,wa}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{3\,wa}{\sqrt{1-wa^2}}-3\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}$$

```
StylePrint["με γράφημα", "Subsubsection"]
Plot[h, {wa, 0.49, .5}]
StylePrint["η οποία έχει μέγιστο για την ακόλουθη τιμή του ws", "Subsubsection"]
h2 = ∂wa h;
FindRoot[h2 = 0, {wa, 0.495}]
StylePrint["που οδηγεί στη τιμή του β πέραν της οποίας
   ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ΔΕΝ έχει οριακό σημείο. Στην
   τιμή του β που ακολουθεί υπάρχει σημείο ΚΑΜΠΗΣ", "Subsubsection"]
h /. wa → 0.49935660751242666
StylePrint[
 "Τούτο διαπιστώνεται από χαρακτηριστικά γραφήματα της συνάρτησης ως κατωτέρω",
 "Subsubsection"]

β = 0.12

q1 = Plot[λ2e[wa], {wa, 0.49, 0.5}]

β = 0.12616135860834984

q2 = Plot[λ2e[wa], {wa, 0.49, 0.5}]

β = 0.13

q3 = Plot[λ2e[wa], {wa, 0.49, 0.5}]
```

■ **Διερεύνηση και υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων των συναρτήσεων του 2ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας**

2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση

$$\lambda 2e(wa,\beta)=\frac{2}{3}\ wa^2\ \left(-2\sqrt{1-4\,wa^2}\ \left(-1+wa^2\right)+\sqrt{1-wa^2}\ \left(-1+4\,wa^2\right)\right)+\frac{\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{wa}$$

$$\frac{2}{3}\,wa^2\left(-2\sqrt{1-4\,wa^2}\ \left(-1+wa^2\right)+\sqrt{1-wa^2}\ \left(-1+4\,wa^2\right)\right)+\frac{\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{wa}$$

Η συνάρτηση αυτή θεωρείται επίσης μιας μεταβλητής, της wa, και υπολογίζονται τα ακρότατα της μέσω μηδενισμού της 1ης παραγώγου της

■ **1η παράγωγος**

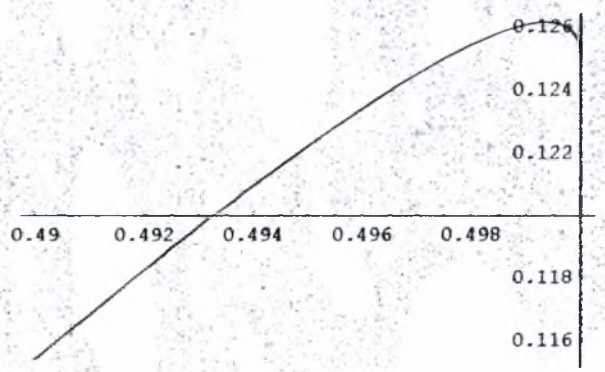
$$\frac{\frac{2\,wa\,(4\,wa^2-32\,wa^4+40\,wa^6+3\,\beta)}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{-4\,wa^3+38\,wa^5-40\,wa^7+3\,wa\,\beta}{\sqrt{1-wa^2}}-3\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}{3\,wa^2}$$

■ **τιμή του β που την μηδενίζει**

$$\left\{\left\{\beta\to-\frac{\frac{2\,wa\,(4\,wa^2-32\,wa^4+40\,wa^6)}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{-4\,wa^3+38\,wa^5-40\,wa^7}{\sqrt{1-wa^2}}}{\frac{6\,wa}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{3\,wa}{\sqrt{1-wa^2}}-3\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}\right\}\right\}$$

$$-\frac{\frac{2\,wa\,(4\,wa^2-32\,wa^4+40\,wa^6)}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{-4\,wa^3+38\,wa^5-40\,wa^7}{\sqrt{1-wa^2}}}{\frac{6\,wa}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{3\,wa}{\sqrt{1-wa^2}}-3\,(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa])}$$

■ **με γράφημα**



- Graphics -

■ **η οποία έχει μέγιστο για την ακόλουθη τιμή του ws**

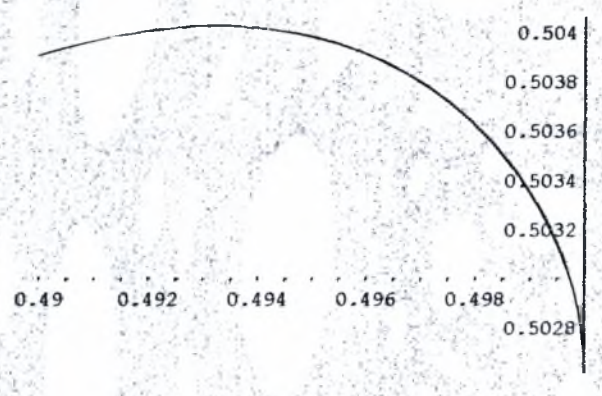
{wa → 0.499357}

- **που οδηγεί στη τιμή του β πέραν της οποίας ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας ΔΕΝ έχει οριακό σημείο. Στην τιμή του β που ακολουθεί υπάρχει σημείο ΚΑΜΠΗΣ**

```
0.126161
```

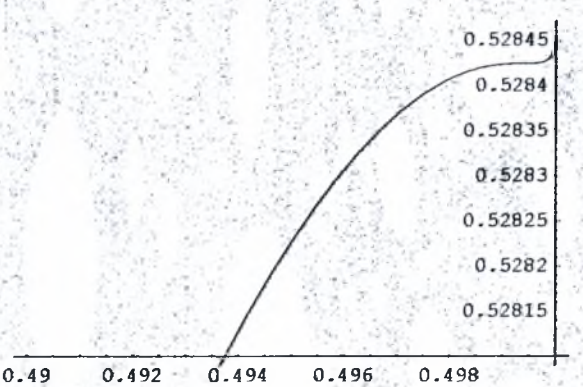
- **Τούτο διαπιστώνεται από χαρακτηριστικά γραφήματα της συνάρτησης ως κατωτέρω**

```
0.12
```



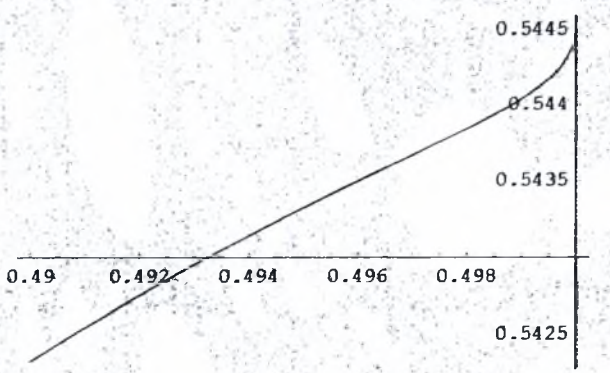

```
- Graphics -
```

```
0.126161
```




```
- Graphics -
```

```
0.13
```




```
- Graphics -
```

```
ClearAll[ws, wa, λ1, λ2, h1, Limpo1, Limpo2, r1, r2, k1, k2]
StylePrint["Υπολογισμός των τιμών του 1ου και 2ου δευτερεύοντος δρόμου
   ισορροπίας του τέλειου συστήματος - ακριβής ανάλυση για β = 0.10", "Section"]
β = 0.10
StylePrint["Διερεύνηση μορφής καμπύλων - μέγιστα - ελάχιστα", "Subsection"]
StylePrint["1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση (ws≠0, wa=
   0): λ = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + (0.1 ArcSin[ws])/ws ", "DisplayFormula"]
λ1[ws_] := 4 ws^2 √(1 - ws^2) + (β ArcSin[ws])/ws
StylePrint["Με πράτη παράγωγο ως προς ws ίση με", "Subsubsection"]
h1 = ∂ws λ1[ws]
StylePrint["οι ρίζες της οποίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού",
 "Subsubsection"]
r1 = FindRoot[{h1 == 0}, {ws, 0.7}]
Limpo1 = λ1[0.8189855160827633]
r2 = FindRoot[{h1 == 0}, {ws, -0.7}]
Limpo2 = λ1[-0.8189855160827633]
Limit[λ1[ws], ws → 0]
StylePrint[
 "Συνεπώς ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [ws =
   0.818986 , λ = 1.65669] , [ws = -0.818986 , λ = 1.65669]", "Subsubsection"]
StylePrint["και ανωμαλία στο σημείο [ws = 0 , λ = β = 0.10], όπως
   φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί", "Subsubsection"]
Plot[λ1[ws], {ws, -1, 1}]
StylePrint[
 "2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - αντισυμμετρική παραμόρφωση (ws=0, wa≠0)",
 "Subsubsection"]
StylePrint["λ2=(2/3) wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1+wa^2)+√(1 - wa^2) (-1+4
   wa^2))+(0.1 (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]))/wa ", "DisplayFormula"]

λ2[wa_] := (2/3) wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1 + wa^2) + √(1 - wa^2) (-1 + 4 wa^2)) +
  (β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]))/wa

StylePrint["Με πράτη παράγωγο ως προς wa ίση με", "Subsubsection"]
h2 = ∂wa λ2[wa]
StylePrint["οι ρίζες της οποίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού",
 "Subsubsection"]
k1 = FindRoot[{h2 == 0}, {wa, 0.4}]
Lp1 = λ2[0.4801135597483448]
k2 = FindRoot[{h2 == 0}, {wa, -0.4}]
Lp2 = λ2[-0.4801135597483448]
Limit[λ2[wa], wa → 0]
StylePrint[
 "Συνεπώς ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [wa =
   0.480114 , λ = 0.428062] , [wa = -0.480114 , λ = 0.428062]", "Subsubsection"]
StylePrint["και ανωμαλία στο σημείο [wa = 0 , λ = 3β = 0.30], όπως
   φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί", "Subsubsection"]
Plot[λ2[wa], {wa, -0.5, 0.5}]
```

■ Υπολογισμός των τιμών του 1ου και 2ου δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος - ακριβής ανάλυση για β = 0.10

```
0.1
```

■ Διερεύνηση μορφής καμπύλων - μέγιστα - ελάχιστα

```
1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική
  παραμόρφωση (ws≠0, wa=0): λ = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + 0.1 ArcSin[ws] / ws
```

■ **Με πρώτη παράγωγο ως προς ws ίση με**

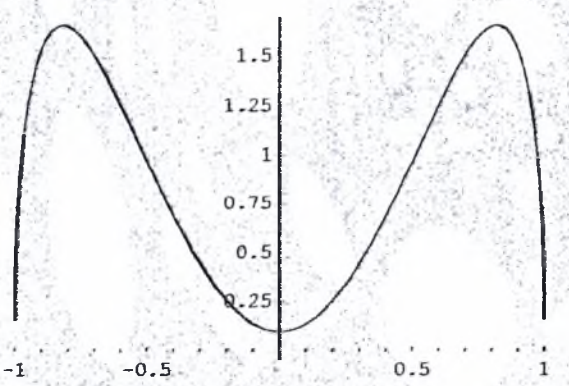
$$\frac{0.1}{ws\sqrt{1-ws^2}} - \frac{4\,ws^3}{\sqrt{1-ws^2}} + 8\,ws\sqrt{1-ws^2} - \frac{0.1\,\text{ArcSin}[ws]}{ws^2}$$

■ **οι ρίζες της οποίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού**

```
{ws → 0.818986}

1.65669

{ws → -0.818986}

1.65669

0.1
```

■ **Συνεπώς ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [ws = 0.818986 , λ = 1.65669] , [ws = -0.818986 , λ = 1.65669]**

■ **και ανωμαλία στο σημείο [ws = 0 , λ = β = 0.10], όπως φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί**




```
- Graphics -
```

■ **2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - αντισυμμετρική παραμόρφωση (ws=0, wa≠0)**

$$\lambda 2=\frac{2}{3}\ wa^2\ \left(-2\ \sqrt{1-4\ wa^2}\ \left(-1+wa^2\right)+\sqrt{1-wa^2}\ \left(-1+4\ wa^2\right)\right)+\frac{0.1\ (\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\ wa])}{wa}$$

■ **Με πρώτη παράγωγο ως προς wa ίση με**

$$\frac{0.1\ \left(\frac{2}{\sqrt{1-4\ wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-wa^2}}\right)}{wa}+\frac{2}{3}\ wa^2\ \left(-4\ wa\ \sqrt{1-4\ wa^2}+8\ wa\ \sqrt{1-wa^2}+\frac{8\ wa\ \left(-1+wa^2\right)}{\sqrt{1-4\ wa^2}}-\frac{wa\ \left(-1+4\ wa^2\right)}{\sqrt{1-wa^2}}\right)+\frac{4}{3}\ wa\ \left(-2\ \sqrt{1-4\ wa^2}\ \left(-1+wa^2\right)+\sqrt{1-wa^2}\ \left(-1+4\ wa^2\right)\right)-\frac{0.1\ (\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\ wa])}{wa^2}$$

■ **οι ρίζες της οποίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού**

```
{wa → 0.480114}
```

■ Υπολογισμός των τιμών του 1ου και 2ου δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας του τέλειου συστήματος - ακριβής ανάλυση για β = 0.10

```
0.1
```

■ **Διερεύνηση μορφής καμπύλων - μέγιστα - ελάχιστα**

```
1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - συμμετρική παραμόρφωση (
  ws≠0, wa=0): λ = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + 0.1\ \ ArcSin[ws]
                                          ws
```

■ **Με πρώτη παράγωγο ως προς ws ίση με**

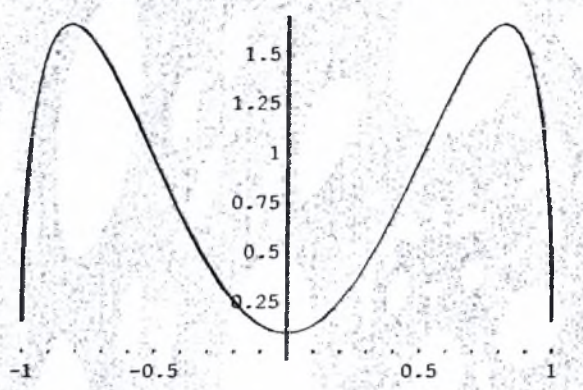
$$\frac{0.1}{ws\ \sqrt{1-ws^2}}-\frac{4\ ws^3}{\sqrt{1-ws^2}}+8\ ws\ \sqrt{1-ws^2}-\frac{0.1\ \text{ArcSin}[ws]}{ws^2}$$

■ **οι ρίζες της οποίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού**

```
{ws → 0.818986}

1.65669

{ws → -0.818986}

1.65669

0.1
```

- **Συνεπώς ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [ws = 0.818986 , λ = 1.65669] , [ws = -0.818986 , λ = 1.65669]**

- **και ανωμαλία στο σημείο [ws = 0 , λ = β = 0.10], όπως φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί**



- Graphics -

- **2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας - αντισυμμετρική παραμόρφωση (ws=0, wa≠0)**

$$\lambda 2=\frac{2}{3}\ wa^2\ \left(-2\ \sqrt{1\ -\ 4\setminus wa^2}\ \ (-1+wa^2)+\sqrt{1\ -\ wa^2}\ \ (-1+4\ wa^2)\right)+\frac{0.1\setminus (\text{ArcSin}[wa]\ +\ \text{ArcSin}[2\setminus wa])}{wa}$$

- **Με πρώτη παράγωγο ως προς wa ίση με**

$$\frac{0.1\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\ wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-wa^2}}\right)}{wa}+$$

$$\frac{2}{3}\ wa^2\left(-4\ wa\ \sqrt{1-4\ wa^2}+8\ wa\ \sqrt{1-wa^2}+\frac{8\ wa\ (-1+wa^2)}{\sqrt{1-4\ wa^2}}-\frac{wa\ (-1+4\ wa^2)}{\sqrt{1-wa^2}}\right)+$$

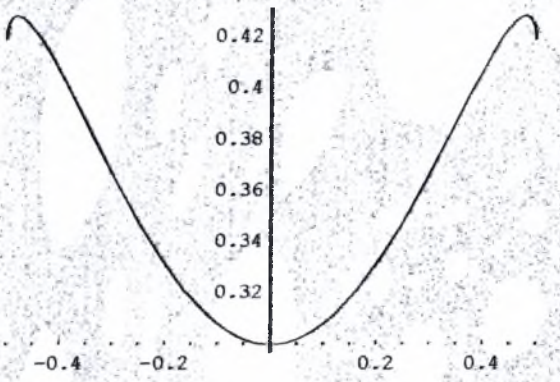
$$\frac{4}{3}\ wa\left(-2\ \sqrt{1-4\ wa^2}\ \ (-1+wa^2)+\sqrt{1-wa^2}\ \ (-1+4\ wa^2)\right)-\frac{0.1\ (\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\ wa])}{wa^2}$$

- **οι ρίζες της ακολουθίας δίδουν τις τιμές των ακροτάτων του δρόμου αυτού**

```
{wa → 0.480114}

0.428062

{wa → -0.480114}

0.428062

0.3
```

- **Συνεπώς ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [wa = 0.480114 , λ = 0.428062] , [wa = -0.480114 , λ = 0.428062]**

- **και ανωμαλία στο σημείο [wa = 0 , λ = 3β = 0.30], όπως φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί**



- Graphics -

{wa → 0.4801135597483448}

0.428062

0.42806226322756846

{wa → -0.480114}

{wa → -0.4801135597483448}

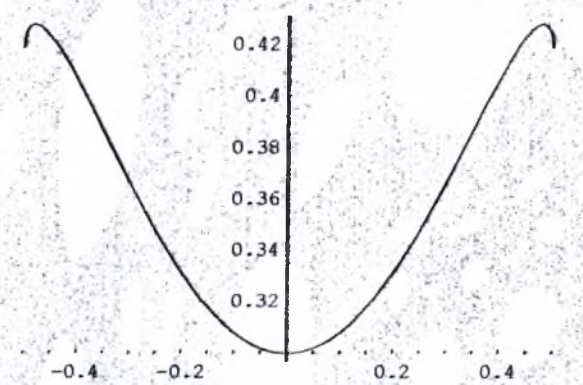
0.428062

0.42806226322756846

0.3

- **Συνεπώς ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο οριακά σημεία [ws = 0.480114 , λ = 0.428062] , [ws = -0.480114 , λ = 0.428062]**

- **και ανωμαλία στο σημείο [wa = 0 , λ = 3β = 0.30], όπως φαίνεται και από το γράφημα που ακολουθεί**



- Graphics -

```
ClearAll[ws, wa, β, λ, equ1, equ2, x1,
 StabDet, ws1, ws2, λcr1, λcr2, wa1, wa2, λcr3, λcr4, x2]
StylePrint["Ακριβής ανάλυση", "Subtitle"]
StylePrint[
 "Εύρεση του 3ου συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας για β = 0.10", "Section"]
β = 0.10;
StylePrint["Εξισώσεις ισορροπίας", "Subsection"]
```

$$equ1 = 4\,ws\,(3\,wa^2 + 2\,ws^2) + \frac{(wa - ws)\,\lambda - \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} +$$
$$\frac{-(wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}}$$

$$equ2 = 4\,wa\,(wa^2 + 3\,ws^2) + \frac{(-wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} +$$
$$\frac{-(wa + ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} +$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}}\,(-4\,wa\,\lambda + 2\,\beta\,(2\,\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws] + \text{ArcSin}[wa + ws]))$$

```
StylePrint["Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον υπολογισμό
   σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, εκκινώντας
   από την τομή του 1ου και 3ου δρόμου", "Subsubsection"]
```

$$StatDeb = 144\,wa^4 - 144\,wa^2\,ws^2 + 288\,ws^4 + \frac{96\,wa^2\,\beta}{1 - 4\,wa^2} + \frac{24\,wa^2\,\beta}{1 - (wa - ws)^2} +$$
$$\frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1 - (wa - ws)^2} + \frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{192\,ws^2\,\beta}{1 - 4\,wa^2} +$$
$$\frac{36\,ws^2\,\beta}{1 - (wa - ws)^2} + \frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{24\,wa^2\,\beta}{1 - (wa + ws)^2} - \frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1 - (wa + ws)^2} +$$
$$\frac{36\,ws^2\,\beta}{1 - (wa + ws)^2} + \frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} - \frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} +$$
$$\frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \frac{4\,\beta^2}{(1 - 4\,wa^2)\,(1 - (wa - ws)^2)} + \frac{4\,\beta^2}{(1 - 4\,wa^2)\,(1 - (wa + ws)^2)} +$$
$$\frac{4\,\beta^2}{(1 - (wa - ws)^2)\,(1 - (wa + ws)^2)} + \frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - (wa - ws)^2}\,(1 - (wa + ws)^2)} +$$
$$\frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,(1 - (wa - ws)^2)\,\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \frac{8\,\beta^2}{(1 - 4\,wa^2)\,\sqrt{1 - (wa - ws)^2}\,\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} -$$
$$\frac{192\,wa^4\,\lambda}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{48\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}} - \frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} - \frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} -$$
$$\frac{384\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{96\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}} + \frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} +$$
$$\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} + \frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} -$$
$$\frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} - \frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1 - 4\,wa^2)\,(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{16\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}\,(1 - (wa - ws)^2)} -$$

$$\frac{4\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\beta\lambda}{(1-4wa^2)\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{16wa\,ws\,\beta\lambda}{(1-4wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8ws^2\beta\lambda}{(1-4wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8wa^2\beta\lambda}{(1-4wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4wa^2\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8wa^2\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16wa\,ws\,\beta\lambda}{(1-4wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8wa\,ws\,\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16wa\,ws\,\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8ws^2\beta\lambda}{(1-4wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4ws^2\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8ws^2\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16wa^2\beta\lambda}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4wa^2\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\beta\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)}+$$
$$\frac{8wa\,ws\,\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4ws^2\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{8\beta\lambda}{(1-4wa^2)\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{8wa^2\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{4\beta\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{16\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16wa\,ws\,\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8ws^2\beta\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16wa^4\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4wa^2\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16wa^2\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{4\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{32wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16wa^2ws^2\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4ws^2\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16wa^4\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4wa^2\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4wa^4\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4wa^2\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{32wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16wa^2ws^2\lambda^2}{(1-4wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4ws^2\lambda^2}{\sqrt{1-4wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{8\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws^4\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{192\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}};$$

```
x1 = FullSimplify[StatDeb /. {wa → 0, λ → 4 ws^2 √(1 - ws^2) + β ArcSin[ws]/ws}];
FindRoot[x1 = 0, {ws, 0.3}]
ws1 = Evaluate[ws /. %]
FindRoot[x1 = 0, {ws, 0.9}]
ws2 = Evaluate[ws /. %]
λcr1 = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + β ArcSin[ws]/ws /. ws → ws1
λcr2 = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + β ArcSin[ws]/ws /. ws → ws2
StylePrint["Συνεπώς ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει
   δύο κρίσιμα σημεία, εκ των οποίων το πρώτο αντιστοιχεί στη τομή του
   με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο και το δεύτερο στο οριακό σημείο του,
   που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα b one exact.nb", "Subsubtitle"]
Print["Τομή 1ου και 3ου δευτερεύοντα δρόμου : ws =
   0.321205 , wa = 0 , λ = 0.492627"]
Print ["υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο σημείο τομής από τη προσεγγιστική
   ανάλυση (b one.nb) βρέθηκε για ws = 0.321682, wa = 0 ,  λ = 0.495279"]
Print["Οριακό σημείο                    : ws =
   0.818986 , wa = 0 , λ = 1.65669"]

StylePrint["Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον
   υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας,
   εκκινώντας από την τομή του 2ου και 3ου δρόμου", "Subsubsection"]

x2 = StatDeb /. {ws → 0, λ → 2/3 wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1 + wa^2) + √(1 - wa^2) (-1 + 4 wa^2)) +
      β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa};
FindRoot[x2 = 0, {wa, .16}]
wa1 = Evaluate[wa /. %]
FindRoot[x2 = 0, {wa, .48}]
wa2 = Evaluate[wa /. %]
λcr3 = 2/3 wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1 + wa^2) + √(1 - wa^2) (-1 + 4 wa^2)) +
   β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa /. wa → wa1
λcr4 = 2/3 wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1 + wa^2) + √(1 - wa^2) (-1 + 4 wa^2)) +
   β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa /. wa → wa2
StylePrint["Συνεπώς ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο
   κρίσιμα σημεία, εκ των οποίων το πρώτο αντιστοιχεί στη τομή του
   με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο και το δεύτερο στο οριακό σημείο του,
   που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα b one exact.nb", "Subsubtitle"]
Print["Τομή 1ου και 3ου δευτερεύοντα δρόμου : ws =
   0 , wa = 0.197611 , λ = 0.3307"]
Print ["υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο σημείο τομής από τη προσεγγιστική
```

```
    ανάλυση (b one.nb) βρέθηκε για ws = 0, wa = 0.19743 ,  λ = 0.330395"]
Print["Οριακό σημείο                    : ws =
   0 , wa = 0.480114 , λ = 0.428062"]
```

Ακριβής ανάλυση

■ Εύρεση του 3ου συμπληρωματικού δρόμου ισορροπίας για β = 0.10

▪ Εξισώσεις ισορροπίας

$$4\,ws\,(3\,wa^2 + 2\,ws^2) + \frac{(wa - ws)\,\lambda - 0.1\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} +$$
$$\frac{(-wa - ws)\,\lambda + 0.1\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}}$$

$$4\,wa\,(wa^2 + 3\,ws^2) + \frac{(-wa + ws)\,\lambda + 0.1\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} +$$
$$\frac{(-wa - ws)\,\lambda + 0.1\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} +$$
$$\frac{-4\,wa\,\lambda + 0.2\,(2\,\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}}$$

▪ Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, εκκινώντας από την τομή του 1ου και 3ου δρόμου

```
{ws → 0.321205}

0.321205

{ws → 0.818986}

0.818986

0.492627

1.65669
```

Συνεπώς ο 1ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο κρίσιμα σημεία, εκ των οποίων το πρώτο αντιστοιχεί στη τομή του με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο και το δεύτερο στο οριακό σημείο του, που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα b one exact.nb

```
Τομή 1ου και 3ου δευτερεύοντα δρόμου : ws = 0.321205 , wa = 0 , λ = 0.492627

υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο σημείο τομής από τη προσεγγιστική
  ανάλυση (b one.nb) βρέθηκε για ws = 0.321682, wa = 0 ,  λ = 0.495279

Οριακό σημείο                    : ws = 0.818986 , wa = 0 , λ = 1.65669
```

- **Τιμές έναρξης της επίλυσης για τον υπολογισμό σημείων του 3ου δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας, εκκινώντας από την τομή του 2ου και 3ου δρόμου**

```
{wa → 0.197611}

0.197611

{wa → 0.480114}

0.480114

0.3307

0.428062
```

Συνεπώς ο 2ος δευτερεύων δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει δύο κρίσιμα σημεία, εκ των οποίων το πρώτο αντιστοιχεί στη τομή του με τον 3ο δευτερεύοντα δρόμο και το δεύτερο στο οριακό σημείο του, που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα b one exact.nb

```
Τομή 1ου και 3ου δευτερεύοντα δρόμου : ws = 0 , wa = 0.197611 , λ = 0.3307 .

υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο σημείο τομής από τη προσεγγιστική
  ανάλυση (b one.nb) βρέθηκε για ws = 0, wa = 0.19743 ,  λ = 0.330395

Οριακό σημείο                    : ws = 0 , wa = 0.480114 , λ = 0.428062
```

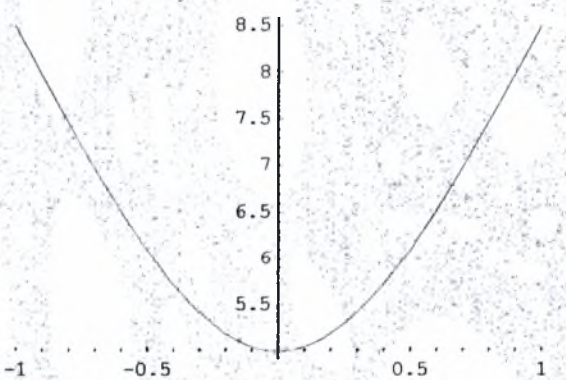
```
ClearAll[λ1a, λ2a, λ1e, λ1e, β, p1, p2, p3, p4, ws, wa]
β = 5
StylePrint["1ος Δευτερεύων Δρόμος Ισορροπίας", "Section"]
StylePrint["Από προσεγγιστική ανάλυση", "SubTitle"]
λ1a = β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)
p1 = Plot[λ1a, {ws, -1, 1}, PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0]}]
StylePrint["Από ακριβή ανάλυση", "SubTitle"]
λ1e = 4 ws^2 √(1 - ws^2) + (β ArcSin[ws])/ws
p2 = Plot[λ1e, {ws, -1, 1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1]}]
Show[p1, p2]
StylePrint["2ος Δευτερεύων Δρόμος Ισορροπίας", "Section"]
StylePrint["Από προσεγγιστική ανάλυση", "SubTitle"]
λ2a = 3β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + (3β)/2)
p3 = Plot[λ2a, {wa, -1, 1}, PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0]}]
StylePrint["Από ακριβή ανάλυση", "SubTitle"]
λ2e =
 2/3 wa^2 (-2 √(1 - 4 wa^2) (-1 + wa^2) + √(1 - wa^2) (-1 + 4 wa^2)) + (β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]))/wa
p4 = Plot[λ2e, {wa, -0.5, 0.5}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1]}]
Show[p3, p4]
Show[p1, p3]
```

5

■ 1ος Δευτερεύων Δρόμος Ισορροπίας

Από προσεγγιστική ανάλυση

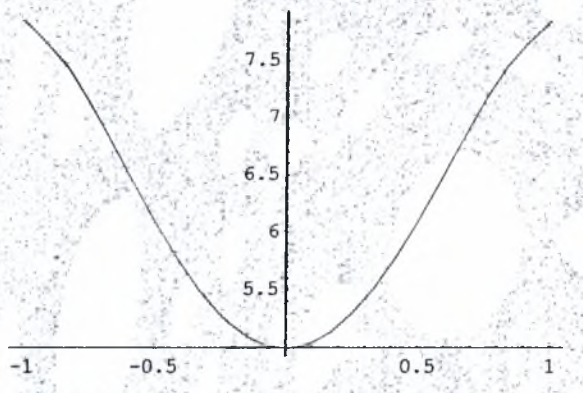
$$5 + \frac{1}{6} ws^2 \left(5 + \frac{48}{2 + ws^2}\right)$$



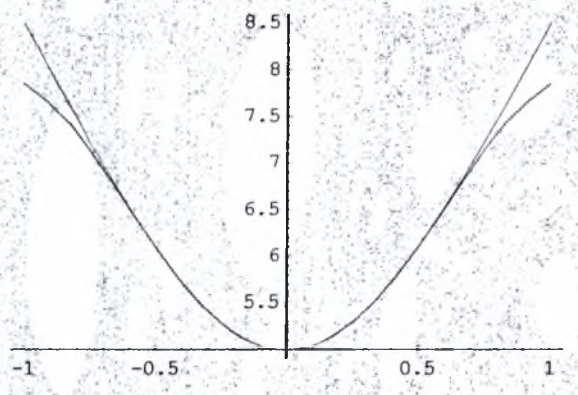
- Graphics -

Από ακριβή ανάλυση

$$4\, ws^2 \sqrt{1 - ws^2} + \frac{5\, \text{ArcSin}[ws]}{ws}$$



- Graphics -

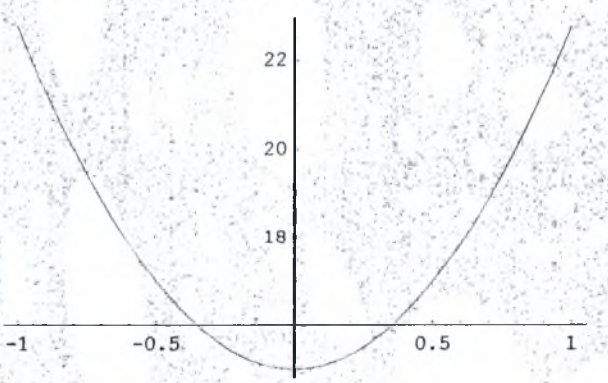


- Graphics -

■ 2ος Δευτερεύων Δρόμος Ισορροπίας

Από προσεγγιστική ανάλυση

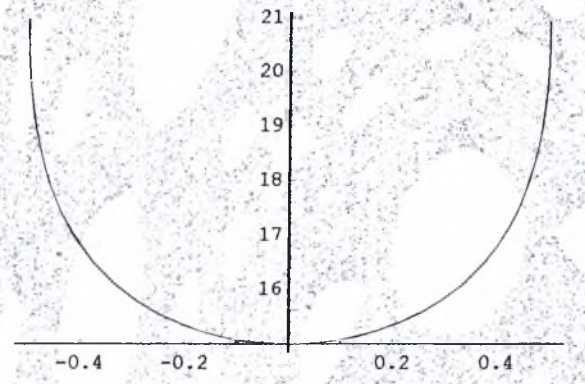
$$15 + wa^2 \left(\frac{15}{2} + \frac{4}{6 + 9\,wa^2}\right)$$



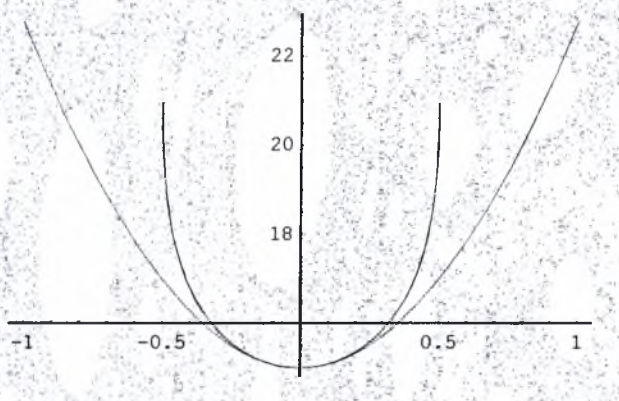
- Graphics -

Από ακριβή ανάλυση

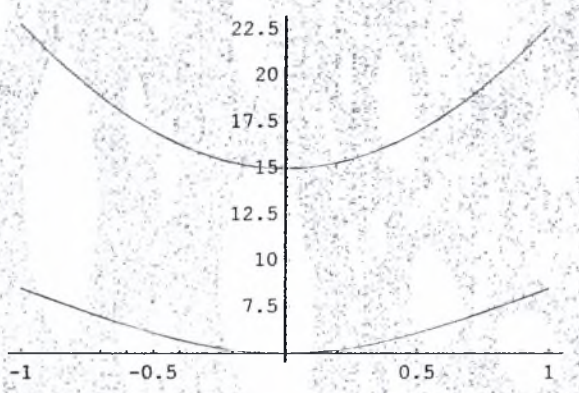
$$\frac{2}{3} wa^2 \left(-2\sqrt{1 - 4\,wa^2}\ (-1 + wa^2) + \sqrt{1 - wa^2}\ (-1 + 4\,wa^2)\right) + \frac{5\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa])}{wa}$$



- Graphics -

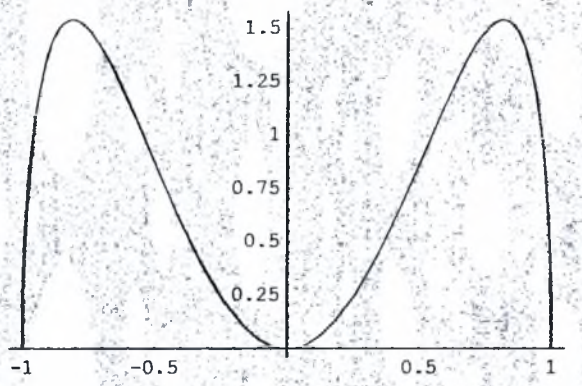


- Graphics -



- Graphics -

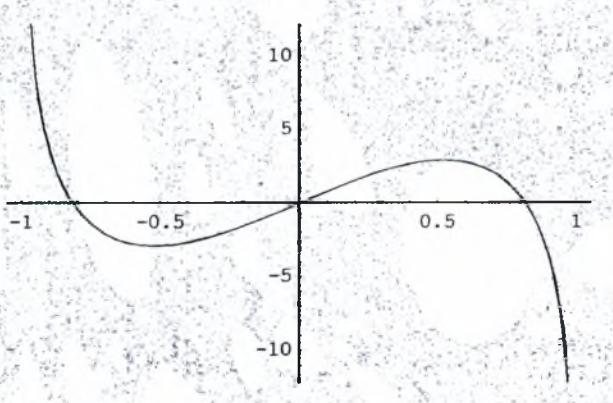
```
ClearAll[ws, β, f, x, y, g1, g2, f1, f2]
f[x_] := 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] /. ws → x
Plot[f[x], {x, -1, 1}]
f1 = ∂x f[x]
f2 = ∂x f1
Plot[f1, {x, -1, 1}]
Solve[f1 == 0, x]
N[Sqrt[2/3]]
f[%]
N[-Sqrt[2/3]]
f[%]
N[8 Sqrt[3]/9]
(*g[x_]:=2/3 wa^2 (-2 Sqrt[1-4 wa^2] (-1+wa^2)+Sqrt[1-wa^2] (-1+4 wa^2))/.wa→x
  g1=∂x g[x]
   g2=∂x g1
    Plot[g1,{x,-0.5,0.5}]
    a=NSolve[g1=0,x]
    g[0.42314818757576655]*)
```



- Graphics -

$$-\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^2}}+8x\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{4x^4}{(1-x^2)^{3/2}}-\frac{20x^2}{\sqrt{1-x^2}}+8\sqrt{1-x^2}$$



- Graphics -

$$\left\{\{x \to 0\}, \left\{x \to -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}, \left\{x \to \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$$

0.816497

1.5396

-0.816497

1.5396

1.5396

```
(*Search3.nb, αντίστοιχο του Search1.nb αλλά για ακριβή ανάλυση*)
ClearAll[StabDet, wa, ws, β, λ, x1, x2, x3, v]
```

$$V11 = 16\,ws^2 + 4\,(3\,wa^2 + 2\,ws^2) + \frac{\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} - \lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} - \lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} -$$
$$\frac{(wa-ws)\,((wa-ws)\,\lambda - \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} +$$
$$((wa+ws)\,(-(wa+ws)\,\lambda + \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa+ws])))\,/\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2};$$

$$\text{StabDet} = 144\,wa^4 - 144\,wa^2\,ws^2 + 288\,ws^4 + \frac{96\,wa^2\,\beta}{1-4\,wa^2} + \frac{24\,wa^2\,\beta}{1-(wa-ws)^2} +$$
$$\frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{192\,ws^2\,\beta}{1-4\,wa^2} +$$
$$\frac{36\,ws^2\,\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{24\,wa^2\,\beta}{1-(wa+ws)^2} - \frac{48\,wa\,ws\,\beta}{1-(wa+ws)^2} +$$
$$\frac{36\,ws^2\,\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{48\,wa^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} - \frac{96\,wa\,ws\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} +$$
$$\frac{96\,ws^2\,\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \frac{4\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)} + \frac{4\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)} +$$
$$\frac{4\,\beta^2}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)} + \frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)} +$$
$$\frac{8\,\beta^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \frac{8\,\beta^2}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} -$$
$$\frac{192\,wa^4\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{48\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}} - \frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} - \frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} -$$
$$\frac{384\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{96\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}} + \frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} +$$
$$\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} + \frac{36\,wa^2\,ws^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{24\,wa\,ws^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{36\,ws^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{24\,wa^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \frac{48\,wa\,ws\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} -$$
$$\frac{36\,ws^2\,\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} - \frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{16\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)} -$$
$$\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)} - \frac{8\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{8\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{16\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-\frac{4\,ws^2\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{8\,\beta\,\lambda}{(1-4\,wa^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{8\,wa^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{4\,\beta\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{16\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws^2\,\beta\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa^4\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{32\,wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^4\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^4\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{32\,wa^3\,ws\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws^4\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\lambda^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{4\,wa^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,\lambda^2}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws^2\,\lambda^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{192\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{32\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{48\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{16\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}-\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{192\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{24\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa^2\,ws\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{12\,wa\,ws^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{36\,ws^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)}-$$
$$\frac{8\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{24\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,wa^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{32\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-4\,wa^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,wa^2\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{8\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa\,ws^2\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{4\,ws^3\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,\beta\,\lambda\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{24\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{4\,ws^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa-ws]\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa^2\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,ws\,\beta^2\,\text{ArcSin}[wa+ws]^2}{(1-4\,wa^2)^{3/2}\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}};$$

```
x1 = FullSimplify[V11 /. {wa → 0, λ → 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + β ArcSin[ws]/ws}]

x3 =
 FullSimplify[V11 /. {ws → 0, λ → 2/3 wa^2 (-2 Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2) + Sqrt[1 - wa^2] (-1 + 4 wa^2)) +
     β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa}]

x2 = FullSimplify[StabDet /. {wa → 0, λ → 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + β ArcSin[ws]/ws}]
```

```
x4 = FullSimplify[
  StabDet /. {ws → 0, λ → 2/3 wa^2 (-2 Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2) + Sqrt[1 - wa^2] (-1 + 4 wa^2)) +
      β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa}]
```

$$\frac{16\,ws^3 - 24\,ws^5 + 2\,ws\,\beta - 2\sqrt{1 - ws^2}\,\beta\,\text{ArcSin}[ws]}{ws - ws^3}$$

$$-\frac{1}{3\,wa\,(1 - wa^2)^{3/2}}\left(-8\,wa^3\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,(-1 + wa^2) + 2\,wa\sqrt{1 - wa^2}\,(-20\,wa^2 + 26\,wa^4 - 3\,\beta) - 6\,(-1 + wa^2)\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa])\right)$$

$$\frac{1}{ws^2\,(-1 + ws^2)^2}\left(4\left(-ws^2\,(-8\,ws^2 + 12\,ws^4 - \beta)\left(5\,\beta + 4\sqrt{1 - ws^2}\,(-2\,ws^2 + 2\,ws^4 + \beta) - 2\,ws^2\,(-1 + 3\,ws^2 + 2\,\beta)\right) + \beta\,\text{ArcSin}[ws]\left(2\,ws\,(-1 + ws^2)\,(4\,ws^2 - 8\,ws^4 + 3\,\beta) - (-1 + ws^2)\,\beta\,\text{ArcSin}[ws] + 2\sqrt{1 - ws^2}\,(9\,ws^5 - 3\,ws\,\beta + ws^3\,(-5 + 2\,\beta) + (\beta - ws^2\,\beta)\,\text{ArcSin}[ws])\right)\right)\right)$$

$$-\frac{1}{3\,wa^2\,(1 - 4\,wa^2)^{3/2}\,(1 - wa^2)^{5/2}}\left(4\left(-6\sqrt{1 - wa^2}\,(wa - 5\,wa^3 + 4\,wa^5)\,(-6\,wa^2 + 4\,wa^4 - 3\,\beta)\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa]) - 6\,wa\sqrt{1 - 4\,wa^2}\,(-1 + wa^2)\,\beta\,(-26\,wa^4 + 28\,wa^6 + wa^2\,(4 - 6\,\beta) + 3\,\beta)\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa]) + 2\,(1 - 5\,wa^2 + 4\,wa^4)\,(4\,wa^6\,(2 - 25\,wa^2 + 29\,wa^4) + 30\,wa^4\,(-1 + wa^2)\,\beta - 6\,wa^2\,\beta^2 + 3\,(-1 + wa^2)\,\beta^2\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa])^2) + \sqrt{1 - 4\,wa^2}\,\sqrt{1 - wa^2}\,(-1500\,wa^{10} + 896\,wa^{12} - 240\,wa^8\,(-3 + \beta) + 24\,wa^4\,(-4 + \beta)\,\beta - 15\,wa^2\,\beta^2 + 20\,wa^6\,(-4 + 15\,\beta) - 3\,(1 - 5\,wa^2 + 4\,wa^4)\,\beta^2\,(\text{ArcSin}[wa] + \text{ArcSin}[2\,wa])^2)\right)\right)$$

```
ClearAll[ws, wa, x1, x2, x3, x4, β]
x1 = (16 ws^3 - 24 ws^5 + 2 ws β - 2 Sqrt[1 - ws^2] β ArcSin[ws]) / (ws - ws^3);
Solve[Collect[x1, β] == 0, β]
x3 = -1/(3 wa (1 - wa^2)^(3/2)) (-8 wa^3 Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2) +
    2 wa Sqrt[1 - wa^2] (-20 wa^2 + 26 wa^4 - 3 β) - 6 (-1 + wa^2) β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]));
Solve[Collect[x3, β] == 0, β]
x2 = 1/(ws^2 (-1 + ws^2)^2)
  (4 (-ws^2 (-8 ws^2 + 12 ws^4 - β) (5 β + 4 Sqrt[1 - ws^2] (-2 ws^2 + 2 ws^4 + β) - 2 ws^2 (-1 + 3 ws^2 + 2 β)) +
      β ArcSin[ws] (2 ws (-1 + ws^2) (4 ws^2 - 8 ws^4 + 3 β) - (-1 + ws^2) β ArcSin[ws] +
        2 Sqrt[1 - ws^2] (9 ws^5 - 3 ws β + ws^3 (-5 + 2 β) + (β - ws^2 β) ArcSin[ws]))));
Solve[Collect[x2, β] == 0, β]

x4 = -1/(3 wa^2 (1 - 4 wa^2)^(3/2) (1 - wa^2)^(5/2))
  (4 (-6 Sqrt[1 - wa^2] (wa - 5 wa^3 + 4 wa^5) (-6 wa^2 + 4 wa^4 - 3 β) β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]) -
      6 wa Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2) β (-26 wa^4 + 28 wa^6 + wa^2 (4 - 6 β) + 3 β)
       (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]) + 2 (1 - 5 wa^2 + 4 wa^4) (4 wa^6 (2 - 25 wa^2 + 29 wa^4) +
        30 wa^4 (-1 + wa^2) β - 6 wa^2 β^2 + 3 (-1 + wa^2) β^2 (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])^2) +
      Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - wa^2] (-1500 wa^10 + 896 wa^12 - 240 wa^8 (-3 + β) + 24 wa^4 (-4 + β) β - 15 wa^2
        β^2 + 20 wa^6 (-4 + 15 β) - 3 (1 - 5 wa^2 + 4 wa^4) β^2 (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])^2)));
Solve[
 Collect[
  x4,
  β] =
 0,
 β]
```

$$\left\{\left\{\beta \to \frac{4\left(-2\,ws^3+3\,ws^5\right)}{ws-\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\beta \to -\frac{-40\,wa^3\sqrt{1-wa^2}+52\,wa^5\sqrt{1-wa^2}-8\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\left(-1+wa^2\right)}{-6\,wa\sqrt{1-wa^2}-6\left(-1+wa^2\right)\left(\text{ArcSin}[wa]+\text{ArcSin}[2\,wa]\right)}\right\}\right\}$$

$$\{\{\beta \to (42\,ws^4 - 98\,ws^6 + 48\,ws^8 + 24\,ws^4\sqrt{1-ws^2} -$$
$$40\,ws^6\sqrt{1-ws^2} - 8\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] + 24\,ws^5\,\text{ArcSin}[ws] - 16\,ws^7\,\text{ArcSin}[ws] -$$
$$10\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] + 18\,ws^5\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] -$$
$$\sqrt{((-42\,ws^4 + 98\,ws^6 - 48\,ws^8 - 24\,ws^4\sqrt{1-ws^2} + 40\,ws^6\sqrt{1-ws^2} + 8\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] -$$
$$24\,ws^5\,\text{ArcSin}[ws] + 16\,ws^7\,\text{ArcSin}[ws] + 10\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] -$$
$$18\,ws^5\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws])^2 -$$
$$4\,(-16\,ws^6 + 72\,ws^8 - 72\,ws^{10} + 64\,ws^6\sqrt{1-ws^2} - 160\,ws^8\sqrt{1-ws^2} + 96\,ws^{10}\sqrt{1-ws^2})$$
$$(-5\,ws^2 + 4\,ws^4 - 4\,ws^2\sqrt{1-ws^2} + 6\,ws\,\text{ArcSin}[ws] - 6\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$6\,ws\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - 4\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - \text{ArcSin}[ws]^2 +$$
$$ws^2\,\text{ArcSin}[ws]^2 - 2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2 + 2\,ws^2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2)))) /$$
$$(2\,(-5\,ws^2 + 4\,ws^4 - 4\,ws^2\sqrt{1-ws^2} + 6\,ws\,\text{ArcSin}[ws] - 6\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$6\,ws\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - 4\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - \text{ArcSin}[ws]^2 +$$
$$ws^2\,\text{ArcSin}[ws]^2 - 2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2 + 2\,ws^2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2))\},$$
$$\{\beta \to (42\,ws^4 - 98\,ws^6 + 48\,ws^8 + 24\,ws^4\sqrt{1-ws^2} - 40\,ws^6\sqrt{1-ws^2} -$$
$$8\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] + 24\,ws^5\,\text{ArcSin}[ws] - 16\,ws^7\,\text{ArcSin}[ws] -$$
$$10\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] + 18\,ws^5\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$\sqrt{((-42\,ws^4 + 98\,ws^6 - 48\,ws^8 - 24\,ws^4\sqrt{1-ws^2} + 40\,ws^6\sqrt{1-ws^2} +$$
$$8\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] - 24\,ws^5\,\text{ArcSin}[ws] + 16\,ws^7\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$10\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - 18\,ws^5\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws])^2 -$$
$$4\,(-16\,ws^6 + 72\,ws^8 - 72\,ws^{10} + 64\,ws^6\sqrt{1-ws^2} - 160\,ws^8\sqrt{1-ws^2} + 96\,ws^{10}\sqrt{1-ws^2})$$
$$(-5\,ws^2 + 4\,ws^4 - 4\,ws^2\sqrt{1-ws^2} + 6\,ws\,\text{ArcSin}[ws] - 6\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$6\,ws\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - 4\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - \text{ArcSin}[ws]^2 +$$
$$ws^2\,\text{ArcSin}[ws]^2 - 2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2 + 2\,ws^2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2)))) /$$
$$(2\,(-5\,ws^2 + 4\,ws^4 - 4\,ws^2\sqrt{1-ws^2} + 6\,ws\,\text{ArcSin}[ws] - 6\,ws^3\,\text{ArcSin}[ws] +$$
$$6\,ws\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - 4\,ws^3\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws] - \text{ArcSin}[ws]^2 +$$
$$ws^2\,\text{ArcSin}[ws]^2 - 2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2 + 2\,ws^2\sqrt{1-ws^2}\,\text{ArcSin}[ws]^2))\}\}$$

$$\{\{\beta \to (60\,wa^4 - 360\,wa^6 + 540\,wa^8 - 240\,wa^{10} + 96\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} -$$
$$300\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} + 240\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} - 24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] +$$
$$180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] - 324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] +$$
$$168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] - 36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] + 204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[wa] - 264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] + 96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] -$$
$$24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] + 180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$
$$324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] + 168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$
$$36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] + 204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$
$$264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] + 96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$
$$\sqrt{((-60\,wa^4 + 360\,wa^6 - 540\,wa^8 + 240\,wa^{10} - 96\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} + 300\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}$$
$$\sqrt{1-wa^2} - 240\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} + 24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] -$$
$$180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] + 324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] -$$
$$168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] + 36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] - 204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[wa] + 264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] - 96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa] +$$
$$24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] - 180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +$$
$$324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] - 168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +$$
$$36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] - 204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +$$
$$264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] - 96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa])^2 -$$
$$4\,(16\,wa^6 - 280\,wa^8 + 1296\,wa^{10} - 1960\,wa^{12} + 928\,wa^{14} -$$
$$80\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} + 720\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} -$$
$$1500\,wa^{10}\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2} + 896\,wa^{12}\sqrt{1-4\,wa^2}\sqrt{1-wa^2})$$

$$\Big(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-6\,\text{ArcSin}[wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2\Big)\Big)\Big/$$

$$\Big(2\Big(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-6\,\text{ArcSin}[wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2\Big)\Big)\Big\},$$

$$\Big\{\beta\to\Big(60\,wa^4-360\,wa^6+540\,wa^8-240\,wa^{10}+96\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}-300\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+240\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}-24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

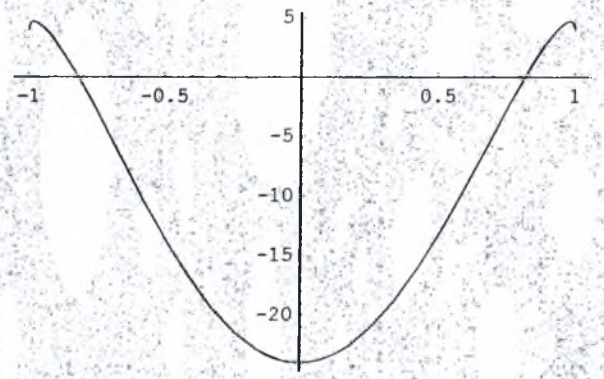
$$
\begin{aligned}
&36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +\\
&204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] -\\
&264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +\\
&96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa] +\\
&\sqrt{\Big(\big(-60\,wa^4+360\,wa^6-540\,wa^8+240\,wa^{10}-96\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+300\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\\
&\quad\sqrt{1-wa^2}-240\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-\\
&\quad 180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-\\
&\quad 168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\\
&\quad \text{ArcSin}[wa]+264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+\\
&\quad 24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]\big)^2-\\
&\quad 4\,\big(16\,wa^6-280\,wa^8+1296\,wa^{10}-1960\,wa^{12}+928\,wa^{14}-80\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\\
&\quad 720\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}-1500\,wa^{10}\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+896\,wa^{12}\\
&\quad \sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\big)\,\big(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\\
&\quad 24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\\
&\quad \text{ArcSin}[wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-\\
&\quad 90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-6\,\text{ArcSin}[wa]^2+\\
&\quad 36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-\\
&\quad 3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-\\
&\quad 12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\\
&\quad \text{ArcSin}[2\,wa]-12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\\
&\quad \text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+\\
&\quad 24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\\
&\quad \sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2\big)\big)\big)\Big/\\
&\big(2\,\big(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\\
&\quad 18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+\\
&\quad 36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-\\
&\quad 90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-\\
&\quad 6\,\text{ArcSin}[wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+\\
&\quad 24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+\\
&\quad 15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+\\
&\quad 18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\\
&\quad 30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\\
&\quad 24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+\\
&\quad 36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-\\
&\quad 3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-\\
&\quad 12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2\big)\big)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

```
ClearAll[ws, wa, β1, β2, β3, β4, β2a, β2b, β4a, β4b, pl1, Pl4a, Pl4b]
β1 = 4 (-2 ws^3 + 3 ws^5) / (ws - Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]);
pl1 = Plot[β1, {ws, -1, 1}]
β2a = (42 ws^4 - 98 ws^6 + 48 ws^8 + 24 ws^4 Sqrt[1 - ws^2] -
    40 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] - 8 ws^3 ArcSin[ws] + 24 ws^5 ArcSin[ws] - 16 ws^7 ArcSin[ws] -
    10 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] + 18 ws^5 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] -
    Sqrt[((-42 ws^4 + 98 ws^6 - 48 ws^8 - 24 ws^4 Sqrt[1 - ws^2] + 40 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] + 8 ws^3 ArcSin[ws] -
        24 ws^5 ArcSin[ws] + 16 ws^7 ArcSin[ws] + 10 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] -
        18 ws^5 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]) ^ 2 -
      4 (-16 ws^6 + 72 ws^8 - 72 ws^10 + 64 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] - 160 ws^8 Sqrt[1 - ws^2] + 96 ws^10 Sqrt[1 - ws^2])
       (-5 ws^2 + 4 ws^4 - 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + 6 ws ArcSin[ws] - 6 ws^3 ArcSin[ws] +
        6 ws Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - 4 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - ArcSin[ws]^2 +
        ws^2 ArcSin[ws]^2 - 2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2 + 2 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2))] /
   (2 (-5 ws^2 + 4 ws^4 - 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + 6 ws ArcSin[ws] - 6 ws^3 ArcSin[ws] +
      6 ws Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - 4 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - ArcSin[ws]^2 +
      ws^2 ArcSin[ws]^2 - 2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2 + 2 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2));
Pl2a = Plot[β2a, {ws, -1, 1}]
β2b = (42 ws^4 - 98 ws^6 + 48 ws^8 + 24 ws^4 Sqrt[1 - ws^2] -
    40 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] - 8 ws^3 ArcSin[ws] + 24 ws^5 ArcSin[ws] - 16 ws^7 ArcSin[ws] -
    10 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] + 18 ws^5 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] +
    Sqrt[((-42 ws^4 + 98 ws^6 - 48 ws^8 - 24 ws^4 Sqrt[1 - ws^2] + 40 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] + 8 ws^3 ArcSin[ws] -
        24 ws^5 ArcSin[ws] + 16 ws^7 ArcSin[ws] + 10 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] -
        18 ws^5 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]) ^ 2 -
      4 (-16 ws^6 + 72 ws^8 - 72 ws^10 + 64 ws^6 Sqrt[1 - ws^2] - 160 ws^8 Sqrt[1 - ws^2] + 96 ws^10 Sqrt[1 - ws^2])
       (-5 ws^2 + 4 ws^4 - 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + 6 ws ArcSin[ws] - 6 ws^3 ArcSin[ws] +
        6 ws Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - 4 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - ArcSin[ws]^2 +
        ws^2 ArcSin[ws]^2 - 2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2 + 2 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2))] /
   (2 (-5 ws^2 + 4 ws^4 - 4 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] + 6 ws ArcSin[ws] - 6 ws^3 ArcSin[ws] +
      6 ws Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - 4 ws^3 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws] - ArcSin[ws]^2 +
      ws^2 ArcSin[ws]^2 - 2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2 + 2 ws^2 Sqrt[1 - ws^2] ArcSin[ws]^2));
Pl2b = Plot[β2b, {ws, -1, 1}]
Show[pl1, Pl2a, Pl2b]
β3 = -(-40 wa^3 Sqrt[1 - wa^2] + 52 wa^5 Sqrt[1 - wa^2] - 8 wa^3 Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2)) /
   (-6 wa Sqrt[1 - wa^2] - 6 (-1 + wa^2) (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa]));
pl3 = Plot[β3, {wa, -0.5, 0.5}]
β4a = (60 wa^4 - 360 wa^6 + 540 wa^8 - 240 wa^10 + 96 wa^4 Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - wa^2] -
    300 wa^6 Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - wa^2] + 240 wa^8 Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - wa^2] -
    24 wa^3 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[wa] + 180 wa^5 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[wa] -
    324 wa^7 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[wa] + 168 wa^9 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[wa] -
    36 wa^3 Sqrt[1 - wa^2] ArcSin[wa] + 204 wa^5 Sqrt[1 - wa^2] ArcSin[wa] -
    264 wa^7 Sqrt[1 - wa^2] ArcSin[wa] + 96 wa^9 Sqrt[1 - wa^2] ArcSin[wa] -
    24 wa^3 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[2 wa] + 180 wa^5 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[2 wa] -
    324 wa^7 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[2 wa] + 168 wa^9 Sqrt[1 - 4 wa^2] ArcSin[2 wa] -
```

