

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ
ΛΟΓΩ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
ΣΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ**

Υπό

ΒΑΪΑΣ ΚΛΙΑΦΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2003



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 2427/1

Ημερ. Εισ.: 03-03-2004

Δωρεά:

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ ΜΜΒ

2003

ΚΛΙ



Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

- Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Δ. Βαλουγεώργης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
- Δεύτερος Εξεταστής (Συνεπιβλέπων) Δρ. Σ. Καραμάνος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
- Τρίτος Εξεταστής Δρ. Β. Μποντόζογλου
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	3
1. Εισαγωγή	4
2. Βιβλιογραφία	11
3. Πρόβλημα Ιδιοτιμών	
3.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	16
3.2 Ιδιοτιμές – Ιδιομορφές	18
4. Πρόβλημα συνοριακών τιμών-Αναλυτική επίλυση	
4.1 Διατύπωση του προβλήματος	22
4.2 Επίλυση του προβλήματος ωστικής κίνησης	24
4.3 Επίλυση του προβλήματος επαγωγικής κίνησης	29
4.4 Πιέσεις, δυνάμεις και ροπές	33
4.5 Εναλλακτική μεθοδολογία επίλυσης	37
5. Αριθμητική επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία	
5.1 Εισαγωγή.....	39
5.2 Επίλυση του προβλήματος	41
5.3 Απλουστευμένη εφαρμογή με τέσσερα στοιχεία	44
6. Αποτελέσματα	
6.1 Αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα ιδιοτιμών και ιδιομορφών	54
6.2 Αναλυτικά αποτελέσματα προβλήματος συνοριακών τιμών.....	64
6.3 Υπολογιστικά αποτελέσματα προβλήματος συνοριακών τιμών.....	69
6.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	74

7. Συμπεράσματα	78
8. Αναφορές	81
9. Παράρτημα	
9.1. Κώδικες σε Mathematica	
9.1.1 Αναλυτικός υπολογισμός ιδιοτιμών του προβλήματος.....	90
9.1.2 Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικού ϕ	90
9.1.3 Υπολογισμός ωστικής και επαγωγικής κίνησης	91
9.1.4 Υπολογισμός και γραφική παράσταση των συντελεστών C_1 και C_2	91
9.1.5 Υπολογισμός της ροπής M που ασκείται στο τοίχωμα της δεξαμενής.....	91
9.2. Κώδικες σε Fortran	
9.2.1 Πρόγραμμα ιδιοτιμών.....	92
9.2.2 Πρόγραμμα προβλήματος ωστικής κίνησης.....	96
9.2.3 Ολικό πρόγραμμα	103

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ολοκλήρωσης των προπτυχιακών σπουδών μου. Η επίτευξή της δε θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση, τη βοήθεια και την κατανόηση του επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δ. Βαλουγεώργη, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της επιτροπής και ιδιαιτέρως στον κ. Σ. Καραμάνο, για τις συμβουλές και τη βοήθειά του ειδικότερα σε θέματα που αφορούσαν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Σημαντική ήταν επίσης η βοήθεια που μου προσέφεραν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές Χ. Δριτσέλης και Σ. Παπασπύρου τους οποίους επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς την οικογένειά μου, για την ηθική και οικονομική στήριξη που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Σε δοχεία μερικώς γεμάτα, η ελεύθερη επιφάνεια των υγρών, μπορεί να υποστεί ένα ευρύ φάσμα κινήσεων ανάλογα με τον τύπο της διαταραχής και το σχήμα του δοχείου. Στις κινήσεις αυτές περιλαμβάνονται η απλή επίπεδη κίνηση, η μη επίπεδη, η περιστροφική, η συμμετρική η ασύμμετρη, η ημι-περιοδική και η χαοτική. Έτσι όταν αλληλεπιδρά η ελεύθερη επιφάνεια με το ελαστικό δοχείο στο οποίο περιέχεται το υγρό ή με την κατασκευή στήριξής του, μπορεί να επιδείξει συναρπαστικούς τύπους κίνησης, ανάλογους με τη μορφή της ανταλλαγής ενέργειας ανάμεσα στα αλληλεπιδρώντα μέρη. Κάθε κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στο εσωτερικό του δοχείου που το περιέχει περιγράφεται με τον όρο κυματισμός.

Η κίνηση του ρευστού στο εσωτερικό της δεξαμενής του, έχει έναν άπειρο αριθμό φυσικών συχνοτήτων, ωστόσο είναι πιθανότερο ότι οι χαμηλότεροι όροι είναι αυτοί που προκαλούνται από την εξωτερική διέγερση. Οι περισσότερες μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην έρευνα των εξαναγκασμένων αρμονικών ταλαντώσεων κοντά στην χαμηλότερη φυσική συχνότητα που προβλέπεται από τις γραμμικές εξισώσεις του πεδίου των ρευστών. Η γραμμική επίλυση, άλλωστε, είναι αυτή που θα μας απασχολήσει στη συγκεκριμένη εργασία.

Οι δεξαμενές υγρών αποτελούν κύρια συνιστώσα σε έναν αριθμό δυναμικών συστημάτων, όπως διαστημικά οχήματα, βυτιοφόρα οχήματα, μεταφορικά οχήματα υγρού αερίου και πύργοι ανύψωσης νερού. Η δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων αυτών επηρεάζεται πολύ από την δυναμική της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Αυτοί οι παράμετροι έχουν άμεση επιρροή στη δυναμική σταθερότητα και απόδοση των κινούμενων δεξαμενών.

Το πρόβλημα της δυναμικής του κυματισμού σε υγρά, απασχολεί επίσης τους μηχανικούς και τους σεισμολόγους, κατά την μελέτη των επιδράσεων του σεισμού σε μεγάλα φράγματα, δεξαμενές πετρελαίου, ρεζερβουάρ νερού και πύργους ανύψωσης νερού. Το πρόβλημα αυτό είναι επίσης σημαντικό για τους μηχανικούς, που εμπλέκονται στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη αεροσκαφών μεγάλων ταχυτήτων και μεγάλων πυραύλων. Σε επίπεδο μηδενικής βαρύτητας ο όγκος του υγρού παίρνει ένα σχεδόν αυθαίρετο προσανατολισμό και δημιουργεί πρόβλημα στο χειρισμό και τη συμπεριφορά της ροής του υγρού.

Ο κυματισμός των υγρών σε κινούμενα δοχεία δημιουργεί μεγάλη ποικιλία προβλημάτων πρακτικής ασφάλειας, που αφορούν τα βυτιοφόρα οχήματα σε αυτοκινητόδρομους, και τα δεξαμενόπλοια με υγρό φορτίο. Αυτό είναι ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα για να επιλυθεί αναλυτικά καθώς οι δυναμικές συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μη γραμμικές και η θέση της ελεύθερης επιφάνειας ποικίλει με το χρόνο κατά τρόπο που δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων.

Οι αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα του κυματισμού είναι δυνατό να εξαχθούν για δεξαμενές κανονικού γεωμετρικού σχήματος, όπως είναι οι ορθογώνιες και οι κυλινδρικές. Η φύση της δυναμικής του κυματισμού σε κυλινδρικές δεξαμενές είναι περισσότερο κατανοητή απ' ό,τι σε πρισματικές δεξαμενές. Ωστόσο αναλυτικές τεχνικές για την πρόβλεψη του κυματισμού μεγάλου πλάτους δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί πλήρως. Τέτοια φορτία είναι ιδιαίτερος σημαντικά κατά το στάδιο του σχεδιασμού της κατασκευής στήριξης και των εσωτερικών εξαρτημάτων των οχημάτων που φέρουν δεξαμενές. Επιπρόσθετα, αρκετές από τις τεχνολογίες του κυματισμού που αναπτύχθηκαν για διαστημικές εφαρμογές δεν είναι εφαρμόσιμες σε δεξαμενές βυτιοφόρων οχημάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί έχει δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στις συχνότητες και στις συνολικές δυνάμεις όταν αυτές σχετίζονται με

απαιτήσεις σε συστήματα ελέγχου. Αναλόγως, οι επιδράσεις του τοπικού μέγιστου της πίεσης στις κατασκευαστικές απαιτήσεις δεν έχουν μελετηθεί σε κάποιο βαθμό. Επιπλέον, τα πλάτη της διέγερσης που λαμβάνονται υπόψη σε διαστημικές εφαρμογές είναι πολύ μικρά για εξομοίωση με τα οχήματα για δρόμο. Για την αποφυγή δημιουργίας καταστροφικού κυματισμού στα διαστημικά οχήματα, οι συχνότητες των συστημάτων ελέγχου, οι συχνότητες της ελαστικής κατασκευής του οχήματος και οι συχνότητες του κυματισμού του ρευστού πρέπει να είναι πλήρως και ευρέως διαχωρίσιμες.

Τα φαινόμενα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας υγρών σε ορθογώνιες δεξαμενές, μπορούν συνήθως να περιγραφούν, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη ροή του ρευστού στις δύο διαστάσεις. Γενικώς, η υδροδυναμική πίεση των ρευστών σε κινούμενα άκαμπτα δοχεία περιλαμβάνει δύο διακριτές συνιστώσες. Η μία είναι άμεσα συσχετισμένη με την επιτάχυνση της δεξαμενής και προκαλείται από το μέρος του υγρού που κινείται με την ταχύτητα της δεξαμενής. Η δεύτερη είναι γνωστή ως επαγωγική πίεση και αντιπροσωπεύει την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Μηχανικά μοντέλα όπως αυτό του ελατηρίου μάζας ή εκκρεμών συστημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν το μέρος του κυματισμού.

Ιδιαίτερη αναφορά για το πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας υπάρχει και στον Ευρωκώδικα 8 (European prestandard) ο οποίος αφορά το σχεδιασμό των κατασκευών έναντι σεισμού. Περιέχει έναν αριθμό διατάξεων για τον σχεδιασμό κτιρίων και άλλων δομικών έργων, όπως το σχεδιασμό αποθηκευτικών δεξαμενών διαφόρων τύπων. Η αντοχή και η ευστάθεια των δεξαμενών που υπόκεινται σε έντονη σεισμική δραστηριότητα μπορεί να εξαρτάται από σύνθετα

φαινόμενα αλληλεπίδρασης εδάφους- κατασκευής – ρευστού, τα οποία δεν είναι εύκολο να απλοποιηθούν για τις διαδικασίες σχεδιασμού.

Μία εύχρηστη μέθοδος, που βασίζεται στη λύση των υδροδυναμικών εξισώσεων με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δομική επάρκεια του συστήματος της δεξαμενής υπό τη σεισμική δράση σχεδιασμού. Συγκεκριμένα η ανάλυση πρέπει να υπολογίζει τα ακόλουθα μεγέθη όπου απαιτείται:

- Τις επαγωγικές και ωστικές συνιστώσες κίνησης του ρευστού
- Την παραμόρφωση στο κέλυφος της δεξαμενής, όταν αυτή βρίσκεται υπό την επίδραση υδροδυναμικών πιέσεων, και τις πιθανές αλληλεπιδράσεις με την ωστική συνιστώσα.
- Την παραμορφωσιμότητα του εδάφους θεμελίωσης και την προκύπτουσα τροποποίηση της αντίδρασης.

Ακόμη, σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν συσκευές απόσβεσης (dampers) ώστε να μειωθεί ο κυματισμός. Για τον ίδιο λόγο μπορεί να χρησιμοποιηθούν κάθετα χωρίσματα τα οποία μπορούν να εισαχθούν στο εσωτερικό των δεξαμενών.

Μία αυστηρή ανάλυση του φαινομένου της δυναμικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο κινούμενο και το περιεχόμενο ρευστό, της παραμόρφωσης των τοιχωμάτων της δεξαμενής, και του εδάφους θεμελίωσης συμπεριλαμβανομένου ενός πιθανού ανασηκώματος (σε δεξαμενές απλά εδραζόμενες), είναι ένα πρόβλημα σημαντικής αναλυτικής δυσκολίας, που συνήθως απαιτεί προχωρημένα υπολογιστικά μέσα και αρκετή προγραμματιστική προσπάθεια. Παρόλο που οι λύσεις στις πιο απλές περιπτώσεις σεισμικής απόκρισης δεξαμενών είναι γνωστές από τις αρχές της δεκαετίας του '70, η πρόοδος στη συμπεριφορά των πιο πολύπλοκων περιπτώσεων συνεχίζεται μέχρι το παρόν και είναι ακόμα αντικείμενο έρευνας.

Η δυναμική του κυματισμού των υγρών περιλαμβάνει επίσης ένα μεγάλο φάσμα προβλημάτων αεροναυπηγικής, που εξαρτώνται από τον τύπο της εφαρμογής, της διέγερσης, το πεδίο βαρύτητας και πολλούς άλλους παράγοντες. Αναμφισβήτη η διαστημική τεχνολογία έχει προωθήσει τις ερευνητικές ενέργειες σε πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τον κυματισμό σε υγρά και η ειδική μονογραφία της NASA που εκδόθηκε από τον Abramson [1] τεκμηριώνει τέτοιου είδους προβλήματα. Ωστόσο δεν αναφέρεται σε άλλα θέματα που σχετίζονται με δεξαμενές βυτιοφόρων οχημάτων, πλοία που μεταφέρουν υδροποιημένο φυσικό αέριο, αποθηκευτικές δεξαμενές υγρών και αριθμητικές τεχνικές.

Πολλές πρόωρες προσπάθειες, έχουν γίνει κατά το παρελθόν όσον αφορά τους κυματισμούς υγρών σε ταλαντευόμενα δοχεία [2-48]. Η θεμελιώδης θεωρία του κυματισμού της επιφάνειας των υγρών τεκμηριώνεται σε πολλές αναφορές [49-53]. Επίσης έχουν γραφεί και πιο πρόσφατες αναφορές για το θέμα αυτό [54-60].

Η θεωρία της δυναμικής του κυματισμού υγρών σε μερικούς γεμάτα δοχεία βασίζεται στην ανάπτυξη των εξισώσεων του πεδίου ροής. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών μπορεί να επιλυθεί είτε για ανάλυση όρων είτε για την δυναμική απόκριση των χαρακτηριστικών στις εξωτερικές διεγέρσεις. Διάφορες αναλυτικές διατυπώσεις έχουν αναπτυχθεί [61-80]. Η μελέτη της δυναμικής του κυματισμού των υγρών σε μεγάλες δεξαμενές υγρών έχει επιτευχθεί με τη χρήση μικρών μοντέλων εξομοίωσης. Ο σχεδιασμός των εξομοιωτικών πειραμάτων περιέχεται σε πολλές αναφορές [81-91].

Οι γενικές εξισώσεις κίνησης για ένα ρευστό σε κλειστά δοχεία μπορούν να απλοποιηθούν υποθέτοντας ότι το δοχείο είναι άκαμπτο και στεγανό, ότι το ρευστό δεν είναι παχύρρευστο και ότι αρχικά δεν περιστρέφεται. Τα τριχοειδή φαινόμενα και οι επιδράσεις της επιφανειακής τάσης μπορούν να αγνοηθούν για ένα βαρυντικό πεδίο. Για μη περιστροφική κίνηση του ρευστού υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού της

ταχύτητας Φ , της οποίας η αρνητική κλίση δίνει την ταχύτητα του ρευστού $U = -\nabla\Phi$.

Η συνάρτηση του δυναμικού πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. Η

συνολική λύση της εξίσωσης αυτής πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι συνθήκες αυτές είναι οι εξής

- Στα υγρά τοιχώματα και στον πυθμένα της δεξαμενής, η συνιστώσα της ταχύτητας κάθετα στα σύνορα πρέπει να εξαφανίζεται.
- Στην ελεύθερη επιφάνεια, η πίεση είναι μηδέν και δίνει την δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας.
- Η κάθετη ταχύτητα ενός μορίου του ρευστού που βρίσκεται στην περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας, πρέπει να ισούται με την ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας. Αυτή η συνθήκη είναι γνωστή σαν κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας.

Σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος του κυματισμού, σε μία δεξαμενή ορθογωνικής διατομής, η οποία υπόκειται σε οριζόντια εξωτερική διέγερση. Η υπολογιστική επίλυση του προβλήματος γίνεται με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ ο κώδικας που χρησιμοποιείται είναι γραμμένος σε Fortran. Επίσης το πρόβλημα επιλύεται και αναλυτικά με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών και οι λύσεις που προκύπτουν συγκρίνονται με αυτές της υπολογιστικής επίλυσης.

Στη συνέχεια παρατίθεται η δομή των υπόλοιπων κεφαλαίων. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση, όσον αφορά το πρόβλημα του κυματισμού. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα των ιδιοτιμών για ορθογωνική δεξαμενή. Πιο συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.1 γίνεται η διατύπωση του προβλήματος και στην 3.2 η επίλυσή του. Το τέταρτο κεφάλαιο περιέχει την αναλυτική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Έτσι στην παράγραφο 4.1

γίνεται η διατύπωση του πλήρους προβλήματος, στην παράγραφο 4.2 παρουσιάζεται η επίλυση του προβλήματος ομοιόμορφης κίνησης, στην παράγραφο 4.3 η επίλυση του προβλήματος του κυματισμού και στην 4.4 υπολογίζονται οι πιέσεις και οι δυνάμεις. Στο πέμπτο κεφάλαιο περιέχεται η υπολογιστική λύση του προβλήματος, με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Μετά από μία σύντομη εισαγωγή που περιέχεται στην παράγραφο 5.1 και αφορά στο συνδυασμό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με το πρόβλημα του κυματισμού, ακολουθεί στη δεύτερη παράγραφο η διατύπωση και η επίλυση του προβλήματος. Στο έκτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα του προβλήματος των ιδιοτιμών, της αναλυτικής λύσης και της υπολογιστικής λύσης, ενώ γίνεται και ένας συγκριτικός σχολιασμός. Τέλος ακολουθεί το έβδομο κεφάλαιο όπου παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος.

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα προβλήματα αλληλεπίδρασης ρευστού κατασκευής, τα οποία μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε διάφορους τύπους, έχουν αποσπάσει την προσοχή των μηχανικών εξαιτίας των πολλαπλών πρακτικών εφαρμογών τους. Ο κυματισμός των υγρών σε ταλαντευόμενα δοχεία, αποτελεί ένα τέτοιου είδους πρόβλημα, το οποίο έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές από πολύ νωρίς. Στη συνέχεια παρατίθεται μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση που αφορά το πρόβλημα αυτό.

Οι εξισώσεις κίνησης ενός υγρού σε μια άκαμπτη ορθογώνια δεξαμενή ομοιόμορφου βάθους και με γραμμικοποιημένες οριακές συνθήκες έχουν δοθεί από το Rayleigh [92] και τον Lamb [93]. Η λύση της εξίσωσης Laplace χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, είναι κάπως πιο ανίσχυρη για περιπτώσεις όπου το βάθος του υγρού είναι μεταβλητό. Ο Ehrlich [94] έλαβε ορισμένες ακριβείς λύσεις για το πρόβλημα των συνοριακών τιμών του κυματισμού των υγρών, ενώ ο Harper [95] έλυσε το πρόβλημα για κωνικές δεξαμενές. Προκειμένου να εξαχθούν ποιοτικές πληροφορίες, φαίνεται λογικό να εισάγουμε μία προσέγγιση στις εξισώσεις της ελεύθερης επιφάνειας. Υπάρχουν κάποιες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία του πλάτους της ταλάντωσης της ελεύθερης επιφάνειας, σε ορθογώνιες και κυλινδρικές δεξαμενές. Οι τρεις κυριότερες από αυτές συνοψίζονται παρακάτω.

Οι μορφές της ελεύθερης επιφάνειας για αξονοσυμμετρικές δεξαμενές καθορίστηκαν από τον Moissev [34]. Σύμφωνα με τη θεωρία του Moissev δημιουργούνται συνήθεις όροι συναρτήσεων μέσω της ολοκλήρωσης των εξισώσεων με τη χρήση συναρτήσεων Green δεύτερου είδους.

Οι Penny και Price [97] πραγματοποίησαν μια επιτυχημένη προσέγγιση όπου η συνάρτηση του δυναμικού εκφράσθηκε σε σειρές Fourier στο χώρο, όπου οι

συντελεστές είναι συναρτήσεις του χρόνου. Αυτοί οι συντελεστές προσεγγίστηκαν επίσης με σειρές Fourier. Η λύση που πρόκυψε δινόταν από διπλές σειρές Fourier στο χρόνο και το χώρο.

Η θεωρία του Hutton [98] προσέγγισε τις δυναμικές και κινηματικές εξισώσεις με σειρές Taylor για μια στάσιμη θέση της επιφάνειας.

Βασιζόμενοι στη δισδιάστατη ανάλυση της κίνησης του ρευστού σε ορθογώνιες δεξαμενές, παρατηρούμε ότι η φυσική συχνότητα εξαρτάται βασικά από το πηλίκο του βάθους του υγρού προς το πλάτος της δεξαμενής. Η επίδραση του βάθους του υγρού ελαττώνεται καθώς η τάξη του όρου αυξάνεται. Οι Graham και Rodriguez [99] έλυσαν το τρις-διάστατο δυναμικό της ταχύτητας, για το οποίο η φυσική συχνότητα εξαρτάται από τις τρεις κύριες διαστάσεις του ρευστού. Ο Ghali [100] καθόρισε τη μη γραμμική εξάρτηση των φυσικών συχνοτήτων από το πλάτος του κυματισμού. Η θεμελιώδης φυσική συχνότητα σε μια ορθογώνια δεξαμενή μετρήθηκε πειραματικά από τον Addigton [101] και τα πειραματικά αποτελέσματα είχαν ακρίβεια 5 % σε σχέση με τις αναλυτικές τιμές. Κατά το πείραμα αυτό εξετάστηκε επίσης η επίδραση των κυματισμών στις φυσικές συχνότητες και προτάθηκε ότι οι κυματισμοί πρέπει να τοποθετούνται σε μια περιοχή μέγιστης ταχύτητας, όπως και ότι τα κύματα της επιφάνειας είναι παγιδευμένα αλλά επιτρέπουν την απώλεια ενέργειας σε όσο το δυνατό μικρότερο βάθος. Η επιρροή της απόσβεσης στη φυσική συχνότητα μελετήθηκε πειραματικά από τον Ghali [99] και βρέθηκε ότι για μεγαλύτερες τιμές του ιξώδους (κινηματικό ιξώδες $\nu = 2,5 \text{ poise}$) η συχνότητα συντονισμού είναι ελαφρώς υψηλότερη από την προβλεπόμενη τιμή για ένα ιδανικό υγρό.

