



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ:

**Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων
με Πεπερασμένες Ελαστο-πλαστικές Παραμορφώσεις**

Φοιτήτρια: Ελευθεριάδου Όλγα

Εξεταστική Επιτροπή

Καθ. Ν.Αράβας (επιβλέπων)

Αν.Καθ. Κ.Παπαδημητρίου

Λεκτ. Σ.Καραμάνος



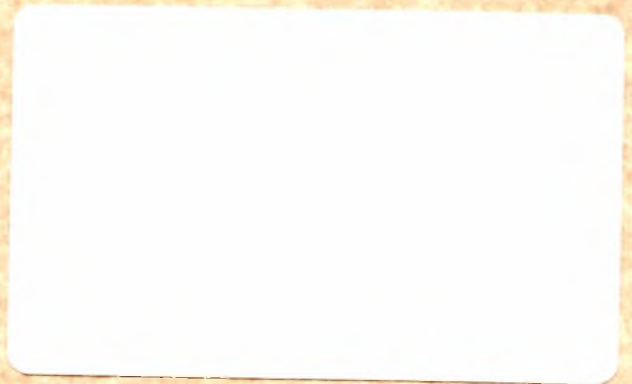
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 749/1
Ημερ. Εισ.:
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιδετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ
2001
ΕΛΕ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000062974



Σημείωμα της συγγραφέα

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου και επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής αυτής εργασίας, κύριο Ν.Αράβα, και για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του αλλά και για το είδος της συνεργασίας αυτής και για τα πολύτιμα στοιχεία ακαδημαϊκά και μη που αποκόμισα μέσα από αυτήν. Για τις πληροφορίες, τις συμβουλές, τον τρόπο σκέψης που μου μετέδωσε, τον τρόπο του συνεργάζεσθαι με βάση το ειλικρινές ενδιαφέρον και την διάθεση για κάθε είδους υποστήριξη, για την αμέριστη συμπαράσταση. Για όλα αυτά παρακαλώ να δεχτεί όχι μόνο τις ευχαριστίες μου αλλά και την ευγνωμοσύνη μου.

Ευχαριστώ επίσης τους κυρίους Αν.Καθ. Κ.Παπαδημητρίου και Λεκ. Σ.Καραμάνο για τη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στις κυρίες Ε.Αμανατίδου για την πρόθυμη βοήθεια της σε θέματα σχετικά με το εργαστηριακό κομμάτι της εργασίας και Γ.Γιακουμάκη για την συμβολή της στην παρουσίαση της εργασίας αλλά κυρίως για την πολύτιμη φιλία της.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και σε κάθε ένα μέλος της όμορφης οικογένειας που έφτιαξαν για την συμπαράσταση και ατελείωτη αγάπη τους, που μου δίνει πάντα δύναμη σε κάθε μου προσπάθεια.

Στους γονείς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	3
2. Καταστατικές εξισώσεις των μικρών παραμορφώσεων	5
Εισαγωγή	5
Ελαστο-πλαστικές καταστατικές εξισώσεις	5
Ελαστικότητα	5
Πλαστικότητα	6
Υπολογισμός του πολλαπλασιαστή λ	6
Ο ελαστο-πλαστικός τανυστής τετάρτης τάξεως	10
Παραδείγματα	10
Αριθμητική ολοκλήρωση των ελαστο-πλαστικών εξισώσεων	16
Η μέθοδος forward Euler	17
Η μέθοδος backward Euler	17
Αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου του Von-Mises με ισότροπη ελαστικότητα με τη μέθοδο backward Euler	18
Αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου της κινηματικής σκλήρυνσης με ισότροπη ελαστικότητα με τη μέθοδο backward Euler	22
Αναλυτική επίλυση του προβλήματος απλής διάτμησης για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης με ισότροπη ελαστικότητα	26
3. Θεωρία των μεγάλων παραμορφώσεων	32
Γενικά	32
Διαφοροποίηση από τις μικρές παραμορφώσεις	33
Ελαστο-πλαστικές καταστατικές εξισώσεις	35
Αριθμητική ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων για το μοντέλο του Von-Mises	35
Αναλυτική λύση του προβλήματος της απλής διάτμησης σε μεγάλες παραμορφώσεις για το μοντέλο του Von-Mises	41
4. Πεπερασμένες ελαστο-πλαστικές παραμορφώσεις ανισότροπων υλικών και το πλαστικό spin	45
Εισαγωγή	45
Το spin του συνεχούς μέσου και το αντίστοιχο της δομής του	45
Το spin ενός μοναδιαίου διανύσματος, το οποίο είναι προσαρμοσμένο σε κάποια υλική ίνα	45
Φυσικό νόημα του τανυστή στροβιλότητας \mathbf{W}	47
Το spin του συνεχούς μέσου	47
Το πλαστικό spin	48
Καταστατικές εξισώσεις και αλγόριθμος ολοκλήρωσης για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης	49
5. Επίπεδη εντατική κατάσταση. Απειροστές παραμορφώσεις.	55
Εισαγωγή	55
Καταστατικές εξισώσεις	55
Ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων	57
Υπολογισμός του ελαστο-πλαστικού τανυστή \mathbf{C}	60

6. Εφαρμογές	62
Εφελκυσμός επίπεδης πλάκας με οπή	62
Διάτμηση στοιχείου σύμφωνα με το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης	70
Παράρτημα Α	
Η umat υπορουτίνα mises_finite	
Παράρτημα Β	
Η umat υπορουτίνα kinem_finite	
Παράρτημα Γ	
Το πρόγραμμα large	
Παράρτημα Δ	
Αρχείο δημιουργίας καννάβου για το πρόβλημα της πλάκας με οπή	

1. Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την αριθμητική επίλυση προβλημάτων που υπόκεινται σε πεπερασμένες ελαστο-πλαστικές παραμορφώσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο η ανάλυση ξεκινάει με την παρουσίαση της γενικής μορφής των καταστατικών εξισώσεων που αποτελούν το ελαστο-πλαστικό πρόβλημα των μικρών παραμορφώσεων και τον ορισμό της συνθήκης πλαστικής φόρτισης. Ο προσδιορισμός του υλικού που είναι και το πρώτο βήμα μιας τέτοιας ανάλυσης οδηγεί στη σωστή επιλογή ενός μοντέλου πλαστικότητας το οποίο καθορίζει το κριτήριο της πλαστικότητας. Στην εργασία, παρουσιάζουμε τρία μοντέλα πλαστικότητας και τη συγκεκριμένη μορφή των καταστατικών εξισώσεων για κάθε ένα από αυτά. Ξεκινάμε με το μοντέλο του Von-Mises που χρησιμοποιείται για ισότροπα υλικά. Ακολουθούν το μοντέλο του Gurson για πορώδη υλικά και αυτό της κινηματικής κράτυνσης (ή σκλήρυνσης) για ανισότροπα υλικά.

Για τα μοντέλα Von-Mises και κινηματικής σκλήρυνσης προχωρήσαμε στην αριθμητική ολοκλήρωση των καταστατικών τους εξισώσεων, δημιουργώντας αλγόριθμους ολοκληρώσεως οι οποίοι γράφτηκαν στη συνέχεια με μορφή κώδικα με σκοπό την εφαρμογή τους στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων Abaqus. Η λύση σε έναν τέτοιο κώδικα προκύπτει ως μια σειρά απειροστών προσαυξήσεων είτε κάποιας εξωτερικής δύναμης, είτε της μετατόπισης ενός συνόλου κόμβων κάποιου κάρναβου πεπερασμένων στοιχείων. Το υλικό και το μοντέλο πλαστικότητας του, λαμβάνονται υπόψη από τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων μέσω μιας υπορουτίνας `umat`. Μια `umat` υπορουτίνα περιέχει τις ιδιότητες του υλικού και έναν αλγόριθμο ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων ενός συγκεκριμένου μοντέλου πλαστικότητας. Μέσα στην υπορουτίνα είναι δυνατόν να υπάρχουν μεταβλητές ανεξάρτητες του κώδικα Abaqus, των οποίων το μέγεθος ανανεώνεται σε κάθε βήμα προσαύξεσης. Μετά την ολοκλήρωση των εξισώσεων η υπορουτίνα θα πρέπει να ανανεώσει τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών και τάσεων και να πληροφορήσει τον κώδικα για αυτές τις νέες τιμές στο τέλος κάθε βήματος προσαύξεσης για το οποίο έχει καλεστεί από τον κώδικα. Γνωρίζοντας πλέον τις νέες τιμές των τάσεων ο κώδικας του Abaqus καταγράφει εξισώσεις ισορροπίας μεταξύ τάσεων και εξωτερικά εφαρμοζόμενων φορτίων καταλήγοντας έτσι σε ένα σύστημα μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους κομβικούς αγνώστους. Για την επίλυση του συστήματος αυτού το Abaqus χρησιμοποιεί τη μέθοδο Newton και επομένως χρειάζεται ο υπολογισμός της Ιακωβιανής. Κάθε υπορουτίνα `umat` υπολογίζει για κάθε βήμα προσαύξεσης έναν τανυστή γραμμικοποίησης \bar{C} που χρειάζεται στον υπολογισμό της Ιακωβιανής της μεθόδου Newton. Ο σωστός υπολογισμός του τανυστή \bar{C} επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης.

Στο κεφάλαιο τρία συνθέτουμε το σύνολο των ελαστο-πλαστικών καταστατικών εξισώσεων ισότροπων υλικών για σώματα που υπόκεινται σε μεγάλες παραμορφώσεις και εξηγούμε το λόγο διαφοροποίησης τους από τις αντίστοιχες εξισώσεις που ισχύουν στις μικρές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση τώρα που το υλικό είναι ανισότροπο οι συνθήκες καταστατικές εξισώσεις δεν επαρκούν για να περιγράψουν το ελαστο-πλαστικό πρόβλημα. Ο λόγος είναι ότι το `spin` της δομής του υλικού ενός σώματος δεν είναι ίδιο με το `spin` του ίδιου του σώματος. Η διαφορά μεταξύ των προαναφερθέντων `spin` ορίζεται ως το πλαστικό `spin`. Στο κεφάλαιο τέσσερα εξηγούμε το φυσικό νόημα του πλαστικού `spin` και συνθέτουμε καταστατικές εξισώσεις προσδιορισμού του για την περίπτωση ενός ελαστο-πλαστικού υλικού το οποίο διαρρέει σύμφωνα με το κριτήριο διαρροής της κινηματικής σκλήρυνσης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται το πρόβλημα της επίπεδης εντατικής κατάστασης για υλικά που υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές των αλγορίθμων που γράφηκαν για μεγάλες παραμορφώσεις ισότροπων και ανισότροπων υλικών.

Τυποποιημένοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται σε ολόκληρη την έκταση της εργασίας. Κεφαλαία και μαυρισμένα σύμβολα δηλώνουν τανυστές, των οποίων η τάξη υποδεικνύεται από το κείμενο. Κάθε στοιχείο ενός τανυστή είναι εκφρασμένο σε αναφορά προς ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, και η σύμβαση της αθροίσεως χρησιμοποιείται για επαναλαμβανόμενους δείκτες, εκτός αν υποδεικνύονται διαφορετικά μέσα στο κείμενο. Το γράμμα T υποδεικνύει την αναστροφή ενός τανυστή δευτέρας τάξης, η υπερθετημένη τελεία την υλική παράγωγο και τα γράμματα s και a το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος ενός τανυστή δευτέρας τάξεως. Έστω \mathbf{a} και \mathbf{b} διανύσματα, \mathbf{A} και \mathbf{B} τανυστές δευτέρας τάξεως και \mathbf{C} τανυστής τετάρτης τάξεως. Τα παρακάτω γινόμενα χρησιμοποιούνται μέσα στο κείμενο:

$$(\mathbf{a} \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j,$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})_i = A_{ij} a_j, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})_i = a_j A_{ji},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}.$$

$$(\mathbf{A} : \mathbf{C})_{ij} = A_{kl} C_{klij}, \quad (\mathbf{C} : \mathbf{A})_{ij} = C_{ijkl} A_{kl},$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij},$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

2. Καταστατικές εξισώσεις των μικρών παραμορφώσεων.

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη γενική μορφή ελαστο-πλαστικών καταστατικών εξισώσεων για rate-independent υλικά που υπόκεινται σε μικρές παραμορφώσεις. Θα δούμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνουν αυτές για τρία διαφορετικά μοντέλα, το μοντέλο του Von-Mises, του Gurson και της κινηματικής σκλήρυνσης. Επίσης θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων, τις μεθόδους backward και forward Euler και για τα μοντέλα Von-Mises και κινηματικής σκλήρυνσης θα αναλύσουμε τους αλγορίθμους ολοκλήρωσης για την περίπτωση που χρησιμοποιείται η μέθοδος backward Euler.

2.2 Ελαστο-πλαστικές καταστατικές εξισώσεις

Ο τανυστής των παραμορφώσεων μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1)$$

2.2.1 Ελαστικότητα

Το ελαστικό μέρος των καταστατικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί συναρτήσει της ελαστικής ενέργειας $W(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$. Ο τανυστής των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ καθορίζεται από την ελαστική ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}. \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad \text{ή} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C}^{e-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2a)$$

$$\text{όπου } \mathbf{C}^e = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e \partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}.$$

Στην περίπτωση που έχουμε γραμμική ελαστικότητα, ο τανυστής ελαστικότητας \mathbf{C}^e είναι σταθερός και μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (3) μαζί με τις εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού, $\sigma_{ij,j} = 0$ και $\varepsilon_{ij} = 1/2 \cdot (u_{i,j} + u_{j,i})$ αντίστοιχα, καθώς και τις συνοριακές συνθήκες αποτελούν το ελαστικό πρόβλημα.

2.3 Πλαστικότητα

Η γενική μορφή της συνθήκης διαρροής είναι:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, s^{\alpha}) = 0, \quad (4)$$

όπου s^{α} ($\alpha=1, \dots, m$) είναι ένα σύνολο καταστατικών μεταβλητών. Ο νόμος διαρροής και οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών είναι:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\alpha}), \quad (5)$$

όπου $\dot{\lambda}$ είναι μια μη αρνητική μεταβλητή και ονομάζεται πολλαπλασιαστής πλαστικότητας, και

$$\dot{s}^{\alpha} = G^{\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\beta}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m. \quad (6)$$

αντίστοιχα. Για rate independent υλικά, οι καταστατικές συναρτήσεις G^{α} είναι ομογενείς συναρτήσεις πρώτου βαθμού ως προς το ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ και επομένως η τελευταία εξίσωση λόγω της εξίσωσης (5) γίνεται:

$$\dot{s}^{\alpha} = \dot{\lambda} g^{\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m. \quad (7)$$

όπου $g^{\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\beta}) \equiv G^{\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\beta}, \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, s^{\beta}))$.

Για δεδομένα s^{α} , η σχέση (4) ορίζει μια « υπερεπιφάνεια » στον χώρο των τάσεων. Εάν μια εντατική κατάσταση $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^A$ είναι τέτοια ώστε $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^{\alpha}) < 0$, τότε το $\boldsymbol{\sigma}^A$ βρίσκεται στην ελαστική περιοχή, δηλαδή ο ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης ισούται με μηδέν, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = 0$. Εάν $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^{\alpha}) = 0$, τότε υπάρχει κάποιος ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ ενώ η κατάσταση $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^{\alpha}) > 0$ δεν επιτρέπεται.

Στην εξίσωση (5) το μέτρο του ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$, καθορίζεται κυρίως από τον πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$. Το διάνυσμα \mathbf{N} συνεισφέρει στο μέτρο, αλλά κυρίως καθορίζει την κατεύθυνση του διανύσματος ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$.

2.3.1 Υπολογισμός του πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$

Κατά τη διάρκεια της πλαστικής ροής, η παράμετρος $\dot{\lambda}$ καθορίζεται από τη λεγόμενη κατάσταση συνέχειας (consistency condition), η οποία μαθηματικά εκφράζεται ως $\dot{\Phi} = 0$. Αυτό σημαίνει πως τα $\boldsymbol{\sigma}, s^{\alpha}$ θα πρέπει να μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε η εξίσωση $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, s^{\alpha}) = 0$ να ικανοποιείται πάντα,

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial s^{\alpha}} \dot{s}^{\alpha} = 0.$$

Αντικαθιστώντας τα $\dot{s}^a = \dot{\lambda} g^a$ και θέτοντας $\mathbf{M} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\mathbf{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s^a} g^a = 0, \quad (8)$$

και θέτοντας $H = -\sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s^a} g^a$, παίρνει την τελική μορφή

$$\mathbf{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} H = 0. \quad (9)$$

Από την εξίσωση (9) προσδιορίζεται ο πολλαπλασιαστής πλαστικότητας λ ,

i. $\dot{\lambda}$ συναρτήσει του ρυθμού τάσεων $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\text{από την (9)} \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{1}{H} \mathbf{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{για } H \neq 0 \quad (10)$$

Στην τέλεια πλαστικότητα η συνάρτηση διαρροής Φ είναι ανεξάρτητη των καταστατικών μεταβλητών s^a με αποτέλεσμα το H να ισούται με μηδέν και η τελευταία εξίσωση να μην ισχύει.

ii. $\dot{\lambda}$ συναρτήσει του ρυθμού παραμορφώσεως $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

από τη σχέση (2α), με αντικατάσταση της εξίσωσης (5) προκύπτει:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{N}) \Rightarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{C}^e : \mathbf{N}.$$

Σύμφωνα με την τελευταία η εξίσωση (9) γράφεται:

$$\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} (\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} + H) = 0,$$

και λύνοντας ως προς $\dot{\lambda}$, παίρνουμε:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (11)$$

όπου $L = \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} + H$. Η εξίσωση (11) ισχύει ακόμα και στην περίπτωση τέλει πλαστικότητας.

Η παράμετρος H , μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διευκρινίσει αν στην παρούσα κατάσταση ενός υλικού σημείου έχουμε σκλήρυνση ή πράυνση του υλικού ή ακόμα και τέλεια πλαστικότητα. Στην περίπτωση της τέλει πλαστικότητας έχουμε ή-

δη πει πως η παράμετρος H είναι ίση με μηδέν. Στα μέταλλα, το H είναι τάξης μεγέθους τάσης διαρροής και μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του μηδενός. Παραδείγματος χάρη σε ένα πορώδες υλικό, που υφίσταται εφελκυσμό, η μήτρα σκληρύνεται ενώ ταυτόχρονα οι πόροι μεγαλώνουν με αποτέλεσμα να αδυνατίζουν το υλικό. Στην περίπτωση που το μέγεθος των πόρων μεγαλώνει με ρυθμό τέτοιο ώστε η επίπτωση τους να υπερτερεί αυτήν της σκλήρυνσης της μήτρας, τότε το υλικό πραΰνεται και $H < 0$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση το υλικό σκληρύνεται και $H > 0$. Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση σκλήρυνσης ή πράυνσης του υλικού ισχύει $H > 0$ και $H < 0$ αντίστοιχα.

Έστω ότι $(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a)$ είναι η παρούσα κατάσταση ενός υλικού σημείου για το οποίο ισχύει $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a) = 0$. Έστω τώρα ότι οι καταστατικές μεταβλητές s^a , μεταβάλλονται σε $s^a + \Delta s^a$. Αν το αρχικό $\boldsymbol{\sigma}^A$ είναι μέσα από την καινούρια επιφάνεια διαρροής $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, s^a + \Delta s^a) = 0$, δηλαδή ισχύει $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a + \Delta s^a) < 0$ τότε είχαμε σκλήρυνση, ενώ στην περίπτωση που είναι έξω από την καινούρια επιφάνεια διαρροής, δηλαδή ισχύει $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a + \Delta s^a) > 0$ είχαμε πράυνση του υλικού.

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a + \Delta s^a) &= \underbrace{\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a)}_0 + \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s^a} \Delta s^a + O(\Delta s^a)^2 \\ &= \Delta \lambda \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s^a} g^a(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a) + O(\Delta \lambda^2) \\ &= -\Delta \lambda H(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a) + O(\Delta \lambda^2). \end{aligned}$$

Επομένως επειδή κατά την πλαστική φόρτιση $\Delta \lambda > 0$ πάντα, για

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a + \Delta s^a) < 0 \Rightarrow H > 0,$$

ενώ για

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^A, s^a + \Delta s^a) > 0 \Rightarrow H < 0.$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η εξίσωση (10) δεν ισχύει στην περίπτωση τέλει πλαστικότητας και επομένως το κριτήριο πλαστικής φόρτισης δεν μπορεί να γραφεί συναρτήσει του $\boldsymbol{\sigma}$. Εξάλλου, σύμφωνα με το σχήμα 2.1. της επόμενης σελίδας, για μια δεδομένη μεταβολή $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ δεν μπορούμε να ξέρουμε αν λαμβάνουν χώρα πλαστικές παραμορφώσεις. Αντίθετα, στην εξίσωση (11) η παράμετρος L είναι πάντα θετική.

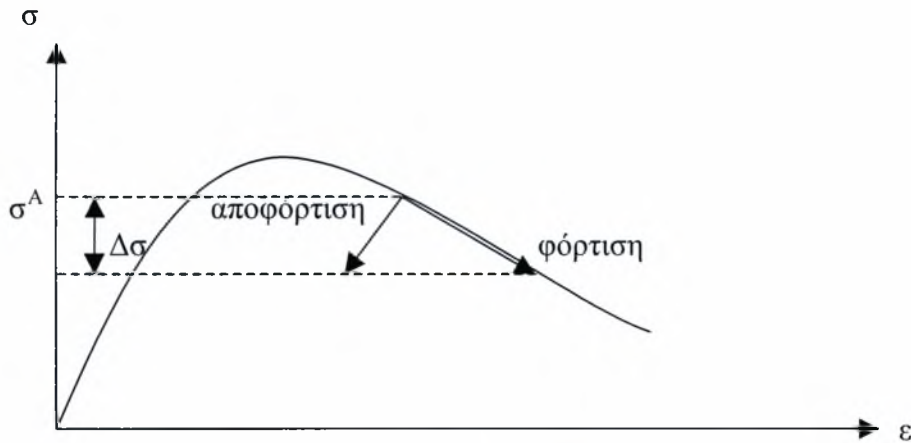
Απόδειξη:

$$L = \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} + H,$$

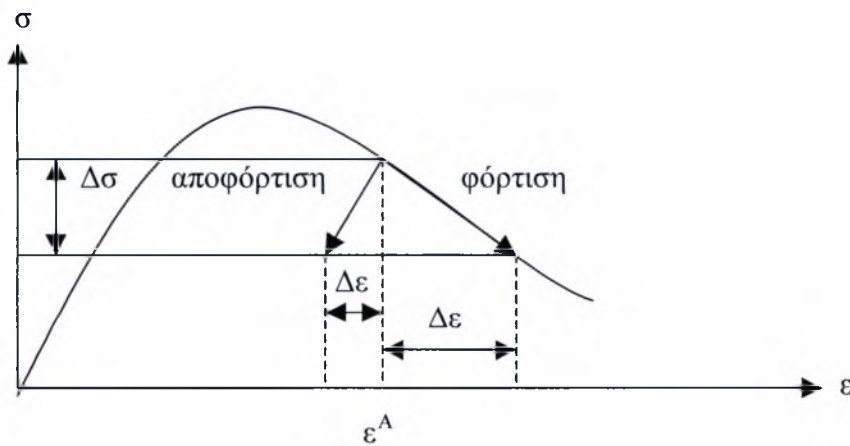
και επειδή συνήθως $\mathbf{M} = \mathbf{N}$, ο πρώτος όρος γράφεται $\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} > 0$ και είναι πάντα θετικός γιατί ο τανυστής \mathbf{C}^e είναι θετικά ορισμένος. Επίσης είναι τάξης μεγέθους $O(E)$, όπου E είναι ένα τυπικό μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Επομένως, εφόσον το H είναι όπως έχουμε πει τάξης μεγέθους τάσης διαρροής $O(\sigma_0)$, όπου σ_0 μια τυπική τάση διαρροής η παράμετρος L είναι πάντα θετική αφού το μέτρο ελαστικότητας είναι πάντα μεγαλύτερο της τάσης διαρροής.

$$\text{Άρα } L = \underbrace{\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N}}_{O(E)} + \underbrace{\mathbf{H}}_{O(\sigma_0)} > 0$$

Επομένως η εξίσωση (11) καλύπτει και τις τρεις περιπτώσεις (σκλήρυνση, πράυνση, τέλεια πλαστικότητα) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο πλαστικής φόρτισης. Εξάλλου σύμφωνα με το σχήμα 2.2, μια μεταβολή $\Delta\epsilon$ μπορεί να διευκρινίσει αν λαμβάνουν χώρα πλαστικές παραμορφώσεις ή όχι.



Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.2

Τέλος σημειώνουμε πως η παράμετρος $\dot{\lambda}$ πρέπει να είναι πάντα θετική κατά τη διάρκεια της πλαστικής ροής και να μηδενίζεται όταν υπάρχει ουδέτερη φόρτιση ή ελαστική αποφόρτιση. Για το λόγο αυτό γράφουμε τις εξισώσεις ορισμού του πολλαπλασιαστή πλαστικότητας λ με αγκύλες Macauley.

$$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{1}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{L} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right\rangle. \quad (12)$$

2.3.2 Ο ελαστο-πλαστικός τανυστής τετάρτης τάξεως

Ορίζουμε ως ελαστο-πλαστικό τανυστή τετάρτης τάξεως \mathbf{C} , τον τανυστή που συνδέει τους ρυθμούς τάσεων-παραμορφώσεων, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (13)$$

Ο ελαστο-πλαστικός τανυστής \mathbf{C} μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση του νόμου του υλικού:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{N}),$$

όπου με αντικατάσταση του πολλαπλασιαστή πλαστικότητας από την εξίσωση (11), η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{C}^e - \frac{1}{L} \mathbf{C}^e : \mathbf{N} \mathbf{M} : \mathbf{C}^e) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (14)$$

Επομένως,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e - \frac{1}{L} \mathbf{C}^e : \mathbf{N} \mathbf{M} : \mathbf{C}^e. \quad (15)$$

2.3.3 Παραδείγματα

Το μοντέλο του von Mises

Στο μοντέλο του von Mises η επιφάνεια διαρροής καθορίζεται από το αποκλίνον τμήμα των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}'$ και από την τάση διαρροής. Υπάρχει μόνο μια καταστατική μεταβλητή ($m=1$), η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\varepsilon}^p$, δηλαδή, $s^1 = \bar{\varepsilon}^p$. Η καμπύλη διαρροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \sigma_e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (16)$$

όπου $\sigma_e = [3/2 \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}']^{1/2}$ είναι η ισοδύναμη τάση κατά von Mises. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος της καθετότητας (plastic normality), δηλαδή $\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, έτσι ώστε

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3 \dot{\lambda}}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e}. \quad (17)$$

Απόδειξη:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{2\sigma_e} \frac{3}{2} 2\sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_e} \frac{\partial (\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{nn} \delta_{ij})}{\partial \sigma_{kl}} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_e} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \underbrace{\delta_{nk} \delta_{nl}}_{\delta_{kl}} \right) = \frac{3}{2\sigma_e} \left(\sigma'_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \underbrace{\sigma'_{ii}}_0 \right) = \frac{3\sigma'_{kl}}{2\sigma_e}. \quad (18)$$

Ο ρυθμός της καταστατικής μεταβλητής, δηλαδή, ο ρυθμός της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{s}^1 = \dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} \equiv G^1(\dot{\varepsilon}^p) \quad (19)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (17), η παραπάνω γράφεται:

$$\dot{s}^1 = \dot{\varepsilon}^p = \sqrt{(2/3) \frac{3\dot{\lambda}}{2} \frac{3\dot{\lambda}}{2} \frac{\sigma' : \sigma'}{\sigma_e \sigma_e}} = \sqrt{\dot{\lambda}^2 \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2}} = \dot{\lambda} g^1, \quad \text{όπου } g^1 \equiv 1. \quad (20)$$

Από τη συνθήκη συνέχειας (consistency condition) θα βρούμε τις σχέσεις για τις παραμέτρους H, L και λ.

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \Rightarrow \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sqrt{3/2 \sigma' : \sigma'}}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial [-\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)]}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma' : \dot{\sigma}}{\sigma_e} - \underbrace{\frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}_H \underbrace{\dot{\varepsilon}^p}_{\dot{\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2H} \frac{\sigma' : \dot{\sigma}}{\sigma_e}, \text{ για } H \neq 0$$

Αν στην εξίσωση (21) αντικαταστήσουμε το

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^e : \dot{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \mathbf{C}^e : \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \text{ παίρνουμε}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^e : \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \underbrace{\frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}_H \underbrace{\dot{\varepsilon}^p}_{\dot{\lambda}} = 0, \text{ και λύνοντας ως προς } \dot{\lambda}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^e : \dot{\varepsilon} \quad \text{όπου } L = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + H. \quad (22)$$

Στην ισότροπη γραμμική ελαστικότητα ο τανυστής ελαστικότητας έχει τη μορφή

$$\mathbf{C}^e = 2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{I},$$

όπου G και K είναι το μέτρο διατμήσεως και διογκώσεως αντίστοιχα, \mathbf{I} ο μοναδιαίος τανυστής δευτέρας τάξεως, $\mathbf{J}^d = \mathbf{J} - \frac{1}{3}\mathbf{I}$, και \mathbf{J} ο μοναδιαίος τανυστής τετάρτης τάξεως με καρτεσιανές συντεταγμένες $J_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$.

Επομένως για $\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e}$ έχουμε

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e} : (2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{I}) = \frac{3G}{\sigma_e}\boldsymbol{\sigma}' = 2G\mathbf{N}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = 2G\mathbf{N} : \mathbf{N} = 3G.$$

Επομένως η εξίσωση (22β) γίνεται $L = 3G + H$ ενώ η έκφραση $\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$, η οποία ορίζει την πλαστική φόρτιση, είναι ισοδύναμη με την $\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$.

