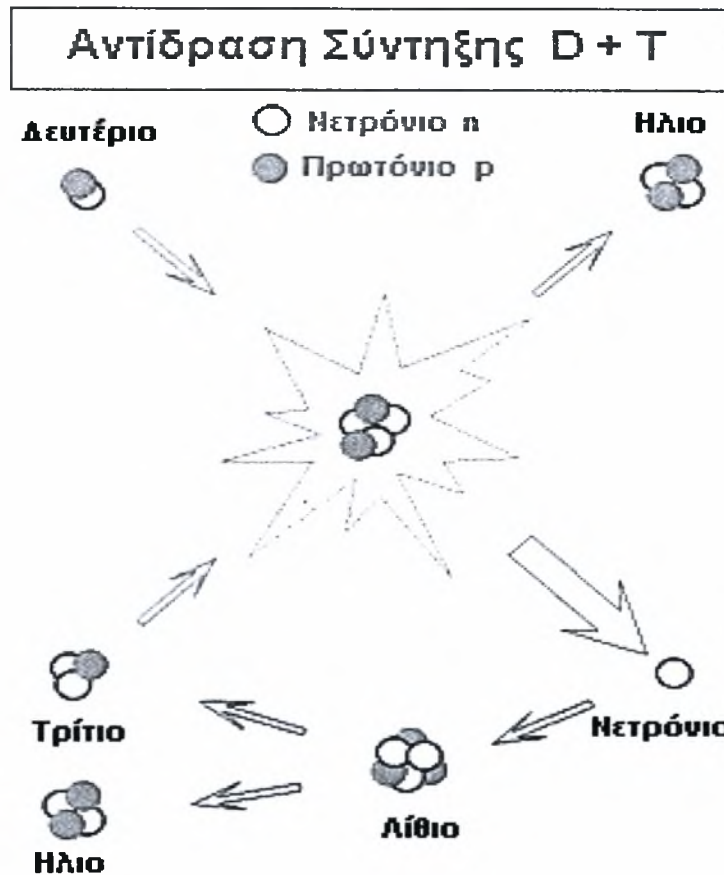


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ



...Νομίζω πως μπορώ να πω με σιγουριά
ότι κανένας δεν καταλαβαίνει την
κβαντική μηχανική.

Richard Feynman

Ανάλυση ευστάθειας και κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης για
ροή φυσικής συναγωγής υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου

Διπλωματική εργασία: Νικόλαου Τσαπραλή

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Νίκος Πελεκάσης

Ιούλιος 2004



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3951/1
Ημερ. Εισ.: 01-10-2004
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2004
ΤΣΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	1
1. Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	4
1.1 Πυρηνική σύντηξη και πυρηνική σχάση	4
1.2 Διατάξεις σύντηξης	7
1.3 Πλεονεκτήματα σύντηξης	9
2. Κεφάλαιο 2: Περιγραφή Φυσικού Προβλήματος	12
2.1 Εξαναγκασμένη και φυσική συναγωγή	12
2.2 Εσωτερικές πηγές	14
2.3 Επίδραση του μαγνητικού πεδίου	16
3. Κεφάλαιο 3: Μαθηματικό Μοντέλο	18
3.1 Ρευστοδυναμική	19
3.2 Ηλεκτροδυναμική	20
3.3 Μαγνητορευστοδυναμική	22
3.4 Σύνοψη των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα	27
4. Κεφάλαιο 4 :Διακριτοποίηση-Αριθμητική Επίλυση	30
4.1 Γενικά	30
4.2 Η χρήση πλέγματος για τη διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων	30
4.3 Κατασκευή υπολοίπων	34
4.4 Κατασκευή Ιακωβιανού πίνακα	35
4.5 Στοιχεία του αρχικού κώδικα	37
4.6 Μεθοδολογία εύρεσης περιοδικών λύσεων	38
5. Κεφάλαιο 5: Εισαγωγή στην Ευστάθεια	42
5.1 Ανάλυση ευστάθειας	42
5.2 Κατασκευή διαγράμματος διακλάδωσης με τις παραμέτρους του προβλήματος	43
5.3 Πρόβλημα γραμμικής ευστάθειας των καταστάσεων ισορροπίας	45
5.4 Κατάστρωση γραμμικού αριθμητικού προβλήματος	46
5.5 Αριθμητική επίλυση του προβλήματος ευστάθειας	48
5.6 Παραγωγή περιοδικών λύσεων	49
5.7 Λυμένο πρόβλημα παράδειγμα εύρεσης περιοδικής λύσης	52
5.8 Διακριτοποίηση εξισώσεων και κατασκευή των υπολοίπων	53
6. Κεφάλαιο 6: Παραμετρική Μελέτη Προβλήματος Μαγνητο-Υδροδυναμικής	57

6.1	Στοιχεία της παραμετρικής μελέτης	57
6.2	Έλεγχος πλέγματος	58
6.3	Επίδραση του μαγνητικού πεδίου	63
6.4	Επίδραση της φυσικής συναγωγής	68
6.5	Επίδραση των εσωτερικών πηγών	71
6.6	Διαγράμματα διακλάδωσης	76
7.	Κεφάλαιο 7 : Συμπεράσματα και Προοπτικές	85
7.1	Συμπεράσματα	85
7.2	Προτάσεις για μελλοντική εργασία	86
	Βιβλιογραφία	87

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Νίκο Πελεκάση, για τη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Νικόλαο Βλάχο και Καθηγητή κ. Βασίλη Μποντόζογλου για την ανάγνωση της εργασίας μου. Οφείλω ευχαριστίες στον Δρ. Θεοφάνη Γραμμένο, διδάσκοντα ΠΔ407/80 και επιστημονικό συνεργάτη του Τμήματος, για την πολύτιμη βοήθεια που μου πρόσφερε όσο καιρό έκανα την Διπλωματική Εργασία, και για την τελική μορφή της εργασίας αυτής.

Ευχαριστώ τους μεταπτυχιακούς φοιτητές Μαρία Βλαχομήτρου και Κώστα Τσιγκλιφή για τη βοήθεια που μου πρόσφεραν όλο αυτό το διάστημα. Ευχαριστώ τους φίλους και συναδέλφους Μιχάλη Αγόρο, Θωμά Κατσαρό, Μουσταφά Μουσταφά, Δημήτριο Ντέτσικα και Θόδωρο Χατζηδιαλεκτό για την ηθική υποστήριξή τους.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου Σάββα και Ευαγγελία και τον αδερφό μου Γεώργιο Τσαπραλή για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στο Νεκτάριο.

Νίκος Τσαπραλής

Επιβλέπων Καθηγητής : Δρ. Νίκος Πελεκάσης,
Επίκουρος Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Τα μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής :

Πρώτος εξεταστής: Δρ. Νίκος Πελεκάσης,
Επίκουρος Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Δεύτερος Εξεταστής: Δρ. Νικόλαος Βλάχος,
Καθηγητής Μηχανικής Ρευστών, Αντλιών & Στροβιλομηχανών

Τρίτος Εξεταστής : Δρ. Βασίλης Μποντόζογλου,
Καθηγητής Φαινομένων Μεταφοράς & Συσκευών Φυσικών Διεργασιών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Στην εργασία αυτή μελετάται η ανάλυση ευστάθειας και η κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης για ροή φυσικής συναγωγής σε ορθογώνια κοιλότητα υπό την επίδραση εξωτερικού ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Η εργασία εντάσσεται στο πλαίσιο μιας γενικότερης προσπάθειας σύνδεσης της ροής φυσικής συναγωγής με τη μαγνητοϋδροδυναμική.

Η μελέτη της φυσικής συναγωγής σε δοχεία (enclosures), ή και σε ανοικτές διατάξεις, σε συνδυασμό με την επίδραση πεδιακών δυνάμεων π.χ. ηλεκτρικών ή μαγνητικών, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον λόγω των σημαντικών εφαρμογών όπου εμφανίζονται τα φαινόμενα αυτά. Μερικές από αυτές τις εφαρμογές είναι στον τομέα της παραγωγής ημιαγωγίμων κρυστάλλων υψηλής καθαρότητας με την μέθοδο της υγρής ζώνης (floating zone method)[1].

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μεγάλη προσπάθεια να αναπτυχθεί η τεχνολογία απορρόφησης της θερμότητας που παράγεται σε αντιδραστήρες όπου λαμβάνει χώρα πυρηνική σύντηξη, με σκοπό η τελευταία να μεταφερθεί σε εναλλάκτες θερμότητας για την παραγωγή ατμού. Πρόκειται για μια σημαντική εφαρμογή με σκοπό την εναλλακτική παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσω της διοχέτευσης του παραγόμενου ατμού σε αεριοστροβίλους.

Η θερμότητα που παράγεται από τις εξώθερμες πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης είναι ικανή να αυξήσει τη θερμοκρασία των τοιχωμάτων του πυρήνα του αντιδραστήρα όπου λαμβάνει χώρα η σύντηξη. Έτσι, μπορεί να αναπτυχθεί μεγάλη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των θερμών τοιχωμάτων του πυρήνα και των τοιχωμάτων του ψυχρότερου εξωτερικού μανδύα που περιέχει το ενεργό μέσο της ψύξης, συνήθως κάποιο υγρό μέταλλο, και είναι τοποθετημένος μεταξύ του πυρήνα και του περιβάλλοντος. Από μόνη της αυτή η διαφορά θερμοκρασίας μπορεί να λειτουργήσει ως ενεργός δύναμη για τη ροή φυσικής συναγωγής του ρευστού που περιέχεται στο μανδύα.

Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας

Η μελέτη αφορά μια ορθογώνια κοιλότητα με αδιαβατικά οριζόντια τοιχώματα και διαφορετικής θερμοκρασίας κάθετα τοιχώματα. Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας και υπάρχουν εσωτερικές πηγές.

Πρώτο και κύριο μέλημα ήταν η κατανόηση του φαινομένου και η κατάστρωση των εξισώσεων που το περιγράφουν. Οι κατάλληλες παραδοχές συνέβαλαν στην απλοποίηση του προβλήματος. Ταυτόχρονα δόθηκε βαρύτητα στην εκμάθηση του υπολογιστικού κώδικα και στο χειρισμό της δομής και των αποτελεσμάτων του.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε παραμετρική μελέτη των πεδίων ροής και θερμοκρασίας που αναπτύσσονται για την περίπτωση φυσικής συναγωγής υγρού μετάλλου παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και εσωτερικών πηγών. Οι τελευταίες χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν την ενέργεια που παράγεται στον μανδύα λόγω της ακτινοβολίας που παράγεται στον πυρήνα του αντιδραστήρα σύντηξης. Μέσω των αποτελεσμάτων εκτιμήθηκε η επίδραση της έντασης του μαγνητικού πεδίου και των εσωτερικών πηγών θερμότητας στη διαμόρφωση της ροής φυσικής συναγωγής στην κοιλότητα.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στην κατασκευή και μελέτη των διαγραμμάτων διακλάδωσης καθώς και στην ανάλυση ευστάθειας. Εντοπίστηκαν, για διάφορες τιμές των παραμέτρων σημεία αστάθειας της ροής που οδηγούν σε περιοδικές λύσεις (διακλαδώσεις τύπου Hopf) και εξετάστηκε η επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της έντασης των εσωτερικών πηγών.

Τέλος, έγινε επέκταση του κώδικα προκειμένου να μελετηθεί η εξέλιξη των περιοδικών λύσεων, ώστε στα διαγράμματα διακλάδωσης να καλυφθούν οι κλάδοι Hopf και να εξετασθεί η ευστάθειά τους (χρήση μονόδρομου πίνακα και μεθόδου βολής (shooting method)).

Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στις πυρηνικές αντιδράσεις, στο φαινόμενο της σύντηξης και στις αρχές λειτουργίας των διατάξεων σύντηξης.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται η φυσική του προβλήματος. Γίνεται αναφορά στη φυσική συναγωγή και στην επίδραση των εσωτερικών πηγών και του μαγνητικού πεδίου στο πρόβλημά μας.

Στο κεφάλαιο 3 δίνεται το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις που αφορούν το μοντέλο μας και γίνεται αδιαστατοποίησή τους.

Στο κεφάλαιο 4 περιγράφεται το αριθμητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος. Ακολουθεί η παρουσίαση της επέκτασης του κώδικα.

Στο κεφάλαιο 5 γίνεται μια εισαγωγή στην παραγωγή περιοδικών λύσεων και στην ανάλυση ευστάθειας. Δίνεται ένα λυμένο πρόβλημα ως παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του θέματος.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και γίνεται σχολιασμός τους.

Το κεφάλαιο 7 περιέχει τα συμπεράσματα και τις προοπτικές για μελλοντική εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Πυρηνική σύντηξη και πυρηνική σχάση

Πριν εμφανιστεί η κβαντική μηχανική, η κλασική φυσική δεν μπορούσε να ερμηνεύσει ούτε το μέγεθος ούτε την σταθερότητα των ατόμων. Πειράματα σκέδασης που άρχισαν το 1911 από το διάσημο νεοζηλανδό φυσικό Ernest Rutherford έδειξαν ότι σχεδόν όλη η μάζα και ολόκληρο το θετικό φορτίο του ατόμου είναι συγκεντρωμένα σε μια μικρή κεντρική περιοχή που ο Rutherford αποκάλεσε «πυρήνα» του ατόμου. Το μεγαλύτερο μέρος του ατόμου είναι κενός χώρος! Σήμερα γνωρίζουμε πως η ραδιενέργεια οφείλεται στη διάσπαση του ασταθούς πυρήνα των ατόμων ορισμένων χημικών στοιχείων, κατά την οποία εκπέμπεται ακτινοβολία με τη μορφή ακτίνων άλφα, βήτα ή γάμμα, και προκύπτει ένας πυρήνας ατόμου ενός άλλου χημικού στοιχείου. Ο Rutherford έδειξε ότι οι θετικά φορτισμένες, βαριές, διεισδυτικές ακτίνες άλφα ήταν στην πραγματικότητα άτομα ηλίου που είχαν χάσει δύο ηλεκτρόνια. Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι ακτίνες βήτα ήταν ηλεκτρόνια και οι ακτίνες γάμμα φωτόνια μεγάλης ενέργειας. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια συγκρατούνται μέσα στον πολύ μικρό όγκο του πυρήνα από δυνάμεις που είναι πολύ ισχυρότερες από την ηλεκτρική άπωση Coulomb μεταξύ των πρωτονίων. Επιπλέον, αυτές οι «ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις» επιτρέπουν μόνο σε ορισμένους αριθμούς νετρονίων και πρωτονίων να συνδυαστούν για να σχηματίσουν σταθερούς πυρήνες. Ο πιο απλός πυρήνας είναι εκείνος του υδρογόνου, αφού αποτελείται από ένα μόνο πρωτόνιο. Οι επόμενοι πιο απλοί πυρήνες είναι τα σωματίδια άλφα, που είναι πυρήνες ηλίου με δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση του πυρήνα του δευτερίου, που περιέχει ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια σύνδεσης Σ :

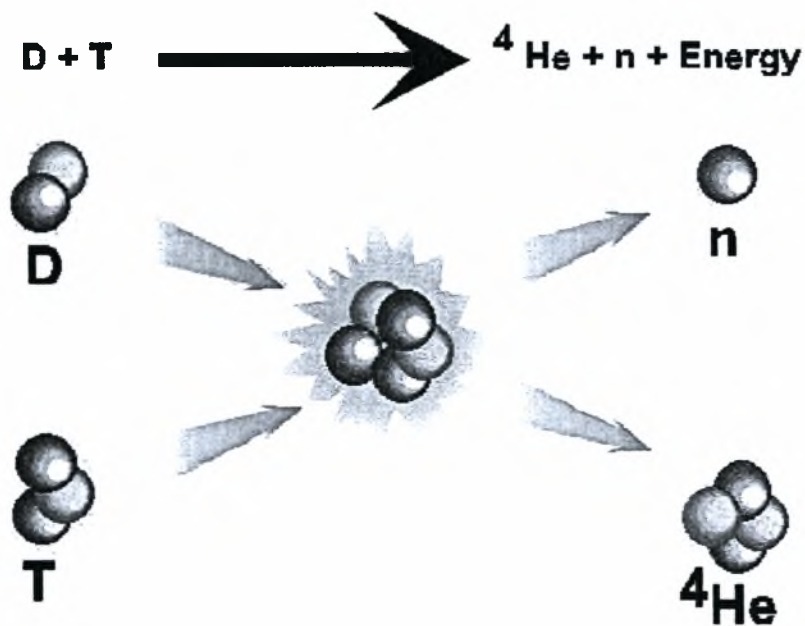
$$\Sigma = m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 \quad (1.1)$$

ενέργεια ενέργεια μάζας ενέργεια μάζας ενέργεια μάζας
 σύνδεσης = πρωτονίου + νετρονίου - δευτερίου

Χρησιμοποιώντας τις τιμές μάζας που έχουμε από πειράματα φασματομετρίας μάζας [2], βρίσκουμε ότι η ενέργεια σύνδεσης είναι περίπου 2 MeV. Αυτή η ενέργεια θα απελευθερωνόταν αν μπορούσαμε να πάρουμε ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο και να τα τοποθετήσουμε μαζί για να σχηματίσουν ένα άτομο δευτερίου. Εδώ χρειάζεται να πούμε δυο

λόγια για τις μονάδες μέτρησης της ενέργειας. Ένα ηλεκτρονιοβόλτ (eV) είναι το ποσό της ενέργειας που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν κινηθεί μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού ένα βολτ. Για διαδικασίες που αναφέρονται στον πυρήνα οι ενέργειες είναι πολύ μεγαλύτερες, και μια κατάλληλη μονάδα ενέργειας είναι το ένα εκατομμύριο ηλεκτρονιοβολτ ή «1 MeV» για συντομία. Μετρώντας τις μάζες όλων των διαφορετικών πυρήνων μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια σύνδεσης για τον καθένα. Η ενέργεια σύνδεσης, αρχίζοντας από 2 MeV περίπου που έχουμε υπολογίσει για το δευτέριο, φτάνει σε ένα μέγιστο γύρω στα 8,8 MeV για τον πυρήνα του σιδήρου (Fe) . Υπάρχουν δυο τρόποι να απελευθερωθεί ενέργεια από έναν πυρήνα. Ο πρώτος είναι η διαδικασία της σύντηξης, κατά την οποία δύο πυρήνες ελαφρότεροι από τον πυρήνα του σιδήρου συντήκονται για να σχηματίσουν ένα βαρύτερο πυρήνα. Ο δεύτερος είναι η σχάση, κατά την οποία ένας πολύ βαρύς πυρήνας διασπάται σε δύο ελαφρότερους. Η ενέργεια σύνδεσης που απελευθερώνεται σε αυτές τις δύο διαδικασίες εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια των τελικών προϊόντων της αντίδρασης.

Ας εξετάσουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση αντίδρασης σύντηξης. Παρατηρώντας όλες τις διαφορετικές ενέργειες σύνδεσης μπορούμε να βρούμε πολλές δυνατές αντιδράσεις. Ίσως η πιο καλή υποψήφια για μια αντίδραση σύντηξης είναι η αντίδραση δευτερίου – τριτίου. Σε αυτήν χρησιμοποιούνται τα ισότοπα του υδρογόνου στην αντίδραση :



Σχήμα 1.1 Αντίδραση πυρηνικής σύντηξης D – T



δευτέριο + τρίτιο \rightarrow ήλιο + νετρόνιο

από την οποία απελευθερώνεται ενέργεια 17.6 MeV ($1\text{MeV} = 0.16 \times 10^{-12} \text{ J}$).

(Τα ισότοπα ενός στοιχείου έχουν στον πυρήνα τον ίδιο αριθμό πρωτονίων αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων. Επειδή τα ισότοπα έχουν τον ίδιο αριθμό πρωτονίων, άρα και τον ίδιο αριθμό ηλεκτρονίων, έχουν και τις ίδιες χημικές ιδιότητες). Το πρόβλημα της παραγωγής ενέργειας με αυτό τον τρόπο συνίσταται στο ότι είναι δύσκολο να φτιάξουμε ένα περιβάλλον στο οποίο να μπορεί να πραγματοποιηθεί και να συντηρηθεί μια τέτοια αντίδραση. Αυτό συμβαίνει λόγω του ηλεκτρικού απωστικού φράγματος (φράγμα Coulomb) που συναντούν τα σωματίδια καθώς πλησιάζουν μεταξύ τους. Ενώ είναι εύκολο να πραγματοποιήσουμε αυτή την αντίδραση χρησιμοποιώντας δέσμες δευτερίου που επιταχύνονται σε ενέργειες μεγαλύτερες από το φράγμα αυτό δεν είναι πρακτικά δυνατό να παράγουμε με αυτόν τον τρόπο μεγάλες ποσότητες εμπορεύσιμων ποσών ενέργειας. Αντίθετα, η διαδικασία που ακολουθείται στην έρευνα για την παραγωγή φθηνής ενέργειας από σύντηξη είναι η θέρμανση των αρχικών στοιχείων σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες (περίπου 100-200 εκατομμύρια βαθμούς Kelvin) , έτσι ώστε να υπάρχει αρκετή κινητική ενέργεια στις συγκρούσεις των ιόντων του πλάσματος (το πλάσμα είναι ιονισμένο αέριο αποτελούμενο από ηλεκτρόνια και ιόντα), για να μπορέσει να γίνει αυτή η αντίδραση. Θεωρητικοί υπολογισμοί που επιβεβαιώνονται από τα μέχρι σήμερα πειράματα[3] δείχνουν ότι πρέπει ταυτόχρονα να επιτευχθούν τα εξής μεγέθη:

Θερμοκρασία ιόντων T_i	$100-200 \times 10^6 \text{ K}$
Πυκνότητα ιόντων n_i	$2-3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$
Χρόνος συγκράτησης ενέργειας τ_e	1-5 s

Για συνεχή λειτουργία του αντιδραστήρα χωρίς παροχή εξωτερικής ενέργειας πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$n_i T_i \tau_e \leq 6 \times 10^{28} (\text{m}^{-3} \text{ K s}), \text{ κριτήριο Lawson.}$$

1.2 Διατάξεις σύντηξης

Για να πραγματοποιηθεί η αντίδραση σύντηξης μέσα στον αντιδραστήρα απαιτείται η θέρμανση των αρχικών στοιχείων σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, έτσι ώστε να υπάρχει αρκετή κινητική ενέργεια στις συγκρούσεις των ατόμων και των ιόντων του πλάσματος. Η δημιουργία τέτοιων υψηλών θερμοκρασιών και η «συγκράτηση» του θερμού πλάσματος παρουσιάζει τρομερές τεχνικές δυσκολίες. Η συγκράτηση του πλάσματος επιτυγχάνεται μέσω ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Το πεδίο δημιουργείται με πηνία σε διατάξεις τύπου 'Τόκαμακ' (Σχ. 1.2).

Το τόκαμακ είναι μια δακτυλιοειδής συσκευή όπου ο περιορισμός και η κυκλική ροή του πλάσματος επιτυγχάνονται με μαγνητικά πεδία. Στο τόκαμακ το δακτυλιοειδές μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από τα τοροειδή πηνία. Η κυκλική ροή του πλάσματος δημιουργεί ένα επί πλέον πολοειδές μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε το συνολικό μαγνητικό πεδίο να είναι ελικοειδές. Σε άλλες διατάξεις (stellarators) το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται μόνο από πηνία χωρίς ηλεκτρικό ρεύμα στο πλάσμα (Σχ. 1.3). Επειδή το πλάσμα στο τόκαμακ περιορίζεται από τα μαγνητικά πεδία, η συμπεριφορά του πλάσματος εξαρτάται από την ένταση και τη δομή του μαγνητικού πεδίου.

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε πώς ένα μαγνητικό πεδίο περιορίζει το πλάσμα για μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της πειραματικής διάταξης. Αντίθετα με ένα συνηθισμένο αέριο του οποίου τα άτομα ή μόρια είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, τα συστατικά του πλήρως ιονισμένου πλάσματος είναι θετικά φορτισμένοι πυρήνες και αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Ένα μαγνητικό πεδίο ασκεί μια δύναμη Lorentz σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο, υποχρεώνοντάς το να κινείται σε μια αυστηρά καθορισμένη τροχιά γύρω από τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Με το να περιβάλλουμε το πεδίο σε ένα σχήμα όπως αυτό του τόκαμακ αποφεύγουμε την απώλεια πλάσματος. Λέγοντας απώλεια πλάσματος εννοούμε ότι η ενέργεια του πλάσματος χάνεται λόγω της επαφής του πλάσματος με τα τοιχώματα του πυρήνα αντιδραστήρα ή της μετάπτωσης μέρους του αερίου σε μη ιονισμένη κατάσταση. Αν το μαγνητικό πεδίο διαμορφωθεί προσεκτικά και κατάλληλα, τα σωματίδια μπορούν να παγιδευτούν από αυτό ώστε το πλάσμα να περιοριστεί. Στη συνέχεια μπορούμε να θερμάνουμε το πλάσμα και να επιτύχουμε τη σύντηξη με μικρότερες πυκνότητες σωματιδίων.

Η θέρμανση του πλάσματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους :

Ωμική θέρμανση

Καθώς το πλάσμα είναι ένας ηλεκτρικός αγωγός, είναι εφικτή η θέρμανσή του με τη διοχέτευση ρεύματος διαμέσου αυτού. Στην πραγματικότητα, το ρεύμα που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο θερμαίνει επίσης το πλάσμα. Η θερμότητα που παράγεται εξαρτάται από την αντίσταση του πλάσματος και την ένταση του ρεύματος. Όμως, καθώς η θερμοκρασία του πλάσματος αυξάνεται η αντίσταση ελαττώνεται και η μέθοδος αυτή γίνεται ολοένα και λιγότερο αποτελεσματική. Η μέγιστη θερμοκρασία που είναι εφικτή με την ωμική θέρμανση σε ένα αντιδραστήρα τύπου Tokamak είναι περίπου 20-30 εκατομμύρια βαθμούς Κελσίου. Για την επίτευξη ακόμα υψηλότερων θερμοκρασιών πρέπει να χρησιμοποιηθούν επιπρόσθετα άλλες μέθοδοι θέρμανσης.

Παρεμβολή δέσμης ουδέτερων ατόμων

Αυτή η μέθοδος συνίσταται στην έγχυση ατόμων με υψηλή ενέργεια μέσα σε πλάσμα που έχει θερμανθεί με την ωμική θέρμανση και περιορίζεται μαγνητικά. Τα άτομα αυτά ιονίζονται αμέσως και παγιδεύονται από το μαγνητικό πεδίο. Τα ιόντα υψηλής ενέργειας που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο μεταφέρουν μέρος της ενέργειάς τους στα σωματίδια του πλάσματος με αλληπάλληλες συγκρούσεις αυξάνοντας έτσι τη θερμοκρασία του πλάσματος.

Μαγνητική συμπίεση

Ένα αέριο μπορεί να θερμανθεί με μια απότομη συμπίεση. Κατά τον ίδιο τρόπο η θερμοκρασία του πλάσματος αυξάνεται απότομα με την αύξηση του μαγνητικού πεδίου περιορισμού. Καθώς η συμπίεση του πλάσματος φέρνει τα ιόντα πλησιέστερα μεταξύ τους, η διαδικασία έχει ένα πρόσθετο πλεονέκτημα., αυτό της διευκόλυνσης στην επίτευξη της επιθυμητής πυκνότητας σε ένα αντιδραστήρα σύντηξης.