Η δυναμική συμπεριφορά της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού εξαρτάται από το είδος της διέγερσης και τη συχνότητα του περιεχομένου. Στη διαδικασία του σχεδιασμού είναι σημαντικό να διατηρείται το υγρό κοντά στις φυσικές συχνότητες και μακριά από όλες τις κανονικές και μη γραμμικές συνθήκες συντονισμού. Η διέγερση μπορεί να είναι αυθόρμητη, ημιτονοειδής, περιοδική ή τυχαία. Ο προσανατολισμός του υγρού με βάση τη δεξαμενή μπορεί να είναι πλάγιος, παραμετρικός ή κυλινδρικός ή ένας συνδυασμός αυτών. Κάτω από εξαναγκασμένη διέγερση, είναι σημαντικό να καθοριστούν τα δυναμικά φορτία του κυματισμού του υγρού που ενεργούν στο δοχείο και η φάση τους σε σχέση με τη διέγερση.

Μια συμμετρική λύση της κίνησης του υγρού σε δεξαμενές αυθαίρετου σχήματος που υπόκεινται σε μικρές οριζόντιες ταλαντώσεις και τραντάγματα αναπτύχθηκε στο παρελθόν από τον Trembath [101] και Chu [102]. Η λύση δόθηκε σε ολοκληρωτικούς όρους, οι οποίοι μπορούσαν να υπολογιστούν είτε αλγεβρικά είτε αριθμητικά ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα. Η μη γραμμική κίνηση του υγρού σε αυθαίρετα αξονο-συμμετρικά δοχεία, σε κυλινδρικά δοχεία και σε ορθογώνιες δεξαμενές με πλάγιες διεγέρσεις μελετήθηκε από τους Kimura και Osashi [103], Kimura et al [104-107], και Liu και Huang [108]. Αναλύθηκε ακόμη και ο μη γραμμικός κυματισμός με εσωτερική και εξωτερική ροή σε μια ορθογώνια δεξαμενή που υπόκειται σε οριζόντια αρμονική διέγερση από τον Machida et al [109]. Εκτός αυτών έχει εξετασθεί και η μη γραμμική ανύψωση της επιφάνειας του υγρού σε μια ορθογώνια δεξαμενή από τους Hayama et al [110], Su [111] και Lepelletier και Raichlen [112]. Τα φαινόμενα υστέρησης που σχετίζονται με τη μη γραμμική κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας κοντά στο συντονισμό έχουν μελετηθεί πρόσφατα από τους Shemer και Chamesses [113]. Το φάσμα της μη γραμμικής απόκρισης του υγρού

κάτω από οριζόντιες και κατακόρυφες διεγέρσεις έχει καθοριστεί από τον Yamada et al [114].

Το 1831 ο Faraday παρατήρησε το ρευστό μέσα σε γυάλινο δοχείο υπό ταλάντωση στο μισό των συχνοτήτων της κατακόρυφης διέγερσης του. Μία άλλη παρόμοια σειρά πειραμάτων πραγματοποιήθηκε από τον Matthiessen [115,116] και έδειξε ότι οι ταλαντώσεις του ρευστού ήταν επίσης σύγχρονες. Η αντίφαση των δύο παρατηρήσεων οδήγησε τον Rayleigh [92,117] σε μια νέα σειρά πειραμάτων με βελτιωμένο εξοπλισμό και οι παρατηρήσεις του υποστηρίχθηκαν από τα αποτελέσματα του Faraday. Εκείνη την περίοδο ο Mathieu [118] μορφοποίησε τις εξισώσεις του, οι οποίες βοήθησαν τον Rayleigh να εξηγήσει το φαινόμενο αυτό μαθηματικά. Το πρόβλημα ερευνήθηκε ξανά από τον Lewis [119] και τους Benjamin και Ursell [120], που εξήγησαν μαθηματικά την ασυμφωνία μεταξύ των παρατηρήσεων των Faraday και Rayleigh και των αποτελεσμάτων του Matthiessen.

Πρόσφατες μελέτες αναφέρονται στις πολύπλοκες κινήσεις της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού, οι οποίες λαμβάνουν χώρα κατά την παρουσία μη γραμμικών συνθηκών συντονισμού, όπως είναι ο εσωτερικός συντονισμός και οι συνθήκες παραμετρικού συντονισμού. Ο εσωτερικός συντονισμός προϋποθέτει την παρουσία μιας γραμμικής αλγεβρικής σχέσης ανάμεσα στις φυσικές συχνότητες των αλληλεπιδρώντων μερών. Αυτά τα προβλήματα μελετήθηκαν από τους Gollub και Simonelli [121], Simonelli και Gollub [122], Feng και Sethna [123], Funakushi και Inoue [124], και πολλούς άλλους. Η διαταραχή της κατασκευής από τη ροή της ελεύθερης επιφάνειας κάτω από σχετικά μεγάλα πλάτη αρμονικών διεγέρσεων, έχει επίσης μελετηθεί πειραματικά από τους Gollub και Meyer [125]. Οι μετρήσεις τους έδειξαν σειρά διαδοχικών συμμετρικών ασταθειών που οδήγησαν σε χαοτική κατάσταση. Κάτω από παραμετρική αρμονική διέγερση, ο χαοτικός κυματισμός

παρατηρήθηκε πειραματικά από τους Ciliberto και Gollub [126], Gollub και Meyer [125] και Virning et al [127]. Ο Kimura et al [128,129], εξέτασε την επιρροή των όρων μεγαλύτερης τάξης του μη γραμμικού κυματισμού σε κυλινδρικές και ορθογώνιες δεξαμενές που υπόκεινται σε παραμετρικές διεγέρσεις.

Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ρευστού κατασκευής, αναλύθηκε και με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας πρόσφατων μελετών. Οι Subhash Babu και Bhattacharyya [130] ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη ενός αριθμητικού σχήματος χρησιμοποιώντας την τεχνική των πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό της μετατόπισης του κυματισμού του υγρού, και της πίεσης που αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια ενός τέτοιου κυματισμού. Το σχήμα επεκτείνεται και στη μελέτη των συζευγμένων επιδράσεων του κυματισμού και της μετατόπισης των τοιχωμάτων της δεξαμενής, κατά τη διάρκεια της αλλαγής στην πίεση του υγρού.

Ο κυματισμός σε τρισδιάστατη δεξαμενή αναλύεται από τους Wu, Ma και Eatock Taylor [131], με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στην θεωρία πλήρως μη γραμμικών κυμάτων δυναμικού. Όταν η δεξαμενή υπόκειται σε δισδιάστατη κίνηση, τα υπολογιστικά αποτελέσματα βρέθηκαν να είναι σε πλήρη συμφωνία με άλλα δημοσιευμένα δεδομένα.

Τέλος η στατική και δυναμική συμπεριφορά ορθογώνιων δεξαμενών αποθήκευσης υγρών, αναλύεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη χρήση της προσέγγισης Lagrange από τους Dogangum, Durmus και Ayvaz [132].

Κεφάλαιο 3: Πρόβλημα ιδιοτιμών

3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό επιλύεται το πρόβλημα των ιδιοτιμών με τη χρήση ενός αναλυτικού μοντέλου για τη μελέτη του κυματισμού ενός υγρού σε μία άκαμπτη ορθογώνια δεξαμενή.

Θεωρούμε ορθογωνική δεξαμενή μήκους $2L$, με ύψος ελεύθερης επιφάνειας ίσο με H και πλάτος ίσο με $2b$. Ένα τοπικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων (x,y,z) είναι τοποθετημένο στο κέντρο της δεξαμενής, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Επιπλέον, γίνονται οι υποθέσεις ότι το υγρό είναι ασυμπίεστο με αστρόβιλη ροή και αμελητέα επιφανειακή τάση, ενώ η κίνησή του περιγράφεται σε δύο διαστάσεις και η δεξαμενή είναι άκαμπτη. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις, η ταχύτητα του υγρού μπορεί να απεικονισθεί με το διάνυσμα του δυναμικού της ταχύτητας $\hat{\Phi}(x,y,z,t)$. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

με την ακόλουθη συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad y = H \quad (3.1.2)$$

Στα τοιχώματα της δεξαμενής ισχύουν οι κλασσικές οριακές συνθήκες ολίσθησης

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} = 0 \quad (3.1.3)$$

όπου n είναι το κάθετο στα τοιχώματα της δεξαμενής διάνυσμα.

Θεωρώντας αρμονική εξωτερική διέγερση ισχύει η σχέση

$$\hat{\Phi}(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (3.1.4)$$

Επομένως η συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.5)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες :

i) στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού:

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = H \quad (3.1.6)$$

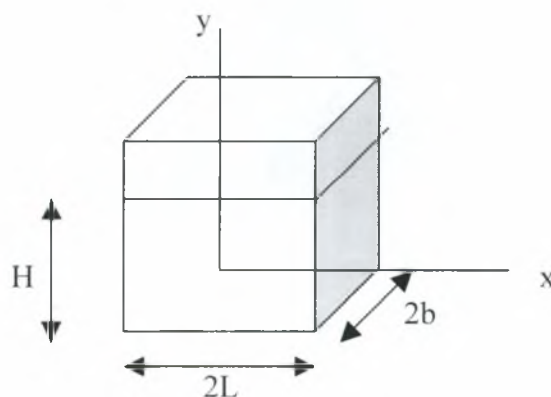
ii) στα τοιχώματα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x=L \text{ και } x=-L \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = b \text{ και } z = -b \quad (3.1.8)$$

iii) στον πυθμένα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad (3.1.9)$$



Σχήμα 3.1: Απεικόνιση ορθογώνιας δεξαμενής μήκους $2L$, πλάτους $2b$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας H

3.2 Ιδιοτιμές- ιδιομορφές

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών και αντικαθιστούμε την έκφραση $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)Z(z)$, στην εξίσωση (3.1.4), οπότε προκύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \Rightarrow X'' + \mu^2 X = 0 \Rightarrow$$

$$X(x) = A_1 \sin(\mu x) + A_2 \cos(\mu x) \quad (3.2.1)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (3.1.6), έχουμε

i) αν $A_2 = 0$

$$X(x) = A_1 \sin(\mu x) \quad (3.2.2)$$

$$\mu_m = \frac{2m-1}{2L} \pi, \text{ για } m=1,2,3,\dots \quad (3.2.3)$$

ii) αν $A_1 = 0$

$$X(x) = A_2 \cos(\mu x) \quad (3.2.4)$$

$$\mu_m = \frac{m\pi}{L}, \text{ για } m=0,1,2,3,\dots \quad (3.2.5)$$

Συνεχίζοντας τη λύση με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, έχουμε

$$-\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Z''}{Z} = -\frac{Y''}{Y} + \mu^2 = -\lambda^2 \Rightarrow$$

$$Z(z) = B_1 \sin(\lambda z) + B_2 \cos(\lambda z) \quad (3.2.6)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (3.1.8), έχουμε

i) αν $B_2 = 0$

$$Z(z) = B_1 \sin(\lambda z) \quad (3.2.7)$$

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2b} \pi, \text{ για } n=1,2,3,\dots \quad (3.2.8)$$

ii) αν $B_1 = 0$

$$Z(z) = B_2 \cos(\lambda z) \quad (3.2.9)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \text{ για } n=1,2,3,\dots \quad (3.2.10)$$

$$\frac{Y''}{Y} - (\lambda^2 + \mu^2) = 0 \Rightarrow Y'' - \kappa^2 Y = 0$$

$$Y(y) = C_1 \sinh(\kappa y) + C_2 \cosh(\kappa y) \quad (3.2.11)$$

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 \quad (3.2.12)$$

Από την οριακή συνθήκη (3.1.7) έχουμε

$$C_1 = 0$$

$$\text{Άρα } Y(y) = C_2 \cosh(\mu y) \quad (3.2.13)$$

Η συνολική λύση του συγκεκριμένου προβλήματος θα έχει μια από τις ακόλουθες

μορφές

i) για $X(x) = A \sin(\mu x)$, και $Z(z) = B_2 \cos(\lambda z)$ είναι

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \sin(\mu_m x) \cosh(\kappa_{mn} y) \cos(\lambda_n z) \quad (3.2.14)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{2m-1}{2L} \right)^2 \pi^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (3.2.15)$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη (3.1.5) και προκύπτει

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{mn}^2 = g \kappa_{mn} \tanh(\kappa_{mn} H) \quad (3.2.16)$$

όπου ω είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

ii) για $X(x) = A_1 \sin(\mu x)$, και $Z(z) = B_1 \sin(\lambda z)$ είναι

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \sin(\mu_m x) \cosh(\kappa_{mn} y) \sin(\lambda_n z) \quad (3.2.17)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{2m-1}{2L}\right)^2 \pi^2 + \left(\frac{2n-1}{2b}\right)^2 \pi^2 \quad (3.2.18)$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη (3.1.5) και προκύπτει

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{mn}^2 = g \kappa_{mn} \tanh(\kappa_{mn} H) \quad (3.2.19)$$

iii) για $X(x) = A_2 \cos(\mu x)$, και $Z(z) = B_2 \cos(\lambda z)$ είναι

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \cos(\mu_m x) \cosh(\kappa_{mn} y) \cos(\lambda_n z) \quad (3.2.20)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.2.21)$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη (3.1.5) και προκύπτει

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{mn}^2 = g \kappa_{mn} \tanh(\kappa_{mn} H) \quad (3.2.22)$$

iv) για $X(x) = A_2 \cos(\mu x)$ και $Z(z) = B_1 \sin(\lambda z)$ είναι

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \cos(\mu_m x) \cosh(\kappa_{mn} y) \sin(\lambda_n z) \quad (3.2.23)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2b}\right)^2 \pi^2 \quad (3.2.24)$$

εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (3.1.5) προκύπτει η εξής σχέση για τις ιδιοτιμές

$$\omega_{mn}^2 = g \kappa_{mn} \tanh(\kappa_{mn} H) \quad (3.2.25)$$

Λόγω της εξωτερικής διέγερσης που θα εφαρμοσθεί παρακάτω (κεφ. 4), προκύπτει ότι οι λύσεις είναι ανεξάρτητες της κατεύθυνσης z. Για το λόγο αυτό

περιοριζόμαστε στον υπολογισμό μόνο των ιδιοτιμών που αντιστοιχούν σε $\lambda = 0$. Οι ιδιοτιμές αυτές προέρχονται από τις περιπτώσεις

i) όπου είναι $\cos(\lambda z) = \cos(0) = 1$, άρα η 3.2.14 γίνεται

$$\Phi_m(x, y, z) = A_m \sin(\mu_m x) \cosh(\kappa_m y) \quad (3.2.26)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{2m-1}{2L} \right)^2 \pi^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \Rightarrow \kappa = \frac{2m-1}{2L} \pi \quad (3.2.27)$$

$$\omega_m^2 = g\kappa_m \tanh(\kappa_m H) \Rightarrow \omega^2 = g \frac{2m-1}{2L} \pi \tanh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) \quad (3.2.28)$$

όπου ω είναι οι αντισυμμετρικές ιδιοτιμές του προβλήματος.

$$\text{ii) } \Phi_m(x, y, z) = A_m \cos(\mu_m x) \cosh(\kappa_m y) \quad (3.2.29)$$

με

$$\kappa^2 = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \Rightarrow \kappa = \frac{m\pi}{L} \quad (3.2.30)$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη (3.1.5) και προκύπτει

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_m^2 = g\kappa_m \tanh(\kappa_m H) \Rightarrow \omega^2 = g \frac{m}{L} \pi \tanh\left(\frac{m\pi}{L} H\right) \quad (3.2.31)$$

από τη σχέση 3.2.31 προκύπτουν οι συμμετρικές ιδιοτιμές του προβλήματος.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα των ιδιοτιμών αυτών υπολογίζονται στο έκτο κεφάλαιο, στο οποίο παρατίθενται και οι αντίστοιχες αντισυμμετρικές και συμμετρικές ιδιομορφές του προβλήματος.

Κεφάλαιο 4 : Πρόβλημα συνοριακών τιμών-Αναλυτική επίλυση

4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιείται ένα αναλυτικό μοντέλο για τη μελέτη του κυματισμού ενός υγρού σε μία άκαμπτη ορθογώνια δεξαμενή, όταν σ' αυτό ασκείται εξωτερική αρμονική διέγερση της μορφής $X = X_0 e^{i\omega t}$, η οποία χωρίς να χάνεται η γενικότητα του προβλήματος θεωρείται στη x κατεύθυνση. Η ταχύτητα είναι της μορφής $U = U_0 e^{i\omega t}$ ενώ μεταξύ τους ισχύει η σχέση

$$U = \dot{X} \Rightarrow U_0 = -i\omega X_0 \quad (4.1.1)$$

Θεωρούμε ορθογωνική δεξαμενή μήκους $2L$ και πλάτους $2b$ με ύψος ελεύθερης επιφάνειας H , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Ένα τοπικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων (x,y,z) είναι τοποθετημένο στο κέντρο της δεξαμενής. Επιπλέον, γίνονται οι υποθέσεις ότι το υγρό είναι ασυμπίεστο με αστρόβιλη ροή και αμελητέα επιφανειακή τάση, ενώ η κίνησή του περιγράφεται σε τρεις διαστάσεις και η δεξαμενή είναι άκαμπτη. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις, η ταχύτητα του υγρού μπορεί να απεικονισθεί με το διάνυσμα του δυναμικού της ταχύτητας $\hat{\Phi}(x, y, z, t)$. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

i) Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad y = H \quad (4.1.3)$$

ii) στα τοιχώματα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} = U, \quad x = \pm L \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm b \quad (4.1.5)$$

iii) στον πυθμένα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad y=0 \quad (4.1.6)$$

Σημειώνεται ότι σε σχέση με τη διατύπωση του προβλήματος των ιδιοτιμών, (Εξισώσεις 3.1.1 – 3.1.4), η μόνη διαφορά εντοπίζεται στην εξίσωση (4.1.4) η οποία δεν είναι πλέον ομογενής.

Επειδή έχουμε αρμονική εξωτερική διέγερση ισχύει η σχέση

$$\hat{\Phi}(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (4.1.7)$$

Η συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.8)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες :

i) στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού:

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = H \quad (4.1.9)$$

ii) στα τοιχώματα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U, \quad x = \pm L \quad (4.1.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = \pm b \quad (4.1.11)$$

iii) στον πυθμένα της δεξαμενής :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad (4.1.12)$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε δύο υποπροβλήματα. Το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \varphi(x, y, z) \quad (4.1.13)$$

σύμφωνα με το διαχωρισμό ωστικής-επαγωγικής κίνησης [133]. Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην αρχική διαφορική εξίσωση (4.1.7) και έτσι προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις με τις ανάλογες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες επιλύονται στις παραγράφους 4.2 και 4.3.

4.2 Επίλυση του προβλήματος της ωστικής κίνησης (f)

Στην παράγραφο αυτή επιλύουμε το πρώτο από τα δύο υποπροβλήματα. Η συνάρτηση $f(x, y, z)$, που αντιπροσωπεύει την ωστική κίνηση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial f}{\partial x} = U, \quad x = -L \text{ και } x = L \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad z = -b \text{ και } z = b \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad (4.2.4)$$

και

$$f(x, y, z) = 0, \quad y = H \quad (4.2.5)$$

Επειδή η μια από τις συνθήκες είναι μη ομογενής, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Θέτουμε

$$f(x,y,z) = G(x,y,z) + F(x) \quad (4.2.6)$$

με

$$F(x) = Ux \quad (4.2.7)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.2.1) προκύπτει :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2.8)$$

το οποίο ισχύει, και οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad x=-L \text{ και } x=L \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad z=-b \text{ και } z=b \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad y=0 \quad (4.2.11)$$

$$G(x,y,z) = -F(x), \quad y=H \quad (4.2.12)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών για την επίλυση του προβλήματος. Ορίζουμε την $G(x,y,z)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$G(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \text{ και αφού αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.2.1)}$$

προκύπτουν οι ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις .

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \quad (4.2.13)$$

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \Rightarrow X'' + \mu^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 \sin(\mu x) + A_2 \cos(\mu x) \quad (4.2.14)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες της σχέσης (4.2.9) οπότε είναι

$$i) \quad A_2 = 0$$

Άρα η λύση είναι

$$X(x) = A \sin(\mu x) \quad (4.2.15)$$

και

$$\mu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L}, \text{ με } m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.16)$$

Οι τιμές μ_m είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

ii) $A_1 = 0$

Άρα η λύση είναι

$$X(x) = A \cos(\mu x) \quad (4.2.17)$$

$$\mu_m = \frac{m\pi}{L}, \text{ με } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.18)$$

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Z''}{Z} = -\frac{Y''}{Y} + \mu^2 = -\lambda^2$$

Η λύση στη z κατεύθυνση προκύπτει από την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \Rightarrow$$

$$Z(z) = B_1 \sin(\lambda z) + B_2 \cos(\lambda z) \quad (4.2.19)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες της σχέσης (4.2.10) οπότε είναι

i) $B_2 = 0$

Άρα η λύση είναι

$$Z(z) = B \sin(\lambda z) \quad (4.2.20)$$

και

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, \text{ με } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.21)$$

ii) $B_1 = 0$

Άρα η λύση είναι

$$Z(z) = B \cos(\lambda z) \quad (4.2.22)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \text{ με } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.23)$$

Αντίστοιχα έχουμε

$$\frac{Y''}{Y} - (\lambda^2 + \mu^2)Y = 0 \Rightarrow Y(y) = C_1 \sinh(\kappa y) + C_2 \cosh(\kappa y)$$

με

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 \quad (4.2.24)$$

και από την οριακή συνθήκη (4.2.3) προκύπτει $C_1 = 0$

Επομένως

$$Y(y) = C_2 \cosh(\kappa y) \quad (4.2.25)$$

Προκειμένου να μην προκύψει η τετριμμένη λύση, από τις παραπάνω περιπτώσεις απορρίπτουμε τις συμμετρικές λύσεις. Έτσι από τον συνδυασμό των παραπάνω λύσεων επιβιώνει μόνο η ακόλουθη αντισυμμετρική λύση

$$G(x,y,z) = A_{mn} \sin(\mu_m x) \cosh(\kappa_{mn} y) \cos(\lambda_n z) \quad (4.2.26)$$

Σύμφωνα με την οριακή συνθήκη (4.2.5) είναι

$$f(x,H,z)=0 \Rightarrow G(x,H,z)=-F(x) \Rightarrow$$

$$\int_{-L}^L \int_{-b}^b A_{mn} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2L} x\right) \cosh(\kappa_{mn} H) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dx dz = -Ux \quad (4.2.27)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right)$ και $\cos\left(\frac{m\pi}{b} z\right)$ και εφαρμόζουμε σχέσεις

ορθογωνιότητας

$$A_{mn} \cosh(\kappa_{mn} H) \int_{-L}^L \int_{-b}^b \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} z\right) dx dz = -U \int_{-L}^L \int_{-b}^b x \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} z\right) dx dz \quad (4.2.28)$$

Το δεύτερο μέλος της σχέσης 4.2.28 ισούται με το μηδέν σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από αυτή που είναι $\cos(0) = 1$, επομένως $\lambda_n = 0$, οπότε προκύπτει

$$\int_{-L}^L x \sin\left(\frac{2n-1}{2L}\pi x\right) dx \int_{-b}^b dz = \frac{8L^2 \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}{(2n-1)^2 \pi^2 bL} 2b$$

Επομένως ο συντελεστής A_m είναι :

$$A_m = \frac{-8UL(-1)^m}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right)} \quad (4.2.29)$$

Άρα η λύση είναι τελικά ανεξάρτητη του z , όπως φαίνεται πιο κάτω

$$G(x, y) = \sum_{m=1} \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi y\right) \quad (4.2.30)$$

Τελικά η συνολική μορφή της συνάρτησης $f(x, y)$, της ωστικής λύσης είναι :

$$f(x, y) = \sum_{m=1} \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi y\right) + Ux \quad (4.2.31)$$

Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (4.2.5) που ισχύει στην επιφάνεια. Έχουμε ότι

$$f(x, y) = G(x, y) + F(x)$$

$$G(x, y) = -F(x)$$

$$f(x, y)|_{y=H} = G(x, H) = \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) + Ux$$

$$G(x, H) = \sum_{m=1} \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right)$$

$$\text{Για } m = 1, x = L \text{ και } \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) = \left[-(-1)^{m-1}\right] \Rightarrow$$

$$G(L, H) = \frac{-8UL(-1)}{(2-1)^2 \pi^2} [- (1)] = -F(L) = -UL$$

Το ίδιο συμβαίνει και για τους υπόλοιπους όρους του αθροίσματος. Επομένως η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και όλες τις συνοριακές συνθήκες.