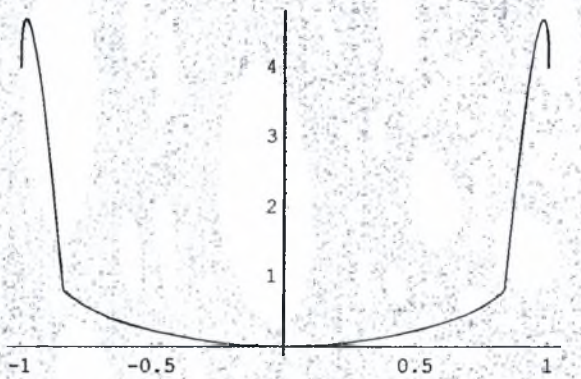
$$36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\sqrt{\left(-60\,wa^4+360\,wa^6-540\,wa^8+240\,wa^{10}-96\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+300\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\right.}$$
$$\sqrt{1-wa^2}-240\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-$$
$$180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-$$
$$168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[wa]+264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+$$
$$24\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-180\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$324\,wa^7\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-168\,wa^9\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$36\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-204\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\left.264\,wa^7\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-96\,wa^9\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]\right)\text{^}2-$$
$$4\left(16\,wa^6-280\,wa^8+1296\,wa^{10}-1960\,wa^{12}+928\,wa^{14}-80\,wa^6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\right.$$
$$720\,wa^8\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}-1500\,wa^{10}\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+896\,wa^{12}$$
$$\left.\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\right)\left(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\right.$$
$$24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-$$
$$90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-6\,\text{ArcSin}[wa]^2+$$
$$36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-$$
$$3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-$$
$$12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[2\,wa]-12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}$$
$$\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+$$
$$24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}$$
$$\left.\left.\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2\right)\right)\Big/$$
$$\left(2\left(-12\,wa^2+60\,wa^4-48\,wa^6-15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}+\right.\right.$$
$$18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+$$
$$36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-$$
$$90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]-$$
$$6\,\text{ArcSin}[wa]^2+36\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]^2+$$
$$24\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]^2-3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+$$
$$15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2-12\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]^2+$$
$$18\,wa\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-54\,wa^3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$36\,wa^5\sqrt{1-4\,wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+18\,wa\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$90\,wa^3\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^5\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$12\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+72\,wa^2\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$108\,wa^4\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+48\,wa^6\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$6\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$30\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$24\,wa^4\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[wa]\,\text{ArcSin}[2\,wa]-6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+$$
$$36\,wa^2\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-54\,wa^4\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+24\,wa^6\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-$$
$$3\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2+15\,wa^2\sqrt{1-4\,wa^2}\,\sqrt{1-wa^2}\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2-$$

```
        12 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2)) ;
Pl4a = Plot[β4a, {wa, -0.5, 0.5}]
β4b = (60 wa^4 - 360 wa^6 + 540 wa^8 - 240 wa^10 + 96 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) -
      300 wa^6 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 240 wa^8 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) -
      24 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 180 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] -
      324 wa^7 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 168 wa^9 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] -
      36 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] + 204 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] -
      264 wa^7 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] + 96 wa^9 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] -
      24 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] + 180 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] -
      324 wa^7 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] + 168 wa^9 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] -
      36 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] + 204 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] -
      264 wa^7 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] + 96 wa^9 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] +
      √((-60 wa^4 + 360 wa^6 - 540 wa^8 + 240 wa^10 - 96 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 300 wa^6 √(1 - 4 wa^2)
          √(1 - wa^2) - 240 wa^8 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 24 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] -
        180 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 324 wa^7 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] -
        168 wa^9 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 36 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] - 204 wa^5 √(1 - wa^2)
         ArcSin[wa] + 264 wa^7 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] - 96 wa^9 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] +
        24 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] - 180 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] +
        324 wa^7 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] - 168 wa^9 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] +
        36 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] - 204 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] +
        264 wa^7 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] - 96 wa^9 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa])^2 -
      4 (16 wa^6 - 280 wa^8 + 1296 wa^10 - 1960 wa^12 + 928 wa^14 - 80 wa^6 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) +
        720 wa^8 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) - 1500 wa^10 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 896 wa^12
         √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2)) (-12 wa^2 + 60 wa^4 - 48 wa^6 - 15 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) +
        24 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 18 wa √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] - 54 wa^3 √(1 - 4 wa^2)
         ArcSin[wa] + 36 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 18 wa √(1 - wa^2) ArcSin[wa] -
        90 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] + 72 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] - 6 ArcSin[wa]^2 +
        36 wa^2 ArcSin[wa]^2 - 54 wa^4 ArcSin[wa]^2 + 24 wa^6 ArcSin[wa]^2 -
        3 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 + 15 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 -
        12 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 + 18 wa √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] -
        54 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] + 36 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] +
        18 wa √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] - 90 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] + 72 wa^5 √(1 - wa^2)
         ArcSin[2 wa] - 12 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] + 72 wa^2 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
        108 wa^4 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] + 48 wa^6 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
        6 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] + 30 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2)
         ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] - 24 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
        6 ArcSin[2 wa]^2 + 36 wa^2 ArcSin[2 wa]^2 - 54 wa^4 ArcSin[2 wa]^2 +
        24 wa^6 ArcSin[2 wa]^2 - 3 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2 + 15 wa^2 √(1 - 4 wa^2)
         √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2 - 12 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2))) /
    (2 (-12 wa^2 + 60 wa^4 - 48 wa^6 - 15 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) + 24 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) +
      18 wa √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] - 54 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] +
      36 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[wa] + 18 wa √(1 - wa^2) ArcSin[wa] -
      90 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] + 72 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[wa] -
      6 ArcSin[wa]^2 + 36 wa^2 ArcSin[wa]^2 - 54 wa^4 ArcSin[wa]^2 +
      24 wa^6 ArcSin[wa]^2 - 3 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 +
```

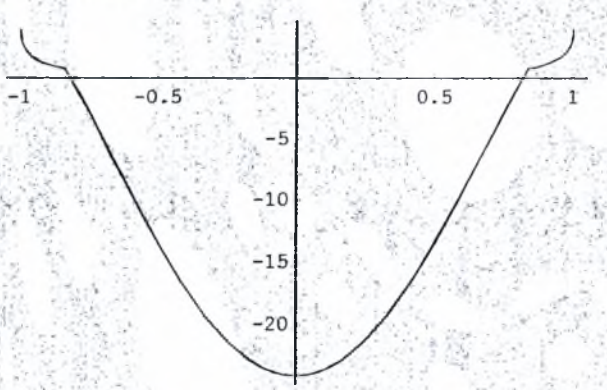
```
15 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 - 12 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa]^2 +
18 wa √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] - 54 wa^3 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] +
36 wa^5 √(1 - 4 wa^2) ArcSin[2 wa] + 18 wa √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] -
90 wa^3 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] + 72 wa^5 √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa] -
12 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] + 72 wa^2 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
108 wa^4 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] + 48 wa^6 ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
6 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] +
30 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] -
24 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[wa] ArcSin[2 wa] - 6 ArcSin[2 wa]^2 +
36 wa^2 ArcSin[2 wa]^2 - 54 wa^4 ArcSin[2 wa]^2 + 24 wa^6 ArcSin[2 wa]^2 -
3 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2 + 15 wa^2 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2 -
12 wa^4 √(1 - 4 wa^2) √(1 - wa^2) ArcSin[2 wa]^2));
Pl4b = Plot[β4b, {wa, -0.5, 0.5}]
Show[pl3, Pl4a, Pl4b]
```



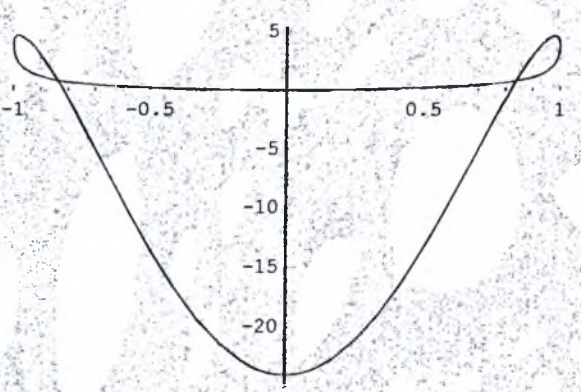
- Graphics -



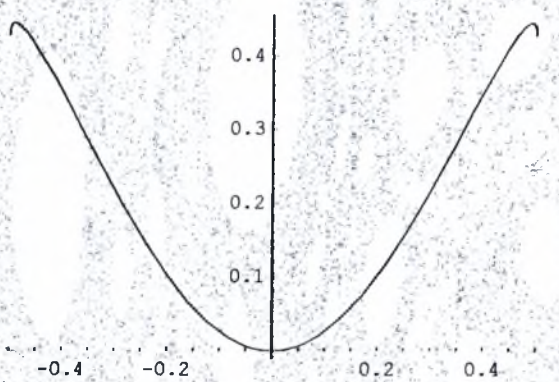
- Graphics -



- Graphics -

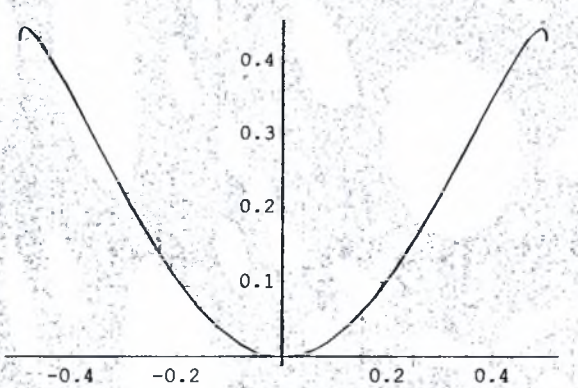


- Graphics -

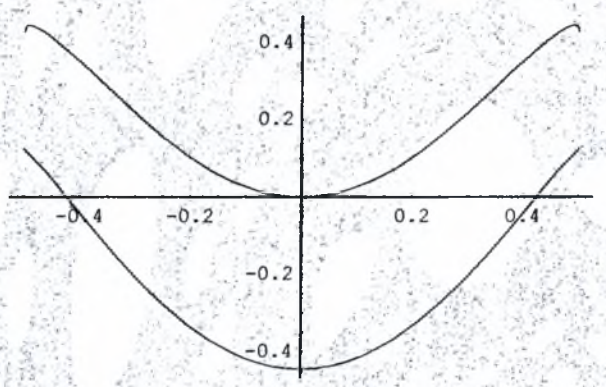


- Graphics -

- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

```
ClearAll[λ, β, ws, wa, a1, a2, a3, a4]
(*a1=
  Limit[Limit[-(Sqrt[1-4 wa^2] Sqrt[1-(wa-ws)^2] Sqrt[1-(wa+ws)^2] (-(4 (wa+2 ws) (wa^2+wa ws+ws^2)
                (ArcSin[2 wa]+ArcSin[wa-ws]))/(Sqrt[1-(wa-ws)^2])+(4 (wa-2 ws)
              (wa^2-wa ws+ws^2) (ArcSin[2 wa]+ArcSin[wa+ws]))/(Sqrt[1-(wa+ws)^2])-1/Sqrt[1-4 wa^2]
            (8 ws (3 wa^2+2 ws^2) (2 ArcSin[2 wa]+ArcSin[wa-ws]+ArcSin[wa+ws])))))/
      (2 (Sqrt[1-4 wa^2]+Sqrt[1-(wa-ws)^2]+Sqrt[1-(wa+ws)^2]) (2 ws ArcSin[2 wa]+
          (wa+ws) ArcSin[wa-ws]+(-wa+ws) ArcSin[wa+ws])),wa→0],ws→-1]
  a2=4 ws^2 Sqrt[1-ws^2]+β ArcSin[ws]/ws /.ws→1*)
a3 =
 Limit[Limit[-(Sqrt[1 - 4 wa^2] Sqrt[1 - (wa - ws)^2] Sqrt[1 - (wa + ws)^2] (-(4 (wa + 2 ws) (wa^2 + wa ws + ws^2)
              (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws]))/(Sqrt[1 - (wa - ws)^2]) +
            (4 (wa - 2 ws) (wa^2 - wa ws + ws^2) (ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa + ws]))/
             (Sqrt[1 - (wa + ws)^2]) - 1/Sqrt[1 - 4 wa^2]
            (8 ws (3 wa^2 + 2 ws^2) (2 ArcSin[2 wa] + ArcSin[wa - ws] + ArcSin[wa + ws])))))/
      (2 (Sqrt[1 - 4 wa^2] + Sqrt[1 - (wa - ws)^2] + Sqrt[1 - (wa + ws)^2]) (2 ws ArcSin[2 wa] +
          (wa + ws) ArcSin[wa - ws] + (-wa + ws) ArcSin[wa + ws])), ws → 0], wa → -0.5]
a4 = 2/3 wa^2 (-2 Sqrt[1 - 4 wa^2] (-1 + wa^2) + Sqrt[1 - wa^2] (-1 + 4 wa^2)) + β (ArcSin[wa] + ArcSin[2 wa])/wa /.
  wa → 0.5
NSolve[{a3 = a4},
 β]
```

$1.79342 + 2.19623 \times 10^{-16}\, i$

$0. + 4.18879\, \beta$

$\{\{\beta \to 0.428147565992976\}\}$

```
ClearAll[Vp, V11, V12, V21, V22, MM, wa, ws, λ, β, dd,
 VV2, V111, V112, V122, V222, V3, V1111, V1122, V1222, V2222, V4]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών ευστάθειας, οριζουσών, και
   μεταβολών 3ης και 4ης τάξης - ακριβής ανάλυση - τέλειο σύστημα", "Subtitle"]
```

$$Vp = wa^4 + 6\,wa^2\,ws^2 + 2\,ws^4 - 3\,\lambda + \sqrt{1 - 4\,wa^2}\;\lambda + \sqrt{1 - (wa - ws)^2}\;\lambda + \sqrt{1 - (wa + ws)^2}\;\lambda + \beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]^2 + \frac{1}{2}\,\beta\,\text{ArcSin}[wa - ws]^2 + \frac{1}{2}\,\beta\,\text{ArcSin}[wa + ws]^2 + \beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]\,(\text{ArcSin}[wa - ws] + \text{ArcSin}[wa + ws]);$$

```
StylePrint["Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11", "Section"]
V1 = ∂ws Vp;
V2 = ∂wa Vp;
V11 = FullSimplify[∂ws V1]
V12 = ∂wa V1;
V21 = ∂ws V2;
V22 = ∂wa V2;
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
VV2 = V11 V22 - V12 V21
V111 = ∂ws V11;
V112 = ∂wa V11;
V122 = ∂wa V12;
V121 = ∂ws V12;
V222 = ∂wa V22;
```

$$dd = -\frac{V12}{V22};$$

```
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
V1111 = ∂ws V111;
V1112 = ∂wa V111;
V1122 = ∂wa V112;
V1222 = ∂wa V122;
V2222 = ∂wa V222;
V3 = V111 + 3 V112 dd + 3 V122 dd^2 + V222 dd^3
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
V4 = V1111 + 4 V1112 dd + 6 V1122 dd^2 + 4 V1222 dd^3 + V2222 dd^4
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
```

$$d1111 = V1111 - \frac{3\,V121^2}{V22}$$

Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών ευστάθειας, οριζουσών, και μεταβολών 3ης και 4ης τάξης - ακριβής ανάλυση - τέλειο σύστημα

■ Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11

$$12\,(wa^2+2\,ws^2)-\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\;(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)$$

■ Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21

$$-\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)^2+\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\left(12\,(wa^2+2\,ws^2)-\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\;(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)\right)$$

■ Τρίτη μεταβολή δV3

$$48\,ws + \frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2} -$$

$$\frac{4\,ws\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4} + \frac{-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} - \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} +$$

$$\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2) -$$

$$\frac{(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} -$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3) -$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2) -$$

$$\left(\left(24\,wa\,ws - \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} +\right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} +$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$

$$\left.\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}3\left(24\,wa+\frac{96\,wa\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2}+\right.\right.$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{6\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$

$$\frac{24\,wa\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{192\,wa^3\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} - \frac{48\,wa\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} - \frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}} - \frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} +$$

$$\frac{192\,wa^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} + \frac{16\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} + \left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] +$$

$$\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} + \frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}} +$$

$$\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} + \frac{96\,wa^2\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} +$$

$$\left.\left.\frac{8\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\right)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)\text{^}3+$$

$$\Bigg(3\left(24\,ws-\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{4\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$

$$\frac{8\,wa\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$\frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\right.$$

$$\left.\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\left.\frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Bigg(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}2\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)\text{^}2-$$

$$\Bigg(3\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$

$$\left.\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\right.$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)\Bigg(24\,wa+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,wa\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{3/2}+(3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Big/(1-(wa-ws)^2)^{5/2}+\Bigg(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\Bigg)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2)-((wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή δV4

$$48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}-$$

$$\frac{6\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{2\,(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+$$

$$\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$

$$((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)+$$

$$\left(\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\left.\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}4\right.$$

$$\left(24+\frac{1920\,wa^2\,\beta}{(1-4\,wa^2)^3}+\frac{128\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+\right.$$

$$\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-4\,wa^2}}\left(8\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\right)+$$

$$\frac{48\,wa\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{32\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3840\,wa^4\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}-\frac{1152\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}-$$

$$\frac{48\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{3840\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+\frac{576\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$
$$\left(\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+$$
$$\frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1920\,wa^3\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+$$
$$\frac{288\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$
$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\wedge 4-$$
$$\left(4\left(-\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}-\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\right.\right.$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-4\,wa^2}}\left(6\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\right)+\frac{24\,wa\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{96\,wa^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+\frac{8\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$
$$\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left(-\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+$$
$$\left.\frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$

$$\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\wedge 3\Bigg)\Bigg/$$
$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\wedge 3+$$
$$\left(6\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\left.\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\wedge 2\right.$$
$$\left(24-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\right.$$
$$\frac{2\,(8\,wa^2+4\,(-1+wa^2)-4\,ws^2)\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$
$$\frac{8\,wa\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-$$
$$\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\left(2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta+\right.$$
$$\left.\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}\right)(wa-ws)\,\beta\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{3/2}+$$
$$\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta+\right.\right.$$
$$\left.\left.2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2)+$$
$$\left(6\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\right.\right.$$

$$\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\Big)\Big)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{5/2}+$$
$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$(15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Big/(1-(wa-ws)^2)^{7/2}-$$
$$\Big(2\,(wa+ws)\,\Big((wa+ws)\,\Big(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\Big)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\text{ArcSin}[wa+ws])\Big)\Big)\Big/\Big((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\Big)-$$
$$\Big(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,\Big((wa+ws)\,\Big(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\Big)\beta+$$
$$\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\Big)\Big)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$
$$\Big(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,\Big((wa+ws)\,\Big(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\Big)\beta+$$
$$\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\Big)\Big)\Big/((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$
$$((wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$
$$\Big((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}\Big)+$$
$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$
$$\Big((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\sqrt{1-(wa+ws)^2}\Big)-$$
$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$
$$\Big((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\Big)+$$
$$\Big(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\Big)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+$$
$$\Big(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\Big)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+$$
$$\Big(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\Big)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)\Big)\Big)\Big/$$
$$\Big(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Big)\wedge 2-$$

$$\left(4\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\left(-(4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta)\Big/\right.$$

$$\left((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4\right)^3-\frac{16\,wa\,ws\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$

$$\frac{4\,ws\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{4\,wa\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$

$$\frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta-\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)+$$

$$\left(3\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\right)\Big/$$

$$(1-(wa-ws)^2)^{5/2}-\left(3\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{5/2}-$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$(15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Big/(1-(wa-ws)^2)^{7/2}-$$

$$\left((wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-\left((wa+ws)\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right.$$

$$\left.\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\right)-$$
$$\left((wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}\right)+$$
$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$
$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)+$$
$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4\right)+$$
$$\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3\right)+$$
$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$\left((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2\right)\Big)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-$$
$$\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων

$$48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$
$$\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+$$

$$\frac{\frac{2\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^2}-$$

$$\frac{6(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{3(-\lambda+(wa-ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15(wa-ws)^2(-\lambda+(wa-ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{2(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)/$$
$$((-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)/$$
$$((-1+wa+ws)^3(1+wa+ws)^2)-$$

$$\frac{(wa+ws)^2(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^2(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4(wa+ws)(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^3\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{4(wa+ws)(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$
$$((-1+wa+ws)^2(1+wa+ws)^4)+$$

$$\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$
$$((-1+wa+ws)^3(1+wa+ws)^3)+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}(-\lambda+(wa+ws)\beta(\text{ArcSin}[2wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)/$$
$$((-1+wa+ws)^4(1+wa+ws)^2)-$$

$$\left(3\left(24wa+\frac{3(wa-ws)\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3(wa+ws)\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{2\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4wa^2}}-\right.\right.$$
$$\frac{3(wa-ws)\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3(wa-ws)^3\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{3(wa+ws)^3\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3(wa+ws)\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2wa]+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3(wa-ws)^2\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\left.\left.\frac{3(wa+ws)^2\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)^2\right)/$$

$$\left(12wa^2+12ws^2+\frac{8\beta}{1-4wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\left.\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4wa^2}}-\frac{16wa^2\lambda}{(1-4wa^2)^{3/2}}-\frac{4\lambda}{\sqrt{1-4wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\right.$$

$$\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$
$$\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)$$

```
ClearAll[Vp, V11, wa, ws, λ, β, dd, Hessian, V3, V4, d1111]
(*β=0.10;
 ws=.........;
 wa=.........;
 λ=.........;*)
StylePrint[
 "Ευστάθεια κρισίμων σημείων - τέλειο σύστημα - ακριβής ανάλυση", "Title"]
StylePrint["με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας",
 "Title"]
StylePrint["Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11", "Section"]
```

$$V11 = 12\,(wa^2 + 2\,ws^2) - \frac{2\,(-1 + wa^2 + ws^2)\,\beta}{(-1 + wa^2)^2 - 2\,(1 + wa^2)\,ws^2 + ws^4} + \frac{-\lambda + (wa - ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa - ws])}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} + \left(\sqrt{1 - (wa + ws)^2}\;(-\lambda + (wa + ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa] + \text{ArcSin}[wa + ws]))\right) \Big/ \left((-1 + wa + ws)^2\,(1 + wa + ws)^2\right)$$

```
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
```

$$Hessian = -\left(24\,wa\,ws - \frac{\beta}{1 - (wa - ws)^2} + \frac{\beta}{1 - (wa + ws)^2} + \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} + \frac{(wa - ws)^2\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa + ws)^2\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \left(-\frac{wa - ws}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa + ws}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] - \frac{(wa - ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa - ws]}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa + ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa + ws]}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}2 + \left(12\,wa^2 + 12\,ws^2 + \frac{8\,\beta}{1 - 4\,wa^2} + \frac{\beta}{1 - (wa - ws)^2} + \frac{\beta}{1 - (wa + ws)^2} + \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}} - \frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{4\,\lambda}{\sqrt{1 - 4\,wa^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (wa - ws)^2}} - \frac{(wa - ws)^2\,\lambda}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa + ws)^2\,\lambda}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (wa + ws)^2}} + \frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}} + \left(\frac{wa - ws}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa + ws}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] + \frac{(wa - ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa - ws]}{(1 - (wa - ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa + ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa + ws]}{(1 - (wa + ws)^2)^{3/2}} + \frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa - ws] + \text{ArcSin}[wa + ws])}{(1 - 4\,wa^2)^{3/2}}\right)\left(12\,(wa^2 + 2\,ws^2) - \frac{2\,(-1 + wa^2 + ws^2)\,\beta}{(-1 + wa^2)^2 - 2\,(1 + wa^2)\,ws^2 + ws^4} + \right.$$

$$\frac{-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2)\right)$$

```
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
```

$$V3 = 48\,ws+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,ws\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)-\frac{(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\right)-\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\right)-\left(\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{\^{}}3\left(24\,wa+\frac{96\,wa\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2}+\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{6\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{24\,wa\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{192\,wa^3\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}-\frac{48\,wa\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{192\,wa^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+\frac{16\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{\beta \text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3(wa-ws)^2\beta \text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3(wa+ws)^2\beta \text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{\beta \text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^2\beta(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$
$$\left.\left.\frac{8\beta(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\right)\Big/$$
$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta \text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta \text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\beta \text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\beta \text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left.\frac{8\,wa\,\beta(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\text{^}3+$$
$$\left(3\left(24\,ws-\frac{3(wa-ws)\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3(wa+ws)\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{4\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$
$$\frac{8\,wa\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{3(wa-ws)\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3(wa-ws)^3\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{3(wa+ws)^3\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3(wa+ws)\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\right.$$
$$\left.\left.\frac{3(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta \text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{\beta \text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\right.$$
$$\left.\frac{3(wa-ws)^2\beta \text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3(wa+ws)^2\beta \text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta \text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$
$$\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left.\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta \text{ArcSin}[2\,wa]-\right.$$

$$\left(\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)^2\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)^2-$$

$$\Bigg(3\Bigg(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)\Bigg(24\,wa+$$

$$\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,wa\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+$$

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\Bigg/$$

$$(1-(wa-ws)^2)^{3/2}+(3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Bigg/$$

$$(1-(wa-ws)^2)^{5/2}+\Bigg(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\right.$$

$$\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\Bigg)\Bigg/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$((wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Bigg/$$

$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Bigg/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\ (-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)\Big)\Big)\Big/$$

$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)$$

```
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
```

$$V4 = 48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+$$

$$\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-$$

$$\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}-$$

$$\frac{6\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{2\,(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$
\begin{aligned}
&((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)- \\
&\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+ \\
&\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}- \\
&\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+ \\
&\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+ \\
&\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/ \\
&((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+ \\
&\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/ \\
&((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+ \\
&\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/ \\
&((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)+ \\
&\Bigg(\Bigg(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+ \\
&\quad\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+ \\
&\quad\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]- \\
&\quad\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)\Bigg)\text{^}4 \\
&\Bigg(24+\frac{1920\,wa^2\,\beta}{(1-4\,wa^2)^3}+\frac{128\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+ \\
&\quad\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-4\,wa^2}}\left(8\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\right.\right. \\
&\quad\left.\left.\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\right)+ \\
&\quad\frac{48\,wa\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+ \\
&\quad\frac{32\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3840\,wa^4\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}-\frac{1152\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}- \\
&\quad\frac{48\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}- \\
&\quad\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-
\end{aligned}
$$

$$\frac{3\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{3840\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+\frac{576\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$

$$\left(\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$

$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+$$

$$\frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1920\,wa^3\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+$$

$$\left.\left.\frac{288\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}\right)\right)\Bigg/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\text{^}4-$$

$$\left(4\left(-\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}-\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\right.\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4\,wa^2}}\left(6\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\right)+\frac{24\,wa\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{96\,wa^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+\frac{8\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{3\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left(-\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$

$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] - \frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} - \frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}} + \frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}} + \frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\Bigg)$$

$$\Bigg(24\,wa\,ws - \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] - \frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)^3\Bigg) \Big/$$

$$\Bigg(12\,wa^2 + 12\,ws^2 + \frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2} + \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} - \frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} - \frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} + \left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] + \frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} + \frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws] + \text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)^3 +$$

$$\Bigg(6\Bigg(24\,wa\,ws - \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} + \left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] - \frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)^2$$

$$\Bigg(24 - \frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2) - 4\,wa\,ws^2)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2 - 2\,(1+wa^2)\,ws^2 + ws^4)^3} + \frac{2\,(8\,wa^2 + 4\,(-1+wa^2) - 4\,ws^2)\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2 - 2\,(1+wa^2)\,ws^2 + ws^4)^2} +$$

$$\frac{8\,wa\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+$$

$$\left(2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta+\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}\right)(wa-ws)\,\beta\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{3/2}+$$

$$\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta+2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2)+$$

$$\left(6\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{5/2}+$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$(15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Big/(1-(wa-ws)^2)^{7/2}-$$

$$\left(2\,(wa+ws)\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$((wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}\right)+$$

$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+$$

$$\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\ (-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+$$
$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\ (-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)\,\text{^}2-$$

$$\Bigg(4\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Bigg(-(4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta)\Big/$$
$$\left((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4\right)^3-\frac{16\,wa\,ws\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$
$$\frac{4\,ws\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{4\,wa\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$
$$\frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta-\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\Bigg(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\right.$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\Big)\Big)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)+$$

$$\left(3\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\right)\Big/$$

$$(1-(wa-ws)^2)^{5/2}-\left(3\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)\right)\Big/(1-(wa-ws)^2)^{5/2}-$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$(15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])))\Big/(1-(wa-ws)^2)^{7/2}-$$

$$\left((wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$

$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$\left((wa+ws)\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\right.\right.$$

$$\left.\left.\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$((wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$

$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}\right)+$$

$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$

$$\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$(4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])))\Big/$$

$$\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\right)+\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)$$

```
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
```

$$d1111=48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}-\frac{6\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{2\,(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4)+$$

$$\left(8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3)+$$

$$\left(6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))\right)\Big/$$
$$((-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2)-$$

$$\left(3\left[24\,wa+\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{2\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\right.\right.$$
$$\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\left.\left.\frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}2\right)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\left.\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)$$

Ευστάθεια κρισίμων σημείων - τέλειο σύστημα - ακριβής ανάλυση

με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας

■ Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11

$$12\,(wa^2+2\,ws^2)-\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\;(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}$$

■ Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21

$$-\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}2+$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\right.$$

$$\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-$$

$$\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$

$$\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)$$

$$\left(12\,(wa^2+2\,ws^2)-\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{(-1+wa^2)^2+2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\right.$$

$$\frac{-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}\right)$$

■ Τρίτη μεταβολή δV3

$$48\,ws + \frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2} -$$

$$\frac{4\,ws\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4} + \frac{-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} - \beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} +$$

$$\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2} -$$

$$\frac{(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}} -$$

$$\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3} -$$

$$\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2} -$$

$$\left(\left(24\,wa\,ws - \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} + \right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}} + \frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}} +$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] -$$

$$\left.\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}3\left(24\,wa + \frac{96\,wa\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2} + \right.$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2} + \frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2} + \frac{6\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} +$$

$$\frac{24\,wa\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{192\,wa^3\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} - \frac{48\,wa\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} - \frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} - \frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}} - \frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} +$$

$$\frac{192\,wa^2\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} + \frac{16\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} + \left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left.\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} + \frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}} + \frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa] +$$

$$\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}} + \frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}} + \frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}} +$$

$$\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}} + \frac{96\,wa^2\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}} +$$

$$\left.\left.\frac{8\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\right) \Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2 + \frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2} + \frac{\beta}{1-(wa-ws)^2} + \frac{\beta}{1-(wa+ws)^2} + \right.$$

$$\left.\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}} - \frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}} - \frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}} -\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)\text{^}3+$$
$$\Bigg(3\Bigg(24\,ws-\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{4\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$
$$\frac{8\,wa\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)$$
$$\Bigg(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)\text{^}2\Bigg)\Big/$$
$$\Bigg(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)\text{^}2-$$
$$\Bigg(3\Bigg(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\Bigg)\Bigg(24\,wa+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,wa\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\left(\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\right)-\frac{(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3}-\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2}\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή δV4

$$48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}-\frac{6\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$
$$\frac{2\,(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{4\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3}-$$
$$\frac{4\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2}-$$
$$\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$
$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{6\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4}+$$
$$\frac{8\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3}+$$
$$\frac{6\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2}+$$
$$\left(\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$
$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}4\left(24+\frac{1920\,wa^2\,\beta}{(1-4\,wa^2)^3}+\right.$$
$$\frac{128\,\beta}{(1-4\,wa^2)^2}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+$$
$$\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{8\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$
$$\frac{48\,wa\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{384\,wa^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{32\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3840\,wa^4\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}-\frac{1152\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{48\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-$$
$$\frac{3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{3840\,wa^3\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+\frac{576\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$

$$\left(\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+$$
$$\frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1920\,wa^3\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{7/2}}+$$
$$\frac{288\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$
$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$
$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\wedge 4-$$

$$\left(4\left(-\frac{4\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}-\frac{15\,(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^3}+\frac{15\,(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^3}+\frac{4\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\right.\right.$$
$$\frac{6\left(-\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+$$
$$\frac{24\,wa\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{96\,wa^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{8\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{18\,(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$
$$\frac{15\,(wa-ws)^4\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-\frac{15\,(wa+ws)^4\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}-\frac{18\,(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$
$$\left(-\frac{9\,(wa-ws)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{15\,(wa-ws)^3}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+\frac{15\,(wa+ws)^3}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$
$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\frac{9\,(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{15\,(wa-ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}+$$
$$\left.\frac{15\,(wa+ws)^3\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{7/2}}+\frac{9\,(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}\right)$$

$$\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.$$
$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$
$$\left.\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\right.$$

$$\left(\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)^3\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)^3+$$

$$\left(6\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left.\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-\right.$$

$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)^2$$

$$\left(24-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\right.$$

$$\frac{2\,(8\,wa^2+4\,(-1+wa^2)-4\,ws^2)\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$

$$\frac{8\,wa\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+$$

$$\frac{2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta+\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}\right)(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{8\,wa}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta+2\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}+$$

$$\frac{6\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{2\,(wa+ws)\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left.\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\right)-$$

$$\left(4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\right)-$$

$$\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4}+$$

$$\frac{8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3}+$$

$$\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2}\Bigg)\Bigg)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+$$

$$\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)\hat{}\,2-$$

$$\left(4\left(24\,wa\,ws-\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\right.\right.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\left(-\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]-$$

$$\left.\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\left(-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}-\right.$$

$$\frac{16\,wa\,ws\,(-1+wa^2+ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$

$$\frac{4\,ws\,(4\,wa\,(-1+wa^2)-4\,wa\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{4\,wa\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+$$

$$\frac{\left(-\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)\beta-\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}+$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}\right)(wa-ws)\,\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-$$

$$\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-$$

$$\frac{(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3}-$$

$$\frac{2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2}-$$

$$\frac{(wa+ws)\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\right)-$$

$$\left(2\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left((wa+ws)\left(\frac{2}{\sqrt{1-4\,wa^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)\right)\Big/\left((-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\right)-$$

$$\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-$$

$$\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+$$

$$\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4}+$$

$$\frac{8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3}+$$

$$\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2}\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\Bigg)$$

■ Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων

$$48-\frac{4\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)^2\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^3}+\frac{2\,(-1+wa^2+ws^2)\,(-4\,(1+wa^2)+12\,ws^2)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}+\frac{8\,ws\,(-4\,(1+wa^2)\,ws+4\,ws^3)\,\beta}{((-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4)^2}-\frac{4\,\beta}{(-1+wa^2)^2-2\,(1+wa^2)\,ws^2+ws^4}+\frac{\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{(wa-ws)^2\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)^2\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{2\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2}-\frac{6\,(wa-ws)\left(-\frac{(wa-ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws])\right)}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{15\,(wa-ws)^2\,(-\lambda+(wa-ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa-ws]))}{(1-(wa-ws)^2)^{7/2}}-\frac{2\,(wa+ws)\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3}-\frac{4\sqrt{1-(wa+ws)^2}\left(\frac{(wa+ws)\,\beta}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2}-\frac{(wa+ws)^2\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^3\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}-\frac{-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{4\,(wa+ws)\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^2\,\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^2\,(1+wa+ws)^4}+\frac{8\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws]))}{(-1+wa+ws)^3\,(1+wa+ws)^3}+$$

$$\frac{6\sqrt{1-(wa+ws)^2}\,\left(-\lambda+(wa+ws)\,\beta\,(\text{ArcSin}[2\,wa]+\text{ArcSin}[wa+ws])\right)}{(-1+wa+ws)^4\,(1+wa+ws)^2}-$$

$$\left(3\left(24\,wa+\frac{3\,(wa-ws)\,\beta}{(1-(wa-ws)^2)^2}+\frac{3\,(wa+ws)\,\beta}{(1-(wa+ws)^2)^2}+\frac{2\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\right.\right.$$

$$\frac{3\,(wa-ws)\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{3\,(wa-ws)^3\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)^3\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}-\frac{3\,(wa+ws)\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left(\frac{1}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+\frac{3\,(wa+ws)^2}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{1}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{3\,(wa-ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{5/2}}+$$

$$\left.\left.\frac{3\,(wa+ws)^2\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{5/2}}+\frac{\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\text{^}2\right)\Big/$$

$$\left(12\,wa^2+12\,ws^2+\frac{8\,\beta}{1-4\,wa^2}+\frac{\beta}{1-(wa-ws)^2}+\frac{\beta}{1-(wa+ws)^2}+\right.$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}\right)\beta}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{16\,wa^2\,\lambda}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}-\frac{4\,\lambda}{\sqrt{1-4\,wa^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa-ws)^2}}-$$

$$\frac{(wa-ws)^2\,\lambda}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}-\frac{(wa+ws)^2\,\lambda}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{1-(wa+ws)^2}}+\frac{16\,wa\,\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}+$$

$$\left(\frac{wa-ws}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+\frac{wa+ws}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}\right)\beta\,\text{ArcSin}[2\,wa]+\frac{(wa-ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa-ws]}{(1-(wa-ws)^2)^{3/2}}+$$

$$\left.\frac{(wa+ws)\,\beta\,\text{ArcSin}[wa+ws]}{(1-(wa+ws)^2)^{3/2}}+\frac{8\,wa\,\beta\,(\text{ArcSin}[wa-ws]+\text{ArcSin}[wa+ws])}{(1-4\,wa^2)^{3/2}}\right)$$

```
ClearAll[θ1, θ2, β, w1, w2, e1, e2, Uc, Uk, λ, Ω, z, ca, cb, c1, c2, c3, c4, c5, c6,
 ma, mb, s1, s2, s3, s4, s5, s6, Ω, Ξ, ws, wa, es, ea, Vsa, Vp, Vps. Vpa, V11, V12,
 V21, V22, M, StDet, SePath1, St1, Pcr1, SePath2, St2, Pcr2, tt, eu1, eu23, eu4]
StylePrint["A. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος", "Title"]
StylePrint["Φορτίο : P", "Section"]
StylePrint["Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c", "Section"]
StylePrint["Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k", "Section"]
StylePrint["Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2", "Section"]
StylePrint["Αρχικές ατέλειες : E1 , E2", "Section"]
StylePrint["A δ ι α σ τ α τ ο π ο ί η σ η", "Subtitle"]
StylePrint["λ=P/(kℓ^3) , β=c/(kℓ^4) , Ξ=V_T/(kℓ^4) , w1=W1/ℓ , w2=W2/ℓ , e1=E1/ℓ , e2=E2/ℓ",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B. Μη γραμμική προσεγγιστική ανάλυση ευστάθειας", "Title"]
StylePrint["B.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος", "Subtitle"]
StylePrint[
 "B.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk",
 "Subsubtitle"]
StylePrint["Uk = 1/2 ((w1-e1)^4+2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4+(w2-e2)^4)",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης
   λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc", "Subsubtitle"]
StylePrint["Uc = 1/2 β(θ1^2 +θ2^2)", "DisplayFormula"]
Print["όπου"]
StylePrint[
 "θ1 = (arcsin(w1)-arcsin(e1))-(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))", "DisplayFormula"]
StylePrint["θ2 = (arcsin(w2)-arcsin(e2))+(arcsin(w2-w1)-arcsin(e2-e1))",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω", "Subsubtitle"]
StylePrint["Ω = -λ(√(1 - e1^2) +√(1 - (e2 - e1)^2) +√(1 - e2^2) -
   √(1 - w1^2) -√(1 - (w2 - w1)^2) -√(1 - w2^2) )", "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω", "Subsubtitle"]
ca = Normal[Series[ArcSin[z], {z, 0, 4}]];
cb = Normal[Series[ArcSin[z], {z, 0, 2}]];
c1 = ca /. z → w1;
c2 = cb /. z → e1;
c3 = ca /. z → (w2 - w1);
c4 = cb /. z → (e2 - e1);
c5 = ca /. z → w2;
c6 = cb /. z → e2;
θ1 = c1 - c2 - c3 + c4;
θ2 = c5 - c6 + c3 - c4;
Uc = 1/2 β (θ1^2 + θ2^2);
ma = Normal[Series[√(1 - x^2), {x, 0, 4}]];
mb = Normal[Series[√(1 - x^2), {x, 0, 2}]];
s1 = mb /. x → e1;
s2 = mb /. x → (e2 - e1);
s3 = mb /. x → e2;
```

```
s4 = ma /. x → w1;
s5 = ma /. x → (w2 - w1);
s6 = ma /. x → w2;
Ω = -λ (s1 + s2 + s3 - s4 - s5 - s6);
Uk = 1/2 ((w1 - e1)^4 + 2 ((w1 - e1) + (w2 - e2))/2)^4 + (w2 - e2)^4);
Ξ = FullSimplify[Uc + Uk + Ω]
StylePrint["B.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων
   σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση", "Subsubtitle"]
StylePrint["ws = (w1 + w2)/2 , wa = (w1 - w2)/2 οπότε w1 = ws + wa  και w2 = ws - wa",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["es = (e1 + e2)/2 , ea = (e1 - e2)/2 οπότε e1 = es + ea  και e2 = es - ea",
 "DisplayFormula"]
StylePrint["B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό",
 "Subsubtitle"]
Vsa = FullSimplify[Ξ /. {w1 → ws + wa, w2 → ws - wa, e1 → es + ea, e2 → es - ea}]
StylePrint["B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσες ευστάθειας", "Subtitle"]
StylePrint["B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας", "Subsubtitle"]
StylePrint["1η εξίσωση : ∂Vsa/∂ws=0  , 2η εξίσωση : ∂Vsa/∂wa=0 ", "DisplayFormula"]
Vps = FullSimplify[∂ws Vsa]
Vpa = FullSimplify[∂wa Vsa]
StylePrint["B.2.2. Ορίζουσες Ευστάθειας", "Subsubtitle"]
V11 = FullSimplify[∂ws Vps]
V12 = ∂wa Vps;
V21 = ∂ws Vpa;
V22 = ∂wa Vpa;
M = (V11  V12
     V21  V22);
StDet = FullSimplify[Det[M]]
StylePrint[
 "B.2.3. Περίπτωση 1η : Συμμετρική αρχική ατέλεια: es≠0 , ea=0", "Subsubtitle"]
eu1 = FullSimplify[Vps /. {ea → 0, wa → 0}]
eu2 = FullSimplify[Vpa /. {ea → 0, wa → 0}]
SePath1 = FullSimplify[Solve[eu1 = 0, λ]]
Limit[SePath1 /. es → 0, ws → 0]
StylePrint["B.2.4. Περίπτωση 2η : Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια: es=0 , ea≠0",
 "Subsubtitle"]
eu3 = FullSimplify[Vps /. {es → 0, ws → 0}]
eu4 = FullSimplify[Vpa /. {es → 0, ws → 0}]
SePath2 = FullSimplify[Solve[eu4 = 0, λ]]
Limit[SePath2 /. ea → 0, wa → 0]
```

Α. Παράγοντες και μεγέθη του προβλήματος

■ **Φορτίο : P**

■ **Μήκος αβαρών ράβδων : ℓ**

■ **Δυσκαμψία στροφικών ελατηρίων : c**

■ **Δυσκαμψία εκτατικών ελατηρίων ελικοειδούς τύπου : k**

■ **Βαθμοί ελευθερίας - γενικευμένες συντεταγμένες : W1 , W2**

■ **Αρχικές ατέλειες : E1 , E2**

Αδιαστατοποίηση

$$\lambda=\frac{P}{k\ell^3}\ ,\ \beta=\frac{c}{k\ell^4}\ ,\ \Xi=\frac{V_T}{k\ell^4}\ ,\ w1=\frac{W1}{\ell}\ ,\ w2=\frac{W2}{\ell}\ ,\ e1=\frac{E1}{\ell}\ ,\ e2=\frac{E2}{\ell}$$

Β. Μη γραμμική προσεγγιστική ανάλυση ευστάθειας

Β.1. Υπολογισμός συνολικού δυναμικού του συστήματος

Β.1.1. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των εκτατικών ελατηρίων : Uk

$$Uk = \frac{1}{2}\left((w1-e1)^4+2\left(\frac{(w1-e1)+(w2-e2)}{2}\right)^4+(w2-e2)^4\right)$$

Β.1.2. Αδιάστατη Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω των στροφικών ελατηρίων : Uc

$$Uc = \frac{1}{2}\beta(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

όπου

$$\theta_1 = (\arcsin(w1)-\arcsin(e1))-(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

$$\theta_2 = (\arcsin(w2)-\arcsin(e2))+(\arcsin(w2-w1)-\arcsin(e2-e1))$$

B.1.3. Αδιάσταστατο έργο εξωτερικών δυνάμεων : Ω

$$\Omega = -\lambda(\sqrt{1 - e1^2}+\sqrt{1 - (e2 - e1)^2}+ \sqrt{1 - e2^2}-\sqrt{1 - w1^2}-\sqrt{1 - (w2 - w1)^2}-\sqrt{1 - w2^2})$$

B.1.4. Συνολικό Δυναμικό : Ξ = Uc + Uk + Ω

$$\frac{1}{2}\left((e1 - w1)^4 + (e2 - w2)^4 + \frac{1}{8}(e1 + e2 - w1 - w2)^4 + \left(\left(-2e1 + e2 + 2w1 + \frac{w1^3}{6} + \frac{1}{6}(w1 - w2)^3 - w2\right)^2 + \left(e1 - 2e2 - w1 + 2w2 + \frac{w2^3}{6} + \frac{1}{6}(-w1 + w2)^3\right)^2\right)\beta + \frac{1}{2}(4(e1^2 - e1\,e2 + e2^2) - (w1^2 - w1\,w2 + w2^2)(4 + w1^2 - w1\,w2 + w2^2))\lambda\right)$$

B.1.5. Μετασχηματισμός συντεταγμένων σε συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση

$$ws = \frac{w1 + w2}{2},\ wa = \frac{w1 - w2}{2}\ \text{οπότε}\ w1 = ws + wa\ \text{και}\ w2 = ws - wa$$

$$es = \frac{e1 + e2}{2},\ ea = \frac{e1 - e2}{2}\ \text{οπότε}\ e1 = es + ea\ \text{και}\ e2 = es - ea$$

B.1.6. Συνολικό Δυναμικό Ατελούς Συστήματος μετά τον μετασχηματισμό

$$\frac{1}{2}\left(2(es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 + (ea - es - wa + ws)^4 + \left(18\,ea^2 + 2\,es^2 - 6\,ea\,wa(6 + 3\,wa^2 + ws^2) - \frac{2}{3}es\,ws(6 + 3\,wa^2 + ws^2) + \frac{1}{18}(6 + 3\,wa^2 + ws^2)^2(9\,wa^2 + ws^2)\right)\beta + \frac{1}{2}(12\,ea^2 + 4\,es^2 - (3\,wa^2 + ws^2)(4 + 3\,wa^2 + ws^2))\lambda\right)$$

B.2. Εξισώσεις ισορροπίας - ορίζουσες ευστάθειας

B.2.1. Εξισώσεις ισορροπίας

$$1η\ εξίσωση : \frac{\partial Vsa}{\partial ws}=0\ ,\ 2η\ εξίσωση : \frac{\partial Vsa}{\partial wa}=0$$

$$\frac{1}{2}\left(-8(es - ws)^3 - 4(ea + es - wa - ws)^3 + 4(ea - es - wa + ws)^3 - \frac{1}{3}(6\,es(2 + wa^2 + ws^2) - ws(-36\,ea\,wa + (6 + 3\,wa^2 + ws^2)(2 + 7\,wa^2 + ws^2)))\beta - 2\,ws(2 + 3\,wa^2 + ws^2)\lambda\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-4\,(ea+es-wa-ws)^3-4\,(ea-es-wa+ws)^3+\left(-6\,ea\,(6+9\,wa^2+ws^2)+wa\left(36+27\,wa^4-4\,es\,ws+16\,ws^2+\frac{5\,ws^4}{3}+2\,wa^2\,(36+7\,ws^2)\right)\right)\beta-6\,wa\,(2+3\,wa^2+ws^2)\,\lambda\right)$$

B.2.2. Ορίζουσες Ευστάθειας

$$12\,ea^2+\frac{7\,wa^4\,\beta}{2}-2\,es\,ws\,\beta+4\,ws^2\,\beta+\frac{5\,ws^4\,\beta}{6}-6\,ea\,wa\,(4+\beta)+wa^2\,(12+8\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda)+2\,(12\,(es-ws)^2+\beta-\lambda)-3\,ws^2\,\lambda$$

$$144\,ea^4+288\,es^4+144\,wa^4-144\,wa^2\,ws^2+288\,ws^4+240\,wa^2\,\beta+1392\,wa^4\,\beta+852\,wa^6\,\beta+456\,ws^2\,\beta+2064\,wa^2\,ws^2\,\beta+1302\,wa^4\,ws^2\,\beta+240\,ws^4\,\beta+424\,wa^2\,ws^4\,\beta+30\,ws^6\,\beta+36\,\beta^2+360\,wa^2\,\beta^2+1062\,wa^4\,\beta^2+918\,wa^6\,\beta^2+\frac{945\,wa^8\,\beta^2}{4}+88\,ws^2\,\beta^2+372\,wa^2\,ws^2\,\beta^2+558\,wa^4\,ws^2\,\beta^2+215\,wa^6\,ws^2\,\beta^2+\frac{146\,ws^4\,\beta^2}{3}+114\,wa^2\,ws^4\,\beta^2+\frac{425}{6}\,wa^4\,ws^4\,\beta^2+10\,ws^6\,\beta^2+\frac{95}{9}\,wa^2\,ws^6\,\beta^2+\frac{25\,ws^8\,\beta^2}{36}-72\,es^3\,ws\,(16+\beta)-144\,ea^3\,wa\,(4+5\,\beta)-96\,wa^2\,\lambda-360\,wa^4\,\lambda-168\,ws^2\,\lambda-468\,wa^2\,ws^2\,\lambda-108\,ws^4\,\lambda-48\,\beta\,\lambda-372\,wa^2\,\beta\,\lambda-696\,wa^4\,\beta\,\lambda-297\,wa^6\,\beta\,\lambda-100\,ws^2\,\beta\,\lambda-360\,wa^2\,ws^2\,\beta\,\lambda-243\,wa^4\,ws^2\,\beta\,\lambda-\frac{128}{3}\,ws^4\,\beta\,\lambda-63\,wa^2\,ws^4\,\beta\,\lambda-5\,ws^6\,\beta\,\lambda+12\,\lambda^2+72\,wa^2\,\lambda^2+81\,wa^4\,\lambda^2+24\,ws^2\,\lambda^2+54\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2+9\,ws^4\,\lambda^2-2\,ea\,wa\,(5\,ws^4\,(-12+\beta)\,\beta+12\,es^2\,(-12+53\,\beta)+3\,\beta\,(36\,\beta+4\,wa^2\,(146+45\,\beta)+wa^4\,(284+99\,\beta))+8\,es\,ws\,((-105+42\,wa^2+10\,ws^2-6\,\beta)\,\beta-18\,(-2+\lambda))+6\,ws^2\,(\beta\,(50+6\,\beta+wa^2\,(-4+19\,\beta)-9\,\lambda)+12\,(-2+\lambda))+48\,(6\,wa^2+5\,\beta-2\,\lambda)-18\,(4\,\beta+wa^2\,(20+9\,\beta))\,\lambda)+2\,es^2\,(831\,wa^4\,\beta+15\,ws^4\,\beta+2\,ws^2\,(432+96\,\beta+\beta^2-27\,\lambda)+12\,(19\,\beta-7\,\lambda)-2\,wa^2\,(36-3\,(216+47\,ws^2)\,\beta+\beta^2+171\,\lambda))-4\,ea^2\,(36\,es^2-60\,\beta-213\,wa^4\,\beta-12\,es\,ws\,(6+5\,\beta)-3\,wa^2\,(72+\beta\,(236+26\,ws^2+27\,\beta)-30\,\lambda)+24\,\lambda+ws^2\,(\beta\,(36-5\,ws^2+9\,\beta)+18\,(2+\lambda)))-\frac{2}{3}\,es\,ws\,(5\,ws^4\,\beta\,(18+\beta)+12\,\beta\,(114+5\,\beta)+3\,wa^4\,\beta\,(1326+43\,\beta)-24\,(21+\beta)\,\lambda+18\,ws^2\,(2\,(48+\beta\,(23+\beta))-(18+\beta)\,\lambda)+2\,wa^2\,(\beta\,(ws^2\,(726+29\,\beta)+9\,(380+14\,\beta-3\,\lambda))-54\,(4+15\,\lambda)))$$

B.2.3. Περίπτωση 1η : Συμμετρική αρχική ατέλεια: es≠0 , ea=0

$$\frac{1}{2}\left(-12\,(es-ws)^3+4\,(-es+ws)^3+\frac{1}{3}\,(2+ws^2)\,(-6\,es+6\,ws+ws^3)\,\beta-2\,ws\,(2+ws^2)\,\lambda\right)$$

0

$$\left\{\left\{\lambda\to\frac{48\,(-es+ws)^3}{2+ws^2}+(-6\,es+6\,ws+ws^3)\,\beta}{6\,ws}\right\}\right\}$$

$$\{\{\lambda\to\beta\}\}$$

B.2.4. Περίπτωση 2η : Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια: es=0 , ea≠0

0

$$\frac{1}{2}\,(-8\,(ea-wa)^3+9\,(2+3\,wa^2)\,(-2\,ea+2\,wa+wa^3)\,\beta-6\,wa\,(2+3\,wa^2)\,\lambda)$$

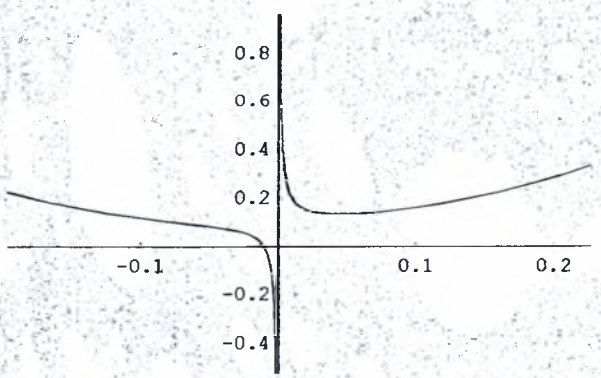
$$\left\{\left\{\lambda\to\frac{8\,(-ea+wa)^3}{2+3\,wa^2}+9\,(-2\,ea+2\,wa+wa^3)\,\beta}{6\,wa}\right\}\right\}$$

