Διπλωματική Εργασία

Διερεύνηση της Κατανόησης των Παιδιών Της Έννοιας του Τριγώνου σε Περιβάλλον Οπτικό- Απτικού Υλικού και Δυναμικής Γεωμετρίας

Επιμέλεια Δημουλά Μαρία,

φοιτήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος

Προσχολικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Χρονάκη Άννα

Σεπτέμβριος, 2004

Βόλος

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη δασκάλα για την πολύτιμη και χωρίς προβλήματα συνεργασία μας, αλλά και για τη θετική στάση της τόσο απέναντι σε μένα, όσο και στην ερευνητική εργασία. Ακόμη, χωρίς την πρόθυμη και αυθόρμητη συμμετοχή των παιδιών, θα ήταν αδύνατο να πραγματοποιηθεί η παρούσα έρευνα, οπότε αξίζουν το μεγαλύτερο ευχαριστώ.

Αμέσως μετά, απευθύνω τις ευχαριστίες μου στη κα. Άννα Χρονάκη, επιβλέπουσα καθηγήτρια, που με ιδιαίτερο ζήλο, προσοχή και ουσιαστικά σχόλια με βοήθησε να φέρω σε πέρας την ερευνητική αυτή εργασία. Πρέπει να σημειωθεί, ότι η διάθεση ακόμη και του προσωπικού της χρόνου ήταν απεριόριστη. Θα ήταν η μεγαλύτερη παράλειψή μου, όμως, να μην αναφερθώ στην παροχή, από μέρους της, της μεγάλης βιβλιογραφικής και τεχνολογικής υποστήριξης, γεγονός που διευκόλυνε τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων, όπως και τη συγγραφή της εργασίας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη συμφοιτήτριά μου Διονυσία, που με βοήθησε με ορισμένες από τις βιντεοσκοπήσεις και τον ξάδερφό μου Πέτρο, που επιμελήθηκε την απομόνωση των διάφορων στιγμιότυπων στα βίντεο, για την παραγωγή των φωτογραφιών που περιέχονται στην εργασία.

Στη συνέχεια, θα ήθελε να απευθυνθώ σε όσους με στήριξαν σ΄ αυτή μου την προσπάθεια. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους γονείς μου, που με στηρίζουν πάντα στις επιλογές μου, με την απεριόριστη αγάπη και την πίστη τους, και κάνουν τα πάντα για να με βοηθήσουν. Δεν θα μπορούσα, βέβαια, να ξεχάσω τους θείους μου εδώ στο Βόλο, Βαγγέλη και Θεοδώρα, που έζησαν από κοντά όλη αυτή τη διαδικασία και με στήριξαν ηθικά με το μοναδικό τρόπο που έχουν!

Περιεχόμενα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΕΙΚΟΝΕΣ

ΠΙΝΑΚΕΣ

Κεφ. 1: Εισαγωγή

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της κατανόησης γεωμετρικών εννοιών από παιδιά μικρών ηλικιών και η ανάπτυξη της ικανότητάς τους να διευρύνουν την αντίληψή τους για τις γεωμετρικές έννοιες (δηλ. υιοθετώντας μη- στερεότυπες αναπαραστάσεις). Προς αυτή την κατεύθυνση συγκεκριμένα λογισμικά που αφορούν περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (Cabri, Geometry Sketchpad) υπόσχονται ότι παρέχουν ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη τέτοιων ικανοτήτων τουλάχιστον για παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας. Έτσι, παράλληλος στόχος αποτελεί η αξιολόγηση στην πράξη ενός περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας, ως υποστηρικτικού εργαλείου για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών στις μικρές ηλικίες.

Η παρούσα εργασία δομείται στα ακόλουθα κεφάλαια:
Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και παρατίθεται το θεωρητικό πλαίσιο που στηρίζει την έρευνά μας. Γίνεται αναφορά σε διάφορους θεωρητικούς και αναλύεται λεπτομερώς το μοντέλο van Hiele, που αποτελεί το θεωρητικό σκελετό της έρευνας.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στην ανάπτυξη των γεωμετρικών αντιλήψεων και δεξιοτήτων. Ορίζει τη δυναμική γεωμετρία,, παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά των προγραμμάτων που την υπηρετούν και περιγράφει το λογισμικό του Cabri με τι οποίο εφαρμόστηκε η έρευνα.

Ακολουθεί, στο τέταρτο κεφάλαιο, η ανάλυση των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή στοιχείων και έπειτα περνάμε στην ανάλυση των δεδομένων αυτών. Αναλύονται πρώτα, στο πέμπτο κεφάλαιο, τα δεδομένα που συλλέξαμε με τα έργα πριν την εφαρμογή του προγράμματος της δυναμικής γεωμετρίας, σύμφωνα με τις μεθόδους ανάλυσης που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Και συνεχίζουμε την ανάλυση των στοιχείων που συλλέξαμε από τα έργα στο δυναμικό περιβάλλον του Cabri.

Τα συμπεράσματά μας διαρθρώνονται στο τελευταίο κεφάλαιο, μαζί με τις προτάσεις μας για τη διδασκαλία της γεωμετρίας στις μικρές ηλικίες.

Κεφ. 2: Ανάπτυξη Γεωμετρικής Σκέψης

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης είναι το βασικό θέμα της έρευνας αυτής. Έτσι το κεφάλαιο που ακολουθεί, αποτελεί τον ορισμό της γεωμετρικής σκέψης και αναφέρεται παράλληλα στις διάφορες θεωρίες που σχετίζονται με την ανάπτυξη των χωρικών δεξιοτήτων. Επίσης, γίνεται μια εκτενής αναφορά στο μοντέλο γεωμετρικής σκέψης των van Hiele, καθώς αποτελεί τον βασικό άξονα ανάλυσης της σκέψης των παιδιών στην παρούσα έρευνα.

2.1 Προσεγγίσεις στη μελέτη της Γεωμετρία

Συχνά η γεωμετρία ορίζεται ως η συστηματική μελέτη του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε, ο οποίος λειτουργεί ως εργαλείο για να είμαστε ικανοί να κατανοούμε, να περιγράφουμε και να αλληλεπιδρούμε μέσα σ' αυτόν. Το σχήμα και ο χώρος, καθώς είναι δυο πολύ σχετικές έννοιες ως προς το εύρος και το περιεχόμενό τους, καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα, από το πραγματικό περιβάλλον με τα ορατά και τα απτά αντικείμενα, μέχρι αφηρημένες έννοιες γεωμετρικών αντικειμένων και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Πιο αναλυτικά, η Hershkovits (1991) υποστηρίζει, ότι μπορούμε να δούμε τη γεωμετρία από δυο κύριες προσεγγίσεις. Πρώτον, ως «Επιστήμη του χώρου» που περιλαμβάνει μη-μαθηματικές δραστηριότητες και καθημερινές γεωμετρικές εμπειρίες. Για παράδειγμα ο τρόπος με τον οποίο γεωργοί, μηχανικοί, αρχιτέκτονες, οικοδόμοι, ξυλουργοί, τεχνίτες προσεγγίζουν το χώρο διαφέρει. Πρόκειται για ένα διαισθητικό, ευδιάκριτο και συνδεδεμένο με την πραγματικότητα μέρος των μαθηματικών. Και δεύτερον, η προσέγγιση της γεωμετρίας ως «λογικής δομής», αναφέρεται σε μαθηματικές δομές. Σε ένα πιο προχωρημένο στάδιο, αυτή η προσέγγιση απαιτεί μια πιο ευρεία αντίληψη για τη γεωμετρία, χωρίς την αναγκαία ύπαρξη ενός πραγματικού περιβάλλοντος ως βάση. Έτσι η γεωμετρία αποτελεί τη μελέτη βασικών αντικειμένων του χώρου (σημείο, γραμμή), των συσχετίσεών τους και των μετασχηματισμών τους, καθώς και τα αξιωματικά μαθηματικά συστήματα που έχουν δημιουργηθεί για να τα αντιπροσωπεύουν (π.χ. Το σημείο και η γραμμή αποτελούν αφηρημένες εννοιολογικές οντότητες που δεν ανήκουν στην απτή πραγματικότητα).

Η έρευνα για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, αν θεωρηθεί η τελευταία ως επιστήμη του Χώρου, σχετίζεται άμεσα με την έννοια “visualization”, έναν όρο ο οποίος στην ελληνική γλώσσα μπορεί να αποδοθεί ως οπτικοποίηση, ή με περιγραφικό τρόπο ως σκέψη μέσω οπτικών εικόνων. Ο Efraim Fischbein, από τους πρωτεργάτες της ομάδας P.M.E (Psychology of Mathematics Education), εργάστηκε πολλά χρόνια πάνω στο φαινόμενο της ‘οπτικοποίησης’ και σχετικά πρόσφατα έχει δώσει τη θεωρία του για τις σχηματικές έννοιες (figural concepts) για τη μελέτη διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Σύμφωνα με τη θεωρία του, οι σχηματικές έννοιες είναι αφηρημένες, γενικές, ιδανικές, αγνές, λογικά διαμορφώσιμες οντότητες. Ακόμη, αντανακλούν και μεταχειρίζονται νοερές αναπαραστάσεις χωρικών ιδιοτήτων (όπως το σχήμα, η θέση). Πολύ συχνά, τα σχήματα τείνουν να διατηρούν και να επιβάλλουν στη λογική διαδικασία τα εμφανή αυστηρά χαρακτηριστικά τους, σύμφωνα με τους παγκόσμιους ή γραφικούς περιορισμούς της αναπαράστασης. Συνεπώς, ο εννοιολογικός (αξιωματικός-επαγωγικός) έλεγχος μειώνεται και η διαδικασία επίλυσης ή μετάφρασης καταστρατηγείται. Ο ίδιος σημειώνει σχετικά με τους παράγοντες που επιδρούν στα φαινόμενα της οπτικής αντίληψης ότι: «οι σχηματικές έννοιες είναι φυσικό προϊόν του ανθρώπινου μυαλού ως έννοιες και εικόνες, ή αναπτύσσονται μόνο ως αποτέλεσμα συστηματικής εξάσκησης; Το πρόβλημα είναι δύσκολο να απαντηθεί, επειδή σε πολλές καταστάσεις η υλική πραγματοποίηση και η νοητική αναπαράσταση αποτελούν μέρη της ίδιας απάντησης» (Fischbein, 1993).

2.2 «Ανάπτυξη Χωρικών Δεξιοτήτων»

Οι χωρικές δεξιότητες προσδιορίζονται ως εκείνες οι δεξιότητες που αποκτά ή πρέπει να αποκτήσει το παιδί για να επιλύσει προβλήματα, τα οποία σχετίζονται με τον πραγματικό και νοητό χώρο. Τέτοια προβλήματα είναι ο προσανατολισμός και η απλή κίνηση στο χώρο, η παράκαμψη εμποδίων, η τοποθέτηση αντικειμένων σύμφωνα με κάποιο πλάνο, η «ανάγνωση» τρισδιάστατων ή δισδιάστατων αναπαραστάσεων διαφόρων αντικειμένων του χώρου, κλπ.

Η ανάπτυξη χωρικών δεξιοτήτων είναι αναγκαία προϋπόθεση για την συγκρότηση της χωρικής και γεωμετρικής σκέψης. Η Yakimanskaya (1991) υποστηρίζει ότι: «Η χωρική σκέψη είναι μια μορφή νοητικής δραστηριότητας, η οποία κάνει δυνατή την παραγωγή χωρικών εικόνων (spatial images) και το χειρισμό τους κατά την πορεία επίλυσης ποικίλων πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων». Η ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων συντελείται μέσα από ποικίλες δραστηριότητες, όπως η φυσική αγωγή, η προσέγγιση των φυσικών φαινομένων, το σχέδιο και η ζωγραφική, η επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Η Yakimanskaya (1991) διαπραγματεύεται τη φύση της χωρικής σκέψης μέσα από διάφορες Σοβιετικές μελέτες. Τα αποτελέσματά τους παρατίθενται συνοπτικά:
α. «Η χωρική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από δραστηριότητες: όπου το άτομο πρέπει να σχηματίσει τη δική της/του εικόνα, πριν αυτή μπορέσει να χρησιμοποιηθεί λειτουργικά. (Η δραστηριότητα της χωρικής σκέψης χειρίζεται χωρικές εικόνες , παρά τις δημιουργεί.)
β. Οι αναπαραστάσεις και τα αναπαραστασιακά συστήματα είναι απαραίτητο αλλά σύνθετο συστατικό στοιχείο της χωρικής σκέψης.
γ. Υπάρχουν πολλές ατομικές διαφορές, σχετικά με τις δεξιότητες χωρικής σκέψης.
δ. Η χωρική σκέψη είναι δυναμική και απαιτεί μια συνεχή καταγραφή εικόνων. Οι εικόνες επεξεργάζονται, συντελώντας στη δημιουργία νέων εικόνων, οι οποίες επανεπεξεργάζονται και η κυκλική διαδικασία συνεχίζεται».

Από τα παραπάνω κύρια σημεία, μπορούμε να διακρίνουμε κάποιες συσχετίσεις με την κονστροκτουβιστική προσέγγιση όπου η γεωμετρική σκέψη υποστηρίζεται ως υποκειμενική και βασισμένη στην ενεργή δράση του ατόμου. Σύμφωνα με τις γραμμές του κονστροκτουβισμού, τα σημαντικά χαρακτηριστικά της χωρικής σκέψης υποστηρίζεται ότι βασίζονται σε τρεις διαστάσεις: **1)** το σημειωτικό σύστημα, το οποίο εκφράζεται μέσα από γραφικές, γλωσσικές και οπτικές αναπαραστάσεις, **2)** το ψυχολογικό του περιεχόμενο, ως μια δραστηριότητα εστιασμένη στο να καταγράφει χωρικές εικόνες ποικίλων βαθμών αφαίρεσης, οπτικοποίησης και γενικότητας. και 3) τα λειτουργικά τμήματα-(μονάδες) που απαιτούνται, προκειμένου να επιλυθούν προβλήματα που περιλαμβάνουν: το σχήμα, το μέγεθος, τη χωρική ταξινόμηση στοιχείων και τις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα μέρη και το σύνολο. Όλα μαζί τα παραπάνω χαρακτηριστικά καθορίζουν τα βασικά μονοπάτια για την ανάπτυξη της χωρικής σκέψης σε συγκεκριμένα επίπεδα στη διαδικασία διδασκαλίας (Chronaki, 1997, σ.60).

Η μάθηση λοιπόν της Γεωμετρίας ξεκινά όταν τα παιδιά αρχίζουν να «βλέπουν» και να «γνωρίζουν» τον περιβάλλοντα φυσικό κόσμο και συνεχίζεται σε υψηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσω επαγωγικών διαδικασιών σε κοινωνικά πλαίσια όπως το σχολείο και η οικογένεια. Για το πώς συντελείται αυτή η εννοιολογική αλλαγή ή πως αναπτύσσονται διαχρονικά οι χωρικές δεξιότητες έχουν ασχοληθεί διάφοροι θεωρητικοί, όπως ο Piaget, ο Vygotsky. Οι θεωρίες τους έχουν ασκήσει κυρίαρχες γενικές επιρροές. Κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις έχει πλεονεκτήματα, αλλά η κάθε μια βρέθηκε ότι προσφέρει μόνο μια μερική άποψη της ανάπτυξης χωρικών δεξιοτήτων.

2.2.1 Η θεωρία του Piaget για την ανάπτυξη των χωρικών δεξιοτήτων

Όπως με πολλούς άλλους τομείς της γνωστικής ανάπτυξης, ο αρχικός απολογισμός των απαρχών του χωρικού συλλογισμού των ενηλίκων βρίσκονται στον Piaget. Η σχολή του Jean Piaget μελέτησε σε έκταση και βάθος τη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών και του χώρου στα παιδιά. Ο Piaget δεν ασχολείται γενικά με την ανάπτυξη των εννοιών του Χώρου, αλλά συγκεκριμένα με αυτές του Αναπαραστάσιμου Χώρου (representational space). Όπως σημειώνει με τη συνεργάτιδά του Inhelder, "το κύριο εμπόδιο σε κάθε αναπτυξιακή μελέτη του χώρου, προέρχεται από το γεγονός ότι η εξέλιξη των χωρικών σχέσεων συντελείται σε δύο επίπεδα. Είναι μια εξελικτική διαδικασία η οποία διεξάγεται στο αντιληπτικό επίπεδο και παράλληλα στο επίπεδο της σκέψης, ή της φαντασίας", (Piaget & Inhelder, 1956).

Ο Piaget (1951, 1952, 1954) ισχυρίζεται ότι τα βρέφη γεννιούνται χωρίς τη γνώση του χώρου και χωρίς την αντίληψη των μόνιμων αντικειμένων, η οποία καταλαμβάνει και δομεί αυτό το χώρο. Προτείνει ότι τα βρέφη ξεκινούν με το να μεταχειρίζονται τα αντικείμενα, όπως ορίζονται σε δραστηριότητες. Από αυτή την άποψη ένα αντικείμενο αποκτά μια ύπαρξη και μια θέση, που έχουν οριστεί από τη φυσική δράση που χρειάζεται για να κατακτήσει ή να χειριστεί το αντικείμενο ή από τις αντιληπτικές δραστηριότητες που χρειάζεται για να το δει ή να το ακούσει.

Από το εναρκτήριο αυτό σημείο, ο Piaget χαρακτηρίζει την ανάπτυξη περισσότερο ώριμων εννοιών. Για παράδειγμα, ισχυρίστηκε ότι η πρωταρχική κατανόηση του μήκους εμπεριέχει την ποιοτική διαίρεση του αντιληπτού κόσμου στις κατηγορίες του «προσεγγίσιμου» (reachable) και του «μη- προσεγγίσιμου» (κοντά-μακριά). Αυτή η αρχική ιδέα θεωρείται επικεντρωμένη στον εαυτό. Η αποκέντρωση (decentering) (π.χ η γενίκευση της έννοιας του μήκους (extent) έτσι ώστε να περιλαμβάνει σχέσεις που να μην περικλείουν τον εαυτό) θεωρήθηκε ως μια σταδιακή διαδικασία, που ορισμένες φορές όριζε τη μεταφορά από το εγωκεντρικό στο αλλοκεντρικό.

Οι σχετικές έρευνες της πιαζετιανής Σχολής, συνοψίζονται στα δύο βασικά έργα, "The Child`s Conception of Space" (Piaget and Inhelder,1967) και "The Child's Conception of Geometry" (Piaget, Inhelder and Szeminska, 1960). Σύμφωνα με τα έργα αυτά, κατά τη γνωστική εξέλιξη του παιδιού, σχετικά με τις έννοιες του χώρου και της Γεωμετρίας, υπάρχει μια αντιστροφή της πορείας που ακολούθησε η επιστήμη αυτή. Ενώ δηλαδή ιστορικά διαμορφώθηκε πρώτα η ευκλείδεια Γεωμετρία, αργότερα η προβολική Γεωμετρία και αργότερα η Τοπολογία, η γνωστική ανάπτυξη, σύμφωνα με τον Piaget, ακολουθεί την πορεία:

i. διαμόρφωση τοπολογικών σχέσεων,
ii. διαμόρφωση προβολικών σχέσεων,
iii. διαμόρφωση ευκλείδειων σχέσεων.

Ο Piaget θεωρεί ότι η διαδικασία κατανόησης της γεωμετρικής αναπαράστασης του χώρου από το παιδί, εξελίσσεται πολύ αργά και ότι οι πρώτες αντιλήψεις που

διαμορφώνονται είναι τοπολογικής υφής. Η διαμόρφωση των τοπολογικών αντιλήψεων, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ερευνών, φαίνεται ότι περνά μέσα από αναγνωρίσιμα στάδια. Περιέγραψαν λοιπόν, τα εξής ποιοτικά διαφορετικά στάδια της σκέψης :
Στο 1^{o} στάδιο τα σχήματα που αναγνωρίζονται και σχεδιάζονται είναι τα κλειστά και εκείνα που εκφράζουν πολύ απλές τοπολογικές σχέσεις. Γράφοντας για τη χωρική ανάπτυξη μετά τη βρεφική ηλικία, ο Piaget & η Inhelder (1948/1967), ισχυρίστηκαν ότι τα παιδιά ξεκινούν με το να σκέφτονται σχετικά με τη χωρική τοποθεσία (spatial location) τοπολογικά, που σημαίνει ότι, υπό όρους συνέχειας και ασυνέχειας, τα παιδιά βλέπουν τα αντικείμενα απλά καθώς αγγίζουν το ένα το άλλο, καθώς εσωκλείεται (enclosed) το ένα από το άλλο, ή καθώς διαχωρίζονται μεταξύ τους. Το 2^{o} στάδιο χαρακτηρίζεται από την αναγνώριση των απλούστερων ευκλείδειων σχημάτων, από την αντίληψη της ισότητας, της ευθειότητας, κτλ. Στο 3^{o} στάδιο γίνεται φανερή η διαπίστωση σχέσεων ανάμεσα στα σχήματα και ο συντονισμός των ενεργειών αναγνώρισης. Πιο ώριμη χωρική κωδικοποίηση θεωρείται ότι εμφανίζεται στην ηλικία των 9 ή 10 ετών, σε συστήματα αποκαλούμενα *προβολικός & Ευκλείδειος χώρος*. Ο Piaget & η Inhelder όρισαν τον προβολικό χώρο, ως την κωδικοποίηση των αντικειμένων, με αναφορές σε κάθετες και οριζόντιες γραμμές αναφοράς. Ενώ ο προβολικός χώρος φαίνεται απλούστερος από τον Ευκλείδειο χώρο στο ότι εμπεριέχει αυθεντικές παρά μετρικές σχέσεις, ο προβολικός και ο Ευκλείδειος χώρος δεν είναι ξεκάθαρα αναπτυξιακά σε αλληλουχία στα κείμενα του Piaget (βλ, Newcombe 1989).

Ο απολογισμός του Piaget για τη χωρική ανάπτυξη έχει εμπνεύσει ένα τεράστιο ποσό παραγωγικής εμπειρικής δουλειάς, κυριολεκτικά εκατοντάδες μελέτες για την εγωκεντρική στην αλλοκεντρική μετατόπιση, έρευνες παιδιών για τα αντικείμενα, απαντήσεις παιδιών προσχολικής ηλικίας για προβλήματα απόστασης, και για την ικανότητα παιδιών δημοτικού σχολείου να αντιγράφουν μοντέλα ή να φαντάζονται μια άλλη άποψη μιας χωρικής διάταξης. Μελέτες έχουν δείξει, ότι τα βρέφη ξεκινούν με περισσότερο εξοπλισμό για χωρική ανάλυση από όσο φαντάστηκε ο Piaget, ώστε τα προνήπια είναι σε θέση να επιχειρηματολογούν για το χώρο.

Συμπερασματικά, πολλοί ερευνητές συμφωνούν, ότι ο Piaget πράγματι έσφαλλε στο να προτείνει ότι πολλές χωρικές δεξιότητες κατορθώνονται αρκετά αργά στην παιδική ηλικία. Τέτοιες επιτυχίες μας λένε κάτι για τα σημεία που περιγράφουν την ανάπτυξη, όπως ακριβώς οι αποτυχίες μας λένε τι παραμένει για να πραγματοποιηθεί. Επιπρόσθετα, ίσως από απροσεξία, ο Piaget, έσφαλλε στο να υποδηλώσει ότι οι ενήλικες είναι ακριβείς σε χωρικά θέματα. Σημαντικά λάθη και προκαταλήψεις υπάρχουν και στην ώριμη χωρική κωδικοποίηση και το συλλογισμό. Το πιο σημαντικό συμπέρασμα μοιάζει να είναι, ότι τα αναλυτικά εργαλεία του Piaget για τη συζήτηση της χωρικής ανάπτυξης (οι διαχωρισμοί ανάμεσα στον τοπολογικό, προβολικό και Ευκλείδειο χώρο) δεν είναι χρήσιμα για μια ανάλυση της ανάπτυξης(ιδιαίτερα αυτή που αφορά τις μικρές ηλικίες).

Παρά τα προβλήματα αυτά, ο Piaget έκανε μια μεγάλη συνεισφορά στη δική μας κατανόηση της ανάπτυξης γενικότερα και της χωρικής ανάπτυξης συγκεκριμένα, με το να αναγνωρίσει ότι ένα αναπτυσσόμενο άτομο χρησιμοποιεί τις ήδη υπάρχουσες γνωστικές αντιλήψεις (ξεκινώντας από κάποιο neonatal αρχικό σημείο) στη μετάφραση (και πράγματι-γι΄ αυτό επιλεκτικά seeking) περιβαλλοντικών και πολιτισμικών εισροών.

2.2.2 Οι απόψεις του Vygotsky για την Ανάπτυξη των Χωρικών Δεξιοτήτων

Η θεωρία του Vygotsky για τη γνωστική ανάπτυξη έχει κινήσει το ενδιαφέρον των ερευνητών τις τελευταίες δεκαετίες. Τρία βασικά σημεία αυτής της προσέγγισης έχουν φανεί χρήσιμα που αφορούν τη χωρική δεξιότητα. Ένα πρώτο θέμα είναι αυτό της «καθοδηγούμενης συμμετοχής» (Rogoff 1990), η διαδικασία με την οποία τα παιδιά αρχίζουν να κατανοούν καλύτερα τον κόσμο, καθώς οδηγούνται- καθοδηγούνται από ενηλίκους ή μεγαλύτερους συνομηλίκους. Έρευνες των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα σε παιδιά και τις μητέρες τους, καθώς τα παιδιά ασχολούνται και εμπλέκονται με την αντιγραφή σχεδίων με τουβλάκια (Wertsch et al.1980) και αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα παιδιά και τους ενήλικες που σε φαντασιακό σχεδιασμό (Radziszewska and Rogoff 1988,1991), έχουν δείξει ότι τέτοια καθοδηγούμενη συμμετοχή μπορεί να είναι ένα σημαντικό μέρος της ανάπτυξης συγκεκριμένων χωρικών δεξιοτήτων.

Ένα δεύτερο κύριο θέμα της θεωρίας του Vygotsky υπήρξε η κατάδειξη της εγκαταστημένης (situated) φύσης της αντίληψης (Rogoff and Lave 1984). Συγκεκριμένα, αυτή η ιδέα αναφέρεται στο ότι, η γνωστική προσπάθεια είναι μοναδικά προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις συγκεκριμένων περιπτώσεων και μπορεί να είναι υπερβολικά εξειδικευμένη σ΄ αυτές τις περιπτώσεις. Σε διάφορες επιδείξεις για την υποκειμενικότητα των περιπτώσεων έχει συμπεριλάβει και χωρικά θέματα. Για παράδειγμα οι Gauvain & Klaue (1989) βρήκαν ότι οι φύλακες της δημόσιας βιβλιοθήκης της Νέας Υόρκης έδωσαν καλύτερες οδηγίες για κατεύθυνση-συντεταγμένες απ΄ ότι οι βιβλιοθηκονόμοι, παρά το ισότιμο χρονικό διάστημα στη δουλειά και το πλήθος των περιφορών σχετικά με τη δουλεία τους, γύρω από το κτήριο. Οι Gauvain & Rogoff (1986) βρήκαν ότι η χωρική γνώση των παιδιών, επηρεαζόταν από το εάν οι καθοδηγητικές τους οδηγίες έδιναν έμφαση στην εκμάθηση μιας διαδρομής μέσα από αυτό ή απαιτούσε γενική γνώση του χώρου, συμπεριλαμβάνοντας χαρακτηριστικά εκτός πορείας.

Τρίτον, οι επηρεασμένοι από το Vygotsky ερευνητές επικέντρωσαν μεγάλο ενδιαφέρον στη μοναδικά ανθρώπινη ικανότητα να χειρίζονται συμβολικά υλικά, όπως χάρτες ή διαγράμματα (Gauvain 1993, 1995). Σκεπτόμενοι τα χωρικά συμβολικά συστήματα ως επακόλουθα - συμβολικά επικεντρώνουν την προσοχή τους στην αλληλεπίδραση των υποκειμένων με το πολιτισμικό τους περιβάλλον, από την οποία τέτοια αναπαραστασιακά συστήματα προσκτούνται. Η εμπειρία του ατόμου συνδέεται με κοινωνικά κατευθυνόμενες οδηγίες στη χρήση των υπαρχόντων συμβολικών συστημάτων. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δουλεύουν για να κατανοήσουν και οι δάσκαλοι για να μεταδώσουν τεχνικές σχετικά με τα συστήματα πλοήγησης, όπως έχει μελετηθεί στις στρατηγικές πλοήγησης των Puluwat Islanders (Gladwin, 1970: Hutchins 1995) ή τη χρήση ποικίλων χαρτογραφικών συμβατικοτήτων (π.χ, αυτών που εμπλέκονται στην ερμηνεία της σφαίρας ως μια επίπεδη επιφάνεια). Τα συμβολικά συστήματα επιτρέπουν να κατακτηθεί νέα γνώση, χωρίς απαραίτητα την πρόσκτηση της άμεσης απτής εμπειρίας. Αυτό σημαίνει ότι τα συμβολικά συστήματα υπηρετούν ως πολιτισμικοί ενισχυτές της ευφυΐας των ατόμων, όπως είχε ισχυριστεί ο Bruner.

Η έρευνα στην καθοδηγούμενη συμμετοχή, την υποκειμενικότητα των περιπτώσεων και τα συμβολικά συστήματα υπήρξε μια πρόσφατη συναρπαστική περιοχή έρευνας, λειτουργώντας ως θεραπευτική για τις προσεγγίσεις, στις οποίες τα παιδιά αναπτύσσονται ως απομονωμένα υποκείμενα ή στις οποίες αναπτύσσουν υψηλές γενικές στρατηγικές και αντιλήψεις. Παρόλαυτά η εστίαση μόνο σ΄ αυτά τα θέματα δίνει μια εικόνα της ανάπτυξης, που ορισμένες φορές υπερτονίζει την καθοδήγηση των ενηλίκων και την πολιτισμική μεταφορά, αγνοώντας τα υποκείμενα και τις δικές τους προσπάθειες να κατασκευάσουν έναν συγκροτημένο και γεμάτο νόημα κόσμο. Είναι πιθανόν τα παιδιά να αλληλεπιδρούν με το φυσικό περιβάλλον ως άτομα-υποκείμενα, όπως συμμετέχουν και σε κοινωνικές ομάδες.

Η έμφαση στο ρόλο του κοινωνικού περιβάλλοντος για τη δημιουργία και τη διαμόρφωση της ατομικής ανάπτυξης, είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό της θεωρίας του Vygotsky. Πρόσφατες παρατηρήσεις ενισχύουν την άποψη ότι η έννοια της «Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης» είναι αρκετά όμοια με την ιδέα του Piaget για τη γνωστική ετοιμότητα. Και στις δυο περιπτώσεις οι οδηγίες προσαρμόζονται στο γνωστικό επίπεδο του παιδιού. Έτσι είναι πιθανόν, ότι μια πλήρης θεωρία ανάπτυξης σε οποιοδήποτε τομέα πρέπει να περιλαμβάνει αλληλεπιδράσεις του αναπτυσσόμενου παιδιού με ικανούς ενηλίκους και με ένα πολιτισμικό κοινωνικό περίγυρο αποφεύγοντας τους υπαινιγμούς ότι η πολιτισμική μετάδοση βρίσκεται σε εξέλιξη ή ότι η πολιτισμική μετάδοση αποτυπώνει πληροφορίες σε έναν παθητικό οργανισμό.

2.3 Η θεωρία των van Hiele για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης.

Μέχρι πρόσφατα το εκπαιδευτικό πρόγραμμα για τη γεωμετρία ήταν φτωχά ορισμένο. Η δουλειά δύο Ολλανδών συγγραφέων, του Pierre van Hiele και της Dina van Hiele-Geldof άρχισε να έχει επιρροή στο σχεδιασμό γεωμετρικών οδηγιών και προγράμματος. Μέσα από μια κριτική διερεύνηση των θεωριών της σχολής του Piaget για τα στάδια διαμόρφωσης της γεωμετρικής σκέψης, το 1957 δόθηκε στη δημοσιότητα η πρώτη μορφή του μοντέλου διδασκαλίας της Γεωμετρίας από το ζεύγος των Ολλανδών εκπαιδευτικών Pierre και Dina van Hiele. Σύμφωνα με τους van Hiele, ο μαθητής κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής του σε θέματα της Γεωμετρίας, διέρχεται από πέντε σαφώς διακριτά επίπεδα, τα οποία σχετίζονται άμεσα με την εμπειρία που έχει αφομοιώσει από την προηγούμενη εκπαίδευσή του και τις καθημερινές δραστηριότητές του. Ο μαθητής δεν μπορεί να ανέλθει σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, χωρίς να έχει διέλθει από όλα τα προηγούμενα επίπεδα. Όπως αντιλαμβάνεται κανείς, από την άποψη αυτή το μοντέλο έχει μια σαφή ομοιότητα με τα στάδια εξέλιξης της σκέψης που προτείνει η θεωρία του Piaget. Το μοντέλο των van Hiele συγκροτεί μια ποιοτική διερεύνηση της ανάπτυξης της γεωμετρικής αντίληψης, των ικανοτήτων και της σκέψης των μαθητών, ενώ ταυτόχρονα ο προσδιορισμός του συγκεκριμένου επιπέδου στο οποίο βρίσκεται ο μαθητής ή η ομάδα των μαθητών μας παρέχει ένα ποσοτικό- αριθμητικό κριτήριο, ένα μέτρο σύγκρισης σε σχέση με την ανάπτυξη άλλων μαθητών. Αλλά όπως επισημαίνει η Rina Hershkovits (1990), "ενώ η πιαζετιανή Σχολή θεωρεί κυρίως τη Γεωμετρία ως την επιστήμη του Χώρου, η θεωρία των van Hiele συνδυάζει τη Γεωμετρία ως επιστήμη του Χώρου, αλλά και ως εργαλείο με το οποίο περιγράφουμε μια μαθηματική δομή".

Στάδια Γεωμετρικής Σκέψης

Το μοντέλο της θεωρίας των van Hiele ιεραρχεί τη γεωμετρική σκέψη σε πέντε επίπεδα: το επίπεδο 0 της οπτικοποίησης, το επίπεδο 1 της ανάλυσης, το επίπεδο 2 της άτυπης επαγωγικής σκέψης, το επίπεδο 3 της επαγωγικής σκέψης και το επίπεδο 4 του αυστηρού μαθηματικού συλλογισμού. Τα επίπεδα της σκέψης της θεωρίας των van Hiele αναλύονται λεπτομερώς πιο κάτω, αν και θα πρέπει να σημειωθεί, ότι ενδιαφέρον για την έρευνά μας παρουσιάζουν μόνο τα τρία πρώτα επίπεδα ανάπτυξης. Καθένα από τα πέντε στάδια περιγράφει τον τρόπο σκέψης που χρησιμοποιείται για γεωμετρικά περιεχόμενα. Σύμφωνα με τη θεωρία των P. & D. van Hiele τα στάδια της γεωμετρικής σκέψης είναι τα ακόλουθα:

Επίπεδο 0: Οπτικοποίηση.

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 0 είναι τα ίδια τα σχήματα και οι μορφές τους.

Οι μαθητές αναγνωρίζουν και ονομάζουν αντικείμενα βασισμένα σε παγκόσμια οπτικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου- γενική προσέγγιση των σχημάτων. Οι μαθητές που βρίσκονται σ' αυτό το στάδιο είναι ικανοί να κάνουν μετρήσεις, ακόμη να μιλούν και για τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά αυτές οι ιδιότητες δεν λαμβάνονται υπ' όψιν για επεξήγηση-ερμηνεία. Είναι η εμφάνιση του σχήματος που δημιουργεί τη βάση του ορισμού που δίνει ο /η μαθητής /τρια. Για παράδειγμα οι επεξηγήσεις που δίνουν τα παιδιά στο στάδιο αυτό είναι της μορφής:«Ένα τετράγωνο είναι ένα τετράγωνο επειδή μοιάζει με ένα τετράγωνο». Επειδή η εξωτερική μορφή είναι κυρίαρχη σ' αυτό το επίπεδο, μπορεί και να υπερενισχύσει τις ιδιότητες ενός σχήματος. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο που έχει περιστραφεί έτσι ώστε όλες οι πλευρές να έχουν κλίση 45ο από το αρχικό μπορεί να μη μοιάζει με τετράγωνο για ένα σκεπτόμενο άτομο του επιπέδου 0. Οι μαθητές αυτού του επιπέδου θα συλλέξουν και θα ταξινομήσουν σχήματα βασιζόμενοι στην εξωτερική τους μορφή . Δηλαδή τυπικές επεξηγήσεις είναι:« Τα έβαλα μαζί γιατί όλα μοιάζουν να είναι λίγο ίδια».

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 0 είναι κατηγορίες ή ομάδες σχημάτων που μοιάζει να είναι «όμοια».

Επίπεδο 1: Ανάλυση.

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 1 είναι κατηγορίες σχημάτων, και όχι μόνο μεμονωμένα σχήματα.

Οι μαθητές στο επίπεδο της ανάλυσης είναι ικανοί να σκεφτούν τα σχήματα συνολικά ως μέρη μίας κατηγορίας παρά σαν μεμονωμένο σχήμα. Αντί λοιπόν να μιλάνε γι΄ αυτό το ορθογώνιο, είναι δυνατόν να μιλάνε για όλα τα ορθογώνια. Εστιάζοντας σε μια κατηγορία σχημάτων, οι μαθητές είναι ικανοί να σκεφτούν τι είναι αυτό που κάνει ένα ορθογώνιο (τέσσερις πλευρές, οι απέναντι πλευρές παράλληλες, οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος, τέσσερις ορθές γωνίες κτλ.). Άσχετα χαρακτηριστικά, όπως το μέγεθος, το χρώμα, η υφή μπαίνουν στο περιθώριο. Σ' αυτό το επίπεδο, οι μαθητές αρχίζουν να εκτιμούν ότι ένα σύνολο σχημάτων πάει μαζί εξαιτίας των ιδιοτήτων τους.

Οι αντιλήψεις για τα μεμονωμένα σχήματα μπορούν τώρα να γενικευτούν σε όλα τα σχήματα που ταιριάζουν σ' αυτήν την κατηγορία. Εάν ένα σχήμα ανήκει σε μια συγκεκριμένη κατηγορία όπως για παράδειγμα οι κύβοι, έχει τις ιδιότητες της συγκεκριμένης κατηγορίας. «Όλοι οι κύβοι έχουν έξι πλευρές και κάθε μια από αυτές τις πλευρές είναι ένα τετράγωνο.» Αυτές οι ιδιότητες στο μηδενικό επίπεδο είναι μόνο implicit. Οι μαθητές όντας στο επίπεδο 1, ίσως είναι ικανοί να απαριθμούν όλες τις ιδιότητες των τετραγώνων, τριγώνων και παραλληλογράμμων αλλά δεν βλέπουν ότι πρόκειται για υποκατηγορίες των σχημάτων μεταξύ τους, ότι δηλαδή όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και όλα τα ορθογώνια είναι παραλληλόγραμμα. Κατά τη διαδικασία ορισμού ενός σχήματος τα άτομα που βρίσκονται στο επίπεδο 1 είναι πιθανόν να αριθμούν όσες περισσότερες ιδιότητες των σχημάτων ξέρουν.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 1 είναι οι ιδιότητες των σχημάτων.

<u>Επίπεδο 2: Άτυπη Επαγωγική Σκέψη.</u>

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 2 αποτελούν οι ιδιότητες των σχημάτων.

Καθώς οι μαθητές αρχίζουν να είναι ικανοί να σκέφτονται- να εστιάζουν στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς τους περιορισμούς ενός συγκεκριμένου αντικειμένου, είναι ικανοί να αναπτύσσουν σχέσεις-συνδέσεις ανάμεσα σε δύο και περισσότερες ιδιότητες. «Αν όλες οι τέσσερις γωνίες είναι ορθές, το σχήμα πρέπει να είναι ένα ορθογώνιο. Αν είναι ένα τετράγωνο, όλες οι γωνίες είναι ορθές. Αν είναι ένα τετράγωνο, τότε πρέπει να είναι ένα ορθογώνιο». Με μεγαλύτερη ικανότητα να εμπλέκονται στην «εάν- τότε» αιτιολόγηση, τα σχήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν χρησιμοποιώντας ελάχιστα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, τέσσερις ίσες πλευρές και τουλάχιστον μία ορθή γωνία μπορεί να είναι αρκετά, για να ορίσουν ένα τρίγωνο. Τα ορθογώνια είναι παραλληλόγραμμα με μια ορθή γωνία. Οι παρατηρήσεις ξεφεύγουν από τις ίδιες τις ιδιότητες και αρχίζουν να εστιάζουν σε λογικούς ισχυρισμούς *σχετικά* με τις ιδιότητες. Οι μαθητές στο δεύτερο επίπεδο θα είναι ικανοί να ακολουθήσουν και να εκτιμήσουν μια άτυπη επαγωγική επιχειρηματολογία (informal deductive argument), για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Οι «αποδείξεις» ίσως είναι περισσότερο ενστικτώδεις παρά αυστηρά συμπερασματικές. Παρ όλ' αυτά, υπάρχει μια εκτίμηση ότι μια λογική επιχειρηματολογία είναι αναγκαστική. Μια εκτίμηση της αυταπόδεικτης κατασκευής ενός ανεπίσημου επαγωγικού συστήματος, παρ' όλ' αυτά, παραμένει κάτω από την επιφάνεια.