Θέρμανση με ραδιοκύματα

Στη θέρμανση με ραδιοκύματα κύματα υψηλής συχνότητας παράγονται έξω από τον αντιδραστήρα. Αν αυτά τα κύματα είναι μιας συγκεκριμένης συχνότητας, ή μήκους κύματος, η ενέργειά τους μπορεί να μεταφερθεί στα φορτισμένα σωματίδια του πλάσματος τα οποία, με τη σειρά τους, συγκρούονται μεταξύ τους αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο τη θερμοκρασία της μάζας του πλάσματος.

Αδρανής συμπίεση

Αυτή είναι παρόμοια με τη μαγνητική συμπίεση, όπου η ελάττωση του όγκου των αερίων προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας. Σε αυτή τη μέθοδο, όμως, η συμπίεση επιτυγχάνεται με

τη χρήση δέσμης laser ή δέσμης σωματιδίων για τη θέρμανση της εξωτερικής επιφάνειας του στόχου ο οποίος έχει την μορφή σφαιριδίου. Συγκεκριμένα, η δέσμη ενέργειας θερμαίνει το φλοιό του σφαιριδίου αυξάνοντας την πίεση του. Το πλάσμα επιταχύνεται και η αδράνεια των καταρρεόντων ατόμων μέσα στο σφαιρίδιο επιτρέπει τη συμπίεσή του και συνεπώς τη θέρμανση του.

1.3 Πλεονεκτήματα της σύντηξης

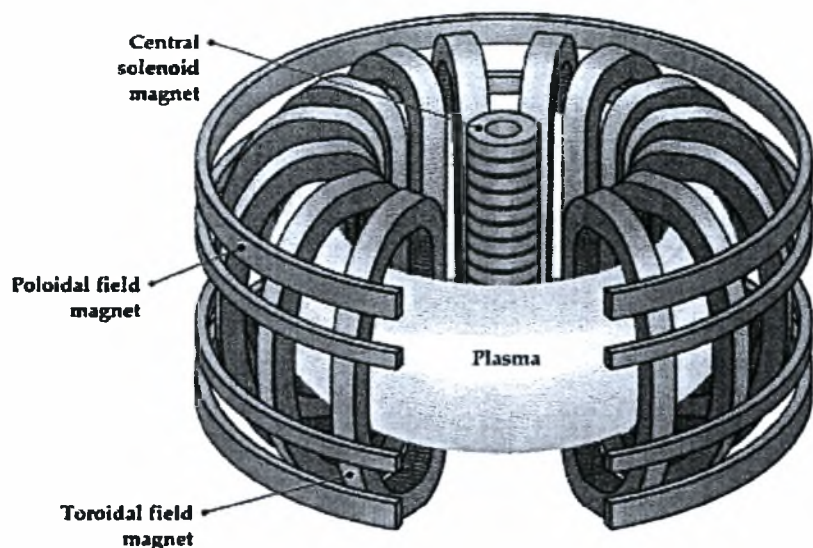
Η πυρηνική σύντηξη, όπως και η πυρηνική διάσπαση, δεν παράγει αέρια που εντείνουν το φαινόμενο του θερμοκηπίου, ούτε αιθαλομίχλη, ούτε δημιουργεί όξινη βροχή. Η μεγαλύτερη πηγή 'μόλυνσης' της ατμόσφαιρας από τη σύντηξη θα μπορούσε να πει κανείς ότι είναι το ήλιο το οποίο είναι χημικά αδρανές και αποτελεί σημαντικό συστατικό της γήινης ατμόσφαιρας. Η σύντηξη δεν είναι χημική αντίδραση, κι έτσι δεν δημιουργεί παραπροϊόντα που θα μπορούσαν να μολύνουν την ατμόσφαιρα.

Η σύντηξη καταναλώνει λιγότερη μάζα καυσίμου ανά μονάδα παραγόμενης ενέργειας από κάθε άλλη πηγή ενέργειας. Επίσης υπάρχει πολύ περισσότερο διαθέσιμο καύσιμο σύντηξης από οποιαδήποτε άλλη πηγή ενέργειας με κατανάλωση κάποιου άλλου καυσίμου. Το δευτέριο και το λίθιο είναι τόσο διαδεδομένα, το δευτέριο υπάρχει στο νερό των ωκεανών και το λίθιο σε διάφορα ορυκτά αλλά και στο θαλασσινό νερό, ώστε τα αποθέματα τους είναι στην ουσία ανεξάντλητα.

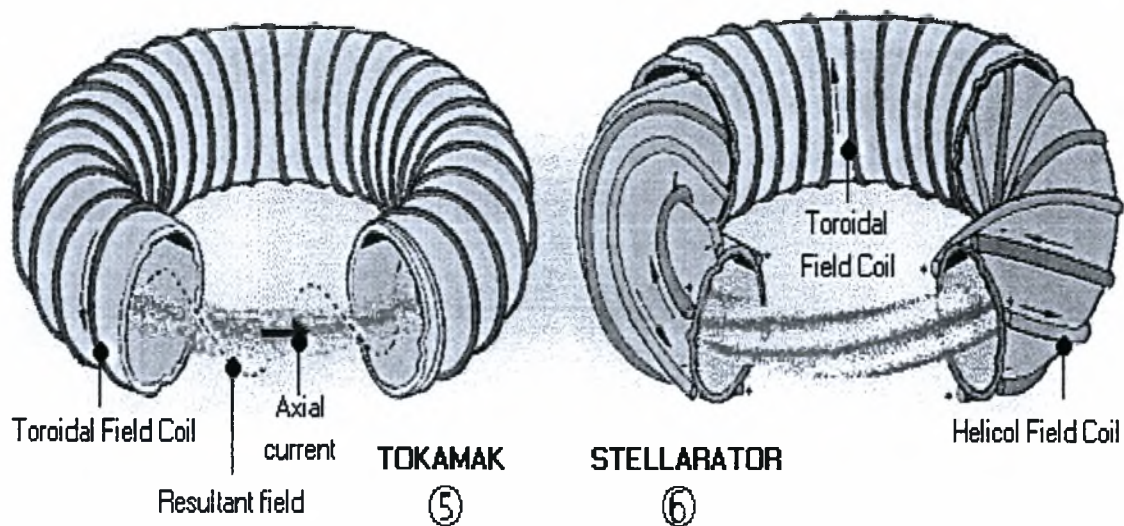
Μεγάλα ατυχήματα, όπως αυτό του Τσέρνομπιλ, είναι ουσιαστικά αδύνατο να συμβούν σε ένα αντιδραστήρα σύντηξης. Σε περίπτωση αστάθειας στη λειτουργία του αντιδραστήρα σύντηξης ο θάλαμος του ψύχεται γρήγορα κάτω από τη θερμοκρασία που απαιτείται για να συνεχιστεί η αντίδραση με αποτέλεσμα να σταματήσει η λειτουργία του. Είναι επίσης τόσο εξαιρετικά δύσκολο να συντηρηθεί η αντίδραση σύντηξης, που αν οτιδήποτε δεν λειτουργήσει σωστά η αντίδραση θα διακοπεί αμέσως.

Η πυρηνική αντίδραση σύντηξης DT, που περιγράψαμε παραπάνω, έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή νετρονίων. Τα νετρόνια απορροφούνται από τα τοιχώματα (κέλυφος) του αντιδραστήρα και τα καθιστούν ραδιενεργά. Ο βαθμός στον οποίο τα τοιχώματα του αντιδραστήρα γίνονται ραδιενεργά εξαρτάται από ποιο υλικό είναι κατασκευασμένος ο αντιδραστήρας. Οι αντιδραστήρες φτιαγμένοι από καρβίδιο του πυριτίου ή βανάδιο γίνονται μόνο ελαφρώς ραδιενεργοί από την ακτινοβολία που απορροφάται. Μόλις διακοπεί η λειτουργία ενός αντιδραστήρα σύντηξης, οι ραδιενεργές ιδιότητες αποσυντίθενται σε ένα

αποδεκτό επίπεδο σε περίπου 20 έτη, σε αντίθεση με τα απόβλητα της πυρηνικής σχάσης που δεν αποσυντίθενται για περισσότερα από 10.000 έτη. Συνεπώς, η ακτινοβολία από τη σύντηξη δεν αποτελεί σημαντική απειλή για την ανθρώπινη υγεία και το περιβάλλον.



Σχήμα 1.2 Σχηματική αναπαράσταση αντιδραστήρα τύπου Tokamak



Σχήμα 1.3 Μαγνητικά πεδία σε αντιδραστήρες τύπου Tokamak και Stellarator

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

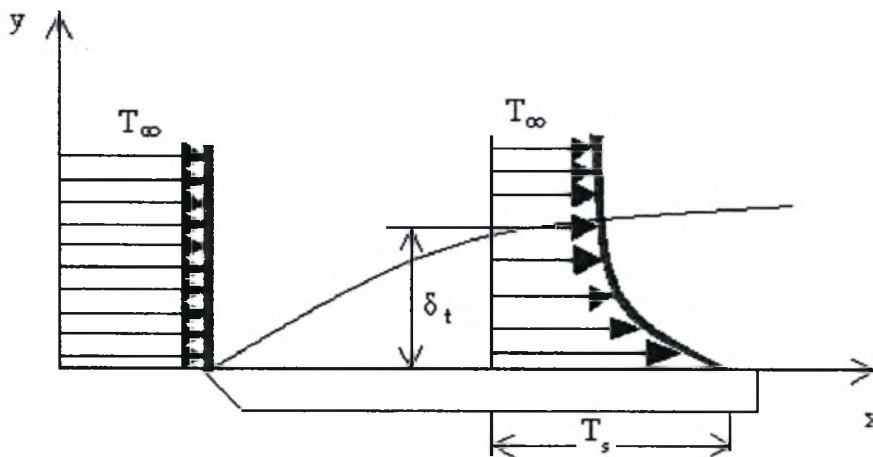
2.1 Εξαναγκασμένη και Φυσική Συναγωγή

Η συναγωγή αναφέρεται στη μετάδοση θερμότητας σε κινούμενα ρευστά. Στην περίπτωση αυτή συνυπάρχουν δύο μηχανισμοί μετάδοσης ενέργειας. Ο πρώτος είναι η διάχυση ενέργειας μέσω των σωματιδιακών αλληλεπιδράσεων (όπως στην περίπτωση της αγωγής), ενώ ο δεύτερος μηχανισμός συνδέεται με τη μακροσκοπική κίνηση του ρευστού. Κατά τη μακροσκοπική κίνηση του ρευστού, τα σωματίδια που απαρτίζουν το ρευστό μεταφέρουν μαζί με τη μάζα τους και τη θερμική ενέργεια που σχετίζεται με την τυχαία μεταφορική κίνησή τους, την εσωτερική περιστροφή τους και την ταλάντωσή τους. Έτσι η συνολική μετάδοση θερμικής ενέργειας είναι το άθροισμα της μετάδοσης λόγω συγκρούσεων (διάχυση) και της μετάδοσης λόγω της μεταφοράς της θερμικής ενέργειας των σωματιδίων μέσω της μακροσκοπικής κίνησης του ρευστού.

Η κύρια περιοχή εφαρμογής της μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή είναι η μετάδοση από στερεή επιφάνεια προς κινούμενο ρευστό σε επαφή με την επιφάνεια, ή το αντίθετο. Γνωρίζουμε από τη μηχανική ρευστών ότι στην περιοχή επαφής του ρευστού με στερεή επιφάνεια αναπτύσσεται το λεγόμενο οριακό στρώμα ταχύτητας, ή οριακό υδραυλικό στρώμα, ως αποτέλεσμα της δράσης των δυνάμεων συνεκτικότητας στο εσωτερικό του ρευστού. Στο οριακό στρώμα εμφανίζεται ομαλή μετάβαση από την ταχύτητα της ροής μακριά από το τοίχωμα, ταχύτητα ελεύθερης ροής, στη μηδενική ταχύτητα στην επιφάνεια του ακίνητου τοιχώματος. Στην περίπτωση κινούμενης επιφάνειας, η ταχύτητα της ροής πάνω στην επιφάνεια ισούται με την ταχύτητα της επιφάνειας, συνθήκη μη ολίσθησης. Το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται κατόπιν της ροής.

Στην περίπτωση διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ της στερεής επιφάνειας και του ρευστού εμφανίζεται το λεγόμενο *θερμικό οριακό στρώμα* (*thermal boundary layer*, Σχ. 2.1), του οποίου το πάχος μπορεί να είναι ίσο, μικρότερο ή μεγαλύτερο από αυτό του υδραυλικού οριακού στρώματος. Εντός του θερμικού οριακού στρώματος εμφανίζεται ομαλή μεταβολή της θερμοκρασίας από τη θερμοκρασία της στερεής επιφάνειας T_s , μέχρι τη θερμοκρασία της κύριας ροής T_0 .

Επειδή στην περιοχή κοντά στο στερεό τοίχωμα οι ταχύτητες της ροής είναι πολύ μικρές, ο μηχανισμός της διάχυσης είναι αυτός που επικρατεί. Αντίθετα, μακριά από το τοίχωμα, όπου έχουν αυξηθεί οι ταχύτητες ροής, επικρατεί η μετάδοση θερμότητας με συναγωγή. Ειδικά πάνω στο τοίχωμα, όπου η σχετική ταχύτητα της ροής είναι μηδέν, υπάρχει μόνο μετάδοση θερμότητας με διάχυση.



Σχήμα 2.1 Ανάπτυξη θερμικού οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα

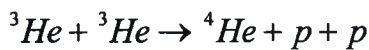
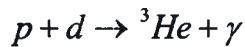
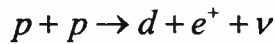
Η φυσική συναγωγή στο πρόβλημά μας οφείλεται στην επίδραση ανωστικών δυνάμεων στο ρευστό. Οι δυνάμεις αυτές προκαλούνται από το συνδυασμό μιας κλίσης πυκνότητας και της βαρυτικής δύναμης. Η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των θερμών τοιχωμάτων του πυρήνα του αντιδραστήρα και των τοιχωμάτων του ψυχρότερου εξωτερικού μανδύα (που περιβάλλει το υγρό μέταλλο) δημιουργεί την κλίση πυκνότητας ($\partial\rho/\partial T < 0$) με αποτέλεσμα την εμφάνιση ανωστικών δυνάμεων στο ρευστό και περιοχών ανακυκλοφορίας. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά θερμοκρασίας, τόσο ισχυρότερη είναι η ενεργός δύναμη της ροής, η ταχύτητα του ρευστού και η μεταφορά θερμότητας.

Η φυσική συναγωγή παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές. Μερικές από αυτές αφορούν στην τήξη κραμάτων σε υψηλές θερμοκρασίες όπως τιτανίου, αλογόνων με βάση το νικέλιο ή το αλουμίνιο [4,5] και στη απαγωγή της θερμότητας που παράγεται κατά την λειτουργία μικρο-ηλεκτρονικών διατάξεων, π.χ. μικροεπεξεργαστών, κυκλωμάτων ημιαγωγών κτλ. [6].

2.2 Εσωτερικές Πηγές

Κρίνεται σκόπιμη μία αναφορά στην ύπαρξη εσωτερικών πηγών, ώστε να διαφανεί ο λόγος για τον οποίο καθιστούν πιο ρεαλιστικό το μοντέλο που αναλύεται στην εργασία αυτή.

Υπάρχουν δύο είδη αντιδράσεων σύντηξης, αυτή που συμβαίνει στον Ήλιο και η αντίδραση DT (δευτέριο – τρίτιο). Η σειρά των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων στον Ήλιο ονομάζεται «κύκλος πρωτονίου – πρωτονίου».



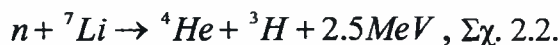
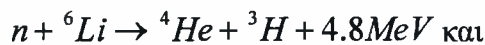
Όπως φαίνεται από τις παραπάνω αντιδράσεις, σε αυτό το είδος των αντιδράσεων θερμοπυρηνικής σύντηξης δεν έχουμε παραγωγή νετρονίων.

Αντίθετα, στην αντίδραση DT,

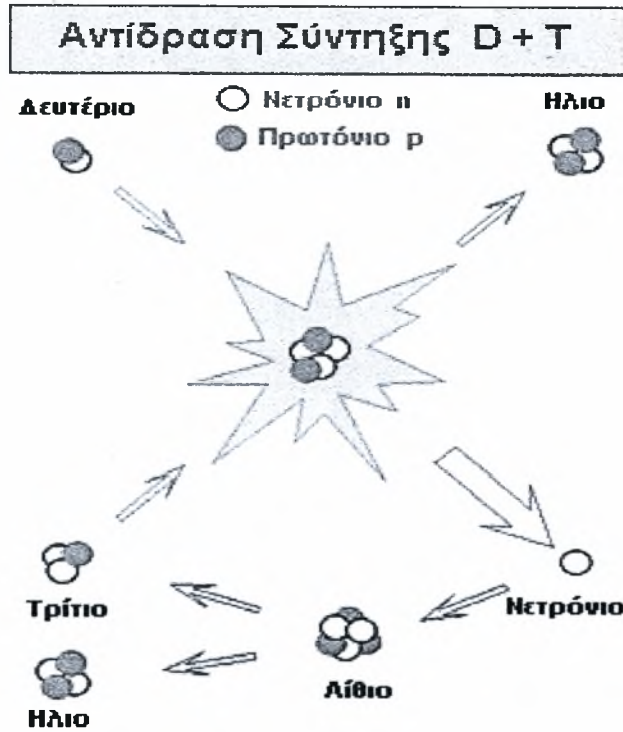


έχουμε παραγωγή νετρονίων. Η θερμοπυρηνική αντίδραση (DT) έχει το μεγαλύτερο ρυθμό αντίδρασης (reaction rate) στις θερμοκρασίες πλάσματος που είναι εργαστηριακά εφικτές. Επίσης παράγει μεγαλύτερη ποσότητα ενέργειας συγκριτικά με άλλες αντιδράσεις.

Ένας αντιδραστήρας σύντηξης που χρησιμοποιεί καύσιμο DT, θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει ένα θάλαμο κενού όπου πραγματοποιούνται οι αντιδράσεις. Έξω από το θάλαμο αυτό θα πρέπει να υπάρχει ένα κάλυμμα παραγωγής τριτίου που θα απορροφά τα νετρόνια από την αντίδραση σύντηξης και το οποίο θα περιέχει λίθιο για την παραγωγή τριτίου μέσω των αντιδράσεων



Μέσα και έξω από το κάλυμμα θα πρέπει να υπάρχει εξοπλισμός συλλογής τριτίου και απαγωγής θερμότητας, αντίστοιχα.

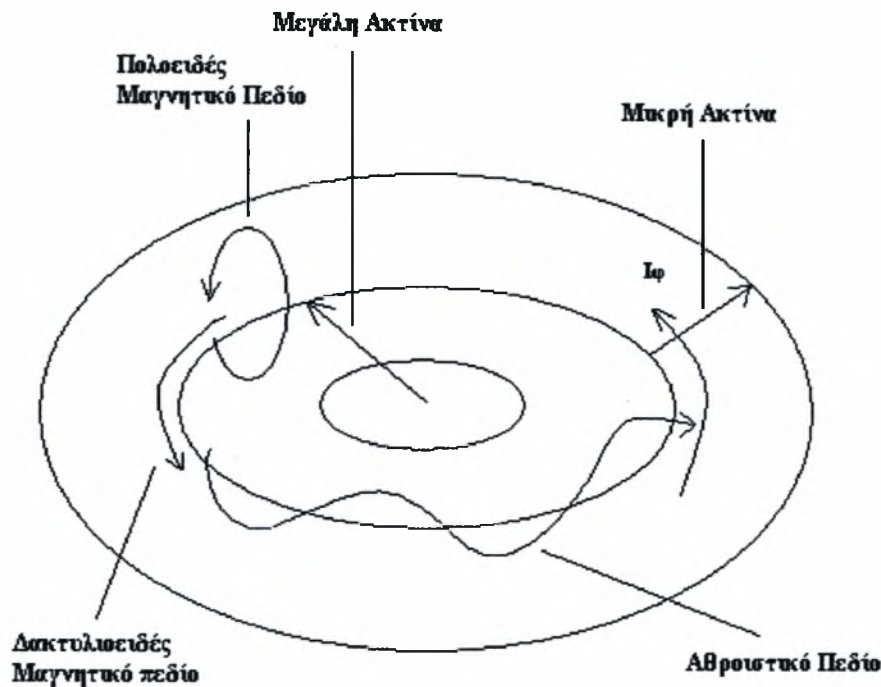


Σχήμα 2.2 Η αντίδραση σύντηξης DT και η αντίδραση των νετρονίων με τα άτομα του υγρού μετάλλου (Li)

Τα νετρόνια βομβαρδίζουν τα άτομα Li και η αντίδραση που συντελείται είναι εξώθερμη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η θερμοκρασία του υγρού μετάλλου, που περιβάλλει τον θάλαμο αντίδρασης, να αυξάνει. Έτσι, στο μοντέλο μας, κάνουμε την παραδοχή ότι αυτό το αποτέλεσμα των αντιδράσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με την ύπαρξη εσωτερικών πηγών μέσα στο ρευστό συναγωγής (υγρό μέταλλο). Το αριθμητικό μοντέλο είναι έτσι διαμορφωμένο ώστε να μπορούμε να καθορίζουμε την ένταση των εσωτερικών πηγών μέσω του αριθμού Grashof (Gr_i). Με αυτό τον τρόπο φαίνεται η επίδραση που έχει η ένταση των εσωτερικών πηγών στη ροή.

2.3 Επίδραση του μαγνητικού πεδίου

Ο αντιδραστήρας Tokamak είναι μια δακτυλιοειδής συσκευή όπου ο περιορισμός και η κυκλική ροή του πλάσματος επιτυγχάνονται με μαγνητικά πεδία.



Σχήμα 2.3 Σχηματική αναπαράσταση της δράσης των μαγνητικών πεδίων σε έναν αντιδραστήρα Tokamak

Το δακτυλιοειδές μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από τα τοροειδή πηνία. Η κυκλική ροή του πλάσματος δημιουργεί πολοειδές μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε το συνολικό μαγνητικό πεδίο να είναι ελικοειδές. Το δακτυλιοειδές μαγνητικό πεδίο έχει ένταση περίπου 5 Tesla, δηλαδή περίπου 10^5 φορές το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια της Γης.

Το μαγνητικό πεδίο επιδρά και στη ροή του ρευστού συναγωγής (υγρό μέταλλο) που υπάρχει έξω από το θάλαμο αντίδρασης. Η επίδραση αυτή εκφράζεται μέσω της δύναμης Lorentz. Όσο μεγαλύτερες είναι οι ταχύτητες που αναπτύσσονται στο ροϊκό πεδίο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η επίδραση της συγκεκριμένης δύναμης, η οποία αντιτίθεται στην κίνηση του ρευστού. Το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από την κίνηση του ρευστού είναι σχετικά πολύ μικρότερης έντασης από το εξωτερικό πεδίο και άρα θεωρείται αμελητέο.

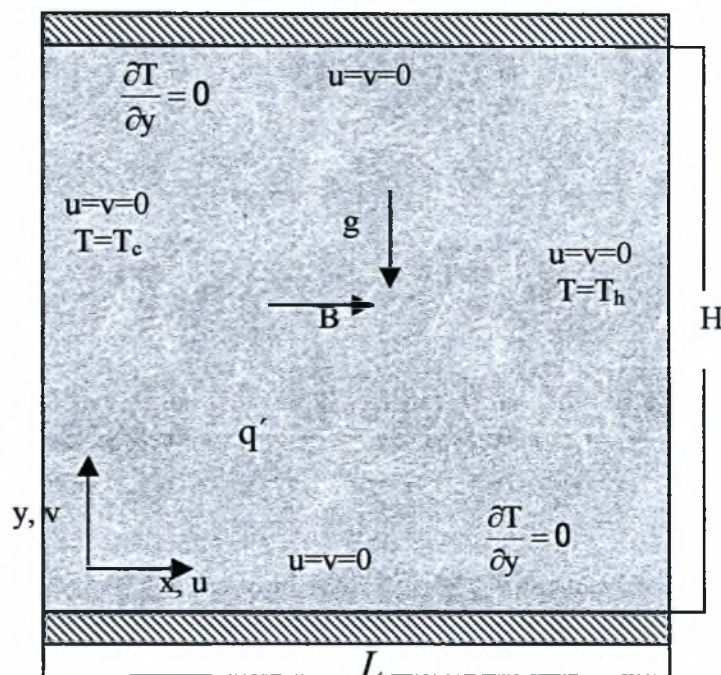
Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη ροή καθορίζεται μέσω του αριθμού Hartmann,

$$Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} . \text{ Με σταθερά τα υπόλοιπα μεγέθη, όσο αυξάνει η ένταση του μαγνητικού}$$

πεδίου B_0 τόσο αυξάνει ο αριθμός Ha .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ



Σχήμα 3.1 Σχηματική διάταξη της μοντελοποίησης του προβλήματος

Σε μία πρώτη προσπάθεια να κατανοήσουμε την ταυτόχρονη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και του πεδίου θερμοκρασιών στην διαμόρφωση και την ευστάθεια του πεδίου ροής, εξετάζουμε την φυσική συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής. Σε πρώτη προσέγγιση θεωρούμε αμελητέο πεδίο ταχυτήτων καθώς και αμελητέες μεταβολές του πεδίου θερμοκρασίας και ταχύτητας στην κατεύθυνση z εγκάρσια στο επίπεδο της διατομής, xy . Οι δύο πλευρές του ορθογωνικού χωρίου που είναι κάθετες στο πεδίο βαρύτητας είναι θερμικά μονωμένες ενώ οι άλλες δύο έχουν θερμοκρασία T_c και T_h , αντιστοίχως. Σε όλη δε την περιφέρεια της διατομής ισχύει η συνθήκη μη εισροής και μη ολίσθησης. Επίσης θεωρούμε πολύ μικρές μεταβολές της πυκνότητας με την μεταβολή της θερμοκρασίας, σε σχέση με την πυκνότητα του ρευστού, ρ_0 , στην μέση θερμοκρασία $(T_h+T_c)/2$ (υπόθεση Boussinesq).

Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι, το μαγνητικό πεδίο, \vec{B}_0 , εφαρμόζεται παράλληλα με την βαθμίδα θερμοκρασίας, x διεύθυνση, και κάθετα στο πεδίο βαρύτητας. Επί πλέον, η

επίδραση της ακτινοβολίας στην μεταφορά θερμότητας προσομοιώνεται με την ύπαρξη ομοιόμορφα κατανεμημένων πηγών ενέργειας εντάσεως, q . Τέλος, υποθέτουμε αμελητέα μαγνητική επαγωγή με αποτέλεσμα ο μαγνητικός αριθμός Reynolds να είναι πολύ μικρός και το μαγνητικό πεδίο να είναι ομοιόμορφο μέσα στο πεδίο ροής, $\vec{B} = \vec{B}_0$. Οι παραπάνω παραδοχές ενσωματώνονται αναλυτικά στις εξισώσεις που περιγράφουν την ισορροπία και την δυναμική του προβλήματος στις παρακάτω υποενότητες.

