



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΕ ΠΙΠΤΟΝΤΑ ΥΜΕΝΑ
ΜΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΟΔΡΑΣΤΙΚΟ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΣΥΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ*

ΤΗΣ
Άννας Κατσιαβριά

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Βασίλειος Μποντόζογλου

Ημερομηνία Υποβολής: 27 - 06 - 2017
Ακαδημαϊκό έτος: 2017 - 2018
Βόλος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Δρ. Βασίλειος Μποντόζογλου: Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δρ. Νικόλαος Ανδρίτσος: Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης: Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

© 2018 Άννα Κατσαβριά

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (N. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Ευχαριστίες...

Κατ' αρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χαϊδεμενόπουλο, διότι η αρχή είναι το ήμισυ του παντός. Τον κ. Μπονιόζογλου τον ευχαριστώ πολλαπλώς. Για το ότι δέχθηκε να εκπονήσω τη διπλωματική εργασία μου υπό την επίβλεψή του, για το πολύ ενδιαφέρον, συναρπαστικό, μπορώ να πω, θέμα που μου πρότεινε, για τη συνεχή καθοδήγηση και βοήθεια, την πάντοτε ταχεία απάντηση στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο, για τις πολλές απορίες μου που έλυσε ακούραστα, για όλο το χρόνο που αφιέρωσε. Ακόμη, τον ευχαριστώ που με «έβαλε σε άγνωστα νερά» κι έτσι έμαθα τόσα πράγματα για ένα τόσο γοητευτικό κεφάλαιο της ρευστομηχανικής του οποίου την ύπαρξη δεν είχα καν ακούσει προηγουμένως. Ελπίζω κάποια στιγμή στο μέλλον να έχω ξανά την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του.

Ακόμη, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς κι όλες τις αδελφές μου για την υποστήριξη και την υπομονή τους κατά την εκπόνηση της εργασίας μου αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Ευχαριστώ για την ανοχή τους, που δε δυσανασχέτησαν όταν κατέλαβα με το υλικό της εργασίας μου αρκετούς μήνες το τραπέζι του σαλονιού μας. Ευχαριστώ τις μικρότερες Ελευθερία και Βασιλική για όλες τις φορές που έκλεισαν ή χαμήλωσαν τη μουσική, τα παιχνίδια τους κι εκείνες τις παιδικές σειρές τα πρωινά του Σαββάτου για χάρη μου, καθώς και την Ελένη που πολλές φορές διέκοψε το παιχνίδι της με τη μπάλα. Ευχαριστώ ιδιαίτερα την Ελευθερία για την βοήθειά της στη σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων και για την υπαγόρευση των χειρόγραφων κειμένων μου όταν τα έγραφα στον υπολογιστή. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω και την Ξανθίππη που όλα αυτά τα κοινά χρόνια των σπουδών μας και, κυρίως, κατά τους δυσκολότερους τελευταίους μήνες μοιραστήκαμε τον ίδιο υπολογιστή για τις εργασίες μας με αμέτρητες υποχωρήσεις και παραχωρήσεις εκ μέρους της. Τη φίλη μου Δέσποινα ευχαριστώ, επιπλέον, για τη συνεχή αλληλοενθάρυνση και υποστήριξη στην κοινή μας πορεία προς το πτυχίο. Για όλες εκείνες τις ώρες που με άκουγε να της εξηγώ με ενθουσιασμό με τι ασχολούμαι ή να προβληματίζομαι πώς θα ξεκολλήσω κάποιον κώδικα, για τη συνεχή βεβαιότητά της ότι όλα θα είναι έτοιμα στην ώρα τους. Την ευχαριστώ, ακόμη, που με βοήθησε να κάνω αρκετά από τα σχήματά μου στο Mathematica με το οποίο δεν είμαι εξοικιωμένη και ιδίως το Σχήμα 6.1 το οποίο στην προσπάθεια να με διδάξει το έκανε σχεδόν μόνη...

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω τέσσερεις ακόμη καλούς φίλους. Τον Άγιο Λαβίδ, τον Άγιο Γεράσιμο με όλη του την οικογένεια, τον Άγιο Φανούριο και τον Άγιο Παΐσιο για τη συνεχή βοήθεια, στήριξη και καθοδήγηση στην εκπόνηση της εργασίας αλλά και σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

— Παρασκευή... Τα τελευταία δυο χρόνια λείπεις και σπουδάξεις στην Αθήνα, επομένως απουσιάζεις κατά τις περιόδους έντονης μελέτης. Έτσι, δεν έχω για σένα κάποια ευχαριστία σχετική με τη διπλωματική. Ωστόσο, δε θα ήθελα να απουσιάζει από αυτή τη χαρούμενη σελίδα κανένα από τα οκτώ πρόσωπα της οικογένειάς μου σε μια τόσο ευχάριστη στιγμή. Οπότε, αν δεν έχεις αντίρρηση, σου αφιερώνω την εργασία μου...

Σας ευχαριστώ όλους! Ολόψυχα...

Άννα

ΙΟΥΝΙΟΣ 2018

...γύρου σὲ κάτι ἀτάραχο π' ἀσιρῖζει μὲς στὴ λίμνη...
Διονύσιος Σολωμός
Ἐλεύθεροι Πολιορκημένοι (Γ' VI)

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	2
1 Εισαγωγή	5
1.1 Ψύξη στην καθημερινότητα και τη θερμοδυναμική	5
1.2 Ψυκτικές μηχανές	5
1.2.1 Ψύκτες & Αντλίες θερμότητας	5
1.2.2 Ο αντίστροφος κύκλος Carnot	6
1.3 Εφαρμογές της ψύξης	7
1.4 Κύκλος ψύξης με συμπίεση ατμού	8
2 Ψύξη με απορρόφηση	10
2.1 Πλεονεκτήματα έναντι της συμπίεσης ατμού	10
2.2 Αρχές λειτουργίας	11
2.3 Κύκλος ψύξεως με απορρόφηση	11
2.3.1 Ο δρόμος του εργαζομένου μέσου & οι ανταλλαγές θερμότητας	11
2.3.2 Ο ιδανικός κύκλος	12
2.4 Εργαζόμενα μέσα	14
2.4.1 Το ζεύγος αμμωνία-νερό	14
2.4.2 Το ζεύγος νερό-βρωμιούχο λίθιο	15
2.5 Ιστορική αναδρομή	15
2.6 Διάφοροι κύκλοι ψύξεως με απορρόφηση	17
2.6.1 Σύστημα με μια βαθμίδα	17
2.6.1.1 Ζεύγος ψυκτικού-μη πιητικού απορροφητή	17
2.6.1.2 Ζεύγος ψυκτικού-πιητικού απορροφητή	18
2.6.2 Μετατροπείς θερμότητας	18
2.6.3 Κύκλος πολλαπλών βαθμίδων	19
2.6.3.1 Ζεύγος ψυκτικού-μη πιητικού απορροφητή	19
2.6.3.2 Ζεύγος ψυκτικού-πιητικού απορροφητή	20
2.6.4 Κύκλος απορρόφησης με εναλλάκτη αναγεννητή-απορροφητή	21
2.6.5 Κύκλος απορρόφησης με ανάκτηση θερμότητας	21
2.6.6 Κύκλος απορρόφησης για πηγή θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία	22
2.6.7 Κύκλος απορρόφησης φυσικής ανακυκλοφορίας	22
2.6.8 Κύκλος απορρόφησης με διάχυση	23
3 Απορροφητής	25
3.1 Η σημασία της συσκευής	25
3.2 Η διεργασία	26
3.3 Η μοντελοποίηση της διεργασίας	27
3.3.1 Τα φαινόμενα μεταφοράς	27

3.3.2	Προσπάθειες μοντελοποίησης	28
3.3.2.1	Ένα πρώτο μοντέλο	28
3.3.2.2	Η μελέτη του G. Grossman	28
3.3.2.3	Καιοπινές μοντελοποιήσεις	29
3.3.2.4	Η μελέτη των E. Hofmann και H. C. Kuhlmann	30
3.3.2.5	Τυρβώδης ροή	31
3.3.2.6	Υμένες με επιφανειακούς κυματισμούς	31
4	Επιφανειοδραστικά & Φαινόμενα Marangoni	32
4.1	Επιφανειοδραστικά	32
4.1.1	Διαλυτότητα	32
4.1.2	Χαρακτηριστικές συγκεντρώσεις	33
4.1.3	Επιφανειακή τάση	33
4.1.4	Περιγραφή της προσρόφησης	35
4.1.4.1	Το μοντέλο Langmuir	35
4.1.4.2	Η διόρθωση των Kovalchuk et al.	36
4.2	Φαινόμενα Marangoni	37
4.2.1	Κλίσεις επιφανειακής συγκεντρώσεως επιφανειοδραστικού- Η έννοια της ελαστικότητας	37
4.2.2	Φαινόμενα Marangoni στην ψύξη με απορρόφηση	38
4.2.3	Κλίσεις θερμοκρασίας	39
4.2.4	Κλίσεις συγκεντρώσεως άλατος	40
4.3	Το επιφανειοδραστικό SDS	41
5	Μοντελοποίηση του προβλήματος	42
5.1	Ο στόχος της εργασίας-Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας	42
5.2	Περιγραφή προβλήματος και επιλογή εξισώσεων	42
5.2.1	Μεταφορά ορμής	43
5.2.2	Μεταφορά νερού και θερμότητας	45
5.2.3	Μεταφορά επιφανειοδραστικού	47
5.2.4	Συνολικό πρόβλημα	48
5.3	Μόνιμη λύση	49
6	Αδιαστατοποίηση εξισώσεων	52
6.1	Ανάλυση διανυσματικών όρων	52
6.2	Αδιαστατοποίηση εξισώσεων	58
6.2.1	Οι κλίμακες	58
6.2.2	Εξισώσεις πεδίου	59
6.2.3	Συνοριακές συνθήκες	62
6.2.4	Συνολικό αδιάστατο πρόβλημα	68
6.2.5	Μόνιμη λύση	69
7	Γραμμικοποίηση εξισώσεων	71
7.1	Επιβολή διαταραχής	71
7.2	Γραμμικοποίηση εξισώσεων	72
7.2.1	Εξισώσεις πεδίου	72
7.2.2	Συνοριακές συνθήκες	74
7.3	Εισαγωγή ροϊκής συνάρτησης	79

8 Ανάλυση Ιδιομορφών - Normal mode analysis	82
8.1 Η μορφή της λύσης	82
8.2 Αντικατάσταση της λύσης	83
8.2.1 Εξισώσεις πεδίου	85
8.2.2 Συνοριακές συνθήκες	85
8.2.3 Το τελικό πρόβλημα ιδιοτιμών	87
9 Ευστάθεια καθαρού υμένα	90
9.1 Το πρόβλημα	90
9.2 Διακριτοποίηση-Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων	92
9.3 Επίλυση-Αριθμός στοιχείων	97
9.4 Αποτελέσματα	98
9.4.1 Οι χάρτες ιδιοτιμών	98
9.4.2 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού	99
9.4.3 Η επίδραση του αριθμού Kapitza	104
9.4.4 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του αριθμού Reynolds	105
9.4.5 Ο οριακός κυματαριθμός	106
9.4.6 Η θέση και η τιμή του μεγίστου	108
9.4.7 Ο οριακός κυματαριθμός και η θέση του μεγίστου	110
9.4.8 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού	111
9.4.9 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει της γωνίας	112
9.4.10 Τρισδιάστατη απεικόνιση	115
10 Ευστάθεια υμένα με επιφανειοδραστικό	116
10.1 Το πρόβλημα	116
10.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων	118
10.3 Περιγραφή της επίλυσης	122
10.3.1 Έλεγχος εγκυρότητας του υπολογισμού των πινάκων	122
10.3.2 Η λειτουργία του βασικού προγράμματος	125
10.3.3 Επιλογή αριθμού στοιχείων	125
10.4 Αποτελέσματα	126
10.4.1 Οι χάρτες ιδιοτιμών	126
10.4.2 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού	127
10.4.3 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού - Η σημασία της κινητικής των αντιδράσεων	128
10.4.4 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει της ποσότητας επιφανειοδραστικού - Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα	130
Αντί Κεφαλαίου 11 - Αντί Επιλόγου	134
Βιβλιογραφικές Αναφορές	138
Παράρτημα	140

Περίληψη

Η ψύξη αποτελεί κεντρική ανάγκη του σύγχρονου πολιτισμού. Για την κάλυψη των αναγκών έχει επικρατήσει ο κύκλος ψύξεως με συμπίεση ατμού που, όμως, λόγω της παρουσίας του συμπιεστή χαρακτηρίζεται από υψηλό κόστος λειτουργίας. Ο κύκλος ψύξεως με απορρόφηση, που αντί για αέριο συμπιέζει ένα υγρό διάλυμα στο οποίο έχει απορροφηθεί το ψυκτικό, αποτελεί μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική λύση που ξεκίνησε να χρησιμοποιείται το 1777. Από τότε έχουν αναπτυχθεί αρκετοί κύκλοι, ωστόσο η επικράτηση της τεχνολογίας αυτής δεν είναι εφικτή ακόμη, λόγω του ότι οι διατάξεις δεν έχουν επαρκώς υψηλούς συντελεστές λειτουργίας. Η βελτίωση της απόδοσης των μηχανών αυτών εστιάζει στη βελτίωση της συσκευής απορρόφησης, ώστε η τελευταία αποτελεί αντικείμενο μελέτης για περισσότερα από 50 έτη. Στην περίπτωση που ως εργαζόμενο μέσο χρησιμοποιείται το ζεύγος $H_2O - LiBr$ έχει παρατηρηθεί πειραματικώς πως η προσθήκη επιφανειοδραστικής ουσίας στο διάλυμα του απορροφητή οδηγεί στην εμφάνιση φαινομένων Marangoni που ενισχύουν τα φαινόμενα μεταφοράς τόσο σε στάσιμους όσο και στους πίπτοντες υμένες που απαντώνται στους απορροφητές.