4.3 Επίλυση του προβλήματος της επαγωγικής κίνησης (ϕ)

Στη συνέχεια επιλύουμε το δεύτερο μέρος του προβλήματος, το οποίο είναι ουσιαστικά το πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας. Η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται είναι η εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

με τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad x = L \text{ και } x = -L \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = b \text{ και } z = -b \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad (4.3.4)$$

και

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = -g \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y = H \quad (4.3.5)$$

Διαμέσου της συνθήκης (4.3.4) στην επιφάνεια, το παρόν πρόβλημα συνδέεται με το πρόβλημα ομοιόμορφης κίνησης.

Όπως προέκυψε παραπάνω, η λύση του προβλήματος της f είναι:

$$f(x, y) = \sum_n \frac{-8UL(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \pi^2 \cosh(\frac{2n-1}{2L} \pi H)} \sin(\frac{2n-1}{2L} \pi x) \cosh(\frac{2n-1}{2L} \pi y) + Ux$$

το οποίο στο $y = H$ γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_n \frac{-4U(-1)^{n-1}}{(2n-1) \pi} \sin(\frac{2n-1}{2L} \pi x) \tanh(\frac{2n-1}{2L} \pi H)$$

Επομένως η συνθήκη στο $y = H$ παίρνει τελικά τη μορφή:

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = g \sum_n \frac{-4U(-1)^{n-1}}{(2n-1) \pi} \sin(\frac{2n-1}{2L} \pi x) \tanh(\frac{2n-1}{2L} \pi H) \quad (4.3.6)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών και έχουμε

$$f(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

αντικαθιστούμε στην αρχική διαφορική εξίσωση και προκύπτει

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \Rightarrow X'' + \mu^2 = 0 \Rightarrow$$

$$X(x) = A_1 \sin(\mu x) + A_2 \cos(\mu x) \quad (4.3.7)$$

Επομένως

$$X'(x) = A_1 \mu \cos(\mu x) - A_2 \mu \sin(\mu x) \text{ και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στο } x = -L$$

και στο $x = L$ αντίστοιχα, έχουμε

$$X'(-L) = 0 \Rightarrow A_1 \mu \cos(-\mu L) - A_2 \mu \sin(-\mu L) = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 \mu \cos(\mu L) + A_2 \mu \sin(\mu L) = 0$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 \mu \cos(\mu L) - A_2 \mu \sin(\mu L) = 0$$

Ανάλογα με το αν θα αφαιρέσουμε ή θα προσθέσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις,

τότε θα προκύψουν οι παρακάτω τύποι

$$X(x) = A_1 \sin(\mu x) \quad (4.3.8)$$

ή

$$X(x) = A_2 \cos(\mu x) \quad (4.3.9)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες βρίσκουμε

Για $X(x) = A_1 \sin(\mu x)$ είναι

$$\mu = \frac{2m-1}{2L} \pi, \text{ για } m=1,2,3,\dots \quad (4.3.10)$$

Για $X(x) = A_2 \cos(\mu x)$ είναι

$$\mu = \frac{m\pi}{L} \text{ για } m=1,2,3,\dots \quad (4.3.11)$$

Συνεχίζοντας τη λύση με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, έχουμε

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Z''}{Z} = -\frac{Y''}{Y} + \mu^2 = -\lambda^2$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \Rightarrow$$

$$Z(z) = B_1 \sin(\lambda z) + B_2 \cos(\lambda z)$$

Από τη σχέση 4.3.3 προκύπτει είτε $B_1 = 0$ οπότε

$$Z(z) = B_2 \cos(\lambda z) \quad (4.3.12)$$

και

$$\lambda = \frac{n\pi}{b} \quad (4.3.13)$$

είτε $B_2 = 0$ οπότε

$$Z(z) = B_1 \sin(\lambda z) \quad (4.3.14)$$

και

$$\lambda = \frac{2n-1}{2b} \pi \quad (4.3.15)$$

$$\frac{Y''}{Y} - (\lambda^2 + \mu^2) = 0 \Rightarrow Y'' - \kappa^2 Y = 0 \Rightarrow$$

$$Y(y) = C_1 \sinh(\kappa y) + C_2 \cosh(\kappa y) \quad (4.3.16)$$

Από την οριακή συνθήκη που ισχύει στο $y=0$ έχουμε

$$C = 0$$

Άρα

$$Y(y) = C_2 \cosh(\kappa y) \quad (4.3.17)$$

Για να μην έχουμε την τετριμμένη λύση πρέπει η λύση μας να έχει την μορφή

$$\Phi(x, y, z) = A_{mn} \sin(\mu x) \cosh(\kappa y) \cos(\lambda z) \quad (4.3.18)$$

Εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη στο $y=H$ και έχουμε

$$-\omega^2 A_{mn} \sin(\mu x) \cosh(\kappa H) \cos(\lambda z) + g A_{mn} \kappa \sin(\mu x) \sinh(\kappa H) \cos(\lambda z) =$$

$$-g \sum_m \frac{-4U(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \tanh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) \Rightarrow$$

$$A_{mn} [-\omega^2 + g\kappa \tanh(\kappa H)] \sin(\mu x) \cos(\lambda z) =$$

$$g \sum_m \frac{4U(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi} \frac{\tanh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) \sin(\mu x)}{\cosh(\kappa H)}$$

Εφαρμόζουμε σχέσεις ορθογωνιότητας οπότε προκύπτει ότι μόνο για $n = 0$ δε θα

πάραυμε μηδενική λύση. Έτσι ο συντελεστής είναι

$$A_m = \sum_m \frac{g \frac{4U(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi} \tanh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) + g \frac{2m-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \quad (4.3.19)$$

Άρα η τελική λύση είναι η ακόλουθη

$$\phi(x, y) = \sum_n \frac{g \frac{4U(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right) + g \frac{2n-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi y\right) \quad (4.3.20)$$

4.4 Πιέσεις, δυνάμεις και ροπές

Από την επίλυση των προβλημάτων της ώσης και της επαγωγής έχει προκύψει αντίστοιχα ότι

$$f(x, y) = \sum_{m=1} \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi y\right) + Ux \quad (4.4.1)$$

$$\phi(x, y) = \sum_n \frac{g \frac{4U(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right) + g \frac{2n-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi y\right) \quad (4.4.2)$$

Επομένως μετά την επεξεργασία των λύσεων 4.4.1 και 4.4.2 η συνολική λύση είναι

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1} \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \frac{4}{\pi^2} \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi y\right) + Ux \Rightarrow$$

$$\Phi(x, y) = \sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(k_m x) \cosh(k_m y) + Ux \quad (4.4.3)$$

όπου $k_m = \frac{2m-1}{2L} \pi$ και $\omega_n^2 = gk_n \tanh(k_n H)$

Λόγω της εξωτερικής αρμονικής διέγερσης έχουμε

$$\hat{f}(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t} \text{ και } \hat{\phi}(x, y, t) = \phi(x, y)e^{i\omega t} \quad (4.4.6)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli και βρίσκουμε τις πιέσεις.

$$P_l = -\rho \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$P_l = i\omega \rho \left[\sum_{m=1} \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi y\right) + Ux \right] e^{i\omega t} \quad (4.4.7)$$

$$P_c = -\rho \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$P_c = i\omega\rho \sum_n \frac{g \frac{4U(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right) + g \frac{2n-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right) \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi y\right) e^{i\omega t} \quad (4.4.8)$$

$$P_T = -\rho \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$P_T = i\omega\rho \left[\sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \sin(k_m x) \cosh(k_m y) + Ux \right] e^{i\omega t} \quad (4.4.9)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε τις παραπάνω σχέσεις και βρίσκουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

Στο $x = L$, είναι

$$F_l(L, y, t) =$$

$$\begin{aligned} &= i\omega\rho e^{i\omega t} \int_0^H \left[\sum_m \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right) \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi y\right) + UL \right] dy \\ &= i\omega\rho e^{i\omega t} \left[\sum_m \frac{-8UL(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi\right) \sinh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) \left(\frac{2L}{(2m-1)\pi}\right) + ULH \right] \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$$F_c(L, y, t) =$$

$$= i\omega\rho e^{i\omega t} \int_0^H \sum_n \frac{g \frac{4U(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right) + g \frac{2n-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi H\right)} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right) \cosh\left(\frac{2n-1}{2L} \pi y\right) dy$$

$$= i\omega\rho e^{i\omega t} \sum_n \frac{\frac{8UL(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)}{-\frac{\omega^2}{g} \cosh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right) + \frac{2n-1}{2L}\pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \sinh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right) \quad (4.4.11)$$

Επομένως η συνολική δύναμη στο $x = L$ είναι

$$F_T(L, y, t) = F_I(L, y, t) + F_C(L, y, t) \quad (4.4.12)$$

Άρα η συνολική δύναμη του προβλήματος είναι

$$F_T(L, y, t) = i\omega\rho e^{i\omega t} \left[\int_0^H \sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(k_m L) \cosh(k_m y) + UL \right] dy$$

$$= i\omega\rho e^{i\omega t} \left[\sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \sinh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right) \left(\frac{2L}{(2m-1)\pi}\right) + ULH \right] \quad (4.4.13)$$

Ομοίως προκύπτουν και οι δυνάμεις στο $x = -L$, καθώς ισχύει

$$F_I(-L, y, t) = -F_I(L, y, t) \quad (4.4.14)$$

και

$$F_C(-L, y, t) = -F_C(L, y, t) \quad (4.4.15)$$

Για την εξαγωγή συμπερασμάτων καθώς και για να απλοποιηθούν οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις ως προς τον χρόνο χρησιμοποιούμε τους συντελεστές

$$C_1 = \frac{F_C}{F_I} \quad (4.4.16)$$

και

$$C_2 = \frac{F_C + F_I}{F_U} \quad (4.4.17)$$

με

$$F_U = i\omega e^{i\omega t} mU \quad (4.4.18)$$

οι οποίοι είναι αντίστοιχα, ο λόγος της δύναμης επαγωγικής κίνησης προς τη δύναμη της ωστικής κίνησης, και ο λόγος της συνολικής δύναμης προς τη δύναμη της

ομοιόμορφης κίνησης. Ο υπολογισμός και οι γραφικές παραστάσεις των συντελεστών αυτών γίνονται στο έκτο κεφάλαιο.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε αναλυτικά τη ροπή που ασκείται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Για το δεξί τοίχωμα της δεξαμενής είναι

$$M(L, y, t) = i\omega\rho e^{i\omega t} \int_0^H y\Phi(L, y)dy$$

$$M(L, y, t) = i\omega\rho e^{i\omega t} \int_0^H y \sum_m \left(\frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(k_m L) \cosh(k_m y) + UL \right) dy$$

$$= i\omega\rho e^{i\omega t} \left[\sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(k_m L) \left(\frac{4L^2(1 - \cosh(\frac{2m-1}{2L}\pi H))}{(2m-1)^2 \pi^2} + \frac{2LH \sinh(\frac{2m-1}{2L}\pi H)}{(2m-1)\pi} \right) + \frac{ULH^2}{2} \right]$$

(4.4.19)

Το σημείο εφαρμογής της ροπής δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{\sum_m \left[\frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(k_m L) \left(\frac{4L^2(1 - \cosh(\frac{2m-1}{2L}\pi H))}{(2m-1)^2 \pi^2} + \frac{2LH \sinh(\frac{2m-1}{2L}\pi H)}{(2m-1)\pi} \right) + \frac{ULH^2}{2} \right]}{\sum_m \left[\frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh(k_m H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin(\frac{2m-1}{2} \pi) \sinh(\frac{2m-1}{2L}\pi H) \frac{2L}{(2m-1)\pi} \right] + ULH}$$

(4.4.20)

ενώ για την ροπή στο αριστερό τοίχωμα ισχύει

$$M(-L, y, t) = -M(L, y, t) \quad (4.4.21)$$

4.5 Εναλλακτική μεθοδολογία επίλυσης

Στη παρούσα εργασία για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε μία συγκεκριμένη μεθοδολογία, σύμφωνα με την οποία το συνολικό πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού, διασπάστηκε σε δύο υποπροβλήματα. Στο πρόβλημα της ωστικής κίνησης και στο πρόβλημα της επαγωγικής κίνησης που περιγράφονται από τις εξισώσεις (4.2.31) και (4.3.20) αντίστοιχα.

Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος έχει γίνει και με μια άλλη εναλλακτική μεθοδολογία [134]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το πρόβλημα πάλι διασπάται σε δύο διαφορετικά υποπροβλήματα, το πρόβλημα ομοιόμορφης κίνησης και το πρόβλημα κυματισμού, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\Phi(x, y) = \Phi_U(x, y) + \Phi_S(x, y) \quad (4.5.1)$$

$$\Phi_U = Ux \quad (4.5.2)$$

$$\Phi_S = \sum_n B_n \sin(\kappa_n x) \cosh(\kappa_n y) \quad (4.5.3)$$

με

$$\kappa_n L = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (4.5.4)$$

και

$$B_n = \frac{-2UL(-1)^{n-1}}{(k_n L)^2 \cosh(k_n H)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \quad (4.5.5)$$

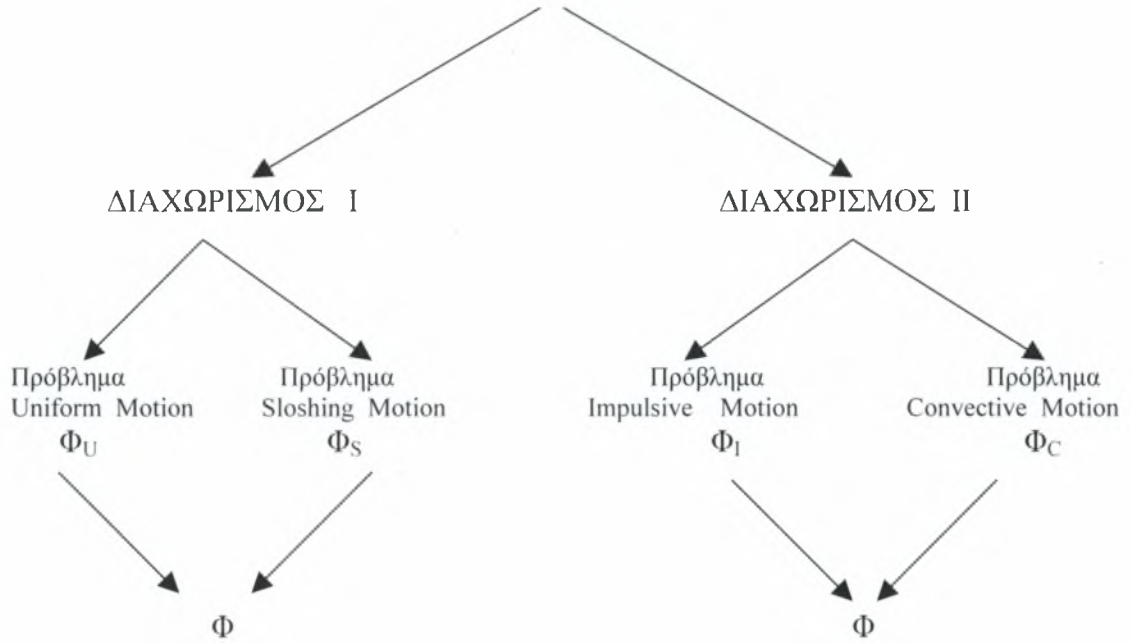
η συνολική λύση των οποίων ταυτίζεται με τη συνολική λύση του προβλήματος με τη μέθοδο διαχωρισμού ωστικής – επαγωγικής κίνησης (4.4.3) και είναι η εξής

$$\Phi = \sum_n B_n \sin(\kappa_n x) \cosh(\kappa_n y) + Ux \quad (4.5.6)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια σχηματική απεικόνιση των δύο μεθόδων.

ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\hat{\Phi} = \Phi e^{i\omega t}$$



Κεφάλαιο 5 : Υπολογιστική επίλυση του προβλήματος

5.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μία εναλλακτική υπολογιστική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Το πεδίο επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης διαιρείται σε υποπεδία που ονομάζονται στοιχεία. Στη συνέχεια διατυπώνεται μία προσεγγιστική λύση για κάθε στοιχείο. Τέλος η ολική λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει συνδυάζοντας τις επιμέρους λύσεις κάθε στοιχείου εξασφαλίζοντας τη συνέχεια της λύσης στα όρια κάθε στοιχείου.

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται μία συνοπτική περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθεί μια γενικευμένη μεθοδολογία. Τα βασικά βήματα της μεθόδου είναι τα εξής:

- Ασθενής μορφή των εξισώσεων

Αρχικά η διαφορική εξίσωση τροποποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να προκύψει η ασθενής μορφή του προβλήματος, για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται μια αποδεκτή συνάρτηση. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τις διαφορικές εξισώσεις που εκφράζουν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

- Διακριτοποίηση

Το επόμενο βήμα είναι η διακριτοποίηση του χωρίου ορισμού του προβλήματος. Το πεδίο λύσης διασπάται σε υποπεδία που ονομάζονται στοιχεία

- Διατύπωση εξισώσεων στοιχείων

Ακολουθεί η διατύπωση εξισώσεων που να προσεγγίζουν τη λύση σε κάθε στοιχείο. Επιλέγονται κατάλληλες συναρτήσεις βάσης με άγνωστους συντελεστές και οι συντελεστές εκτιμώνται έτσι ώστε η λύση να προσεγγίζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές από τις οποίες οι πλέον διαδεδομένες είναι η μέθοδος των βαθμωτών υπολοίπων και η μέθοδος Galerkin. Το αποτέλεσμα όλων αυτών των τεχνικών είναι ανάλογο της θεωρίας παρεμβολής και

οδηγεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για κάθε στοιχείο της μορφής $[K] \{u\} = \{F\}$, όπου $[K]$ είναι το γνωστό μητρώο συντελεστών, $\{u\}$ το διάνυσμα των αγνώστων στους κόμβους και $\{F\}$ το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα των εξωτερικών δυνάμεων ή διαταραχών που ασκούνται στους κόμβους.

- Τελικό σύστημα εξισώσεων

Έχοντας τις εξισώσεις κάθε στοιχείου, διατυπώνεται το τελικό σύστημα εξισώσεων για όλο το πεδίο ορισμού του προβλήματος. Διαλέγοντας κατάλληλες συναρτήσεις η τελική λύση πρέπει να είναι συνεχής. Το τελικό σύστημα έχει τη μορφή $[K] \{u'\} = \{F'\}$, όπου $[K]$ είναι το τελικό μητρώο συντελεστών, όπως προκύπτει από τις ιδιότητες του συνεχούς μέσου, και $\{u'\}$ και $\{F'\}$ τα διανύσματα των αγνώστων και των εξωτερικών δυνάμεων αντίστοιχα. Το σύμβολο «'» δηλώνει ότι τα διανύσματα $\{u'\}$ και $\{F'\}$ προκύπτουν από τα στοιχεία των διανυσμάτων $\{u\}$ και $\{F\}$ για κάθε στοιχείο.

- Οριακές συνθήκες

Το σύστημα $[K] \{u'\} = \{F'\}$ τροποποιείται λαμβάνοντας υπ' όψιν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

- Επίλυση

Η επίλυση του συστήματος και ο προσδιορισμός των αγνώστων ποσοτήτων γίνεται με μια τυπική μέθοδο επίλυσης γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων (π.χ. απαλοιφή Gauss).

- Επεξεργασία αποτελεσμάτων

Μετά την επίλυση του προβλήματος ακολουθεί μετ-επεξεργασία των αποτελεσμάτων, δηλαδή υπολογισμός πιέσεων.

