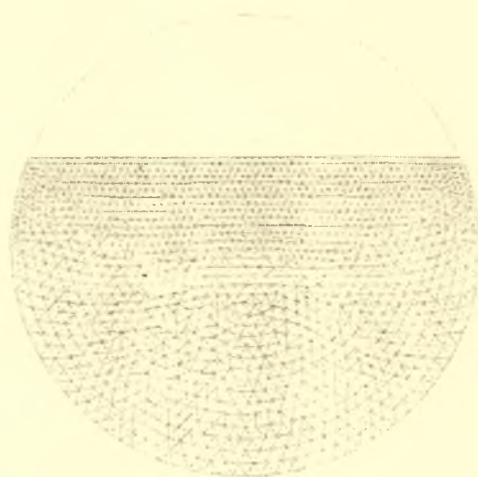
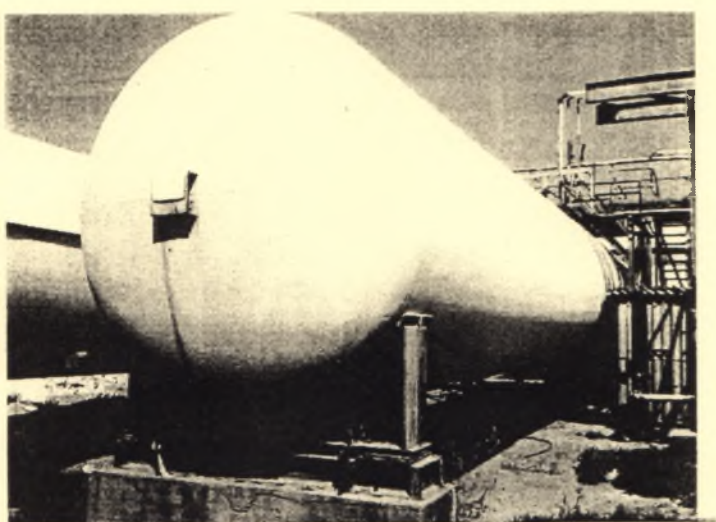


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΣΕ
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΠΙΕΣΗΣ ΥΠΟ ΣΕΙΣΜΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΑΛΛΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

ΜΑΝΩΛΗΣ ΠΛΑΤΥΡΡΑΧΟΣ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2004



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.:	3952/1
Ημερ. Εισ.:	01-10-2004
Δωρεά:	Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ – ΜΜΒ
	2004
	ΠΛΑ

© 2004 Μανώλης Πλατύρραχος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

- Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Σπύρος Καραμάνος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
- Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
- Τρίτος Εξεταστής Δρ. Βασίλειος Μποντόζογλου
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Σπύρο Καραμάνο, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Με την συμβολή του κατάφερα να ξεπεράσω όλα τα προβλήματα τα οποία ανέκυψαν κατά την διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Παράλληλα με την υπομονή και την κατανόηση του κατάφερα να εμβαθύνω τις γνώσεις μου σε υπολογιστικά θέματα.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δημήτρη Βαλουγεώργη, για την βοήθεια και στήριξη του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου καθώς και για την υλικοτεχνική υποδομή του Εργαστηρίου Ηλεκτρονικών Υπολογιστών.

Επίσης, είμαι ευγνώμων στο τρίτο μέλος της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Βασίλη Μποντόζογλου για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις του.

Οφείλω ευχαριστίες στον υποψήφιο διδάκτορα, Σπύρο Παπασπύρου για την αμέριστη και πολύτιμη βοήθεια του καθ' όλη την διάρκεια της δουλειάς μου, αλλά και για το ιδανικό κλίμα το οποίο δημιούργησε και διατήρησε από την πρώτη μέχρι την τελευταία στιγμή στο Εργαστήριο Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του τμήματος μας. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον υποψήφιο διδάκτορα Χρήστο Δριτσέλη για την βοήθειά τους στον προγραμματισμό. Τέλος οφείλω να ευχαριστήσω τον συνάδελφο μου Κύρο Ανδρεαδάκη για την βοήθεια του στην χρήση του προεπεξεργαστή ABAQUS/CAE.

Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Αριστείδη και Αικατερίνη Πλατύρραχο, και τον συνάδελφο πλέον αδελφό μου Δημήτρη Πλατύρραχο για την ολόψυχη αγάπη, ηθική και υλική υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένειά μου.

Μανώλης Πλατύρραχος

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΔΟΧΕΙΑ ΠΙΕΣΗΣ ΥΠΟ ΣΕΙΣΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΛΑΤΥΡΡΑΧΟΣ ΜΑΝΩΛΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2004

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Σπύρος Καραμάνος Επίκουρος Καθηγητής Υπολογιστικών
Μεθόδων και Πεπερασμένων Στοιχείων των Κατασκευών.

Περίληψη

Το φαινόμενο του κυματισμού συνίσταται στην δυναμική συμπεριφορά της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού καθώς και την γενική δυναμική συμπεριφορά της μάζας του ρευστού λόγω εξωτερικής διέγερσης. Τα μήκη κύματος της ελεύθερης επιφάνειας αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες διακριτές τιμές της συχνότητας κίνησης και αποτελούν τις ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) του συστήματος. Αντίστοιχα οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η υπολογιστική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία στη διάρκεια εξωτερικής διέγερσης για τυχαία πληρότητα του κυλινδρικού δοχείου. Η επίλυση γίνεται μέσω πηγαίου κώδικα (source code) πεπερασμένων στοιχείων. Μέσα από την χρήση του κώδικα προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές και οι ιδιομορφές του συστήματος. Για την πιστοποίηση του κώδικα έγινε εφαρμογή του σε τετραγωνική δεξαμενή (απλή γεωμετρία). Στην συνέχεια υπολογίστηκαν με τρεις τύπους θεώρησης οι λόγοι των μαζών του ρευστού καθώς και οι ολικές δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα του δοχείου όταν σε αυτό επιβάλουμε εξωτερική σεισμική διέγερση. Για τον υπολογισμό των δυνάμεων χρησιμοποιήθηκε επίσης και η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης προκειμένου τα αποτελέσματα να συγκριθούν με πληρέστερο τρόπο. Τα αριθμητικά αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση κρίνονται ικανοποιητικά σε σχέση με άλλες αριθμητικές και αναλυτικές λύσεις, όπου αυτές υπήρχαν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	8
Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	12
Κεφάλαιο 3: Φυσική και Μαθηματική διατύπωση του φαινομένου.....	17
Κεφάλαιο 4: Αριθμητική επίλυση του φαινομένου με πεπερασμένα στοιχεία.....	27
4.1) Διατύπωση γενικού προβλήματος.....	28
4.2) Θεώρηση Τύπου I (Ολική θεώρηση).....	30
4.2 ^α) Ειδική Περίπτωση αρμονικής διέγερσης.....	32
4.2 ^β) Ειδική περίπτωση μηδενικής εξωτερικής διέγερσης.....	33
4.2.1) Επιλογή των συναρτήσεων σχήματος και διακριτοποίηση.....	34
4.2.2) Υπολογισμός Ιδιοτιμών και ιδιομορφών.....	42
4.2.3) Υπολογισμός Δυνάμεων.....	43
4.3) Θεώρηση τύπου II (διαχωρισμός σε ομοιόμορφη κίνηση – κίνηση κυματισμού).....	44
4.3.1) Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιομορφών.....	47
4.3.2) Υπολογισμός δυνάμεων.....	48
4.4) Θεώρηση τύπου III (ωστική κίνηση – επαγωγική κίνηση).....	50
4.4.1) Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιομορφών.....	55
4.4.2) Υπολογισμός Δυνάμεων.....	56
Κεφαλαίο 5: Σύγκριση αποτελεσμάτων των πεπερασμένων στοιχείων με αναλυτικές και άλλες λύσεις.....	58
5.1) Απλουστευμένη εφαρμογή σε ορθογωνική δεξαμενή.....	59
5.2) Εφαρμογή σε κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50% - Ιδιοτιμές..	71
5.3) Ισοδυναμία θεώρησης τύπου II και τύπου III για δεξαμενή πληρότητας 50%.....	83
5.4) Εφαρμογή σε κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50% - Δυνάμεις..	85

Κεφάλαιο 6: Αποτελέσματα για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή οιασδήποτε	
Πληρότητας.....	93
6.1)Ιδιοτιμές για οποιοδήποτε ύψος ρευστού.....	94
6.2)Λόγος μαζών κίνησης κυματισμού και ομοιόμορφης κίνησης....	100
6.3)Λόγος μαζών ωστικής και επαγωγικής κίνησης.....	111
6.4)Αποτελέσματα δυνάμεων με την θεώρηση τύπου I.....	123
6.5)Αποτελέσματα δυνάμεων με την θεώρηση τύπου III.....	135
Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα.....	138
Παράρτημα Α) Αναλυτική λύση φαινομένου.....	139
B)Πηγαίος κώδικας.....	143
Αναφορές	155

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η υπολογιστική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία στη διάρκεια εξωτερικής διέγερσης για τυχαία πληρότητα του κυλινδρικού δοχείου. Η επίλυση γίνεται μέσω πηγαίου κώδικα (source code) πεπερασμένων στοιχείων.

Το φαινόμενο του κυματισμού συνίσταται στην δυναμική συμπεριφορά της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού καθώς και την γενική δυναμική συμπεριφορά της μάζας του ρευστού λόγω εξωτερικής διέγερσης. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών και δοχεία πίεσης δεν περιορίζεται από τα τοιχώματα του δοχείου ή της δεξαμενής. Επομένως η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού επιτρέπει την σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο, και έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση των κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Αποδεικνύεται ότι για σχετικά μικρές κινήσεις οι κυματισμοί της ελεύθερης επιφάνειας μπορούν να θεωρηθούν ότι συνεπάγονται με κίνηση μόνο κάθετη ως προς την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών της συχνότητας κίνησης που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος. Αντίστοιχα οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Όταν μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος υγρό-δοχείο είναι στην περιοχή ή ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα μιας εξωτερικής κίνησης, διαταραχής ή διέγερσης που ασκείται πάνω στη κατασκευή, τότε εμφανίζεται συντονισμός και το εύρος της ταλάντωσης αυξάνει σημαντικά. Επομένως ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων του φαινομένου του κυματισμού και γενικότερα η

μελέτη της απόκρισης του συστήματος υγρό-δοχείο σε εξωτερική διέγερση αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σημασία.

Με τον όρο αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής εννοείται η συζευγμένη επίλυση του ρευστού σε αλληλεπίδραση με την περιβάλλουσα δεξαμενή. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις στο κέλυφος της δεξαμενής υπολογίζονται μαζί με τα υδροδυναμικά μεγέθη του υγρού που περιβάλλεται από την δεξαμενή. Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστού-κατασκευής είναι ανάλογη του βαθμού παραμόρφωσης της κατασκευής. Για στατικά φαινόμενα και «μικρές» παραμορφώσεις το πρόβλημα του ρευστού και αυτό της κατασκευής δύνανται να διατυπωθούν χωριστά. Όταν όμως η κίνηση είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, ακόμη και στην περίπτωση της μικρής παραμόρφωσης, η σύζευξη των δύο προβλημάτων είναι απαραίτητη, αφού το ρευστοδυναμικό πρόβλημα μπορεί να μην εξαρτάται από την μικρή παραμόρφωση της κατασκευής, εξαρτάται όμως από τις οριακές συνθήκες, καθώς οι ταχύτητες που αναπτύσσονται στην κατασκευή μεταφέρονται στο ρευστό. Η παρούσα εργασία εστιάζει κατά κύριο λόγο, στην αριθμητική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε απαραμόρφωτα δοχεία όπου η συνολική κίνηση του απαραμόρφωτου δοχείου μεταφέρεται στο υγρό.

Η σημασία της μελέτης του φαινομένου του κυματισμού είναι μεγάλη όχι μόνο από την ερευνητική σκοπιά αλλά και επειδή υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών και τεχνολογικών εφαρμογών που μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν:

- Δυναμική απόκριση δεξαμενών και δοχείων πίεσης διαφορετικών γεωμετριών (τετραγωνικές, κυλινδρικές, σφαιρικές) λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια της δεξαμενής.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών πλοίων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από τα θαλάσσια κύματα, του αποθηκευμένου υγρού στις δεξαμενές του πλοίου. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας του πλοίου.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών καυσίμων διαστημικών οχημάτων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την μεταβαλλόμενη επιτάχυνση του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω

εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.

- Δυναμική απόκριση δεξαμενών οχημάτων μεταφοράς καυσίμων όπου το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την απότομη αλλαγή της πορείας του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.
- Δυναμική απόκριση φραγμάτων λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια του φράγματος.

Η παρούσα διπλωματική εργασία περιλαμβάνει τρεις ενότητες. Η πρώτη ενότητα αποτελείται από τα κεφάλαια 2 και 3 όπου δίδεται η φυσική του φαινομένου και μία εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση στο φαινόμενο του κυματισμού, στις τεχνικές και μεθόδους επίλυσης του. Η δεύτερη ενότητα αποτελείται από το κεφάλαιο 4 όπου επιλύεται αριθμητικά το πρόβλημα του κυματισμού για οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο (εγκάρσια κατεύθυνση) οποιασδήποτε πληρότητας θεωρώντας τα τοιχώματα τους μη-παραμορφώσιμα και περιγράφεται η αριθμητική τεχνική επίλυσης με πεπερασμένα στοιχεία σε έναν πηγαίο κώδικα. Η τρίτη ενότητα περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του πηγαίου κώδικα και αποτελείται από τα κεφάλαια 5 και 6. Τέλος, στο κεφάλαιο 7 γίνεται μία σύνοψη των προηγούμενων κεφαλαίων και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα όλης της μελέτης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μία εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση στο φαινόμενο του κυματισμού σε σφαιρικές και κυλινδρικές δεξαμενές. Σημειώνουμε πως η αναλυτική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού έχει ισχυρή εξάρτηση από την γεωμετρία της δεξαμενής. Για σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο το φαινόμενο του κυματισμού δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και γίνεται χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Επίσης, πληθώρα δημοσιεύσεων που μελετούν το φαινόμενο του κυματισμού σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία το εξετάζουν ως ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιομορφών, χωρίς να εξετάζουν την επίδραση της εξωτερικής

σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα ιδιοτιμών ανάγεται σε πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, και απαιτεί κατάλληλες μεθόδους επίλυσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας περιγράφεται η φυσική του φαινομένου του κυματισμού. Το φαινόμενο του κυματισμού αναλύεται ως προς την ρευστομηχανική και μαθηματική διατύπωση του. Παρουσιάζονται οι διάφορες μεθοδολογίες επίλυσης του και το πώς αυτές σχετίζονται με την φυσική του φαινομένου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο το φαινόμενο του κυματισμού επιλύεται αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για δοχείο οριζόντιας κυλινδρικής γεωμετρίας υπό την επίδραση εξωτερικής διέγερσης. Αναλύονται οι διάφορες μεθοδολογίες επίλυσης του. Ειδικότερα, για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού έχουν αναπτυχθεί τρεις τύποι διακριτοποίησης του προβλήματος. Στον πρώτο τύπο δεν διαχωρίζεται το συνολικό πρόβλημα. Στον δεύτερο τύπο το πρόβλημα διαχωρίζεται στην 'ομοιόμορφη' και στην 'κυματική' κίνηση ενώ στον τρίτο τύπο διαχωρίζεται το πρόβλημα σε 'ωστική' και σε 'επαγωγική' κίνηση.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η αριθμητική λύση του φαινομένου του κυματισμού σε κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50% με μη-παραμορφώσιμα τοιχώματα. Αναπτύσσεται κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης όπου παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία. Επίσης εξετάζεται η σύγκλιση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μέσω του αντίστοιχου προβλήματος των ιδιοτιμών του κυματισμού. Οι υδροδυναμικές πιέσεις και οι οριζόντιες δυνάμεις στο τοίχωμα του κυλίνδρου υπολογίζονται για πραγματική σεισμική διέγερση. Τέλος παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των ιδιοτιμών για την εφαρμογή της τετραγωνικής δεξαμενής.

Στο έκτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η αριθμητική λύση του φαινομένου του κυματισμού σε κυλινδρικό δοχείο τυχαίας πληρότητας με μη-παραμορφώσιμα τοιχώματα. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις ιδιοτιμές και τις ιδιομορφές για τυχαία πληρότητα. Επίσης παρουσιάζονται οι αντίστοιχες μάζες για τους διάφορους τύπους διακριτοποίησης. Τέλος παρουσιάζονται οι υδροδυναμικές πιέσεις και δυνάμεις στο τοίχωμα του οριζόντιου κυλίνδρου για πραγματική σεισμική διέγερση με βάση την φασματική μέθοδο.

Κεφάλαιο 2

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Με τον όρο “φαινόμενο κυματισμού” εννοείται η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού που περιέχεται στο εσωτερικό δοχείου. Η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού προκαλείται από την εξωτερική διέγερση του δοχείου. Ανάλογα με την εξωτερική διέγερση και την γεωμετρία του δοχείου η δυναμική συμπεριφορά του ρευστού αποτελείται από δύο επιμέρους κινήσεις του ρευστού. Η πρώτη κίνηση σχετίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού οπότε έχουμε την δημιουργία κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού και η δεύτερη αφορά την κίνηση της μάζα του ρευστού, η οποία ακολουθεί την κίνηση της εξωτερικής διέγερσης ή πιο συγκεκριμένα την κίνηση του δοχείου.

Το φαινόμενο του κυματισμού επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Westergaard (1933), ο οποίος υπολόγισε την κατανομή των πιέσεων σε φράγμα ορθογωνικής διατομής, το οποίο υπόκειντο σε οριζόντια επιτάχυνση. Ο Lamb το 1945 στο κλασικό βιβλίο του «Υδροδυναμική» παρουσίασε τις θεμελιώδεις αρχές των επιφανειακών κυμάτων, στις οποίες βασίζεται και η ρευστομηχανική ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού. Ο Jacobsen (1949) έλυσε το πρόβλημα του κυματισμού σε όρθιο κυλινδρικό δοχείο καθώς και το πρόβλημα του κυλινδρικού βάρους που περιβάλλεται από ρευστό. Οι Werner και Sundquist (1949) επέκτειναν την μεθοδολογία του Jacobsen για ορθογωνικό δοχείο, ημικυκλικό και τριγωνικό κανάλι. Ωστόσο η πρώτη ολοκληρωμένη ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού και ο διαχωρισμός του σε ομοιόμορφη κίνηση και κίνηση κυματισμού έγινε από τους Graham και Rodriguez (1952), οι οποίοι υπολόγισαν την ομοιόμορφη και κυματική πίεση σε ορθογωνική δεξαμενή. Η πρώτη πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού έγινε από τους Hoskins και Jacobsen (1951), οι οποίοι υπολόγισαν

πειραματικά την ωστική πίεση. Αργότερα οι Jacobsen και Ayre (1953) παρουσίασαν εργασία που επιβεβαίωνε τα αποτελέσματα των Hoskins και Jacobsen (1951).

Το έναυσμα για μία ολοκληρωμένη και σε βάθος ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού έγινε από την NASA την δεκαετία του 1960 καθώς το πρόβλημα του κυματισμού εμφανιζόταν σε αεροδιαστημικές εφαρμογές και πιο συγκεκριμένα στις δεξαμενές καυσίμων των πυραύλων. Η NASA (Abramson, 1966) παρουσίασε μια ολοκληρωμένη μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας και για αρμονική εξωτερική διέγερση. Στην μελέτη αυτή περιλαμβάνονται αναλυτικές λύσεις και πειραματικά αποτελέσματα για το φαινόμενο του κυματισμού σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ελαστικότητα των τοιχωμάτων. Τέλος παρουσιάζονται ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα για την προσομοίωση του φαινομένου του κυματισμού.

Η μελέτη του φαινομένου του κυματισμού για δεξαμενές και δοχεία πίεσης υπό την επίδραση σεισμικής διέγερσης παρουσιάστηκε αρχικά από τον Housner (1957, 1963), ο οποίος παρουσίασε αναλυτική λύση του φαινομένου του κυματισμού για μη-παραμορφώσιμα όρθια κυλινδρικά και ορθογωνικά δοχεία. Η αναλυτική λύση του φαινομένου του κυματισμού διαχωρίστηκε σε δύο μέρη, το πρώτο μέρος ονομάστηκε “επαγωγική κίνηση” ενώ το δεύτερο μέρος ονομάστηκε “ωστική κίνηση”. Η αρχή αυτή αποτέλεσε την βάση για την σύνταξη των κανονιστικών διατάξεων API 650 (American Petroleum Institute, 2000, Παράρτημα E) για όρθια κυλινδρικά δοχεία. Οι Veletsos (1974), Veletsos και Yang (1977), Haroun και Housner (1981) και Haroun (1983) επέκτειναν την μεθοδολογία του διαχωρισμού της “επαγωγικής” και “ωστικής” κίνησης ώστε να περιληφθεί στην μεθοδολογία η ελαστική παραμόρφωση του κελύφους και η αλληλεπίδραση της με το φαινόμενο του κυματισμού. Στην συνέχεια, οι Peek (1988), Natsiavas (1988), Veletsos και Tang (1990) και Malhotra (1995) μελέτησαν το ανασήκωμα απλά εδραζόμενων κατακόρυφων κυλινδρικών δεξαμενών καθώς και την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Σημαντική συνεισφορά στην σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών με ειδική θεμελίωση και απλή στήριξη και στον αντισεισμικό σχεδιασμό αυτών των δεξαμενών έχουν παρουσιάσει με τις εργασίες τους οι Fisher (1979), Rammerstorfer et. al. (1988) και Fisher et. al. (1991). Επιπλέον, οι εργασίες αυτές αποτέλεσαν και την βάση για την σύνταξη των κανονισμών αντισεισμικού σχεδιασμού των κατακόρυφων κυλινδρικών δοχείων στον Eurocode 8 (EC8-part 4.3-παράρτημα A). Αξιοσημείωτη είναι η συνεισφορά των Niwa και Clough (1982) όσον αφορά την

πειραματική μελέτη του φαινομένου του κυματισμού σε κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Ο Rammerstorfer (1990) παρουσίασε μία ολοκληρωμένη μελέτη και εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με την σεισμική απόκριση δεξαμενών αποθήκευσης υγρών, περιλαμβάνοντας την αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής και την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Σε πρόσφατη εργασία των Ibrahim et. al. (2001) παρουσιάζεται μια εκτενέστατη βιβλιογραφική ανασκόπηση που αποτελείται από 1.319 αναφορές, οι οποίες αναφέρονται στο μη-γραμμικό φαινόμενο του κυματισμού, σε ισοδύναμα μηχανικά μοντέλα, σε στοχαστική εξωτερική διέγερση, στην παραμόρφωση του τοιχώματος της δεξαμενής, σε ωστική εξωτερική διέγερση και σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας του φαινομένου του κυματισμού.

Οι παραπάνω εργασίες μελετούν το φαινόμενο του κυματισμού σε κατακόρυφες κυλινδρικές και ορθογωνικές δεξαμενές. Εντούτοις τα οριζόντια κυλινδρικά δοχεία έχουν σημαντικές εφαρμογές στην χημική και πετροχημική βιομηχανία. Επομένως η μελέτη του φαινομένου του κυματισμού λόγω σεισμικής διέγερσης έχει πρακτικό ενδιαφέρον για τον υπολογισμό της συνολικής οριζόντιας δύναμης και της αντίστοιχης ροπής ανατροπής. Επίσης ο αριθμός των θεωρητικών και αριθμητικών εργασιών που αναφέρονται σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία είναι περιορισμένος σε σύγκριση με τον αριθμό των δημοσιεύσεων σε κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία. Επιπλέον, οι σύγχρονοι κανονισμοί του EN 1998 (Παράρτημα A του μέρους EC8) αναλύουν σε λεπτομέρεια το φαινόμενο του κυματισμού για ορθογωνικά και κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία ενώ στην περίπτωση του οριζόντιου κυλίνδρου δεν υπάρχει ανάλυση του φαινομένου.

Ο Budiansky (1960) εξέτασε το φαινόμενο του κυματισμού σε κυλινδρικό κανάλι και σε σφαίρα χρησιμοποιώντας χωρικό μετασχηματισμό και με αυτό τον τρόπο απεικόνισε την αρχική κυκλική και σφαιρική γεωμετρία σε μία επίπεδη γεωμετρία. Το πεδίο ροής περιγράφεται από ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες επιλύονται με την μέθοδο Galerkin. Τέλος παρουσιάστηκαν αριθμητικά αποτελέσματα όσον αφορά τις ιδιοσυχνότητες και τις υδροδυναμικές πιέσεις. Ο Abramson et. al. (1963) παρουσίασαν πειραματικά αποτελέσματα για τις ιδιοσυχνότητες και τις πιέσεις, σφαιρικού δοχείου υπό την επίδραση εξωτερικής διέγερσης. Τα αποτελέσματα τους είχαν πολύ καλή συμφωνία με αυτά του Budiansky (1960). Οι Moiseev και Petron (1966) εφάρμοσαν την μεθοδολογία μεταβολών κατά Ritz και υπολόγισαν αριθμητικά τις συχνότητες κυματισμού σε ποικίλες γεωμετρίες δοχείων μεταξύ αυτών, οριζόντιου κυλινδρικού και σφαιρικού. Οι Fox και Kuttler (1981, 1983) υπολόγισαν το άνω και κάτω όριο των τιμών των συχνοτήτων του κυματισμού σε ημι-κυκλικό κανάλι, η

γεωμετρία του οποίου είναι το δυδιάστατο ανάλογο του σφαιρικού δοχείου. χρησιμοποιώντας την μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης και την μεθοδολογία των ενδιάμεσων προβλημάτων. Ωστόσο, η πλειονότητα των τεχνικών σύμμορφης απεικόνισης απαιτούν πολύπλοκους μετασχηματισμούς, ενώ οι μέθοδοι των μιγαδικών μεταβλητών δεν είναι εφαρμόσιμες σε τρισδιάστατες γεωμετρίες. Ο McIver (1989) εξέτασε το φαινόμενο του κυματισμού σε οριζόντιο κυλινδρικό και σφαιρικό δοχείο, με τυχαίο ύψος της στάθμης του ρευστού. Επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το τοίχωμα του δοχείου και η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού να ταυτίζονται με τις γραμμές συντεταγμένων. Στην συνέχεια ο McIver επαναδιατύπωσε το πρόβλημα ιδιοτιμών σε όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες επιλύθηκαν αριθμητικά. Οι McIver και McIver (1993) παρουσίασαν απλές αναλυτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του άνω και κάτω ορίου των συχνότητων του κυματισμού σε οριζόντιους κυλίνδρους, τα οποία είχαν πολύ καλή συμφωνία με τα όρια που υπολογίστηκαν από την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.

Γενικότερα η ανάλυση του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία με την στάθμη του υγρού σε κάποιο τυχαίο ύψος απαιτεί υπολογιστική μέθοδο. Ωστόσο για την ειδική περίπτωση οριζόντιου κυλίνδρου πληρότητας 50% είναι δυνατό να αναπτυχθεί αναλυτική λύση. Οι Evans και Linton (1993) δημοσίευσαν ημι-αναλυτική λύση σε μορφή αναπτύγματος σειράς για το πρόβλημα ιδιοτιμών του φαινομένου του κυματισμού σε σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο ελαχιστοποιώντας το υπολογιστικό έργο. Θεωρώντας αρμονική λύση ως προς τον χρόνο, το δυναμικό της ταχύτητας αναλύεται σε όρους μη-ορθογωνικών χωρικών αρμονικών συναρτήσεων. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα του δοχείου και στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού προκύπτει ένα ομογενές σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, η επίλυση των οποίων δίνει τις συχνότητες του κυματισμού.

Βασισμένοι στην εργασία των Evans και Linton (1995), οι Papaspyrou et al.(2003 a, 2004 b) επίλυσαν ημί-αναλυτικά το πρόβλημα του κυματισμού για σφαιρικό και οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο (διαμήκης και εγκάρσια κατεύθυνση) πληρότητας 50% θεωρώντας τα τοιχώματα τους μη-παραμορφώσιμα. Στις εργασίες αυτές αναπτύχθηκε μεθοδολογία μέσα από την οποία το δυναμικό της λύσης διαχωρίζεται θεώρηση της "ομοιόμορφης κίνησης" και της "κίνησης κυματισμού (π.χ. Miles 1958, Abramson 1966, Bauer 1984, Isaacson και Subbiach 1991).

Αντικειμενικός σκοπός της εργασίας είναι η επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος του κυματισμού, λόγω εξωτερικής διέγερσης σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία τυχαίας πληρότητας με την εφαρμογή υπολογιστικών εργαλείων και συγκεκριμένα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Κεφάλαιο 3

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

Το φαινόμενο του κυματισμού αποτελεί πρόβλημα ροής με ελεύθερη επιφάνεια και σχετίζεται με την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων. Οι ροές, οι οποίες σχετίζονται με επιφανειακά κύματα συνηθίζεται να θεωρούνται δυναμικές ροές γεγονός το οποίο αποτελεί αποδεκτή προσέγγιση για φαινόμενα ελεύθερης επιφάνειας. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού κινείται μόνο κάθετα ως προς τη βάση της δεξαμενής και τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος. Τέλος ο λόγος του μήκους κύματος του κυματισμού προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι αρκετά μεγάλος ώστε η γραμμικοποίηση των εξισώσεων να είναι αποδεκτή. Λαμβάνοντας υπ όψιν τις παραπάνω θεωρήσεις μπορούμε να παρουσιάσουμε την μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού.

Η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού βασίζεται στην μαθηματική διατύπωση των επιφανειακών κυμάτων. Όταν σ' ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας δημιουργηθούν κυματισμοί βαρύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια, η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων και η ροή χαρακτηρίζεται ως αστρόβιλη. Το διάνυσμα της ταχύτητας εκφράζεται ως η κλίση του δυναμικού της ταχύτητας, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για ένα ατρίβες και ασυμπιεστο ρευστό είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (3.2)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι η ροή είναι αστρόβιλη και ότι το πεδίο ροής \mathbf{u} μπορεί να γραφεί ως η κλίση του δυναμικού της συνάρτησης

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi. \quad (3.3)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας γίνεται η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της απόκλισης

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (3.5)$$

ο όρος της συναγωγής γράφεται ως εξής

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (3.6)$$

καθώς η ροή θεωρείται αστρόβιλη ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$). Εάν η βαρύτητα επιδρά στην αρνητική y -κατεύθυνση μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{g} = \nabla(-gy) \quad (3.7)$$

Η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) + \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gy) \quad (3.8)$$

θεωρώντας ότι η συνάρτηση Φ είναι ομαλή, η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gy \right\} = 0 \quad (3.9)$$

και επομένως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gy = C(t) \quad (3.10)$$

για κάποια συνάρτηση $C(t)$. Όμως μπορούμε να επιλέξουμε $C(t)=0$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\Phi \rightarrow \Phi + \int_0^t C(s) ds \quad (3.11)$$

ο οποίος δεν επηρεάζει το πεδίο ταχύτητας.

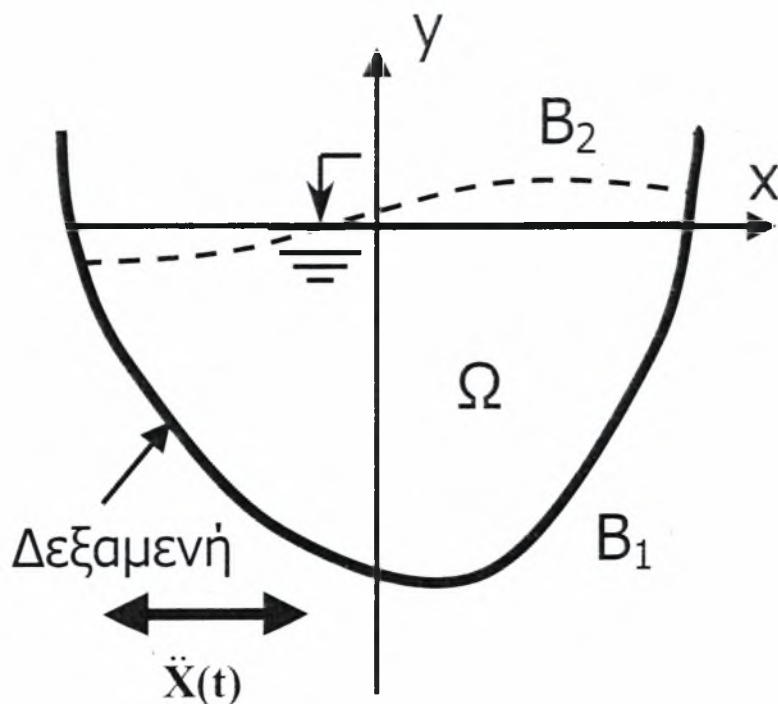
Για αυτό τον τύπο ροής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + gy = 0 \quad (3.12)$$

Υπολογίζοντας το Φ από την εξίσωση Laplace (3.3) υπολογίζεται στην συνέχεια το πεδίο των πιέσεων από την εξίσωση Bernoulli(3.12).

Θεωρώντας ότι η ροή είναι δισδιάστατη η ελεύθερη επιφάνεια περιγράφεται από την σχέση $y=\eta(x,t)$, όπου η συντεταγμένη x βρίσκεται κατά μήκος της διεπιφάνειας Σχήμα 3.1. Θεωρώντας αμελητέα την επιφανειακή τάση η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η ατμοσφαιρική $p=p_{\text{atm}}$. Επιλέγουμε $p=0$ στην ελεύθερη επιφάνεια και κάνουμε χρήση του απλού μετασχηματισμού $p \rightarrow p - p_{\text{atm}}$ γεγονός το οποίο δεν αλλάζει τις βασικές εξισώσεις Euler, οι οποίες εξαρτώνται από ∇p . Η εξίσωση Bernoulli στην ελεύθερη επιφάνεια δίνει την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g\eta = 0 \quad \text{στο } y=\eta(x,t) \quad (3.13)$$



Σχήμα 3.1: Γεωμετρική απεικόνιση του πεδίου ορισμού και των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια. Η άλλη εξίσωση που ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η κινηματική συνοριακή συνθήκη, η οποία υποδηλώνει ότι κάθε σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια παραμένει σ' αυτήν. Η μαθητική διατύπωση της κινηματικής συνοριακής συνθήκης είναι

$$\frac{D}{Dt} \{y - \eta(x,t)\} = \frac{\partial}{\partial t} \{y - \eta(x,t)\} + \mathbf{u} \cdot \nabla \{y - \eta(x,t)\} = 0 \quad (3.14)$$

η οποία δίνει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.15)$$

Τέλος το ρευστό περιορίζεται από την απαραμόρφωτη επιφάνεια του στο $\partial_2 G$. Σ' αυτή την συνοριακή συνθήκη το κάθετο διάνυσμα της ταχύτητας είναι μηδέν και επομένως ισχύει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \quad (3.16)$$

Στην συνέχεια γραμμικοποιούμε τις μη-γραμμικές συνοριακές συνθήκες θεωρώντας ότι το ύψος των κυματισμών $\eta(x)$ είναι μικρό σε σχέση με χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος όπως το μέσο βάθος του ρευστού και το μήκος κύματος του κυματισμού. Επομένως οι ποσότητες $\partial \eta / \partial x$ και $\partial \Phi / \partial x$ που εκφράζουν την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας και την συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι μικρές. Επομένως, το γινόμενο $\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ θα είναι πολύ μικρό (δεύτερης τάξης) και μπορούμε να το αγνοήσουμε σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους που είναι πρώτης τάξης. Τότε η κινηματική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,\eta,t) \quad (3.17)$$

Αναλύοντας την συνιστώσα $\partial \Phi / \partial y$ στο $y = \eta$ σε σειρά Taylor ως προς $y = 0$ και απαλείφοντας τους όρους δεύτερης τάξης προκύπτει η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,0,t) \quad \text{στο } B_2 \quad (3.18)$$

Η δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή το ρευστό είναι σε ηρεμία και κάθε κίνηση του ρευστού προκαλείται από τον κυματισμό, ο μη-γραμμικός όρος

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (3.19)$$

μπορεί να αγνοηθεί ως πολύ μικρός. Επιπλέον όρος $\partial \Phi / \partial t$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Taylor ως προς $y=0$ λαμβάνοντας υπ όψιν μόνο τον πρώτο όρο της σειράς. Τότε προκύπτει η συνοριακή σχέση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,0,t) + \frac{P(x,t)}{\rho} + g \eta(x,t) = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (3.20)$$

Υπολογίζοντας την χρονική παράγωγο της τελευταίας εξίσωσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $\partial \eta / \partial t$ συναρτήσει του $\partial \Phi / \partial y$ και η δυναμική συνοριακή συνθήκη γράφεται

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x,0,t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,0,t) = 0 \quad (3.21)$$

Τέλος ισχύει

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (3.22)$$

καθώς η πίεση είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια. άρα η τελική μορφή της συνοριακής συνθήκης είναι

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x,0,t) + g \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,0,t) = 0 \quad (3.23)$$

Μετά την γραμμικοποίηση και για την περίπτωση δεξαμενής ορθογωνικής διατομής η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού έχει ως εξής

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (3.26)$$

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες αποτελεί κλασσικό πρόβλημα ιδιοτιμών και για το λόγο αυτόν το φαινόμενο του κυματισμού θεωρείται και επιλύεται ως πρόβλημα ιδιοτιμών. Στις περιπτώσεις που ασκείται εξωτερική διέγερση στην δεξαμενή το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα συνοριακών τιμών με την εμφάνιση μη-ομογενών όρων στις συνοριακές συνθήκες των τοιχωμάτων της δεξαμενής.

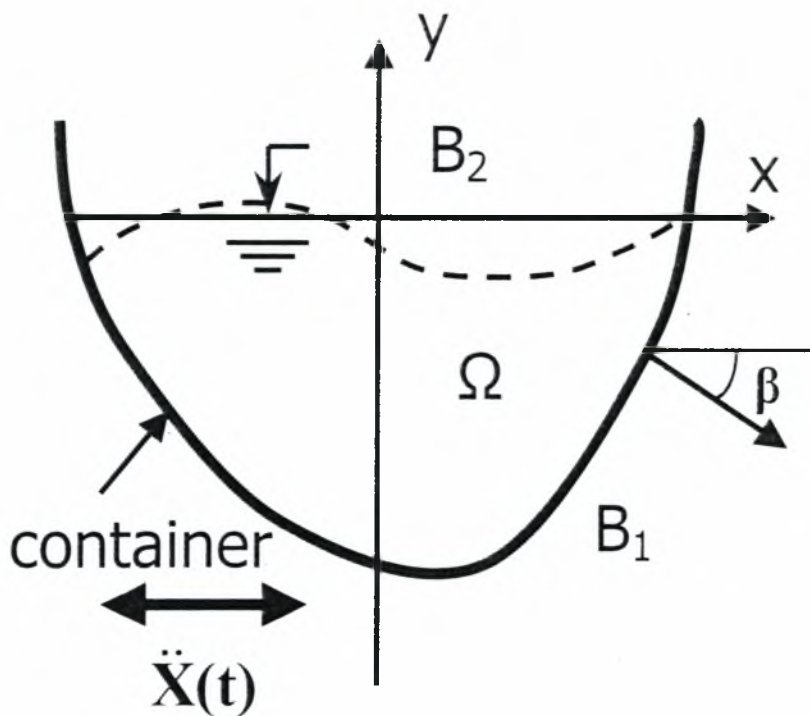
Συγκεκριμένα

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta \quad \text{στο } B_1 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (3.29)$$

όπου \dot{X} είναι η εξωτερική διέγερση και $\cos \beta$ είναι το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} με το άξονα x όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Απεικόνιση της γωνίας β και της εξωτερικής διέγερσης $\ddot{X}(t)$

Οι μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος των συνοριακών τιμών διακρίνονται σε αναλυτικές και αριθμητικές. Οι αναλυτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως η μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών και η σύμμορφη απεικόνιση. Η μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών εφαρμόζεται σε ορθογωνικές και κατακόρυφες κυλινδρικές δεξαμενές. Σε

σφαιρικές και σε οριζόντιες κυλινδρικές δεξαμενές το πρόβλημα είναι μη διαχωρίσιμο και εφαρμόζονται συνήθως μέθοδοι σύμμορφης απεικόνισης ή άλλες εξειδικευμένες τεχνικές. Τέλος οι υπολογιστικές μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών και στοιχείων εφαρμόζονται σε όλες τις γεωμετρίες.

Η επίλυση του φαινομένου του κυματισμού μπορεί να διευκολυνθεί σημαντικά θεωρώντας την φυσική του φαινομένου. Για την επίλυση του φαινομένου χρησιμοποιούνται τρεις διαφορετικοί τύποι θεώρησης του δυναμικού. Στην θεώρηση τύπου I το δυναμικό της ταχύτητας Φ δεν διαχωρίζεται. Στην θεώρηση τύπου II το δυναμικό της ταχύτητας Φ διαχωρίζεται σε δύο μέρη και ο διαχωρισμός αυτός σχετίζεται άμεσα με την φυσική του φαινομένου. Στο φαινόμενο του κυματισμού το ρευστό που βρίσκεται στο εσωτερικό του δοχείου περιλαμβάνει δύο διαφορετικές κινήσεις, ένα μέρος του ρευστού εκτελεί ταλάντωση (κυματισμό), η οποία εκφράζει την σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο και το υπόλοιπο μέρος του ρευστού ακολουθεί την κίνηση του δοχείου. Στην θεώρηση τύπου III το δυναμικό της ταχύτητας Φ διαχωρίζεται επίσης σε δύο μέρη την 'ωστική' και την 'επαγωγική' κίνηση. Επομένως, ο μαθηματικός διαχωρισμός του προβλήματος του κυματισμού βασίζεται στην φυσική θεώρηση του φαινομένου (Σχήμα 3.3). Η μαθηματική διατύπωση των τριών τύπων διακριτοποίησης του προβλήματος είναι:

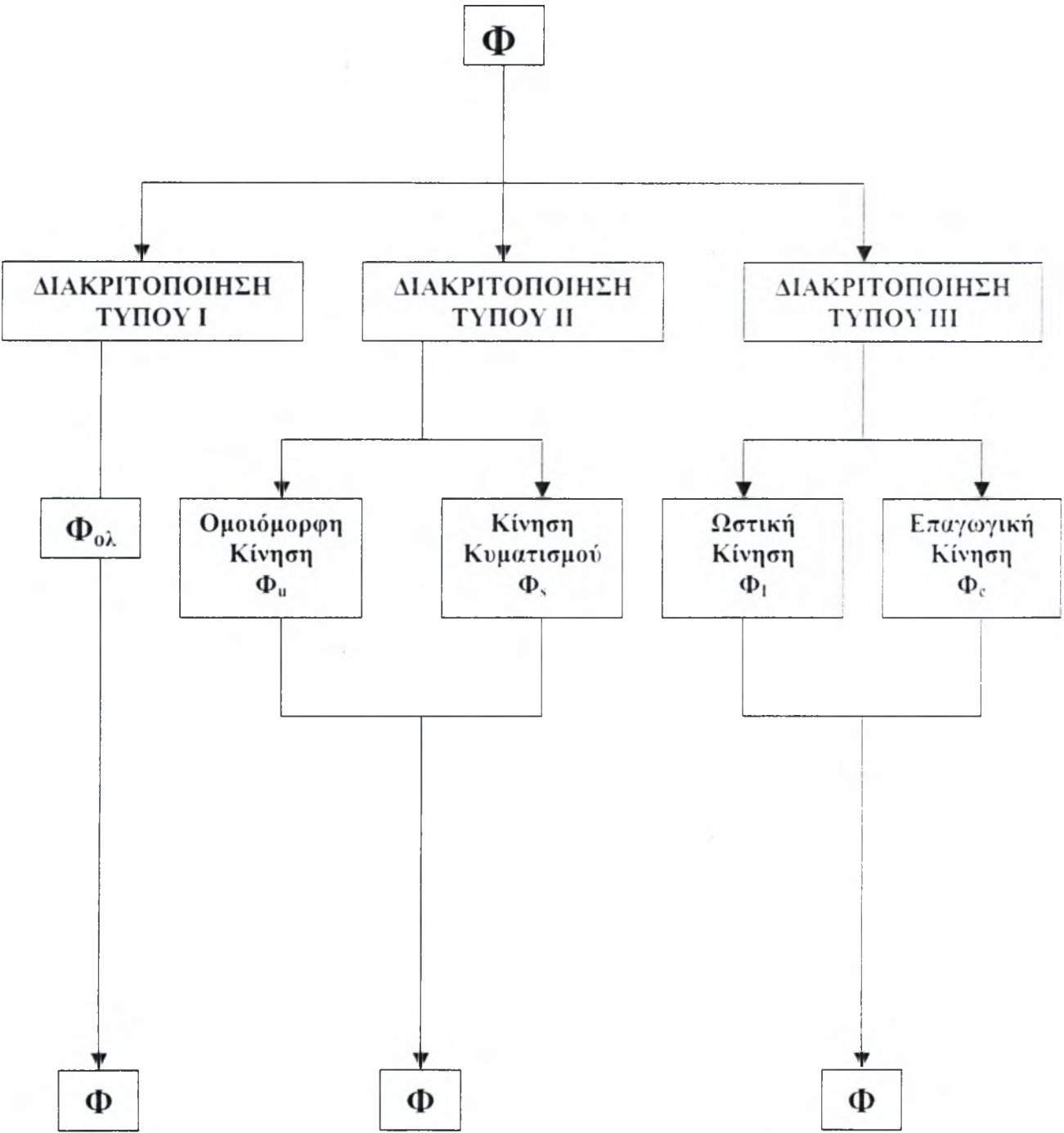
ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ Ι	
$\nabla^2 \Phi = 0$	στο Ω
$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta$	στο B_1
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$	στο B_2

ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ ΙΙ $\Phi = \Phi_U + \Phi_S$	
Ομοιόμορφη Κίνηση	Κίνηση Κυματισμού
$\nabla^2 \Phi_U = 0$ στο Ω	$\nabla^2 \Phi_S = 0$ στο Ω
$\frac{\partial \Phi_U}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta$ στο B_1	$\frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = 0$ στο B_1
$\frac{\partial \Phi_U}{\partial n} = 0$ στο B_2	$\frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ στο B_2

ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΥΠΟΥ ΙΙΙ $\Phi = \Phi_I + \Phi_C$	
Ωστική Κίνηση	Επαγωγική Κίνηση
$\nabla^2 \Phi_I = 0$ στο Ω	$\nabla^2 \Phi_C = 0$ στο Ω
$\frac{\partial \Phi_I}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta$ στο B_1	$\frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = 0$ στο B_1
$\Phi_I = 0$ στο B_2	$\frac{\partial^2 \Phi_C}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = -g \frac{\partial \Phi_I}{\partial n}$ στο B_2

Προφανώς οι θεωρήσεις τύπου I, II και III είναι ισοδύναμες δηλαδή δίνουν το ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Η θεώρηση τύπου I εκφράζει το συνολικό πρόβλημα. Ο διαχωρισμός τύπου II εκφράζει την αντίληψη για το πρόβλημα ενός παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο κινούμενο δοχείο. Η διαφορά των θεωρήσεων τύπου II και III είναι ότι ο διαχωρισμός σε ομοιόμορφη κίνηση και κίνηση κυματισμού εκφράζει την σχετική κίνηση του φαινομένου ως προς την κίνηση της δεξαμενής. Από την άλλη μεριά ο διαχωρισμός σε ωστική και επαγωγική κίνηση εκφράζει την απόλυτη κίνηση του φαινομένου.

