ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

Συνάρτηση αξιοπιστίας και υπογραφή μονότονων συστημάτων.

Ανυφαντής Νεόφυτος-Ευάγγελος

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Υπεύθυνος
Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου
Επ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Λαμία, 2021

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

Συνάρτηση αξιοπιστίας και υπογραφή μονότονων συστημάτων

Ανυφαντής Νεόφυτος-Ευάγγελος

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων
Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου
Επ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Λαμία, 2021

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις (1), που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. *Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί* ***χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά*** *και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάσθηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.*

2. *Δέχομαι ότι η αυτολεξεί* ***παράθεση χωρίς εισαγωγικά****, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.*

3. *Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια*

4. *Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.*

Ημερομηνία: 09/06/2021

Ο – Η Δηλών

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

Συνάρτηση Αξιοπιστίας και υπογραφή μονότονων συστημάτων.

Ανυφαντής Νεόφυτος-Ευάγγελος

Τριμελής Επιτροπή:

Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής (επιβλέπων)

Δρακόπουλος Βασίλειος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Σανδαλίδης Χαρίλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία γίνεται αναφορά στην συνάρτηση αξιοπιστίας και τον μέσο χρόνο ζωής των μονότονων συστημάτων.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες της Θεωρίας Αξιοπιστίας. Γίνεται εισαγωγή της έννοιας του μονότονου συστήματος, όπου μέσου της συνάρτησης δομής του και των ιδιοτήτων της γίνεται μελέτη για την απόδοση ενός συστήματος και την σύγκριση του με ένα άλλο. Έπειτα, δίνεται τόσο ο χρόνος ζωης συστήματος καθώς και ο μέσος χρόνος ζωης του. Τέλος, εισάγεται η έννοια της υπογραφής του συστήματος και η συνάρτηση αξιοπιστίας αυτού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναφέρεται η οικογένεια των συστημάτων k-από-τα-n: F καθώς και οι γενικεύσεις αυτών. Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα, παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι υπολογισμού κάποιων βασικών χαρακτηριστικών τους, όπως η αξιοπιστία και ο μέσος χρόνος ζωής των συστημάτων.

Το τρίτο κεφάλαιο, επικεντρώνεται στην παρουσίαση του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε για να παραχθούν τα αποτελέσματα πάνω στα οποία βασίστηκε αυτή η εργασία. Επιπλέον, αναφέρεται το πρόγραμμα στο οποίο βασίστηκε ο γράφων ώστε να υλοποιήσει τον αλγόριθμο. Παρουσιάζονται τα νέα αποτελέσματα με τον σχετικό σχολιασμό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται επαλήθευσης της ορθότητας του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας ήδη υπάρχοντα δεδομένα παράλληλα με τα νέο παραχθέντα. Επίσης, αναφέρονται τα νέα αποτελέσματα της υπογραφής που παρήχθησαν στο πλαίσιο της πτυχιακής εργασίας και ιδιαίτερη μνεία γίνεται ως προς την σημασία αυτών για την υπογραφή του συστηματος. Αξιό αναφοράς αποτελεί επίσης το γεγονός, ότι τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζονται για πρώτη φορά στην διεθνή βιβλιογραφία. Κλείνοντας, θα υπάρξει μια σύνοψη με τους στόχο της πτυχιακής αυτης.

ABSTRACT

In this thesis, there is a reference of the Reliability Function and the mean lifetime of the monotone systems.

More specifically, in the first chapter introductory concepts of Reliability Theory are given. There's an introduction to the meaning of the monotone system where through its structure function and its properties are used as a vehicle in order to study system performance and for comparing it with another system. In addition, there's an introduction to the term of the signature of a system and its Reliability Function.

In the second chapter, there's a reference to the family of the k-out-of-n: F system and its generalizations. For each of these systems below, we introduce several calculation methods of their basic characteristics such as the Reliability and the mean lifetime of the systems.

The third chapter focuses on the presentation of the algorithm that is being used to produce the new results which this project was based on. Also, there is a mention to the program that was used to make the algorithm possible and as a result of that the new results are being presented and commented as well.

In the fourth chapter, there's a validation of the accuracy of the algorithm using as a concrete point already existing data that can be related to the new ones. Furthermore, it's worth mentioning the importance of the new results for the signature of the system because there are being used first time in the international bibliography. Last but not least, there will be a recapitulation of the purpose of this assignment.

Περιεχόμενα

Λίστα Σχημάτων

Λίστα Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Η θεωρία αξιοπιστίας αποτελείται από ένα σύνολο από ιδέες, μοντέλα και μεθόδους που έχουν ως σκοπό την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τον υπολογισμό, την εκτίμηση, την βελτιστοποίηση της πιθανότητας λειτουργίας ή της αναμενομένης ζωής ή γενικότερα της κατανομής της διάρκειας ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος μονάδων. Στο τρέχον κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις βασικές έννοιες και ορισμούς της θεωρίας και των Συστημάτων Αξιοπιστίας.

1.1 **Συστήματα Αξιοπιστίας**

Σύστημα ονομάζεται ένα σύνολο μονάδων τοποθετημένων και συνδεδεμένων, με κάποια δομή. Σε γενικές γραμμές, ο όρος "Αξιοπιστία" ενός συστήματος αποτελείται από μονάδες (components), έστω n το πλήθος, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις εξής δύο καταστάσεις:

- Μη λειτουργία (failed, not working off)
- Λειτουργία (functioning, working on)

Το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, μπορεί να βρίσκεται και αυτό σε δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία.

Δίνονται παρακάτω ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα συνδεσμολογίας συστημάτων.

Μονότονο Σύστημα

Ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο (ή μονότονης δομής, coherent structure ή monotone structure) αν ισχύουν τα εξής:

a) Η συνάρτηση δομής του $\varphi(x)$ είναι αύξουσα με την εξής έννοια

$$x_i \le y_{i,}\ i=1,2,...,\mathrm{n} \Rightarrow \varphi(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}_1, x_{2,} ... \mathrm{x}_n) \le \varphi(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_{2,} ... \mathrm{y}_n) = \varphi(y).$$

b) Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η φ δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.

Εναλλακτικά, όταν για κάθε $i = 0, 1, ...,$n για τα διανύσματα $x, y \in \{0,1\}^n$ ισχύει $x_i \le y_{i,}$

Τότε θα γράφουμε $x \le y$, οπότε η **α** γίνεται : $x \le y$ => φ(x) ≤ φ(y) (φ αύξουσα κατά συντεταγμένες).

Για κάθε μονότονο σύστημα ισχύει ότι $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$. Αποδεικνύεται ως εξής:

Αν θεωρήσουμε ότι $\varphi(0) = 1,$ επειδή η φ είναι μονότονη, τότε $1 = \varphi(0) \le \varphi(x) \le 1,$ για κάθε x.

Οπότε $\varphi(x) = 1$ για κάθε x, δηλαδή το σύστημα θα λειτουργεί πάντα. Αυτό, όμως παραβιάζει την ιδιότητα **b**. Έτσι, $\varphi(0) = 0.$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\varphi(1) = 1.$

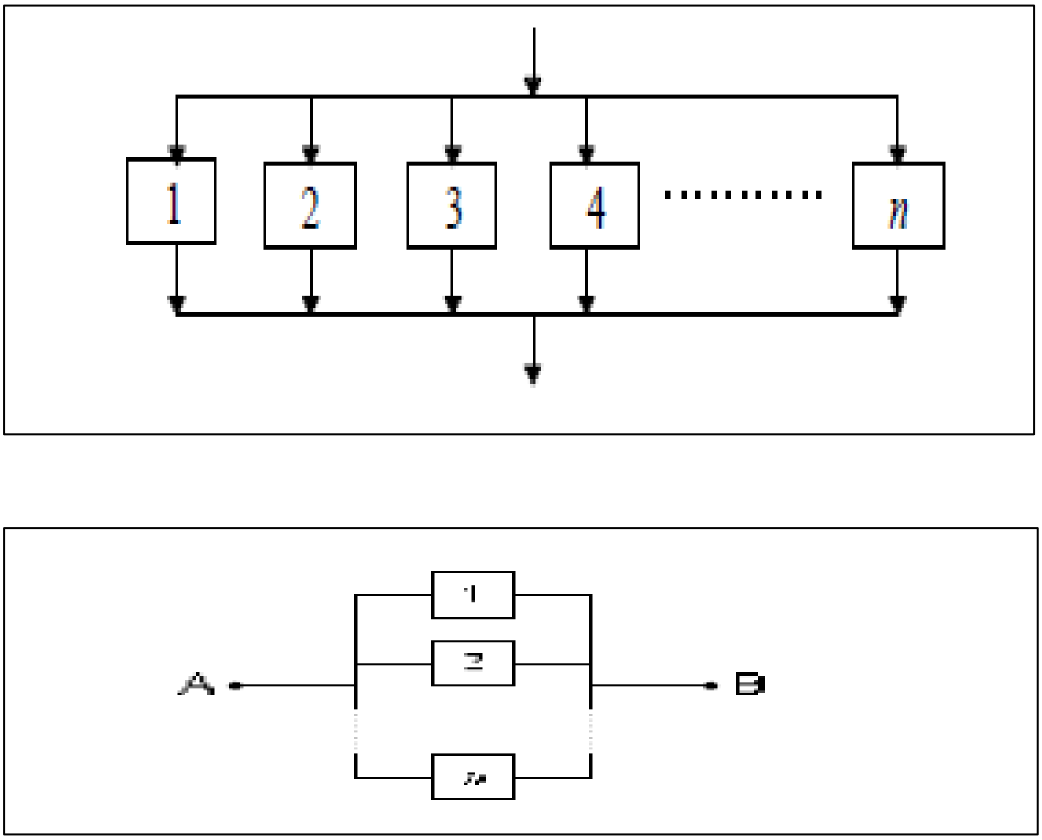
1.1.1 Παράδειγμα.

Σειριακό Σύστημα (SS- Serial System): Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μία μονάδα αποτύχει, ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν όλες του οι μονάδες είναι λειτουργικές.

Σχήμα 1: Σειριακό σύστημα n μονάδων.

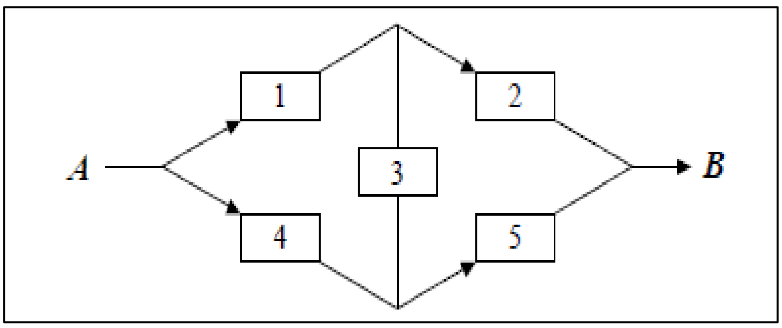
1.1.2 Παράδειγμα.

Παράλληλο Σύστημα (PS- Parallel System): Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες του αποτύχουν, ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μια μονάδα του λειτουργεί. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποια παρακάτω.



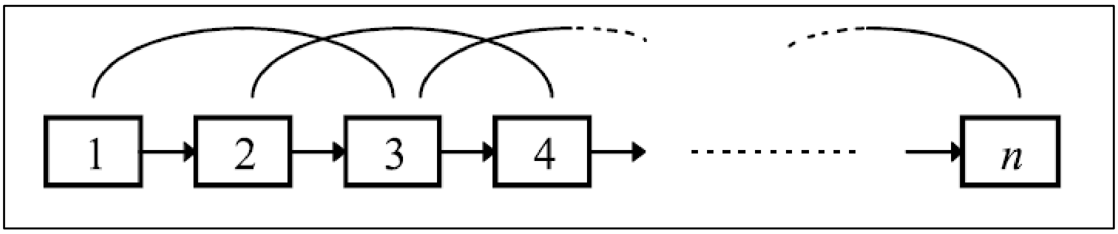
Σχήμα 2: Παράλληλο σύστημα n μονάδων.

1.1.3 Παράδειγμα. Γέφυρα (BS- Bridge Structure): Αποτελείται από n=5 μονάδες και λειτουργεί όταν είναι δυνατή η διέλευση από την θέση A στη θέση B μέσω μονάδων που λειτουργούν. Συνεπώς, για να είναι λειτουργικό το σύστημα θα αρκούσε να λειτουργούν οι μονάδες 1 και 2 ή οι 1, 3 και 5 κ.ο.κ.



Σχήμα 3: *Σύστημα γέφυρα 5 μονάδων.*

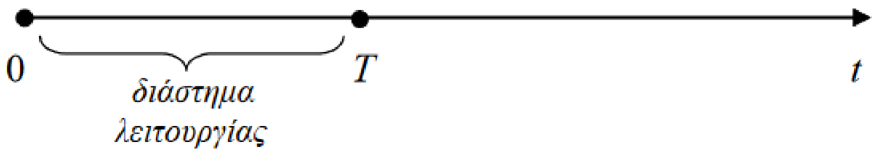
1.1.4 Παράδειγμα. Σύστημα συνεχόμενο k-από-τα-n:F (C(n,k):F, Consecutive k-out-of-n:Fal): Ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται από n μονάδες και αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον k συνεχόμενες μονάδες από τις n.



Σχήμα 4: *Σύστημα συνεχόμενο k-από-τα-n:F.*

1.2 Χρόνος Ζωής Συστήματος.

Θεωρούμε ότι κάθε μονάδα (ή σύστημα) έχει ένα χρόνο ζωής T ο οποίος δεν μπορεί να είναι εκ των προτέρων γνωστός και για αυτό θεωρείται τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$. Θεωρούμε λοιπόν ότι μια μονάδα ξεκινά να λειτουργεί στο χρόνο 0 και παραμένει στη κατάσταση λειτουργίας μέχρι και τον τυχαίο χρόνο T. Μετά από τη στιγμή αυτή θεωρούμε ότι η μονάδα παραμένει σε κατάσταση αποτυχίας:



Σχήμα 5: Χρόνος ζωής συστήματος.

Είναι φανερό ότι ως χρόνος ζωής T μια μονάδας θα πρέπει να θεωρήσουμε μια μη αρνητική ($T \geq 0$) τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνηθέστερα συνεχή).

Ιδιότητες

- $F(x) \geq 0, x \in R$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq a) = P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

1.3 Μεσος Χρόνος Ζωής

Ο μέσος χρόνος μέχρι την πρώτη αποτυχία (mean time to failure- MTTF) είναι η μέση τιμή του χρόνου ζωής χωρίς αποτυχία.