In[1]:= {{λ → 3 β}}

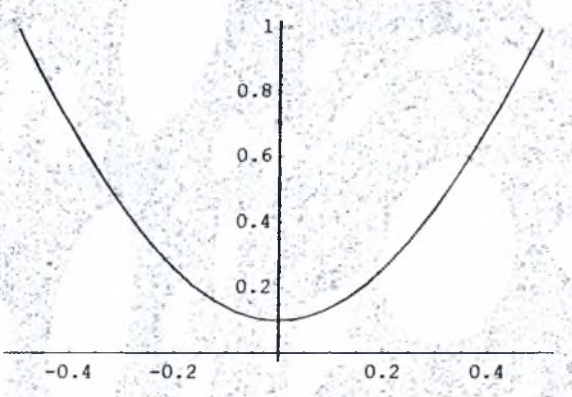
```
ClearAll[λ1, λ2, λc1, ws, wa, es, ea, β, p1, pc1, p2, pc2, λc2, S1, S2]
β = 0.1;
ea = -0.5;
es = -0.01;

StylePrint["1ος δρόμος ατελούς (συμμετρική αρχική ατέλεια)", "Subsubsection"]
λc1[ws_] := β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)
StylePrint[
 "λ1=((48 (-es + ws)^3)/(2 + ws^2) + (-6 es + 6 ws + ws^3) β)/(6 ws) , wa=0", "DisplayFormula"]
λ1[ws_] := ((48 (-es+ws)^3)/(2+ws^2) + (-6 es + 6 ws + ws^3) β)/(6 ws)
p1 = Plot[λ1[ws], {ws, -.5, .5}]
pc1 = Plot[λc1[ws], {ws, -.5, .5}]
Show[p1, pc1]
StylePrint["2ος δρόμος ατελούς (αντισυμμετρική αρχική ατέλεια)", "Subsubsection"]
λc2[wa_] := 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + 3 β/2)
StylePrint["ws=0 , λ2=((8 (-ea + wa)^3)/(2 + 3 wa^2) + 9 (-2 ea + 2 wa + wa^3) β)/(6 wa)", "DisplayFormula"]
λ2[wa_] := ((8 (-ea+wa)^3)/(2+3 wa^2) + 9 (-2 ea + 2 wa + wa^3) β)/(6 wa)
p2 = Plot[λ2[wa], {wa, -.5, .5}]
pc2 = Plot[λc2[wa], {wa, -.5, .5}]
Show[p2, pc2]
StylePrint[
  "Μελέτη μεγίστων και ελαχίστων των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας", "Subsubsection"];
S1 = FullSimplify[∂wa λ2[wa]];
Solve[S1 = 0, wa]
```

■ 1ος δρόμος ατελούς (συμμετρική αρχική ατέλεια)

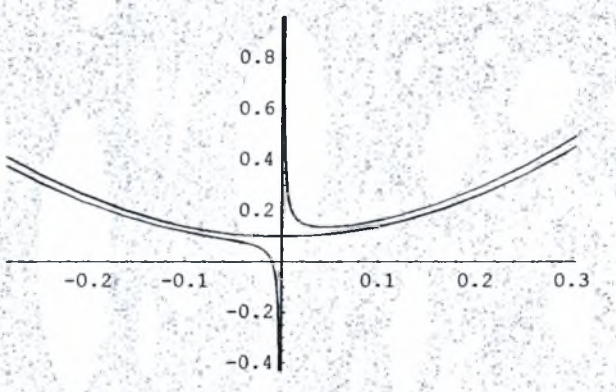
$$\lambda 1=\frac{\frac{48\,(-es+ws)^3}{2+ws^2}+(-6\,es+6\,ws+ws^3)\,\beta}{6\,ws}\quad,\quad wa=0$$



- Graphics -



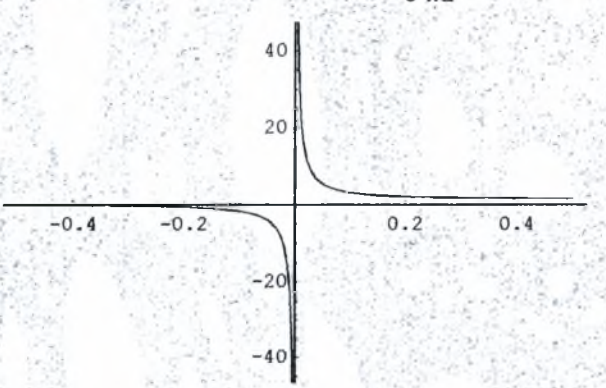
- Graphics -



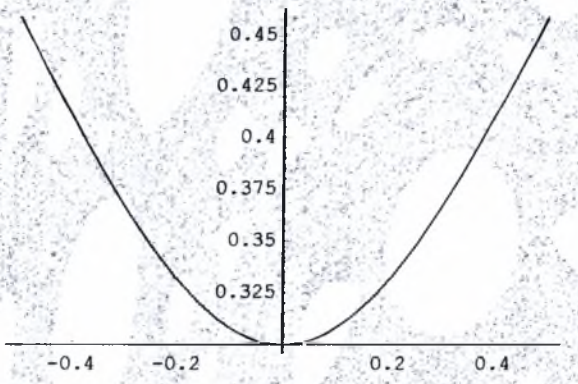
- Graphics -

■ **2ος δρόμος ατελούς (αντισυμμετρική αρχική ατέλεια)**

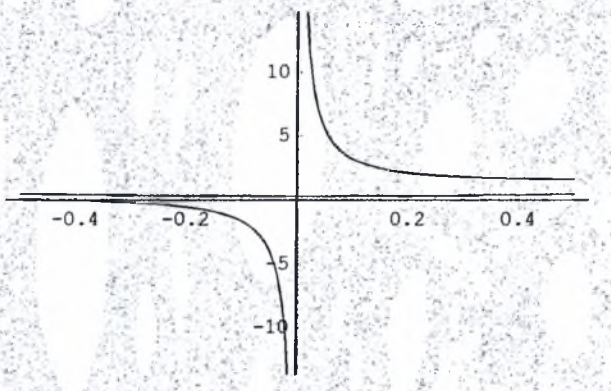
$$ws=0\ ,\ \lambda 2=\frac{\frac{8\,(-ea+wa)^3}{2+3\,wa^2}+9\,(-2\,ea+2\,wa+wa^3)\,\beta}{6\,wa}$$



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

▪ Μελέτη μεγίστων και ελαχίστων των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας

```
{{wa → -0.555018 - 1.50289 i}, {wa → -0.555018 + 1.50289 i},
 {wa → -0.42815 - 0.358891 i}, {wa → -0.42815 + 0.358891 i},
 {wa → 0.45565 - 0.448745 i}, {wa → 0.45565 + 0.448745 i}, {wa → 1.05504}}
```

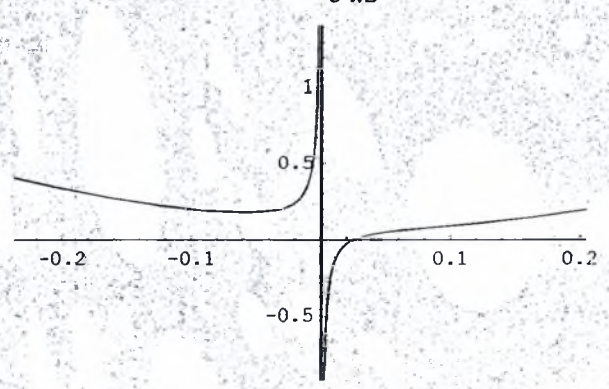
```
β = 0.1;
ea = 0.345;
wa = -0.147344
λ2[wa_] := (8 (-ea+wa)^3)/(2+3 wa^2) + 9 (-2 ea + 2 wa + wa^3) β / (6 wa)
λ2[wa]
```

```
-0.147344

1.52865
```

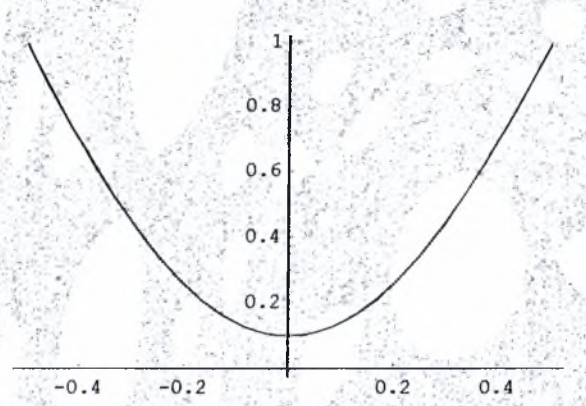
```
ClearAll[λ1, λ2, λc1, ws, wa, es, ea, β, p1, pc1, p2, pc2, λc2, S1, S2]
β = 0.1;
ea = 0.025;
es = 0.025;
StylePrint["1ος δρόμος ατελούς (συμμετρική αρχική ατέλεια)", "Subsubsection"]
λc1[ws_] := β + 1/6 ws^2 (48/(2 + ws^2) + β)
StylePrint[
  "λ1=((48 (-es + ws)^3)/(2 + ws^2) + (-6 es + 6 ws + ws^3) β)/(6 ws) , wa=0", "DisplayFormula"]
λ1[ws_] := ((48 (-es+ws)^3)/(2+ws^2) + (-6 es + 6 ws + ws^3) β)/(6 ws)
p1 = Plot[λ1[ws], {ws, -.5, .5}]
pc1 = Plot[λc1[ws], {ws, -.5, .5}]
Show[p1, pc1]
StylePrint["2ος δρόμος ατελούς (αντισυμμετρική αρχική ατέλεια)", "Subsubsection"]
λc2[wa_] := 3 β + wa^2 (4/(6 + 9 wa^2) + 3 β/2)
StylePrint["ws=0 , λ2=((8 (-ea + wa)^3)/(2 + 3 wa^2) + 9 (-2 ea + 2 wa + wa^3) β)/(6 wa)", "DisplayFormula"]
λ2[wa_] := ((8 (-ea+wa)^3)/(2+3 wa^2) + 9 (-2 ea + 2 wa + wa^3) β)/(6 wa)
p2 = Plot[λ2[wa], {wa, -.5, .5}]
pc2 = Plot[λc2[wa], {wa, -.5, .5}]
Show[p2, pc2]
StylePrint[
  "Μελέτη μεγίστων και ελαχίστων των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας", "Subsubsection"];
S1 = FullSimplify[∂wa λ2[wa]];
NSolve[S1 = 0, wa]
S2 = FullSimplify[∂ws λ1[ws]];
NSolve[S2 = 0, ws]
```

▪ 1ος δρόμος ατελούς (συμμετρική αρχική ατέλεια)

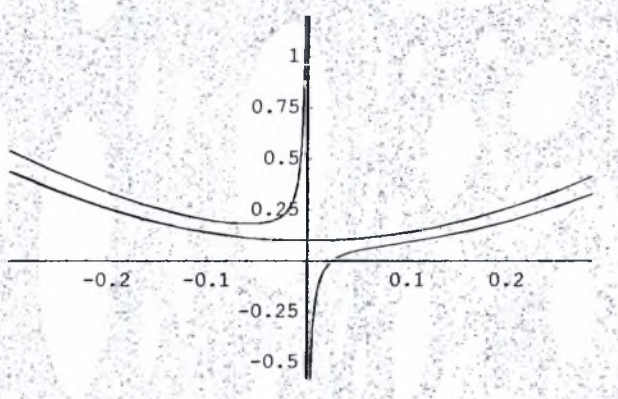
$$\lambda 1=\frac{\frac{48\,(-es+ws)^3}{2+ws^2}+(-6\,es+6\,ws+ws^3)\,\beta}{6\,ws}\quad,\quad wa=0$$



- Graphics -



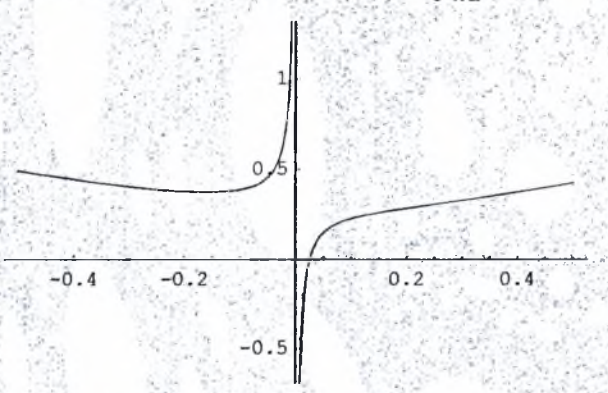
- Graphics -



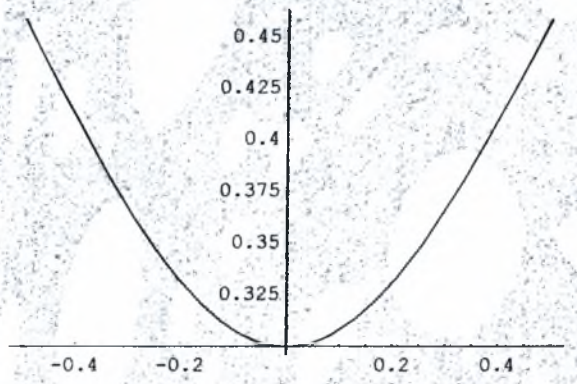
- Graphics -

■ **2ος δρόμος ατελούς (αντισυμμετρική αρχική ατέλεια)**

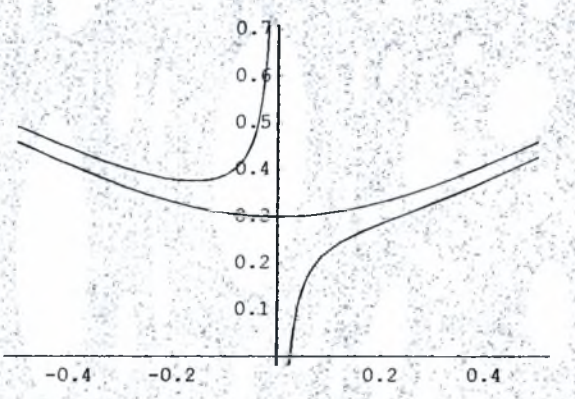
$$ws=0\ ,\ \lambda 2=\frac{\frac{8\,(-ea+wa)^3}{2+3\,wa^2}+9\,(-2\,ea+2\,wa+wa^3)\,\beta}{6\,wa}$$



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

▪ Μελέτη μεγίστων και ελαχίστων των ανωτέρω δρόμων ισορροπίας

```
{{wa → 0.661731 + 1.07954 i}, {wa → 0.661731 - 1.07954 i},
 {wa → -0.671403 + 1.02814 i}, {wa → -0.671403 - 1.02814 i},
 {wa → 0.0900277 + 0.143292 i}, {wa → 0.0900277 - 0.143292 i}, {wa → -0.160712}}
```

```
{{ws → 3.80285 + 4.20985 i}, {ws → 3.80285 - 4.20985 i},
 {ws → -3.82137 + 3.91694 i}, {ws → -3.82137 - 3.91694 i},
 {ws → 0.047506 + 0.0569738 i}, {ws → 0.047506 - 0.0569738 i}, {ws → -0.0579807}}
```

```
ClearAll[ws, wa, es, ea, β, λ, V11, V11a, Hes, Hesa, β]
β = 0.1;
ea = 0.345;
ws = 0;
es = 0;
```

$$V11 = 12\,ea^2 + \frac{7\,wa^4\,\beta}{2} - 2\,es\,ws\,\beta + 4\,ws^2\,\beta + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} -$$
$$6\,ea\,wa\,(4+\beta) + wa^2\,(12 + 8\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 3\,\lambda) + 2\,(12\,(es-ws)^2 + \beta - \lambda) - 3\,ws^2\,\lambda;$$

$$Hes = 144\,ea^4 + 288\,es^4 + 144\,wa^4 - 144\,wa^2\,ws^2 + 288\,ws^4 + 240\,wa^2\,\beta + 1392\,wa^4\,\beta + 852\,wa^6\,\beta +$$
$$456\,ws^2\,\beta + 2064\,wa^2\,ws^2\,\beta + 1302\,wa^4\,ws^2\,\beta + 240\,ws^4\,\beta + 424\,wa^2\,ws^4\,\beta + 30\,ws^6\,\beta +$$
$$36\,\beta^2 + 360\,wa^2\,\beta^2 + 1062\,wa^4\,\beta^2 + 918\,wa^6\,\beta^2 + \frac{945\,wa^8\,\beta^2}{4} + 88\,ws^2\,\beta^2 + 372\,wa^2\,ws^2\,\beta^2 +$$
$$558\,wa^4\,ws^2\,\beta^2 + 215\,wa^6\,ws^2\,\beta^2 + \frac{146\,ws^4\,\beta^2}{3} + 114\,wa^2\,ws^4\,\beta^2 + \frac{425}{6}\,wa^4\,ws^4\,\beta^2 + 10\,ws^6\,\beta^2 +$$
$$\frac{95}{9}\,wa^2\,ws^6\,\beta^2 + \frac{25\,ws^8\,\beta^2}{36} - 72\,es^3\,ws\,(16+\beta) - 144\,ea^3\,wa\,(4+5\,\beta) - 96\,wa^2\,\lambda -$$
$$360\,wa^4\,\lambda - 168\,ws^2\,\lambda - 468\,wa^2\,ws^2\,\lambda - 108\,ws^4\,\lambda - 48\,\beta\,\lambda - 372\,wa^2\,\beta\,\lambda - 696\,wa^4\,\beta\,\lambda -$$
$$297\,wa^6\,\beta\,\lambda - 100\,ws^2\,\beta\,\lambda - 360\,wa^2\,ws^2\,\beta\,\lambda - 243\,wa^4\,ws^2\,\beta\,\lambda - \frac{128}{3}\,ws^4\,\beta\,\lambda - 63\,wa^2\,ws^4\,\beta\,\lambda -$$
$$5\,ws^6\,\beta\,\lambda + 12\,\lambda^2 + 72\,wa^2\,\lambda^2 + 81\,wa^4\,\lambda^2 + 24\,ws^2\,\lambda^2 + 54\,wa^2\,ws^2\,\lambda^2 + 9\,ws^4\,\lambda^2 - 2\,ea\,wa$$
$$(5\,ws^4\,(-12+\beta)\,\beta + 12\,es^2\,(-12+53\,\beta) + 3\,\beta\,(36\,\beta + 4\,wa^2\,(146+45\,\beta) + wa^4\,(284+99\,\beta)) +$$
$$8\,es\,ws\,((-105 + 42\,wa^2 + 10\,ws^2 - 6\,\beta)\,\beta - 18\,(-2+\lambda)) +$$
$$6\,ws^2\,(\beta\,(50 + 6\,\beta + wa^2\,(-4+19\,\beta) - 9\,\lambda) + 12\,(-2+\lambda)) + 48\,(6\,wa^2 + 5\,\beta - 2\,\lambda) -$$
$$18\,(4\,\beta + wa^2\,(20+9\,\beta))\,\lambda) + 2\,es^2\,(831\,wa^4\,\beta + 15\,ws^4\,\beta + 2\,ws^2\,(432 + 96\,\beta + \beta^2 - 27\,\lambda) +$$
$$12\,(19\,\beta - 7\,\lambda) - 2\,wa^2\,(36 - 3\,(216 + 47\,ws^2)\,\beta + \beta^2 + 171\,\lambda)) -$$
$$4\,ea^2\,(36\,es^2 - 60\,\beta - 213\,wa^4\,\beta - 12\,es\,ws\,(6+5\,\beta) - 3\,wa^2\,(72 + \beta\,(236 + 26\,ws^2 + 27\,\beta) - 30\,\lambda) +$$
$$24\,\lambda + ws^2\,(\beta\,(36 - 5\,ws^2 + 9\,\beta) + 18\,(2+\lambda))) -$$
$$\frac{2}{3}\,es\,ws\,(5\,ws^4\,\beta\,(18+\beta) + 12\,\beta\,(114+5\,\beta) + 3\,wa^4\,\beta\,(1326+43\,\beta) -$$
$$24\,(21+\beta)\,\lambda + 18\,ws^2\,(2\,(48 + \beta\,(23+\beta)) - (18+\beta)\,\lambda) +$$
$$2\,wa^2\,(\beta\,(ws^2\,(726+29\,\beta) + 9\,(380 + 14\,\beta - 3\,\lambda)) - 54\,(4+15\,\lambda)));$$

$$V11a = FullSimplify\left[V11 /. \lambda \to \frac{\frac{8\,(-ea+wa)^3}{2+3\,wa^2} + 9\,(-2\,ea + 2\,wa + wa^3)\,\beta}{6\,wa}\right];$$

$$Hesa = FullSimplify\left[Hes /. \lambda \to \frac{\frac{8\,(-ea+wa)^3}{2+3\,wa^2} + 9\,(-2\,ea + 2\,wa + wa^3)\,\beta}{6\,wa}\right];$$

```
(*r2=Plot[V11a,{ws,-0.5,.5}]
  r3=Plot[Hesa,{ws,-0.5,0.5}]*)
NSolve[V11a = 0, wa]
Solve[Hesa = 0, wa]
```

```
{{wa → -10.4508}, {wa → 9.78686}, {wa → 0.405621 + 0.0957 i},
 {wa → 0.405621 - 0.0957 i}, {wa → -0.147344}}
```

```
{{wa → -10.4508}, {wa → -0.67174 - 0.611195 i}, {wa → -0.67174 + 0.611195 i},
 {wa → -0.496595}, {wa → -0.147344}, {wa → 4.82534 x 10^-17 - 0.816497 i},
 {wa → 4.82534 x 10^-17 + 0.816497 i}, {wa → 0.329505 - 0.320948 i},
 {wa → 0.329505 + 0.320948 i}, {wa → 0.405621 - 0.0957 i}, {wa → 0.405621 + 0.0957 i},
 {wa → 0.590532 - 1.37427 i}, {wa → 0.590532 + 1.37427 i}, {wa → 9.78686}}
```

```
ClearAll[V11, wa, ws, es, ea, λ, β, Hessian, eq1, eq2, V11]
es = 0.025;
ea = 0.025;
β = 0.10;
eq1 =
  1/2 (-8 (es - ws)^3 - 4 (ea + es - wa - ws)^3 + 4 (ea - es - wa + ws)^3 - 1/3 (6 es (2 + wa^2 + ws^2) -
      ws (-36 ea wa + (6 + 3 wa^2 + ws^2) (2 + 7 wa^2 + ws^2))) β - 2 ws (2 + 3 wa^2 + ws^2) λ);
eq2 = 1/2 (-4 (ea + es - wa - ws)^3 - 4 (ea - es - wa + ws)^3 +
    (-6 ea (6 + 9 wa^2 + ws^2) + wa (36 + 27 wa^4 - 4 es ws + 16 ws^2 + 5 ws^4/3 + 2 wa^2 (36 + 7 ws^2))) β -
    6 wa (2 + 3 wa^2 + ws^2) λ);
V11 = 12 ea^2 + 7 wa^4 β/2 - 2 es ws β + 4 ws^2 β + 5 ws^4 β/6 - 6 ea wa (4 + β) +
  wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 2 (12 (es - ws)^2 + β - λ) - 3 ws^2 λ;
Hessian = 144 ea^4 + 288 es^4 + 144 wa^4 - 144 wa^2 ws^2 + 288 ws^4 + 240 wa^2 β + 1392 wa^4 β +
  852 wa^6 β + 456 ws^2 β + 2064 wa^2 ws^2 β + 1302 wa^4 ws^2 β + 240 ws^4 β + 424 wa^2 ws^4 β + 30 ws^6 β +
  36 β^2 + 360 wa^2 β^2 + 1062 wa^4 β^2 + 918 wa^6 β^2 + 945 wa^8 β^2/4 + 88 ws^2 β^2 + 372 wa^2 ws^2 β^2 +
  558 wa^4 ws^2 β^2 + 215 wa^6 ws^2 β^2 + 146 ws^4 β^2/3 + 114 wa^2 ws^4 β^2 + 425/6 wa^4 ws^4 β^2 + 10 ws^6 β^2 +
  95/9 wa^2 ws^6 β^2 + 25 ws^8 β^2/36 - 72 es^3 ws (16 + β) - 144 ea^3 wa (4 + 5 β) - 96 wa^2 λ -
  360 wa^4 λ - 168 ws^2 λ - 468 wa^2 ws^2 λ - 108 ws^4 λ - 48 β λ - 372 wa^2 β λ - 696 wa^4 β λ -
  297 wa^6 β λ - 100 ws^2 β λ - 360 wa^2 ws^2 β λ - 243 wa^4 ws^2 β λ - 128/3 ws^4 β λ - 63 wa^2 ws^4 β λ -
  5 ws^6 β λ + 12 λ^2 + 72 wa^2 λ^2 + 81 wa^4 λ^2 + 24 ws^2 λ^2 + 54 wa^2 ws^2 λ^2 + 9 ws^4 λ^2 - 2 ea wa
   (5 ws^4 (-12 + β) β + 12 es^2 (-12 + 53 β) + 3 β (36 β + 4 wa^2 (146 + 45 β) + wa^4 (284 + 99 β)) +
     8 es ws ((-105 + 42 wa^2 + 10 ws^2 - 6 β) β - 18 (-2 + λ)) +
     6 ws^2 (β (50 + 6 β + wa^2 (-4 + 19 β) - 9 λ) + 12 (-2 + λ)) + 48 (6 wa^2 + 5 β - 2 λ) -
     18 (4 β + wa^2 (20 + 9 β)) λ) + 2 es^2 (831 wa^4 β + 15 ws^4 β + 2 ws^2 (432 + 96 β + β^2 - 27 λ) +
     12 (19 β - 7 λ) - 2 wa^2 (36 - 3 (216 + 47 ws^2) β + β^2 + 171 λ)) -
  4 ea^2 (36 es^2 - 60 β - 213 wa^4 β - 12 es ws (6 + 5 β) - 3 wa^2 (72 + β (236 + 26 ws^2 + 27 β) - 30 λ) +
     24 λ + ws^2 (β (36 - 5 ws^2 + 9 β) + 18 (2 + λ))) -
  2/3 es ws (5 ws^4 β (18 + β) + 12 β (114 + 5 β) + 3 wa^4 β (1326 + 43 β) -
     24 (21 + β) λ + 18 ws^2 (2 (48 + β (23 + β)) - (18 + β) λ) +
     2 wa^2 (β (ws^2 (726 + 29 β) + 9 (380 + 14 β - 3 λ)) - 54 (4 + 15 λ)));

FindRoot[{eq1 = 0, eq2 = 0, Hessian = 0}, {ws, -0.10}, {wa, 0.11}, {λ, .267}]

{ws → -0.102152, wa → 0.117424, λ → 0.267512}
```

```
ClearAll[Vp, V11, V12, V21, V22, MM, wa, ws, λ, β, dd, V1, V2, VV2, V111,
 V112, V122, V222, V3, V1111, V1122, V1222, V2222, V4, ws, wa, es, ea]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών
   ευστάθειας, οριζουσών, και μεταβολών 3ης και 4ης τάξης -
   προσεγγιστική ανάλυση - ατελές σύστημα", "Subtitle"]
Vp = 1/2 (2 (es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 + (ea - es - wa + ws)^4 +
    (18 ea^2 + 2 es^2 - 6 ea wa (6 + 3 wa^2 + ws^2) - 2/3 es ws (6 + 3 wa^2 + ws^2) + 1/18 (6 + 3 wa^2 + ws^2)^2
      (9 wa^2 + ws^2)) β + 1/2 (12 ea^2 + 4 es^2 - (3 wa^2 + ws^2) (4 + 3 wa^2 + ws^2)) λ);
V1 = FullSimplify[δws Vp];
V2 = FullSimplify[δwa Vp];
V11 = FullSimplify[δws V1]
V12 = δwa V1;
V21 = δws V2;
V22 = δwa V2;
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
VV2 = FullSimplify[V11 V22 - V12 V21]
V111 = δws V11;
V112 = δwa V11;
V122 = δwa V12;
V121 = δws V12;
V222 = δwa V22;
dd = -V12/V22;
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
V1111 = δws V111;
V1112 = δwa V111;
V1122 = δwa V112;
V1222 = δwa V122;
V2222 = δwa V222;
V3 = FullSimplify[V111 + 3 V112 dd + 3 V122 dd^2 + V222 dd^3]
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
V4 = FullSimplify[V1111 + 4 V1112 dd + 6 V1122 dd^2 + 4 V1222 dd^3 + V2222 dd^4]
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
d1111 = FullSimplify[V1111 - 3 V121^2/V22]
```

Συμβολικός υπολογισμός συντελεστών ευστάθειας, οριζουσών, και μεταβολών 3ης και 4ης τάξης - προσεγγιστική ανάλυση - ατελές σύστημα

$$12\,ea^2 + \frac{7\,wa^4\,\beta}{2} - 2\,es\,ws\,\beta + 4\,ws^2\,\beta + \frac{5\,ws^4\,\beta}{6} - 6\,ea\,wa\,(4+\beta) +$$
$$wa^2\,(12 + 8\,\beta + 5\,ws^2\,\beta - 3\,\lambda) + 2\,(12\,(es - ws)^2 + \beta - \lambda) - 3\,ws^2\,\lambda$$

■ Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21

$$-\frac{4}{9}\,(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^2+$$
$$\frac{1}{2}\left(24\,ea^2+135\,wa^4\,\beta-4\,es\,ws\,\beta+16\,ws^2\,\beta+\frac{5\,ws^4\,\beta}{3}-12\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+\right.$$
$$\left.6\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+12\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)-6\,ws^2\,\lambda\right)$$
$$\left(12\,ea^2+\frac{7\,wa^4\,\beta}{2}-2\,es\,ws\,\beta+4\,ws^2\,\beta+\frac{5\,ws^4\,\beta}{6}-6\,ea\,wa\,(4+\beta)+\right.$$
$$\left.wa^2\,(12+8\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda)+2\,(12\,(es-ws)^2+\beta-\lambda)-3\,ws^2\,\lambda\right)$$

■ Τρίτη μεταβολή δV3

$$-48\,(es-ws)-2\,es\,\beta+8\,ws\,\beta+10\,wa^2\,ws\,\beta+\frac{10\,ws^3\,\beta}{3}-6\,ws\,\lambda+$$
$$\left(384\,(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^3\right.$$
$$\left.(ea\,(4+9\,\beta)-wa\,(4+(36+45\,wa^2+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda))\right)/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\,\hat{}\,3+$$
$$\left(32\,(9\,ea\,(-4\,es+ws\,(4+\beta))+wa\,(3\,es\,(12+\beta)-ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^2\right.$$
$$\left.(3\,es\,(12+\beta)-ws\,((24+63\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-9\,(-4+\lambda)))\right)/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\,\hat{}\,2+$$
$$(24\,(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))($$
$$(3\,ea\,(4+\beta)-wa\,((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))))/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))$$

■ Τέταρτη μεταβολή δV4

$$2\left(24+4\,\beta+5\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-3\,\lambda+\right.$$
$$\left(768\,(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^4\right.$$
$$\left.(4+(36+135\,wa^2+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)\right)/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\,\hat{}\,4-\left(10752\,wa\,ws\,\beta\right.$$
$$\left.(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^3\right)/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\,\hat{}\,3+$$
$$\left(96\,(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda)))^2\right.$$
$$\left.((8+21\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda))\right)/$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+$$
$$36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\,\hat{}\,2-(160\,wa\,ws\,\beta\,$$
$$(9\,ea\,(4\,es-ws\,(4+\beta))+wa\,(-3\,es\,(12+\beta)+ws\,(36+24\,\beta+21\,wa^2\,\beta+5\,ws^2\,\beta-9\,\lambda))))/$$
$$\left.(72\,ea^2+405\,wa^4\,\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\,\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\,\lambda)+\right.$$
$$\left.36\,(2\,(es-ws)^2+3\,\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\,\beta-18\,ws\,\lambda))\right)$$

■ Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων

$$2\left(24+4\beta+5\,wa^2\beta+5\,ws^2\beta-3\lambda-\left(36\,(-3\,ea\,(4+\beta)+wa\,((8+7\,wa^2+5\,ws^2)\,\beta-3\,(-4+\lambda)))^2\right)/\right.$$
$$(72\,ea^2+405\,wa^4\beta-36\,ea\,wa\,(4+9\beta)+18\,wa^2\,(4+(36+7\,ws^2)\,\beta-9\lambda)+$$
$$\left.36\,(2\,(es-ws)^2+3\beta-\lambda)+ws\,(-12\,es\,\beta+48\,ws\,\beta+5\,ws^3\beta-18\,ws\,\lambda))\right)$$

```
ClearAll[V11, wa, ws, es, ea, λ, β, Hessian, V3, V4, d1111]
β = 0.10;
es = 0.1;
ea = 0;
ws = -0.50557;
wa = 0;
λ = 1.68194;
StylePrint[
 "Ευστάθεια κρισίμων σημείων - ατελές σύστημα - προσεγγιστική ανάλυση", "Title"]
StylePrint["με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας",
 "Title"]
StylePrint["Πρώτη ελάσσων ορίζουσα V11", "Section"]
V11 = 12 ea^2 + (7 wa^4 β)/2 - 2 es ws β + 4 ws^2 β + (5 ws^4 β)/6 -
  6 ea wa (4 + β) + wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 2 (12 (es - ws)^2 + β - λ) - 3 ws^2 λ
StylePrint["Δεύτερη ελάσσων ορίζουσα V11*V22-V12*V21", "Section"]
Hessian =
 -(4/9) (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^2 +
  (1/2) (24 ea^2 + 135 wa^4 β - 4 es ws β + 16 ws^2 β + (5 ws^4 β)/3 - 12 ea wa (4 + 9 β) +
     6 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) + 12 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) - 6 ws^2 λ)
    (12 ea^2 + (7 wa^4 β)/2 - 2 es ws β + 4 ws^2 β + (5 ws^4 β)/6 - 6 ea wa (4 + β) +
     wa^2 (12 + 8 β + 5 ws^2 β - 3 λ) + 2 (12 (es - ws)^2 + β - λ) - 3 ws^2 λ)
StylePrint["Τρίτη μεταβολή δV3", "Section"]
V3 = -48 (es - ws) - 2 es β + 8 ws β + 10 wa^2 ws β + (10 ws^3 β)/3 - 6 ws λ +
  (384 (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^3
     (ea (4 + 9 β) - wa (4 + (36 + 45 wa^2 + 7 ws^2) β - 9 λ))) /
   (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
     36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))^3 -
  (32 (9 ea (-4 es + ws (4 + β)) + wa (3 es (12 + β) - ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^2
     (3 es (12 + β) - ws ((24 + 63 wa^2 + 5 ws^2) β - 9 (-4 + λ))) /
   (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
     36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))^2 +
  (24 (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))
     (3 ea (4 + β) - wa ((8 + 7 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ))) /
   (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
     36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή δV4", "Section"]
V4 = 2 (24 + 4 β + 5 wa^2 β + 5 ws^2 β - 3 λ +
    (768 (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^4
       (4 + (36 + 135 wa^2 + 7 ws^2) β - 9 λ)) /
     (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
       36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))^4 -
     (10752 wa ws β (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^3) /
     (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
       36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))^3 +
```

```
(96 (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))^2
   ((8 + 21 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ))) /
 (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
    36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ))^2 - (160 wa ws β
   (9 ea (4 es - ws (4 + β)) + wa (-3 es (12 + β) + ws (36 + 24 β + 21 wa^2 β + 5 ws^2 β - 9 λ)))) /
 (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
   36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ)))
StylePrint["Τέταρτη μεταβολή για μη γραμμικότητες d1111, το πρόσημο
   της οποίας καθορίζει την ευστάθεια κρισίμων σημείων", "Section"]
d1111 = 2 (24 + 4 β + 5 wa^2 β + 5 ws^2 β - 3 λ -
   (36 (-3 ea (4 + β) + wa ((8 + 7 wa^2 + 5 ws^2) β - 3 (-4 + λ)))^2) /
 (72 ea^2 + 405 wa^4 β - 36 ea wa (4 + 9 β) + 18 wa^2 (4 + (36 + 7 ws^2) β - 9 λ) +
   36 (2 (es - ws)^2 + 3 β - λ) + ws (-12 es β + 48 ws β + 5 ws^3 β - 18 ws λ)))
```

```
ClearAll[ws, wa, λ, β, ea, es, equ1, equ2]
β = 0.1;
es = 0.025;
ea = 0.025;
λ = 0.2
equ1 =
  1/2 (-8 (es - ws)^3 - 4 (ea + es - wa - ws)^3 + 4 (ea - es - wa + ws)^3 - 1/3 (6 es (2 + wa^2 + ws^2) -
      ws (-36 ea wa + (6 + 3 wa^2 + ws^2) (2 + 7 wa^2 + ws^2))) β - 2 ws (2 + 3 wa^2 + ws^2) λ);
equ2 = 1/2 (-4 (ea + es - wa - ws)^3 - 4 (ea - es - wa + ws)^3 +
    (-6 ea (6 + 9 wa^2 + ws^2) + wa (36 + 27 wa^4 - 4 es ws + 16 ws^2 + 5 ws^4/3 + 2 wa^2 (36 + 7 ws^2))) β -
    6 wa (2 + 3 wa^2 + ws^2) λ);
TableForm[NSolve[{equ1 = 0, equ2 = 0}]]
```

0.2

wa → 0.00734224 + 19.4533 i	ws → -39.8308 + 0.0481726 i
wa → 0.00734224 - 19.4533 i	ws → -39.8308 - 0.0481726 i
wa → 0.00708146 - 19.4089 i	ws → 39.7072 + 0.0482541 i
wa → 0.00708146 + 19.4089 i	ws → 39.7072 - 0.0482541 i
wa → -14.8349 + 0.193759 i	ws → 0.353474 + 23.5741 i
wa → -14.8349 - 0.193759 i	ws → 0.353474 - 23.5741 i
wa → 14.1502 - 0.187895 i	ws → 0.343332 + 22.3428 i
wa → 14.1502 + 0.187895 i	ws → 0.343332 - 22.3428 i
wa → -0.0111906 + 0.0000199065 i	ws → -0.0379679 + 21.818 i
wa → -0.0111906 - 0.0000199065 i	ws → -0.0379679 - 21.818 i
wa → -0.252294 + 0.00570243 i	ws → 0.0268515 + 0.305195 i
wa → -0.252294 - 0.00570243 i	ws → 0.0268515 - 0.305195 i
wa → 0.275508 - 0.00890887 i	ws → 0.02958 + 0.266524 i
wa → 0.275508 + 0.00890887 i	ws → 0.02958 - 0.266524 i
wa → 0.0554735	ws → 0.201562
wa → 0.0658831	ws → -0.0750954
wa → 0.0686796	ws → -0.0525976
wa → -0.0323377 + 2.04753 i	ws → 0.027948 + 0.0000284308 i
wa → -0.0323377 - 2.04753 i	ws → 0.027948 - 0.0000284308 i
wa → -0.00442316 + 0.328878 i	ws → 0.0183941 + 0.000960026 i
wa → -0.00442316 - 0.328878 i	ws → 0.0183941 - 0.000960026 i

```
ClearAll[es, ws, ea, wa, β, λ, Vt, Vtg, x,
 y, α0, α1, α2, V1, V2, V11, V12, V21, V22, HESSIAN]
StylePrint["Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του τέλειου συστήματος", "Subtitle"]
Vt = 1/2 (2 (es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 +
    (ea - es - wa + ws)^4 + (18 ea^2 + 2 es^2 - 6 ea wa (6 + 3 wa^2 + ws^2) -
      2/3 es ws (6 + 3 wa^2 + ws^2) + 1/18 (6 + 3 wa^2 + ws^2)^2 (9 wa^2 + ws^2)) β +
    1/2 (12 ea^2 + 4 es^2 - (3 wa^2 + ws^2) (4 + 3 wa^2 + ws^2)) λ) /. {es → 0, ea → 0};
StylePrint["Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση",
 "Subsection"]
Vtg = Vt /. {ws → x, wa → y, λ → α0}
StylePrint["ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή", "Subsection"]
ExpandAll[Vtg]
StylePrint["η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της", "Subsection"]
Collect[Vtg, {x^(_:1) y^(_:1), x^(_:1), y^(_:1)}]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M", "Section"]
V1 = FullSimplify[∂x Vtg]
V2 = FullSimplify[∂y Vtg]
V11 = ∂x V1;
V12 = ∂y V1;
V21 = ∂x V2;
V22 = ∂y V2;
StylePrint["Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας", "Section"]
HESSIAN = FullSimplify[V11 V22 - V21 V12]
```

Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του τέλειου συστήματος

■ Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση

$$\frac{1}{2}\left(2x^4+(-x-y)^4+(x-y)^4-\frac{1}{2}(x^2+3y^2)(4+x^2+3y^2)\alpha 0+\frac{1}{18}(6+x^2+3y^2)^2(x^2+9y^2)\beta\right)$$

■ ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή

$$2x^4+6x^2y^2+y^4-x^2\alpha 0-\frac{x^4\alpha 0}{4}-3y^2\alpha 0-\frac{3}{2}x^2y^2\alpha 0-\frac{9y^4\alpha 0}{4}+$$
$$x^2\beta+\frac{x^4\beta}{3}+\frac{x^6\beta}{36}+9y^2\beta+4x^2y^2\beta+\frac{5}{12}x^4y^2\beta+9y^4\beta+\frac{7}{4}x^2y^4\beta+\frac{9y^6\beta}{4}$$

■ η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της

$$\frac{1}{2}x^4\left(4-\frac{\alpha 0}{2}+\frac{2\beta}{3}\right)+\frac{x^6\beta}{36}+\frac{5}{12}x^4y^2\beta+\frac{7}{4}x^2y^4\beta+\frac{9y^6\beta}{4}+\frac{1}{2}x^2(-2\alpha 0+2\beta)+$$
$$\frac{1}{2}x^2y^2(12-3\alpha 0+8\beta)+\frac{1}{2}y^2(-6\alpha 0+18\beta)+\frac{1}{2}y^4\left(2-\frac{9\alpha 0}{2}+18\beta\right)$$

■ Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M

$$\frac{1}{6} x \left(x^4 \beta + 2 x^2 \left(24 - 3 \alpha 0 + 4 \beta + 5 y^2 \beta\right) + 3 \left(-4 \alpha 0 + 4 \beta + 7 y^4 \beta + y^2 \left(24 - 6 \alpha 0 + 16 \beta\right)\right)\right)$$

$$y^3 \left(4 - 9 \alpha 0\right) - 3 x^2 y \left(-4 + \alpha 0\right) - 6 y \alpha 0 + \frac{1}{6} y \left(6 + x^2 + 3 y^2\right) \left(18 + 5 x^2 + 27 y^2\right) \beta$$

■ Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας

$$\frac{1}{36} \left(-16 x^2 y^2 \left(36 - 9 \alpha 0 + \left(24 + 5 x^2 + 21 y^2\right) \beta\right)^2 + \left(-36 \left(\alpha 0 - 3 \beta\right) + 5 x^4 \beta + 6 x^2 \left(12 - 3 \alpha 0 + 8 \beta + 21 y^2 \beta\right) + 9 y^2 \left(8 - 18 \alpha 0 + 72 \beta + 45 y^2 \beta\right)\right) \left(5 x^4 \beta - 6 x^2 \left(-24 + 3 \alpha 0 - 4 \beta - 5 y^2 \beta\right) + 3 \left(-4 \alpha 0 + 4 \beta + 7 y^4 \beta + y^2 \left(24 - 6 \alpha 0 + 16 \beta\right)\right)\right)\right)$$

```
ClearAll[es, ws, ea, wa, β, λ, Vt, Vts, x,
 y, α0, α1, α2, V1, V2, V11, V12, V21, V22, HESSIAN]
StylePrint["Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του μερικά
   ατελούς συστήματος - Συμμετρική αρχική ατέλεια", "Subtitle"]
StylePrint["Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)",
 "Section"]
StylePrint["Παράμετροι ελέγχου   : Δύο (λ, es, που αντικαθίστανται με α0, α1)",
 "Section"]
Vt = 1/2 (2 (es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 +
      (ea - es - wa + ws)^4 + (18 ea^2 + 2 es^2 - 6 ea wa (6 + 3 wa^2 + ws^2) -
         2/3 es ws (6 + 3 wa^2 + ws^2) + 1/18 (6 + 3 wa^2 + ws^2)^2 (9 wa^2 + ws^2)) β +
      1/2 (12 ea^2 + 4 es^2 - (3 wa^2 + ws^2) (4 + 3 wa^2 + ws^2)) λ) /. ea → 0;
StylePrint["Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση",
 "Subsection"]
Vts = Vt /. {ws → x, wa → y, λ → α0, es → α1}
StylePrint["ενά ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή", "Subsection"]
ExpandAll[Vts]
StylePrint["η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της", "Subsection"]
Collect[Vts, {x^(_ : 1) y^(_ : 1), x^(_ : 1), y^(_ : 1)}]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M", "Section"]
V1 = FullSimplify[∂x Vts]
V2 = FullSimplify[∂y Vts]
V11 = ∂x V1;
V12 = ∂y V1;
V21 = ∂x V2;
V22 = ∂y V2;
StylePrint ["Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας", "Section"]
HESSIAN = FullSimplify[V11 V22 - V21 V12]
```

Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του μερικά ατελούς συστήματος - Συμμετρική αρχική ατέλεια

■ Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)

■ Παράμετροι ελέγχου   : Δύο (λ, es, που αντικαθίστανται με α0, α1)

▪ Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση

$$\frac{1}{2}\left((x-y-\alpha 1)^4+2(-x+\alpha 1)^4+(-x-y+\alpha 1)^4+\frac{1}{2}\alpha 0\left(-(x^2+3y^2)(4+x^2+3y^2)+4\alpha 1^2\right)+\left(\frac{1}{18}(6+x^2+3y^2)^2(x^2+9y^2)-\frac{2}{3}x(6+x^2+3y^2)\alpha 1+2\alpha 1^2\right)\beta\right)$$

■ **ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή**

$$2x^4+6x^2y^2+y^4-x^2\alpha0-\frac{x^4\alpha0}{4}-3y^2\alpha0-\frac{3}{2}x^2y^2\alpha0-\frac{9y^4\alpha0}{4}-8x^3\alpha1-12xy^2\alpha1+$$
$$12x^2\alpha1^2+6y^2\alpha1^2+\alpha0\alpha1^2-8x\alpha1^3+2\alpha1^4+x^2\beta+\frac{x^4\beta}{3}+\frac{x^6\beta}{36}+9y^2\beta+4x^2y^2\beta+$$
$$\frac{5}{12}x^4y^2\beta+9y^4\beta+\frac{7}{4}x^2y^4\beta+\frac{9y^6\beta}{4}-2x\alpha1\beta-\frac{1}{3}x^3\alpha1\beta-xy^2\alpha1\beta+\alpha1^2\beta$$

■ **η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της**

$$\frac{1}{2}x^4\left(4-\frac{\alpha0}{2}+\frac{2\beta}{3}\right)+\frac{x^6\beta}{36}+\frac{5}{12}x^4y^2\beta+\frac{7}{4}x^2y^4\beta+$$
$$\frac{9y^6\beta}{4}+\frac{1}{2}x^2(-2\alpha0+24\alpha1^2+2\beta)+\frac{1}{2}x^2y^2(12-3\alpha0+8\beta)+$$
$$\frac{1}{2}y^4\left(2-\frac{9\alpha0}{2}+18\beta\right)+\frac{1}{2}y^2(-6\alpha0+12\alpha1^2+18\beta)+\frac{1}{2}x(-16\alpha1^3-4\alpha1\beta)+$$
$$\frac{1}{2}xy^2(-24\alpha1-2\alpha1\beta)+\frac{1}{2}x^3\left(-16\alpha1-\frac{2\alpha1\beta}{3}\right)+\frac{1}{2}(2\alpha0\alpha1^2+4\alpha1^4+2\alpha1^2\beta)$$

■ Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M

$$\frac{x^5\beta}{6}-x^2\alpha1(24+\beta)+x^3\left(8-\alpha0+\frac{1}{3}(4+5y^2)\beta\right)-$$
$$\alpha1(y^2(12+\beta)+2(4\alpha1^2+\beta))+x\left(-2\alpha0+24\alpha1^2+2\beta+\frac{7y^4\beta}{2}+y^2(12-3\alpha0+8\beta)\right)$$
$$-6y(\alpha0-2\alpha1^2-3\beta)+\frac{5}{6}x^4y\beta+\frac{27y^5\beta}{2}-$$
$$2xy\alpha1(12+\beta)+y^3(4-9\alpha0+36\beta)+x^2y(12-3\alpha0+8\beta+7y^2\beta)$$

■ Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας

$$-\frac{4}{9}y^2(5x^3\beta-3\alpha1(12+\beta)+3x(12-3\alpha0+8\beta+7y^2\beta))^2+$$
$$\left(-2\alpha0+24\alpha1^2+2\beta+\frac{5x^4\beta}{6}+\frac{7y^4\beta}{2}-2x\alpha1(24+\beta)+y^2(12-3\alpha0+8\beta)+\right.$$
$$\left.x^2(24-3\alpha0+4\beta+5y^2\beta)\right)\left(-6(\alpha0-2\alpha1^2-3\beta)+\frac{5x^4\beta}{6}+\frac{135y^4\beta}{2}-\right.$$
$$\left.2x\alpha1(12+\beta)+y^2(12-27\alpha0+108\beta)+x^2(12-3\alpha0+8\beta+21y^2\beta)\right)$$

```
ClearAll[es, ws, ea, wa, β, λ, Vt, Vta, x,
 y, α0, α1, α2, V1, V2, V11, V12, V21, V22, HESSIAN]
StylePrint["Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του μερικά ατελούς
   συστήματος - Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια", "Subtitle"]
StylePrint["Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)",
 "Section"]
StylePrint["Παράμετροι ελέγχου   : Δύο (λ, ea, που αντικαθίστανται με α0, α1)",
 "Section"]
Vt = 1/2 (2 (es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 +
      (ea - es - wa + ws)^4 + (18 ea^2 + 2 es^2 - 6 ea wa (6 + 3 wa^2 + ws^2) -
         2/3 es ws (6 + 3 wa^2 + ws^2) + 1/18 (6 + 3 wa^2 + ws^2)^2 (9 wa^2 + ws^2)) β +
      1/2 (12 ea^2 + 4 es^2 - (3 wa^2 + ws^2) (4 + 3 wa^2 + ws^2)) λ) /. es → 0;
StylePrint["Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση",
 "Subsection"]
Vta = Vt /. {ws → x, wa → y, λ → α0, ea → α1}
StylePrint["ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή", "Subsection"]
ExpandAll[Vta]
StylePrint["η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της", "Subsection"]
Collect[Vta, {x^(_ : 1) y^(_ : 1), x^(_ : 1), y^(_ : 1)}]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M", "Section"]
V1 = FullSimplify[∂x Vta]
V2 = FullSimplify[∂y Vta]
V11 = ∂x V1;
V12 = ∂y V1;
V21 = ∂x V2;
V22 = ∂y V2;
StylePrint ["Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας", "Section"]
HESSIAN = FullSimplify[V11 V22 - V21 V12]
```

Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του μερικά ατελούς συστήματος - Αντισυμμετρική αρχική ατέλεια

■ Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)

■ Παράμετροι ελέγχου : Δύο (λ, ea, που αντικαθίστανται με α0, α1)

▪ Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση

$$\frac{1}{2}\left(2x^4 + (-x-y+\alpha 1)^4 + (x-y+\alpha 1)^4 + \frac{1}{2}\alpha 0\,(-(x^2+3y^2)(4+x^2+3y^2) + 12\alpha 1^2) + \left(\frac{1}{18}(6+x^2+3y^2)^2(x^2+9y^2) - 6y(6+x^2+3y^2)\alpha 1 + 18\alpha 1^2\right)\beta\right)$$

■ **ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή**

$$2x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - x^2\alpha 0 - \frac{x^4\alpha 0}{4} - 3y^2\alpha 0 - \frac{3}{2}x^2y^2\alpha 0 - \frac{9y^4\alpha 0}{4} - 12x^2y\alpha 1 - 4y^3\alpha 1 +$$
$$6x^2\alpha 1^2 + 6y^2\alpha 1^2 + 3\alpha 0\,\alpha 1^2 - 4y\alpha 1^3 + \alpha 1^4 + x^2\beta + \frac{x^4\beta}{3} + \frac{x^6\beta}{36} + 9y^2\beta + 4x^2y^2\beta +$$
$$\frac{5}{12}x^4y^2\beta + 9y^4\beta + \frac{7}{4}x^2y^4\beta + \frac{9y^6\beta}{4} - 18y\alpha 1\beta - 3x^2y\alpha 1\beta - 9y^3\alpha 1\beta + 9\alpha 1^2\beta$$

■ **η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της**

$$\frac{1}{2}x^4\left(4 - \frac{\alpha 0}{2} + \frac{2\beta}{3}\right) + \frac{x^6\beta}{36} + \frac{5}{12}x^4y^2\beta + \frac{7}{4}x^2y^4\beta +$$
$$\frac{9y^6\beta}{4} + \frac{1}{2}x^2\left(-2\alpha 0 + 12\alpha 1^2 + 2\beta\right) + \frac{1}{2}x^2y^2\left(12 - 3\alpha 0 + 8\beta\right) +$$
$$\frac{1}{2}y^4\left(2 - \frac{9\alpha 0}{2} + 18\beta\right) + \frac{1}{2}y^2\left(-6\alpha 0 + 12\alpha 1^2 + 18\beta\right) + \frac{1}{2}y\left(-8\alpha 1^3 - 36\alpha 1\beta\right) +$$
$$\frac{1}{2}y^3\left(-8\alpha 1 - 18\alpha 1\beta\right) + \frac{1}{2}x^2y\left(-24\alpha 1 - 6\alpha 1\beta\right) + \frac{1}{2}\left(6\alpha 0\,\alpha 1^2 + 2\alpha 1^4 + 18\alpha 1^2\beta\right)$$

■ Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M

$$\frac{1}{6}x\left(x^4\beta + 2x^2\left(24 - 3\alpha 0 + 4\beta + 5y^2\beta\right) +\right.$$
$$\left.3\left(7y^4\beta - 12y\alpha 1\left(4 + \beta\right) + 4\left(-\alpha 0 + 6\alpha 1^2 + \beta\right) + y^2\left(24 - 6\alpha 0 + 16\beta\right)\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-6y\left(2 + x^2 + 3y^2\right)\alpha 0 + 4\left(x + y - \alpha 1\right)^3 - 4\left(x - y + \alpha 1\right)^3 +\right.$$
$$\left.\left(\left(36 + 16x^2 + \frac{5x^4}{3}\right)y + 2\left(36 + 7x^2\right)y^3 + 27y^5 - 6\left(6 + x^2\right)\alpha 1 - 54y^2\alpha 1\right)\beta\right)$$

■ Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας

$$-\frac{4}{9}x^2\left(21y^3\beta - 9\alpha 1\left(4 + \beta\right) + y\left(36 - 9\alpha 0 + 24\beta + 5x^2\beta\right)\right)^2 +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{5x^4\beta}{6} + \frac{7y^4\beta}{2} - 6y\alpha 1\left(4 + \beta\right) + 2\left(-\alpha 0 + 6\alpha 1^2 + \beta\right) + y^2\left(12 - 3\alpha 0 + 8\beta\right) +\right.$$
$$\left.x^2\left(24 - 3\alpha 0 + 4\beta + 5y^2\beta\right)\right)\left(-6\left(2\alpha 0 + y^2\left(-4 + 9\alpha 0\right) + 8y\alpha 1 - 4\alpha 1^2\right) +\right.$$
$$\left.\frac{5x^4\beta}{3} + 9\left(4 + 3y\left(8y + 5y^3 - 4\alpha 1\right)\right)\beta + x^2\left(24 - 6\alpha 0 + 16\beta + 42y^2\beta\right)\right)$$

```
ClearAll[es, ws, ea, wa, β, λ, Vt, Vtg, x,
 y, α0, α1, α2, V1, V2, V11, V12, V21, V22, HESSIAN]
StylePrint["Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του πλήρως ατελούς συστήματος",
 "Subtitle"]
StylePrint["Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)",
 "Section"]
StylePrint["Παράμετροι ελέγχου   : Τρεις (λ, es,
   ea, που αντικαθίστανται με α0, α1, α2)", "Section"]
Vt = 1/2 (2 (es - ws)^4 + (ea + es - wa - ws)^4 + (ea - es - wa + ws)^4 +
      (18 ea^2 + 2 es^2 - 6 ea wa (6 + 3 wa^2 + ws^2) - 2/3 es ws (6 + 3 wa^2 + ws^2) + 1/18 (6 + 3 wa^2 + ws^2)^2
         (9 wa^2 + ws^2)) β + 1/2 (12 ea^2 + 4 es^2 - (3 wa^2 + ws^2) (4 + 3 wa^2 + ws^2)) λ);
StylePrint["Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση",
 "Subsection"]
Vtg = Vt /. {ws → x, wa → y, λ → α0, es → α1, ea → α2}
StylePrint["ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή", "Subsection"]
ExpandAll[Vtg]
StylePrint["η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της", "Subsection"]
Collect[Vtg, {x^(_:1) y^(_:1), x^(_:1), y^(_:1)}]
StylePrint["Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M", "Section"]
V1 = FullSimplify[∂x Vtg]
V2 = FullSimplify[∂y Vtg]
V11 = ∂x V1;
V12 = ∂y V1;
V21 = ∂x V2;
V22 = ∂y V2;
StylePrint["Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας", "Section"]
HESSIAN = FullSimplify[V11 V22 - V21 V12]
```

