

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



Διπλωματική Εργασία

---

Αριθμητική ανάλυση της μακροσκοπικής απόκρισης  
πορωδών μετάλλων με περιοδική μικροδομή  
υπό συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων

---

Αναδιώτης Γεώργιος

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος 2019



©2019 Αναδιώτης Γεώργιος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Αγόρας Μιχάλης  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων  
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος εξεταστής Δρ. Αράβας Νικόλαος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος εξεταστής Δρ. Κερμανίδης Αλέξης  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων  
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

# Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Αγόρα Μιχάλη για την καθοδήγηση που μου παρείχε καθόλη την διάρκεια υλοποίησης της διπλωματικής μου εργασίας. Μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα και να αποκομίσω πολύτιμες γνώσεις.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές, κύριο Αράβα Νικόλαο και κύριο Κερμανίδη Αλέξη που δέχτηκαν να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής μου εργασίας. Αμφότεροι μέσω των μαθημάτων που με δίδαξαν μου έδωσαν όχι μόνο τις βάσεις στην επιστήμη της μηχανικής των υλικών αλλά μου έδωσαν και το κίνητρο για να ασχοληθώ περαιτέρω με τον συγκεκριμένο τομέα.

Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ, οφείλω στους φίλους μου, που μοιραστήκαμε μαζί τις όμορφες εμπειρίες των φοιτητικών μας χρόνων. Τους ευχαριστώ για τις όμορφες στιγμές που ζήσαμε, αλλά κυρίως, τους ευχαριστώ για την ηθική τους υποστήριξη στις δύσκολες στιγμές που προέκυψαν. Η συναναστροφή και ο χρόνος που πέρασα μαζί τους μου άνοιξε νέους ορίζοντες στο τρόπο σκέψης μου.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την οικογένεια μου. Ο πατέρας μου Παναγιώτης, η μητέρα μου Αικατερίνη και ο αδερφός μου Γιάννης δεν με άφησαν στιγμή μόνο μου. Ήταν πάντα εκεί όταν τα πράγματα δεν πήγαιναν όπως ήταν σχεδιασμένα και με βοηθούσαν να ανακάμψω και να προχωρήσω. Τους ευχαριστώ για τον μεγάλο κόπο που κατέβαλαν και τις θυσίες που έκαναν, ώστε αυτές οι σπουδές να γίνουν πραγματικότητα. Χωρίς αυτούς δεν θα μπορούσα να φτάσω τόσο μακριά όσο έχω φτάσει.

# Abstract

In this work, the macroscopic response of porous metals with periodic microstructure was taken under consideration. Specifically, the material's matrix was considered to be isotropic, incompressible and elastoplastic. The hardening of the matrix can be described from Power Law relation. The material's response was analyzed under finite strain loading condition and it was analyzed numerically. Thus, three dimensional finite deformation finite element analyses of a unit cell containing a single initially spherical void were carried out. Different values of the initial porosity and both contractile and extensional loads were considered during analyses. For these loading and initial conditions, the size and the shape of pore was investigated as well as the effect they have on mechanical behaviour of the porous material. After observing the diagram of macroscopic stress-strain it was confirmed that material's behaviour exhibited an initial hardening regime followed by a softening regime at sufficiently large strains, regardless of loading condition. Porosity evolution is found to be responsible for this behaviour. Specifically, softening regime during extensional loadings is a consequence of void growth, whereas during contractile loadings, void collapse is the reason for this regime, respectively. Furthermore, void shape did not remain spherical during deformation. This, has the effect of increasing load carrying capacity of porous material along loading direction. Thus, evolution of void shape acts as an anisotropic hardening mechanism. Finally, the transition from hardening to softening in the macroscopic response can be identified with the onset of macroscopic strain localization which accounts for an instability phenomenon.

# Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία, μελετήθηκε η μακροσκοπική απόκριση πορωδών μετάλλων με περιοδική μικροδομή. Συγκεκριμένα, θεωρήθηκε μεταλλικός φορέας ισότροπος, ασυμπίεστος ελαστοπλαστικός με καθεστός σκλήρυνσης που περιγράφεται από την σχέση Power Law. Η μελέτη έγινε για φόρτιση υπό συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων. Η ανάλυση ήταν αριθμητικής φύσης. Έτσι, πραγματοποιήθηκαν τρισδιάστατες αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων σε μοναδιαίες κυψελίδες όπου περιείχαν έναν αρχικά σφαιρικό πόρο. Στις αναλύσεις που διεξάχθηκαν δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές του αρχικού πορώδους. Επίσης εφαρμόστηκαν φορτίσεις επίπεδης παραμόρφωσης, τόσο επιμήκυνσης όσο και επιβράχυνσης. Για αυτές τις περιπτώσεις ερευνήθηκε η εξέλιξη του μεγέθους και του σχήματος του πόρου αλλά και της επίδρασης που έχει στην συμπεριφορά του υλικού. Μέσω της παρατήρησης του διαγράμματος μακροσκοπικής τάσης παραμόρφωσης εξακριβώθηκε πως το υλικό επιδεικνυε μία φάση σκλήρυνσης όπου ακολουθούταν από μια φάση πράυνσης σε μεγαλύτερες παραμορφώσεις, ανεξαρτήτως του τύπου της φόρτισης. Η εξέλιξη του πορώδους βρέθηκε πως είναι υπεύθυνη για αυτήν την συμπεριφορά. Η αύξηση του πορώδους στις φορτίσεις επιμήκυνσης αποτελεί τον μηχανισμό πράυνσης, ενώ για τις φορτίσεις επιβράχυνσης η κατάρρευση του πόρου αποτελεί τον αντίστοιχο μηχανισμό. Η εξέλιξη του σχήματος του πόρου δεν παραμένει σφαιρικό κατά την διάρκεια της φόρτισης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του φορτίου που μπορεί να φέρει το υλικό προς την διεύθυνση της φόρτισης. Έτσι δρα ως ένας ανισότροπος μηχανισμός σκλήρυνσης. Τέλος η μετάβαση από το καθεστός σκλήρυνσης σε αυτό της πράυνσης μπορεί να συνδιαστεί με την έναρξη της συγκέντρωσης παραμόρφωσης που αποτελεί φαινόμενο αστάθειας.

# Περιεχόμενα

Abstract	v
Περίληψη	vi
Κατάλογος Σχημάτων	viii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2 Διατύπωση Προβλήματος</b>	<b>4</b>
2.1 Στοιχεία κινηματικής . . . . .	4
2.2 Κατασταστικές εξισώσεις για τον φορέα . . . . .	6
2.3 Μικροδομή και Χαρακτηριστικά . . . . .	7
2.4 Περιοδικές συνθήκες και φόρτιση . . . . .	8
2.5 Μακροσκοπική απόκριση, εξέλιξη της μικροδομής και μακροσκοπικές αστάθειες	9
<b>3 Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος</b>	<b>12</b>
3.1 Διακριτοποίηση κυψελίδας . . . . .	12
3.2 Τιμές των παραμέτρων του προβλήματος . . . . .	13
3.3 Μετεπεξεργασία αποτελεσμάτων (Post processing) . . . . .	13
3.4 Έλεγχος Σύγκλισης . . . . .	14
<b>4 Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις</b>	<b>17</b>
4.1 Μονοαξονική επιμήκυνση ( $\beta \rightarrow \infty$ ) . . . . .	17
4.2 Μονοαξονική επιβράχυνση ( $b = 0$ ) . . . . .	20
4.3 Διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	22
4.4 Διάγραμμα Αστοχίας . . . . .	26
4.5 Κατανομή Τάσεων . . . . .	27
4.6 Συμπεράσματα . . . . .	29
<b>5 Επίλογος</b>	<b>32</b>
<b>6 Bibliography</b>	<b>34</b>
<b>A' Υπολογιστικά ζητήματα</b>	<b>37</b>



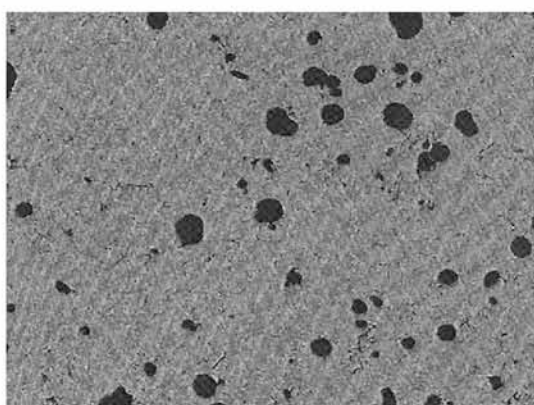
# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Εικόνες πόρων από οπτικό μικροσκόπιο . . . . .	1
2.1	Δομή πορώδους μετάλλου. . . . .	8
2.2	Μήκη κυρίων αξόνων πόρου απεικονιζόμενα στο 1/8 της μοναδιαίας κυψελίδας. . . . .	8
2.3	Σχήματα περιγραφής των συνθηκών έναρξης συγκέντρωσης των παραμορφώσεων . . . . .	11
3.1	Διάγραμματα $\bar{\sigma}_{ii} - \bar{E}_e$ για τον έλεγχο σύγκλισης των διαφόρων πλεγμάτων που ελέγχθηκαν . . . . .	15
3.2	Οι κυψελίδες διακριτοποιημένες για τις οποίες πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος σύγκλισης . . . . .	16
4.1	Αποτελέσματα για φόρτιση μονοαξονικής επιμήκυνσης ( $\beta \rightarrow \infty$ ) . . . . .	19
4.2	Αποτελέσματα για φόρτιση μονοαξονικής επιβράχυνσης ( $\beta = 0$ ) . . . . .	21
4.3	Διαγράμματα $f - \bar{E}_e$ για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	23
4.4	Διαγράμματα $w_1 - \bar{E}_e, w_2 - \bar{E}_e$ για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	24
4.5	Διαγράμματα $\bar{\sigma}_{11} - \bar{E}_e$ για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	25
4.6	Διαγράμματα $X_\sigma - \bar{E}_e$ για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	26
4.7	Διαγράμματα $\hat{P} - \bar{E}_e$ για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ) . . . . .	27
4.8	Διάγραμμα $\bar{E}_e^{cr} - \beta$ . . . . .	27
4.9	Κατανομή τάσεων για μονοαξονική επιμήκυνση ( $\beta \rightarrow \infty$ ) . . . . .	28
4.10	Κατανομή τάσεων για μονοαξονική επιβράχυνση ( $\beta = 0$ ) . . . . .	28
4.11	Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση καθαρής διάτμησης ( $\beta = 1$ ) . . . . .	29
4.12	Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση επιμήκυνσης ( $\beta = 1.5$ ) . . . . .	29
4.13	Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση επιβράχυνσης ( $\beta = 0.5$ ) . . . . .	30
A'1	Κυψελίδα με έντονα παραμορφωμένα στοιχεία, $f_0 = 0.01$ και $\beta = 0.1$ . . . . .	37

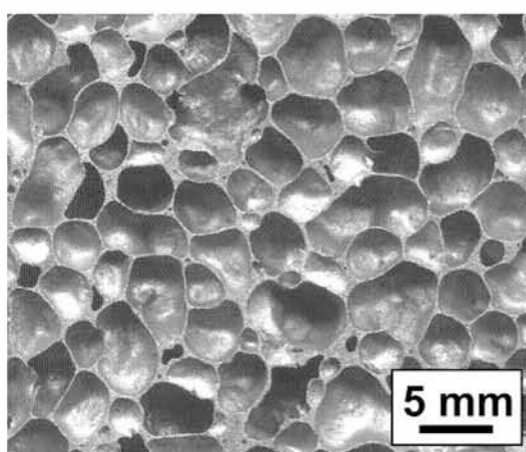
# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μία μελέτη της μακροσκοπικής απόκρισης πορώδων μετάλλων υπό συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων. Τα πορώδη μέταλλα δημιουργούνται είτε από κάποια ατέλεια σε μεταλλουργική διαδικασία κατασκευής ελατών κραμάτων (χύτευση, κonioμεταλλουργία), είτε κατασκευάζονται εξ αρχής και επί σκοπώ με κάποιο επιθυμητό ποσοστό πορώδους (metal foams, βιουλικά). Η εξέλιξη των πόρων κάτω από συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων παίζει σημαντικό ρόλο στην μακροσκοπική συμπεριφορά αυτών των μετάλλων. Έτσι, για παράδειγμα, κατά την διάρκεια κατεργασίας μετάλλων (έλαση, σφυρηλάτηση κτλ) οι πόροι στο υλικό υπόκεινται σε αλλαγές τόσο στο μέγεθος όσο και στο σχήμα τους. Ως συνέπεια, αυτές οι αλλαγές ενδέχεται να έχουν σημαντική επίδραση στις μακροσκοπικές ιδιότητες του τελικού προϊόντος. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του μεταλικού αφρού (metal foam). Η μηχανική συμπεριφορά του συγκεκριμένου υλικού κάτω από θλιπτικά φορτία χαρακτηρίζεται από την συγκέντρωση μακροσκοπικής παραμόρφωσης μέσα σε λεπτές ζώνες [Ashby et al., 2000]. Η δημιουργία αυτών των ζωνών, που αποτελούν φαινόμενο αστάθειας, είναι εξαιρετικά σημαντική για την απόδοση του υλικού. Συνεπώς, τα δύο αυτά παραδείγματα αναδεικνύουν γιατί η μελέτη της μακροσκοπικής απόκρισης των πορώδων μετάλλων είναι εξέχουσας σημασίας.



(α') Μέταλλο μετά την χύτευση  
([www.hillandgriffith.com](http://www.hillandgriffith.com))



(β') Μεταλλικός αφρός (metal foam)  
([commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org))

Σχήμα 1.1: Εικόνες πόρων από οπτικό μικροσκόπιο

2 Σε θεωρητικό υπόβαθρο η μελέτη εξέλιξης του πορώδους σε ελατά μέταλλα ξεκινάει με την εργασία των [Rice and Tracey, 1969] όπου μοντελοποίησαν το πρόβλημα ως έναν απομωνομένο πόρο μέσα σε έναν άπειρο μέσο. Στην εργασία των [Banks-Sills and Budiansky, 1982] αναλύεται η εξέλιξη του πόρου μέσα σε έναν ιξωδοπλαστικό φορέα κάτω από αξονοσυμμετρική φόρτιση. Το πρώτο καταστατικό μοντέλο για πορώδη, τέλεια πλαστικά υλικά, αναπτύχθηκε από τον [Gurson, 1977]. Το μοντέλο αυτό, το οποίο είναι ακριβές για την ειδική περίπτωση της ισοτροπικής μικροδομής όπου υποβάλλεται σε υδροστατική φόρτιση, προτάθηκε ως προσέγγιση για πιο γενικές καταστάσεις φόρτισης και μικροδομές. Παρόλη την επιτυχία του μοντέλου να προβλέπει κύριες πτυχές της μακροσκοπικής απόκρισης και της όλκιμης θραύσης μετάλλων, βρέθηκε πως για μικρές τιμές της τριαξονικότητας των τάσεων είναι ανακριβές. Κυρίως γιατί το μοντέλο αμελεί την εξέλιξη του σχήματος του πόρου. Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την βελτίωση του μοντέλου αυτού με κύρια αυτή του [Tvergaard, 1989].

Ακόμα, έχουν προταθεί εναλλακτικά μοντέλα για πορώδη υλικά λαμβάνοντας υπόψη και την μορφή και τον προσανατολισμό των πόρων αλλά και την κατανομή τους μέσα στο υλικό. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών αποτελούν οι εργασίες των [Castañeda and Zaidman, 1994], [Castañeda, 1991]. Αξιοσημείωτη είναι και η εργασία των [Aravas and Castañeda, 2004] όπου γίνεται η αριθμητική εφαρμογή αυτών των μοντέλων σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων. Αυτού του τύπου τα μοντέλα βρέθηκαν να δίνουν πολύ καλές προβλέψεις για αποκλίνοντα φορτία, όπου οι αλλαγές του σχήματος του πόρου γίνονται σημαντικές. Όμως σε φορτίσεις για μεγάλες τιμές της τριαξονικότητας των τάσεων και ειδικά για μικρές τιμές του πορώδους χάνουν αισθητά την ακρίβεια τους. Πιο πρόσφατες εργασίες, όπου γίνεται προσπάθεια για άρση αυτών των περιορισμών, είναι αυτές των [Danas and Castañeda, 2009a], [Danas and Castañeda, 2009b], [Agoras and Castañeda, 2013].

Εκτός από την θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος και την ανάπτυξη καταστατικών μοντέλων, που προβλέπουν την μακροσκοπική συμπεριφορά των πορώδων μετάλλων, το πρόβλημα έχει αντιμετωπιστεί και από υπολογιστική σκοπιά. Συγκεκριμένα στην εργασία των [Srivastava and Needleman, 2013] θεωρείται μοναδιαία κυψελίδα και πόρος σφαιρικού σχήματος στην μέση αυτής. Ο φορέας αποτελείται από ένα ελαστοπλαστικό υλικό και χαρακτηρίζεται από μια καταστατική σχέση ιξώδους κρυσταλικής πλαστικότητας (viscous crystal plasticity). Η κυψελίδα υποβάλλεται σε τριαξονική φόρτιση. Το πρόβλημα διακριτοποιείται και λύνεται σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων. Παρόμοιες εργασίες έχουν παρουσιαστεί και από τον Tvergaard ([Tvergaard, 2000], [Tvergaard, 2009], [Tvergaard, 2011], [Tvergaard, 2012], [Tvergaard, 2014]) όπου μελετάται η επίδραση που έχουν μεταβλητές του προβλήματος, όπως το μέγεθος και σχήμα του πόρου ή η κατανομή του πόρου, στην μακροσκοπική συμπεριφορά και συγκεκριμένα σε πιθανές καταστάσεις αστάθειας του υλικού κάτω από διάφορες φορτίσεις.

Στην παρούσα εργασία, θεωρείται πως το πορώδες μέταλλο έχει περιοδική μικροδομή. Το αρχικό σχήμα του πόρου είναι σφαιρικό. Επίσης, ο φορέας είναι ασυμπίεστος, ελαστοπλαστικός και υπόκεινται σε καθεστός σκλήρυνσης σύμφωνα με την σχέση Power Law. Η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού μελετήθηκε σε υπολογιστικό επίπεδο. Έτσι το πρόβλημα επιλύεται στο λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων Abaqus. Το υλικό μοντελοποιείται ως μοναδιαία κυβική κυψελίδα με το πόρο να τοποθετείται στο κέντρο της. Ακολουθώντας την εργασία [Agoras and Castañeda, 2014] επιλέγουμε να εξετάσουμε το πορώδες μέταλλο κάτω από συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων. Υπό αυτές τις φορτίσεις εξετάζεται η εξέλιξη της μικροδομής δηλαδή, η εξέλιξη του πορώδους αλλά και το σχήμα του πόρου. Αυτές οι

μεταβλητές αναμένεται να έχουν σημαντική επίδραση στην μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους υλικού. Ακόμα εξετάζουμε την επίδραση που έχει στην μακροσκοπική συμπεριφορά η τιμή του αρχικού πορώδους αλλά επιπροσθέτως και το είδος της επίπεδης φόρτισης που υποβάλλουμε το υλικό.