Ο υπολογισμός του μέσου χρόνου ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος δίνεται από τον εξής τύπο:

$$MTTF = E(T) = \int_0^\infty R_T(t)dt$$

Παράδειγμα υπολογισμού του μέσου χρόνου ζωής συστήματος

Έστω ότι έχουμε n μονάδες συνδεδεμένες σε σειρά με βαθμίδες αποτυχίας $\lambda(t), i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για την βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος θα ισχύει

$$\lambda_{SS}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$$

Οπότε

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda_{SS}(s)ds} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(s)ds\right\}$$

Και

$$MTTFs = E(T_S) = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(s)ds\right\}dt$$

Στην ειδική περίπτωση που οι βαθμίδες αποτυχίας των μονάδων είναι σταθερές, δηλαδή

$$\lambda_i(s) = \lambda_i, s > 0, i = 1, 2, ..., n$$

Βρίσκουμε

$$MTTF_S = \int_0^{\infty} \exp\left\{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right\}dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

1.4 Υπογραφή ενός συστήματος αξιοπιστίας

Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)'$ με συντεταγμένες $s_i = P(T = X_{(i)}), i = 1, 2, \ldots n$ όπου $\{X_{(1),} X_{(2),} \ldots, X_{(n)}\}$ είναι το διατεταγμένο τυχαίο δείγμα από τη συνεχή κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος.

Η ιδέα της υπογραφής ενός συστήματος αναπτύχθηκε από μια συγκεκριμένη ιδιότητα των μονότονων συστημάτων, στα οποία οι μονάδες είναι ισόνομες και ανεξάρτητες. Για αυτά τα συστήματα, η πιθανότητα ότι το σύστημα αποτυγχάνει στην i-οστή αποτυχία μονάδας δεν εξαρτάται από την κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων. Αντίθετα η πιθανότητα αυτή είναι συνάρτηση μόνο του σχεδιασμού του συστήματος, συνεπώς η υπογραφή αποτελεί καθαρό μέτρο αξιολόγησης του σχεδιασμού ενός συστήματος αξιοπιστίας. Η υπόθεση ισόνομων και ανεξάρτητων σε ένα σύστημα βοηθάει στη σύγκριση μεταξύ συστημάτων αξιοπιστίας, μιας και εξαλείφει παράδοξα συμπεράσματα, όπως το γεγονός ότι ένα σειριακό σύστημα με καλές μονάδες μπορεί να έχει καλύτερη απόδοση από ένα παράλληλο σύστημα με χαμηλής ποιότητας μονάδες, μολονότι ένα παράλληλο σύστημα είναι σαφώς ανώτερο (σχεδιαστικά) από ένα σειριακό.

Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα της υπογραφής ως μέτρου του σχεδιασμού ενός συστήματος, περιλαμβάνεται το γεγονός ότι μπορούν να εφαρμοσθούν οι βασικές μαθηματικές αρχές της Συνδυαστικής συντελώντας στον σχετικά εύκολο υπολογισμό της.

Το γεγονός ότι η υπογραφή s εξαρτάται μόνο από την τυπολογία του συστήματος, και όχι από την κατανομή F, είναι συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε μία από τις n! διατάξεις των χρόνων ζωής $X_{1,}X_2,\ldots,X_n$ των μονάδων του συστήματος είναι το ίδιο πιθανόν να συμβεί υπό την i.i.d. υπόθεση. Συνεπώς η πιθανότητα ότι η αποτυχία της i-οστής μονάδας είναι μοιραία για το σύστημα εξαρτάται αποκλειστικά από την πιθανότητά ότι η τελευταία μονάδα που λειτουργεί σε ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ.) είναι ταυτόχρονα η i-οστή μονάδα που αποτυγχάνει γενικά στο σύστημα. Δηλαδή για να υπολογισθεί η υπογραφή s ενός συστήματος αρκεί να εξετασθούν τα ε.σ.δ και να μετρηθούν πόσοι συνδυασμοί ανάμεσα στις ισοπίθανες μεταθέσεις των $X_{1,}X_2,\ldots,X_n$ συμπίπτουν ακριβώς με την αποτυχία κάποιου ε.σ.δ. και το συμβάν $X_{(i).}$ Επομένως εναλλακτικά η υπογραφή s ενός μονότονου συστήματος με n μονάδες μπορεί να δοθεί μέσω των μεταθέσεων των χρόνων ζωής $X_{1,}X_2,\ldots,X_n$ των μονάδων του συστήματος ως εξής.

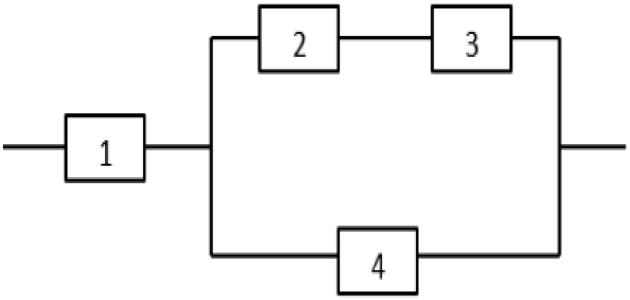
Παράδειγμα 1.4.1. Η υπογραφή ενός σειριακού συστήματος n συνιστωσών δίνεται από το διάνυσμα καθώς η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος ταυτίζεται με τον πρώτο διατεταγμένο χρόνο ζωής των συνιστωσών και ισούται με 1. Αντίθετα η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργήσει αφού έχει αποτύχει μια συνιστώσα του ισούται με 0.

Παράδειγμα 1.4.2. Γίνεται υπολογισμός της υπογραφής ενός k-από-τα-n συστήματος. Το σύστημα αυτό αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον $n-k+1$συνιστώσες. Συνεπώς η πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος T να ταυτίζεται με τον χρόνο ζωής της $i-οστής$ διατεταγμένης συνιστώσας $X_{i:n}$ για $i=1,2,\ldots,n-k$ ισούται με μηδέν, δηλαδή $P(T = X_{i:n}) = 0,\ i = 1,2,...,n-k$. Επίσης η πιθανότητα το σύστημα να αποτύχει κατά την αποτυχία της i-οστής συνιστώσας για $i = n-k+2$,…,n είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $P(T = X_{i:n}) = 0,\ i = n-k+2,...,n$. Το σύστημα αποτυγχάνει κατά την αποτυχία της $(n-k+1)$-οστής συνιστώσας, καθώς μόνο $k-1$ συνιστώσες βρίσκονται σε λειτουργία. Έτσι η πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτίζεται με το χρόνο ζωής της $(n-k+1)$-οστής συνιστώσας ισούται με 1, δηλαδή $P(T = X_{n-k+1:n}) = 1$. Συνεπώς το διάνυσμα της υπογραφής του k-από-τα-n συστήματος εκφράζεται ως εξής: $s^{s|n} = (0,0,...,0,1,0,...,0)$.

Ορισμός 1.1.1: Η υπογραφή ενός συνεπούς συστήματος είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ με στοιχεία $s_i = \dfrac{A}{n!}$, όπου Α είναι το πλήθος των μεταθέσεων των διατεταγμένων χρόνων ζωής για τις οποίες η αποτυχία της $i-οστής$ συνιστώσας προκαλεί την αποτυχία του συστήματος.

Σύμφωνα με τον ορισμό για να υπολογίσουμε το $i-οστό$ στοιχείο της υπογραφής αρκεί να εξεταστούν τα ελάχιστα σύνολα αποκοπής και να βρεθεί το πλήθος των συνδυασμών μεταξύ των ισοπίθανων μεταθέσεων των χρόνων ζωής $X_1, X_2, ..., X_n$ που συμπίπτουν με την αποτυχία κάποιου ελάχιστου συνόλου αποκοπής όταν το σύστημα αποτυγχάνει κατά την αποτυχία της $i-οστής$ διατεταγμένης συνιστώσας δηλαδή, $T = X_{i:n}$.

Παράδειγμα 1.4.3. Το παρακάτω σύστημα 4^{ης} τάξης με συνάρτηση δομής $\varphi(\boldsymbol{x})=x_1(x_2x_3\sqcup x_4)$ έχει ως ελάχιστα σύνολα αποκοπής τα $\{1\}$, $\{2,4\}$ και $\{3,4\}$. Σε κάθε περίπτωση ο χρόνος ζωής του συστήματος θα ισούται με $T = min\{X_1, max(X_2, X_4), max(X_3, X_4)\}$ έτσι η υπογραφή του συστήματος αυτού δίνεται από το διάνυσμα $(\frac{1}{4},\frac{7}{12},\frac{1}{6},0)$. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι διατεταγμένοι χρόνοι ζωής των συνιστωσών (οι διατάξεις είναι 4!=24), οι οποίοι προκαλούν την αποτυχία του συστήματος.



Σχήμα 6: *Σύστημα 4ης τάξης.*

Διατεταγμένοι χρόνοι ζωής των συνιστωσών	**Χρόνος ζωής του συστήματος T**
$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_2 < X_4 < X_3$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_3 < X_2 < X_4$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_3 < X_4 < X_2$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_4 < X_2 < X_3$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_4 < X_3 < X_2$	$X_{1:3}$
$X_2 < X_1 < X_3 < X_4$	$X_{2:3}$
$X_2 < X_1 < X_4 < X_3$	$X_{2:3}$
$X_2 < X_3 < X_1 < X_4$	$X_{3:3}$
$X_2 < X_3 < X_4 < X_1$	$X_{3:3}$
$X_2 < X_4 < X_1 < X_3$	$X_{2:3}$
$X_2 < X_4 < X_3 < X_1$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_1 < X_4 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_1 < X_2 < X_4$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_2 < X_4 < X_1$	$X_{3:3}$
$X_3 < X_2 < X_1 < X_4$	$X_{3:3}$
$X_3 < X_4 < X_1 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_4 < X_2 < X_1$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_1 < X_2 < X_3$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_1 < X_3 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_2 < X_1 < X_3$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_2 < X_3 < X_1$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_3 < X_1 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_4 < X_3 < X_2 < X_1$	$X_{2:3}$

Οπότε οι συνιστώσες του διανύσματος της υπογραφής θα είναι

$$s_1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, s_2 = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}, s_3 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}, s_4 = 0 .$$

Γίνεται εισαγωγή των ελάχιστων διατεταγμένων συνόλων αποκοπής σύμφωνα με τον Boland (2001) για να την χρησιμοποιήσουμε σε μια εναλλακτική διατύπωση του διανύσματος της υπογραφής.

Ορισμός 1.1.2: Έστω ένα συνεπές σύστημα n συνιστωσών και $C = \{ c_1, c_2, ..., c_n \}$ το σύνολο αυτών. Ένα διατεταγμένο υποσύνολο $K = \{ c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, ..., c_{\pi(\kappa-1)} \}$ (όπου π κάποια διάταξη των $1,2,...,n,\ \mu\varepsilon\ k \leq n$) του C ορίζεται ως διατεταγμένο σύνολο αποκοπής αν οι σχέσεις $X_{i:n} = X_{\pi(1)}, ..., X_{k:n} = X_{\pi(\kappa)}$ υποδηλώνουν ότι $T \leq X_{\pi(k)}$. Το Κ είναι ελάχιστα διατεταγμένο σύνολο αποκοπής αν είναι σύνολο αποκοπής αλλά το σύνολο $\{ c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, ..., c_{\pi(\kappa-1)} \}$ δεν είναι διατεταγμένο σύνολο αποκοπής.

Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή της προηγούμενης σχέσης στον Ορισμό 1.1.1 με την ποσότητα $(n-i)!$ θα προκύψει μια διαφορετική διατύπωση για το διάνυσμα της υπογραφής όπως αναφέρει ο Boland (2001).

Ορισμός 1.1.3 Η υπογραφή ενός συνεπούς συστήματος ορίζεται ως

$$s_i = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omega\nu\ \delta\iota\alpha\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{o}\lambda\omega\nu\ \alpha\pi o\kappa o\pi\acute{\eta}\varsigma\ \mu\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\theta o\upsilon\varsigma\ i}{(n)_i}$$

όπου $n(i)_i = \dfrac{n!}{(n-i)!}$.

Παράδειγμα 1.4.4. Θα χρησιμοποιήσουμε τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής για να υπολογίσουμε την υπογραφή ενός παράλληλου συστήματος n συνιστωσών. Το παράλληλο σύστημα δεν έχει ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα αποκοπής με $n-1,...,3,2$ *ή 1 στοιχεία*. Το μόνο ελάχιστο διατεταγμένο σύνολο αποκοπής είναι το $\{1,2,3,...,n\}$ και όλες οι δυνατές μεταθέσεις των στοιχείων είναι n!. Συνεπώς έχουμε

$$s_1 = \frac{0}{\frac{n!}{(n-1)!}} = 0, s_2 = \frac{0}{\frac{n!}{(n-2)!}} = 0, ..., s_{n-1} = \frac{0}{\frac{n!}{(n-(n-1))!}} = 0, s_1 = \frac{n!}{\frac{n!}{(n-n)!}} = 1$$

Οπότε το διάνυσμα της υπογραφής του παράλληλου συστήματος $s^{\Pi} = (0,0,...,0,1)$.

1.5 Συνάρτηση Αξιοπιστίας.

Όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, οι καταστάσεις των μονάδων του συστήματος π.χ. σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t στο μέλλον, δεν είναι γνωστές. Συνήθως, η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι οι πιθανότητες λειτουργίας τους. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε λοιπόν ότι οι καταστάσεις κάθε μονάδας του συστήματος που μελετάμε, είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές 0, 1 (λειτουργία – αποτυχία). Εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι η μελέτη της πιθανότητας λειτουργίας του συστήματος, η οποία ονομάζεται αξιοπιστία R (reliability) του συστήματος. Αντίστοιχα, η πιθανότητα λειτουργίας της i – μονάδας του συστήματος, ονομάζεται και αξιοπιστίας της i – μονάδας και θα συμβολίζεται με p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Στόχος μας είναι να εκφράσουμε την αξιοπιστία R του συστήματος συναρτήσει των πιθανοτήτων p_i, $i = 1, 2, ..., n$ δηλαδή να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης

$$R = R(p_1, p_2, ..., p_n)$$

ο οποίος προφανώς εξαρτάται από τη δομή του συστήματος (αν π.χ. αυτό είναι σειριακό, παράλληλο, γέφυρα, κ.ο.κ.).

Έστω ένα σύστημα n μονάδων και X_i μια μεταβλητή η οποία εκφράζει την κατάσταση της i – μονάδας του συστήματος, $i = 1, 2, \ldots, n$ κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, δηλαδή

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-μονάδα λειτουργεί τη στιγμή } t \\ 0, & \text{αν η } i\text{-μονάδα δεν λειτουργεί τη στιγμή } t \end{cases}$$

Η πιθανότητα λειτουργίας p_i της i – μονάδας του συστήματος (δηλαδή η αξιοπιστία της i – μονάδας) θα είναι ίση με $p_i = P(X_i = 1)$ ενώ $q_i = P(X_i = 0) = 1 - p_i$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για μια δείκτρια τ.μ. X (δηλαδή με τιμές στο (0,1) ισχύει ότι

$$E(X) = 0 * P(X = 0) + 1 * P(X = 1) = P(X = 1)$$

προκύπτει ότι $p_i = P(X_i = 1) = E(X_i)$.

Οι μονάδες του συστήματος θα θεωρούνται ανεξάρτητες, δηλαδή οι τ.μ. $X1, X2...., X_n$ θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες. Στην περίπτωση που ισχύει $p_i = p$, $i = 1, 2, ..., n$ θα λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα με iid μονάδες (independent, identically distributed).

