

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πολυμεταβλητός Έλεγχος Ελικοφόρων Αεροσκαφών

Μ. Κ. Γρυπάρη

Επίβλεψη: Φ. Ν. Κουμπουλής

Βόλος 1997

αρ. εισ. ...65/Π.Α.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000055677



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 1918/1
Ημερ. Εισ.: 20-10-1997
Δωρεά:
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ
1997
ΓΡΥ

Πρόλογος

Η παρούσα Διπλωματική εργασία αποτελεί συμβολή στον έλεγχο πτήσης ελικοπτέρων. Σχεδιάζονται νέοι νόμοι ελέγχου, οι οποίοι συνεισφέρουν στην επιτυχή τοποθέτηση και προσανατολισμό του ελικοπτέρου, στη διάρκεια της πτήσης.

Η διπλωματική εργασία διαμορφώνεται σε επτά κεφάλαια, ως ακολούθως:

Στο πρώτο Κεφάλαιο δίδονται εισαγωγικά στοιχεία για τον επιστημονικό κλάδο του ελέγχου πτήσης, και παρουσιάζεται συνοπτικά η συμβολή της αποσύζευξης.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά τεχνικά στοιχεία που επικρατούν στην πτήση του ελικοπτέρου, και ειδικότερα τα θεμελιώδη δυναμικά προβλήματα του έλικα, η ασυμμετρία ροής και ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται, η κίνηση πτερυγισμού και πτέρωσης της λεπίδας, κ.α.

Στο τρίτο Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης του ελικοπτέρου για την πλήρη ανάλυση σε διαμήκη και εγκάρσια συνιστώσα.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο έλεγχος της διαμήκους κίνησης του ελικοπτέρου που εκτελεί ευθεία οριζόντια πτήση.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο έλεγχος της διαμήκους κίνησης του ελικοπτέρου που εκτελεί εμπρόσθια πτήση.

Στο έκτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο έλεγχος της συζευγμένης διαμήκους και εγκάρσιας κίνησης του ελικοπτέρου.

Στο έβδομο Κεφάλαιο παρουσιάζονται συνολικά τα εξαγόμενα συμπεράσματα. Τέλος παρουσιάζεται η σχετική βιβλιογραφία και αρθρογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους καθηγητές του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για τις γνώσεις που μου προσέφεραν, και κυρίως στα μέλη της Τριμελούς επιτροπής της Διπλωματικής μου εργασίας Φ. Κουμπουλή, Ν. Βλάχο και Β. Μποντόζογλου. Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την κατανόηση και την συμπαράσταση που μου έδειξε.

Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Ν. Σπ. Βλάχο για τη συμβολή του στην αεροδυναμική ανάλυση των συνθηκών επίλυσιμότητας του ανεξάρτητου ελέγχου ελικοπτέρων, καθώς και τον επιβλέποντά μου Φ. Ν. Κουμπουλή ο οποίος με την εμπνευσμένη και ακούραστη επίβλεψή του σε όλα τα στάδια της ερευνητικής προσπάθειας, κατέστησε εφικτή την ολοκλήρωση της Διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:	Εισαγωγή.	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:	Στοιχεία δομής και λειτουργίας αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων.	4
2.1	Ορισμός αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων.	4
2.2	Φόρτιση δίσκου	6
2.3	Κατανάλωση ενέργειας αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων.	6
2.3.1	Αιώρηση	6
2.3.2	Διαδρομή	7
2.4	Θεμελιώδη δυναμικά ζητήματα του έλικα	8
2.4.1	Ασυμμετρία ροής.	8
2.4.2	Ασυμμετρία στα φορτία των λεπίδων	10
2.4.3	Στρόφιγγα πτερυγισμού	12
2.5	Κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας	15
2.5.1	Στατική ευστάθεια.	15
2.5.2	Δυναμική ευστάθεια.	16
2.6	Ελεγχος Ελικα	25
2.6.1	Κλίση του διανύσματος της άνωσης μέσω περιοδικής αλλαγής της γωνίας προένευσης της λεπίδας κατά την αιώρηση	25
2.6.2	Πτερυγισμός κατά την πτήση	29
2.7	Κίνηση υστέρησης της λεπίδας	32
2.8	Ερμηνεία της ισοδυναμίας των κινήσεων πτερυγισμού και πτέρωσης	34
2.9	Είσοδοι ελέγχου της κίνησης του ελικοπτέρου	34
2.9.1	Εγκάρσιο και διαμήκες κυκλικό βήμα	34
2.9.2	Συλλογικό βήμα	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:	Δυναμικές εξισώσεις κίνησης ελικοπτέρου	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:	Ελεγχος Αποκοπής Αλληλεπιδράσεων για Ευθεία και Οριζόντια Πτήση Ελικοπτέρου	50

4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Περιγραφή μοντέλου.	51
4.3	Συνθήκες επιλυσιμότητας	53
4.4	Αναλυτική έκφραση των ελεγκτών αποσύζευξης	55
4.5	Αποσυζευγμένο σύστημα κλειστού βρόχου	56
4.6	Αποτελέσματα προσομοίωσης	56
4.7	Συμπεράσματα	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Ανεξάρτητος Έλεγχος Πτήσης για την

Διαμήκη Κίνηση Ελικοπτέρου 68

5.1	Εισαγωγή	69
5.2	Περιγραφή μοντέλου.	70
5.3	Συνθήκες επιλυσιμότητας	71
5.4	Ερμηνεία των συνθηκών αποσύζευξης	75
5.5	Αναλυτική έκφραση των ελεγκτών ανεξάρτητου ελέγχου	76
5.5.1	Ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος ως προς την άνωση και την ροπή προένευσης	76
5.5.2	Μη ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος ως προς την άνωση	77
5.5.3	Μη ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος ως προς την ροπή	77
5.6	Ανεξάρτητος έλεγχος με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση	78
5.7	Προσομοίωση	79
5.8	Συμπεράσματα	80

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Έλεγχος της Συζευγμένης

Διαμήκους και Εγκάρσιας Κίνησης

Ελικοπτέρου 92

6.1	Εισαγωγή	93
6.2	Περιγραφή μοντέλου.	94
6.3	Συνθήκες επιλυσιμότητας.	99
6.4	Αναλυτική έκφραση των ελεγκτών αποσύζευξης.	101
6.5	Αποσυζευγμένο σύστημα κλειστού βρόχου	104
6.6	Αποτελέσματα προσομοίωσης.	105
6.7	Συμπεράσματα	106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Τελικά Συμπεράσματα και προτάσεις. 125

7.1	Τελικά συμπεράσματα	125
7.2	Προτάσεις.	126

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ	128
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	130

Εισαγωγή

Σύνοψη: Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικά στοιχεία για τον έλεγχο πτήσης αεροσκαφών και ελικοπτέρων. Επίσης παρουσιάζεται συνοπτικά η συμβολή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τα συστήματα ελέγχου αεροσκαφών (αεροπλάνων, ελικοπτέρων, πυραύλων) αποτελούν ένα ταχέως εξελισσόμενο κλάδο στην επιστήμη του Μηχανικού. Τα ερευνητικά αποτελέσματα διαρκώς αυξάνονται προσελκύοντας το άμεσο ενδιαφέρον των αεροπορικών βιομηχανιών. Τα υπάρχοντα επιτεύγματα είναι ήδη γνωστά σε όλο τον κόσμο, έχουν όμως πολλά να γίνουν μέχρι την μετατροπή των αεροσκαφών σε οχήματα πλήρως ελεγχόμενης διαδρομής. Οι προσπάθειες ξεκινούν από δύο ερευνητικές περιοχές, τον αυτόματο έλεγχο και την αεροδυναμική, και συναντώνται στις τεχνικές ελέγχου πτήσης αεροσκαφών.

Ειδικότερα, για την περίπτωση των ελικοπτέρων το ενδιαφέρον είναι ιδιαίτερα αυξημένο τα τελευταία χρόνια. Το χαρακτηριστικό πλεονέκτημα των ελικοπτέρων σε σχέση με τα αεροπλάνα είναι ότι παρουσιάζουν στοιχεία αεροδυναμικής ευστάθειας επιτρέποντας την καλύτερη τοποθέτηση και προσανατολισμό του σκάφους ανεξάρτητα από το μέγεθος της οριζόντιας ταχυτητάς του. Αναμένεται στο μέλλον τα ελικόπτερα να αποκτήσουν περίοπτη θέση, όσον αφορά στις υπεραστικές συγκοινωνίες. Το μειονέκτημα των ελικοπτέρων είναι ότι για μακρινές διαδρομές καταναλώνουν σημαντική ενέργεια σε σχέση με τα αεροπλάνα. Από την πλευρά του ελέγχου, ο στόχος στα ελικόπτερα είναι να επιτευχθεί ικανοποιητική (ακριβής) τοποθέτηση και προσανατολισμός του σκάφους μέσα από ελεγκτές που υλοποιούνται με ταχεία υπολογιστικά συστήματα. Η παρούσα εργασία συνεισφέρει σε αυτό τον σκοπό.

Η σύζευξη μεταξύ των εντολών του χειριστή και των προς έλεγχο μεταβλητών πτήσης επηρεάζει άμεσα την ποιότητα της πτήσης. Η αποσύζευξη των τρόπων των μεταβλητών

πτήσης με ταυτόχρονα ικανοποιητικό χρόνο απόσβεσης και ρύθμισης, είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα του ελέγχου πτήσης τόσο για τα αεροπλάνα όσο και για τα ελικόπτερα ([1]-[10]). Η τοποθέτηση ιδιοτιμών [8]-[10] είναι ίσως η πιο συνήθης τεχνική σχεδιασμού η οποία ικανοποιεί σε σημαντικό βαθμό τις παραπάνω απαιτήσεις για το ελικόπτερο. Σύμφωνα με την τοποθέτηση ιδιοτιμών ([1], [2], [8], [10]), μετά την εκλογή ενός ιδανικού συνόλου ιδιοτιμών του κλειστού συστήματος καθώς και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, παρατηρείται ικανοποιητική αποσύζευξη των τρόπων και ικανοποιητικές ποιότητες πτήσης. Σύμφωνα με την τεχνική της αποσύζευξης, [4]-[6], [11], το πολλαπλών εισόδων-εξόδων σύστημα πτήσης μετατρέπεται σε πολλά συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου.

Στην παρούσα εργασία η τεχνική της αποσύζευξης εισόδων-εξόδων προτείνεται ως ο κατάλληλος σχεδιαστικός στόχος για τον ανεξάρτητο έλεγχο των μεταβλητών απόδοσης του ελικοπτέρου. Ειδικότερα, τρεις κατηγορίες πτήσης μελετώνται όπου και επιτυγχάνεται ανεξάρτητος έλεγχος των μεταβλητών του αεροσκάφους με κατάλληλο έλεγχο στατικής ανατροφοδότησης κατάστασης. Οι τρεις κατηγορίες είναι: α) η ευθεία και οριζόντια πτήση, β) η διαμήκης κίνηση και γ) η συζευγμένη διαμήκης και εγκάρσια κίνηση. Οι τρεις κατηγορίες παρουσιάζουν κλιμάκωση όσον αφορά στην δυσκολία και πολυπλοκότητα.

Για την περίπτωση της ευθείας και οριζόντιας πτήσης, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι παρά το γεγονός ότι αποτελεί την πιο ασφαλή πτήση, η ακρίβεια των ελιγμών δεν είναι πάντα επιτυχής. Για την συγκεκριμένη πτήση επιτυγχάνεται αποσύζευξη μεταξύ της γωνίας προένευσης του σκάφους και της κατακόρυφης ταχύτητας. Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος προσδιορίζονται αναλυτικά σε σχέση με τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι γενικές αναλυτικές εκφράσεις των νόμων ανατροφοδότησης που συναντούν τις σχεδιαστικές απαιτήσεις και το αντίστοιχο αποσυζευγμένο κλειστό σύστημα. Οι ελιγμοί τοποθέτησης της γωνίας προένευσης και κατακόρυφης μετατόπισης παρουσιάζονται αναλυτικά με μη γραμμικές προσομοιώσεις.

Για την περίπτωση της διαμήκου κίνησης, το πρόβλημα του ελέγχου της τοποθέτησης και προσανατολισμού αντιμετωπίζεται για οποιαδήποτε αρχική τοποθέτηση και αρχικό προσανατολισμό του σκάφους. Το αντικείμενο είναι ο ανεξάρτητος έλεγχος της κατακόρυφης ταχύτητας και της γωνίας προένευσης του ελικοπτέρου, κατά την διαμήκη πτήση. Μετά την εφαρμογή ενός κατάλληλου στατικού νόμου ανατροφοδότησης, το κυκλικό βήμα και το συλλογικό βήμα χειρίζονται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να συνεργάζονται. Αυτό οδηγεί σε ανεξάρτητο έλεγχο της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας. Ειδικά, το κλειστό σύστημα έχει το χαρακτηριστικό του ελέγχου της γωνίας προένευσης με μια εξωτερική εντολή, και χωρίς να επηρεάζει την κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου. Ομοίως, η δεύτερη εξωτερική είσοδος ελέγχει την κατακόρυφη

ταχύτητα χωρίς να επηρεάζει την γωνία προένευσης. Τα δυναμικά συστήματα που σχετίζονται με τις εξωτερικές εντολές με τις αντίστοιχες εξόδους απόδοσης (γωνία προένευσης, κατακόρυφη μετάφραση) αποδεικνύεται ότι είναι συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου όλο πόλους (αυθαίρετους). Έτσι, οι απαιτήσεις για καλές ποιότητες πτήσης ικανοποιούνται. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι όλα τα αποτελέσματα είναι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώνων ευστάθειας του ελικοπτερου. Ειδικότερα, οι συνθήκες επιλυσιμότητας εξάγονται ως ανισότητες ενώ οι ελεγκτές σαν ρητές συναρτήσεις των παραγώνων ευστάθειας του ελικοπτερου. Οι ελεγκτές εξαρτώνται επίσης από αυθαίρετες παραμέτρους οι οποίες είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος. Ανάλογες συνθήκες παράγονται για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευστάθεια. Τέλος, όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, παρουσιάζονται σε προσομοίωση επί μοντέλου ελικοπτερου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

Για την περίπτωση της συζευγμένης διαμήκους και εγκάρσιας κίνησης μελετάται η δυνατότητα αποσύζευξης των δύο κινήσεων του ελικοπτερου, με ταυτόχρονη αποσύζευξη των επιμέρους μεταβλητών. Ειδικότερα, για τις μεταβλητές u , w , q , θ , v , p , ϕ , r επιτυγχάνεται ο έλεγχος με κατάλληλο χειρισμό των εσωτερικών εισόδων. Ο νόμος ανατροφοδότησης είναι στατικός, και ανατροφοδοτεί τις μεταβλητές: οριζόντια ταχύτητα u , κατακόρυφη ταχύτητα w , ρυθμός μεταβολής της γωνίας προένευσης q , γωνία προένευσης θ , ταχύτητα κατά τον y άξονα v , ρυθμός μεταβολής της γωνίας κύλισης p , γωνία κύλισης ϕ , και ρυθμός μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας r . Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να επιλυθεί το πρόβλημα αποδεικνύεται να είναι σχεδόν πάντα αληθείς εξαρτόμενες αποκλειστικά από την αεροδυναμική επίδραση των μεταβλητών του δίσκου του έλικα. Η γενική μορφή του νόμου ελέγχου προσδιορίζεται σε αναλυτική μορφή. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο γενικός νόμος ελέγχου είναι εξαιρετικά πολυπλοκότερος και ο προσδιορισμός του αποτελεί ιδιαίτερη συμβολή στην ανάπτυξη αυτόματων φακέλων πτήσης. Η απόδοση του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος είναι ικανοποιητική, ακόμα και με την εφαρμογή του νόμου ελέγχου στο μη γραμμικό μοντέλο. Οι αποκρίσεις ακολουθούν πιστά και γρήγορα τις εντολές, με αργές μεταβολές μόνο στην οριζόντια ταχύτητα και στις εσωτερικές εισόδους, δηλαδή στο διαμήκες κυκλικό βήμα, στο συλλογικό βήμα, στο εγκάρσιο κυκλικό βήμα και στο συλλογικό βήμα του οπίσθιου έλικα. Οι καλές ποιότητες πτήσης αναδεικνύονται στις αποκρίσεις των εσωτερικών εισόδων.

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις πτήσεων, οι σχεδιαστικές απαιτήσεις του ανεξάρτητου ελέγχου των μεταβλητών πτήσης με καλές ποιότητες πτήσης ικανοποιούνται με απόλυτη ακρίβεια.

Στοιχεία Δομής και Λειτουργίας Αεροσκαφών Περιστρεφόμενων Πτερύγων

Σύνοψη: Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται στοιχεία δομής και λειτουργίας αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων. Ειδικότερα, παρουσιάζονται θεμελιώδη δυναμικά ζητήματα του έλικα όπως η ασυμμετρία της εισερχόμενης ροής του αέρα στο επίπεδο του έλικα, η ημιτονοειδής μεταβολή των φορτίων που δέχονται οι λεπίδες κατά την περιστροφή τους, καθώς και οι τρόποι αντιμετώπισης αυτής της ασυμμετρίας. Παρουσιάζονται επίσης οι κινήσεις πτερυγισμού και υστέρησης της λεπίδας, ως επακόλουθα της ασυμμετρίας ροής, καθώς και οι αρθρώσεις που δίνουν στις λεπίδες τους απαραίτητους βαθμούς ελευθερίας κίνησης για να αποφευχθούν τα προβλήματα της ασυμμετρίας. Παρουσιάζεται επίσης η κίνηση πτέρωσης και η ισοδυναμία μεταξύ της κίνησης πτέρωσης και πτερυγισμού. Τέλος παρουσιάζονται οι τρόποι ελέγχου του διανύσματος της άνωσης του έλικα (μέσω της κίνησης πτέρωσης), δηλαδή το διαμήκες και εγκάρσιο κυκλικό βήμα και το συλλογικό βήμα, καθώς και οι κατάλληλες για την εφαρμογή τους μηχανικές διατάξεις.

2.1 Ορισμός αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων

Σύμφωνα με την αεροδυναμική θεώρηση, τα αεροσκάφη περιστρεφόμενων πτερύγων τα αεροσκάφη τα οποία, τουλάχιστον κατά τους ελιγμούς απογείωσης και προσγείωσης, λαμβάνουν την ανυψωτική τους δύναμη κατ' ευθείαν απο έναν ανοικτό κοχλία ή κοχλίες κίνησης αέρος (airscrews). Αυτοί οι ελιγμοί δύνανται να πραγματοποιηθούν είτε κατακόρυφα, είτε με πορεία παράλληλη στο έδαφος (ground run).

Ο ανυψωτικός κοχλίας κίνησης αέρος του αεροσκάφους κατακόρυφης απογείωσης και προσγείωσης (vertical take off and landing ή VTOL), ενεργοποιείται άμεσα. Κάποια ελικοφόρα αεροσκάφη απογειώνονται και προσγειώνονται χρησιμοποιώντας πορεία παράλληλη στο έδαφος. Τέτοια ελικοφόρα αεροσκάφη, είναι τα ελικόπτερα και τα αεροσκάφη κεκλιμένου έλικα (tilt rotors), τα οποία χρησιμοποιούνται σε μεταφορές μεγάλων φορτίων υπερβαίνοντας την δυνατότητα αιώρησης (hovering ability) που διαθέτουν. Και αυτά τα αεροσκάφη ανήκουν στο σύνολο των αεροσκαφών με ευθέως ενεργοποιούμενους αεροκοχλίες. Υπάρχουν όμως πολλοί άλλοι σχηματισμοί περιστρεφόμενων πτερύγων, για παράδειγμα το αυτοστρεφόμενο (autogiro), όπου η ενέργεια που λαμβάνει ο ανυψωτικός κοχλίας κίνησης αέρος δημιουργείται έμμεσα, δηλαδή προέρχεται από την κίνηση του οχήματος συνολικά, σε σχέση με την μάζα του αέρα.

Όλοι οι σχηματισμοί VTOL, οι οποίοι αποτελούν ένα ευρύ σύνολο αεροσκαφών (από ελικόπτερα μέχρι ρουκέτες), έχουν την δυνατότητα αιώρησης. Από αυτήν την κατηγορία, τα αεροσκάφη VTOL που χρησιμοποιούνται εκτενέστερα σε πραγματική λειτουργία είναι τα ελικόπτερα. Οι σημαντικότεροι λόγοι της ευρείας χρησιμοποίησης των ελικοπτέρων είναι:

- α) η χαμηλή κατανάλωση ενέργειας ανά μονάδα δημιουργούμενης στατικής άνωσης, και
- β) η σχετικά χαμηλή απόπλυση (downwash) που δημιουργείται εξαιτίας του αναπτυσσόμενου ρεύματος ανατροχασμού (slipstream) του έλικα κατά την αιώρηση.

Ο πρώτος λόγος, αναδεικνύει την δυνατότητα του αεροσκάφους να αιωρείται για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ο δεύτερος αναδεικνύει την σχετικά μειωμένη διάβρωση του εδάφους (ground erosion) και την δυνατότητα του προσωπικού εδάφους του αεροσκάφους να εκτελεί εργασίες σε περιοχές που καλύπτονται από την απόπλυση.

Η χαμηλή κατανάλωση ενέργειας, καθώς και η σχετικά μειωμένη απόπλυση, είναι αποτέλεσμα της χαμηλής φόρτισης των γεννητριών άνωσης. Είναι σκόπιμο να σημειωθεί ότι ο όρος "έλικας" (rotor), χρησιμοποιείται για τους κοχλίες κίνησης αέρος που υπόκεινται σε σχετικά χαμηλή φόρτιση, σε αντίθεση με τον όρο "προωθητήρας", ο οποίος χρησιμοποιείται για ανυψωτικούς και

προωθητικούς κοχλίες κίνησης αέρος, οι οποίοι υπόκεινται σε υψηλή φόρτιση, και χρησιμοποιούνται συνήθως σε σχηματισμούς κεκλιμένου έλικα.

2.2 Φόρτιση δίσκου

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζεται ο προσδιορισμός των ορίων φόρτισης των ελικοφόρων αεροσκαφών. Ο ακριβής ορισμός της φόρτισης w , δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$w = \frac{T}{A} \quad (2.2.1)$$

όπου T η άνωση που δημιουργείται από τον έλικα και A η επιφάνεια του δίσκου του έλικα. Με τον όρο δίσκος του έλικα, ορίζεται το γεωμετρικό σχήμα (δίσκος) που ο έλικας διαγράφει στο χώρο κατά την περιστροφική του κίνηση. Υπό συνθήκες σταθερής πτήσης του ελικοπτέρου, όλη η άνωση προέρχεται αποκλειστικά από τους έλικες. Στα ελικοφόρα αεροσκάφη, η άνωση T προσεγγίζει το συνολικό βάρος W του αεροσκάφους. Αρα ισχύει ότι :

$$T \cong W$$

και, εκτός από την περίπτωση της μεταβαλλόμενης πτήσης, η φόρτιση του δίσκου ορίζεται από την σχέση

$$w = \frac{W}{A} \quad (2.2.2)$$

όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύμβολο A αντιστοιχεί στην ολική επιφάνεια δίσκου, από όλους τους έλικες του αεροσκάφους.

2.3 Κατανάλωση ενέργειας αεροσκαφών περιστρεφόμενων πτερύγων

2.3.1 Αιώρηση (Hovering)

Απ' όλες τις γεννήτριες στατικής άνωσης, οι έλικες των ελικοφόρων αεροσκαφών κατά την διάρκεια της αιώρησης (hovering) λειτουργούν στο χαμηλότερο σημείο φόρτισης της περιοχής δημιουργίας στατικής άνωσης. Συνεπώς, από την οικογένεια των ενεργών και δυναμικών Κ.Α.Π αεροσκαφών, τα

ελικοφόρα λειτουργούν στο χαμηλότερο επίπεδο κατανάλωσης ενέργειας που απαιτείται για την δημιουργία στατικής άνωσης.

Με σκοπό την κατασκευή μιας ευκολα κατανοητής κλίμακας για την κατανάλωση ενέργειας κατά την δημιουργία άνωσης, ορίζεται ένα νέο μέγεθος που καλείται ειδική άνωση(l_s) και ορίζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$l_s = \frac{T}{\dot{w}_f} \quad (2.3.1)$$

Οπου T η άνωση και \dot{w}_f ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμου σε kg/sec ή lb/sec. Έτσι στην περίπτωση της θεώρησης $T = W$, η ειδική άνωση μπορεί να ερμηνευθεί ως ο υποθετικός χρόνος σε sec, στον οποίο μια γεννήτρια ώθησης μπορεί να καταναλώνει ποσότητα καυσίμου ίση με το συνολικό βάρος του αεροσκάφους. Ορίζοντας την άνωση ειδικής κατανάλωσης καυσίμου ανά μονάδα χρόνου(sec) $tsfc_s$, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$l_s = \frac{1}{tsfc} \quad (2.3.2)$$

2.3.2 Διαδρομή

Για την διευκόλυνση της ποσοτικής αντίληψης της καταναλισκόμενης ενέργειας κατά την οριζόντια κίνηση του αεροσκάφους, εισάγουμε μία νέα ποσότητα παρόμοια με αυτή της ειδικής άνωσης. Αυτή η ποσότητα καλείται ειδική απόσταση και συμβολίζεται με (D_s). Η ειδική απόσταση εκφράζει την υποθετική απόσταση σε (km) που διανύει ένα όχημα σε μία συγκεκριμένη στιγμή, έχοντας καταναλώσει έως εκείνη την στιγμή βάρος καυσίμου ίσο με το βάρος του W . Όταν είναι γνωστή η ειδική εμβέλεια R_s , δηλαδή η απόσταση που διανύει το όχημα έχοντας καταναλώσει μία μονάδα βάρους του καυσίμου, (km/kg), τότε η D_s υπολογίζεται από τη σχέση :

$$D_s = R_s W \quad (2.3.3)$$

Είναι προφανές ότι η ειδική εμβέλεια, και συνεπώς η ειδική απόσταση εξαρτώνται από την ταχύτητα της κίνησης. Για υποβρύχια οχήματα, για τροχοφόρα οχήματα εδάφους και για αερόπλοια, η R_s και η D_s αυξάνουν όταν η ταχύτητα της κίνησης μειώνεται, ενώ για αεροσκάφη (είτε περιστρεφόμενων είτε σταθερών πτερύγων) υπάρχουν συνδιασμοί ταχυτήτων πτήσης και ύψους, οι οποίοι μεγιστοποιούν την R_s και την D_s .

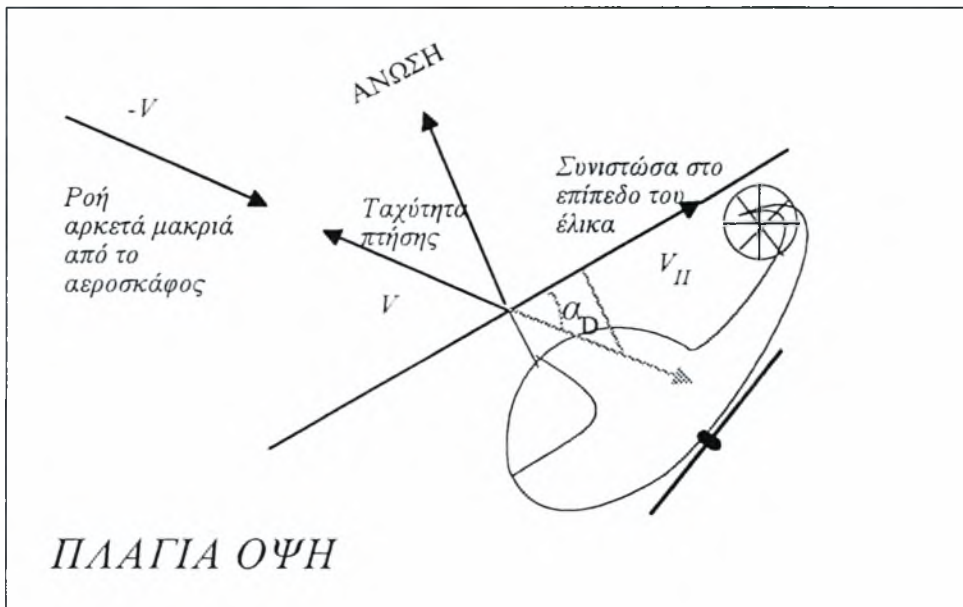
Εχει εξακριβωθεί από διάφορες μελέτες ότι, σε αντίθεση με την αιώρηση, το ελικόπτερο κατά τη διαδρομή λειτουργεί σε πολύ υψηλότερα επίπεδα κατανάλωσης ενέργειας ανά μονάδα βάρους και διανυόμενης απόστασης από οποιοδήποτε άλλο μέσο εναέριας μεταφοράς και μεταφοράς εδάφους. Ομως αυτό δεν αποκλείει την πιθανότητα να γίνουν τα ελικόπτερα ανταγωνιστικότερα ως προς τα άλλα οχήματα όσον αφορά στην καταναλισκόμενη ενέργεια ανά επιβατικό χιλιόμετρο, υπό συνθήκες πάντα ενεργού λειτουργίας.

2.4 Θεμελιώδη δυναμικά ζητήματα του έλικα

2.4.1 Ασυμμετρία ροής

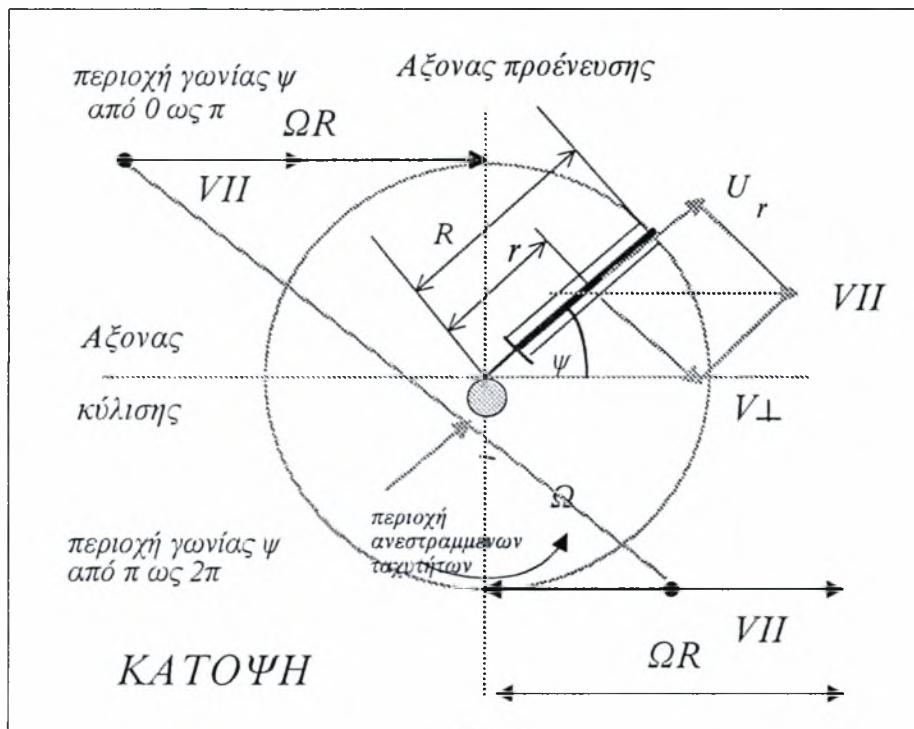
Αποτελεί βασική αρχή της αεροδυναμικής ότι οι αεροδυναμικές δυνάμεις που ασκούνται σε σκάφος κινούμενο με ταχύτητα V , εντός ακίνητου αέρα, είναι ίσες με τις αεροδυναμικές δυνάμεις που ασκούνται σε σκάφος ακίνητο εντός αέρα που κινείται με ταχύτητα $-V$. Τα περισσότερα από τα δυναμικά, αλλά και πολλά από τα αεροδυναμικά προβλήματα των ελικοφόρων αεροσκαφών, προκύπτουν από το γεγονός ότι μία συνιστώσα της ταχύτητας $-V$, έστω V_{II} , η οποία κείται στο επίπεδο του έλικα, εμφανίζεται σε όλες τις μεταφορικές κινήσεις του έλικα (εκτός των κατακόρυφων). Εστω $-a_D$ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής του αέρα με το επίπεδο του έλικα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. (θετική, όταν η ταχύτητα έχει συνιστώσα στην κατεύθυνση της άνωσης). Τότε η συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία κείται στο επίπεδο του έλικα, δίνεται από τηνσχέση :

$$V_{II} = V \cos a_D \quad (2.4.1)$$



Σχήμα 2.1: Συνιστώσα της ταχύτητας της ροής του αέρα στο επίπεδο του έλικα

Κατά την αιώρηση και την κατακόρυφη μετατόπιση, κάθε στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας δέχεται την ταχύτητα της εισερχόμενης ροής του αέρα, η οποία είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r του στοιχειώδους τμήματος της λεπίδας από την πλήμνη. Ομως, η παρουσία της V_{II} στην περίπτωση της οριζόντιας μετατόπισης καταστρέφει την αξονική συμμετρία, και επομένως η ταχύτητα του αέρα που προσκρούει στο στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας είναι συνάρτηση και της γωνίας ψ που διαγράφει η λεπίδα κατά την περιστροφή του έλικα (βλ. Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Ανάλυση της V_{II} ως προς την λεπίδα

Με σκοπό τον καθορισμό ενός μέτρου της ασυμμετρίας που προκαλείται από την συνιστώσα V_{II} της ταχύτητας, εισάγεται η ποσότητα $\mu = \frac{V_{II}}{R\Omega}$, η οποία καλείται προηγμένη αναλογία (όπου $V_t = R\Omega$, η γραμμική ταχύτητα στο άκρο της λεπίδας). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2, η περιοχή ανεστραμμένων ταχυτήτων αποτελείται από τον διαγραμμισμένο κύκλο διαμέτρου d_r . Από την ανάλυση των ομοίων τριγώνων που σχηματίζουν οι διακεκομμένες γραμμές του σχήματος με τα διανύσματα των γραμμικών ταχυτήτων, λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση :

$$\frac{\Omega R - V_{II}}{\Omega R + V_{II}} = \frac{R - d_r}{R + d_r} \quad (2.4.2)$$

ή ισοδύναμα

$$d_r = \frac{V_{II}}{\Omega} = \mu R \quad (2.4.3)$$

2.4.2 Ασυμμετρία στα φορτία των λεπίδων

Βασιζόμενοι στην αναλογία με τα αεροπλάνα, είναι φανερό ότι από την σκοπιά της δημιουργίας άνωσης σε ένα στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας στο σημείο r , (ή σε ανοιγμένη μορφή στην θέση $\bar{r} = \frac{r}{R}$), η πιο σημαντική συνιστώσα της ταχύτητας V_{II} θα είναι αυτή η οποία είναι κάθετη στην λεπίδα, δηλαδή

$$V_{\perp}(\vec{r}) = V_{II} \sin \psi + V_I \vec{r} \quad (2.4.4)$$

ή ισοδύναμα

$$V_{\perp}(\vec{r}) = V_I(\mu \sin \psi + \vec{r}) \quad (2.4.5)$$

Από την παραπάνω εξίσωση, είναι προφανές ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας δέχεται την κάθετη σ' αυτό συνιστώσα της ταχύτητας της ροής του αέρα, η οποία όμως υπόκειται σε μια ημιτονοειδή διαταραχή. Σαν αποτέλεσμα, οι τιμές της $V_{\perp}(\vec{r})$ για τιμές της γωνίας περιστροφής της λεπίδας από $0 \rightarrow \pi$ είναι μεγαλύτερες από αυτές για τιμές της γωνίας περιστροφής από $\pi \rightarrow 2\pi$. Το πόσο μεγαλύτερες θα είναι οι τιμές της $V_{\perp}(\vec{r})$ εξαρτάται από την προηγμένη αναλογία μ . Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, για γωνίες περιστροφής της λεπίδας από $\pi \rightarrow 2\pi$, υπάρχει ένας κύκλος διαμέτρου $d_r = \mu R$ όπου η λεπίδα συναντά ροή αέρα που προέρχεται από την οπίσθια ακμή της λεπίδας. Η περιοχή αυτή του κύκλου λέγεται περιοχή ανεστραμμένων ταχυτήτων.

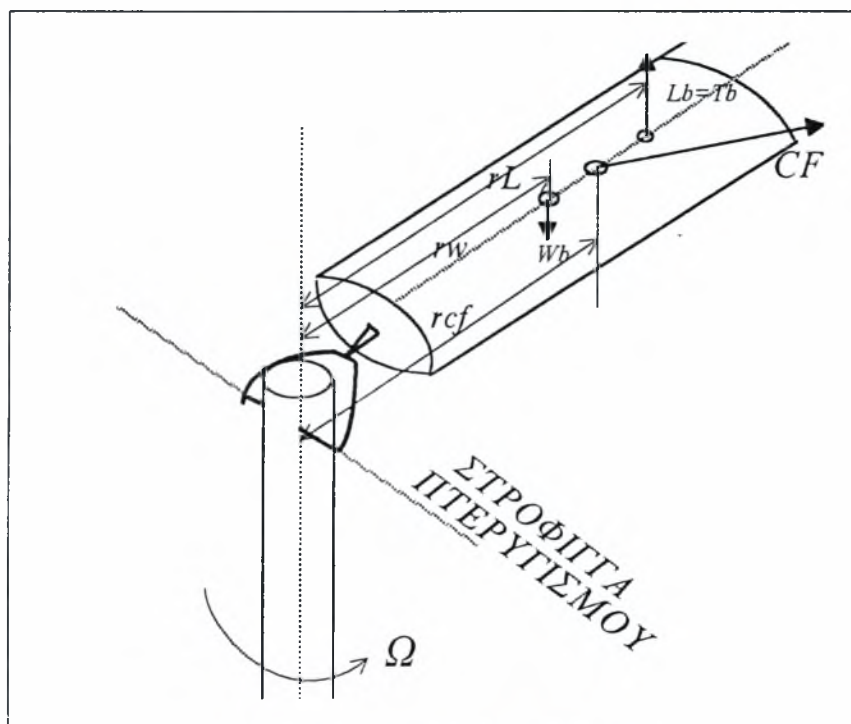
Η προηγούμενη ανάλυση έχει σκοπό να δείξει ότι, με $\mu > 0$, για γωνίες περιστροφής της λεπίδας από $0 \rightarrow \pi$ δημιουργείται μεγαλύτερη άνωση απ' ότι για τιμές της γωνίας περιστροφής από $\pi \rightarrow 2\pi$. Για μια λεπίδα στερεά προσαρμοσμένη στην πλήμνη, μπορεί να δημιουργηθεί μια καμπτική ροπή, η οποία μπορεί να εξουδετερωθεί σαν σύνολο συζευγνύοντας δύο ιδίων διαστάσεων έλικες, οι οποίοι περιστρέφονται κατ' αντίθετες κατευθύνσεις. Ένα τέτοιο ζεύγος μπορεί να υλοποιηθεί με την μορφή ομοαξονικών, παραπλεύρων, συζυγών ελίκων, ή άλλων παρόμοιων σχηματισμών. Όσο υπάρχει μια μή εξισορροπούμενη καμπτική ροπή στον έλικα, θα υπάρχει και μία καμπτική ροπή στην βάση της λεπίδας, καθώς και μία αντίστοιχη στην άτρακτο του έλικα. Πρέπει να εφαρμοστούν κατάλληλες αεροδυναμικές μετρήσεις, με σκοπό την ελάττωση ή τον μηδενισμό των ροπών που είναι αποτέλεσμα της συνιστώσας της ταχύτητας της ροής του αέρα, η οποία κείται στο επίπεδο του έλικα. Για το σκοπό αυτό, υπάρχουν δύο λύσεις: Πρώτον, μεταβολή της γωνία προσβολής της λεπίδας κατα τρόπο τέτοιο ώστε να εκμηδενιστεί η επιρροή του όρου $\mu \sin \psi$ στην (2.4.5), ή δεύτερον, εφαρμογή άλλων αεροδυναμικών μέσων ελέγχου της άνωσης, όπως πτερύγια καμπυλότητας (flaps), ελάσματα εξουδετέρωσης της ροής (spoilers) κ.α. Όλα αυτά τα δυναμικά μέσα ελέγχου της άνωσης, μπορούν να ενεργοποιηθούν κατά τρόπο τέτοιο ώστε να επιτευχθεί το αποτέλεσμα που επιδιώκουμε στην πρώτη λύση. Ο όρος $\mu \sin \psi$ είναι πρώτου αρμονικού χαρακτήρα ως προς την περιστροφή της λεπίδας στο αζιμούθιο. Έτσι, οι μετρήσεις που θα εφαρμοστούν με σκοπό τον εκμηδενισμό (ή

την μείωση) της επιρροής αυτού του όρου πρέπει επίσης να είναι πρώτου αρμονικού χαρακτήρα.

2.4.3 Στρόφιγγα πτερυγισμού

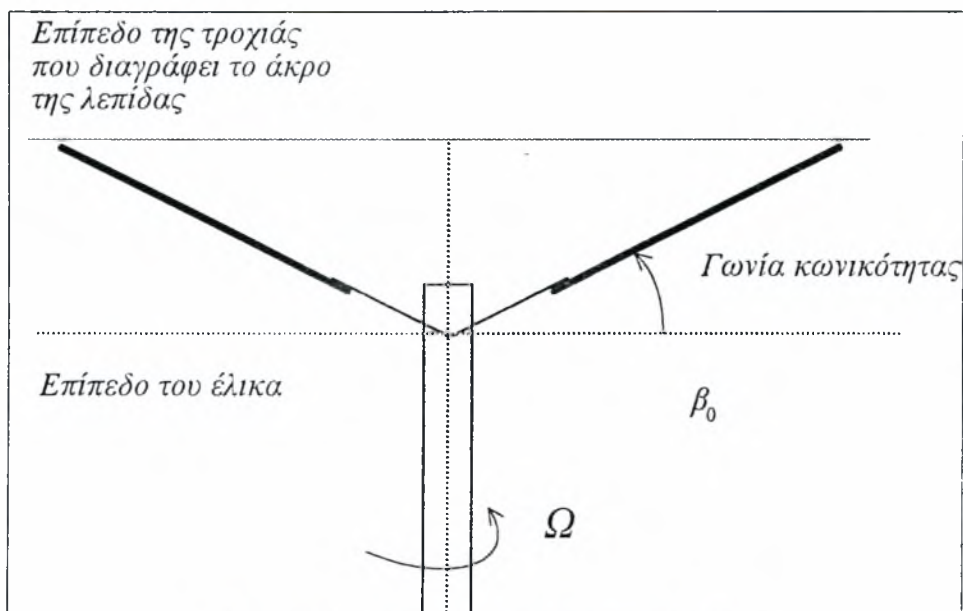
Μία πρακτική λύση για τα προβλήματα ασυμμετρίας ροής του αέρα που δημιουργούνται, επιτεύχθηκε με την εισαγωγή της στρόφιγγας πτερυγισμού. Η εισαγωγή της στρόφιγγας πτερυγισμού αποκλείει την μεταφοράς της καμπτικής ροπής της λεπίδας στην πλήμνη. Ταυτόχρονα, δίνει στην λεπίδα την δυνατότητα να κινείται γύρω από την άρθρωση. Όπως θα αποδειχθεί αργότερα, αυτή η κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας έχει αεροδυναμική επίδραση ισοδύναμη με την μείωση της γωνίας προσβολής για τιμές της γωνίας περιστροφής της λεπίδας από $0 \rightarrow \pi$, και αύξησή της αντίστοιχα για τιμές της γωνίας περιστροφής της λεπίδας από $\pi \rightarrow 2\pi$. Έτσι, είναι φανερό ότι ο πρόσθετος βαθμός ελευθερίας που αποδίδεται στην λεπίδα οδηγεί σε μια ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ δυναμικών και αεροδυναμικών αποτελεσμάτων.

Η αρθρωτή λεπίδα είναι το πιο διαδεδομένο σχήμα από εκείνα που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση των ημιτονοειδών διαταραχών της ανωστικής δύναμης εξαιτίας της ύπαρξης της συνιστώσας της ταχύτητας της ροής του αέρα η οποία κείται στο επίπεδο του έλικα. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι η στρόφιγγα πτερυγισμού διέρχεται από τον άξονα του έλικα, με κατεύθυνση κάθετη προς αυτόν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Στροφή για πτερυγισμό

Θεωρώντας αμελητέα την επίδραση των δινών που δημιουργεί ο έλικας στην περιοχή κοντά στις λεπίδες, συμπεραίνεται ότι κατά την αιώρηση ή την κατακόρυφη μετατόπιση, η ταχύτητα της ροής του αέρα που δέχονται οι λεπίδες, και επομένως οι αεροδυναμικές φορτίσεις, παραμένουν ανεξάρτητες της αξιμουθιακής γωνίας. Μαζί με την αεροδυναμική άνοση ανά λεπίδα L_b , υπάρχουν δύο άλλες δυνάμεις που δρουν στο επίπεδο των λεπίδων: α) η φυγόκεντρος C_f , και β) το βάρος της λεπίδας W_b . Εξαιτίας της ελευθερίας κίνησης γύρω από την στροφή για πτερυγισμό, η λεπίδα καθώς περιστρέφεται μπορεί να εκτραπεί από το επίπεδο του έλικα (επίπεδο κάθετο στην άτρακτο που διέρχεται από την πλήμνη) και να αρχίσει να διαγράφει κωνική επιφάνεια (κώνο, με άξονα συμμετρίας τον άξονα της άτρακτου). Η γωνία κωνικότητας μπορεί να υπολογιστεί από τις συνθήκες ισοδυναμίας ροπών γύρω από την στροφή για πτερυγισμό (βλέπε Σχήμα 2.4)



Σχήμα 2.4 : γωνία κωνικότητας της λεπίδας

Η ισορροπία ροπών μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως :

$$L_b r_l - CF \sin \beta_0 r_{CF} - W_b r_w \cos \beta_0 = 0 \quad (2.4.6)$$

Θεωρώντας μικρή γωνία β_0 έτσι ώστε $\sin \beta_0 \cong \beta_0$ και $\cos \beta_0 \cong 1$, λαμβάνεται η ακόλουθη προσεγγιστική σχέση για την ισοδυναμία των ροπών :

$$L_b r_L - CF \beta_0 r_{CF} - W_b r_w = 0 \quad (2.4.7)$$

Οπότε, όταν η ανυψωτική δύναμη και η κατανομή της μάζας κατά μήκος της λεπίδας καθώς και η ταχύτητα V_t στο άκρο του έλικα είναι γνωστές, είναι εύκολο να βρούμε την γωνία κωνικότητας β_0 . Για τον προσδιορισμό της γωνίας κωνικότητας προτείνονται οι ακόλουθες παραδοχές : α) Η μάζα ανά μονάδα μήκους της λεπίδας $\bar{m}_b(r) = \bar{m}_b$ είναι σταθερή, και έτσι $r_{CF} = \frac{2}{3}R$, β) Το βάρος της λεπίδας είναι αμελητέο σε σχέση με την άνωση ανά λεπίδα, δηλαδή $W_b \ll L_b$, και γ) Η κατανομή της άνωσης κατά μήκος της λεπίδας είναι παραβολική, οπότε $r_L = \frac{3}{4}R$. Έτσι, σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, λαμβάνουμε την ακόλουθη λύση για την γωνία κωνικότητας σε σχέση με την αεροδυναμική άνωση :

$$\beta_0 = \left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{L_b}{CF}\right) \cong \left(\frac{9}{4}\right) \left(\frac{RL_b}{m_b V_t^2}\right) \quad (2.4.8)$$

όπου $m_b = R\bar{m}_b$ είναι η μάζα της λεπίδας.

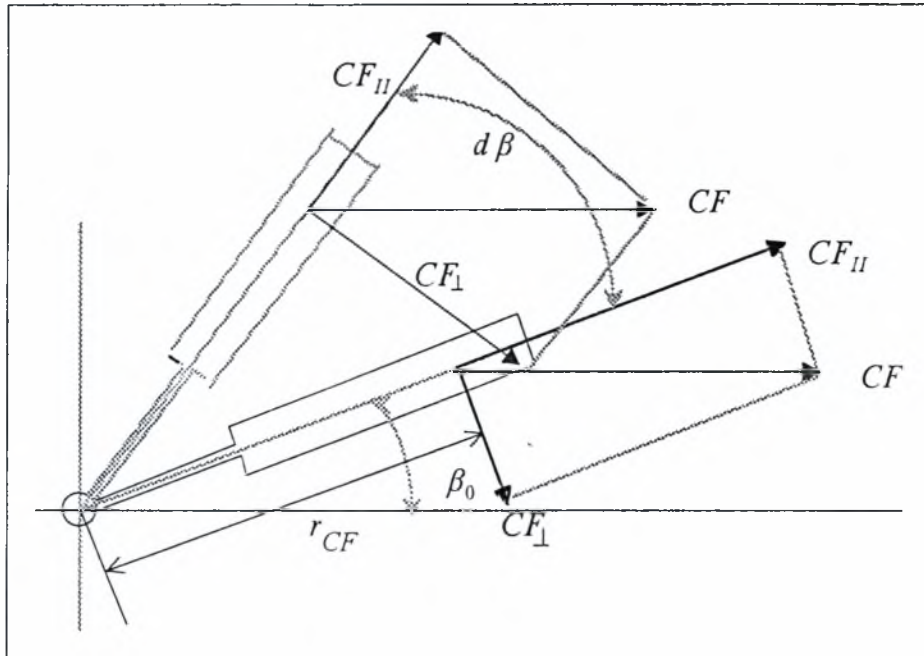
Η φυσική και σχεδιαστική σημασία των παραπάνω εξισώσεων είναι προφανής, δηλαδή, ακόμα και αν ο λόγος $\frac{L_b}{m_b}$ καθώς και η γραμμική ταχύτητα του άκρου της λεπίδας είναι ίσες για μικρές και μεγάλες λεπίδες, η γωνία κωνικότητας θα είναι μεγαλύτερη για την μεγαλύτερη λεπίδα. Οι μεγάλες γωνίες κωνικότητας είναι ανεπιθύμητες εξαιτίας της αεροδυναμικής αντίδρασης που αναπτύσσεται κατά την εμπρόσθια πτήση. Μπορεί επίσης να εισάγουν σφάλματα ελέγχου. Για αυτόν το λόγο, απαιτείται σχετική μετατόπιση του κέντρου μάζας της λεπίδας προς το άκρο της, κυρίως για μεγάλους έλικες, για να αντισταθμίσουν την τάση προς αύξηση της γωνίας κωνικότητας.

2.5 Κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας

Η εισαγωγή βαθμών ελευθερίας της λεπίδας ως προς την κίνηση πτερυγισμού, οδηγεί στο ερώτημα αν θα είναι ευσταθής η κίνηση της λεπίδας γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού. Για την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος εξετάζονται ακολούθως η στατική και η δυναμική ευστάθεια της κίνησης πτερυγισμού.

2.5.1 Στατική ευστάθεια

Για να μελετήσουμε την στατική ευστάθεια της λεπίδας, θεωρούμε ότι είναι μετατοπισμένη από την θέση ισορροπίας (σε γωνία β_0) κατά μια γωνία $d\beta$, όπως δείχνει το Σχήμα 2.5



Σχήμα 2.5: Εκτροπή της λεπίδας από την θέση ισορροπίας της

Η μετατόπιση αυτή, θα επηρεάσει μόνο το μέγεθος της συνιστώσας της φυγοκεντρικής δύναμης η οποία είναι κάθετη στην λεπίδα. Θεωρώντας αρκετά μικρή την γωνία $d\beta$, η νέα τιμή της ροπής γύρω από την στρόφιγγα περυγισμού που δημιουργείται από την κάθετη στην λεπίδα συνιστώσα της φυγοκεντρικής δύναμης θα είναι

$$M_{CF_{\perp}} + dM_{CF_{\perp}} = -(CF)r_{CF}(\beta_0 + d\beta) \quad (2.5.1)$$

αλλά εφόσον $-(CF)r_{CF}\beta_0 \cong M_{CF_{\perp}}$, τότε ισχύει ότι $dM_{CF_{\perp}} = -(CF)r_{CF}d\beta$ ή ισοδύναμα

$$\frac{dM_{CF_{\perp}}}{d\beta} = -(CF)r_{CF} \quad (2.5.2)$$

Από την τελευταία εξίσωση φαίνεται ότι η λεπίδα είναι στατικά ευσταθής απ'την στιγμή που η παράγωγος $\frac{dM_{CF_{\perp}}}{d\beta}$ είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει πως όταν η λεπίδα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας (γωνία β_0), τότε δημιουργείται μία ροπή επαναφοράς η οποία τείνει να επαναφέρει την λεπίδα στην αρχική της θέση.

