

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ  
ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΜΟΝΩΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ  
ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΘΗΤΙΚΗ ΑΝΤΛΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ  
ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

**Σπουδαστές : Θεόφιλος Καλικάντζαρος – Μουχούρτης  
Νικόλαος Καπουράνης**

**Επιβλέπων : Δημήτρης Σ. Σοφιανόπουλος  
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ**

**Βόλος, Οκτώβριος 2005**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3512/1

Ημερ. Εισ.: 6-06-2006

Δωρεά: Συγγραφέα

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ-ΠΜ

2005

ΚΑΛ

Στους γονείς μας,

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Πρόλογος.....σελ.1
- Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....σελ.2
  - A.1. Μη Γραμμικές Κανονικές Μορφές και Μέθοδοι Υπολογισμού των
    - A.1.1 Η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών
    - A.1.2 Ορισμός των μη γραμμικών κανονικών μορφών (ΜΓΚΜ)  
και μέθοδοι υπολογισμού τους.....σελ.3
  - A.2. Μόνωση ταλαντώσεων με τη χρήση μη γραμμικής τοπικοποίησης..... σελ.12
  - A.3. Παθητική άντληση ενέργειας.....σελ.14
- Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>:ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....σελ.17
  - B.1. Διακριτά συστήματα
    - B.1.1. Κανονικές μορφές για γραμμικά συστήματα.....σελ.18
    - B.1.2. Κανονικές μορφές για μη γραμμικά συστήματα.....σελ.24
    - B.1.3 Προσεγγιστική λύση της δυναμικής των διακριτών συστημάτων .....σελ.26
  - B.2 Συνεχή συστήματα.....σελ.31
    - B.2.1 .Απ' ευθείας ανάλυση των εξισώσεων κίνησης.....σελ.33
- Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΜΟΝΩΣΗ - ΤΟΠΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΤΛΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....σελ.47
  - Γ.1. Απομόνωση ταλαντώσεων
    - Γ.1.1 Γενικά
    - Γ.1.2 Συμπεριφορά σταθερής κατάστασης
  - Γ.2. Παθητική άντληση ενέργειας.....σελ.63
    - Γ.2.1 Αρχικές παρατηρήσεις
    - Γ.2.2. Περιοδικές τροχιές υποκείμενου Hamiltonian συστήματος.....σελ.67
    - Γ.2.3. Αναλυτικές προσεγγίσεις.....σελ.79
    - Γ.2.4 Ανάλυση σύλληψης συντονισμών.....σελ.83
    - Γ.2.5 Τοπικά προσαρτήματα και ενίσχυση ενεργειακής άντλησης.....σελ.87

- Παράρτημα Ι.....σελ103
- Παράρτημα ΙΙ.....σελ112
- Παράρτημα ΙΙΙ.....σελ114

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η χρήση μη γραμμικών δυναμικών μεθόδων στην επιστήμη του μηχανικού είναι σχετικά πρόσφατη. Μέχρι τώρα η επίλυση των κατασκευών γίνεται συνήθως με χρήση γραμμικών μεθόδων που αποτελούν προσέγγιση της πραγματικότητας. Τα τελευταία 10-15 χρόνια πολλοί επιστήμονες έχουν στρέψει την προσοχή τους στην ανάπτυξη αυτών των μη γραμμικών μεθόδων προσπαθώντας να αποδείξουν και να επιβάλλουν την χρησιμότητα αλλά και το μεγάλο εύρος εφαρμογής τους. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει νέες μη γραμμικές δυναμικές μεθόδους ανάλυσης και να επιδείξει τις πολύ σημαντικές και καινοτόμες ιδέες που αυτές εισάγουν. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται οι εφαρμογές των μη γραμμικών κανονικών μορφών στην απομόνωση ταλαντώσεων και την παθητική άντληση ενέργειας σε δομικά συστήματα.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών δίνονται ορισμοί και αναφέρονται οι μέθοδοι υπολογισμού τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί και γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στα διακεκριμένα και τα συνεχή συστήματα ενώ παράλληλα αναφέρονται χαρακτηριστικά των δύο αυτών μορφών συστημάτων. Στο τρίτο ασχολούμαστε με την μόνωση δομικών συστημάτων από δονήσεις (vibration isolation), την τοπικοποίηση των ιδιομορφών ( mode localization ) και αναλύεται η έννοια της ενεργειακής άντλησης (energy pumping). Τέλος παρατίθενται τα συμπεράσματα.

Η βιβλιογραφία στο τέλος της εργασίας είναι απόλυτα ενδεικτική και καθόλου περιοριστική, παρά μόνον αντιπροσωπευτική, από την οποία ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να αναζητήσει και άλλες περισσότερο ειδικευμένες γνώσεις και βασικά διόδους για να τις αποκτήσει.

Θα θέλαμε εδώ να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή μας κ. Δημήτρη Σοφιαννόπουλο για την υπερπολύτιμη βοήθεια που μας προσέφερε στα διάφορα στάδια της εργασίας, το χρόνο που μας διέθεσε καθώς και την καθοριστική συμβολή του στην εκπόνηση της διπλωματικής μας εργασίας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1° : ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### A.1. Μη Γραμμικές Κανονικές Μορφές και Μέθοδοι Υπολογισμού των

#### A.1.1 Η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών

Ο όρος *μη γραμμική κανονική μορφή* είναι για τον μέσο σπουδαστή αλλά και απλό μηχανικό εντελώς νέα και ξενίζει αρκετά. Αυτό γιατί η έννοια των κανονικών μορφών παραδοσιακά σχετίζεται με τη γραμμική θεωρία των ταλαντώσεων και θεωρείται στενά συνδεδεμένη με την αρχή της γραμμικής επαλληλίας. Πράγματι, ένα κλασσικό αποτέλεσμα της γραμμικής θεωρίας είναι ότι οι ιδιομορφές των ταλαντώσεων ενός διακριτού ή ενός συνεχούς συστήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συνδέσουν τις εξισώσεις της κίνησης και για να εκφράσουν ελεύθερες ή εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ως επαλληλίες των (ιδιο)μορφικών αποκρίσεων. Επιπλέον στη γραμμική θεωρία ο αριθμός των κανονικών μορφών σε μια ταλάντωση δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος και κάθε εξαναγκασμένη ταλάντωση αυτού υπό εξωτερικές αρμονικές δυνάμεις πάντα εμφανίζεται στη γειτονία των κανονικών μορφών. Από την άλλη, είναι ευρέως γνωστό αποτέλεσμα ότι η αρχή της επαλληλίας δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικά συστήματα. Κατά συνέπεια προκύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα: μπορεί η έννοια των κανονικών μορφών να επεκταθεί και στη μη γραμμική θεωρία; Ποια η ανάγκη για μια τέτοια επέκταση; Και ποιες είναι οι δυνατότητες εφαρμογής μιας τέτοιας έννοιας στη θεωρία των ταλαντώσεων; Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά δίνονται στη συνέχεια.

Παράλληλα θα αποδειχθεί πως η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλύτερη κατανόηση της ελεύθερης και της εξαναγκασμένης δυναμικής των μη γραμμικών ταλαντωτών. Επιπρόσθετα θα εξετασθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών κανονικών μορφών. Τελικά οι μη γραμμικές κανονικές μορφές αποδεικνύονται ένα πολύτιμο θεωρητικό εργαλείο για την κατανόηση διάφορων δυναμικών φαινομένων τα οποία δεν έχουν αντιστοιχίες με την γραμμική θεωρία, όπως τη θεωρία των

διακλαδώσεων, τη μη γραμμική τοπικοποίηση των μορφών και την παθητική άντληση ενέργειας. Τέτοια φαινόμενα δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν και να μελετηθούν με τις κλασσικές γραμμικές τεχνικές.

### **A.1.2 Ορισμός των μη γραμμικών κανονικών μορφών (ΜΓΚΜ)**

#### **και μέθοδοι υπολογισμού τους**

Δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος ορισμός των μη γραμμικών κανονικών μορφών. Ένας πρώτος και προφανής ορισμός μιας μη γραμμικής κανονικής μορφής είναι μια μη γραμμική επέκταση του ορισμού της κανονικής μορφής της κλασσικής γραμμικής θεωρίας. Σε αυτό το πλαίσιο μια μη γραμμική κανονική μορφή ενός μη αποσβενόμενου διακριτού ή συνεχούς συστήματος μπορεί να οριστεί ως *μια σύγχρονη περιοδική ταλάντωση όπου όλα τα υλικά σημεία του συστήματος προσεγγίζουν τις ακραίες τιμές τους ή περνούν από το μηδέν ταυτόχρονα.*

Βασισμένοι στον προηγούμενο ορισμό των μη γραμμικών κανονικών μορφών ο Lyapunov απέδειξε την ύπαρξη  $n$  σύγχρονων περιοδικών λύσεων στη γειτονία ευσταθών σημείων ισορροπίας των  $n$  βαθμών ελευθερίας Χαμιλτονιανών συστημάτων χωρίς εσωτερικούς συντονισμούς, δηλαδή με γραμμικές ιδιοσυχνότητες οι οποίες δεν είναι ολοκληρώσιμα σχετιζόμενες. Οι Weinstein και Moser επέκτειναν το αποτέλεσμα του Lyapunov σε συστήματα με εσωτερικούς συντονισμούς.

Διακριτά ονομάζονται τα συστήματα τα οποία έχουν πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας ενώ συνεχή τα συστήματα εκείνα που έχουν άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Ο αριθμός, η μορφή και οι μέθοδοι υπολογισμού των μη γραμμικών κανονικών μορφών διαφέρουν εξ ολοκλήρου ανάμεσα στις δυο αυτές κατηγορίες συστημάτων.

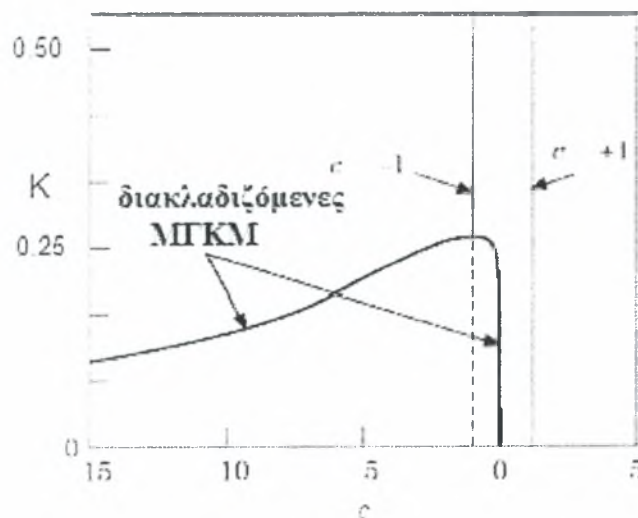
Λαμβάνοντας υπόψη τον προηγούμενο ορισμό των μη γραμμικών μορφών, όταν ένα διακριτό σύστημα ταλαντώνεται σε μια μη γραμμική κανονική μορφή, η αντίστοιχη ταλάντωση αντιπροσωπεύεται στο δικό της χώρο διαμόρφωσης από μια γραμμή που είναι η ιδιομορφική γραμμή. Μια ιδιομορφική γραμμή



αντιπροσωπεύει τη σύγχρονη ταλάντωση του συστήματος στο χώρο διαμόρφωσης κατά τη διάρκεια μιας κίνησης σε μη γραμμική κανονική μορφή. Τα γραμμικά συστήματα έχουν ευθείες ιδιομορφικές γραμμές μέχρι οι συντεταγμένες τους να συσχετιστούν γραμμικά κατά την διάρκεια μιας κανονικής μορφής της ταλάντωσης. Σε μη γραμμικά συστήματα, οι γραμμές μορφής μπορούν να είναι είτε ευθείες είτε καμπύλες. Με τις ευθείες ιδιομορφικές γραμμές να απεικονίζουν συμμετρίες του συστήματος.

▪ Πρώτη μέθοδος υπολογισμού.

Οι Rosenberg, Kauderer και οι συνεργάτες τους ανέπτυξαν ποιοτικές και ποσοτικές τεχνικές για την ανάλυση των μη γραμμικών κανονικών μορφών σε διακριτούς συντηρητικούς ταλαντωτές. Για διακριτά συστήματα ο Rosenberg όρισε ως *όμοιες* εκείνες τις μη γραμμικές κανονικές μορφές οι οποίες αντιστοιχούν σε ευθείες ιδιομορφικές γραμμές στο χώρο διαμόρφωσης και ως *μη-όμοιες* εκείνες τις μη γραμμικές κανονικές μορφές οι οποίες αντιστοιχούν σε καμπύλες ιδιομορφικές γραμμές (Σχήμα Α.1).



Σχήμα Α.1. Οι ΜΓΚΜ του συστήματος με κυβικές μη γραμμικότητες

— ευσταθής ----ασταθής ΜΓΚΜ

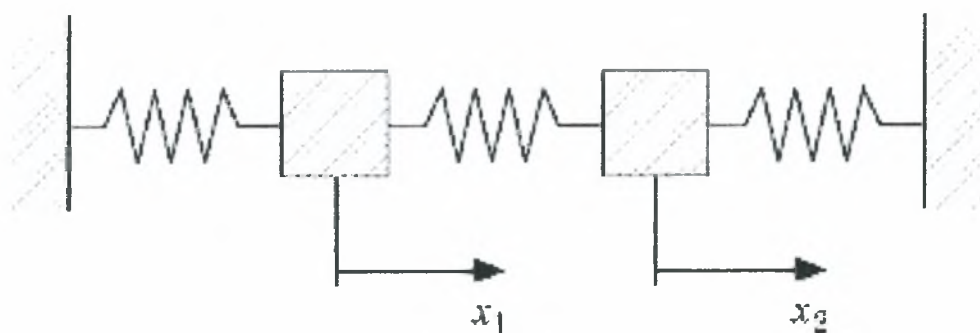
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως ένα μη γραμμικό διακριτό σύστημα αναμένεται να έχει μη-όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές σε αντίθεση με την γραμμική περίπτωση όπου όλες οι μορφές είναι όμοιες. Οι έννοιες των όμοιων και μη-όμοιων μη γραμμικών κανονικών μορφών παρουσιάζονται με τη χρήση δυο πολύ απλών παραδειγμάτων. Ας υποθέσουμε το μη γραμμικό δύο βαθμών ελευθερίας συμμετρικό σύστημα που απεικονίζεται στο Σχήμα Α.2, του οποίου η κίνηση περιγράφεται με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 - K(x_1 - x_2)^3 &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

όπου έχουν υποθεθεί κυβικές μη γραμμικότητες των δυσκαμψιών.

Το εν λόγω σύστημα διαθέτει όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές, οι οποίες ανταποκρίνονται στην ακόλουθη σχέση ανάμεσα στις εξαρτημένες μεταβλητές  $x_1$  και  $x_2$ :

$$x_2(t) = c \cdot x_1(t)\tag{A.2}$$



Σχήμα Α.2. Διβάθμιος μη γραμμικός ταλαντωτής

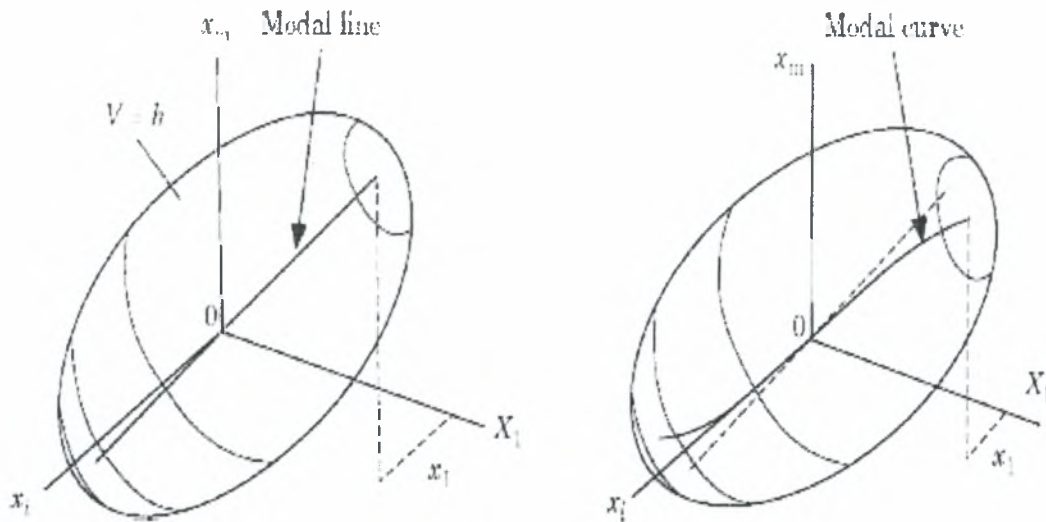
όπου το  $c$  εκφράζει την ιδιομορφική σταθερά. Οι όμοιες μορφές (Α.2) παριστάνονται με ευθείες ιδιομορφικές γραμμές στο επίπεδο διαμόρφωσης  $(x_1, x_2)$  του συστήματος και είναι οι μόνοι τύποι κανονικών μορφών που συναντώνται στη γραμμική θεωρία. Η σχέση (Α.2) χρησιμοποιείται τώρα για να απαλείψει τη μεταβλητή  $x_2$  από τις εξισώσεις κίνησης όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + [1 + K(1 - c)^3]x_1^3 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + x_1 - (1/c)[K(1 - c)^3 + c^3]x_1^3 &= 0, c \neq 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Για την κίνηση μιας μη γραμμικής κανονικής μορφής οι εξισώσεις (A.3) πρέπει να οδηγούν μαζί στην ίδια λύση  $x_1 = x_1(t)$ , γεγονός που ικανοποιείται εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των γραμμικών και των μη γραμμικών όρων. Με την απαίτηση και οι δύο εξισώσεις να έχουν ίδια γραμμικά μέρη οδηγούμαστε στην ακόλουθη εξίσωση για την ιδιομορφική σταθερά:

$$K(1 + c)(c - 1)^3 = c(1 - c^2), c \neq 0 \tag{A.4}$$

Η αλγεβρική εξίσωση (A.4) έχει πάντα τη λύση  $c = \pm 1$ , η οποία αντιστοιχεί στις μη γραμμικές κανονικές μορφές **όμοιας και αντίθετης φάσης**. Αυτές είναι οι μόνες κανονικές μορφές τις οποίες μπορεί το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα να έχει. Οπότε παρατηρούμε ότι το μη γραμμικό σύστημα έχει τις μορφές τις οποίες έχει και το γραμμικό σύστημα (που αντιστοιχεί στο  $(x_2 = \pm x_1)$ ). Αρκετά ενδιαφέρον είναι ότι το διβάθμιο μη γραμμικό σύστημα με κυβικές μη γραμμικότητες μπορεί να έχει επιπρόσθετες μορφές (δηλαδή πάνω από δύο, που αντιστοιχεί στους βαθμούς ελευθερίας του) όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Οι επιπρόσθετες ΜΓΚΜ του μη γραμμικού συστήματος (1) διακλαδίζονται από την αντίθετης φάσης μορφή και υφίστανται για τιμές της παραμέτρου σύζευξης  $K < 0.25$ . Είναι εύλογο ότι μια τέτοια διακλάδωση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στο γραμμικό σύστημα (το οποίο έχει τόσες ιδιομορφές όσες και οι βαθμοί ελευθερίας του).



Σχήμα Α.3. Όμοιες και ανόμοιες ΜΓΚΜ στο χώρο διαμόρφωσης.

Κατά συνέπεια οι διακλαδιζόμενες μη γραμμικές κανονικές μορφές είναι ουσιαστικά μη γραμμικές κινήσεις και δεν μπορούν να θεωρηθούν ως μη γραμμικές συνέχειες των κανονικών μορφών. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις μορφές  $c = \pm 1$  οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως μη γραμμικές συνέχειες των κανονικών μορφών του γραμμικού συστήματος. Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει ότι οι κανονικές μορφές ενός μη γραμμικού συστήματος μπορούν να ξεπεράσουν σε αριθμό τους βαθμούς ελευθερίας του μια ιδιότητα η οποία έρχεται σε αντίθεση με τις προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Επιπλέον οι μη γραμμικές κανονικές μορφές μπορούν να είναι είτε ευσταθείς είτε ασταθείς, ένα χαρακτηριστικό τελείως αντίθετο με τις αρχές της γραμμικής θεωρίας όπου όλες οι μορφές είναι φυσικά ευσταθείς. Λέγοντας αστάθεια μιας ιδιομορφής, εννοούμε τις μικρές διαταραχές των αρχικών συνθηκών, οι οποίες απαιτούνται για την πραγματοποίηση / εμφάνιση των μη γραμμικών κανονικών μορφών, που τελικά οδηγούν στην εξάλειψη της ιδιομορφικής ταλάντωσης.

Οι όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές δεν είναι γενικές σε μη γραμμικά συστήματα δεδομένου ότι απαιτούν ειδικές συνθήκες συμμετρίας (σημειώνεται ότι το σύστημα του σχήματος Α.2 είναι συμμετρικό). Γενικά οι ΜΓΚΜ είναι μη-όμοιες και (δυστυχώς) πολύ πιο δύσκολο να υπολογιστούν. Εδώ η έννοια των μη-όμοιων μη γραμμικών κανονικών μορφών παρουσιάζεται εξετάζοντας το σύστημα με τη

φιλοσοφία του Σχήματος Α.2 χωρίς όμως μη συμμετρικές δυσκαμψίες θεμελίωσης.

Οι εξισώσεις της κίνησης του συστήματος αυτού είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + v_1 x_1^3 + k_1(x_1 - x_2) + v_2(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + (1 + a_1)x_2 + v_1(1 + a_3)x_2^3 + k_1(x_2 - x_1) + v_2(x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5}\alpha)$$

οι οποίες συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες:

$$x_1(0) = X_1, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = X_2, \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{A.5}\beta)$$

Οι συντελεστές  $v_1$  και  $v_2$  είναι οι όροι μη γραμμικής δυσκαμψίας της θεμελίωσης και της σύζευξης και  $a_1, a_3$  είναι παράμετροι που καθορίζουν την ασυμμετρία του συστήματος. Όταν  $a_1 \cdot a_2 \neq 0$  η συμμετρία του συστήματος διαταράσσεται και οι προηγουμένως υπολογισμένες όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές δεν μπορούν πλέον να υπάρχουν. Αν σε αυτό το σημείο θεωρηθεί ασθενής σύζευξη μεταξύ των δυο μαζών πραγματοποιείται αλλαγή κλίμακας στους συντελεστές δυσκαμψίας της σύνδεσης με,  $k_1 = \varepsilon K_1, v_2 = \varepsilon N_2$  όπου  $\varepsilon$  είναι μια μικρή παράμετρος  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$x_2 = \hat{x}_2(x_1) \quad (\text{A.6})$$

επιδιώκεται να ευρεθεί μια μη-όμοια μη γραμμική κανονική μορφή (συγκρίνετε με την απαίτηση για όμοια μη γραμμική κανονική μορφή της σχέσης (Α.2)).

όπου η ιδιομορφική συνάρτηση  $\hat{x}_2(\cdot)$  καθορίζει την τροχιά της ιδιομορφής στο χώρο διαμόρφωσης  $(x_1, x_2)$ .

Δεδομένου ότι η εξίσωση (Α.6) πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή, οι παράγωγοι των μεταβλητών θέσης για κίνηση σε μη-όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές μπορεί να εκφραστούν σύμφωνα με τον κανόνα παραγοντικής παραγωγίσης ως εξής:

$$\dot{x}_2 = \hat{x}_2' \dot{x}_1, \ddot{x}_2 = \hat{x}_2'' (\dot{x}_1)^2 + \hat{x}_2 \ddot{x}_1 \quad (\text{A.7})$$

όπου  $(\cdot)' \equiv d/dx_1$ . Αντικαθιστώντας τα  $x_2, \dot{x}_2$  και  $\ddot{x}_2$  στην εξίσωση της κίνησης (Α.5) προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων κίνησης που περιγράφει την ταλάντωση στην μη-όμοια ιδιομορφή:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + v_1 x_1^3 + \varepsilon K_1 (x_1 - \hat{x}_2) + \varepsilon N_2 (x_1 - \hat{x}_2)^3 = 0 \quad (\text{A.8}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_2'' (\dot{x}_1)^2 + \hat{x}_2' \ddot{x}_1 + (1 + a_1) \hat{x}_2 + v_1 (1 + a_3) \hat{x}_2^3 + \\ \varepsilon K_1 (\hat{x}_2 - x_1) + \varepsilon N_2 (\hat{x}_2 - x_1)^3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8}\beta)$$

ενώ μια έκφραση για την ταχύτητα  $\dot{x}_1$  μπορεί να επιτευχθεί ολοκληρώνοντας την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$(\dot{x}_1)^2 = -2 \int_{x_1}^{x_1} \{ \xi (1 + \varepsilon K_1) + v_1 \xi^3 - \varepsilon K_1 \hat{x}_2(\xi) + \varepsilon N_2 [\xi - \hat{x}_2(\xi)]^3 \} d\xi \quad (\text{A.9})$$

όπου  $X_1$  είναι το μέγιστο εύρος που επιτυγχάνεται από την παραμετροποιούσα συντεταγμένη  $x_1$ . Αντικαθιστώντας την εξίσωση (A.9) στη δεύτερη των εξισώσεων (A.8) και απαλείφοντας το  $\ddot{x}_1$ , λαμβάνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση η οποία καθορίζει την συνάρτηση  $\hat{x}_2(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} -2\hat{x}_2'' \left[ \frac{(x_1^2 + X_1^2)}{2} (1 + \varepsilon K_1) + v_1 \frac{(x_1^4 - X_1^4)}{4} + \right. \\ \left. \int_{x_1}^{x_1} \{ \varepsilon N_2 [\xi - \hat{x}_2(\xi)]^3 - \varepsilon K_1 \hat{x}_2(\xi) \} d\xi \right] - \hat{x}_2' [x_1 + v_1 x_1^3 + \\ \varepsilon K_1 x_1 - \varepsilon \hat{x}_2 K_1 + \varepsilon N_2 (x_1 - \hat{x}_2)^3] + \\ (1 + a_1) \hat{x}_2 + v_1 (1 + a_3) \hat{x}_2^3 - \varepsilon K_1 \hat{x}_2 - \varepsilon K_1 x_1 + \varepsilon N_2 (\hat{x}_2 - x_1)^3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Οι μη-όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές του προβλήματος είναι λύσεις της (A.10) και υπολογίζονται χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενες (συνεχόμενες) προσεγγίσεις μέσω του ακόλουθου ασυμπτωτικού νόμου:

$$\hat{x}_2(x_1) = \hat{x}_2^{(0)}(x_1) + \varepsilon \hat{x}_2^{(1)}(x_1) + \dots \quad (\text{A.11})$$

Σε αντίθεση με τις όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές, οι οποίες δεν εξαρτώνται από το επίπεδο της ενέργειας ταλάντωσης, οι μη-όμοιες μη γραμμικές κανονικές μορφές είναι ενεργειακά εξαρτώμενες. Αυτό εκφράζεται στην συνάρτηση ιδιομορφής (A.6), η οποία εξαρτάται από την πραγματική ενέργεια της ταλάντωσης, ένα χαρακτηριστικό το οποίο περιπλέκει τον υπολογισμό των τροχιών των μη-όμοιων μη γραμμικών κανονικών μορφών. Στο σχήμα A.3 παρουσιάζονται όμοιες και μη-όμοιες

τροχιές μη γραμμικών κανονικών μορφών στο χώρο διαμόρφωσης  $(x_1, x_2)$ . Η έλλειψη που περικλείει την καμπύλη γραμμή ιδιομορφής αντιπροσωπεύει την επιφάνεια της μέγιστης δυναμικής ενέργειας στο σύστημα όταν  $x_1 = X_1$ , δηλαδή όταν η παραμετροποιούσα μεταβλητή  $x_1$  λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Δεδομένου ότι μια μη γραμμική κανονική μορφή αντιστοιχεί σε ταυτόχρονες ταλαντώσεις όλων των συντεταγμένων του συστήματος όταν  $x_1 = X_1$ , όλες οι υπόλοιπες συντεταγμένες φτάνουν στις μέγιστες τιμές τους και η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή μεγιστοποιείται.

▪ **Δεύτερη μέθοδος υπολογισμού.**

Προηγουμένως η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών εφαρμόστηκε για μια πιο γενική ομάδα μη γραμμικών διακριτών ταλαντωτών. Στην ενότητα αυτή θα εξεταστεί η ύπαρξη μη γραμμικών κανονικών μορφών σε μη συντηρητικά συστήματα με απόσβεση. Για να μελετηθούν ελεύθερες μη γραμμικές ταλαντώσεις σε αυτήν την κατηγορία συστημάτων, παρουσιάζεται μια επέκταση του προηγούμενου ορισμού των μη γραμμικών κανονικών μορφών χρησιμοποιώντας την έννοια των *αμετάβλητων πολλαπλών*, όπως αυτή αναλυτικά παρουσιάζεται στο Παράρτημα I ( *Αμετάβλητα Πολλαπλά* ) της παρούσας. Αυτός ο ορισμός είναι απαραίτητος, δεδομένου ότι μια ελεύθερη ταλάντωση ενός αποσβενόμενου συστήματος δεν είναι σύγχρονη και αναμένονται σημαντικές διαφορές φάσης ανάμεσα στις μεταβλητές θέσης. Η ανάλυση αυτή αναφέρεται πλέον στον πραγματικό χώρο (μέθοδος πραγματικών αμετάβλητων πολλαπλών) και βασίζεται στον υπολογισμό των αμετάβλητων πολλαπλών πάνω στα οποία λαμβάνουν χώρα οι μη γραμμικές κανονικές μορφές. Η παραμετροποίηση των αμετάβλητων πολλαπλών στις μη γραμμικές κανονικές μορφές επιτυγχάνεται με τη χρήση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών που είναι γνωστές με την ονομασία *μετακίνηση αναφοράς θέσης* και *αναφερόμενη ταχύτητα αναφοράς θέσης*. Η ικανή υπολογιστικά επέκταση της μεθόδου των ανεξάρτητων πολλαπλών προτάθηκε από τον Nayfeh, ο οποίος αναδιατύπωσε τη μέθοδο των αμετάβλητων πολλαπλών με βάση τη θεωρία των μιγαδικών (μέθοδος μιγαδικών αμετάβλητων πολλαπλών). Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της μιγαδικής

προσέγγισης είναι ότι μπορεί εύκολα να επεκταθεί για τον υπολογισμό υψηλής διάστασης ανεξάρτητων πολλαπλών των μη γραμμικών κανονικών μορφών σε εσωτερικό συντονισμό.

Η πραγματική μέθοδος των αμετάβλητων πολλαπλών επιτυγχάνεται θεωρώντας τον  $n$ -βαθμών ελευθερίας μη γραμμικό αυτόνομο ταλαντωτή με εξίσωση κίνησης:

$$\ddot{x}_i + f_i(x, \dot{x}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

όπου το  $x$  δηλώνει το  $(n-1)$  διάνυσμα των μεταβλητών θέσης ενώ το  $f_i(x, \dot{x})$  ομαλές μη γραμμικότητες. Αρχικά, η (A.12) εκφράζεται με την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{x}_i = y_i \quad \dot{y}_i = -f_i(x, y), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A.13})$$

Οι εξισώσεις (A.12) και (A.13) διαθέτουν μια μη γραμμική κανονική μορφή, εάν υπάρχει μια κίνηση, για την οποία όλες οι μετακινήσεις και οι ταχύτητες μπορούν να παραμετροποιηθούν μέσω ενός μόνο ζεύγους μετακίνησης-ταχύτητας αναφοράς  $(x_1, y_1) \equiv (x, y)$ :

$$x_i = X_i(x, y), \quad y_i = Y_i(x, y), \quad i=2, \dots, n \quad (\text{A.14})$$

Οι σχέσεις (A.14) ορίζουν μια περιορισμένη διδιάστατη επιφάνεια στο  $2n$ -D χώρο φάσης του δυναμικού συστήματος, το οποίο είναι ορισμένο ως η διδιάστατη μη γραμμική κανονική μορφή αμετάβλητου πολλαπλού. Η μη γραμμική κανονική μορφή αμετάβλητου πολλαπλού υπολογίζεται όπως προηγουμένως, χρησιμοποιώντας την (A.14) για την απαλοιφή της σαφούς χρονικής εξάρτησης από τη (A.13) και διατυπώνοντας ένα σύστημα από διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν τις συναρτήσεις  $X_i(x, y)$  και  $Y_i(x, y)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Επομένως προκύπτει το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες καθορίζουν αυτές τις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} Y_i - \frac{\partial X_i}{\partial x} y &= \frac{\partial X_i}{\partial y} f_1(x, X_2, \dots, X_n, y, Y_2, \dots, Y_n) \\ \frac{\partial Y_i}{\partial x} y + \frac{\partial Y_i}{\partial y} f_1(x, X_2, \dots, X_n, y, Y_2, \dots, Y_n) & \\ &= f_i(x, X_2, \dots, X_n, y, Y_2, \dots, Y_n) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$



Όταν βρεθεί μια λύση για τις  $X_i(x, y)$  και  $Y_i(x, y)$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , υπολογίζεται η χρονική αντίδραση του δυναμικού συστήματος εκφράζοντας το πρώτο ζεύγος εξισώσεων (A.13) με τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \dot{y} = -f_1[x, X_2(x, y), \dots, X_n(x, y), y, Y_2(x, y), \dots, Y_n(x, y)] \\ \Rightarrow \ddot{x} + f_1[x, X_2(x, \dot{x}), \dots, X_n(x, \dot{x}), \dot{x}, Y_2(x, \dot{x}), \dots, Y_n(x, \dot{x})] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

και λύνοντας αυτές τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό των  $x(t)$  και  $y(t)$ , χρησιμοποιώντας αποδεδειγμένες μη γραμμικές τεχνικές όπως η μέθοδος του μέσου όρου ή τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (A.15) είναι γενικά τόσο δύσκολο να λυθούν όσο το αρχικό πρόβλημα (A.12). Ωστόσο μπορεί να αναπτυχθεί μια προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας ανάλυση σε σειρές όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} X_i(x, y) &= a_i^{(0)} + a_i^{(1)}x + a_i^{(2)}y + a_i^{(3)}x^2 + a_i^{(4)}y^2 + a_i^{(5)}xy \\ &\quad + a_i^{(6)}x^3 + a_i^{(7)}y^3 + a_i^{(8)}x^2y + a_i^{(9)}xy^2 + \dots \\ Y_i(x, y) &= b_i^{(0)} + b_i^{(1)}x + b_i^{(2)}y + b_i^{(3)}x^2 + b_i^{(4)}y^2 + b_i^{(5)}xy \\ &\quad + b_i^{(6)}x^3 + b_i^{(7)}y^3 + b_i^{(8)}x^2y + b_i^{(9)}xy^2 + \dots, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Αντικαθιστώντας τη (A.17) στην (A.15) και εξισώνοντας τους συντελεστές των μονωνύμων ( $x^m y^n$ ), προκύπτει ένα σύστημα από συζευγμένες αλγεβρικές εξισώσεις σε όρους των συντελεστών  $a_i^{(p)}$  και  $b_i^{(q)}$ , το οποίο μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας γνωστές αλγεβρικές μεθόδους. Επιπρόσθετοι ορισμοί των μη γραμμικών κανονικών μορφών υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία περιλαμβάνοντας ομάδες από θεωρητικούς ορισμούς βασισμένοι σε διακριτά και συνεχή συστήματα.

## A.2. Μόνωση ταλαντώσεων με τη χρήση μη γραμμικής τοπικοποίησης

Όπως αναφέρθηκε στον πρόλογο της εργασίας, βασικός σκοπός αυτών των νέων μη γραμμικών μεθόδων είναι να μονωθούν οι κατασκευές από ταλαντώσεις με όσο το δυνατό λιγότερες βλάβες στο σύστημα. Ακολουθώντας αυτήν την πορεία η μη γραμμική αυτή μέθοδος μόνωσης από ταλαντώσεις είναι ικανή

α) να απομονώσει το κύριο μέρος του από περιοδικές διαταραχές οι οποίες δημιουργούνται στη βάση του και

β) ταυτόχρονα να απομονώσει τη βάση του από περιοδικές διαταραχές οι οποίες δημιουργούνται στο επίπεδο της βάσης.

Χρησιμοποιώντας ουσιαστικά μη γραμμικά στοιχεία δυσκαμψίας (δηλαδή μη δυνάμενα να γραμμικοποιηθούν) εξαλείφονται ολοκληρωτικά οι πιθανοί συντονισμοί κοντά σε γραμμικοποιημένες ιδιομορφές, και κατά συνέπεια επιτυγχάνεται μόνωση από δονήσεις γύρω από ένα εκτεταμένο εύρος συχνοτήτων. Αντ' αυτού αποδεικνύεται η ύπαρξη κλάδων τοπικοποιημένων κινήσεων σταθερής κατάστασης στην περιοχή των συχνοτήτων. Πράγματι αυτές οι τοπικοποιημένες εξαναγκασμένες κινήσεις είναι αρχικά υπεύθυνες για την πραγματοποίηση της μόνωσης.

Θεωρείται ένα σύστημα απομόνωσης των ταλαντώσεων, το οποίο είναι ικανό για διμορφική μόνωση. Αρχικά, αποτρέπει δονήσεις, οι οποίες δημιουργούνται στο ανώτερο μέρος του συστήματος (μηχανισμός), να μεταδοθούν στη βάση και ταυτόχρονα αποτρέπει ανεπιθύμητες δονήσεις από τη βάση να μεταδοθούν στο επίπεδο του μηχανισμού. Αυτή η προκλητική απαίτηση μπορεί να επιτευχθεί μέσω της μη γραμμικής ενεργειακής τοπικοποίησης, δηλαδή, προκαλώντας μέσω μη γραμμικών δύσκαμπτων στοιχείων τοπικοποίηση σταθερών δονήσεων που είναι συμβατή με τους στόχους της διμορφικής μόνωσης. Αυτές οι σταθερές τοπικοποιημένες δονήσεις εμφανίζονται στις γειτονίες των σταθερών τοπικοποιημένων μη γραμμικών κανονικών μορφών του συστήματος. Λαμβάνοντας υπόψη την έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών, όπως αυτές αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα της εργασίας, αυτές είναι ελεύθερες ταλαντώσεις διακριτών ή συνεχών μη αποσβενόμενων μη γραμμικών συστημάτων, όπου όλες οι συντεταγμένες δονούνται μαζί φτάνοντας τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους ταυτόχρονα. Ως εκ τούτου, οι ΜΓΚΜ είναι παρόμοιες με τις κανονικές μορφές της κλασικής γραμμικής θεωρίας ταλαντώσεων. Σε αντίθεση με τη γραμμική περίπτωση ωστόσο, ο αριθμός των ΜΓΚΜ μπορεί να υπερβεί τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας ενός γραμμικού συστήματος, λόγω διακλάδωσης των μη γραμμικών κανονικών μορφών, γεγονός που

αυξάνει σε πολυπλοκότητα καθώς αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας. Επιπλέον, ένα υποσύνολο των διακλαδιζόμενων μη γραμμικών κανονικών μορφών τοπικοποιείται καθόσον αντιστοιχούν σε χωρικό περιορισμό της ενέργειας ταλάντωσης. Επίσης, ένα υποσύνολο των τοπικοποιημένων ιδιομορφών είναι σταθερό και κατά συνέπεια φυσικά αναγνωρίσιμο. Αυτό το τελευταίο συμπέρασμα επιτρέπει τη χρήση μη γραμμικής τοπικοποίησης μορφών για μόνωση ταλαντώσεων και αιφνίδιων δυναμικών διαταραχών των κατασκευών.

### **A.3. Παθητική άντληση ενέργειας**

Με αυτήν την ονομασία ορίζεται η ελεγχόμενη χωρική μεταφορά της ενέργειας ταλάντωσης από το σημείο της αρχικής της γέννησης σε ένα διαφορετικό (προκαθορισμένο) σημείο όπου τελικά τοπικοποιείται. Επιπλέον το φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης ανταποκρίνεται στην ελεγχόμενη μονόδρομη διοχέτευση της ενέργειας ταλάντωσης σε μια μη γραμμικό δίνη, όπου τοπικοποιείται και μικραίνει με το χρόνο μέσω της απόσβεσης. Υπάρχουν αριθμητικές μελέτες στη διεθνή βιβλιογραφία επάνω στη "στατική" μέθοδο τοπικοποίησης, χωρικού περιορισμού της κίνησης, και στην μεταφορά ενέργειας μέσω εσωτερικών ταλαντώσεων σε συζευγμένους μηχανικούς ταλαντωτές. Εδώ παρουσιάζεται το φαινόμενο της μη γραμμικής άντλησης της ενέργειας σε διακριτό μη γραμμικό μηχανισμό της ενεργειακής άντλησης που πραγματοποιείται μέσω της «σύλληψης» των συντονισμών. Η γραμμική και η μη γραμμική "στατική" μέθοδος παθητικής τοπικοποίησης και χωρικού περιορισμού της κίνησης σε περιοδικούς και μη περιοδικούς συζευγμένους ταλαντωτές, έχει ήδη μελετηθεί αναλυτικά στη βιβλιογραφία. Σε αυτές τις μελέτες αναλύθηκαν οι κινήσεις των γραμμικών και μη γραμμικών στατικών κυμάτων σε διαταραγμένους ή όχι περιοδικούς συζευγμένους ταλαντωτές και αποδείχτηκε η ύπαρξη χωρικά τοπικοποιημένων ελεύθερων ή εξαναγκασμένων στατικών κυμάτων με τη χρήση θεωρητικών, αριθμητικών και πειραματικών τεχνικών. Η τοπικοποίηση των στατικών κυμάτων που αναφέρεται στη βιβλιογραφία μπορεί να χαρακτηριστεί ως

«στατική» από τη στιγμή που δεν εμπλέκει καμιά ελεγχόμενη μεταφορά ενέργειας μέσω του συστήματος. Όντως η μέθοδος της γραμμικής και μη γραμμικής τοπικοποίησης μπορεί να πραγματοποιηθεί με την κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών του συστήματος και δεν εμπλέκει καμιά χωρική ροή ενέργειας μέσω του συστήματος.

Έχει επίσης μελετηθεί η μη γραμμική μεταφορά ενέργειας ανάμεσα στις μη γραμμικές μορφές σε περιοχές εσωτερικών συντονισμών. Παράλληλα, όπως έχει αποδειχθεί πρόσφατα, κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορεί να επιτευχθεί η μεταφορά ενέργειας από υψηλότερης σε χαμηλότερης συχνότητας μορφές μιας ασθενώς μη γραμμικής κατασκευής. Ωστόσο, αυτές οι μη γραμμικές ανταλλαγές ενέργειας γίνονται απλά μέσω της αλληλεπίδρασης των μορφών χωρίς να εμπλέκεται απαραίτητα ελεγχόμενη μονόδρομη χωρική μεταφορά ενέργειας μέσω του συστήματος.