Συνάρτηση συνολικού δυναμικού του πλήρως ατελούς συστήματος

Ενεργές συντεταγμένες: Δύο (ws, wa, που αντικαθίστανται με x, y)

Παράμετροι ελέγχου : Τρεις (λ, es, ea, που αντικαθίστανται με α0, α1, α2)

Η συνάρτηση δίδεται από την ακόλουθη συνεπτυγμένη έκφραση

$$\frac{1}{2}\left\{2\,(-x+\alpha 1)^4+(x-y-\alpha 1+\alpha 2)^4+(-x-y+\alpha 1+\alpha 2)^4+\right.$$
$$\frac{1}{2}\,\alpha 0\,\left(-(x^2+3y^2)\,(4+x^2+3y^2)+4\,\alpha 1^2+12\,\alpha 2^2\right)+\left(\frac{1}{18}\,(6+x^2+3y^2)^2\,(x^2+9y^2)-\right.$$
$$\left.\left.\frac{2}{3}\,x\,(6+x^2+3y^2)\,\alpha 1+2\,\alpha 1^2-6\,y\,(6+x^2+3y^2)\,\alpha 2+18\,\alpha 2^2\right)\beta\right)$$

■ **ενώ ανεπτυγμένη λαμβάνει τη μορφή**

$$2x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - x^2\alpha0 - \frac{x^4\alpha0}{4} - 3y^2\alpha0 - \frac{3}{2}x^2y^2\alpha0 - \frac{9y^4\alpha0}{4} - 8x^3\alpha1 - 12xy^2\alpha1 +$$
$$12x^2\alpha1^2 + 6y^2\alpha1^2 + \alpha0\alpha1^2 - 8x\alpha1^3 + 2\alpha1^4 - 12x^2y\alpha2 - 4y^3\alpha2 + 24xy\alpha1\alpha2 -$$
$$12y\alpha1^2\alpha2 + 6x^2\alpha2^2 + 6y^2\alpha2^2 + 3\alpha0\alpha2^2 - 12x\alpha1\alpha2^2 + 6\alpha1^2\alpha2^2 - 4y\alpha2^3 + \alpha2^4 +$$
$$x^2\beta + \frac{x^4\beta}{3} + \frac{x^6\beta}{36} + 9y^2\beta + 4x^2y^2\beta + \frac{5}{12}x^4y^2\beta + 9y^4\beta + \frac{7}{4}x^2y^4\beta + \frac{9y^6\beta}{4} -$$
$$2x\alpha1\beta - \frac{1}{3}x^3\alpha1\beta - xy^2\alpha1\beta + \alpha1^2\beta - 18y\alpha2\beta - 3x^2y\alpha2\beta - 9y^3\alpha2\beta + 9\alpha2^2\beta$$

■ **η οποία οδηγεί στην τελική παραγοντοποίηση της**

$$24xy\alpha1\alpha2 + \frac{1}{2}x^4\left(4 - \frac{\alpha0}{2} + \frac{2\beta}{3}\right) + \frac{x^6\beta}{36} + \frac{5}{12}x^4y^2\beta + \frac{7}{4}x^2y^4\beta +$$
$$\frac{9y^6\beta}{4} + \frac{1}{2}x^2(-2\alpha0 + 24\alpha1^2 + 12\alpha2^2 + 2\beta) + \frac{1}{2}x^2y^2(12 - 3\alpha0 + 8\beta) +$$
$$\frac{1}{2}y^4\left(2 - \frac{9\alpha0}{2} + 18\beta\right) + \frac{1}{2}y^2(-6\alpha0 + 12\alpha1^2 + 12\alpha2^2 + 18\beta) +$$
$$\frac{1}{2}x(-16\alpha1^3 - 24\alpha1\alpha2^2 - 4\alpha1\beta) + \frac{1}{2}xy^2(-24\alpha1 - 2\alpha1\beta) + \frac{1}{2}x^3\left(-16\alpha1 - \frac{2\alpha1\beta}{3}\right) +$$
$$\frac{1}{2}y(-24\alpha1^2\alpha2 - 8\alpha2^3 - 36\alpha2\beta) + \frac{1}{2}y^3(-8\alpha2 - 18\alpha2\beta) + \frac{1}{2}x^2y(-24\alpha2 - 6\alpha2\beta) +$$
$$\frac{1}{2}(2\alpha0\alpha1^2 + 4\alpha1^4 + 6\alpha0\alpha2^2 + 12\alpha1^2\alpha2^2 + 2\alpha2^4 + 2\alpha1^2\beta + 18\alpha2^2\beta)$$

■ Συμβολικός υπολογισμός του πολλαπλού καταστροφής M

$$\frac{1}{2}\left(-2x(2 + x^2 + 3y^2)\alpha0 + 8(x - \alpha1)^3 + 4(x + y - \alpha1 - \alpha2)^3 + 4(x - y - \alpha1 + \alpha2)^3 +\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}(x^5 + 2x^3(4 + 5y^2) - 6x^2\alpha1 - 6(2 + y^2)\alpha1 + 3x(4 + 16y^2 + 7y^4 - 12y\alpha2))\beta\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-6y(2 + x^2 + 3y^2)\alpha0 + 4(x + y - \alpha1 - \alpha2)^3 - 4(x - y - \alpha1 + \alpha2)^3 +\right.$$
$$\left.\left(2(36 + 7x^2)y^3 + 27y^5 + y\left(36 + 16x^2 + \frac{5x^4}{3} - 4x\alpha1\right) - 6(6 + x^2)\alpha2 - 54y^2\alpha2\right)\beta\right)$$

■ Συμβολική έκφραση της ορίζουσας ευστάθειας

$$\frac{1}{4}\left(\left(\frac{5x^4\beta}{3} + 7y^4\beta - 12y\alpha2(4 + \beta) - 4x\alpha1(24 + \beta) +\right.\right.$$
$$\left.4(-\alpha0 + 12\alpha1^2 + 6\alpha2^2 + \beta) + y^2(24 - 6\alpha0 + 16\beta) + 2x^2(24 - 3\alpha0 + 4\beta + 5y^2\beta)\right)$$
$$\left(\frac{5x^4\beta}{3} + 135y^4\beta - 4x\alpha1(12 + \beta) + 12(-\alpha0 + 2(\alpha1^2 + \alpha2^2) + 3\beta) -\right.$$
$$12y\alpha2(4 + 9\beta) + y^2(24 - 54\alpha0 + 216\beta) + x^2(24 - 6\alpha0 + 16\beta + 42y^2\beta)\Big) -$$
$$\left.\left.\frac{16}{9}(5x^3y\beta - 3\alpha1(-12\alpha2 + y(12 + \beta)) + 3x(7y^3\beta - 3\alpha2(4 + \beta) + y(12 - 3\alpha0 + 8\beta)))^2\right)\right)$$

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
β = 0.10;
A1 = 1/6 x (x^4 β + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β) + 3 (-4 α0 + 4 β + 7 y^4 β + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β)));
A2 = y^3 (4 - 9 α0) - 3 x^2 y (-4 + α0) - 6 y α0 + 1/6 y (6 + x^2 + 3 y^2) (18 + 5 x^2 + 27 y^2) β;
Solve[A1 = 0, α0];
Solve[A2 == 0, α0];
Solve[A3 = 0, α0];
FullSimplify[Eliminate[{A1 = 0, A2 = 0}, α0]];
S1 = ContourPlot3D[A1, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
   {α0, 0, 1.5}, Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}];
S2 = ContourPlot3D[A2, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α0, 0, 1.5},
   Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}];
<< Utilities`DXF`
(*aa=Show[S1,S2,AxesLabel→{"x(ws)","y(wa)","α0(λ)"}]*)
WriteDXF["Mperf.dxf", aa]
```

- Graphics3D -

Mperf.dxf

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
β = 0.10;
A1 = 1/6 x (x^4 β + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β) + 3 (-4 α0 + 4 β + 7 y^4 β + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β)));
A2 = y^3 (4 - 9 α0) - 3 x^2 y (-4 + α0) - 6 y α0 + 1/6 y (6 + x^2 + 3 y^2) (18 + 5 x^2 + 27 y^2) β;
A3 = 1/36 (-16 x^2 y^2 (36 - 9 α0 + (24 + 5 x^2 + 21 y^2) β)^2 +
      (-36 (α0 - 3 β) + 5 x^4 β + 6 x^2 (12 - 3 α0 + 8 β + 21 y^2 β) + 9 y^2 (8 - 18 α0 + 72 β + 45 y^2 β))
       (5 x^4 β - 6 x^2 (-24 + 3 α0 - 4 β - 5 y^2 β) + 3 (-4 α0 + 4 β + 7 y^4 β + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β))));
S1 = ContourPlot3D[A1, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α0, 0, 1.5},
   Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}];
S2 = ContourPlot3D[A2, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α0, 0, 1.5},
   Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}];
S3 = ContourPlot3D[A3, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α0, 0, 1.5},
   Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}];
(*Show[S1,S2,S3,AxesLabel→{"x(ws)","y(wa)","α0(λ)"}]*)

- Graphics3D -
```

```
ClearAll[x, y, β, α0, α1, RR, SS]
V1 = x^5 β/6 - x^2 α1 (24 + β) + x^3 (8 - α0 + 1/3 (4 + 5 y^2) β) -
    α1 (y^2 (12 + β) + 2 (4 α1^2 + β)) + x (-2 α0 + 24 α1^2 + 2 β + 7 y^4 β/2 + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β));
V2 = -6 y (α0 - 2 α1^2 - 3 β) + 5/6 x^4 y β + 27 y^5 β/2 - 2 x y α1 (12 + β) +
    y^3 (4 - 9 α0 + 36 β) + x^2 y (12 - 3 α0 + 8 β + 7 y^2 β);
RR = FullSimplify[Eliminate[{V1 == 0, V2 == 0}, α1]]
```

$$
\begin{aligned}
&54\, y\, (2 + x^2 + 3 y^2)\, \alpha 0 \\
&\quad \left(-108 x^2 (2 + x^2)\, \alpha 0 + 36 \left(28 y^4 + 3 y^2 (16 + 5 x^2 + 24 y^2)\, \alpha 0 + 3 (2 + x^2 + 3 y^2)^2 \alpha 0^2\right) - \right. \\
&\qquad 6 \left(-6 x^4 (2 + x^2) + 4 (402 + 69 x^2 + 5 x^4)\, y^2 + 6 (566 + 91 x^2)\, y^4 + 1296 y^6 + \right. \\
&\qquad\quad 3 (2 + x^2 + 3 y^2) (96 + 36 x^2 + 5 x^4 + 42 (5 + x^2)\, y^2 + 81 y^4)\, \alpha 0\Big)\, \beta + \\
&\qquad \left(25 x^8 + 27 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (17 + 27 y^2) + 12 x^6 (29 + 35 y^2) + 3 x^4 (695 + 1684 y^2 + \right. \\
&\qquad\quad \left. 858 y^4) + 36 x^2 (176 + 632 y^2 + 649 y^4 + 189 y^6)\right) \beta^2 + 2 x^2 (6 + x^2 + 3 y^2)\, \beta^3\Big) == \\
&\quad y \left(169344 y^6 + 3024 y^4 (5 x^4 + 6 x^2 (8 + 7 y^2) + 3 (2 + y^2) (22 + 27 y^2))\, \beta - \right. \\
&\qquad 18 \left(-9 x^{10} + 4 x^8 (-9 + 5 y^2) + 108 y^2 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (37 + 54 y^2) + \right. \\
&\qquad\quad 6 x^6 (-6 + 250 y^2 + 347 y^4) + 12 x^4 y^2 (1225 + 2558 y^2 + 1401 y^4) + \\
&\qquad\quad 9 x^2 y^2 (5664 + 17996 y^2 + 18812 y^4 + 5607 y^6)\Big)\, \beta^2 + \\
&\qquad \left(125 x^{12} + 630 x^{10} (4 + 5 y^2) + 2187 (2 + y^2)^3 (2 + 3 y^2) (5 + 9 y^2)^2 + \right. \\
&\qquad\quad 9 x^8 (2543 + 6502 y^2 + 3615 y^4) + 54 x^6 (2244 + 8671 y^2 + 9796 y^4 + 3262 y^6) + \\
&\qquad\quad 27 x^4 (14904 + 75796 y^2 + 128520 y^4 + 86124 y^6 + 19521 y^8) + \\
&\qquad\quad \left. 54 x^2 (2 + y^2) (7560 + y^2 (42614 + 27 y^2 (3007 + 2274 y^2 + 567 y^4)))\right) \\
&\qquad \left. \beta^3 + 54 x^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 \beta^4\right)
\end{aligned}
$$

```
ClearAll[x, y, β, α0, α1, RR, SS, TT]
SS = 54 y (2 + x^2 + 3 y^2) α0
    (-108 x^2 (2 + x^2) α0 + 36 (28 y^4 + 3 y^2 (16 + 5 x^2 + 24 y^2) α0 + 3 (2 + x^2 + 3 y^2)^2 α0^2) -
      6 (-6 x^4 (2 + x^2) + 4 (402 + 69 x^2 + 5 x^4) y^2 + 6 (566 + 91 x^2) y^4 + 1296 y^6 +
        3 (2 + x^2 + 3 y^2) (96 + 36 x^2 + 5 x^4 + 42 (5 + x^2) y^2 + 81 y^4) α0) β +
      (25 x^8 + 27 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (17 + 27 y^2) + 12 x^6 (29 + 35 y^2) + 3 x^4 (695 + 1684 y^2 +
          858 y^4) + 36 x^2 (176 + 632 y^2 + 649 y^4 + 189 y^6)) β^2 + 2 x^2 (6 + x^2 + 3 y^2) β^3) -
    (y (169344 y^6 + 3024 y^4 (5 x^4 + 6 x^2 (8 + 7 y^2) + 3 (2 + y^2) (22 + 27 y^2)) β -
        18 (-9 x^10 + 4 x^8 (-9 + 5 y^2) + 108 y^2 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (37 + 54 y^2) +
          6 x^6 (-6 + 250 y^2 + 347 y^4) + 12 x^4 y^2 (1225 + 2558 y^2 + 1401 y^4) +
          9 x^2 y^2 (5664 + 17996 y^2 + 18812 y^4 + 5607 y^6)) β^2 +
        (125 x^12 + 630 x^10 (4 + 5 y^2) + 2187 (2 + y^2)^3 (2 + 3 y^2) (5 + 9 y^2)^2 +
          9 x^8 (2543 + 6502 y^2 + 3615 y^4) + 54 x^6 (2244 + 8671 y^2 + 9796 y^4 + 3262 y^6) +
          27 x^4 (14904 + 75796 y^2 + 128520 y^4 + 86124 y^6 + 19521 y^8) +
          54 x^2 (2 + y^2) (7560 + y^2 (42614 + 27 y^2 (3007 + 2274 y^2 + 567 y^4)))) β^3 +
        54 x^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 β^4)) ;
TT = Collect[SS /. β → 0.1, {α0, α0^2, α0^3}]
Solve[TT == 0, α0]
```

```
-y (169344 y^6 + 0.0054 x^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 +
    302.4 y^4 (5 x^4 + 6 x^2 (8 + 7 y^2) + 3 (2 + y^2) (22 + 27 y^2)) -
    0.18 (-9 x^10 + 4 x^8 (-9 + 5 y^2) + 108 y^2 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (37 + 54 y^2) +
       6 x^6 (-6 + 250 y^2 + 347 y^4) + 12 x^4 y^2 (1225 + 2558 y^2 + 1401 y^4) +
       9 x^2 y^2 (5664 + 17996 y^2 + 18812 y^4 + 5607 y^6)) +
    0.001 (125 x^12 + 630 x^10 (4 + 5 y^2) + 2187 (2 + y^2)^3 (2 + 3 y^2) (5 + 9 y^2)^2 +
       9 x^8 (2543 + 6502 y^2 + 3615 y^4) + 54 x^6 (2244 + 8671 y^2 + 9796 y^4 + 3262 y^6) +
       27 x^4 (14904 + 75796 y^2 + 128520 y^4 + 86124 y^6 + 19521 y^8) +
       54 x^2 (2 + y^2) (7560 + y^2 (42614 + 27 y^2 (3007 + 2274 y^2 + 567 y^4))))) +
  (194.4 x^4 (2 + x^2) y (2 + x^2 + 3 y^2) - 129.6 (402 + 69 x^2 + 5 x^4) y^3 (2 + x^2 + 3 y^2) +
    54432 y^5 (2 + x^2 + 3 y^2) - 194.4 (566 + 91 x^2) y^5 (2 + x^2 + 3 y^2) -
    41990.4 y^7 (2 + x^2 + 3 y^2) + 0.108 x^2 y (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2) +
    0.54 y (2 + x^2 + 3 y^2) (25 x^8 + 27 (2 + y^2)^2 (5 + 9 y^2) (17 + 27 y^2) + 12 x^6 (29 + 35 y^2) +
       3 x^4 (695 + 1684 y^2 + 858 y^4) + 36 x^2 (176 + 632 y^2 + 649 y^4 + 189 y^6))) α0 +
  (-5832 x^2 (2 + x^2) y (2 + x^2 + 3 y^2) + 5832 y^3 (2 + x^2 + 3 y^2) (16 + 5 x^2 + 24 y^2) -
    97.2 y (2 + x^2 + 3 y^2)^2 (96 + 36 x^2 + 5 x^4 + 42 (5 + x^2) y^2 + 81 y^4))
  α0^2 + 5832 y (2 + x^2 + 3 y^2)^3 α0^3

{{α0 →
  -(0.333333 (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 - 486. x^8 - 6998.4 y^2 - 79315.2
        x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 - 6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 - 6998.4 x^2 y^4 -
       36741.6 x^4 y^4 + 141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8)) /
    (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
       52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6) +
    ((0.209987 - 0.363708 i) (-1. (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 -
           486. x^8 - 6998.4 y^2 - 79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 - 6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 -
           6998.4 x^2 y^4 - 36741.6 x^4 y^4 + 141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8)^2 +
       3. (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
           52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
        (9914.4 + 11801.4 x^2 + 6451.7 x^4 + 2279.45 x^6 + 409.32 x^8 + 13.5 x^10 -
         45820.1 y^2 - 13391.6 x^2 y^2 + 12048.6 x^4 y^2 + 3680.64 x^6 y^2 + 267.3 x^8 y^2 -
         137820. y^4 - 23506.8 x^2 y^4 + 3946.32 x^4 y^4 + 2070.36 x^6 y^4 - 117413. y^6 -
         31492.8 x^2 y^6 + 7844.04 x^4 y^6 - 63772.9 y^8 + 14565.4 x^2 y^8 + 10628.8 y^10))) /
    ((46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
       52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
     (2.539×10^10 + 9.74239×10^13 x^2 + 4.81207×10^14 x^4 + 1.01127×10^15 x^6 +
       1.19319×10^15 x^8 + 8.7187×10^14 x^10 + 4.07789×10^14 x^12 + 1.21001×10^14 x^14 +
       2.15587×10^13 x^16 + 2.01238×10^12 x^18 + 6.95271×10^10 x^20 + 6.61198×10^8 x^22 +
       2.98023×10^-8 x^24 + 4.83679×10^12 y^2 + 1.07425×10^14 x^2 y^2 + 7.95527×10^14 x^4 y^2 +
       1.94133×10^15 x^6 y^2 + 2.35798×10^15 x^8 y^2 + 1.64507×10^15 x^10 y^2 +
       6.90278×10^14 x^12 y^2 + 1.71868×10^14 x^14 y^2 + 2.34397×10^13 x^16 y^2 +
       1.41862×10^12 x^18 y^2 + 1.98359×10^10 x^20 y^2 + 0. x^22 y^2 + 3.21133×10^14 y^4 +
       7.08985×10^14 x^2 y^4 + 1.17216×10^14 x^4 y^4 - 6.42808×10^14 x^6 y^4 -
       3.58628×10^14 x^8 y^4 + 1.98168×10^14 x^10 y^4 + 2.48711×10^14 x^12 y^4 +
       8.72235×10^13 x^14 y^4 + 1.15201×10^13 x^16 y^4 + 2.67785×10^11 x^18 y^4 +
       0. x^20 y^4 + 8.28894×10^15 y^6 + 3.52041×10^16 x^2 y^6 + 4.98541×10^16 x^4 y^6 +
       3.28898×10^16 x^6 y^6 + 1.10219×10^16 x^8 y^6 + 1.9687×10^15 x^10 y^6 +
       2.70493×10^14 x^12 y^6 + 4.2117×10^13 x^14 y^6 + 2.14228×10^12 x^16 y^6 +
       0. x^18 y^6 + 6.03249×10^16 y^8 + 2.18035×10^17 x^2 y^8 + 2.64079×10^17 x^4 y^8 +
       1.44141×10^17 x^6 y^8 + 3.61322×10^16 x^8 y^8 + 3.28608×10^15 x^10 y^8 +
       1.61706×10^13 x^12 y^8 + 1.1247×10^13 x^14 y^8 + 0. x^16 y^8 + 2.08929×10^17 y^10 +
       5.86022×10^17 x^2 y^10 + 5.3437×10^17 x^4 y^10 + 1.96832×10^17 x^6 y^10 +
       2.39129×10^16 x^8 y^10 - 4.71556×10^14 x^10 y^10 + 4.04891×10^13 x^12 y^10 -
```

$$0.03125\,x^{14}y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4y^{12} +$$
$$8.57325\times10^{16}\,x^6y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}y^{12} +$$
$$0.\,x^{12}y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2y^{14} + 1.63977\times10^{17}\,x^4y^{14} -$$
$$3.8872\times10^{15}\,x^6y^{14} + 1.73525\times10^{14}\,x^8y^{14} - 0.25\,x^{10}y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} +$$
$$1.61365\times10^{17}\,x^2y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4y^{16} + 1.95215\times10^{14}\,x^6y^{16} + 1.\,x^8y^{16} +$$
$$6.40437\times10^{16}\,y^{18} - 1.64046\times10^{15}\,x^2y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4y^{18} - 0.5\,x^6y^{18} +$$
$$8.\,y^{20} + 3.90431\times10^{13}\,x^2y^{20} + 0.\,x^4y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2y^{22} + 0.\,y^{24} +$$
$$\sqrt{\Big((2.539\times10^{10} + 9.74239\times10^{13}\,x^2 + 4.81207\times10^{14}\,x^4 + 1.01127\times10^{15}\,x^6 +$$
$$1.19319\times10^{15}\,x^8 + 8.7187\times10^{14}\,x^{10} + 4.07789\times10^{14}\,x^{12} + 1.21001\times10^{14}\,x^{14} +$$
$$2.15587\times10^{13}\,x^{16} + 2.01238\times10^{12}\,x^{18} + 6.95271\times10^{10}\,x^{20} + 6.61198\times10^{8}\,x^{22} +$$
$$2.98023\times10^{-8}\,x^{24} + 4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2y^2 + 7.95527\times10^{14}$$
$$x^4y^2 + 1.94133\times10^{15}\,x^6y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8y^2 + 1.64507\times10^{15}\,x^{10}y^2 +$$
$$6.90278\times10^{14}\,x^{12}y^2 + 1.71868\times10^{14}\,x^{14}y^2 + 2.34397\times10^{13}\,x^{16}y^2 +$$
$$1.41862\times10^{12}\,x^{18}y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}y^2 + 0.\,x^{22}y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 +$$
$$7.08985\times10^{14}\,x^2y^4 + 1.17216\times10^{14}\,x^4y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6y^4 -$$
$$3.58628\times10^{14}\,x^8y^4 + 1.98168\times10^{14}\,x^{10}y^4 + 2.48711\times10^{14}\,x^{12}y^4 +$$
$$8.72235\times10^{13}\,x^{14}y^4 + 1.15201\times10^{13}\,x^{16}y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}y^4 +$$
$$0.\,x^{20}y^4 + 8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4y^6 +$$
$$3.28898\times10^{16}\,x^6y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}y^6 +$$
$$2.70493\times10^{14}\,x^{12}y^6 + 4.2117\times10^{13}\,x^{14}y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}y^6 +$$
$$0.\,x^{18}y^6 + 6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4y^8 +$$
$$1.44141\times10^{17}\,x^6y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8y^8 + 3.28608\times10^{15}\,x^{10}y^8 +$$
$$1.61706\times10^{13}\,x^{12}y^8 + 1.1247\times10^{13}\,x^{14}y^8 + 0.\,x^{16}y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} +$$
$$5.86022\times10^{17}\,x^2y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4y^{10} + 1.96832\times10^{17}\,x^6y^{10} +$$
$$2.39129\times10^{16}\,x^8y^{10} - 4.71556\times10^{14}\,x^{10}y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}y^{10} -$$
$$0.03125\,x^{14}y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4y^{12} +$$
$$8.57325\times10^{16}\,x^6y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}y^{12} +$$
$$0.\,x^{12}y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2y^{14} + 1.63977\times10^{17}\,x^4y^{14} -$$
$$3.8872\times10^{15}\,x^6y^{14} + 1.73525\times10^{14}\,x^8y^{14} - 0.25\,x^{10}y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} +$$
$$1.61365\times10^{17}\,x^2y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4y^{16} + 1.95215\times10^{14}\,x^6y^{16} + 1.\,x^8y^{16} +$$
$$6.40437\times10^{16}\,y^{18} - 1.64046\times10^{15}\,x^2y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4y^{18} - 0.5\,x^6y^{18} +$$
$$8.\,y^{20} + 3.90431\times10^{13}\,x^2y^{20} + 0.\,x^4y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2y^{22} + 0.\,y^{24}\Big)^2 +$$
$$4.\Big(-1.\,(-37324.8 - 74649.6\,x^2 - 48600.\,x^4 - 11275.2\,x^6 - 486.\,x^8 - 6998.4\,y^2 -$$
$$79315.2\,x^2y^2 - 51904.8\,x^4y^2 - 6998.4\,x^6y^2 + 199454.\,y^4 - 6998.4\,x^2y^4 -$$
$$36741.6\,x^4y^4 + 141718.\,y^6 - 83980.8\,x^2y^6 - 70858.8\,y^8)^2 +$$
$$3.\,(46656. + 69984.\,x^2 + 34992.\,x^4 + 5832.\,x^6 + 209952.\,y^2 +$$
$$209952.\,x^2y^2 + 52488.\,x^4y^2 + 314928.\,y^4 + 157464.\,x^2y^4 + 157464.\,y^6)$$
$$(9914.4 + 11801.4\,x^2 + 6451.7\,x^4 + 2279.45\,x^6 + 409.32\,x^8 +$$
$$13.5\,x^{10} - 45820.1\,y^2 - 13391.6\,x^2y^2 + 12048.6\,x^4y^2 + 3680.64\,x^6y^2 +$$
$$267.3\,x^8y^2 - 137820.\,y^4 - 23506.8\,x^2y^4 + 3946.32\,x^4y^4 +$$
$$2070.36\,x^6y^4 - 117413.\,y^6 - 31492.8\,x^2y^6 + 7844.04\,x^4y^6 -$$
$$63772.9\,y^8 + 14565.4\,x^2y^8 + 10628.8\,y^{10})\Big)^3\Big)^{(1/3)}\Big) -$$
$$\Big((0.132283 + 0.229122\,i)\,\Big(2.539\times10^{10} + 9.74239\times10^{13}\,x^2 + 4.81207\times10^{14}\,x^4 +$$
$$1.01127\times10^{15}\,x^6 + 1.19319\times10^{15}\,x^8 + 8.7187\times10^{14}\,x^{10} +$$
$$4.07789\times10^{14}\,x^{12} + 1.21001\times10^{14}\,x^{14} + 2.15587\times10^{13}\,x^{16} +$$
$$2.01238\times10^{12}\,x^{18} + 6.95271\times10^{10}\,x^{20} + 6.61198\times10^{8}\,x^{22} +$$
$$2.98023\times10^{-8}\,x^{24} + 4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2y^2 +$$
$$7.95527\times10^{14}\,x^4y^2 + 1.94133\times10^{15}\,x^6y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8y^2 +$$
$$1.64507\times10^{15}\,x^{10}y^2 + 6.90278\times10^{14}\,x^{12}y^2 + 1.71868\times10^{14}\,x^{14}y^2 +$$
$$2.34397\times10^{13}\,x^{16}y^2 + 1.41862\times10^{12}\,x^{18}y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}y^2 +$$
$$0.\,x^{22}y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 + 7.08985\times10^{14}\,x^2y^4 +$$
$$1.17216\times10^{14}\,x^4y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6y^4 - 3.58628\times10^{14}\,x^8y^4 +$$
$$1.98168\times10^{14}\,x^{10}y^4 + 2.48711\times10^{14}\,x^{12}y^4 + 8.72235\times10^{13}\,x^{14}y^4 +$$
$$1.15201\times10^{13}\,x^{16}y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}y^4 + 0.\,x^{20}y^4 +$$
$$8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4y^6 +$$
$$3.28898\times10^{16}\,x^6y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}y^6 +$$

$$2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^{6}+4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^{6}+2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^{6}+0.\,x^{18}\,y^{6}+6.03249\times10^{16}\,y^{8}+2.18035\times10^{17}\,x^{2}\,y^{8}+2.64079\times10^{17}\,x^{4}\,y^{8}+1.44141\times10^{17}\,x^{6}\,y^{8}+3.61322\times10^{16}\,x^{8}\,y^{8}+3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^{8}+1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^{8}+1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^{8}+0.\,x^{16}\,y^{8}+2.08929\times10^{17}\,y^{10}+5.86022\times10^{17}\,x^{2}\,y^{10}+5.3437\times10^{17}\,x^{4}\,y^{10}+1.96832\times10^{17}\,x^{6}\,y^{10}+2.39129\times10^{16}\,x^{8}\,y^{10}-4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10}+4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10}-0.03125\,x^{14}\,y^{10}+4.009\times10^{17}\,y^{12}+8.1348\times10^{17}\,x^{2}\,y^{12}+4.86699\times10^{17}\,x^{4}\,y^{12}+8.57325\times10^{16}\,x^{6}\,y^{12}-1.98325\times10^{15}\,x^{8}\,y^{12}+1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12}+0.\,x^{12}\,y^{12}+4.39713\times10^{17}\,y^{14}+5.73461\times10^{17}\,x^{2}\,y^{14}+1.63977\times10^{17}\,x^{4}\,y^{14}-3.8872\times10^{15}\,x^{6}\,y^{14}+1.73525\times10^{14}\,x^{8}\,y^{14}-0.25\,x^{10}\,y^{14}+2.5935\times10^{17}\,y^{16}+1.61365\times10^{17}\,x^{2}\,y^{16}-3.91839\times10^{15}\,x^{4}\,y^{16}+1.95215\times10^{14}\,x^{6}\,y^{16}+1.\,x^{8}\,y^{16}+6.40437\times10^{16}\,y^{18}-1.64046\times10^{15}\,x^{2}\,y^{18}+1.30144\times10^{14}\,x^{4}\,y^{18}-0.5\,x^{6}\,y^{18}+8.\,y^{20}+3.90431\times10^{13}\,x^{2}\,y^{20}+0.\,x^{4}\,y^{20}-1.\,y^{22}+0.5\,x^{2}\,y^{22}+0.\,y^{24}+\sqrt{\Big((2.539\times10^{10}+9.74239\times10^{13}\,x^{2}+4.81207\times10^{14}\,x^{4}+1.01127\times10^{15}\,x^{6}+1.19319\times10^{15}\,x^{8}+8.7187\times10^{14}\,x^{10}+4.07789\times10^{14}\,x^{12}+1.21001\times10^{14}\,x^{14}+2.15587\times10^{13}\,x^{16}+2.01238\times10^{12}\,x^{18}+6.95271\times10^{10}\,x^{20}+6.61198\times10^{8}\,x^{22}+2.98023\times10^{-8}\,x^{24}+4.83679\times10^{12}\,y^{2}+1.07425\times10^{14}\,x^{2}\,y^{2}+7.95527\times10^{14}\,x^{4}\,y^{2}+1.94133\times10^{15}\,x^{6}\,y^{2}+2.35798\times10^{15}\,x^{8}\,y^{2}+1.64507\times10^{15}\,x^{10}\,y^{2}+6.90278\times10^{14}\,x^{12}\,y^{2}+1.71868\times10^{14}\,x^{14}\,y^{2}+2.34397\times10^{13}\,x^{16}\,y^{2}+1.41862\times10^{12}\,x^{18}\,y^{2}+1.98359\times10^{10}\,x^{20}\,y^{2}+0.\,x^{22}\,y^{2}+3.21133\times10^{14}\,y^{4}+7.08985\times10^{14}\,x^{2}\,y^{4}+1.17216\times10^{14}\,x^{4}\,y^{4}-6.42808\times10^{14}\,x^{6}\,y^{4}-3.58628\times10^{14}\,x^{8}\,y^{4}+1.98168\times10^{14}\,x^{10}\,y^{4}+2.48711\times10^{14}\,x^{12}\,y^{4}+8.72235\times10^{13}\,x^{14}\,y^{4}+1.15201\times10^{13}\,x^{16}\,y^{4}+2.67785\times10^{11}\,x^{18}\,y^{4}+0.\,x^{20}\,y^{4}+8.28894\times10^{15}\,y^{6}+3.52041\times10^{16}\,x^{2}\,y^{6}+4.98541\times10^{16}\,x^{4}\,y^{6}+3.28898\times10^{16}\,x^{6}\,y^{6}+1.10219\times10^{16}\,x^{8}\,y^{6}+1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^{6}+2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^{6}+4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^{6}+2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^{6}+0.\,x^{18}\,y^{6}+6.03249\times10^{16}\,y^{8}+2.18035\times10^{17}\,x^{2}\,y^{8}+2.64079\times10^{17}\,x^{4}\,y^{8}+1.44141\times10^{17}\,x^{6}\,y^{8}+3.61322\times10^{16}\,x^{8}\,y^{8}+3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^{8}+1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^{8}+1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^{8}+0.\,x^{16}\,y^{8}+2.08929\times10^{17}\,y^{10}+5.86022\times10^{17}\,x^{2}\,y^{10}+5.3437\times10^{17}\,x^{4}\,y^{10}+1.96832\times10^{17}\,x^{6}\,y^{10}+2.39129\times10^{16}\,x^{8}\,y^{10}-4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10}+4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10}-0.03125\,x^{14}\,y^{10}+4.009\times10^{17}\,y^{12}+8.1348\times10^{17}\,x^{2}\,y^{12}+4.86699\times10^{17}\,x^{4}\,y^{12}+8.57325\times10^{16}\,x^{6}\,y^{12}-1.98325\times10^{15}\,x^{8}\,y^{12}+1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12}+0.\,x^{12}\,y^{12}+4.39713\times10^{17}\,y^{14}+5.73461\times10^{17}\,x^{2}\,y^{14}+1.63977\times10^{17}\,x^{4}\,y^{14}-3.8872\times10^{15}\,x^{6}\,y^{14}+1.73525\times10^{14}\,x^{8}\,y^{14}-0.25\,x^{10}\,y^{14}+2.5935\times10^{17}\,y^{16}+1.61365\times10^{17}\,x^{2}\,y^{16}-3.91839\times10^{15}\,x^{4}\,y^{16}+1.95215\times10^{14}\,x^{6}\,y^{16}+1.\,x^{8}\,y^{16}+6.40437\times10^{16}\,y^{18}-1.64046\times10^{15}\,x^{2}\,y^{18}+1.30144\times10^{14}\,x^{4}\,y^{18}-0.5\,x^{6}\,y^{18}+8.\,y^{20}+3.90431\times10^{13}\,x^{2}\,y^{20}+0.\,x^{4}\,y^{20}-1.\,y^{22}+0.5\,x^{2}\,y^{22}+0.\,y^{24}\Big)^{2}+4.\Big(-1.\,\big(-37324.8-74649.6\,x^{2}-48600.\,x^{4}-11275.2\,x^{6}-486.\,x^{8}-6998.4\,y^{2}-79315.2\,x^{2}\,y^{2}-51904.8\,x^{4}\,y^{2}-6998.4\,x^{6}\,y^{2}+199454.\,y^{4}-6998.4\,x^{2}\,y^{4}-36741.6\,x^{4}\,y^{4}+141718.\,y^{6}-83980.8\,x^{2}\,y^{6}-70858.8\,y^{8}\big)^{2}+3.\,\big(46656.+69984.\,x^{2}+34992.\,x^{4}+5832.\,x^{6}+209952.\,y^{2}+209952.\,x^{2}\,y^{2}+52488.\,x^{4}\,y^{2}+314928.\,y^{4}+157464.\,x^{2}\,y^{4}+157464.\,y^{6}\big)\,\big(9914.4+11801.4\,x^{2}+6451.7\,x^{4}+2279.45\,x^{6}+409.32\,x^{8}+13.5\,x^{10}-45820.1\,y^{2}-13391.6\,x^{2}\,y^{2}+12048.6\,x^{4}\,y^{2}+3680.64\,x^{6}\,y^{2}+267.3\,x^{8}\,y^{2}-137820.\,y^{4}-23506.8\,x^{2}\,y^{4}+3946.32\,x^{4}\,y^{4}+2070.36\,x^{6}\,y^{4}-117413.\,y^{6}-31492.8\,x^{2}\,y^{6}+7844.04\,x^{4}\,y^{6}-63772.9\,y^{8}+14565.4\,x^{2}\,y^{8}+10628.8\,y^{10}\big)^{3}\Big)^{(1/3)}\Big)\Big/\big(46656.+69984.\,x^{2}+34992.\,x^{4}+5832.\,x^{6}+209952.\,y^{2}+209952.\,x^{2}\,y^{2}+52488.\,x^{4}\,y^{2}+314928.\,y^{4}+157464.\,x^{2}\,y^{4}+157464.\,y^{6}\big)$$

```
      x^2
      y^4 + 157464.
      y^6)},
 {α0 → -(0.333333 (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 -
        486. x^8 - 6998.4 y^2 - 79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 -
        6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 - 6998.4 x^2 y^4 - 36741.6 x^4 y^4 +
        141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8)) /
      (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 +
       209952. x^2 y^2 +
       52488. x^4 y^2 +
       314928. y^4 +
       157464. x^2 y^4 +
       157464. y^6) +
     ((0.209987 + 0.363708 i) (-1. (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 -
          486. x^8 - 6998.4 y^2 - 79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 - 6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 -
          6998.4 x^2 y^4 - 36741.6 x^4 y^4 + 141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8) ^2 +
       3. (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
          52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
        (9914.4 + 11801.4 x^2 + 6451.7 x^4 + 2279.45 x^6 + 409.32 x^8 + 13.5 x^10 -
          45820.1 y^2 - 13391.6 x^2 y^2 + 12048.6 x^4 y^2 + 3680.64 x^6 y^2 + 267.3 x^8 y^2 -
          137820. y^4 - 23506.8 x^2 y^4 + 3946.32 x^4 y^4 + 2070.36 x^6 y^4 - 117413. y^6 -
          31492.8 x^2 y^6 + 7844.04 x^4 y^6 - 63772.9 y^8 + 14565.4 x^2 y^8 + 10628.8 y^10))) /
     ((46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
       52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
      (2.539×10^10 + 9.74239×10^13 x^2 + 4.81207×10^14 x^4 + 1.01127×10^15 x^6 +
        1.19319×10^15 x^8 + 8.7187×10^14 x^10 + 4.07789×10^14 x^12 +
        1.21001×10^14 x^14 + 2.15587×10^13 x^16 + 2.01238×10^12 x^18 +
        6.95271×10^10 x^20 + 6.61198×10^8 x^22 + 2.98023×10^-8 x^24 +
        4.83679×10^12 y^2 + 1.07425×10^14 x^2 y^2 + 7.95527×10^14 x^4 y^2 +
        1.94133×10^15 x^6 y^2 + 2.35798×10^15 x^8 y^2 + 1.64507×10^15 x^10 y^2 +
        6.90278×10^14 x^12 y^2 + 1.71868×10^14 x^14 y^2 + 2.34397×10^13 x^16 y^2 +
        1.41862×10^12 x^18 y^2 + 1.98359×10^10 x^20 y^2 + 0. x^22 y^2 +
        3.21133×10^14 y^4 + 7.08985×10^14 x^2 y^4 + 1.17216×10^14 x^4 y^4 -
        6.42808×10^14 x^6 y^4 - 3.58628×10^14 x^8 y^4 + 1.98168×10^14 x^10 y^4 +
        2.48711×10^14 x^12 y^4 + 8.72235×10^13 x^14 y^4 + 1.15201×10^13 x^16 y^4 +
        2.67785×10^11 x^18 y^4 + 0. x^20 y^4 + 8.28894×10^15 y^6 +
        3.52041×10^16 x^2 y^6 + 4.98541×10^16 x^4 y^6 + 3.28898×10^16 x^6 y^6 +
        1.10219×10^16 x^8 y^6 + 1.9687×10^15 x^10 y^6 + 2.70493×10^14 x^12 y^6 +
        4.2117×10^13 x^14 y^6 + 2.14228×10^12 x^16 y^6 + 0. x^18 y^6 +
        6.03249×10^16 y^8 + 2.18035×10^17 x^2 y^8 + 2.64079×10^17 x^4 y^8 +
        1.44141×10^17 x^6 y^8 + 3.61322×10^16 x^8 y^8 + 3.28608×10^15 x^10 y^8 +
        1.61706×10^13 x^12 y^8 + 1.1247×10^13 x^14 y^8 + 0. x^16 y^8 +
        2.08929×10^17 y^10 + 5.86022×10^17 x^2 y^10 + 5.3437×10^17 x^4 y^10 +
        1.96832×10^17 x^6 y^10 + 2.39129×10^16 x^8 y^10 - 4.71556×10^14 x^10 y^10 +
        4.04891×10^13 x^12 y^10 - 0.03125 x^14 y^10 + 4.009×10^17 y^12 +
        8.1348×10^17 x^2 y^12 + 4.86699×10^17 x^4 y^12 + 8.57325×10^16 x^6 y^12 -
        1.98325×10^15 x^8 y^12 + 1.01223×10^14 x^10 y^12 + 0. x^12 y^12 +
        4.39713×10^17 y^14 + 5.73461×10^17 x^2 y^14 + 1.63977×10^17 x^4 y^14 -
        3.8872×10^15 x^6 y^14 + 1.73525×10^14 x^8 y^14 - 0.25 x^10 y^14 +
        2.5935×10^17 y^16 + 1.61365×10^17 x^2 y^16 - 3.91839×10^15 x^4 y^16 +
        1.95215×10^14 x^6 y^16 + 1. x^8 y^16 + 6.40437×10^16 y^18 -
        1.64046×10^15 x^2 y^18 + 1.30144×10^14 x^4 y^18 - 0.5 x^6 y^18 + 8. y^20 +
        3.90431×10^13 x^2 y^20 + 0. x^4 y^20 - 1. y^22 + 0.5 x^2 y^22 + 0. y^24 +
        √((2.539×10^10 + 9.74239×10^13 x^2 + 4.81207×10^14 x^4 + 1.01127×10^15 x^6 +
            1.19319×10^15 x^8 + 8.7187×10^14 x^10 + 4.07789×10^14 x^12 + 1.21001×10^14 x^14 +
            2.15587×10^13 x^16 + 2.01238×10^12 x^18 + 6.95271×10^10 x^20 + 6.61198×10^8 x^22 +
```

$$2.98023\times10^{-8}\,x^{24} + 4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2\,y^2 + 7.95527\times10^{14}\,x^4\,y^2 + 1.94133\times10^{15}\,x^6\,y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8\,y^2 + 1.64507\times10^{15}\,x^{10}\,y^2 + 6.90278\times10^{14}\,x^{12}\,y^2 + 1.71868\times10^{14}\,x^{14}\,y^2 + 2.34397\times10^{13}\,x^{16}\,y^2 + 1.41862\times10^{12}\,x^{18}\,y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}\,y^2 + 0.\,x^{22}\,y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 + 7.08985\times10^{14}\,x^2\,y^4 + 1.17216\times10^{14}\,x^4\,y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6\,y^4 - 3.58628\times10^{14}\,x^8\,y^4 + 1.98168\times10^{14}\,x^{10}\,y^4 + 2.48711\times10^{14}\,x^{12}\,y^4 + 8.72235\times10^{13}\,x^{14}\,y^4 + 1.15201\times10^{13}\,x^{16}\,y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}\,y^4 + 0.\,x^{20}\,y^4 + 8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2\,y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4\,y^6 + 3.28898\times10^{16}\,x^6\,y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8\,y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^6 + 2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^6 + 4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 + 6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2\,y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4\,y^8 + 1.44141\times10^{17}\,x^6\,y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8\,y^8 + 3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 + 1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^8 + 1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^8 + 0.\,x^{16}\,y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} + 5.86022\times10^{17}\,x^2\,y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4\,y^{10} + 1.96832\times10^{17}\,x^6\,y^{10} + 2.39129\times10^{16}\,x^8\,y^{10} - 4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10} - 0.03125\,x^{14}\,y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2\,y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4\,y^{12} + 8.57325\times10^{16}\,x^6\,y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12} + 0.\,x^{12}\,y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2\,y^{14} + 1.63977\times10^{17}\,x^4\,y^{14} - 3.8872\times10^{15}\,x^6\,y^{14} + 1.73525\times10^{14}\,x^8\,y^{14} - 0.25\,x^{10}\,y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} + 1.61365\times10^{17}\,x^2\,y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4\,y^{16} + 1.95215\times10^{14}\,x^6\,y^{16} + 1.\,x^8\,y^{16} + 6.40437\times10^{16}\,y^{18} - 1.64046\times10^{15}\,x^2\,y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4\,y^{18} - 0.5\,x^6\,y^{18} + 8.\,y^{20} + 3.90431\times10^{13}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2\,y^{22} + 0.\,y^{24})^2 + 4.\,(-1.\,(-37324.8 - 74649.6\,x^2 - 48600.\,x^4 - 11275.2\,x^6 - 486.\,x^8 - 6998.4\,y^2 - 79315.2\,x^2\,y^2 - 51904.8\,x^4\,y^2 - 6998.4\,x^6\,y^2 + 199454.\,y^4 - 6998.4\,x^2\,y^4 - 36741.6\,x^4\,y^4 + 141718.\,y^6 - 83980.8\,x^2\,y^6 - 70858.8\,y^8)^2 + 3.\,(46656. + 69984.\,x^2 + 34992.\,x^4 + 5832.\,x^6 + 209952.\,y^2 + 209952.\,x^2\,y^2 + 52488.\,x^4\,y^2 + 314928.\,y^4 + 157464.\,x^2\,y^4 + 157464.\,y^6)\,(9914.4 + 11801.4\,x^2 + 6451.7\,x^4 + 2279.45\,x^6 + 409.32\,x^8 + 13.5\,x^{10} - 45820.1\,y^2 - 13391.6\,x^2\,y^2 + 12048.6\,x^4\,y^2 + 3680.64\,x^6\,y^2 + 267.3\,x^8\,y^2 - 137820.\,y^4 - 23506.8\,x^2\,y^4 + 3946.32\,x^4\,y^4 + 2070.36\,x^6\,y^4 - 117413.\,y^6 - 31492.8\,x^2\,y^6 + 7844.04\,x^4\,y^6 - 63772.9\,y^8 + 14565.4\,x^2\,y^8 + 10628.8\,y^{10}))^3))^{(1/3)} - \big((0.132283 - 0.229122\,i)\,(2.539\times10^{10} + 9.74239\times10^{13}\,x^2 + 4.81207\times10^{14}\,x^4 + 1.01127\times10^{15}\,x^6 + 1.19319\times10^{15}\,x^8 + 8.7187\times10^{14}\,x^{10} + 4.07789\times10^{14}\,x^{12} + 1.21001\times10^{14}\,x^{14} + 2.15587\times10^{13}\,x^{16} + 2.01238\times10^{12}\,x^{18} + 6.95271\times10^{10}\,x^{20} + 6.61198\times10^{8}\,x^{22} + 2.98023\times10^{-8}\,x^{24} + 4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2\,y^2 + 7.95527\times10^{14}\,x^4\,y^2 + 1.94133\times10^{15}\,x^6\,y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8\,y^2 + 1.64507\times10^{15}\,x^{10}\,y^2 + 6.90278\times10^{14}\,x^{12}\,y^2 + 1.71868\times10^{14}\,x^{14}\,y^2 + 2.34397\times10^{13}\,x^{16}\,y^2 + 1.41862\times10^{12}\,x^{18}\,y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}\,y^2 + 0.\,x^{22}\,y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 + 7.08985\times10^{14}\,x^2\,y^4 + 1.17216\times10^{14}\,x^4\,y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6\,y^4 - 3.58628\times10^{14}\,x^8\,y^4 + 1.98168\times10^{14}\,x^{10}\,y^4 + 2.48711\times10^{14}\,x^{12}\,y^4 + 8.72235\times10^{13}\,x^{14}\,y^4 + 1.15201\times10^{13}\,x^{16}\,y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}\,y^4 + 0.\,x^{20}\,y^4 + 8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2\,y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4\,y^6 + 3.28898\times10^{16}\,x^6\,y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8\,y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^6 + 2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^6 + 4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 + 6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2\,y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4\,y^8 + 1.44141\times10^{17}\,x^6\,y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8\,y^8 + 3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 + 1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^8 + 1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^8 + 0.\,x^{16}\,y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} + 5.86022\times10^{17}\,x^2\,y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4\,y^{10} + 1.96832\times10^{17}\,x^6\,y^{10} + 2.39129\times10^{16}\,x^8\,y^{10} - 4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10} - 0.03125\,x^{14}\,y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2\,y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4\,y^{12} + 8.57325\times10^{16}\,x^6\,y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12} + 0.\,x^{12}\,y^{12} +$$

```
4.39713×10^17 y^14 + 5.73461×10^17 x^2 y^14 + 1.63977×10^17 x^4 y^14 -
3.8872×10^15 x^6 y^14 + 1.73525×10^14 x^8 y^14 - 0.25 x^10 y^14 +
2.5935×10^17 y^16 + 1.61365×10^17 x^2 y^16 - 3.91839×10^15 x^4 y^16 +
1.95215×10^14 x^6 y^16 + 1. x^8 y^16 + 6.40437×10^16 y^18 -
1.64046×10^15 x^2 y^18 + 1.30144×10^14 x^4 y^18 - 0.5 x^6 y^18 + 8. y^20 +
3.90431×10^13 x^2 y^20 + 0. x^4 y^20 - 1. y^22 + 0.5 x^2 y^22 + 0. y^24 +
√((2.539×10^10 + 9.74239×10^13 x^2 + 4.81207×10^14 x^4 + 1.01127×10^15 x^6 +
      1.19319×10^15 x^8 + 8.7187×10^14 x^10 + 4.07789×10^14 x^12 + 1.21001×10^14 x^14 +
      2.15587×10^13 x^16 + 2.01238×10^12 x^18 + 6.95271×10^10 x^20 + 6.61198×10^8 x^22 +
      2.98023×10^-8 x^24 + 4.83679×10^12 y^2 + 1.07425×10^14 x^2 y^2 + 7.95527×10^14
       x^4 y^2 + 1.94133×10^15 x^6 y^2 + 2.35798×10^15 x^8 y^2 + 1.64507×10^15 x^10 y^2 +
      6.90278×10^14 x^12 y^2 + 1.71868×10^14 x^14 y^2 + 2.34397×10^13 x^16 y^2 +
      1.41862×10^12 x^18 y^2 + 1.98359×10^10 x^20 y^2 + 0. x^22 y^2 + 3.21133×10^14 y^4 +
      7.08985×10^14 x^2 y^4 + 1.17216×10^14 x^4 y^4 - 6.42808×10^14 x^6 y^4 -
      3.58628×10^14 x^8 y^4 + 1.98168×10^14 x^10 y^4 + 2.48711×10^14 x^12 y^4 +
      8.72235×10^13 x^14 y^4 + 1.15201×10^13 x^16 y^4 + 2.67785×10^11 x^18 y^4 +
      0. x^20 y^4 + 8.28894×10^15 y^6 + 3.52041×10^16 x^2 y^6 + 4.98541×10^16 x^4 y^6 +
      3.28898×10^16 x^6 y^6 + 1.10219×10^16 x^8 y^6 + 1.9687×10^15 x^10 y^6 +
      2.70493×10^14 x^12 y^6 + 4.2117×10^13 x^14 y^6 + 2.14228×10^12 x^16 y^6 +
      0. x^18 y^6 + 6.03249×10^16 y^8 + 2.18035×10^17 x^2 y^8 + 2.64079×10^17 x^4 y^8 +
      1.44141×10^17 x^6 y^8 + 3.61322×10^16 x^8 y^8 + 3.28608×10^15 x^10 y^8 +
      1.61706×10^13 x^12 y^8 + 1.1247×10^13 x^14 y^8 + 0. x^16 y^8 + 2.08929×10^17 y^10 +
      5.86022×10^17 x^2 y^10 + 5.3437×10^17 x^4 y^10 + 1.96832×10^17 x^6 y^10 +
      2.39129×10^16 x^8 y^10 - 4.71556×10^14 x^10 y^10 + 4.04891×10^13 x^12 y^10 -
      0.03125 x^14 y^10 + 4.009×10^17 y^12 + 8.1348×10^17 x^2 y^12 + 4.86699×10^17 x^4 y^12 +
      8.57325×10^16 x^6 y^12 - 1.98325×10^15 x^8 y^12 + 1.01223×10^14 x^10 y^12 +
      0. x^12 y^12 + 4.39713×10^17 y^14 + 5.73461×10^17 x^2 y^14 + 1.63977×10^17 x^4 y^14 -
      3.8872×10^15 x^6 y^14 + 1.73525×10^14 x^8 y^14 - 0.25 x^10 y^14 + 2.5935×10^17 y^16 +
      1.61365×10^17 x^2 y^16 - 3.91839×10^15 x^4 y^16 + 1.95215×10^14 x^6 y^16 + 1. x^8 y^16 +
      6.40437×10^16 y^18 - 1.64046×10^15 x^2 y^18 + 1.30144×10^14 x^4 y^18 - 0.5 x^6 y^18 +
      8. y^20 + 3.90431×10^13 x^2 y^20 + 0. x^4 y^20 - 1. y^22 + 0.5 x^2 y^22 + 0. y^24) ^2 +
   4. (-1. (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 - 486. x^8 - 6998.4 y^2 -
         79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 - 6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 - 6998.4 x^2 y^4 -
         36741.6 x^4 y^4 + 141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8) ^2 +
      3. (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952.
         x^2 y^2 + 52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6) (9914.4 +
        11801.4 x^2 + 6451.7 x^4 + 2279.45 x^6 + 409.32 x^8 + 13.5 x^10 - 45820.1 y^2 -
        13391.6 x^2 y^2 + 12048.6 x^4 y^2 + 3680.64 x^6 y^2 + 267.3 x^8 y^2 - 137820. y^4 -
        23506.8 x^2 y^4 + 3946.32 x^4 y^4 + 2070.36 x^6 y^4 - 117413. y^6 - 31492.8 x^2
         y^6 + 7844.04 x^4 y^6 - 63772.9 y^8 + 14565.4 x^2 y^8 + 10628.8 y^10)) ^3)) ^
(1 / 3)) / (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952.
y^2 + 209952.
x^2
y^2 + 52488.
x^4
y^2 + 314928.
y^4 + 157464.
x^2
y^4 + 157464.
y^6)},
{α0 → -(0.333333 (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 -
      486. x^8 - 6998.4 y^2 - 79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 -
      6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 - 6998.4 x^2 y^4 - 36741.6 x^4 y^4 +
      141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8)) /
   (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 +
    209952. x^2 y^2 +
```

```
      52488. x^4 y^2 +
      314928. y^4 +
      157464. x^2 y^4 +
      157464. y^6) -
   (0.419974 (-1. (-37324.8 - 74649.6 x^2 - 48600. x^4 - 11275.2 x^6 - 486. x^8 -
         6998.4 y^2 - 79315.2 x^2 y^2 - 51904.8 x^4 y^2 - 6998.4 x^6 y^2 + 199454. y^4 -
         6998.4 x^2 y^4 - 36741.6 x^4 y^4 + 141718. y^6 - 83980.8 x^2 y^6 - 70858.8 y^8) ^ 2 +
      3. (46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
         52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 + 157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
       (9914.4 + 11801.4 x^2 + 6451.7 x^4 + 2279.45 x^6 + 409.32 x^8 + 13.5 x^10 -
         45820.1 y^2 - 13391.6 x^2 y^2 + 12048.6 x^4 y^2 + 3680.64 x^6 y^2 + 267.3 x^8 y^2 -
         137820. y^4 - 23506.8 x^2 y^4 + 3946.32 x^4 y^4 + 2070.36 x^6 y^4 - 117413. y^6 -
         31492.8 x^2 y^6 + 7844.04 x^4 y^6 - 63772.9 y^8 + 14565.4 x^2 y^8 + 10628.8 y^10))) /
   ((46656. + 69984. x^2 + 34992. x^4 + 5832. x^6 + 209952. y^2 + 209952. x^2 y^2 +
      52488. x^4 y^2 + 314928. y^4 +
      157464. x^2 y^4 + 157464. y^6)
     (2.539*10^10 + 9.74239*10^13 x^2 + 4.81207*10^14 x^4 + 1.01127*10^15 x^6 +
       1.19319*10^15 x^8 + 8.7187*10^14 x^10 + 4.07789*10^14 x^12 +
       1.21001*10^14 x^14 + 2.15587*10^13 x^16 + 2.01238*10^12 x^18 +
       6.95271*10^10 x^20 + 6.61198*10^8 x^22 + 2.98023*10^-8 x^24 +
       4.83679*10^12 y^2 + 1.07425*10^14 x^2 y^2 + 7.95527*10^14 x^4 y^2 +
       1.94133*10^15 x^6 y^2 + 2.35798*10^15 x^8 y^2 + 1.64507*10^15 x^10 y^2 +
       6.90278*10^14 x^12 y^2 + 1.71868*10^14 x^14 y^2 + 2.34397*10^13 x^16 y^2 +
       1.41862*10^12 x^18 y^2 + 1.98359*10^10 x^20 y^2 + 0. x^22 y^2 +
       3.21133*10^14 y^4 + 7.08985*10^14 x^2 y^4 + 1.17216*10^14 x^4 y^4 -
       6.42808*10^14 x^6 y^4 - 3.58628*10^14 x^8 y^4 + 1.98168*10^14 x^10 y^4 +
       2.48711*10^14 x^12 y^4 + 8.72235*10^13 x^14 y^4 + 1.15201*10^13 x^16 y^4 +
       2.67785*10^11 x^18 y^4 + 0. x^20 y^4 + 8.28894*10^15 y^6 +
       3.52041*10^16 x^2 y^6 + 4.98541*10^16 x^4 y^6 + 3.28898*10^16 x^6 y^6 +
       1.10219*10^16 x^8 y^6 + 1.9687*10^15 x^10 y^6 + 2.70493*10^14 x^12 y^6 +
       4.2117*10^13 x^14 y^6 + 2.14228*10^12 x^16 y^6 + 0. x^18 y^6 +
       6.03249*10^16 y^8 + 2.18035*10^17 x^2 y^8 + 2.64079*10^17 x^4 y^8 +
       1.44141*10^17 x^6 y^8 + 3.61322*10^16 x^8 y^8 + 3.28608*10^15 x^10 y^8 +
       1.61706*10^13 x^12 y^8 + 1.1247*10^13 x^14 y^8 + 0. x^16 y^8 +
       2.08929*10^17 y^10 + 5.86022*10^17 x^2 y^10 + 5.3437*10^17 x^4 y^10 +
       1.96832*10^17 x^6 y^10 + 2.39129*10^16 x^8 y^10 -
       4.71556*10^14 x^10 y^10 + 4.04891*10^13 x^12 y^10 -
       0.03125 x^14 y^10 + 4.009*10^17 y^12 + 8.1348*10^17 x^2 y^12 +
       4.86699*10^17 x^4 y^12 + 8.57325*10^16 x^6 y^12 -
       1.98325*10^15 x^8 y^12 + 1.01223*10^14 x^10 y^12 + 0. x^12 y^12 +
       4.39713*10^17 y^14 + 5.73461*10^17 x^2 y^14 + 1.63977*10^17 x^4 y^14 -
       3.8872*10^15 x^6 y^14 + 1.73525*10^14 x^8 y^14 - 0.25 x^10 y^14 +
       2.5935*10^17 y^16 + 1.61365*10^17 x^2 y^16 - 3.91839*10^15 x^4 y^16 +
       1.95215*10^14 x^6 y^16 + 1. x^8 y^16 + 6.40437*10^16 y^18 -
       1.64046*10^15 x^2 y^18 + 1.30144*10^14 x^4 y^18 - 0.5 x^6 y^18 + 8. y^20 +
       3.90431*10^13 x^2 y^20 + 0. x^4 y^20 - 1. y^22 + 0.5 x^2 y^22 + 0. y^24 +
       √((2.539*10^10 + 9.74239*10^13 x^2 + 4.81207*10^14 x^4 + 1.01127*10^15 x^6 +
           1.19319*10^15 x^8 + 8.7187*10^14 x^10 + 4.07789*10^14 x^12 + 1.21001*10^14 x^14 +
           2.15587*10^13 x^16 + 2.01238*10^12 x^18 + 6.95271*10^10 x^20 + 6.61198*10^8 x^22 +
           2.98023*10^-8 x^24 + 4.83679*10^12 y^2 + 1.07425*10^14 x^2 y^2 + 7.95527*10^14
            x^4 y^2 + 1.94133*10^15 x^6 y^2 + 2.35798*10^15 x^8 y^2 + 1.64507*10^15 x^10 y^2 +
           6.90278*10^14 x^12 y^2 + 1.71868*10^14 x^14 y^2 + 2.34397*10^13 x^16 y^2 +
           1.41862*10^12 x^18 y^2 + 1.98359*10^10 x^20 y^2 + 0. x^22 y^2 + 3.21133*10^14 y^4 +
           7.08985*10^14 x^2 y^4 + 1.17216*10^14 x^4 y^4 - 6.42808*10^14 x^6 y^4 -
           3.58628*10^14 x^8 y^4 + 1.98168*10^14 x^10 y^4 + 2.48711*10^14 x^12 y^4 +
           8.72235*10^13 x^14 y^4 + 1.15201*10^13 x^16 y^4 + 2.67785*10^11 x^18 y^4 +
```