Στο εξής θα εννοείται, χωρίς πάντα αυτό να αναφέρεται ότι το σύστημα των n μονάδων εξετάζεται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Το σύστημα λοιπόν (τη χρονική στιγμή t) θα βρίσκεται είτε σε κατάσταση λειτουργίας είτε σε κατάσταση μη λειτουργίας, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι. Αν φ είναι η συνάρτηση δομής του συστήματος και $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ το (τυχαίο) διάνυσμα κατάστασης θα εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή

$$\varphi(X) = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$$

δηλαδή το σύστημα λειτουργεί ή όχι ανάλογα με το αν $\varphi(X)=1$ ή 0. Συνεπώς, η αξιοπιστία του συστήματος (τη χρονική στιγμή t) θα είναι ίση με $R=P\big(\varphi(\mathrm{X}) \;=\; 1\big) \;=\; \mathrm{E}(\varphi(X))$ (επειδή η φ είναι και αυτή μια δίτιμη τ.μ.) Έπειτα γράφουμε $R(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ ενώ θα γράψουμε $R(p)$ εννοώντας την αξιοπιστία ενός iid συστήματος με αξιόπιστες μονάδες $(R(p) \;= R(p, p,\ldots, p))$. Τέλος, αναξιοπιστία του συστήματος θα καλείται η πιθανότητα αποτυχίας του $F \;=\; 1-R$.

Παράδειγμα 1.5.1

Έχουμε ένα σειριακό σύστημα του οποίου η δομή καθορίζεται από το σχήμα:

$$\mathbf{P}=\{\{1,2,\ldots ,n\}\} \text{ και } \mathbf{C} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots ,\{n\}\}$$

με αντίστοιχη συνάρτηση δομής

$$R=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών $X_1,X_2,\ldots,X_n$ μπορούμε να γράψουμε:

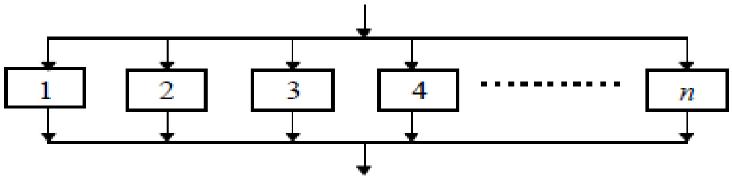
$$R=E(\varphi(X))=E(\prod_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}E(X_i)=p_1p_2\ldots p_n=R_{ss}$$

ενώ στην i.i.d περίπτωση θα έχουμε $R(p)=R_{ss}=p^n$.

Παράδειγμα 1.5.2

Έχουμε ένα παράλληλο σύστημα του οποίου η δομή καθορίζεται από το σχήμα:

P={{1}, {2}, ... ,{n}}, και **C**={{1,2,... ,n}}.



με αντίστοιχη συνάρτηση δομής

$$\varphi(x)=\prod_{j=1}^{1}(1-\prod_{i\in Cj}(1-x_i))=1-(1-x_1)...(1-x_n).$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών $1-X_1, 1-X_2, ..., 1-X_n$ μπορούμε να γράψουμε

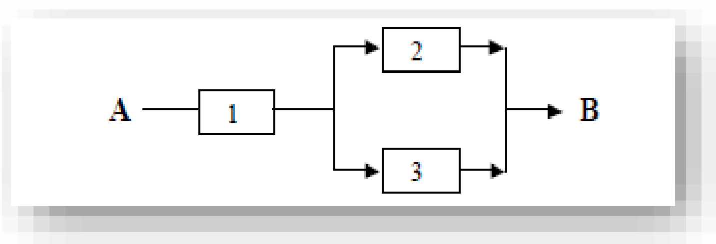
$$R=E(\varphi(X))=E[1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)]=1-E[\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)]=1-\prod_{i=1}^{n}E(1-X_i)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-E(X_i)]=$$

$$=1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n)=R_{PS}$$

ενώ στην i.i.d περίπτωση θα έχουμε $R(p)=R_{PS}=1-(1-p)^n$.

Παράδειγμα 1.5.3

Το σύστημα του οποίου η δομή καθορίζεται από το σχήμα:



Σχήμα 7: Δομή συστήματος καθορισμένη από το σχήμα.

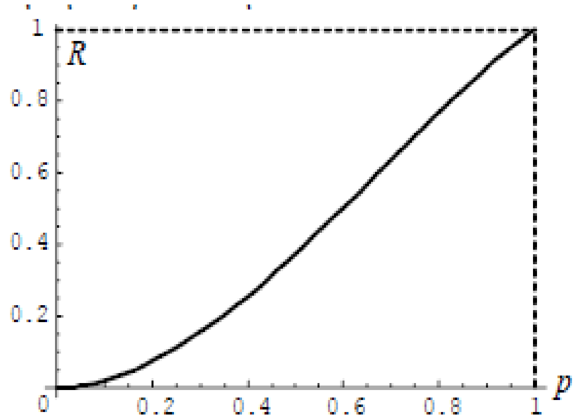
Έχει ε.σ.λ τα {1,2} και {1,3} και επομένως

$$\varphi(x)=\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}))=\mathrm{E}(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3)=$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_3)+\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)-\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)\mathrm{E}(\mathrm{X}_3)$$

$$=p_1p_3+p_1p_2-p_1p_2p_3$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι τ.μ X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και συνεπώς $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$ κ.ο.κ. Στην iid περίπτωση $(p_i = p)$ θα είναι $R(p) = 2p^2 - p^3$. Το γράφημα της $R(p), p \in [0,1]$ σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

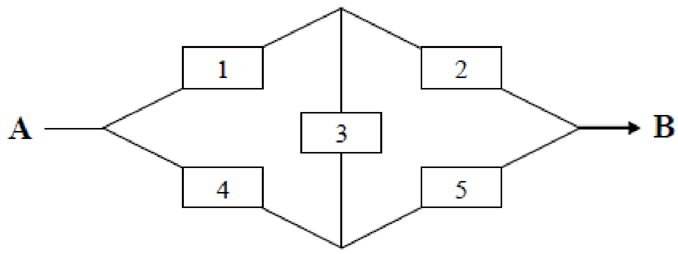


Εικόνα 8: Αξιοπιστία Συστήματος.

Όπως ήταν αναμενόμενο, όταν αυξάνεται η αξιοπιστία p των μονάδων, αυξάνεται και η αξιοπιστία $R(p)$ του συστήματος.

Παράδειγμα 1.5.4

Έχουμε ένα σύστημα γέφυρα του οποίου η δομή καθορίζεται από το σχήμα:



Η συνάρτηση δομής είναι:

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_4x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_4x_3x_2) = \ldots =$$

$$= x_1x_2 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_2x_3x_5 + x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Επομένως

$$R = E(\varphi(X)) = p_1p_2 + p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_2p_3p_5 + p_4p_5 - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5.$$

Στην i.i.d περίπτωση $(p_i = p)$ προκύπτει $R = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.

Παράδειγμα 1.5.5

Έχουμε ένα σύστημα k-από-τα-n:G (S(n,k):G) του οποίου η συνάρτηση δομής είναι η

$$\varphi(x)=1-\prod_{\substack{\{\alpha_1,\dots,\alpha_\kappa\}\\ \subseteq\{1,2,\dots,n\}}}(1-\prod_{i=1}^{k}x_{a_i})=\prod_{\substack{\{a_1,\dots,a_{n-k+1}\}\\ \subseteq\{1,2,\dots,n\}}}(1-\prod_{i=1}^{n-k+1}(1-x_{a_i})).$$

Επομένως

$$R=E(\varphi(X))=E\left\{1-\prod_{\substack{\{a_1,\dots,a_k\}\\ \subseteq\{1,2,\dots,n\}}}(1-\prod_{i=1}^{k}x_{a_i})\right\}=1-E\left[\prod_{\substack{\{a_1,\dots,a_k\}\\ \subseteq\{1,2,\dots,n\}}}(1-\prod_{i=1}^{k}x_{a_i})\right]$$

και η αξιοπιστία δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί ιδιαίτερα για μεγάλα n,k αφού στη γενική περίπτωση εμφανίζεται ένα γινόμενο $\binom{n}{k}$ όρων.

Ειδική περίπτωση: Για το σύστημα S(4,2):G θα έχουμε

$$\varphi(x)=1-(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)(1-x_1x_4)(1-x_2x_3)(1-x_2x_4)(1-x_3x_4)=$$

$$=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-2x_1x_2x_3+x_1x_4+x_2x_4-2x_1x_2x_4+x_3x_4-2x_1x_3x_4-2x_2x_3x_4+3x_1x_2x_3x_4$$

οπότε

$$R=E(\varphi(X))=p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3+p_1p_4+p_2p_4-2p_1p_2p_4+p_3p_4-2p_1p_3p_4-2p_2p_3p_4+3p_1p_2p_3p_4$$

Για το αντίστοιχο i.i.d σύστημα προκύπτει $R(p)=6p^2-8p^3+3p^4$.

Κεφάλαιο 2

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στη οικογένεια συστημάτων συνεχόμενων k-από-τα-n:F καθώς και στις γενικεύσεις αυτών. Επίσης, παρουσιάζονται βασικά αποτελέσματα που αφορούν τον υπολογισμό μεγεθών όπως ο μέσος χρόνος ζωής E(T), η υπογραφή και η αξιοπιστία R.

2.1 Οικογένεια συστημάτων k-από-τα-n:F

Ορισμός 2.1.1 Ένα συνεχόμενο k-από-τα-n: F σύστημα (consecutive k-out-of-n: F system) αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον k συνεχόμενες συνιστώσες του από τις n.

Τα συστήματα αυτά χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στα γραμμικά (linear), όταν οι συνιστώσες είναι γραμμικά διατεταγμένες και στα κυκλικά (circular) συνεχόμενα k-από-τα-n:F συστήματα, όταν οι συνιστώσες διατάσσονται σε κύκλο, έτσι ώστε η πρώτη και η τελευταία συνιστώσα να είναι γειτονικές.

Οι πιο δημοφιλείς εφαρμογές αυτών των συστημάτων συναντώνται στις τηλεπικοινωνίες, στο σχεδιασμό διασωλήνωσης δικτύων, στη μηχανική καθώς και στο σχεδιασμό ολοκληρωμένου συστήματος.

Παράδειγμα 2.1.1 Έστω ότι έχουμε δύο γραμμικά συνεχόμενα k-από-τα-n συστήματα με n=8 και k=3. Ας θεωρήσουμε τις εξής αναπαραστάσεις συνιστωσών για τα δύο συστήματα, όπου το ΄΄1΄΄ παριστάνει μια συνιστώσα που λειτουργεί και το ΄΄0΄΄ μια συνιστώσα που δεν λειτουργεί.

- 110100011
- 10010010

Το πρώτο σύστημα αποτυγχάνει εφόσον υπάρχουν 3 συνεχόμενες συνιστώσες που αποτυγχάνουν, ενώ το δεύτερο λειτουργεί κανονικά παρά το γεγονός ότι έχει περισσότερες συνιστώσες που αποτυγχάνουν.

Τα συνεχόμενα k-από-τα-n: F συστήματα έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών από το 1980. Οι Chiang και Niu (1981) δίνουν δύο παραδείγματα για την χρήση των συστημάτων αυτών. Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται σε ένα σύστημα τηλεπικοινωνιών με n σταθμούς αναμετάδοσης, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε ίσες αποστάσεις και κανένας δεν μπορεί να μεταφέρει σήμα σε απόσταση που περιλαμβάνει k σταθμούς αναμετάδοσης. Προφανώς το σύστημα αυτό αποτυγχάνει εάν τουλάχιστον k συνεχόμενοι σταθμοί αναμετάδοσης παύσουν να λειτουργούν. Το άλλο παράδειγμα αφορά ένα δίκτυο μεταφοράς πετρελαίου με σωλήνες και n σταθμούς τροφοδότησης. Εάν ένας σταθμός τροφοδότησης χαλάσει, η ροή πετρελαίου δεν θα διακοπεί, επειδή οι υπόλοιποι k-1 σωλήνες θα συνεχίσουν την μεταφορά. Όμως, αν χαλάσουν τουλάχιστον k συνεχόμενοι σωλήνες η ροή του πετρελαίου θα σταματήσει και το σύστημα αποτυγχάνει.

Τα ελάχιστα σύνολα αποκοπής ενός συνεχόμενου k-από-τα-n: F συστήματος είναι τα σύνολα $\{1,2,\ldots k\}$, $\{2,3,\ldots,k+1\}$, ..., $\{n-k+1, n-k+2,\ldots,n\}$, δηλαδή είναι όλα εκείνα τα υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ τα οποία περιέχουν k συνεχόμενα στοιχεία. Επίσης, όπως η συνάρτηση δομής του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(x)=\prod_{j=1}^{n-k+1}\left(1-\prod_{i=j}^{j+k-1}(1-x_i)\right)$$

Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στις έννοιες που παρουσιάστηκαν στο 1^{o} Κεφάλαιο αναφορικά με τα k-από-τα-n:F συστήματα πάνω στον μέσο χρόνο ζωής $(E(T))$, στην αξιοπιστία (R) και την υπογραφή.

Μέσος χρόνος ζωής T ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

Έστω ότι έχουμε ένα iid k-από-τα-n-F σύστημα, υποθέτοντας ότι οι μονάδες του έχουν αξιοπιστία $R(t)$. Υπενθυμίζεται ότι η αξιοπιστία του συστήματος αυτού είναι

$$R_S(t)=P(T_{n-k+1}>t)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(R(t))^i(1-R(t))^{n-i}$$

και ο μέσος χρόνος ζωής του θα υπολογίζεται από τον γενικό τύπο

Ας υπολογίσουμε την παραπάνω μέση τιμή, όταν οι χρόνοι ζωής των μονάδων ακολουθούν την ομοιόμορφη στο [0,1] κατανομή. Θα είναι

$$E(T_s)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\int_0^1(1-t)^i t^{n-i}dt$$

Είναι εύκολο τώρα να διαπιστώσουμε ότι γενικά, για $m,k>0,$

$$C(m,r)=\int_0^1 t^m(1-t)^r\,dt=\int_0^1\left(\frac{t^{m+1}}{m+1}\right)'(1-t)^r\,dt=\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}(1-t)^r\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{m+1}}{m+1}r(-1)(1-t)^{r-1}dt$$

$$=\frac{r}{m+1}C(m+1,r-1)$$

ενώ $C(m,0)=1/(m+1)$. Επομένως, αποδεικνύεται επαγωγικά ότι

$$C(m,r)=\frac{r}{m+1}C(m+1,r-1)=\frac{r(r-1)}{(m+1)(m+2)}C(m+2,r-2)=\ldots=\frac{r!}{(m+1)\ldots(m+r)}C(m+r,0)$$

$$=\frac{r!}{(m+1)\ldots(m+r)(m+r+1)}=\frac{m!\,r!}{(m+r+1)!}.$$

Άρα, επιστρέφοντας στην ειδική περίπτωση όπου $m=n-i, r=i$ θα είναι

$$E(T_S)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\int_0^1(1-t)^i t^{n-i}dt=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\frac{(n-i)!\,i!}{(n+1)!}=\sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{(n-i)!\,i!}{(n+1)!}=\frac{n-k+1}{n+1}.$$

Υπενθυμίζεται ότι ο χρόνος ζωής T_s του συγκεκριμένου συστήματος είναι ο $n-k+1$ διατεταγμένος χρόνος $T_{(n-k+1)}$ από τους $T_1, T_2, ..., T_n$ (χρόνοι ζωής μονάδων). Παρεμπιπτόντως λοιπόν αποδείξαμε ότι αν $T_1, T_2, ..., T_n$ ~ Ομοιόμορφη στο [0,1] τότε $E(T_{(n-k+1)}) = (n-k+1)/(n+1)$ ή ισοδύναμα αν $T_1, T_2, ..., T_n$ ~Ομοιόμορφη στο [0,1],τότε $E(T_{(i)}) = \frac{i}{n+1}, i = 1,2,...,n$.