Η σπουδαιότερη μέχρι τώρα μελέτη όσον αφορά τη μη γραμμική άντληση ενέργειας έχει παρουσιαστεί από τον Gendelman [19]. Σε αυτήν την εργασία έχει υποθεθεί ένα σύστημα από δύο ασθενώς συζευγμένους ταλαντωτές, έναν γραμμικό και έναν μη γραμμικό. Η άντληση της ενέργειας καταδείχθηκε, αποδεικνύοντας ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, η αρχική μεταδιδόμενη ενέργεια στον γραμμικό ταλαντωτή μεταφέρεται στον μη γραμμικό ακόμα και αν ο τελευταίος δεν έχει διεγερθεί εξαρχής. Εκτενέστερη αναφορά στην ενεργειακή άντληση γίνεται στο Κεφάλαιο 3 της εργασίας, όπου περιγράφονται και οι σχετικές μέθοδοι υπολογισμού. Παρουσιάζονται αριθμητικές αποδείξεις της ενεργειακής άντλησης σε συζευγμένους ταλαντωτές δύο ή τριών βαθμών ελευθερίας με μη γραμμικότητες και απόσβεση. Κατόπιν δίνεται προσοχή στην περίπτωση των δυο βαθμών ελευθερίας και αναλύονται συστηματικά η διακλάδωση των ελεύθερων μη γραμμικών περιοδικών τροχιών του βασικού Χαμιλτονιανού συστήματος χωρίς απόσβεση. Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του φαινομένου της άντλησης ενέργειας μπορεί να αιτιολογηθεί λαμβάνοντας υπ' όψη τις 1:1 ή υψηλότερης τάξης συντονισμένες τροχιές του Hamiltonian συστήματος. Έπειτα πραγματοποιείται μια απ' ευθείας λεπτομερής ανάλυση του φαινομένου της άντλησης

της ενέργειας, μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις της κίνησης με απόσβεση, κάνοντας χρήση των μεταβλητών της ενεργού γωνίας του βασικού Χαμιλτονιανού συστήματος. Αποδεικνύεται ότι η άντληση ενέργειας είναι ένα φαινόμενο σύλληψης συντονισμών σε ένα 1:1 συντονισμένο πολλαπλό και προσδιορίζονται αναλυτικά προσεγγίσεις ενεργειακής άντλησης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

### B.1. Διακριτά συστήματα

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, διακριτά ονομάζονται τα συστήματα τα οποία έχουν πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας. Αρχικά, προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η χρήση των μη γραμμικών κανονικών μορφών στα παραπάνω συστήματα, κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση της έννοιας των κανονικών μορφών σε γραμμικά συστήματα. Έπειτα παρουσιάζεται μια διατύπωση, η οποία επεκτείνει τη γενική ιδέα για μη γραμμικές κανονικές μορφές σε μια τάξη των γενικών συστημάτων με  $N$ (πεπερασμένους) βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι μπορούν να συμπεριλάβουν και απόσβεση. Η μέθοδος αναπτύσσεται τοπικά, δηλαδή κοντά σε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος, έτσι ώστε να μπορεί να αποδειχθεί η φυσική έννοια των μορφών, η παραγωγή και δημιουργία της δυναμική του συστήματος και η αναπαραγωγή μιας γενικής κίνησης από τη δυναμική μορφική συμπεριφορά.

Ένα χαρακτηριστικό σημείο της παρούσας εφαρμογής είναι ότι το πρόβλημα διατυπώνεται σε όρους διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, που περιέχουν ως εξαρτημένες μεταβλητές ταχύτητα και μετατόπιση. Η εν λόγω η μεθοδολογία όχι μόνο επιτρέπει την ύπαρξη απόσβεσης με συστηματική έννοια, αλλά αποδεικνύεται επίσης ότι προκύπτει η παρουσία σημαντικού αριθμού όρων εξαρτημένων από την ταχύτητα για κανονικές μορφές μη γραμμικών συντηρητικών συστημάτων. Στην παραδοσιακή προσέγγιση για μη γραμμικές μορφές συντηρητικών συστημάτων, αυτοί οι όροι εκφράζονται συναρτήσει της ενέργειας του συστήματος και ως εκ τούτου αποτρέπουν την απευθείας επέκταση στα μη συντηρητικά συστήματα.

Η γενική προσέγγιση είναι εμπνευσμένη από την θεωρία των αμετάβλητων πολλαπλών για δυναμικά συστήματα και μέσω αυτής επιτυγχάνεται η γενίκευση των αποτελεσμάτων της γραμμικής θεωρίας. Επίσης έχοντας ως κύριο στόχο την εστίαση σε διακριτά συστήματα με ταλαντωτική συμπεριφορά, παρουσιάζονται αποτελέσματα για σύνολα συζευγμένων μη γραμμικών δευτέρου βαθμού συνήθων διαφορικών

εξισώσεων, η γραμμικοποίηση των οποίων σχετίζεται με την ύπαρξη μιγαδικών ιδιοτιμών. Όπως περιγράφεται στις τελικές παρατηρήσεις, οι ιδέες που παρουσιάζονται μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε πιο γενικές περιπτώσεις.

### **B.1.1. Κανονικές μορφές για γραμμικά συστήματα**

Παρουσιάζεται ο ορισμός των κανονικών μορφών για γραμμικά ταλαντούμενα συστήματα με έναν τρόπο που επιτρέπει επεκτάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μη γραμμικές επιδράσεις. Εισάγεται μια προσέγγιση, η οποία είναι βασισμένη στην ιδιότητα της αμεταβλητότητας των ιδιομορφικών υποχώρων και η οποία επιτρέπει την απεικόνιση των ιδιομορφών των μη συζευγμένων ταλαντωτών μέσω ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτής της προσέγγισης είναι ότι τα ιδιοδιανύσματα ευρίσκονται πριν τον υπολογισμό των ιδιοτιμών.

Εξετάζεται αρχικά η ελεύθερη κίνηση ενός συστήματος  $N$  βαθμών ελευθερίας, το οποίο έχει γραμμικοποιηθεί σε ένα σημείο αρχικής ισορροπίας:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (\text{B.1})$$

όπου  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων, ο τόνος δηλώνει την παράγωγο του χρόνου και  $M$ ,  $C$  και  $K$  είναι οι πίνακες της αδράνειας, της απόσβεσης και της δυσκαμψίας αντίστοιχα, αποκτηθέντα γραμμικοποιώντας τη δυναμική ενός μηχανικού συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας. Απαιτείται το  $M$  να μην είναι μοναδικό και να επιτρέπει στα  $K$  και  $C$  να είναι ανεξάρτητα, κάτι που επιτρέπει να συμπεριλαμβάνονται όροι απόσβεσης καθώς και μη γραμμικοί, μη συντηρητικοί όροι. Υποτίθεται ακόμα ότι το σύστημα έχει ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και παρόλο που δεν είναι αυστηρώς ζητούμενο, ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι όλες μιγαδικές.

Η συνηθισμένη διαδικασία είναι να γίνει θεώρηση μιας λύσης του τύπου:

$$x(t) = qe^{\lambda t} \quad (\text{B.2})$$

και αντικαθιστώντας αυτή στην εξίσωση (B.1). Αυτό οδηγεί σε ένα δευτέρου βαθμού  $N \times N$  πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο μπορεί να επιλυθεί για τις ιδιοτιμές  $\lambda$  και τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{q}$ . Όταν το  $\mathbf{C}$  είναι μη μηδενικό τα  $2N$  ιδιοδιανύσματα είναι γενικά μιγαδικά και οι  $N$  εξισώσεις κίνησης είναι μη συζευγμένες μέσα στη δευτέρου βαθμού μορφή εκτός από ειδικές περιπτώσεις. Μια πρώτου βαθμού διατύπωση είναι αυτή η οποία περιλαμβάνει τις ταχύτητες σαν ξεχωριστά εξαρτημένες μεταβλητές, παρέχοντας την μορφή που απαιτείται για να αποσυζευχθούν οι δυναμικές.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (B.1) με τον αντίστροφο του  $\mathbf{M}$  και εισάγοντας το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{y}$ , η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στην αρχική της μορφή ως εξής :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

όπου  $\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  και  $\mathbf{B} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ . Σημειώνονται τα στοιχεία τους με  $\alpha_{ij}$  και  $\beta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ). Έστω μια λύση της μορφής:

$$\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{z}}e^{\lambda t} \quad (\text{B.4})$$

η οποία όταν αντικαθίσταται στην εξίσωση (B.3) οδηγεί σε ένα κανονικό πρώτου βαθμού,  $2N \times 2N$  πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο μπορεί να λυθεί για τα  $2N$  ιδιοδιανύσματα  $\bar{\mathbf{z}}$  και  $2N$  ιδιοτιμές,  $\lambda$ . Τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι μοναδικά και γι' αυτό παρέχουν μόνο μια κατεύθυνση στον χώρο φάσης και όχι ένα μέγεθος. Καθένα περιέχει  $2N-1$  συγκεκριμένες αναλογίες και μια ελεύθερη (μιγαδική) σταθερά πολλαπλασιασμού. Με την πρώτη τάξης αυτή προσέγγιση, μια κίνηση καθαρά πρώτης μορφής είναι τέτοια που όλες οι συντεταγμένες έχουν ακριβώς την ίδια χρονική εξάρτηση μέχρι τους σταθερούς όρους κλίμακας, δηλαδή τους λόγους των ευρών. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα μιας τέτοιας κίνησης μορφών, είναι αυτή κατά την οποία, εάν κάποιος γνωρίζει τη μετακίνηση σε ένα σημείο τότε οι μετακινήσεις όλων των άλλων κινήσεων προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα αυτής της μορφής. Επιπλέον λόγω της ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων μια αρχική συνθήκη, η οποία ευθυγραμμίζεται με μια απλή μορφή οδηγεί σε μια καθαρά ιδιομορφική κίνηση, στην οποία όλες οι άλλες μορφές ξεκινούν με μηδενικό εύρος και παραμένουν αμετάβλητες



καθ' όλη τη διάρκεια. Αυτή είναι η σημαντική αμετάβλητη ιδιότητα των ιδιομορφικών υποχώρων.

Περιορισμό στις εξισώσεις (B.2) και (B.4) αποτελεί το γεγονός ότι μέσω αυτών υποτίθεται απόλυτα ότι η κίνηση σε μια μορφή είναι συγχρονισμένη, δηλαδή υπάρχουν σχέσεις *μόνο* μεταξύ μετατοπίσεων, που πρέπει να ισχύουν για να επιτευχθεί μια κίνηση κανονικής μορφής. Παρ' όλα αυτά οι κανονικές μορφές κίνησης για ένα σύστημα με απόσβεση ή γυροσκοπικό δεν είναι στατικά κύματα αλλά «ταξιιδεύοντα», τέτοια ώστε οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος να μην ταλαντώνονται σε φάση. Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις μεταξύ των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων πρέπει να διατηρούνται σε μια κανονική μορφή και ότι ο σχετικός ιδιομορφικός υποχώρος είναι διδιάστατος. Το αποτέλεσμα είναι ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στην εξίσωση (B.4) πρέπει να είναι μιγαδικά και τέτοια ώστε να για επιτευχθεί μια πραγματικά κανονική μορφή, απαιτείται ένα ζεύγος ιδιολύσεων.

Για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες, αναζητούνται οι κανονικές μορφές του συστήματος μέσω μιας μεθόδου, η οποία εκμεταλλεύεται την αμετάβλητη ιδιότητα των ιδιομορφικών υποχώρων. Προσδιορίζεται η κίνηση σε μια κανονική μορφή ως μία όπου όλες οι μετατοπίσεις και οι ταχύτητες σχετίζονται σε ένα μοναδικό ζεύγος μετατόπισης-ταχύτητας  $x_1$  και  $y_1$  (αυτά επιλέχτηκαν για απλότητα, κάθε ζεύγος μπορεί να επιλεγεί). Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, αυτή η συναρτησιακή σχέση των  $x_i$  και των  $y_i$  με τα  $x_1$  και  $y_1$  είναι γραμμική:

$$x_i(t) = a_{1i}x_1(t) + a_{2i}y_1(t), \quad y_i(t) = b_{1i}x_1(t) + b_{2i}y_1(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.5}\alpha)$$

όπου  $a_{11} = 1$ ,  $a_{21} = 0$ ,  $b_{11} = 0$  και  $b_{21} = 1$ . Σε μορφή διανύσματος αυτό γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5}\beta)$$

Η εξίσωση αυτή είναι αυτή ενός επιπέδου στο  $2N$ -διάστατο χώρο φάσης. Οποιαδήποτε κίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα τέτοιο γραμμικό αμετάβλητο υποχώρο φάσης και ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης ορίζεται ως **μια γραμμική κανονική μορφή**. (Εάν  $x_1$  είναι ένα κομβικό σημείο για μια δεδομένη μορφή δηλαδή  $x_1 = y_1 = 0$ , οι εξισώσεις θα είναι ανώμαλες. Αυτή η περίπτωση μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα επιλέγοντας ένα διαφορετικό ζεύγος μετατόπισης/ταχύτητας.) Σημειώνεται ότι ο ορισμός αυτός επιτρέπεται διαφορές φάσης μεταξύ των συστατικών (στοιχείων), όπως απαιτείται στις «μη-κλασσικές» κανονικές μορφές.

Οι εξισώσεις κίνησης (B.3) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij} x_j + \beta_{ij} y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.6})$$

Αντικαθίσταται η εξίσωση (B.5) στην (B.6) για  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  και γίνεται χρήση του τύπου:

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = \sum_{j=1}^N (\alpha_{1j} (a_{1j} x_1 + a_{2j} y_1) + \beta_{1j} (b_{1j} x_1 + b_{2j} y_1)), \quad (\text{B.7})$$

Συλλέγοντας τους όρους  $x_i$  και  $y_i$  στις  $2N-2$  εξισώσεις και απαιτώντας οι συντελεστές των  $x_i$  και  $y_i$ , που δίνουν  $4N-4$  εξισώσεις, να είναι τετραγωνικοί στους αγνώστους  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$ ,  $b_{1i}$ , και  $b_{2i}$ ,  $i = 2, \dots, N$ , οδηγούμεθα στην ακόλουθη μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{j=1}^N (\alpha_{1j} a_{1j} + \beta_{1j} b_{1j}) & \sum_{j=1}^N (\alpha_{1j} a_{2j} + \beta_{1j} b_{2j}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Σημειώνεται ότι η εξάρτηση του προβλήματος από τον χρόνο απαλειφθηκε από αυτήν τη διαδικασία και ότι η εξίσωση (B.8) μπορεί να επιλυθεί για την γεωμετρία των ιδιομορφικών χώρων, χωρίς να επιλυθεί το βασικό πρόβλημα ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος. Για ένα ταλαντούμενο σύστημα η εξίσωση (B.8) έχει  $N$  πραγματικές

λύσεις για τους γραμμικούς συντελεστές  $(a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i})_{i=2, \dots, N}$ , μία για κάθε κανονική μορφή. Για να προκύψουν οι ιδιομορφές του συστήματος για κάθε έναν από τους  $N$  αμετάβλητους επίπεδους υποχώρους εισάγεται ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} = U\mathbf{w}(t) \quad (\text{B.9})$$

όπου  $\mathbf{U}$  ορίζεται ως ο πίνακας  $2N \times 2N$ , τα  $N$  ζεύγη στύλων του οποίου είναι οι  $N$  λύσεις της εξίσωσης (B.8) ώστε η  $k$ -οστή κανονική μορφή να αποτελείται από  $(2k-1)$  – οστή και  $(2k)$ - οστή στήλες του  $\mathbf{U}$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{w} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)^T$  περιλαμβάνει τις ιδιομορφικές συντεταγμένες, όπου  $\mathbf{u}_x$  και  $\mathbf{v}_x$  είναι η μετακίνηση και η ταχύτητα αντίστοιχα για την  $k$ -οστή κανονική μορφή. Εφαρμόζουμε αυτό τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων στις εξισώσεις κίνησης (B.3) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα που ικανοποιείται από τα ζεύγη των στύλων του  $\mathbf{U}$ . Αυτό οδηγεί σε ένα σύνολο  $2N$  εξισώσεων πρώτου βαθμού της μορφής

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \\ \dot{v}_N \end{pmatrix} = U^{-1}DU \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ g_1 & h_1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & g_N & h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

όπου στην εξίσωση (B.10) ορίζουμε:

$$g_k = a_{11} + \sum_{j=2}^N \alpha_{1j} (a_{1j})_k + \sum_{j=2}^N \beta_{1j} (b_{1j})_k, \quad (\text{B.11})$$

$$h_k = \sum_{j=2}^N \alpha_{1j} (a_{2j})_k + \beta_{11} + \sum_{j=2}^N (\beta_{1j} (b_{2j})_k), \quad k = 1, \dots, N$$

Επομένως η δυναμική σε κάθε αμετάβλητο ιδιομορφικό υποχώρο καθορίζεται από την εξίσωση του μονοβάθμιου ταλαντωτή:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\xi_k\omega_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad k=1, \dots, N, \quad (\text{B.12})$$

όπου  $g_k = -\omega_k^2$  και  $h_k = -2\xi_k\omega_k$  όπου  $\omega_k$  και  $\xi_k$  είναι η φυσική συχνότητα χωρίς απόσβεση και η αναλογία απόσβεσης για την  $k$ -οστή κανονική μορφή και  $u_k, v_k$  είναι η μετακίνηση και ταχύτητα μορφής αντίστοιχα.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η επιλογή των  $(u_k, v_k)$  ως τη συνεισφορά της  $k$ -οστής μορφής στην μετακίνηση/ ταχύτητα του πρώτου βαθμού ελευθερίας έχει επηρεάσει την κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων σ' ένα ιδιαίτερο ποσοστό. Αυτή η κανονικοποίηση φανερώνεται από μόνη της με έναν ασυνήθιστο τρόπο: οι ιδιοτιμές, όπως παρουσιάζονται στην εξίσωση (B.11), εξαρτώνται από τα ιδιοδιανύσματα. Αρχικά αυτό μπορεί να είναι παράδοξο αλλά είναι η φυσική συνέπεια της μεθόδου που προσδιορίζει τα ιδιοδιανύσματα με μοναδικό τρόπο.

Η εξίσωση (B.10) δείχνει ότι η δυναμική του  $N$ -βαθμών ελευθερίας συστήματος μειώνεται στους  $N$  ανεξάρτητους ταλαντωτές. Για δεδομένες αρχικές συνθήκες  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{U}\mathbf{w}(0)$ , τα  $N$  δευτέρου βαθμού προβλήματα αρχικών τιμών (B.12) μπορούν να επιλυθούν για τις ιδιομορφές και η γενική κίνηση υπολογίζεται σαν επαλληλία των εξισώσεων κίνησης (B.9) των ανεξάρτητων ταλαντωτών.

Εδώ έχουν χρησιμοποιηθεί αμετάβλητοι χώροι φάσης για να καθοριστούν οι κανονικές μορφές και να λάβει χώραν ιδιομορφική ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Παρόλο που η προσέγγιση αυτή είναι νέα και εξ' ολοκλήρου διαφορετική από την κλασσική μεθοδολογία, αυτό που απαιτείται για την εύρεση της πραγματικής ταλαντωτικής μορφής της ιδιομορφικής δυναμικής είναι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας της μιγαδικής ιδιολύσης για την αναπαράσταση πρώτης τάξης. Παρά ταύτα, η δύναμη της προσέγγισης μέσω των αμετάβλητων ιδιοχώρων έγκειται στην φυσική της επέκταση σε αμετάβλητα πολλαπλά, τα οποία αντιπροσωπεύουν κανονικές μορφές μη γραμμικών συστημάτων, όπως θα δειχθεί παρακάτω.

### **B.1.2. Κανονικές μορφές για μη γραμμικά συστήματα**

Αμετάβλητο σύνολο ενός δυναμικού συστήματος ορίζεται ένα υποσύνολο  $S$  του χώρου φάσης, τέτοιο ώστε εάν το σύστημα δίνει μια αρχική κατάσταση στο  $S$ , η λύση των εξισώσεων που καθορίζουν την κίνηση παραμένει στο  $S$  κάθε στιγμή. Οι μη-γραμμικές κανονικές μορφές που ορίζονται παρακάτω είναι αμετάβλητα υποσύνολα για τις μη-γραμμικές εξισώσεις της κίνησης. Αυτά τα υποσύνολα γενικά είναι μη-επίπεδα πολλαπλά τα οποία είναι εφαπτόμενα των αντίστοιχων γραμμικών επίπεδων ιδιοχώρων στο σημείο ισορροπίας.

Οι εξισώσεις κίνησης θα έχουν την μορφή :

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.13})$$

όπου το  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  αναπαριστά τις γενικευμένες συντεταγμένες (μετακινήσεις και στροφές) και το  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  περιέχει τις αντίστοιχες γενικευμένες ταχύτητες. Το διάνυσμα  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$  εκφράζει τις δυνάμεις και τις ροπές που δρουν στο σύστημα κανονικοποιημένα απ' τις αντίστοιχες αδρανειακές δράσεις. [Σε μερικές εφαρμογές πρέπει να αντιστραφεί ο πίνακας αδράνειας, ο οποίος μπορεί να εξαρτάται από τα  $x$  και  $y$  με σκοπό να επιτευχθεί η μορφή της εξίσωσης (B.13)]. Επίσης πιθανά, για δεδομένο πρόβλημα, θα είναι πιο φυσικό να χρησιμοποιηθούν μετακινήσεις και αντίστοιχες ροπές. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί να χρειαστεί μια πιο γενική πρώτου βαθμού διατύπωση. Τα βήματα που ακολουθούν μπορούν να γενικευθούν για τον χειρισμό και της εν λόγω περίπτωσης.

Υποτίθεται κατ' αρχήν ότι υπάρχει τουλάχιστον μια κίνηση, για την οποία όλες οι μετακινήσεις και οι ταχύτητες εξαρτώνται συναρτησιακά με ένα μοναδικό ζεύγος μετακίνησης-ταχύτητας το οποίο επιλέγεται αυθαίρετα σαν η πρώτη μετατόπιση και ταχύτητα  $x_1$  και  $y_1$ . Με σκοπό να εφαρμοστεί αυτό, γράφονται τα  $u = x_1$  και  $v = y_1$  και εκφράζονται τα άλλα  $x_i$  και  $y_i$  συναρτήσεων των  $u$  και  $v$  όπως παρακάτω:

$$x_i = X_i(u, v), \quad y_i = Y_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{B.14}\alpha)$$

όπου  $X_i(u, v) = u$  και  $Y_i(u, v) = v$ . Σε μορφή διανύσματος αυτό γράφεται :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ X_2(u, v) \\ Y_2(u, v) \\ \vdots \\ X_N(u, v) \\ Y_N(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{B.14}\beta)$$

Η εξίσωση (B.14) ορίζεται σε μια περιορισμένη επιφάνεια διάστασης 2 (ή ισοδύναμα συν-διάστασης  $2N-2$ ) στο  $2N$ -διάστατο χώρο φάσης. *Κατά συνέπεια ορίζεται μια κανονική μορφή κίνησης για το μη-γραμμικό, ανεξάρτητο σύστημα ως η κίνηση η οποία λαμβάνει χώρα σε ένα διδιάστατο πολλαπλό στο χώρο φάσης του συστήματος. Αυτό το πολλαπλό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: Περνά από ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος και σε αυτό το σημείο είναι εφαπτόμενο σε ένα επίπεδο το οποίο είναι ένας ιδιοχώρος του γραμμικού συστήματος για την ισορροπία αυτή.*

Ένα σύνολο εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν γι' αυτήν την περιορισμένη επιφάνεια, για τα  $X_i$  και τα  $Y_i$ , μπορούν να παραχθούν αναζητώντας τις λύσεις, που ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης, με τις συνθήκες περιορισμού ταυτόχρονα. Αυτό επιτυγχάνεται με την απαλοιφή από την εξάρτηση του χρόνου στο πρόβλημα, το οποίο παράγει ένα σύνολο εξισώσεων για την γεωμετρία των πολλαπλών. Η διαδικασία που ακολουθείται δανείστηκε από την κύρια θεωρία των πολλαπλών. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τις εξισώσεις περιορισμού και με χρήση του κανόνα παραγώντων βρίσκουμε:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{B.15})$$

Μετά αντικαθιστούμε στις εξισώσεις της κίνησης για  $\dot{x}_i$  και  $\dot{y}_i$  και αντικαθίστανται τα  $x_i$  και  $y_i$  με  $X_i$  και  $Y_i$  για να επιτύχουμε  $2N-2$  εξισώσεις που μπορούν να λυθούν για τα  $X_i$  και  $Y_i$ :

$$\begin{aligned}
 Y_i(u, v) &= \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial X_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)), \\
 & f_i(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \\
 &= \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)) \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, 3, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{B.16}$$

Σημειωτέον ότι για  $i = 1$  οι εξισώσεις ικανοποιούνται.

Γενικά αυτές οι εξισώσεις συναρτήσεων είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο να επιλυθούν όσο και οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις, όμως οι πρώτες επιτρέπουν μια προσεγγιστική λύση της μορφής των δυναμικών ακολουθιών. Άπαξ και έχουν λυθεί για τα  $X_i$  και  $Y_i$  οι δυναμικές των αμετάβλητων πολλαπλών, που είναι οι δυναμικές των κανονικών μορφών, μπορούν μετά να γενικευθούν με την απλή αντικατάσταση των  $X_i$  και  $Y_i$  με τα  $x_i$  και  $y_i$  στο πρώτο ζεύγος εξισώσεων κίνησης, οπότε προκύπτει ότι:

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = f_1(u, X_2(u, v), \dots, X_N(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_N(u, v)),
 \tag{B.17}$$

όπου  $u$  και  $v$  εκφράζουν τις μεταβλητές στο αμετάβλητο πολλαπλό και αντιστοιχούν σε προβολές των ιδιομορφών στο  $(x_i, y_i)$ . Γενικά σε κάθε σημείο ισορροπίας υπάρχουν  $N$  λύσεις για τα  $X_i$  και  $Y_i$  και  $N$  αντίστοιχες ομάδες εξισώσεων της μορφής που δίνεται στην εξίσωση (B.17), μια ομάδα για κάθε μορφή. Σε μερικές περιπτώσεις, για παράδειγμα για συστήματα που έχουν συγκεκριμένες συμμετρίες, οι εξισώσεις (B.16) μπορούν να λυθούν ακριβώς, περίπτωση για την οποία δύνανται να αποκτηθούν καθολικές αναπαραστάσεις των μορφικών πολλαπλών και της δυναμικής. Αυτές είναι οι ονομαζόμενες "όμοιες κανονικές μορφές", όπως ορίζονται κατά τον Rosenberg.

### **B.1.3 Προσεγγιστική λύση της δυναμικής των διακριτών συστημάτων**

Η μέθοδος που παρουσιάζεται εδώ είναι **τοπικού** χαρακτήρα, και οδηγεί σε προσεγγίσεις για τα αμετάβλητα πολλαπλά των κανονικών μορφών στη γειτονιά σημείου ισορροπίας. Αυτός ο περιορισμός επιτρέπει η ανάλυση να γίνεται για συστήματα χωρίς συμμετρία και επιτρέπει να συμπεριληφθεί η απόσβεση, η οποία καλύπτει τις περισσότερες των περιπτώσεων δομικών συστημάτων. Η διαδικασία αυτή παράγει ακριβή αποτελέσματα για όμοιες κανονικές μορφές, καθώς αυτές

αναπαρίστανται με πολλαπλά επίπεδα και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για μη-όμοιες κανονικές μορφές. Οι προσεγγίσεις είναι σε μορφή αναπτυγμάτων σε δυναμοσειρές και μπορεί να παραχθούν για οποιοδήποτε τάξη. Επί του παρόντος γίνεται χρήση προσέγγισης μέχρι 3<sup>ης</sup> τάξης για τις μετακινήσεις και τις ταχύτητες. Αυτό θα είναι επαρκές για τα περισσότερα προβλήματα, ωστόσο η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και σε ανώτερες τάξης με απ' ευθείας ανάλυση.

Η προσέγγιση είναι βασισμένη στα αναπτύγματα κατά Taylor γύρω από ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος. Εδώ γίνεται η παραδοχή ότι η ισορροπία είναι στο  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ . Αυτό είναι πάντα πιθανό με τη σωστή επιλογή του  $\mathbf{x}$ . Η συμπεριφορά του συστήματος κοντά στο σημείο ισορροπίας καθορίζεται από τα εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = y_j, \quad \dot{y}_j = & \alpha_{jk}x_k + \beta_{jk}y_k + \delta_{jkm}x_kx_m + \varepsilon_{jkm}x_ky_m + \gamma_{jkm}y_ky_m + \\ & + \mu_{jkmq}x_kx_mx_q + \nu_{jkmq}x_kx_my_q + \rho_{jkmq}x_ky_my_q + \xi_{jkmq}y_ky_my_q + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

όπου οι συντελεστές των αναπτυγμάτων υπολογίζονται μετά από απ' ευθείας παραγωγή των δυνάμεων  $f_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) ως προς  $x$  και  $y$  με χρήση της ειδικής σημειογραφίας για άθροιση. Σημειώνεται ότι οι συντελεστές των μη γραμμικών όρων δεν είναι μοναδικά ορισμένοι αλλά μπορούν να επιλεγούν με κάθε τρόπο, ώστε να περιλαμβάνονται όλοι οι όροι μέχρι την επιθυμητή τάξη. Για παράδειγμα, για τους όρους  $x_1x_2$  μπορεί να θεωρηθούν τα  $\delta_{1,12}$  ως οι απαιτούμενοι συντελεστές και μετά  $\delta_{1,21}$  για να γίνουν μηδενικοί. Έστω τώρα ότι οι κανονικές μορφές για τα μη γραμμικά συστήματα όπως δίνονται στις εξισώσεις (B.14α) μπορούν επίσης να εκφραστούν με τη μορφή των αναπτυγμάτων Taylor:

$$\begin{aligned} X_i(u, v) = & a_{1i}u + a_{2i}u + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3 + \dots, \\ Y_i(u, v) = & b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.19α})$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

Σε μορφή πίνακα τα αναπτύγματα μπορούν να γραφούν ως εξής:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ b_{1N} & b_{2N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{32}u + a_{42}v & a_{52}v \\ b_{32}u + b_{42}v & b_{52}v \\ \vdots & \vdots \\ a_{3Nu} + a_{4N}v & a_{5N}v \\ b_{3Nu} + b_{4N}v & b_{5N}v \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{62}u^2 + a_{82}v^2 & a_{72}u^2 + a_{92}v^2 \\ b_{62}u^2 + b_{82}v^2 & b_{72}u^2 + b_{92}v^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{6Nu}^2 + a_{8N}v^2 & a_{7Nu}^2 + a_{9N}v^2 \\ b_{6Nu}^2 + b_{8N}v^2 & b_{7Nu}^2 + b_{9N}v^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots \right. \quad (B.19\beta)$$

ή με πιο συμπαγή μορφή ως εξής:

$$z = \{m_0 + m_1(u, v) + m_2(u, v)\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots, \quad (B.19\gamma)$$

όπου  $\mathbf{z} = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N]^T$  και  $\mathbf{m}_0$ ,  $\mathbf{m}_1$  και  $\mathbf{m}_2$  είναι πίνακες  $2N \times 2$ . Ο πίνακας  $\mathbf{m}_0$  είναι το γραμμικό ιδιομορφικό συστατικό (μέρος) και  $\mathbf{m}_1$  και  $\mathbf{m}_2$  εκφράζουν τις επιρροές των τετραγωνικών και κυβικών μη γραμμικών όρων. Σημειωτέον ότι μπορεί να αναπαραχθεί ένα διάνυσμα  $(u, v)$  και ότι η δεδομένη παράσταση δεν είναι μοναδική. Είναι όμως κατάλληλη για μερικούς από τους υπολογισμούς και όλες οι πιθανές αναπαραστάσεις θα οδηγήσουν στα ίδια αποτελέσματα.

Οι συντελεστές των γραμμικών όρων εκφράζουν την αναλογία για τις συνήθεις κανονικές μορφές. Για ένα μη γυροσκοπικό σύστημα χωρίς απόσβεση μπορεί να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι όροι μεταξύ της μετακίνησης και της ταχύτητας  $a_{2i}$  και  $b_{1i}$ , ισούνται με μηδέν όταν  $a_{2i} = b_{1i}$  και εκφράζουν τις συνήθεις αναλογίες μετατοπίσεων (και επομένως αναλογίες ταχυτήτων) για ένα συντηρητικό ταλαντούμενο σύστημα. Για ένα γυροσκοπικό σύστημα ή σύστημα με απόσβεση οι γραμμικοί όροι σύζευξης μεταξύ των μετακινήσεων και των ταχυτήτων είναι γενικά μη μηδενικοί και

δεν έχουν τέτοια ειδική σχέση μεταξύ τους (πέραν του να είναι γραμμική προσέγγιση το ιδιομορφικού υποχώρου), εκτός από περιπτώσεις όπως αναλογικής απόσβεσης, όπου οι μορφές του συστήματος με απόσβεση είναι ταυτόσιμες με αυτές του συστήματος χωρίς απόσβεση. Αυτοί οι μη μηδενικοί όροι επιτρέπουν τις διαφορές στις φάσεις μεταξύ των μετατοπίσεων για μη συντηρητικά ή γυροσκοπικά συστήματα.

Οι μη γραμμικοί όροι περιγράφουν την **καμπύλωση** (bending back) του ιδιομορφικού υποχώρου. Οι αντίστοιχοι συντελεστές τους μπορούν ακόμη να είναι μηδενικοί για μια μορφή, στην οποία τα ποσοστά των μετατοπίσεων είναι σταθερά, όπως συμβαίνει και σε συστήματα, τα οποία έχουν όμοιες κανονικές μορφές, αλλά γενικά είναι μη μηδενικές. Οι όροι αυτοί συλλαμβάνουν την επιρροή των μη γραμμικών δυνάμεων και καταλήγουν στο γεγονός ότι το μέγεθος της μετατόπισης και της ταχύτητας εξαρτώνται από το εύρος της κίνησης.

Με την απαλοιφή του χρόνου με τη χρήση της εξίσωσης (B.16) παράγεται ένα σύνολο  $2N-2$  εξισώσεων οι οποίες περιέχουν τους συντελεστές των δυνάμεων ως γνωστές ποσότητες και τους συντελεστές των κανονικών μορφών ως άγνωστες. Λύνονται συλλέγοντας τους όρους της ίδιας δύναμης σε  $u$  και  $v$  με την απαίτηση να ταιριάζουν. Για όρους κυβικής τάξης αυτό οδηγεί σε  $18(N-1)$  εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές των κανονικών μορφών. Αυτές οι εξισώσεις παρουσιάζονται στο Παράρτημα III (Μέθοδος Μέσου Όρου (averaging)). Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται διαδοχικά, όπως τυπικά λαμβάνει χώραν στη θεωρία των διαταραχών και η όλη διαδικασία οδηγεί σε μερικές **εμπληκτικές** παρατηρήσεις, οι οποίες παρατίθενται κατωτέρω.

Οι εξισώσεις για τους γραμμικούς συντελεστές είναι τετραγωνικές ως προς αγνώστους  $a_{1j}, a_{2j}, b_{1j}, b_{2j}$  και γενικά έχουν  $N$  πραγματικές λύσεις, μια για κάθε μορφή. Η λύση για αυτές τις τετραγωνικές εξισώσεις παρουσιάζει υπολογιστικές δυσκολίες. Όμως, αφού η λύση τους είναι ισοδύναμη με την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων, είναι ξεκάθαρο ότι οι επιθυμητές λύσεις είναι υπολογιστικά αποκτήσιμες (εφικτές) μέσω καθιερωμένων μεθόδων.

Λύσεις από  $18(N-1)$  εξισώσεις οδηγούν σε κυβικές προσεγγίσεις σειρών για  $N$  μη γραμμικές φυσικές μορφές. Η διαδικασία αυτή παρέχει τη γεωμετρική κατασκευή των μη γραμμικών μορφών κοντά στο σημείο ισορροπίας. Η τοπική προσέγγιση των δυναμικών εξισώσεων για κάθε μορφή μπορεί τότε να κατασκευασθεί από την εξίσωση (B.17) χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα για το  $f_j$  που δίνεται στην εξίσωση (B.18), στην οποία τα  $(x_p, y_p)$  αντικαθίσταται παντού από τις αναπαραστάσεις σε σειρές των  $X_j(u, v)$ ,  $Y_j(u, v)$  για  $j=1, 2, 3, \dots, N$ . Τούτο οδηγεί σε μια εξίσωση ενός μονοβάθμιου μη γραμμικού ταλαντωτή, η οποία αναπαριστά τη δυναμική του συστήματος επί ενός αμετάβλητου, δισδιάστατου υποχώρου, ο οποίος εφάπτεται στον γραμμικό ιδιοχώρο της κανονικής μορφής στο σημείο ισορροπίας. Μπορούν να υπάρξουν  $N$  τον αριθμό τέτοιοι ταλαντωτές, ένας για κάθε κανονική μορφή.

Βρισκόμαστε πλέον σε θέση να συνθέσουμε το πλήρες μη γραμμικό μορφικό μητρώο  $\bar{M}$  και τις σχετικές μορφικές συντεταγμένες  $w$ . Το μητρώο  $\bar{M}$  συντίθεται με την συλλογή σε ένα μητρώο  $2N \times 2N$  των  $N$  μοναδικών μορφικών μητρώων διαστάσεων  $2N \times 2$ , που δίνονται στην εξίσωση (B.19). Όμοια, το διάνυσμα  $w$  συντίθεται παρατηρώντας ότι κάθε μορφή θα έχει το δικό της ζεύγος  $(u, v)$  που σχετίζεται με αυτήν, το οποίο γράφεται ως  $(u_k, v_k)$  για  $k=1, 2, \dots, N$ . Αυτά τα ζεύγη συλλέγονται στο διάνυσμα  $w = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N\}^T$ . Ο πλήρης μετασχηματισμός μεταξύ των φυσικών συντεταγμένων  $z$  και των μορφικών συντεταγμένων  $w$  μπορεί συνεπώς να γραφεί τώρα ως:

$$z = \bar{M}(w) = \{M_0 + M_1(w) + M_2(w)\}w + \dots, \quad (\text{B.20})$$

όπου  $\bar{M}(w) = M_0 + M_1(w) + M_2(w) + \dots$ , και όπου τα  $M_p$  συντίθενται από τα  $m_p$  από την εξίσωση (B.19γ) για  $p = 0, 1, 2$ .

Υπάρχουν πολλές σημαντικές ιδιότητες αυτής της μεθόδου. Είναι η πιο πιθανή φυσική τοπική περιγραφή για μια μη γραμμική κανονική μορφή. Είναι εύχρηστη έτσι ώστε να είναι ικανή να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει συγκεκριμένα μη γραμμικά συστήματα. Παράγει πληροφορίες αναφορικά με τη μη γραμμική συμπεριφορά κοντά σε ένα σημείο ισορροπίας περιλαμβανόμενων μη γραμμικών συχνοτήτων καθώς και φθινόντων ρυθμών. Οι πληροφορίες αυτές είναι εξαιρετικά

σημαντικές για να τον υπολογισμό της κινηματικής απόκρισης και του υπόβαθρου για τον προσδιορισμό της αναμενόμενης συμπεριφοράς όταν υπάρξει εξωτερική διέγερση. Επίσης προέρχεται από μια περισσότερο καθολική αναπαράσταση, η οποία μπορεί να επιτρέψει τη χρησιμοποίηση και άλλων στρατηγικών για να την απόκτηση μη γραμμικών αποτελεσμάτων για μη γραμμικές κανονικές μορφές. Ένας προς τούτο τρόπος είναι η δημιουργία αριθμητικών λύσεων των εξισώσεων (B.16).

## B.2. Συνεχή συστήματα

Η αρχή των μη γραμμικών κανονικών μορφών δύναται να επεκταθεί σε συνεχή συστήματα (με άπειρους βαθμούς ελευθερίας). Οι γενικές αναλυτικές μεθοδολογίες που περιγράφονται κατωτέρω αναφέρονται στον υπολογισμό των ΜΓΚΜ σε δομικά συστήματα με πεπερασμένη χωρική έκταση (μέγεθος).

Εξετάζονται αρχικά οι μη γραμμικές κανονικές μορφές μιας κλάσης μονοδιάστατων συντηρητικών ή μη συνεχών φραγμένων ταλαντωτών. Σε μια τέτοια κλάση συστημάτων οι ΜΓΚΜ ορίζονται ως ελεύθερες περιοδικές κινήσεις κατά τη διάρκεια των οποίων όλα τα σημεία της κατασκευής φθάνουν τη μέγιστη τιμή του εύρους στην ίδια χρονική στιγμή. Υπάρχουν αρκετές τεχνικές για τον υπολογισμό των κανονικών μορφών συνεχών συστημάτων όπως δοκών, πλακών και κελυφών, οι σπουδαιότερες των οποίων παρατίθενται σε ότι ακολουθεί.

Τα εύκαμπτα συστήματα που εξετάζονται κυριαρχούνται από μερικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης με την εξής γενική μορφή:

$$u_{tt} = L[u(x,t)] \quad , \quad x \in [0,1] \quad (B.21)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$B[u(x,t)] = 0 \quad , \quad x = 0,1 \quad (B.22)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $L[\bullet]$  είναι ένας μη γραμμικός ολοκληρωτικο-διαφορικός τελεστής, που δρα στη μεταβλητή μετατόπισης  $u(x,t)$  και  $B[\bullet]$  τελεστής συνοριακών συνθηκών. Προϋποτίθεται ότι οι μη γραμμικότητες στο σύστημα είναι μικρές και

ανάλογες με μια μικρή παράμετρο  $\varepsilon, |\varepsilon| \ll 1$ . Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία για την εγκυρότητα της ανάλυσης διαταραχών που πρόκειται να εφαρμοστεί. Υφίστανται δύο γενικές κατηγορίες μεθόδων για τον υπολογισμό μη γραμμικών κανονικών μορφών των εξισώσεων (B.21) και (B.22). Η πρώτη βασίζεται στην διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης που διέπουν το σύστημα και στην ανάλυση του συνόλου των ασθενώς συζευγμένων μη γραμμικών κανονικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν. Η δεύτερη κατηγορία μεθόδων (απ' ευθείας προσεγγίσεις) βασίζεται στην απ' ευθείας ανάλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης, χωρίς να παρεμβάλλεται κάποια διακριτοποίηση.

Μέθοδοι βασισμένες στην διακριτοποίηση των εξισώσεων κίνησης εκφράζουν την μετατόπιση  $u(x,t)$  με την ακόλουθη μορφή σειρών:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (\text{B.23})$$

όπου μια από τις συναρτήσεις  $\phi_i(x)$  ή  $q_i(t)$  είναι καθορισμένες. Αν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ομογενείς, οι συναρτήσεις  $\phi_i(x)$  συνήθως λαμβάνονται ως οι συναρτήσεις σχήματος (ιδιοσυναρτήσεις) του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος. Σε άλλες κατηγορίες εφαρμογών (μέθοδοι γενικευμένης αρμονικής εξισορρόπησης) οι συναρτήσεις  $\phi_i(x)$  επιλέγονται από ένα πλήρες σύνολο αρμονικών συναρτήσεων. Αντικαθιστώντας τις (B.23) στις (B.21) και (B.22) και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες συνθήκες ορθογωνικότητας, οι αρχικές μερικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης καταλήγουν σε ένα σύνολο συνήθων ιδιομορφικών εξισώσεων[11].