Τέλος με αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στην εξίσωση ορισμού του ελαστο-πλαστικού τανυστή \mathbf{C} , εξίσωση (15), βρίσκουμε ότι αυτός στο μοντέλο του von-Mises ισούται με:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{3G + H}\mathbf{N}\mathbf{N}. \quad (23)$$

Το μοντέλο του Gurson (1977) για πορώδη μέταλλα

Στο μοντέλο του Gurson η εξίσωση διαρροής εξαρτάται από τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ και τον αποκλίνων τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}'$. Το μοντέλο περιέχει δύο καταστατικές μεταβλητές ($m=2$), α) την ισοδύναμη μικροσκοπική πλαστική παραμόρφωση της μήτρας του υλικού $\bar{\varepsilon}_m^p$ και β) το πορώδες f , το οποίο ορίζεται ως το κλάσμα όγκου των πόρων. Η συνθήκη διαρροής είναι της μορφής

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_m^p, f) = \left[\frac{q}{\sigma_m(\varepsilon_m^p)} \right]^2 + 2f \cosh \left[\frac{3p}{2\sigma_m(\varepsilon_m^p)} \right] - (1 + f^2) = 0, \quad (24)$$

όπου $p = -\sigma_{kk}/3$ είναι η υδροστατική πίεση (θετική κατά τη θλίψη), q η ισοδύναμη τάση κατά Von-Mises και σ_m είναι η τάση διαρροής της μήτρας του υλικού.

Ο ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_m} \left[\frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_m} - f \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_m} \right) \mathbf{I} \right]. \quad (25)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[\frac{q}{\sigma_m^2} + 2f \cosh\left(\frac{-\sigma_{nn}}{2\sigma_m}\right) - (1+f^2) \right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[\frac{3/2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{\sigma_m^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[2f \cosh\left(\frac{-\sigma_{nn}}{2\sigma_m}\right) \right] - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (1+f^2)}_0 = \\
&= \frac{3}{2\sigma_m^2} 2\sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{f}{\sigma_m} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \sigma_{kl}} = \\
&= \frac{3}{\sigma_m^2} \left[\sigma'_{ij} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{ij} + 1/3 \sigma_{nn} \delta_{ij}) \right] - \frac{f}{\sigma_m} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \delta_{nk} \delta_{nl} = \\
&= \frac{3}{\sigma_m^2} \sigma'_{ij} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{1}{3} \sigma_{nn} \underbrace{\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}}_0 \right) - \frac{f}{\sigma_m} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \delta_{kl} = \\
&= \frac{3}{\sigma_m^2} \left(\sigma'_{kl} + \frac{1}{3} \underbrace{\sigma'_{ij} \delta_{ij}}_{\sigma'_{ii}=0} \right) - \frac{f}{\sigma_m} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \delta_{kl} = \\
&= \frac{1}{\sigma_m} \left[\frac{3}{\sigma_m} \sigma'_{kl} - f \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \delta_{kl} \right].
\end{aligned}$$

Η εξίσωση συνέχειας της πρώτης καταστατικής μεταβλητής $\dot{\epsilon}_m^p$ βασίζεται στο ότι το μακροσκοπικό πλαστικό έργο $\sigma : \dot{\epsilon}^p$ θα πρέπει να είναι ίσο με το αντίστοιχο μικροσκοπικό $(1-f)\sigma_m \dot{\epsilon}_m^p$, έτσι ώστε

$$\dot{s}^1 = \dot{\epsilon}_m^p = \frac{\sigma : \dot{\epsilon}^p}{(1-f)\sigma_m} \equiv G^1(\sigma, \epsilon_m^p, f, \dot{\epsilon}^p). \quad (26)$$

Υποθέτοντας ότι το υλικό της μήτρας είναι πλαστικά ασυμπίεστο και αγνοώντας την ελαστική συνεισφορά στην μεταβολή του όγκου των πόρων, η εξίσωση συνέχειας του πορώδους γράφεται:

$$\dot{s}^2 = \dot{f} = (1-f)\dot{\epsilon}_{kk}^p \equiv G^2(f, \dot{\epsilon}^p). \quad (27)$$

Απόδειξη:

$$f = \frac{V_v}{V}, \quad V_v + V_m = V \Rightarrow \dot{V}_v + \underbrace{\dot{V}_m}_0 = \dot{V}$$

$$\dot{f} = \frac{\dot{V}_v}{V} - \frac{V_v}{V^2} \dot{V} = \frac{\dot{V}}{V} - \frac{V_v}{V^2} \dot{V} = \left(1 - \frac{V_v}{V} \right) \underbrace{\frac{\dot{V}}{V}}_{\dot{\varepsilon}_{kk}} = (1-f)\dot{\varepsilon}_{kk},$$

όπου V, V_m, V_v είναι οι όγκοι του υλικού, της μήτρας του υλικού και των πόρων αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο πλαστικής ροής, εξίσωση (25), προκύπτουν οι ακόλουθες εναλλακτικές εκφράσεις για τις εξισώσεις συνέχειας των καταστατικών μεταβλητών:

$$\dot{s}^1 = \dot{\varepsilon}_m^p = \frac{\dot{\lambda}}{(1-f)\sigma_m^2} \left[\frac{2q^2}{\sigma_m} + 3fp \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \right] = \dot{\lambda} g^1(\sigma, \bar{\varepsilon}_m^p, f) \quad (28)$$

$$\dot{s}^2 = \dot{f} = -\dot{\lambda} \frac{3(1-f)f}{\sigma_m} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \equiv \dot{\lambda} g^2(\sigma, \bar{\varepsilon}_m^p, f), \quad (29)$$

ενώ οι παράμετροι H, L καθορίζονται από την εξίσωση συνέχειας $\dot{\Phi} = 0$ (consistency condition).

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p} \dot{\varepsilon}_m^p + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \dot{f} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - \dot{\lambda} \underbrace{\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p} g^1 - \frac{\partial \Phi}{\partial f} g^2 \right)}_H = 0.$$

Στην έκφραση του H , οι παράγωγοι $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial f}$ ισούνται με:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_m^p} = - \left[\frac{2q^2}{\sigma_m^3(\varepsilon_m^p)} + f \frac{3p}{2\sigma_m^2(\varepsilon_m^p)} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m(\varepsilon_m^p)}\right) \right] \frac{\partial \sigma_m(\varepsilon_m^p)}{\partial \varepsilon_m^p} d\varepsilon_m^p$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} = -2 \left[-\cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_m(\varepsilon_m^p)}\right) + f \right].$$

Επομένως,

$$H = g^1 \left[\frac{2q^2}{\sigma_m^3(\varepsilon_m^p)} + 2f \frac{3p}{4\sigma_m^2(\varepsilon_m^p)} \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m(\varepsilon_m^p)}\right) \right] \frac{\partial \sigma_m(\varepsilon_m^p)}{\partial \varepsilon_m^p} d\varepsilon_m^p + 2g^2 \left[-\cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_m(\varepsilon_m^p)}\right) + f \right]$$

Επίσης $L = H + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : C^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$ και για γραμμική ισότροπη ελαστικότητα:

$$L = H + \frac{3}{\sigma_m^2} \left[\frac{4Gq^2}{\sigma_m^2} + 3Kf^2 \sinh^2\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \right].$$

Τέλος ο ελαστο-πλαστικός τανυστής δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e - \frac{1}{L \sigma_m^2} \left[\frac{6G}{\sigma_m} \boldsymbol{\sigma}' - 3Kf \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \mathbf{I} \right] : \left[\frac{6G}{\sigma_m} \boldsymbol{\sigma}' - 3Kf \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_m}\right) \mathbf{I} \right].$$

Το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης

Στο μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης η επιφάνεια διαρροής καθορίζεται από το αποκλίνον τμήμα του τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}'$, τον αποκλίνοντα τανυστή back-stress $\boldsymbol{\alpha}$ και από την τάση διαρροής. Υπάρχουν έξι καταστατικές μεταβλητές ($m=6$), η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\varepsilon}^p$, δηλαδή, $s^1 = \bar{\varepsilon}^p$ και οι πέντε ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή backstress $\boldsymbol{\alpha}$ (αποκλίνων, συμμετρικός τανυστής). Η καμπύλη διαρροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \bar{\varepsilon}^p) = \Sigma_e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (30)$$

όπου $\Sigma_e = \left[\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma} \right]^{1/2}$ είναι η ισοδύναμη τάση και $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\alpha}$.

Σύμφωνα με το νόμο της καθετότητας, ο ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3 \dot{\lambda}}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\Sigma_e}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: } \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial \Sigma_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2 \Sigma_e} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2 \Sigma_e} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : \frac{\partial (\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij} - \alpha_{ij})}{\partial \sigma_{mn}} = \\ &= \frac{3}{2 \Sigma_e} (s_{ij} - \alpha_{ij}) : (\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{km} \delta_{kn} \delta_{ij}) = \frac{3}{2 \Sigma_e} (s_{mn} - \alpha_{mn}) = \frac{3 \boldsymbol{\Sigma}}{2 \Sigma_e} = \mathbf{N}, \end{aligned}$$

επίσης ισχύει $\mathbf{N} : \mathbf{N} = \frac{3}{2}$ και $\mathbf{N} : \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_e$.

Ο ρυθμός της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται από την εξίσωση

$$\dot{s}^1 = \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{2/3 \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} \equiv G^1(\dot{\varepsilon}^p), \quad (32)$$

στην οποία χρησιμοποιώντας την έκφραση για το ρυθμό πλαστικής παραμόρφωσης της εξίσωσης (31), βρισκουμε:

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{3 \dot{\lambda}}{2} \frac{3 \dot{\lambda}}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}}{\Sigma_e \Sigma_e}}{\frac{\Sigma_e^2}{\Sigma_e^2}}} = \sqrt{\dot{\lambda}^2 \frac{\Sigma_e^2}{\Sigma_e^2}} = \dot{\lambda} g^1, \quad \text{όπου } g^1 \equiv 1. \quad (33)$$

Ο ρυθμός των υπόλοιπων πέντε ανεξάρτητων καταστατικών μεταβλητών, δηλαδή των συνιστωσών του τανυστή back-stress α , δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\alpha} = A(\bar{\varepsilon}^p) \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} A(\bar{\varepsilon}^p) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{3\dot{\lambda}}{2} A(\bar{\varepsilon}^p) \frac{\Sigma}{\Sigma_e}. \quad (34)$$

Από την εξίσωση συνέπειας (consistency condition) για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης βρίσκουμε ότι:

$$H = \frac{3}{2} A(\bar{\varepsilon}^p) + h \quad \text{και} \quad L = 3G + H, \quad \text{όπου} \quad h = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\varepsilon}^p}.$$

Τέλος ο ελαστο-πλαστικός τανυστής έχει τη μορφή:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{3G + H} \mathbf{N} \mathbf{N}. \quad (35)$$

2.4 Αριθμητική ολοκλήρωση των ελαστο-πλαστικών εξισώσεων

Η λύση ενός ελαστο-πλαστικού προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία βασίζεται σε απειροστές αυξήσεις της μετατόπισης. Σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης, οι τιμές των $\varepsilon_n, \sigma_n, s_n^a$ τη χρονική στιγμή t_n καθώς και μια απειροστή αύξηση της παραμόρφωσης $\Delta \varepsilon$ είναι γνωστά, και επομένως χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός της λύσης σ_{n+1}, s_{n+1}^a τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Το ελαστικό μέρος των εξισώσεων συμβιβαστού είδαμε ότι μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_{n+1} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e} \right)_{n+1} = \mathbf{F}(\varepsilon_{n+1}^e) = \mathbf{F}(\varepsilon_n^e, \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p). \quad (36)$$

Ορίζουμε ως ελαστική πρόβλεψη ή (elastic predictor) την ποσότητα $\sigma^e = \mathbf{F}(\varepsilon_n^e + \Delta \varepsilon)$ και για την περίπτωση γραμμικής ελαστικότητας, η εξίσωση (36) γράφεται ως εξής:

$$\sigma_{n+1} = \sigma^e - \mathbf{C}^e : \Delta \varepsilon^p \quad (37)$$

όπου τώρα $\sigma^e = \sigma_n + \mathbf{C}^e : \Delta \varepsilon$.

Έχουμε πει πως το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(\sigma^e, s_n^a)$ μπορεί να μας πληροφορήσει σχετικά με το αν έχουμε πλαστική ροή κατά τη διάρκεια του παρόντος βήματος ή όχι. Δηλαδή, είχαμε πει πως για

$\Phi(\sigma^e, s_n^a) > 0$ έχουμε πλαστική φόρτιση,

ενώ για

$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^e, s_n^a) \leq 0$ έχουμε ελαστική συμπεριφορά.

Επομένως οι εξισώσεις που χρειαζόμαστε για την επίλυση ενός ελαστο-πλαστικού προβλήματος είναι οι εξής:

$$\text{ελαστικότητα: } \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (38)$$

$$\text{πλαστική ροή: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, s^a), \quad (39)$$

$$\text{εξέλιξη των } s^a: \dot{s}^a = G^a(\boldsymbol{\sigma}, s^b, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{\lambda} g^a(\boldsymbol{\sigma}, s^b), \quad (40)$$

$$\text{κριτήριο διαρροής: } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, s^a) = 0. \quad (41)$$

Οι εξισώσεις (38) και (41) είναι αλγεβρικές, ενώ οι (39) και (40) είναι διαφορικές. Για την αριθμητική ολοκλήρωση των δύο τελευταίων εξισώσεων, αναπτύσσουμε παρακάτω δύο μεθόδους, τις forward και backward Euler. Αυτές οι μέθοδοι δεν διαφέρουν ως προς την ακρίβεια της λύσης. Ωστόσο η backward Euler είναι πιο ευσταθής και για το λόγο αυτό την προτιμούμε.

2.4.1 Η μέθοδος forward Euler

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p(\Delta\lambda) = \Delta\lambda \mathbf{N}_n \quad \text{και} \quad s_{n+1}^a(\Delta\lambda) = s_n^a + \Delta\lambda g_n^a. \quad (42)$$

Οι εξισώσεις (38) και (41) γίνονται

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta\lambda) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\lambda \mathbf{N}_n), \quad (43)$$

και

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta\lambda), s_{n+1}^a(\Delta\lambda)) = 0. \quad (44)$$

Η εξίσωση του κριτηρίου διαρροής (44) είναι όπως αναφέρθηκε αλγεβρική εξίσωση και μπορεί να λυθεί ως προς $\Delta\lambda$. Βρίσκοντας το $\Delta\lambda$, οι εξισώσεις (42) καθορίζουν τα $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ και s_{n+1}^a , και εδώ ολοκληρώνεται η διαδικασία ολοκλήρωσης.

2.4.2 Η μέθοδος backward Euler

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, s_{n+1}^a) \quad \text{και} \quad s_{n+1}^a = s_n^a + G^a(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, s_{n+1}^b, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (45)$$

Οι εξισώσεις (38) και (41) γίνονται

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{και} \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, s_{n+1}^a) = 0. \quad (46)$$

Οι εξισώσεις (45) και (46) καθορίζουν ένα σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων οι οποίες θα πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα ως προς $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$, s_{n+1}^a , και $\Delta\lambda$. Γενικά η μέθοδος backward Euler, είναι πιο πολύπλοκη από την forward Euler, όμως όπως αναφέρθηκε και παραπάνω είναι περισσότερο ευσταθής.

2.5 Αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου του von-Mises με ισότροπη ελαστικότητα με τη μέθοδο backward Euler.

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε τη μέθοδο backward Euler αριθμητικής ολοκλήρωσης για το μοντέλο του von-Mises με ισότροπη ελαστικότητα.

Υποθέτουμε πως έχουμε γραμμική ισότροπη ελαστικότητα, έτσι ώστε το ελαστικό μέρος των καταστατικών εξισώσεων να μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\mathbf{e}^e + K\varepsilon_{kk}^e \mathbf{I}, \quad (47)$$

όπου \mathbf{e} είναι το αποκλίνον μέρος του τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\varepsilon}$. Για τον αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων \mathbf{s} , γνωρίζουμε πως ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = 2G\mathbf{e} - 2G\mathbf{e}^p.$$

Αν κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ υπάρξει μεταβολή της παραμόρφωσης $\Delta \mathbf{e}$, αυτή θα προκαλέσει μια αντίστοιχη μεταβολή των τάσεων σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + 2G\Delta \mathbf{e} - 2G\Delta \mathbf{e}^p = \mathbf{s}^e - 2G\Delta \mathbf{e}^p \quad (48)$$

και

$$(\sigma_{kk})_{n+1} = (\sigma_{kk})_n + 3K\Delta \varepsilon_{kk}^e = (\sigma_{kk})_n + 3K\Delta \varepsilon_{kk} - 3K \underbrace{\Delta \varepsilon_{kk}^p}_0. \quad (49)$$

Η εξίσωση διαρροής είδαμε πως είναι της μορφής:

$$\Phi = \sigma_e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (50)$$

ενώ ο κανόνας πλαστικής ροής δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p \mathbf{N}, \quad \text{όπου } \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_e}. \quad (51)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο backward Euler στην παραπάνω εξίσωση, προσδιορίζουμε τη μεταβολή της πλαστικής παραμόρφωσης συναρτήσει του διανύσματος \mathbf{N} υπολογισμένο όμως τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \bar{\varepsilon}^p \mathbf{N}_{n+1}. \quad (52)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση (48) προκύπτει:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 2G\Delta \bar{\varepsilon}^p \mathbf{N}_{n+1}$$

και αντικαθιστώντας το \mathbf{N} από την εξίσωση ορισμού του, βρίσκουμε:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^P \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(\sigma_e)_{n+1}}.$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς τις τάσεις \mathbf{s}_{n+1} , βρίσκουμε ότι τα διανύσματα \mathbf{s}_{n+1} , \mathbf{s}^e είναι συγραμμικά,

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{3G\Delta\bar{\varepsilon}^P}{(\sigma_e)_{n+1}}} \mathbf{s}^e = c\mathbf{s}^e,$$

με αποτέλεσμα το διάνυσμα \mathbf{N}_{n+1} να γράφεται συναρτήσει της ελαστικής πρόβλεψης \mathbf{s}^e και να είναι πλέον γνωστό.

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(\sigma_e)_{n+1}} = \frac{3}{2} \frac{c\mathbf{s}^e}{\sqrt{3/2}(c\mathbf{s}^e) : (c\mathbf{s}^e)} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^e}{\sigma_e}.$$

Ορίσαμε την ελαστική πρόβλεψη \mathbf{s}^e με σκοπό να μπορούμε να ελέγχουμε αν η μεταβολή της παραμόρφωσης μας βγάζει έξω από την παρούσα επιφάνεια διαρροής ή όχι. Υπολογίζουμε λοιπόν την ισοδύναμη ελαστική τάση σ_e^e και ελέγχουμε το πρόσημο της συνάρτησης διαρροής $\Phi = \sigma_e^e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^P)$. Εάν λοιπόν η τιμή της Φ είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός τότε $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e$ και $\Delta\bar{\varepsilon}^P = 0$, ενώ στην περίπτωση όπου $\Phi > 0$ τότε υπάρχει κάποια μεταβολή στην ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\Delta\bar{\varepsilon}^P$ η οποία θα πρέπει να υπολογιστεί προκειμένου να καθοριστούν οι τάσεις τη χρονική στιγμή t_{n+1} . Στην ουσία στις παραπάνω εξισώσεις το $\Delta\bar{\varepsilon}^P$ είναι πλέον ο μόνος άγνωστος. Αυτός θα υπολογιστεί από το κριτήριο διαρροής:

$$(\sigma_e)_{n+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^P + \Delta\bar{\varepsilon}^P) = 0,$$

όπου $(\sigma_e^2)_{n+1} = 3/2(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}) = (\sigma_e^e - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^P)^2$ και η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\sigma_e^e - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^P - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^P + \Delta\bar{\varepsilon}^P) = 0. \quad (53)$$

Η εξίσωση (53) μπορεί να λυθεί ως προς $\Delta\bar{\varepsilon}^P$ με την αριθμητική μέθοδο Newton-Raphson. Στην ειδική περίπτωση μάλιστα της τέλει πλαστικότητας όπου η τάση διαρροής σ_y είναι σταθερή, η λύση είναι πολύ απλή:

$$\Delta\bar{\varepsilon}^P = \frac{\sigma_e^e - \sigma_y}{3G}. \quad (54)$$

Αφού πλέον γνωρίζουμε τη μεταβολή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\bar{\varepsilon}^P$, υπολογίζουμε τις τάσεις από τις σχέσεις:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 2G\Delta\bar{\varepsilon}^p \mathbf{N}_{n+1} \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{kk})_{n+1} \mathbf{I}. \quad (56)$$

Επειδή στις παραπάνω εξισώσεις οι μεταβλητές εξαρτώνται από την ιστορία της παραμόρφωσης, η λύση που δίνει ένας καθορισμένος κώδικας πεπερασμένων στοιχείων όπως αυτός του Abaqus, προκύπτει ως μια σειρά απειροστών προσαυξήσεων είτε της μετατόπισης είτε των εξωτερικών φορτίων στους κόμβους ενός κάρναβου εφαρμογής. Οι εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες δηλώνουν ότι οι τάσεις είναι σε ισορροπία με τα εξωτερικά φορτία, γράφονται στο τέλος κάθε βήματος προσαυξήσης καταλήγοντας σε ένα σύστημα μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους κομβικούς αγνώστους. Το Abaqus χρησιμοποιεί τη μέθοδο Newton για την επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων και επομένως χρειάζεται να υπολογίσει την Ιακωβιανή. Για τον υπολογισμό αυτόν απαραίτητος είναι ένας δεύτερος υπολογισμός, αυτός του τανυστή γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$. Ο τελευταίος είναι τανυστής τετάρτης τάξεως και ορίζεται από τη σχέση:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\mathbf{C}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (57)$$

Ο τανυστής $\bar{\mathbf{C}}$ εξαρτάται από το καταστατικό μοντέλο αλλά και από τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης και συνδέει τις απειροστές μεταβολές των τάσεων με αυτές των παραμορφώσεων. Για τον υπολογισμό του αρκεί να εκφράσουμε τις μεταβολές αυτές των τάσεων $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ συναρτήσει των παραμορφώσεων $d(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \underbrace{d\boldsymbol{\varepsilon}_n}_0 = d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$.

Γενικά για διαφορετικούς αλγόριθμους ολοκλήρωσης, παίρνουμε διαφορετικές τιμές τάσεων $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \text{αλγόριθμος ολοκλήρωσης})$, ενώ για δεδομένο αλγόριθμο ισχύει $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον τανυστή γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$ του μοντέλου του von-Mises με τη μέθοδο backward Euler. Από τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης γνωρίζουμε ότι:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{kk})_{n+1} \mathbf{I} \quad (58)$$

$$(\sigma_{kk})_{n+1} = (\sigma_{kk})_n + 3K\Delta\varepsilon_{kk} \quad (59)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 2G\Delta\bar{\varepsilon}^p \mathbf{N}_{n+1} \quad (60)$$

$$\sigma_c^e - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^p = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p). \quad (61)$$

Θα πρέπει να εκφράσω κάθε μεταβλητή ως συνάρτηση του $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$. Ξεκινώντας από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}d(\sigma_{kk})_{n+1} \mathbf{I}, \quad (62)$$

και επομένως χρειάζεται ο υπολογισμός των:

- i. $d(\sigma_{kk})_{n+1}$
- ii. ds_{n+1} .

Από τις εξισώσεις (59-60) βρίσκουμε:

$$d(\sigma_{kk})_{n+1} = \underbrace{d(\sigma_{kk})_n}_0 + 3Kd(\Delta\varepsilon_{kk}) = 3K(d\varepsilon_{kk})_{n+1} = 3K\mathbf{I} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (63)$$

$$ds_{n+1} = ds^e - 2Gd(\Delta\bar{\varepsilon}^p) \mathbf{N}_{n+1} - 2G\Delta\bar{\varepsilon}^p d\mathbf{N}_{n+1}. \quad (64)$$

Η τελευταία εξίσωση δημιουργεί την ανάγκη υπολογισμού τριών επιπλέον όρων, των ds^e , $d(\Delta\bar{\varepsilon}^p)$, και $d\mathbf{N}_{n+1}$.

$$a) \quad ds^e = \underbrace{ds_n}_0 + 2Gd(\Delta\mathbf{e}) = 2Gd\mathbf{e}_{n+1} = 2G\mathbf{J}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (65)$$

b) Με παραγωγή της εξίσωσης (61) βρίσκουμε:

$$d\sigma_e^e - 3Gd(\Delta\bar{\varepsilon}^p) = \underbrace{\frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}^p}}_H d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) \quad \Rightarrow \quad d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) = \frac{d\sigma_e^e}{3G + H_{n+1}}. \quad (66)$$

Το $d\sigma_e^e$ θα βρεθεί από την παραγωγή της σχέσης $(\sigma_e^e)^2 = 3/2 \mathbf{s}^e : \mathbf{s}^e$,

$$2\sigma_e^e d\sigma_e^e = 3\mathbf{s}^e : ds^e \quad \Rightarrow \quad \text{λόγω της εξίσωσης (65)}$$

$$2\sigma_e^e d\sigma_e^e = 6G\mathbf{s}^e : \mathbf{J}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 6G\mathbf{s}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$d\sigma_e^e = 3G \frac{\mathbf{s}^e}{\sigma_e^e} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 2G\mathbf{N}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}.$$

Άρα η εξίσωση (66) γράφεται:

$$d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) = \frac{2G}{3G + H_{n+1}} \mathbf{N}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (67)$$

c) Με παραγωγή της εξίσωσης $\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^e}{\sigma_e^e}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}
dN_{n+1} &= \frac{3}{2} \frac{ds^e}{\sigma_e^e} - \frac{3}{2} \frac{s^s}{\left(\frac{\sigma_e^e}{\frac{2N_{n+1}}{3\sigma_e^e}}\right)^2} d\sigma_e^e \Rightarrow \\
dN_{n+1} &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sigma_e^e} 2G\mathbf{J}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \frac{2N_{n+1}}{3\sigma_e^e} 2GN_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \right) \Rightarrow \\
dN_{n+1} &= \frac{3G}{\sigma_e^e} \left[\mathbf{J}^d - \frac{2}{3} N_{n+1} N_{n+1} \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \tag{68}
\end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των παραπάνω εξισώσεων στην εξίσωση (58) δίνει:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{II} - 4G^2 \left(\frac{1}{3G+H} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_e^e} \right) N_{n+1} N_{n+1} - 6G^2 \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_e^e} \mathbf{J}^d \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$$

όπου η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι ο τανυστής $\bar{\mathbf{C}}$.

Παρατήρηση: καθώς το $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$, το $\Delta\bar{\varepsilon}^p \rightarrow 0$ επίσης, οπότε η παραπάνω σχέση τείνει να γίνει :

$$\bar{\mathbf{C}} \rightarrow 2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{II} - \frac{4G^2}{3G+H} N_{n+1} N_{n+1} = \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{3G+H} N_{n+1} N_{n+1}. \tag{69}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με εκείνη του ελαστο-πλαστικού τανυστή \mathbf{C} , του μοντέλου του von-Mises. Δηλαδή για $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ ο τανυστής γραμμικοποίησης τείνει να γίνει ίσος με τον ελαστο-πλαστικό τανυστή.

2.6 Αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου της κινηματικής σκλήρυνσης με ισότροπη ελαστικότητα με τη μέθοδο backward Euler.

Όπως και στο μοντέλο του von-Mises ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις τάσεις

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{70}$$

$$(\sigma_{kk})_{n+1} = (\sigma_{kk})_n + 3K\Delta\varepsilon_{kk} = \text{γνωστό}. \tag{71}$$

Επιπλέον η μεταβολή του τανυστή backstress $\boldsymbol{\alpha}$, δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + A(\bar{\varepsilon}^p)_{n+1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \tag{72}$$

Η εξίσωση διαρροής, για $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$ είναι της μορφής:

$$\Phi = \Sigma_e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p), \tag{73}$$

ενώ ο κανόνας πλαστικής ροής δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \mathbf{N}. \quad (74)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο backward Euler στην εξίσωση (74) προκύπτει:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}_{n+1}, \quad (75)$$

$$\text{όπου } \mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{(\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1}}, \quad \text{και } \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}.$$

Η αντικατάσταση της παραπάνω στις εξισώσεις (70, 72) δίνει:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^e - 2G\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}_{n+1} \quad (76)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}_{n+1}. \quad (77)$$

Όπως στην περίπτωση του μοντέλου Von-Mises, έτσι και εδώ ο τανυστής \mathbf{N}_{n+1} είναι γνωστός από την αρχή του βήματος προσαύξησης της μετατόπισης και επομένως διευκολύνει την επίλυση των εξισώσεων.

Απόδειξη: έστω $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ και $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^e = \mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n$,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^e - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p (2G + A)\mathbf{N}_{n+1},$$

με αντικατάσταση του \mathbf{N}_{n+1} από την εξίσωση ορισμού του βρίσκουμε

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p (2G + A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p))}{(\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1}} \right] = \boldsymbol{\Sigma}^e \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = c\boldsymbol{\Sigma}^e, \quad (78)$$

και επομένως

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{(\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1}} = \frac{3}{2} \frac{c\boldsymbol{\Sigma}^e}{\sqrt{3/2}(c\boldsymbol{\Sigma}^e) : (c\boldsymbol{\Sigma}^e)} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}^e}{\boldsymbol{\Sigma}_e^e} = \text{γνωστό}. \quad (79)$$

Αν η παρούσα κατάσταση $\boldsymbol{\Sigma}_e^e$ βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια διαρροής, έχουμε ελαστικότητα και επομένως $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$ και $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^e$. Στην αντίθετη περίπτωση για να επιλυθούν οι εξισώσεις θα πρέπει να υπολογίσουμε τον μοναδικό πλέον άγνωστο, την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, από το κριτήριο διαρροής, εκφρασμένο τη χρονική στιγμή t_{n+1} .

$$(\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0,$$

όπου

$$\begin{aligned}
(\Sigma_c^2)_{n+1} &= \frac{3}{2} \Sigma_{n+1} : \Sigma_{n+1} \\
&= \frac{3}{2} (\Sigma^e - 2G\Delta\bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{n+1} - A(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\Delta\bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{n+1}) : (\Sigma^e - 2G\Delta\bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{n+1} - A(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)\Delta\bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{n+1})
\end{aligned}$$

και μετά από πράξεις

$$(\Sigma_c^2)_{n+1} = [\Sigma_c^e - \frac{3}{2}(2G + A(\bar{\epsilon}_{n+1}^p))\Delta\bar{\epsilon}^p]^2. \quad (80)$$

Επομένως το κριτήριο διαρροής γράφεται ως εξής:

$$(\Sigma_c^e)_{n+1} - \frac{3}{2}[2G + A(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p)]\Delta\bar{\epsilon}^p - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (81)$$

Στην περίπτωση που η τάση διαρροής σ_y και η μεταβλητή A είναι ανεξάρτητες της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να λυθεί ως προς το $\Delta\bar{\epsilon}^p$ και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τάσεις.