Τέλος, ας εξετάσουμε και την περίπτωση όπου οι χρόνοι ζωής των μονάδων ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ. Σε αυτή περίπτωση θα είναι

$$E(T_s) = \int_0^\infty R_s(t)dt = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \int_0^\infty (e^{-\lambda t})^i (1-e^{-\lambda t})^{n-i} dt$$

και θέτοντας $x = 1 - e^{-\lambda t}$ στο ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι $(dt = dx/(\lambda(1-x)))$

$$E(T_s) = \int_0^\infty R_s(t)dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \int_0^1 (1-x)^{i-1} x^{n-i} dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} C(i-1, n-i)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i-1)!(n-i)}{n!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=k}^{n} 1/i .$$

Αξιοπιστία R ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος

Για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών, παρακάτω παρατίθεται η επεξήγηση κάποιων εννοιών

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$n \rightarrow$ *Αριθμός εξαρτημάτων του συστήματος*

$k \rightarrow$ *Ελάχιστος αριθμός συνεχόμενων αποτυχημένων εξαρτημάτων τα οποία οδηγούν στην αποτυχία του συστήματος.*

$h(p,k,n) \rightarrow$ *Αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος*

$X_i \rightarrow$ *Κατάσταση του εξαρτήματος i*

$X \rightarrow$ *Διάνυσμα των καταστάσεων των εξαρτημάτων*

Έστω X ένα n-διάνυσμα στο οποίο το εξάρτημα i του X είναι 1 ή 0 ανάλογα αν το εξάρτημα i του συστήματος λειτουργεί ή όχι. Συνεπώς, το X αντιπροσωπεύει την κατάσταση όλων των εξαρτημάτων του συστήματος. Η προέλευση της αναδρομικής φόρμουλας η οποία βασίζεται στην ιδέα του να εξεταστεί η πρώτη ακολουθία των συνεχόμενων στο X διάνυσμα. Εάν ο αριθμός των συνεχόμενων 0 στη πρώτη ακολουθία είναι τουλάχιστον k, τότε το σύστημα αποτυγχάνει. Εάν ο αριθμός των συνεχόμενων 0 στη πρώτη ακολουθία είναι λιγότερο από k, τότε η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με την αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k-από-τα-n΄:F συστήματος όπου n΄ είναι αυστηρά μικρότερο από n. Αφού η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος για όλα τα n<k είναι 1 εξ ορισμού, μπορούμε αναδρομικά να υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος για $n \geq k$.

Η αξιοπιστία ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος είναι:

$$h(p,k,n) = Pr\{\textit{το σύστημα λειτουργεί}\}$$

$$= \sum_{r} \sum_{m} Pr\{\textit{το σύστημα λειτουργεί} \mid R=r,M = m\} Pr\{R=r,M=m\}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-k+1} \sum_{m=r+1}^{r+k-1} Pr\{\textit{το σύστημα λειτουργεί} \mid R = r,M=m\} p^{r}(1-p)^{m-r} + p^{n-k+1}$$

Αφού, το σύστημα έχει λιγότερα από k αποτυχημένα εξαρτήματα για $r > n-k+1,$ έχουμε *Pr{ το σύστημα λειτουργεί | R>n-k+1}=1,* και $Pr\{ R > n-k+1\} = p^{n=k+1}$. Όταν $m \geq r+k,$ το σύστημα έχει ήδη k αποτυχημένα εξαρτήματα, επομένως το σύστημα αποτυγχάνει.

Για $r+1 \leq m \leq r+k-1,$ η πρώτη ακολουθία των αποτυχημένων εξαρτημάτων δεν συνιστά ένα cut set. Επιπλέον, αφού $X_m = 1,$ το γεγονός ότι το συνεχόμενο k-από-τα-n:F σύστημα λειτουργεί είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι ένα συνεχόμενο k-από-τα-(n-):F σύστημα λειτουργεί. Άρα, η αναδρομική φόρμουλα της αξιοπιστίας ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος είναι:

$h(p,2,2), h(p,2,3), \ldots, h(p,2,7).$ Για παράδειγμα, υποθέστε ότι γνωρίζουμε τα ακόλουθα:

$h(p,2,2) = 2p - p^2$

$h(p,2,3) = p + p^2 - p^3$

$h(p,2,4) = 3p^2 - 2p^3$

$h(p,2,5) = p^2 + 3p^3 - 4p^4 + p^5$

$h(p,2,6) = 4p^3 - 2p^4 - 2p^5 + p^6.$ (1)

Τότε, σύμφωνα με τον τύπο $h(p,k,j) = \{ \begin{matrix} 1, 0 \leq j \leq k \\ 0, j < 0 \end{matrix}$, έχουμε

$$h(p,2,7) = \sum_{r=1}^{6} h(p,2,6-r) p^r (1-p) + p^6 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) και (2), παίρνουμε, ύστερα από απλοποίηση,
$h(p,2,7) = p^3 + 6p^4 - 9p^5 + 3p^6$.

TABLE I
Bounds and System Reliability of Consecutive-2-out-of-7:F System

Component Reliability p	Lower Bound $l(p)$	Error (%) in $l(p)$	System Reliability $h(p, 2, 7)$	Error(%) in $u(p)$	Upper Bound $u(p)$
0.00	0.00	—	0.00	—	0.00
0.10	0.00	100 %	0.0015	360 %	0.0069
0.20	0.0022	85 %	0.015	213 %	0.047
0.30	0.018	68 %	0.056	132 %	0.13
0.40	0.069	51 %	0.14	86 %	0.26
0.50	0.18	33 %	0.27	56 %	0.42
0.60	0.35	19 %	0.43	37 %	0.59
0.70	0.57	8.1%	0.62	21 %	0.75
0.80	0.78	3.7%	0.81	8.6%	0.88
0.90	0.94	1.1%	0.95	2.1%	0.97
1.00	1.00	0.0%	1.00	0.0%	1.00

Πίνακας 1: Όρια και αξιοπιστία ενός συνεχόμενου 2-από-τα-7:F συστήματος.

Υπογραφή ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος

Αρχικά, θα παραθέσουμε κάποια παραδείγματα, όπου θα υπολογίζουμε την υπογραφή και άλλα χαρακτηριστικά ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος με την βοήθεια των μεθόδων που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1.

Παράδειγμα 2.1.2 Θεωρούμε ένα συνεχόμενο 2-από-τα-3F σύστημα, με ανεξάρτητες και ισόνομες συνιστώσες. Έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος και X_i, $i=1,2,3$ οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών του, οι οποίοι υποθέτουμε ότι έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής F. Τότε, όλες οι δυνατές μεταθέσεις (3!=6) των X_1, X_2, X_3 δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Διατεταγμένοι χρόνοι ζωής των συνιστωσών	Χρόνος ζωής του συστήματος
$X_1 < X_2 < X_3$	$T = X_{2:3}$
$X_1 < X_3 < X_2$	$T = X_{3:3}$
$X_2 < X_1 < X_3$	$T = X_{2:3}$
$X_2 < X_3 < X_1$	$T = X_{2:3}$
$X_3 < X_1 < X_2$	$T = X_{3:3}$
$X_3 < X_2 < X_1$	$T = X_{2:3}$

Σχήμα 9: *Διατεταγμένοι χρόνοι ζωής.*

Υπενθυμίζουμε ότι το $i-οστό$ στοιχείο του διανύσματος της υπογραφής ισούται με την πιθανότητα να αποτύχει κατά την αποτυχία της $i-οστής$ διατεταγμένης συνιστώσας του, δηλαδή $s_i = P(T = X_{i:n})$. Συνεπώς υπολογίζουμε ότι

$$s_1 = P(T = X_{1:3}) = 0$$

$$s_2 = P(T = X_{2:3}) = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = P(T = X_{3:3}) = \frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

έτσι ώστε το διάνυσμα της υπογραφής του συνεχόμενου 2-από-τα-3:F συστήματος να είναι το $s = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Παράδειγμα 2.1.3 Ας συμβολίσουμε με $T_{2:4}$ τον χρόνο ζωής ενός συνεχόμενου 2-από-τα-4:F συστήματος και $T_{3:4}$ τον χρόνο ζωής του συνεχόμενου 3-από-τα-4:F συστήματος. Τότε οι δυνατές μεταθέσεις (4!=24) των χρόνων ζωής των συνιστωσών τους καθώς και οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής των συστημάτων συνεχόμενου 2-από-τα-4:F και συνεχόμενου 3-από-τα-4:F δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

Διατεταγμένοι χρόνοι ζωής των συνιστωσών	Χρόνος ζωής του συστήματος	
	$T_{2\|4}$	$T_{3\|4}$
$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_1 < X_2 < X_4 < X_3$	$X_{2:4}$	$X_{4:4}$
$X_1 < X_3 < X_2 < X_4$	$X_{3:4}$	$X_{3:4}$
$X_1 < X_3 < X_4 < X_2$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_1 < X_4 < X_2 < X_3$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_1 < X_4 < X_3 < X_2$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_2 < X_1 < X_3 < X_4$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_2 < X_1 < X_4 < X_3$	$X_{2:4}$	$X_{4:4}$
$X_2 < X_3 < X_1 < X_4$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_2 < X_3 < X_4 < X_1$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_2 < X_4 < X_1 < X_3$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_2 < X_4 < X_3 < X_1$	$X_{3:4}$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_1 < X_4 < X_2$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_3 < X_1 < X_2 < X_4$	$X_{3:4}$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_2 < X_4 < X_1$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_2 < X_1 < X_4$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_4 < X_1 < X_2$	$X_{2:4}$	$X_{4:4}$
$X_3 < X_4 < X_2 < X_1$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_1 < X_2 < X_3$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_4 < X_1 < X_3 < X_2$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_4 < X_2 < X_1 < X_3$	$X_{3:4}$	$X_{4:4}$
$X_4 < X_2 < X_3 < X_1$	$X_{3:4}$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_3 < X_1 < X_2$	$X_{2:4}$	$X_{4:4}$
$X_4 < X_3 < X_2 < X_1$	$X_{2:4}$	$X_{3:4}$

Υπολογίζουμε ότι

$s_1 = P(T_{2|4} = X_{1:4}) = 0$ $\qquad$ $s'_1 = P(T_{3|4} = X_{1:4}) = 0$

$s_2 = P(T_{2|4} = X_{2:4}) = \dfrac{12}{4!} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $s'_2 = P(T_{3|4} = X_{2:4}) = 0$

$s_3 = P(T_{2|4} = X_{3:4}) = \dfrac{12}{4!} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $s'_3 = P(T_{2|4} = X_{3:4}) = \dfrac{12}{4!} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

$s_4 = P(T_{2|4} = X_{4:4}) = 0$

$s'_4 = P(T_{2|4} = X_{4:4}) = \dfrac{12}{4!} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

Το διάνυσμα της υπογραφής του συνεχόμενου 3-από-τα-4:F συστήματος να είναι $s_{3|4} = (s'_1, s'_2, s'_3, s'_4) = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Τότε η συνάρτηση επιβίωσης του συνεχόμενου 2-από-τα-4:F συστήματος μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης $P(T > t)\sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{i:n} > t)$ ως εξής:

$$P(T_{2|4} > t) = \sum_{i=1}^{4} s_i P(X_{i:4} > t)$$

$$= s_1 P(X_{1:4} > t) + s_2 P(X_{2:4} > t) + s_3 P(X_{3:4} > t) + s_4 P(X_{4:4} > t)$$

$$= 0P(X_{1:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{2:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{3:4} > t) + 0P(X_{4:4} > t)$$

$$E(T_{3|4}) \cong 83{,}33. = \frac{1}{2}P(X_{2:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{3:4} > t).$$

Επίσης, για την συνάρτηση επιβίωσης του συνεχόμενου 3-από-τα-4:F έχουμε ότι:

$$P(T_{2|4} > t) = \sum_{i=1}^{4} s_i P(X_{i:4} > t)$$

$$= s'_1 P(X_{1:4} > t) + s'_2 P(X_{2:4} > t) + s'_3 P(X_{3:4} > t) + s'_4 P(X_{4:4} > t)$$

$$= 0P(X_{1:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{2:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{3:4} > t) + 0P(X_{4:4} > t)$$

$$= \frac{1}{2}P(X_{3:4} > t) + \frac{1}{2}P(X_{4:4} > t).$$

Σημειώνεται ότι αν $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών και αποτελούν τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κατανομή F τότε

$$P(X_{i:n} < t) = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} \left(F(t)\right)^j (1 - F(t))^{n-j} \equiv \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^{F(t)} x^{i-1}(1-x)^{n-i} dx$$

και

$$E(X_{i:n}) = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (1 - F(t))^{n-j} dt$$

Στην περίπτωση που το τυχαίο δείγμα, δηλαδή οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών, προέρχονται από Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, αποδεικνύεται ότι:

$$E(X_{i:n}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n - j + 1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-i+1}\right).$$

Οπότε ο μέσος χρόνος αποτυχίας του συνεχόμενου 2-από-τα-4:F συστήματος σύμφωνα με την σχέση

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} s_i P(X_{i:n} > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \int_0^{\infty} P(X_{i:n} > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i E(X_{i:n}),$$ θα είναι

$$E(T_{2|4}) = \sum_{I=1}^{4} s_i E(X_{i:4})$$

$$= s_1 E(X_{1:4}) + s_2 E(X_{2:4}) + s_3 E(X_{3:4}) + s4E(X_{4:4})$$

$$= 0 \bullet E(X_{1:4}) + 0 \bullet E(X_{2:4}) + 0 \bullet E(X_{3:4}) + 0 \bullet E(X_{4:4})$$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lambda}\bullet\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\bullet\frac{19}{12}$$

Αν θέσουμε για παράδειγμα $\lambda=\frac{1}{100}$ παίρνουμε την τιμή του μέσου χρόνου αποτυχίας για το συνεχόμενο 2-από-τα-4:F συστήματος: $E(T_{2|4})=100\bullet\frac{19}{12}\cong 158{,}33.$

Αντίστοιχα ο μέσος χρόνος αποτυχίας του συνεχόμενου 3-από-τα-4:F συστήματος θα είναι

$$E(T_{3|4})=\sum_{I=1}^{4}s_i E(X_{i:4})$$

$$=s_1E(X_{1:4})+s_2E(X_{2:4})+s_3E(X_{3:4})+s4E(X_{4:4})$$

$$=0\bullet E(X_{1:4})+\frac{1}{2}\bullet E(X_{2:4})+\frac{1}{2}\bullet E(X_{3:4})+0\bullet E(X_{4:4})$$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lambda}\bullet\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\bullet\frac{5}{6}$$

Θέτοντας $\lambda=\frac{1}{100}$ η τιμή του μέσου χρόνου αποτυχίας για το συνεχόμενο 3-από-τα-4:F σύστημα είναι $E(T_{3|4})\cong 83{,}33$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι το συνεχόμενο 2-από-τα-4:F σύστημα έχει μεγαλύτερο χρόνο ζωής από το 3-από-τα-4:F.