Στην συνέχεια κάνουμε μια περιγραφή της δομής της εργασίας. Το κεφάλαιο 2, περιλαμβάνει την αναλυτική περιγραφή του προβλήματος. Αρχικά, γίνεται η περιγραφή κάποιων κινηματικών μεγεθών. Επίσης παρουσιάζονται οι καταστατικές εξισώσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά του υλικού του φορέα. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε την μικρογεωμετρία του πορώδους μετάλλου ορίζοντας κάποια γεωμετρικά μεγέθη που θα μας βοηθήσουν στην περιγραφή της εξέλιξης της μικροδομής. Σε επόμενη ενότητα παραθέσουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αλλά και το είδος της φόρτισης που υποβάλλουμε το υλικό. Τέλος αναπτύσσονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους μετάλλου.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε τις λεπτομέρειες σχετικά με τον αριθμητικό τρόπο επίλυσης του προβλήματος.

Το κεφάλαιο 4 είναι το κεφάλαιο που περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της μελέτης μας, αλλά και τις παρατηρήσεις πάνω σε αυτά. Ειδικά, παρουσιάζονται διαγράμματα όπως η εξέλιξη του πορώδους, των συνιστώσων του μακροσκοπικού τάνυστη των τάσεων αλλά και του μακροσκοπικού μέτρου σκλήρυνσης, σε συνάρτηση με την ισοδύναμη μακροσκοπική παραμόρφωση τα οποία μας βοηθούν στην ερμηνεία της μακροσκοπικής συμπεριφοράς του υλικού. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση των συμπερασμάτων που εξήχθησαν από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων.

Ακόμα, πρότείνονται επέκτασεις αυτής της εργασίας για διεύρυνση της μελέτης αυτής της κατηγορίας πορώδων μετάλλων υπό αυτού του τύπου τις φορτισείς.

Τέλος το κεφάλαιο 5 αποτελεί τον επίλογο αυτής της εργασίας. Εδώ συνοψίζουμε όσα θίχτηκαν σε αυτήν την εργασία, αλλά κάνουμε και κάποιες προτάσεις για περαιτέρω μελέτη στο θέμα της μακροσκοπικής απόκρισης πορώδων μετάλλων υπό συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων.

# Κεφάλαιο 2

## Διατύπωση Προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε, τα δεδομένα του προβλήματος που μελετάμε. Στην πρώτη ενότητα ορίζουμε τα στοιχεία κινηματικής που θα μας φανούν χρήσιμα για την περιγραφή του προβλήματος. Στην συνέχεια αναπτύσσουμε τις καταστατικές εξισώσεις που περιγράφουν την ελαστοπλαστική φύση του υλικού του φορέα. Στην ενότητα 2.3 περιγράφουμε τα χαρακτηριστικά της μικροδομής του πορώδους μετάλλου που μελετάμε. Συνεπώς ορίζουμε σε αυτήν την ενότητα κάποια μεγέθη που μας βοηθάνε στην περιγραφή της. Έπειτα, ορίζουμε τις περιοδικές συνθήκες για το παρόν πρόβλημα αλλά και την φορτίση που χρησιμοποιούμε. Τέλος, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που αναπτύξαμε στις παραπάνω ενότητες, βρισκόμαστε σε θέση να περιγράψουμε την μακροσκοπική απόκριση του πορώδους υλικού καθώς και την εξέλιξη της μικροδομής του. Ακόμα, σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε μακροσκοπικές αστάθειες που αναπτύσσονται στο υλικό.

### 2.1 Στοιχεία κινηματικής

Έστω ένα υλικό σημείο  $A$  του συνεχούς μέσου που καταλαμβάνει χώρο  $B_0$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$ , η οποία περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης του,  $\mathbf{X}$ . Έστω τώρα ότι την χρονική στιγμή  $t = t_0 + \Delta t$  έχει μετατοπιστεί. Τότε ένα νέο διάνυσμα  $\mathbf{x}$  περιγράφει την θέση του και  $B$  θα είναι η νέα περιοχή που καταλαμβάνει στον χώρο το παραμορφωμένο συνεχές μέσο. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση στον χώρο είναι:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Ακόμα ορίζουμε τον τανυστή κλίσης της παραμορφώσεως:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \frac{\partial(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{X})} \quad (2.2)$$

όπου εμπεριέχει όλη την πληροφορία για την παραμόρφωση. Όσον αφορά την περίπτωση μια υλικής ίνας, θεωρούμε μια απειροστή υλική ίνα  $d\mathbf{X}$  στην απαραμόρφωτη κατάσταση και την  $d\mathbf{x}$  μετά την παραμόρφωση. Ορίζουμε μαθηματικά τότε:  $d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}|\mathbf{N}$  και  $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|\mathbf{n}$  όπου  $\mathbf{n}$  και  $\mathbf{N}$  τα μοναδιαία διανύσματα στις αντίστοιχες κατευθύνσεις. Ορίζουμε ως «ανηγμένη αλλαγή μήκους» (stretch ratio) της υλικής ίνας το μέγεθος:

$$\lambda = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \quad (2.3)$$

Εύκολα αποδεικνύεται:

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}} = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}} \quad (2.4)$$

όπου ο  $\mathbf{C}$  είναι ο δεξιός τανυστής Cauchy Green ([Αράβας, 2005])

Είναι προφανές πως το  $\lambda$  είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης  $\mathbf{N}$ . Επίσης αποδεικνύεται πως οι ακρότατες τιμές του  $\lambda$  συμβαίνουν στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του  $\mathbf{C}$  καθώς και το τετράγωνο τους είναι ( $\lambda^2$ ) είναι οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{C}$ . Συμβολίζοντας με  $\lambda_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) τις ιδιοτιμές και με  $\mathbf{N}_i$  τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, προκύπτει:  $\mathbf{C} = \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i$ . Ορίζουμε τον τανυστή:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \lambda_i \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (2.5)$$

όπου ο τανυστής  $\mathbf{U}$  χρησιμοποιείται στην πολική παραγοντοποίηση του τανυστή  $\mathbf{F}$  της κλίσης των παραμορφώσεων και συγκεκριμένα της δεξιάς παραγοντοποίησης (βλ [Αράβας, 2005]). με την βοήθεια του  $\mathbf{U}$  ορίζουμε τον λογαριθμικό τανυστή των παραμορφώσεων  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \ln \mathbf{U} = \ln (\lambda_i) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (2.6)$$

Προσπαθώντας να αναλύσουμε τον ρυθμό αλλαγής της γεωμετρίας του σώματος δηλαδή τον ρυθμό παραμόρφωσης, ορίζουμε το πεδίο των ταχυτήτων:

$$v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

και όπως για το διάνυσμα θέσης έτσι έχουμε τον τανυστή κλίσης της ταχύτητας:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.8)$$

ο οποίος περιέχει όλη την πληροφορία για τον ρυθμό αλλαγής γεωμετρίας του σώματος. Για την σχέση μεταξύ  $\mathbf{L}$  και  $\mathbf{F}$  ισχύει:

$$dv = \frac{\partial}{\partial t} [d\mathbf{x}] = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}] = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow dv = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.9)$$

Ο τανυστής  $\mathbf{L}$  μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τμήματος.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^a \quad (2.10)$$

Ο τανυστής  $\mathbf{L}^s$  είναι το συμμετρικό τμήμα και συμβολίζεται με  $\mathbf{D}$  και προκύπτει:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (2.11)$$

Αντίστοιχα για το αντισυμμετρικό μέρος  $\mathbf{L}^a$  όπου συμβολίζεται με  $\mathbf{W}$  ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (2.12)$$

Ο τανυστής  $\mathbf{D}$  ονομάζεται «ρυθμός της παραμόρφωσης» ενώ ο τανυστής  $\mathbf{W}$ , «σπιν του συνεχούς μέσου».

## 2.2 Κατασταστικές εξισώσεις για τον φορέα

Έχοντας ορίσει κάποια κινηματικά μεγέθη μπορεί να γίνει και περιγραφή των καταστατικών εξισώσεων. Αρχικά, ο ταυιστής του ρυθμού των παραμορφώσεων γράφεται ως άθροισμα του ελαστικού και πλαστικού μέρους.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.13)$$

Σχετικά με το κομμάτι της ελαστικότητας, υποθέτουμε πως το υλικό του φορέα είναι ελαστοπλαστικό και ισότροπο.

Όσον αφορά το κομμάτι της πλαστικότητας, η υποθέτουμε την συνθήκη διαρροής κατά Von Mises :

$$\Phi(\sigma_e, \bar{\epsilon}^p) = \sigma_e - \sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (2.14)$$

με  $\sigma_e$  την ισοδύναμη τάση κατά Von Mises:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} \text{ ο αποκλίνων ταυιστής των τάσεων} \quad (2.15)$$

η  $\bar{\epsilon}^p$  είναι μια μεταβλητή που ονομάζεται “καταστατική μεταβλητή”. Η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ορίζεται ως:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p : \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} dt \quad (2.16)$$

ενώ ο ισοδύναμος ρυθμός της πλαστικής παραμόρφωσης ορίζεται ως:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p : \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (2.17)$$

Η εξίσωση 2.14 καθορίζει για ποιες εντατικές καταστάσεις και δεδομένη κατάσταση του υλικού δημιουργείται πλαστική διαρροή. Εφόσον  $\Phi(\sigma, s^a) < 0$  δεν υπάρχει πλαστική διαρροή. Ενώ υποθέτω πως το όριο διαρροής δίνεται από τον παρακάτω νόμο σκλήρυνσης:

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^p}{\epsilon_0}\right)^{1/n} \quad (2.18)$$

Γνωστός ακόμα και ως Power Law. Σε αυτήν την σχέση οι σταθερές  $\sigma_0, \epsilon_0$  αναπαριστούν το αρχικό όριο διαρροής και μία παραμόρφωση αναφοράς, όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε ως  $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ . Ο όρος  $n$  είναι ο εκθέτης σκλήρυνσης και παίρνει τιμές  $n \geq 1$ . Να σημειωθεί πως για την ειδική περίπτωση όπου  $n \rightarrow \infty$  έχουμε την περίπτωση τέλει πλαστικότητας, ενώ για  $n = 1$  την περίπτωση γραμμικής σκλήρυνσης.

Στην συνέχεια, με εφαρμογή του νόμου της καθετότητας προκύπτει μια εξίσωση για το πλαστικό τμήμα του ρυθμού παραμόρφωσης:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad \text{με } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.19)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο συντελεστής  $\dot{\lambda} \geq 0$  αποκαλείται πλαστικός πολλαπλασιαστής. Η εξίσωση αποτελεί τον νόμο πλαστικής διαρροής. Εδώ, για την περίπτωση του μοντέλου του

Von Mises ο ρυθμός του πλαστικού πολλαπλασιαστή  $\dot{\lambda}$  ισούται με το ρυθμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης  $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{2/3 \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = \dot{\lambda}$  οπότε προκύπτει:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\epsilon}^p \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_e} \quad (2.20)$$

Τέλος για την ολοκλήρωση του πλαστικού προβλήματος επιβάλλουμε τον εξής περιορισμό:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \cdot \dot{\epsilon}^p = 0 \quad (2.21)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται συνθήκη συνέχειας της πλαστικής διαρροής και εξασφαλίζει πως για όσο το υλικό διαρρέει πλαστικά, οποιαδήποτε μεταβολή στην ένταση προκαλεί και μεταβολή στις καταστατικές μεταβλητές έτσι ώστε να ικανοποιείται συνεχώς η συνθήκη διαρροής.

Το σύνολο των εξισώσεων (2.14), (2.19), (2.21) αποτελούν μέρος της συμπεριφοράς του υλικού.

### 2.3 Μικροδομή και Χαρακτηριστικά

Τα πορώδη μέταλλα μπορούν να θεωρηθούν ως σύνθετα, ετερογενή υλικά αφού η δομή τους αποτελείται από δύο φάσεις: η μία είναι η μεταλλική φάση η οποία αποκαλείται φορέας και η άλλη η πορώδης φάση, δηλαδή οι κενές περιοχές ή πόροι που παρεμβάλλονται στον φορέα. Το υλικό που χρησιμοποιείται για τον φορέα είναι ισότροπο ελαστοπλαστικό και ασυμπίεστο.

Θεωρούμε πως ο πόρος είναι αρχικά σφαιρικός και ότι κατανέμεται περιοδικά μέσα στον φορέα. Συγκεκριμένα, η περιοδικότητα προκύπτει από την θεώρηση τρισδιάστατης μοναδιαίας κυβικής κυψελίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1β'. Ο πόρος τοποθετείται στο κέντρο αυτής της κυψελίδας. Αρχικά, η κυψελίδα είναι κυβική με πλευρές  $2l_1^0 = 2l_2^0 = 2l_3^0 = 2l^0$  ενώ η ακτίνα του σφαιρικού πόρου  $r_0$  μεταβάλλεται αναλόγως το πορώδες  $f_0$ . Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε τοποθετείται στο κέντρο του πόρου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1β'.

Επίσης, καθώς το υλικό υπόκειται σε πεπερασμένες παραμορφώσεις αλλάζει η μορφή, το μέγεθος των πόρων και η κατανομή τους αλλά ο προσανατολισμός παράμένει ίδιος.

Για την περιγραφή της μικροδομής του υλικού ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα στις κύριες κατευθύνσεις της σφαίρας ( $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ) και τα αντίστοιχα μήκη των κυρίων αξόνων ( $2a_1, 2a_2, 2a_3$ ) όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2. Στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση ισχύει:  $2a_1 = 2a_2 = 2a_3 = 2r_0$ .

Επίπροσθέτως, ορίζουμε τους λόγους των πλευρών

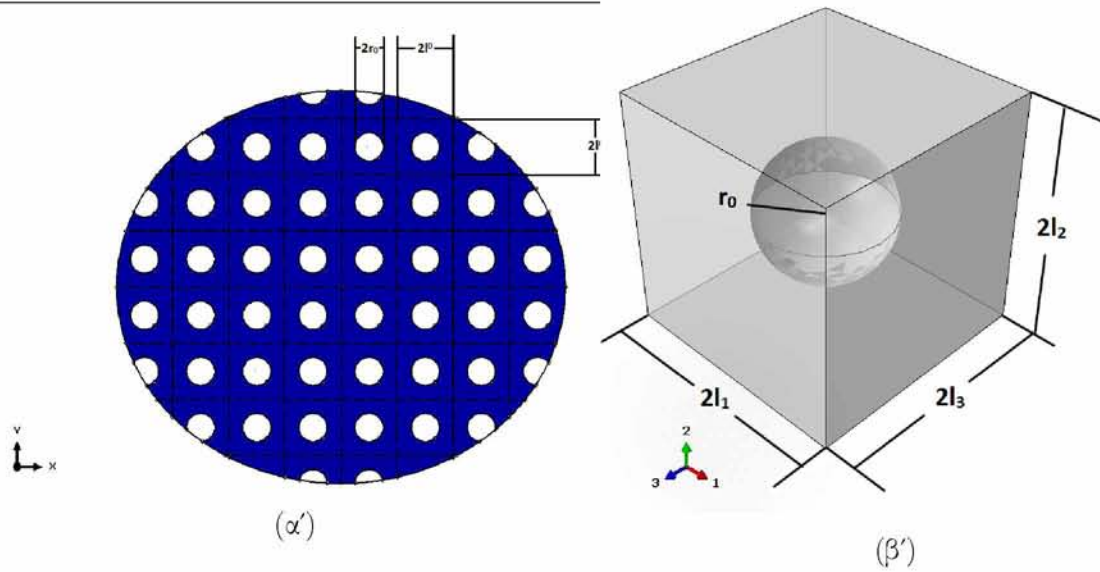
$$w_1 = \frac{a_3}{a_1} \text{ και } w_2 = \frac{a_3}{a_2} \quad (2.22)$$

Το πορώδες ορίζεται ως το κλάσμα:

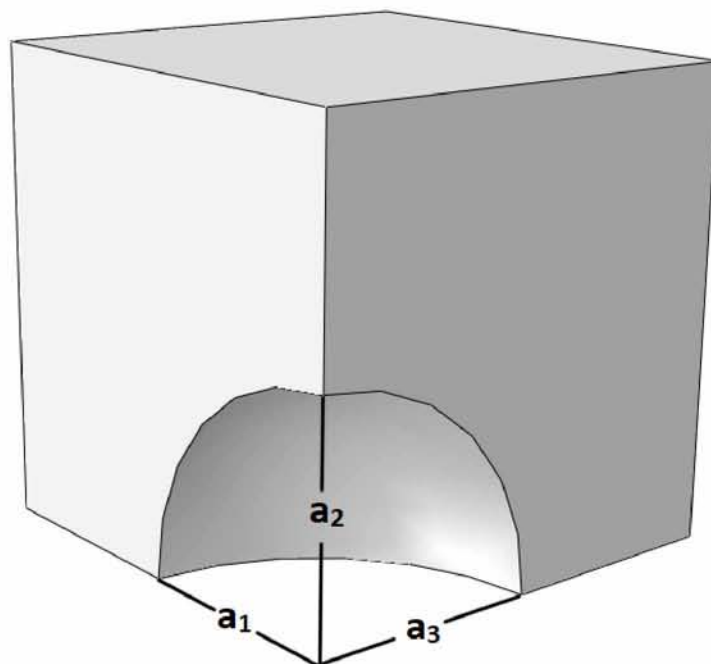
$$f = \frac{V_v}{V_t} \quad (2.23)$$

με  $V_v$  και  $V_t$ , αναφερόμαστε στον όγκο του πόρου και στον συνολικό όγκο της κυψελίδας αντίστοιχα.





Σχήμα 2.1: Δομή πορώδους μετάλλου. Στην εικόνα (α) φαίνεται η περιοδική μικροδομή του υπό θέωρηση πορώδους μετάλλου, ενώ στην (β) η αντίστοιχη μοναδιαία κυψελίδα



Σχήμα 2.2: Μήκη κυρίων αξόνων πόρου απεικονιζόμενα στο 1/8 της μοναδιαίας κυψελίδας.