3.1 Ρευστοδυναμική

3.1.1 Εξίσωση συνέχειας

Η γενική μορφή είναι :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (3.1)$$

Στην περίπτωση μόνιμης ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) και ασυμπίεστης ροής, οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες και η εξίσωση (3.1) γίνεται:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.2)$$

3.1.2 Εξίσωση ορμής

Η γενική εξίσωση για οποιαδήποτε μορφή ροής, που χαρακτηρίζεται από σταθερό ιξώδες και πυκνότητα, είναι :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu_0 \vec{\nabla}^2 \vec{u} + f \quad (3.3)$$

όπου το σύμβολο f αναφέρεται σε δυνάμεις, εκτός από τις βαρυτικές, που επηρεάζουν τη ροή.

3.1.3 Εξίσωση διατήρησης ενέργειας

Η γενική εξίσωση διατήρησης ενέργειας είναι :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \vec{\nabla}^2 T + q \quad (3.4)$$

όπου q εκφράζει τον όρο γένεσης και α ($\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$, $[m^2/s]$) είναι ο όρος της θερμικής διαχυτότητας.

3.2 Ηλεκτροδυναμική

3.2.1 Ηλεκτροστατικό πεδίο

Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ένα αστρόβιλο πεδίο παραγόμενο από ακίνητες πηγές. Ξεκινώντας από το νόμο του Gauss και την αστροβιλότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου, και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Gauss και Stokes της διανυσματικής ανάλυσης, καταλήγουμε στις βασικές εξισώσεις του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Οι βασικές εξισώσεις, σε διαφορική μορφή, που προκύπτουν για το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.6)$$

όπου \vec{E} η ένταση του πεδίου.

3.2.2 Μαγνητοστατικό πεδίο

Το μαγνητοστατικό πεδίο είναι ένα στρόβιλο πεδίο παραγόμενο από κινούμενες πηγές (φορτία), όπου η ροή φορτίου, δηλαδή η ποσότητα φορτίου που διαπερνά συγκεκριμένη επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, είναι σταθερή. Οι μαθηματικές εξισώσεις που το εκφράζουν είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \omega(\vec{r}) \quad (3.8)$$

όπου $\vec{\omega}(\vec{r})$ η πυκνότητα στροβίλων του πεδίου στη μαθηματική του εκδοχή. Στο φυσικό πρόβλημα : $\vec{\omega}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$,όπου $\vec{j}(\vec{r})$ η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

3.2.3 Εξισώσεις Maxwell

Οι σχέσεις μεταξύ ηλεκτρικών πεδίων, μαγνητικών πεδίων και των πηγών τους περιγράφονται από ένα εξαιρετικά κομψό σύνολο τεσσάρων εξισώσεων, που ονομάζονται εξισώσεις του Maxwell. Σε διαφορική μορφή οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξής:

Ο νόμος του Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

όπου ρ η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου.

Η δεύτερη εξίσωση του Maxwell δίνει την ανάλογη σχέση για τα μαγνητικά πεδία. Η εξίσωση ονομάζεται συχνά νόμος του Gauss για μαγνητικά πεδία :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.10)$$

και δείχνει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ένα σωληνοειδές πεδίο.

Η τρίτη εξίσωση είναι ο νόμος Ampere - Maxwell στον οποίο έχει συμπεριληφθεί το ρεύμα μετατόπισης $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (3.11)$$

όπου το μ_0 συμβολίζει το συντελεστή μαγνητικής διαπερατότητας του κενού.

Η τέταρτη εξίσωση είναι ο νόμος του Faraday σύμφωνα με τον οποίο ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτρικό πεδίο :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.12)$$

Οι εξισώσεις σε ολοκληρωτική μορφή είναι :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad (3.13)$$

όπου ϵ_0 συμβολίζει την διηλεκτρική σταθερά του υλικού όπου εμφανίζεται το ηλεκτροστατικό πεδίο.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.14)$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \oint_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA \quad (3.15)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}_{ol} \cdot d\vec{A} \quad (3.16)$$

Το γεγονός ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην εξίσωση (3.15) δεν είναι μηδέν δείχνει ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} που παράγεται από τη μεταβολή της μαγνητικής ροής Φ δεν είναι διατηρητικό. Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι οι ολοκληρωτικές σχέσεις προκύπτουν από τις αντίστοιχες διαφορικές με ολοκλήρωση πάνω στον κατάλληλο όγκο ή επιφάνεια ελέγχου.

3.3 Μαγνητορευστοδυναμική

3.3.1 Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη χωρίς εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (δύναμη Lorentz) δίνεται από τη σχέση :

$$\vec{f}_{em} = \vec{J} \times \vec{B} + \vec{E} \rho_{el} \quad (3.17)$$

Όταν δεν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο η δύναμη Lorentz παίρνει τη μορφή:

$$\vec{f}_{em} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.18)$$

Η δύναμη Lorentz παρέχει μια σύνδεση ανάμεσα στις εξισώσεις του ρευστού και στις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού. Με δεδομένη ροή ταχύτητας μέτρου u , η εξίσωση επαγωγής (σχέση 3.28) μας λέει πως το μαγνητικό πεδίο θα εξελιχθεί στο χρόνο. Όταν το B μεταβάλλεται, η δύναμη Lorentz δημιουργεί ανάδραση στο πλάσμα παράγοντας μια δύναμη που θα τροποποιήσει την ταχύτητα στην εξίσωση κίνησης.

Θα αναλύσουμε τις ιδιότητες της δύναμης Lorentz και θα δώσουμε κάποια φυσικά νοήματα. Πρώτα, από την εξίσωση (3.15) για αμελητέο ρεύμα μετατόπισης έχουμε :

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

όταν δεν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) = \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (3.19)$$

η δύναμη Lorentz μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) \quad (3.20)$$

Ο πρώτος όρος αναπαριστά τη δράση μιας δύναμης τάξης μεγέθους B^2/μ_0 σε διεύθυνση παράλληλη στο \vec{B} . Αυτή η δύναμη εμφανίζεται κάθε φορά που οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου καμπυλώνονται. Ο δεύτερος όρος αναπαριστά τη δράση της μαγνητικής πίεσης τάξης μεγέθους B^2/μ_0 ανά μονάδα επιφάνειας. Αυτή η δύναμη εμφανίζεται όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου, $|\vec{B}|$, μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.21)$$

και θεωρώντας ότι δεν έχουμε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, η δύναμη Lorentz γράφεται :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{em} &= \sigma (\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B} \Rightarrow \\ \vec{f}_{em} &= \sigma [(\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{u}] \Rightarrow \\ f_{em} &= \sigma [(\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{B} - |\vec{B}|^2 \vec{u}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του υπόψη υλικού.

Αν u_p και u_n οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας \vec{u} , παράλληλα και κάθετα προς το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , αντίστοιχα, και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με αυτό του μαγνητικού πεδίου, τότε :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{em} &= \sigma [(|\vec{B}| |\vec{u}| \cos \theta) \vec{B} - |\vec{B}|^2 \vec{u}] \Rightarrow \\ \vec{f}_{em} &= \sigma (|\vec{B}|^2 |\vec{u}| \vec{e}_p \cos \theta - |\vec{B}|^2 \vec{u}) \Rightarrow \vec{f}_{em} = \sigma (|\vec{B}|^2 \vec{u}_p - |\vec{B}|^2 \vec{u}) \Rightarrow \\ \vec{f}_{em} &= -\sigma |\vec{B}|^2 \vec{u}_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

Για δισδιάστατη ροή και θεωρώντας ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά την οριζόντια διεύθυνση $\vec{B}_0(B_0, 0)$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της κίνησης του ρευστού, έχουμε :

$$x\text{-διεύθυνση} : \vec{f}_{em,x} = 0$$

$$y\text{-διεύθυνση} : \vec{f}_{em,y} = -\sigma B_0^2 \vec{u}_n$$

$$\text{Av } \vec{u} = (u, v) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y \Rightarrow \vec{f}_{em,y} = -\sigma B_0^2 v\vec{e}_y \quad (3.24)$$

3.3.2 Οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής

Οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής ασυμπίεστου ρευστού είναι :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (3.25)$$

$$P = p + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{B} \quad (3.28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.29)$$

Το γινόμενο $(\sigma \mu_0)^{-1}$ καλείται *συντελεστής μαγνητικής διάχυσης*. Η συνολική πίεση P στην εξίσωση (3.26) είναι το άθροισμα της υδροστατικής πίεσης p και της λεγόμενης *μαγνητικής πίεσης* $\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$. Ο λόγος της υδροστατικής προς την μαγνητική πίεση είναι μια βασική παράμετρος, γνωστή ως β -αριθμός (ή παράμετρος β), που χαρακτηρίζει τις διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης πλάσματος.

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{|\vec{B}|^2} \quad (3.30)$$

3.3.3 Μοντέλο μικρού μαγνητικού αριθμού Reynolds (R_m)

Στο μοντέλο μικρού R_m το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο επηρεάζει τις ταχύτητες του ρευστού, άρα και τη ροή του. Οι ταχύτητες, όμως, του ιονισμένου ρευστού δεν επιδρούν στη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου διότι αμελούμε το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο. Έτσι ο νόμος του Ohm γράφεται :

$$\vec{J} = \sigma \left(-\vec{\nabla} V + \vec{u} \times \vec{B}_0 \right) \quad (3.31)$$

όπου V το ηλεκτρικό δυναμικό, και η δύναμη Lorentz ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση :

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}_0 \quad (3.32)$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις υπολογίζεται η δύναμη Lorentz στο μοντέλο μικρού R_m , και παίρνει την μορφή της εξίσωσης (3.24).

3.3.3 Προσέγγιση Boussinesq

Στην προσέγγιση Boussinesq η πυκνότητα δίνεται από τον τύπο :

$$\rho = \rho_0 [1 - a(T - T_0)] \quad , \quad T_0 = \frac{T_c + T_h}{2} \quad , \quad a(T_h - T_c) \ll 1$$

Για μικρές θερμοκρασιακές μεταβολές η πυκνότητα θεωρείται σταθερή και ίση με την αρχική τιμή ρ_0 .

Η ορμή δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(\rho \vec{u}) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \nu \rho \vec{\nabla}^2 \vec{u} + f$$

Οι δύο πρώτοι όροι του δεύτερου μέλους γράφονται,

$$-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} + (\rho - \rho_0) \vec{g} \Rightarrow$$

$$-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} (P + \rho_0 g y) + \Delta \rho \vec{g} \quad (3.33)$$

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής δίνεται από τη σχέση :

$$a = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{m/\rho} \frac{\partial m/\rho}{\partial T} = \rho \frac{\partial (1/\rho)}{\partial T}$$

και για μικρά ΔT

$$a \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \Rightarrow \Delta\rho = -\rho_0 a \Delta T \quad (3.34)$$

όπου $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ και $\Delta T = T - T_0$

Η (3.31), μέσω της (3.32) γράφεται :

$$-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} (P + \rho_0 g \bar{y}) + \rho_0 a \Delta T \vec{g} \quad (3.35)$$

Έτσι η εξίσωση της ορμής παίρνει την τελική μορφή,

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla})(\rho \vec{u}) = -\vec{\nabla} (P + \rho_0 g \bar{y}) + \rho_0 a \Delta T \vec{g} + \mu_0 \vec{\nabla}^2 \vec{u} + f \quad (3.36)$$

3.4 Σύνοψη των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα[43], με ύπαρξη εσωτερικών πηγών, εξωτερικού ομογενούς μαγνητικού πεδίου και πεδίου βαρύτητας, είναι οι εξής :

Συνέχεια :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.38 \text{ α, β})$$

Ορμή :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho_0} + gy \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} + a \vec{g} (T_0 - T) + \frac{I_D}{\rho_0} \vec{E} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho_0} \quad (3.39)$$

όπου I_D , το ρεύμα μετατόπισης.

Θερμότητα :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \vec{\nabla}^2 T + q \quad , \quad T_0 = \frac{T_c + T_h}{2} \quad (3.40)$$

Μαγνητική επαγωγή (Νόμος Faraday) :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{B} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.41)$$

3.4.1 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{L^2 / \nu} \quad , & \bar{x}^* &= \frac{\bar{x}}{L} \quad , \\ P^* &= \frac{P + \rho_0 g y}{\rho (\nu / L)^2} \quad , & \bar{B}^* &= \frac{\bar{B}}{\bar{B}_0} \quad (3.42) \\ \vec{u}^* &= \frac{\vec{u}}{\nu / L} \quad , & T^* &= \frac{T - T_0}{T_h - T_0} \end{aligned}$$

Θεωρούμε αμελητέο το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_0 , καθώς και το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{b} = O(\sigma \vec{B}_0)$. Επίσης, υποθέτουμε μικρή ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \vec{B}_0 .

Έτσι οι εξισώσεις σε αδιάστατη μορφή, όπου παραλείπονται οι αστερίσκοι από τις αδιάστατες μεταβλητές στις εξισώσεις που προκύπτουν προς χάριν της απλότητας, παίρνουν τη μορφή :

Συνέχεια :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.43)$$

x-ορμή :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.44)$$

y-ορμή :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gr_E T - Ha^* \quad (3.45)$$

Θερμότητα :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T + Gr_I \quad (3.46)$$

Μαγνητικό πεδίο:

$$R_m \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \nabla^2 \vec{B} \quad (3.47)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις εμφανίζονται αδιάστατοι αριθμοί που ορίζονται ως εξής:
ο αριθμός Grashof που εκφράζει την επίδραση της φυσικής συναγωγής,

$$Gr_E = \frac{ga\Delta TL^3}{\nu^2}, \quad \Delta T = T_h - T_c \quad (3.48)$$

ο αριθμός Grashof που εκφράζει την επίδραση των εσωτερικών πηγών,

$$Gr_I = \frac{qL^2}{\Delta T \nu}, \quad (3.49)$$

ο αριθμός Hartmann που εκφράζει το λόγο της δύναμης Lorentz προς τις δυνάμεις ιξώδους,

$$Ha^* = \frac{L^2 \sigma B_0^2}{\rho \nu} = Ha^2, \quad (3.50)$$

ο αριθμός Prandtl,

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (3.51)$$

Ο λόγος όψεως της κοιλότητας

$$A = \frac{H}{L}, \quad (3.52)$$

και ο μαγνητικός αριθμός R_m

$$R_m = \sigma \mu \nu \ll 1. \quad (3.53)$$

Στο όριο $R_m \rightarrow 0$ το μαγνητικό πεδίο είναι $\bar{B} = \bar{B}_0 + R_m \bar{b} + O(R_m^2)$ και συνεπώς $\bar{B} \approx \bar{B}_0$, όπου \bar{b} το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο.

Οι συνοριακές συνθήκες για το πεδίο θερμοκρασιών και ταχυτήτων, σε αδιάστατη μορφή, παίρνουν την μορφή:

$$T(x=0, y) = -1, \quad T(x=1, y) = 1 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y=0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=1) = 0 \quad (3.55)$$

$$u(x=0, y) = u(x=1, y) = 0 \quad (3.56)$$

$$u(x, y=0) = u(x, y=1) = 0 \quad (3.57)$$

$$v(x=0, y) = v(x=1, y) = 0 \quad (3.58)$$

$$v(x, y=0) = v(x, y=1) = 0 \quad (3.59)$$

Για ευκολία συμβολισμού, στο κεφάλαιο 6 όπου παρατίθεται η παραμετρική μελέτη του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Ha αντί του Ha^* για τον αριθμό Hartmann, με την υποσημείωση ότι πρόκειται για το τετράγωνο του αριθμού Hartmann που χρησιμοποιείται συνήθως στη βιβλιογραφία. Πρόκειται επίσης για το τετράγωνο του αριθμού Hartman που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενη Διπλωματική Εργασία, [43], και η οποία αποτέλεσε το έναυσμα για την παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

4.1 Γενικά

Για την επίλυση του προβλήματός μας σε δύο (ή και τρεις) διαστάσεις, ο προσδιορισμός αναλυτικών λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν είναι αδύνατος. Η εύρεση του θερμοκρασιακού πεδίου, του πεδίου των ταχυτήτων, του πεδίου πιέσεων και της ροϊκής συνάρτησης εντός της κοιλότητας μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση *αριθμητικών μεθόδων*. Τέτοιες μέθοδοι είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite-difference method) [7], η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (finite-volume method) [8] και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite-element method)[9].

Στο πρόβλημά εφαρμόσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

4.2 Η χρήση πλέγματος για την διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων

Εν γένει, η αναλυτική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση που επιτρέπει τον προσδιορισμό του αγνώστου μεγέθους σε κάθε σημείο του χώρου (ή και σε κάθε χρονική στιγμή αν το μέγεθος εξαρτάται και από το χρόνο). Στην περίπτωση των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης, η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται πλέον σε ένα σύνολο αλγεβρικών πλέον εξισώσεων. Η λύση του συστήματος των αριθμητικών εξισώσεων δίνει την τιμή του αγνώστου μεγέθους όχι σε όλα τα σημεία του χώρου αλλά σε συγκεκριμένα σημεία, τα λεγόμενα *διακριτά σημεία* (*discrete points*), οπότε η μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων καλείται *διακριτοποίηση*.

Η διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη χρήση ενός *πλέγματος* (*grid ή mesh*), οι *κόμβοι* (*nodes*) του οποίου είναι τα διακριτά σημεία. Οι κόμβοι του πλέγματος περιγράφονται από κάποιο σύστημα αρίθμησης (κομβικές συντεταγμένες), για το οποίο συνήθως χρησιμοποιούνται τα σύμβολα i, j, k . Στην περίπτωση ορθογώνιων καρτεσιανών πλεγμάτων τα σύμβολα i, j, k αντιστοιχούν στις διευθύνσεις x, y, z , με τις οποίες συνδέονται μέσω σχετικά απλών σχέσεων. Τα πλέγματα μπορούν όμως να είναι και καμπυλόγραμμα, οπότε οι κομβικές συντεταγμένες συνδέονται με τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες με αρκετά πολύπλοκο τρόπο.

Στην περίπτωση υιοθέτησης μεταβαλλόμενων αποστάσεων μεταξύ των κόμβων του πλέγματος, είναι δυνατή η πύκνωση των κόμβων σε περιοχές με μεγάλες κλίσεις του

ζητούμενου μεγέθους, ώστε να αυξηθεί η ακρίβεια της λύσης, ενώ σε περιοχές που δεν υπάρχουν μεγάλες κλίσεις το πλέγμα διατηρείται αραιό για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Στην περίπτωση του προβλήματός μας δεν κρίθηκε αναγκαία η πύκνωση του πλέγματος, παρότι ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε έδινε την δυνατότητα πύκνωσης του πλέγματος στις περιοχές μέσα στην κοιλότητα, όπου τα μεγέθη παρουσίαζαν μεγάλες κλίσεις.

Η επίλυση των αριθμητικών εξισώσεων που προκύπτουν στους κόμβους του πλέγματος δίνει μια τιμή του άγνωστου μεγέθους (π.χ. της θερμοκρασίας) για κάθε σημείο του πλέγματος. Η τιμή αυτή δεν αντιστοιχεί στην ακριβή τιμή που θα είχε π.χ. η θερμοκρασία στο σημείο αν ήταν γνωστή η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται σημαντικά από την πυκνότητα των κόμβων του πλέγματος. Όσο πιο πυκνή είναι η διάταξη των κόμβων (πυκνό πλέγμα), τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια της λύσης. Για την αξιολόγηση μιας αριθμητικής λύσης απαιτείται ο λεγόμενος έλεγχος της ανεξαρτησίας του πλέγματος. Επιλύουμε το πρόβλημα διπλασιάζοντας συνεχώς τον αριθμό των κόμβων σε κάθε διάσταση. Αν σε δύο διαδοχικούς διπλασιασμούς δεν μεταβληθεί η ποιότητα της λύσης τότε έχουμε φτάσει σε λύση ανεξάρτητη του πλέγματος η οποία είναι και η καλύτερη δυνατή που μπορεί να επιτευχθεί με τη δεδομένη αριθμητική μέθοδο. Όμως, η αύξηση των κόμβων του πλέγματος συνοδεύεται κατ' ανάγκη από αύξηση της απαιτούμενης μνήμης του υπολογιστή και του αριθμού των εξισώσεων που θα λυθούν, συνεπώς και του χρόνου επίλυσής τους.

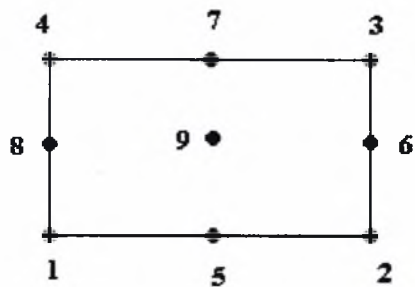
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα 'τρεξίματα' του προγράμματος έγιναν σε υπολογιστή με τα εξής χαρακτηριστικά :Intel (R) Pentium, (R) 4CPU 2.40 GHz, 1.310.196 KB RAM

Στο πρόγραμμα χρησιμοποιούνται δι-τετράγωνα και δι-γραμμικές Λαγκρανζιανές συναρτήσεις βάσης $\Phi_i(x, y), \Psi_j(x, y)$, για τα πεδία ταχυτήτων και θερμοκρασίας, και πίεσης, αντίστοιχα.

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i(x, y) \quad , \quad v = \sum_{i=1}^N v_i \Phi_i(x, y) \quad (4.1\alpha)$$

$$T = \sum_{i=1}^N t_i \Phi_i(x, y) \quad , \quad P = \sum_{j=1}^S p_j \Psi_j(x, y) \quad (4.1\beta)$$

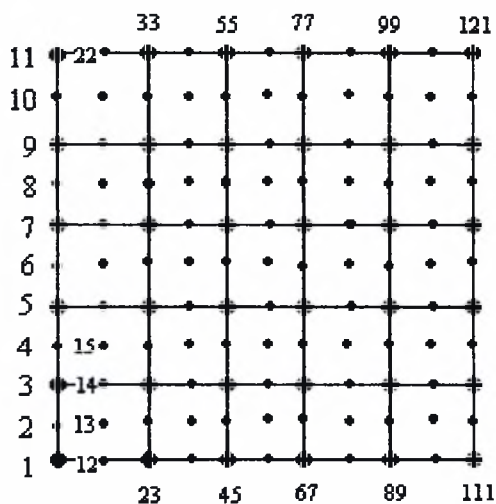
Η αρίθμηση σε κάθε στοιχείο του πλέγματος γίνεται ως εξής :



Σχήμα 4.1 Η θερμοκρασία, οι ταχύτητες στις δυο διευθύνσεις και η ροϊκή συνάρτηση υπολογίζονται σε όλους τους κόμβους (1-9), ενώ η πίεση υπολογίζεται μόνο στους γωνιακούς κόμβους του στοιχείου (1,2,3,4)

Έτσι για n , m στοιχεία στις x , y διευθύνσεις για την πίεση θα έχουμε $S = (n+1)(m+1)$ εξισώσεις, ενώ για τα υπόλοιπα μεγέθη $N = (2n+1)(2m+1)$.

Η συνολική αρίθμηση του πλέγματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (χάρην ευκολίας θεωρούμε ένα πλέγμα 5×5) :



Σχήμα 4.2 Η αρίθμηση του συνολικού πλέγματος

Μετά την διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος προκύπτει ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων. Η επίλυση του συστήματος γίνεται με τη μέθοδο Newton – Raphson.

Γίνεται κατασκευή των υπολοίπων :

$$R_k(u_i, v_i, t_i, p_j; Ha^*, Gr_i, Gr_e, Pr, A) = 0, \quad k=1, \dots, 3N+S \quad (4.2)$$

και η μορφή του συστήματος των εξισώσεων γίνεται :

$$\underline{\underline{J}}^n \cdot \underline{\underline{\Delta c}}^n = \underline{\underline{R}}^n \quad (4.3)$$

όπου J ο πίνακας της ιακωβιανής : $J_{ij}^n = \frac{\partial R_i^n}{\partial c_j^i}$, $\Delta c_j^n = c_j^{n-1} - c_j^n$

και n είναι ο αριθμός της επανάληψης.

Η μέθοδος τερματίζεται όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης που έχουμε θέσει :

$$|\underline{\underline{\Delta c}}^n| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3N+S} (c_i^n - c_i^{n-1})^2} < 10^{-10} \quad (\text{ακρίβεια της επιλογής μας}). \quad (4.4)$$

4.3 Κατασκευή των υπολοίπων

Υπόλοιπο x – ορμής

$$R_u = \iint \left[\Phi_i \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy -$$

$$\oint \Phi_i \left[-P n_x + 2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] ds, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.5)$$

Υπόλοιπο y – ορμής

$$R_v = \iint \left[\Phi_i \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (Ha \dot{v} - Gr_i T) \Phi_i - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy -$$

$$\oint \Phi_i \left[-P n_y + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x \right] ds, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.6)$$

Υπόλοιπο συνέχειας

$$R_{p_i} = \iint \Psi_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots, S \quad (4.7)$$

Υπόλοιπο θερμότητας

$$R_n = \iint \left[\Phi_i \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \Phi_i Gr_i \right] dx dy -$$

$$\oint \Phi_i \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.8)$$

4.4 Κατασκευή Ιακωβιανού πίνακα

$$\frac{\partial R_u}{\partial u_j} = \iint \left[\Phi_i \left(\Phi_j \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy - \oint \Phi_i \left(2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} n_y \right) ds \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial R_u}{\partial v_j} = \iint \left[\Phi_i \Phi_j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right] dx dy - \oint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} n_y ds \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial R_u}{\partial P_k} = \iint -\Psi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx dy \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial v_j} = \iint \left[\Phi_i \left(u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \Phi_j \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + Ha^* \Phi_j \right) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + 2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy - \oint \Phi_i \left(2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} n_x \right) ds \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial u_j} = \iint \left[\Phi_i \Phi_j \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy - \oint \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} n_x ds \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial P_k} = \iint -\Psi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} dx dy \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial R_v}{\partial T_j} = \iint -\Phi_i \Phi_j Gr_c dx dy \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial R_n}{\partial T_j} = \iint \left[\Phi_i \left(u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) \right] dx dy - \oint \Phi_i \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} n_y \right) ds \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial R_n}{\partial u_j} = \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T}{\partial x} dx dy \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial R_n}{\partial v_j} = \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T}{\partial y} dx dy \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial R_{pk}}{\partial u_j} = \iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial R_{pk}}{\partial v_j} = \iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \quad (4.20)$$

όπου $i = 1, 2, 3, \dots, N$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$, $k = 1, 2, 3, \dots, S$

και $\vec{n} = (n_x, n_y)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετα στον όγκο ελέγχου με διεύθυνση προς τα έξω.