Είναι προφανές όμως ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των συνεχόμενων συστημάτων δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί όταν ο αριθμός των συνιστωσών του συστήματος είναι μεγάλος. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι.

Οι Τριανταφύλλου και Κούτρας (2008) ανέπτυξαν την παρακάτω Πρόταση για τον υπολογισμό του διανύσματος της υπογραφής ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

Πρόταση 2.1.1 Έστω $s_i(n), i=1,2,...,n$ είναι η υπογραφή ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

1. Η διπλή γεννήτρια συνάρτηση των $i\binom{n}{i}s_i(n)$ δίνεται από την σχέση

   $$s=(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7,s_8,s_9,s_{10})=(0,0,\frac{1}{15},\frac{1}{6},\frac{4}{15},\frac{2}{7},\frac{19}{105},\frac{1}{30},0,0).$$

2. Οι ποσότητες $q_i(n)=(n)_i s_i(n), i=1,2,...,n,$ όπου $(n)_i=n(n-1)...(n-i+1)$ ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

   $$\begin{aligned} q_{i+1}(n+1)=2q_{i+1}(n) &\\ &-q_{i+1}(n-1)+2i(q_i(n)-q_i(n-1))\\ &-2(i)_k(q_{i-k+1}(n-k)-q_{i-k+1}(n-k-1))\\ &-(i)_2 q_{i-1}(n-1)+2(i)_{k+1}q_{i-k}(n-k-1))\\ &-(i)_{2k}q_{i-2k+1}(n-2k-1)\end{aligned}$$

   Για $i=0,1,...,n-1$ και $n\geq 2k+2.$

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση της Πρότασης 2.1.1 για τον υπολογισμό της υπογραφής, χρειάζεται ένα σύνολο επαρκών αρχικών συνθηκών οι οποίες είναι:

$$q_i(n)=0 \text{ για } 1\leq i\leq n\leq k-1$$

$$q_i(k)=\{\begin{matrix} 0, & 1\leq i\leq k\text{-}1\\ k!, & i=k\end{matrix}$$

$$q_i(k+1)=\begin{Bmatrix} 0,1\leq i\leq k-i\\ 2k!,i=k\\ (k+1)!-2k!,i=k+1\end{Bmatrix}$$

Για $k+1<n\leq 2k+2$ οι απαραίτητες τιμές των $q_i(n)$ προκύπτουν αν θέσουμε $q_i(n)=0$ εάν $i\leq 0, n\leq 0, i<k$ ή $n<k$ και στις περιπτώσεις αρνητικών τιμών των $q_i(n)$.

Στην συνέχεια ακολουθώντας συγκεκριμένη μεθοδολογία θα προκύψει ένας αναδρομικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό της υπογραφής ενός γραμμικού συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

Η ποσότητα $\overline{s_i}(n)=n!\,s_i(n)$ είναι ένας ακέραιος αριθμός και μετρά πόσες μεταθέσεις μεταξύ των ισοπίθανων μεταθέσεων n! Των χρόνων ζωής $X_1, X_2, \dots, X_n$ των συνιστωσών του συστήματος συμπίπτουν με την αποτυχία κάποιου συνόλου αποκοπής κατά την εμφάνιση του $i-οστού$ διατεταγμένου χρόνου ζωής. Επομένως, πρώτα υπολογίζουμε τους ακέραιους $\overline{s_i}(n)$ και στην συνέχεια το διάνυσμα της υπογραφής $s_i(n)$. Επαληθεύουμε από την σχέση $-(i)_{2k}q_{i-2k+1}(n-2k-1)$ ότι οι ποσότητες $\overline{s_i}(n)$ ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$
\begin{aligned}
\overline{s}_{i+1}(n+1) = (n-1)(2\overline{s}_{i+1}(n) - (n-i-1)\overline{s}_{i+1}(n-1)) \\
+i(2\overline{s}_{i+1}(n) - 2(n-i)\overline{s}_i(n-1) - (i)_2\overline{s}_{i-1}(n-1))\,| \\
+(i)_k(n-i)(2(n-i-1)\overline{s}_{i-k+1}(n-k-1) \\
-\overline{s}_{i-k+1}(n-k) + 2(i-k)\overline{s}_{i-k}(n-k-1) \\
-(n-i-1)(i-k)_k\overline{s}_{i-2k+1}(n-2k-1)
\end{aligned}
$$

Για $i=0,1,\dots,n-1$ και $\mathrm{n}\geq 2\mathrm{k}+2$ με αρχικές συνθήκες

$\overline{s}_i(n)=0$ για $1\leq i\leq n\leq k-1$,

$$\bar{s}_i(k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq \text{i} \leq \text{k-1} \\ k!, & \text{i=k} \end{cases}$$

$$\bar{s}_i(k+1) = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1 \leq i \leq k-i \\ 2k!, i = k \\ (k+1)! - 2k!, i = k+1 \end{array} \right\}$$

Για $k+1 < n \leq 2k+2$ οι απαραίτητες τιμές των $\bar{s}_i(n)$ προκύπτουν αν θέσουμε $\bar{s}_i(n) = 0$ εάν $\text{i} \leq 0$, $\text{n} \leq 0$, i<k ή n<k και στις περιπτώσεις αρνητικών τιμών των $\bar{s}_i(n)$.

Θεωρούμε ένα συνεχόμενο k-από-τα-n:F σύστημα, με ανεξάρτητες και ισόνομες συνιστώσες. Έστω $T_{k|n}$ ο χρόνος ζωής του συστήματος και $X_{i, i=1,2,\ldots,n}$ οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών του, οι οποίοι υποθέτουμε ότι έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής F. Όπως έχει ήδη αναφερθεί η ποσότητα N(j,k,n) απαριθμεί το πλήθος των τρόπων που μπορούν να διαταχθούν σε μια γραμμή n-j συνιστώσες που λειτουργούν και j συνιστώσες που έχουν αποτύχει, έτσι ώστε να μην υπάρχουν k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες. Ο αριθμός αυτών των διατάξεων δίνεται από τον τύπο:

$$N(j,k,m) = \sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{j}{k}\right], n-j+1\right)} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j}.$$

Σύμφωνα με τον τύπο που έδωσε ο Boland (2001) η υπογραφή ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος μπορεί να δοθεί από την σχέση

$$s_i = a_{n-i+1} - a_{n-i} = \frac{r_{n-i+1}(n)}{\binom{n}{n-i+1}} - \frac{r_{n-i}(n)}{\binom{n}{n-i}}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των συνόλων διαδρομής με i-στοιχεία, $r_i(n)$, μπορεί μνα εκφραστεί ως $r_i(n) = \mathrm{N}(n-i,k,n)$, έτσι σύμφωνα με τον Eryilmaz (2010) κάθε συντεταγμένη του διανύσματος της υπογραφής ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος υπολογίζεται από την σχέση

$$s_i = \frac{N(i-1,k,n)}{\binom{n}{n-i+1}} - \frac{N(i,k,n)}{\binom{n}{n-i}} \text{ για } 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}.$$

Εν κατακλείδι, ο Eryilmaz (2010) απέδειξε δύο εκφράσεις για τον υπολογισμό της minimal και maximal υπογραφής ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα παράδειγμα σχετικά με το υπολογισμό της υπογραφής ενός συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος.

Παράδειγμα 2.1.4 Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο, θα υπολογίσουμε το διάνυσμα της υπογραφής ενός συνεχόμενου 3-από-τα-10 συστήματος.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $\mathrm{N}(j,3,10)$ από την σχέση

$$N(j,k,m) = \sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{j}{k}\right],n-j+1\right)} (-1)^i \binom{n-j+1}{i}\binom{n-ik}{n-j}.$$

$$j=0: \ \mathrm{N}(0,3,10) = (-1)^0 \binom{10-0+1}{0}\binom{10-0}{10-0} = \binom{11}{0}\binom{10}{10} = \frac{11!}{11!\cdot 0!}\cdot\frac{10!}{0!\cdot 10!} = 1$$

$$j=1:\ \mathrm{N}(1,3,10) = (-1)^0 \binom{10-1+1}{0}\binom{10-0}{10-1} = \binom{10}{0}\binom{10}{9} = \frac{10!}{0!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$$

$$j=2:\ \mathrm{N}(2,3,10) = (-1)^0 \binom{10-2+1}{0}\binom{10-0}{10-2} = \binom{9}{0}\binom{10}{8} = \frac{9!}{9!\cdot 0!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

$$j=7:\ \mathrm{N}(7,3,10) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \binom{10-7+1}{i}\binom{10-3i}{10-7}$$

$$= (-1)^0\binom{4}{0}\binom{10}{3} + (-1)^1\binom{4}{1}\binom{7}{3} + (-1)^2\binom{4}{2}\binom{4}{3}$$

$$= 120 - 4\cdot 35 + 6\cdot 24 = 4$$

• • •

Συνεπώς,

$$i=1:\ \mathrm{s}_1 = \frac{N(0,3,10)}{\binom{10}{10-1+1}} - \frac{N(1,3,10)}{\binom{10}{10-1}} = \frac{1}{\binom{10}{10}} - \frac{10}{\binom{10}{9}} = \frac{1}{1} - \frac{10}{10} = 1-1 = 0$$

$$i=2:\ \mathrm{s}_2 = \frac{N(1,3,10)}{\binom{10}{10-2+1}} - \frac{N(2,3,10)}{\binom{10}{10-2}} = \frac{10}{\binom{10}{9}} - \frac{45}{\binom{10}{8}} = \frac{10}{10} - \frac{45}{45} = 1-1 = 0$$

$$i=3:\ \mathrm{s}_3 = \frac{N(2,3,10)}{\binom{10}{10-3+1}} - \frac{N(3,3,10)}{\binom{10}{10-3}} = \frac{45}{\binom{10}{8}} - \frac{112}{\binom{10}{7}} = \frac{45}{45} - \frac{112}{120} = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}$$

$$i=4:\ \mathrm{s}_4 = \frac{N(3,3,10)}{\binom{10}{10-3+1}} - \frac{N(4,3,10)}{\binom{10}{10-4}} = \frac{112}{\binom{10}{7}} - \frac{161}{\binom{10}{6}} = \frac{112}{120} - \frac{161}{210} = \frac{14}{15} - \frac{23}{30} = \frac{1}{6}$$

Τελικά προκύπτει:

$$s=(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7,s_8,s_9,s_{10})=(0,0,\frac{1}{15},\frac{1}{6},\frac{4}{15},\frac{2}{7},\frac{19}{105},\frac{1}{30},0,0).$$

2.2 Γενικεύσεις συστημάτων k-από-τα-n:F

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζονται δύο γενικεύσεις του συνεχόμενου k-από-τα-n:F συστήματος, οι οποίες θα μελετηθούν εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια.

2.2.1 R-within-k-out-of-n: F Systems. Μια γενίκευση του συνεχόμενου k-από-τα-n: F συστήματος, αποτελούμενη από n γραμμικώς τακτοποιημένα εξαρτήματα με τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα να αποτυγχάνει όταν υπάρχουν k συνεχόμενα εξαρτήματα τα οποία περικλείουν ανάμεσά τους τουλάχιστον r αποτυχημένα εξαρτήματα. Αυτό το σύστημα πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Griffith.Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει συνεχόμενα k-από-τα-n: F συστήματα αλλά και απλά k-από-τα-n:F συστήματα για $k=r$ και $k=n$,αντίστοιχα, και έχει εφαρμογές στην ποιότητα ελέγχου και στην ανίχνευση ραντάρ.

Ενδεικτικά, αναφέρουμε 2 θεωρήματα σχετικά με τον υπολογισμό επαναληπτικά της αξιοπιστίας ενός r-within-k-out-of-n: F συστήματος.

Θεώρημα 1ο (Sfakianakis):

Έστω $R^L{}_{k,k,n}(p)$ δείχνει την αξιοπιστία της λειτουργίας ενός γραμμικού r-within-k-out-of-n: F συστήματος, όπου το p είναι η κοινή αξιοπιστία των εξαρτημάτων του. Τότε, για $n=r+\lambda, \lambda\le r$, $R^L{}_{k,k,n}(p)$ ικανοποιεί την ακόλουθη επαναληπτική σχέση:

$R^L{}_{k,k,n}(p)$

$$= \sum_{x=1}^{k} R^{L}{}_{x,\lambda,2\lambda}(p) \binom{k-\lambda}{r-x} p^{k-\lambda+r+x} (1-p)^{r-x},$$

όπου $R^{L}{}_{x,\lambda,2\lambda}(p) = 1$, αν $x > \lambda$.

Θεώρημα 2 (Eryilmaz):

Έστω $R^{L}{}_{k,k,n}(p)$ δείχνουν την αξιοπιστία της λειτουργίας ενός γραμμικού r-within-k-out-of-n: F συστήματος, όπου το p είναι η κοινή αξιοπιστία των εξαρτημάτων του. Τότε, για $n \le 2k$, η $R^{L}{}_{k,k,n}(p)$ ικανοποιεί την ακόλουθη επαναληπτική σχέση:

$$R^{L}{}_{r,k,n}(t) = \sum_{s=0}^{\min(n-k,r-1)} P\left(T \begin{matrix} [n-k+1:k] \\ r-s:2k-n \end{matrix} > t \right)$$

$$\bullet\ [R^{*}{}_{s+1,n-k:2(n-k)}(t) - R^{*}{}_{s+1,n-k:2(n-k)}(t)],$$

όπου $R^{*}{}_{s+1,n-k:2(n-k)}(t)$ είναι η αξιοπιστία ενός s-within-consecutive-(n-m)-out-of-2(n-m): F σύστημα με εξαρτήματα $1,2,...,m,\ m+1,...,n$ ενώ η $T \begin{matrix} [i:i+m-1] \\ k:m \end{matrix}$ δείχνει τη ζωή ενός k-από-τα-m: F υποσυστήματος με εξαρτήματα που έχουν χρόνο ζωής $\mathrm{T}_i, T_{i+1}, ..., T_{i+m-1},\ 1 \le i \le n-m+1.$

2.2.2 (n, f, k) System. Ένα (n, f, k) σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα διατεταγμένα γραμμικά ή κυκλικά, ενώ το σύστημα αποτυγχάνει ,εάν και μόνο εάν, υπάρχουν τουλάχιστον f αποτυχημένα εξαρτήματα ή τουλάχιστον k συνεχόμενα αποτυχημένα εξαρτήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαμόρφωση του εν λόγω συστήματος πρωταρχικά εισήχθη από τον Tung ως μια εφαρμογή ενός περίπλοκου υπέρυθρου συστήματος ανίχνευσης και μετέπειτα τράβηξε τους προβολείς της επιστημονικής έρευνας.