## 2.4 Περιοδικές συνθήκες και φόρτιση

Ακολουθώντας την εργασία των [Srivastava and Needleman, 2013] εφαρμόζουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

Για την μοναδιαία κυφελίδα θεωρούμε συμμετρία ως προς τα επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στους άξονες συμμετρίας (σύστημα συντεταγμένων τοποθετημένο στο κέντρο του πόρου. Συνεπώς, οι πλευρές της κυβικής κυφελίδας παραμένουν επίπεδες κατά την διαρκεία της παραμόρφωσης. Το γεγονός αυτό, είναι συνεπές με την περιοδικότητα αλλά πιο ισχυρό από αυτή. Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζουμε στις πλευρές της κυφελίδας είναι:

$$\begin{aligned} u_1(l_1^0, x_2, x_3) &= U_1(t), & T_2(l_1^0, x_2, x_3) &= 0, & T_3(l_1^0, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(x_1, l_2^0, x_3) &= U_2(t), & T_1(x_1, l_2^0, x_3) &= 0, & T_3(x_1, l_2^0, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_2, l_3^0) &= U_3(t), & T_1(x_1, x_2, l_3^0) &= 0, & T_2(x_1, x_2, l_3^0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Επίσης, επιλέγουμε συνθήκες συμμετρίας ως προς κάθε άξονα. Ως συνέπεια μόνο το 1/8 της κυφελίδας χρειάζεται να αναλύσουμε αριθμητικά. Αυτές οι συνθήκες συμμετρίας είναι:

$$\begin{aligned} u_1(0, x_2, x_3) &= U_1(t), & T_2(0, x_2, x_3) &= 0, & T_3(0, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(x_1, 0, x_3) &= U_2(t), & T_1(x_1, 0, x_3) &= 0, & T_3(x_1, 0, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_2, 0) &= U_3(t), & T_1(x_1, x_2, 0) &= 0, & T_2(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Στις παραπάνω συνθήκες το  $\mathbf{T}$  είναι το διάνυσμα της τάσης (traction vector).  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι η μετατόπιση στην κατεύθυνση  $i$  όπου  $U_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι η τιμή που παίρνει η μετατόπιση.

Ακολουθώντας τους [Agoras and Castañeda, 2014] η φόρτιση στην οποία υποβάλλουμε την κυφελίδα περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\bar{D}_{11} = -\beta \bar{D}_{33} \quad , \text{όπου } \bar{D}_{33} \leq 0 \text{ και } \beta \geq 0 \text{ ενώ, } \bar{D}_{ij} = 0 \quad (2.26)$$

όπου,  $\bar{D}_{ij}$  είναι οι συνιστώσες του μακροσκοπικού ταυστή του ρυθμού παραμόρφωσης  $\bar{\mathbf{D}}$ , ενώ  $\beta$  είναι ο λόγος του ρυθμού παραμόρφωσης και παραμένει σταθερός κατά την διάρκεια της φόρτισης. Υποθέτοντας  $t$  την μεταβλητή του χρόνου, έχουμε για τις συνιστώσες του λογαριθμικού ταυστή των παραμορφώσεων:  $\bar{E}_{11} = \bar{D}_{11}t$  και  $\bar{E}_{33} = \bar{E}_{33}t$ . Οπότε, έχουμε  $\bar{E}_{11} = -\beta \bar{E}_{33}$ . Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό του λογαριθμικού ταυστή των παραμορφώσεων και την ανηγμένη αλλαγή μήκους (βλ. σχέση 2.6, 2.3) προκύπτει:  $U_1(t) = 2l_0 \left(\frac{U_3(t)}{2l_0}\right)^{-\beta}$

Ειδικά ισχύει, για  $\beta \rightarrow \infty$  φόρτιση μονοαξονικής επιμήκυνσης ( $\bar{D}_{11} \geq 0$ ), για  $\beta=0$  φόρτιση μονοαξονικής επιβράχυνσης ( $\bar{D}_{33} \geq 0$ ) και για  $\beta=1$  φόρτιση καθαρής διάτμησης ( $\bar{D}_{11} = -\bar{D}_{33} \neq 0$ ).

## 2.5 Μακροσκοπική απόκριση, εξέλιξη της μικροδομής και μακροσκοπικές αστάθειες

Μέχρι στιγμής έχουμε αναπτύξει τις σχέσεις που διέπουν την συμπεριφορά του υλικού του φορέα. Έχουμε ορίσει τα μεγέθη  $w_1, w_2$  και  $f$  που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά του πόρου. Είμαστε σε θέση λοιπόν, να ορίσουμε τις σχέσεις που περιγράφουν την μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους μετάλλου αλλά και την εξέλιξη της μικροδομής του.

Αρχικά, θεωρούμε τον μακροσκοπικό ταυστή των παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{E}}$ :

$$\bar{E}_{ii} = \ln \lambda_i \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \quad (2.27)$$

$$\bar{E}_e = \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\mathbf{E}}^d : \bar{\mathbf{E}}^d} \quad (2.28)$$

Στην συνέχεια ορίζουμε τον μακροσκοπικό τανυστή των τάσεων:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} dV \quad (2.29)$$

Αφού πλέον γνωρίζουμε τις συντιστώσες του μακροσκοπικού τανυστή των τάσεων, είναι εφικτό να υπολογίσουμε και την μακροσκοπικά ισοδύναμη τάση κατά Von Mises όπως ορίστηκε στην σχέση (2.15).

Όσον αφορά την εξέλιξη της μικροδομής επιγεντρωνόμαστε στην εξέλιξη του πορώδους. Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπίεστικότητα του φορέα αλλά και τα αποτελέσματα του [Gurson, 1977] μπορούμε να υποθέσουμε πως η εξέλιξη του πορώδους  $f$  περιγράφεται από την σχέση:

$$\dot{f} = (1 - f) \bar{D}_{kk} \quad (2.30)$$

όπου  $\bar{\mathbf{D}}$  είναι ο μακροσκοπικός τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης.

Συγκεκριμένα η εξίσωση 2.30 γίνεται στην περίπτωση μας:

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{E}_{kk} \quad (2.31)$$

Η παραμόρφωση πορωδών μετάλλων κάτω από τις συνθήκες φόρτισης που καθοστίστηκαν (σχέση 2.26) αναμένεται να είναι μακροσκοπικά ομοιόμορφη τουλάχιστον ως ένα κρίσιμο σημείο όπου το υλικό μπορεί να γίνει ασταθές ([Rice, 1976]). Στην παρούσα διπλωματική εργασία περιορίζουμε την μελέτη στις μακροσκοπικές αστάθειες, όπου χαρακτηρίζονται από την συγκέντρωση πλαστικής παραμόρφωσης σε μια λεπτή ζώνη του υλικού (όπως και στην εργασία των [Agoras and Castañeda, 2014]). Η έναρξη αυτού του φαινομένου κάτω από σύνθηκες της παρούσας φόρτισης (βλ. σχέση 2.26) υποθέτουμε κατά προσέγγιση πως συμβαίνει:

- όταν ο ρυθμός σκλήρυνσης  $H$  του υλικού μηδενίζεται, και
- όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα επίπεδο το οποίο δεν είναι παραμορφώσιμο, ώστε να ορίσει την ζώνη συγκέντρωσης.

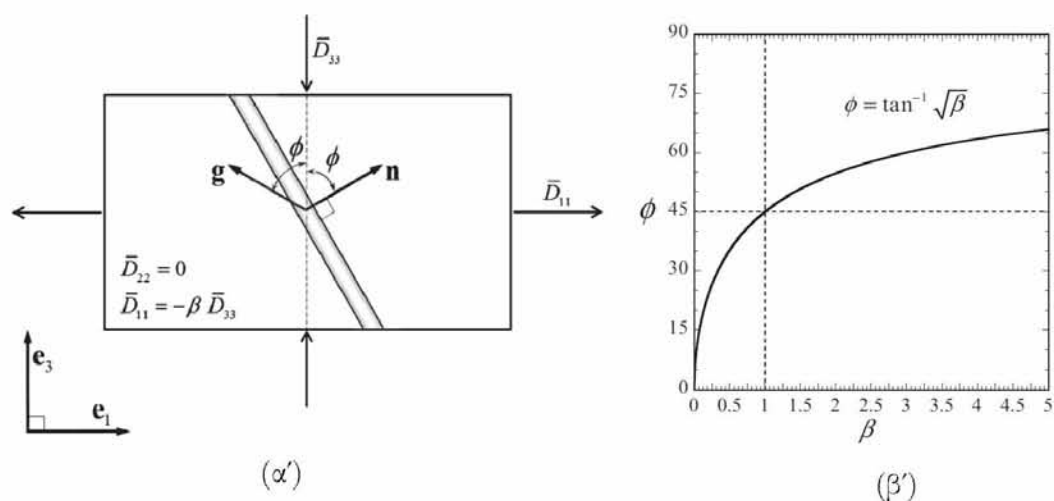
Η συνθήκη λοιπόν  $H = 0$  απαιτεί η επιφάνεια διαρροής (σχέση 2.14) είτε να παραμένει τοπικά αμετάβλητη ή η σχετική μεταβολή της κρίσιμης τάσης  $\bar{\sigma}$  να είναι είτε μηδενική ή να εφάπτεται στην επιφάνεια διαρροής. Συγκεκριμένα, μαθηματικά η συνθήκη αυτή μπορεί να προκύψει από την εξίσωση συνέχειας της πλαστικής διαρροής (βλ. σχέση 2.21). Αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\bar{\sigma}} - \dot{\lambda} H \quad (2.32)$$

Και για  $H = 0$ :

$$N_{11} \dot{\bar{\sigma}}_{11} + N_{33} \dot{\bar{\sigma}}_{33} = N_{33} (-\beta \dot{\bar{\sigma}}_{11} + \dot{\bar{\sigma}}_{33}) = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}}_{33} = \beta \dot{\bar{\sigma}}_{11} \quad (2.33)$$

Η δεύτερη προϋπόθεση για την την συγκέντρωση παραμόρφωσης ικανοποιείται εν γένει για την συγκεκριμένη περίπτωση φόρτισης, δεδομένου ότι  $0 < \beta < \infty$



Σχήμα 2.3: (α) Σχηματική απεικόνιση της επίπεδης φόρτισης σε ένα επίπεδο και γεωμετρικών στοιχείων της ζώνης συγκέντρωσης όπου ενδέχεται να αναπτυχθεί μετά από μία συγκεκριμένη κρίσιμη παραμόρφωση. (β) Η γωνία προσανατολισμού  $\phi = \tan^{-1} \sqrt{\beta}$  της (σε μίρες) σε σχέση με τον λόγο  $\beta$  (πηγή: [Agoras and Castañeda, 2014])

## Κεφάλαιο 3

# Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύουμε τα υπολογιστικά ζητήματα του πρόβληματος. Η υλοποίηση της υπολογιστικής ανάλυσης του προβλήματος έγινε με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα μοντελοποιήσαμε την γεωμετρία της κυψελίδας, αλλά και τις καταστατικές εξισώσεις που διέπουν την συμπεριφορά του φορέα στο λογισμικό Abaqus . Η διακριτοποίηση της κυψελίδας έγινε στον κώδικα δημιουργίας πλέγματος Netgen. Τέλος οι περαιτέρω υπολογισμοί για τα μακροσκοπικά μεγέθη της τάσης, των παραμορφώσεων αλλά και γεωμετρικών χαρακτηριστικών του πόρου ( $w_1, w_2, f$ ) έγιναν με έναν κώδικα στην γλώσσα Python.

### 3.1 Διακριτοποίηση κυψελίδας

Η διακριτοποίηση της κυψελίδας γίνεται με τον κώδικα Netgen. Ο κώδικας Netgen έχει την δυνατότητα να δημιουργήσει περιοδικά πλέγματα και έτσι είναι ιδανικός για την συγκεκριμένη εφαρμογή. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιούνται τα 10-κομβικά τετραεδρικά στοιχεία C3D10. Το συγκεκριμένο στοιχείο είναι ιδιαίτερα ελκυστικό λόγω της ύπαρξης αρκετών πλήρως αυτοματοποιημένων meshers. Επίσης τα στοιχεία δεύτερης τάξης παρέχουν περισσότερη ακρίβεια και πιο γρήγορη σύγκλιση με την πύκνωση του πλέγματος από αυτά της πρώτης τάξεως. Συγκεκριμένα, είναι πιο αποτελεσματικά σε περιοχές συγκέντρωσης τάσεων και μπορούν να διακριτοποιήσουν γεωμετρίες (όπως καμπύλες επιφάνειες) με λίγότερα στοιχεία.

Επειδή το υλικό του φορέα είναι ασυμπίεστο, εμφανίζεται το φαινόμενο όπου μια πολύ μικρή αλλαγή στην μετατόπιση, παράγει μια πολύ μεγάλη αλλαγή στην πίεση. Το φαινόμενο αυτό καθιστά την λύση πολύ ευαίσθητη υπολογιστικά. Για αυτό λοιπόν, προτιμήθηκαν τα υβριδικά στοιχεία C3D10H. Τα στοιχεία αυτά αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά αυτήν την συμπεριφορά με ένα μικρό υπολογιστικό κόστος αφού έχουν περισσότερες εσωτερικές μεταβλητές από τα μη υβριδικά. [Dassault Systèmes, 2016]

### 3.2 Τιμές των παραμέτρων του προβλήματος

Για την μοντελοποίηση του υλικού του φορέα στο λογισμικό Abaqus χρησιμοποιούμε τις εξής παραμέτρους:

Αρχικά, για την ελαστική συμπεριφορά δίνονται οι εξής τιμές:

Λόγω του ότι θεωρήσαμε ασυμπίεστο το υλικό του φορέα δίνουμε την τιμή  $\nu=0,495$  στον συντελεστή Poisson. Στο μέτρο Ελαστικότητας δίνουμε την τιμή  $E=1000$ . Στο υλικό δίνεται αυτή η μεγάλη τιμή ( $E = 1000\sigma_0$ ), έτσι ώστε να δοθεί περισσότερο βάρος στην πλαστική παραμόρφωση του υλικού. Για την πλαστική συμπεριφορά και την μοντελοποίηση της ισότροπης πλαστικής σκλήρυνσης, δημιουργήσαμε την υπορουτίνα UHARD σε γλώσσα Fortran όπου προβλέπει την τάση διαρροής του υλικού σύμφωνα με την σχέση Power Law (βλ. σχέση 2.18). Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές  $E/\sigma_0 = 1000$  και για τον εκθέτη σκλήρυνσης  $n = 10$ .

Από την λύση του προβλήματος σε κάθε βήμα προκύπτουν οι τοπικοί ταυυστές των τάσεων και των παραμορφώσεων.

### 3.3 Μετεπεξεργασία αποτελεσμάτων (Post processing)

Το Abaqus σε κάθε βήμα  $\Delta t$  όπου λύνει το πρόβλημα προσφέρει μια λύση. Με βάση αυτή είναι δυνατόν να υπολογιστούν χρήσιμα μεγέθη σε κάθε βήμα. Αυτό γίνεται με την συγγραφή ενός προγράμματος σε κώδικα Python. Σε αυτό χρησιμοποιούνται οι τάσεις στο κέντρο κάθε στοιχείου όπου προσφέρονται από το Abaqus έπειτα από παρεμβολή στους κόμβους κάθε στοιχείου. Επίσης γνωστή είναι και η μετατόπιση των κόμβων για τους οποίους δίνονται οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση.

Αρχικά, υπολογίζεται ο μακροσκοπικός λογαριθμικός ταυυστής των παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{E}}$  (σχέση 2.6) ως εξής:

$$\lambda_i = \frac{U_{ni} + l_i^0}{l_i^0}, \quad \text{και } E_i = \ln \lambda_i, \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

όπου  $U_{ni}$  είναι η μετατόπιση του κόμβου όπως έχει οριστεί από τις συνοριακές συνθήκες σύμφωνα με την 2.26 ( $U_1(t), U_1(t), U_1(t)$ ). Αφού γνωρίζουμε τις συνιστώσες του ταυυστή  $\bar{\mathbf{E}}$  μπορούμε και υπολογίζουμε την ισοδύναμη μακροσκοπική παραμόρφωση  $\bar{E}_e = \frac{3}{2} \sqrt{\bar{\mathbf{E}}^d : \bar{\mathbf{E}}^d}$ . Στην συνέχεια, παίρνωντας τον ταυυστή των τάσεων για κάθε στοιχείο στο κέντρο του, είναι εφικτό να υπολογιστεί ο μακροσκοπικός ταυυστής των παραμορφώσεων:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) dV \approx \frac{1}{|\Omega|} \sum_{elem} \sigma_{ij}(x)^{ec} |\Omega_{elem}| \quad (3.2)$$

όπου  $\sum_{elem}$  ορίζουμε το άθροισμα για όλα τα στοιχεία της κυψελίδας.  $\Omega_{elem}$  είναι ο χώρος που καταλαμβάνει κάθε στοιχείο, ενώ  $\sigma_{ij}(x)^{ec}$  συμβολίζουμε το την συνιστώσα του ταυυστή των τάσεων στο κέντρο κάθε στοιχείου.

Επίσης, αφού ξέρουμε τον μακροσκοπικό ταυυστή των τάσεων μπορούμε να υπολογίσουμε και την ισοδύναμη μακροσκοπική τάση σύμφωνα με την σχέση 2.15 όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μέσω του προγράμματος υπολογίζουμε και την εξέλιξη του πορώδους. Συγκεκριμένα, εάν ολοκληρώσουμε από 0 έως  $t$  την εξίσωση 2.31 προκύπτει:

$$f = 1 - (1 - f_0)e^{-E_{kk}} \quad (3.3)$$

Ακόμα μπορούμε να υπολογίζουμε τους λόγους των πλευρών  $w_1 = a_3/a_1$  και  $w_2 = a_3/a_2$ . Το λογισμικό Abaqus μας δίνει την μετατόπιση του κάθε κόμβου του πλέγματος σε κάθε βήμα  $i$ . Έτσι εφόσον γνωρίζουμε τις μετατοπίσεις των κόμβων που βρίσκονται στις άκρες του πόρου, υπολογίζουμε και τους λόγους  $w_1, w_2$ . Τέλος, μέσω του προγράμματος μπορούμε υπολογίσουμε την έναρξη συγκέντρωσης πλαστικής παραμόρφωσης υπολογίζοντας την συνθήκη 2.33. Ονομάζοντας  $\dot{P}$  την ποσότητα:

$$\dot{P} = \dot{\bar{\sigma}}_{33} - \beta \dot{\bar{\sigma}}_{11} \quad (3.4)$$

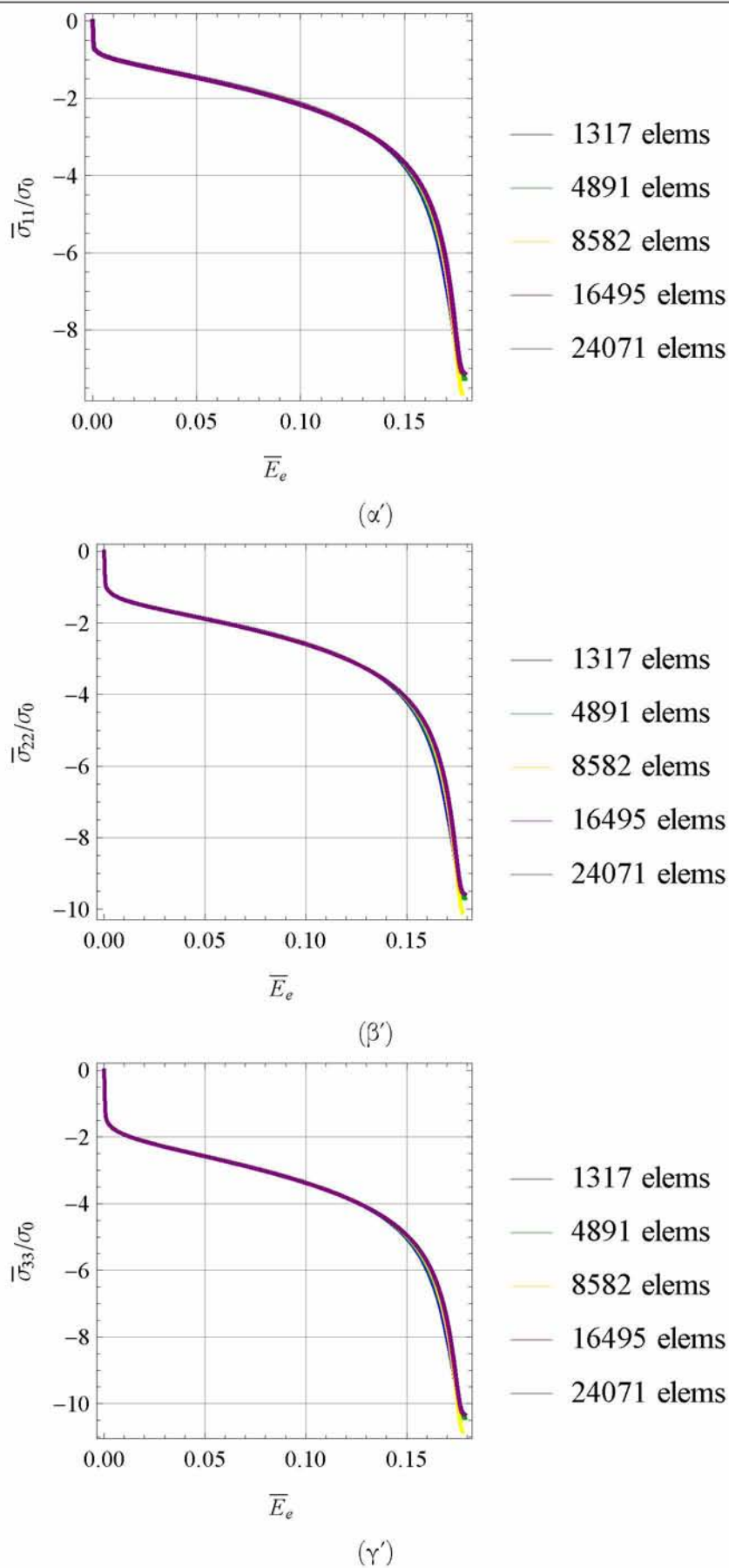
Και ολοκληρώνοντας μεταξύ δυο βημάτων:

$$\dot{P} = \bar{\sigma}_{33}^{(i+1)} - \beta \bar{\sigma}_{11}^{(i+1)} + \bar{\sigma}_{33}^{(i)} - \beta \bar{\sigma}_{11}^{(i)} \quad (3.5)$$

όπου  $i$  το βήμα για το οποίο υπολογίζονται οι μακροσκοπικές τάσεις.