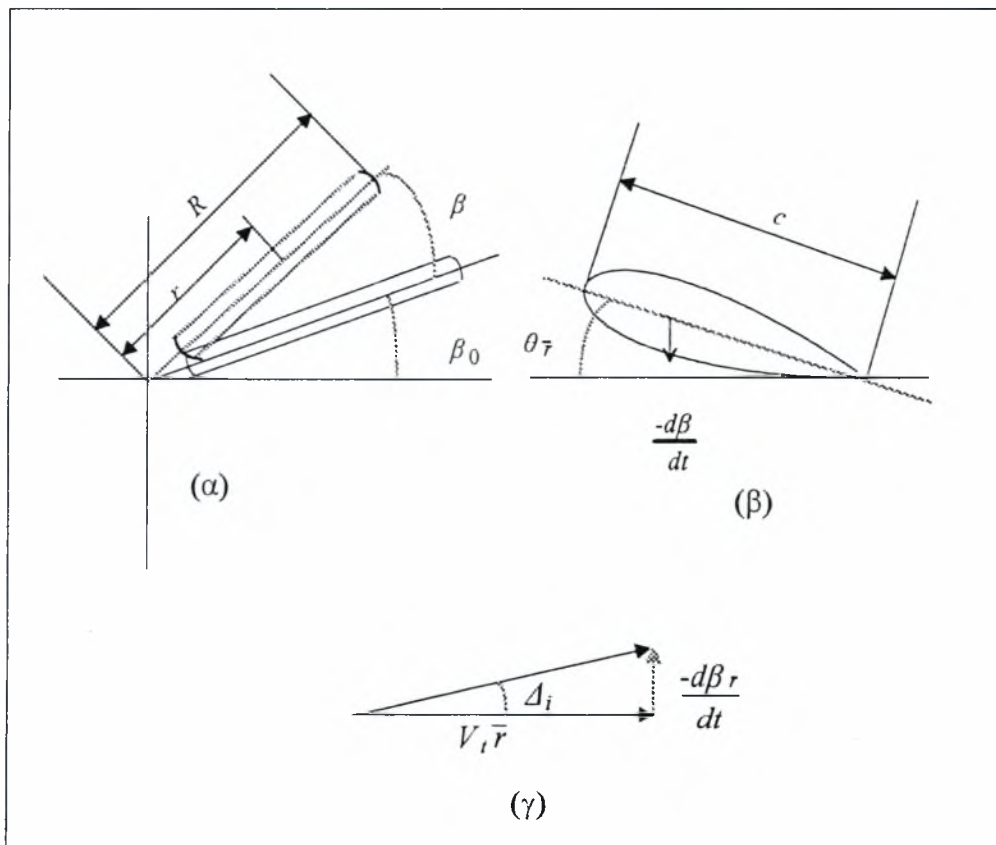
2.5.2 Δυναμική ευστάθεια

Γνωρίζοντας ότι η λεπίδα κατά την κίνηση περυγισμού είναι στατικά ευσταθής, το ερώτημα που απομένει είναι αν η λεπίδα είναι δυναμικά ευσταθής,

δηλαδή αν με το χρόνο θα τείνει στην θέση ισορροπίας της. Σ' αυτό το σημείο, θα πρέπει να εισαχθούν κάποιες νέες γεωμετρικές και αεροδυναμικές έννοιες:

1. Η σχετική θέση του στοιχειώδους τμήματος της λεπίδας $\bar{r} = \frac{r}{R}$
2. Το σχήμα της τομής της λεπίδας, καθώς και η θέση της χορδής μηδενικής άνωσης
3. Ο προσανατολισμός της τομής της λεπίδας ως προς το επίπεδο του έλικα, όπως αυτός καθορίζεται από την σχετική γωνία προένευσης θ_r (η οποία παριστάνει την γωνία μεταξύ του επιπέδου του έλικα και της χορδής μηδενικής άνωσης).

Οι έννοιες που περιγράψαμε παραπάνω παρουσιάζονται γραφικά στα σχήματα που ακολουθούν



Σχήμα 2.6: (α) Σχετική θέση του στοιχειώδους τμήματος της λεπίδας
 (β) Τομή της λεπίδας, χορδή μηδενικής άνωσης
 (γ) Ισοδυναμία πτέρωσης και πτερυγισμού.

Η λεπίδα μπορεί να είναι σταθερής καμπυλότητας (όταν $\theta_r = \text{σταθερή}$), ή συνεστραμμένη (όταν $\theta_r \neq \text{σταθερή}$). Πρέπει να σημειωθεί ότι η γωνία προένευσης όλων των θέσεων (από $\bar{r} = 0 \rightarrow 1$) μπορεί να μεταβάλλεται, δηλαδή να

ποικίλει για το ίδιο r , όταν περιστρέφεται η λεπίδα σαν σύνολο γύρω από τον άξονα προένευσής της. Αυτή η λειτουργία καλείται κίνηση πτέρωσης (feathering). Χάριν απλότητας, θεωρούμε ότι επικρατούν συνθήκες αώρησης. Έτσι, η μόνη ροή αέρα που δέχεται το στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας είναι αυτή που οφείλεται στην περιστροφή της λεπίδας γύρω από τον άξονά της, με γωνιακή ταχύτητα Ω . Το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής αυτής, είναι είτε παράλληλο είτε πάνω στο επίπεδο του έλικα. Έτσι, για ένα στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας που βρίσκεται σε απόσταση \bar{r} από την πλήμνη, υπολογίζεται να είναι: $V_{\bar{r}} = -r\Omega = -\bar{r}V_t$. Υπό συνθήκες μόνιμης κατάστασης, η γωνία πρόσπτωσης του αέρα στην λεπίδα ($i_{\bar{r}}$) που σχηματίζει το στοιχειώδες τμήμα της λεπίδας με την $V_{\bar{r}}$ είναι ίση με την γωνία προένευσής της λεπίδας στην θέση \bar{r} , δηλαδή $i_{\bar{r}} = \theta_{\bar{r}}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.β.

Επιστρέφοντας στην μελέτη της δυναμικής ευστάθειας, υποθέτουμε ότι - όπως στην στατική περίπτωση- η λεπίδα έχει μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας (γωνία κωνικότητας β_0) σε μια θέση με γωνία κωνικότητας β (όπως δείχνει το Σχήμα 2.6α. Όταν ελευθερωθεί από την εξαναγκασμένη της θέση, η στατικώς ευσταθής λεπίδα θα αρχίσει να κινείται προς τα κάτω, δηλαδή προς την θέση ισορροπίας της και με γωνιακή ταχύτητα $-\frac{d\beta}{dt} = -\dot{\beta}$. Επίσης, με την εμφάνιση του $-\dot{\beta}$, οι γωνίες πρόσπτωσης σε όλες τις θέσεις κατά μήκος της λεπίδας θα αυξηθούν, όπως δείχνει το Σχήμα 2.6.γ. Σε κάθε σχετική θέση $\bar{r} = \frac{r}{R}$, η αύξηση $\Delta i_{\bar{r}}$ θα είναι:

$$\sin \Delta i = \frac{\beta r}{V_{\bar{r}} \bar{r}} = -\frac{R\bar{r}(\frac{d\beta}{dt})}{V_{\bar{r}} \bar{r}} = -\frac{d\beta}{dt} \frac{1}{\Omega} = \frac{-\dot{\beta}}{\Omega} \quad (2.5.3)$$

και πάλι υπό την θεώρηση μικρής γωνίας Δi , καταλήγουμε στο ότι $\Delta i = -\frac{\dot{\beta}}{\Omega}$.

Αν η Δi είναι ανεξάρτητη του \bar{r} όπως δείχνει η προηγούμενη εξίσωση, όλες οι θέσεις \bar{r} κατά μήκος της λεπίδας θα παρουσιάζουν την ίδια μεταβολή στην γωνία πρόσπτωσης, όπως αν εκτελούσαν κίνηση πτέρωσης κατά γωνία $\Delta\theta$. Με άλλα λόγια αποδείχθηκε ότι κατά την αεροδυναμική θεώρηση, η κίνηση πτερυγισμού είναι ισοδύναμη με την κίνηση πτέρωσης. ($\Delta\theta_0$ κατά την περιστροφή της λεπίδας περί τον άξονα προένευσής $\equiv \Delta i$ κατά την κίνηση πτερυγισμού). Αυτό σημαίνει ότι η Δi , με την έννοια που της αποδόθηκε στην προηγούμενη εξίσωση, θα προκαλέσει ακριβώς την ίδια μεταβολή στις

αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές που δρουν πάνω στην λεπίδα, όπως ακριβώς αν η λεπίδα εκτελούσε αλλαγή της γωνίας προένευσής της ή ισοδύναμα κίνηση πτέρωσης κατά γωνία $\Delta\theta_0$. Όσο για την δυναμική ευστάθεια, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο πτερυγισμός προς τα κάτω αυξάνει την γωνία πρόσπτωσης του αέρα πάνω στην επιφάνεια της λεπίδας, από την στιγμή που το Δi είναι θετικό καθώς το $\frac{d\beta}{dt}$ είναι αρνητικό. Συνεπώς, όσο η λεπίδα λειτουργεί εντός των ορίων αποκόλλησης του οριακού στρώματος, ο πτερυγισμός της προς τα κάτω θα οδηγήσει σε μία αύξηση της ανωστικής δύναμης (άνωση ανά λεπίδα). Αυτή όμως η αναπτυσσόμενη δύναμη και η ταχύτητα πτερυγισμού έχουν αντίθετα πρόσημα. Επομένως, αυτή η πρόσθετη αεροδυναμική ροπή γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού θα αντιτίθεται στην κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας, και έτσι θα προβάλλεται απόσβεση. Γνωρίζοντας την κλίση $\left. \frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right|_{\vartheta_{0c}}$ σε μια περιοχή της θεωρούμενης γωνίας προένευσής της λεπίδας (ϑ_{0c}), υποθέτοντας ότι αυτή είναι σταθερή, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, η ροπή απόσβεσης που συναντά η λεπίδα κατά την ταλαντωτική της κίνηση θα είναι:

$$M_{damp} = r_R \left(\frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right)_{\vartheta_{0c}} \left(\frac{\beta}{\Omega} \right) \quad (2.5.4)$$

ή καλώντας το $\frac{r_R \left(\frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right)_{\vartheta_{0c}}}{\Omega}$ σαν κ , δηλαδή σαν το μέτρο απόσβεσης, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$M_{damp} = -\kappa \dot{\beta} \quad (2.5.5)$$

Ομοια με την περίπτωση της στατικής ευστάθειας, η ροπή επαναφοράς (η οποία τείνει να επαναφέρει την λεπίδα στην αρχική της θέση) είναι

$$M_{res} = -(CF) r_{CF} \beta \quad (2.5.6)$$

ή καλώντας το $(CF) r_{CF}$ σαν k , δηλαδή σαν τη σταθερά ελατηρίου, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$M_{res} = -k \beta \quad (2.5.7)$$

Αρα, η ταλαντωτική κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$I_I \ddot{\beta} + \kappa \dot{\beta} + k \beta = 0 \quad (2.5.8)$$

όπου I_I είναι η ροπή αδράνειας της λεπίδας ως προς την στρόφιγγα πτερυγισμού.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$s^2 B(s) - s\beta(0) - \beta(0) + s\frac{\kappa}{I_f} B(s) - \frac{\kappa}{I_f} \beta(0) + \frac{k}{I_f} B(s) = 0 \quad (2.5.9)$$

ή ισοδύναμα

$$(s^2 + s\frac{\kappa}{I_f} + \frac{k}{I_f})B(s) = \beta(0) + \frac{\kappa}{I_f} \beta(0) + s\beta(0) \quad (2.5.10)$$

ή τελικά

$$B(s) = \frac{\beta(0) + \frac{\kappa}{I_f} \beta(0) + s\beta(0)}{(s^2 + s\frac{\kappa}{I_f} + \frac{k}{I_f})} = \frac{s + \frac{X}{\Psi}}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \Psi \quad (2.5.11)$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι ρίζες του διωνύμου $s^2 + s\frac{\kappa}{I_f} + \frac{k}{I_f}$, δηλαδή

$$\lambda_{1,2} = -\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2 - \frac{k}{I_f}} \text{ και}$$

$$X = \beta(0) + \kappa\beta(0)$$

$$\Psi = \beta(0)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, σύμφωνα με το ζευγος μετασχηματισμού

$$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{(a-b)e^{-bt} - (a-c)e^{-ct}}{c-b}$$

προκύπτει ότι

$$\beta = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (2.5.12)$$

$$\text{με } A = \frac{\Psi \left[\left(\frac{X}{\Psi} \right) - \lambda_1 \right]}{\lambda_1 - \lambda_2}, B = \frac{-\Psi \left[\left(\frac{X}{\Psi} \right) - \lambda_2 \right]}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Η ταλαντωτική κίνηση χαρακτηρίζεται από το πρόσημο της υπορίζου ποσότητας στις σχέσεις που περιγράφουν τις ρίζες του διωνύμου. Αρα λοιπόν, η κίνηση χαρακτηρίζεται από το πρόσημο της ποσότητας $\kappa^2 - 4kI_f$. Αυτή η ποσότητα γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$r_R \left[\left(\frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right) \Big|_{\vartheta_0} \left(\frac{1}{\Omega} \right) \right]^2 - 4(CF)_{rcf} I_f$$

Στην πράξη, οι σχεδιασμοί γίνονται έτσι ώστε ο πρώτος όρος της παραπάνω ποσότητας να είναι αρκετά μικρότερος από τον δεύτερο ($\kappa \approx 0.032(4kI_f)$). Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο ρίζες του διωνύμου είναι φανταστικές

$$\lambda_{1,2} = -\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right) \pm i \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2 - \frac{k}{I_f}} \quad (2.5.13)$$

Οπότε το διώνυμο έχει τη μορφή

$$s^2 + s\frac{\kappa}{I_f} + \frac{k}{I_f} = \left(s + \frac{\kappa}{2I_f} + i \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2 - \frac{k}{I_f}}\right) \left(s + \frac{\kappa}{2I_f} - i \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2 - \frac{k}{I_f}}\right) = (s+a)^2 + \omega_0^2$$

όπου $a = \frac{\kappa}{2I_f}$ και $\omega_0 = \sqrt{-\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2 + \frac{k}{I_f}}$.

Αρα λοιπόν

$$B(s) = \frac{s + \frac{X}{\Psi}}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]} \Psi \quad (2.5.14)$$

Ομως

$$\frac{X}{\Psi} = \frac{\kappa}{I_f} + \frac{\beta(0)}{\beta(0)}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{X}{\Psi} = 2a + \frac{\beta(0)}{\beta(0)}$$

ή

$$\frac{X}{\Psi} = a + \Delta$$

όπου $\Delta = \frac{\beta(0)}{\beta(0)} + a$. Έτσι, η λύση στο πεδίο της συχνότητας είναι:

$$B(s) = \Psi \frac{s + a + \Delta}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]} \quad (2.5.15)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$B(s) = \Psi \frac{s+a}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]} + \left(\frac{\Psi \Delta}{\omega_0}\right) \frac{\omega_0}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]} \quad (2.5.16)$$

Κατόπιν, εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, σύμφωνα με τα ζεύγη μετασχηματισμού

$$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \cos(bt)$$

και

$$\frac{s+b}{(s+a)^2 + b^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \sin(bt)$$

λαμβάνεται η ακόλουθη λύση στο πεδίο του χρόνου

$$\beta(t) = \Psi e^{-at} \cos(\omega_0 t) + \frac{\Psi \Delta}{\omega_0} e^{-at} \sin(\omega_0 t) \quad (2.5.17)$$

ή ισοδύναμα

$$\beta(t) = C e^{-\frac{\kappa}{2I_f} t} \cos\left[\sqrt{\left(\frac{k}{I_f}\right) - \left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2} t\right] + D e^{-\frac{\kappa}{2I_f} t} \sin\left[\sqrt{\left(\frac{k}{I_f}\right) - \left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2} t\right]$$

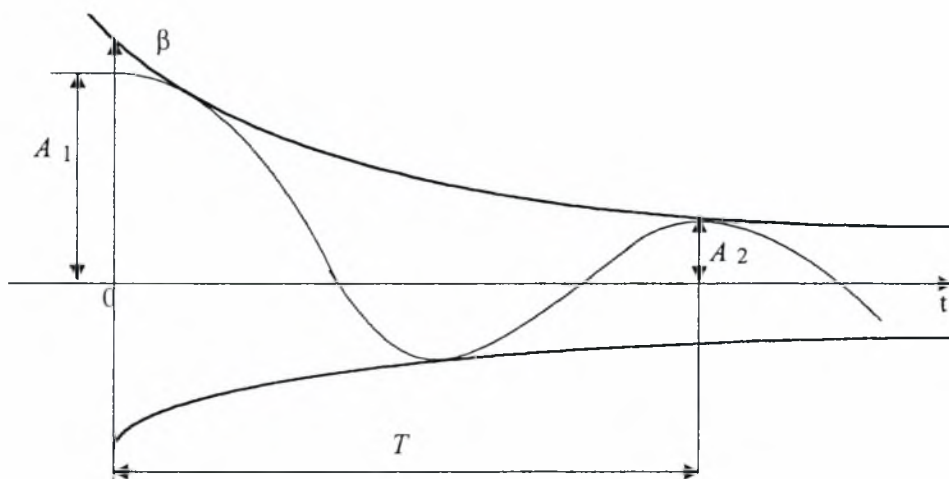
με $C = \Psi = \beta_0$ και $D = \frac{\Psi \Delta}{\omega_0} = \frac{\beta_0 \left[\frac{\beta(0)}{\beta(0)} + \frac{\kappa}{2I_f} \right]}{\sqrt{\left(\frac{k}{I_f}\right) - \left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2}}$. Άρα η περίοδος της

αποσβενόμενης ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{I_f}\right) - \left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)^2}} \quad (2.5.18)$$

ενώ η συχνότητα της θα είναι $\nu = \frac{1}{T}$.

Από την (2.5.18), φαίνεται ότι αν το μέτρο απόσβεσης κ πάρει την τιμή $\kappa = 2\sqrt{I_f k}$ τότε η περίοδος της κίνησης τείνει στο άπειρο, και η συχνότητα τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, η κίνηση γίνεται μη ταλαντωτική. Η παραπάνω τιμή του κ ονομάζεται κρίσιμη απόσβεση (κ_{crit}). Για $\kappa < \kappa_{crit}$ η γενική μορφή της κίνησης περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.7: Κίνηση πτερυγισμού, για $\kappa < \kappa_{crit}$

Η ταχύτητα σύγκλισης μπορεί να μετρηθεί με τον λόγο δύο διαδοχικών ευρών (έστω A_1 και A_2):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{e^{-\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)(t+T)}}{e^{-\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)t}} = e^{-\left(\frac{\kappa}{2I_f}\right)T} \quad (2.5.19)$$

Με σκοπό την μελέτη της σχέσης της περιόδου και της μείωσης του εύρους της ταλαντωτικής κίνησης της λεπίδας, θα εξετασθεί η υπόριζος ποσότητα της (2.5.18). Στην αρχή της παραγράφου συμβολίστηκε σαν σταθερά ελατηρίου k η ποσότητα $(CF)r_{CF}$, όπου CF είναι η φυγόκεντρος δύναμη που δρα στη λεπίδα κατά την περιστροφική της κίνηση, σε απόσταση $r_{CF} = \frac{2}{3}R$ από τον άξονα περιστροφής της λεπίδας. Αν η φυγόκεντρος δύναμη είναι $CF = \frac{1}{2}MR\Omega^2$, η ροπή αδράνειας της λεπίδας ως προς την στρόφιγγα πτερυγισμού είναι $I_f = \frac{1}{3}MR^2$, όπου M είναι η μάζα της λεπίδας, Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του έλικα, και R είναι το συνολικό μήκος της, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{I_f}$ ισούται με

$$\frac{k}{I_f} = \frac{[\frac{1}{2}MR\Omega^2][\frac{2}{3}R]}{\frac{1}{3}MR^2} = \Omega^2 \quad (2.5.20)$$

Η παραπάνω σχέση, σε συνδιασμό με την (2.5.18) δείχνουν ότι όταν δεν υπάρχει καθόλου απόσβεση, η περίοδος της κίνησης είναι ίση με τον χρόνο που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή του έλικα ($\tau_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$).

Ο λόγος της περιόδου της ταλαντωτικής κίνησης με απόσβεση προς την περίοδο της ταλαντωτικής κίνησης χωρίς απόσβεση είναι ίσος με

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{4kI_f}}} \quad (2.5.21)$$

Αλλά ο όρος $\frac{\kappa^2}{4kI_f}$ σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι περίπου ίσος με $\frac{\kappa^2}{4kI_f} \approx 0.032$ σύμφωνα με τιμές που χρησιμοποιούνται στους περισσότερους σχεδιασμούς ελικοπτέρων. Αρα λοιπόν, είναι επιτρεπτό να θεωρηθεί αμελητέα η όποια απόσβεση και να υποθεθεί ότι $T \approx \tau_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$. Οσον αφορά στον λόγο δύο διαδοχικών ευρών της ταλάντωσης της λεπίδας, είναι σκόπιμο να εξεταστεί ο όρος $\frac{\kappa}{2I_f}$ που εμφανίζεται στο εκθετικό της (2.5.19). Παρατηρώντας ότι η άνωση της λεπίδας είναι ίση με $T_b = w_b Rc$, (όπου c είναι το μήκος της χορδής της λεπίδας, όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2.6β και w_b είναι η δύναμη που δέχεται η λεπίδα ανά μονάδα επιφάνειας), η μερική παράγωγος της ώθησης ως προς τις μεταβολές της γωνίας προένευσης της λεπίδας εκφράζεται ως

$$\left. \frac{\partial T_b}{\partial \Theta_0} \right|_{\Theta_{0c}} = \left(\left. \frac{\partial w_b}{\partial \Theta_0} \right|_{\Theta_{0c}} \right) Rc \quad (2.5.22)$$

Υποθέτοντας ότι η μάζα της λεπίδας είναι ομοιόμορφα κατανομημένη κατά μήκος του άξονα της λεπίδας, η ροπή αδράνειάς της ως προς την στρόφιγγα πτερυγισμού είναι

$$I_f = \frac{1}{3} \left(\frac{W_b}{g} \right) R^2 \quad (2.5.23)$$

όπου W_b είναι το βάρος της λεπίδας, και g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας. Έτσι, ο όρος $\frac{\kappa}{2I_f}$ εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\kappa}{2I_f} = \frac{R r_f Rc \left(\left. \frac{\partial w_b}{\partial \Theta_0} \right|_{\Theta_{0c}} \right) \frac{1}{\Omega}}{\frac{2}{3} \left(\frac{W_b}{g} \right) R^2} \quad (2.5.24)$$

όπου r_T είναι η απόσταση του σημείου δράσης της ώθησης της λεπίδας, μετρούμενη από τον άξονα περιστροφής ($\bar{r}_T = \frac{r_T}{R}$).

Αδιαστατοποιώντας την φόρτιση της λεπίδας διαιρώντας την με την ποσότητα ρV_i^2 έτσι ώστε $\bar{w}_b = \frac{w_b}{\rho V_i^2}$ (όπου ρ είναι η πυκνότητα της λεπίδας και $V_i = \Omega R$), ο όρος $\frac{\partial w_b}{\partial \theta_0}$ εκφράζεται ως εξής

$$\frac{\partial w_b}{\partial \theta_0} = \left(\frac{\partial \bar{w}_b}{\partial \theta_0} \right) \rho V_i^2 \quad (2.5.25)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψην ότι $W_b = w_{sb} R c$ (όπου w_{sb} είναι το βάρος της λεπίδας ανά μονάδα επιφανείας της, και υποθέτοντας ότι $\bar{r}_T \approx \frac{2}{3}$, ο όρος $\frac{\kappa}{2I_f}$ εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\kappa}{2I_f} = \frac{g \rho V_i^2}{w_{sb}} \left(\left. \frac{\partial \left(\frac{w_b}{\rho V_i^2} \right)}{\partial \theta_0} \right|_{\theta_{0c}} \right) \quad (2.5.26)$$

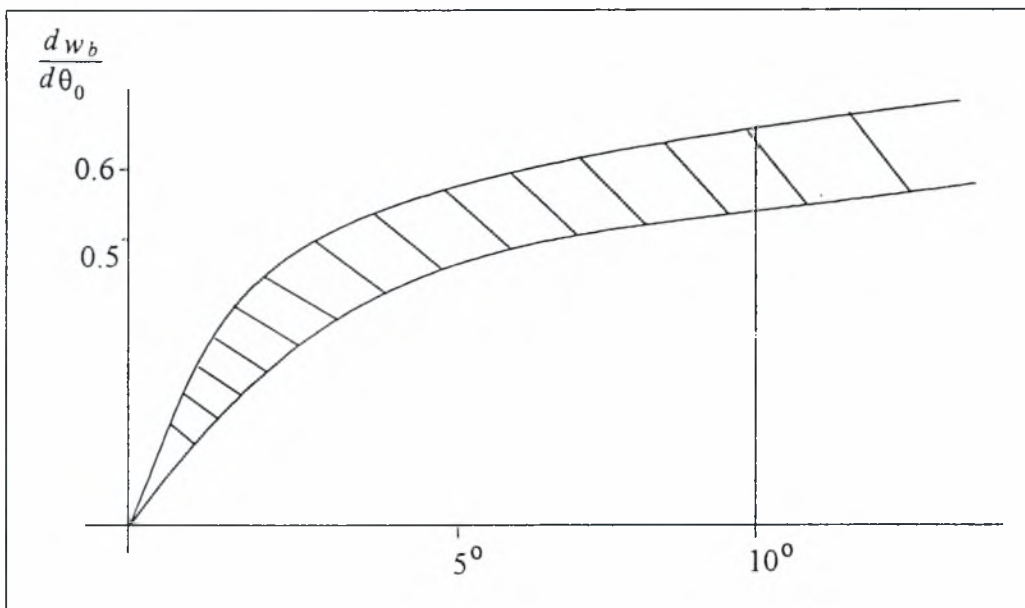
Η απεικόνιση του $\frac{\partial \bar{w}_b}{\partial \theta_0} = F(\theta_0)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.8. Όταν $\theta_0 \rightarrow 0$, τότε και $\frac{\partial \bar{w}_b}{\partial \theta_0} \rightarrow 0$. Αυτό προφανώς σημαίνει ότι για αφόρτιστους ή σχεδόν αφόρτιστους έλικες ($\theta_0 \approx 0$), το μέτρο απόσβεσης μπορεί να γίνει πολύ μικρό, ή ακόμη και μηδέν. Ακόμη, για τυπική λειτουργία, όπως φαίνεται από το σχήμα, όταν $\theta_0 \geq 10^\circ$ τότε $\frac{\partial \bar{w}_b}{\partial \theta_0} \approx 0.65/\text{rad}$. Αυτή η τιμή, για πρακτικές τιμές των υπολοίπων μεγεθών, δηλαδή

$$V_i = 200 \frac{m}{\text{sec}} \approx 650 \text{fps}, \quad w_{sb} = 30 \frac{Kg}{m^2} \approx 6 \text{psf}$$

και

$$\rho = \rho_0 = 1.23 \frac{Kg}{m^3} \approx 0.00237 \frac{\text{slugs}}{\text{cu} \times \text{ft}},$$

θα δώσει $\frac{\kappa}{2I_f} \approx 5.3/\text{sec}$ και ένα λόγο διαδοχικών ευρών $\frac{A_2}{A_1} \approx e^{-1.13} = 0.323$. Αυτό σημαίνει ότι το εύρος της ταλάντωσης θα είναι περίπου ίσο με το ένα τρίτο του εύρους της ταλάντωσης της προηγούμενης περιόδου. Συνεπώς, μία λεπίδα η οποία έχει στρόφιγγα πτερυγισμού κάθετη στον άξονα του έλικα, θα επιστρέψει πολύ γρήγορα στην θέση ισορροπίας της, από την οποία αρχικά είχε εκτραπεί. Με άλλα λόγια, σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας, η λεπίδα κατά την κίνηση πτερυγισμού της είναι όχι μόνο στατικά αλλά και δυναμικά ευσταθής.



Σχήμα 2.8: Μεταβολή της αεροδυναμικής δύναμης στη λεπίδα σε συνάρτηση με την γωνία προένευσης.

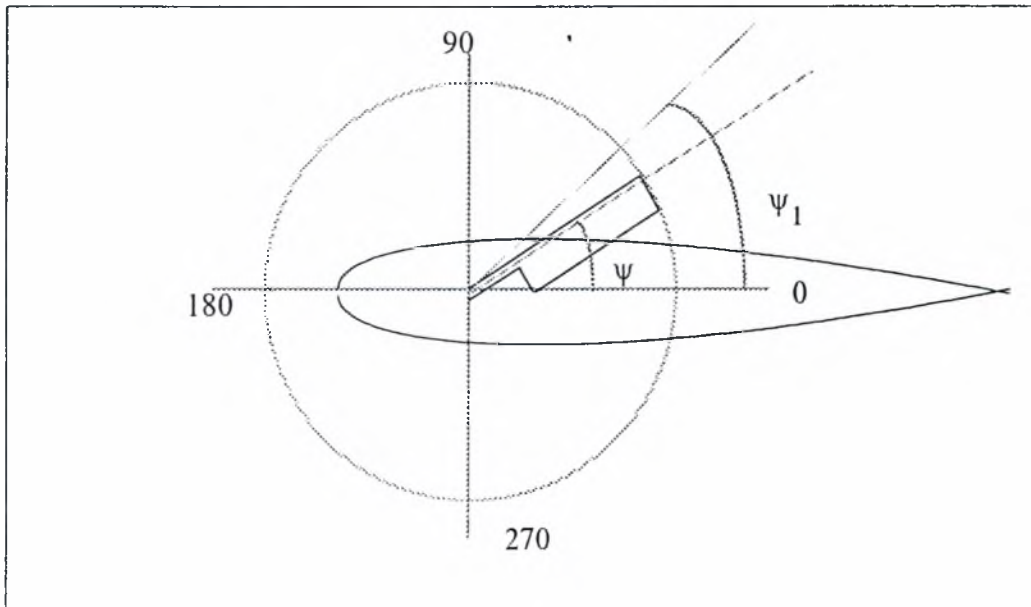
2.6 Ελεγχος έλικα

2.6.1 Κλίση του διανύσματος της άνωσης μέσω περιοδικής αλλαγής της γωνίας προένευσης της λεπίδας κατά την αιώρηση.

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείχθηκε ότι η κίνηση της λεπίδας γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού είναι μία ταλαντωτική κίνηση με απόσβεση. Αν όμως εφαρμοσθεί μία εξωτερική περιοδικά μεταβαλλόμενη ροπή, τότε η κίνηση της λεπίδας θα μετατραπεί σε εξαναγκασμένη ταλάντωση. Στην περίπτωση του έλικα, είναι γεγονός ότι μία τέτοια εξωτερική ροπή μπορεί να δημιουργηθεί από εξαναγκασμένη αλλαγή του διανύσματος της άνωσης. Προς το παρόν, ο πιο συνηθισμένος τρόπος αλλαγής της ώθησης της λεπίδας στον αξιμουθιακό κύκλο είναι μέσω της κίνησης πτέρωσης, δηλαδή αλλαγή της γωνίας προένευσης της λεπίδας θ_0 σαν σύνολο. Αυτή η μεταβολή της θ_0 στον αξιμουθιακό κύκλο πρέπει να είναι περιοδική, και κατά συνέπεια αναπτύσσεται σε σειρά Fourier, η οποία περιλαμβάνει οποιοδήποτε αριθμό αρμονικών. Όμως στην πράξη οι είσοδοι ελέγχου σε όλες τις συνθήκες πτήσης και ειδικά κατά την αιώρηση είναι πρώτου αρμονικού χαρακτήρα, δηλαδή

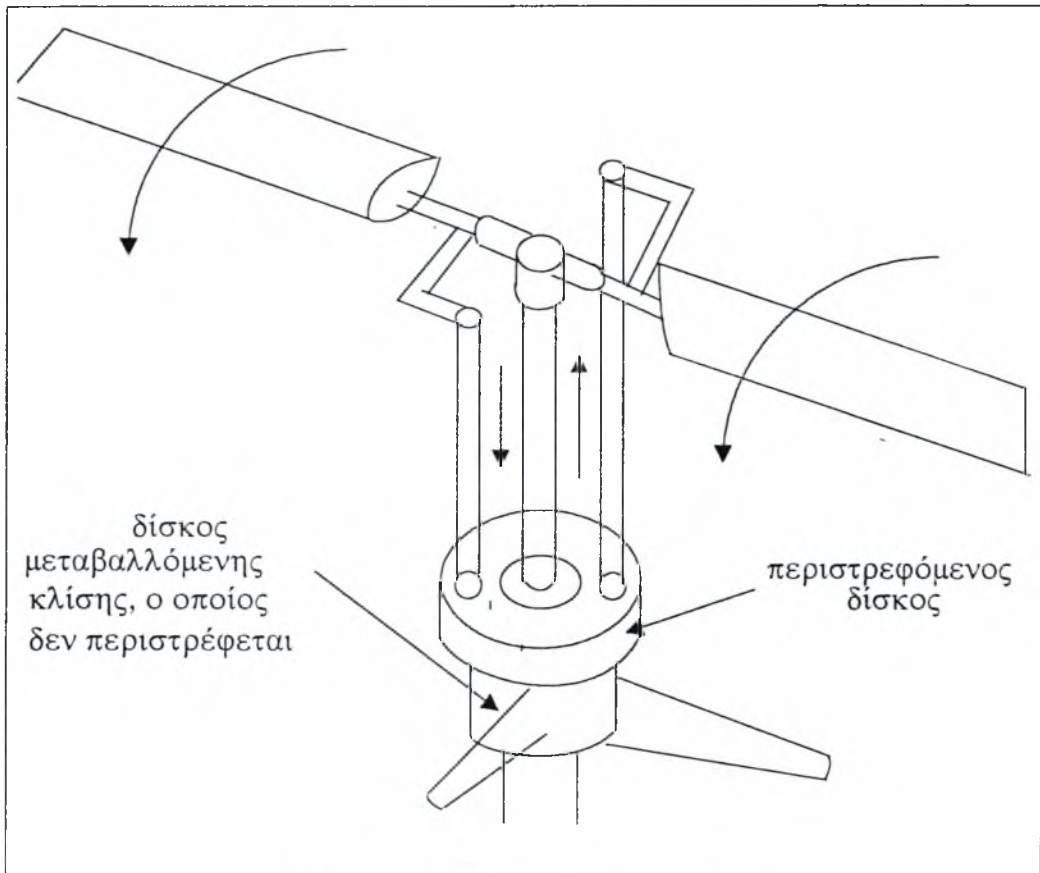
$$\theta_{0\psi} = \theta_0 - \theta_1 \cos(\psi - \psi_1) \quad (2.6.1)$$

όπου θ_1 είναι η μέγιστη απόκλιση της γωνίας προένευσης της λεπίδας από την κανονική τιμή της (θ_0), και ψ_1 είναι η αξιμουθιακή γωνία στην οποία εισάγεται αυτή η μέγιστη απόκλιση.



Σχήμα 2.9: Περιοδική αλλαγή της γωνίας προένευσης της λεπίδας

Στην πράξη, αυτή η μεταβολή της γωνίας προένευσης της λεπίδας πραγματοποιείται μέσω ενός απλού σχετικά μηχανικού εξαρτήματος, το οποίο καλείται περιστρεφόμενος δίσκος (swashplate). Αυτό το εξάρτημα αποτελείται από ένα κυκλικό δίσκο, ο οποίος μέσω των εισόδων, δηλαδή των εντολών τις οποίες δίνει ο χειριστής, αλλάζει την κλίση του ως προς το επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στον άξονα του έλικα, όπως δείχνει το Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10: Περιστρεφόμενος δίσκος

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.10, ο δίσκος ο οποίος δεν περιστρέφεται, δίνει μέσω των συνδέσεων και του περιστρεφόμενου δίσκου την περιοδική μεταβολή της γωνίας προένευσης των λεπίδων. Αυτή η πρώτου αρμονικού χαρακτήρα περιοδική μεταβολή της γωνίας προένευσης των λεπίδων θα δημιουργήσει αντίστοιχη μεταβολή στην άνωση ανά λεπίδα, γεγονός που σημαίνει ότι και η ροπή που δέχεται η λεπίδα γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού θα μεταβάλλεται περιοδικά. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην δημιουργία ροπής M_f , η οποία είναι συνάρτηση του $\Delta\theta_{0\psi} = \theta_{0\psi} - \theta_0$, δηλαδή $M_f = f(\theta_{0\psi} - \theta_0)$.

Υποθέτοντας ότι το $\Delta\theta_{0\psi}$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή του όταν $\psi = 90^\circ$, συνεπάγεται ότι $M_{f\psi} = M_{f_{\max}} \sin \Omega t$, και έτσι προκύπτει το μηχανικό ανάλογο υλικού σημείου που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση, αφού η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση πτερυγισμού της λεπίδας γίνεται

$$I_f \ddot{\beta} + \kappa \dot{\beta} + k \beta = M_{f_{\max}} \sin \Omega t \quad (2.6.2)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\beta = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + M_{f_{\max}} \frac{(k - I_f \Omega^2) \sin \Omega t - \kappa \Omega \cos \Omega t}{(k - I_f \Omega^2)^2 + \kappa^2 \Omega^2} \quad (2.6.3)$$

Οι πρώτοι δύο όροι της παραπάνω εξίσωσης περιγράφουν τις ελεύθερες δυναμικά ευσταθείς ταλαντώσεις, οι οποίες αναλύθηκαν προηγουμένως, και στις οποίες το εύρος μειώνεται με ταχείς ρυθμούς. Ο τρίτος όρος περιγράφει απλή αρμονική κίνηση με σταθερό εύρος. Είναι προφανές ότι μετά από κάποιες περιόδους, η λεπίδα θα κινείται σύμφωνα με τον τρίτο όρο της παραπάνω εξίσωσης. Οπότε οι εκθετικοί όροι της εξίσωσης μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι, και η εξίσωση να γραφεί ως ακολούθως:

$$\beta = \frac{M_{f_{\max}}}{\sqrt{(k - I_f \Omega^2)^2 + \kappa^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \psi_p) \quad (2.6.4)$$

οπου η τιμή της γωνίας φάσης δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tan \psi_p = \frac{\kappa \Omega}{(k - I_f \Omega^2)} \quad (2.6.5)$$

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι όταν $k = I_f \Omega^2$, τότε $\psi_p = 90^\circ$.

Ετσι, για μία λεπίδα η οποία έχει στρόφιγγα πτερυγισμού τοποθετημένη κάθετα στον άξονα του έλικα καθώς και σταθερή κατανομή μάζας $\bar{m}(r) = \text{σταθερή}$

$$k = (CF) R \bar{r}_{CF} = \frac{1}{2} M R \Omega^2 \frac{2}{3} R = I_f \Omega^2 \quad (2.6.6)$$

Συνεπώς, η γωνία φάσης για την λεπίδα θα είναι $\psi_p = 90^\circ$. Αυτό σημαίνει ότι όταν η πρώτη αρμονικής περιοδική μεταβολή της γωνίας προένευσης της λεπίδας εφαρμοστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μέγιστη τιμή της εμφανιστεί για $\psi = 90^\circ$, όπως και το $M_{f_{\max}}$, τότε το β_{\max} θα εμφανιστεί όταν $\psi = 180^\circ$.

Όσο για το μέγεθος του β_{\max} , αποδεικνύεται ότι

$$\beta_{\max} = \frac{M_{f_{\max}}}{\kappa \Omega} \quad (2.6.6)$$

Αλλά

$$M_{f_{\max}} = \left. \frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right|_{\vartheta_{0c}} (\Delta \vartheta_{0_{\max}} R \bar{r}_T)$$

Αντικαθιστώντας το $M_{f_{\max}}$ από την παραπάνω εξίσωση, αλλά και το $\kappa = \frac{1}{\Omega} r_R \left(\frac{\partial T_b}{\partial \vartheta_0} \right)_{\vartheta_{0c}}$ στην (2.6.6), προκύπτει η σχέση

$$\beta_{\max} \approx \Delta \vartheta_{0_{\max}} \quad (2.6.7)$$

Από τις εξισώσεις (2.6.4) και (2.6.6) φαίνεται ότι εφαρμόζοντας μία πρώτη αρμονικής μεταβολή της γωνίας προένευσης των λεπίδων του έλικα ενός αιωρούμενου ελικοπτέρου, μπορεί να επιτευχθεί μία μόνιμη κλίση του επιπέδου της τροχιάς του άκρου της λεπίδας, όσο η είσοδος που ελέγχει ο χειριστής και

αφορά την περιοδική μεταβολή της γωνίας προένευσης της λεπίδας παραμένει η ίδια. Ακόμη, η μέγιστη τιμή της γωνίας κλίσης είναι ίση με το εύρος της περιοδικής μεταβολής της γωνίας προένευσης της λεπίδας ($\Delta\theta_{\max}$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, φαίνεται και πάλι η ισοδυναμία μεταξύ κίνησης πτερυγισμού και πτέρωσης. Επίσης, αποδείχθηκε ότι η γωνία φάσης, η οποία είναι ανεξάρτητη της απόσβεσης, είναι ίση με 90° . Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη γωνία πτερυγισμού της λεπίδας, λαμβάνει χώρα 90° μετά την μέγιστη γωνία προένευσης της λεπίδας.

2.6.2 Πτερυγισμός κατά την πτήση

Σε προηγούμενη ενότητα είχε δειχθεί ότι η συνιστώσα της ταχύτητας η οποία είναι κάθετη στην λεπίδα V_\perp μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στον αζιμουθιακό κύκλο. Είχε σημειωθεί επίσης, ότι εξαιτίας της άνωσης της λεπίδας, η αεροδυναμική ροπή γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού θα μεταβάλλεται επίσης ημιτονοειδώς κατά τον ίδιο τρόπο με την συνιστώσα της ταχύτητας. Έτσι, $M_f = M_f(\psi)$. Σε μόνιμες συνθήκες, η M_f θα μεταβάλλεται περιοδικά. Όπως και στην περίπτωση της αιώρησης, θα θεωρηθεί η M_f σαν την ροπή που εξαναγκάζει την λεπίδα να εκτελεί ταλάντωση γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού. Η κίνηση αυτή της λεπίδας περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$I_f \ddot{\beta} + \kappa \dot{\beta} + k\beta = M_f(\psi) \quad (2.6.8)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης στην μόνιμη κατάσταση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, παριστάνοντας άθροισμα απλών αρμονικών κινήσεων. Σταματώντας στην δεύτερη αρμονική, η λύση θα είναι

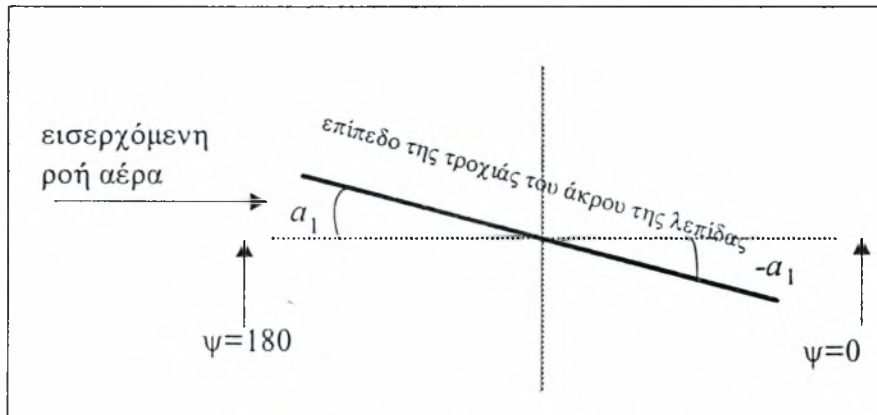
$$\beta = a_0 - a_1 \cos(\psi) - b_1 \sin(\psi) - a_2 \cos(2\psi) - b_2 \sin(2\psi) \quad (2.6.9)$$

Παρακάτω αποδίδονται στους συντελεστές της σχέσης οι ακόλουθες ερμηνείες:

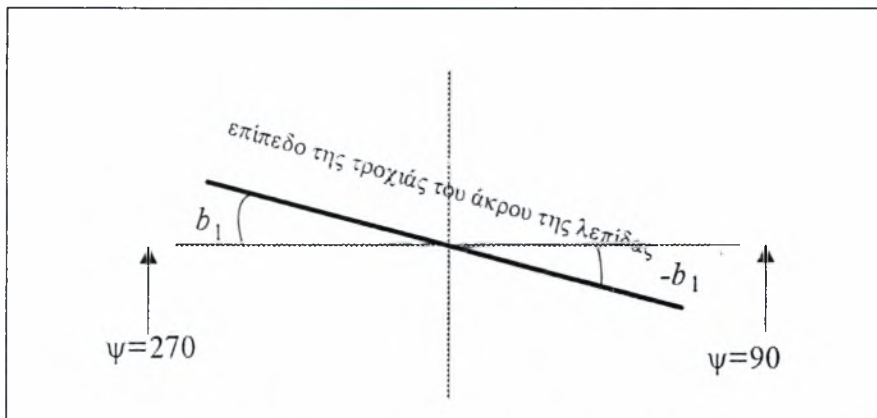
Ο a_0 παριστάνει το μέρος της κίνησης το οποίο είναι ανεξάρτητο από την αζιμουθιακή γωνία. Είναι ταυτόσημος με την γωνία κωνικότητας στην αιώρηση, όταν όλες οι περιοδικές είσοδοι είναι μηδενικές: $\beta_0 = a_0$.

Ο a_1 παριστάνει το πλάτος μίας απλής, πρώτης αρμονικής συνημιτονοειδούς κίνησης, και περιγράφει την εμπρός και πίσω κλίση του επιπέδου της τροχιάς που διαγράφει το άκρο της λεπίδας, το οποίο λαμβάνει μέγιστο ύψος (elevation) για $\psi = 180^\circ$ και ελάχιστο για $\psi = 0^\circ$, όπως δείχνει το Σχήμα 2.11. Ο b_1 παριστάνει το πλάτος μίας απλής αρμονικής, ημιτονοειδούς

κίνησης, που λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο στις 90° και 270° αντίστοιχα, όπως δείχνει το Σχήμα 2.12



Σχήμα 2.11: Συνημιτονοειδής κίνηση



Σχήμα 2.12: Ημιτονοειδής κίνηση

Είναι προφανές ότι όσο περισσότερους αρμονικούς όρους περιλαμβάνει η σχέση (2.6.9), τόσο ακριβέστερος θα είναι ο καθορισμός της τροχιάς του άκρου της λεπίδας. Συνήθως, ο a_0 μαζί με δύο ακόμη αρμονικούς όρους είναι αρκετοί. Από παρατήρηση της κίνησης πτερυγισμού στην πράξη, προκύπτουν όσον αφορά στην τιμή των αρμονικών συντελεστών τα παρακάτω:

$$a_0 = 8.7^\circ, a_1 = 6.1^\circ, b_1 = 3.9^\circ, a_2 = 0.5^\circ, b_2 = -0.1^\circ$$

Κρατώντας μόνο τους πρώτους αρμονικούς όρους, και εκτελώντας τις αντικαταστάσεις $-a_0 = \beta_0$, $a_1 = \beta_1 \cos \psi_1$ και $b_1 = \beta_1 \sin \psi_1$, η σχέση (2.6.9) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \cos(\psi - \psi_1) \quad (2.6.10)$$

Η σχέση (2.6.10) είναι ταυτόσημη με την σχέση (2.6.1) και δείχνει ότι το επίπεδο της τροχιάς που διαγράφει το άκρο της λεπίδας είναι κεκλιμένο ως προς το κάθετο στον άξονα του έλικα επίπεδο κατά μία γωνία β_1 . Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι το επίπεδο της τροχιάς του άκρου της λεπίδας είναι κάθετο στον “κατ’ ουσίαν” άξονα περιστροφής (virtual axis of rotation). Αυτός ο άξονας περνά από την πλήμνη και κείται σ’ ένα επίπεδο το οποίο περνά από τον άξονα του έλικα και σχηματίζει γωνία ψ_1 με το επίπεδο $\psi = 0$.

Ο καθορισμός των συντελεστών της κίνησης πτερυγισμού απαιτεί εκτεταμένες γνώσεις της αεροδυναμικής των ελικοφόρων αεροσκαφών. Έτσι, στην περιγραφή που ακολουθεί θα δωθούν μόνο οι αναγκαίες λεπτομέρειες που απαιτούνται για την κατανόηση των φυσικών εννοιών.

Χάριν απλότητας υποτίθεται ότι η δύναμη που παριστάνει την άνωση της λεπίδας T_b , ενεργεί στην ίδια σχετική θέση ως προς την λεπίδα \bar{r}_T , και για την περίπτωση της αιώρησης αλλά και για την περίπτωση της εμπρόσθιας πτήσης. Τότε η ροπή που θα αναπτυχθεί γύρω από την στρόφιγγα πτερυγισμού είναι

$$M_f = T_b R \bar{r}_T \quad (2.6.11)$$

Αν οι λεπίδες είναι απολύτως στερεές, μπορεί να υποτεθεί ότι η T_b όπως και οποιαδήποτε ανυψωτική δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο του μέτρου της συνιστώσας V_{\perp} της ταχύτητας του αέρα που δέχεται η λεπίδα, στην σχετική θέση r_T . Αυτό σημαίνει ότι η ώθηση ανά λεπίδα κατά την αιώρηση T_{b_h} είναι ανάλογη με το $V_{\perp_h}^2$, δηλαδή

$$T_{b_h} \sim V_{\perp_h}^2 = (V_i \bar{r}_T)^2 \quad (2.6.12)$$

και

$$T_{b_{id}} \sim V_{\perp_{id}}^2 = V_i^2 (\bar{r}_T + \mu \sin \psi)^2 \quad (2.6.13)$$

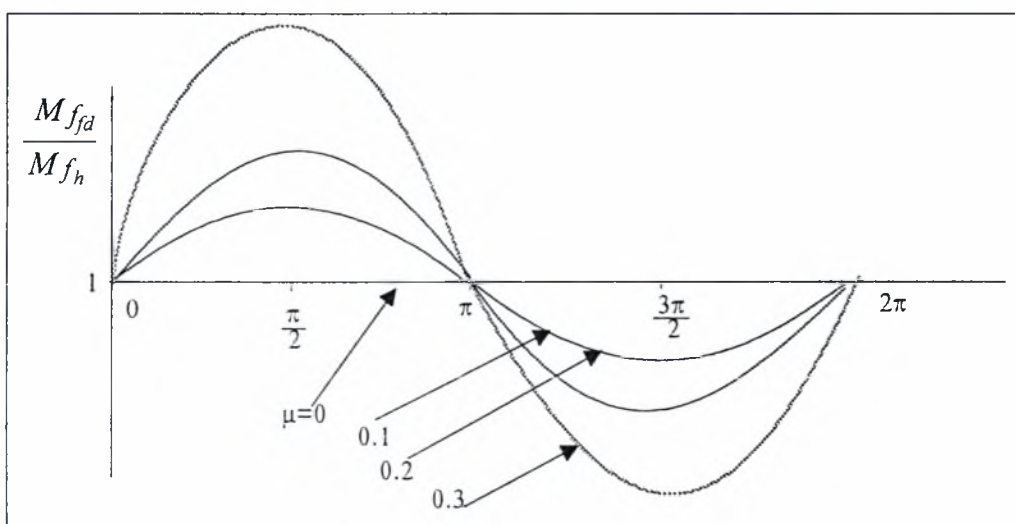
Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.6.11), (2.6.12) και (2.6.13), έχοντας υπ’ όψη ότι η στρόφιγγα πτερυγισμού είναι τοποθετημένη καθέτως στον άξονα του έλικα και θεωρώντας τις λεπίδες σαν στερεά σώματα, καταλήγουμε στο ότι ο λόγος της ροπής της λεπίδας ως προς την στρόφιγγα πτερυγισμού κατά την εμπρόσθια πτήση $M_{f_{id}}$, προς αυτήν κατά την αιώρηση M_{f_h} θα ακολουθούν την αναλογία

$$\left(\frac{M_{f_{id}}}{M_{f_h}} \right) \sim \left[1 + 2 \left(\frac{\mu \sin \psi}{\bar{r}_T} \right) + \frac{\mu^2 \sin^2 \psi}{\bar{r}_T^2} \right] \quad (2.6.14)$$

Παραλείποντας τον τελευταίο όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης επειδή είναι μικρός σε σύγκριση με τους δύο πρώτους ($\mu < 0.3$), η σχέση (2.6.14) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\left(\frac{M_{fd}}{M_{fh}}\right) \sim \left[1 + 2\left(\frac{\mu \sin \psi}{\bar{r}_T}\right)\right] \quad (2.6.14a)$$

Από την παραπάνω σχέση και το Σχήμα 2.13 είναι δυνατόν να υποθεθεί σαν πρώτη προσέγγιση ότι κατά την μεταφορική πτήση με συνιστώσα της ταχύτητας στο επίπεδο του έλικα ($\mu > 0$), θα δημιουργηθεί ροπή ανάλογη του $\sin \psi$. Ακόμη, από την σχέση (2.6.14a) φαίνεται ότι το μέγεθος της είναι επίσης ανάλογο του μ . Η αναλογία αυτής της ροπής με το $\sin \psi$ καθιστά την θεωρούμενη κατάσταση ανάλογη με αυτήν του κεκλιμένου διανύσματος της ώθησης της λεπίδας, την οποία αναλύσαμε σε προηγούμενη παράγραφο.



Σχήμα 2.13: Μεταβολή της ροπής εξαναγκασμού που προέρχεται από την παράλληλη στο επίπεδο του έλικα συνιστώσα της ροής του αέρα

2.7 Κίνηση υστέρησης της λεπίδας

Παρατηρώντας τους σχηματισμούς ελίκων που περιλαμβάνουν στρόφιγγες πτερυγισμού, μπορεί να δει κανείς επιπρόσθετες στρόφιγγες τοποθετημένες περίπου κάθετα στο επίπεδο του έλικα. Αυτές οι στρόφιγγες ονομάζονται στρόφιγγες υστέρησης, και δίνουν έναν ακόμη βαθμό ελευθερίας κίνησης στην λεπίδα. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα παρουσιαστεί το είδος της επιπλέον κίνησης που εκτελεί η λεπίδα, καθώς και η αναγκαιότητα αυτής της στρόφιγγας υστέρησης.

Εστω ότι η λεπίδα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του έλικα με γωνιακή ταχύτητα Ω , και ταυτόχρονα εκτελώντας κίνηση πτερυγισμού έχει στην

θέση β γωνιακή ταχύτητα $\dot{\beta}$. Η επιτάχυνση Coriollis που αναπτύσσεται στη στοιχειώδη μάζα της λεπίδας στη θέση r από τον άξονα του έλικα, είναι

$$a_c = 2r\Omega\beta\dot{\beta} \quad (2.7.1)$$

Υποθέτοντας απλή αρμονική κίνηση πτερυγισμού, η γωνία β εκφράζεται ως

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \cos(\psi - \psi_1) \quad (2.7.2)$$

όπου β_0 είναι η γωνία κωνικότητας. Κατά την παρούσα θεώρηση, υποτίθεται ότι $\beta_0 = 0$, β_1 είναι η μέγιστη απόλυτη τιμή της γωνίας πτερυγισμού, και ψ_1 είναι η αζιμουθιακή γωνία στην οποία η γωνία πτερυγισμού λαμβάνει την τιμή β_1 . Αναπτύσσοντας την αζιμουθιακή γωνία σε όρους της περιστροφικής ταχύτητας του έλικα και στον χρόνο ($\psi = \Omega t$), η σχέση (2.7.2) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \cos(\Omega t - \psi_1) \quad (2.7.3)$$

Συνεπώς, η γωνιακή ταχύτητα πτερυγισμού είναι

$$\dot{\beta} = \beta_1 \Omega \sin(\Omega t - \psi_1) \quad (2.7.4)$$

και έτσι η σχέση (2.7.1) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$a_c = -2r\Omega^2\beta_1^2 \sin(\Omega t - \psi_1) \cos(\Omega t - \psi_1) \quad (2.7.5)$$

Ομως,

$$\sin(\Omega t - \psi_1) \cos(\Omega t - \psi_1) = \frac{1}{2} \sin(2\Omega t - 2\psi_1) \quad (2.7.6)$$

Έτσι η επιτάχυνση Coriollis που δέχεται η στοιχειώδης μάζα της λεπίδας ισούται με

$$a_c = -r\Omega^2\beta_1^2 \sin 2(\Omega t - \psi_1) \quad (2.7.7)$$

Από την παραπάνω σχέση καθίσταται προφανές ότι η επιτάχυνση Coriollis του στοιχειώδους τμήματος της λεπίδας μεταβάλλεται σαν δεύτερη αρμονική, και έτσι λαμβάνει την μέγιστη αρνητική και την μέγιστη θετική τιμή της δύο φορές σε κάθε περιστροφή της λεπίδας. Είναι φανερό λοιπόν ότι, απουσία στρόφιγγας υστέρησης, η βάση της λεπίδας θα υπόκειται σε μία καμπτική ροπή η οποία θα οδηγήσει σε κόπωση αφού εναλλάσσεται η φορά της δύο φορές σε κάθε περιστροφή.