$$0.\,x^{20}\,y^4 + 8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2\,y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4\,y^6 +$$
$$3.28898\times10^{16}\,x^6\,y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8\,y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^6 +$$
$$2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^6 + 4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^6 +$$
$$0.\,x^{18}\,y^6 + 6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2\,y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4\,y^8 +$$
$$1.44141\times10^{17}\,x^6\,y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8\,y^8 + 3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 +$$
$$1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^8 + 1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^8 + 0.\,x^{16}\,y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} +$$
$$5.86022\times10^{17}\,x^2\,y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4\,y^{10} + 1.96832\times10^{17}\,x^6\,y^{10} +$$
$$2.39129\times10^{16}\,x^8\,y^{10} - 4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10} +$$
$$0.03125\,x^{14}\,y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2\,y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4\,y^{12} +$$
$$8.57325\times10^{16}\,x^6\,y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12} +$$
$$0.\,x^{12}\,y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2\,y^{14} + 1.63977\times10^{17}\,x^4\,y^{14} -$$
$$3.8872\times10^{15}\,x^6\,y^{14} + 1.73525\times10^{14}\,x^8\,y^{14} - 0.25\,x^{10}\,y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} +$$
$$1.61365\times10^{17}\,x^2\,y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4\,y^{16} + 1.95215\times10^{14}\,x^6\,y^{16} + 1.\,x^8\,y^{16} +$$
$$6.40437\times10^{16}\,y^{18} - 1.64046\times10^{15}\,x^2\,y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4\,y^{18} - 0.5\,x^6\,y^{18} +$$
$$8.\,y^{20} + 3.90431\times10^{13}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2\,y^{22} + 0.\,y^{24})\,\hat{}\,2 +$$
$$4.\,(-1.\,(-37324.8 - 74649.6\,x^2 - 48600.\,x^4 - 11275.2\,x^6 - 486.\,x^8 - 6998.4\,y^2 -$$
$$79315.2\,x^2\,y^2 - 51904.8\,x^4\,y^2 - 6998.4\,x^6\,y^2 + 199454.\,y^4 - 6998.4\,x^2\,y^4 -$$
$$36741.6\,x^4\,y^4 + 141718.\,y^6 - 83980.8\,x^2\,y^6 - 70858.8\,y^8)\,\hat{}\,2 +$$
$$3.\,(46656. + 69984.\,x^2 + 34992.\,x^4 + 5832.\,x^6 + 209952.\,y^2 +$$
$$209952.\,x^2\,y^2 + 52488.\,x^4\,y^2 + 314928.\,y^4 + 157464.\,x^2\,y^4 + 157464.\,y^6)$$
$$(9914.4 + 11801.4\,x^2 + 6451.7\,x^4 + 2279.45\,x^6 + 409.32\,x^8 +$$
$$13.5\,x^{10} - 45820.1\,y^2 - 13391.6\,x^2\,y^2 + 12048.6\,x^4\,y^2 + 3680.64\,x^6\,y^2 +$$
$$267.3\,x^8\,y^2 - 137820.\,y^4 - 23506.8\,x^2\,y^4 + 3946.32\,x^4\,y^4 +$$
$$2070.36\,x^6\,y^4 - 117413.\,y^6 - 31492.8\,x^2\,y^6 + 7844.04\,x^4\,y^6 -$$
$$63772.9\,y^8 + 14565.4\,x^2\,y^8 + 10628.8\,y^{10}))\,\hat{}\,3)\big)\,\hat{}\,(1/3)\big) +$$
$$\big(0.264567\,\big(2.539\times10^{10} + 9.74239\times10^{13}\,x^2 + 4.81207\times10^{14}\,x^4 + 1.01127\times10^{15}\,x^6 +$$
$$1.19319\times10^{15}\,x^8 + 8.7187\times10^{14}\,x^{10} + 4.07789\times10^{14}\,x^{12} +$$
$$1.21001\times10^{14}\,x^{14} + 2.15587\times10^{13}\,x^{16} + 2.01238\times10^{12}\,x^{18} +$$
$$6.95271\times10^{10}\,x^{20} + 6.61198\times10^{8}\,x^{22} + 2.98023\times10^{-8}\,x^{24} +$$
$$4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2\,y^2 + 7.95527\times10^{14}\,x^4\,y^2 +$$
$$1.94133\times10^{15}\,x^6\,y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8\,y^2 +$$
$$1.64507\times10^{15}\,x^{10}\,y^2 + 6.90278\times10^{14}\,x^{12}\,y^2 +$$
$$1.71868\times10^{14}\,x^{14}\,y^2 + 2.34397\times10^{13}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$1.41862\times10^{12}\,x^{18}\,y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}\,y^2 +$$
$$0.\,x^{22}\,y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 + 7.08985\times10^{14}\,x^2\,y^4 +$$
$$1.17216\times10^{14}\,x^4\,y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6\,y^4 -$$
$$3.58628\times10^{14}\,x^8\,y^4 + 1.98168\times10^{14}\,x^{10}\,y^4 +$$
$$2.48711\times10^{14}\,x^{12}\,y^4 + 8.72235\times10^{13}\,x^{14}\,y^4 +$$
$$1.15201\times10^{13}\,x^{16}\,y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}\,y^4 + 0.\,x^{20}\,y^4 +$$
$$8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2\,y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4\,y^6 +$$
$$3.28898\times10^{16}\,x^6\,y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8\,y^6 +$$
$$1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^6 + 2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^6 +$$
$$4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 +$$
$$6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2\,y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4\,y^8 +$$
$$1.44141\times10^{17}\,x^6\,y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8\,y^8 +$$
$$3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 + 1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^8 +$$
$$1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^8 + 0.\,x^{16}\,y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} +$$
$$5.86022\times10^{17}\,x^2\,y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4\,y^{10} +$$
$$1.96832\times10^{17}\,x^6\,y^{10} + 2.39129\times10^{16}\,x^8\,y^{10} -$$
$$4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10} -$$
$$0.03125\,x^{14}\,y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2\,y^{12} +$$
$$4.86699\times10^{17}\,x^4\,y^{12} + 8.57325\times10^{16}\,x^6\,y^{12} -$$
$$1.98325\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12} +$$
$$0.\,x^{12}\,y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2\,y^{14} +$$
$$1.63977\times10^{17}\,x^4\,y^{14} - 3.8872\times10^{15}\,x^6\,y^{14} +$$
$$1.73525\times10^{14}\,x^8\,y^{14} - 0.25\,x^{10}\,y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} +$$

$$1.61365\times10^{17}\,x^2\,y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4\,y^{16} +$$
$$1.95215\times10^{14}\,x^6\,y^{16} + 1.\,x^8\,y^{16} + 6.40437\times10^{16}\,y^{18} -$$
$$1.64046\times10^{15}\,x^2\,y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4\,y^{18} - 0.5\,x^6\,y^{18} + 8.\,y^{20} +$$
$$3.90431\times10^{13}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2\,y^{22} + 0.\,y^{24} +$$
$$\sqrt{\Big((2.539\times10^{10} + 9.74239\times10^{13}\,x^2 + 4.81207\times10^{14}\,x^4 + 1.01127\times10^{15}\,x^6 +$$
$$1.19319\times10^{15}\,x^8 + 8.7187\times10^{14}\,x^{10} + 4.07789\times10^{14}\,x^{12} + 1.21001\times10^{14}\,x^{14} +$$
$$2.15587\times10^{13}\,x^{16} + 2.01238\times10^{12}\,x^{18} + 6.95271\times10^{10}\,x^{20} + 6.61198\times10^{8}\,x^{22} +$$
$$2.98023\times10^{-8}\,x^{24} + 4.83679\times10^{12}\,y^2 + 1.07425\times10^{14}\,x^2\,y^2 + 7.95527\times10^{14}\,x^4\,y^2 +$$
$$1.94133\times10^{15}\,x^6\,y^2 + 2.35798\times10^{15}\,x^8\,y^2 + 1.64507\times10^{15}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$6.90278\times10^{14}\,x^{12}\,y^2 + 1.71868\times10^{14}\,x^{14}\,y^2 + 2.34397\times10^{13}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$1.41862\times10^{12}\,x^{18}\,y^2 + 1.98359\times10^{10}\,x^{20}\,y^2 + 0.\,x^{22}\,y^2 + 3.21133\times10^{14}\,y^4 +$$
$$7.08985\times10^{14}\,x^2\,y^4 + 1.17216\times10^{14}\,x^4\,y^4 - 6.42808\times10^{14}\,x^6\,y^4 -$$
$$3.58628\times10^{14}\,x^8\,y^4 + 1.98168\times10^{14}\,x^{10}\,y^4 + 2.48711\times10^{14}\,x^{12}\,y^4 +$$
$$8.72235\times10^{13}\,x^{14}\,y^4 + 1.15201\times10^{13}\,x^{16}\,y^4 + 2.67785\times10^{11}\,x^{18}\,y^4 +$$
$$0.\,x^{20}\,y^4 + 8.28894\times10^{15}\,y^6 + 3.52041\times10^{16}\,x^2\,y^6 + 4.98541\times10^{16}\,x^4\,y^6 +$$
$$3.28898\times10^{16}\,x^6\,y^6 + 1.10219\times10^{16}\,x^8\,y^6 + 1.9687\times10^{15}\,x^{10}\,y^6 +$$
$$2.70493\times10^{14}\,x^{12}\,y^6 + 4.2117\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 2.14228\times10^{12}\,x^{16}\,y^6 +$$
$$0.\,x^{18}\,y^6 + 6.03249\times10^{16}\,y^8 + 2.18035\times10^{17}\,x^2\,y^8 + 2.64079\times10^{17}\,x^4\,y^8 +$$
$$1.44141\times10^{17}\,x^6\,y^8 + 3.61322\times10^{16}\,x^8\,y^8 + 3.28608\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 +$$
$$1.61706\times10^{13}\,x^{12}\,y^8 + 1.1247\times10^{13}\,x^{14}\,y^8 + 0.\,x^{16}\,y^8 + 2.08929\times10^{17}\,y^{10} +$$
$$5.86022\times10^{17}\,x^2\,y^{10} + 5.3437\times10^{17}\,x^4\,y^{10} + 1.96832\times10^{17}\,x^6\,y^{10} +$$
$$2.39129\times10^{16}\,x^8\,y^{10} - 4.71556\times10^{14}\,x^{10}\,y^{10} + 4.04891\times10^{13}\,x^{12}\,y^{10} -$$
$$0.03125\,x^{14}\,y^{10} + 4.009\times10^{17}\,y^{12} + 8.1348\times10^{17}\,x^2\,y^{12} + 4.86699\times10^{17}\,x^4\,y^{12} +$$
$$8.57325\times10^{16}\,x^6\,y^{12} - 1.98325\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.01223\times10^{14}\,x^{10}\,y^{12} +$$
$$0.\,x^{12}\,y^{12} + 4.39713\times10^{17}\,y^{14} + 5.73461\times10^{17}\,x^2\,y^{14} + 1.63977\times10^{17}\,x^4\,y^{14} -$$
$$3.8872\times10^{15}\,x^6\,y^{14} + 1.73525\times10^{14}\,x^8\,y^{14} - 0.25\,x^{10}\,y^{14} + 2.5935\times10^{17}\,y^{16} +$$
$$1.61365\times10^{17}\,x^2\,y^{16} - 3.91839\times10^{15}\,x^4\,y^{16} + 1.95215\times10^{14}\,x^6\,y^{16} + 1.\,x^8\,y^{16} +$$
$$6.40437\times10^{16}\,y^{18} - 1.64046\times10^{15}\,x^2\,y^{18} + 1.30144\times10^{14}\,x^4\,y^{18} - 0.5\,x^6\,y^{18} +$$
$$8.\,y^{20} + 3.90431\times10^{13}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} - 1.\,y^{22} + 0.5\,x^2\,y^{22} + 0.\,y^{24}\Big)^2 +$$
$$4.\,(-1.\,(-37324.8 - 74649.6\,x^2 - 48600.\,x^4 - 11275.2\,x^6 - 486.\,x^8 - 6998.4\,y^2 -$$
$$79315.2\,x^2\,y^2 - 51904.8\,x^4\,y^2 - 6998.4\,x^6\,y^2 + 199454.\,y^4 - 6998.4\,x^2\,y^4 -$$
$$36741.6\,x^4\,y^4 + 141718.\,y^6 - 83980.8\,x^2\,y^6 - 70858.8\,y^8)^2 +$$
$$3.\,(46656. + 69984.\,x^2 + 34992.\,x^4 + 5832.\,x^6 + 209952.\,y^2 + 209952.\,x^2\,y^2 + 52488.\,x^4\,y^2 + 314928.\,y^4 + 157464.\,x^2\,y^4 + 157464.\,y^6)\,(9914.4 +$$
$$11801.4\,x^2 + 6451.7\,x^4 + 2279.45\,x^6 + 409.32\,x^8 + 13.5\,x^{10} - 45820.1\,y^2 -$$
$$13391.6\,x^2\,y^2 + 12048.6\,x^4\,y^2 + 3680.64\,x^6\,y^2 + 267.3\,x^8\,y^2 - 137820.\,y^4 -$$
$$23506.8\,x^2\,y^4 + 3946.32\,x^4\,y^4 + 2070.36\,x^6\,y^4 - 117413.\,y^6 - 31492.8\,x^2\,y^6 + 7844.04\,x^4\,y^6 - 63772.9\,y^8 + 14565.4\,x^2\,y^8 + 10628.8\,y^{10}))^3\Big)^{(1/3)}\Big) \Big/ (46656. + 69984.\,x^2 + 34992.\,x^4 + 5832.\,x^6 + 209952.\,y^2 + 209952.\,x^2\,y^2 + 52488.\,x^4\,y^2 + 314928.\,y^4 + 157464.\,x^2\,y^4 + 157464.\,y^6)\Big\}\Big\}$$

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, M1, M2, Bs]
M1 = x^5 β/6 - x^2 α1 (24 + β) + x^3 (8 - α0 + 1/3 (4 + 5 y^2) β) - α1 (y^2 (12 + β) + 2 (4 α1^2 + β)) +
     x (-2 α0 + 24 α1^2 + 2 β + 7 y^4 β/2 + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β)) /. β → 0.1;
M2 = -6 y (α0 - 2 α1^2 - 3 β) + 5/6 x^4 y β + 27 y^5 β/2 - 2 x y α1 (12 + β) +
     y^3 (4 - 9 α0 + 36 β) + x^2 y (12 - 3 α0 + 8 β + 7 y^2 β) /. β → 0.1;
Bs = FullSimplify[-4/9 y^2 (5 x^3 β - 3 α1 (12 + β) + 3 x (12 - 3 α0 + 8 β + 7 y^2 β))^2 +
     (-2 α0 + 24 α1^2 + 2 β + 5 x^4 β/6 + 7 y^4 β/2 - 2 x α1 (24 + β) + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β) +
     x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β)) (-6 (α0 - 2 α1^2 - 3 β) + 5 x^4 β/6 + 135 y^4 β/2 -
     2 x α1 (12 + β) + y^2 (12 - 27 α0 + 108 β) + x^2 (12 - 3 α0 + 8 β + 21 y^2 β)) /. β → 0.1];
FullSimplify[Eliminate[{M1 == 0, M2 == 0}, α0]]
FullSimplify[Eliminate[{M1 == 0, M2 == 0}, α1]]
A = y (-2.643051282788797`*^47 x^12 - 1.1237006534212489`*^51 y^12 +
    9.865136051983529`*^52 (-0.30000000000000016` + α0) (-0.25` + α0)^2 +
    4.439311223392588`*^53 y^2 (-0.3109639182498186` + α0)
     (-0.2500000000000002` + α0) (0.5276305849164855` + α0) +
    6.658966835088882`*^53 y^4 (-0.37891784190338046` + α0)
     (-0.05085424724758709` + α0) (1.063105422484301` + α0) -
    1.4982675378949984`*^53 y^8 (-0.1645860797176552` + α0)
     (1.0645860797176554` + α0) + x^10 (-8.753785848596495`*^48 -
       6.660489232627768`*^48 y^2 + 2.8544953854119006`*^49 α0) +
    y^10 (1.1237006534212489`*^52 + 2.2474013068424978`*^52 α0) +
    3.329483417544441`*^53 y^6 (-0.9796963471921395` + α0)
     (1.0958834970263989` + α0 (1.8796963471921397` + α0)) +
    x^8 (-6.879333878842681`*^49 y^4 - 1.0276183387482843`*^51
        (-0.7630139202019365` + α0) (-0.07920830202028553` + α0) +
       y^2 (-1.1612087227855613`*^50 + 5.651900863115564`*^50 α0)) +
    x^6 (-3.724545578885448`*^50 y^6 - 1.4797704077975294`*^52 y^2
        (-0.4649950350749559` + α0) (-0.06093089085096992` + α0) +
       y^4 (-3.2609755282945555`*^50 + 4.377654123067691`*^51 α0) +
       1.233142006497941`*^52 (-1.7125764628982123` + α0)
        (0.012788831521593555` + (-0.2207568704351208` + α0) α0)) +
    x^2 (-1.7479787942108316`*^51 y^10 + 4.439311223392588`*^53 y^2
        (-0.41660516153907295` + α0) (-0.19964144630539643` + α0)
        (0.23846883006669148` + α0) + 3.329483417544441`*^53 y^4
        (-0.28976014196624345` + α0) (-0.1827045378217823` + α0)
        (0.4280202353435812` + α0) - 1.7757244893570351`*^53 y^6
        (-0.15256257367188422` + α0) (0.5275625736718842` + α0) +
       y^8 (8.699816855842974`*^51 + 3.0797721612286077`*^52 α0) +
       1.4797704077975294`*^53 (-0.8923529567303993` + α0)
        (0.013080275169356196` + (-0.1743137099362675` + α0) α0)) +
    x^4 (-1.1144520883725142`*^51 y^8 - 7.768794640937029`*^52 y^4
        (-0.18661547849624363` + α0) (0.07920807108883618` + α0) +
       y^6 (1.481825644475026`*^51 + 1.6585759987397307`*^52 α0) +
       1.109827805848147`*^53 y^2 (0.041853992013277413` + α0)
        (0.2726900870210711` + (-1.0307428809021661` + α0) α0) +
```

```
        7.398852038987647`*^52 (-1.248605283435931` + α0)
         (0.009217692261871508` + (-0.14028360545295812` + α0) α0)));
B = y α1 (1.3510798882111458`*^16 + 1.0831157103826019`*^18 x^2 + 8.174033323677432`*^17
      y^2 - 1.3510798882111457`*^18 x α1 + 5.404319552844583`*^17 α1^2) -
   (x y (-2.702159776422292`*^16 - 7.50599937895081`*^14 x^4 +
      6.935543426150548`*^17 y^2 - 6.755399441055729`*^15 y^4 +
      x^2 (2.612087783874882`*^17 - 4.503599627370486`*^15 y^2)));
(*ContourPlot3D[A,{x,-1,1},{y,-0.5,0.5},{α0,0,1.5},
   Contours→{0},PlotPoints→{10,10}]
  S1=ContourPlot3D[B,{x,-1,1},{y,-0.5,0.5},{α1,-0.5,0.5},
   Contours→{0},PlotPoints→{15,15}]
  <<Utilities`DXF`
  WriteDXF["Manifsymm2.dxf",S1]*)
```

$$y\,\alpha 1\,(1.35108\times 10^{16} + 1.08312\times 10^{18}\,x^2 + 8.17403\times 10^{17}\,y^2 - 1.35108\times 10^{18}\,x\,\alpha 1 + 5.40432\times 10^{17}\,\alpha 1^2) == x\,y\,(-2.70216\times 10^{16} - 7.506\times 10^{14}\,x^4 + 6.93554\times 10^{17}\,y^2 - 6.7554\times 10^{15}\,y^4 + x^2\,(2.61209\times 10^{17} - 4.5036\times 10^{15}\,y^2))$$

$$y\,(-2.64305\times 10^{47}\,x^{12} - 1.1237\times 10^{51}\,y^{12} + 9.86514\times 10^{52}\,(-0.3+\alpha 0)\,(-0.25+\alpha 0)^2 + 4.43931\times 10^{53}\,y^2\,(-0.310964+\alpha 0)\,(-0.25+\alpha 0)\,(0.527631+\alpha 0) + 6.65897\times 10^{53}\,y^4\,(-0.378918+\alpha 0)\,(-0.0508542+\alpha 0)\,(1.06311+\alpha 0) - 1.49827\times 10^{53}\,y^8\,(-0.164586+\alpha 0)\,(1.06459+\alpha 0) + x^{10}\,(-8.75379\times 10^{48} - 6.66049\times 10^{48}\,y^2 + 2.8545\times 10^{49}\,\alpha 0) + y^{10}\,(1.1237\times 10^{52} + 2.2474\times 10^{52}\,\alpha 0) + 3.32948\times 10^{53}\,y^6\,(-0.979696+\alpha 0)\,(1.09588+\alpha 0\,(1.8797+\alpha 0)) + x^8\,(-6.87933\times 10^{49}\,y^4 - 1.02762\times 10^{51}\,(-0.763014+\alpha 0)\,(-0.0792083+\alpha 0) + y^2\,(-1.16121\times 10^{50} + 5.6519\times 10^{50}\,\alpha 0)) + x^6\,(-3.72455\times 10^{50}\,y^6 - 1.47977\times 10^{52}\,y^2\,(-0.464995+\alpha 0)\,(-0.0609309+\alpha 0) + y^4\,(-3.26098\times 10^{50} + 4.37765\times 10^{51}\,\alpha 0) + 1.23314\times 10^{52}\,(-1.71258+\alpha 0)\,(0.0127888 + (-0.220757+\alpha 0)\,\alpha 0)) + x^2\,(-1.74798\times 10^{51}\,y^{10} + 4.43931\times 10^{53}\,y^2\,(-0.416605+\alpha 0)\,(-0.199641+\alpha 0)\,(0.238469+\alpha 0) + 3.32948\times 10^{53}\,y^4\,(-0.28976+\alpha 0)\,(-0.182705+\alpha 0)\,(0.42802+\alpha 0) - 1.77572\times 10^{53}\,y^6\,(-0.152563+\alpha 0)\,(0.527563+\alpha 0) + y^8\,(8.69982\times 10^{51} + 3.07977\times 10^{52}\,\alpha 0) + 1.47977\times 10^{53}\,(-0.892353+\alpha 0)\,(0.0130803 + (-0.174314+\alpha 0)\,\alpha 0)) + x^4\,(-1.11445\times 10^{51}\,y^8 - 7.76879\times 10^{52}\,y^4\,(-0.186615+\alpha 0)\,(0.0792081+\alpha 0) + y^6\,(1.48183\times 10^{51} + 1.65858\times 10^{52}\,\alpha 0) + 1.10983\times 10^{53}\,y^2\,(0.041854+\alpha 0)\,(0.27269 + (-1.03074+\alpha 0)\,\alpha 0) + 7.39885\times 10^{52}\,(-1.24861+\alpha 0)\,(0.00921769 + (-0.140284+\alpha 0)\,\alpha 0))) == 0$$

```
- Graphics3D -

Manifsymm2.dxf
```

```
ClearAll[x, y, α0, α1, S1, S2, S3, SS, Manif]
S1 =
 -(0.3333333333333333` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
       486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004` x^2 y^2 -
       51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 +
       199454.39999999997` y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 +
       141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8)) /
   (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
     52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) +
  ((0.20998684164914555` - 0.3637078786572405` i)
     (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
           486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004` x^2 y^2 -
           51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997`
            y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 +
           141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
      3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
        52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) (9914.400000000001` +
        11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 + 2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 +
        13.500000000000004` x^10 - 45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
        12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 + 267.30000000000007` x^8 y^2 -
        137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 + 3946.320000000003` x^4 y^4 +
        2070.3600000000006` x^6 y^4 - 117412.74000000008` y^6 -
        31492.800000000003` x^2 y^6 + 7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
        14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10))) /
   ((46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
      52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
     (2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13 x^2 +
      4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15 x^6 +
      1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14 x^10 +
      4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14 x^14 +
      2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12 x^18 +
      6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8 x^22 +
      2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12 y^2 +
      1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 +
      1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 +
      1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 +
      1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 +
      1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20 y^2 +
      0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14 x^2 y^4 +
      1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6 y^4 -
      3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10 y^4 +
      2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14 y^4 +
      1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18 y^4 +
      0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 + 3.5204136558798608`*^16 x^2 y^6 +
      4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 + 3.2889809530354672`*^16 x^6 y^6 +
      1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 + 1.968697311129105`*^15 x^10 y^6 +
      2.704925768845715`*^14 x^12 y^6 + 4.2116993374108125`*^13 x^14 y^6 +
      2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 + 0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16 y^8 +
      2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4 y^8 +
      1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8 y^8 +
      3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
      1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.0892918887762067`*^17 y^10 +
      5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4 y^10 +
      1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 + 2.3912920130384684`*^16 x^8 y^10 -
```

```
4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12 y^10 +
0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17 x^2 y^12 +
4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16 x^6 y^12 -
1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10 y^12 +
0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17 x^2 y^14 +
1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6 y^14 +
1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17 y^16 +
1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4 y^16 +
1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16 y^18 -
1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14 x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 +
6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2 y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 +
0.25` y^24 + √((2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13
      x^2 + 4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15
      x^6 + 1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14
      x^10 + 4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14
      x^14 + 2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12
      x^18 + 6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8
      x^22 + 2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12
      y^2 + 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4
      y^2 + 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8
      y^2 + 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12
      y^2 + 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16
      y^2 + 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20
      y^2 + 0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14
      x^2 y^4 + 1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6
      y^4 - 3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10
      y^4 + 2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14
      y^4 + 1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18
      y^4 + 0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 + 3.5204136558798608`*^16
      x^2 y^6 + 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 + 3.2889809530354672`*^16
      x^6 y^6 + 1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 + 1.968697311129105`*^15 x^10
      y^6 + 2.704925768845715`*^14 x^12 y^6 + 4.2116993374108125`*^13 x^14
      y^6 + 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 + 0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16
      y^8 + 2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4
      y^8 + 1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8
      y^8 + 3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
    1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.0892918887762067`*^17
      y^10 + 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4
      y^10 + 1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 + 2.3912920130384684`*^16 x^8
      y^10 - 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12
      y^10 + 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17
      x^2 y^12 + 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16
      x^6 y^12 - 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10
      y^12 + 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17
      x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6
      y^14 + 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17
      y^16 + 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4
      y^16 + 1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16
      y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
      x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
      y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24)^2 +
  4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
        486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
        79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
        6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
```

```
6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
(9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^3)) ^ (1 / 3)) -
((0.13228342099734997` + 0.22912160616643376` i) (2.5389989167109375`*^10 +
9.742392743309481`*^13 x^2 + 4.812067318549415`*^14 x^4 +
1.0112724777803568`*^15 x^6 + 1.1931915738432872`*^15 x^8 +
8.718701704452624`*^14 x^10 + 4.0778922431468094`*^14 x^12 +
1.2100067024710247`*^14 x^14 + 2.155870592155143`*^13 x^16 +
2.0123814486887383`*^12 x^18 + 6.952713526609894`*^10 x^20 +
6.611976345599937`*^8 x^22 + 2.9802322387695312`*^-8 x^24 +
4.836792936332828`*^12 y^2 + 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 +
7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 + 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 +
2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 + 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 +
6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 + 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 +
2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 + 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 +
1.9835929036799988`*^10 x^20 y^2 + 0.` x^22 y^2 +
3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14 x^2 y^4 +
1.172163761134 36`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6 y^4 -
3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.981676752935 07`*^14 x^10 y^4 +
2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14 y^4 +
1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18 y^4 +
0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 +
3.5204136558798608`*^16 x^2 y^6 + 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 +
3.2889809530354672`*^16 x^6 y^6 + 1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 +
1.9686973111291 05`*^15 x^10 y^6 + 2.7049257688457 15`*^14 x^12 y^6 +
4.2116993374108125`*^13 x^14 y^6 + 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 +
0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16 y^8 +
2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4 y^8 +
1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8 y^8 +
3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 +
2.0892918887762067`*^17 y^10 + 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 +
5.343703438081843`*^17 x^4 y^10 + 1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 +
2.391292013038 4684`*^16 x^8 y^10 - 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 +
4.048909834991625`*^13 x^12 y^10 + 0.` x^14 y^10 +
4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17 x^2 y^12 +
4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16 x^6 y^12 -
1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10 y^12 +
0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 +
5.73460557734933`*^17 x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 -
3.887204088391256`*^15 x^6 y^14 + 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 +
0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17 y^16 +
1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4 y^16 +
1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 +
```

```
6.404366746596053`*^16 y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 +
1.30143530410446`*^14 x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 +
3.9043059123134`*^13 x^2 y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 +
0.25` y^24 + √((2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13
      x^2 + 4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15
      x^6 + 1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14
      x^10 + 4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14
      x^14 + 2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12
      x^18 + 6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8
      x^22 + 2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12
      y^2 + 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4
      y^2 + 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8
      y^2 + 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12
      y^2 + 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16
      y^2 + 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20
      y^2 + 0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14
      x^2 y^4 + 1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6
      y^4 - 3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10
      y^4 + 2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14
      y^4 + 1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18
      y^4 + 0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 + 3.5204136558798608`*^16
      x^2 y^6 + 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 + 3.2889809530354672`*^16
      x^6 y^6 + 1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 + 1.968697311129105`*^15 x^10
      y^6 + 2.704925768845715`*^14 x^12 y^6 + 4.2116993374108125`*^13 x^14
      y^6 + 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 + 0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16
      y^8 + 2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4
      y^8 + 1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8
      y^8 + 3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
    1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.0892918887762067`*^17
      y^10 + 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4
      y^10 + 1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 + 2.3912920130384684`*^16 x^8
      y^10 - 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12
      y^10 + 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17
      x^2 y^12 + 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16
      x^6 y^12 - 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10
      y^12 + 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17
      x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6
      y^14 + 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17
      y^16 + 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4
      y^16 + 1.952152956156667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16
      y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
      x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
      y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24) ^2 +
  4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
        486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
        79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
        6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
        6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
        83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
    3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
        x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
      (9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
        2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
        45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
        12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
```

```
                267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
                3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
                117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
                7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
                14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^ 3)) ^ (1 / 3)) /
    (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 +
     209952.`
      x^2
      y^2 + 52488.`
      x^4
      y^2 + 314928.`
      y^4 + 157464.`
      x^2
      y^4 + 157464.`
      y^6);

S2 =
  -(0.3333333333333333` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
        486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004` x^2 y^2 -
        51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 +
        199454.39999999997` y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 +
        141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8)) /
    (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
     52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) +
   ((0.20998684164914555` + 0.3637078786572405` i)
      (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
          486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004` x^2 y^2 -
          51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997`
           y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 +
          141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^ 2 +
       3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
        52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) (9914.400000000001` +
        11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 + 2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 +
        13.500000000000004` x^10 - 45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
        12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 + 267.30000000000007` x^8 y^2 -
        137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 + 3946.320000000003` x^4 y^4 +
        2070.3600000000006` x^6 y^4 - 117412.74000000008` y^6 -
        31492.800000000003` x^2 y^6 + 7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
        14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10))) /
    ((46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
       52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
      (2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13 x^2 +
        4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15 x^6 +
        1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14 x^10 +
        4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14 x^14 +
        2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12 x^18 +
        6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8 x^22 +
        2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12 y^2 +
        1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 +
        1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 +
        1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 +
        1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 +
        1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20 y^2 +
        0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14 x^2 y^4 +
```

$$1.17216376113436`*^14\,x^4\,y^4 - 6.42808353051814`*^14\,x^6\,y^4 -$$
$$3.58628042925216`*^14\,x^8\,y^4 + 1.98167675293507`*^14\,x^{10}\,y^4 +$$
$$2.487109514865165`*^14\,x^{12}\,y^4 + 8.722354887503325`*^13\,x^{14}\,y^4 +$$
$$1.1520072834844234`*^13\,x^{16}\,y^4 + 2.6778504199679883`*^11\,x^{18}\,y^4 +$$
$$0.`\,x^{20}\,y^4 + 8.288942813438599`*^15\,y^6 + 3.5204136558798608`*^16\,x^2\,y^6 +$$
$$4.9854128729418576`*^16\,x^4\,y^6 + 3.2889809530354672`*^16\,x^6\,y^6 +$$
$$1.1021914503169804`*^16\,x^8\,y^6 + 1.968697311129105`*^15\,x^{10}\,y^6 +$$
$$2.704925768845715`*^14\,x^{12}\,y^6 + 4.2116993374108125`*^13\,x^{14}\,y^6 +$$
$$2.1422803359743906`*^12\,x^{16}\,y^6 + 0.`\,x^{18}\,y^6 + 6.032492900050812`*^16\,y^8 +$$
$$2.1803459439895725`*^17\,x^2\,y^8 + 2.6407912909593402`*^17\,x^4\,y^8 +$$
$$1.441410847969183`*^17\,x^6\,y^8 + 3.6132225897843344`*^16\,x^8\,y^8 +$$
$$3.28607817309819`*^15\,x^{10}\,y^8 + 1.617064606938025`*^13\,x^{12}\,y^8 +$$
$$1.1246971763865562`*^13\,x^{14}\,y^8 + 0.`\,x^{16}\,y^8 + 2.0892918887762067`*^17\,y^{10} +$$
$$5.860215228502327`*^17\,x^2\,y^{10} + 5.343703438081843`*^17\,x^4\,y^{10} +$$
$$1.9683191498534202`*^17\,x^6\,y^{10} + 2.391292013038468 4`*^16\,x^8\,y^{10} -$$
$$4.715555341341805`*^14\,x^{10}\,y^{10} + 4.048909834991625`*^13\,x^{12}\,y^{10} +$$
$$0.`\,x^{14}\,y^{10} + 4.008997438508142`*^17\,y^{12} + 8.134804854615626`*^17\,x^2\,y^{12} +$$
$$4.866994782491996`*^17\,x^4\,y^{12} + 8.573249437769507`*^16\,x^6\,y^{12} -$$
$$1.983246012953003`*^15\,x^8\,y^{12} + 1.01222745874791`*^14\,x^{10}\,y^{12} +$$
$$0.`\,x^{12}\,y^{12} + 4.3971315052193114`*^17\,y^{14} + 5.73460557734933`*^17\,x^2\,y^{14} +$$
$$1.6397680181739078`*^17\,x^4\,y^{14} - 3.887204088391256`*^15\,x^6\,y^{14} +$$
$$1.73524707213926`*^14\,x^8\,y^{14} + 0.25`\,x^{10}\,y^{14} + 2.59350388911741`*^17\,y^{16} +$$
$$1.6136547669983597`*^17\,x^2\,y^{16} - 3.918390334382208`*^15\,x^4\,y^{16} +$$
$$1.95215295615667`*^14\,x^6\,y^{16} + 2.`\,x^8\,y^{16} + 6.404366746596053`*^16\,y^{18} -$$
$$1.64045920082364`*^15\,x^2\,y^{18} + 1.30143530410446`*^14\,x^4\,y^{18} + 0.5`\,x^6\,y^{18} +$$
$$6.`\,y^{20} + 3.9043059123134`*^13\,x^2\,y^{20} + 2.`\,x^4\,y^{20} + 0.`\,y^{22} + 0.5`\,x^2\,y^{22} +$$
$$0.25`\,y^{24} + \sqrt{(}(2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13$$
$$x^2 + 4.812067318549415`*^14\,x^4 + 1.0112724777803568`*^15$$
$$x^6 + 1.1931915738432872`*^15\,x^8 + 8.718701704452624`*^14$$
$$x^{10} + 4.0778922431468094`*^14\,x^{12} + 1.2100067024710247`*^14$$
$$x^{14} + 2.155870592155143`*^13\,x^{16} + 2.0123814486887383`*^12$$
$$x^{18} + 6.952713526609894`*^10\,x^{20} + 6.611976345599937`*^8$$
$$x^{22} + 2.9802322387695312`*^-8\,x^{24} + 4.8367929363328 28`*^12$$
$$y^2 + 1.0742504416601538`*^14\,x^2\,y^2 + 7.9552739233018`*^14\,x^4$$
$$y^2 + 1.941332747794058`*^15\,x^6\,y^2 + 2.357976069633132`*^15\,x^8$$
$$y^2 + 1.645069764989325`*^15\,x^{10}\,y^2 + 6.902779660848735`*^14\,x^{12}$$
$$y^2 + 1.7186836746749525`*^14\,x^{14}\,y^2 + 2.3439700788276734`*^13\,x^{16}$$
$$y^2 + 1.4186193608775137`*^12\,x^{18}\,y^2 + 1.9835929036799988`*^10\,x^{20}$$
$$y^2 + 0.`\,x^{22}\,y^2 + 3.21132582985528`*^14\,y^4 + 7.0898497950437`*^14$$
$$x^2\,y^4 + 1.17216376113436`*^14\,x^4\,y^4 - 6.42808353051814`*^14\,x^6$$
$$y^4 - 3.58628042925216`*^14\,x^8\,y^4 + 1.98167675293507`*^14\,x^{10}$$
$$y^4 + 2.487109514865165`*^14\,x^{12}\,y^4 + 8.722354887503325`*^13\,x^{14}$$
$$y^4 + 1.1520072834844234`*^13\,x^{16}\,y^4 + 2.6778504199679883`*^11\,x^{18}$$
$$y^4 + 0.`\,x^{20}\,y^4 + 8.288942813438599`*^15\,y^6 + 3.5204136558798608`*^16$$
$$x^2\,y^6 + 4.9854128729418576`*^16\,x^4\,y^6 + 3.2889809530354672`*^16$$
$$x^6\,y^6 + 1.1021914503169804`*^16\,x^8\,y^6 + 1.968697311129105`*^15\,x^{10}$$
$$y^6 + 2.704925768845715`*^14\,x^{12}\,y^6 + 4.2116993374108125`*^13\,x^{14}$$
$$y^6 + 2.1422803359743906`*^12\,x^{16}\,y^6 + 0.`\,x^{18}\,y^6 + 6.032492900050812`*^16$$
$$y^8 + 2.1803459439895725`*^17\,x^2\,y^8 + 2.6407912909593402`*^17\,x^4$$
$$y^8 + 1.441410847969183`*^17\,x^6\,y^8 + 3.6132225897843344`*^16\,x^8$$
$$y^8 + 3.28607817309819`*^15\,x^{10}\,y^8 + 1.617064606938025`*^13\,x^{12}\,y^8 +$$
$$1.1246971763865562`*^13\,x^{14}\,y^8 + 0.`\,x^{16}\,y^8 + 2.0892918887762067`*^17$$
$$y^{10} + 5.860215228502327`*^17\,x^2\,y^{10} + 5.343703438081843`*^17\,x^4$$
$$y^{10} + 1.9683191498534202`*^17\,x^6\,y^{10} + 2.391292013038468 4`*^16\,x^8$$
$$y^{10} - 4.715555341341805`*^14\,x^{10}\,y^{10} + 4.048909834991625`*^13\,x^{12}$$

```
y^10 + 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17
x^2 y^12 + 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16
x^6 y^12 - 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10
y^12 + 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17
x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6
y^14 + 1.735247072139 26`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17
y^16 + 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4
y^16 + 1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16
y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24) ^2 +
4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
      486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
      79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
      6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
      6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
      83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
   3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
      x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
    (9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
      2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
      45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
      12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
      267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
      3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
      117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
      7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
      14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^3)) ^ (1 / 3)) -
((0.13228342099734997` - 0.22912160616643376` i) (2.5389989167109375`*^10 +
   9.742392743309481`*^13 x^2 + 4.812067318549415`*^14 x^4 +
   1.0112724777803568`*^15 x^6 + 1.1931915738432872`*^15 x^8 +
   8.718701704452624`*^14 x^10 + 4.0778922431468094`*^14 x^12 +
   1.2100067024710247`*^14 x^14 + 2.155870592155143`*^13 x^16 +
   2.0123814486887383`*^12 x^18 + 6.952713526609894`*^10 x^20 +
   6.611976345599937`*^8 x^22 + 2.9802322387695312`*^-8 x^24 +
   4.836792936332828`*^12 y^2 + 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 +
   7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 + 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 +
   2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 + 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 +
   6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 + 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 +
   2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 + 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 +
   1.9835929036799988`*^10 x^20 y^2 + 0.` x^22 y^2 +
   3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14 x^2 y^4 +
   1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6 y^4 -
   3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10 y^4 +
   2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14 y^4 +
   1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18 y^4 +
   0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 +
   3.5204136558798608`*^16 x^2 y^6 + 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 +
   3.2889809530354672`*^16 x^6 y^6 + 1.102191450316 9804`*^16 x^8 y^6 +
   1.968697311129105`*^15 x^10 y^6 + 2.704925768845715`*^14 x^12 y^6 +
   4.2116993374108125`*^13 x^14 y^6 + 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 +
   0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16 y^8 +
   2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4 y^8 +
   1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8 y^8 +
```

$$3.28607817309819`*^{15}x^{10}y^8 + 1.617064606938025`*^{13}x^{12}y^8 +$$
$$1.1246971763865562`*^{13}x^{14}y^8 + 0.`x^{16}y^8 +$$
$$2.0892918887762067`*^{17}y^{10} + 5.860215228502327`*^{17}x^2y^{10} +$$
$$5.343703438081843`*^{17}x^4y^{10} + 1.9683191498534202`*^{17}x^6y^{10} +$$
$$2.3912920130384684`*^{16}x^8y^{10} - 4.715555341341805`*^{14}x^{10}y^{10} +$$
$$4.048909834991625`*^{13}x^{12}y^{10} + 0.`x^{14}y^{10} +$$
$$4.008997438508142`*^{17}y^{12} + 8.134804854615626`*^{17}x^2y^{12} +$$
$$4.866994782491996`*^{17}x^4y^{12} + 8.573249437769507`*^{16}x^6y^{12} -$$
$$1.983246012953003`*^{15}x^8y^{12} + 1.01222745874791`*^{14}x^{10}y^{12} +$$
$$0.`x^{12}y^{12} + 4.3971315052193114`*^{17}y^{14} +$$
$$5.73460557734933`*^{17}x^2y^{14} + 1.6397680181739078`*^{17}x^4y^{14} -$$
$$3.887204088391256`*^{15}x^6y^{14} + 1.73524707213926`*^{14}x^8y^{14} +$$
$$0.25`x^{10}y^{14} + 2.59350388911741`*^{17}y^{16} +$$
$$1.6136547669983597`*^{17}x^2y^{16} - 3.918390334382208`*^{15}x^4y^{16} +$$
$$1.95215295615667`*^{14}x^6y^{16} + 2.`x^8y^{16} +$$
$$6.404366746596053`*^{16}y^{18} - 1.64045920082364`*^{15}x^2y^{18} +$$
$$1.30143530410446`*^{14}x^4y^{18} + 0.5`x^6y^{18} + 6.`y^{20} +$$
$$3.9043059123134`*^{13}x^2y^{20} + 2.`x^4y^{20} + 0.`y^{22} + 0.5`x^2y^{22} +$$
$$0.25`y^{24} + \sqrt{((2.5389989167109375`*^{10} + 9.742392743309481`*^{13}$$
$$x^2 + 4.812067318549415`*^{14}x^4 + 1.0112724777803568`*^{15}$$
$$x^6 + 1.1931915738432872`*^{15}x^8 + 8.718701704452624`*^{14}$$
$$x^{10} + 4.0778922431468094`*^{14}x^{12} + 1.2100067024710247`*^{14}$$
$$x^{14} + 2.155870592155143`*^{13}x^{16} + 2.0123814486887383`*^{12}$$
$$x^{18} + 6.952713526609894`*^{10}x^{20} + 6.611976345599937`*^8$$
$$x^{22} + 2.9802322387695312`*^{-8}x^{24} + 4.836792936332828`*^{12}$$
$$y^2 + 1.0742504416601538`*^{14}x^2y^2 + 7.9552739233018`*^{14}x^4$$
$$y^2 + 1.941332747794058`*^{15}x^6y^2 + 2.357976069633132`*^{15}x^8$$
$$y^2 + 1.645069764989325`*^{15}x^{10}y^2 + 6.902779660848735`*^{14}x^{12}$$
$$y^2 + 1.7186836746749525`*^{14}x^{14}y^2 + 2.3439700788276734`*^{13}x^{16}$$
$$y^2 + 1.4186193608775137`*^{12}x^{18}y^2 + 1.9835929036799988`*^{10}x^{20}$$
$$y^2 + 0.`x^{22}y^2 + 3.21132582985528`*^{14}y^4 + 7.0898497950437`*^{14}$$
$$x^2y^4 + 1.17216376113436`*^{14}x^4y^4 - 6.42808353051814`*^{14}x^6$$
$$y^4 - 3.58628042925216`*^{14}x^8y^4 + 1.98167675293507`*^{14}x^{10}$$
$$y^4 + 2.487109514865165`*^{14}x^{12}y^4 + 8.722354887503325`*^{13}x^{14}$$
$$y^4 + 1.1520072834844234`*^{13}x^{16}y^4 + 2.6778504199679883`*^{11}x^{18}$$
$$y^4 + 0.`x^{20}y^4 + 8.288942813438599`*^{15}y^6 + 3.5204136558798608`*^{16}$$
$$x^2y^6 + 4.9854128729418576`*^{16}x^4y^6 + 3.2889809530354672`*^{16}$$
$$x^6y^6 + 1.1021914503169804`*^{16}x^8y^6 + 1.9686973111291105`*^{15}x^{10}$$
$$y^6 + 2.704925768845715`*^{14}x^{12}y^6 + 4.2116993374108125`*^{13}x^{14}$$
$$y^6 + 2.1422803359743906`*^{12}x^{16}y^6 + 0.`x^{18}y^6 + 6.032492900050812`*^{16}$$
$$y^8 + 2.1803459439895725`*^{17}x^2y^8 + 2.6407912909593402`*^{17}x^4$$
$$y^8 + 1.441410847969183`*^{17}x^6y^8 + 3.6132225897843344`*^{16}x^8$$
$$y^8 + 3.28607817309819`*^{15}x^{10}y^8 + 1.617064606938025`*^{13}x^{12}y^8 +$$
$$1.1246971763865562`*^{13}x^{14}y^8 + 0.`x^{16}y^8 + 2.0892918887762067`*^{17}$$
$$y^{10} + 5.860215228502327`*^{17}x^2y^{10} + 5.343703438081843`*^{17}x^4$$
$$y^{10} + 1.9683191498534202`*^{17}x^6y^{10} + 2.3912920130384684`*^{16}x^8$$
$$y^{10} - 4.715555341341805`*^{14}x^{10}y^{10} + 4.048909834991625`*^{13}x^{12}$$
$$y^{10} + 0.`x^{14}y^{10} + 4.008997438508142`*^{17}y^{12} + 8.134804854615626`*^{17}$$
$$x^2y^{12} + 4.866994782491996`*^{17}x^4y^{12} + 8.573249437769507`*^{16}$$
$$x^6y^{12} - 1.983246012953003`*^{15}x^8y^{12} + 1.01222745874791`*^{14}x^{10}$$
$$y^{12} + 0.`x^{12}y^{12} + 4.3971315052193114`*^{17}y^{14} + 5.73460557734933`*^{17}$$
$$x^2y^{14} + 1.6397680181739078`*^{17}x^4y^{14} - 3.887204088391256`*^{15}x^6$$
$$y^{14} + 1.73524707213926`*^{14}x^8y^{14} + 0.25`x^{10}y^{14} + 2.59350388911741`*^{17}$$
$$y^{16} + 1.6136547669983597`*^{17}x^2y^{16} - 3.918390334382208`*^{15}x^4$$
$$y^{16} + 1.95215295615667`*^{14}x^6y^{16} + 2.`x^8y^{16} + 6.404366746596053`*^{16}$$

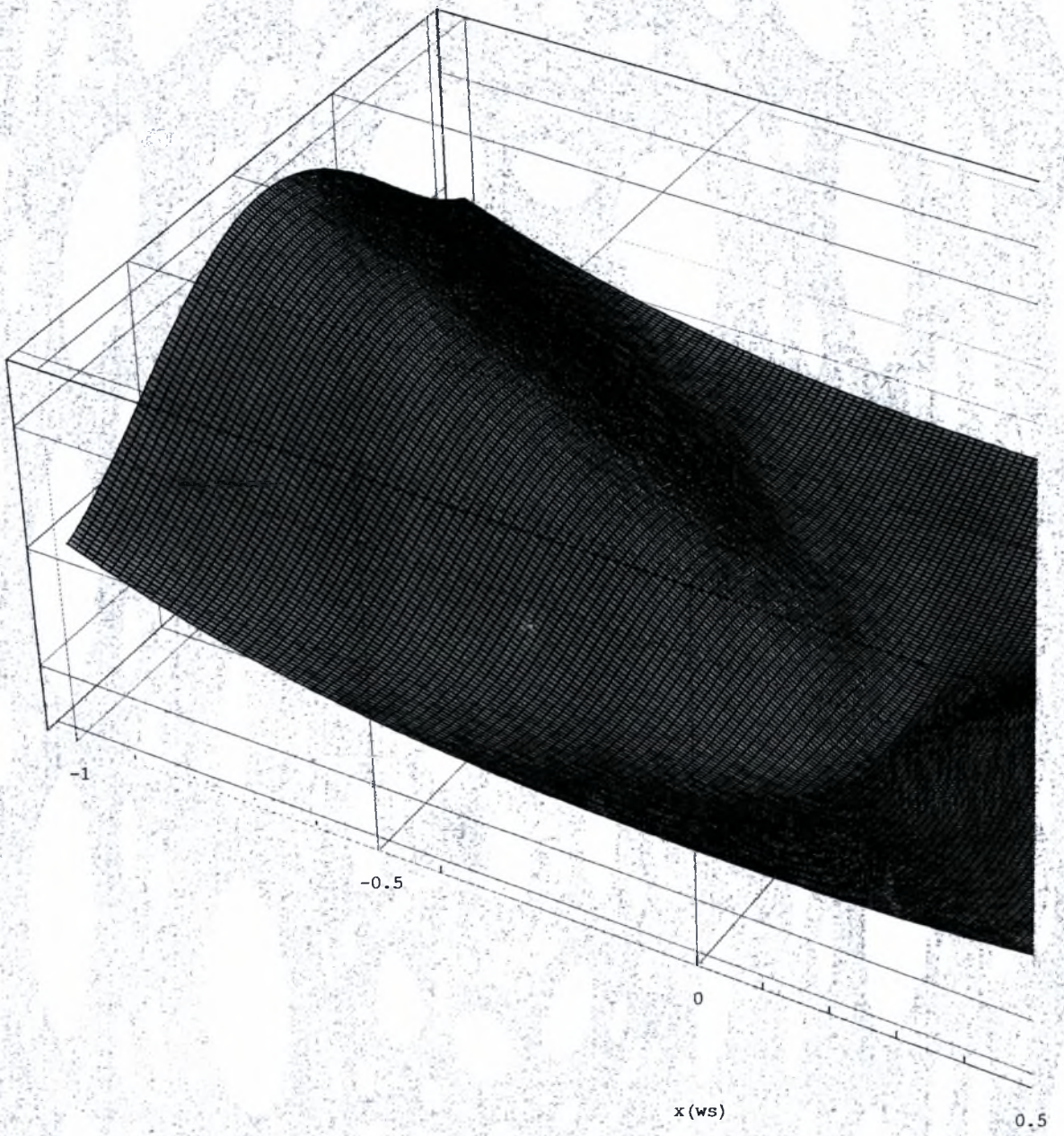
```
                y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
                x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
                y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24) ^ 2 +
             4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
                   486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
                   79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
                   6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
                   6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
                   83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^ 2 +
                3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
                   x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
                  (9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
                   2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
                   45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
                   12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
                   267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
                   3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
                   117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
                   7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
                   14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^ 3)) ^ (1 / 3)) /
          (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 +
            209952.`
             x^2
             y^2 + 52488.`
             x^4
             y^2 + 314928.`
             y^4 + 157464.`
             x^2
             y^4 + 157464.`
             y^6);