5.2 Επίλυση του προβλήματος

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρατίθεται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος του κυματισμού, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η συνάρτηση του δυναμικού ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.2.1)$$

με τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{X}, \text{ στο } B_1, \text{ δηλαδή στα τοιχώματα της δεξαμενής} \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ στο } B_3, \text{ δηλαδή στον πυθμένα της δεξαμενής} \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \text{ στο } B_2, \text{ δηλαδή στην ελεύθερη επιφάνεια} \quad (5.2.4)$$

Διακριτοποιούμε την διαφορική εξίσωση, χρησιμοποιώντας την αποδεκτή συνάρτηση ϕ^* , ώστε να προκύψει η ασθενής μορφή του παραπάνω προβλήματος :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi) \phi^* d\Omega = 0$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green έχουμε

$$-\int_B \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* dB + \int_{\Omega} (\nabla \phi) (\nabla \phi^*) d\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{B_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* dB_2 + \int_{B_3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* dB_3 - \int_{\Omega} (\nabla \phi) (\nabla \phi^*) d\Omega = 0$$

όπου $\int_{B_3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* dB_3 = 0$, λόγω της συνοριακής συνθήκης (5.2.3). Για αρμονική

διέγερση $\dot{X} = Ue^{i\omega t}$, επομένως $\phi(x, y, t) = \Phi(x, y)e^{i\omega t}$ και $\nabla \phi = (\nabla \Phi)e^{i\omega t}$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\left(\int_{B_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \phi^* dB_1 \right) e^{i\omega t} + \left(\int_{B_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \phi^* dB_2 \right) e^{i\omega t} - \left(\int_{\Omega} (\nabla \Phi) (\nabla \phi^*) d\Omega \right) e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{B_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \phi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \phi^* dB_2 - \int (\nabla \Phi)(\nabla \phi^*) d\Omega = 0 \quad (5.2.5)$$

Η σχέση 5.2.4, για αρμονική απόκριση γίνεται

$$-\omega^2 \Phi e^{i\omega t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial n} e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \Phi \quad (5.2.6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 5.2.6 και 5.2.2 στη σχέση 5.2.5 προκύπτει

$$\int_{B_1} U \phi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\omega^2}{g} \Phi \phi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi)(\nabla \phi^*) d\Omega = 0 \quad (5.2.7)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο Galerkin με :

$$\Phi = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x, y) \quad (5.2.8)$$

και

$$\phi^* = \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i(x, y) \quad (5.2.9)$$

όπου τα $\psi_i(x, y)$ είναι γνωστές συναρτήσεις βάσεις, τα β_i τυχαία και τα a_i άγνωστα προς υπολογισμό. Το μητρώο των συντελεστών παίρνει τελικά τη μορφή

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \psi_i)(\nabla \psi_j) d\Omega - \int_{B_2} \frac{\omega^2}{g} \psi_i \psi_j dB_2 \quad (5.2.10)$$

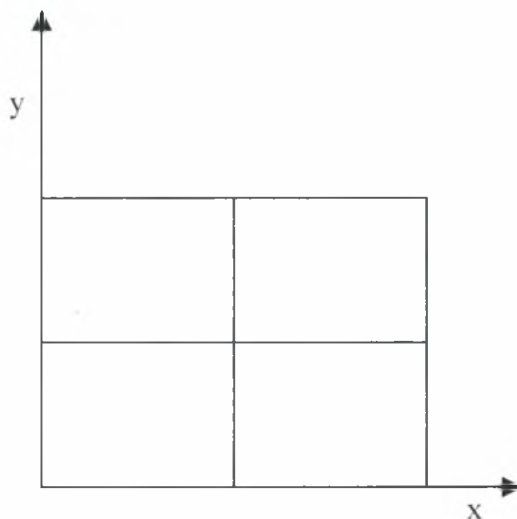
ενώ το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση

$$F_i = \int_{B_1} U \psi_i dB_1 \quad (5.2.11)$$

Συνεπώς το σύστημα που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι το ακόλουθο

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} a_{ij} = F_i \quad (5.2.12)$$

Έτσι θεωρούμε πλέγμα που αποτελείται από τετραγωνικά τετρακομβικά στοιχεία, και ένα γενικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) τοποθετημένο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.1.



Σχήμα 5.2.1 : Τυπικό (αραιό) πλέγμα τεσσάρων στοιχείων

Στη συνέχεια θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ,η) στο κάθε στοιχείο για το οποίο ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί

$$x(\xi, \eta) = x_A + \frac{h_x}{2}(1 + \xi) \Rightarrow \frac{dx}{d\xi} = \frac{h_x}{2} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{d\eta} = 0 \quad (5.2.13)$$

$$y(\xi, \eta) = y_A + \frac{h_y}{2}(1 + \eta) \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dy}{d\eta} = \frac{h_y}{2} \quad (5.2.14)$$

και εργαζόμαστε για κάθε στοιχείο (e) ξεχωριστά Έτσι για το κάθε στοιχείο ισχύει η σχέση 5.2.10 παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B]^T [B] d\Omega^e - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_2^e} [N]^T [N] dB_2^e \quad (5.2.15)$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$, αποτελείται από τις συναρτήσεις βάσης του στοιχείου.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

ενώ ο πίνακας \mathbf{B} είναι $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix}$. Τέλος το διάνυσμα των

εξωτερικών δυνάμεων για το κάθε στοιχείο δίνεται από τη σχέση

$$F^e = \int_{B_1^e} U[N]^T dB_1^e \quad (5.2.16)$$

Υπολογίζουμε τους πίνακες που προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.15) και (5.2.16) για το κάθε στοιχείο και στη συνέχεια τους συνθέτουμε έτσι ώστε να προκύψουν το ολικό μητρώο των συντελεστών \mathbf{K} και το ολικό διάνυσμα των δυνάμεων F . Στη συνέχεια επιλύουμε το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση (5.2.12) και υπολογίζουμε τα άγνωστα a_i .

Η σχέση (5.2.7), αποτελεί μια γενική έκφραση του προβλήματος και από αυτή προκύπτουν και οι υπόλοιπες υποπεριπτώσεις του προβλήματος του κυματισμού. Έτσι όταν μηδενίζεται ο πρώτος όρος της σχέσης (5.2.7) επιλύουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών, ενώ όταν μηδενίζεται ο δεύτερος όρος της σχέσης προκύπτει το πρόβλημα της ωστικής κίνησης.

5.3 Απλουστευμένη εφαρμογή με 4 στοιχεία

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ένα απλουστευμένο παράδειγμα επίλυσης του συνολικού προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για

την περίπτωση που το πεδίο επίλυσης του προβλήματος υποδιαιρείται σε τέσσερα μόνο στοιχεία.

Επιλύουμε την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.3.1)$$

με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U, \text{ στο } x = L \text{ και στο } x = -L \quad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \text{ στο } y = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \text{ στο } y = H \quad (5.3.4)$$

Όπου $2L$ είναι το συνολικό μήκος της δεξαμενής και H το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας.

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων ξ, η με $-1 \leq \xi \leq 1$ και $-1 \leq \eta \leq 1$. Ο μετασχηματισμός που ισχύει μεταξύ των συστημάτων ξ, η και x, y είναι ο ακόλουθος :

$$x(\xi, \eta) = x_A + \frac{h_x}{2}(1 + \xi) \quad (5.3.5)$$

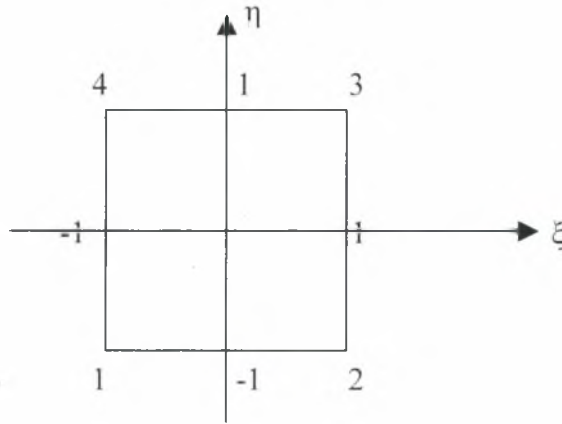
και

$$y(\xi, \eta) = y_A + \frac{h_y}{2}(1 + \eta) \quad (5.3.6)$$

με

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{h_x}{2}, \frac{dx}{d\eta} = 0, \frac{dy}{d\xi} = 0 \text{ και } \frac{dy}{d\eta} = \frac{h_y}{2}$$

Θεωρούμε το ορθογωνικό στοιχείο (i, j, k, l) με τοπική αρίθμηση (1, 2, 3, 4) και τις ακόλουθες γραμμικές συναρτήσεις



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (5.3.7)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (5.3.8)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (5.3.9)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (5.3.10)$$

Παραγωγίζουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως προς ξ και η .

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{2h_x}(\eta-1)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{2h_y}(\xi-1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{2h_x}(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{2h_y}(-1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{2h_x}(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{2h_y}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{2h_x} (-\eta - 1)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{2h_y} (1 - \xi)$$

Το μητρώο \mathbf{B} γίνεται

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2h_x}(\eta-1) & \frac{1}{2h_x}(1-\eta) & \frac{1}{2h_x}(1+\eta) & \frac{1}{2h_x}(-1-\eta) \\ \frac{1}{2h_y}(\xi-1) & \frac{1}{2h_y}(-1-\xi) & \frac{1}{2h_y}(1+\xi) & \frac{1}{2h_y}(1-\xi) \end{bmatrix}$$

του οποίου το ανάστροφο μητρώο είναι το \mathbf{B}^T .

Υπολογίζουμε το εξής ολοκλήρωμα :

$$\int_e B^T B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T B \det \begin{bmatrix} \frac{h_x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_y}{2} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (5.3.11)$$

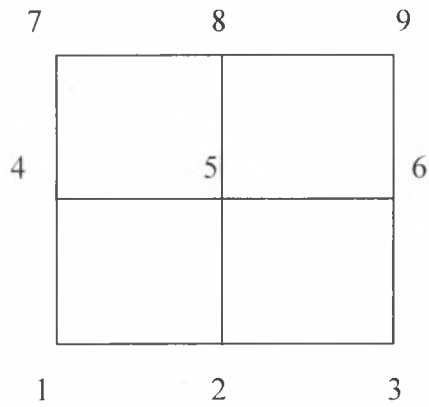
με

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x^2}(\eta-1)^2 + \frac{1}{h_y^2}(\xi-1)^2 & \frac{-1}{h_x^2}(\eta-1)^2 - \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{1}{h_x^2}(\eta^2-1) + \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{-1}{h_x^2}(\eta^2-1) - \frac{1}{h_y^2}(\xi-1)^2 \\ \frac{-1}{h_x^2}(\eta-1)^2 - \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{1}{h_x^2}(\eta-1)^2 + \frac{1}{h_y^2}(\xi+1)^2 & \frac{-1}{h_x^2}(\eta^2-1) - \frac{1}{h_y^2}(\xi+1)^2 & \frac{1}{h_x^2}(\eta^2-1) + \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) \\ \frac{1}{h_x^2}(\eta^2-1) + \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{-1}{h_x^2}(\eta^2-1) - \frac{1}{h_y^2}(\xi+1)^2 & \frac{1}{h_x^2}(\eta+1)^2 + \frac{1}{h_y^2}(\xi+1)^2 & \frac{-1}{h_x^2}(\eta+1)^2 - \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) \\ \frac{-1}{h_x^2}(\eta^2-1) - \frac{1}{h_y^2}(\xi-1)^2 & \frac{1}{h_x^2}(\eta^2-1) + \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{-1}{h_x^2}(\eta^2-1) + \frac{1}{h_y^2}(\xi^2-1) & \frac{1}{h_x^2}(\eta+1)^2 + \frac{1}{h_y^2}(\xi-1)^2 \end{bmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας τον πίνακα $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ και πολλαπλασιάζοντας με την ορίζουσα προκύπτει ο

παρακάτω πίνακας, ενώ τα στοιχεία έχουν ως εξής:



Το μητρώο του κάθε στοιχείου έχει ως εξής:

$$K^{(1)} = \frac{1}{48} * h_x * h_y * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2} & -\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2} & -\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2} & \frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2} \\ -\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2} & \frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2} & \frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2} & -\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2} \\ \frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2} & \frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2} & \frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2} & -\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2} \\ \frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2} & -\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2} & -\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2} & \frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2} \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 5 \\ \leftarrow 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{48} * h_x * h_y *$$

2	3	6	5	
↓	↓	↓	↓	
$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	← 2
$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	← 3
$\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	← 6
$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	← 5

$$K^{(3)} = \frac{1}{48} * h_x * h_y *$$

4	5	8	7	
↓	↓	↓	↓	
$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	← 4
$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	← 5
$\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	← 8
$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	← 7

$$K^{(4)} = \frac{1}{48} * h_x * h_y *$$

5	6	9	8	
↓	↓	↓	↓	
$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	← 5
$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	← 6
$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	← 9
$\frac{8}{h_x^2} - \frac{16}{h_y^2}$	$-\frac{8}{h_x^2} - \frac{8}{h_y^2}$	$-\frac{16}{h_x^2} + \frac{8}{h_y^2}$	$\frac{16}{h_x^2} + \frac{16}{h_y^2}$	← 8

Από τη σύνθεση των τεσσάρων αυτών μητρώων προκύπτει το συνολικό μητρώο **K**, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων για $\eta = 1$ διότι η συνοριακή συνθήκη ισχύει στο $y = H$.

$$\int_{B_2^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dB_2^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{hx}{2} d\xi = \frac{hx}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας υπολογίστηκε για το τρίτο στοιχείο, ομοίως προκύπτει και ο πίνακας του τέταρτου στοιχείου. Επομένως το ολικό μητρώο που προκύπτει από τη σύνθεσή τους είναι ως εξής

$$\int_{B_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dB_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{hx}{3} & \frac{hx}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{hx}{6} & \frac{2hx}{3} & \frac{hx}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{hx}{6} & \frac{hx}{3} \end{bmatrix}$$

Έτσι καλούμαστε να επιλύσουμε το σύστημα $\mathbf{K}\Phi = \mathbf{F}$, με

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega_e - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dB_2 \quad (5.3.8)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Για τον υπολογισμό των δυνάμεων σε κάθε στοιχείο ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Για το πρώτο στοιχείο, (με αντίστοιχους κόμβους 1, 5) είναι

$$F_1 = - \int_{-1}^1 N_1(-1, \eta) V \frac{hy}{2} d\eta = -\frac{1}{2} Vhy$$

$$F_5 = - \int_{-1}^1 N_4(-1, \eta) V \frac{hy}{2} d\eta = -\frac{1}{2} Vhy$$

Ομοίως για το δεύτερο στοιχείο, (με αντίστοιχους κόμβους 3, 6)

$$F_3 = \frac{1}{2} Vhy$$

$$F_6 = \frac{1}{2} Vhy$$

για το τρίτο στοιχείο, (με αντίστοιχους κόμβους 4, 7)

$$F_4 = -\frac{1}{2} Vhy$$

$$F_7 = -\frac{1}{2} Vhy$$

και για το τέταρτο στοιχείο(με αντίστοιχους κόμβους 6, 9),

$$F_6 = \frac{1}{2} Vhy$$

$$F_9 = \frac{1}{2} Vhy$$

Από τη σύνθεση των δυνάμεων του κάθε στοιχείου προκύπτει το συνολικό διάνυσμα των δυνάμεων

$$F = \left[-\frac{1}{2} Vhy \quad 0 \quad \frac{1}{2} Vhy \quad -Vhy \quad 0 \quad Vhy \quad -\frac{1}{2} Vhy \quad 0 \quad \frac{1}{2} Vhy \right]^T$$

Κεφάλαιο 6: Αποτελέσματα

6.1. Αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα ιδιοτιμών και ιδιομορφών

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου, δηλαδή τα αποτελέσματα του προβλήματος των ιδιοτιμών. Κατά την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο τρίτο κεφάλαιο, προέκυψαν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\omega_m^2 = g \frac{2m-1}{2L} \pi \tanh\left(\frac{2m-1}{2L} \pi H\right) \quad (6.1.1)$$

$$\omega_n^2 = g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi}{L} H\right) \quad (6.1.2)$$

από τις οποίες υπολογίζονται οι ιδιοτιμές ω του προβλήματος.

Στους πίνακες που ακολουθούν φαίνονται οι τέσσερις πρώτες ιδιοτιμές καθώς και ο λόγος $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, που προκύπτουν από τη σχέση 6.1.1 ανάλογα με το μήκος και το ύψος της δεξαμενής που θα επιλέξουμε, οπότε προκύπτουν οι αντισυμμετρικές ιδιοτιμές, καθώς και οι τέσσερις πρώτες συμμετρικές ιδιοτιμές που προκύπτουν από τη σχέση 6.1.2. Στα σχήματα 6.1.1 και 6.1.2 παρουσιάζονται αντίστοιχα οι τέσσερις πρώτες αντισυμμετρικές και οι τέσσερις πρώτες συμμετρικές ιδιομορφές.

Από τη μελέτη των πινάκων αυτών διαπιστώνεται ότι η μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας H , έχει μικρή επίπτωση στις ιδιοτιμές. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι διπλασιασμός του ύψους H , επιφέρει αισθητή μεταβολή μόνο στην πρώτη ιδιοτιμή ενώ οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές παραμένουν ουσιαστικά ανεπηρέαστες. Αντίθετα η μεταβολή του συνολικού μήκους της δεξαμενής επηρεάζει σημαντικά όχι μόνο την πρώτη ιδιοτιμή αλλά και τις μεγαλύτερες.

m	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	1.3840	0.1952
2	2.4825	0.6282
3	3.2051	1.0472
4	3.7923	1.4660

Πίνακας 6.1.1: Αντισυμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8\text{m}$ και $2L = 15\text{m}$

m	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	1.4307	0.2086
2	2.4827	0.6283
3	3.2051	1.0472
4	3.7923	1.4660

Πίνακας 6.1.2: Αντισυμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 15\text{m}$ και $2L = 15\text{m}$

m	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	1.4333	0.2094
2	2.4827	0.6283
3	3.2051	1.0472
4	3.7923	1.4660

Πίνακας 6.1.3: Αντισυμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 30\text{m}$ και $2L = 15\text{m}$

m	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	1.9509	0.3879
2	3.3995	1.1780
3	4.3888	1.9634
4	5.1929	2.7485

Πίνακας 6.1.4: Αντισυμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8m$ και $2L = 8m$

m	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	2.7757	0.7853
2	4.8077	2.3561
3	6.2057	3.9279
4	7.3439	5.4977

Πίνακας 6.1.5: Αντισυμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8m$ και $2L = 4m$

n	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	0.0000	0.0000
2	2.0246	0.4178
3	2.8666	0.8377
4	3.5110	1.2566

Πίνακας 6.1.6: Συμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8m$ και $2L = 15m$

n	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	0.0000	0.0000
2	2.0271	0.4178
3	2.8667	0.8377
4	3.5107	1.2566

Πίνακας 6.1.7: Συμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 15m$ και $2L = 15m$

n	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	0.0000	0.0000
2	2.0271	0.4178
3	2.8667	0.8377
4	3.5107	1.2566

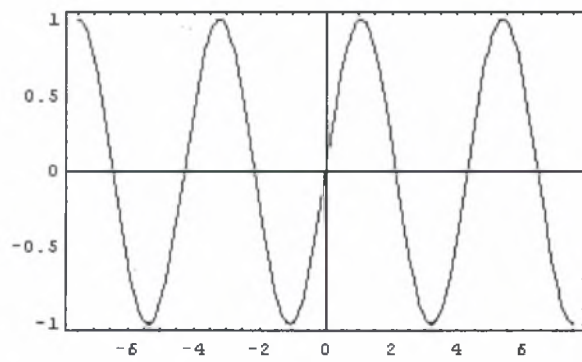
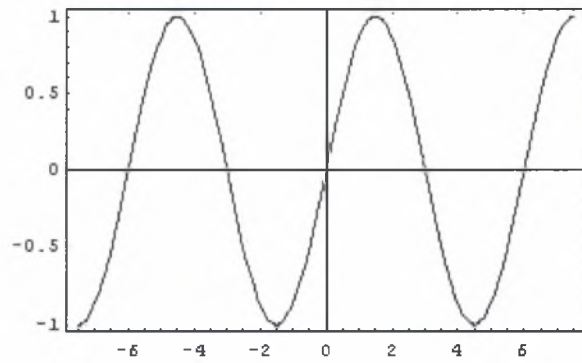
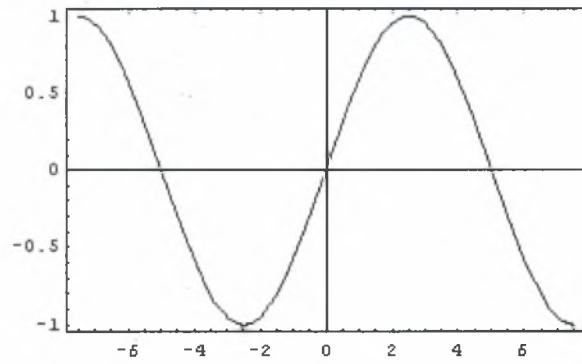
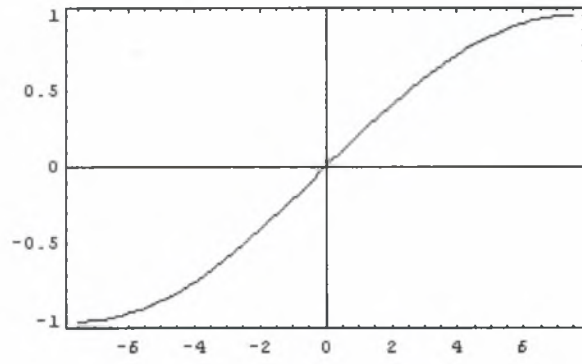
Πίνακας 6.1.8: Συμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 30\text{m}$ και $2L = 15\text{m}$

n	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	0.0000	0.0000
2	2.7757	0.7853
3	3.9255	1.5708
4	4.8077	2.3561

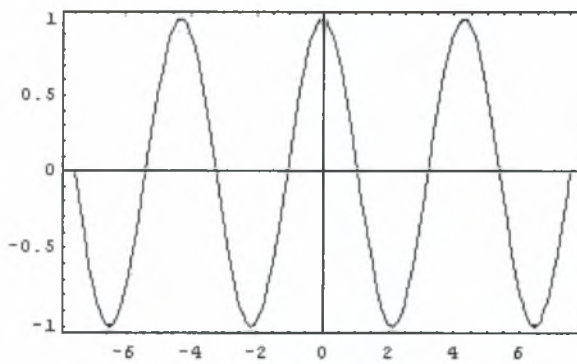
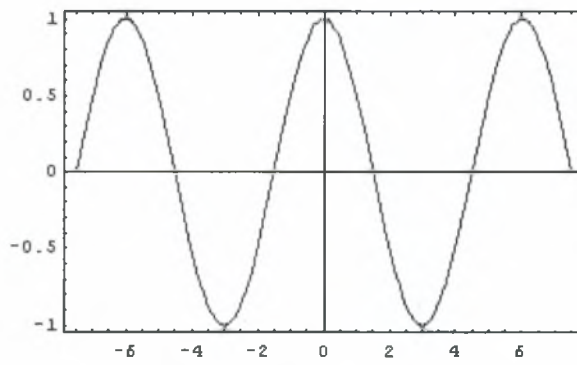
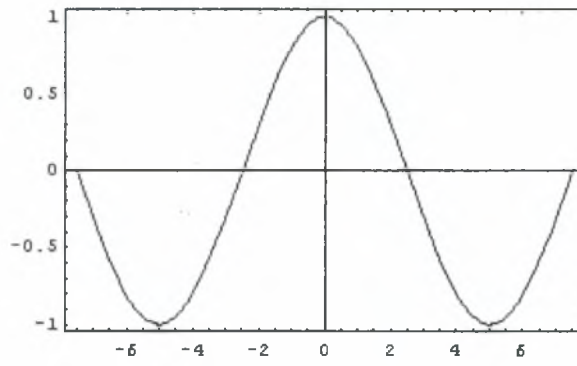
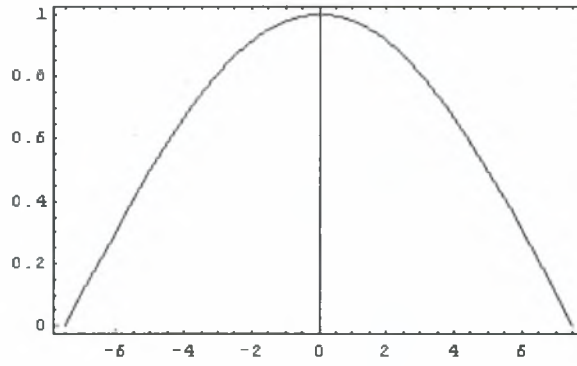
Πίνακας 6.1.9: Συμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8\text{m}$ και $2L = 8\text{m}$

n	ω	$\frac{\omega^2}{g}$
1	0.0000	0.0000
2	3.9255	1.5708
3	5.5149	3.1003
4	6.7991	6.2830

Πίνακας 6.1.10: Συμμετρικών Ιδιοτιμών για $H = 8\text{m}$ και $2L = 4\text{m}$



Σχήμα 6.1.1: Αντισυμμετρικές Ιδιομορφές για $m=1,2,3,4$



Σχήμα 6.1.2: Συμμετρικές Ιδιομορφές για $n=1,2,3,4$

Στη συνέχεια επιχειρείται η σύγκριση των αναλυτικών και των υπολογιστικών αποτελεσμάτων του προβλήματος των ιδιοτιμών. Συγκεκριμένα στον πίνακα 6.1.11 συγκρίνονται οι τιμές του λόγου $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$ που προκύπτουν αναλυτικά με τις αντίστοιχες υπολογιστικές τιμές του λόγου αυτού. Για την εξαγωγή των τιμών του λόγου λ υπολογιστικά, χρησιμοποιήθηκαν πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας, δηλαδή πλέγματα με διαφορετικό αριθμό κόμβων. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα για πλέγματα που αποτελούνται από 3, 4, 10, 20 και 50 κόμβους στην κάθε κατεύθυνση.