2.8 Ερμηνεία της ισοδυναμίας των κινήσεων πτερυγισμού και πτέρωσης

Εστω ότι ένας παρατηρητής βρίσκεται πάνω στον άξονα του έλικα και συμμετέχει στην περιστροφική του κίνηση. Ο παρατηρητής βλέπει τις λεπίδες του έλικα να εκτελούν κίνηση πτερυγισμού πάνω-κάτω, χωρίς όμως να μεταβάλλεται η γωνία προένευσης τους. Την ίδια στιγμή, αν υποθεθεί ότι ένας άλλος παρατηρητής βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που διαγράφουν τα άκρα των λεπίδων, και συμμετέχει στην κίνηση που εκτελούν οι λεπίδες, τότε παρατηρεί ότι οι λεπίδες δεν εκτελούν κίνηση πτερυγισμού, αλλά μεταβάλλουν την γωνία προένευσής τους κατά την περιστροφή. Ακόμη ότι η γωνία προένευσης της κάθε λεπίδας είναι χαμηλότερη για $0 < \psi < \pi$ και υψηλότερη για $\pi < \psi < 2\pi$.

Με βάση αυτήν την ισοδυναμία, αλλά και τα προβλήματα ασυμμετρίας ροής που παρουσιάζονται κατά την μεταφορική οριζόντια πτήση του ελικοπτέρου (τα οποία έχουν αναλυθεί σε προηγούμενη παράγραφο), θα παρουσιαστούν οι μορφές των εισόδων που ελέγχουν και κατευθύνουν την κίνηση του ελικοπτέρου

2.9 Εισοδοί ελέγχου της κίνησης του ελικοπτέρου

2.9.1 Εγκάρσιο και διαμήκες κυκλικό βήμα

Στις προηγούμενες ενότητες είχε αποδειχθεί ότι η ταχύτητα της ροής του αέρα που δέχεται η λεπίδα κατά την περιστροφική της κίνηση, μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με την αζιμουθιακή γωνία. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία καμπτικής ροπής η οποία ενεργεί πάνω στην λεπίδα και την αναγκάζει να εκτελεί κίνηση πτερυγισμού. Αν ληφθεί υπ' όψη ότι η μεταβολή της δημιουργούμενης ροπής είναι πρώτου αρμονικού χαρακτήρα, (δηλαδή $M_f = M_{f_{\max}} \sin(\psi)$), καθώς και το ότι η κίνηση πτερυγισμού είναι ισοδύναμη με την κίνηση πτέρωσης, τότε είναι φανερό ότι για την εξουδετέρωση των συνεπειών της ασυμμετρίας ροής οι εισοδοί θα πρέπει να είναι της μορφής

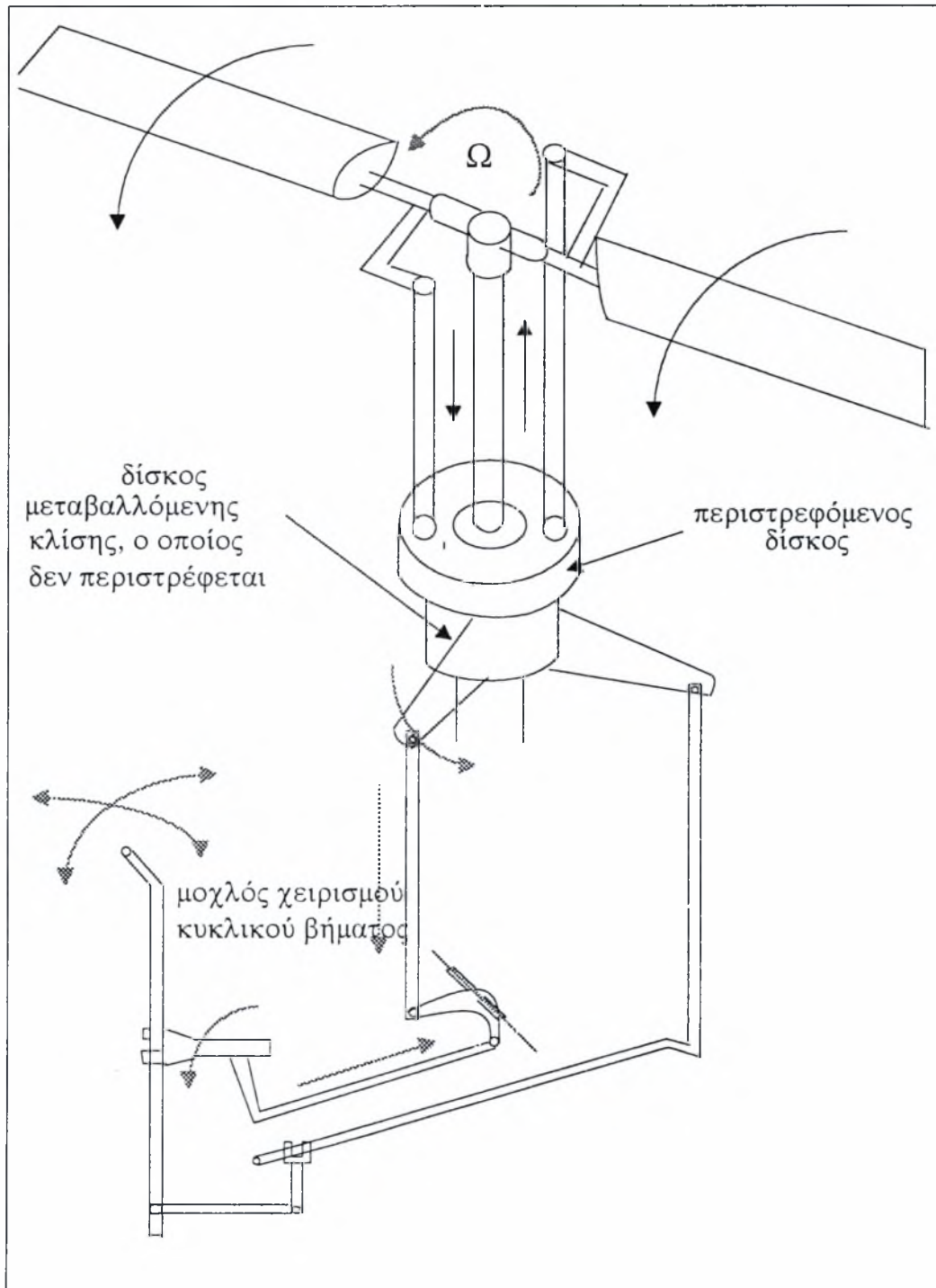
$$\vartheta_{0\psi} = \vartheta_0 - \vartheta_1 \cos(\psi - \psi_1)$$

Με την εφαρμογή εισόδων της παραπάνω μορφής, επιτυγχάνεται η εξουδετέρωση των προβλημάτων που επιφέρει η ασυμμετρία ροής, καθώς και ο καθορισμός της

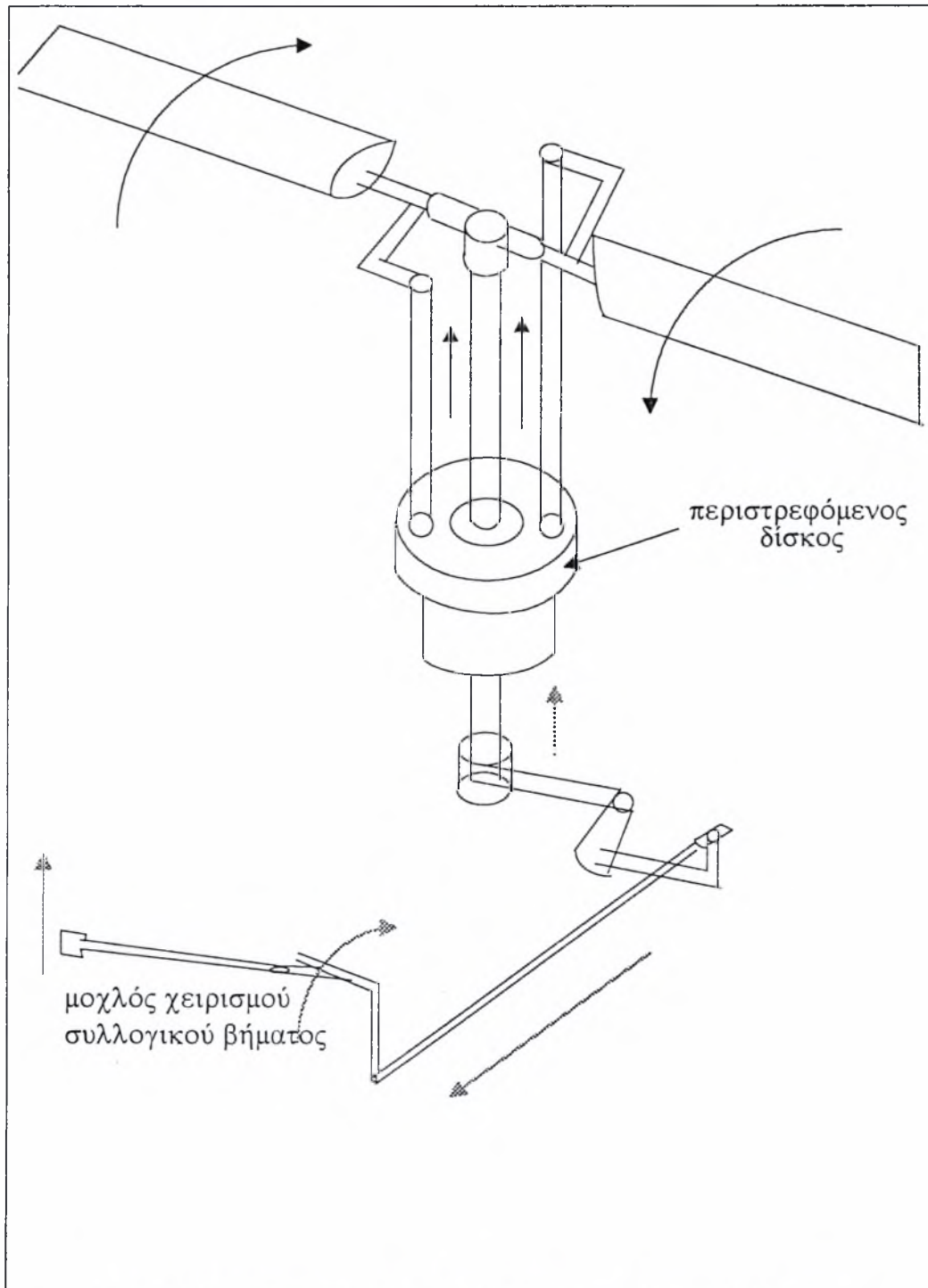
διεύθυνσης του διανύσματος της άνωσης του έλικα, καθώς επιτυγχάνεται κλίση του επιπέδου του έλικα κατά γωνία θ_1 . Ανάλογα με το αν κατά την τοποθέτηση του διανύσματος της άνωσης υπάρχει συνιστώσα της άνωσης κατά την διαμήκη ή την εγκάρσια κατεύθυνση, η είσοδος διακρίνεται σε διαμήκες ή εγκάρσιο κυκλικό βήμα.

2.9.2 Συλλογικό βήμα

Με το συλλογικό βήμα επιτυγχάνεται η μεταβολή του μέτρου του διανύσματος της άνωσης. Με τον όρο αυτό εννοείται η ταυτόχρονη αλλαγή της γωνίας προένευσης όλων των λεπίδων, δηλαδή στην ουσία η γωνία πρόσπτωσης του αέρα στις λεπίδες. Το συλλογικό βήμα αφορά τον όρο θ_0 της παραπάνω σχέσης, και οποιαδήποτε αλλαγή του λαμβάνει χώρα ανεξάρτητα από το κυκλικό βήμα. Ουσιαστικά το κυκλικό βήμα εφαρμόζεται “πάνω” από το συλλογικό βήμα. Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο υλοποιούνται οι είσοδοι που περιγράφηκαν παραπάνω, καθώς και οι απαραίτητες μηχανικές διατάξεις, για ένα συγκεκριμένο έλικα. Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζονται αυτές οι είσοδοι στον κύριο και στον οπίσθιο έλικα ενός ελικοπτέρου μονού έλικα, για την επίτευξη του ορθολογικότερου ελέγχου της κίνησής του.



Σχήμα 2.15 : Μηχανική διάταξη ελέγχου του κυκλικού βήματος



Σχήμα 2.16: Μηχανική διάταξη ελέγχου του συλλογικού βήματος

Ο έλεγχος της κατακόρυφης κίνησης του ελικοπτέρου γίνεται με την αλλαγή του μέτρου του διανύσματος της άνωσης, μέσω αλλαγής του συλλογικού βήματος του κύριου έλικα. Η μεταβολή της περιστροφικής ταχύτητας του κύριου έλικα θεωρητικά μπορεί να συνεισφέρει προς αυτήν την κατεύθυνση, αλλά

πρακτικά δεν κρίνεται αποδοτική. Ο έλεγχος της διαμήκους και εγκάρσιας κίνησης του ελικοπτέρου γίνεται με κατάλληλη κλίση του διανύσματος της άνωσης, μέσω του διαμήκους και του εγκάρσιου κυκλικού βήματος του κύριου έλικα αντίστοιχα. Τέλος, ο έλεγχος της κατευθυντικής κίνησης του ελικοπτέρου, (δηλαδή της γωνίας πλαγιοπορείας (γaw)), γίνεται μέσω της αλλαγής του συλλογικού βήματος του οπίσθιου έλικα.

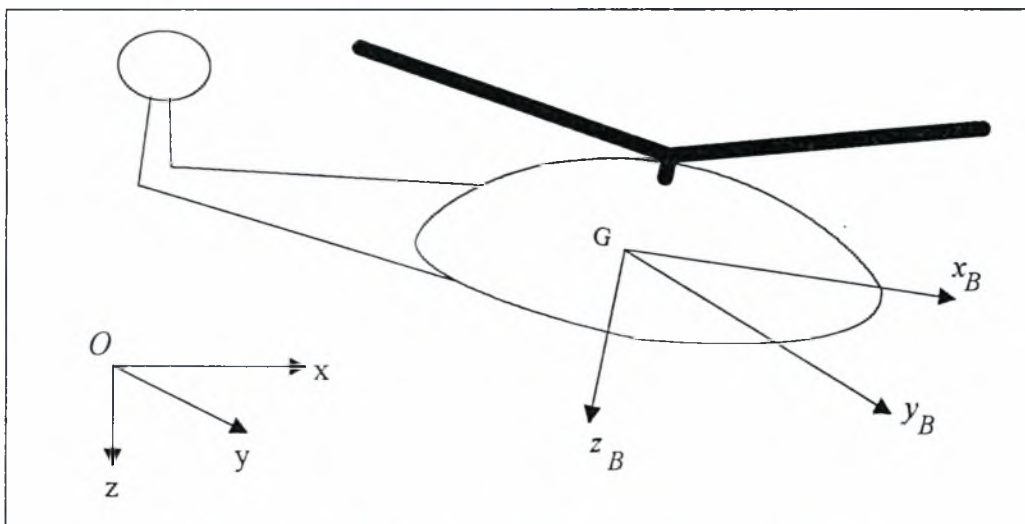
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Δυναμικές Εξισώσεις Κίνησης Ελικοπτέρου

Σύνοψη: Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εξισώσεις κίνησης του ελικοπτέρου. Εξάγονται οι συνολικές (αεροδυναμικές και βαρυτικές) δυνάμεις και ροπές που δέχεται κατά την πτήση το ελικόπτερο, σύμφωνα με την ανάλυση της χωρικής κίνησης στερεού. Εξάγονται επίσης οι γωνιακές ταχύτητες που αναπτύσσονται κατά την στροφή που εκτελεί το ελικόπτερο. Όλη η ανάλυση βασίζεται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και σε ένα σύστημα που ακολουθεί την κίνηση του ελικοπτέρου.



Κατά την διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων κίνησης, θεωρείται ολόκληρο το ελικόπτερο σαν στερεό σώμα, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη η δυναμική του έλικα. Έτσι, το ελικόπτερο κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ (ή E , το οποίο είναι στερεωμένο στη γη), υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων $Gx_B y_B z_B$ ή B που είναι στερεωμένο στο ελικόπτερο θα χρησιμοποιηθεί επίσης στην ανάλυση που ακολουθεί (Σχήμα 3.1)



Σχήμα 3.1: Αδρανειακό και κινούμενο σύστημα αναφοράς

Ο δεύτερος νόμος του Newton μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη διανυσματική μορφή ως εξής :

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(m V_G) \quad (3.1)$$

$$\Sigma M = \frac{d}{dt} H_G \quad (3.2)$$

όπου V_G είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του ελικοπτέρου σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα $Oxyz$, H_G είναι η στροφορμή του ελικοπτέρου ως προς το κέντρο μάζας του, και F , M είναι οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις και ροπές πάνω στο ελικοπτερο. Η στροφορμή στερεού σώματος υπολογίζεται πάντα ως προς κάποιο σημείο αναφοράς. Εκλέγοντας σαν σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας του ελικοπτέρου, τότε η στροφορμή του ισούται με την σχετική του στροφορμή, δηλαδή

$$H_G = \bar{H}_G$$

όπου H_G , \bar{H}_G είναι η στροφορμή και η σχετική στροφορμή αντίστοιχα του ελικοπτέρου. Οι σχέσεις (3.1) και (3.2) μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$F_x = \frac{d}{dt}(m u), F_y = \frac{d}{dt}(m v), F_z = \frac{d}{dt}(m w) \quad (3.3)$$

και

$$L = \frac{d}{dt}(H_x), M = \frac{d}{dt}(H_y), N = \frac{d}{dt}(H_z) \quad (3.4)$$

όπου u , v , w , H_x , H_y , H_z είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας και της στροφορμής αντίστοιχα στους άξονες του αδρανειακού συστήματος $Oxyz$. Εστω στοιχειώδης μάζα του ελικοπτέρου δm , η οποία έχει ταχύτητα v και δέχεται δύναμη δF . Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton

$$\delta F = \delta m \frac{dv}{dt} \quad (3.5)$$

και συνεπώς, η συνολική δύναμη που δέχεται το ελικόπτερο θα είναι

$$F = \sum \delta F \quad (3.6)$$

Η απόλυτη ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$v = v_c + \frac{dr}{dt} \quad (3.7)$$

όπου v_c είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του ελικοπτερου, και r είναι η θέση της στοιχειώδους μάζας του ελικοπτερου ως προς το κέντρο μάζας του. Ετσι, η σχέση (3.6) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$F = \sum \delta F = m \frac{dv_c}{dt} + \frac{d}{dt} \sum \frac{dr}{dt} \delta m \quad (3.8)$$

ή ισοδύναμα

$$F = \sum \delta F = m \frac{dv_c}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \sum r \delta m \quad (3.9)$$

Επειδή το r μετριέται από το κέντρο μάζας του ελικοπτερου, ισχύει ότι $\sum r \delta m = 0$, και έτσι η σχέση (3.9) γίνεται:

$$F = m \frac{dv_c}{dt} \quad (3.10)$$

Η παραπάνω σχέση, συνδέει την εξωτερική δύναμη που δέχεται το ελικόπτερο, με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

Κατά παρόμοιο τρόπο αναπτύσσεται η σχέση για την ροπή του ελικοπτερου. Ετσι,

$$\delta M = \frac{d}{dt} \delta H = \frac{d}{dt} (r \times v) \delta m \quad (3.11)$$

Αν τώρα εκφραστεί η ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας του ελικοπτερου σαν

$$v = v_c + \frac{dr}{dt} = v_c + \omega \times r \quad (3.12)$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του ελικοπτερου, τότε η συνολική στροφορμή του μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$H = \sum \delta H = \sum (r \times v_c) \delta m + \sum [r \times (\omega \times r)] \delta m \quad (3.13)$$

ή ισοδύναμα

$$H = \sum \delta H = (\sum r \delta m) \times v_c + \sum [r \times (\omega \times r)] \delta m \quad (3.14)$$

Επειδή όμως το r μετριέται από το κέντρο μάζας, ισχύει ότι $\sum r \delta m = 0$. Αν αναλυθεί η γωνιακή ταχύτητα του ελικοπτερου ως

$$\omega = p i + q j + r k \quad (3.15)$$

και το διάνυσμα θέσης της στοιχειώδους μάζας ως

$$r = x i + y j + z k \quad (3.16)$$

η συνολική στροφορμή λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$H = (p i + q j + r k) \sum (x^2 + y^2 + z^2) \delta m - \sum (x i + y j + z k) (p x + q y + r z) \delta m \quad (3.17)$$

Οι συνιστώσες της στροφορμής στους άξονες του αδρανειακού συστήματος, είναι:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= p \sum (y^2 + z^2) \delta m - q \sum x y \delta m - r \sum x z \delta m \\ H_y &= -p \sum x y \delta m - q \sum (x^2 + z^2) \delta m - r \sum y z \delta m \\ H_z &= -p \sum x z \delta m - q \sum y z \delta m - r \sum (x^2 + y^2) \delta m \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Οι αθροιστικοί όροι στις παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τα στοιχεία του μητρώου αδρανείας του αεροσκάφους. Αναλυτικότερα,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2) \delta m, \quad I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) \delta m, \quad I_{zz} = \iiint (x^2 + y^2) \delta m \\ I_{xy} &= \iiint x y \delta m, \quad I_{xz} = \iiint x z \delta m, \quad I_{yz} = \iiint y z \delta m \end{aligned}$$

Εφόσον η ανάλυση της στροφορμής έγινε στο αδρανειακό σύστημα Gx_B, y_B, z_B , τα στοιχεία του μητρώου αδρανείας του ελικοπτέρου παραμένουν σταθερά. Ετσι, οι συνιστώσες της στροφορμής λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= p I_{xx} - q I_{xy} - r I_{xz} \\ H_y &= -p I_{xy} + q I_{yy} - r I_{yz} \\ H_z &= -p I_{xz} - q I_{yz} + r I_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Είναι γνωστό ότι για ένα διάνυσμα q και δύο συστήματα αναφοράς A και B , όπου το ένα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς το άλλο, ισχύει ότι

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_A = \left. \frac{dq}{dt} \right|_B + \omega \times q \quad (3.20)$$

Οι υπολογισμοί διευκολύνονται αρκετά, αν οι παραγωγίσεις των διανυσμάτων που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.1) και (3.2) γίνουν ως προς το σύστημα αναφοράς $Gx_B y_B z_B$, δηλαδή

$$\dot{V}_G = (\dot{V}_G)_E = (\dot{V}_G)_B + \omega V_G \quad (3.21)$$

και

$$\dot{H}_G = (\dot{H}_G)_E = (\dot{H}_G)_B + \omega H_G \quad (3.22)$$

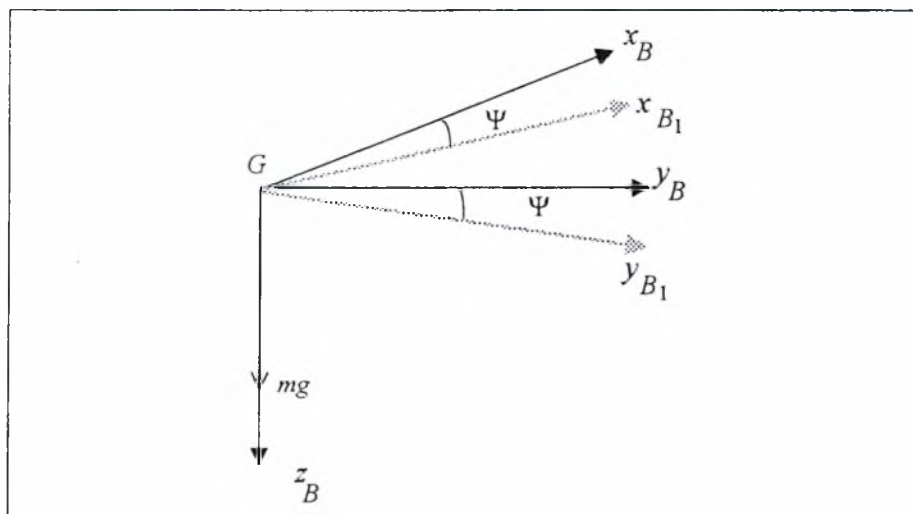
Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} + q w - r v), \quad F_y = m(\dot{v} + r u - p w), \quad F_z = m(\dot{w} + p v - q u) \\ L &= \dot{H}_x + q H_z - r H_y, \quad M = \dot{H}_y + r H_x - p H_z, \quad N = \dot{H}_z + p H_y - q H_x \end{aligned}$$

Αν το σύστημα που είναι στερεωμένο στο ελικόπτερο τοποθετηθεί ως προς το σκάφος έτσι ώστε το επίπεδο $Gx_B z_B$ να είναι επίπεδο συμμετρίας, τότε τα γινόμενα αδρανείας I_{yz} και I_{xy} μηδενίζονται, και οι εξισώσεις των ροπών λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz}pq \\ M &= I_{yy}\dot{q} + rp(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= -I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}qr \end{aligned}$$

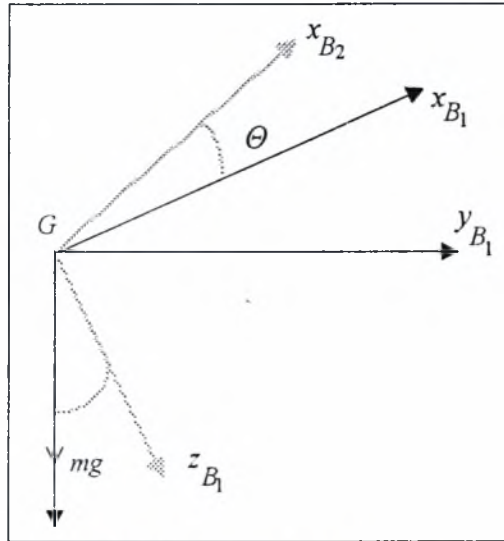
Στις παραπάνω εξισώσεις, οι F_x , F_y , F_z είναι οι συνισταμένες των εξωτερικών δυνάμεων (αεροδυναμικών και βαρυτικών), οι οποίες δρουν στο κέντρο μάζας του ελικοπτέρου, αναλυμένες στους άξονες του συστήματος αναφοράς $Gx_B y_B z_B$. Στη συνέχεια, θα εξάγουμε τις βαρυτικές δυνάμεις που δρουν στο ελικόπτερο, καθώς και τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του ελικοπτέρου, στο ίδιο σύστημα. Για την εξαγωγή των βαρυτικών δυνάμεων, θεωρείται ότι το σύστημα αναφοράς $Gx_B y_B z_B$ αρχικά έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το αδρανειακό σύστημα $Oxyz$, και σε κάποια χρονική στιγμή εκτελεί στροφή (yaw) κατά γωνία Ψ γύρω από τον άξονα Gz_B έτσι ώστε ο προσανατολισμός του ελικοπτέρου να δίνεται από το σύστημα αναφοράς $Gx_{B_1} y_{B_1} z_{B_1}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



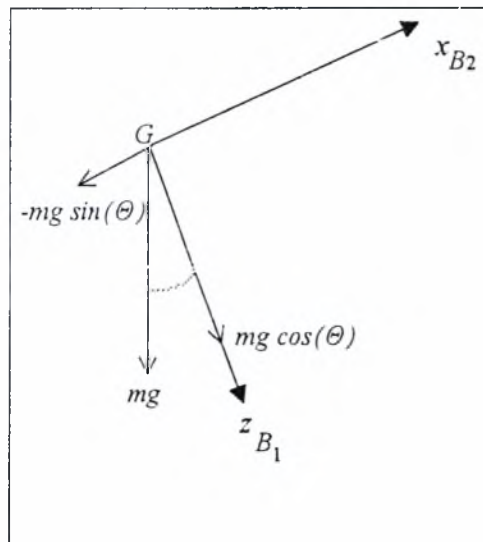
Σχήμα 3.2: Στροφή πλαγιοπορείας

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.2, η βαρυτική δύναμη μετά την στροφή κείται στον κατακόρυφο άξονα του νέου συστήματος αναφοράς, χωρίς να έχει συνιστώσες στους άλλους άξονες. Κατόπιν, το σύστημα $Gx_{B_1} y_{B_1} z_{B_1}$ εκτελεί στροφή (pitch) κατά γωνία

Θ γύρω από τον άξονα Gy_{B_1} . Ο προσανατολισμός του ελικοπτέρου δίνεται από το σύστημα $Gx_{B_2}y_{B_1}z_{B_1}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3

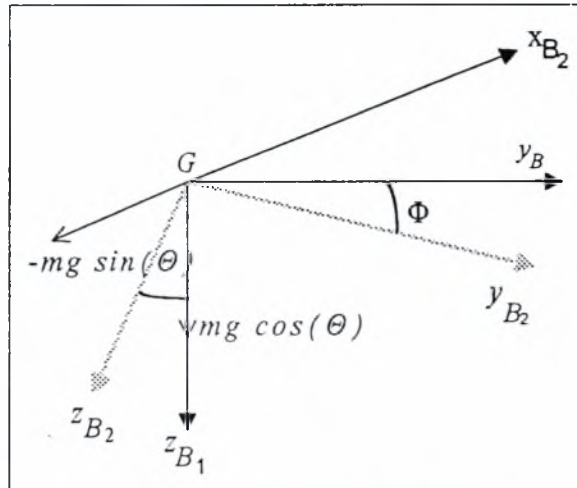


Σχήμα 3.3 Στροφή προένευσης

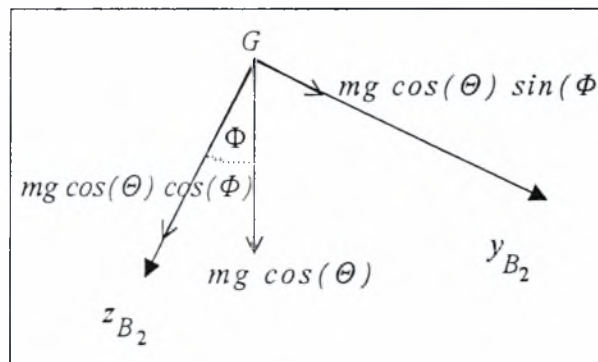


Σχήμα 3.4 Ανάλυση της βαρυτικής δύναμης

και η βαρυτική δύναμη αναλύεται στο επίπεδο $Gx_{B_2}z_{B_1}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Στη συνέχεια, το σύστημα αναφοράς $Gx_{B_2}y_{B_1}z_{B_1}$ εκτελεί στροφή (roll) κατά γωνία Φ γύρω από τον άξονα Gx_{B_2} και ο προσανατολισμός του ελικοπτέρου προσδιορίζεται από το νέο σύστημα αναφοράς $Gx_{B_2}y_{B_2}z_{B_2}$, όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.5. Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η ανάλυση της βαρυτικής δύναμης στο επίπεδο $Gy_{B_2}z_{B_2}$.



Σχήμα 3.5: Στροφή κύλισης



Σχήμα 3.6: Ανάλυση της βαρυτικής δύναμης στο επίπεδο $Gy_{B_2}z_{B_2}$

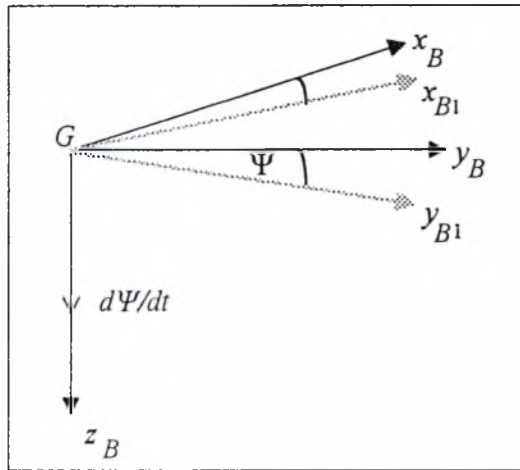
Ετσι, η βαρυτική δύναμη στο σύστημα αναφοράς $Gx_{B_2}y_{B_2}z_{B_2}$ που καθορίζει τον προσανατολισμό του ελικοπτέρου μετά τις στροφές, είναι

$$(F_x)_R = -mg \sin(\Theta) \quad (3.19)$$

$$(F_y)_R = mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) \quad (3.20)$$

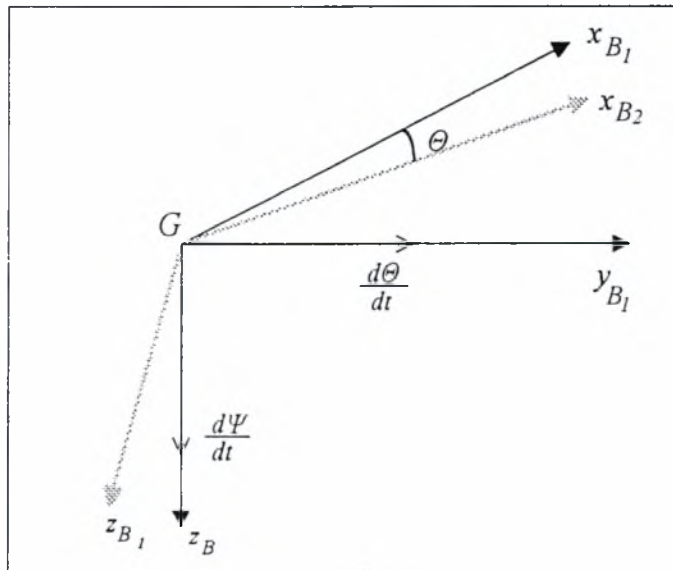
$$(F_z)_R = mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) \quad (3.21)$$

Παρόμοια διαδικασία θα ακολουθήσουμε και για την εξαγωγή των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας του ελικοπτέρου. Αρχικά θεωρείται το σύστημα αναφοράς $Gx_B y_B z_B$. Το σύστημα αυτό έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το αδρανειακό $OXYZ$, και σε κάποια χρονική στιγμή εκτελεί στροφή (yaw) κατά γωνία Ψ γύρω από τον άξονα Gz_B . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7, αναπτύσσεται στον άξονα Gz_B γωνιακή ταχύτητα Ψ .

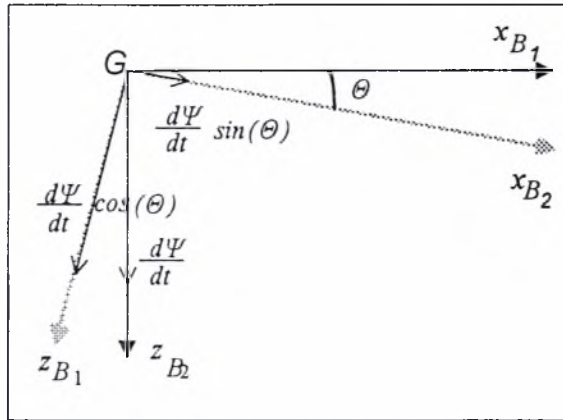


Σχήμα 3.7: Στροφή πλαγιοπορείας

Κατόπιν, το ελικόπτερο εκτελεί στροφή γύρω από τον άξονα Gy_{B1} . Έτσι, αναπτύσσεται στον άξονα αυτό γωνιακή ταχύτητα $\dot{\Theta}$ και ο προσανατολισμός του ελικοπτέρου προσδιορίζεται από το σύστημα $Gx_{B2}y_{B1}z_{B1}$, ενώ η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\Psi}$ αναλύεται στο επίπεδο $Gx_{B2}z_{B1}$, όπως δείχνουν τα Σχήματα 3.8 και 3.9

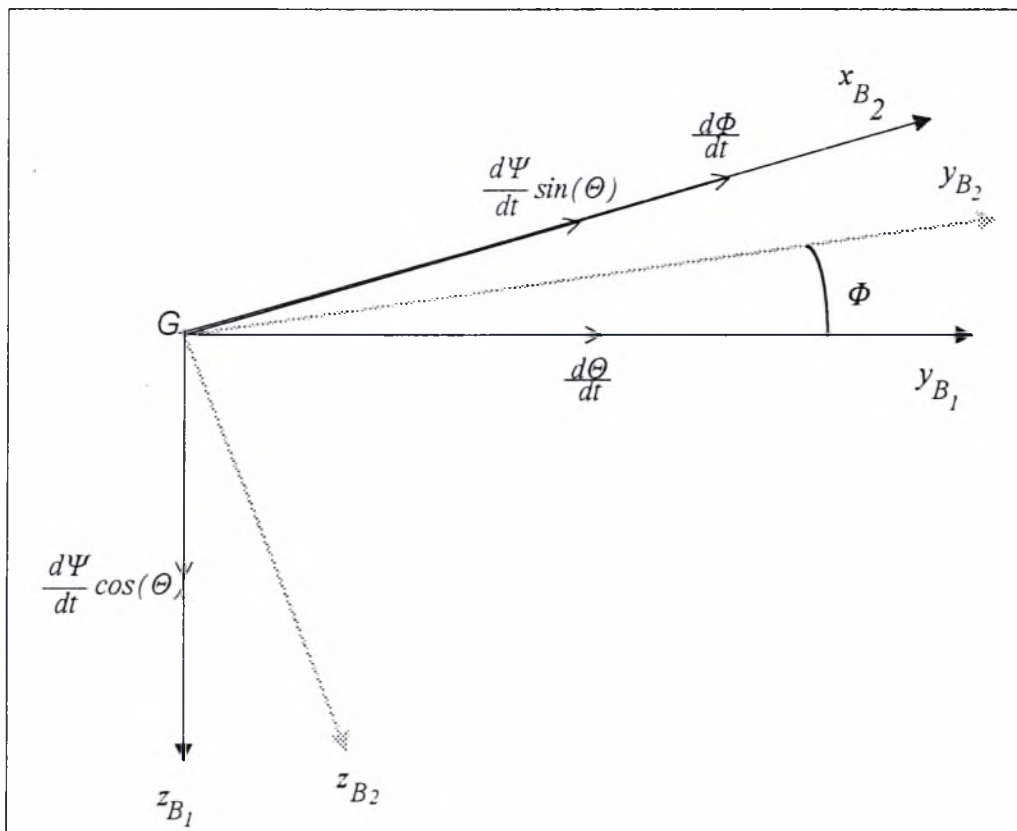


Σχήμα 3.8: Στροφή προένευσης

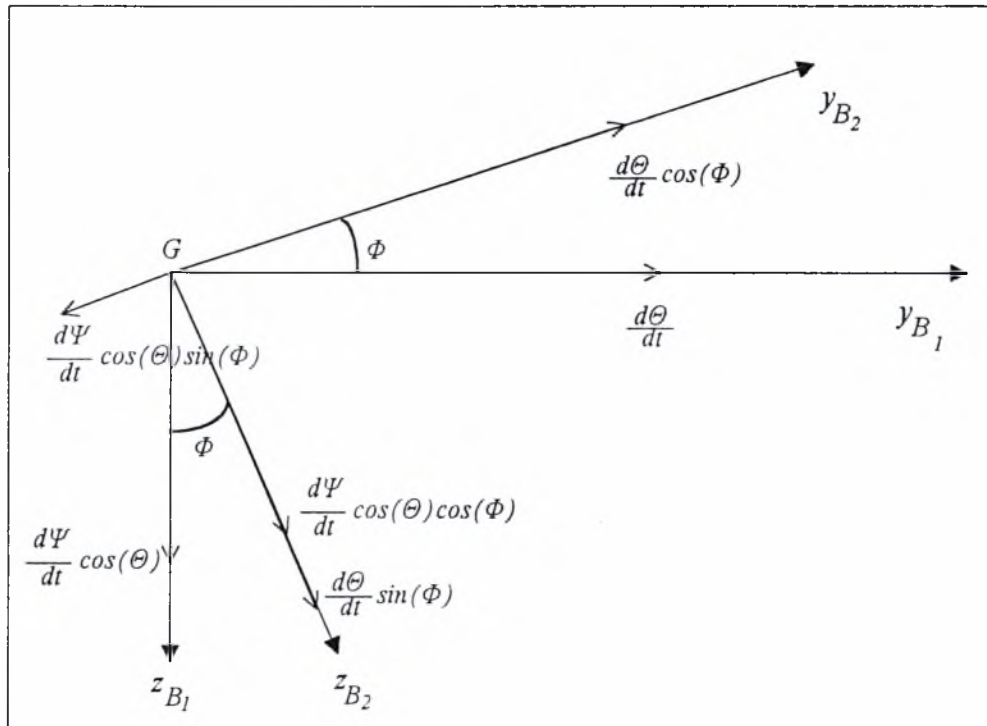


Σχήμα 3.9: Ανάλυση της γωνιακής ταχύτητας Ψ στο επίπεδο $Gx_{B_2}z_{B_1}$

Στη συνέχεια, το ελικοπτερο εκτελεί στροφή γύρω από τον άξονα Gx_{B_2} . Έτσι, αναπτύσσεται στον άξονα αυτό γωνιακή ταχύτητα Φ και ο προσανατολισμός του ελικοπτερου προσδιορίζεται από το σύστημα $Gx_{B_2}y_{B_2}z_{B_2}$, ενώ η γωνιακές ταχύτητες $\Psi \cos(\Theta)$, $\Psi \sin(\Theta)$ και Θ αναλύονται στο επίπεδο $Gy_{B_1}z_{B_2}$, όπως δείχνουν τα Σχήματα 3.10 και 3.11



Σχήμα 3.10: Στροφή κύλισης



Σχήμα 3.11: Ανάλυση στο επίπεδο $G y_{B_2} z_{B_2}$

Αρα η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ελικοπτέρου αναλύεται στο σύστημα που είναι στερεωμένο στο ελικόπτερο στις εξής συνιστώσες:

$$p = \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin(\Theta)$$

$$q = \dot{\Theta} \cos(\Phi) - \dot{\Psi} \cos(\Theta) \sin(\Phi)$$

$$r = \dot{\Psi} \cos(\Theta) \cos(\Phi) + \dot{\Theta} \sin(\Phi)$$

Αν ακολουθηθεί η σύμβαση που ορίζει σαν θετική γωνία Θ την γωνία που προκαλεί ανύψωση της “μύτης” του ελικοπτέρου, και σαν θετική γωνία Φ την γωνία που προκαλεί την κίνηση της δεξιάς πλευράς του ελικοπτέρου προς τα κάτω, τότε πρέπει να τεθεί στις παραπάνω εξισώσεις

$\Theta = -\Theta$ και $\Phi = -\Phi$. Οπότε οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουν την μορφή

$$p = \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin(\Theta) \tag{3.22}$$

$$q = \dot{\Theta} \cos(\Phi) + \dot{\Psi} \cos(\Theta) \sin(\Phi) \tag{3.23}$$

$$r = \dot{\Psi} \cos(\Theta) \cos(\Phi) - \dot{\Theta} \sin(\Phi) \tag{3.24}$$

Θέτοντας

$$F_x = (F_x)_g + X$$

$$F_y = (F_y)_g + Y$$

$$F_z = (F_z)_g + Z$$

όπου X, Y, Z είναι οι αεροδυναμικές δυνάμεις που δρουν στο κέντρο μάζας του ελικοπτέρου στους άξονες του συστήματος $Gx_B y_B z_B$, τότε οι εξισώσεις που περιγράφουν την μεταφορική συνιστώσα της κίνησης του ελικοπτέρου ως προς το κέντρο μάζας του με την βοήθεια των σχέσεων (3.19), (3.20), και (3.21) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$X - mg \sin(\Theta) = m(\dot{u} + q w - r v) \quad (3.25)$$

$$Y + mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) = m(\dot{v} + r u - p w) \quad (3.26)$$

$$Z + mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) = m(\dot{w} + p v - q u) \quad (3.27)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά οι εξισώσεις κίνησης του ελικοπτέρου

$$\left. \begin{aligned} X - mg \sin(\Theta) &= m(\dot{u} + q w - r v) \\ Y + mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) &= m(\dot{v} + r u - p w) \\ Z + mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) &= m(\dot{w} + p v - q u) \end{aligned} \right\} \text{ Δυνάμεις}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= I_{xx}^G \dot{p} - I_{xz}^G (\dot{r} + p q) + (I_{zz}^G - I_{yy}^G) q r \\ M &= I_{yy}^G \dot{q} + (I_{xx}^G - I_{zz}^G) p r - I_{xz}^G (r^2 - p^2) \\ N &= I_{zz}^G \dot{r} - I_{xz}^G (\dot{p} - q r) + (I_{yy}^G - I_{xx}^G) q p \end{aligned} \right\} \text{ Ροπές}$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin(\Theta) \\ q &= \dot{\Theta} \cos(\Phi) - \dot{\Psi} \cos(\Theta) \sin(\Phi) \\ r &= \dot{\Psi} \cos(\Theta) \cos(\Phi) + \dot{\Theta} \sin(\Phi) \end{aligned} \right\} \text{ Γωνιακές Ταχύτητες}$$

Έλεγχος Αποκοπής Αλληλεπιδράσεων για την Ευθεία και Οριζόντια Πτήση Ελικοπτέρου

Σύνοψη: Η γωνία προένευσης και η κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου κατά την ευθεία και οριζόντια πτήση αποσυζευγνύονται μέσω στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης. Καθορίζεται αναλυτικά το σύνολο των παραγώγων ευστάθειας για τις οποίες ικανοποιείται η αποσύζευξη. Εξάγεται η γενική αναλυτική έκφραση του ελεγκτή ανατροφοδότησης, ο οποίος ικανοποιεί την απαίτηση της αποσύζευξης. Καθορίζονται αναλυτικά οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την υλοποίηση της αποσύζευξης, με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση, σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για ελιγμούς του ελικοπτέρου κατά την τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και την κατακόρυφη μετάφραση.

Συμβολισμοί

$U, W, Q, \Theta (u_0, w_0, q_0, \theta_0)$	= μεταφορικές ταχύτητες στους άξονες x, z , ροπή γύρω από τον y , γωνία προένευσης, (ονομαστικές τιμές)
m, I_y, g	= μάζα του ελικοπτέρου, ροπή αδράνειας του ελικοπτέρου κατά τον y άξονα, επιτάχυνση βαρύτητας
$X, Z, M(x_0, z_0, m_0)$	= Εξωτερικές αεροδυναμικές και προωθητικές δυνάμεις στους άξονες x, z και εξωτερική προωθητική ροπή γύρω από τον άξονα y .
θ, q, u, w	= μεταβολή της γωνίας προένευσης του ελικοπτέρου, του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης, της οριζόντιας ταχύτητας, και της κατακόρυφης ταχύτητας
δ_p, δ_s	= διαμήκες κυκλικό βήμα (περιοδική μεταβολή της γωνίας προένευσης της κάθε λεπίδας), συλλογικό βήμα (ταυτόχρονη αλλαγή της γωνίας προένευσης όλων των λεπίδων)
$z_i, m_i, x_i (i = u, w, q, \delta_p, \delta_s)$	= διαστατικές παράγωγοι ευστάθειας

4.1. Εισαγωγή

Τα συστήματα ελέγχου πτήσης, είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια στον σύγχρονο έλεγχο ([1]-[10]). Η ευθεία και οριζόντια πτήση είναι η συνηθέστερη μορφή πτήσης των ελικοπτέρων, με την έννοια ότι, στον περισσότερο χρόνο πτήσης, η τροχιά του ελικοπτέρου είναι ευθεία και οριζόντια. Παρόλο που αυτός ο τύπος της πτήσης είναι ο πλέον ασφαλής, οι ελιγμοί που επιχειρεί ο χειριστής δεν είναι πάντοτε εξασφαλισμένοι. Ειδικότερα, οποιαδήποτε απόκλιση της γωνίας προένευσης μπορεί να οδηγήσει σε διαδοχικές αλλαγές του ύψους στο οποίο βρίσκεται το ελικόπτερο, και αντίστροφα. Με σκοπό να αντισταθμιστεί μια τέτοια συμπεριφορά κατά την πτήση, η οποία είναι εγγενώς συνδεδεμένη με την αεροδυναμική του στερεού σώματος, έχει εφαρμοσθεί στην πτήση των αεροσκαφών και των ελικοπτέρων η τεχνική τοποθέτησης ιδιοτιμών ([1], [2], [3], [8]). Για τον ίδιο λόγο, κυρίως στα αεροσκάφη, εφαρμόζεται η τεχνική της αποσύζευξης ([4], [5], [6], [11]).

Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρείται ως ευθεία και οριζόντια η πτήση του ελικοπτέρου, και έτσι εξετάζεται η δυναμική της διαμήκου κίνησής του. Ειδικότερα, η γωνία προένευσης και η κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου ελέγχονται ανεξάρτητα από τις εξωτερικές εισόδους του εφαρμοζόμενου στατικού ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης. Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος διατυπώνονται υπό μορφή ανισότητας. Το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι το άθροισμα δύο γινομένων των παραγώγων ευστάθειας της δυναμικής του έλικα. Το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι ίσο με το μηδέν. Καθορίζονται οι γενικοί τύποι των στατικών ελεγκτών ανατροφοδότησης, οι οποίοι οδηγούν σε αποσύζευξη μεταξύ της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας, ως προς τις εξωτερικές εισόδους, σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου, και αυθαίρετων παραμέτρων. Εξάγεται επίσης ο γενικός τύπος του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος και αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς έχει αυθαίρετους συντελεστές. Διατυπώνονται επίσης οι συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι όλα τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγονται σε παραμετρική μορφή, δηλαδή εξαρτώνται από τις παραγώγους ευστάθειας χωρίς να χρησιμοποιούνται αριθμητικές τιμές. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα απεικονίζονται μέσω της προσομοίωσης ενός μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιλαμβάνει μη γραμμικά στοιχεία.

4.2. Περιγραφή μοντέλου

Οι μη γραμμικές εξισώσεις που περιγράφουν την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου έχουν την ακόλουθη μορφή [12], [13]

$$Z + mg \cos(\Theta) = m(\dot{W} - \underline{Q}U) \quad , \quad \underline{Q} = q_0 + q \quad , \quad M = I_y \dot{Q} \quad , \quad \dot{\Theta} = \underline{Q} \quad (4.2.1)$$

Με σκοπό την γραμμικοποίηση των παραπάνω εξισώσεων, θεωρείται η απόκλιση κάθε μεταβλητής γύρω από την ονομαστική τιμή της. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$U = u_0 + u, \quad \Theta = \Theta_0 + \vartheta, \quad X = x_0 + x_d, \quad W = w_0 + w, \quad M = m_0 + m_d, \quad z_0 + mg = m\dot{w}_0, \quad Z = z_0 + z_d \quad (4.2.2)$$

όπου m_d, x_d, z_d είναι οι αποκλίσεις από την ονομαστική τιμή, των αεροδυναμικών και προωθητικών δυνάμεων X, Z και ροπής M . Για ευθεία και οριζόντια πτήση, οι ονομαστικές τιμές των μεταβλητών πτήσης είναι ίσες με το μηδέν, εκτός από την οριζόντια ταχύτητα u_0 , και τις ονομαστικές τιμές των δυνάμεων X και Z . Είναι φανερό ότι η μη γραμμική εξίσωση (4.2.1) ισχύει για τις ονομαστικές τιμές των ενεργών μεταβλητών, δηλαδή για $U = u_0, X = x_0, Z = z_0$. Με άλλα λόγια, οι συνθήκες ισορροπίας εκφράζονται ως ακολούθως

$$x_0 = m\dot{u}_0, \quad z_0 + mg = m\dot{w}_0 \quad (4.2.3)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.2.2) και (4.2.3) στην (4.2.1), η ακόλουθη εξίσωση περιγράφει την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου σε όρους μεταβολών

$$\left. \begin{aligned} x_d - mg \sin(\vartheta) &= m(qw + \dot{u}) \\ z_d + mg \cos(\vartheta) - mg &= m(\dot{w} - u_0q - qu) \\ m_d &= I_y \dot{q} \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

Μετά την κανονικοποίηση με την μάζα του ελικοπτέρου και με την ροπή αδράνειας κατά τον y άξονα, δηλαδή

$$\bar{x}_d = \frac{x_d}{m}, \quad \bar{z}_d = \frac{z_d}{m}, \quad \bar{m}_d = \frac{m_d}{I_y}$$

οι εξισώσεις στην (4.2.4) λαμβάνουν την μορφή

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \bar{x}_d - g \sin(\vartheta) - qw \\ \dot{w} &= \bar{z}_d + g \cos(\vartheta) - g + qu_0 + qu \\ \dot{q} &= \bar{m}_d \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

Οι μεταβολές στις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές (ανά μονάδα μάζας και ροπής αδράνειας αντίστοιχα) θεωρούνται σαν συναρτήσεις των $\{\delta_P, \delta_S, u, w, q\}$. Προφανώς, αυτή η θεώρηση ισχύει για τους περισσότερους από τους φακέλους πτήσης.