Στην εργασία αυτή επιχειρείται να πραγματοποιηθεί ανάλυση ευστάθειας σε πίπτονια επί κεκλιμένου επιπέδου υμένα νερού- $LiBr$, ο οποίος φέρει και επιφανειοδραστικό διαλυτό στην κυρίως μάζα του, κατά τη διάρκεια της διεργασίας απορρόφησης. Κατ' αρχάς, το πρόβλημα μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Navier-Stokes για τη μεταφορά ορμής και τα κατάλληλα ισοζύγια για τη μεταφορά θερμότητας και τη μεταφορά μάζας νερού και επιφανειοδραστικού. Το στερεό τοίχωμα επί του οποίου αναπτύσσεται η ροή θεωρείται ισοθερμοκρασιακό, αδιαπέρατο στην ορμή και το επιφανειοδραστικό και δε θεωρείται ολίσθηση. Η συνθήκη για τη μεταφορά του νερού επιλέγεται ιδιαίτερη, ωστόσο η επιλογή αυτή τεκμηριώνεται. Στη διεπιφάνεια περιγράφεται το ισοζύγιο δυνάμεων, το επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού και η ανταλλαγή του με την κυρίως μάζα μέσω ενός ψευδο-μη-ιονικού μοντέλου. Η μεταφορά μάζας υδρατμού και θερμότητας στη διεπιφάνεια είναι συζευγμένες μέσω της συνθήκης ισορροπίας των δυο φάσεων και του ισοζυγίου ενέργειας λόγω της αλλαγής φάσεως. Από το σύνολο των εξισώσεων αυτών εξάγεται και η μόνιμη λύση του προβλήματος. Το πρόβλημα αδιαστατοποιείται κι έπειτα, για την ανάλυση ευστάθειας, γραμμικοποιείται γύρω από τη μόνιμη λύση στο όριο μιας απειροελάχιστης διαταραχής. Στην πορεία, προκειμένου να ενσωματωθούν σε μια κοινή συνάρτηση οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας, εισάγεται η ροϊκή συνάρτηση κι έπειτα πραγματοποιείται ανάλυση ιδιομορφών, ώστε προκύπτει πρόβλημα ιδιοτιμών. Μετά την απόκτηση του προβλήματος ιδιοτιμών η μελέτη χωρίζεται σε τρία στάδια - τρία προβλήματα από τα οποία υλοποιήθηκαν μόνο τα δυο. Πρώτον του πίπτοντος υμένος καθαρού συστατικού, δεύτερον του πίπτοντος υμένος φέροντος επιφανειοδραστικής ουσίας και τρίτον του πίπτοντος υμένος φέροντος επιφανειοδραστικής ουσίας κατά την απορρόφηση ατμού. Για την επίλυσή τους τα προβλήματα διακριτοποιήθηκαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και προγραμματίστηκε ο υπολογισμός των ιδιοτιμών.

Σε ό,τι αφορά το πρώτο πρόβλημα, πραγματοποιήθηκε εκτενής παραμετρική μελέτη και αναπαρήχθησαν αριθμητικώς αποτελέσματα της βιβλιογραφίας τόσο για το άπειρο μήκος κύματος όσο και για πεπερασμένο μήκος κύματος διαταραχής. Στο δεύτερο, αφού αναπαρήχθησαν για έλεγχο της εγκυρότητας των προγραμμάτων κάποια υπάρχοντα αποτελέσματα, η επίλυση εξειδικεύτηκε στον πίπτονια υμένα νερού φέροντος ποσότητα του επιφανειοδραστικού SDS και επιχειρήθηκε η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με πειραματικές μετρήσεις χρήσει του απλού ψευδο-μη-ιονικού μοντέλου.

Λέξεις-κλειδιά: ψύξη με απορρόφηση, πίπτων υμένας, πίπτων υμένας με επιφανειοδραστικό, γραμμική ανάλυση ευστάθειας, νερό-SDS, ζεύγος $H_2O - LiBr$

Abstract

Refrigeration is undoubtedly an important need of civilization. To meet the demand the dominant technology is vapor compression refrigeration cycle, which, however, involves the vapor compression, process characterised by considerable energy consumption and cost. Absorption refrigeration cycle, which pumps a fluid instead, appears to be a very interesting alternative, that began in 1777. Since then many cycles were developed but its prevalence is not feasible yet, due to the relatively low coefficients of performance of such systems. Investigation to improve this performance focuses on the absorber, device in which the refrigerant vapor is absorbed in a solution to be pumped, extent subject of study for more than 50 years. In the special case the working pair $H_2O - LiBr$ is used, it is experimentally observed that addition of surfactant in the absorbing solution triggers Marangoni flows which enhance the transport phenomena in the falling films of absorbers.

In the present study linear stability analysis of surfactant laden $H_2O - LiBr$ falling film on infinite, inclined plate during water vapor absorption is attempted. The problem is modelled using the continuity and the Navier-Stokes equations for momentum transfer and the transport equations for heat and mass (water and surfactant) transfer. The solid substrate is considered isothermal, impermeable regarding the momentum and the surfactant and no-slip condition is used. Boundary condition for water transfer, although chosen unusual, is justified. At the interface the force balance, the surfacial transport equation for the surfactant and its' exchange with the bulk via a pseudo-non-ionic model are considered. Heat and water transfer are coupled at the interface through the equilibrium of the two phases in contact and the energy balance due to the phase change of the vapor. This set of equations, after being formed, provides the steady state solution (base state). Then it is non-dimensionalised and linearised at the limit of a very small perturbation around the aforementioned base state. Afterwards, in order to merge the two velocity components into one variable, the flow function is substituted in the linear equations and normal mode analysis is performed. Once by this step the eigenvalue problem is derived, the study is divided in three problems of which only the two were solved. First the falling film of a clean liquid, second the surfactant laden falling film and last the surfactant laden falling film during absorption process. All were discretised using the finite element method and the calculation of eigenvalues was programmed.

Regarding the first problem, an extensive parametric study was performed and results from the literature were reproduced numerically for the longwave disturbance as well as for finite wavelengths. Concerning the second problem, after reproducing existing in the literature results for validation purposes, the study focused on the water falling film laden with the SDS surfactant and a comparison with experimental results was attempted, using the simple pseudo-non-ionic Langmuir model.

Key-words: refrigeration absorption, falling film, surfactant laden falling film, linear stability analysis, water-SDS, working pair $H_2O - LiBr$

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ψύξη στην καθημερινότητα και τη θερμοδυναμική

Ψύξη: ουσιαστικό γένους θηλυκού προερχόμενο από τη λέξη *ψύξις* της αρχαίας ελληνικής γλώσσας ορίζεται ως η παραγωγή ψύχους (Τεγόπουλος & Φυτράκης (1989), Ελληνικό Λεξικό, σ.865) στη νέα ελληνική, το οποίο ψύχος (ουσιαστικό ουδέτερο) [\ll αρχ. *ψύχος* < ψύχω] με τη σειρά του ορίζεται ως η έλλειψη θερμότητας, το κρύο (Τεγόπουλος & Φυτράκης (1989), Ελληνικό Λεξικό, σ.867). Εκτός από μια ιδιαιτέρως κοινή, καθημερινή έννοια, η ψύξη αποτελεί και ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογής της θερμοδυναμικής. Στα πλαίσια, λοιπόν, του επιστημονικού αυτού κλάδου ορίζεται ως η μεταφορά θερμότητας από μια περιοχή χαμηλότερης θερμοκρασίας σε μια άλλη με υψηλότερη θερμοκρασία (Υ. Çengel 2013) ή, εναλλακτικά, η δημιουργία και διατήρηση σε ένα μέσο θερμοκρασίας χαμηλότερης από εκείνης του περιβάλλοντός του (B. Horbaniuc 2004).

Η ψύξη, λοιπόν, συνίσταται στη μεταφορά θερμότητας από το κρύο στο ζεστό. Η διεργασία αυτή δεν πραγματοποιείται αυθόρμητα στη φύση. Γενικώς, η θερμότητα μεταφέρεται από το θερμό σώμα προς το ψυχρότερο, εξ' αιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας τους, με την οποία σχετίζεται και η κινούσα δύναμη για το φαινόμενο. Η φυσική διαίσθηση πληροφορεί καλά πως μια κούπα ζεστό τσάι θα κρυώσει, αν αφηθεί σε χώρο θερμοκρασίας περιβάλλοντος και, αντιστοίχως, ένα κρύο αναψυκτικό θα ζεσταθεί. Η αντίστροφη διαδικασία δεν πραγματοποιείται μόνη της. Ωστόσο, είναι εφικτή. Από τη διατύπωση του 2^{ου} θερμοδυναμικού νόμου σύμφωνα με τον Clausius θερμότητα μπορεί να μεταφερθεί από ένα σώμα σε χαμηλή θερμοκρασία σε ένα άλλο υψηλότερης μόνο αν δαπανηθεί εξωτερικό έργο (B. Horbaniuc 2004). Κατ' αναλογία, ένας βράχος θα ολισθήσει από την κορυφή μιας πλαγιάς μόνος του μα, προκειμένου από τους πρόποδες να ανεβεί σε μεγαλύτερο ύψος, οφείλει κάποιος να τον σπρώξει είτε να τον τραβήξει κοπιάζοντας, δαπανώντας ενέργεια, παράγοντας έργο. Συνεπώς, οι διεργασίες παραγωγής ψύξεως, ήτοι οι ψυκτικοί κύκλοι, απαιτούν προσφορά εξωτερικού έργου, ώστε να επιτύχουν το σκοπό τους.

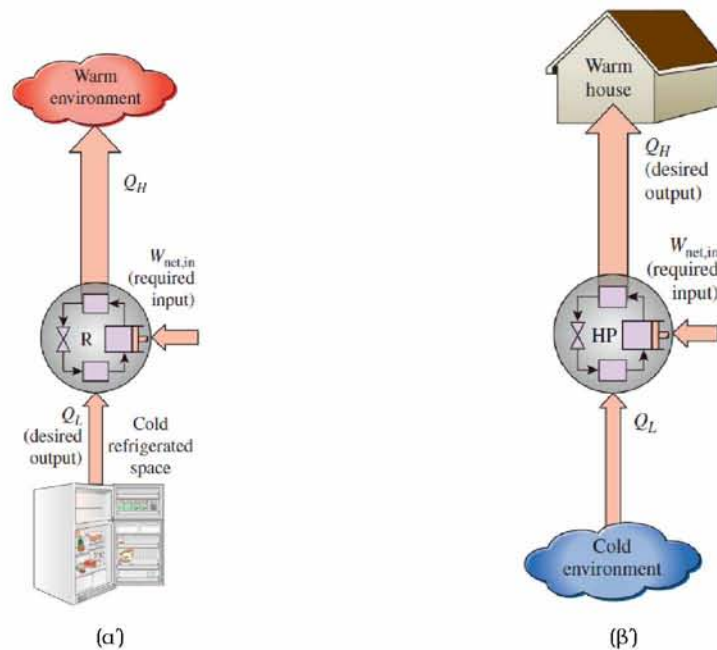
1.2 Ψυκτικές μηχανές

1.2.1 Ψύκτες & Αντλίες θερμότητας

Η ανάγκη δαπάνης έργου καθιστά αναγκαία και την ύπαρξη ειδικών διατάξεων για την επίτευξη της μεταφοράς θερμότητας ανιθέτως προς τη φυσική κατεύθυνση ροής της. Αυτές καλούνται ψύκτες (Υ. Çengel 2013). Εντός τους το εργαζόμενο μέσο, ψυκτικό, μέσω μιας σειράς θερμοδυναμικών διεργασιών μεταξύ των δύο θερμοκρασιών λειτουργίας παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ένας ψυκτικός κύκλος αντλεί θερμότητα από την ψυχρή δεξαμενή και την απορρίπτει στη θερμή. Ως προς τη λειτουργία που επιτελεί, χαρακτηρίζεται είτε ως ψυγείο είτε ως αντλία θερμότητας.