Στην περίπτωση που το πλέγμα αποτελείται από εννέα κόμβους προκύπτουν μόνο τρεις ιδιοτιμές οι οποίες αντιστοιχούν στους τρεις κόμβους της ελεύθερης επιφάνειας, ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές απειρίζονται. Η ακρίβεια των τιμών αυτών δεν είναι ικανοποιητική καθώς αν εξαιρέσουμε τη μηδενική ιδιοτιμή, ακόμα και η πρώτη ιδιοτιμή βρίσκεται μακριά από την αντίστοιχη αναλυτική. Για πλέγμα δεκαέξι κόμβων προκύπτουν τέσσερις ιδιοτιμές, όσοι δηλαδή είναι και οι κόμβοι της ελεύθερης επιφάνειας, και αυτές όμως οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση από τα αναλυτικά αποτελέσματα ιδιοτιμών. Χρησιμοποιώντας πλέγμα εκατό κόμβων προκύπτουν δέκα μη άπειρες ιδιοτιμές από τις οποίες μόνο η πρώτη προσεγγίζει ικανοποιητικά την αντίστοιχη αναλυτική ιδιοτιμή. Για πλέγμα τετρακοσίων κόμβων η σύγκλιση των ιδιοτιμών βελτιώνεται αισθητά, όμως ικανοποιητική προσέγγιση παρατηρείται όταν το πλέγμα αποτελείται από δύο χιλιάδες πεντακόσιους κόμβους. Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν πενήντα μη άπειρες ιδιοτιμές οι οποίες αντιστοιχούν στους κόμβους της ελεύθερης επιφάνειας, από τις οποίες οι οχτώ πρώτες προσεγγίζουν τις αντίστοιχες αναλυτικές με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου.

Τα υπολογιστικά αυτά αποτελέσματα προέκυψαν με τη χρήση του προγράμματος των ιδιοτιμών, το οποίο είναι γραμμένο σε Fortran και επισυνάπτεται στο ένατο κεφάλαιο. Ο κώδικας αυτός βασίζεται στην επίλυση του προβλήματος των ιδιοτιμών με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων όπως αυτή περιγράφεται στο πέμπτο κεφάλαιο. Για την επίλυση του συστήματος που προκύπτει χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα της IMSL, GVLRG η οποία είναι κατάλληλη για τον υπολογισμό ιδιοτιμών. Ο χρόνος που απαιτείται για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων με τη χρήση του συγκεκριμένου κώδικα είναι μικρότερος των 60 sec όταν αναφερόμαστε σε μικρά πλέγματα, όπως αυτά των εννέα και των δεκαέξι κόμβων, αλλά αυξάνει αισθητά όταν το πλέγμα αποτελείται από τετρακόσιους κόμβους και επάνω.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 6.1.11 προέκυψαν από την επίλυση των αντίστοιχων αναλυτικών εκφράσεων με τη χρήση του προγράμματος Mathematica. Στην παράγραφο 9.1.1 παρατίθεται ο αντίστοιχος κώδικας, με τη χρήση του, ο χρόνος υπολογισμού των ιδιοτιμών είναι σαφώς μικρότερος από αυτόν που απαιτείται για την εξαγωγή των υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Ακόμα και για την περίπτωση του υπολογισμού των πενήντα ιδιοτιμών απαιτείται χρόνος μικρότερος των 60 sec.

9 κόμβοι	16 κόμβοι	100 κόμβοι	400 κόμβοι	2500 κόμβοι	Αναλυτικά αποτελέσματα
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2290	0.2099	0.1968	0.1956	0.1953	0.1952
0.5234	0.5234	0.4291	0.4203	0.4182	0.4178
	0.7852	0.6665	0.6366	0.6295	0.6282
		0.9303	0.8576	0.8407	0.8377
		1.2308	1.0864	1.0529	1.0472
		1.5707	1.3250	1.2666	1.2566
		1.9289	1.5757	1.4819	1.4660
		2.2314	1.8409	1.6993	1.6755
		2.3555	2.1228	1.9189	1.8849
			2.4231	2.1411	2.0944
			2.7429	2.3662	2.3038
			3.0814	2.5945	2.5132
			3.4351	2.8264	2.7227
			3.7958	3.0620	2.9321
			4.1488	3.3019	3.1415
			4.4720	3.5464	3.3510
			4.7364	3.7957	3.5604
			4.9114	4.0503	3.7699
			4.9729	4.3105	3.9793
				4.5765	4.1887
				4.8489	4.3982
				5.1278	4.6076
				5.4136	4.8171
				5.7065	5.0265
				6.0068	5.2359
				6.3146	5.4454
				6.6300	5.6548
				6.9529	5.8643
				7.2834	6.0737
				7.6209	6.2831
				7.9652	6.4926
				8.3154	6.7020
				8.6706	6.9115
				9.0295	7.1209
				9.3904	7.3303
				9.7514	7.5398
				10.1099	7.7492
				10.4630	7.9587
				10.8073	8.1681
				11.1389	8.3775
				11.4536	8.5870
				11.7469	8.7964
				12.0139	9.0059
				12.2499	9.2153
				12.4505	9.4247
				12.6110	9.6342
				12.7290	9.8436
				12.8000	10.0531
				12.8240	10.2625

Πίνακας 6.1.11: Σύγκριση υπολογιστικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων του λόγου ω^2 / g

6.2 Αναλυτικά αποτελέσματα προβλήματος συνοριακών τιμών

Στην παράγραφο αυτή παρατίθενται τα αποτελέσματα του τέταρτου κεφαλαίου, τα οποία αφορούν τις δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Συγκεκριμένα υπολογίζουμε τους παρακάτω συντελεστές, τον συντελεστή

$C_1 = \frac{F_c}{F_l}$, που είναι ο λόγος της δύναμης του προβλήματος της επαγωγής προς τη

δύναμη του προβλήματος της ώσης και το συντελεστή $C_2 = \frac{F_c + F_l}{F_U}$, ο οποίος είναι

ο λόγος της επαγωγικής προς τη συνολική δύναμη.

Οι παραπάνω συντελεστές μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις των δυνάμεων F_c και F_l , όπως αυτές προέκυψαν κατά την επίλυση των προβλημάτων της επαγωγής και της ώσης στο τέταρτο κεφάλαιο, καθώς και την αναλυτική έκφραση της δύναμης F_U που επίσης δίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Έτσι στο αριστερό τοίχωμα της δεξαμενής, δηλαδή στο $x = -L$ είναι

$$C_1 = \frac{\sum_n \frac{g \frac{8UL(-1)^{n-1} \tanh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\right) \sinh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)}{-\omega^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right) + g \frac{2n-1}{2L} \pi \sinh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)}{-ULH + \sum_n \frac{-8UL(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \pi^2 \cosh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right)} \sinh\left(\frac{2n-1}{2L}\pi H\right) \left(\frac{2L}{(2n-1)\pi}\right) \sin\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\right)}$$

(6.2.1)

και

$$C_2 = \frac{\left[\sum_m \frac{-2UL(-1)^{m-1}}{(k_m L)^2 \cosh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right)} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin\left(-\frac{2m-1}{2}\pi\right) \sinh\left(\frac{2m-1}{2L}\pi H\right) \left(\frac{2L}{(2m-1)\pi}\right) - ULH \right] \rho}{mU}$$

(6.2.2)

Ομοίως προκύπτουν και οι αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών στο $x = L$, δηλαδή στο δεξί τοίχωμα της δεξαμενής, αφού ισχύουν οι σχέσεις

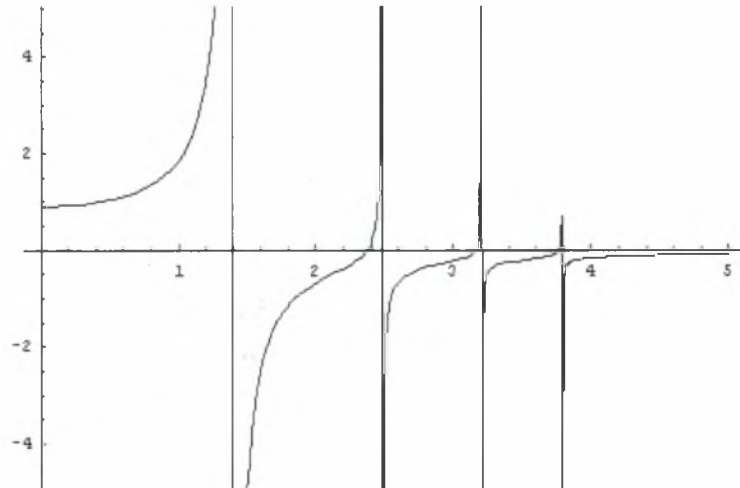
$$F_c(L) = -F_c(-L) \quad (6.2.3)$$

και

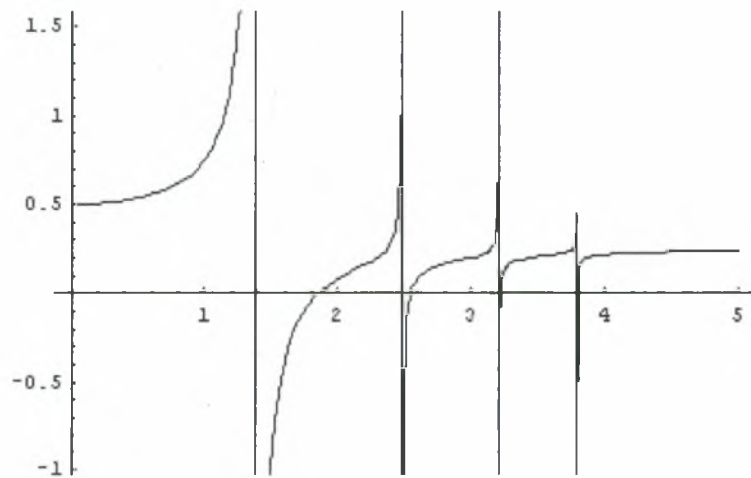
$$F_l(L) = -F_l(-L) \quad (6.2.4)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές είναι δυνατή η γραφική αναπαράσταση των συντελεστών C_1 και C_2 , των συνολικών δυνάμεων που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής, ως συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω . Οι γραφικές αυτές απεικονίσεις γίνονται για χαρακτηριστικές τιμές του λόγου του ύψους της δεξαμενής, προς το μήκος της.

Έτσι επιλέγοντας το λόγο $\frac{H}{2L} = \frac{8}{15}$, $\frac{H}{2L} = 1$ και $\frac{H}{2L} = 2$ προκύπτουν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις, των συντελεστών C_1 και C_2 , όπου το ω παίρνει τιμές από 1 ως 5. Ο σχολιασμός των γραφικών αυτών παραστάσεων γίνεται στην παράγραφο 6.3 όπου παρουσιάζονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από τα υπολογιστικά αποτελέσματα

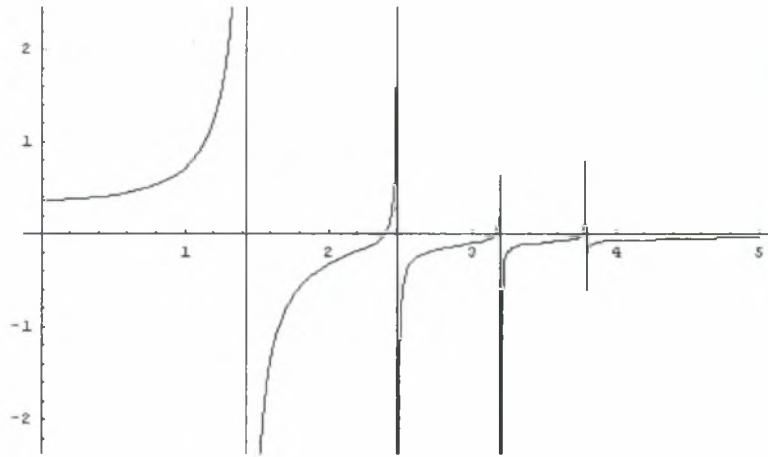


Σχήμα 6.2.1: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 8 \text{ m}$ και $2L = 15 \text{ m}$

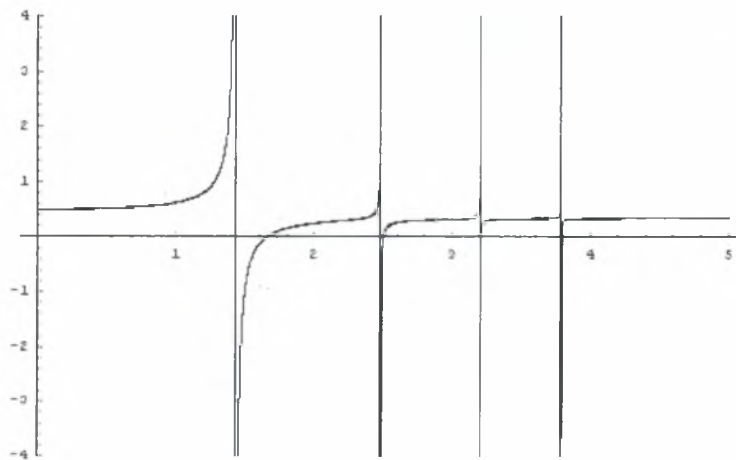


Σχήμα 6.2.2: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 8 \text{ m}$ και $2L = 15 \text{ m}$

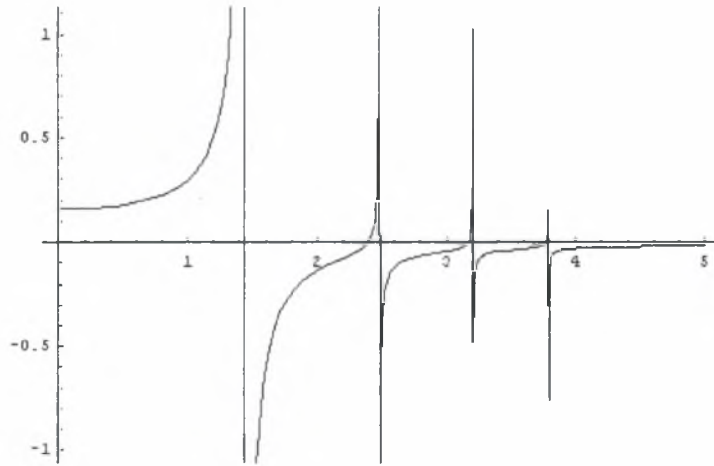




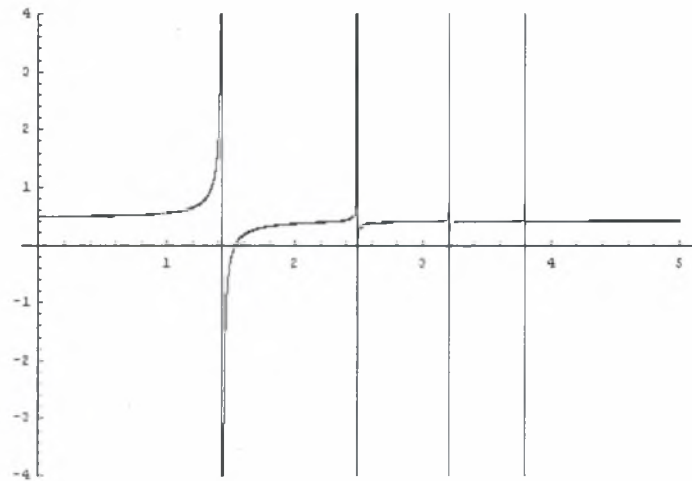
Σχήμα 6.2.3: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 15$ m και $2L = 15$ m



Σχήμα 6.2.4: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 15$ m και $2L = 15$ m



Σχήμα 6.2.5: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για ύψος $H = 30$ m και μήκος $2L = 15$ m.



Σχήμα 6.2.6: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για ύψος $H = 30$ m και μήκος $2L = 15$ m.

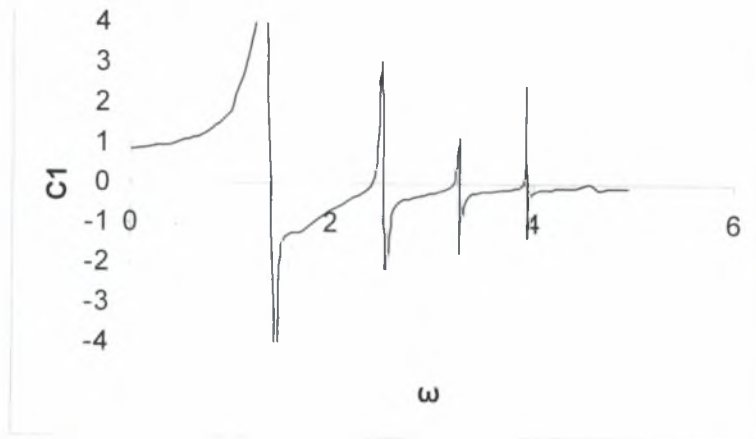
6.3 Υπολογιστικά αποτελέσματα προβλήματος οριακών τιμών

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρατίθενται τα υπολογιστικά αποτελέσματα του προβλήματος, όπως αυτά προέκυψαν από την επίλυσή του με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, που περιγράφεται στο πέμπτο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών $C_1 = \frac{F_C}{F_I}$ και $C_2 = \frac{F_C + F_L}{F_U}$ υπολογιστικά, βάση των τιμών των δυνάμεων που προέκυψαν κατά την επίλυση του προβλήματος με τη χρήση προγράμματος Fortran. Αναλυτικότερα χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος Fortran για την επίλυση του υποπροβλήματος της ωστικής κίνησης και τον υπολογισμό της δύναμης F_I και ένας δεύτερος αλγόριθμος για την επίλυση του συνολικού προβλήματος και τον υπολογισμό της συνολικής δύναμης $F_I + F_C$.

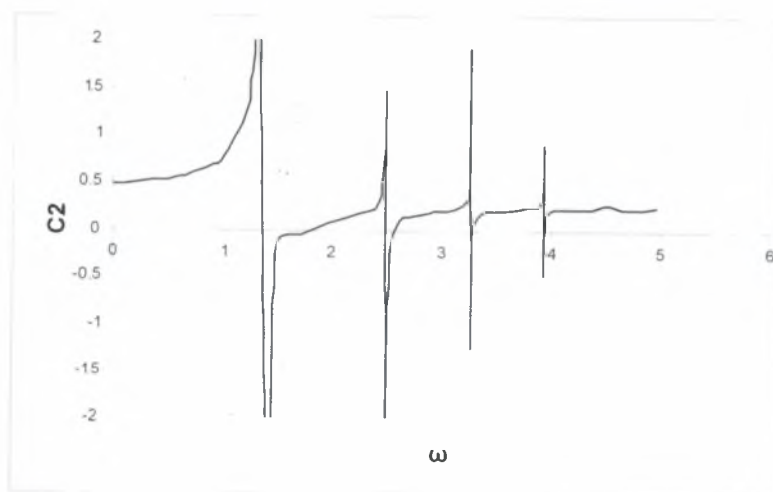
Είναι λοιπόν δυνατή η γραφική απεικόνιση των παραπάνω συντελεστών για ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές του λόγου $\frac{H}{2L}$, του ύψους προς το μήκος της δεξαμενής. Επιλέγοντας αντίστοιχα λόγο $\frac{H}{2L} = \frac{8}{15}$, $\frac{H}{2L} = 1$ και $\frac{H}{2L} = 2$ προκύπτουν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις, των συντελεστών C_1 και C_2 , όπου το ω παίρνει τιμές από 1 ως 5. Οι τιμές των συντελεστών αυτών προήρθαν από τα υπολογιστικά αποτελέσματα των δυνάμεων που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος της ωστικής κίνησης, καθώς και του συνολικού προβλήματος με την χρήση των προγραμμάτων Fortran που παρουσιάζονται στο ένατο κεφάλαιο, και στα δύο προγράμματα το σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Gauss. Για την εξαγωγή των συγκεκριμένων τιμών των δυνάμεων χρησιμοποιήθηκε πλέγμα που αποτελείται από τετρακόσιους κόμβους.