Ένας βασικός περιορισμός των μεθόδων διακριτοποίησης έγκειται στο ότι, αν μεν οι  $\phi_i(x)$  είναι προκαθορισμένες, η συνάρτηση σχήματος της μη γραμμικής ταλάντωσης ορίζεται εκ των προτέρων και ως εκ τούτου δεν επηρεάζεται από τις μη γραμμικότητες, αφού ταυτίζεται με τις κανονικές μορφές του σχετικού γραμμικού συστήματος. Παρόμοια, σε περιπτώσεις όπου οι συναρτήσεις  $q_i(t)$  προκαθορίζονται, δεν υπάρχει η δυνατότητα μη γραμμικών διορθώσεων. Πλην όμως, υφίστανται στην

βιβλιογραφία γενικεύσεις της ανωτέρω μεθόδου χρονικής διακριτοποίησης., όπου παρέχεται η δυνατότητα μη γραμμικών διορθώσεων στις συναρτήσεις σχήματος και στην χρονική εξάρτηση των ταλαντώσεων[11].

Όσον αφορά τις απ' ευθείας μεθόδους υπολογισμού των ΜΓΚΜ οι σπουδαιότερες από αυτές βασίζονται είτε σε ασυμπτωτικές θεωρίες είτε στα αμετάβλητα πολλαπλά καθώς και σε ενεργειακές θεωρήσεις.

### **B.2.1. Απ' ευθείας ανάλυση των εξισώσεων κίνησης**

Παρατίθενται στο σημείο αυτό δύο απ' ευθείας αναλυτικές μέθοδοι υπολογισμού μη γραμμικών κανονικών μορφών συνεχών δομικών συστημάτων. Το κοινό χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι η απαλοιφή του χρονικού παράγοντα από το πρόβλημα, με την εισαγωγή ενός κατάλληλα ορισμένου μετασχηματισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό δεν χρειάζεται διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης και έτσι βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

#### ▪ **Ενεργειακή προσέγγιση**

Η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη σε συντηρητικά μονοδιάστατα δομικά στοιχεία[30]. Αν θεωρηθεί η ταλάντωση ενός μη γραμμικού συνεχούς συστήματος, όπως στην (B.21), που καταλαμβάνει μια μονοδιάστατη περιοχή  $0 \leq x \leq 1$  και εκφράζοντας τον τελεστή  $L$  υπό τη μορφή διαχωριζόμενων και μη όρων, οι εξισώσεις κίνησης επαναγράφονται και λαμβάνουν την μορφή:

$$u_{tt} = L_x^{(0)}[u(x,t)] + \varepsilon L_{xt}^{(1)}[u(x,t)] \quad (B.24)$$

ενώ υπόκεινται στις συνοριακές συνθήκες (B.22). Στην (B.24) οι  $L_x^{(0)}[\bullet]$  και  $\varepsilon L_{xt}^{(1)}[\bullet]$  είναι ολοκληρωτικο-διαφορικοί τελεστές δρώντες επί της μεταβλητής  $u(x,t)$  και  $\varepsilon$  μια μικρή παράμετρος. Οι ακόλουθες υποθέσεις ισχύουν για το σύστημα (B.24):

(1) Αυτό είναι συντηρητικό και οι συνοριακές συνθήκες (B.22) δεν εμπεριέχουν απορρόφηση ενέργειας.

(2) Για  $\varepsilon=0$ , το σύστημα είναι διαχωρίσιμο τόσο χωρικά όσο και χρονικά, και ταλαντώνεται ελεύθερα με φραγμένο εύρος για οποιοδήποτε δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών.

(3) Ο τελεστής  $L_x^{(0)}[\bullet]$  αποτελείται από παραγωγίσεις ή/και ολοκληρώσεις μόνο ως προς τη χωρική μεταβλητή  $x$ , ενώ ο τελεστής  $L_{xt}^{(1)}[\bullet]$  σχετίζεται με ολοκληρωτικο-διαφορικούς χειρισμούς σε όρους της χωρικής μεταβλητής  $x$  και πιθανά σε όρους της χρονικής μεταβλητής  $t$ .

(4) Μόνο περιττής τάξης μη γραμμικότητες υπάρχουν στο σύστημα.

(5) Η μετατόπιση  $u(x,t)$  είναι μια ικανοποιητικά ομαλή συνάρτηση των μεταβλητών της έτσι ώστε να υφίστανται όλες οι παράγωγοι της, που εμφανίζονται στην εν λόγω ανάλυση.

Η υπόθεση (1) απαιτείται για να είναι δυνατή η εφαρμογή της συνθήκης διατήρησης της συνολικής ενέργειας ταλάντωσης, οι υποθέσεις (2), (3) και (5) είναι αναγκαίες για την εφαρμογή ανάλυσης διαταραχών ενώ η (4) δίδει μια συμμετρική δομή για τις υπολογιζόμενες ΜΓΚΜ. Επιπρόσθετα το σύστημα θεωρείται φυσικό, έτσι ώστε η κινητική ενέργεια να δύναται να εκφραστεί σαν μια τετραγωνική συνάρτηση της ταχύτητας  $u_t(x,t)$ . Αν η τελευταία αυτή απαίτηση δεν ικανοποιείται, τότε τροποποιείται ελαφρά η μέθοδος των διαταραχών.

Κατά τη διάρκεια μιας μη γραμμικής κανονικής μορφής η μετατόπιση του σημείου του υλικού στη θέση  $x = x_0$  ορίζεται ως  $u_0(t) \equiv u(x_0, t)$ . Κάνοντας χρήση της  $u_0(t)$  ως μιας μετατόπισης αναφοράς, εκφράζεται η μετατόπιση οποιουδήποτε άλλου σημείου του συστήματος συναρτήσει της κίνησης αναφοράς ως εξής:

$$u(x,t) = U[x, u_0(t)] \quad (\text{B.25})$$

όπου  $U(\bullet, \bullet)$  μια (ιδιο)μορφική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για να περιγράψει το σχήμα της εξεταζόμενης μη γραμμικής μορφής. Σημειωτέον ότι γράφοντας την (B.25) το σύνολο των ανεξαρτήτων μεταβλητών αλλάζει από  $(x, t)$  σε  $[x, u_0(t)]$  και έτσι απαλείφεται η σαφής χρονική εξάρτηση της κίνησης. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός συντεταγμένων απαιτεί να μην ταυτίζεται το  $x_0$  με κόμβο της ΜΓΚΜ. Καθόσον δε το σύστημα είναι συντηρητικό και φυσικό, η συνολική ενέργεια του  $E_{tot}$  διατηρείται κατά τη διάρκεια μιας μη γραμμικής μορφής, δηλαδή ισχύει ότι

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + L^{(0)}[u(x, t)] + \varepsilon L^{(1)}[u(x, t)] \quad (B.26)$$

όπου  $L^{(0)}[\bullet]$  και  $L^{(1)}[\bullet]$  είναι οι ενεργειακοί όροι που αντιστοιχούν στους τελεστές  $L_x^{(0)}[\bullet]$  και  $L_{xt}^{(1)}[\bullet]$ . Οι όροι αυτοί τυπικά περιέχουν ολοκληρωτικές εκφράσεις ως προς τη χωρική μεταβλητή, οι οποίες περιέχουν μερικές παραγώγους της μετατόπισης. Κάνοντας χρήση της συναρτησιακής σχέσης (B.25) εκφράζονται οι μερικές παράγωγοι της μετατόπισης ως προς το χρόνο κατά παράγοντες

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial U}{\partial u_0} \right) u_{0,t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial u_0^2} \right) u_{0,t}^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial u_0} \right) u_{0,tt}, \dots \quad (B.27)$$

όπου ο δείκτης  $t$  υποδηλώνει παραγωγή ως προς τη μεταβλητή του χρόνου. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τις (B.26) και (B.27) εκφράζεται εκ νέου η ενεργειακή σχέση και δίνεται πλέον υπό την ακόλουθη μορφή:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} u_{0,t}^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial u_0} \right)^2 dx + L^{(0)}[U] + \varepsilon L^{(1)}[U, u_0(t)] \quad (B.28)$$

όπου

$$L^{(j)} = \left\{ L^{(j)} \right\}_{u(x,t) \rightarrow U[x, u_0(t)]} \quad (B.29)$$

Λόγω της προηγηθείσας υπόθεσης (3), ο  $L^{(0)}$  δεν περιέχει παραγώγους ως προς τον χρόνο, ενώ οποιεσδήποτε τέτοιες παράγωγοι στον  $\varepsilon L^{(1)}$  μετασχηματίζονται σε μερικές παραγώγους ως προς το  $u_0$  κατά τα γνωστά. Η σχέση (B.28) οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση της ταχύτητας αναφοράς



$$u_{0,t}^2 = \frac{2|E_{tot} - L^0[U] + O(\varepsilon)|}{\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial u_0}\right)^2 dx} \quad (B.30)$$

όπου  $O(\varepsilon)$  αναπαριστά διορθώσεις της ταχύτητας αναφοράς λόγω του τελεστού  $\varepsilon L^{(1)}[U, u_0(t)]$ . Καθόσον η γενική ανάλυση πραγματοποιείται μέχρι  $O(\varepsilon)$ , η έκφραση (B.30) είναι αρκετή για την εφαρμογή της ανάλυσης διαταραχών. Πάντως, ο υπολογισμός προσεγγίσεων υψηλότερης τάξης απαιτεί τον υπολογισμό διορθώσεων υψηλότερης τάξης στην έκφραση της  $u_{0,t}^2$ .

Οι εκφράσεις (B.25) και (B.30) δίδουν την μετατόπιση και την ταχύτητα του σημείου αναφοράς συναρτήσει της (άγνωστης ακόμη) ιδιομορφικής συνάρτησης  $U[x, u_0(t)]$ . Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω στην εξίσωση κίνησης (B.24) και εκφράζοντας την επιτάχυνση του σημείου αναφοράς με

$$u_{0,tt} = \left\{ L_x^{(0)}[u(x,t)] + \varepsilon L_{xt}^{(1)}[u(x,t)] \right\}_{x=x_0}$$

λαμβάνεται η ακόλουθη εξίσωση που διέπει την ιδιομορφική συνάρτηση  $U[x, u_0(t)]$  :

$$\frac{2|E_{tot} - L^{(0)}[U]|}{\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial u_0}\right)^2 dx} \frac{\partial^2 U}{\partial u_0^2} + \left\{ L^{(0)}[U(x, u_0)] + \varepsilon L^{(1)}[U(x, u_0)] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U}{\partial u_0} =$$

$$= L^{(0)}[U(x, u_0)] + \varepsilon L^{(1)}[U(x, u_0)] + O(\varepsilon) \quad , \quad x \in [0, 1]$$
(B.31)

που υπόκειται στις συνοριακές συνθήκες

$$\underline{B}[U(x, u_0(t))] = 0 \quad , \quad x = 0, 1 \quad (B.32)$$

Στις τελευταίες δύο σχέσεις, οι τελεστές με την υπογράμμιση προέρχονται από τους αρχικούς τελεστές μετασχηματίζοντας το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών  $(x, t) \rightarrow [x, u_0(t)]$ . Ορίζοντας ως  $u_0^*$  το μέγιστο εύρος που αποκτά η  $u_0(t)$ , παρατηρούμε ότι η εξίσωση (B.31) καθίσταται ανώμαλη στο επίπεδο της μέγιστης δυναμικής ενέργειας

$$E_{tot} = \left\{ L^{(0)}[U] + \varepsilon L^{(1)}[U, u_0(t)] \right\}_{u_0=u_0^*}$$

επειδή ο συντελεστής της υψηλότερης τάξης παραγώγου  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u_0^2}\right)$  μηδενίζεται στη θέση αυτή. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα αναπτυχθούν ασυμπτωτικές προσεγγίσεις της συνάρτησης  $U$ , για τιμές της συνολικής δυναμικής ενέργειας μικρότερες από  $E_{tot}$  και θα συνεχιστεί αναλυτικά μέχρι τη μέγιστη τιμή της ενέργειας αυτής. Η ακόλουθη συνθήκη επιβάλλεται συνεπώς στο μέγιστο της δυναμικής ενέργειας:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ L^{(0)}[U(x, u_0)] + \varepsilon L^{(1)}[U(x, u_0)] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U}{\partial u_0} - \\ L^{(0)}[U(x, u_0)] + \varepsilon L^{(1)}[U(x, u_0)] \end{array} \right]_{u_0=u_0^*} = 0 \quad (\text{B.33})$$

Η συνθήκη αυτή εγγυάται την αναλυτική συνέχεια της ασυμπτωτικής λύσης μέχρι το επίπεδο της μέγιστης δυναμικής ενέργειας. Συνοψίζοντας, η ιδιομορφική συνάρτηση σχήματος  $U[x, u_0(t)]$  διέπεται από την μερική διαφορική εξίσωση (B.31), με συνοριακές συνθήκες αυτές της (B.32) και με τη συνθήκη αναλυτικής συνέχειας (B.33).

Μια ασυμπτωτική μεθοδολογία για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (B.31) – (B.33) εφαρμόζεται στη συνέχεια, μέσω αναπτυγμάτων σε δυναμοσειρές. Μακριά από το επίπεδο μέγιστης δυναμικής ενέργειας η λύση αναπαρίσταται από το ανάπτυγμα σε σειρές

$$U[x, u_0(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)}(x, u_0) \quad (\text{B.34})$$

όπου

$$U^{(0)}(x, u_0) = a_1^{(0)}(x) u_0(t) \quad (\text{B.35})$$

$$U^{(k)}(x, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}^{(k)}(x) u_0^{2m+1}(t) \quad , \quad k \geq 1 \quad (\text{B.36})$$

Η γραμμική μορφή της  $U(x, u_0)$  οφείλεται στην προηγούμενη υπόθεση ότι η εξίσωση κίνησης είναι διαχωρίσιμη για  $\varepsilon=0$ . Καθ' όσον δε έχουν θεωρηθεί μόνο περιττού εκθέτη μη γραμμικότητες, μόνο περιττοί όροι εμφανίζονται στις εκφράσεις σειρών (B.36). Επιπρόσθετα, η συνάρτηση  $U^{(k)}$  και όλες οι μερικές παράγωγοι της θεωρούνται τάξης  $\varepsilon^k$ , δηλαδή

$$\frac{\partial^n U^{(k)}}{\partial x_n} = O(\varepsilon^k) \quad , \quad k \geq 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.37})$$

Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία για την ταξινόμηση των διάφορων όρων στην ανάλυση διαταραχών και έχει επαληθευτεί μέσω ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων. Τέλος, λόγω συμβατότητας,  $a_1^{(0)}(x_0) = 1$  και  $a_{2m+1}^{(k)}(x_0) = 0$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$ ,  $k \geq 1$ . Οι διάφορες τάξεις προσέγγισης υπολογίζονται αντικαθιστώντας την (B.34) στις (B.31) – (B.33) και ταιριάζοντας τους όρους διαφόρων τάξεων ως προς  $\varepsilon$ .

### 1. Προσέγγιση $O(\varepsilon^0)$

Η εξίσωση που διέπει την προσέγγιση  $O(1)$  είναι

$$\left\{ \underline{L}^{(0)} \left[ a_1^{(0)}(x) u_0(t) \right] \right\}_{x=x_0} a_1^{(0)}(x) = \underline{L}^{(0)} \left[ a_1^{(0)}(x) u_0(t) \right] \quad (\text{B.38})$$

με συνοριακή συνθήκη  $\underline{B} \left[ a_1^{(0)}(x) u_0(t) \right] = 0$  και τη συνθήκη συμβατότητας  $a_1^{(0)}(x_0) = 1$ . Καθόσον ο  $\underline{L}^{(0)}$  είναι γραμμικός και δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, ο τελεστής στην (B.38) γράφεται ως

$$\underline{L}^{(0)} \left[ a_1^{(0)}(x) u_0(t) \right] = X \left[ a_1^{(0)}(x) \right] u_0(t) \quad (\text{B.39})$$

όπου ο  $X[\bullet]$  είναι πλέον ένας χωρικός τελεστής. Αντικαθιστώντας την (B.39) στην (B.38) και μηδενίζοντας την τετριμμένη λύση  $u_0(t) = 0$ , αποκτάται η ακόλουθη εξίσωση που διέπει τον  $X[\bullet]$ :

$$X \left[ a_1^{(0)}(x) \right] - \left\{ X \left[ a_1^{(0)}(x) \right] \right\}_{x=x_0} a_1^{(0)}(x) = 0 \quad (\text{B.40})$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ως προς  $a_1^{(0)}(x)$  σε συνδυασμό με την  $O(1)$  συνοριακή συνθήκη και τις σχετικές συνθήκες συμβατότητας. Σημειωτέον ότι, επειδή ισχύει η σχέση  $\partial^2 U^{(0)} / \partial u_0^2 = 0$ , η συνθήκη μέγιστης αναλυτικής συνέχειας δυναμικής ενέργειας (B.33) ικανοποιείται ταυτοτικά από την λύση  $O(1)$ .

### 2. Προσέγγιση $O(\varepsilon^1)$

Καθ' όσον  $u_{0,t} = 0$  όταν η δυναμική ενέργεια καθίσταται μέγιστη, η εξίσωση που διέπει την  $O(\varepsilon)$  διόρθωση της ιδιομορφικής συνάρτησης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{2 \left\{ L^{(0)} [U^{(0)}] \right\}_{u_0=u_0^*} - L^{(0)} [U^{(0)}]}{\int_0^l \left( \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} \right)^2 dx} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial u_0^2} + \left\{ L^{(0)} [U^{(0)}] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial u_0} + \left\{ L^{(0)} [U^{(1)}] + L^{(1)} [U^{(0)}] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} = L^{(0)} [U^{(1)}] + L^{(1)} [U^{(0)}] \quad (B.41)$$

όπου  $u_0^*$  είναι η μέγιστη τιμή της  $u_0(t)$  και ικανοποιεί τη σχέση

$$E_{tot} = \left\{ L^{(0)} [U] + \varepsilon L^{(1)} [U, u_0(t)] \right\}_{u_0=u_0^*}$$

Για να αποκτηθεί η (B.41) έλαβε χώραν ανάπτυγμα σε σειρές των τελεστών σε όρους της μικρής παραμέτρου  $\varepsilon$ . Η εξίσωση αυτή συμπληρώνεται από την ακόλουθη συνθήκη  $O(\varepsilon)$ , που περιγράφει την αναλυτική συνέχεια της λύσης στο επίπεδο της μέγιστης δυναμικής ενέργειας:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ L^{(0)} [U^{(0)}] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial u_0} + \left\{ L^{(0)} [U^{(1)}] + L^{(1)} [U^{(0)}] \right\}_{x=x_0} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} \\ - L^{(0)} [U^{(1)}] + L^{(1)} [U^{(0)}] \end{array} \right]_{u_0=u_0^*} = 0 \quad (B.42)$$

Η προσέγγιση  $O(\varepsilon)$  υπολογίζεται κατόπιν κολοβώσεως των άπειρων σειρών ως προς  $U^{(1)}(x, u_0)$  μέχρι την επιθυμητή τάξη προσέγγισης και εξισώνοντας τις ίδιες δυνάμεις του  $u_0(t)$  στις ανωτέρω εξισώσεις. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν ως προς την χωρική μεταβλητή επιλύονται υποκείμενες στις συνοριακές συνθήκες  $O(\varepsilon)$ .

Η περιγραφείσα αναλυτική μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί μέχρι οποιαδήποτε επιθυμητή τάξη προσέγγισης, υπό την προϋπόθεση ότι η έκφραση της ταχύτητας του σημείου αναφοράς (B.30) αναβαθμίζεται σε κάθε βήμα των υπολογισμών. Η ιδιομορφική συνάρτηση τότε προσεγγίζεται από τη σχέση

$$u(x,t) = U[x, u_0(t)] = a_1^{(0)}(x)u_0(t) + \varepsilon \sum_m a_m^{(1)}(x)u_0^m(t) + O(\varepsilon u_0^{m+2}, \varepsilon^2)$$

όπου  $m=1,3,\dots$ . Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στις εξισώσεις κίνησης (B.21), υπολογίζοντας τις προκύπτουσες εκφράσεις στο σημείο αναφοράς  $x=x_0$ , και λαμβάνοντας υπ' όψη τα προηγούμενα αναλυτικά αποτελέσματα, αποκτάται η ακόλουθη μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση, που διέπει την μετατόπιση του σημείου αναφοράς:

$$\ddot{u}_0(t) = \left\{ X \left[ a_1^{(0)}(x) \right] \right\}_{x=x_0} u_0(t) + \varepsilon \left[ \sum_m X \left[ a_m^{(1)}(x) \right] u_0^m(t) + \underline{L}^{(1)} \left[ a_1^{(0)}(x) u_0(t) \right] \right] + O(\varepsilon u_0^{m+2}, \varepsilon^2)$$

(B.44)

όπου  $X[\bullet]$  ένας χωρικός τελεστής, αποτέλεσμα του διαχωρισμού των μεταβλητών του γραμμικού τελεστή  $L_x^{(0)}[\bullet]$  τάξης  $O(1)$ . Θεωρώντας όρους τάξης μέχρι  $O(\varepsilon u_0^m)$ , μπορεί κανείς να επιλύσει την εξίσωση (B.44) αναλυτικά για δοθέν σύνολο αρχικών συνθηκών  $[u_0, \dot{u}_0(0)]$ , μέσω μεθοδολογίας διαταραχών. Η λύση που θα προκύψει θα αποκαλύψει τη μη γραμμική εξάρτηση της συχνότητας των μη γραμμικών κανονικών μορφών στο εύρος ταλάντωσης.

Έχουν παρουσιαστεί πολλές εφαρμογές της ως άνω ενεργειακής μεθόδου για τον υπολογισμό ΜΓΚΜ συντηρητικών συνεχών συστημάτων[17], δύο χαρακτηριστικές των οποίων είναι (1) *Ταλάντωση γραμμικής απλά εδραζόμενης δοκού επί μη γραμμικής ελαστικής θεμελίωσης* και (2) *Επίπεδη ταλάντωση ενός προβόλου με γεωμετρικές μη γραμμικότητες*. Και στις δύο αυτές εφαρμογές, οι εξισώσεις των οποίων παρατίθενται πληροφορικά στη συνέχεια, έγινε εκτεταμένη χρήση συμβολικών αλγεβρικών υπολογισμών με χρήση του γνωστού εμπορικού μαθηματικού λογισμικού *Mathematica*. Οι εξισώσεις κίνησης και οι σχετικές συνοριακές συνθήκες των δύο ως άνω προβλημάτων έχουν ως ακολούθως:

*Αμφιέριστη δοκός επί ελαστικής θεμελίωσης*

Εξίσωση κίνησης :  $u_{tt} = -u_{xxxx} - ku - \varepsilon \gamma u^3, \quad x \in [0,1]$

Συνοριακές συνθήκες :  $u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0$

Πρόβολος με γεωμετρικές μη γραμμικότητες

Εξίσωση κίνησης :

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} u_x [u_x u_{xx}]_x + \\ \frac{1}{2} u_x \int_0^l \left( \int_0^\zeta (u_x^2 d\lambda) \right)_{tt} d\zeta \end{array} \right\}_x, \quad x \in [0,1]$$

Συνοριακές συνθήκες :

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$$

▪ **Μέθοδος με βάση τα αμετάβλητα πολλαπλά**

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε[11] για τον υπολογισμό μη γραμμικών κανονικών μορφών μονοδιάστατων συνεχών συστημάτων με ή χωρίς απόσβεση. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που περιέχουν ιξώδη απόσβεση, σε αντίθεση με την ενεργειακή. Η βασική ιδέα της εν λόγω μεθόδου είναι αρκετά απλή. Υπολογίζεται μέσω αυτής ένα σύνολο δισδιάστατων αμετάβλητων πολλαπλών στον χώρο φάσης, που αντιπροσωπεύουν κινήσεις κανονικών μορφών του μη γραμμικού συστήματος, και κατόπιν υπολογίζονται οι εξισώσεις κίνησης, οι οποίες καθορίζουν την δυναμική συμπεριφορά πάνω στα πολλαπλά αυτά. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την ύπαρξη γραμμικών κανονικών μορφών, υφίσταται η δυνατότητα τοπικών ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων σειρών για αυτά τα πολλαπλά κανονικών μορφών και για τις σχετικές μορφικές ταλαντώσεις. Οι σειρές αυτές αντιπροσωπεύουν μια μορφή διαχωρισμού των μεταβλητών, η οποία ανακτά με ακρίβεια τη γραμμική δυναμική απόκριση, αν αμεληθούν οι μη γραμμικότητες, δίδει δε συστηματικές μη γραμμικές διορθώσεις των κανονικών μορφών.

Μέσω της προσέγγισης των αμετάβλητων πολλαπλών γίνεται πλήρης αποσύζευξη της ιδιομορφικής δυναμικής συμπεριφοράς πάνω σε κάθε ένα πολλαπλό (όπως άλλωστε υπαγορεύει η αμεταβλητότητα τους), εκτός περιπτώσεων φαινομένων εσωτερικών συντονισμών. Σε καταστάσεις αυτής της μορφής υφίσταται

αλληλεπίδραση μεταξύ των υπό συντονισμό μορφών, η οποία δεν είναι δυνατόν να απαλειφθεί.

Η παρούσα μέθοδος δύναται να εφαρμοστεί σε μη συντηρητικά και σε γυροσκοπικά (υπό μερικώς εφαπτομενικές δυνάμεις) συστήματα και επιπρόσθετα διαθέτει το σημαντικότερο πλεονέκτημα ότι η δυναμική συμπεριφορά των μορφών δεν ορίζεται εκ των προτέρων, αλλά υπολογίζεται μέσω διαφορικών εξισώσεων, που διέπουν την συμπεριφορά αυτή. Πέραν τούτων, η όλη μέθοδος βασίζεται σε βασικές αρχές της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων[11], δηλαδή στην χρήση αμετάβλητων πολλαπλών στον χώρο φάσης, που αναπαριστούν τις μη γραμμικές κανονικές μορφές και έτσι παρέχει μια γενική θεωρητική ανάλυση, η οποία δεν περιορίζεται από το εύρος της κίνησης. Οι γενικές αρχές της μεθόδου, για μονοδιάστατες (επίπεδες) ταλαντώσεις συνεχών συστημάτων και συνοπτική περιγραφή αυτής έχουν ως εξής:

Θεωρούνται κατ' αρχήν οι ταλαντώσεις ενός χωρικά κατανομημένου συστήματος, που καταλαμβάνει μια μονοδιάστατη περιοχή  $\Omega$ . Τα υλικά σημεία στο σύστημα, όταν αυτό ισορροπεί, χαρακτηρίζονται από τη θέση τους, που αντιστοιχεί σε μια μονομετρική βαθμωτή (scalar) ποσότητα  $s$ . Όταν το όλο σύστημα βρίσκεται σε κίνηση, το σημείο  $s$  μετατοπίζεται κατά  $u(s,t)$ , που είναι μια μονομετρική συνάρτηση του  $s$  και του χρόνου  $t$ , η δε ταχύτητα του υλικού σημείου στο  $s$  ισούται με  $u_t(s,t) = \partial u(s,t) / \partial t = v(s,t)$ . Υποτίθεται ότι  $(u(s,t), v(s,t)) = (0,0)$  είναι μια θέση ισορροπίας του συστήματος, που επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή του  $u$ . Υπό αρκετά γενικές καταστάσεις, οι εξισώσεις κίνησης για ταλάντωση περί την θέση ισορροπίας μπορούν να γραφούν υπό μορφή συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως:

$$\begin{aligned} \partial u(s,t) / \partial t &= v(s,t), \\ \partial v(s,t) &= F(u(s,t), v(s,t)), \quad s \in \Omega - \partial\Omega \end{aligned} \tag{B.45}$$

με συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$B(u(s,t), v(s,t)) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{B.46}$$

όπου  $F$  μη γραμμικός τελεστής τυπικά ολοκληρωτικο-διαφορικής μορφής ως προς τη χωρική μεταβλητή  $s$ ,  $\partial\Omega$  το σύνορο της περιοχής  $\Omega$  και  $B$  οι χωρικοί τελεστές συνοριακών συνθηκών.

Ο ορισμός των κανονικών μορφών που βασίζεται στα αμετάβλητα πολλαπλά είναι: *μια κανονική μορφή κίνησης για έναν μη γραμμικό, αυτόνομο σύστημα είναι μια κίνηση που λαμβάνει χώραν επάνω σε ένα διδιάστατο αμετάβλητο πολλαπλό, στο χώρο φάσης του συστήματος. Το πολλαπλό αυτό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) διέρχεται από το ευσταθές σημείο ισορροπίας  $(u,v) = (0,0)$  και (β) για  $(u,v) = (0,0)$  είναι εφαπτόμενο σε ένα επίπεδο, το οποίο αποτελεί ιδιοχώρο του γραμμικοποιημένου περί το  $(u,v) = (0,0)$  συστήματος.*

Η παρατήρηση – κλειδί για τον εν συνεχεία υπολογισμό των μη γραμμικών κανονικών μορφών είναι η ακόλουθη: σε μια κίνηση κανονικής μορφής, αν η μετατόπιση  $u_0(t) = u(s_0, t)$  και η ταχύτητα  $v_0(t) = v(s_0, t)$  ενός μόνο σημείου  $s = s_0$  είναι γνωστές, τότε τα συνολικά πεδία μετατοπίσεων και ταχυτήτων μπορούν να προσδιοριστούν από τη δυναμική συμπεριφορά του σημείου αυτού. Η μαθηματική έκφραση της ως άνω παρατήρησης, σε μια τουλάχιστον γειτονιά της θέσης ισορροπίας, δίνεται από τις σχέσεις:

$$u(s, t) = U(u_0(t), v_0(t), s, s_0), \quad v(s, t) = V(u_0(t), v_0(t), s, s_0) \quad (\text{B.47})$$

όπου  $U$  και  $V$  αναπαριστούν συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ του συνολικού πεδίου  $(u,v)$  και του  $(u_0, v_0)$  και αμφότερες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες.

Η συνακόλουθη δυναμική απόκριση του συστήματος σχετίζεται πλέον με μια συνήθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση, δηλαδή όπως ακριβώς ένας απλός μη γραμμικός ταλαντωτής. Από μια πιο γεωμετρική οπτική γωνία, οι εξισώσεις (B.47) αντιπροσωπεύουν ένα διδιάστατο πολλαπλό στον απείρων διαστάσεων χώρο φάσης του συστήματος. Οι συναρτησιακές σχέσεις  $U$  και  $V$  διαθέτουν και τις ακόλουθες, προφανείς μεν αλλά και εξαιρετικά χρήσιμες ιδιότητες, όταν υπολογιστούν για  $s = s_0$ , καλούμενη επίσης ως *συνθήκη συμβατότητας*:

$$U(u_0(t), v_0(t), s_0, s_0) = u_0(t), \quad V(u_0(t), v_0(t), s_0, s_0) = v_0(t) \quad (\text{B.48})$$



Στη συνέχεια υπολογίζονται οι συνθήκες, οι οποίες θα εξασφαλίζουν το ότι τα πολλαπλά αυτά θα είναι αμετάβλητα για τις εξισώσεις κίνησης. Ο τρόπος υπολογισμού τους, που εκτίθεται παρακάτω, είναι παρόμοιος με αυτόν που εφαρμόζεται για την εύρεση κεντρικών πολλαπλών. Με σκοπό την απαλοιφή όλων των χρονικών παραγώγων από τις εξισώσεις κίνησης, χρησιμοποιούνται οι συνθήκες περιορισμού (constraint conditions)  $U, V$ , οπότε η μέθοδος καταλήγει σε εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την γεωμετρία των αμετάβλητων πολλαπλών. Η δυναμική επ' αυτών βρίσκεται με απ' ευθείας υπολογισμό και επίλυση των εξισώσεων κίνησης πάνω στο πολλαπλό κανονικής μορφής.

Η όλη διαδικασία ξεκινά με την εύρεση της 1<sup>ης</sup> παραγώγου των σχέσεων (B.47) ως προς τον χρόνο, που είναι

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial u_0} u_{0,t} + \frac{\partial U}{\partial v_0} v_{0,t}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u_0} u_{0,t} + \frac{\partial V}{\partial v_0} v_{0,t} \quad (\text{B.49})$$

Οι εξισώσεις κίνησης τότε χρησιμοποιούνται αντικαθιστώντας τα  $u, v$  και  $u_{0,t}, v_{0,t}$  με  $F(u, v)$ ,  $u_{0,t}$  με  $u_0$  και  $v_{0,t}$  με  $F(u, v)|_{s=t_0}$ . Κατόπιν οι περιορισμοί εφαρμόζονται παντού αντικαθιστώντας τα  $u$  με  $U$  και τα  $v$  με  $V$ , ακόμα και στις συνοριακές συνθήκες. Τούτο έχει σαν αποτέλεσμα τις ακόλουθες υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, που πρέπει να επιλυθούν ως προς τις συναρτήσεις  $U$  και  $V$ , με μεταβλητές τα  $u_0, v_0, s$  και  $s_0$ :

$$V = \frac{\partial U}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial U}{\partial v_0} [F(U, V)]_{s=t_0}, \quad (\text{B.50}\alpha)$$

$$F(U, V) = \frac{\partial V}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} [F(U, V)]_{s=t_0}, \quad s \in \Omega - \partial\Omega$$

με συνοριακές συνθήκες

$$B(U, V) = 0, \quad s \in \partial\Omega \quad (\text{B.50}\beta)$$

Οι εξισώσεις (B.50) διέπουν τις μη γραμμικές συναρτήσεις  $U, V$  και δύνανται να προσεγγιστούν ασυμπτωτικά μέσω αναπτυγμάτων σειρών, τουλάχιστον τοπικά. Προς τούτο, θεωρούνται οι ακόλουθες, υπό μορφή σειρών, εκφράσεις των συναρτήσεων αυτών:

$$\begin{aligned}
 U(u_0, v_0, s, s_0) &= a_1(s, s_0)u_0(t) + a_2(s, s_0)v_0(t) \\
 &\quad + a_3(s, s_0)u_0(t)^2 + a_4(s, s_0)u_0(t)v_0(t) \\
 &\quad + a_5(s, s_0)v_0(t)^2 + a_6(s, s_0)u_0(t)^3 + \dots, \\
 V(u_0, v_0, s, s_0) &= b_1(s, s_0)u_0(t) + b_2(s, s_0)v_0(t) \\
 &\quad + b_3(s, s_0)u_0(t)^2 + b_4(s, s_0)u_0(t)v_0(t) \\
 &\quad + b_5(s, s_0)v_0(t)^2 + b_6(s, s_0)u_0(t)^3 + \dots,
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

που στην πραγματικότητα είναι ένας τύπος μη γραμμικού διαχωρισμού των μεταβλητών. Τα  $a_i$  και  $b_i$  περιέχουν συνεπώς πληροφορίες για την χωρική κατανομή για μια δεδομένη μορφή, ενώ τα  $u_0, v_0$  αντιπροσωπεύουν τις σχετικές μορφικές μετατοπίσεις και ταχύτητες, δηλαδή την χρονική απόκριση. Σημειωτέον ότι η συνάρτηση σχήματος εξαρτάται από τα εύρη των  $u_0, v_0$ , ενώ οι σχετικές συνεισφορές των  $a_i$  και  $b_i$  ποικίλουν, εξαρτώμενες από τα μεγέθη των  $u_0, v_0$ . Όντως η συνάρτηση σχήματος εξαρτάται όχι μόνο από το μέγιστο εύρος της κίνησης, αλλά η χωρική κατανομή του συστήματος αλλάζει συναρτήσει του χρόνου, κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης κίνησης.

Η λύση για τα  $a_i$  και  $b_i$  επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας τις σειρές εκ των (B.51) στις εξισώσεις (B.50α) και στις συνοριακές συνθήκες (B.50β), και εξισώνοντας τους συντελεστές των μονωνύμων με τις ίδιες δυνάμεις των  $u_0^m v_0^n$ , ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m+n \geq 1$ ). Με τον τρόπο αυτό καταλήγει κανείς σε μια σειρά προβλημάτων συνοριακών τιμών ως προς τους χωρικούς συντελεστές  $a_i(s, s_0)$  και  $b_i(s, s_0)$ , που είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και επιδέχονται απ' ευθείας λύσεις.

Μετά την ως άνω ασυμπτωτική προσέγγιση των αμετάβλητων πολλαπλών, η κίνηση του σημείου αναφοράς  $s_0$  υπολογίζεται αφού βρεθούν οι εκφράσεις των εξισώσεων (B.45) για το σημείο αυτό, οι οποίες στη συνέχεια συνδυαζόμενες οδηγούν στην ακόλουθη μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση, που διέπει το  $u_0(t)$ :

$$\ddot{u}_0(t) - \left\{ F \left[ u(s, t), \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \right] \right\} \Big|_{s=s_0} = 0 \tag{B.52}$$

Οι βασικές ιδέες της μεθόδου αυτής μπορούν κάλλιστα να γενικευθούν για ταλαντώσεις  $m$ -διαστάσεων συνεχών συστημάτων  $n$ -διαστάσεων. Σε μια τέτοια περίπτωση  $\Omega$  είναι μια  $n$ -διαστάσεων περιοχή και  $s$  ένα διάνυσμα επίσης  $n$ -διαστάσεων. Παραδείγματος χάριν, για διαμήκεις ταλαντώσεις μιας πλάκας θα είναι  $n=2$ ,  $m=1$  ενώ για εκτός επιπέδου ταλαντώσεις μιας λυγερής δοκού θα είναι  $n=1$ ,  $m=2$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΗΝ ΑΠΟΜΟΝΩΣΗ - ΤΟΠΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΤΛΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

### Γ.1. Απομόνωση ταλαντώσεων

#### Γ.1.1 Γενικά

Έστω ένα σύστημα μόνωσης ταλαντώσεων παρόμοιο με αυτό που αναφέρθηκε στην εισαγωγή, με δυο βασικές διαφορές: Πρώτον χρησιμοποιήθηκαν γραμμικοποιημένες μη γραμμικές δυσκαμψίες, οδηγώντας σε μη γραμμικές ταλαντώσεις σε γειτονίες γραμμικοποιημένων μορφών δόνησης και δεύτερον η μόνωση από δονήσεις που θεωρήθηκε δημιούργησε μόνο μια μορφή μόνωσης από δονήσεις, κυρίως μόνωση της βάσης από δονήσεις, που δημιουργούνται στο επίπεδο του μηχανισμού. Στο εδάφιο αυτό μη γραμμικές αποσβέσεις (που είναι αντίθετες με τον στόχο της μόνωσης από δονήσεις του προτεινόμενου σχεδιασμού) απαλείφονται ολοκληρωτικά, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά μη γραμμικές δυσκαμψίες χωρίς γραμμικά τμήματα. Αυτό ενισχύει την ικανότητα του συστήματος για μόνωση από ταλαντώσεις ενός εκτεταμένου εύρους συχνοτήτων. Επιπρόσθετα η χρήση ουσιαστικά μη γραμμικών στοιχείων επιτρέπει τη διπλή μορφή μόνωσης από δονήσεις που είναι και ο βασικός στόχος της έρευνας.

#### Γ.1.2 Συμπεριφορά σταθερής κατάστασης

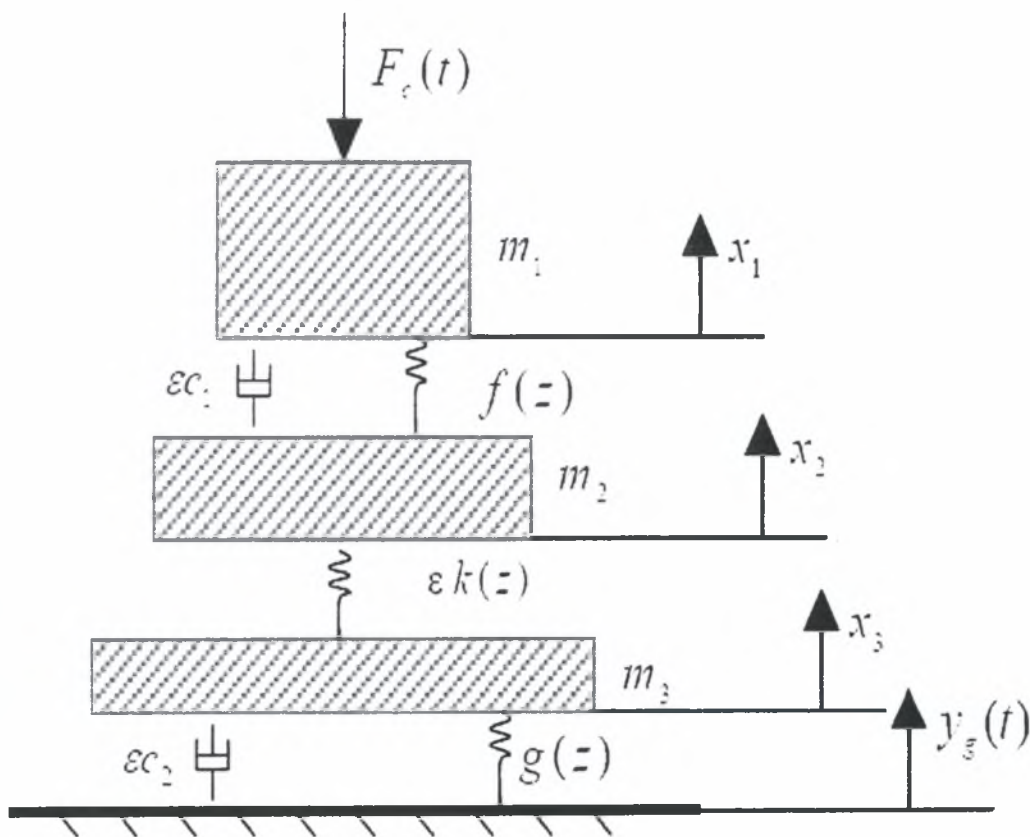
Έστω ένα σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα Γ.1. Υπάρχουν δυο μη γραμμικά ελατήρια, ένα μεγάλης και ένα μικρής  $[O(\varepsilon), |\varepsilon| \ll 1]$  δυσκαμψίας, τα οποία συνδέουν τα διάφορα μέλη του συστήματος μεταξύ τους και με τη βάση. Η πάνω μάζα  $m$ , αντιπροσωπεύει μια “μηχανή”, ενώ οι άλλες μάζες του συστήματος είναι καθαρά βοηθητικές. Δυο ευδιάκριτοι τύποι διεγέρσεων υποθέτονται για αυτό το σύστημα, δηλαδή, περιοδικές δυνάμεις  $F_d(t)$  επιβαλλόμενες στο επίπεδο της μηχανής και διεγέρσεις στη βάση (στηρίζεις)  $y_b(t)$

επιβαλλόμενες στη βάση, οι οποίες μεταδίδονται στο σύστημα από κάτω. Το πρόβλημα το οποίο επιδιώκεται να επιλυθεί εστιάζεται στη διπλής μορφής μόνωση ταλαντώσεων και μπορεί να προσδιοριστεί όπως παρακάτω:

Σχεδιάζεται αυτό το σύστημα ώστε να μονώσει

(α) τη βάση του από διαταράξεις δυνάμεων, που γεννιούνται στο επίπεδο της μηχανής και ταυτόχρονα,

(β) τη μηχανή από διεγέρσεις, οι οποίες γεννιούνται στη βάση, με κάθε μια από τις διαταράξεις να ασκείται ξεχωριστά από τις άλλες. Θα αποδειχθεί ότι χρησιμοποιώντας στοιχεία μεγάλης δυσκαμψίας ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται αποτελεσματικά.