Στην παρούσα εργασία θα εξεταστούν και οι τρεις μέθοδοι διαχωρισμού του προβλήματος, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θα αποδειχθεί ότι και τα διακριτοποιημένα προβλήματα είναι επίσης ισοδύναμα.



Σχήμα 3.3: Σχηματική απεικόνιση των θεωρήσεων τύπου I, II και III

Κεφάλαιο 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Περίληψη

Στο παρόν κεφάλαιο το φαινόμενο του κυματισμού επιλύεται αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε δοχείο οριζόντιας κυλινδρικής διατομής υπό την επίδραση εξωτερικής διέγερσης. Για την επίλυση αναπτύσσεται κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran, με τον οποίο υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές του κυματισμού καθώς επίσης και οι δυνάμεις. Στην αριθμητική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού η συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας διαχωρίζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους για να καταλήξουμε στον υπολογισμό των δυνάμεων. Για κάθε έναν διαφορετικό διαχωρισμό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά σχηματίζεται η ασθενής μορφή του προβλήματος. Το πρόβλημα διακριτοποιείται με την μέθοδο Galerkin (πεπερασμένων στοιχείων) επιλέγοντας κατάλληλες συναρτήσεις βάσης για την υπ' όψιν γεωμετρία. Διακριτοποιώντας με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων την ασθενή μορφή του προβλήματος, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης. Στην ειδική περίπτωση της αρμονικής εξωτερικής διέγερσης το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μετασχηματίζεται σε αλγεβρικό σύστημα η επίλυση του οποίου γίνεται με την μέθοδο της απαλοιφής Gauss. Στο αλγεβρικό σύστημα εάν αγνοηθεί το δεξί μέλος του συστήματος που προέρχεται από την εξωτερική διέγερση προκύπτει το πρόβλημα των ιδιοτιμών, το οποίο και επιλύεται αριθμητικά. Χρησιμοποιούμε τριών ειδών θεωρήσεις ανάλογα με τον διαχωρισμό της συνάρτησης του δυναμικού της ταχύτητας όπως αυτοί περιγράφονται αναλυτικά στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Το υγρό στο εσωτερικό του δοχείου θεωρείται ατρίβες και η ροή περιγράφεται από την συνάρτηση του δυναμικού της ταχύτητας $\Phi(r,\theta,z,t)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad -R < y < H-R, \quad 0 < z < b \quad (4.1.1)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας υπόκειται στην γραμμικοποιημένη δυναμική και κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g \eta = 0 \quad \text{στο} \quad y=H, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < b \quad (4.1.2)$$

και

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{στο} \quad y=H, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < b \quad (4.1.3)$$

αντίστοιχα, όπου g είναι σταθερά βαρύτητας και $\eta = \eta(r,z,t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Συνδυάζοντας τις συνοριακές συνθήκες (4.1.2) και (4.1.3) προκύπτει η μικτή συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο} \quad y=H, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < b \quad (4.1.4)$$

Επιπλέον, το Φ ικανοποιεί την κινηματική συνθήκη στο απαραμόρφωτο τοίχωμα λόγω της εξωτερικής διέγερσης $X(t)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta \quad \text{στο} \quad r=R, \quad -R < y < H-R, \quad 0 < z < b \quad (4.1.5)$$

όπου $\cos \beta$ είναι το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα πάνω στην συνοριακή επιφάνεια με τον άξονα x και \dot{X} είναι η επιτάχυνση της εξωτερικής διέγερσης.

4.2 Θεώρηση Τύπου I (Ολική Διατύπωση)

Το πρόβλημα όπως παρουσιάστηκε είναι τρισδιάστατο. Λόγω όμως του τύπου της γεωμετρικής συμμετρίας του σχήματος της οριζόντιας κυλινδρικής δεξαμενής και της εξωτερικής διέγερσης το πρόβλημα γίνεται διδιάστατο. Επομένως το υγρό στο εσωτερικό του δοχείου θεωρείται ατριβές και η ροή περιγράφεται από την συνάρτηση του δυναμικού της ταχύτητας $\Phi(x,y,t)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad -R < y < H - R. \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{X} \cos \beta \quad \text{στο } r=R, \quad -R < y < H - R. \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } y=H, \quad 0 < r < R. \quad (4.2.3)$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi) \varphi^* d\Omega = 0 \quad (4.2.4)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_B \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB - \int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega = 0 \quad (4.2.5)$$

Όπου B είναι το ολικό σύνορο του προβλήματος. Ισχύει $B = B_1 \cup B_2$ άρα η σχέση (4.2.5)

γράφεται

$$\int_{B_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega = 0 \quad (4.2.6)$$

όπου B_1 είναι το τοίχωμα της δεξαμενής και B_2 η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Λαμβάνοντας υπ όψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_{B_1} \dot{X} n_x \varphi^* dB_1 + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \varphi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega = 0 \quad (4.2.7)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο διακριτοποίησης Galerkin θεωρώντας

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i(t) N_i(x,y) = [N] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.2.8)$$

όπου q_i είναι οι άγνωστες χρονικές συναρτήσεις που πρέπει να υπολογιστούν και $[N]$ είναι ένας πίνακας διάστασης $1 \times N$ ο οποίος περιλαμβάνει τις συναρτήσεις βάσης $N_i(x,y)$. Με παραγωγήσις έχουμε

$$\nabla \Phi = [B] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.2.9)$$

Επίσης θεωρούμε

$$\varphi^* = \sum_{i=1}^N q_i^* N_i(x,y) = [N] \mathbf{q}^* \quad (4.2.10)$$

και με παραγωγήσις παίρνουμε

$$\nabla \varphi^* = [B] \mathbf{q}^* \quad (4.2.11)$$

όπου \mathbf{q}^* είναι τυχαίες συναρτήσεις και $[B]$ είναι ένας πίνακας διαστάσεων $2 \times N$ και περιλαμβάνει ανά γραμμή τις παραγώγους των συναρτήσεων βάσεις N ως προς τις διαστάσεις του προβλήματος (x,y) . Με την παραπάνω διακριτοποίηση και με την απαίτηση να ισχύει η 'διακριτοποιημένη' ασθενής μορφή για τα τυχαία \mathbf{q}^* , καταλήγουμε στο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

$$[M] \ddot{\mathbf{q}} + [K] \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (4.2.12)$$

όπου $[M]$ είναι το μητρώο μάζας, $[K]$ το μητρώο ακαμψίας και \mathbf{F} το μητρώο των εξωτερικών δυνάμεων και δίνονται από τις σχέσεις

$$[M] = \frac{1}{g} \int_{B_2} [N]^T [N] dB_2 \quad (4.2.13)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [B] d\Omega \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{F} = \dot{X} \int_{B_1} [N]^T n_x dB_1 \quad (4.2.15)$$

αντίστοιχα.

4.2.α) Ειδική Περίπτωση αρμονικής εξωτερικής διέγερσης

Για την περίπτωση της αρμονικής εξωτερικής διέγερσης, η διέγερση έχει την εξής μορφή

$$\dot{X}=Ue^{-i\omega t} \quad (4.2.α.1)$$

ενώ το δυναμικό της ταχύτητας γίνεται

$$\Phi(x,y,t)=\phi(x,y)e^{-i\omega t} \quad (4.2.α.2)$$

και με παραγώγιση έχουμε

$$\nabla\Phi=(\nabla\phi)e^{-i\omega t} \quad (4.2.α.3)$$

Η ασθενής μορφή γίνεται

$$\int_B U\phi^*dB_1+\frac{\omega^2}{g}\int_{B_2}\phi\phi^*dB_2-\int_{\Omega}(\nabla\Phi)(\nabla\phi^*)d\Omega=0 \quad (4.2.α.4)$$

οπότε προκύπτει αλγεβρικό γραμμικό σύστημα

$$\sum_{i=1}^N[K']a_j=F_i \quad (4.2.α.5)$$

όπου a_j είναι οι άγνωστοι συντελεστές και K_{ij} είναι το μητρώο δυναμικής ακαμψίας που υπολογίζεται από την σχέση

$$[K']=\int_{\Omega}[B]^T[B]d\Omega-\frac{\omega^2}{g}\int_{B_2}[N]^T[N]dB_2 \quad (4.2.α.6)$$

όπου $[N]$ είναι οι συναρτήσεις βάσης ενώ F_i είναι το μητρώο των δυνάμεων και υπολογίζεται από την σχέση

$$F_i=U\int_{B_1}[N]dB_1 \quad (4.2.α.7)$$

Το σύστημα σε μητρωϊκή μορφή γράφεται:

$$[K']\cdot a=F\Rightarrow a=[K']^{-1}F \quad (4.2.α.8)$$

4.2.β) Ειδική Περίπτωση μηδενικής εξωτερικής διέγερσης

Για την περίπτωση όπου δεν έχουμε εξωτερική διέγερση

$$\dot{X}=0 \quad (4.2.\beta.1)$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος γίνεται

$$\int_{\Omega} (\nabla \phi)(\nabla \phi^*) d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \phi^* dB_z = 0 \quad (4.2.\beta.2)$$

οπότε προκύπτει αλγεβρικό γραμμικό σύστημα

$$[K'] \cdot \alpha = 0 \quad (4.2.\beta.3)$$

όπου α , είναι οι άγνωστοι συντελεστές και $[K']$ είναι το μητρώο δυναμικής ακαμψίας που υπολογίζεται από την σχέση

$$[K'] = \int_{\Omega} [B]^T [B] d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_z} [N]^T [N] dB_z \quad (4.2.\beta.4)$$

όπου $[N]$ είναι οι συναρτήσεις βάσης.

Το σύστημα σε μητρωϊκή μορφή γράφεται:

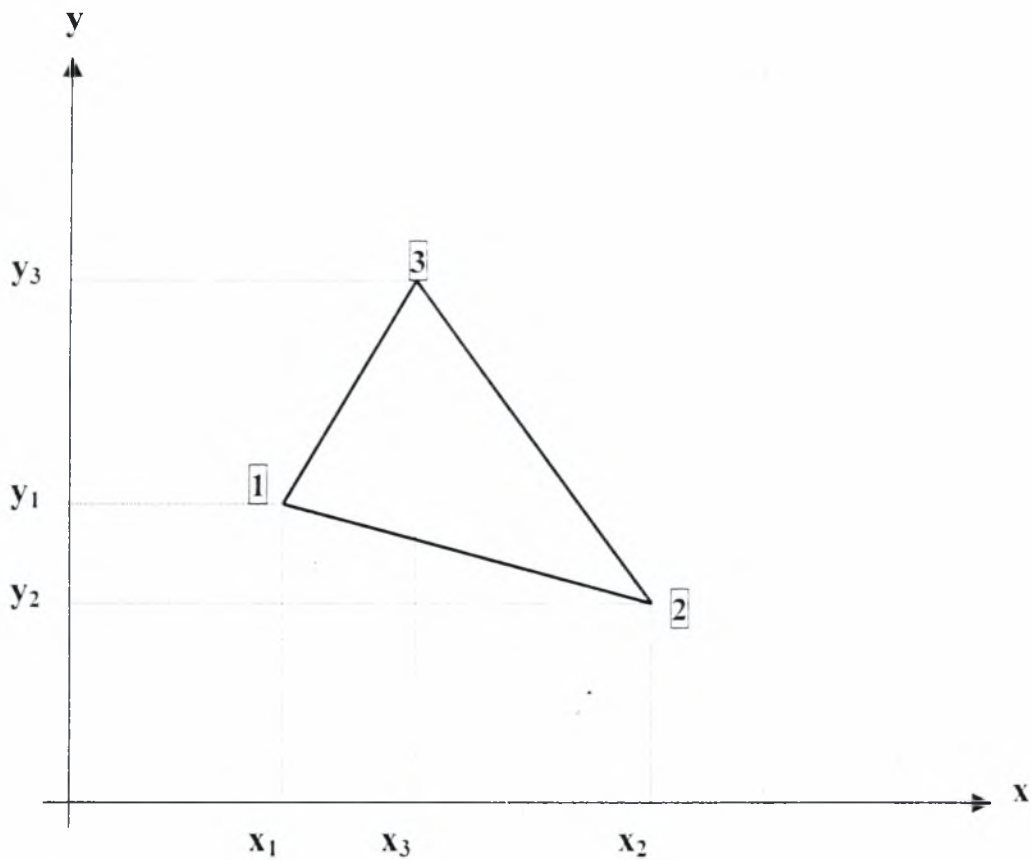
$$[K'] \cdot a = 0 \quad (4.2.\beta.5)$$

ενώ η απαίτηση για μη τετριμμένη λύση

$$\det[K'] = 0 \quad (4.2.$$

4.2.1 Επιλογή των Συναρτήσεων σχήματος και διακριτοποίηση

Για την επιλογή των συναρτήσεων βάσης $N_i(x,y)$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θεωρούμε πλέγμα που αποτελείται από τριγωνικά τρικομβικά στοιχεία, με βάση το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2

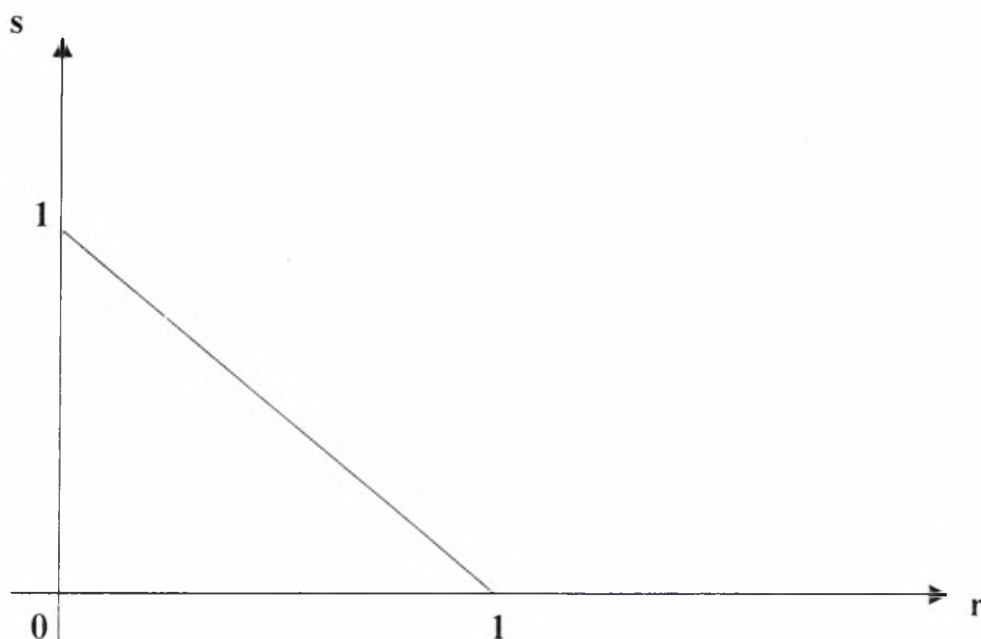


Σχήμα 4.2: Γεωμετρική απεικόνιση τρικομβικού τριγωνικού στοιχείου στο ολικό σύστημα (x,y)

Στη συνέχεια θεωρούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων (r,s) . Σχήμα 4.3. σε κάθε στοιχείο και ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί συντεταγμένων

$$x(r,s) = \sum_{i=1}^3 N_i(r,s)x_i = N_1(r,s)x_1 + N_2(r,s)x_2 + N_3(r,s)x_3 \quad (4.2.1.1)$$

$$y(r,s) = \sum_{i=1}^3 N_i(r,s)y_i = N_1(r,s)y_1 + N_2(r,s)y_2 + N_3(r,s)y_3 \quad (4.2.1.2)$$



Σχήμα 4.3: Γεωμετρική απεικόνιση τρικομβικού τριγωνικού στοιχείου στο τοπικό σύστημα (r,s)

Σημειώνεται ότι η επιλογή των τριγωνικών τρικομβικών έγινε για να μπορέσουμε να έχουμε όσο το δυνατόν καλύτερη γεωμετρική προσέγγιση του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων με την γεωμετρία της δεξάμενης.

Ο πίνακας $N = [N_1 \ N_2 \ N_3]$, αποτελείται από τις συναρτήσεις βάσης του στοιχείου

$$N_1(r,s)=1-r-s \quad (4.2.1.3)$$

$$N_2(r,s)=r \quad (4.2.1.4)$$

$$N_3(r,s)=s \quad (4.2.1.5)$$

άρα η μορφή του πίνακα $[N]$ είναι

$$[N]=\begin{bmatrix} 1-r-s & r & s \end{bmatrix} \quad (4.2.1.6)$$

και ο πίνακας $[B]$ είναι της μορφής

$$[B]=\begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} \\ N_{1,s} & N_{2,s} & N_{3,s} \end{bmatrix} \quad (4.2.1.7)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (4.2.1.8)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad (4.2.1.9)$$

υπολογίζουμε τις αντίστοιχες παραγώγους και υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα. Για κάθε στοιχείο υπολογίζουμε το αντίστοιχο “μητρώο μάζας” [M] και “ακαμψίας” [K]. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι υπολογισμοί των μητρώων αυτών για την γενική περίπτωση του προβλήματος κυματισμού.

Υπολογισμός του “Μητρώου Ακαμψίας”

Ο πίνακας [K] εκφράζει την “ακαμψία” του συστήματος μας. Για κάθε στοιχείο του πλέγματός μας υπολογίζουμε το αντίστοιχο μητρώο. Στην περίπτωση μας (τρικομβικό στοιχείο) είναι ένα μητρώο 3x3 το οποίο είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο και αντιπροσωπεύει την συμβολή του στοιχείου στην ολική ακαμψία. Σχηματικά φαίνεται στο Σχήμα 4.4 το μητρώο [K] για ένα τρικομβικό στοιχείο

$$[K]_e = \begin{matrix} \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \overline{1} \\ \leftarrow \overline{2} \\ \leftarrow \overline{3} \end{matrix} \end{matrix}$$

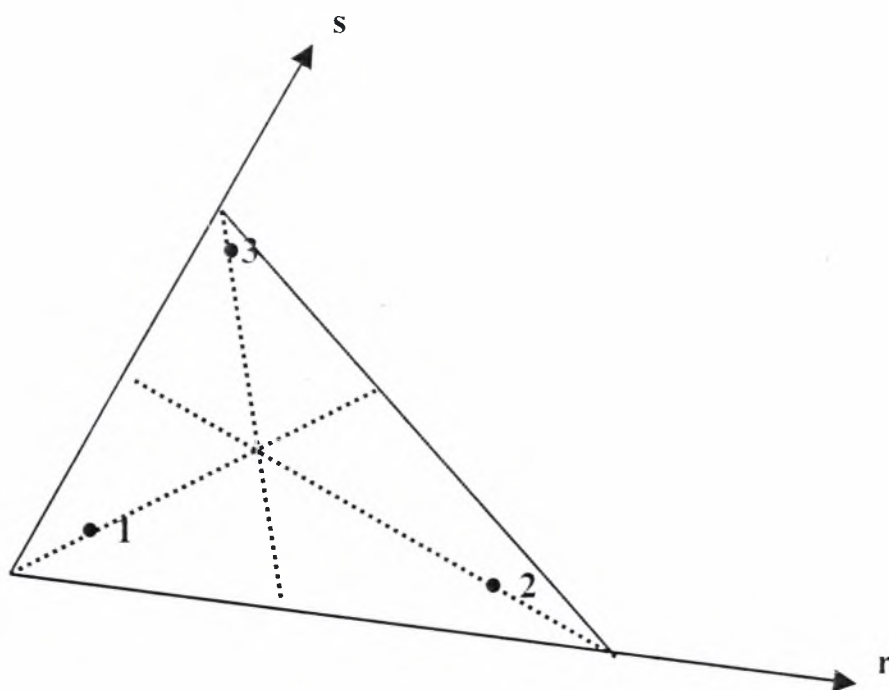
Σχήμα 4.4: Σχηματική απεικόνιση του μητρώου ακαμψίας [K] για ένα τρικομβικό στοιχείο με τοπική αρίθμηση κόμβων (1,2,3)

Αφού υπολογίσουμε για κάθε στοιχείο το αντίστοιχο μητρώο $[K]_e$ κάνουμε την σύνθεση του συνολικού μητρώου ακαμψίας $[K]_{ολ}$. Το συνολικό μητρώο ακαμψίας του προβλήματος είναι ένα τετραγωνικό συμμετρικό θετικά ορισμένο NxN μητρώο. Η διάσταση του καθορίζεται από τον αριθμό των κόμβων του πλέγματος το οποίο χρησιμοποιείται. Το κάθε μητρώο του στοιχείου τοποθετείται στην κατάλληλη θέση στο συνολικό μητρώο ανάλογα με την αρίθμηση των κόμβων του στο πλέγμα του

προβλήματος. Για τον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας του κάθε στοιχείου χρησιμοποιήθηκε αριθμητική ολοκλήρωση Gauss τριών σημείων. Για την αριθμητική ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκε η σχέση (Bathe J.1996 “Finite Element Procedures”)

$$\iint f dr ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 w_i f(r_i, s_i) \quad (4.2.1.9)$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5



Σχήμα 4.5: Σχηματική απεικόνιση της ολοκλήρωσης τριών σημείων κατά Gauss για το τριγωνικό στοιχείο

Για την αριθμητική ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία ολοκλήρωσης

$$r_1 = 0.1666666667 \quad (4.2.1.11)$$

$$s_1 = 0.1666666667 \quad (4.2.1.12)$$

$$r_2 = 0.6666666667 \quad (4.2.1.13)$$

$$s_2 = 0.1666666667 \quad (4.2.1.14)$$

και

$$r_3 = 0.1666666667 \quad (4.2.1.15)$$

$$s_3 = 0.6666666667 \quad (4.2.1.16)$$

και οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας

$$w_1 = 0.3333333333 \quad (4.2.1.17)$$

$$w_2 = 0.3333333333 \quad (4.2.1.18)$$

$$w_3 = 0.3333333333 \quad (4.2.1.19)$$

επομένως η σχέση για τον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας για κάθε στοιχείο είναι

$$[K] = \iint [B]^T [B] J dr ds \quad (4.2.1.20)$$

όπου J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του πίνακα.

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Επισημαίνεται το γεγονός ότι η χρήση της ολοκλήρωσης κατά Gauss τριών σημείων αποδείχθηκε αρκετά ικανοποιητική για την σύγκλιση και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Υπολογισμός “Μητρώου Μάζας”

Υπολογίσουμε το μητρώο [M] το οποίο υπολογίζεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια. Θα διαχωρίσουμε τρεις περιπτώσεις για τον υπολογισμό του μητρώου μάζας ανάλογα με τον προσανατολισμό του στοιχείου πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια. Για κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε αριθμητική ολοκλήρωση Gauss δύο σημείων πάνω στην αντίστοιχη πλευρά κάθε φορά του στοιχείου η οποία βρίσκεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια (Σχήμα 4.6).

Άρα χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\int_a^b f(\xi) dr = \sum_{i=1}^2 w_i f(\xi_i) \quad (4.2.1.21)$$

όπου ξ είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης. Για την αριθμητική ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία ολοκλήρωσης

$$\xi_1 = 0.2113248652 \quad (4.2.1.22)$$

$$\xi_2 = 0.7886751346 \quad (4.2.1.23)$$

και οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας

$$w_1 = 0.5 \quad (4.2.1.24)$$

$$w_2 = 0.5 \quad (4.2.1.25)$$

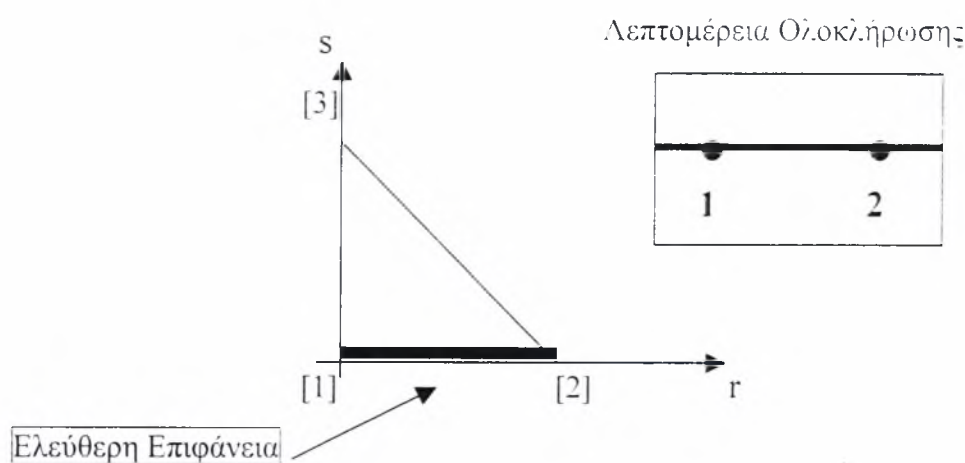
επομένως ο υπολογισμός του μητρώου μάζας για κάθε στοιχείο είναι

$$[M] = \int_0^l [N]^T [N] (\det[J]) d\xi \quad (4.2.1.26)$$

όπου ξ κάθε φορά είναι η αντίστοιχη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Εξετάζουμε τώρα πως διαμορφώνονται οι συναρτήσεις βάσεις για κάθε στοιχείο ανάλογα με τον προσανατολισμό του πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια

1^η περίπτωση

Προσανατολισμός του στοιχείου πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια κατά την πλευρά 1-2 (Σχήμα 4.6)



Σχήμα 4.6: Σχηματική απεικόνιση της ολοκλήρωσης δύο σημείων κατά Gauss για το τριγωνικό στοιχείο με προσανατολισμό 1-2 πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $s=0$. Επομένως οι συναρτήσεις βάσεις γίνονται

$$N_1(r,s)=1-r$$

$$N_2(r,s)=r \quad [N] = [1-r \quad r \quad 0] \quad (5.1.40)$$

$$N_3(r,s)=0$$

Επομένως η υπό ολοκλήρωση ποσότητα γίνεται

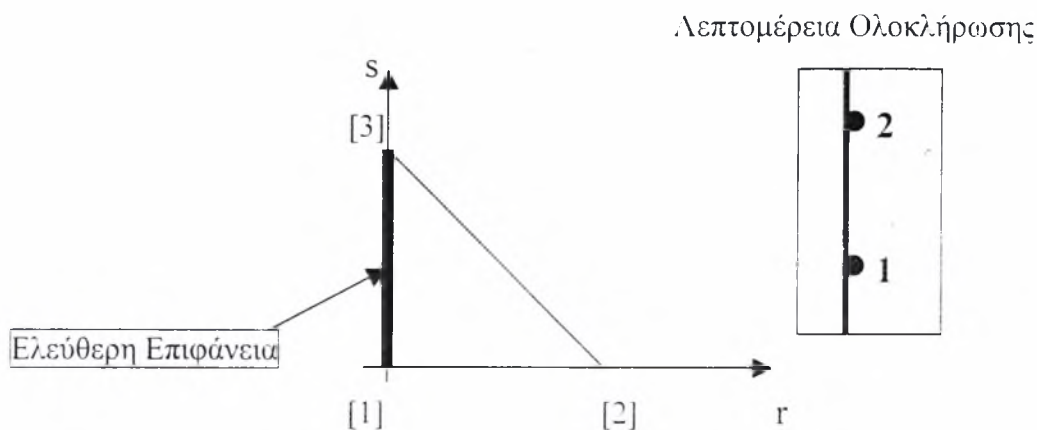
$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} (1-r)^2 & (1-r)r & 0 \\ (1-r)r & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.1.41)

Σε αυτήν την περίπτωση η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην πλευρά 1-2 και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το r

2^η περίπτωση

Προσανατολισμός του στοιχείου πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια κατά την πλευρά 1-3
(Σχήμα 4.7)



Σχήμα 4.7: Σχηματική απεικόνιση της ολοκλήρωσης δύο σημείων κατά Gauss για το τριγωνικό στοιχείο με προσανατολισμό 1-3 πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $r=0$. Επομένως οι συναρτήσεις βάσεις γίνονται

$$N_1(r,s)=1-s$$

$$N_2(r,s)=0$$

$$N_3(r,s)=s$$

$$[N]=[1-s \quad 0 \quad s] \quad (5.1.44)$$

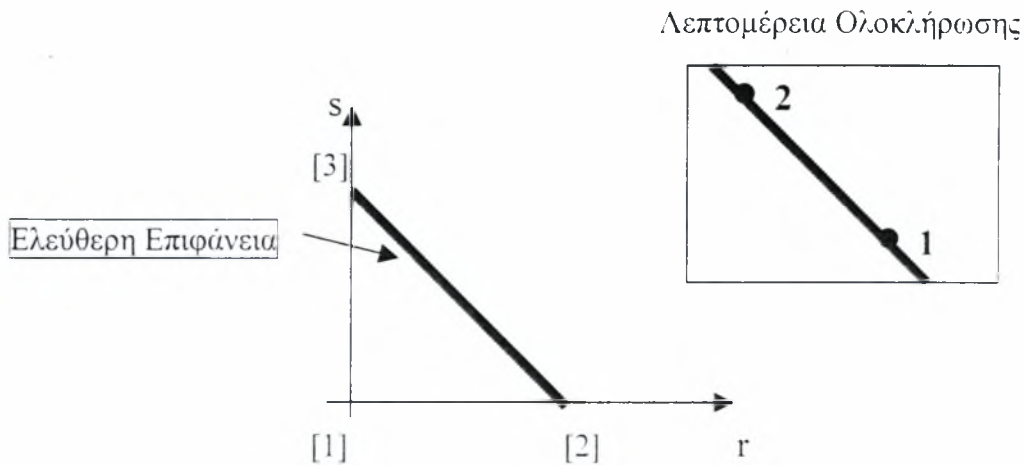
Επομένως η υπό ολοκλήρωση ποσότητα γίνεται

$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} (1-s)^2 & 0 & (1-s)s \\ 0 & 0 & 0 \\ (1-s)s & 0 & s^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.45)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην πλευρά 2-3 και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το s

3^η περίπτωση

Προσανατολισμός του στοιχείου πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια κατά την πλευρά 2-3
(Σχήμα 4.8)



Σχήμα 4.8: Σχηματική απεικόνιση της ολοκλήρωσης δύο σημείων κατά Gauss για το τρικομβικό στοιχείο με προσανατολισμό 2-3 πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $r+s=1$. Επομένως οι συναρτήσεις βάσεις γίνονται

$$N_1(r,s)=0$$

$$N_2(r,s)=r \quad [N]=[0 \quad r \quad 1-r] \quad (5.1.48)$$

$$N_3(r,s)=1-r$$

Επομένως η υπό ολοκλήρωση ποσότητα γίνεται

$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & (1-r)r \\ 0 & (1-r)r & (1-r)^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.49)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην πλευρά 2-3 και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το $r = 1-s$

Αφού υπολογιστούν τα μητρώα για κάθε στοιχείο συνθέτουμε το συνολικό $N \times N$ "μητρώο μάζας" του προβλήματος.

4.2.2 Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιομορφών

Από την σχέση (4.2.12) για την περίπτωση του ομογενούς προβλήματος (εξωτερική διέγερση μηδενική $X=0$) γίνεται υπολογισμός των ιδιοτιμών και των ιδιομορφών του προβλήματος ω_n και Ψ_n αντίστοιχα.

Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε την σχέση (4.2.12) κάνοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής βάσει της σχέσης

$$q = \sum_{i=1}^n Y_n \Psi_n \quad (4.2.2.1)$$

όπου Ψ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα του προβλήματος και ο δείκτης i δηλώνει την αντίστοιχη ιδιοτιμή / ιδιομορφή. Κάνοντας αυτήν την αλλαγή μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων, όπως αυτό περιγράφεται στην εξίσωση (4.2.12). Θέτοντας

$$M_n = \Psi_n^T [M] \Psi_n \quad (4.2.2.2)$$

$$K_n = \Psi_n^T [K] \Psi_n = \omega_n^2 M_n \quad (4.2.2.3)$$

$$F_n = \Psi_n^T F \quad (4.2.2.4)$$

το σύστημα των εξισώσεων καταλήγει στις ασύζευκτες διαφορικές εξισώσεις

$$M_n \ddot{Y}_n + K_n Y_n = F_n X \quad n=1,2,3,\dots,N \quad (4.2.2.5)$$

4.2.3 Υπολογισμός Δυνάμεων

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις δυνάμεις του κυματισμού στο δοχείο. Οι δυνάμεις αποτελούν το ολοκλήρωμα των υδροδυναμικών πιέσεων σε ολόκληρο το τοίχωμα επομένως

$$F = -\rho \int_{B_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) dB_1 \quad (4.2.3.1)$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση ιδομορφών που προηγήθηκε παραπάνω. Η σχέση (4.2.3.1) γίνεται λαμβάνοντας υπ όψιν μας την σχέση (4.2.8) γίνεται

$$F = -\rho \left(\int_{B_1} [N] \mathbf{n}_x dB_1 \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.2.3.2)$$

Αντικαθιστώντας από την σχέση $\mathbf{q} = \sum_{n=1}^N \Upsilon_n \Psi_n$ η σχέση (4.1.31) γίνεται

$$F = -\rho \sum_{n=1}^N F_n \ddot{\Upsilon}_n \quad (4.2.3.3)$$

στη συνέχεια κάνουμε αλλαγή μεταβλητής χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\Upsilon_n = \xi_n \frac{F_n}{M_n} \quad (4.2.3.4)$$

και επομένως μορφή των δυνάμεων γίνεται

$$F = -\rho \sum_{n=1}^N \frac{F_n^2}{M_n} \ddot{\xi}_n \quad (4.2.3.5)$$

Για τον υπολογισμό του $\ddot{\xi}_n$ εφαρμόζουμε τον ανωτέρω μετασχηματισμό στην σχέση (4.2.2.5)

$$\frac{F_n}{\omega_n^2 M_n} \ddot{\xi}_n + \frac{F_n}{\omega_n^2 M_n} \xi_n = F_n X \quad (4.2.3.6)$$

$$\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 (\xi_n - X) = 0 \quad (4.2.3.7)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το ξ_n έχοντας δεδομένη μιας μορφής εξωτερικής διέγερσης X και επομένως τις δυνάμεις του κυματισμού στην δεξαμενή από την σχέση (4.2.3.5)

Επομένως το πρόβλημα μας ανάγεται στο πρόβλημα της κυματικής κίνησης ως εξής

$$\nabla^2 \Phi_s = \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H. \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } r=R, \quad 0 < y < H. \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\ddot{X}x \quad \text{στο } y=H, \quad 0 < r < R. \quad (4.3.5)$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi) \varphi^* d\Omega = 0 \quad (4.3.6)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_B \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB - \int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega = 0 \quad (4.3.7)$$

Όπου B είναι το ολικό σύνορο του προβλήματος. Ισχύει $B = B_1 \cup B_2$ άρα η σχέση (4.3.7) γράφεται

$$\int_B \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega = 0 \quad (4.3.8)$$

όπου B_1 είναι το τοίχωμα της δεξαμενής και B_2 η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Λαμβάνοντας υπ όψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \varphi^*) d\Omega + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \varphi^* dB_2 = -\frac{1}{g} \int_{B_2} \ddot{X}x \varphi^* dB_2 \quad (4.3.9)$$

Στην συνέχεια διακριτοποιούμε με την μέθοδο Galerkin

$$\Phi = \sum_{i=1}^N q_i(t) N_i(x,y) = [N] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.3.10)$$

$$\varphi^* = \sum_{i=1}^N q_i^* N_i(x,y) = [N] \mathbf{q}^* \quad (4.3.11)$$

με παραγωγή έχουμε

$$\nabla \Phi = [B] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.3.12)$$

$$\nabla \varphi^* = [B] \mathbf{q}^* \quad (4.3.13)$$

όπου $N_i(x,y)$ είναι γνωστές συναρτήσεις βάσεις, $\dot{\mathbf{q}}$ είναι οι άγνωστες χρονικές συναρτήσεις που πρέπει να υπολογιστούν και \mathbf{q}^* είναι τυχαίες συναρτήσεις. Με την παραπάνω διακριτοποίηση και με την απαίτηση να ισχύει η 'διακριτοποιημένη' ασθενής μορφή για τα τυχαία \mathbf{q}^* , καταλήγουμε στο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}] \mathbf{q} = -\mathbf{P}\ddot{\mathbf{X}} \quad (4.3.16)$$

όπου $[\mathbf{M}]$ είναι το μητρώο μάζας, $[\mathbf{K}]$ το μητρώο ακαμψίας και $\{\mathbf{P}\}$ το μητρώο των εξωτερικών δυνάμεων και δίνονται από τις σχέσεις

$$[\mathbf{M}] = \frac{1}{g} \int_{B_2} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dB_2 \quad (4.3.17)$$

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega \quad (4.3.18)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{g} \int_{B_2} [\mathbf{N}]^T x dB_2 \quad (4.3.19)$$

αντίστοιχα.

4.3.1 Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιομορφών

Στην συνέχεια από την σχέση (4.3.16) για την περίπτωση του ομογενούς προβλήματος υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές ω_n και τα ιδιοδιανύσματα Ψ_n του προβλήματος. Μετασχηματίζουμε την σχέση (4.3.16) κάνοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής

$$\underline{q} = \sum_{n=1}^N \Upsilon_n \Psi_n \quad n=1,2,3,\dots,N \quad (4.3.1.1)$$

όπου Ψ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα και n είναι οι αντίστοιχες ιδιομορφές. Κάνοντας αυτήν την αλλαγή διαγωνοποιούμε το σύστημα των εξισώσεων. Θεωρώντας

$$M_n = \Psi_n^T [M] \Psi_n \quad (4.3.1.2)$$

$$K_n = \Psi_n^T [K] \Psi_n = \omega_n^2 M_n \quad (4.3.1.3)$$

$$P_n = \Psi_n^T P \quad (4.3.1.4)$$

όπου όπως φαίνεται οι νέοι συντελεστές M_n , K_n , P_n είναι πλέον βαθμωτά μεγέθη. Άρα και η νέα μορφή της (4.1.12) είναι

$$M_n \ddot{\Upsilon}_n + K_n \Upsilon_n = -P_n \ddot{X} \quad (4.3.1.5)$$

4.3.2 Υπολογισμός Δυνάμεων

Στην συνέχεια περνάμε στον υπολογισμό των δυνάμεων λόγω του κυματισμού στο τοίχωμα του δοχείου. Οι δυνάμεις αποτελούν το ολοκλήρωμα των υδροδυναμικών πιέσεων σε ολόκληρο τον όγκο του ρευστού άρα έχουμε

$$F = -\rho \int_{B_l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} n_x dB_l - \rho \int_{B_l} \ddot{X} x n_x dB_l \quad (4.3.2.1)$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων θα υπολογίσουμε χωριστά τις δυνάμεις για την ομοιόμορφη και την κυματική κίνηση. Επομένως για την ομοιόμορφη κίνηση έχουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (4.2.31)

$$F_x = -\rho \int_{B_l} n_x \ddot{X} x dB_l \quad (4.3.2.2)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$F_x = -\rho \ddot{X} \left(\int_{B_l} n_x x dB_l \right) = -\rho \ddot{X} \int_{\Omega} \frac{\partial x}{\partial x} d\Omega = \quad (4.3.2.3)$$

$$F_x = -\rho \ddot{X} \Omega = -\ddot{X} M_l \quad (4.3.2.4)$$

Από την τελευταία ισότητα κατανοούμε ότι η δύναμη η οποία οφείλεται στην ομοιόμορφη κίνηση είναι το γινόμενο της ολικής μάζας του ρευστού επί την εξωτερική επιτάχυνση. Περνάμε τώρα στην περίπτωση της κυματικής κίνησης

$$F_x = -\rho \int_{B_l} n_x [N] \ddot{q} dB_l \quad (4.3.2.5)$$

αντικαθιστώντας τώρα από την σχέση

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^N \Upsilon_n \Psi_n \quad (4.3.2.6)$$

η σχέση (4.3.2.5) γίνεται

$$F_x = -\rho \int_{B_l} n_x [N] \left(\sum_n \Psi_n \ddot{\Upsilon}_n \right) dB_l = -\rho \sum_n \Psi_n^T \left(\int_{B_l} n_x [N]^T dB_l \right) \ddot{\Upsilon}_n = \quad (4.3.2.7)$$

$$F_x = -\rho \sum_n F_n \ddot{\Upsilon}_n \quad (4.3.2.8)$$

όπου

$$F_n = \Psi_n^T \mathbf{F} \quad (4.3.2.9)$$

και

$$\mathbf{F} = \ddot{X} \int_{B_l} [N]^T n_x dB_l \quad (4.3.2.10)$$

στη συνέχεια κάνουμε αλλαγή μεταβλητής χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$Y_n = a_n \frac{P_n}{M_n} \quad (4.3.2.11)$$

άρα η τελική μορφή των δυνάμεων γίνεται

$$F = -\rho \sum_{n=1}^n \frac{P_n F_n}{M_n} \ddot{a}_n - M_T \ddot{X} \quad (4.3.2.12)$$

αντικαθιστώντας το κλάσμα

$$M_{ns} = \frac{P_n F_n}{M_n} \quad (4.3.2.13)$$

η σχέση (4.3.2.13) γίνεται

$$F = -\rho \sum_{n=1}^n M_{ns} \ddot{a}_n - M_T \ddot{X} \quad (4.3.2.14)$$

Για τον υπολογισμό του \ddot{a}_n εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό στην σχέση (4.3.1.15) έχουμε

$$\frac{P_n}{M_n} M_n \ddot{a}_n + \frac{P_n}{M_n} K_n a_n = -P_n \ddot{X} \quad (4.3.2.15)$$

$$\ddot{a}_n + \omega_n^2 a_n = -\ddot{X} \quad (4.3.2.16)$$

από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το a_n και επομένως τις δυνάμεις του κυματισμού. Στην συνέχεια θεωρώντας τον μετασχηματισμό

$$y_n = a_n + X \quad (4.3.2.17)$$

καταλήγουμε σε μια νέα μορφή για την έκφραση των δυνάμεων.

$$F = -\rho \sum_{n=1}^n M_{ns} \ddot{y}_n - (M_T - \sum_{n=1}^n M_{ns}) \ddot{X} \quad (4.3.2.18)$$

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 (y_n - X) = 0 \quad (4.3.2.19)$$

θεωρώντας

$$M_s = M_T - \sum_n M_{ns} \quad (4.3.2.20)$$

όπου M_s είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα από την θεώρηση τύπου II. μπορούμε να εκφράσουμε την συνολική δύναμη ως το άθροισμα δύο όρων που αντίστοιχα εκφράζουν την συμβολή της ομοιόμορφης και κυματικής κίνησης.

$$F = -\rho \sum_n M_{ns} \ddot{y}_n - M_s \ddot{X} \quad (4.3.2.21)$$

4.4 Θεώρηση τύπου ΙΙΙ

(ωστική κίνηση – επαγωγική κίνηση)

Στην διακριτοποίηση αυτού του τύπου η συνάρτηση του δυναμικού της ταχύτητας διαχωρίζεται $\Phi = \Phi_I + \Phi_C$. Έτσι το πρόβλημα της ωστικής κίνησης διατυπώνεται ως εξής

$$\nabla^2 \Phi_I = \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < L, -R < y < H - R. \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial n} = \dot{X} n_x \quad \text{στο } r=R, 0 < y < H \quad (4.4.2)$$

$$\Phi_I = 0 \quad \text{στο } y=H, 0 < r < R. \quad (4.4.3)$$

Αντίστοιχα για το πρόβλημα της επαγωγής κίνησης έχουμε

$$\nabla^2 \Phi_C = \frac{\partial^2 \Phi_C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_C}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < L, -R < y < H - R \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } r=R, 0 < y < H. \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_C}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi_C}{\partial n} = g \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \quad \text{στο } y=H, 0 < r < R. \quad (4.4.6)$$

Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος πρέπει να επιλύσουμε ξεχωριστά το κάθε πρόβλημα. Αρχικά επιλύουμε το πρόβλημα της ωστικής κίνησης, εφόσον η συνάρτηση Φ_I απαιτείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης Φ_C . Η ασθενής μορφή του ωστικού προβλήματος είναι

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi_I) \varphi_1^* d\Omega = 0 \quad (4.4.7)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_B \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} \varphi_1^* dB - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_I) (\nabla \varphi_1^*) d\Omega = 0 \quad (4.4.8)$$

Όπου B είναι το ολικό σύνορο του προβλήματος. Ισχύει $B = B_1 \cup B_2$ άρα η σχέση (4.4.8) γράφεται

$$\int_{B_1} \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} \varphi_1^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} \varphi_1^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_I) (\nabla \varphi_1^*) d\Omega = 0 \quad (4.4.9)$$

όπου B_1 είναι το τοίχωμα της δεξαμενής και B_2 η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και το γεγονός ότι το ϕ_1^* είναι μηδέν πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_1) (\nabla \phi_1^*) d\Omega = -\frac{1}{g} \int_{B_1} \dot{X} n_{\chi} \phi_1^* dB_1 \quad (4.4.10)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο Galerkin

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^N q_i(t) N_i(x,y) = [N] \dot{q}_1 \quad (4.4.11)$$

$$\phi_1^* = \sum_{i=1}^N q_i^* N_i(x,y) = [N] q^* \quad (4.4.12)$$

με παραγωγή έχουμε

$$\nabla \Phi_1 = [B] \dot{q}_1 \quad (4.4.13)$$

$$\nabla \phi_1^* = [B] q^* \quad (4.4.14)$$

όπου $N_i(x,y)$ είναι γνωστές συναρτήσεις βάσεις. \dot{q}_1 είναι οι άγνωστες χρονικές συναρτήσεις που πρέπει να υπολογιστούν και q^* είναι τυχαίες σταθερές. Με την παραπάνω διακριτοποίηση και με την απαίτηση να ισχύει η 'διακριτοποιημένη' ασθενής μορφή για τα τυχαία q^* , καταλήγουμε στο αλγεβρικό σύστημα

$$[K] q_1 = F X \quad (4.4.17)$$

όπου $[K]$ είναι το μητρώο ακαμψίας και F το μητρώο των εξωτερικών δυνάμεων και δίνονται από τις σχέσεις

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [B] d\Omega \quad (4.4.18)$$

$$F = \int_{B_1} [N]^T n_{\chi} dB_1 \quad (4.4.19)$$

αντίστοιχα.