Με βάση τις γραφικές παραστάσεις των λόγων της επαγωγικής προς την ωστική δύναμη, και της συνολικής δύναμης προς τη δύναμη ομοιόμορφης κίνησης

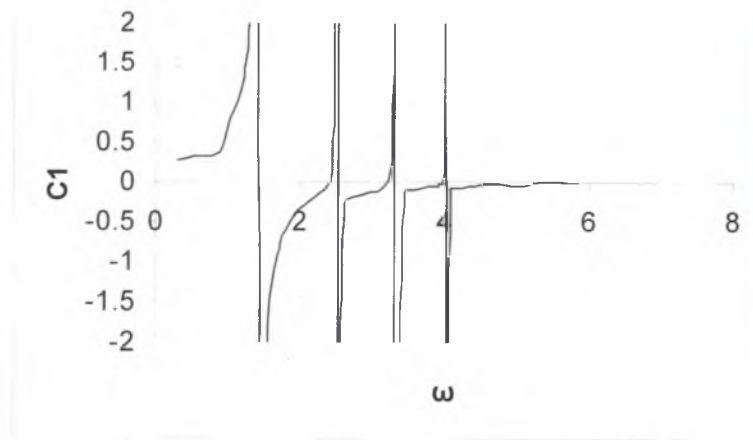
που παρουσιάζονται στις παραγράφους 6.2 και 6.3 μπορούμε να καταλήξουμε σε ορισμένα συμπεράσματα. Όσον αφορά τη μορφή των γραφικών παραστάσεων των συντελεστών που προέκυψαν υπολογιστικά, σε σχέση με τη μορφή των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων, παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική ταύτιση τιμών, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα υπολογιστικά αποτελέσματα προσεγγίζουν τα αναλυτικά. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για τις τιμές της εξωτερικής διέγερσης ω που πλησιάζουν τις αντισυμμετρικές ιδιοτιμές του προβλήματος οι συντελεστές C_1 και C_2 παρουσιάζουν ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς τείνουν προς το άπειρο. Η συμπεριφορά αυτή είναι η ίδια και για τις τρεις περιπτώσεις του λόγου $\frac{H}{L}$ που εξετάστηκαν, και οφείλεται στο γεγονός ότι δημιουργείται συντονισμός του συστήματος για τις τιμές αυτές της εξωτερικής διέγερσης. Από τη σύγκριση των γραφικών παραστάσεων των συντελεστών προκύπτει ότι για τις τρεις πρώτες αντισυμμετρικές ιδιοτιμές του προβλήματος υπάρχει ταύτιση αναλυτικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με την τέταρτη αντισυμμετρική ιδιοτιμή, γεγονός αναμενόμενο αν λάβουμε υπόψη τα αποτελέσματα του πίνακα 6.1.11. Από τη μελέτη του συγκεκριμένου πίνακα σύγκλισης προκύπτει ότι όσον αφορά την τέταρτη ιδιοτιμή, η οποία είναι η όγδοη ιδιοτιμή του πίνακα, για πλέγμα 400 κόμβων (με βάση το οποίο έγιναν οι γραφικές παραστάσεις των συντελεστών), δεν υπάρχει ταύτιση αναλυτικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων των ιδιοτιμών. Παρατηρούμε επίσης ότι για τιμές της εξωτερικής διέγερσης ω μεγαλύτερες του πέντε, ο συντελεστής C_1 τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



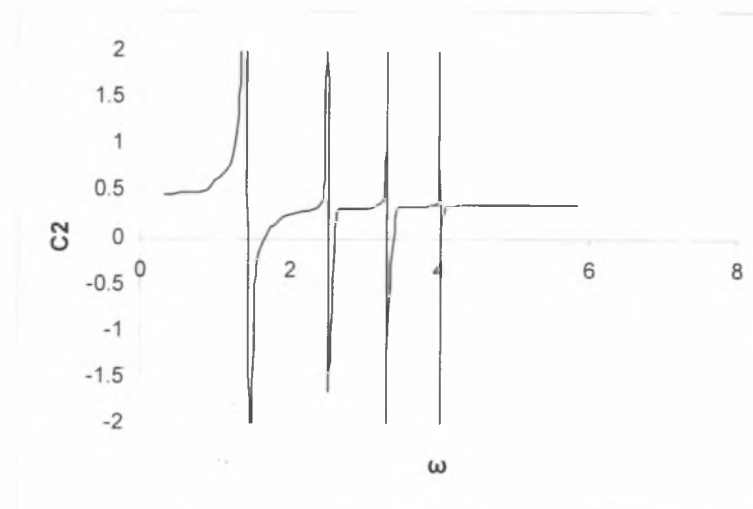
Σχήμα 6.3.1: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 8$ m και $2L = 15$ m



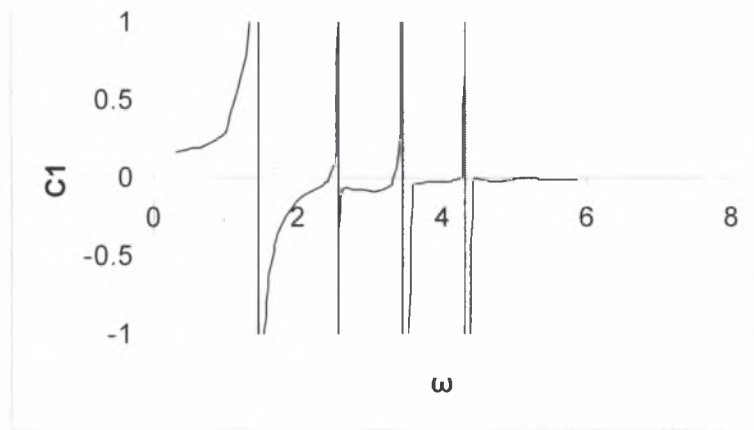
Σχήμα 6.3.2: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 8$ m και $2L = 15$ m



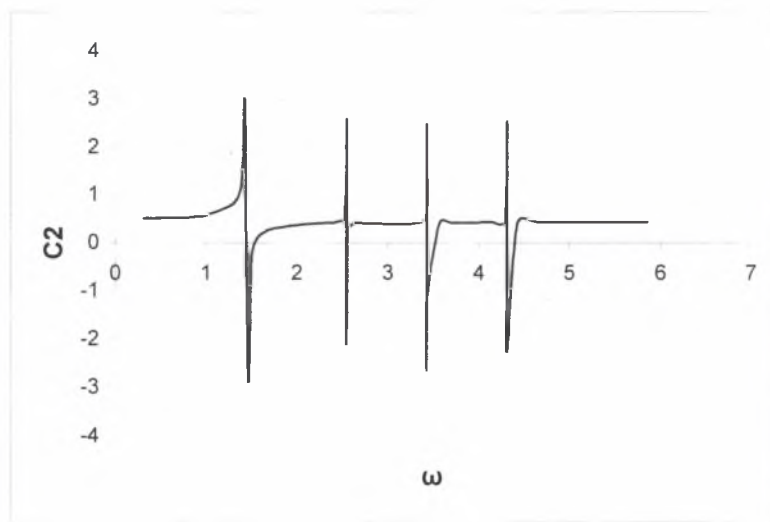
Σχήμα 6.3.3: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 15$ m και $2L = 15$ m



Σχήμα 6.3.4: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 15$ m και $2L = 15$ m



Σχήμα 6.3.5: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_1 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 30$ m και $2L = 15$ m



Σχήμα 6.3.6: Γραφική παράσταση του συντελεστή C_2 σε συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω , για $H = 30$ m και $2L = 15$ m

6.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Στις προηγούμενες παραγράφους του κεφαλαίου έγινε η παρουσίαση των αναλυτικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων του προβλήματος, με σκοπό να γίνει η μεταξύ τους σύγκριση. Παρόλο που επιλύθηκε υπολογιστικά και το υποπρόβλημα της ωστικής κίνησης, δεν κρίθηκε σκόπιμο να γίνει μια παρόμοια παρουσίαση των αποτελεσμάτων καθώς κάτι τέτοιο δε θα είχε φυσικό νόημα. Ωστόσο τα αποτελέσματα του υποπροβλήματος συγκρίθηκαν με τα αναλυτικά και βρέθηκαν σε συμφωνία.

Στη συνέχεια για καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συγκλίνει το συνολικό πρόγραμμα παρουσιάζονται οι ακόλουθοι πίνακες σύγκλισης. Οι τιμές της συνάρτησης του δυναμικού που παρουσιάζονται στους πίνακες αυτούς προέκυψαν από την υπολογιστική επίλυση του συνολικού προβλήματος για πλέγμα 9, 121, 441 και 1681 κόμβων αντίστοιχα. Παρατίθενται επίσης οι αναλυτικές τιμές της συνάρτησης στους αντίστοιχους κόμβους. Από την μελέτη των ακόλουθων πινάκων παρατηρούμε ότι για πλέγμα που αποτελείται από 441 κόμβους ή πυκνότερο, η σύγκλιση των υπολογιστικών με τις αναλυτικές τιμές είναι ικανοποιητική. Στους παρακάτω πίνακες σύγκλισης παρατηρούμε ότι τόσο στα αναλυτικά όσο και στα υπολογιστικά αποτελέσματα παρουσιάζεται μια αντισυμμετρία των τιμών του δυναμικού. Ο άξονας της αντισυμμετρίας είναι ο άξονας y , ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο της δεξαμενής.

$x \backslash y$	-L	0	L
H	-13.3159	0.0000	13.3159
H/2	-9.9993	0.0000	9.9993
0	-9.1691	0.0000	9.1691

Πίνακας 6.4.1: Υπολογιστικά αποτελέσματα δυναμικού για 9 (3x3) κόμβους

$x \backslash y$	-L	0	L
H	-14.023	0.0000	14.023
H/2	-10.6443	0.0000	10.6443
0	-9.7793	0.0000	9.7793

Πίνακας 6.4.2: Υπολογιστικά αποτελέσματα δυναμικού για 121 (11x11) κόμβους

$x \backslash y$	-L	0	L
H	-14.0489	0.0000	14.0490
H/2	-10.6696	0.0000	10.6697
0	-9.8025	0.0000	9.8025

Πίνακας 6.4.3: Υπολογιστικά αποτελέσματα δυναμικού για 441 (21x21) κόμβους

$x \backslash y$	-L	0	L
H	-14.0544	0.0000	14.0544
H/2	-10.6757	0.0000	10.6758
0	-9.8081	0.0000	9.8082

Πίνακας 6.4.4: Υπολογιστικά αποτελέσματα δυναμικού για 1681 (41x41) κόμβους

$x \backslash y$	-L	0	L
H	-14.0560	0.0000	14.0560
H/2	-10.6781	0.0000	10.6781
0	-9.8103	0.0000	9.8103

Πίνακας 6.4.5: Αναλυτικά αποτελέσματα δυναμικού

7. Συμπεράσματα

Στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας, σε δεξαμενή ορθογώνιας διατομής, η οποία υπόκειται σε οριζόντια εξωτερική διέγερση. Αρχικά έγινε η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών αναλυτικά, με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών. Με τη χρήση του συγκεκριμένου αναλυτικού μοντέλου προέκυψαν οι ιδιοτιμές του προβλήματος του κυματισμού. Στη συνέχεια το πρόβλημα των ιδιοτιμών επιλύθηκε υπολογιστικά, για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικός κώδικας σε Fortran, ο οποίος βασίζεται στην επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η εξαγωγή των ιδιοτιμών του προβλήματος υπολογιστικά έγινε για πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας..

Πέρα από το πρόβλημα των ιδιοτιμών εξετάστηκε και το πρόβλημα των συνοριακών τιμών, δηλαδή της απόκρισης δεξαμενής με υγρό υπό εξωτερική διέγερση. Προκειμένου να επιτευχθεί η αναλυτική επίλυσή του, το πρόβλημα διαιρέθηκε σε δύο υποπροβλήματα, σύμφωνα με το διαχωρισμό ωστικής- επαγωγικής κίνησης. Επιλύθηκε αρχικά αναλυτικά το πρόβλημα της ωστικής και στη συνέχεια της επαγωγικής κίνησης. Οι αναλυτικές λύσεις που προέκυψαν για τα δύο προβλήματα συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες λύσεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για τα συγκεκριμένα προβλήματα, και βρέθηκαν σε πλήρη συμφωνία με αυτές. Στη συνέχεια με βάση τις λύσεις αυτές υπολογίστηκαν οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

Για την υπολογιστική επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά επιλύθηκε υπολογιστικά το πρόβλημα της ωστικής κίνησης και υπολογίστηκαν οι ωστικές

δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής. Στη συνέχεια με την ίδια μέθοδο επιλύθηκε και το συνολικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και προέκυψαν οι συνολικές δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων οι ιδιοτιμές που προκύπτουν τείνουν όλο και περισσότερο στις αναλυτικές ιδιοτιμές του προβλήματος. Έτσι όταν το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από 50 κόμβους σε κάθε κατεύθυνση, τα υπολογιστικά αποτελέσματα παρουσιάζουν ικανοποιητική σύγκλιση με τα αναλυτικά. Η σύγκλιση των αρχικών ιδιοτιμών είναι ακρίβειας τρίτου δεκαδικού ψηφίου. Η σύγκλιση είναι πιο αργή όταν αναφερόμαστε σε υψηλές ιδιοτιμές. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα του προβλήματος της ωστικής κίνησης καθώς και του πλήρους προβλήματος παρουσιάζουν καλύτερη σύγκλιση με τα αναλυτικά από αυτά του προβλήματος των ιδιοτιμών, αλλά και πάλι απαιτείται πλέγμα που να αποτελείται από τετρακόσιους κόμβους ή πυκνότερο.

Για να επιτευχθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγιναν οι γραφικές παραστάσεις των λόγων της ωστικής προς την επαγωγική δύναμη και της συνολικής δύναμης προς τη δύναμη ομοιόμορφης κίνησης, τόσο για τα αναλυτικά όσο και για τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις αναφέρονται σε διαφορετικούς λόγους ύψους προς μήκος δεξαμενής, επιλέχθηκαν λόγοι 0.5, 1 και 2. Και στις τρεις περιπτώσεις, η μορφή των γραφικών παραστάσεων που προέκυψαν υπολογιστικά προσεγγίζει ικανοποιητικά την μορφή των γραφικών παραστάσεων που προήρθαν από τους αναλυτικούς τύπους. Επίσης υπολογίστηκαν και οι ροπές που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής και τα υπολογιστικά αποτελέσματα προσέγγισαν τα αναλυτικά με ικανοποιητική ακρίβεια.

Από τη μελέτη όλων αυτών των αποτελεσμάτων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

i) Η επίδραση του κυματισμού είναι σημαντική κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων που ασκούνται στη δεξαμενή, όταν οι τιμές της εξωτερικής διέγερσης ω προσεγγίζουν τις ιδιοτιμές του προβλήματος.

ii) Οι ιδιοτιμές δεν επηρεάζονται έντονα από τη μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας αλλά από τη μεταβολή του μήκους της δεξαμενής. Μείωση του μήκους της δεξαμενής προκαλεί αύξηση των ιδιοτιμών. Οι δεξαμενές που έχουν μικρό μήκος και σχετικά μεγάλο ύψος, είναι αυτές που έχουν και μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

iii) Η συνολική δύναμη του προβλήματος είναι αισθητά μεγαλύτερη από τη δύναμη ομοιόμορφης κίνησης, ιδιαίτερα για τιμές της εξωτερικής διέγερσης που προσεγγίζουν τις αντισυμμετρικές ιδιοτιμές του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες προτάσεις όσον αφορά την συνέχιση και επέκταση της συγκεκριμένης εργασίας. Η ίδια μελέτη θα μπορούσε να γίνει :

i) Λαμβάνοντας υπόψη την παραμόρφωση των τοιχωμάτων της δεξαμενής, η οποία θεωρήθηκε αμελητέα.

ii) Για συνεκτικό ρευστό

iii) Για μη γραμμικές εξισώσεις.

iv) Για τυχαία εξωτερική διέγερση

8. ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Abramson HN (ed), (1966a), The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, NASA SP 106.
- [2] Hough (1895), The Oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid, Phil Trans A 186(1).
- [3] Honda K and Matsushita T (1913), An Investigation of the Oscillations of Tank Water, Scientific Reports Tohoku, Imperial Univ, First Series 21, 131-148.
- [4] Jeffries H (1924). Free oscillations of water in an elliptical lake, Proc (London) Math Soc 23.
- [5] Sen BM (1927), Waves in canals and basins, Proc London Math Soc Series 2(26), 363-376.
- [6] Westergaard HM (1933), Water pressures on dams during earthquakes, Trans ASCE 98, 418-472.
- [7] Binnie AM (1955), Self-excited oscillations in an open circular water tank, Phil Mag 46, 327-337.
- [8] Smith C (1948), The Effect of Fuel Sloshing on the Lateral Stability of a Free-Flying Airplane Model, NACA RM L8C, (16 January).
- [9] Smith KW (1947), Fuel Sloshing Relation Between Surface Movement and Moving Masses Displacement for a Circular Tank, RAE, Great Britain, GW File Ref GW/55 027/KWS.
- [10] Luskin and Lapin E (1952), An analytical approach to the fuel sloshing and buffeting problems of aircraft, J Aeronaut Sci 19(4), 217-228.
- [11] Cambell IJ (1953), Wave motion in an annular tank, Phil Mag Series 7(44), 845-854.
- [12] Kachigan K (1955), Forced Oscillations of a Fluid in an Cylindrical Tank, Convair, San Diego, CA, Report ZU-7-046.
- [13] Nakagawa K (1955), On the Vibration of an Elevated Water- Tank-II, Tech Report Osaka Univ 5(170), 317-336.
- [14] Nakagawa K (1956), On the Vibration of an Elevated Water- Tank-III, Tech Report of Osaka Univ 6(193), 53-62.
- [15] Senda and Nakagawa K (1954), On the Vibration of an Elevated Water- Tank-I, Tech Report Osaka Univ 4(117), 247-264.

- [16] Taylor GI (1950), The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes, Proc Royal Soc (London) Series A 201, 192-196.
- [17] Taylor GI (1954), An experimental study of standing waves, Proc Royal Soc (London) Series A 218, 44-59.
- [18] Birkhoff G (1956), Liquid Oscillations in static Containers, Space Technology Laboratories, Memo, GM-TN 12, 18 April, Los Angeles, CA.
- [19] Narimanov GS (1956), Concerning the motion of a rigid body with a cavity partially filled with a liquid, Prikl Math Mekh 20(1), 21-38.
- [20] Narimanov GS (1957a), Concerning the motion of a symmetrical gyroscope with cavity partially filled with liquid, Prikl Math Mekh 21, 696-700.
- [21] Narimanov GS (1957b), Concerning the motion of a container partially filled with a liquid taking into account large motion of the latter, Prikl Math Mekh 21(4), (Translated as Space Technology Laboratories Translation T-RU-18)
- [22] Narimanov GS (1957c), Concerning the Vibration of Fluids in Moving Cavities, Izvestiya Acad Sci SSSR, OTN 10.
- [23] Okhotsimski DE (1956), On the Motion of a Body with Cavities Partly Filled with a Liquid, NASA TTF-33, (May, 1960), (NASA Translation from Prikl Math Mekh 20(1).
- [24] Sretanskii LN (1956), Propagation of waves of finite amplitudes in an cylindrical channel, Trudy Mor Gidrofiz in-ta Akad Nauk SSSR 6, 3-6.
- [25] Sretanskii LN (1957), The oscillations of liquid in a moving container, Akad Nauk SSSR Otd Tekh Nauk 10, 1494.
- [26] Krein SG and Moissev NN (1957), On Vibrations of a rigid body containing liquid having free surface, J Appl Math Mech 21, 169-174.
- [27] Heinrich K and Kaufman FM (1956), Sloshing Stability for Vehicles with One Free Surface, Space Technology Laboratories Memo GM45-3-45, 12 July.
- [28] Moissev NN (1952a), The motion of a rigid body with cavities partially filled with an ideal liquid, Doklady Akad Nauk SSSR 85(4).
- [29] Moissev NN (1952b), On oscillations of a heavy ideal and incompressible liquid in a container, Doklady Akad Nauk SSSR 85(5), 963-966.
- [30] Moissev NN (1952c), Dynamics of a ship having a liquid load, Izy Akad Nauk SSSR Otd Tekh Nauk 7, 27-45.
- [31] Moissev NN (1952d), The problem of small oscillations of an open vessel with a fluid under the action of an elastic Force, Ukrainian Mat Zh 4, 168-173.

- [32] Moissev NN (1953), The problem of the motion of a rigid body filled with a liquid having a free surface. *Matemicheskii Sbornik* 32(74), 1.
- [33] Moissev NN (1954), Some questions on the theory of oscillations of vessel with a fluid. In *Zhenernyi Sbornik* 19, 167-170.
- [34] Moissev NN (1956), Studies of the motion of a solid body containing fluid masses with free surfaces. *Vestnik Acad Sci SSSR* 5.
- [35] Moissev NN (1958), On the theory of nonlinear vibration of a liquid of finite volume. *Prikl Math Mekh* 22, 612-621.
- [36] Moissev NN (1959), On the theory of vibration of elastic bodies with liquid cavities. *Prikl Math Mekh* 23(5), 862-878.
- [37] Moissev NN (1960), On the theory of elastic oscillations of a fluid filled body. *Doklady Akad Nauk SSSR* 27(1), 53-56. Also *Soviet Physics* 4(4), February 1960.
- [38] Moissev NN (1961), On boundary-value problem for linearized Navier-Stokes equations for the case of low viscosity. *Zh Vychisl Matem i Matem Fiz* 1(3)
- [39] Moissev NN (1962), On two pendulums filled with liquids. *Prikl Math Mekh* 26(6), 671-678.
- [40] Moissev NN (1964), Introduction to the Theory of Oscillations of Liquid-Containing Bodies. *Advances in Appl Mech*, vol 8, Academic Press, New York.
- [41] Miles JW (1958a), On the sloshing of liquid in a flexible tank. *J Appl Mech* 25(2), 277-283.
- [42] Miles JW (1958b), Ring damping of free surface oscillations in a circular tank. *J Appl Mech* 25(2), 274-276.
- [43] Miles JW (1959a), On the Free Surface Oscillations in a rotating liquid. *Space Technology Laboratories*, GM-TR-0165-00458, (18 August).
- [44] Miles JW (1959b), Centrifugal Slosh. *Space Technology Laboratories*, Memo GM-59, 8021, 6-1&602, (February).
- [45] Miles JW (1959c), Free surface oscillations in a rotating liquid. *Phys Fluids* 2(3), 297-305.
- [46] Housner GW (1963a), The dynamic behavior of water tanks. *Bull Seismol Soc Am* 53(2), 381-387.
- [47] Housner GW (1963b), Dynamic Pressure on Fluid Containers. TID-7024, *Nuclear Reactors and Earthquakes*, Ch 6, (US Atomic Energy Commission), 183-209.