4.5 Στοιχεία του αρχικού κώδικα

Η παραπάνω αριθμητική μεθοδολογία επίλυσης υλοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού κώδικα πεπερασμένων στοιχείων MHD2D ο οποίος αναπτύχθηκε από τον Δρ. Νίκο Πελεκάση στα πλαίσια της συμμετοχής του στο Ευρωπαϊκό Πρόγραμμα EURATOM [44]. Κατά την διάρκεια της παρούσης Διπλωματικής εργασίας έγινε εκτεταμένη χρήση του κώδικα αυτού προκειμένου να γίνει παραμετρική μελέτη, να κατασκευασθούν διαγράμματα διακλάδωσης στον χώρο των σχετικών παραμέτρων του προβλήματος και να διαπιστωθεί η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας που προέκυψαν. Τα δεδομένα για τις προσομοιώσεις που έγιναν δίνονται στο αρχείο input.dat. Στο αρχείο αυτό μπορούμε να καθορίσουμε τα εξής:

- Τον αριθμό των στοιχείων του πλέγματος στις δύο διευθύνσεις, x και y
- Το μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων Newton – Raphson και το κριτήριο σύγκλισης
- Τον αριθμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων που θέλουμε να υπολογίσει το πρόγραμμα
- Τη μέθοδο μέσω της οποίας θα υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές, δηλαδή αν θα έχουμε έναν πλήρη πίνακα ή έναν πίνακα ζώνης
- Το βαθμό της πύκνωσης του πλέγματος και το κατά πόσο θα έχουμε ασύμμετρη πύκνωση για να καλύψουμε τις μεγάλες κλίσεις των μεγεθών στα όρια της κοιλότητας
- Την αρχική και τελική τιμή για το εύρος τιμών του αριθμού Gr_e , καθώς και το βήμα που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα για να καταλήξει στην τελική τιμή. Μπορούσαμε να επιλέξουμε ποια βήματα από τα παραπάνω θα αποθηκεύει το πρόγραμμα. Το ίδιο μπορούσαμε να κάνουμε με κάποιες μικρές αλλαγές στον κώδικα για τον αριθμό Gr_i και τον αριθμό Ha .

Στο πρώτο τρέξιμο του προγράμματος για συγκεκριμένο πλέγμα επιλέγουμε μια μικρή αρχική τιμή του Gr_e ώστε να δημιουργήσουμε το κατάλληλο μέγεθος στο αρχείο guess.dat , από το οποίο το πρόγραμμα θα διαβάζει στην συνέχεια τα δεδομένα.

Σε περίπτωση μη σύγκλισης μέσα στον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που έχουμε επιλέξει πρέπει να τρέξουμε το πρόγραμμα για μικρότερο βήμα αλλαγής του αριθμού Gr_e .

Στην διάρκεια της προσομοίωσης παρακολουθούμε την πορεία της σύγκλισης μέσα από το αρχείο error.dat που περιέχει τον αριθμό των επαναλήψεων και το αντίστοιχο σφάλμα.

4.6 Μεθοδολογία Εύρεσης Περιοδικών Λύσεων

Η ενότητα αυτή έχει σκοπό τη μελέτη των περιοδικών λύσεων που προκύπτουν ως σημεία διακλάδωσης των κλάδων ισορροπίας που κατασκευάστηκαν στην παρούσα εργασία., ώστε στα διαγράμματα διακλάδωσης να καλυφθούν οι κλάδοι Hopf και να εξεταστεί η ευστάθειά τους. Στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής εργασίας εξετάστηκε η μεθοδολογία διερεύνησης της ύπαρξης χρονο-περιοδικών λύσεων καθώς και η ευστάθειά τους, σε ένα απλούστερο πρόβλημα από την Βιβλιογραφία [11] το οποίο χαρακτηρίζεται από μικρότερο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Στόχος μας είναι να κατασκευασθεί ένας απλούστερος κώδικας ο οποίος θα υπολογίζει την περιοδική λύση και την ευστάθεια ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}, \lambda) \quad (4.21)$$

Η μεθοδολογία του απλούστερου αυτού κώδικα αργότερα θα ενσωματωθεί στον κυρίως κώδικα μαγνητο-υδροδυναμικής που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες υποενότητες. Αυτή η τελευταία προσαρμογή του αρχικού κώδικα δεν κατέστη δυνατή στην παρούσα εργασία και θα αποτελέσει στόχο μελλοντικής προσπάθειας.

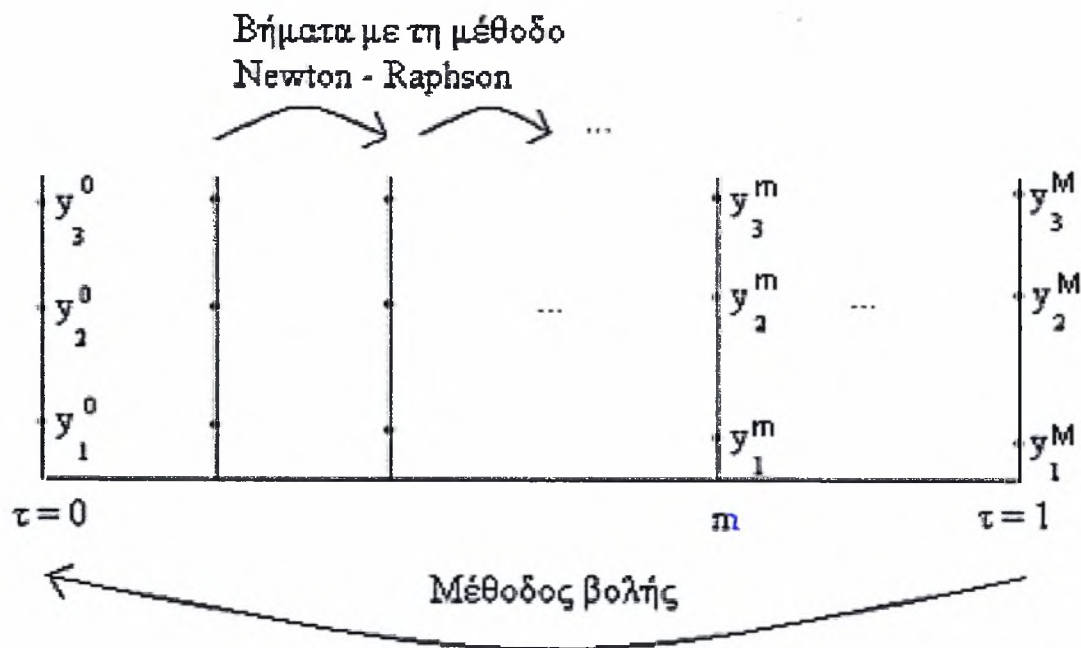
Με διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων, μέσω του κανόνα του τραπεζίου $\frac{dy}{dt} = f(y) \rightarrow \frac{y^{m+1} - y^m}{\Delta t} = \frac{f(y^{m+1}) + f(y^m)}{2}$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Υποθέτουμε μια αρχική τιμή για τα y_1, y_2, \dots, y_n και για την περίοδο T , όπου n ο αριθμός των εξισώσεων. Το λ είναι παράμετρος του προβλήματος που καθορίζουμε εκ των προτέρων. Τα βήματα για τον υπολογισμό των $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = T$, στο διάστημα μεταξύ $\tau = 0$ και $\tau = 1$, $\tau = \frac{t}{T}$, πραγματοποιούνται με τη μέθοδο Newton – Raphson. Στο τέλος του διαστήματος και μετά από M επαναλήψεις, $M \Delta \tau = 1$, παίρνουμε καινούργιες τιμές για τα y_1, y_2, \dots, y_n και την ίδια τιμή για την περίοδο T . Δηλαδή, για την περίπτωση τριών αγνώστων:

$$y_1^0(\tau = 0), y_2^0(\tau = 0), T^0(\tau = 0) \xrightarrow{\text{Newton-Raphson}}$$

$$y_1^M(\tau = 1), y_2^M(\tau = 1), T^M(\tau = 1)$$

$$\text{με } T^0(\tau = 0) = T^m(\tau = 1) = T^M(\tau = 1)$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της λειτουργίας του κώδικα παρουσιάζεται στο Σχ. 4.2, όπου με y_3 συμβολίζουμε την περίοδο T .



Σχήμα 4.3 Σχηματική αναπαράσταση της λειτουργίας του κώδικα

Στην συνέχεια για μια εκ νέου επανάληψη από το $\tau = 0$ έως $\tau = 1$ ως αρχικές τιμές για τα y_1, y_2, \dots, y_n μπορούμε να θέσουμε τις τιμές $y_1(\tau = 1), y_2(\tau = 1), \dots, y_n(\tau = 1)$, που έχουμε υπολογίσει μέσω της μεθόδου Newton – Raphson. Το πρόβλημα υπάρχει για την καινούργια βελτιωμένη τιμή της περιόδου T που θα χρησιμοποιήσουμε, αφού στο τέλος του διαστήματος, για $\tau = 1$, η τιμή της περιόδου είναι ίδια με την αρχική τιμή που έχουμε επιλέξει. Ο τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο όπου δίνεται ένα λυμένο πρόβλημα ως παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας της επέκτασης του κώδικα.

Στο τέλος των επαναλήψεων θέλουμε να ικανοποιούνται οι συνθήκες που έχουμε επιβάλλει στο πρόβλημά μας. Οι συνθήκες αυτές, λόγω της περιοδικότητας, θα έχουν την εξής διανυσματική μορφή

$$\bar{y}(\tau = 0) = \bar{y}(\tau = 1) \tag{4.22}$$

$$F[\bar{y}(\tau = 1)] = 0 \tag{4.23}$$

όπου το F προκύπτει από τις εξισώσεις του προβλήματος και από την επιλογή της αυθαίρετης ‘αρχικής’ χρονικής στιγμής και δεν εξαρτάται άμεσα από την περίοδο.

Επίσης, σε μορφή υπολοίπων έχουμε:

$$\bar{y}(\tau = 0) - \bar{y}(\tau = 1) = 0 \quad (4.24)$$

$$F[\bar{y}(\tau = 1)] = 0$$

Χάριν απλοποίησης θα θεωρήσουμε την περίπτωση τριών αγνώστων, y_1 , y_2 και y_3 . Με y_3 συμβολίζεται η περίοδος T του προβλήματος. Η παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους μας δίνει τον παρακάτω πίνακα

$$\frac{\partial R_i}{\partial y_j} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)} & -\frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)} & -\frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_3(\tau = 0)} \\ -\frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)} & 1 - \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)} & -\frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_3(\tau = 0)} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\text{όπου } A_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1(\tau = 1)} \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)} + \frac{\partial F}{\partial y_2(\tau = 1)} \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)}$$

$$A_2 = \frac{\partial F}{\partial y_1(\tau = 1)} \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)} + \frac{\partial F}{\partial y_2(\tau = 1)} \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)}$$

$$A_3 = \frac{\partial F}{\partial y_1(\tau = 1)} \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_3(\tau = 0)} + \frac{\partial F}{\partial y_2(\tau = 1)} \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_3(\tau = 0)}$$

Ο μονόδρομος πίνακας $\underline{\underline{M}}$ προκύπτει από τον πίνακα (4.25) και έχει την παρακάτω μορφή

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)} & \frac{\partial y_1(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)} \\ \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_1(\tau = 0)} & \frac{\partial y_2(\tau = 1)}{\partial y_2(\tau = 0)} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Ο πίνακας αυτός, που χρησιμοποιείται στην επέκταση του κώδικα, περιέχει την πληροφορία σχετικά με την ευστάθεια της περιοδικής λύσης. Γενικά, ο πίνακας $\underline{\underline{M}}$ έχει n ιδιοτιμές

$\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$. Μια από αυτές τις ιδιοτιμές είναι ίση με τη μονάδα. Οι άλλες $n-1$ ιδιοτιμές καθορίζουν την ευστάθεια με βάση τον παρακάτω κανόνα :

A. Η περιοδική λύση $y(t)$ είναι ευσταθής αν $|\mu_j| < 1$ για $j = 1, \dots, n-1$.

B. Η περιοδική λύση $y(t)$ είναι ασταθής αν $|\mu_j| > 1$ για κάποιο j

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το μονόδρομο πίνακα δίνονται σε επόμενο κεφάλαιο όπου γίνεται μια εισαγωγή στην ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

5.1 Ανάλυση ευστάθειας

Για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε ανάλυση ευστάθειας για μια λύση επιβάλλουμε μια μικρή διαταραχή στη βασική λύση, δηλαδή τη λύση στην κατάσταση ισορροπίας, και παρατηρούμε την εξέλιξή της.

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ P \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ P_1 \\ T_1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad (5.1)$$

όπου $\begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$ η βασική λύση και $\varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ P_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$ η μικρή διαταραχή που επιβάλλουμε στη λύση.

Η διαταραχή μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ P_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{T}_1 \end{pmatrix} e^{\sigma t} \quad \text{όπου } \sigma \text{ είναι οι ιδιοτιμές } \sigma = \sigma_r + i\sigma_i \text{ και } \bar{u}, \bar{P}, \bar{T} \text{ οι}$$

ιδιοσυναρτήσεις.

Οι ιδιοτιμές εξαρτώνται από τις παραμέτρους Gr, Ha^*, Gr, Pr και $A = \frac{H}{L}$.

Όταν το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής είναι μικρότερο του μηδενός ($\sigma_r < 0$) τότε έχουμε ευστάθεια. Επίσης, το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής δείχνει το ρυθμό ενίσχυσης (αν $\sigma_r > 0$) ή απόσβεσης (αν $\sigma_r < 0$) της διαταραχής.

Το φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής δείχνει τη συχνότητα της λύσης ($\sigma_i = \omega = \frac{2\pi}{T}$).

Όταν $\sigma_r = 0$ έχουμε σημείο διακλάδωσης όπου η βασική λύση γίνεται ασταθής λόγω της εμφάνισης καινούργιου κλάδου.

Όταν ισχύουν :

$$\sigma_r(\lambda_0) = 0, \quad \sigma_i(\lambda_0) = 0, \quad \frac{d\sigma_r}{d\lambda}(\lambda_0) > 0$$

τότε έχουμε απλό σημείο διακλάδωσης για την τιμή της παραμέτρου, $\lambda = \lambda_0$.

Όταν ισχύουν :

$$\sigma(\lambda_0) = \pm i\sigma_i, \quad \sigma_r(\lambda_0) = 0, \quad \sigma_i(\lambda_0) \neq 0, \quad \frac{d\sigma_r}{d\lambda}(\lambda_0) > 0$$

τότε έχουμε σημείο διακλάδωσης Hopf για την τιμή της παραμέτρου, $\lambda = \lambda_0$.

5.2 Κατασκευή διαγράμματος διακλάδωσης με τις παραμέτρους του προβλήματος

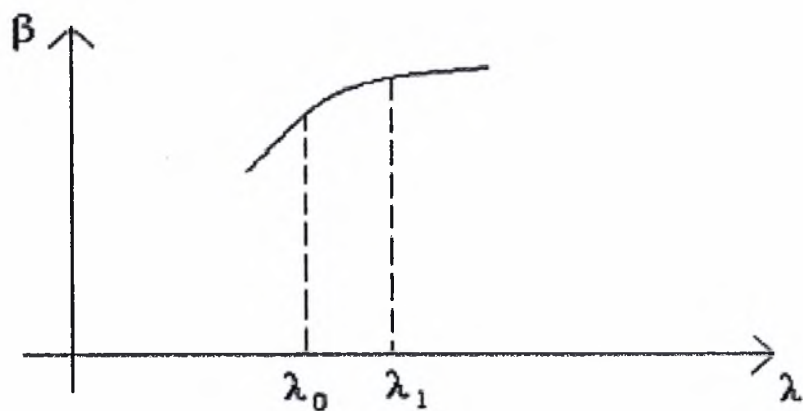
Απλή συνέχιση $\det J(\lambda = \lambda_0) \neq 0$

Η λύση για μια τιμή της παραμέτρου ($\lambda = \lambda_0$) χρησιμοποιείται για να βρεθεί λύση για την επόμενη τιμή (Σχ. 5.1).

Γύρω από ιδιάζοντα σημεία ισχύει $\det J(\lambda = \lambda_0) = 0$

Στα οριακά σημεία έχουμε συνέχιση μήκους τόξου. Το μήκος της καμπύλης ενσωματώνεται στους αγνώστους του προβλήματος (Σχ. 5.2).

Στα σημεία διακλάδωσης προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές και κάνουμε χρήση του ιδιοδιανύσματος $\underline{c} = \underline{c}_0 + \varepsilon \underline{c}_1$ για καλύτερη πρόβλεψη και μετάβαση στο νέο κλάδο (Σχ. 5.3).



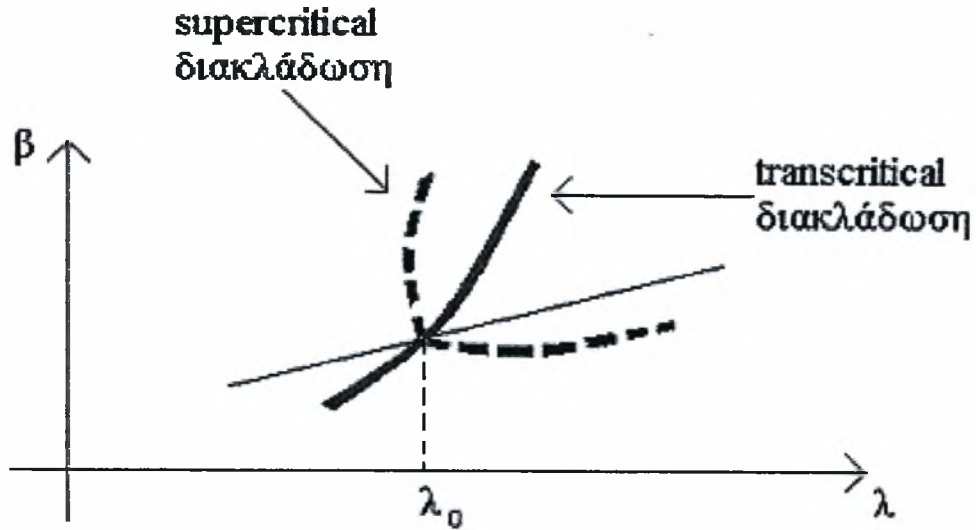
Σχήμα 5.1 Διάγραμμα διακλάδωσης. Απλή συνέχιση

$$[\det J(\lambda = \lambda_0) \neq 0]$$



Σχήμα 5.2 Διάγραμμα διακλάδωσης. Ιδιάζοντα σημεία (οριακά)

$$[\det J(\lambda = \lambda_0) = 0]$$



Σχήμα 5.3 Διάγραμμα διακλάδωσης. Ιδιάζοντα σημεία (διακλάδωσης)

$$[\det J(\lambda = \lambda_0) = 0]$$

Το λ είναι παράμετρος της διακλάδωσης και το β μέτρο της λύσης για το διαχωρισμό των κλάδων.

5.3 Πρόβλημα γραμμικής ευστάθειας των καταστάσεων ισορροπίας

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις που περιγράφουν το συγκεκριμένο πρόβλημα της παρούσας εργασίας γράφονται με την εξής μορφή :

Συνέχεια : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (5.2)

Ορμή :

$$\sigma \vec{u} + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} - (Gr_c \vec{T} - Ha^* \vec{v}) \vec{e}_y = 0$$
 (5.3)

Θερμότητα :

$$\sigma \vec{T} + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T_0 - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \vec{T} = 0$$
 (5.4)

Οι συνοριακές συνθήκες που έχουμε είναι ομογενείς. Στα άκρα της κοιλότητας απαιτούμε μηδενική ταχύτητα:

$$\bar{u}(x, y = 0) = 0 \quad , \quad \bar{u}(x, y = A) = 0 \quad (5.5 \alpha)$$

$$\bar{u}(x = 0, y) = 0 \quad , \quad \bar{u}(x = 1, y) = 0 \quad (5.5 \beta)$$

Στο αριστερό και δεξιό άκρο της κοιλότητας ($x = 0$ και $x = 1$) απαιτούμε μηδενική θερμοκρασία:

$$\bar{T}(x = 0, y) = 0 \quad , \quad \bar{T}(x = 1, y) = 0 \quad (5.6)$$

Στο πάνω και κάτω άκρο της κοιλότητας ($y = 0$ και $y = A$) απαιτούμε μηδενική μεταφορά θερμότητας (μόνωση):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}(x, y = 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}(x, y = A) = 0 \quad (5.7)$$

5.4 Κατάστρωση γραμμικού αριθμητικού προβλήματος

Η κατάστρωση του γραμμικού αριθμητικού προβλήματος επιτυγχάνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

Συνέχεια :

$$\iint \Psi_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (5.8)$$

x-ορμή :

$$\begin{aligned} \iint \left[\Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \bar{P} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ -\sigma \iint \Phi_i \bar{u} dx dy \end{aligned} \quad (5.9)$$

y-ορμή :

$$\begin{aligned} \iint \left[\Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \bar{P} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ \iint (Ha^* \bar{v} - Gr_e \bar{T}) \Phi_i dx dy = -\sigma \iint \Phi_i \bar{v} dx dy \end{aligned} \quad (5.10)$$

Θερμότητα :

$$\begin{aligned} & \iint \left[\Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \Phi_i Gr_i \right] dx dy = \\ & -\sigma \iint \Phi_i \bar{T} dx dy \end{aligned} \quad (5.11)$$

Η επίλυση του αριθμητικού γραμμικού προβλήματος σε μορφή πινάκων μας δίνει:

$$\sum_{j=1}^N \left(\iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right) u_j + \sum_{j=1}^N \left(\iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right) v_j = 0 \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left\{ \iint \left[\Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \Phi_j \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy \right\} u_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left[\iint \left(\Phi_i \Phi_j \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) dx dy \right] v_j - \sum_{k=1}^S \left[\iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] P_k \\ & = -\sigma \sum_{j=1}^N \left(\iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right) u_j \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left\{ \iint \left[\Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + Ha \Phi_j \right) + 2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right] dx dy \right\} v_j - \\ & Gr_i \sum_{j=1}^N \left(\iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right) v_j + \sum_{j=1}^N \left[\iint \left(\Phi_i \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] u_j - \sum_{k=1}^S \left[\iint \Psi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] P_k \\ & = -\sigma \sum_{j=1}^N \left(\iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right) v_j \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[\iint \Phi_i \left(u_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[\iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial x} dx dy \right] u_j + \\ & \sum_{j=1}^N \left[\iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial y} dx dy \right] v_j = -\sigma \sum_{j=1}^N \left[\iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j \end{aligned} \quad (5.15)$$

Η παραπάνω μορφή των εξισώσεων (5.12), (5.13), (5.14) και (5.15) μας δείχνει την ομοιότητα με τον Ιακωβιανό πίνακα, (4.9) – (4.20). Οι μόνοι καινούργιοι όροι είναι τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (5.13), (5.14) και (5.15). Έτσι, υπολογίζοντας τις παραπάνω ποσότητες μόνο μια φορά μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε τόσο για την εύρεση της λύσης στη μόνιμη κατάσταση όσο και για την ανάλυση ευστάθειας.

5.5 Αριθμητική επίλυση του προβλήματος ευστάθειας

Για την επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος εφαρμόζεται η μέθοδος Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων και το πρόγραμμα λύνει το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών :

$$\underline{\underline{J}}\underline{\underline{c}} = -\sigma\underline{\underline{B}}\underline{\underline{c}} \quad \text{όπου } \sigma \text{ οι ιδιοτιμές και } \underline{\underline{c}} \text{ το ιδιοδιάνυσμα.}$$

Ο B είναι συμμετρικός ημι-θετικά ορισμένος πίνακας ζώνης με μηδενικά στοιχεία στις γραμμές που αντιστοιχούν στη συνέχεια και στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (ο πίνακας B είναι γνωστός ως mass matrix σε μεταβατικού τύπου προβλήματα).

Ο πίνακας J είναι ίδιος με τον Ιακωβιανό πίνακα που προκύπτει κατά την τελευταία επανάληψη με τη μέθοδο Newton – Raphson που δίνει τη βασική λύση.

5.5.1 Μέθοδος Arnoldi

Η μέθοδος Arnoldi [10] χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ιδιοπροβλημάτων πινάκων ζώνης της μορφής

$$\underline{\underline{\omega}}\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{c}} \quad , \quad \underline{\underline{\omega}} = \frac{-1}{\sigma} \quad (5.16)$$

και υπολογίζει τις k μεγαλύτερες ιδιοτιμές (απόλυτη τιμή), ενώ για ιδιοτιμές μικρού μεγέθους χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο πίνακα. Ο χρόνος υπολογισμού k ιδιοτιμών ενός πίνακα n τάξης είναι $t = O(k^{3.5})O(n^{1.5})$

5.6 Παραγωγή περιοδικών λύσεων

Σε αυτήν την υποενότητα θα εστιάσουμε στη χρονο-εξαρτώμενη περιοδικότητα της λύσης ενός «αυτόνομου» συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}, \lambda) \quad (5.17)$$

Ας σημειωθεί ότι λέγοντας «αυτόνομο» εννοούμε ότι η f δεν εξαρτάται από τον χρόνο t . Για τη χρονο - περιοδική λύση υπάρχει ένα χρονικό διάστημα T (η περίοδος) μετά το οποίο το σύστημα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση :

$$\vec{y}(t+T) = \vec{y}(t) \quad (5.18)$$

Έτσι μπορούμε να επιβάλλουμε τη φάση θέτοντας για τη χρονική στιγμή $t=0$ μια τιμή της y :

$$y_k(t=0) = c$$

ή επιβάλλοντας την χρονική στιγμή $t=0$ να μηδενίζεται η f (κρίσιμο σημείο)

$$f_k(\vec{y}(t=0); \lambda) = 0$$

Η περίοδος T της περιοδικής λύσης $y(t)$ είναι συνήθως άγνωστη και πρέπει να υπολογιστεί μαζί με το y .

Η περιοδική λύση y με περίοδο T μπορεί να υπολογιστεί από τη λύση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών :

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{y}} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(\vec{y}, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{y}(0) - \vec{y}(T) \\ f_k(\vec{y}(0), \lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.19)$$

Για τεχνικούς λόγους [11] είναι καλό να κανονικοποιήσουμε το διάστημα ώστε να έχουμε μοναδιαίο μήκος. Δηλαδή, αντί για $0 \leq t \leq T$ έχουμε $0 \leq \tau \leq 1$, όπου $\tau = \frac{t}{T}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών στη μορφή :

$$\begin{pmatrix} \vec{y}' \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\vec{f}(\vec{y}, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{y}(0) - \vec{y}(1) \\ f_k(\vec{y}(\tau=0), \lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

$$\text{με } \tau = \frac{t}{T} \text{ και } 0 \leq \tau \leq 1$$

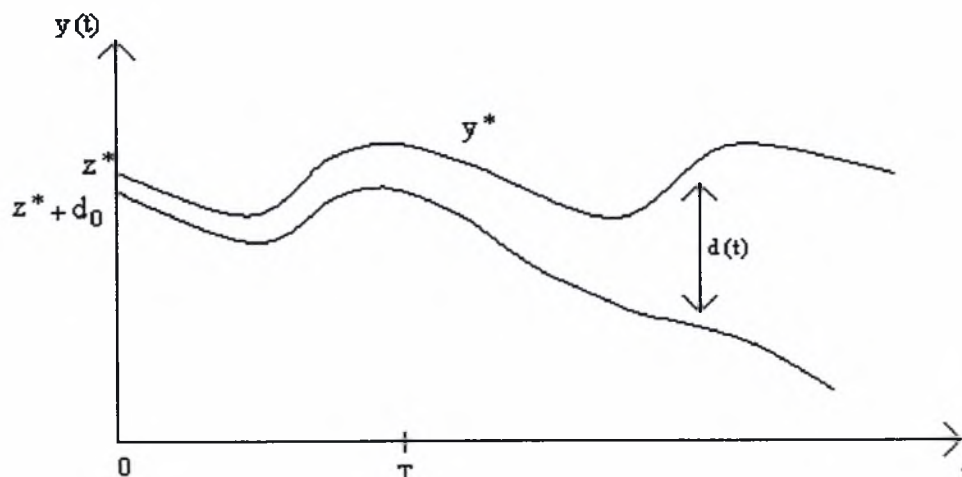
Το πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.20) λύνεται με τη μέθοδο της βολής (shooting method).