Για την ολοκλήρωση της γραμμικοποίησης, οι μεταβολές $\bar{x}_d, \bar{z}_d, \bar{m}_d$ αναπτύσσονται σε πολυμεταβλητή σειρά Laurent ως προς τις μεταβολές των θέσεων των ενεργοποιητών δ_P, δ_S (διαμήκες κυκλικό βήμα της λεπίδας, συλλογικό βήμα της λεπίδας) και των μεταβολών u, w, q των ταχυτήτων. Μόνο οι πρώτοι όροι (σταθεροί όροι) και οι δεύτεροι όροι (γραμμικοί όροι) της

σειράς λαμβάνονται στους υπολογισμούς. Οι πρώτοι όροι είναι ίσοι με το μηδέν [12]. Ετσι, λαμβάνονται οι ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις

$$\bar{x}_d = x_u u + x_w w + x_q q + x_{\delta_P} \delta_P + x_{\delta_S} \delta_S \quad (4.2.6a)$$

$$\bar{z}_d = z_u u + z_w w + z_q q + z_{\delta_P} \delta_P + z_{\delta_S} \delta_S \quad (4.2.6b)$$

$$\bar{m}_d = m_u u + m_w w + m_q q + m_{\delta_P} \delta_P + m_{\delta_S} \delta_S \quad (4.2.6c)$$

όπου $x_\xi = \left. \frac{\partial \bar{x}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$, $z_\xi = \left. \frac{\partial \bar{z}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$, $m_\xi = \left. \frac{\partial \bar{m}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ ($\xi = u, w, q, \delta_P, \delta_S$). Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές σχέσεις, το σύστημα εξισώσεων στην (4.2.5) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= x_u u + x_w w + x_q q - g \sin(\vartheta) + x_{\delta_P} \delta_P + x_{\delta_S} \delta_S - q w \\ \dot{w} &= z_u u + z_w w + z_q q + g \cos(\vartheta) - g + z_{\delta_P} \delta_P + z_{\delta_S} \delta_S + q u_0 + q u \\ \dot{q} &= m_u u + m_w w + m_q q + m_{\delta_P} \delta_P + m_{\delta_S} \delta_S \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, είναι μη γραμμικό ως προς την ϑ . Με σκοπό την γραμμικοποίηση της (4.2.7) και για ϑ αρκετά μικρό, χρησιμοποιούνται οι προσεγγιστικές σχέσεις $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$, $\cos(\vartheta) \approx 1$. Επιπλέον, οι προσεγγιστικές σχέσεις $q w = 0$, $q u = 0$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις, λαμβάνεται η ακόλουθη προσέγγιση μικρής περιόδου

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0^-) = x_0 \quad (4.2.8a)$$

όπου

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) & w(t) & q(t) & \vartheta(t) \end{bmatrix}^T, \quad y(t) = \begin{bmatrix} w(t) & \vartheta(t) \end{bmatrix}^T, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \delta_P & \delta_S \end{bmatrix}^T \quad (4.2.8b)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_u & x_w & x_q & -g \\ z_u & z_w & z_q + u_0 & 0 \\ m_u & m_w & m_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_{\delta_P} & x_{\delta_S} \\ z_{\delta_P} & z_{\delta_S} \\ m_{\delta_P} & m_{\delta_S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.8c)$$

Το παραπάνω γραμμικό δυναμικό σύστημα θα χρησιμοποιηθεί ως το μοντέλο που περιγράφει την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου.

4.3. Συνθήκες επιλυσιμότητας

Θεωρείται ο στατικός ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης

$$u(t) = Fx(t) + G\omega(t) \quad ; \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} w_c(t) \\ \vartheta_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

όπου $w_c(t)$ και $\vartheta_c(t)$ είναι οι εντολές γωνίας προένευσης και κατακόρυφης ταχύτητας, δηλαδή οι εξωτερικές είσοδοι του κλειστού συστήματος. Σε αυτό το σημείο διερευνάται για ποιές συνθήκες πτήσης (επί των αεροδυναμικών παραμέτρων του ελικοπτέρου), ο ελεγκτής (4.3.1) οδηγεί σε διαγώνιο αποσυσζευγμένο κλειστό σύστημα, με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης και την κατακόρυφη ταχύτητα. Προφανώς, αν η αποσύζευξη ικανοποιείται, η εξωτερική είσοδος $w_c(t)$ ελέγχει την κατακόρυφη ταχύτητα $w(t)$ χωρίς να επηρεάζει την γωνία προένευσης $\vartheta(t)$. Ομοίως, η εξωτερική εντολή $\vartheta_c(t)$ ελέγχει την γωνία προένευσης $\vartheta(t)$ χωρίς να επηρεάζει την κατακόρυφη ταχύτητα $w(t)$. Οι συνθήκες επιλυσιμότητας για το σχεδιαστικό πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω θεμελιώνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.1. Ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου για την διαμήκη κίνησή του σε ευθεία οριζόντια πτήση, επιτυγχάνεται αν και μόνο αν η συνθήκη

$$m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s} \neq 0 \quad (4.3.2)$$

ικανοποιείται

Απόδειξη: Όπως αποδεικνύεται στο [4], η αποσύζευξη εισόδου-εξόδου είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $\det[C^*B] \neq 0$, όπου

$$C^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ c_2 A^{d_2} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{cases} \min\{j : c_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\} \\ n-1 \quad \text{if} \quad c_i A^j B = 0, \forall j \end{cases}; \quad c_i : i\text{-οστή γραμμή του } C \quad (4.3.3)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη $\det[C^*B] \neq 0$, παρατηρείται ότι $c_1 B = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix}$, $c_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $c_2 A B = \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}$. Από τις παραπάνω σχέσεις, συμπεραίνεται, ότι $d_1 = 0$ και $d_2 = 1$. Έτσι, ισχύει ότι $C^*B = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 A B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}$ και κατά συνέπεια ότι $\det[C^*B] = m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s}$. Έτσι, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης είναι η συνθήκη (4.3.2). ■

Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την αποσύζευξη εισόδου-εξόδου αντανακλά σε ειδικά τεχνικά χαρακτηριστικά του ελικοπτέρου. (Περιγραφή (4.2.8)). Ειδικότερα, η απαίτηση (4.3.2) περιγράφει την ικανότητα του χειριστή να τροποποιήσει την θέση και την ταχύτητα του ελικοπτέρου χρησιμοποιώντας το διαμήκες κυκλικό βήμα δ_p και το συλλογικό βήμα δ_s . Εκτός της αποκόλλησης του οριακού στρώματος και των δυσλειτουργιών του περιστρεφόμενου δίσκου, είναι προφανές ότι $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, και έτσι η συνθήκη (4.3.2) είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για την υλοποίηση της αποσύζευξης.

4.4 Αναλυτική εκφραση των ελεγκτών αποσύζευξης

Εστω ότι η συνθήκη επιλυσιμότητας ικανοποιείται, δηλαδή ότι $m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s} \neq 0$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την τεχνική σχεδιασμού που αναπτύχθηκε στο [14], η γενική λύση των πινάκων ανατροφοδότησης στον ελεγκτή (4.3.1), ο οποίος οδηγεί στην αποσύζευξη εισόδου-εξόδου, εξάγεται ως

$$G = \begin{bmatrix} \frac{m_{\delta_s}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{-z_{\delta_s}(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \\ \frac{-m_{\delta_p}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{m_{\delta_s}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{-z_{\delta_s}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \\ \frac{-m_{\delta_p}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_u & -(\lambda_1)_0 - z_w & -u_0 - z_q & 0 \\ -m_u & -m_w & -(\lambda_2)_1 - m_q & -(\lambda_2)_0 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

και $(p_i)_0^{-1}$, $(\lambda_i)_j$ είναι αυθαίρετες παράμετροι. Οι σχέσεις (4.4.1) και (4.4.2) είναι απλοί τύποι, εφαρμοζόμενοι με στοιχειώδεις πράξεις στις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου, και στην ονομαστική τιμή u_0 .

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στο [14], η εξαγωγή της γενικής λύσης ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Σημειώνεται επίσης ότι δύο βαθμοί ελευθερίας του ελεγκτή F έχουν καθοριστεί λύνοντας δύο εξισώσεις της μορφής

$$\begin{aligned} x_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} &= 0 \\ x_2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

όπου x_1 , x_2 θεωρούνται στοιχεία του ελεγκτή, και όπου

$$\begin{aligned} a_{12} &= (x_q + m_q A + (u_0 + z_q)B)(x_u + m_u A + z_u B)^2 - A(x_u + m_u A + z_u B)^3 - g \\ a_{21} &= x_w + m_w A + z_w B - B(z_u B + m_u A + x_u) \\ a_{22} &= -B(z_u B + m_u A + x_u)^2 + (x_w + m_w A + z_w B)(z_u B + m_u A + x_u) \end{aligned}$$

και

$$A = \frac{x_{\delta_s} z_{\delta_p} - x_{\delta_p} z_{\delta_s}}{-m_{\delta_s} z_{\delta_p} + m_{\delta_p} z_{\delta_s}}, \quad B = \frac{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}}{-m_{\delta_s} z_{\delta_p} + m_{\delta_p} z_{\delta_s}}$$

Προφανώς, οι πίνακες του ελεγκτή F και G έχουν εξαχθεί υπό την υπόθεση ότι $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0$. Οι παραπάνω υποθέσεις ισχύουν για όλες σχεδόν τις συνθήκες πτήσης [8]-[10], [12]-[13]. Έτσι, η γενικότητα του νόμου ελέγχου στην (4.4.2) δεν παραβιάζεται.

4.5. Αποσυζευγμένο σύστημα κλειστού βρόχου

Εστω ότι η συνθήκη της αποσύζευξης ικανοποιείται. Αντικαθιστώντας τον ελεγκτή (4.3.1), με τους πίνακες των (4.4.1)-(4.4.2) στο σύστημα (4.2.8), η συνάρτηση μεταφοράς του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος είναι

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{(p_1)_0^{-1}}{s + (\lambda_1)_0} & 0 \\ 0 & \frac{(p_2)_0^{-1}}{s^2 + s(\lambda_2)_1 + (\lambda_2)_0} \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

Όπως έχει σημειωθεί, τα $(p_i)_0^{-1}$, $(\lambda_i)_j$ είναι απολύτως αυθαίρετα. Έτσι, ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς $C(sI - A - BF)^{-1}BG$ έχει τρεις αυθαίρετους πόλους. Το πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς εκφράζεται σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου, ως ακολούθως

$$p_u = m_{\delta_s} x_{\delta_p} z_u - m_{\delta_p} x_{\delta_s} z_u + m_{\delta_s} s z_{\delta_p} + m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_s} x_u z_{\delta_p} - m_{\delta_p} s z_{\delta_s} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s} + m_{\delta_p} x_u z_{\delta_s} \quad (4.5.2)$$

Από την σχέση (4.5.2) είναι φανερό ότι ο απαλειφόμενος πόλος s_0^* ($p_u(s_0^*) = 0$) είναι στο

$$s_0^* = x_u + \frac{z_u(m_{\delta_p} x_{\delta_s} - m_{\delta_s} x_{\delta_p}) + m_u(x_{\delta_p} z_{\delta_s} - x_{\delta_s} z_{\delta_p})}{(m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s})} \quad (4.5.3)$$

Για να είναι ευσταθές το μοντέλο του ελικοπτέρου, το παραπάνω σημείο θα πρέπει να βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιπίεδο. Συνδυασμός του παραπάνω πορίσματος, με το θεώρημα 4.3.1 και το γεγονός ότι το σύστημα (4.2.8) είναι τέταρτης τάξης, οδηγεί στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.5.1. Αν η συνθήκη του θεωρήματος 4.3.1 ικανοποιείται, τότε ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση είναι πάντοτε εφικτός, αν και μόνο αν

$$x_u + \frac{z_u(m_{\delta_p} x_{\delta_s} - m_{\delta_s} x_{\delta_p}) + m_u(x_{\delta_p} z_{\delta_s} - x_{\delta_s} z_{\delta_p})}{(m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s})} < 0$$

■

4.6. Αποτελέσματα προσομοίωσης

Θεωρείται ένα ελικόπτερο μονού έλικα, το οποίο πετάει με οριζόντια πτήση 80 κόμβων [8]. Οι παράγωγοι ευστάθειάς του και οι ονομαστικές τιμές είναι: $x_u = -0.03220$, $x_w = 0.04030$, $x_q = -0.2261$, $z_u = -0.00958$, $z_w = -0.80178$, $u_0 + z_q = 41.091$, $m_u = 0.02710$, $m_w = 0.02884$, $m_q = -2.3408$, $x_{\delta_p} = -7.6327$, $x_{\delta_s} = 4.3447$, $z_{\delta_p} = -30.891$, $z_{\delta_s} = -117.79$, $m_{\delta_p} = 28.54$, $m_{\delta_s} = 14.078$, $q_0 = 0$, $w_0 = 0$ and $\vartheta_0 = 0$. Οι συνθήκες του θεωρήματος 4.3.1 ικανοποιούνται. Θέτοντας τις επιλογές $(\lambda_1)_0 = 10$, $(\lambda_2)_1 = 35$, $(\lambda_2)_0 = 300$ στις (4.5.1 και 2), οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι στα σημεία -10 , -15 , και -20 . Εκλέγοντας τα $(p_1)_0^{-1} = 10$ και $(p_2)_0^{-1} = 300$, οι αποκρίσεις των καταστάσεων και των εσωτερικών εισόδων του κλειστού συστήματος, για τοποθέτηση της

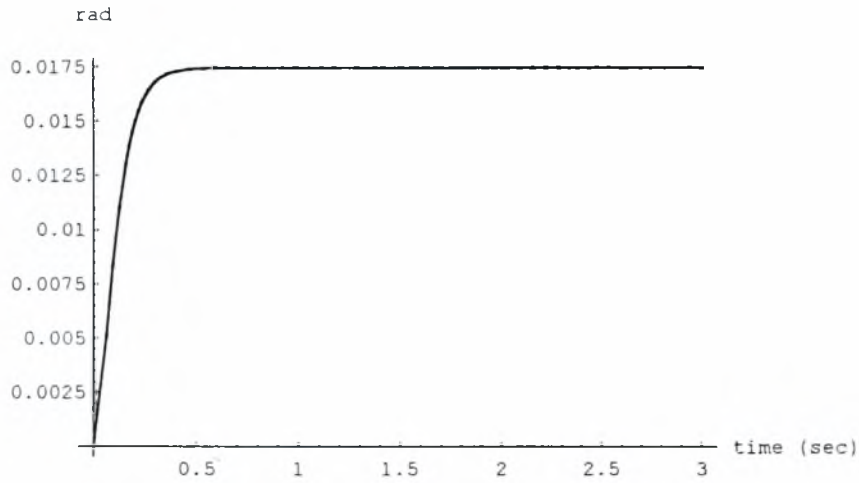
γωνίας προένευσης ($\theta_0 = \frac{\pi}{180}$ rad) φαίνονται στα Σχήματα 4.1-1.6. Ειδικότερα, για κάθε μία από τις μεταβλητές: εμπρόσθια ταχύτητα, κυκλικό και συλλογικό βήμα, παρατίθενται δύο σχήματα, ονομαστικά τα σχήματα (4a,b), (5a,b) και (6a,b). Ο λόγος για την παράθεση των δύο σχημάτων είναι για να φανεί η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου. Ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.7-4.12 για την συμπεριφορά του κλειστού συστήματος ως προς την κατακόρυφη μετατόπιση ($w_c = 1\text{m/s}$). Όπως φαίνεται από τα σχήματα, η απόκριση του διανύσματος κατάστασης είναι ικανοποιητική, ενώ ο χρόνος μετάβασης των μεταβλητών εξόδου προς την επιθυμητή τιμή τους είναι πολύ μικρός.

Για τον έλεγχο της λειτουργίας του παραπάνω ελεγκτή μέσω μη γραμμικής προσομοίωσης, θεωρείται το σύστημα εξισώσεων (4.2.7) με $qw \approx 0$ και $qu \approx 0$. Στο μη γραμμικό σύστημα (4.2.7) εφαρμόζεται ο νόμος ανατροφοδότησης της (4.5.1 και 2). Το κλειστό σύστημα που προκύπτει είναι σχεδόν αποσυζευγμένο με πολύ ικανοποιητική απόδοση. Για τοποθέτηση γωνίας προένευσης και κατακόρυφη μετατόπιση, η απόκριση του κλειστού συστήματος φαίνεται να είναι ίδια με αυτήν στην γραμμική προσομοίωση. Στα Σχήματα 4.1-4.12, η απόκριση του γραμμικού μοντέλου σχεδιάζεται με διακεκομμένες ενώ η απόκριση του μη γραμμικού σχεδιάζεται με συνεχείς γραμμές. Εκτός από την κατακόρυφη ταχύτητα στην περίπτωση τοποθέτησης της γωνίας προένευσης, οι διακεκομμένες και οι συνεχείς γραμμές ταυτίζονται (οπτικά)

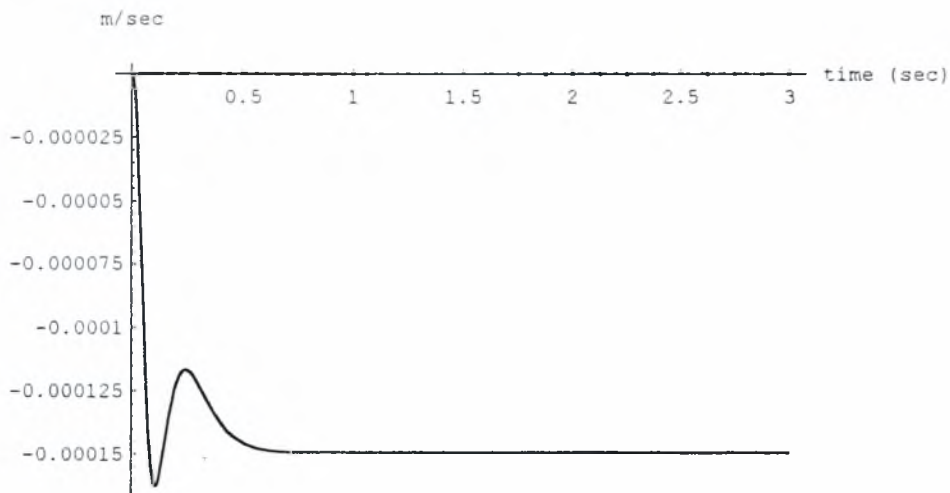
4.7. Συμπεράσματα

Για ένα ελικόπτερο το οποίο εκτελεί ευθεία οριζόντια πτήση, με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης και την κατακόρυφη ταχύτητα, εφαρμόζεται επιτυχώς η τεχνική αποσύζευξης εισόδου-εξόδου. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι επιλύσιμο το πρόβλημα καθορίζονται πλήρως σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτερό, που ανταποκρίνονται στην αεροδυναμική του έλικα (Θεώρημα 4.3.1). Ο γενικός τύπος των πινάκων του ελεγκτή, που οδηγεί σε αποσύζευξη έχουν αναλυτικά εξαχθεί στην Ενότητα 4. Έχει επίσης εξαχθεί ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος κλειστού βρόχου. Η αποσύζευξη με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση αποδείχθηκε ότι υλοποιούνται υπό τις συνθήκες της επιλυσιμότητας, και μιας ανισότητας που περιέχει τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτερό. Η τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και η κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζονται μέσω προσομοίωσης.

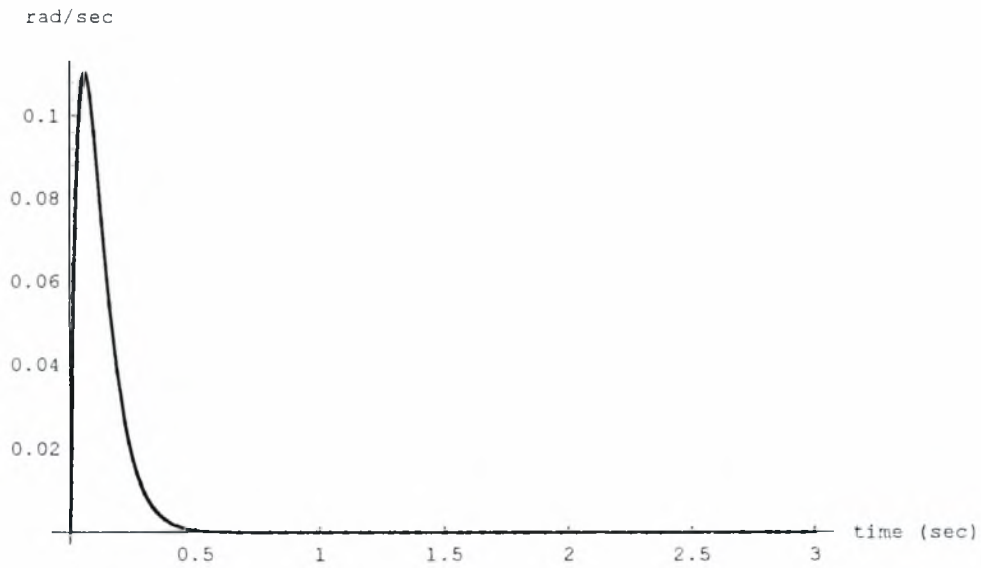
Τοποθέτηση γωνίας προένευσης



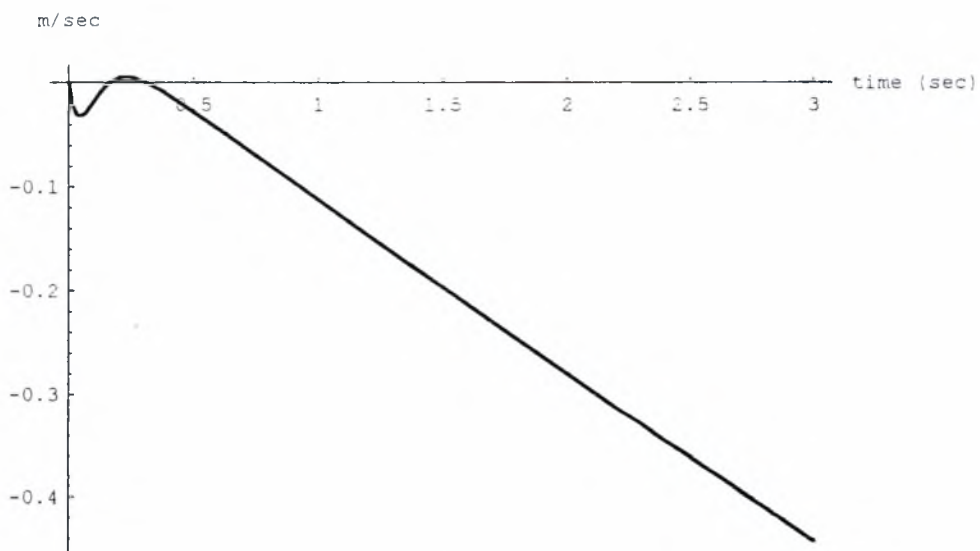
Σχήμα 4.1: Απόκριση γωνίας προένευσης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



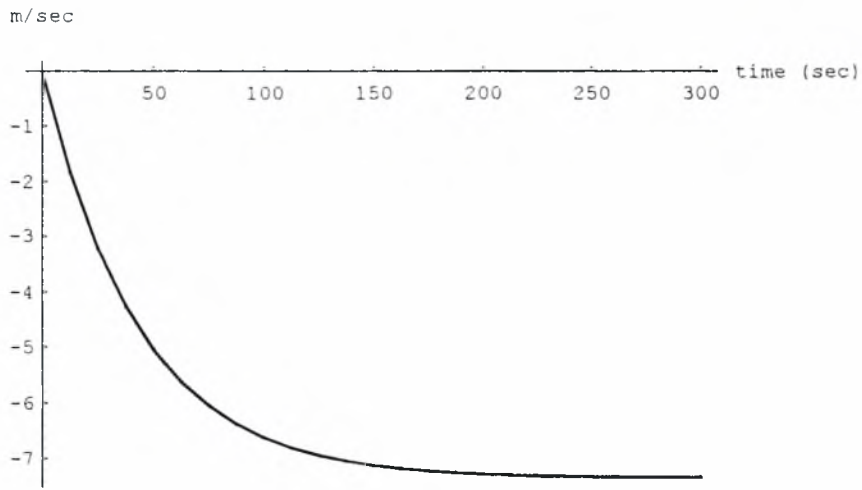
Σχήμα 4.2: Απόκριση κατακόρυφης ταχύτητας για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή, ταυτιζόμενη με τον άξονα του χρόνου) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)



Σχήμα 4.3: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)

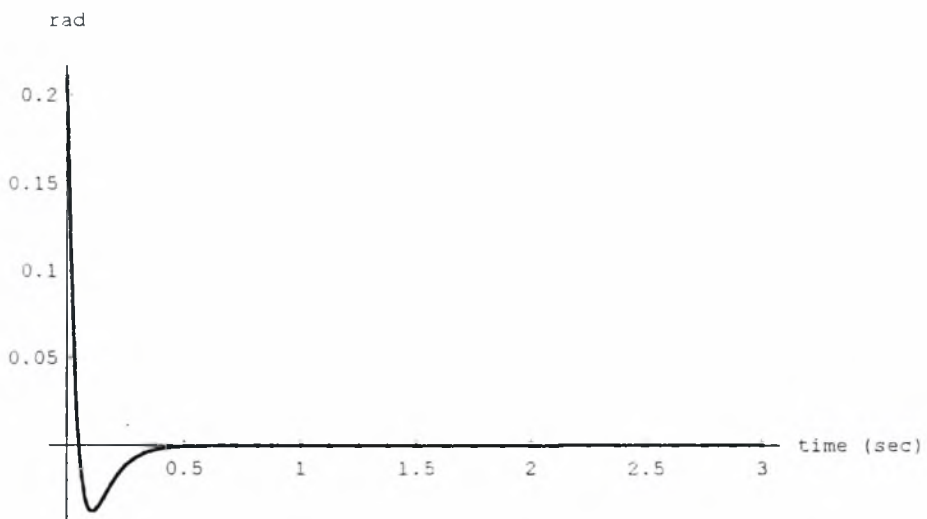


(a)

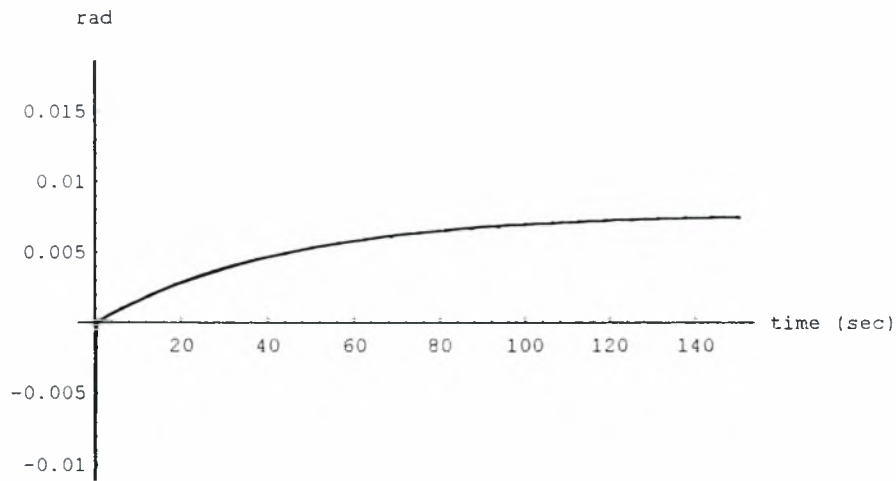


(b)

Σχήμα 4.4: Απόκριση της εμπρόσθιας ταχύτητα για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

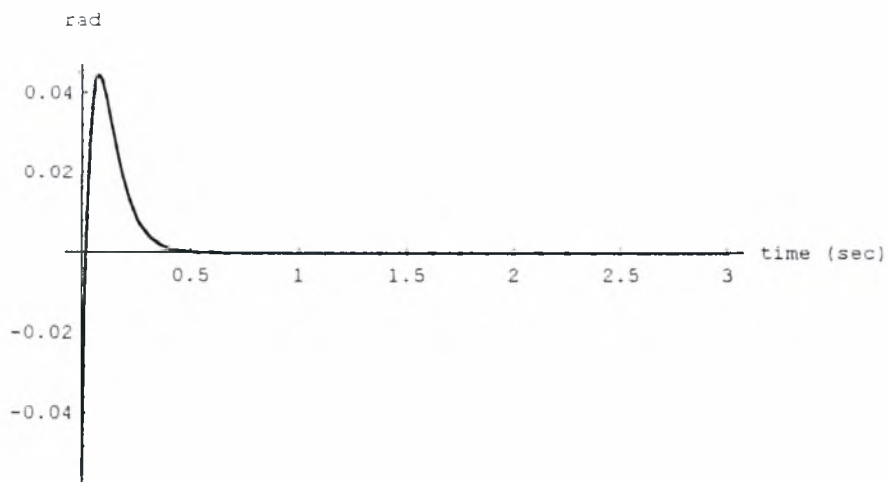


(a)

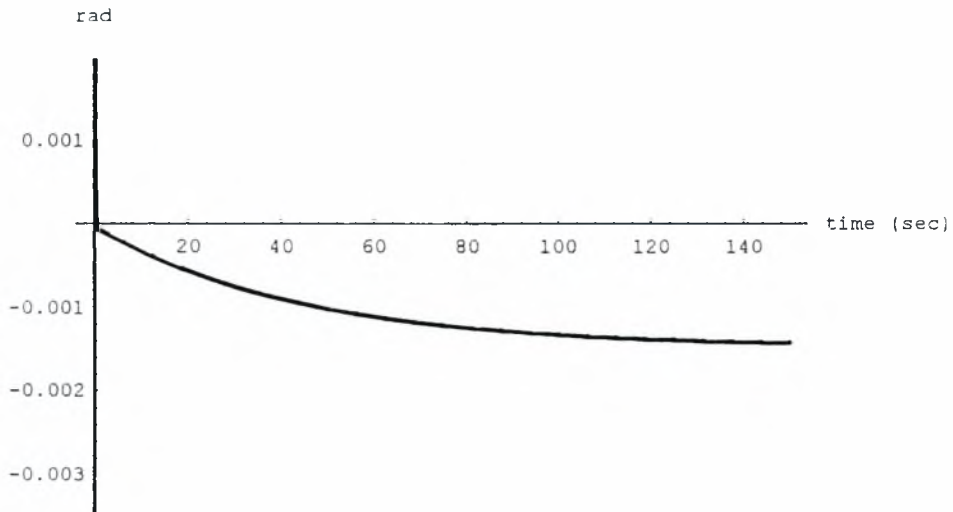


(b)

Σχήμα 4.5 : Απόκριση του κυκλικού βήματος για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)



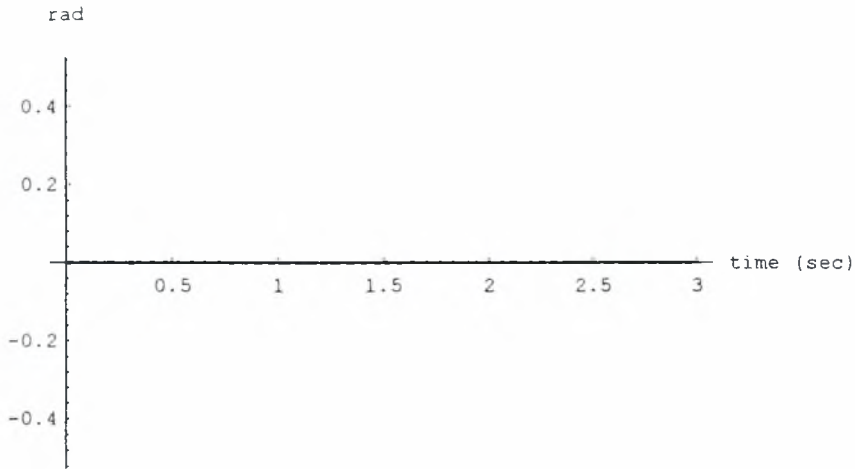
(a)



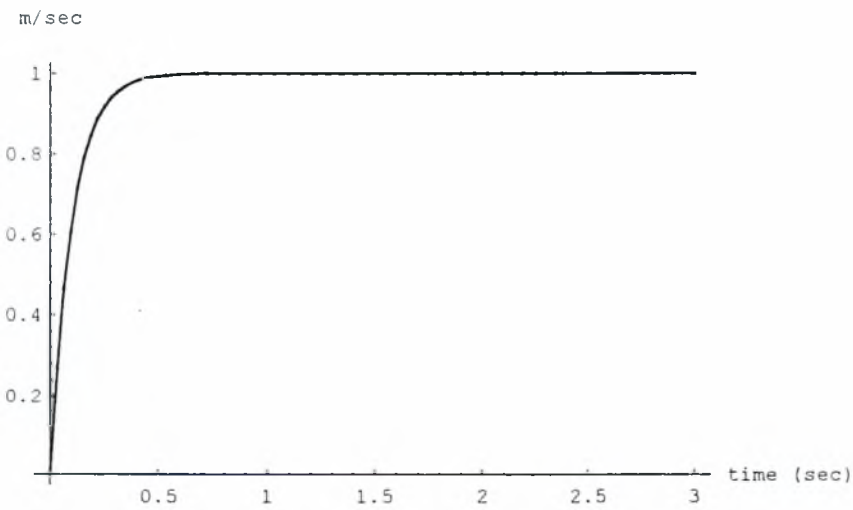
(b)

Σχήμα 4.6 : Απόκριση του συλλογικού βήματος για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

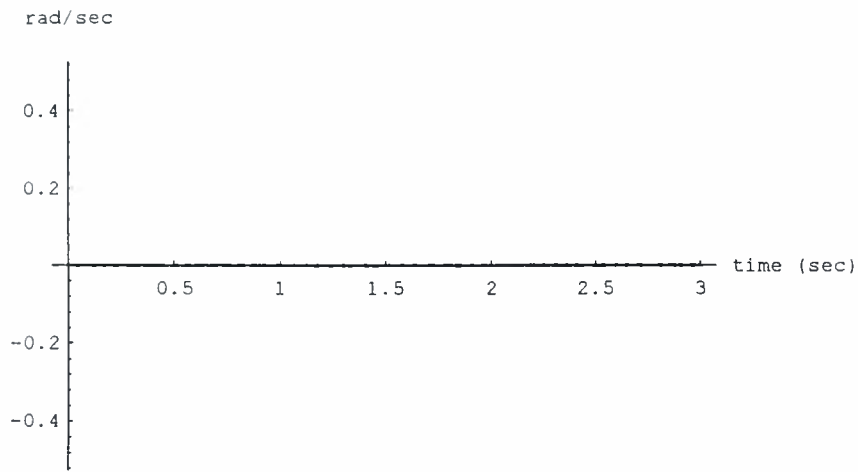
Κατακόρυφη μετάφραση



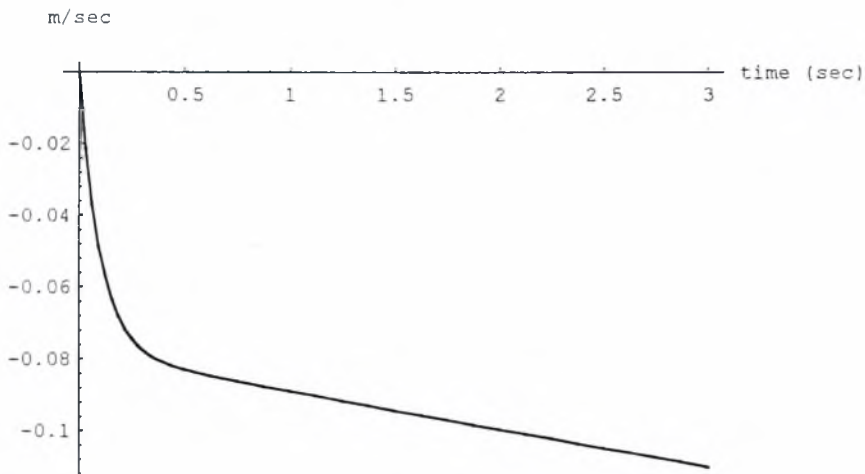
Σχήμα 4.7: Απόκριση γωνίας προένευσης για κατακόρυφη μετάφραση γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)



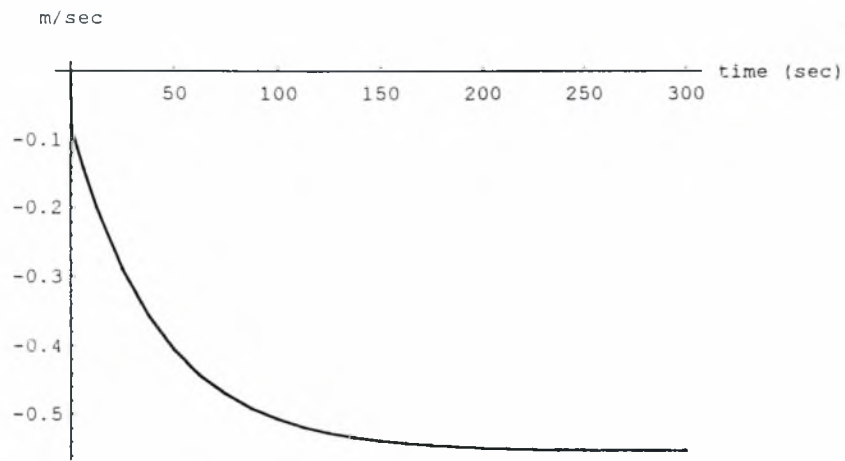
Σχήμα 4.8: Απόκριση κατακόρυφης ταχύτητας για κατακόρυφη μετάφραση γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



Σχήμα 4.9: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)

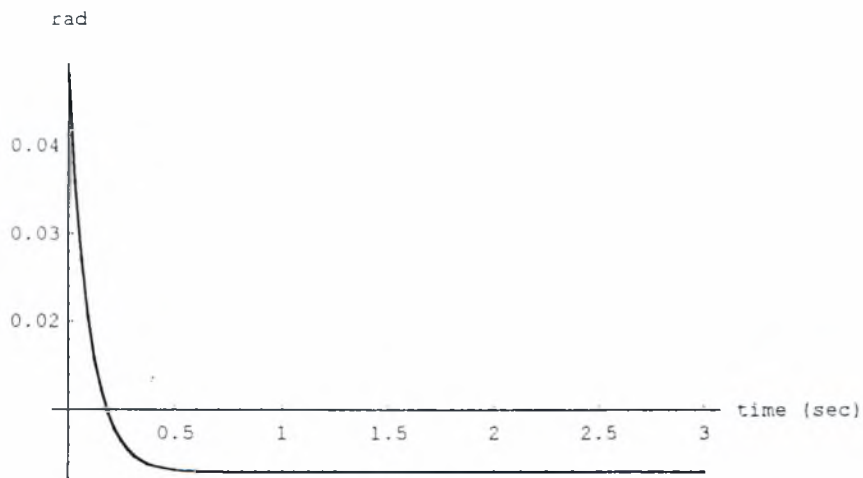


(a)

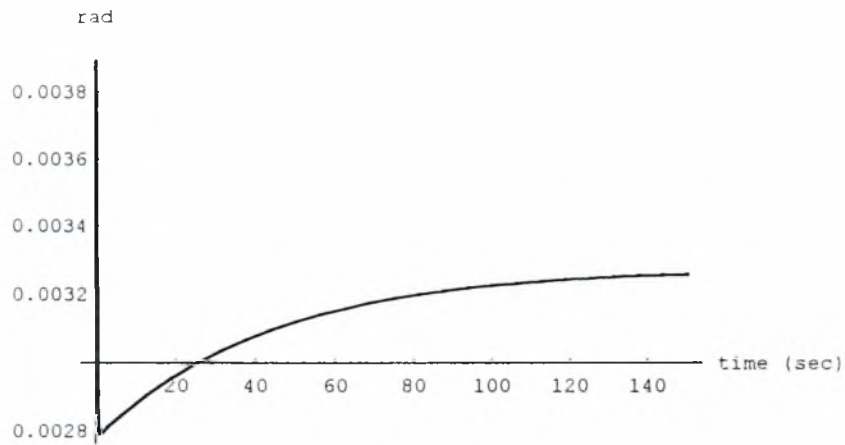


(b)

Σχήμα 4.10: Απόκριση της εμπρόσθιας ταχύτητα για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

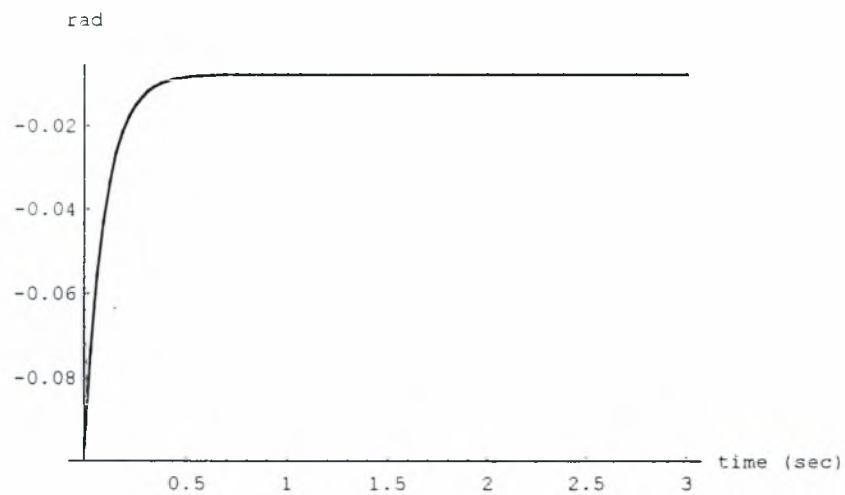


(a)

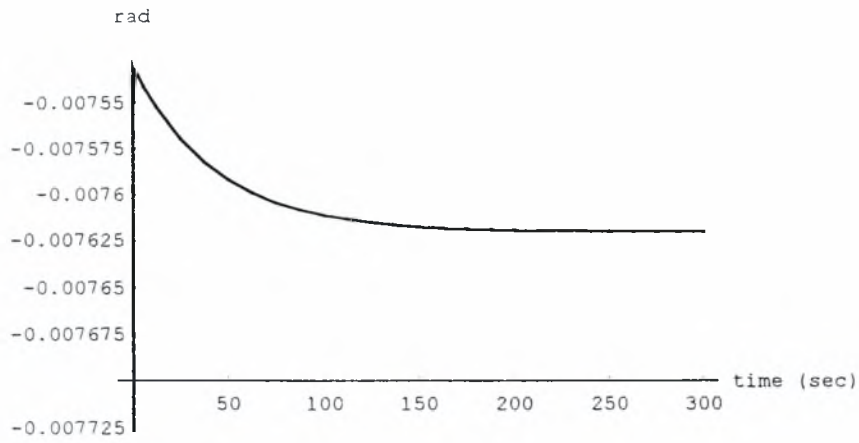


(b)

Σχήμα 4.11 : Απόκριση του κυκλικού βήματος για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)



(a)



(b)

Σχήμα 4.12 : Απόκριση του συλλογικού βήματος για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)

(a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]

(b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]

Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

Ανεξάρτητος Έλεγχος Πτήσης για την Διαμήκη Κίνηση του Ελικοπτέρου

Σύνοψη: Στο παρόν κεφάλαιο, μελετάται το πρόβλημα του ανεξάρτητου ελέγχου της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου, με την βοήθεια ενός στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης. Ο νόμος ελέγχου ανατροφοδοτεί την γωνία προένευσης, τον ρυθμό μεταβολής της, καθώς και την οριζόντια και κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου. Για την λύση του προβλήματος, εφαρμόζεται η τεχνική της αποσύζευξης εισόδου-εξόδου. Διατυπώνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει λύση το πρόβλημα της αποσύζευξης. Ο γενικός τύπος του νόμου ελέγχου που οδηγεί στην αποσύζευξη των εξόδων από τις εξωτερικές εισόδους, εξάγεται σε απλή μορφή, η οποία αποτελείται από τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου, καθώς και από αυθαίρετες παραμέτρους. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, παρουσιάζονται σε προσομοίωση επί μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

Συμβολισμοί

- $U, W, Q, \Theta (u_0, w_0, q_0, \theta_0)$ = μεταφορικές ταχύτητες στους άξονες x, z , ροπή γύρω από τον y ,
γωνία προένευσης, (ονομαστικές τιμές)
- m, I_y, g = μάζα του ελικοπτέρου, ροπή αδράνειας του ελικοπτέρου κατά τον y
άξονα, επιτάχυνση βαρύτητας
- $X, Z, M(x_0, z_0, m_0)$ = Εξωτερικές αεροδυναμικές και προωθητικές δυνάμεις στους άξονες
 x, z και εξωτερική προωθητική ροπή γύρω από τον άξονα y .
- θ, q, u, w = μεταβολή της γωνίας προένευσης του ελικοπτέρου, του ρυθμού
μεταβολής της γωνίας προένευσης, της οριζόντιας ταχύτητας, και
της κατακόρυφης ταχύτητας
- δ_P, δ_S = διαμήκες κυκλικό βήμα (περιοδική μεταβολή της γωνίας
προένευσης της κάθε λεπίδας, συλλογικό βήμα (ταυτόχρονη
αλλαγή της γωνίας προένευσης όλων των λεπίδων)

$z_i, m_i, x_i (i = u, w, q, \delta_P, \delta_S) =$ διαστατικές παράγωγοι ευστάθειας

5.1 Εισαγωγή

Η σύζευξη μεταξύ των εντολών του χειριστή και των προς έλεγχο μεταβλητών πτήσης επηρεάζει άμεσα την ποιότητα της πτήσης. Η αποσύζευξη των τρόπων των μεταβλητών πτήσης με ταυτόχρονα ικανοποιητικό χρόνο απόσβεσης και ρύθμισης, είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα του ελέγχου πτήσης τόσο για τα αεροπλάνα όσο και για τα ελικόπτερα ([1]-[10]). Η τοποθέτηση ιδιοτιμών [8]-[10] είναι ίσως η πιο συνήθης τεχνική σχεδιασμού η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις για το ελικόπτερο. Σύμφωνα με την τοποθέτηση ιδιοτιμών([1], [2], [8], [10]), μετά την εκλογή ενός ιδανικού συνόλου ιδιοτιμών του κλειστού συστήματος καθώς και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, παρατηρείται ικανοποιητική αποσύζευξη των τρόπων και ικανοποιητική ποιότητα πτήσης. Σύμφωνα με την τεχνική της αποσύζευξης, [4]-[6], [11], το πολλαπλών εισόδων-εξόδων σύστημα μετατρέπεται σε πολλά συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου.

Σε αυτήν την ενότητα, η τεχνική αποσύζευξης εισόδων εξόδων προτείνεται ως ο κατάλληλος σχεδιαστικός στόχος για τον ανεξάρτητο έλεγχο των μεταβλητών απόδοσης του ελικοπτέρου. Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι ο ανεξάρτητος έλεγχος της κατακόρυφης ταχύτητας και της γωνίας προένευσης του ελικοπτέρου, κατά την διαμήκη πτήση. Μετά την εφαρμογή ενός κατάλληλου στατικού νόμου ανατροφοδότησης, το κυκλικό βήμα και το συλλογικό βήμα χειρίζονται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να συνεργάζονται. Αυτό οδηγεί σε ανεξάρτητο έλεγχο της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας. Ειδικά, το κλειστό σύστημα έχει το χαρακτηριστικό του ελέγχου της γωνίας προένευσης με μια εξωτερική εντολή, και χωρίς να επηρεάζει την κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου. Ομοίως, η δεύτερη εξωτερική είσοδος ελέγχει την κατακόρυφη ταχύτητα χωρίς να επηρεάζει την γωνία προένευσης. Τα δυναμικά συστήματα που σχετίζουν τις εξωτερικές εντολές με τις αντίστοιχες εξόδους απόδοσης, (γωνία προένευσης, κατακόρυφη μετατόπιση) αποδεικνύεται ότι είναι συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου όλο πόλους (αυθαίρετους πόλους). Έτσι, οι απαιτήσεις για καλές ποιότητες πτήσης ικανοποιούνται. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι όλα τα αποτελέσματα είναι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου. Ειδικότερα, οι συνθήκες επιλυσιμότητας εξάγονται ως ανισότητες ενώ οι ελεγκτές σαν ρητές συναρτήσεις των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου. Οι ελεγκτές εξαρτώνται επίσης από αυθαίρετες παραμέτρους οι οποίες είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος. Ανάλογες συνθήκες παράγονται για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευστάθεια. Τέλος, όλα τα παραπάνω

αποτελέσματα, παρουσιάζονται σε προσομοίωση επί μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

5.2 Περιγραφή Μοντέλου

Οι μη γραμμικές εξισώσεις που περιγράφουν την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου είναι στην ακόλουθη μορφή [12], [13]

$$X - mg \sin(\Theta) = m(\dot{U} + QW) \quad , \quad Z + mg \cos(\Theta) = m(\dot{W} - QU) \quad , \quad M = I_y \dot{Q} \quad , \quad \dot{\Theta} = Q \quad (5.2.1)$$

Με σκοπό την γραμμικοποίηση των παραπάνω εξισώσεων, θεωρείται η απόκλιση της κάθε μεταβλητής γύρω από την ονομαστική τιμή της. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$U = u_0 + u, \quad \Theta = \vartheta_0 + \vartheta, \quad \dot{U} = \dot{u}_0 + \dot{u}, \quad \dot{W} = \dot{w}_0 + \dot{w}, \quad M = m_0 + m_d, \quad X = x_0 + x_d, \quad Z = z_0 + z_d \quad (5.2.2)$$

όπου m_d, x_d, z_d είναι οι αποκλίσεις των αεροδυναμικών και προωθητικών ροπών M και δυναμικών X, Z . Είναι σαφές ότι η μη γραμμική εξίσωση (5.2.1) ισχύει επίσης και για τις ονομαστικές τιμές των μεταβλητών, δηλαδή για τις τιμές $U = u_0, \Theta = \vartheta_0, Q = q_0, W = w_0, M = m_0, X = x_0, Z = z_0$. Με άλλα λόγια οι συνθήκες ισορροπίας εκφράζονται ως ακολούθως

$$x_0 - mg \sin(\vartheta_0) = m(\dot{u}_0 + q_0 w_0) \quad , \quad z_0 + mg \cos(\vartheta_0) = m(\dot{w}_0 + q_0 u_0) \quad , \quad m_0 = I_y \dot{q}_0 \quad , \quad \dot{\vartheta}_0 = q_0 \quad (5.2.3)$$

Αντικαθιστώντας την (5.2.2) και την (5.2.3) στην (5.2.1), λαμβάνεται η ακόλουθη εξίσωση η οποία περιγράφει την διαμήκη κίνηση ενός ελικόπτερου σε συνάρτηση των μεταβολών των μεταβλητών πτήσης

$$\left. \begin{aligned} x_d - mg \sin(\vartheta_0 + \vartheta) + mg \sin(\vartheta_0) &= m(q_0 w + w_0 q + q w + \dot{u}) \\ z_d + mg \cos(\vartheta_0 + \vartheta) - mg \cos(\vartheta_0) &= m(\dot{w} - q_0 u - u_0 q - q u) \\ m_d &= I_y \dot{q} \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\sin(\vartheta_0 + \vartheta) = \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) + \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) \quad , \quad \cos(\vartheta + \vartheta_0) = \cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)$$

και κανονικοποιώντας ως προς τη μάζα και την ροπή αδρανείας

$$\tilde{x}_d = \frac{x_d}{m} \quad , \quad \tilde{z}_d = \frac{z_d}{m} \quad , \quad \tilde{m}_d = \frac{m_d}{I_y}$$

οι εξισώσεις (2.4) λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \bar{x}_d - g \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) + g \sin(\vartheta_0) - q_0 w - q w_0 - q w \\
 \dot{w} &= \bar{z}_d + g \cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0) - g \cos(\vartheta_0) + q_0 u + q u_0 + q u \\
 \dot{q} &= \bar{m}_d \\
 \dot{\vartheta} &= q
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Οι μεταβολές των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπής (ανά μονάδα μάζας και ροπής αδράνειας) θεωρούνται συναρτήσεις των μεταβλητών $\{\delta_P, \delta_S, u, w, q\}$. Προφανώς η παραδοχή αυτή ισχύει για την πλειοψηφία των συνθηκών πτήσης ελικοπτέρου.

Για την ολοκλήρωση της γραμμικοποίησης οι μεταβολές $\bar{x}_d, \bar{z}_d, \bar{m}_d$ αναπτύσσονται σε πολυμεταβλητή σειρά Laurent ως προς τις μεταβολές των τιμών των ενεργοποιητών δ_P, δ_S (κυκλικός έλεγχος προένευσης της λεπίδας, συλλογικός έλεγχος προένευσης της λεπίδας) και τις μεταβολές των ταχυτήτων u, w, q . Απο την ανάπτυξη σε σειρά κρατάμε μόνο τους πρώτους και τους δεύτερους όρους. Σημειώνεται ότι, οι πρώτοι όροι είναι ίσοι με το μηδέν [12]. Έτσι λαμβάνονται οι ακόλουθες προσεγγιστικές ισότητες

$$\bar{x}_d = x_u u + x_w w + x_q q + x_{\delta_P} \delta_P + x_{\delta_S} \delta_S \tag{5.2.6a}$$

$$\bar{z}_d = z_u u + z_w w + z_q q + z_{\delta_P} \delta_P + z_{\delta_S} \delta_S \tag{5.2.6b}$$

$$\bar{m}_d = m_u u + m_w w + m_q q + m_{\delta_P} \delta_P + m_{\delta_S} \delta_S \tag{5.2.6c}$$

όπου $x_\xi = \left. \frac{\partial \bar{x}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, z_\xi = \left. \frac{\partial \bar{z}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, m_\xi = \left. \frac{\partial \bar{m}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ ($\xi = u, w, q, \delta_P, \delta_S$). Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές ισότητες, το σύστημα εξισώσεων (5.2.5) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= x_u u + x_w w + x_q q - g \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - g \cos(\vartheta) \sin(\vartheta_0) + g \sin(\vartheta_0) + \\
 &\quad + x_{\delta_P} \delta_P + x_{\delta_S} \delta_S - q_0 w - q w_0 - q w \\
 \dot{w} &= z_u u + z_w w + z_q q + g \cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - g \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0) - g \cos(\vartheta_0) + \\
 &\quad + z_{\delta_P} \delta_P + z_{\delta_S} \delta_S + q u_0 + q_0 u + q u \\
 \dot{q} &= m_u u + m_w w + m_q q + m_{\delta_P} \delta_P + m_{\delta_S} \delta_S \\
 \dot{\vartheta} &= q
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μη γραμμικό ως προς ϑ . Για την γραμμικοποίηση της (5.2.7), με ϑ αρκετά μικρό, ισχύει ότι

$$\sin(\vartheta_0 + \vartheta) \approx \vartheta \cos(\vartheta_0) + \sin(\vartheta_0)$$

$$\cos(\vartheta + \vartheta_0) \approx \cos(\vartheta_0) - \vartheta \sin(\vartheta_0)$$

Επιπλέον, οι προσεγγιστικές σχέσεις $q w \approx 0, q u \approx 0$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις, λαμβάνεται η ακόλουθη προσέγγιση μικρής περιόδου

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0^-) = x_0 \tag{5.2.8a}$$

όπου

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) & w(t) & q(t) & \vartheta(t) \end{bmatrix}^T, \quad y(t) = \begin{bmatrix} w(t) & \vartheta(t) \end{bmatrix}^T, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \delta_P & \delta_S \end{bmatrix}^T \tag{5.2.8b}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_u & x_w - q_0 & x_q - w_0 & -g \cos(\vartheta_0) \\ z_u + q_0 & z_w & z_q + u_0 & -g \sin(\vartheta_0) \\ m_u & m_w & m_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \\ z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.8c)$$

Το παραπάνω γραμμικό δυναμικό σύστημα θα χρησιμοποιηθεί ως το μοντέλο που περιγράφει την διαμήκη πτήση του ελικοπτέρου.