Τα προϊόντα της σκέψης στο δεύτερο επίπεδο είναι οι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

<u>Επίπεδο 3: Επαγωγική σκέψη</u>

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 3 είναι οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων.

Στο επίπεδο 3, οι μαθητές είναι ικανοί να εξετάζουν περισσότερα από τις ιδιότητες των σχημάτων. Το προηγούμενο αντιληπτικό στάδιο τους δημιούργησε εικασίες αναφορικά με τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Είναι αυτές οι εικασίες σωστές; Αποτελούν αναμφισβήτητες "αλήθειες"; Καθώς αυτή η ανάλυση των ανεπίσημων ισχυρισμών λαμβάνει χώρα, η κατασκευή ενός συστήματος βασισμένο σε αξιώματα, ορισμούς, θεωρίες, πορίσματα, αρχίζει να αναπτύσσεται και μπορεί να εκτιμηθεί- να θεωρηθεί ως το απαραίτητο μέσο για την εγκαθίδρυση της γεωμετρικής αλήθειας. Σ΄ αυτό το επίπεδο, οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την ανάγκη για ένα σύστημα λογικής, το οποίο στηρίζεται σε ένα ελάχιστο σύνολο υποθέσεων και από τις οποίες άλλες αλήθειες μπορεί να αναδυθούν. Ο μαθητής σ' αυτό το επίπεδο είναι ικανός να δουλεύει με αφηρημένες δηλώσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες και να βγάζει συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση. Αυτό είναι το επίπεδο του παραδοσιακού μαθήματος γεωμετρίας στο Λύκειο. Ένας μαθητής που βρίσκεται στο επίπεδο 3, μπορεί καθαρά να παρατηρήσει ό,τι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου διχοτομούνται μεταξύ τους, όπως μπορεί να το παρατηρήσει και ένας μαθητής που βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο σκέψης. Παρ' όλ' αυτά, στο επίπεδο 3, υπάρχει μια εκτίμηση της ανάγκης να το αποδείξουμε αυτό μέσα από μια σειρά αφαιρετικών ισχυρισμών. Τα άτομα που βρίσκονται στο επίπεδο 2 σε αντίθεση, ακολουθούν τον ισχυρισμό- το επιχείρημα αλλά αποτυγχάνουν να εκτιμήσουν την ανάγκη.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 3 είναι επαγωγικά αυταπόδεικτα συστήματα για τη γεωμετρία.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα

Τα αντικείμενα της σκέψης στο επίπεδο 4 είναι επαγωγικά αυταπόδεικτα συστήματα για τη γεωμετρία.

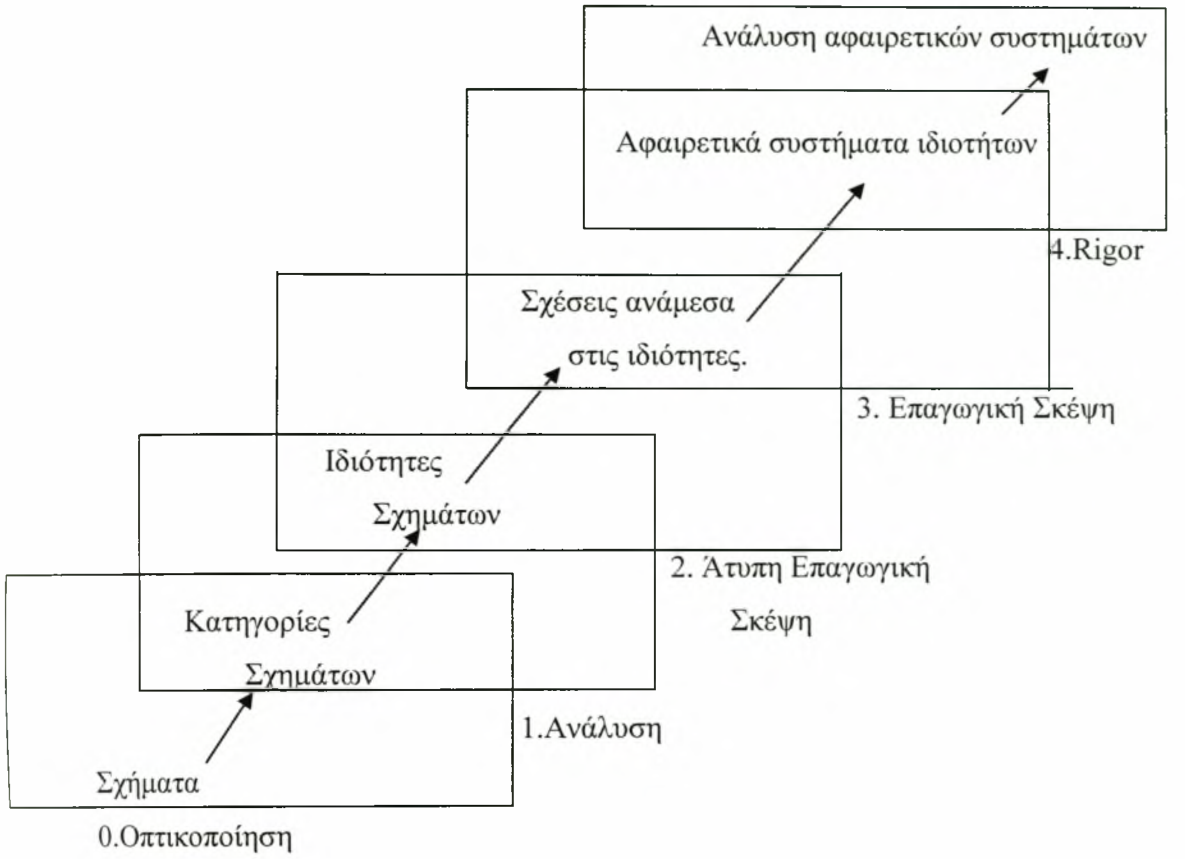
Στο υψηλότερο επίπεδο της ιεραρχίας του van Hiele, το αντικείμενο της προσοχής είναι τα αυταπόδεικτα συστήματα αυτά καθ΄ αυτά, όχι μόνο οι σχέσεις που αναπτύσσονται μέσα σ' αυτά. Υπάρχει μια εκτίμηση των διακρίσεων και των σχέσεων ανάμεσα σε διαφορετικά αυταπόδεικτα συστήματα. Αυτό είναι γενικότερα το επίπεδο ενός σπουδαστή στα ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα, που μελετά τη γεωμετρία ως έναν κλάδο της μαθηματικής επιστήμης.

Τα προϊόντα της σκέψης στο επίπεδο 4 είναι συγκρίσεις και αντιθέσεις ανάμεσα σε πολλά αυταπόδεικτα γεωμετρικά συστήματα.

Χαρακτηριστικά των Επιπέδων του van Hiele.

Χωρίς αμφιβολία, έχετε προσέξει ότι τα προϊόντα της σκέψης του ενός σταδίου αποτελούν τα αντικείμενα της σκέψης στο επόμενο. Αυτή η σχέση αντικειμένου-προϊόντος ανάμεσα στα επίπεδα της θεωρίας του van Hiele απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.

Η θεωρία του van Hiele για τη Γεωμετρική Σκέψη



Τα αντικείμενα (ιδέες) πρέπει να έχουν δημιουργηθεί στο ένα επίπεδο, έτσι ώστε οι σχέσεις ανάμεσα σ' αυτά τα αντικείμενα να γίνουν το κέντρο στο επόμενο επίπεδο. Επιπρόσθετα σ' αυτήν την αντίληψη-κλειδί της θεωρίας, τέσσερα σχετικά χαρακτηριστικά των σταδίων της σκέψης αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής.

1. Τα επίπεδα είναι διαδοχικά. Για να φτάσουν οι μαθητές σε οποιοδήποτε επίπεδο πάνω από το επίπεδο 0, πρέπει να προχωρήσουν μέσα από όλα τα προηγούμενα στάδια. Το να περάσεις μέσα από ένα επίπεδο σημαίνει, ότι κάποιος έχει έρθει σε επαφή με τη γεωμετρική σκέψη που είναι κατάλληλη γι' αυτό το επίπεδο και έχει δημιουργήσει στο μυαλό του τους τύπους των αντικειμένων ή τις σχέσεις που είναι το επίκεντρο της σκέψης στο επόμενο επίπεδο. Το να προσπερνά κάποιος ένα επίπεδο σπάνια συμβαίνει. Έρευνες που έγιναν στις Η.Π.Α και σε

άλλες χώρες υποστηρίζουν αυτή την άποψη με μια εξαίρεση. Ορισμένοι μαθητές με ταλέντο στα μαθηματικά φαίνεται να προσπερνούν επίπεδα, ενδεχομένως γιατί αναπτύσσουν ικανότητες λογικής σκέψης με άλλους τρόπους από αυτόν της γεωμετρίας.

2. Τα επίπεδα δεν είναι εξαρτώμενα από την ηλικία, όπως συμβαίνει με τα αναπτυξιακά στάδια του Piaget. Ένας μαθητής της τρίτης δημοτικού και ένας μαθητής του γυμνασίου θα μπορούσαν να βρίσκονται στο επίπεδο 0. Πράγματι, ορισμένοι μαθητές και ενήλικες παραμένουν στο επίπεδο 0 για πάντα, και ένας σημαντικός αριθμός ενηλίκων ποτέ δεν φτάνει στο επίπεδο 2. Αλλά η ηλικία σχετίζεται βέβαια με το πλήθος και τους τύπους των γεωμετρικών εμπειριών τις οποίες έχουμε. Γι' αυτό, είναι λογικό για όλα τα παιδιά στη σχολική κλίμακα K-2 να βρίσκονται στο επίπεδο 0, καθώς επίσης και η πλειοψηφία των παιδιών στις τάξεις 3 και 4.

3. Οι γεωμετρικές εμπειρίες είναι ο μεγαλύτερος και μοναδικός παράγοντας που επηρεάζει την εξέλιξη διαμέσου των επιπέδων. Δραστηριότητες που επιτρέπουν στα παιδιά να εξερευνήσουν, να μιλήσουν γι΄ αυτές και να αλληλεπιδράσουν με ευχαρίστηση στο επόμενο επίπεδο, ενώ παράλληλα αυξάνουν τις εμπειρίες τους στο τρέχον επίπεδο, έχουν τη ευκαιρία να προάγουν το επίπεδο της σκέψης αυτών των παιδιών.

4. Όταν οι οδηγίες ή ο λόγος είναι ένα επίπεδο πιο υψηλό από αυτό του μαθητή, θα υπάρξει έλλειψη επικοινωνίας. Μαθητές, που τους ζητήθηκε να «παλέψουν» με αντικείμενα σκέψης τα οποία δεν είχαν κατασκευαστεί στο προηγούμενο επίπεδο, μπορεί να εξαναγκαστούν να παπαγαλίζουν τη γνώση και έτσι θα καταφέρουν μόνο προσωρινή και επιφανειακή επιτυχία. Ένας μαθητής μπορεί, για παράδειγμα, να απομνημονεύσει ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, χωρίς να έχει κατασκευάσει αυτή την σχέση. Ένας μαθητής μπορεί να απομνημονεύσει μια γεωμετρική απόδειξη αλλά αποτυγχάνει να δημιουργήσει τα βήματα ή να κατανοήσει τη λογική που εμπλέκεται (Gedds, &Tischler,1998; Gedds & Fortunato, 1993).

Ανεξάρτητα από το χρόνο παραμονής του μοντέλου van Hiele στην επιστημονική επικαιρότητα, ως ολοκληρωμένης περιγραφής της εξέλιξης των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών, θεωρούμε ότι παρέχει μια βάση στήριξης για την έρευνα που διεξάγουμε. Τα επιχειρήματα που παραθέτουμε για την επιλογή αυτή είναι τα εξής:

I. Η απομνημόνευση σχέσεων, ιδιοτήτων, τύπων και κανόνων δεν θεωρείται χαρακτηριστικό κανενός από τα πέντε επίπεδα, όπως επίσης η μετάβαση από το ένα επίπεδο ικανοτήτων στο επόμενο, σχετίζεται κυρίως με τη διδασκαλία και την επαφή με ανάλογες εμπειρίες και δεν εξαρτάται πολύ από την ηλικιακή ωριμότητα. Η τελευταία παρατήρηση σημαίνει ότι τα παιδιά μιας ορισμένης ηλικίας αν εκπαιδευτούν κατάλληλα, μπορεί να φτάσουν σε ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης από άλλα μεγαλύτερης ηλικίας, τα οποία έχουν εκπαιδευτεί με διαφορετικό σύστημα επαφής με γεωμετρικές έννοιες.

II. Κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα και τα δικά του σύμβολα.

III. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την επικοινωνία δασκάλου-μαθητή, αφού αυτή πρέπει να κινείται στα όρια που καθορίζει το επίπεδο γεωμετρικής εξοικείωσης του δευτέρου.

IV. Το πέρασμα από το ένα επίπεδο στο επόμενο, συχνά ακολουθείται από διεύρυνση των γλωσσικών ικανοτήτων, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της «προσαρμογής» στο νέο μαθησιακό περιβάλλον.

Μια άλλη ταξινόμηση των επιπέδων που επιχειρήθηκε από την ερευνητική ομάδα των Fuys κ.α.(Fuys et al, 1988) βρήκε σύμφωνο τον Pierre van Hiele. Η ταξινόμηση αυτή περιγράφει 3 επίπεδα ανάπτυξης γεωμετρικής σκέψης, το οπτικό, το περιγραφικό και το θεωρητικό. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή φαίνεται, ότι οι δυνατότητες γεωμετρικής σκέψης των παιδιών προσχολικής ηλικίας κινούνται κυρίως στο οπτικό και ίσως στην αρχή του περιγραφικού επιπέδου. Από δω προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η εξοικείωση των παιδιών με γεωμετρικές έννοιες πρέπει να περιλαμβάνει πολλά οπτικά στοιχεία και βαθμιαία να αναπτύσσει τη γλώσσα και τη σχεδίαση, τα βασικά εργαλεία περιγραφής των αποκτημένων χωρικών εμπειριών και αντιλήψεων.

2.4 Τάσεις στη διαμόρφωση των σχολικών προγραμμάτων για τη γεωμετρία.

Την τελευταία δεκαετία έχει δοθεί παραπάνω έμφαση στη γεωμετρία και στην ανάπτυξη χωρικών δεξιοτήτων. Παρόλο που δεν μπορούμε να μιλήσουμε για αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα, μπορούμε να εστιάσουμε σε τάσεις που επικρατούν κατά τη διαμόρφωση προγραμμάτων σχολικής γεωμετρίας και της διδασκαλίας της.

1η τάση

Η γεωμετρία σχετίζεται με τη μελέτη αντικειμένων που αντιλαμβάνεται ο μαθητής οπτικά , με το σχεδιασμό και την κατασκευή σχημάτων. Η τάση αυτή βρίσκει εφαρμογή στο Νηπιαγωγείο και στο Δημοτικό σχολείο και έχει ως στόχο την εξοικείωση των μαθητών με τα γεωμετρικά αντικείμενα, με τη χρήση κυρίως υλικών όπως το χαρτόνι, το ξύλο, τα νήματα, ο πυλός κλπ. Στις περιπτώσεις όμως που δεν συνδέεται με κάποιες θεωρητικές ερμηνείες και συλλογισμούς μπορεί να οδηγήσει τη διδασκαλία της γεωμετρίας σε ένα πλαίσιο μεταξύ χειροτεχνίας και γραμμικού σχεδίου.

2η τάση

Η γεωμετρία ως μελέτη του κόσμου που μας περιβάλλει με την ποικιλία των μορφών που αυτός έχει. Τα έργα του Ολλανδού μαθηματικού Freudenthal είναι κλασικά παραδείγματα αυτής της τάσης. Σύμφωνα με αυτόν η γεωμετρία έχει σημασία μόνο αν εκφράζει σχέσεις του εμπειρικού κόσμου. Το να κάνουμε γεωμετρία σημαίνει ότι βρίσκουμε τρόπους αναπαράστασης των φαινομένων στο Χώρο, που διαρκώς μεταβάλλονται, συνεπώς προκύπτει η αναγκαιότητα διδασκαλίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

3η τάση

Θεωρεί τη γεωμετρία ως διδακτική μεταφορά των εννοιών της επιστήμης του Χώρου. Η τάση αυτή ενισχύθηκε μετά τη δεκαετία του 1970 και είναι μια απάντηση στην ισχυρή κριτικά που δέχθηκαν τα παραδοσιακά προγράμματα διδασκαλίας. Ενδιαφέρουσα είναι η θέση ενός εκπροσώπου αυτής της τάσης του Alan Bishop, για το ρόλο που παίζει η γεωμετρία, ως μάθημα σχετικό με τις ιδιότητες του Χώρου: «Αισθάνομαι ότι η αιτία για την οποία πολλά παιδιά αποστρέφονται τα Μαθηματικά είναι η έλλειψη ικανοποίησης και ευχαρίστησης και κυρίως οι λογικο-αναλυτικές μέθοδοι. (που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στα Αναλυτικά Προγράμματα). Νομίζω ότι πολλά παιδιά είναι προδιατεθειμένα προς περισσότερο οπτικές διαδικασίες (visual processing), αλλά οι δάσκαλοι και τα βιβλία δεν ενισχύουν, ή μάλλον τα αποθαρρύνουν γι' αυτή τους την ικανότητα[...]εάν κατά τη μαθηματική τους εκπαίδευση είχε δοθεί έμφαση και ενθάρρυνση στη χρήση οπτικών διαδικασιών, είμαι βέβαιος ότι θα είχαν φτάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο μαθηματικής ανάπτυξης» (Bishop, 1983α).

4η τάση

Τέλος, έχουν γίνει εντατικές ερευνητικές προσπάθειες, ώστε οι γεωμετρικές έννοιες να διδάσκονται με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι οποίες σταδιακά βρίσκουν εφαρμογή στα σχολικά προγράμματα. Σχετικά με το αντικείμενο των μαθηματικών, ο Κ. Γαβρίλης δίνει την πιο χειροπιαστή επίδειξη της έννοιας του υπολογιστικού εργαλείου, ίσως επειδή το γνωστικό αντικείμενο με το οποίο καταπιάνεται- η γεωμετρία- έχει στις επιστημονικές του παραδόσεις την έννοια του εργαλείου και της κατασκευής. Όπως επισημαίνει ο ίδιος, στην παραδοσιακή τάξη τα εργαλεία της γεωμετρικής σκέψης μετατρέπονται συχνά σε αυτοσκοπό, σε τυποποιημένες διαδικασίες επίλυσης και απόδειξης. Η εναλλακτική που αναπτύσσει είναι ένα περιβάλλον μάθησης, που με τη βοήθεια του υπολογιστή ενσωματώνει εργαλεία, υλικά (π.χ. γεωμετρικά όργανα) και άυλα (π.χ. γνώσεις και διαδικασίες), ώστε να επιδέχονται τροποποίηση και χειρισμό από το μαθητή.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια τη σχέση της γεωμετρίας με την τεχνολογία.

Κεφ. 3: Γεωμετρία και Τεχνολογία

«Καλύτερη μάθηση δεν θα συντελεστεί με το
να βρούμε καλύτερους τρόπους για τη διδασκαλία,
αλλά με το να δώσουμε καλύτερες ευκαιρίες
στους μαθητές για εννοιολογικές κατασκευές».
Papert.

Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες έχουν γίνει μεγάλες προσπάθειες για την ανάπτυξη κατάλληλου λογισμικού το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για τη διδασκαλία, τη μάθηση και την εξερεύνηση γεωμετρικών εννοιών. Ανάμεσα στα κύρια λογισμικά που έχουν αναπτυχθεί είναι το περιβάλλον Logo, Supposer, Cabri και Geometry Sketchpad. Η παρακάτω ενότητα αναφέρεται στα χαρακτηριστικά αυτών των λογισμικών και για το πώς διαμεσολαβούν στην ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης.

3.1 Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας: Logo, Supposer, Geometry Sketspad, Cabri

Πατέρας του λογισμικού Logo είναι ο Seymour P*a*pert, καθηγητής στο MIT (Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης). Η Logo αποτελεί ταυτόχρονα γλώσσα προγραμματισμού και περιβάλλον επεξεργασίας γεωμετρικών εννοιών. Η ιστορία της έχει τις ρίζες της στην επιστήμη των υπολογιστών και στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης. Μια από τις πιο δυναμικές εφαρμογές της Logo είναι η αποκαλούμενη "γεωμετρία της χελώνας". Χρησιμοποιώντας τη χελώνα στην οθόνη του υπολογιστή, ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει διάφορα γεωμετρικά σχήματα μ' έναν πραγματικά πρωτότυπο τρόπο, που ασκεί τη σκέψη του και τον οδηγεί να κατανοεί τα πράγματα σε βάθος. "Στις περισσότερες μαθησιακές καταστάσεις, όπου τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τον υπολογιστή, ο υπολογιστής είναι εκείνος που δίνει στο παιδί ασκήσεις ενός συγκεκριμένου βαθμού δυσκολίας, προσφέροντας ανατροφοδότηση και που παρέχει πληροφορίες. Θα μπορούσε δηλαδή να ειπωθεί, ότι ο υπολογιστής προγραμματίζει το παιδί. Στη γλώσσα Logo όμως, αυτή η σχέση αντιστρέφεται: το παιδί ακόμα και της προσχολικής ηλικίας, έχει τον έλεγχο: αυτό προγραμματίζει τον υπολογιστή!

Προσπαθώντας τα παιδιά να διδάξουν τον υπολογιστή μπαίνουν στη διαδικασία της εξερεύνησης του πώς σκέφτονται τα ίδια" (Papert, 1980).

Ένα ακόμη από τα πρώτα υπολογιστικά προγράμματα που δημιουργήθηκαν για τη γεωμετρία είναι και το Supposer, που είχε ως σκοπό να διευκολύνει τους μαθητές να σχηματίζουν και να ελέγχουν εικασίες για τις γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις. Το πρόγραμμα αυτό επιτρέπει στους μαθητές να επιλέξουν ένα αρχικό γεωμετρικό σχήμα (πχ. τρίγωνο) και να κάνουν διάφορες μετρήσεις και κατασκευές. Το πρόγραμμα καταγράφει τη διαδικασία που ακολουθεί ο μαθητής και την εκτελεί σε κάθε άλλο σχήμα.

Άλλα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιούν το σύρσιμο (dragging) του ποντικιού για την κατασκευή και τον έλεγχο των γεωμετρικών σχημάτων. Εδώ ανήκουν τα λογισμικά Cabri-Geometry II και Geometer's Sketchpad, που ήδη έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται στα σχολεία μας. Στο Sketchpad όλες οι σχέσεις διατηρούνται, επιτρέποντας στο μαθητή να εξετάσει ένα ολόκληρο σύνολο παρόμοιων περιπτώσεων, οδηγώντας τον μέσα από μια φυσική διαδικασία σε γενικεύσεις. Το Sketchpad ενθαρρύνει μια διαδικασία ανακάλυψης, κατά την οποία οι μαθητές πρώτα οπτικοποιούν και αναλύουν ένα πρόβλημα και μετά κάνουν «εικασίες», πριν επιχειρήσουν μια απόδειξη[1].

Η φιλοσοφία του Cabri- geometry II, δημιουργός του οποίου είναι **Jean-Marie Laborde,** είναι να παρέχει τη μεγαλύτερη ευελιξία σε αλληλεπίδραση (πληκτρολόγιο, ποντίκι..) ανάμεσα στο μαθητή και το λογισμικό[2]. Οι περισσότερες ενέργειες πραγματοποιούνται με το ποντίκι (επιλέγοντας στην οθόνη και όχι με προγραμματισμό), μέσα από την επιλογή των κατάλληλων εργαλείων. Επιπλέον, οι μετασχηματισμοί των γεωμετρικών σχημάτων γίνονται με ιδιαίτερη ευκολία και οι αναπαραστάσεις τους είναι άμεσες. Το Cabri ανήκει στη κατηγορία του λογισμικού που προσφέρεται κυρίως για διερευνητική μάθηση και πειραματισμό σε ένα μεγάλο μέρος των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επιτρέπει στον χρήστη, με εργαλεία τα βασικά γεωμετρικά σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (σημείο, κύκλο, ευθ. τμήμα, ημιευθεία και ευθεία), τις στοιχειώδεις κατασκευές και τους βασικούς μετασχηματισμούς (μεταφορά, στροφή κτλ), να κατασκευάζει οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα, και να το επεξεργάζεται μετρώντας τα βασικά μεγέθη του (μήκη πλευρών και της περιμέτρου του, το εμβαδόν του και μέτρα των γωνιών του). Ο δυναμικός τρόπος επεξεργασίας του σχήματος καθώς και επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων μέσω υπολογιστή που υπάρχει ενσωματωμένος στο πρόγραμμα, επιτρέπει στον χρήστη να πειραματίζεται με απλό τρόπο και να οικοδομεί την γνώση. Η χρήση συντεταγμένων και άλλων στοιχείων της Αναλυτικής Γεωμετρίας (εξισώσεις κτλ) διευρύνει ακόμα περισσότερο τις δυνατότητες επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων. Τέλος η δυνατότητα κατασκευής animations κάνει το πρόγραμμα ένα ιδανικό εργαλείο για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών.

Το πρόγραμμα μπορεί να ενταχθεί στο κύριο διδακτικό έργο και την καθημερινή πραγματικότητα του σχολείου και ανταποκρίνεται τόσο στις ανάγκες των μαθητών, όσο και των εκπαιδευτικών. Συμπληρώνει τη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία. Προκαλεί και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Ενισχύει τη διερευνητική και ενεργητική μάθηση. Αξιοποιεί την προσομοίωση φαινομένων. Προσφέρει την δυνατότητα για πολλαπλή αναπαράσταση της γνώσης. Είναι απλό και φιλικό στη χρήση του από εκπαιδευτικούς και μαθητές που δεν έχουν ιδιαίτερη ειδίκευση σε υπολογιστές.

3.2 Η φύση των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας

Τα παρακάτω χαρακτηριστικά σκιαγραφούν τη φύση των Δυναμικών Λογισμικών και αναδεικνύουν την υπεροχή τους έναντι των παραδοσιακών προγραμμάτων και της παραδοσιακής διδασκαλίας:

Το δυναμικό λογισμικό της γεωμετρίας εισάγει ένα νέο τύπο σχεδίου και διαδικασίας σχεδιασμού, η συμπεριφορά των οποίων είναι σύμφωνη με τη γεωμετρική θεωρία. Καθώς οι μαθητές χειρίζονται δυναμικά το σχέδιο, απαιτείται να «κατασκευάσουν μια ερμηνεία» αυτών που διαδραματίζονται και να εξηγήσουν τα αποτελέσματα του χειρισμού τους με γεωμετρικούς όρους. Έτσι μαθαίνουν να κινούνται από τις οπτικές στις νοητικές αναπαραστάσεις και να αναπτύσσουν νοητικές στρατηγικές και ερμηνείες με γεωμετρικούς όρους, αναπτύσσοντας παράλληλα τη μαθηματική τους σκέψη. Όπως αναφέρεται σε σχετικές μελέτες, οι μαθητές που χρησιμοποιούν τέτοια εργαλεία φαίνεται να έχουν καλύτερα αποτελέσματα μάθησης και να κάνουν υψηλότερου επιπέδου ερωτήσεις (Laborde, 1995).

Επιπλέον, μας προσφέρουν τη δυνατότητα να αποφύγουμε από την αρχή να ασχοληθούμε με την απόδειξη του θεωρήματος, που σε όλους τους μαθητές δημιουργεί αξεπέραστα εμπόδια και δυσκολίες.

Παράλληλα, η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος, όπως το τρίγωνο, σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, μπορεί να γίνει μόνο με τη βοήθεια και χρήση των ιδιοτήτων του. Αυτό που προκύπτει είναι ένα τρίγωνο και όχι ένα σχέδιο που «μοιάζει» με τρίγωνο. «Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατασκευή ενός τετραγώνου συγκεκριμένης πλευράς στο περιβάλλον του Cabri-Geometry II;»
Όποιος επιχειρήσει να απαντήσει στο παραπάνω ερώτημα, θα διαπιστώσει ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσει σημαντικές γεωμετρικές έννοιες και ιδιότητες, όπως τη στροφή ευθύγραμμου τμήματος γύρω από το ένα του άκρο κατά 90°, ή να χαράξει συγκεκριμένο κύκλο και μετά κάθετες στα άκρα δύο κάθετων διαμέτρων του ή κάθετες στα άκρα της πρώτης πλευράς και ορισμό σημείων σε αυτές, σε ίσες αποστάσεις από τα άκρα ίσες προς την πλευρά του κλπ. Αυτή η διαδικασία «υποχρεώνει» το χρήστη (που σχεδιάζει στο Cabri) να σκεφτεί και να δράσει γεωμετρικά.

Η προσπάθεια να «δούμε» με τα μάτια της φαντασίας μας τη γραμμή που γράφει ένα σημείο, καθώς κινείται με τη βοήθεια κάποιας ιδιότητας, αποτέλεσε τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ των καλών και των κακών μαθητών στη Γεωμετρία. Η άμεση οπτικοποίηση του γεωμετρικού τόπου ανοίγει διάπλατα το δρόμο στο λύτη και του δίνει τη δυνατότητα να εντρυφήσει σε βαθύτερα και πλουσιότερα φαράγγια της γεωμετρικής γνώσης.

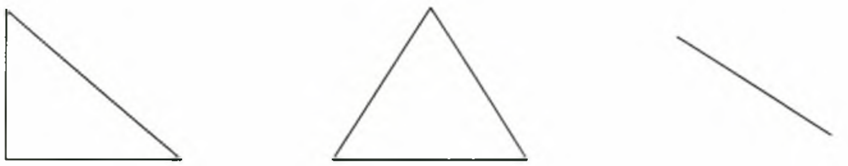
Αν θέλαμε, λοιπόν, να αναφέρουμε το ρόλο των λογισμικών αυτών στη μάθηση της γεωμετρίας, θα επιλέγαμε να αναφέρουμε όρους όπως «εξερεύνηση», «εικασία», «έλεγχος», «ανατροφοδότηση». Η «εξερεύνηση» ενός γεωμετρικού σχήματος στηρίζεται αφενός στη δυνατότητα κατασκευής εύκολα πολλών σχεδίων του, αλλά και στην ικανότητα να μεταβάλλουμε το σχέδιο ή να επαναλαμβάνουμε την κατασκευή του. Η εστίασή μας σε κρίσιμα σημεία του σχήματος-που συνήθως καθοδηγούμαστε γι' αυτό από μια σειρά ερωτήσεων- εμπλουτίζει τις νοητικές μας αναπαραστάσεις με τα αναλλοίωτα και μεταβαλλόμενα στοιχεία του και μας διευκολύνει στην αναγνώριση των θεωρητικών του ιδιοτήτων. Αυτή η διαδικασία μας διευκολύνει περισσότερο να πραγματοποιήσουμε νοητικές διεργασίες που αφορούν στο γεωμετρικό σχήμα και να περάσουμε έτσι στις επόμενες φάσεις της διατύπωσης των ιδιοτήτων του. Έτσι σχηματίζουμε «εικασίες» για το γεωμετρικό σχήμα. Η δυνατότητα να ελέγχουμε το σχέδιο με δυναμικό τρόπο μας επιτρέπει να κάνουμε έλεγχο των εικασιών που σχηματίσαμε. Αυτές είτε απορρίπτονται είτε ενισχύονται. Η απόρριψη μας οδηγεί συνήθως στην αναθεώρηση της δράσης μας και στην κατασκευή μιας διαφορετικής στρατηγικής της εξερεύνησης. Η επαλήθευσή της μας ενισχύει τη βεβαιότητα για την ισχύ της. Η ενίσχυση της βεβαιότητας μας οδηγεί να αναζητήσουμε μια θεωρητική ερμηνεία, μια απόδειξη της εικασίας μας. Η «ανατροφοδότηση» μπορεί να γίνει σε κάθε φάση. Και κατά το σχηματισμό της εικασίας, αλλά και κατά τον έλεγχό της. Σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον αυτή είναι άμεση και βοηθά τους μαθητές με πολλούς τρόπους.

Παρόλο που υπάρχουν διακριτές διαφορές ανάμεσα στα παραπάνω λογισμικά, τα κύρια χαρακτηριστικά τους -συσχέτιση με αναπαραστάσεις, μετασχηματισμοί, χρήση δημιουργία μικρόκοσμων- μπορούν να εξηγηθούν ως εξής:

3.3 Δυναμική Γεωμετρία & συσχέτιση με αναπαραστάσεις

Όμως, τι σημαίνει η λέξη «δυναμικός», όταν αναφερόμαστε σε περιβάλλοντα γεωμετρίας; Η λέξη «δυναμικός» δηλώνει το αντίθετο του στατικού, του αμετάβλητου. Στο πλαίσιο της γεωμετρίας, αυτή αναφέρεται στην κίνηση και τη μεταβολή των σχημάτων, συνήθως με το χέρι. Αυτή η προοπτική μας προδιαθέτει να δούμε το γεωμετρικό σχήμα ως μια μεταβαλλόμενη οντότητα, της οποίας κάθε φορά έχουμε και μια διαφορετική αναπαράσταση. Αλλά τι σημαίνει μεταβάλλεται ένα σχήμα;

Αρχικά ας θεωρήσουμε το απλούστερο γεωμετρικό σχήμα το τρίγωνο. Για να οριστεί (ή για να κατασκευαστεί) ένα τρίγωνο πρέπει να καθοριστούν οι πλευρές του ή οι θέσεις των τριών κορυφών του. Άρα μπορούμε να μεταβάλλουμε το τρίγωνο όταν μεταβάλλουμε τις κορυφές του. Και καθώς μεταβάλλονται οι θέσεις των κορυφών του, μεταβάλλονται και τα μεγέθη των πλευρών, των γωνιών του, το εμβαδόν του κτλ. Εκείνο που δεν μεταβάλλεται είναι η έννοια του τριγώνου, εφόσον οι τρεις κορυφές του δεν θα έχουν οριστεί ως συνευθειακά σημεία.



Αλλά δεν είναι μόνο αυτό που μας μαθαίνει η «δυναμική» μεταβολή του τριγώνου. Το τρίγωνο είναι μια *γεωμετρική έννοια* και αυτό που προκύπτει από τη μεταβολή των κορυφών του είναι «διαφορετικές αναπαραστάσεις» αυτής της έννοιας. Έχοντας αυτή τη δυνατότητα, να παρατηρούμε δηλαδή τις διάφορες αναπαραστάσεις αυτής της έννοιας, μπορούμε να συλλογιζόμαστε για τα χαρακτηριστικά της και να σχηματίζουμε εικασίες και υποθέσεις γι' αυτά[3](Γαβρίλης, 2003). Για παράδειγμα, όταν σε κάθε αναπαράσταση της έννοιας μετράμε το άθροισμα των τριών γωνιών του και παρατηρούμε ότι αυτό είναι 180o, σχηματίζουμε την εικασία ότι αυτό θα συμβαίνει και σε κάθε άλλη περίπτωση. Αν στη συνέχεια αυτή η εικασία επαληθευτεί και αποδειχτεί, θα έχουμε τότε μάθει μια από τις ιδιότητες της έννοιας του τριγώνου.

Από την παραπάνω περιγραφή, έχει ενδιαφέρον να ξεχωρίσουμε μια σημαντική δυνατότητα που μας παρέχει ο δυναμικός χειρισμός των αναπαραστάσεών τους. Συγκεκριμένα, μπορούμε μέσα από τις πολλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας, να σχηματίζουμε ευκολότερα εικασίες για έννοιες και σχέσεις που αφορούν στις γεωμετρικές έννοιες. Οι εικασίες αυτές αν δεν απορριφθούν κατά τον έλεγχο, αν δηλαδή γίνουν ισχυρές υποθέσεις, δημιουργούν από μόνες τους «την ανάγκη της απόδειξής τους» (Λάππας & Γαβρίλης, 2001). Παρόλο που θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι αυτή η δυναμική αλληλεπίδραση μπορεί να γίνει σε κάθε περιβάλλον που ενσωματώνει γεωμετρική γνώση, πιστεύουμε, ότι όταν γίνει σε ένα κατάλληλο υπολογιστικό περιβάλλον, η μάθηση είναι αποτελεσματικότερη. Σε ένα τέτοιο υπολογιστικό περιβάλλον τα σχήματα μπορούν να κατασκευαστούν πιο γρήγορα και με μεγαλύτερη ακρίβεια, ενώ αυξάνει η ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και οι δυνατότητες «πειραματισμού» (Γαβρίλης, 2001).

3.4 Δυνατότητα μετασχηματισμών

Ένα άλλο χαρακτηριστικό, που αναφέρεται στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας, είναι οι «μετασχηματισμοί». Πρόκειται για τη διαδικασία αλλαγής των σχημάτων, η οποία μπορεί να γίνει σε πολλά επίπεδα καθώς οι αλλαγές μπορεί να είναι αλλαγή θέσης, μορφής ή μεγέθους των γεωμετρικών σχημάτων. Οι μετασχηματισμοί είναι άμεσα συνδεδεμένοι με την κίνηση στο επίπεδο και στο χώρο και αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία περιβαλλόντων γεωμετρικής δραστηριότητας. Η μεταβολή του αρχικού σχήματος μεταδίδεται και στο σχήμα-εικόνα του μετασχηματισμού. Η διερεύνηση των μετασχηματισμών στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας βοηθά τους μαθητές, αφενός να κατανοήσουν τις έννοιες αυτές αλλά και να γενικεύουν γεωμετρικές ιδιότητες. Η έννοια του "αμετάβλητου" μέσα από μια συνεχή μεταβολή, που αναφέρει ο Otte (1997), οδηγεί στη γενίκευση μιας έννοιας. Ο Simon (1996) αναφέρει τη δυναμική μεταβολή αντικειμένων ως τη βάση του μετασχηματιστικού συλλογισμού, που τον θεωρεί ως έναν τρόπο κατανόησης των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Edwards (1992) η γεωμετρία των μετασχηματισμών είναι ένα περιβάλλον για εξερευνήσεις των μαθητών, επειδή είναι πλούσιο σε μαθηματικό περιεχόμενο και επειδή συνδέεται με τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών που περιέχουν κίνηση, μορφή και δράση. Το εύρος των εφαρμογών της μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε περιβάλλοντα, τα οποία συνδέουν τη γεωμετρία των μετασχηματισμών με την ευκλείδεια γεωμετρία, με την καρτεσιανή γεωμετρία αλλά και με τη γεωμετρία της Χελώνας.

3.5 Η χρήση/ δημιουργία «μικρόκοσμων»

Για τα δυναμικά περιβάλλοντα χρησιμοποιείται και ο όρος «μικρόκοσμος» . Με τον όρο αυτό προσδιορίζουμε τα υπολογιστικά περιβάλλοντα, τα οποία ενσωματώνουν συγκεκριμένες έννοιες ενός γνωστικού αντικειμένου υπό τη μορφή δυναμικών αναπαραστάσεων (Edwards, 1995). Ανάλογα με τη γνωστική περιοχή που θέλουμε να διδάξουμε στους μαθητές, δομούμε και το αντίστοιχο υπολογιστικό περιβάλλον. Ωστόσο, μέσα σε αυτό πουθενά δεν γράφεται, αναφέρεται, διδάσκεται- με την κλασική, συμβατική έννοια του όρου- η γνώση αυτή. Αυτό ακριβώς αποτελεί και το βασικό χαρακτηριστικό των εφαρμογών αυτών. Η έννοια, ο νόμος, η γνώση που θέλουμε να προσεγγίσουν οι μαθητές, είναι ενσωματωμένη, διάχυτη μέσα στο μικρόκοσμο «περιμένοντας» να «ανακαλυφθεί» από το μαθητή. Για παράδειγμα ένας μικρόκοσμος φυσικής, που στοχεύει στη μελέτη των νόμων του Νεύτωνα, δεν αναγράφει πουθενά τους νόμους αυτούς. Ωστόσο, ολόκληρος έχει κτισθεί με βάση αυτούς και η προσομοίωση της κίνησης που υποστηρίζεται από το μικρόκοσμο διέπεται από αυτούς. Η αλληλεπίδραση του μαθητή με το μικρόκοσμο μπορεί, για παράδειγμα, να συνίσταται στη διατύπωση υποθέσεων, οι οποίες βασίζονται στην εμπειρία του μαθητή και την προηγούμενη γνώση του για το πως θα λειτουργήσει η προσομοίωση. Μέσα από τη διαδικασία ελέγχου των υποθέσεών του, που υποστηρίζεται από την ανατροφοδότηση την οποία παρέχει ο υπολογιστής, ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να αναμορφώνει διαρκώς τις γνωστικές τους δομές, προκειμένου να κατανοήσει τη λειτουργία του μικρόκοσμου και συνεπώς τους νόμους που τη διέπουν.