Όταν είμαστε πάνω σε ένα κλάδο περιοδικής λύσης το ερώτημα που τίθεται είναι αν η περιοδική λύση είναι ευσταθής και σε ποιο σημείο και με ποιο τρόπο χάνεται η ευστάθεια. Για να μπορέσουμε να αναλύσουμε την ευστάθεια της περιοδικής λύσης χρειαζόμαστε το μονόδρομο πίνακα που θα αναφέρουμε παρακάτω. Μελετάμε την ευστάθεια μιας περιοδικής ειδικής λύσης $y^*(t)$ με περίοδο T και εξάρτηση από την παράμετρο λ [11].

Η ευστάθεια της y^* γίνεται έκδηλη από τον τρόπο που συμπεριφέρονται οι γειτονικές τροχιές (Σχ. 5.4). Οι τροχιές της διαφορικής εξίσωσης ορίζονται από την ποσότητα $\bar{\varphi}$,

$$\eta \bar{\varphi}(t; \bar{z}) \text{ λύνει την } \dot{\bar{y}} = \bar{f}(\bar{y}, \lambda) \text{ με } \bar{y}(t=0) = \bar{z} \quad (5.21)$$

Άρα και η ευστάθεια καθορίζεται από την ποσότητα $\bar{\varphi}(t; \bar{z})$.



Σχήμα 5.4 Χρονική εξέλιξη της περιοδικής λύσης y^* με διαταραχή του αρχικού z^* ίση με d_0

Μια τροχιά που αρχίζει από μια διαταραχή $(z^* + d_0)$ του αρχικού διανύσματος z^* , εξελίσσεται με την απόσταση ως εξής :

$$\bar{d}(t) = \bar{\varphi}(t; \bar{z}^* + \bar{d}_0) - \bar{\varphi}(t; \bar{z}^*)$$

ως προς την περιοδική τροχιά y^* .

Έχουμε θεωρήσει ότι $\bar{z}^* = \bar{y}^*(0)$

Προσδιορίζοντας την απόσταση μετά από μία περίοδο έχουμε :

$$\bar{d}(T) = \bar{\varphi}(T; \bar{z}^* + \bar{d}_0) - \bar{\varphi}(T; \bar{z}^*)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor προκύπτει

$$\bar{d}(T) = \frac{\partial \bar{\varphi}(T; \bar{z}^*)}{\partial \bar{z}} \bar{d}_0 + \text{όροι ανώτερης τάξης}$$

Είναι φανερό ότι ο πίνακας

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(T; \bar{z}^*)}{\partial \bar{z}} \quad (5.22)$$

μπορεί να μας πληροφορήσει κατά πόσον η αρχική διαταραχή \bar{d}_0 εξασθενεί ή ενισχύεται. Ο πίνακας (5.22) ονομάζεται *μονόδρομος πίνακας*.

Ορισμένες ιδιότητες της φ μας βοηθούν να βρούμε καινούργιες εκφράσεις του μονόδρομου πίνακα. Υπενθυμίζουμε ότι η φ , που ορίζεται στην εξίσωση (5.21), ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (5.17)

$$\frac{d\bar{\varphi}(t; \bar{z})}{dt} = \bar{f}(\bar{\varphi}(t; \bar{z}), \lambda), \quad \forall t.$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς z , προκύπτει :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\varphi}(t; \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}(\bar{\varphi}, \lambda)}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \bar{\varphi}(t; \bar{z})}{\partial \bar{z}}$$

Από τη συνθήκη $\bar{\varphi}(0; \bar{z}) = \bar{z}$ έπεται ότι

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(0; \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \underline{\underline{I}}$$

οπότε, ο μονόδρομος πίνακας (5.22) είναι ταυτόσημος με τον πίνακα $\underline{\underline{\Phi}}(T)$, ο οποίος λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών (σε μητρική μορφή)

$$\underline{\underline{\dot{\Phi}}} = \bar{f}_y(\bar{y}^*, \lambda) \underline{\underline{\Phi}}, \quad \underline{\underline{\Phi}}(t=0) = \underline{\underline{I}} \quad (5.23)$$

Έτσι, ο μονόδρομος πίνακας $\underline{\underline{M}}$ της περιοδικής λύσης $\bar{y}^*(t)$ με περίοδο T και αρχική τιμή \bar{z}^* ορίζεται από τη σχέση :

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\Phi}}(T) = \frac{\partial \bar{\varphi}(T; \bar{z}^*)}{\partial \bar{z}} \quad (5.24)$$

όπου τα $\bar{\varphi}$ και $\underline{\underline{\Phi}}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (5.21) και (5.23), αντίστοιχα.

Ο πίνακας \underline{M} υπολογίζεται στο τελευταίο χρονικό βήμα της μεθόδου βολής και οι ιδιοτιμές του καθορίζουν την ευστάθεια της περιοδικής λύσης.

5.7 Λυμένο Πρόβλημα – Παράδειγμα εύρεσης περιοδικής λύσης

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι :

$$\dot{y}_1 = 3(y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_1^3 + \lambda) \quad (5.25)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{3}(y_1 - 0.7 + 0.8y_2) \quad (5.26)$$

όπου το λ είναι παράμετρος του προβλήματος που καθορίζουμε εμείς.

Για να υπολογίσουμε την περιοδική λύση του προβλήματος θέτουμε $y_3 = T$, όπου $T = \frac{t}{\tau}$ η περίοδος της αναζητούμενης λύσης.

Η περίοδος είναι άγνωστη, καθώς δεν τη γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Έτσι πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους, τα y_1, y_2 και T .

$$y_1' = 3y_3(y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_1^3 + \lambda) \quad (5.27)$$

$$y_2' = -\frac{1}{3}y_3(y_1 - 0.7 + 0.8y_2) \quad (5.28)$$

$$y_3' = 0 \quad (5.29)$$

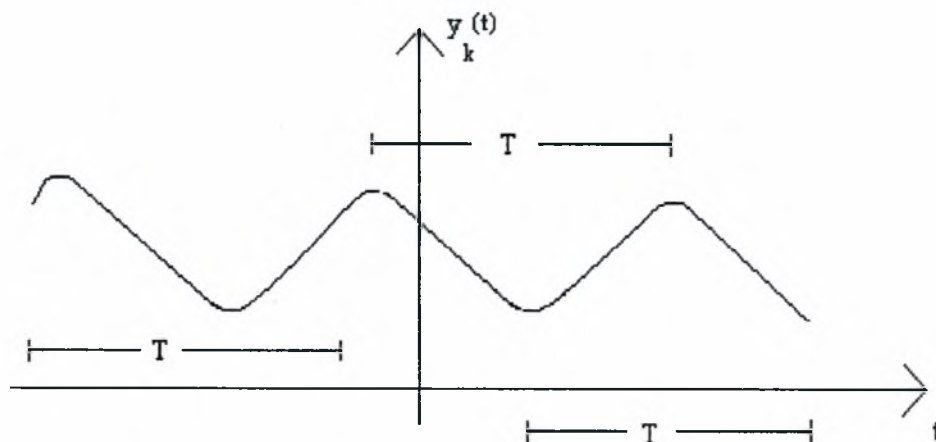
$$y_1(0) - y_1(1) = 0 \quad (5.30)$$

$$y_2(0) - y_2(1) = 0 \quad (5.31)$$

$$y_1(0) - 0.8y_2(0) - 0.7 = 0 \quad (5.32)$$

Οι δύο πρώτες συνθήκες, (5.30) και (5.31), προκύπτουν από την περιοδικότητα της λύσης. Η τρίτη συνθήκη προκύπτει από την εξίσωση (5.32) αν επιλέξουμε το y_1' να είναι μηδέν τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Αυτό συμβαίνει διότι σε μια περιοδική τροχιά μπορούμε να αρχίσουμε τον προσδιορισμό της περιόδου από οποιοδήποτε σημείο $y(t_0)$ κατά μήκος του προφίλ της λύσης, Σχ. 5.5. Μπορούμε να διαλέξουμε μια αυθαίρετη «αρχική» στιγμή $t_0 = 0$, έτσι ώστε να απλοποιείται το πρόβλημά μας.



Σχήμα 5.5 Περιοδικότητα της λύσης και ελευθερία επιλογής της ‘αρχικής’ χρονικής στιγμής

5.8 Διακριτοποίηση των εξισώσεων και κατασκευή των υπολοίπων

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται με τον τραπεζοειδή κανόνα

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{f(y^{n+1}) + f(y^n)}{2} \quad (5.33)$$

οπότε οι εξισώσεις (5.27), (5.28) και (5.29) γράφονται (με τη μορφή υπολοίπων) :

$$R_1 = (y_1^{n+1} - y_1^n) - \left[\frac{3y_3^{n+1}(y_1^{n+1} + y_2^{n+1} - \frac{1}{3}(y_1^{n+1})^3 + \lambda) + 3y_3^n(y_1^n + y_2^n - \frac{1}{3}(y_1^n)^3 + \lambda)}{2} \right] \Delta t = 0 \quad (5.34)$$

$$R_2 = (y_2^{n+1} - y_2^n) - \left[\frac{y_3^{n+1}(y_1^{n+1} - 0.7 + 0.8y_2^{n+1}) + y_3^n(y_1^n - 0.7 + 0.8y_2^n)}{6} \right] \Delta t = 0 \quad (5.35)$$

$$R_3 = y_3^{n+1} - y_3^n = 0 \quad (5.36)$$

και οι συνοριακές συνθήκες γράφονται ως εξής :

$$y_1^k(0) - y_1^k(1) = 0 \quad (5.37)$$

$$y_2^k(0) - y_2^k(1) = 0 \quad (5.38)$$

$$y_1^k(0) - 0.8 y_2^k(0) - 0.7 = 0 \quad (5.39)$$

όπου k δείκτης που αντιστοιχεί στις εξωτερικές επαναλήψεις (Σχήμα 4.3) για την εύρεση της περιόδου και της περιοδικής λύσης.

Προκειμένου να υπολογιστούν τα $y_i, i=1, \dots, n$, σχηματίζουμε την Ιακωβιανή με τις παραγώγους των υπολοίπων ως προς τα y_1^{n+1}, y_2^{n+1} και y_3^{n+1} , τα οποία αναφέρονται στην τρέχουσα χρονική στιγμή, τ , έχουμε :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial y_1^{n+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial y_2^{n+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial y_3^{n+1}} \\ \frac{\partial R_2}{\partial y_1^{n+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial y_2^{n+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial y_3^{n+1}} \\ \frac{\partial R_3}{\partial y_1^{n+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial y_2^{n+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial y_3^{n+1}} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (5.40)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2} y_3^{n+1} \Delta t [1 - (y_1^{n+1})^2] & -\frac{3}{2} y_3^{n+1} \Delta t & -\frac{3}{2} \Delta t [y_1^{n+1} + y_2^{n+1} - \frac{(y_1^{n+1})^3}{3} + \lambda] \\ \frac{\Delta t}{6} y_3^{n+1} & 1 + \frac{0.8 \Delta t}{6} y_3^{n+1} & \frac{\Delta t}{6} (y_1^{n+1} + 0.8 y_2^{n+1} - 0.7) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Έτσι καταλήγουμε στη μορφή

$$\frac{\partial R_i}{\partial y_j^{n+1}} (-\Delta y_i) = R_i, \quad \text{με} \quad \Delta y_i = y_i^{n+1,j}(\tau = 0) - y_i^{n+1,j+1}(\tau = 0) \quad (5.42)$$

όπου l συμβολίζει τον αύξοντα αριθμό των επαναλήψεων Newton-Raphson.

Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε αρχικά βρίσκει τη λύση στη μόνιμη κατάσταση. Επίσης, μπορούμε να δούμε για ποιες τιμές των παραμέτρων έχουμε σημείο διακλάδωσης. Πάνω στο σημείο διακλάδωσης εμφανίζεται ένας καινούργιος κλάδος της λύσης ο οποίος

από την ανάλυση ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας είναι περιοδικός (Hopf). Η παραπάνω μεθοδολογία μελετά την εξέλιξη των περιοδικών λύσεων, ώστε στα διαγράμματα διακλάδωσης να καλυφθούν οι κλάδοι Hopf και να εξετασθεί η ευστάθειά τους (χρήση μονόδρομου πίνακα και μεθόδου βολής, shooting method).

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που έδωσε ο καινούργιος κώδικας για το απλούστερο πρόβλημα – παράδειγμα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.27) έως και (5.32). Αρχικά δίνουμε μια τυχαία πρόβλεψη για τα y_1 , y_2 και T . Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι το πρόγραμμα προσεγγίζει τη λύση της μόνιμης κατάστασης και όχι την περιοδική λύση που ζητάμε. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα πρέπει να υποθέσουμε μια καλύτερη τιμή για την περίοδο T . Για μια καλύτερη προσέγγιση της περιόδου λύνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από το αρχικό πρόβλημα – παράδειγμα όταν μηδενιστεί η χρονοπαράγωγος

$$g_1 = 3y_1 + 3y_2 - y_1^3 + 3\lambda = 0 \quad (5.43)$$

$$g_2 = -\frac{1}{3}(y_1 + 0.8y_2 - 0.7) = 0 \quad (5.44)$$

Ο υπολογισμός της λύσης του παραπάνω μη γραμμικού προβλήματος εξισώσεων γίνεται με τη μέθοδο Newton – Raphson. Αφού βρίσκουμε τη λύση του συστήματος, y_1 και y_2 , υπολογίζουμε την Ιακωβιανή του συστήματος :

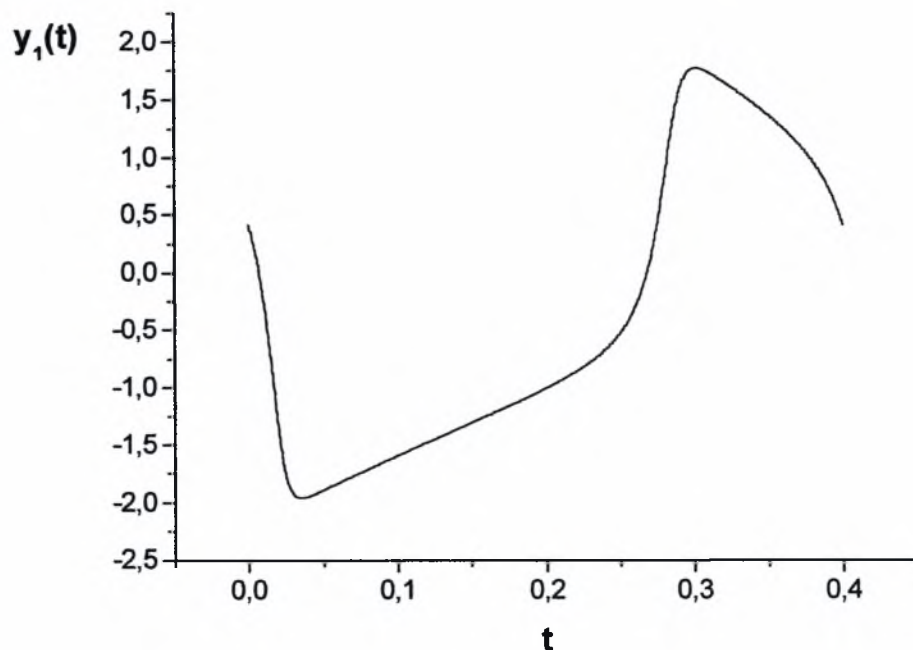
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1 - y_1^2) & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{0.8}{3} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός των ιδιοτιμών της Ιακωβιανής για τη μελέτη ευστάθειας και βρίσκουμε την ιδιοτιμή της Ιακωβιανής για την οποία έχουμε αστάθεια. Το φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής αυτής μας δίνει την συχνότητα, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ της περιοδικής λύσης. Έτσι βρίσκουμε την αρχική πρόβλεψη που χρειαζόμαστε για την περίοδο T . Κατόπιν με χρήση του τραπεζοειδούς κανόνα (5.34 – 5.36) υπολογίζουμε την λύση $y_i^{n,k}$, $i=1,2$, $n=1, \dots, N$ στην k εξωτερική επανάληψη, όπου N ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Αφού ακολουθηθεί αυτή η διαδικασία μέχρι την χρονική στιγμή $\tau=1$, χρησιμοποιείται η μεθοδολογία που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την διόρθωση της αρχικής πρόβλεψης $y_i^{k+1}(\tau=0)$. Κατόπιν η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να συγκλίνουν οι αρχικές τιμές,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y_i^k(\tau=0) - y_i^{k+1}(\tau=0))^2} < 10^{-8}, \text{ και να ικανοποιηθεί η εξίσωση που καθορίζει την φάση.}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι παράλληλα με τις επαναλήψεις (5.42) επιλύεται και η εξίσωση (5.23) η οποία παρέχει τον μονόδρομο πίνακα \underline{M} , ο οποίος καθορίζει την ευστάθεια της περιοδικής λύσης, σαν μέρος του πίνακα (4.25).

Τα παρακάτω αποτελέσματα προέκυψαν για $\lambda = -1.3$. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η εξέλιξη της περιοδικής λύσης για διάστημα μιας περιόδου (Σχ. 5.6).



Σχήμα 5.6 Εξέλιξη της περιοδικής λύσης για διάστημα μιας περιόδου

Η αξιοπιστία του κώδικα επιβεβαιώνεται από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα που υπάρχουν στη σχετική βιβλιογραφία [11].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΑΓΝΗΤΟΥΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

6.1 Στοιχεία της παραμετρικής μελέτης

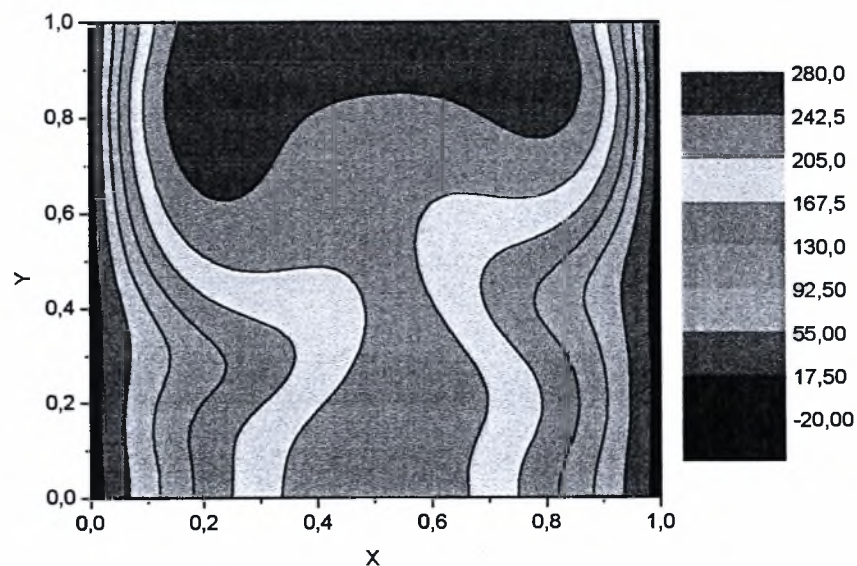
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.43) – (3.47) και γίνεται σχολιασμός τους. Μέσω αυτών των αποτελεσμάτων γίνεται εκτίμηση για την επίδραση της έντασης του μαγνητικού πεδίου καθώς και των εσωτερικών πηγών θερμότητας στη διαμόρφωση της ροής φυσικής συναγωγής στην κοιλότητα. Υπολογίσαμε τα πεδία ροής, ταχυτήτων και θερμοκρασίας για διάφορους αριθμούς Hartmann (Ha), σε συνδυασμό με διάφορες τιμές του αριθμού Gr_i και για εύρος τιμών του αριθμού Gr_e (Πίνακας 6.1). Μελετήθηκε η περίπτωση υγρού μετάλλου με $Pr=0.0321$.

Πίνακας 6.1 Εύρος τιμών των παραμέτρων και το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε περίπτωση

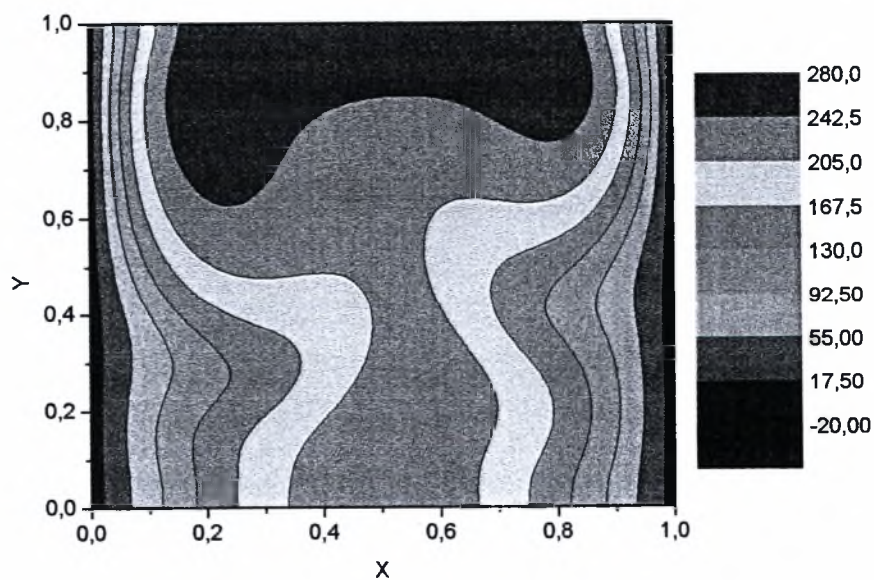
Περίπτωση	Πλέγμα	Ha	Gr_i	Gr_e
1	30x30	0	10^5	1000 έως 10500 με βήμα 500
2	60x60	0	10^5	500 έως 13000 με βήμα 500
3	60x60	0	1.5×10^5	500 έως 10000 με βήμα 500
4	60x60	125	2×10^5	500 έως 15000 με βήμα 500
5	60x60	250	2×10^5	500 έως 12000 με βήμα 500
6	60x60	500	2×10^5	500 έως 12000 με βήμα 500
7	30x30	0	2×10^5	500 έως 15000 με βήμα 250

6.2 Έλεγχος πλέγματος

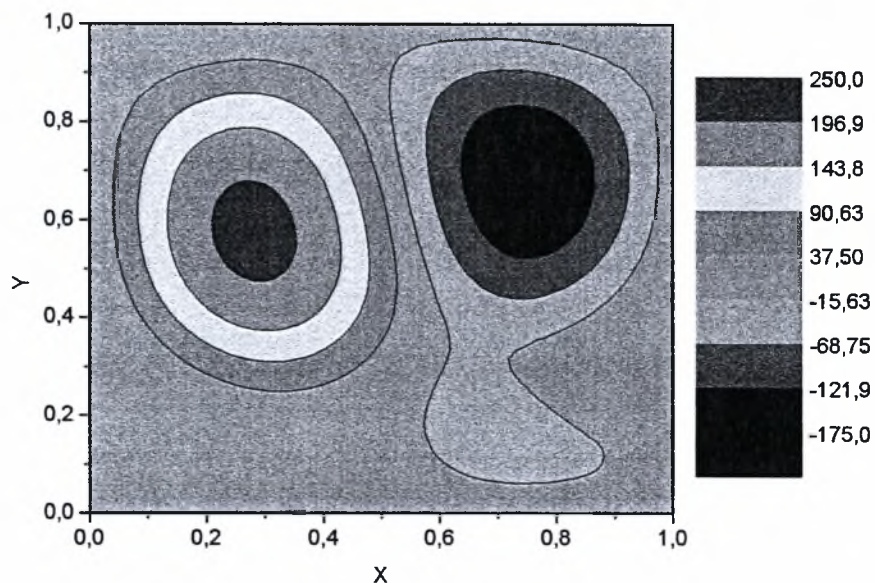
6.2.1 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=10^5$, $Gr_e=5500$



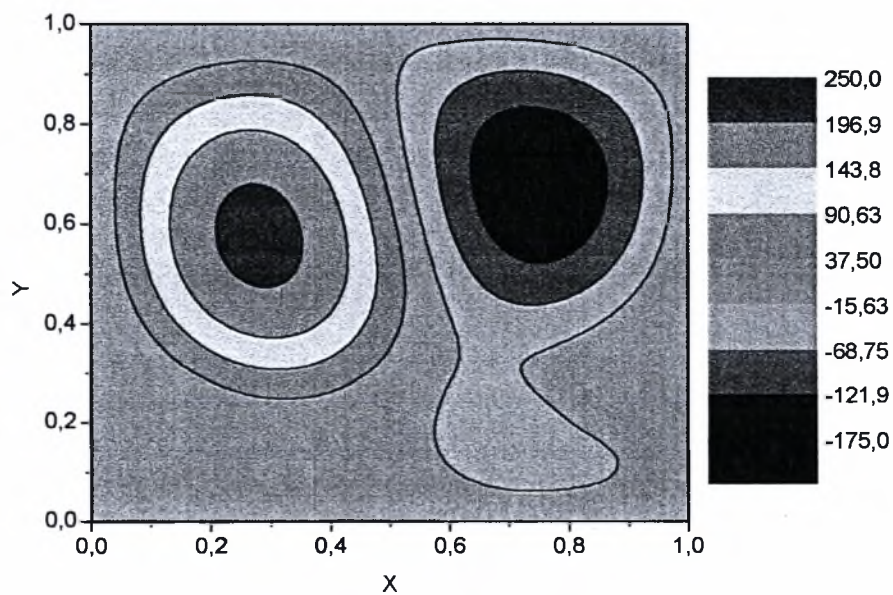
Σχήμα 6.1 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 30x30)



Σχήμα 6.2 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

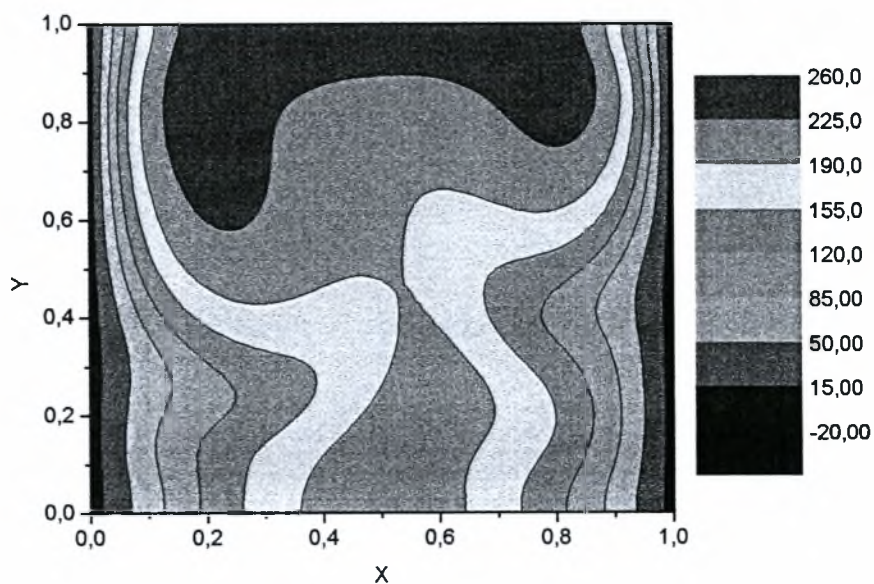


Σχήμα 6.3 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 30x30)