Από την διακριτοποίηση του προβλήματος προκύπτει η λύση για το πρόβλημα της ωστικής κίνησης από την σχέση

$$q_1 = [K]^{-1} F X \quad (4.4.20)$$

Στην περίπτωση όμως αυτήν όμως θα πρέπει στο πρόβλημα να επιβληθεί και η συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή $\Phi_f = 0$. Για τον λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε την μέθοδο Ποινής. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συχνά και συνοψίζεται στην επιρροή ενός μεγάλου αριθμού στο μητρώο $[K]$ και το μητρώο $[F]$. Συγκεκριμένα στο σύστημα μας θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τα στοιχεία του μητρώου $[K]$ τα οποία αντιστοιχούν σε κόμβους πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια με έναν πολύ μεγάλο αριθμό $M \gg |K_n|$ και στην συνέχεια αντίστοιχα για το μητρώο $[F]$ θα πρέπει να αντικαταστήσω τα αντίστοιχα στοιχεία με 0. Έτσι καταλήγουμε στην επίλυση ενός νέου συστήματος

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \dots & \dots & \dots & K_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \dots & M & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & \dots & \dots & K_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (4.4.21)$$

από το οποίο παίρνουμε ως λύση το μητρώο q

Στην συνέχεια έχοντας την λύση του προβλήματος της ωστικής κίνησης μπορούμε να περάσουμε στην επίλυση του προβλήματος της επαγωγικής κίνησης. Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi_c) \varphi_c^* d\Omega = 0 \quad (4.4.22)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_B \frac{\partial \Phi_c}{\partial n} \varphi_c^* dB - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_c) (\nabla \varphi_c^*) d\Omega = 0 \quad (4.4.23)$$

Όπου B είναι το ολικό σύνορο του προβλήματος. Ισχύει $B = B_1 \cup B_2$ άρα η σχέση (4.4.23) γράφεται

$$\int_{B_1} \frac{\partial \Phi_c}{\partial n} \varphi_c^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_c}{\partial n} \varphi_c^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi_c) (\nabla \varphi_c^*) d\Omega = 0 \quad (4.4.24)$$

όπου B_1 είναι το τοίχωμα της δεξαμενής και B_2 η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος η ασθενής μορφή γράφεται

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_c) (\nabla \varphi_c^*) d\Omega + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial t^2} \varphi_c^* dB_2 = \int_{B_2} \frac{\partial \Phi_f}{\partial y} \varphi_1^* dB_2 \quad (4.4.25)$$

Στην συνέχεια διακριτοποιούμε με την μέθοδο Galerkin

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N q_j(t) N_j(x,y) = [N] \dot{q} \quad (4.4.26)$$

$$\varphi_c^* = \sum_{j=1}^N q_j^* N_j(x,y) = [N] \mathbf{q}^* \quad (4.4.27)$$

με παραγωγή έχουμε

$$\nabla \Phi_i = [B] \dot{q} \quad (4.4.28)$$

$$\nabla \varphi_c^* = [B] \mathbf{q}^* \quad (4.4.29)$$

όπου $N_j(x,y)$ είναι γνωστές συναρτήσεις βάσεις, \dot{q} είναι οι άγνωστες χρονικές συναρτήσεις που πρέπει να υπολογιστούν και \mathbf{q}^* είναι τυχαίες συναρτήσεις. Για να μπορέσουμε να σχηματίσουμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης θα πρέπει να υπολογίσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα του δεξιού μέλους

$$\Phi_i = [N] \mathbf{q} = [N][K]^{-1} \mathbf{F} X \quad (4.4.32)$$

άρα

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial [N]}{\partial y} [K]^{-1} \mathbf{F} X \quad (4.4.33)$$

Θεωρώντας

$$[S] = \int_{B_2} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} dB_2 \quad (4.4.34)$$

έχουμε

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_i) (\nabla \varphi_c^*) d\Omega + \frac{1}{g} \int_{B_2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} \varphi_c^* dB_2 = \int_{B_2} \frac{\partial N}{\partial y} [K]^{-1} \mathbf{F} X \varphi_i^* dB_2 \quad (4.4.35)$$

Με την παραπάνω διακριτοποίηση και με την απαίτηση να ισχύει η ‘διακριτοποιημένη’ ασθενής μορφή για τα τυχαία q_i , καταλήγουμε στο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

$$[M] \ddot{\mathbf{q}} + [K] \mathbf{q} = \mathbf{f} X \quad (4.4.36)$$

όπου $[K]$ είναι το μητρώο ακαμψίας και \mathbf{f} το μητρώο των εξωτερικών δυνάμεων και δίνονται από τις σχέσεις

$$[M] = \frac{1}{g} \int_{B_1} [N]^T [N] dB_1 \quad (4.4.37)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [B] d\Omega \quad (4.4.38)$$

$$f = [S][K]^{-1} F \quad (4.4.39)$$

αντίστοιχα.

4.4.1 Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιομορφών

Στην συνέχεια από την σχέση (4.4.36) για την περίπτωση του ομογενούς προβλήματος υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές ω_n και τα ιδιοδιανύσματα Ψ_n του προβλήματος. Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε την σχέση (4.4.36) κάνοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής

$$q = \sum_{i=1}^n \Upsilon_n \Psi_n \quad n=1,2,3,\dots,N \quad (4.4.1.1)$$

όπου Ψ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα και n είναι οι αντίστοιχες ιδιομορφές. Κάνοντας αυτήν την αλλαγή διαγωνοποιούμε το σύστημα των εξισώσεων. Θεωρώντας

$$M_n = \Psi_n^T [M] \Psi_n \quad (4.4.1.2)$$

$$K_n = \Psi_n^T [K] \Psi_n = \omega_n^2 M_n \quad (4.4.1.2)$$

$$f_n = \Psi_n^T f \quad (4.4.1.3)$$

όπου όπως φαίνεται οι νέοι συντελεστές M_n, K_n, f_n είναι πλέον βαθμωτά μεγέθη. Άρα και η νέα μορφή της (4.4.36) είναι

$$M_n \ddot{Y}_n + K_n Y_n = f_n X \quad (4.4.1.4)$$

4.4.2 Υπολογισμός Δυνάμεων

Στην συνέχεια περνάμε στον υπολογισμό των δυνάμεων του κυματισμού στο τοίχωμα του δοχείου. Οι δυνάμεις αποτελούν το ολοκλήρωμα των υδροδυναμικών πιέσεων σε ολόκληρο τον όγκο του ρευστού άρα έχουμε

$$F = -\rho \int_{B_l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} n_x dB_l - \rho \int_{B_l} \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} n_x dB_l \quad (4.4.2.1)$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση που προηγήθηκε παραπάνω και θα υπολογίσουμε χωριστά τις δυνάμεις για την ωστική και την επαγωγική κίνηση. Επομένως για την ωστική κίνηση έχουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (4.1.30)

$$F_l = -\rho \int_{B_l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} n_x dB_l = \quad (4.4.2.2)$$

$$F_l = - \left(\rho \int_{B_l} [N] n_x dB_l \right) \ddot{q}_l = \quad (4.4.2.3)$$

$$F_l = -\rho \left(\mathbf{F}^T [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F} \right) \ddot{\mathbf{X}} = -\rho \bar{\mathbf{M}}_l \ddot{\mathbf{X}} \quad (4.4.2.4)$$

όπου $\bar{\mathbf{M}}_l$ είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα από την θεώρηση τύπου III

Εξετάζουμε τώρα στην περίπτωση της επαγωγικής κίνησης

$$F_c = -\rho \int_{B_l} \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} n_x dB_l = - \left(\rho \int_{B_l} [N] n_x dB_l \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.4.2.5)$$

αντικαθιστώντας τώρα από την σχέση

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^n \Upsilon_n \Psi_n$$

η σχέση (4.4.2.5) γίνεται

$$F_c = -\rho \sum_n \left(\rho \int_{B_l} [N] n_x dB_l \right) \Psi_n \ddot{\Upsilon}_n = -\rho \sum_n \Psi_n^T \left(\int_{B_l} [N]^T n_x dB_l \right) \ddot{\Upsilon}_n \quad (4.4.2.6)$$

$$F_c = -\rho \sum_n \Psi_n^T \mathbf{F} \ddot{\Upsilon}_n = -\rho \sum_n \mathbf{F} \ddot{\Upsilon}_n \quad (4.4.2.7)$$

όπου

$$\mathbf{F}_n = \Psi_n^T \mathbf{F} \quad (4.4.2.8)$$

και

$$\underline{F} = \int_{B_i} [\underline{N}]^T n_x dB_i \quad (4.4.2.9)$$

στη συνέχεια κάνουμε αλλαγή μεταβλητής χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\gamma_n = \beta_n \frac{f_n}{\omega_n^2 M_n} \quad (4.4.2.10)$$

άρα η τελική μορφή των δυνάμεων γίνεται

$$\underline{F} = -\rho \sum_{i=1}^n \frac{f_n F_n}{\omega_n^2 M_n} \ddot{\beta}_i - (\underline{F}^T [\underline{K}]^{-1} \underline{F}) \ddot{X} \quad (4.4.2.11)$$

αντικαθιστώντας το κλάσμα

$$\underline{M}_n = \frac{f_n F_n}{\omega_n^2 M_n} \quad (4.4.2.12)$$

και

$$\underline{\bar{M}}_j = \underline{F}^T [\underline{K}]^{-1} \underline{F} \quad (4.4.2.13)$$

η σχέση (4.4.2.11) γίνεται

$$\underline{F} = -\rho \sum_{i=1}^n \underline{M}_n \ddot{\beta}_n - \underline{\bar{M}}_j \ddot{X} \quad (4.4.2.14)$$

Για τον υπολογισμό του $\ddot{\beta}_n$ εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό στην σχέση (4.4.1.4)

$$\frac{f_n}{\omega_n^2 M_n} \ddot{\beta}_n + \frac{\omega_n^2 f_n}{\omega_n^2 M_n} \beta_n = \frac{f_n}{M_n} X \quad (4.4.2.15)$$

$$\ddot{\beta}_n + \omega_n^2 (\beta_n - X) = 0 \quad (4.4.2.16)$$

από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το β_n και επομένως τις δυνάμεις του κυματισμού. Στην συνέχεια κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\gamma_n = \beta_n + X \quad (4.4.2.17)$$

καταλήγουμε σε μια νέα μορφή για την έκφραση των δυνάμεων.

$$\underline{F} = -\rho \sum_n \underline{M}_n \ddot{\gamma}_n - \underline{\bar{M}}_j \ddot{X} \quad (4.4.2.18)$$

Βασική Σημείωση: Η θεώρηση τύπου II και τύπου III οφείλουν να είναι ισοδύναμες. Η ισοδυναμία τους συνεπάγεται ότι θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να ισχύουν οι σχέσεις

$$\underline{M}_j = \underline{\bar{M}}_j \quad (4.4.2.19)$$

$$\underline{M}_{ns} = \underline{M}_{nc} \quad (4.4.2.20)$$

Αυτό θα αποδειχθεί αριθμητικά στα κεφάλαια 5 και 6.

Κεφάλαιο 5

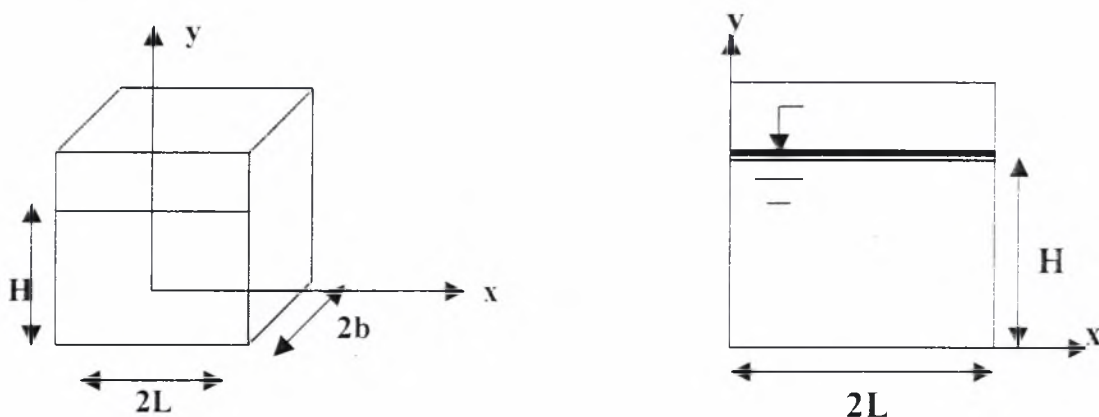
Σύγκριση των αποτελεσμάτων των πεπερασμένων στοιχείων με αναλυτικές και άλλες αριθμητικές λύσεις

Περίληψη

Στο παρόν κεφάλαιο το φαινόμενο του κυματισμού επιλύεται αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε δοχεία τετραγωνικής και οριζόντιας κυλινδρικής μορφής υπό την επίδραση εξωτερικής διέγερσης. Για την επίλυση αναπτύχθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran, με τον οποίο υπολογίστηκαν οι ιδιοσυχρότητες και ιδιομορφές του κυματισμού καθώς επίσης και οι αντίστοιχες υδροδυναμικές δυνάμεις. Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια πρώτη παρουσίαση αποτελεσμάτων για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50% και την σύγκριση αυτών με τα αναλυτικά αποτελέσματα για την ίδια γεωμετρία. Επίσης γίνεται παρουσίαση μιας απλουστευμένης εφαρμογής και τα αποτελέσματά της για ορθογωνική δεξαμενή. Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αναλυτικά και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιοπιστία του κώδικα των πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκε.

5.1 Απλουστευμένη εφαρμογή σε ορθογωνική δεξαμενή

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ένα απλουστευμένο παράδειγμα επίλυσης του συνολικού προβλήματος της τετραγωνικής δεξαμενής (Σχήμα 5.1) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται τριγωνικά τρικομβικά στοιχεία και τετραγωνικά τετρακομβικά στοιχεία. Με την εφαρμογή αυτή θέλουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του πηγαίου κώδικα ο οποίος αναπτύχθηκε με τα αποτελέσματα από προηγούμενες εργασίες (Lamb 1945 ,Κλιάφα .2003).



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση ορθογώνιας δεξαμενής μήκους $2L$, πλάτους $2b$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας H

Επισημαίνεται ότι στην συγκεκριμένη ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί η διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων η οποία περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επιλύουμε την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (5.1.1)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \text{ (παράπλευρο τοίχωμα)} \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } B_2 \text{ (ελεύθερη επιφάνεια)} \quad (5.1.3)$$

Ορίζουμε $2L$ είναι το συνολικό μήκος της δεξαμενής και H το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας.

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιούμε τριγωνικά τρικομβικά στοιχεία των οποίων οι δύο πλευρές είναι παράλληλες προς τους άξονες . Για τα στοιχεία αυτά λόγω του προσανατολισμού τους υπάρχουν απλές αναλυτικές εκφράσεις για τα μητρώα $[M]$ και $[K]$. Συγκεκριμένα θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων r,s με

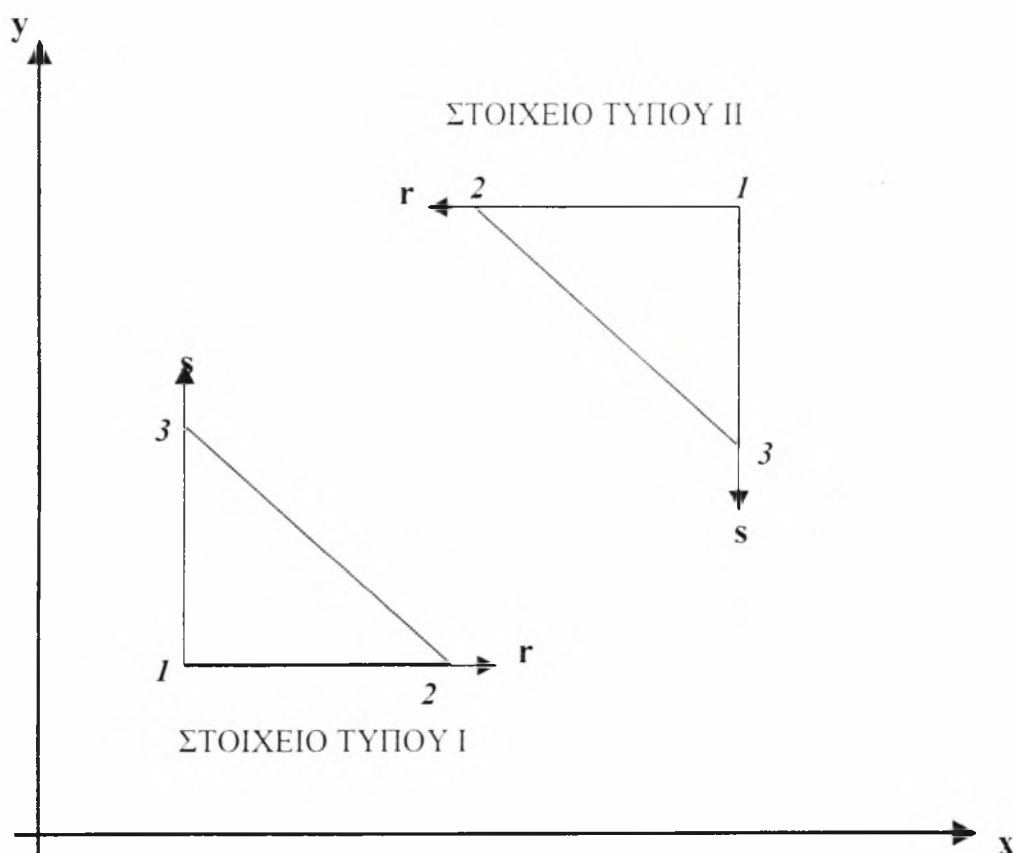
$0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq s \leq 1$. Για την ειδική αυτή περίπτωση ο μετασχηματισμός που ισχύει μεταξύ των συστημάτων r,s και x,y είναι ο ακόλουθος :

$$x(r,s)=x_1+(x_2-x_1)r=(1-r)x_1+rx_2=x_1+h_x r \quad (5.1.4)$$

και

$$y(r,s)=y_1+(y_3-y_1)s=(1-s)y_1+sy_3=y_1+h_y s \quad (5.1.5)$$

Θεωρούμε το τριγωνικό στοιχείο τύπου I (i. j. k) με τοπική αρίθμηση (1. 2. 3) και το τριγωνικό στοιχείο τύπου II (i,j,k) με τοπική αρίθμηση (1,2,3) ανάλογα με τον προσανατολισμό του τοπικού συστήματος (r,s) .σε σχέση με το ολικό σύστημα (x,y) όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2



Σχήμα 5.2 : Απεικόνιση Στοιχείων τύπου I και II στο τοπικό σύστημα (x,y) .(r,s)
αντίστοιχα

Υπολογισμός “Μητρώου Ακαμψίας”

Στοιχεία Τύπου Ι

Θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων r, s με $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq s \leq 1$.

Ο μετασχηματισμός που ισχύει μεταξύ των συστημάτων r, s και x, y είναι ο ακόλουθος

$$x(r, s) = x_1 + (x_2 - x_1)r = (1-r)x_1 + rx_2 = x_1 + h_x r \quad (5.1.6)$$

και

$$y(r, s) = y_1 + (y_2 - y_1)s = (1-s)y_1 + sy_2 = y_1 + h_y s \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = h_x \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial s} = h_y \quad (5.1.8)$$

Επομένως η Ιακωβιανή είναι

$$\mathbf{J} = \det \begin{bmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{bmatrix} \quad (5.1.9)$$

Οι συναρτήσεις βάσης για τον συγκεκριμένο τύπο στοιχείου είναι

$$N_1(r, s) = 1 - r - s$$

$$N_2(r, s) = r \quad [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 - r - s & r & s \end{bmatrix} \quad (5.1.10)$$

$$N_3(r, s) = s$$

Παραγωγίζουμε τις σχέσεις (5.1.10) συναρτήσεων ως προς r και s και έχουμε

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{h_x} \quad (5.1.11)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{h_y} \quad (5.1.12)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{h_x} \quad (5.1.13)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \quad (5.1.14)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial x} = 0 \quad (5.1.15)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{h_y} \quad (5.1.16)$$

Το μητρώο $[B]$ γίνεται

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \quad (5.1.17)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & \frac{1}{h_x} & 0 \\ \frac{1}{h_y} & 0 & \frac{1}{h_y} \end{bmatrix} \quad (5.1.18)$$

του οποίου το ανάστροφο μητρώο είναι το B^T .

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & \frac{1}{h_y} \\ \frac{1}{h_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} \end{bmatrix} \quad (5.1.19)$$

Υπολογίζουμε το εξής ολοκλήρωμα :

$$K_c = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [B] \det \begin{bmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{bmatrix} dr ds \quad (5.1.20)$$

$$[B]^T [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_y^2} \\ \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_x^2} & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & 0 & \frac{1}{h_y^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.21)$$

Επομένως για κάθε στοιχείο με αυτόν τον προσανατολισμό το μητρώο ακαμψίας είναι

$$[K]_c = \frac{1}{2} h_x h_y \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_y^2} \\ \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_x^2} & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & 0 & \frac{1}{h_y^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.22)$$

Στοιχεία Τύπου II

Θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων r,s με $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq s \leq 1$.

Ο μετασχηματισμός που ισχύει μεταξύ των συστημάτων r,s και x,y είναι ο ακόλουθος

$$x(r,s)=x_1-(x_2-x_1)r=(1-r)x_1-rx_2 = x_1-h_x r \quad (5.1.23)$$

και

$$y(r,s)=y_1-(y_3-y_1)s=(1-s)y_1-sy_3 = y_1-h_y s \quad (5.1.24)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -h_x \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -h_y \quad (5.1.25)$$

Επομένως η Ιακωβιανή είναι

$$J = \det \begin{bmatrix} -h_x & 0 \\ 0 & -h_y \end{bmatrix} \quad (5.1.26)$$

Οι συναρτήσεις βάσης για τον συγκεκριμένο τύπο στοιχείου είναι

$$N_1(r,s)=1-r-s$$

$$N_2(r,s)=r \quad [N]=[1-r-s \quad r \quad s] \quad (5.1.27)$$

$$N_3(r,s)=s$$

Παραγωγίζουμε τις σχέσεις (5.1.10) συναρτήσεων ως προς r και s και έχουμε

$$\frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{h_x} \quad (5.1.28)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{1}{h_y} \quad (5.1.29)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial x} = -\frac{1}{h_x} \quad (5.1.30)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \quad (5.1.31)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial x} = 0 \quad (5.1.32)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial y} = -\frac{1}{h_y} \quad (5.1.33)$$

Το μητρώο $[B]$ γίνεται

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \quad (5.1.34)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_x} & -\frac{1}{h_x} & 0 \\ -\frac{1}{h_y} & 0 & -\frac{1}{h_y} \end{bmatrix} \quad (5.1.35)$$

του οποίου το ανάστροφο μητρώο είναι το $[B]^T$.

$$[B]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_x} & -\frac{1}{h_y} \\ -\frac{1}{h_x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y} \end{bmatrix} \quad (5.1.36)$$

Υπολογίζουμε το εξής ολοκλήρωμα :

$$[K]_e = \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [B] \det \begin{bmatrix} -h_x & 0 \\ 0 & -h_y \end{bmatrix} dr ds \quad (5.1.37)$$

$$[B]^T [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_y^2} \\ \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_x^2} & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & 0 & \frac{1}{h_y^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.38)$$

Επομένως για κάθε στοιχείο με αυτόν τον προσανατολισμό το μητρώο ακαμψίας είναι

$$[K]_e = \frac{1}{2} h_x h_y \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_y^2} \\ \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_x^2} & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & 0 & \frac{1}{h_y^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.39)$$

Υπολογισμός “Μητρώου Μάζας”

Για την συγκεκριμένη ειδική περίπτωση το μητρώο μάζας μπορεί και αυτό να εκφραστεί αναλυτικά. Επίσης λόγω των προσανατολισμών των στοιχείων μόνο στοιχεία τύπου II βρίσκονται στην ελεύθερη επιφάνεια και επομένως έχουν μη μηδενική συμβολή στο συνολικό μητρώο μάζας.

Επομένως ισχύει $s=0$. Άρα οι συναρτήσεις βάσεις γίνονται

$$N_1(r,s)=1-r$$

$$N_2(r,s)=r \quad [N]=[1-r \quad r \quad 0] \quad (5.1.40)$$

$$N_3(r,s)=0$$

Επομένως η υπό ολοκλήρωση ποσότητα γίνεται

$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} (1-r)^2 & (1-r)r & 0 \\ (1-r)r & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.41)$$

Άρα για τα στοιχεία του συγκεκριμένου προσανατολισμού το μητρώο μάζας γίνεται

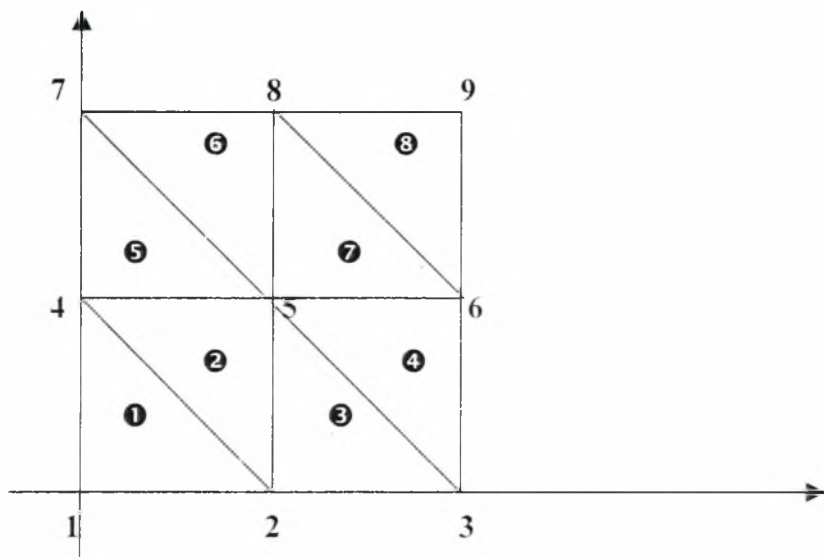
$$[M] = \int_{B_2} [N]^T [N] \mu / B_2 = \int_0^1 [N]^T [N] h_x dr = \int_0^1 [N]^T [N] h_x dr \quad (5.1.42)$$

Άρα τελικά το μητρώο μάζας γίνεται

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{h_x}{3} & \frac{h_x}{6} & 0 \\ \frac{h_x}{6} & \frac{h_x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.43)$$

Όπως παρατηρούμε και από το αποτέλεσμα το μητρώο μάζας δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση y . Αφού υπολογιστούν τα αντίστοιχα μητρώα για κάθε στοιχείο συνθέτουμε τα ολικά μητρώα $[K]$ και $[M]$ όπως αυτό περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο

Η απεικόνιση των στοιχείων για την συγκεκριμένη γεωμετρία και ένα ενδεικτικό πλέγμα αποτελούμενο από οχτώ στοιχεία φαίνεται στο Σχήμα 5.3



Σχήμα 5.3 : Τυπικό (αραιό) πλέγμα για τετραγωνική δεξαμενή οχτώ στοιχείων

Στο Σχήμα 5.3 οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν την αρίθμηση των κόμβων του πλέγματος και οι αριθμοί σε κύκλο αντιπροσωπεύουν την αρίθμηση των στοιχείων του πλέγματος. Οι άρτιοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν στοιχεία τύπου II και οι περιττοί αριθμοί στοιχεία τύπου I

Τα αριθμητικά αποτελέσματα του προβλήματος των ιδιοτιμών που προκύπτουν από την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (τρικομβικά στοιχεία) συγκρίνονται με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Η αναλυτική έκφραση για τις ιδιοτιμές σε ορθογωνική δεξαμενή είναι (Lamb 1945)

$$\omega_m^2 = g \frac{(2m-1)\pi}{2L} \tanh\left(\frac{(2m-1)\pi}{2L} H\right) \quad (5.1.53)$$

$$\omega_n^2 = g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi}{L} H\right) \quad (5.1.54)$$

από την σχέση (5.1.53) και ανάλογα με το ύψος H και το μήκος $2L$ της ορθογωνικής δεξαμενής υπολογίζονται οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε αντισυμμετρικές ιδιομορφές ενώ από την σχέση (5.1.54) υπολογίζονται οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε συμμετρικές ιδιομορφές. Στον πίνακα 5.1 παρουσιάζεται η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων για διάφορα πλέγματα με τα αντίστοιχα αναλυτικά αποτελέσματα για γεωμετρικά χαρακτηριστικά $H/2L=1.875$

Πίνακας 5.1 Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων $H/2L=1.875$

Αριθμητικά Αποτελέσματα					Αναλυτικά αποτελέσματα
Αριθμός κόμβων πλέγματος					
9	16	100	400	2500	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2348	0.2172	0.1962	0.1959	0.1955	0.1952
0.5561	0.4982	0.4465	0.4362	0.4198	0.4178
	0.7956	0.6824	0.6537	0.6301	0.6282
		0.9844	0.8649	0.8462	0.8377
		1.2934	1.1035	1.0623	1.0472
		1.5942	1.3664	1.2743	1.2566
		1.9913	1.5965	1.4936	1.4660
		2.3546	1.8654	1.7012	1.6755
		2.4212	2.2286	1.9244	1.8849
			2.4862	2.1968	2.0944
			2.8524	2.3589	2.3038
			3.1487	2.6044	2.5132
			3.5781	3.1043	2.7227
			3.8012	3.3123	2.9321
			4.2625	3.6351	3.1415
			4.5281	3.8012	3.3510
			4.8234	4.0321	3.5604
			5.0095	4.1012	3.7699
			5.1400	4.3512	3.9793
				4.6278	4.1887
				4.9132	4.3982
				5.1342	4.6076
				5.5015	4.8171
				5.8111	5.0265
				5.9999	5.2359
				6.3190	5.4454
				6.7613	5.6548
				6.9545	5.8643
				7.3211	6.0737
				7.7644	6.2831
				7.9987	6.4926
				8.2945	6.7020
				8.7659	6.9115
				9.0053	7.1209
				9.4856	7.3303
				9.8451	7.5398
				10.2753	7.7492
				10.5566	7.9587
				10.8456	8.1681
				11.2643	8.3775
				11.5685	8.5870

Στον πίνακα 5.1 γίνεται σύγκριση των τιμών των ιδιοτιμών σε αδιάστατη μορφή που προέκυψαν από την αναλυτική λύση και αυτών που υπολογίστηκαν από τον κώδικα των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα στον πίνακα 5.1 συγκρίνονται οι τιμές του $\lambda = \omega^2/g$ για την ορθογωνική δεξαμενή που προκύπτουν αναλυτικά με τις αντίστοιχες τιμές του λόγου αυτού που υπολογίζονται αριθμητικά. Για τον αριθμητικό υπολογισμό των τιμών του λ χρησιμοποιήθηκαν πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας, δηλαδή πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κόμβων. Στον πίνακα 5.1 παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα για πλέγματα με ίδιο αριθμό κόμβων κατά την x και y κατεύθυνση που αποτελούνται από 3, 4, 10, 20 και 50 κόμβους στην κάθε κατεύθυνση x και y . Από τον πίνακα 5.1 προκύπτει ότι στην περίπτωση που το πλέγμα αποτελείται από εννέα κόμβους προκύπτουν μόνο τρεις ιδιοτιμές οι οποίες αντιστοιχούν στους τρεις κόμβους της ελεύθερης επιφάνειας, ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές απειρίζονται. Η ακρίβεια των τιμών αυτών δεν είναι ικανοποιητική καθώς αν εξαιρέσουμε τη μηδενική ιδιοτιμή, ενώ ακόμα και η πρώτη ιδιοτιμή βρίσκεται μακριά από την αντίστοιχη αναλυτική. Για πλέγμα δεκαέξι κόμβων προκύπτουν τέσσερις ιδιοτιμές, όσοι δηλαδή είναι και οι κόμβοι της ελεύθερης επιφάνειας. Και αυτές όμως οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση από τα αναλυτικά αποτελέσματα ιδιοτιμών. Χρησιμοποιώντας πλέγμα εκατό κόμβων προκύπτουν δέκα μη άπειρες ιδιοτιμές από τις οποίες μόνο η πρώτη προσεγγίζει ικανοποιητικά την αντίστοιχη αναλυτική ιδιοτιμή. Για πλέγμα τετρακοσίων κόμβων η σύγκλιση των ιδιοτιμών βελτιώνεται αισθητά, όμως ικανοποιητική προσέγγιση παρατηρείται όταν το πλέγμα αποτελείται από 2500 κόμβους (50x50). Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν πενήντα μη άπειρες ιδιοτιμές οι οποίες αντιστοιχούν στους κόμβους της ελεύθερης επιφάνειας, από τις οποίες οι οχτώ πρώτες προσεγγίζουν τις αντίστοιχες αναλυτικές με καλή ακρίβεια.

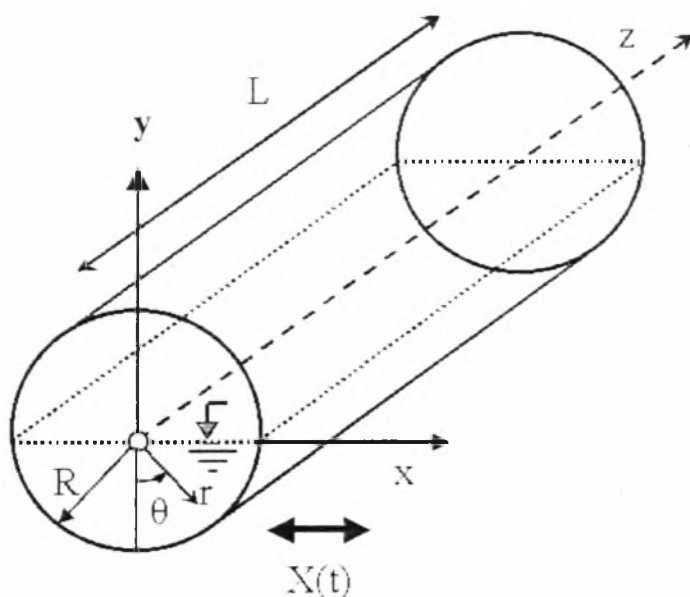
Πίνακας 5.2 Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων για H/2L=1.875

Τετρακομβικά Τετραγωνικά Στοιχεία					Τρικομβικά Τριγωνικά Στοιχεία				
Αριθμός κόμβων πλέγματος					Αριθμός κόμβων πλέγματος				
9	16	100	400	2500	9	16	100	400	2500
0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2290	0.2099	0.1968	0.1956	0.1953	0.2348	0.2172	0.1962	0.1959	0.1955
0.5234	0.5234	0.4291	0.4203	0.4182	0.5561	0.4982	0.4465	0.4362	0.4198
	0.7852	0.6665	0.6366	0.6295		0.7956	0.6824	0.6537	0.6301
		0.9303	0.8576	0.8407			0.9844	0.8649	0.8462
		1.2308	1.0864	1.0529			1.2934	1.1035	1.0623
		1.5707	1.3250	1.2666			1.5942	1.3664	1.2743
		1.9289	1.5757	1.4819			1.9913	1.5965	1.4936
		2.2314	1.8409	1.6993			2.3546	1.8654	1.7012
		2.3555	2.1228	1.1989			2.4212	2.2286	1.9244
			2.4231	2.1411				2.4862	2.1968
			2.7429	2.3662				2.8524	2.3589
			3.0814	2.5945				3.1487	2.6044
			3.4351	2.8264				3.5781	3.1043
			3.7958	3.0620				3.8012	3.3123
			4.1488	3.3019				4.2625	3.6351
			4.4720	3.5464				4.5281	3.8012
			4.7364	3.7957				4.8234	4.0321
			4.9114	4.0503				5.0095	4.1012
			4.9729	4.3105				5.1400	4.3512
				4.5765					4.6278
				4.8489					4.9132
				5.1278					5.1342
				5.4136					5.5015
				5.7065					5.8111
				6.0068					5.9999
				6.3146					6.3190
				6.6300					6.7613
				6.9529					6.9545
				7.2834					7.3211
				7.6209					7.7644
				7.9652					7.9987
				8.3154					8.2945
				8.6706					8.7659
				9.0295					9.0053
				9.3904					9.4856
				9.7514					9.8451
				10.1099					10.2753
				10.4630					10.5566
				10.8073					10.8456
				11.1389					11.2643
				11.4536					11.5685

Στον πίνακα 5.2 συγκρίνονται οι τιμές του $\lambda = \omega^2/g$ για την ορθογωνική δεξαμενή που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση με τα τετρακομβικά τετραγωνικά στοιχεία με τα αντίστοιχα τρικομβικά τριγωνικά στοιχεία. Τα αποτελέσματα για τα τετραγωνικά τετρακομβικά στοιχεία τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2 είναι από την χρήση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκε από την Κλιάφα (2003). Για τον αριθμητικό υπολογισμό των τιμών του λ χρησιμοποιήθηκαν πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας, δηλαδή πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κόμβων. Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα για πλέγματα με τον ίδιο αριθμό κόμβων κατά την x και y κατεύθυνση που αποτελούνται από 3, 4, 10, 20 και 50 κόμβους στην κάθε κατεύθυνση. Από τον πίνακα 5.2 προκύπτει ότι τα αποτελέσματα και για τα δύο είδη στοιχείων είναι σχεδόν ταυτόσημα.

5.2 Εφαρμογή σε κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50%- Ιδιοτιμές

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η αριθμητική επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή δεξαμενής (Σχήμα 5.4) για την περίπτωση που η πληρότητα της δεξαμενής είναι 50%. Στην περίπτωση αυτής της πληρότητας (half full) υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και η απόκριση υπό την επίδραση εξωτερικής σεισμικής διέγερσης .



Σχήμα 5.4: Γεωμετρική απεικόνιση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου πληρότητας 50%.

Επιλύουμε την εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (5.2.1)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } B_1 \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } B_2 \quad (5.2.3)$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων r,s με

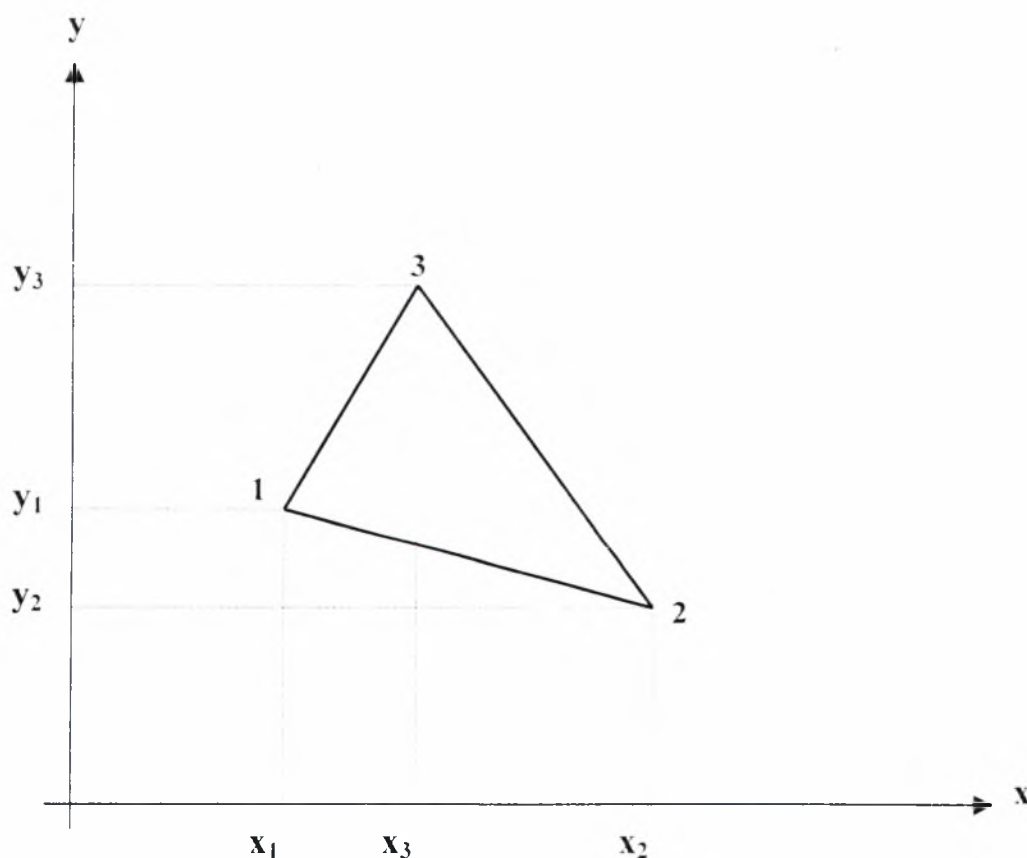
$0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq s \leq 1$. Ο μετασχηματισμός που ισχύει μεταξύ των συστημάτων r,s και x,y είναι ο ακόλουθος :

$$x(r,s) = N_1(r,s)x_1 + N_2(r,s)x_2 + N_3(r,s)x_3 = (1-r-s)x_1 + rx_2 + sx_3 \quad (5.2.4)$$

και

$$y(r,s) = N_1(r,s)y_1 + N_2(r,s)y_2 + N_3(r,s)y_3 = (1-r-s)y_1 + ry_2 + sy_3 \quad (5.2.5)$$

Θεωρούμε το τριγωνικό τρικομβικό στοιχείο με τοπική αρίθμηση (1, 2, 3) το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.5: Γεωμετρική απεικόνιση τρικομβικού τριγωνικού στοιχείου

Οι συναρτήσεις βάσης για κάθε ένα από τα στοιχεία είναι

$$N_1(r,s)=1-r-s$$

$$N_2(r,s)=r$$

$$[N]=\begin{bmatrix} 1-r-s & r & s \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

$$N_3(r,s)=s$$

Το μητρώο $[B]$ γίνεται

$$[B]=\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \quad (5.2.7)$$

του οποίου το ανάστροφο μητρώο είναι το $[B]^T$.