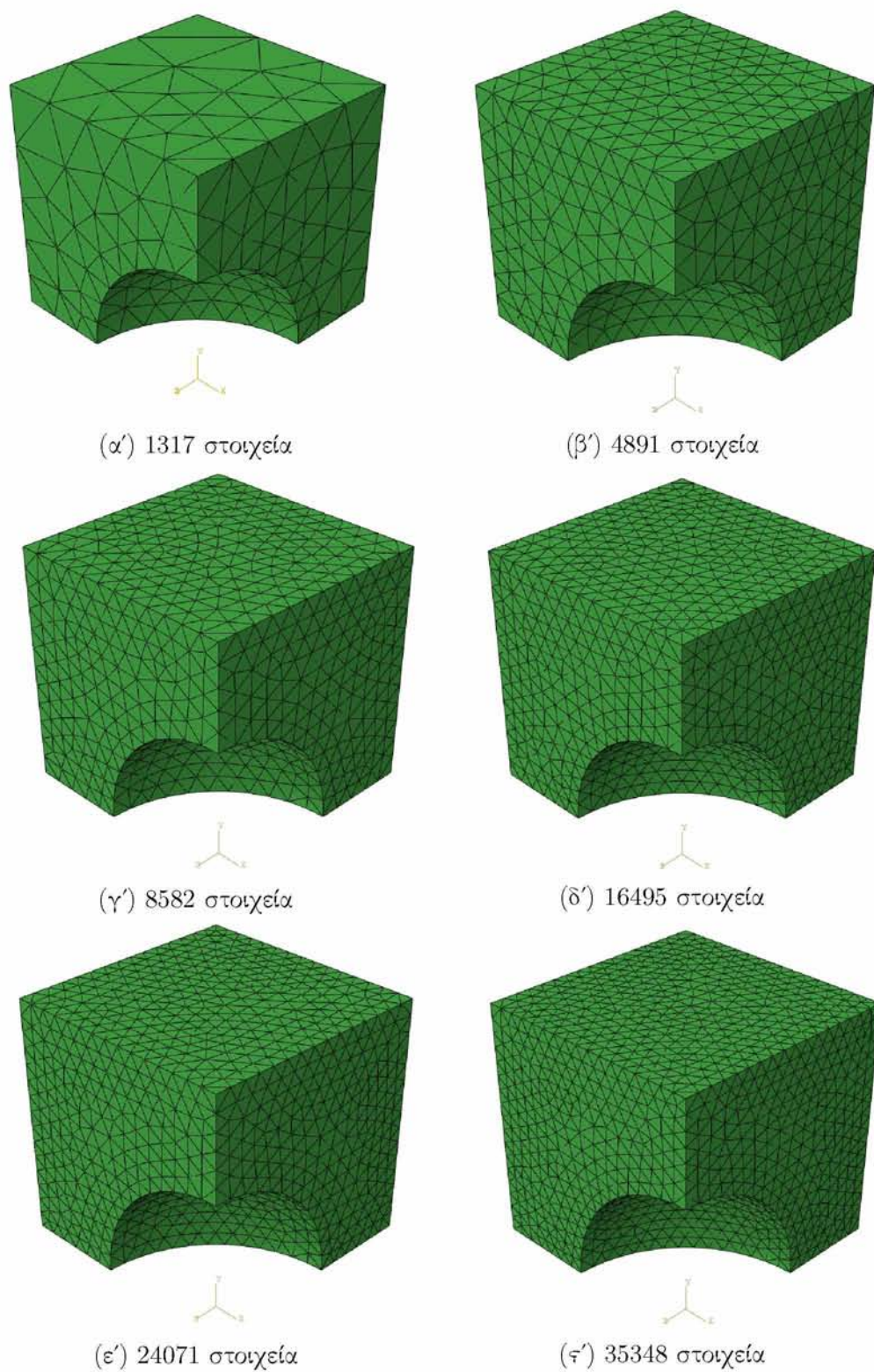
### 3.4 Έλεγχος Σύγκλισης

Για την επιλογή του αριθμού των στοιχείων για τον οποίο θα γίνονταν οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκε έλεγχος σύγκλισης. Συγκεκριμένα, για την φόρτιση  $\beta = 0.5$  και για ποσοστό πορώδους  $f_0 = 0.1$  δοκιμάστηκαν 6 πλέγματα όπως φαίνεται στην εικόνα 3.2. Με σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν εάν και για τα 6 πλέγματα τα αποτελέσματα δεν είχαν μεγάλη απόκλιση, μπορούμε να δούμε ότι μετά τα 16495 στοιχεία οι λύσεις που προκύπτουν είναι σχεδόν πανομοιότυπες. Συνεπώς το μοντέλο για το οποίο διεξήχθησαν οι αναλύσεις αποτελούταν από το συγκεκριμένο πλέγμα των 16495 στοιχείων.



Σχήμα 3.1: Διάγραμματα  $\bar{\sigma}_{ii} - \bar{E}_e$  για τον έλεγχο σύγκλισης των διαφόρων πλεγμάτων που ελέγχθηκαν όπου (α)  $i = 1$ , (β)  $i = 2$  και (γ)  $i = 3$





Σχήμα 3.2: Οι κυψελίδες διακριτοποιημένες για τις οποίες πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος σύγκλισης (μόνο το 1/8 χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς)

# Κεφάλαιο 4

## Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την λύση του προβλήματος που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Θεωρούμε δηλαδή πορώδες μέταλλο με περιοδική μικροδομή. Ο φορέας θεωρείται ελαστοπλαστικός όπου υπακούει στο μοντέλο της πλαστικότητας κατά Von Mises και η σκλήρυνση του περιγράφεται από την σχέση Power Law (βλ σχέσεις 2.14, 2.18). Ο πόρος θεωρούμε πως έχει σφαιρικό σχήμα και τοποθετείται στο κέντρο της κυβικής μοναδιαίας κυψελίδας (βλ σχήμα 2.1β'). Το 1/8 της κυψελίδας αναλύθηκε αριθμητικά εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες και την φόρτιση που περιγραφεί η ενότητα 2.4. Οι μεταβλητές που μελετώνται είναι η μακροσκοπικές τάσεις, το πορώδες  $f$ , οι λόγοι των πλευρών  $w_1 = a_3/a_1$ ,  $w_2 = a_3/a_2$ , η τριαξονικότητα των τάσεων  $X_\sigma$ , αλλά και η συνθήκη  $\hat{P}$ . Αυτές οι μεταβλητές παρουσιάζονται σε διαγράμματα συναρτήσεως της ισοδύναμης μακροσκοπικής λογαριθμικής παραμόρφωσης  $\bar{E}_e$ . Στα διαγράμματα παρουσιάζονται αυτές οι μεταβλητές για διάφορες τιμές του λόγου του ρυθμού παραμόρφωσης  $\beta$ . Επίσης, εξετάζουμε και 3 τιμές του αρχικού πορώδους  $f_0 = 0.01, 0.1, 0.3$ . Συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα μελετάμε τη περίπτωση της μονοαξονικής επιμήκυνσης που αντιστοιχεί για  $\beta \rightarrow \infty$ . Στην συνέχεια, εξετάζεται η τιμή  $\beta=0$  που αντιστοιχεί σε μονοαξονική επιβράχυνση. Τέλος παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για τιμές του  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ . Ειδικά, η τιμή  $\beta=1$  αντιστοιχεί σε φόρτιση καθαρής διάτμησης.

Για όλες τις τιμές του  $\beta$  που εξετάζονται, παρουσιάζουμε τα contour plots όπου απεικονίζουν την κατανομή τάσεων στην αρχή της πλαστικοποίησης της κυψελίδας και στο τέλος της φόρτισης.

Στο τέλος της ενότητας παρέχουμε τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε.

### 4.1 Μονοαξονική επιμήκυνση ( $\beta \rightarrow \infty$ )

Η κυψελίδα υποβλήθηκε σε φόρτιση μονοαξονικής επιμήκυνσης, η οποία αντιστοιχεί σε  $\beta \rightarrow \infty$ . Για την συγκεκριμένη φόρτιση εξετάζονται οι περιπτώσεις πορώδους  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Στο σχήμα 4.1 παρατηρείται η μακροσκοπική απόκριση του υλικού καθώς και η εξέλιξη της μικροδομής.

Στο σχήμα 4.1α' φαίνεται η εξέλιξη του πορώδους. Το πορώδες αυξάνεται με την αύξηση της ισοδύναμης μακροσκοπικής παραμόρφωσης (βλ. σχέση 2.6). Σε αντίθεση με τις άλλες μεταβλητές, ο λόγος  $w_1 \equiv a_3/a_1$  συμπεριφέρεται διαφορετικά για τις 3 περιπτώσεις του

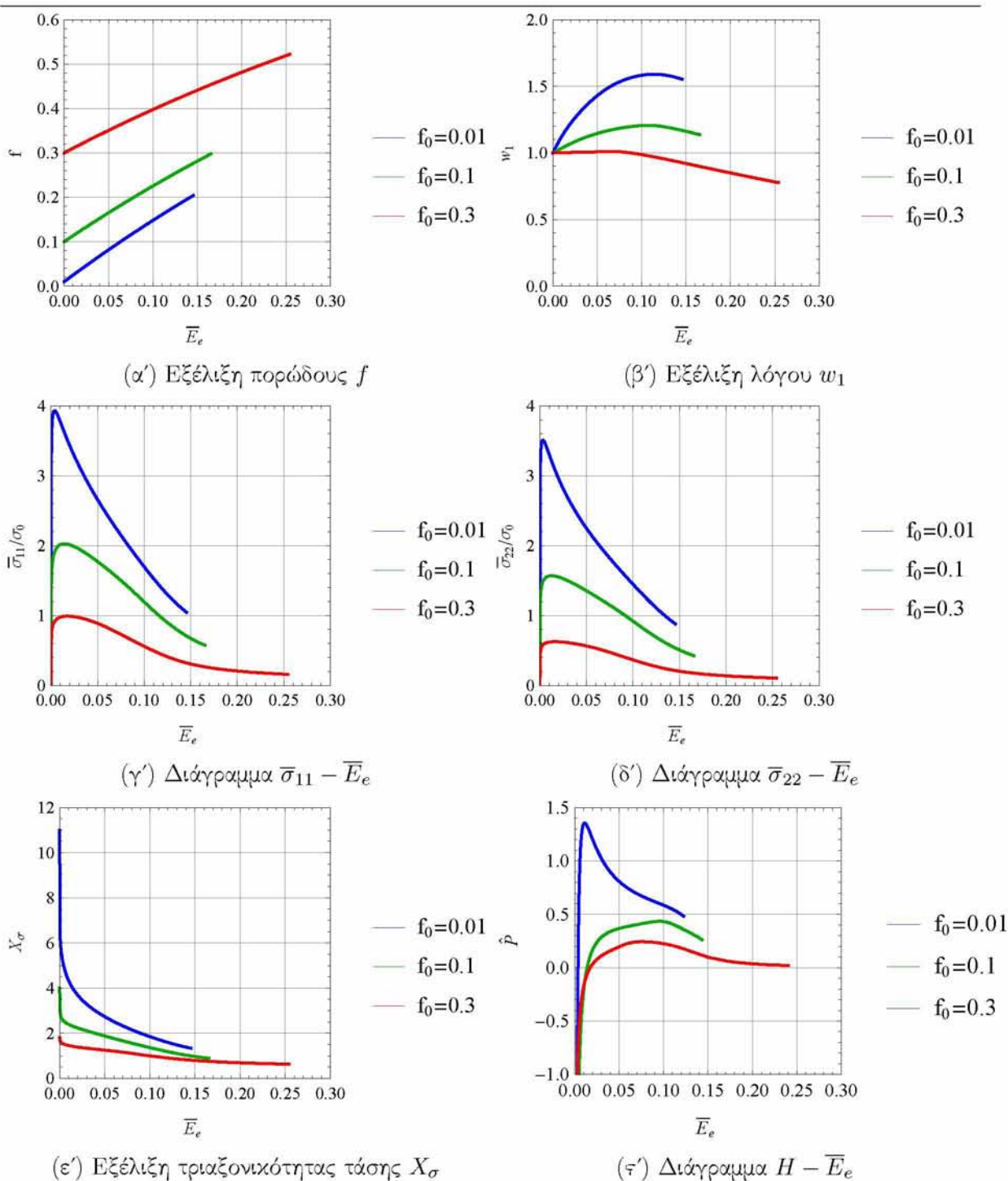
πορώδους. Για  $f_0 = 1\%, 10\%$  παρατηρείται μια σταδιακή αύξηση μέχρι ένα σημείο ενώ στο τέλος της φόρτισης η καμπύλη επιδυνκνύει ένα μέγιστο όπου ακολουθείται από μια μικρή πτώση. Στην περίπτωση τώρα του υλικού με πορώδες  $f_0 = 30\%$ , παρατηρείται πως ο λόγος παραμένει σχεδόν σταθερός ενώ στην συνέχεια μειώνεται, καθώς αυξάνει η ισοδύναμη μακροσκοπική παραμόρφωση. Ο λόγος  $w_2 \equiv a_3/a_2$  παραμένει σταθερός στην διάρκεια της φόρτισης και ίσος με την μονάδα  $w_2 = 1$ .

Το σχήμα 4.1δ' και 4.1γ' απεικονίζει το διάγραμμα μακροσκοπικής τάσης-παραμόρφωσης, όπου  $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33}$ . Από τα διαγράμματα γίνεται φανερό πως για όλα τα ποσοστά πορώδους το υλικό αρχικά μακροσκοπικά επιδεικνύει μια κρατυνόμενη συμπεριφορά στην συνέχεια όμως η πράυνση είναι η κυρίαρχη συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αυτή δείχνει πως αρχικά η μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους μετάλλου καθορίζεται από την σκλήρυνση του υλικού του φορέα. Στην συνέχεια όμως το υλικό υφίσταται καθεστός πράυνσης λόγω της αύξησης του πορώδους. Η αλλαγή του σχήματος του πόρου, έχει ως συνέπεια την αύξηση της ικανότητας του υλικού να φέρει μεγαλύτερα φορτία στην κατεύθυνση φόρτισης. Συνεπώς δρα ως ένας ανισότροπος μηχανισμός σκλήρυνσης, όχι όμως τόσο σημαντικός όσο ο μηχανισμός σκλήρυνσης λόγω της σκλήρυνσης του υλικού του φορέα. Αυτό φαίνεται καθώς ο λόγος  $w_1$  παίρνει τιμές αρκετά κοντά στην μονάδα για όσο το υλικό βρίσκεται σε καθεστός σκλήρυνσης. Επίσης φαίνεται πως ισχύει για τις τάσεις  $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{22}$ .

Αξίζει να σημειώσουμε πως η περιοχή σκλήρυνσης του υλικού είναι μικρότερη για μικρότερες τιμές του αρχικού πορώδους  $f_0$ . Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο μηχανισμός πράυνσης μέσω της αύξησης του πορώδους έχει μεγαλύτερη επίδραση σε υλικά με μικρότερο αρχικό πορώδες.

Η μετάβαση από το καθεστός σκλήρυνσης σε αυτό της πράυνσης, όπως είδαμε στο σχήμα 4.1γ', σηματοδοτεί την απώλεια ευστάθειας στην μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού. Επίσης, μετά από παρατήρηση των διαγραμμάτων 4.1ε', όπου απεικονίζεται γραφικά η ποσότητα  $\dot{P}$  (σχέση 3.4) αλλά και 4.1γ', φαίνεται πως η συγκέντρωση της παραμόρφωσης (strain localization,  $H = 0$ ) αρχίζει στην παραμορφώση όπου η τάση  $\bar{\sigma}_{11}$  φτάνει στην μέγιστη τιμή της. Αυτό συμβαίνει για όλες τις τιμές του πορώδους  $f_0$ . Επίσης, εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα, πως καθώς αυξάνεται η αρχική τιμή του  $f_0$  τόσο μειώνεται η τάση και η κρίσιμη παραμόρφωση για την οποία ικανοποιείται η σχέση για την έναρξη της συγκέντρωσης παραμορφώσεων.

Από τα διαγράμματα 4.1γ', και 4.1ε' φαίνεται πως όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του αρχικού πορώδους τόσο πιο «ήπια» είναι η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού με την έννοια πως οι καμπύλες των διαγραμμάτων έχουν μικρότερες κλίσεις. Ακόμα οι υψηλές τιμές από το διάγραμμα εξέλιξης της τριαξονικότητας των τάσεων (σχήμα 4.1ε') δείχνουν πως ο κυρίαρχος μηχανισμός παραμόρφωσης του υλικού για αυτήν την φόρτιση είναι η ανάπτυξη του πορώδους.