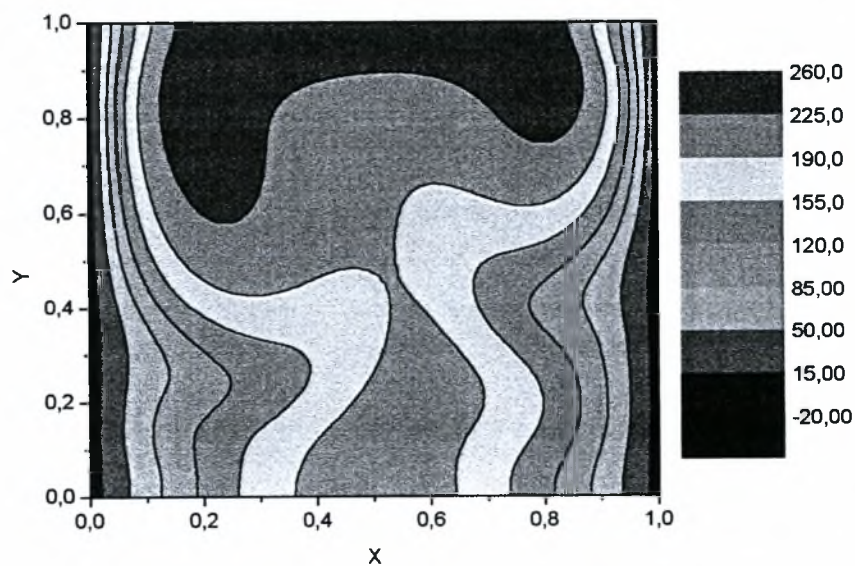


Σχήμα 6.4 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

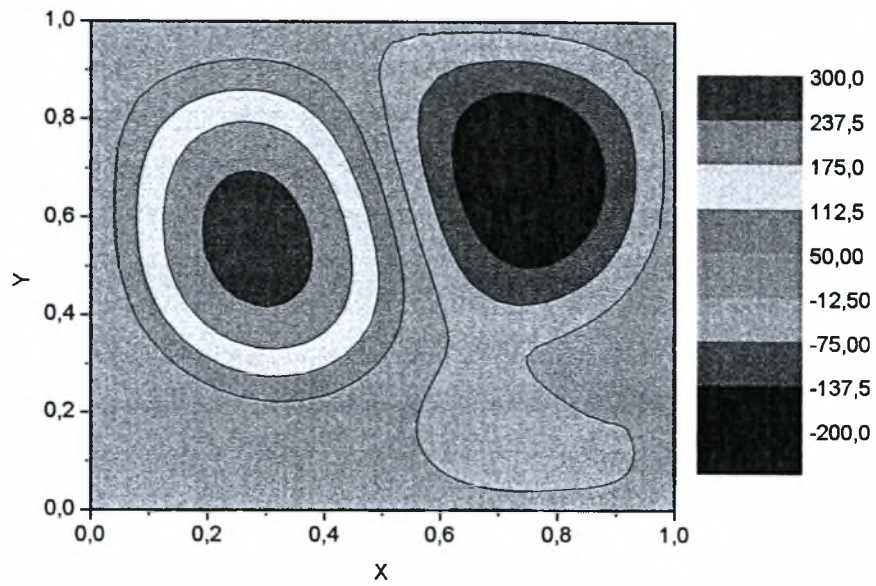
6.2.2 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=10^5$, $Gr_e=9800$



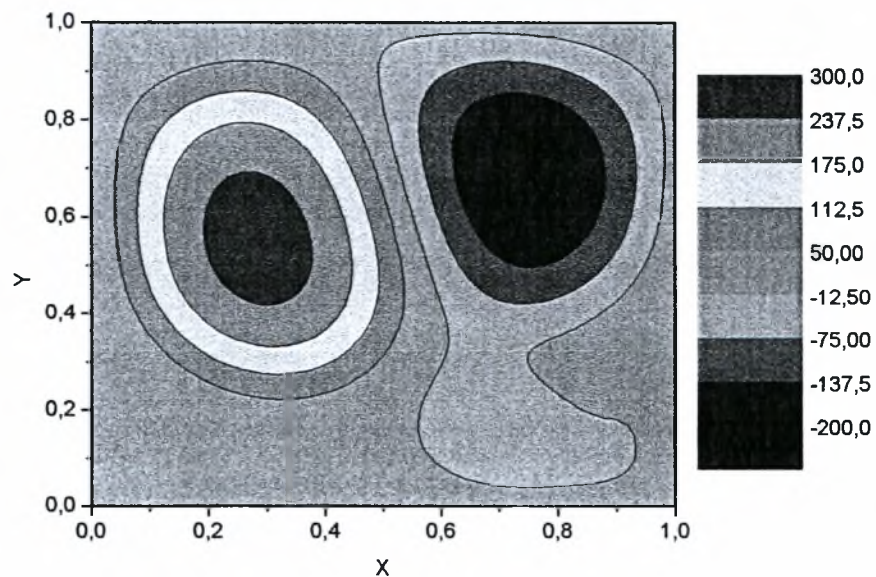
Σχήμα 6.5 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 30x30)



Σχήμα 6.6 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)



Σχήμα 6.7 Ροϊκες γραμμές (Πλέγμα 30x30)



Σχήμα 6.8 Ροϊκες γραμμές (Πλέγμα 60x60)

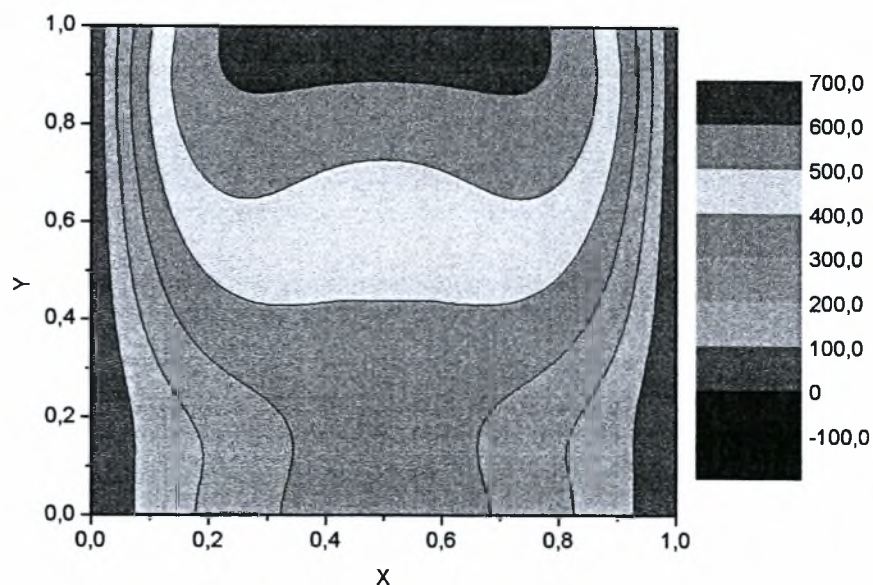
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται με τη μορφή γραμμών ροής και ισοθερμοκρασιακών κατανομών στα σχήματα 6.1 έως 6.8 δείχνουν ότι η λύση είναι ανεξάρτητη του πλέγματος και είναι η καλύτερη δυνατή που μπορεί να επιτευχθεί με τη δεδομένη αριθμητική μέθοδο. Τα αποτελέσματα που πήραμε για τη ροϊκή συνάρτηση και τη θερμοκρασία με πλέγμα 30x30 είναι τα ίδια με αυτά που πήραμε με πλέγμα 60x60.

Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, $Ha=0$ και $Gr_i=10^5$, το σημείο διακλάδωσης βρέθηκε για $Gr_e=10,050$. Στα σχήματα 6.5 έως 6.8, παρουσιάζονται η κατανομή της θερμοκρασίας και η ροϊκή συνάρτηση για $Gr_e=9800$, κοντά στο σημείο διακλάδωσης.

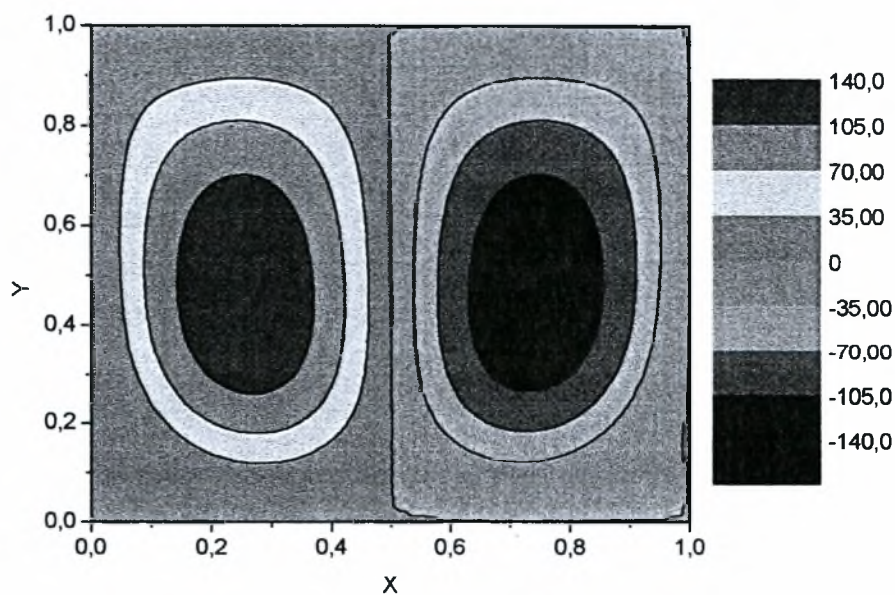
Επίσης τα παραπάνω σχήματα δείχνουν ότι όσο αυξάνει ο αριθμός Gr_e έχουμε μεγαλύτερες κλίσεις στην κατανομή της θερμοκρασίας και μεγαλύτερη ένταση της ανακυκλοφορίας με αποτέλεσμα να αυξάνει η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή.

6.3 Επίδραση του μαγνητικού πεδίου

6.3.1 Περίπτωση $Ha=250$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=3000$

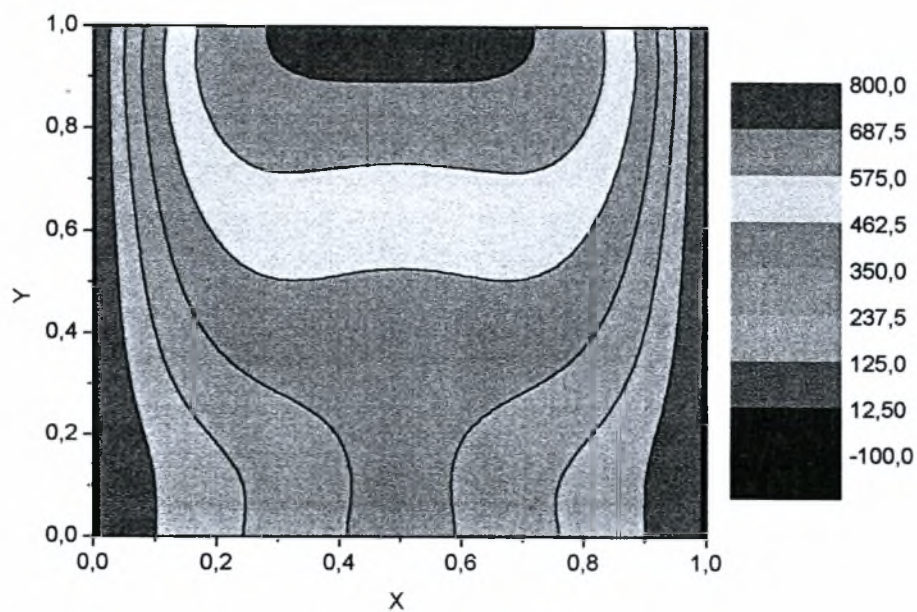


Σχήμα 6.9 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

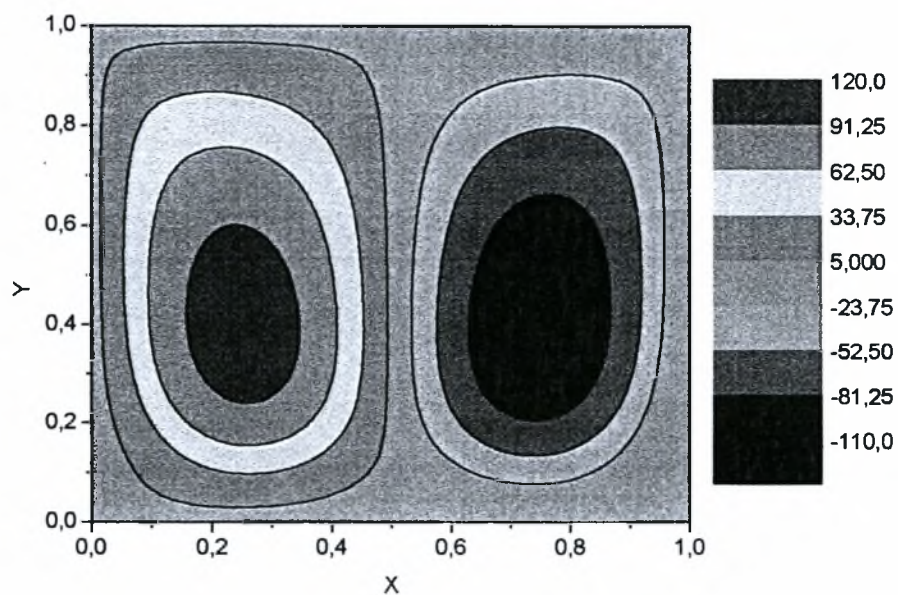


Σχήμα 6.10 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.3.2 Περίπτωση $Ha=500$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=3000$

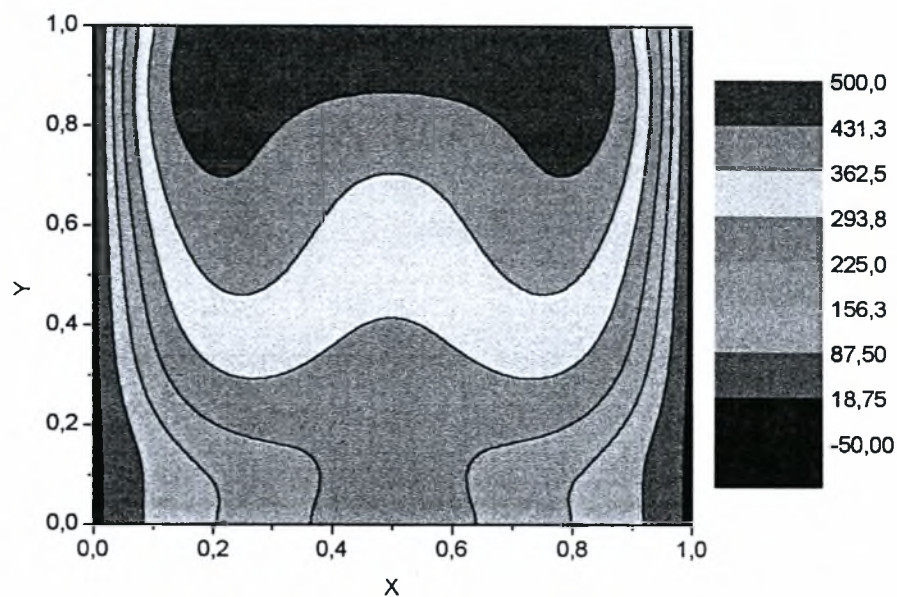


Σχήμα 6.11 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

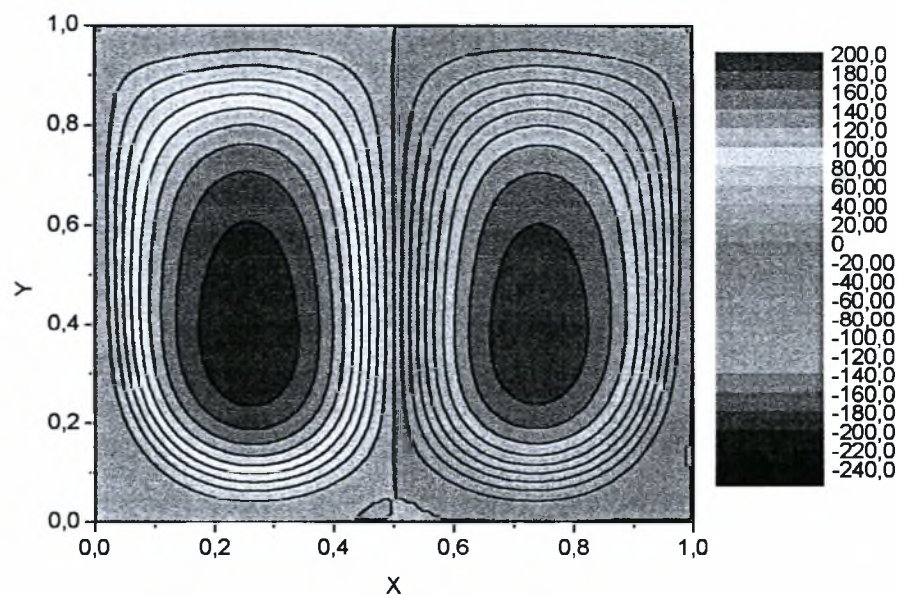


Σχήμα 6.12 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.3.3 Περίπτωση $Ha=250$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=10^4$

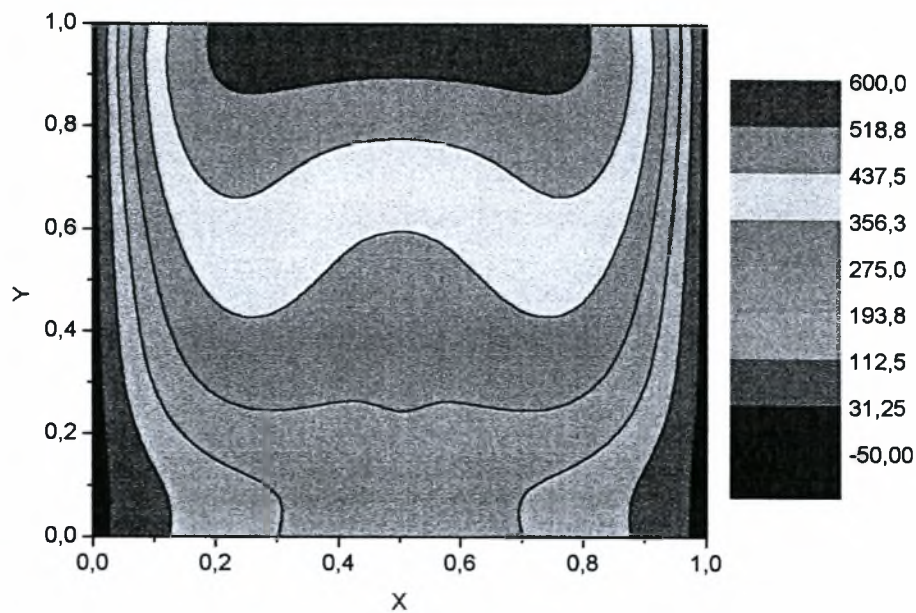


Σχήμα 6.13 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

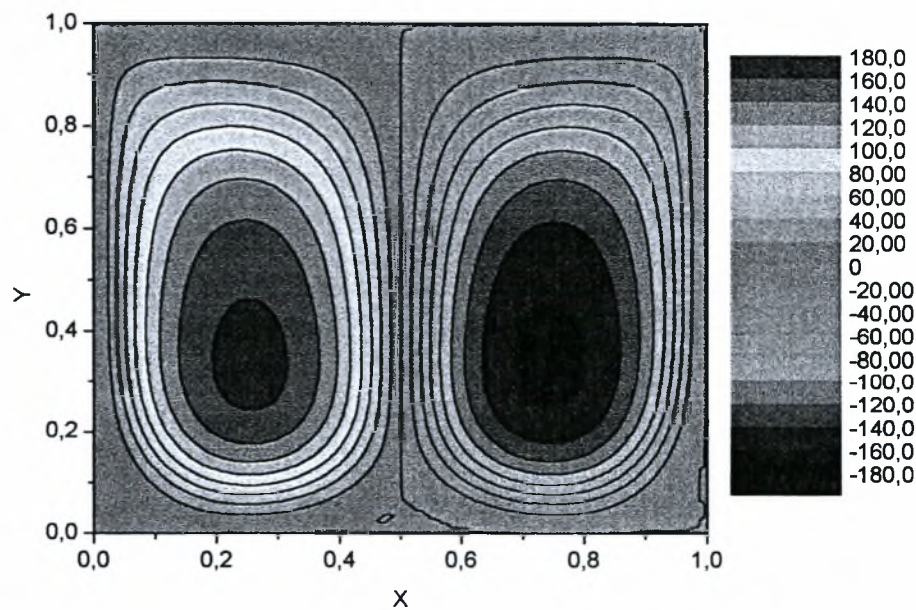


Σχήμα 6.14 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.3.4 Περίπτωση $Ha=500$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=10^4$



Σχήμα 6.15 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)



Σχήμα 6.16 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

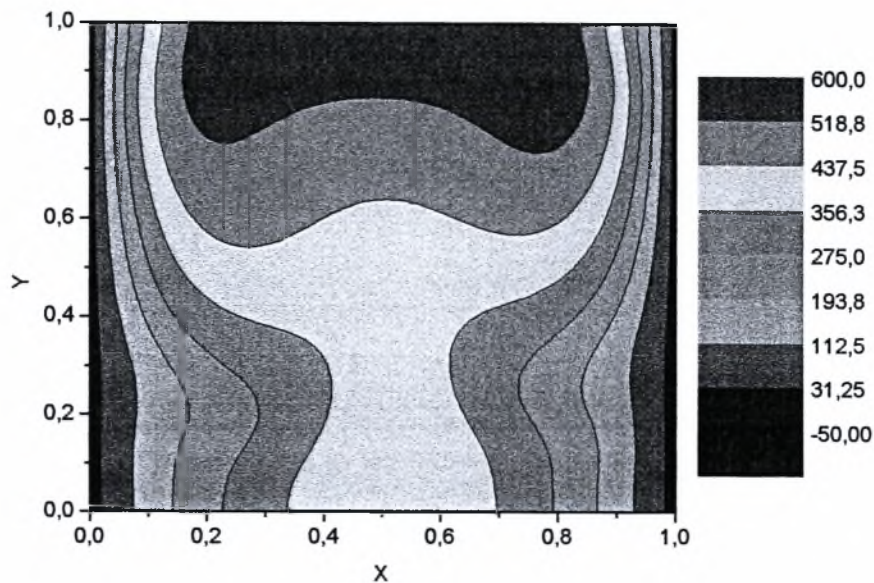
Από τα σχήματα 6.9 έως 6.16, που δείχνουν την επίδραση του μαγνητικού πεδίου, παρατηρούμε τα εξής :

Η ένταση της ανακυκλοφορίας που επικρατεί στο πεδίο ροής μειώνεται με αύξηση του αριθμού Hartmann κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς η δύναμη Lorentz λόγω του μαγνητικού πεδίου αντιτίθεται στην κίνηση του ρευστού.

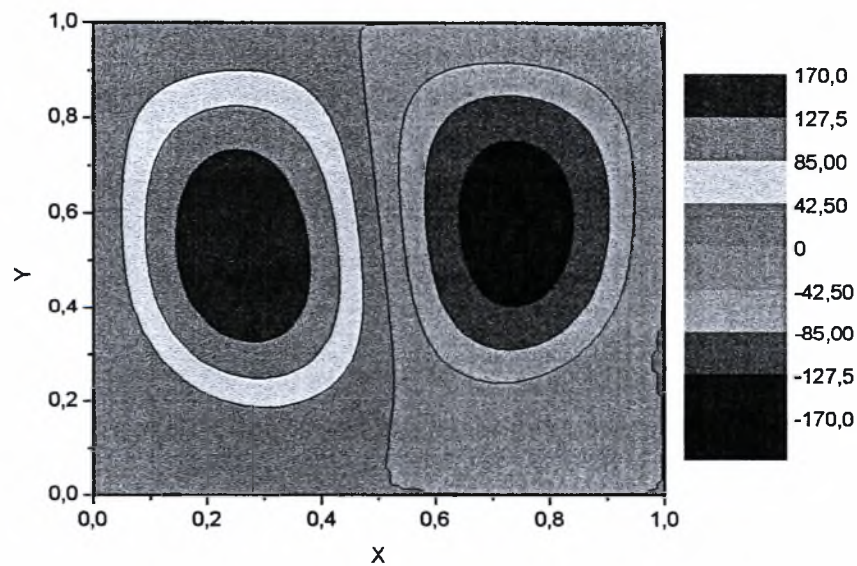
Η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου κάθετα στη βαρύτητα ευνοεί τη συμμετρία και σταθεροποιεί τη ροή. Για τις τιμές των παραμέτρων, $Ha=125$ ή $Ha=500$ και $Gr_i=2 \times 10^5$, δεν βρέθηκε σημείο διακλάδωσης έως και $Gr_e=1.2 \times 10^4$. Με αύξηση του αριθμού Hartmann έχουμε αύξηση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Gr_e για την οποία εμφανίζεται σημείο διακλάδωσης.