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = \frac{\Sigma_c^e - \sigma_y}{3G + 3/2A}. \quad (82)$$

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, για να μπορέσει το abaqus να υπολογίσει τις τάσεις κάθε βήματος χρειάζεται τον αλγόριθμο ολοκληρώσεως και τον τανυστή γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$. Ο υπολογισμός του τελευταίου γίνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{kk})_{n+1} \mathbf{I} \quad (83)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3}d(\sigma_{kk})_{n+1} \mathbf{I} \quad (84)$$

$$d(\sigma_{kk})_{n+1} = 3\mathbf{KI} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (85)$$

$$d\mathbf{s}_{n+1} = d\mathbf{s}^e - 2Gd(\Delta\bar{\epsilon}^p) \mathbf{N}_{n+1} - 2G\Delta\bar{\epsilon}^p d\mathbf{N}_{n+1} \quad (86)$$

$$d\mathbf{s}^e = 2G\mathbf{J}^d : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (87)$$

$$d\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{d\mathbf{s}^e - \overbrace{d\boldsymbol{\alpha}_n}^0}{\Sigma_c^e} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n}{(\Sigma_c^e)^2} d\Sigma_c^e = \frac{3}{2} \frac{d\mathbf{s}^e}{\Sigma_c^e} - \frac{\mathbf{N}_{n+1}}{\Sigma_c^e} d\Sigma_c^e, \quad (88)$$

από την παραγωγή της εξίσωσης ισοδύναμης τάσης βρίσκουμε:

$$(\Sigma_e^e)^2 = \frac{3}{2}(\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n) : (\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n) \Rightarrow$$

$$2\Sigma_e^e d\Sigma_e^e = 3(\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n) : d\mathbf{s}^e = 6G(\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n) : \mathbf{J}^d : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 6G(\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \Rightarrow$$

$$d\Sigma_e^e = 3G \frac{\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}_n}{\Sigma_e^e} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 2G\mathbf{N}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (89)$$

επομένως η εξίσωση (88), λόγω των εξισώσεων (87, 89) γίνεται:

$$d\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3G}{\Sigma_e^e} (\mathbf{J}^d - \frac{2}{3}\mathbf{N}_{n+1}\mathbf{N}_{n+1}) : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (90)$$

Με παραγωγή της εξίσωσης (81) προκύπτει:

$$d\Sigma_e^e - 3Gd(\Delta\bar{\varepsilon}^p) - \underbrace{\frac{3}{2} \frac{dA(\bar{\varepsilon}^p)}{d\bar{\varepsilon}^p}}_Z \Big|_{n+1} d(\Delta\bar{\varepsilon}^p)\Delta\bar{\varepsilon}^p - \frac{3}{2}A(\bar{\varepsilon}^p)d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) - \underbrace{\frac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}^p}}_h \Big|_{n+1} d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) \Rightarrow$$

$$d(\Delta\bar{\varepsilon}^p) = \frac{d\Sigma_e^e}{3G + 3/2(A(\bar{\varepsilon}^p) + Z\Delta\bar{\varepsilon}^p) + h} = \frac{2G}{3G + 3/2(A(\bar{\varepsilon}^p) + Z\Delta\bar{\varepsilon}^p) + h} \mathbf{N}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (91)$$

Με αντικατάσταση όλων των παραπάνω εξισώσεων, στην εξίσωση (84) προκύπτει:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{I}\mathbf{I} - 4G^2 \left[\frac{1}{H} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^p}{\Sigma_e^e} \right] \mathbf{N}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1} - \frac{6G}{\Sigma_e^e} \Delta\bar{\varepsilon}^p \mathbf{J}^d \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (92)$$

όπου $H = 3G + 3/2(A(\bar{\varepsilon}^p) + Z\Delta\bar{\varepsilon}^p) + h$. Η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι ο τανυστής γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$.

Για $\Delta\bar{\varepsilon}^p \rightarrow 0$

$$\bar{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{3G + 3/2A(\bar{\varepsilon}^p) + h} \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}. \quad (93)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ίδια με εκείνη του ελαστο-πλαστικού τανυστή \mathbf{C} που υπολογίστηκε για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης. Δηλαδή για $\Delta\bar{\varepsilon}^p \rightarrow 0$, ο τανυστής γραμμικοποίησης τείνει να γίνει ίσος με τον ελαστο-πλαστικό τανυστή.

Στον μονοαξονικό εφελκυσμό όταν η τάση διαρροής και η μεταβλητή A είναι σταθερές αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση, $A = 2/3H$, όπου H είναι η κλίση της ευθείας διαρροής του διαγράμματος τάσης – ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι στον μονοαξονικό εφελκυσμό ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{s} &= 2/3 \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - 1/3 \sigma (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \\ \boldsymbol{\alpha} &= \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - 1/2 \alpha (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3).\end{aligned}\tag{94}$$

Επομένως η ισοδύναμη τάση δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} \left[(2/3 \sigma - \alpha)^2 + 2(1/3 \sigma - 1/2 \alpha)^2 \right] = (\sigma - 3/2 \alpha)^2,$$

και το κριτήριο διαρροής, για $\sigma_y = \sigma_0 = \text{σταθερό}$ γράφεται ως εξής:

$$\sigma - \frac{3}{2} \alpha = \sigma_0.$$

Με παραγωγή της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$H = \frac{d\sigma}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{3}{2} \frac{d\alpha}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{3}{2} A.\tag{95}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο ολοκλήρωσης γράφηκε μια umat υπορουτίνα, η *kineso.f*. Σε αυτήν, η τάση διαρροής σ_0 θεωρείται σταθερή και η μεταβλητή A είναι ίση με $A = 10/3 \sigma_0$.

2.7 Αναλυτική επίλυση του προβλήματος απλής διάτμησης για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης με ισότροπη ελαστικότητα.

Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος της απλής επίπεδης διάτμησης ενός στοιχείου, για την περίπτωση του μοντέλου της κινηματικής σκλήρυνσης με ισότροπη ελαστικότητα. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις φόρτισης, ελαστικής αποφόρτισης και αντίθετης φόρτισης του στοιχείου και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του προγράμματος που γράφηκε σύμφωνα με την ανάλυση που θα ακολουθήσει, με εκείνα που έδωσε το Abaqus χρησιμοποιώντας την υπορουτίνα *kineso* που περιέχει τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης του ίδιου προβλήματος όπως αυτός αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Στην περίπτωση της απλής διάτμησης στο επίπεδο γνωρίζουμε ότι ο τανυστής των παραμορφώσεων έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\gamma}{2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \text{ δηλαδή } \epsilon_{11}^c + \epsilon_{11}^p = \epsilon_{22}^c + \epsilon_{22}^p = 0.\tag{96}$$

Επίσης οι τανυστές τάσης και backstress γράφονται ως:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \text{ και } \boldsymbol{\alpha} = \alpha(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (97)$$

Ο τανυστής των τάσεων έχει μόνο διαμητικές συνιστώσες και επομένως ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων θα έχει την ίδια μορφή, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}$. Άρα η ισοδύναμη τάση ισούται με:

$$\Sigma_e = \sqrt{3/2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})} = \sqrt{3}(\tau - \alpha). \quad (98)$$

Ο υπολογισμός του διανύσματος \mathbf{N} μας φανερώνει πως αυτό είναι σταθερό:

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\Sigma_e} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}(\tau - \alpha)} (\tau - \alpha)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (99)$$

Ο ρυθμός του τανυστή backstress $\boldsymbol{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = A\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = A\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \mathbf{N}. \quad (100)$$

Το γεγονός ότι το διάνυσμα \mathbf{N} είναι σταθερό και η μεταβλητή A λαμβάνεται σταθερή, διευκολύνουν την ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης:

$$\boldsymbol{\alpha} = A\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \mathbf{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} A\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (101)$$

Το κριτήριο διαρροής για σταθερή τάση διαρροής, γράφεται:

$$\Sigma_e - \sigma_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}(\tau - \alpha) = \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \alpha$$

και λόγω των εξισώσεων (97, 101) συνεπάγεται:

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} A\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P. \quad (102)$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$, προκύπτει:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \frac{2(\sqrt{3}\tau - \sigma_0)}{3A}. \quad (103)$$

Έχουμε πει ότι ο τανυστής των παραμορφώσεων μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (104)$$

Επειδή το διάνυσμα \mathbf{N} είναι σταθερό, το πλαστικό μέρος της παραμόρφωσης γράφεται:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}^p \mathbf{N},$$

και με αντικατάσταση του \mathbf{N} ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\varepsilon}^p (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (105)$$

Η εξίσωση (104) μπορεί τώρα να γραφεί ως

$$\frac{\gamma}{2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \frac{\tau}{2G} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\varepsilon}^p (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \text{δηλαδή,}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \sqrt{3} \bar{\varepsilon}^p, \quad (106)$$

όπου με αντικατάσταση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης από την εξίσωση (103) προκύπτει:

$$\tau = \frac{GA}{A + 2G} \left(\gamma + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}A} \right). \quad (107)$$

Έστω ότι υποβάλλουμε σε απλή διάτμηση ένα τετράγωνο στοιχείο με διαστάσεις 1×1 . Στην αρχή της φόρτισης το υλικό βρίσκεται στην ελαστική περιοχή και παραμένει σε αυτήν όσο η παραμόρφωση είναι όλη ελαστική, δηλαδή όσο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\tau_0}{2G}, \quad (108)$$

η οποία λόγω της εξίσωσης (102) με $\bar{\varepsilon}^p = 0$, δίνει:

$$\gamma \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}G} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{2(1+\nu)}{E} = \gamma_0. \quad (109)$$

Η τάση στο σημείο όπου το υλικό μεταβαίνει από την ελαστική στην πλαστική περιοχή ισούται με:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}. \quad (110)$$

Το υλικό για μετατόπιση $\gamma > \gamma_0$ περνάει στην πλαστική περιοχή, όπου πλέον οι τάσεις δίνονται από την εξίσωση (107) στην οποία η μεταβλητή A έχουμε αναφέρει ότι ισούται με $2/3H$, δηλαδή με τα $2/3$ της κλίσης της ευθείας διαρροής. Συνεχίζουμε τη φόρτιση μέχρι το σημείο, έστω B , όπου η παραμόρφωση φτάνει το 10%, δηλαδή $\gamma=0.1$. Στο σημείο αυτό αποφορτίζουμε πλήρως και φορτίζουμε αντίθετα (inverse loading). Η αποφόρτιση γίνεται πάντοτε ελαστικά. Οι τανυστές τάσης $\boldsymbol{\sigma}$ και backstress $\boldsymbol{\alpha}$ δίνονται τώρα από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\tau_B - \tau') \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \mathbf{s} \quad (111)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_B - \alpha') \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad (112)$$

όπου ο δείκτης B συμβολίζει μέγεθος στο σημείο B , ενώ ο τόνος αναφέρεται σε μέγεθος που προκύπτει από την αποφόρτιση και αντίθετη φόρτιση. Η διαφορά των δύο παραπάνω μεγεθών δηλώνει την παρούσα τιμή του μεγέθους.

Η ισοδύναμη τάση είναι τώρα:

$$\Sigma_e = \sqrt{3}[(\tau_B - \tau') - (\alpha_B - \alpha')]. \quad (113)$$

Επομένως το διάνυσμα \mathbf{N} ισούται με:

$$\mathbf{N} = \frac{3 \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{2 \Sigma_e} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \quad (114)$$

και είναι πάλι σταθερό. Άρα μπορούμε εύκολα να ολοκληρώσουμε τους τύπους πλαστικής παραμόρφωσης και backstress:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}^p \mathbf{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{\varepsilon}_B^p - \bar{\varepsilon}^p) \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \quad (115)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} A (\bar{\varepsilon}_B^p - \bar{\varepsilon}^p) \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (116)$$

Το κριτήριο διαρροής, για αντίθετη φόρτιση γράφεται:

$$\Sigma_e = -\sigma_0, \quad (117)$$

και η αντικατάσταση της εξίσωσης (113) δίνει:

$$\sqrt{3}[(\tau_B - \tau') - (\alpha_B - \alpha')] = -\sigma_0 \Rightarrow$$

$$\tau' - \alpha' = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \tau_B - \alpha_B. \quad (118)$$

Η σχέση (103) προσδιορίζει την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στη θέση B και συνεπώς ο τανυστής backstress στη θέση B ισούται με:

$$\alpha_B = \frac{\sqrt{3}}{2} A \bar{\varepsilon}_B^p = \frac{\sqrt{3}}{2} A \frac{2(\sqrt{3}\tau_B - \sigma_0)}{3A} = \tau_B - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}. \quad (119)$$

Τελικά το κριτήριο διαρροής γράφεται:

$$\tau' - \alpha' = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}. \quad (120)$$

Στο σημείο τώρα που το υλικό μεταβαίνει από την ελαστική στην πλαστική περιοχή, έστω σημείο Γ, η διατμητική τάση τ'_0 βρίσκεται από το παραπάνω κριτήριο για $\alpha' = 0$,

$$\tau'_0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad (121)$$

ενώ η τάση που δέχεται το υλικό σε εκείνο το σημείο είναι

$$\tau = \tau_B - \tau'_0. \quad (122)$$

Το υλικό παραμένει στην ελαστική περιοχή όσο ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} \tau &\leq 2G\varepsilon^e \Rightarrow \\ \tau_B - \tau'_0 &\leq 2G \left(\frac{\tau_B}{2G} - \frac{\gamma^e}{2} \right) \Rightarrow \\ \gamma^e &\leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}G} \end{aligned} \quad (123)$$

όπου γ^e είναι η μετατόπιση από το σημείο B.

Συνεχίζουμε τη φόρτιση πέρα από το σημείο διαρροής Γ. Από την εξίσωση (120) με αντικατάσταση του $\alpha' = \sqrt{3}/2 A \bar{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}^p H / \sqrt{3}$ λύνουμε ως προς την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\varepsilon}^p$:

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{\sqrt{3}\tau' - 2\sigma_0}{H}. \quad (124)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ τους αντίστοιχους όρους προκύπτει:

$$\frac{\gamma_B - \gamma'}{2} = \frac{\tau_B - \tau'}{2G} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{\varepsilon}_B^p - \bar{\varepsilon}^p) \Rightarrow$$

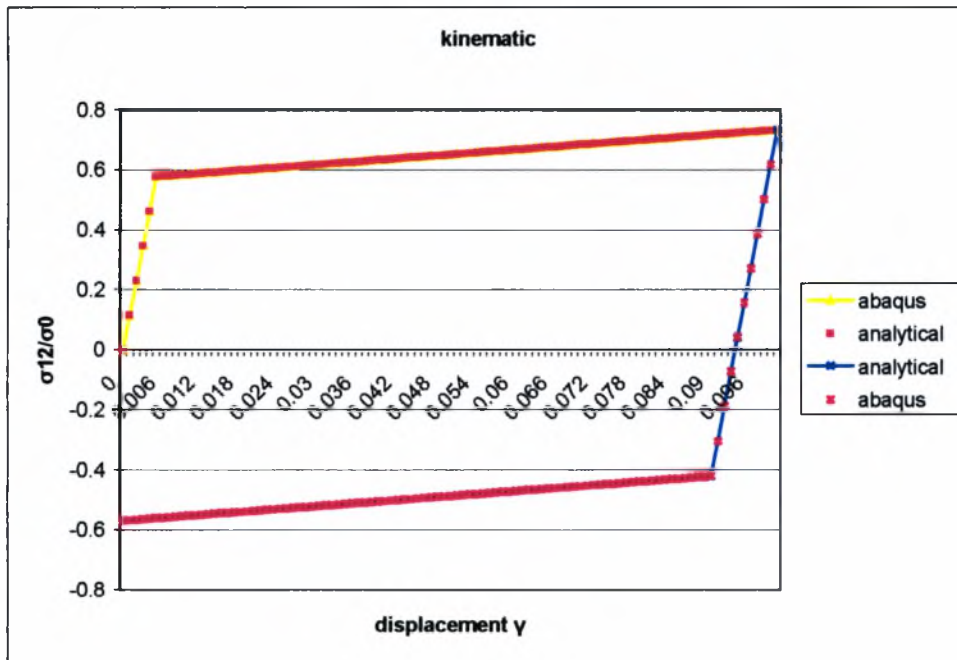
$$\gamma' = \frac{\tau'}{G} + \sqrt{3}\bar{\epsilon}^p,$$

η οποία λόγω της εξίσωσης (124), γράφεται:

$$\tau' = \frac{GH}{3G+H}(\gamma' + 3\sqrt{3}\frac{\sigma_0}{H}). \quad (125)$$

Η διατμητική τάση που δέχεται το υλικό είναι $\tau = \tau_T - \tau'$

Ο παραπάνω αλγόριθμος γράφηκε με τη μορφή κώδικα. Προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που έδωσε με εκείνα τις υπορουτίνας kinesiο χρησιμοποιήσαμε υλικό με λόγο μέτρου ελαστικότητας προς τάση διαρροής $E/\sigma_0 = 300$ λόγο P $\nu=0.3$ και σταθερή τάση διαρροής. Επίσης η μεταβλητή A λήφθηκε ίση με $A=10/3\sigma_0$. Τα αποτελέσματα όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση που ακολουθεί συμπίπτουν



Γράφημα 1

3. Θεωρία των μεγάλων παραμορφώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ανάλυση ελαστο-πλαστικών υλικών, τα οποία υποβάλλονται σε μεγάλες παραμορφώσεις.

3.1 Γενικά

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 , ένα συνεχές μέσο καταλαμβάνει μια συγκεκριμένη περιοχή B_0 στο χώρο. Η θέση ενός υλικού σημείου A του συνεχούς μέσου, τη χρονική στιγμή t_0 περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης του \mathbf{X} . Τη χρονική στιγμή $t = t_0 + \Delta t$, πιθανόν το υλικό αυτό σημείο να έχει μετατοπιστεί. Έστω \mathbf{x} το νέο διάνυσμα θέσης του στον παρόντα χρόνο και B η νέα περιοχή που καταλαμβάνει στο χώρο το παραμορφωμένο συνεχές μέσο. Μια εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συνεχούς μέσου είναι της μορφής

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (1)$$

Ο τανυστής παραμορφώσεως \mathbf{F} της κίνησης ορίζεται ως

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2)$$

και περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την παραμόρφωση.

Η θέση ενός δευτέρου υλικού σημείου, έστω B , θα μπορούσε να καθοριστεί στην α-παραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση, από τα διανύσματα θέσης $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ και $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ αντίστοιχα, όπου $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$. Παίρνοντας τη χρονική μεταβολή του διανύσματος $d\mathbf{x}$

$$\frac{\partial (d\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})}{\partial t} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (3)$$

προκύπτει ο τανυστής \mathbf{L} ο οποίος εκφράζει την κλίση της ταχύτητας στο χώρο B ,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (4)$$

Γνωρίζουμε πως κάθε τανυστής μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού μέρους. Ορίζουμε

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (5)$$

τον τανυστή ρυθμού παραμορφώσεως (deformation rate) ως το συμμετρικό μέρος του \mathbf{L} και

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (6)$$

τον τανυστή στροβιλότητας (spin tensor) ως το αντισυμμετρικό μέρος του \mathbf{L} . Πράγματι ο \mathbf{W} είναι τανυστής στροβιλότητας γιατί εάν $\boldsymbol{\omega}$ είναι το αξονικό του διάνυσμα τότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχει τη μορφή

$$\omega_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}W_{jk} = -\frac{1}{2}e_{ijk}(L_{jk} - D_{jk}) = -\frac{1}{2}e_{ijk}L_{jk} = -\frac{1}{2}e_{ijk}v_{j,k} = \frac{1}{2}e_{ikj}(v_j\nabla_k) = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}$$

όπου το τελευταίο εξωτερικό γινόμενο είναι το διάνυσμα της στροβιλότητας.

3.2 Διαφοροποίηση από τις μικρές παραμορφώσεις

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι στις μικρές παραμορφώσεις η σχέση που συνδέει ρυθμούς τάσεων και παραμορφώσεων είναι:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (7)$$

Στις μεγάλες παραμορφώσεις όμως το παράδειγμα του μονοαξονικού εφελκυσμού, στη διάρκεια του οποίου πιθανόν να έχουμε και περιστροφή του συνεχούς μέσου, αποδεικνύει πως μια εξίσωση της παραπάνω μορφής δεν ισχύει και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Έστω παραδείγματος χάρι ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, ένα σώμα δέχεται εφελκυστικές τάσεις στη διεύθυνση \mathbf{e}_1 ενός σταθερού συστήματος συντεταγμένων. Δηλαδή ο τανυστής των τάσεων έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \quad (8)$$

Τη χρονική στιγμή t , ενώ το μέγεθος της εφελκυστικής τάσης διατηρείται σταθερό το σώμα έχει περιστραφεί και επομένως ως προς το σταθερό σύστημα συντεταγμένων, η έκφραση του τανυστή των τάσεων έχει αλλάξει σε

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_{12}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \quad (9)$$

και επομένως $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \neq \mathbf{0}$. Αντίθετα ο τανυστής \mathbf{D} ρυθμού παραμορφώσεως μηδενίζεται και μια σχέση της μορφής $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}$ δεν έρχεται σε συμφωνία με το πρόβλημα. Πράγματι εάν \mathbf{v} είναι το διάνυσμα της ταχύτητας μιας υλικής ίνας, τότε αυτό δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} \quad \text{ή} \quad v_i = Q_{ik}x_k \quad (10)$$

όπου \mathbf{Q} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής. Επομένως αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού του τανυστή \mathbf{D} , αυτός θα ισούται με τον μηδενικό τανυστή,

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \frac{1}{2}(Q_{ik}\delta_{kj} + Q_{jk}\delta_{ki}) = \frac{1}{2}(Q_{ij} + Q_{ji}) = 0 \quad (11)$$

και ο τανυστής \mathbf{W} με τον αντισυμμετρικό \mathbf{Q} ,

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \frac{1}{2}(Q_{ik}\delta_{kj} - Q_{jk}\delta_{ki}) = \frac{1}{2}(Q_{ij} - Q_{ji}) = Q_{ij}. \quad (12)$$

Εναλλακτικά μπορούμε τη χρονική στιγμή t να εκφράσουμε των τανυστή των τάσεων ως προς ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο είναι προσαρμοσμένο πάνω στο συνεχές μέσο. Ο τανυστής των τάσεων θα έχει τώρα τη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}'_1(t) \mathbf{e}'_1(t) \quad (13)$$

όπου \mathbf{e}'_i είναι τα μοναδιαία διανύσματα του κινούμενου συστήματος συντεταγμένων για τα οποία ισχύει:

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{Q}. \quad (14)$$

Παίρνοντας τώρα το ρυθμό του τανυστή των τάσεων προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma (\dot{\mathbf{e}}'_1 \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_1 \dot{\mathbf{e}}'_1) = \sigma (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{Q}) = \\ &= \mathbf{Q} \cdot (\sigma \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1) - (\sigma \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q} \Rightarrow \\ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Η τελευταία εξίσωση ορίζει την συστροφική με το \mathbf{Q} παράγωγο. Η παράγωγος Jaumann είναι η χρονική παράγωγος όπως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής, ο οποίος περιστρέφεται με spin το \mathbf{W} , το οποίο εδώ είναι ίσο με το \mathbf{Q} . Πρόκειται επομένως για έναν αντικειμενικό παρατηρητή ο οποίος έχει μαζί του ένα σύστημα αξόνων με μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_i , τέτοια ώστε

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{W}^T, \quad (16)$$

επομένως για κάθε τανυστή \mathbf{A} θα ισχύει:

$$\mathbf{A}(t) = A'_{ij}(t) \mathbf{e}'_i(t) \mathbf{e}'_j(t) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \dot{A}'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j + A'_{ij} (\dot{\mathbf{e}}'_i \mathbf{e}'_j + \mathbf{e}'_i \dot{\mathbf{e}}'_j) = \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{A}}} + \mathbf{W} \cdot (A'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j) - (A'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{W} \Rightarrow \\ \overset{\nabla}{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (18)$$

Σύμφωνα λοιπόν με το παράδειγμα του μονοαξονικού εφελκυσμού μία σχέση μεταξύ παραγώγων τάσεων - παραμορφώσεων θα μπορούσε να είναι της μορφής

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}. \quad (19)$$

Στην παραπάνω εξίσωση τα μεγέθη που συνδέονται, παράγωγος Jaumann $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ και ρυθμός παραμορφώσεως \mathbf{D} , είναι αντικειμενικά κατά Euler και επομένως μπορεί να γραφεί σχέση μεταξύ τους. Αντίθετα η παράγωγος $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ δεν είναι αντικειμενικό μέγεθος και επομένως δεν μπορεί να συσχετιστεί με το αντικειμενικό \mathbf{D} .

3.2 Ελαστοπλαστικές καταστατικές εξισώσεις

Ο τανυστής ρυθμού παραμορφώσεως \mathbf{D} , μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \quad (20)$$

Ο νόμος διαρροής, ο οποίος καθορίζει το πλαστικό μέρος \mathbf{D}^p και οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών s_α ($\alpha=1, \dots, n$) για ένα rate-independent μοντέλο είναι της μορφής

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, s_\alpha) \quad (21)$$

$$\dot{s}_\alpha = \dot{\lambda} g_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, s_\beta) \quad \alpha, \beta=1, \dots, n \quad (22)$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η τάση κατά Cauchy (ή πραγματική τάση), λ ο πολλαπλασιαστής πλαστικότητας και (\mathbf{N}, g_α) είναι ισότροπες συναρτήσεις των μεταβλητών τους. Οι καταστατικές μεταβλητές εδώ είναι βαθμωτά μεγέθη. Στην περίπτωση ανισότροπου υλικού, οι παραπάνω συναρτήσεις θα περιείχαν επιπλέον καταστατικές μεταβλητές – διανυσματικές ποσότητες- που θα προσδιόριζαν την ανισοτροπία.

Τέλος η συνάρτηση διαρροής Φ θα πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο πλαστικής φόρτισης-αποφόρτισης,

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, s_\alpha) \leq 0 \quad (23)$$

όπου $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, s_\alpha)$ είναι η συνάρτηση διαρροής στο χώρο των τάσεων.

3.3 Αριθμητική ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων για το μοντέλο του Von-Mises.

Επειδή στο πρόβλημα που επιλύουμε υπάρχουν μεταβλητές που εξαρτώνται από την ιστορία της παραμόρφωσης, χρησιμοποιείται κώδικας πεπερασμένων στοιχείων κατά τον οποίο η λύση προκύπτει ως μια σειρά απειροστών αυξήσεων μετατόπισης σε κάθε μια από τις οποίες γίνεται η ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων. Έχουμε αναφέρει ότι ο τανυστής που περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την παραμόρφωση είναι ο τανυστής \mathbf{F} . Σε μία δεδομένη χρονική στιγμή t_n , η λύση $(\mathbf{F}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p)$ είναι γνωστή. Γνωστός είναι επίσης και ο τανυστής παραμορφώσεως \mathbf{F}_{n+1} τη χρονική στιγμή t_{n+1} και επομένως το πρόβλημα είναι να υπολογιστεί η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p$ και οι τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ τη χρονική στιγμή t_{n+1} .

Στην περίπτωση ενός ισότροπου ελαστο-πλαστικού υλικού, οι καταστατικές εξισώσεις που χρειάζεται να ολοκληρωθούν για το μοντέλο του Von-Mises, είναι οι

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (24)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e, \quad (25)$$

ο ρυθμός του πολλαπλασιαστή πλαστικότητας $\dot{\lambda}$ ισούται και σε αυτή την περίπτωση με το ρυθμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{2/3 \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = \dot{\lambda}$, οπότε

$$\mathbf{D}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e}. \quad (26)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις \mathbf{C}^e είναι το elastic modulus:

$$\mathbf{C}^e = 2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{I}\mathbf{I} \quad (27)$$

όπου K και G είναι το ελαστικό μέτρο διογκώσεως και το ελαστικό μέτρο διατμήσεως αντίστοιχα, \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος τανυστής δευτέρας τάξης και $\mathbf{J}^d = \mathbf{J} - 1/3\mathbf{I}\mathbf{I}$, όπου \mathbf{J} είναι ο συμμετρικός, μοναδιαίος τανυστής τετάρτης τάξης με καρτεσιανές συντεταγμένες $J_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

Η χρονική μεταβολή του τανυστή παραμορφώσεως \mathbf{F} κατά τη διάρκεια της χρονικής προσαύξεσης $[t_n, t_{n+1}]$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{F}(t) = \Delta\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}_n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (28)$$

Από το θεώρημα της πολικής αναλύσεως γνωρίζουμε ότι κάθε τανυστής \mathbf{A} μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο ενός γνήσιου ορθογώνιου, έστω \mathbf{R} , και ενός συμμετρικού, έστω \mathbf{U} , τανυστή. Οι δύο αυτοί τανυστές είναι μοναδικοί για κάθε τανυστή \mathbf{A} . Μαθηματικά, το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση πολικής αναλύσεως του τανυστή \mathbf{F} εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad \text{ή} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (29)$$

όπου \mathbf{V} είναι επίσης ένας μοναδικός, για κάθε \mathbf{F} , συμμετρικός τανυστής. Ο τανυστής \mathbf{R} , ως γνήσιος ορθογώνιος, απλώς περιστρέφει το συνεχές μέσο, ενώ ο τανυστής \mathbf{U} είναι υπεύθυνος για την παραμόρφωση του συνεχούς μέσου ενώ παράλληλα μπορεί και να το περιστρέφει. Οι τανυστές \mathbf{U} και \mathbf{V} διαγωνοποιούνται ως προς τις κύριες διευθύνσεις τους και επομένως γράφονται ως

$$\mathbf{U}(t) = \lambda_i(t) \mathbf{N}_i(t) \mathbf{N}_i(t) \quad (30)$$

$$\mathbf{V}(t) = \lambda_i(t) \mathbf{n}_i(t) \mathbf{n}_i(t) \quad (31)$$

όπου $\lambda_i(t)$ είναι οι ιδιοτιμές του τανυστή $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ και $\mathbf{N}_i(t)$, $\mathbf{n}_i(t)$ τα ιδιοδιανύσματα των τανυστών \mathbf{U} και \mathbf{V} αντίστοιχα. Επίσης ισχύει η σχέση

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{n}_i \mathbf{N}_i. \quad (32)$$

Αναλύοντας τον τανυστή $\Delta\mathbf{F}(t)$ σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η εξίσωση (28) γράφεται:

$$\mathbf{F}(t) = \Delta\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{F}_n. \quad (33)$$

Οι τανυστές ρυθμού παραμορφώσεως $\mathbf{D}(t)$ και στροβιλότητας $\mathbf{W}(t)$ που σχετίζονται με τον τανυστή $\mathbf{F}(t)$ είναι:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{L}_s = [\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}^{-1}(t)]_s = [\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n^{-1} \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t)]_s = [\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t)]_s \quad (34)$$

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{L}_a = [\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}^{-1}(t)]_a = [\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n^{-1} \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t)]_a = [\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t)]_a. \quad (35)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή \mathbf{U} είναι ανεξάρτητα του χρόνου, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t), \quad (36)$$

$$\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) \quad (37)$$

όπου $\mathbf{E}(t) = \ln \mathbf{U}(t)$ είναι ο λογαριθμικός τανυστής παραμορφώσεως.