Ο χρήστης επομένως καθίσταται ενεργός, σε αντίθεση με την εκπαιδευτική πρακτική αλλά και τις παροχές του λογισμικού υποστήριξης της καθοδηγητικής διδασκαλίας. Ενεργοποιεί και εκμεταλλεύεται το πνευματικό του δυναμικό- αφού είναι και αναγκασμένος να στηριχθεί σε αυτό- και έχει ελευθερία επιλογής των στρατηγικών διερεύνησης και πειραματισμού που θα ακολουθήσει. Επιπροσθέτως, είναι δυνατόν να του παρέχονται δυνατότητες προκειμένου όχι απλά να χειρίζεται αλλά και να δημιουργεί υπολογιστικά αντικείμενα, χρησιμοποιώντας εντολές που λειτουργούν ως εργαλεία δόμησης και διαχείρισης αυτού του περιβάλλοντος. Κάνοντας χρήση αυτών των εντολών ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει υπολογιστικές οντότητες στην οθόνη του υπολογιστή και τις αντίστοιχες εντολές και διαδικασίες χειρισμού τους.

Επιπλέον τέτοιες εφαρμογές υποστηρίζουν τη συνδυασμένη χρήση τέτοιων διαδικασιών, επιτρέποντας στο χρήστη να τις χρησιμοποιεί ως δομικές μονάδες χτίζοντας/ ενσωματώνοντας τη μία πάνω/ μέσα στην άλλη, ενισχύοντας έτσι την προοδευτικά εξελισσόμενη αφαιρετική σκέψη από το συγκεκριμένο στο πιο αφηρημένο και γενικευμένο. Έτσι, χτίζοντας και διαμορφώνοντας το μικρόκοσμο οι μαθητές βαθμιαία δομούν τη δική τους προσωπική γνώση (Hoyles & Noss, 1992).

Η αρχική εκπαιδευτική πρακτική των μικρόκοσμων συνοδεύτηκε από την προσδοκία ότι η μάθηση θα πραγματώνεται απλώς και μόνο λόγω της αλληλεπίδρασης των μαθητών μ' αυτά τα μαθησιακά περιβάλλοντα, μειώνοντας αισθητά το ρόλο του εκπαιδευτικού στη μαθησιακή διαδικασία. Ωστόσο, προσδιορίζοντας την παιδαγωγική αξία τέτοιων περιβαλλόντων και εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στην ποιότητα της αλληλεπίδρασης, ερχόμαστε πιο κοντά στο να εκτιμήσουμε αυτή την αλληλεπίδραση σε όλο της το εύρος. Με άλλα λόγια, το παιδί δεν ανατροφοδοτείται μόνο από την οθόνη του υπολογιστή, αλλά και από το σύνολο του κοινωνικού του περίγυρου, από τους συμμαθητές και το δάσκαλό του. Επομένως δεν μπορούμε να δούμε τη λειτουργία του μικρόκοσμου αποκομμένη από το πλαίσιο της όλης εκπαιδευτικής διαδικασίας, από τη δυναμική της ομάδας στην οποία είναι ενταγμένος ο υποθετικός χρήστης και από το ρόλο του εκπαιδευτικού. Ο μικρόκοσμος, λοιπόν, αποτελεί μέρος μιας παιδαγωγικής αντίληψης και πρακτικής, δεν ταυτίζεται όμως μ' αυτή. Στο πλαίσιο αυτό αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού. Ο/Η εκπαιδευτικός είναι εκείνος/η που θα πρέπει να αναλύσει εννοιολογικά το «εμφυτευμένο» στο μικρόκοσμο γνωστικό αντικείμενο και λαμβάνοντας υπόψη το γνωστικό επίπεδο των μαθητών του, να προχωρήσει σε σχεδιασμό δραστηριοτήτων με ενδιαφέρων και νόημα για τα παιδιά. Επιπλέον, καλείται να διαμορφώσει έναν περισσότερο συμβουλευτικό ρόλο, ένα ρόλο μάλλον συνερευνητή και αρωγού των προσπαθειών των μαθητών, παρά καθοδηγητή, αφού το ζητούμενο είναι οι μαθητές να συνεργαστούν μεταξύ τους, ίσως σε μικρές ομάδες των δύο/τριών ατόμων, για την επίτευξη του κοινού στόχου, μετατοπίζοντας έτσι το κέντρο βάρους της εκπαιδευτική διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή ή ακριβέστερα, προς τη μικρή ομάδα των μαθητών.

Κεφ. 4: Μεθοδολογία

4.1 Εισαγωγή.

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφουμε τη μεθοδολογική προσέγγιση της έρευνας, το δείγμα, τις μεθόδους συλλογής στοιχείων και ανάλυσης αυτών.

4.2 Στόχοι- Ερωτήματα- Προσέγγιση

Με βάση τον προβληματισμό που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, οι στόχοι της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθεί:

Α) τι κατανοούν τα παιδιά σχετικά με την έννοια του τριγώνου και τι είδους αναπαραστάσεις διαθέτουν για τις έννοιες του διαφορετικού και του ίδιου;

Β) την διαδικασία μύησης των παιδιών στον πειραματισμό και στον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας στον υπολογιστή

Τα βασικά μας ερωτήματα είναι:

1. Τι είδους αναπαραστάσεις διαθέτουν τα παιδιά σχετικά με τα διαφορετικά και ίδια τρίγωνα και κατά πόσο αυτές οι αναπαραστάσεις είναι κοντά σε στερεότυπα σχήματα της γεωμετρικής έννοιας; Συγκεκριμένα, έχουν τα παιδιά εικόνα για τα σκαληνά και αμβλυγώνια τρίγωνα;
2. Κατά πόσο το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας διευκολύνει τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων και τον πειραματισμό με διάφορες μορφές αναπαραστάσεων τους;
3. Κατά πόσο η δυνατότητα μετασχηματισμού και πειραματισμών βοηθάει στην γενίκευση σχετικά με την έννοια του τριγώνου στους μικρούς μαθητές και μαθήτριες;

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο, που αναπτύχθηκε παραπάνω και μια πρώτη ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων, καταλήξαμε στις εξής υποθέσεις:

1. Λόγω του ότι οι γεωμετρικές δεξιότητες των παιδιών βρίσκονται, σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele, στα επίπεδα 0 –2, οι αναπαραστάσεις, που διαθέτουν για τα τρίγωνα, ίσως να περιορίζονταν κυρίως σε στερεότυπες μορφές (ισόπλευρα ή/και ισοσκελή τρίγωνα).
2. Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να διευκολύνει το μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων και ίσως συμβάλλει στον εμπλουτισμό των αναπαραστάσεων που διαθέτουν τα παιδιά, μέσω της δυναμικότητας του μετασχηματισμού.

4.3 Τα παιδιά, το σχολείο και η δασκάλα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν είκοσι δύο παιδιά της Ά τάξης ενός Δημοτικού σχολείου στο Βόλο. Επιλέχθηκαν παιδιά Δημοτικού, γιατί λόγω αναλυτικού προγράμματος έρχονται καθημερινά σε επαφή με το σχολικό εγχειρίδιο, άρα με τις αναπαραστάσεις των τριγώνων, απ' ότι τα νήπια. Ακόμη η γεωμετρική σκέψη κάνει την εμφάνισή της σε αυτήν ακριβώς την ηλικία. Επίσης, θεωρήθηκε ότι τα παιδιά της Α΄ Δημοτικού θα χειρίζονταν πιο εύκολα το υπολογιστικό περιβάλλον, καθώς έρχονται σε επαφή με υπολογιστές στο σχολείο τους και έχουν ένα βαθμό εξοικείωσης. Εξάλλου, ο αριθμός των νηπιαγωγείων που διαθέτουν υπολογιστή είναι πολύ μικρός. Συνεπώς θα ήταν πολύ δύσκολή η διεξαγωγή της έρευνας, εφόσον το δείγμα θα ήταν μικρό και επί πλέον η γωνιά του υπολογιστή δεν είναι δυνατόν να απομονωθεί.

Τα παιδιά προέρχονταν από διάφορα κοινωνικοοικονομικά στρώματα και οι επιδόσεις τους στα σχολικά μαθήματα ποικίλες. Να σημειωθεί επίσης, ότι πολλά από τα παιδιά δεν είχαν ασχοληθεί ξανά με υπολογιστή σε ζευγάρια ή ατομικά-. Η εμπειρία τους στο σπίτι και το σχολείο ήταν σε πολυμελής ομάδες, για λίγη ώρα και χωρίς κυρίαρχο ρόλο (χειριστές πληκτρολογίου-ποντικιού). Γεγονός θετικό, για την επαλήθευση της υπόθεσής μας σχετικά με τη συμβολή του υπολογιστικού περιβάλλοντος στην εννοιολογική κατάκτηση.

Το σχολείο βρίσκεται στο κέντρο της πόλης και συστεγάζεται με ένα ακόμη Δημοτικό και δύο νηπιαγωγεία. Η δασκάλα ήταν γύρω στα πενήντα, ωστόσο με ιδιαίτερο ζήλο και δεκτικότητα για καινούρια πράγματα και τρόπους διδασκαλίας. Φαινόταν να έχει πολύ καλή σχέση με τα παιδιά, ήταν πολύ φιλική, ευχάριστη και ευνοϊκά διατεθειμένη απέναντί μας, γεγονός που διευκόλυνε τη συνεργασία μας και τη διεξαγωγή της έρευνας.

4.4 Οι 4 φάσεις της έρευνας

Σύμφωνα με το παρακάτω πλάνο, η έρευνα ολοκληρώθηκε στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις. Η πρώτη φάση περιλαμβάνει τη διαπραγμάτευση της πρόσβασής μας στο σχολείο και τη συγκεκριμένη τάξη, προκειμένου να διεξαχθεί η έρευνα, καθώς και τη διαδικασία γνωριμίας με τη δασκάλα και τα παιδιά και την ενημέρωση και επικοινωνία για την έρευνα μαζί τους. Στη δεύτερη φάση ακολουθεί η εφαρμογή της πιλοτικής μελέτης σε δύο μαθητές. Αφού ολοκληρώθηκαν οι δύο πρώτες φάσεις ήμασταν έτοιμοι να περάσουμε στην εφαρμογή της τρίτης, τη φάση της διάγνωσης, η οποία περιελάμβανε την εφαρμογή της κύριας μελέτης σε οπτικο-απτικό περιβάλλον. Τέλος, την τέταρτη φάση αποτελούσε: α) την εφαρμογή του διδακτικού πειράματος[4] στο χώρο του εργαστηρίου (βλ. Chronaki, 1992) και β) την αφήγηση ιστορίας και την εικονογράφησή της από τα παιδιά μέσα στην τάξη.

[4] Όπως αναφέρει ο Steffe (1991), ο ρόλος του ερευνητή στο Διδακτικό Πείραμα αλλάζει από ένα παρατηρητή, σε ένα δρων υποκείμενο που σκοπεύει να δημιουργήσει μοντέλα των γνωστικών δράσεων των εκπαιδευομένων. Ενεργεί ως δάσκαλος, καθώς είναι ένα παρατηρητής που συμμετέχει σε μια αλληλεπιδραστική επικοινωνία με τους μαθητές. Ο ερευνητής ξεκινά υποθέτοντας τι μπορεί να μάθει το άτομο, βασίζοντας τις υποθέσεις τους σε μία πρόσφατη ερμηνεία των λεκτικών ή των σωματικών συμπεριφορών του. Οπως εξηγούν οι Skemp (1981) και Seffe (1991), ο ερευνητής αρχικά διαμορφώνει ένα μοντέλο της παρούσας γνωστικής μαθηματικής κατάστασης του μαθητευόμενου, και μετά αποφασίζει το στόχο που πρέπει να φτάσει ο εκπαιδευόμενος.

Ά Φάση	▪ Διαπραγμάτευση πρόσβασης στην τάξη. ▪ Γνωριμία με την δασκάλα και τα παιδιά/ Ενημέρωση και Επικοινωνία για την έρευνα
Β Φάση	▪ Εφαρμογή της Πιλοτικής Μελέτης
Γ Φάση	▪ Εφαρμογή Κύριας Μελέτης σε Οπτικο-απτικό περιβάλλον
Ά Φάση	▪ Εφαρμογή Διδακτικού Πειράματος (στο εργαστήριο Η/Υ) ▪ Αφήγηση Ιστορίας και Εικονογράφησή- Ζωγραφική (στην τάξη)

Πίνακας 1. **Πλάνο Συλλογής Δεδομένων**

4.4.1 Περιγραφή διαδικασίας πρόσβασης & Δεοντολογία της Έρευνας

Στα πλαίσια της έρευνας προκειμένου να αποφευχθούν ορισμένα προβλήματα, καθ' ότι πρόκειται για μια περίπλοκη και μπερδεμένη διαδικασία, από τα πρώτα στάδιά της κρίνεται αναγκαίο να αποσαφηνιστούν τα κίνητρα του ερευνητή, η ερευνητική μέθοδος. Να διατηρηθεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων και να κερδίσει ο ερευνητής την εμπιστοσύνη τους, προκειμένου να μη διστάζουν να δώσουν αληθινές και αυθόρμητες απαντήσεις και διεξαχθεί η έρευνα (Plummer, 2000).

Όπως φαίνεται και στο πλάνο συλλογής δεδομένων, κατά την **Ά Φάση** έγινε η διαπραγμάτευση πρόσβασης στην τάξη, η γνωριμία με τη δασκάλα και τα παιδιά, η διεκδίκηση της εμπιστοσύνης τους και η γνωστοποίηση της διαδικασίας. Η διαπραγμάτευση έγινε με επίσκεψή μας στο χώρο του σχολείου, όπου συζητήσαμε με τη διευθύντρια του σχολείου και τη δασκάλα της τάξης. Γνωστοποιήσαμε στις υπεύθυνες το λόγο της επισκέψεώς μας, όπως και το σκοπό διεξαγωγής της έρευνας. Στη συνέχεια περιγράψαμε τη διαδικασία που θα ακολουθούνταν, τις δραστηριότητες που θα δίνονταν στα παιδιά. Η εκπαιδευτικός δεν χρειαζόταν να πάρει ενεργό μέρος στην όλη διαδικασία, απλά θα μας επέτρεπε, κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, να απασχολούμε καθημερινά δυο- τρία παιδιά, έξω από την τάξη χωρίς να παρεμβαίνουμε στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Προκειμένου η εκπαιδευτικός να δείξει εμπιστοσύνη στην όλη διαδικασία, κάθε φορά που κάποιο παιδί ολοκλήρωνε τα φύλλα εργασίας, την ενημέρωνα για την πορεία και τα σχόλιά μου. Επισημαίνοντας στη δασκάλα ότι στόχος μου δεν ήταν να ελέγξω τα αποτελέσματα της δικής της δουλειάς κατά τη διάρκεια του έτους (καθώς στα σχολικά εγχειρίδια και το αναλυτικό πρόγραμμα δεν περιλαμβάνει τη συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας) και ζητώντας τα δικά της σχόλια πάνω στις παρατηρήσεις μου για την εργασία του κάθε παιδιού, άρχισε να δείχνει μεγαλύτερη εμπιστοσύνη και να κατανοεί τη σημαντικότητα του δικού της ρόλου στην έρευνα. Εξ' αρχής ήταν πολύ θετική απέναντί μου, συνεργάσιμη και πρόθυμη να βοηθήσει. Εύλογη όμως και η δυσπιστία της, καθώς ένα τρίτο άτομο εισβάλλει στο χώρο ευθύνης της απέναντι στα παιδιά και τους γονείς.

Στη συνέχεια η ίδια με παρουσίασε στα παιδιά και εξήγησε το λόγο που βρισκόμουν εκεί. Είναι προτιμότερο τα παιδιά να γνωρίζουν τον πραγματικό λόγο της παρουσίας σου εκεί, προκειμένου να μην αμφισβητήσουν τη διαδικασία και να αποφευχθεί το ενδεχόμενο να νιώσουν ότι εξαπατήθηκαν. Όσον αφορά στην εμπιστοσύνη που έπρεπε να δείξουν τα παιδιά, αυτή αποτελούσε σημαντικότατο παράγοντα, για την απόσπαση αυθόρμητων και αληθινών πληροφοριών. Έτσι τους επισήμανα ότι δεν σκόπευα να τους εξετάσω και ότι απλά ήθελα να μου εκφράσουν τις σκέψεις και τις ιδέες τους για όσα θα τους ρωτούσα. Δεν μ΄ ενδιέφερε αν η απάντηση ήταν σωστή ή λάθος. Επιπλέον έδειχναν φόβο στο μαγνητοφωνάκι και για να αποφύγω συγκρατημένες απαντήσεις τους είπα ότι μετά θα μπορούσαν να ακούσουν τον εαυτό τους να μιλά. Έτσι έγιναν πιο δεκτικοί σώμα. Κάτι αντίστοιχο συνέβη και με την βιντεοκάμερα.

4.5 Μέθοδοι

Προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι που θέσαμε αρχικά και να διερευνηθούν οι υποθέσεις μας, επιστρατεύθηκαν μια σειρά μεθόδων συλλογής και ανάλυσης στοιχείων. Η χρήση τους για την πραγματοποίηση της έρευνας συντέλεσε στην ολοκληρωμένη διαμόρφωση και διεξαγωγή της

4.5.1 Μέθοδοι συλλογής στοιχείων

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των δεδομένων ήταν: (α) τα έργα, που δόθηκαν στους μαθητές/τριες και περιείχαν φύλλα εργασίας και οπτικό-απτικό υλικό, (β) η συνέντευξη- τα έργα αποτελούσαν τη βάση για τις συνεντεύξεις που έγιναν με τα παιδιά. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και τα κείμενα αποτέλεσαν τη βάση για ανάλυση. Καταγράφηκαν επίσης και οι παρατηρήσεις των κινήσεων, των εκφράσεων και των περιγραφών που έκαναν τα παιδιά.

(α)΄Εργα

Τα έργα που δόθηκαν στα παιδιά στο οπτικο-απτικό περιβάλλον είναι τα εξής: 1^{o} Σχεδίαση διαφορετικών τρίγωνων σε λευκό και σε χαρτί με κουκίδες. 2^{o} Σχεδίαση όμοιων τριγώνων σε λευκό χαρτί και σε χαρτί με κουκίδες. 3^{o} Ελεύθερες συνθέσεις τριγώνων και 4^{o} Συνθέσεις τριγώνων σε πάζλ (βλ. παράρτημα 2).

Τα έργα που κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας στο περιβάλλον του Cabri, περιελάμβαναν ελεύθερους μετασχηματισμούς και μετασχηματισμούς με συνθήκες (βλ. παράρτημα 4). Τέλος, στο χώρο της τάξης τους ζητήθηκε να ζωγραφίσουν την ιστορία που τους αφηγηθήκαμε, ώστε να φτιάξουμε το δικό μας παραμύθι (βλ. παράρτημα 5).

(β) Συνέντευξη

Το είδος της συνέντευξης που χρησιμοποιήθηκε μπορεί να χαρακτηριστεί ως ημι-δομημένη, καθώς από τη μια υπάρχουν συγκεκριμένα φύλλα εργασίας που πρέπει να συμπληρωθούν και ερωτήσεις που έπρεπε να απαντηθούν από τα παιδιά, ενώ από την άλλη παρέχεται σημαντική ελευθερία στον ερευνητή να τροποποιήσει τη διαδικασία «καθ΄ οδόν» . Το είδος αυτό της συνέντευξης επιτρέπει στον ερευνητή να κινηθεί σε μεγαλύτερο βάθος, και στην προκειμένη περίπτωση να κατανοήσει τις απαντήσεις και τη σκέψη των παιδιών. Επιπλέον, μαγνητοφωνώντας τις απαντήσεις των παιδιών δίνονταν η δυνατότητα να επανεξεταστούν και να επεξεργαστούν ξανά όποια σημεία κρίνονταν απαραίτητο. Βέβαια, το μεγαλύτερο μέρος της επεξεργασίας αυτών των συνεντεύξεων συντελέστηκε στα απομαγνητοφωνημένα κείμενα. Για την ανάλυση σημαντικότατο ρόλο έπαιξε και η απομαγνητοφώνηση αυτών των συνεντεύξεων, καθώς παρείχε άμεση πρόσβαση στο υλικό, οποιαδήποτε στιγμή χρειαζόταν. Η απομαγνητοφώνηση είναι μια αρκετά χρονοβόρα διαδικασία, παρόλ' αυτά αναγκαία, ώστε να διευκολυνθεί ο ερευνητής.

(γ) Παρατήρηση

Η παρατήρηση των κινήσεων, των εκφράσεων και των αντιδράσεων των παιδιών παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς φανερώνει άδηλες σκέψεις, που τα ίδια ντρέπονται ή φοβούνται να εκφράσουν. Στην καταγραφή των παρατηρήσεων βοηθούσε σημαντικά και η μαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων, καθώς εξοικονομούνταν χρόνος για την παρατήρηση. Η καταγραφή αυτών των παρατηρήσεων αποτέλεσε σημαντικό συμπληρωματικό στοιχείο, για την κατανόηση της συμπεριφοράς και των ερμηνειών-εξηγήσεων που έδιναν τα παιδιά, συνέβαλλε, λοιπόν, σημαντικά στη φάση της ανάλυσης. Η παρατήρηση θεωρείται αποτελεσματική μέθοδος συλλογής δεδομένων, καθώς οι πληροφορίες προέρχονται από τις περιγραφές και τις μετρήσεις που δίνει ο ίδιος ο ερευνητής-εξεταστής (Παρασκευόπουλος, 1993). Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος της παρατήρησης στο δεύτερο μέρος της έρευνας, στο υπολογιστικό περιβάλλον, όπου ερευνάται και η αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων, με απώτερο σκοπό τη μάθηση. Έτσι λοιπόν, η καταγραφή αυτών των παρατηρήσεων ήταν ένα πρόσθετο επεξηγηματικό στοιχείο στη μετέπειτα ανάλυση των δεδομένων.

(δ) Βιντεοσκόπηση

Η βιντεοσκόπηση ως μέθοδος, χρησιμοποιείται για τη συλλογή και τη λεπτομερή ανάλυση μέσα από την αποβιντεοσκόπηση. Στην παρούσα έρευνα η βιντεοσκόπηση χρησιμοποιήθηκε για να εγκλωβίσει το φυσικό διάλογο ανάμεσα στην ομάδα εργασίας, τη ροή και την αλληλουχία των κινήσεων, τις αντιλήψεις τους για τα τρίγωνα και το επίπεδο συνεργασίας . Όπως αναφέρεται στο Chronaki (1997), ο Mehan (1993) ισχυρίζεται ότι η βιντεοσκόπηση διευκολύνει τον ερευνητή να ακούσει και να παρακολουθήσει κατ' επανάληψη. Αυτό διευκολύνει τη διαδικασία περιγραφής των νοημάτων, τόσο των ερωτήσεων του ερευνητή , όσο και των απαντήσεων των παιδιών. Στη φάση που χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας βιντεοσκοπήθηκαν τα έργα και οι διάλογοι των παιδιών. Η βιντεοσκόπηση έχει το προτέρημα της επανεξέτασης διάφορων σημείων πολλές φορές και την εστίαση σε επιλεγμένα επεισόδια.

Ο συνδυασμός των παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιήθηκε για την αύξηση της αξιοπιστίας και της εγκυρότητας των στοιχείων που συλλέχθηκαν. Δύο ζητήματα κεντρικά για κάθε ερευνητική μέθοδο και τα οποία έχουν μια ιδιάζουσα σχέση μεταξύ τους. η αξιοπιστία αφορά κυρίως την ερευνητική τεχνική και συνέπεια- διασφαλίζει δηλαδή, ότι η συγκεκριμένη μελέτη θα οδηγούσε σε παρόμοια ευρήματα, ακόμη κι αν διεξαγόταν από άλλο ερευνητή. Η εγκυρότητα συνδέεται με τη διασφάλιση ότι η τεχνική της έρευνας πραγματεύεται το αντικείμενό της (Plummer, 2000). Όπως παρατηρεί ο Frazier (1976, σ.129), « μπορούμε ίσως να πούμε ότι είναι πιθανότερο η εγκυρότητα να περιορίζεται όσο αυξάνει η ευκολία με την οποία ελέγχεται η αξιοπιστία». Συνήθως όσο πιο κοντά βρίσκεται κανείς στα φαινόμενα που θέλει να κατανοήσει, τόσο προσεγγίζει την εγκυρότητα. Δίνοντας λοιπόν βάση περισσότερο στη εγκυρότητα, επιστρατεύθηκαν όλες οι παραπάνω τεχνικές συλλογής δεδομένων.

4.5.2 Μέθοδος Ανάλυσης Στοιχείων

Η ανάλυση των στοιχείων πραγματοποιήθηκε μέσα από τρεις διαδικασίες:

Πρώτον, μέσα από μια πρώτη ανάγνωση των απαντήσεων των παιδιών στα έργα του οπτικο-απτικού περιβάλλοντος (1 α, 1β, 2 α, 2β, 3 α, 3β, 4 α,4β), δημιουργήθηκαν πίνακες με τα ποσοστά της επίδοσης των παιδιών στα έργα αυτά.

Δεύτερον, αναλύοντας τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των συνεντεύξεων των παιδιών, έγινε επιλογή αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων (ή αντι- παραδειγμάτων), που αναδεικνύουν την ποικιλία των αναπαραστάσεων που διαθέτουν τα παιδιά, τους τρόπους που εκφράζονται και επεξηγούν τη σκέψη τους και πως τελικά διαμορφώνεται η κατανόησή τους σχετικά με τις γεωμετρικές έννοιες.

Τρίτον, όσον αφορά το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του van Hiele. Για τη δική μας ανάλυση είναι χρήσιμα τα τρία πρώτα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, σύμφωνα με τα οποία αναμένουμε από τα παιδιά την ακόλουθη συμπεριφορά ανά επίπεδο, προκειμένου να κάνουμε την κατηγοριοποίηση για την ανάλυση (βλ. κεφάλαιο 2, όπου γίνεται λεπτομερής παρουσίαση). Να σημειωθεί ότι το επίπεδο 0 και το επίπεδο 2 του van Hiele εμπλουτίστηκαν με μια σειρά επιπέδων, προκειμένου να ανταποκρίνονται επακριβώς με το επίπεδο των παιδιών. Συγκεκριμένα:

Α) Το επίπεδο 0 (οπτικοποίηση), με τρία επιμέρους επίπεδα:

Επίπεδο 0α: Τα παιδιά σχεδιάζουν χωρίς να δίνουν καμία εξήγηση.
Επίπεδο 0β: Τα παιδιά σχεδιάζουν και δίνουν προσωπικές εξηγήσεις.
Επίπεδο 0γ: Τα παιδιά σχεδιάζουν και εξηγούν χρησιμοποιώντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά ανάμικτα με προσωπικές εξηγήσεις.

Β) Το επίπεδο 1, (ανάλυση), όπου τα παιδιά σχεδιάζουν και εξηγούν χρησιμοποιώντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά, χωρίς προσωπικά στοιχεία.
Γ) Το επίπεδο 2, (άτυπη επαγωγική σκέψη), όπου τα παιδιά αντιλαμβάνονται αιτιώδεις σχέσεις και εξηγούν γιατί μια σχέση είναι έτσι όπως είναι, γιατί ένα ορθογώνιο είναι ορθογώνιο. Αυτό το επίπεδο εμπλουτίστηκε με δδύο επιμέρους επίπεδα:

Επίπεδο 2α: Τα παιδιά αντιλαμβάνονται τον τρόπο μετασχηματισμού των σχημάτων, καθώς και ότι πρέπει να εστιάσουν σε γεωμετρικές ιδιότητες, αλλά δεν εξηγούν.
Επίπεδο 2β: Τα παιδιά αντιλαμβάνονται τον τρόπο μετασχηματισμού των σχημάτων, καθώς και ότι πρέπει να εστιάσουν σε γεωμετρικές ιδιότητες και εξηγούν με βάση αυτών των παρατηρήσεων.

Κεφ. 5: Η Κατανόηση των Παιδιών της Έννοια του Τριγώνου σε Οπτικο-Απτικό Περιβάλλον

5.1 Εισαγωγή

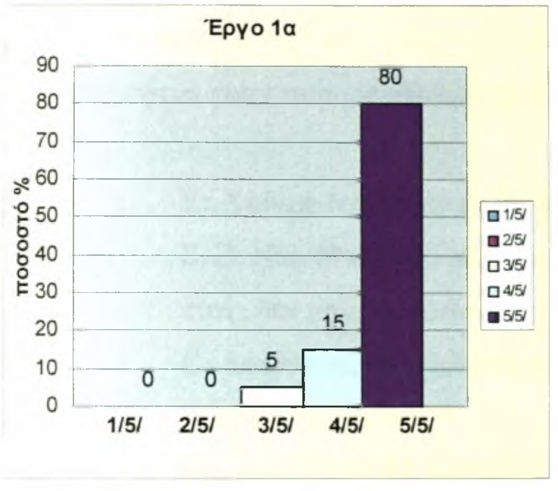
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας, που αφορούν την αποτίμηση της επίδοσης των παιδιών σχετικά με τις γεωμετρικές δεξιότητες σε συγκεκριμένα έργα. Η επίδοση των παιδιών διερευνάται στα εξής σημεία: α) πως κατανοούν τα παιδιά το 'διαφορετικό' και το 'ίδιο' μέσα από τις κατασκευές (π.χ. σχεδίαση) και τις περιγραφές τους, β) το ρόλο που μπορεί να παίξει το λευκό χαρτί ή το χαρτί με τις κουκίδες στον σχεδιασμό 'διαφορετικών' ή 'όμοιων' τριγώνων (δηλαδή κατά πόσο ωθεί τα παιδιά στη μέτρηση) και γ) η αξιοποίηση της γνώσης γεωμετρικών χαρακτηριστικών για την ελεύθερη σύνθεση και τη σύνθεση με περιορισμό (π.χ. πάζλ). Η γεωμετρική δεξιότητα των παιδιών χαρακτηρίζεται σύμφωνα με τα επίπεδα του μοντέλου van Hiele και την επιμέρους τροποποίηση που έγινε σ΄ αυτά λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις των παιδιών (βλ. Κεφ. 4 Μεθοδολογία). Παρατίθενται λοιπόν, πίνακες ποσοστών εμφάνισης των διαφόρων επιπέδων στα οποία βρίσκονται τα παιδιά ανά έργο, καθώς και αποσπάσματα των συνεντεύξεων που αναδεικνύουν τις δυσκολίες, τις αντιλήψεις, τις αναπαραστάσεις τους, τους τρόπους έκφρασής τους αλλά και τα επίπεδα της γεωμετρικής τους σκέψης.

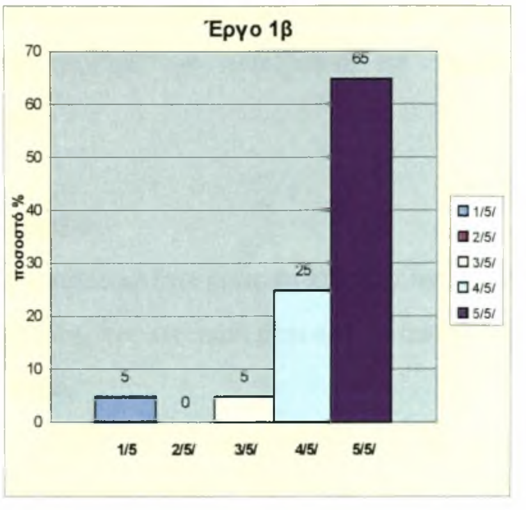
5.2 Κατανόηση της Έννοιας του «Διαφορετικού» στα Τρίγωνα

Με στόχο τη διερεύνηση της κατανόησης των παιδιών για την έννοια του διαφορετικού στα τρίγωνα και των αναπαραστάσεων που διαθέτουν, δόθηκαν τα έργα $1^{α}$,1β (βλ. παράρτημα 2), όπου έπρεπε να σχεδιάσουν πέντε διαφορετικά τρίγωνα σε λευκό χαρτί και σε χαρτί με κουκίδες αντίστοιχα.

5.2.1 Σχεδίαση Διαφορετικών Τριγώνων

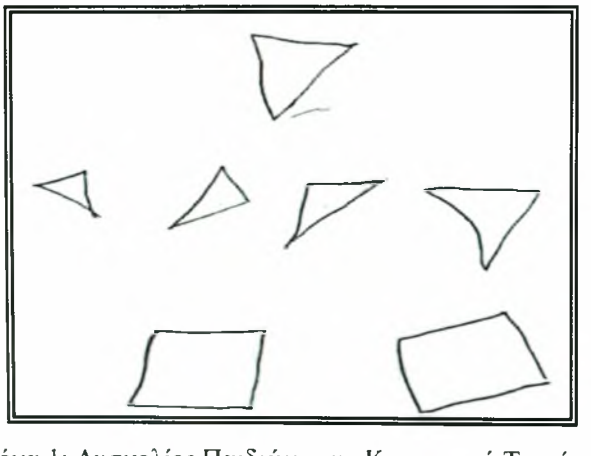
Η πλειοψηφία των παιδιών δυσκολεύεται στην κατανόηση της έννοιας της διαφορετικότητας στα τρίγωνα:Δηλαδή δεν μπορούν να δημιουργήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας του τριγώνου. Όπως φαίνεται στον πίνακα 1.3, ενώ το 80% των παιδιών σχεδιάζει διαφορετικά τρίγωνα, ωστόσο επιλέγει στερεότυπες





Πίνακες 1.3 & 1.4 : Σχεδίαση Διαφορετικών Τριγώνων

αναπαραστάσεις. Δηλαδή, αυτό που αντιλαμβανόταν ως διαφορετικό αντιστοιχούσε σε ίδιες αναπαραστάσεις τριγώνων. Ταυτόχρονα, το 20% των παιδιών δεν καταφέρνει να σχεδιάσει τρίγωνα (βλ. εικόνα 1).



Εικόνα 1: Δυσκολίες Παιδιών στην Κατασκευή Τριγώνων

Σε πολλές γεωμετρικές δραστηριότητες (βλ. διδακτικά εγχειρίδια) προτείνεται η χρήση του χαρτιού με κουκίδες ως μέσο για τη διευκόλυνση της μέτρησης κατά τη σχεδίαση. Όμως κάτι τέτοιο δε φαίνεται να ισχύει. Εάν συγκρίνει κανείς τους πίνακες 1.3 και 1.4, μπορεί να διαπιστώσει, ότι τα παιδιά δυσκολεύονται περισσότερο να κατασκευάσουν τρίγωνα (έστω και στερεότυπα) στο χαρτί με τις κουκίδες (πίνακας 1.4), όπου το ποσοστό συμβατών αναπαραστάσεων μειώνεται αισθητά κατά 15% σε σχέση με αυτό στο λευκό χαρτί, που ανέρχεται στο 80%. Πολλές φορές μπερδεύονται και φτιάχνουν τετράγωνα, θεωρώντας πως όλες οι γραμμές πρέπει να ακουμπάνε σε τελείες. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω αποσπάσματα:

Ε: Ακόμη ένα, να είναι διαφορετικό ε;

Σ. Ζ: Ναι. Η τελίτσα πάει έτσι. άμα κάνω κι ένα προς τα κάτω.. έτσι κι έτσι ..δεν μπορώ γιατί είναι οι τελίτσες, λες και πάει έτσι σαν κι αυτό.

Ε: Δοκίμασε, να φτιάξεις κάτι άλλο.

Σ. Ζ: Δεν ξέρω. Να.

Επεισόδιο 1 [Κ.Μ. 646-649, Σάκης, συνέντευξη]

Ε: Θα πρέπει να κοιτάς αυτό, για να κάνεις αυτό ίδιο.

Σ. Ζ: Δεν μπορώ… Δεν έχει τελίτσες άλλες για να το κάνω αυτό γραμμή.

Επεισόδιο 4.1 [Κ.Μ.678-679, Σάκης, συνέντευξη]

Α. Μ: Λιγάκι............

Α. Μ: Δεν είναι σωστό αυτό..

Ε: Γιατί δεν είναι σωστό;

Α. Μ: Έχει δύο μύτες..

Ε: Μόνο δύο έχει;

Α. Μ: Ναι.

Επεισόδιο 2 [Κ.Μ. 5200-5213, Αποστόλης, συνέντευξη]

5.2.2 Στερεότυπες Αναπαραστάσεις Τριγώνων

Η εξήγηση που δίνουμε για τις στερεότυπες επιλογές των παιδιών στην αναπαράσταση τριγώνων είναι, ότι οι οπτικές εμπειρίες των παιδιών δεν περιλαμβάνει παραστάσεις αμβλυγώνιων ή οξυγώνιων τριγώνων, όπως:

Αν και γνωρίζουν τυπικά, ότι το τρίγωνο έχει «τρεις πλευρές και τρεις γωνίες» (Hill, 1987), δεν είναι σε θέση να γενικεύσουν αυτή την πρόταση. Σ' αυτό συντελούν έντονα και τα σχολικά εγχειρίδια, καθώς η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται για την έννοια του τριγώνου είναι ουσιαστικά μία, αυτή του ισοπλεύρου. Αυτό συμβαίνει ειδικά στις μικρές τάξεις (Α΄& Β΄ Δημοτικού). Το γεγονός αυτό συντελεί στην ταύτιση του ισόπλευρου τριγώνου με την έννοια του τριγώνου (Σκουμπουρδή, 2003). Μέσα από τα δικά μας δεδομένα σκιαγραφούνται οι αντιλήψεις των παιδιών για τα σκαληνά, αμβλυγώνια τρίγωνα, που για τα απιδιά παύουν να είναι τρίγωνα. Στο 2^o έργο τα παιδιά ήρθαν αντιμέτωπα με τρία τρίγωνα μη-στερεότυπα (αμβλυγώνιο, σκαληνό, ορθογώνιο). Ορίστε οι αντιδράσεις τους:

Ε: Για πες μου τώρα είναι ίδια μεταξύ τους τα τρίγωνα

Ο. Α: Το πρώτο είναι, το άλλο όχι.

Ε: Όχι; Γιατί δεν είναι ίδια;

Ο. Α: Γιατί αυτό που έκανα είναι κανονικό.

Ε: Γιατί το διπλανό του δεν είναι κανονικό;

Ο. Α: Όχι, είναι στραβό.

Ε: Είναι πιο λοξό;

Ο. Α: Ναι.

Επεισόδιο 3 Αντιδράσεις στην παρουσία μη-στερεότυπων τριγώνων.

[Κ.Μ. Ολυμπία, 1715-1723, συνέντευξη]

Ε: Τώρα εδώ θέλω να σχεδιάσεις δίπλα από κάθε τρίγωνο ένα που να του μοιάζει, ένα ίδιο.

Γ. Μ: Κυρία, αυτά δεν είναι κανονικά τρίγωνα.

Ε: Γιατί το λες αυτό;

Γ. Μ: Γιατί δε μοιάζουν με τα κανονικά.

Ε: Είναι όμως τρίγωνα;

Γ. Μ: Ναι.

Επεισόδιο 4 Αντιδράσεις στην παρουσία μη-στερεότυπων τριγώνων.

[Κ.Μ. 2028-2031, Γιώργος, συνέντευξη]

Ε: Τι έχει δηλαδή και είναι πάρα πολύ μεγάλο;

Λ. Α: Είναι κανονικό.

Ε: Πως το έκανες κανονικό;

Λ. Α: Ε.. έβαλα τρεις γραμμές.

Ε: Τα άλλα δεν έχουνε τρεις γραμμές;

Λ. Α: Ναι.

Ε: Τότε γιατί δεν είναι κι αυτά κανονικά, αφού τρεις γραμμές έχουνε.

Λ. Α: Δεν είναι κανονικά!

Ε: Πως είναι δηλαδή τα κανονικά;

Λ. Α: Τα κανονικά είναι έτσι.