6.4 Επίδραση της φυσικής συναγωγής

6.4.1 Περίπτωση $Ha=125$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=3000$

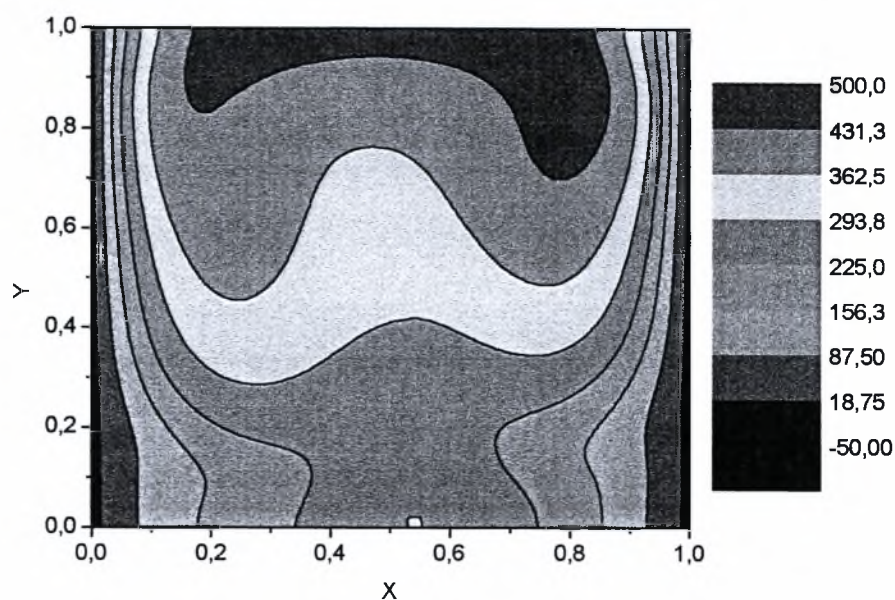


Σχήμα 6.17 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

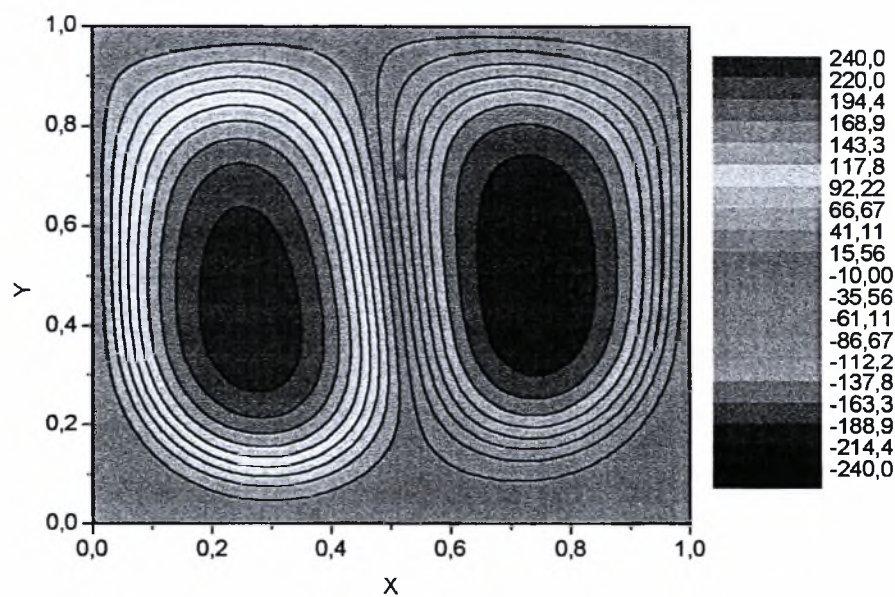


Σχήμα 6.18 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.4.2 Περίπτωση $Ha=125$, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Gr_e=10^4$



Σχήμα 6.19 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)



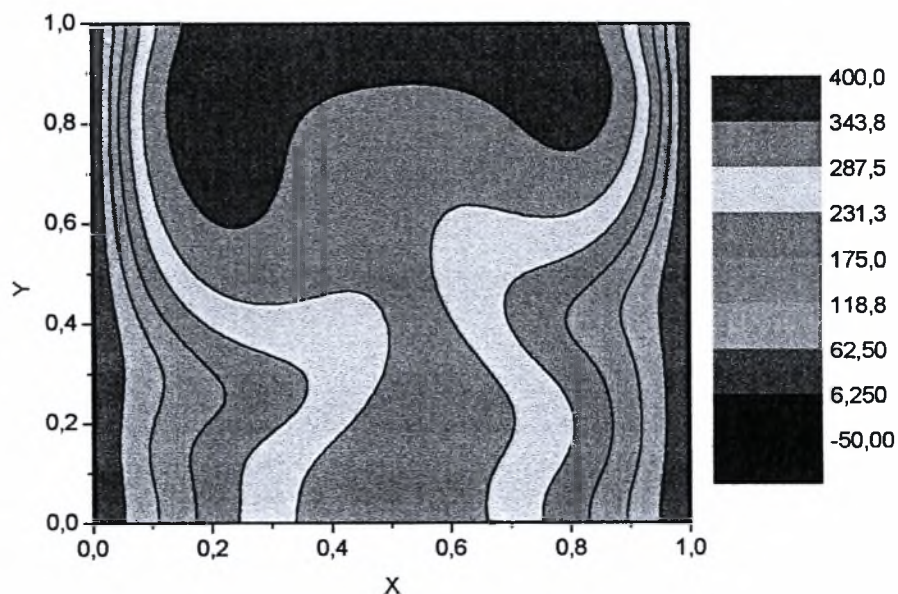
Σχήμα 6.20 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

Στα σχήματα 6.17 έως 6.20, φαίνεται η επίδραση της φυσικής συναγωγής στο ροϊκό πεδίο και στο πεδίο κατανομής της θερμοκρασίας. Με την αύξηση του αριθμού Grashof, Gr_e , παρατηρούμε ότι παρουσιάζονται μεγαλύτερες κλίσεις στο θερμοκρασιακό πεδίο και έντονη ανακυκλοφορία στο ροϊκό πεδίο με αποτέλεσμα, να ενισχύεται ο μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας με φυσική συναγωγή και να έχουμε καλύτερη μεταφορά θερμότητας προς τις περιοχές ψύξης.

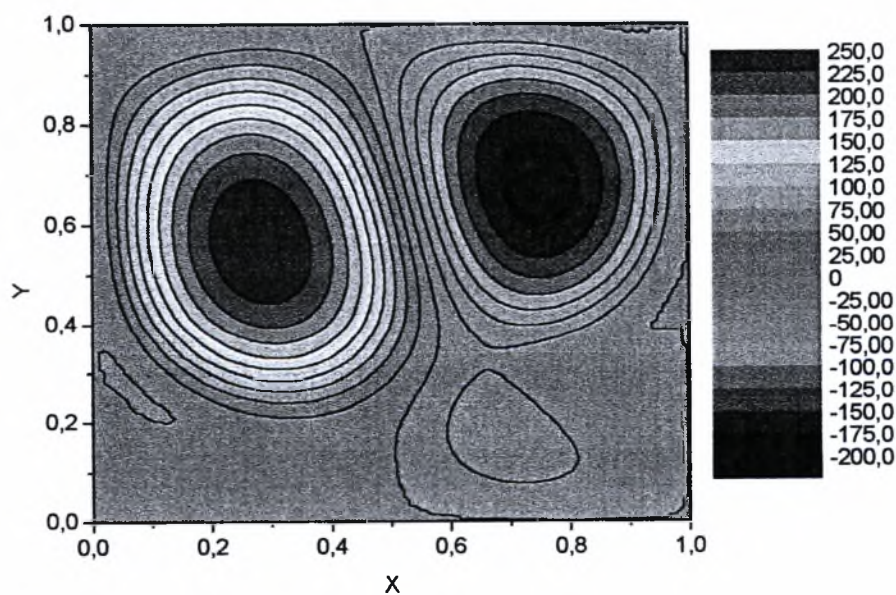
Για τις τιμές των παραμέτρων, $Ha=125$ και $Gr_i=2 \times 10^5$, βρέθηκε σημείο διακλάδωσης για $Gr_e=12,800$.

6.5 Επίδραση των εσωτερικών πηγών

6.5.1 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=1.5 \times 10^5$, $Gr_e=5500$

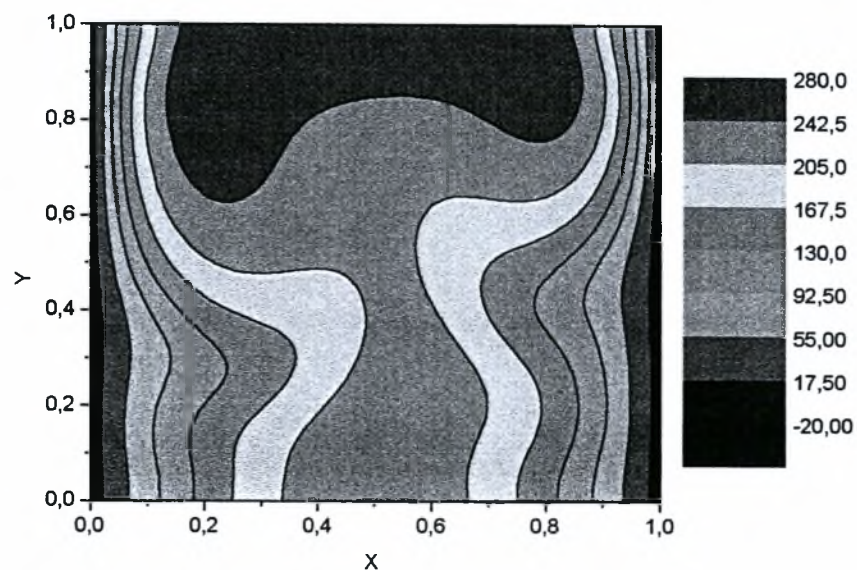


Σχήμα 6.21 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

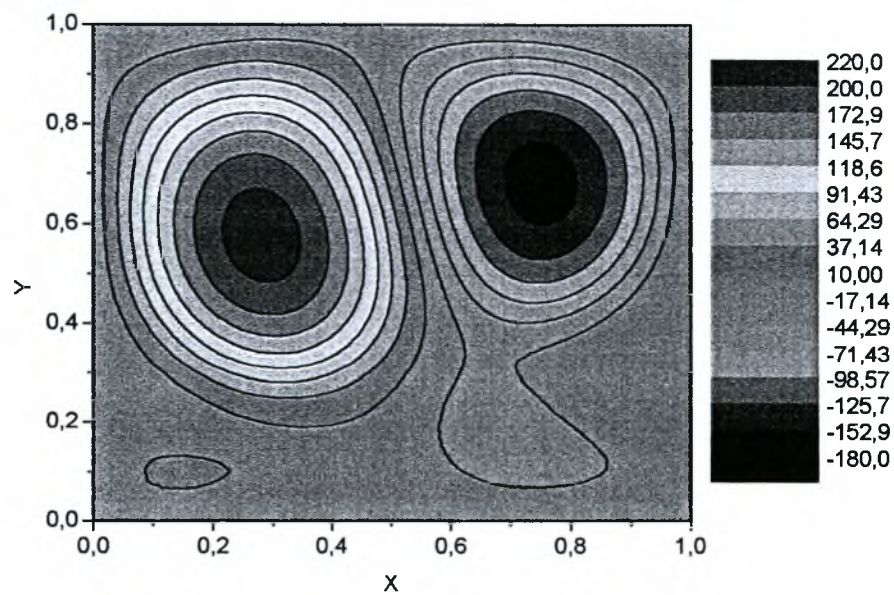


Σχήμα 6.22 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.5.2 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=10^5$, $Gr_e=5500$

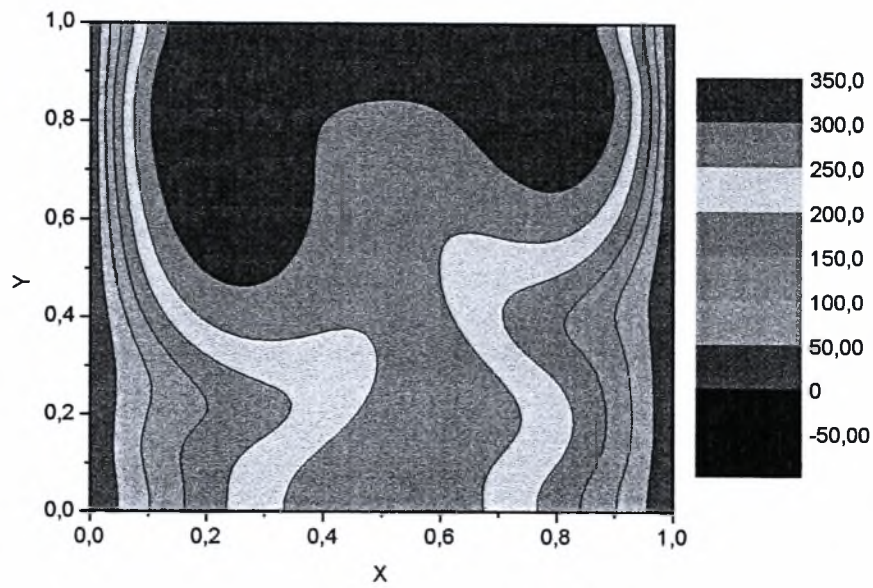


Σχήμα 6.23 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 30x30)

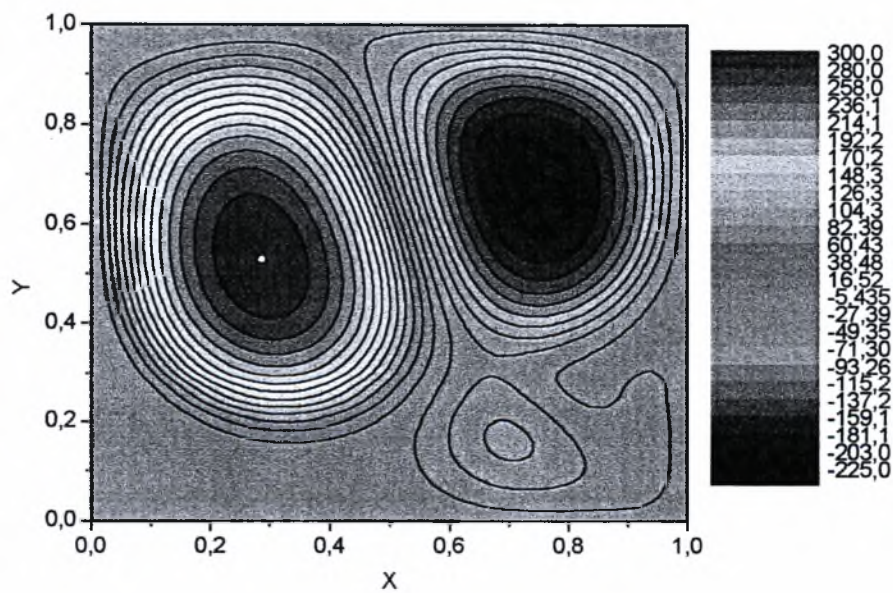


Σχήμα 6.24 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.5.3 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=1.5 \times 10^5$, $Gr_e=9500$

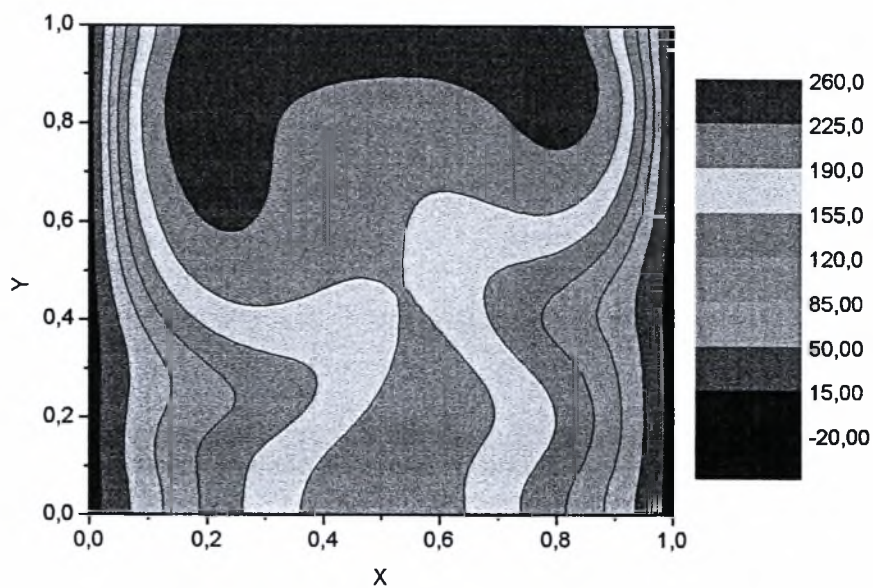


Σχήμα 6.25 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 60x60)

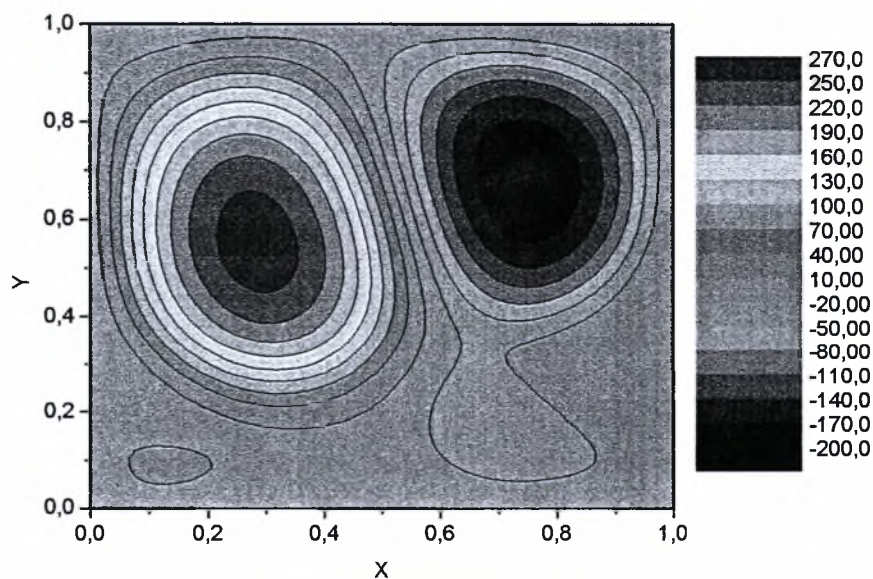


Σχήμα 6.26 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

6.5.4 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=10^5$, $Gr_e=9800$



Σχήμα 6.27 Κατανομή θερμοκρασιών (Πλέγμα 30x30)



Σχήμα 6.28 Ροϊκές γραμμές (Πλέγμα 60x60)

Στα σχήματα 6.21 έως 6.28 φαίνεται η επίδραση των εσωτερικών πηγών στο ροϊκό πεδίο και στο πεδίο κατανομής της θερμοκρασίας.

Η ύπαρξη εσωτερικών πηγών ευνοεί την ανάπτυξη ασταθειών τύπου Hopf. Όταν αυξάνει η επίδραση των εσωτερικών πηγών, αύξηση του Gr_i , μειώνεται η κρίσιμη τιμή του αριθμού Grashof, $Gr_{e,crit}$, για την οποία εμφανίζεται σημείο διακλάδωσης.

Για τις τιμές των παραμέτρων $Ha=0$ και $Gr_i=1.5 \times 10^5$, βρέθηκε σημείο διακλάδωσης για $Gr_e=7,100$

Η αύξηση των εσωτερικών πηγών δημιουργεί μεγαλύτερη θερμοκρασία στο εσωτερικό της κοιλότητας και συνεπώς μεγαλύτερες κλίσεις της θερμοκρασία κοντά στα κάθετα τοιχώματα, όπου οι θερμοκρασίες είναι δεδομένες με βάση τις συνοριακές συνθήκες.

6.6 Διαγράμματα διακλάδωσης

6.6.1 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=10^5$

Στην περίπτωση αυτή το σημείο διακλάδωσης βρέθηκε για $Gr_e=10,050$. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν 60×60 . Ο κάθετος άξονας δείχνει την μεταβολή της διαφοράς των μέσων τιμών των αριθμών Nusselt, $Nu_{AvR} - Nu_{AvL}$, καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός Gr_e , ο οποίος παρουσιάζεται στον οριζόντιο άξονα. Οι αριθμοί Nu_{AvL} και Nu_{AvR} μας δίνουν τη μέση τιμή του αριθμού Nu , και συνεπώς το μεταφερόμενο ποσό θερμότητας, στην αριστερή και δεξιά επιφάνεια της κοιλότητας αντίστοιχα και ορίζονται ως εξής,

Μέσος Nusselt για την αριστερή πλευρά της κοιλότητας :

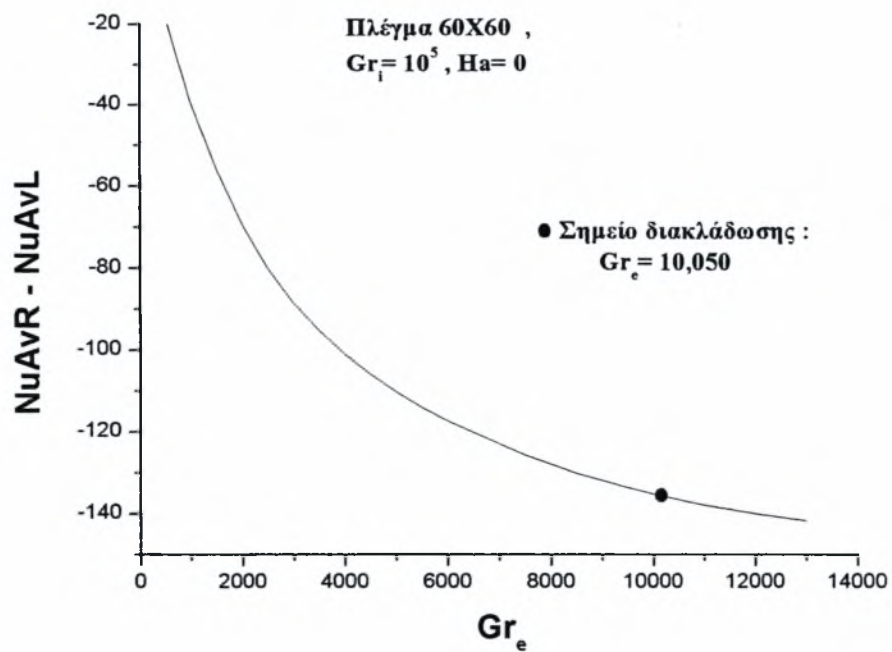
$$\overline{Nu}_L = \frac{-\int_0^{H/L} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=0} dy}{H/L} = \frac{\int_0^{H/L} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} dy}{H/L} \quad (6.1)$$

Μέσος Nusselt για τη δεξιά επιφάνεια της κοιλότητας :

$$\overline{Nu}_R = \frac{-\int_0^{H/L} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=L} dy}{H/L} = \frac{-\int_0^{H/L} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} dy}{H/L} \quad (6.2)$$

Η διαφορά $Nu_{AvR} - Nu_{AvL}$ μας δίνει την ασυμμετρία στο πεδίο θερμοκρασιών ενώ το άθροισμα $Nu_{AvR} + Nu_{AvL}$ πρέπει να ισούται με το ολοκλήρωμα του $Gr_i Pr$ πάνω στην κοιλότητα. Η τελευταία σχέση προκύπτει μετά από ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας πάνω στην κοιλότητα και χρήση των συνοριακών συνθηκών.

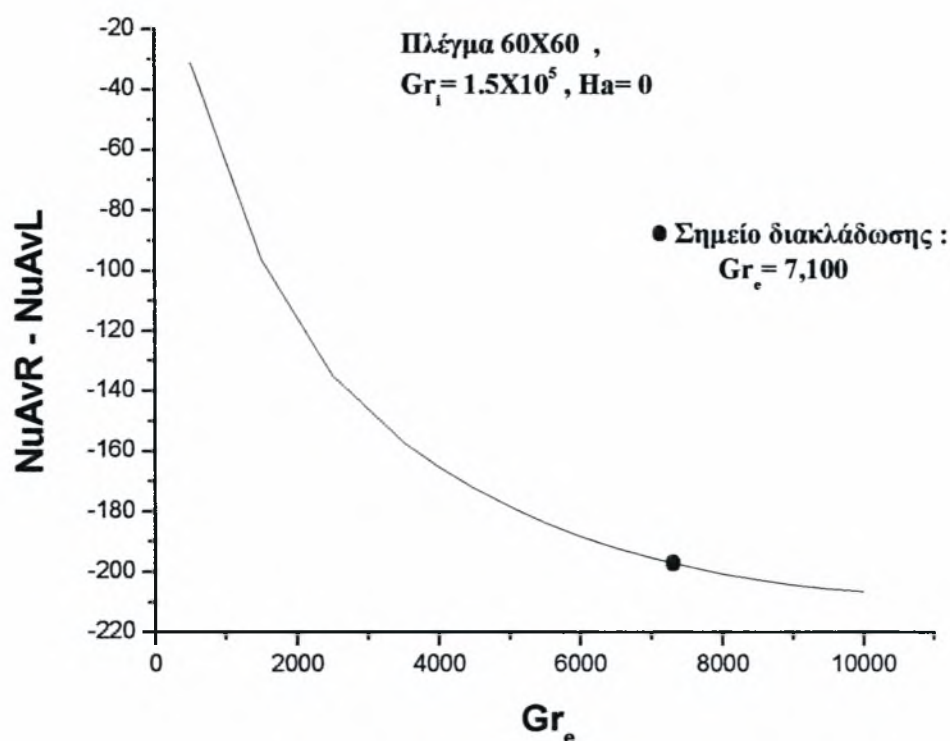
Το σημείο διακλάδωσης, που εμφανίζεται στα παρακάτω διαγράμματα με ένα μαύρο κύκλο, είναι το σημείο όπου το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα αλλάζει πρόσημο ενώ το φανταστικό μέρος παραμένει πεπερασμένο.



Σχήμα 6.25 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i=10^5$, $Ha=0$

6.6.2 Περίπτωση $Ha=0$, $Gr_i=1.5 \times 10^5$

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν 60×60 . Με αύξηση της επίδρασης των εσωτερικών πηγών, $Gr_i = 1.5 \times 10^5$, το σημείο διακλάδωσης εμφανίζεται για $Gr_e = 7,100$. Με σύγκριση των σχημάτων 6.25 και 6.26 παρατηρούμε ότι η ύπαρξη εσωτερικών πηγών ευνοεί την ανάπτυξη ασταθειών τύπου Hopf και μειώνει την κρίσιμη τιμή του αριθμού Grashof, Gr_e , για την οποία έχουμε σημείο διακλάδωσης. Επίσης, αύξηση του αριθμού Gr_i οδηγεί σε υψηλότερες θερμοκρασίες στο εσωτερικό της κοιλότητας και συνεπώς, αν ληφθεί υπόψη ότι η θερμοκρασία των δύο κατακόρυφων πλευρών της κοιλότητας είναι δεδομένη, σε υψηλότερες κλίσεις του πεδίου θερμοκρασιών και συνεπώς σε υψηλότερους αριθμούς Nu_L , Nu_R .

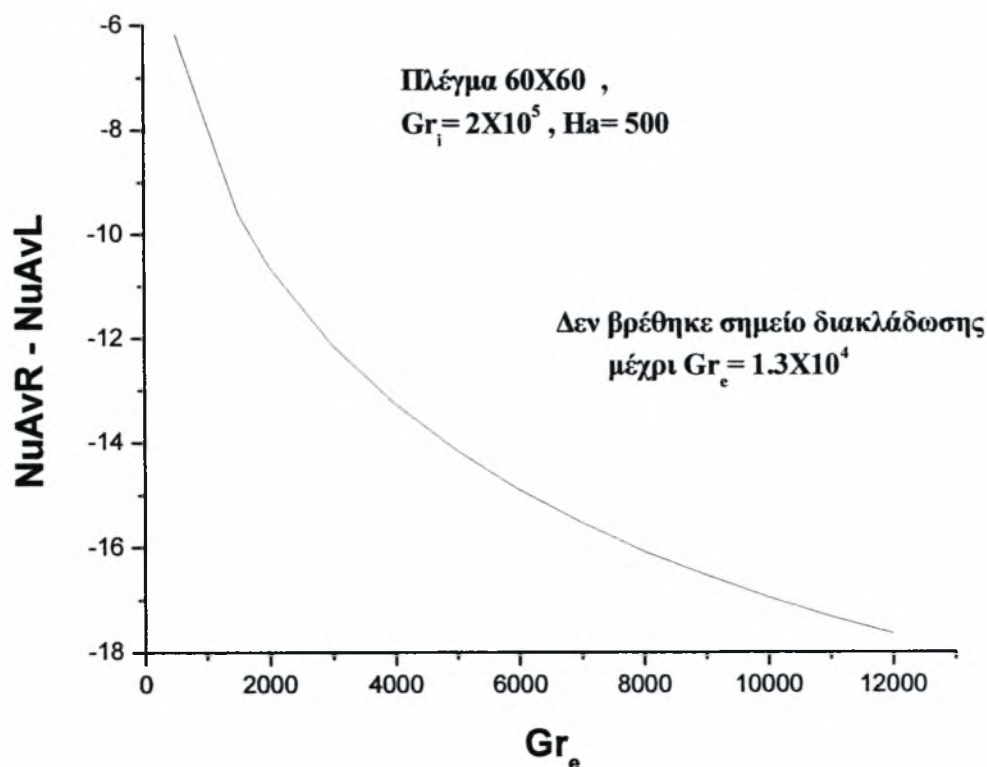


Σχήμα 6.26 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i=1.5 \times 10^5$, $Ha=0$

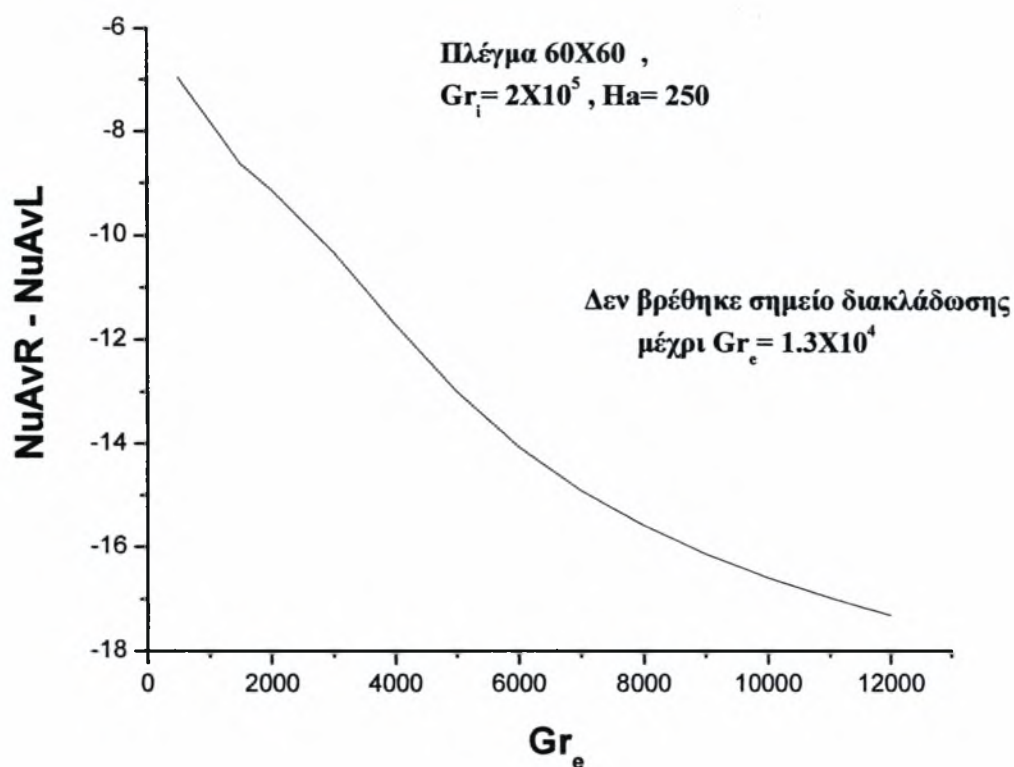
6.6.3 Περίπτωση $Ha = 500$ και $Ha = 250$, $Gr_i = 2 \times 10^5$

Στα δύο επόμενα διαγράμματα διακλάδωσης, σχήματα 6.27 και 6.28, φαίνεται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ευστάθεια της ροής μέσα στην κοιλότητα. Στην περίπτωση $Ha = 500$ δεν βρέθηκε σημείο διακλάδωσης μέχρι $Gr_e = 1.3 \times 10^4$. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και όταν $Ha = 250$.