Υπολογίζουμε για κάθε στοιχείο τα εξής ολοκληρώματα :

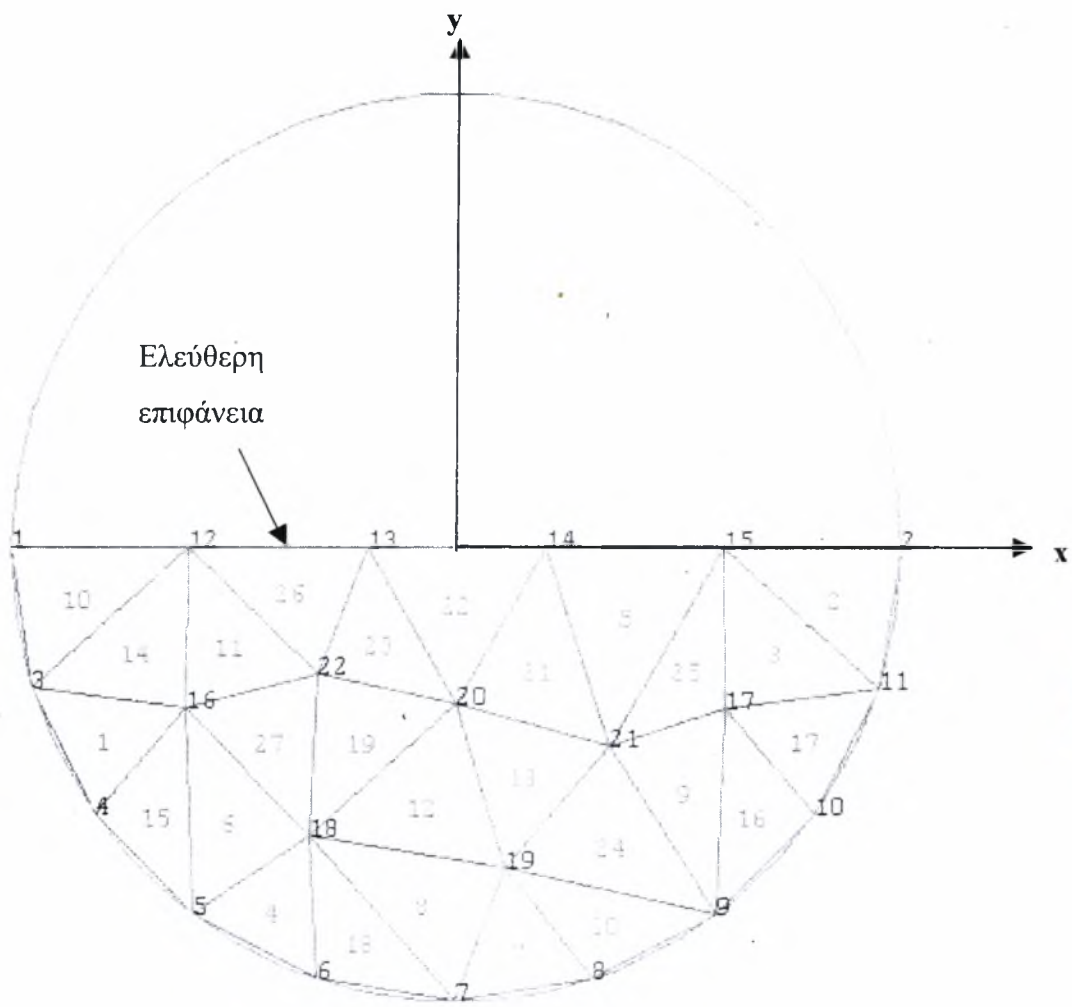
$$[K]_e = \int_0^1 \int_0^1 B^T B J dr ds \quad (5.2.8)$$

$$[M]_e = \int_0^1 N^T N J dr \quad (5.2.9)$$

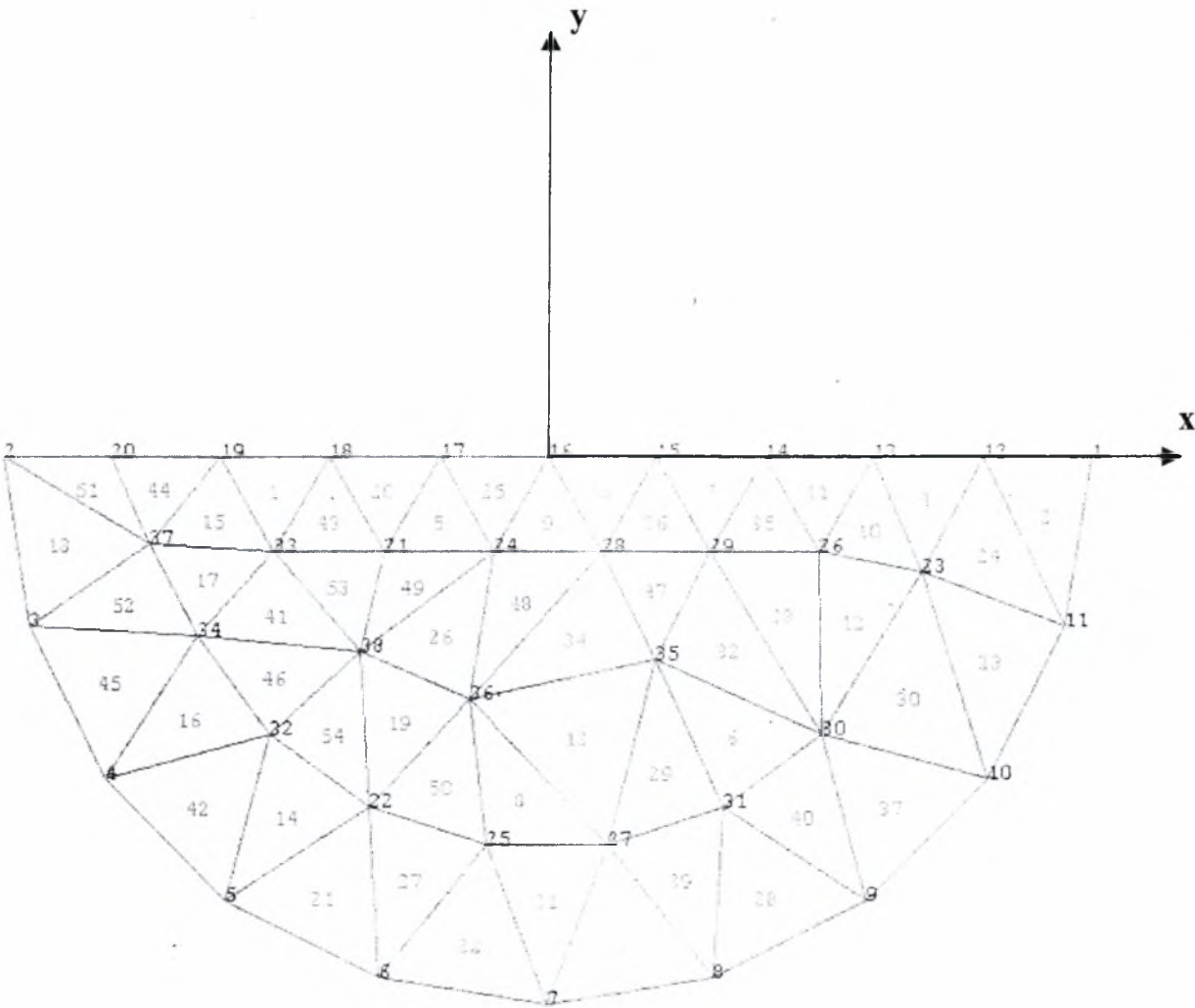
όπου J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του πίνακα.

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.2.10)$$

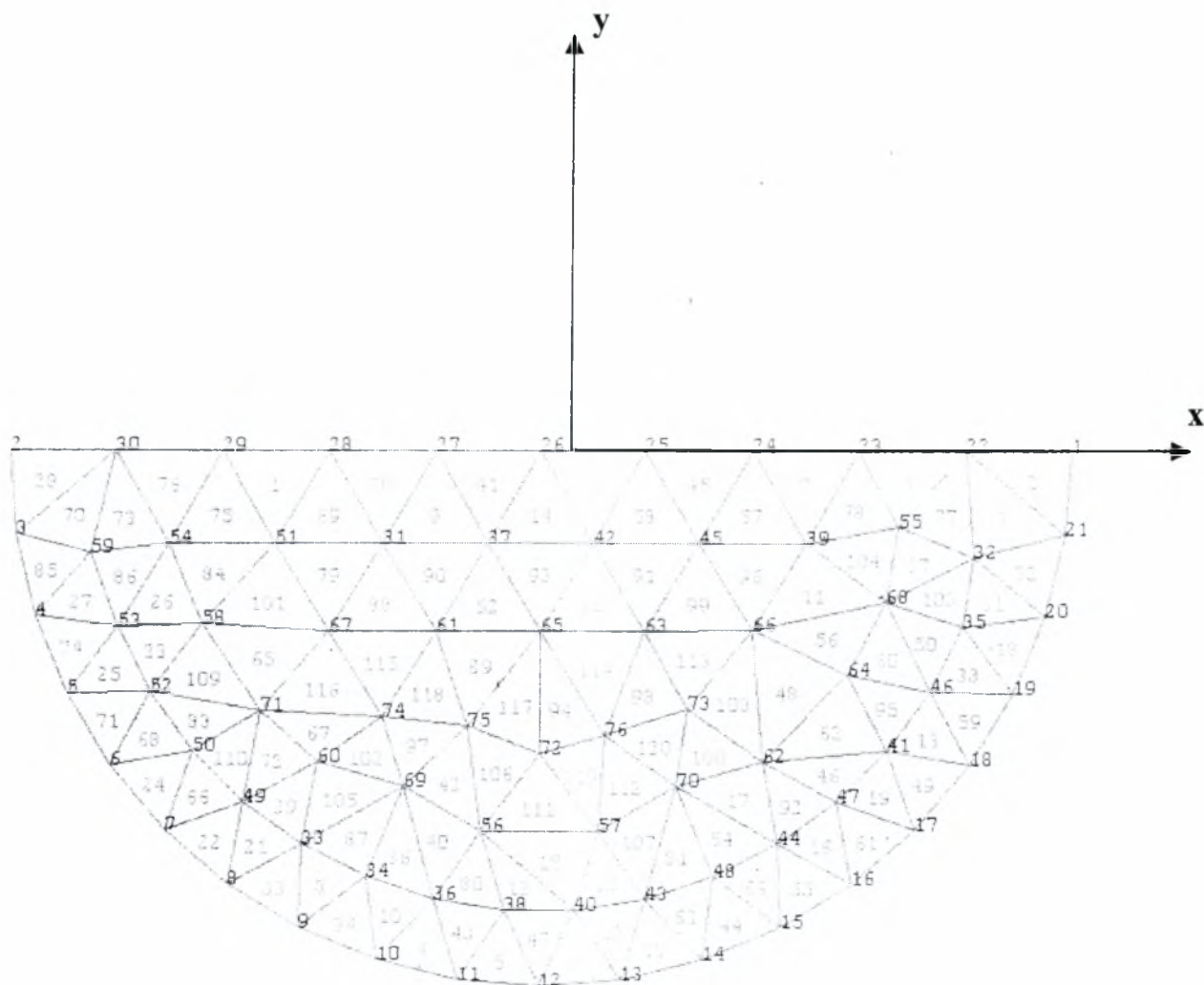
Παρακάτω παρουσιάζονται χαρακτηριστικά πλέγματα τριγωνικών τρικομβικών στοιχείων
για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50%



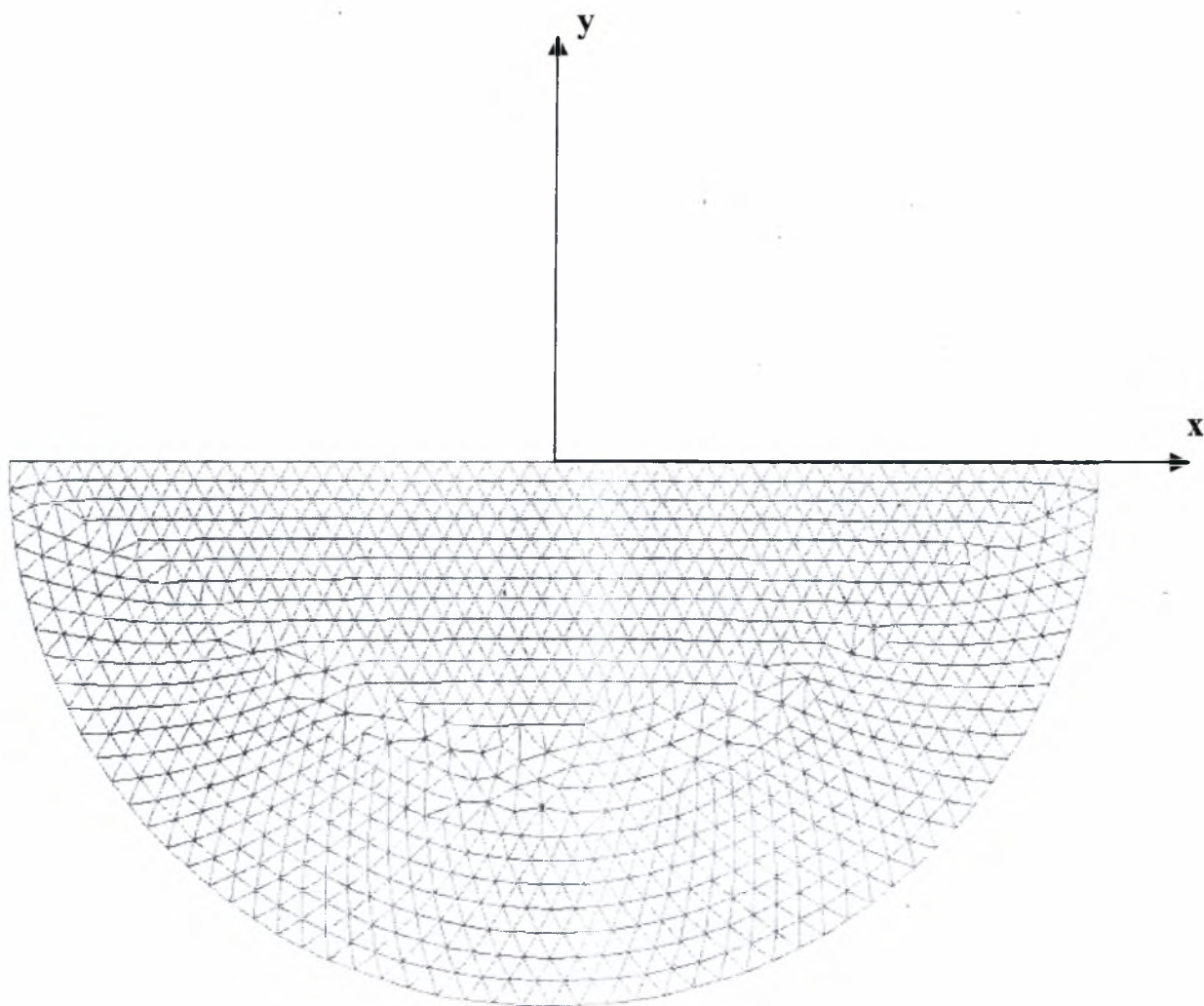
Σχήμα 5.6: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 27 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας 50%



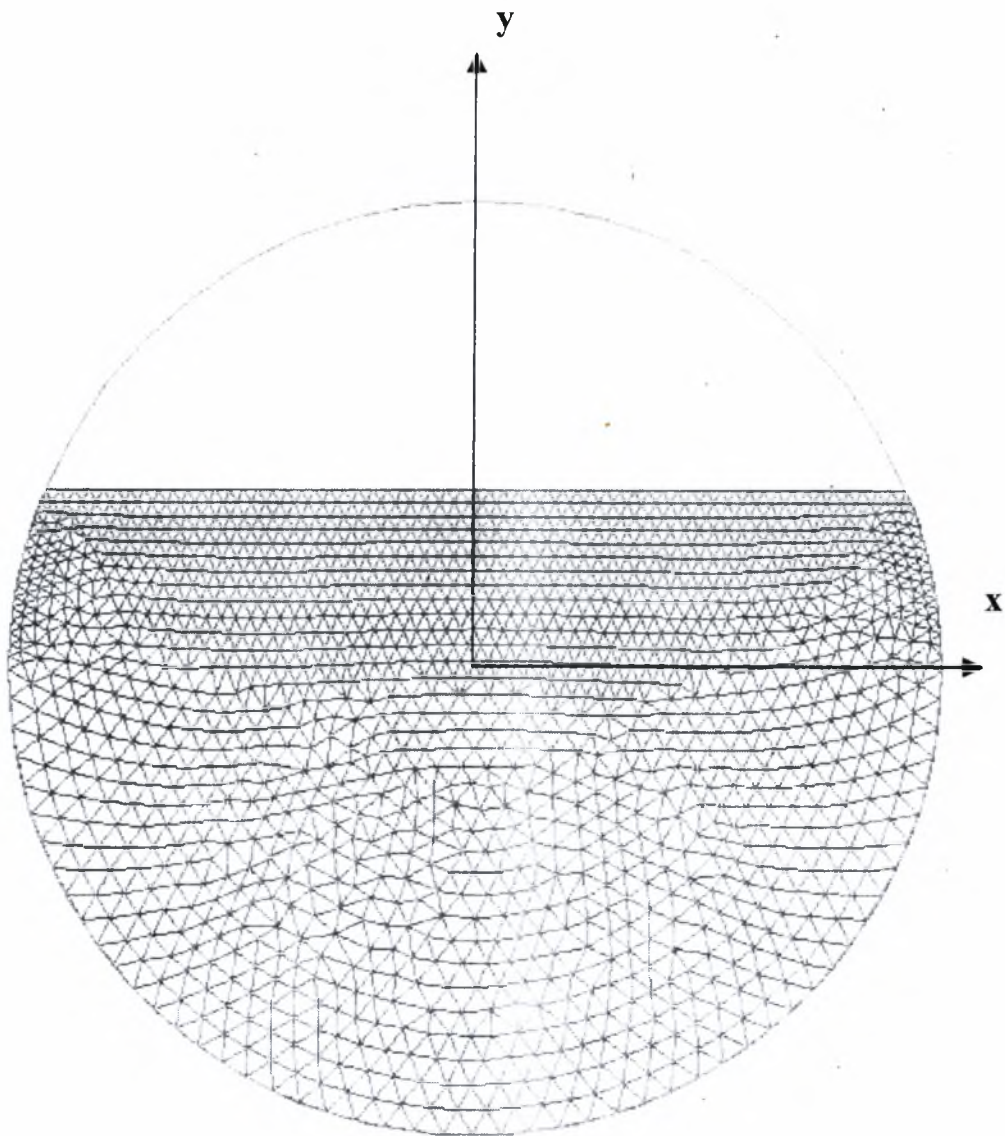
Σχήμα 5.7: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 54 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας 50%



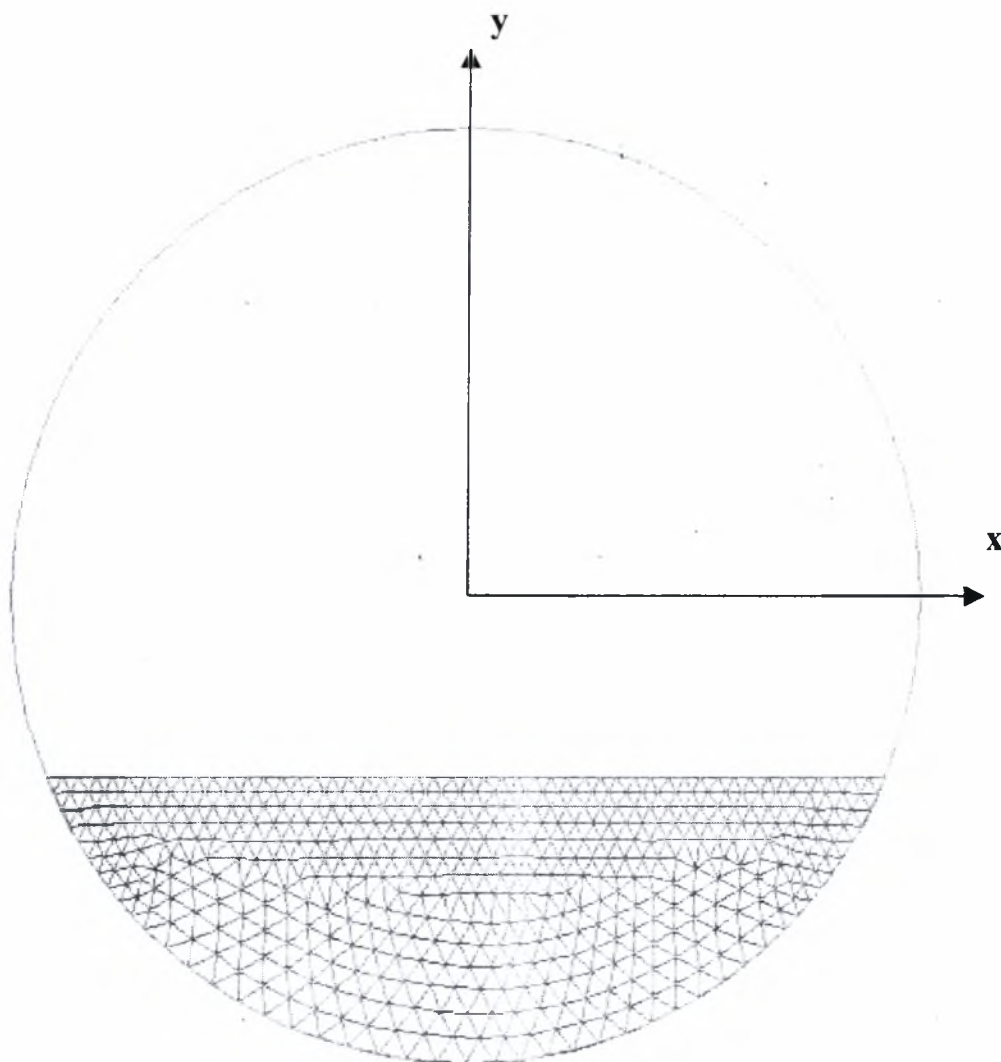
Σχήμα 5.8: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 120 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας 50%



Σχήμα 5.9: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 1700 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας 50%



Σχήμα 5.10: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 5000 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας $e = 0.4$



Σχήμα 5.11: Γεωμετρική απεικόνιση πλέγματος 2000 στοιχείων για οριζόντια δεξαμενή
πληρότητας $e = -0.4$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν υπήρχε η δυνατότητα να δημιουργήσουμε τα γεωμετρικά πλέγματα και για αυτό το λόγο χρησιμοποιήθηκε σαν είσοδος στον κώδικα μας τα πλέγματα από τον mesh generator του προγράμματος Πεπερασμένων Στοιχείων CAE του ABAQUS. Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση για την τετραγωνική δεξαμενή υπολογίζουμε τα μητρώα [K] και [M] για κάθε στοιχείο και στην συνέχεια συνθέτουμε τα ολικά μητρώα για όλα τα στοιχεία που αποτελούν το πλέγμα μας. Αφού ολοκληρώσαμε την ανάλυση και σύνθεση των μητρώων μπορούμε να λύσουμε το σύστημα για την περίπτωση των ιδιοτιμών δηλαδή

$$([K]-\omega_n^2[M])\Psi_n = 0 \tag{5.1.32}$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα του προβλήματος του κυματισμού στο συγκεκριμένο δοχείο συγκρίνονται με την ημι-αναλυτική λύση η οποία αναπτύχθηκε από τον Budiansky (1960) και τον McIver (1988). Στον πίνακα 5.4 παρουσιάζονται τα ημι-αναλυτικά αποτελέσματα του $\lambda = \frac{\omega^2 R}{g}$ και τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα από την παρούσα ανάλυση.

Πίνακας 5.4: Σύγκριση αριθμητικών και ημι-αναλυτικών αποτελεσμάτων του λ για R=1m και πληρότητα 50%

Ημι-αναλυτικά αποτελέσματα		Αριθμητικά αποτελέσματα
*	1.35573	1.3557
**	3.03310	3.0347
*	4.65105	4.6572
**	6.23920	6.2545
*	7.81986	7.8504
**	9.39668	9.4501
*	10.9718	11.0574
**	12.5457	12.6742

Παραπομπή: * «αντισυμμετρικές» ιδιοτιμές ** «συμμετρικές» ιδιοτιμές

Πίνακας 5.5 Αριθμητικά αποτελέσματα του $\omega^2 R/g$ για πληρότητα 50%

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%						
Αριθμός κόμβων πλέγματος						
12	38	76	120	278	957	4994
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.9784	1.8657	1.7523	1.6276	1.5389	1.3590	1.3557
4.3705	4.2472	4.0125	3.6043	3.4299	3.0535	3.0347
13.0655	7.1239	6.6574	5.6034	5.2773	4.7059	4.6572
136.0690	9.1354	8.9543	7.7756	7.1680	6.3506	6.2545
	10.8864	10.5987	10.2149	9.1444	8.0183	7.8504
	15.9551	14.6472	13.0183	11.2357	9.7161	9.4501
	22.6937	18.9856	16.2789	13.4688	11.4531	11.0574
	30.2438	25.6874	20.0991	15.8713	13.2368	12.6742
	40.2164	32.6871	24.5732	18.4760	15.0744	14.3029
	323.8985	36.4891	29.7760	21.3088	16.9735	15.9451
		41.5687	35.7195	22.9945	18.9416	17.6027
		56.2871	42.2918	24.4030	20.9867	19.2777
		67.2368	49.1461	27.7796	23.1163	20.9709
		456.2386	55.5793	31.4717	25.3388	22.6850
			60.4525	35.5007	27.6623	24.4213
			73.2684	39.8999	30.0956	26.1817
			584.2946	44.6770	32.6474	27.9676
				49.8399	38.1452	29.7816
				55.3676	41.1110	31.6247
				61.2416	44.2349	33.4952
				67.4054	47.5275	35.2658
				73.1443	50.9986	37.8952
				80.1447	54.6578	39.3687
				86.2739	58.5134	41.5841
				91.7975	62.5731	43.5684
				96.3035	66.8423	45.5036
				99.3404	71.3254	47.6491
				106.2342	76.0239	49.8451
				935.3535	80.9373	51.6841
					86.0622	53.7213
					91.3919	55.7513
					96.9160	57.4613
					102.6198	59.1343
					108.4829	61.4373
					114.4782	63.7961
					120.5702	65.7633
					126.7138	67.8464
					132.8521	69.6548
					138.9168	71.8564
					144.8256	73.2354
					150.4842	75.6541

Από τον πίνακα 5.4 παρατηρούμε ότι οι πρώτες μη μηδενικές πραγματικές τιμές του λόγου $\lambda = \frac{\omega^2 R}{g}$ οι οποίες υπολογίστηκαν αριθμητικά από τον κώδικα έχουν καλή σύγκριση με τα αναλυτικά αποτελέσματα. Το σχετικό σφάλμα είναι της τάξεως του 10^{-3} σε όλες τις περιπτώσεις. Το γεγονός αυτό αποτελεί δείγμα για την αξιοπιστία του κώδικα. Επισημαίνεται το γεγονός ότι τα αποτελέσματα του κώδικα είναι όλες οι ιδιοτιμές. Οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε συμμετρικές και αντισυμμετρικές ιδιομορφές. Συγκεκριμένα οι περιττές ιδιοτιμές κατά σειρά είναι αυτές που αντιστοιχούν σε συμμετρικές ιδιομορφές και οι άρτιες ιδιοτιμές είναι αυτές που αντιστοιχούν σε αντισυμμετρικές ιδιομορφές. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η θεωρητική διακριτοποίηση η οποία χρησιμοποιείται για την δημιουργία του κώδικα δεν διαχωρίζει τις συμμετρικές από τις αντισυμμετρικές ιδιοτιμές. Σημειώνεται πως η αναλυτική προσέγγιση η οποία παρουσιάστηκε από τον Budiansky (1960) παρουσιάζει τις τιμές του $\lambda = \frac{\omega^2 R}{g}$ για τις αντισυμμετρικές ιδιομορφές ενώ η ανάλυση του McIver (1988) παρουσιάζει όλες τις ιδιοτιμές. Το γεγονός αυτό διαμορφώνει την σύγκριση των αποτελεσμάτων όπως αυτά παρουσιάζονται στον πίνακα 5.4.

5.3 Ισοδυναμία θεώρησης τύπου II και τύπου III για δεξαμενή πληρότητας 50%

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η θεώρηση τύπου II και τύπου III όπου αναφέρθηκε ότι θα πρέπει να υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο τρόπων ανάλυσης του προβλήματος κυματισμού. Αυτή η ισοδυναμία παρουσιάζονται για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50% και συγκεκριμένα ελέγχονται οι ισότητες.

$$M_I = \bar{M}_I \quad (5.3.1)$$

$$M_{ns} = M_{nc} \quad (5.3.2)$$

όπου

$$M_{ns} = \frac{P_n F_n}{M_n} \quad (5.3.3)$$

$$M_I = M_T - \sum_n M_{ns} \quad (5.3.4)$$

και M_I είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα από την θεώρηση τύπου II.

ενώ

$$M_{nc} = \frac{f_n F_n}{\omega_n^2 M_n} \quad (5.3.5)$$

και

$$\bar{M}_I = \mathbf{F}^T [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F} \quad (5.3.6)$$

όπου \bar{M}_I είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα για την θεώρηση τύπου III.

Στον Πίνακα 5.6 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα $\frac{M_{ys}}{M_T}, \frac{M_x}{M_T}, \frac{M_{yk}}{M_T}, \frac{\bar{M}_y}{M_T}$ για τις πρώτες επτά ιδιοτιμές του προβλήματος. Στον πίνακα αυτό οι τιμές των M_y και \bar{M}_y υπολογίζονται με βάση τον τύπο (5.3.4) και (5.3.6) για μικρότερο ή ίσο της ιδιοτιμής που εξετάζεται σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 5.6 Αριθμητικά αποτελέσματα των ποσοτήτων $\frac{M_{ys}}{M_T}, \frac{M_x}{M_T}, \frac{M_{yk}}{M_T}, \frac{\bar{M}_y}{M_T}$ για την
θεώρηση τύπου II και III για πληρότητα 50%

Αποτελέσματα για την θεώρηση τύπου II και τύπου III					
Ιδιοτιμή		Θεώρηση Τύπου II		Θεώρηση Τύπου II	
		$\frac{M_{ys}}{M_T}$	$\frac{M_x}{M_T}$	$\frac{M_{yk}}{M_T}$	$\frac{\bar{M}_y}{M_T}$
1	1.3557	0.584	0.416	0.5704	0.404
2	3.0347	0.01402	0.40198	0.01801	0.38599
3	4.6572	0.0032	0.39878	0.00312	0.38287
4	6.2545	0.000292	0.39849	0.00023	0.38264
5	7.8504	0.000102	0.398388	0.000098	0.382542
6	9.4501	0.000086	0.398302	0.000079	0.382463
7	11.0574	0.000023	0.398284	0.000019	0.382444

Από τον Πίνακα 5.6 παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις πρώτες επτά ιδιοτιμές είναι πολύ κοντά. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε την ισοδυναμία της θεώρησης τύπου II και τύπου III.

5.4 Υπολογισμός Δυνάμεων σε κυλινδρική δεξαμενή πληρότητας 50%

α)Θεώρηση τύπου I

Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου I του 4^{ου} Κεφαλαίου θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις. Η συνολική δύναμη βάση της θεώρησης τύπου I είναι

$$F = -\rho \sum_{n=1}^n \frac{F_n^2}{\omega_n^2 M_n} \ddot{\xi}_n \quad (5.4.1)$$

όπου

$$M_n = \Psi_n^T [M] \Psi_n \quad (5.4.2)$$

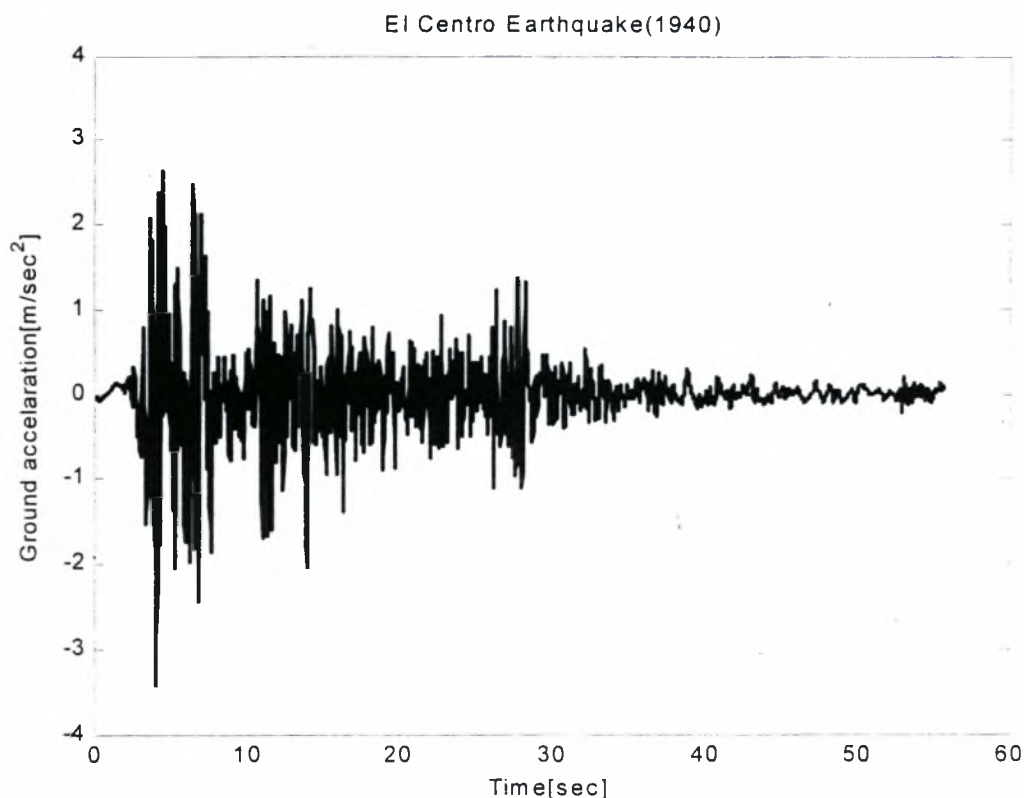
$$F_n = \Psi_n^T F \quad (5.4.3)$$

και ω_n^2 είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος

Για τον υπολογισμό του $\ddot{\xi}_n$ χρησιμοποιούμε την σχέση

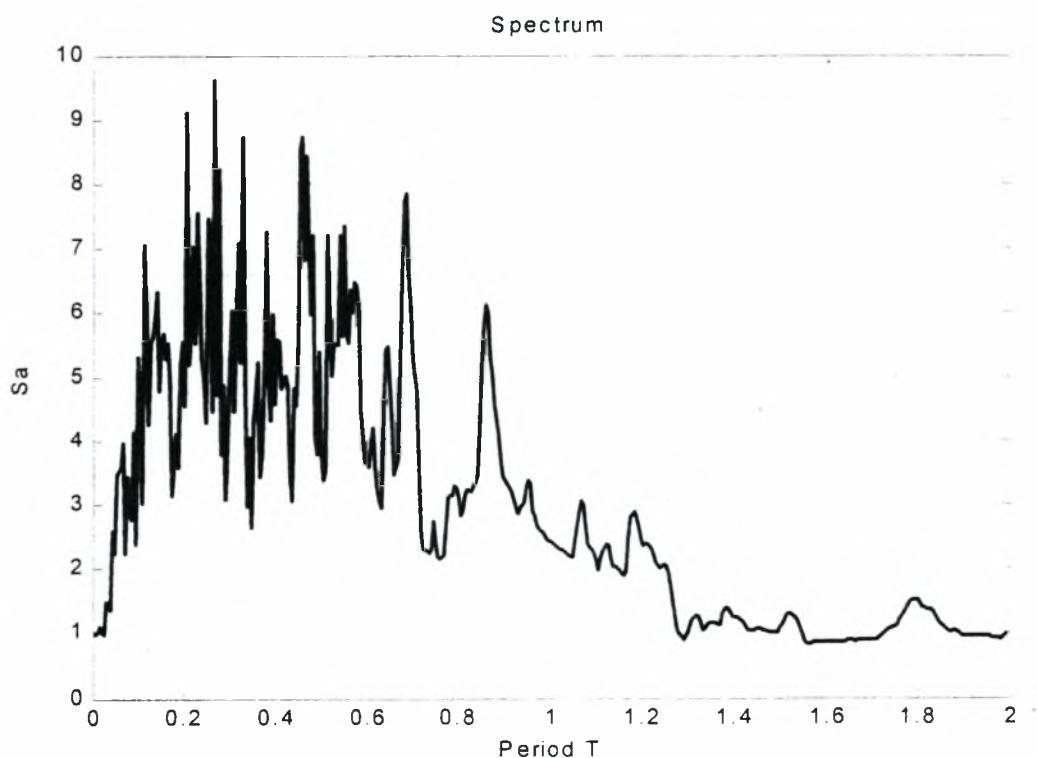
$$\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 (\xi_n - X) = 0 \quad (5.4.5)$$

όπου ω_n^2 είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος και X είναι η εξωτερική διεγερση .η οποία για την περίπτωση μας είναι ο σεισμός του El Centro (1940) του οποίου το επιταχυνσιογράφημα φαίνεται στο σχήμα 5.7, ενώ το αντίστοιχο φάσμα ολικών επιταχύνσεων S_a φαίνεται στο σχήμα 5.8 για μηδενική απόσβεση.



Σχήμα 5.7: Επιταχυνσιογράφημα του σεισμού του El Centro, 1940

(Πηγή: <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>).

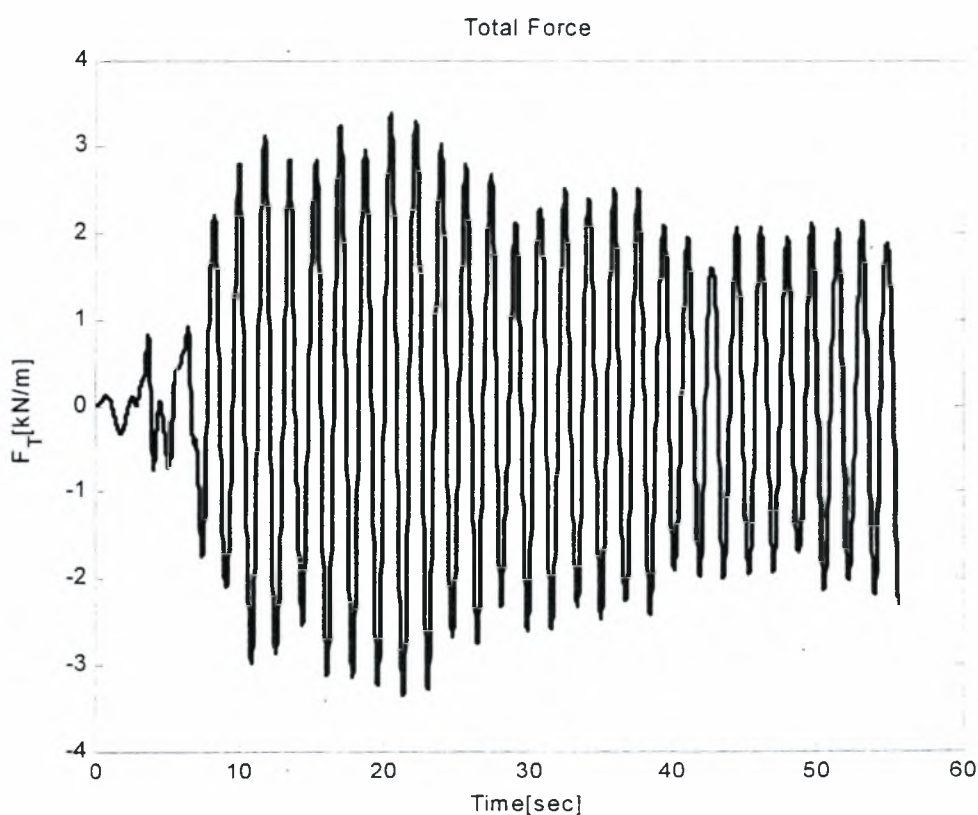


Σχήμα 5.8: Φάσμα ολικών επιταχύνσεων του σεισμού του El Centro, 1940

Από το επιτανσιογράφημα του σεισμού και από την σχέση (5.3.6)

$$\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -\ddot{X} \quad (5.3.6)$$

επιλύουμε υπολογιστικά και βρίσκουμε το Y_n με χρήση του προγράμματος Matlab. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων επιλύεται με την μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης και την αντίστοιχη υπορουτίνα του προγράμματος. Στην συνέχεια εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\xi_n = Y_n + X$ υπολογίζουμε τις δυνάμεις του προβλήματος του κυματισμού οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 5.9: Συνολική Δύναμη (θεώρηση τύπου I)

β)Θεώρηση τύπου II ή III

Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου II και III του 4^{ου} Κεφαλαίου για τον υπολογισμό των δυνάμεων έχουμε για την ωστική κίνηση

$$F_I = -\rho \bar{M}_I \ddot{X} \quad (5.3.\beta.1)$$

Από την τελευταία ισότητα κατανοούμε ότι η δύναμη η οποία οφείλεται στην ωστική κίνηση είναι το γινόμενο της αντίστοιχης μάζας του ρευστού επί την εξωτερική επιτάχυνση. Για την επαγωγική κίνηση η δύναμη δίνεται από τη σχέση

$$F_C = -\rho \sum_{i=1}^n M_{nc} \ddot{\beta}_n \quad (5.3.\beta.2)$$

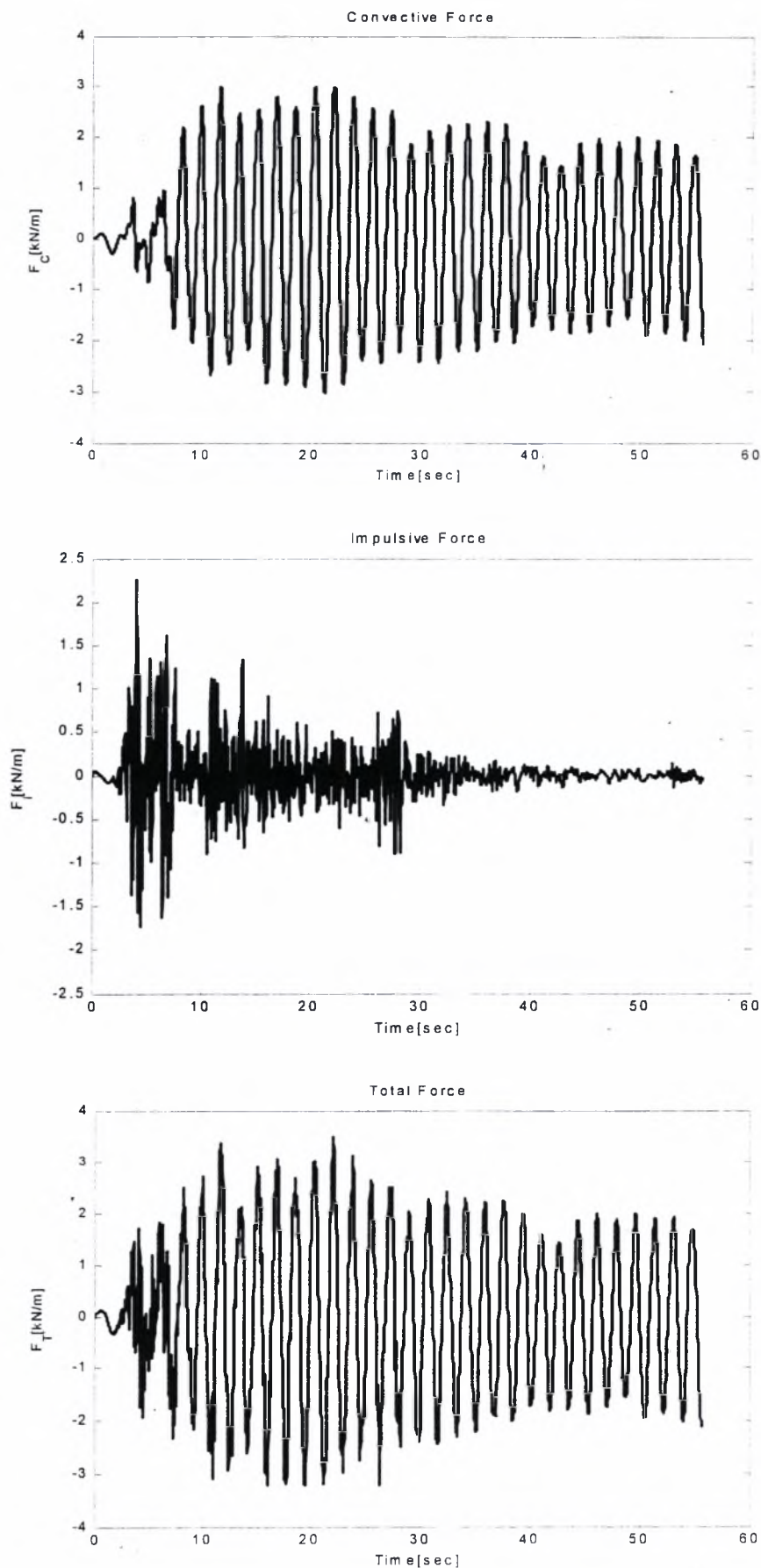
όπου M_{nc} και \bar{M}_I δίνονται από τον Πίνακα 5.6 σε σχέση με την ολική μάζα

Επομένως η συνολική δύναμη του φαινομένου του κυματισμού δίνεται

$$F = -\rho \sum_{i=1}^n M_{nc} \ddot{\beta}_n - \bar{M}_I \ddot{X} \quad (5.3.\beta.3)$$

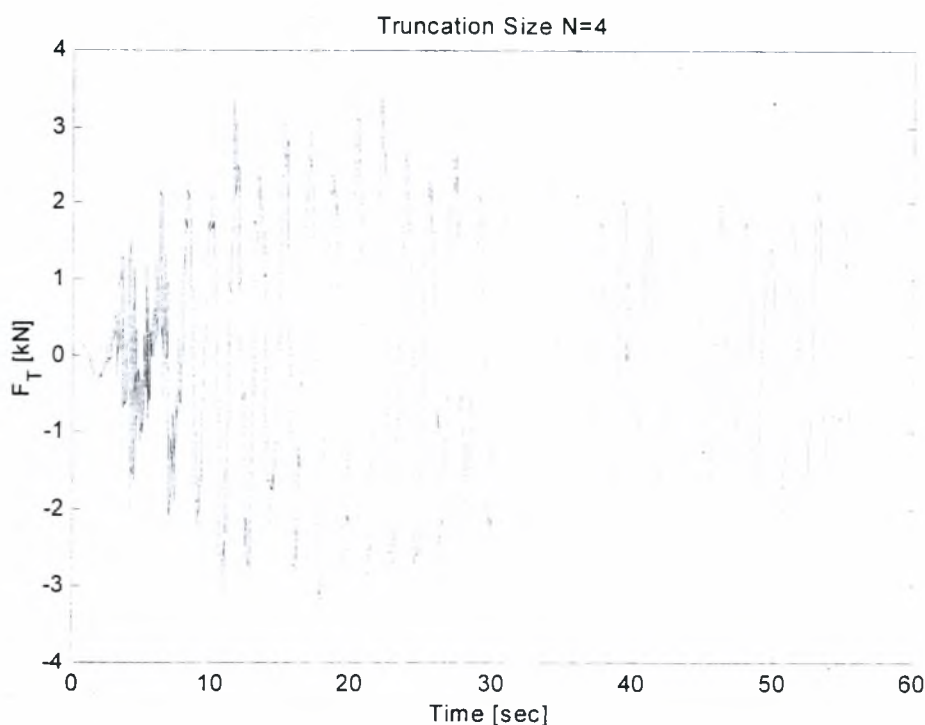
$$\ddot{\beta}_n + \omega_n^2 (\beta_n - X) = 0 \quad (5.3.\beta.4)$$

από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το β_n και επομένως τις δυνάμεις του κυματισμού. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις δυνάμεις της ομοιόμορφης και κυματικής κίνησης και τις συνολικές δυνάμεις αντίστοιχα.



Σχήμα 5.10: α) Επαγωγική Δύναμη, β) Ωστική Δύναμη, γ) Συνολική Δύναμη

Στην συνέχεια στο σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η συνολική δύναμη για την ημι-αναλυτική λύση (Παράρτημα Α) και συγκρίνεται με τα σχήματα 5.9 και 5.10



Σχήμα 5.11: Συνολική Δύναμη (Αναλυτική Προσέγγιση – Papasryrou et. al.2004)

Όπως παρατηρούμε από τα σχήματα 5.9, 5.10 και 5.11 η μορφή της συνολικής δύναμης για την αναλυτική και την αριθμητική επίλυση είναι σχεδόν ίδια. Παρατηρούμε ότι η αναλυτική λύση είναι υπολογισμένη για τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς η οποία περιγράφει την συνολική δύναμη (Παράρτημα Α). Σημαντικό στοιχείο για την συνολική δύναμη είναι το μέγιστο της δύναμης και η χρονική στιγμή στην οποία αυτό παρουσιάζεται. Το μέγιστο της δύναμης είναι σημαντικό δεδομένο για τον σχεδιασμό των κατασκευών.

γ)Φασματική ανάλυση

Για την πληρέστερη σύγκριση των αποτελεσμάτων γίνεται υπολογισμός της ολικής δύναμης με την μέθοδο της φασματικής ανάλυσης. Η φασματική ανάλυση βασίζεται στην θεωρητική προσέγγιση του μηχανικού μοντέλου. Μέσα από την διαγωνοποίηση το σύστημα μας προσομοιώνεται ως μία «οικογένεια» απλών αρμονικών ταλαντωτών στους οποίους επιβάλουμε την εξωτερική σεισμική διέγερση. Σε κάθε ταλαντωτή, η μάζα είναι M_{nc} και η ακαμψία είναι $\omega_n^2 M_{nc}$ όπου ω_n είναι η ιδιοσυχνότητα του κάθε ταλαντωτή. Για την κάθε ιδιοτιμή υπολογίζουμε την αντίστοιχη ιδιοπερίοδο $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ και από το φάσμα επιταχύνσεων προσδιορίζουμε το $S_a(T_n)$.