5.3 Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Θεωρείται ο στατικός νόμος ανατροφοδότησης

$$u(t) = Fx(t) + G\omega(t) \quad ; \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} w_c(t) \\ \vartheta_c(t) \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

όπου $w_c(t)$ και $\vartheta_c(t)$ είναι οι εντολές προένευσης και κατακόρυφης ταχύτητας, δηλαδή οι έξοδοι του κλειστού συστήματος. Εδώ διερευνάται υπό ποιές συνθήκες πτήσης (επί των αεροδυναμικών παραμέτρων του ελικοπτέρου), ο ελεγκτής (5.3.1) οδηγεί διαγώνια αποσυσζευγμένο κλειστό σύστημα με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης και την κατακόρυφη ταχύτητα. Προφανώς, εάν η αποσυσζευξη ικανοποιείται, η εξωτερική είσοδος $w_c(t)$ ελέγχει την κατακόρυφη ταχύτητα $w(t)$ χωρίς να επηρεάζει την γωνία προένευσης $\vartheta(t)$. Ομοίως, η εξωτερική εντολή $\vartheta_c(t)$ ελέγχει τη γωνία προένευσης $\vartheta(t)$ χωρίς να επηρεάζει την κατακόρυφη ταχύτητα $w(t)$. Οι συνθήκες επιλυσιμότητας για το σχεδιάστικό πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω θεμελιώνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.1: Ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου (5.2.2) μέσω στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης, επιτυγχάνεται αν και μόνο αν η συνθήκη

$$\text{rank} \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \\ z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 2 \quad (5.3.2a)$$

ικανοποιείται μαζί με τις συνθήκες

$$\text{if} \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ and } \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ then } m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s} \neq 0 \quad (5.3.2b)$$

$$\text{if} \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0 \text{ and } \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ then } z_u + q_0 \neq 0 \quad (5.3.2c)$$

$$\text{if} \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ and } \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0 \text{ then } m_u \neq 0 \quad (5.3.2d)$$

Απόδειξη: Όπως αποδεικνύεται στο [4], η αποσυσζευξη εισόδου-εξόδου είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $\det[C^*B] \neq 0$, όπου

$$C^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ c_2 A^{d_2} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{cases} \min\{j : c_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\} \\ n-1 \quad \text{if} \quad c_i A^j B = 0, \forall j \end{cases} \quad ; \quad c_i : i\text{-οστή γραμμή του } C \quad (5.3.3)$$

Από την συνθήκη $\det[C^*B] \neq 0$, παρατηρείται ότι η συνθήκη $\text{rank}[B] = 2$ πρέπει να ισχύει, δηλαδή ότι η συνθήκη (5.3.2.a) πρέπει να ικανοποιείται. Σε αυτό το σημείο θα βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί $d_i (i = 1, 2)$ για το σύστημα (5.2.8), δηλαδή το ελικόπτερο σε συνθήκες διαμήκουσ πτήσης. Για αυτόν τον σκοπό, παρατηρείται ότι $c_1B = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix}$, $c_2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $c_2AB = \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}$. Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $d_1 \geq 0$ and $d_2 \geq 1$.

Για την περίπτωση που $d_1 = 0$ και $d_2 = 1$ ισχύει ότι $C^*B = \begin{bmatrix} c_1B \\ c_2AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}$ και συνεπώς ότι $\det[C^*B] = m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}$. Για αυτήν την περίπτωση, οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης είναι

$$\det[C^*B] = \det \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s} \neq 0 \quad (5.3.4)$$

Θεωρείται η περίπτωση στην οποία $d_1 > 0$ και $d_2 = 1$ δηλαδή η περίπτωση όπου $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει ότι

$$c_1B = 0, c_1AB = \begin{bmatrix} x_{\delta_p}(z_u + q_0) + m_{\delta_p}(z_q + u_0) & x_{\delta_s}(z_u + q_0) + m_{\delta_s}(z_q + u_0) \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Διακρίνονται δύο υποπεριπτώσεις. Πρώτον: $c_1AB \neq 0$ και δεύτερον: $c_1AB = 0$. Για την πρώτη υποπερίπτωση, και σύμφωνα με τον ορισμό (5.3.3) ισχύει ότι

$$C^*B = \begin{bmatrix} c_1AB \\ c_2AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\delta_p}(z_u + q_0) + m_{\delta_p}(z_q + u_0) & x_{\delta_s}(z_u + q_0) + m_{\delta_s}(z_q + u_0) \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \quad (5.3.6)$$

και έτσι η επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης περιορίζεται στις ακόλουθες δύο συνθήκες

$$z_u + q_0 \neq 0, \det \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.3.7)$$

Για την δεύτερη υποπερίπτωση, παρατηρείται ότι

$$(z_u + q_0) \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \end{bmatrix} + (z_q + u_0) \begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3.8)$$

Η παραπάνω σχέση, μαζί με τις $|z_u + q_0| + |z_q + u_0| \neq 0$ και την υπόθεση ότι $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$ αντιτίθενται στην συνθήκη (5.3.2a). Έτσι, η δεύτερη υποπερίπτωση, για $|z_u + q_0| + |z_q + u_0| \neq 0$, αποκλείει την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης. Απομένει η διερεύνηση της υποπερίπτωσης $z_u + q_0 = 0$ και $z_q + u_0 = 0$ με $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$. Για αυτήν την υποπερίπτωση ισχύει ότι $c_1B = 0$, $c_1AB = 0$ και

$$c_1A^2B = \begin{bmatrix} -gm_{\delta_p} \sin(\vartheta_0) & -gm_{\delta_s} \sin(\vartheta_0) \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

Διακρίνονται δύο υποπεριπτώσεις: Πρώτον $\vartheta_0 \neq 0$ και δεύτερον $\vartheta_0 = 0$. Για την πρώτη υποπερίπτωση, ($\vartheta_0 \neq 0$), είναι φανερό ότι

$$C^*B = \begin{bmatrix} c_1A^2B \\ c_2AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -gm_{\delta_p} \sin(\vartheta_0) & -gm_{\delta_s} \sin(\vartheta_0) \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}, \det[C^*B] = 0 \quad (5.3.10)$$

Για την δεύτερη υποπερίπτωση ($\vartheta_0 = 0$) ισχύει ότι $d_1 = 3$ και έτσι

$$C^*B = \begin{bmatrix} c_1A^3B \\ c_2AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix}, \quad \det[C^*B] = 0 \quad (5.3.11)$$

Ετσι, η υποπερίπτωση $z_u + q_0 = 0$ και $z_q + u_0 = 0$ αντιτίθεται στην επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης.

Συνοψίζοντας, για την περίπτωση όπου $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης, αν η συνθήκη (5.3.2a) ικανοποιείται, είναι

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ then } \det \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \\ \text{if } \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0 \text{ then } \det \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ and } z_u + q_0 \neq 0 \end{array} \right\} \quad (5.3.12)$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, απομένει η μελέτη της περίπτωσης $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$. Για αυτήν την περίπτωση, ισχύει ότι $d_1 = 0$ και $d_2 > 1$ και $c_1A^2B = \begin{bmatrix} m_u x_{\delta_p} + m_w z_{\delta_p} & m_u x_{\delta_s} + m_w z_{\delta_s} \end{bmatrix}$. Διακρίνονται δύο υποπεριπτώσεις: Πρώτον $c_1A^2B \neq 0$ και δεύτερον $c_1A^2B = 0$. Για την πρώτη περίπτωση, ισχύει ότι

$$C^*B = \begin{bmatrix} c_1B \\ c_2A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ m_u x_{\delta_p} + m_w z_{\delta_p} & m_u x_{\delta_s} + m_w z_{\delta_s} \end{bmatrix}, \quad \det[C^*B] = m_u \det \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \end{bmatrix}. \text{Ετσι, οι}$$

ικανές και αναγκαίες συνθήκες είναι

$$m_u \neq 0 \text{ and } \det \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.3.13)$$

Αν $c_1A^2B = 0$, τότε διακρίνονται δύο ακόμη υποπεριπτώσεις. Πρώτον: $|m_u| + |m_w| \neq 0$ και δεύτερον: $|m_u| + |m_w| = 0$. Για την πρώτη υποπερίπτωση, παρατηρείται ότι $m_u \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \end{bmatrix} + m_w \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$. Με βάση την υπόθεση ότι $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$, η παραπάνω ισότητα αντιτίθεται στην συνθήκη (3.2a). Για την υποπερίπτωση $m_u = m_w = 0$ ισχύει ότι $d_2 = 3$,

$$\text{δηλαδή ότι } C^*B = \begin{bmatrix} c_1B \\ c_2A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det[C^*B] = 0.$$

Συνοψίζοντας, για την περίπτωση όπου $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$, η αποσύζευξη επιτυγχάνεται αν και μόνο αν οι συνθήκες στην (5.3.13) ικανοποιούνται.

Συνολικά, το πρόβλημα της αποσύζευξης εισόδου-εξόδου για την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου, είναι επιλύσιμο όταν και μόνο όταν η συνθήκη (5.3.2.c) ικανοποιείται μαζί με την συνθήκη (5.3.12) και την συνθήκη (5.3.13). Παρατηρείται ότι η δεύτερη συνθήκη στην (5.3.13) ικανοποιείται πάντα, αφού έχει υποθεθεί ότι ισχύει η (5.3.2a) και έχει τεθεί η υπόθεση ότι

$$\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0. \text{ Παρόμοια, η συνθήκη } \det \begin{bmatrix} x_{\delta_p} & x_{\delta_s} \\ m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ στην (5.3.12) ικανοποιείται πάντα.}$$

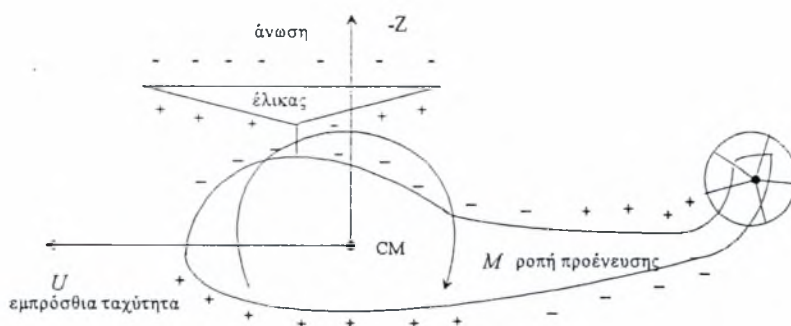
Τότε οι συνθήκες στην (5.3.12) και (5.3.13) περιορίζονται σε αυτές της (5.3.2.b), (5.3.2.c) και (5.3.2.d). ■

5.4. Ερμηνεία των συνθηκών αποσύζευξης

Οι συνθήκες της αποσύζευξης εισόδου-εξόδου αντανακλούν σε ειδικά τεχνικά χαρακτηριστικά του ελικοπτέρου (Περιγραφή (5.2.8)). Ειδικότερα, η απαίτηση (5.3.2a) περιγράφει την ικανότητα του χειριστή να τροποποιήσει την θέση και την ταχύτητα του ελικοπτέρου χρησιμοποιώντας το διαμήκες κυκλικό βήμα δ_p και το συλλογικό βήμα δ_s . Εκτός της αποκόλλησης του οριακού στρώματος και των δυσλειτουργιών του περιστρεφόμενου δίσκου, είναι φανερό ότι η συνθήκη (5.3.2b) ικανοποιείται.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι σε ειδικές περιπτώσεις, δηλαδή ατμοσφαιρικές διαταραχές (συννεκτική τύρβη, τύρβη, ασυνέχεια πυκνότητας), ακόμα και αν ο περιστρεφόμενος δίσκος εκτελεί ομαλή λειτουργία, δεν υπάρχει αισθητή επιρροή του έλικα στην δυναμική του ελικοπτέρου. Αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν στην περιγραφή (5.2.8) με $[m_{\delta_p} \ m_{\delta_s}] = 0$ και/ή $[z_{\delta_p} \ z_{\delta_s}] = 0$ και/ή $[x_{\delta_p} \ x_{\delta_s}] = 0$.

Σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος 5.3.1, αν $[z_{\delta_p} \ z_{\delta_s}] = 0$ (και εφόσον η (5.3.2a) ισχύει), η συνθήκη αποσύζευξης είναι $z_u + q_0 \neq 0$. Για τα περισσότερα από τα μοντέλα των ελικοπτέρων, βλέπε [13]-[14], ισχύει ότι $z_u < 0$. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από την ακόλουθη εικόνα όπου τα σημεία τα οποία δέχονται την υψηλότερη πίεση σημειώνονται με “+” ενώ τα σημεία που δέχονται την χαμηλότερη (σε σχέση με την υψηλότερη) πίεση σημειώνονται με “-”.



Σχήμα 5.1: Κατανομή πιέσεων κατά την αύξηση της οριζόντιας ταχύτητας

Είναι φανερό ότι για τα περισσότερα σχήματα ελικοπτέρων, το κάτω μέρος του ελικοπτέρου είναι αεροδυναμικά πιο ενεργό από ότι το επάνω μέρος, ως προς την οριζόντια ταχύτητα του αέρα. Με άλλα λόγια, αν το u αυξάνει, τότε η άνωση Z μειώνεται, και έτσι ισχύει ότι

$z_u = \frac{\partial Z_d}{\partial u} < 0$. Είναι φανερό ότι για $q_0 \leq 0$, η συνθήκη αποσύζευξης $z_u + q_0 \neq 0$ ικανοποιείται.

Παρόμοια, στην περίπτωση όπου $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$, η συνθήκη είναι $m_u \neq 0$. Σύμφωνα με την αρθρογραφία [8],[10],[12],[13], ισχύει ότι $m_u > 0$. Αυτό μπορεί επίσης να απεικονιστεί στο παραπάνω σχήμα, όπου το εμπρόσθιο μέρος του ελικοπτέρου είναι περισσότερο ενεργό από την ουρά. Για τέτοια σχήματα ελικοπτέρων, ισχύει ότι η ροπή προένευσης M αυξάνει ως προς την οριζόντια ταχύτητα του αέρα, και έτσι ισχύει ότι $m_u = \frac{\partial \bar{m}_d}{\partial u} > 0$.

Τελικά, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις (βλέπε [8],[10],[12],[13]), ισχύει ότι $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και κατά συνέπεια ότι η συνθήκη $m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s} \neq 0$ ικανοποιείται. Επιπλέον, η προηγούμενη ανισότητα ικανοποιείται για όλες σχεδόν τις συνθήκες πτήσης. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχουν ατμοσφαιρικές διαταραχές, είναι φανερό ότι $z_{\delta_s} \neq 0$ και $m_{\delta_p} \neq 0$. Ετσι, με σκοπό να εξασφαλιστεί η αποσύζευξη, αρκεί να μεταβάλλεται το δ_s κατά τρόπο τέτοιο ώστε $z_{\delta_s} \neq \frac{-z_{\delta_p} m_{\delta_s}}{m_{\delta_p}}$ ή ισοδύναμα να μεταβάλλεται το δ_p κατά τρόπο τέτοιο ώστε $m_{\delta_p} \neq \frac{-z_{\delta_p} m_{\delta_s}}{z_{\delta_s}}$.

5. 5 Αναλυτική έκφραση των ελεγκτών ανεξάρτητου ελέγχου

5.5.1 Ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος, ως προς την άνωση και την ροπή προένευσης.

Η παρούσα περίπτωση περιγράφεται από τις υποθέσεις: $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$. Ετσι, η συνθήκη αποσύζευξης είναι $m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s} \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την τεχνική σχεδιασμού που αναπτύχθηκε στο [14], η γενική λύση των πινάκων ανατροφοδότησης στον ελεγκτή (5.3.1), που αποδίδει αποσύζευξη εισόδου-εξόδου εξάγεται ως

$$G = \begin{bmatrix} \frac{m_{\delta_s}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{-z_{\delta_s}(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \\ \frac{-m_{\delta_p}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \quad (5.5.1)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{m_{\delta_s}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{-z_{\delta_s}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \\ \frac{-m_{\delta_p}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}}{m_{\delta_s}z_{\delta_p} - m_{\delta_p}z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_0 - z_u & -(\lambda_1)_0 - z_w & -u_0 - z_q & g \sin(\theta_0) \\ -m_u & -m_w & -(\lambda_2)_1 - m_q & -(\lambda_2)_0 \end{bmatrix} \quad (5.5.2)$$

και $(p_i)_0^{-1}, (\lambda_i)_j$ είναι αυθαίρετες παράμετροι. Οι σχέσεις (5.5.1) και (5.5.2) είναι απλοί τύποι, εφαρμοζόμενοι με στοιχειώδεις πράξεις στις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου, και στις ονομαστικές τιμές θ_0, u_0 και q_0

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τον αλγόριθμο στο [14], η εξαγωγή της γενικής λύσης ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Σημειώνεται

επίσης, ότι δύο βαθμοί ελευθερίας του ελεγκτή F έχουν καθοριστεί λύνοντας δύο εξισώσεις της μορφής

$$\begin{aligned} x_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} &= 0 \\ x_2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

όπου τα x_1, x_2 θεωρούνται στοιχεία του ελεγκτή, και όπου

$$a_{11} = (x_q - w_0 + m_q A + (u_0 + z_q)B)(x_u + m_u A + (q_0 + z_u)B) - \\ + A(x_u + m_u A + (q_0 + z_u)B)^2 - g \cos(\vartheta_0) - g \sin(\vartheta_0)B$$

$$a_{12} = (x_q - w_0 + m_q A + (u_0 + z_q)B)(x_u + m_u A + (q_0 + z_u)B)^2 - \\ + A(x_u + m_u A + (q_0 + z_u)B)^3 - g \cos(\vartheta_0) - g \sin(\vartheta_0)B$$

$$a_{21} = x_w - q_0 + m_w A + z_w B - B((q_0 + z_u)B + m_u A + x_u)$$

$$a_{22} = -B((q_0 + z_u)B + m_u A + x_u)^2 + (x_w - q_0 + m_w A + z_w B)((q_0 + z_u)B + m_u A + x_u)$$

με

$$A = \frac{x_{\delta_s} z_{\delta_p} - x_{\delta_p} z_{\delta_s}}{-m_{\delta_s} z_{\delta_p} + m_{\delta_p} z_{\delta_s}}, \quad B = \frac{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}}{-m_{\delta_s} z_{\delta_p} + m_{\delta_p} z_{\delta_s}}$$

Προφανώς, οι πίνακες του ελεγκτή F και G έχουν εξαχθεί υπό την υπόθεση ότι $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0$. Η παραπάνω υπόθεση ισχύει για όλες σχεδόν τις συνθήκες πτήσης [8]-[10], [12], [13]. Έτσι, η γενικότητα του νόμου ελέγχου στην (5.5.2) δεν παραβιάζεται.

5.5.2 Μη ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος, ως προς την άνωση.

Για την παρούσα περίπτωση, ισχύει ότι $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$. Άρα, οι συνθήκες επιλυσιμότητας είναι η συνθήκη (5.3.2a) μαζί με την συνθήκη $z_u + q_0 \neq 0$. Έτσι, εφαρμόζοντας την μέθοδο που αναπτύχθηκε στο [14], η γενική λύση των πινάκων του ελεγκτή είναι

$$G = \frac{1}{q_0 + z_u} \begin{bmatrix} \frac{m_{\delta_s}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}} & \frac{(-m_{\delta_s}(u_0 + z_q) - x_{\delta_s}(q_0 + z_u))(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}} \\ \frac{-m_{\delta_p}(p_1)_0^{-1}}{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}} & \frac{(m_{\delta_p}(u_0 + z_q) + x_{\delta_p}(q_0 + z_u))(p_2)_0^{-1}}{m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s}} \end{bmatrix} \quad (5.5.3)$$

$$F = \frac{1}{(q_0 + z_u)(m_{\delta_s} x_{\delta_p} - m_{\delta_p} x_{\delta_s})} \begin{bmatrix} m_{\delta_s} & a \\ -m_{\delta_p} & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ -m_u & -m_w & -(\lambda_2)_1 - m_q & -(\lambda_2)_0 \end{bmatrix} \quad (5.5.4)$$

όπου

$$f_{11} = -m_u(u_0 + z_q) - (q_0 + z_u)[(\lambda_1)_1 + x_u + z_w]$$

$$f_{12} = -(\lambda_1)_0 - m_w(u_0 + z_q) - (-q_0 + x_w)(q_0 + z_u) - (\lambda_1)_1 z_w - (z_w)^2$$

$$f_{13} = -m_q(u_0 + z_q) - (-w_0 + x_q)(q_0 + z_u) - (\lambda_1)_1(u_0 + z_q) - (u_0 + z_q)z_w + g \sin(\vartheta_0)$$

$$f_{14} = g(q_0 + z_u) \cos(\vartheta_0) + g(\lambda_1)_1 \sin(\vartheta_0) + g z_w \sin(\vartheta_0)$$

$$a = -m_{\delta_s}(u_0 + z_q) - x_{\delta_s}(q_0 + z_u)$$

$$\beta = m_{\delta_p}(u_0 + z_q) + x_{\delta_p}(q_0 + z_u)$$

5.5.3 Μη ενεργός περιστρεφόμενος δίσκος, ως προς την ροπή

Για την παρούσα περίπτωση, ισχύει ότι $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$. Τότε, οι συνθήκες επιλυσιμότητας είναι η συνθήκη (5.3.2a) μαζί με την συνθήκη $m_u \neq 0$. Εφαρμογή της διαδικασίας σχεδιασμού που αναπτύχθηκε στο [14] δίνει

$$G = \begin{bmatrix} \frac{(m_u x_{\delta_s} + m_w z_{\delta_s})(p_1)_0^{-1}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_s}(p_2)_0^{-1}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} \\ \frac{(-m_u x_{\delta_p} - m_w z_{\delta_p})(p_1)_0^{-1}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}(p_2)_0^{-1}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{m_u x_{\delta_s} + m_w z_{\delta_s}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_s}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} \\ \frac{-m_u x_{\delta_p} - m_w z_{\delta_p}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} & \frac{z_{\delta_p}}{m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_0 - z_u & -(\lambda_1)_0 - z_w & -u_0 - z_q & g \sin(\vartheta_0) \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} \quad (5.5.6)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_{21} &= -(\lambda_2)_2 m_u - m_q m_u - m_u x_u - m_w (q_0 + z_u) \\ f_{22} &= -(\lambda_2)_2 m_w - m_q m_w - m_u (-q_0 + x_w) - m_w z_w \\ f_{23} &= -(\lambda_2)_1 - (\lambda_2)_2 m_q - (m_q)^2 - m_u (-w_0 + x_q) - m_w (u_0 + z_q) \\ f_{24} &= -(\lambda_2)_0 + g m_u \cos(\vartheta_0) + g m_w \sin(\vartheta_0) \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις μη ενεργού δίσκου, δεν υπάρχουν ιδιόμορφα σημεία για τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου, τα οποία θα μπορούσαν να τροποποιήσουν τις γενικές λύσεις (5.5.3)-(5.5.6).

5.6. Ανεξάρτητος έλεγχος με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση

Για την περίπτωση στην οποία $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, χρησιμοποιώντας τις (5.3.1), (5.3.2a), (5.3.2b) (5.2.8), (5.5.1) και (5.5.2), ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου υπολογίζεται ως

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{(p_1)_0^{-1}}{s + (\lambda_1)_0} & 0 \\ 0 & \frac{(p_2)_0^{-1}}{s^2 + s(\lambda_2)_1 + (\lambda_2)_0} \end{bmatrix} \quad (5.6.1)$$

Όπως έχει σημειωθεί, τα $(p_i)_0^{-1}$, $(\lambda_i)_j$ είναι απολύτως αυθαίρετα. Έτσι, ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος $C(sI - A - BF)^{-1}BG$ έχει τρεις αυθαίρετους πόλους. Το πολυώνυμο του πόλου που απαλείφεται στην συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} p_u &= m_{\delta_s} s z_{\delta_p} - m_{\delta_p} s z_{\delta_s} + \\ &+ m_{\delta_s} x_{\delta_p} (q_0 + z_u) - m_{\delta_p} x_{\delta_s} (q_0 + z_u) + m_u x_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_s} x_u z_{\delta_p} - m_u x_{\delta_p} z_{\delta_s} + m_{\delta_p} x_u z_{\delta_s} \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Από την σχέση (6.2) είναι φανερό ότι ο απαλειφόμενος πόλος s_0^* ($p_u(s_0^*) = 0$) υπολογίζεται να είναι

$$s_0^* = x_u + \frac{(q_0 + z_u)(m_{\delta_p} x_{\delta_s} - m_{\delta_s} x_{\delta_p}) + m_u(x_{\delta_p} z_{\delta_s} - x_{\delta_s} z_{\delta_p})}{(m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s})} \quad (5.6.3)$$

Για να είναι ευσταθές το μοντέλο του ελικοπτέρου, το παραπάνω σημείο θα πρέπει να βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Συνδυασμός του παραπάνω πορίσματος με το θεώρημα (5.3.1) και το γεγονός ότι το μοντέλο (5.2.8) είναι τέταρτης τάξεως, οδηγεί στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.1: Αν οι συνθήκες του θεωρήματος 5.3.1 ικανοποιούνται και $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, τότε ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση μπορεί πάντα να επιτευχθεί αν $x_u + \frac{(q_0 + z_u)(m_{\delta_p} x_{\delta_s} - m_{\delta_s} x_{\delta_p}) + m_u(x_{\delta_p} z_{\delta_s} - x_{\delta_s} z_{\delta_p})}{(m_{\delta_s} z_{\delta_p} - m_{\delta_p} z_{\delta_s})} < 0$. ■

Για τις άλλες δύο περιπτώσεις, τα κλειστά συστήματα που προκύπτουν δεν έχουν απαλειφόμενους πόλους. Για την περίπτωση στην οποία $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{(p_1)_0^{-1}}{s^2 + s(\lambda_1)_1 + (\lambda_1)_0} & 0 \\ 0 & \frac{(p_2)_0^{-1}}{s^2 + s(\lambda_2)_1 + (\lambda_2)_0} \end{bmatrix}$$

Ετσι, εξάγεται το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.6.2: Αν οι συνθήκες του θεωρήματος 5.3.1 ικανοποιούνται, με $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$, τότε ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου με ταυτόχρονη ευστάθεια μπορεί πάντα να επιτευχθεί. ■

Για την περίπτωση στην οποία $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$, ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{(p_1)_0^{-1}}{s + (\lambda_1)_0} & 0 \\ 0 & \frac{(p_2)_0^{-1}}{s^3 + s^2(\lambda_2)_2 + s(\lambda_2)_1 + (\lambda_2)_0} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 5.6.3. Αν οι συνθήκες του θεωρήματος 5.3.1 ικανοποιούνται, με $\begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} \end{bmatrix} \neq 0$ και $\begin{bmatrix} m_{\delta_p} & m_{\delta_s} \end{bmatrix} = 0$, τότε ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης και της κατακόρυφης ταχύτητας του ελικοπτέρου μπορεί πάντα να επιτευχθεί. ■

5.7. Προσομοίωση

Θεωρείται ένα ελικοπτερο μονού έλικα, το οποίο πετάει με οριζόντια πτήση 80 κόμβων [8]. Οι παράγωγοι ευστάθειάς του και οι ονομαστικές τιμές είναι: $x_u = -0.03220$, $x_w = 0.04030$, $x_q = -0.2261$, $z_u = -0.00958$, $z_w = -0.80178$, $u_0 + z_q = 41.091$, $m_u = 0.02710$, $m_w = 0.02884$, $m_q = -2.3408$, $x_{\delta_p} = -7.6327$, $x_{\delta_s} = 4.3447$, $z_{\delta_p} = -30.891$, $z_{\delta_s} = -117.79$, $m_{\delta_p} = 28.54$, $m_{\delta_s} = 14.078$

$q_0 = 0$, $w_0 = 0$ και $\vartheta_0 = 0.0215$. Οι συνθήκες του θεωρήματος 5.3.1 ικανοποιούνται. Θέτοντας τις επιλογές $(\lambda_1)_0 = 10$, $(\lambda_2)_1 = 35$, $(\lambda_2)_0 = 300$ στις (5.5.1 και 2), οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι στα σημεία -10 , -15 , και -20 . Εκλέγοντας τα $(p_1)_0^{-1} = 10$ και $(p_2)_0^{-1} = 300$, οι αποκρίσεις των καταστάσεων και των εσωτερικών εισόδων του κλειστού συστήματος, για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{180}$ rad) φαίνονται στα σχήματα 1-6. Ειδικότερα, για κάθε μία από τις μεταβλητές: εμπρόσθια ταχύτητα, κυκλικό και συλλογικό βήμα, παρατίθενται δύο σχήματα, ονομαστικά τα σχήματα (4a,b), (5a,b) και (6a,b). Ο λόγος για την παράθεση των δύο σχημάτων είναι για να φανεί η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου. Ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 7-12 για την συμπεριφορά του κλειστού συστήματος ως προς την κατακόρυφη μετατόπιση ($w_c = 1\text{m/s}$). Όπως φαίνεται από τα σχήματα, η απόκριση του διανύσματος κατάστασης είναι ικανοποιητική, ενώ ο χρόνος μετάβασης των μεταβλητών εξόδου προς την επιθυμητή τιμή τους είναι πολύ μικρός.

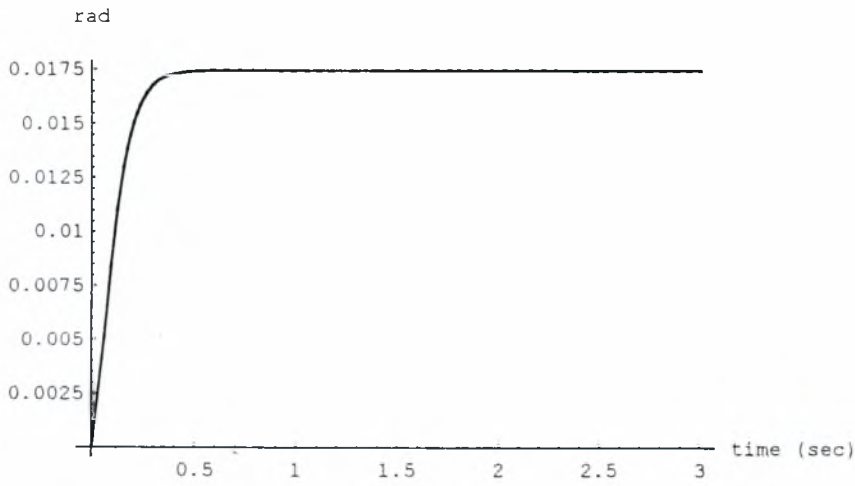
Για τον έλεγχο της λειτουργίας του παραπάνω ελεγκτή μέσω μη γραμμικής προσομοίωσης, θεωρείται το σύστημα εξισώσεων (5.2.7) με $qw \approx 0$ και $qu \approx 0$. Στο μη γραμμικό σύστημα (5.2.7) εφαρμόζεται ο νόμος ανατροφοδότησης της (5.5.1 και 5.5.2). Το κλειστό σύστημα που προκύπτει είναι σχεδόν αποσυσζευγμένο με πολύ ικανοποιητική απόδοση. Για τοποθέτηση γωνίας προένευσης και κατακόρυφη μετάφραση, η απόκριση του κλειστού συστήματος φαίνεται να είναι ίδια με αυτήν στην γραμμική προσομοίωση. Στα Σχήματα 5.2-5.7, και στα Σχήματα 5.8-5.13 που περιγράφουν την τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και την κατακόρυφη μετάφραση αντίστοιχα, η απόκριση του γραμμικού μοντέλου σχεδιάζεται με διακεκομμένες ενώ η απόκριση του μη γραμμικού σχεδιάζεται με συνεχείς γραμμές (για τις εξόδους: κατακόρυφη ταχύτητα w , γωνία προένευσης ϑ , τις καταστάσεις: οριζόντια ταχύτητα u , ρυθμός μεταβολής της γωνίας προένευσης q , και τις εσωτερικές εισόδους: διαμήκες κυκλικό βήμα δ_p , συλλογικό βήμα δ_s). Εκτός από την κατακόρυφη ταχύτητα στην περίπτωση τοποθέτησης της γωνίας προένευσης, οι διακεκομμένες και οι συνεχείς γραμμές ταυτίζονται (οπτικά)

5.8. Συμπεράσματα

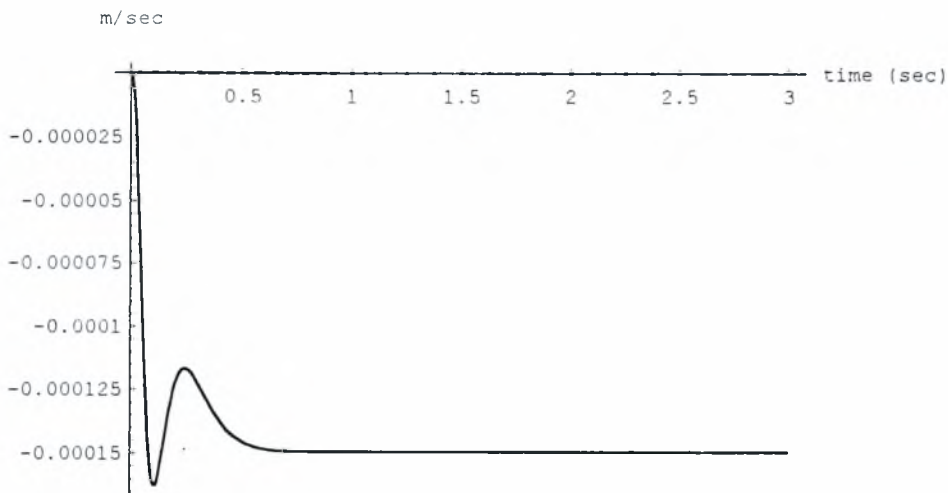
Η γωνία προένευσης και η κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου, ελέγχονται ανεξάρτητα μέσω ενός στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης χρησιμοποιώντας τεχνική αποσύζευξης εισόδων εξόδων με ταυτόχρονη αυθαίρετη τοποθέτηση πόλων. Το σύνολο των παραγώγων ευστάθειας του συστήματος, για τις οποίες η απαίτηση για την υλοποίηση της αποσύζευξης ικανοποιείται, έχει οριστεί αναλυτικά, όπως και η γενική μορφή των πινάκων του ελεγκτή που οδηγεί σε αποσύζευξη. Έχει επίσης οριστεί αναλυτικά η γενική μορφή του

αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος, καθώς και η συνθήκη των παραγώγων ευστάθειας, η οποία πρέπει να ικανοποιείται για την υλοποίηση της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, όλες οι παραπάνω έννοιες έχουν εξετασθεί για την περίπτωση μη ενεργού περιστρεφόμενου δίσκου. Τα αποτελέσματα στις περιπτώσεις ενεργού και μη ενεργού περιστρεφόμενου δίσκου μπορούν εύκολα να ομαδοποιηθούν, με μία ιεραρχική δομή φακέλου πτήσης. Η ικανοποιητική απόκριση του κλειστού συστήματος φαίνεται από την προσομοίωση ενός μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

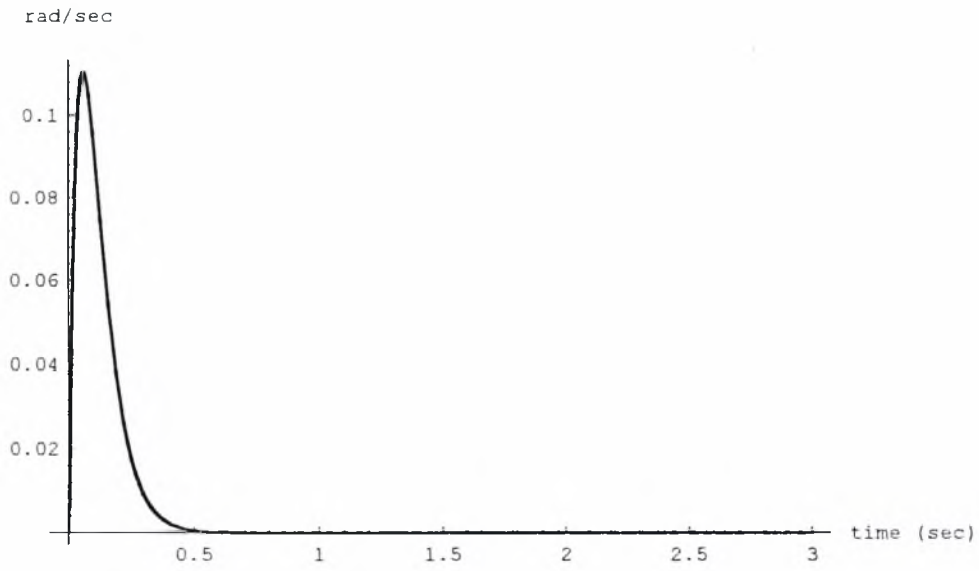
Τοποθέτηση γωνίας προένευσης



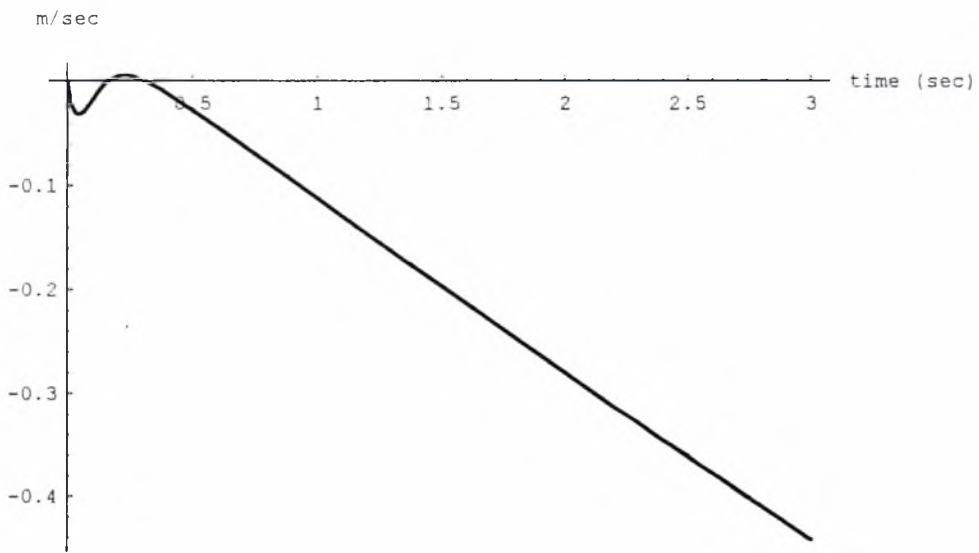
Σχήμα 5.2: Απόκριση γωνίας προένευσης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



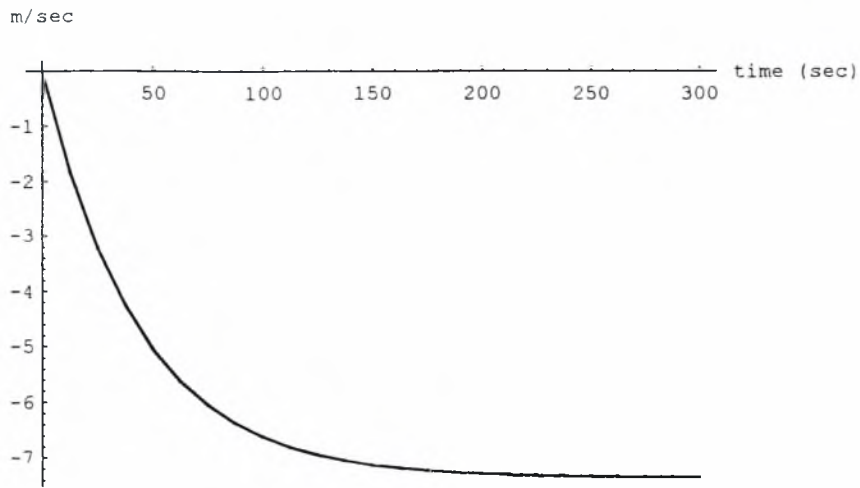
Σχήμα 5.3: Απόκριση κατακόρυφης ταχύτητας για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή, ταυτιζόμενη με τον άξονα του χρόνου) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)



Σχήμα 5.4: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)

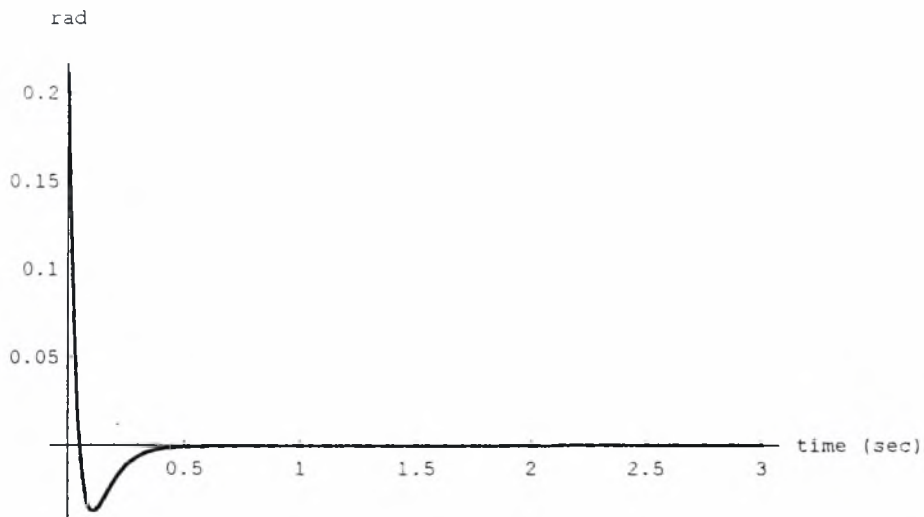


(a)

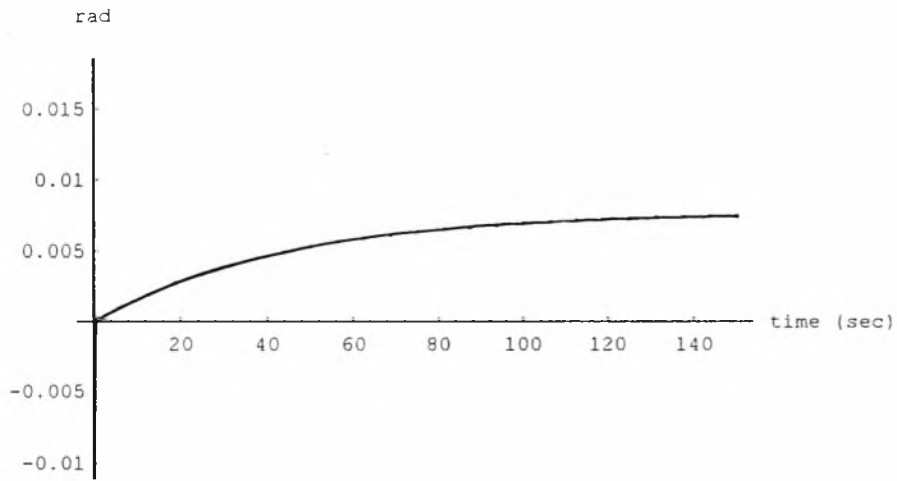


(b)

- Σχήμα 5.5: Απόκριση της εμπρόσθιας ταχύτητα για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

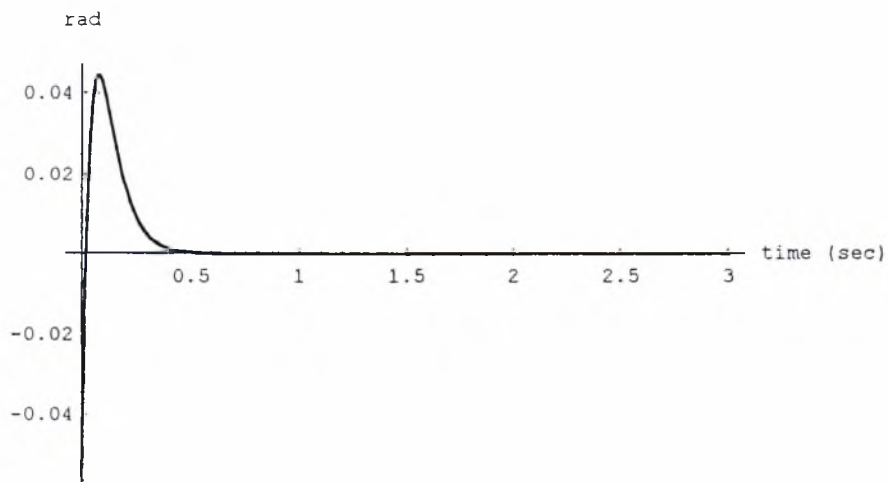


(a)

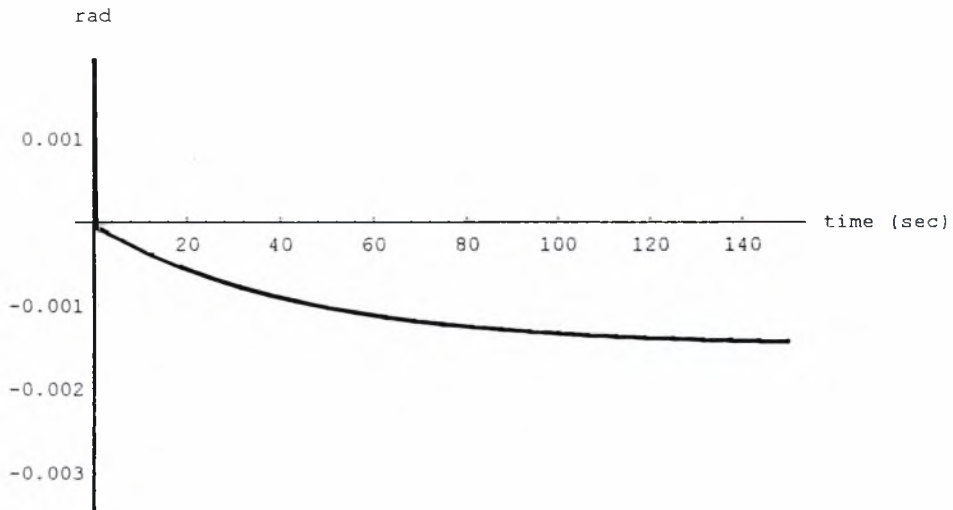


(b)

Σχήμα 5.6 : Απόκριση του κυκλικού βήματος για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)



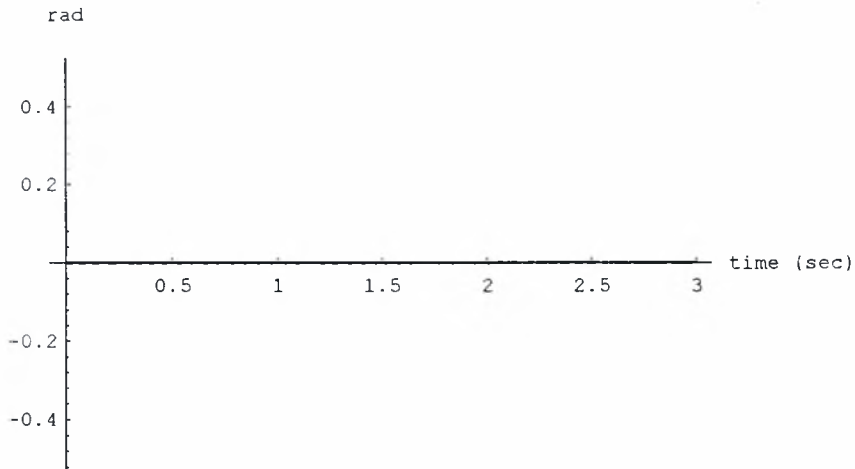
(a)



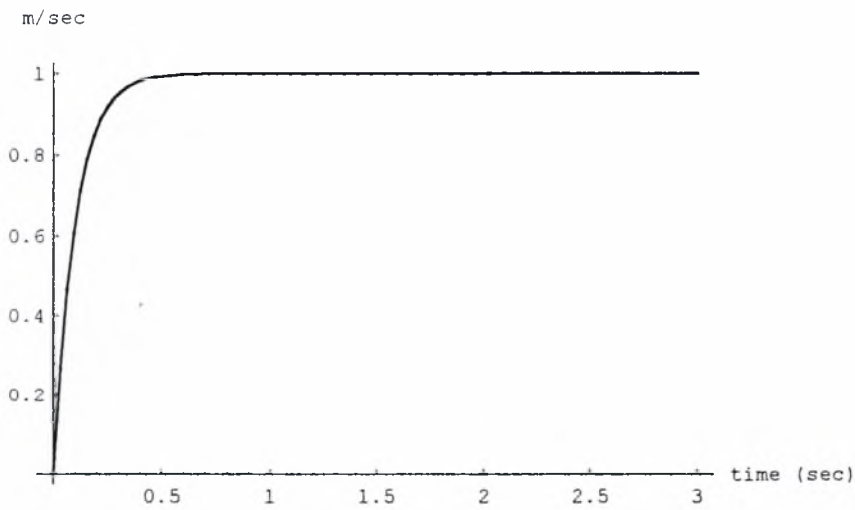
(b)

Σχήμα 5.7: Απόκριση του συλλογικού βήματος για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

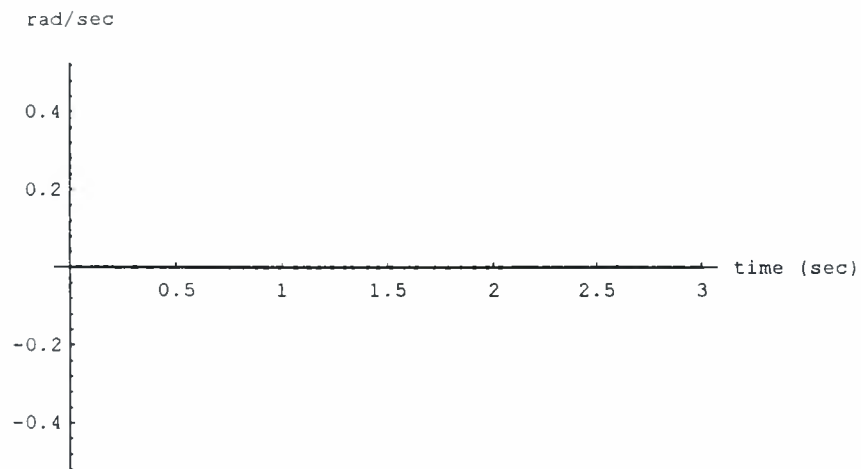
Κατακόρυφη μετάφραση



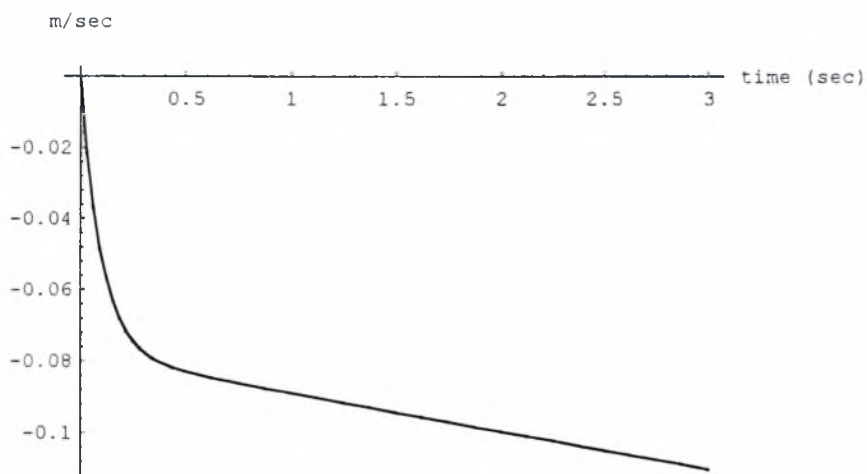
Σχήμα 5.8: Απόκριση γωνίας προένευσης για κατακόρυφη μετάφραση γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)



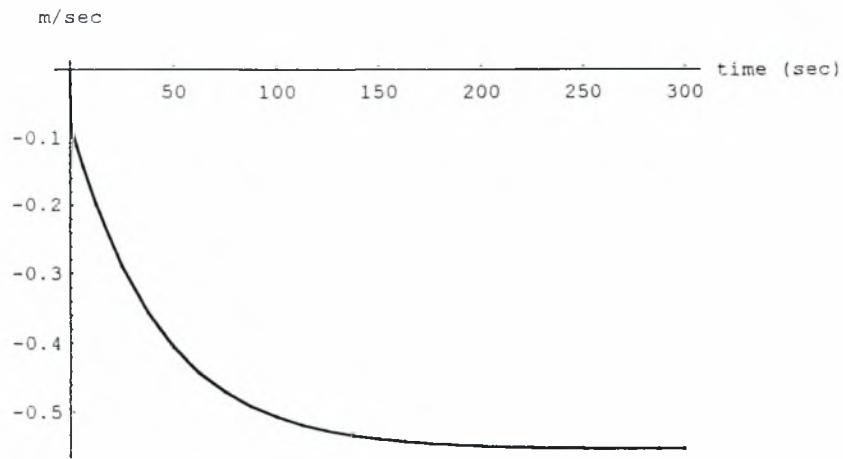
Σχήμα 5.9: Απόκριση κατακόρυφης ταχύτητας για κατακόρυφη μετάφραση γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



Σχήμα 5.10: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προέλευσης για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)

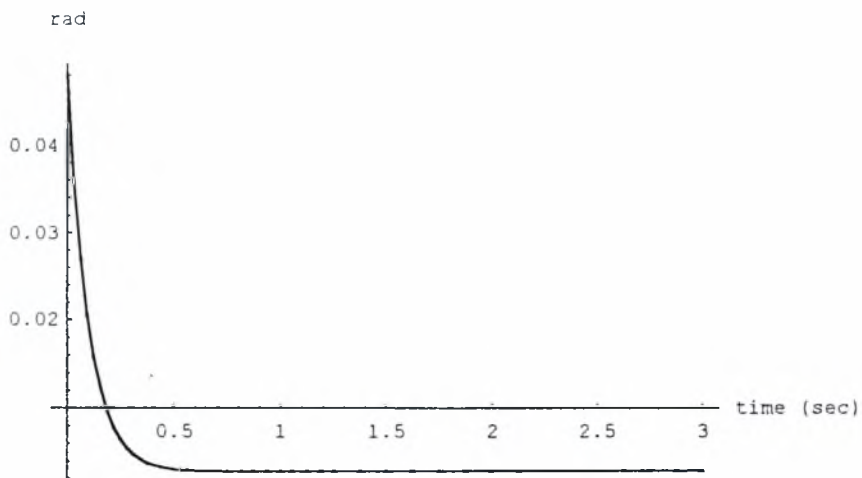


(a)

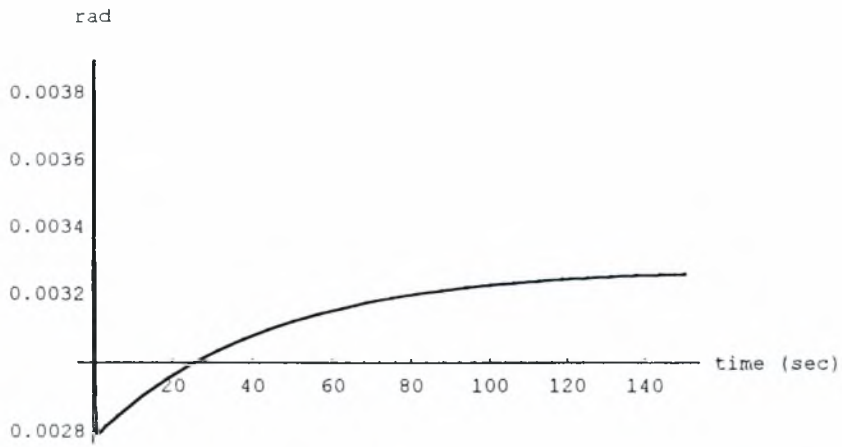


(b)

Σχήμα 5.11: Απόκριση της εμπρόσθιας ταχύτητα για κατακόρυφη μετάφραση γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

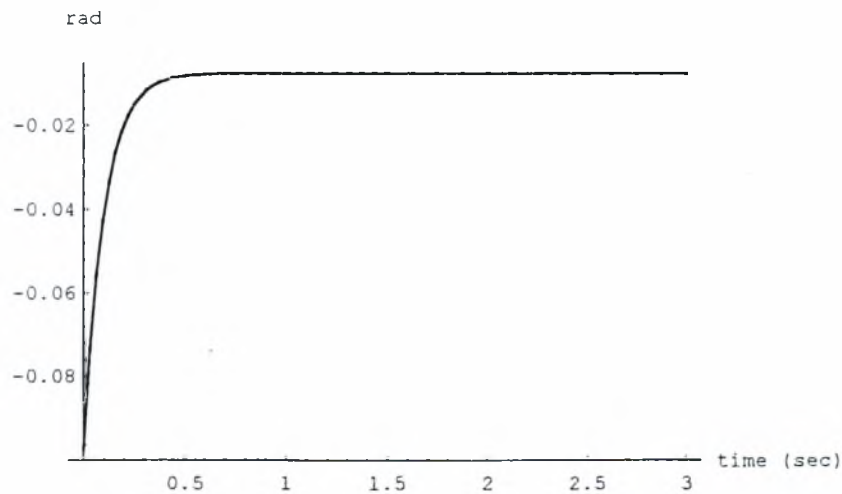


(a)

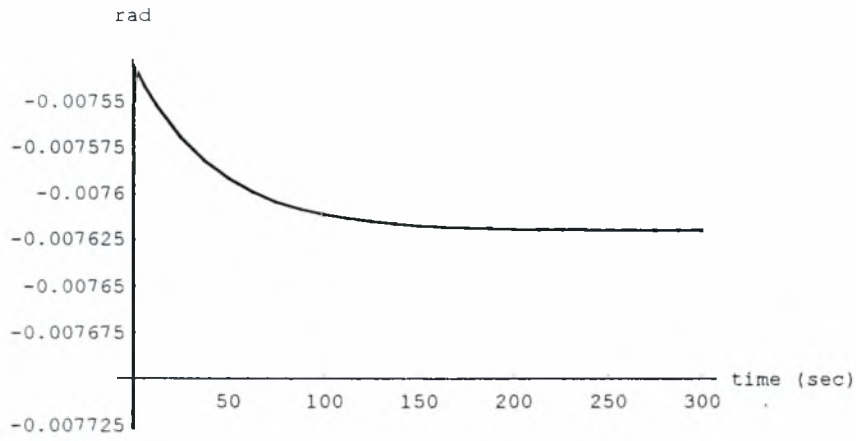


(b)

Σχήμα 5.12 : Απόκριση του κυκλικού βήματος για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)



(a)



(b)

Σχήμα 5.13 : Απόκριση του συλλογικού βήματος για κατακόρυφη μετάφραση
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)

(a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]

(b) Απόκριση για t στο $[0, 300]$ [sec]

Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

Ελεγχος της συζευγμένης διαμήκους και εγκάρσιας κίνησης του ελικοπτέρου

Σύνοψη: Για την περίπτωση της συζευγμένης διαμήκους και εγκάρσιας κίνησης μελετάται η δυνατότητα αποσύζευξης των δύο κινήσεων του ελικοπτέρου, με ταυτόχρονη αποσύζευξη των επιμέρους μεταβλητών. Ειδικότερα, για τις μεταβλητές οριζόντια ταχύτητα u , κατακόρυφη ταχύτητα w , ρυθμό μεταβολής της γωνίας προένευσης q , γωνία προένευσης Θ , ταχύτητα (κατά τον άξονα y) v , ρυθμό μεταβολής της γωνίας κύλισης p , γωνία κύλισης ϕ , ρυθμό μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας r επιτυγχάνεται ο έλεγχος με κατάλληλο χειρισμό των εσωτερικών εισόδων, δηλαδή του διαμήκους κυκλικού βήματος, του συλλογικού βήματος, του εγκάρσιου κυκλικού βήματος και του συλλογικού βήματος του οπίσθιου έλικα. Ο νόμος ανατροφοδότησης είναι στατικός, και ανατροφοδοτεί τις μεταβλητές u , w , q , Θ , v , p , ϕ , r . Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να επιλυθεί το πρόβλημα αποδεικνύονται να είναι σχεδόν πάντα αληθείς, εξαρτώμενες αποκλειστικά από την αεροδυναμική επίδραση των μεταβλητών του δίσκου του έλικα. Η γενική μορφή του νόμου ελέγχου προσδιορίζεται σε αναλυτική μορφή. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο γενικός νόμος ελέγχου είναι εξαιρετικά πολύπλοκος και ο προσδιορισμός του αποτελεί ιδιαίτερη συμβολή στην ανάπτυξη αυτόματων φακέλων πτήσης. Η απόδοση του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος είναι ικανοποιητική, ακόμα και με την εφαρμογή του νόμου ελέγχου στο μη γραμμικό μοντέλο. Οι αποκρίσεις ακολουθούν πιστά και γρήγορα τις εντολές, με αργές μεταβολές μόνο στην οριζόντια ταχύτητα, την ταχύτητα στον y άξονα και στις εσωτερικές εισόδους, δηλαδή στο διαμήκες κυκλικό βήμα, στο συλλογικό βήμα, στο εγκάρσιο κυκλικό βήμα και στο συλλογικό βήμα του οπίσθιου έλικα. Οι καλές ποιότητες πτήσης αναδεικνύονται με προσομοίωση.