Απόδειξη: ειδική περίπτωση $\dot{\mathbf{N}}_i = \mathbf{0}$

$$\mathbf{U}(t) = \lambda_i(t) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad \Rightarrow \quad (38)$$

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = \frac{1}{\lambda_i(t)} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \dot{\lambda}_i(t) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \frac{\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i = \frac{d}{dt} (\ln \lambda_i(t)) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (41)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \quad (43)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \quad (44)$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} \mathbf{R} \frac{2\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot (\ln[\lambda_i(t)])^\bullet \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot (\ln \mathbf{U})^\bullet \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (46)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T - \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T) = \\ &= \frac{1}{2}(2\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T. \end{aligned} \quad (47)$$

Το γινόμενο $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ είναι πράγματι ένας αντισυμμετρικός τανυστής:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T = -\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (48)$$

Η παράγωγος Jaumann που υπάρχει στη σχέση $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e$ είναι μια πολύπλοκη παράγωγος και η ολοκλήρωση της θα ήταν μια επίπονη διαδικασία. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιώντας την έκφραση της εξίσωσης (47) για τον αντισυμμετρικό τανυστή \mathbf{W} σε συνδυασμό με την ιδιότητα των γνήσιων ορθογώνιων τανυστών $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, στην εξίσωση ορισμού της παραγώγου Jaumann, προκύπτει μια εναλλακτική έκφραση της τελευταίας που μας διευκολύνει στους υπολογισμούς. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \\ &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (49)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{R}^T(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$ είναι μια συστροφική τάση και είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι η τάση $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)$, συνδέεται με την πραγματική τάση $\boldsymbol{\sigma}$, με μία περιστροφή.

Στην αρχή του βήματος προσαύξησης, δηλαδή για $t = t_n$ ισχύει:

$$\Delta \mathbf{F}_n = \mathbf{R}_n = \mathbf{U}_n = \mathbf{I}, \quad \text{η τάση } \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \text{ και } \mathbf{E}_n = \mathbf{0} \quad (50)$$

και επομένως στο ξεκίνημα του αλγόριθμου ολοκλήρωσης δεν χρειάζεται περιστροφή της πραγματικής τάσης $\boldsymbol{\sigma}$ της οποίας το μέγεθος γνωρίζουμε από το προηγούμενο βήμα.

Στο τέλος του βήματος προσαύξησης ($t = t_{n+1}$) θα ισχύει:

$$\Delta \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{R}_{n+1} \cdot \mathbf{U}_{n+1} = \text{γνωστό} \quad (51)$$

όπου οι τανυστές \mathbf{R} και \mathbf{U} είναι ο γνήσιος ορθογώνιος και ο συμμετρικός τανυστής αντίστοιχα που προκύπτουν από την πολική ανάλυση του $\Delta \mathbf{F}_{n+1}$. Γνωστός είναι επίσης και ο λογαριθμικός τανυστής των παραμορφώσεων

$$\mathbf{E}_{n+1} = \ln \mathbf{U}_{n+1} = \text{γνωστό}.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εξισώσεων (46) και (49) στην $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e$ προκύπτει:

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{C}^e : (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{R}^T) \Rightarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot [\mathbf{C}^e : (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{R}^T)] \cdot \mathbf{R} = \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{E}}. \quad (52)$$

Απόδειξη:

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\dot{\sigma}_{ij} = R_{ik}^T C_{klpq}^e R_{ps} \dot{E}_{st} R_{tq}^T R_{lj} = \hat{C}_{ijst}^e \dot{E}_{st}, \quad (53)$$

όπου

$$\hat{C}_{ijst}^e = R_{ik}^T R_{jl}^T C_{klpq}^e R_{ps} R_{qt}. \quad (54)$$

Ο τανυστής ελαστικότητας δίνεται από τη σχέση (27) η οποία είναι, σύμφωνα με τους ορισμούς των τανυστών \mathbf{J}^d , \mathbf{J} , \mathbf{I} που δώσαμε, ισοδύναμη με την σχέση:

$$C_{ijkl}^e = (K - 2/3G) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

επομένως η σχέση (54) γράφεται:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ijst}^e &= R_{ik}^T R_{lj} [(K - 2/3G) \delta_{kl} \delta_{pq} + G(\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{kq} \delta_{lp})] R_{ps} R_{qt} = \\ &= R_{il}^T R_{lj} (K - 2/3G) R_{sp}^T R_{pt} + G(R_{ip}^T R_{ps} R_{jl}^T R_{lt} + R_{iq}^T R_{qt} R_{jp}^T R_{ps}) = \\ &= (K - 2/3G) \delta_{ij} \delta_{st} + G(\delta_{is} \delta_{jt} + \delta_{it} \delta_{js}) = C_{ijst}^e, \end{aligned} \quad (55)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί αφού από την σχέση (53) έχουμε $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijst}^e \dot{E}_{st}$.

Με παρόμοιους μετασχηματισμούς οι καταστατικές εξισώσεις (24 –26) μπορούν να γραφούν τώρα ως:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad (56)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{E}}^e \quad (57)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{N}}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{3}{2} \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sigma_e} \quad (58)$$

και είναι πλέον όμοιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων.

Η διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης του συνόλου των εξισώσεων (56 –58) είναι όμοια με εκείνη που εφαρμόστηκε στις μικρές παραμορφώσεις. Έτσι λοιπόν η συστροφική τάση $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ τη χρονική στιγμή t_{n+1} γράφεται ως

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}^e, \quad (59)$$

έχοντας λάβει υπόψη ότι $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_n$. Για την ολοκλήρωση του νόμου διαρροής, εξίσωση (58), χρησιμοποιείται η μέθοδος backward Euler και επομένως η εξίσωση γράφεται ως

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \bar{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{N}}_{n+1}. \quad (60)$$

Σύμφωνα με την τελευταία η νέα έκφραση της εξίσωσης (59) είναι

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^e - 2G \Delta \bar{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{N}}_{n+1} \quad (61)$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}$ είναι η λεγόμενη ελαστική πρόβλεψη (elastic predictor) και $\Delta \mathbf{E} = \ln \mathbf{U}_{n+1}$ η λογαριθμική παραμόρφωση. Στον αλγόριθμο ολοκλήρωσης ο λογάριθμος του ταυυστή \mathbf{U}_{n+1} , προσεγγίζεται από μία σειρά Taylor, της μορφής

$$\Delta \mathbf{E} = \ln \mathbf{U}_{n+1} \approx (\mathbf{U} - \mathbf{I}) - \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \mathbf{I})^2 + \frac{1}{3} (\mathbf{U} - \mathbf{I})^3. \quad (62)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το διάνυσμα $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ είναι γνωστό, εκφράζοντας το απλώς συναρτήσεως της ελαστικής πρόβλεψης $\boldsymbol{\sigma}^e$. Αντικαθιστώντας το διάνυσμα $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ από την εξίσωση ορισμού του (58.β) στην εξίσωση (61) και λαμβάνοντας το αποκλίον τμήμα αυτής, προκύπτει:

$$\hat{\sigma}'_{n+1} = \frac{\sigma^e}{1 + \frac{3G\Delta\bar{\epsilon}^p}{(\sigma_e)_{n+1}}} \quad (63)$$

από όπου και παρατηρούμε ότι οι τανυστές των τάσεων $\hat{\sigma}'_{n+1}$ και σ^e είναι συγγραμμικοί. Επομένως, αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για την $\hat{\sigma}'_{n+1}$ στην εξίσωση ορισμού του τανυστή \hat{N}_{n+1} , βρίσκουμε

$$\hat{N}_{n+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}'}{\sigma_e} \right)_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\sigma^e}{\sigma_e} = N^e = \text{γνωστό} \quad (64)$$

όπου $\sigma_e = (3/2 \sigma_{ij}^e \sigma_{ij}^e)^{1/2}$. Ο μόνος άγνωστος πλέον είναι η μεταβολή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\bar{\epsilon}^p$, που υπολογίζεται από το κριτήριο διαρροής

$$(\sigma_e)_{n+1} - \sigma_0(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) = 0. \quad (65)$$

Στο τέλος του βήματος προσαύξησης η συστροφική τάση $\hat{\sigma}_{n+1}$ καθορίζεται από την εξίσωση (61), ενώ η πραγματική τάση σ_{n+1} , που είναι αυτή που μας ενδιαφέρει γιατί είναι εκφρασμένη ως προς σταθερό σύστημα συντεταγμένων, προκύπτει από τη συστροφική τάση με μία περιστροφή.

Δηλαδή

$$\sigma_{n+1} = R_{n+1} \cdot \hat{\sigma}_{n+1} \cdot R_{n+1}^T. \quad (66)$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι αυτός που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία μιας υπορουτίνας `umat`, της `mises_finite`. Η υπορουτίνα αυτή υπολογίζει τις τάσεις και τον τανυστή γραμμικοποίησης

3.4 Αναλυτική λύση του προβλήματος της απλής διάτμησης σε μεγάλες παραμορφώσεις για το μοντέλο του Von-Mises.

Στο πρόβλημα της απλής διάτμησης οι κινηματικές σχέσεις είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{X}, t) &= X_1 + \gamma(t) \cdot X_2 \\ x_2(\mathbf{X}, t) &= X_2 \\ x_3(\mathbf{X}, t) &= X_3, \end{aligned} \quad (67)$$

όπου $\gamma(t)$ είναι η μετατόπιση του στοιχείου που υποβάλλεται σε διάτμηση στη διεύθυνση \mathbf{e}_1 ενός σταθερού συστήματος συντεταγμένων. Το αντίστοιχο διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \dot{\gamma}(t) \cdot X_2 \mathbf{e}_1 = \dot{\gamma}(t) \cdot x_2 \mathbf{e}_1, \quad (68)$$

επομένως ο τανυστής \mathbf{D} ρυθμού παραμορφώσεως έχει τη μορφή

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad (69)$$

ενώ ο τανυστής στροβιλότητας \mathbf{W} , τη μορφή

$$\mathbf{W} = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (70)$$

Επίσης γνωρίζουμε την έκφραση του τανυστή των τάσεων,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \tau(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (71)$$

Επειδή το ίχνος του τανυστή \mathbf{D} είναι μηδέν, συμπεραίνουμε πως και η υδροστατική πίεση ισούται με μηδέν,

$$\dot{p} = \text{KD}_{kk} = 0 \Rightarrow p = 0 \quad (72)$$

και επομένως ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων \mathbf{s} , έχει την ίδια μορφή με τον $\boldsymbol{\sigma}$ και η ισοδύναμη τάση κατά Von-Mises ισούται με:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} = \frac{3}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 2\tau^2) \Rightarrow \\ \sigma_e &= \sqrt{3(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \tau^2)}. \end{aligned} \quad (73)$$

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι στις μεγάλες παραμορφώσεις η παράγωγος Jaumann του τανυστή των τάσεων συνδέεται με τον τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης μέσω της σχέσης,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e,$$

επομένως για τις διαμητικές συνιστώσες μπορούμε να γράψουμε

$$\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = 2G(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = 2G(\mathbf{D} - \dot{\epsilon}^p \mathbf{N}) = 2G\left(\mathbf{D} - \frac{3}{2} \dot{\epsilon}^p \frac{\mathbf{s}}{\sigma_e}\right). \quad (74)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού της παραώγου Jaumann

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (75)$$

τις εκφράσεις των τανυστών $\mathbf{s}=\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{D} και \mathbf{W} , μετά από πράξεις προκύπτουν οι παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11} &= -3G\dot{\bar{\epsilon}}^p \frac{\sigma_{11}}{\sigma_e} + \dot{\gamma}\tau \\ \dot{\sigma}_{22} &= -3G\dot{\bar{\epsilon}}^p \frac{\sigma_{22}}{\sigma_e} - \dot{\gamma}\tau \\ \dot{\tau} &= G\dot{\gamma} - 3G\dot{\bar{\epsilon}}^p \frac{\tau}{\sigma_e} + \frac{\dot{\gamma}}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}),\end{aligned}\quad (76)$$

σε καθεμία από τις οποίες ο τελευταίος όρος προέρχεται από τη θεωρία των μεγάλων παραμορφώσεων. Οι παραπάνω εξισώσεις, μαζί με τη συνθήκη διαρροής,

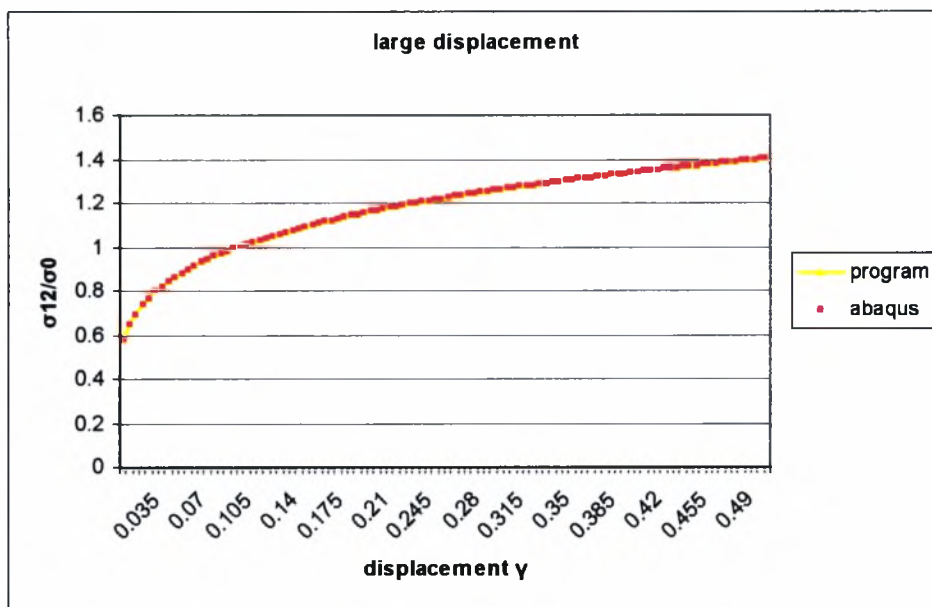
$$\sigma_e(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau) - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = 0, \quad (77)$$

αποτελούν το σύστημα των καταστατικών εξισώσεων που χρειάζεται να ολοκληρωθεί για τη λύση του προβλήματος. Ο παραπάνω αλγόριθμος υπάρχει σε μορφή κώδικα στο πρόγραμμα `large.f` και εφαρμόστηκε για μετατόπιση $\gamma=0.5$ σε ένα στοιχείο του οποίου το υλικό έχει λόγο μέτρου ελαστικότητας προς αρχική τάση διαρροής $E/\sigma_0 = 300$, λόγο Poisson $\nu=0.3$ και η καμπύλη διαρροής του δίνεται από τη σχέση:

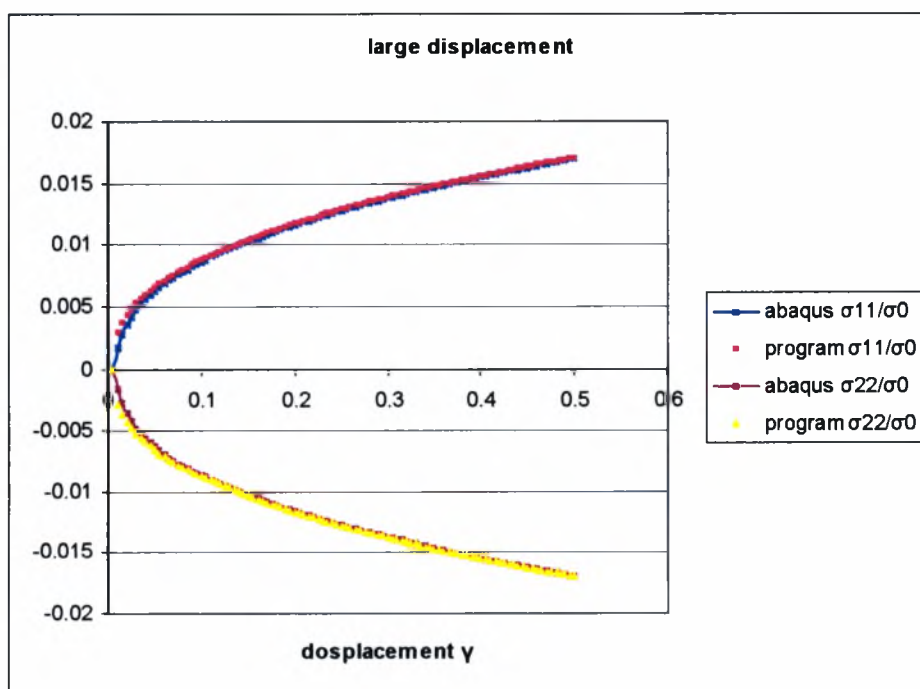
$$\sigma_y = \sigma_0 \left(\bar{\epsilon}^p / \epsilon_0 + 1 \right)^{1/n},$$

όπου $n=5$, $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ και $\bar{\epsilon}^p$ είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση.

Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν μέσω γραφικών παραστάσεων με εκείνα που έδωσε το Abaqus για το ίδιο πρόβλημα και όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις τις επόμενης σελίδας τα αποτελέσματα συμπίπτουν. Οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν επίσης την ύπαρξη των ορθών τάσεων στο πρόβλημα της απλής διάτμησης μεγάλων παραμορφώσεων.



Γράφημα 3.1



Γράφημα 3.2

4. Πεπερασμένες ελαστο-πλαστικές παραμορφώσεις ανισότροπων υλικών και το πλαστικό spin.

4.1 Εισαγωγή

Στις πεπερασμένες ελαστο-πλαστικές παραμορφώσεις, η κινηματική της δομής του υλικού, η οποία ορίζει τις συμμετρίες του υλικού, δεν είναι απαραίτητα ίδια με εκείνη του συνεχούς μέσου. Το μέγεθος που προκύπτει από την παραπάνω διαχώριση στην κινηματική είναι το λεγόμενο πλαστικό spin και είναι το spin του συνεχούς μέσου σε σχέση με αυτό της δομής του υλικού. Χρησιμοποιώντας representation θεωρήματα ισότροπων συναρτήσεων, ο Kratochvil (1973) συμπέρανε ότι το πλαστικό spin μηδενίζεται σε ισότροπα υλικά. Αντίθετα σε ανισότροπα υλικά – των οποίων οι καταστατικές εξισώσεις περιέχουν διανυσματικές μεταβλητές κατεύθυνσης, που ορίζουν την ανισοτροπία του υλικού – το πλαστικό spin παίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μιλήσουμε για την κινηματική ανισότροπων ελαστο-πλαστικών υλικών καθώς επίσης και για τις καταστατικές τους εξισώσεις. Ακόμη θα πούμε ποιο είναι το φυσικό νόημα των spin του συνεχούς μέσου και της δομής του υλικού και θα ορίσουμε το πλαστικό spin. Τέλος θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο ολοκλήρωσης για τις ελαστο-πλαστικές καταστατικές εξισώσεις ενός τέτοιου προβλήματος.

4.2 Το spin του συνεχούς μέσου και το αντίστοιχο της δομής του.

Γνωρίζουμε ότι στις μεγάλες παραμορφώσεις η κλίση της παραμόρφωσης \mathbf{F} της κίνησης ορίζεται ως

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

όπου $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ και \mathbf{X} είναι τα διανύσματα θέσης κάποιου υλικού σημείου στην παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη κατάσταση αντίστοιχα. Η αντίστοιχη κλίση της ταχύτητας \mathbf{L} δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (2)$$

όπου \mathbf{v} είναι η ταχύτητα και \mathbf{D}, \mathbf{W} είναι ο ρυθμός παραμόρφωσης και ο ταυιστής στροβιλότητας, ορισμένοι ως το συμμετρικό και αντι-συμμετρικό μέρος του \mathbf{L} , αντίστοιχα.

4.2.1 Το spin ενός μοναδιαίου διανύσματος, το οποίο είναι προσαρμοσμένο σε κάποια υλική ίνα.

Έστω \mathbf{m} , ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι προσαρμοσμένο πάνω σε κάποια υλική ίνα της παραμορφωμένης κατάστασης ενός συνεχούς μέσου. Δηλαδή,

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (3)$$

όπου \mathbf{dx} είναι ένα διάνυσμα μεταξύ δυο υλικών σημείων της παραμορφωμένης κατάστασης και $ds = \sqrt{\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}}$ το μέτρο του.

Η χρονική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση θα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{dx}}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{dx}) - \frac{\mathbf{dx}}{(ds)^2} \frac{\partial}{\partial t} (ds) = \frac{1}{ds} \mathbf{L} \cdot \mathbf{dx} - \frac{\mathbf{dx}}{(ds)^2} \frac{1}{ds} \mathbf{dx} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{dx} \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} = (\mathbf{W} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} = \\ &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = \\ &= (\mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{W}^m \cdot \mathbf{m} . \end{aligned} \quad (4)$$

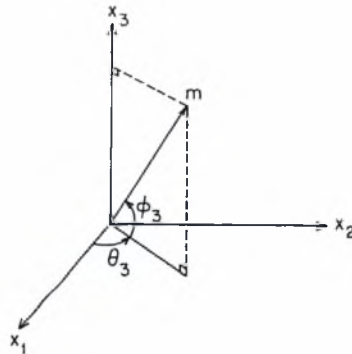
Η παράσταση $\mathbf{W}^m = \mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}$ είναι κάποιος αντι-συμμετρικός τανυστής

$$(\mathbf{W}^m)^T = \mathbf{W}^T + (\mathbf{m} \mathbf{m})^T \cdot \mathbf{D}^T - \mathbf{D}^T \cdot (\mathbf{m} \mathbf{m})^T = -\mathbf{W} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} = -\mathbf{W}^m$$

και η σχέση (4) δηλώνει πως είναι το spin του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{m} και κατά συνέπεια της υλικής ίνας πάνω στην οποία αυτό είναι προσαρμοσμένο,

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{W}^m \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}^m . \quad (5)$$

Πράγματι, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, το διάνυσμα \mathbf{m} γράφεται ως:



Σχήμα 4.1. Κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος στην παραμορφωμένη κατάσταση

$$\mathbf{m} = \cos \theta_3 \cos \varphi_3 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \mathbf{e}_2 + \sin \varphi_3 \mathbf{e}_3 . \quad (6)$$

Ο αντι-συμμετρικός τανυστής \mathbf{W}^m μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\mathbf{W}^m = w_3^m (-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + w_1^m (-\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) + w_2^m (-\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) \quad (7)$$

όπου w_i^m είναι οι συνιστώσες του αξονικού του διανύσματος.

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (5) προκύπτουν τρεις εξισώσεις:

$$-\sin\theta_3\dot{\theta}_3\cos\varphi_3 - \cos\theta_3\sin\varphi_3\dot{\varphi}_3 = -w_3^m\sin\theta_3\cos\varphi_3 + w_2^m\sin\varphi_3$$

$$\cos\theta_3\dot{\theta}_3\cos\varphi_3 - \sin\theta_3\sin\varphi_3\dot{\varphi}_3 = w_3^m\cos\theta_3\cos\varphi_3 - w_1^m\sin\varphi_3$$

$$\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3 = -w_2^m\cos\theta_3\cos\varphi_3 + w_1^m\sin\theta_3\cos\varphi_3,$$

τις οποίες αν λύσουμε ως προς τα w_i^m , προκύπτουν οι εξής λύσεις:

$$w_3^m = \dot{\theta}_3 \text{ (στροφή γύρω από τον άξονα τρία)}, \quad w_2^m = -\cos\theta\dot{\varphi}, \quad w_1^m = \sin\theta\dot{\varphi}. \quad (8)$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι για στροφή γύρω από τους άξονες ένα και δύο, ισχύει $w_1^m = \dot{\theta}_1$ και $w_2^m = \dot{\theta}_2$ αντίστοιχα. Επομένως ο τανυστής \mathbf{W}^m είναι πράγματι το spin του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{m} αφού κάθε του συνιστώσα W_i^m προκύπτει να είναι η γωνιακή ταχύτητα του διανύσματος \mathbf{m} περί τον i - άξονα.

4.2.2 Φυσικό νόημα του τανυστή στροβιλότητας \mathbf{W} .

Εάν στην εξίσωση $\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{m}$ το διάνυσμα \mathbf{m} της παραμορφωμένης κατάστασης του συνεχούς μέσου ήταν ένα από τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης \mathbf{D} , τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ο τανυστής στροβιλότητας \mathbf{W} είναι το spin ή αλλιώς η γωνιακή ταχύτητα της τριάδας των υλικών ινών, οι οποίες στην παραμορφωμένη κατάσταση συμπίπτουν στιγμιαία με τις κύριες διευθύνσεις \mathbf{d}_i του \mathbf{D} .

Απόδειξη:

Έστω \mathbf{d} ένα ιδιοδιάνυσμα του ρυθμού παραμορφώσεως \mathbf{D} , δηλαδή

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{D} = c \mathbf{d}. \quad (9)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{W}^d \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d} \mathbf{d} - \mathbf{d} \mathbf{d} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{d} \quad (10)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (9) η παραπάνω σχέση απλοποιείται:

$$\dot{\mathbf{d}} = (\mathbf{W} + c \mathbf{d} \mathbf{d} - c \mathbf{d} \mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{d}. \quad (11)$$

4.2.3 Το spin του συνεχούς μέσου.

Είδαμε ότι ο τανυστής \mathbf{W}^m είναι το spin κάποιας υλικής ίνας η οποία στην παραμορφωμένη κατάσταση βρίσκεται στη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος

m. Συγκεκριμένα αποδείξαμε ότι για περιστροφή γύρω από τον άξονα τρία, η τρίτη συνιστώσα του αξονικού διανύσματος ισούται με την γωνιακή ταχύτητα,

$$\dot{\theta}_3 = w_3^m = W_{21} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m})_{21} - (\mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D})_{21}, \quad (12)$$

και παρόμοιες εκφράσεις για περιστροφή γύρω από τους άλλους δύο άξονες. Εάν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε το διάνυσμα \mathbf{m} από την εξίσωση (6), παίρνουμε μια εναλλακτική μορφή της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_3$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_3 &= W_{21} + \tan \varphi_3 (-W_{13} \sin \theta_3 + W_{32} \cos \theta_3) + \frac{1}{2} (D_{22} - D_{11}) \sin 2\theta_3 + D_{12} \cos 2\theta_3 \\ &= + \tan \varphi_3 (-D_{13} \sin \theta_3 + D_{23} \cos \theta_3) = W_{21} + f(D_{ij}, \theta_3, \varphi_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Η μέση γωνιακή ταχύτητα περί τον i - άξονα, σύμφωνα με το σχήμα 1. θα δίνεται από τη σχέση:

$$\langle \dot{\theta}_i \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_i = -\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i = 0}^{2\pi} \dot{\theta}_i d\theta_i \right) d\varphi_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \dot{\theta}_i d\theta_i d\varphi_i, \quad (14)$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_i$ με την αντίστοιχη έκφραση της εξίσωσης (13), θα προκύψει η σχέση:

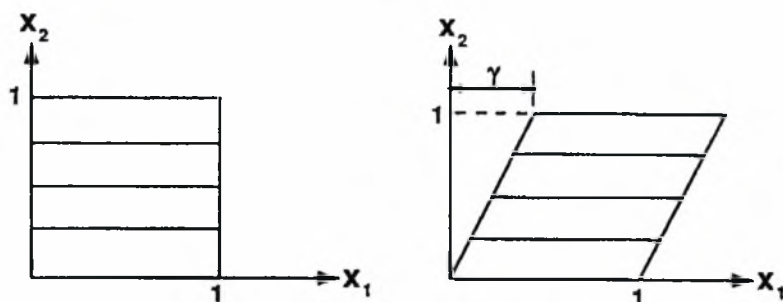
$$\langle \dot{\theta}_i \rangle = w_i + \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\int \int f(D_{ij}, \theta_i, \varphi_i) d\theta_i d\varphi_i}_0 = w_i \quad (12)$$

όπου w_i οι συνιστώσες του αξονικού διανύσματος του \mathbf{W} . Επομένως οι συνιστώσες του ταυστή στροβιλότητας \mathbf{W} καθορίζουν το μέσο spin όλων των υλικών ινών της παραμορφωμένης κατάστασης και ο ταυστής \mathbf{W} θα αναφέρεται στο εξής ως το spin του συνεχούς μέσου.

4.3 Το πλαστικό spin.

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου αναφέραμε ότι, όταν ένα ανισότροπο υλικό υπόκειται σε πεπερασμένες παραμορφώσεις το spin ω της δομής του, το οποίο εκφράζει την ισοτροπία ή ανισοτροπία που πιθανόν υπάρχει στη δομή του υλικού, δεν είναι απαραίτητα ίδιο με το spin \mathbf{W} του συνεχούς μέσου. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε μέσω ενός απλού παραδείγματος την ύπαρξη του πλαστικού spin, που προκύπτει ως το αποτέλεσμα της παραπάνω διάκρισης των spin.