Για να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη του αρμονικού μοντέλου χρησιμοποιούμε N το πλήθος αρμονικούς ταλαντωτές δηλαδή τις N πρώτες ιδιομορφές με τους οποίους προσομοιώνουμε το σύστημα μας και η συνολική δύναμη υπολογίζεται

$$F_{n,max} = M_{nc} S_a(T_n) \quad (5.3.γ.1)$$

$$F_{I,max} = M_I \ddot{X}_{max} \quad (5.3.γ.2)$$

όπου M_{nc} είναι η επαγωγική μάζα της n ιδιομορφής και $S_a(T_n)$ είναι η μέγιστη επιτάχυνση από το φάσμα επιταχύνσεων που αντιστοιχεί στην ιδιοπερίοδο T_n . M_I είναι η ωστική μάζα και \ddot{X}_{max} είναι η μέγιστη επιτάχυνση της εξωτερικής σεισμικής διέγερσης.

Αρκετά σημαντικό θέμα είναι ο τρόπος με τον οποίο θα μπορέσουμε να αθροίσουμε τις μέγιστες τιμές των δυνάμεων και να προσδιορίσουμε την συνολική μέγιστη δύναμη. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το κάθε μέγιστο συμβαίνει σε διαφορετική χρονική στιγμή. Για την επαλληλία λοιπόν των μέγιστων χρησιμοποιούμε δύο τρόπους (Chopra A.2001). Ο πρώτος τρόπος είναι το άθροισμα των απολύτων τιμών (SAV) δηλαδή έχουμε

$$F_{T,max} = \sum_n |F_{c,max}| + |F_{I,max}| \quad (5.3.γ.3)$$

Ο τρόπος όμως αυτός δεν είναι πολύ αξιόπιστος ούτε δημοφιλής για τον σχεδιασμό κατασκευών διότι δίνει συντηρητικά αποτελέσματα. Ο δεύτερος τρόπος αναπτύχθηκε από τον Rosenblueth (1951) και συνίσταται στην τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων (SRSS). Χρησιμοποιώντας αυτή τη μεθοδολογία για την επαγωγική κίνηση έχουμε

$$F_{c,max} = \sqrt{\sum_n (F_{c,max})^2} \tag{5.3.γ.4}$$

Ο τρόπος αυτός αποτελεί έναν συνηθισμένο εφαρμοσμένο τρόπο ανάλυσης στις κατασκευές και θεωρείται αρκετά αξιόπιστος. Για την επαλληλία επαγωγικής και ωστικής κίνησης θεωρούμε επαλληλία αθροίσματος απολύτων τιμών. Ο λόγος επιλογής αυτού του τρόπου είναι ότι η ωστική κίνηση είναι υψηλότερη ενώ η επαγωγική κίνηση αργόσυχη. Επομένως για την συνολική δύναμη έχουμε

$$F_{T,max} = \sqrt{\sum_n (F_{c,max})^2} + |F_{I,max}| \tag{5.3.γ.5}$$

Πίνακας 5.6: Σύγκριση αποτελεσμάτων ολικής δύναμης για δοχείο πληρότητας 50%

Σύγκριση αποτελεσμάτων ολικής δύναμης για δοχείο πληρότητας 50%		
	Απόλυτη τιμή μέγιστης δύναμης	Χρονική Στιγμή
Αναλυτική λύση	3.3645kN/m	22.1sec
Αριθμητική επίλυση τύπου I (ολική θεώρηση δυναμικού)	3.4135kN/m	23.5sec
Αριθμητική επίλυση τύπου II (θεώρηση ωστικής - επαγωγικής κίνησης)	3.3920kN/m	23.5sec
Φασματική Ανάλυση (SAV)	4.2846kN/m	-
Φασματική Ανάλυση (SRSS)	5.1894kN/m	-

Από την μελέτη του πίνακα 5.6 παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι σε αρκετά καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα της φασματικής ανάλυσης. Γενικά τα αποτελέσματα της φασματικής μεθόδου είναι συντηρητικά. Με την ανάλυση αυτή και γνωρίζοντας ότι τα αποτελέσματα και στις υπόλοιπες συγκρίσεις που έγιναν είναι ικανοποιητικά, συμπεραίνουμε ότι ο κώδικας έχει αξιοπιστία για την συγκεκριμένη κυλινδρική γεωμετρία.

Κεφάλαιο 6

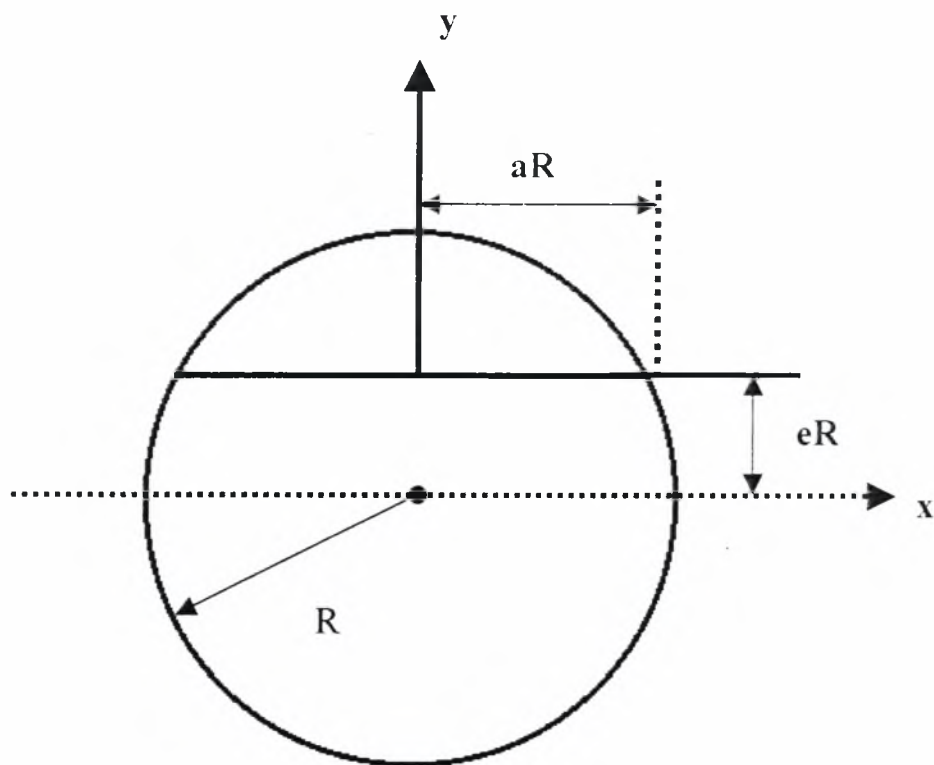
Αποτελέσματα για οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή οιασδήποτε πληρότητας

Περίληψη

Το φαινόμενο του κυματισμού επιλύεται αριθμητικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε δοχείο οριζόντιας κυλινδρικής διατομής υπό την επίδραση εξωτερικής διέγερσης. Μέσα από το πηγαίο κώδικα FORTRAN που περιγράφηκε στο 4^ο κεφάλαιο επιλύουμε το πρόβλημα των ομογενών συνοριακών συνθηκών και παίρνουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιομορφές του προβλήματος για οποιαδήποτε πληρότητα του δοχείου. Επίσης για το πρόβλημα των συνοριακών συνθηκών υπολογίζουμε τις μάζες της κίνησης του κυματισμού και της ομοιόμορφης κίνησης βασιζόμενοι στην θεώρηση τύπου II του 4^{ου} κεφαλαίου. Παράλληλα βασιζόμενοι στην θεώρηση τύπου III του 4^{ου} κεφαλαίου υπολογίζουμε τις μάζες της επαγωγικής και της ωστικής κίνησης και οι τιμές συγκρίνονται με αυτές της θεώρησης II. Τέλος, στην τρίτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου υπολογίζουμε τις δυνάμεις του κυματισμού όταν το σύστημα δεξαμενή-ρευστό υπόκειται σε σεισμική εξωτερική διέγερση.

6.1 Ιδιοτιμές για οποιοδήποτε ύψος ρευστού

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιομορφές για δεξαμενή πληρότητας 50%. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις ιδιοτιμές, για οποιοδήποτε ύψος ρευστού. Το ύψος του ρευστού εκφράζεται σε σχέση με τις δύο μεταβλητές a και e όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1



Σχήμα 6.1: Γεωμετρικές παράμετροι καθορισμού ύψους ελεύθερης επιφάνειας ρευστού για κυλινδρικό δοχείο.

Τα αποτελέσματα του προβλήματος των ιδιοτιμών προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \Psi_n = 0 \quad (6.1.1)$$

όπου $[M]$ και $[K]$ είναι το μητρώο μάζας και ακαμψίας αντίστοιχα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 τα αποτελέσματα των τεσσάρων πρώτων αντισυμμετρικών ιδιοτιμών για επιλεγμένα ύψη ρευστού.

Πίνακας 6.1 Αποτελέσματα ω^2/g για επιλεγμένα ύψη ρευστού.

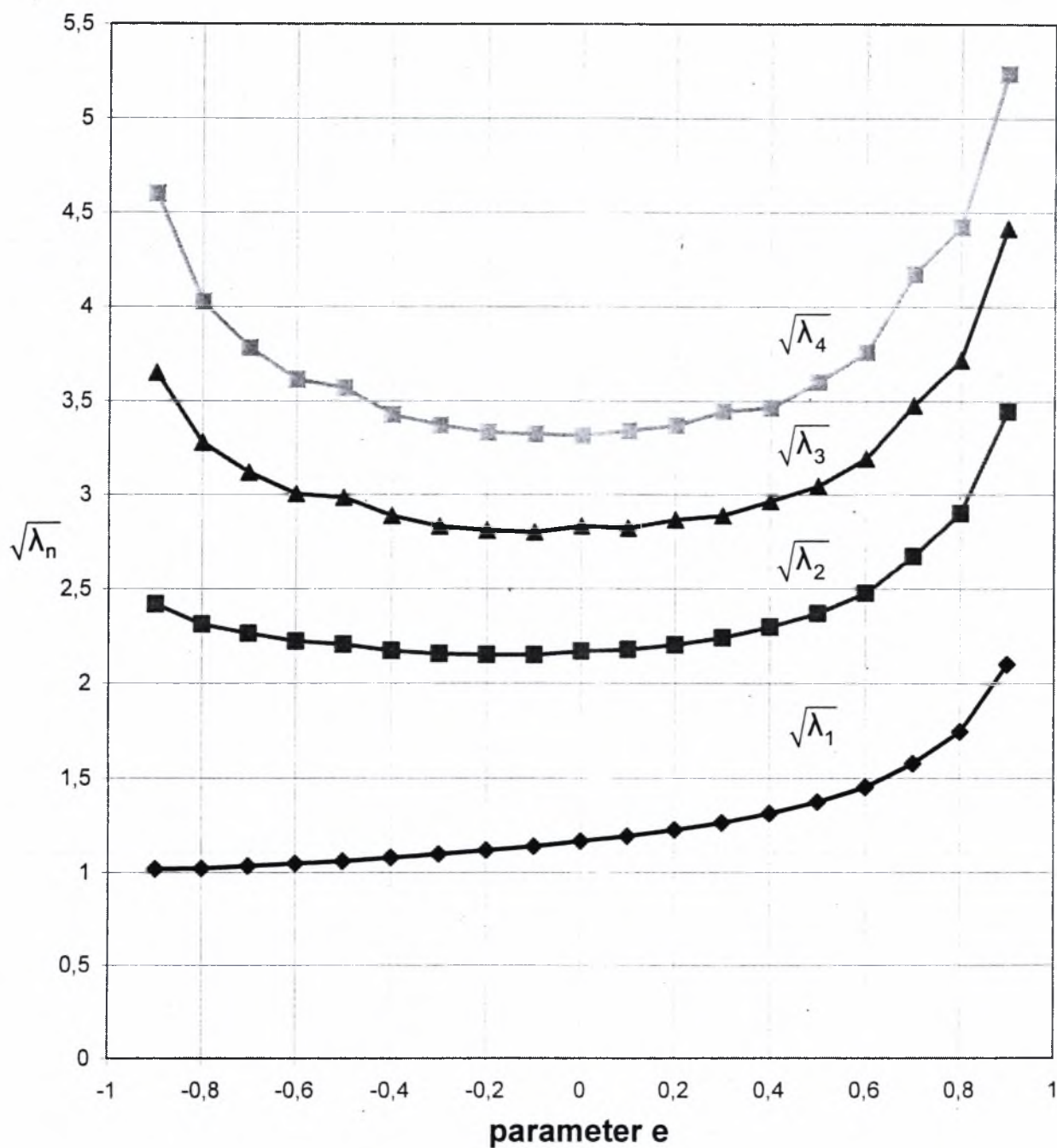
Λόγος $\lambda = \omega^2/g$ για διάφορα ύψη ρευστού					
a	e	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	-1	*	*	*	*
0.43	-0.9	1.038	5.843	13.322	21.162
0.6	-0.8	1.044	5.349	10.759	16.215
0.7	-0.7	1.070	5.128	9.74	14.296
0.8	-0.6	1.099	4.94	9.026	13.058
0.87	-0.5	1.123	4.862	8.908	12.737
0.917	-0.4	1.164	4.718	8.336	11.742
0.96	-0.3	1.206	4.645	8.011	11.368
0.98	-0.2	1.249	4.629	7.899	11.106
0.99	-0.1	1.298	4.624	7.841	11.053
1	0	1.359	4.706	8.018	11.006
0.99	0.1	1.424	4.742	7.966	11.176
0.98	0.2	1.503	4.854	8.21	11.358
0.96	0.3	1.598	5.018	8.349	11.8653
0.917	0.4	1.727	5.279	8.796	11.9986
0.87	0.5	1.889	5.612	9.274	12.962
0.8	0.6	2.113	6.129	10.199	14.115
0.7	0.7	2.491	7.131	12.0921	17.426
0.6	0.8	3.0501	8.417	13.805	19.568
0.43	0.9	4.4114	11.871	19.503	27.433
0	1	*	*	*	*

Στην συνέχεια στον Πίνακα 6.2 συγκρίνονται οι τιμές του λόγου λ σε σχέση με τις λύσεις των Budiansky (1960) και McIver(1993).

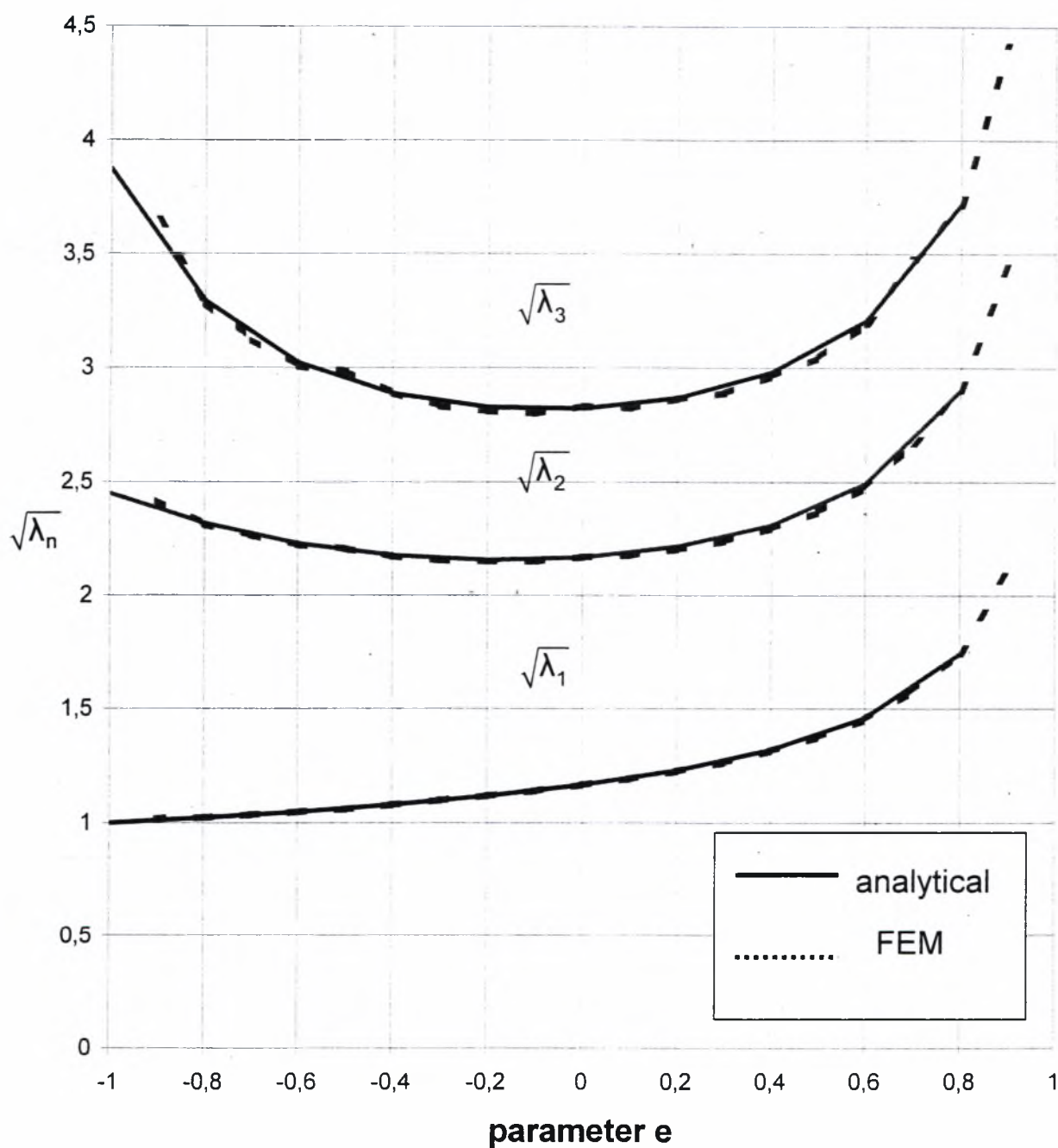
Πίνακας 6.2 Σύγκριση τιμών του λόγου λ για επιλεγμένα ύψη ρευστού

Σύγκριση $\lambda = \omega^2/g$								
Αποτελέσματα Budiansky(1960) ,McIver(1993)					Αριθμητικά αποτελέσματα			
e	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-1	1	6	15	23	*	*	*	*
-0.8	1.045	5.38	10.85	15.42	1.044	5.349	10.759	16.215
-0.6	1.099	4.97	9.13	14.67	1.099	4.94	9.026	13.058
-0.4	1.165	4.74	8.33	11.94	1.164	4.718	8.336	11.742
-0.2	1.249	4.65	7.99	11.13	1.249	4.629	7.899	11.106
0	1.36	4.70	7.96	11.09	1.359	4.706	8.018	11.006
0.2	1.513	4.91	8.23	11.45	1.503	4.854	8.21	11.358
0.4	1.742	5.34	8.89	12.12	1.727	5.279	8.796	11.998
0.6	2.13	6.22	10.28	14.89	2.113	6.129	10.199	14.115
0.8	3.04	8.42	13.84	18.63	3.0501	8.417	13.805	19.568
1	∞	∞	∞	∞	*	*	*	*

Στην συνέχεια στον Σχήμα 6.2 παρουσιάζονται οι τιμές τις τετραγωνικής ρίζας των αριθμητικών αποτελεσμάτων του λόγου λ για διάφορα ύψη της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.



Σχήμα 6.2 : Τιμές $\sqrt{\lambda}$ για τις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές διδιάστατου κυλινδρικού δοχείου
(αριθμητικά αποτελέσματα)



Σχήμα 6.3: Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων του $\sqrt{\lambda}$.

Από τους πίνακες 6.1 και 6.2 και από τα σχήματα 6.2 και 6.3 παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν αρκετή καλή σύγκλιση με τα αντίστοιχα ημι-αναλυτικά. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας σε FORTRAN και σε αυτό εισάγουμε ως δεδομένο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλέγματος από τον προεπεξεργαστή CAE του ABAQUS. Ο χρόνος ο οποίος απαιτείται για την επίλυση ποικίλει ανάλογα με το πλέγμα. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι πλέγματα πάνω από 2500 στοιχεία απαιτούν υπολογιστικό χρόνο μεγαλύτερο των 30 λεπτών σε έναν προσωπικό υπολογιστή. Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αξιοπιστία του κώδικα είναι αρκετά ικανοποιητική. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική και το σχετικό σφάλμα είναι της τάξεως του 10^{-2} σε σχέση με τις ημι-αναλυτικές προσεγγίσεις.

6.2 Λόγος Μαζών κίνησης κυματισμού και ομοιόμορφης κίνησης με την θεώρηση τύπου II

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον λόγο των μαζών της ομοιόμορφης κίνησης και της κίνησης κυματισμού ως προς την ολική μάζα του ρευστού. Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου II του τέταρτου κεφαλαίου υπολογίζουμε την μάζα κυματισμού, την ολική μάζα και την μάζα της ομοιόμορφης κίνησης. Από την σχέση (6.2.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα κυματισμού

$$M_{ms} = \frac{P_n F_n}{M_n} \quad (6.2.1)$$

και

$$M_f = M_T - \sum_n M_{ms} \quad (6.2.2)$$

όπου M_f είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα από την θεώρηση τύπου II και M_T είναι η ολική μάζα του ρευστού για τυχαίο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας. Άρα έχουμε τους λόγους

$$C_1 = \frac{M_{ms}}{M_T} \quad (6.2.3)$$

και

$$C_2 = \frac{M_f}{M_T} \quad (6.2.4)$$

Αφού υπολογιστούν οι μάζες υπολογίζουμε τους λόγους C_1 και C_2 για τις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές και για το σύνολό τους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για επιλεγμένα ύψη ρευστού στον Πίνακα 6.3

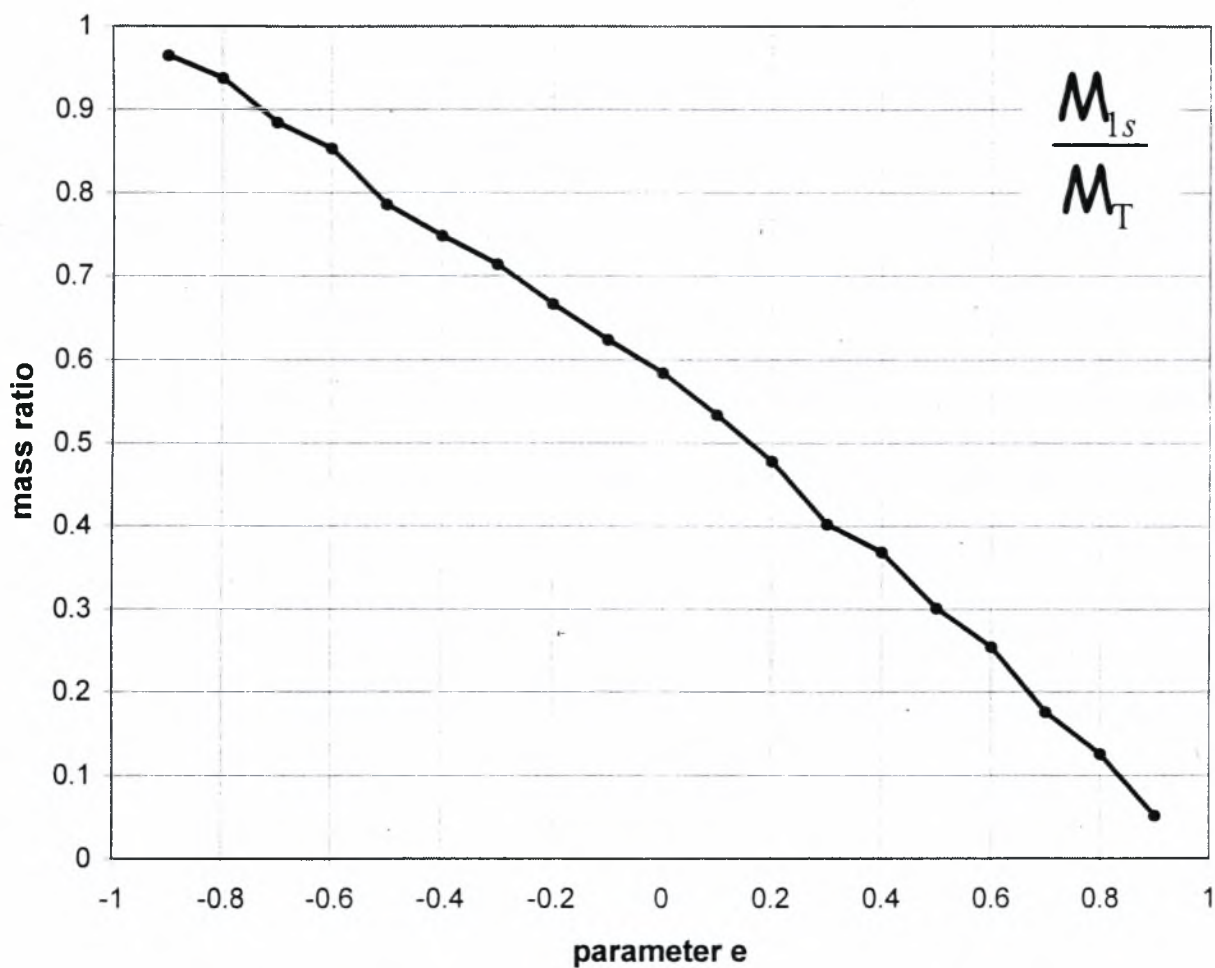
Πίνακας 6.3 Αποτελέσματα λόγου C₁ και C₂

Λόγοι ομοιόμορφης και κυματικής μάζας προς την ολική μάζα του ρευστού						
e	$\frac{M_{1s}}{M_T}$	$\frac{M_{2s}}{M_T}$	$\frac{M_{3s}}{M_T}$	$\frac{M_{4s}}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{ijs}}{M_T}$	$\frac{M_l}{M_T}$
-1	*	*	*	*	1.0000	0.0000
-0.9	0.965	0.0016	0.0003	0.000038	0.9710	0.0539
-0.8	0.938	0.0029	0.0004	0.000114	0.9413	0.0914
-0.7	0.884	0.0051	0.0004	0.000140	0.8860	0.1419
-0.6	0.853	0.006	0.0007	0.000216	0.8567	0.1733
-0.5	0.786	0.00732	0.0022	0.000444	0.7901	0.2099
-0.4	0.749	0.00891	0.0029	0.000698	0.7504	0.2496
-0.3	0.714	0.00999	0.0025	0.000330	0.7143	0.2857
-0.2	0.667	0.0123	0.0031	0.000749	0.6719	0.3281
-0.1	0.624	0.01392	0.0036	0.000152	0.6250	0.3750
0	0.584	0.01402	0.0032	0.000292	0.5862	0.4138
0.1	0.534	0.01561	0.0024	0.000749	0.5303	0.4697
0.2	0.478	0.01697	0.0030	0.000292	0.4753	0.5247
0.3	0.402	0.01763	0.0037	0.000776	0.4212	0.5788
0.4	0.369	0.01896	0.0055	0.001030	0.3605	0.6395
0.5	0.301	0.01956	0.0046	0.000445	0.3176	0.6824
0.6	0.255	0.01766	0.0036	0.000222	0.2535	0.7465
0.7	0.176	0.01489	0.0043	0.000142	0.1854	0.8146
0.8	0.126	0.01192	0.0013	0.000114	0.1029	0.8971
0.9	0.052	0.00989	0.0011	0.000109	0.0391	0.9609
1	*	*	*	*	0.0000	1.0000

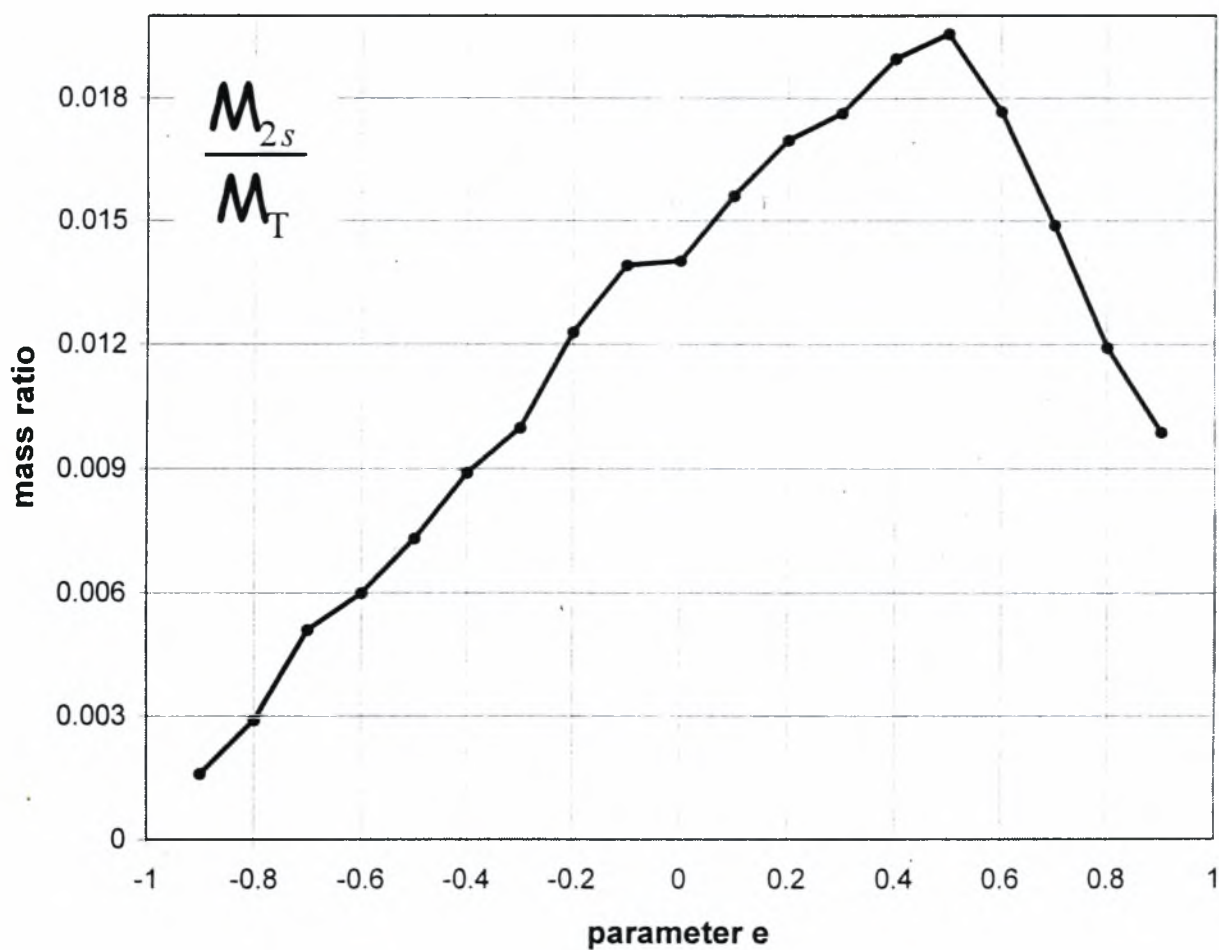
Πίνακας 6.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων λόγου C₁ και C₂

Σύγκριση αποτελεσμάτων								
Αποτελέσματα κώδικα							Αποτελέσματα Karamanos(2003)	
e	$\frac{M_{1s}}{M_T}$	$\frac{M_{2s}}{M_T}$	$\frac{M_{3s}}{M_T}$	$\frac{M_{4s}}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{1s}}{M_T}$	$\frac{M_i}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{1s}}{M_T}$	$\frac{M_i}{M_i}$
-1	*	*	*	*	1.0000	0.0000	1.00	0.00
-0.8	0.938	0.0029	0.0004	0.000114	0.9413	0.0914	0.94	0.06
-0.6	0.853	0.006	0.0007	0.000216	0.8567	0.1733	0.36	0.14
-0.4	0.749	0.00891	0.0029	0.000698	0.7504	0.2496	0.75	0.25
-0.2	0.667	0.0123	0.0031	0.000749	0.6719	0.3281	0.67	0.33
0	0.584	0.01402	0.0032	0.000749	0.5862	0.4138	0.58	0.42
0.2	0.478	0.01697	0.0030	0.000292	0.4753	0.5247	0.48	0.52
0.4	0.369	0.01896	0.0055	0.001030	0.3605	0.6395	0.37	0.63
0.6	0.255	0.01766	0.0036	0.000222	0.2535	0.7465	0.26	0.74
0.8	0.126	0.01192	0.0013	0.000114	0.1029	0.8971	0.13	0.87
1	*	*	*	*	0.0000	1.0000	0.00	1.00

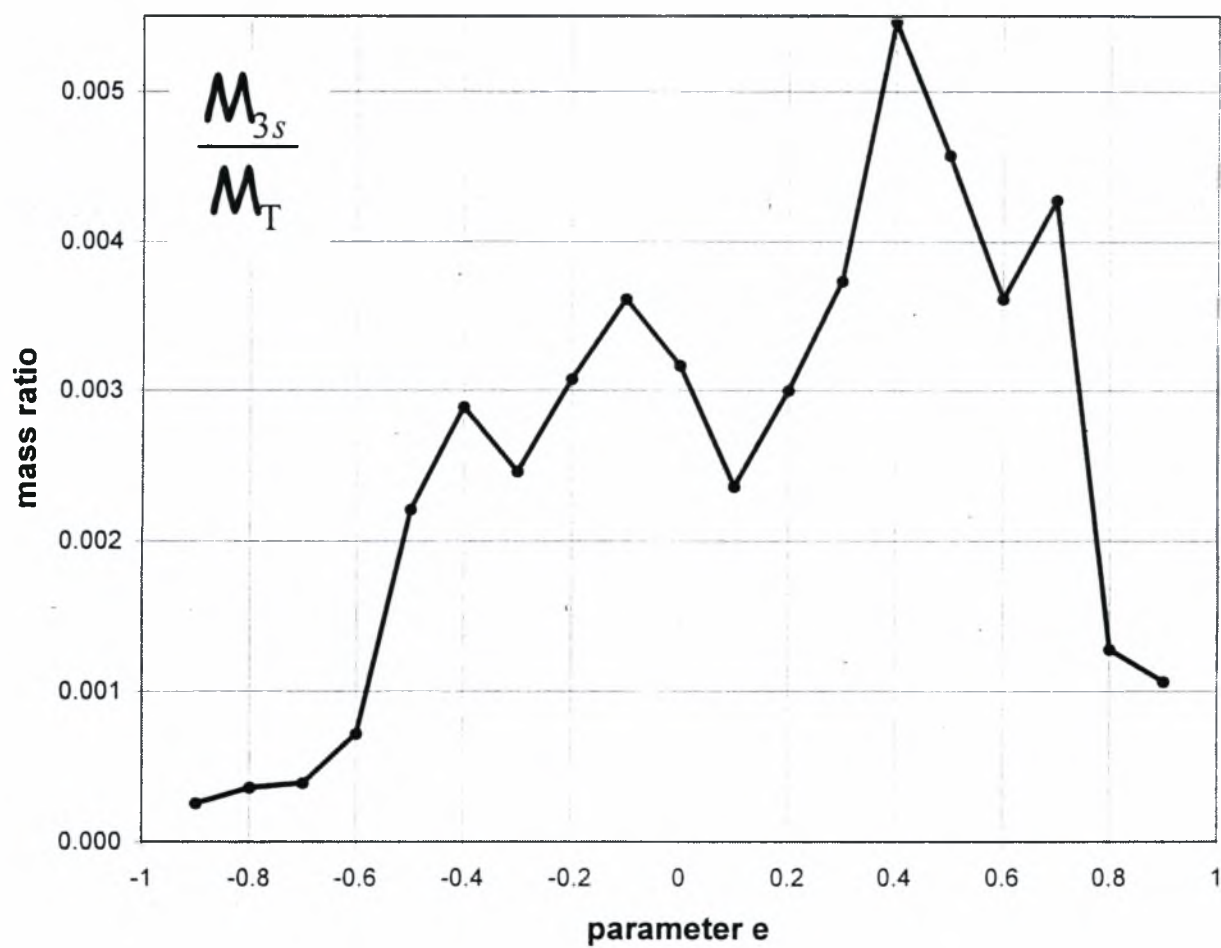
Στην συνέχεια παραθέτουμε στα Σχήματα 6.5. 6.6. 6.7. 6.8. 6.9. 6.10. 6.11. 6.12 τα αποτελέσματα σε γραφική μορφή



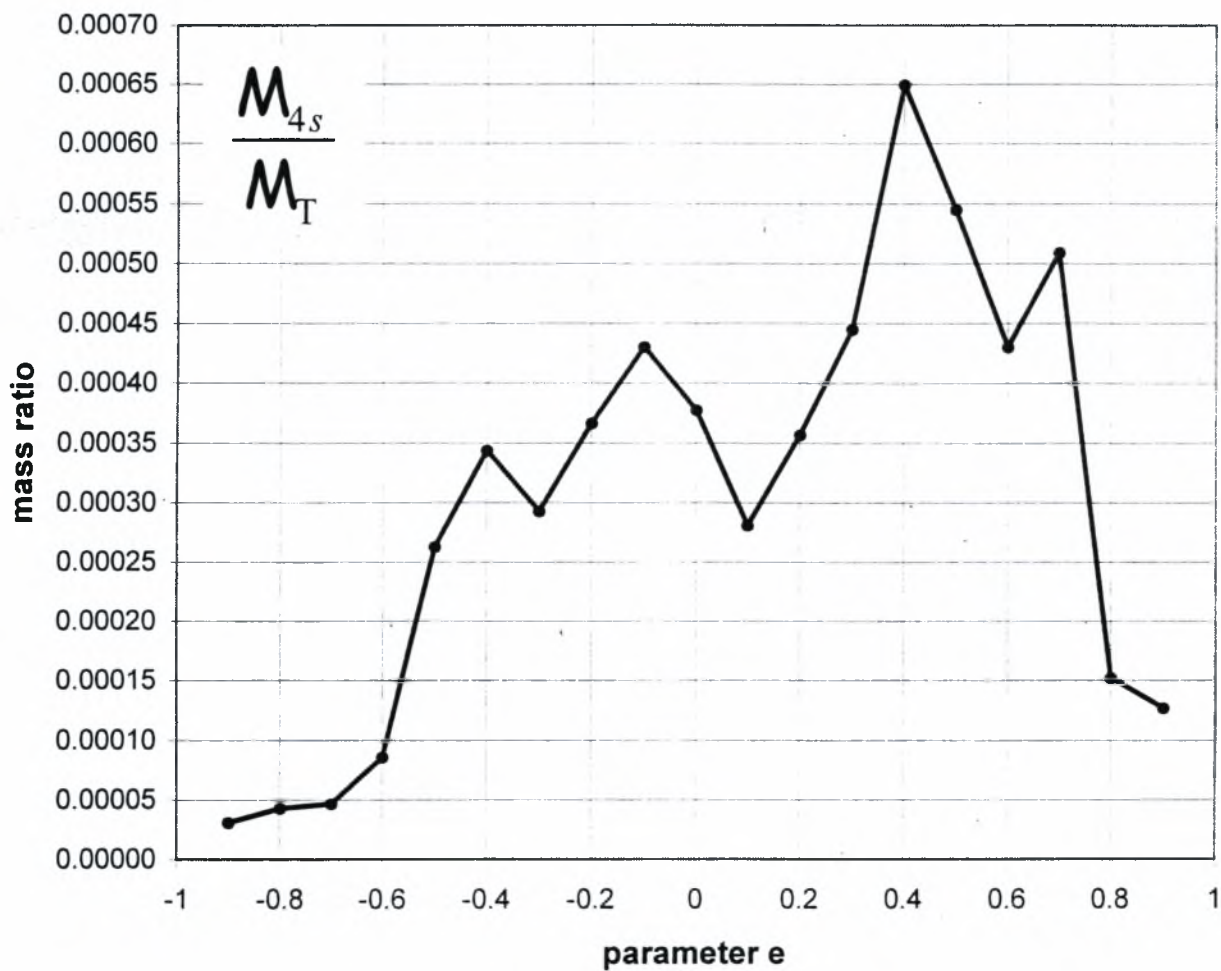
Σχήμα 6.5 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς την ολική μάζα για την πρώτη ιδιοτιμή



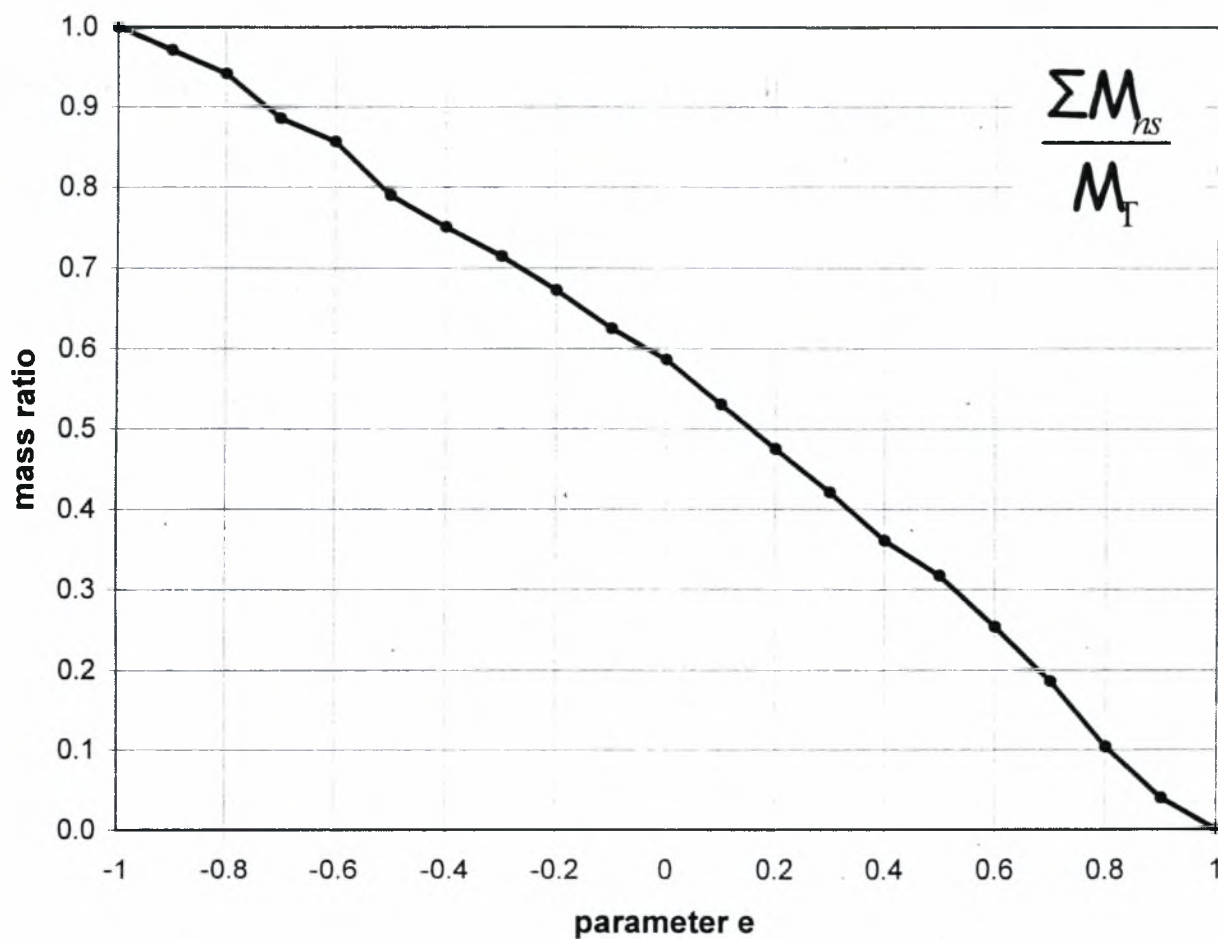
Σχήμα 6.6 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς την ολική μάζα για την δεύτερη ιδιοτιμή



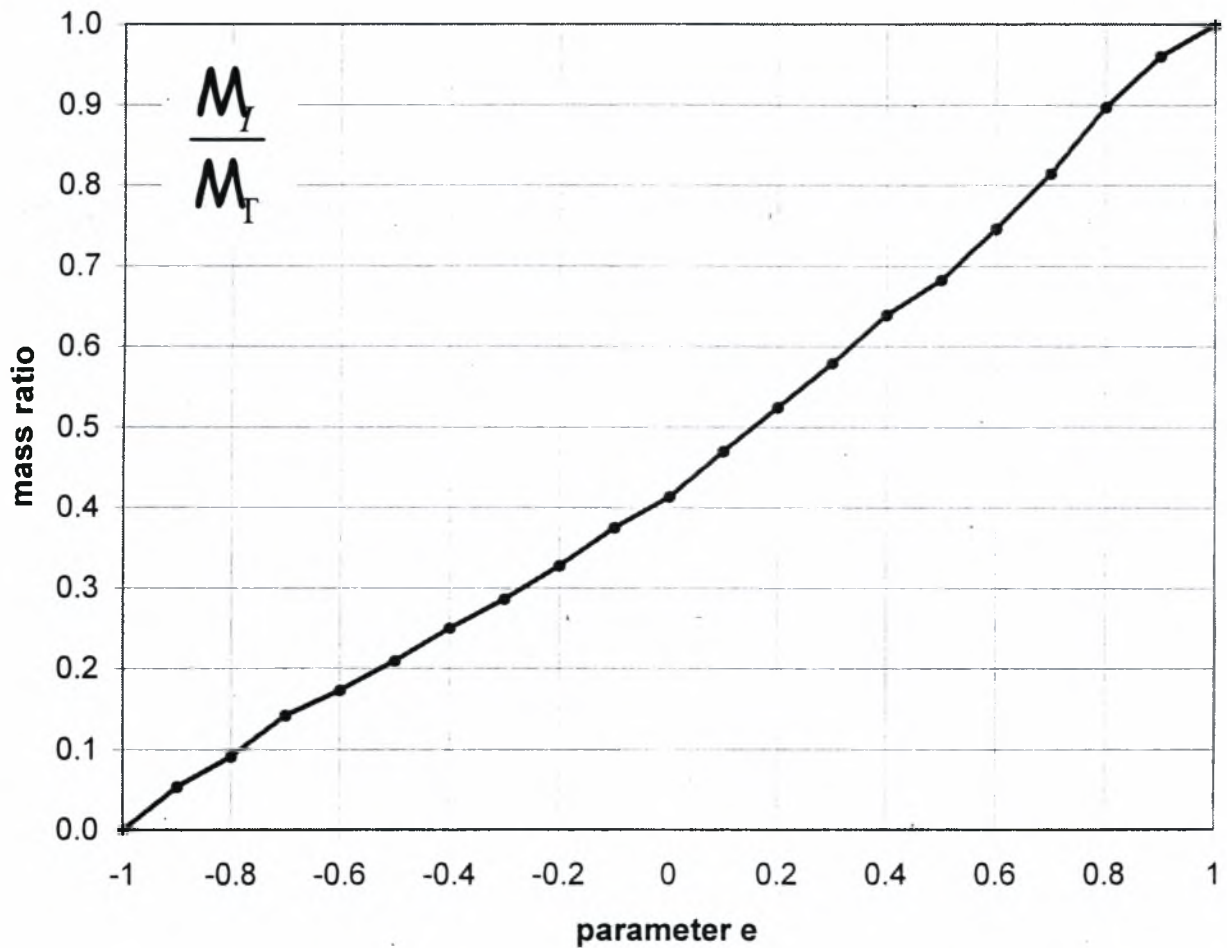
Σχήμα 6.7 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς την ολική μάζα για την τρίτη ιδιοτιμή