Ψυγείο ονομάζεται όταν ο στόχος είναι η διατήρηση του ψυχρού χώρου σε χαμηλή θερμοκρασία, δηλαδή όταν είναι επιθυμητό να αφαιρεθεί θερμότητα από αυτόν. Για παράδειγμα, στο οικιακό ψυγείο αντλείται θερμότητα από το θάλαμο τροφίμων και απορρίπτεται στον περιβάλλοντα χώρο-δωμάτιο. Ανιθέτως, μια αντλία

θερμότητας αποσκοπεί στη διατήρηση της θερμής δεξαμενής σε υψηλή θερμοκρασία μέσω της απόρριψης εντός της της θερμότητας που αφαιρέθηκε από τον ψυχρό. Έτσι λειτουργεί και ένα οικιακό κλιματιστικό το



Σχήμα 1.1: Η λειτουργία (α) του ψυγείου & (β) της αντλίας θερμότητας (Πηγή: Cengel Y. & Boles M. 2015)

χειμώνα που απομακρύνει από το κρύο, εξωτερικό περιβάλλον θερμότητα και την προσφέρει στο σπίτι, ώστε να ζεσταθεί. Οι αποδόσεις των διατάξεων εκφράζονται με το συντελεστή λειτουργίας COP ως :

$$COP = \frac{\text{Επιθυμητή Έξοδος}}{\text{Απαιτούμενη Είσοδος}} \quad (1.1)$$

Ειδικότερα, για το ψυγείο και την αντλία θερμότητας :

$$COP_{Refrigerator} = \frac{\text{Ψυκτικό Αποτέλεσμα}}{\text{Έργο εισόδου}} = \frac{Q_L}{W_{input}} \quad (1.2)$$

$$COP_{Heat Pump} = \frac{\text{Θερμαντικό Αποτέλεσμα}}{\text{Έργο εισόδου}} = \frac{Q_H}{W_{input}} \quad (1.3)$$

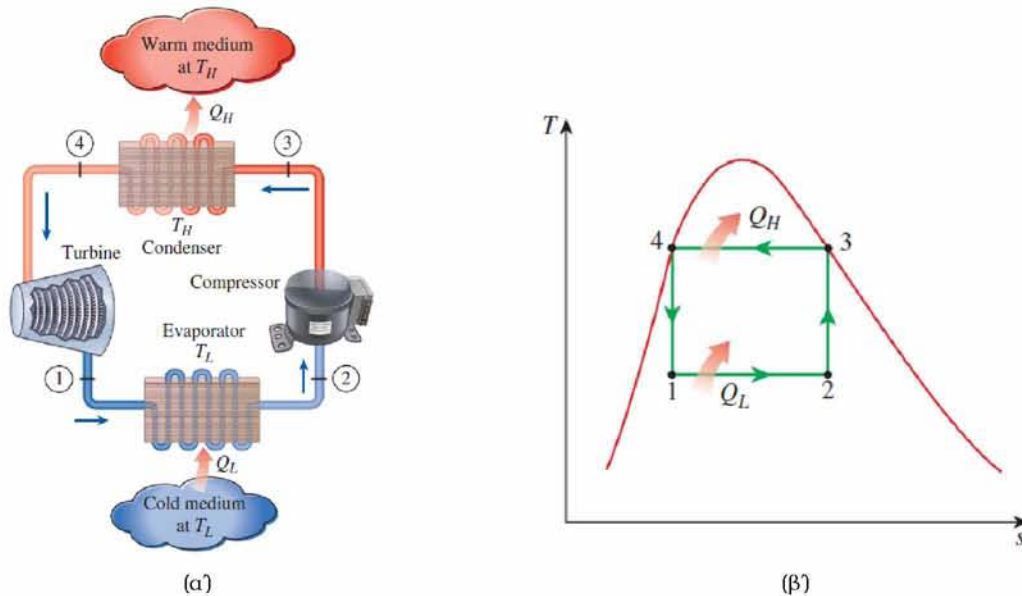
1.2.2 Ο αντίστροφος κύκλος Carnot

Οι πλέον αποδοτικοί ψυκτικοί κύκλοι είναι οι αντιστρεπτοί-ιδανικοί, εκείνοι που αποσιελούνται από αντιστρεπές διεργασίες. Χαρακτηρίζονται από βαθμούς απόδοσης οι οποίοι αποσιελούν άνω όρια-μέγιστες πμές για οποιαδήποτε μηχανή λειτουργεί μεταξύ των ίδιων δύο θερμοκρασιών. Ο επικρατέστερος τέτοιος κύκλος είναι ο αντίστροφος κύκλος Carnot (1824) (B. Horbaniuc 2004) και λαμβάνεται, αν αντιστραφούν οι τέσσερις αντιστρεπές διεργασίες (δύο ισόθερμες και δύο αδιαβατικές του αντίστοιχου θερμικού).

Η αντιστροφή τον καθιστά αριστερόστροφο στα διάφορα διαγράμματα, κάτι που υποδεικνύει ότι απαιτεί έργο προκειμένου να πραγματοποιηθεί. Οι συντελεστές λειτουργίας Carnot εκφράζονται συναρτήσει των απολύτων θερμοκρασιών ως :

$$COP_{Carnot Refrigerator} = \frac{1}{\frac{T_H}{T_L} - 1} \quad (1.4)$$

$$COP_{Carnot Heat Pump} = \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_H}} \quad (1.5)$$



Σχήμα 1.2: (α) Η διάταξη του αντίστροφου κύκλου Carnot και (β) αναπαράστασή του σε διάγραμμα θερμοκρασίας-εντροπίας (Πηγή: Cengel Y. & Boles M. 2015)

Ο ιδανικός ψυκτικός κύκλος Carnot αποιελείται από μια αδιαβατική-ισεντροπική συμπίεση στην υψηλή θερμοκρασία που ακολουθείται από μια ισοθερμοκρασιακή απόρριψη θερμότητας στη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας και στη συνέχεια ισεντροπική εκτόνωση ως τη χαμηλή θερμοκρασία. Τέλος, μέσω της ισοθερμοκρασιακής αφαίρεσης θερμότητας από τη δεξαμενή σε χαμηλή θερμοκρασία, το ψυκτικό μέσο επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση, ώστε να επαναλάβει τον κύκλο. Το έργο προσφέρεται στη διάρκεια της συμπίεσης. Προκειμένου οι ισοθερμοκρασιακές διεργασίες να προσεγγιστούν ικανοποιητικά, το εργαζόμενο μέσο δεν μπορεί να είναι αέριο αλλά πρέπει να είναι υγρό που κατά τη διάρκεια αυτών εξαιτμίζεται ή συμπυκνώνεται απορροφώντας τη λανθάνουσα θερμότητα εξαιτμίσής του (B. Horbaniuc 2004). Ωστόσο, αυτός ο κύκλος με το ψυκτικό που αλλάζει φάση παρουσιάζει δυο σημαντικά μειονεκτήματα. Καταρχάς, η συμπίεση είναι υγρή, πραγματοποιείται στην περιοχή υγρού-ατμού. Η παρουσία υγρού και σταγονιδίων είναι ιδιαίτερος επιβλαβής για τα πτερύγια του συμπιεστή που μπορεί να εμφανίσουν φαινόμενα διάβρωσης όπως τρήματα ή σπηλαιώση. Δεύτερον, η εκτόνωση στο σιρόβιλο αφορά ένα μείγμα υγρού-ατμού χαμηλής ποιότητας, ώστε η απόδοσή του είναι πολύ χαμηλή. Αν και παρέχει κάποιο έργο στο συμπιεστή, η πολυπλοκότητα και το κόστος κατασκευής και λειτουργίας σε υψηλό περιεχόμενο υγρασίας δεν δικαιολογείται. Συνεπώς ο κύκλος Carnot δεν υλοποιείται στις εφαρμογές.

1.3 Εφαρμογές της ψύξης

Η εφαρμογή των ψυκτικών κύκλων είναι ιδιαίτερος ευρεία και υπηρετεί πλήθος καθημερινών αναγκών οικιακών, βιομηχανικών και όχι μόνο. Καταρχάς, βάσει του στόχου, της θερμοκρασίας η οποία επιδιώκεται στον ψυχόμενο χώρο, διακρίνονται τρεις περιοχές ψύξεως (B. Horbaniuc 2004):

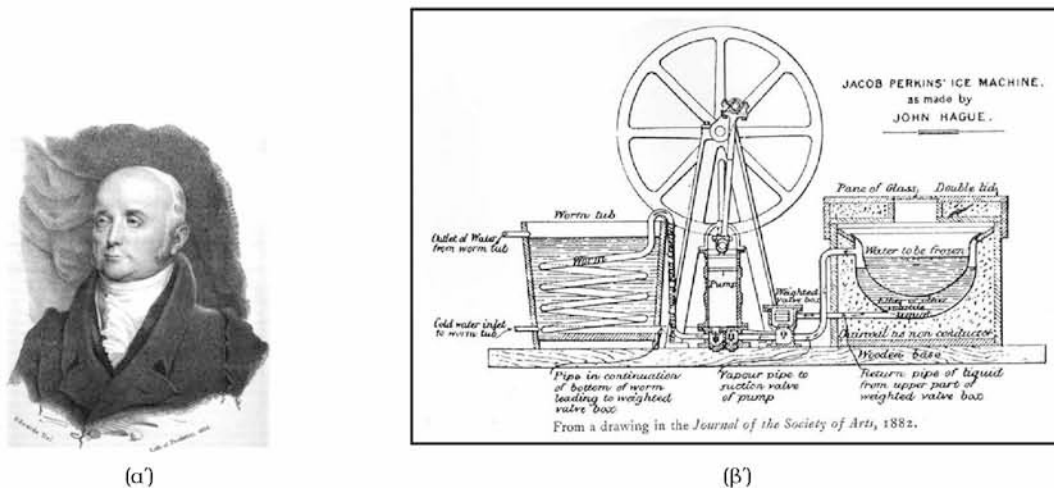
- περίπου $5^{\circ}C$: κλιματισμός (air conditioning)
- $0^{\circ}C$ έως $-150^{\circ}C$: βιομηχανική ψύξη (industrial refrigeration)
- $-150^{\circ}C$ έως $-273^{\circ}C$: κρυογένεση (cryogenics)

Η ψύξη απανιάνεται στις κατοικίες, στους χώρους εργασίας και στα νοσοκομεία με τους οικιακούς ψύκτες και τα κλιματιστικά, στη βιομηχανία τροφίμων στην παραγωγή, επεξεργασία, διατήρηση και μεταφορά τους, αναλόγως το προϊόν καθώς και στην παραγωγή πάγου. Μάλιστα στην τελευταία καταγράφεται ιστορικά και η πρώτη προσπάθεια παραγωγής ψύξης το 1755, όταν ο Cullen κατόρθωσε να παράξει πάγο εξαιτμίζοντας νερό σε χαμηλή πίεση (B. Horbaniuc 2004). Ακόμη, αξιοποιείται στη χημική βιομηχανία για την απαγωγή της παραγόμενης θερμότητας είτε από εξώθερμες αντιδράσεις είτε από ανάμειξη ουσιών, στο διαχωρισμό

αλάτων από υγρά διαλύματα, στην υγροποίηση των αερίων. Στην εξαγωγή ορυκτών υλών και από τους πολιτικούς μηχανικούς χρησιμοποιείται, ώστε να παγώσει η υγρασία σε ασταθή, υδροφόρα εδάφη, ενώ στη βιομηχανία κατασκευής μεταλλικών αντικειμένων είναι αναγκαία στις κοπές και στις θερμικές κατεργασίες. Δεν απουσιάζει η ανάγκη της στη φαρμακευτική βιομηχανία καθώς και στην ιατρική και τη βιολογία για τη διατήρηση αίματος και ιστών ή για την επίτευξη καταλλήλων συνθηκών σε αίθουσες χειρουργείων. Σε πεδία ερευνών, κυριαρχεί σε εγκαταστάσεις διεξαγωγής πειραμάτων ατομικής και πυρηνικής φυσικής, όπου επιδιώκονται συνθήκες που προσεγγίζουν το απόλυτο μηδέν ($-273^{\circ}C$).

1.4 Κύκλος ψύξης με συμπίεση ατμού

Για την κάλυψη των ανωτέρω αναγκών στις εφαρμογές, κυρίως στα δύο πρώτα θερμοκρασιακά εύρη, χρησιμοποιείται ο κύκλος ψύξης με συμπίεση ατμού (vapor compression refrigeration cycle). Αποτελεί την πλέον διαδεδομένη διάταξη. Η πρώτη ευρεσιτεχνία ενός μηχανικώς κινουμένου συστήματος ψύξης που λειτουργούσε με αιθέρα κατοχυρώθηκε το 1834 από τον J. Perkins και δέκα έτη αργότερα το 1844 ο Gortie κατεσκεύασε το πρώτο σύστημα με συμπίεση ατμού, χρησιμοποιώντας αέρα ως εργαζόμενο μέσο. Εν συνεχεία, το 1857 οι Harrison και Siebe δημιούργησαν την πρώτη εμπορεύσιμη διάταξη με αιθέρα. Το 1898 διατέθηκε μια πρώτη μορφή του οικιακού ψυγείου (B. Horbanicus 2004). Από το 1890 η εισαγωγή ηλεκτρικών κινητήρων, η παρουσία αυτομάτου ελέγχου, η ελάττωση του μεγέθους και οι συνεχείς βελτιώσεις κατέστησαν δυνατή την εμφάνιση των συσκευών σε σπίτια και κρεοπωλεία. Μετά το 1930 το μέγεθος μειώθηκε περαιτέρω, η αξιοπιστία αυξήθηκε και οι τιμές χαμήλωσαν (Υ. Çengel 2013).



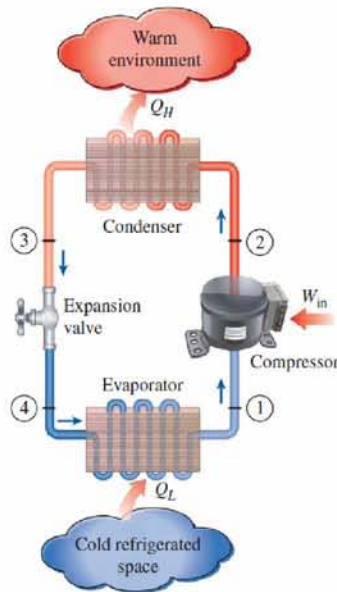
Σχήμα 1.3: (α) Ο Jacob Perkins και (β) η ευρεσιτεχνία του (1834)

(Πηγές:(α) <https://en.wikipedia.org> 2018, (β) <https://www.pinterest.co.uk> 2018)

Η χρήση του κύκλου ψύξης με συμπίεση ατμού οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι αντιμετωπίζει τις δυο δυσκολίες του αντίστροφου κύκλου Carnot. Προκειμένου να αποφευχθούν τα προβλήματα που σχετίζονται με τη συμπίεση διφασικού μείγματος υγρού-ατμού μπορεί αυτό να μεταφερθεί στην περιοχή του υπέρθερμου ατμού και η πολύπλοκη διάταξη του στροβίλου εκτόνωσης να αντικατασταθεί από μια διάταξη στραγγαλισμού. Ο στραγγαλισμός είναι μια μη αντιστρεπτή διεργασία, επομένως ακόμα και στην ιδανική του περίπτωση, δίχως τις αναντιστρεπτότητες λόγω τριβών ή πιώσεων πίεσεως στις σωληνώσεις, ο κύκλος δεν είναι αντιστρεπτός. Συνεπώς, η απόδοση του ιδανικού κύκλου, και καί' επέκταση και του πραγματικού, θα είναι μικρότερη από εκείνη του αντίστροφου κύκλου Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών.