Ε: Πως δηλαδή; Κοιτάνε κάπου;

Λ. Α: Είναι ένα γοριλάκι έτσι. .έχει μια γραμμή έτσι και μετά κάνουμε έτσι.

Επεισόδιο 5 Αντιδράσεις στην παρουσία μη-στερεότυπων τριγώνων.

[Κ.Μ. 3446-3457, Λαέρτης, συνέντευξη]

Απορρέει, λοιπόν, από δω, ότι η κυρίαρχη εικόνα αναπαράστασης της έννοιας του τριγώνου είναι η στερεότυπη, αυτή του ισόπλευρου τριγώνου.

5.2.3 Οι Ερμηνείες των Παιδιών για την Έννοια του «Διαφορετικού»

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εμβάθυνση στα σχέδια των παιδιών όπου αποκαλύπτεται ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται την 'διαφορετικότητα' στα τρίγωνα με πολλαπλούς τρόπους.

Δεν μπορούν να κατασκευάσουν διαφορετικά τρίγωνα, γιατί δεν διαθέτουν μια γενικεύσιμη της αναπαράσταση της έννοιας. Στα δεδομένα μας εντοπίσαμε τρεις τουλάχιστον κατηγορίες ερμηνείας της έννοιας του «διαφορετικού» όπου:

1. Τα παιδιά κατανοούν την έννοια της διαφορετικότητας ιδιοσυγκρασιακά.

Σ' αυτή την κατηγορία τα παιδιά θεωρούν ως διαφορετικό ένα τρίγωνο όταν αυτό είναι διακοσμημένο είναι με διαφορετικό τρόπο ή ένα τρίγωνο που έχει τη μορφή κάποιων αντικειμένων. Στην προσπάθειά της, για παράδειγμα, η Βασιλική να φτιάξει διαφορετικά τρίγωνα, βάζει κουλουράκια (βλ. εικόνα 2). Για τη Βασιλική η διακόσμηση είναι η αιτία που κάνει τα τρίγωνα διαφορετικά και όχι τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες τους.

Β. Σ: Αυτό σκέφτηκα το τρίγωνο.

Ε: Κι αυτό που έχει πάνω, τι είναι;

Β. Σ: Ένα κουλουράκι.

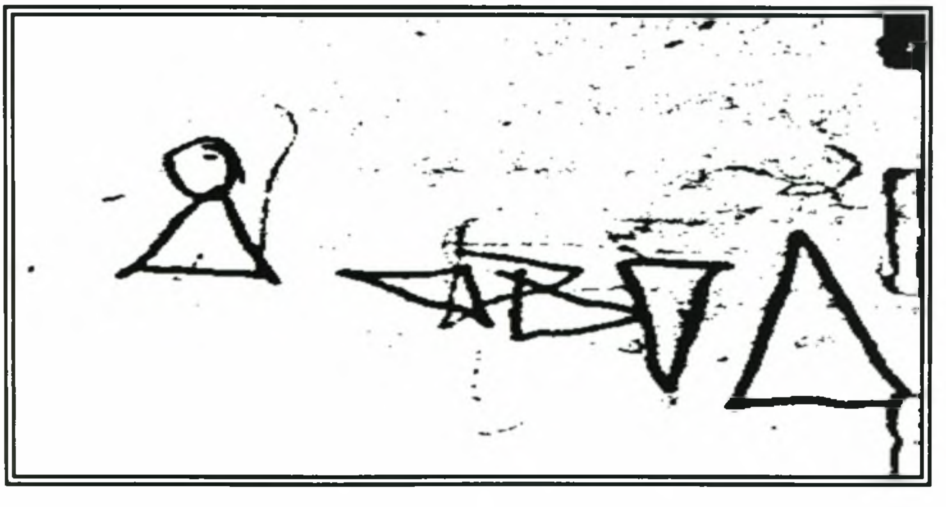
Ε: Ένα τρίγωνο με ένα κουλουράκι;

Ε: Μάλιστα. Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό εκτός από το σχέδιο;

Β. Σ: Αυτό δεν ταιριάζει μ΄ αυτό, γιατί αυτό δεν έχει κουλουράκι..

Επεισόδιο 6 Διαφορετικότητα μέσω της διακόσμησης

[Κ.Μ 264-269, Βασιλική, συνέντευξη]



Εικόνα 2: Διαφορετικότητα μέσω Διακόσμησης

Στο παρακάτω επεισόδιο, ο Γιάννης ισχυρίζεται, ότι ο ρόμβος που έχει φτιάξει είναι τρίγωνο και το δηλώνει με σιγουριά. Κοιτάζει όμως μόνο το πάνω μέρος και το συγκρίνει με άλλα τρίγωνα. Για να διαπιστώσει ότι είναι τρίγωνο, περνά και το δάχτυλο του πάνω από το μισό ρόμβο. Ο μισός ρόμβος μοιάζει με ισόπλευρο τρίγωνο.

Ε: Και τι έχει διαφορετικό από τα προηγούμενα;

Γ. Σ: Είναι ανάποδα.

Ε: Και το δίπλα είναι τρίγωνο, έτσι; Πόσες γωνίες έχει;

Γ. Σ: Τέσσερις.

Ε: Μα, πως γίνεται τα υπόλοιπα να έχουν τρεις και αυτό να έχει τέσσερις;

Γ. Σ: ……

Ε: Είσαι σίγουρος ότι δεν το λένε κάπως αλλιώς, ε; είσαι σίγουρος;

Γ. Σ: Ναι.

Ε: Ωραία και τι έχει διαφορετικό αυτό το τρίγωνο από τα υπόλοιπα;

Γ. Σ: Είναι έτσι..

Ε: Πως;

Γ. Σ: Σαν ένα γυαλί λαμπερό.

Επεισόδιο 7 Διαφορετικότητα ως προς τη μορφή

[Κ.Μ. 3773-3784, Γιάννης, συνέντευξη*]*

Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και η Εύα και ο Λαέρτης, όπως φαίνεται στα παρακάτω επεισόδια 8, 9.

Ε: Κοίταξε τα τρίγωνά σου και προσπάθησε να κάνεις κάτι άλλο. Που να μην τους μοιάζει! Προσπάθησε κι ότι βγει, ναι;
Ε. Κ:......
Ε: Πώς είναι αυτό το τρίγωνο, τι έχει;
Ε. Κ: Πετάει λίγο η γωνία.
Ε: Ωραία, κάνε ένα τρίγωνο, λίγο διαφορετικό από αυτό. Έλα προσπάθησε να κάνεις ένα τρίγωνο και βλέπουμε, ε;

Ε. Κ: Θα προσπαθήσω να κάνω ένα τέτοιο, χωρίς να πετάξει η μύτη.
Επεισόδιο 8 Διαφορετικότητα ως προς τη μορφή

[Κ.Μ. 2725-2728, Εύα, συνέντευξη]

Ε: Τι έχουνε διαφορετικό, δηλαδή;
Λ. Α: Αυτό είναι πολύ λεπτό, αυτό είναι χοντρό, αυτό είναι λίγο πιο μεγάλο και λίγο φαρδύ και αυτό…είναι μικρό.
Ε: Έχουν τίποτα άλλο διαφορετικό;
Λ. Α: Όχι.
Επεισόδιο 9 Διαφορετικότητα ως προς τη μορφή

[Κ.Μ. 3479-3281, Λαέρτης, συνέντευξη]

2. *Τα παιδιά κατανοούν τη διαφορετικότητα ως ομοιότητα.*

Πολλά παιδιά ερμηνεύουν την διαφορετικότητα ως ομοιότητα. Σχεδιάζουν τρίγωνα τα οποία ενώ είναι διαφορετικά στο μέγεθος, παραμένουν όμοια. Για παράδειγμα, ενώ ο Σάκης [στο επεισόδιο 10] μιλάει για γωνία και σχήμα, στην πραγματικότητα αναφέρεται στο μέγεθος, καθώς τα τρίγωνα που έχει φτιάξει είναι όλα ισόπλευρα.

Ε: Ωραία. Για πρόσεξε, είναι διαφορετικά αυτά τα τρίγωνα; Τι έχουν διαφορετικό;

Σ. Ζ: Αυτό είναι έτσι και αυτό είναι έτσι..

Ε: Πως δηλαδή είναι;

Σ. Ζ: Αυτό δεν έχει κάποια μύτη κοφτερή..

Ε: Το πρώτο δεν έχει δηλαδή κοφτερή μύτη, μάλιστα. Διαφέρουν κάπου αλλού; Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό;

Σ. Ζ: Αυτό.(το δεύτερο) γιατί δεν είναι έτσι, δεν είναι ίδιο.

Ε: Πως είναι δηλαδή, γιατί δεν καταλαβαίνω;

Σ. Ζ: Αυτό δεν είναι όπως κι αυτό.

Ε: Τι εννοείς;

Σ. Ζ: Τρίγωνο.

Ε: Είναι τρίγωνο;

Σ. Ζ: Δεν ξέρω να κάνω τρίγωνα πολλά.

Ε: Έκανες τρίγωνα, απλά θέλω να μου πεις αυτό σε τι διαφέρει από αυτό, γιατί δεν κατάλαβα.

Σ. Ζ: Εννοώ ότι δεν έχουν το ίδιο σχήμα.

Ε: Τι άλλο έχουν διαφορετικό αυτά τα τρίγωνα που σχεδίασες;

Σ. Ζ: Αυτό είναι πιο μεγάλο από αυτό, αυτό είναι πιο μικρό και αυτό είναι πιο μεγάλο. Δεν είναι ίδια.

Επεισόδιο 10 *Διαφορετικότητα ως ομοιότητα*

[Κ.Μ 624-627, Σάκης, συνέντευξη]

Χαρακτηριστική είναι επίσης, η περίπτωση του Πάρη, όπου θα μπορούσε κανείς να παίξει με τα τρίγωνα που έφτιαξε το παιχνίδι με τις Μπάμπουσκες, να βάλει δηλαδή το ένα τρίγωνο μέσα στο άλλο (βλ. εικόνα 3).

Ε: Είναι διαφορετικά τα τρίγωνα αυτά μεταξύ τους;

Π. ΤΣ Ναι.

Ε: Τι έχουν διαφορετικό;

Π.ΤΣ....αυτό είναι πολύ μεγάλο, αυτό είναι λίγο πιο μικρό, αυτό πιο μικρό, αυτά είναι πάλι μικρό και αυτό πιο μικρό απ' όλα.

Ε: Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό;

Π. ΤΣ Όχι.

Επεισόδιο 11 *Διαφορετικότητα ως ομοιότητα*

[Κ.Μ.2511-2512, Πάρης, συνέντευξη]

Ε: Τι έχουν διαφορετικό;

Π. ΤΣ Άλλα είναι πιο μεγάλα κι άλλα είναι πιο μικρά!

Ε: Τι έχουν πιο μεγάλο και πιο μικρό;

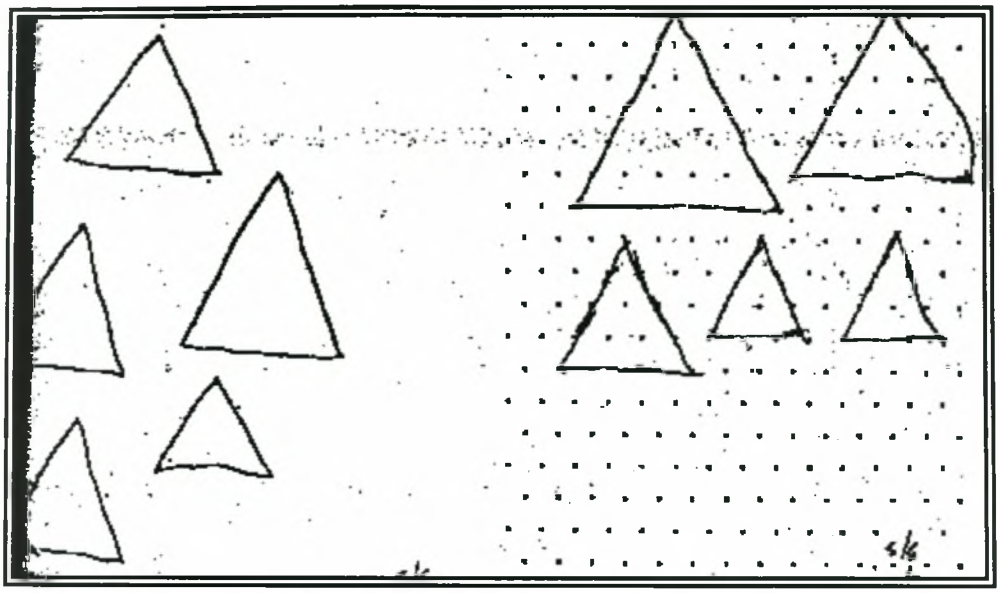
Π. ΤΣ Τίποτα, απλά είναι πιο μεγάλα και πιο μικρά!

Ε: Είσαι βέβαιος ότι δεν έχουν τίποτα άλλο διαφορετικό;

Π. ΤΣ Ναι.

Επεισόδιο 12 *Διαφορετικότητα ως προς τη μορφή*

[Κ.Μ. 2523-2526, Πάρης, συνέντευξη]



Εικόνα 3: Διαφορετικότητα ως Ομοιότητα

3. Κατανόηση του διαφορετικού ως προς την 'τοποθέτηση'.

Σ' αυτή την κατηγορία τα παιδιά ερμηνεύουν ως διαφορετικά τα τρίγωνα που απλά έχουν άλλη θέση (διεύθυνση και φορά). Για παράδειγμα ένα ισόπλευρο τρίγωνο σχεδιάζεται ξανά με τρόπο που η κορυφή του να «κοιτά» σε άλλη κατεύθυνση. Από το διάλογο που ακολουθεί, φαίνεται ότι η Ιωάννα πιστεύει ότι τα τρίγωνα που σχεδίασε δεν μοιάζουν, γιατί «είναι αλλιώς», εννοώντας ότι είναι τοποθετημένα αλλιώς.

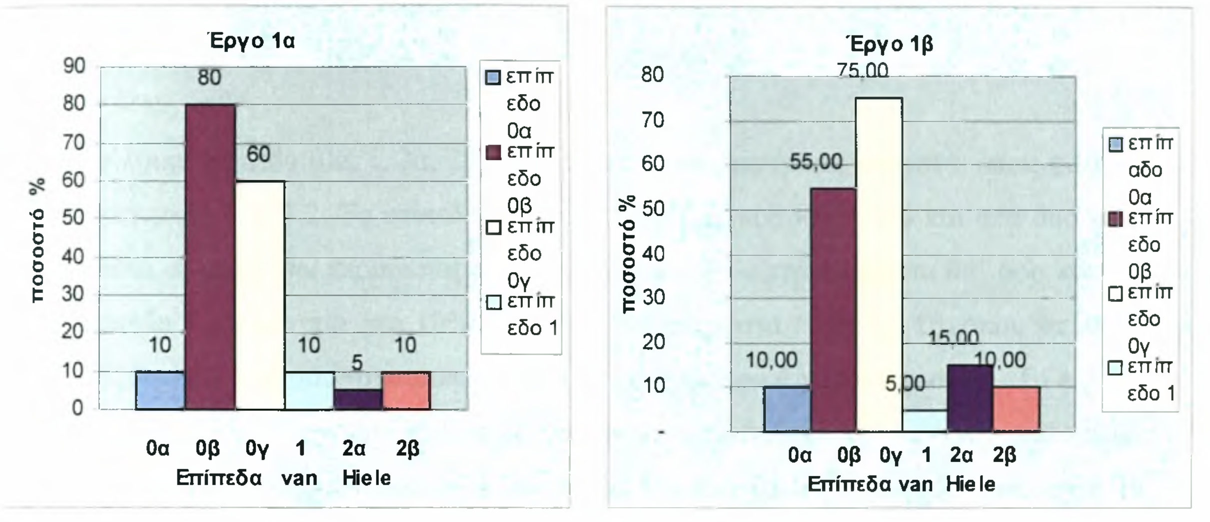
Ε: Ωραία, είναι διαφορετικά μεταξύ τους;
Ι. Β: Ναι.
Ε: Γιατί τι έχουν διαφορετικό;
Ι. Β: Δεν είναι ίδια!
Ε: Τι έχουν διαφορετικό και δεν μοιάζουν;
Ι. Β: Είναι αλλιώς, δε μοιάζουν.

Επεισόδιο 13 *Διαφορετικότητα ως προς την τοποθέτηση*

[Κ.Μ. 1857-1862, Ιωάννα, συνέντευξη]

5.2.4 Γεωμετρική Δεξιότητα και Διαφορετικά Τρίγωνα

Όσον αφορά τα επίπεδα γεωμετρικής δεξιότητας των παιδιών στα έργα 1α, 1β, παρατηρούμε σύμφωνα με τον πίνακα 1.1 και 1.2,



Πίνακες 1.1 & 1.2: Γεωμετρική Δεξιότητα και Διαφορετικά Τρίγωνα

ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των παιδιών βρίσκεται στα επίπεδα 0β και 0γ και στα δύο έργα. Στο έργο 1α, το 80% των παιδιών βρίσκεται στο επίπεδο 0β, ενώ στο έργο 1β, μόλις το 55%. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά εξηγούν τα τρίγωνα που σχεδιάζουν με βάση προσωπικά χαρακτηριστικά. Μπορούμε να ανατρέξουμε στο επεισόδιο 1 όπου περιγράψαμε το παράδειγμα με τα κουλουράκια. Σχετικά με το επίπεδο 0γ (όπου τα παιδιά εξηγούν χρησιμοποιώντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά ανάμικτα με προσωπικά στοιχεία), τα ποσοστά είναι της τάξης του 60% και 75% σε κάθε έργο αντίστοιχα. Παρακάτω ακολουθούν παραδείγματα των επιπέδων.

Ε: Μοιάζουνε μεταξύ τους ή είναι διαφορετικά;

Γ. Σ: Είναι διαφορετικά.

Ε: Τι έχουνε διαφορετικό;

Γ. Σ: Αυτό είναι σαν κράνος!

Ε: Το πρώτο; Μάλιστα. Πώς είναι αυτό το τρίγωνο; Τι έχει;

Γ. Σ: Έχει τρεις γωνίες…

Ε: Και τι άλλο; Μόνο τρεις γωνίες έχει; Πες μου ότι σκέφτεσαι!

Γ. Σ: Τρεις γωνίες και…

Ε: Ότι βλέπεις πες μου!

Γ. Σ: Είναι σαν κράνος και σαν πίτσα!

Επεισόδιο 14 Εξήγηση επιπέδου 0γ

[Κ.Μ. 3743-3752, Γιάννης, συνέντευξη]

Τα υπόλοιπα επίπεδα (0α, 1, 2α, 2β) εμφανίζονται σε μικρότερα ποσοστά, όπως φαίνεται στους πίνακες 1.1, 1.2. Το επίπεδο 0α εμφανίζεται με ποσοστό 10% και στα δυο έργα. Τα παιδιά σ' αυτή την περίπτωση σχεδιάζουν χωρίς να εξηγούν τίποτα απ' όσα κάνουν. Το επίπεδο 1 κυμαίνεται στο 10% και 5% αντίστοιχα στα έργα 1α, 1β, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν και εξηγούν χρησιμοποιώντας μόνο γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Το επίπεδο 2α, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν βασιζόμενα στον αιτιώδη συλλογισμό (εάν-τότε) χωρίς όμως να εξηγούν, παρουσιάζεται με ποσοστό 5% στο έργο 1α και 15% στο έργο 1β. Τέλος το επίπεδο 2β, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν βασιζόμενα στον αιτιώδη συλλογισμό δίνοντας όμως κάποιου είδους εξηγήσεις, εμφανίζεται και στα δύο έργα 1α,1β με ποσοστό 10%. Ένα πολύ χαρακτηριστικό και ενδιαφέρον παράδειγμα του επιπέδου 2β αφορά τον Ευθύμη.

Ε: Πως μπορείς να το κάνεις διαφορετικό από τα άλλα, που έχεις φτιάξει;

Ε. Μ: Θα έχει τρία...

Ε: Τρία τι; Θα πρέπει να είναι τρία για να είναι τρίγωνο;

Ε. Μ: Ναι.

Ε: Αν είχε τέσσερα;

Ε. Μ: Τετράγωνο.

Ε: Αν είχε πέντε;

Ε. Μ: Πεντάγραμμο..

Ε: Πεντάγραμμο;;

Ε. Μ: Α, ορθογώνιο!

Ε: Είσαι σίγουρός ότι είναι διαφορετικά;

Ε. Μ: Ναι.

Επεισόδιο 15 *Εξήγηση επιπέδου 2β*

[Κ.Μ. 4917-4928, Ευθύμης, συνέντευξη]

Όπως φαίνεται παραπάνω, ο Ευθύμης ορίζει και διαχωρίζει το τρίγωνο από τα υπόλοιπα σχήματα. Βέβαια το συγκεκριμένο παιδί έχει το επίπεδο 2 και αυτό φαίνεται σε όλα τα έργα, από τον τρόπο που ορίζει το τρίγωνο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα θα τεθούν παρακάτω.

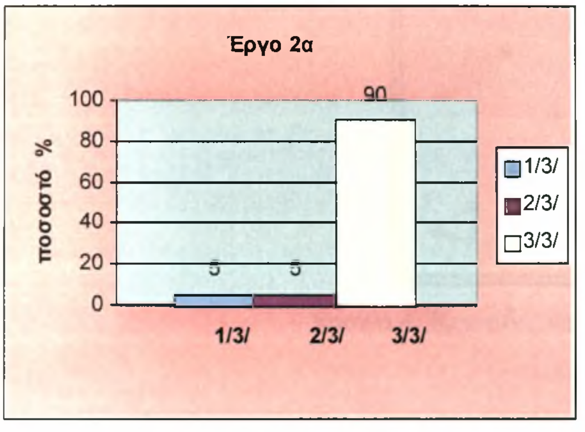
5.3 Κατανόηση της Έννοιας του «Ίδιου» στα τρίγωνα

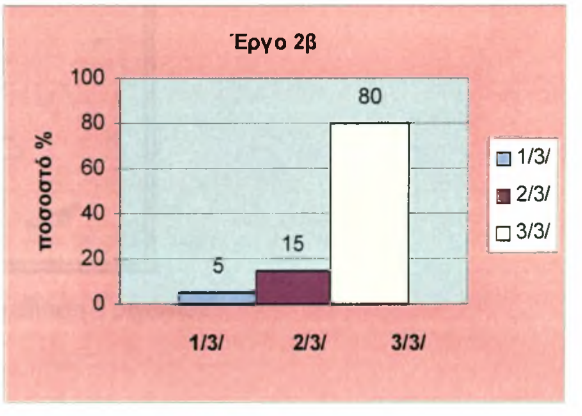
Με τα έργα 2α και 2β δόθηκαν στα παιδιά τρία μη στερεότυπα τρίγωνα (σκαληνά, αμβλυγώνια) και τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν τρία ίδια (βλ. έργα 2α, 2β). Η έννοια του «ίδιου» στη γεωμετρία μπορεί να αποδοθεί ως ίσο ή ως όμοιο, ενώ στην καθημερινή ζωή οι δύο έννοιες συνήθως ταυτίζονται.

5.3.1 Σχεδίαση Ίδιων Τριγώνων

Σε σύγκριση με τα προηγούμενα έργα (1α, 1β), όπου τα παιδιά είχαν να σχεδιάσουν πέντε διαφορετικά τρίγωνα, στα έργα 2α, 2β τα παιδιά μοιάζει να έχουν μεγαλύτερη επιτυχία (βλ. πίνακες 2.3/2.4). Τα ποσοστά επιτυχίας (σωστής δηλαδή αναπαράστασης της έννοιας του τριγώνου) είναι υψηλότερα στους πίνακες 2.3, 2.4 απ' ότι στους πίνακες 1.3, 1.4. Έχουμε μια ανοδική διαφορά της τάξης του 10% στο λευκό χαρτί (πίνακες 1.3, 2.3) και του 15% στο χαρτί με τις κουκίδες (πίνακες 1.4, 2.4). Όπως αναφέρθηκε, το «ίδιο» αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, το πρωτότυπο το οποίο τα παιδιά πρέπει να αναπαράγουν, ενώ το διαφορετικό είναι πολύ αφηρημένο και αόριστο. Επιπλέον, δεν υπάρχει εικονική αναπαράστασή του στο χαρτί, αλλά ούτε και στις νοητικές αποθήκες (στη μνήμη) των παιδιών, για να το ανακαλέσουν, καθώς έχουν σχεδόν ταυτίσει την έννοια του τριγώνου με την αναπαράσταση του ισόπλευρου τριγώνου. Έτσι μοιάζει να δυσκολεύονται στην κατασκευή του διαφορετικού περισσότερο από ότι στην κατασκευή του ίδιου.

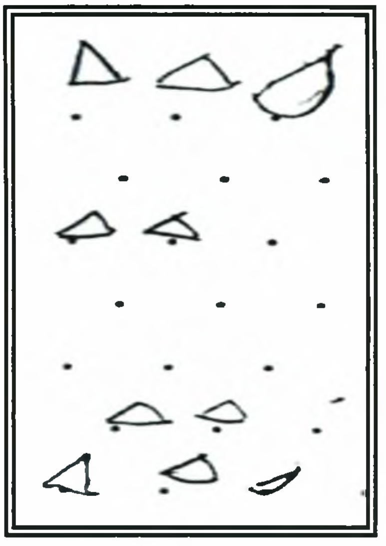
Πιο συγκεκριμένα το 90% των παιδιών σχεδιάζει σωστές αναπαραστάσεις στο έργο 2α και για τα τρία τρίγωνα, ενώ μόνο το 10% δυσκολεύτηκε και κατόρθωσε να αναπαραστήσει σωστά μόνο τα 2 από τα 3 ή 1 από τα 3 τρίγωνα με ποσοστό 5% αντίστοιχα (βλ. πίνακα 2.3). Τα ποσοστά στο έργο 2β μοιράστηκαν στο 80% για τις τρεις επιτυχημένες αναπαραστάσεις, στο 15% για τις δύο επιτυχημένες αναπαραστάσεις και στο 5% για τη μία μόνο επιτυχημένη αναπαράσταση (βλ. πίνακα 2.4).





Πίνακες 2.3 & 2.4: Σχεδίαση Ίδιων Τριγώνων

Παράλληλα, διαπιστώνουμε για άλλη μια φορά, ότι οι κουκίδες δυσκολεύουν τις κατασκευές των παιδιών. Ωστόσο, συγκρίνοντας τους πίνακες 1.4, 2.4 εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, ότι οι κουκίδες μοιάζει να μη δυσκολεύουν τόσο τα παιδιά, όσο στο πρώτο έργο. Ίσως εδώ να εμπλέκεται και η έννοια του «ίδιου». Οι κουκίδες οριοθετούν το τρίγωνο και έτσι αυτό που πρέπει να κάνουν τα παιδιά, είναι να κατασκευάζουν τα αντίγραφά τους, όπως και όπου είναι τα πρωτότυπα. Θα ήταν ακόμη πιο εύκολο, αν χρησιμοποιούσαν τις κουκίδες σαν εργαλείο μέτρησης. Μόνο δυο παιδιά, προκειμένου τα τρίγωνα να είναι ίσα, τραβούν νοητές γραμμές με το δάχτυλό τους, χρησιμοποιούν ένα είδος μέτρησης δηλαδή. Επίσης, πολλά παιδιά δεν χρησιμοποιούν τις κουκίδες, είναι σαν να μην υπάρχουν (βλ. εικόνα 4). Δε φαίνεται, λοιπόν, να μετρούν. Μήπως όμως το κάνουν; Καλούνται να διατηρήσουν το μήκος των γραμμών, το άνοιγμα των γωνιών και την κατεύθυνση. Κατασκευάζουν περίπου όμοια και περίπου ίσα τρίγωνα, άρα μετρούν νοερά. Προσπαθούν να διατηρήσουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά, επομένως κάνουν ένα είδος μέτρησης, χωρίς να χρησιμοποιούν, φανερά τουλάχιστον, τις κουκίδες.



Εικόνα 4: Κουκίδες και Σχεδίαση Τριγώνων

5.3.2 Ερμηνείες των Παιδιών για την Έννοια του «Ίδιου»

Όμως τελικά πως τα παιδιά κατανοούν την έννοια του 'ίδιου'; Όπως είπαμε και παραπάνω, ο όρος «ίδιο» στην αυθόρμητη ομιλία περιέχει την έννοια του ίσου και του όμοιου. Αυτός ο προσδιορισμός διαφέρει από την αυστηρά γεωμετρική λογική, όπου οι ορισμοί του ίσου και του όμοιου διαφέρουν σημαντικά. Πώς λοιπόν, τα παιδιά ορίζουν το ίδιο; Είναι γι' αυτά ίσο ή όμοιο; Ή μήπως και τα δύο; Η απάντηση έρχεται μέσα από τα ίδια τα παιδιά, όπου συναντούμε και τις τρεις περιπτώσεις:

Στην κατηγορία ερμηνείας του ίδιου ως όμοιο χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι αυτά του Μάριου, του Λαέρτη και του Κων/νου, που σχεδιάζουν «όμοια» τρίγωνα.

Ε: Τα από κάτω είναι ίδια;

Μ. Τ: Ναι είναι , μόνο που αυτό που έφτιαξα είναι λίγο πιο μικρό. Είναι όμως ίδια.

Ε: Τι έχουν ίδιο;

Μ. Τ: Είναι στραβά..

Ε: Λοξά;

Μ. Τ: Ναι και έχουν από μια μυτερή μύτη.

Ε: Έχουν κάτι άλλο ίδιο;

Μ. Τ: Όχι.

Επεισόδιο 16 *Ίδιο = όμοιο*

[Κ.Μ. 52-59, Μάριος, συνέντευξη]

Ε: Γιατί είναι ίδια;

Λ. Α: Έχουν.. είναι ολόιδια στο σχήμα.

Ε: Έχουν τίποτα άλλο ίδιο;

Λ. Α: Ναι.

Ε: Τι;

Λ. Α: Έχουν και τα δυο τρεις γραμμές.

Ε: Είναι ίδιες δηλαδή αυτές οι γραμμές;

Λ. Α: Ναι

Επεισόδιο 17 *Ίδιο = όμοιο*

[Κ.Μ. 3493-3500, Λαέρτης, συνέντευξη]

Ε: Τι έχουν ίδιο;

Κ. Λ: Αυτό κι αυτό μοιάζουν ίδια.

Ε: Τι έχουνε δηλαδή ίδιο;

Κ. Λ: Μοιάζουν δίδυμες.

Ε: Και γιατί είναι δίδυμα;

Κ. Λ: Γιατί έχουν το πιο μικρό το πιο μεγάλο αδερφό.

Ε: Έχουν τίποτα άλλο ίδιο;

Κ. Λ: Όχι.

Ε: Τα δεύτερα τρίγωνα είναι ίδια;

Κ. Λ: Ναι.

Ε: Τι έχουν ίδιο;

Κ. Λ: Είναι δίδυμες, όπως αυτό λες και είναι αδερφές.

Ε: Και τι άλλο έχουνε ίδιο αυτά τα τρίγωνα;

Κ. Λ: Έχουνε ... αυτά.

Ε: Ποια;

Κ. Λ: Αυτά.

Ε: Τις γραμμές εννοείς; Τι έχουνε ίδιο;

Κ. Λ: Έχουνε ίδιο με αυτό.. πως τα λένε τώρα αυτά.

Ε: Ποια τις γραμμούλες; Έχουν ίδιες γραμμές; Αυτό εννοείς;

Κ. Λ: Ναι.

Ε: Έχουν κάτι άλλο ίδιο;

Κ. Λ: Όχι.

Ε: Αυτά τα τρίγωνα;

Κ. Λ: Μοιάζουν.

Ε: Τι έχουν ίδιο και μοιάζουν;

Κ. Λ: Γιατί έχουν ίδιες γραμμές και ίδιο...είναι δίδυμες..

Επεισόδιο 18 *Ίδιο = όμοιο*

[Κ.Μ. 4532-4563, Κωνσταντίνος, συνέντευξη]

Η ερμηνεία του ίδιου ως ίσο αφορά κάποια μορφή χρήσης της μέτρησης στη δικαιολόγηση των σχεδίων των παιδιών. Λένε «ίσες γραμμές» ή δείχνουν μετρώντας ίσα τμήματα.

Ε: Μάλιστα. Το άλλο τρίγωνο; Το δεύτερο;
Ε. Κ: Αυτό μόνο εδώ πάει λίγο ίσιο.. έχει την ίσια πλευρά και είναι ίδιο.
Ε: Είναι απλά πιο καμπυλωτή, ε;
Ε. Κ: Ναι. Πειράζει;
Ε: Όχι.
Ε. Κ: Αλλά είναι ίδιο! Και εδώ είναι η πλευρά αυτή και εδώ είναι πάλι έτσι..
Ε: Έχει δηλαδή τις πλευρές ίδιες;
Ε. Κ: Ναι.
Επεισόδιο 19 *Ίδιο = Ίσο*

[Κ.Μ. 2857-2868, Εύα, συνέντευξη]

Ε: Ωραία, τώρα κάνε και δίπλα το ίδιο.
Π. ΤΣ :(Αφού κάνει το πρώτο).. είναι δύσκολο πάνω στις τελείες! Δεν είναι ίδιο...

Ε: Διόρθωσέ το αν θέλεις και ξαναπροσπάθησε!
Π. ΤΣ: Πάλι το λάθος το έκανα......θα το κάνω πιο κοντά....aaa...δεν ακουμπάει...πειράζει άμα ακουμπάει;
Ε: Όχι, απλά να είναι ίδιο με το διπλανό του.
Π. ΤΣ :Εντάξει το έκανα, το άλλο τώρα.... πολύ μεγάλο ε;
Ε: Θέλεις να φτιάξεις άλλο;
Π. ΤΣ :Θα το κάνω από πάνω για να το κάνω ίδιο....ωχ μικρό το έκανα.. έτσι....έτσι...να το!
Ε: Είναι ίδια αυτά τα τρίγωνα;
Π. ΤΣ : Ναι
Ε: Τι έχουν ίδιο μεταξύ τους;
Π. ΤΣ :Έχουν ίσιες γραμμές.
Ε: Τι εννοείς;
Π. ΤΣ :Έτσι εδώ έτσι κι εδώ, έτσι αυτή έτσι κι αυτή....
Ε: Μάλιστα, έχουν κάτι άλλο ίδιο;
Π. ΤΣ : Όχι.
Ε: Σίγουρα;
Π. ΤΣ :Ναι.
Επεισόδιο 20 *Ίδιο = Ίσο.*

[Κ.Μ. 2542-2555, Πάρης, συνέντευξη]

Η διττή ερμηνεία του ίδιου ως ίσου & όμοιου αφορά ένα μεγάλο αριθμό παιδιών, για τα οποία μοιάζει να μην υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ αυτών των εννοιών.

Ε: Για πες μου τα τρίγωνα αυτά είναι ίδια μεταξύ τους;

Σ. Π: ναι.

Ε: Τι έχουν ίδιο;

Σ. Π: έχουν ίδιες γραμμές…..ίδιο ύψος..

Επεισόδιο 21 *Ίδιο = Ίσο & Όμοιο*

[Κ.Μ. 1284-1290, Στεφανία, συνέντευξη]

Ε: Αυτά τα τρίγωνα, τα δεύτερα;

Λ. Α: Ναι, γιατί έχουν το ίδιο σχήμα.

Ε: Έχουν τίποτα άλλο ίδιο;

Λ. Α: Όχι.

Ε: Αυτά τα τρίγωνα;

Λ. Α: Ολόιδια, αλλά είναι λίγο πιο μικρό.

Ε: Τι έχει πιο μικρό;

Λ. Α: Τις γραμμές.

Ε: Αλλά είναι ίδιο; Ολόιδιο;

Λ. Α: Όχι.

Ε: Τι έχει ίδιο;

Λ. Α: Το σχήμα.

Ε: Το σχήμα.. αλλά έχει πιο μικρές γραμμές, ε;

Λ. Α: Ναι.

Επεισόδιο 22 *Ίδιο = Ίσο & Όμοιο*

[Κ.Μ. 3505-3514, Λαέρτης, συνέντευξη]

Β. Σ: Πιο μικρό πρέπει να το κάνω..

Ε: Πιο μικρό;

Β. Σ: Ναι γιατί αυτό δεν είναι τόσο τεράστιο! Αυτό δεν είναι όμως το ίδιο.

Ε: Ναι αλλά θέλουμε να το φτιάξεις ίδιο.

Β. Σ: Μικρό το έκανα..

Ε: Σου φαίνεται όμως ίδιο; Πως φαίνεται σε σένα;

Β. Σ: Εμένα όχι..

Ε: Τι μπορείς να κάνεις γι' αυτό;

Β. Σ: Αυτό δεν είναι ίδιο..

Ε: Σκέψου, πως θα το κάνεις ίδιο μ' αυτό;

Β. Σ: Μπορώ.

Ε: Τι θα κάνεις, για να το κάνεις ίδιο;

Β. Σ: Πως σας φαίνεται αυτό ;

Ε: Εσένα πως σου φαίνεται;

Β. Σ: Εμένα μου φαίνεται καλό.

Ε: Καλό; σου φαίνεται ίδιο;

Β. Σ: Ναι.

Επεισόδιο 23 *Ίδιο = Ίσο & Όμοιο*

[Κ.Μ. 368-369, Βασιλική, συνέντευξη]

Ε: Τα τρίγωνα αυτά είναι ίδια μεταξύ τους;

Α. Ν: Ναι.

Ε: Γιατί; Θα μου πεις για το καθένα χωριστά;

Α. Ν: Αυτά είναι ίδια, μόνο που αυτό είναι λίγο πιο μικρό, αλλά είναι ίδια.

Ε: Τι έχουν ίδιο;

Α. Ν:.............έχουν ίδιο μπόι- ύψος......

Ε: Έχουν κάτι άλλο ίδιο;

Α. Ν: Όχι.

Ε: Σίγουρα;

Α. Ν: Ναι.

Ε: Τα επόμενα;

Α. Ν: Αυτά είναι έτσι προς τα ΄δω και έχουν μεγάλες γραμμές.

Ε: Τι άλλο έχουν ίδιο;

Α. Ν: Το ύψος.

Ε: Κάτι άλλο;

Α. Ν: Τίποτα.

Επεισόδιο 24 *Ίδιο = Ίσο & Όμοιο*

[Κ.Μ. 2384-2389, Αποστόλης, συνέντευξη]

Ε: Για πες μου, αυτά τα τριγωνάκια είναι ίδια;

Ε. Κ: Αυτό κι αυτό είναι ίδια, γιατί έχουν ίδιες πλευρές, αυτό έχει την ίδια την πλευρά, αυτό έχει την ίδια την πλευρά. Έχει την πλευρά που πάει διαγώνια κι αυτό που πάει διαγώνια. Αυτό που πάει ίσια κι αυτό που πάει ίσια!

Ε: Ναι..

Ε. Κ: Αυτό έχει μια πλευρά που πάει προς τα πάνω, κι αυτό έχει μια πλευρά που πάει προς τα πάνω διαγώνια. Κι αυτό έχει μια πλευρά που έρχεται λίγο πιο μέσα κι αυτό έχει μια πλευρά, που έρχεται λίγο πιο μέσα! Και εδώ μια ίδια γραμμή κι αυτό έχει ακόμα μια ίσια γραμμή!

Ε: Μάλιστα.

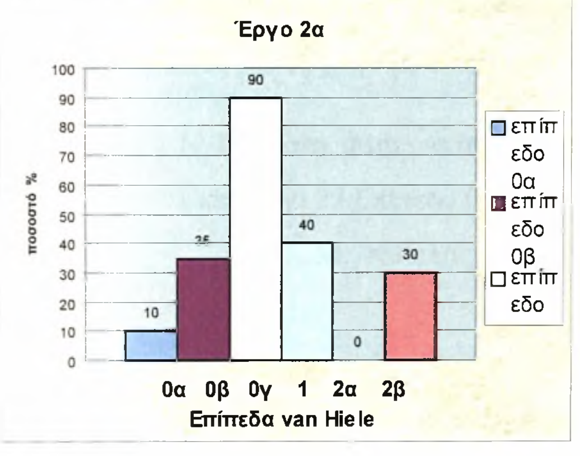
Ε. Κ: Λοιπόν, έχει τώρα μια γραμμή και διαγώνια κι αυτό έχει μια γραμμή, που πάει πάλι και αυτό διαγώνια. Κι αυτό λίγο πάνω κι αυτό λίγο πάνω! Αυτό είναι ίσιο, αυτό είναι ίσιο!