Έστω λοιπόν ένα συνεχές μέσο από άκαμπτο πλαστικό υλικό υπό τη μορφή ενός τετραγωνικού στοιχείου. Το συνεχές μέσο είναι ενισχυμένο με ίνες, χαρακτηριστικό της ανισοτροπίας του, οι οποίες είναι παράλληλες με τη διεύθυνση \mathbf{e}_1 ενός σταθερού συστήματος συντεταγμένων. Το συνεχές μέσο υποβάλλεται σε πεπερασμένη απλή διάτμηση με κατεύθυνση παράλληλη προς τις ίνες, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. που ακολουθεί.



Σχήμα 4.2.

Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι η μορφή του τανυστή \mathbf{W} , ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων, είναι η εξής:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \quad (14)$$

και επομένως το spin του συνεχούς μέσου είναι μη-μηδενικό. Η κατεύθυνση όμως των ινών στη δομή του υλικού δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της διαμηκτικής παραμόρφωσης και επομένως σε κάθε χρονική στιγμή το spin της δομής ω μηδενίζεται. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο να ορίσουμε το πλαστικό spin ως τη διαφορά των spin του συνεχούς μέσου και εκείνου της δομής, δηλαδή

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{W} - \omega . \quad (15)$$

Ένα πλήρες καταστατικό μοντέλο, για ανισότροπα υλικά που υπόκεινται σε πεπερασμένες παραμορφώσεις, θα πρέπει επομένως να περιλαμβάνει εκτός από τις συνήθεις καταστατικές εξισώσεις του ελαστικού και πλαστικού μέρους των ρυθμών παραμορφώσεως και καταστατικές εξισώσεις που θα φανερώσουν τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η ανισοτροπία του υλικού κατά τη διάρκεια της πλαστικής ροής.

Έτσι λοιπόν εάν γνωρίζουμε την κίνηση ενός συνεχούς μέσου και επομένως το \mathbf{W} , και ορίσουμε μια καταστατική εξίσωση για το πλαστικό spin, η εξίσωση (15) κατάλληλα διαμορφωμένη καθορίζει το spin της δομής του υλικού και στην ουσία την εξέλιξη της ανισοτροπίας του.

4.4 Καταστατικές εξισώσεις και αλγόριθμος ολοκλήρωσης για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης.

Στην παράγραφο αυτή θα καταστρώσουμε το σύνολο των καταστατικών εξισώσεων που αποτελούν το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης στην περίπτωση που το υλικό είναι ανισότροπο και υπόκειται σε πεπερασμένες παραμορφώσεις.

Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι στο μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης, η θεωρία των μικρών παραμορφώσεων, περιείχε εκτός των άλλων καταστατικές εξισώσεις για το ρυθμό της πλαστικής παραμόρφωσης και το ρυθμό του τανυστή back stress α .

Το σύνολο των καταστατικών εξισώσεων που αποτελούσαν το μοντέλο ήταν:

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (16)$$

$$p = K\varepsilon_{kk} \quad (17)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\Sigma}{\Sigma_e}, \quad \Sigma = \mathbf{s} - \mathbf{a} \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = c\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p \mathbf{N} \quad (19)$$

$$\Phi(\Sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0. \quad (20)$$

Κατά αντιστοιχία, η θεωρία των πεπερασμένων παραμορφώσεων ισότροπων υλικών αποτελείται από καταστατικές εξισώσεις ανάλογης μορφής και ήδη στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε ποια είναι αυτή η μορφή. Στην περίπτωση τώρα που το συνεχές μέσο είναι ανισότροπο, λόγω της παρουσίας του πλαστικού spin, στο σύνολο των καταστατικών εξισώσεων θα πρέπει να προσθέσουμε έξι νέες εξισώσεις. Οι τρεις από αυτές ορίζουν τις συνιστώσες του διανύσματος του πλαστικού spin ενώ οι υπόλοιπες είναι οι εξισώσεις (15) που καθορίζουν το spin ω της δομής του υλικού στην περίπτωση που η κίνηση του συνεχούς μέσου \mathbf{W} είναι γνωστή. Οι καταστατικές εξισώσεις επομένως που συνθέτουν το μοντέλο είναι:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = 2G\mathbf{D}^e \quad (21)$$

$$\mathbf{D}^p = \dot{\varepsilon}^p \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\Sigma}{\Sigma_e}, \quad \Sigma = \mathbf{s} - \mathbf{a} \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = c\mathbf{D}^p = c\dot{\varepsilon}^p \mathbf{N} \quad (23)$$

$$\mathbf{W}^p = \dot{\varepsilon}^p \mathbf{Q}^p \quad (24)$$

$$\omega = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p \quad (25)$$

$$\Phi(\Sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0. \quad (26)$$

όπου $\mathbf{Q}^p = \eta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{a})$ με \mathbf{a} τον τανυστή back stress και η μια σταθερά. Επομένως σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, το πλαστικό spin μπορεί να γραφεί και ως:

$$\mathbf{W}^p = \eta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \cdot \mathbf{a})$$

Η παραπάνω έκφραση για το πλαστικό spin προτείνεται τέτοια στην εργασία Macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations(Yannis F. Dafalias) και προήλθε από θεωρήματα ισότροπων συναρτήσεων.

Η παράγωγος $\overset{\circ}{\mathbf{a}}$ είναι μια συστροφική παράγωγος και είναι αυτή που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που περιστρέφεται με spin το spin της δομής ω . Ο παρατηρητής έχει μαζί του ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων για το οποίο ισχύει

$$\dot{\mathbf{e}}_i^* = \omega \cdot \mathbf{e}_i^* = -\mathbf{e}_i^* \cdot \omega \quad (27)$$

επομένως ο ταχυστής \mathbf{a} , ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, γράφεται:

$$\mathbf{a} = a_{ij}^*(t) \mathbf{e}_i^*(t) \mathbf{e}_j^*(t) \quad (28)$$

και η χρονική μεταβολή του

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \dot{a}_{ij}^* \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^* + a_{ij}^* \dot{\mathbf{e}}_i^* \mathbf{e}_j^* + a_{ij}^* \mathbf{e}_i^* \dot{\mathbf{e}}_j^* = \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{a}} + \omega \cdot (a_{ij}^* \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*) - (a_{ij}^* \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^*) \cdot \omega \Rightarrow \\ \overset{\circ}{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \omega - \omega \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (29)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την εξίσωση (25) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p) - (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p) \cdot \mathbf{a} = \\ &= \overset{\nabla}{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^p + \mathbf{W}^p \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \\ \overset{\nabla}{\mathbf{a}} &= \overset{\circ}{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^p - \mathbf{W}^p \cdot \mathbf{a} = \dot{\bar{\epsilon}}^p (c\mathbf{N} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^p - \mathbf{Q}^p \cdot \mathbf{a}) = \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (30)$$

Συνοψίζοντας, οι καταστατικές εξισώσεις του μοντέλου είναι πλέον οι εξής:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = 2\mathbf{G}\mathbf{D}^e \quad (31)$$

$$\mathbf{D}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{N} \quad (32)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{A} \quad (33)$$

$$\Phi(\Sigma, \bar{\epsilon}^p) = 0. \quad (34)$$

Η μορφή των παραπάνω εξισώσεων δεν βοηθάει την διαδικασία ολοκλήρωσης τους. Για το λόγο αυτό αντικαθιστούμε τις πολύπλοκες παραγώγους Jaumann και τον ταχυστή ρυθμού παραμορφώσεως \mathbf{D} , με ισοδύναμες εκφράσεις, με αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό των παραπάνω εξισώσεων σε απλούστερες μορφές που μας

διευκολύνουν κατά την αριθμητική ολοκλήρωση. Συγκεκριμένα, για τις παραγώγους Jaumann αποδείξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο ότι ισούνται με:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{R}^T \quad \text{όπου} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \quad (35)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \cdot \mathbf{R}^T \quad \text{όπου} \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R}, \quad (36)$$

και ο ρυθμός παραμορφώσεως \mathbf{D} , με

$$\mathbf{D}^c = \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\mathbf{E}}} \cdot \mathbf{R}^T \quad \text{και} \quad \mathbf{D}^p = \mathbf{R} \cdot \dot{\hat{\mathbf{E}}}^p \cdot \mathbf{R}^T, \quad (37)$$

όπου $\mathbf{E} = \ln \mathbf{U}$ είναι ο λογαριθμικός τανυστής παραμορφώσεων.

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στις εξισώσεις (31 –34), προκύπτουν οι:

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = 2G\dot{\hat{\mathbf{E}}}^c \quad (38)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}}^p = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \hat{\mathbf{N}}, \quad \text{όπου} \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{3}{2} \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e} = \frac{\hat{\mathbf{s}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}}{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e} \quad (39)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \hat{\mathbf{A}}, \quad \text{όπου} \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \quad (40)$$

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0. \quad (41)$$

Ο κώδικας του Abaqus, λύνει το πρόβλημα βηματικά, με προσαυξήσεις της μετατόπισης. Εμείς επεμβαίνουμε στον κώδικα, μέσω μιας υπορουτίνας umat που καθορίζει τον τρόπο υπολογισμού των τάσεων, δηλαδή τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης, καθώς και τον τρόπο υπολογισμού του τανυστή γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$. Για forward Euler αλγόριθμο ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}_n \quad (42)$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{A}_n \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{n+1} = \mathbf{s}^c - 2G\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}_n \quad (44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{A}_n. \quad (45)$$

Ο μοναδικός άγνωστος στις παραπάνω εξισώσεις είναι η μεταβολή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Αυτή θα υπολογιστεί από τη συνθήκη διαρροής με ένα Newton loop.

$$\Phi = (\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1} - \sigma_y (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0. \quad (46)$$

Αν θέσουμε $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} = \hat{\mathbf{s}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \mathbf{s}^c - \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p (2G\mathbf{N}_n + \mathbf{A}_n) = \boldsymbol{\Sigma}^c - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, το τετράγωνο της ισοδύναμης τάσης στη σχέση (46) ισούται με:

$$(\Sigma_e)_{n+1}^2 = (\Sigma_e^e)^2 - 3\Delta\bar{\varepsilon}^P \Sigma^e : \mathbf{B}_n + \frac{3}{2}(\Delta\bar{\varepsilon}^P)^2 \mathbf{B}_n : \mathbf{B}_n .$$

Στο Newton loop απαραίτητη είναι μια πρώτη εκτίμηση για την τιμή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης. Γνωρίζοντας ότι η παράγωγος της συνάρτησης διαρροής θα πρέπει πάντα να μηδενίζεται, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}^P} \dot{\bar{\varepsilon}}^P = 0 \Rightarrow \\ \dot{\Phi} &= \mathbf{N} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{N} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} - h \dot{\bar{\varepsilon}}^P = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

και με αντικατάσταση των

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \dot{\bar{\varepsilon}}^P \mathbf{N}) \quad \text{και} \quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\bar{\varepsilon}}^P \mathbf{A} \quad (48)$$

προκύπτει:

$$\dot{\Phi} = \mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D} - \dot{\bar{\varepsilon}}^P (\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} + \mathbf{N} : \mathbf{A} + h) = \mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D} - \dot{\bar{\varepsilon}}^P L = 0. \quad (49)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^P = \frac{1}{L} (\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}) \quad (50)$$

Επομένως μια πρώτη εκτίμηση θα μπορούσε να είναι:

$$\Delta\bar{\varepsilon}^P = \frac{1}{L} (\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \Delta\mathbf{E})_n . \quad (51)$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί:

$$\mathbf{N} : \mathbf{C}^e = \frac{3}{2\sigma_e} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) [2G\mathbf{J}^d + K\mathbf{I}\mathbf{I}] = \frac{3G}{\sigma_e} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{N} : \mathbf{C}^e = 2GN \quad (52)$$

$$\mathbf{N} : \mathbf{C}^e : \mathbf{N} = 2GN : \mathbf{N} = 2G \frac{3}{2} = 3G, \quad (53)$$

$$\mathbf{N} : \mathbf{A} = \mathbf{N} : (c\mathbf{N} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^p - \mathbf{Q}^p \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \frac{3}{2}c + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^p - \mathbf{Q}^p \cdot \boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{N} = \frac{3}{2}c + \bar{H}$$

επομένως

$$L = 3G + \frac{3}{2}c + h + \bar{H}, \quad (54)$$

και

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = \frac{2G}{L} (\mathbf{N} : \Delta \mathbf{E})_n \quad (55)$$

Στο τέλος της ολοκλήρωσης, αφού έχουμε βρει τον τανυστή των πραγματικών τάσεων σ_{n+1} , θα πρέπει να υπολογιστεί ο τανυστής γραμμικοποίησης $\bar{\mathbf{C}}$. Η εύρεση του όμως είναι δύσκολη στις μεγάλες παραμορφώσεις, για το λόγο αυτό τον προσεγγίζουμε παίρνοντας την τιμή του ίση με εκείνη του ελαστο-πλαστικού τανυστή \mathbf{C} . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (48a) την εξίσωση (50) και λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα $\mathbf{N} : \mathbf{C}^e = 2GN$, βρίσκουμε:

$$\sigma^{\nabla} = (\mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{L} \mathbf{N} \mathbf{N}) : \mathbf{D}, \quad (56)$$

δηλαδή,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{L} \mathbf{N} \mathbf{N}. \quad (57)$$

οπότε προσεγγίζουμε το $\bar{\mathbf{C}}$ ως εξής:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^e - \frac{4G^2}{L} \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{N}_{n+1} \quad (58)$$

5. Επίπεδη εντατική κατάσταση. Απειροστές παραμορφώσεις.

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε το πρόβλημα της επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Στο πρόβλημα της επίπεδης εντατικής κατάστασης οι συνιστώσες ε_{3i} του τανυστή των παραμορφώσεων δεν είναι δυνατόν να καθοριστούν από την κινηματική του προβλήματος. Συνεπώς η λύση ενός τέτοιου προβλήματος δεν μπορεί να προκύψει με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου όμοιου εκείνων που αναλύσαμε στην επίπεδη παραμόρφωση. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα παρουσιάζεται λόγω της ορθής συνιστώσας ε_{33} του τανυστή των παραμορφώσεων, η οποία δεν δύναται να καθοριστεί πριν τον υπολογισμό των τάσεων ή των τάσεων και των παραμορφώσεων στην περίπτωση που έχουμε ελαστο-πλαστικές παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p). \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από τον περιορισμό που επιβάλλει η επίπεδη εντατική κατάσταση, που θέλει τις τάσεις στην τρίτη διεύθυνση να μηδενίζονται, $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$. Από το νόμο του υλικού (Hooke) $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}$, γνωρίζουμε ότι οι συνιστώσες ε_{31} , ε_{32} του τανυστή των παραμορφώσεων μηδενίζονται. Επομένως το θέμα είναι ο υπολογισμός της άγνωστης τιμής της συνιστώσας ε_{33} .

5.2 Καταστατικές εξισώσεις.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε έναν εναλλακτικό τρόπο γραφής των καταστατικών εξισώσεων ενός μοντέλου. Σκοπός είναι να γραφεί ένας αλγόριθμος ολοκλήρωσης τους που θα είναι συνεπής με το πρόβλημα της επίπεδης έντασης.

Έστω ότι το μοντέλο μας είναι αυτό του Von-Mises ισότροπης ελαστικότητας με γραμμική κινηματική σκλήρυνση. Για την περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων οι ελαστο-πλαστικές εξισώσεις στις τρεις διαστάσεις είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{N}, \quad (4)$$

όπου $\mathbf{N} = \frac{3 \mathbf{s} - \alpha'}{2 \Sigma_e} = \frac{3 \boldsymbol{\Sigma}'}{2 \Sigma_e}$ και Σ_e η ισοδύναμη τάση,

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}' = A \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5)$$

$$\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{a}', \bar{\varepsilon}^p) = 0. \quad (6)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί της επίπεδης εντατικής κατάστασης. Έστω \mathbf{V}^s το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι συμμετρικοί τανυστές δευτέρας τάξης. Αυτό λόγω της συμμετρίας των τανυστών θα έχει διάσταση $\dim \mathbf{V}^s = 6$. Για την επίπεδη ένταση μπορούμε να πούμε ότι το αντίστοιχο σύνολο \mathbf{V}^p είναι ένα υποσύνολο του \mathbf{V}^s τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{V}^p = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{V}^s \mid \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0\}. \quad (7)$$

Ομοίως το αντίστοιχο υποσύνολο των αποκλινόντων τανυστών προκύπτει με τρεις περιορισμούς:

$$\mathbf{V}^D = \{\mathbf{s} \in \mathbf{V}^s \mid s_{13} = s_{23} = s_{kk} = 0\}. \quad (8)$$

Άρα και τα δύο υποσύνολα έχουν διάσταση τρία και επειδή είναι ισομορφικά στο χώρο είναι βολικό να γράψουμε τις τάσεις με μορφή διανυσμάτων:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{s} = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{12}]^T. \quad (9)$$

Το διάνυσμα των τάσεων και το αντίστοιχο αποκλινόν διάνυσμα συνδέονται μέσω ενός πίνακα, έστω $\bar{\mathbf{P}}$ του οποίου οι τιμές προκύπτουν εύκολα λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του αποκλινόντος μέρους ενός μεγέθους:

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Μια αντίστοιχη εξίσωση μπορεί να γραφεί και για τον τανυστή back stress. Οι συνιστώσες του \mathbf{a}'_{ij} , καθορίζονται έμμεσα από τον τανυστή $\bar{\mathbf{P}}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbf{V}^p$ τέτοιο ώστε ($\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$):

$$[\alpha'_{11} \quad \alpha'_{22} \quad \alpha'_{12}]^T = \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{a}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{a} = [\alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{12}]^T. \quad (11)$$

Σε διανυσματική μορφή γράφονται και οι παραμορφώσεις:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = [\varepsilon_{11}^p \quad \varepsilon_{22}^p \quad 2\varepsilon_{12}^p]^T. \quad (12)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται πλέον σύμφωνα με τα παραπάνω με τη μορφή:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}{\Sigma_e} \boldsymbol{\Sigma}' = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}}{\Sigma_e} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \dot{\gamma} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}' = A \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = A \dot{\gamma} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma},$$

όμως επειδή $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = A \dot{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\Phi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p).$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο πίνακας \mathbf{P} διαφέρει από τον πίνακα $\bar{\mathbf{P}}$ μόνο ως προς την συνιστώσα $P_{33} = 2\bar{P}_{33}$. Η αλλαγή αυτή έγινε εξαιτίας των διατμητικών συνιστωσών των διανυσμάτων παραμόρφωσης. Επομένως,

$$\boldsymbol{\Sigma} = [s_{11} - \alpha_{11} \quad s_{22} - \alpha_{22} \quad (s_{12} - \alpha_{12})]^T$$

και

$$\boldsymbol{\Sigma}' = [s_{11} - \alpha'_{11} \quad s_{22} - \alpha'_{22} \quad 2(s_{12} - \alpha_{12})]^T. \quad (14)$$

5.3 Ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων.

Για την ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο backward Euler. Έτσι λοιπόν οι εξισώσεις (13γ, 13δ) γράφονται:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \gamma \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \quad (15)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = A \Delta \gamma \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \quad (16)$$

όπου $\Delta \gamma = \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{(\Sigma_e)_{n+1}}$ και

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^e - \boldsymbol{\alpha}_n - \Delta \gamma \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - A \Delta \gamma \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \Rightarrow$$

$$[(1 + A \Delta \gamma) \mathbf{I} + \Delta \gamma \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P}] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^e \Rightarrow \quad (17\alpha)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^e. \quad (17\beta)$$

Στην περίπτωση ισότροπης ελαστικότητας ο τανυστής ελαστικότητας \mathbf{C}^e έχει τις ίδιες κύριες κατευθύνσεις με τον πίνακα \mathbf{P} . Επομένως,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_p \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_D \cdot \mathbf{Q}^T \quad (18)$$

όπου ο τανυστής \mathbf{Q} είναι γνήσιος ορθογώνιος $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ και οι $\mathbf{\Lambda}_P, \mathbf{\Lambda}_D$ είναι διαγώνιοι πίνακες:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (18\alpha)$$

$$\mathbf{\Lambda}_P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_D = \begin{bmatrix} E/(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (18\beta)$$

Οι τανυστές \mathbf{C}^e και \mathbf{P} είναι συγραμμικοί (ίδια ιδιοδιανύσματα) και επομένως για το μεταξύ τους γινόμενο θα ισχύει, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e = \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}_P \cdot \mathbf{\Lambda}_D \cdot \mathbf{Q}^T$. Οι παρατηρήσεις αυτές διευκολύνουν όπως θα δούμε παρακάτω την ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (17β) από αριστερά με τον ορθογώνιο τανυστή \mathbf{Q} και χρησιμοποιώντας σε αυτήν την ιδιότητα των ορθογώνιων τανυστών $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, βρίσκουμε:

$$\underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}_{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} = \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1} \cdot \mathbf{Q}}_{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^e}_{\boldsymbol{\xi}^e} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\xi}^e. \quad (19)$$

Ο τανυστής $\boldsymbol{\Gamma}$ της παραπάνω σχέσης περιέχει μοναδικό άγνωστο τη μεταβλητή $\Delta\gamma$ και διαγωνοποιείται όταν στην έκφραση του τανυστή $\boldsymbol{\Psi}$ το γινόμενο $\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P}$ αντικατασταθεί από $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}_P \cdot \mathbf{\Lambda}_D \cdot \mathbf{Q}^T$ σύμφωνα με την spectral ανάλυση. Συγκεκριμένα:

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{Q})^{-1}, \quad (20)$$

και η έκφραση στην παρένθεση με αντικατάσταση του $\boldsymbol{\Psi}$ από την εξίσωση (17α) ισοσούται με,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T \cdot [(1 + A\Delta\gamma)\mathbf{I} + \Delta\gamma \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P}] \cdot \mathbf{Q} = \\ &= (1 + A\Delta\gamma)\mathbf{I} + \Delta\gamma \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \\ &= (1 + A\Delta\gamma)\mathbf{I} + \Delta\gamma \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}_P \cdot \mathbf{\Lambda}_D \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \\ &= (1 + A\Delta\gamma)\mathbf{I} + \Delta\gamma \mathbf{\Lambda}_P \cdot \mathbf{\Lambda}_D. \end{aligned} \quad (21)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τις εξισώσεις(20, 21),

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1/c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\text{όπου } c_1 = 1 + \left[\frac{E}{3(1-\nu)} + A \right] \cdot \Delta\gamma \text{ και } c_2 = 1 + \left[\frac{E}{1+\nu} + A \right] \cdot \Delta\gamma.$$

Το πρόβλημα αυτή τη στιγμή έχει αναχθεί στον υπολογισμό του άγνωστου διανύσματος $\xi_{n+1} = \mathbf{\Gamma} \cdot \xi^e$, το οποίο είναι συνάρτηση της μεταβλητής $\Delta\gamma = \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{\epsilon}^P}{(\Sigma_e)_{n+1}}$.

Ο υπολογισμός της τελευταίας θα γίνει μέσω του κριτηρίου διαρροής και τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου Newton:

$$(\Sigma_e)_{n+1} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^P) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } (\Sigma_e^2)_{n+1} &= \frac{3}{2} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}')_{n+1} : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}')_{n+1} = \frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})_{n+1} : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}')_{n+1} = \frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}'_{n+1} = \\ &= \frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \frac{3}{2} \xi_{n+1}^T \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}_{\Lambda_p} \cdot \xi_{n+1} = \\ &= \frac{3}{2} \xi^{eT} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \cdot \Lambda_p \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \xi^e. \end{aligned} \quad (23)$$

Στην παραπάνω σχέση το γινόμενο $\mathbf{\Gamma}^T \cdot \Lambda_p \cdot \mathbf{\Gamma}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας:

$$\mathbf{\Gamma}^T \cdot \Lambda_p \cdot \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1/(3c_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_2^2 \end{bmatrix},$$

και η ισοδύναμη τάση δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$(\Sigma_e^2)_{n+1} = \frac{3}{2} \left[\frac{\xi_{11}^{e2}}{3c_1^2} + \frac{\xi_{22}^{e2}}{c_2^2} + \frac{2\xi_{12}^{e2}}{c_2^2} \right]. \quad (24)$$

Η τάση διαρροής είναι επίσης συνάρτηση της μεταβλητής $\Delta\gamma$, αφού $\sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^P)$ και:

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^P = \bar{\epsilon}_n^P + \Delta\bar{\epsilon}^P = \bar{\epsilon}_n^P + \frac{2}{3} (\Sigma_e)_{n+1} \Delta\gamma. \quad (25)$$

Έχοντας υπολογίσει τη μεταβλητή $\Delta\gamma$ από το κριτήριο διαρροής:

$$[(\Sigma_e)_{n+1}(\Delta\gamma)]^2 - \sigma_y^2(\bar{\epsilon}_{n+1}^p(\Delta\gamma)) = 0, \quad (26)$$

μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε αρχικά τον τανυστή Γ και το διάνυσμα ξ και τελικά τις τάσεις, τον τανυστή back stress και την πλαστική παραμόρφωση.

$$\xi_{n+1} = \Gamma \cdot \xi^e \quad (27)$$

$$\Sigma_{n+1} = Q \cdot \xi_{n+1} \quad (28)$$

$$\Delta \mathbf{a} = A \Delta \gamma \Sigma_{n+1} \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \Sigma_{n+1} + \mathbf{a}_{n+1} \quad (30)$$

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta \gamma \mathbf{P} \cdot \Sigma_{n+1} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p. \quad (31)$$

4.4 Υπολογισμός του ελαστο-πλαστικού τανυστή C .

Όπως και στις περιπτώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης, έτσι και εδώ για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του τανυστή γραμμικοποίησης \bar{C} . Εδώ τον προσεγγίζουμε με τον ελαστο-πλαστικό τανυστή C . Από την εξίσωση συνέχειας (consistency condition) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0, \quad (32)$$

$$\text{όπου } \Phi = \frac{3}{2} \Sigma_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \Sigma_{n+1} - \sigma_y^2(\bar{\epsilon}^p)_{n+1} = 0.$$

Από τους νόμους υλικού και διαρροής έχουμε:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = C^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = C^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{P} \cdot \Sigma_{n+1}). \quad (33)$$

Επίσης, ο ρυθμός του τανυστή back stress δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\mathbf{a}} = A \dot{\gamma} \Sigma_{n+1}, \quad (34)$$

ενώ ο ρυθμός της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης ισούται με:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\Sigma}'^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}'} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\Sigma}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}} \quad (35)$$

Με τον υπολογισμό των παραγώγων της σχέσεις (32),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [3/2 (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})] = 3(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{P} = 3 \Sigma_{n+1}^T \cdot \mathbf{P}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [3/2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})] = -3(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{P} = -3\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \quad (32)$$

και την αντικατάσταση των εξισώσεων (33-37) στην εξίσωση συνέχειας (32) βρίσκουμε:

$$3\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) - 3A \dot{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - 2\sigma_y \sigma'_y \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}} = 0. \quad (33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $A=2/3H$, λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \cdot (1 + \beta')}, \quad (34)$$

$$\text{όπου } \beta' = \frac{2 \sigma_y \sigma'_y \sqrt{2/3 \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}} + H \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{3 \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}.$$

Από την εξίσωση διαρροής γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$(\boldsymbol{\Sigma}_e)_{n+1} = (\sigma_y)_{n+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}} = (\sigma_y)_{n+1},$$

επομένως η εξίσωση (34) γίνεται:

$$\dot{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \cdot (1 + \beta)} \quad (35)$$

$$\text{όπου } \beta = \frac{2 (\sigma'_y + H) \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{3 \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}.$$

Τέλος από τους νόμους υλικού και διαρροής βρίσκουμε τον ελαστο-πλαστικό τανυστή \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{C}^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbf{C}^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = \\ &= \left\{ \mathbf{C}^e - \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \cdot \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e}{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} \cdot (1 + \beta)} \right\} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Στην παραπάνω σχέση η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι ο τανυστής \mathbf{C} . Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο γράφτηκε μια umat υποροουτίνα, για την επίλυση προβλημάτων επίπεδης εντατικής κατάστασης.

6. Εφαρμογές

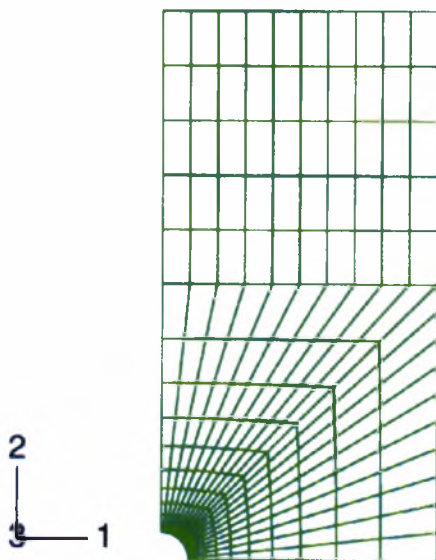
Χρησιμοποιώντας τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων του Abaqus έγιναν κάποιες εφαρμογές των μοντέλων του Von-Mises και της κινηματικής σκλήρυνσης με πλαστικό spin ή όχι, για περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων. Το μοντέλο του Von-Mises εφαρμόστηκε μέσω της υπαί υπορουτίνας `mises_finite` η οποία γράφτηκε σύμφωνα με τον αλγόριθμο του μοντέλου για πεπερασμένες παραμορφώσεις. Η αντίστοιχη υπορουτίνα για το πρόβλημα της κινηματικής κράτυνσης είναι η `kinem_finite`. Οι υπορουτίνες αυτές βρίσκονται στα παραρτήματα της εργασίας.

6.1 Εφελκυσμός επίπεδης πλάκας με οπή.

Αρχικά εξετάστηκε το πρόβλημα της επίπεδης πλάκας με οπή που υφίσταται εφελκυσμό. Το δείγμα που θεωρήσαμε είναι το ένα τέταρτο αυτού που αντιπροσωπεύει το πρόβλημα, λόγω της συμμετρίας που υπάρχει και έχει κλάσμα διαστάσεων, $a/c=2$, όπου a είναι το μήκος και c το πλάτος του δείγματος. Επίσης το πάχος της πλάκας b είναι μοναδιαίο και το κλάσμα διαστάσεων της ακτίνας της οπής προς το πλάτος του δείγματος είναι $R=c/10$. Μια σχηματική παρουσίαση του δείγματος με τον κάρναβο πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε υπάρχει στο σχήμα 6.1. Το υλικό του δείγματος έχει λόγο μέτρου ελαστικότητας προς αρχική τάση διαρροής $E/\sigma_0 = 300$, λόγο Poisson $\nu=0.3$ και η καμπύλη διαρροής του περιγράφεται από την εξίσωση :

$$\sigma_y = \sigma_0 (\bar{\epsilon}^p / \epsilon_0 + 1)^{1/n},$$

όπου $n=5$, $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$ και $\bar{\epsilon}^p$ η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση. Κάθε υλικό σημείο του δείγματος καθορίστηκε από το διάνυσμα θέσης του $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ της απαραμόρφωτης κατάστασης ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Επίσης θεωρούμε ότι έχουμε επίπεδη παραμόρφωση στη διεύθυνση X_1 .