S3 =
   -(0.3333333333333333` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
          486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004` x^2 y^2 -
          51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 +
          199454.39999999997` y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 +
          141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8)) /
        (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
          52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) -
       (0.419973683298291` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995`
                x^6 - 486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 - 79315.20000000004`
                x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 - 6998.400000000001` x^6 y^2 +
               199454.39999999997` y^4 - 6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006`
                x^4 y^4 + 141717.6` y^6 - 83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^ 2 +
           3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
             52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6) (9914.400000000001` +
             11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 + 2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 +
             13.500000000000004` x^10 - 45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
             12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 + 267.30000000000007` x^8 y^2 -
             137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 + 3946.320000000003` x^4 y^4 +
             2070.3600000000006` x^6 y^4 - 117412.74000000008` y^6 -
             31492.800000000003` x^2 y^6 + 7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
             14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10))) /
        ((46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.` x^2 y^2 +
```

```
52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
(2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13 x^2 +
 4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15 x^6 +
 1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14 x^10 +
 4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14 x^14 +
 2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12 x^18 +
 6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8 x^22 +
 2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12 y^2 +
 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 +
 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 +
 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 +
 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 +
 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20 y^2 +
 0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14 x^2 y^4 +
 1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6 y^4 -
 3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10 y^4 +
 2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14 y^4 +
 1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18 y^4 +
 0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 + 3.5204136558798608`*^16 x^2 y^6 +
 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 + 3.2889809530354672`*^16 x^6 y^6 +
 1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 + 1.968697311129105`*^15 x^10 y^6 +
 2.7049257688457l5`*^14 x^12 y^6 + 4.2116993374108125`*^13 x^14 y^6 +
 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 + 0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16 y^8 +
 2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4 y^8 +
 1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8 y^8 +
 3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
 1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.08929188877620l7`*^17 y^10 +
 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4 y^10 +
 1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 + 2.3912920130384684`*^16 x^8 y^10 -
 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12 y^10 +
 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17 x^2 y^12 +
 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16 x^6 y^12 -
 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10 y^12 +
 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17 x^2 y^14 +
 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6 y^14 +
 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17 y^16 +
 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4 y^16 +
 1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16 y^18 -
 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14 x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 +
 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2 y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 +
 0.25` y^24 + √((2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13
      x^2 + 4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15
      x^6 + 1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14
      x^10 + 4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14
      x^14 + 2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12
      x^18 + 6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8
      x^22 + 2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12
      y^2 + 1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4
      y^2 + 1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8
      y^2 + 1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12
      y^2 + 1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16
      y^2 + 1.4186193608775137`*^12 x^18 y^2 + 1.9835929036799988`*^10 x^20
      y^2 + 0.` x^22 y^2 + 3.21132582985528`*^14 y^4 + 7.0898497950437`*^14
      x^2 y^4 + 1.17216376113436`*^14 x^4 y^4 - 6.42808353051814`*^14 x^6
```

```
y^4 - 3.58628042925216`*^14 x^8 y^4 + 1.98167675293507`*^14 x^10
y^4 + 2.487109514865165`*^14 x^12 y^4 + 8.722354887503325`*^13 x^14
y^4 + 1.1520072834844234`*^13 x^16 y^4 + 2.6778504199679883`*^11 x^18
y^4 + 0.` x^20 y^4 + 8.288942813438599`*^15 y^6 + 3.5204136558798608`*^16
x^2 y^6 + 4.9854128729418576`*^16 x^4 y^6 + 3.2889809530354672`*^16
x^6 y^6 + 1.1021914503169804`*^16 x^8 y^6 + 1.968697311129105`*^15 x^10
y^6 + 2.704925768845715`*^14 x^12 y^6 + 4.2116993374108125`*^13 x^14
y^6 + 2.1422803359743906`*^12 x^16 y^6 + 0.` x^18 y^6 + 6.032492900050812`*^16
y^8 + 2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4
y^8 + 1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8
y^8 + 3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.0892918887762067`*^17
y^10 + 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4
y^10 + 1.968319149534202`*^17 x^6 y^10 + 2.391292013038468`*^16 x^8
y^10 - 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12
y^10 + 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17
x^2 y^12 + 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16
x^6 y^12 - 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.01222745874791`*^14 x^10
y^12 + 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17
x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6
y^14 + 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17
y^16 + 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4
y^16 + 1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16
y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24) ^2 +
4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
486.0000000000001` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
(9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^3)) ^ (1 / 3)) +
(0.26456684199469993` (2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13 x^2 +
4.812067318549415`*^14 x^4 + 1.0112724777803568`*^15 x^6 +
1.1931915738432872`*^15 x^8 + 8.718701704452624`*^14 x^10 +
4.0778922431468094`*^14 x^12 + 1.2100067024710247`*^14 x^14 +
2.155870592155143`*^13 x^16 + 2.0123814486887383`*^12 x^18 +
6.952713526609894`*^10 x^20 + 6.611976345599937`*^8 x^22 +
2.9802322387695312`*^-8 x^24 + 4.836792936332828`*^12 y^2 +
1.0742504416601538`*^14 x^2 y^2 + 7.9552739233018`*^14 x^4 y^2 +
1.941332747794058`*^15 x^6 y^2 + 2.357976069633132`*^15 x^8 y^2 +
1.645069764989325`*^15 x^10 y^2 + 6.902779660848735`*^14 x^12 y^2 +
1.7186836746749525`*^14 x^14 y^2 + 2.3439700788276734`*^13 x^16 y^2 +
```

$$1.4186193608775137`*^12x^{18}y^2 + 1.9835929036799988`*^10x^{20}y^2 +$$
$$0.`x^{22}y^2 + 3.21132582985528`*^14y^4 +$$
$$7.0898497950437`*^14x^2y^4 + 1.17216376113436`*^14x^4y^4 -$$
$$6.42808353051814`*^14x^6y^4 - 3.58628042925216`*^14x^8y^4 +$$
$$1.98167675293507`*^14x^{10}y^4 + 2.487109514865165`*^14x^{12}y^4 +$$
$$8.722354887503325`*^13x^{14}y^4 + 1.1520072834844234`*^13x^{16}y^4 +$$
$$2.6778504199679883`*^11x^{18}y^4 + 0.`x^{20}y^4 +$$
$$8.288942813438599`*^15y^6 + 3.5204136558798608`*^16x^2y^6 +$$
$$4.9854128729418576`*^16x^4y^6 + 3.2889809530354672`*^16x^6y^6 +$$
$$1.1021914503169804`*^16x^8y^6 + 1.968697311129105`*^15x^{10}y^6 +$$
$$2.704925768845715`*^14x^{12}y^6 + 4.2116993374108125`*^13x^{14}y^6 +$$
$$2.1422803359743906`*^12x^{16}y^6 + 0.`x^{18}y^6 +$$
$$6.032492900050812`*^16y^8 + 2.1803459439895725`*^17x^2y^8 +$$
$$2.6407912909593402`*^17x^4y^8 + 1.441410847969183`*^17x^6y^8 +$$
$$3.6132225897843344`*^16x^8y^8 + 3.28607817309819`*^15x^{10}y^8 +$$
$$1.6170646069380 25`*^13x^{12}y^8 + 1.1246971763865562`*^13x^{14}y^8 +$$
$$0.`x^{16}y^8 + 2.0892918887762067`*^17y^{10} +$$
$$5.860215228502327`*^17x^2y^{10} + 5.343703438081843`*^17x^4y^{10} +$$
$$1.9683191498534202`*^17x^6y^{10} + 2.391292013038 4684`*^16x^8y^{10} -$$
$$4.715555341341805`*^14x^{10}y^{10} + 4.048909834991625`*^13x^{12}y^{10} +$$
$$0.`x^{14}y^{10} + 4.008997438508142`*^17y^{12} +$$
$$8.134804854615626`*^17x^2y^{12} + 4.866994782491996`*^17x^4y^{12} +$$
$$8.573249437769507`*^16x^6y^{12} - 1.983246012953003`*^15x^8y^{12} +$$
$$1.01222745874791`*^14x^{10}y^{12} + 0.`x^{12}y^{12} +$$
$$4.3971315052193114`*^17y^{14} + 5.73460557734933`*^17x^2y^{14} +$$
$$1.6397680181739078`*^17x^4y^{14} - 3.887204088391256`*^15x^6y^{14} +$$
$$1.73524707213926`*^14x^8y^{14} + 0.25`x^{10}y^{14} +$$
$$2.59350388911741`*^17y^{16} + 1.6136547669983597`*^17x^2y^{16} -$$
$$3.918390334382208`*^15x^4y^{16} + 1.95215295615667`*^14x^6y^{16} +$$
$$2.`x^8y^{16} + 6.404366746596053`*^16y^{18} -$$
$$1.64045920082364`*^15x^2y^{18} + 1.30143530410446`*^14x^4y^{18} +$$
$$0.5`x^6y^{18} + 6.`y^{20} + 3.9043059123134`*^13x^2y^{20} +$$
$$2.`x^4y^{20} + 0.`y^{22} + 0.5`x^2y^{22} + 0.25`y^{24} +$$
$$\sqrt{((2.5389989167109375`*^10 + 9.742392743309481`*^13$$
$$x^2 + 4.812067318549415`*^14x^4 + 1.0112724777803568`*^15$$
$$x^6 + 1.1931915738432872`*^15x^8 + 8.718701704452624`*^14$$
$$x^{10} + 4.0778922431468094`*^14x^{12} + 1.2100067024710247`*^14$$
$$x^{14} + 2.155870592155143`*^13x^{16} + 2.0123814486887383`*^12$$
$$x^{18} + 6.952713526609894`*^10x^{20} + 6.611976345599937`*^8$$
$$x^{22} + 2.9802322387695312`*^-8x^{24} + 4.836792936332828`*^12$$
$$y^2 + 1.0742504416601538`*^14x^2y^2 + 7.9552739233018`*^14x^4$$
$$y^2 + 1.941332747794058`*^15x^6y^2 + 2.357976069633132`*^15x^8$$
$$y^2 + 1.645069764989325`*^15x^{10}y^2 + 6.902779660848735`*^14x^{12}$$
$$y^2 + 1.7186836746749525`*^14x^{14}y^2 + 2.3439700788276734`*^13x^{16}$$
$$y^2 + 1.4186193608775137`*^12x^{18}y^2 + 1.9835929036799988`*^10x^{20}$$
$$y^2 + 0.`x^{22}y^2 + 3.21132582985528`*^14y^4 + 7.0898497950437`*^14$$
$$x^2y^4 + 1.17216376113436`*^14x^4y^4 - 6.42808353051814`*^14x^6$$
$$y^4 - 3.58628042925216`*^14x^8y^4 + 1.98167675293507`*^14x^{10}$$
$$y^4 + 2.487109514865165`*^14x^{12}y^4 + 8.722354887503325`*^13x^{14}$$
$$y^4 + 1.1520072834844234`*^13x^{16}y^4 + 2.6778504199679883`*^11x^{18}$$
$$y^4 + 0.`x^{20}y^4 + 8.288942813438599`*^15y^6 + 3.5204136558798608`*^16$$
$$x^2y^6 + 4.9854128729418576`*^16x^4y^6 + 3.2889809530354672`*^16$$
$$x^6y^6 + 1.1021914503169804`*^16x^8y^6 + 1.968697311129105`*^15x^{10}$$
$$y^6 + 2.704925768845715`*^14x^{12}y^6 + 4.2116993374108125`*^13x^{14}$$
$$y^6 + 2.1422803359743906`*^12x^{16}y^6 + 0.`x^{18}y^6 + 6.032492900050812`*^16$$

```
y^8 + 2.1803459439895725`*^17 x^2 y^8 + 2.6407912909593402`*^17 x^4
y^8 + 1.441410847969183`*^17 x^6 y^8 + 3.6132225897843344`*^16 x^8
y^8 + 3.28607817309819`*^15 x^10 y^8 + 1.617064606938025`*^13 x^12 y^8 +
1.1246971763865562`*^13 x^14 y^8 + 0.` x^16 y^8 + 2.0892918887762067`*^17
y^10 + 5.860215228502327`*^17 x^2 y^10 + 5.343703438081843`*^17 x^4
y^10 + 1.9683191498534202`*^17 x^6 y^10 + 2.391292013038468 4`*^16 x^8
y^10 - 4.715555341341805`*^14 x^10 y^10 + 4.048909834991625`*^13 x^12
y^10 + 0.` x^14 y^10 + 4.008997438508142`*^17 y^12 + 8.134804854615626`*^17
x^2 y^12 + 4.866994782491996`*^17 x^4 y^12 + 8.573249437769507`*^16
x^6 y^12 - 1.983246012953003`*^15 x^8 y^12 + 1.012227458747 91`*^14 x^10
y^12 + 0.` x^12 y^12 + 4.3971315052193114`*^17 y^14 + 5.73460557734933`*^17
x^2 y^14 + 1.6397680181739078`*^17 x^4 y^14 - 3.887204088391256`*^15 x^6
y^14 + 1.73524707213926`*^14 x^8 y^14 + 0.25` x^10 y^14 + 2.59350388911741`*^17
y^16 + 1.6136547669983597`*^17 x^2 y^16 - 3.918390334382208`*^15 x^4
y^16 + 1.95215295615667`*^14 x^6 y^16 + 2.` x^8 y^16 + 6.404366746596053`*^16
y^18 - 1.64045920082364`*^15 x^2 y^18 + 1.30143530410446`*^14
x^4 y^18 + 0.5` x^6 y^18 + 6.` y^20 + 3.9043059123134`*^13 x^2
y^20 + 2.` x^4 y^20 + 0.` y^22 + 0.5` x^2 y^22 + 0.25` y^24) ^2 +
4.` (-1.` (-37324.8` - 74649.6` x^2 - 48600.` x^4 - 11275.199999999995` x^6 -
486.00000000000 1` x^8 - 6998.400000000023` y^2 -
79315.20000000004` x^2 y^2 - 51904.799999999996` x^4 y^2 -
6998.400000000001` x^6 y^2 + 199454.39999999997` y^4 -
6998.400000000027` x^2 y^4 - 36741.600000000006` x^4 y^4 + 141717.6` y^6 -
83980.80000000002` x^2 y^6 - 70858.80000000002` y^8) ^2 +
3.` (46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 + 209952.`
x^2 y^2 + 52488.` x^4 y^2 + 314928.` y^4 + 157464.` x^2 y^4 + 157464.` y^6)
(9914.400000000001` + 11801.376000000002` x^2 + 6451.704` x^4 +
2279.448` x^6 + 409.3200000000001` x^8 + 13.500000000000004` x^10 -
45820.07999999997` y^2 - 13391.567999999985` x^2 y^2 +
12048.588` x^4 y^2 + 3680.6400000000003` x^6 y^2 +
267.30000000000007` x^8 y^2 - 137819.88` y^4 - 23506.84800000002` x^2 y^4 +
3946.320000000003` x^4 y^4 + 2070.3600000000006` x^6 y^4 -
117412.74000000008` y^6 - 31492.800000000003` x^2 y^6 +
7844.040000000001` x^4 y^6 - 63772.92000000001` y^8 +
14565.420000000002` x^2 y^8 + 10628.820000000002` y^10)) ^3)) ^ (1 / 3)) /
(46656.` + 69984.` x^2 + 34992.` x^4 + 5832.` x^6 + 209952.` y^2 +
209952.`
x^2
y^2 + 52488.`
x^4
y^2 + 314928.`
y^4 + 157464.`
x^2
y^4 + 157464.`
y^6);

S1 /. {x → 0.2, y → 0.1};
S2 /. {x → 0.2, y → 0.1};
S3 /. {x → 0.2, y → 0.1};
<< Utilities`DXF`
Manif = ParametricPlot3D[{x, y, S3}, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
  PlotPoints → 150, FaceGrids → All, AxesLabel → {"x(ws)", "y(wa)", "α0(λ)"}]
WriteDXF["ManifSymm.dxf", Manif]
```



- Graphics3D -

ManifSymm.dxf

```
ClearAll[x, y, β, α0, α1, RR]
V1 = 1/6 x (x^4 β + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β) +
      3 (7 y^4 β - 12 y α1 (4 + β) + 4 (-α0 + 6 α1^2 + β) + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β)));
V2 = 1/2 (-6 y (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + 4 (x + y - α1)^3 - 4 (x - y + α1)^3 +
      ((36 + 16 x^2 + 5 x^4/3) y + 2 (36 + 7 x^2) y^3 + 27 y^5 - 6 (6 + x^2) α1 - 54 y^2 α1) β);
RR = FullSimplify[Eliminate[{V1 == 0, V2 == 0}, α1]]
```

$$
\begin{aligned}
&18\,x\,(2+x^2+3y^2)\,\alpha 0\\
&\quad\Big(12\left(336x^4+12(2x-9y)(2x+9y)(2+x^2+3y^2)\,\alpha 0+(2+x^2+3y^2)^2\,\alpha 0^2\right)-\\
&\qquad 6\left(8\left(4x^6-729y^4(2+3y^2)-x^4(58+95y^2)-6x^2(82+235y^2+175y^4)\right)+\right.\\
&\qquad\quad \left.(2+x^2+3y^2)(-204-28x^2+x^4+2(6+5x^2)y^2+21y^4)\,\alpha 0\right)\beta+\\
&\qquad\Big((-4+x)(4+x)(-52+x^2)(6+x^2)^2+4(15300+2214x^2-80x^4+5x^6)y^2+\\
&\qquad\quad 2(9882+180x^2+71x^4)y^4+12(204+35x^2)y^6+441y^8\Big)\beta^2+324y^2(6+x^2+3y^2)\beta^3\Big)==\\
&\quad x\Big(1354752x^6+12096x^4(444+80x^2+x^4+10(66+x^2)y^2+21y^4)\beta-\\
&\qquad 72\left(4x^{10}-6561y^6(2+3y^2)^2-29x^8(4+5y^2)-\right.\\
&\qquad\quad 4x^6(1028+1211y^2+803y^4)-6x^4(5560+11106y^2+6780y^4+3581y^6)-\\
&\qquad\quad \left.36x^2(2288+6700y^2+6120y^4+2995y^6+1652y^8)\right)\beta^2+\\
&\qquad\Big((-52+x^2)^2(2+x^2)(6+x^2)^3+6(6+x^2)(131040+76104x^2+6824x^4-196x^6+5x^8)y^2+\\
&\qquad\quad 3(2150928+1030608x^2+93024x^4-280x^6+121x^8)y^4+\\
&\qquad\quad 4(841860+191592x^2+7038x^4+565x^6)y^6+9(71136+13116x^2+847x^4)y^8+\\
&\qquad\quad 378(366+35x^2)y^{10}+9261y^{12}\Big)\beta^3+972y^2(2+x^2+3y^2)(6+x^2+3y^2)^2\beta^4\Big)
\end{aligned}
$$

```
ClearAll[x, y, β, α0, α1, SS, TT, WW]
SS =
 18 x (2 + x^2 + 3 y^2) α0
   (12 (336 x^4 + 12 (2 x - 9 y) (2 x + 9 y) (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + (2 + x^2 + 3 y^2)^2 α0^2) -
     6 (8 (4 x^6 - 729 y^4 (2 + 3 y^2) - x^4 (58 + 95 y^2) - 6 x^2 (82 + 235 y^2 + 175 y^4)) +
       (2 + x^2 + 3 y^2) (-204 - 28 x^2 + x^4 + 2 (6 + 5 x^2) y^2 + 21 y^4) α0) β +
     ((-4 + x) (4 + x) (-52 + x^2) (6 + x^2)^2 + 4 (15300 + 2214 x^2 - 80 x^4 + 5 x^6) y^2 +
       2 (9882 + 180 x^2 + 71 x^4) y^4 + 12 (204 + 35 x^2) y^6 + 441 y^8) β^2 + 324 y^2 (6 + x^2 + 3 y^2) β^3) -
   (x (1354752 x^6 + 12096 x^4 (444 + 80 x^2 + x^4 + 10 (66 + x^2) y^2 + 21 y^4) β -
       72 (4 x^10 - 6561 y^6 (2 + 3 y^2)^2 - 29 x^8 (4 + 5 y^2) -
         4 x^6 (1028 + 1211 y^2 + 803 y^4) - 6 x^4 (5560 + 11106 y^2 + 6780 y^4 + 3581 y^6) -
         36 x^2 (2288 + 6700 y^2 + 6120 y^4 + 2995 y^6 + 1652 y^8)) β^2 +
       ((-52 + x^2)^2 (2 + x^2) (6 + x^2)^3 + 6 (6 + x^2) (131040 + 76104 x^2 + 6824 x^4 - 196 x^6 + 5 x^8) y^2 +
         3 (2150928 + 1030608 x^2 + 93024 x^4 - 280 x^6 + 121 x^8) y^4 +
         4 (841860 + 191592 x^2 + 7038 x^4 + 565 x^6) y^6 + 9 (71136 + 13116 x^2 + 847 x^4) y^8 +
         378 (366 + 35 x^2) y^10 + 9261 y^12) β^3 + 972 y^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 β^4))
TT = Collect[SS /. β → 0.1, {α0, α0^2, α0^3}]
WW = FullSimplify[TT]
Solve[WW == 0, α0]
```

```
18 x (2 + x^2 + 3 y^2) α0
  (12 (336 x^4 + 12 (2 x - 9 y) (2 x + 9 y) (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + (2 + x^2 + 3 y^2)^2 α0^2) -
    6 (8 (4 x^6 - 729 y^4 (2 + 3 y^2) - x^4 (58 + 95 y^2) - 6 x^2 (82 + 235 y^2 + 175 y^4)) +
      (2 + x^2 + 3 y^2) (-204 - 28 x^2 + x^4 + 2 (6 + 5 x^2) y^2 + 21 y^4) α0) β +
    ((-4 + x) (4 + x) (-52 + x^2) (6 + x^2)^2 + 4 (15300 + 2214 x^2 - 80 x^4 + 5 x^6) y^2 +
      2 (9882 + 180 x^2 + 71 x^4) y^4 + 12 (204 + 35 x^2) y^6 + 441 y^8) β^2 + 324 y^2 (6 + x^2 + 3 y^2) β^3) -
  x (1354752 x^6 + 12096 x^4 (444 + 80 x^2 + x^4 + 10 (66 + x^2) y^2 + 21 y^4) β -
    72 (4 x^10 - 6561 y^6 (2 + 3 y^2)^2 - 29 x^8 (4 + 5 y^2) -
      4 x^6 (1028 + 1211 y^2 + 803 y^4) - 6 x^4 (5560 + 11106 y^2 + 6780 y^4 + 3581 y^6) -
      36 x^2 (2288 + 6700 y^2 + 6120 y^4 + 2995 y^6 + 1652 y^8)) β^2 +
    ((-52 + x^2)^2 (2 + x^2) (6 + x^2)^3 + 6 (6 + x^2) (131040 + 76104 x^2 + 6824 x^4 - 196 x^6 + 5 x^8) y^2 +
      3 (2150928 + 1030608 x^2 + 93024 x^4 - 280 x^6 + 121 x^8) y^4 +
      4 (841860 + 191592 x^2 + 7038 x^4 + 565 x^6) y^6 + 9 (71136 + 13116 x^2 + 847 x^4) y^8 +
      378 (366 + 35 x^2) y^10 + 9261 y^12) β^3 + 972 y^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 β^4)

-x (1354752 x^6 + 0.0972 y^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 +
    1209.6 x^4 (444 + 80 x^2 + x^4 + 10 (66 + x^2) y^2 + 21 y^4) + 0.001
     ((-52 + x^2)^2 (2 + x^2) (6 + x^2)^3 + 6 (6 + x^2) (131040 + 76104 x^2 + 6824 x^4 - 196 x^6 + 5 x^8) y^2 +
      3 (2150928 + 1030608 x^2 + 93024 x^4 - 280 x^6 + 121 x^8) y^4 +
      4 (841860 + 191592 x^2 + 7038 x^4 + 565 x^6) y^6 +
      9 (71136 + 13116 x^2 + 847 x^4) y^8 + 378 (366 + 35 x^2) y^10 + 9261 y^12) -
    0.72 (4 x^10 - 6561 y^6 (2 + 3 y^2)^2 - 29 x^8 (4 + 5 y^2) - 4 x^6 (1028 + 1211 y^2 + 803 y^4) -
      6 x^4 (5560 + 11106 y^2 + 6780 y^4 + 3581 y^6) -
      36 x^2 (2288 + 6700 y^2 + 6120 y^4 + 2995 y^6 + 1652 y^8))) +
  (72576 x^5 (2 + x^2 + 3 y^2) + 5.832 x y^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2) + 0.18 x (2 + x^2 + 3 y^2)
     ((-4 + x) (4 + x) (-52 + x^2) (6 + x^2)^2 + 4 (15300 + 2214 x^2 - 80 x^4 + 5 x^6) y^2 +
      2 (9882 + 180 x^2 + 71 x^4) y^4 + 12 (204 + 35 x^2) y^6 + 441 y^8) -
    86.4 x (2 + x^2 + 3 y^2) (4 x^6 - 729 y^4 (2 + 3 y^2) - x^4 (58 + 95 y^2) - 6 x^2 (82 + 235 y^2 + 175 y^4))) α0 +
  (2592 x (2 x - 9 y) (2 x + 9 y) (2 + x^2 + 3 y^2)^2 -
    10.8 x (2 + x^2 + 3 y^2)^2 (-204 - 28 x^2 + x^4 + 2 (6 + 5 x^2) y^2 + 21 y^4)) α0^2 + 216 x (2 + x^2 + 3 y^2)^3 α0^3

x (-0.001 x^12 - 9.261 y^12 +
  x^10 (2.964 - 0.03 y^2 + 0.18 α0) - 2041.2 y^8 (-278.339 + α0) (-0.100907 + α0) +
  5832. y^6 (-324.261 + α0) (-0.37431 + α0) (-0.0314689 + α0) +
  11664. y^4 (-214.394 + α0) (-0.0871722 + α0) (-0.0296814 + α0) +
  1728. (-0.1 + α0) (2.6 + α0) (2.6 + α0) + y^10 (-42653.6 + 238.14 α0) +
  7776. y^2 (-104.62 + α0) (0.00580738 + (-0.0469943 + α0) α0) +
  x^8 (-0.363 y^4 - 10.8 (4.17001 + α0) (28.73 + α0) + y^2 (-103.404 + 4.14 α0)) +
  x^4 (-7.623 y^8 - 972. y^4 (-118.129 + α0) (-0.478752 + α0) +
    1296. (-1.93232 + α0) (7.80356 + α0) (28.7288 + α0) + y^6 (-15498.1 + 152.28 α0) +
    1944. y^2 (-72.8748 + α0) (5.97887 + (-2.54743 + α0) α0)) +
  x^2 (-13.23 y^10 - 2332.8 y^6 (-197.834 + α0) (-0.169877 + α0) +
    2592. (-0.504561 + α0) (2.6 + α0) (17.7712 + α0) + y^8 (-42937.9 + 306.18 α0) +
    5832. y^4 (-199.459 + α0) (0.139034 + (-0.585066 + α0) α0) +
    7776. y^2 (-89.3981 + α0) (0.254899 + (-0.557444 + α0) α0)) +
  x^6 (-2.26 y^6 - 172.8 y^2 (-38.6978 + α0) (-2.33553 + α0) + y^4 (-2311.8 + 36.36 α0) +
    216. (-8.16735 + α0) (824.489 + α0 (57.3673 + α0))))

{{α0 →
  -(0.333333 (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 - 813888. y^2 - 699494.
      x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 - 1.16666×10^6 x^2 y^4 -
```

$$
\begin{aligned}
&972.\,x^4\,y^4 - 1.89346\times10^6\,y^6 - 2332.8\,x^2\,y^6 - 2041.2\,y^8)) /\\
&(1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 + 7776.\,x^2\,y^2 +\\
&\quad 1944.\,x^4\,y^2 + 11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6) +\\
&((0.209987 - 0.363708\,i)\,(-1.\,(8812.8 + 51494.4\,x^2 + 44841.6\,x^4 + 10627.2\,x^6 - 10.8\,x^8 -\\
&\quad 813888.\,y^2 - 699494.\,x^2\,y^2 - 146621.\,x^4\,y^2 - 172.8\,x^6\,y^2 - 2.50206\times10^6\,y^4 -\\
&\quad 1.16666\times10^6\,x^2\,y^4 - 972.\,x^4\,y^4 - 1.89346\times10^6\,y^6 - 2332.8\,x^2\,y^6 - 2041.2\,y^8)^2 +\\
&\quad 3.\,(1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 + 7776.\,x^2\,y^2 +\\
&\quad 1944.\,x^4\,y^2 + 11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6)\\
&\quad (10782.7 + 93121.9\,x^2 + 199058.\,x^4 + 76885.2\,x^6 - 355.32\,x^8 + 0.18\,x^{10} +\\
&\quad 38276.1\,y^2 + 389495.\,x^2\,y^2 + 372514.\,x^4\,y^2 + 7090.56\,x^6\,y^2 + 4.14\,x^8\,y^2 +\\
&\quad 292245.\,y^4 + 681388.\,x^2\,y^4 + 115287.\,x^4\,y^4 + 36.36\,x^6\,y^4 + 767434.\,y^6 +\\
&\quad 461903.\,x^2\,y^6 + 152.28\,x^4\,y^6 + 568351.\,y^8 + 306.18\,x^2\,y^8 + 238.14\,y^{10})))/\\
&((1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 + 7776.\,x^2\,y^2 + 1944.\,x^4\,y^2 +\\
&\quad 11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6)\\
&\quad (2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +\\
&\quad 3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} +\\
&\quad 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -\\
&\quad 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 +\\
&\quad 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +\\
&\quad 8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +\\
&\quad 9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -\\
&\quad 3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}\,x^6\,y^4 -\\
&\quad 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -\\
&\quad 6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -\\
&\quad 4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}\,x^4\,y^6 -\\
&\quad 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 -\\
&\quad 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 - 2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 +\\
&\quad 9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 + 4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 +\\
&\quad 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 - 3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 +\\
&\quad 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 - 5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 + 3.74109\times10^{19}\,y^{10} +\\
&\quad 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} + 4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} + 1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} +\\
&\quad 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} + 5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} +\\
&\quad 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} + 1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} +\\
&\quad 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} - 9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} +\\
&\quad 1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} + 8.80782\times10^{19}\,y^{14} +\\
&\quad 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} - 2.4091\times10^{16}\,x^6\,y^{14} +\\
&\quad 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} + 5.34055\times10^{19}\,y^{16} +\\
&\quad 2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} + 8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} -\\
&\quad 0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} - 3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} -\\
&\quad 0.0000152588\,x^6\,y^{18} - 1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} +\\
&\quad 0.\,x^4\,y^{20} + 1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24} +\\
&\quad \sqrt{((2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +}\\
&\qquad 3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} +\\
&\qquad 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -\\
&\qquad 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\\
&\qquad x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +\\
&\qquad 8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +\\
&\qquad 9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -\\
&\qquad 3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}\\
&\qquad x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -\\
&\qquad 6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -\\
&\qquad 4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}\\
&\qquad x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 -\\
&\qquad 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 - 2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 +\\
&\qquad 0.\,x^{18}\,y^6 + 9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +\\
&\qquad 4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -
\end{aligned}
$$

$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^{8}+1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^{8}-5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^{8}+3.74109\times10^{19}\,y^{10}+6.38367\times10^{19}\,x^{2}\,y^{10}+4.00831\times10^{19}\,x^{4}\,y^{10}+1.0904\times10^{19}\,x^{6}\,y^{10}+1.06796\times10^{18}\,x^{8}\,y^{10}-2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10}+5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10}+4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10}+7.69976\times10^{19}\,y^{12}+1.03007\times10^{20}\,x^{2}\,y^{12}+4.54981\times10^{19}\,x^{4}\,y^{12}+6.60353\times10^{18}\,x^{6}\,y^{12}-9.53399\times10^{15}\,x^{8}\,y^{12}+1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12}+2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12}+8.80782\times10^{19}\,y^{14}+8.04951\times10^{19}\,x^{2}\,y^{14}+1.82491\times10^{19}\,x^{4}\,y^{14}-2.4091\times10^{16}\,x^{6}\,y^{14}+4.99865\times10^{12}\,x^{8}\,y^{14}-3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14}+5.34055\times10^{19}\,y^{16}+2.47493\times10^{19}\,x^{2}\,y^{16}-3.74324\times10^{16}\,x^{4}\,y^{16}+8.56912\times10^{12}\,x^{6}\,y^{16}-0.0000228882\,x^{8}\,y^{16}+1.3429\times10^{19}\,y^{18}-3.29179\times10^{16}\,x^{2}\,y^{18}+9.64026\times10^{12}\,x^{4}\,y^{18}-0.0000152588\,x^{6}\,y^{18}-1.25872\times10^{16}\,y^{20}+6.42684\times10^{12}\,x^{2}\,y^{20}+0.\,x^{4}\,y^{20}+1.92805\times10^{12}\,y^{22}-7.62939\times10^{-6}\,x^{2}\,y^{22}-5.72205\times10^{-6}\,y^{24})^{2}+4.(-1.(8812.8+51494.4\,x^{2}+44841.6\,x^{4}+10627.2\,x^{6}-10.8\,x^{8}-813888.\,y^{2}-699494.\,x^{2}\,y^{2}-146621.\,x^{4}\,y^{2}-172.8\,x^{6}\,y^{2}-2.50206\times10^{6}\,y^{4}-1.16666\times10^{6}\,x^{2}\,y^{4}-972.\,x^{4}\,y^{4}-1.89346\times10^{6}\,y^{6}-2332.8\,x^{2}\,y^{6}-2041.2\,y^{8})^{2}+3.(1728.+2592.\,x^{2}+1296.\,x^{4}+216.\,x^{6}+7776.\,y^{2}+7776.\,x^{2}\,y^{2}+1944.\,x^{4}\,y^{2}+11664.\,y^{4}+5832.\,x^{2}\,y^{4}+5832.\,y^{6})(10782.7+93121.9\,x^{2}+199058.\,x^{4}+76885.2\,x^{6}-355.32\,x^{8}+0.18\,x^{10}+38276.1\,y^{2}+389495.\,x^{2}\,y^{2}+372514.\,x^{4}\,y^{2}+7090.56\,x^{6}\,y^{2}+4.14\,x^{8}\,y^{2}+292245.\,y^{4}+681388.\,x^{2}\,y^{4}+115287.\,x^{4}\,y^{4}+36.36\,x^{6}\,y^{4}+767434.\,y^{6}+461903.\,x^{2}\,y^{6}+152.28\,x^{4}\,y^{6}+568351.\,y^{8}+306.18\,x^{2}\,y^{8}+238.14\,y^{10}))^{3})\Big)^{(1/3)}-\Big((0.132283+0.229122\,i)\,\big(2.0312\times10^{11}+4.77332\times10^{12}\,x^{2}+4.17073\times10^{13}\,x^{4}+1.66295\times10^{14}\,x^{6}+3.11735\times10^{14}\,x^{8}+3.18118\times10^{14}\,x^{10}+1.89487\times10^{14}\,x^{12}+6.61607\times10^{13}\,x^{14}+1.25967\times10^{13}\,x^{16}+1.01268\times10^{12}\,x^{18}-1.90735\times10^{-6}\,x^{20}+0.\,x^{22}-4.54747\times10^{-13}\,x^{24}+2.55907\times10^{14}\,y^{2}+3.51368\times10^{15}\,x^{2}\,y^{2}+1.68241\times10^{16}\,x^{4}\,y^{2}+3.42874\times10^{16}\,x^{6}\,y^{2}+3.68842\times10^{16}\,x^{8}\,y^{2}+2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^{2}+8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^{2}+1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^{2}+1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^{2}+9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^{2}+3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^{2}-2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^{2}-3.52978\times10^{16}\,y^{4}-2.66408\times10^{17}\,x^{2}\,y^{4}-5.58292\times10^{17}\,x^{4}\,y^{4}-5.49372\times10^{17}\,x^{6}\,y^{4}-2.91814\times10^{17}\,x^{8}\,y^{4}-8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^{4}-1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^{4}-6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^{4}+4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^{4}+9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^{4}-4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^{4}+8.53643\times10^{17}\,y^{6}+1.15754\times10^{18}\,x^{2}\,y^{6}-1.00984\times10^{17}\,x^{4}\,y^{6}-9.58559\times10^{17}\,x^{6}\,y^{6}-6.39902\times10^{17}\,x^{8}\,y^{6}-1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^{6}-1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^{6}-2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^{6}+1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^{6}+0.\,x^{18}\,y^{6}+9.39774\times10^{18}\,y^{8}+1.80818\times10^{19}\,x^{2}\,y^{8}+1.30765\times10^{19}\,x^{4}\,y^{8}+4.24044\times10^{18}\,x^{6}\,y^{8}+5.35846\times10^{17}\,x^{8}\,y^{8}+5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^{8}-3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^{8}+1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^{8}-5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^{8}+3.74109\times10^{19}\,y^{10}+6.38367\times10^{19}\,x^{2}\,y^{10}+4.00831\times10^{19}\,x^{4}\,y^{10}+1.0904\times10^{19}\,x^{6}\,y^{10}+1.06796\times10^{18}\,x^{8}\,y^{10}-2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10}+5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10}+4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10}+7.69976\times10^{19}\,y^{12}+1.03007\times10^{20}\,x^{2}\,y^{12}+4.54981\times10^{19}\,x^{4}\,y^{12}+6.60353\times10^{18}\,x^{6}\,y^{12}-9.53399\times10^{15}\,x^{8}\,y^{12}+1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12}+2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12}+8.80782\times10^{19}\,y^{14}+8.04951\times10^{19}\,x^{2}\,y^{14}+1.82491\times10^{19}\,x^{4}\,y^{14}-2.4091\times10^{16}\,x^{6}\,y^{14}+4.99865\times10^{12}\,x^{8}\,y^{14}-3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14}+5.34055\times10^{19}\,y^{16}+2.47493\times10^{19}\,x^{2}\,y^{16}-3.74324\times10^{16}\,x^{4}\,y^{16}+8.56912\times10^{12}\,x^{6}\,y^{16}-0.0000228882\,x^{8}\,y^{16}+1.3429\times10^{19}\,y^{18}-3.29179\times10^{16}\,x^{2}\,y^{18}+9.64026\times10^{12}\,x^{4}\,y^{18}-0.0000152588\,x^{6}\,y^{18}-1.25872\times10^{16}\,y^{20}+6.42684\times10^{12}\,x^{2}\,y^{20}+0.\,x^{4}\,y^{20}+1.92805\times10^{12}\,y^{22}-7.62939\times10^{-6}\,x^{2}\,y^{22}-5.72205\times10^{-6}\,y^{24}+\sqrt{\big((2.0312\times10^{11}+4.77332\times10^{12}\,x^{2}+4.17073\times10^{13}\,x^{4}+1.66295\times10^{14}\,x^{6}+3.11735\times10^{14}\,x^{8}+3.18118\times10^{14}\,x^{10}+1.89487\times10^{14}\,x^{12}+6.61607\times10^{13}\,x^{14}+1.25967\times10^{13}\,x^{16}+1.01268\times10^{12}\,x^{18}-1.90735\times10^{-6}\,x^{20}+0.\,x^{22}-4.54747\times10^{-13}\,x^{24}+2.55907\times10^{14}\,y^{2}+3.51368\times10^{15}\,x^{2}\,y^{2}+1.68241\times10^{16}\,x^{4}\,y^{2}+3.42874\times10^{16}\,x^{6}\,y^{2}+3.68842\times10^{16}\,x^{8}\,y^{2}+2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^{2}+$$

```
8.26499×10^15 x^12 y^2 + 1.62391×10^15 x^14 y^2 + 1.34859×10^14 x^16 y^2 +
9.87535×10^10 x^18 y^2 + 3.26517×10^7 x^20 y^2 - 2.91038×10^-11 x^22 y^2 -
3.52978×10^16 y^4 - 2.66408×10^17 x^2 y^4 - 5.58292×10^17 x^4 y^4 - 5.49372×10^17
 x^6 y^4 - 2.91814×10^17 x^8 y^4 - 8.49304×10^16 x^10 y^4 - 1.23789×10^16 x^12 y^4 -
6.56676×10^14 x^14 y^4 + 4.51597×10^11 x^16 y^4 + 9.79552×10^8 x^18 y^4 -
4.65661×10^-10 x^20 y^4 + 8.53643×10^17 y^6 + 1.15754×10^18 x^2 y^6 - 1.00984×10^17
 x^4 y^6 - 9.58559×10^17 x^6 y^6 - 6.39902×10^17 x^8 y^6 - 1.73232×10^17 x^10 y^6 -
1.73563×10^16 x^12 y^6 - 2.11578×10^13 x^14 y^6 + 1.3224×10^10 x^16 y^6 +
0. x^18 y^6 + 9.39774×10^18 y^8 + 1.80818×10^19 x^2 y^8 + 1.30765×10^19 x^4 y^8 +
4.24044×10^18 x^6 y^8 + 5.35846×10^17 x^8 y^8 + 5.27129×10^15 x^10 y^8 -
3.34143×10^14 x^12 y^8 + 1.05792×10^11 x^14 y^8 - 5.96046×10^-8 x^16 y^8 +
3.74109×10^19 y^10 + 6.38367×10^19 x^2 y^10 + 4.00831×10^19 x^4 y^10 +
1.0904×10^19 x^6 y^10 + 1.06796×10^18 x^8 y^10 - 2.34082×10^15 x^10 y^10 +
5.55406×10^11 x^12 y^10 + 4.76837×10^-7 x^14 y^10 + 7.69976×10^19 y^12 +
1.03007×10^20 x^2 y^12 + 4.54981×10^19 x^4 y^12 + 6.60353×10^18 x^6 y^12 -
9.53399×10^15 x^8 y^12 + 1.99946×10^12 x^10 y^12 + 2.86102×10^-6 x^12 y^12 +
8.80782×10^19 y^14 + 8.04951×10^19 x^2 y^14 + 1.82491×10^19 x^4 y^14 - 2.4091×10^16
 x^6 y^14 + 4.99865×10^12 x^8 y^14 - 3.8147×10^-6 x^10 y^14 + 5.34055×10^19 y^16 +
2.47493×10^19 x^2 y^16 - 3.74324×10^16 x^4 y^16 + 8.56912×10^12 x^6 y^16 -
0.0000228882 x^8 y^16 + 1.3429×10^19 y^18 - 3.29179×10^16 x^2 y^18 + 9.64026×10^12
 x^4 y^18 - 0.0000152588 x^6 y^18 - 1.25872×10^16 y^20 + 6.42684×10^12 x^2 y^20 +
0. x^4 y^20 + 1.92805×10^12 y^22 - 7.62939×10^-6 x^2 y^22 - 5.72205×10^-6 y^24) ^ 2 +
4. (-1. (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 - 813888. y^2 -
      699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 -
      1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 - 1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 -
      2041.2 y^8) ^ 2 + 3. (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 +
      7776. x^2 y^2 + 1944. x^4 y^2 + 11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6) (10782.7 +
      93121.9 x^2 + 199058. x^4 + 76885.2 x^6 - 355.32 x^8 + 0.18 x^10 + 38276.1 y^2 +
      389495. x^2 y^2 + 372514. x^4 y^2 + 7090.56 x^6 y^2 + 4.14 x^8 y^2 + 292245. y^4 +
      681388. x^2 y^4 + 115287. x^4 y^4 + 36.36 x^6 y^4 + 767434. y^6 + 461903. x^2 y^6 +
      152.28 x^4 y^6 + 568351. y^8 + 306.18 x^2 y^8 + 238.14 y^10)) ^ 3)) ^ (1 / 3)) /
 (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
  1944.
   x^4
   y^2 + 11664.
   y^4 + 5832.
   x^2
   y^4 + 5832.
   y^6)},
{α0 → -(0.333333 (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 -
      813888. y^2 - 699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 -
      2.50206×10^6 y^4 - 1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 -
      1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 - 2041.2 y^8)) /
   (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
    1944. x^4 y^2 +
    11664. y^4 +
    5832. x^2 y^4 +
    5832. y^6) +
  ((0.209987 + 0.363708 i) (-1. (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 -
        813888. y^2 - 699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 -
        1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 - 1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 - 2041.2 y^8) ^ 2 +
      3. (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
        1944. x^4 y^2 + 11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6)
       (10782.7 + 93121.9 x^2 + 199058. x^4 + 76885.2 x^6 - 355.32 x^8 + 0.18 x^10 +
        38276.1 y^2 + 389495. x^2 y^2 + 372514. x^4 y^2 + 7090.56 x^6 y^2 + 4.14 x^8 y^2 +
        292245. y^4 + 681388. x^2 y^4 + 115287. x^4 y^4 + 36.36 x^6 y^4 + 767434. y^6 +
```

$$461903.\,x^2\,y^6 + 152.28\,x^4\,y^6 + 568351.\,y^8 + 306.18\,x^2\,y^8 + 238.14\,y^{10})))\Big/$$
$$\Big((1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 + 7776.\,x^2\,y^2 + 1944.\,x^4\,y^2 +$$
$$11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6\Big)$$
$$\Big(2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +$$
$$3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} +$$
$$6.61607\times10^{13}\,x^{14} + 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} -$$
$$1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} - 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} +$$
$$2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 +$$
$$3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -$$
$$3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 -$$
$$5.49372\times10^{17}\,x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 -$$
$$1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 - 6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 +$$
$$9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 - 4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 +$$
$$1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}\,x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 -$$
$$6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 - 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 -$$
$$2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 +$$
$$9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +$$
$$4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -$$
$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 - 5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 +$$
$$3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} + 4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} +$$
$$1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} + 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} +$$
$$5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} + 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} +$$
$$1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} + 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} -$$
$$9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} +$$
$$8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} -$$
$$2.4091\times10^{16}\,x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} +$$
$$5.34055\times10^{19}\,y^{16} + 2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} +$$
$$8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} - 0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} -$$
$$3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} -$$
$$1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} +$$
$$1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24} +$$
$$\sqrt{\Big((2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +$$
$$3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} +$$
$$1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -$$
$$4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}$$
$$x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -$$
$$3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}$$
$$x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -$$
$$6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -$$
$$4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}$$
$$x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 -$$
$$1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 - 2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 +$$
$$0.\,x^{18}\,y^6 + 9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +$$
$$4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -$$
$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 - 5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 +$$
$$3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} + 4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} +$$
$$1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} + 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} +$$
$$5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} + 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} +$$
$$1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} + 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} -$$
$$9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} +$$
$$8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} - 2.4091\times10^{16}$$
$$x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} + 5.34055\times10^{19}\,y^{16} +$$

$$2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} + 8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} -$$
$$0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} - 3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}$$
$$x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} - 1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} +$$
$$0.\,x^4\,y^{20} + 1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24})\,\hat{}\,2 +$$
$$4.\,(-1.\,(8812.8 + 51494.4\,x^2 + 44841.6\,x^4 + 10627.2\,x^6 - 10.8\,x^8 - 813888.\,y^2 -$$
$$699494.\,x^2\,y^2 - 146621.\,x^4\,y^2 - 172.8\,x^6\,y^2 - 2.50206\times10^6\,y^4 -$$
$$1.16666\times10^6\,x^2\,y^4 - 972.\,x^4\,y^4 - 1.89346\times10^6\,y^6 - 2332.8\,x^2\,y^6 -$$
$$2041.2\,y^8)\,\hat{}\,2 + 3.\,(1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 +$$
$$7776.\,x^2\,y^2 + 1944.\,x^4\,y^2 + 11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6)\,(10782.7 +$$
$$93121.9\,x^2 + 199058.\,x^4 + 76885.2\,x^6 - 355.32\,x^8 + 0.18\,x^{10} + 38276.1\,y^2 +$$
$$389495.\,x^2\,y^2 + 372514.\,x^4\,y^2 + 7090.56\,x^6\,y^2 + 4.14\,x^8\,y^2 + 292245.\,y^4 +$$
$$681388.\,x^2\,y^4 + 115287.\,x^4\,y^4 + 36.36\,x^6\,y^4 + 767434.\,y^6 + 461903.\,x^2\,y^6 +$$
$$152.28\,x^4\,y^6 + 568351.\,y^8 + 306.18\,x^2\,y^8 + 238.14\,y^{10}))\,\hat{}\,3)\Big)\,\hat{}\,(1/3)\Big) -$$
$$\Big((0.132283 - 0.229122\,i)\,\big(2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 +$$
$$1.66295\times10^{14}\,x^6 + 3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} +$$
$$1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} + 1.25967\times10^{13}\,x^{16} +$$
$$1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -$$
$$4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 +$$
$$1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 +$$
$$2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 + 8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 +$$
$$1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 -$$
$$2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 - 3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 -$$
$$5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}\,x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 -$$
$$8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -$$
$$6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 +$$
$$9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 - 4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 +$$
$$1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}\,x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 -$$
$$6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 - 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 -$$
$$2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 +$$
$$9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +$$
$$4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -$$
$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 -$$
$$5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 + 3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} +$$
$$4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} + 1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} + 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} -$$
$$2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} + 5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} +$$
$$4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} + 1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} +$$
$$4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} - 9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} +$$
$$1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} +$$
$$8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} -$$
$$2.4091\times10^{16}\,x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} +$$
$$5.34055\times10^{19}\,y^{16} + 2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} +$$
$$8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} - 0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} -$$
$$3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} -$$
$$1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} +$$
$$1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24} +$$
$$\sqrt{\big((2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +$$
$$3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} +$$
$$1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -$$
$$4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}$$
$$x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -$$
$$3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}$$
$$x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -$$
$$6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -$$

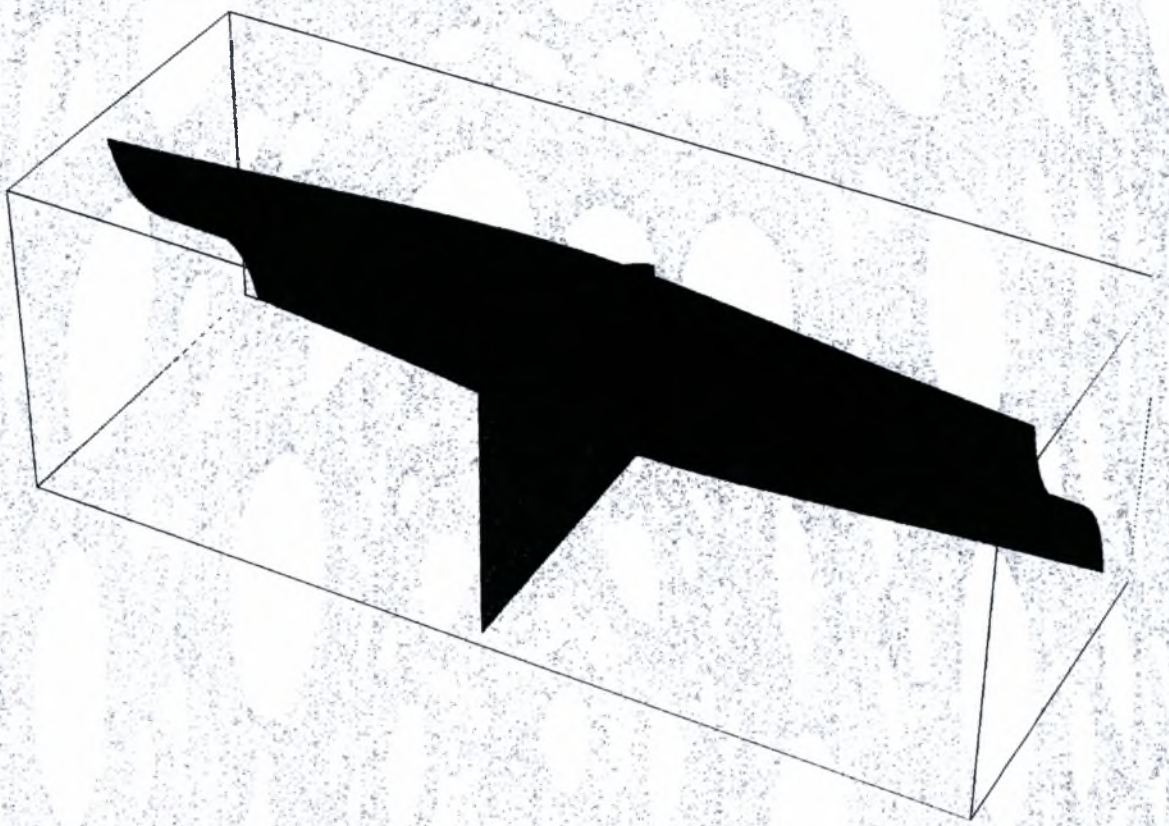
```
4.65661×10^-10 x^20 y^4 + 8.53643×10^17 y^6 + 1.15754×10^18 x^2 y^6 - 1.00984×10^17
 x^4 y^6 - 9.58559×10^17 x^6 y^6 - 6.39902×10^17 x^8 y^6 - 1.73232×10^17 x^10 y^6 -
1.73563×10^16 x^12 y^6 - 2.11578×10^13 x^14 y^6 + 1.3224×10^10 x^16 y^6 +
0. x^18 y^6 + 9.39774×10^18 y^8 + 1.80818×10^19 x^2 y^8 + 1.30765×10^19 x^4 y^8 +
4.24044×10^18 x^6 y^8 + 5.35846×10^17 x^8 y^8 + 5.27129×10^15 x^10 y^8 -
3.34143×10^14 x^12 y^8 + 1.05792×10^11 x^14 y^8 - 5.96046×10^-8 x^16 y^8 +
3.74109×10^19 y^10 + 6.38367×10^19 x^2 y^10 + 4.00831×10^19 x^4 y^10 +
1.0904×10^19 x^6 y^10 + 1.06796×10^18 x^8 y^10 - 2.34082×10^15 x^10 y^10 +
5.55406×10^11 x^12 y^10 + 4.76837×10^-7 x^14 y^10 + 7.69976×10^19 y^12 +
1.03007×10^20 x^2 y^12 + 4.54981×10^19 x^4 y^12 + 6.60353×10^18 x^6 y^12 -
9.53399×10^15 x^8 y^12 + 1.99946×10^12 x^10 y^12 + 2.86102×10^-6 x^12 y^12 +
8.80782×10^19 y^14 + 8.04951×10^19 x^2 y^14 + 1.82491×10^19 x^4 y^14 - 2.4091×10^16
 x^6 y^14 + 4.99865×10^12 x^8 y^14 - 3.8147×10^-6 x^10 y^14 + 5.34055×10^19 y^16 +
2.47493×10^19 x^2 y^16 - 3.74324×10^16 x^4 y^16 + 8.56912×10^12 x^6 y^16 -
0.0000228882 x^8 y^16 + 1.3429×10^19 y^18 - 3.29179×10^16 x^2 y^18 + 9.64026×10^12
 x^4 y^18 - 0.0000152588 x^6 y^18 - 1.25872×10^16 y^20 + 6.42684×10^12 x^2 y^20 +
0. x^4 y^20 + 1.92805×10^12 y^22 - 7.62939×10^-6 x^2 y^22 - 5.72205×10^-6 y^24) ^ 2 +
4. (-1. (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 - 813888. y^2 -
      699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 -
      1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 - 1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 -
      2041.2 y^8) ^ 2 + 3. (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 +
     7776. x^2 y^2 + 1944. x^4 y^2 + 11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6) (10782.7 +
     93121.9 x^2 + 199058. x^4 + 76885.2 x^6 - 355.32 x^8 + 0.18 x^10 + 38276.1 y^2 +
     389495. x^2 y^2 + 372514. x^4 y^2 + 7090.56 x^6 y^2 + 4.14 x^8 y^2 + 292245. y^4 +
     681388. x^2 y^4 + 115287. x^4 y^4 + 36.36 x^6 y^4 + 767434. y^6 + 461903. x^2 y^6 +
     152.28 x^4 y^6 + 568351. y^8 + 306.18 x^2 y^8 + 238.14 y^10)) ^ 3)) ^ (1 / 3)) /
 (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
  1944.
   x^4
   y^2 + 11664.
   y^4 + 5832.
   x^2
   y^4 + 5832.
   y^6)},
{α0 → -(0.333333 (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 -
      813888. y^2 - 699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 -
      2.50206×10^6 y^4 - 1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 -
      1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 - 2041.2 y^8)) /
   (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
    1944. x^4 y^2 +
    11664. y^4 +
    5832. x^2 y^4 +
    5832. y^6) -
  (0.419974 (-1. (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 -
        813888. y^2 - 699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 -
        1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 - 1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 - 2041.2 y^8) ^ 2 +
     3. (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
        1944. x^4 y^2 + 11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6)
      (10782.7 + 93121.9 x^2 + 199058. x^4 + 76885.2 x^6 - 355.32 x^8 + 0.18 x^10 +
        38276.1 y^2 + 389495. x^2 y^2 + 372514. x^4 y^2 + 7090.56 x^6 y^2 + 4.14 x^8 y^2 +
        292245. y^4 + 681388. x^2 y^4 + 115287. x^4 y^4 + 36.36 x^6 y^4 + 767434. y^6 +
        461903. x^2 y^6 + 152.28 x^4 y^6 + 568351. y^8 + 306.18 x^2 y^8 + 238.14 y^10))) /
   ((1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 + 1944. x^4 y^2 +
      11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6)
    (2.0312×10^11 + 4.77332×10^12 x^2 + 4.17073×10^13 x^4 + 1.66295×10^14 x^6 +
      3.11735×10^14 x^8 + 3.18118×10^14 x^10 + 1.89487×10^14 x^12 +
```

$$6.61607\times10^{13}\,x^{14} + 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} -$$
$$1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} - 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} +$$
$$2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 +$$
$$3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 +$$
$$1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 + 9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 +$$
$$3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -$$
$$3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 -$$
$$5.49372\times10^{17}\,x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 -$$
$$1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 - 6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 +$$
$$4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -$$
$$4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 -$$
$$1.00984\times10^{17}\,x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 -$$
$$1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 - 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 -$$
$$2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 +$$
$$9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +$$
$$4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -$$
$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 -$$
$$5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 + 3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} +$$
$$4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} + 1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} +$$
$$1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} +$$
$$5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} + 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} +$$
$$7.69976\times10^{19}\,y^{12} + 1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} + 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} +$$
$$6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} - 9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} +$$
$$1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} +$$
$$8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} -$$
$$2.4091\times10^{16}\,x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} +$$
$$5.34055\times10^{19}\,y^{16} + 2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} +$$
$$8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} - 0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} -$$
$$3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} -$$
$$1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} +$$
$$1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24} +$$
$$\sqrt{((2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 +$$
$$3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} +$$
$$1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} -$$
$$4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}$$
$$x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$
$$8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 +$$
$$9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 -$$
$$3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}$$
$$x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 -$$
$$6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 -$$
$$4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}$$
$$x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 -$$
$$1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 - 2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 +$$
$$0.\,x^{18}\,y^6 + 9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 +$$
$$4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 -$$
$$3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 - 5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 +$$
$$3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} + 4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} +$$
$$1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} + 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} +$$
$$5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} + 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} +$$
$$1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} + 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} -$$
$$9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} +$$
$$8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} - 2.4091\times10^{16}$$
$$x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} + 5.34055\times10^{19}\,y^{16} +$$
$$2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} + 8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} -$$

$$0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} - 3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} - 1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} + 1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24})^2 + 4.(-1.(8812.8 + 51494.4\,x^2 + 44841.6\,x^4 + 10627.2\,x^6 - 10.8\,x^8 - 813888.\,y^2 - 699494.\,x^2\,y^2 - 146621.\,x^4\,y^2 - 172.8\,x^6\,y^2 - 2.50206\times10^6\,y^4 - 1.16666\times10^6\,x^2\,y^4 - 972.\,x^4\,y^4 - 1.89346\times10^6\,y^6 - 2332.8\,x^2\,y^6 - 2041.2\,y^8)^2 + 3.(1728. + 2592.\,x^2 + 1296.\,x^4 + 216.\,x^6 + 7776.\,y^2 + 7776.\,x^2\,y^2 + 1944.\,x^4\,y^2 + 11664.\,y^4 + 5832.\,x^2\,y^4 + 5832.\,y^6)(10782.7 + 93121.9\,x^2 + 199058.\,x^4 + 76885.2\,x^6 - 355.32\,x^8 + 0.18\,x^{10} + 38276.1\,y^2 + 389495.\,x^2\,y^2 + 372514.\,x^4\,y^2 + 7090.56\,x^6\,y^2 + 4.14\,x^8\,y^2 + 292245.\,y^4 + 681388.\,x^2\,y^4 + 115287.\,x^4\,y^4 + 36.36\,x^6\,y^4 + 767434.\,y^6 + 461903.\,x^2\,y^6 + 152.28\,x^4\,y^6 + 568351.\,y^8 + 306.18\,x^2\,y^8 + 238.14\,y^{10}))^3))^{(1/3)}) + (0.264567(2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 + 3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} + 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} - 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 + 8.26499\times10^{15}\,x^{12}\,y^2 + 1.62391\times10^{15}\,x^{14}\,y^2 + 1.34859\times10^{14}\,x^{16}\,y^2 + 9.87535\times10^{10}\,x^{18}\,y^2 + 3.26517\times10^{7}\,x^{20}\,y^2 - 2.91038\times10^{-11}\,x^{22}\,y^2 - 3.52978\times10^{16}\,y^4 - 2.66408\times10^{17}\,x^2\,y^4 - 5.58292\times10^{17}\,x^4\,y^4 - 5.49372\times10^{17}\,x^6\,y^4 - 2.91814\times10^{17}\,x^8\,y^4 - 8.49304\times10^{16}\,x^{10}\,y^4 - 1.23789\times10^{16}\,x^{12}\,y^4 - 6.56676\times10^{14}\,x^{14}\,y^4 + 4.51597\times10^{11}\,x^{16}\,y^4 + 9.79552\times10^{8}\,x^{18}\,y^4 - 4.65661\times10^{-10}\,x^{20}\,y^4 + 8.53643\times10^{17}\,y^6 + 1.15754\times10^{18}\,x^2\,y^6 - 1.00984\times10^{17}\,x^4\,y^6 - 9.58559\times10^{17}\,x^6\,y^6 - 6.39902\times10^{17}\,x^8\,y^6 - 1.73232\times10^{17}\,x^{10}\,y^6 - 1.73563\times10^{16}\,x^{12}\,y^6 - 2.11578\times10^{13}\,x^{14}\,y^6 + 1.3224\times10^{10}\,x^{16}\,y^6 + 0.\,x^{18}\,y^6 + 9.39774\times10^{18}\,y^8 + 1.80818\times10^{19}\,x^2\,y^8 + 1.30765\times10^{19}\,x^4\,y^8 + 4.24044\times10^{18}\,x^6\,y^8 + 5.35846\times10^{17}\,x^8\,y^8 + 5.27129\times10^{15}\,x^{10}\,y^8 - 3.34143\times10^{14}\,x^{12}\,y^8 + 1.05792\times10^{11}\,x^{14}\,y^8 - 5.96046\times10^{-8}\,x^{16}\,y^8 + 3.74109\times10^{19}\,y^{10} + 6.38367\times10^{19}\,x^2\,y^{10} + 4.00831\times10^{19}\,x^4\,y^{10} + 1.0904\times10^{19}\,x^6\,y^{10} + 1.06796\times10^{18}\,x^8\,y^{10} - 2.34082\times10^{15}\,x^{10}\,y^{10} + 5.55406\times10^{11}\,x^{12}\,y^{10} + 4.76837\times10^{-7}\,x^{14}\,y^{10} + 7.69976\times10^{19}\,y^{12} + 1.03007\times10^{20}\,x^2\,y^{12} + 4.54981\times10^{19}\,x^4\,y^{12} + 6.60353\times10^{18}\,x^6\,y^{12} - 9.53399\times10^{15}\,x^8\,y^{12} + 1.99946\times10^{12}\,x^{10}\,y^{12} + 2.86102\times10^{-6}\,x^{12}\,y^{12} + 8.80782\times10^{19}\,y^{14} + 8.04951\times10^{19}\,x^2\,y^{14} + 1.82491\times10^{19}\,x^4\,y^{14} - 2.4091\times10^{16}\,x^6\,y^{14} + 4.99865\times10^{12}\,x^8\,y^{14} - 3.8147\times10^{-6}\,x^{10}\,y^{14} + 5.34055\times10^{19}\,y^{16} + 2.47493\times10^{19}\,x^2\,y^{16} - 3.74324\times10^{16}\,x^4\,y^{16} + 8.56912\times10^{12}\,x^6\,y^{16} - 0.0000228882\,x^8\,y^{16} + 1.3429\times10^{19}\,y^{18} - 3.29179\times10^{16}\,x^2\,y^{18} + 9.64026\times10^{12}\,x^4\,y^{18} - 0.0000152588\,x^6\,y^{18} - 1.25872\times10^{16}\,y^{20} + 6.42684\times10^{12}\,x^2\,y^{20} + 0.\,x^4\,y^{20} + 1.92805\times10^{12}\,y^{22} - 7.62939\times10^{-6}\,x^2\,y^{22} - 5.72205\times10^{-6}\,y^{24} + \sqrt{((2.0312\times10^{11} + 4.77332\times10^{12}\,x^2 + 4.17073\times10^{13}\,x^4 + 1.66295\times10^{14}\,x^6 + 3.11735\times10^{14}\,x^8 + 3.18118\times10^{14}\,x^{10} + 1.89487\times10^{14}\,x^{12} + 6.61607\times10^{13}\,x^{14} + 1.25967\times10^{13}\,x^{16} + 1.01268\times10^{12}\,x^{18} - 1.90735\times10^{-6}\,x^{20} + 0.\,x^{22} - 4.54747\times10^{-13}\,x^{24} + 2.55907\times10^{14}\,y^2 + 3.51368\times10^{15}\,x^2\,y^2 + 1.68241\times10^{16}\,x^4\,y^2 + 3.42874\times10^{16}\,x^6\,y^2 + 3.68842\times10^{16}\,x^8\,y^2 + 2.28733\times10^{16}\,x^{10}\,y^2 +$$