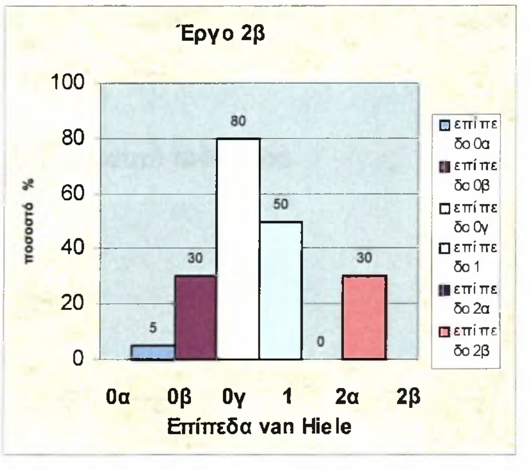
Επεισόδιο 25 *Ίδιο = Ίσο & Όμοιο*

[Κ.Μ. 2878-2884, Εύα, συνέντευξη]

5.3.3 Γεωμετρική Δεξιότητα και Ίδια Τρίγωνα

Από τους παραπάνω διαλόγους διακρίνουμε και τα επίπεδα των παιδιών. Γενικότερα στα έργα 2α, 2β τα περισσότερα παιδιά βρίσκονται στα επίπεδα 0γ και 1. Το επίπεδο 0γ εμφανίζεται στο έργο 2α με ποσοστό 90% (πίνακας 2.1) και στο έργο 2β με ποσοστό 80% (πίνακας 2.2), όπου τα παιδιά σχεδιάζουν και εξηγούν, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά ανάμικτα με προσωπικά στοιχεία. Το επίπεδο εμφανίζεται στα αντίστοιχα έργα με ποσοστό 40% και 50%. Εδώ τα παιδιά σχεδιάζουν και εξηγούν





Πίνακες 2.1 & 2.2: Γεωμετρική Δεξιότητα και Ίδια Τρίγωνα

χρησιμοποιώντας μόνο γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Να σημειωθεί εδώ, ότι τα παιδιά δεν κινούνται μόνο σε ένα επίπεδο έργο, αλλά πηγαίνουν μπρος-πίσω. Εύκολα το διαπιστώνει κανείς αυτό παρατηρώντας τους πίνακες 2.1 & 2.2. Έτσι το επίπεδο 0α, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν χωρίς να δίνουν εξηγήσεις, εμφανίζεται με ποσοστό 10% στο έργο 2α και 5% στο 2β. Το επίπεδο 0β, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν δίνοντας προσωπικές εξηγήσεις, παρουσιάζεται με 35% και 30% αντίστοιχα. Το επίπεδο 2α, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν με βάση το συλλογισμό εάν-τότε χωρίς όμως να εξηγούν, δεν εμφανίζεται σε κανένα έργο. Τέλος το επίπεδο 2β, όπου τα παιδιά σχεδιάζουν με βάση τον αιτιώδη συλλογισμό, εμφανίζεται με ποσοστό 30% και στα δύο έργα. Επιβεβαιώνεται λοιπόν, σύμφωνα με τις έρευνες των van Hieles, ότι τα παιδιά μπορεί να βρίσκονται ταυτόχρονα σε περισσότερα από ένα επίπεδα. Τα παρακάτω παραδείγματα δίνουν μια εικόνα των επιπέδων που συναντήσαμε στο 2º έργο:

Σχετικά με το επίπεδο 0β, η Βασιλική αναφέρει

Ε: Πως είναι αυτές οι μύτες, για δες; Ξεκίνα από τη μία μύτη..
Β. Σ: Πάλι μπότα θα το κάνω.
Επεισόδιο26 Επίπεδο 0β
[Κ.Μ., Βασιλική, συνέντευξη]

Οι περιπτώσεις του Νικόλα και Πάρη αναφέρονται στο επίπεδο 0γ, γιατί παράλληλα με τους γεωμετρικούς όρους χρησιμοποιούν και προσωπικές εξηγήσεις.

Ν. Γκ: Έτσι...έτσι.. κι αυτό πάει ίσιο. Άρα αυτά είναι ίδια.
Επεισόδιο 27 Επίπεδο 0γ
[Κ.Μ., Νικόλας, συνέντευξη]

γ Ε: **Τι έχουν ίδιο μεταξύ τους;**
Π. ΤΣ :Έχουν ίσιες γραμμές.
Ε: Τι εννοείς;
Π. ΤΣ :Έτσι εδώ έτσι κι εδώ, έτσι αυτή έτσι κι αυτή....
Επεισόδιο 28 Επίπεδο 0γ
[Κ.Μ., Πάρης, συνέντευξη]

Τέλος, ο Λαέρτης παρουσιάζει επίπεδο 2β, γιατί αναφέρεται σε γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Ε: Αυτά τα τρίγωνα, τα δεύτερα, είναι ίδια;
Λ. Α: Ναι, γιατί έχουν το ίδιο σχήμα.

Επεισόδιο 29 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ., συνέντευξη]

Συνολικά, παρατηρούμε ότι στα έργα που αφορούν στο σχεδιασμό ίδιων τριγώνων, τα παιδιά παρουσιάζουν υψηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, από 0β και 0γ σε 0γ και 1, σε σχέση σε σχέση με τα έργα 1α,1β. Μ' αυτό, ίσως, σχετίζεται και το γεγονός, ότι το έργο αυτό είναι πιο περιοριστικό από το προηγούμενο. Τα παιδιά πρέπει να σχεδιάσουν κάτι πιο συγκεκριμένο, να αντιγράψουν το πρωτότυπο τρίγωνο και έτσι «αναγκάζονται» να χρησιμοποιήσουν περισσότερο τους γεωμετρικούς όρους.

5.4 Σύνθεση με τρίγωνα

Στόχος στα έργα 3α, 3β και 4α, 4β είναι να δώσει ένα πλαίσιο, όπου τα παιδιά να μπορούν να χρησιμοποιήσουν απτικό υλικό (π.χ. χάρτινα τρίγωνα) και να προβούν είτε σε ελεύθερες συνθέσεις, είτε σε συγκεκριμένες κατασκευές τύπου πάζλ.

5.4.1 Ελεύθερη σύνθεση

Στα έργα 3α, 3β δόθηκε στα παιδιά απτικό υλικό (δηλαδή χάρτινα τρίγωνα, με τα οποία μπορούσαν να παίξουν και να δημιουργήσουν δικές τους κατασκευές) και τους ζητήθηκε, αρχικά, να φανταστούν τι σχήμα θα βγει, εάν ενώσουν δύο τρίγωνα και στη συνέχεια να ενώσουν τα τρίγωνα και να ονομάσουν το σχήμα που προκύπτει. Ενώ όλα τα παιδιά έπαιξαν με τα τρίγωνα και έφτιαξαν δικές τους συνθέσεις, τα περισσότερα δυσκολεύονταν να απαντήσουν στην ερώτηση: «Τι σχήμα θα βγει» στη συνθήκη, όπου έπρεπε να φανταστούν (χωρίς να δουν) το αποτέλεσμα. Αυτό φανερώνει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην πραγματοποίηση νοερών μετασχηματισμών. Μέσα από το έργο αυτό, λοιπόν, διαφαίνονται οι αναπαραστάσεις που διαθέτουν τα παιδιά για τα τρίγωνα, καθώς και σε ποιο βαθμό μπορούν να τα μετασχηματίσουν γεωμετρικέ έννοιες νοερά. Παραθέτουμε λοιπόν, χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις με τα παιδιά.

Ε: Τώρα θα ήθελε να μου πεις τι σχήμα νομίζεις ότι θα πάρουμε, αν ενώσουμε δυο τρίγωνα; Δεν θέλω να το ζωγραφίσεις, σκέψου τώρα..

Σ. Ζ: Άμα τα βάλω έτσι;

Ε: Ναι, τι σχήμα θα πάρουμε;

Σ. Ζ: Σαν κι αυτό που έχει καρδούλα, έτσι, άμα το κάνω κι έτσι.

Επεισόδιο 30 Νοερός Μετασχηματισμός. (Χαρακτηρισμός με προσωπικά στοιχεία)

[Κ.Μ. 714-717, Σάκης, συνέντευξη]

Ε: Θέλω να μου πεις άμα, ενώσουμε δυο τριγωνάκια, τι σχήμα νομίζεις ότι θα βγει;

Χ. Κ: Αστεράκια!!

Ε: Και τι άλλο;

Χ. Κ: Και.. κύκλους!

Ε: Θα πάρουμε κύκλους; Θα σου δώσω τριγωνάκια να τα ενώσεις αν δούμε τι σχήμα βγαίνει. έλα, πάρε αυτά τα δύο.

Χ. Κ:........

Ε: Τι σχήμα είναι αυτό που έφτιαξες;

Χ. Κ: Το ....πως το λένε.. το.. πως το λένε...

Ε: Τι έχει το σχήμα, μήπως σε βοηθήσει έτσι. Πόσες γωνίες έχει αυτό το σχήμα;

Χ. Κ: Τέσσερις.

Ε: Και πόσες πλευρές;

Χ. Κ: Πλευρές;

Ε: Πόσες γραμμές;

Χ. Κ: Τέσσερις.

Ε: Μήπως σε βοηθάει αυτό, τι σχήμα μπορεί να είναι;

Χ. Κ: Ξέρω αλλά δεν μπορώ το..

Επεισόδιο 31 Νοερός Μετασχηματισμός (Χαρακτηρισμός με ανάμικτά στοιχεία)

[Κ.Μ. 4206-4210, Χριστιάνα, συνέντευξη]

Ε: Θέλω να μου πεις αν ενώσουμε δυο τρίγωνα τι σχήμα νομίζεις ότι θα πάρουμε;

Γ. Σ: Αν ενώσω;

Ε: Δυο τρίγωνα.

Γ. Σ: Τι σχήμα..

Ε: Τι σχήμα θα βγει;

Γ. Σ: Που να ξέρω..

Ε: Φαντάσου!

Γ. Σ: Μπορεί να βγει ένα τρίγωνο..

Ε: Άλλο τίποτα μπορεί να βγει;

Γ. Σ: Το ίδιο τρίγωνο.

Ε: Εκτός από τρίγωνο, μπορεί να βγει κάποιο άλλο σχήμα; Τι λες;

Γ. Σ: Μπα..

Επεισόδιο 32 Νοερός Μετασχηματισμός (Χαρακτηρισμός με ανάμικτα στοιχεία)

[Κ.Μ. 3865-3874, Γιάννης, συνέντευξη]

Ε: Τώρα θα κολλήσουμε. Θέλω πρώτα όμως να μου πεις, άμα ενώσω δυο τρίγωνα τι σχήμα νομίζεις ότι θα βγει;

Ε. Μ: Ααα, τέ- τέσσερις γωνιές! Τρίγωνο!

Ε: Κάτι άλλο βγαίνει;

Ε. Μ: Τε-τετράγωνο!

Επεισόδιο 33 Νοερός Μετασχηματισμός (χαρακτηρισμός με γεωμετρικά στοιχεία)

[Κ.Μ. 4993-4996, Ευθύμης, συνέντευξη]

Μετά την πρώτη απόπειρα για νοερό μετασχηματισμό, περνούσαμε αμέσως στην πράξη. Δηλαδή τα παιδιά χρησιμοποιούσαν αμέσως τα χάρτινα τρίγωνα, έφτιαχναν, έβλεπαν και άγγιζαν αυτό που έφτιαχναν. Παραθέτουμε εδώ ενδεικτικά ορισμένες από τις συνθέσεις με δυο τρίγωνα, με τις ονομασίες που τους έδωσαν τα παιδιά

Ε: Αυτό το σχήμα που έκανες , με τι μοιάζει; Πως θα το λέμε; Πρέπει να του δώσουμε και ένα όνομα! Έλα πες μου!!

ΕΙΡ: Δεν το έχω ξαναδεί!!

Ε: Δεν πειράζει, θα του δώσουμε ένα όνομα όμως. Πως θα το έλεγες;

ΕΙΡ: Κατερίνα.

Επεισόδιο 34 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης- Προσωποποίηση του Σχήματος, Όνομα

[Κ.Μ. 1157-1161, Ειρήνη, συνέντευξη]

Ε: Θα δοκιμάζεις στο χαρτί και ότι σχηματάκι βγαίνει θα το κολλάμε. Εντάξει;

Ν. Γκ: Ρόμβος.. και σκεπή μπορούμε;

Ε: Ότι θέλεις. Ωραία. Τι άλλο σχηματάκι μπορούμε να βγάλουμε;

Ν. Γκ: Τέτοιο, πως το λένε;

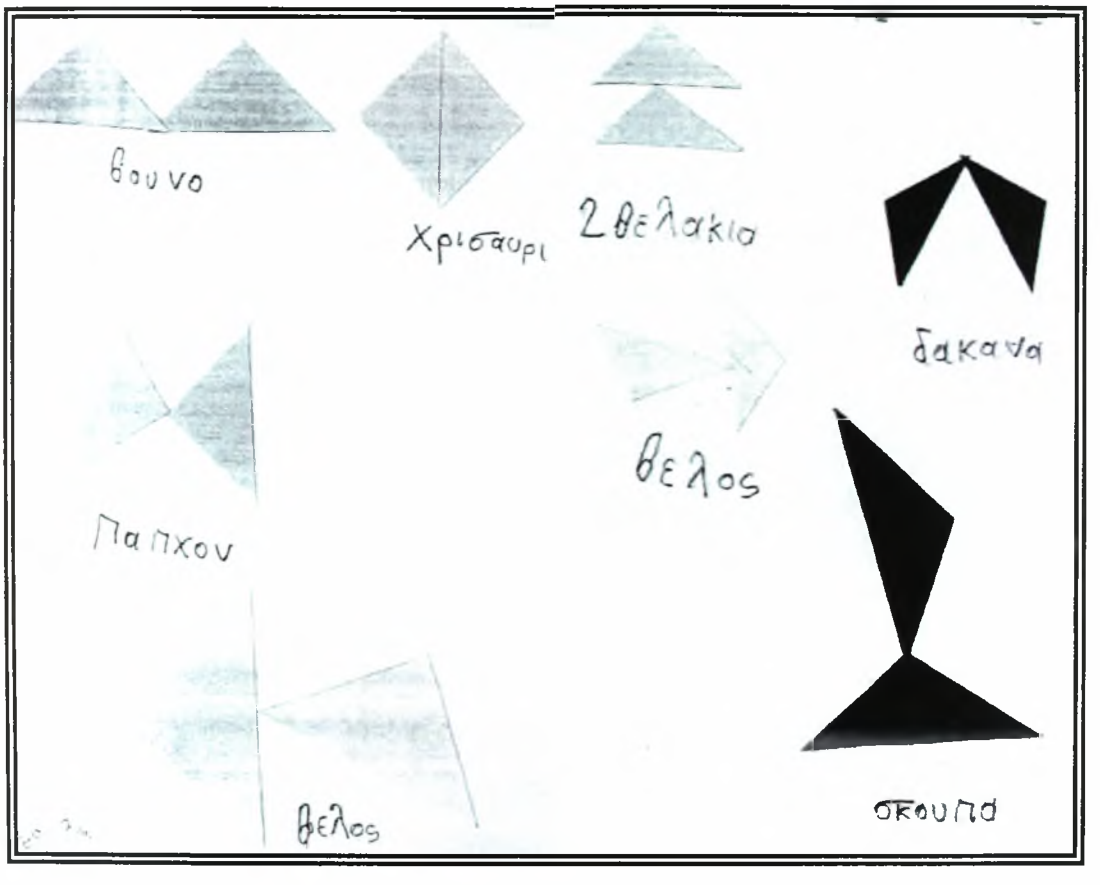
Ε: Κλεψύδρα;

Ν. Γκ: Ναι, που μετράμε το χρόνο, ή το ανάποδο της σκεπής

Επεισόδιο 35 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης- Αναλογία

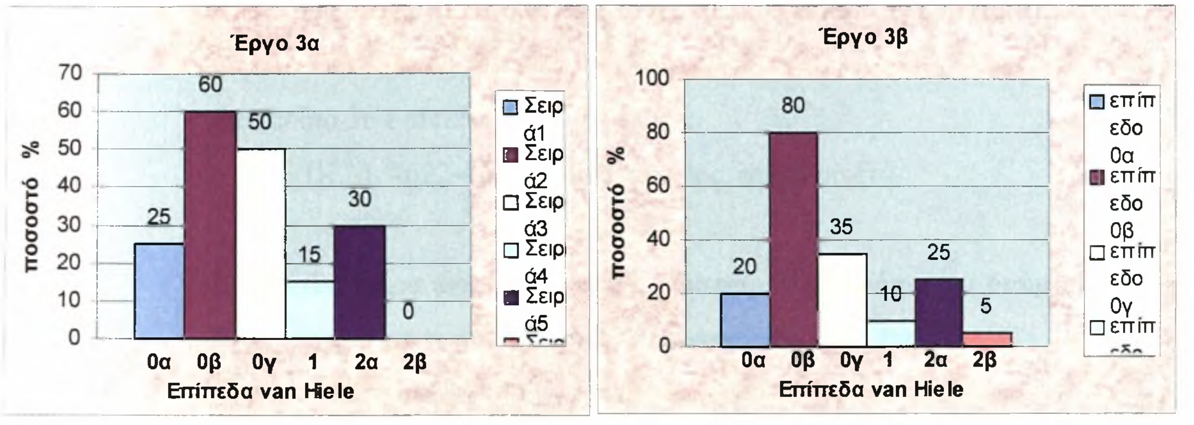
[Κ.Μ. 1545-1548, Νικόλας, συνέντευξη]

Οι περιγραφές που δίνουν στα σχήματα αντιστοιχούν σε μορφές της καθημερινότητας και όχι σε γεωμετρικά σχήματα, όταν βέβαια αυτά προκύπτουν (βλ. εικόνα 5). Πολύ λίγα παιδιά χρησιμοποίησαν μόνο γεωμετρικούς όρους ή και τα δύο μαζί. Εύλογο το παραπάνω, καθώς το έργο δεν θέτει όρια για τα παιδιά. Δεν τα ωθεί/ υποχρεώνει να ασχοληθούν με τα γεωμετρικά σχήματα, αλλά αυτό που τους ζητείται, είναι να πουν με τι σχήμα νομίζουν ότι μοιάζουν. Και το «μοιάζει» παραπέμπει σε παρομοίωση-μεταφορά και λογικό να έχουμε τα αποτελέσματα αυτά. Θα μπορούσαμε να πούμε, ότι το έργο αυτό αποτελεί το προκαταρκτικό στάδιο του 4^{ου} έργου, όπου τα παιδιά χρησιμοποιούν τρίγωνα για φτιάξουν ένα πάζλ.



Εικόνα 5: Ελεύθερη Σύνθεση Τριγώνων και Συσχέτιση τους με Μορφές της Καθημερινότητας

Ποιο είναι όμως το επίπεδο των παιδιών στο έργο αυτό; Η πλειοψηφία, 60% & 80% αντίστοιχα σε κάθε έργο, σύμφωνα με τους πίνακες 3.1, 3.2



Πίνακες 3.1 & 3.2: Ελεύθερη Σύνθεση Τριγώνων

βρίσκεται στο επίπεδο 0β, όπου τα παιδιά δίνουν προσωπικές εξηγήσεις για τα σχήματα. Ενώ, στο επίπεδο 0γ όπου οι εξηγήσεις είναι ανάμικτες με γεωμετρικά χαρακτηριστικά, το ποσοστό κυμαίνεται μεταξύ 50% & 35% αντίστοιχα. Το επίπεδο 0α, όπου τα παιδιά ενώνουν τα τρίγωνα χωρίς να δίνουν καμία εξήγηση-ερμηνεία, εμφανίζεται με ποσοστό 25% και 20% . Το επίπεδο 1, στο οποίο οι ερμηνείες των παιδιών είναι εστιασμένες στα γεωμετρικά σχήματα και χαρακτηριστικά, βρίσκεται σε ποσοστό 15% και 10% αντίστοιχα. Το επίπεδο 2α, με ποσοστό 30% και 25%, στο οποίο τα παιδιά ένωναν με βάση τον αιτιώδη συλλογισμό, εφόσον για να ενώσουν τα τρίγωνα, πρέπει να εστιάσουν στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, χωρίς όμως να δίνουν εξηγήσεις γιατί το σχήμα που έκαναν είναι αυτό που είναι. Και τέλος το επίπεδο 2β, με ποσοστό 5% εμφανίζεται μόνο στο έργο 3β, όπου τα παιδιά βασίζουν τις κατασκευές τους στον αιτιώδη συλλογισμό και παράλληλα εξηγούν. Η παρουσία όμως των υπόλοιπων επίπεδων επικαλύπτεται από τα 0β και 0γ. Αυτό συμβαίνει ενδεχομένως για τον ίδιο λόγο που επισημάνθηκε παραπάνω. Ότι δηλαδή, στο έργο 3 τα παιδιά είναι ελεύθερα να ενώσουν τα τρίγωνα όπως θέλουν, χωρίς να στοχεύουν σε μια συγκεκριμένη κατασκευή. Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα των που περιγράψαμε παραπάνω.

Επίπεδο 0β

Ε: Ααα.... τι είναι αυτό που έφτιαξες; Με τι μοιάζει;

Κ. Λ: Μοιάζει σαν ένα εργαστήριο.. που ανοίγει.. και κλείνει.

Ε: Και τι σχήμα έχει αυτό το εργαστήριο; Με τι μοιάζει;

Κ. Λ: Σαν ένα εργαστήριο, που κάνει κάτι.. έχει κάποιο κομπιούτερ μεγάλο.. και...

Επεισόδιο 36 Επίπεδο 0β

[Κ.Μ. 4622-4625, Κωνσταντίνος, συνέντευξη]

Ε: Ωραία, τώρα ένωσε κι αυτά με διαφορετικό τρόπο, να δούμε τι θα βγει.....μμμ.. με τι μοιάζει αυτό έτσι όπως το έχεις βάλει;

Π. ΤΣ : Με τη σκεπή του μάρκετ.

Ε: Με σκεπή από τι;

Π. ΤΣ : Από το σούπερ μάρκετ κυρία, που είναι εκεί έξω...

Επεισόδιο 37 Επίπεδο 0β

[Κ.Μ. 2582-2585, Πάρης, συνέντευξη]

Επίπεδο 0γ

Ε: Πάρε τώρα αυτά.

Ο. Α: Είναι πάλι ρόμβος άλλά έχει κάνει στροφή!

Επεισόδιο 38 Επίπεδο 0γ

[Κ.Μ. Όλγα, συνέντευξη]

Ε: Για κοίταξέ το λίγο, πως το λένε;

Ε. Μ: Τετράγωνο.

Ε: Είσαι σίγουρος;

Ε. Μ: Ναι, γιατί έχει τέ-τέσσερις από όπου και να κοιτάξεις.

Ε: Τι τέσσερις;

Ε. Μ: Γωνίες.

Επεισόδιο 39 Επίπεδο 2β

Ε: Τι σχήμα βγαίνει;

Ε. Μ: Ψάρι από κόκαλο! Κόκαλο από ψάρι, έχει έξι γωνίες!

Ε: Το κόκαλο έχει έξι γωνίες; Τι θα γράψεις από κάτω;

Ε. Μ: Τετράγωνο!

Ε: Τι είπες ότι είναι;

Ε. Μ: Κόκαλο, αλλά έχει έξι γωνίες. Εξάγωνο

Επεισόδιο 40 Επίπεδο 0γ & 2β μαζί

[Κ.Μ. 5023-5028, Ευθύμης, συνέντευξη]

Ε: Τι σχήμα είναι αυτό που έφτιαξες;

Γ. Σ: Είναι....το σχήμα του Σούπερμαν.

Ε: Και τι σχήμα έχει το σχήμα του Σούπερμαν;

Γ. Σ: Έχει τρεις γραμμές και τρεις γωνίες.

Ε: Τι σχήμα είναι δηλαδή με τρεις γραμμές και τρεις γωνίες;

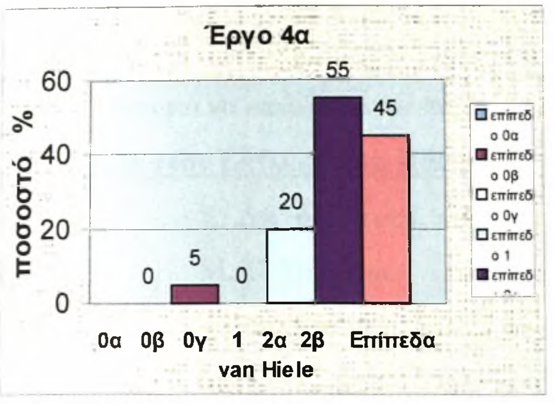
Γ. Σ: Τρίγωνο!

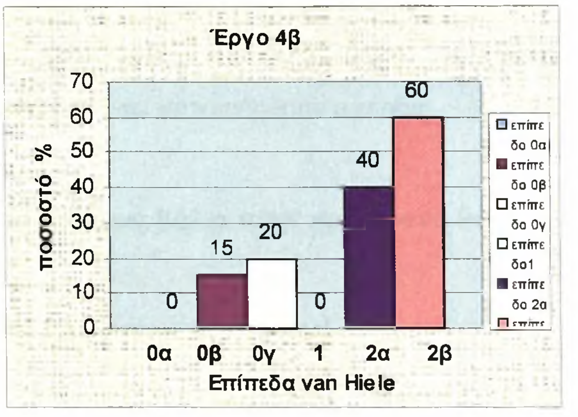
Επεισόδιο 41 Επίπεδο 0γ & 2β μαζί

[Κ.Μ. 3887-3982, Γιάννης, συνέντευξη]

5.4.2 Σύνθεση Τριγώνων σε Πάζλ

Στο $4^{ο}$ έργο, δόθηκε στα παιδιά περιορισμένος αριθμός τριγώνων και τους ζητήθηκε να τα συνδυάσουν κατάλληλα προκειμένου να φτιάξουν ένα πάζλ. Για να το κατορθώσουν αυτό, έπρεπε να ενώσουν τα τρίγωνα εστιάζοντας σε γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τριγώνων με βάση τον αιτιώδη συλλογισμό, περνώντας μέσα από τη διαδικασία δοκιμής και λάθους. Γεγονός που σημαίνει ότι το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο οποίο θα έπρεπε να βρίσκονται είναι το επίπεδο 2. Πράγματι παρατηρώντας τους πίνακες 4.1 και 4.2, διαπιστώνουμε ότι ο μεγαλύτερος αριθμός των παιδιών στο έργο 4 βρίσκεται στο επίπεδο 2, σε ένα ποσοστό 100% παράλληλα με τα άλλα επίπεδα. Θα λέγαμε ότι σχεδόν όλα τα παιδιά βρίσκονται στο 2α, καθώς και όσα μας εξηγούν τον τρόπο εργασίας τους, οι εξηγήσεις δεν είναι αυτές που περιμένουμε. Δεν αναφέρονται σε καθαρά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Επειδή δεν εξηγούν όλα τα παιδιά, όσοι μαθητές έδωσαν κάποιου είδους εξήγηση, κατατάσσονται στο επίπεδο 2β. Έχουμε να κάνουμε λοιπόν, με παιδιά που κατασκευάζουν χωρίς να εξηγούν τίποτα. Άρα, ανήκουν στο επίπεδο 2α με ποσοστό





Πίνακες 4.1 & 4.2: Σύνθεση Τριγώνων σε Πάζλ

55% και 40% αντίστοιχα σε κάθε έργο, εφόσον για να φτιάξουν το πάζλ, πρέπει να διαθέτουν τον αιτιώδη συλλογισμό (εάν-τότε), απλά δεν τον εκφράζουν. Και παιδιά που τα φτιάχνουν και εξηγούν, άρα, ανήκουν στο επίπεδο 2 β με ποσοστό 45% και 60% αντίστοιχα. Τα άλλα επίπεδα παρουσιάζονται με τα εξής ποσοστά: Το επίπεδο 0α δεν παρουσιάζεται καθόλου, γιατί στο έργο αυτό το αντίστοιχό του είναι το επίπεδο 2α, όπου τα παιδιά κατασκευάζουν χωρίς να δίνουν απολύτως καμία εξήγηση. Το επίπεδο 0β εμφανίζεται με ποσοστό 5% και 15% στα αντίστοιχα έργα. Το επίπεδο 0γ, στο έργο 4α δεν εμφανίζεται καθόλου και στο έργο 4β, εμφανίζεται με ποσοστό 20%. Τέλος το επίπεδο 1, παρουσιάζεται μόνο στο έργο 4α με ποσοστό 20%. Η φύση όμως του έργου δεν επιτρέπει παρεκκλίσεις, κρατά την προσοχή των παιδιών επικεντρωμένη στα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες και έτσι τα υπόλοιπα επίπεδα επικαλύπτονται. Επειδή όμως πάντα υπάρχουν εξαιρέσεις, δείτε και το παρακάτω απόσπασμα, όπου ο Νικόλας βάζει πρώτα τα δύο τρίγωνα σαν μια κλεψύδρα και μετά τα άλλα δύο πάλι σαν μια κλεψύδρα:

Ε: Για δοκίμασε και τα υπόλοιπα.

Ν. Γκ: Αα α!! Το βρήκα!! Να το. Μια κλεψύδρα, δυο κλεψύδρες.

Επεισόδιο 42 Επίπεδο 0β&2β μαζί

[Κ.Μ. 1646-1647, Νικόλας, συνέντευξη]

Τα παρακάτω παραδείγματα είναι χαρακτηριστικά των περιπτώσεων που εμφανίζονται στο έργο 4α: Τα έχουμε χωρίσει σε δύο κατηγορίες, σε αυτή όπου τα παιδιά δυσκολεύονται να επιλύσουν το πάζλ και σε αυτή που τα καταφέρνουν αμέσως.

Δυσκολία στην Επίλυση του Πάζλ

Ε: Απ' όλα αυτά, ποιο νομίζεις ότι έχεις βάλει στην πιο σωστή θέση;

Μ. Τ: Το πάνω.

Ε: Πως το έχεις βάλει αυτό και είναι σωστά; Για δες!

Μ. Τ: Το έχω βάλει ανάποδα!

Ε: Και τι γίνεται που το έχεις βάλει έτσι;

....

Ε: Έχει κάτι ίδιο με το τετράγωνο και ταιριάζει;

Μ. Τ: Είναι ίδιο με το τετράγωνο!

Ε: Αυτό είναι τρίγωνο, δεν μπορεί να είναι ίδιο με το τετράγωνο! Μήπως έχουν όμως κάτι ίδιο; Μάλλον κάτι ίσο;

Μ. Τ: Έχουν ίσιες αυτές τις γραμμές.

Επεισόδιο 43 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 183-201, Μάριος, συνέντευξη]

Ε: Τώρα θα κάνουμε πάζλ. Θα πάρεις αυτά τα τρίγωνα και θα προσπαθήσεις να τα ενώσεις, για να φτιάξεις το τετράγωνο, χωρίς να αφήνεις κενά, ούτε να βγαίνουν απ' έξω.

Ν. Γκ: Δύσκολο είναι!

Ε: Ξεκίνησε και θα δεις ότι δεν είναι πολύ δύσκολο.

Ν. Γκ: Έτσι.. αυτό να το βάλω.. έτσι..

Ε: Βγαίνει απ' έξω όμως..

Ν. Γκ: Αφού έχει μεγάλες γραμμές..

Επεισόδιο 44 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 1632-1636, Νικόλας, συνέντευξη]

Ευκολία στην Επίλυση του Πάζλ

Ε: Τώρα θα κάνουμε πάζλ. Με τα τρίγωνα αυτά θα γεμίσεις το τετράγωνο, ώστε να μην έχει κενό ανάμεσα στα τρίγωνα. Επίσης τα τρίγωνα δεν θα πρέπει να βγαίνουν απ' έξω.

Γ. Τ: Κατάλαβα.(παίρνει τα τρίγωνα και το φτιάχνει αμέσως). Ωραίο δεν είναι κυρία;

Ε: Πολύ ωραίο, πως το έκανες;

Γ. Τ: Έβαλα τα τρίγωνα μέσα, να ακουμπάνε στο τετράγωνο και το έκανα.

Επεισόδιο 45 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 2278-2281, Γιάννης, συνέντευξη]

Ε: Πως το έκανες;

Α. Ν: Να, τα έβαλα έτσι και βγήκε, δεν ήταν δύσκολο. Και δίπλα το ίδιο θα κάνουμε;

Επεισόδιο 46 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 2464-2467, Αποστόλης, συνέντευξη]

Ε: το βρήκες, έ; Τι έφτιαξες με τα τρίγωνα;

Λ. Α: Ένα τετράγωνο!

Ε: Ένα τετράγωνο! Ε; Μάλιστα. Τι έκανες και τα έβαλες σωστά αυτά τα τρίγωνα;

Λ. Α: Τα έβαλα έτσι όπως πρέπει.

Ε: Πως πρέπει δηλαδή;

Λ. Α: Εε…δεν ξέρω.. είναι ολόιδια και τα βάζουμε σε κάθε μεριά.

Επεισόδιο 47 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 3644-3649, Λαέρτης, συνέντευξη]

Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα ατόμων που βρίσκονται στο επίπεδο 2β στο έργο 4β:

Ε: Βγαίνουν απ' έξω. Δοκίμασε να τα βάλεις αλλιώς!

Ν. Γκ: Είναι πολύ μεγάλο αυτό και βγαίνει απ' έξω. Πως να το βάλουμε; Μήπως έτσι;

Επεισόδιο 48 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 1652-1653, Νικόλας, συνέντευξη]

Ε: Για βάλε το άλλο, μήπως ταιριάζει εκείνο..

Π. ΤΣ : Ναι κυρία αυτό είναι! Εδώ χωράει αυτό, φαίνεται! Ένα μας έμεινε..

Επεισόδιο 49 Επίπεδο 2β

[Κ.Μ. 2663-2667, Πάρης, συνέντευξη]

Κεφ. 6: Διδακτικό Πείραμα σε Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

6.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε, τα παιδιά δυσκολεύονται στο $4^{ο}$ έργο, γιατί πρέπει να επεξεργαστούν περισσότερο τα τρίγωνα, τις ιδιότητες τους και τις διαφορετικές τους αναπαραστάσεις, έτσι ώστε τελικά να επιλυθεί το πάζλ. Μέσα από την ανάλυση των συνεντεύξεων όμως διαπιστώνουμε ότι πολλά παιδιά έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν τις δεξιότητές τους. Αυτό σημαίνει ότι *αν τους δοθεί ένα πιο δυναμικό και ευέλικτο εργαλείο χειρισμού αυτών των αναπαραστάσεων, οι κατασκευές θα είναι πιο εύκολες.* Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. οι μικρόκοσμοι σε Cabri), θα μπορούσαν να βοηθήσουν προς αυτή την κατεύθυνση;

Παρατηρώντας κανείς τους πίνακες, διαπιστώνει μία σταδιακή μετάβαση από το επίπεδο 0β στο 2, μέσα από τα έργα. Βασισμένοι λοιπόν στην περιγραφή των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας (συγκεκριμένα, του πειραματισμού & του μετασχηματισμού), μπορούμε να υποθέσουμε, ότι το πέρασμα αυτό *σε ένα πιο υψηλό επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, διευκολύνεται και ενισχύεται με ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri.* Καθώς η άμεση οπτικοποίηση των μετασχηματισμών, η ανατροφοδότηση και η δυνατότητα αλλαγής του σχήματος δυναμικά εστιάζει την προσοχή του ατόμου, που χρησιμοποιεί το Cabri, στις ιδιότητες και προωθεί τη σκέψη και την αντίληψη σε υψηλότερο επίπεδο. Με βάση τις υποθέσεις αυτές, εφαρμόσαμε μια σειρά έργων στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του Cabri, με στόχο το διδακτικό πειραματισμό, σύμφωνα με τις παραπάνω αρχές. Τα αποτελέσματα αυτού του μέρους της εν λόγω έρευνας απαρτίζουν το παρόν κεφάλαιο.

Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, σκιαγραφείται, μέσα από την ανάλυση των επεισοδίων το δυναμικό της αλληλεπίδρασης παιδιών, λογισμικού και έργων. Παράλληλα, η περιγραφή των ενεργειών τους σε κάθε έργο δίνει μια συνολική εικόνα των αντιλήψεών τους για τα τρίγωνα, καθώς και του βαθμού στον οποίο η γεωμετρία του Cabri (και συγκεκριμένα η δυνατότητα πειραματισμού και μετασχηματισμού με τις φιγούρες) συντελεί στην διεύρυνσή των αντιλήψεων αυτών.

6.2 Βασικά Βήματα στο Σχεδιασμό του Διδακτικού Πειράματος

Προκειμένου λοιπόν, να σχεδιάσουμε το διδακτικό στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, ακολουθήσαμε ορισμένα βήματα:

Αρχικά, ήταν αναγκαία η δημιουργία «μικρόκοσμων» στο Cabri, έτσι ώστε τα παιδιά να αλληλεπιδρούν μόνο με τρίγωνα. Έτσι διαμορφώθηκε μια σειρά από έργα, που στόχευαν να βοηθήσουν τα παιδιά στον πειραματισμό και στον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων (βλ. έργα Διδακτικού Πειράματος ενότητα 6.3). Περιορίσαμε με τον τρόπο αυτό το ενδεχόμενο να αποπροσανατολιστούν οι μαθητές από τις δυνατότητες που προσφέρει το Cabri (ένα περιβάλλον ανοικτό), καθώς στο επίκεντρο της έρευνας βρισκόταν η έννοια του τριγώνου. Τα έργα-μικρόκοσμοι, που δόθηκαν στα παιδιά τα διακρίνουμε σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη ανήκουν τα έργα, όπου τα παιδιά ήταν ελεύθερα να μετασχηματίσουν ή όχι τα τρίγωνα, και στη δεύτερη εκείνα τα έργα, όπου τα παιδιά έπρεπε αναγκαστικά να μετασχηματίσουν τα τρίγωνα, προκειμένου να ολοκληρώσουν τα έργα. Η πρώτη κατηγορία περιελάμβανε τα εξής έργα:

1. Φτιάξε ένα τρίγωνο και μετασχημάτισέ το σε μεγάλο /μικρό και μια γραμμή.
2. Κάνε τα δύο τρίγωνα «ίδια», αλλάζοντας μόνο το ένα από τα δύο.
3. Επέλεξε όποια και όσα τρίγωνα θέλεις και φτιάξε ένα καράβι.

Η δεύτερη κατηγορία περιελάμβανε έργα, όπου τα παιδιά έπρεπε να γεμίσουν πέντε πλαίσια (ένα ορθογώνιο και τέσσερα τετράγωνα) με τρίγωνα.
Στη συνέχεια θα περιγραφεί αναλυτικά πως δούλεψαν τα παιδιά στα παραπάνω έργα.

Το δεύτερο μέλημά μας ήταν να βάλουμε τα παιδιά να εργαστούν σε δυάδες, για να δούμε πως λειτουργεί στα πλαίσια της ομάδας η συνεργατική μάθηση. Σύμφωνα με την έννοια αυτή, που έχει τις ρίζες της στη «Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης» της θεωρίας του Vygotsky, η μάθηση συντελείται με τη συμβολή ενός πιο ώριμου γνωστικά ατόμου. Προωθείται λοιπόν, η μάθηση μέσω της αλληλεπίδρασης του ατόμου με το μικρόκοσμο και τη συνεργασία με κάποιον άλλο; Μπορεί το άλλο άτομο να μην είναι γνωστικά ωριμότερο, έχει όμως αναμφίβολα διαφορετικές αναπαραστάσεις και αντιλήψεις για τα τρίγωνα και έτσι δίνει νέες πληροφορίες. Επιλέχθηκαν δυάδες για το σκοπό αυτό και πολυμελείς ομάδες, γιατί το εργαλείο χειρισμού του ηλεκτρονικού υπολογιστή ήταν ένα, το ποντίκι, και δεν θα υπήρχε δυνατότητα να το χειρίζονται ισότιμα. Παρόλο που ο χρόνος δεν επέτρεψε την εμβάθυνση σ' αυτή τη διάσταση στην παρούσα εργασία, ωστόσο η μέθοδος της ομαδικής εργασίας αποτελεί τη βάση για την εργασία των παιδιών σε υπολογιστικά περιβάλλοντα.