Το ψυκτικό μέσο πραγματοποιεί ξανά τέσσερις διεργασίες. Ο υπέρθερμος ατμός συμπιέζεται στην υψηλή πίεση, ιδανικώς υπό σταθερή εντροπία, και στην πορεία απορρίπτει ισοβαρώς θερμότητα στο συμπυκνωτή. Από εκεί εξέρχεται υγρό ελαφρώς υπόψυκτο, διότι είναι δύσκολο να ελεγχθεί και να εξέλθει ακριβώς κορεσμένο, ενώ δε συμφέρει να απομακρυνθεί από το συμπυκνωτή μέρος του σε αέρια κατάσταση. Το υγρό,

έπειτα, σπραγγαλίζεται στην πίεση του εξατμιστήρα, διεργασία που θεωρείται ισηνθαλπική. Στον εξατμιστήρα, στη χαμηλή πίεση, απορροφά την ενθαλπία αλλαγής φάσης ισοβαρώς από τον ψυχόμενο χώρο και εισέρχεται ξανά ως ελαφρώς υπέρθερμος ατμός στο συμπιεστή.



Σχήμα 1.4: Κύκλος ψύξεως με συμπίεση ατμού (Πηγή: Cengel Y. & Boles M. 2015)

Το απαιτούμενο εξωτερικό έργο W_{input} προσφέρεται στο συμπιεστή, ενώ το ωφέλιμο αποτέλεσμα είναι η θερμότητα Q_L που αντλείται από το χώρο κατά την εξάτμιση του ψυκτικού στον εξατμιστήρα (ψυγείο) ή η θερμότητα Q_H που προσφέρεται στη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας (αντλία θερμότητας). Οι συντελεστές λειτουργίας είναι:

$$COP_{Refrigerator} = \frac{Q_L}{W_{input}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$$

$$COP_{Heat Pump} = \frac{Q_H}{W_{input}} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1}$$

Η χαμηλότερη θερμοκρασία που επιτυγχάνει η διάταξη εξαρτάται από το λόγο πιέσεων του συμπιεστή. Προκειμένου αυτή να χαμηλώσει περισσότερο και η λειτουργία να καταστεί περισσότερο αποδοτική υπάρχουν διάφορες παραλλαγές, όπως ο κύκλος με παρουσία πολλαπλών εξατμιστών, ο κύκλος με πολυβάθμια συμπίεση και το σύστημα κλιμακωτής ψύξεως.

Κεφάλαιο 2

Ψύξη με απορρόφηση

2.1 Πλεονεκτήματα έναντι της συμπίεσως ατμού

Παρά την εκτενέστατη χρήση της οποίας χαιρεί, η ψύξη με συμπίεση ατμού παρουσιάζει το μεγάλο μειονέκτημα ότι η συμπίεση αυτή του αερίου απαιτεί υψηλό προσδιδόμενο έργο. Προκειμένου αυτό να παρέχεται και να κινεί τη διάταξη, καταναλώνεται, συνήθως, ηλεκτρική ενέργεια. Το Διεθνές Ινστιτούτο Ψύξεως των Παρισίων εκτιμά πως για την κάλυψη αναγκών ψύξεως και κλιματισμού δαπανάται το 15% της παγκοσμίως παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας. Ακόμη, ο ίδιος φορέας υπολόγισε πως από τη συνολική κατανάλωση των κατοικιών και των εργασιακών χώρων το 45% αφορά τον κλιματισμό τους (B. Choudhury 2012). Παρ' όλες τις συστηματικές προσπάθειες βελτίωσης του κύκλου και περιορισμού του απαιτούμενου έργου, από τη στιγμή που εμπλέκεται συμπίεση αερίου η τιμή του παραμένει πάντοτε υψηλή (B. Horbaniuc 2004). Το ελάττωμα αυτό της συγκεκριμένης τεχνολογίας σε συνδυασμό με τις υψηλές υπάρχουσες ανάγκες (εκτιμώνται ανάλογες του βιωτικού επιπέδου των πολιτών (B. Choudhury 2012)) καθιστά δελεαστική μια λιγότερο δαπανηρή μεν, εφαρμόσιμη δε εναλλακτική λύση. Έτσι, βασισμένη στο γεγονός ότι ένα υγρό, ως σχεδόν ασυμπίεστο, απαιτεί εξαιρετικά ελάχιστο έργο, ώστε μέσω μιας αντλίας να αυξηθεί η πίεσή του, εισήχθη και αναπτύχθηκε η τεχνολογία της ψύξεως με απορρόφηση.

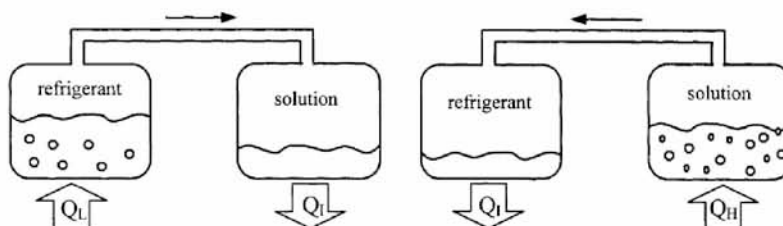
Η ψύξη με απορρόφηση, λοιπόν, αντί για την υψηλού κόστους συμπίεση αερίου, περιλαμβάνει συμπίεση ενός υγρού απαιτώντας τόσο λίγο έργο στην αντλία, ώστε αποτελεί κοινή πρακτική αυτό να αγνοείται στη μελέτη (Y. Çengel 2013, P. Srikhirin 2001). Δεν είναι, όμως, αυτό το μόνο πλεονέκτημά της έναντι της συμπίεσης ατμού. Καταρχάς, αντικαθίσταται ο συμπίεστής, που χαρακτηρίζεται από αρκετή πολυπλοκότητα, με μια αντλία. Ακόμη, τα ψυκτικά μέσα που χρησιμοποιούνται δεν είναι επιβλαβή για το περιβάλλον, ιδίως όσον αφορά τα δύο κύρια περιβαλλοντικά προβλήματα: της υπερθερμάνσεως του πλανήτη και της καταστροφής της στροβιλιάς του όζοντος. Αυτό εν αντιθέσει με τους αλογονωμένους υδρογονάνθρακες, όπως CFCs, που αφ' ενός διασπούν το όζον με φωτοχημικές αντιδράσεις (ένα μόριο καταστρέφει πολλά μόρια όζοντος), αφ' ετέρου απορροφούν την υπέρυθη ακτινοβολία της Γης εμποδίζοντάς την να επιστρέψει στο διάστημα και παγιδεύοντάς τη στην ατμόσφαιρα. Χαρακτηριστικά αναφέρεται πως αν η ικανότητα του CO_2 να απορροφά την υπέρυθη ακτινοβολία οριστεί 1 (global warming potential, θεωρώντας πως παραμένει 100 έτη στην ατμόσφαιρα), τα μόρια CFCs χαρακτηρίζονται από τιμές 1300 ως 22200 (N. Ανδρίτσος 2017). Στην ψύξη με απορρόφηση η χρήση τέτοιων επιβλαβών ενώσεων αποφεύγεται πλήρως (B. Horbaniuc 2004, P. Srikhirin 2001).

Επιπλέον, τα εν λόγω συστήματα συμβάλλουν και στην εξοικονόμηση της ενέργειας. Αντί για μηχανικό έργο απαιτούν πρόσδοση θερμότητας προκειμένου να λειτουργήσουν. Το ευτύχημα είναι πως η θερμότητα αυτή μπορεί να προέρχεται από διάφορες πηγές. Μπορεί να είναι ηλιακή ή γεωθερμική ενέργεια και θερμότητα που απορρίπτεται ως απόβλητο στο περιβάλλον κατά τις βιομηχανικές διεργασίες, τη συμπαραγωγή και τις διεργασίες των ατμοηλεκτρικών εγκαταστάσεων (Y. Çengel 2013, B. Horbaniuc 2004, P. Srikhirin 2001). Η αξιοποίηση της θερμότητος αυτής, που υπό άλλες συνθήκες χάνεται, και η μετατροπή της σε χρήσιμη μορφή (ψύξη) αποφεύγοντας τη χρήση ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να συνδράμει και στον περιορισμό των εκπομπών CO_2 από τα θερμοηλεκτρικά εργοστάσια (P. Srikhirin 2001). Η πηγή της θερμικής ενέργειας στην ψύξη με απορρόφηση κυμαίνεται, συνήθως μεταξύ $100^{\circ}C$ και $200^{\circ}C$ (Y. Çengel 2013). Παρά

τα πολυάριθμα προτερήματα της τεχνολογίας αυτής, η ψύξη με συμπίεση ατμού κυριαρχεί στις εφαρμογές, διότι οι συσκευές ψύξεως με απορρόφηση είναι λιγότερο αποδοτικές, περισσότερο ογκώδεις και δύσκολες στη συντήρηση, καθώς δεν απαντώνται συχνά (Υ. Çengel 2013). Προκειμένου να προωθηθούν πρέπει να βελιωθεί η απόδοσή τους και να μειωθεί το κόστος τους (P. Srikuhirin 2001). Προς στιγμήν χρησιμοποιούνται περιορισμένα σε χημικές βιομηχανίες και κλιματισμό (B. Horbaniuc 2004).

2.2 Αρχές λειτουργίας

Στις διατάξεις αυτές το εργαζόμενο μέσο είναι ένα διάλυμα απορροφητικού (absorbent) και ψυκτικού (refrigerant). Η λειτουργία τους βασίζεται στο ακόλουθο. Έστω δύο συγκοινωνούντα δοχεία εκκενωμένα (Σχήμα 2.1). Το ένα περιέχει υγρό διάλυμα απορροφητικού-ψυκτικού και το άλλο υγρό ψυκτικό. Το ψυκτικό στο δοχείο του, λόγω του κενού, θα δημιουργήσει ατμούς επιδιώκοντας ισορροπία - ταύτιση της πίεσης με την τάση ατμών στις συνθήκες θερμοκρασίας του. Ωστόσο, το αέριο θα φθάνει και στο άλλο δοχείο. Εκεί, όσο το διάλυμα δεν είναι κορεσμένο σε ψυκτικό, οι ατμοί απορροφώνται στο υγρό αραιώνοντάς το. Όσο το αέριο απορροφάται στο διάλυμα τόσο στο άλλο δοχείο το ψυκτικό εξαιτμίζεται και ως εκ τούτου η θερμοκρασία του μειώνεται. Έτσι δημιουργείται ψύξη στο δοχείο του ψυκτικού. Στο διπλανό δοχείο όπου πραγματοποιείται η απορρόφηση, καθώς το διάλυμα αραιώνει, εκλύεται θερμότητα, πρόκειται γαρ για εξώθερμη διεργασία. Επομένως, απαιτείται απομάκρυνση της παραγόμενης θερμότητας, ώστε να διατηρείται η ικανότητα του διαλύματος να απορροφά αέριο. Μετά τον κορεσμό σε ψυκτικό, το τελευταίο πρέπει να ανακτηθεί. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί προσδίδοντας θερμότητα από εξωτερική πηγή στο διάλυμα. Το ψυκτικό απομακρύνεται ως αέριο και, αποδίδοντας θερμότητα στο περιβάλλον, συμπυκνώνεται στο γειτονικό δοχείο (P. Srikuhirin 2001).



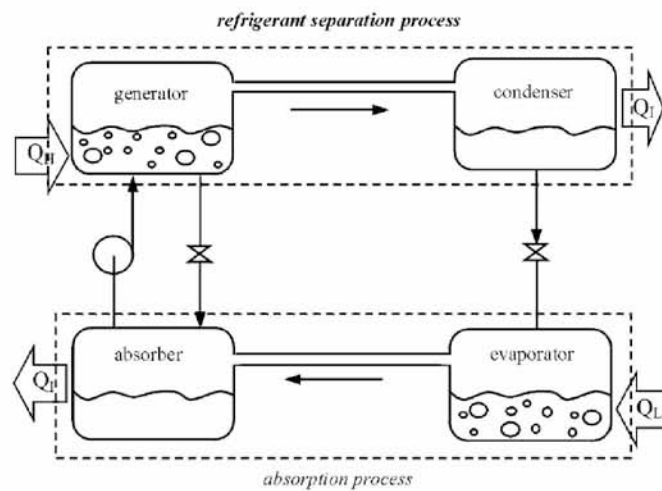
Σχήμα 2.1: Αρχή λειτουργίας της ψύξεως με απορρόφηση (Πηγή: P. Srikuhirin et al. 2001)

2.3 Κύκλος ψύξεως με απορρόφηση

2.3.1 Ο δρόμος του εργαζόμενου μέσου & οι ανταλλαγές θερμότητας

Προκειμένου η ανωτέρω διεργασία να πραγματοποιηθεί συνεχόμενα και να μπορεί διαρκώς να παράγεται ψύξη, επιστρατεύεται μια κυκλική διάταξη (Σχήμα 2.2) που λειτουργεί μεταξύ δυο πιέσεων και παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τα κυρίαρχα συστήματα συμπίεσεως ατμού. Στον εξατμιστήρα (evaporator), λοιπόν, της διάταξης βρίσκεται σε χαμηλή πίεση υγρό ψυκτικό. Καθώς εξαιτμίζεται, απορροφά την ενθαλπία αλλαγής φάσης που το χαρακτηρίζει στις δεδομένες συνθήκες από το περιβάλλον του που αποτελεί τον ψυχόμενο χώρο, τη δεξαμενή θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία. Κατά την εξάτμιση αυτή παράγεται ψύξη, ο χώρος ψύχεται. Στην πορεία, ο ατμός κατευθύνεται στον απορροφητή (absorber), συσκευή όπου απορροφάται στο υγρό διάλυμα, όπως προαναφέρθηκε. Απορροφόμενο στο υγρό, το ψυκτικό το αραιώνει και το αραιό διάλυμα συμπιέζεται μέσω μιας αντλίας στην υψηλή πίεση. Εκεί, στον αναγεννητή (generator) το αέριο εκροφάται-αποδεσμεύεται, αφήνοντας το διάλυμα πυκνότερο σε απορροφητικό χάρη στην προσδιδόμενη θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία. Έπειτα συμπυκνώνεται στο συμπυκνωτή (condenser) κι επιστρέφει ως υγρό στον εξατμιστήρα, στη χαμηλή πίεση, μέσω μιας διάταξης στραγγαλισμού. Το δε πυκνό σε απορροφητικό διάλυμα στραγγαλίζεται κι αυτό στη χαμηλή πίεση του απορροφητή, ώστε να συνεχιστεί η λειτουργία. Υπάρχουν, δηλαδή, δύο μονοπάτια που ακολουθούν τα εργαζόμενα ρευστά (B. Horbaniuc 2004). Το ένα είναι το

μονοπάτι του ψυκτικού που περνά από εξάτμιση, απορροφητή, αντλία, αναγεννητή, συμπυκνωτή, διάταξη στραγγαλισμού και το δεύτερο το μονοπάτι του διαλύματος που από τον απορροφητή συμπιέζεται στην αντλία, εκροφά το αέριο στον αναγεννητή και στραγγαλίζεται ξανά στη χαμηλή πίεση.