- [48] Housner GW (1963c), Dynamic Analysis of Fluids in Containers Subjected to Acceleration, TID-7024, Nuclear Reactors and Earthquakes, Appendix F, (US Atomic Energy Commission),183-209.
- [49] Shved GL (1959), Small Oscillations of the Free Surface of an Ideal Fluid in a Plane Moving Vessel with Smooth Vertical Walls, Trudy Odessk, Teknol Inst Pislch, ikholodil'n Promysh 8, 150-160.
- [50] Lamp H (1945), Hydrodynamics, Cambridge Univ Press, Cambridge.
- [51] Stoker JJ (1957), Water Waves, Interscience Publ Inc, London.
- [52] Kochin NE, Kibel IA, and Rose NV (1964), Theoretical Hydrodynamics, Interscience Publishers, New York.
- [53] Thomson MM (1965), Theoretical Hydrodynamics, MacMillan Co, New York.
- [54] Barber NF and Ghey G (1969), Water Waves, The Wykeham Sci Series, London.
- [55] Abramson HN and Ransleben GE Jr (1961), Some comparisons of sloshing behavior in cylindrical tanks having flat and conical bottoms, ARS J 31, 542-544.
- [56] Abramson HN (1963b), Some recent developments concerned with liquid dynamic behavior in moving containers, ASME Appl Mech Rev 16(7), 501-506.
- [57] Abramson HN (1966b), Some current aspects of the dynamic behavior of liquids in rocket propellant tanks, in Appl Mech Surveys, HN Abramson, H Liebowitz, JM Crowley, and S Juhasz (eds), Spartan Books, Washington, DC, 941-949.
- [58] Abramson HN (1968), Liquid propellant dynamics, AGARD Manual Aerostability(1), Ch 8, Revised Edition, NATO, Paris.
- [59] Abramson HN and Kana DD (1967), Some recent research on the vibration of elastic shells containing liquids, Proc Symp Shell Theory, Univ of Houston, Texas.
- [60] Brown SJ (1982a), Hydrodynamic Response of Fluid Coupled Cylinders: Simplified Damping and Inertia Coefficients, Welding Research Council Bulletin, No 281.
- [61] Rammestorfer FG, Scharf K, and Fisher FD (1990), Storage tanks under earthquake loading, ASME Appl Mech Rev 43(11), 261-282.
- [62] Bauer HF (1961d), Dynamics of liquid propellant vehicles, Proc ONR/AIAA Symp on Struct Dynamics of High Speed Flight, 319-355(Office of Naval Res, Los Angeles, CA.
- [63] Bauer HF (1962a), Theory of Fluid Oscillations in Partially Filled Cylindrical Containers, MSFC, NASA,MTP-AERO-62-1, Jan 62.

- [64] Bauer HF (1964b), Fuel vibration in rocket containers and their influence on the overall stability, (in German) *Zeit fur Flugweissenschaften* 12(3/6), 85-101 & 222-229.
- [65] Bauer HF (1965), The response of propellant in an arbitrary cylindrical tank due to single pulse excitation, in *Developments in Theoretical and Appl Mech*, vol 2, WA Shaw (ed), 351-384.
- [66] Bauer HF (1968a), Response of the Fuel in a Rectangular Container to a Roll Maneuver with Numerical Examples for C-5A-Wing, Report No SMN-217, Lockheed-Georgia Co.
- [67] Bauer HF (1968b), Dynamics of the Airplane with Fuel Sloshing, Report No SMN-246, Lockheed-Georgia Co.
- [68] Bauer HF and Villeneuve J (1966), Theory of Liquid Sloshing in a Rectangular Container with Numerical Examples for C-45A-Wing, Lockheed-Georgia Co., Report No ER 8390.
- [69] Boneau E (1964), Sloshing of liquids in missiles (French), *Bull Assoc Tech Marit Aeronaut* 64, 163-177.
- [70] Cooper RM (1960), Dynamics of liquid IN MOVING CONTAINERS, *ARS J* 30(8), 725-729.
- [71] Bratu C (1971), Oscillations of liquid masses in reservoirs, (French), *Bulletin de l' Assoc Tech Maritime et Aeronaut* 71, 221-241.
- [72] Dodge FT and Garza LR (1971), Propellant Dynamics in an Aircraft Type Launch Vehicle, NASA CR-119891.
- [73] Eulitz WR (1957), The Sloshing Phenomenon and the Mechanics of a Liquid in Motion in an Oscillating Missile Container, Army Ballistic Missile Agency, Report No DS-R-31-Div Operation.
- [74] Eulitz WR (1961), Analysis and Control of Liquid Propellant Sloshing during Missile Flight, NASA-MSFC, MTP-P and VE-P-61, (December).
- [75] Eulitz WR (1963), Practical Consequences of Liquid Propellant SLOSH Characteristics Derived by Nomographic Methods, NASA-MSFC, MTP-P and VE-P-63-7.
- [76] Eulitz WR and Glaser RF (1961), Comparative Experimental and Theoretical Considerations on the Mechanism of Fluid Oscillations in Cylindrical Containers, Army Ballistic Missile Agency, Report No MTP-M-S and M-61 (29 May).
- [77] Ewart DG (1956), Fuel Oscillations in Cylindrical Tanks and the Forces Produced Thereby, De Havilland Propellers Ltd, GW Dynamics Dept, Tech Note No 2050, (8 November).

- [78] Fortenot LL (1968), The Dynamics of Liquids in Fixed and Moving Containers, volume VII in Dyn Stability of Space Vehicles, NASA CR-941.
- [79] Kornecki A (1983), Dynamics of a mobile tank partially filled with liquid equations of motion and their linearization, SM Archives 8, 217-241.
- [80] Lomen DO (1965a), Liquid Propellant Sloshing in Mobile Tanks of Arbitrary Shape, NASA CR-222, (April).
- [81] Stephens DG, Leonard HW (1963), The Coupled Dynamic Response of a Tank Partially Filled with a Liquid Undergoing Free and Forced Planner Oscillations, NASA TN D-1945.
- [82] Abramson HN, Martin RJ, and Ransleben GE Jr (1958), Application of Similitude Theory to the Problem of Fuel Sloshing in Rigid Tanks, Tech Report 1, SWRI, May, 1958.
- [83] Abramson HN and Ransleben GE Jr (1959a), Simulation of Fuel Characteristics in Missile Tanks by Use of Small Models, Tech Report 3 SWRI, March 1959.
- [84] Abramson HN and Ransleben GE Jr (1960), Simulation of fuel characteristics in missile tanks by use of small models, ARS J 30(7), 603-612.
- [85] Sandorff PE (1960), Principles of Design of DynAmerlly Similar Models for Large Propellant Tanks, NASA TN D-99.
- [86] Abramson HN and Neville GE Jr (1963), Some modern developments in the application of scale models in dynamic testing, ASME Colloquium on Use of Models and Scalling in Shock and Vibration, Nov 1963.
- [87] Mixon JS, Catherine JJ, and Arman A (1963), Investigation of the Lateral Vibration Characteristics of a 1/5-Scale Model of Saturn SA-I, NASA TN D-1593.
- [88] Mixon JS and Catherine JJ(1964a), Experimental Lateral Vibration Characteristics of a 1/5-Scale Model of Saturn SA-I with an Eight-Cable Suspension System, NASA TN D-2214.
- [89] Mixon JS and Catherine JJ(1964b), Comparison of Experimental Vibration Characteristics Obtained from a 1/5-Scale Model and From a Full-Scale Saturn SA-I, NASA TN D-2215.
- [90] Pinson LD and Leonard HW (1969), Longitudinal Vibration Characteristics of 1/10-Scale Apollo/Saturn V Replica Model, NASA TN D-5159 (April).
- [91] Huther M, Dubois M, and Planeix JM (1973), Model studies on the movement of liquid in tanks, Marine Eng Rev, Jan 1973.
- [92] Rayleigh L (1887), On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil Mag 24, 145-159.
- [93] Lamb H (1945), Hydrodynamics, Cambridge Univ Press, Cambridge.

- [94] Ehrlich L (1959), Exact Solutions for Sloshing Problems, Space Tech Lab, Memo-PA 2450/79,(22 September).
- [95] Harper J (1958), Propellant Sloshing in Conical Tank Undergoing Arbitrary Forced Translational Motion, Convair, Astronautics, Rep ZU-7-089-TN, (2 January).
- [96] Penney WG and Price AT (1952), Finite periodic stationary waves in a perfect liquid- Part II, Phil Trans Royal Soc (London) 254-284.
- [97] Hutton RE (1962), An investigation of resonance, Nonlinear and Nonplanar Free Surface Oscillations of Fluid, PhD Diss, UCLA, Also as NASA TN-D-1870, (1963).
- [98] Graham EW and Rodriguez AM (1952), The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics, J Appl Mech 74, 381-388.
- [99] Ghali SA (1965), The Dynamics of Liquids in Rectangular Moving Containers, PhD Thesis, Univ of Leeds, Dept Civil Eng, (January).
- [100] Addigton (1960), Dynamics of Fuel in Tanks, Note 99, College of Aeronaut, Cranfield, England.
- [101] Trembath NW (1957), Fluid Sloshing in Tanks of Arbitrary Shape, R-GM-45, 3-378, STL 28 August.
- [102] Chu WH (1971), Sloshing of an Arbitrary Two-Dimensional Tank with Flat Mean Free Surface, CASI Transactions 4(7), (Technical Forum), 48-60.
- [103] Kimura N and Ohashi H (1978), Nonlinear sloshing in containers with arbitrary axi-symmetric geometries:1st Report, derivation of governing equations and the behavior of their solutions, (Japanese), Trans JSME 44, 3024-3033.
- [104] Kimura K, Takahara H, Ito T, and Sakata M (1992), Nonlinear liquid oscillation in a circular cylindrical tank subjected to pitching excitation, (Japanese), Trans JSME C 58(556), 3564-3571.
- [105] Kimura K, Takahara H, and Sakata M (1993), Sloshing in a rigid tank subjected to pitching excitation: Condition of excitation for liquid surface remain planar, (in Japanese), Trans JSME C 59(565), 2606-2612.
- [106] Kimura K, Takahara H, and Sakata M (1996a), Sloshing in a circular cylindrical tank subjected to pitching excitation: Condition of excitation for liquid surface remaining plane, Pro 73rd JSME Spring Annual Meeting, 96-1(VI),87-90.
- [107] Kimura K, Takahara H, and Sakata M (1996b), Three-dimensional sloshing analysis in a rectangular tank subjected to pitching excitation, (Japanese), Trans JSME C 62(596),1285-1294.
- [108] Liu Z and Huang Y (1994), A new method for large amplitude sloshing problems, J Sound Vib 175(2), 185-195.

- [109] Mashida T, Kaneko S, and Watanabe T(1998), Nonlinear characteristics of sloshing with inlet and outlet flow in a rectangular tank, (Japanese), Trans JSME C 64(620),1184-1192.
- [110] Hayama S, Aruga K, and Watanabe T (1983), Nonlinear response of sloshing in rectangular tanks:1st Report. nonlinear response of surface elevation, Bulletin JSME 26(219), 1641-1648.
- [111] Su TC (1987), Sloshing in the rectangular tanks, Proc ASME Symp Fluid-Structure Vibration and Liquid Sloshing, PVP- vol 128, 69-79.
- [112] Lepelletier TG and Raichlen F (1988), Nonlinear oscillation in rectangular tanks, J Eng Mech 114(1),1-23.
- [113] Shamer L and Chamesse M (1990), On the Hysteresis phenomenon in the directly excited nonlinear resonance sloshing waves in a tank, Acta Mech 81(1/2), 47-58.
- [114] Yamada Y, Lemura H, Noda S, and Shimada S (1987), Long-period response spectra from nonlinear sloshing analysis under horizontal and vertical excitations, Natural Disaster Sci 9(2), 39-54.
- [115] Mathiessen L (1868), Akustisce Versuche, die kleinsten Transversalivellen der Flussigkeiten Betreffend, Annalen der Physik 134, 107-117.
- [116] Mathiessen L (1870), Uber die Transversal-schwingungen tonender Tropharer und Elastisher Flus-sigkeiten, Annalen der Physik 141,375-393.
- [117] Rayleigh L (1883), On the crispations of fluid resting upon a vibrating support, Phil Mag 15, 229-235.
- [118] Mathieu E (1868), Memoire sur le movement vibratoire d'une membrane de
- [119] Lewis DJ (1950), The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes, Proc Royal Soc(London) Series A 202, 81-96.
- [120] Benjamin TB and Ursell F (1954), The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, Proc Royal Soc(London) A225, 505-515.
- [121] Gollub JP and Simonelli F (1989), Bifurcation and modal interactions in fluid mechanics : surface waves , Proc XVII Int Congress of Theor Appl Mech, Grenoble, France, 21-27 August 1988, P Germain, M Piau, and D Caillerie (eds), Elsevier Science Publisher B V (North Holland), 73-82.
- [122] Simonelli F and Gollub JP (1989), Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy, J Fluid Mech 199, 471-494.
- [123] Feng ZC and Sethna PR (1989), Symmetry-breaking bifurcations in resonance surface waves, J Fluid Mech 199, 495-518.
- [124] Fynakushi M and Inoue S (1991), Bifurcations in resonantly forced water waves, European J Mech B/Fluids 10, 31-36.

- [125] Gollub JP and Meyer CW (1983), Symmetry-breaking instabilities on a fluid surface, *Physica* 6D, 337-346.
- [126] Ciliberto S and Gollub JP (1985a), Phenomenological model of chaotic mode competition in surface waves, *IL Nouvo Cimento* 6(4),309-316.
- [127] Virnig JC, Berman AS, and Sethna PR (1988), On three-dimensional nonlinear subharmonic resonance surface waves in a fluid- Part II: Experiment *J Appl Mech* 55, 220-224.
- [128] Kimura K, Takahara H, and Sakata M (1994b), Effects of higher order radial modes upon nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank subjected to vertical excitation, (Japanese), *Trans JSME C* 60(578), 3259-3267.
- [129] Kimura K and Takahara H (1997), Parametric vibration of liquid surface in a rectangular tank subjected to pitching excitation: 1st Report, Asymmetric mode, (Japanese), *Trans JSME C* 63(608),1052-1060.
- [130] Subhash Babu S and Bhattacharyya SK (1994), Finite element analysis of fluid structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing. Civil Engineering Department, Indian Institute of Technology, Kharagpur-721302, India.
- [131] Wu GX, Ma QW and Eatock Taylor R, Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank, based on a finite element method, Department of Mechanical Engineering, University College London, Torrington Place, London WC1E 7JE, UK.
- [132] Dogangum A, Durmus A, and Ayvaz Y(1994), Static and dynamic analysis of rectangular tanks by using the lagrangian fluid finite element method, Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, 61080, Trabzon, Turkey.
- [133] F.D. Fischer, F.G. Rammerstorfer, A refined analysis of sloshing effects in seismically excited tanks, Institute of Mechanics Montanuniversitat Leoben, Franz Josef-Strasse 18, A-8700 Leoben, Austria
- [134] M. Isaacson, K. Subbiah, Earthquake- induced sloshing in a rigid circular tank, Department of Civil Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, B.C., Canada V6T 1Z4.

Κεφάλαιο 9 : Παράρτημα

9.1 Προγράμματα σε Mathematica

9.1.1 Αναλυτικός υπολογισμός ιδιοτιμών του προβλήματος

```
U := 1
L := 7.5
H := 8
ω := 1
g := 9.81
```

Αντισυμμετρικές ιδιοτιμές

```
Table[μm =  $\frac{2 * m - 1}{2 * L} * \pi$ , {m, 1, 4}]
```

```
Table[Sqrt[g * μm * Tanh[H * μm]], {m, 1, 4}]
```

```
Table[μm * Tanh[H * μm], {m, 1, 4}]
```

Συμμετρικές ιδιοτιμές

```
Table[μn =  $\frac{n}{L} * \pi$ , {n, 1, 4}]
```

```
Table[Sqrt[g * μn * Tanh[H * μn]], {n, 1, 4}]
```

```
Table[μn * Tanh[H * μn], {n, 1, 4}]
```

9.1.2 Υπολογισμός της συνάρτησης του δυναμικού φ για κάθε κόμβο

```
N[
  Table[
    Sum[
      
$$\left( \frac{-1}{\text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]} * \frac{2 * U * L * (-1)^{n-1}}{\left(\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * L\right)^2} * \right.$$

      
$$\left. \frac{\omega^2}{\omega^2 - \left(\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * g * \text{Tanh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]\right)} * \text{Sin}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * x\right] * \right.$$

      
$$\left. \text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * y\right] \right) + (U * x), \{x, -7.5, 7.5, 7.5\},$$

    {y, 0, 8, 4}] // MatrixForm
```

9.1.3 Υπολογισμός ωστικής και επαγωγικής δύναμης

$$F_I = \sum_{n=1}^4 \frac{-8 * U * L * (-1)^{n-1}}{(2 * n - 1)^2 * \pi^2 * \text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]} \text{Sin}\left[\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right] * \frac{2 * L * \text{Sinh}\left[\frac{(2 * n - 1)}{2 * L} * \pi * H\right]}{\pi * (2 * n - 1)} + U * L * H$$

$$F_S = \sum_{n=1}^4 \frac{g * 4 * U * (-1)^{n-1} * \text{Tanh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]}{-\omega^2 * \text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right] + g * \frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * \text{Sinh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]} * \text{Sin}\left[\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right] * \frac{2 * L * \text{Sinh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]}{\pi * (2 * n - 1)}$$

9.1.4 Υπολογισμός και γραφική παράσταση των συντελεστών

C₁ και C₂

$$C_1 = \frac{F_S}{F_I}$$

Plot[C₁, {ω, 0, 10}]

$$C_2 = \frac{F_S + F_I}{F_U}$$

Plot[C₂, {ω, 0, 10}]

9.1.5 Υπολογισμός της ροπής M που ασκείται στο τοίχωμα της δεξαμενής

Φ =

$$\sum_{n=1}^4 \left(\frac{-1}{\text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]} * \frac{2 * U * L * (-1)^{n-1}}{\left(\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right)^2} * \left(\omega^2 - \left(\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * g * \text{Tanh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]\right) \right) * \text{Sin}\left[\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right] * \text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right] \right) + (U * L)$$

$$M = \int_0^H Y * \left(\sum_{n=1}^4 \left(\frac{-1}{\text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]} * \frac{2 * U * L * (-1)^{n-1}}{\left(\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right)^2} * \left(\omega^2 - \left(\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * g * \text{Tanh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * H\right]\right) \right) * \text{Sin}\left[\frac{2 * n - 1}{2} * \pi\right] * \text{Cosh}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * L} * \pi * Y\right] \right) + (U * L) \right) dy$$

9.2 Προγράμματα σε Fortran

9.2.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

```
PROGRAM GRID
IMPLICIT NONE

INTEGER LDA1,LDB1, N1,LDEVEC,LDAINV
PARAMETER (N1=9, LDA1=N1,LDB1=N1,LDEVEC=N1,LDAINV=N1) REAL
AMACH, BETA(N1)
COMPLEX ALPHA(N1)
EXTERNAL AMACH, GVLRG
C
REAL AINV(LDAINV,LDAINV),NSTIFF(N1,N1)
REAL ABC(LDA1,LDA1)
C
COMPLEX EVAL(N1)
EXTERNAL EVLCG, WRCRN,LINRG,WRRRN
COMPLEX EVEC(LDEVEC,N1)

C Δηλώσεις μεταβλητών

INTEGER::I,J,IEL,e,NNX,NNY,m,k,NELY,NELX,NUMEL,L,IIFL,IK,JK,J4,IJK
REAL T
REAL*4 :: dx,dy,hx,hy
INTEGER JJ,II,IJ,III,JJJ,MM,kk
REAL*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,,:),Ay(:,,:),STIFF(:,:)
1                                     ,NE(:,,:),N(:,:)
1                                     ,STIFFE(:,:)
INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(:,:),IW(:,),IW1(:)

C Ανοίγονται αρχεία.Στο 5 θα αποθηκεύουμε τις συντεταγμένες
C των κόμβων,καθώς και σε ποιον κόμβο ανήκουν αυτές,στο 6
C αποθηκεύουμε την αρίθμηση των κόμβων που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο,
C στο 7 αποθηκεύεται το συνολικό μητρώο ακαμψίας

OPEN(5,file='outsyntet.dat')
OPEN(6,file='outkomboi.dat')
OPEN(7,file='outmitroo.dat')
OPEN(8,file='outN.dat')

C Δίνετε ο αριθμός των κόμβων στην y και x κατεύθυνση,
C το συνολικό μήκος των στοιχείων στην x και y κατεύθυνση,
C και ο αριθμός των στοιχείων στην y και x κατεύθυνση

print*,'enter 1 for givin input at the screen:'
print*,'enter 2 for givin input at the screen:'
READ(*,*) IIFL
IF(iifl.EQ.1)THEN
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN Y'
```

```

READ(*,*) NNY
PRINT*, 'NUMBER OF NODES IN X'
READ(*,*) NNX
PRINT*, 'TOTAL LENGTH IN X'
READ(*,*) hx
PRINT*, 'TOTAL LENGTH IN Y'
READ(*,*) hy
ELSE
OPEN (125,file='inp.dat')
READ(125,*)NNY
READ(125,*)NNx
READ(125,*)hx
READ(125,*)hy
END IF
NELY=NNY-1
NELX=NNX-1
NUMEL=NELX*NELY
dx=hx/float(NNX-1)
dy=hy/float(NNY-1)

```

- C Ο πίνακας Ax δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην x κατεύθυνση
C Ο πίνακας Ay δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην y κατεύθυνση

```

ALLOCATE (Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX),STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL),iw(nny),iw1(nely))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),NE(4,4),N(NNX*NNY,NNX*NNY))

```

```

DO J4=1,nny
iw(J4)=(J4-1)*nnx
PRINT*,J4,IW(J4)
ENDDO

```

```

DO J4=1,NELY
IW1(J4)=(J4-1)*NELX
PRINT*,J4,IW1(J4)
END DO
READ(*,*)

```

- C Υπολογίζονται οι συντεταγμένες και η συνολική αρίθμηση όλων των κόμβων

```

DO J=1,NNY
DO I=1,NNX

Ax(J,I)=(I-1)*dx
Ay(J,I)=(J-1)*dy
M=(J-1)*NNX+I
WRITE(5,*) M,J,I,Ax(J,I),Ay(J,I)
END DO
END DO

```

C Υπολογίζεται ποιοι κόμβοι ανήκουν σε κάθε στοιχείο

k=0

L=0

```
DO E=1,NUMEL
IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
L=L+1
```

```
IC(1,E)=L
IC(2,E)=L+1
IC(3,E)=L+NNX+1
IC(4,E)=L+NNX
```

```
WRITE(6,*) E,IC(1,E),IC(2,E),IC(3,E),IC(4,E)
END DO
```

```
DO IEL=1,NUMEL
```

```
STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)
STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
```

```
DO II=1,4
DO JJ=1,4
```

```
STIFF(IC(ii,IEL),IC(jj,IEL))=STIFF(IC(ii,IEL),IC(jj,IEL))
+STIFFE(ii,jj)
```

1

```
END DO
END DO
```

```
IF(IEL.LE.IW1(NELY))THEN
CONTINUE
ELSE
NE(1,1)=0.
NE(1,2)=0.
NE(1,3)=0.
```



```

NE(1,4)=0.
NE(2,1)=0.
NE(2,2)=0.
NE(2,3)=0.
NE(2,4)=0.
NE(3,1)=0.
NE(3,2)=0.
NE(3,3)=dx/3.
NE(3,4)=dx/6.
NE(4,1)=0.
NE(4,2)=0.
NE(4,3)=dx/6.
NE(4,4)=dx/3.
END IF
DO III=1,4
DO JJJ=1,4
N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))=N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))
1      +NE(III,JJJ)
END DO
END DO
END DO

DO II=1,NNX*NNY
DO JJ=1,NNX*NNY
ABC(II,JJ)=N(II,JJ)
ENDDO
ENDDO

C      CALL GVLRG (N1, stiff, LDA1, n, LDB1, ALPHA, BETA)
      Compute eigenvalues
DO 10 I=1, N1
      EVAL(I) = ALPHA(I)/BETA(I)
10 CONTINUE
DO IJK=1,NNX*NNY
PRINT*,IJK,EVAL(IJK)
ENDDO

DO II=1,NNX*NNY
WRITE (7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
WRITE (8,4455) (N(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
END DO
12345  FORMAT (20(1X,F12.5))
4455   FORMAT (9(1X,F12.5))

CLOSE (5)
CLOSE (6)
CLOSE (7)
CLOSE (8)

END