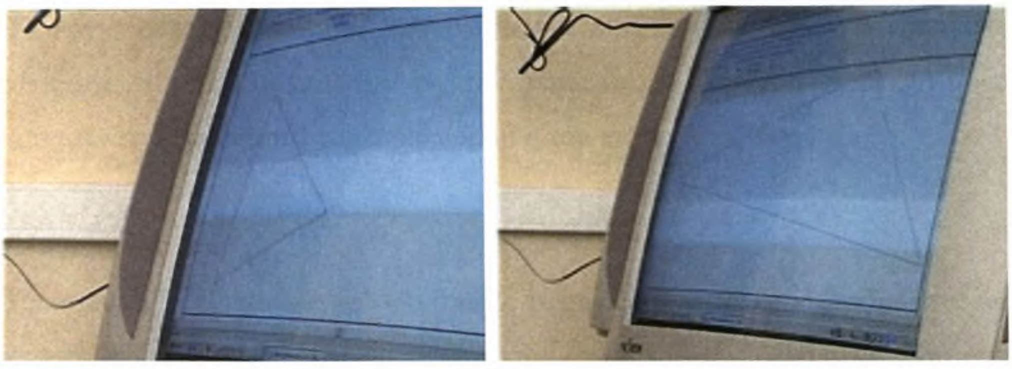
6.3 Εργασία των Παιδιών στα Πλαίσια του Διδακτικού Πειράματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα έργα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορά έργα που επιτρέπουν και προωθούν τα παιδιά να μετασχηματίσουν ένα τρίγωνο ελεύθερα (δηλαδή, να το μεγαλώσουν, να το μικρύνουν κλπ.). Η δεύτερη κατηγορία αφορά έργα που επιζητούν ένα συγκεκριμένο μετασχηματισμό ενός τριγώνου, ώστε να αποτελέσει τμήμα που να χωράει στο τελικό σχήμα. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί αναλυτικά η δουλειά των παιδιών στα έργα της κάθε κατηγορίας και μέσα από την ανάλυση αυτή θα οδηγηθούμε στα συμπεράσματά μας.

6.3.1 Ελεύθεροι Μετασχηματισμοί

Α. Φτιάξε ένα δικό σου τρίγωνο

Στο έργο αυτό, ζητήθηκε από τα παιδιά να επιλέξουν τα κατάλληλα εργαλεία, να φτιάξουν ένα τρίγωνο και στη συνέχεια να το μετασχηματίσουν, να το κάνουν δηλαδή πολύ μεγάλο, πολύ μικρό, καθώς και να το μεταμορφώσουν σε μία γραμμή. Το αρχικό τρίγωνο που έφτιαχναν ήταν πότε στερεότυπο (ισόπλευρο- ισοσκελές) και πότε αμβλυγώνιο ή οξυγώνιο, ενώ οι μετασχηματισμοί του σε μικρότερο ή μεγαλύτερο σχήμα περιελάμβαναν στερεότυπα ισοσκελή και ισόπλευρα τρίγωνα (βλ. εικόνα 6)



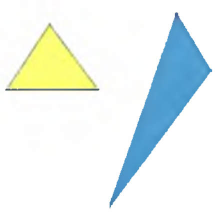
Εικόνα 6, Μετασχηματισμός σε στερεότυπο ισόπλευρο τρίγωνο.

Β. Κατασκεύασε ίδια τρίγωνα

Στο επόμενο μέρος, όπου έπρεπε να αλλάξουν το ένα από τα δύο τρίγωνα και να τα κάνουν ίδια, δεν επέλεγαν να μετασχηματίσουν το ισόπλευρο αλλά το αμβλυγώνιο τρίγωνο, προκειμένου να το κάνουν ισόπλευρο. Μάλιστα θεωρούσαν ότι επρόκειτο για ένα άλλο σχήμα, όχι τρίγωνο και όταν οδηγούνταν στο συμπέρασμα ότι ήταν τρίγωνο, το χαρακτήριζαν ως διαφορετικό τρίγωνο ή πεσμένο (βλ. εικόνα 7).

Χαρακτηριστικά αυτής της αντίδρασης είναι το παρακάτω παράδειγμα:

- Χ: Έγινε ένα τρίγωνο.
- Ε: γιατί πριν δεν ήταν τρίγωνο;
- Χ: όχι ήταν ένα άλλο σχήμα.
- Ε: Πόσες γωνίες έχει ένα τρίγωνο;
- Χ: τρεις.
- Ε: εκείνο δεν είχε τρεις;
- Χ: Ναι.
- Ε: Γιατί τότε δεν είναι τρίγωνο;
- Χ: είναι λίγο αλλιώτικο, είναι πεσμένο.

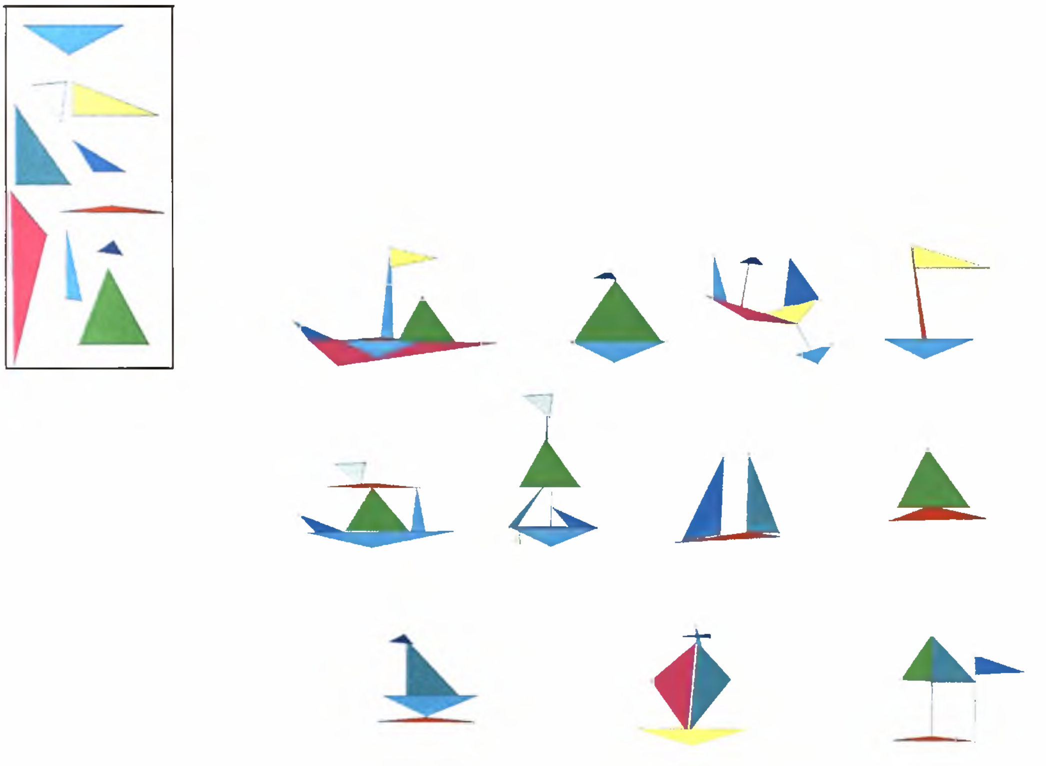


Εικόνα 7: «Πεσμένο Τρίγωνο»

Το έργο, λοιπόν, αυτό μας φανερώνει και επιβεβαιώνει για άλλη μια φορά, ότι η κυρίαρχη εικονική αναπαράσταση, την οποία έχουν συνδέσει τα παιδιά με την έννοια του τριγώνου είναι αυτή του ισόπλευρου ή του ισοσκελούς τριγώνου.

Γ. Φτιάξε ένα καράβι

Το παραπάνω γίνεται φανερό και από το γεγονός ότι, όταν τους ζητάμε, στο παρόν έργο, να κατασκευάσουν ένα καράβι επιλέγοντας όποια τρίγωνα θέλουν απ᾽ όσα τους δίνονται έτοιμα, επιλέγουν όσα τρίγωνα είναι και μοιάζουν ισοσκελή ή ισόπλευρα και έτσι χρειάζεται να τα μετασχηματίσουν λίγο έως καθόλου. Επιλέγουν, δηλαδή, τα «πιο στερεότυπα», αυτά που είναι πιο κοντά στις δικές τους αναπαραστάσεις-εικόνες για τα καράβια Αυτό μπορεί να το παρατηρήσει κανείς στα τμήματα των έργων τους που ακολουθούν (βλ. εικόνα 8).



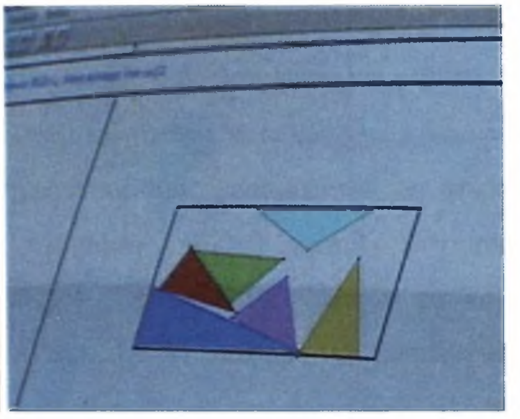
(Εικόνα 8) «Στερεότυπα καράβια»

6.3.2 Μετασχηματισμός με Συνθήκες

Σ' αυτή την κατηγορία τα παιδιά έχουν να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Τους ζητείται να χρησιμοποιήσουν τρίγωνα, να τα μετασχηματίσουν και να γεμίσουν μ΄ αυτά ένα πλαίσιο (π.χ. ορθογώνιο ή τετράγωνο).

Α. *Γέμισμα ορθογωνίου με τρίγωνα.*

Σ' αυτό το μέρος δε ζητείται περιορισμός, αναφορικά με πλήθος των τριγώνων που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν. Όλα τα παιδιά ξεκινούν εφάπτοντας το σκούρο μπλε τρίγωνο, χωρίς να το αλλάξουν στη γωνία-στη μια πλευρά του ορθογωνίου (βλ. εικόνες 9 και 10). Στη συνέχεια βάζουν και τα υπόλοιπα τρίγωνα μέσα και προσπαθούν να γεμίσουν το ορθογώνιο. Να σημειωθεί, ότι εξ' αρχής τα τρίγωνα δεν χωράνε στο ορθογώνιο και έτσι αναγκάζονται να τα αλλάξουν. Έτσι με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν γεμίζουν το ορθογώνιο. Τους παίρνει αρκετή ώρα να το ολοκληρώσουν, όμως τους προετοιμάζει για το επόμενο έργο, όπου ζητείται μικρός αριθμός τριγώνων. Μπορούμε να πούμε ότι οι μετασχηματισμοί σε αυτό το έργο, τα οδηγούν στη γενίκευση της έννοιας του τριγώνου (πχ δημιουργούν πλουσιότερες αναπαραστάσεις και ξεφεύγουν από τις στερεότυπες εικόνες). Ότι μπορούν δηλαδή να τα μεγαλώνουν, να τα μικραίνουν, να τα «στριμώχνουν», όπως λένε και τα ίδια. Επίσης οδηγούνται και σε διάφορες στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος. Η στρατηγική που εφαρμόζουν στο σύνολό τους, είναι ο μετασχηματισμός του τριγώνου έξω από το ορθογώνιο, όπου συγκρίνοντας το τρίγωνο με το πλαίσιο στο οποίο έπρεπε να τοποθετηθεί το τρίγωνο, κάνουν το τρίγωνο περίπου ίδιο και ύστερα το βάζουν μέσα (βλ. εικόνα 11).



Εικόνα 9 Εικόνα 10

' Πώς γεμίζουν τα παιδιά το ορθογώνιο πλαίσιο'

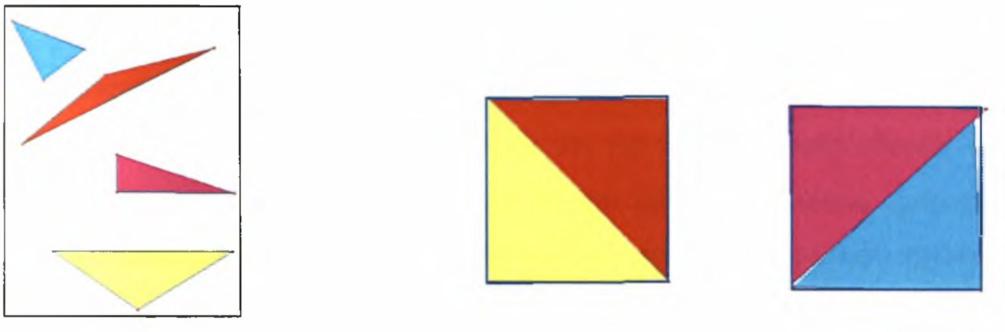
Εικόνα 11, Γ: «Θέλω να το βγάλω έξω, για να μπορέσω να βάλω αυτό πιο εδώ και να το μικρύνω… και μετά θα το βάλω μέσα».

Μετά την εξάσκηση που είχαν τα παιδιά με το ορθογώνιο, συνάντησαν λιγότερες δυσκολίες στα επόμενα έργα (π.χ. γέμισμα τετραγώνου με δύο, τρία, τέσσερα ή πέντε τρίγωνα). Στα παρακάτω θα δούμε αναλυτικά το πως δούλεψαν τα παιδιά.

Β. Γέμισμα τετραγώνου με τρίγωνα

- <u>Τετράγωνο με δύο τρίγωνα</u>

Η πρόκληση για τα παιδιά σ' αυτό το έργο αφορούσε το σχήμα που έπρεπε να δώσουν στο τρίγωνο (δηλαδή το είδος του μετασχηματισμού), προκειμένου να γεμίσει όλο το τετράγωνο με δύο μόνο τρίγωνα. «Με τόσα λίγα τρίγωνα πως θα το κάνουμε;» (αναφέρει με έκπληξη η Χριστίνα). Οι αρχικοί μετασχηματισμοί τους περιοριζόταν σε στερεότυπα ισόπλευρα και ισοσκελή τρίγωνα (με τη βάση δηλαδή κάτω). Στη συνέχεια αναγκάζονταν να τα μεταβάλουν περισσότερο, ώστε να τελειώσουν το έργο. Το αποτέλεσμα ήταν μεν δύο ισόπλευρα τρίγωνα, αλλά με διαφορετική κατεύθυνση, όχι δηλαδή στερεότυπα (Εικόνα 12). Το έργο αυτό με τη σειρά του προετοίμαζε-εξοικείωνε και μυούσε τα παιδιά σε συγκεκριμένους μετασχηματισμούς και την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης του προβλήματος.



Εικόνα 12: «Ισόπλευρο τρίγωνο με διαφορετική κατεύθυνση»

- Τετράγωνο με τρία /τέσσερα και πέντε τρίγωνα

Από τις κατασκευές των παιδιών σ' αυτά τα έργα, βλέπουμε ότι προκειμένου να διευκολυνθούν, εφάρμοζαν αρχικά τη στρατηγική που αναφέρθηκε πιο πάνω. Εφάπτουν, δηλαδή κολλάνε- 'καρφώνουν' (όπως χαρακτηριστικά λένε) ένα τρίγωνο στην πλευρά του τετραγώνου και το μετασχηματίζουν σε ισόπλευρο. Στη συνέχεια γεμίζουν και το υπόλοιπο πλαίσιο. Τους μετασχηματισμούς τους εκτελούν ως επί το πλείστον έξω από το τετράγωνο (βλ. εικόνα 13 και 14). Χαρακτηριστική ήταν η φράση του Γιάννη, που ζήτησε να βάλει μόνο δύο τρίγωνα. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει, ότι το έργο αυτό έχει μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας από το προηγούμενο, γιατί απαιτούσε από τα παιδιά να σκεφτούν τα είδη των μετασχηματισμών που έπρεπε να επιλέξουν. Έτσι όμως προωθούσε τα παιδιά σε υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

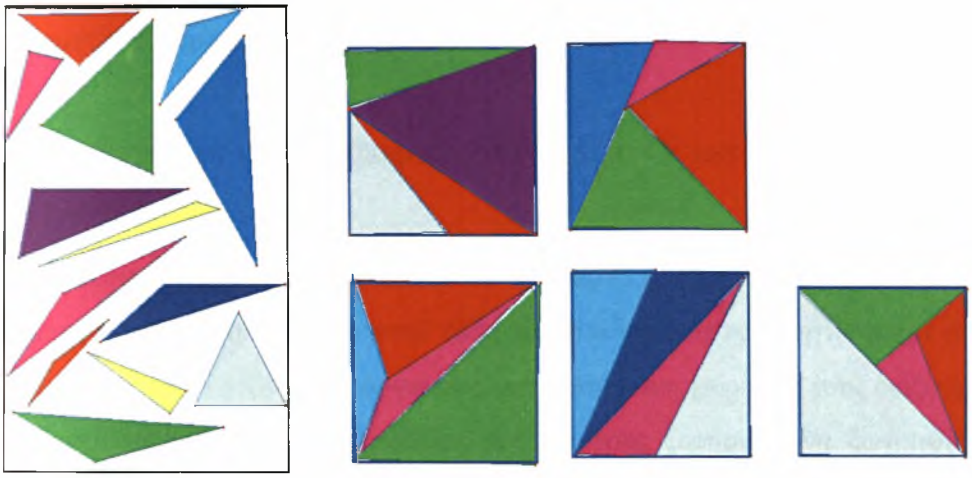
Εικόνα 13, Τετράγωνο με τρία τρίγωνα

Μετά την επιτυχημένη ολοκλήρωση του πρώτου πλαισίου με τα δύο τρίγωνα, μέσα από τη διαδικασία δοκιμής και λάθους, τα υπόλοιπα ήταν πολύ εύκολα για τα παιδιά. Αυτό το συμπεραίνουμε και από τη σύντομη χρονική διάρκεια της ολοκλήρωσής τους. Το τελευταίο έργο με τα πέντε τρίγωνα είναι πια για τα παιδιά πολύ εύκολο, καθώς έχουν αντιληφθεί τη διαδικασία μετασχηματισμού, την έχουν αφομοιώσει, έχουν κάνει δηλαδή τις γενικεύσεις τους, και πλέον γίνονται όλα πολύ γρήγορα και σχεδόν αυτόματα. Μικραίνουν και μεγαλώνουν τα τρίγωνα ιδιαίτερα εύκολα και πλέον τα τρίγωνα δεν είναι μόνο στερεότυπα (εικόνα 15 και 16).

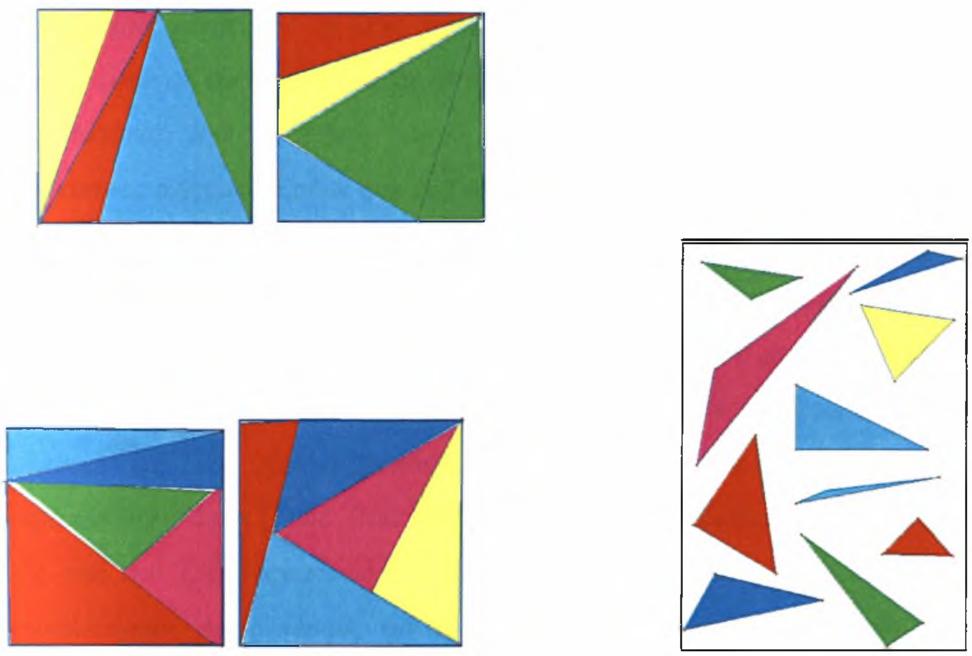
Εικόνα 14, Τετράγωνο με τέσσερα τρίγωνα

«Κάντο έτσι, ανέβασέ το έτσι

και «κάρφωσέ» το εδώ!»



Εικόνα 15, Τετράγωνα με τέσσερα τρίγωνα (Το αποτέλεσμα των μετασχηματισμών).



Εικόνα 16, Τετράγωνο με πέντε τρίγωνα

Ταυτόχρονα μέσα από τα διάφορα έργα παρατηρούμε μια σταδιακή εξέλιξη- μετάβαση σε ένα πιο σύνθετο τρόπο σκέψης, με την προσοχή να εστιάζει περισσότερο σε γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

6.4 Αφήγηση και Ζωγραφική στην Τάξη: Οι μεταμορφώσεις του Τασούλη

Στο δεύτερο μέρος του διδακτικού πειράματος περάσαμε από την αίθουσα των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην τάξη των παιδιών, όπου αφηγηθήκαμε στα παιδιά την ιστορία με τίτλο « Οι μεταμορφώσεις του Τασούλη», χωρίς να τους δείξουμε εικόνες και στη συνέχεια τους δώσαμε κόλλες Α4 και τους ζητήσαμε να ζωγραφίσουν διάφορα σημεία της ιστορίας, ώστε να κάνουμε το δικό μας παραμύθι.

Η ιστορία μας είναι η ακόλουθη:

Υπάρχει μια χώρα που τη λένε Επιπεδία. Εκεί ζουν όλα τα σχήματα. Σε μια γειτονιά λοιπόν, ζουν οι κύκλοι, σε μία τα τετράγωνα, σε μία τα πολύγωνα και σε μία τα τρίγωνα. Στη γειτονιά των τριγώνων, όπου όλα είχαν τρίγωνο σχήμα, τραπέζια, καρέκλες, αυτοκίνητα, πλατείες, ζούσε και ένα ισόπλευρο τριγωνάκι, ο Τασούλης. Ο Τασούλης είχε και τις τρεις πλευρές του ίσες, όπως είναι οι σκεπές των σπιτιών. Δεν ήταν όμως όλοι οι τριγωνοφίλοι του έτσι. Υπήρχαν τριγωνάκια πιο ξαπλωτά από αυτόν και καθώς ήταν λίγο ζηλιάρης ο Τασούλης, ήθελε κι αυτός να γίνει ξαπλωτός, να μην κουράζεται καθόλου όλη μέρα. Αποφασίζει τότε να πάει στον κ. Αλφόνσο τον Ξαπλωτό, μέγα μάγο και μεταμορφωτή, να ζητήσει βοήθεια, αν και δεν έπρεπε να πάει στη γειτονιά των τετραπλεύρων, όπου ζούσε. Ξεκινάει λοιπόν, ένα πρωί. Αφήνει το τρίστρατο που οδηγούσε έξω από την Τριγωνογειτονιά και παίρνει το τετράστρατο για να πάει στη γειτονιά των τετραπλεύρων. Αφού πέρασε την τετράφυλλη πύλη και διέσχισε ένα μεγάλο τετράγωνο δέντρο, έφτασε στο σπίτι του κ. Αλφόσου! Χτύπησε την πόρτα τέσσερις φορές: τοκ. . τοκ. . τοκ. . τοκ.

- *Ποιος είναι;*
- *Ο Τασούλης είμαι, ένα τριγωνάκι.*
- *Και τι θέλεις εσύ εδώ; Έλα μέσα.*

- *Να, έμαθα ότι μπορείτε να με βοηθήσετε. Θα ήθελα να με μεταμορφώσετε με το μαγικό ραβδί σας σε ένα πιο ξαπλωτό τρίγωνο, όπως είναι οι φίλοι μου.*
- *Χα, χα! Είσαι σίγουρος πως θέλεις να το κάνεις αυτό;*
- *Ναι, ναι!*

Και πριν προλάβει ο Τασούλης να καταλάβει., τον χτυπά τέσσερις φορές στη ράχη και ο Τασούλης γίνεται ξαπλωτός.

- *Αχ, ευχαριστώ! Είπε ο Τασούλης και άρχισε να κάνει τριγωνότουμπες.*

Μετά από λίγες μέρες, ένιωσε πολύ πιασμένος έτσι όπως ήταν ξαπλωτός. Παίρνει ξανά το τετράστρατο και πηγαίνει στον κ. Αλφόνσο για να του ζητήσει να τον κάνει ακόμα πιο ξαπλωτό. Ο κ. Αλφόνσο τον κάνει και πριν το καταλάβει ο Τασούλης οι γωνίες του άρχισαν να μικραίνουν, να μικραίνουν η άλλη να μεγαλώνει, να μεγαλώνει ώσπου έγινε μια γραμμή.

- *Μα κ. Αλφόνσο, εσείς με κάνατε γραμμή, όχι ξαπλωτό!*
- *Α, έπρεπε να ξέρεις ότι όταν μεγαλώνει η μια σου γωνία, οι άλλες μικραίνουν και μετά γίνεσαι γραμμή. Δεν φταίω εγώ!!*
- *Κάνε με πάλι τρίγωνο! Σε παρακαλώ!*
- *Δεν μπορώ να κάνω τίποτα άλλο! (Και γέλασε). Πήγαινε στις γραμμές, ίσως να μπορούν να σε βοηθήσουν εκεί!*

Φεύγει λοιπόν, ο Τασούλης ευθεία γραμμή για τις γραμμές.

Με την αφήγηση στοχεύαμε να εξάψουμε τη φαντασία των παιδιών, ώστε καθένα να σχηματίσει τις δικές του εικόνες-αναπαραστάσεις της έννοιας του τριγώνου, με βάση τα εσωτερικευμένα σχήματα που είχε αποκτήσει μέσα από τα έργα στα οποία είχαν δουλέψει ατομικά ή ομαδικά. και στη συνέχεια με την εικονογράφηση να τις αποτυπώσει στο χαρτί. Μέσα από τη διαδικασία της αποτύπωσης, θα μπορούσαμε επίσης να δούμε, εάν το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας του Cabri, συνέβαλλε στη δημιουργία νέων νοητικών αναπαραστάσεων του τριγώνου.

Εικονογραφήσαμε τα εξής τρία σημεία της ιστορίας:

1. Ο Τασούλης πριν τη μεταμόρφωσή του στη γειτονιά του

Εδώ ζητήσαμε από τα παιδιά να σχεδιάσουν τον Τασούλη στη γειτονιά του, την Τριγωνογειτονιά. Ο Τασούλης στην ιστορία μας ήταν ένα ισόπλευρο τριγωνάκι, όχι όμως και οι γείτονές του. Τα παιδιά στο σύνολό τους σχεδίασαν ισοσκελή-ισόπλευρα τρίγωνα, για άλλη μια φορά διαπιστώνουμε ότι η κυρίαρχη αναπαράσταση της έννοιας του τριγώνου είναι αυτή του ισοσκελούς/ ισόπλευρου τριγώνου.

2. Ο Τασούλης ξαπλωτός.

Τα παιδιά εδώ έχουν μετασχηματίσει τον Τασούλη, τον έχουν μεταμορφώσει σε ένα ξαπλωτό τρίγωνο. Στις ζωγραφιές 1, 3 & 4 βλέπουμε πράγματι έναν ξαπλωτό Τασούλη. Πρόκειται για μια αναπαράσταση διαφορετική από τη στερεότυπη. Το πρώτο βήμα προς ένα άλλο είδος αναπαράστασης έχει δηλαδή γίνει. Πολύ εντυπωσιακή είναι η 2η ζωγραφιά, όπου ο ξαπλωτός Τασούλης είναι «ένα κομμάτι του πάζλ» στο οποίο είναι ξαπλωμένος. Η ζωγραφιά αυτή παραπέμπει λίγο στα πάζλ που κάναμε με το Cabri. Η 5η ζωγραφιά έχει απλά έναν Τασούλη που ξάπλωσε. Αυτό σημαίνει, ότι το ισοσκελές τρίγωνο ξάπλωσε- έγειρε, χωρίς να υποστεί καμία αλλαγή στις πλευρές και τις γωνίες του. Εδώ επίσης περιέχονται και οι ζωγραφιές, όπου τα παιδιά έχουν σχεδιάσει όλες τις μεταμορφώσεις του Τασούλη σε ένα φύλλο. Όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, οι αναπαραστάσεις-μεταμορφώσεις αυτές διαφέρουν από το ισοσκελές τρίγωνο. Ακόμη, ορισμένα παιδιά δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν μια διαφορετική αναπαράσταση της έννοιας του τριγώνου, πέρα από τη στερεότυπη.

3. Ο Τασούλης μεταμορφωμένος σε γραμμή.

Εδώ τα παιδιά δεν συνάντησαν δυσκολίες στην αναπαράσταση-μετασχηματισμό του Τασούλη ως γραμμή. Τραβούσαν απλά μια γραμμή και τη διακοσμούσαν.

Από τα παραπάνω συνάγουμε το συμπέρασμα, ότι το λογισμικό της δυναμικής γεωμετρίας του Cabri συνετέλεσε στη διεύρυνση των νοητικών αναπαραστάσεων των παιδιών για τα τρίγωνα. Βέβαια, όχι σε όλα τα παιδιά, στα περισσότερα όμως ναι. Αυτό υποδηλώνει πως, εάν εφαρμόσουμε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας συστηματικά, το ποσοστό επιτυχημένων διαφορετικών αναπαραστάσεων του τριγώνου θα αυξηθεί σημαντικά. Ας μην ξεχνάμε, ότι τα παιδιά ασχολήθηκαν με κάτι τέτοιο για πρώτη φορά και μόνο για μιάμιση περίπου ώρα ανά ζεύγος, και το ότι αρκετά από αυτά, ασχολήθηκαν για πρώτη φορά με υπολογιστή. Η μεγαλύτερη εξοικείωση και συστηματικότερη διδασκαλία με λογισμικά, όπως το Cabri, συντελεί θετικά στη μάθηση.

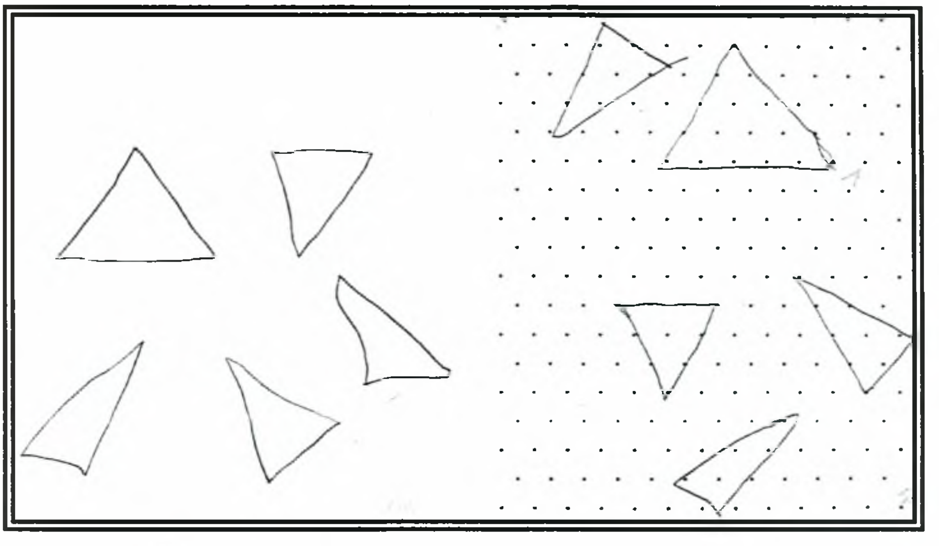
Κεφ. 7: Συμπεράσματα

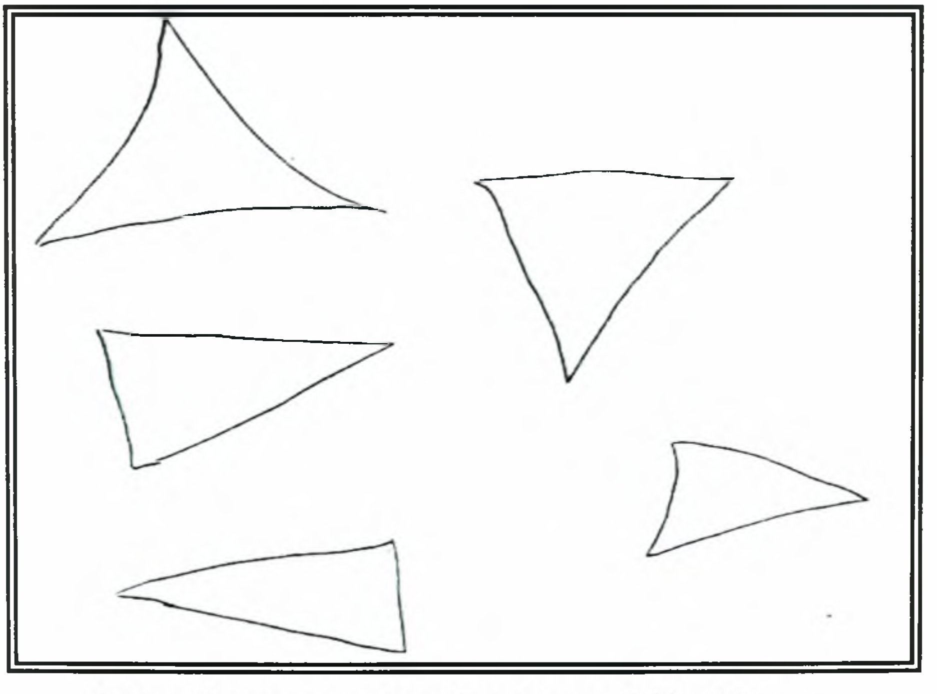
Η παραπάνω έρευνα μας οδήγησε σε ορισμένα συμπεράσματα, αναφορικά με τη γεωμετρική σκέψη των παιδιών και τη χρήση περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας. Τα συμπεράσματα αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων που συλλέξαμε α) κατά τη χρήση του οπτικο-απτικού υλικού και β) κατά το διδακτικό πείραμα με τη χρήση του περιβάλλοντος της Δυναμικής Γεωμετρίας. Παρακάτω θα αναφερθούμε συνοπτικά στα συμπεράσματα που απορρέουν μέσα από αυτές τις δύο συσχετιζόμενες φάσεις.

7.1 Συμπεράσματα

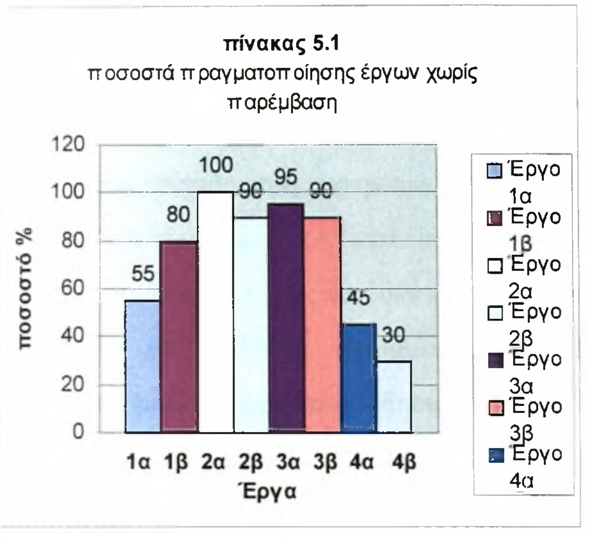
Μέσα από την επισκόπηση των κεφαλαίων μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ότι τα έργα που εφαρμόστηκαν σε οπτικο-απτικό υλικό και στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας αλληλοσυνδέονται. Ένα από τα κοινά χαρακτηριστικά τους στοιχεία είναι το γεγονός, ότι αποκαλύπτουν στο σύνολό τους, ότι η αναπαράσταση της έννοιας του τριγώνου που υπερέχει, είναι αυτή των στερεότυπων τριγώνων (ισοσκελή-ισόπλευρα). Εξάλλου, ένα τρίγωνο διαφορετικό του ισοπλεύρου ή του ισοσκελούς δεν θεωρείται από τα παιδιά τρίγωνο, αλλά ένα άλλο σχήμα χωρίς κάποιο συγκεκριμένο όνομα. Στην καλύτερη περίπτωση θεωρείται τρίγωνο, όχι όμως κανονικό (ισόπλευρο ή ισοσκελές με τη βάση προς τα κάτω).

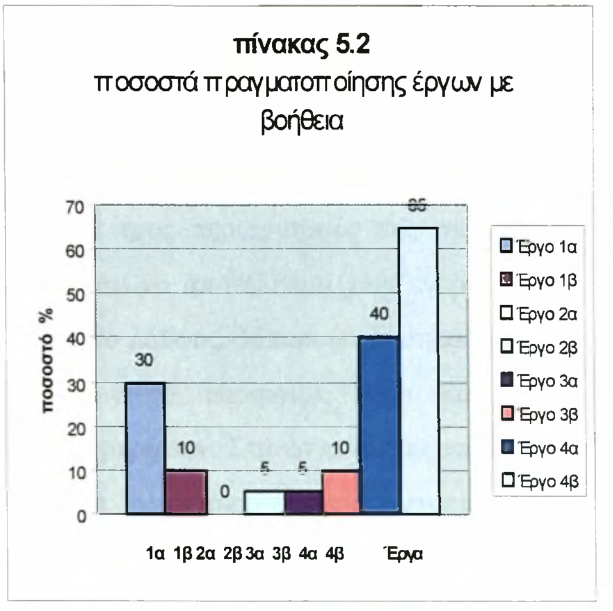
Τα έργα αυτά έχουν βέβαια διαφορές ως προς τη διαδικασία μάθησης που προωθούν, ωστόσο αυτές οι διαφορές οδηγούν από το ένα περιβάλλον στο άλλο. Για παράδειγμα, όπως έχει αναφερθεί τα παιδιά δυσκολεύονταν να κατασκευάσουν διαφορετικά τρίγωνα και ήταν αρκετά διστακτικά. Στους παρακάτω πίνακες (5.1, 5.2, 5.3), διαφαίνεται σε ποια έργα τα παιδιά δυσκολεύτηκαν, οπότε χρειάστηκε η δική μας παρέμβαση και σε ποια όχι. Τα έργα στα οποία τα παιδιά χρειάστηκαν τη μεγαλύτερη βοήθεια ήταν τα έργα 1α και 1β, όπου έπρεπε τα παιδιά να σχεδιάσουν πέντε διαφορετικά τρίγωνα, καθώς και τα έργα 4α, 4β, όπου έπρεπε τα παιδιά να χειριστούν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας του τριγώνου. Δυσκολεύτηκαν δηλαδή στα έργα που σχετίζονταν με διαφορετικές αναπαραστάσεις των τριγώνων. Τα ποσοστά λοιπόν των παιδιών που χρειάστηκαν βοήθεια, ανέρχονται σε 40% και 65% αντίστοιχα σε κάθε έργο, ενώ το ποσοστό των παιδιών που χρειάστηκαν πολύ βοήθεια για να τα εκτελέσουν σε 15% και 5% αντίστοιχα. Τα στοιχεία του πίνακα 5.1 μας δείχνουν, ότι στο έργο $4^{α}$ το 45% των παιδιών δε χρειάστηκε βοήθεια-παρέμβαση για την εκτέλεση. Εξάλλου διαθέτουν αναπαραστάσεις του τριγώνου σε άλλη θέση-κατεύθυνση, κάτι που φαίνεται από τα σχέδιά τους (βλ. εικόνα 17). Άρα δεν είναι τόσο δύσκολο να τοποθετήσουν ανάλογα τα τρίγωνα.