Ενδεικτικά, αναφέρουμε 2 θεωρήματα σχετικά με τον υπολογισμό επαναληπτικά της αξιοπιστίας ενός (n, f, k) συστήματος.

Θεώρημα 1º (M.J. Zuo).

Έστω A(i, j, k) είναι το γεγονός που το υποσύστημα (i, j, k) αποτυγχάνει (το υποσύστημα αποτελείται από εξαρτήματα $1,2,...,i$ i $\geq$ j $\geq$ 0, i $\geq k$), ενώ το $Q(i,$ j, k) δηλώνει ότι η αντίστοιχη πιθανότητα $P\left(A\left(i, \text{ j, k}\right)\right)$. Τότε η αναξιοπιστία της λειτουργίας του (i, j, k) συστήματος ικανοποιεί την ακόλουθη επαναληπτική σχέση:

$$
\begin{aligned}
&Q(i, \text{ j, k}) \\
&= p_i Q(i-1, j, k) + q_i Q(i-1, j-1, k) \\
&+[1-Q(i-k-1, j-k, k]p_{i-k} \prod_{l=i-k+1}^{i} q_l,
\end{aligned}
$$

Αν θεωρήσουμε ένα (n, f, k) σύστημα, όπου f > k, ανακαλούμε ότι για την περίπτωση $f \leq k$ το (n, f, k) σύστημα συμπίπτει με το γνωστό f-out-of-n: F σύστημα και τις ιδιότητες αξιοπιστίας του, οι οποίες έχουν μελετηθεί εκτενώς στο παρελθόν. Ο Chang καθιέρωσε μια αναπαράσταση της αλυσίδας Markov ενός (n, f, k) συστήματος που οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας της προαναφερθείσας δομής. Πιο συγκεκριμένα, για το (n, f, k) σύστημα με $f > k$, μας δίνει της δυνατότητα να καθορίσουμε το state space προς επεξεργασία $\{Y(t), t = 0,1...\}$ ως

$$S = \{(i, j): \ 0 \leq \text{i} \leq \text{k-1, i} \leq \text{j} \leq \text{f-1}\} \cup \{s_N\},$$

όπου (i, j) δείχνει ένα working state στο οποίο το σύστημα αποτελούμενο από εξαρτήματα 1,2,..,t έχει j αποτυχημένα εξαρτήματα, τα τελευταία του $i-1$ εξαρτήματα έχουν αποτύχει και το $(t-i)-οστό$ εξάρτημα δουλεύει. Η s_N κατάσταση δείχνει ότι το σύστημα (1,2,…,t) αποτυγχάνει. Τότε το $\{\mathrm{Y}(t)\}$ είναι μια αλυσίδα Markov της μορφής:

$$\Lambda_t(n) = \begin{pmatrix} A^{(1)}_{f\times f} & B^{(1)}_{f\times(f-1)} & 0 & 0 & C^{(1)}_{f\times 1} \\ A^{(2)}_{(f-1)\times f} & 0 & B^{(2)}_{(f-1)\times(f-2)} & 0 & C^{(2)}_{(f-1)\times 1} \\ \vdots & & & & \\ A^{(k)}_{(f-k+1)\times f} & 0 & 0 & B^{(k)}_{(f-k+1)\times(f-k)} & C^{(k)}_{(f-k+1)\times 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{N\times N},$$

όπου,

$$A^{(i)}_{(f-i+1)\times f} = \begin{pmatrix} \underbrace{0\cdots 0}_{i-1} & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{pmatrix},$$

$$B^{(i)}_{(f-i+1)\times(f-i)} = \begin{pmatrix} p & & \\ & \ddots & \\ & & p \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$C^{(i)}{}_{(f-i+1)\times(f-i)} = (0\cdots 0\ \mathrm{q})',\ i = 1, 2, \dots, k-1$

Και $N = (2f - k + 1)k/2 + 1$.

Όπως απέδειξε ο Κούτρας, η αξιοπιστία R_n της δομής μπορεί να εκφραστεί ως :

$\pi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)'$,

$u = (1, 1, \dots, 1, 0)'$,

$e_N = (0, 0, \dots, 0, 1)'$.

Ωστόσο, εφαρμόζοντας την από πάνω έκφραση που πάρθηκε από τον πίνακα μετάβασης ενός (n, f, k) συστήματος, κάποιος μπορεί εύκολα να υπολογίσει την συνάρτηση αξιοπιστίας της προαναφερθείσας δομής.

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες πιθανότητες:

$i = 1, 2, \dots, n.$

$\theta_m^{(1)} = P(X_1 = \cdots = X_m = 1),$

Για $m \geq 1$,

όπου X_i είναι η κατάσταση του $\iota - o\sigma\tau o\acute{\upsilon}$ εξαρτήματος $\left(X_i \in \{0,1\}\right)$, για $i = 1, 2, \ldots, n.$

Κεφάλαιο 3

Το τρίτο μέρος της παρούσας πτυχιακής έχει ως θέμα την παρουσίαση του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση του προγράμματος αυτού. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στην επιλογή του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε καθώς και στα αποτελέσματα που παρήχθησαν.

3.1 Ανάλυση Αλγορίθμου

Το σύστημα το οποίο χρησιμοποιούμε για την κατασκευή του αλγορίθμου ονομάζεται Combined m_1-consecutive- k_1-out-of-n and m_2-consecutive-k_2 -out-of-n. Ανήκει στην οικογένεια των συνεχόμενων k-από-τα-n:F συστημάτων.

Σαν δεδομένα εισόδου ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τα εξής:

- m_1: το οποίο δείχνει το πλήθος των συνεχόμενων k_1 αριθμών.
- k_1: το οποίο δείχνει το πλήθος των συνεχόμενων αριθμών μέσα στην m_1-αδα.
- m_2: το οποίο δείχνει το πλήθος των συνεχόμενων k_2 αριθμών.
- k_2: το οποίο δείχνει το πλήθος των συνεχόμενων αριθμών μέσα στην m_2-αδα.
- n: Τυχαίοι παραγόμενοι αριθμοί στο διάστημα (0,1). Αποτελούν τις μονάδες του συστήματος και η καθεμιά εξ αυτών έχει ένα τυχαίο χρόνο ζωής μέχρι να πάψει να λειτουργεί.
- F: Αποτελεί τον αριθμό των επαναλήψεων.

Πότε χαλάει το σύστημα;

Το παραπάνω σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν:

- Τουλάχιστον m_1 συνεχόμενες k_1 μονάδες.

  Ή

- Τουλάχιστον m_2 συνεχόμενες k_2 μονάδες.

Πάντα ισχύουν οι εξής συνθήκες:

- $m_1 \geq m_2$
- $k_1 \leq k_2$

ΣΚΟΠΟΣ

Όταν ικανοποιηθεί ένα από τα δυο υπό-κριτήρια , τότε το σύστημα παύει να λειτουργεί. Στη συνέχεια, η θέση της μονάδας που ήταν υπεύθυνη για τον τερματισμό του συστηματος εκείνη την χρονική στιγμή αυξάνεται κατά 1 σε κάθε επαναληψη σε ένα αρχικά άδειο πίνακα, ο οποίος είναι ο πίνακας της υπογραφής του διανύσματος. Με το πέρας των F επαναλήψεων ο πίνακας αυτός έχει ένα αριθμό από τις μοιραίες χρονικα μονάδες που οδηγησαν στο τερματισμό του συστηματος και αθροίζει ίσο με τον αριθμό των επαναλήψεων. Τελικός σκοπός του αλγορίθμου είναι να διαιρέσει τα στοιχεία του πίνακα αυτού δια τον αριθμό επαναλήψεων ώστε να προκύψει ο τελικός πίνακας της υπογραφής του διανύσματος.

Αλγόριθμος

Το πρόγραμμα μας ζητάει από τον χρήστη να ορίσει τα δεδομένα εισόδου που περιγράφονται παραπάνω ώστε να αρχίσει η εκτέλεσή του. Εφόσον οριστούν σωστά οι παράμετροι από τον χρήστη, προχωράμε στην παραγωγή των n τυχαίων χρονών ζωής των υπομοναδων. Έπειτα, οι χρόνοι ζωής ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά χωρίς να επηρεαστεί η τοπική τους θέση. Για παράδειγμα, έχουμε τους εξης τυχαίους χρόνους:

UnitLifeTimes =
0.5470 ->1
0.2963 ->2
0.7447 ->3
0.1890 ->4
0.6868 ->5
0.1835 -> 6
0.3685 ->7
0.6256 ->8
0.7802 ->9
0.0811 ->10

Στην συνέχεια, ταξινομούνται με αύξουσα σειρά λαμβάνοντας υπόψιν τους χρόνους ζωής αλλά με γνώμονα την τοπική τους θέση. Έτσι, ο μικρότερος χρόνος ζωής βρίσκεται στη θέση 10 και ταξινομείται πρώτος και με την ιδιά λογική καταλήγουμε στη σειρά αυτή:

10 -> 6 -> 4 -> 2-> 7 -> 1 -> 8 -> 5 ->3 -> 9

Από την στιγμή που έχουν παραχθεί και ταξινομηθεί οι υπομοναδες, σκοπός μας είναι να βρούμε σε κάθε επανάληψη ποιο υπό-κριτήριο ενεργοποιείται ώστε να έχουμε τερματισμό του συστηματος για την επαναληψη αυτή. Συνεπώς, θα πρέπει να βρούμε είτε m_1 συνεχόμενες k_1 μονάδες **ή** m_2 συνεχόμενες k_2 μονάδες. Για χάριν συντομίας, θα χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω τυχαίους αριθμούς για να δούμε ποιο υπό-κριτήριο πληρείται στην περίπτωση μας. Έτσι με δεδομένα εισόδου τα παρακάτω έχουμε:

$m_1 = 3$

$k_1 = 2$

$m_2 = 2$

$k_2 = 4$

Σε κάθε επανάληψη θα πρέπει να βρούμε είτε μια τριάδα συνεχομένων δυάδων θέσεων ή μια δυάδα συνεχομένων τετράδων θέσεων. Στην ταξινομημένη μας σειρά των θέσεων, αρχίζουμε πάντα με την μονάδα με τον μικρότερο χρόνο ζωής και στη συνέχεια κοιτάμε τους προηγουμένους της αριθμούς. Αν υπάρχουν οι συνεχόμενες θέσεις που ζητείται ανάλογα με τα δεδομένα εισόδου προκειμένου να ικανοποιείται κάποιο από τα δυο υπό-κριτήρια, τότε βρίσκουμε αυτές τις συνεχόμενες m-άδες συνεχομένων k θέσεων και δεν της ξανά χρησιμοποιούμε για την επαναληψη αυτή. Για να γίνει κατανοητό αυτό, θα δείξουμε ένα παράδειγμα υλοποίησης.

Με τα παραπάνω δεδομένα εισόδου και της ταξινομημένης σειράς, αρχίζουμε με την θέση 10 η οποία όπως προ είπαμε έχει τον μικρότερο χρόνο ζωής. Ελέγχουμε για προηγούμενες διάδοχες θέσεις κάτι για το οποίο είναι αδύνατο διότι η θέση 10 είναι η πρώτη στην ταξινομημένη σειρά και συνεπώς δεν διαθέτει προηγούμενες θέσεις. Δεδομένου ότι έχει τον μικρότερο χρόνο ζωής, παύει να λειτουργεί έπειτα από λίγο χρόνο και προχωράμε έτσι στην επόμενη θέση στην ταξινομημένη σειρά. Αυτή είναι η θέση 6. Ελέγχουμε για προηγούμενες διάδοχες θέσεις και όπως θα διαπιστώσουμε δεν υπάρχει κάποια καθότι η μοναδική προηγουμένη θέση είναι η 10 αλλά δεν είναι η διάδοχη της. Προφανώς η θέση 6 παύει να λειτουργεί Μετα το πέρας του χρόνου ζωής της. Συνεχίζουμε στην θέση 4. Οι προηγούμενες θέσεις της είναι η 6 και 10 αλλά καμμιά δεν αποτελεί διάδοχη της οπότε προχωράμε στην επόμενη της, μιας και αυτή παύει να λειτουργεί. Στην συνέχεια, έχουμε την θέση 2 η οποία όπως θα διαπιστώσουμε δεν έχει κάποια διαδοχική θέση σχετικά με τις προηγούμενες της οπότε περνάμε στην επόμενη. Επόμενη στην σειρά θέση είναι η 7. Εδώ θα παρατηρήσουμε ότι βρήκαμε την πρώτη διαδοχική δυάδα του υπό-κριτήριου καθώς η θέση 6 αποτελεί διαδοχική της 7. Οπότε η δυάδα (6,7) είναι η πρώτη δυάδα που βρήκαμε και δεσμεύεται ώστε να μην μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους δυο αριθμούς ώστε να σχηματίσουμε μετέπειτα διαδοχικές δυάδες θέσεων. Μετέπειτα, εξετάζουμε την θέση 1 με τις προηγούμενες της σχετικά με το αν έχει διαδοχική θέση. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η θέση 2 είναι διαδοχική της οπότε βρήκαμε και την δεύτερη συνεχομένη δυάδα (1,2) οπού και την δεσμεύουμε. Η θέση 8 έχει διαδοχική την θέση 7 αλλά όπως είπαμε η θέση 7 έχει δεσμευθεί καθώς έχει βρεθεί διάδοχη με την θέση 6 προγενέστερα. Προχωράμε στην θέση 5, η οποία έχει διαδοχική προηγουμένη θέση η οποία είναι η θέση 4. Επομένως, βρήκαμε και την τρίτη συνεχομένη δυάδα θέσεων (4,5) και έχουμε την ικανοποίηση του ικανοποίηση. Το σύστημα παύει να λειτουργεί για αυτή την επανάληψη διότι βρέθηκαν οι τρεις διαδοχικές δυάδες συνεχομένων θέσεων (6,7), (1,2) και (4,5). Η μοιραία μονάδα που προκάλεσε χρονικά εκείνη την στιγμή την παύση του συστήματος είναι η 5 δηλαδή η 8^{η} χρονικά μονάδα. Για αυτό τον λόγο, στον αρχικό πίνακα των διανυσμάτων αυξάνουμε κατά 1 την θέση s_8 για την συγκεκριμένη επανάληψη. Αυτή η διαδικασία που περιεγράφηκε ισχύει για κάθε επανάληψη με τελικό σκοπό να βγει ο τελικός πίνακας της υπογραφής του διανύσματος.

3.2 Βήματα Αλγόριθμού.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται τα βήματα υλοποίησης του αλγορίθμου καθώς και το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την περάτωση του.

- **Βήμα 1^{ο} :** Εισαγωγή των παραμέτρων εισόδου από τον χρήστη.
- **Βήμα 2^{ο} :** Παραγωγή υπό-μονάδων του συστήματος με τυχαίους χρόνους ζωής στο διάστημα (0,1).
- **Βήμα 3^{ο} :** Βρίσκουμε τις συνεχόμενες αποτυχημένες θέσεις ανάλογα με τα δεδομένα εισόδου.
- **Βήμα 4^{ο} :** Επιλογή υπό-κριτηρίου τερματισμού του συστήματος.
- **Βήμα 5^{ο} :** Εύρεση του τελικού διανύσματος της υπογραφής.