Σχήμα 4.1: Αποτελέσματα για φόρτιση μονοαξονικής επιμήκυνσης ( $\beta \rightarrow \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που θεωρούνται  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Τα διαγράμματα απεικονίζουν: την εξέλιξη του πορώδους, την εξέλιξη των λόγων των πλευρών  $w_1 = a_3/a_1$ , τις μακροσκοπικές συνιστώσες τανυστή τάσεων  $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{11}$ , την τριαξονικότητα των τάσεων  $X_\sigma = \bar{\sigma}_m/\bar{\sigma}_e$  και την ποσότητα  $\dot{P}$

## 4.2 Μονοαξονική επιβράχυνση ( $b = 0$ )

Άλλη μια φόρτιση που μελετήσαμε είναι η μονοαξονική επιβράχυνση της κυψελίδας. Αυτή αντιστοιχεί για τιμή του  $\beta=0$ . Επίσης χρησιμοποιούμε τα ποσοστά πορώδους  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα ίδια μεγέθη όπως και στην προηγούμενη φόρτιση.

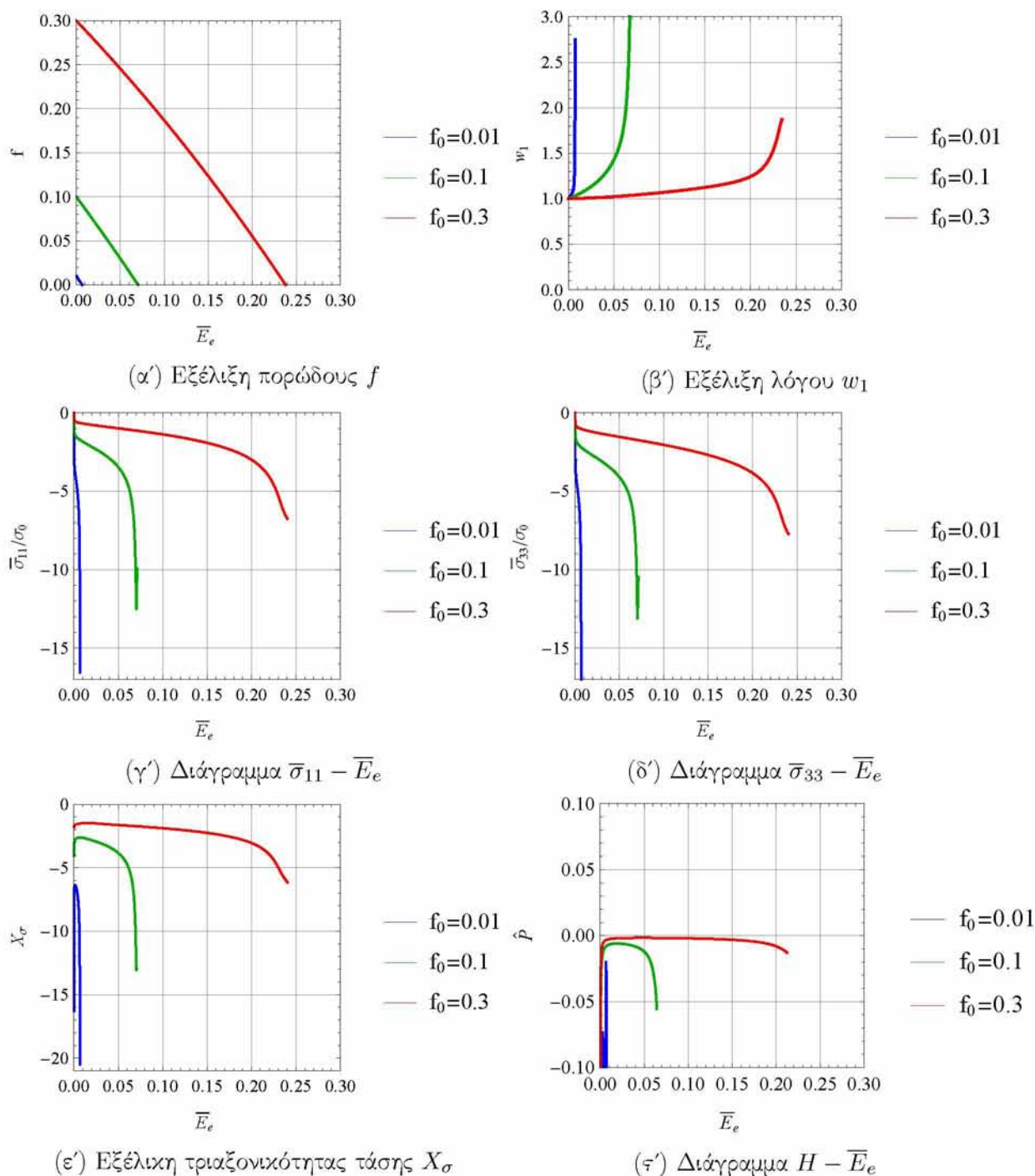
Το πορώδες, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2α' μειώνεται καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση  $\bar{E}_e$  και φτάνει ως το κλείσιμο του πόρου. Ακόμα, είναι φανερό πως καθώς αυξάνεται το αρχικό πορώδες του υλικού, αυξάνεται και η παραμόρφωση για την οποία κλείνει ο πόρος ( $f = 0$ ). Αυτό συμβαίνει και για τις 3 τιμές του αρχικού πορώδους. Σε αντίθεση, στο σχήμα 4.2β' παρατηρούμε την αύξηση του λόγου των πλευρών του πόρου  $w_1$  (όπου  $w_1 = w_2$ ). Επίσης, ο ρυθμός αύξησής του λόγου  $w_1$  είναι μεγαλύτερος για μικρότερες τιμές του αρχικού πορώδους  $f_0$ . Με μια πιο προσεκτική ματιά διακρίνουμε πως παίρνει πολύ μεγάλες τιμές για τις παραμορφώσεις όπου το πορώδες τείνει στο 0. Δηλαδή, το αρχικό σφαιρικό σχήμα του πόρου τείνει σε αυτό ενός πεπλατυμένου ελλειψοειδούς έως ότου κλείσει. Το γεγονός αυτό προτείνει ότι για αυτήν την φόρτιση η μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους υλικού καθορίζεται σημαντικά από την μείωση του μεγέθους του πόρου μέχρι το κλείσιμο του.

Η εξέλιξη των μακροσκοπικών τάσεων φαίνεται στα σχήματα 4.2γ' και 4.2δ'. Ισχύει για αυτήν την φόρτιση  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}$ . Διακρίνονται λοιπόν, ανεξαρτήτως της τιμής του αρχικού πορώδους, δύο φάσεις σκλήρυνσης που δεν ακολουθείται φάση πράυνσης όπως στην μονοαξονική επιμήκυνση. Οι τάσεις λοιπόν αρχικά αυξάνονται με ελαττούμενο ρυθμό έως ένα σημείο όπου υποδικνύεται το τέλος της πρώτης φάσης σκλήρυνσης. Σε αυτήν την φάση κυρίαρχος μηχανισμός σκλήρυνσης, είναι αυτός της σκλήρυνσης του μεταλλικού υλικού του φορέα. Αρχικά, αυτός ο μηχανισμός σκλήρυνσης είναι ισχυρός όπως φαίνεται από την αύξηση των τάσεων αλλά με αύξηση της παραμόρφωσης χάνει σημαντικά την επίδραση του. Καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση, αρχίζει η δεύτερη φάση σκλήρυνσης του υλικού. Αυτή η φάση οφείλεται στην μείωση του πορώδους κατά την διάρκεια της φόρτισης. Από την έκταση της περιοχής σκλήρυνσης στο διάγραμμα 4.2γ' και 4.2δ' για κάθε έναν από τους δύο μηχανισμούς, φαίνεται πως ο μηχανισμός σκλήρυνσης λόγω μείωσης του πορώδους είναι ισχυρότερος από αυτόν λόγω της σκλήρυνσης του υλικού του φορέα.

Παρατηρώντας τις καμπύλες των διαγραμμάτων μακροσκοπικών τάσεων παραμορφώσεων βλέπουμε πως αλλάζουν με διαφορετικό ρυθμό. Γεγονός που υποδεικνύει πως ο μηχανισμός πράυνσης δρα ανισότροπα στην μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού.

Στην περίπτωση της μονοαξονικής επιμήκυνσης παρατηρήσαμε πως κατά την μεταβατική κατάσταση από την σκλήρυνση στην πράυνση το υλικό χάνει την ευστάθεια του και έχουμε συγκέντρωση συγκέντωση της παραμόρφωσης (strain localization). Για την μονοαξονική επιβράχυνση όμως από το σχήμα 4.2ε' φαίνεται πως η συνθήκη για την έναρξη της συγκέντρωσης παραμόρφωσης ( $H = 0$ ) δεν ικανοποιείται για καμία τιμή του αρχικού ποσοστού πορώδους. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνεπές με το γεγονός πως η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού δεν χαρακτηρίζεται από εναλλαγή φάσης σκλήρυνση σε πράυνση. Τέλος στο σχήμα 4.2ε' η τριαξονικότητα των τάσεων μειώνεται καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση και πλησιάζει πολύ μικρές τιμές καθώς το πορώδες τείνει σε μηδενικές τιμές. Η συμπεριφορά της τριαξονικότητας των τάσεων καθώς και οι μακροσκοπικές τάσεις δείχνουν πως μακροσκοπικά για μεγαλύτερα ποσοστά αρχικού πορώδους  $f_0$  το υλικό είναι όλο και πιο «μαλακό» κάτω από την συγκεκριμένη φόρτιση.





Σχήμα 4.2: Αποτελέσματα για φόρτιση μονοαξονικής επιβράχυνσης ( $\beta = 0$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που θεωρούνται  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Τα διαγράμματα απεικονίζουν: την εξέλιξη του πορώδους, την εξέλιξη των λόγων πλευρών  $w_1 = w_2 = a_3/a$  με  $a = a_1 = a_2$ , τις μακροσκοπικές συνιστώσες του ταυστή των τάσεων  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}$ , την τριαξονικότητα των τάσεων  $X_\sigma = \bar{\sigma}_m/\bar{\sigma}_e$  και την ποσότητα  $\hat{P}$ .

### 4.3 Διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ )

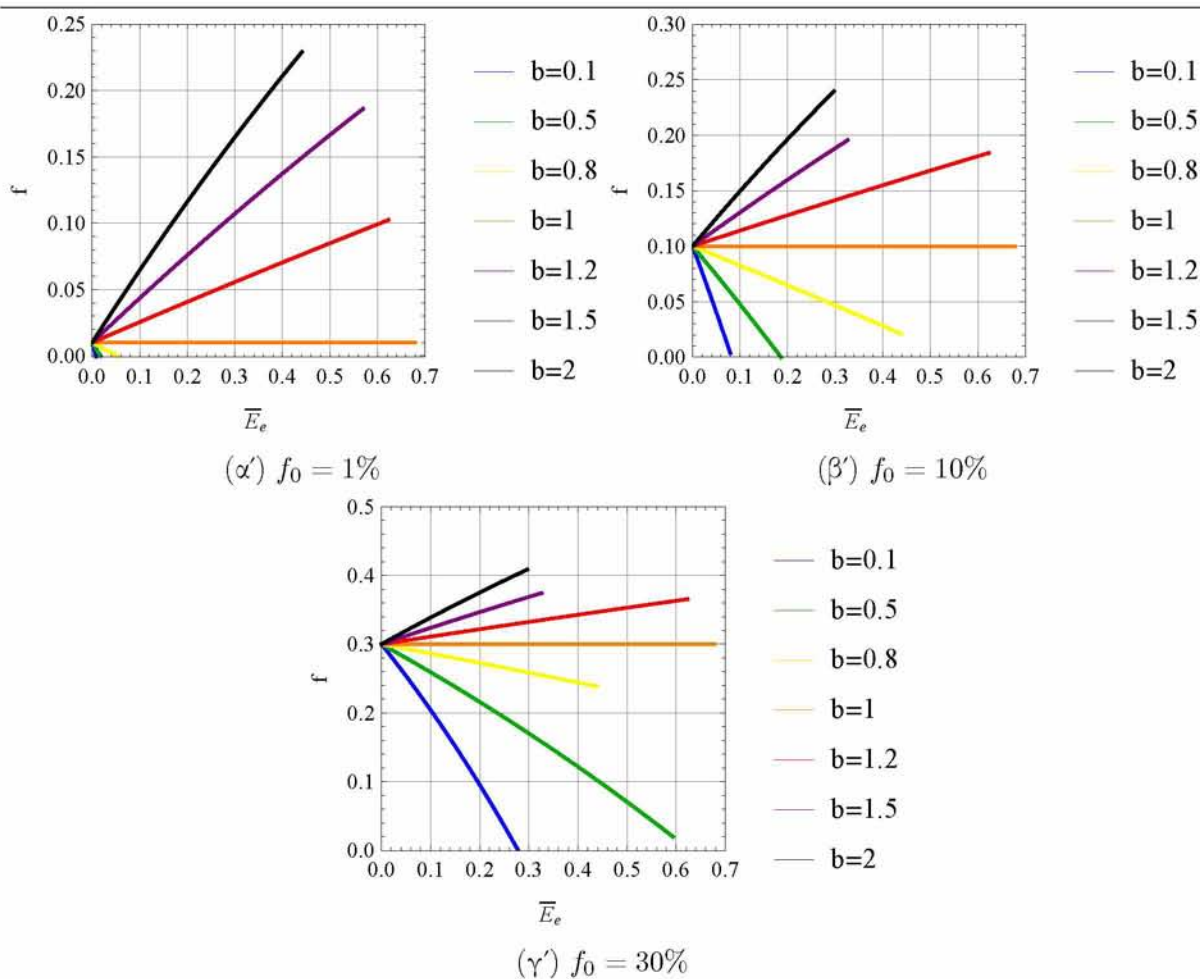
Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την απόκριση του υλικού κάτω από διαξονική παραμόρφωση. Στην διαξονική παραμόρφωση δίνουμε στον λόγο  $\beta$  πεπερασμένες τιμές ανάμεσα στο  $0 < \beta < \infty$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι τιμές καλύπτουν το εύρος ανάμεσα από δυο οριακές καταστάσεις. Την μονοαξονική επιμήκυνση ( $\beta \rightarrow \infty$ ) και την μονοαξονική επιβράχυνση ( $\beta = 0$ ) όπου τα αποτελέσματα για αυτές τις φορτίσεις παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές:  $\beta=0.1$ ,  $\beta=0.5$ ,  $\beta=0.8$ ,  $\beta=1$ ,  $\beta=1.5$  και  $\beta=2$ . Η τιμή  $\beta=1$  αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση της παραμόρφωσης καθαρής διάτμησης. Επίσης, εξετάζουμε τις περιπτώσεις 3 τιμών για το ποσοστό του αρχικού πορώδους  $f_0 = 1\%$ ,  $10\%$ ,  $30\%$ .

Στο σχήμα 4.3, παρουσιάζεται η εξέλιξη του πορώδους. Ειδικά, για  $\beta > 1$  το πορώδες αυξάνεται με την αύξηση της παραμόρφωσης  $\bar{E}_e$ , ενώ, για  $\beta < 1$  μειώνεται έως την τιμή 0. Για την περίπτωση  $\beta=1$  της παραμόρφωσης καθαρής διάτμησης, το πορώδες μένει σταθερό στην αρχική τιμή του. Ακόμα, παρατηρείται πως για αύξηση της τιμής  $\beta > 1$  και για μείωση της  $\beta < 1$ , αυξάνεται ο ρυθμός αύξησης και μείωσης του πορώδους αντίστοιχα. Συνεπώς για φορτίσεις με  $\beta < 1$  το κλείσιμο του πόρου συμβαίνει σε μικρότερες παραμορφώσεις.

Όσον αφορά τους λόγους  $w_1$ ,  $w_2$  όπως φαίνονται στο σχήμα 4.4, υπάρχει μια τάση όπου το σφαιρικό σχήμα των πόρων εκφυλίζεται σε ελλειψοειδές αφού  $w_1, w_2 \neq 1$ . Συγκεκριμένα για  $\beta > 1$ , οι λόγοι  $w_1$  και  $w_2$  φαίνεται πως μειώνονται με την αύξηση της παραμόρφωσης για όλες τις περιπτώσεις αρχικού πορώδους. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση  $f_0 = 0.01$  και για  $\beta=1.5, 2$  όπου υπάρχει μια μεταβατική συμπεριφορά, μικρής αύξησης αρχικά και στην συνέχεια μείωση κάτω από την μονάδα. Ακόμα, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα πως ο ρυθμός της μείωσης των λόγων αυξάνεται για μικρότερα  $\beta$  ( $\beta > 1$ ).

Για τις φορτίσεις όπου  $\beta < 1$  παρατηρείται απότομη αύξηση των λόγων. Συγκεκριμένα για  $f_0 = 0.01$  και στις 3 περιπτώσεις  $\beta=0.1, 0.5, 0.8$  υπάρχει αυτή η απότομη αύξηση. Για  $f_0 = 0.1$  παρατηρείται μόνο για  $\beta=0.1, 0.5$  και για  $f_0 = 0.3$  μόνο στην φόρτιση  $\beta=0.1$ . Το γεγονός αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα διαγράμματα εξέλιξης του πορώδους, όπου συγκρίνοντας τα διαφέρεται συσχετισμός του κλείσιμου των πόρων, (void closure) με την μεγάλη αύξηση των λόγων των πλευρών του πόρου.