```
8.26499×10^15 x^12 y^2 + 1.62391×10^15 x^14 y^2 + 1.34859×10^14 x^16 y^2 +
9.87535×10^10 x^18 y^2 + 3.26517×10^7 x^20 y^2 - 2.91038×10^-11 x^22 y^2 -
3.52978×10^16 y^4 - 2.66408×10^17 x^2 y^4 - 5.58292×10^17 x^4 y^4 - 5.49372×10^17
 x^6 y^4 - 2.91814×10^17 x^8 y^4 - 8.49304×10^16 x^10 y^4 - 1.23789×10^16 x^12 y^4 -
6.56676×10^14 x^14 y^4 + 4.51597×10^11 x^16 y^4 + 9.79552×10^8 x^18 y^4 -
4.65661×10^-10 x^20 y^4 + 8.53643×10^17 y^6 + 1.15754×10^18 x^2 y^6 - 1.00984×10^17
 x^4 y^6 - 9.58559×10^17 x^6 y^6 - 6.39902×10^17 x^8 y^6 - 1.73232×10^17 x^10 y^6 -
1.73563×10^16 x^12 y^6 - 2.11578×10^13 x^14 y^6 + 1.3224×10^10 x^16 y^6 +
0. x^18 y^6 + 9.39774×10^18 y^8 + 1.80818×10^19 x^2 y^8 + 1.30765×10^19 x^4 y^8 +
4.24044×10^18 x^6 y^8 + 5.35846×10^17 x^8 y^8 + 5.27129×10^15 x^10 y^8 -
3.34143×10^14 x^12 y^8 + 1.05792×10^11 x^14 y^8 - 5.96046×10^-8 x^16 y^8 +
3.74109×10^19 y^10 + 6.38367×10^19 x^2 y^10 + 4.00831×10^19 x^4 y^10 +
1.0904×10^19 x^6 y^10 + 1.06796×10^18 x^8 y^10 - 2.34082×10^15 x^10 y^10 +
5.55406×10^11 x^12 y^10 + 4.76837×10^-7 x^14 y^10 + 7.69976×10^19 y^12 +
1.03007×10^20 x^2 y^12 + 4.54981×10^19 x^4 y^12 + 6.60353×10^18 x^6 y^12 -
9.53399×10^15 x^8 y^12 + 1.99946×10^12 x^10 y^12 + 2.86102×10^-6 x^12 y^12 +
8.80782×10^19 y^14 + 8.04951×10^19 x^2 y^14 + 1.82491×10^19 x^4 y^14 - 2.4091×10^15
 x^6 y^14 + 4.99865×10^12 x^8 y^14 - 3.8147×10^-6 x^10 y^14 + 5.34055×10^19 y^16 +
2.47493×10^19 x^2 y^16 - 3.74324×10^16 x^4 y^16 + 8.56912×10^12 x^6 y^16 -
0.0000228882 x^8 y^16 + 1.3429×10^19 y^18 - 3.29179×10^16 x^2 y^18 + 9.64026×10^12
 x^4 y^18 - 0.0000152588 x^6 y^18 - 1.25872×10^16 y^20 + 6.42684×10^12 x^2 y^20 +
0. x^4 y^20 + 1.92805×10^12 y^22 - 7.62939×10^-6 x^2 y^22 - 5.72205×10^-6 y^24) ^ 2 +
4. (-1. (8812.8 + 51494.4 x^2 + 44841.6 x^4 + 10627.2 x^6 - 10.8 x^8 - 813888. y^2 -
      699494. x^2 y^2 - 146621. x^4 y^2 - 172.8 x^6 y^2 - 2.50206×10^6 y^4 -
      1.16666×10^6 x^2 y^4 - 972. x^4 y^4 - 1.89346×10^6 y^6 - 2332.8 x^2 y^6 -
      2041.2 y^8) ^ 2 + 3. (1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 +
     7776. x^2 y^2 + 1944. x^4 y^2 + 11664. y^4 + 5832. x^2 y^4 + 5832. y^6) (10782.7 +
     93121.9 x^2 + 199058. x^4 + 76885.2 x^6 - 355.32 x^8 + 0.18 x^10 + 38276.1 y^2 +
     389495. x^2 y^2 + 372514. x^4 y^2 + 7090.56 x^6 y^2 + 4.14 x^8 y^2 + 292245. y^4 +
     681388. x^2 y^4 + 115287. x^4 y^4 + 36.36 x^6 y^4 + 767434. y^6 + 461903. x^2 y^6 +
     152.28 x^4 y^6 + 568351. y^8 + 306.18 x^2 y^8 + 238.14 y^10)) ^ 3)) ^ (1 / 3)) /
(1728. + 2592. x^2 + 1296. x^4 + 216. x^6 + 7776. y^2 + 7776. x^2 y^2 +
 1944.
  x^4
  y^2 + 11664.
  y^4 + 5832.
  x^2
  y^4 + 5832.
  y^6)}}
```

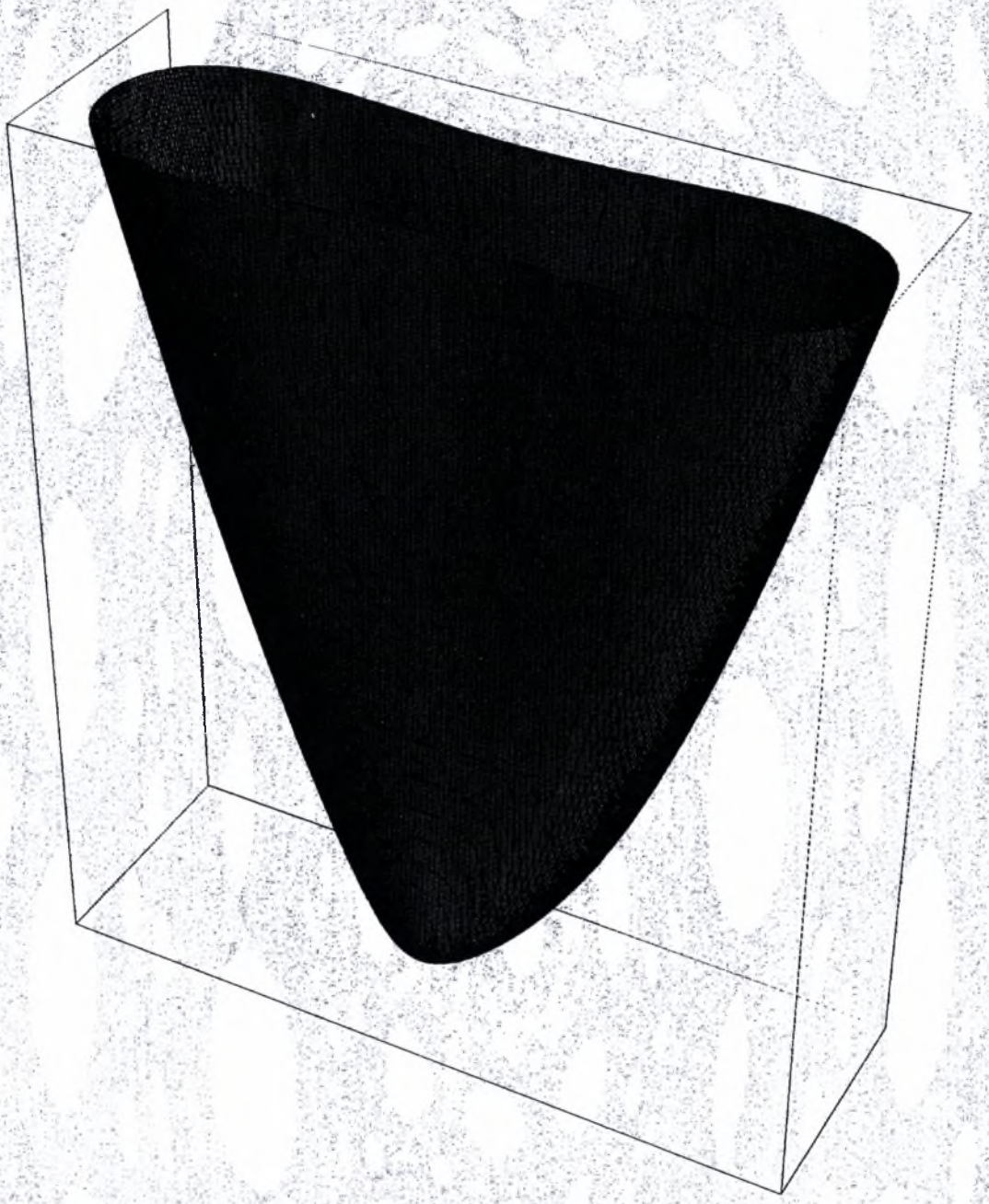
```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, M1, M2, Bs, A, B]
M1 = FullSimplify[1/6 x (x^4 β + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β) +
      3 (7 y^4 β - 12 y α1 (4 + β) + 4 (-α0 + 6 α1^2 + β) + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β)))] /. β → 0.1;
M2 = FullSimplify[-1/2 (-6 y (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + 4 (x + y - α1)^3 - 4 (x - y + α1)^3 +
      ((36 + 16 x^2 + 5 x^4/3) y + 2 (36 + 7 x^2) y^3 + 27 y^5 - 6 (6 + x^2) α1 - 54 y^2 α1) β)] /. β → 0.1;
Bs = FullSimplify[-4/9 x^2 (21 y^3 β - 9 α1 (4 + β) + y (36 - 9 α0 + 24 β + 5 x^2 β))^2 +
     1/2 (5 x^4 β/6 + 7 y^4 β/2 - 6 y α1 (4 + β) + 2 (-α0 + 6 α1^2 + β) + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β) +
      x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β)) (-6 (2 α0 + y^2 (-4 + 9 α0) + 8 y α1 - 4 α1^2) + 5 x^4 β/3 +
      9 (4 + 3 y (8 y + 5 y^3 - 4 α1)) β + x^2 (24 - 6 α0 + 16 β + 42 y^2 β)) /. β → 0.1];
FullSimplify[Eliminate[{M1 == 0, M2 == 0}, α0]]
A =
 x α1 (2.053593972369735`*^32 + 7.016446072263263`*^32 x^4 - 1.0113950313920947`*^34 y^4 +
     2.7381252964929807`*^33 y α1 + 4.107187944739471`*^33 y^3 α1 +
     4.563542160821633`*^32 α1^2 + x^2 (1.505968913071139`*^33 - 1.2663829496280035`*^33
        y^2 + 1.36906264824649`*^33 y α1 + 2.281771080410817`*^32 α1^2) +
     y^2 (-6.434594446758504`*^33 + 6.84531324123245`*^32 α1^2)) -
  (x y (1.3690626482464897`*^32 + 1.9014759003423475`*^30 x^6 -
     3.3085680665956857`*^33 y^2 - 5.236664629542826`*^33 y^4 + 5.133984930924338`*^31
      y^6 + x^4 (-6.579106615184522`*^32 + 1.7113283103081128`*^31 y^2) +
     x^2 (-1.2549740942259496`*^33 - 3.719286861069632`*^33 y^2 +
        5.133984930924338`*^31 y^4)))
B = ContourPlot3D[A, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α1, -0.345, 0.345},
  Contours → {0}, PlotPoints → {15, 15}]
<< Utilities`DXF`
WriteDXF["ManifAsymm2.dxf", B]

x α1 (2.05359×10^32 + 7.01645×10^32 x^4 - 1.0114×10^34 y^4 +
     2.73813×10^33 y α1 + 4.10719×10^33 y^3 α1 + 4.56354×10^32 α1^2 +
     x^2 (1.50597×10^33 - 1.26638×10^33 y^2 + 1.36906×10^33 y α1 + 2.28177×10^32 α1^2) +
     y^2 (-6.43459×10^33 + 6.84531×10^32 α1^2)) ==
 x y (1.36906×10^32 + 1.90148×10^30 x^6 - 3.30857×10^33 y^2 - 5.23666×10^33 y^4 +
     5.13398×10^31 y^6 + x^4 (-6.57911×10^32 + 1.71133×10^31 y^2) +
     x^2 (-1.25497×10^33 - 3.71929×10^33 y^2 + 5.13398×10^31 y^4))

-x y (1.36906×10^32 + 1.90148×10^30 x^6 - 3.30857×10^33 y^2 -
     5.23666×10^33 y^4 + 5.13398×10^31 y^6 + x^4 (-6.57911×10^32 + 1.71133×10^31 y^2) +
     x^2 (-1.25497×10^33 - 3.71929×10^33 y^2 + 5.13398×10^31 y^4)) +
 x α1 (2.05359×10^32 + 7.01645×10^32 x^4 - 1.0114×10^34 y^4 +
     2.73813×10^33 y α1 + 4.10719×10^33 y^3 α1 + 4.56354×10^32 α1^2 +
     x^2 (1.50597×10^33 - 1.26638×10^33 y^2 + 1.36906×10^33 y α1 + 2.28177×10^32 α1^2) +
     y^2 (-6.43459×10^33 + 6.84531×10^32 α1^2))
```



- Graphics3D -

ManifAsymm2.dxf

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, β, α0, α1, SS, TT, WW]
SS =
  18 x (2 + x^2 + 3 y^2) α0
    (12 (336 x^4 + 12 (2 x - 9 y) (2 x + 9 y) (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + (2 + x^2 + 3 y^2)^2 α0^2) -
      6 (8 (4 x^6 - 729 y^4 (2 + 3 y^2) - x^4 (58 + 95 y^2) - 6 x^2 (82 + 235 y^2 + 175 y^4)) +
        (2 + x^2 + 3 y^2) (-204 - 28 x^2 + x^4 + 2 (6 + 5 x^2) y^2 + 21 y^4) α0) β +
      ((-4 + x) (4 + x) (-52 + x^2) (6 + x^2)^2 + 4 (15300 + 2214 x^2 - 80 x^4 + 5 x^6) y^2 + 2
        (9882 + 180 x^2 + 71 x^4) y^4 + 12 (204 + 35 x^2) y^6 + 441 y^8) β^2 + 324 y^2 (6 + x^2 + 3 y^2) β^3) -
    (x (1354752 x^6 + 12096 x^4 (444 + 80 x^2 + x^4 + 10 (66 + x^2) y^2 + 21 y^4) β -
      72 (4 x^10 - 6561 y^6 (2 + 3 y^2)^2 - 29 x^8 (4 + 5 y^2) -
        4 x^6 (1028 + 1211 y^2 + 803 y^4) - 6 x^4 (5560 + 11106 y^2 + 6780 y^4 + 3581 y^6) -
        36 x^2 (2288 + 6700 y^2 + 6120 y^4 + 2995 y^6 + 1652 y^8)) β^2 +
      ((-52 + x^2)^2 (2 + x^2) (6 + x^2)^3 + 6 (6 + x^2) (131040 + 76104 x^2 + 6824 x^4 - 196 x^6 + 5 x^8)
        y^2 + 3 (2150928 + 1030608 x^2 + 93024 x^4 - 280 x^6 + 121 x^8) y^4 +
        4 (841860 + 191592 x^2 + 7038 x^4 + 565 x^6) y^6 + 9 (71136 + 13116 x^2 + 847 x^4) y^8 +
        378 (366 + 35 x^2) y^10 + 9261 y^12) β^3 + 972 y^2 (2 + x^2 + 3 y^2) (6 + x^2 + 3 y^2)^2 β^4));
TT = Collect[SS /. β → 0.1, {α0, α0^2, α0^3}];
WW = FullSimplify[TT] / x;
S1 = ContourPlot3D[WW, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α0, 0, 1.5}, Contours → {0},
  PlotPoints → {15, 15}, AxesLabel → {"x(ws)", "y(wa)", "α0(λ)"}]
<< Utilities`DXF`
WriteDXF["ManifAsymm.dxf", S1]
```



- Graphics3D -

ManifAsymm.dxf

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, M1, M2, Bs]
M1 = x^5 β/6 - x^2 α1 (24 + β) + x^3 (8 - α0 + 1/3 (4 + 5 y^2) β) - α1 (y^2 (12 + β) + 2 (4 α1^2 + β)) +
     x (-2 α0 + 24 α1^2 + 2 β + 7 y^4 β/2 + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β)) /. β → 0.1;
M2 = -6 y (α0 - 2 α1^2 - 3 β) + 5/6 x^4 y β + 27 y^5 β/2 - 2 x y α1 (12 + β) +
     y^3 (4 - 9 α0 + 36 β) + x^2 y (12 - 3 α0 + 8 β + 7 y^2 β) /. β → 0.1;
Bs = FullSimplify[-4/9 y^2 (5 x^3 β - 3 α1 (12 + β) + 3 x (12 - 3 α0 + 8 β + 7 y^2 β))^2 +
     (-2 α0 + 24 α1^2 + 2 β + 5 x^4 β/6 + 7 y^4 β/2 - 2 x α1 (24 + β) + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β) +
     x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β)) (-6 (α0 - 2 α1^2 - 3 β) + 5 x^4 β/6 + 135 y^4 β/2 -
     2 x α1 (12 + β) + y^2 (12 - 27 α0 + 108 β) + x^2 (12 - 3 α0 + 8 β + 21 y^2 β)) /. β → 0.1];
Eliminate[{M1 = 0, M2 = 0}, α1]
Solve[Bs = 0, α0]
```

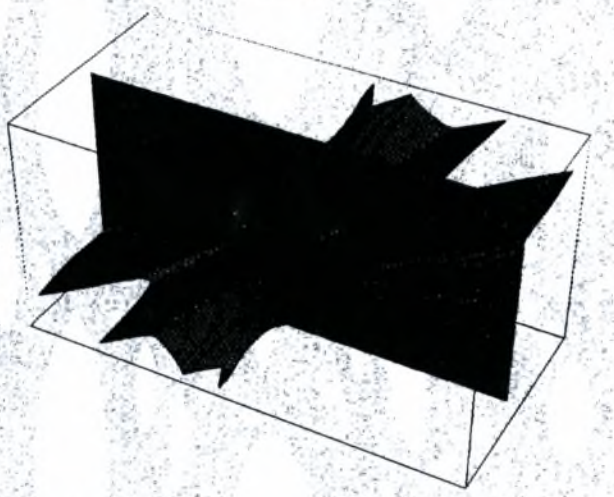
$$
\begin{aligned}
&y\,(2.09634\times10^{52} + 2.49533\times10^{52}\,x^2 + 1.36417\times10^{52}\,x^4 + 4.81976\times10^{51}\,x^6 + 8.65483\times10^{50}\,x^8 + \\
&\quad 2.8545\times10^{49}\,x^{10} - 9.68839\times10^{52}\,y^2 - 2.83157\times10^{52}\,x^2\,y^2 + 2.5476\times10^{52}\,x^4\,y^2 + \\
&\quad 7.7825\times10^{51}\,x^6\,y^2 + 5.6519\times10^{50}\,x^8\,y^2 - 2.91412\times10^{53}\,y^4 - 4.97038\times10^{52}\,x^2\,y^4 + \\
&\quad 8.34426\times10^{51}\,x^4\,y^4 + 4.37765\times10^{51}\,x^6\,y^4 - 2.48262\times10^{53}\,y^6 - 6.65897\times10^{52}\,x^2\,y^6 + \\
&\quad 1.65858\times10^{52}\,x^4\,y^6 - 1.34844\times10^{53}\,y^8 + 3.07977\times10^{52}\,x^2\,y^8 + 2.2474\times10^{52}\,y^{10})\,\alpha0 + \\
&y\,(-7.89211\times10^{52} - 1.57842\times10^{53}\,x^2 - 1.02762\times10^{53}\,x^4 - 2.38407\times10^{52}\,x^6 - \\
&\quad 1.02762\times10^{51}\,x^8 - 1.47977\times10^{52}\,y^2 - 1.67707\times10^{53}\,x^2\,y^2 - 1.0975\times10^{53}\,x^4\,y^2 - \\
&\quad 1.47977\times10^{52}\,x^6\,y^2 + 4.21735\times10^{53}\,y^4 - 1.47977\times10^{52}\,x^2\,y^4 - 7.76879\times10^{52}\,x^4\,y^4 + \\
&\quad 2.99654\times10^{53}\,y^6 - 1.77572\times10^{53}\,x^2\,y^6 - 1.49827\times10^{53}\,y^8)\,\alpha0^2 + \\
&y\,(9.86514\times10^{52} + 1.47977\times10^{53}\,x^2 + 7.39885\times10^{52}\,x^4 + 1.23314\times10^{52}\,x^6 + \\
&\quad 4.43931\times10^{53}\,y^2 + 4.43931\times10^{53}\,x^2\,y^2 + 1.10983\times10^{53}\,x^4\,y^2 + \\
&\quad 6.65897\times10^{53}\,y^4 + 3.32948\times10^{53}\,x^2\,y^4 + 3.32948\times10^{53}\,y^6)\,\alpha0^3 == \\
&y\,(1.84971\times10^{51} + 1.72722\times10^{51}\,x^2 + 8.51553\times10^{50}\,x^4 + 2.70081\times10^{50}\,x^6 + \\
&\quad 6.21062\times10^{49}\,x^8 + 8.75379\times10^{48}\,x^{10} + 2.64305\times10^{47}\,x^{12} - 1.82094\times10^{52}\,y^2 - \\
&\quad 8.80486\times10^{51}\,x^2\,y^2 - 1.26667\times10^{51}\,x^4\,y^2 + 4.19257\times10^{50}\,x^6\,y^2 + 1.16121\times10^{50}\,x^8\,y^2 + \\
&\quad 6.66049\times10^{48}\,x^{10}\,y^2 - 1.36413\times10^{52}\,y^4 - 7.54448\times10^{51}\,x^2\,y^4 - 1.14834\times10^{51}\,x^4\,y^4 + \\
&\quad 3.26098\times10^{50}\,x^6\,y^4 + 6.87933\times10^{49}\,x^8\,y^4 + 3.57464\times10^{53}\,y^6 - 1.42922\times10^{52}\,x^2\,y^6 - \\
&\quad 1.48183\times10^{51}\,x^4\,y^6 + 3.72455\times10^{50}\,x^6\,y^6 - 2.62521\times10^{52}\,y^8 - 8.69982\times10^{51}\,x^2\,y^8 + \\
&\quad 1.11445\times10^{51}\,x^4\,y^8 - 1.1237\times10^{52}\,y^{10} + 1.74798\times10^{51}\,x^2\,y^{10} + 1.1237\times10^{51}\,y^{12})
\end{aligned}
$$

$$\{\{\alpha 0 \to \Big(0.5\ \big(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 337.6\,x\,\alpha 1 - 217.2\,x^3\,\alpha 1 - 1083.6\,x\,y^2\,\alpha 1 + 168.\,\alpha 1^2 + 108.\,x^2\,\alpha 1^2 + 684.\,y^2\,\alpha 1^2 - 1.\,\sqrt{\big((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 337.6\,x\,\alpha 1 + 217.2\,x^3\,\alpha 1 + 1083.6\,x\,y^2\,\alpha 1 - 168.\,\alpha 1^2 - 108.\,x^2\,\alpha 1^2 - 684.\,y^2\,\alpha 1^2\big)^2 - 4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 91.6\,x\,\alpha 1 - 1207.44\,x^3\,\alpha 1 - 6.03333\,x^5\,\alpha 1 - 169.68\,x\,y^2\,\alpha 1 - 97.1867\,x^3\,y^2\,\alpha 1 - 266.06\,x\,y^4\,\alpha 1 + 45.6\,\alpha 1^2 + 1766.44\,x^2\,\alpha 1^2 + 3.\,x^4\,\alpha 1^2 + 115.16\,y^2\,\alpha 1^2 + 56.4\,x^2\,y^2\,\alpha 1^2 + 166.2\,y^4\,\alpha 1^2 - 1159.2\,x\,\alpha 1^3 + 288.\,\alpha 1^4\big)}\big)\big)\big) / (12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\},\ \{\alpha 0 \to \Big(0.5\ \big(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 337.6\,x\,\alpha 1 - 217.2\,x^3\,\alpha 1 - 1083.6\,x\,y^2\,\alpha 1 + 168.\,\alpha 1^2 + 108.\,x^2\,\alpha 1^2 + 684.\,y^2\,\alpha 1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 337.6\,x\,\alpha 1 + 217.2\,x^3\,\alpha 1 + 1083.6\,x\,y^2\,\alpha 1 - 168.\,\alpha 1^2 - 108.\,x^2\,\alpha 1^2 - 684.\,y^2\,\alpha 1^2\big)^2 - 4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 91.6\,x\,\alpha 1 - 1207.44\,x^3\,\alpha 1 - 6.03333\,x^5\,\alpha 1 - 169.68\,x\,y^2\,\alpha 1 - 97.1867\,x^3\,y^2\,\alpha 1 - 266.06\,x\,y^4\,\alpha 1 + 45.6\,\alpha 1^2 + 1766.44\,x^2\,\alpha 1^2 + 3.\,x^4\,\alpha 1^2 + 115.16\,y^2\,\alpha 1^2 + 56.4\,x^2\,y^2\,\alpha 1^2 + 166.2\,y^4\,\alpha 1^2 - 1159.2\,x\,\alpha 1^3 + 288.\,\alpha 1^4\big)}\big)\big)\big) / (12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\}\}$$

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, RR1, RR2, V1, V2, TT]
RR1 =
  y (2.0963414110465006`*^52 + 2.4953313580378344`*^52 x^2 + 1.364174762669889`*^52 x^4 +
       4.8197583683602864`*^51 x^6 + 8.654830008568883`*^50 x^8 +
       2.8544953854119006`*^49 x^10 - 9.688385697718825`*^52 y^2 -
       2.8315680784762726`*^52 x^2 y^2 + 2.5476028775354964`*^52 x^4 y^2 +
       7.782496218787006`*^51 x^6 y^2 + 5.651900863115564`*^50 x^8 y^2 -
       2.914120085022385`*^53 y^4 - 4.9703843808577`*^52 x^2 y^4 +
       8.344260910636068`*^51 x^4 y^4 + 4.377654123067691`*^51 x^6 y^4 -
       2.48262314458198`*^53 y^6 - 6.658966835088882`*^52 x^2 y^6 +
       1.6585759987397307`*^52 x^4 y^6 - 1.3484407841054987`*^53 y^8 +
       3.0797721612286077`*^52 x^2 y^8 + 2.2474013068424978`*^52 y^10) α0 +
    y (-7.892108841586825`*^52 - 1.5784217683173647`*^53 x^2 - 1.0276183387482843`*^53
         x^4 - 2.3840745458960194`*^52 x^6 - 1.0276183387482843`*^51 x^8 -
       1.4797704077975334`*^52 y^2 - 1.6770731288372`*^53 x^2 y^2 -
       1.0974963857831677`*^53 x^4 y^2 - 1.4797704077975294`*^52 x^6 y^2 +
       4.217345662222959`*^53 y^4 - 1.4797704077975294`*^52 x^2 y^4 -
       7.768794640937029`*^52 x^4 y^4 + 2.996535075789997`*^53 y^6 -
       1.7757244893570351`*^53 x^2 y^6 - 1.4982675378949984`*^53 y^8) α0^2 +
    y (9.865136051983529`*^52 + 1.4797704077975294`*^53 x^2 + 7.398852038987647`*^52 x^4 +
       1.233142006497941`*^52 x^6 + 4.439311223392588`*^53 y^2 + 4.439311223392588`*^53
        x^2 y^2 + 1.109827805848147`*^53 x^4 y^2 + 6.658966835088882`*^53 y^4 +
       3.329483417544441`*^53 x^2 y^4 + 3.329483417544441`*^53 y^6) α0^3 -
    (y (1.8497130097469127`*^51 + 1.7272209037681167`*^51 x^2 +
       8.515530633760784`*^50 x^4 + 2.700809353861324`*^50 x^6 +
       6.210620759886853`*^49 x^8 + 8.753785848596495`*^48 x^10 +
       2.643051282788797`*^47 x^12 - 1.8209396962619604`*^52 y^2 -
       8.804862286026134`*^51 x^2 y^2 - 1.2666652003042184`*^51 x^4 y^2 +
       4.192568642277584`*^50 x^6 y^2 + 1.1612087227855613`*^50 x^8 y^2 +
       6.660489232627768`*^48 x^10 y^2 - 1.3641290907437227`*^52 y^4 -
       7.544476975569823`*^51 x^2 y^4 - 1.148340657588124`*^51 x^4 y^4 +
       3.2609755282945555`*^50 x^6 y^4 + 6.879333878842681`*^49 x^8 y^4 +
       3.5746434664177734`*^53 y^6 - 1.4292150109255762`*^52 x^2 y^6 -
       1.481825644475026`*^51 x^4 y^6 + 3.724545578885448`*^50 x^6 y^6 -
       2.6252051890833043`*^52 y^8 - 8.699816855842974`*^51 x^2 y^8 +
       1.1144520883725142`*^51 x^4 y^8 - 1.1237006534212489`*^52 y^10 +
       1.7479787942108316`*^51 x^2 y^10 + 1.1237006534212489`*^51 y^12)) /.
  α0 → (0.5` (4.800000000000001` + 177.99999999999997` x^2 + 112.26666666666665` x^4 +
       0.5` x^6 + 133.20000000000002` y^2 + 503.99999999999994` x^2 y^2 +
       6.300000000000001` x^4 y^2 + 429.6` y^4 + 24.3` x^2 y^4 +
       29.700000000000003` y^6 - 337.6` x α1 - 217.20000000000002` x^3 α1 -
       1083.6` x y^2 α1 + 168.` α1^2 + 108.` x^2 α1^2 + 684.` y^2 α1^2 -
       1.` √((-4.800000000000001` - 177.99999999999997` x^2 - 112.26666666666665` x^4 -
             0.5` x^6 - 133.20000000000002` y^2 - 503.99999999999994` x^2 y^2 -
             6.300000000000001` x^4 y^2 - 429.6` y^4 - 24.3` x^2 y^4 - 29.700000000000003`
              y^6 + 337.6` x α1 + 217.20000000000002` x^3 α1 + 1083.6` x y^2 α1 - 168.` α1^2 -
             108.` x^2 α1^2 - 684.` y^2 α1^2)^2 - 4.` (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 +
             54.` x^2 y^2 + 81.` y^4) (0.3600000000000001` + 46.480000000000004` x^2 +
             312.4866666666666` x^4 + 3.0999999999999996` x^6 + 0.006944444444444444`
              x^8 + 27.60000000000001` y^2 + 66.11999999999978` x^2 y^2 +
             43.54` x^4 y^2 + 0.10555555555555554` x^6 y^2 + 293.82000000000005` y^4 +
             135.77999999999997` x^2 y^4 + 0.7083333333333333` x^4 y^4 +
             94.38000000000001` y^6 + 2.1500000000000004` x^2 y^6 + 2.3625000000000003`
```

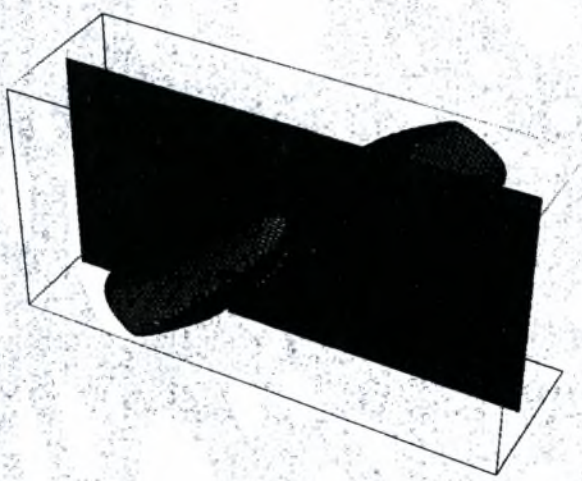
```
y^8 - 91.60000000000002` x α1 - 1207.44` x^3 α1 - 6.033333333333333` x^5 α1 -
169.68000000000006` x y^2 α1 - 97.18666666666667` x^3 y^2 α1 -
266.06000000000006` x y^4 α1 + 45.6` α1^2 + 1766.44` x^2 α1^2 + 3.` x^4 α1^2 +
115.1600000000002` y^2 α1^2 + 56.400000000000006` x^2 y^2 α1^2 +
166.2` y^4 α1^2 - 1159.2` x α1^3 + 288.` α1^4))))/
(12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4);
RR2 = y (2.0963414110465006`*^52 + 2.4953313580378344`*^52 x^2 +
1.364174762669889`*^52 x^4 + 4.8197583683602864`*^51 x^6 +
8.654830008568883`*^50 x^8 + 2.8544953854119006`*^49 x^10 -
9.688385697718825`*^52 y^2 - 2.8315680784762726`*^52 x^2 y^2 +
2.5476028775354964`*^52 x^4 y^2 + 7.782496218787006`*^51 x^6 y^2 +
5.651900863115564`*^50 x^8 y^2 - 2.914120085022385`*^53 y^4 -
4.9703843808577`*^52 x^2 y^4 + 8.344260910636068`*^51 x^4 y^4 +
4.377654123067691`*^51 x^6 y^4 - 2.48262314458198`*^53 y^6 - 6.658966835088882`*^52
x^2 y^6 + 1.6585759987397307`*^52 x^4 y^6 - 1.3484407841054987`*^53 y^8 +
3.0797721612286077`*^52 x^2 y^8 + 2.2474013068424978`*^52 y^10) α0 +
y (-7.892108841586825`*^52 - 1.5784217683173647`*^53 x^2 - 1.0276183387482843`*^53
x^4 - 2.3840745458960194`*^52 x^6 - 1.0276183387482843`*^51 x^8 -
1.4797704077975334`*^52 y^2 - 1.6770731288372`*^53 x^2 y^2 -
1.0974963857831677`*^53 x^4 y^2 - 1.4797704077975294`*^52 x^6 y^2 +
4.217345662222959`*^53 y^4 - 1.4797704077975294`*^52 x^2 y^4 -
7.768794640937029`*^52 x^4 y^4 + 2.996535075789997`*^53 y^6 -
1.7757244893570351`*^53 x^2 y^6 - 1.4982675378949984`*^53 y^8) α0^2 +
y (9.865136051983529`*^52 + 1.4797704077975294`*^53 x^2 +
7.398852038987647`*^52 x^4 + 1.233142006497941`*^52 x^6 +
4.439311223392588`*^53 y^2 + 4.439311223392588`*^53 x^2 y^2 +
1.109827805848147`*^53 x^4 y^2 + 6.658966835088882`*^53 y^4 +
3.329483417544441`*^53 x^2 y^4 + 3.329483417544441`*^53 y^6) α0^3 -
(y (1.8497130097469127`*^51 + 1.7272209037681167`*^51 x^2 +
8.515530633760784`*^50 x^4 + 2.700809353861324`*^50 x^6 +
6.210620759886853`*^49 x^8 + 8.753785848596495`*^48 x^10 +
2.643051282788797`*^47 x^12 - 1.8209396962619604`*^52 y^2 -
8.804862286026134`*^51 x^2 y^2 - 1.2666652003042184`*^51 x^4 y^2 +
4.192568642277584`*^50 x^6 y^2 + 1.1612087227855613`*^50 x^8 y^2 +
6.660489232627768`*^48 x^10 y^2 - 1.3641290907437227`*^52 y^4 -
7.544476975569823`*^51 x^2 y^4 - 1.148340657588124`*^51 x^4 y^4 +
3.2609755282945555`*^50 x^6 y^4 + 6.879333878842681`*^49 x^8 y^4 +
3.5746434664177734`*^53 y^6 - 1.4292150109255762`*^52 x^2 y^6 -
1.481825644475026`*^51 x^4 y^6 + 3.724545578885448`*^50 x^6 y^6 -
2.6252051890833043`*^52 y^8 - 8.699816855842974`*^51 x^2 y^8 +
1.1144520883725142`*^51 x^4 y^8 - 1.1237006534212489`*^52 y^10 +
1.7479787942108316`*^51 x^2 y^10 + 1.1237006534212489`*^51 y^12)) /.
α0 → (0.5` (4.800000000000001` + 177.99999999999997` x^2 + 112.26666666666665` x^4 +
0.5` x^6 + 133.20000000000002` y^2 + 503.99999999999994` x^2 y^2 +
6.300000000000001` x^4 y^2 + 429.6` y^4 + 24.3` x^2 y^4 + 29.700000000000003` y^6 -
337.6` x α1 - 217.20000000000002` x^3 α1 - 1083.6` x y^2 α1 + 168.` α1^2 +
108.` x^2 α1^2 + 684.` y^2 α1^2 + √((-4.800000000000001` - 177.99999999999997`
x^2 - 112.26666666666665` x^4 - 0.5` x^6 - 133.20000000000002` y^2 -
503.99999999999994` x^2 y^2 - 6.300000000000001` x^4 y^2 - 429.6` y^4 - 24.3`
x^2 y^4 - 29.700000000000003` y^6 + 337.6` x α1 + 217.20000000000002` x^3
α1 + 1083.6` x y^2 α1 - 168.` α1^2 - 108.` x^2 α1^2 - 684.` y^2 α1^2)^2 - 4.`
(12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4) (0.3600000000000001` +
46.480000000000004` x^2 + 312.4866666666666` x^4 + 3.0999999999999996` x^6 +
0.006944444444444444` x^8 + 27.60000000000001` y^2 + 66.11999999999978`
```

```
x^2 y^2 + 43.54` x^4 y^2 + 0.10555555555555554` x^6 y^2 + 293.82000000000005`
 y^4 + 135.77999999999997` x^2 y^4 + 0.7083333333333333` x^4 y^4 +
94.38000000000001` y^6 + 2.1500000000000004` x^2 y^6 + 2.3625000000000003`
 y^8 - 91.60000000000002` x a1 - 1207.44` x^3 a1 - 6.033333333333333`
 x^5 a1 - 169.68000000000006` x y^2 a1 - 97.18666666666667` x^3
 y^2 a1 - 266.06000000000006` x y^4 a1 + 45.6` a1^2 + 1766.44` x^2
 a1^2 + 3.` x^4 a1^2 + 115.1600000000002` y^2 a1^2 + 56.400000000000006`
 x^2 y^2 a1^2 + 166.2` y^4 a1^2 - 1159.2` x a1^3 + 288.` a1^4))))/
    (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4);
<< Utilities`DXF`
V1 = ContourPlot3D[RR1, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
  {a1, -0.5, 0.5}, PlotPoints → {10, 10}, Contours → {0}]
WriteDXF["BsSymma.dxf", V1]
V2 = ContourPlot3D[RR2, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
  {a1, -0.5, 0.5}, PlotPoints → {10, 10}, Contours → {0}]
WriteDXF["BsSymmb.dxf", V2]
TT = Show[V1, V2]
WriteDXF["BsSymm.dxf", TT]
```



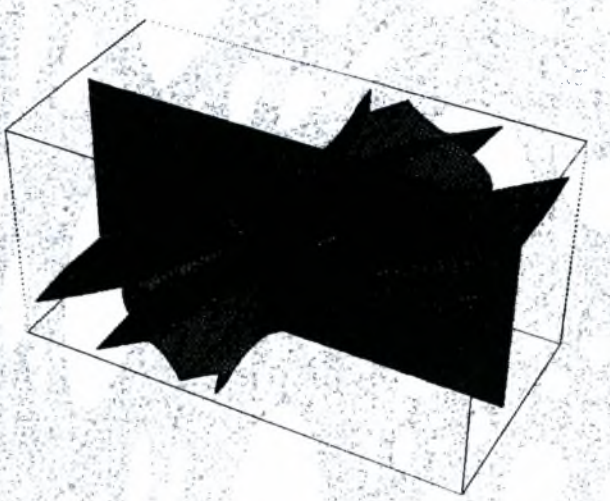
- Graphics3D -

BsSymma.dxf



- Graphics3D -

BsSymmb.dxf



- Graphics3D -

BsSymm.dxf

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, M1, M2, Bs, A, B]
M1 = FullSimplify[1/6 x (x^4 β + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β) +
        3 (7 y^4 β - 12 y α1 (4 + β) + 4 (-α0 + 6 α1^2 + β) + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β))) /. β → 0.1];
M2 = FullSimplify[-1/2 (-6 y (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + 4 (x + y - α1)^3 - 4 (x - y + α1)^3 +
        ((36 + 16 x^2 + 5 x^4/3) y + 2 (36 + 7 x^2) y^3 + 27 y^5 - 6 (6 + x^2) α1 - 54 y^2 α1) β) /. β → 0.1];
Bs = FullSimplify[-4/9 x^2 (21 y^3 β - 9 α1 (4 + β) + y (36 - 9 α0 + 24 β + 5 x^2 β))^2 +
      1/2 (5 x^4 β/6 + 7 y^4 β/2 - 6 y α1 (4 + β) + 2 (-α0 + 6 α1^2 + β) + y^2 (12 - 3 α0 + 8 β) +
        x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β)) (-6 (2 α0 + y^2 (-4 + 9 α0) + 8 y α1 - 4 α1^2) + 5 x^4 β/3 +
        9 (4 + 3 y (8 y + 5 y^3 - 4 α1)) β + x^2 (24 - 6 α0 + 16 β + 42 y^2 β)) /. β → 0.1];
FullSimplify[Eliminate[{M1 == 0, M2 == 0}, α1]]
Solve[Bs == 0, α0]
```

$$
\begin{aligned}
&x\,(-1.59143\times10^{89}\,x^{12} - 1.47383\times10^{93}\,y^{12} - 3.24844\times10^{95}\,y^{8}\,(-278.339+\alpha0)\,(-0.100907+\alpha0) + \\
&\quad 9.28125\times10^{95}\,y^{6}\,(-324.261+\alpha0)\,(-0.37431+\alpha0)\,(-0.0314689+\alpha0) + \\
&\quad 1.85625\times10^{96}\,y^{4}\,(-214.394+\alpha0)\,(-0.0871722+\alpha0)\,(-0.0296814+\alpha0) + \\
&\quad x^{10}\,(4.71701\times10^{92} - 4.7743\times10^{90}\,y^{2} + 2.86458\times10^{91}\,\alpha0) + \\
&\quad y^{10}\,(-6.78804\times10^{96} + 3.78984\times10^{94}\,\alpha0) + \\
&\quad 1.2375\times10^{96}\,y^{2}\,(-104.62+\alpha0)\,(0.00580738 + (-0.0469943+\alpha0)\,\alpha0) + \\
&\quad 2.75\times10^{95}\,(-0.1+\alpha0)\,(6.76+\alpha0\,(5.2+\alpha0)) + x^{8}\,(-5.77691\times10^{91}\,y^{4} - \\
&\qquad 1.71875\times10^{93}\,(4.17001+\alpha0)\,(28.73+\alpha0) + y^{2}\,(-1.64561\times10^{94} + 6.58854\times10^{92}\,\alpha0)) + \\
&\quad x^{4}\,(-1.21315\times10^{93}\,y^{8} - 1.54687\times10^{95}\,y^{4}\,(-118.129+\alpha0)\,(-0.478752+\alpha0) + \\
&\qquad 2.0625\times10^{95}\,(-1.93232+\alpha0)\,(7.80356+\alpha0)\,(28.7288+\alpha0) + \\
&\qquad y^{6}\,(-2.46642\times10^{96} + 2.42344\times10^{94}\,\alpha0) + \\
&\qquad 3.09375\times10^{95}\,y^{2}\,(-72.8748+\alpha0)\,(5.97887 + (-2.54743+\alpha0)\,\alpha0)) + \\
&\quad x^{2}\,(-2.10547\times10^{93}\,y^{10} - 3.7125\times10^{95}\,y^{6}\,(-197.834+\alpha0)\,(-0.169877+\alpha0) + 4.125\times10^{95} \\
&\qquad (-0.504561+\alpha0)\,(2.6+\alpha0)\,(17.7712+\alpha0) + y^{8}\,(-6.83328\times10^{96} + 4.87265\times10^{94}\,\alpha0) + \\
&\qquad 9.28125\times10^{95}\,y^{4}\,(-199.459+\alpha0)\,(0.139034 + (-0.585066+\alpha0)\,\alpha0) + \\
&\qquad 1.2375\times10^{96}\,y^{2}\,(-89.3981+\alpha0)\,(0.254899 + (-0.557444+\alpha0)\,\alpha0)) + \\
&\quad x^{6}\,(-3.59664\times10^{92}\,y^{6} - 2.75\times10^{94}\,y^{2}\,(-38.6978+\alpha0)\,(-2.33553+\alpha0) + \\
&\qquad y^{4}\,(-3.67908\times10^{95} + 5.78646\times10^{93}\,\alpha0) + \\
&\qquad 3.4375\times10^{94}\,(-8.16735+\alpha0)\,(824.489+\alpha0\,(57.3673+\alpha0)))) == 0
\end{aligned}
$$