Συμβολισμοί

- $U, W, Q, \Theta, V, P, \Phi, R$ = μεταφορικές ταχύτητες στους άξονες x, z , ρυθμός μεταβολής της γωνίας προένευσης, γωνία προένευσης, μεταφορική ταχύτητα στον άξονα y , ρυθμός μεταβολής γωνίας κύλισης, γωνία κύλισης, ρυθμός μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας
- $u_0, w_0, q_0, \Theta_0, v_0, p_0, \phi_0, r_0$ = ονομαστικές τιμές των παραπάνω μεταβλητών
- $m, I_y, I_z, I_{xz}, I_{xy}, g$ = μάζα του ελικοπτέρου, ροπή αδράνειας κατά τον y άξονα, ροπή αδράνειας κατά τον z άξονα, γινόμενα αδράνειας, επιτάχυνση βαρύτητας

X, Z, Y, M, L, N	= εξωτερικές αεροδυναμικές & προωθητικές δυνάμεις στους άξονες x, z και y , και εξωτερικές αεροδυναμικές και προωθητικές ροπές στους άξονες y, x, z
$x_0, z_0, y_0, m_0, l_0, n_0$	= ονομαστικές τιμές των παραπάνω μεταβλητών
$\vartheta, q, u, w, v, p, \phi, r$	= μεταβολές της γωνίας προένευσης, του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης, της οριζόντιας και της κατακόρυφης ταχύτητας, της ταχύτητας στον άξονα y , του ρυθμού μεταβολής των γωνιών (κύλισης και πλαγιοπορείας), και της γωνίας κύλισης
$\delta_P, \delta_S, \delta_A, \delta_T$	= διαμήκες κυκλικό βήμα, (περιοδική αλλαγή της γωνίας προένευσης της λεπίδας), συλλογικό βήμα (ταυτόχρονη αλλαγή της γωνίας προένευσης όλων των λεπίδων), εγκάρσιο κυκλικό βήμα, συλλογικό βήμα του οπίσθιου έλικα
$x_i, y_i, z_i, m_i, l_i, n_i$	= διαστατικές παράγωγοι ευστάθειας ($i = u, w, q, v, p, r, \delta_P, \delta_S, \delta_A, \delta_T$)

6.1 Εισαγωγή

Η σύζευξη μεταξύ των εντολών του χειριστή και των προς έλεγχο μεταβλητών πτήσης επηρεάζει άμεσα την ποιότητα της πτήσης. Ειδικότερα, για την συζευγμένη διαμήκη και εγκάρσια κίνηση του ελικοπτέρου, είναι εξαιρετικά σημαντικό να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι ελιγμοί των ελικοπτέρων αντιστοιχούν μόνο σε αλλαγές των μεταβλητών πτήσης μιας από τις δύο κινήσεων του σκάφους (διαμήκης ή εγκάρσια). Επιπλέον, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι κύριες μεταβολές ελιγμών στη διαμήκη κίνηση είναι η γωνία προένευσης και η κατακόρυφη ταχύτητα, ενώ στην εγκάρσια κίνηση είναι η γωνία κύλισης και η γωνία πλαγιοπορείας ή ισοδύναμα η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα.

Σε αυτήν το κεφάλαιο, η τεχνική αποσύζευξης εισόδων εξόδων προτείνεται ως ο κατάλληλος σχεδιαστικός στόχος για τον ανεξάρτητο έλεγχο των μεταβλητών απόδοσης του ελικοπτέρου. Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι ο ανεξάρτητος έλεγχος της κατακόρυφης ταχύτητας, της γωνίας προένευσης, της γωνίας κύλισης (roll), και του ρυθμού μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας (yaw) του ελικοπτέρου, κατά την συζευγμένη διαμήκη και εγκάρσια πτήση. Μετά την εφαρμογή ενός κατάλληλου στατικού νόμου ανατροφοδότησης, το διαμήκες κυκλικό βήμα, το συλλογικό βήμα, το εγκάρσιο κυκλικό βήμα, και το συλλογικό βήμα του οπίσθιου έλικα λειτουργούν κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να επιτυγχάνουν ανεξάρτητο έλεγχο της γωνίας προένευσης, της κατακόρυφης ταχύτητας, της γωνίας κύλισης και του ρυθμού μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας. Ειδικότερα, το κλειστό σύστημα έχει το χαρακτηριστικό του ελέγχου της γωνίας προένευσης με μια εξωτερική εντολή, και χωρίς να επηρεάζει την κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου, την γωνία κύλισης και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας

πλαγιοπορείας. Ομοίως, η δεύτερη εξωτερική εισόδος ελέγχει την κατακόρυφη ταχύτητα χωρίς να επηρεάζει την γωνία προένευσης, την γωνία κύλισης και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας και γενικότερα κάθε μία από τις εξωτερικές εντολές ρυθμίζει την έξοδο στην οποία αντιστοιχεί, χωρίς να επηρεάζει τις υπόλοιπες εξόδους. Τα δυναμικά συστήματα που σχετίζονται τις εξωτερικές εντολές με τις αντίστοιχες εξόδους απόδοσης, (γωνία προένευσης, κατακόρυφη ταχύτητα, γωνία κύλισης, ρυθμός μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας) αποδεικνύεται ότι είναι συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου όλο πόλους (αυθαίρετους πόλους). Έτσι, οι απαιτήσεις για καλές ποιότητες πτήσης ικανοποιούνται.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι όλα τα αποτελέσματα είναι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου. Ειδικότερα, οι συνθήκες επιλυσιμότητας εξάγονται ως ανισότητες ενώ οι ελεγκτές σαν ρητές συναρτήσεις των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου. Οι ελεγκτές εξαρτώνται επίσης από αυθαίρετες παραμέτρους οι οποίες είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος. Ανάλογες συνθήκες παράγονται για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευστάθεια. Τέλος, όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, παρουσιάζονται σε προσομοίωση επί μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

6.2 Περιγραφή μοντέλου

Οι μη γραμμικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την συζευγμένη διαμήκη και εγκάρσια κίνηση του ελικοπτέρου είναι στην ακόλουθη μορφή [8]

$$\begin{aligned}
 X - mg \sin(\Theta) &= m(\dot{U} + QW - RV) \\
 Z + mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) &= m(\dot{W} + PV - QU) \\
 M &= I_y \dot{Q} + PR(I_x - I_z) + I_{xz}(P^2 - R^2) \\
 \Theta &= Q \cos(\Phi) - R \sin(\Phi) \\
 Y + mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) &= m(\dot{V} + RU - PW) \\
 L &= I_x \dot{P} - I_{xz} \dot{R} + QR(I_z - I_y) - I_{xz} PQ \\
 \dot{\Phi} &= P + Q \sin(\Phi) \tan(\Theta) + R \cos(\Phi) \tan(\Theta) \\
 N &= -I_{xz} \dot{P} + I_z \dot{R} + PQ(I_y - I_x) + I_{xz} QR
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

Με σκοπό την γραμμικοποίηση των παραπάνω εξισώσεων, θεωρείται η απόκλιση της κάθε μεταβλητής από την ονομαστική τιμή της. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$U = u_0 + u, \quad \Theta = \vartheta_0 + \vartheta, \quad Q = q_0 + q, \quad W = w_0 + w, \quad M = m_0 + m_d, \quad X = x_0 + x_d, \quad Z = z_0 + z_d, \quad Y = y_0 + y_d$$

$$V = v_0 + v, \quad \Phi = \phi_0 + \phi, \quad P = p_0 + p, \quad R = r_0 + r, \quad L = l_0 + l_d, \quad N = n_0 + n_d \quad (6.2.2)$$

όπου $l_d, m_d, n_d, x_d, y_d, z_d$ είναι οι μεταβολές των αεροδυναμικών και προωθητικών δυνάμεων X, Y, Z και ροπών L, M, N . Είναι φανερό ότι η μη γραμμική εξίσωση (6.2.1) ισχύει και για τις ονομαστικές τιμές των ενεργών μεταβλητών, δηλαδή για $U = u_0, \quad \Theta = \vartheta_0, \quad Q = q_0, \quad W = w_0, \quad M = m_0, \quad X = x_0, \quad Z = z_0, \quad Y = y_0, \quad V = v_0, \quad \Phi = \phi_0, \quad P = p_0, \quad R = r_0, \quad L = l_0, \quad N = n_0$. Με άλλα λόγια, οι συνθήκες ισορροπίας εκφράζονται ως ακολούθως

$$\left. \begin{aligned} x_0 - mg \sin(\vartheta_0) &= m(\dot{u}_0 + q_0 w_0 - r_0 v_0) \\ z_0 + mg \cos(\vartheta_0) \cos(\phi_0) &= m(\dot{w}_0 + p_0 v_0 - q_0 u_0) \\ m_0 &= I_y \dot{q}_0 + p_0 r_0 (I_x - I_z) + I_{xz} (p_0^2 - r_0^2) \\ \dot{\vartheta}_0 &= q_0 \cos(\phi_0) - r_0 \sin(\phi_0) \\ y_0 + mg \cos(\vartheta_0) \sin(\phi_0) &= m(\dot{v}_0 + r_0 u_0 - p_0 w_0) \\ l_0 &= I_x \dot{p}_0 - I_{xz} \dot{r}_0 + q_0 r_0 (I_z - I_y) - I_{xz} p_0 q_0 \\ \dot{\phi}_0 &= p_0 + q_0 \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + r_0 \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ n_0 &= -I_{xz} \dot{p}_0 + I_z \dot{r}_0 + p_0 q_0 (I_y - I_x) + I_{xz} q_0 r_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.2.2) και (6.2.3) στην (6.2.1), οι ακόλουθες εξισώσεις περιγράφουν την κίνηση του ελικοπτέρου σε όρους μεταβολών

$$\left. \begin{aligned} x_d - mg \sin(\vartheta_0 + \vartheta) + mg \sin(\vartheta_0) &= m(\dot{u} + q_0 w + w_0 q + q w - r_0 v - r v_0 - r v) \\ z_d + mg \cos(\vartheta_0 + \vartheta) \cos(\phi_0 + \phi) - mg \cos(\vartheta_0) \cos(\phi_0) &= m(\dot{w} - q_0 u - u_0 q - q u + p_0 v + v_0 p + p v) \\ m_d &= I_y \dot{q} + (I_x - I_z)(r_0 p + r p_0 + r p) + I_{xz}(p^2 - r^2 + 2p_0 p - 2r_0 r) \\ \dot{\vartheta} &= q_0(\cos(\phi_0 + \phi) - \cos(\phi_0)) - r_0(\sin(\phi_0 + \phi) - \sin(\phi_0)) + q \cos(\phi_0 + \phi) - r \sin(\phi_0 + \phi) \\ y_d + mg \cos(\vartheta_0 + \vartheta) \sin(\phi_0 + \phi) - mg \cos(\vartheta_0) \sin(\phi_0) &= m(\dot{v} + r_0 u + r u_0 + r u - p_0 w - p w_0 - p w) \\ l_d &= I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y)(q_0 r + q r_0 + q r) - I_{xz}(p_0 q + p q_0 + p q) \\ \dot{\phi} &= p + (q_0 + q) \sin(\phi_0 + \phi) \tan(\vartheta_0 + \vartheta) - q_0 \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + \\ &\quad (r_0 + r) \cos(\phi_0 + \phi) \tan(\vartheta_0 + \vartheta) - r_0 \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ n_d &= \dot{p}(-I_{xz}) + \dot{r}(I_z) + (I_y - I_x)(p_0 q + p q_0 + p q) + I_{xz}(q_0 r + q r_0 + q r) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

Μετά από χρήση των τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\sin(\vartheta_0 + \vartheta) = \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) + \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) \quad \cos(\vartheta + \vartheta_0) = \cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)$$

και κανονικοποιώντας ως προς τη μάζα και την αδράνεια, δηλαδή

$$\tilde{x}_d = \frac{x_d}{m}, \quad \tilde{y}_d = \frac{y_d}{m}, \quad \tilde{z}_d = \frac{z_d}{m}, \quad \tilde{m}_d = \frac{m_d}{I_y}, \quad \tilde{l}_d = \frac{l_d}{(I_x I_z - I_{xz}^2)}, \quad \tilde{n}_d = \frac{n_d}{(I_x I_z - I_{xz}^2)}$$

οι εξισώσεις στην (6.2.4) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{x}_d - g \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) + g \sin(\vartheta_0) - q_0 w - q w_0 - q w + r_0 v + r_0 v + r v \\ \dot{w} &= \tilde{z}_d + g [\cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)] [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi) \sin(\phi_0)] \\ &\quad - g \cos(\vartheta_0) \cos(\phi_0) + q_0 u + q u_0 + q u - p_0 v - p v_0 - p v \\ \dot{q} &= \tilde{m}_d - p \frac{I_x - I_z}{I_y} r_0 - r \frac{I_x - I_z}{I_y} p_0 - r p \frac{I_x - I_z}{I_y} - p^2 \frac{I_{xz}}{I_y} + r^2 \frac{I_{xz}}{I_y} - 2p_0 p \frac{I_{xz}}{I_y} + 2r_0 r \frac{I_{xz}}{I_y} \\ \dot{\vartheta} &= q_0 [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi) \sin(\phi_0) - \cos(\phi_0)] - r_0 [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0) - \sin(\phi_0)] \\ &\quad + q [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi_0) \sin(\phi)] - r [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \\ \dot{v} &= \tilde{y}_d + g [\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)] [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \\ &\quad - g \cos(\vartheta_0) \sin(\phi_0) - r_0 u - r u_0 - r u + p_0 w + p w_0 + p w \\ \dot{p} &= I_{xz} \tilde{l}_d + I_{xz} \tilde{n}_d + (p q (I_x I_{xz} + I_z I_{xz} - I_{xz} I_y) + p_0 q (I_x I_{xz} - I_{xz} I_y + I_{xz} I_z) + \\ &\quad q r (I_y I_z - I_z^2 - I_{xz}^2) + q_0 r (-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2) + q r_0 (-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2) + p q_0 (I_x I_{xz} - I_y I_{xz} + I_z I_{xz})) / (I_x I_z - I_{xz}^2) \\ \dot{\phi} &= p + (q_0 + q) [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \left[\frac{\sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)} \right] \\ &\quad + (r_0 + r) [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi_0) \sin(\phi)] \left[\frac{\sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)} \right] \\ &\quad - q_0 \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - r_0 \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ \dot{r} &= I_{xz} \tilde{l}_d + I_x \tilde{n}_d + (p q (I_x^2 + I_z^2 - I_x I_y) + p_0 q (I_x^2 + I_z^2 - I_x I_y) + q r (-I_x I_{xz} + I_y I_{xz} - I_z I_{xz}) + \\ &\quad + p q_0 (I_x^2 + I_z^2 - I_x I_y) + q_0 r (-I_x I_{xz} + I_x I_y - I_{xz} I_z) + q r_0 (-I_x I_{xz} + I_x I_y - I_{xz} I_z)) / (I_x I_z - I_{xz}^2) \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Οι μεταβολές στις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές (ανά μονάδα μάζας και ροπής αδράνειας) θεωρούνται συναρτήσεις των μεταβλητών $\{\delta_P, \delta_S, \delta_A, \delta_T, u, w, q, v, p, r\}$. Προφανώς αυτή η θεώρηση ισχύει για τις περισσότερες συνθήκες πτήσης.

Για την ολοκλήρωση της γραμμικοποίησης, οι μεταβολές $\tilde{x}_d, \tilde{y}_d, \tilde{z}_d, \tilde{l}_d, \tilde{m}_d, \tilde{n}_d$ αναπτύσσονται σε πολυμεταβλητή σειρά Laurent ως προς τις μεταβολές της θέσης των ενεργοποιητών $\delta_P, \delta_S, \delta_A, \delta_T$ και τις μεταβολές των ταχυτήτων u, v, w, q, p, r . Χρησιμοποιούνται μόνο οι πρώτοι (σταθεροί) όροι και οι δεύτεροι (γραμμικοί) όροι της σειράς. Σημειώνεται ότι οι πρώτοι όροι είναι ίσοι με το μηδέν. Οπότε, προκύπτουν οι ακόλουθες προσεγγιστικές ισότητες.

$$\tilde{x}_d = x_u u + x_w w + x_q q + x_v v + x_p p + x_r r + x_{\delta_P} \delta_P + x_{\delta_S} \delta_S + x_{\delta_A} \delta_A + x_{\delta_T} \delta_T \tag{6.2.6a}$$

$$\tilde{z}_d = z_u u + z_w w + z_q q + z_v v + z_p p + z_r r + z_{\delta_P} \delta_P + z_{\delta_S} \delta_S + z_{\delta_A} \delta_A + z_{\delta_T} \delta_T \tag{6.2.6b}$$

$$\tilde{m}_d = \tilde{m}_u u + \tilde{m}_w w + \tilde{m}_q q + \tilde{m}_v v + \tilde{m}_p p + \tilde{m}_r r + \tilde{m}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{m}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{m}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{m}_{\delta_T} \delta_T \quad (6.2.6c)$$

$$\tilde{y}_d = y_u u + y_w w + y_q q + y_v v + y_p p + y_r r + y_{\delta_p} \delta_p + y_{\delta_s} \delta_s + y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_T} \delta_T \quad (6.2.6d)$$

$$\tilde{l}_d = \tilde{l}_u u + \tilde{l}_w w + \tilde{l}_q q + \tilde{l}_v v + \tilde{l}_p p + \tilde{l}_r r + \tilde{l}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{l}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{l}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{l}_{\delta_T} \delta_T \quad (6.2.6e)$$

$$\tilde{n}_d = \tilde{n}_u u + \tilde{n}_w w + \tilde{n}_q q + \tilde{n}_v v + \tilde{n}_p p + \tilde{n}_r r + \tilde{n}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{n}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{n}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{n}_{\delta_T} \delta_T \quad (6.2.6f)$$

$$\text{όπου } x_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{x}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, z_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{z}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \tilde{m}_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{m}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, y_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{y}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \tilde{l}_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{l}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \tilde{n}_\xi = \left. \frac{\partial \tilde{n}_d}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

($\xi = u, w, q, v, p, r, \delta_p, \delta_s, \delta_A, \delta_T$).

κ.τ.λ. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές ιδιότητες, και το γεγονός ότι τα γινόμενα δύο μεταβολών είναι αμελητέα στη γραμμικοποίηση, το σύστημα των ισοτήτων στην (6.2.5) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{u} &= x_u u + x_w w + x_q q + x_v v + x_p p + x_r r + x_{\delta_p} \delta_p + x_{\delta_s} \delta_s + x_{\delta_A} \delta_A + x_{\delta_T} \delta_T \\ &- g \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0) + g \sin(\vartheta_0) - q_0 w - q w_0 + r_0 v + r v_0 \\ \dot{w} &= z_u u + z_w w + z_q q + z_v v + z_p p + z_r r + z_{\delta_p} \delta_p + z_{\delta_s} \delta_s + z_{\delta_A} \delta_A + z_{\delta_T} \delta_T \\ &+ g [\cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) - g \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)] [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi) \sin(\phi_0)] \\ &- g \cos(\vartheta_0) \cos(\phi_0) + q_0 u + q u_0 - p_0 v - p v_0 \\ \dot{q} &= \tilde{m}_u u + \tilde{m}_w w + \tilde{m}_q q + \tilde{m}_v v + \tilde{m}_p p + \tilde{m}_r r + \tilde{m}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{m}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{m}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{m}_{\delta_T} \delta_T \\ &- p \frac{I_x - I_z}{I_y} r_0 - r \frac{I_x - I_z}{I_y} p_0 - 2p_0 p \frac{I_{xz}}{I_y} + 2r_0 r \frac{I_{xz}}{I_y} \\ \dot{\vartheta} &= q_0 [\cos(\phi_0) \cos(\phi_0) - \sin(\phi) \sin(\phi_0) - \cos(\phi_0)] \\ &- r_0 [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0) - \sin(\phi_0)] \\ &+ q [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi_0) \sin(\phi)] - r [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \\ \dot{v} &= y_u u + y_w w + y_q q + y_v v + y_p p + y_r r + y_{\delta_p} \delta_p + y_{\delta_s} \delta_s + y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_T} \delta_T \\ &+ g [\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)] [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \\ &- g \cos(\vartheta_0) \sin(\phi_0) - r_0 u - r u_0 + p_0 w + p w_0 \\ \dot{p} &= I_z (\tilde{l}_u u + \tilde{l}_w w + \tilde{l}_q q + \tilde{l}_v v + \tilde{l}_p p + \tilde{l}_r r + \tilde{l}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{l}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{l}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{l}_{\delta_T} \delta_T) \\ &+ I_{xz} (\tilde{n}_u u + \tilde{n}_w w + \tilde{n}_q q + \tilde{n}_v v + \tilde{n}_p p + \tilde{n}_r r + \tilde{n}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{n}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{n}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{n}_{\delta_T} \delta_T) \\ &+ [p_0 q (I_x I_{xz} - I_{xz} I_y + I_{xz} I_z) + \\ &+ q_0 r (-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2) + q r_0 (-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2) \\ &+ p q_0 (I_x I_{xz} - I_y I_{xz} + I_z I_{xz})] / (I_x I_z - I_{xz}^2) \\ \dot{\phi} &= p + (q_0 + q) [\sin(\phi_0) \cos(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi_0)] \left[\frac{\sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)} \right] \\ &+ (r_0 + r) [\cos(\phi_0) \cos(\phi) - \sin(\phi_0) \sin(\phi)] \left[\frac{\sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta) \cos(\vartheta_0) - \sin(\vartheta) \sin(\vartheta_0)} \right] \\ &- q_0 \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - r_0 \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ \dot{r} &= I_{xz} (\tilde{l}_u u + \tilde{l}_w w + \tilde{l}_q q + \tilde{l}_v v + \tilde{l}_p p + \tilde{l}_r r + \tilde{l}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{l}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{l}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{l}_{\delta_T} \delta_T) \\ &+ I_x (\tilde{n}_u u + \tilde{n}_w w + \tilde{n}_q q + \tilde{n}_v v + \tilde{n}_p p + \tilde{n}_r r + \tilde{n}_{\delta_p} \delta_p + \tilde{n}_{\delta_s} \delta_s + \tilde{n}_{\delta_A} \delta_A + \tilde{n}_{\delta_T} \delta_T) \\ &+ [p_0 q (I_x^2 + I_{xz}^2 - I_x I_y) + p q_0 (I_x^2 + I_{xz}^2 - I_x I_y) \\ &+ q_0 r (I_{xz} I_y - I_z I_{xz} - I_x I_{xz}) + q r_0 (-I_x I_{xz} + I_{xz} I_y - I_{xz} I_z)] / (I_x I_z - I_{xz}^2) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Το παραπάνω σύστημα ισοτήτων είναι μη γραμμικό ως προς την γωνία ϑ και την γωνία ϕ . Αν η γωνία ϑ και η γωνία ϕ είναι αρκετά μικρές, οι προσεγγιστικές σχέσεις $\sin(\vartheta_0 + \vartheta) \simeq \vartheta \cos(\vartheta_0) + \sin(\vartheta_0) \cos(\vartheta + \vartheta_0) \simeq \cos(\vartheta_0) - \vartheta \sin(\vartheta_0)$, $\sin(\phi_0 + \phi) \simeq \phi \cos(\phi_0) + \sin(\phi_0)$, $\cos(\phi + \phi_0) \simeq \cos(\phi_0) - \phi \sin(\phi_0)$ χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή της ακόλουθης προσέγγισης μικρής περιόδου

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0^-) = x_0 \quad (6.2.8)$$

όπου

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) & w(t) & q(t) & \vartheta(t) & v(t) & p(t) & \phi(t) & r(t) \end{bmatrix}^T$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} w(t) & \vartheta(t) & \phi(t) & r(t) \end{bmatrix}^T, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \delta_P & \delta_S & \delta_A & \delta_T \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_u & x_w - q_0 & x_w - q_0 & -g \cos(\vartheta_0) & x_v + r_0 & x_p & 0 & x_r + v_0 \\ z_u + q_0 & z_w & z_q + u_0 & -\sin(\vartheta_0) \cos(\phi_0) & z_v - p_0 & z_p - v_0 & a_{27} & z_r \\ m_u & m_w & m_q & 0 & m_v & m_p & 0 & m_r \\ 0 & 0 & \cos(\phi_0) & 0 & 0 & 0 & a_{47} & -\sin(\phi_0) \\ y_u - r_0 & y_w + p_0 & y_q & -g \sin(\vartheta_0) \sin(\phi_0) & y_v & y_p + w_0 & a_{57} & y_r - u_0 \\ l_u & l_w & l_q & 0 & l_v & l_p & 0 & l_r \\ 0 & 0 & \frac{\sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta_0)} & a_{74} & 0 & 1 & a_{77} & a_{78} \\ n_u & n_w & n_q & 0 & n_v & n_p & 0 & n_r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{\delta_P} & x_{\delta_S} & x_{\delta_A} & x_{\delta_T} \\ z_{\delta_P} & z_{\delta_S} & z_{\delta_A} & z_{\delta_T} \\ m_{\delta_P} & m_{\delta_S} & m_{\delta_A} & m_{\delta_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{\delta_P} & y_{\delta_S} & y_{\delta_A} & y_{\delta_T} \\ l_{\delta_P} & l_{\delta_S} & l_{\delta_A} & l_{\delta_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{\delta_P} & n_{\delta_S} & n_{\delta_A} & n_{\delta_T} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με

$$a_{47} = -[q_0 \sin(\phi_0) + r_0 \cos(\phi_0)] \quad , \quad a_{74} = \frac{\phi_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta_0)}$$

$$a_{77} = \frac{q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta_0)} \quad , \quad a_{78} = \frac{\cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0)}{\cos(\vartheta_0)} \quad a_{27} = -g \cos(\vartheta_0) \sin(\phi_0)$$

$$a_{57} = g \cos(\vartheta_0) \cos(\phi_0)$$

και

$$m_u = \tilde{m}_u, \quad m_w = \tilde{m}_w, \quad m_q = \tilde{m}_q, \quad m_v = \tilde{m}_v, \quad m_p = \tilde{m}_p - 2p_0 \frac{I_{xz}}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} r_0, \quad m_r = \tilde{m}_r - p_0 \frac{I_x - I_z}{I_y} + 2r_0 \frac{I_{xz}}{I_y}$$

$$l_u = I_z \tilde{l}_u + I_{xz} \tilde{n}_u, \quad l_w = I_z \tilde{l}_w + I_{xz} \tilde{n}_w, \quad l_q = I_z \tilde{l}_q + I_{xz} \tilde{n}_q + p_0 \frac{I_x I_{xz} - I_{xz} I_y + I_{xz} I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} + r_0 \frac{-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2}{I_x I_z - I_{xz}^2},$$

$$l_v = I_z \tilde{l}_v + I_{xz} \tilde{n}_v, \quad l_p = I_z \tilde{l}_p + I_{xz} \tilde{n}_p + \frac{I_x I_{xz} - I_y I_{xz} + I_z I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}, \quad l_r = I_z \tilde{l}_r + I_{xz} \tilde{n}_r + q_0 \frac{-I_{xz}^2 + I_y I_z - I_z^2}{I_x I_z - I_{xz}^2}$$

$$n_u = I_{xz}\tilde{l}_u + I_x\tilde{n}_u, \quad n_w = I_{xz}\tilde{l}_w + I_x\tilde{n}_w, \quad n_q = I_{xz}\tilde{l}_q + I_x\tilde{n}_q + p_0 \frac{I_x^2 + I_{xz}^2 - I_x I_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + r_0 \frac{-I_x I_{xz} + I_{xz} I_y - I_{xz} I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2},$$

$$n_v = I_{xz}\tilde{l}_v + I_x\tilde{n}_v$$

$$n_p = I_{xz}\tilde{l}_p + I_x\tilde{n}_p + q_0 \frac{I_x^2 + I_{xz}^2 - I_x I_y}{I_x I_z - I_{xz}^2}, \quad n_r = I_{xz}\tilde{l}_r + I_x\tilde{n}_r + q_0 \frac{-I_x I_{xz} + I_{xz} I_y - I_{xz} I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2}$$

$$m_{\delta_p} = \tilde{m}_{\delta_p}, \quad m_{\delta_s} = \tilde{m}_{\delta_s}, \quad m_{\delta_A} = \tilde{m}_{\delta_A}, \quad m_{\delta_T} = \tilde{m}_{\delta_T},$$

$$l_{\delta_p} = I_z\tilde{l}_{\delta_p} + I_{xz}\tilde{n}_{\delta_p}, \quad l_{\delta_s} = I_z\tilde{l}_{\delta_s} + I_{xz}\tilde{n}_{\delta_s}, \quad l_{\delta_A} = I_z\tilde{l}_{\delta_A} + I_{xz}\tilde{n}_{\delta_A}, \quad l_{\delta_T} = I_z\tilde{l}_{\delta_T} + I_{xz}\tilde{n}_{\delta_T},$$

$$n_{\delta_p} = I_{xz}l_{\delta_p} + I_x n_{\delta_p}, \quad n_{\delta_s} = I_{xz}l_{\delta_s} + I_x n_{\delta_s}, \quad n_{\delta_A} = I_{xz}l_{\delta_A} + I_x n_{\delta_A}, \quad n_{\delta_T} = I_{xz}l_{\delta_T} + I_x n_{\delta_T}$$

Το παραπάνω γραμμικό δυναμικό σύστημα θα χρησιμοποιηθεί ως ένα μοντέλο που περιγράφει την συζευγμένη διαμήκη και εγκάρσια πτήση του ελικοπτέρου.

6.3 Συνθήκες επιλυσιμότητας

Εστω ο στατικός ελεγκτής ανατροφοδότησης κατάστασης

$$u(t) = Fx(t) + G\omega(t) \quad ; \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} w_c(t) \\ \vartheta_c(t) \\ \phi_c(t) \\ r_c(t) \end{bmatrix} \quad (6.3.1)$$

όπου $w_c(t)$, $\vartheta_c(t)$, $\phi_c(t)$, και $r_c(t)$ είναι οι εντολές που επηρεάζουν την γωνία προένευσης και την γωνία κύλισης, την κατακόρυφη ταχύτητα και την γωνία πλαγιοπορείας, δηλαδή οι εξωτερικές είσοδοι του συστήματος κλειστού βρόχου. Εδώ εξετάζεται κάτω από ποιες συνθήκες πτήσης ο ελεγκτής (6.3.1) οδηγεί σε ένα διαγώνιο αποσυζευγμένο σύστημα κλειστού βρόχου με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης, την γωνία κύλισης, την κατακόρυφη ταχύτητα και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας. Προφανώς, αν μπορεί να ικανοποιηθεί, η εξωτερική εντολή $w_c(t)$ ελέγχει την κατακόρυφη ταχύτητα $w(t)$ χωρίς να επηρεάζει την συμπεριφορά της γωνίας προένευσης $\vartheta(t)$. Ομοίως, οι εξωτερικές εντολές $\vartheta_c(t)$, $\phi_c(t)$, και $r_c(t)$ ελέγχουν την γωνία προένευσης $\vartheta(t)$, την γωνία κύλισης $\phi(t)$ και την γωνία πλαγιοπορείας $r(t)$ αντίστοιχα, χωρίς να επηρεάζει τις άλλες καταστάσεις. Οι συνθήκες επιλυσιμότητας του προβλήματος σχεδιασμού που περιγράφηκε παραπάνω διατυπώνονται στο παρακάτω θεώρημα..

Θεώρημα 3.1: Ο ανεξάρτητος έλεγχος της γωνίας προένευσης, της γωνίας κύλισης, της κατακόρυφης ταχύτητας και του ρυθμού μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας του ελικοπτέρου (6.2.8), μέσω στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης (6.3.1), ικανοποιείται αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη :

$$\begin{aligned} \cos(\phi_0) [& (-l_{\delta_s} m_{\delta_T} + l_{\delta_T} m_{\delta_s})(n_{\delta_p} z_{\delta_A} - n_{\delta_A} z_{\delta_p}) + (-l_{\delta_s} m_{\delta_p} + l_{\delta_p} m_{\delta_s})(-n_{\delta_T} z_{\delta_A} + n_{\delta_A} z_{\delta_T}) + \\ & (-l_{\delta_s} m_{\delta_A} + l_{\delta_A} m_{\delta_s})(n_{\delta_T} z_{\delta_p} - n_{\delta_p} z_{\delta_T}) + (-l_{\delta_T} m_{\delta_p} + l_{\delta_p} m_{\delta_T})(n_{\delta_s} z_{\delta_A} - n_{\delta_A} z_{\delta_s}) + \\ & (-l_{\delta_T} m_{\delta_A} + l_{\delta_A} m_{\delta_T})(-n_{\delta_s} z_{\delta_p} + n_{\delta_p} z_{\delta_s}) + (-l_{\delta_p} m_{\delta_A} + l_{\delta_A} m_{\delta_p})(n_{\delta_s} z_{\delta_T} - n_{\delta_T} z_{\delta_s})] \neq 0 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Απόδειξη: Αποδείχθηκε στο [4], η αποσύζευξη εισόδου-εξόδου επιλύεται αν και μόνο αν

$\det[C^*B] \neq 0$, όπου

$$C^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ c_2 A^{d_2} \\ c_3 A^{d_3} \\ c_4 A^{d_4} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{cases} \min\{j : c_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\} \\ n-1 \quad \text{if} \quad c_i A^j B = 0, \forall j \end{cases}; \quad c_i : i\text{-οστή γραμμή του } C \quad (6.3.3)$$

Σε αυτό το σημείο θα προσδιοριστούν οι ακέραιοι $d_i (i=1,2,3,4)$ για το σύστημα που περιγράφηκε στην (6.2.8), δηλαδή για το ελικόπτερο κατά την διαμήκη κίνηση.

Για αυτό τον σκοπό, παρατηρείται ότι

$$\begin{aligned} c_1 B &= \begin{bmatrix} z_{\delta_p} & z_{\delta_s} & z_{\delta_A} & z_{\delta_T} \end{bmatrix} \\ c_2 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ c_2 A B &= \begin{bmatrix} m_{\delta_p} \cos(\phi_0) - n_{\delta_p} \sin(\phi_0) & m_{\delta_s} \cos(\phi_0) - n_{\delta_s} \sin(\phi_0) & m_{\delta_A} \cos(\phi_0) - n_{\delta_A} \sin(\phi_0) \\ & & & m_{\delta_T} \cos(\phi_0) - n_{\delta_T} \sin(\phi_0) \end{bmatrix} \\ c_3 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ c_3 A B &= \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \\ c_4 B &= \begin{bmatrix} n_{\delta_p} & n_{\delta_s} & n_{\delta_A} & n_{\delta_T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_{31} &= l_{\delta_p} + n_{\delta_p} \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_p} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ c_{32} &= l_{\delta_s} + n_{\delta_s} \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_s} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ c_{33} &= l_{\delta_A} + n_{\delta_A} \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ c_{34} &= l_{\delta_T} + n_{\delta_T} \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, συμπεραίνεται ότι $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, και $d_4 = 0$ και άρα ότι

$$C^* B = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 A B \\ c_3 A B \\ c_4 B \end{bmatrix}. \quad \text{Επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επιλυσιμότητα της}$$

αποσύζευξης είναι

$$\begin{aligned}
\det[C^*B] = & \cos(\phi_0)[(-l_{\delta_s}m_{\delta_T} + l_{\delta_T}m_{\delta_s})(n_{\delta_P}z_{\delta_A} - n_{\delta_A}z_{\delta_P}) + \\
& + (-l_{\delta_s}m_{\delta_P} + l_{\delta_P}m_{\delta_s})(-n_{\delta_T}z_{\delta_A} + n_{\delta_A}z_{\delta_T}) + \\
& (-l_{\delta_s}m_{\delta_A} + l_{\delta_A}m_{\delta_s})(n_{\delta_T}z_{\delta_P} - n_{\delta_P}z_{\delta_T}) + (-l_{\delta_T}m_{\delta_P} + l_{\delta_P}m_{\delta_T})(n_{\delta_S}z_{\delta_A} - n_{\delta_A}z_{\delta_S}) + \\
& (-l_{\delta_T}m_{\delta_A} + l_{\delta_A}m_{\delta_T})(-n_{\delta_S}z_{\delta_P} + n_{\delta_P}z_{\delta_S}) + (-l_{\delta_P}m_{\delta_A} + l_{\delta_A}m_{\delta_P})(n_{\delta_S}z_{\delta_T} - n_{\delta_T}z_{\delta_S})] \\
\neq & 0
\end{aligned}$$

■

6.4 Αναλυτική έκφραση των ελεγκτών αποσύζευξης

Χρησιμοποιώντας την σχεδιαστική διαδικασία που αναπτύχθηκε στο [14], η γενική λύση των πινάκων ανατροφοδότησης του ελεγκτή (6.3.1), που οδηγεί σε αποσύζευξη εισόδου-εξόδου είναι

$$G = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (p_1)_0^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (p_2)_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (p_3)_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p_4)_0^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.5.1)$$

$$F = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \Phi_{17} & \Phi_{18} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26} & \Phi_{27} & \Phi_{28} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} & \Phi_{37} & \Phi_{38} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} & \Phi_{47} & \Phi_{48} \end{bmatrix} \quad (6.5.2)$$

όπου

$$\begin{aligned}
b_{11} = & [l_{\delta_s}m_{\delta_T}n_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_T}m_{\delta_s}n_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_s}m_{\delta_A}n_{\delta_T} \cos(\phi_0) + \\
& l_{\delta_A}m_{\delta_s}n_{\delta_T} \cos(\phi_0) + l_{\delta_T}m_{\delta_A}n_{\delta_s} \cos(\phi_0) - l_{\delta_A}m_{\delta_T}n_{\delta_s} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} = & [l_{\delta_s}n_{\delta_T}z_{\delta_A} - l_{\delta_T}n_{\delta_s}z_{\delta_A} - l_{\delta_s}n_{\delta_A}z_{\delta_T} + l_{\delta_A}n_{\delta_s}z_{\delta_T} + l_{\delta_T}n_{\delta_A}z_{\delta_S} - l_{\delta_A}n_{\delta_T}z_{\delta_S} + \\
& m_{\delta_s}n_{\delta_T}z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_T}n_{\delta_s}z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - \\
& m_{\delta_s}n_{\delta_A}z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_A}n_{\delta_s}z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + \\
& m_{\delta_T}n_{\delta_A}z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A}n_{\delta_T}z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{13} = & [-m_{\delta_s}n_{\delta_T}z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + m_{\delta_T}n_{\delta_s}z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + m_{\delta_s}n_{\delta_A}z_{\delta_T} \cos(\phi_0) - \\
& m_{\delta_A}n_{\delta_s}z_{\delta_T} \cos(\phi_0) - m_{\delta_T}n_{\delta_A}z_{\delta_S} \cos(\phi_0) + m_{\delta_A}n_{\delta_T}z_{\delta_S} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{14} = & [-l_{\delta_s}m_{\delta_T}z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_T}m_{\delta_s}z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_s}m_{\delta_A}z_{\delta_T} \cos(\phi_0) \\
& - l_{\delta_A}m_{\delta_s}z_{\delta_T} \cos(\phi_0) - l_{\delta_T}m_{\delta_A}z_{\delta_S} \cos(\phi_0) + l_{\delta_A}m_{\delta_T}z_{\delta_S} \cos(\phi_0) + \\
& l_{\delta_s}n_{\delta_T}z_{\delta_A} \sin(\phi_0) - l_{\delta_T}n_{\delta_s}z_{\delta_A} \sin(\phi_0) - l_{\delta_s}n_{\delta_A}z_{\delta_T} \sin(\phi_0) + \\
& l_{\delta_A}n_{\delta_s}z_{\delta_T} \sin(\phi_0) + l_{\delta_T}n_{\delta_A}z_{\delta_S} \sin(\phi_0) - l_{\delta_A}n_{\delta_T}z_{\delta_S} \sin(\phi_0) + \\
& m_{\delta_s}n_{\delta_T}z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_T}n_{\delta_s}z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_s}n_{\delta_A}z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0) + \\
& m_{\delta_A}n_{\delta_s}z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_T}n_{\delta_A}z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A}n_{\delta_T}z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0) \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]
\end{aligned}$$

$$b_{21} = [l_{\delta_T} m_{\delta_P} n_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_P} m_{\delta_T} n_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_T} m_{\delta_A} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) + \\ l_{\delta_A} m_{\delta_T} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) + l_{\delta_P} m_{\delta_A} n_{\delta_T} \cos(\phi_0) - l_{\delta_A} m_{\delta_P} n_{\delta_T} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{22} = [l_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_A} - l_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_A} - l_{\delta_T} n_{\delta_A} z_{\delta_P} + l_{\delta_A} n_{\delta_T} z_{\delta_P} + l_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_T} - l_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_T} + \\ m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - \\ m_{\delta_T} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_A} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + \\ m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{23} = [-m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + m_{\delta_T} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - \\ m_{\delta_A} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{24} = [-l_{\delta_T} m_{\delta_P} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_P} m_{\delta_T} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_T} m_{\delta_A} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - \\ l_{\delta_A} m_{\delta_T} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - l_{\delta_P} m_{\delta_A} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + l_{\delta_A} m_{\delta_P} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + \\ l_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) - l_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) - l_{\delta_T} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) + \\ l_{\delta_A} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) + l_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) - l_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) + \\ m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_T} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) + \\ m_{\delta_A} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{31} = [-l_{\delta_S} m_{\delta_T} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) + l_{\delta_T} m_{\delta_S} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) + l_{\delta_S} m_{\delta_P} n_{\delta_T} \cos(\phi_0) - \\ l_{\delta_P} m_{\delta_S} n_{\delta_T} \cos(\phi_0) - l_{\delta_T} m_{\delta_P} n_{\delta_S} \cos(\phi_0) + l_{\delta_P} m_{\delta_T} n_{\delta_S} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{32} = [-l_{\delta_S} n_{\delta_T} z_{\delta_P} + l_{\delta_T} n_{\delta_S} z_{\delta_P} + l_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_T} - l_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_T} - l_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_S} + l_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_S} - \\ m_{\delta_S} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_T} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + \\ m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - \\ m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{33} = [m_{\delta_S} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - m_{\delta_T} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + \\ m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_S} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{34} = [l_{\delta_S} m_{\delta_T} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - l_{\delta_T} m_{\delta_S} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) - l_{\delta_S} m_{\delta_P} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + \\ l_{\delta_P} m_{\delta_S} z_{\delta_T} \cos(\phi_0) + l_{\delta_T} m_{\delta_P} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - l_{\delta_P} m_{\delta_T} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - \\ l_{\delta_S} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) + l_{\delta_T} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) + l_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) - \\ l_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_T} \sin(\phi_0) - l_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) + l_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) - \\ m_{\delta_S} n_{\delta_T} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_T} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0) - \\ m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_T} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_T} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_T} z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{41} = [-l_{\delta_S} m_{\delta_P} n_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_P} m_{\delta_S} n_{\delta_A} \cos(\phi_0) + l_{\delta_S} m_{\delta_A} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) - \\ l_{\delta_A} m_{\delta_S} n_{\delta_P} \cos(\phi_0) - l_{\delta_P} m_{\delta_A} n_{\delta_S} \cos(\phi_0) + l_{\delta_A} m_{\delta_P} n_{\delta_S} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{42} = [-l_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_A} + l_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_A} + l_{\delta_S} n_{\delta_A} z_{\delta_P} - l_{\delta_A} n_{\delta_S} z_{\delta_P} - l_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_S} + l_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_S} - m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_S} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{43} = [m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) - m_{\delta_S} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) + m_{\delta_A} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \cos(\phi_0)] / \det[C^*B]$$

$$b_{44} = [l_{\delta_S} m_{\delta_P} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_P} m_{\delta_S} z_{\delta_A} \cos(\phi_0) - l_{\delta_S} m_{\delta_A} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) + l_{\delta_A} m_{\delta_S} z_{\delta_P} \cos(\phi_0) + l_{\delta_P} m_{\delta_A} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - l_{\delta_A} m_{\delta_P} z_{\delta_S} \cos(\phi_0) - l_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) + l_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_A} \sin(\phi_0) + l_{\delta_S} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) - l_{\delta_A} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \sin(\phi_0) - l_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) + l_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \sin(\phi_0) - m_{\delta_S} n_{\delta_P} z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_P} n_{\delta_S} z_{\delta_A} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_S} n_{\delta_A} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_A} n_{\delta_S} z_{\delta_P} \tan(\vartheta_0) - m_{\delta_P} n_{\delta_A} z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0) + m_{\delta_A} n_{\delta_P} z_{\delta_S} \tan(\vartheta_0)] / \det[C^*B]$$

$$\Phi_{11} = -q_0 - z_u, \quad \Phi_{12} = -(\lambda_1)_0 - z_w, \quad \Phi_{13} = -u_0 - z_q, \quad \Phi_{14} = g \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0)$$

$$\Phi_{15} = p_0 - z_v, \quad \Phi_{16} = v_0 - z_p, \quad \Phi_{17} = g \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0), \quad \Phi_{18} = -z_r$$

$$\Phi_{21} = -m_u \cos(\phi_0) + n_u \sin(\phi_0)$$

$$\Phi_{22} = -m_w \cos(\phi_0) + n_w \sin(\phi_0)$$

$$\Phi_{23} = -(\lambda_2)_1 \cos(\phi_0) - m_q \cos(\phi_0) + n_q \sin(\phi_0) - \sin(\phi_0) [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] \tan(\vartheta_0)$$

$$\Phi_{24} = -(\lambda_2)_0 - \sec(\vartheta_0) [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] \times [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0)]$$

$$\Phi_{25} = -m_v \cos(\phi_0) + n_v \sin(\phi_0)$$

$$\Phi_{26} = -m_p \cos(\phi_0) + r_0 \cos(\phi_0) + n_p \sin(\phi_0) + q_0 \sin(\phi_0)$$

$$\Phi_{27} = -(\lambda_2)_1 [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] - \sec(\vartheta_0) [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] \times [-r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0) + q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0)]$$

$$\Phi_{28} = -m_r \cos(\phi_0) + (\lambda_2)_1 \sin(\phi_0) + n_r \sin(\phi_0) - \cos(\phi_0) [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] \tan(\vartheta_0)$$

$$\Phi_{31} = l_u - n_u \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_u \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)$$

$$\Phi_{32} = l_w - n_w \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_w \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{33} = & -l_q - \cos(\phi_0) \sec(\vartheta_0) [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0)] \\ & - n_q \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - (\lambda_3)_1 \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_q \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ & - \sec(\vartheta_0) \sin(\phi_0) [q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)] \tan(\vartheta_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{34} = & -(\lambda_3)_1 \sec(\vartheta_0) [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0)] \\ & - \sec^2(\vartheta_0) [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \\ & \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0)] \times [q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)]\end{aligned}$$

$$\Phi_{35} = -l_v - n_v \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_v \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{36} = & -l_p - (\lambda_3)_1 - \sec(\vartheta_0) (q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)) - \\ & n_p \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - m_p \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{37} = & -(\lambda_3)_0 - \sec(\vartheta_0) [-r_0 \cos(\phi_0) - q_0 \sin(\phi_0)] \\ & [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0) \\ & - (\lambda_3)_1 \sec(\vartheta_0) [q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)] - \\ & \sec^2(\vartheta_0) [q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{38} = & -l_r + \sec(\vartheta_0) \sin(\phi_0) [r_0 \cos(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + q_0 \sin(\phi_0) \cos(\vartheta_0) + \dot{\phi}_0 \sin(\vartheta_0) - p_0 \sin(\vartheta_0)] \\ & - (\lambda_3)_1 \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - n_r \cos(\phi_0) \tan(\vartheta_0) \\ & - m_r \sin(\phi_0) \tan(\vartheta_0) - \cos(\phi_0) \sec(\vartheta_0) [q_0 \cos(\phi_0) \sin(\vartheta_0) - r_0 \sin(\phi_0) \sin(\vartheta_0)] \tan(\vartheta_0)\end{aligned}$$

$$\Phi_{41} = -n_u, \Phi_{42} = -n_w, \Phi_{43} = -n_q, \Phi_{44} = 0, \Phi_{45} = -n_v, \Phi_{46} = -n_p, \Phi_{47} = 0, \Phi_{48} = -(\lambda_4)_0 - n_r$$

και τα $(p_i)_0^{-1}$, $(\lambda_i)_j$ είναι απολύτως αυθαίρετα. Οι σχέσεις (6.5.1) και (6.5.2) εφαρμόζονται εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου. και στις ονομαστικές τιμές ϕ_0, ϑ_0, q_0 και u_0 .