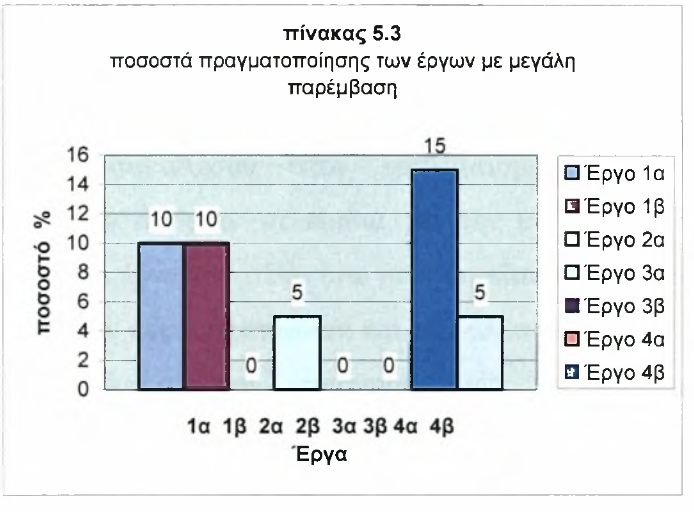




Εικόνα 17: Αναπαραστάσεις Τριγώνων σε Άλλη Θέση







Τα πράγματα όμως είναι πιο δύσκολα, όταν πηγαίνουν στο έργο 4β, όπου καλούνται να κάνουν το ίδιο με τρίγωνα, διαφόρων όμως ειδών και περισσότερα σε αριθμό. Πώς χειρίζονται τα τρίγωνα αυτά; Πώς τα τοποθετούν; Εδώ τα παιδιά στην πλειοψηφία τους δυσκολεύτηκαν πολύ και χρειάστηκε η δική μας παρέμβαση. Το ποσοστό των παιδιών που χρειάστηκαν βοήθεια, όπως φαίνεται στον πίνακα 5.2 ανέρχεται στο 65%, ενώ ένα 5% χρειάστηκε πολύ μεγάλη βοήθεια (πίνακας 5.3). Όπου δεν κρίθηκε αναγκαία η δική μας παρέμβαση, στο 30%, προσπαθούσαν μόνα τους χωρίς να παραιτούνται και χωρίς να δίνουν λεπτομερείς εξηγήσεις. Αντίθετα, στο περιβάλλον του Cabri, παρατηρήσαμε ότι όλα ήταν πρόθυμα να συμμετέχουν, να κατασκευάσουν και να μετασχηματίσουν τα τρίγωνα. Δεν παράτησαν τις προσπάθειές τους, πρώτα γιατί ως εργαλείο ο υπολογιστής είναι πολύ ελκυστικός, για να αντισταθούν σ΄ αυτόν τα παιδιά και δεύτερον ο άμεσος μετασχηματισμός που επιτρέπει το Cabri, υπερπηδά τους περιορισμούς της σκέψης, καθώς με την άμεση οπτικοποίηση τα παιδιά έβλεπαν το αποτέλεσμα των ενεργειών τους, των δοκιμών τους και δεν είχαν την αίσθηση του λάθους. Μπορούσαν δηλαδή να προβούν σε πολλούς πειραματισμούς. Τίποτα δεν τα περιόριζε, ούτε καν οι εσωτερικευμένες αναπαραστάσεις των στερεότυπων τριγώνων. Στα έργα αυτά (στα δύο περιβάλλοντα) παρατηρήσαμε μία μετάβαση προς ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης και συγκεκριμένα προς το επίπεδο 2. Η προσπάθεια αυτή ήταν πιο ανώδυνη στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, καθώς η φύση των μετασχηματισμών οδηγεί μόνη της στο επίπεδο αυτό.

Παράλληλα προς το παραπάνω, συνάγουμε το συμπέρασμα ότι τα περιβάλλοντα που χρησιμοποιήθηκαν, συντέλεσαν στον εμπλουτισμό των αντιλήψεων και των αναπαραστάσεων που διέθεταν τα παιδιά για την έννοια του τριγώνου. Κάτι που φαίνεται μέσα από τα έργα τους. Στο ένα γιατί ζητείται από τα παιδιά να εργαστούν με τρίγωνα διαφορετικών αναπαραστάσεων και στο άλλο γιατί παρέχει τη δυνατότητα στα παιδιά, κατά τη διαδικασία των μετασχηματισμών, να δημιουργήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις- μορφές τριγώνων. Αλλά και μέσα από την κίνηση του ποντικιού να αντιληφθούν πως πρέπει να μετακινήσουν το τρίγωνο, προς τα πού πρέπει να το «τραβήξουν», ώστε να είναι διαφορετικό. Αντιλαμβάνονται την κίνηση του χεριού, καθώς τη συνδέουν με το οπτικό αποτέλεσμα και κατ' επέκταση αντιλαμβάνονται τη διαδικασία μετασχηματισμού του τριγώνου. Η συμβολή των αισθήσεων με την άμεση οπτικοποίηση, που παρέχει το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, συντελούν στη διεύρυνση των οπτικών εικόνων των παιδιών και εμπλουτίζονται οι αναπαραστάσεις τους. Βέβαια, διεύρυνση των νοητικών αναπαραστάσεων για τα τρίγωνα δε συντελέστηκε σε όλα τα παιδιά, στα περισσότερα όμως ναι. Αυτό επιβεβαιώνουν και οι ζωγραφιές τους για τις μεταμορφώσεις του Τασούλη.

Το παραπάνω υποδηλώνει πως, εάν εφαρμόσουμε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας συστηματικά, το ποσοστό επιτυχημένων διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας του τριγώνου, θα αυξηθεί σημαντικά. Ας μην ξεχνάμε, ότι στην προκειμένη περίπτωση, τα παιδιά ασχολήθηκαν με κάτι τέτοιο για πρώτη φορά και μόνο για μιάμιση περίπου ώρα ανά ζεύγος, και ότι αρκετά από αυτά, ασχολήθηκαν για πρώτη φορά με υπολογιστή.

Υπάρχουν χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνομιλίες των παιδιών, τα οποία καταγράψαμε και παραθέτουμε στη συνέχεια, που αποκαλύπτουν ακριβώς όλες τις παραπάνω αντιλήψεις, δυσκολίες, τις διαφορετικές εικόνες-αναπαραστάσεις που έχουν.

Ένα στοιχείο, που προκύπτει, είναι ότι οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν τα παιδιά στην περιγραφή συνεχίζονται και στο Cabri. Μόνο που εδώ λύνουν το πρόβλημα αυτό, καθώς μπορούν να δείξουν πάνω στην οθόνη και να «χειριστούν» δυναμικά τις οπτικές αναπαραστάσεις σχημάτων. Αφοπλιστική είναι η απάντηση του Λαέρτη, όταν του ζητήθηκε να περιγράψει την ιδέα του:

- Λ: Δεν ξέρω πώς να το πω!
- Ε: Δείξε με το χέρι σου!
- Λ: Αυτό να έρθει από δω κι αυτό πιο μεγάλο.

Ακόμη κι όταν δείχνει στην οθόνη όμως, δεν χρησιμοποιεί διευκρινιστικές λέξεις. Γενικά τα παιδιά, όπως μας έχει πει και η δασκάλα τους, δυσκολεύονται στις περιγραφές, δεν έχουν το απαραίτητο λεξιλόγιο και δεν είναι εξασκημένα στον περιγραφικό και επεξηγηματικό λόγο. Πολλές φορές δεν κατανοούν αυτό που τους περιγράφουν, όπως για παράδειγμα η Βασιλική, όταν τις δίνει οδηγίες ο Γιώργος, που λέει:

- Δεν καταλαβαίνω.. πάρτο εσύ.

Ενώ, σε πολλές περιπτώσεις τα παιδιά δεν μιλούν καθόλου κατά τη διάρκεια της κατασκευής τους.

Περνώντας τώρα στους μετασχηματισμούς του τριγώνου, αυτό που παρατηρήσαμε αλλά και αυτό που έλεγαν τα ίδια τα παιδιά, ήταν το εξής: μια κίνηση του ενός παιδιού δημιουργούσε νέες ιδέες στο άλλο, δηλαδή νέα νοητή εικόνα- νέο νοερό μετασχηματισμό. Το αποτέλεσμα της σκέψης του ενός παιδιού δίνει ώθηση στη σκέψη του άλλου. Έχουμε μια κυκλική διαδικασία δηλαδή, που προάγει τη μαθηματική σκέψη. Έτσι, περνάμε από την οπτική στην νοητική αναπαράσταση και τους μετασχηματισμούς. Αυτό αποδίδεται στην άμεση οπτικοποίηση του μετασχηματισμού σε ένα περιβάλλον όπως το Cabri. Οι έννοιες που χειρίζονται είναι λίγο αφηρημένες για τα παιδιά, καθώς δεν είναι σε θέση να τις περιγράψουν. Όμως η εικόνα βοηθά να ξεφύγουν από τις στερεότυπες αναπαραστάσεις, καθώς και να αναπτύξουν πλουσιότερες νοητές αναπαραστάσεις και τη γεωμετρική τους σκέψη. Χαρακτηριστικό το παρακάτω απόσπασμα.

> (α) Ευθ.: Α!!!! ..(κάτι σκέφτηκε, όσο ο Γιώργος άλλαζε το τρίγωνο) ..σε παρακαλώ δώσε μου το ποντίκι.
>
> Γ: Ευθύμη μην το κάνεις, μου έφερες μια ιδέα!
>
> …….
>
> Ευθ.: Τώρα που το έφτιαξε έτσι, μου ήρθε κυρία ιδέα!!
>
> (β) Λ: Ναι!!! Ναι!! Φέρτο λίγο ξέρω ένα σχέδιο!

Η μεγαλύτερη, λοιπόν, εξοικείωση και συστηματικότερη διδασκαλία με λογισμικά, όπως το Cabri, μπορεί να συντελέσει θετικά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Τι μπορεί να σημαίνει όμως κάτι τέτοιο; Όπως αναφέρεται και στην αρχή, ο ίδιος ο ηλεκτρονικός υπολογιστής αποτελεί ένα ελκυστικό μέσο διεξαγωγής της διδασκαλίας για τους μαθητές, γεγονός που αποτελεί ταυτόχρονα κίνητρο για μάθηση. Κρατά αμείωτο το ενδιαφέρον των παιδιών και κάνει τη διδασκαλία πιο ευχάριστη. Πολλά ήταν τα παιδιά που δεν ήθελαν να επιστρέψουν στην τάξη, γιατί, όπως έλεγαν, τους άρεσε να παίζουν με τον υπολογιστή και να κάνουν κατασκευές με τρίγωνα! Επιπλέον η αυτονομία που παρέχει αυτός ο τρόπος διδασκαλίας, προσελκύει περισσότερους μαθητές: η παρουσία του εκπαιδευτικού δεν είναι έντονη, καθώς οι μαθητές διορθώνονται και παίρνουν απαντήσεις μέσα από την αλληλεπίδραση με το μικρόκοσμο στον οποίο δουλεύουν. Ταυτόχρονα, η εξατομίκευση της μάθησης, επιτρέπει στο μαθητή να προχωρά με το δικό του ρυθμό. Μπορεί τα παιδιά να εργάζονται σε ομάδες, προχωρούν όμως, ανάλογα με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο οποίο βρίσκονται, με το δικό τους ρυθμό. Μπορεί να εργάζονται σε ομάδες, καθένα όμως αφομοιώνει διαφορετικά στοιχεία, αφομοιώνει όσα και ότι είναι έτοιμο γνωστικά να δεχθεί.

Ένα από τα σημαντικά ζητήματα (το οποίο μπορεί να έχει αρνητικές προεκτάσεις)της διδασκαλίας με ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι το γεγονός ότι η ικανότητα χειρισμού του εργαλείου αυτού προσδίδει εξουσία στο παιδί που «ελέγχει» το ποντίκι ή το πληκτρολόγιο. Γι' αυτό, λοιπόν και τα παιδιά, δεν είναι πρόθυμα να παραχωρήσουν αυτήν την εξέχουσα θέση στο συμμαθητή τους. Αυτό ακριβώς το σημείο δημιουργεί ανταγωνιστικό περιβάλλον. Όλα λοιπόν τα παιδιά ήθελαν να αναλάβουν το ρόλο του χειριστή. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα παιδιά δεν εργάζονται ως ομάδα (πλην εξαιρέσεων). Πιστεύουν πως θα κερδίσει ο ένας από τους δύο και έτσι εκτελούν χωρίς να μιλούν, να περιγράφουν. Αρκετές ήταν και οι περιπτώσεις, όπου τα παιδιά διεκδικούσαν το ποντίκι ακόμη και με άσχημο τρόπο. Πολύ χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του Ευθύμη που γύρισε την πλάτη του στο συμμαθητή του, αρνούμενος πεισματικά να του πει τις ιδέες του, τόσο για να μην κερδίσει, όσο και για να μην παίξει περισσότερο.

- Ε: Μπορείς να του πεις την ιδέα σου.
- Ευθ: Δεν θέλω να μου την πάρει!
- Γ: κι εγώ σκέφτηκα κάτι, αλλά πρέπει να το κάνω, γιατί είναι δύσκολο και δεν μπορώ να το πω.

*

- Ε: Μαζί, ε;;
- Γ: Εγώ δεν έπαιξα…
- Ε: Πριν, δεν έπαιξες;
- Γ: Ναι, αλλά έπαιξε πιο πολύ από μένα….

Από την παραπάνω κατάσταση ανταγωνισμού προκύπτει, ότι τα παιδιά δεν έχουν μάθει να συνεργάζονται, καθώς πάντα καλούνται να ξεπεράσουν τους άλλους, να γίνουν οι καλύτεροι. Η εργασία στον υπολογιστή απαιτεί στην παρούσα περίπτωση, την εργασία σε ομάδες και τη συνεργασία, γεγονός που αναδεικνύει την προβληματική κατάσταση. Η μάθηση όμως δεν μπορεί να συντελεστεί στην ολότητα της μέσα σε τέτοιες συνθήκες.

Επιτακτική λοιπόν, η ανάγκη για μύηση στη συνεργασία και την ομαδικότητα, πόσο μάλλον μέσα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον, που είναι ελκυστικό και κρατά αμείωτο το ενδιαφέρον των παιδιών. Προκειμένου να αλληλεπιδράσουν μ΄ αυτό, θα συνεργάζονται όσο πιο αρμονικά μπορούν. Μύηση που απαιτεί όμως ευαισθητοποίηση και προσεκτικό σχεδιασμό από τον εκπαιδευτικό για την καλλιέργεια κλίματος συνεργασίας στα πλαίσια ολόκληρης της διδακτικής πρακτικής.

Εν κατακλείδι, τα πορίσματα της εν λόγω έρευνας συγκλίνουν στο γεγονός ότι η συστηματική διδασκαλία της γεωμετρίας σε δυναμικά λογισμικά, όπως το Cabri, επιδρά θετικά στην ανάπτυξη γεωμετρικών και χωρικών δεξιοτήτων των παιδιών. Κάτι τέτοιο συμβαίνει σε μεγαλύτερο βαθμό, όταν αναφερόμαστε στις μικρές ηλικίες, όπου τα παιδιά μαθαίνουν ως επί το πλείστον μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με το περιβάλλον και τη βιωματική μάθηση. Δυναμικά λογισμικά όπως το Cabri, προσφέρονται για βιωματική μάθηση όπου τα παιδιά με βάση τα ενδιαφέροντα και το επίπεδο ανάπτυξής τους, αναβαίνουν στη σκαλωσιά της γνώσης.

7.2 Αναστοχασμός

Όπως σε κάθε ερευνητική διαδικασία, ανακύπτουν διάφορα προβλήματα και περιορισμοί. Ένας ανασταλτικός παράγοντας στη διεξαγωγή της έρευνας ήταν το περιορισμένο χρονικό περιθώριο που είχα στη διάθεσή μου και ταυτόχρονα το μεγαλεπίβολο πλάνο που ήθελα να ολοκληρώσω. Η εμπειρική έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών της σχολικής χρονιάς. Το γεγονός ότι δεν μπορούσα να πάρω πάνω από δύο-τρία παιδιά την ημέρα, η μεσολάβηση αργιών και εκπαιδευτικών περιπάτων, καθώς και το ότι η δασκάλα έπρεπε να ετοιμάσει τη σχολική γιορτή, δεν έδωσε χρόνο για προέκταση της έρευνας. Σε θέματα διδακτικής θα μπορούσαμε να σκεφτούμε κι άλλες προεκτάσεις, όπως π.χ. η εικονογράφηση της ιστορίας του Τασούλη στο περιβάλλον του Cabri, η οποία θα μπορούσε να αποτελεί τον επίλογο των έργων. Προέκυψαν επίσης ορισμένα σημεία τα οποία χρήζουν σημαντικότερης ερμηνείας, ανάλυσης ή και σχεδιασμού για περαιτέρω έρευνα. Η παρούσα έρευνα θα πρέπει κυρίως να χαρακτηριστεί ως μια πρώτη εις βάθος διερεύνηση μιας σειράς γνωστών και διδακτών παραμέτρων, που υπεισέρχονται κατά την αξιοποίηση περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος.

Μια σειρά από ενδιαφέροντα ζητήματα τα οποία θα μπορούσαν να ερευνηθούν σε επόμενη έρευνα είναι:
Αν η διδακτή χρήση δυναμικών περιβαλλόντων κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας, σε ποιο βαθμό θα εξελισσόταν η γεωμετρική σκέψη των παιδιών σε σύγκριση με τα παιδιά μιας παραδοσιακής τάξης. Αναγνωρίζω βέβαια, ότι κάτι τέτοιο απαιτεί το διπλάσιο χρόνο για τη συλλογή, όσο και για την ανάλυση των δεδομένων. Αξίζει όμως να διερευνηθεί.

Ένα άλλο σημείο που χρήζει προσοχής είναι η προαγωγή της συνεργασίας των παιδιών στις ομάδες εργασίας στον υπολογιστή. Πριν εφαρμόσουμε το διδακτικό πείραμα, θα μπορούσαμε να είχαμε ασκήσει τα παιδιά, για τουλάχιστον ένα μήνα, στην αξία της συνεργασίας, στον περιγραφικό λόγο και στον τρόπο συνεργασίας, επικοινωνίας και έκφρασης απόψεων.. Κάτι τέτοιο, θα μας έδινε ξεκάθαρες απαντήσεις για τις αντιλήψεις και τον τρόπο σκέψης των παιδιών για τη γεωμετρία των τριγώνων.

Βιβλιογραφία

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

- Αρβανιτίδης Ν. Α., (1993), *Ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, Εκδόσεις Κορυφή, Αθήνα

- Γιαννακοπούλου Ε., (1994), *Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Νέοι Παιδαγωγικοί Ορίζοντες*, Εκδόσεις Γρήγορη, Αθήνα.

- Χρόνης Κυνηγός και Ευαγγελία Β. Δημαράκη, (επιμέλεια), (2002), *ΝΟΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΜΕΣΑ, Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής*, Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα.

- Λάπας Δ. & Γαβρίλης Κ., (2001), *Νέο Περιβάλλον Στη Διδασκαλία της Γεωμετρίας*, Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας.

- Μαρκόπουλος Χ., Νόταρη Δ., Τσιόκανος Αθ., (2003), *Η Γεωμετρική Σκέψη των Μελλοντικών Δασκάλων Μέσα από Δυναμικούς Μετασχηματισμούς Επιπέδων Σχημάτων*, Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτικής Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση.

- Παρασκευόπουλος Ι. Ν., (1993), *Μεθοδολογία Επιστημονικής Έρευνας*, Τόμος Β, Αθήνα.

- Πούλος Α. Ι., (1994), *Παιδαγωγική Παρέμβαση για τη Διαμόρφωση Εννοιών Γεωμετρικού Χώρου σε Παιδιά Προσχολικής Ηλικίας*, Διδακτορική Διατριβή, Θεσσαλονίκη.

- Σκουμπουρδή Χ., (2003), *Μορφές Εικονικής Αναπαράστασης της έννοιας του Τριγώνου Στα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου*, Εικόνα, Σχήμα, και Λόγος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ενότητα ΙΙ Σελ. 105-124

- Τσιώτσος Ν., (2000), *Επιπεδία, Αφηγήματα σε δυο Διαστάσεις. Η Γεωμετρία του Δημοτικού Σχολείου σ' ένα ρυθμό Λιγότερο Επίπεδο*, Εκδόσεις Κέρδος, Αθηνά

- Laborde C., (1995), *Η Μάθηση της Γεωμετρίας με τη Βοήθεια του Υπολογιστή. Επαγωγικές και Κονστρουκτιβιστικές Πλευρές*, η Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία και Έρευνα (επιμ. Γαγάτσης Α.), ART of TEXT.

- Papert S., (1980), *Νοητικές Θύελλες, παιδιά, ηλεκτρονικοί υπολογιστές και δυναμικές ιδέες. Τα πάντα γύρω από τη Logo,* Οδυσσέας, Αθήνα 1991.

- Donaldson M., (1991), *Η Σκέψη των Παιδιών,* Μετάφραση: Καλογιαννίδου Α & Αρχοντίδου Α, Επιμέλεια Στέλλα Βοσνιάδου, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

- Χασάπης Δ., (2000), *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών Αριθμοί και Αριθμητικές Πράξεις,* Εκδόσεις ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ, Αθήνα

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

- Alan Bishop (1983), *Space and Geometry,* Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, In Richard Lesh &Marsha Landow (eds), N. Y. Academic Press, p. 175-203
- Battista M., (1994), *On Greeno's Environmental/Model View of Conceptual Domains: A Spatial/Geometric Perspective.* A Form for researchers. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 25, No1, 86-99.

- Chronaki A., (1997), *Case Studies in the Teaching of Mathematics Through the Use of Art-Based Activities, Unpublished PhD Dissertation.* University of Bath, Bath.

- Chronaki A., (1999), *COMPUTERS IN CLASSROOMS, Learners and Teachers in New Roles*, In Routledge International Companion To Education, By B. Moon, M. Ben-Peretz and Sally Brown, 32, p. 558-572.

- Chronaki A., (1992), *The Epistemology of Constructivism. Internal Monograph. University of Bath. UK.*

- Del Grande J., (1983), *Space as a Model of Elementary School Geometry,* Proceedings of 4th International Congress on Mathematical Education, 163-165

- Fischbein, E., (1993), *The Theory Figural Concepts,* Educational Studies in Mathematics 24, 139-162.

- Fuys D, Gedde D. & Tischler R. (1988), *The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents,* Journal Research in Mathematics Education. Monograph Number 3, N.C.T.M

- Hershkovits R., (1990), *Psychological Aspects of Learning Geometry*, In P. Nesher &J. Kilpatric (eds) Mathematics and Cognition, Cambridge.

- Laborde *Language and Mathematics,* In P. Nesher &J. Kilpatric (eds), I.C.M.C Studies, Cambridge University press.

- Newcombe N. S., Janelle Huttenlocher, (2000), *The Development of Spatial Representation and Reasoning,* MIT Press, Cambridge, London.

- Van De Walle, J. A. (2001), *Geometric Thinking and Geometric Concepts,* In Ellementary and Middle Shcool Mathematics : Teaching Developmentally, Chapter 17, Commonwealth Univesity, Virginia.

- Teppo Anne, (1991), *Van Hiele levels of Geometric Thought-Revisited.*

- N.C.T.M, (1987), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* επιμέλεια Mary Montgomery Lindguist, Albert P. Shnite, Virginia, USA.

- N.C.T.M, (1978), *Soviet Studies, Vol 5: The Development of Spatial Abilities,* University of Chicago, USA.

- Yakimanskaya I. S., (1991), *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren,* In Soviet Studiew in Maathematics. Vol V, N.C.T.M., Reston, Virginia, USA.

- Young Children, (2003), *Using Technology as a Teaching and Learning Tool,* Vol 58, No 6

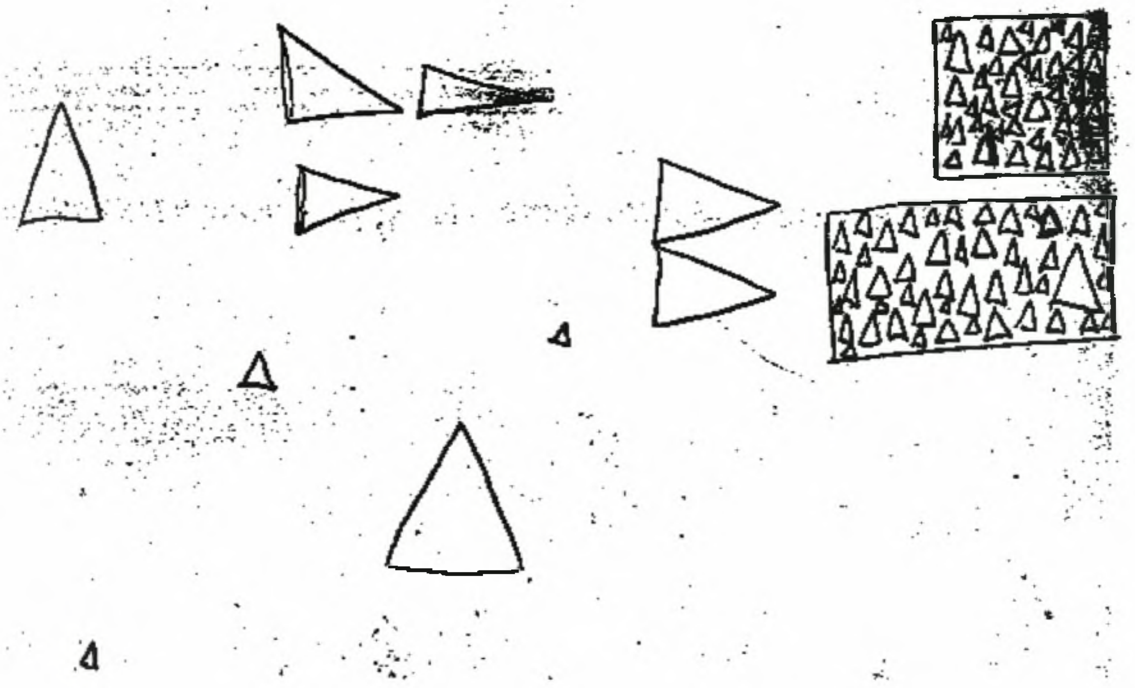
- *ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ*

- http://www.crme.soton.ac.uk/publications/jepuds/Edwards
- http://www.state.nj.us/njded/frameworks/math/maths5
- www.keypress.com/sketchpad
- www.cabri.com
- http://odysseia.cti.gr/kirki/2ndProductGroup/Cabri%20Geometry%20II.htm

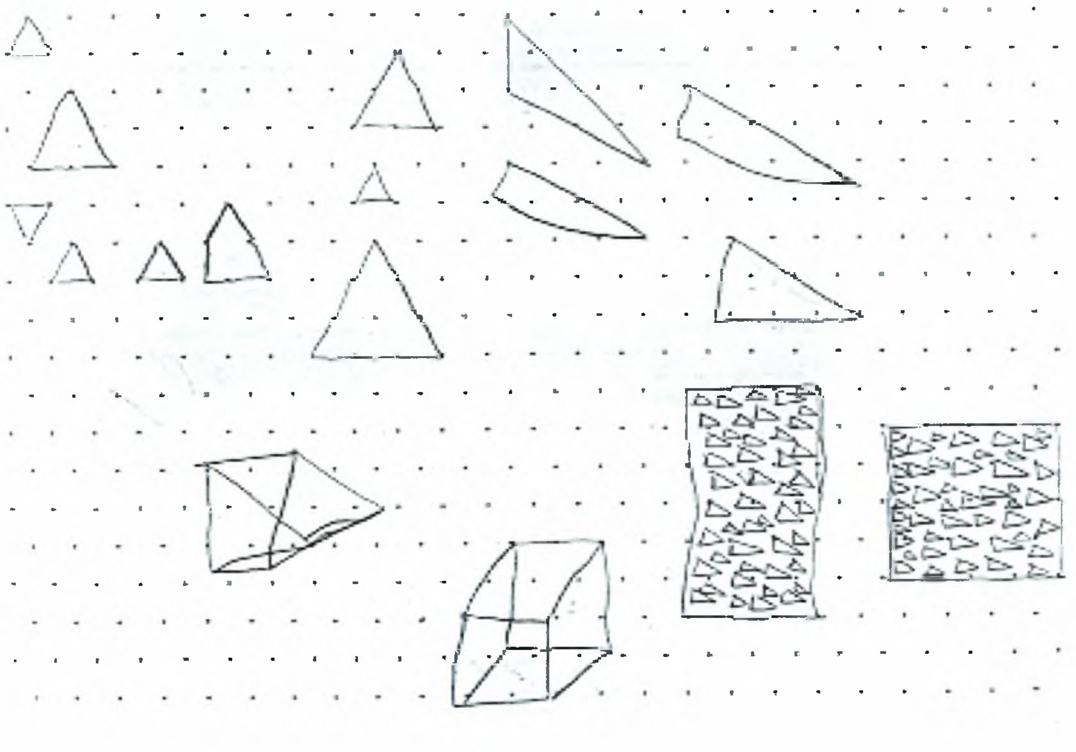
Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α Τ Α

Παράρτημα 1

Έργα Πιλοτικής Μελέτης

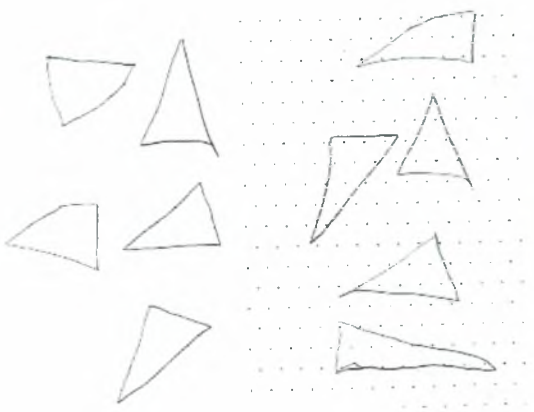


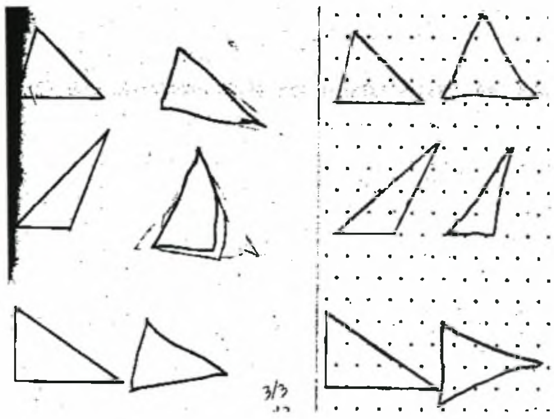
Το Έργο εφαρμόστηκε σε λευκό χαρτί και σε χαρτί με κουκίδες.



Παράρτημα 2

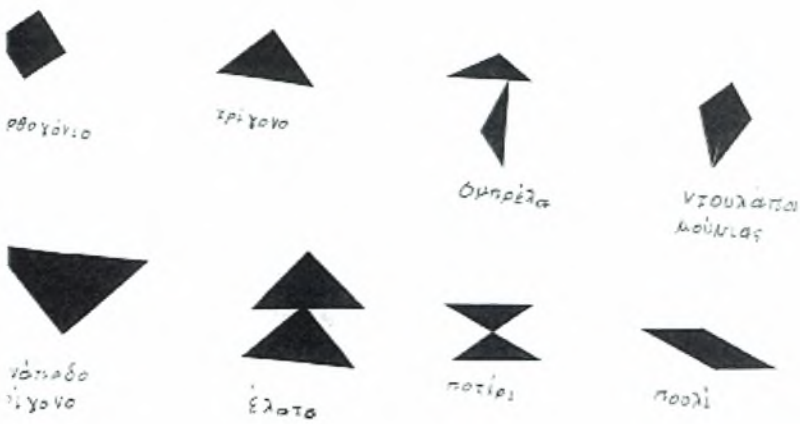
Έργα Οπτικο-Απτικού Περιβάλλοντος



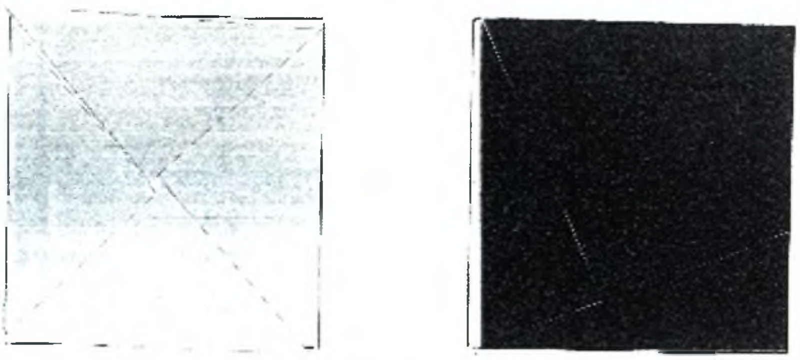


Έργο 1α, 1β: Σχεδίασε πέντε Διαφορετικά Τρίγωνα

Έργο 2α, 2β: Σχεδίασε Ίδια Τρίγωνα



Έργο 3 α, 3β: Ελεύθερη Σύνθεση Τριγώνων



Έργο 4α, 4β: Σύνθεση Τριγώνων με Συνθήκη

Παράρτημα 3

Διάφορα Επεισόδια από τις Συνεντεύξεις

Προϊόντα Ελεύθερης Σύνθεσης Τριγώνων.

Ε: Ένωσε αυτά τα τριγωνάκια να δούμε τι θα βγει...τι είναι αυτό που έφτιαξες; Με τι μοιάζει;

Γ. Μ: Με βουνό.

Ε: Ωραία, γράψτο από κάτω. Πάρε τα δυο αυτά.

Γ. Μ: Αυτό είναι σαν χρυσάφι!

Ε: Τι εννοείς;

Γ. Μ: Σαν αυτό....το χρυσάφι..

Ε: Αυτό που έχει στα κινούμενα σχέδια;

Γ. Μ: Ναι.

Ε: Και τι σχήμα έχει;

Γ. Μ: Σαν το χρυσάφι

Επεισόδιο 36 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 2062-2069, Γιώργος, συνέντευξη]

Ε: Πάρε κι αυτά τα τριγωνάκια και ένωσέ τα με άλλο τρόπο να δούμε τι βγαίνει, ε;

Γ. Σ: Α, άλλο τρόπο;....Α, άλλο τέτοιο σχήμα!

Ε: Άλλο σχήμα είναι αυτό με τέσσερις γωνίες;

Γ. Σ: Είναι το μωρό του.

Ε: Και πως λέγεται;

Γ. Σ: Μπέμπι παραλληλόγραμμο!

Επεισόδιο 37 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 3926-3931, Γιάννης, συνέντευξη]

Ε: Ναι, ξεκίνησε....με τι μοιάζει αυτό που έφτιαξες;

Α. Ν: Με δύο βέλη!! σαν αυτό που έχει το στερεοφωνικό!

Επεισόδιο 38 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 2419-2421, Αποστόλης, συνέντευξη]

Ε: Τι βγήκε αυτό;

Γ. Σ: Είναι σαν φτερά του Μπατμαν.

Ε: Και τι σχήμα έχουν τα φτερά του Μπάτμαν;

Γ. Σ: Έχουν τέσσερις γραμμές και τρεις γωνίες.

Ε: Και τι σχήμα είναι αυτό;

Γ. Σ: Δεν ξέρω..

Επεισόδιο 39 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 3940-3943, Γιάννης, συνέντευξη]

Ε: Τι σχηματάκι είναι αυτό;

Χ. Κ: Είναι ένα ποτήρι από τους παλιούς ή ένας φιόγκος ή με μια σκάλα ανάποδη ή αυτό το ποτήρι που έχει μια σκόνη και πάει κάτω.

Επεισόδιο 40 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 4262-4270, Χριστιάνα, συνέντευξη]

Ε: Μάλιστα. Συνέχισε με αυτά.

Α. Μ: Ένα διαμάντι!

Ε: Και τι σχήμα έχει το διαμάντι;

Α. Μ: Από διαμάντι.

Επεισόδιο 41 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ.5295-5298, Αναστασία, συνέντευξη]

Ε: Τι σχήμα είναι αυτό που έφτιαξες;

Γ. Σ: Είναι….το σχήμα του Σούπερμαν.

Ε: Και τι σχήμα έχει το σχήμα του Σούπερμαν;

Γ. Σ: Έχει τρεις γραμμές και τρεις γωνίες.

Ε: Τι σχήμα είναι δηλαδή με τρεις γραμμές και τρεις γωνίες;

Γ. Σ: Τρίγωνο!

Επεισόδιο 42 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

[Κ.Μ. 3887-3892, Γιάννης, συνέντευξη]

Ε: Α.., τι βγαίνει εδώ; Τι σχήμα είναι αυτό που έχεις φτιάξει εδώ; ε; με τι μοιάζει;

Β. Σ: Τετράγωνο;

Ε: Μοιάζει με τετράγωνο; ε; πως σου φαίνεται;

Β. Σ: Δεν το καταλαβαίνω..

Ε: Απλά δώσε του ένα όνομα, κάτι είναι!

Β. Σ: Πλαγιαστό τρίγωνο.

Ε: Δύο είναι τα τρίγωνα, δεν είναι ένα!

Β. Σ: Ρόμβος!

Επεισόδιο 43 Προϊόν Ελεύθερης Συσχέτισης

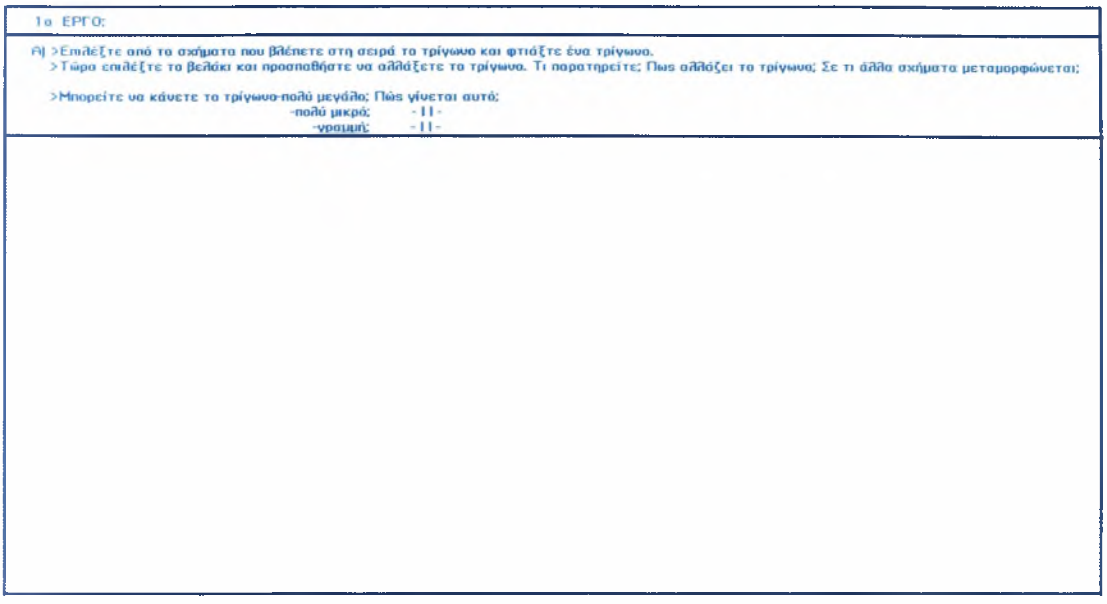
[Κ.Μ. 460-466, Βασιλική, συνέντευξη]

Παράρτημα 4

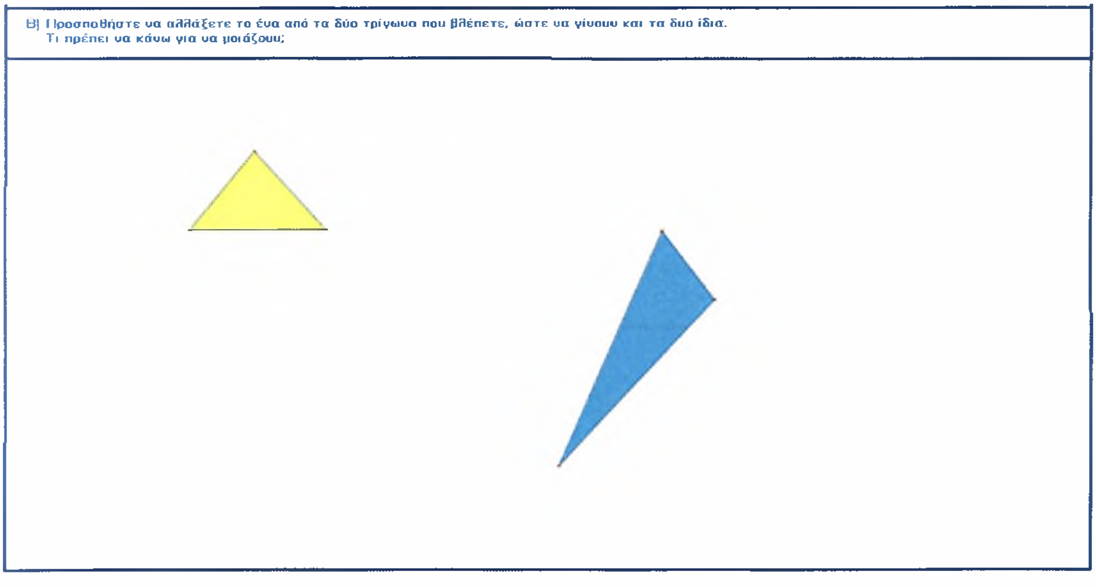
Έργα Διδακτικού Πειράματος

Έργα στο περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας του Cabri

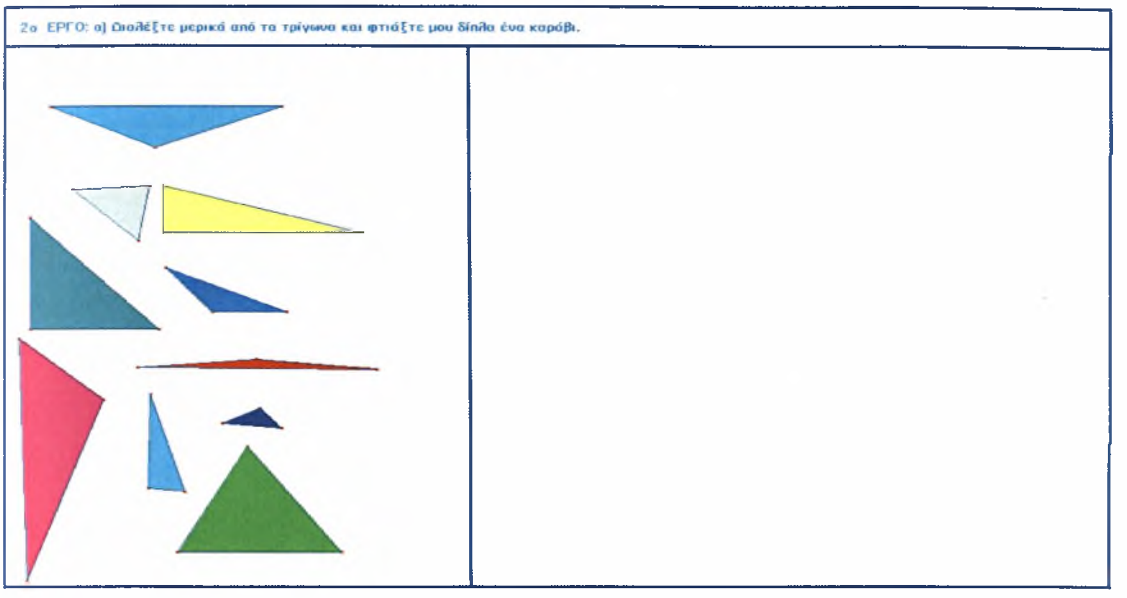
Φτιάξτε ένα τρίγωνο και Μετασχηματίστε το.