Με εφαρμογή μαγνητικού πεδίου κάθετα στη βαρύτητα η ροή σταθεροποιείται. Με αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου, αύξηση του αριθμού Ha , αυξάνει και η κρίσιμη τιμή του αριθμού Grashof, $Gr_{e,Crit}$, για την οποία έχουμε σημείο διακλάδωσης.



Σχήμα 6.27 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i = 2 \times 10^5$, $Ha = 500$

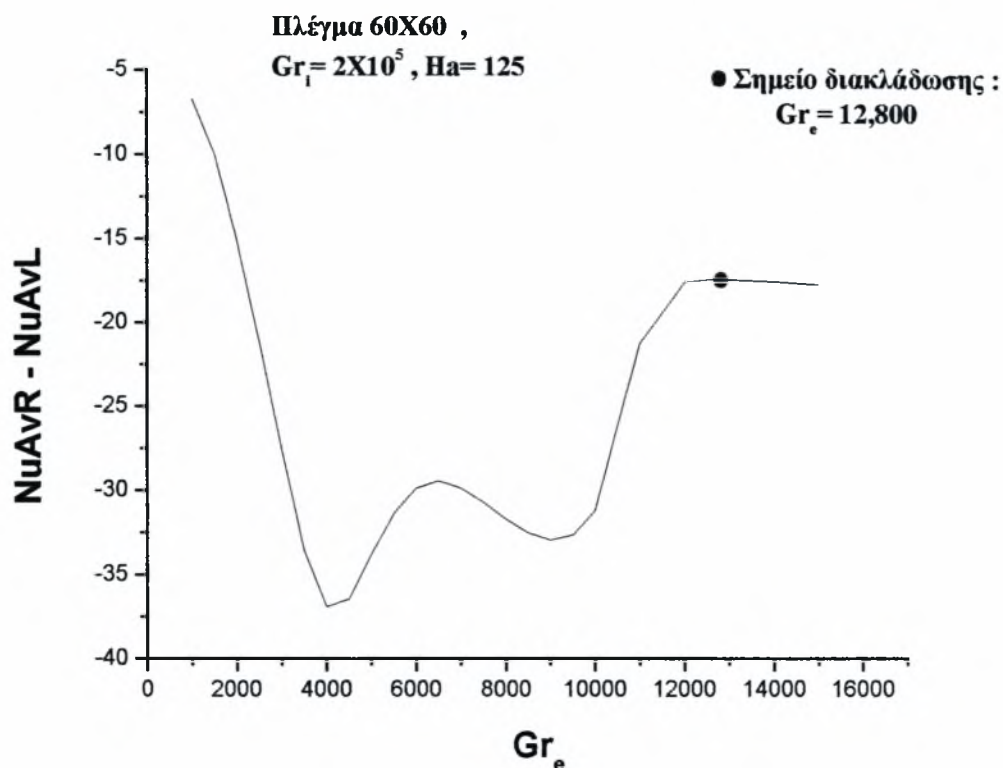


Σχήμα 6.28 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i = 2 \times 10^5$, $Ha = 250$

Οι προσομοιώσεις έγιναν μέχρι $Gr_e = 1.3 \times 10^4$ επειδή για μεγαλύτερες τιμές του Gr_e οι απαιτήσεις ακρίβειας των υπολογισμών καθιστούσαν την διαδικασία προσομοίωσης εξαιρετικά χρονοβόρα για το υπάρχον υπολογιστικό σύστημα.

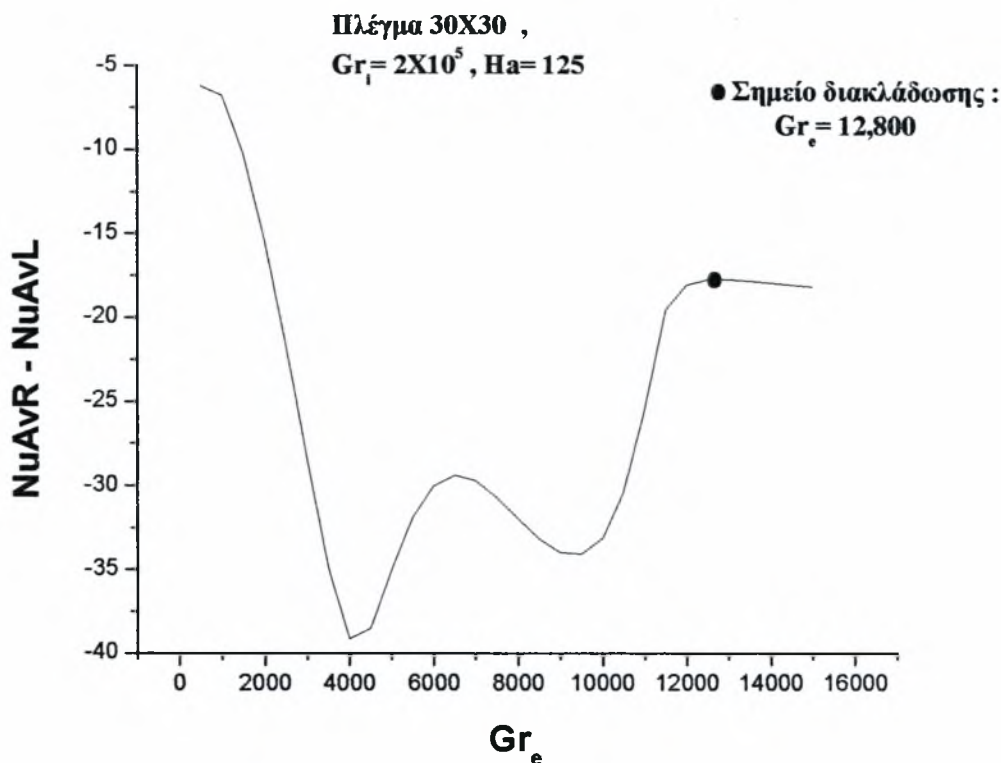
6.6.4 Περίπτωση $Ha=125$, $Gr_i=2 \times 10^5$

Για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκε πλέγμα 60×60 και βρέθηκε σημείο διακλάδωσης για $Gr_e = 12,800$.



Σχήμα 6.29 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Ha=125$

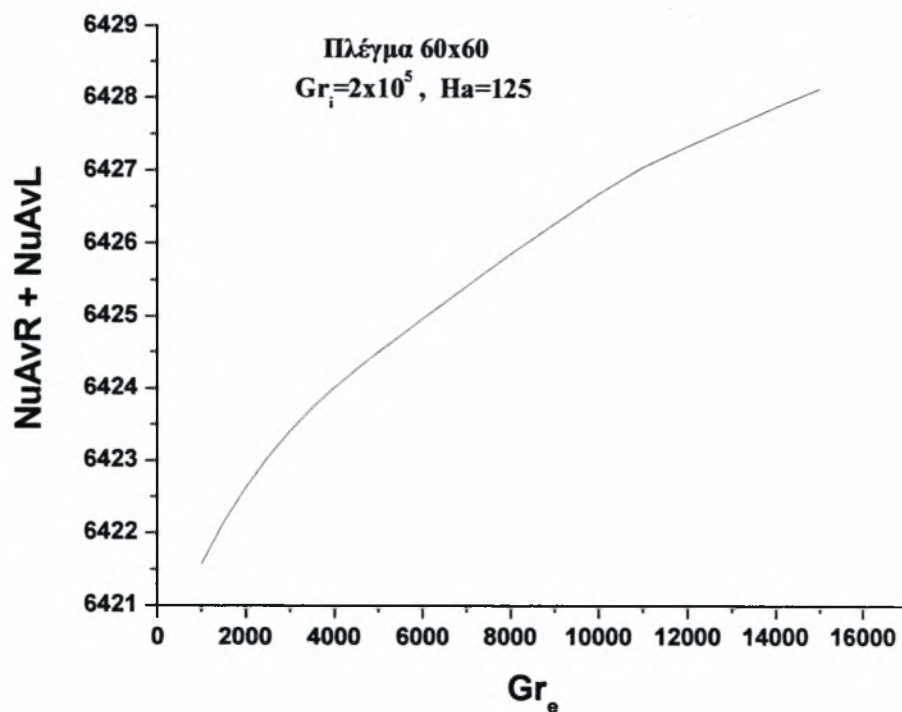
Επειδή η μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης σε αυτή την περίπτωση παρουσίαζε αυξομειώσεις στην τιμή της διαφοράς $Nu_{AvR} - Nu_{AvL}$ καθώς μεταβαλλόταν ο αριθμός Gr_e , κάτι που δεν παρατηρήθηκε στα προηγούμενα διαγράμματα διακλάδωσης, κρίθηκε σκόπιμη η κατασκευή του ίδιου διαγράμματος διακλάδωσης αλλά για πλέγμα 30×30 . Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 6.30.



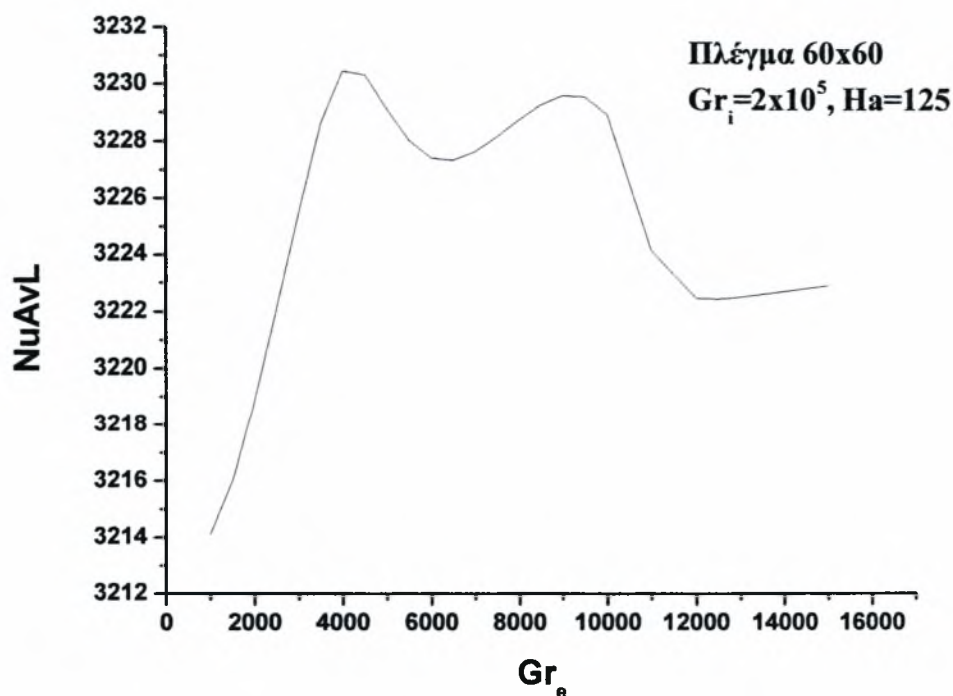
Σχήμα 6.30 Διάγραμμα διακλάδωσης, $Gr_i=2 \times 10^5$, $Ha= 125$

Από την ομοιότητα των σχημάτων 6.29 και 6.30, εικάζουμε ότι αυτή η μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης δεν οφείλεται σε κάποιο αριθμητικό λάθος.

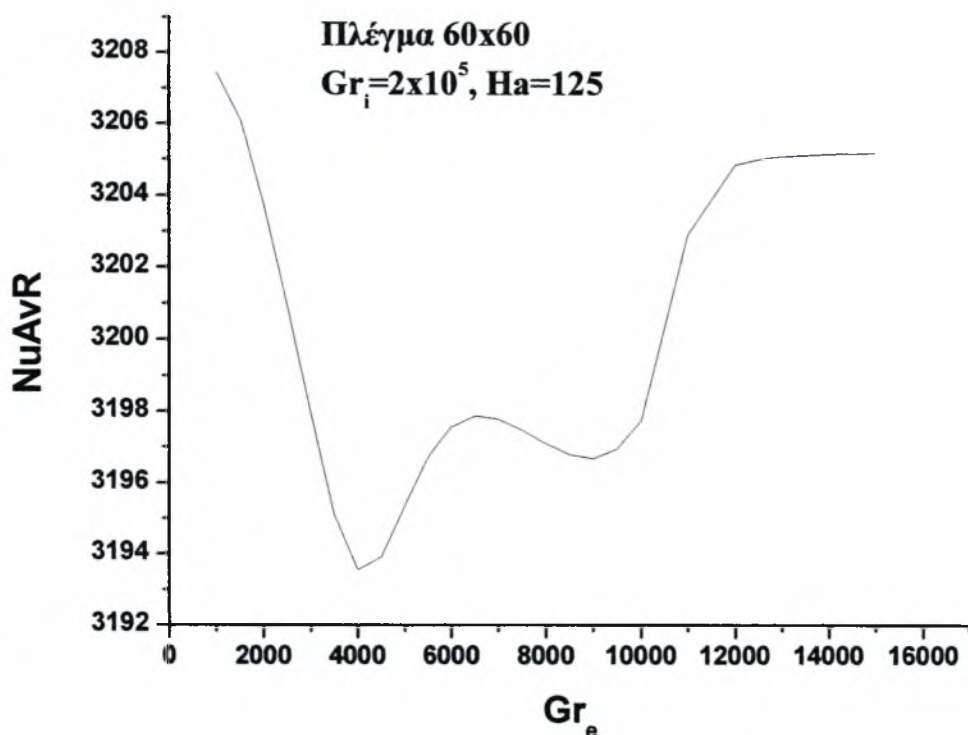
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το άθροισμα $Nu_{AvR} + Nu_{AvL}$ πρέπει να είναι σταθερό και να ισούται με το ολοκλήρωμα του $Gr_i Pr$. Για $Pr = 0.0321$ και $Gr_i = 2 \times 10^5$ πρέπει $Gr_i Pr = 6420$. Το σχήμα 6.31, που δίνει το άθροισμα $Nu_{AvR} + Nu_{AvL}$ σε σχέση με τον αριθμό Gr_e , είναι ένας ακόμη έλεγχος για την ορθότητα των σχημάτων 6.29 και 6.30. Πιο συγκεκριμένα το άθροισμα αυτό, όπως προκύπτει αριθμητικά, μεταβάλλεται μετά το τρίτο σημαντικό ψηφίο.



Σχήμα 6.31 Διάγραμμα του αθροίσματος $Nu_{AvR} + Nu_{AvL}$, ($Gr_i=2 \times 10^5$, $Ha=125$)



Σχήμα 6.32 Διάγραμμα για την αριστερή πλευρά της κοιλότητας, Nu_{AvL}



Σχήμα 6.33 Διάγραμμα για την δεξιά πλευρά της κοιλότητας, Nu_{AvR}

Οι αριθμοί Nu_{AvL} και Nu_{AvR} είναι έτσι ορισμένοι, σχέσεις 6.1 και 6.2, ώστε να δίνουν τη θερμότητα που αποβάλλεται από την αριστερή και δεξιά επιφάνειά της κοιλότητας, αντίστοιχα. Στο ισοζύγιο της θερμότητας η ποσότητα θερμότητας που αποβάλλεται από αριστερά συν την ποσότητα θερμότητας που αποβάλλεται από δεξιά πρέπει κάθε φορά να είναι ίδια αφού αναφερόμαστε σε μόνιμη κατάσταση. Έτσι όταν κάποιος από τους αριθμούς Nu_{AvL} και Nu_{AvR} μειώνεται ο άλλος θα πρέπει να αυξάνει ώστε να διατηρείται το ισοζύγιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τη μελέτη της ροής φυσικής συναγωγής σε ορθογώνια κοιλότητα υπό την επίδραση εξωτερικού ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Τα συμπεράσματα προκύπτουν από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης παρουσιάζονται κάποια γενικά συμπεράσματα για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Τέλος γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα πάνω στο θέμα.

7.1 Συμπεράσματα

Αναπτύχθηκε μεθοδολογία για τον υπολογισμό μη γραμμικών φαινομένων σε συνδυασμό με την γραμμική ανάλυση ευστάθειας.

Χρησιμοποιήθηκαν Πεπερασμένα Στοιχεία και η μέθοδος Arnoldi για τον υπολογισμό της βασικής λύσης, και των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων, αντίστοιχα.

Επίδραση Μαγνητικού Πεδίου:

Οι αξονικές και εγκάρσιες ταχύτητες παρουσιάζουν μείωση με την αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου κάθετα στη βαρύτητα ($Ha \neq 0$) σταθεροποιεί τη ροή, δηλαδή αύξηση του αριθμού Ha οδηγεί σε μεγαλύτερη κρίσιμη τιμή του Gr_c , ευνοεί τη συμμετρία και οδηγεί σε σχετικά χαμηλότερους αριθμούς Nu_L .

Επίδραση Εσωτερικών Πηγών:

Η ύπαρξη εσωτερικών πηγών ($Gr_i \neq 0$) ευνοεί την ανάπτυξη ασταθειών τύπου Hopf. Αύξηση των εσωτερικών πηγών οδηγεί σε χαμηλότερη κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr_c .

7.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Στην παρούσα εργασία έγινε κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης ως προς τον Gr_e για πεπερασμένο εύρος τιμών των Ha και Gr_i , που αντιστοιχούν στην μεταβολή μαγνητικού πεδίου και εσωτερικών πηγών. Επίσης αναπτύχθηκε η μεθοδολογία για την παραγωγή και ευστάθεια περιοδικών λύσεων με χρήση του μονόδρομου πίνακα και της μεθόδου βολής (shooting method) ώστε στο μέλλον να γίνει επέκταση των διαγραμμάτων διακλάδωσης, να καλυφθούν οι κλάδοι Hopf και να εξετασθεί η ευστάθειά τους. Ως συνέχεια της παραπάνω μελέτης προτείνονται τα εξής :

1. Χρήση ακόμη πυκνότερου πλέγματος και μεγαλύτερης πυκνώσης κοντά στα όρια όπου αναπτύσσονται συνοριακά στρώματα καθώς αυξάνει ο αριθμός Gr_e .
2. Παρακολούθηση των κλάδων Hopf και ανάλυση ευστάθειας με την βοήθεια του μονόδρομου πίνακα.
3. Βελτιστοποίηση και παραλληλισμός του κώδικα.
4. Θεώρηση του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου, $R_m \neq 0$.
5. Διερεύνηση ύπαρξης τρισδιάστατων ασταθειών με γραμμική ανάλυση.
6. Επέκταση μη γραμμικού κώδικα σε τρεις διαστάσεις.
7. Μελέτη της ροής για κυλινδρική γεωμετρία.

Επί πλέον ενδιαφέρει η μελέτη της ευστάθειας πλήρως ανεπτυγμένης ροής λόγω πτώσης πίεσης σε ορθογώνιο ή κυλινδρικό αγωγό. Η βασική ροή είναι μονοδιάστατη κατά την διεύθυνση πτώσης πίεσης και μεταβάλλεται επάνω στην διατομή όπου σχηματίζει στοιβάδες Hartmann όταν υπάρχει μαγνητικό πεδίο κάθετο στην διεύθυνση της ροής και ο αριθμός Hartmann είναι αρκετά υψηλός. Υπό αυτές τις συνθήκες παρατηρείται ανακυκλοφορία της ροής επάνω στο επίπεδο της διατομής γεγονός που επηρεάζει τον ρυθμό μεταφοράς θερμότητας. Η ροή αυτή αναμένεται να εμφανιστεί στον μανδύα αναγέννησης λιθίου του ITER [42] όπου η ροή του λιθίου θα γίνεται κάθετα στο τοροειδές πεδίο. Το πολοειδές πεδίο θα είναι παράλληλο με την κύρια διεύθυνση της ροής, όμως είναι αμελητέο σε σχέση με το τοροειδές. Πρόκειται για αρκετά ενδιαφέροντα διάταξη ροής με σημαντική προοπτική εφαρμογής στο μέλλον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] N.A. Pelekasis, K. Economou and J.A. Tsamopoulos, “Linear oscillations and stability of a liquid bridge in an axial electric field”, *Physics of Fluids*, Vol. 13, No 12, pp. 3564-3581
December 2001
- [2] E. de Hoffman and V. Stroobant, *Mass Spectrometry: Principles and Applications*, Wiley 2002
- [3] R.L.Murray, *Understanding radioactive waste*, Battelle Press 2003
- [4] Wu K.F., J.P. Brancher, Thermoconvective instability in a bounded vertical cylinder with internal heat generation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3775-3784, 2000.
- [5] Davidson P.A., “An introduction to Magnetohydrodynamics”, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [6] R.Brown, “Theory of Transport Processes in single crystal growth from the melt”, *AIChE. J.* 34. 881 (1988)
- [7] Γ.Μπεργελές, *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Εκδόσεις Συμεών, 1999.
- [8] Ν. Μαρκατος και Δ. Ασημακόπουλος, *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 1995.
- [9] Γ. Ι. Τσαμασφύρος και Ε. Ε. Θεοτόκογλου, *Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων I*, Αθήνα 2000.
- [10] R.B. Lehoucq & J.A. Scott, “An evaluation of software for computing eigenvalues of sparse nonsymmetric matrices”, MCS-P547-1195, Argonne National Laboratory (1996)
- [11] Rüdiger S., ‘From Equilibrium To Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis’, Elsevier 1988.
- [12] Morley N.B., S. Smolentsev, L. Barleon, I.R. Kirillov and M. Takahashi, ‘Liquid magnetohydrodynamics – recent progress and future direction for fusion’, *Fusion Engineering and Design*, Vol. 51 – 52, pp. 701 – 713, 2000.
- [13] T. Hey and P. Walters, ‘The Quantum Universe’, Cambridge University Press, 1987.
- [14] H. D. Young, ‘University Physics’, Addison – Wesley Publishing Company, 1992.
- [15] F. Chen, *Introduction to plasma physics*, Plenum Press, 1985.
- [16] J. Wesson, *Tokamaks*, second edition, Oxford Engineering Science Series 48, Oxford, 1997.
- [17] H.P. Zerhfeld, Proc. 25th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics, Prague, 1998.

- [18] S. Chandrasekhar, Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, 1961.
- [19] G. Bateman, MHD Instabilities, The MIT Press, Cambridge Massachusetts and London, England, 1980
- [20] N.A. Pelekasis, J.A. Tsamopoulos and G.D. Manolis, Equilibrium shapes and stability of charged and conducting drops, Physics Fluids A., Vol.2, No 8, August 1990.
- [21] W.B. Kunkel, Plasma Physics in Theory and Application, McGraw – Hill, 1996.
- [22] P.A Sturrock, Plasma Physics: an introduction, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [23] L.C. Woods, Physics of Plasmas, Wiley, 2003.
- [24] B.B. Kadomtsev, Tokamak Plasma, IoP, 1993.
- [25] T. Kammash, Fusion Reactor Physics, Ann Arbor Science, 1982.
- [26] W.M. Stacey, Fusion and Technology, Wiley, 1984.
- [27] Wesson, Tokamaks, Clarendon Press, 1997.
- [28] H. Branover (ed.), Liquid Metal Flows: MHD and Applications, AIAA Press, 1988.
- [29] V.C.A. Ferraro, Plumpton, An Introduction to Magnetofluid Mechanics, Oxford Univ. Press, 1966.
- [30] J.P. Goedbloed, Principles of MHD, Cambridge Univ. Press, 2004.
- [31] H. Young, The Electromagnetodynamics of Fluids, Krieger, 1988.
- [32] H.K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids, Cambridge Univ. Press, 1978.
- [33] P.H. Roberts, An Introduction to MHD, Longmans, 1967.
- [34] B.K. Shivamoggi, Theory of Hydromagnetic Stability, Gordon and Breach, 1986.
- [35] Shi-I-Pai, Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Springer, 1962.
- [36] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley, 1975.
- [37] C.M. Braams, Stott, Nuclear Fusion: Half a Century of Magnetic Confinement Fusion Research, IoP, 2002.
- [38] Παπαϊωάννου Α., Μηχανική των ρευστών, Τόμος I και II, 1996.
- [39] Θ. Γραμμένος, “Εισαγωγή στην Κλασική Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία”, 2^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος 2003
- [40] Θ. Γραμμένος, “Εισαγωγή στην Κλασική Ηλεκτροδυναμική και το Πλάσμα”, 3^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος 2003
- [41] Patankar S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

- [42] Bühler L. & Norajitra P. , Magnetohydrodynamic flow in the dual coolant blanket, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 2003.
- [43] Κακαράντζας Σ., “Μελέτη της Επίδρασης του Μαγνητικού Πεδίου σε Ροές Φυσικής Συναγωγής υπό την Επίδραση Εσωτερικών Πηγών Θερμότητας”, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Π.Θ., 2002
- [44] Pelekasis N. & Grammenos, “Stability Analysis of MHD Flows, Euratom Report, Annex, 2003



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074027