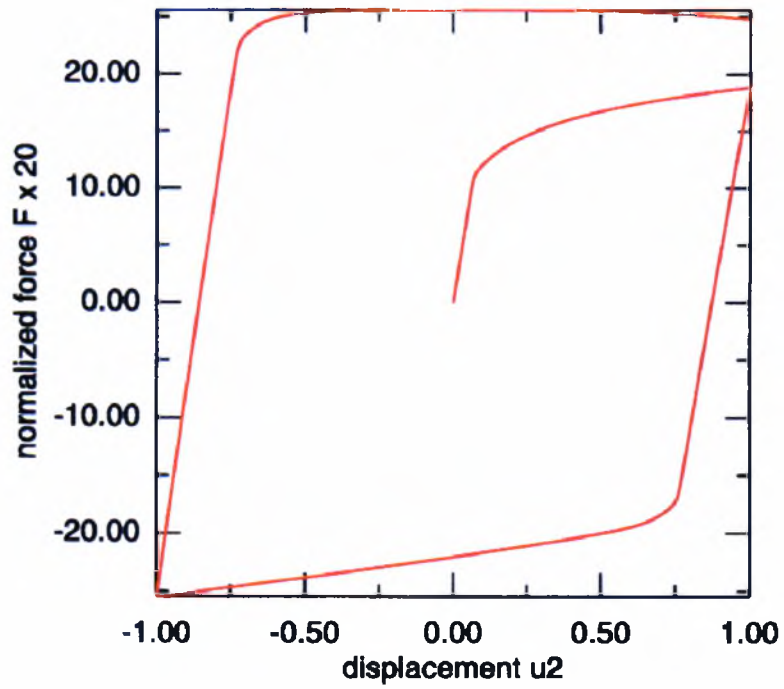
Σχήμα 6.1

Κάρναβος του δείγματος επίπεδης πλάκας με οπή.

Ο εφελκυσμός του δείγματος έγινε με σταδιακή αύξηση της μετατόπισης των εξωτερικών κόμβων της πάνω πλευράς του κάνναβου στη διεύθυνση δύο του συστήματος συντεταγμένων, ενώ στους εξωτερικούς κόμβους της απέναντι πλευράς υπήρχε περιορισμός κίνησης στη διεύθυνση δύο του συστήματος συντεταγμένων, μέσω συντοριακής συνθήκης ώστε να διατηρείται η εγκάρσια συμμετρία του προβλήματος. Περιοριστική συνθήκη μετατόπισης υπήρχε και στους εξωτερικούς κόμβους της αριστερής πλευράς του κάνναβου στη διεύθυνση ένα του συστήματος συντεταγμένων ώστε να διατηρείται η διαμήκης συμμετρία του προβλήματος. Προκειμένου να μπορούμε να βλέπουμε τη μεταβολή της εξωτερικής δύναμης που χρειάζεται για την μετατόπιση των επάνω εξωτερικών κόμβων του δείγματος, συνδέσαμε όλους αυτούς τους κόμβους μέσω άκαμπτων ράβδων με έναν ουδέτερο κόμβο, ανεξάρτητο του κάνναβου του δείγματος. Έτσι επιβάλλαμε την μετατόπιση στον ουδέτερο αυτό κόμβο και είχαμε μετατόπιση όλων των εξωτερικών κόμβων της επάνω πλευράς, ίδια με εκείνη του ουδέτερου κόμβου.

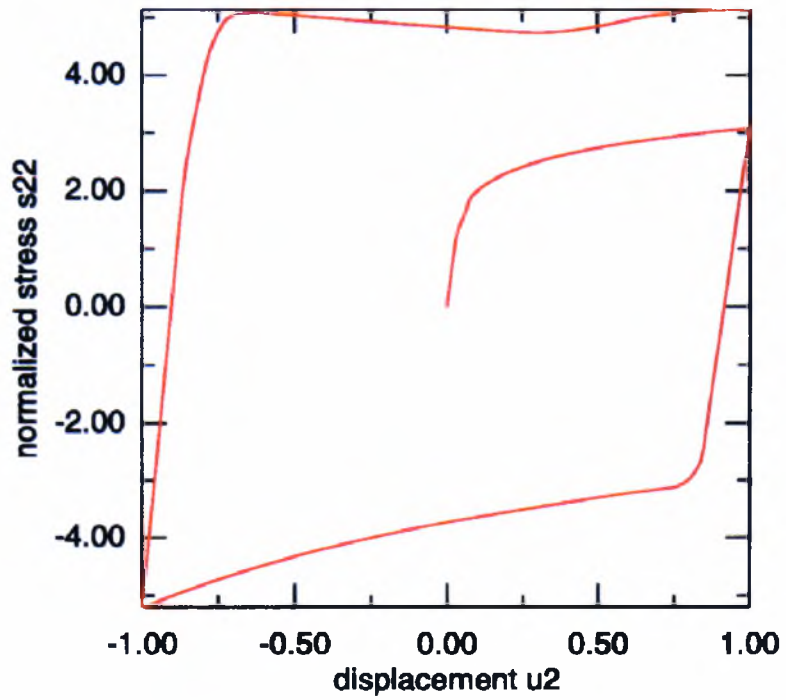
Στο παραπάνω δείγμα επιβάλλαμε μετατόπιση σε τρία διαδοχικά βήματα. Στα βήματα αυτά είχαμε εφελκυσμό (στη διεύθυνση δύο του συστήματος συντεταγμένων), θλίψη (στη διεύθυνση μείον δύο) και ξανά εφελκυσμό της επίπεδης πλάκας με παραμόρφωση κάθε φορά $\epsilon=1/20$, δηλαδή 5% σε σχέση με την απαραμόρφωτη κατάσταση. Κάθε βήμα ξεκινούσε από το σημείο τέλους του προηγούμενου έτσι ώστε οι αρχικές του συνθήκες να είναι οι τάσεις και παραμορφώσεις του τέλους του προηγούμενου βήματος. Το παραπάνω πρόβλημα εξετάστηκε με δύο μοντέλα πλαστικότητας, το μοντέλο του von-Mises και αυτό της κινηματικής σκλήρυνσης. Οι γραφικές παραστάσεις της κανονικοποιημένης τάσης σ_{22}/σ_0 και της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\epsilon}^p$ αναφέρονται στο πρώτο στοιχείο που βρίσκεται στην κάτω πλευρά του κάνναβου δεξιά της οπής ενώ εκείνες της κανονικοποιημένης δύναμης $F/(\sigma_0 ab) = F/(20 \sigma_0)$ σε ολόκληρο το δείγμα. Τα σχήματα (6.2-6.5) αναφέρονται στην εφαρμογή του προβλήματος με κριτήριο διαρροής του υλικού αυτό του von-Mises, ενώ στα σχήματα (6.6-6.10) το κριτήριο διαρροής του υλικού ήταν αυτό της κινηματικής σκλήρυνσης.

Στο σχήμα 6.2. παρουσιάζεται η μεταβολή της εξωτερικής δύναμης που χρειάζεται για την παραμόρφωση του υλικού συναρτήσει της παραμόρφωσης της πάνω πλευράς του κάνναβου. Η δύναμη παίρνει θετικές τιμές και έχει αύξουσα μορφή όσο το υλικό εφελκύεται κατά τη διάρκεια του πρώτου βήματος παραμόρφωσης. Με το που ξεκινάει η θλίψη, δεύτερο βήμα, η δύναμη πέφτει απότομα και παίρνει αρνητικές τιμές, μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή από αυτές του πρώτου βήματος λόγω της εργοσκλήρυνσης του υλικού. Στο τρίτο βήμα η δύναμη παίρνει πάλι θετικές τιμές και μοιάζει να σταθεροποιείται καθώς η πλαστική παραμόρφωση προχωράει. Στο τέλος όμως του βήματος η δύναμη πέφτει γιατί οι διατομές του δείγματος στο ύψος της οπής έχουν μειωθεί λόγω αυξημένης πλαστικής παραμόρφωσης και η εργοσκλήρυνση δεν επαρκεί για να αντισταθμίσει αυτή τη μείωση των διατομών. Στο σχήμα 6.3. παρουσιάζεται η αντίστοιχη πορεία της τάσης σ_{22} του υπό εξέταση στοιχείου. Θετική κατά τον εφελκυσμό και αρνητική κατά τη θλίψη με μεγαλύτερες, κατά απόλυτη τιμή, τιμές λόγω της εργοσκλήρυνσης. Στο σχήμα 6.4. φαίνεται η ανοδική πορεία της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης με εμφανή τα σημεία αλλαγής βήματος. Στα σημεία αυτά η τιμή της σταθεροποιείται για το μικρό χρονικό διάστημα που το υλικό βρίσκεται και πάλι στην ελαστική περιοχή. Τέλος το σχήμα 6.5. δείχνει την κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στο δείγμα.



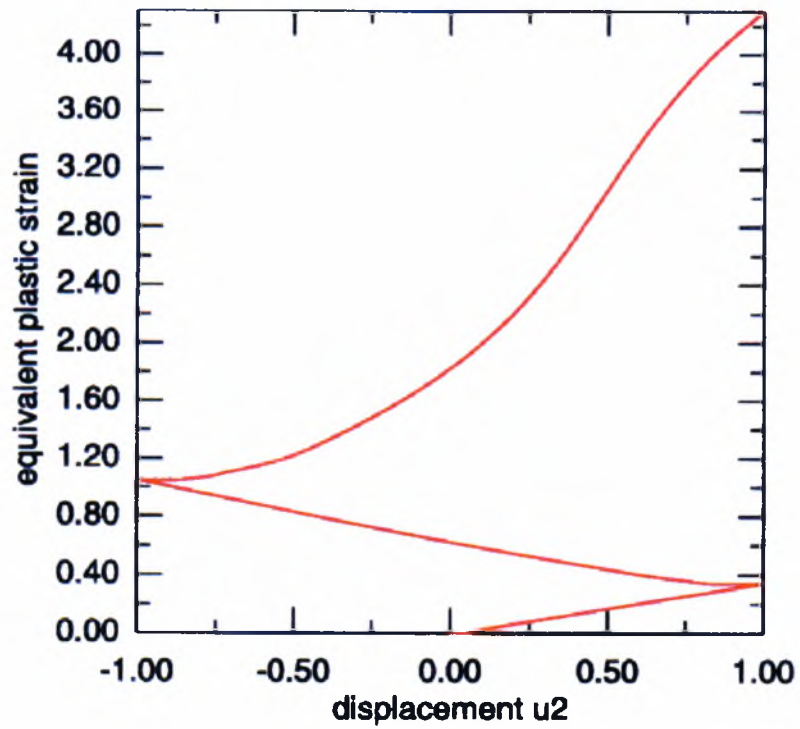
Σχήμα 6.2

Μεταβολή της εξωτερικής δύναμης $20 \cdot F/(\sigma_0 ab)$ συναρτήσει της μετατόπισης u_2/R .



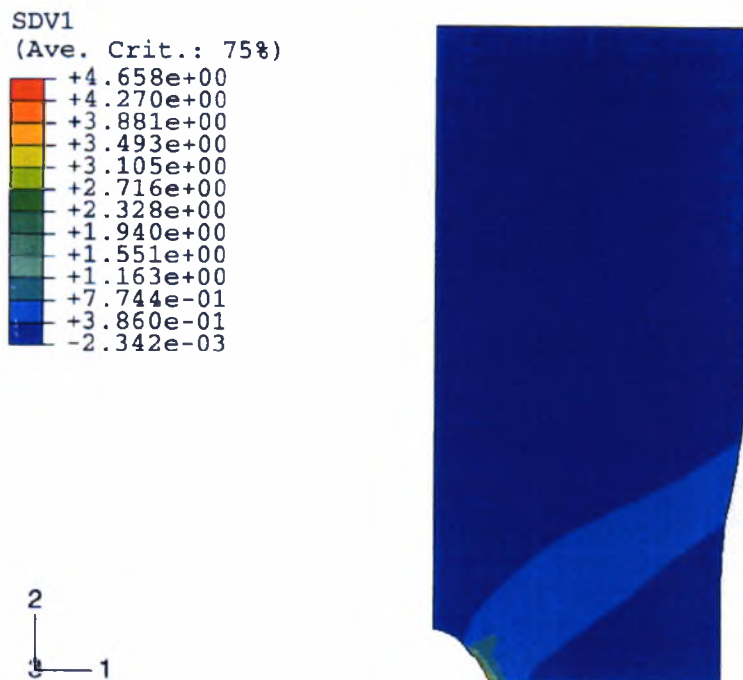
Σχήμα 6.3

Μεταβολή της τάσης σ_{22}/σ_0 συναρτήσει της μετατόπισης u_2/R .



Σχήμα 6.4

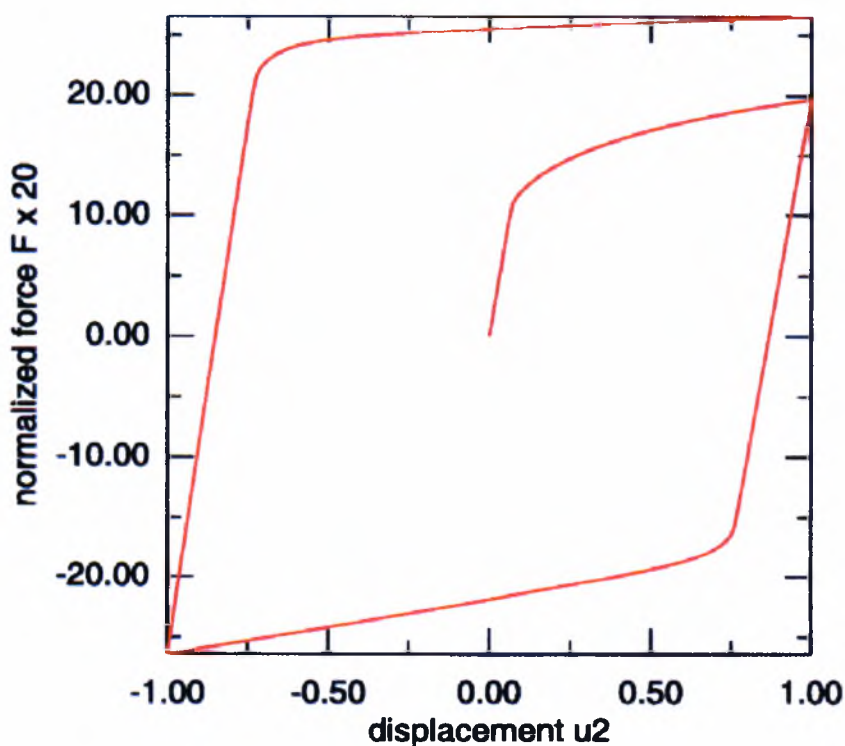
Μεταβολή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\epsilon}^p$, συναρτήσει της μετατόπισης u_2/R .



Σχήμα 6.5

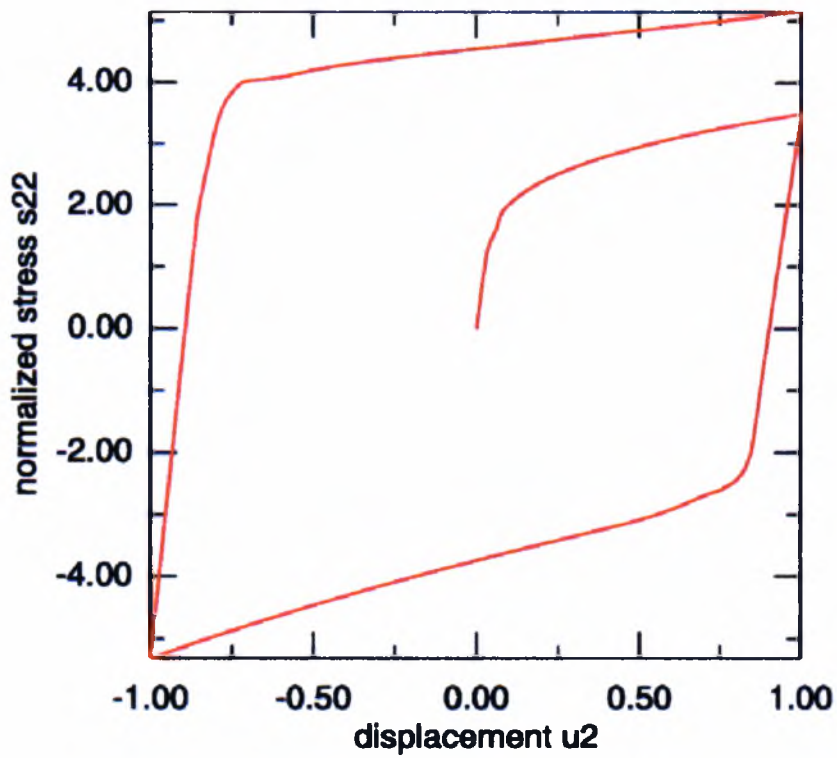
Κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\epsilon}^p$.

Τα σχήματα για το μοντέλο της κινηματικής σκλήρυνσης δείχνουν μια ανάλογη, με το μοντέλο του von-Mises, συμπεριφορά των αντίστοιχων μεγεθών. Η διαφορά εντοπίζεται στο τρίτο βήμα, στο οποίο πλέον η κανονικοποιημένη δύναμη έχει σταθερή ανοδική πορεία καθώς το όριο διαρροής αυξάνεται και οι διατομές παραμένουν ίδιες. Σταθερή ανοδική πορεία έχει και η κανονικοποιημένη τάση σ_{22} κατά τη διάρκεια του τρίτου βήματος. Στα σχήματα 6.9(α,β,γ), φαίνονται οι μεταβολές των ορθών συνιστωσών του τανυστή back stress. Το άθροισμα τους, όπως φαίνεται από τα σχήματα, ισούται με μηδέν. Αυτό περιμέναμε εξάλλου αφού ο τανυστής back stress είναι αποκλίνων. Στο σχήμα 6.9.α φαίνεται ότι η συνιστώσα α_{22} παίρνει θετικές τιμές και έχει αύξουσα μορφή στο πρώτο βήμα του εφελκυσμού. Στην αρχή του δεύτερου και τρίτου βήματος είναι σταθερή λόγω της ελαστικής περιοχής. Κατά τη θλίψη περνάει σε αρνητικές τιμές και μετά πάλι θετικές στο τρίτο βήμα εφελκυσμού. Το σχήμα 6.10. δείχνει την κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στο δείγμα. Η κατανομή είναι διαφορετική από την αντίστοιχη που προήλθε από το κριτήριο διαρροής του von-Mises.



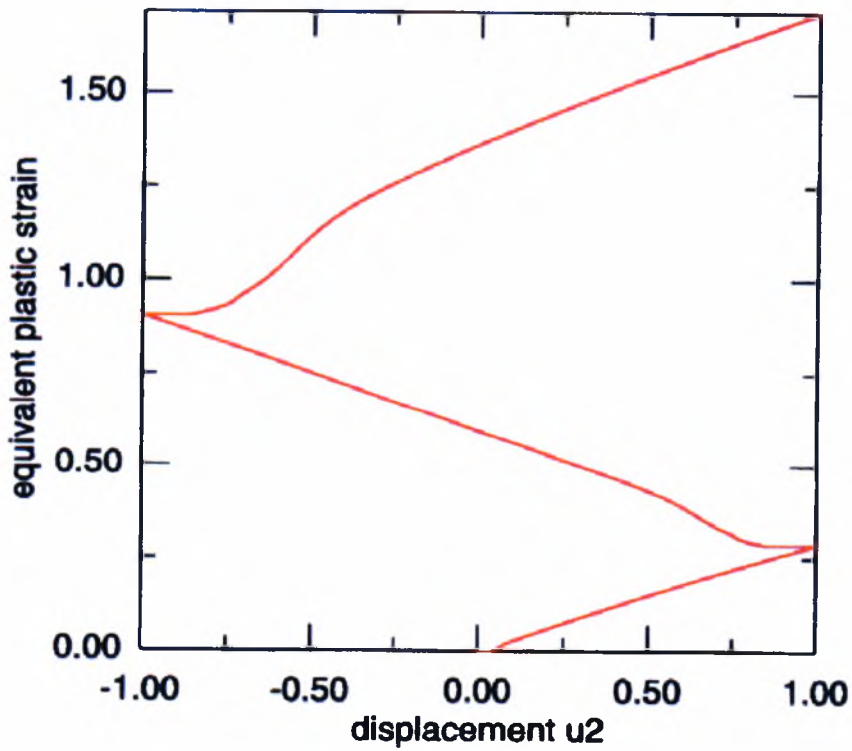
Σχήμα 6.6

Μεταβολή της εξωτερικής δύναμης $20 \cdot F/(\sigma_{0ab})$ συναρτήσει της μετατόπισης u_2 / R .

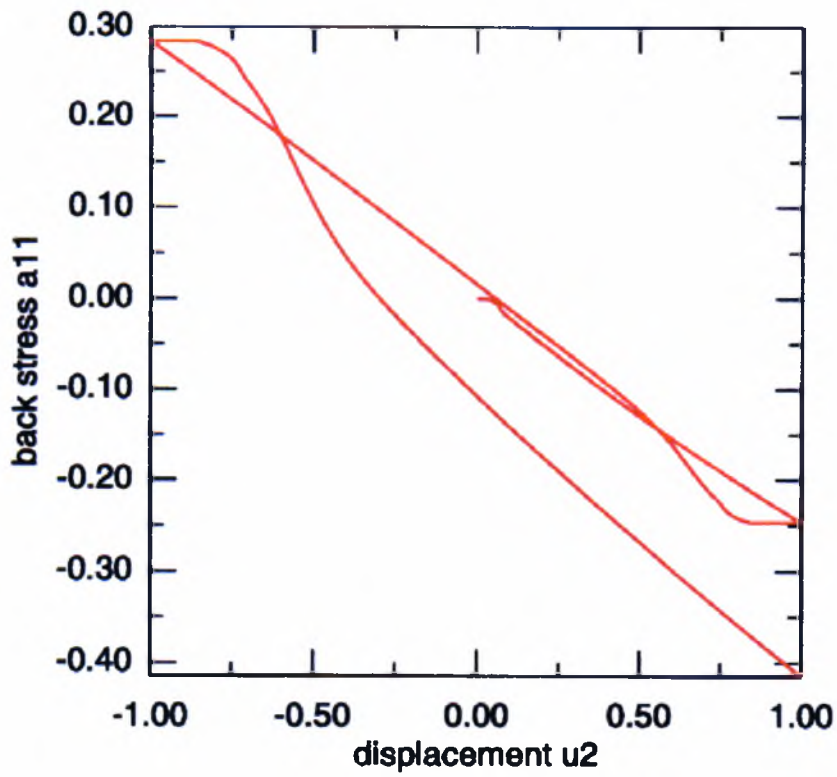


Σχήμα 6.7

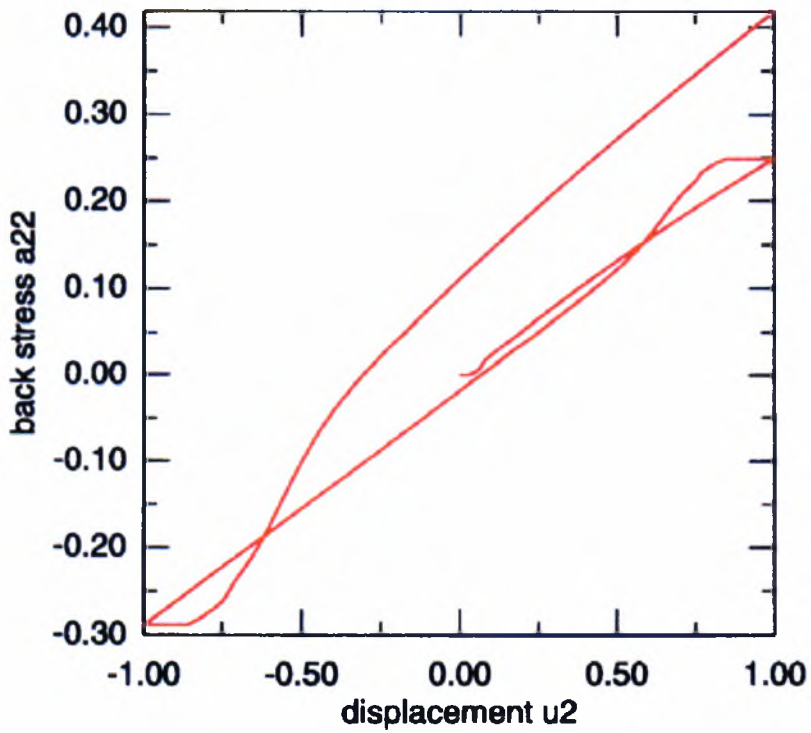
Τα σχήματα 6.7 και 6.8 παριστούν την μεταβολή της τάσης σ_{22} / σ_0 και της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης αντίστοιχα, συναρτήσει της μετατόπισης u_2 / R .



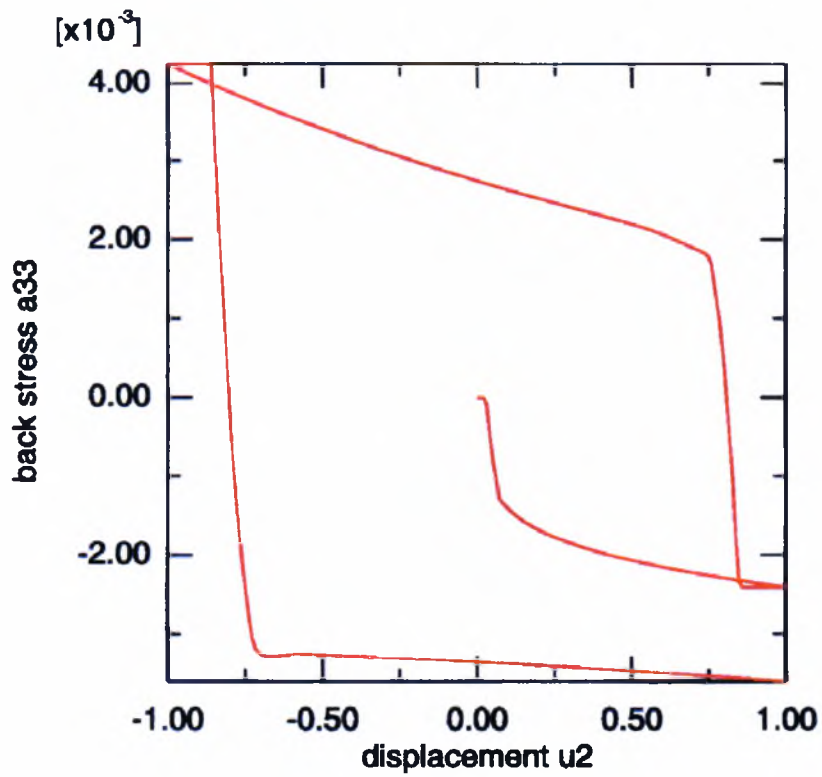
Σχήμα 6.8



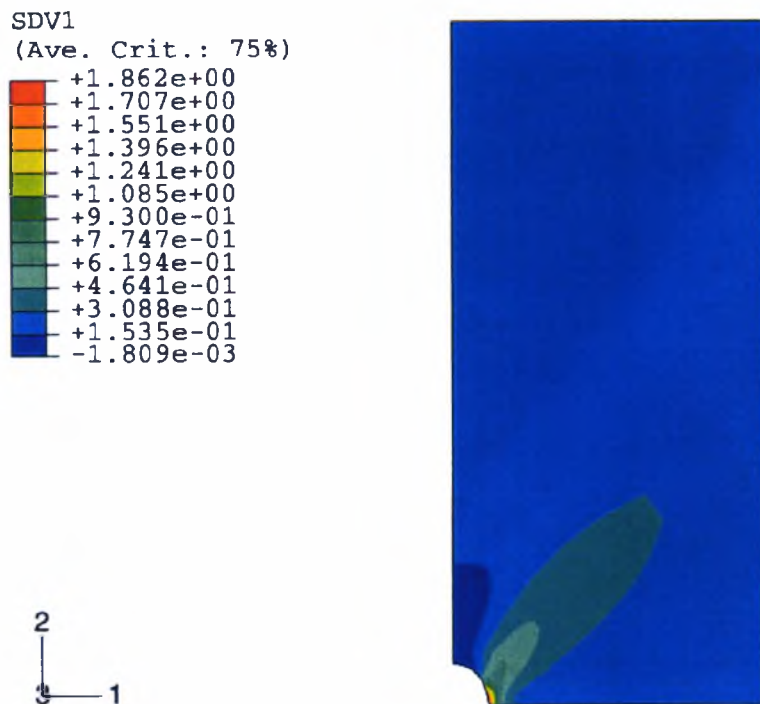
Σχήμα 6.9.α
 Μεταβολή των συνιστώσων α_{11} / σ_0 και α_{22} / σ_0 του τανυστή back stress συναρτήσει της μετατόπισης u_2 / R .



Σχήμα 6.9.β.



Σχήμα 6.9.γ.
Μεταβολή της συνιστώσας a_{33} / σ_0 του ταυνοστή back stress, συναρτήσει της μετατόπισης u_2 / R .



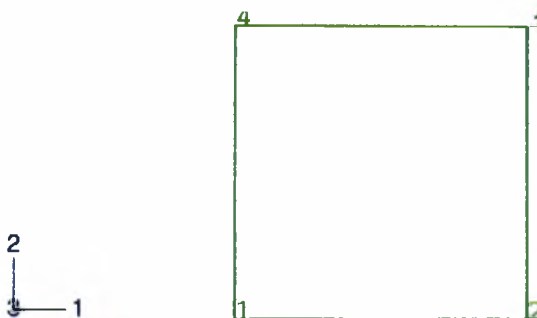
Σχήμα 6.10
Κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης

6.2 Διάτμηση στοιχείου σύμφωνα με το μοντέλο της κινηματική σκλήρυνση.