**Σχήμα Γ.1.** Το σύστημα διπλής μορφής μόνωσης ταλαντώσεων

Υποθέτοντας ασθενή απόσβεση, οι εξισώσεις κίνησης, που διέπουν για το σύστημα του Σχήματος Γ.1. δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \varepsilon c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f(x_1 - x_2) &= F_c(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + \varepsilon c_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f(x_2 - x_1) + \varepsilon k(x_2 - x_3) &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + \varepsilon c_2 [\dot{x}_3 - \dot{y}_g(t)] + g(x_3 - y_g(t)) + \varepsilon k(x_3 - x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

όπου  $f(\bullet)$  και  $g(\bullet)$  είναι ισχυρές μη γραμμικές δυσκαμψίες και η τελεία δείχνει τη χρονική παράγωγο. Η παράμετρος  $\varepsilon$  θεωρείται μικρή δηλαδή  $|\varepsilon| \ll 1$ , τούτο δε υποδηλώνει ότι για το σύστημα του Σχήματος Γ.1: (α) η απόσβεση είναι ασθενής και (β) η σύνδεση μεταξύ του ανώτερου και του κατώτερου τμήματος είναι επίσης ασθενής.

Στο σημείο αυτό εισάγονται οι νέες μεταβλητές  $u \equiv x_1 - x_2$ ,  $v \equiv m_1 x_1 + m_2 x_2$ ,  $w \equiv x_3$ . Επίσης υποτίθεται ότι η δύναμη και οι διαταράξεις του εδάφους είναι αρμονικές με συχνότητα  $\omega$ ,  $F_c(t) = P_c \sin \omega t$  και  $y_g(t) = Y_g \sin \omega t$ . Με βάση τις παραδοχές αυτές οι εξισώσεις (1) γράφονται ως:

$$\ddot{u} + \varepsilon \delta_1 \dot{u} + F(u) = P_c \sin \omega t + \varepsilon (a_1 v - a_2 u - a_3 w),$$

$$\ddot{v} = m_1 F \sin \omega t + \varepsilon (-\beta_1 v + \beta_2 u + \beta_3 w), \quad (\Gamma.2\alpha)$$

$$\ddot{w} + \varepsilon \delta_2 (\dot{w} - \omega Y_g \cos \omega t) + G(w - Y_g \sin \omega t) = \varepsilon (\gamma_1 v - \gamma_2 u - \gamma_3 w),$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές ποσότητες και ορίζονται ως εξής :

$$a_1 = \frac{k}{m_2(m_1 + m_2)}, \quad a_2 = \frac{km_1}{m_2(m_1 + m_2)},$$

$$a_3 = \frac{k}{m_2}, \quad \beta_1 = \frac{k}{(m_1 + m_2)}, \quad \beta_2 = \frac{km_1}{(m_1 + m_2)},$$

$$\beta_3 = k, \quad \gamma_1 = \frac{k}{m_3(m_1 + m_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{km_1}{m_3(m_1 + m_2)}, \quad (\Gamma.2\beta)$$

$$\gamma_3 = \frac{k}{m_3}, \quad \delta_1 = c_1 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\delta_2 = \frac{c_2}{m_3}, \quad F = \frac{P_c}{m_1}$$

Οι κανονικοποιημένες δυνάμεις δυσκαμψίας στις εξισώσεις (Γ.3) ορίζονται ως :

$$F(u) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)f(u), \quad G(u) = \frac{1}{m_3}g(w) \quad (\Gamma.2\gamma)$$

Υποτίθεται ένας συγκεκριμένος τύπος για τη μη γραμμική ακαμψία θέτοντας,

$$F(u) = C_1 u^3, \quad G(w) = C_3 w^3 \quad (\Gamma.3)$$

Καθόσον οι δυσκαμψίες είναι μη γραμμικοποιήσιμες κυβικού τύπου, είναι ισχυρά μη γραμμικές, οπότε για τον τύπο του προβλήματος που προκύπτει οι καθιερωμένες αναλυτικές μέθοδοι της μη γραμμικής δυναμικής, όπως πολλαπλών κλιμάκων και μέσου όρου δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμες, οπότε θα πρέπει να υιοθετηθεί μια νέου είδους μεθοδολογία. Σε ότι δε αφορά τις εξισώσεις κίνησης (Γ.2) και τους ορισμούς (Γ.3) θα εξεταστούν δυο διαφορετικές μορφές εξαναγκασμένης κίνησης, που αντιστοιχούν σε (α)  $P_c \neq 0, Y_g = 0$  και (β)  $P_c = 0, Y_g \neq 0$ . Όπως σημειώθηκε παραπάνω, αυτό που επιδιώκεται είναι να σχεδιαστεί ένα σύστημα το οποίο έχει ιδιότητες δονητικής μόνωσης διπλής-μορφής. Σε ότι ακολουθεί εξετάζεται διεξοδικά η απόκριση σταθερής κατάστασης του εξεταζόμενου συστήματος, το οποίο υπόκειται στις ως άνω δύο μορφές εξαναγκασμένης κίνησης.

#### ▪ **Μορφή I: Διέγερση στο επίπεδο της μηχανής**

Θέτοντας  $Y_g = 0$  οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή,

$$\ddot{u} + \varepsilon \delta_1 \dot{u} + C_1 u^3 = F \sin \omega t + \varepsilon(a_1 v - a_2 u - a_3 w),$$

$$\ddot{v} = m_1 F \sin \omega t + \varepsilon(-\beta_1 v + \beta_2 u + \beta_3 w), \quad (\Gamma.4)$$

$$\ddot{w} + \varepsilon \delta_2 \dot{w} + C_3 w^3 = \varepsilon(\gamma_1 v - \gamma_2 u - \gamma_3 w),$$

Επιδιώκεται να μελετηθούν περιοδικές ταλαντώσεις σταθερής κατάστασης του προηγούμενου συστήματος εξισώσεων με συχνότητα  $\omega$ , δηλαδή ισοδύναμη με τον όρο της διέγερσης. Δεδομένου ότι το σύστημα είναι ουσιωδώς μη γραμμικό, γίνεται χρήση της μιγαδικής μεθόδου του Manevitch και ορίζονται οι ακόλουθες νέες μιγαδικές μεταβλητές

$$\begin{aligned} U(t) &\equiv \dot{u}(t) + j\omega u(t), & V(t) &\equiv \dot{v}(t) + j\omega v(t), \\ W(t) &\equiv \dot{w}(t) + j\omega w(t). \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Το πραγματικό μέρος αυτών των νέων μιγαδικών μεταβλητών είναι οι ταχύτητες των συντεταγμένων ενώ το φανταστικό μέρος είναι τα προϊόντα της συχνότητας με τις συντεταγμένες. Σε όρους των νέων μεταβλητών οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνουν την ακόλουθη μιγαδικού τύπου μορφή :

$$\begin{aligned} \dot{U} - \frac{j\omega}{2}(U + U^*) + C_1 \left( \frac{U - U^*}{2j\omega} \right)^3 = \\ F \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + \varepsilon\alpha_1 \left( \frac{V - V^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\alpha_2 \left( \frac{U - U^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\alpha_3 \left( \frac{W - W^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\delta_1 \left( \frac{U + U^*}{2} \right) \\ \dot{V} - \frac{j\omega}{2}(V + V^*) = m_1 F \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} - \varepsilon\beta_1 \left( \frac{V - V^*}{2j\omega} \right) + \varepsilon\beta_2 \left( \frac{U - U^*}{2j\omega} \right) + \varepsilon\beta_3 \left( \frac{W - W^*}{2j\omega} \right) \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{W} - \frac{j\omega}{2}(W + W^*) + C_3 \left( \frac{W - W^*}{2j\omega} \right)^3 = \\ \varepsilon\gamma_1 \left( \frac{V - V^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\gamma_2 \left( \frac{U - U^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\gamma_3 \left( \frac{W - W^*}{2j\omega} \right) - \varepsilon\delta_2 \left( \frac{W + W^*}{2} \right) \end{aligned}$$

όπου το \* υποδηλώνει συζυγή μιγαδικό. Καθόσον αναζητούνται ταλαντώσεις σταθερής κατάστασης με συχνότητα κατά προσέγγιση ίση με  $\omega$ , οι νέες μιγαδικές μεταβλητές εκφράζονται ως :

$$U(t) = \varphi(t)e^{j\omega t} \Rightarrow U^* = \varphi^* e^{-j\omega t},$$

$$\dot{U} = \dot{\varphi}e^{j\omega t} + j\omega\varphi e^{j\omega t},$$

$$V(t) = \sigma(t)e^{j\omega t} \Rightarrow V^* = \sigma^* e^{-j\omega t}, \quad (\Gamma.7)$$

$$\dot{V} = \dot{\sigma}e^{j\omega t} + j\omega\sigma e^{j\omega t},$$

$$W(t) = \lambda(t)e^{j\omega t} \Rightarrow W^* = \lambda^* e^{-j\omega t}, \quad \dot{W} = \dot{\lambda}e^{j\omega t} + j\omega\lambda e^{j\omega t}$$



όπου  $\varphi(t)$ ,  $\sigma(t)$  και  $\lambda(t)$  αντιπροσωπεύουν αργά μεταβαλλόμενες μιγαδικές περιβάλλουσες (*slowly-varying complex envelopes*) της κίνησης. Ως εκ τούτου, η αντίδραση του συστήματος αναλύεται σε δύο μέρη: σε μια «γρήγορη» ταλάντωση με συχνότητα  $\omega$  και σε μια «αργή» διαμόρφωση εύρους που στην ουσία αντιπροσωπεύουν την περιβάλλουσα της «γρήγορης» ταλάντωσης. Αντικαθιστώντας την (Γ.7) στην (Γ.6) και διατηρώντας μόνο όρους της συχνότητας  $\omega$ , αποκτώνται οι ακόλουθες μιγαδικές εξισώσεις διαμόρφωσης, που διέπουν την «αργή» δυναμική (δηλ. την περιβάλλουσα) της απόκρισης :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\alpha}{2j\omega} + \frac{\varepsilon\delta_1}{2} \right) \varphi - \frac{3C_1j}{8\omega^3} \varphi^2 \varphi^* + \left( -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon\alpha_3}{2j\omega} \right) \lambda &= \frac{F}{2j}, \\ \dot{\sigma} + \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\beta_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( -\frac{\varepsilon\beta_2}{2j\omega} \right) \varphi + \left( -\frac{\varepsilon\beta_3}{2j\omega} \right) \sigma + \left( -\frac{\varepsilon\beta_3}{2j\omega} \right) \lambda &= \frac{m_1 F}{2j}, \end{aligned} \quad (\Gamma.8)$$

$$\dot{\lambda} + \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\gamma_3}{2j\omega} + \frac{\varepsilon\delta_2}{2} \right) \lambda - \frac{3C_3j}{8\omega^3} \lambda^2 \lambda^* + \left( -\frac{\varepsilon\gamma_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon\gamma_2}{2j\omega} \right) \varphi = 0.$$

Για να ευρεθούν περιοδικές λύσεις σταθερής κατάστασης, θέτουμε  $\dot{\varphi} = \dot{\sigma} = \dot{\lambda} = 0$  στην (Γ.8) και λαμβάνεται ένα σύνολο μη ομογενών αλγεβρικών εξισώσεων που καθορίζουν τα εύρη και τις φάσεις για τις διαμορφώσεις της περιβάλλουσας κατά τη σταθερή κατάσταση:

$$\begin{aligned} \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\alpha_2}{2j\omega} + \frac{\varepsilon\delta_1}{2} \right) \varphi - \frac{3C_1j}{8\omega^3} \varphi^2 \varphi^* + \left( -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon\alpha_3}{2j\omega} \right) \lambda &= \frac{F}{2j}, \\ \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\beta_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( -\frac{\varepsilon\beta_2}{2j\omega} \right) \varphi + \left( -\frac{\varepsilon\beta_3}{2j\omega} \right) \lambda &= \frac{m_1 F}{2j} \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

$$\left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon\gamma_3}{2j\omega} + \frac{\varepsilon\delta_2}{2} \right) \lambda - \frac{3C_3j}{8\omega^3} \lambda^2 \lambda^* + \left( -\frac{\varepsilon\gamma_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon\gamma_2}{2j\omega} \right) \varphi = 0$$

Σε αυτό το αλγεβρικό σύστημα οι άγνωστες μεταβλητές είναι μιγαδικές σταθερές ανεξάρτητες από τον χρόνο. Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν ακριβείς λύσεις για την (Γ.9), καταφεύγουμε σε αριθμητικές τεχνικές, με σκοπό τον υπολογισμό της κίνησης

σταθερής κατάστασης. Προς τούτο αντιπροσωπεύονται οι άγνωστοι μιγαδικοί μέσω όρων πραγματικών και φανταστικών μερών  $\varphi = x_1 + jx_2$ ,  $\sigma = y_1 + jy_2$  και  $\lambda = z_1 + jz_2$  και αντικαθίστανται στην (Γ.9). Θέτοντας ξεχωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη ίσα με το μηδέν παράγεται μια ομάδα από έξι πραγματικές μη ομογενείς μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ως προς  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ . Αυτό το τελευταίο σύνολο λύνεται αριθμητικά για σταθερές παραμέτρους του συστήματος και για μια ποικιλία συχνοτήτων διέγερσης  $\omega$ , με σκοπό να παραχθούν διαγράμματα συχνότητας – εύρους και συχνότητας – φάσης της κίνησης σταθερής κατάστασης, που αντιστοιχούν στην 1<sup>η</sup> κανονική μορφή διέγερσης.

Όταν προσδιοριστεί μια λύση  $\varphi_o$ ,  $\sigma_o$  και  $\lambda_o$  για τα μιγαδικά εύρη, οι αποκρίσεις σταθερής κατάστασης με όρους των αρχικών συντεταγμένων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{|\varphi_o|}{\omega} \sin(\omega t + \theta_\varphi) \\ v(t) &= \frac{|\sigma_o|}{\omega} \sin(\omega t + \theta_\sigma) \\ w(t) &= \frac{|\lambda_o|}{\omega} \sin(\omega t + \theta_\lambda) \end{aligned} \quad (\Gamma.10)$$

όπου οι  $|\varphi_o|$ ,  $|\sigma_o|$  και  $|\lambda_o|$  υποδηλώνουν εύρη, δηλ.  $|\varphi_o| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  και  $\theta_\varphi$  φάσεις, π.χ  $\theta_\varphi = \arctan(x_2/x_1)$ . Σημειώνεται ότι ως αποτέλεσμα των προηγούμενων προσεγγίσεων αμελήθηκαν από την συμπεριφορά σταθερής κατάστασης συστατικά με συχνότητα διαφορετική από  $\omega$ . Άρα, ενώ το σφάλμα από αυτήν την προσέγγιση δεν αναμένεται να είναι μεγάλο για το θεμελιώδες εύρος συχνότητας το οποίο εξετάζεται εδώ, μπορεί να υπάρχουν περιοχές συχνοτήτων όπου λαμβάνουν χώραν υποαρμονικές ή υπεαρμονικές αποκρίσεις σταθερής κατάστασης, με την συχνότητα της απόκρισης αυτής να είναι ένα κλάσμα ή ένα πολλαπλάσιο της συχνότητας διέγερσης. Τέτοιες αποκρίσεις σταθερής κατάστασης δεν θεωρούνται περαιτέρω στην παρούσα εργασία.

Η ευστάθεια της των λύσεων σταθερής κατάστασης, που υπολογίστηκαν από την (Γ.10), προσδιορίζεται μέσω απ' ευθείας αριθμητικής ολοκλήρωσης των αρχικών εξισώσεων κίνησης (Γ.4) με αρχικές συνθήκες όμοιες με

εκείνες που προσδιορίστηκαν με τη θεωρητική ανάλυση. Αν η προκύπτουσα προσομοίωση είναι μια περιοδική κίνηση, η οποία παραμένει στην γειτονιά της θεωρητικά προβλεφθείσας, τότε εκ των πραγμάτων η σταθερή κατάσταση είναι *ευσταθής*. Αντίθετα, μεγάλες αποκλίσεις από την θεωρητική πρόβλεψη ισοδυναμούν με *αστάθεια*. Όντως, σε κάποιες καταστάσεις οι αριθμητικές προσομοιώσεις συλλαμβάνουν «άλματα» από ασταθείς σε ευσταθείς σταθερές καταστάσεις, με την πάροδο του χρόνου.

▪ **Μορφή II: Κίνηση προκαλούμενη στη βάση**

Μια παρόμοια ανάλυση εφαρμόζεται για την περίπτωση όπου υφίσταται διέγερση στη βάση του συστήματος. Θέτοντας  $P_g = 0$ ,  $Y_g \neq 0$  οι εξισώσεις της κίνησης (Γ.2) παίρνουν την εξής μορφή :

$$\ddot{u} + \varepsilon \delta_1 \dot{u} + C_1 u^3 = \varepsilon (a_1 v - a_2 u - a_3 w),$$

$$\ddot{v} = \varepsilon (-\beta_1 v + \beta_2 u + \beta_3 w), \tag{Γ.11}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \varepsilon \delta_2 (\dot{w} - \omega Y_g \cos \omega t) + C_3 (w - Y_g \sin \omega t)^3 = \\ = \varepsilon (\gamma_1 v - \gamma_2 u - \gamma_3 w) \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση συνδυάζονται εξωτερικές και παραμετρικές (περιοδικές) διεγέρσεις του συστήματος, αλλά η ανάλυση μιγαδοποίησης που παρουσιάστηκε προηγουμένως μπορεί ακόμα να εφαρμοστεί για τον προσδιορισμό μιας προσέγγισης της κίνησης σταθερής κατάστασης. Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές (Γ.5) και (Γ.7) και επιβάλλοντας τις συνθήκες για σταθερής κατάστασης κίνηση  $\dot{\phi} = \dot{\sigma} = \dot{\lambda} = 0$ , καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες καθορίζουν τα εύρη και τις φάσεις της σταθερής κατάστασης κίνησης :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon a_2}{2j\omega} + \frac{\varepsilon \delta_1}{2} \right) \varphi - \frac{3C_1}{8\omega_3} \varphi^2 \varphi^* + \left( -\frac{\varepsilon a_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon a_3}{2j\omega} \right) \lambda = 0 \\
 & \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon \beta_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( -\frac{\varepsilon \beta_2}{2j\omega} \right) \varphi + \left( -\frac{\varepsilon \beta_3}{2j\omega} \right) \lambda = 0 \\
 & \left( \frac{j\omega}{2} + \frac{\varepsilon \gamma_3}{2j\omega} + \frac{\varepsilon \delta_2}{2} \right) \lambda + C_3 \left\{ -j \frac{3\lambda^2 \lambda^*}{8\omega^3} + j \frac{3Y_g^3}{8} + \right. \\
 & \left. \left. j \frac{3Y_g}{8\omega^2} (\lambda^2 + 2\lambda \lambda^*) - j \frac{3Y_g^2}{8\omega} (2\lambda + \lambda) \right\} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\varepsilon \gamma_1}{2j\omega} \right) \sigma + \left( \frac{\varepsilon \gamma_2}{2j\omega} \right) \varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \delta_2 \omega Y_g = 0 \right. \quad (Γ.12)
 \end{aligned}$$

Αυτό το σύστημα μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα από έξι πραγματικές αλγεβρικές εξισώσεις οι οποίες λύνονται εκφράζοντας τα εύρη της σταθερής κατάστασης ως  $\varphi = x_1 + jx_2$ ,  $\sigma = y_1 + jy_2$  και  $\lambda = z_1 + jz_2$  αντικαθιστώντας στην (Γ.12) και θέτοντας ίσα με το μηδέν ξεχωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη. Το σύστημα που προκύπτει λύνεται εκ νέου αριθμητικά. Για μεταβαλλόμενη συχνότητα υπολογίζονται τα διαγράμματα συχνότητας-εύρους και συχνότητας-φάσης για την εν λόγω μορφή II. Η ευστάθεια των θεωρητικών λύσεων εξετάζεται όπως προηγουμένως, δηλαδή με την έννοια των απευθείας αριθμητικών ολοκληρώσεων των αρχικών εξισώσεων της κίνησης.

### Γ.1.3 Αριθμητικές εφαρμογές και σχετικά αποτελέσματα

Οι αριθμητικές λύσεις παράγονται για τις επόμενες τιμές του συστήματος παραμέτρων:

$$a_1 = 13.333, a_2 = 13.333, a_3 = 20.000, \beta_1 = 6.666, \beta_2 = 10.000, m_1 = 1.000,$$

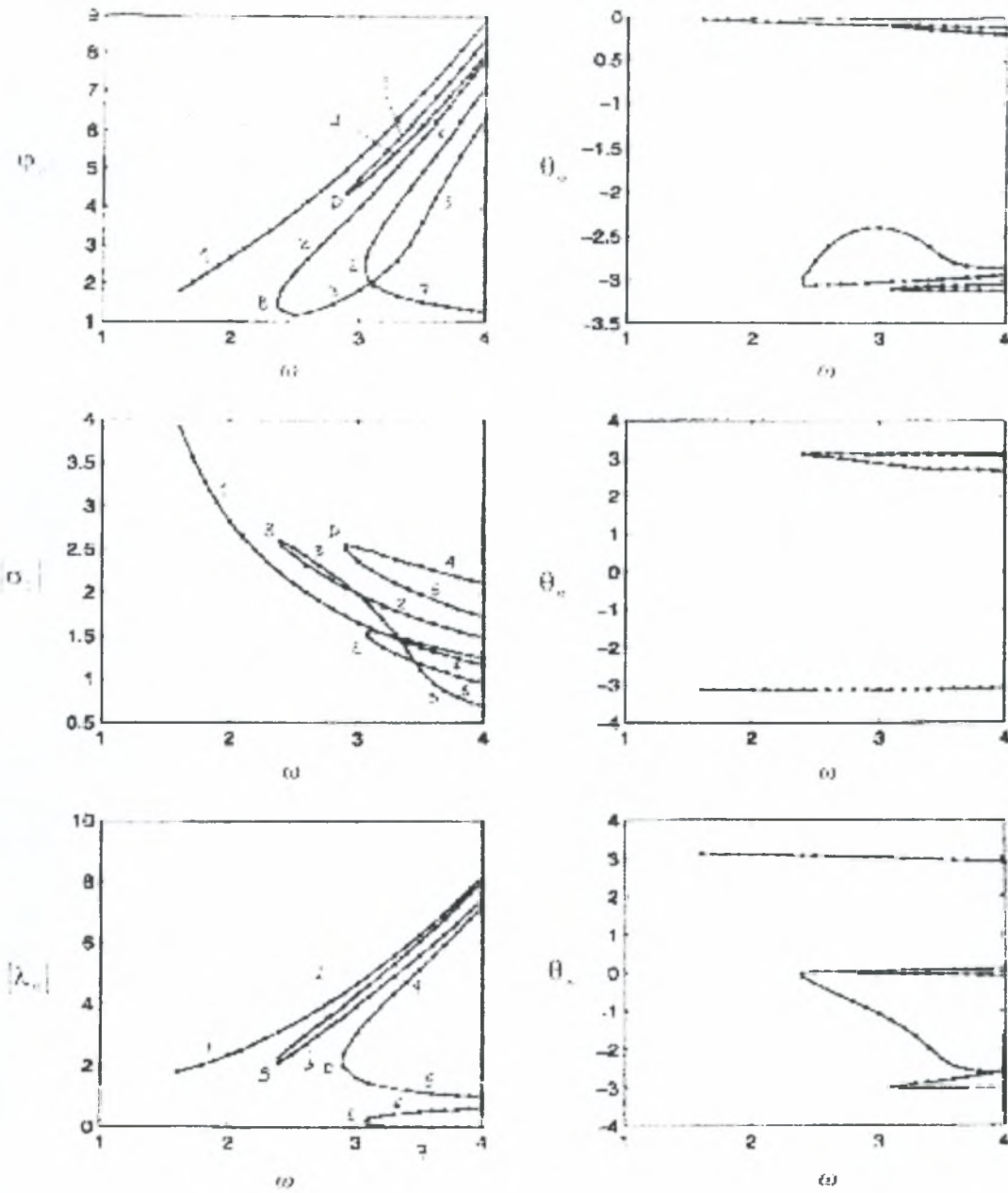
$$\gamma_1 = 13.333, \gamma_2 = 13.333, \gamma_3 = 20.000, \varepsilon = 0.1, P_c = 5.000, Y_g = 5.000,$$

$$C_1 = 5.000, C_3 = 5.000$$

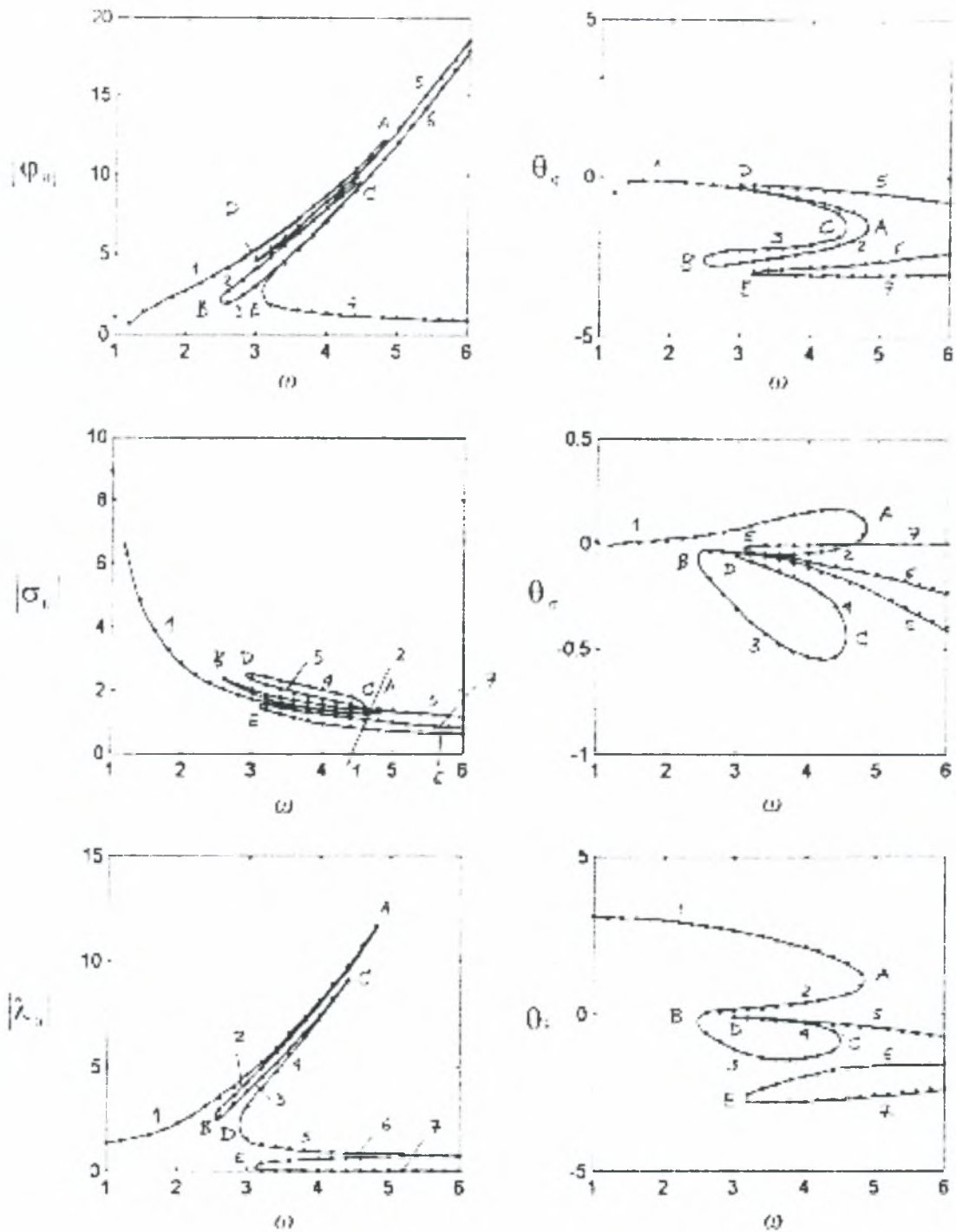
Σε ότι αφορά μορφή I, τα προσεγγιστικά διαγράμματα συχνότητας-εύρους και συχνότητας-φάσης για το σύστημα με  $\varepsilon \delta_1 = 0.6$  και  $\varepsilon \delta_2 = 0.4$  απεικονίζονται στο Σχήμα Γ.2, ενώ για λόγους σύγκρισης παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για βαρύτερη απόσβεση  $\varepsilon \delta_1 = 1.64$  και  $\varepsilon \delta_2 = 1.84$  φαίνονται στο Σχήμα Γ.3. Οι κλάδοι σταθερής κατάστασης ονομάζονται από 1-7 και η ευστάθεια τους έχει ως εξής:

Ο κλάδος 1 είναι ασταθής για μικρές τιμές συχνοτήτων ( $\omega < 2.9$ ), όμως γίνεται ευσταθής όταν αυξάνεται η συχνότητα. Οι κλάδοι 2,3,4 και 6 είναι ασταθείς ενώ οι 5 και 7 είναι ευσταθείς. Για περιοχές μικρών τιμών συχνοτήτων, όπου δεν υπάρχουν ευσταθείς κλάδοι σταθερής κατάστασης, το σύστημα καταλήγει είτε σε υποαρμονικές κινήσεις είτε σε κινήσεις μη κανονικές (χαοτικές ή ημι – περιοδικές μεγάλης περιόδου).

Από τη στιγμή που σκοπός αυτής έρευνας είναι να μελετήσει τις ιδιότητες του συστήματος του Σχήματος 1, όσον αφορά την μόνωση από δονήσεις εστιάζεται η όλη ανάλυση στις τοπικοποιημένες λύσεις. Για την διέγερση μορφής I, οι τοπικοποιημένες λύσεις είναι αυτές οι κινήσεις σταθερής κατάστασης, των οποίων η ενέργεια είναι κυρίως περιορισμένη κοντά στη μηχανή  $m_1$ . Αυτή η απαίτηση οδηγεί στους περιορισμούς ώστε τα  $u$  και  $v$  να είναι  $O(1)$  ποσότητες και το  $w$  να είναι μια ποσότητα  $O(\varepsilon)$ , όπου  $\varepsilon$  είναι η μικρή παράμετρος του προβλήματος. Υπάρχουν τρεις κλάδοι λύσεων, που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς, οι κλάδοι 5, 6 και 7. Από αυτούς οι κλάδοι 5 και 7 είναι ευσταθείς ενώ ο 6 είναι ασταθής και κατά συνέπεια εκπροσωπεί απλά μαθηματικές λύσεις. Παρά ταύτα, οι αριθμητικές προσομοιώσεις που φαίνονται κατωτέρω υποδηλώνουν ότι όταν το σύστημα εκκινεί από συνθήκες ηρεμίας, η πραγματική απόκριση σταθερής κατάστασης που φτάνεται αντιστοιχεί στον τοπικοποιημένο κλάδο 7.



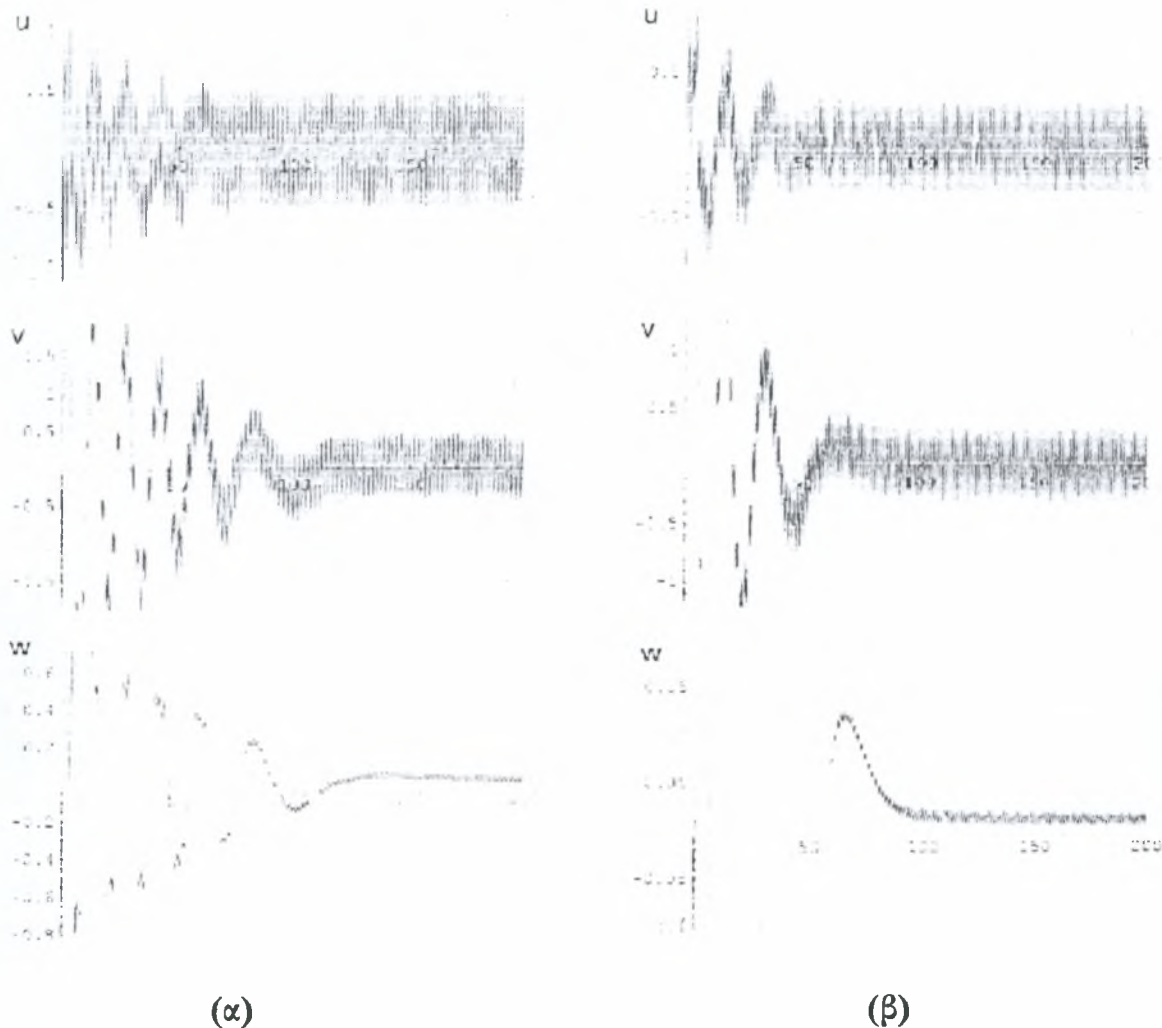
Σχήμα Γ.2. Αποκρίσεις σταθερής κατάστασης για την διέγερση μορφής I, για ασθενή απόσβεση



Σχήμα Γ.3. Αποκρίσεις σταθερής κατάστασης για την διέγερση μορφής I, για ισχυρά (βαρεία) απόσβεση

Στο Σχήμα Γ.4 καταδεικνύεται η κατάληξη της κίνησης του συστήματος στις τοπικοποιημένες ευσταθείς σταθερές καταστάσεις που αντιστοιχούν στον κλάδο 7. Οι εν λόγω αριθμητικές προσομοιώσεις προέκυψαν από αριθμητική

ολοκλήρωση των αρχικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης με χρήση του *Mathematica*, για μηδενικές αρχικές συνθήκες, από αυτές δε άμεσα προκύπτει ο διαχωρισμός της κίνησης σε «αργά» (χαμηλών συχνοτήτων) και «ταχέα» (υψηλών συχνοτήτων) συστατικά, και η προκύπτουσα τοπικοποίηση της σταθερής κίνησης στο άνω μέρος του συστήματος (στο «μηχάνημα»).

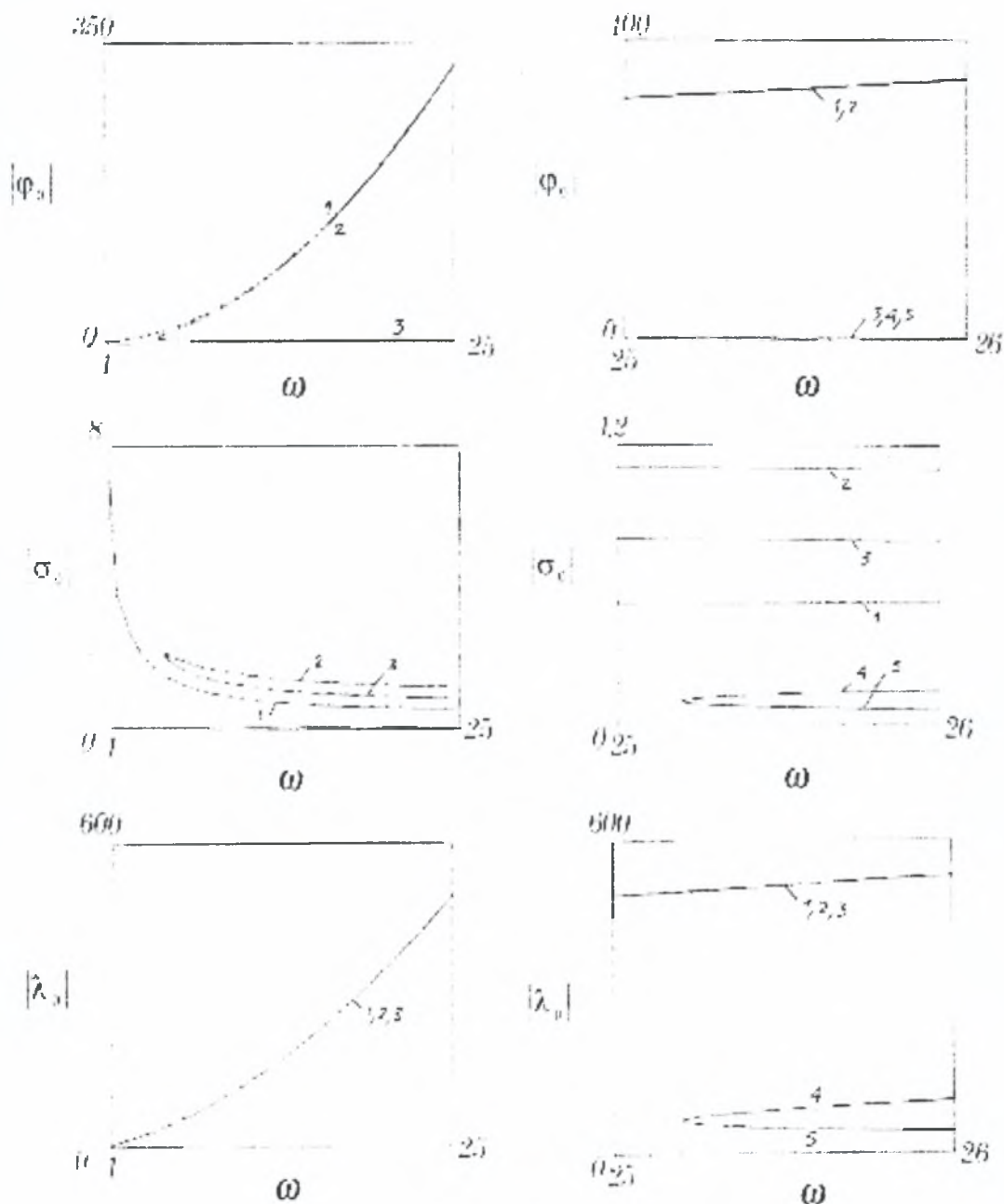


**Σχήμα Γ.4.** Αριθμητικές λύσεις του συστήματος (Γ.4) με μηδενικές αρχικές συνθήκες για (α)  $\omega=3.3$  rad/sec,  $\varepsilon\delta_1=0.6$ ,  $\varepsilon\delta_2=0.4$  και (β)  $\omega=4$  rad/sec,  $\varepsilon\delta_1=1.84$ ,  $\varepsilon\delta_2=1.64$  (διέγερση μορφής I)

Όσον αφορά την διέγερση μορφής II, τα σχετικά αριθμητικά αποτελέσματα παρατίθενται στα Σχήματα Γ.5α,β για τις παραμέτρους  $P_c = 0$  και  $Y_g = 5$ , ενώ τα διαγράμματα συχνοτήτων-φάσεων, έχοντα σχετικά απλή δομή,

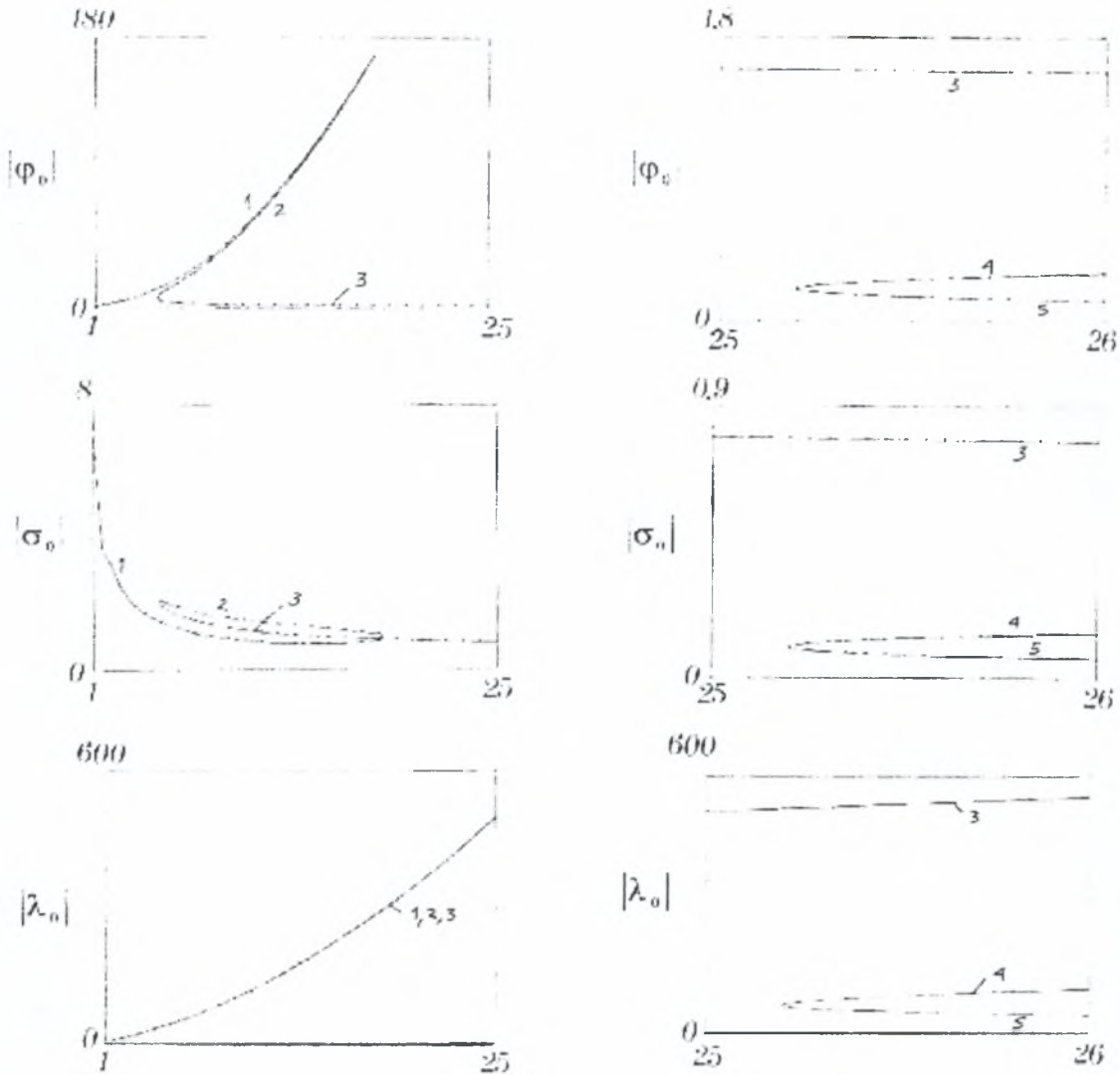


παραλείπονται. Στα Σχήματα αυτά (που προέκυψαν για  $\varepsilon\delta_1=0.6$ ,  $\varepsilon\delta_2=0.4$  και για  $\varepsilon\delta_1=1.84$ ,  $\varepsilon\delta_2=1.64$  αντίστοιχα), λόγω διαφορών κλίμακας σε ορισμένους κλάδους σταθερής κατάστασης, έχουν χαραχθεί δύο ξεχωριστά διαγράμματα για κάθε μεταβλητή, ήτοι για  $1 < \omega < 25$  και για  $25 < \omega < 26$ .