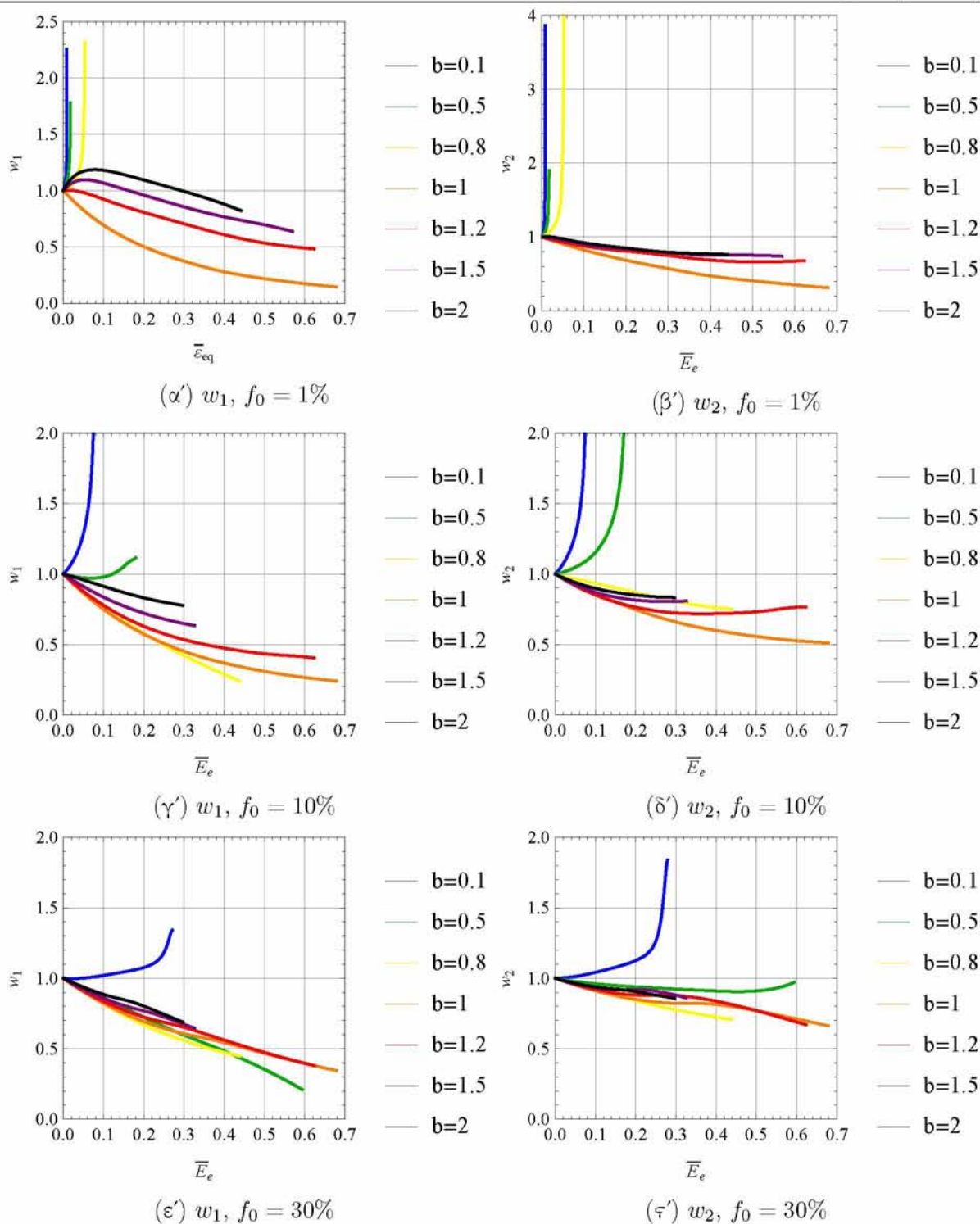
Στο σχήμα 4.5 απεικονίζονται τα διάγραμμα μακροσκοπικής τάσης παραμόρφωσης. Η συμπεριφορά των τριών συνιστωσών της μακροσκοπικής τάσης ( $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}$ ) είναι παρόμοια και για τις 3 τιμές του αρχικού πορώδους, για αυτό και επιλέχθηκε να παρουσιαστεί μόνο η τάση  $\bar{\sigma}_{11}$ . Εδώ παρατηρούνται 2 διαφορετικές συμπεριφορές. Για  $\beta > 1$  (φορτίσεις επιμήκυνσης) υπάρχει μια φάση σκλήρυνσης όπου ακολουθούνται από μια φάση πλάυνσης όπως και στην περίπτωση της μονοαξονικής επιμήκυνσης ( $\beta \rightarrow \infty$ ). Για  $\beta < 1$  (φορτίσεις επιβράχυνσης) συνυπάρχουν δύο φάσεις σκλήρυνσης μόνο, όπως και στην περίπτωση της μονοαξονικής επιβράχυνσης ( $\beta = 0$ ). Συγκεκριμένα, η μία φάση της σκλήρυνσης που παρατηρείται για τις φορτίσεις σε όλο το εύρος του  $\beta$  ( $0 < \beta < \infty$ ), οφείλεται στην σκλήρυνση του μεταλλικού φορέα. Για τις φορτίσεις  $\beta < 1$ , η δεύτερη φάση σκλήρυνσης και πιο ισχυρή, όπου αρχίζει μετά από μια συγκεκριμένη τιμή της παραμορφωσης (διαφορετική για κάθε τιμή του  $f_0$ ) οφείλεται στην μείωση του πορώδους. Ειδικά, για  $\beta=0.8$ , ο μηχανισμός κράτυνσης μέσω της μείωσης του πορώδους έχει ελάχιστη συνεισφορά όπου και στην περίπτωση  $f_0 = 0.3$  δεν ανιχνεύεται καθόλου. Η συμπεριφορά αυτή συμβαίνει, αφού όπως διαπιστώνεται, με την αύξηση της τιμής του  $\beta$  και του  $f_0$  αυτός ο μηχανισμός σκλήρυνσης έχει μειούμενη επίδραση. Για  $\beta=1$  δεν εμφανίζεται καθόλου ανεξαρτήτου τιμής  $f_0$ .



Σχήμα 4.3: Εξέλιξη πορώδους για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που χρησιμοποιήθηκαν  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Απεικονίζονται οι καμπύλες για τις τιμές  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ .

Σε μεγαλύτερες παραμορφώσεις εμφανίζεται η φάση της πράυνσης. Αυτή οφείλεται στην αύξηση του πορώδους για τις φορτίσεις επιμήκυνσης ( $\beta > 1$ ). Για  $\beta=1$  δεν παρατηρείται φάση πράυνσης στα διαγράμματα εκτός της περίπτωσης  $f_0 = 0.3$  όπου γίνεται αντιληπτή μια μικρή πτώση της τάσης μετά από μια τιμή παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα για  $\beta=1$  δεν υπάρχει αλλαγή στο πορώδες και η αλλαγή στο σχήμα του πόρου είναι ήπια όπως φαίνεται στα σχήματα 4.3 και 4.4. Έτσι οι μηχανισμοί πράυνσης που επενεργούν στις άλλες περιπτώσεις, εδώ έχουν αμελητέα επίδραση. Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως για μεγαλύτερα  $\beta$  στο εύρος ( $\beta > 1$ ) και μικρότερα στο ( $\beta < 1$ ), αυξάνεται το μέτρο του ρυθμού σκλήρυνσης (και πράυνσης στην περίπτωση ( $\beta > 1$ ), αντίστοιχα). Συγκεκριμένα, ο μηχανισμός πράυνσης για ( $\beta > 1$ ) φαίνεται πως έχει μεγαλύτερη επίδραση καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\beta$ . Συγκεκριμένα, για μεγαλύτερα  $\beta$  οι καμπύλες της μακροσκοπικής τάσης έχουν μεγαλύτερη κλίση στην πραυνόμενη περιοχή όπως μπορούμε να δούμε από τις καμπύλες του σχήματος 4.5. Η συμπεριφορά αυτή έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός πως καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $\beta$  αυξάνεται και ο ρυθμός αύξησης του πόρώδους, δηλαδή του μηχανισμού πράυνσης. Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως για φορτίσεις με μεγαλύτερα  $\beta$  για ( $\beta > 1$ ) και μικρότερα για ( $\beta < 1$ ), η εξέλιξη της μικροδομής, έχει μεγαλύτερη επίδραση

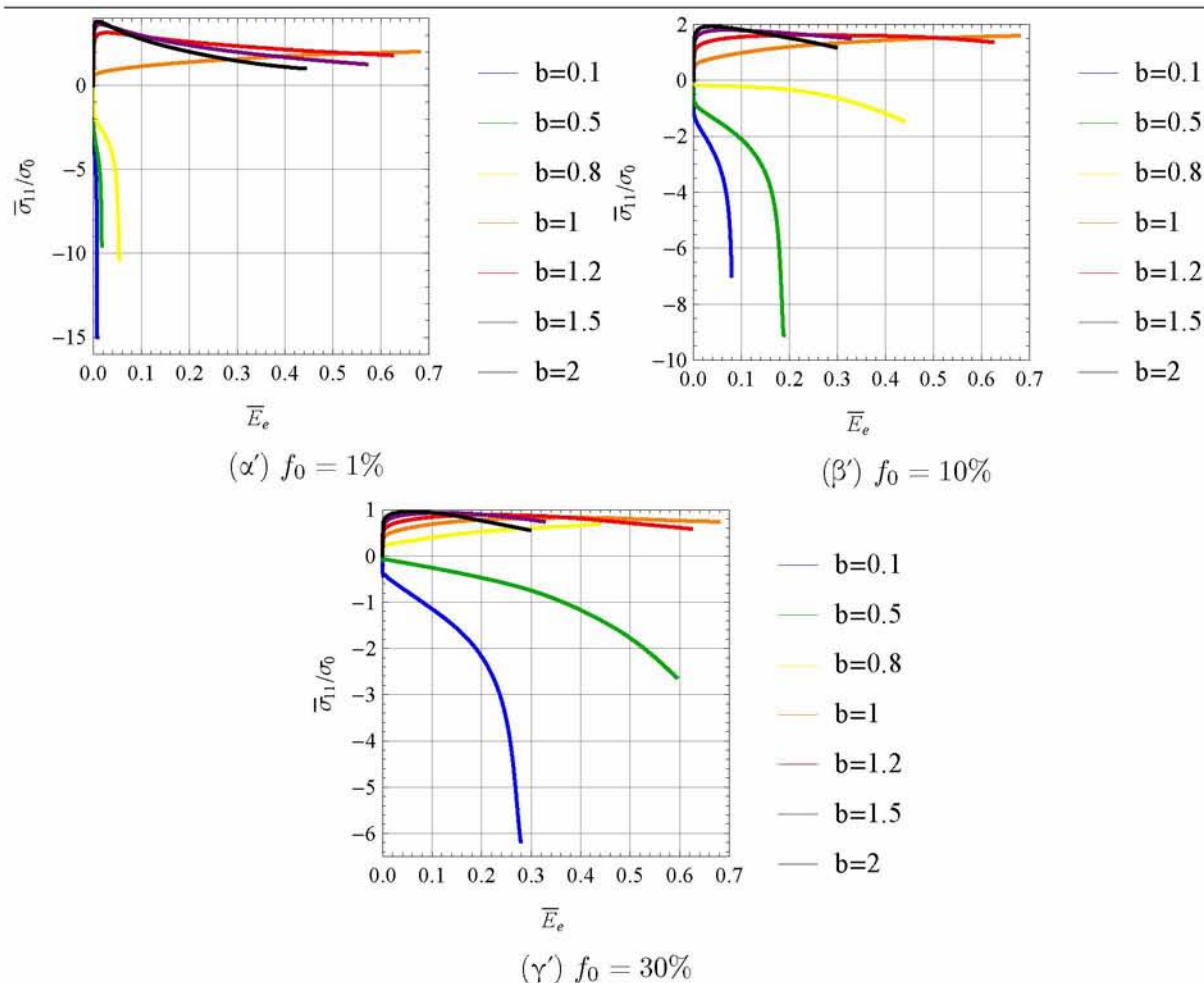




Σχήμα 4.4: Εξέλιξη λόγων πλευρών πόρου  $w_1 = a_3/a_1$ ,  $w_2 = a_3/a_2$  για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που χρησιμοποιήθηκαν  $f_0 = 1\%$ ,  $10\%$ ,  $30\%$ . Απεικονίζονται οι καμπύλες για τις τιμές  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ .

στην μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους υλικού.

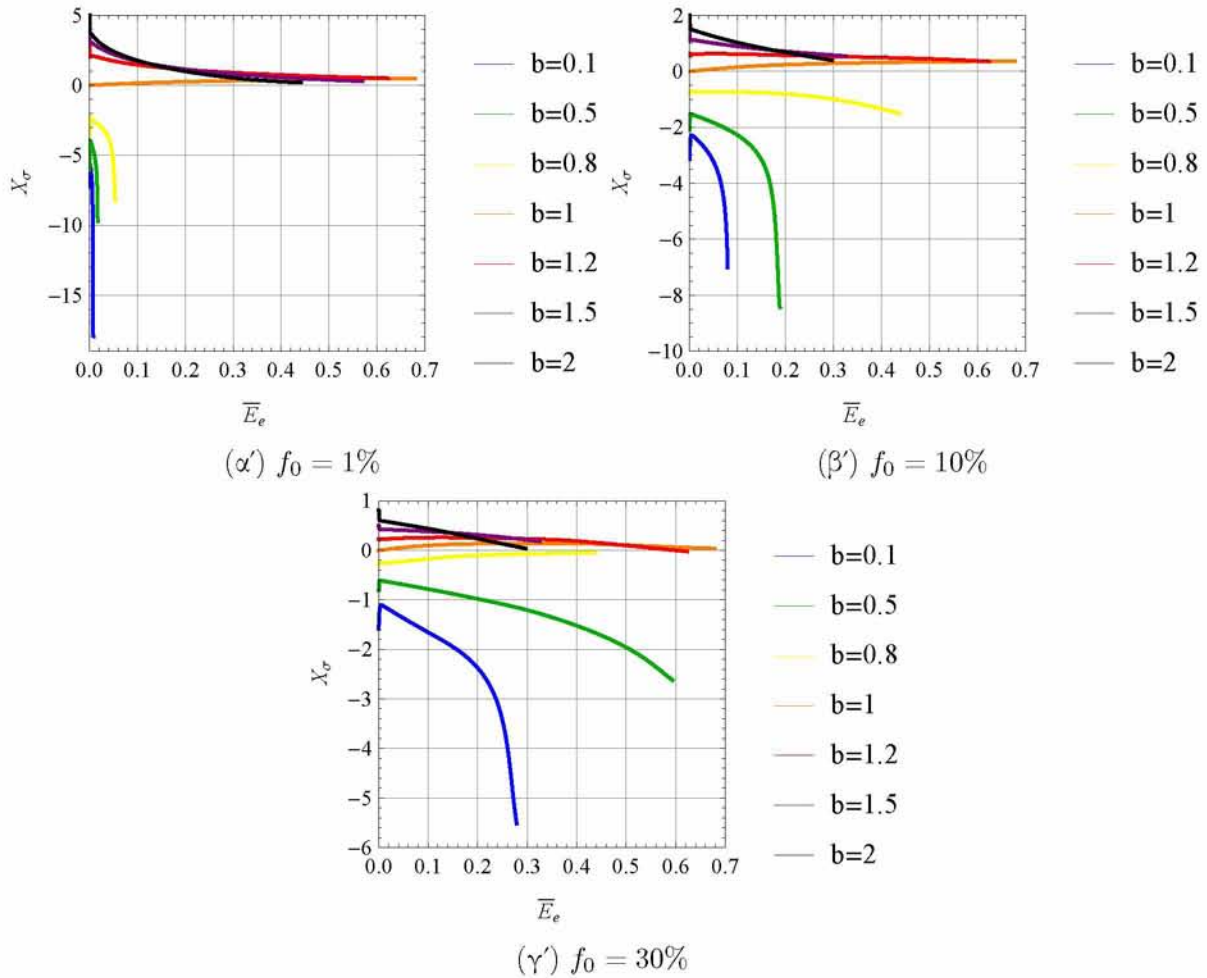
Στο σχήμα 4.6 παρουσιάζεται η εξέλιξη της τριαξονικότητας της τάσης. Συμπεραίνεται



Σχήμα 4.5: Συνιστώσα  $\bar{\sigma}_{11}$  τανυστή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που χρησιμοποιήθηκαν  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Απεικονίζονται οι καμπύλες για τις τιμές  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ .

πως η συμπεριφορά της, παρομοιάζει πολύ την εξέλιξη των τάσεων όπως παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο σχήμα. Σημειώνεται πως κατά απόλυτη τιμή, η τριαξονικότητα  $X_\sigma = \bar{\sigma}_m/\bar{\sigma}_e$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές στις φορτίσεις επιβράχυνσης παρά στις φορτίσεις επιμήκυνσης. Οι τιμές αυτές είναι συνεπείς με το γεγονός πως κατά την εξέλιξη της παραμόρφωσης στις φορτίσεις επιβράχυνσης υπάρχει μείωση του πορώδους ενώ σε αυτές τις επιμήκυνσης παρατηρούμε αύξηση του πορώδους.

Τέλος, στο σχήμα 4.7 απεικονίζεται η ποσότητα  $\hat{P}$  όπου για  $\hat{P} = 0$  έχουμε έναρξη της συγκέντρωσης παραμόρφωσης (strain localization). Όπως είναι φανερό για τιμές του  $\beta > 1$  η συνθήκη  $H = 0$  αληθεύει για κάποια τιμή της παραμόρφωσης, σηματοδοτώντας την έναρξη συγκέντρωσης παραμόρφωσης. Διακρίνεται πως αυτή η κρίσιμη παραμόρφωση όπου το υλικό γίνεται ασταθές μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\beta$ . Το οποίο βρίσκεται σε συνόχη με το γεγονός πως για μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  το πορώδες αυξάνεται γρηγορότερα. Επίσης, παρατηρούμε πως για την κρίσιμη παραμόρφωση όπου αρχίζει η συγκέντρωση της παραμόρφωσης η τάση που απεικονίζεται στο σχήμα 4.5 είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερα  $\beta$  στο εύρος  $\beta > 1$



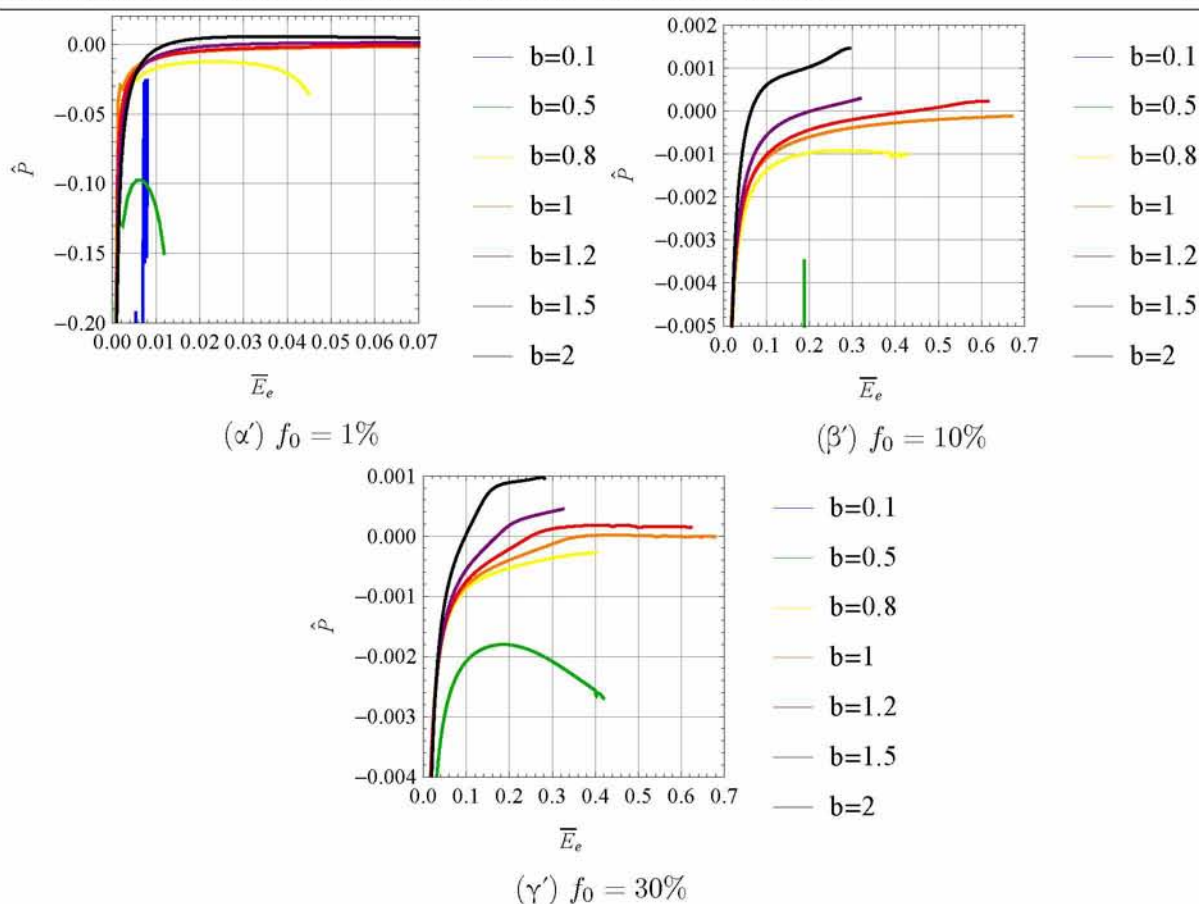
Σχήμα 4.6: Τριαξονικότητα τάσεων  $X_\sigma = \bar{\sigma}_m / \bar{\sigma}_e$  για διαξονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που χρησιμοποιήθηκαν  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Απεικονίζονται οι καμπύλες για τις τιμές  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ .

Όσον αφορά το εύρος  $\beta \leq 1$  φαίνεται πως για το υλικό ισχύει  $H \neq 0$  καθόλη την διάρκεια της φόρτισης και συνεπώς η μακροσκοπική συμπεριφορά των πορωδών μετάλλων για αυτές τις φορτίσεις παραμένει σταθερά.

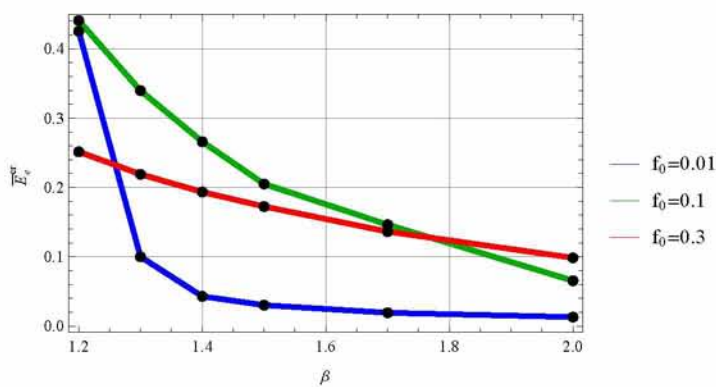
#### 4.4 Διάγραμμα Αστοχίας

Στο διάγραμμα 4.8 απεικονίζεται η κρίσιμη ισοδύναμη παραμόρφωση για την οποία αρχίζει η συγκέντρωση της παραμόρφωσης (strain localization) σε συνάρτηση με την παράμετρο  $\beta$  της φόρτισης. Στο διάγραμμα συνυπάρχουν οι καμπύλες για τις αρχικές τιμές του πορώδους  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Αρχικά, φαίνεται πως για  $\beta < 1.2$  το κριτήριο για την έναρξη της συγκέντρωσης της παραμόρφωσης δεν ικανοποιείται. Συνεπώς για τιμές  $\beta < 1.2$  η κρίσιμη ισοδύναμη παραμόρφωση θεωρητικά τείνει στο άπειρο. Όσον αφορά τις τιμές για  $\beta \geq 1.2$ , συμπαίρνεται πως για δεδομένο  $f_0$  όσο αυξάνεται το  $\beta$  τόσο μειώνεται η κρίσιμη παραμόρφωση, δηλαδή το υλικό γίνεται πιο ασταθές σε μικρότερες παραμορφώσεις.





Σχήμα 4.7: Διάγραμμα της ποσότητας  $\bar{P}$  για διαζονική παραμόρφωση ( $0 < \beta < \infty$ ). Τιμές αρχικού πορώδους που χρησιμοποιήθηκαν  $f_0 = 1\%, 10\%, 30\%$ . Απεικονίζονται οι καμπύλες για τις τιμές  $\beta = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5, 2$ .



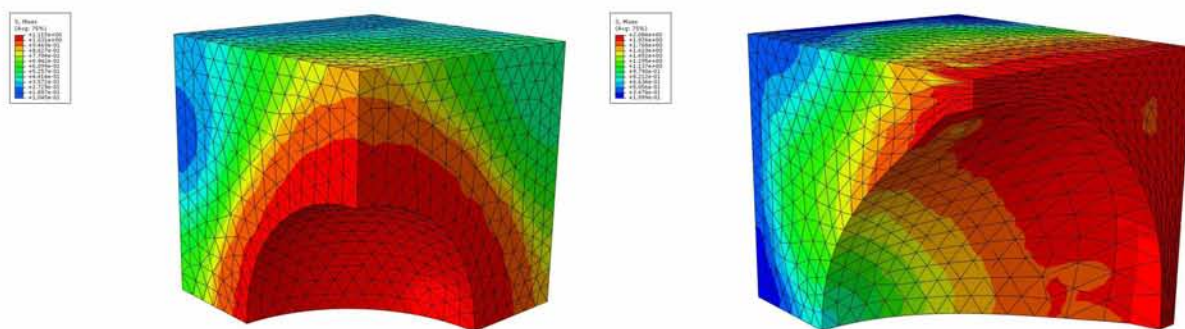
Σχήμα 4.8: Διάγραμμα  $\bar{E}_e^{cr} - \beta$

## 4.5 Κατανομή Τάσεων

Οπτικοποιώντας την λύση του προβλήματος, κατασκευάζονται contour plots στα οποία απεικονίζεται η κατανομή των τάσεων στην κυψελίδα. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η ισοδύναμη τάση Von Mises. Τα contour plots που παρατίθενται παρακάτω έχουν αρχική τιμή

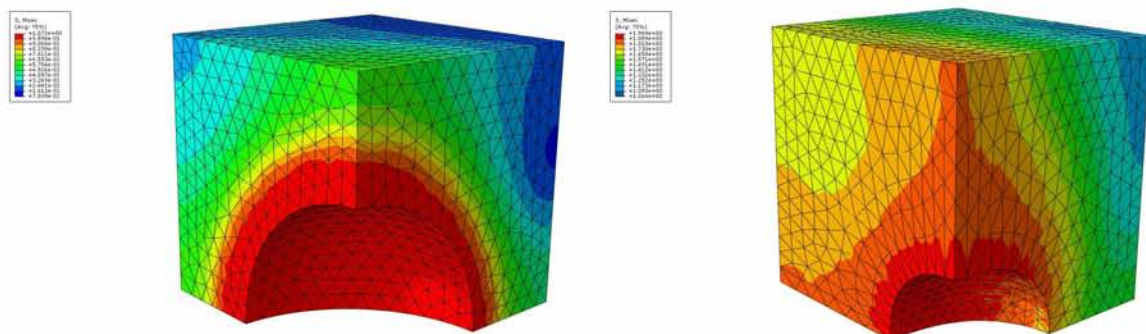
πορώδους  $f_0 = 10\%$ . Η συμπεριφορά για τα ποσοστά πορώδους  $f_0 = 1\%, 30\%$  είναι παρόμοια όποτε και παραλείπονται. Παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά τις δύο ακρές περιπτώσεις για μονοαξονική επιμήκυνση και μονοαξονική επιβράχυνση, την περίπτωση φόρτισης για  $\beta = 1$  που αντιστοιχεί σε παραμόρφωση καθαρής διάτμησης και δυο ενδιάμεσες καταστάσεις για  $\beta = 0.5, 1.5$  (φορτίσεις επιβράχυνσης και επιμήκυνσης αντίστοιχα).

Στα σχήματα 4.9 και 4.10 παρουσιάζονται οι φορτίσεις της μονοαξονικής επιμήκυνσης και μονοαξονικής επιβράχυνσης. Και στις δύο περιπτώσεις η πλαστικοποίηση του υλικού αρχίζει περιφερειακά της επιφάνειας του πόρου. Κατά την λήξη της φόρτισης παρατηρείται σύγκεντωση τάσεων σε μια λωρίδα στο κέντρο του πόρου της κυψελίδας με κατεύθυνση παράλληλη σε κάποιο επίπεδο πλευράς της κυψελίδας. Η κατεύθυνση εξαρτάται από το είδος της φόρτισης.



(α') Αρχή Πλαστικοποίησης

(β') Τελική κατάσταση φόρτισης

Σχήμα 4.9: Κατανομή τάσεων για μονοαξονική επιμήκυνση ( $\beta \rightarrow \infty$ )

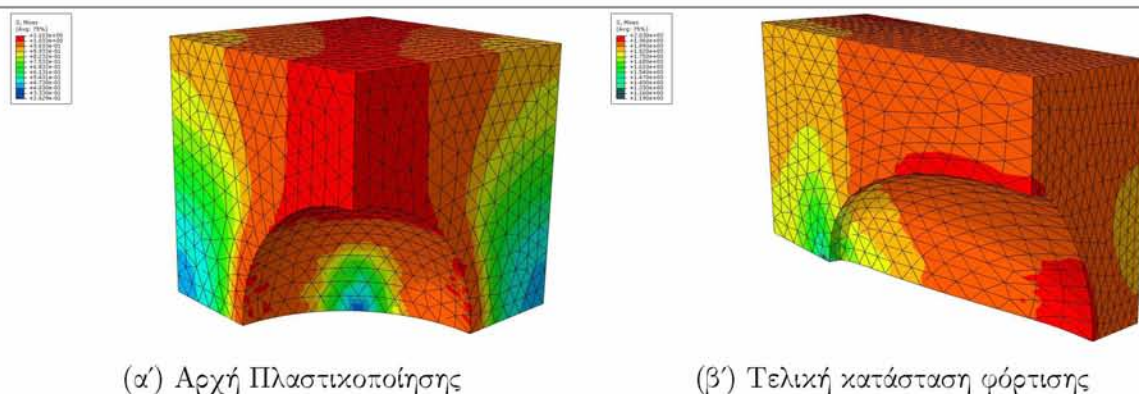
(α') Αρχή Πλαστικοποίησης

(β') Τελική κατάσταση φόρτισης

Σχήμα 4.10: Κατανομή τάσεων για μονοαξονική επιβράχυνση ( $\beta = 0$ )

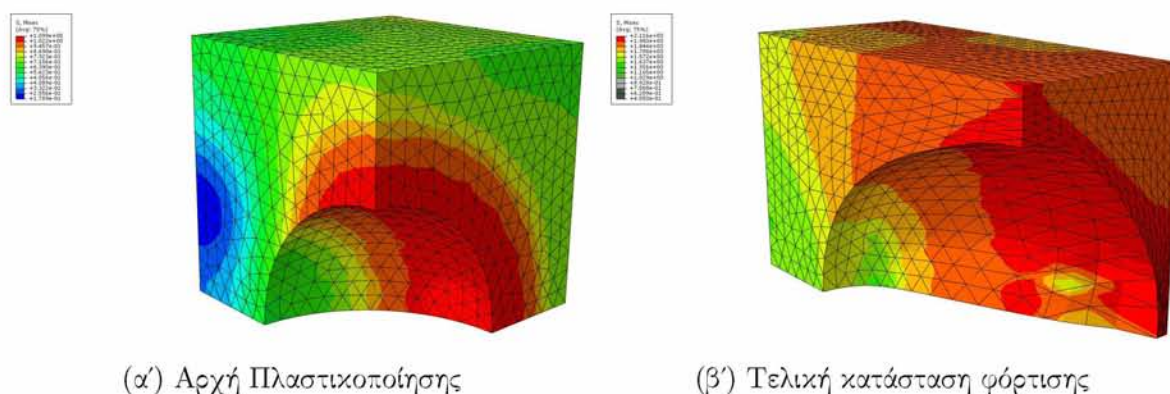
Στο σχήμα 4.11 παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων για παραμόρφωση καθαρής διάτμησης. Σε αντίθεση με τις περιπτώσεις του μονοαξονικού εφελκυσμού και θλίψης, εδώ γίνεται φανερό πως η πλαστικοποίηση της κυψελίδας εντοπίζεται στην επιφάνεια της πλευράς της κυψελίδας κάθετη στην 2-διεύθυνση. Με μια προσεκτική ματιά φαίνεται πως η περιοχή της κυψελίδας που αρχίζει να πλαστικοποιείται σχηματίζει μια διαγώνια λωρίδα, που χωρίζει την κυψελίδα στην μέση. Με το τέλος της φόρτισης η τάσεις συγκεντρώνονται στην περιφέρεια του πόρου και συγκεκριμένα στους δύο πόλους κατά τον 2 και 3 άξονα, ενώ στους πόλους στην κατεύθυνση 1 παρατηρείται μια «χαλάρωση» της τάσης.





Σχήμα 4.11: Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση καθαρής διάτμησης ( $\beta = 1$ )

Τέλος παρατίθενται οι δύο ενδιάμεσες περιπτώσεις φόρτισης. Μία φόρτιση επιβράχυνσης για  $\beta = 0.5$  και μία επιμήκυνσης για  $\beta = 1.5$ . Και στις δύο περιπτώσεις η πλαστικοποίηση της κυψελίδας ξεκινάει σε μια λωρίδα, στην επιφάνεια του πόρου. Η κατεύθυνση της λωρίδας εξαρτάται από το είδος της φόρτισης. Οπότε για θλίπτική φόρτιση η ζώνη αυτή βρίσκεται στο 1-2 επίπεδο, ενώ για εφελκυστική βρίσκεται στο 2-3 επίπεδο. Κατά την συνέχιση της φόρτισης έως το τέλος αυτής εντοπίζεται συγκέντρωση τάσεων στο ίδιο σημείο όπου άρχισε η πλαστική ροή στην κυψελίδα.



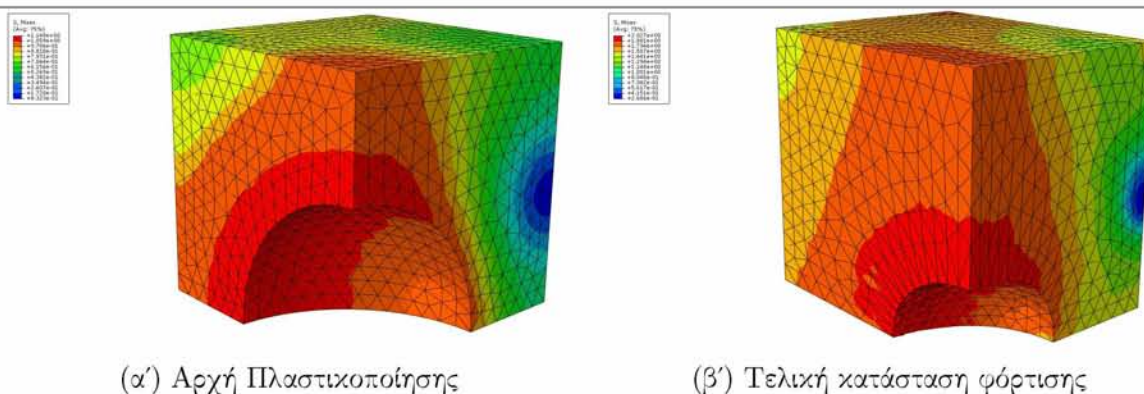
Σχήμα 4.12: Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση επιμήκυνσης ( $\beta = 1.5$ )

## 4.6 Συμπεράσματα

Συγκεντρώνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα. Αρχικά, κάνουμε διάκριση των φορτίσεων όπως παρουσιάστηκε στην σχέση 2.26 σε 3 υποκατηγορίες. Στις φορτίσεις επιβράχυνσης, για  $\beta < 1$  όπου συμπεριλαμβάνεται και η ακραία περίπτωση της μονοαξονικής επιβράχυνσης ( $\beta = 0$ ). Αντίστοιχα διακρίνονται οι φορτίσεις επιμήκυνσης, για  $\beta > 1$  όπου συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση της μονοαξονικής επιμήκυνσης. Η περίπτωση  $\beta = 1$  αντιστοιχεί σε καθαρή διάτμηση.

Έχοντας χωρίσει λοιπόν το είδος των φορτίσεων που μελέτηθηκαν ανάλογα με τιμή που παίρνει η παράμετρος  $\beta$  μπορούν να ομαδοποιηθούν κάποια συμπεράσματα. Αρχικά, για τις





Σχήμα 4.13: Κατανομή τάσεων για διαξονική παραμόρφωση επιβράχυνσης ( $\beta = 0.5$ )

φορτίσεις επιμήκυνσης προκύπτει διέυρυνση του πόρου. Για τις φορτίσεις επιβράχυνσης παρατηρήθηκε συρρίκνωση έως και κλείσιμο του πόρου. Όσο πιο μικρή η τιμή του αρχικού πορώδους τόσο πιο πιθανό είναι να προκύψει κλείσιμο του πόρου. Συγκεκριμένα οι παραμορφωσιακές καταστάσεις όπου χαρακτηρίζονται από εντόνως αρνητική τριαξονικότητα τάσεων εμφανίζουν την τάση ο πόρος να εξελιχθεί σε ρωγμή (crack). Για την καθαρή διάτμηση ο πόρος παραμένει σταθερός.

Η αλλαγή του μεγέθους του πόρου αποτέλεσε έναν μηχανισμό κράτυνσης ή πράυνσης αναλόγως με την μεταβολή. Συγκεκριμένα, η αύξηση του πορώδους οδηγεί σε πράυνση της μακροσκοπικής συμπεριφοράς του πορώδους μετάλλου, ενώ αντίθετα η μείωση του οδηγεί σε κράτυνση. Γενικά, η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού, διαφέρει ανάλογα με την φόρτιση. Για φορτίσεις επιμήκυνσης, παρατηρείται μια φάση σκλήρυνσης που ακολουθούσαν από μια πράυνσης. Αυτές, στην συγκεκριμένη περίπτωση, οφείλεται στην κράτυνση του μεταλλικού φορέα του υλικού και την αύξηση του πορώδους του υλικού αντίστοιχα. Σε φορτίσεις επιβράχυνσης, εκτός από την κράτυνση του μεταλλικού φορέα εμφανίζεται και μια δεύτερη περιοχή κράτυνσης. Αυτή οφείλεται στην μείωση του πορώδους. Το γεγονός πως σε όλες τις φορτίσεις οι συνιστώσες της τάσης  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{33}$ , αλλάζουν με διαφορετικό ρυθμό οδηγεί στο συμπέρασμα πως η αλλαγή του σχήματος του πόρου δρα ανισότροπα στην μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού.