Μια δεύτερη εφαρμογή έγινε με σκοπό να δειχθεί η σημασία του πλαστικού srin στις μεγάλες παραμορφώσεις. Έτσι λοιπόν υποβάλλαμε σε διάτμηση ένα τετραγωνικό στοιχείο, διαστάσεων 1×1 , (σχήμα 6.11), θεωρώντας επίπεδη παραμόρφωση στη διεύθυνση δύο του συστήματος συντεταγμένων. Το υλικό του στοιχείου έχει λόγο μέτρου ελαστικότητας προς αρχική τάση διαρροής $E/\sigma_0 = 300$, λόγο Poisson $\nu=0.3$ και η καμπύλη διαρροής του περιγράφεται από την εξίσωση :

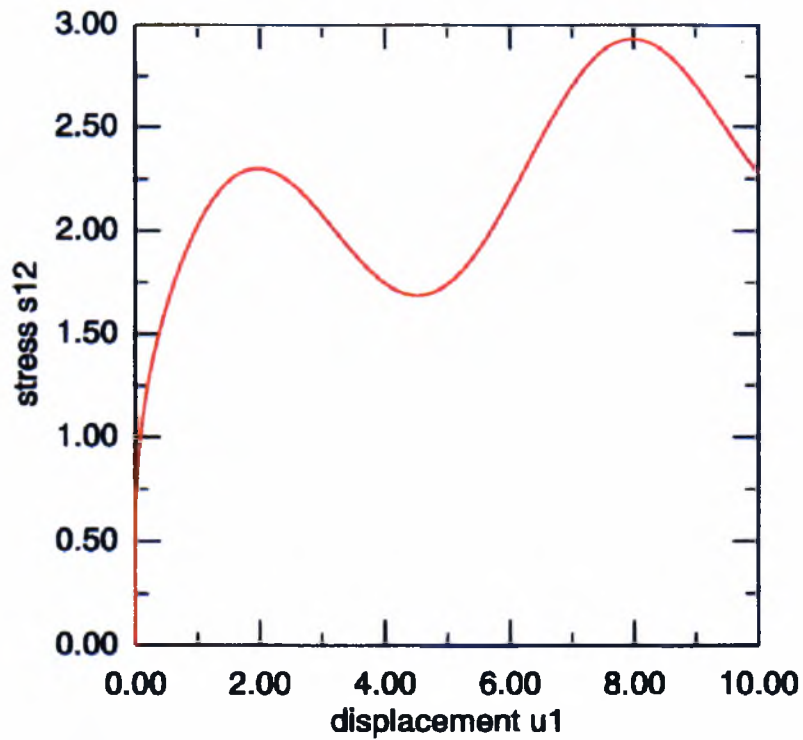
$$\sigma_y = \sigma_0 (\bar{\epsilon}^p / \epsilon_0 + 1)^{1/n},$$

όπου $n=5$, $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$ και $\bar{\epsilon}^p$ η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση. Η διάτμηση έγινε με μετατόπιση, δεκαπλάσια της πλευράς του στοιχείου, των κόμβων τρία και τέσσερα στη διεύθυνση ένα του συστήματος συντεταγμένων. Το κριτήριο διαρροής του υλικού ήταν αυτό της κινηματικής σκλήρυνσης για μεγάλες παραμορφώσεις με πλαστικό srin και χωρίς πλαστικό srin . Στο σχήμα 6.12 παρουσιάζεται η κανονικοποιημένη διατμητική τάση σ_{12} / σ_0 στην περίπτωση όπου δεν έχουμε λάβει υπόψη μας το πλαστικό srin . Παρατηρούμε ότι αυτή έχει μια περίεργη ταλαντωτική μορφή. Αντίθετα η παρουσία του πλαστικού srin στις καταστατικές εξισώσεις του μοντέλου δίνει όπως φαίνεται στο σχήμα 6.13, τη συνήθη σωστή καμπύλη της διατμητικής τάσης.

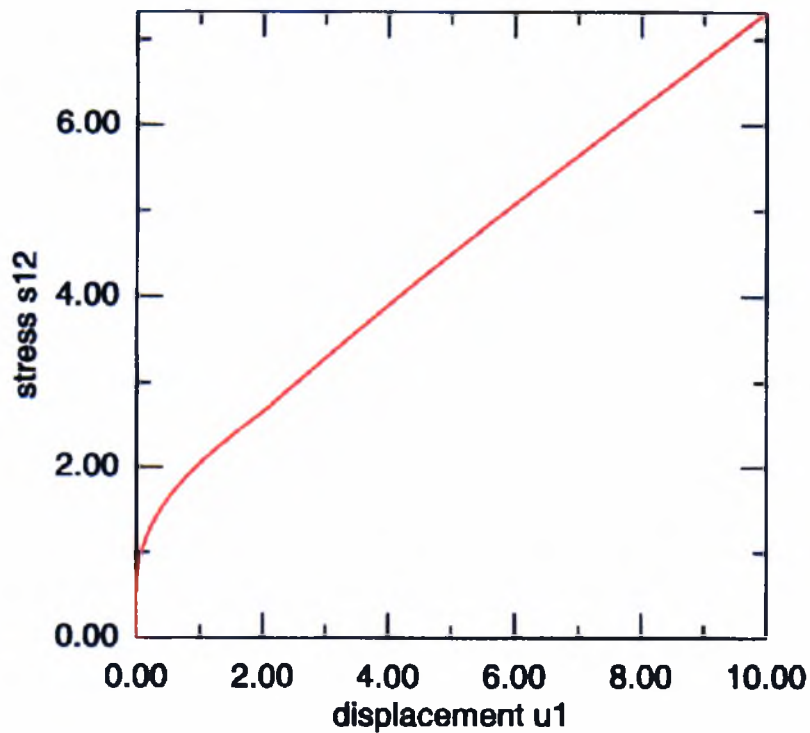


Σχήμα 6.11
Στοιχείο που χρησιμοποιήθηκε για τη διάτμηση.

•



Σχήμα 6.12
Μεταβολή της τάσης σ_{12} / σ_0 σύμφωνα με το μοντέλο της κινηματικής
σκλήρυνσης χωρίς πλαστικό spin.



Σχήμα 6.13
Μεταβολή της τάσης σ_{12} / σ_0 σύμφωνα με το μοντέλο της κινηματικής
σκλήρυνσης με πλαστικό spin.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Η *umat* υπορουτίνα *mises_finite*

```

SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDD, SSE, SPD, SCD,
+RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
+STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
+NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
+CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
C   Finite strain von Mises power-law hardening
C   If EXPO>50, then perfect plasticity is assumed
C   June 2001
C
C   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C   CHARACTER*8 CMNAME
C
C   DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
+DDSDD (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),
+STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),
+PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3)
C
C*** For 3D problems
C   DIMENSION CEL (6, 6), QMX (6, 6), AIMX (6, 6), AJMX (6, 6), AKMX (6, 6)
C   DIMENSION CEL (4, 4), QMX (4, 4), AIMX (4, 4), AJMX (4, 4), AKMX (4, 4)
C
C   DIMENSION DEDEV (6), SDEVT (6), SEL (6), SDEV (6), AN (6)
C
C   DIMENSION DF (3, 3), R (3, 3), RT (3, 3), U (3, 3), V (3, 3), DFGINV (3, 3),
+DETENS (3, 3), DE (6), UMI1 (3, 3), UMI2 (3, 3), UMI3 (3, 3), UMI4 (3, 3),
+IPIV (10), WORK (10), DROTTRAN (3, 3), AUXM (3, 3)
C
C   COMMON/NICK/AIMX, AJMX, AKMX
C
C
C*** STATE VARIABLES
C
C STATEV (1) =EBAR
C STATEV (2) =YFLAG (0=ELASTICITY, 1=PLASTICITY)
C
C
C
C   IWR=0
C   IF (NOEL.EQ.1.AND.NPT.EQ.1) IWR=1
C*** IOUT=7 WRITES ON THE .msg FILE
C   IOUT=7
C*** NEVER USE AN IOUT<100 (SEE USER'S MANUAL SECTION 3.6.1)
C   OPEN (UNIT=IOUT, STATUS='UNKNOWN',
C   + FILE='/usr/people/aravas/umat/umat2.out')
C
C   IF (IWR.NE.0) THEN
C     WRITE (IOUT, *)
C     WRITE (IOUT, *) 'NOEL, NPT'
C     WRITE (IOUT, 1002) NOEL, NPT
C   END IF
C
C   IF (TIME (1).EQ.0.D0) THEN
C     CALL INITIA (AIMX, NTENS*NTENS)
C     CALL INITIA (AJMX, NTENS*NTENS)
C     DO I=1, NDI
C       AIMX (I, I)=1.D0
C     END DO
C     DO I=NDI+1, NTENS
C       AIMX (I, I)=0.5D0
C     END DO
C     DO I=1, NDI
C     DO J=1, NDI
C       AJMX (I, J)=1.D0/3.D0
C     END DO
C     END DO
C     DO I=1, NTENS
C     DO J=1, NTENS
C       AKMX (I, J)=AIMX (I, J)-AJMX (I, J)
C     END DO
C     END DO
C   END IF
C
C   E=PROPS (1)
C   ANU=PROPS (2)
C   SIG0=PROPS (3)

```

```

EXPO=PROPS(4)
G=E/(2.DO*(1.DO+ANU))
AK=E/(3.DO*(1.DO-2.DO*ANU))
E0=SIG0/E
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'E,ANU,SIG0,EXPO,G,AK,E0'
  WRITE(IOUT,1001) E,ANU,SIG0,EXPO,G,AK,E0
END IF
C
EBART=STATEV(1)
YFLAG=STATEV(2)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'EBART,YFLAG'
  WRITE(IOUT,1001) EBART,YFLAG
END IF
C
C*** UN-ROTATE STRESSES
C
CALL ZTRANPOSE(DROT,DROTTRAN,3)
CALL ZROTSTRS(STRESS,DROTTRAN,QMX,NTENS)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'UN-ROTATED STRESSES'
  WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I), I=1,NTENS)
END IF
C
C*** FORM ELASTIC STIFFNESS
C
Z1=2.DO*G
Z2=3.DO*AK
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    CEL(I,J)=Z1*AKMX(I,J)+Z2*AJMX(I,J)
  END DO
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'CEL'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (CEL(I,J),J=1,NTENS)
  END DO
END IF
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD0'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD0(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD1(I,J),J=1,3)
  ENDDO
END IF
C
AUX=0.DO
DO I=1,3
  DO J=1,3
    AUX=AUX+DABS(DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J))
  END DO
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1-DFGRD0'
  WRITE(IOUT,1001) AUX
END IF
IF (AUX.NE.0.DO) GOTO 29
C
C*** DE=0 NEEDS DDSDE ONLY
C
IF (YFLAG.EQ.0) THEN
C*** ELASTICITY
  CALL ZCOPY(CEL,DDSDE,NTENS*NTENS)
ELSE
C*** PLASTICITY
  PT=0.DO
  DO I=1,NDI
    PT=PT+STRESS(I)
  ENDDO
  PT=PT/3.DO
  CALL VDEV(STRESS,SDEV,NDI,NSHR,NTENS)
  CALL ZINVAR(SDEV,P,SBAR,NDI,NSHR,NTENS)

```

```

AUX=1.5D0/SBAR
DO I=1,NTENS
  AN(I)=AUX*SDEV(I)
END DO
CALL YCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'EBART, YIELD, H'
  WRITE(IOUT,1001) EBART, YIELD, H
END IF
AUX=4.D0*G*G/(3.D0*G+H)
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=CEL(I,J)-AUX*AN(I)*AN(J)
  END DO
END DO
END IF
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DEMAG=0, DDSDE'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
  END DO
END IF
C
GOTO 9999
C
29 CONTINUE
C
C*** INTEGRATE ELASTOPLASTIC EQUATIONS
C
CALL ZCOPY(DFGRD0,DFGINV,3*3)
C*** LAPACK library
C*** f77 eshelby.f -lcomplib.sgmith
M=3
N=3
LDA=3
LWORK=3
CALL DGETRF(M,N,DFGINV,LDA,IPIV,INFO)
CALL DGETRI(N,DFGINV,LDA,IPIV,WORK,LWORK,INFO)
C
CALL MULT(DFGRD1,DFGINV,DF,3,3,3)
CALL POLAR(DF,R,U,V)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DF'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DF(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'R'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (R(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'U'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (U(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'V'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (V(I,J),J=1,3)
  ENDDO
END IF
C
CALL ZCOPY(U,UMI1,3*3)
DO I=1,3
  UMI1(I,I)=UMI1(I,I)-1.D0
ENDDO
CALL MULT(UMI1,UMI1,UMI2,3,3,3)
CALL MULT(UMI2,UMI1,UMI3,3,3,3)
CALL MULT(UMI3,UMI1,UMI4,3,3,3)
DO I=1,3
  DO J=1,3
    DETENS(I,J)=UMI1(I,J)-UMI2(I,J)/2.D0+UMI3(I,J)/3.D0
    * -UMI4(I,J)/4.D0
  ENDDO
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DETENS'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DETENS(I,J),J=1,3)
  ENDDO

```

```

      ENDDO
      END IF
C
      CALL TTOV(DETENS,DE,NDI,NSHR,NTENS)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DE VECTOR (TENSOR SHEAR COMPONENTS)'
        WRITE(IOUT,1001) (DE(I),I=1,NTENS)
      END IF
C
      DEMAG=0.D0
      DO I=1,NDI
        DEMAG=DEMAG+DE(I)*DE(I)
      END DO
      DO I=1,NSHR
        DEMAG=DEMAG+2.D0*DE(NDI+I)*DE(NDI+I)
      END DO
      DEMAG=DSQRT(2.D0*DEMAG/3.D0)
      DETOL=DEMAG*1.D-6
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DEMAG'
        WRITE(IOUT,1001) DEMAG
        WRITE(IOUT,*) 'DETOL'
        WRITE(IOUT,1001) DETOL
      END IF
C
      CALL ZINVAR(STRESS,PT,SBART,NDI,NSHR,NTENS)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'EBART, PT, SBART'
        WRITE(IOUT,1001) EBART, PT, SBART
      END IF
C
      DEKK=0.D0
      DO I=1,NDI
        DEKK=DEKK+DE(I)
      END DO
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DEKK'
        WRITE(IOUT,1001) DEKK
      END IF
C
      DP=AK*DEKK
      P=PT+DP
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DP,P'
        WRITE(IOUT,1001) DP,P
      END IF
C
      CALL VDEV(STRESS,SDEVT,NDI,NSHR,NTENS)
      CALL VDEV(DE,DEDEV,NDI,NSHR,NTENS)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DEDEV'
        WRITE(IOUT,1001) (DEDEV(I),I=1,NTENS)
        WRITE(IOUT,*) 'SDEVT'
        WRITE(IOUT,1001) (SDEVT(I),I=1,NTENS)
      END IF
C
      DO I=1,NTENS
        SEL(I)=SDEVT(I)+2.D0*G*DEDEV(I)
      END DO
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'SEL'
        WRITE(IOUT,1001) (SEL(I),I=1,NTENS)
      END IF
C
      CALL ZINVAR(SEL,PEL,QEL,NDI,NSHR,NTENS)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'QEL'
        WRITE(IOUT,1001) QEL
      END IF
C
C*** CHECK FOR YIELDING
      CALL YCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'EBART, YIELD, H'
        WRITE(IOUT,1001) EBART, YIELD, H
      END IF
      IF (QEL.LE.YIELD) GOTO 1000
      IF (QEL.GT.YIELD) GOTO 2000

```



```

C
C*** ELASTICITY
C
1000 CONTINUE
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'ELASTICITY'
  CALL ZCOPY(SEL,STRESS,NTENS)
  DO I=1,NDI
    STRESS(I)=STRESS(I)+P
  END DO
C
C*** ROTATE STRESS VECTOR
C
  CALL ZROTSTRS(STRESS,R,QMX,NTENS)
  STATEV(2)=0.D0
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'STRESS'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
  END IF
  SSE=QEL*QEL/(6.D0*G)+P*P/(2.D0*AK)
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC STRAIN ENERGY'
    WRITE(IOUT,1001) SSE
  END IF
C*** ELASTIC JACOBIAN
  CALL ZCOPY(CEL,DDSDDE,NTENS*NTENS)
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC DDSDDE'
    DO I=1,NTENS
      WRITE(IOUT,1001) (DDSDDE(I,J),J=1,NTENS)
    END DO
  END IF
  GOTO 9999
C
C*** PLASTICITY
C
2000 CONTINUE
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'PLASTICITY'
C
C*** DETERMINE DEBAR
C
  CALL YCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
  DEBAR=(QEL-YIELD)/(3.D0*G+H)
  EBAR=EBART+DEBAR
  WRITE(IOUT,*) 'FIRST ESTIMATE FOR DEBAR,EBAR'
  WRITE(IOUT,1001) DEBAR,EBAR
C
  TOL=SIG0*1.D-4
  DO ILOOP=1,20
    CALL YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
    F=QEL-3.D0*G*DEBAR-YIELD
    IF (DABS(F).LT.TOL) GOTO 2011
    FP=-3.D0*G-H
    DDE=-F/FP
    DEBAR=DEBAR+DDE
    EBAR=EBART+DEBAR
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'F,FP'
      WRITE(IOUT,1001) F,FP
    END IF
  END DO
  WRITE(IOUT,*) 'NEWTON LOOP IN UMAT DOES NOT CONVERGE'
  STOP
2011 CONTINUE
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'NEWTON ITERATIONS FOR DE = ', ILOOP
    WRITE(IOUT,*) 'DEBAR,EBAR'
    WRITE(IOUT,1001) DEBAR,EBAR
  END IF
C
  AUX=1.5D0/QEL
  DO I=1,NTENS
    AN(I)=AUX*SEL(I)
  END DO
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'AN'
    WRITE(IOUT,1001) (AN(I),I=1,NTENS)
  END IF

```

```

C
DO I=1,NTENS
  SDEV(I)=SEL(I)-2.D0*G*DEBAR*AN(I)
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'SDEV'
  WRITE(IOUT,1001) (SDEV(I),I=1,4)
END IF

C
CALL ZCOPY(SDEV,STRESS,NTENS)
DO I=1,NDI
  STRESS(I)=STRESS(I)+P
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'STRESS'
  WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
END IF

C
C*** ROTATE STRESS AND AN
C
CALL ZROTSTRS(STRESS,R,QMX,NTENS)
CALL ZROTSTRS(AN,R,QMX,NTENS)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'ROTATED STRESS VECTOR'
  WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
  WRITE(IOUT,*) 'ROTATED AN VECTOR'
  WRITE(IOUT,1001) (AN(I),I=1,NTENS)
END IF

C
C*** UPDATE STATE VARIABLES
C
STATEV(1)=EBAR
STATEV(2)=1.D0

C
SSE=YIELD*YIELD/(6.D0*G)+P*P/(2.D0*AK)
SPD=SPD+0.5D0*(SBART+YIELD)*DEBAR
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC STRAIN ENERGY, PLASTIC DISSIPATION'
  WRITE(IOUT,1001) SSE,SPD
END IF

C
C*** PLASTIC JACOBIAN
C
IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC JACOBIAN'

C
A1=4.D0*G*G/(3.D0*G+H)
A2=2.D0*G*G*DEBAR/QEL
DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=CEL(I,J)-A1*AN(I)*AN(J)+
+      A2*(2.D0*AN(I)*AN(J)-3.D0*AKMX(I,J))
  END DO
END DO

C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC DDSDE'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
  END DO
END IF

C
C
C
9999 CONTINUE
C
RETURN
1001 FORMAT(1P8E13.5)
1002 FORMAT(10I5)
END

C
C*****
C
SUBROUTINE YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
IF(EXPO.GT.50.D0) THEN
  YIELD=SIG0

```

```

      H=0.D0
      ELSE
        YIELD=SIG0*(EBAR/E0+1.D0)**(1.D0/EXPO)
        H=YIELD/(EXPO*(E0+EBAR))
      END IF
      RETURN
    END
  C
  C*****
  C
  SUBROUTINE ZINVAR(S,P,Q,NDI,NSHR,NTENS)
  C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION S(NTENS),SDEV(6)
  C
  P=0.D0
  DO I=1,NDI
    P=P+S(I)
  END DO
  P=P/3.D0
  C
  CALL ZCOPY(S,SDEV,NTENS)
  DO I=1,NDI
    SDEV(I)=SDEV(I)-P
  END DO
  AUX=0.D0
  DO I=1,NDI
    AUX=AUX+SDEV(I)*SDEV(I)
  END DO
  DO I=NDI+1,NTENS
    AUX=AUX+2.D0*SDEV(I)*SDEV(I)
  END DO
  Q=DSQRT(1.5D0*AUX)
  C
  RETURN
  END
  C
  C*****
  C
  SUBROUTINE POLAR(F,R,U,V)
  C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  C
  DIMENSION F(3,3),R(3,3),U(3,3),V(3,3)
  DIMENSION FT(3,3),C(3,3),C2(3,3),AL(3),AI(3,3),UINV(3,3),RT(3,3)
  C
  PI=4.D0*DATAN(1.D0)
  CALL INITIA(AI,3*3)
  DO I=1,3
    AI(I,I)=1.D0
  END DO
  C
  CALL ZTRANSPOSE(F,FT,3)
  CALL MULT(FT,F,C,3,3,3)
  C
  CALL MULT(C,C,C2,3,3,3)
  TR1=C(1,1)+C(2,2)+C(3,3)
  TR2=C2(1,1)+C2(2,2)+C2(3,3)
  DET=C(1,1)*(C(2,2)*C(3,3)-C(3,2)*C(2,3))
+   -C(1,2)*(C(2,1)*C(3,3)-C(3,1)*C(2,3))
+   +C(1,3)*(C(2,1)*C(3,2)-C(3,1)*C(2,2))
  C
  AI1=TR1
  AI2=0.5D0*(TR1*TR1-TR2)
  AI3=DET
  C
  B=AI2-AI1*AI1/3.D0
  D=- (2.D0/27.D0)*AI1**3+AI1*AI2/3.D0-AI3
  C
  IF (DABS(B).LT.1.D-6) THEN
    AUX=AI1/3.D0
    AL(1)=AUX
    AL(2)=AUX
    AL(3)=AUX
  ELSE
    AM=2.D0*DSQRT(-B/3.D0)
    AN=3.D0*D/(AM*B)
    AUX=1.D0-AN*AN
  END IF

```

```

      IF(AUX.LT.0.D0) THEN
        IF(AN.GT.1.D0) T=0.D0
        IF(AN.LT.(-1.D0)) T=PI/3.D0
      ELSE
        T=DATAN2(DSQRT(AUX),AN)/3.D0
      END IF
    DO I=1,3
      X=AM*DCOS(T+2.D0*(I-1)*PI/3.D0)
      AL(I)=X+AI1/3.D0
    END DO
  END IF

C
  DO I=1,3
    AL(I)=DSQRT(AL(I))
  END DO

C
  BI1=AL(1)+AL(2)+AL(3)
  BI2=AL(1)*AL(2)+AL(2)*AL(3)+AL(3)*AL(1)
  BI3=AL(1)*AL(2)*AL(3)
  DD=BI1*BI2-BI3

C
  AUX1=BI1*BI1-BI2
  AUX2=BI1*BI3
  DO I=1,3
    DO J=1,3
      U(I,J)=(-C2(I,J)+AUX1*C(I,J)+AUX2*AI(I,J))/DD
      UINV(I,J)=(C(I,J)-BI1*U(I,J)+BI2*AI(I,J))/BI3
    END DO
  END DO

C
  CALL MULT(F,UINV,R,3,3,3)
  CALL ZTRANSPOSE(R,RT,3)
  CALL MULT(F,RT,V,3,3,3)

C
  RETURN
  END

C
C*****
C
  SUBROUTINE TTOV(T,V,NDI,NSHR,NTENS)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
  DIMENSION T(3,3),V(1)
C
  DO I=1,NDI
    V(I)=T(I,I)
  END DO
  DO I=1,NSHR
    IF (I.EQ.1) AUX=T(1,2)
    IF (I.EQ.2) AUX=T(1,3)
    IF (I.EQ.3) AUX=T(2,3)
    V(NDI+I)=AUX
  END DO

C
  RETURN
  END

C
C*****
C
  SUBROUTINE VDEV(A,ADEV,NDI,NSHR,NTENS)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
  DIMENSION A(NTENS),ADEV(NTENS)
C
  P=0.D0
  DO I=1,NDI
    P=P+A(I)
  END DO
  P=P/3.D0

C
  CALL ZCOPY(A,ADEV,NTENS)
  DO I=1,NDI
    ADEV(I)=ADEV(I)-P
  END DO

C
  RETURN

```

```

END
C
C*****
C
SUBROUTINE MULT(A,B,C,L,M,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(L,M),B(M,N),C(L,N)
C
DO I=1,L
DO J=1,N
AUX=0.D0
DO K=1,M
AUX=AUX+A(I,K)*B(K,J)
END DO
C(I,J)=AUX
END DO
END DO
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE INITIA(A,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(1)
C
DO I=1,N
A(I)=0.D0
END DO
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE ZCOPY(A,B,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(1),B(1)
C
DO I=1,N
B(I)=A(I)
END DO
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE ZTRANSPOSE(A,AT,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(N,N),AT(N,N)
C
DO I=1,N
DO J=1,N
AT(I,J)=A(J,I)
END DO
END DO
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE ZROTSTRS(A,R,QMX,NTENS)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(NTENS),R(3,3),QMX(4,4),AUX(6)

```

```

      CALL INITIA(QMX,4*4)
      DO I=1,3
      DO J=1,3
        QMX(I,J)=R(I,J)**2
      END DO
      END DO
C
      QMX(1,4)=2.D0*R(1,1)*R(1,2)
      QMX(2,4)=2.D0*R(2,1)*R(2,2)
      QMX(3,4)=2.D0*R(3,1)*R(3,2)
C
      QMX(4,1)=R(1,1)*R(2,1)
      QMX(4,2)=R(1,2)*R(2,2)
      QMX(4,3)=R(1,3)*R(2,3)
C
      QMX(4,4)=R(1,2)*R(2,1)+R(2,2)*R(1,1)
C
      CALL MULT(QMX,A,AUX,NTENS,NTENS,1)
      CALL ZCOPY(AUX,A,NTENS)
C
      RETURN
      END
C
C*****
C

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Η umat υπορουτίνα kinem_finite

```

SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDD, SSE, SPD, SCD,
+RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
+STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
+NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
+CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
C
C
C
C   Finite strain kinematic power-law hardening
C   Large displacement theory
C   If EXPO>50, then perfect plasticity is assumed
C   MARCH 2001
C
C
C   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C   CHARACTER*80 CMNAME
C
C   DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
+DDSDD (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),
+STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),
+PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3)
C
C*** For 3D problems
C   DIMENSION CEL (6, 6), QMX (6, 6), AIMX (6, 6), AJMX (6, 6), AKMX (6, 6)
C   DIMENSION CEL (4, 4), QMX (4, 4), AIMX (4, 4), AJMX (4, 4), AKMX (4, 4)
C
C   DIMENSION DEDEV (6), SDEVT (6), SEL (6), SDEV (6), AN (6),
+ADEV (6), ADEVT (6), DIFF (6), A (6), B (6), S (6)
C
C   DIMENSION DF (3, 3), R (3, 3), RT (3, 3), U (3, 3), V (3, 3), DFGINV (3, 3),
+DETENS (3, 3), DE (6), UMI1 (3, 3), UMI2 (3, 3), UMI3 (3, 3), UMI4 (3, 3),
+DROTTRAN (3, 3), IPIV (10), WORK (10)
C
C   COMMON/NICK/AIMX, AJMX, AKMX
C
C*** STATE VARIABLES
C
C STATEV (1)=EBAR
C STATEV (2)=YFLAG (0=ELASTICITY, 1=PLASTICITY)
C STATEV (3--2+NTENS)=ADEV
C
C   IWR=0
C   IF (NOEL.EQ.1.AND.NPT.EQ.1) IWR=1
C*** IOUT=7 WRITES ON THE .msg FILE
C   IOUT=7
C*** NEVER USE AN IOUT<100 (SEE USER'S MANUAL SECTION 3.6.1)
C   OPEN (UNIT=IOUT, STATUS='UNKNOWN',
+FILE='/usr/people/olga')
C
C   IF (IWR.NE.0) WRITE (IOUT, *)
C   IF (IWR.NE.0) WRITE (IOUT, *) 'NOEL, NPT'
C   IF (IWR.NE.0) WRITE (IOUT, 1002) NOEL, NPT
C
C   IF (TIME (1).EQ.0.D0) THEN
C     CALL INITIA (AIMX, NTENS*NTENS)
C     CALL INITIA (AJMX, NTENS*NTENS)
C     DO I=1, NDI
C       AIMX (I, I)=1.D0
C     END DO
C     DO I=NDI+1, NTENS
C       AIMX (I, I)=0.5D0
C     END DO
C     DO I=1, NDI
C     DO J=1, NDI
C       AJMX (I, J)=1.D0/3.D0
C     END DO
C     END DO
C     DO I=1, NTENS
C     DO J=1, NTENS
C       AKMX (I, J)=AIMX (I, J)-AJMX (I, J)
C     END DO
C     END DO
C   END IF
C
C   E=PROPS (1)
C   ANU=PROPS (2)
C   SIG0=PROPS (3)
C   EXPO=PROPS (4)

```



```

AC=PROPS(5)
AV=PROPS(6)
G=E/(2.D0*(1.D0+ANU))
AK=E/(3.D0*(1.D0-2.D0*ANU))
E0=SIG0/E
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'E,ANU,SIG0,EXPO,G,AK,E0,AC,AV'
  WRITE(IOUT,1001) E,ANU,SIG0,EXPO,G,AK,E0,AC,AV
END IF
C
EBART=STATEV(1)
YFLAG=STATEV(2)
DO I=1,NTENS
  ADEVT(I)=STATEV(2+I)
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'EBART,YFLAG'
  WRITE(IOUT,1001) EBART,YFLAG
  WRITE(IOUT,*) 'ADEVT'
  WRITE(IOUT,1001) (ADEVT(I),I=1,NTENS)
END IF
C
C*** UN-ROTATE STRESSES
C
CALL ZTRANSPOSE(DROT,DROTTRAN,3)
CALL ZROTSTRS(STRESS,DROTTRAN,QMX,NTENS)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'UN-ROTATED STRESSES'
  WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
END IF
C
C -----FORM ELASTIC STIFFNESS-----
C
Z1=2.D0*G
Z2=3.D0*AK
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
  CEL(I,J)=Z1*AKMX(I,J)+Z2*AJMX(I,J)
END DO
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'CEL'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (CEL(I,J),J=1,NTENS)
  END DO
END IF
C -----END OF TASK -----
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD0'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD0(I,J),J=1,3)
  END DO
END IF
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD1(I,J),J=1,3)
  END DO
END IF
C ----- ( Fn+1 - Fn ) -----
AUX=0.D0
DO I=1,3
DO J=1,3
  AUX=AUX+DABS(DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J))
END DO
END DO
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1-DFGRD0'
  WRITE(IOUT,1001) AUX
END IF
IF(AUX.NE.0.D0) GOTO 29
C
C ***** DE=0 NEEDS DDSDE ONLY *****
C
IF(YFLAG.EQ.0) THEN

```