```

9.2.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΩΣΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

```
PROGRAM GRID
IMPLICIT NONE
```

```
INTEGER::i,j,IEL,e,NNX,NNY,m,k,NELY,NELX,NUMEL,L
```

```
INTEGER KB,KM1,NM1,KP1,NN1
```

```
REAL T
```

```
REAL*4 :: dx,dy,hx,hy,V,cond,CONDP1
```

```
INTEGER JJ,II,IJ,N,MM,NDIM
```

```
REAL*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,:),Ay(:,:),B,STIFF(:,:)
```

```
1 , FE(:,:),F(:,:)
```

```
1 , STIFFE(:,:),X(:,:)
```

```
INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(:,:)
```

```
REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,:)
```

```
REAL, DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: WORK(:)
```

```
INTEGER(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: IPVVT(:)
```

```
REAL EK,ANORM,YNORM,ZNORM
```

```
REAL FORCLEFT,FORCRIGHT
```

- C Ανοίγονται αρχεία.Στο 5 θα αποθηκεύουμε τις συντεταγμένες
- C των κόμβων,καθώς και σε ποιον κόμβο ανήκουν αυτές,στο 6
- C αποθηκεύουμε την αρίθμηση των κόμβων που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο,
- C στο 7 αποθηκεύεται το συνολικό μητρώο ακαμψίας

```
OPEN(5,file='outsyntet.dat')
```

```
OPEN(6,file='outkomboi.dat')
```

```
OPEN(7,file='outmitroo.dat')
```

```
OPEN(8,file='outf.dat')
```

- C Δίνετε ο αριθμός των κόμβων στην y και x κατεύθυνση,
- C το συνολικό μήκος των στοιχείων στην x και y κατεύθυνση,
- C και ο αριθμός των στοιχείων στην y και x κατεύθυνση

```
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN Y'
```

```
READ(*,*) NNY
```

```
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN X'
```

```
READ(*,*) NNX
```

```
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN X'
```

```
READ(*,*) hx
```

```
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN Y'
```

```
READ(*,*) hy
```

```
PRINT*,'VELOCITY OF EXTERNAL EXCITATION'
```

```
READ(*,*) V
```

```
NELY=NNY-1
```

```
NELX=NNX-1
```

```
NUMEL=NELX*NELY
```

```
dx=hx/float(NNX-1)
dy=hy/float(NNY-1)
```

- C Ο πίνακας Ax δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην x κατεύθυνση
- C Ο πίνακας Ay δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην y κατεύθυνση

```
ALLOCATE
(Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX),STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY),X(2,NNX))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),FE(4,1),F(NNX*NNY,1))
```

- C Υπολογίζονται οι συντεταγμένες και η συνολική αρίθμηση όλων των κόμβων

```
Do j=1,NNY
Do i=1,NNX

Ax(j,i)=(i-1)*dx
Ay(j,i)=(j-1)*dy
m=(j-1)*NNX+i

WRITE(5,*) m,j,i,Ax(j,i),Ay(j,i)
END DO
END DO
```

- C Υπολογίζεται ποιοι κόμβοι ανήκουν σε κάθε στοιχείο

```
k=0
L=0
DO e=1,NUMEL
IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
L=L+1
```

```
IC(1,e)=L
IC(2,e)=L+1
IC(3,e)=L+NNX+1
IC(4,e)=L+NNX
```

```
WRITE(6,*) e,IC(1,e),IC(2,e),IC(3,e),IC(4,e)
END DO
```

```
DO IEL=1,NUMEL
```

```
STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)
STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
```

```

STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))

DO ii=1,4
DO jj=1,4
PRINT*,IEL,Ii,Jj,IC(Ii,IEL),IC(jJ,IEL)
STIFF(IC(ii,IEL),IC(jj,IEL))=STIFF(IC(Ii,IEL),IC(Jj,IEL))
1                                     +STIFFE(Ii,Jj)
END DO
END DO
END DO

```

C-----

```

DO m=1,NUMEL
DO n=1,NELY

IF(m.EQ.(1+NELX*(n-1))) THEN

FE(1,1)=-(.5)*V*dy
FE(2,1)=0.
FE(3,1)=0.
FE(4,1)=-(.5)*V*dy

ELSE IF (m.EQ.(NELX*n)) THEN

FE(2,1)=(.5)*V*dy
FE(3,1)=(.5)*V*dy
FE(1,1)=0.
FE(4,1)=0.

ELSE

FE(1,1)=0.
FE(2,1)=0.
FE(3,1)=0.
FE(4,1)=0.

END IF
ENDDO

DO MM=1,4
DO IEL=1,NUMEL
F(IC(mm,IEL),1)=F(IC(mm,IEL),1)+FE(mm,1)
END DO

```

```
END DO
END DO
```

```
DO I=1,nnx*ny
WRITE(8,*) F(i,1)
END DO
```

```
DO II=1,NNX*NNY
WRITE(7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
END DO
```

```
12345 FORMAT(20(1X,F12.5))
```

```
CLOSE(5)
CLOSE(6)
CLOSE(7)
CLOSE(8)
```

C-----solve the system -----

```
ALLOCATE(A(Nnx*Nny-ny,nnx*ny),
1 WORK(NNY*NNX),IPVT(NNY*NNX),B(Nnx*ny-ny))
OPEN (10, file='results.dat')
DO I=1,nnx*ny-ny
B(I)=F(I,1)
END DO
DO I=1,NNX*NNY-NNY
DO J=1,NNX*NNY-NNY
A(I,J)=STIFF(I,J)
END DO
END DO
N=NNX*NNY-NNX
PRINT*,N
READ(*,*)
NDIM=N
```

```
NDIM=N
IPVT(1)=1
IF(N.EQ.1)GOTO 80
NM1=N-1
```

C-----COMPUTE OF 1-NORM OF A-----

```
ANORM=0.0
DO J=1,N
T=0.0
DO I=1,N
T=T+ABS(A(I,J))
ENDDO
IF(T.GT.ANORM)ANORM=T
ENDDO
```

```

C-----GAUSS ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING-----
DO K=1,NM1
  KP1=K+1
C-----FIND PIVOTING-----
  M=K
  DO I=KP1,N
    IF(ABS(A(I,K)).GT.ABS(A(M,K)))M=I
  ENDDO
  IPVT(K)=M
  IF(M.NE.K)IPVT(N)=-IPVT(N)
  T=A(M,K)
  A(M,K)=A(K,K)
  A(K,K)=T

  IF(T.EQ.0.0)GOTO 35

C-----MULTIPLIERS-----
  DO I=KP1,N
    A(I,K)=-A(I,K)/T
  ENDDO

C-----PIVOTING AND ELIMINATION-----
  DO J=KP1,N
    T=A(M,J)
    A(M,J)=A(K,J)
    A(K,J)=T
    IF(T.EQ.0.0)GOTO 30
  DO I=KP1,N
    A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*T
  ENDDO
30 CONTINUE
  ENDDO
35 CONTINUE
  ENDDO

  DO K=1,N
    T=0.0
    IF(K.EQ.1)GOTO 45
    KM1=K-1
    DO I=1,KM1
      T=T+A(I,K)*WORK(I)
    ENDDO
45 EK=1.0
    IF(T.LT.0.0)EK=-1.0
    IF(A(K,K).EQ.0.0)GOTO 90
    WORK(K)=- (EK+T)/A(K,K)
  ENDDO
  DO KB=1,NM1
    K=N-KB
    T=0.0

```

```

        KP1=K+1
        DO I=KP1,N
        T=T+A(I,K)*WORK(K)
        ENDDO
        WORK(K)=T
        M=IPVT(K)
        IF(M.EQ.K)GOTO 60
        T=WORK(M)
        WORK(M)=WORK(K)
        WORK(K)=T
60  ENDDO
        DO I=1,N
        YNORM=YNORM+ABS(WORK(I))
        ENDDO

C-----SOLUTION A*Z=Y-----
        CALL SOLVE(N,A,WORK,IPVT)
        ZNORM=0.0
        DO I=1,N
        ZNORM=ZNORM+ABS(WORK(I))
        ENDDO

C----CONDITION NUMBER-----
        COND=ANORM*ZNORM/YNORM
        IF(COND.LT.1.0) COND=1.0
        GO TO 91

80  COND=1.0
        IF(A(1,1).NE.0.0)GO TO 91

C----SINGULAR -----
90  COND=1.0E+32
91  CONTINUE
        IF(N.EQ.1)GOTO 50
        NM1=N-1
        DO K=1,NM1
        KP1=K+1
        M=IPVT(K)
        T=B(M)
        B(M)=B(K)
        B(K)=T
        DO I=KP1,N
        B(I)=B(I)+A(I,K)*T
        ENDDO
        ENDDO

C----BACKWARD
        DO KB=1,NM1
        KM1=N-KB
        K=KM1+1

```

```

B(K)=B(K)/A(K,K)
T=-B(K)
DO I=1,KM1
B(I)=B(I)+A(I,K)*T
ENDDO
ENDDO

50 B(1)=B(1)/A(1,1)

WRITE(10,*)'THE SOLUTION IS:'
DO I=1,N
WRITE(10,7)b(I)
ENDDO

7 FORMAT(1H,F10.5)
8 FORMAT(80('-'))
PRINT*,'THE SYSTEM SOLVED SUCCESFULLY'

400 FORMAT (3(1X,F17.10))
410 FORMAT(' ZONE I=',I5,',J=',I5,',K= 1, F=POINT')
500 FORMAT ('EXECUTION TIME:',F8.3,1X,'SEC')

FORCLEFT=0.0
DO N=1,NNY-1
NN1=N+(N-1)*NELX
IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
FORCLEFT=FORCLEFT+ DY*(1./2.*B(NN1))
ELSE
FORCLEFT=FORCLEFT+ DY*(B(NN1))
ENDIF
ENDDO

FORCRIGHT=0.0
DO N=1,NNY-1
NN1=N*NNX
IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(1./2.*B(NN1))
ELSE
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(B(NN1))
ENDIF
ENDDO

OPEN (141,FILE='FORCES.DAT')
WRITE(141,1411)FORCLEFT,FORCRIGHT
1411 FORMAT(1X,'LEFT BOUNDARY FORCE:',F12.5,/,
11X,'RIGHT BOUNDARY FORCE:',F12.5)
END

```


9.2.3 ΟΛΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

PROGRAM GRID
IMPLICIT NONE

C Δηλώσεις μεταβλητών

```
INTEGER::I,J,IEL,E,NNX,NNY,M,k,NELY,NELX,NUMEL,L,J4  
INTEGER KB,KM1,NM1,KP1,NN1  
INTEGER JJ,II,IJ,N,MM,NDIM,III,JJJ  
INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(,:)  
INTEGER(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: IPVT(:),IW1(:)
```

```
REAL T  
REAL(4) :: dx,dy,hx,hy,V,H,cond,CONDP1,LAMDA
```

```
REAL(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,,:),Ay(:,,:),B,STIFF(:,:)  
1     ,FE(:,,:),F(:,,:),MK(:,:)  
1     ,STIFFE(:,,:),C(:,,:),CE(:,:)
```

```
REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,:)  
REAL, DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: WORK(:)
```

```
REAL EK,ANORM,YNORM,ZNORM  
REAL FORCLEFT,FORCRIGHT,MR
```

C Ανοίγονται αρχεία.Στο 5 θα αποθηκεύουμε τις συντεταγμένες
C των κόμβων,καθώς και σε ποιον κόμβο ανήκουν αυτές,στο 6
C αποθηκεύουμε την αρίθμηση των κόμβων που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο,
C στο 7 αποθηκεύεται το συνολικό μητρώο ακαμψίας

```
OPEN(5,FILE='OUTSYNTET.DAT')  
OPEN(6,FILE='OUTKOMBOI.DAT')  
OPEN(7,FILE='OUTMITROO.DAT')  
OPEN(8,FILE='OUTF.DAT')
```

C Δίνετε ο αριθμός των κόμβων στην y και x κατεύθυνση,
C το συνολικό μήκος των στοιχείων στην x και y κατεύθυνση,
C και ο αριθμός των στοιχείων στην y και x κατεύθυνση

```
PRINT*, 'NUMBER OF NODES IN Y'  
READ(*,*) NNY  
PRINT*, 'NUMBER OF NODES IN X'  
READ(*,*) NNX  
PRINT*, 'TOTAL LENGTH IN X'  
READ(*,*) hx  
PRINT*, 'TOTAL LENGTH IN Y'  
READ(*,*) hy  
PRINT*, 'VELOCITY OF EXTERNAL EXCITATION'  
READ(*,*) V
```

C----- Σταθερές -----

```
NELY=NNY-1
NELX=NNX-1
NUMEL=NELX*NELY
dx=hx/FLOAT(NNX-1)
dy=hy/FLOAT(NNY-1)
H=hy/NELY
```

```
ALLOCATE (IW1(NELY))
DO J4=1,NELY
iw1(J4)=(J4-1)*NELX
PRINT*,J4,iw1(J4)
ENDDO
```

C-----Ο πίνακας Ax δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην x κατεύθυνση-----

C-----Ο πίνακας Ay δίνει την αρίθμηση των κόμβων στην y κατεύθυνση-----

```
ALLOCATE (STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),FE(4,1),F(NNX*NNY,1),MK(NNX*NNY,NNX*NNY),
1          CE(4,4),C(NNX*NNY,NNX*NNY))
```

C-----Υπολογίζονται οι συντεταγμένες και η συνολική αρίθμηση όλων των κόμβων-----

```
ALLOCATE (Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX))
DO J=1,NNY
DO I=1,NNX
Ax(J,I)=(I-1)*dx
Ay(J,I)=(J-1)*dy
M=(J-1)*NNX+I
WRITE(5,*) M,J,I,Ax(J,I),Ay(J,I)
END DO
END DO
```

C-----Υπολογίζεται ποιοι κόμβοι ανήκουν σε κάθε στοιχείο-----

```
k=0
L=0
DO E=1,NUMEL
IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
L=L+1
IC(1,E)=L
IC(2,E)=L+1
IC(3,E)=L+NNX+1
\IC(4,E)=L+NNX
WRITE(6,*) E,IC(1,E),IC(2,E),IC(3,E),IC(4,E)
END DO
```

C----- Δημιουργία του πίνακα STIFFE -----

```
DO IEL=1,NUMEL
```

```
STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)
STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
```

C----- Σύνθεση του πίνακα STIFF -----

```
DO II=1,4
DO JJ=1,4
PRINT*,IEL,II,JJ,IC(II,IEL),IC(JJ,IEL)
STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))=STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))
1                                     +STIFFE(II,JJ)
END DO
END DO

IF(IEL.le.iw1(NELY))THEN
CONTINUE
ELSE
CE(1,1)=0.
CE(1,2)=0.
CE(1,3)=0.
CE(1,4)=0.
CE(2,1)=0.
CE(2,2)=0.
CE(2,3)=0.
CE(2,4)=0.
CE(3,1)=0.
CE(3,2)=0.
CE(3,3)=dx/3.
CE(3,4)=dx/6.
CE(4,1)=0.
CE(4,2)=0.
CE(4,3)=dx/6.
```

```

CE(4,4)=dx/3.
ENDIF
LAMDA=0.1

DO III=1,4
DO JJJ=1,4
1 C(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))=(C(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))
                                +CE(III,JJJ))
END DO
END DO

DO M=1,NUMEL
DO N=1,NELY

IF(M.EQ.(1+NELX*(n-1))) THEN
FE(1,1)=-(1./2.)*V*dy
FE(2,1)=0.
FE(3,1)=0.
FE(4,1)=-(1./2.)*V*dy

ELSE IF (M.EQ.(NELX*n)) THEN
FE(2,1)=(1./2.)*V*dy
FE(3,1)=(1./2.)*V*dy
FE(1,1)=0.
FE(4,1)=0.

ELSE
FE(1,1)=0.
FE(2,1)=0.
FE(3,1)=0.
FE(4,1)=0.
END IF

IEL=M
DO MM=1,4
F(IC(MM,IEL),1)=F(IC(MM,IEL),1)+FE(MM,1)
ENDDO

ENDDO
ENDDO

DO I=1,NNX*NNY
DO J=1,NNX*NNY
MK(I,J)=STIFF(I,J)-LAMDA*C(I,J)
ENDDO
ENDDO

DO I=1,NNX*NNY
WRITE(8,*) F(I,1)
ENDDO

```

```

WRITE(8,*)
DO I=1,NNX*NNY
WRITE(8,12345) (C(I,J) ,J=1,NNY*NNX)
ENDDO

```

```

DO II=1,NNX*NNY
WRITE(7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
END DO

```

12345 FORMAT(20(1X,F12.5))

```

CLOSE(5)
CLOSE(6)
CLOSE(7)
CLOSE(8)

```

C-----SYSTEM SOLUTION -----

```

ALLOCATE(A(Nnx*Nny,NNX*NNY),
1 WORK(NNY*NNX),IPVT(NNY*NNX),B(NNX*NNY))
OPEN (10, FILE='RESULTS.DAT')
DO I=1,NNX*NNY
B(I)=F(I,1)
ENDDO
DO I=1,NNX*NNY
DO J=1,NNX*NNY
A(I,J)=MK(I,J)
ENDDO
ENDDO
N=NNX*NNY
PRINT*,N
READ(*,*)
NDIM=N

PVT(1)=1
IF(N.EQ.1)GOTO 80
NM1=N-1

```

C-----COMPUTE OF 1-NORM OF A-----

```

ANORM=0.0
DO J=1,N
T=0.0
DO I=1,N
T=T+ABS(A(I,J))
ENDDO
IF(T.GT.ANORM)ANORM=T
ENDDO

```

C-----GAUSS ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING-----

```

DO K=1,NM1

```

KP1=K+1

C-----FIND PIVOTING-----

```
M=K
DO I=KP1,N
IF(ABS(A(I,K)).GT.ABS(A(M,K)))M=I
ENDDO
IPVT(K)=M
IF(M.NE.K)IPVT(N)=-IPVT(N)
T=A(M,K)
A(M,K)=A(K,K)
A(K,K)=T
```

IF(T.EQ.0.0)GOTO 35

C-----MULTIPLIERS

```
DO I=KP1,N
A(I,K)=-A(I,K)/T
ENDDO
```

C-----PIVOTING AND ELIMINATION-----

```
DO J=KP1,N
T=A(M,J)
A(M,J)=A(K,J)
A(K,J)=T
IF(T.EQ.0.0)GOTO 30
DO I=KP1,N
A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*T
ENDDO
```

30 CONTINUE
ENDDO

35 CONTINUE
ENDDO

C-----

```
DO K=1,N
T=0.0
IF(K.EQ.1)GOTO 45
KM1=K-1
DO I=1,KM1
T=T+A(I,K)*WORK(I)
ENDDO
45 EK=1.0
IF(T.LT.0.0)EK=-1.0
IF(A(K,K).EQ.0.0)GOTO 90
WORK(K)=- (EK+T)/A(K,K)
ENDDO
DO KB=1,NM1
K=N-KB
T=0.0
KP1=K+1
DO I=KP1,N
```

```

T=T+A(I,K)*WORK(K)
ENDDO
WORK(K)=T
M=IPVT(K)
IF(M.EQ.K)GOTO 60
T=WORK(M)
WORK(M)=WORK(K)
WORK(K)=T
60 ENDDO
DO I=1,N
YNORM=YNORM+ABS(WORK(I))
ENDDO
C-----SOLUTION A*Z=Y-----
CALL SOLVE(N,A,WORK,IPVT)
ZNORM=0.0
DO I=1,N
ZNORM=ZNORM+ABS(WORK(I))
ENDDO
C-----CONDITION NUMBER-----
COND=ANORM*ZNORM/YNORM
IF(COND.LT.1.0) COND=1.0
GOTO 91

C-----
80 COND=1.0
IF(A(1,1).NE.0.0)GOTO 91
C-----SINGULAR-----
90 COND=1.0E+32
91 CONTINUE

IF(N.EQ.1)GOTO 50
NM1=N-1
DO K=1,NM1
KP1=K+1
M=IPVT(K)
T=B(M)
B(M)=B(K)
B(K)=T
DO I=KP1,N
B(I)=B(I)+A(I,K)*T
ENDDO
ENDDO
C-----BACKWARD-----
DO KB=1,NM1
KM1=N-KB
K=KM1+1
B(K)=B(K)/A(K,K)
T=-B(K)
DO I=1,KM1
B(I)=B(I)+A(I,K)*T

```

```

        ENDDO
        ENDDO
50  B(1)=B(1)/A(1,1)

        WRITE(10,*)'THE SOLUTION IS:'
        DO I=1,N
        WRITE(10,7)b(I)
        ENDDO
7   FORMAT(1H,F10.5)
8   FORMAT(80('-'))
        PRINT*,'THE SYSTEM SOLVED SUCCESFULLY'

400  FORMAT (3(1X,F17.10))
410  FORMAT(' ZONE I=',I5,',J=',I5,',K= 1, F=POINT')
500  FORMAT ('EXECUTION TIME:',F8.3,1X,'SEC')

        FORCLEFT=0.0
        DO N=1,NNY
        NN1=N+(N-1)*NELX
        IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
        FORCLEFT=FORCLEFT+ DY*(1./2.*B(NN1))
        ELSE
        FORCLEFT=FORCLEFT+ DY*(B(NN1))
        ENDIF
        ENDDO

        FORCRIGHT=0.0
        DO N=1,NNY
        NN1=N*NNX
        IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
        FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(1./2.*B(NN1))
        ELSE
        FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(B(NN1))
        ENDIF
        ENDDO

        OPEN (141,FILE='FORCES.DAT')
        WRITE(141,1411)FORCLEFT,FORCRIGHT
1411  FORMAT(1X,'LEFT BOUNDARY FORCE:',F12.5,/,
        11X,'RIGHT BOUNDARY FORCE:',F12.5)

        MR=0.0
        DO N=1,NNY
        NN1=N*NNX
        IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
        MR=MR+ DY*(N-1)* DY*(1./2.*B(NN1))
        ELSE
        MR=MR+ DY*(N-1)* DY*(B(NN1))
        ENDIF
        ENDDO

```



```
OPEN (142,FILE='ROPES.DAT')  
WRITE(142,1412)MR  
1412 FORMAT(1X,'ROPI:',F12.5)
```

```
END
```