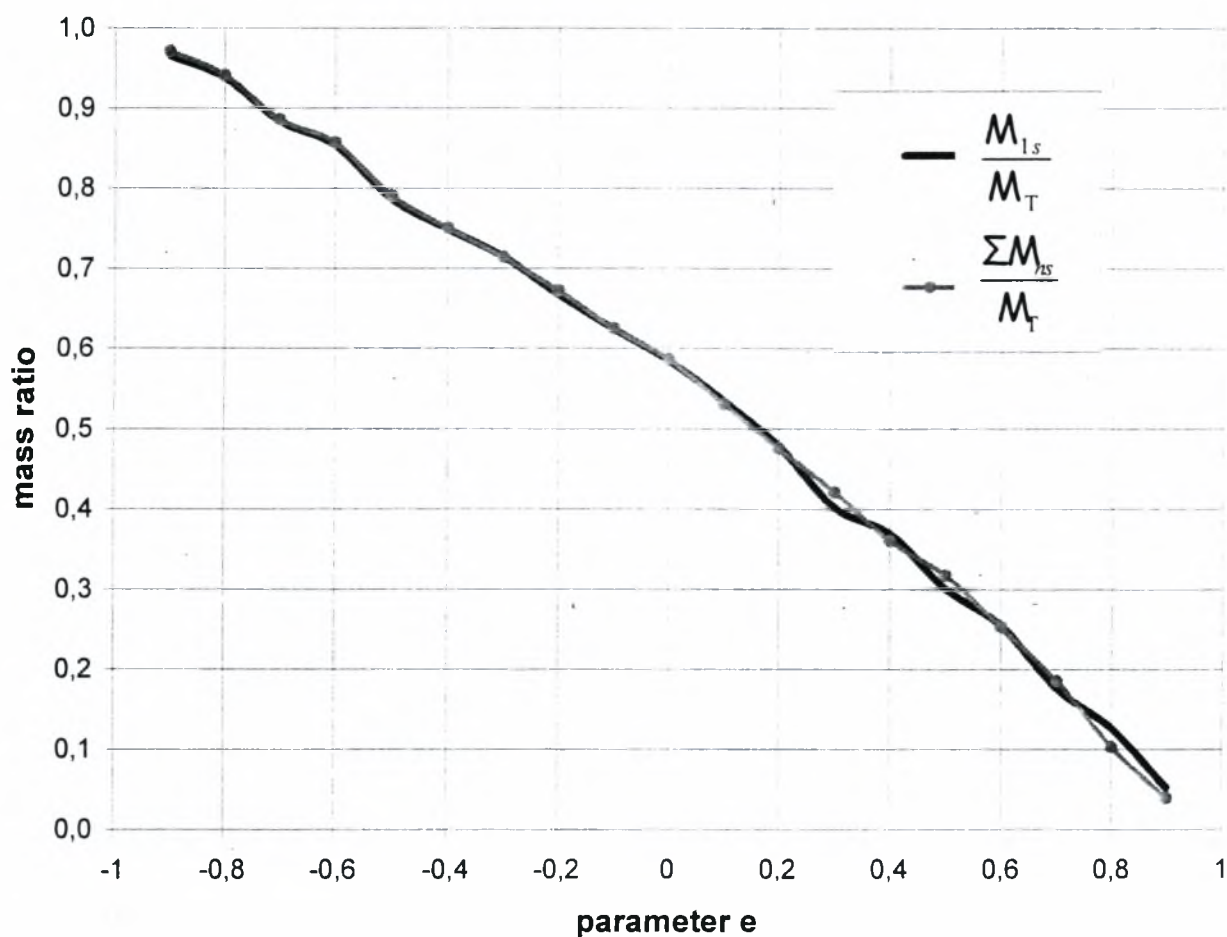
Σχήμα 6.8 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας κυματισμού προς την ολική μάζα για την τέταρτη ιδιοτιμή



Σχήμα 6.9 Γραφική απεικόνιση του λόγου της συνολικής μάζας κυματισμού για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές προς την ολική μάζα

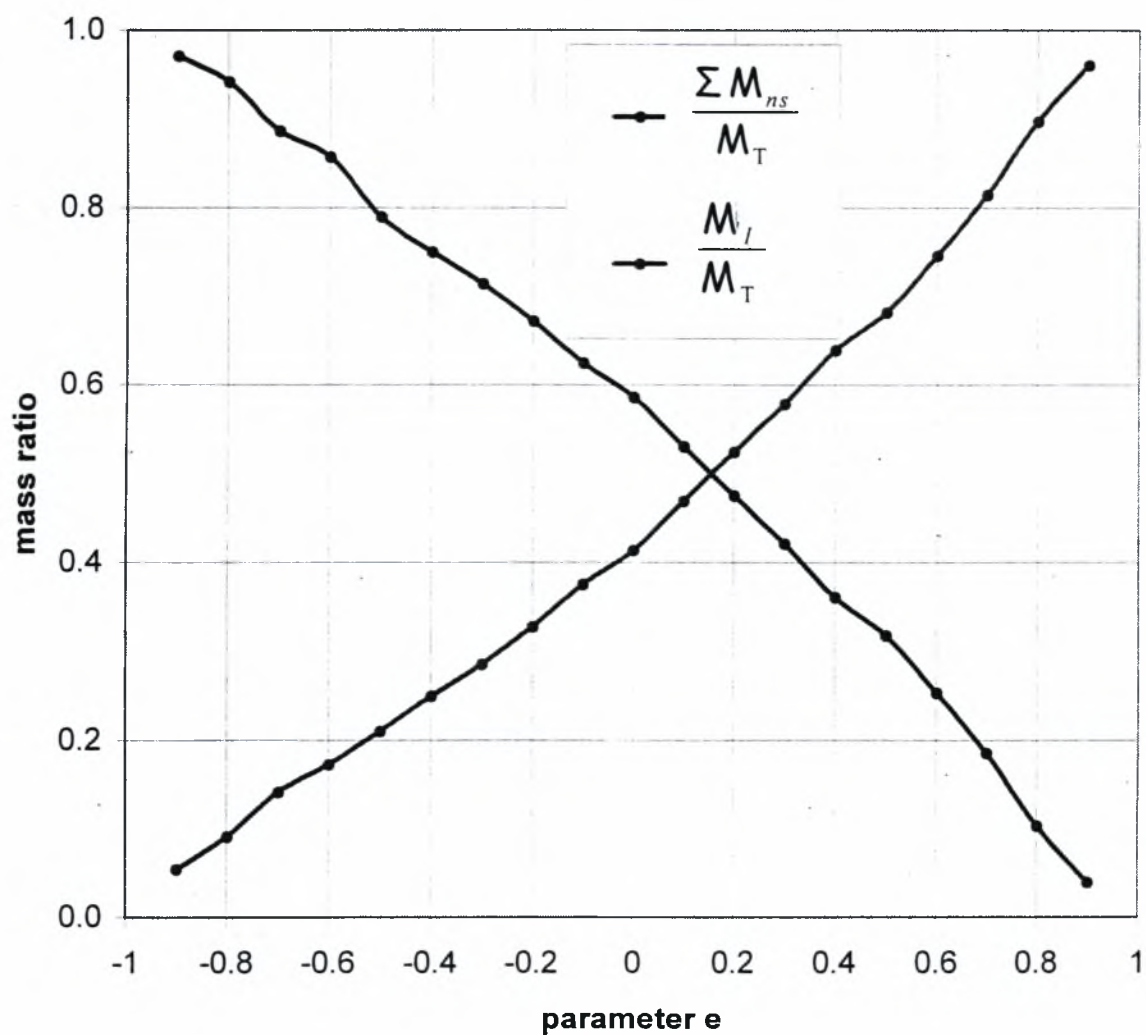


Σχήμα 6.10 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας της ωστικής μάζας με την θεώρηση τύπου II προς την ολική μάζα



Σχήμα 6.11 Γραφική απεικόνιση της συμβολής του λόγου $\frac{M_{1s}}{M_T}$ της πρώτης ιδιοτιμής

στον λόγο $\frac{\sum M_{hs}}{M_T}$ της συνολικής μάζας κυματισμού για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές.



Σχήμα 6.12 Γραφική απεικόνιση του λόγου της μάζας κυματισμού και του λόγου της ωστικής μάζας για την θεώρηση τύπου II προς την ολική μάζα του ρευστού

6.3 Αποτελέσματα λόγου μαζών ωστικής κίνησης και επαγωγικής κίνησης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον λόγο των μαζών της ωστικής κίνησης και της επαγωγικής κίνησης ως προς την ολική μάζα του ρευστού. Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου III του τέταρτου κεφαλαίου υπολογίζουμε την επαγωγική μάζα, την ολική μάζα και την μάζα της ωστικής κίνησης. Από την σχέση (6.3.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα κυματισμού

$$M_{nc} = \frac{f_n F_n}{\omega_n^2 M_n} \quad (6.3.1)$$

και

$$\bar{M}_y = \mathbf{F}^T [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F} \quad (6.3.2)$$

όπου \bar{M}_y είναι η ποσότητα που εκφράζει την ωστική μάζα από την θεώρηση τύπου III και M_T είναι η ολική μάζα του ρευστού για τυχαίο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας. Άρα έχουμε τους λόγους

$$\bar{C}_1 = \frac{M_{nc}}{M_T} \quad (6.3.3)$$

και

$$\bar{C}_2 = \frac{\bar{M}_y}{M_T} \quad (6.3.4)$$

Αφού υπολογιστούν οι μάζες υπολογίζουμε τους λόγους \bar{C}_1 και \bar{C}_2 για τις τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές και για το σύνολό τους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για επιλεγμένα ύψη ρευστού στον Πίνακα 6.3

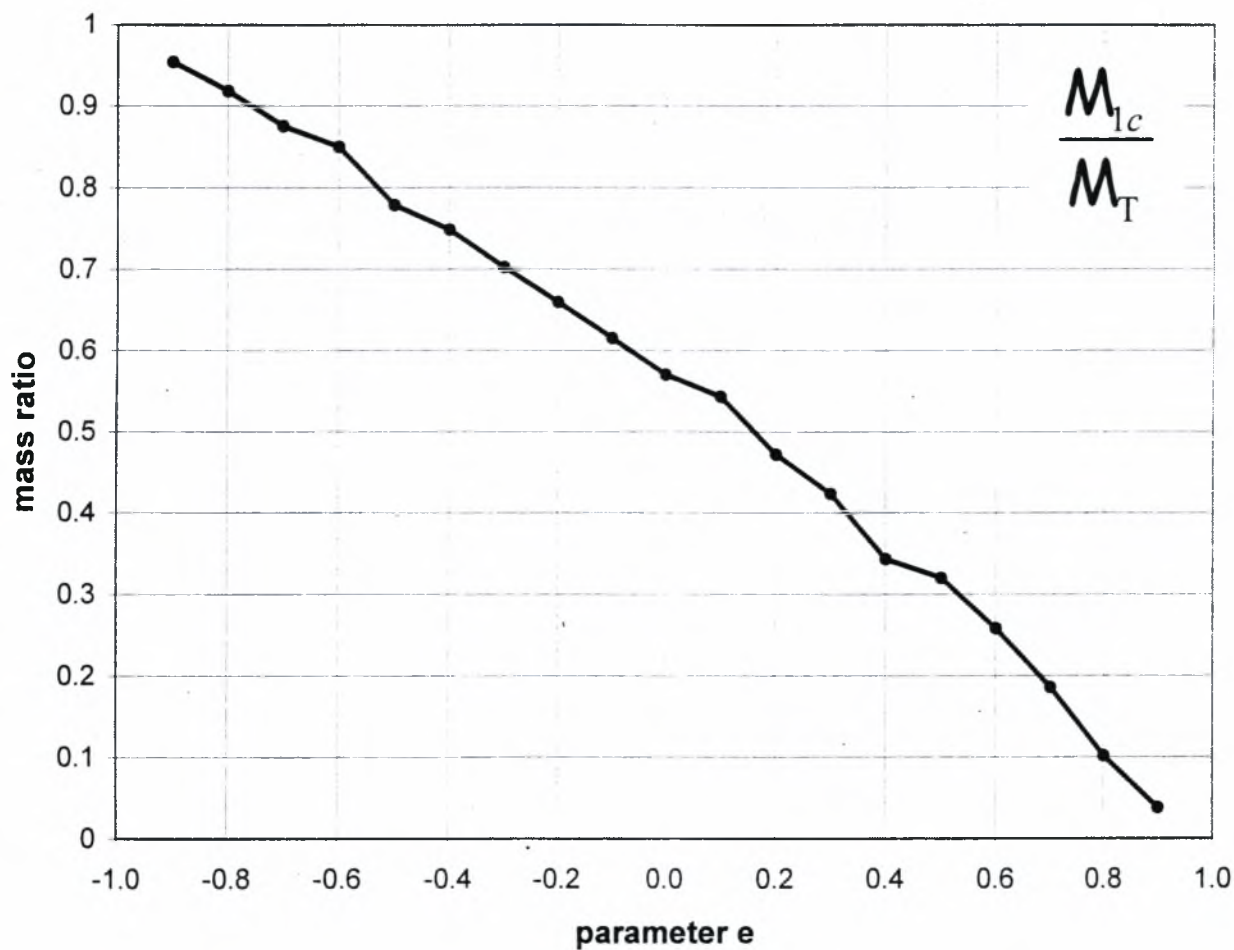
Πίνακας 6.3 Αποτελέσματα λόγου \bar{C}_1 και \bar{C}_2

Λόγοι ομοιόμορφης και κυματικής μάζας προς την ολική μάζα του ρευστού						
e	$\frac{M_1}{M_T}$	$\frac{M_2}{M_T}$	$\frac{M_3}{M_T}$	$\frac{M_4}{M_T}$	$\frac{\sum M_{pi}}{M_T}$	$\frac{M_T}{M_T}$
-1	*	*	*	*	1	0.000
-0.9	0.9542	0.0024	0.00021	0.00003	0.956	0.044
-0.8	0.9179	0.0031	0.00031	0.00009	0.919	0.081
-0.7	0.8756	0.0049	0.00034	0.00011	0.868	0.132
-0.6	0.8499	0.0063	0.00067	0.00017	0.837	0.163
-0.5	0.7781	0.00745	0.00216	0.00035	0.800	0.200
-0.4	0.7484	0.00912	0.00284	0.00055	0.760	0.240
-0.3	0.7019	0.01201	0.00241	0.00026	0.724	0.276
-0.2	0.6593	0.01491	0.003031	0.000590	0.682	0.318
-0.1	0.6151	0.0165	0.00357	0.000120	0.635	0.365
0	0.5704	0.01801	0.00312	0.000230	0.596	0.404
0.1	0.5432	0.01901	0.00231	0.000590	0.540	0.460
0.2	0.472	0.01931	0.00295	0.000230	0.485	0.515
0.3	0.423	0.01989	0.00369	0.000612	0.431	0.569
0.4	0.343	0.0201	0.00541	0.000812	0.370	0.630
0.5	0.3201	0.01802	0.00453	0.000351	0.328	0.672
0.6	0.2581	0.01621	0.00357	0.000175	0.264	0.736
0.7	0.186	0.01342	0.00423	0.000112	0.195	0.805
0.8	0.102	0.011433	0.00123	0.000090	0.113	0.887
0.9	0.0378	0.01001	0.001014	0.000086	0.049	0.951
1	*	*	*	*	0	1.000

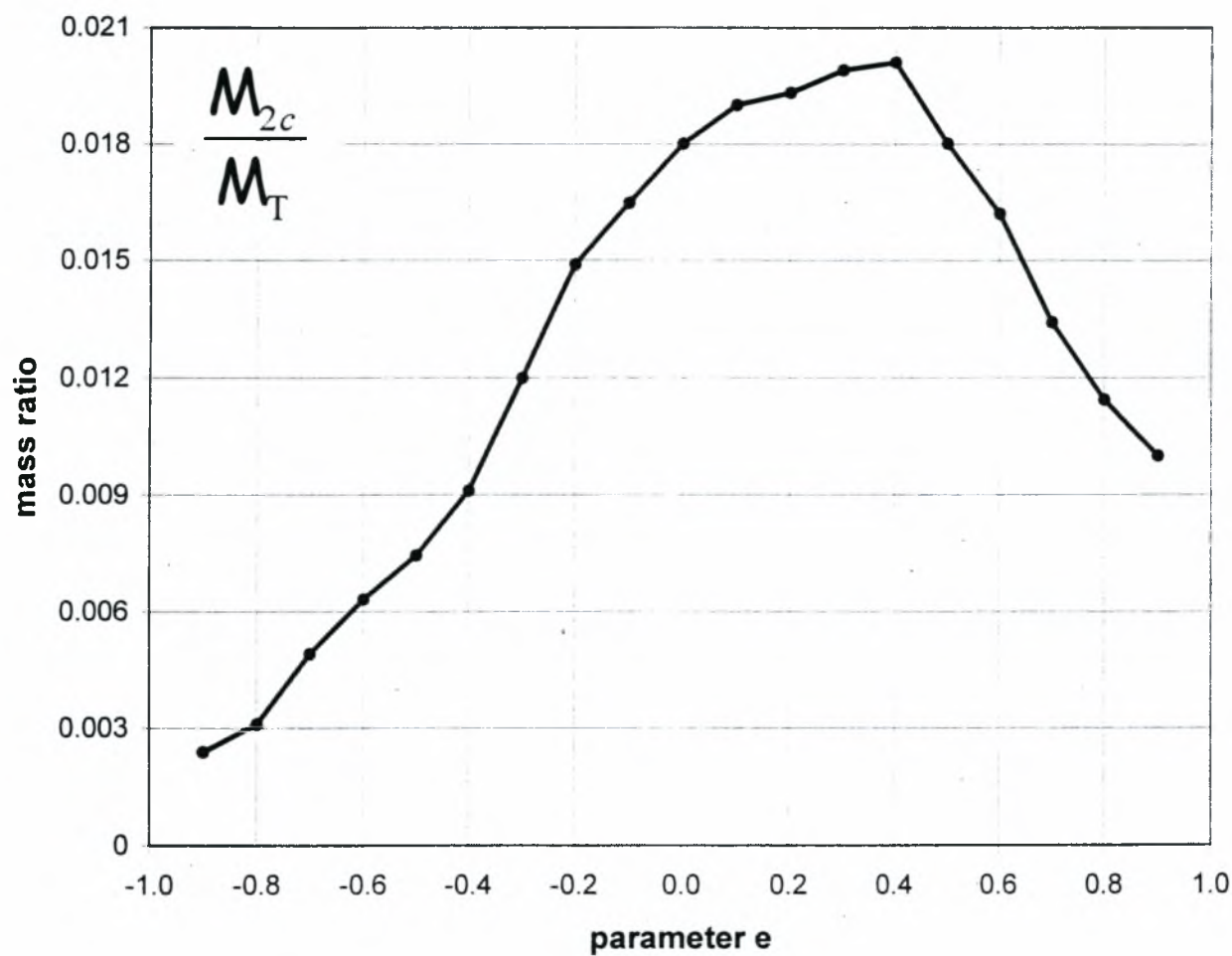
Πίνακας 6.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων λόγου \bar{C}_1 και \bar{C}_2

Σύγκριση αποτελεσμάτων								
Αποτελέσματα κώδικα							Αποτελέσματα Karamanos(2003)	
e	$\frac{M_{1s}}{M_T}$	$\frac{M_{2s}}{M_T}$	$\frac{M_{3s}}{M_T}$	$\frac{M_{4s}}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{ys}}{M_T}$	$\frac{M_l}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{ys}}{M_T}$	$\frac{M_l}{M_T}$
-1	*	*	*	*	1.0000	0.0000	1.00	0.00
-0.8	0.9179	0.0031	0.00031	0.00009	0.919	0.081	0.94	0.06
-0.6	0.8499	0.0063	0.00067	0.00017	0.837	0.163	0.86	0.14
-0.4	0.749	0.00891	0.0029	0.0034	0.760	0.2496	0.75	0.25
-0.2	0.7484	0.00912	0.00284	0.00055	0.682	0.240	0.67	0.33
0	0.5704	0.01801	0.00312	0.000230	0.596	0.404	0.58	0.42
0.2	0.472	0.01931	0.00295	0.000230	0.485	0.515	0.48	0.52
0.4	0.343	0.0201	0.00541	0.000812	0.370	0.630	0.37	0.63
0.6	0.2581	0.01621	0.00357	0.000175	0.264	0.736	0.26	0.74
0.8	0.102	0.011433	0.00123	0.000090	0.113	0.887	0.13	0.87
1	*	*	*	*	0.0000	1.0000	0.00	1.00

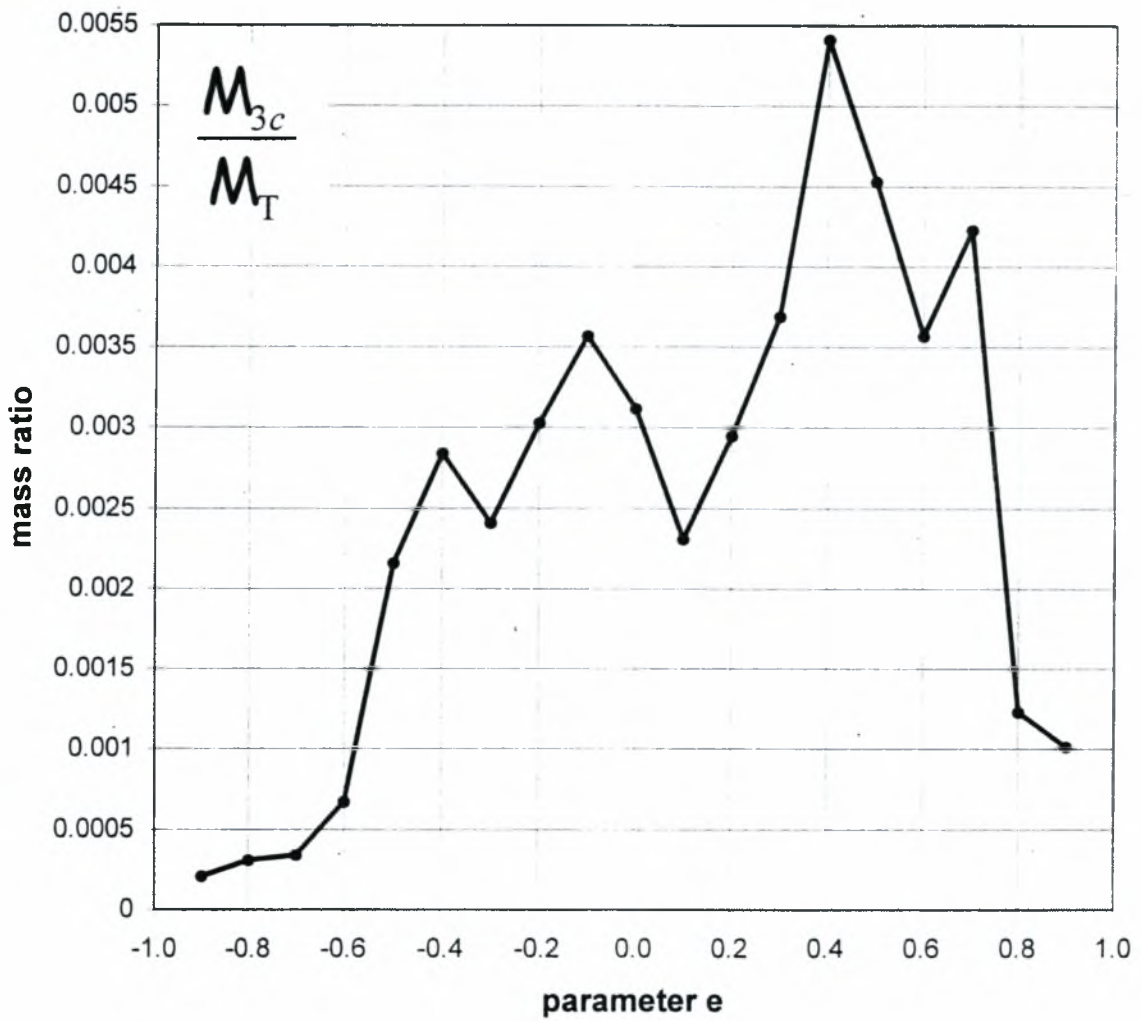
Στην συνέχεια παραθέτουμε στα Σχήματα 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 τα αποτελέσματα σε γραφική μορφή



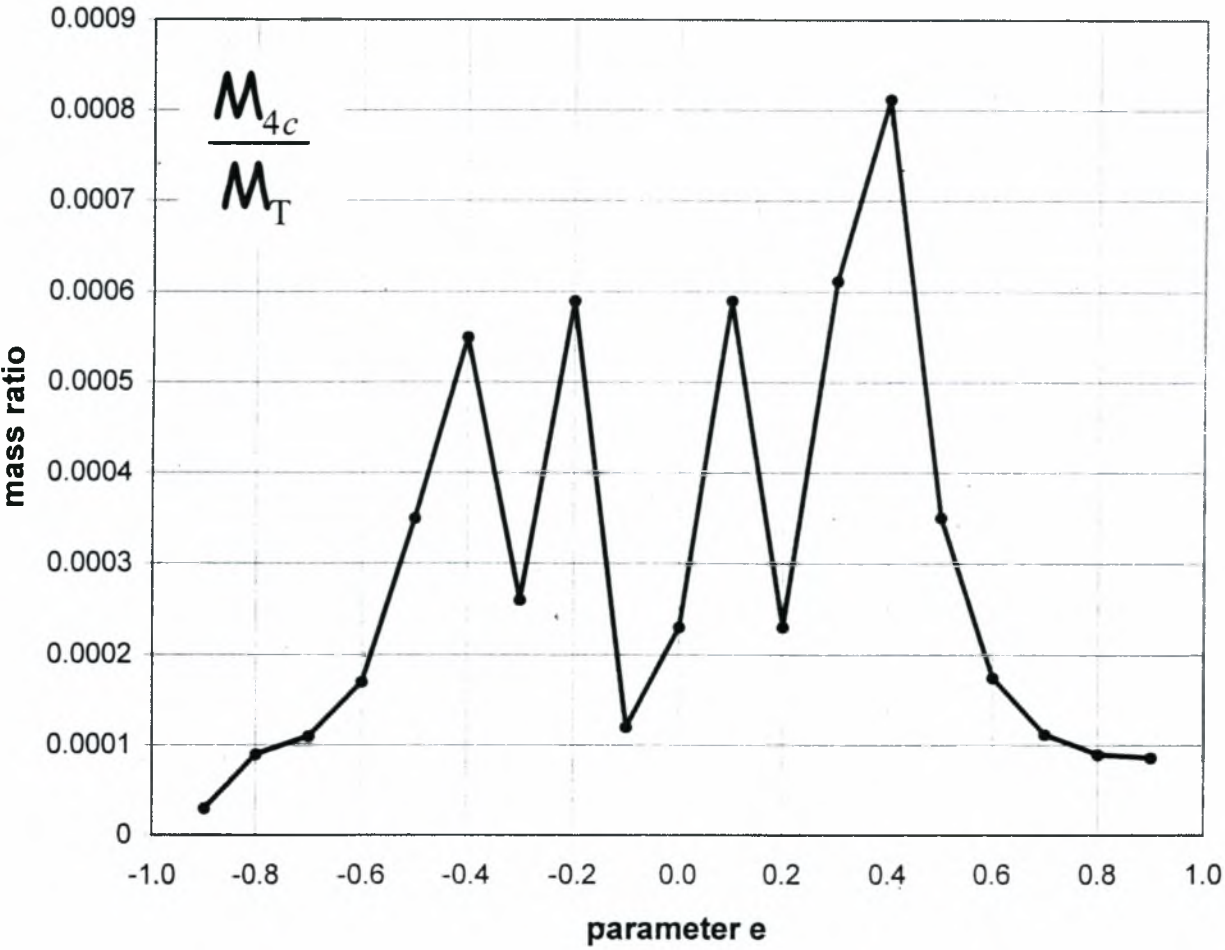
Σχήμα 6.13 Γραφική απεικόνιση του λόγου της επαγωγικής μάζας προς την ολική μάζα για την πρώτη ιδιοτιμή



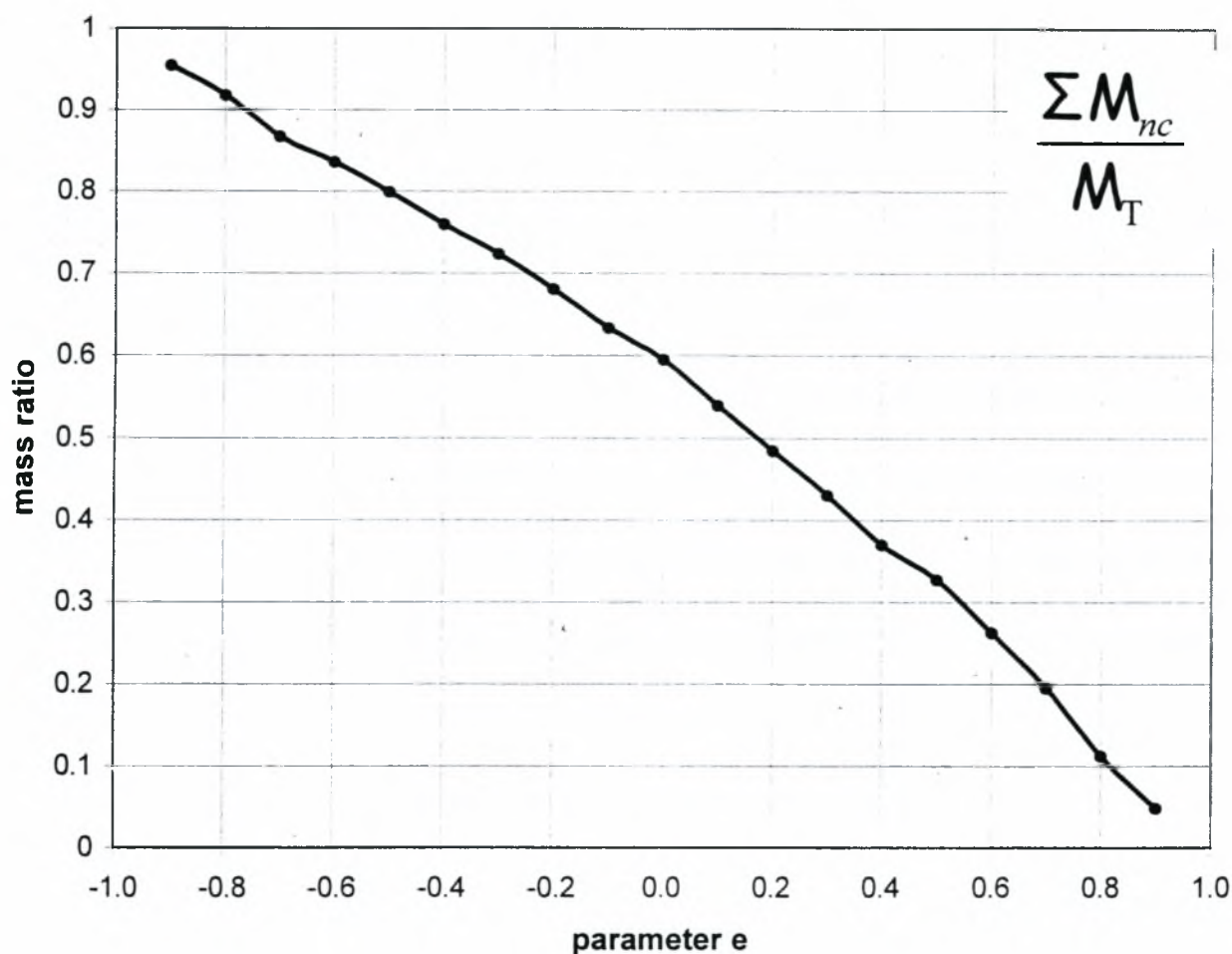
Σχήμα 6.14 Γραφική απεικόνιση του λόγου της επαγωγικής μάζας προς την ολική μάζα για την δεύτερη ιδιοτιμή



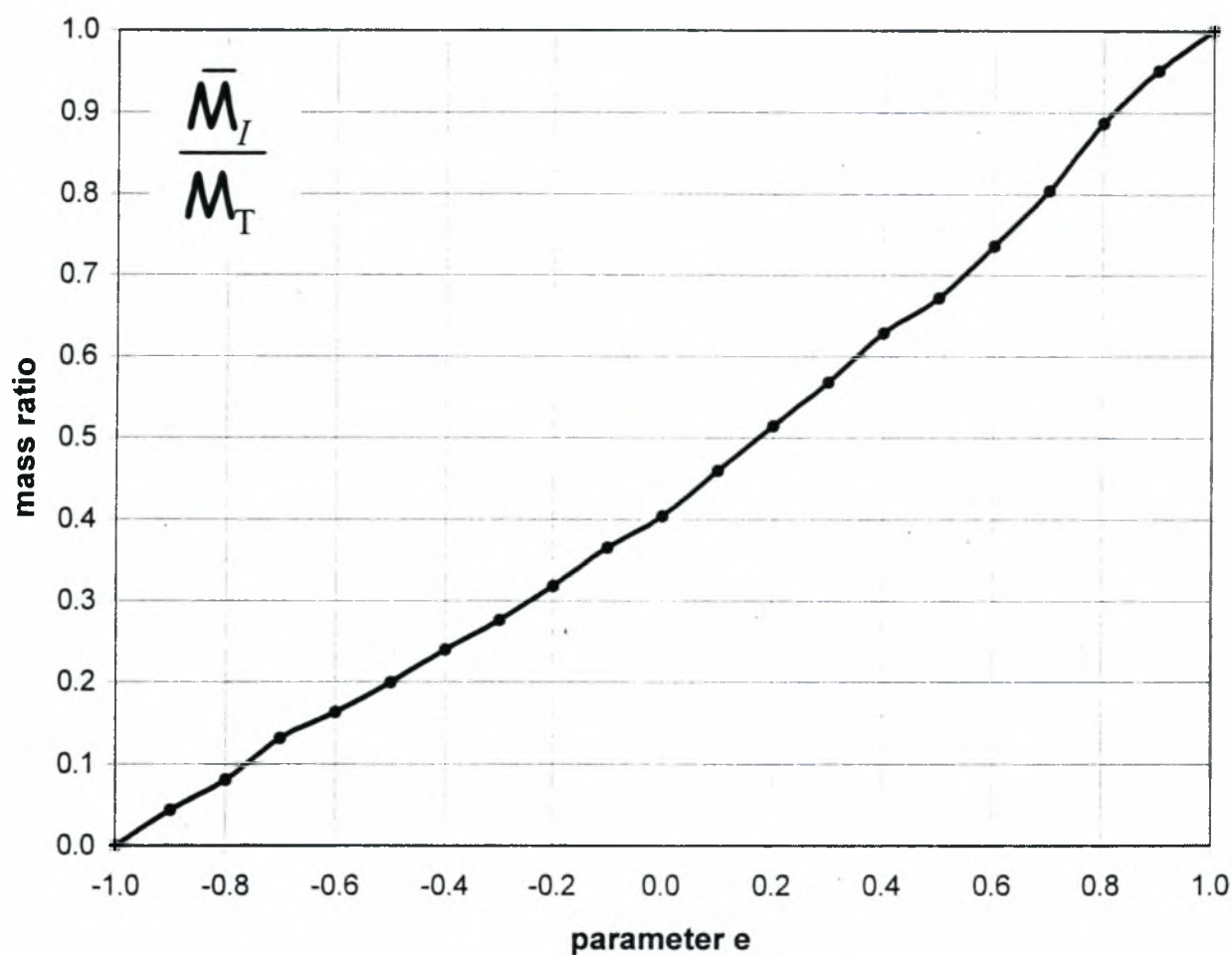
Σχήμα 6.15 Γραφική απεικόνιση του λόγου της επαγωγικής μάζας προς την ολική μάζα για την τρίτη ιδιοτιμή



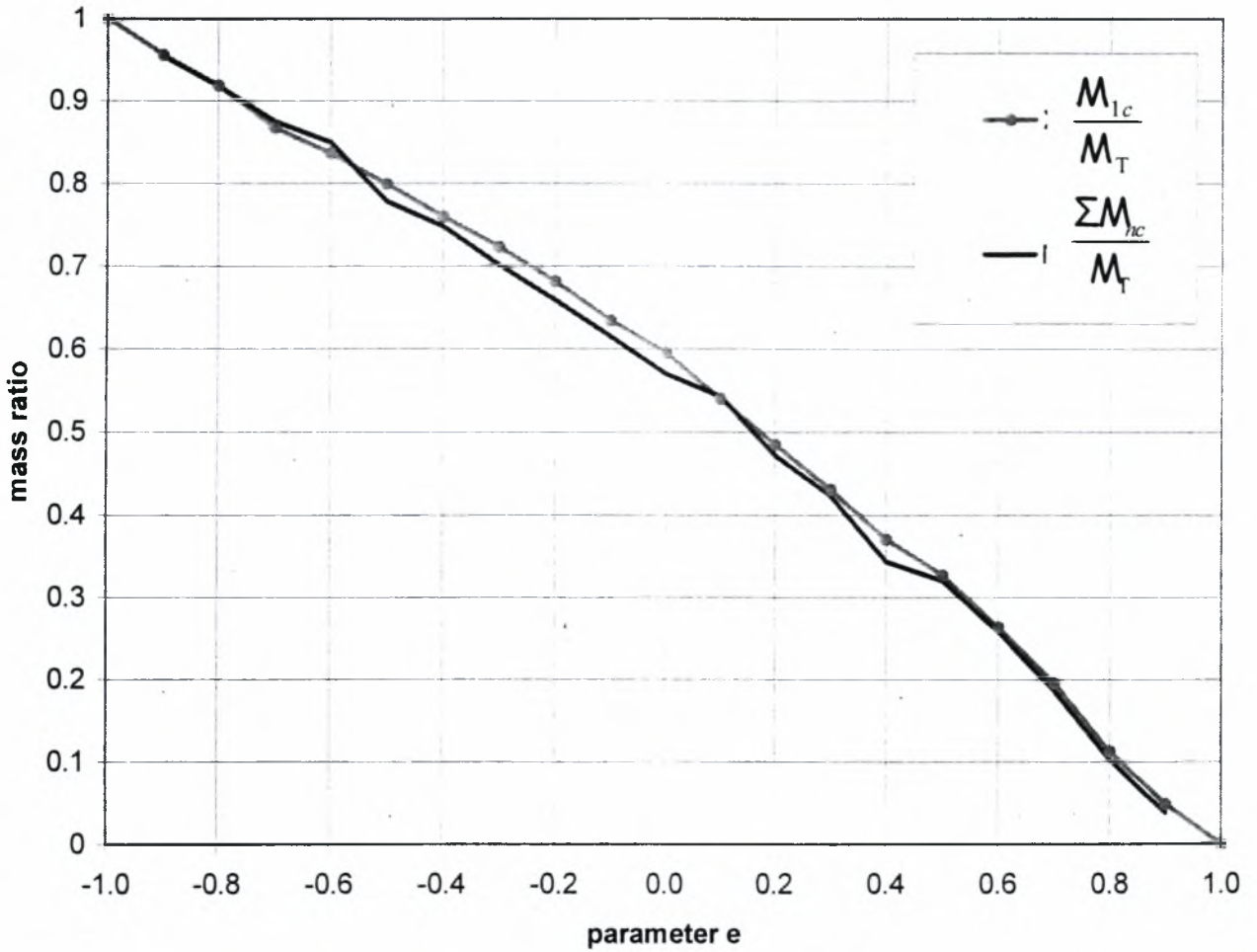
Σχήμα 6.16 Γραφική απεικόνιση του λόγου της επαγωγικής μάζας προς την ολική μάζα για την τέταρτη ιδιοτιμή



Σχήμα 6.17 Γραφική απεικόνιση του λόγου της συνολικής επαγωγικής μάζας προς την ολική μάζα για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές

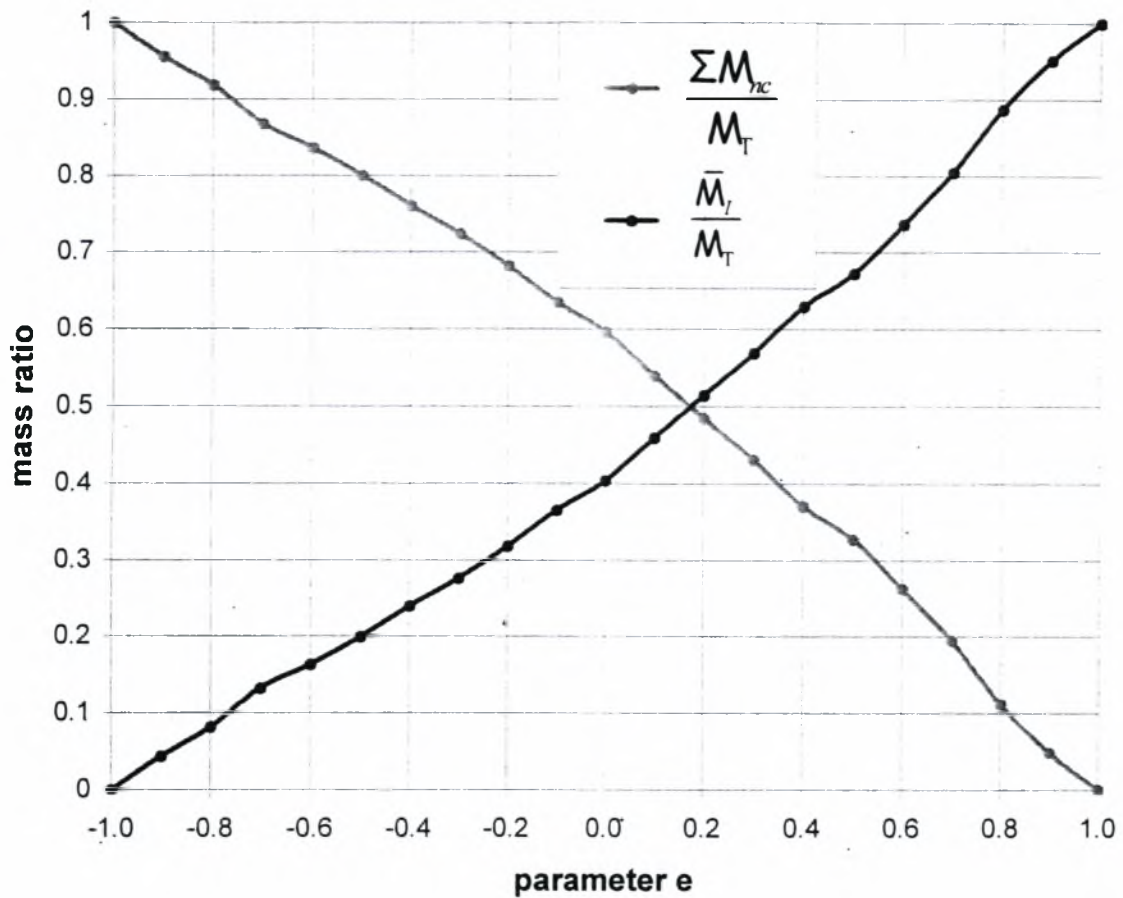


Σχήμα 6.18 Γραφική απεικόνιση του λόγου της ωστικής μάζας προς την ολική μάζα για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές



Σχήμα 6.19 Γραφική απεικόνιση της συμβολής του λόγου $\frac{M_{1c}}{M_T}$ της πρώτης ιδιοτιμής στον

λόγο $\frac{\sum M_{nc}}{M_T}$ της συνολικής μάζας κυματισμού για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές



Σχήμα 6.20 Γραφική απεικόνιση του λόγου της επαγωγικής μάζας και του λόγου της ωστικής μάζας προς την ολική μάζα του ρευστού για τις επτά πρώτες ιδιοτιμές

Σύγκριση θεώρησης τύπου II και III

Για το τυχαίο ύψος του ρευστού συγκρίνουμε της τιμές των λόγων $\frac{M_{I_s}}{M_T}, \frac{\Sigma M_{I_{ns}}}{M_T}, \frac{M_I}{M_T}, \frac{M_{I_c}}{M_T}, \frac{\Sigma M_{I_{nc}}}{M_T}, \frac{\bar{M}_I}{M_T}$ για να επιβεβαιώσουμε την ισοδυναμία των δύο τύπων θεώρησης. Όπως παρατηρούμε και από τον Πίνακα 6.5 τα αποτελέσματα των δύο θεωρήσεων είναι κοντά γεγονός το οποίο μας επιβεβαιώνει και για οιαδήποτε πληρότητα του δοχείου την ισοδυναμία των θεωρήσεων τύπου II και III

Πίνακας 6.5: Σύγκριση λόγων μαζών για της θεώρησης τύπου II με την θεώρηση τύπου III

	Θεώρηση τύπου II			Θεώρηση τύπου III		
e	$\frac{M_{I_s}}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{I_{ns}}}{M_T}$	$\frac{M_I}{M_T}$	$\frac{M_{I_c}}{M_T}$	$\frac{\Sigma M_{I_{nc}}}{M_T}$	$\frac{\bar{M}_I}{M_T}$
-1	*	1.0000	0.0000	*	1.0000	0.0000
-0.8	0.938	0.9413	0.0914	0.9179	0.919	0.081
-0.6	0.853	0.8567	0.1733	0.8499	0.837	0.163
-0.4	0.749	0.7504	0.2496	0.749	0.760	0.2496
-0.2	0.667	0.6719	0.3281	0.7484	0.682	0.240
0	0.584	0.5862	0.4138	0.5704	0.596	0.404
0.2	0.478	0.4753	0.5247	0.472	0.485	0.515
0.4	0.369	0.3605	0.6395	0.343	0.370	0.630
0.6	0.255	0.2535	0.7465	0.2581	0.264	0.736
0.8	0.126	0.1029	0.8971	0.102	0.113	0.887
1	*	0.0000	1.0000	*	0.0000	1.0000

6.4 Αποτελέσματα δυνάμεων με την θεώρηση τύπου I

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δυνάμεων. Έχοντας υπολογίσει το συνολικό δυναμικό του κυματισμού υπολογίζονται οι υδροδυναμικές πιέσεις και η συνολική οριζόντια δύναμη που ασκείται στο δοχείο. Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου I του τέταρτου κεφαλαίου υπολογίζουμε την συνολική δύναμη βασισμένοι στο ολικό δυναμικό Φ . Από την σχέση (6.4.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη

$$F = -\rho \sum_{i=1}^n \frac{F_n^2}{\omega_n^2 M_n} \ddot{\xi}_i \quad (6.4.1)$$

όπου

$$F_n = \Psi_n^T \mathbf{F} \quad (6.4.2)$$

$$\mathbf{F} = \dot{X} \int_{B_i} [\mathbf{N}]^T n_x dB_i \quad (6.4.3)$$

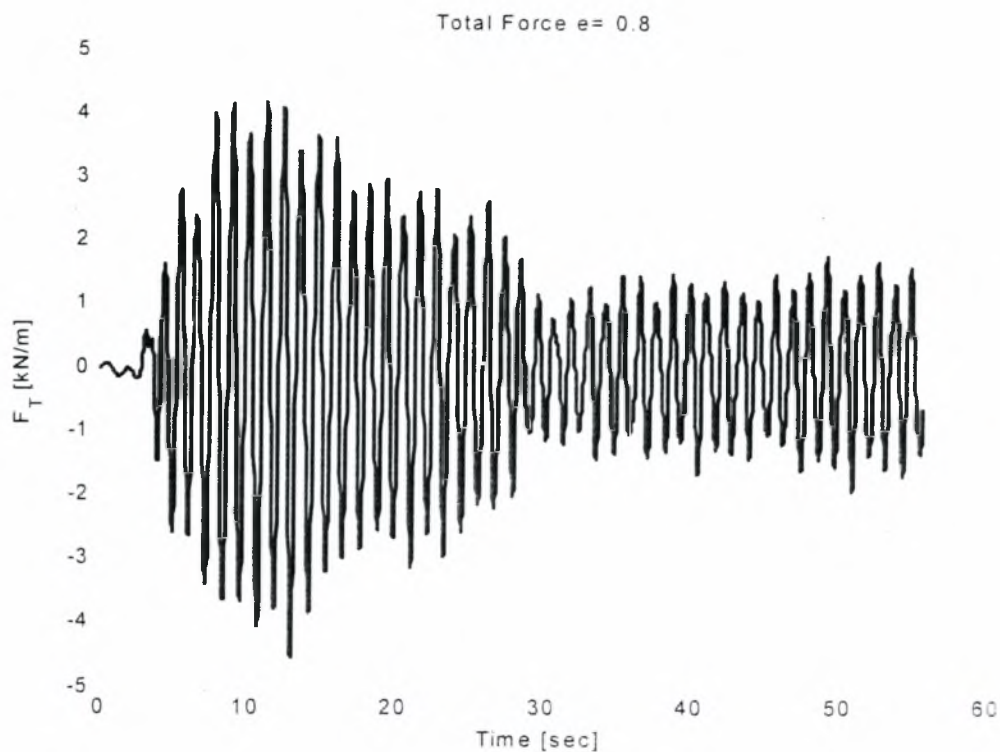
$$M_n = \Psi_n^T [\mathbf{M}] \Psi_n \quad (6.4.4)$$

όπου Ψ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές ω_n και ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Ενώ από την σχέση (6.4.5) μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση $\ddot{\xi}_n$

$$\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 (\xi_n - X) = 0 \quad (6.4.5)$$

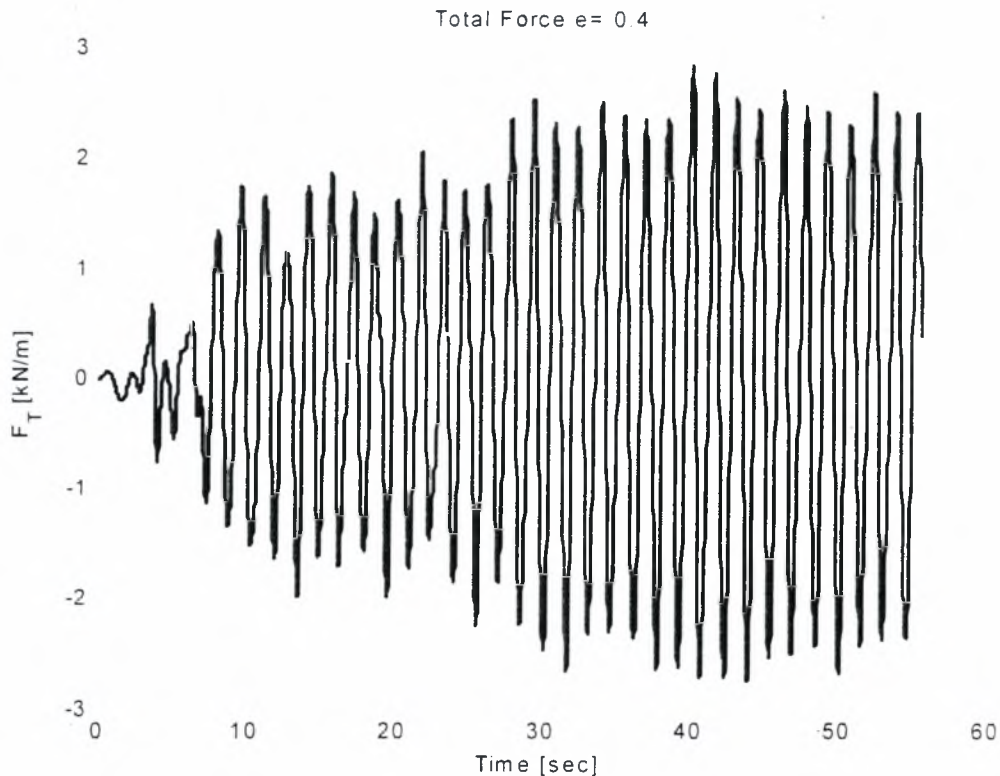
όπου X είναι η εξωτερική μετατόπιση του δοχείου. Στην ανάλυσή μας η κίνηση προέρχεται από τον σεισμό του El Centro (1940) του οποίου το επιταχυνσιογράφημα και το φάσμα επιταχύνσεων φαίνονται στο Σχήμα 5.3.32 και 5.3.33 αντίστοιχα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα διαγράμματα των δυνάμεων για διάφορα ύψη ρευστού και σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε το μέγιστο της δύναμης και η χρονική στιγμή στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο αυτό. Επισημαίνεται οι δυνάμεις υπολογίζονται σε kN m αφού στον υπολογισμό τους δεν περιλαμβάνεται το μήκος της δεξαμενής.