Σχήμα 2.2: Βασικός κύκλος ψύξεως με απορρόφηση (Πηγή: P. Srihirin et al. 2001)

Όπως είναι φανερό και από το σχήμα, η διάταξη ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον σε όλα τα στάδια της εκτός του στραγγαλισμού. Κατ' αρχάς, αντλεί θερμότητα σε χαμηλή θερμοκρασία από τον ψυχόμενο χώρο κατά την εξάτμιση, έστω Q_L . Στη συνέχεια, κατά την απορρόφηση (εξώθερμη διεργασία), προκειμένου το διάλυμα να δύναται να απορροφήσει περισσότερο αέριο, οφείλει να αποβάλλει τη θερμότητα που εκλύεται. Έτσι, ο απορροφητής ψύχεται, συνήθως με νερό που απάγει ποσότητα ενέργειας Q_I σε ενδιάμεση θερμοκρασία. Στην αντλία που ακολουθεί παρέχεται μηχανικό έργο, τιμή εξαιρετικά χαμηλή. Στον δε αναγεννητή, για την εκρόφηση του αερίου προσφέρεται θερμότητα Q_H σε υψηλή θερμοκρασία. Αυτή αποτελεί και την κυρίως δαπάνη για τη λειτουργία του κύκλου. Τέλος, στον συμπυκνωτή το αέριο ψυκτικό αποβάλλει την ενθαλπία αλλαγής φάσης, ξανά σε ενδιάμεση θερμοκρασία, και υγροποιείται. Δεδομένου ότι η λειτουργία της διάταξης βασίζεται στην πρόσδοση της Q_H , δηλαδή στη μεταφορά θερμότητας στο σύστημα από μια εξωτερική πηγή, οι συσκευές ψύξεως με απορρόφηση χαρακτηρίζονται ως θερμοκαθοδηγούμενες (Υ. Çengel 2013).

Με βάση τις θερμοροές αυτές ορίζεται και ο συντελεστής λειτουργίας, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως:

$$COP = \frac{\text{Επιθυμητή Έξοδος}}{\text{Απαιτούμενη Είσοδος}} = \frac{Q_L}{Q_H + W_{pump}} \simeq \frac{Q_L}{Q_H} \quad (2.1)$$

διότι, καθώς προαναφέρθηκε, το W_{pump} για τη λειτουργία της αντλίας μπορεί να αγνοηθεί ως αμελητέο εν συγκρίσει με τη θερμότητα που προσφέρεται στον αναγεννητή (Υ. Çengel 2013, P. Srihirin 2001).

2.3.2 Ο ιδανικός κύκλος

Για τη μέγιστη δυνατή τιμή COP που μπορεί να επιτευχθεί, οι διεργασίες μεταφοράς θερμότητας αντιμετωπίζονται ως ισόθερμες και αντιστρεπτές. Το μηχανικό έργο στην αντλία αγνοείται. Για να είναι ο ψυκτικός κύκλος αντιστρεπτός, πρέπει η θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία Q_H να τροφοδοτείται σε μια θερμική μηχανή Carnot και το έργο εξόδου αυτής W με τη σειρά του σε ένα ψυγείο Carnot (Σχήμα 2.3) που θα αφαιρεί Q_L ποσό θερμότητας από τον ψυχόμενο χώρο (Υ. Çengel 2013). Για την απόδοση της θερμικής μηχανής Carnot ισχύει:

$$\varepsilon_{thermal, reversible} = \frac{W}{Q_H} \Rightarrow W = \varepsilon_{thermal, reversible} \cdot Q_H \quad (2.2)$$

Ακόμη, ο συντελεστής λειτουργίας του ψυγείου Carnot είναι:

$$COP_{Refrigerator, reversible} = \frac{Q_L}{W} \Rightarrow Q_L = W \cdot COP_{Refrigerator, reversible} \quad (2.3)$$

Αντικαθιστώντας το έργο από τη σχέση της θερμικής μηχανής:

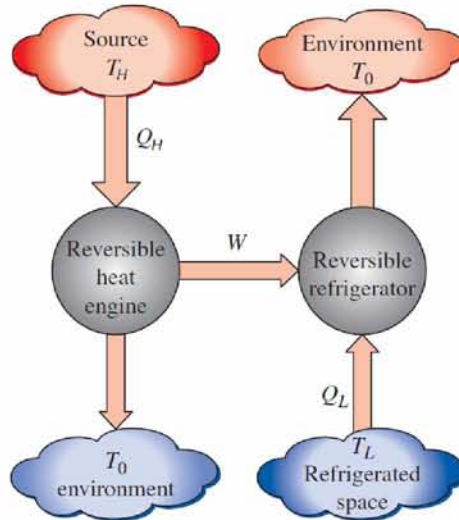
$$Q_L = \varepsilon_{thermal, reversible} \cdot COP_{Refrigerator, reversible} \cdot Q_H \quad (2.4)$$

Επιστρέφοντας στη διάταξη ψύξεως με απορρόφηση:

$$COP_{reversible} = \frac{Q_L}{Q_H} = \varepsilon_{thermal, reversible} \cdot COP_{Refrigerator, reversible} \quad (2.5)$$

Έστω, τώρα, T_0 η θερμοκρασία του περιβάλλοντος το οποίο λειτουργεί τόσο ως δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας όπου η θερμική μηχανή απορρίπτει θερμότητα όσο κι ως δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας όπου το ψυγείο απορρίπτει θερμότητα. Οι διατάξεις Carnot λειτουργούν, αντιστοίχως, μεταξύ των θερμοκρασιών T_H , T_0 και T_L , T_0 , όπου T_H η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής που παρέχει την Q_H και T_L της ψυχρής που παρέχει την Q_L . Συνεπώς, ισχύει:

$$\varepsilon_{thermal, reversible} = 1 - \frac{T_0}{T_H} \quad \text{και} \quad COP_{Refrigerator, reversible} = \frac{T_L}{T_0 - T_L} \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.3: Συνδυασμός ιδανικής θερμικής μηχανής και ιδανικού ψυγείου Carnot για την εκτίμηση της απόδοσης ιδανικού κύκλου ψύξεως με απορρόφηση (Πηγή: Cengel Y. & Boles M. 2015)

Τελικώς, για την ιδανική-αντιστρεπτή διάταξη ψύξεως με απορρόφηση ο συντελεστής λειτουργίας παίρνει τη μορφή:

$$COP_{reversible} = \left(1 - \frac{T_0}{T_H}\right) \left(\frac{T_L}{T_0 - T_L}\right) \quad (2.7)$$

Κάθε πραγματικό σύστημα που λειτουργεί σε περιβάλλον T_0 , ψύχει χώρο θερμοκρασίας T_L και δέχεται θερμότητα από πηγή θερμοκρασίας T_H έχει χαμηλότερη τιμή COP από αυτή. Οι τυπικές τιμές είναι μικρότερες της μονάδας και η βελτίωση αρκετά ακριβή, πλην όμως δυνατή (Y. Cengel 2013, B. Horbaniuc 2004). Η επίδραση της T_H στον COP είναι πολύ ισχυρή. Συνήθως ρυθμίζεται στους $120^\circ C$ περίπου και για κάθε πώση $6^\circ C$ ο συντελεστής λειτουργίας μειώνεται κατά 12.5%. Τότε, για την επίτευξη του ίδιου θερμικού φορτίου απαιτείται αύξηση του μεγέθους και κατά συνέπεια του κόστους της διάταξης (Y. Cengel 2013).

Είναι φανερό πως όλοι οι κύκλοι ψύξεως με απορρόφηση ανταλλάσσουν θερμότητα με τρεις δεξαμενές: χαμηλής, ενδιάμεσης και υψηλής θερμοκρασίας. Όταν ο κύκλος υπηρετεί ως ψυγείο ή αντλία θερμότητας λειτουργεί με βάση την Q_H που προσφέρεται στην πιο υψηλή θερμοκρασία, η ψύξη παράγεται στη χαμηλή και η θερμότητα αποβάλλεται στην ενδιάμεση. Στο μεν ψυγείο η ωφέλιμη θερμότητα είναι η Q_L στη δε αντλία θερμότητας η Q_I . Έτσι, συνήθως, το περιβάλλον αποτελεί τη δεξαμενή σε χαμηλή θερμοκρασία για την αντλία θερμότητας και σε ενδιάμεση για το ψυγείο (P. Srihirin 2001).

2.4 Εργαζόμενα μέσα

Καθοριστικής σημασίας για την ικανοποιητική απόδοση ενός συστήματος ψύξεως με απορρόφηση είναι η επιλογή του εργαζόμενου μέσου (ζεύγους απορροφητή-ψυκτικού), εξ' αιτίας της ισχυρής επίδρασης των χημικών και θερμοδυναμικών ιδιοτήτων του μείγματος στη λειτουργία. Στη βιβλιογραφία προτείνονται αρκετά ζεύγη απορροφητή-ψυκτικού. Μάλιστα, κατά τον Marciiss υπάρχουν περίπου 40 ενώσεις προτεινόμενες ως ψυκτικά και 200 ως απορροφητές (P. Srihirin 2001).

Μια βασική απαίτηση από το μείγμα απορροφητή-ψυκτικού είναι στην υγρή φάση να είναι αναμείγμα στο θερμοκρασιακό εύρος λειτουργίας. Ακόμη το μείγμα πρέπει να είναι χημικώς ευσταθές, μη τοξικό και μη εκρηκτικό. Άλλα επιθυμητά χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα. Είναι καλό η διαφορά μεταξύ των σημείων ζέσεως του καθαρού ψυκτικού και του μείγματος στην ίδια πίεση (ανύψωση του σημείου ζέσεως) να είναι όσο γίνεται μεγαλύτερη (P. Srihirin 2001). Η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης του ψυκτικού πρέπει να είναι υψηλή και οι δυνατές συγκεντρώσεις του στην απορροφητική ουσία μεγάλες, ώστε να παράγεται ψύξη χωρίς την ανάγκη μεγάλων ποσοτήτων και να διατηρούνται χαμηλοί ρυθμοί ανακυκλοφορίας του διαλύματος μεταξύ αναγεννητή και απορροφητή. Οι ιδιότητες που σχετίζονται με φαινόμενα μεταφοράς μάζας και θερμότητας (δυναμικό και κινηματικό ιξώδες, θερμική αγωγιμότητα, διαχυτότητα, ειδική θερμοχωρητικότητα) οφείλουν να είναι ευνοϊκές. Τόσο το ψυκτικό όσο και ο απορροφητής πρέπει να είναι μη διαβρωτικά, φιλικά προς το περιβάλλον και φθηνά στην παρασκευή και την απόκτηση (P. Srihirin 2001, B. Horbaniuc 2004).

Τα πιο κοινά ζεύγη συστατικών του εργαζόμενου μείγματος είναι νερό-αμμωνία ($H_2O - NH_3$) και νερό-βρωμιούχο λίθιο ($H_2O - LiBr$). Στην πρώτη περίπτωση το ψυκτικό είναι η αμμωνία και στη δεύτερη το νερό (P. Srihirin 2001). Στην ανατολή της ψύξεως με απορρόφηση, στις πρώτες συσκευές, χρησιμοποιήθηκε το ζεύγος νερό-θειϊκό οξύ ($H_2O - H_2SO_4$) το οποίο εγκαταλείφθηκε σύντομα ως δηλητηριώδες και εξαιρετικά διαβρωτικό (K. Stephan 1983). Έτσι, στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η αμμωνία τόσο σε εφαρμογές ψύξης όσο και θέρμανσης.

2.4.1 Το ζεύγος αμμωνία-νερό

Χαρακτηριστικό του ζεύγους $H_2O - NH_3$ είναι πως τόσο το ψυκτικό (NH_3) όσο και ο απορροφητής (H_2O) είναι πητικές ενώσεις. Αυτό καθιστά αναγκαία την παρουσία ανορθωτή (rectifier) στη διάταξη, ώστε να διαχωρίζει το νερό που εξατμίζεται μαζί με την αμμωνία στον αναγεννητή. Η απουσία του έχει σαν αποτέλεσμα τη συσσώρευση νερού στον εξατμιστήρα κάτι που εμποδίζει την αποδοτική λειτουργία της διάταξης. Και οι δύο ενώσεις είναι πολύ σταθερές σε μεγάλο εύρος θερμοκρασιών και πιέσεων και η αμμωνία χαρακτηρίζεται από υψηλή λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης (κάτι που επιτρέπει υψηλές αποδόσεις συστήματος) και χαμηλό σημείο πήξεως ($-77^\circ C$) που δίνει τη δυνατότητα χρήσης σε εφαρμογές χαμηλών θερμοκρασιών (P. Srihirin 2001).