```

C***ELASTICITY
  CALL ZCOPY (CEL, DDSDE, NTENS*NTENS)
  ELSE
C***PLASTICITY
  PT=0.0
  DO I=1, NDI
    PT=PT+STRESS (I)
  END DO
  PT=PT/3.0
  CALL VDEV (STRESS, SDEV, NDI, NSHR, NTENS)
  CALL ZINVAR (SDEV, ADEV, P, SBAR, NDI, NSHR, NTENS)
  AUX=1.5D0/SBAR
  DO I=1, NTENS
    AN (I)=AUX*(SDEV (I)-ADEV (I))
  END DO
C
  OM=ADEV (4)*(AN (1)-AN (2))+AN (4)*(ADEV (2)-ADEV (1))
  HBAR=2.0*AV*OM*OM
  CALL YCURVE (YIELD, H, EBART, EXPO, E0, SIG0)
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE (IOUT, *) 'EBART, YIELD, H, OM, HBAR'
    WRITE (IOUT, 1001) EBART, YIELD, H, OM, HBAR
  END IF
  AUX=4.0D0*G*G/(3.0D0*G+H+1.5D0*AC+HBAR)
  DO I=1, NTENS
    DO J=1, NTENS
      DDSDE (I, J)=CEL (I, J)-AUX*AN (I)*AN (J)
    END DO
  END DO
C
  END IF
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE (IOUT, *) 'DEMAG=0, DDSDE'
    DO I=1, NTENS
      WRITE (IOUT, 1001) (DDSDE (I, J), J=1, NTENS)
    END DO
  END IF
C
  GOTO 9999
C
29  CONTINUE
C
C*****INTEGRATE ELASTOPLASTIC EQUATIONS*****
C
  CALL ZCOPY (DFGRD0, DFGINV, 3*3)
C*** LAPACK library
C*** f77 eshelby.f -lcomplib.sgmath
  M=3
  N=3
  LDA=3
  LWORK=3
  CALL DGETRF (M, N, DFGINV, LDA, IPIV, INFO)
  CALL DGETRI (N, DFGINV, LDA, IPIV, WORK, LWORK, INFO)
C
  CALL MULT (DFGRD1, DFGINV, DF, 3, 3, 3)
  CALL POLAR (DF, R, U, V)
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE (IOUT, *) 'DF'
    DO I=1, 3
      WRITE (IOUT, 1001) (DF (I, J), J=1, 3)
    ENDDO
    WRITE (IOUT, *) 'R'
    DO I=1, 3
      WRITE (IOUT, 1001) (R (I, J), J=1, 3)
    ENDDO
    WRITE (IOUT, *) 'U'
    DO I=1, 3
      WRITE (IOUT, 1001) (U (I, J), J=1, 3)
    ENDDO
    WRITE (IOUT, *) 'V'
    DO I=1, 3
      WRITE (IOUT, 1001) (V (I, J), J=1, 3)
    ENDDO
  END IF
C
  CALL ZCOPY (U, UMI1, 3*3)
  DO I=1, 3

```

```

      UMI1(I,I)=UMI1(I,I)-1.D0
    END DO
    CALL MULT(UMI1,UMI1,UMI2,3,3,3)
    CALL MULT(UMI2,UMI1,UMI3,3,3,3)
    CALL MULT(UMI3,UMI1,UMI4,3,3,3)
    DO I=1,3
    DO J=1,3
      DETENS(I,J)=UMI1(I,J)-UMI2(I,J)/2.D0+UMI3(I,J)/3.D0
+      -UMI4(I,J)/4.D0
    END DO
    END DO
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DETENS'
      DO I=1,3
        WRITE(IOUT,1001) (DETENS(I,J),J=1,3)
      END DO
    END IF
C
    CALL TTOV(DETENS,DE,NDI,NSHR,NTENS)
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DE'
      WRITE(IOUT,1001) (DE(I),I=1,NTENS)
    END IF
C
    PT=0.D0
    DO I=1,NDI
      PT=PT+STRESS(I)
    END DO
    PT=PT/3.D0
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'PT'
      WRITE(IOUT,1001) PT
    END IF
C
    DEKK=0.D0
    DO I=1,NDI
      DEKK=DEKK+DE(I)
    END DO
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DEKK'
      WRITE(IOUT,1001) DEKK
    END IF
C
    DP=AK*DEKK
    P=PT+DP
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DP,P'
      WRITE(IOUT,1001) DP,P
    END IF
C
    CALL VDEV(STRESS,SDEVT,NDI,NSHR,NTENS)
    CALL VDEV(DE,DEDEV,NDI,NSHR,NTENS)
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DEDEV'
      WRITE(IOUT,1001) (DEDEV(I),I=1,NTENS)
      WRITE(IOUT,*) 'SDEVT'
      WRITE(IOUT,1001) (SDEVT(I),I=1,NTENS)
    END IF
C
    DO I=1,NTENS
      SEL(I)=SDEVT(I)+2.D0*G*DEDEV(I)
    END DO
    IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'SEL'
    IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) (SEL(I),I=1,NTENS)
C
    CALL ZINVAR(SEL,ADEV,PEL,QEL,NDI,NSHR,NTENS)
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'QEL'
      WRITE(IOUT,1001) QEL
    END IF
C
C*****CHECK FOR YIELDING*****
C
    CALL YCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'EBART,YIELD,H'
      WRITE(IOUT,1001) EBART,YIELD,H
    END IF

```

```

      IF(QEL.LE.YIELD) GOTO 1000
      IF(QEL.GT.YIELD) GOTO 2000
C
C ***ELASTICITY
C
1000 CONTINUE
      IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'ELASTICITY'
      CALL ZCOPY(SEL,STRESS,NTENS)
      DO I=1,NDI
          STRESS(I)=SEL(I)+P
      END DO
C*** ADEV DOES NOT CHANGE IN ELASTICITY
C
C*** ROTATE STRESS VECTOR
C
      CALL ZROTSTRS(STRESS,R,QMX,NTENS)
      STATEV(2)=0.D0
      IF (IWR.NE.0) THEN
          WRITE(IOUT,*) 'STRESS'
          WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
      END IF
      SSE=QEL*QEL/(6.D0*G)+P*P/(2.D0*AK)
      IF (IWR.NE.0) THEN
          WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC STRAIN ENERGY'
          WRITE(IOUT,1001) SSE
      END IF
C
C*** ELASTIC JACOBIAN
      CALL ZCOPY(CEL,DDSDDE,NTENS*NTENS)
C
      IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC DDSDE'
      DO I=1,NTENS
          IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) (DDSDDE(I,J),J=1,NTENS)
      END DO
C
      GOTO 9999
C
C
C*** PLASTICITY
C
2000 CONTINUE
      IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'PLASTICITY'
C
      IF(YFLAG.EQ.0.D0) THEN
C*** FIND ELASTIC FRACTION
C
          DO I=1,NTENS
              S(I)=SDEV(T(I))-ADEVT(I)
          END DO
C
          CALL ZADOTB(DEDEV,DEDEV,A1,NDI,NSHR,NTENS)
          A1=6.D0*G*G*A1
          CALL ZADOTB(S,DEDEV,B1,NDI,NSHR,NTENS)
          B1=6.D0*G*B1
          CALL ZADOTB(S,S,C1,NDI,NSHR,NTENS)
          C1=1.5D0*C1-YIELD*YIELD
C
          FRACT=1.D0/(2.D0*A1)*(-B1+DSQRT(B1*B1-4.D0*A1*C1))
          DO I=1,NTENS
              SDEV(T(I))=SDEV(T(I))+FRACT*2.D0*G*DEDEV(I)
          END DO
          DO I=1,NTENS
              DEDEV(I)=(1.D0-FRACT)*DEDEV(I)
          END DO
C
          CALL ZINVAR(SDEV(T),ADEVT,PT,SBART,NDI,NSHR,NTENS)
          PHIT=SBART-YIELD
          IF (IWR.NE.0) THEN
              WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC FRACTION'
              WRITE(IOUT,1001) FRACT
              WRITE(IOUT,*) 'NEW SDEV(T)'
              WRITE(IOUT,1001) (SDEV(T(I)),I=1,NTENS)
              WRITE(IOUT,*) 'NEW EVT'
              WRITE(IOUT,1001) (DEDEV(I),I=1,NTENS)
              WRITE(IOUT,*) 'NEW PHIT'
              WRITE(IOUT,1001) PHIT
          END IF
      END IF

```

```

C
C*** DETERMINE DEBAR
C
  CALL ZINVAR(SDEVT,ADEVT,PT,SBART,NDI,NSHR,NTENS)
  AUX=1.5D0/SBART
  DO I=1,NTENS
    AN(I)=AUX*(SDEVT(I)-ADEVT(I))
  END DO
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'AN'
    WRITE(IOUT,1001) (AN(I),I=1,NTENS)
  END IF

C
  OM=ADEVT(4)*(AN(1)-AN(2))+AN(4)*(ADEVT(2)-ADEVT(1))
  OP=AV*OM
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'OM, OP'
    WRITE(IOUT,1001) OM,OP
  END IF

C
  AA=2.D0*ADEVT(4)*OP
  A(1)=AC*AN(1)+AA
  A(2)=AC*AN(2)-AA
  A(3)=AC*AN(3)
  A(4)=AC*AN(4)+(ADEVT(2)-ADEVT(1))*OP
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'A'
    WRITE(IOUT,1001) (A(I),I=1,NTENS)
  END IF

  DO I=1,NTENS
    B(I)=2.D0*G*AN(I)+A(I)
  END DO

C
  CALL ZADOTB(B,B,A2,NDI,NSHR,NTENS)
  A2=1.5D0*A2

C
  DO I=1,NTENS
    DIFF(I)=SEL(I)-ADEVT(I)
  END DO

C
  CALL ZADOTB(DIFF,B,B2,NDI,NSHR,NTENS)
  B2=3.D0*B2

C
  CALL ZADOTB(DIFF,DIFF,C2,NDI,NSHR,NTENS)
  C2=1.5D0*C2

C
  HBAR=2.D0*AV*OM*OM
  AUX=3.D0*G+H+1.5D0*AC+HBAR
  CALL ZADOTB(AN,DEDEV,SUM,NDI,NSHR,NTENS)
  DEBAR=2.D0*G*SUM/AUX
C
  DEBAR=1.D0/(2.D0*A2)*(B2+DSQRT(B2*B2-4.D0*A2*(C2-YIELD*YIELD)))
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'FIRST ESTIMATE FOR DEBAR'
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) DEBAR
  EBAR=EBART+DEBAR

C
C*** NEWTON LOOP
C
  TOL=SIG0*1.D-4
  DO ILOOP=1,50
    CALL YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
    F=DEBAR*(A2*DEBAR-B2)+C2-YIELD*YIELD
    IF (IWR.NE.0) THEN
      WRITE(IOUT,*) 'DEBAR, F'
      WRITE(IOUT,1001) DEBAR,F
    END IF
    IF (DABS(F).LT.TOL) GOTO 2011
    FP=2.D0*A2*DEBAR-B2-2.D0*YIELD*H
    DDE=-F/FP
    DEBAR=DEBAR+DDE
    EBAR=EBART+DEBAR
  END DO

C
  WRITE(IOUT,*) 'NEWTON LOOP IN UMAT DOES NOT CONVERGE'
  STOP
2011 CONTINUE
  IF (IWR.NE.0) THEN

```

```

        WRITE(IOUT,*) 'NEWTON ITERATIONS FOR DE=',ILOOP
        WRITE(IOUT,*) 'DEBAR,EBAR'
        WRITE(IOUT,1001) DEBAR,EBAR
END IF
C
DO I=1,NTENS
    ADEV(I)=ADEV(I)+DEBAR*A(I)
    SDEV(I)=SEL(I)-2.D0*G*DEBAR*AN(I)
END DO
C
CALL ZCOPY(SDEV,STRESS,NTENS)
DO I=1,NDI
    STRESS(I)=STRESS(I)+P
END DO
C
IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'SDEV'
    WRITE(IOUT,1001) (SDEV(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'STRESS'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'ADEV'
    WRITE(IOUT,1001) (ADEV(I),I=1,NTENS)
END IF
C
C*** ROTATE STRESS AND ADEV VECTORS
C
CALL ZROTSTRS(STRESS,R,QMX,NTENS)
CALL ZROTSTRS(ADEV,R,QMX,NTENS)
IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'ROTATED STRESS VECTOR'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'ROTATED ADEV VECTOR'
    WRITE(IOUT,1001) (ADEV(I),I=1,NTENS)
END IF
C
C** UPDATE STATE VARIABLES
C
STATEV(1)=EBAR
STATEV(2)=1.D0
DO I=1,NTENS
    STATEV(2+I)=ADEV(I)
END DO
C
C*** PLASTIC JACOBIAN
C
IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC JACOBIAN'
C
CALL ZINVAR(SDEV,ADEV,PT,SBAR,NDI,NSHR,NTENS)
AUX=1.5D0/SBAR
DO I=1,NTENS
    AN(I)=AUX*(SDEV(I)-ADEV(I))
END DO
C
OM=ADEV(4)*(AN(1)-AN(2))+AN(4)*(ADEV(2)-ADEV(1))
HBAR=2.D0*AV*OM*OM
AUX=4.D0*G*G/(3.D0*G+H+1.5D0*AC+HBAR)
DO I=1,NTENS
    DO J=1,NTENS
        DDSDE(I,J)=CEL(I,J)-AUX*AN(I)*AN(J)
    END DO
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC DDSDE'
    DO I=1,NTENS
        WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
    END DO
END IF
C
C
C
9999  CONTINUE
      RETURN
1001  FORMAT(1P8E13.5)
1002  FORMAT(10I5)
      END
C
C *****
C

```

```

SUBROUTINE ZINVAR(S,ADEV,P,Q,NDI,NSHR,NTENS)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION S(NTENS),SDEV(6),ADEV(6),DIFF(6)
C
P=0.D0
DO I=1,NDI
  P=P+S(I)
END DO
P=P/3.D0
C
DO I=1,NTENS
  SDEV(I)=S(I)
END DO
DO I=1,NDI
  SDEV(I)=SDEV(I)-P
END DO
C
DO I=1,NTENS
  DIFF(I)=SDEV(I)-ADEV(I)
END DO
C
CALL ZADOTB(DIFF,DIFF,AUX,NDI,NSHR,NTENS)
Q=DSQRT(1.5D0*AUX)
C
RETURN
END
C
*****
C
SUBROUTINE YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
IF(EXPO.GT.50.D0) THEN
  YIELD=SIG0
  H=0.D0
ELSE
  YIELD=SIG0*(EBAR/E0+1.D0)**(1.D0/EXPO)
  H=YIELD/(EXPO*(E0+EBAR))
END IF
RETURN
END
C
*****
C
SUBROUTINE INITIA(A,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION A(1)
C
DO I=1,N
  A(I)=0.D0
END DO
C
RETURN
END
C
*****
C
SUBROUTINE VDEV(B,BDEV,NDI,NSHR,NTENS)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION B(NTENS),BDEV(NTENS)
C
P=0.D0
DO I=1,NDI
  P=P+B(I)
END DO
P=P/3.D0
C
CALL ZCOPY(B,BDEV,NTENS)
DO I=1,NDI
  BDEV(I)=BDEV(I)-P
END DO
C
RETURN
END
C
*****
C
SUBROUTINE ZCOPY(A,B,N)

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),B(1)
      DO I=1,N
         B(I)=A(I)
      END DO
C
      RETURN
      END
C
C *****
C
      SUBROUTINE POLAR(F,R,U,V)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION F(3,3),R(3,3),U(3,3),V(3,3)
      DIMENSION FT(3,3),C(3,3),C2(3,3),AL(3),AI(3,3),UINV(3,3),RT(3,3)
C
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
      CALL INITIA(AI,3*3)
      DO I=1,3
         AI(I,I)=1.D0
      END DO
C
      CALL ZTRANPOSE(F,FT,3)
      CALL MULT(FT,F,C,3,3,3)
C
      CALL MULT(C,C,C2,3,3,3)
      TR1=C(1,1)+C(2,2)+C(3,3)
      TR2=C2(1,1)+C2(2,2)+C2(3,3)
      DET=C(1,1)*(C(2,2)*C(3,3)-C(3,2)*C(2,3))
+      -C(1,2)*(C(2,1)*C(3,3)-C(3,1)*C(2,3))
+      +C(1,3)*(C(2,1)*C(3,2)-C(3,1)*C(2,2))
C
      AI1=TR1
      AI2=0.5D0*(TR1*TR1-TR2)
      AI3=DET
C
      B=AI2-AI1*AI1/3.D0
      D=- (2.D0/27.D0)*AI1**3+AI1*AI2/3.D0-AI3
C
      IF (DABS(B).LT.1.D-6) THEN
         AUX=AI1/3.D0
         AL(1)=AUX
         AL(2)=AUX
         AL(3)=AUX
      ELSE
         AM=2.D0*DSQRT(-B/3.D0)
         AN=3.D0*D/(AM*B)
         AUX=1.D0-AN*AN
         IF(AUX.LT.0.D0) THEN
            IF(AN.GT.1.D0) T=0.D0
            IF(AN.LT.(-1.D0)) T=PI/3.D0
         ELSE
            T=DATAN2(DSQRT(AUX),AN)/3.D0
         END IF
         DO I=1,3
            X=AM*DCOS(T+2.D0*(I-1)*PI/3.D0)
            AL(I)=X+AI1/3.D0
         END DO
      END IF
C
      DO I=1,3
         AL(I)=DSQRT(AL(I))
      END DO
C
      BI1=AL(1)+AL(2)+AL(3)
      BI2=AL(1)*AL(2)+AL(2)*AL(3)+AL(3)*AL(1)
      BI3=AL(1)*AL(2)*AL(3)
      DD=BI1*BI2-BI3
C
      AUX1=BI1*BI1-BI2
      AUX2=BI1*BI3
      DO I=1,3
         DO J=1,3
            U(I,J)=(-C2(I,J)+AUX1*C(I,J)+AUX2*AI(I,J))/DD
            UINV(I,J)=(C(I,J)-BI1*U(I,J)+BI2*AI(I,J))/BI3
         END DO

```



```

C      END DO
C
C      CALL MULT (F,UINV,R,3,3,3)
C      CALL ZTRANPOSE (R,RT,3)
C      CALL MULT (F,RT,V,3,3,3)
C
C      RETURN
C      END
C
C *****
C
C      SUBROUTINE MULT (A,B,C,L,M,N)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(L,M),B(M,N),C(L,N)
C      DO 10 I=1,L
C      DO 10 J=1,N
C      AUX=0.D0
C      DO K=1,M
C      AUX=AUX+A(I,K)*B(K,J)
C      END DO
C 10 C(I,J)=AUX
C
C      RETURN
C      END
C
C *****
C
C      SUBROUTINE TTOV (T,V,NDI,NSHR,NTENS)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION T(3,3),V(1)
C      DO I=1,NDI
C      V(I)=T(I,I)
C      END DO
C      DO I=1,NSHR
C      IF (I.EQ.1) AUX=T(1,2)
C      IF (I.EQ.2) AUX=T(1,3)
C      IF (I.EQ.3) AUX=T(2,3)
C      V(NDI+I)=AUX
C      END DO
C
C      RETURN
C      END
C
C *****
C
C      SUBROUTINE ZTRANPOSE (A,AT,N)
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION A(N,N),AT(N,N)
C
C      DO I=1,N
C      DO J=1,N
C      AT(I,J)=A(J,I)
C      END DO
C      END DO
C
C      RETURN
C      END
C
C *****
C
C      SUBROUTINE ZROTSTRS (A,R,QMX,NTENS)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION A(NTENS),R(3,3),QMX(4,4),AUX(6)
C
C      CALL INITIA(QMX,4*4)
C      DO I=1,3
C      DO J=1,3
C      QMX(I,J)=R(I,J)**2
C      END DO
C      END DO
C
C      QMX(1,4)=2.D0*R(1,1)*R(1,2)
C      QMX(2,4)=2.D0*R(2,1)*R(2,2)
C      QMX(3,4)=2.D0*R(3,1)*R(3,2)

```

```

C
QMX(4,1)=R(1,1)*R(2,1)
QMX(4,2)=R(1,2)*R(2,2)
QMX(4,3)=R(1,3)*R(2,3)
C
QMX(4,4)=R(1,2)*R(2,1)+R(2,2)*R(1,1)
C
CALL MULT(QMX,A,AUX,NTENS,NTENS,1)
CALL ZCOPY(AUX,A,NTENS)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE ZADOTB(A,B,C,NDI,NSHR,NTENS)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(NTENS),B(NTENS)
C
C=0.D0
C
DO I=1,NDI
  C=C+A(I)*B(I)
END DO
DO I=NDI+1,NTENS
  C=C+2.D0*A(I)*B(I)
END DO
C
RETURN
END
C
C*****

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Το πρόγραμμα large

```

PROGRAM LARGE
IMPLICIT NONE
REAL (8) S11, S22, S12
REAL (8) DS11, DS22, DS12
REAL (8) S11T, S22T, S12T
REAL (8) SBARE, SBARET, EBAR, EBART, DEBAR
REAL (8) G, DG
REAL (8) F, DF, DDE
REAL (8) YIELD, H, EXPO, E0, SIG0, E, ANU, AG
REAL (8) DETOL, Q
INTEGER I, K
OPEN (UNIT=23, FILE='out2.txt')
SIG0=1.0
E=300.0
E0=SIG0/E
ANU=0.3
EXPO=5.0
AG=E/(2.D0*(1.D0+ANU))
DETOL=1.E-06
G=0.0
DG=0.005
S11T=0.0
S22T=0.0
S12T=0.0
C-----ELASTIC AREA-----

DO K=1, 100
G=G+DG
S12=S12T+AG*DG+(DG/2)*(S22T-S11T)
S11=S11T+DG*S12T
S22=S22T-DG*S12T
SBARE=SQRT(3*(S11*S11+S22*S22+S11*S22+S12*S12))
Q=SBARE-SIG0
C WRITE(23, 201) G
C 201 FORMAT('DISPLACEMENT G=', F5.3)
C WRITE(23, 203)
C 203 FORMAT(4X, 'S11', 13X, 'S22', 13X, 'S12')
C WRITE(23, 205) S11, S22, S12
C 205 FORMAT(F10.5, 5X, F10.5, 5X, F10.5)
WRITE(23, 802) S12
802 FORMAT(2X, F10.5)
C -----UPDATE VARIABLES -----
S11T=S11
S22T=S22
S12T=S12

IF(DABS(Q).GE.DETOL) GOTO 301
END DO

301 CONTINUE
C -----PLASTIC AREA-----

EBART=0.0
DO K=1, 100
G=G+DG
IF(G.GE.0.5) GOTO 1000
SBARET=SQRT(3*(S11T*S11T+S22T*S22T+S11T*S22T+S12T*S12T))
C -----DETERMINE DEBAR-----
CALL YCURVE(YIELD, H, EBART, EXPO, E0, SIG0)
DEBAR=(SBARET-YIELD)/(3.D0*AG+H)
EBAR=EBART+DEBAR

DO I=1, 20
S11=S11T*(1-3*AG*DEBAR/SBARET)+DG*S12T
S22=S22T*(1-3*AG*DEBAR/SBARET)-DG*S12T
S12=S12T*(1-3*AG*DEBAR/SBARET)+AG*DG+DG/2*(S22T-S11T)
SBARE=SQRT(3*(S11*S11+S22*S22+S11*S22+S12*S12))

CALL YCURVE(YIELD, H, EBAR, EXPO, E0, SIG0)
F=SBARE-YIELD
DF=3/SBARE*(S11*S11T+S22*S22T+1/2*S11T*S22+1/2*S11*S22T+
&S12*S12T)*(-3*AG/SBARE)-H
DDE=-F/DF

```

```

DEBAR=DEBAR+DDE
EBAR=EBART+DEBAR

IF(DABS(DDE).LT.DETOL) GOTO 501
END DO
PRINT *, 'NEWTON LOOP DOES NOT CONVERGE'
GOTO 1000
501 CONTINUE

C      WRITE(23,601) G
C 601  FORMAT('DISPLACEMENT G=',F5.3)
C      WRITE(23,701)
C 701  FORMAT(4X,'S11',13X,'S22',13X,'S12')
C      WRITE(23,801) S11,S22,S12
C 801  FORMAT(F10.5,5X,F10.5,5X,F10.5)

      WRITE(23,807) S12
807  FORMAT(2X, F10.5)
C -----UPDATE VARIABLES -----
      S11T=S11
      S22T=S22
      S12T=S12
      EBART=EBAR
C -----END OF TASK -----

      END DO
1000 CONTINUE
      CLOSE(23)
      STOP
      END

C -----
SUBROUTINE YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IF(EXPO.GT.50.D0) THEN
YIELD=SIG0
H=0.D0
ELSE
YIELD=SIG0*(EBAR/E0+1.D0)**(1.D0/EXPO)
H=(SIG0/(E0*EXPO))*(SIG0/YIELD)**(EXPO-1.D0)
END IF
RETURN
END

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Αρχείο δημιουργίας καννάβου για το πρόβλημα της πλάκας με οπή

```

*HEADING
TEST
*RESTART,WRITE,FREQ=1000
**RESTART, READ, STEP=2, INC=76, WRITE, FREQUENCY=1000
**
** NODES
**
*NODE
999, 0., 0.
  1, 1., 0.
  21, 0., 1.
211, 10., 0.
221, 10., 10.
231, 0., 10.
276, 10., 20.
286, 0., 20.
1000, 0., 0.
*NGEN, LINE=C, NSET=INSIDE
1, 21, 1, 999
*NGEN, NSET=MIDSIDE
211, 221, 1
221, 231, 1
*NGEN, NSET=UPOUT
276, 286, 1
*NFILL, BIAS=0.8
INSIDE, MIDSIDE, 10, 21
*NSET, NSET=UPMID, GENERATE
221, 231, 1
*NFILL, BIAS=1.
UPMID, UPOUT, 5, 11
**
** ELEMENTS
**
*ELEMENT, TYPE=CPE4
1, 1,22,23,2
*ELGEN,ELSET=ALLE
1,20,1,1,10,21,20
*ELEMENT, TYPE=CPE4
201, 222,221,232,233
*ELGEN, ELSET=ALLE
201,10,1,1,5,11,10
**
** MATERIAL
**
*SOLID SECTION, ELSET=ALLE,MATERIAL=ONE
*MATERIAL,NAME=ONE
*USER MATERIAL, CONSTANTS=6
300., 0.3, 1., 5., 1., 0.
*DEPVAR
8
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
*NSET, NSET=SIDE1, GENERATE
1, 211, 21
*NSET, NSET=SIDE2, GENERATE
21, 231,21
231,286,11
*BOUNDARY
SIDE1, 2,2
SIDE2, 1,1
**
** TIE TO FAKE NODE 1000
**
*EQUATION
2

```

```

    UPOUT, 2, 1., 1000, 2, -1.
**
** SETS FOR OUTPUT
**
*ELSET, ELSET=WHOLE, GENERATE
1, 20, 1
*NSET, NSET=NWHOLE, GENERATE
1, 42, 1
*NSET, NSET=FAKE
    1000
**
**
**
*STEP, AMPLITUDE=RAMP, INC=3000, NLGEOM
*STATIC
    0.001, 1., , 0.01
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
    1.D-4
*BOUNDARY
    1000, 2, 2, 1.
*OUTPUT, FIELD, FREQUENCY=10, VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT
*NODE OUTPUT
*OUTPUT, HISTORY, FREQUENCY=1
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=WHOLE
    SDV, S22
*NODE OUTPUT, NSET=FAKE
    RF2, U2
*END STEP
**
**
**
*STEP, AMPLITUDE=RAMP, INC=3000, NLGEOM
*STATIC
    0.001, 2., , 0.01
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
    1.D-4
*BOUNDARY
    1000, 2, 2, -1.
*OUTPUT, FIELD, FREQUENCY=10, VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT
*NODE OUTPUT
*OUTPUT, HISTORY, FREQUENCY=1
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=WHOLE
    SDV, S22
*NODE OUTPUT, NSET=FAKE
    RF2, U2
*END STEP
**
**
**
*STEP, AMPLITUDE=RAMP, INC=3000, NLGEOM
*STATIC
    0.001, 2., , 0.01
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
    1.D-4
*BOUNDARY
    1000, 2, 2, 1.
*OUTPUT, FIELD, FREQUENCY=10, VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT
*NODE OUTPUT
*OUTPUT, HISTORY, FREQUENCY=1
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=WHOLE
    SDV, S22
*NODE OUTPUT, NSET=FAKE
    RF2, U2

```


*END STEP

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ARAVAS N and AIFANTIS E C 1991 On the geometry of slip and spin in finite plastic deformation *Int.J.Plasticity* **7** 141-160
- ARAVAS N 1994 Finite-strain anisotropic plasticity and the plastic spin *Modelling Simul.Mater.Sci.Eng* **2** 483-504
- ARAVAS N 1987 On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models *Int.J.Numer.Methods* **24** 1395-1416
- ARAVAS N Use of pressure-dependent plasticity models in abaqus University of Pennsylvania Philadelphia USA
- DAFALIAS Y F, A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations *Dep.Civil Eng. University of California Davis USA* 135-151
- KRATOCHVIL.J. 1973 On a finite strain theory of elastic-inelastic materials Prague, Czechoslovakia **16** 127-142
- RAMASWAMY S and ARAVAS N 1998 Finite element implementation of gradient plasticity models, part I: gradient-dependent yield functions *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg.* 11-32
- SIMO.J.C and TAYLOR.R.L 1986 A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity *Int.J.Numerical methods in engineering* **22** 649-670