(α)  $\varepsilon\delta_1=0.6$ ,  $\varepsilon\delta_2=0.4$

Σχήμα Γ.5. (συνεχίζεται)



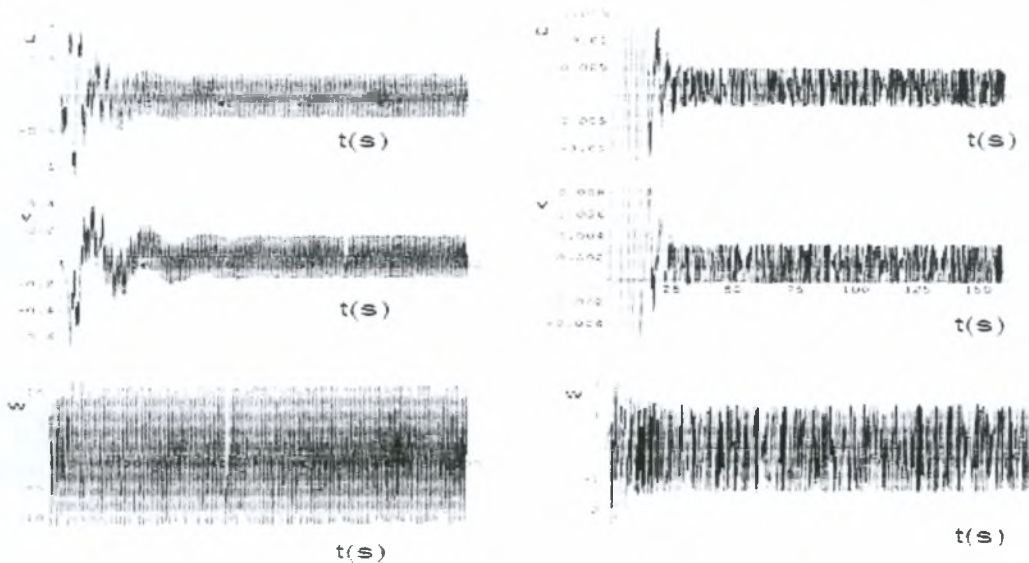
$$(\beta) \quad \varepsilon\delta_1=1.84, \quad \varepsilon\delta_2=1.64$$

**Σχήμα Γ.5.** Διαγράμματα συχνοτήτων – ευρών για τη διέγερση μορφής II

Υφίστανται στην περίπτωση αυτή πέντε κλάδοι σταθερής κατάστασης, των οποίων η ευστάθεια αναφέρεται αμέσως μετά. Οι κλάδοι 1, 2 και 4 είναι ασταθείς, ενώ οι υπόλοιποι 3 και 5 είναι ευσταθείς. Όπως και στην προηγούμενη μορφή διέγερσης, σε χαμηλές συχνότητες (όπου δεν υπάρχουν ευσταθείς κλάδοι) υφίστανται κινήσεις που είτε είναι ασταθείς ως προς την μεταβλητή  $\nu$ , υπορμονικές είτε διαμορφωμένες από συχνότητα ή εύρος. Επιπρόσθετα παρατηρήθηκαν περιπτώσεις διακοπής της ευστάθειας των κλάδων 3 και 5, λόγω «εκρήξεων» (απότομης εμφάνισης

ευσταθών υποαρμονικών ή μη κανονικών κινήσεων εντός ιδιαίτερα περιορισμένων ζωνών συχνοτήτων.

Εδώ υπάρχουν τρεις τοπικοποιημένοι κλάδοι αντιστοιχούντες στα  $u$  και  $v$  τάξης  $O(\varepsilon)$ , και στο  $w$  τάξης  $O(1)$ , ήτοι οι κλάδοι 3, 4 και 5. Σημειωτέον ότι αναζητείται τοπικοποίηση της κίνησης σταθερής κατάστασης κοντά στη βάση της κίνησης και μακράν του μηχανισμού  $m_1$ . Εξ αυτών, οι 3 και 5 είναι ευσταθείς, ενώ ο 4 ασταθής. Στο Σχήμα Γ.7 απεικονίζονται ορισμένες αριθμητικές προσομοιώσεις του αρχικού συστήματος (Γ.11), με αρχικές συνθήκες ηρεμίας. Στο μεν Σχήμα Γ.7α (για  $\omega = 8.2 \text{ rad/sec}$ ,  $\varepsilon\delta_1=1.84$ ,  $\varepsilon\delta_2=1.64$ ) το σύστημα καταλήγει σε μια τοπικοποιημένη λύση επί του κλάδου 3, στο δε Σχήμα Γ.7β (για  $\omega = 27 \text{ rad/sec}$ ,  $\varepsilon\delta_1=0.6$ ,  $\varepsilon\delta_2=0.4$ ) επί του κλάδου 5. Σε αμφότερες όμως περιπτώσεις η μόνωση ταλαντώσεων του άνω μέρους του συστήματος επιτυγχάνεται καθόσον στις σταθερές καταστάσεις η ενέργεια περιορίζεται κοντά στη βάση του, απ' όπου αρχικά ξεκινάει.



(α)

(β)

Σχήμα Γ.7. Αριθμητικές λύσεις του συστήματος (Γ.11) – διέγερση μορφής II

## Γ.2. Παθητική άντληση ενέργειας

### Γ.2.1 Αρχικές παρατηρήσεις

Έστω το ακόλουθο εκ δυο βαθμών ελευθερίας σύστημα, το οποίο αποτελείται από δυο ασθενώς συζευγμένους ταλαντωτές με μικρή απόσβεση:

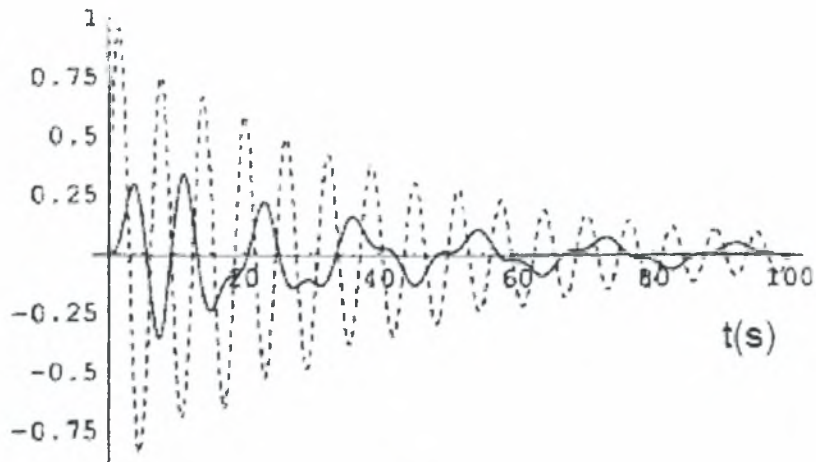
$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \varepsilon \dot{y}_1 + C y_1^3 + \varepsilon (y_1 - y_2) &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \varepsilon \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + \varepsilon (y_2 - y_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Γ.13})$$

Η ασθενής σύζευξη εξασφαλίζεται με την απαίτηση ότι  $\varepsilon \ll 1$  και με το ότι όλες οι άλλες μεταβλητές υποτίθενται ότι είναι  $O(1)$  ποσότητες. Η τελεία δείχνει παραγωγή ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  (χρόνος). Για  $\varepsilon = 0$  το σύστημα αποσυντίθεται σε δυο μη συζευγμένους μη γραμμικούς και γραμμικούς ταλαντωτές, ονομαζόμενους ως *ταλαντωτής 1* και *ταλαντωτής 2*. Σημειώνεται ότι ο ταλαντωτής 1 είναι ο μη γραμμικός.

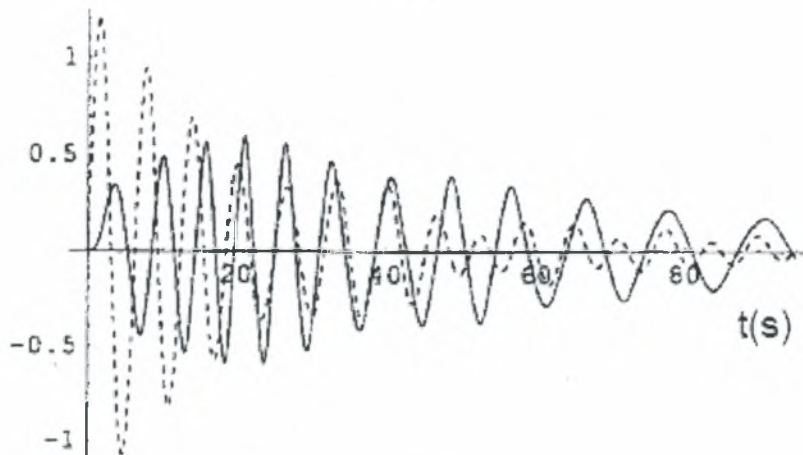
Στο σχήμα Γ.8 απεικονίζεται οι μεταβατικές αποκρίσεις των δυο ταλαντωτών για  $\lambda = 0.5$ ,  $\omega_2^2 = 0.9$ ,  $C = 5.0$ ,  $\varepsilon = 0.1$  και με αρχικές συνθήκες  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ ,  $\dot{y}_1(0) = 0$ ,  $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$ , όπου  $h$  (η ενέργεια του συστήματος για  $t = 0+$ ) ποικίλλει. Αυτές οι αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε απότομη διέγερση του ταλαντωτή 2 για  $t=0$ . Για  $h=0.5$  και οι δυο ταλαντωτές εκτελούν ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση και δεν λαμβάνει χώραν άντληση ενέργειας, αφού η περισσότερη ενέργεια είναι αποθηκευμένη στον κατευθείαν διεγερόμενο ταλαντωτή 2. Αυξάνοντας την αρχική ενέργεια στο επίπεδο  $h = 0.8$  και  $h = 1.125$  [σύμφωνα με τα περιεχόμενα στο Σχήμα Γ.8α,β] παρατηρείται μεταφορά ενέργειας από τον απευθείας διεγερόμενο ταλαντωτή 2 στον μη διεγερμένο ταλαντωτή 1.

Πράγματι, μετά από μια αρχική μεταβατική κατάσταση, η περισσότερη από την ενέργεια ταλάντωσης έχει αμετάκλητα μεταφερθεί («αντληθεί») στον ταλαντωτή 1, ενώ με περαιτέρω αύξηση της αρχικής ενέργειας το φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης γίνεται λιγότερο έντονο. Αυτές οι αριθμητικές εξομοιώσεις δείχνουν ότι για σταθερές τιμές μεταβλητών, η ενεργειακή άντληση στο ασθενώς

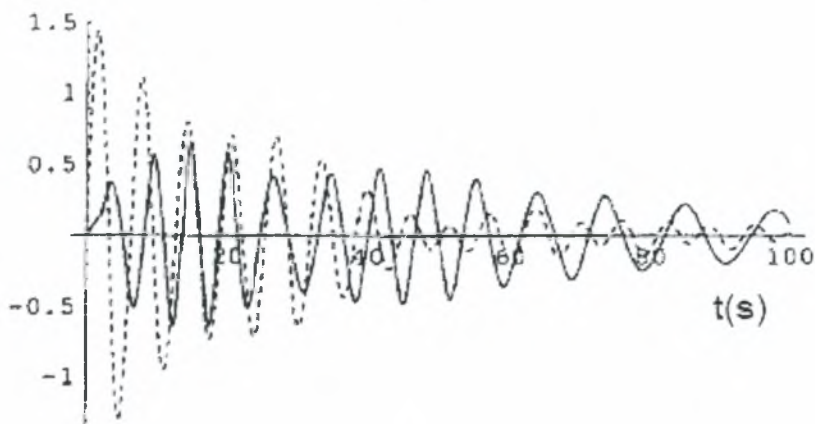
συζευγμένο σύστημα λαμβάνει χώρα πάνω από μια συγκεκριμένη τιμή του επιπέδου της αρχικής ενέργειας (αντοχής της διέγερσης).



(α)



(β)



(γ)

**Σχήμα Γ.8.** Αριθμητικές προσομοιώσεις της μεταβατικής απόκρισης  $y_1(t)$  και  $y_2(t)$  του συστήματος (Γ.13) για (α)  $b=0.50$ , (β)  $b=0.80$  και (γ)  $b=1.125$  — ταλαντωτής 1, ----- ταλαντωτής 2

**Σχήμα Γ.8.** Αριθμητικές προσομοιώσεις της μεταβατικής απόκρισης  $y_1(t)$  και  $y_2(t)$  του συστήματος (Γ.13) για (α)  $b=0.50$ , (β)  $b=0.80$  και (γ)  $b=1.125$  — ταλαντωτής 1, ----- ταλαντωτής 2

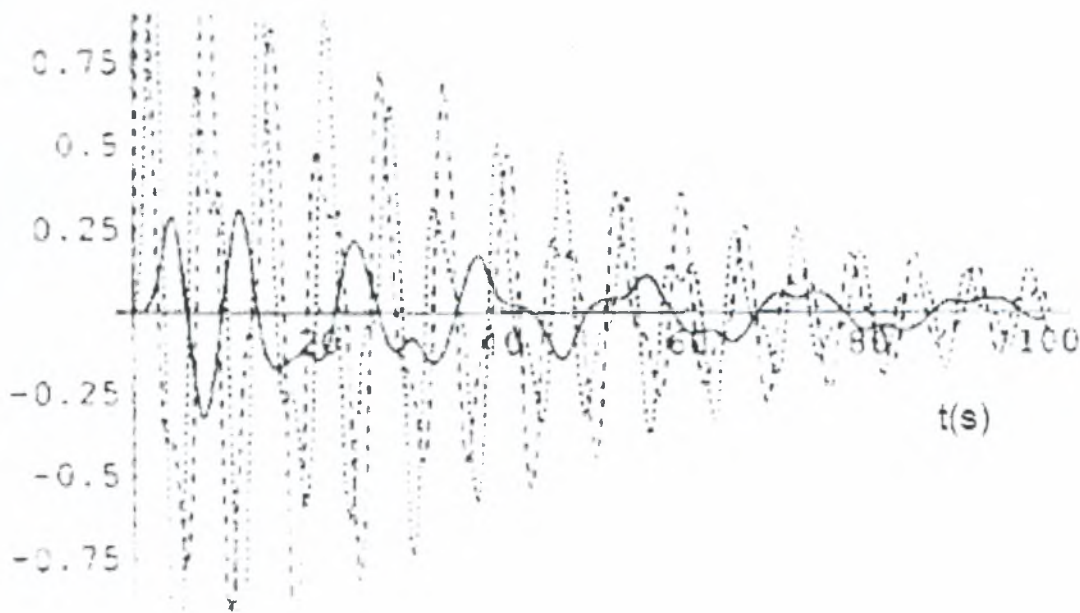
Παρόμοια αποτελέσματα επιτυγχάνονται για τριών βαθμών ελευθερίας συστήματα που καθορίζονται από τις εξισώσεις:

$$\ddot{y}_1 + \varepsilon \dot{y}_1 + C y_1^3 + \varepsilon(y_1 - y_2) = 0$$

$$\ddot{y}_2 + \varepsilon \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + \varepsilon(y_2 - y_1) + d(y_2 - y_3) = 0 \quad (\Gamma.14)$$

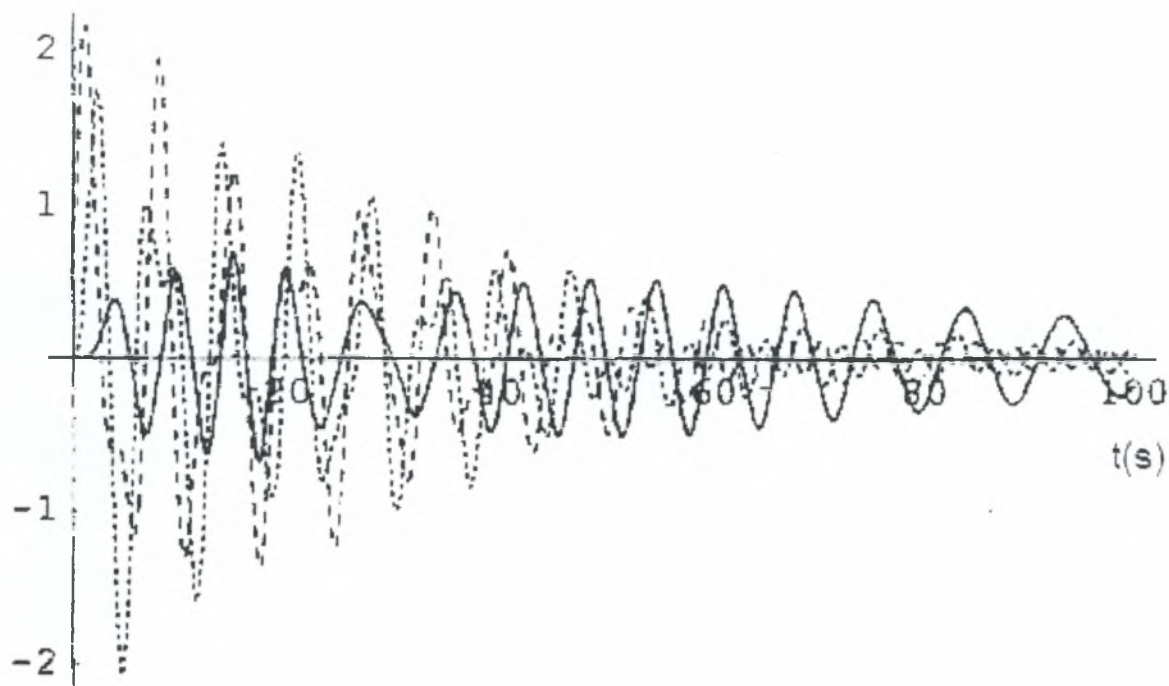
$$\ddot{y}_3 + \varepsilon \dot{y}_3 + \omega_2^2 y_3 + d(y_3 - y_2) = 0$$

που αντιπροσωπεύουν δύο ισχυρά συζευγμένους γραμμικούς ταλαντωτές, που είναι ασθενώς συνδεδεμένοι με έναν ουσιωδώς μη γραμμικό ταλαντωτή. Στο σχήμα Γ.9 απεικονίζεται η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος για  $\lambda=0.5$ ,  $\omega_2^2=0.9$ ,  $C=5.0$ ,  $d=1.0$ ,  $\varepsilon=0.1$  και μηδενικές αρχικές συνθήκες εκτός από το  $\dot{y}_3(0) \neq 0$ . Καθόσον δεν επιτυγχάνεται ενεργειακή άντληση για χαμηλή διέγερση [Σχήμα Γ.9α], όσο το  $\dot{y}_3(0)$  αυξάνεται επιτυγχάνεται ενεργειακή άντληση [Σχήμα Γ.9β,γ]. Ως εκ τούτου το φαινόμενο της μη γραμμικής άντλησης της ενέργειας μπορεί να παρατηρηθεί και σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας.

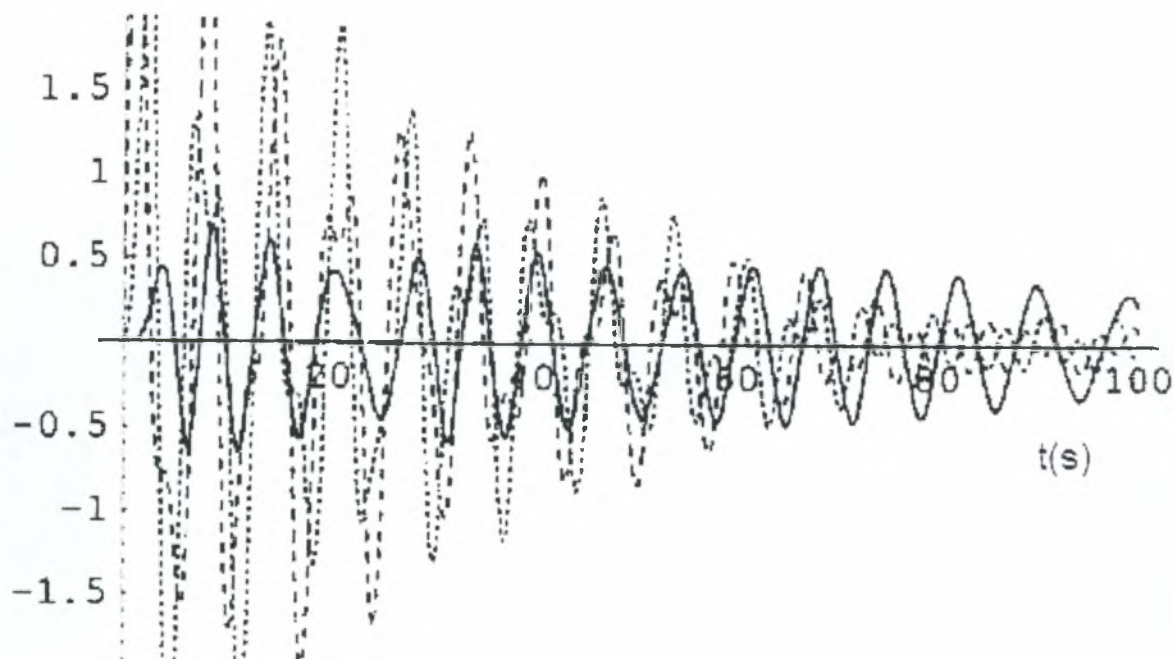


(α)

**Σχήμα Γ.9** (συνεχίζεται)



(β)



(γ)

Σχήμα Γ.9. Αριθμητικές μεταβατικές αποκρίσεις του τριβάθμιου συστήματος για

$$(\alpha) \dot{y}_3(0) = 2.0, (\beta) \dot{y}_3(0) = 3 \text{ και } (\gamma) \dot{y}_3(0) = 4$$

— ταλαντωτής 1, ..... ταλαντωτής 2, -----ταλαντωτής 3

Τώρα η μελέτη θα εστιαστεί αποκλειστικά στο σύστημα με δυο βαθμούς ελευθερίας (Γ.13). Θεωρώντας τις μεταβατικές αποκρίσεις, όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα Γ.8, παρατηρούμε ότι, όταν επιτυγχάνεται άντληση ενέργειας, η κίνηση μπορεί να χωριστεί σε δυο φάσεις: (1) στην αρχική φάση η ενέργεια αντλείται από τον ταλαντωτή 2 στον ταλαντωτή 1 σε μια αμετάκλητη μεταφορά μέχρις ότου ο ταλαντωτής 1 να φθάσει σε ένα ορισμένο εύρος ταλάντωσης και (2) στη δεύτερη φάση της κίνησης και οι δυο ταλαντωτές εκτελούν ταλαντώσεις μειούμενου εύρους λόγω απώλειας ενέργειας, που οφείλεται στην απόσβεση, με τον ταλαντωτή 1 να διατηρεί την περισσότερη από την ενέργεια ταλάντωσης. Επιπρόσθετα, κατά την διάρκεια της αρχικής φάσης άντλησης της ενέργειας ( $0 < t < 60$ , Σχήμα Γ.9γ), η κίνηση του ταλαντωτή 1 αποτελείται από μια «ταχεία» ταλάντωση, με συχνότητα περίπου ίδια με την φυσική συχνότητα του ταλαντωτή 2, και από μια «βραδεία» περιβάλλουσα ταλάντωσης. Τούτο καταδεικνύει με σαφήνεια ότι ένας 1:1 εσωτερικός συντονισμός μεταξύ των ταλαντωτών 1 και 2 παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην φάση της ενεργειακής άντλησης, παρόλο που αυτό δεν εξηγεί την μονόδρομη ροή της ενεργειακής άντλησης από τον ταλαντωτή 2 στον 1.

Με κίνητρο αυτές τις παρατηρήσεις, η μελέτη μπορεί τώρα να προχωρήσει στην εξέταση των περιοδικών τροχιών του βασικού / υποκείμενου (underlying) Hamiltonian συστήματος, απαλείφοντας την απόσβεση από τις εξισώσεις (Γ.13). Αφού το σύστημα αυτό διαθέτει ασθενή απόσβεση, θα ανέμενε κανείς ότι, τουλάχιστον κατά τα αρχικά στάδια της κίνησης, η δυναμική θα επηρεαστεί πολύ από τη δυναμική του αντίστοιχου (χωρίς απόσβεση) Hamiltonian συστήματος. Εναλλακτικά, η δυναμική χωρίς απόσβεση κυριαρχείται από *περιοδικές τροχιές*. Αποτέλεσμα αυτού είναι να αναμένεται ότι η τοπολογική δομή των περιοδικών τροχιών (και των διακλαδώσεων τους) του χαμιλτονιανού συστήματος να διαδραματίζει πρωτεύοντα ρόλο στο φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης.



### Γ.2.2. Περιοδικές τροχιές υποκείμενου Hamiltonian συστήματος

Το υποκείμενο Hamiltonian σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας ορίζεται θέτοντας  $\lambda = 0$  στην (Γ.13). Σε ένα σταθερό επίπεδο ενέργειας (Hamiltonian) χρησιμοποιείται η μέθοδος της μείωσης για να απλοποιηθεί το σύστημα (Γ.13) σε έναν μη αυτόνομο ταλαντωτή ενός μόνο βαθμού ελευθερίας με περιοδική διέγερση. Αυτή είναι μια συνηθισμένη διαδικασία απλοποίησης, με την οποία ένα Hamiltonian σύστημα  $(n + 1)$  βαθμών ελευθερίας με συμμετρία (χρονικών μεταβολών) απλοποιείται σε ένα  $n$ - βαθμών ελευθερίας μη αυτόνομο σύστημα χωρίς συμμετρία.

Εισάγοντας τις μεταβλητές ενεργούς γωνίας  $(I_2, \theta_2) \equiv (R^+ \times S^1)$  (Όπου αμετάβλητο σύνολο ενός δυναμικού συστήματος ορίζεται ένα υποσύνολο  $S$  του χώρου φάσης, τέτοιο ώστε εάν το σύστημα δίνει μια αρχική κατάσταση στο  $S$ , η λύση των εξισώσεων που καθορίζουν την κίνηση παραμένει στο  $S$  κάθε στιγμή.), για τον ταλαντωτή 2, οι οποίες καθορίζονται με αυστηρό μαθηματικό τρόπο από τις σχέσεις  $y_2 = \sqrt{2I_2 / \omega_2} \sin \theta_2, v_2 \equiv \dot{y}_2 = \sqrt{2I_2 \omega_2} \cos \theta_2$ , η Hamiltonian του συστήματος χωρίς απόσβεση εκφράζεται ως:

$$H^\varepsilon = F(y_1, v_1) + G(I_2) + \frac{\varepsilon}{2} H^1(y_1, v_1, \theta_2, I_2) \quad (\Gamma.15)$$

όπου,

$$F(y_1, v_1) = (v_1^2 / 2) + (C y_1^4 / 4), \quad G(I_2) = \omega_2 I_2$$

$$H^1(y_1, v_1, \theta_2, I_2) = (y_1 - \sqrt{2I_2 / \omega_2} \sin \theta_2)^2.$$

Οι εξισώσεις της κίνησης μπορούν να εκφραστούν πλέον ως:

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial F}{\partial v_1} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial H^1}{\partial v_1}, \quad \dot{v}_1 = -\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial H^1}{\partial y_1}, \quad (\Gamma.16)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial H^1}{\partial I_2}, \quad \dot{I}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial H^1}{\partial \theta_2}$$

όπου  $v_1 = \dot{y}_1$ . Σταθεροποιώντας την Hamiltonian (συνολική ενέργεια) σε ένα σταθερό επίπεδο  $h$ , η ενέργεια  $I_2$  μπορεί να εκφραστεί σε όρους των άλλων μεταβλητών του συστήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} H^\varepsilon &= F(y_1, v_1) + G(I_2) + \frac{\varepsilon}{2} H^1(y_1, v_1, \theta_2, I_2) \\ &= h \Rightarrow I_2 = L^\varepsilon(y_1, v_1, \theta_2, h) \end{aligned} \quad (\Gamma.17)$$

όπου  $L^\varepsilon$  είναι μια σύνθετη έκφραση. Η ανωτέρω αντιστροφή είναι εφικτή μόνο όταν το σύστημα είναι ομαλό δηλαδή, δηλ. εάν ικανοποιείται η συνθήκη  $\partial H^\varepsilon / \partial I_2 \neq 0$ , γεγονός που ισχύει για το εξεταζόμενο σύστημα. Λαμβάνοντας υπόψη την (Γ.17), απαλείφοντας την χρονική από την (Γ.16) και συνδυάζοντας τις προκύπτουσες πρώτου βαθμού εξισώσεις σε μια μόνη δευτέρου βαθμού εξίσωση, αποκτάται η ακόλουθη εξίσωση για τον *περιορισμένο ταλαντωτή*:

$$\begin{aligned} y_1'' + \left( C / \omega_2^2 \right) y_1^3 &= \varepsilon \frac{1}{2\omega_2^4} \left\{ -2\omega_2^2 y_1 + 4C y_1^3 \sin^2 \theta_2 \right. \\ &+ \frac{\omega_2(4h - 5C y_1^4) \sin \theta_2}{\sqrt{2h - \frac{C y_1^4}{2} - \omega_2^2 y_1'^2}} \\ &\left. + 2\omega_2^2 y_1' \left[ -\sin 2\theta_2 + \frac{\omega_2 y_1 \cos \theta_2}{\sqrt{2h - \frac{C y_1^4}{2} - \omega_2^2 y_1'^2}} \right] \right\} + O(\varepsilon^2) \equiv \text{eg}(y_1, y_1', \theta_2) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\Gamma.18)$$

Σημειώνεται ότι οι εκφράσεις που προκύπτουν είναι προσεγγίσεις, καθόσον αγνοούνται όροι  $O(\varepsilon^2)$ . Αυτή η προσέγγιση δημιουργήθηκε από την αδυναμία εύρεσης μιας ακριβούς έκφρασης για το  $L^\varepsilon$  στην (Γ.17). Ως αποτέλεσμα, η ακόλουθη ανάλυση ισχύει μόνο για συστήματα χωρίς απόσβεση με αρικετά ασθενή σύζευξη. Στην (Γ.18),  $y_1 = y_1(\theta_2)$  και οι τόνοι συμβολίζουν παραγώγιση ως προς το  $\theta_2$ . Επίσης οι «όροι διέγερσης» στο δεξί μέλος είναι 2-π περιοδικοί ως προς  $\theta_2$ .

Υποθετώντας την προηγηθείσα ανάλυση, το πρόβλημα του υπολογισμού των περιοδικών τροχιών του συστήματος χωρίς απόσβεση (Γ.13) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του υπολογισμού των περιοδικών λύσεων του απλοποιημένου συστήματος (Γ.18). Αυτή η ισοδυναμία ισχύει αφού μια περιοδική κίνηση ως προς  $y_1$

και  $v_1$  υπό περιοδική μεταβολή της  $\theta_2$  οδηγεί σε μια περιοδική κίνηση επίσης ως προς  $I_2$ . Αφού το απλοποιημένο σύστημα είναι ουσιωδώς μη γραμμικό, καταφεύγουμε σε μια αναλυτική/ αριθμητική τεχνική για να υπολογίσουμε τις περιοδικές τροχιές και τις διακλαδώσεις τους. Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε έναν μη ομαλό μετασχηματισμό των μεταβλητών για να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σε ένα σύστημα προβλημάτων μη γραμμικών συνοριακών τιμών σε πεπερασμένα πεδία. Αυτή η τεχνική προτάθηκε αρχικά από τον Pilschuck [17] και έπειτα εφαρμόστηκε σε αρκετά ομαλά και μη προβλήματα δυναμικής σε μια σειρά εργασιών.

Υπολογίζονται εν συνεχεία οι περιοδικές λύσεις της (Γ.18) με περίοδο  $T = 4a$  (που ακόμα δεν έχει προσδιοριστεί). Η λύση εκφράζεται με την ακόλουθη μορφή:

$$y_1(\theta_2) = X(\tau(\phi)) + e(\phi)Y(\tau(\phi)), \quad \phi = \theta_2 / a \quad (\text{Γ.19})$$

όπου οι νέες ανεξάρτητες μεταβλητές  $\tau(\phi)$  και  $e(\phi)$  είναι φραγμένες μη ομαλές συναρτήσεις ως προς  $\phi$ :

$$\tau(\phi) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \sin \left( \frac{\pi\phi}{2} \right) \right], \quad e(\phi) = \tau'(\phi) \quad (\text{Γ.20})$$

Αμφότερες οι μη ομαλές (μη λείες) μεταβλητές είναι περιοδικές ως προς  $\phi$  με (κανονικοποιημένη) περίοδο ίση με 4. Σημειώνεται ότι από την (Γ.19) η λύση εκφράζεται σε όρους δύο επί μέρους συστατικών. Το  $X$  εξαρτάται μόνο από το  $\tau$  και ορίζεται ως  $R$  - (πραγματικό) μέλος της λύσης. Το  $Y$  επίσης εξαρτάται απλά από το  $\tau$  και πολλαπλασιάζεται με το  $e$ , ορίζεται δε ως το  $I$  (ψευδοφανταστικό) - μέλος της λύσης. Έχει ενδιαφέρον πως η έκφραση της εξίσωσης (Γ.19) έχει φαινομενολογική ομοιότητα με την αναπαράσταση μιγαδικών, με το  $e$  να παίζει το ρόλο της φανταστικής σταθεράς  $j$  ( $e^2 = -j^2 = 1$ ). Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό αυτό, εκφράζονται οι παράγωγοι και οι δυνάμεις της  $y_1$  στην (Γ.18) με όρους των  $X$  και  $Y$  και τίθενται ξεχωριστά τα  $R$  και  $I$  μέλη στην προκύπτουσα έκφραση ίσα με το 0. Ως εκ τούτων, προκύπτουν τα παρακάτω δυο υποπροβλήματα που διέπουν τα  $R$  και  $I$  μέλη της λύσης:

▪ **Υποπρόβλημα 1:**

$$Y'' + (Ca^2 / \omega_2^2) Y^3 = \varepsilon a^2 g(y_1 = Y, y_1' = Y' / a, \theta_2 = m\pi\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (\Gamma.21)$$

$$a = m\pi, \quad X = 0, \quad Y(\pm 1) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

▪ **Υποπρόβλημα 2:**

$$X'' + (Ca^2 / \omega_2^2) X^3 = \varepsilon a^2 g\left(y_1 = X, y_1' = X' / a, \theta_2 = \frac{(2n-1)\pi\tau}{2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (\Gamma.22)$$

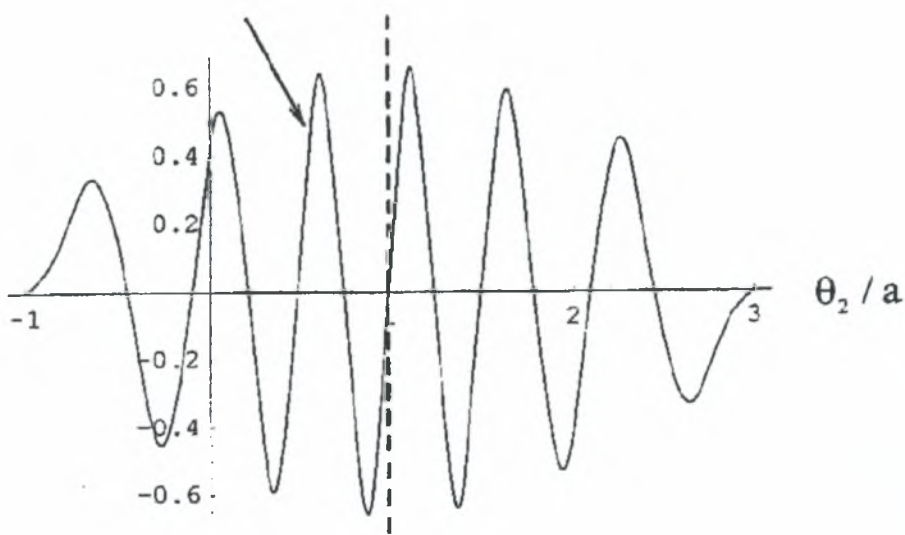
$$a = \frac{(2n-1)}{2}, \quad Y = 0, \quad X'(\pm 1) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Σημειώνεται ότι τα παραπάνω υποπροβλήματα έχουν αποκτηθεί τα  $R$  και  $L$  μέλη (όπου  $R$  και  $L$  το δεξι και αριστερό μέλος της εξίσωσης ανντίστοιχα) της λύσης ίσα με το μηδέν. Μετά οι λύσεις του κάθε υποπροβλήματος προσφέρουν μια ευδιάκριτη τάξη υποαρμονικών κινήσεων του προβλήματος. Γενικά, το πρόβλημα που έχει αποκτηθεί υιοθετώντας την προηγούμενη μέθοδο οδηγεί σε ένα συζευγμένο σύστημα εξισώσεων ως προς  $X$  και  $Y$ .