Συνανιάνται, κυρίως, σε μικρούς ψύκτες που λειτουργούν με θερμότητα από καύση αερίου ή ηλεκτρική ενέργεια. Οι πιέσεις είναι υψηλές, μεταξύ 4 και 5 bar. Η συσκευή του απορροφητή ψύχεται συνήθως με αέρα (B. Horbaniuc 2004). Το ζεύγος ενώσεων $H_2O - NH_3$ δεν είναι επιβλαβές για το περιβάλλον και το κόστος του είναι σχετικά χαμηλό (P. Srihirin 2001).

Ωστόσο, δεν απουσιάζουν και τα μειονεκτήματα. Η μέγιστη θερμοκρασία στον αναγεννητή περιορίζεται στους $180^\circ C$, διότι έπειτα η αμμωνία διασπάται (K. Stephan 1983). Ακόμη, οι πιέσεις που αναπτύσσονται είναι υψηλές (αυτό σχετίζεται με τη μηχανική καταπόνηση των στοιχείων της μηχανής), η αμμωνία είναι τοξική και διαβρώνει το χαλκό και τα κράματά του.

2.4.2 Το ζεύγος νερό-βρωμιούχο λίθιο

Η χρήση του ζεύγους $H_2O - LiBr$ εισήχθη αρκετά αργότερα. Τα δυο κυριότερα προτερήματά του είναι η πολύ μεγάλη ενθαλπία αλλαγής φάσης του νερού και η μη πιητικότητα του βρωμιούχου λιθίου. Χάρη στην τελευταία, σε όλα τα στάδια της διεργασίας οι ατμοί είναι καθαρό νερό, ώστε εκλείπει η ανάγκη του ανορθωτή. Ο ρόλος του νερού ως ψυκτικό υπαγορεύει λειτουργία σε συνθήκες κενού (P. Sriksirin 2001), συνήθεις τιμές πιέσεων είναι 0.04-0.08 bar (B. Horbaniuc 2004). Ο ίδιος αυτός ρόλος, ωστόσο, περιορίζει και την ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία στους $0^\circ C$, τιμή κάτω από την οποία το νερό παγώνει.

Επιπλέον, το διάλυμα $H_2O - LiBr$ είναι επιρρεπές στην κρυστάλλωση (P. Sriksirin 2001). Αυτό σημαίνει πως σε ενδεχόμενη παύση της τροφοδοσίας (Q_H στον αναγεννητή) η εγκατάσταση θα πρέπει να αδειάσει και το διάλυμα να φυλαχθεί σε θερμαινόμενη δεξαμενή (B. Horbaniuc 2004). Για τη βελτίωση της διαλυτότητας, πειράματα έχουν δείξει πως η προσθήκη ενός άλατος ακόμη μπορεί να αναχαιτίσει την κρυστάλλωση. Το πιο συνηθισμένο εξ' αυτών είναι ο βρωμιούχος ψευδάργυρος $ZnBr_2$ (P. Sriksirin 2001). Η ίδια ενέργεια μπορεί να βελτιώσει την απόδοση μεταφοράς μάζας και θερμότητας του διαλύματος, καθώς επίσης να αναστείλει τη διαβρωτική του δράση (P. Sriksirin 2001), αφού τείνει να διαβρώνει τα μη σιδηρούχα υλικά (B. Horbaniuc 2004). Το βρωμιούχο λίθιο δεν είναι τοξικό είναι, όμως, ακριβό στην προμήθειά του (P. Sriksirin 2001, B. Horbaniuc 2004).

Τέτοιες συσκευές εξυπηρετούν, συνήθως, ως ψύκτες νερού ($5^\circ C$) σε εφαρμογές κλιματισμού. Οι απορροφητές των διατάξεων αυτών είναι κατ' εξοχήν υδρόψυκτοι (B. Horbaniuc 2004).

Εκτός από τα δύο επικρατέστερα ζεύγη έχουν μελετηθεί κι άλλα, όπως χλωροφθοράνθρακες-οργανικοί διαλύτες (R21, R22 με DMETEG ή DMF). Ωστόσο, η καταλληλότερη επιλογή για ένα σύστημα ψύξεως με απορρόφηση είναι μείγμα νερού και κάποιας ανόργανης ετεροπολικής ένωσης ($LiBr, NaOH$) (P. Sriksirin 2001).

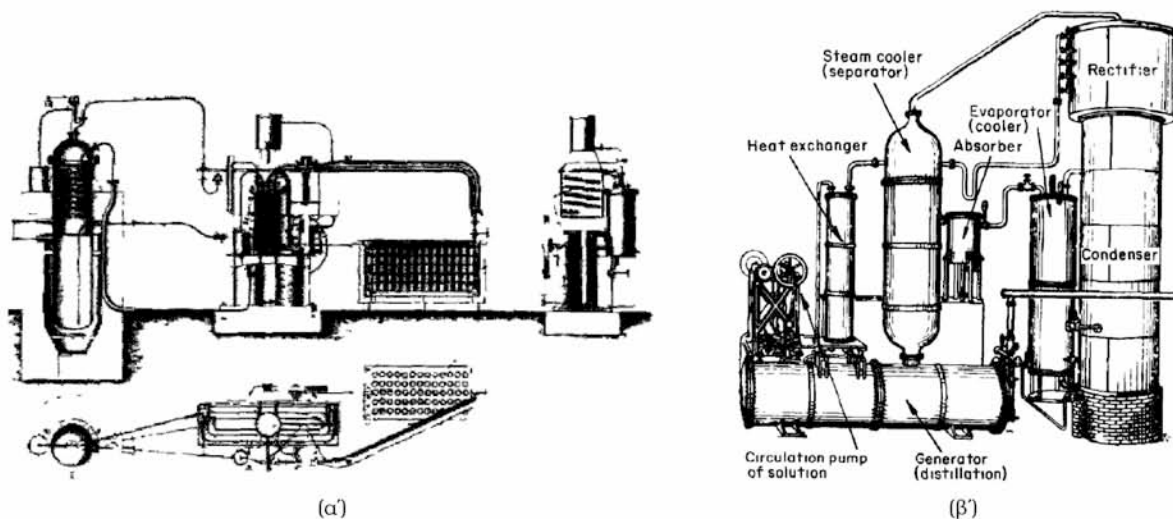
2.5 Ιστορική αναδρομή

Ούτε η ιδέα αλλά ούτε και η τεχνολογία της ψύξεως με απορρόφηση είναι σύγχρονη. Οι απαρχές της χρονολογούνται το 1777, όταν ο Nairne (K. Stephan 1983) δημοσίευσε πειράματα που πραγματοποιούσε με θειϊκό οξύ και νερό σε μια διάταξη δοχείων σαν του σχήματος 2.1. Το ένα περιείχε νερό και το άλλο θειϊκό οξύ. Στο σύστημα συνδεόταν αεραντλία η οποία απομακρύνοντας τον αέρα προκαλούσε εξάτμιση μέρους του νερού και απορρόφησή του από το οξύ. Η θερμοκρασία του νερού μειωνόταν διαρκώς, ως το σχηματισμό πάγου. Η εκλυόμενη θερμότητα από την απορρόφηση, αν και θα ήταν εφικτό, δεν αξιοποιήθηκε για σκοπούς θέρμανσης, διότι η επιδίωξη ήταν αποκλειστικά η παραγωγή πάγου. Λίγο αργότερα, το 1810, βασιζόμενος στη δουλειά αυτή, ο Σκώτος John Leslie, καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου, κατασκεύασε την πρώτη συσκευή προς παραγωγή πάγου στο εργαστήριό του (B. Horbaniuc 2004, K. Stephan 1983).

Χρειάστηκε να μεσολαβήσουν περίπου σαράντα έτη από τότε, ώστε το 1850 ο Edmond Carré, συλλέγοντας αυτές τις ιδέες, να κατασκευάσει μηχανή νερού-θειϊκού οξέος. Η διάταξη λειτουργούσε με χειροκίνητη αντλία. Οι μηχανές χρησιμοποιήθηκαν σε καφετέριες του Παρισιού για παραγωγή πάγου. Η συνεχής λειτουργία δεν ήταν εφικτή, αφού απαιτούσε διαρκή συμπύκνωση του οξέος. Αυτό επέτυχε το 1878 ο Windhausen ο οποίος κατασκεύασε με τα ίδια ρευστά μια συσκευή που εκτός από την παραγωγή πάγου βρήκε εφαρμογή στην ψύξη υγρών και σε ψυχρούς χώρους αποθήκευσης. Ωστόσο, προκειμένου να μην κατασιρέφεται από το πυκνό και διαβρωτικό όξινο διάλυμα, η μηχανή έπρεπε να περιβάλλεται από μόλυβδο. Έτσι, παρά τις εξαιρετικές του θερμικές ιδιότητες το ζεύγος αυτό των εργαζόμενων ρευστών επιδιώχθηκε να αντικατασταθεί.

Το 1859 ο Ferdinand Carré κατοχύρωσε την πρώτη ευρεσιτεχνία συσκευής ψύξεως με απορρόφηση που λειτουργούσε με νερό και αμμωνία. Ως το 1862 είχε κατοχυρώσει άλλες 14 σχετικές ευρεσιτεχνίες (K. Stephan 1983). Η μηχανή του χρησιμοποιήθηκε και πάλι στην παραγωγή πάγου. Μέχρι το 1876 είχαν πωληθεί περισσότερα από 600 τεμάχια στις Ηνωμένες Πολιτείες (B. Horbaniuc 2004). Λόγω της αξιοπιστίας τους, παράχθηκε μεγάλος αριθμός συσκευών στη Γαλλία, τη Γερμανία και την Αγγλία. Στις ευρεσιτεχνίες περιγράφονται δυο τύποι μηχανών. Ο ένας αφορά περιοδική λειτουργία και προορίζεται για παραγωγή πάγου σε οικίες, ενώ ο δεύτερος λειτουργεί συνεχώς και προορίζεται για βιομηχανικές εφαρμογές. Ο ίδιος

ο F. Carré προέβλεψε αρκετές μελλοντικές εφαρμογές πέραν της παραγωγής πάγου, όπως ο κλιματισμός, ο έλεγχος της ζύμωσης στην οινοποιία και τη ζυθοποιία, η πύκνωση διαλυμάτων οξέων και αλκοολών παγώνοντας μέρος του νερού που περιέχουν, εξαγωγή θειώδους νατρίου από το θαλασσινό νερό, εξαγωγή παραφινών από το αργό πετρέλαιο (K. Stephan 1983).



Σχήμα 2.4: Η ευρεσιτεχνία του F. Carré (1859) & Η συσκευή της αγγλικής εταιρείας Pontifex & Wood (1887) (Πηγή: K. Stephan 1983)

Είναι αξιοσημείωτο πως το 1875 το πλοίο Παραγουάη μετέφερε από το Μπουένος Άιρες στη Χάβρη της Γαλλίας κατεψυγμένο κρέας στους $-30^{\circ}C$ με βάση τις υποδείξεις του F. Carré και το 1876 με την καθοδήγηση του Tellier αυτή τη φορά το πλοίο Le Frigorifique, χρησιμοποιώντας ξανά συσκευές ψύξεως με απορρόφηση μετέφερε κατεψυγμένα φρούτα, λαχανικά και κρέας από τη Ρουέν στο Μπουένος Άιρες (B. Horbaniuc 2004).

Έπειτα, από το 1880 και μετά στις ΗΠΑ επικράτησε ο κύκλος ψύξεως με συμπίεση ατμού και οι συσκευές ψύξεως με απορρόφηση εκτοπίστηκαν σχεδόν εντελώς. Ωστόσο, κατά τη δεκαετία του 1920, μετά τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο οι Ευρωπαίοι συνειδητοποίησαν πως η ενέργεια είναι ακριβή και μεγάλες ποσότητες θα



(α')



(β')

Σχήμα 2.5: Ferdinand Carré (1824-1900) & Edmund Altenkirch (1880-1953) (Πηγή: K. Stephan 1983)

μπορούσαν να εξοικονομηθούν από την αναβάθμιση θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία. Έτσι, η ψύξη με απορρόφηση άρχισε να μελετάται συστηματικά και από όλες τις πλευρές (θεωρία-θερμοδυναμική, εφαρμο-

γές, εργαζόμενα ρευστά). Ο Altenkirch με τη δεινότητά του στη θερμοδυναμική απέδειξε ότι στις συσκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν πολλές βελτιώσεις και προσεγγίζοντας καλύτερα την αντιστρεπτότητα να περιοριστούν οι απώλειες της διαθέσιμης ενέργειας, ενώ πρότεινε μηχανές πολυβάθμιας απορρόφησης καθώς και μια διάταξη με φυσική ανακυκλοφορία που εκμεταλλεύεται τη διαφορά πιέσεως λόγω της υψομετρικής διαφοράς, αν ο εξατμιστήρας και ο απορροφητής τοποθετηθούν πάνω από το συμπυκνωτή και τον αναγεννητή αντιστοίχως (K. Stephan 1983).