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MATLAB, καθώς έχει τις απαραίτητες ρουτίνας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περάτωση του αλγορίθμου. Με αυτόν τον σκοπό, χρησιμοποιήθηκαν 2 m-files για τον αλγόριθμο. Το Cofinal αφορούσε το πως παράγονται οι υπό-μονάδες με τους τυχαίους χρόνους ζωης, τα δεδομένα εισόδου, την επιλογή του υπό-κριτηρίου για τον τερματισμό του συστήματος.
Το m-file find_cons αφορούσε στην εύρεση των συνεχομένων αποτυχημένων θέσεων ανάλογα με τους τυχαίους χρόνους ζωής τους βάση των δεδομένων εισόδου του χρήστη.

3.3 Παρουσίαση νέων αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα υπό-ενότητα γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων που παρήχθησαν από τον αλγόριθμο σχετικά με το σύστημα $\mathit{Combined}\ \mathrm{m}_{f_1} - \mathit{con}\mathrm{secutive} - \mathrm{k}_1 - \mathit{out} - \mathit{of} - n$ and $\mathrm{m}_2 - \mathit{con}\mathrm{sec}\mathit{utive} - k_2 - \mathit{out} - \mathit{of} - n$. Επιπροσθέτως, γίνεται αναφορά στην σημασία των αποτελεσμάτων καθώς και σύγκριση των παραχθέντων αποτελεσμάτων με πραγματικά.
Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε μια πλειάδα διαφορετικών δεδομένων εισόδου ώστε να εξαχθούν όσο το δυνατόν περισσότερα αποτελέσματα με σκοπό την καλύτερη επεξεργασία τους. Με αυτό τον σκοπό παρουσιάζεται ο κάτωθι πίνακας που συνοψίζει τα δεδομενα εισόδου αυτά:

m_1	k_1	m_2	k_2	n	F
1	1	1	1	Από 6 έως 18	50.000
2	1	1	2	Από 6 έως 18	50.000
2	1	1	3	Από 6 έως 18	50.000
2	2	1	4	Από 6 έως 18	50.000
2	2	2	3	Από 6 έως 18	50.000
3	2	2	3	Από 6 έως 18	50.000
4	2	2	3	Από 6 έως 18	50.000
4	2	2	4	Από 8 έως 18	50.000
4	3	2	4	Από 8 έως 18	50.000
4	3	2	5	Από 10 έως 18	50.000
4	3	3	4	Από 12 έως 18	50.000
4	3	2	6	Από 12 έως 18	50.000

Πίνακας 2: Δεδομένα εισόδου που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των αποτελεσμάτων.

Προκειμένου να καταστεί σαφής ο υπολογισμός της υπογραφής του διανύσματος περιγράφονται κάποια αποτελέσματα που παρήχθησαν από τα άνωθι δεδομένα εισόδου. Επιλέχθηκε ως παράδειγμα τα δεδομένα εισόδου με:

- $m_1 = 4$
- $k_1 = 2,3$
- $m_2 = 2,3$
- $k_2 = 3,4,5,6$
- Ο αριθμός των υπομοναδων είναι από 8 έως 18. Επιπλέον, το πλήθος των επαναλήψεων F είναι 50.000

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν καθώς ισχύει ο γενικός κανόνας $m_1 \geq m_2$ *και* $\mathrm{k}_1 \leq k_2$.

	S								
n	(m_1,k_1,m_2,k_2)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	1
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0.0350	0.0252	0.9398
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	1

Πίνακας 3: Η υπογραφή του συστήματος για n=8.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα η υπογραφή του συστηματος *Combined* 4- consecutive- 2- out-of- 8:F and 2- consecutive- 4- out-of- 8:F καθώς και του Combined 4-consecutive- 3 – out – of-8:F and 2-consecutive- 4 – out – of-8:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,1). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας του είναι ίση με 100%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4- consecutive-2-out-of-8: F and 2-consecutive-out-of-3: F είναι S= (0,0,0,0,0, 0.0350, 0.0252, 0.9398). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 6ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 3,5%. Με το που διακόπτεται η λειτουργία της 7ης διατεταγμένης μονάδας είναι 2,52% ενώ με το που διακόπτεται η 8η διατεταγμένη μονάδα η πιθανότητα είναι 93,98%.

S										
n	(m_1,k_1,m_2,k_2)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0.1918	0.5065	0.3016
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.1919	0.5080	0.3001
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.1097	0.3834	0.5068
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Πίνακας 4: Η υπογραφή του συστηματος για n=10.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-2-out-of-10:F and 2-consecutive-3-out-of-10:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0.1918, 0.5065, 0.3016). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 19,18%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 50,65%. Τέλος, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα του συστηματος είναι 30,16%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-2-out-of-10:F and 2-consecutive-4-out-of-10:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.1919, 0.5080, 0.3001). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η $8^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 19,19%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 50,80% ενώ για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα του συστηματος είναι 30,01%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-10:F and 2-consecutive-4-out-of-10:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0.1097,0.3834,0.5068). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η $8^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 10,97%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 38,34% ενώ για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα του συστήματος είναι 50,68%.

Τέλος, η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-10:F and 2-consecutive-5-out-of-10:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 100%.

						S							
n	(m_1,k_1,m_2,k_2)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0,0904	0,3508	0,4096	0,1430	0,0062
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0,0934	0,3449	0,4124	0,1425	0,0068
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0,0075	0,0323	0,0567	0,0377	0,8657
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0233	0,0636	0,9130
	(4,3,3,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	(4,3,2,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Πίνακας 5: Η υπογραφή του συστήματος για n=12.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-12:F and 2-consecutive-3-out-of-12:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0.0904,0.3508,0,4096,0.1430,0.0062). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 9,04%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 35,08%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 40,96% ενώ για την 11η είναι 14,30%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12 διατεταγμένη μονάδα είναι 0,62%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-2-out-of-12:F and 2-consecutive-4-out-of-12:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0904, 0.3449, 0.4124, 0.1425, 0.0068). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 9,34%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 34,49%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 41,24% ενώ για την 11η είναι 14,25%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12 διατεταγμένη μονάδα είναι 0,68%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-12:F and 2-consecutive-4-out-of-12:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.075, 0.0323, 0.0567, 0.0377, 0.8657). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 0,75%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 3,23%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 5,67% ενώ για την 11η είναι 3,77%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12 διατεταγμένη μονάδα είναι 86,57.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-12:F and 2-consecutive-5-out-of-12:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0233, 0.0636, 0.9130). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 10ης διατεταγμένης μονάδας είναι 2,33%. Η πιθανότητα για την 11η διατεταγμένη μονάδα είναι της τάξεως του 6,336% ενώ η 12η διατεταγμένη μονάδα έχει πιθανότητα 91,30%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-12:F and 3-consecutive-4-out-of-12:F καθώς και του του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-12:F and 2-consecutive-6-out-of-12:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1) Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι 100%.

n	(m_1,k_1,m_2,k_2)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0.0700	0.2814	0.4095	0.2114	0.0278	0
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.0666	0.2844	0.4066	0.2157	0.0267	0
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.0007	0.0034	0.0074	0.0093	0.2440	0.7351
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0024	0.0106	0.2451	0.7419
	(4,3,3,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2374	0.7626
	(4,3,2,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2406	0.7594

Πίνακας 6: Η υπογραφή του συστήματος για n=13

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-13:F and 2-consecutive-3-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0700, 0.2814, 0.4905, 0.2114, 0.0278, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 7%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 28,14%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 40,95% ενώ για την 11η είναι 21,14%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 2,78%. Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-13:F and 2-consecutive-4-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0666, 0.2844, 0.4066, 0.2157, 0.0267, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 6,66%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 28,44%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 40,66% ενώ για την $11^{η}$ είναι 21,57%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 24,40%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-13:F and 2-consecutive-4-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0007, 0.0034, 0.0074, 0.0093, 0.2440, 0.7351). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 0,07%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 0,34%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 7,4% ενώ για την $11^{η}$ είναι 9,3%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 24,40% ενώ για την $13^{η}$ είναι 73,51%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-13:F and 2-consecutive-5-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0024, 0.0106, 0.2451, 0.7419). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $10^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 2,4%. Η πιθανότητα για την $11^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι της τάξεως του 1,06 % ενώ η $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα έχει πιθανότητα 24,51% ενώ η $13^{η}$ είναι ιση με 74,19%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-13:F and 3-consecutive-4-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.2374, 0.7626) Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 23,74% ενώ η $13^{η}$ είναι 76,26 %.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-13:F and 2-consecutive-6-out-of-13:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.2406, 0.7594)

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 24,06% ενώ η $13^{η}$ είναι 75,94%.

								S							
n	(m_1,k_1,m_2,k_2)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0.0502	0.2289	0.3882	0.2665	0.0640	0.0022	0
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.0499	0.2281	0.3882	0.2692	0.0616	0.0029	0
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0900	0.3482	0.5618
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0870	0.3502	0.5628
	(4,3,3,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0898	0.3519	0.5583
	(4,3,2,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0882	0.3469	0.5649

Πίνακας 7: Η υπογραφή του συστήματος για n=14.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-14:F and 2-consecutive-3-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0502, 0.2289, 0.3882, 0.2665, 0.0640, 0.0022, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 5,02%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 22,89%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 38,82% ενώ για την $11^{η}$ είναι 26,65%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 6,4% ενώ για την $13^{η}$ είναι 0,22%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-14:F and 2-consecutive-4-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0499, 0.2281, 0.3882, 0.2692, 0.0616, 0.0029, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 4,99%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 22,81%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 38,82% ενώ για την $11^{η}$ είναι

26,92%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 6,16% ενώ για την $13^{η}$ είναι 0,29%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-14:F and 2-consecutive-4-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0900, 0.3482, 0.5618). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 9%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 43,82%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 56,18%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-14:F and 2-consecutive-5-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0870, 0.3502, 0.5628). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 8,7%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 35,02%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 56,28%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-14:F and 3-consecutive-4-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0898, 0.3519, 0.5583). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 8,98%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 35,19%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 55,83% .

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-14:F and 2-consecutive-6-out-of-14:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0882, 0.3469, 0.5649). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 8,82%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση ιση με 34,69%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 56,49%.

									S							
n	(m1,k1,m2,k2)	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)	S(5)	S(6)	S(7)	S(8)	S(9)	S(10)	S(11)	S(12)	S(13)	S(14)	S(15)
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0,0384	0,01827	0,3541	0,03076	0,01073	0,01	0	0
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0,0369	0,1831	0,352	0,03086	0,1092	0,0101	0	0
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0387	0,1935	0,4053	0,3625
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0401	0,1951	0,4062	0,3586
	(4,3,3,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0402	0,1923	0,4071	0,3604
	(4,3,2,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0396	0,1923	0,4074	0,3607

Πίνακας 8: Η υπογραφή του συστήματος για n=15.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-15:F and 2-consecutive-3-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0384, 0.1827, 0.3541, 0.3076, 0.1073, 0.0100, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 3,84%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 18,27%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 35,41% ενώ για την 11η είναι 30,76%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 10,73% ενώ για την 13η είναι 1%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-15:F and 2-consecutive-4-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0.0369,0.1831, 0.3520, 0.3086, 0.1092, 0.101, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 3,69%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 18,31%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 35,20% ενώ για την 11η είναι 30,86%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 10,92% ενώ για την 13η είναι 10,1%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-15:F and 2-consecutive-4-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0387, 0.1935, 0.4053, 0.3625). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 3,87%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 13,35%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 40,53% ενώ για την $15^{η}$ είναι 36,25%.
Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-15:F and 2-consecutive-5-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0401, 0.1951, 0.4062,0.3586). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 4,01%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 19,51%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 40,62% ενώ για την $15^{η}$ είναι 35,86%.
Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-15:F and 3-consecutive-4-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0402 , 0,1923, 0,4071, 0,3604). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 4,02%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 19,23%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 40,71% ενώ για την $15^{η}$ είναι 36,04%.
Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-15:F and 2-consecutive-6-out-of-15:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0396, 0.1923 , 0.4074, 0.3607). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 3,96%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 19,23%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 40,74% ενώ για την $15^{η}$ είναι 36,07%.

										S							
n	(m1,k1,m2,k2)	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
	(4,2,2,3)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0294**	**0,1481**	**0,3134**	**0,3288**	**0,154**	**0,0257**	**0,0005**	**0**	**0**
	(4,2,2,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0299**	**0,1514**	**0,3138**	**0,3232**	**0,155**	**0,0258**	**0,0008**	**0**	**0**
	(4,3,2,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0208**	**0,1139**	**0,2986**	**0,3618**	**0,2049**
	(4,3,2,5)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0209**	**0,1146**	**0,2997**	**0,3587**	**0,2061**
	(4,3,3,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,021**	**0,1141**	**0,2998**	**0,3598**	**0,2053**
	(4,3,2,6)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,02**	**0,1129**	**0,301**	**0,363**	**0,2031**

Πίνακας 9: Η υπογραφή του συστήματος για n=16.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-16:F and 2-consecutive-3-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0294, 0.1481, 0.3134, 0.3288, 0.1540, 0.0257, 0.0005 , 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,94%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 14,81%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 31,34% ενώ για την $11^{η}$ είναι 32,88%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 15,40% ,για την $13^{η}$ είναι 2,57% ενώ για την $14^{η}$ είναι 0,005%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-16:F and 2-consecutive-4-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0299, 0.1514 , 0.3138 , 0.3232 , 0.1550 , 0.0258 , 0.0008, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $8^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,99%. Η πιθανότητα για την $9^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 15,14%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την $10^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 31,38% ενώ για την $11^{η}$ είναι 32,32%. Τέλος, η πιθανότητα για την $12^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 15,50% , για την $13^{η}$ είναι 2,58% ενώ για την $14^{η}$ είναι 0,008%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-16:F and 2-consecutive-4-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.0208, 0.1139, 0.2986, 0.3618, 0.2049). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,08%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 11,39%. Τέλος, η πιθανότητα για την

14η διατεταγμένη μονάδα είναι 29,86% , για την 15η είναι 36,18% ενώ για την 16η είναι 20,49%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-16:F and 2-consecutive-5-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0209, 0.1146, 0.2997, 0.3587, 0.2061). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,09%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 11,46%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 29,97% , για την 15η είναι 35,87% ενώ για την 16η είναι 20,61%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-16:F and 3-consecutive-4-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0210, 0.1141, 0.2998, 0.3598, 0.2053). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,10%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 11,41%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 29,98% , για την 15η είναι 35,98% ενώ για την 16η είναι 20,53%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-16:F and 2-consecutive-6-out-of-16:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0200, 0.1129, 0.3010, 0.3630, 0.2031). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 11,29%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 30,10% , για την 15η είναι 36,30% ενώ για την 16η είναι 20,31%.

n	(m1,k1,m2,k2)	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17
	(4,2,2,3)	0	0	0	0	0	0	0	0,0239	0,1223	0,2769	0,328	0,1947	0,0504	0,0038	0	0	0
	(4,2,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0,0225	0,1212	0,2759	0,3299	0,1948	0,0523	0,0035	0	0	0
	(4,3,2,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0122	0,0727	0,217	0,3388	0,2741	0,0852
	(4,3,2,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0106	0,0714	0,2154	0,3385	0,2782	0,858
	(4,3,3,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0123	0,0716	0,22	0,339	0,2729	0,0842
	(4,3,2,6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,012	0,0718	0,2169	0,3411	0,2738	0,0845