Εφόσον δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για αυτά τα προβλήματα μη γραμμικών συνοριακών τιμών, χρειάζεται να καταφύγει κανείς σε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τους. Πριν εφαρμοστούν αριθμητικές μέθοδοι πάντως, αναγκαιούν οι παρακάτω επισημάνσεις, οι οποίες αφορούν την μέθοδο των μη ομαλών μετασχηματισμών. Οι συνοριακές συνθήκες των (Γ.21) και (Γ.22) επιβάλλουν ομαλότητα στις μετασχηματισμένες παραγώγους της  $y_1$  και αυτές οι συνοριακές συνθήκες καθορίζουν την περιοχή των λύσεων αυτών των προβλημάτων μη γραμμικών συνοριακών τιμών  $\tau \in [-1, 1]$ . Επιπρόσθετα, στο ένα τέταρτο της περιόδου της λύσης,  $a$ , για κάθε υποπρόβλημα, επιτρέπεται μια μετρήσιμη απειρία τιμών. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η περίοδος της περιοδικής λύσης είναι  $T = 4a$  και ότι οι μη ομογενείς όροι στην (Γ.18) είναι  $2\pi$  - περιοδικοί ως προς  $\theta_2$ , καταλήγουμε ότι το υποπρόβλημα 1 υπολογίζει τις  $2m:1$ ,  $m \zeta = 1, 2, 3, \dots$  υποαρμονικές τροχιές της (Γ.18), ενώ το υποπρόβλημα 2 υπολογίζει τις  $2n-1:1$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$  υποαρμονικές τροχιές. Μια υποαρμονική τροχιά της τάξης  $p:1$  είναι μια περιοδική τροχιά με περίοδο ίση με  $2p\pi$ , δηλαδή  $p$ -φορές την περίοδο των μη ομογενών όρων  $g$ . Τελικά σημειώνεται ότι η περιοδική λύση

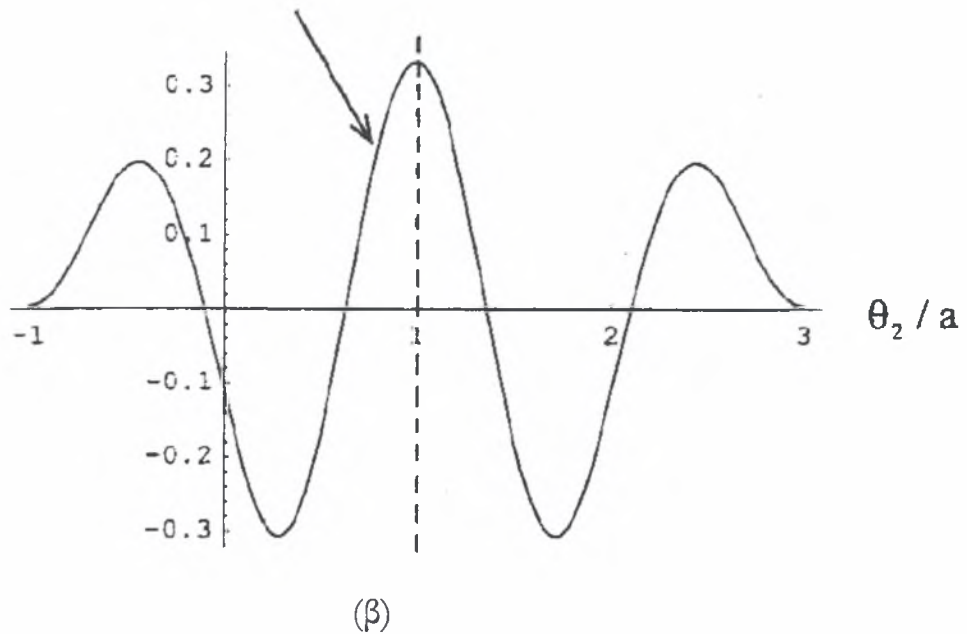
$y_1(t)$  έχει προκύψει από τις λύσεις των προβλημάτων μη γραμμικών συνοριακών τιμών είτε  $y_1(\theta_2) = e(\theta_2/a)Y(\tau(\theta_2/a))$  (υποπρόβλημα 1) είτε  $y_1(\theta_2) = X(\tau(\theta_2/a))$  (υποπρόβλημα 2) όπου  $\theta_2 = \omega_2 t + \theta_{20} + O(\varepsilon)$ . Τώρα, τα παραπάνω προβλήματα μη γραμμικών συνοριακών τιμών προσφέρουν λύση μόνο σε κανονικοποιημένη ημιπερίοδο  $\tau \in [-1, 1]$ . Για να επεκταθεί το αποτέλεσμα πάνω σε μια πλήρη κανονικοποιημένη περίοδο ίση με 4, χρειάζεται να προστεθεί το μέλος της λύσης στο διάστημα  $\tau \in [1, 3]$ . Για να επιτευχθεί αυτό, λαμβάνονται υπόψη οι συμμετρικές ιδιότητες των μη ομαλών μεταβλητών  $\tau$  και  $\varepsilon$  και προστίθεται είτε το αντισυμμετρικό είδωλο της λύσης περί το σημείο  $(\gamma, \tau) = (0, 1)$  (για το υποπρόβλημα 1, βλ. Σχήμα Γ.10α) ή η κατοπτρική εικόνα της λύσης περί την γραμμή  $\tau = 1$  (για υποπρόβλημα 2 βλ. σχήμα Γ.10β).

$$y_1(\theta_2) = e(\theta_2/a)Y(\tau(\theta_2/a)) \quad (\text{υποπρόβλημα 1})$$



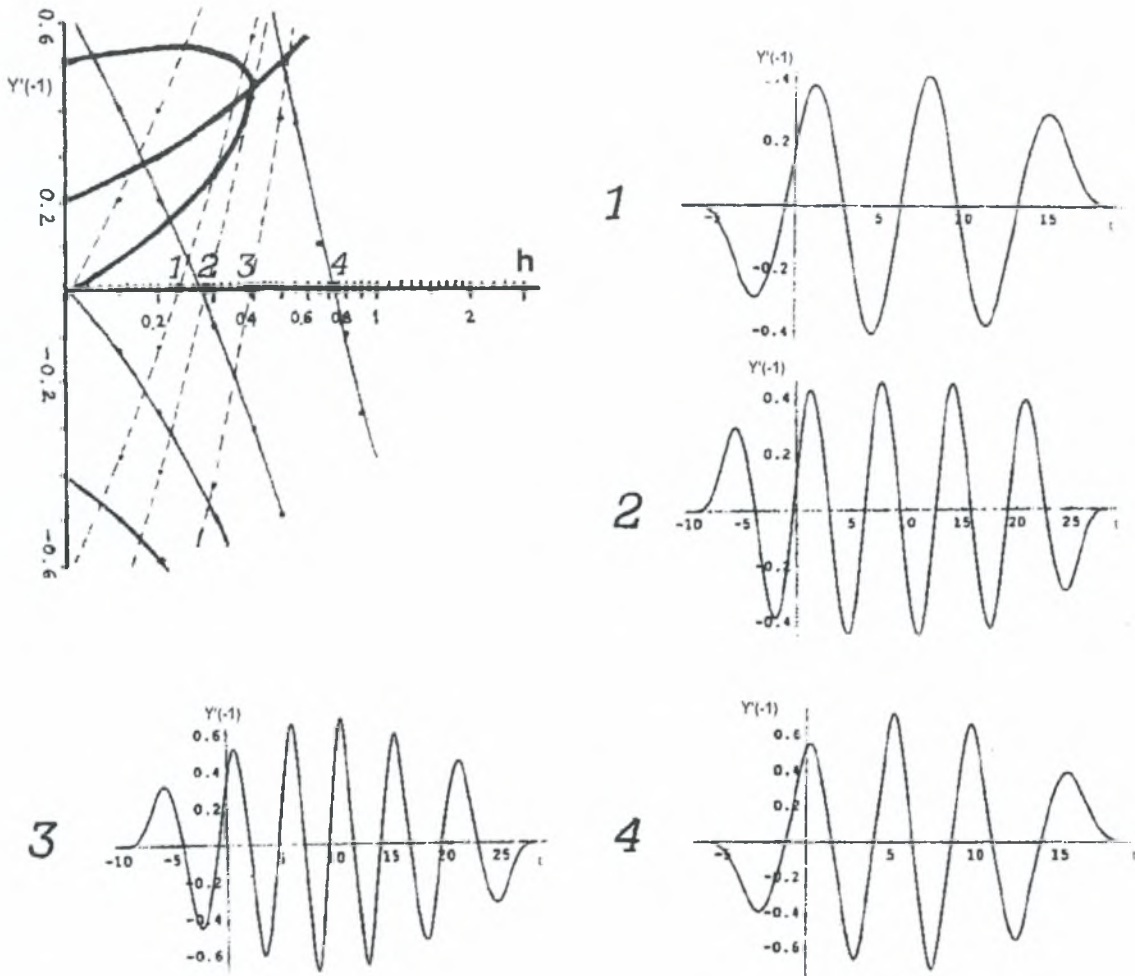
(α)

$$y_1(\theta_2) = X(\tau(\theta_2 / a)) \quad (\text{υποπρόβλημα 2})$$

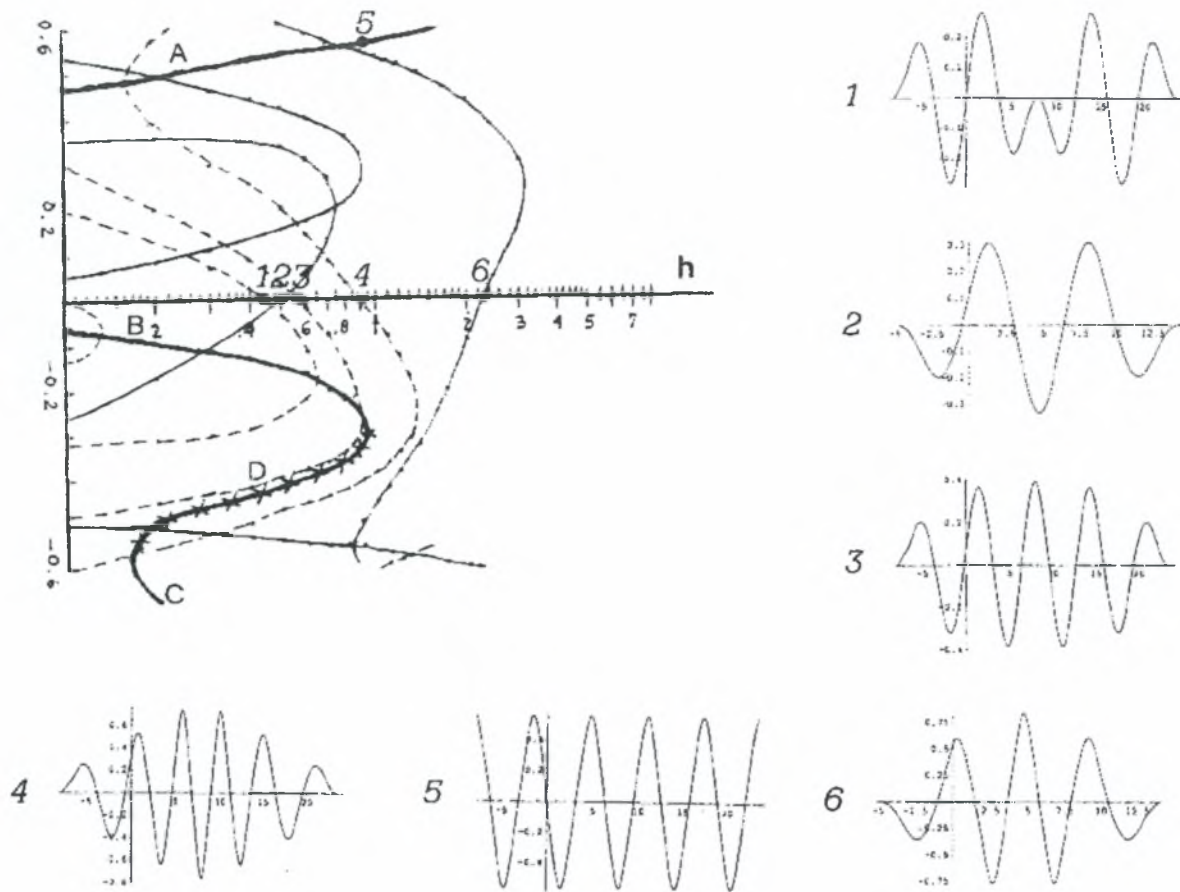


**Σχήμα Γ.10.** Δημιουργία της λύσης  $y_1$  περί μια πλήρη κανονικοποιημένη περίοδο (ιση με 4) από τις ημι-κανονικοποιημένες περιοδικές λύσεις (α)  $eY(t)$  και (β)  $X(t)$

Τα μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών (Γ.21) και (Γ.22) λύθηκαν χρησιμοποιώντας μια αριθμητική μέθοδο στόχευσης απλού σημείου (*single-point numerical shooting method*) μέσω του *Mathematica*. Στα Σχήματα (Γ.10) και (Γ.11) απεικονίζονται οι προεξάρχουσες χαμηλής τάξης υποαρμονικές τροχιές και οι διακλαδώσεις τους για το 2 βαθμών ελευθερίας σύστημα χωρίς απόσβεση με  $\omega_2^2=0.9$ ,  $c=5$ ,  $\varepsilon=0.1$  και μια ποικιλία τιμών της συνολικής ενέργειας  $h$ .



Σχήμα Γ.10. Προεξάρχουσες υποαρμονικές τροχιές, συναρτήσεις του  $h$ , του  $Y'(-1)$  για  $m=1$  (απλή συνεχής γραμμή),  $m=2$  (βαρεία συνεχής γραμμή),  $m=3$  (διακεκομμένη)



**Σχήμα Γ.11.** Προεξάρχουσες  $(2n-1):1$  υποαρμονικές τροχιές συναρτήσεως του  $h$ :

—  $X(-1)$  για  $n=1$ , — -  $X(-1)$  για  $n=2$ , - - -  $X(-1)$  για  $n=3$  και  
 x x x x x ασταθείς 1:1 υποαρμονικές

Σε αυτά τα Σχήματα παρουσιάζονται επίσης μονοπεριοδικές απεικονίσεις ενός αριθμού υποαρμονικών τροχιών. Στην διάγραμμα διακλαδώσεων του Σχήματος Γ.10 φαίνονται οι τιμές  $Y'(-1)$  στις υποαρμονικές τροχιές συναρτήσεως του  $h$  (ότι η περιοχή των λύσεων των παραπάνω μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι  $-1 \leq \tau \leq 1$ ). Σε φυσικούς όρους, κάθε σημείο συμβολίζει την αρχική κλίση  $a y_1'$  της υποαρμονικής τροχιάς αποκρινόμενο στη μηδενική αρχική μετακίνηση  $y_1 = 0$ . Στο Σχήμα Γ.11 έχει σχεδιαστεί το  $X(-1)$  συναρτήσεως του  $h$ . Σε φυσικούς όρους, κάθε σημείο συμβολίζει την αρχική κλίση  $a y_1'$  της υποαρμονικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε μηδενική αρχική μετακίνηση  $y_1 = 0$ . Όμοια, στο Σχήμα Γ.11 φαίνεται το  $X(-1)$  συναρτήσεως του  $h$ , όπου κάθε σημείο συμβολίζει την αρχική μετατόπιση  $y_1$  της

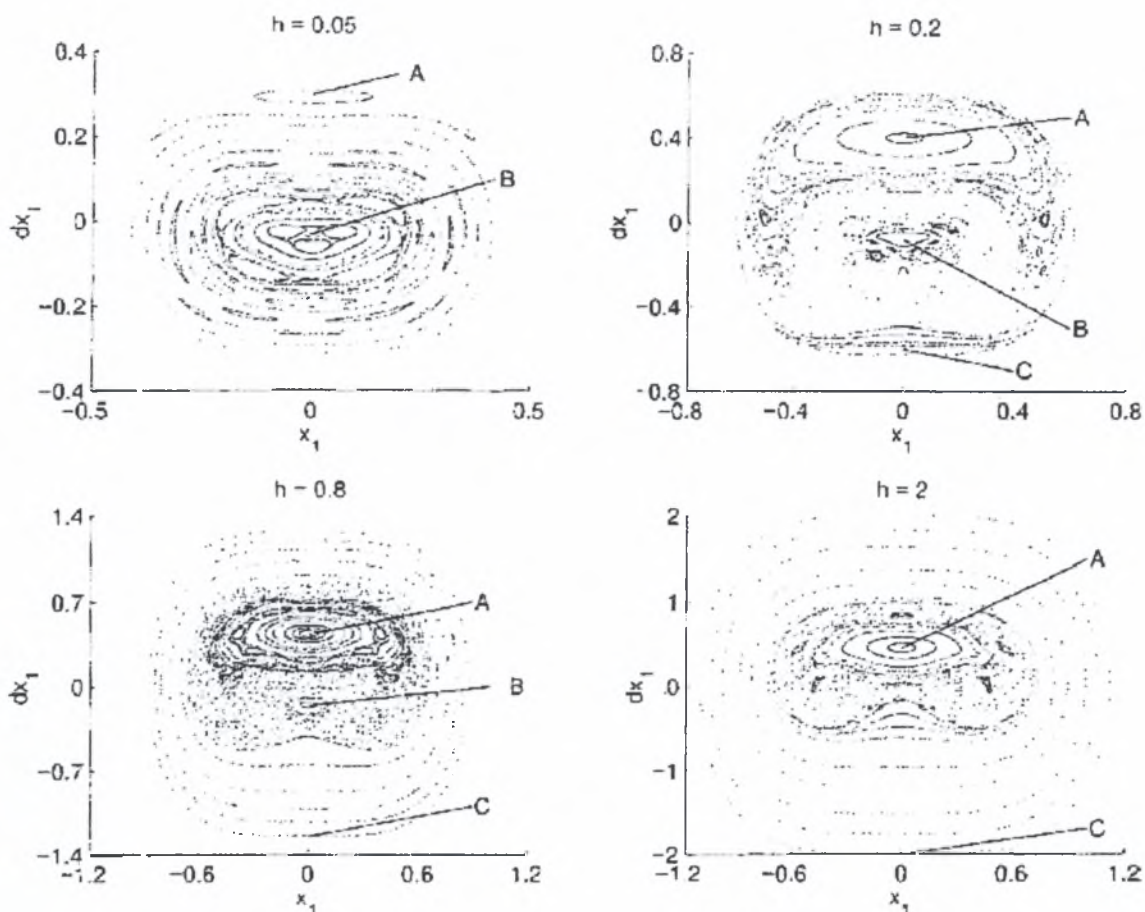


υποαρμονικής τροχιάς, που αντιστοιχεί σε μηδενική αρχική κλίση  $y_1' = 0$ . Αυτά τα γραφήματα απεικονίζουν μόνο τις αποκρίσεις του μη διεγερόμενου ταλαντωτή 1. Οι αντίστοιχες αποκρίσεις του ταλαντωτή 2 υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση (Γ.15) και τις εκφράσεις  $y_2 = \sqrt{2I_2 / \omega_2} \sin \theta_2, \theta_2 = \omega_2 t + \theta_{20} + O(\varepsilon)$ . Τελικά, δίνεται έμφαση στο ότι αφού στο απλοποιημένο σύστημα αμελούνται οι όροι  $O(\varepsilon^2)$ , τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα σχήματα Γ.10 και Γ.11 είναι προσεγγιστικά και ισχύουν μόνο για πραγματικά μικρές τιμές του  $\varepsilon$ . Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι 1:1 υποαρμονικές τροχιές A-D στο σχήμα Γ.11. Αυτές οι τροχιές διέπουν τη δυναμική όπως αποδεικνύεται παρακάτω.

Η περιοχή έλξης και η ευστάθεια των 1:1 υποαρμονικών τροχιών καθορίζονται μέσω απεικονίσεων Poincare. Αυτές κατασκευάζονται με βάση τις αρχικές εξισώσεις χωρίς απόσβεση εξίσωση (Γ.13). Αρχικά ο τεσσάρων διαστάσεων χώρος φάσης των λύσεων της (Γ.13) μειώνεται σε ένα τρισδιάστατο ισοενεργειακό πολλαπλό  $\mathcal{N}$  δίνοντας σταθερή τιμή στη συνολική ενέργεια  $H^\varepsilon(y_1, y_1, y_2, y_2) = h$ . Στη συνέχεια το  $\mathcal{N}$  «κόβεται» από την διατομή (section) Poincare  $\Sigma = \{(y_1, \dot{y}_1, y_2) \in \mathcal{N} / y_2 = 0, \dot{y}_2 > 0\}$ . Η απεικόνιση Poincare  $P^\varepsilon$  ορίζεται ως  $P^\varepsilon : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , δηλαδή ως μια απεικόνιση σημείων πάνω στον  $\Sigma$  επί των ειδώλων τους υπό την ροή του δυναμικού συστήματος πάνω στον  $\Sigma$ , με περιορισμό διατήρησης του προσανατολισμού. Οι σταθερές περιοδικές τροχιές της εξίσωσης (Γ.14) εμφανίζονται σαν κέντρα στην απεικόνιση Poincare, ενώ ότι οι μη σταθερές περιοδικές τροχιές εμφανίζονται ως σημεία σέλας.

Στο σχήμα Γ.12 φαίνονται οι απεικονίσεις Poincare του συστήματος χωρίς απόσβεση (Γ.13) με  $c = 5.0, \varepsilon = 0.1$  και ποικιλία τιμών της ενέργειας  $h$ . Οι 1:1 υποαρμονικές τροχιές ονομαζόμενες A-D, αντιστοιχούν σε αυτές του προσεγγιστικού διαγράμματος διακλαδώσεων του Σχήματος Γ.11. Ένα σύνθητες χαρακτηριστικό όλων αυτών των διαγραμμάτων είναι μια μεγάλη περιοχή κανονικής κίνησης (ομαλές ημι-περιοδικές τροχιές) στις ανώτερες περιοχές των διαγραμμάτων, που περιλαμβάνει την ευσταθή 1:1 υποαρμονική τροχιά A. Όταν προστίθεται απόσβεση στο σύστημα, η

μεγάλη συνήθης περιοχή που περικλείει την τροχιά A αναμένεται να γίνει μια μεγάλη περιοχή έλξης με αυτήν την τροχιά να γίνεται έλκτικη. Επιπρόσθετες ευσταθείς και μη 1:1 υποαρμονικές τροχιές του συστήματος επισημαίνονται στους χάρτες Poincare, επιβεβαιώνοντας τα προσεγγιστικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα του Σχήματος Γ.11.



**Σχήμα Γ.12.** Απεικονίσεις Poincare της δυναμικής του συστήματος χωρίς απόσβεση (Γ.13) για διάφορες τιμές της ενέργειας με  $\omega_2^2=0.90$ ,  $C=0.50$ ,  $\varepsilon=0.1$  και:

$$(\alpha) h=0.05, (\beta) h=0.20, (\gamma) h=0.80, (\delta) h=2.00$$

Σε χαμηλά επίπεδα ενέργειας  $h = 0.05$  υπάρχουν δύο ευσταθείς υποαρμονικές τροχιές, που αμφότερες αντιστοιχούν σε τοπικοποιημένες κινήσεις, με την τροχιά A να περιορίζεται στον ταλαντωτή 1 και η τροχιά B στον ταλαντωτή 2. Σε υψηλότερες τιμές ενέργειας λαμβάνει χώρα η χαμηλής ενέργειας διακλάδωση των 1:1 υποαρμονικών τροχιών (που προβλέφθηκαν στο Σχήμα Γ.12) και υπάρχουν 4 τροχιές, τρεις ευσταθείς και μια ασταθής. Σημειώνεται ότι όσο η  $h$  αυξάνει η τροχιά A

σταδιακά απο-τοπικοποιείται από τον ταλαντωτή 1 και τοπικοποιείται στον ταλαντωτή 2. Οι περιοχές τις χαοτικής κίνησης (η «στοχαστική θάλασσα») στις απεικονίσεις είναι ένα καλά τεκμηριωμένο χαρακτηριστικό στη δυναμική τέτοιων ισχυρά μη γραμμικών συστημάτων.

Το διάγραμμα διακλάδωσης και οι απεικονίσεις Poincare των 1:1 υποαρμονικών τροχιών, οδηγούν σε μια προκαταρκτική ποιοτική εξήγηση του φαινομένου ενεργειακής άντλησης, το οποίο όπως φαίνεται στην προηγούμενη ενότητα εμφανίζεται μόνο πάνω από συγκεκριμένο επίπεδο αρχικής ενέργειας  $h$ . Όταν υφίσταται ενεργειακή άντληση εμφανίζεται μια αρχική μεταφορά ενέργειας από τον απευθείας διεγερόμενο (γραμμικό) ταλαντωτή 2 στον μη διεγερμένο (μη γραμμικό) ταλαντωτή 1. Επιπλέον, η «ταχεία» ταλάντωση κατά τη διάρκεια της αρχικής φάσης της κίνησης έχει μια συχνότητα περίπου ίδια με τη γραμμική φυσική συχνότητα  $\omega_2$ . Ως εκ τούτου, είναι λογικό να εξαχθεί το συμπέρασμα πως **η 1:1 υποαρμονική τροχιά A, η οποία εμφανίζεται για ένα ολόκληρο εύρος του  $h$  και έχοντας μια μεγάλη περιοχή έλξης, είναι κύρια υπεύθυνη για το φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης.** Ωστόσο, αυτή η οικογένεια των τροχιών δεν μπορεί κατευθείαν να διεγερθεί για  $t = 0$ , καθώς δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες  $((y_1(0), \dot{y}_1(0)) = (0,0)$  (αυτή είναι η αρχική κατάσταση του ταλαντωτή 1 όταν το φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης αρχίζει). Ως αποτέλεσμα, θα πρέπει πρώτα να διεγερθεί μια **μεταβατική τροχιά γεφύρωσης**, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες και τελικά να ενωθεί πλήρως με την 1:1 υποαρμονική τροχιά A. Υπό αυτές τις συνθήκες εμφανίζεται το φαινόμενο της ενεργειακής άντλησης. Σημειώνοντας ότι το εύρος της 1:1 τροχιάς έχει ένα κάτω φράγμα περίπου 0.47 (βλ. Σχήμα Γ.11) και θεωρώντας τις αρχικές μεταβατικές κινήσεις των αριθμητικών προσομοιώσεων του Σχήματος Γ.8, εικάζεται ότι, εάν η αρχικές μεταβατικές κινήσεις του ταλαντωτή 1 δεν διαθέτουν αρκετά μεγάλα εύρη, δεν δρουν ως τροχιές γεφύρωσης για να διεγείρουν την 1:1 υποαρμονική τροχιά A και δεν λαμβάνει μέρος ενεργειακή άντληση. *Κατά συνέπεια, για αρκετά χαμηλές τιμές του  $h$  δεν είναι δυνατή η ενεργειακή άντληση. Για υψηλότερες τιμές του  $h$  οι αρχικές μεταβατικές κινήσεις για τον ταλαντωτή 1 επιτυγχάνουν αρκετά μεγάλα εύρη, ώστε να διεγείρουν την 1:1*

τροχιά και να εμφανιστεί ενεργειακή άντληση. Αυτή η εικασία εξηγεί την έλλειψη της ενεργειακής άντλησης για  $b = 0.5$  στις προσομοιώσεις του Σχήματος Γ.8. Τα προηγούμενα επιχειρήματα διαμορφώνουν μόνο μια υπόθεση, αλλά η περισσότερο αυστηρή ανάλυση που ακολουθεί επιβεβαιώνει αυτά τα επιχειρήματα.

### Γ.2.3. Αναλυτικές προσεγγίσεις

Εδώ παρουσιάζεται μια αναλυτική τεχνική, ώστε να προσεγγιστούν οι μεταβατικές αποκρίσεις των Χαμιλτονιανών συστημάτων. Σε αντίθεση με τις περισσότερες τεχνικές, οι οποίες βασίζονται στην υπόθεση της ασθενούς μη γραμμικότητας, η μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ ασχολείται με ισχυρή μη γραμμικότητα του ταλαντωτή 1. Η επέκταση αυτής της τεχνικής για συστήματα με απόσβεση (που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια) θα δώσει την δυνατότητα αναλυτικής προσέγγισης των μεταβατικών αποκρίσεων κατά την διάρκεια της αρχικής φάσης της ενεργειακής άντλησης του Σχήματος Γ.8.

Προς τούτο, εκφράζεται το σύστημα (Γ.13) με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \varepsilon y_1 + C y_1^3 - \varepsilon y_2 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - \varepsilon y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Γ.23})$$

όπου  $\omega^2 = \omega_2^2 + \varepsilon$ . Εισάγεται εδώ ένας μετασχηματισμός σε μιγαδικές συντεταγμένες:

$$\psi_1 = \dot{y}_1 + j\omega y_1, \quad \psi_2 = \dot{y}_2 + j\omega y_2 \quad (\text{Γ.24})$$

και η (Γ.23) επαναγράφεται ως:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 - \frac{j\omega}{2}(\psi_1 + \psi_1^*) - \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_1 - \psi_1^*) + \frac{jC}{8\omega^3}(\psi_1 - \psi_1^*)^3 \\ + \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_2 - \psi_2^*) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Γ.25})$$

$$\dot{\psi}_2 - j\omega\psi_2 + \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_1 - \psi_1^*) = 0$$

όπου το \* δηλώνει συζυγή μιγαδικό.

Αναζητείται μια προσεγγιστική λύση του (Γ.25), βασισμένη στην υπόθεση ύπαρξης «ταχέων» ταλαντώσεων στη συχνότητα  $\omega$ :

$$\psi_1 = \varphi_1 e^{j\omega t}, \quad \psi_2 = \varphi_2 e^{j\omega t} \quad (\Gamma.26)$$

Οι σχέσεις (Γ.26) υποδεικνύουν την παρουσία της 1:1 εσωτερικής ταλάντωσης στην «ταχεία» δυναμική των ταλαντωτών 1 και 2. Αντικαθιστώντας την (Γ.26) στην (Γ.25) και εφαρμόζοντας την μέθοδο των μέσων όρων πάνω στους «ταχείς» περιοδικούς όρους  $e^{j\omega t}$ , βρίσκονται τα παρακάτω συστήματα των εξισώσεων που καθορίζουν τα μιγαδικά εύρη  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{j}{2} \left( \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \varphi_1 - \frac{3jC}{8\omega^3} |\varphi_1|^2 \varphi_1 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \varphi_2 = 0 \quad (\Gamma.27)$$

$$\dot{\varphi}_2 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \varphi_1 = 0$$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι σε αντίθεση με την (Γ.23), το μετασχηματισμένο σύστημα (Γ.27) είναι πλήρως ολοκληρώσιμο, με τα ακόλουθα δυο πρώτα ολοκληρώματα κίνησης:

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = N^2 \quad (\Gamma.28)$$

$$\frac{j\omega}{2} |\varphi_1|^2 - \frac{3jC}{16\omega^3} |\varphi_1|^4 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} (\varphi_1 \varphi_2^* + \varphi_1^* \varphi_2) = H$$

Υιοθετώντας αυτά τα αποτελέσματα τα μιγαδικά εύρη εκφράζονται ως:

$$\varphi_1 = N \sin \theta e^{j\delta_1}, \quad \varphi_2 = N \cos \theta e^{j\delta_2} \quad (\Gamma.29)$$

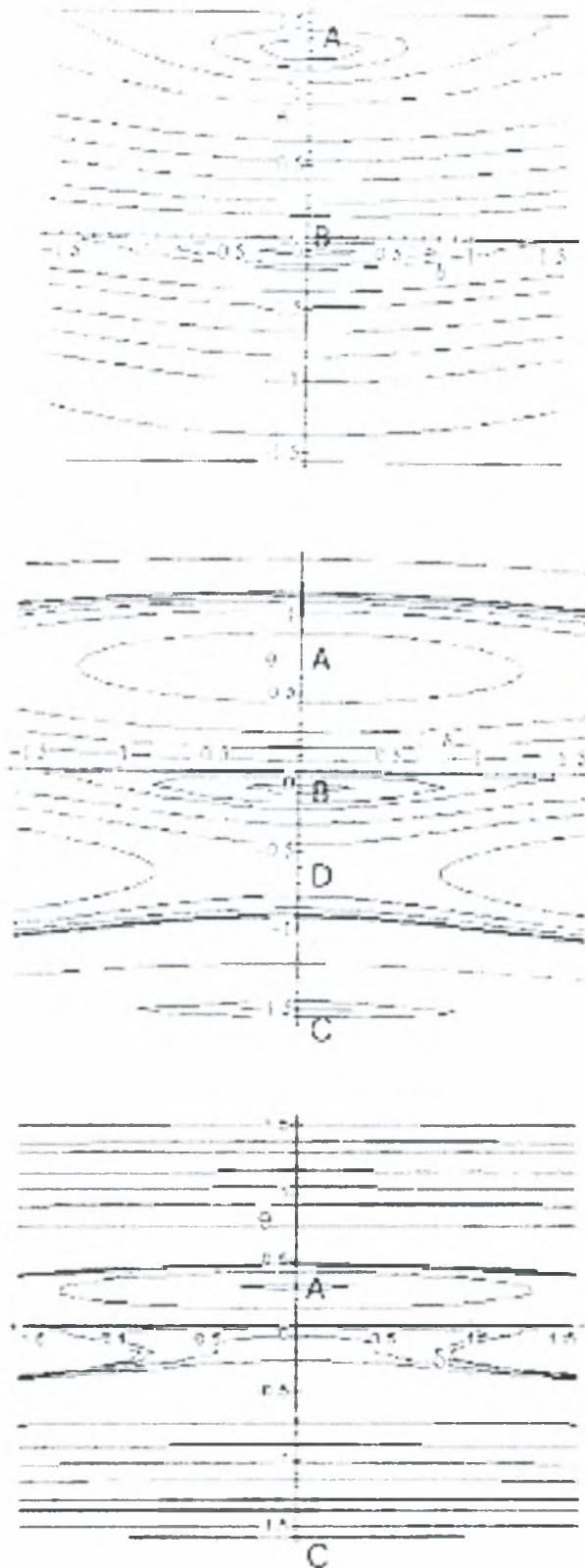
Αντικαθιστώντας τις (Γ.29) στις (Γ.27) καθορίζουμε το τελικό σύστημα των εξισώσεων πάνω στο **2-Τόρο**, που διέπει τις γωνιακές μεταβλητές  $\theta$  και  $\delta = \delta_1 - \delta_2$ :

$$\dot{\delta} + \frac{\omega}{2} - \frac{3CN}{8\omega^3} \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon}{\omega} \cot 2\theta \cos \delta = 0 \quad (\Gamma.30)$$

$$\dot{\theta} + \frac{\varepsilon}{2\omega} \sin \delta = 0$$

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων (Γ.30) μπορούν να μελετηθούν οι μεταβατικές μη περιοδικές τροχιές στην γειτονιά των 1:1 υποαρμονικών τροχιών του υποκείμενου Hamiltonian συστήματος. Στο σχήμα Γ.13 παρουσιάζονται τα διαγράμματα φάσης των (Γ.30) για ποικιλία τιμών του

ομοιάζοντας με ενέργεια πρώτου ολοκληρώματος  $N$ , επιβεβαιώνοντας τις διακλαδώσεις των 1:1 υποαρμονικών τροχιών, οι οποίες απεικονίζονται στις αναλυτικές προσεγγίσεις του Σχήματος Γ.11 και στα αριθμητικά αποτελέσματα του Σχήματος Γ.12.



**Σχήμα Γ.13.** Διαγράμματα φάσης του συστήματος των εξισώσεων (Γ.30) για  $\omega_2^2 = 0.9$ ,  $C = 5.0$ ,  $\varepsilon = 0.1$  και ποικιλία τιμών του πρώτου ολοκληρώματος κίνησης  $N$ : (α)  $N = 0.4$ , (β)  $N = 0.8$ , (γ)  $N = 1.9$

### Γ.2.4 Ανάλυση σύλληψης συντονισμών

Ακολουθώντας την προσεγγιστική τεχνική της προηγούμενης παραγράφου, το σύστημα (Γ.13) ξαναγράφεται με τη μορφή που ακολουθεί:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + \varepsilon \lambda \dot{y}_1 + \varepsilon y_1 + C y_1^3 - \varepsilon y_2 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \varepsilon \lambda \dot{y}_2 + \omega^2 y_2 - \varepsilon y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Γ.31})$$

όπου  $\omega^2 = \omega_2^2 + \varepsilon$ . Εδώ οι συντελεστές απόσβεσης έχουν υποτεθεί  $O(1)$ , σε αντίθεση με το σύστημα (Γ.13). Κατόπιν εισάγονται οι νέες μιγαδικές μεταβλητές

$$\psi_1 = \dot{y}_1 + j\omega y_1 \quad , \quad \psi_2 = \dot{y}_2 + j\omega y_2 \quad , \quad j^2 = -1 \quad (\text{Γ.32})$$

και ως εκ τούτου το σύστημα (Γ.31) μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 - \frac{j\omega}{2}(\psi_1 + \psi_1^*) + \frac{\varepsilon\lambda}{2}(\psi_1 + \psi_1^*) - \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_1 - \psi_1^*) \\ + \frac{jC}{8\omega^3}(\psi_1 - \psi_1^*)^3 + \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_2 - \psi_2^*) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Γ.33})$$

$$\dot{\psi}_2 - j\omega\psi_2 + \frac{\varepsilon\lambda}{2}(\psi_2 + \psi_2^*) + \frac{j\varepsilon}{2\omega}(\psi_1 - \psi_1^*) = 0$$

που αποτελούν ακριβείς σχέσεις.

Αναζητείται εκ νέου μια προσεγγιστική λύση του (Γ.33), βασισμένη στην υπόθεση ύπαρξης «ταχέων» ταλαντώσεων στη συχνότητα  $\omega$ :

$$\psi_1 = \varphi_1 e^{j\omega t} \quad , \quad \psi_2 = \varphi_2 e^{j\omega t}$$

Οι ανωτέρω εκφράσεις φανερώνουν συνθήκη για 1:1 εσωτερικού συντονισμού στην «ταχεία» δυναμική του συστήματος. Αντικαθιστώντας και εφαρμόζοντας την μέθοδο των μέσων όρων επί των «ταχέων» περιοδικών μεταβλητών  $e^{j\omega t}$ , λαμβάνεται το ακόλουθο *averaged* σύστημα, το οποίο για  $\lambda=0$  αναλύθηκε πλήρως στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{j}{2} \left( \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \varphi_1 + \frac{\varepsilon\lambda}{2} \varphi_1 - \frac{3jC}{8\omega^3} |\varphi_1|^2 \varphi_1 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \varphi_2 = 0 \quad (\text{Γ.34})$$

$$\dot{\varphi}_2 + \frac{\varepsilon\lambda}{2} \varphi_2 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \varphi_1 = 0$$



Για να ληφθούν υπ' όψη οι μειώσεις στο εύρος λόγω απόσβεσης, εισάγουμε τις νέες μεταβλητές  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , που ορίζονται ως

$$\varphi_i = \sigma_i \exp(-\varepsilon \lambda t / 2) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (\Gamma.35)$$

οπότε οι (Γ.34) εκφράζονται όπως ακολουθεί:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_1 + \frac{j}{2} \left( \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \right) \sigma_1 - \frac{3jC e^{-\varepsilon \lambda t}}{8\omega^3} |\sigma_1|^2 \sigma_1 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \sigma_2 &= 0 \\ \dot{\sigma}_2 + \frac{j\varepsilon}{2\omega} \sigma_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.36)$$

Μετά από επεξεργασία του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων, αποδεικνύεται ότι διαθέτει το εξής 1<sup>ο</sup> ολοκλήρωμα:

$$|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2 = M^2 \quad (\Gamma.37)$$

γεγονός που δίδει την δυνατότητα έκφρασης των ευρών ταλάντωσης με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\sigma_1 = M \sin \theta e^{j\delta_1} \quad , \quad \sigma_2 = M \cos \theta e^{j\delta_2} \quad (\Gamma.38)$$

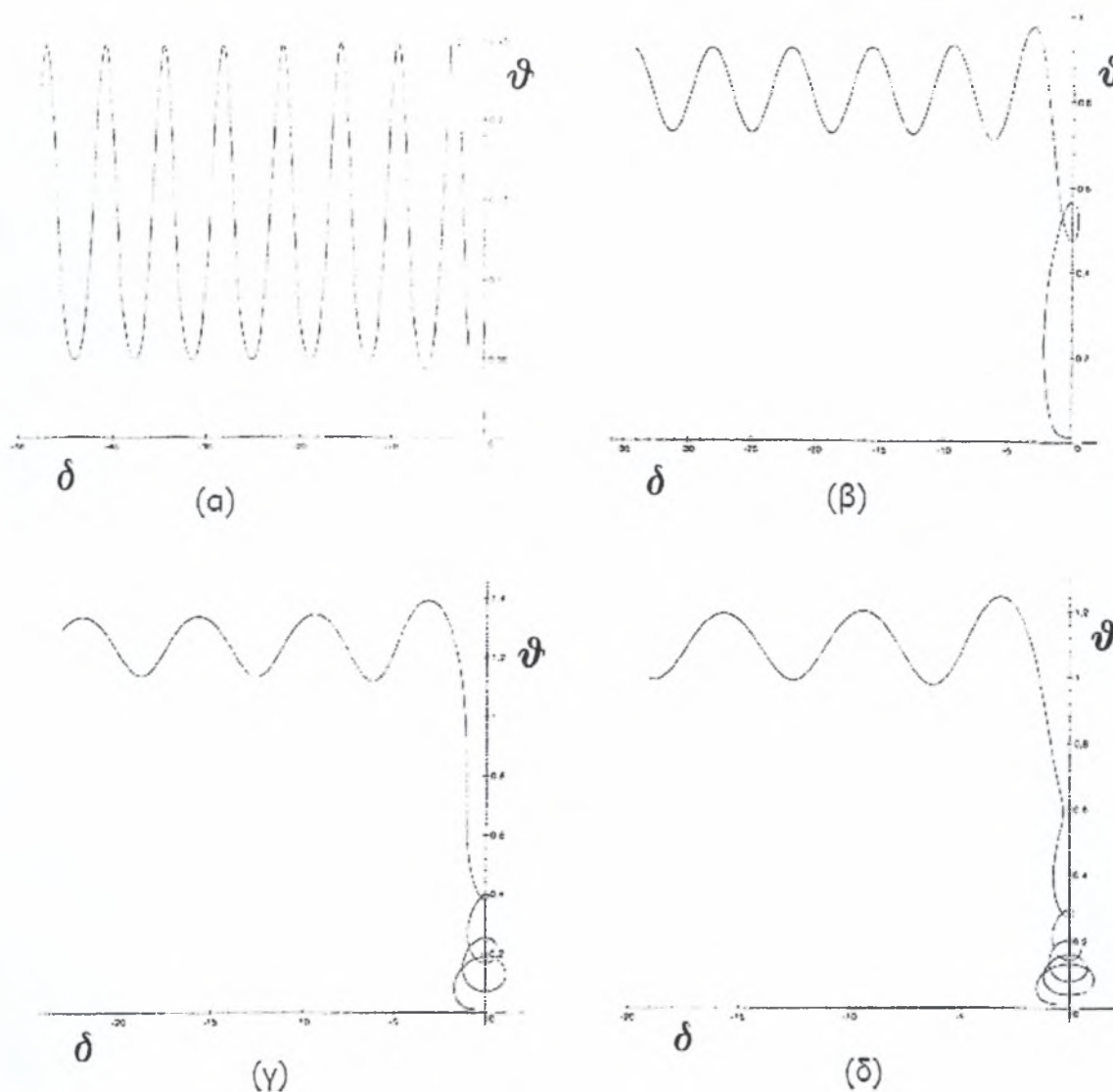
Αντικαθιστώντας τις (Γ.38) στις (Γ.36) και μετά από αλγεβρική επεξεργασία το πρόβλημα καταλήγει σε ένα τελικό σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, εξαρτώμενων από παραμέτρους, επί του 2-τόρου:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\delta} + \frac{\omega}{2} - \frac{3CMe^{-\varepsilon \lambda t}}{8\omega^3} \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon}{\omega} \cot 2\theta \cos \delta &= 0 \\ \dot{\theta} + \frac{\varepsilon}{2\omega} \sin \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.39)$$

όπου  $\delta = \delta_1 - \delta_2$ . Παρόλο που το παραπάνω σύστημα εξισώσεων φαίνεται παρόμοιο με αυτό που βρέθηκε στην ανάλυση του υποκείμενου Χαμιλτονιανού συστήματος [σχέσεις (Γ.30), που είναι ίδιες με τις (Γ.39) αν τεθεί  $Me^{-\varepsilon \lambda t} = N$  στις τελευταίες], η δυναμική του συστήματος με απόσβεση κυριαρχείται από «μεταφορά» των «στιγμιαίων σημείων ισορροπίας», λόγω της ύπαρξης όρου στη (Γ.39), που παρουσιάζει εκθετική μείωση. Σημειωτέον ότι το  $\delta$  υποδηλώνει τη σχετική φάση, ενώ το  $\theta$  προσδιορίζει τα στιγμιαία εύρη των κινήσεων των ταλαντωτών 1 και 2.

Αριθμητικές ολοκληρώσεις του συστήματος (Γ.39) για διάφορες τιμές του αρχικού 1<sup>ου</sup> ολοκληρώματος, αποκαλύπτουν με σαφήνεια την άντληση ενέργειας

καθώς και το φαινόμενο σύλληψης συντονισμού, που συμβαίνει στο σύστημα (Γ.13). Τα σχετικά αποτελέσματα απεικονίζονται στα διαγράμματα φάσης  $(\delta, \theta)$  του Σχήματος Γ.14, για τιμές των παραμέτρων  $\omega=1$ ,  $C=2$ ,  $\varepsilon=0.1$ ,  $\lambda=0.1$  και για αρχικές συνθήκες  $\delta(0)=0$ ,  $\theta(0)=0.10$ .