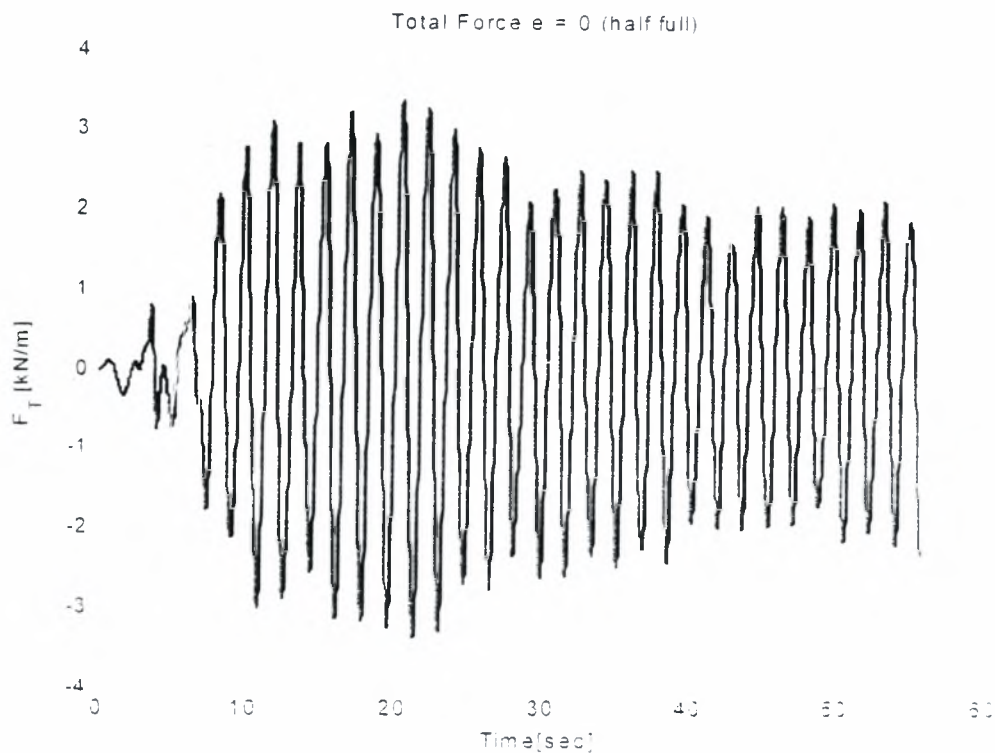
Σχήμα 6.21 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.8$ (θεώρηση τύπου Ι)

$$F_{\max} = 4.47 \text{ kN/m} \quad \text{για } t = 14.4 \text{ sec}$$

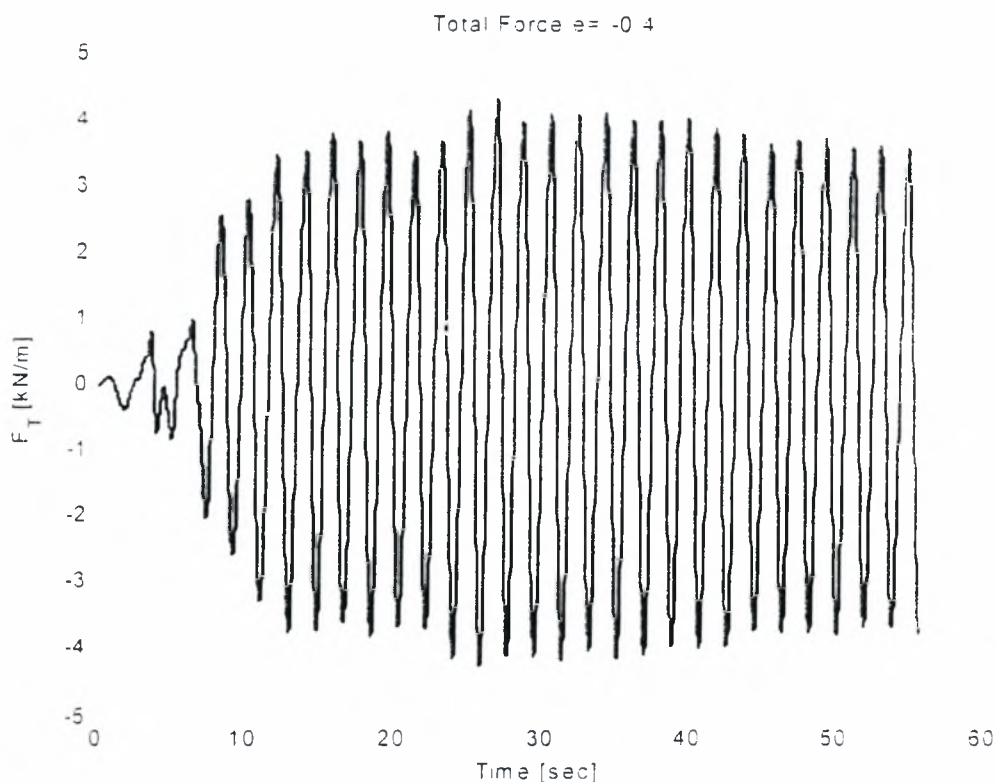


Σχήμα 6.22 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.4$ (θεώρηση τύπου Ι)

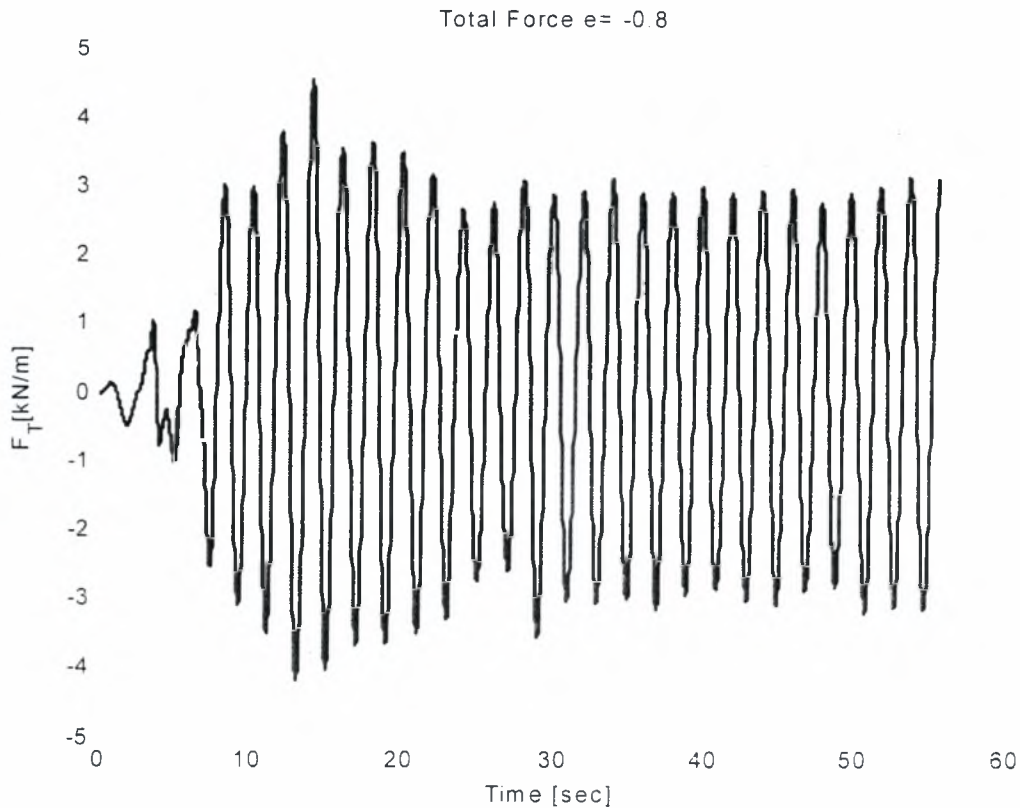
$$F_{\max} = 2.974 \text{ kN/m} \quad \text{για } t = 41.8 \text{ sec}$$



Σχήμα 6.23 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0$ (θεώρηση τύπου I)
 $F_{max} = 3.468 \text{ kN m}$ για $t = 21.9 \text{ sec}$



Σχήμα 6.24 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.4$ (θεώρηση τύπου I)
 $F_{max} = 4.323 \text{ kN m}$ για $t = 26.9 \text{ sec}$



Σχήμα 6.25 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.8$ (θεώρηση τύπου I)
 $F_{\max} = 4.58 \text{ kN/m}$ για $t = 15.3 \text{ sec}$

Από τα διαγράμματα των Σχημάτων 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25 παρατηρούμε ότι η γενική μορφή όλων των δυνάμεων είναι παρόμοια ανεξάρτητα από το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας. Για ύψος ρευστού $e = 0$ το διάγραμμα είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την αναλυτική προσέγγιση (Papaspyrou et al. 2004).

6.5 Αποτελέσματα δυνάμεων με την θεώρηση τύπου II ή III

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δυνάμεων. Έχοντας υπολογίσει το δυναμικό της επαγωγικής και της ωστικής κίνησης υπολογίζονται οι υδροδυναμικές πιέσεις, η συνολική οριζόντια δύναμη που ασκείται στο δοχείο καθώς και οι δυνάμεις της επαγωγικής και της ωστικής κίνησης. Βασισμένοι στην θεώρηση τύπου II ή III του τέταρτου κεφαλαίου υπολογίζουμε την συνολική δύναμη βασισμένοι στο δυναμικό της επαγωγικής κίνησης Φ_c και στο δυναμικό της ωστικής κίνησης Φ_l . Από την σχέση (6.5.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη

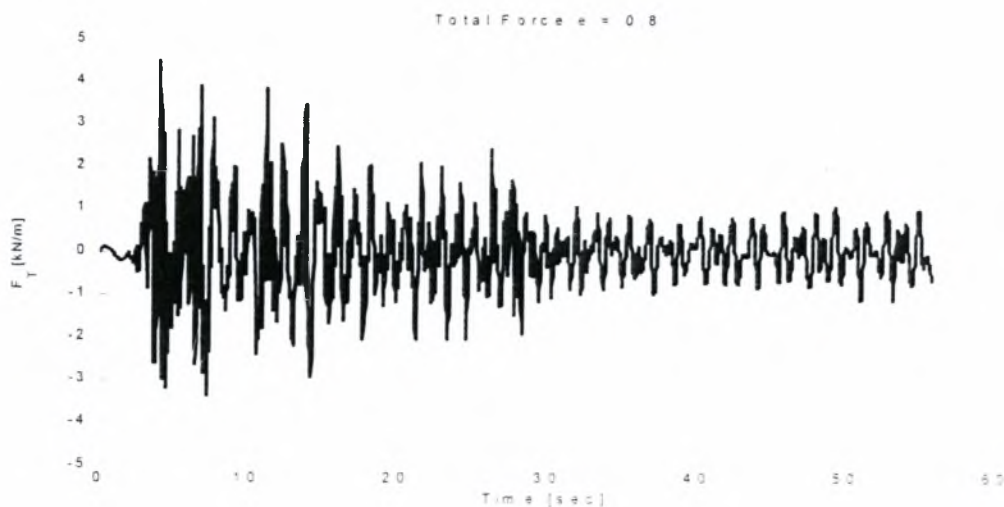
$$F = -\rho \sum_{i=1}^n M_{\eta_i} \ddot{\beta}_i - \bar{M}_l \ddot{X} \quad (6.5.1)$$

όπου ω_n είναι οι ιδιοτιμές και ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Επίσης από την σχέση (6.5.2) υπολογίζουμε την επιτάχυνση $\ddot{\beta}_i$

$$\ddot{\beta}_i + \omega_i^2 (\beta_i - X) = 0 \quad (6.5.2)$$

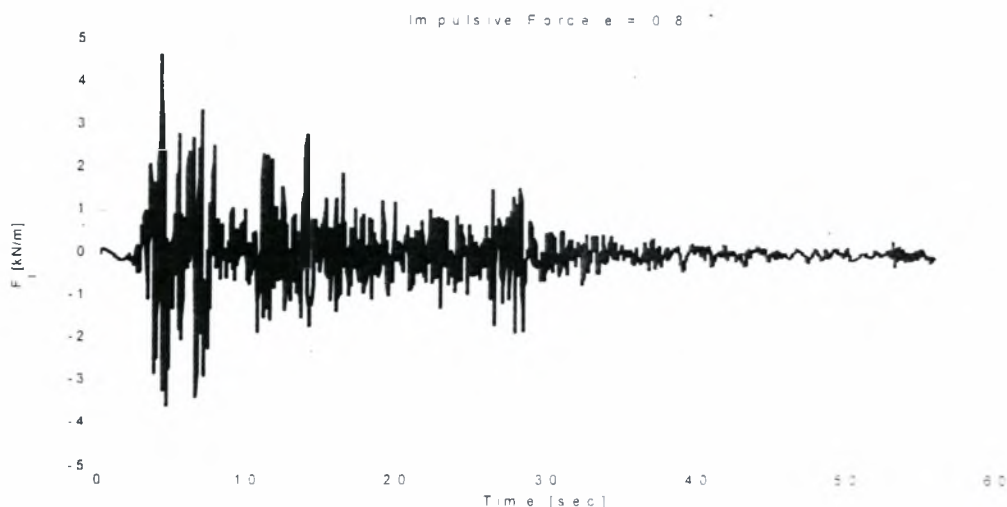
όπου X είναι η εξωτερική μετατόπιση. Στην ανάλυσή μας η εξωτερική διεγέρση προέρχεται από τον σεισμό του El Centro (1940) του οποίου το επιταχυνσιογράφημα και το φάσμα επιταχύνσεων φαίνονται στο Σχήμα 5.3.32 και 5.3.33 αντίστοιχα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα διαγράμματα των ολικών δυνάμεων, των επαγωγικών δυνάμεων και των ωστικών δυνάμεων για διάφορα ύψη ρευστού και σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε το μέγιστο της συνολικής δύναμης και τη χρονική στιγμή στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο αυτό. Επισημαίνεται οι δυνάμεις υπολογίζονται σε kN/m

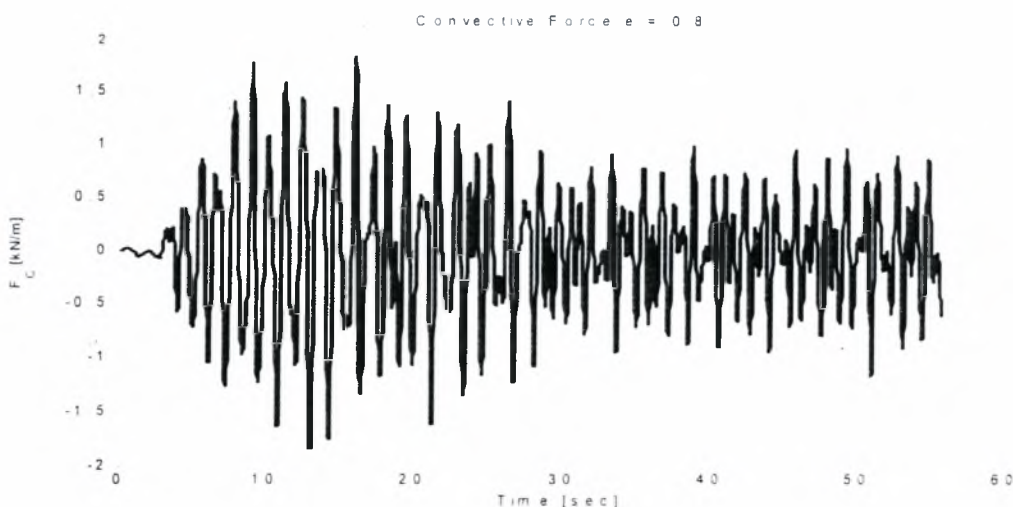


Σχήμα 6.26 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.8$

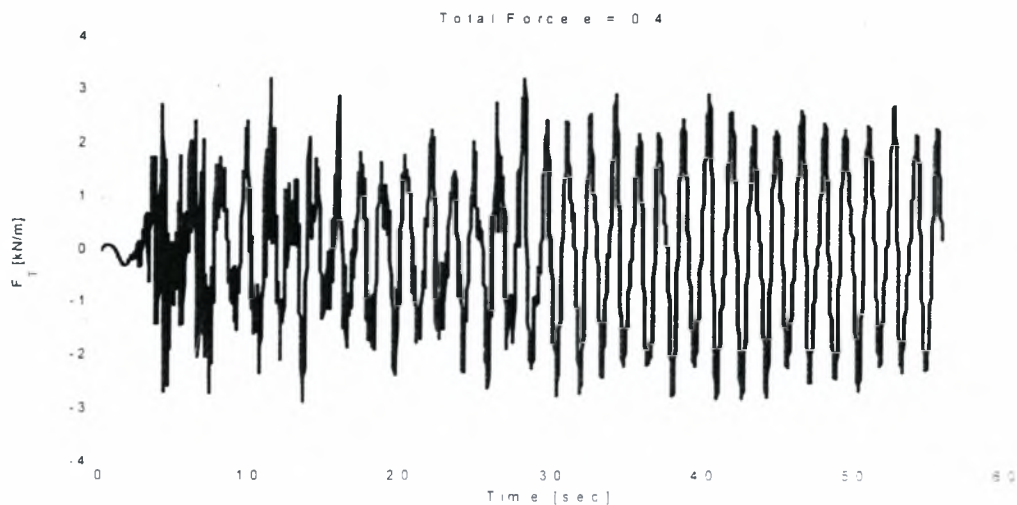
$F_{\max} = 4.017 \text{ kN/m}$ για $t = 8.6 \text{ sec}$



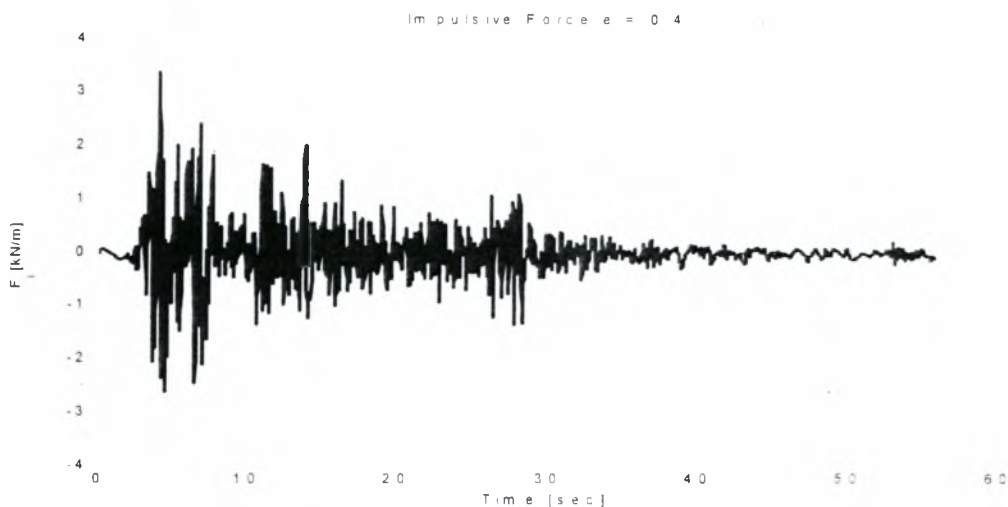
Σχήμα 6.27 Διάγραμμα ωστικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.8$



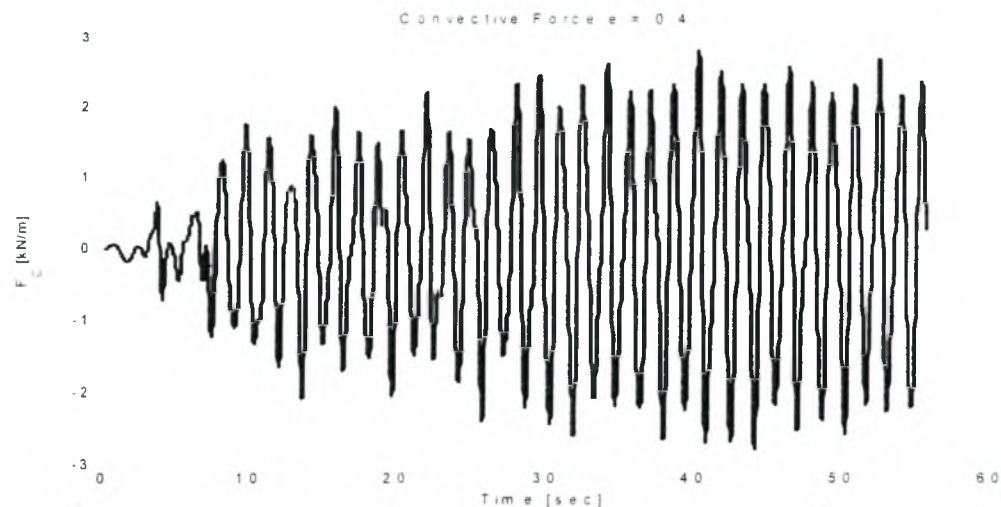
Σχήμα 6.28 Διάγραμμα επαγωγικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.8$



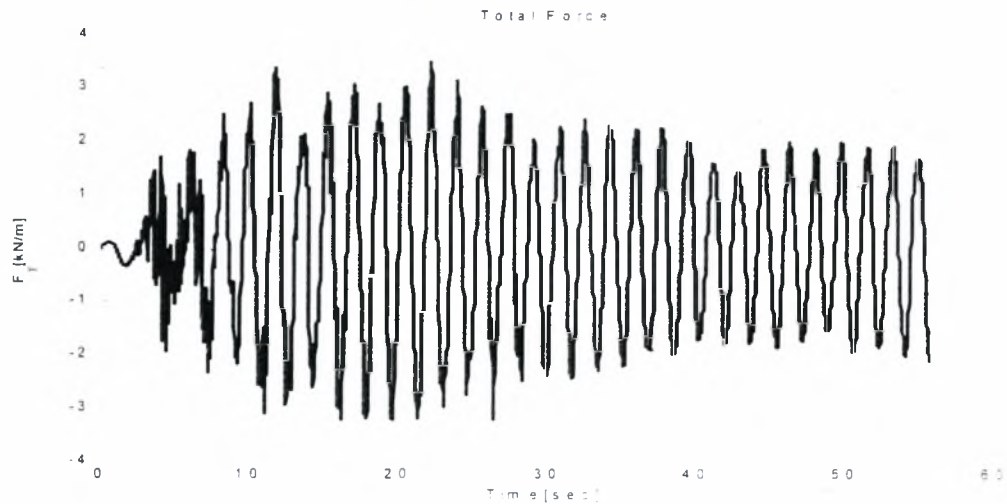
Σχήμα 6.29 Διάγραμμα συνολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.4$
 $F_{max} = 2.679 \text{ kN/m}$ για $t = 15.4 \text{ sec}$



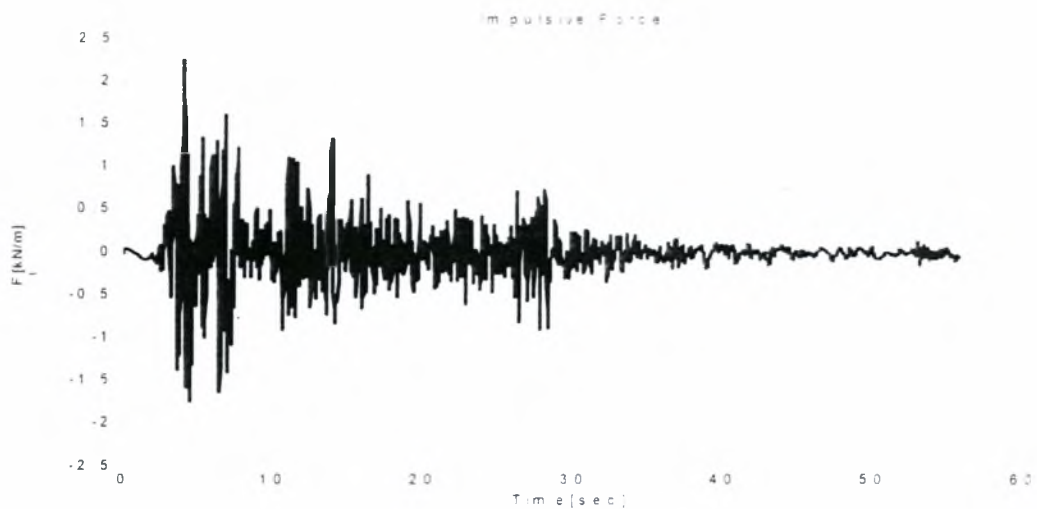
Σχήμα 6.30 Διάγραμμα ωστικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.4$



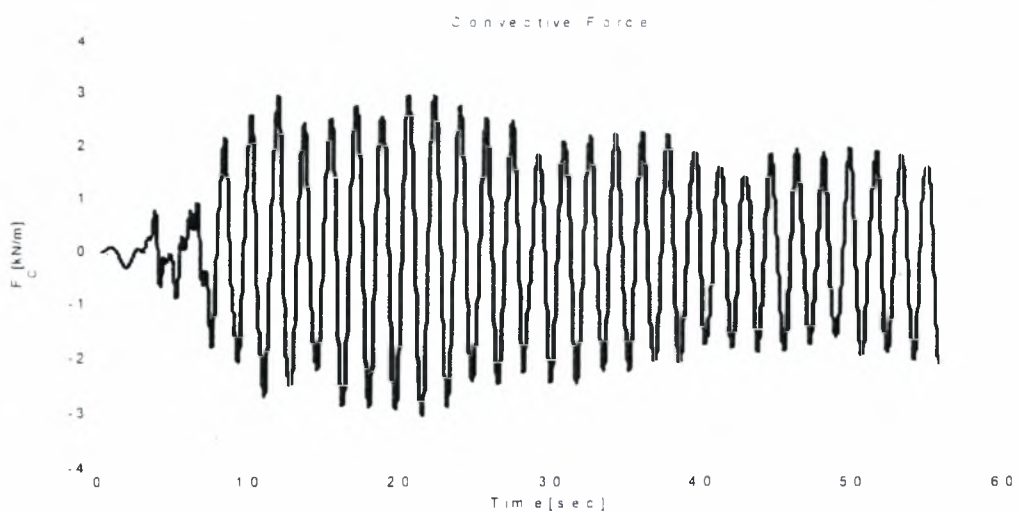
Σχήμα 6.31 Διάγραμμα επαγωγικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0.4$



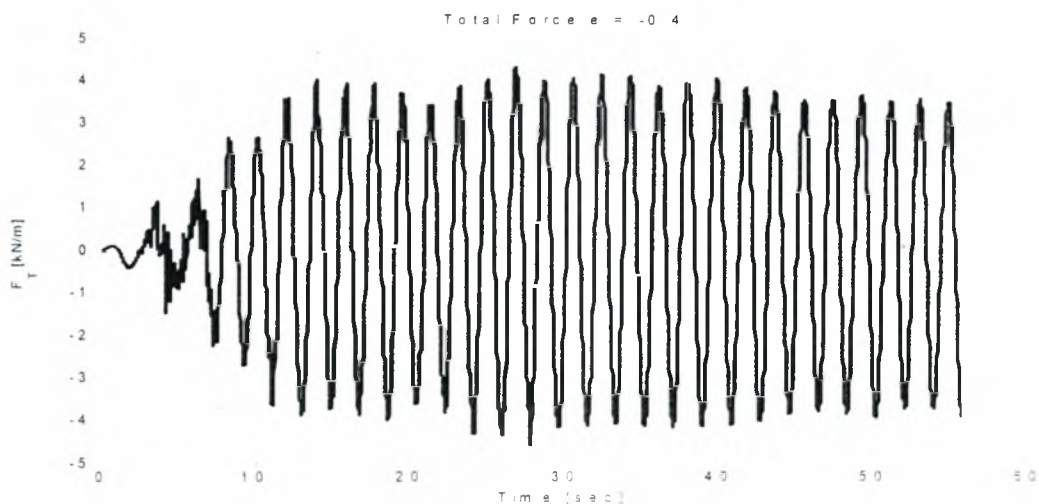
Σχήμα 6.32 Διάγραμμα ολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0$ (half full)
 $F_{\max} = 3.47 \text{ kN/m}$ για $t = 22.2 \text{ sec}$



Σχήμα 6.33 Διάγραμμα ωστικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0$

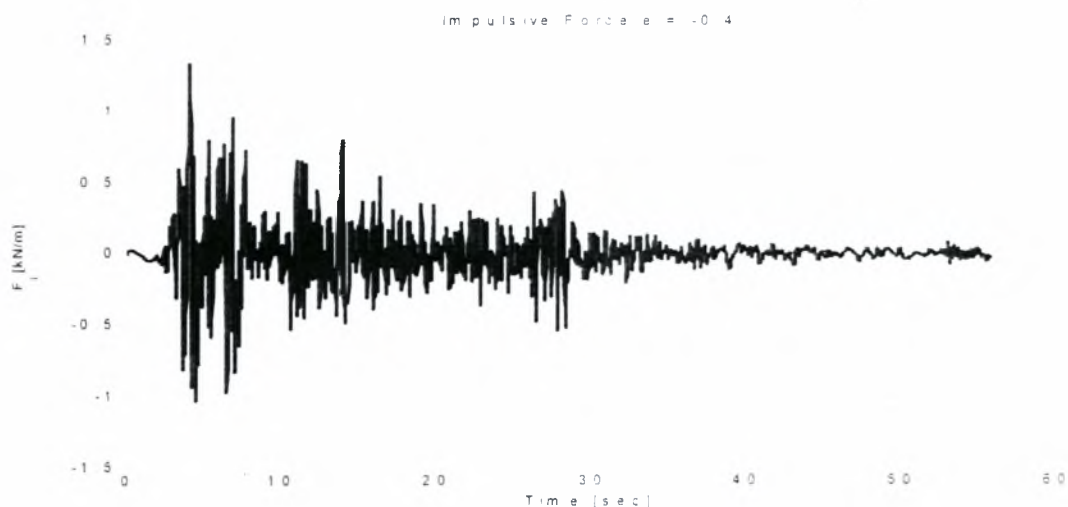


Σχήμα 6.34 Διάγραμμα επαγωγικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = 0$

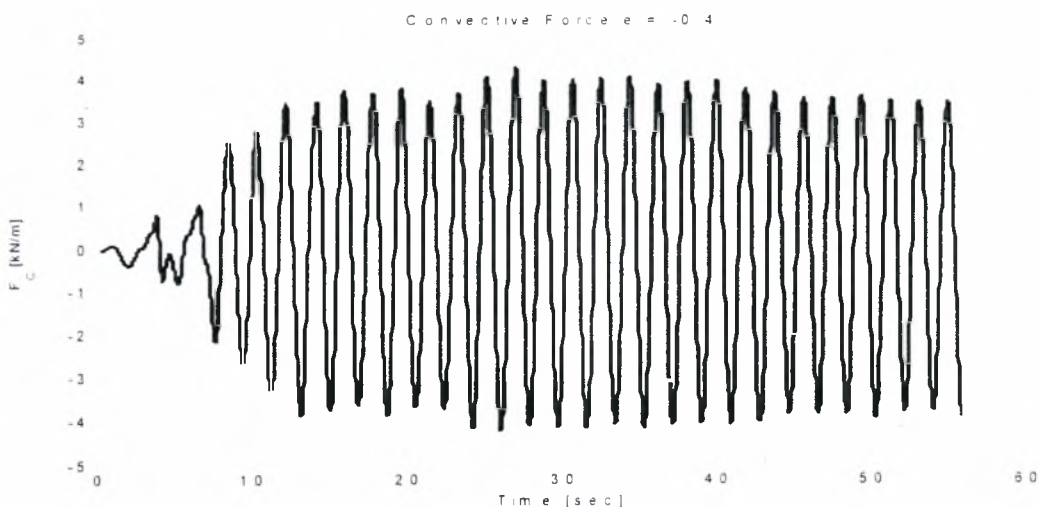


Σχήμα 6.35 Διάγραμμα ολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.4$

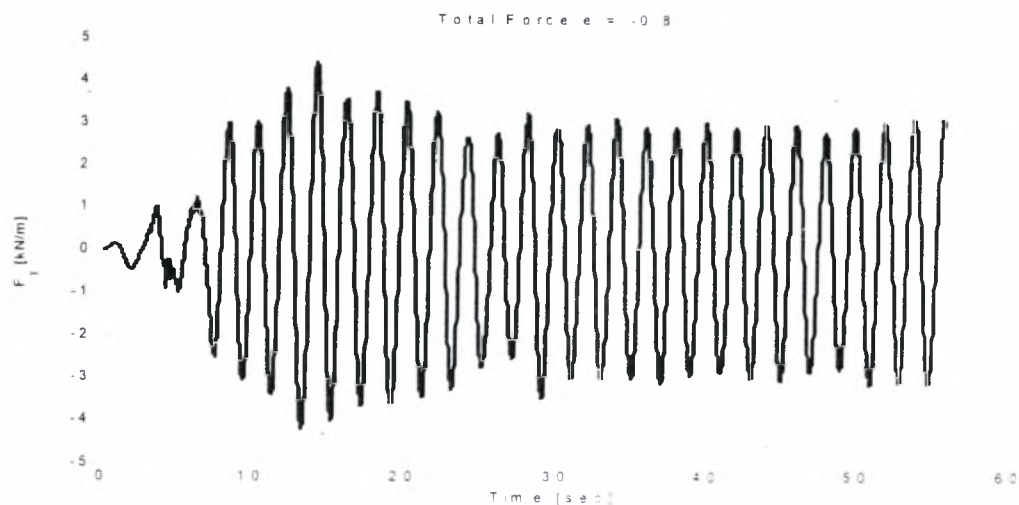
$F_{\max} = 4.27 \text{ kN/m}$ για $t = 27.8 \text{ sec}$



Σχήμα 6.36 Διάγραμμα ωστικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.4$

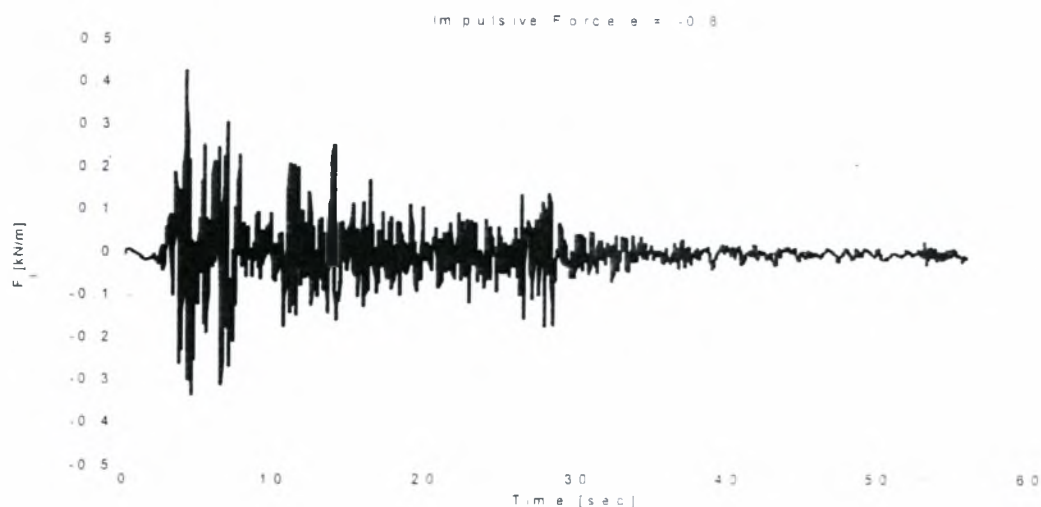


Σχήμα 6.37 Διάγραμμα επαγωγικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.4$

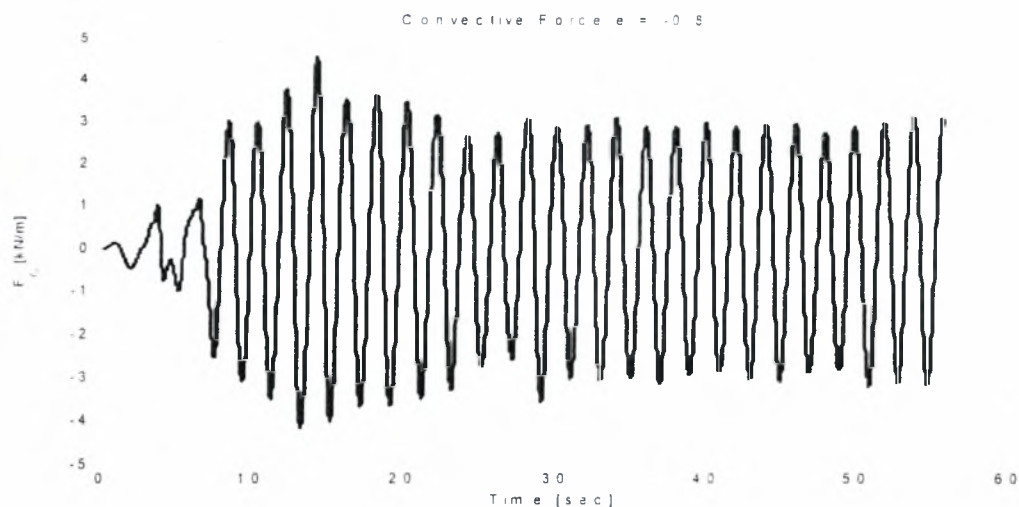


Σχήμα 6.38 Διάγραμμα ολικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.8$

$F_{max} = 4.482 \text{ kN/m}$ για $t = 15.23 \text{ sec}$



Σχήμα 6.39 Διάγραμμα ωστικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.8$



Σχήμα 6.40 Διάγραμμα επαγωγικής δύναμης για ύψους ρευστού $e = -0.8$

Από τα διαγράμματα αυτής της παραγράφου του κεφαλαίου 6^{ου} παρατηρούμε ότι και με την θεώρηση τύπου II και II τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ίδια με τα αποτελέσματα με την θεώρηση τύπου I. Η διαφορά του μέγιστου σε κάθε περίπτωση είναι της τάξεως του 10^{-2} . Επίσης παρατηρούμε ότι για μεγάλα ύψη ρευστού ($e=0.8$) η μορφή του διαγράμματος της συνολικής δύναμης είναι παρόμοια με την μορφή της ωστικής μάζας, γεγονός το οποίο δικαιολογείται από την διαφορά μεταξύ της ωστικής μάζας και της επαγωγικής. Όταν η δεξαμενή είναι σχεδόν γεμάτη το ρευστό συμπεριφέρεται στο μεγαλύτερο ποσοστό του σαν όλη η μάζα του να είναι ωστική. Ακριβώς το αντίθετο φαινόμενο παρατηρούμε όταν η δεξαμενή είναι σχεδόν άδεια και σχεδόν όλη η μάζα του ρευστού συμπεριφέρεται σαν επαγωγική. Η συμπεριφορά αυτή δικαιολογείται από τις τιμές των μαζών M_e και M_l για τα αντίστοιχα ύψη της ελεύθερης επιφάνειας. Επίσης παρατηρούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση τα μέγιστα των δυνάμεων είναι αρκετά κοντά με τις τιμές που προβλέπονται από το φάσμα των επιταχύνσεων. Τέλος για την τυχαία πληρότητα παρουσιάζουμε και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της συνολικής δύναμης για την θεώρηση τύπου I, την θεώρηση τύπου II ή III και την φασματική ανάλυση και με τους δύο τρόπους, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5.

Πίνακας 6.6: Σύγκριση απολύτων τιμών μέγιστης δύναμης για τυχαία πληρότητα.