Πίνακας 10: Η υπογραφή του συστηματος για n=17.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-17:F and 2-consecutive-3-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0239, 0.1223, 0.2769, 0.328, 0.1947, 0.0504, 0.0038, 0, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,39%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 12,23%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 27,69% ενώ για την 11η είναι 32,8%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 19,47% ,για την 13η είναι 5,04% ενώ για την 14η είναι 0,38%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-17:F and 2-consecutive-4-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0225, 0.1212 , 0.2759 , 0.3299 , 0.1948 , 0.0523 , 0.0035, 0, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 2,25%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 12,12%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 27,59% ενώ για την 11η είναι 32,99%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 19,48% , για την 13η είναι 5,23% ενώ για την 14η είναι 0,35%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-3-out-of-17:F and 2-consecutive-4-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0122, 0.0727, 0.217, 0.3388, 0.2741, 0.0852). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 1,22%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 7,27%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 21,7% , για την $15^{η}$ είναι 33,88% ,για την $16^{η}$ είναι 27,41% ενώ για την $17^{η}$ 8,52%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-17:F and 2-consecutive-5-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0106, 0.0714, 0.2154, 0.3385, 0.2782, 0.0858). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 1,06%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 7,14%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 21,54% , για την $15^{η}$ είναι 33,85% ,για την $16^{η}$ είναι 27,82% ενώ για την $17^{η}$ 8,58%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-17:F and 3-consecutive-4-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0123, 0.0716, 0.222, 0.339, 0.2729, 0.0842). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 1,23%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 7,16%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 22,2% , για την $15^{η}$ είναι 33,9% ,για την $16^{η}$ είναι 27,29% ενώ για την $17^{η}$ 8,42%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-17:F and 3-consecutive-6-out-of-17:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.012, 0.0718, 0.2169, 0.3411, 0.2738, 0.0845). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $12^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 1,2%. Η πιθανότητα για την $13^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 7,18%. Τέλος, η πιθανότητα για την $14^{η}$ διατεταγμένη μονάδα είναι 21,69% , για την $15^{η}$ είναι 34,11% ,για την $16^{η}$ είναι 27,38% ενώ για την $17^{η}$ 8,45%.

n	*(m1,k1,m2,k2)*	*S1*	*S2*	*S3*	*S4*	*S5*	*S6*	*S7*	*S8*	*S9*	*S10*	*S11*	*S12*	*S13*	*S14*	*S15*	*S16*	*S17*	*S18*
	(4,2,2,3)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0185**	**0,1007**	**0,2417**	**0,3178**	**0,229**	**0,0813**	**0,0107**	**0,0003**	**0**	**0**	**0**
	(4,2,2,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0174**	**0,0983**	**0,2455**	**0,3196**	**0,2284**	**0,0796**	**0,0109**	**0,0003**	**0**	**0**	**0**
	(4,3,2,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0066**	**0,047**	**0,1566**	**0,2936**	**0,3083**	**0,1583**	**0,0295**
	(4,3,2,5)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0072**	**0,0446**	**0,1557**	**0,2974**	**0,3108**	**0,1561**	**0,0282**
	(4,3,3,4)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0066**	**0,0456**	**0,1543**	**0,296**	**0,3129**	**0,1558**	**0,0289**
	(4,3,2,6)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0074**	**0,045**	**0,1558**	**0,2909**	**0,3152**	**0,1552**	**0,305**

Πίνακας 11: Η υπογραφή του συστηματος για n=18.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-18:F and 2-consecutive-3-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0185, 0.1007, 0.2417, 0.3178, 0.229, 0.0813, 0.0107, 0.0003, 0, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ίση με 1,85%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 10,07%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ίση με 24,17% ενώ για την 11η είναι 31,78%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 2,29% ,για την 13η είναι 8,13% ,για την 14η είναι 1,07% ενώ για την 15η είναι 0,03%.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 4-consecutive-2-out-of-18:F and 2-consecutive-4-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0, 0.0174, 0.0983 , 0.2455 , 0.3196 , 0.2284 , 0.0796 , 0.0109, 0,0003, 0, 0, 0). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 8ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 1,74%. Η πιθανότητα για την 9η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 9,83%. Επιπλέον, η πιθανότητα για την 10η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 24,55% ενώ για την 11η είναι 31,96%. Τέλος, η πιθανότητα για την 12η διατεταγμένη μονάδα είναι 22,84% , για την 13η είναι 7,96% ,για την 14η είναι 1,09% ενώ για την 15η είναι 0,03%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-18:F and 2-consecutive-4-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.066, 0.047, 0.1566, 0.2936, 0.3083, 0,1583, 0.0295). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 6,6%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 4,7%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 15,66% , για την 15η είναι 29,36% ,για την 16η είναι 30,83% ενώ για την 17η είναι 15,83% και την 18η είναι 2,95%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-18:F and 2-consecutive-5-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0072, 0.0446, 0.1557, 0.2974, 0.3108, 0,1561, 0.0282). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 7,2%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 4,46%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 15,57% , για την 15η είναι 29,74% ,για την 16η είναι 31,08% ενώ για την 17η είναι 15,61% και την 18η είναι 2,82%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-18:F and 3-consecutive-4-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0066, 0.0456, 0.1543, 0.296, 0.3129, 0,1558, 0.0289). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 6,6%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 4,56%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 15,43% , για την 15η είναι 29,6% ,για την 16η είναι 31,29% ενώ για την 17η είναι 15,58% και την 18η είναι 2,89%.

Η υπογραφή του συστηματος Combined 4-consecutive-3-out-of-18:F and 2-consecutive-6-out-of-18:F είναι S=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0.0074, 0.045, 0.1558, 0.2909, 0.3152, 0,1552, 0.305). Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστηματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 12ης διατεταγμένης μονάδας είναι ιση με 7,4%. Η πιθανότητα για την 13η διατεταγμένη μονάδα είναι ιση με 4,5%. Τέλος, η πιθανότητα για την 14η διατεταγμένη μονάδα είναι 15,58% , για την 15η είναι 29,09% ,για την 16η είναι 31,52% ενώ για την 17η είναι 15,52% και την 18η είναι 3,05%.

Κεφάλαιο 4

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται επαλήθευση της ορθότητας του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των νέων αποτελεσμάτων. Για να γίνει εφικτό αυτό, παρουσιάζονται ήδη γνωστά αποτελέσματα τα οποία αποτελούν την αφορμή για να συγκριθούν με τα νέα. Επίσης, γίνεται και μια σύνοψη της υπάρχουσας πτυχιακής εργασίας.

4.1 Επαλήθευση ορθότητας αλγορίθμου

Στην υπό-ενότητα αυτή γίνεται μια προσπάθεια επαλήθευσης της ορθότητας του αλγορίθμου. Για αυτό τον σκοπό, χρησιμοποιείται ο κάτωθι πίνακας, ο οποίος περιέχει τις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής αλλα και τις πραγματικές τιμές αυτής.
Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων της υπογραφής χρησιμοποιήθηκαν ως δεδομενα εισόδου τα εξής:

- $m_1 = 1$
- $k_1 = 2,3,4,5,6,7,8$
- $m2 = 1$
- $k2 = 8$
- $n = 8$
- $F = 50.000$

m1,k1,m2,k2	**Τιμές Προσομοίωσης Υπογραφής**	**Πραγματικές Τιμές Υπογραφής**
(1,2,1,8)	0	0
	0.2479	0,25
	0.3926	0,392857143
	0.2874	0,285714286
	0.0720	0,071428571
	0	0
	0	0
	0	0
(1,3,1,8)	0	0
	0	0
	0.1083	0,1071
	0.2469	0,25
	0.3597	0,3571
	0.2498	0,25
	0.0354	0,03571
	0	0

(1,4,1,8)	0	0
	0	0
	0	0
	0.0695	0,0714
	0.2131	0,2143
	0.3603	0,3571
	0.3572	0,3571
	0	0
(1,5,1,8)	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0.0713	0,0714
	0.2510	0,25
	0.4278	0,4286
	0.2499	0,25
(1,6,1,8)	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0.1056	0,1071
	0.3970	0,3929
	0.4974	0,5
(1,7,1,8)	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0.2517	0,25
	0.7483	0,75
(1,8,1,8)	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	0	0
	1	1

Πίνακας 12: Σύγκριση τιμών προσομοίωσης υπογραφής με τις πραγματικές.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-2-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0,2479, 0.3926, 0.2874, 0.0720, 0,0,0) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0.25, 0. 392857143, 0.285714286, 0.071428571 ,0,0,0). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 2ης διατεταγμένης μονάδας είναι 24,79%, της 3ης διατεταγμένης μονάδας είναι 39,26%, της 4ης είναι 28,74 ενώ της 5ης είναι 7,20 %. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την 2η διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 25%, για την 3η είναι 39,2857143%, για την 4η είναι 28,5714286% ενώ για την 5η είναι 7,1428571%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι αρκετά μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.
Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-3-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0, 0.1083, 0.2469, 0.3597, 0.2498, 0,0354, 0) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0.1071, 0.25, 0.3571, 0.25, 0.003571, 0). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 3ης διατεταγμένης μονάδας είναι 10,83%, της 4ης διατεταγμένης μονάδας είναι 24,69%, της 5ης είναι 35,97% της 6ης είναι 24,98% ενώ της 7ης είναι 3,54%. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την 3η διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 10,71%, για την 4η είναι 25%, για την 5η είναι 35,71%, για την 6η είναι 25%, ενώ για την 7η είναι 3,571%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι αρκετά μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-4-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0, 0, 0.0695, 0.2131, 0.3603, 0.3572, 0) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0, 0.0714, 0.2143, 0.3571, 0.3571, 0). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 4ης διατεταγμένης μονάδας είναι 6,95%, της $5^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 21,31%, της $6^{ης}$ είναι 36,03% ενώ της $7^{ης}$ είναι 35,72%. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την $4^{η}$ διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 7,14%, για την $5^{η}$ είναι 21,43%, για την $6^{η}$ είναι 35,71% ενώ για την $7^{η}$ είναι 35,71%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι αρκετά μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-5-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0, 0, 0, 0.0713, 0,2510, 0.4278, 0.2499) ενώ βάση των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0, 0, 0.0714, 0.25, 0,4286, 0.25). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $5^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 7,13%, της $6^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 25,10%, της $7^{ης}$ είναι 42,78% ενώ της $8^{ης}$ είναι 24,99%. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την $5^{η}$ διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 7,14%, για την $6^{η}$ είναι 25%, για την $7^{η}$ είναι 42,86% ενώ για την $8^{η}$ είναι 25%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι αρκετά μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-6-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0, 0, 0, 0, 0.1056, 0.3970, 0.4974) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0, 0, 0, 0.1071, 0.3929, 0.5). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της $6^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 10,56%, της $7^{ης}$ διατεταγμένης μονάδας είναι 39,70% ενώ της $8^{ης}$ είναι 48,74%. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την $6^{η}$ διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 10,71%, για την $7^{η}$ είναι 39,29%, ενώ για την $8^{η}$ είναι 50%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι αρκετά μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.

Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-7-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάση των τιμών προσομοίωσης είναι S

= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2517, 74,83) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0.75). Παρατηρούμε στις τιμές προσομοίωσης της υπογραφής ότι η πιθανότητα για να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος με το που διακόπτεται η λειτουργία της 7ης διατεταγμένης μονάδας είναι 25,17%, ενώ της 8ης είναι 74,83%. Αντίστοιχα, στις πραγματικές τιμές προσομοίωσης έχουμε για την 7η διατεταγμένη μονάδα πιθανότητα 25%, ενώ για την 8η είναι 75%. Συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών μεταξύ της προσομοίωσης και της πραγματικής υπογραφής είναι μικρές και συνεπώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι επιβεβαιώνεται αριθμητικά η ορθότητα του αλγορίθμου.
Η υπογραφή του συστήματος Combined 1-consecutive-8-out-of-8:F and 1-consecutive-8-out-of-8:F βάσει των τιμών προσομοίωσης είναι S = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) ενώ βάσει των πραγματικών της τιμών είναι S = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). Παρατηρούμε ότι τόσο στις τιμές προσομοίωσής της υπογραφής όσο και στις πραγματικές της τιμές υπάρχει ταύτιση.

4.2 Σύνοψη

Θέμα της πτυχιακής εργασίας ήταν η Συνάρτηση Αξιοπιστίας και ο Μέσος Χρόνος Ζωής των Μονότονων Συστημάτων. Μέσα από τον πρώτο κεφάλαιο, επιχειρείται να δοθούν οι γενικές έννοιες εκείνες οι οποίες θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να εντρυφήσει στο θέμα της εργασίας. Κεντρικές έννοιες όπως η θεωρία αξιοπιστίας, το σύστημα, ο μέσος χρόνος ζωης ενός συστηματος και η υπογραφή αποτελούν κάποια από αυτά τα στοιχεία. Έπειτα, στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η οικογένεια των συστημάτων αυτών καθώς και οι γενικεύσεις τους. Παρουσιάζονται διάφοροι μέθοδοι επίλυσης βασικών χαρακτηριστικών των συστημάτων αυτών όπως η Αξιοπιστία και ο μέσος χρόνος ζωης. Στο τρίτο μέρος της πτυχιακής, γίνεται αναφορά στον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των νέων αποτελεσμάτων ενώ γίνεται και σχολιασμός επι αυτού. Επιπροσθέτως, παρουσιάζεται το πρόγραμμα υλοποίησης του αλγορίθμου. Κλείνοντας, στο τέταρτο κεφάλαιο επιχειρείται η επαλήθευση της ορθότητας του αλγορίθμου μέσα από ήδη υπάρχοντα δεδομενα της βιβλιογραφίας ώστε να καταστεί ορθός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κούτρας, Μάρκος Β. (2007). *Στατιστική Θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

Μπούτσικας, Μ. (2008). *Θεωρία αξιοπιστίας*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Eryilmaz, S., Kan, C. & Akici, F. (2009). Consecutive k-within-m-out-of-n:F system with exchangeable components, *Naval Research Logistics*, **56**, 503-510.

Eryilmaz, S. (2010). Review of recent advances in reliability of consecutive k-out-of-n and related systems, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability,* **224**, 225-237.

Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2008). On the signature of coherent systems and applications, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **22**, 19–35.

Chiang, D. T. & Niu, S. C. (1981). Reliability of consecutive-k-out-of-n: F system. *IEEE Transactions on Reliability,* **30,** 87-89.

Eryilmaz, S., Koutras, M. V. & Triantafyllou, I. S. (2011). Signature based analysis of m-Consecutive-k-out-of-n: F systems with exchangeable components, *Naval Research Logistics*, **58,** 344-354.

Mohan, P., Agarwal, M. & Sen, K. (2009). Combined m-Consecutive-k-Out-of-n : F & Consecutive kc-Out-of-n: F Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **58**, 328-337.

Triantafyllou, I. S. (2015). Consecutive-Type Reliability Systems: An Overview and some applications, **2015**, Article ID 212303.

Samaniego, F.J. (2007). *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability*. New York: Springer.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