**Σχήμα Γ.14.** Αριθμητικές λύσεις του συστήματος (Γ.39): (α) χωρίς σύλληψη συντονισμού ( $M=2.8$ ) και (β,γ,δ) με σύλληψη συντονισμού ( $M=4, 10, 15$ )

Τα αριθμητικά αυτά αποτελέσματα αποκτήθηκαν ταιριάζοντας τις μετατοπίσεις και τις ταχύτητες για τους ακόλουθους δύο κλάδους λύσεων:

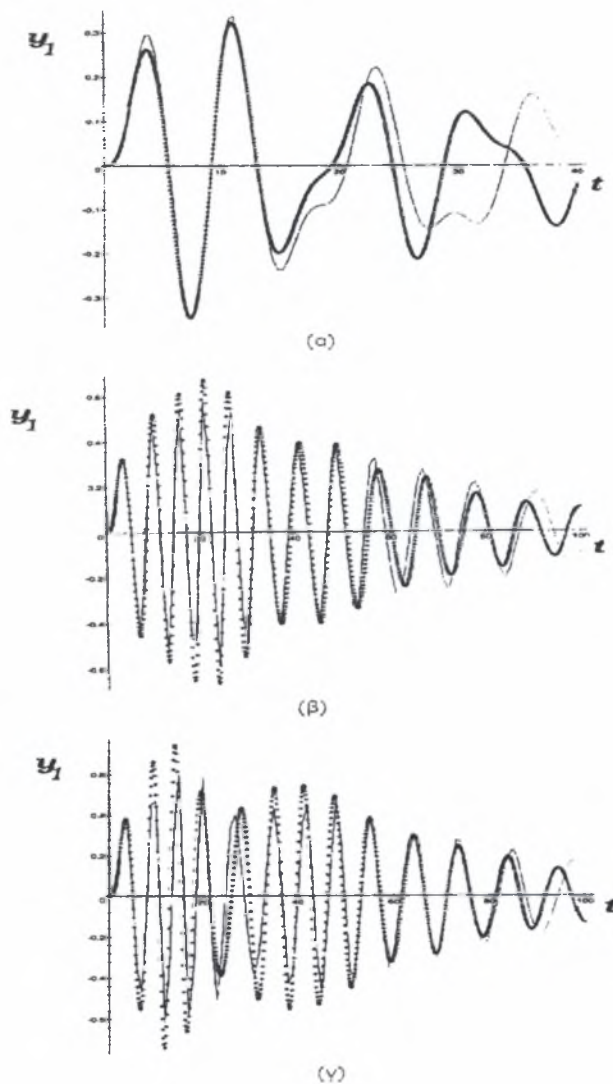
(α) Ο αρχικός κλάδος αποκτήθηκε μέσω αναπτυγμάτων Taylor των αρχικών εξισώσεων κίνησης (Γ.13) κοντά στο  $t = 0$  λαμβάνοντας πλήρως υπ' όψη τις αρχικές συνθήκες του συστήματος και

(β) Ο μετέπειτα κλάδος προήλθε από την αριθμητική επίλυση της αναλυτικής προσέγγισης (Γ.39).

Για  $M = 2.8$ , η αρχική ενέργεια που μεταδόθηκε στον ταλαντωτή 2 παραμένει περιορισμένη στον ταλαντωτή αυτό, καθόσον η ταλάντωση με απόσβεση αντιστοιχεί σε μικρές τιμές του  $\theta$  [σχέση (Γ.38)]. Για υψηλότερες τιμές του  $M$  παρατηρείται άντληση ενέργειας προς τον ταλαντωτή 1, που αντιστοιχεί σε τροχιές που εκκινούν με μικρές τιμές του  $\theta$  και μετά από μερικές μεταβατικές κινήσεις καταλήγουν σε ταλαντώσεις με απόσβεση με  $\theta$  κοντά στο  $\pi/2$ . Ενδιαφέρον δε παρουσιάζει το γεγονός ότι μέσω των αναλυτικών αποτελεσμάτων επιβεβαιώνεται όχι μόνο το φαινόμενο σύλληψης συντονισμού αλλά και σύλληψης των μεταβατικών, όπου η ελκτική περιοχή του συστήματος αρχικά τις συλλαμβάνει και μετά τις απελευθερώνει. Το τελευταίο αυτό δυναμικό φαινόμενο γίνεται αντιληπτό με κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών στις (Γ.39), όπως φαίνεται και στο Σχήμα Γ.14β-δ.

Με σκοπό την σύγκριση των αναλυτικών προβλέψεων με τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα (για το υποκείμενο Χαμιλτονιανό σύστημα), απεικονίζονται στο Σχήμα Γ.15 οι αναλυτικές προσεγγίσεις των μεταβατικών αποκρίσεων του (Γ.13) με βάση τις εξισώσεις (Γ.39), για τιμές των παραμέτρων  $C=5$ ,  $\omega_2^2=0.9$ ,  $\varepsilon=0.1$ ,  $\lambda=0.50$ . Ο δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, πλην της αρχικής ταχύτητας του (γραμμικού) ταλαντωτή 2, που λήφθηκε ίση με  $\dot{y}_2(0) = \sqrt{2h}$ . Στα εν λόγω διαγράμματα (προς σύγκριση) φαίνονται επίσης και τα αποτελέσματα από απ' ευθείας αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος (Γ.13). Ιδιαίτερα, στο Σχήμα Γ.15α, περίπτωση όπου δεν λαμβάνει χώραν άντληση ενέργειας, υπάρχει μικρή συμφωνία μεταξύ των δύο ειδών αποτελεσμάτων. Αντίθετα, στα Σχήματα Γ.15β,γ (όπου υφίσταται ενεργειακή άντληση), παρατηρείται ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ των πραγματικών τιμών των μεταβατικών αποκρίσεων

και των προβλέψεων τους, με μικρές διαφοροποιήσεις εντός κάποιων χρονικών διαστημάτων. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στις προσεγγίσεις μέσου όρου, που εισήχθησαν για να προκύψουν οι εξισώσεις (Γ.34). Από τα αποτελέσματα αυτά τεκμαίρεται ότι, όταν συμβαίνει σύλληψη συντονισμού 1:1, η αναλυτική μέθοδος που προηγήθηκε μπορεί να προβλέπει ικανοποιητικά τις μεταβατικές αποκρίσεις του συστήματος. Τούτο ήταν άλλωστε αναμενόμενο. Καθόσον μέσω των σχέσεων (Γ.33) η όλη ανάλυση βασίστηκε σε 1:1 εσωτερικό συντονισμό της «ταχείας» δυναμικής.



**Σχήμα Γ.15.** Μεταβατική απόκριση  $y_1(t)$  του συστήματος (Γ.13) (α) χωρίς ενεργειακή άντληση ( $b=0.50$ ) και (β,γ) με ενεργειακή άντληση ( $b=0.8, 1.25$ ) \_\_\_\_\_ : αριθμητικές προσομοιώσεις, ○○○○○○○○ : αναλυτικές προσομοιώσεις βάσει των σχέσεων (Γ.39)

### Γ.2.5 Τοπικά προσαρτήματα και ενίσχυση ενεργειακής άντλησης

■ *Γενικές επισημάνσεις*

Στο τελευταίο αυτό εδάφιο του παρόντος Κεφαλαίου παρατίθεται μια μέθοδος βελτιστοποίησης της δυναμικής συμπεριφοράς μιας γραμμικής κατασκευής, η οποία είναι ασθενώς συζευγμένη με ένα τοπικό, ουσιωδώς μη γραμμικό προσάρτημα, με σκοπό την ενίσχυση των ιδιοτήτων ενεργειακής άντλησης του όλου συστήματος. Όπως αποδείχτηκε σε προηγούμενες ενότητες της παρούσας εργασίας, αυτού του τύπου το προσάρτημα, αν σχεδιαστεί κατάλληλα, μπορεί να απορροφήσει παθητικά ενέργεια από την γραμμική μη συντηρητική (με απόσβεση) κατασκευή, αποτελώντας ουσιαστικά μια *δίνη ενέργειας*. Έτσι, λαμβάνει χώραν άντληση ενέργειας από τη γραμμική κατασκευή προς το μη γραμμικό προσάρτημα, δηλαδή *μονόδρομη, μη αναστρέψιμη μεταφορά ενέργειας*. Η ενεργειακή άντληση οφείλεται στη σύλληψη 1:1 συντονισμού, ένα μεταβατικό δυναμικό φαινόμενο, που συμβαίνει (μεταξύ άλλων δυναμικών συστημάτων) και σε συζευγμένους μη γραμμικούς ταλαντωτές και οδηγεί σε σύλληψη μεταβατικού συντονισμού της δυναμικής ροής επί ενός 1:1 πολλαπλού συντονισμού του συστήματος.

Η φυσική σημασία του όλου φαινομένου γίνεται αντιληπτή και εξηγείται μέσω της μελέτης της ενεργειακής εξάρτησης των μη γραμμικών ελεύθερων περιοδικών λύσεων (δηλαδή των Μη Γραμμικών Δυναμικών Μορφών) του αντίστοιχου συντηρητικού συστήματος, που αποκτάται μηδενίζοντας όλες τις μη συντηρητικές δυνάμεις. Προς τούτο, θεωρούμε ένα σύστημα, που συντίθεται από μια γραμμική υπο - κατασκευή με  $(N+1)$  βαθμούς ελευθερίας, η οποία είναι ασθενώς συζευγμένη με ένα τοπικό ουσιωδώς μη γραμμικό προσάρτημα στο σημείο  $O$ , η δε απόκριση της γραμμικής υπο - κατασκευής στο σημείο αυτό ορίζεται ως  $y_0(t)$ . Το προσάρτημα διαθέτει μη γραμμικότητα δυσκαμψίας (μη δυνάμενη να γραμμικοποιηθεί) τρίτης τάξης εν παραλλήλω με μια συσκευή εξασθενηστήρα ιζώδους απόσβεσης, που προσομοιάζει απορρόφησης ενέργειας. Η δυσκαμψία σύζευξης μεταξύ του γραμμικού και μη γραμμικού μέρους θεωρείται γραμμική και ασθενής τάξης  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Επιπρόσθετα, η σύνδεση μεταξύ των δύο υποσυστημάτων πραγματοποιείται μέσω μιας μοναδικής συντεταγμένης σύζευξης. Εισάγοντας

(ιδιο)μορφικές συντεταγμένες για τη γραμμική υπο – κατασκευή και θεωρώντας ασθενή απόσβεση, η μετατόπιση της στο σημείο σύνδεσης εκφράζεται ως:

$$y_0(t) = \sum_{k=0}^N \varphi_0^{(i)} \alpha_k(t) \quad (\Gamma.40\alpha)$$

και οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος με την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + Cv^3(t) + \varepsilon \dot{v}(t) + \varepsilon \left( v - \sum_{k=0}^N \varphi_0^{(k)} \alpha_k(t) \right) &= 0 \\ \ddot{\alpha}_m(t) + \omega_m^2 \alpha_m(t) + \varepsilon \dot{\alpha}_m(t) + \varepsilon \left( \sum_{k=0}^N \varphi_0^{(k)} \varphi_0^{(m)} \alpha_k(t) - \varphi_0^{(m)} v(t) \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.40\beta)$$

όπου  $\alpha_k(t)$ ,  $k=0,1,\dots,N$  είναι ιδιομορφικά εύρη,  $\varphi_j^{(i)}$  το  $j$  στοιχείο του  $i$  – ιδιοδιανύσματος  $\varphi^{(i)}$  του μη συζευγμένου γραμμικού υποσυστήματος, με  $\varepsilon=0$ . Υποθέτουμε ότι αυτό διαθέτει  $(N+1)$  ιδιοδιανύσματα  $\varphi^{(i)}$  που αντιστοιχούν σε  $N+1$  διακριτές ιδιοσυχνότητες  $\omega_i$ ,  $i=0,1,\dots,N$ . Θεωρώντας ότι η γραμμική υπο – κατασκευή διεγείρεται από μια ωστική διέγερση της μορφής  $F(t) = Y\delta(t)\delta(y - y_p)$  στο σημείο  $p$  (όπου  $y$ ,  $y_p$  τοπικές συντεταγμένες του στοιχείου), η απόκριση του συστήματος για  $t = 0+$  είναι μια ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές συνθήκες  $\alpha_i(0+) = 0$ ,  $\dot{\alpha}_i(0+) = Y\varphi_p^{(i)}$ ,  $v(0+) = \dot{v}(0+) = 0$ ,  $i = 1,2,\dots,N$ .

Η ενεργειακή άντληση από το μη γραμμικό υποσύστημα προς τον μη γραμμικό ταλαντωτή συμβαίνει υπό την συνθήκη σύλληψης 1:1 συντονισμού, όπου ο μη γραμμικός ταλαντωτής συντονίζεται μεταβατικά με μια γραμμική μορφή, και η ενέργεια μεταφέρεται (αντλείται) προς το προσάρτημα με τρόπο μονόδρομο και μη αναστρέψιμο. Στην περίπτωση αυτή το μη γραμμικό προσάρτημα δρα σαν μια **Μη Γραμμική Ενεργειακή Δίνη (ΜΓΕΔ)**. Σε ότι ακολουθεί (και χωρίς απώλεια της γενικότητας) η ανάλυση εστιάζεται σε αλληλεπιδράσεις συντονισμών, που περιλαμβάνουν μόνο την προεξάρχουσα (μηδενική) κανονική μορφή της υπο – κατασκευής (υπενθυμίζεται ότι το  $i$  μεταβάλλεται από 0 έως  $N$ ). Επίσης, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες τέτοιου αλληλεπιδράσεις ( $\omega_p, \omega_m, \dots, \omega_k$ ), που περιλαμβάνουν καθαρά (ιδιο)μορφικούς ταλαντωτές, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν άλλοι εσωτερικοί

συντονισμοί, παρά μόνον θεωρηθείς συντονισμός ( $\omega:\omega_0$ ) μεταξύ της ΜΓΕΔ και του ταλαντωτή μηδενικής ιδιομορφής.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η απόσβεση είναι προαπαιτούμενη για την εμφάνιση – ύπαρξη ενεργειακής άντλησης. Παρά ταύτα, το παράδοξο γεγονός είναι ότι η τοπολογική δομή στο χώρο παραμέτρων των ελεύθερων σύγχρονων περιοδικών λύσεων (δηλαδή των μη γραμμικών κανονικών μορφών) του συστήματος χωρίς απόσβεση και χωρίς διέγερση (Γ40.β) είναι βασικά υπεύθυνη για την ενεργειακή άντληση στο αντίστοιχο εξαναγκασμένο (διεγειρόμενο) σύστημα με απόσβεση. Τούτο οφείλεται στο ότι αιτία του φαινομένου αυτού είναι η διέγερση ενός αμετάβλητου πολλαπλού μη γραμμικών κανονικών μορφών με απόσβεση, που αποτελεί αναλυτική συνέχιση μιας ΜΓΚΜ του αντίστοιχου συστήματος χωρίς απόσβεση. Άρα, λογικά συμπεραίνει κανείς ότι μέσω κατάλληλου σχεδιασμού των ΜΓΚΜ του συστήματος ΧΩΡΙΣ απόσβεση, μπορεί να ενισχυθεί το φαινόμενο της άντλησης ενέργειας στο σύστημα ΜΕ απόσβεση, δηλαδή να επιτευχθεί αυξημένη μεταφορά ενέργειας από τη γραμμική υπο – κατασκευή προς την ΜΓΕΔ.

Προς τούτο, θέτοντας  $\lambda=0$  στην (Γ.40β) και αμελώντας τις αρχικές συνθήκες διέγερσης, η εν λόγω εξίσωση διαχωριζόμενη γράφεται πλέον ως:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + Cv^3(t) + \varepsilon \left( v(t) + \varphi_0^{(0)} \alpha_0(t) - \sum_{k=1}^N \varphi_0^{(k)} \alpha_k(t) \right) &= 0 \\ \ddot{\alpha}_0(t) + \omega_0^2 \alpha_0(t) + \varepsilon \left( \varphi_0^{(0)'} \alpha_0(t) - \varphi_0^{(0)} v(t) + \sum_{k=1}^N \varphi_0^{(k)} \varphi_0^{(0)} \alpha_k(t) \right) &= 0 \\ \ddot{\alpha}_m(t) + \omega_m^2 \alpha_m(t) + \varepsilon \left( \sum_{k=1}^N \varphi_0^{(k)} \varphi_0^{(m)} \alpha_k(t) - \varphi_m^{(0)} v(t) \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.41)$$

Αναζητούμε μη γραμμικές κανονικές μορφές του εν λόγω συστήματος με συχνότητες πλησίον της  $\omega_0$ . Τούτο επιτυγχάνεται με την εισαγωγή (όπως και σε προηγούμενες καταστάσεις) των ακόλουθων νέων μιγαδικών μεταβλητών:

$$\psi_v = \dot{v} + j\omega_0 v, \quad \psi_0 = \dot{\alpha}_0 + j\omega_0 \alpha_0, \quad \psi_m = \dot{\alpha}_m + j\omega_m \alpha_m \quad m = 1, 2, \dots, N$$

και εκφράζοντας αυτές ως

$$\psi_v = c_v e^{j\gamma v} e^{j\omega_0 t}, \quad \psi_0 = c_0 e^{j\gamma_0} e^{j\omega_0 t}, \quad \psi_m = c_m e^{j\gamma_m} e^{j\omega_m t} \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (\Gamma.42)$$

όπου τα εύρη  $c_i$  και οι φάσεις  $\gamma_i$  θεωρούνται ως «αργά» μεταβαλλόμενες διαμορφώσεις της «ταχείας» ταλάντωσης  $e^{j\omega_0 t}$ . Ως εκ τούτου, πραγματοποιείται διαχωρισμός μεταξύ «αργής» και «ταχείας» δυναμικής. Ζητώντας λύσεις, που αντιστοιχούν σε σταθερά εύρη, αποκτώνται οι ακόλουθες σχέσεις για τα εύρη αυτά:

$$\left. \begin{aligned} c_0^2 + c_v^2 &= \rho^2 \\ \frac{\varepsilon_0}{2\omega_0} \left\{ \varphi_0^{(0)2} - 1 + \varphi_0^{(0)} \left[ \frac{c_0}{c_v} - \frac{c_v}{c_0} \right] \right\} + \frac{\omega_0}{2} - \frac{3Cc_v^2}{8\omega_0^3} &= 0 \\ c_m &= 0, \quad m = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.43\alpha)$$

αλλά και για τις φάσεις

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_v &= \frac{1}{c_v} \left[ -\frac{\omega_0}{2} c_v + \frac{3C}{8\omega_0^3} c_v^3 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (c_v - \varphi_0^{(0)} c_0) \right] \\ &= \dot{\gamma}_0 = \frac{1}{c_0} \left[ \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\varphi_0^{(0)2} - \varphi_0^{(0)} c_v) \right] \end{aligned} \quad (\Gamma.43\beta)$$

$$\dot{\gamma}_m = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \varphi_0^{(m)2} \left( \frac{\omega_0}{\omega_m} \right), \quad m = 1, \dots, N$$

Η ποσότητα  $\rho$  (που μοιάζει με ενεργειακή) διατηρείται κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων συντονισμού μεταξύ ΜΓΕΔ και μηδενικής ιδιομορφής, ενώ τα εύρη των μη συντονιζόμενων μορφών τέθηκαν ίσα με μηδέν, χωρίς απώλεια της γενικότητας, αφού με κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών του προβλήματος η συνθήκη αυτή πάντοτε ικανοποιείται. Οι εξισώσεις (Γ.43β) καταδεικνύουν ότι οι διαμορφώσεις φάσης είναι  $O(\varepsilon)$  και κατά συνέπεια μικρές.

Για σταθερές παραμέτρους της κατασκευής και δεδομένη την τιμή της ενεργειακής υψής ποσότητας  $\rho$ , το σύστημα (Γ.43α) αντιπροσωπεύει ένα σύστημα δύο πεπλεγμένων (συζευγμένων) αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τα εύρη  $c_v$  (της μη γραμμικής ενεργειακής δίνης) και  $c_0$  (του μηδενικής τάξης ιδιομορφικού ταλαντωτή της γραμμικής υπο – κατασκευής). Κατ' ουσία δηλαδή, το όλο πρόβλημα τελικά οδηγείται στη μελέτη ενός ισοδύναμου συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας. Με βάση δε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που προηγήθηκε, καταλήγουμε στις



ακόλουθες προσεγγιστικές λύσεις για τις κινήσεις της ΜΓΕΔ και για το σημείο σύνδεσης με το κύριο υποσύστημα:

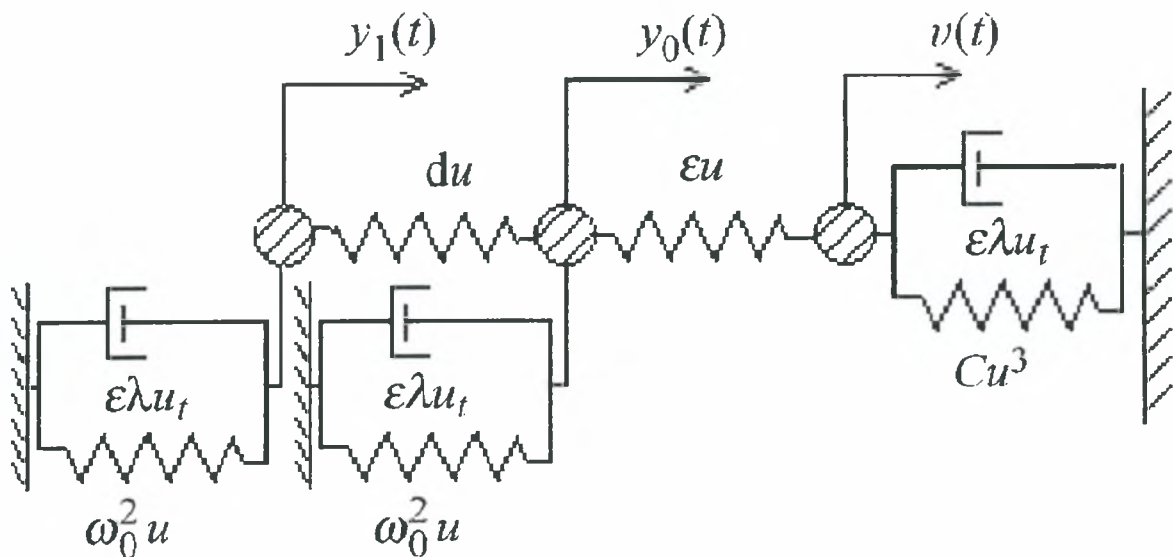
$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \frac{c_v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \gamma_v(t) + O(\varepsilon^2)) + O(\varepsilon) \\ \dot{v}(t) &= c_v \cos(\omega_0 t + \gamma_v(t) + O(\varepsilon^2)) + O(\varepsilon) \\ y_0(t) &= \varphi_0^{(0)} \frac{c_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \gamma_v(t) + O(\varepsilon^2)) + O(\varepsilon) \\ \dot{y}_0(t) &= \varphi_0^{(0)} c_0 \cos(\omega_0 t + \gamma_v(t) + O(\varepsilon^2)) + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.44)$$

Η αντιστοιχούσα συχνότητα της σύγχρονης ταλάντωσης του συνδυασμένου συστήματος, όταν αυτό ταλαντώνεται πάνω στη ΜΓΚΜ προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$\Omega_0 \approx \omega_0 + \dot{\gamma}_v = \omega_0 + \dot{\gamma}_0 = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left( \varphi_0^{(0)2} - \varphi_0^{(0)} \frac{c_v}{c_0} \right) \quad (\Gamma.45)$$

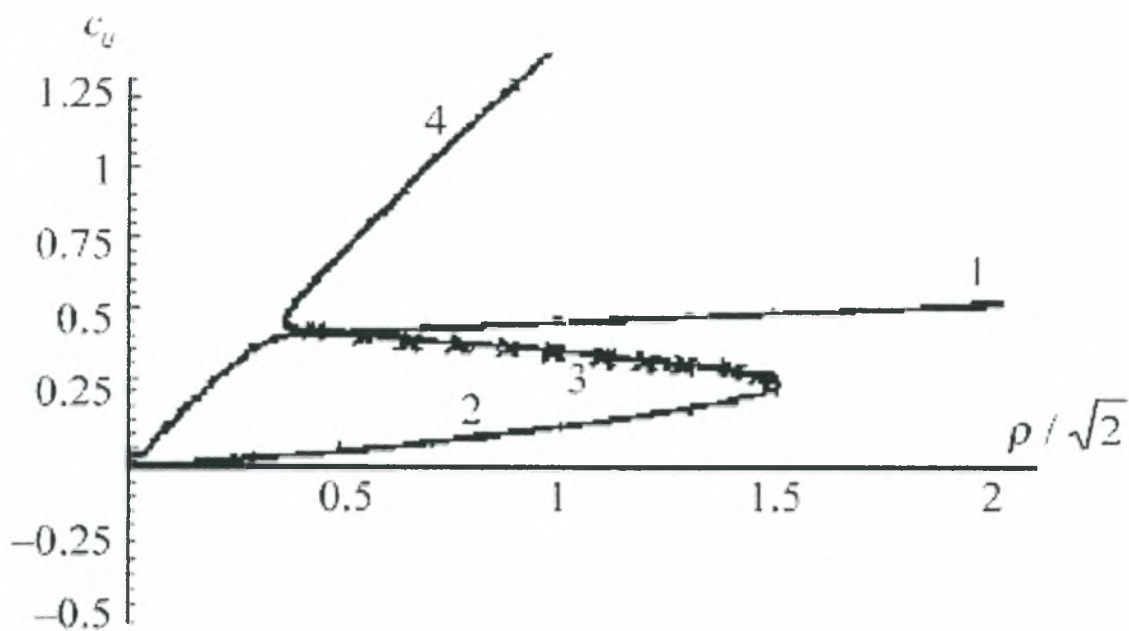
που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την επιθυμία να έχει τιμή κοντά σε αυτή της  $\omega_0$ .

Ως αριθμητική εφαρμογή, θεωρούμε μια γραμμική υπο – κατασκευή αποτελούμενη από δύο συζευγμένους ταλαντωτές μοναδιαίας μάζας, ασθενώς συζευγμένους με έναν ουσιωδώς μη γραμμικό ταλαντωτή, όπως στο Σχήμα Γ.16.

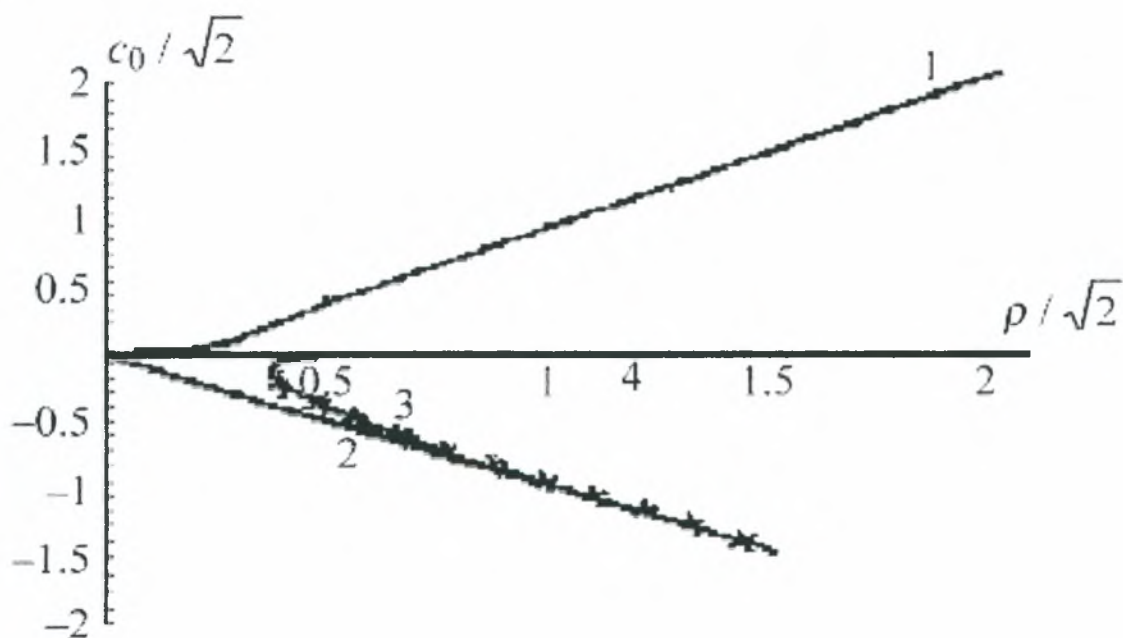


Σχήμα Γ.16. Διβάθμια γραμμική υπο – κατασκευή με ένα ουσιωδώς μη γραμμικό προσάρτημα

Επίσης, στο Σχήμα Γ.17 απεικονίζονται τα εύρη  $c_v$  και  $c_0/\sqrt{2}$  ως συναρτήσεις της παραμέτρου  $\rho$  για  $\omega_0=0.9487$ ,  $\omega_1=1.3784$ ,  $d=0.50$ ,  $C=5$ ,  $\varepsilon=0.1$  και  $\varphi_0^{(0)}=1/\sqrt{2}$ .



(α)



(β)

Σχήμα Γ.17. Εύρη  $c_v$  (α) και  $c_0/\sqrt{2}$  (β) σαν συναρτήσεις της ενεργειακής υψής παραμέτρου  $\rho$  για μη γραμμικές κανονικές μορφές στη γειτονιά της χαμηλότερης γραμμικής ιδιομορφής: \_\_\_\_\_ = ευσταθείς, x x x = ασταθείς λύσεις

Για ικανά υψηλές ενέργειες, η ΜΓΚΜ 1 αντιστοιχεί σε μια μεγάλου εύρους κίνηση της γραμμικής υπο – κατασκευής στην εντός φάσης κίνηση της και σε μια μεσαίου εύρους κίνηση του μη γραμμικού ταλαντωτή. Η ΜΓΚΜ αυτή φθάνει (για αρκετά υψηλά επίπεδα ενέργειας) για το μεν  $\epsilon_0$ , μια στάθμη σχεδόν κορεσμού<sup>1</sup>, για δε το  $\epsilon_0$  μια στάθμη σχεδόν αναλογίας<sup>2</sup> με την αύξηση της ενέργειας.

Ας θεωρηθεί τώρα το σύστημα με απόσβεση, διεγερόμενο από ένα σύνολο ώσεων<sup>3</sup>, που διεγείρουν μόνο την μηδενική γραμμική ιδιομορφή, οπότε εκκινώντας από  $t=0+$  το σύστημα ταλαντώνεται ελεύθερα. Στο δε σύστημα με απόσβεση, οι ΜΓΚΜ καθίστανται αμετάβλητα πολλαπλά μη γραμμικών κανονικών μορφών με απόσβεση και οι περιοδικές κινήσεις μετασχηματίζονται σε φθίνουσες. Για αρκετά ισχυρές ωστικές δυνάμεις, δηλαδή για μεγάλη αρχική ενέργεια, η διέγερση της αποσβενόμενης αναλυτικής συνέχισης της ΜΓΚΜ 1 είναι αυτή που οδηγεί στην έναρξη άντλησης ενέργειας στο σύστημα με απόσβεση. Τούτο καθόσον για ικανά υψηλές ενέργειες, αυτή είναι η μοναδική μορφή που διαθέτει αρχικές συνθήκες σχεδόν συμβατές με την αρχική κατάσταση του συστήματος για  $t=0+$ . Βέβαια, αναμένεται επίσης και κάποια διέγερση της αποσβενόμενης συνέχισης της ΜΓΚΜ 4, που όμως θα είναι ιδιαίτερα ασθενής, λόγω μη συμβατότητας αρχικών συνθηκών. Όντως, το επίπεδο σχεδόν κορεσμού που φθάνει το  $\epsilon_0$  για μεγάλη τιμή της ενέργειας δίδει μια εκτίμηση του μέγιστου εύρους, στο οποίο θα φθάσει ο μη γραμμικός ταλαντωτής κατά την ενεργειακή άντληση. Αντίθετα, μικρές ή μεσαίες ώσεις διεγείρουν την αποσβενόμενη συνέχιση της ΜΓΚΜ 2 και συνεπώς δεν οδηγούμεθα σε εκκίνηση ισχυρής ενεργειακής άντλησης.

Άρα, σύμφωνα με τα ανωτέρω εκτεθέντα, η ενίσχυση της ενεργειακής άντλησης (δηλαδή η αύξηση του εύρους ταλάντωσης της μη γραμμικής ενεργειακής δίνης για ικανά ισχυρές αρχικές ώσεις) εμπεριέχει αύξηση του επιπέδου (της στάθμης) σχεδόν κορεσμού του  $\epsilon_0$  για το μη διεγερόμενο σύστημα χωρίς απόσβεση για υψηλές ενεργειακές στάθμες.

---

<sup>1</sup> near - saturation

<sup>2</sup> near - proportional

<sup>3</sup> impulses

Άρα, σύμφωνα με τα ανωτέρω εκτεθέντα, η ενίσχυση της ενεργειακής άντλησης (δηλαδή η αύξηση του εύρους ταλάντωσης της μη γραμμικής ενεργειακής δίνης για ικανά ισχυρές αρχικές ώσεις) εμπεριέχει αύξηση του επιπέδου (της στάθμης) σχεδόν κορεσμού του  $c_v$  για το μη διεγερόμενο σύστημα χωρίς απόσβεση για υψηλές ενεργειακές στάθμες.

▪ *Σχεδιασμός για ενισχυμένη ενεργειακή άντληση*

Με σκοπό τον υπολογισμό μιας ασυμπτωτικής προσέγγισης, η οποία θα είναι ικανή να περιγράψει την συμπεριφορά της ΜΓΚΜ 1 του γενικού συστήματος για υψηλές ενεργειακές στάθμες, εισάγονται οι μετασχηματισμοί μεταβλητών

$$\lambda = \frac{c_v}{\rho}, \quad \sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{c_0}{\rho}$$

και επανειφράζονται οι εξισώσεις (Γ.43α) ως εξής:

$$\frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ \dot{\phi}_0^{(0)2} - 1 + \dot{\phi}_0^{(0)} \left( \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \right] + \frac{\omega_0}{2} - \frac{3C\rho^2\lambda^2}{8\omega_0^3} = 0 \quad (\Gamma.46)$$

Ενδιαφερόμενοι για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της ανωτέρω εξίσωσης για  $\rho \gg 1$ , που αντιστοιχεί στην ΜΓΚΜ 1, εισάγεται μια μικρή παράμετρος  $\mu = \rho^{-1}$ , οπότε η (Γ.46) γράφεται ως:

$$\mu^2 \left\{ \left[ \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\dot{\phi}_0^{(0)2} - 1) + \frac{\omega_0}{2} \right] - \frac{\varepsilon\dot{\phi}_0^{(0)}}{2\omega_0} \left( \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \right\} - \frac{3C\lambda^2}{8\omega_0^3} = 0 \quad (\Gamma.47)$$

Για  $\mu \rightarrow 0$  ζητείται η ασυμπτωτική λύση της ΜΓΚΜ 1, που αντιστοιχεί σε μεγάλα εύρη για το  $c_0$  και μέτρια εύρη για το  $c_v$ . Για την ικανοποίηση των απαιτήσεων αυτών πραγματοποιείται αλλαγή κλίμακας της ασυμπτωτικής λύσης της αντιστοιχούσας στην ΜΓΚΜ 1 ως εξής:

$$x = x_0\mu^{2/3} + x_1\mu + x_2\mu^{4/3} + x_3\mu^{5/3} + O(\mu^2), \quad \mu \rightarrow 0 \quad (\Gamma.48)$$

Αντικαθιστώντας κατόπιν την (Γ.48) στην (Γ.47) και ταιριάζοντας τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του  $\mu$ , καταλήγουμε στις ακόλουθες αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών της λύσης σε σειρές:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}}{3C} \right)^{1/3}, & \lambda_2 &= \frac{[4\omega_0^4 + 4\varepsilon\omega_0^2(\phi_0^{(0)2} - 1)]\lambda_1^2}{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)} + 6C\lambda_1^3} \\ \lambda_3 &= \lambda_3 = 0 \dots \end{aligned} \quad (\Gamma.49)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, αποκτάται η παρακάτω ασυμπτωτική λύση της ΜΓΚΜ 1 στο όριο των υψηλής στάθμης ενεργειών:

$$\begin{aligned} c_p &= \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}}{3C} \right)^{1/3} \rho^{1/3} + \\ &+ \frac{[4\omega_0^4 + 4\varepsilon\omega_0^2(\phi_0^{(0)2} - 1)](4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)^{2/3}}{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)} + 6C(4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)} \rho^{-1/3} + O(\rho^{-1}) \\ c_0 &= \rho - \frac{1}{2} \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}}{3C} \right)^{2/3} \rho^{-1/3} - \\ &- \frac{[4\omega_0^4 + 4\varepsilon\omega_0^2(\phi_0^{(0)2} - 1)](4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)}{4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)} + 6C(4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)} \rho^{-1} + O(\rho^{-5/3}) \quad \rho \gg 1 \end{aligned} \quad (\Gamma.50)$$

Προκύπτει άμεσα ότι το αναφερθέν εύρος του  $c_p$  εξαρτάται κυρίως από τον όρο

$$(4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)^{1/3} \rho^{1/3}$$

λόγω δε και των (Γ.44) τεκμαίρεται ότι ο σχεδιασμός του συστήματος προς ενίσχυση της ενεργειακής άντλησης από τη γραμμική υπο – κατασκευή στο μη γραμμικό ταλαντωτή (προσάρτημα) (δηλ. την αύξηση του εύρους  $u(t)$ ) πρέπει να περιλαμβάνει την αύξηση του κάτωθι όρου

$$(1/\omega_0)(4\varepsilon\omega_0^2\phi_0^{(0)}/3C)^{1/3} \rho^{1/3} = (4\varepsilon\phi_0^{(0)}/3C\omega_0)^{1/3} \rho^{1/3}$$

Επιπρόσθετα, αυτός ο ασυμπτωτικός όρος προεξάρχουσας τάξης θα πρέπει να δίδει μια εκτίμηση του μέγιστου εύρους του μη γραμμικού ταλαντωτή για μεγάλες τιμές της ενέργειας κατά τη διάρκεια της ενεργειακής άντλησης. Τελικά, ο προεξάρχων ασυμπτωτικός όρος που περιγράφει τη μείωση του  $c_0$  κατά την άντληση ενέργειας είναι ο ακόλουθος:

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^{1/2}\phi_0^{(0)}}{3C} \right)^{2/3} \rho^{-1/3}$$

▪ *Αριθμητική εφαρμογή*

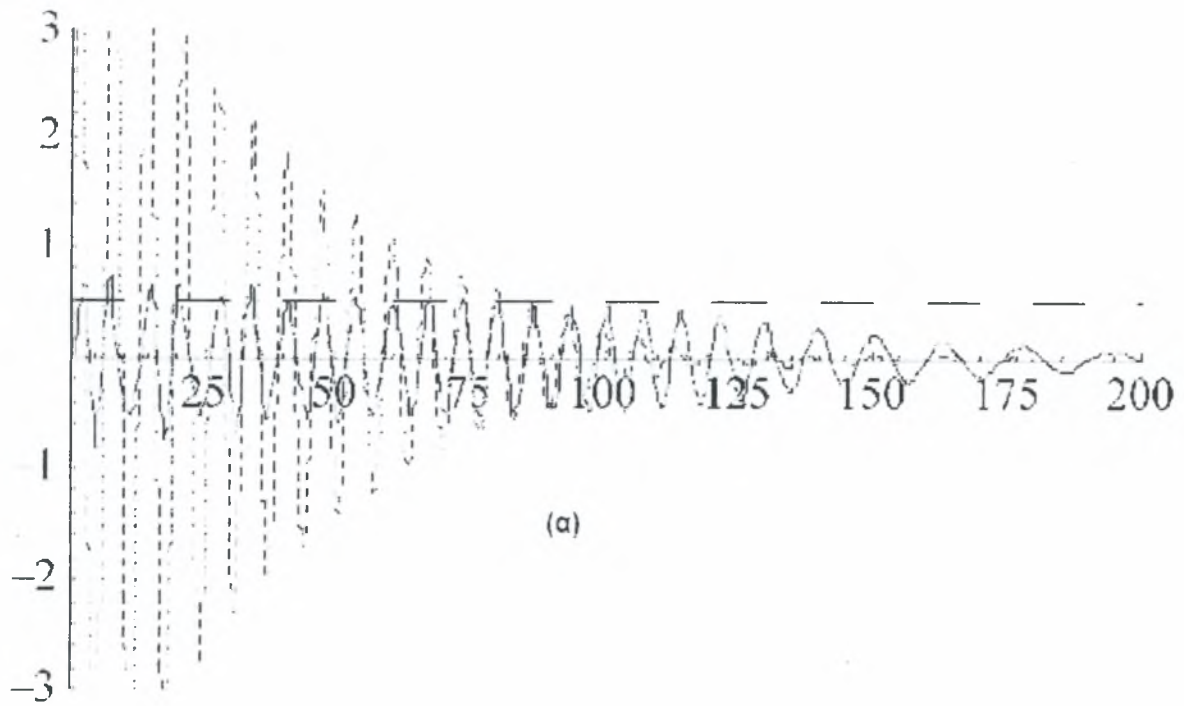
Επιλέγονται κατάλληλες τιμές των παραμέτρων του συστήματος του Σχήματος Γ.16 και μέσω της επιλογής αυτής επιτυγχάνεται ενισχυμένη ενεργειακή άντληση από την εν φάσει ιδιομορφή προς την μη γραμμική ενεργειακή δίνη. Υποθέτοντας ότι για  $t=0$  κάθε μια από τις μάζες της γραμμικής υπο – κατασκευής διεγείρεται από την ίδια ώση εύρους  $Y$ , εξασφαλίζεται η μη διεγερση της σε αντίθετη φάση γραμμικής ιδιομορφής μέχρι  $O(1)$ , οπότε οι εξισώσεις κίνησης γίνονται (και εδώ λαμβάνεται  $\varphi_0^{(0)}=1/\sqrt{2}$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + C v^3(t) + \varepsilon \left( v(t) - \frac{a_0(t)}{\sqrt{2}} \right) &= 0 \\ \ddot{a}_0(t) + \omega_0^2 a_0(t) + \varepsilon \left( \frac{a_0(t)}{2} - \frac{v(t)}{\sqrt{2}} \right) &= 0 \\ a_1(t) &= 0 \end{aligned} \tag{Γ.51}$$

με αρχικές συνθήκες  $v(0) = \dot{v}(0) = 0$ ,  $a_0(0) = 0, \dot{a}_0(0) = Y\sqrt{2}$ . Τότε, οι αποκρίσεις των στοιχείων της γραμμικής υπο – κατασκευής προσεγγίζονται από τις εκφράσεις:

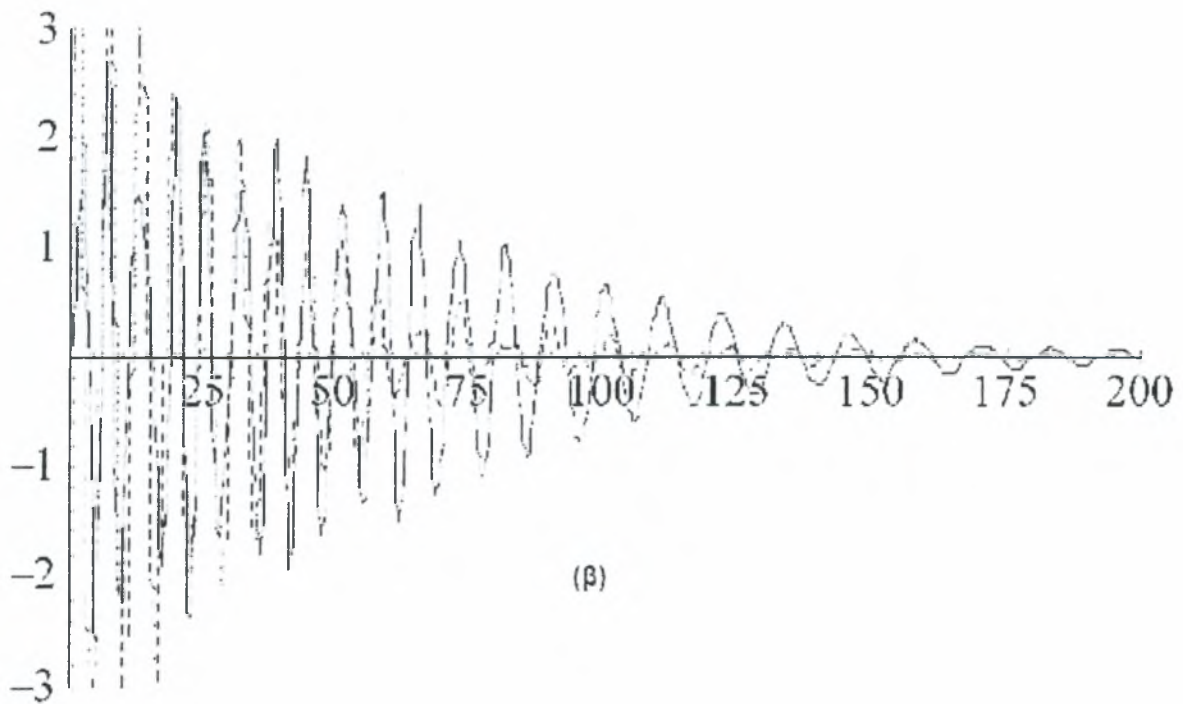
$$y_0(t) = y_1(t) \approx a_0(t)/\sqrt{2}$$

Στο Σχήμα Γ.18α απεικονίζονται οι αποκρίσεις  $v(t), y_0(t)$  για παραμέτρους του συστήματος  $\omega_0=0.9487$ ,  $d=0.5$ ,  $C=5$ ,  $\varepsilon=0.1$  και για μέγεθος ώσης  $Y=5$ .