Σύγκριση αποτελεσμάτων ολικής δύναμης για δοχείο τυχαίας πληρότητας				
e	Αριθμητική επίλυση τύπου I	Αριθμητική επίλυση τύπου II	Φασματική Ανάλυση (SAV)	Φασματική Ανάλυση (SRSS)
-0.8	4.5823 kN/m	4.4826 kN/m	5.6874kN/m	6.6427kN/m
-0.6	4.4439 kN/m	4.3894kN/m	5.3871kN/m	6.3417kN/m
-0.4	4.3231 kN/m	4.2716 kN/m	5.1698kN/m	6.1154kN/m
-0.2	3.8694 kN/m	3.7945kN/m	4.6841kN/m	5.5889kN/m
0	3.4135 kN/m	3.3920 kN/m	4.2846 kN/m	5.1894 kN/m
0.2	3.0125kN/m	3.0094kN/m	4.5843kN/m	5.4196kN/m
0.4	2.9741 kN/m	2.6791 kN/m	5.0236kN/m	5.9634kN/m
0.6	3.5648kN/m	3.6234kN/m	5.9841kN/m	6.8877kN/m
0.8	4.4789 kN/m	4.3157 kN/m	6.1762kN/m	7.2423kN/m

Παρατηρούμε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.6 ότι οι τιμές της απόλυτης δύναμης για την φασματική ανάλυση είναι σημαντικά μεγαλύτερες από εκείνες της αριθμητικής λύσης αλλά όπως έχουμε αναφέρει και στο 5^ο Κεφάλαιο η τιμή της φασματικής ανάλυσης δεν είναι ακριβής, αλλά μας δίνει με απλό τρόπο μία συντηρητική προσέγγιση για το μέγεθος της δύναμης.

Κεφάλαιο 7

ΣΥΝΟΨΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΑΤΑ

Η εισαγωγή στο φαινόμενο του κυματισμού και η παρουσίαση σημαντικών επιστημονικών και τεχνολογικών εφαρμογών του, που γίνονται στο κεφάλαιο 1, αποδεικνύουν την ιδιαίτερη σημασία του φαινομένου του κυματισμού σε εφαρμογές του μηχανικού.

Επιπλέον η βιβλιογραφική ανασκόπηση, που γίνεται στο κεφάλαιο 2, στην επίλυση του φαινομένου του κυματισμού κατά βάση αναφέρεται σε ορθογωνικές και τετραγωνικές δεξαμενές και δείχνει την έλλειψη εφαρμοσμένων εργασιών ανάλυσης του φαινομένου του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία.

Στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας, σε οριζόντια κυλινδρική δεξαμενή, τυχαίας πληρότητας, η οποία υπόκειται σε οριζόντια εξωτερική διέγερση. Το πρόβλημα των ιδιοτιμών επιλύθηκε υπολογιστικά, για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικός πηγαίος κώδικας σε Fortran, ο οποίος βασίζεται στην επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με τριγωνικά ισοπαραμετρικά στοιχεία. Η εξαγωγή των ιδιοτιμών του προβλήματος υπολογιστικά έγινε για πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας τα οποία κατασκευάστηκαν από το mesh generator του CAE του ABAQUS.

Πέρα από το πρόβλημα των ιδιοτιμών εξετάστηκε και το πρόβλημα των συνοριακών τιμών, δηλαδή της απόκρισης δεξαμενής με υγρό υπό εξωτερική διέγερση. Για την υπολογιστική επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών χρησιμοποιήθηκε η ίδια μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά επιλύθηκε υπολογιστικά το συνολικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και προέκυψαν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνολικές

δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής (Θεώρηση τύπου I). Στη συνέχεια με την ίδια μέθοδο επιλύθηκε και το πρόβλημα της ομοιόμορφης κίνησης και κίνησης κυματισμού (Θεώρηση τύπου II) και υπολογίστηκαν οι εξισώσεις κίνησης και οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Τέλος επιλύθηκε υπολογιστικά το πρόβλημα της ωστικής και επαγωγικής κίνησης (Θεώρηση τύπου III) και προέκυψαν οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης και οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Με σύγκριση των αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όσο αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων οι ιδιοτιμές που προκύπτουν τείνουν όλο και περισσότερο στις αναλυτικές ιδιοτιμές του προβλήματος. Έτσι όταν το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από 2500 κόμβους, τα υπολογιστικά αποτελέσματα παρουσιάζουν ικανοποιητική σύγκλιση σε σχέση με τα αναλυτικά. Η σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πιο αργή όταν αναφερόμαστε σε υψηλές ιδιοτιμές.

Για να επιτευχθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγιναν οι γραφικές παραστάσεις των λόγων της ωστικής και της επαγωγικής μάζας προς την συνολική μάζα του ρευστού. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις αναφέρονται σε τυχαία πληρότητα του δοχείου.

Τέλος παρουσιάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις των δυνάμεων για κάθε ένα από τους τύπους διακριτοποίησης. Στην περίπτωση πληρότητας 50%, η μορφή των γραφικών παραστάσεων που προέκυψαν υπολογιστικά προσεγγίζει ικανοποιητικά την μορφή των γραφικών παραστάσεων που προήρθαν από την ημι-αναλυτική λύση.

Συνοπτικά:

- Αναπτύχθηκε πηγαίος υπολογιστικός κώδικας σε FORTRAN για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τα αποτελέσματα του οποίου κρίνονται αρκετά ικανοποιητικά.
- Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι όσο αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων τα αποτελέσματα που προκύπτουν προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις λύσεις από ημι-αναλυτικές και αριθμητικές προσεγγίσεις.
- Από την μελέτη των αριθμητικών αποτελεσμάτων προκύπτει η ισοδυναμία της μελέτης του προβλήματος του κυματισμού με την θεώρηση τύπου II και τύπου III.
- Για τον λόγο των μαζών των διαδοχικών ιδιοτιμών παρατηρείται ικανοποιητική σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων από την πρώτη ιδιοτιμή.
- Η συνολική συμπεριφορά του ρευστού κατά την διέγερση εξαρτάται από το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας. Γενικά, ένα μέρος της μάζας του ρευστού

συμπεριφέρεται ωστικά και το υπόλοιπο ρευστό επαγωγικά. Όταν η δεξαμενή είναι σχεδόν άδεια ($e < -0.5$) η συνολική μάζα του ρευστού συμπεριφέρεται ως μάζα κυματισμού. Αντίθετα όταν η δεξαμενή είναι σχεδόν γεμάτη ($e > 0.5$) η συνολική μάζα του ρευστού συμπεριφέρεται ως ωστική μάζα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α) ΗΜΙ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΟΧΕΙΟ ΣΤΗΝ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Παρουσιάζεται εν συντομία η ημι-αναλυτική λύση του φαινομένου όπως αυτή αναπτύχθηκε από τον Παπασπύρου Σ. κατά την διάρκεια της διδακτορικής του διατριβής. Το ρευστό περιέχεται σε οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο πληρότητας 50% και ακτίνας R με τον άξονα-y του συστήματος των συντεταγμένων να είναι κατακόρυφος προς τα πάνω και την γεωμετρία να απεικονίζεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z. Το δοχείο υπόκειται σε τυχαία εξωτερική κίνηση στην κατεύθυνση του άξονα-x με μετατόπιση X(t).

Το ρευστό θεωρείται ατρίβες, και η ροή περιγράφεται από την συνάρτηση του δυναμικού της ταχύτητας $\Phi(r, \theta, z, t)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του όγκου του υγρού:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L. \quad (1.1)$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας θεωρείται αρκετά μικρή ώστε να είναι αποδεκτή η γραμμικοποίηση του προβλήματος, τότε το Φ υπόκειται στην γραμμική δυναμική και κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g \eta = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L \quad (1.2)$$

και

$$\pm \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L. \quad (1.3)$$

αντίστοιχα, όπου g είναι η παγκόσμια σταθερά και $\eta = \eta(r, \psi, t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Συνδυασμός των εξισώσεων (6.2) και (6.3) μας δίνει την μικτή συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L. \quad (1.4)$$

Θεωρώντας εξωτερική διέγερση κατά μήκος του εγκάρσιου άξονα- x , το δυναμικό του κυματισμού πρέπει να ικανοποιεί την κινηματική συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{X}(t) \sin \theta, \quad \text{στο } r=R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (1.5)$$

και

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{στο } z=0, L, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < r < R. \quad (1.6)$$

Στην συνέχεια το Φ διαχωρίζεται σε δύο μέρη

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi_U(r, \theta, z, t) + \tilde{\varphi}(r, \theta, z, t), \quad (1.7)$$

όπου $\varphi_U(r, \theta, z, t)$ και $\tilde{\varphi}(r, \theta, z, t)$ είναι το δυναμικό της ταχύτητας της ομοιόμορφης κίνησης και το δυναμικό του κυματισμού, αντίστοιχα. Το δυναμικό της ταχύτητας φ_U αντιστοιχεί στην κίνηση του ρευστού ως ένα απαραμόρφωτο σώμα, το οποίο ακολουθεί ακριβώς την κίνηση της εξωτερικής διέγερσης και το δυναμικό της ταχύτητας $\tilde{\varphi}$ αντιπροσωπεύει την σχετική κίνηση του ρευστού μέσα στο δοχείο λόγω του κυματισμού. Το δυναμικό της ταχύτητας της ομοιόμορφης κίνησης δίνεται από την σχέση

$$\varphi_U = \dot{X}(t) \times \dot{X}(t) r \sin \theta \quad (1.8)$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (6.1) και την κινηματική συνθήκη (1.5) στο τοίχωμα του δοχείου $r=R$. Επομένως, το άγνωστο δυναμικό $\tilde{\varphi}$ που σχετίζεται με τον κυματισμό, πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του υγρού και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = - \frac{\partial^2 \varphi_U}{\partial t^2}, \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = 0, \quad \text{στο } r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (1.10)$$

και

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = 0, \quad \text{στο } z=0, L, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < r < R. \quad (1.11)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας $\tilde{\varphi}$ γράφεται στην μορφή

$$\bar{\varphi}(r,\theta,z,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{\varphi}_p(r,\theta,t) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right), \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (1.12)$$

με αυτή την μορφή ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (6.11) για $p=0,1,2,3,\dots$. Θεωρώντας την συνοριακή συνθήκη (6.10) προκύπτει ότι, λόγω της μορφής της εξωτερικής διεγέρσης, μόνο ο όρος που αντιστοιχεί στην ιδιομορφή $p=0$ είναι μη-μηδενικός (π.χ. ο όρος που είναι σταθερός ως προς z) ενώ όλοι οι άλλοι όροι ($p=1,2,3,\dots$) εξαλείφονται. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα μετασχηματίζεται σε ένα δυδιάστατο πρόβλημα στο οποίο πρέπει να υπολογιστεί το δυναμικό της ταχύτητας $\varphi = \bar{\varphi}_0(r,\theta,t)$, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, και την μικτή συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \theta = \pm \pi/2, \quad r < R \quad (1.13)$$

και την κινηματική συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \text{στο } r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2. \quad (1.14)$$

Η λύση της άγνωστης συνάρτησης φ γράφεται σε μορφή σειράς ως εξής

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \varphi_n(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) r^n \sin(n\theta), \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (1.15)$$

όπου $q_n(t)$ είναι οι άγνωστες χρονικές συναρτήσεις και $\varphi_n(r,\theta) = r^n \sin(n\theta)$ είναι οι αντίστοιχες χωρικές συναρτήσεις. Για τους σκοπούς της παρούσας ανάλυσης και σύμφωνα με την μεθοδολογία των Evans και Linton (1993), η έκφραση του άγνωστου δυναμικού γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$\varphi(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_{2n-1}(t) r^{2n-1} \sin(2n-1)\theta + \dot{q}_{2n}(t) r^{2n} \sin 2n\theta \right] \quad (1.16)$$

διαχωρίζοντας τους άρτιους από τους περιττούς όρους της σειράς. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.16) και (1.8) στην εξίσωση (1.9) και εξισώνοντας του όρους της ίδιας δύναμης του r προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$q_2(t) = \frac{1}{2g} \ddot{q}_1(t) + \frac{1}{2g} \ddot{X}(t), \quad (1.17)$$

και

$$q_{2n}(t) = \frac{1}{2ng} \ddot{q}_{2n-1}(t), \quad \text{για } n > 1. \quad (1.18)$$

Οι εξισώσεις (1.17) και (1.18) αντικαθίστανται πίσω στην εξίσωση (1.16) και στην συνέχεια εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου, εξίσωση (1.14), προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{R^{2n-1}}{g} \sin 2n\theta \ddot{q}_{2n-1}(t) + (2n-1) R^{2n-2} \sin(2n-1)\theta q_{2n-1} \right\} = -\frac{R}{g} \sin 2\theta \ddot{X}(t). \quad (1.19)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$I_s = \int_0^{\pi/2} \dots \sin(2s-1)\theta d\theta, \quad s=1,2,3\dots \quad (1.20)$$

στην εξίσωση (1.19) και κάνοντας τις απαραίτητες μαθηματικές πράξεις προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων 2^{ns}

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = -\{\gamma\} \ddot{X} \quad (1.21)$$

Στην εξίσωση (6.21) $[M]$ είναι ένας μη-συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας, $[K]$ είναι ο διαγώνιος πίνακας και $\{\gamma\}$ είναι ένα διάνυσμα

Όπου

$$M_{sn} = \frac{2n(-1)^{n+s}}{n^2 - (s-1/2)^2} R^{2n-1} \quad n=1,2,3\dots \text{και } s=1,2,3\dots \quad (1.22)$$

$$K_{nn} = (2n-1)\pi g R^{2n-2} \quad n=1,2,3\dots \quad (1.23)$$

$$\gamma_s = \frac{8(-1)^{s+1}}{3+4s-4s^2} R \quad s=1,2,3\dots \quad (1.24)$$

και $\{q\}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων με στοιχεία $q_{2n-1}(t)$, $n=1,2,\dots$

Υπολογισμός Δυνάμεων

Η συνολική δύναμη f_T που ασκείται στο τοίχωμα του δοχείου είναι το άθροισμα της δύναμης f_U λόγω ομοιόμορφης κίνησης, της δύναμης f_S λόγω του κυματισμού και της δύναμης αδράνειας f_C του δοχείου

$$f_U = -\rho \int_A \frac{\partial \varphi_U}{\partial t} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) dA \quad (1.25)$$

$$f_S = -\rho \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) dA \quad (1.26)$$

και

$$f_C = -m_C \ddot{X}(t) \quad (1.27)$$

αντίστοιχα, όπου ρ είναι η πυκνότητα της μάζας του υγρού, A είναι η “βρεχόμενη” επιφάνεια του κυλινδρικού δοχείου και m_C είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.8) και (1.16), οι δυνάμεις f_U και f_S υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$f_U = -\rho \ddot{X}(t) R^2 \int_0^L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta dz = -\left(\rho \frac{\pi R^2}{2}\right) \ddot{X}(t) = -m_L \ddot{X}(t) \quad (1.28)$$

$$f_S = -\rho R^2 \sum_{n=1}^{\infty} R^{2n-2} [\ddot{q}_{2n-1}(t) Y_{2n-1} + R \ddot{q}_{2n}(t) Y_{2n}] \quad (1.29)$$

όπου $m_L = \rho \pi R^2 / 2$ είναι η μάζα του υγρού ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου πληρότητας 50% και

$$Y_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2k\theta) \sin \theta d\theta = (-1)^{k+1} \frac{4k}{4k^2-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.30)$$

Επειδή η πίεση είναι πάντοτε κάθετη στο τοίχωμα του δοχείου, η συνολική δύναμη διέρχεται από το κέντρο της τομής του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου.

B)ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ FORTRAN

```

PROGRAM CYLINDER

C-----
C      ΒΑΣΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
C-----

      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      PARAMETER NDIM=2, NNPE=3
      INTEGER LDA, LDB, LDEVEC, N
      REAL*4 MN, KN, FN, MMN2, MMN3, MT, C2, BB, LL, C3, PII, XN
      PARAMETER (N=4994, LDA=N, LDB=N, LDEVEC=N)
      PARAMETER (IPATH=1)
C      PARAMETER IDIO USED FOR COMPUTING EIGENVECTOR COLUMN
C*****
      COMMON /CONSTS/ ZERO, ONE, TWO
      COMMON /MATRICES/ ICONN(NNPE, 9656), X(NDIM, 4994)
      COMMON HEIGHT
C      LAST DIMENSION IN MATRIX ICONN IS NUMBER OF ELEMENTS
C      LAST DIMENSION IM MATRIX X IS NUMBER OF NODES

      DIMENSION Y(NDIM, NNPE), SM(3, 3), SMGL(N, N), AM(3, 3), AMGL(N, N)
      DIMENSION FM(3, 1), FMGL(N, 1), PM(3, 1), PMGL(N, 1), SMGLI(N, N)
      DIMENSION SS(3, 3), SSGL(N, N), FMGLI(N, 1)
C*****
C      PARAMETERS FOR EIGENVALUES MATRIX

      INTEGER I, NOUT
      REAL A(LDA, N), AMACH, B(LDB, N), BETA(N), GPIRG, PI
      COMPLEX ALPHA(N), EVAL(N), EVEC(LDEVEC, N), EVECT(N, LDEVEC)
      EXTERNAL AMACH, GPIRG, GVCGR, UMACH, WRORN
      REAL REV(N, N), REVT(N, N), MN1(1, N), KN1(1, N), QI(N, 1)
      REAL QN(N, 1), FMGLT(1, N)

C*****
C      READING

      OPEN(8, FILE='MATRICES')
      OPEN(7, FILE='INPUT120')
      READ(7, *)
      READ(7, *) NN, NUMEL, NMAT
      DO 10 I=1, NN
         READ(7, *) K, (X(J, K), J=1, NDIM)
10  CONTINUE
      DO 20 IEL=1, NUMEL
         READ(7, *) K, (ICONN(J, K), J=1, NNPE)
20  CONTINUE
      HEIGHT=X(2, 1)

C*****
C      COMPUTING GLOBAL MATRIX
      DO 30 IEL=1, NUMEL
         CALL PICK(Y, IEL)
         CALL LISO3K(Y, SM)
         DO 40 I=1, 3
            DO 40 J=1, 3

```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

      SMGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))=
*      SMGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))-SM(I,J)
40  CONTINUE
      CALL LISO3M(Y,AM)
      DO 50 I=1,3
        DO 50 J=1,3
          AMGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))=
*          AMGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))+AM(I,J)
50  CONTINUE
      CALL LISO3F(Y,FM)
      DO 55 I=1,3
        FMGL(ICONN(I,IEL),1)=
*        FMGL(ICONN(I,IEL),1)+FM(I,1)
55  CONTINUE
      CALL LISO3P(Y,PM)
      DO 56 I=1,3
        PMGL(ICONN(I,IEL),1)=
*        PMGL(ICONN(I,IEL),1)+PM(I,1)
56  CONTINUE
      CALL LISO3S(Y,SS)
      DO 58 I=1,3
        DO 58 J=1,3
          SSGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))=
*          SSGL(ICONN(I,IEL),ICONN(J,IEL))-SS(I,J)
58  CONTINUE
30  CONTINUE

```

C*****

C COMPUTING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

```

      CALL GVCRG (N,SMGL,LDA,AMGL,LDB,ALPHA,BETA,EVEC,LBEVEC)
      DO 11 I=1, N
        EVAL(I) = ALPHA(I)/BETA(I)

```

11 CONTINUE

C*****

C ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΖΩΝ CONVECTIVE-IMPULSIVE

C

C TRANSPOSE OF EIGENVALUES MATRIX

PII=3.141592654D0

RADIUS=1.0D0

DO 37 I=1,N

DO 37 J=1,N

EVECT(J,I)=EVEC(I,J)

37 CONTINUE

C*****

C TRANSFORMATION OF COMPLEX MATRIX TO REAL MATRIX

DO 69 I=1,N

DO 69 J=1,N

REMI(I,J)=REAL(EVEC(I,J))

69 CONTINUE

DO 71 I=1,N

DO 71 J=1,N

REVT(I,J)=REAL(EVECT(I,J))

71 CONTINUE

C*****

C COMPUTING OF MN,KN,FN,f,fn,S

DO 666 IDIO=1,7,2

C COMPUTING MN*****

DO 33 J=1,N

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

      MN1(1,J)=0.0D0
      DO 33 I=1,N
        MN1(1,J)=MN1(1,J)+REVT(N-IDIO,I)*AMGL(I,I)
33    CONTINUE
      MN=0.0D0
      DO 34 I=1,N
        MN=MN+(MN1(1,I)*REV(I,N-IDIO))
34    CONTINUE

C*****

C    COMPUTING KN*****
      DO 35 J=1,N
        KN1(1,J)=0.0D0
        DO 35 I=1,N
          KN1(1,J)=KN1(1,J)+(REVT(N-IDIO,I)*SMGL(I,J))
35    CONTINUE
      KN=0.0D0
      DO 36 I=1,N
        KN=KN+(KN1(1,I)*REV(I,N-IDIO))
36    CONTINUE

C*****

C    COMPUTING FN*****
      FN=0.0D0
      DO 39 I=1,N
        FN=FN+(REVT(N-IDIO,I)*FMGL(I,1))
39    CONTINUE

C*****

C    COMPUTING PN*****
      PN=0.0D0
      DO 38 I=1,N
        PN=PN+(REVT(N-IDIO,I)*PMGL(I,1))
38    CONTINUE

C*****

C    COMPUTING  $\Phi$ impulsive  $\Phi$ i=inverse(K)*FMGL
C    PENALTY METHOD FOR BOUNDARY CONDITIONS
      DO 660 I=1,N
        DO 660 J=1,N
          SMGLI(I,J)=SMGL(I,J)
660    CONTINUE
      DO 661 I=1,N
        FMGLI(I,1)=FMGL(I,1)
661    CONTINUE
      DO 662 I=1,N
        IF (X(2,I).EQ.(HEIGHT)) THEN
          SMGLI(I,I)=99999999
          FMGLI(I,1)=0.0D0
        ENDIF
662    CONTINUE

C*****

C    SOLVING THE SYSTEM WITH GAUSS METHOD
      CALL LSLRG (N,SMGLI,LDA,FMGLI,IPATH,QI)
      DO 663 I=1,N
        QN(I,1)=0.0D0
        DO 663 J=1,N
          QN(I,1)=QN(I,1)+SSGL(I,J)*QI(J,1)
663    CONTINUE

```

```

C*****
C      COMPUTING fn *****
      FNF=0.0D0
      DO 664 I=1,N
        FNF=FNF+(REVT(N-IDIO,I)*QN(I,1))
664    CONTINUE

C      COMPUTING IMPULSIVE MASS *****
      DO 668 I=1,N
        FMGLT(1,I)=FMGL(I,1)
668    CONTINUE
      XN=0.0D0
      DO 667 I=1,N
        XN=XN+FMGLT(1,I)*QI(I,1)
667    CONTINUE

C*****
C      COMPUTING Mtotal
      RR=RADIUS**2
      THET=2*(ASIN(ABS(X(1,1))))
      IF (X(2,1).GT.0.0D0) THEN
        MT=(PII/2)+((PII/2)-(RR/2)*THET-SIN(THET))
      ELSE
        MT=(RR/2)*(THET-SIN(THET))
      ENDIF

C*****
C      COMPUTING FRACTION MNC/MT 2nd METHOD
      MMN2=(PN*FN)/MN
      WRITE(8,*)MMN2/MT
      C2=C2+MMN2/MT

C      COMPUTING FRACTION Mnc/Mtotal 3rd METHOD*****
      LL=((REAL(EVAL(N-IDIO)))**2)
      MMN3=((FNF*FN)/(KN))
      WRITE(8,*)MMN3/MT
      C3=C3+MMN3/MT

C      COMPUTING FORCE MULTIPLIER *****
      CN=((FN**2)/(MN*LL))
      WRITE(8,*)'***',CN

666 CONTINUE
C      CONUTING MASS IMPULSIVE FRACTION *****
      XI=XN/MT

C      PRINTING FRACTIONS
      WRITE(8,*)'FRACTIONS ARE'
      WRITE(8,*)C2
      WRITE(8,*)C3
      WRITE(8,*)XI

C      PRINTING EIGENVALUES
      WRITE(8,*)'EIGENVALUES ARE:'
      DO 665 I=1,N
        WRITE(8,*)I
        WRITE(8,57)EVAL(I)
57    FORMAT(F12.6,3X,F12.6)
665 CONTINUE

```


Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

STOP
END

C*****

```
SUBROUTINE CLEAR(B,NB)
IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
DIMENSION B(NB)
COMMON /CONSTS/ ZERO,ONE,TWO
DO 1100 I=1,NB
  B(I)=ZERO
1100 CONTINUE
RETURN
END
```

C*****

```
SUBROUTINE FUN3(XI1,XI2,F,DF)
IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
DIMENSION F(3),DF(2,3)

C  ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΟΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ R,S
C  ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ DN/DR ΚΑΙ DN/DS

F(1)=1-XI1-XI2
F(2)=XI1
F(3)=XI2

DF(1,1)=-1
DF(1,2)=1
DF(1,3)=0

DF(2,1)=-1
DF(2,2)=0
DF(2,3)=1

RETURN
END
```

C*****

```
SUBROUTINE IP3(F,DF,W)
IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
DIMENSION XI1(3),XI2(3),W(3),F(3,3),DF(2,3,3)
NIPS1=3

C  ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ GAUSS 3 ΣΗΜΕΙΩΝ
C  (ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΤΟ SM=ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ)

XI1(1)=.1666666666666667D0
XI1(2)=.6666666666666667D0
XI1(3)=.1666666666666667D0

XI2(1)=.1666666666666667D0
XI2(2)=.1666666666666667D0
XI2(3)=.6666666666666667D0

W(1)=.3333333333333333D0
W(2)=.3333333333333333D0
W(3)=.3333333333333333D0
```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

DO 1210 IP=1,NIPSI
CALL FUN3 (XI1(IP),XI2(IP),F(1,IP),DF(1,1,IP))
1210 CONTINUE
RETURN
END

C*****

SUBROUTINE LISOK(Y,SM)

C.....ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΠΟΥ ΕΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ Κ

IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(2,3)
DIMENSION SM(3,3)
DIMENSION DX(2,2)
DIMENSION DNDX(2,3)
DIMENSION B(3,2),DB(2,3)
DIMENSION F(3,3),DF(2,3,3),W(3)

C
NIPSI=3
CALL CLEAR(SM,9)
CALL IP3(F,DF,W)

DO 90 IP=1,NIPSI
CALL CLEAR(DX,4)
DO 30 K=1,3
DO 30 I=1,2
DO 30 J=1,2
DX(I,J)=DX(I,J)+DF(I,K,IP)*Y(J,K)
30 CONTINUE

C ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΤΗΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ

DET=DX(1,1)*DX(2,2)-DX(1,2)*DX(2,1)
AUX=DX(1,1)
DX(1,1)=DX(2,2)/DET
DX(2,2)=AUX/DET
DX(1,2)=-DX(1,2)/DET
DX(2,1)=-DX(2,1)/DET

DO 40 K=1,3
DNDX(1,K)=DX(1,1)*DF(1,K,IP)+DX(1,2)*DF(2,K,IP)
DNDX(2,K)=DX(2,1)*DF(1,K,IP)+DX(2,2)*DF(2,K,IP)
40 CONTINUE

DO 50 K=1,2
B(1,K)=DNDX(K,1)
B(2,K)=DNDX(K,2)
B(3,K)=DNDX(K,3)
50 CONTINUE
WGT=W(IP)*ABS(DET)
DO 60 M=1,3
DO 70 L=1,2
DB(L,M)=B(M,L)
70 CONTINUE
60 CONTINUE
DO 80 I=1,3
DO 80 J=1,3
SM(I,J) = SM(I,J) +

```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

*          ((0.50D0)*WGT*(B(I,1)*DB(1,J)+B(I,2)*DB(2,J)))
80  CONTINUE
90  CONTINUE
    RETURN
    END

C*****

SUBROUTINE LISO3M(Y,AM)
C-----
C  ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΜΑΖΑΣ Μ
C  ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
C-----
    IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
    DIMENSION Y(2,3)
    DIMENSION IFSURF(3),AM(3,3),FF(3,3)
    DATA SMALL/0.0D0/
    COMMON HEIGHT
    CALL CLEAR(AM,9)
    DO 111 KK=1,3
        IFSURF(KK)=0.0D0
111  CONTINUE
C
    DO 200 INODE=1,3
        IF (Y(2,INODE).EQ.(HEIGHT)) THEN
            IFSURF(INODE)=1
        ENDIF
200  CONTINUE
    IF ((IFSURF(1)+IFSURF(2)+IFSURF(3)).EQ.0) THEN
        AP1=(Y(1,1)-Y(1,2))
        AP2=(Y(1,1)-Y(1,3))
        AP3=(Y(1,2)-Y(1,3))
    ELSE
        GOTO 222
    ENDIF
C  FREE SURFACE ON NODE 1 AND 2
    IF (IFSURF(1).EQ.1.AND.IFSURF(2).EQ.1) THEN
        FF(1,1)=AP1*0.3333D0
        FF(1,2)=0.0D0
        FF(1,3)=AP1*0.1666D0
        FF(2,1)=0.0D0
        FF(2,2)=0.0D0
        FF(2,3)=0.0D0
        FF(3,1)=FF(1,3)
        FF(3,2)=FF(2,3)
        FF(3,3)=FF(1,1)
        DO 300 II=1,3
            DO 300 JJ=1,3
                AM(II,JJ)=
*          AM(II,JJ)+FF(II,JJ)
300  CONTINUE
    END IF
C  FREE SURFACE ON NODE 1 AND 3
    IF (IFSURF(1).EQ.1.AND.IFSURF(3).EQ.1) THEN
        FF(1,1)=AP2*0.3333D0
        FF(1,2)=AP2*0.1666D0
        FF(1,3)=0.0D0
        FF(2,1)=FF(1,2)
        FF(2,2)=FF(1,1)
        FF(2,3)=0.0D0
        FF(3,1)=FF(1,3)

```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

      FF(3,2)=FF(2,3)
      FF(3,3)=0.0D0
      DO 400 II=1,3
        DO 400 JJ=1,3
          AM(II,JJ)=
*              AM(II,JJ)+FF(II,JJ)
400    CONTINUE
      END IF
C      FREE SURFACE ON NODE 2 AND 3
      IF (IFSURF(2).EQ.1.AND.IFSURF(3).EQ.1) THEN
        FF(1,1)=0.0D0
        FF(1,2)=0.0D0
        FF(1,3)=0.0D0
        FF(2,1)=FF(1,2)
        FF(2,2)=AP3*0.3333D0
        FF(2,3)=AP3*0.1666D0
        FF(3,1)=FF(1,3)
        FF(3,2)=FF(2,3)
        FF(3,3)=FF(2,2)
        DO 500 II=1,3
          DO 500 JJ=1,3
            AM(II,JJ)=
*              AM(II,JJ)+FF(II,JJ)
500    CONTINUE
      END IF
222 CONTINUE
      RETURN
      END

C*****
      SUBROUTINE LISOF(Y,FM)
C-----
C      EXHANTIZEI TO MHTRQC F TOY ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ
C      ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΟΑΚΑΗΡΩΣΗ
C-----
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(2,3)
      DIMENSION IFRAD(3),FM(3,1),FFF(3,1)
      DATA SMALL/0.0D0/
      CALL CLEAR(FM,3)
      RADIUS=1.0D0
      PI=3.141592654D0
      U=1.0D0
      DO 112 KK=1,3
        IFRAD(KK)=0.0D0
112 CONTINUE
C
      DO 201 INODE=1,3
        IF (((RADIUS**2)-(Y(1,INODE)**2+(Y(2,INODE)**2)))
*          .LE.0.01D0) THEN
          IFRAD(INODE)=1
        ENDIF
201 CONTINUE
      IF ((IFRAD(1)+IFRAD(2)+IFRAD(3)).EQ.2) THEN
        AP11=SQRT(((Y(1,1)-Y(1,2))**2)+((Y(2,1)-Y(2,2))**2))
        AP22=SQRT(((Y(1,1)-Y(1,3))**2)+((Y(2,1)-Y(2,3))**2))
        AP33=SQRT(((Y(1,2)-Y(1,3))**2)+((Y(2,2)-Y(2,3))**2))
        C1=COS(PI/2-ATAN((Y(2,2)-Y(2,1))/(Y(1,2)-Y(1,1))))
        C2=COS(PI/2-ATAN((Y(2,3)-Y(2,1))/(Y(1,3)-Y(1,1))))
        C3=COS(PI/2-ATAN((Y(2,3)-Y(2,2))/(Y(1,3)-Y(1,2))))

```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

ELSE
GOTO 223
ENDIF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 1 AND 2
  IF (IFRAD(1).EQ.1.AND.IFRAD(2).EQ.1) THEN
    FFF(1,1)=C1*AP11*U*0.50D0
    FFF(2,1)=C1*AP11*U*0.50D0
    FFF(3,1)=0.0D0
    DO 301 II=1,3
      DO 301 JJ=1,1
        FM(II,JJ)=
*          FM(II,JJ)+FFF(II,JJ)
301  CONTINUE
    END IF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 1 AND 3
  IF (IFRAD(1).EQ.1.AND.IFRAD(3).EQ.1) THEN
    FFF(1,1)=C2*AP22*U*0.50D0
    FFF(2,1)=0.0D0
    FFF(3,1)=C2*AP22*U*0.50D0
    DO 302 II=1,3
      DO 302 JJ=1,1
        FM(II,JJ)=
*          FM(II,JJ)+FFF(II,JJ)
302  CONTINUE
    END IF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 2 AND 3
  IF (IFRAD(2).EQ.1.AND.IFRAD(3).EQ.1) THEN
    FFF(1,1)=0.0D0
    FFF(2,1)=C3*AP33*U*0.50D0
    FFF(3,1)=C3*AP33*U*0.50D0
    DO 308 II=1,3
      DO 308 JJ=1,1
        FM(II,JJ)=
*          FM(II,JJ)+FFF(II,JJ)
308  CONTINUE
    END IF
223 CONTINUE
RETURN
END

```

C*****

SUBROUTINE LISQ3P(Y,PM)

```

C-----
C  ΕΧΗΑΜΤΙΖΕΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ Ρ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ
C  ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
C-----
  IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
  DIMENSION Y(2,3)
  DIMENSION IFSURFP(3),PM(3,1),FFF(3,1)
  DATA SMALL/0.0D0
  COMMON HEIGHT
  CALL CLEAR(PM,3)
  NIPS2=2
  U=1.0D0
  DO 113 KK=1,3
    IFSURFP(KK)=0.0D0
113 CONTINUE
C
  DO 203 INODE=1,3
    IF (Y(2,INODE).EQ.(HEIGHT)) THEN
      IFSURFP(INODE)=1
    
```

```

ENDIF
203 CONTINUE
IF ((IFSURFP(1)+IFSURFP(2)+IFSURFP(3)).EQ.2) THEN
  AP1=(Y(1,1)-Y(1,2))
  AP2=(Y(1,1)-Y(1,3))
  AP3=(Y(1,2)-Y(1,3))
ELSE
  GOTO 225
ENDIF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 1 AND 2
IF (IFSURFP(1).EQ.1.AND.IFSURFP(2).EQ.1) THEN
  P11=((Y(1,1)/3)+(Y(1,2)/6))
  P12=((Y(1,1)/6)+(Y(1,2)/3))
  FFP(1,1)=AP1*P11
  FFP(2,1)=AP1*P12
  FFP(3,1)=0.0D0
  DO 303 II=1,3
    DO 303 JJ=1,1
      PM(II,JJ)=
*      PM(II,JJ)-FFP(II,JJ)
303 CONTINUE
END IF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 1 AND 3
IF (IFSURFP(1).EQ.1.AND.IFSURFP(3).EQ.1) THEN
  P11=((Y(1,1)/3)+(Y(1,3)/6))
  P12=((Y(1,1)/6)+(Y(1,3)/3))
  FFP(1,1)=AP2*P11
  FFP(2,1)=0.0D0
  FFP(3,1)=AP2*P12
  DO 304 II=1,3
    DO 304 JJ=1,1
      PM(II,JJ)=
*      PM(II,JJ)-FFP(II,JJ)
304 CONTINUE
END IF
C BOUNDARY SURFACE ON NODE 2 AND 3
IF (IFSURFP(2).EQ.1.AND.IFSURFP(3).EQ.1) THEN
  P11=((Y(1,2)/3)+(Y(1,3)/6))
  P12=((Y(1,2)/6)+(Y(1,3)/3))
  FFP(1,1)=0.0D0
  FFP(2,1)=AP3*P11
  FFP(3,1)=AP3*P12
  DO 305 II=1,3
    DO 305 JJ=1,1
      PM(II,JJ)=
*      PM(II,JJ)-FFP(II,JJ)
305 CONTINUE
END IF
225 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C*****
C SUBROUTINE LISO3S(Y,SS)
C-----
C ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ S ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ
C ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3
C ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
C-----
C IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
C DIMENSION Y(2,3)

```

Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```

        DIMENSION IFSAD(3),SS(3,3),SSS(3,3)
        DATA SMALL/0.0D0/
        COMMON HEIGHT
        CALL CLEAR(SSS,9)
        CALL CLEAR(SS,9)
        NIPS2=2
        U=1.0D0
        DO 413 KK=1,3
            IFSAD(KK)=0.0D0
413 CONTINUE
C
        DO 403 INODE=1,3
            IF (Y(2,INODE).EQ.(HEIGHT)) THEN
                IFSAD(INODE)=1
            ENDIF
403 CONTINUE
        IF ((IFSAD(1)+IFSAD(2)+IFSAD(3)).EQ.1) THEN
            AP1=(Y(1,1)-Y(1,2))
            AP2=(Y(1,1)-Y(1,3))
            AP3=(Y(1,2)-Y(1,3))
        ELSE
            GOTO 425
        ENDIF
C
        FREE SURFACE ON NODE 1 AND 2
        IF (IFSAD(1).EQ.1.AND.IFSAD(2).EQ.1) THEN
            SSS(1,1)=-5.D0
            SSS(1,2)=0.0D0
            SSS(1,3)=5.D0
            SSS(2,1)=-5.D0
            SSS(2,2)=0.0D0
            SSS(2,3)=5.D0
            SSS(3,1)=0.0D0
            SSS(3,2)=0.0D0
            SSS(3,3)=0.0D0
            DO 402 II=1,3
                DO 402 JJ=1,3
                    SS(II,JJ)=SSS(II,JJ)
402 CONTINUE
        END IF
C
        FREE SURFACE ON NODE 1 AND 3
        IF (IFSAD(1).EQ.1.AND.IFSAD(3).EQ.1) THEN
            SSS(1,1)=-5.D0
            SSS(1,2)=0.0D0
            SSS(1,3)=5.D0
            SSS(2,1)=0.0D0
            SSS(2,2)=0.0D0
            SSS(2,3)=0.0D0
            SSS(3,1)=-5.D0
            SSS(3,2)=0.0D0
            SSS(3,3)=5.D0
            DO 404 II=1,3
                DO 404 JJ=1,3
                    SS(II,JJ)=SSS(II,JJ)
404 CONTINUE
        END IF
C
        BOUNDARY SURFACE ON NODE 2 AND 3
        IF (IFSAD(2).EQ.1.AND.IFSAD(3).EQ.1) THEN
            SSS(1,1)=0.0D0
            SSS(1,2)=0.0D0
            SSS(1,3)=0.0D0
            SSS(2,1)=-5.D0

```


Ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης
υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις με πεπερασμένα στοιχεία

```
      SSS(2,2)=0.0D0
      SSS(2,3)=5.D0
      SSS(3,1)=-5.D0
      SSS(3,2)=0.0D0
      SSS(3,3)=5.D0
      DO 405 II=1,3
        DO 405 JJ=1,3
          SS(II,JJ)=SSS(II,JJ)
405    CONTINUE
      END IF
425 CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE PICK(Y,NTRIG)
C.....picks node coordinates of an element
      IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
      PARAMETER NDIM=2,NNPE=3
      COMMON /MATRICES/ ICONN(NNPE,9656),X(NDIM,4994)
      DIMENSION Y(NDIM,NNPE)
      DO 1000 J=1,NNPE
        NODE=ICONN(J,NTRIG)
        DO 1000 I=1,NDIM
          Y(I,J)=X(I,NODE)
1000 CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. 10th Edition, Dover, New York, NY.
- [2] Abramson, H. N. (1966). "The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers.", prepared by Southwest Research Institute, NASA SP-106. Washington, DC.
- [3] Abramson, H. N., Chu, W.-H., Garza, L. R. (1963), "Liquid Sloshing in Spherical Tanks.", *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 2, pp. 384-389.
- [4] American Petroleum Institute (1995). "Seismic Design of Storage Tanks - Appendix E", *Welded Steel Tanks for Oil Storage*, API Standard 650, Washington, D.C.
- [5] Bathe J.(1996) *Finite Element Procedures* Second Edition Prentice Hall New York
- [6] Budiansky B. (1960). "Sloshing of Liquids in Circular Canals and Spherical Tanks", *Journal of Aero Space Sciences*, Vol. 27, pp. 161-173.
- [7] Hoskins, L. M. and Jacobsen, L. S. (1934). "Water Pressure in a Tank Caused by a Simulated Earthquake.", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 24, pp. 1-32
- [8] Comité Européen de Normalization (1998). "Silos, tanks and pipelines Part 4", *Eurocode 8, Design of structures for earthquake resistance*, CEN ENV-1998, Brussels.
- [9] Chopra A.(2001) *Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering* Second Edition Prentice Hall New York

- [10] Chu, W.-H. (1963), "Breathing Vibrations of a Partially Filled Cylindrical Tank – Linear Theory", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 30, pp. 532-536.
- [11] Evans, D. V. and Linton, C. M. (1993), "Sloshing Frequencies", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 46, pp. 71-87.
- [12] Fisher, F. D. (1979), "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 587-601.
- [13] Fisher, F. D., Rammerstorfer, F. G. and Scharf, K. (1991), "Earthquake Resistant Design of Anchored and Unanchored Liquid Storage Tanks Under Three-Dimensional Earthquake Excitation", *Structural Dynamics – Recent Advances*, editor: G.I. Schueller, Berlin, Springer, pp. 317-371.
- [14] Fox, D. W. and Kutler, J. R. (1981), "Upper and Lower Bounds for Sloshing Frequencies by Intermediate Problems", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 32, pp. 667-682.
- [15] Fox, D. W. and Kutler, J. R. (1983), "Sloshing Frequencies", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 34, pp. 669-696.
- [16] Jacobsen, L. S. (1949), "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 39
- [17] Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S. (1951), "Hydrodynamic experiments with Rigid Cylindrical Tanks Subjected to Transient Motions", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 41, No. 4
- [18] Haroun, M. A. and Housner, G. W. (1981), "Earthquake Response of Deformable Liquid Storage Tanks", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 48, pp. 411-417.

- [19] Haroun, M. A. (1983). "Vibration Studies and Tests of Liquid Storage Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 179-206.
- [20] Housner, G. W. (1957). "Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers", *Bulletin Seismological Society of America*, Vol. 47, pp. 15-35.
- [21] Housner, G. W. (1963). "The Dynamic Behavior of Water Tanks", *Bulletin Seismological Society of America*, Vol. 53, No. 2, pp. 381-387.
- [22] Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N. and Ikeda, T. (2001). "Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics", *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol. 54, No. 2, pp. 133-177.
- [23] Isaacson, M., and Subbiach, K. (1991). "Earthquake-Induced Sloshing in a Rigid Circular Tank", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 18, pp. 904-915.
- [24] Karamanos, S. A., "A Unified Method for Earthquake-Induced Sloshing in Industrial Vessels.", *Steel Tanks 2003. International Conference on Design, Inspection, Maintenance and Operation of Cylindrical Steel Tanks and Pipelines*, pp. 122-129, Prague, Czech Rep., October 2003
- [25] Kobayashi, N., Mieda, T., Shibata, H. and Shinozaki, Y. (1989). "A Study of the Liquid Slosh Response in Horizontal Cylindrical Tanks", *J. Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 111, pp. 32-38.
- [26] Κλιάφα, Β., (2003). "Δυναμική φόρτιση σε ορθογώνιες δεξαμενές λόγω κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας στη διάρκεια αρμονικής εξωτερικής διέγερσης", Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας
- [27] Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*, Dover, New York..

- [28] McIver, P. (1989). "Sloshing Frequencies for Cylindrical and Spherical Containers Filled to an Arbitrary Depth", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 201, pp. 243-257.
- [29] McIver, P. and McIver, M. (1993). "Sloshing Frequencies of Longitudinal Modes for a Liquid Contained in a Trough", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 252, pp. 525-541.
- [30] Moiseev, N. N. and Petrov, A. A. (1966). "The Calculation of Free Oscillations of a Liquid in a Motionless Container", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 91-154.
- [31] Natsiavas, S. (1988). "An Analytical Model for Unanchored Fluid-Filled Tanks Under Base Excitation", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 55, pp. 648-653.
- [32] Niwa, A. and Clough, R. W. (1982). "Buckling of Cylindrical Liquid-Storage Tanks Under Earthquake Excitation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 107-122.
- [33] Papaspyrou S., D. Valougeorgis and S. A. Karamanos. (2004). "Sloshing effects in half full horizontal cylindrical vessels under longitudinal excitation" *Journal of Applied Mechanics*, ASME Transactions. (accepted for publication)
- [34] Papaspyrou S., D. Valougeorgis and S. A. Karamanos. (2004) "Response of half full horizontal cylinders under transverse excitation", *Journal of fluids and Structures* (submitted for publication)
- [35] Παπασπύρου Σ. (Διδακτορική διατριβή σε εξέλιξη) "Το φαινόμενο του κυματισμού σε σφαιρικά και οριζόντια κυλινδρικά δοχεία με αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής."
- [36] Peek, R. (1988). "Analysis of Unanchored Liquid Storage Tanks Under Lateral Loads", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 1087-1100.

- [37] Rammerstorfer, F. G., Fisher, F. D. and Scharf, K. (1988). "A Proposal for the Earthquake Resistant Design of Tanks – Results from the Austrian Project", *Proc. 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo, Japan, Vol. VI, pp. 715-720.
- [38] Rammerstorfer, F. G., Fisher, F. D. and Scharf, K. (1990). "Storage Tanks Under Earthquake Loading", *Applied Mechanics Reviews*, ASME, Vol. 43, No. 11, pp. 261-283.
- [39] Veletsos, A. S. (1974). "Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks", *Proceedings of the 5th World Conference in Earthquake Engineering*, Rome, Italy, Vol. 1, pp. 630-639.
- [40] Veletsos, A. S. and Yang, J. Y. (1977). "Earthquake Response of Liquid Storage Tanks", *2nd Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Raleigh, NC, pp. 1-24.
- [41] Veletsos, A. S. and Tang, Y. (1990). "Soil-Structure Interaction Effects for Laterally Excited Liquid Storage Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 473-496.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074028