Την περίοδο 1920-1940 η βιβλιογραφία αναπτύχθηκε τόσο πολύ στο συγκεκριμένο θέμα, ώστε διατυπώθηκε η θεμελίωση και αναπτύχθηκαν διάφορες κυκλικά λειτουργούσες συσκευές. Στη Γερμανία μεταξύ 1920 και 1925 υπό την καθοδήγηση του Altenkirch παρήχθησαν και ενσωματώθηκαν σε εργοστάσιο μονοβάθμιες και διβάθμιες μηχανές, ώστε υπηρετούσαν ένα καθήκον $4190kW$ λειτουργώντας με χαμηλή θερμοκρασία $-20^{\circ}C$ και υψηλή $30^{\circ}C$. Το 1930 ακολούθησε η Αγγλία και στη συνέχεια το Βέλγιο, η Ολλανδία, η Ρωσία και η Σουηδία. Οι δυναμικότητες υπήρξαν $0.2 - 2.5MJ$ ανά κύκλο (K. Stephan 1983).

Μετά το 1940 εμφανίστηκαν και οι πρώτες βιομηχανικές εφαρμογές του ζεύγους ρευστών νερό-διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου στους κύκλους ψύξεως με απορρόφηση. Οι διατάξεις είναι γνωστές ως συστήματα Carrier & Trane (B. Horbaniuc 2004).

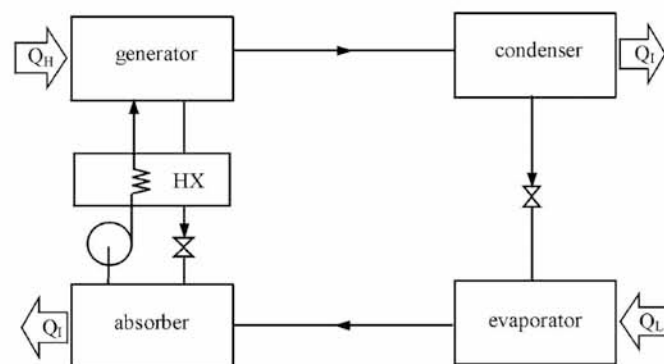
2.6 Διάφοροι κύκλοι ψύξεως με απορρόφηση

Ο σχεδιασμός μιας συσκευής ψύξεως με απορρόφηση μπορεί να ποικίλει, στη βιβλιογραφία συναντώνται αρκετές προτάσεις. Εδώ παρατίθενται οι πλέον χαρακτηριστικές ακολουθώντας τη σειρά και τον τρόπο που παρουσιάζονται στο άρθρο των P. Sriksirin et al.: A review of absorption refrigeration technologies. (2001).

2.6.1 Σύστημα με μια βαθμίδα

2.6.1.1 Ζεύγος ψυκτικού-μη πιητικού απορροφητή

Πιο συχνά απαντάται το απλό σύστημα με μια βαθμίδα. Εμφανίζεται με δυο εκδοχές, αναλόγως αν εκτός από το ψυκτικό είναι πιητικός και ο απορροφητής. Στην περίπτωση του μη πιητικού απορροφητή, όπως στο ζεύγος $H_2O - LiBr$, η διάταξη είναι απλή και φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Η θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία παρέχεται στον αναγεννητή για την εκρόφηση του ψυκτικού από το υγρό διάλυμα. Στο αμέσως επόμενο βήμα το θερμό αέριο ψυκτικό συμπυκνώνεται αποβάλλοντας τη θερμότητα που φέρει από την αναγέννησή του πριν εκτονωθεί ξανά στην πίεση του εξατμιστήρα. Επιπλέον, το πυκνό διάλυμα που προέκυψε από την εκρόφηση του ψυκτικού επιστρέφει στον απορροφητή. Ωστόσο, βρίσκεται σε θερμοκρασία αναγεννητή που



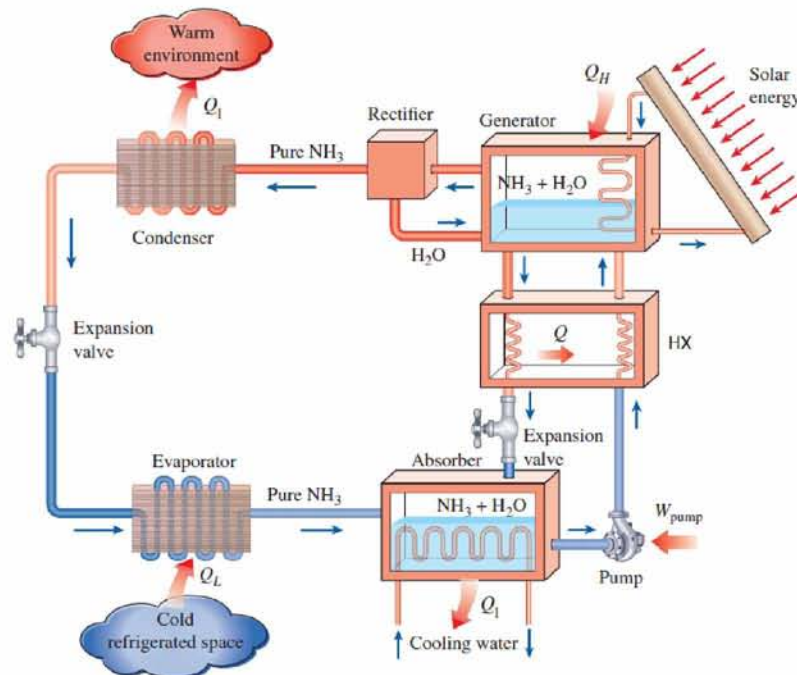
Σχήμα 2.6: Κύκλος ψύξεως με απορρόφηση με χρήση εναλλάκτη θερμότητας (Πηγή: P. Sriksirin et al. 2001)

είναι υψηλότερη και, προκειμένου να διατηρείται η ικανότητα απορρόφησης του διαλύματος, πρέπει να αποβάλλει αυτή τη θερμότητα και να ψυχθεί στη θερμοκρασία του απορροφητή. Με αυτή την απομάκρυνση θερμότητας σε υψηλή θερμοκρασία τόσο στον απορροφητή από το θερμό, πυκνό διάλυμα όσο και στο συμπυκνωτή από το ψυκτικό υπεισέρχεται αναντιστρεπτότητα. Ο περιορισμός της επιτυγχάνεται με τη χρήση

ενός εναλλάκτη θερμότητας (HX), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Εκεί το πυκνό, θερμό διάλυμα κατερχόμε-
νο προς τον απορροφητή, πριν εκτονωθεί στην πίεσή του, έρχεται σε θερμική επαφή με το αραιό, ψυχρότερο
διάλυμα που μόλις έχει διέλθει από την αντλία. Έτσι, το αραιό διάλυμα προθερμαίνεται πριν εισέλθει
στον αναγεννητή από το πυκνό που τον εγκαταλείπει αξιοποιώντας μέρος του πιο ποιοτικού ενεργειακού
περιεχομένου του αποτρέποντας την πλήρη αποβολή του τελευταίου. Συνεπώς, ο συντελεστής λειτουργίας
βελτιώνεται, αφού απαιτείται πρόσδοση λιγότερης θερμότητας στον αναγεννητή και αναδύεται και η δυνα-
τότητα μείωσης του μεγέθους του απορροφητή, διότι πλέον αποβάλλεται λιγότερη θερμότητα. Η χρήση του
εναλλάκτη μπορεί να αυξήσει το συντελεστή λειτουργίας ως και 60%, όπως έχει προκύψει από πειραματι-
κές μελέτες (P. Srikhirin 2001) Για εφαρμογές ψύξεως νερού ο συντελεστής λειτουργίας του κύκλου είναι
συνήθως 0.65-0.7 και η θερμοκρασία πρόσδοσης θερμότητας 90 – 100°C (B. Horbaniuc 2004).

2.6.1.2 Ζεύγος ψυκτικού-πηκτικού απορροφητή

Όταν το διάλυμα του απορροφητή αποτελείται από δυο πηκτικές ενώσεις, όπως $H_2O - NH_3$, κατά την
αναγέννηση του ψυκτικού θα παράγεται εκτός από αέριο ψυκτικό και αέριος απορροφητής (μείγμα αερίων).
Έτσι, προκύπτει η ανάγκη να προσιεθεί και ένας ανορθωτής στη διάταξη, που μετά τον αναγεννητή θα
διαχωρίζει τα αέρια και το μεν ψυκτικό θα κατευθύνεται προς το συμπυκνωτή ο δε απορροφητής πίσω στον
αναγεννητή. Η απουσία του έχει σαν αποτέλεσμα ο απορροφητής που εξατμίστηκε να συμπυκνώνεται με το
ψυκτικό και να συσσωρεύεται στον εξατμιστήρα μειώνοντας την απόδοση.



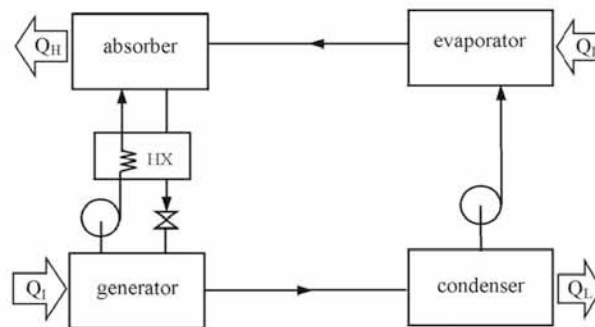
Σχήμα 2.7: Σκαρίφημα ψυκτικής μηχανής με απορρόφηση μιας βαθμίδας με πηκτικό απορροφητή (Πηγή: Cengel Y. & Boles M. 2015)

Η διάταξη μιας βαθμίδας με εργαζόμενο μέσο το ζεύγος $H_2O - NH_3$ αποτέλεσε και την ευρεσιτεχνία
του Ferdinand Carré το 1859. Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται ένα σκαρίφημα, όπου η Q_H προσφέρεται μέσω
ηλιακής ενέργειας. Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, πως στις συσκευές συνεχούς λειτουργίας του F. Carré
ο αναγεννητής λειτουργούσε χρησιμοποιώντας καρβουνο σε θερμοκρασία διαλύματος 130°C (K. Stephan
1983).

2.6.2 Μετατροπές θερμότητας

Εκτός από ψυγείο ή αντλία θερμότητας ένας κύκλος ψύξεως με απορρόφηση μπορεί να λειτουργήσει
και ως μετατροπές θερμότητας ή, όπως αλλιώς απανιτάται στη βιβλιογραφία, αντίστροφη αντλία θερμότη-

τος. Ένα σύστημα σαν αυτό, προκειμένου να λειτουργήσει, αξιοποιεί θερμότητα-απόβλητο βιομηχανικών διεργασιών σε ενδιάμεση θερμοκρασία στον αναγεννητή και αποβάλλει θερμότητα σε χαμηλή θερμοκρασία, συνήθως στο περιβάλλον. Η ωφέλιμη θερμότητα αποδίδεται στην υψηλή θερμοκρασία, αναβαθμίζοντας με αυτόν τον τρόπο τη θερμότητα-απόβλητο. Εφόσον η τελευταία «κινεί» τον κύκλο, το κόστος της αναβάθμισης δεν περιλαμβάνει περαιτέρω πρόσδοση θερμότητας, απαιτείται μόνο το έργο στην αντλία για να κυκλοφορεί το διάλυμα. Ο κύκλος αυτός ομοιάζει με τον απλό μιας βαθμίδας που προηγήθηκε με τη διαφορά πως η βαλβίδα εκτόνωσης από τον συμπυκνωτή αντικαθίσταται από μια αντλία, ώστε ο εξατμιστήρας να λειτουργεί σε πιο υψηλή πίεση. Τόσο ο αναγεννητής όσο και ο εξατμιστήρας λειτουργούν με βάση την ίδια απόβλητη θερμότητα, ενώ συνήθως χαρακτηρίζονται και από κοινή θερμοκρασία. Το ψυκτικό που εξατμίζεται εισέρχεται στον απορροφητή κι εκεί η εκλυόμενη κατά την απορρόφηση θερμότητα αποτελεί το κέρδος του κύκλου, την ωφέλιμη θερμότητα Q_H .



Σχήμα 2.8: Κύκλος με απορρόφηση για την αναβάθμιση θερμικής ενέργειας (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

2.6.3 Κύκλος πολλαπλών βαθμίδων

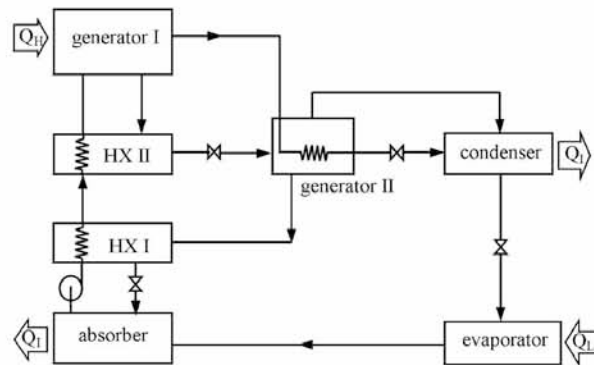
Για την επίτευξη υψηλότερων συντελεστών λειτουργίας μελετήθηκε και εισήχθη ο κύκλος πολλαπλών βαθμίδων. Η εκδοχή αυτή είναι αποτελεσματική, όταν υπάρχει διαθέσιμη θερμότητα σε υψηλές θερμοκρασίες, περίπου $150^{\circ}C$ (B. Horbaniuc 2004). Η διαμόρφωση του κύκλου είναι τέτοια, ώστε η θερμότητα που απορρίπτεται σε υψηλή θερμοκρασία από την πρώτη βαθμίδα να αξιοποιείται στην επόμενη ενισχύοντας την παραγόμενη ψύξη.