(α)

Σχήμα Γ.18. (συνεχίζεται)



(β)

**Σχήμα Γ.18.** Άντληση ενέργειας από την εν φάσει μορφή προς το μη γραμμικό προσάρτημα για το τριβάθμιο σύστημα: (α) σύστημα που αντιστοιχεί στις μη γραμμικές κανονικές μορφές του Σχ.Γ.17 και (β) σύστημα για ενισχυμένη άντληση ( ——— =  $v(t)$ , - - - - - =  $y_0(t)$ , — — — = προβλεφθείσα στάθμη άντλησης από την ΜΓΚΜ 1)

Παρατηρείται άντληση ενέργειας και για  $t > 100$  σχεδόν τοπικοποίηση (περιορισμός) της κίνησης στον μη γραμμικό ταλαντωτή. Για να δειχθεί δε ότι το ασυμπτωτικό (υψηλής ενέργειας) αποτέλεσμα της 1<sup>ης</sup> των εξισώσεων (Γ.50) προβλέπει με ακρίβεια το εύρος που φθάνει ο μη γραμμικός ταλαντωτής κατά την ενεργειακή άντληση, υπολογίζεται ο κυρίαρχος (προεξάρχων) όρος που αντιστοιχεί στο θεωρούμενο σύστημα

$$(c_v)_{\text{άντλησης}} \approx \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^2\varphi_0^{(0)}}{3\Psi} \right) \rho_{\text{αρχικό}}^{1/3} \cong 0.4933$$

και από το αποτέλεσμα αυτό εκτιμάται η μέγιστη τιμή του εύρους  $v(t)$  λαμβάνοντας υπ' όψη και την (Γ.44)

$$v_{\text{άντλησης}} \approx \frac{(c_v)_{\text{άντλησης}}}{\omega_0} \cong 0.52$$

η τιμή δε αυτή φαίνεται επίσης στο Σχήμα Γ.18α με εμφανή την ικανοποιητική προσέγγιση του επιπέδου άντλησης του μη γραμμικού προσαρτήματος. Για τις παραπάνω εκτιμήσεις, η τιμή του αρχικού  $\rho$  υπολογίστηκε ως εξής:

Για  $t=0+$  υποθέτουμε πως το σύστημα διαθέτει αρκετά υψηλή ενέργεια για να ισχύουν οι προσεγγίσεις των (Γ.50). Εκκινώντας από τη χρονική αυτή στιγμή το σύστημα ταλαντώνεται ελεύθερα με την ακόλουθη προσεγγιστική τιμή για την αρχική του ενέργεια:

$$E_{\text{αρχική}} \approx 2\omega_0^2 \left( \frac{\dot{\varphi}_0^{(0)2}}{\omega_0^2} \right) + \frac{C}{4\omega_0^4} \left( \frac{4\varepsilon\omega_0^2\dot{\varphi}_0^{(0)}}{3C} \right)^{4/3} \rho_{\text{αρχικό}}^{4/3} + (11\varepsilon \cdot \rho^{2/3}), \quad \rho \gg 1 \quad (\text{Γ.52α})$$

Η εν λόγω ενέργεια όμως εκτιμάται επίσης με τη θεώρηση του μεγέθους των επιβαλλόμενων ώσεων ως:



$$E_{\text{αρχική}} = \gamma \left( \frac{Y^2}{\gamma} \right) = Y^2 \quad (\Gamma.52\beta)$$

Εξισώνοντας τις εκτιμήσεις των (Γ.52α) και (Γ.52β) βρέθηκε μια προσέγγιση

$$\rho_{\text{αρχικό}} \cong \sqrt{2}Y = 7.071$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε για τους παραπάνω υπολογισμούς.

Για την ενίσχυση του φαινομένου της ενεργειακής άντλησης, όταν η επιβαλλόμενη ενέργεια κρατηθεί σταθερή, αλλάζονται οι παράμετροι του συστήματος σε  $\omega_0=1$ ,  $\delta=0.5$ ,  $C=0.4$ ,  $\varepsilon=0.3$  (ενώ  $Y=5$  σταθερό), οπότε προκύπτει ότι  $\nu_{\text{άντλησης}} \approx 1.71$ . Στο Σχήμα Γ.18β φαίνονται οι αποκρίσεις  $u(t)$  και  $y(t)$  για το σύστημα με τις ανωτέρω τιμές των παραμέτρων, απ' όπου κανείς παρατηρεί ενισχυμένη ενεργειακή άντληση. Επιπρόσθετα δε, η αναλυτική εκτίμηση του εύρους, που φθάνει ο μη γραμμικός ταλαντωτής κατά την άντληση, βρίσκεται σε καλή συμφωνία με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Χωρίς τη χρήση γραμμικών μεθόδων αποκλείεται να υπολογιστεί με επαρκή ακρίβεια η πραγματική δυναμική συμπεριφορά των κατασκευών και ιδιαίτερα τα φαινόμενα συντονισμών και δυναμικών διακλαδώσεων, όπως αυτά ρητά ορίζονται στη θεωρία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων[...].
2. Ουσιώδες και παράλληλα μοντέρνο εργαλείο για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς δομικών συστημάτων αποτελεί η έννοια των μη γραμμικών κανονικών μορφών οι εφαρμογές των οποίων καταδεικνύονται με σαφήνεια στη παρούσα εργασία. Συγκεκριμένα αποδείχθηκε ότι, με βάση τις ιδιότητες των γραμμικοποιημένων αντίστοιχων συστημάτων χωρίς απόσβεση(οι οποίες

αναλύονται με ευκολία) θεμελιώνονται μαθηματικά αποδεδειγμένες μέθοδοι οι οποίες οδηγούν:

α) Στην απομόνωση μη επιθυμητών, μεγάλου εύρους, ταλαντώσεων σε προσαρτήματα ή μικρής σημασίας (από πλευράς λειτουργικότητας και αστοχίας) μέρη της κατασκευής.

β) Στην μονόδρομη και μη αναστρέψιμη μεταφορά ενέργειας από την κατεξοχήν κατασκευή σε κατάλληλα επιλεγμένα μη γραμμικά προσαρτήματα τα οποία όπως έχει αποδειχθεί και πειραματικά είναι υλοποιήσιμα.

3. Μετά την θεωρητική τεκμηρίωση και την κατάδειξη των ως άνω μέγιστης σημασίας εφαρμογών των ΜΓΚΜ η έρευνα που ήδη έχει ξεκινήσει, οδηγεί στο σχεδιασμό ουσιωδώς μη γραμμικών ήσσονος δομικής σημασίας επιμέρους δομημάτων τα οποία μετά από κατάλληλη σύζευξη (πειραματικά υλοποιήσιμη) με την αρχική κατασκευή θα έχουν σαν αποτέλεσμα την δραστική μείωση των κινδύνων έναντι σεισμικών, ωστικών και κρουστικών δράσεων επ' αυτής.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

### Παράρτημα I: Αμετάβλητα Πολλαπλά (invariant manifolds)

Τα *αμετάβλητα πολλαπλά* διαδραματίζουν κεντρικότατο ρόλο στη Θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων. Ειδικότερα για συνεχή δυναμικά συστήματα (δηλαδή για διανυσματικά πεδία, ΔΠ) της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{I.1})$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

#### Ορισμός

Έστω  $S \subset \mathbb{R}^n$  ένα σύνολο. Το  $S$  είναι *αμετάβλητο υπό την επήρεια του ΔΠ (I.1)* αν ισχύει ότι

$$\forall x_0 \in S \rightarrow \Phi_t(x_0) \in S, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Αν ο ορισμός ισχύει για  $t > 0$  ( $t < 0$ ) τότε το  $S$  είναι *θετικά* (*αρνητικά*) *αμετάβλητο*.

Ένα αμετάβλητο σύνολο  $S \subset \mathbb{R}^n$  είναι ένα  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) *αμετάβλητο πολλαπλό*, αν το  $S$  έχει τη δομή ενός  $C^r$ - διαφορίσιμου πολλαπλού, όπου *πολλαπλό είναι ένα σύνολο που ΤΟΠΙΚΑ έχει τη δομή του Ευκλείδειου χώρου*.

#### A. Γραμμικοποίηση

Έστω  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) = 0$  σημείο ισορροπίας του ΔΠ. Εξετάζουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα:

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow y(t) = e^{At} y_0 \quad (\text{I.2})$$

Το  $\mathbb{R}^n$  μπορεί να διαχωριστεί χρησιμοποιώντας τρεις *αμετάβλητους υποχώρους* (ιδιοχώρους, eigenspaces)  $E^s$ ,  $E^u$  και  $E^c$ , που ορίζονται ως εξής:

$E^s$  (ευσταθής, stable): γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του μητρώου  $A$  με *αρνητικό πραγματικό μέρος*

$$E^s = \text{span}\{e_1, \dots, e_s\}$$

$E^u$  (ασταθής, unstable): γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του μητρώου  $A$  με *θετικό πραγματικό μέρος*

$$E^u = \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$$

$E^c$  (κεντριός, center): γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του μητρώου  $\mathbf{A}$  με μηδενικό πραγματικό μέρος

$$E^c = \text{span} \{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$$

$$s + u + c = n$$

Τροχιές του γραμμικοποιημένου ΔΠ (I.2) που αρχίζουν στον  $E^s$ , μένουν πάντα στο χώρο αυτό και προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας  $\bar{y} = 0$  ασυμπτωτικά, όταν  $t \rightarrow \infty$ .

Τροχιές του (I.2) που αρχίζουν στον  $E^u$ , μένουν για πάντα στο χώρο αυτό και τείνουν ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας  $\bar{y} = 0$ , όταν  $t \rightarrow -\infty$ .

### Παράδειγμα 1

Υποθέτουμε ότι το μητρώο  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$  με πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ . Κατά συνέπεια το  $\mathbf{A}$  διαθέτει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα  $e_1, e_2, e_3$  που αντιστοιχούν στις  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$ .

Έστω  $\mathbf{T} = [e_1 \ e_2 \ e_3]$ , οπότε:

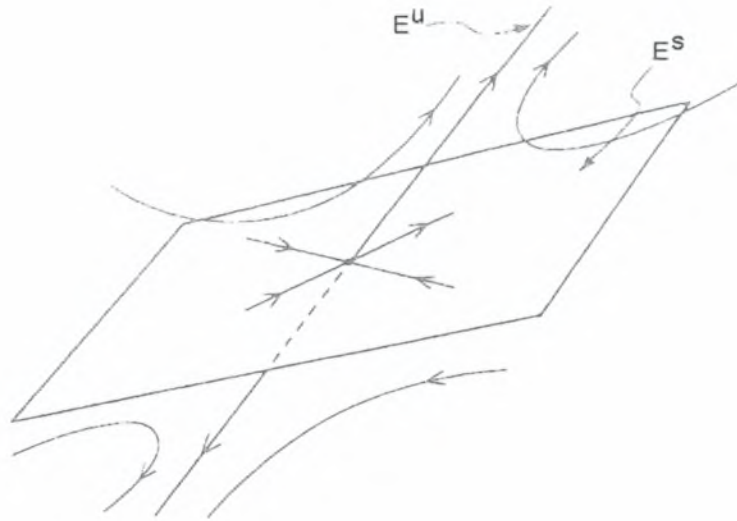
$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \stackrel{(\Sigma 1)}{=} \mathbf{\Lambda} \Rightarrow y(t) = e^{\mathbf{A}t} y_0 = e^{\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} t \mathbf{T}^{-1}} y_0 = \mathbf{T} e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{T}^{-1} y_0 =$$

$$[e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} y_0 = \begin{bmatrix} e_1 e^{\lambda_1 t} & e_2 e^{\lambda_2 t} & e_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} y_0$$

Συνεπώς  $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$ ,  $E^u = \text{span}\{e_3\}$ .

Αν  $y_0 \in E^s \Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} e_1 e^{\lambda_1 t} & e_2 e^{\lambda_2 t} & e_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y}_{01} \\ \tilde{y}_{02} \\ 0 \end{Bmatrix} \in E^s$  (αμετάβλητο). Όμοια, αν

$y_0 \in E^u \Rightarrow y(t) \in E^u$ , με την γεωμετρία των  $E^s$  και  $E^u$  να εικονίζεται γραφικά στο Σχήμα I.1.



Σχήμα Ι.1. Γεωμετρία των  $E^s$  και  $E^u$  του πρώτου παραδείγματος.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι η γραμμικοποίηση ενός ΔΠ μας δίνει  $\dot{y} = \mathbf{A}y$ , όπου η Jordan κανονική μορφή του πίνακα  $\mathbf{A}$  έχει ως εξής:

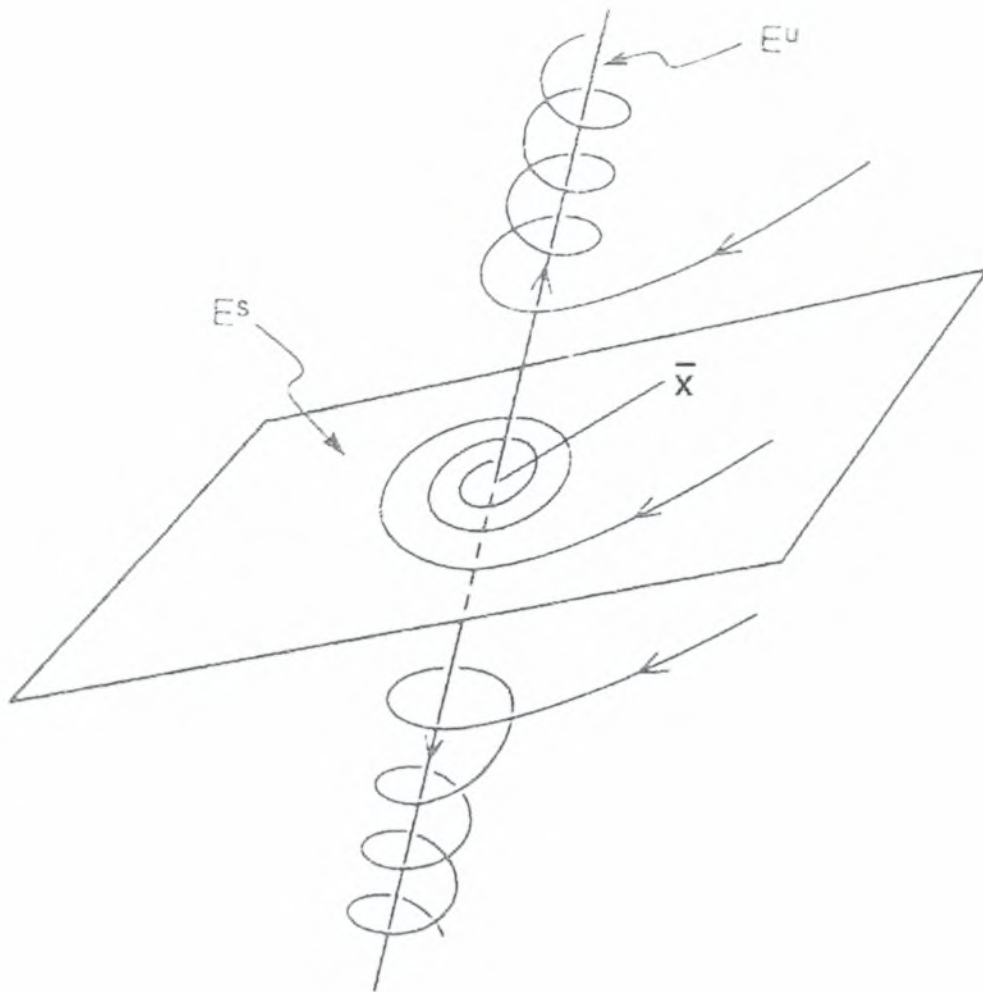
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \rho & \omega & 0 \\ -\omega & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

δηλαδή ο  $\mathbf{A}$  έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές  $\rho \pm i\omega$  και μια πραγματική  $\lambda > 0$ .

Άρα θα ισχύει ότι

$$y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{T}^{-1}y_0 = \mathbf{T} \begin{bmatrix} e^{\rho t} \cos \omega t & e^{\rho t} \sin \omega t & 0 \\ -e^{\rho t} \sin \omega t & e^{\rho t} \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}y_0$$

Αν  $\omega < 0$  η εικόνα της ροής θα είναι σύμφωνα με το Σχήμα Ι2, καθόσον η γειτονιά του σημείου ισορροπίας είναι ασταθής.



Σχήμα Ι.2. Γεωμετρία των  $E^s$  και  $E^u$  του δεύτερου παραδείγματος, για  $\omega < 0$ .

### Παράδειγμα 3

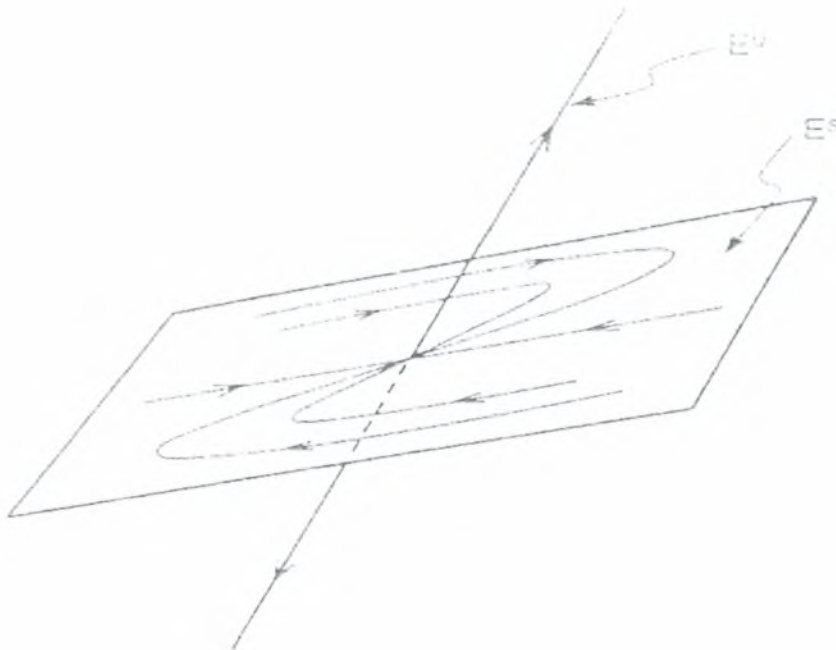
Υποθέτουμε ότι το μητρώο  $\mathbf{A}$  έχει μια διπλή πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda < 0$  και άλλη μια διακριτή (distinct) ιδιοτιμή  $\gamma > 0$ , τέτοιες ώστε να υφίστανται τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα  $e_1, e_2$  και  $e_3$ , τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μορφώσουν τις στήλες ενός μητρώου  $\mathbf{T}$ , με αποτέλεσμα το  $\mathbf{A}$  να μετασχηματιστεί ως ακολούθως:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$$

Σύμφωνα και με τα παραδείγματα 1 και 2 που προηγήθηκαν, η λύση που διέρχεται από το σημείο  $y_0 \in \mathbb{R}^3$  δίδεται από την έκφραση:

$$y(t) = \mathbf{T}e^{\Lambda t}\mathbf{T}^{-1}y_0 = \mathbf{T} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}y_0$$

Με την ίδια λογική (που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα δύο παραδείγματα) εύκολα διαπιστώνουμε ότι το  $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$  είναι ένα *αμετάβλητο πολλαπλό λύσεων*, που καταλήγουν στο  $y=0$  για  $t \rightarrow +\infty$ , ενώ το  $E^u = \text{span}\{e_3\}$  είναι ένα *αμετάβλητο πολλαπλό λύσεων*, που καταλήγουν στο  $y=0$  για  $t \rightarrow -\infty$ , όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα Ι.3.



Σχήμα Ι.3. Γεωμετρία των  $E^s$  και  $E^u$  του τελευταίου παραδείγματος.

## Β. Μη Γραμμικά Συστήματα

Στο σημείο αυτό θα εξεταστεί *το μη γραμμικό σύστημα (διανυσματικό πεδίο)  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$* . Με το γραμμικοποιημένο σύστημα δόθηκε μια μέθοδος προσεγγιστικής αντίληψης της δομής των λύσεων στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας  $x = \bar{x}$ , με άλλα λόγια μέχρι στιγμής επιδοθήκαμε σε *τοπική ανάλυση*. Τίθεται στη συνέχεια  $x = \bar{x} + y$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y + R(y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$



όπου οι μη γραμμικοί όροι  $R(y)$  είναι τάξης  $\mathcal{O}(\|y^2\|)$ . Μπορούμε να βρούμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό  $T$ , που φέρνει το γραμμικοποιημένο σύστημα σε *Jordan* κανονική μορφή  $y = Tz$ , και αντικαθιστώντας όπου

$$\dot{z} = T^{-1} Df(x) Tz + T^{-1} R(Tz), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (I.3)$$

λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & & 0 \\ & A_u & \\ 0 & & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} +$$

block diagonal form

$$+ \begin{bmatrix} R_s(u, v, w) \\ R_u(u, v, w) \\ R_c(u, v, w) \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s \times s \text{ πίνακας}} \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{u \times u \text{ πίνακας}} \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{w \times w \text{ πίνακας}} \end{aligned} \quad (I.4)$$

### Θεώρημα για αμετάβλητα πολλαπλά

Ας υποθέσουμε ότι το (I.4) είναι  $C^r$ ,  $r \geq 2$  (συνεχές και με συνεχείς παραγώγους  $r^{\text{ος}}$  και  $2^{\text{ος}}$  τάξης τουλάχιστον). Τότε το σημείο ισορροπίας  $(u, v, w) = (0, 0, 0)$  του (I.4) έχει:

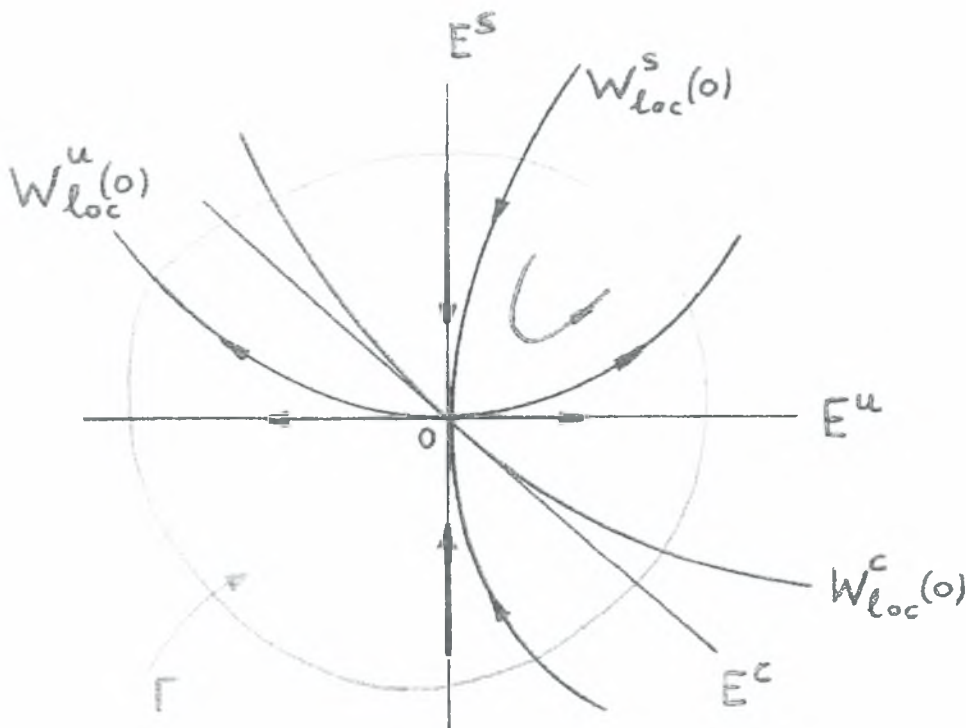
- Ένα  $C$  τοπικό αμετάβλητο ευσταθές πολλαπλό διαστάσεως  $s$ ,  $W_{loc}^s(0)$
- Ένα  $C$  τοπικό αμετάβλητο ασταθές πολλαπλό διαστάσεως  $u$ ,  $W_{loc}^u(0)$  &
- Ένα  $C$  τοπικό αμετάβλητο κεντρικό πολλαπλό διαστάσεως  $c$ ,  $W_{loc}^c(0)$

Όλα αυτά τα τοπικά πολλαπλά τέμνονται στο σημείο ισορροπίας και είναι εφαπτόμενα των αντίστοιχων αμετάβλητων πολλαπλών του γραμμικοποιημένου συστήματος. Έτσι, τα τοπικά μη γραμμικά πολλαπλά παρίστανται ως εξής:

$$W_{loc}^{s,u,c} = \left\{ \begin{array}{l} (u, v, w) \in R^s \times R^u \times R^w / v = h_v^{s,u,c}(u), w = h_w^{s,u,c}(u), Dh_v^{s,u,c}(0) = 0, Dh_w^{s,u,c}(0) = 0 \\ \text{για } \|u\| \text{ αρκούντως μικρό} \end{array} \right\} \text{όπ}$$

ου η συνάρτηση  $h_{v,w}^{s,u,c}$  είναι  $C^1$ . (I.5)

Επίσης, τα τοπικά ευσταθή και ασταθή πολλαπλά  $W_{loc}^s(0)$ ,  $W_{loc}^u(0)$  έχουν τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των αντίστοιχων γραμμικοποιημένων πολλαπλών, δηλαδή λύσεις της (I.4) με αρχικές συνθήκες πάνω στα  $W_{loc}^s(0)$  και  $W_{loc}^u(0)$  προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας εκθετικά γρήγορα όταν  $t \rightarrow +\infty$  και  $t \rightarrow -\infty$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σκαρίφημα 1.

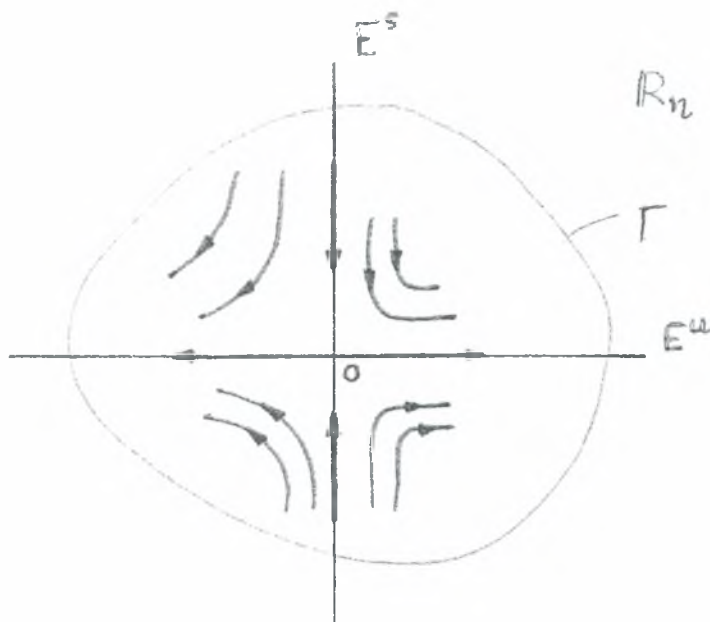


Σκαρίφημα 1

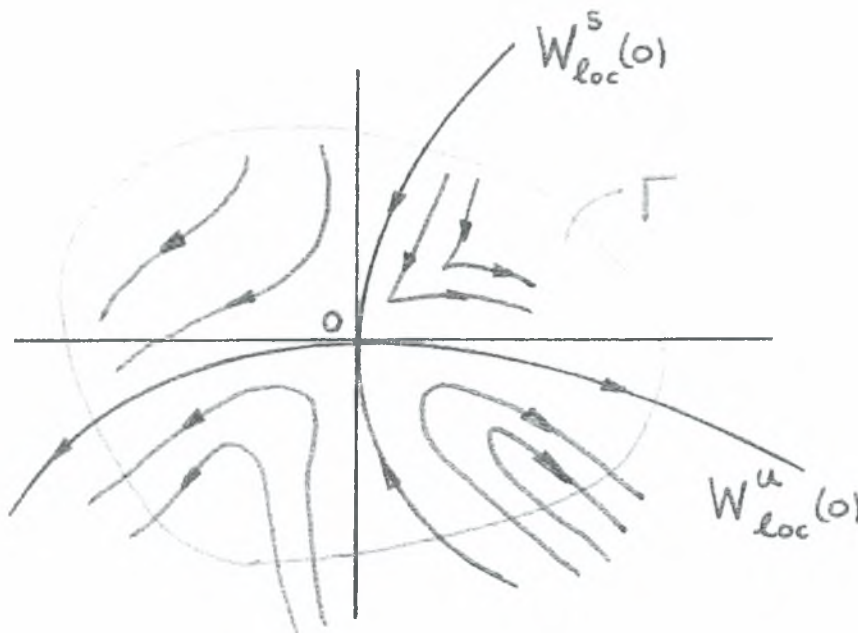
### Παρατηρήσεις

1. Το παραπάνω είναι το θεώρημα του ευσταθούς, ασταθούς και κεντρικού αμετάβλητου πολλαπλού.

2. Αν το  $E^c = 0$  τότε το σημείο ισορροπίας είναι ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ και οι λύσεις του ΜΗ γραμμικού ΔΠ, σε μια μικρή γειτονιά του  $\bar{x}$  φαίνονται να είναι ίδιες με τις γραμμικοποιημένες λύσεις (βλ. Σκαριφήματα 2 και 3).



Σκαριφήμα 2



Σκαριφήμα 3

3. Γενικά, η δομή των λύσεων στο  $W_{loc}^c(0)$  ΔΕΝ είναι ίδια με αυτή στο  $E^c$ .

4. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε τα ευσταθή και ασταθή τοπικά αμετάβλητα πολλαπλά και ως:

$$W_{loc}^{s,u}(\bar{x}) = \left\{ x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n / \Phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ όταν } t \rightarrow +\infty, -\infty, \Phi_t(x) \in \Gamma, \forall t \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \right\} \quad (I.6)$$

Επιπρόσθετα, μπορούμε να υπολογίσουμε **ΚΑΘΟΛΙΚΑ** αμετάβλητα πολλαπλά του  $\bar{x}$  ως εξής: Επιλέγουμε σημεία στα αντίστοιχα ΤΟΠΙΚΑ αμετάβλητα πολλαπλά και παρακολουθούμε τη δυναμική ροή τους για θετικούς ή αρνητικούς χρόνους, σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(W_{loc}^s(\bar{x})) \quad , \quad W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t(W_{loc}^u(\bar{x})) \quad (I.7)$$

## Παράρτημα II : Χαμιλτονιανά Συστήματα (Hamiltonian Systems)

Ένα σύστημα μεταβλητών καλείται *Χαμιλτονιανό*, αν μπορεί να γραφεί υπό την μορφή των εξισώσεων του *Hamilton*, ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

όπου  $\dot{x} \equiv dx/dt$  και  $H$  η λεγόμενη Χαμιλτονιανή. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν και υπό την ακόλουθη διανυσματική μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= H_{p_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_i &= H_{x_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

ενώ υφίσταται και η έκφραση που συσχετίζει τις εξισώσεις του Hamilton με αυτές του Lagrange, που είναι

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (\text{II.3})$$

Η *Lagrangian*  $L$  ενός συστήματος ορίζεται ως

$$L \equiv T - V \quad (\text{II.4})$$

όπου  $T$  η συνολική κινητική ενέργεια (total kinetic energy) και  $V$  το συνολικό δυναμικό του συστήματος (total potential). Δοθείσης μιας *Lagrangian*  $L$ , θεωρούμε ότι

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t) = L + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

όπου  $q$  μια γενικευμένη συντεταγμένη και  $\dot{q}$  η χρονική της παράγωγος. Τότε

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial q} \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (\text{II.7})$$

και συνεπώς θα ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{II.8})$$

Τούτο υποδηλώνει ότι οι δύο *Lagrangians* περιγράφουν την ίδια εξίσωση κίνησης, με

$$p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = p + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \quad (\text{II.9})$$

$$q' = \frac{\partial L'}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial p} = q \quad (\text{II.10})$$

### Παράρτημα III : Μέθοδος Μέσου Όρου (averaging)

Η μέθοδος αυτή αποτελεί ισχυρό εργαλείο για την μελέτη της συμπεριφοράς μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων υπό περιοδική εξωτερική φόρτιση ή διέγερση. Ασχολείται με εξισώσεις της μορφής:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,t) + \varepsilon^2 g(x,t) \text{ για } x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.1})$$

όπου οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται ως

$$f : U \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad g : U \times \mathbb{R}^1 \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

και είναι  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) στα πεδία ορισμού τους, με  $U$  κάποιο ανοικτό σύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .

Επίσης οι  $f$  και  $g$  είναι περιοδικές ως προς  $t$  με την ίδια περίοδο  $T > 0$ . Η σχετιζόμενη με την (III.1) εξίσωση μέσου όρου (averaged) δίνεται από τη σχέση

$$\dot{y} = \bar{\varepsilon} f(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \quad \text{όπου} \quad \bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y,t) dt \quad (\text{III.2})$$

Η μέθοδος βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα μέσου όρου (averaging theorem), το οποίο συσχετίζει τη δυναμική των δύο ανωτέρω εξισώσεων:

#### **Θεώρημα μέσου όρου**

Υπάρχει μια  $C^r$  αλλαγή συντεταγμένων , μέσω της οποίας η (III.1) λαμβάνει τη μορφή

$$\dot{y} = \bar{\varepsilon} f_1(y) + \varepsilon^2 f_2(y,t,\varepsilon) \quad (\text{III.3})$$

όπου η  $f_1$  είναι περιοδική ως προς  $t$  με περίοδο  $T$ . Επιπρόσθετα,

(α) Αν  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι λύσεις των (III.1) και (III.2) αντίστοιχα, με  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$  και  $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$ , τότε  $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$  σε μια χρονική κλίμακα  $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , εφόσον  $y(t) \in U$  στην ίδια χρονική κλίμακα.

(β) Αν  $p_0$  είναι ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας της (III.2). υπάρχει  $\varepsilon_0 > 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  η (III.1) διαθέτει μια απομονωμένη υπερβολική περιοδική τροχιά  $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ , με τον ίδιο τύπο ευστάθειας με το  $p_0$ .

(γ) Αν  $x^s(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$  είναι μια λύση της (III.1) που κείται στο ευσταθές πολλαπλό της υπερβολικής περιοδικής τροχιάς  $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ , το  $y^s(t) \in W^s(p_0)$  είναι μια λύση της (III.2), κείμενη επί του ευσταθούς πολλαπλού του υπερβολικού σημείου ισορροπίας  $p_0$ , και αν  $|x(0) - y(0)| = O(\varepsilon)$  τότε  $|x^s(t) - y^s(t)| = O(\varepsilon)$  για  $t \in [0, \infty)$ . Παρόμοια ισχύουν για λύσεις στο ασταθές πολλαπλό για το χρονικό διάστημα  $(-\infty, 0]$ .



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Rosenberg, R.M.** (1960), “*Normal Modes in nonlinear dual-mode systems*”, Journal of Applied Mechanics (ASME) **27**, 263 – 268.
2. **Rosenberg, R.M.** (1961), “*On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems*”, Journal of Applied Mechanics **28**, 275 – 283.
3. **Rosenberg, R.M.** (1962), “*The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems*”, Journal of Applied Mechanics **29**, 7 – 14.
4. **Szempliska-Stupnicka, W.** (1974), “*A study of main and secondary resonances in nonlinear multi-degree-of-freedom systems*”, International Journal of Nonlinear Mechanics **10**, 289 – 304.
5. **Szempliska-Stupnicka, W.** (1979), “*The modified single mode method in the investigations of the resonant vibration of nonlinear systems*”, Journal of Sound and Vibration **63**(4), 475 – 489.
6. **Szempliska-Stupnicka, W.** (1983), “*Nonlinear normal modes and the generalized and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of nonlinear elastic continuous systems*”, International Journal of Nonlinear Mechanics **18**, 149 – 165.
7. **Nayfeh, A.H.** and **Mook, D.T.** (1984), *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York.
8. **Guckenheimer, J.** and **Holmes, P.** (1984), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, Berlin.
9. **Wiggins, S.** (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Verlag, New York.
10. **Hinch, E.J.** (1991), “*Perturbation Methods*”, Cambridge University Press, UK
11. **Shaw, W.** and **Pierre, C.** (1993), “*Normal modes for nonlinear vibratory systems*”, Journal of Sound and Vibration **164**(1), 85 – 124.
12. **Balder, T.B.** (1994) “*Mathematica for scientists and Engineers*”, Addison-Wesley

13. Shaw, W. and Pierre, C. (1994), “Normal modes for vibration for nonlinear continuous systems”, Journal of Sound and Vibration **169**(3), 319 – 347.
14. King, M.E. and Vakakis, A.F. (1994), “An energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems”, Journal of Vibration and Acoustics (ASME) **116**(3), 332 – 340.
15. Hsieh, S-R., Shaw, S.W. and Pierre, C. (1994), “Normal Modes of Vibration for Large Amplitude Vibration of a Cantilever Beam”, International Journal of Solids and Structures **31**(14), 1981 – 2014.
16. King, M.E. and Vakakis, A.F. (1996), “An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes”, Journal of Applied Mechanics (ASME) **63**, 810 – 819.
17. Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Mikhlin, Y.V., Pilipchuk, V.N. and Zevin, A.A. (1996), *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley, New York.
18. Vakakis, A.F. (1997), “Nonlinear Normal Modes (NNMs) and their applications in vibration theory: An overview”, Mechanical Systems and Signal Processing **11**(1), 3 – 22.
19. Ma, X., Azeez, F.A. and Vakakis, A.F. (2000), “Non-Linear Normal Modes and Non-Parametric System Identification of Non-Linear Oscillators”, Mechanical Systems and Signal Processing **14**(1), 37 – 48.
20. Gendelman, O., Manevitch, L.I., Vakakis, A.F., McCloskey, R. (2001), “Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators: Part I – Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems”, Journal of Applied Mechanics (ASME) **68**, 34 – 41.
21. Vakakis, A.F., Gendelman, O. (2001), “Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators: Part II – Resonance Capture”, Journal of Applied Mechanics (ASME) **68**, 42 – 48.
22. Vakakis, A.F. (2001), “Inducing Passive Nonlinear Energy Sinks in Vibrating Systems”, Journal of Vibration and Acoustics (ASME) **123**, 324 – 332.
23. Peschek, E., Boivoain, N., Pierre, C. and Shaw, S.W. (2001), “Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems using Multi-Mode Invariant Manifolds”, Nonlinear Dynamics **25**, 183 – 205.

24. **Peschek, E., Pierre, C. and Shaw, S.W.** (2002), “*A new Galerkin-Based Approach for Accurate Non-Linear Normal Modes through Invariant Manifolds*”, Journal of Sound and Vibration **294**(5), 971 – 993.
25. **Jiang, X. and Vakakis A.F.** (2002), “*Vibration Isolation Based on Nonlinear Mode Localization*”, 15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference, June 2-5, Columbia University; New York, NY, USA.
26. **Jiang, X., McFarland, D.M., Bergman, L. and Vakakis, A.F.** (2003), “*Steady State Passive Nonlinear Energy Pumping in Coupled Oscillators: Theoretical and Experimental Results*”, Nonlinear Dynamics **33**, 87 – 102.
27. **Vakakis, A.F.** (2003), “*Designing a Linear Structure with a Local Nonlinear Attachment for Enhanced Energy Pumping*”, Meccanica **38**, 677 – 686.
28. **Jiang, X., Vakakis, A.F.** (2003), “*Dual mode vibration isolation based on non – linear mode localization*”, International Journal of Non-Linear Mechanics **37**, 837 – 850.
29. **Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Gendelman, O. and Bergman, L.** (2003), “*Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments*”, Journal of Sound and Vibration **264**, 559 – 577.
30. **Vakakis, A.F. and Rand, R.H.** (2003), “*Nonlinear Dynamics of a System of Coupled Oscillators with Essential Stiffness Nonlinearities*”, Proceedings of DECT 2003 (ASME Design Engineering Technical Conference), September 2 – 6, Chicago. Illinois, USA.
31. **Vakakis, A.F., McFarland, D.M., Bergman, L., Manevitch, L.I. and Gendelman, O.** (2004), “*Isolated Resonance Captures and Resonance Capture Cascades Leading to Single- or Multi-Mode Passive Energy Pumping in Damped Coupled Oscillators*”, Journal of Vibration and Acoustics (ASME) **126**, 235 – 244.
32. **Panagopoulos, P. N., Vakakis, A.F. and Tsakirtzis, S.** (2004), “*Transient resonant interactions of finite linear chains with essentially nonlinear end attachments leading to passive energy pumping*”, International Journal of Solids and Structures **41**, 6505 – 6528.

33. McFarland, D.M., Bergman, L.A., Vakakis, A.D. (2005), “*Experimental study of non-linear energy pumping occulating at a single fast frequency*”, International Journal of Non-Linear Mechanics **40**(6), 891 – 899.
34. Mikhlin, Y.V., Reshentikova, S.N. (2005), “*Dynamic interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber*”, Journal of Sound and Vibration **283**, 91 – 120.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074837