6.5 Αποσυζευγμένο σύστημα κλειστού βρόχου

Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος κλειστού βρόχου υπολογίζεται να είναι η ακόλουθη

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{(p_1)_0^{-1}}{s + (\lambda_1)_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(p_2)_0^{-1}}{s^2 + (\lambda_2)_1 s + (\lambda_2)_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(p_3)_0^{-1}}{s^2 + (\lambda_3)_1 s + (\lambda_3)_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(p_4)_0^{-1}}{s + (\lambda_4)_0} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Όπως προαναφέρθηκε, τα $(p_i)_0^{-1}$, $(\lambda_i)_j$ είναι απολύτως αυθαίρετα. Έτσι, η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς $C(sI - A - BF)^{-1}BG$ έξι αυθαίρετους πόλους. Το πολυώνυμο του απαλειφόμενου πόλου εκφράζεται σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου ως ακολούθως

$$p_u = -\left(\{d_{13}l_v - r_0 - x_v + d_{11}(-p_0 + z_v) + n_v[d_{14} - d_{12}\sin(\phi) + d_{13}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)] + m_v[d_{12}\cos(\phi) + d_{13}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0)]\} \{d_{53}l_u + r_0 - y_u + d_{51}(q_0 + z_u) + n_u[d_{54} - d_{52}\sin(\phi) + d_{53}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)] + m_u[d_{52}\cos(\phi) + d_{53}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0)]\} + \{d_{13}l_u + s - x_u + d_{11}(q_0 + z_u) + n_u[d_{14} - d_{12}\sin(\phi) + d_{13}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)] + m_u[d_{12}\cos(\phi) + d_{13}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0)]\} \{d_{53}l_v + s - y_v + d_{51}(-p_0 + z_v) + n_v[d_{54} - d_{52}\sin(\phi) + d_{53}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)] + m_v[d_{52}\cos(\phi) + d_{53}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0)]\} \right)$$

όπου

$$d_{11} = b_{31}x_{\delta_A} + b_{11}x_{\delta_P} + b_{41}x_{\delta_T} + b_{21}x_{\delta_S}$$

$$d_{12} = b_{32}x_{\delta_A} + b_{12}x_{\delta_P} + b_{42}x_{\delta_T} + b_{22}x_{\delta_S}$$

$$d_{13} = b_{33}x_{\delta_A} + b_{13}x_{\delta_P} + b_{43}x_{\delta_T} + b_{23}x_{\delta_S}$$

$$d_{14} = b_{34}x_{\delta_A} + b_{14}x_{\delta_P} + b_{44}x_{\delta_T} + b_{24}x_{\delta_S}$$

$$d_{51} = b_{31}y_{\delta_A} + b_{11}y_{\delta_P} + b_{41}y_{\delta_T} + b_{21}y_{\delta_S}$$

$$d_{52} = b_{32}y_{\delta_A} + b_{12}y_{\delta_P} + b_{42}y_{\delta_T} + b_{22}y_{\delta_S}$$

$$d_{53} = b_{33}y_{\delta_A} + b_{13}y_{\delta_P} + b_{43}y_{\delta_T} + b_{23}y_{\delta_S}$$

$$d_{54} = b_{34}y_{\delta_A} + b_{14}y_{\delta_P} + b_{44}y_{\delta_T} + b_{24}y_{\delta_S}$$

Από την σχέση (6.2) είναι φανερό ότι το πολυώνυμο του απαλειφόμενου πόλου είναι δυνάμιο, ως προς το s . Για να είναι ευσταθές το μοντέλο του ελικοπτέρου, πρέπει ο συντελεστής του sk και ο σταθερός όρος να είναι θετικοί, δηλαδή $a > 0$ και $\beta > 0$, όπου

$$a = -((d_{13}l_v - r_0 - x_v + d_{11}(-p_0 + z_v) + n_v(d_{14} - d_{12}\sin(\phi) + d_{13}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)) + m_v(d_{12}\cos(\phi) + d_{13}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0))) (d_{53}l_u + r_0 - y_u + d_{51}(q_0 + z_u) + n_u(d_{54} - d_{52}\sin(\phi) + d_{53}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)) + m_u(d_{52}\cos(\phi) + d_{53}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0))) + (d_{13}l_u - x_u + d_{11}(q_0 + z_u) + n_u(d_{14} - d_{12}\sin(\phi) + d_{13}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)) + m_u(d_{12}\cos(\phi) + d_{13}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0))) (d_{53}l_v - y_v + d_{51}(-p_0 + z_v) + n_v(d_{54} - d_{52}\sin(\phi) + d_{53}\cos(\phi)\tan(\vartheta_0)) + m_v(d_{52}\cos(\phi) + d_{53}\sin(\phi)\tan(\vartheta_0)))$$

$$\beta = d_{13}l_u + d_{52}l_v + d_{14}n_u + d_{54}n_v - d_{51}p_0 + d_{11}q_0 - x_u - y_v + d_{11}z_u + d_{51}z_v + d_{12}m_u \cos(\phi) + d_{52}m_v \cos(\phi) - d_{12}n_u \sin(\phi) - d_{52}n_v \sin(\phi) + d_{13}n_u \cos(\phi)\tan(\vartheta_0) + d_{53}n_v \cos(\phi)\tan(\vartheta_0) + d_{13}m_u \sin(\phi)\tan(\vartheta_0) + d_{53}m_v \sin(\phi)\tan(\vartheta_0)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, δυναται να διατυπωθεί το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6.5.1: Ο ανεξάρτητος έλεγχος των μεταβλητών εξόδου με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση μπορεί να επιτευχθεί εάν και μόνο εάν οι συνθήκες του Θεωρήματος 6.3.1 ικανοποιούνται ταυτόχρονα με τις συνθήκες $a > 0$ και $\beta > 0$. ■

6.6 Αποτελέσματα προσομοίωσης

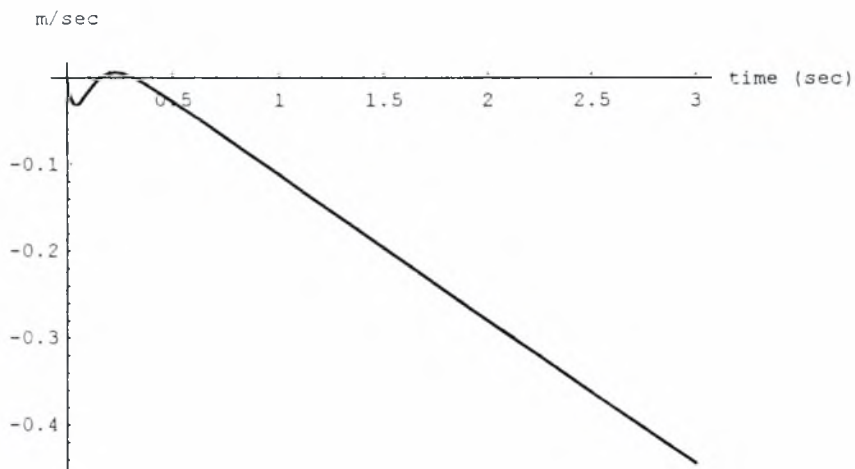
Θεωρείται ένα ελικόπτερο μονού έλικα, το οποίο πετάει με οριζόντια πτήση 80 κόμβων. Οι παράγωγοι ευστάθειάς του είναι $x_w = 0.04030$, $x_q = -0.2261$, $x_v = -0.0021$, $x_p = -0.1085$, $x_r = 0$, $z_u = -0.00958$, $z_w = -0.80178$, $u_0 + z_q = 41.091$, $z_v = -0.0194$, $z_p = -0.4511$, $z_r = 0$. $m_u = 0.02710$, $m_w = 0.02884$, $m_q = -2.3408$, $m_v = 0.01037$, $m_p = 0.4102$, $m_r = 0$, $y_u = 0.00432$, $y_w = 0.014294$, $y_q = -0.1283$, $y_v = -0.1665$, $y_p = 0.19865$, $y_r - u_0 = -40.686$, $l_u = -0.03732$, $l_w = 0.23444$, $l_q = -1.9960$, $l_v = -0.1633$, $l_p = -10.536$, $l_r = -0.2864$, $n_u = -0.02580$, $n_w = -0.002391$, $n_q = -0.0885$, $n_v = 0.1013$, $n_p = -1.7934$, $n_r = -1.3488$, $x_{\delta_p} = -7.6327$, $x_{\delta_s} = 4.3447$, $x_{\delta_A} = 2.0578$, $x_{\delta_r} = 0$, $z_{\delta_p} = -30.891$, $z_{\delta_s} = -117.79$, $z_{\delta_A} = 0$, $z_{\delta_r} = 0$, $m_{\delta_p} = 28.54$, $m_{\delta_s} = 14.078$, $m_{\delta_A} = -5.8552$, $m_{\delta_r} = 0$, $l_{\delta_p} = -25.031$, $l_{\delta_s} = 32.071$, $l_{\delta_A} = -153.23$, $l_{\delta_r} = -1.3416$, $n_{\delta_p} = -5.9564$, $n_{\delta_s} = 13.947$, $n_{\delta_A} = -26.807$, $n_{\delta_r} = -18.069$ και με $\theta_0 = 0.0215$, $\phi_0 = -0.0328$. Οι συνθήκες του θεωρήματος 3.1 ικανοποιούνται. Θέτοντας τις επιλογές $(\lambda_1)_0 = 10$, $(\lambda_2)_1 = 35$, $(\lambda_2)_0 = 300$, $(\lambda_3)_1 = 30$, $(\lambda_3)_0 = 200$, $(\lambda_4)_0 = 15$, στις (5.1 και 2), οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι στα σημεία -10 , -15 και -20 . Εκλέγοντας τα $(p_1)_0^{-1} = 10$, $(p_2)_0^{-1} = 300$, $(p_3)_0^{-1} = 200$ και $(p_4)_0^{-1} = 15$, οι αποκρίσεις των καταστάσεων και των εσωτερικών εισόδων του κλειστού συστήματος, ως προς την τοποθέτηση της γωνίας κύλισης ($\phi = \frac{\pi}{180}$), αλλά και ως προς την τοποθέτηση της γωνίας προένευσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 1-24. Οπως φαίνεται στα σχήματα η λειτουργία του διανύσματος κατάστασης είναι απολύτως ικανοποιητική απ' τη στιγμή που ο χρόνος ανόρθωσης όλων των μεταβλητών εξόδου είναι πολύ μικρός και οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν πιστά τις εξωτερικές εντολές. Για να ελέγξουμε την λειτουργία του ελεγκτή στο μη γραμμικό σύστημα εφαρμόζουμε τον νόμο ελέγχου στο μη γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση 2.6. Το κλειστό σύστημα που προκύπτει είναι σχεδόν αποσυσζευγμένο με ικανοποιητική λειτουργία.

6.7 Συμπεράσματα

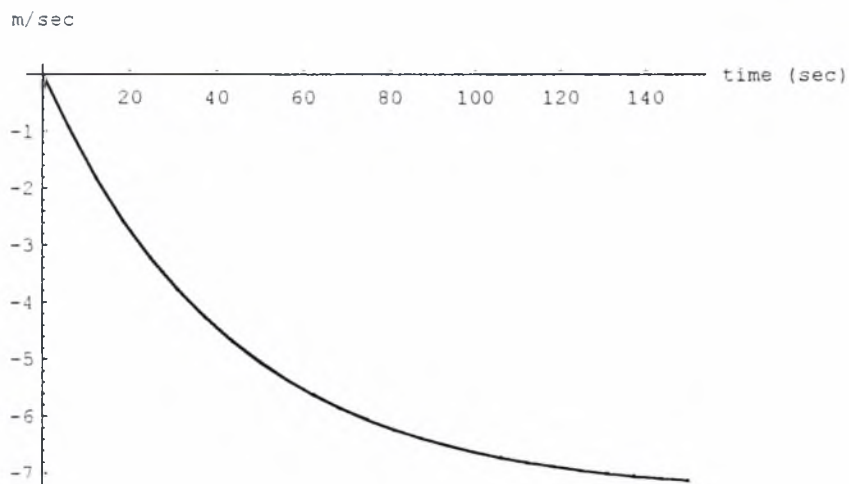
Για ένα ελικόπτερο το οποίο εκτελεί πτήση, με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης, την κατακόρυφη ταχύτητα, την γωνία κύλισης και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας, εφαρμόζεται επιτυχώς η τεχνική αποσυσζευξης εισόδου-εξόδου. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι επιλύσιμο το πρόβλημα καθορίζονται πλήρως σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτερου, που ανταποκρίνονται στην αεροδυναμική του

έλικα (Θεώρημα 6.3.1). Ο γενικός τύπος των πινάκων του ελεγκτή, που οδηγεί σε αποσύζευξη έχουν αναλυτικά εξαχθεί στην παράγραφο 4. Έχει επίσης εξαχθεί ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος κλειστού βρόχου. Η αποσύζευξη με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση αποδείχθηκε ότι υλοποιούνται υπό τις συνθήκες της επιλυσιμότητας, και δύο ανισοτήτων που περιέχουν τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου. Η τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και η κατακόρυφη μετατόπιση παρουσιάζονται μέσω προσομοίωσης.

Τοποθέτηση της γωνίας προένευσης

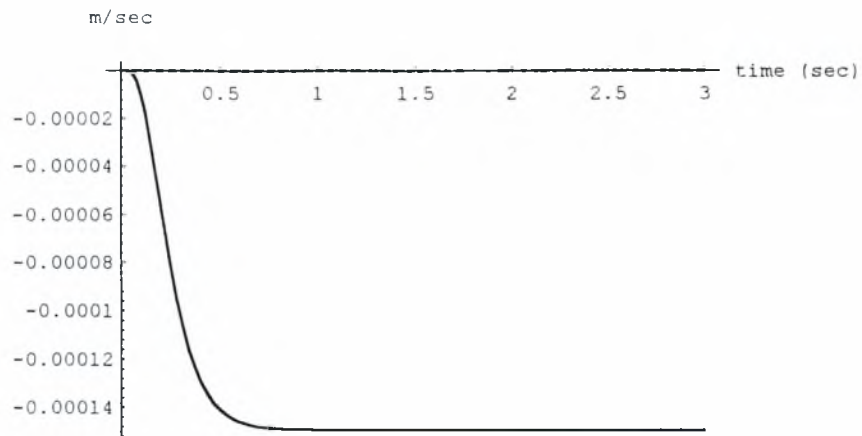


(a)

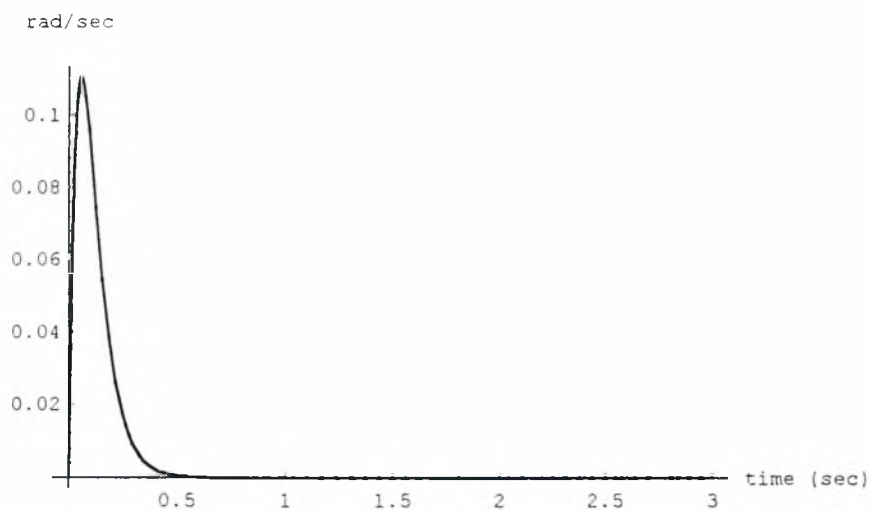


(b)

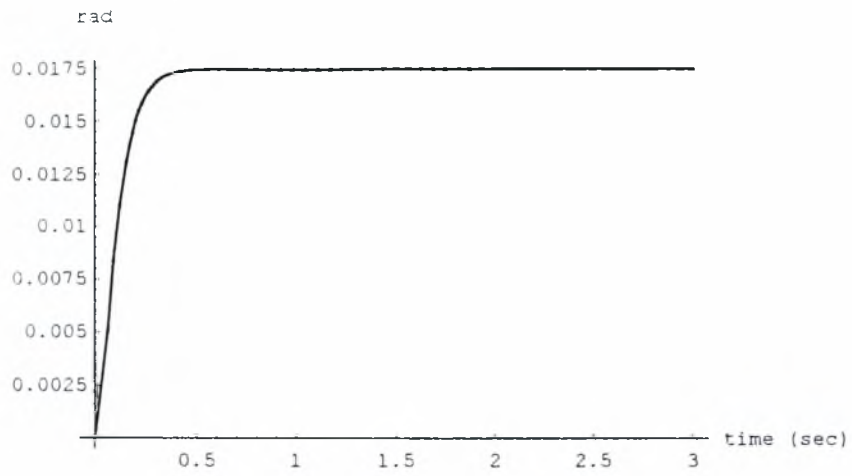
Σχήμα 6.1: Απόκριση οριζόντιας ταχύτητας για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
(οπτικά ταυτιζόμενες)
(a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
(b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]



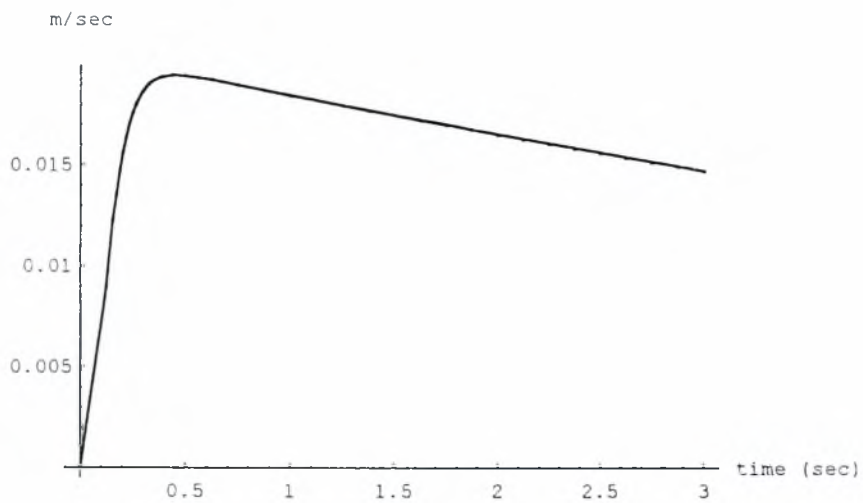
Σχήμα 6.2: Απόκριση της κατακόρυφης ταχύτητας για τοποθέτηση γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή, ταυτιζόμενη με τον άξονα του χρόνου) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)



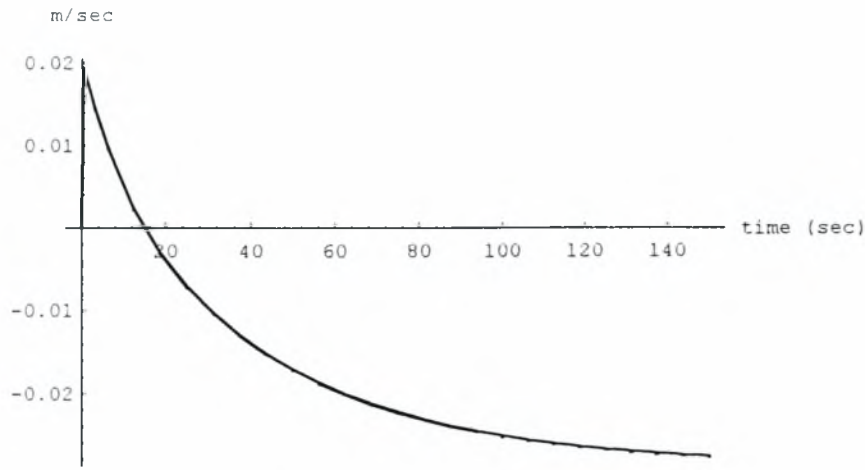
Σχήμα 6.3: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



Σχήμα 6.4: Απόκριση της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)

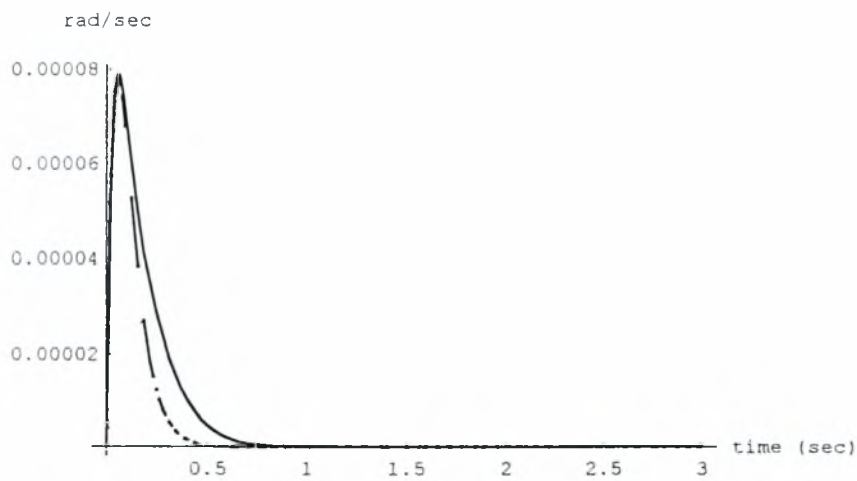


(a)

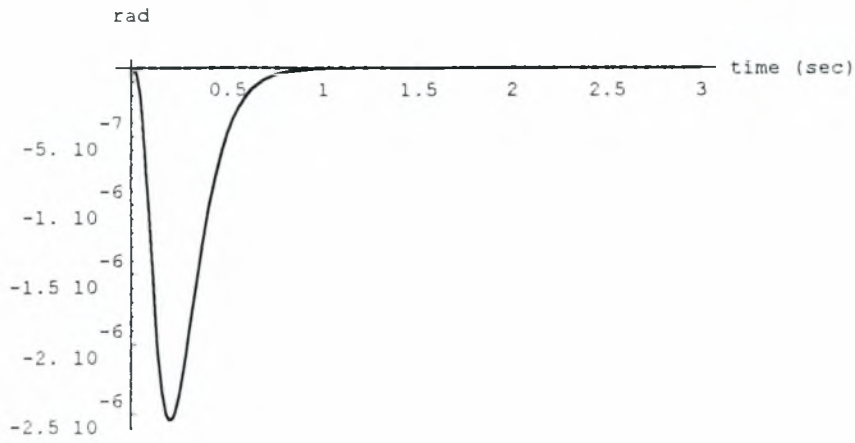


(b)

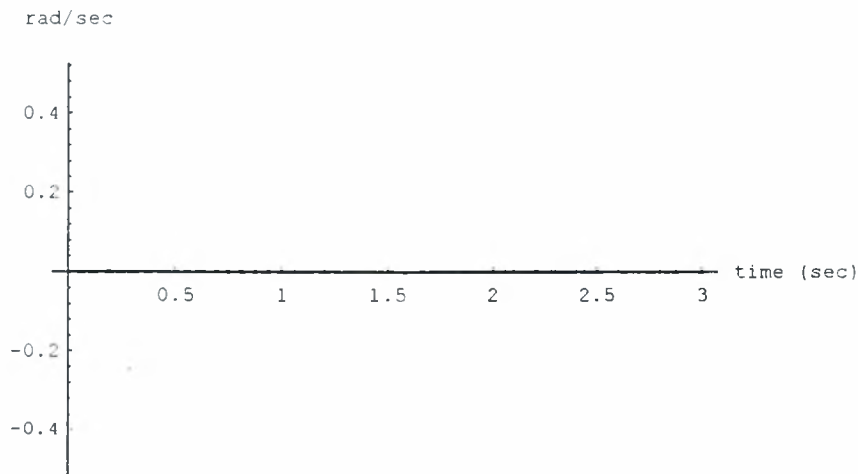
Σχήμα 6.5: Απόκριση της ταχύτητας στον άξονα y για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]



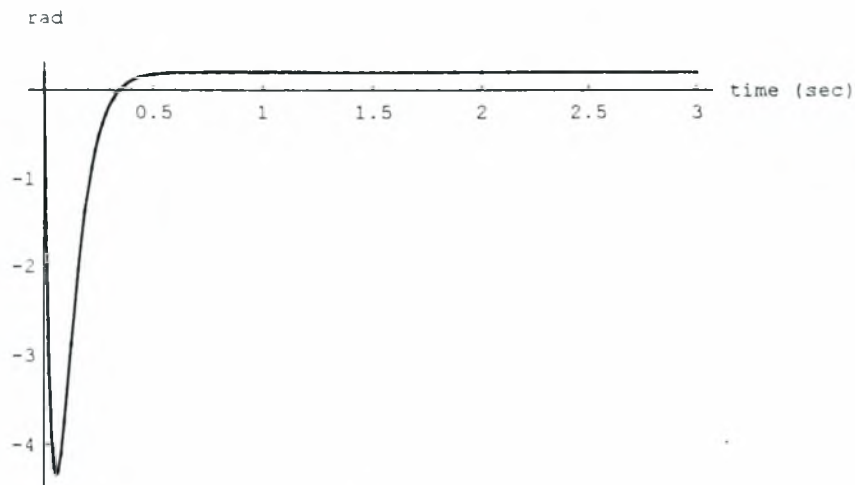
Σχήμα 6.6: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας κύλισης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)



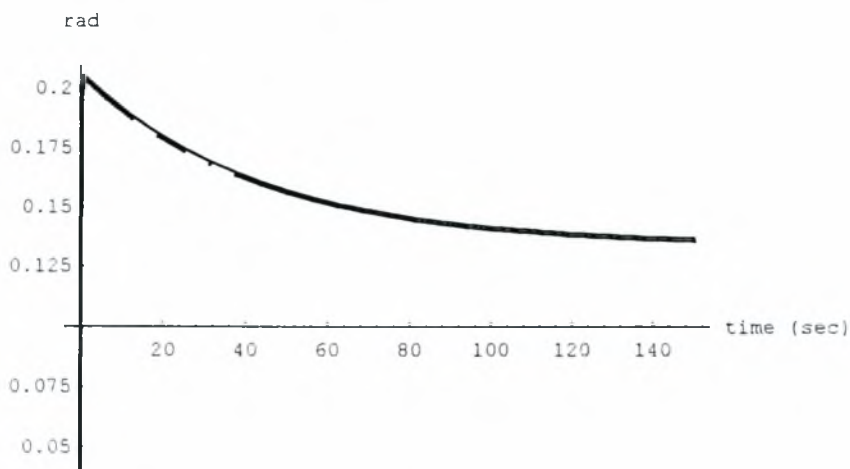
Σχήμα 6.7: Απόκριση της γωνίας κύλισης για τοποθέτηση γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 Μεγέθυνση των διαφορών δύο οπτικά ταυτιζόμενων
 γραμμών, μέχρι κλίμακας εμφανιζόμενου σφάλματος



Σχήμα 6.8: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας για τοποθέτηση
 της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)

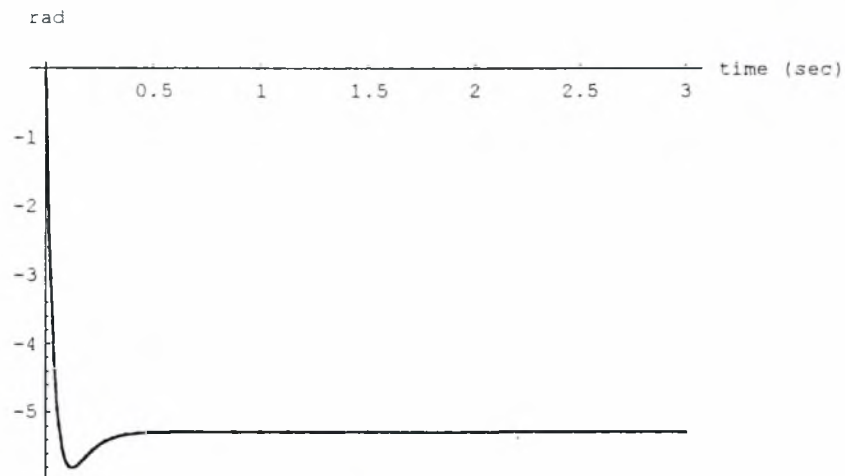


(a)

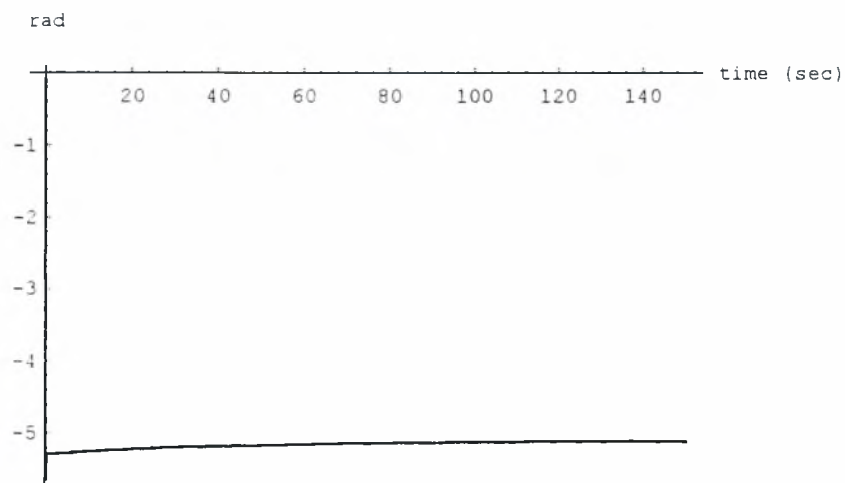


(b)

Σχήμα 6.9: Απόκριση διαμήκους κυκλικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

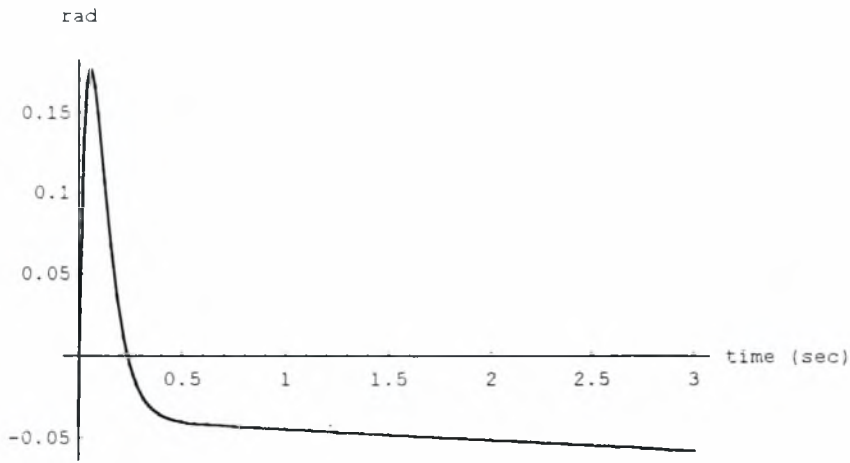


(a)

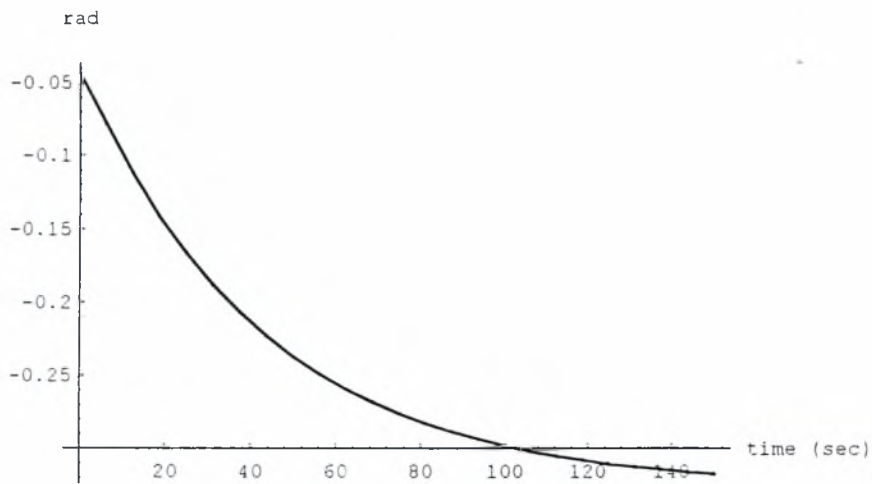


(b)

Σχήμα 6.10: Απόκριση συλλογικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]

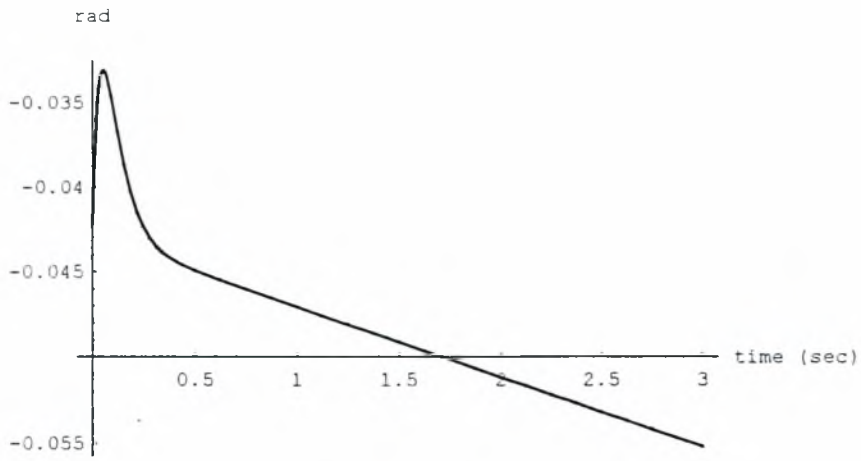


(a)

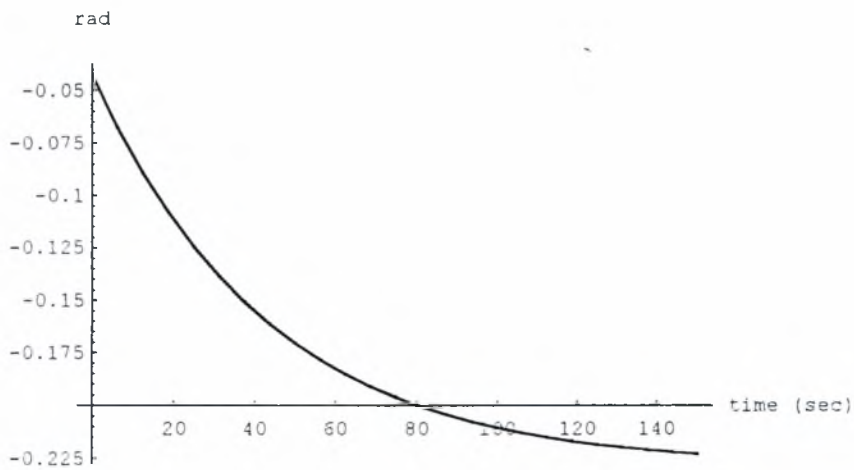


(b)

Σχήμα 6.11: Απόκριση εγκάρσιου κυκλικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας προένευσης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)



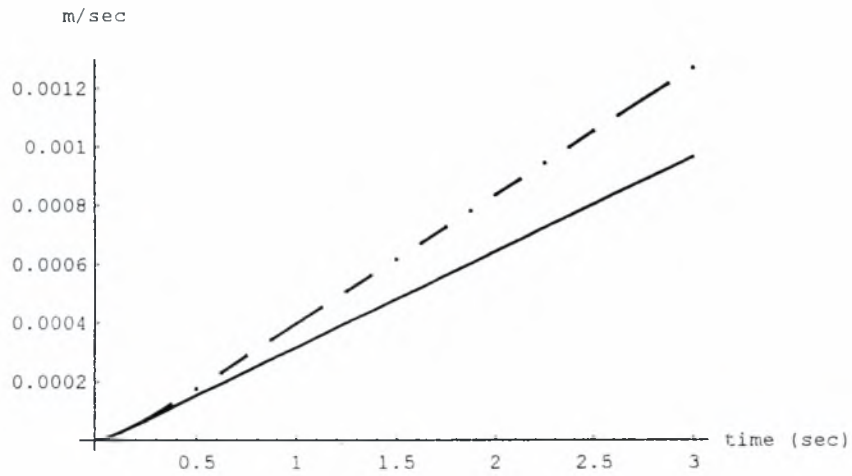
(a)



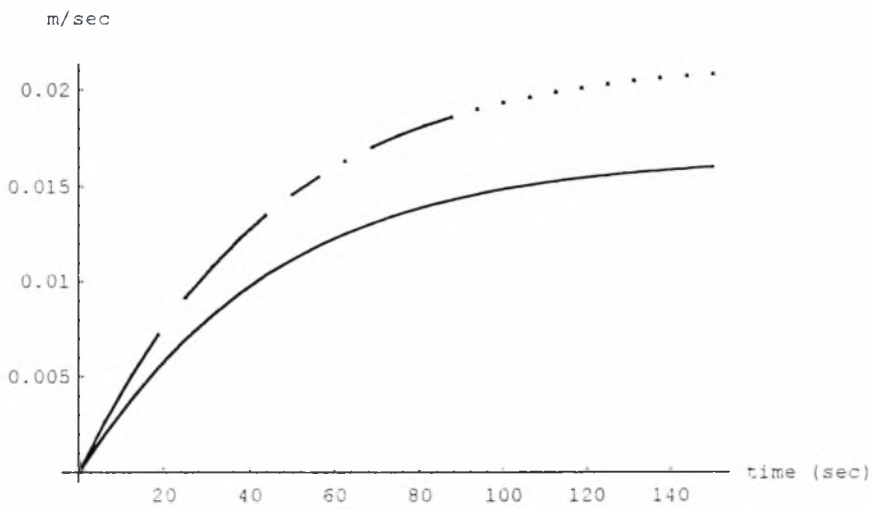
(b)

Σχήμα 6.12: Απόκριση συλλογικού βήματος οπίσθιου έλικα για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

Τοποθέτηση της γωνίας κύλισης

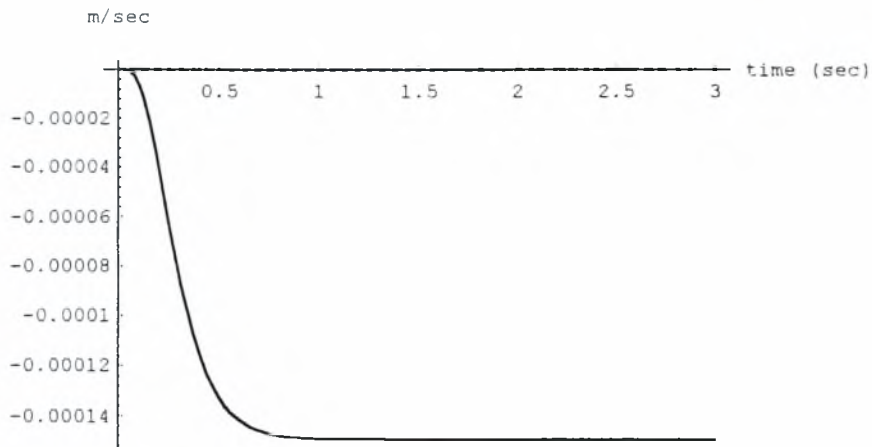


(a)

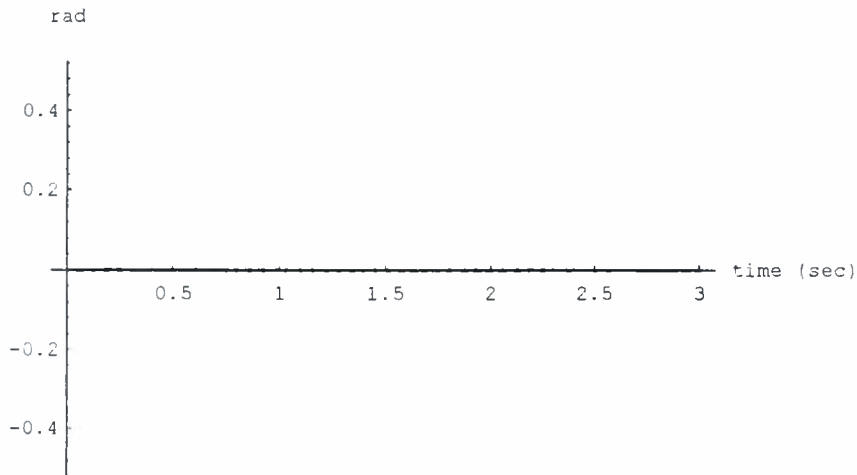


(b)

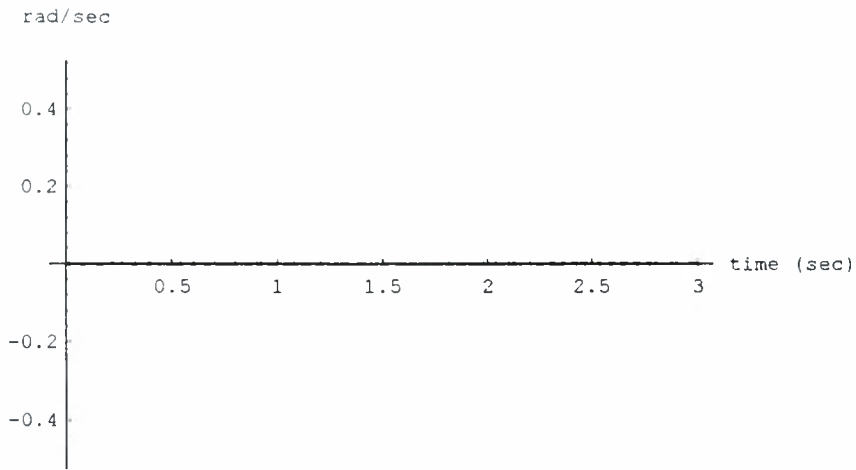
Σχήμα 6.13: Απόκριση οριζόντιας ταχύτητας για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
μη γραμμικό μοντέλο (συνεχής γραμμή)
(a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
(b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]



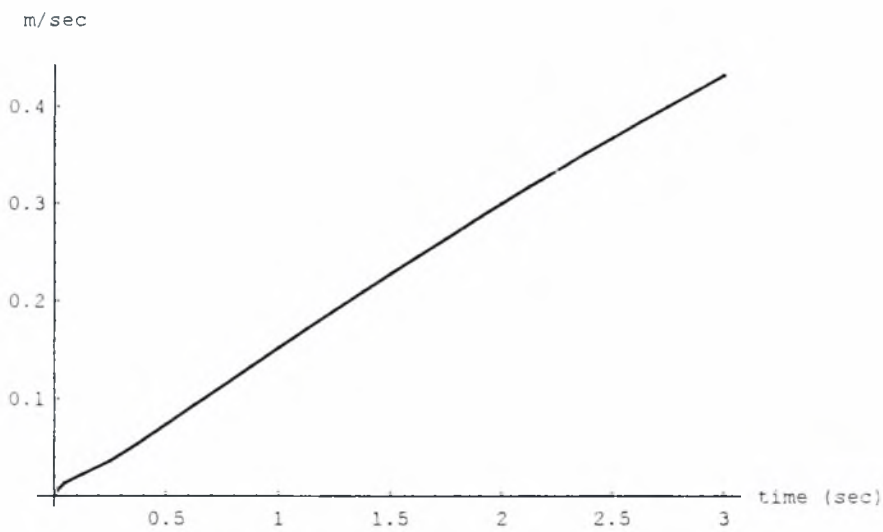
Σχήμα 6.14: Απόκριση της κατακόρυφης ταχύτητας για τοποθέτηση γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή,
 ταυτιζόμενη με τον άξονα του χρόνου)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)



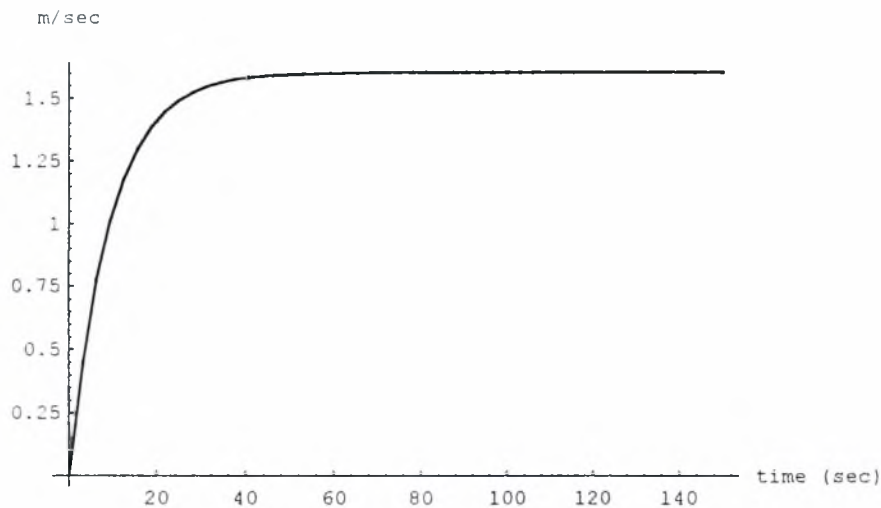
Σχήμα 6.15: Απόκριση της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)



Σχήμα 6.16: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας προένευσης για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)

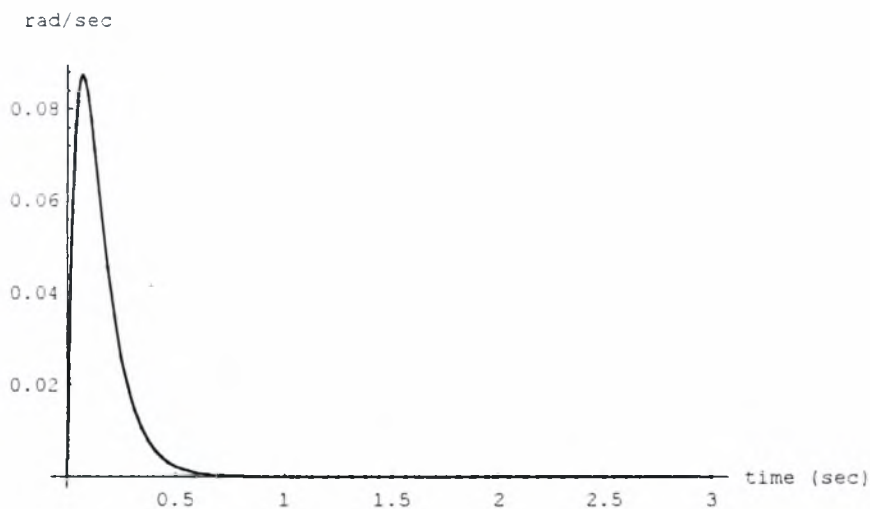


(a)

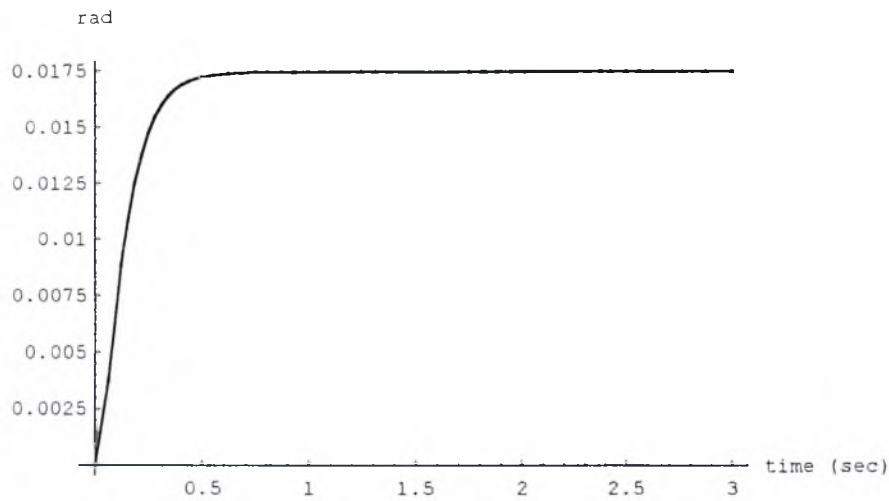


(b)

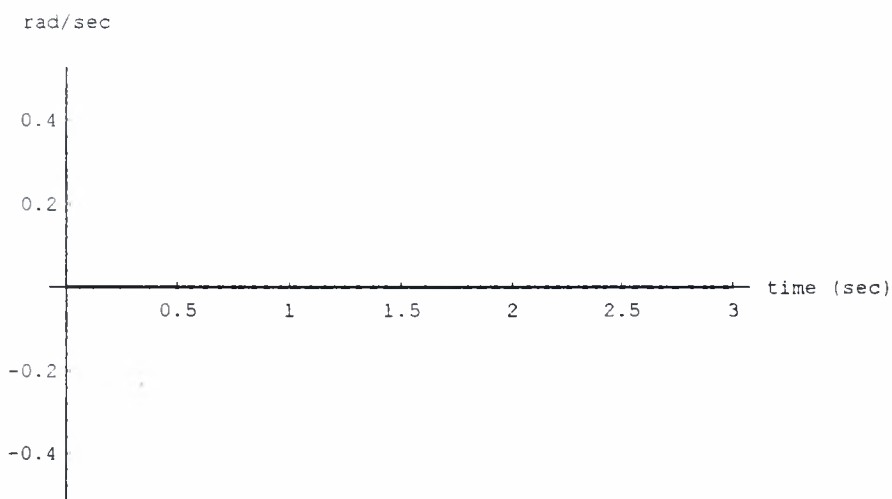
Σχήμα 6.17: Απόκριση της ταχύτητας στον άξονα y για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]



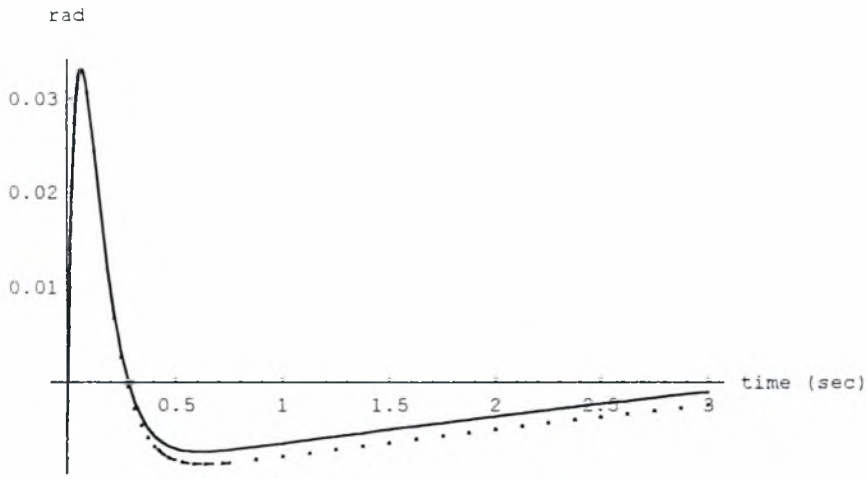
Σχήμα 6.18: Απόκριση του ρυθμού μεταβολής της γωνίας κύλισης για τοποθέτηση γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)



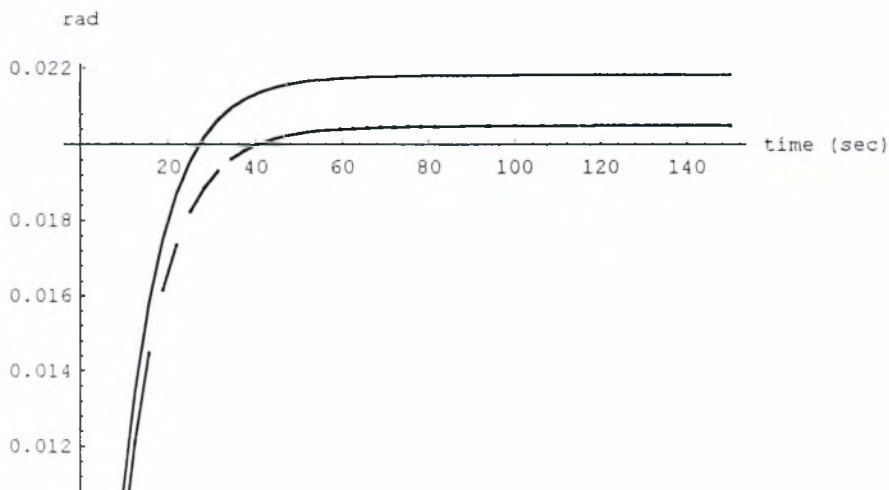
Σχήμα 6.19: Απόκριση της γωνίας κύλισης για τοποθέτηση γωνίας κύλισης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες)