```
{{α0 →
  (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3
      x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360.
      y^2 α1^2 - 1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
          429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y
          α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
        4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
          312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4
          y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38
          y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
          y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4
          α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)}, {α0 →
  (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
      6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
      133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
      √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 -
          24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2
          α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
        (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 +
          43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 +
          94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 -
          937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
          1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)}}
```

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α0, α1, β, RR1, RR2, V1, V2, TT]
RR1 =
 x (-1.5914343565113257`*^89 x^12 - 1.4738273575651388`*^93 y^12 - 3.248435808510918`*^95
      y^8 (-278.33877541656494` + α0) (-0.10090712311761345` + α0) +
     9.281245167174052`*^95 y^6 (-324.26088744046626` + α0) (-0.3743103721606109` + α0)
      (-0.0314688540397786` + α0) + 1.8562490334348102`*^96 y^4
      (-214.3942574871668` + α0) (-0.08717223349520918` + α0)
      (-0.02968139044914596` + α0) + x^10 (4.717011432699569`*^92 -
        4.774303069533977`*^90 y^2 + 2.8645818417203863`*^91 α0) +
     y^10 (-6.788044902905346`*^96 + 3.789841776596071`*^94 α0) +
     1.2374993556232065`*^96 y^2 (-104.61967238885507` + α0)
      (0.005807384527151235` + (-0.04699427781165493` + α0) α0) +
     2.74999856805157`*^95 (-0.1` + α0) (6.7600000000000025` + α0 (5.2` + α0)) +
     x^8 (-5.776906714136113`*^91 y^4 -
        1.718749105032232`*^93 (4.170014024618938` + α0) (28.72998597538106` + α0) +
        y^2 (-1.6456067820069712`*^94 + 6.588538235956888`*^92 α0)) +
     x^4 (-1.2131504099685836`*^93 y^8 - 1.5468741945290087`*^95 y^4
        (-118.12939620668536` + α0) (-0.4787519414627901` + α0) +
       2.0624989260386778`*^95 (-1.932317447087973` + α0)
        (7.803555047417606` + α0) (28.728762399670362` + α0) +
       y^6 (-2.4664164240486196`*^96 + 2.423436238095447`*^94 α0) +
       3.0937483890580173`*^95 y^2 (-72.87478751314929` + α0)
        (5.978866502318223` + (-2.5474347090729363` + α0) α0)) +
     x^2 (-2.105467653664484`*^93 y^10 - 3.7124980668696205`*^95 y^6
        (-197.83382668186186` + α0) (-0.16987702184187467` + α0) +
       4.124997852077355`*^95 (-0.5045609050079658` + α0)
        (2.599999999999999` + α0) (17.771227571674643` + α0) +
       y^8 (-6.833282379349795`*^96 + 4.872653712766377`*^94 α0) +
       9.281245167174052`*^95 y^4 (-199.45937811394748` + α0)
        (0.13903356367784142` + (-0.5850663304969058` + α0) α0) +
       1.2374993556232067`*^96 y^2 (-89.39811163429795` + α0)
        (0.2548994308850173` + (-0.5574439212576064` + α0) α0)) +
     x^6 (-3.596641645715596`*^92 y^6 - 2.749998568051571`*^94 y^2
        (-38.69779985925582` + α0) (-2.3355334740775238` + α0) +
       y^4 (-3.679077945382883`*^95 + 5.78645532027518`*^93 α0) +
       3.437498210064464`*^94 (-8.167348252267514` + α0)
        (824.4891114853791` + α0 (57.36734825226751` + α0)))) /.
  α0 → (0.5` (4.800000000000001` + 177.99999999999997` x^2 + 112.26666666666665` x^4 +
       0.5` x^6 + 133.20000000000002` y^2 + 504.` x^2 y^2 + 6.300000000000001` x^4 y^2 +
       429.6` y^4 + 24.3` x^2 y^4 + 29.700000000000003` y^6 -
       206.39999999999998` y α1 + 133.19999999999993` x^2 y α1 -
       752.3999999999999` y^3 α1 + 96.` α1^2 + 72.` x^2 α1^2 + 360.` y^2 α1^2 -
       1.` √((-4.800000000000001` - 177.99999999999997` x^2 - 112.26666666666665` x^4 -
             0.5` x^6 - 133.20000000000002` y^2 - 504.` x^2 y^2 - 6.300000000000001` x^4 y^2 -
             429.6` y^4 - 24.3` x^2 y^4 - 29.700000000000003` y^6 + 206.39999999999998`
              y α1 - 133.19999999999993` x^2 y α1 + 752.3999999999999` y^3 α1 - 96.`
              α1^2 - 72.` x^2 α1^2 - 360.` y^2 α1^2)^2 - 4.` (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.`
              y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4) (0.36000000000000004` + 46.480000000000004`
              x^2 + 312.4866666666666` x^4 + 3.0999999999999996` x^6 +
             0.006944444444444444` x^8 + 27.6` y^2 + 66.12` x^2 y^2 + 43.540000000000006`
              x^4 y^2 + 0.10555555555555554` x^6 y^2 + 293.82000000000005`
              y^4 + 135.77999999999997` x^2 y^4 + 0.7083333333333333` x^4 y^4 +
             94.38000000000001` y^6 + 2.1500000000000004` x^2 y^6 + 2.3625000000000003`
```

```
y^8 - 50.16` y α1 + 227.27999999999997` x^2 y α1 + 11.899999999999999` x^4
 y α1 - 937.2` y^3 α1 + 2.519999999999996` x^2 y^3 α1 - 176.33999999999997`
 y^5 α1 + 24.` α1^2 - 158.76` x^2 α1^2 + 2.` x^4 α1^2 + 1150.44` y^2 α1^2 +
 31.200000000000003` x^2 y^2 α1^2 + 85.2` y^4 α1^2 - 648.` y α1^3 + 144.` α1^4))))/
 (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4)
RR2 = x (-1.5914343565113257`*^89 x^12 - 1.4738273575651388`*^93 y^12 -
  3.248435808510918`*^95 y^8 (-278.33877541656494` + α0)
   (-0.10090712311761345` + α0) + 9.281245167174052`*^95 y^6
   (-324.26088744046626` + α0) (-0.3743103721606109` + α0)
   (-0.0314688540397786` + α0) + 1.8562490334348102`*^96 y^4
   (-214.3942574871668` + α0) (-0.08717223349520918` + α0)
   (-0.02968139044914596` + α0) + x^10 (4.717011432699569`*^92 -
     4.774303069533977`*^90 y^2 + 2.8645818417203863`*^91 α0) +
   y^10 (-6.788044902905346`*^96 + 3.789841776596071`*^94 α0) +
   1.2374993556232065`*^96 y^2 (-104.61967238885507` + α0)
    (0.005807384527151235` + (-0.04699427781165493` + α0) α0) +
   2.74999856805157`*^95 (-0.1` + α0) (6.7600000000000025` + α0 (5.2` + α0)) +
   x^8 (-5.776906714136113`*^91 y^4 -
     1.718749105032232`*^93 (4.170014024618938` + α0) (28.72998597538106` + α0) +
     y^2 (-1.6456067820069712`*^94 + 6.588538235956888`*^92 α0)) +
   x^4 (-1.2131504099685836`*^93 y^8 - 1.5468741945290087`*^95 y^4
      (-118.12939620668536` + α0) (-0.4787519414627901` + α0) +
     2.0624989260386778`*^95 (-1.932317447087973` + α0)
      (7.803555047417606` + α0) (28.728762399670362` + α0) +
     y^6 (-2.4664164240486196`*^96 + 2.423436238095447`*^94 α0) +
     3.0937483890580173`*^95 y^2 (-72.87478751314929` + α0)
      (5.978866502318223` + (-2.5474347090729363` + α0) α0)) +
   x^2 (-2.105467653664484`*^93 y^10 - 3.7124980668696205`*^95 y^6
      (-197.83382668186186` + α0) (-0.16987702184187467` + α0) +
     4.124997852077355`*^95 (-0.5045609050079658` + α0)
      (2.599999999999999` + α0) (17.771227571674643` + α0) +
     y^8 (-6.833282379349795`*^96 + 4.872653712766377`*^94 α0) +
     9.281245167174052`*^95 y^4 (-199.45937811394748` + α0)
      (0.13903356367784142` + (-0.5850663304969058` + α0) α0) +
     1.2374993556232067`*^96 y^2 (-89.39811163429795` + α0)
      (0.2548994308850173` + (-0.5574439212576064` + α0) α0)) +
   x^6 (-3.596641645715596`*^92 y^6 - 2.749998568051571`*^94 y^2
      (-38.69779985925582` + α0) (-2.3355334740775238` + α0) +
     y^4 (-3.679077945382883`*^95 + 5.78645532027518`*^93 α0) +
     3.437498210064464`*^94 (-8.167348252267514` + α0)
      (824.4891114853791` + α0 (57.36734825226751` + α0)))) /.
 α0 → (0.5` (4.800000000000001` + 177.99999999999997` x^2 + 112.26666666666665` x^4 +
     0.5` x^6 + 133.20000000000002` y^2 + 504.` x^2 y^2 + 6.300000000000001` x^4 y^2 +
     429.6` y^4 + 24.3` x^2 y^4 + 29.700000000000003` y^6 - 206.39999999999998` y α1 +
     133.19999999999993` x^2 y α1 - 752.3999999999999` y^3 α1 + 96.` α1^2 +
     72.` x^2 α1^2 + 360.` y^2 α1^2 + √((-4.800000000000001` - 177.99999999999997` x^2 -
          112.26666666666665` x^4 - 0.5` x^6 - 133.20000000000002` y^2 - 504.` x^2 y^2 -
          6.300000000000001` x^4 y^2 - 429.6` y^4 - 24.3` x^2 y^4 - 29.700000000000003` y^6 +
          206.39999999999998` y α1 - 133.19999999999993` x^2 y α1 +
          752.3999999999999` y^3 α1 - 96.` α1^2 - 72.` x^2 α1^2 - 360.` y^2 α1^2)^2 -
       4.` (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4)
        (0.36000000000000004` + 46.480000000000004` x^2 + 312.4866666666666` x^4 +
          3.0999999999999996` x^6 + 0.006944444444444444` x^8 + 27.6` y^2 +
          66.12` x^2 y^2 + 43.540000000000006` x^4 y^2 + 0.10555555555555554` x^6 y^2 +
```

```
                293.82000000000005` y^4 + 135.77999999999997` x^2 y^4 +
                0.7083333333333333` x^4 y^4 + 94.38000000000001` y^6 +
                2.1500000000000004` x^2 y^6 + 2.3625000000000003` y^8 - 50.16` y a1 +
                227.27999999999997` x^2 y a1 + 11.899999999999999` x^4 y a1 -
                937.2` y^3 a1 + 2.519999999999996` x^2 y^3 a1 - 176.33999999999997` y^5 a1 +
                24.` a1^2 - 158.76` x^2 a1^2 + 2.` x^4 a1^2 + 1150.44` y^2 a1^2 +
                31.200000000000003` x^2 y^2 a1^2 + 85.2` y^4 a1^2 - 648.` y a1^3 + 144.` a1^4))))/
    (12.` + 24.` x^2 + 9.` x^4 + 72.` y^2 + 54.` x^2 y^2 + 81.` y^4)
<< Utilities`DXF`
V1 = ContourPlot3D[RR1, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
  {a1, -0.345, 0.345}, PlotPoints → {10, 10}, Contours → {0}]
WriteDXF["BsAsymma.dxf", V1]
V2 = ContourPlot3D[RR2, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
  {a1, -0.345, 0.345}, PlotPoints → {10, 10}, Contours → {0}]
WriteDXF["BsAsymmb.dxf", V2]
TT = Show[V1, V2]
WriteDXF["BsAsymm.dxf", TT]

x (-1.59143×10^89 x^12 - 1.47383×10^93 y^12 -
   3.24844×10^95 y^8 (-278.339 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
          504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y a1 +
          133.2 x^2 y a1 - 752.4 y^3 a1 + 96. a1^2 + 72. x^2 a1^2 + 360. y^2 a1^2 -
          1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
                429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y a1 - 133.2 x^2 y a1 + 752.4 y^3 a1 -
                96. a1^2 - 72. x^2 a1^2 - 360. y^2 a1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 +
                72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 +
                0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 +
                293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 +
                2.3625 y^8 - 50.16 y a1 + 227.28 x^2 y a1 + 11.9 x^4 y a1 - 937.2 y^3 a1 +
                2.52 x^2 y^3 a1 - 176.34 y^5 a1 + 24. a1^2 - 158.76 x^2 a1^2 + 2. x^4 a1^2 +
                1150.44 y^2 a1^2 + 31.2 x^2 y^2 a1^2 + 85.2 y^4 a1^2 - 648. y a1^3 + 144. a1^4))))/
        (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.100907 +
      (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
          6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y a1 +
          133.2 x^2 y a1 - 752.4 y^3 a1 + 96. a1^2 + 72. x^2 a1^2 + 360. y^2 a1^2 -
          1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
                429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y a1 - 133.2 x^2 y a1 +
                752.4 y^3 a1 - 96. a1^2 - 72. x^2 a1^2 - 360. y^2 a1^2)^2 - 4.
              (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y a1 + 227.28 x^2 y a1 + 11.9 x^4 y a1 - 937.2
                 y^3 a1 + 2.52 x^2 y^3 a1 - 176.34 y^5 a1 + 24. a1^2 - 158.76 x^2 a1^2 + 2. x^4 a1^2 +
                1150.44 y^2 a1^2 + 31.2 x^2 y^2 a1^2 + 85.2 y^4 a1^2 - 648. y a1^3 + 144. a1^4))))/
        (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 9.28125×10^95 y^6
    (-324.261 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
          6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y a1 +
          133.2 x^2 y a1 - 752.4 y^3 a1 + 96. a1^2 + 72. x^2 a1^2 + 360. y^2 a1^2 -
          1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
                429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y a1 - 133.2 x^2 y a1 +
                752.4 y^3 a1 - 96. a1^2 - 72. x^2 a1^2 - 360. y^2 a1^2)^2 - 4.
              (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y a1 + 227.28 x^2 y a1 + 11.9 x^4 y a1 - 937.2
```

$$y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))))/$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(-0.37431 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\sqrt{((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)\,\hat{}\,2 - 4.}$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))))/$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(-0.0314689 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\sqrt{((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)\,\hat{}\,2 - 4.}$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))))/$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)) + 1.85625\times10^{96}\,y^4$$
$$(-214.394 + (0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\sqrt{((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)\,\hat{}\,2 - 4.}$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))))/$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(-0.0871722 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\sqrt{((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)\,\hat{}\,2 - 4.}$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))))/$$

$$(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))\left(-0.0296814+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4))))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))+x^{10}\left(4.71701\times10^{92}-4.7743\times10^{90}y^2+\left(1.43229\times10^{91}\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4))))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))+y^{10}\left(-6.78804\times10^{96}+\left(1.89492\times10^{94}\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4))))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))+1.2375\times10^{96}y^2\left(-104.62+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4))))\right)/$$

$$(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))\left(0.00580738+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4)))\right)\left(-0.0469943+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4)))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))+2.75\times10^{95}\left(-0.1+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4)))\right)/(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4))\left(6.76+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+6.3x^4y^2+429.6y^4+24.3x^2y^4+29.7y^6-206.4y\alpha1+133.2x^2y\alpha1-752.4y^3\alpha1+96.\alpha1^2+72.x^2\alpha1^2+360.y^2\alpha1^2-1.\sqrt{((-4.8-178.x^2-112.267x^4-0.5x^6-133.2y^2-504.x^2y^2-6.3x^4y^2-429.6y^4-24.3x^2y^4-29.7y^6+206.4y\alpha1-133.2x^2y\alpha1+752.4y^3\alpha1-96.\alpha1^2-72.x^2\alpha1^2-360.y^2\alpha1^2)^2-4.(12.+24.x^2+9.x^4+72.y^2+54.x^2y^2+81.y^4)(0.36+46.48x^2+312.487x^4+3.1x^6+0.00694444x^8+27.6y^2+66.12x^2y^2+43.54x^4y^2+0.105556x^6y^2+293.82y^4+135.78x^2y^4+0.708333x^4y^4+94.38y^6+2.15x^2y^6+2.3625y^8-50.16y\alpha1+227.28x^2y\alpha1+11.9x^4y\alpha1-937.2y^3\alpha1+2.52x^2y^3\alpha1-176.34y^5\alpha1+24.\alpha1^2-158.76x^2\alpha1^2+2.x^4\alpha1^2+1150.44y^2\alpha1^2+31.2x^2y^2\alpha1^2+85.2y^4\alpha1^2-648.y\alpha1^3+144.\alpha1^4)))\right)\left(5.2+\left(0.5\left(4.8+178.x^2+112.267x^4+0.5x^6+133.2y^2+504.x^2y^2+\right.\right.\right.

$$6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 +$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 -$$
$$6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$
$$176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 +$$
$$31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)) + x^8\,(-5.77691\times10^{91}$$
$$y^4 -$$
$$1.71875\times10^{93}$$
$$(4.17001 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 +$$
$$24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 +$$
$$72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 - 1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 -$$
$$504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$
$$176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 +$$
$$31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(28.73 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 +$$
$$24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 +$$
$$72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 - 1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 -$$
$$504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$
$$176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 +$$
$$31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)) +$$
$$y^2\,(-1.64561\times10^{94} + (3.29427\times10^{92}\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 +$$
$$133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 -$$
$$206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 -$$
$$6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$

```
                176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
            (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)))) +
        x^4 (-1.21315×10^93 y^8 - 1.54687×10^95
          y^4
          (-118.129 +
            (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
                24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
                72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 - 1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
                    504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                    133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
                  4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                    (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                      66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
                      0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
                      227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
                      176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                      31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
              (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.478752 +
              (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
                  24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
                  72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 - 1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
                      504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                      133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
                    4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                      (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                        66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
                        0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
                        227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
                        176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                        31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
                (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 2.0625×10^95
              (-1.93232 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
                    6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                    133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
                    1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                        6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                        133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
                      4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                        (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                          66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
                          0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
                          227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
                          176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                          31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
                  (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (7.80356 +
                (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
                    24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
                    72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 - 1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
                        504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                        133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
                      4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                        (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                          66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
```

```
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (28.7288 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 - 1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^6 (-2.46642×10^96 + (1.21172×10^94 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 3.09375×10^95 y^2
(-72.8748 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (5.97887 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3
α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 +
72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 +
0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 +
```

```
293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 +
2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 +
2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))
(-2.54743 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) +
x^2 (-2.10547×10^93 y^10 - 3.7125×10^95
y^6
(-197.834 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.169877 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 4.125×10^95
(-0.504561 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
```

```
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))
(2.6 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (17.7712 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^8 (-6.83328×10^96 + (2.43633×10^94 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 9.28125×10^95 y^4
(-199.459 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
```

$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 -$$
$$6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$
$$176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 +$$
$$31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(0.139034 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 +$$
$$6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 +$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 -$$
$$429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3$$
$$\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 - 4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 +$$
$$72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 +$$
$$0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 +$$
$$293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 +$$
$$2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 +$$
$$2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 +$$
$$1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))\,)$$
$$(-0.585066 + (0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 +$$
$$504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 +$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 -$$
$$6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 +$$
$$135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 -$$
$$50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3$$
$$\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44$$
$$y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)) + 1.2375\times10^{96}\,y^2$$
$$(-89.3981 + (0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 +$$
$$6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 +$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 -$$
$$1.\,\sqrt{(-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 -$$
$$6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 -$$
$$133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2)^2 -$$
$$4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)$$
$$(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 +$$
$$66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 +$$
$$0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 +$$
$$227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 -$$
$$176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 +$$
$$31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))) /$$
$$(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4))\,(0.254899 +$$
$$(0.5\,(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 +$$

```
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3
α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 +
72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 +
0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 +
293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 +
2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 +
2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(-0.557444 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) +
x^6 (-3.59664×10^92 y^6 - 2.75×10^94
y^2
(-38.6978 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-2.33553 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
```

```
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^4 (-3.67908×10^95 + (2.89323×10^93 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 3.4375×10^94
(-8.16735 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))/
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (824.489 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3
α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 +
72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 +
0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 +
293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 +
2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 +
2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))
(57.3673 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 -
1. √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
```

```
                                α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
                                y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
                          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))))) /
                    (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)))))

x (-1.59143×10^89 x^12 - 1.47383×10^93 y^12 -
  3.24844×10^95 y^8 (-278.339 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
        504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
              429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 -
              96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 +
              72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 +
              0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 +
              293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 +
              2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 +
              2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
              1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
        (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.100907 +
     (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
           6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
           133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
           √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
                 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 -
                 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 +
                 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 +
                 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
                 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
                 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
                 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
           (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 9.28125×10^95 y^6
     (-324.261 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
           6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
           133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
           √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
              4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                  y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
           (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.37431 +
     (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
           6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
           133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
           √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
              4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
```

```
                2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.0314689 +
         (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
             6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
             133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
             √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                  y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 1.85625 × 10^96 y^4
        (-214.394 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
             6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
             133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
             √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                  y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.0871722 +
         (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
             6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
             133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
             √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                  y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.0296814 +
         (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
             6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
             133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
             √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                  y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
```

```
          1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + x^10 (4.71701×10^92 -
  4.7743×10^90
   y^2 +
   (1.43229×10^91 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
        6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
              6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
              133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
           4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
              312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
              0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
              2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
               y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
              1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + y^10 (-6.78804×10^96 +
   (1.89492×10^94 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
        6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
              6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
              133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
           4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
              312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
              0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
              2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
               y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
              1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 1.2375×10^96 y^2
  (-104.62 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
        6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
              6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
              133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
           4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
              312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
              0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
              2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
               y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
              1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
   (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (0.00580738 +
  (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
        6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
              6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
              133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
           4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
              312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
              0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
              2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 -
              937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4
```

```
                α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
            (-0.0469943 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
                  504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                  133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
                  √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 -
                        429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 +
                        752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 +
                        9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 +
                        3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                        0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                        2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 -
                        937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 +
                        2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 +
                        144. α1^4)))) / (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
            (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 2.75×10^95
      (-0.1 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
            6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
            133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
            √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                  6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                  133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                  312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                  0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                  2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                   y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                  1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
            (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))
      (6.76 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
            6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
            133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
            √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                  6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                  133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
               4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                  312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                  0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                  2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 -
                  937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4
                   α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))
         (5.2 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 +
               429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 +
               96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 -
                     133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 +
                     206.4 y α1 - 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 -
                     360. y^2 α1^2)^2 - 4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                  (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                     66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 +
                     0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 +
                     227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 -
                     176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44 y^2 α1^2 +
                     31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
            (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
         (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + x^8 (-5.77691×10^91
```

$$
\begin{aligned}
&y^4 - \\
&1.71875\times10^{93} \\
&\Big(4.17001 + \\
&\quad\Big(0.5\Big(4.8 + 178.x^2 + 112.267x^4 + 0.5x^6 + 133.2y^2 + 504.x^2y^2 + 6.3x^4y^2 + 429.6y^4 + \\
&\qquad 24.3x^2y^4 + 29.7y^6 - 206.4y\alpha1 + 133.2x^2y\alpha1 - 752.4y^3\alpha1 + 96.\alpha1^2 + \\
&\qquad 72.x^2\alpha1^2 + 360.y^2\alpha1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.x^2 - 112.267x^4 - 0.5x^6 - 133.2y^2 - \\
&\qquad\quad 504.x^2y^2 - 6.3x^4y^2 - 429.6y^4 - 24.3x^2y^4 - 29.7y^6 + 206.4y\alpha1 - \\
&\qquad\quad 133.2x^2y\alpha1 + 752.4y^3\alpha1 - 96.\alpha1^2 - 72.x^2\alpha1^2 - 360.y^2\alpha1^2\big)^2 - \\
&\qquad\quad 4.(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)(0.36 + 46.48x^2 + \\
&\qquad\quad 312.487x^4 + 3.1x^6 + 0.00694444x^8 + 27.6y^2 + 66.12x^2y^2 + 43.54x^4y^2 + \\
&\qquad\quad 0.105556x^6y^2 + 293.82y^4 + 135.78x^2y^4 + 0.708333x^4y^4 + 94.38y^6 + \\
&\qquad\quad 2.15x^2y^6 + 2.3625y^8 - 50.16y\alpha1 + 227.28x^2y\alpha1 + 11.9x^4y\alpha1 - 937.2 \\
&\qquad\quad y^3\alpha1 + 2.52x^2y^3\alpha1 - 176.34y^5\alpha1 + 24.\alpha1^2 - 158.76x^2\alpha1^2 + 2.x^4\alpha1^2 + \\
&\qquad\quad 1150.44y^2\alpha1^2 + 31.2x^2y^2\alpha1^2 + 85.2y^4\alpha1^2 - 648.y\alpha1^3 + 144.\alpha1^4\big)\big)\big)\Big)\Big/ \\
&\quad(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)\Big)\Big(28.73 + \\
&\quad\Big(0.5\Big(4.8 + 178.x^2 + 112.267x^4 + 0.5x^6 + 133.2y^2 + 504.x^2y^2 + 6.3x^4y^2 + 429.6y^4 + \\
&\qquad 24.3x^2y^4 + 29.7y^6 - 206.4y\alpha1 + 133.2x^2y\alpha1 - 752.4y^3\alpha1 + 96.\alpha1^2 + \\
&\qquad 72.x^2\alpha1^2 + 360.y^2\alpha1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.x^2 - 112.267x^4 - 0.5x^6 - 133.2y^2 - \\
&\qquad\quad 504.x^2y^2 - 6.3x^4y^2 - 429.6y^4 - 24.3x^2y^4 - 29.7y^6 + 206.4y\alpha1 - \\
&\qquad\quad 133.2x^2y\alpha1 + 752.4y^3\alpha1 - 96.\alpha1^2 - 72.x^2\alpha1^2 - 360.y^2\alpha1^2\big)^2 - \\
&\qquad\quad 4.(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)(0.36 + 46.48x^2 + \\
&\qquad\quad 312.487x^4 + 3.1x^6 + 0.00694444x^8 + 27.6y^2 + 66.12x^2y^2 + 43.54x^4y^2 + \\
&\qquad\quad 0.105556x^6y^2 + 293.82y^4 + 135.78x^2y^4 + 0.708333x^4y^4 + 94.38y^6 + \\
&\qquad\quad 2.15x^2y^6 + 2.3625y^8 - 50.16y\alpha1 + 227.28x^2y\alpha1 + 11.9x^4y\alpha1 - 937.2 \\
&\qquad\quad y^3\alpha1 + 2.52x^2y^3\alpha1 - 176.34y^5\alpha1 + 24.\alpha1^2 - 158.76x^2\alpha1^2 + 2.x^4\alpha1^2 + \\
&\qquad\quad 1150.44y^2\alpha1^2 + 31.2x^2y^2\alpha1^2 + 85.2y^4\alpha1^2 - 648.y\alpha1^3 + 144.\alpha1^4\big)\big)\big)\Big)\Big/ \\
&\quad(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)\Big)\Big) + \\
&y^2\Big(-1.64561\times10^{94} + \Big(3.29427\times10^{92}\Big(4.8 + 178.x^2 + 112.267x^4 + 0.5x^6 + \\
&\qquad 133.2y^2 + 504.x^2y^2 + 6.3x^4y^2 + 429.6y^4 + 24.3x^2y^4 + 29.7y^6 - \\
&\qquad 206.4y\alpha1 + 133.2x^2y\alpha1 - 752.4y^3\alpha1 + 96.\alpha1^2 + 72.x^2\alpha1^2 + \\
&\qquad 360.y^2\alpha1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.x^2 - 112.267x^4 - 0.5x^6 - 133.2y^2 - \\
&\qquad\quad 504.x^2y^2 - 6.3x^4y^2 - 429.6y^4 - 24.3x^2y^4 - 29.7y^6 + 206.4y\alpha1 - \\
&\qquad\quad 133.2x^2y\alpha1 + 752.4y^3\alpha1 - 96.\alpha1^2 - 72.x^2\alpha1^2 - 360.y^2\alpha1^2\big)^2 - \\
&\qquad\quad 4.(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)(0.36 + 46.48x^2 + \\
&\qquad\quad 312.487x^4 + 3.1x^6 + 0.00694444x^8 + 27.6y^2 + 66.12x^2y^2 + 43.54x^4y^2 + \\
&\qquad\quad 0.105556x^6y^2 + 293.82y^4 + 135.78x^2y^4 + 0.708333x^4y^4 + 94.38y^6 + \\
&\qquad\quad 2.15x^2y^6 + 2.3625y^8 - 50.16y\alpha1 + 227.28x^2y\alpha1 + 11.9x^4y\alpha1 - 937.2 \\
&\qquad\quad y^3\alpha1 + 2.52x^2y^3\alpha1 - 176.34y^5\alpha1 + 24.\alpha1^2 - 158.76x^2\alpha1^2 + 2.x^4\alpha1^2 + \\
&\qquad\quad 1150.44y^2\alpha1^2 + 31.2x^2y^2\alpha1^2 + 85.2y^4\alpha1^2 - 648.y\alpha1^3 + 144.\alpha1^4\big)\big)\big)\Big)\Big/ \\
&\quad(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)\Big)\Big) + \\
&x^4\Big(-1.21315\times10^{93}y^8 - 1.54687\times10^{95} \\
&\quad y^4 \\
&\quad\Big(-118.129 + \\
&\qquad\Big(0.5\Big(4.8 + 178.x^2 + 112.267x^4 + 0.5x^6 + 133.2y^2 + 504.x^2y^2 + 6.3x^4y^2 + 429.6y^4 + \\
&\qquad\quad 24.3x^2y^4 + 29.7y^6 - 206.4y\alpha1 + 133.2x^2y\alpha1 - 752.4y^3\alpha1 + 96.\alpha1^2 + \\
&\qquad\quad 72.x^2\alpha1^2 + 360.y^2\alpha1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.x^2 - 112.267x^4 - 0.5x^6 - 133.2y^2 - \\
&\qquad\qquad 504.x^2y^2 - 6.3x^4y^2 - 429.6y^4 - 24.3x^2y^4 - 29.7y^6 + 206.4y\alpha1 - \\
&\qquad\qquad 133.2x^2y\alpha1 + 752.4y^3\alpha1 - 96.\alpha1^2 - 72.x^2\alpha1^2 - 360.y^2\alpha1^2\big)^2 - \\
&\qquad\qquad 4.(12. + 24.x^2 + 9.x^4 + 72.y^2 + 54.x^2y^2 + 81.y^4)(0.36 + 46.48x^2 + \\
&\qquad\qquad 312.487x^4 + 3.1x^6 + 0.00694444x^8 + 27.6y^2 + 66.12x^2y^2 + 43.54x^4y^2 + \\
&\qquad\qquad 0.105556x^6y^2 + 293.82y^4 + 135.78x^2y^4 + 0.708333x^4y^4 + 94.38y^6 + \\
&\qquad\qquad 2.15x^2y^6 + 2.3625y^8 - 50.16y\alpha1 + 227.28x^2y\alpha1 + 11.9x^4y\alpha1 - 937.2 \\
&\qquad\qquad y^3\alpha1 + 2.52x^2y^3\alpha1 - 176.34y^5\alpha1 + 24.\alpha1^2 - 158.76x^2\alpha1^2 + 2.x^4\alpha1^2 + \\
&\qquad\qquad 1150.44y^2\alpha1^2 + 31.2x^2y^2\alpha1^2 + 85.2y^4\alpha1^2 - 648.y\alpha1^3 + 144.\alpha1^4\big)\big)\big)\Big)\Big/
\end{aligned}
$$

```
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.478752 +
 (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
     24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
     72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
         504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
         133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
       4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
         312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
         0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
         2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
          y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
         1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
 (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 2.0625×10^95
 (-1.93232 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
     6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
     133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
     √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
         6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
         133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
       4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
         312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
         0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
         2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
          y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
         1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
 (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (7.80356 +
 (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
     24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
     72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
         504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
         133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
       4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
         312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
         0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
         2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
          y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
         1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
 (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (28.7288 +
 (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
     24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
     72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
         504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
         133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
       4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
         312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
         0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
         2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
          y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
         1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
 (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^6 (-2.46642×10^96 + (1.21172×10^94 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
     133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
     206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 +
     360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
```

```
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 3.09375×10^95 y^2
(-72.8748 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (5.97887 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))
(-2.54743 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) +
x^2 (-2.10547×10^93 y^10 - 3.7125×10^95
y^6
(-197.834 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
```

```
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-0.169877 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 4.125×10^95
(-0.504561 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (2.6 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (17.7712 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 +
24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 +
72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
```

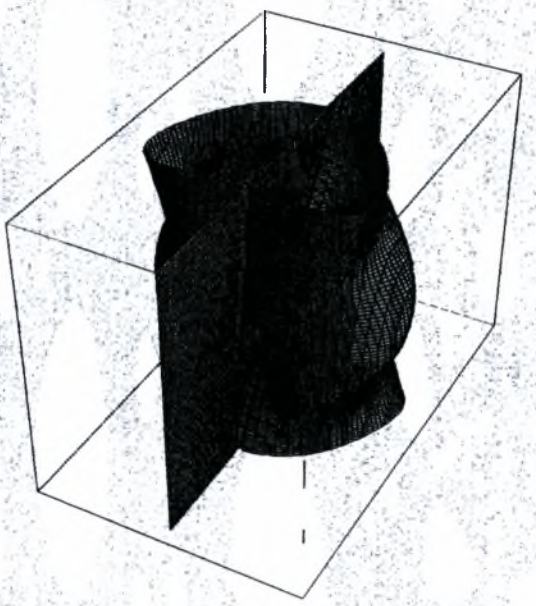
```
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^8 (-6.83328×10^96 + (2.43633×10^94 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 +
360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 9.28125×10^95 y^4
(-199.459 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (0.139034 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))
(-0.585066 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2)^2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
(0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
```

```
                                α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
                                y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
                          (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
                    (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 1.2375×10^96 y^2
               (-89.3981 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
                     6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                     133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
                     √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                           6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                           133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
                        4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                           312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                           0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                           2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                            y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                           1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
                    (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (0.254899 +
                  (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
                        6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                        133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
                        √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                              6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                              133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
                           4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
                              312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
                              0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
                              2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
                               y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
                              1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))
                     (-0.557444 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 +
                           504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                           133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
                           √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
                              4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)
                               (0.36 + 46.48 x^2 + 312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 +
                                 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 + 0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 +
                                 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 + 2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 -
                                 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2 y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3
                                  α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 + 1150.44
                                  y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4))))) /
                           (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) /
                     (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4))) +
               x^6 (-3.59664×10^92 y^6 - 2.75×10^94
                  y^2
                  (-38.6978 +
                     (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
                           6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
                           133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
                           √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
                                 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
                                 133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
                              4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
```

```
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (-2.33553 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) +
y^4 (-3.67908 × 10^95 + (2.89323 × 10^93 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 +
133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 + 6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 -
206.4 y α1 + 133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 +
360. y^2 α1^2 + √((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 -
504. x^2 y^2 - 6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) + 3.4375 × 10^94
(-8.16735 + (0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
2.15 x^2 y^6 + 2.3625 y^8 - 50.16 y α1 + 227.28 x^2 y α1 + 11.9 x^4 y α1 - 937.2
y^3 α1 + 2.52 x^2 y^3 α1 - 176.34 y^5 α1 + 24. α1^2 - 158.76 x^2 α1^2 + 2. x^4 α1^2 +
1150.44 y^2 α1^2 + 31.2 x^2 y^2 α1^2 + 85.2 y^4 α1^2 - 648. y α1^3 + 144. α1^4)))) /
(12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4)) (824.489 +
(0.5 (4.8 + 178. x^2 + 112.267 x^4 + 0.5 x^6 + 133.2 y^2 + 504. x^2 y^2 +
6.3 x^4 y^2 + 429.6 y^4 + 24.3 x^2 y^4 + 29.7 y^6 - 206.4 y α1 +
133.2 x^2 y α1 - 752.4 y^3 α1 + 96. α1^2 + 72. x^2 α1^2 + 360. y^2 α1^2 +
√((-4.8 - 178. x^2 - 112.267 x^4 - 0.5 x^6 - 133.2 y^2 - 504. x^2 y^2 -
6.3 x^4 y^2 - 429.6 y^4 - 24.3 x^2 y^4 - 29.7 y^6 + 206.4 y α1 -
133.2 x^2 y α1 + 752.4 y^3 α1 - 96. α1^2 - 72. x^2 α1^2 - 360. y^2 α1^2) ^ 2 -
4. (12. + 24. x^2 + 9. x^4 + 72. y^2 + 54. x^2 y^2 + 81. y^4) (0.36 + 46.48 x^2 +
312.487 x^4 + 3.1 x^6 + 0.00694444 x^8 + 27.6 y^2 + 66.12 x^2 y^2 + 43.54 x^4 y^2 +
0.105556 x^6 y^2 + 293.82 y^4 + 135.78 x^2 y^4 + 0.708333 x^4 y^4 + 94.38 y^6 +
```

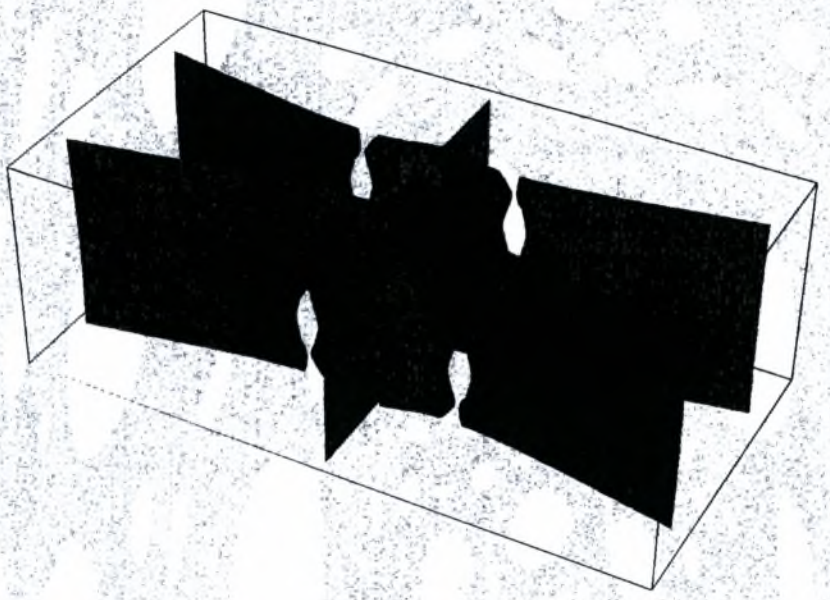
$$2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)))\Big)$$

$$\Big(57.3673 + \Big(0.5\,\Big(4.8 + 178.\,x^2 + 112.267\,x^4 + 0.5\,x^6 + 133.2\,y^2 + 504.\,x^2\,y^2 + 6.3\,x^4\,y^2 + 429.6\,y^4 + 24.3\,x^2\,y^4 + 29.7\,y^6 - 206.4\,y\,\alpha1 + 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 - 752.4\,y^3\,\alpha1 + 96.\,\alpha1^2 + 72.\,x^2\,\alpha1^2 + 360.\,y^2\,\alpha1^2 + \sqrt{\big((-4.8 - 178.\,x^2 - 112.267\,x^4 - 0.5\,x^6 - 133.2\,y^2 - 504.\,x^2\,y^2 - 6.3\,x^4\,y^2 - 429.6\,y^4 - 24.3\,x^2\,y^4 - 29.7\,y^6 + 206.4\,y\,\alpha1 - 133.2\,x^2\,y\,\alpha1 + 752.4\,y^3\,\alpha1 - 96.\,\alpha1^2 - 72.\,x^2\,\alpha1^2 - 360.\,y^2\,\alpha1^2\big)^2 - 4.\,(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\,(0.36 + 46.48\,x^2 + 312.487\,x^4 + 3.1\,x^6 + 0.00694444\,x^8 + 27.6\,y^2 + 66.12\,x^2\,y^2 + 43.54\,x^4\,y^2 + 0.105556\,x^6\,y^2 + 293.82\,y^4 + 135.78\,x^2\,y^4 + 0.708333\,x^4\,y^4 + 94.38\,y^6 + 2.15\,x^2\,y^6 + 2.3625\,y^8 - 50.16\,y\,\alpha1 + 227.28\,x^2\,y\,\alpha1 + 11.9\,x^4\,y\,\alpha1 - 937.2\,y^3\,\alpha1 + 2.52\,x^2\,y^3\,\alpha1 - 176.34\,y^5\,\alpha1 + 24.\,\alpha1^2 - 158.76\,x^2\,\alpha1^2 + 2.\,x^4\,\alpha1^2 + 1150.44\,y^2\,\alpha1^2 + 31.2\,x^2\,y^2\,\alpha1^2 + 85.2\,y^4\,\alpha1^2 - 648.\,y\,\alpha1^3 + 144.\,\alpha1^4)\big)\Big)\Big/(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\Big)\Big/(12. + 24.\,x^2 + 9.\,x^4 + 72.\,y^2 + 54.\,x^2\,y^2 + 81.\,y^4)\Big)\Big)$$



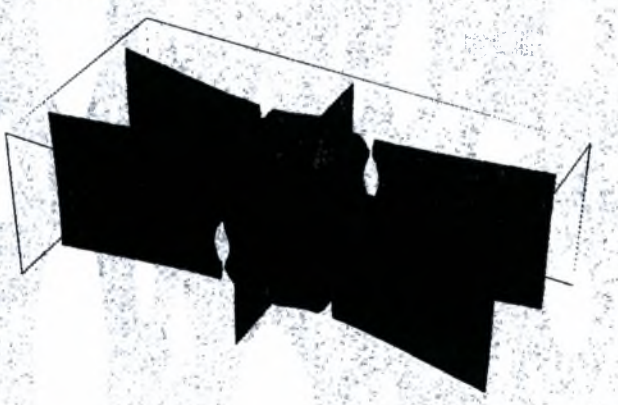
- Graphics3D -

BsAsymma.dxf



- Graphics3D -

BsAsymmb.dxf



- Graphics3D -

BsAsymm.dxf

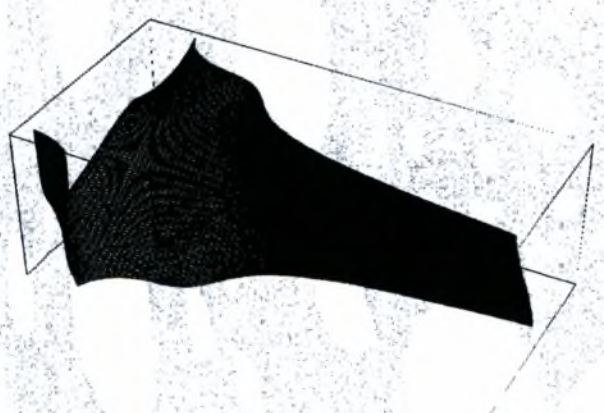
```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, β, α0, α1, α2, M1, M2, Bs]
β = 0.10;
M1 =
 FullSimplify[1/2 (-2 x (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + 8 (x - α1)^3 + 4 (x + y - α1 - α2)^3 + 4 (x - y - α1 + α2)^3 +
     1/3 (x^5 + 2 x^3 (4 + 5 y^2) - 6 x^2 α1 - 6 (2 + y^2) α1 + 3 x (4 + 16 y^2 + 7 y^4 - 12 y α2)) β)]
M2 = FullSimplify[1/2 (-6 y (2 + x^2 + 3 y^2) α0 + 4 (x + y - α1 - α2)^3 - 4 (x - y - α1 + α2)^3 +
     (2 (36 + 7 x^2) y^3 + 27 y^5 + y (36 + 16 x^2 + 5 x^4/3 - 4 x α1) - 6 (6 + x^2) α2 - 54 y^2 α2) β)]
Bs = FullSimplify[1/4 ((5 x^4 β/3 + 7 y^4 β - 12 y α2 (4 + β) - 4 x α1 (24 + β) +
     4 (-α0 + 12 α1^2 + 6 α2^2 + β) + y^2 (24 - 6 α0 + 16 β) + 2 x^2 (24 - 3 α0 + 4 β + 5 y^2 β))
     (5 x^4 β/3 + 135 y^4 β - 4 x α1 (12 + β) + 12 (-α0 + 2 (α1^2 + α2^2) + 3 β) -
     12 y α2 (4 + 9 β) + y^2 (24 - 54 α0 + 216 β) + x^2 (24 - 6 α0 + 16 β + 42 y^2 β)) -
     16/9 (5 x^3 y β - 3 α1 (-12 α2 + y (12 + β)) + 3 x (7 y^3 β - 3 α2 (4 + β) + y (12 - 3 α0 + 8 β)))^2)]
SS = Eliminate[{M1 == 0, M2 == 0}, α0]

1/2 (0.0333333 x^5 + x^3 (16.2667 + 0.333333 y^2 - 2 α0) -
   48.2 x^2 α1 + α1 (-0.4 - 24.2 y^2 - 16 α1^2 + 48 y α2 - 24 α2^2) +
   x (0.4 + 0.7 y^4 + y^2 (25.6 - 6 α0) - 4 α0 + 48 α1^2 - 49.2 y α2 + 24 α2^2))

1/2 (2.7 y^5 + y^3 (15.2 + 1.4 x^2 - 18. α0) -
   29.4 y^2 α2 + α2 (-3.6 - 24.6 x^2 + 48. x α1 - 24. α1^2 - 8. α2^2) +
   y (3.6 + 0.166667 x^4 + x^2 (25.6 - 6. α0) - 12. α0 - 48.4 x α1 + 24. α1^2 + 24. α2^2))

1/4 (-16/9 (0.5 x^3 y - 36.3 y α1 + x (2.1 y^3 + y (38.4 - 9 α0) - 36.9 α2) + 36 α1 α2)^2 +
   (3.6 + 0.166667 x^4 + 13.5 y^4 + y^2 (45.6 - 54. α0) + x^2 (25.6 + 4.2 y^2 - 6 α0) - 12 α0 -
     48.4 x α1 + 24 α1^2 - 58.8 y α2 + 24 α2^2) (0.4 + 0.166667 x^4 + 0.7 y^4 + y^2 (25.6 - 6 α0) +
     x^2 (48.8 + 1. y^2 - 6 α0) - 4 α0 - 96.4 x α1 + 48 α1^2 - 49.2 y α2 + 24 α2^2))

y (2.17312×10^31 + 1.08656×10^31 x^2 + 3.25967×10^31 y^2) α1^3 +
  x α1^2 (-5.43279×10^31 y - 2.71639×10^31 x^2 y - 8.14918×10^31 y^3 -
     1.08656×10^31 α2 - 5.43279×10^30 x^2 α2 - 1.62984×10^31 y^2 α2) +
  α1 (5.43279×10^29 y + 4.38245×10^31 x^2 y + 2.17764×10^31 x^4 y + 3.36833×10^31 y^3 +
     8.17635×10^31 x^2 y^3 + 4.93026×10^31 y^5 + 2.17312×10^31 x^2 α2 + 1.08656×10^31 x^4 α2 -
     6.51935×10^31 y^2 α2 + 4.82529×10^15 x^2 y^2 α2 - 9.77902×10^31 y^4 α2 +
     3.25967×10^31 y α2^2 + 1.62984×10^31 x^2 y α2^2 + 4.88951×10^31 y^3 α2^2) ==
 x (-1.08656×10^30 y + 9.96011×10^30 x^2 y + 5.22151×10^30 x^4 y - 1.50911×10^28 x^6 y +
     2.62585×10^31 y^3 + 2.95181×10^31 x^2 y^3 - 1.3582×10^29 x^4 y^3 + 4.15608×10^31 y^5 -
     4.07459×10^29 x^2 y^5 - 4.07459×10^29 y^7 + 1.62984×10^30 α2 + 1.19521×10^31 x^2 α2 +
     5.56861×10^30 x^4 α2 - 5.10682×10^31 y^2 α2 - 1.00507×10^31 x^2 y^2 α2 -
     8.02694×10^31 y^4 α2 + 2.17312×10^31 y α2^2 + 1.08656×10^31 x^2 y α2^2 +
     3.25967×10^31 y^3 α2^2 + 3.62186×10^30 α2^3 + 1.81093×10^30 x^2 α2^3 + 5.43279×10^30 y^2 α2^3)
```

```
SS =
 y (2.1731153146771195`*^31 + 1.0865576573385598`*^31 x^2 + 3.2596729720156786`*^31 y^2)
   α1^3 + x α1^2 (-5.432788286692799`*^31 y - 2.7163941433463993`*^31 x^2 y -
      8.149182430039197`*^31 y^3 - 1.0865576573385598`*^31 α2 -
      5.432788286692799`*^30 x^2 α2 - 1.6298364860078398`*^31 y^2 α2) +
   α1 (5.4327882866927984`*^29 y + 4.382449217932191`*^31 x^2 y +
      2.1776426382493635`*^31 x^4 y + 3.368328737749535`*^31 y^3 +
      8.176346371472662`*^31 x^2 y^3 + 4.930255370173714`*^31 y^5 +
      2.1731153146771195`*^31 x^2 α2 + 1.0865576573385598`*^31 x^4 α2 -
      6.519345944031358`*^31 y^2 α2 + 4.82528531504016`*^15 x^2 y^2 α2 -
      9.779018916047036`*^31 y^4 α2 + 3.259672972015679`*^31 y α2^2 +
      1.6298364860078395`*^31 x^2 y α2^2 + 4.889509458023518`*^31 y^3 α2^2) -
   (x (-1.0865576573385594`*^30 y + 9.960111858936799`*^30 x^2 y +
      5.221513186654746`*^30 x^4 y - 1.5091078574146656`*^28 x^6 y +
      2.6258476719015194`*^31 y^3 + 2.951814969103087`*^31 x^2 y^3 -
      1.358197071673199`*^29 x^4 y^3 + 4.15608303931999`*^31 y^5 -
      4.0745912150195976`*^29 x^2 y^5 - 4.074591215019598`*^29 y^7 +
      1.6298364860078393`*^30 α2 + 1.1952134230724157`*^31 x^2 α2 +
      5.568607993860119`*^30 x^4 α2 - 5.106820989491231`*^31 y^2 α2 -
      1.0050658330381677`*^31 x^2 y^2 α2 - 8.026944693588609`*^31 y^4 α2 +
      2.1731153146771195`*^31 y α2^2 + 1.0865576573385598`*^31 x^2 y α2^2 +
      3.259672972015678`*^31 y^3 α2^2 + 3.6218588577951985`*^30 α2^3 +
      1.8109294288975992`*^30 x^2 α2^3 + 5.432788286692798`*^30 y^2 α2^3))
```

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α1, α2, SS, LL]
α1 =. ..
α2 =. ..
SS = y (2.1731153146771195`*^31 +
      1.0865576573385598`*^31 x^2 + 3.2596729720156786`*^31 y^2) α1^3 +
   x α1^2 (-5.432788286692799`*^31 y - 2.7163941433463993`*^31 x^2 y -
      8.149182430039197`*^31 y^3 - 1.0865576573385598`*^31 α2 -
      5.432788286692799`*^30 x^2 α2 - 1.6298364860078398`*^31 y^2 α2) +
   α1 (5.4327882866927984`*^29 y + 4.382449217932191`*^31 x^2 y +
      2.1776426382493635`*^31 x^4 y + 3.368328737749535`*^31 y^3 +
      8.176346371472662`*^31 x^2 y^3 + 4.930255370173714`*^31 y^5 +
      2.1731153146771195`*^31 x^2 α2 + 1.0865576573385598`*^31 x^4 α2 -
      6.519345944031358`*^31 y^2 α2 + 4.82528531504016`*^15 x^2 y^2 α2 -
      9.779018916047036`*^31 y^4 α2 + 3.259672972015679`*^31 y α2^2 +
      1.6298364860078395`*^31 x^2 y α2^2 + 4.889509458023518`*^31 y^3 α2^2) -
   (x (-1.0865576573385594`*^30 y + 9.960111858936799`*^30 x^2 y +
      5.221513186654746`*^30 x^4 y - 1.5091078574146656`*^28 x^6 y +
      2.6258476719015194`*^31 y^3 + 2.951814969103087`*^31 x^2 y^3 -
      1.358197071673199`*^29 x^4 y^3 + 4.15608303931999`*^31 y^5 -
      4.0745912150195976`*^29 x^2 y^5 - 4.074591215019598`*^29 y^7 +
      1.6298364860078393`*^30 α2 + 1.1952134230724157`*^31 x^2 α2 +
      5.568607993860119`*^30 x^4 α2 - 5.106820989491231`*^31 y^2 α2 -
      1.0050658330381677`*^31 x^2 y^2 α2 - 8.026944693588609`*^31 y^4 α2 +
      2.1731153146771195`*^31 y α2^2 + 1.0865576573385598`*^31 x^2 y α2^2 +
      3.259672972015678`*^31 y^3 α2^2 + 3.6218588577951985`*^30 α2^3 +
      1.8109294288975992`*^30 x^2 α2^3 + 5.432788286692798`*^30 y^2 α2^3));
LL = ContourPlot3D[SS, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, { ..., ..., ...},
  Contours → {0}, PlotPoints → {10, 10}]
<< Utilities`DXF`
WriteDXF["test.dxf", LL]
```

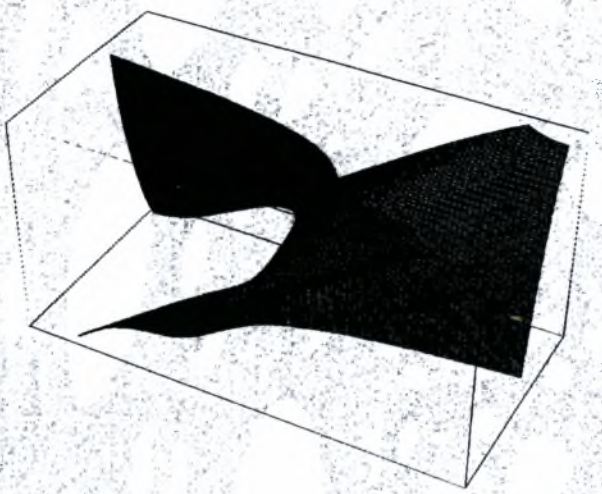
```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α1, α2, SS, LL]
α1 = -0.50
(*Ενδεικτικό πρόγραμμα*)
(*α2=...*)
SS = y (2.1731153146771195`*^31 +
      1.0865576573385598`*^31 x^2 + 3.2596729720156786`*^31 y^2) α1^3 +
   x α1^2 (-5.432788286692799`*^31 y - 2.7163941433463993`*^31 x^2 y -
      8.149182430039197`*^31 y^3 - 1.0865576573385598`*^31 α2 -
      5.432788286692799`*^30 x^2 α2 - 1.6298364860078398`*^31 y^2 α2) +
   α1 (5.4327882866927984`*^29 y + 4.382449217932191`*^31 x^2 y +
      2.1776426382493635`*^31 x^4 y + 3.368328737749535`*^31 y^3 +
      8.176346371472662`*^31 x^2 y^3 + 4.930255370173714`*^31 y^5 +
      2.1731153146771195`*^31 x^2 α2 + 1.0865576573385598`*^31 x^4 α2 -
      6.519345944031358`*^31 y^2 α2 + 4.82528531504016`*^15 x^2 y^2 α2 -
      9.779018916047036`*^31 y^4 α2 + 3.259672972015679`*^31 y α2^2 +
      1.6298364860078395`*^31 x^2 y α2^2 + 4.889509458023518`*^31 y^3 α2^2) -
   (x (-1.0865576573385594`*^30 y + 9.960111858936799`*^30 x^2 y +
      5.221513186654746`*^30 x^4 y - 1.5091078574146656`*^28 x^6 y +
      2.6258476719015194`*^31 y^3 + 2.951814969103087`*^31 x^2 y^3 -
      1.358197071673199`*^29 x^4 y^3 + 4.156083039319999`*^31 y^5 -
      4.0745912150195976`*^29 x^2 y^5 - 4.074591215019598`*^29 y^7 +
      1.6298364860078393`*^30 α2 + 1.1952134230724157`*^31 x^2 α2 +
      5.568607993860119`*^30 x^4 α2 - 5.106820989491231`*^31 y^2 α2 -
      1.0050658330381677`*^31 x^2 y^2 α2 - 8.026944693588609`*^31 y^4 α2 +
      2.1731153146771195`*^31 y α2^2 + 1.0865576573385598`*^31 x^2 y α2^2 +
      3.259672972015678`*^31 y^3 α2^2 + 3.6218588577951985`*^30 α2^3 +
      1.8109294288975992`*^30 x^2 α2^3 + 5.432788286692798`*^30 y^2 α2^3));
LL = ContourPlot3D[SS, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5}, {α2, -0.345, 0.345},
  Contours → {0}, PlotPoints → {10, 10}]
(*<<Utilities`DXF`
  WriteDXF["mga2.dxf",LL]*)
```

```
-0.5
```



```
- Graphics3D -
```

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
ClearAll[x, y, α1, α2, SS, LL]

α2 = -0.345
(*Ενδεικτικό πρόγραμμα*)
SS = y (2.1731153146771195`*^31 +
      1.0865576573385598`*^31 x^2 + 3.2596729720156786`*^31 y^2) α1^3 +
   x α1^2 (-5.432788286692799`*^31 y - 2.7163941433463993`*^31 x^2 y -
      8.149182430039197`*^31 y^3 - 1.0865576573385598`*^31 α2 -
      5.432788286692799`*^30 x^2 α2 - 1.6298364860078398`*^31 y^2 α2) +
   α1 (5.4327882866927984`*^29 y + 4.382449217932191`*^31 x^2 y +
      2.1776426382493635`*^31 x^4 y + 3.368328737749535`*^31 y^3 +
      8.176346371472662`*^31 x^2 y^3 + 4.930255370173714`*^31 y^5 +
      2.1731153146771195`*^31 x^2 α2 + 1.0865576573385598`*^31 x^4 α2 -
      6.519345944031358`*^31 y^2 α2 + 4.82528531504016`*^15 x^2 y^2 α2 -
      9.779018916047036`*^31 y^4 α2 + 3.259672972015679`*^31 y α2^2 +
      1.6298364860078395`*^31 x^2 y α2^2 + 4.889509458023518`*^31 y^3 α2^2) -
   (x (-1.0865576573385594`*^30 y + 9.960111858936799`*^30 x^2 y +
      5.221513186654746`*^30 x^4 y - 1.5091078574146656`*^28 x^6 y +
      2.625847671901519 4`*^31 y^3 + 2.951814969103087`*^31 x^2 y^3 -
      1.358197071673199`*^29 x^4 y^3 + 4.15608303931999`*^31 y^5 -
      4.0745912150195976`*^29 x^2 y^5 - 4.074591215019598`*^29 y^7 +
      1.6298364860078393`*^30 α2 + 1.1952134230724157`*^31 x^2 α2 +
      5.568607993860119`*^30 x^4 α2 - 5.106820989491231`*^31 y^2 α2 -
      1.0050658330381677`*^31 x^2 y^2 α2 - 8.026944693588609`*^31 y^4 α2 +
      2.1731153146771195`*^31 y α2^2 + 1.0865576573385598`*^31 x^2 y α2^2 +
      3.259672972015678`*^31 y^3 α2^2 + 3.6218588577951985`*^30 α2^3 +
      1.8109294288975992`*^30 x^2 α2^3 + 5.432788286692798`*^30 y^2 α2^3));

LL = ContourPlot3D[SS, {x, -1, 1}, {y, -0.5, 0.5},
 {α1, -0.5, 0.5}, Contours → {0}, PlotPoints → {10, 10}]

<< Utilities`DXF`

WriteDXF["mgb1.dxf", LL]


-0.345
```



- Graphics3D -

mgb1.dxf

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
004000074846