Επίσης η εναλλαγή κράτυνσης με πράυνσης σηματοδοτεί την έναρξη αστάθειας του υλικού και έναρξη της συγκέντρωσης παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα για την παραμόρφωση όπου συμβαίνει αυτή η μετάβαση, παρατηρείται πως ικανοποιείται η συνθήκη  $H = 0$ . Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται μόνο για τις φορτίσεις με  $\beta > 1$ . Το γεγονός αυτό συμφωνεί με την μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού κάτω από φορτίσεις επιβράχυνσης όπου δεν εντοπίζεται εναλλαγή κράτυνσης με πράυνση. Η τάση για την οποία το υλικό γίνεται ασταθές μειώνεται με την αύξηση της αρχικής τιμής του πορώδους, ενώ η κρίσιμη παραμόρφωση αυξάνεται με την ίδια μεταβολή στο αρχικό πορώδες.

Τέλος, διαπιστώθηκε πως τα υλικά με μεγαλύτερο αρχικό πορώδες φαίνεται να έχουν πιο «μαλακή» συμπεριφορά, υπό την έννοια πως η μέγιστη τάση στα διαγράμματα μακροσκοπικών τάσεων παραμορφώσεων είναι μικρότερη για μεγαλύτερο αρχικό πορώδες ενώ η μετάβαση από την κράτυνση στην πράυνση γίνεται πιο ομαλά καθώς το αρχικό πορώδες αυξάνεται.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εργασία του

[Agoras and Castañeda, 2014] σε σύγκριση με αυτά που βρέθηκαν σε αυτήν την διπλωματι-

κή εργασία. Στην προαναφερθείσα εργασία, μεταξύ άλλων, έχει γίνει μελέτη για την μακροσκοπική απόκριση πορώδους υλικού κάτω από συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, όπως και εδώ. Στην συγκεκριμένη εφαρμογή, το πορώδες υλικό θεωρήθηκε πως αποτελείται από τον μεταλλικό φορέα όπου περιέχει πόρους σφαιρικού σχήματος ( $w_1 = w_2 = 1$ ), ισοτροπικά κατανεμημένους στον φορέα. Χρησιμοποιήθηκε το ίδιο μοντέλος σκλήρυνσης του υλικού του φορέα. Επίσης χρησιμοποιήθηκε φόρτιση του ίδιου τύπου όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.4. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός πως στην εργασία του [Agoras and Castañeda, 2014] η μελέτη δεν γίνεται υπολογιστικά θεωρώντας μοναδιαία κυψελίδα, αλλά αναλύεται μέσω του καταστατικού μοντέλου που αναπτύσσεται στην εργασία.

Σε γενικές γραμμές τα αποτελέσματα δεν εμφανίζουν ποιοτικά μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, και στις δύο εργασίες αναγνωρίζονται οι μηχανισμοί σκλήρυνσης μέσω σκλήρυνσης του φορέα αλλά και μείωση του πορώδους. Οι μηχανισμοί πράυνσης που αναγνωρίζονται είναι αυτοί της αύξησης του πορώδους. Παρατηρούμε πως και για τις δύο εργασίες στις φορτίσεις με  $\beta > 1$  αναγνωρίζονται μία φάση σκλήρυνσης που ακολουθείται από μια πράυνσης, όπως περιγράφηκε σε αυτό το κεφάλαιο. Οι αποκλίσεις που υπάρχουν μεταξύ των δύο εργασιών εντοπίζονται στην μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού κάτω από φορτίσεις επιβράχυνσης. Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία ενώ εντοπίζονται οι δύο φάσεις κράτυνσης στο υλικό δεν ανιχνεύεται κάποια φάση πράυνσης, όπως στην συγκρινόμενη εργασία. Επίσης, σχετικά με τα αποτελέσματα που προβλέπουν την έναρξη συγκέντρωσης παραμόρφωσης, στην παρούσα εργασία προβλέπεται πως για φορτίσεις επιβράχυνσης το υλικό δεν εισέρχεται σε κατάσταση αστάθειας ενώ στην έτερη εργασία προβλέπεται μια κρίσιμη τιμή για την οποία το υλικό γίνεται ασταθές, κάτω από την ίδιου τύπου φόρτιση.



# Κεφάλαιο 5

## Επίλογος

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η αριθμητική ανάλυση της μακροσκοπικής απόκρισης πορώδων μετάλλων. Το υλικό θεωρήθηκε πως έχει περιοδική μικροδομή και η μακροσκοπική του συμπεριφορά αναλύθηκε υπό συνθήκες πεπερασμένων παραμορφώσεων (βλ. σχέση 2.26). Για την επίλυση του προβλήματος θεωρήθηκε μοναδιαία κυβική κυψελίδα (βλ. σχήμα 2.1). Λόγω περιοδικής μικροδομής συμμετρίας και συνοριακών συνθηκών μόνο το 1/8 της κυψελίδας αναλύθηκε για την λύση του προβλήματος.

Το υλικό του φορέα θεωρήθηκε ασυμπίεστο ( $\nu=0.5$ ). Επίσης αποδόθηκε μια μεγάλη τιμή στο μέτρο ελαστικότητας ( $E/\sigma_0 = 1000$ ). Όσον αφορά την πλαστική συμπεριφορά του, χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο διαρροής του Von Mises ενώ θεωρήθηκε σκλήρυνση η οποία περιγράφεται από την σχέση, γνωστή ως Power Law (βλ. σχέση 2.18).

Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε και λύθηκε μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Για την μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Abaqus. Παράλληλα με το Abaqus χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας διακριτοποίησης γεωμετριών Netgen όπου παρείχε την δυνατότητα εύκολης και ακριβούς παραγωγής ενός πλέγματος για την μοναδιαία κυψελίδα. Μετά την λύση του προβλήματος και την εξαγωγή των τοπικών τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων έγινε μετεπεξεργασία αυτών των αποτελεσμάτων, ώστε να υπολογίσουμε την μακροσκοπική συμπεριφορά του πορώδους μετάλλου. Αυτό έγινε γράφοντας έναν υπολογιστικό κώδικα στην προγραμματιστική γλώσσα Python. Ο κώδικας κάνοντας χρήση των τοπικών τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων αλλά και των μετατοπίσεων των κόμβων (όπου παρεχόταν από το λογισμικό Abaqus ως λύση του προβλήματος σε κάθε βήμα), υπολόγιζε τους μακροσκοπικούς τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων. Ακόμη υπολογίζονταν η εξέλιξη του πορώδους  $f$  αλλά και των λόγων των πλευρών  $w_1, w_2$ , μεγέθη χρήσιμα για την ερμηνεία της εξέλιξης την μικροδομής του υλικού.

Στις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν εξετάστηκαν οι εξής μεταβλητές: το πορώδες  $f$ , οι λόγοι των πλευρών του πόρου  $w_1$  και  $w_2$ , οι συνιστώσες του μακροσκοπικού τανυστή των τάσεων, η τριαξονικότητα των τάσεων  $X_\sigma = \bar{\sigma}_m/\bar{\sigma}_e$  και η ποσότητα  $\hat{P}$  που μέσω του υπολογισμού της μπορούμε να προβλέψουμε τότε το μακροσκοπικό μέτρο σκλήρυνσης  $H$  μηδενίζεται. Αυτές οι μεταβλητές εξετάστηκαν για τιμές του αρχικού πορώδους  $f = 1\%, 10\%, 30\%$  αλλά και για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $\beta$  της φόρτισης στο εύρος  $0 \leq \beta \leq \infty$ . Από τα αποτελέσματα έγινε εφικτή η διερεύνηση των ανταγωνιστικών μηχανισμών σκλήρυνσης και πράυνσης, όπως η σκλήρυνση του μεταλλικού φορέα, η ανάπτυξη του πορώδους και η εξέλιξη του σχήματος του πόρου. Συγκεκριμένα, βρήκαμε πως η αλλαγή του πορώδους οδηγεί σε σκλήρυνση όταν μειώνεται και σε πράυνση όταν αυ-

ξάνεται. Επίσης η αλλαγή του σχήματος του πόρου μπορεί να αποτελέσει έναν ανισότροπο μηχανισμό σκλήρυνσης με μικρή επίδραση. Συνεπώς, στα διαγράμματα που κατασκευάσαμε και παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 4, παρατηρήθηκε η ανταγωνιστική επίδραση αυτών των μηχανισμών. Από τα διαγράμματα της ποσότητας  $\dot{P}$  (βλ σχέση 3.4) συναρτήσει της μακροσκοπικής ισοδύναμης παραμόρφωσης, για διάφορες τιμές του  $\beta$  και του  $f_0$  έγινε φανερό υπό ποιες προϋποθέσεις το πορώδες παρουσιάζει φαινόμενα αστάθειας και συνεπώς γίνεται έναρξη της συγκέντρωσης παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα βρήκαμε πως μόνο για  $\beta > 1$  το υλικό επιδικνύει ασταθές μακροσκοπική συμπεριφορά μετά από μια κρίσιμη παραμόρφωση. Αφού συλλέξαμε αυτά τα αποτελέσματα μπορέσαμε να εξάγουμε ένα συμπέρασμα για το τι επίδραση έχει η παράμετρος  $\beta$  της φόρτισης στην κρίσιμη παραμόρφωση όπου γίνεται η έναρξη ασταθούς συμπεριφοράς (βλ. σχήμα 4.8).

Τέλος κλείνοντας αυτήν την εργασία προτείνουμε κάποιες επεκτάσεις αυτής της εργασίας για περαιτέρω μελέτη:

- Ανάλυση της επίδρασης του αρχικού σχήματος του πόρου. Η μοντελοποίηση του πόρου μπορεί να γίνει με ένα ελλειψοειδές σχήμα, όπου οι αρχικοί λόγοι των πλευρών του πόρου  $w_1, w_2$ , μπορούν να αποτελούν παράμετρο ανάλυσης του προβλήματος
- Ανάλυση της κατανομής του πορώδους. Στην παρούσα εργασία έχει θεωρηθεί περιοδική μικροδομή και κυβική κυψελίδα, έτσι ο πόρος τοποθετείται στο κέντρο αυτής της κυψελίδας. Η θέση του πόρου μέσα στην κυψελίδα αλλά και το σχήμα της κυψελίδας μπορεί να αποτελέσει παράμετρο ανάλυσης.
- Χρησιμοποίηση διαφορετικού μοντέλου σκλήρυνσης του μεταλλικού υλικού του φορέα. Μπορούν να μελετηθούν διάφορα μοντέλα όπως αυτό της ισότροπης κινηματικής σκλήρυνσης.
- Μελέτη ορίων διαμορφωσιμότητας πορώδους μεταλλικού υλικού.

# Chapter 6

## Bibliography

- [Agoras et al., 2016] Agoras, M., Avazmohammadi, R., and Castañeda, P. P. (2016). Incremental variational procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer- and metal-matrix composites reinforced by spheroidal elastic particles. *International Journal of Solids and Structures*, 97-98:668 – 686.
- [Agoras and Castañeda, 2013] Agoras, M. and Castañeda, P. P. (2013). Iterated linear comparison bounds for viscoplastic porous materials with “ellipsoidal” microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(3):701 – 725.
- [Agoras and Castañeda, 2014] Agoras, M. and Castañeda, P. P. (2014). Anisotropic finite-strain models for porous viscoplastic materials with microstructure evolution. *International Journal of Solids and Structures*, 51(5):981 – 1002.
- [Aravas and Castañeda, 2004] Aravas, N. and Castañeda, P. P. (2004). Numerical methods for porous metals with deformation-induced anisotropy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(36):3767 – 3805.
- [Αράβας, 2005] Αράβας, Ν. (2005). *Καρτεσιανού τανυστές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας.
- [Ashby et al., 2000] Ashby, M. F., Evans, T., Fleck, N. A., Hutchinson, J., Wadley, H., and Gibson, L. (2000). *Metal foams: a design guide*. Elsevier.
- [Banks-Sills and Budiansky, 1982] Banks-Sills, L. and Budiansky, B. (1982). On void collapse in viscous solids. *Mechanics of Materials*, 1(3):209 – 218.
- [Benzerga and Leblond, 2010] Benzerga, A. A. and Leblond, J.-B. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. In Aref, H. and van der Giessen, E., editors, *Advances in Applied Mechanics*, volume 44 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 169 – 305. Elsevier.
- [Castañeda, 1991] Castañeda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1):45 – 71.
- [Castañeda and Willis, 1995] Castañeda, P. and Willis, J. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919 – 1951.

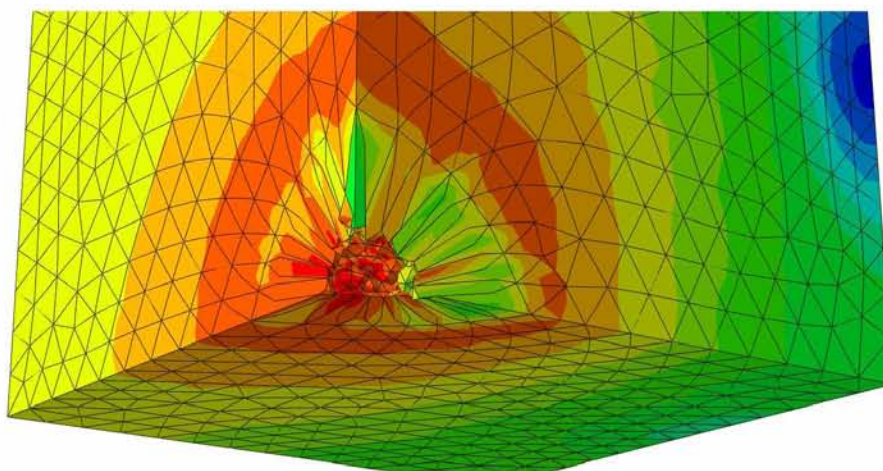
- [Castañeda and Zaidman, 1994] Castañeda, P. and Zaidman, M. (1994). Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9):1459 – 1497.
- [Danas and Aravas, 2012] Danas, K. and Aravas, N. (2012). Numerical modeling of elasto-plastic porous materials with void shape effects at finite deformations. *Composites Part B: Engineering*, 43(6):2544–2559.
- [Danas and Castañeda, 2009a] Danas, K. and Castañeda, P. P. (2009a). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I – theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(3):387 – 401.
- [Danas and Castañeda, 2009b] Danas, K. and Castañeda, P. P. (2009b). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: II – applications. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(3):402 – 416.
- [Dassault Systèmes, 2016] Dassault Systèmes, D. (2016). Abaqus analysis user’s guide. Technical report, Technical Report Abaqus 6.14 Documentation, Simulia Corp.
- [Gurson, 1977] Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology*, 99(1):2–15.
- [J. Lee and E. Mear, 1994] J. Lee, B. and E. Mear, M. (1994). Studies of the growth and collapse of voids in viscous solids. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of The Asme - J ENG MATER TECHNOL*, 116.
- [Needleman et al., 1995] Needleman, A., Tvergaard, V., and Van der Giessen, E. (1995). Evolution of void shape and size in creeping solids. *International Journal of Damage Mechanics*, 4.
- [Papadioti et al., 2016] Papadioti, I., Danas, K., and Aravas, N. (2016). A methodology for the estimation of the effective yield function of isotropic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 87:120–138.
- [Rice and Tracey, 1969] Rice, J. and Tracey, D. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields\*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3):201 – 217.
- [Rice, 1976] Rice, J. R. (1976). Localization of plastic deformation. Technical report, Brown Univ., Providence, RI (USA). Div. of Engineering.
- [Srivastava and Needleman, 2013] Srivastava, A. and Needleman, A. (2013). Void growth versus void collapse in a creeping single crystal. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(5):1169–1184.
- [Tvergaard, 1989] Tvergaard, V. (1989). Material failure by void growth to coalescence. volume 27 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 83 – 151. Elsevier.
- [Tvergaard, 2000] Tvergaard, V. (2000). Interface failure by cavity growth to coalescence. *International journal of mechanical sciences*, 42(2):381–395.

- 
- [Tvergaard, 2009] Tvergaard, V. (2009). Behaviour of voids in a shear field. *International Journal of Fracture*, 158(1):41–49.
- [Tvergaard, 2011] Tvergaard, V. (2011). Elastic–plastic void expansion in near-self-similar shapes. *Computational Materials Science*, 50(11):3105–3109.
- [Tvergaard, 2012] Tvergaard, V. (2012). Effect of stress-state and spacing on voids in a shear-field. *International Journal of Solids and Structures*, 49(22):3047–3054.
- [Tvergaard, 2014] Tvergaard, V. (2014). Bifurcation into a localized mode from non-uniform periodic deformations around a periodic pattern of voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 69:112–122.

# Παράρτημα Α΄

## Υπολογιστικά ζητήματα

Το πρόβλημα λύθηκε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων συνεπώς τα αποτελέσματα είναι υπολογιστικής φύσης. Έτσι στην εργασία αυτή αντιμετωπίσαμε κάποια υπολογιστικά ζητήματα. Συγκεκριμένα, δεν ήταν δυνατόν για όλες τις φορτίσεις  $0 \leq \beta \leq \infty$  και όλες τις τιμές του αρχικού πορώδους  $f_0$  το πρόβλημα να λυθεί για πολύ μεγάλες τιμές παραμόρφωσης. Για τιμές του  $\beta \geq 1$  ο υπολογιστικός κώδικας στο λογισμικό Abaqus, μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα για ακούοντας μεγάλες παραμορφώσεις. Σε αυτές τις παραμορφώσεις περιέχονται τα φαινόμενα που έχει σκοπό να θίξει η παρούσα διπλωματική εργασία και περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 4. Παρόλα αυτά, για  $\beta \leq 1$  όταν η παραμόρφωση παίρνει πολύ μεγάλες τιμές παρουσιάζονται υπολογιστικές δυσκολίες. Σε αυτές τις φορτίσεις επιβράχυνσης παρουσιάζεται το φαινόμενο του κλείσιμου του πόρου. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μεγάλη παραμόρφωση των στοιχείων περιφερειακά του πόρου. Συνεπώς, σε μεγάλες παραμορφώσεις παρουσιάζεται στρέβλωση του πλέγαμτος και ο κώδικας σταματάει να συγκλίνει. Ειδικά για  $f_0 = 0.01$  παρατηρείται εντόνως αυτή η συμπεριφορά όπως φαίνεται και στο σχήμα Α΄.1.



Σχήμα Α΄.1: Κυψελίδα με έντονα παραμορφωμένα στοιχεία,  $f_0 = 0.01$  και  $\beta = 0.1$

Η ίδια μεγάλη παραμόρφωση στα στοιχεία περιφερειακά του πόρου παρουσιάζεται και σε έντονα εφελκυστικές φορτίσεις αλλά στην προκειμένη περίπτωση ο κώδικας σταματάει να συγκλίνει σε παραμορφώσεις όπου δεν παρουσιάζεται πρακτικό ενδιαφέρον.

Στα διαγράμματα που παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο 4 οι καμπύλες που παρουσιάζονται

---

έχουν κατασκευαστεί για παραμορφώσεις όπου ο κώδικας εξάγει αξιόπιστα αποτελέσματα. Για αυτό και στις περιπτώσεις  $\beta \leq 1$  οι καμπύλες σταματούν σε παραμορφώσεις μικρότερες. Λύσεις όπως η πύκνωση του πλέγματος ή μείωση του βήματος  $\Delta t$  δεν φάνηκε να έχουν αξιοσημείωτα αποτελέσματα.