Κάντε τα δύο τρίγωνα ίδια, αλλάζοντας μόνο το ένα από αυτά.

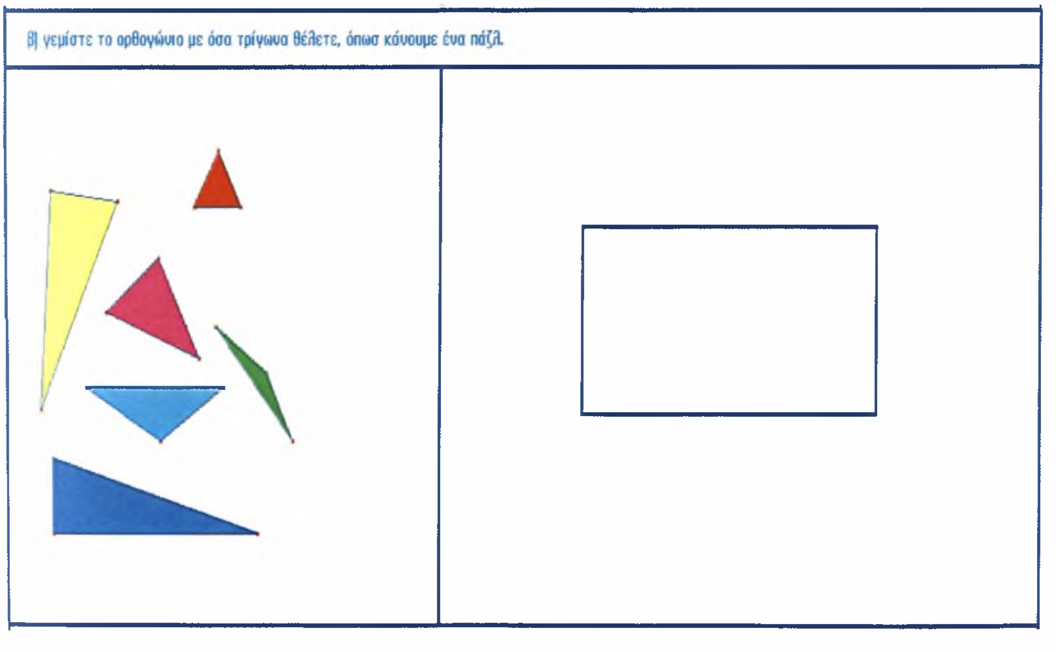


Επιλέξτε όσα τρίγωνα θέλετε και φτιάξτε ένα καράβι.

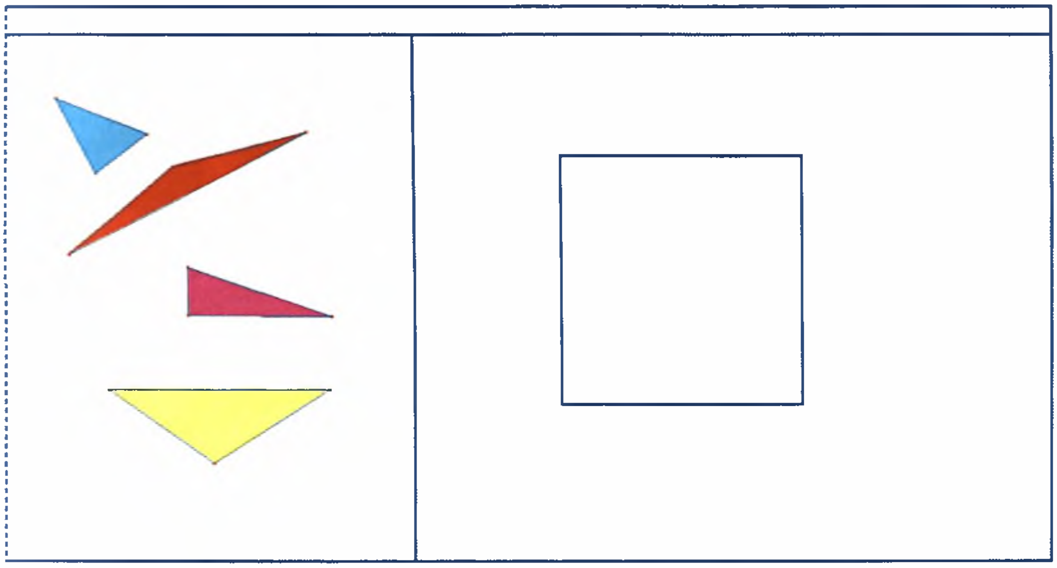


Γεμίστε τα πλαίσια με τρίγωνα

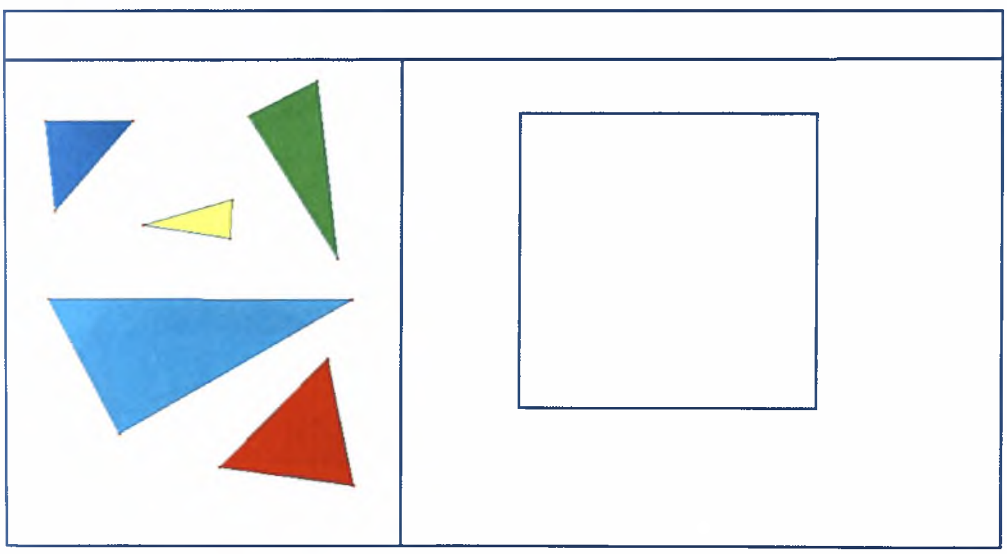
Επιλέξτε όσα τρίγωνα θέλετε και γεμίστε το ορθογώνιο



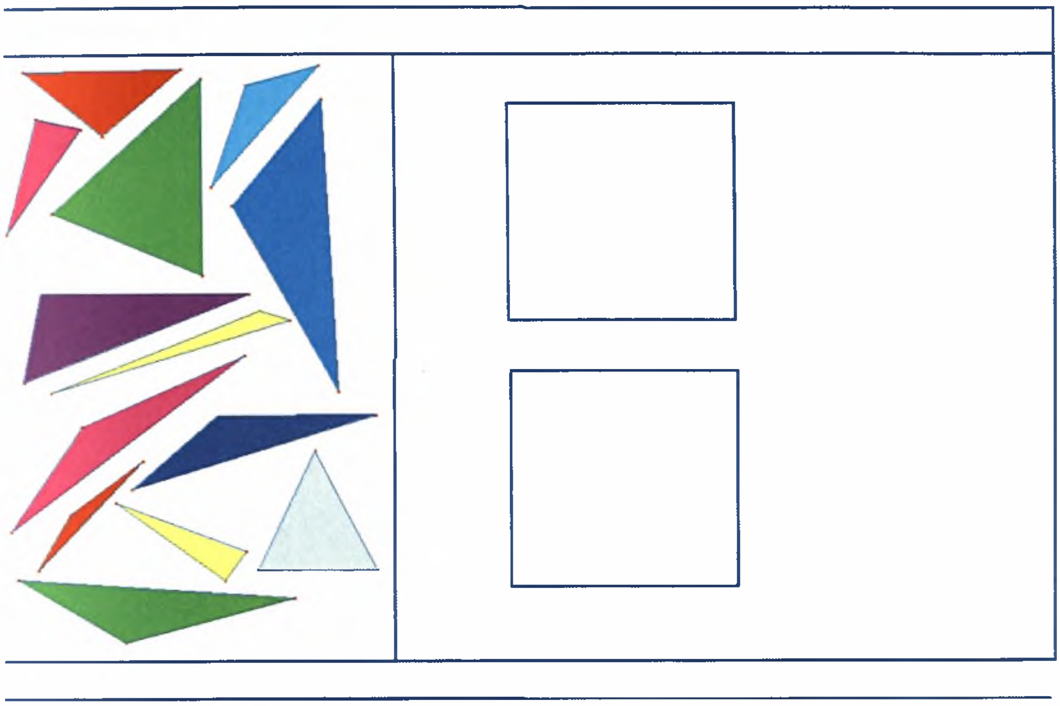
Επιλέξτε δύο τρίγωνα και γεμίστε το τετράγωνο



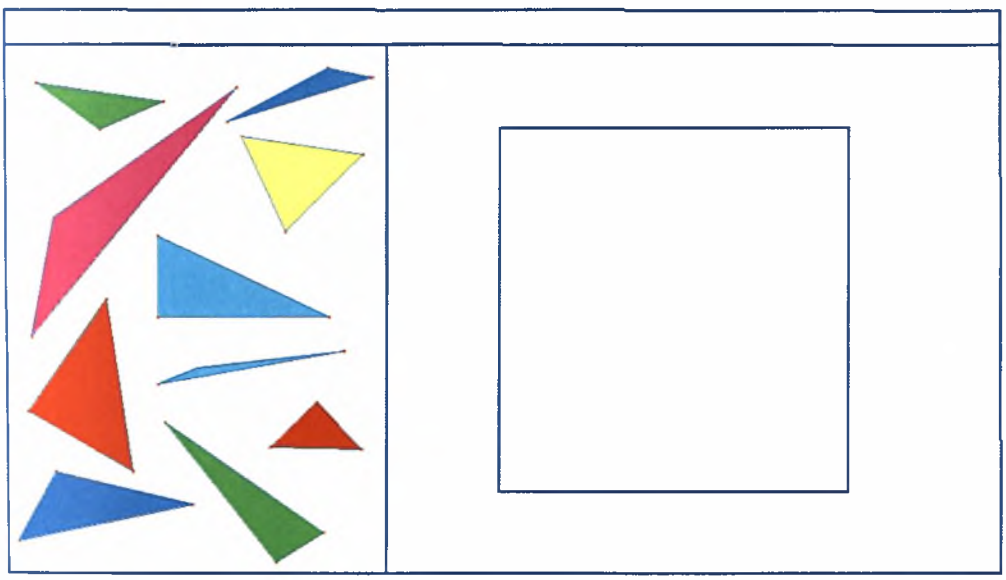
Επιλέξτε τρία τρίγωνα και γεμίστε το τετράγωνο



Επιλέξτε τέσσερα τρίγωνα και γεμίστε το τετράγωνο. Μπορείτε να το κάνετε με άλλο τρόπο;



Επιλέξτε πέντε τρίγωνα και γεμίστε το τετράγωνο



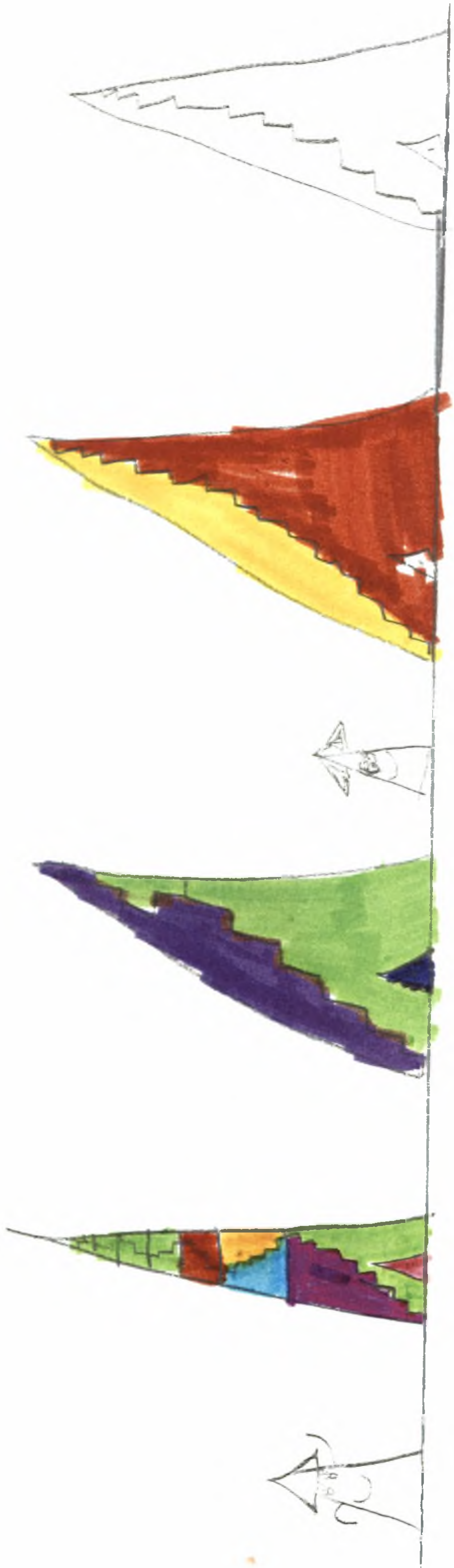
Παράρτημα 5

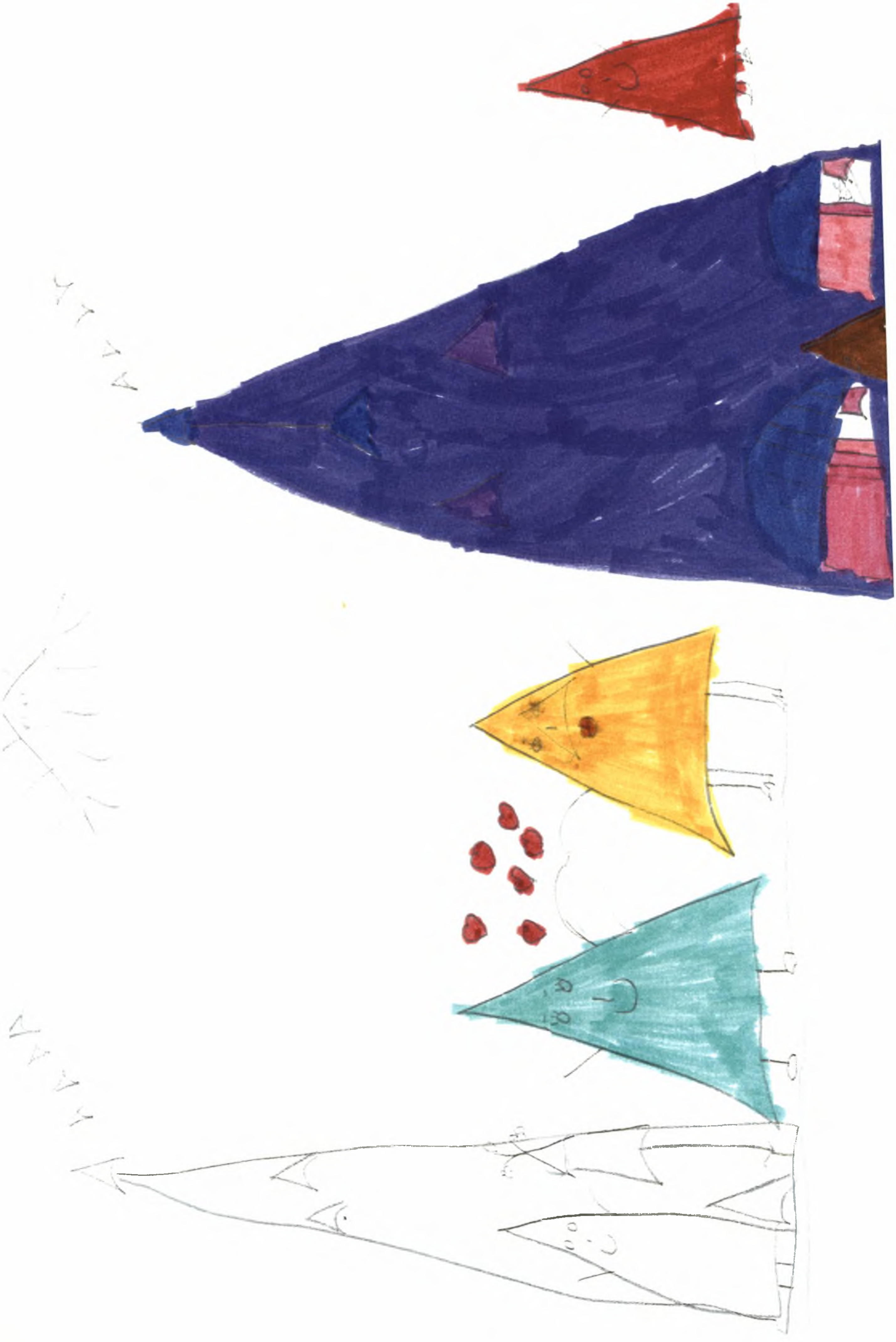
Εικονογραφημένο Παραμύθι:

Οι Μεταμορφώσεις του Τασούλη

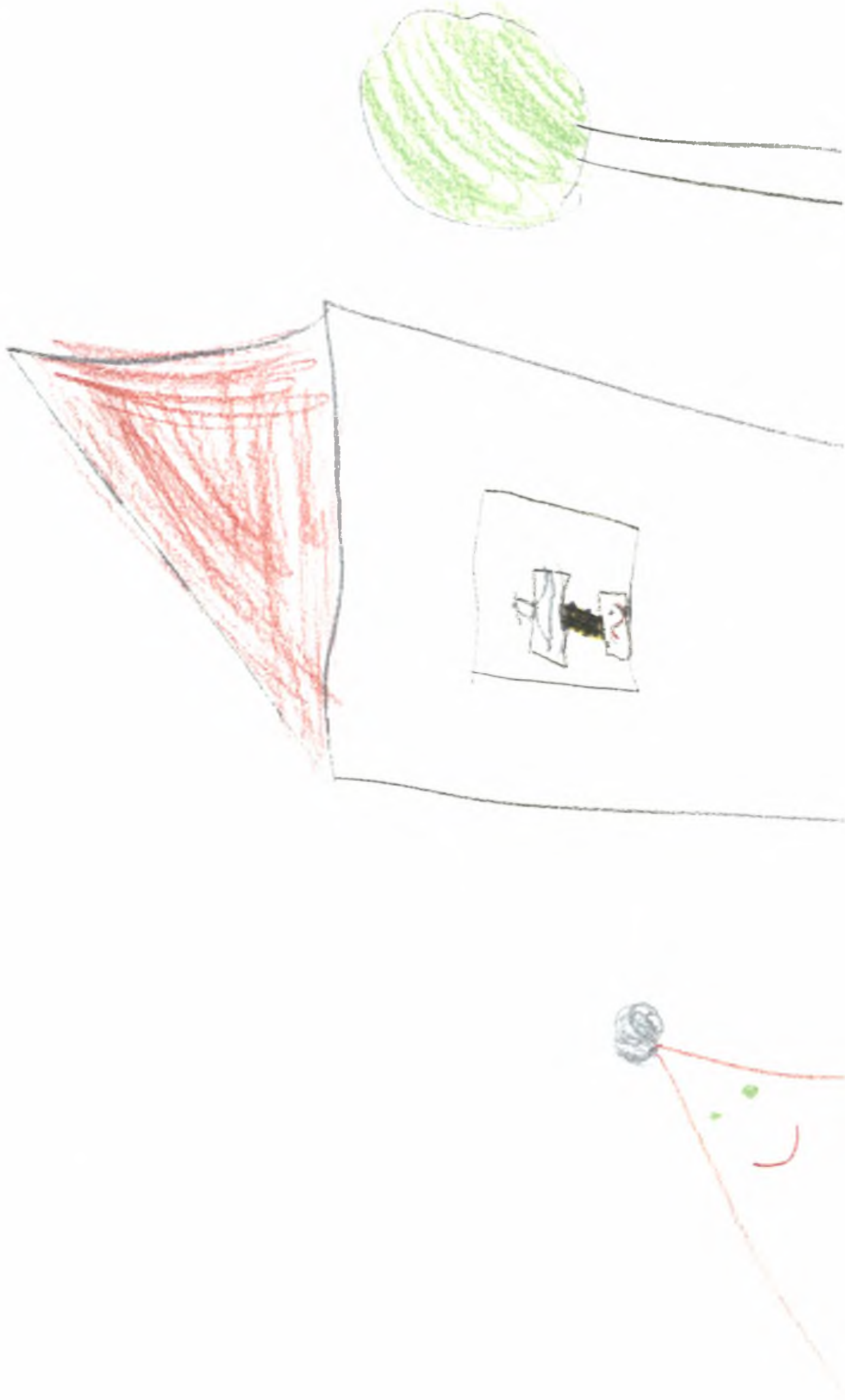
Ο Τασούλης και η Γειτονιά του.

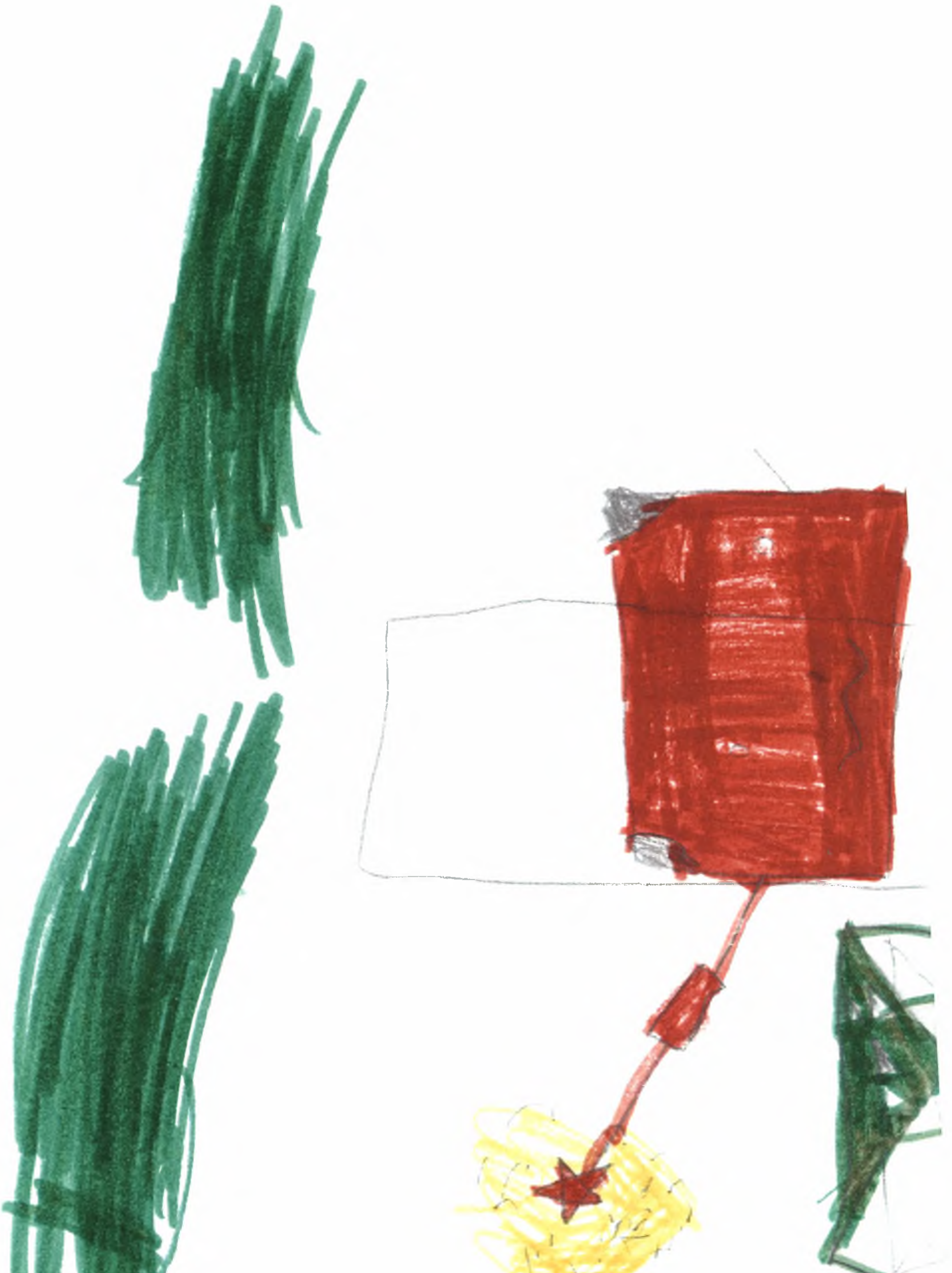
Όλγα



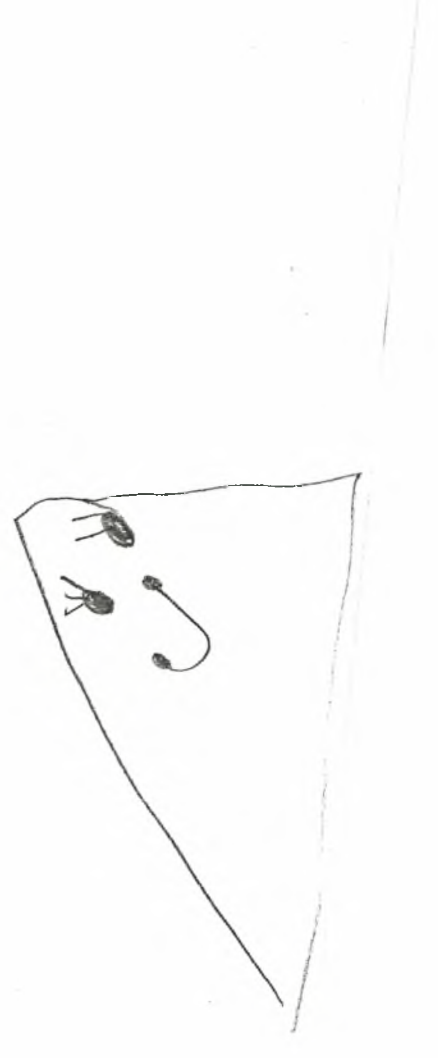


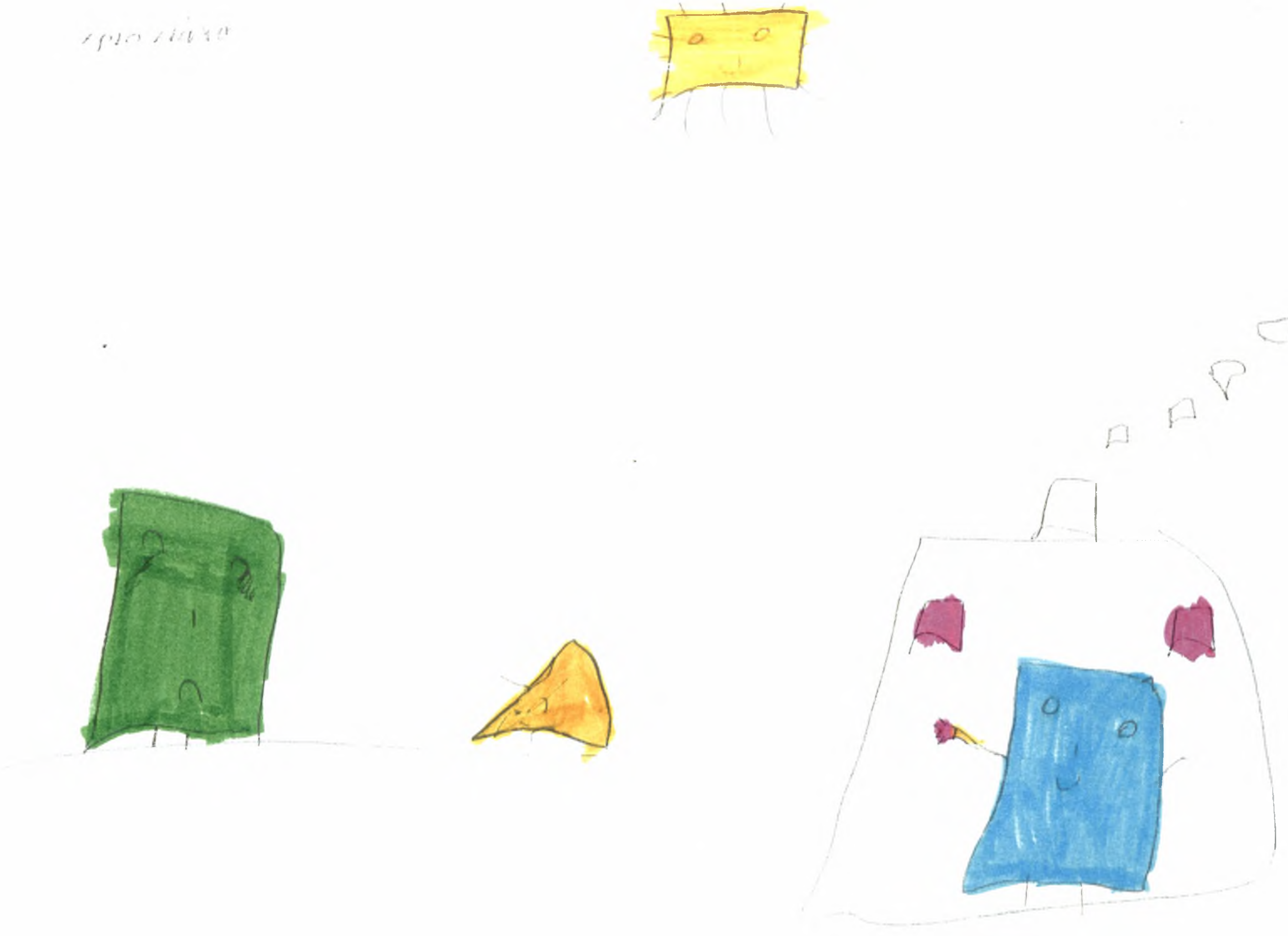
Ο Τασούλης Ξαπλωτός

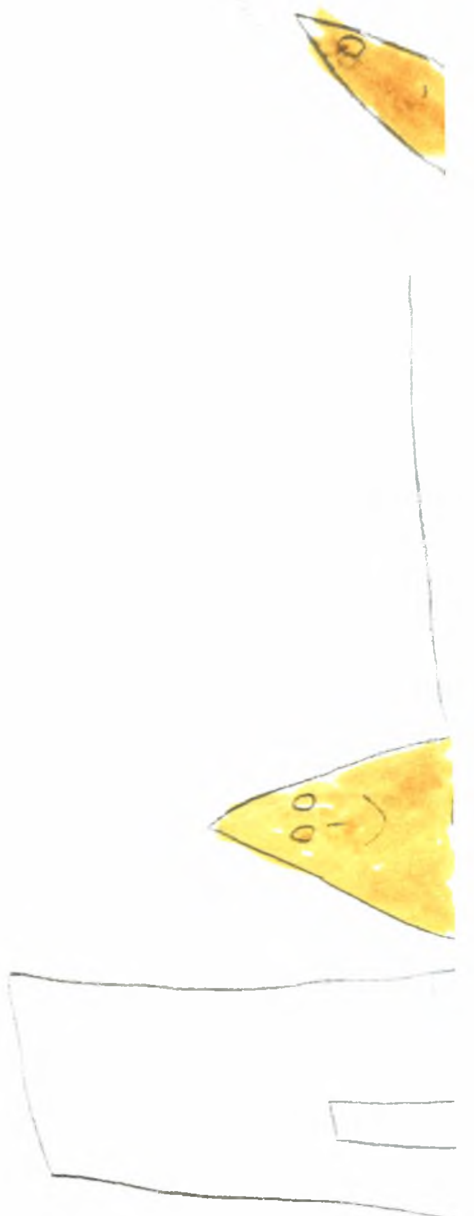




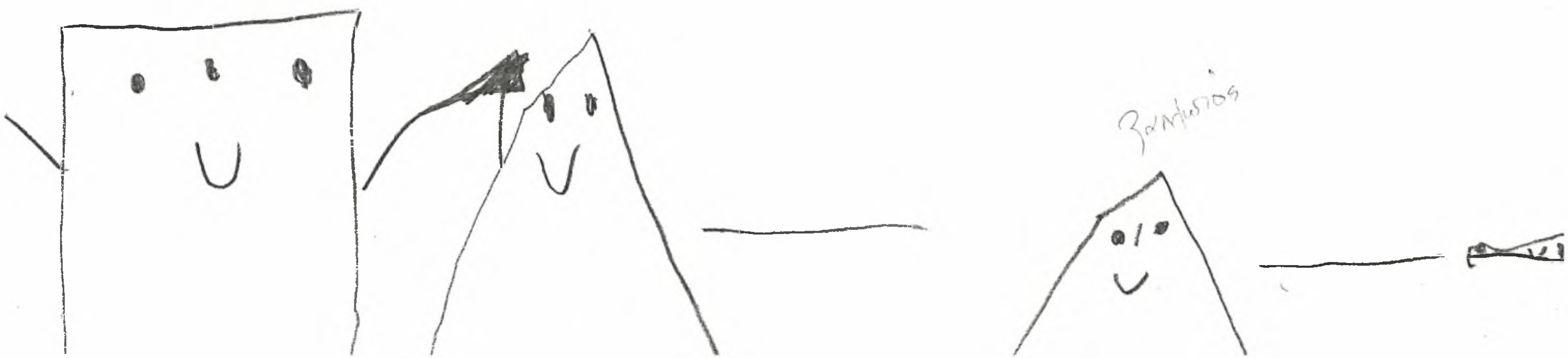
Νικος Μαστράκης



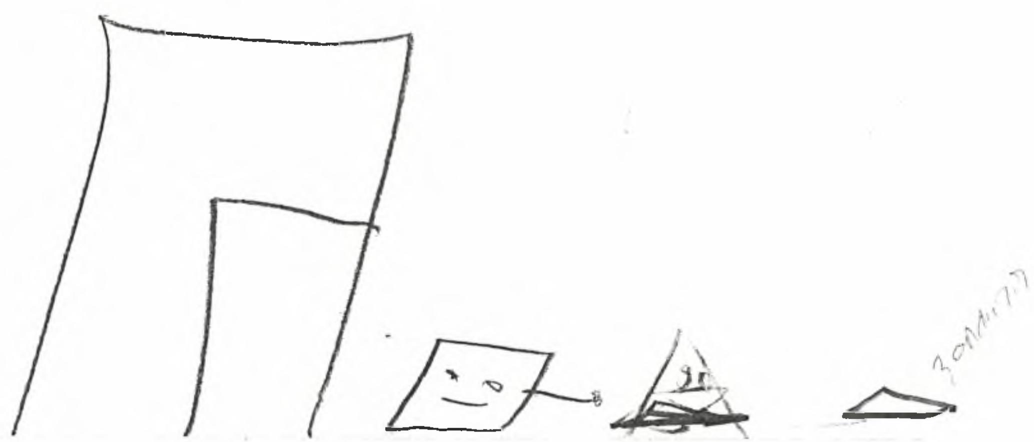




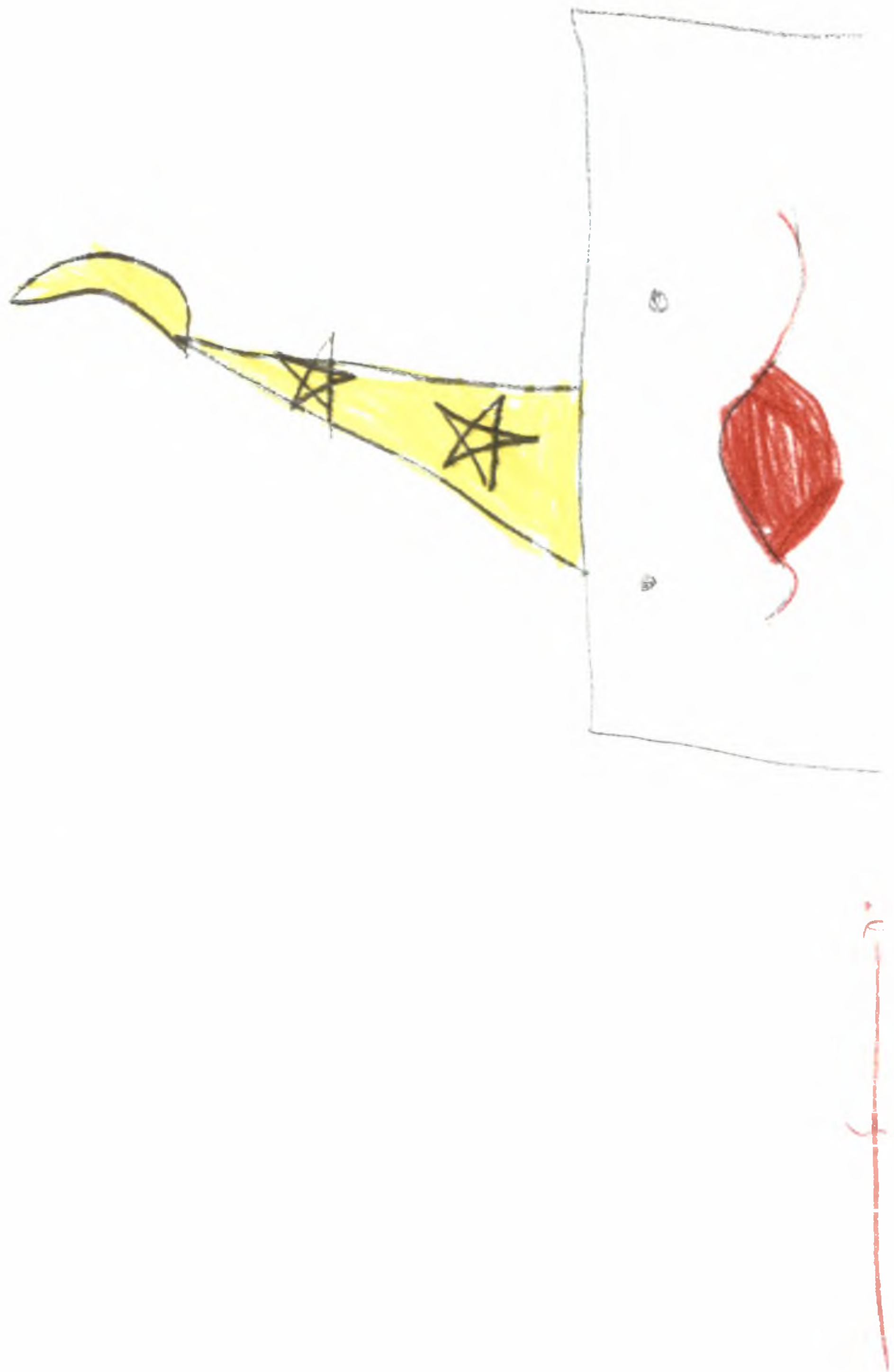
Νικόλαος Γκότσικας



Ευθύμιος



Ο Τασούλης Μεταμορφωμένος σε Γραμμή




Αναστασία