Σχήμα 6.20: Απόκριση της γωνίας πλαγιοπορείας για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή) μη γραμμικό (συνεχής γραμμή) (οπτικά ταυτιζόμενες με τον άξονα του χρόνου)

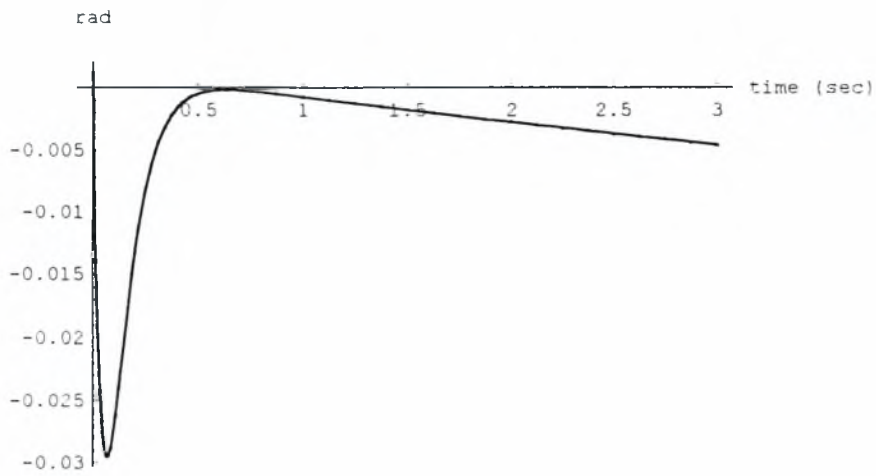


(a)

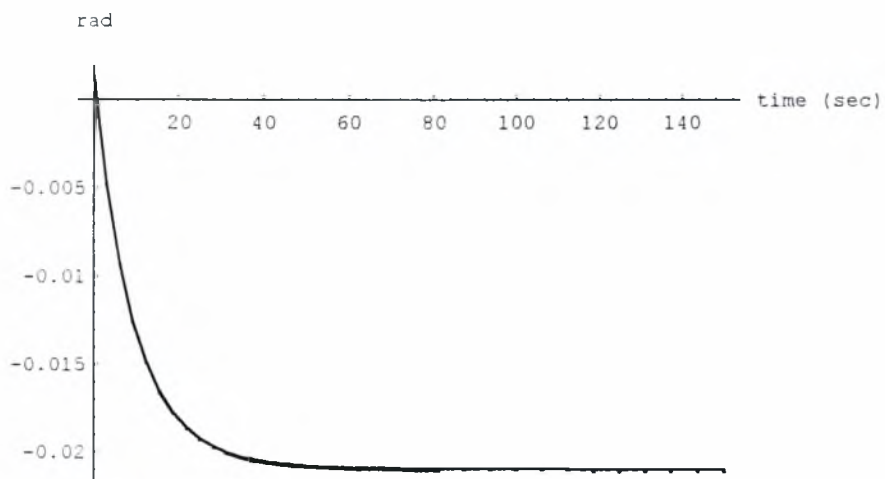


(b)

Σχήμα 6.21: Απόκριση διαμήκους κυκλικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

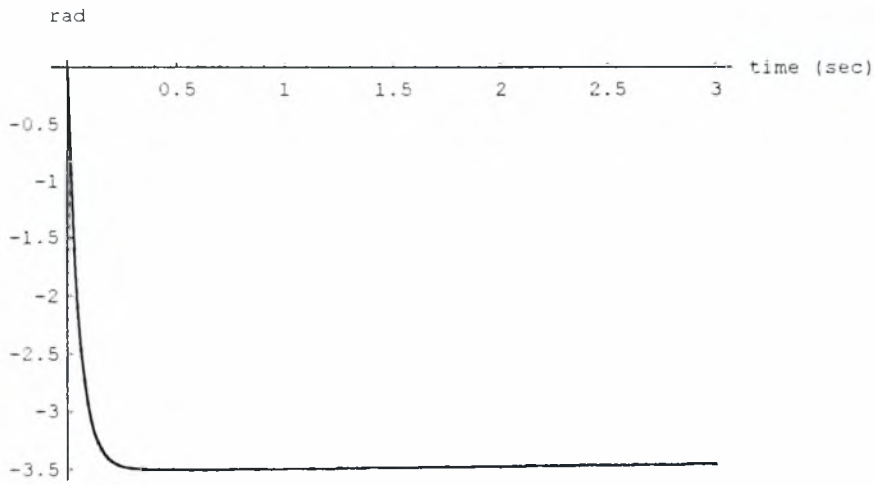


(a)

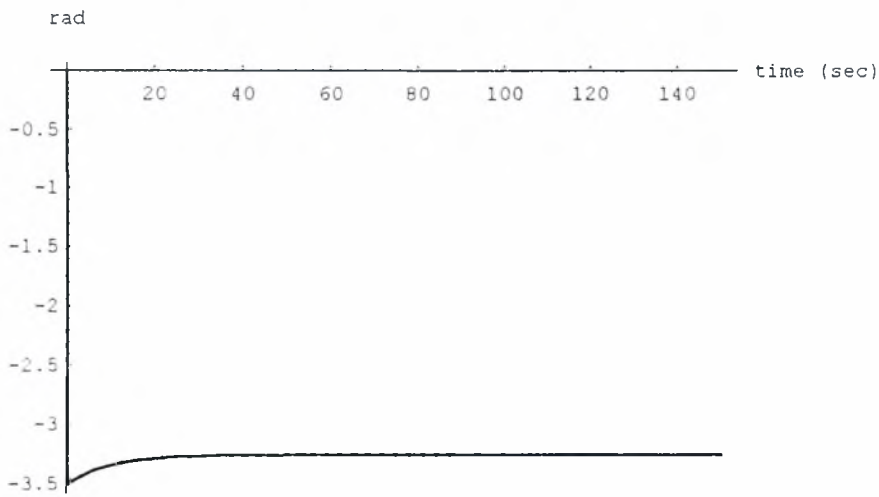


(b)

Σχήμα 6.22: Απόκριση συλλογικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

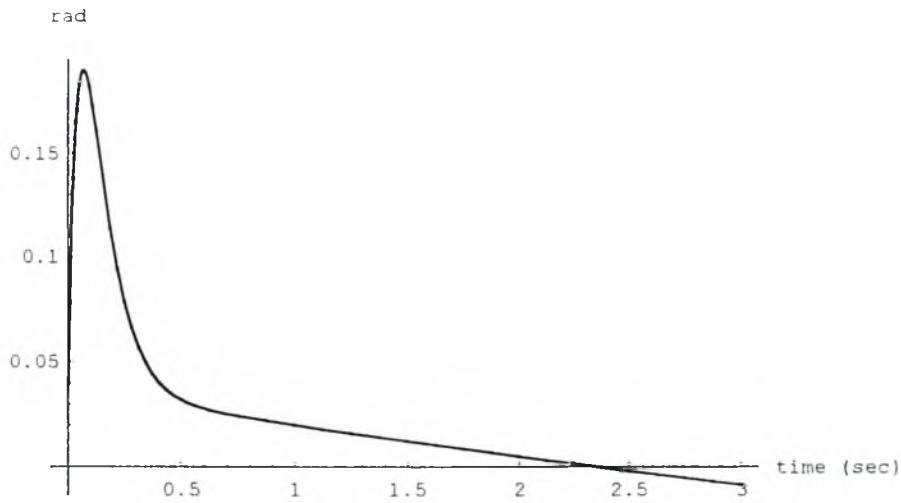


(a)

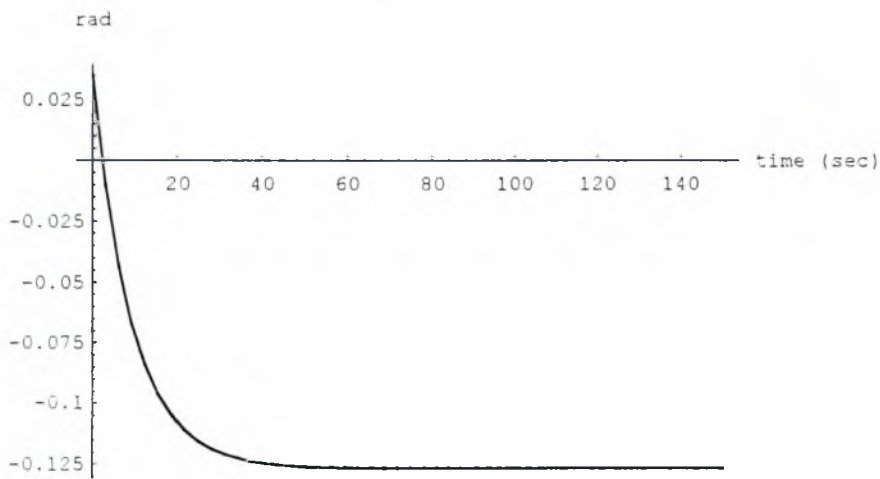


(b)

Σχήμα 6.23: Απόκριση εγκάρσιου κυκλικού βήματος για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]



(a)



(b)

Σχήμα 6.24: Απόκριση συλλογικού βήματος οπίσθιου έλικα για τοποθέτηση της γωνίας κύλισης
 γραμμικό μοντέλο (διακεκομμένη γραμμή)
 μη γραμμικό (συνεχής γραμμή)
 (οπτικά ταυτιζόμενες)
 (a) Απόκριση για t στο $[0, 3]$ [sec]
 (b) Απόκριση για t στο $[0, 150]$ [sec]
 Η ταλάντωση στην αρχή του χρόνου δεν είναι ορατή στο (b)

Τελικά Συμπεράσματα και Προτάσεις

7.1 Τελικά συμπεράσματα

Από τα αποτελέσματα της Διπλωματικής εργασίας που παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, προκύπτουν τα εξής τελικά συμπεράσματα:

A) Αναφορικά με τον έλεγχο αποκοπής αλληλεπιδράσεων για την ευθεία και οριζόντια πτήση ελικοπτέρου, με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης και την κατακόρυφη ταχύτητα, εφαρμόζεται επιτυχώς η τεχνική αποσύζευξης εισόδου-εξόδου. Ειδικότερα:

1. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι επιλύσιμο το πρόβλημα καθορίζονται πλήρως σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου, που αναφέρονται στην αεροδυναμική του έλικα (Θεώρημα 4.3.1).
2. Ο γενικός τύπος των πινάκων του ελεγκτή, που οδηγεί σε αποσύζευξη έχει προσδιοριστεί αναλυτικά στην παράγραφο 4.4.
3. Έχει επίσης εξαχθεί ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος κλειστού βρόχου.
4. Η αποσύζευξη με ταυτόχρονη ευσταθειοποίηση αποδείχθηκε ότι είναι επιτεύξιμη υπό τις συνθήκες της επιλυσιμότητας της αποσύζευξης, και μιας ανισότητας που περιέχει τις παραγώγους ευστάθειας του έλικα του ελικοπτέρου.
5. Η τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και η κατακόρυφη μετάφραση εκτελούνται επιτυχώς, όπως δείχνεται με προσομοίωση.

B) Αναφορικά με τον έλεγχο πτήσης για την διαμήκη κίνηση του ελικοπτέρου, η γωνία προένευσης και η κατακόρυφη ταχύτητα του ελικοπτέρου, ελέγχονται ανεξάρτητα μέσω ενός στατικού νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης.

1. Το σύνολο των παραγώγων ευστάθειας του συστήματος, για τις οποίες η απαίτηση για την υλοποίηση της αποσύζευξης ικανοποιείται, έχει θεμελιωθεί.

2. Η γενική μορφή των πινάκων του ελεγκτή που οδηγεί σε αποσύζευξη προσδιορίζεται σε αναλυτική μορφή. Η μορφή αυτή αποδείχθηκε ότι εξαρτάται μόνο από αυθαίρετες παραμέτρους και παραγώγους ευστάθειας.

3. Έχει επίσης οριστεί αναλυτικά η γενική μορφή του αποσυζευγμένου κλειστού συστήματος, καθώς και η συνθήκη των παραγώγων ευστάθειας, η οποία πρέπει να ικανοποιείται για την υλοποίηση της αποσύζευξης με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, όλες οι παραπάνω έννοιες έχουν εξετασθεί για την περίπτωση μη ενεργού περιστρεφόμενου δίσκου. Τα αποτελέσματα στις περιπτώσεις ενεργού και μη ενεργού περιστρεφόμενου δίσκου μπορούν εύκολα να ομαδοποιηθούν, με μία ιεραρχική δομή φακέλου πτήσης. Η ικανοποιητική απόκριση του κλειστού συστήματος φαίνεται από την προσομοίωση ενός μοντέλου ελικοπτέρου το οποίο περιέχει μη γραμμικά στοιχεία.

Γ. Αναφορικά με τον έλεγχο πτήσης για την συζευγμένη διαμήκη και εγκάρσια κίνηση του ελικοπτέρου, με μεταβλητές εξόδου την γωνία προένευσης, την κατακόρυφη ταχύτητα, την γωνία κύλισης, και τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας πλαγιοπορείας, εφαρμόζεται επιτυχώς η τεχνική αποσύζευξης εισόδου-εξόδου. Ειδικότερα:

1. Εξάγονται σε όρους των παραγώγων ευστάθειας του ελικοπτέρου οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε το πρόβλημα της αποσύζευξης εισόδου-εξόδου να είναι επιλύσιμο.

2. Εξάγεται επίσης η αναλυτική μορφή του γενικού τύπου των πινάκων του ελεγκτή που οδηγεί σε αποσύζευξη, καθώς και ο γενικός τύπος της συνάρτησης μεταφοράς του αποσυζευγμένου συστήματος κλειστού βρόχου.

3. Η αποσύζευξη με ταυτόχρονη ευσταθιοποίηση αποδείχθηκε ότι υλοποιείται υπό τις συνθήκες της επιλυσιμότητας του ανεξάρτητου ελέγχου, και μιας ανισότητας που περιέχει τις παραγώγους ευστάθειας του ελικοπτέρου.

4. Η τοποθέτηση της γωνίας προένευσης και η τοποθέτηση της γωνίας κύλισης αποδεικνύονται επιτυχείς ελιγμοί, με χρήση των παραπάνω αποτελεσμάτων. Προσομοίωση εκτελείται για γραμμικό και μη γραμμικό μοντέλο.

7.2 Προτάσεις

Ως συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, προτείνονται τα εξής:

1. Η επέκταση των παραπάνω αποτελεσμάτων, για την περίπτωση όπου οι ενεργοποιητές δεν αποκρίνονται τέλεια (συνάρτηση μεταφοράς μονάδα), αλλά παρουσιάζουν δυναμικό όρο

με ταυτόχρονη τριβή. Η κατηγορία αυτή ενεργοποιητών αναμένεται να έχει τελικά θετική επίδραση στην επιλυσιμότητα του ανεξάρτητου ελέγχου σε διαφορετικές συνθήκες πτήσης.

2. Η μελέτη των μεταβολών της ατμοσφαιρικής πυκνότητας σαν παράγοντας μεταβολής των παραγώγων ευστάθειας των ελικοπτέρων αναμένεται να προκύψει από τις γενικές αναλυτικές εκφράσεις των πινάκων ανατροφοδότησης.

3. Το πρόβλημα του τεχνικά ανεξάρτητου ελέγχου για σφάλματα αισθητήρα, όσον αφορά την μέτρηση του διανύσματος κατάστασης.

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ήδη υπό μελέτη.

Βιβλιογραφία- Αρθρογραφία

- [1] K. M. Sobel, and E. Y. Shapiro, "Eigenstructure assignment for design of multimode flight control systems", *IEEE Control System Magazine*, pp. 9-16, 1985.
- [2] K. M. Sobel, and E. Y. Shapiro, "A design methodology for pitch pointing flight control systems", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 8, pp. 181-187, 1985.
- [3] W. Yu and M. Sobel, "Robust eigenstructure assignment with structure space uncertainties", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, pp. 621-628, 1991.
- [4] P. L. Falb and W. A. Wolovich, "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 12, pp. 651-659, 1968 .
- [5] C. E. Lin and J. S. Young, "An improved pseudo state method for aircraft controller design", *Proc. of the ACC, Pittsburgh, Pennsylvania*, vol. 3, pp. 128-133, 1989.
- [6] K. Kanai, S. Uchicado, P. N. Nikiforuk and N. Hori, "Application of a new multivariable model-following method to decoupled flight control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 5, pp. 637-643, 1985.
- [7] D. R. Catapang, M. B. Tischler, and D. J. Biezad, "Robust crossfeed design for hovering rotorcraft", *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 4, pp. 161-180, 1994.
- [8] G. Hughes, M. A. Mannes and D. J. Murray-Smith, "Eigenstructure assignment for handling qualities in helicopter flight control law design", *Proc. of the 16th ERF, Glasgow, UK*, pp. 18-21, 1990.
- [9] M. Ekbland, "Reduced order modelling and controller design for a high performance helicopter", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, pp. 439-445, 1990.
- [10] W. L. Garrad, E. Low and S. Prouty, "Design of attitude and rate command for helicopter using eigenstructure assignment", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, pp. 783-791, 1989.
- [11] M. G. Skarpetis and F. N. Koumboulis, "Decoupling of the Longitudinal Modes of Advanced Aircraft", *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 19, pp. 1184-1186, 1996.
- [12] W. Johnson, *Helicopter Theory*, Dover Publications, Inc, New York, 1980.
- [13] W. Z. Stepniewski and C. N. Keys, *Rotary-wing aerodynamics*, Dover Publications, Inc, New York, 1984.
- [14] P. N. Paraskevopoulos and F. N. Koumboulis, "A new approach to the decoupling problem of linear time invariant systems", *J. of the Franklin Institute.*, vol. 329, pp. 347-369, 1992.
- [15] R.C.Nelson, *Flight stability and automatic control*, Mc Graw-Hill International editions, 1989
- [16] E.H.J. Pallett, *Automatic Flight Control*, (third edition)
- [17] William L. Garrard, Eicher Low, and Scott Prouty, "Design of attitude and rate command systems for helicopters using eigenstructure assignment", *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol.12, No.6, pp. 783-791, Nov.-Dec. 1989

- [18] Mark D. Takahashi, “ H_∞ Helicopter Flight Control Law Design with and without Rotor State Feedback, *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol.17, No.6, pp.1245-1251 Nov.-Dec. 1994
- [19] A.J. Fossard, Helicopter Control Law based on sliding Mode with Model Following, *Int. Journal of Control*, vol.57, No.5, pp.1221-1235, 1993
- [20] Pascale Bendotti, John C. Morris, “Robust Hover Control for a model Helicopter”, *American Control Conference*, WM7-1:15, pp.682-687, 1994

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας σε MATHEMATICA 2.1, για τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του κεφαλαίου 6.

gr:=0.0215415
f:=-0.0328
f0:=0
Y0:=0
p0:=0
q0:=0
r0:=0
w0:=0
v0:=0
u0:=80*(1852/3600)
g:=9.81

xu:=-0.03220
xw:=0.04030
xq:=-0.2261
xv:=-0.0021
xp:=-0.1085
xr:=0

zu:=-0.00958
zw:=-0.80178
zq:=41.091-u0
zv:=-0.0194
zp:=-0.4511
zr:=0

mu:=0.02710
mw:=0.02884
mq:=-2.3408
mv:=0.01037
mp:=0.4102
mr:=0

yu:=0.00432
yw:=0.014294
yq:=-0.1283
yv:=-0.1665
yp:=0.19865
yr:=u0-40.686

lu:=-0.03732
lw:=0.23444
lq:=-1.9960
lv:=-0.1633
lp:=-10.536
lr:=-0.2864

nu:=-0.02580
nw:=0.002391
nq:=-0.0885
nv:=0.1013
np:=-1.7934
nr:=-1.3488

```

xdth:=4.3447
xdb:=-7.6327
xda:=2.0578
xdt:=0
zdth:=-117.79
zdb:=-30.891
zda:=0
zdt:=0
mdth:=14.078
mdb:=28.54
mda:=-5.8552
mdt:=0
ydth:=1.4985
ydb:=-1.5282
yda:=-9.3201
ydt:=6.7038
ldth:=32.071
ldb:=-25.031
lda:=-153.23
ldt:=-1.3416
ndth:=13.947
ndb:=-5.9564
nda:=-26.807
ndt:=-18.069

```

```

A:={{xu, xw-q0, xq-w0,-g Cos[gr], xv+r0, xp,0, xr+v0},
{zu+q0, zw, zq+u0,-g Sin[gr] Cos[f], zv-p0, zp-v0,
-g Cos[gr] Sin[f], zr}, {mu, mw, mq, 0, mv, mp, 0, mr},
{0, 0, Cos[f], 0, 0, 0, -(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f], -Sin[f]},
{yu-r0, yw+p0, yq,-g Sin[gr] Sin[f], yv, yp+w0,
g Cos[gr] Cos[f], yr-u0},
{lu, lw, lq, 0, lv, lp, 0, lr},
{0, 0, Sin[f]*Tan[gr], Sec[gr]*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f] + f0*Sin[gr] -
p0*Sin[gr]), 0, 1, Sec[gr]*
(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]), Cos[f]*Tan[gr]},
{nu, nw, nq, 0, nv, np, 0, nr}}

```

```

B:={{xdb, xdth, xda, xdt}, {zdb, zdth, zda, zdt},
{mdb, mdth, mda, mdt}, {0, 0, 0, 0},
{ydb, ydth, yda, ydt}, {ldb, ldth, lda, ldt},
{0, 0, 0, 0}, {ndb, ndth, nda, ndt}}

```

```

CC:={{0,1,0,0,0,0,0,0},{0,0,0,1,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,0,1,0},
{0,0,0,0,0,0,0,1}}

```

```

G:=Inverse[BB].Inverse[P0]
CC1:=CC[[1]]
CC2:=CC[[2]]
CC3:=CC[[3]]
CC4:=CC[[4]]
CCC:={CC1,CC2.A,CC3.A,CC4}
BB:=CCC.B

```

```

M:={{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, Cos[f], 0, 0, 0, 0, 0},
  -(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f], -Sin[f]},
{0, 0, Sin[f]*Tan[gr], Sec[gr]*
  (r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f] + f0*Sin[gr] -
  p0*Sin[gr]), 0, 1, Sec[gr]*
  (q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]), Cos[f]*Tan[gr]},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}}

d:=Det[BB]

```

$$D51 := (y d t h * (l d t * m d b * n d a * C o s [f] - l d b * m d t * n d a * C o s [f] - l d t * m d a * n d b * C o s [f] + l d a * m d t * n d b * C o s [f] + l d b * m d a * n d t * C o s [f] - l d a * m d b * n d t * C o s [f])) / d +$$

$$(y d t * (-l d t h * m d b * n d a * C o s [f]) + l d b * m d t h * n d a * C o s [f] + l d t h * m d a * n d b * C o s [f] - l d a * m d t h * n d b * C o s [f] - l d b * m d a * n d t h * C o s [f] + l d a * m d b * n d t h * C o s [f])) / d +$$

$$(y d b * (l d t h * m d t * n d a * C o s [f] - l d t * m d t h * n d a * C o s [f] - l d t h * m d a * n d t * C o s [f] + l d a * m d t h * n d t * C o s [f] + l d t * m d a * n d t h * C o s [f] - l d a * m d t * n d t h * C o s [f])) / d +$$

$$(y d a * (-l d t h * m d t * n d b * C o s [f]) + l d t * m d t h * n d b * C o s [f] + l d t h * m d b * n d t * C o s [f] - l d b * m d t h * n d t * C o s [f] - l d t * m d b * n d t h * C o s [f] + l d b * m d t * n d t h * C o s [f])) / d$$

$$D52 := (y d t h * (l d t * n d b * z d a - l d b * n d t * z d a - l d t * n d a * z d b + l d a * n d t * z d b + l d b * n d a * z d t - l d a * n d b * z d t + m d t * n d b * z d a * S i n [f] * T a n [g r] - m d b * n d t * z d a * S i n [f] * T a n [g r] - m d t * n d a * z d b * S i n [f] * T a n [g r] + m d a * n d t * z d b * S i n [f] * T a n [g r] + m d b * n d a * z d t * S i n [f] * T a n [g r] - m d a * n d b * z d t * S i n [f] * T a n [g r])) / d +$$

$$(y d t * (-l d t h * n d b * z d a) + l d b * n d t h * z d a + l d t h * n d a * z d b - l d a * n d t h * z d b - l d b * n d a * z d t h + l d a * n d b * z d t h - m d t h * n d b * z d a * S i n [f] * T a n [g r] + m d b * n d t h * z d a * S i n [f] * T a n [g r] + m d t h * n d a * z d b * S i n [f] * T a n [g r] - m d a * n d t h * z d b * S i n [f] * T a n [g r] - m d b * n d a * z d t h * S i n [f] * T a n [g r] + m d a * n d b * z d t h * S i n [f] * T a n [g r])) / d +$$

$$(y d b * (l d t h * n d t * z d a - l d t * n d t h * z d a - l d t h * n d a * z d t + l d a * n d t h * z d t + l d t * n d a * z d t h - l d a * n d t * z d t h + m d t h * n d t * z d a * S i n [f] * T a n [g r] - m d t * n d t h * z d a * S i n [f] * T a n [g r] - m d t h * n d a * z d t * S i n [f] * T a n [g r] + m d a * n d t h * z d t * S i n [f] * T a n [g r] + m d t * n d a * z d t h * S i n [f] * T a n [g r] - m d a * n d t * z d t h * S i n [f] * T a n [g r])) / d +$$

$$(y d a * (-l d t h * n d t * z d b) + l d t * n d t h * z d b + l d t h * n d b * z d t - l d b * n d t h * z d t - l d t * n d b * z d t h + l d b * n d t * z d t h - m d t h * n d t * z d b * S i n [f] * T a n [g r] + m d t * n d t h * z d b * S i n [f] * T a n [g r] + m d t h * n d b * z d t * S i n [f] * T a n [g r] - m d b * n d t h * z d t * S i n [f] * T a n [g r] - m d t * n d b * z d t h * S i n [f] * T a n [g r] + m d b * n d t * z d t h * S i n [f] * T a n [g r])) / d$$

$$D53 := (y d t h * (-m d t * n d b * z d a * C o s [f]) + m d b * n d t * z d a * C o s [f] + m d t * n d a * z d b * C o s [f] - m d a * n d t * z d b * C o s [f] - m d b * n d a * z d t * C o s [f] + m d a * n d b * z d t * C o s [f])) / d +$$

$$(y d t * (m d t h * n d b * z d a * C o s [f] - m d b * n d t h * z d a * C o s [f] - m d t h * n d a * z d b * C o s [f] + m d a * n d t h * z d b * C o s [f] + m d b * n d a * z d t h * C o s [f] - m d a * n d b * z d t h * C o s [f])) / d +$$

$$(y d b * (-m d t h * n d t * z d a * C o s [f]) + m d t * n d t h * z d a * C o s [f] + m d t h * n d a * z d t * C o s [f] - m d a * n d t h * z d t * C o s [f] - m d t * n d a * z d t h * C o s [f] + m d a * n d t * z d t h * C o s [f])) / d +$$

$$(y d a * (m d t h * n d t * z d b * C o s [f] - m d t * n d t h * z d b * C o s [f] - m d t h * n d b * z d t * C o s [f] + m d b * n d t h * z d t * C o s [f] + m d t * n d b * z d t h * C o s [f] - m d b * n d t * z d t h * C o s [f])) / d$$

$$D54 := (y d t h * (-l d t * m d b * z d a * C o s [f]) + l d b * m d t * z d a * C o s [f] + l d t * m d a * z d b * C o s [f] - l d a * m d t * z d b * C o s [f] - l d b * m d a * z d t * C o s [f] + l d a * m d b * z d t * C o s [f] + l d t * n d b * z d a * S i n [f] - l d b * n d t * z d a * S i n [f] - l d t * n d a * z d b * S i n [f] + l d a * n d t * z d b * S i n [f] + l d b * n d a * z d t * S i n [f] - l d a * n d b * z d t * S i n [f] + m d t * n d b * z d a * C o s [f] ^ 2 * T a n [g r] -$$

$$\begin{aligned}
D11 := & (xdt * (ldt * mdb * nda * \cos[f] - ldb * mdt * nda * \cos[f] - \\
& ldt * mda * ndb * \cos[f] + lda * mdt * ndb * \cos[f] + \\
& ldb * mda * ndt * \cos[f] - lda * mdb * ndt * \cos[f])) / d + \\
& (xdt * (- (ldth * mdb * nda * \cos[f]) + ldb * mdth * nda * \cos[f] + \\
& ldth * mda * ndb * \cos[f] - lda * mdth * ndb * \cos[f] - \\
& ldb * mda * ndth * \cos[f] + lda * mdb * ndth * \cos[f])) / d + \\
& (xdb * (ldth * mdt * nda * \cos[f] - ldt * mdth * nda * \cos[f] - \\
& ldth * mda * ndt * \cos[f] + lda * mdth * ndt * \cos[f] + \\
& ldt * mda * ndth * \cos[f] - lda * mdt * ndth * \cos[f])) / d + \\
& (xda * (- (ldth * mdt * ndb * \cos[f]) + ldt * mdth * ndb * \cos[f] + \\
& ldth * mdb * ndt * \cos[f] - ldb * mdth * ndt * \cos[f] - \\
& ldt * mdb * ndth * \cos[f] + ldb * mdt * ndth * \cos[f])) / d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D12 := & (xdt * (ldt * ndb * zda - ldb * ndt * zda - ldt * nda * zdb + \\
& lda * ndt * zdb + \\
& ldb * nda * zdt - lda * ndb * zdt + mdt * ndb * zda * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mdb * ndt * zda * \sin[f] * \tan[gr] - mdt * nda * zdb * \sin[f] \\
& * \tan[gr] + \\
& mda * ndt * zdb * \sin[f] * \tan[gr] + mdb * nda * zdt * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mda * ndb * zdt * \sin[f] * \tan[gr])) / d + \\
& (xdt * (- (ldth * ndb * zda) + ldb * ndth * zda + ldth * nda * zdb - \\
& lda * ndth * zdb - ldb * nda * zdth + lda * ndb * zdth - \\
& mdth * ndb * zda * \sin[f] * \tan[gr] + mdb * ndth * zda * \sin[f] \\
& * \tan[gr] + \\
& mdth * nda * zdb * \sin[f] * \tan[gr] - mda * ndth * zdb * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mdb * nda * zdth * \sin[f] * \tan[gr] + mda * ndb * zdth * \sin[f] \\
& * \tan[gr])) / d + \\
& (xdb * (ldth * ndt * zda - ldt * ndth * zda - ldth * nda * zdt + lda \\
& * ndth * zdt + \\
& ldt * nda * zdth - lda * ndt * zdth + mdth * ndt * zda * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mdt * ndth * zda * \sin[f] * \tan[gr] - mdth * nda * zdt * \sin[f] \\
& * \tan[gr] + \\
& mda * ndth * zdt * \sin[f] * \tan[gr] + mdt * nda * zdth * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mda * ndt * zdth * \sin[f] * \tan[gr])) / d + \\
& (xda * (- (ldth * ndt * zdb) + ldt * ndth * zdb + ldth * ndb * zdt - \\
& ldb * ndth * zdt - ldt * ndb * zdth + ldb * ndt * zdth - \\
& mdth * ndt * zdb * \sin[f] * \tan[gr] + mdt * ndth * zdb * \sin[f] \\
& * \tan[gr] + \\
& mdth * ndb * zdt * \sin[f] * \tan[gr] - mdb * ndth * zdt * \sin[f] \\
& * \tan[gr] - \\
& mdt * ndb * zdth * \sin[f] * \tan[gr] + mdb * ndt * zdth * \sin[f] \\
& * \tan[gr])) / d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D13 := & (xdt * (- (mdt * ndb * zda * \cos[f]) + mdb * ndt * zda * \cos[f] + \\
& mdt * nda * zdb * \cos[f] - mda * ndt * zdb * \cos[f] - \\
& mdb * nda * zdt * \cos[f] + mda * ndb * zdt * \cos[f])) / d + \\
& (xdt * (mdth * ndb * zda * \cos[f] - mdb * ndth * zda * \cos[f] - \\
& mdth * nda * zdb * \cos[f] + mda * ndth * zdb * \cos[f] + \\
& mdb * nda * zdth * \cos[f] - mda * ndb * zdth * \cos[f])) / d + \\
& (xdb * (- (mdth * ndt * zda * \cos[f]) + mdt * ndth * zda * \cos[f] + \\
& mdth * nda * zdt * \cos[f] - mda * ndth * zdt * \cos[f] - \\
& mdt * nda * zdth * \cos[f] + mda * ndt * zdth * \cos[f])) / d + \\
& (xda * (mdth * ndt * zdb * \cos[f] - mdt * ndth * zdb * \cos[f] - \\
& mdth * ndb * zdt * \cos[f] + mdb * ndth * zdt * \cos[f] + \\
& mdt * ndb * zdth * \cos[f] - mdb * ndt * zdth * \cos[f])) / d
\end{aligned}$$


```

d:=- (ldth*mdt*ndb*zda*cos[f]) + ldt*mdth*ndb*zda*cos[f] +
ldth*mdb*ndt*zda*cos[f] - ldb*mdth*ndt*zda*cos[f] -
ldt*mdb*ndth*zda*cos[f] + ldb*mdt*ndth*zda*cos[f] +
ldth*mdt*nda*zdb*cos[f] - ldt*mdth*nda*zdb*cos[f] -
ldth*mda*ndt*zdb*cos[f] + lda*mdth*ndt*zdb*cos[f] +
ldt*mda*ndth*zdb*cos[f] - lda*mdt*ndth*zdb*cos[f] -
ldth*mdb*nda*zdt*cos[f] + ldb*mdth*nda*zdt*cos[f] +
ldth*mda*ndb*zdt*cos[f] - lda*mdth*ndb*zdt*cos[f] -
ldb*mda*ndth*zdt*cos[f] + lda*mdb*ndth*zdt*cos[f] +
ldt*mdb*nda*zdth*cos[f] - ldb*mdt*nda*zdth*cos[f] -
ldt*mda*ndb*zdth*cos[f] + lda*mdt*ndb*zdth*cos[f] +
ldb*mda*ndt*zdth*cos[f] - lda*mdb*ndt*zdth*cos[f]

```

```

DELTA:={{D11, D12, D13, D14}, {1, 0, 0, 0},
{0, Sec[f], 0, Tan[f]},
{0, 0, 0, 0}, {D51, D52, D53, D54},
{0, -(Tan[f]*Tan[gr]), 1, -(Sec[f]*Tan[gr])},
{0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 1}}

```

```

ac11:=- (D13*lu) + xu - D11*(q0 + zu) -
nu*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mu*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])

ac12:=- (D13*lw) - q0 + xw - D11*zw -
nw*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mw*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])

ac13:=- (D13*lq) - w0 + xq - D11*(u0 + zq) -
D13*Cos[f]*Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] +
q0*Cos[gr]*Sin[f] +
f0*Sin[gr] - p0*Sin[gr]) -
Sin[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]
*Sin[gr]))*Tan[gr] -
nq*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mq*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])

ac14:=- (g*Cos[gr]) + D11*g*Cos[f]*Sin[gr] -
Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f]
+ f0*Sin[gr] -
p0*Sin[gr])*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]))

ac15:=- (D13*lv) + r0 + xv - D11*(-p0 + zv) -
nv*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mv*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])

ac16:=- (D13*lp) + xp - D11*(-v0 + zp) - D12
*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]) -
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]) -
np*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mp*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])

ac17:=D11*g*Cos[gr]*Sin[f] - D13*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f])
- q0*Sin[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f] + f0*Sin[gr]
- p0*Sin[gr]) \
- Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr])*
(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]))

ac18:=- (D13*lr) + v0 + xr - D11*zr +
D13*Sec[gr]*Sin[f]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]
*Sin[f] +
f0*Sin[gr] - p0*Sin[gr]) -
Cos[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]))
*Tan[gr] -
nr*(D14 - D12*Sin[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mr*(D12*Cos[f] + D13*Sin[f]*Tan[gr])
ac33:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*Sin[f])*Tan[f]*Tan[gr])

ac34:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f] + f0*Sin[gr] -
p0*Sin[gr]))
ac36:=- (Sec[f]*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f]))

ac37:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f])*
(q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]))
ac38:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*Sin[f])*Tan[gr])

```

```

ac11:=- (D13*lu) + xu - D11*(q0 + zu) -
nu*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mu*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac12:=- (D13*lw) - q0 + xw - D11*zw -
nw*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mw*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac13:=- (D13*lq) - w0 + xq - D11*(u0 + zq) -
D13*Cos[f]*Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] +
q0*Cos[gr]*SIN[f] +
f0*SIN[gr] - p0*SIN[gr]) -
SIN[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]
*Sin[gr]))*Tan[gr] -
nq*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mq*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac14:=- (g*Cos[gr]) + D11*g*Cos[f]*SIN[gr] -
Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f]
+ f0*SIN[gr] -
p0*SIN[gr])*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))

ac15:=- (D13*lv) + r0 + xv - D11*(-p0 + zv) -
nv*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mv*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac16:=- (D13*lp) + xp - D11*(-v0 + zp) - D12
*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) -
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]) -
np*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mp*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac17:=D11*g*Cos[gr]*SIN[f] - D13*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f])
- q0*SIN[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f] + f0*SIN[gr]
- p0*SIN[gr]) \
- Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr])*
(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))

ac18:=- (D13*lr) + v0 + xr - D11*zr +
D13*Sec[gr]*SIN[f]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]
*SIN[f] +
f0*SIN[gr] - p0*SIN[gr]) -
Cos[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))
*TAN[gr] -
nr*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mr*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])
ac33:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*TAN[f]*TAN[gr])

ac34:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f] + f0*SIN[gr] -
p0*SIN[gr]))
ac36:=- (Sec[f]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]))

ac37:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*
(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))
ac38:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*TAN[f]*TAN[gr])

```

```

ac11:=- (D13*lu) + xu - D11*(q0 + zu) -
nu*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mu*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac12:=- (D13*lw) - q0 + xw - D11*zw -
nw*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mw*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac13:=- (D13*lq) - w0 + xq - D11*(u0 + zq) -
D13*Cos[f]*Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] +
q0*Cos[gr]*SIN[f] +
f0*SIN[gr] - p0*SIN[gr]) -
SIN[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]
*Sin[gr]))*Tan[gr] -
nq*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mq*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac14:=- (g*Cos[gr]) + D11*g*Cos[f]*SIN[gr] -
Sec[gr]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f]
+ f0*SIN[gr] -
p0*SIN[gr])*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))

ac15:=- (D13*lv) + r0 + xv - D11*(-p0 + zv) -
nv*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mv*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac16:=- (D13*lp) + xp - D11*(-v0 + zp) - D12
*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) -
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]) -
np*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mp*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])

ac17:=D11*g*Cos[gr]*SIN[f] - D13*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f])
- q0*SIN[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f] + f0*SIN[gr]
- p0*SIN[gr]) \
- Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr])*
(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))

ac18:=- (D13*lr) + v0 + xr - D11*zr +
D13*Sec[gr]*SIN[f]*(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]
*SIN[f] +
f0*SIN[gr] - p0*SIN[gr]) -
Cos[f]*(D12*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]) +
D13*Sec[gr]*(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))
*TAN[gr] -
nr*(D14 - D12*SIN[f] + D13*Cos[f]*Tan[gr]) -
mr*(D12*Cos[f] + D13*SIN[f]*Tan[gr])
ac33:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*TAN[f]*TAN[gr])

ac34:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*
(r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*SIN[f] + f0*SIN[gr] -
p0*SIN[gr]))
ac36:=- (Sec[f]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f]))

ac37:= -(Sec[f]*Sec[gr]*(-(r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*
(q0*Cos[f]*SIN[gr] - r0*SIN[f]*SIN[gr]))
ac38:= -((- (r0*Cos[f]) - q0*SIN[f])*TAN[gr])

```

```

AC:={{ac11, ac12, ac13, ac14, ac15, ac16, ac17, ac18},
      {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, ac33, ac34, 0, ac36,
ac37, ac38},
      {0, 0, ac43, 0, 0, 0, ac47, ac48},
      {ac51, ac52, ac53, ac54, ac55, ac56, ac57, ac58},
      {0, 0, ac63, ac64, 0, ac66, ac67, ac68},
      {0, 0, ac73, ac74, 0, 1, ac77, ac78}, {0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0}}

P0:={{P10,0,0,0},{0,P20,0,0},{0,0,P30,0},{0,0,0,P40}}
H:={{1/(P10*(-J11 + s)), 0, 0, 0},
      {0, 1/(P20*(-J26 - J22*s + s^2)), 0, 0},
      {0, 0, 1/(P30*(-J38 - J33*s + s^2)), 0},
      {0, 0, 0, 1/(P40*(-J44 + s))}}
I8:=IdentityMatrix[8]

J44:=-15
P40:=1/15
J33:=-30
J38:=-200
P30:=1/200
J33:=-30

J11:=-10
P10:=1/10
J22:=-35
J26:=-300
P20:=1/300

J:={{J11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, J22, 0, 0, 0, J26, 0,
0},
      {0, 0, J33, 0, 0, 0, 0, J38}, {0, 0, 0, J44, 0, 0, 0, 0}}
ddd:=(-(p57*p75) + p55*p77)*(J11 - s)*(J44 - s)*(J26 + J22
*s - s^2)*
      (J38 + J33*s - s^2)

p57:=-ac15
p75:=-ac51
p55:=-ac11 + s
p77:=-ac55 + s

COP:=(-(p57*p75) + p55*p77)
COP
COP

-8
-1.53783 10 + (0.0233902 + s) (0.106854 + s)
M:={{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, Cos[f], 0, 0, 0,
-(r0*Cos[f]) - q0*Sin[f], -Sin[f]},
      {0, 0, Sin[f]*Tan[gr], Sec[gr]*
      (r0*Cos[f]*Cos[gr] + q0*Cos[gr]*Sin[f] + f0*Sin[gr] -
      p0*Sin[gr]), 0, 1, Sec[gr]*
      (q0*Cos[f]*Sin[gr] - r0*Sin[f]*Sin[gr]), Cos[f]*Tan[gr]},
      {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {1,0,0,0,0,0,0,0}, {0,0,0,1,0,0,0,0},
},
{0,0,0,0,1,0,0,0}, {0,0,0,0,0,0,1,0}}
FHAT:=J.M

```

```

W1[t_]:=0 /; t<0
W1[t_]:=0 /; t>=0
W2[t_]:=0 /; t<0
W2[t_]:=0 /; t>=0
W3[t_]:=0 /; t<0
W3[t_]:=Pi/180 /; t>=0
W4[t_]:=0 /; t<0
W4[t_]:=0 /; t>=0

```

```

X1[t]:={u1[t],w1[t],q1[t],thf1[t],v1[t],p1[t],fil[t],r1[t]}
XX1[t]:=(AC+DELTA.FHAT).X1[t]+DELTA.Inverse[P0].{{W1[t]}
,{W2[t]},{W3[t]},{W4[t]}}
eqonel:=u1'[t]=={1,0,0,0,0,0,0,0}.XX1[t]
eqtwo1:=w1'[t]=={0,1,0,0,0,0,0,0}.XX1[t]
eqthree1:=q1'[t]=={0,0,1,0,0,0,0,0}.XX1[t]
eqfour1:=thf1'[t]=={0,0,0,1,0,0,0,0}.XX1[t]
eqfive1:=v1'[t]=={0,0,0,0,1,0,0,0}.XX1[t]
eqsix1:=p1'[t]=={0,0,0,0,0,1,0,0}.XX1[t]
eqseven1:=fil'[t]=={0,0,0,0,0,0,1,0}.XX1[t]
eqeight1:=r1'[t]=={0,0,0,0,0,0,0,1}.XX1[t]

```

```

solonel:=NDSolve[{eqonel,eqtwo1,eqthree1,eqfour1,eqfive1,
eqsix1,eqseven1,eqeight1,u1[0]==0,w1[0]==0,q1[0]==0,
thf1[0]==0,v1[0]==0,p1[0]==0,fil[0]==0,r1[0]==0},
{u1[t],w1[t],q1[t],thf1[t],v1[t],p1[t],fil[t],r1[t]},
{t,0,150}]

```

```

FHAT:=J.M
F:=FHAT-CCC.A
X[t]:={u[t],w[t],q[t],thf[t],v[t],p[t],fi[t],r[t]}
U:={{W1[t]},{W2[t]},{W3[t]},{W4[t]}}
K1:=DELTA.F.X[t]
K2:=DELTA.Inverse[P0].U
eqone:=u'[t]==xu u[t]+(xw-q0) w[t]+(xq-w0) q[t]+(xv+r0)
v[t]+xp p[t]+
(xr+v0) r[t]-g Sin[thf[t]] Cos[gr]-g Sin[gr] Cos[thf[t]]+g
Sin[gr]+K1[[1]]+K2[[1]]

eqtwo:=w'[t]==(zu+q0) u[t]+zw w[t]+(zq+u0) q[t]+(zv-p0) v[t]+
(zp-v0) p[t]+zr r[t]+g Cos[thf[t]] Cos[gr] Cos[f] Cos[fi[t]]-
g Cos[thf[t]] Cos[gr] Sin[f] Sin[fi[t]]-
g Sin[thf[t]] Sin[gr] Cos[f] Cos[fi[t]]+
g Sin[thf[t]] Sin[gr] Sin[f] Sin[fi[t]]-g Cos[gr]
Cos[f]+K1[[2]]+K2[[2]]

eqthree:=q'[t]==mu u[t]+mw w[t]+mq q[t]+mv v[t]+mp
p[t]+mr r[t]+K1[[3]]+K2[[3]]

eqfour:=thf'[t]==q0 (Cos[fi[t]] Cos[f]-Sin[fi[t]]
Sin[f]-Cos[f])+
q[t] (Cos[fi[t]] Cos[f]-Sin[fi[t]] Sin[f])+
r0 (Sin[f]-Sin[f] Cos[fi[t]]-Sin[fi[t]] Cos[f])+
r[t] (-Sin[f] Cos[fi[t]]-Sin[fi[t]] Cos[f])+K1[[4]]+K2[[4]]
eqfive:=v'[t]==(yu-r0) u[t]+(yw+p0) w[t]+yq q[t]+yv v[t]+
(yp+w0) p[t]+
(yr-u0) r[t]+g Cos[thf[t]] Cos[gr] Sin[f] Cos[fi[t]]+
g Cos[thf[t]] Cos[gr] Sin[fi[t]] Cos[f]-
g Sin[thf[t]] Sin[gr] Sin[f] Cos[fi[t]]-
g Sin[thf[t]] Sin[gr] Sin[fi[t]] Cos[f]-g Cos[gr] Sin[f]+
K1[[5]]+K2[[5]]

eqsix:=p'[t]==lu u[t]+lw w[t]+lq q[t]+lv v[t] +lp p[t] +
lr r[t]+K1[[6]]+K2[[6]]

eqseven:=fi'[t]==p[t]+q[t] (Sin[f] Cos[fi[t]] Sin[thf[t]]
Cos[gr]+
+Sin[f] Cos[fi[t]] Sin[gr] Cos[thf[t]]+
+Sin[fi[t]] Cos[f] Sin[thf[t]] Cos[gr]+
Sin[fi[t]] Cos[f] Sin[gr] Cos[thf[t]])/(Cos[thf[t]] Cos[gr]
-Sin[thf[t]] Sin[gr])+
r[t](Cos[fi[t]] Cos[f] Sin[thf[t]] Cos[gr]+Cos[fi[t]]
Cos[f] Sin[gr] Cos[thf[t]]-
Sin[fi[t]] Sin[f] Sin[thf[t]] Cos[gr]-Sin[fi[t]] Sin[f]
Sin[gr] Cos[thf[t]])/
(Cos[thf[t]] Cos[gr]-Sin[thf[t]] Sin[gr])+
+f0 (Sin[thf[t]] Sin[gr]+Cos[gr]-Cos[thf[t]] Cos[gr])/
(Cos[thf[t]] Cos[gr]-Sin[thf[t]] Sin[gr])+
+p0 (Cos[thf[t]] Cos[gr]-Sin[thf[t]] Sin[gr]-Cos[gr])/
(Cos[thf[t]] Cos[gr]-Sin[thf[t]] Sin[gr])+
+q0(Sin[f] Cos[fi[t]] Sin[thf[t]] Cos[gr]+Sin[f]
Cos[fi[t]] Sin[gr] Cos[thf[t]]+
Sin[fi[t]] Cos[f] Sin[thf[t]] Cos[gr]+Sin[fi[t]]
Cos[f] Sin[gr] Cos[thf[t]]-
Sin[f] Sin[gr])/ (Cos[thf[t]] Cos[gr]-Sin[thf[t]]
Sin[gr])+
+r0 (Cos[fi[t]] Cos[f] Sin[thf[t]] Cos[gr]+Cos[fi[t]]
Cos[f] Sin[gr] Cos[thf[t]]

```

```
U:={W1[t]},{W2[t]},{W3[t]},{W4[t]}}
GU:=G.U
UU1:=F.X1[t]+GU
UU:=F.X[t]+GU
```

```
UL3:=Plot[Evaluate[{u1[t]/.solonel},{t,0,3},PlotRange->
All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
UNL3:=Plot[Evaluate[{u[t]/.solone},{t,0,3},
PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
figu3:=Show[UL3,UNL3]
```

```
UL150:=Plot[Evaluate[{u1[t]/.solonel},{t,0,150}
,PlotStyle->Dashing[ {.01}],AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
UNL150:=Plot[Evaluate[{u[t]/.solone},{t,0,150}
,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
figu150:=Show[UL150,UNL150]
```

```
WL3:=Plot[Evaluate[{w1[t]/.solonel},{t,0,3},
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
WNL3:=Plot[Evaluate[{w[t]/.solone},{t,0,3},
PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
figw3:=Show[WL3,WNL3]
```

```
QL3:=Plot[Evaluate[{q1[t]/.solonel},{t,0,3},
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],
AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
QNL3:=Plot[Evaluate[{q[t]/.solone},{t,0,3},
PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
figq3:=Show[QL3,QNL3]
```

```
THFL3:=Plot[Evaluate[{thf1[t]/.solonel},{t,0,3}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],
AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
THFNL3:=Plot[Evaluate[{thf[t]/.solone},{t,0,3}
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
figthf3:=Show[THFL3,THFNL3]
```

```
VL3:=Plot[Evaluate[{v1[t]/.solonel},{t,0,3}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],
AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
VNL3:=Plot[Evaluate[{v[t]/.solone},{t,0,3}
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
figv3:=Show[VL3,VNL3]
```



```

VL150:=Plot[Evaluate[{v1[t]/.solone1},{t,0,150}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
VNL150:=Plot[Evaluate[{v[t]/.solone},{t,0,150},
PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","m/sec"}]]
figv150:=Show[VL150,VNL150]

```

```

PL3:=Plot[Evaluate[{p1[t]/.solone1},{t,0,3},
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
PNL3:=Plot[Evaluate[{p[t]/.solone},{t,0,3},
PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
figp3:=Show[PL3,PNL3]

```

```

FIL3:=Plot[Evaluate[{fil[t]/.solone1},{t,0,3}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
FINL3:=Plot[Evaluate[{fi[t]/.solone},
{t,0,3},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
figfi3:=Show[FIL3,FINL3]

```

```

RL3:=Plot[Evaluate[{r1[t]/.solone1},{t,0,3},
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
RNL3:=Plot[Evaluate[{r[t]/.solone},{t,0,3}
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad/sec"}]]
figr3:=Show[RL3,RNL3]

```

```

U2L3:=Plot[Evaluate[{UU[[2]]/.solone},{t,0,3}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
U2NL3:=Plot[Evaluate[{UUf[[2]]/.solfour},
{t,0,3},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
figu23:=Show[U2L3,U2NL3]

```

```

UU1L3:=Plot[Evaluate[{UU1[[1]]/.solone1},{t,0,3}
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}]]
,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
UU1NL3:=Plot[Evaluate[{UU[[1]]/.solone},
{t,0,3},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]
figu13:=Show[UU1L3,UU1NL3]

```

```
UU1L150:=Plot[Evaluate[{UU1[[1]]/.solone1},{t,0,150}  
,PlotStyle->Dashing[ {.01}],AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
UU1NL150:=Plot[Evaluate[{UU[[1]]/.solone},{t,0,150}  
,AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
figu1150:=Show[UU1L150, UU1NL150]
```

```
UU2L3:=Plot[Evaluate[{UU1[[2]]/.solone1},{t,0,3}  
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
UU2NL3:=Plot[Evaluate[{UU[[2]]/.solone},{t,0,3}  
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
figu23:=Show[UU2L3, UU2NL3]
```

```
UU2L150:=Plot[Evaluate[{UU1[[2]]/.solone1}  
, {t,0,150},PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
UU2NL150:=Plot[Evaluate[{UU[[2]]/.solone},{t,0,150}  
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
figu2150:=Show[UU2L150, UU2NL150]
```

```
UU3L3:=Plot[Evaluate[{UU1[[3]]/.solone1},{t,0,3},  
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
,AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
UU3NL3:=Plot[Evaluate[{UU[[3]]/.solone}  
, {t,0,3},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)", "rad"}]]  
figu33:=Show[UU3L3, UU3NL3]
```

```
UU3L150:=Plot[Evaluate[{UU1[[3]]/.solone1},{t,0,150}  
,PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
UU3NL150:=Plot[Evaluate[{UU[[3]]/.solone},  
{t,0,150},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
figu3150:=Show[UU3L150,UU3NL150]
```

```
UU4L3:=Plot[Evaluate[{UU1[[4]]/.solone1},{t,0,3},  
PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
UU4NL3:=Plot[Evaluate[{UU[[4]]/.solone},  
{t,0,3},PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
figu43:=Show[UU4L3,UU4NL3]
```

```
UU4L150:=Plot[Evaluate[{UU1[[4]]/.solone1},  
{t,0,150},PlotRange->All,PlotStyle->Dashing[ {.01}],  
AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
UU4NL150:=Plot[Evaluate[{UU[[4]]/.solone},{t,0,150}  
,PlotRange->All,AxesLabel->{"time (sec)","rad"}]]  
figu4150:=Show[UU4L150,UU4NL150]
```