2.6.3.1 Ζεύγος ψυκτικού-μη πιητικού απορροφητή

Για μη πιητικό απορροφητή και δυο βαθμίδες (Σχήμα 2.9), απαιτούνται δυο αναγεννητές εκ των οποίων ο ένας λειτουργεί σε υψηλότερη πίεση. Το αέριο ψυκτικό από τον εξατμιστήρα οδηγείται στον απορροφητή και το αραιό διάλυμα μέσω της αντλίας καταλήγει στον πρώτο αναγεννητή. Εκεί, με την πρόσδοση της Q_H εκροφάται ψυκτικό και το πυκνότερο διάλυμα εκτονώνεται μέσω μιας βαλβίδας στραγγαλισμού στον δεύτερο αναγεννητή σε ενδιάμεση πίεση, μεγαλύτερη από του απορροφητή. Σε αυτόν τον αναγεννητή το διάλυμα έρχεται σε θερμική επαφή με το αέριο ψυκτικό που παρήχθη στον προηγούμενο. Το τελευταίο, καθώς διέρχεται, συμπυκνώνεται και με τη θερμότητα που απορρίπτει εκροφάται περαιτέρω ψυκτικό από το διάλυμα. Από εκεί όλοι οι ατμοί ψυκτικού οδηγούνται στο συμπυκνωτή σε ενδιάμεση πίεση και το αραιό διάλυμα εκτονώνεται στον απορροφητή. Οι εναλλάκτες διατηρούνται για τον περιορισμό της αναντιστρεπτότητας. Το σύστημα αυτό χαρακτηρίζεται σύστημα απορρόφησης εν σειρά ροής και δυο βαθμίδων (series-flow-double-effect absorption system).

Για την απόδοση μιας τέτοιας διάταξης, αυτή αντιμετωπίζεται ως συνδυασμός δυο μονοβάθμιων συστημάτων και θεωρείται πως καθένα από αυτά απορρίπτει στο συμπυκνωτή θερμότητα περίπου ίση με εκείνη που απομακρύνεται από το χώρο ψύξης. Έτσι, αν θεωρηθεί ότι ο συντελεστής λειτουργίας της απλής βαθμίδας είναι COP_I , ανά μονάδα προσδιδόμενης θερμότητας παράγεται ψύξη $1 \times COP_I$ και τόση θερμότητα απορρίπτεται κατά τη συμπύκνωση. Εδώ αυτό ισχύει για τον πρώτο αναγεννητή. Από τη θερμότητα, όμως, της συμπύκνωσης θα εκροφηθεί ψυκτικό το οποίο θα παράξει ψύξη στην πορεία ίση με $(1 \times COP_I) \times COP_I$, διότι το $1 \times COP_I$ αποτελεί την προσδιδόμενη θερμότητα της δεύτερης βαθμίδας. Τελικά, για το σύστημα με

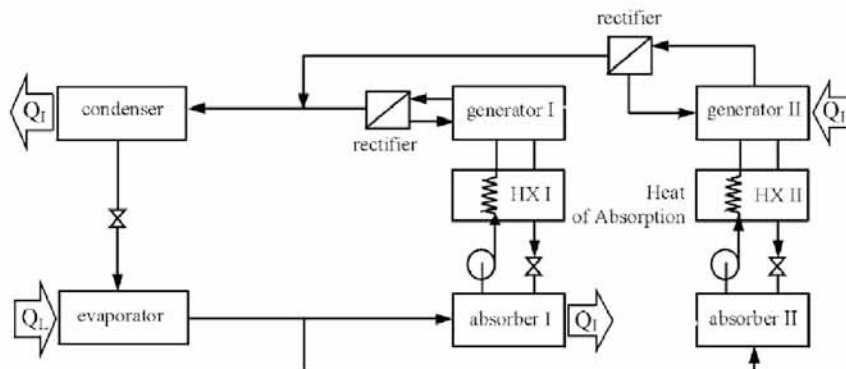
τις δυο βαθμίδες εν σειρά ο συνολικός συντελεστής λειτουργίας ισούται με $COP_{II} = COP_I + COP_I^2$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει πως για $COP_I = 0.6$ το σύστημα δυο βαθμίδων θα έχει $COP_I = 0.96$.



Σχήμα 2.9: Σύστημα απορρόφησης δυο βαθμίδων εν σειρά ροής για μη πιητικό απορροφητή (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

2.6.3.2 Ζεύγος ψυκτικού-πιητικού απορροφητή

Όταν τόσο το ψυκτικό όσο και ο απορροφητής είναι πιητικές ενώσεις η μορφή της διάταξης αλλάζει. Ειδικότερα, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία δυο ανεξάρτητων, μονοβάθμιων συστημάτων (Σχήμα 2.10). Ο συμπυκνωτής και ο εξατμιστήρας είναι κοινί και για τα δύο, ωστόσο καθένα διαθέτει δικό του απορροφητή και αναγεννητή. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το ζεύγος $H_2O - NH_3$ η πίεση στον αναγεννητή της πρώτης βαθμίδας καθίσταται ιδιαίτερα υψηλή, αν χρησιμοποιηθούν τρία επίπεδα πίεσεως. Όμως, εφόσον οι δυο συσκευές είναι κοινές, απαιτούνται μόνο δυο πιέσεις και η υψηλή μπορεί να περιοριστεί στα επιτρεπτά όρια. Η θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία παρέχεται μόνο στο δεύτερο αναγεννητή. Για τη λειτουργία του άλλου χρησιμοποιείται η θερμότητα απορρόφησης που εκλύεται από το δεύτερο απορροφητή. Θερμότητα σε ενδιάμεση θερμοκρασία απορρίπτεται στο συμπυκνωτή και τον πρώτο απορροφητή. Όλοι οι ατμοί ψυκτικού συλλέγονται στο συμπυκνωτή και από τον εξατμιστήρα μοιράζονται στους δυο απορροφητές. Το σύστημα αυτό χαρακτηρίζεται σύστημα απορρόφησης εν παραλλήλω ροής και δυο βαθμίδων (parallel-flow-double-effect absorption system).

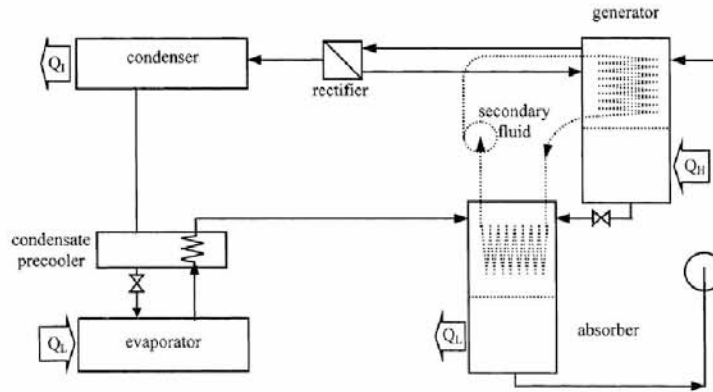


Σχήμα 2.10: Σύστημα απορρόφησης δυο βαθμίδων εν παραλλήλω ροής για πιητικό απορροφητή (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

Έχουν μελετηθεί και συστήματα τριών ή τεσσάρων βαθμίδων. Το συμπέρασμα ήταν πως η βελτίωση του συντελεστή λειτουργίας δε δικαιολογεί την αύξηση της πολυπλοκότητας της διάταξης. Συνεπώς, στο εμπόριο διατίθενται μόνο συστήματα με μια ή δυο βαθμίδες.

2.6.4 Κύκλος απορρόφησης με εναλλάκτη αναγεννητή-απορροφητή

Άλλη μια εκδοχή που προτάθηκε από τους Altenkirch και Tenckhoff χρησιμοποιεί τον GAX (generator-absorber heat exchanger), ώστε να επιτυγχάνεται στο σύστημα μιας βαθμίδας απόδοση αντίστοιχη με το δυο βαθμίδων-εν παραλλήλω ροής αποφεύγοντας την πολυπλοκότητα της διάταξης. Ο αναγεννητής και ο

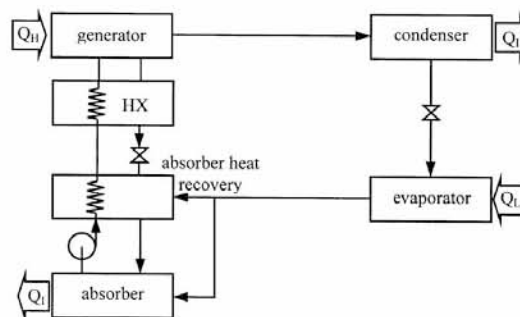


Σχήμα 2.11: Σύστημα απορρόφησης μιας βαθμίδας με χρήση GAX για πιητικό απορροφητή (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

απορροφητής χωρίζονται σε δυο τμήματα, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2.11. Στο ανώτερο τμήμα του απορροφητή εισέρχονται το αραιό διάλυμα και ο ατμός ψυκτικού από τον εξατμιστήρα και από τη διεργασία της απορρόφησης του ατμού εκλύεται θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία που πρέπει να απαχθεί, ώστε να διατηρεί το διάλυμα την ικανότητά του να απορροφά τον ατμό. Αυτό υπηρετεί το τμήμα του εναλλάκτη GAX που βρίσκεται στον απορροφητή. Στο πιο κάτω τμήμα η απορρόφηση συνεχίζεται με την απόρριψη θερμότητας σε χαμηλότερη θερμοκρασία στο περιβάλλον λειτουργίας. Στον αναγεννητή από την άλλη, εισέρχεται το πυκνό διάλυμα από τον απορροφητή στο ανώτερο τμήμα του και ξεκινά η εκρόφηση αξιοποιώντας τη θερμότητα του πρώτου σταδίου της απορρόφησης. Στο κάτω μέρος συνεχίζεται με την πρόσδοση θερμότητας από εξωτερική πηγή. Εγείρεται με τον τρόπο αυτό η ανάγκη της παρουσίας ενός ακόμη δευτερεύοντος ρευστού που θα απάγει τη θερμότητα του άνω μέρους του απορροφητή και θα την προσφέρει στο άνω μέρος του αναγεννητή. Η θερμική σύζευξη των δυο συσκευών του κύκλου οδηγεί σε σημαντική βελτίωση της απόδοσης.

2.6.5 Κύκλος απορρόφησης με ανάκτηση θερμότητας

Η βελτίωση της απόδοσης μπορεί να επιτευχθεί και με περαιτέρω προθέρμανση του πυκνού διαλύματος από τον απορροφητή. Σε αυτό βασίζεται ο κύκλος με ανάκτηση θερμότητας που φαίνεται στο Σχήμα 2.12.



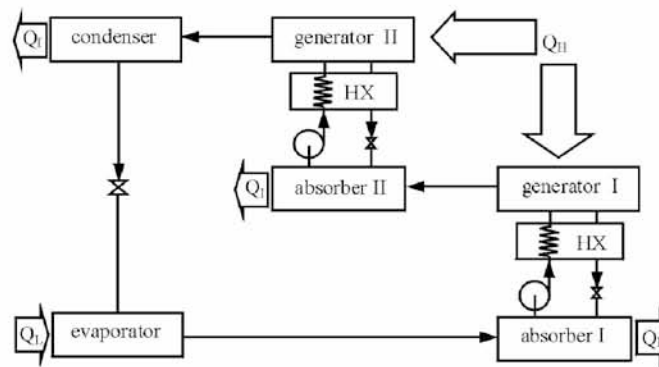
Σχήμα 2.12: Σύστημα απορρόφησης μιας βαθμίδας με ανάκτηση θερμότητας (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

Ο απορροφητής διαιρείται πάλι σε δυο μέρη τα οποία απορρίπτουν θερμότητα σε διαφορετικές θερμοκρασίες (το κατώτερο στο περιβάλλον). Η εκλυόμενη θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία από το ανώτερο τμήμα προθερμαίνει το διάλυμα που οδηγείται μέσω της αντλίας στον αναγεννητή. Οι ατμοί του ψυκτικού

διοχετεύονται και στα δυο τμήματα του απορροφητή. Η προθέρμανση ελαττώνει τις ανάγκες για εξωτερικώς προσδιδόμενη θερμότητα και παρ' ότι εκτιμάται από τις μελέτες αύξηση του COP κατά 10% περίπου, η ιδέα αυτή δεν έχει υλοποιηθεί ακόμη.

2.6.6 Κύκλος απορρόφησης για πηγή θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία

Εάν η προσδιδόμενη θερμότητα βρίσκεται σε σχετικά χαμηλή θερμοκρασία, ο απλός κύκλος δε μπορεί να λειτουργήσει και χρησιμοποιείται η τροποποίηση του σχήματος 2.13. Ωστόσο, οι αποδόσεις είναι αρκετά χαμηλές και ο συντελεστής λειτουργίας βρίσκεται κοντά στο 50%. Η διάταξη διαθέτει δυο απορροφητές που απορρίπτουν θερμότητα στο περιβάλλον και δυο αναγεννητές στους οποίους τροφοδοτείται η ίδια θερμότητα Q_H . Ο δεύτερος αναγεννητής και ο πρώτος απορροφητής λειτουργούν στην ίδια πίεση προς διατήρηση των ρυθμών ανακυκλοφορίας στις αντλίες σε αποδεκτά πλαίσια.

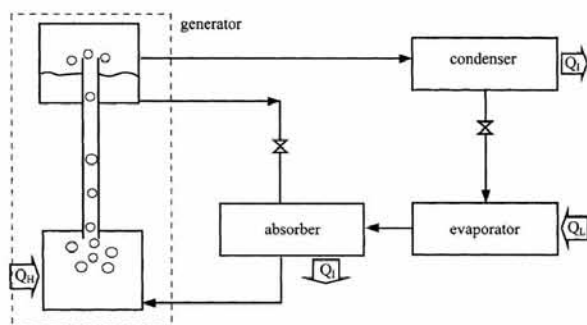


Σχήμα 2.13: Σύστημα απορρόφησης για πηγή θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία (Πηγή: P. Srikihirin et al. 2001)

2.6.7 Κύκλος απορρόφησης φυσικής ανακυκλοφορίας

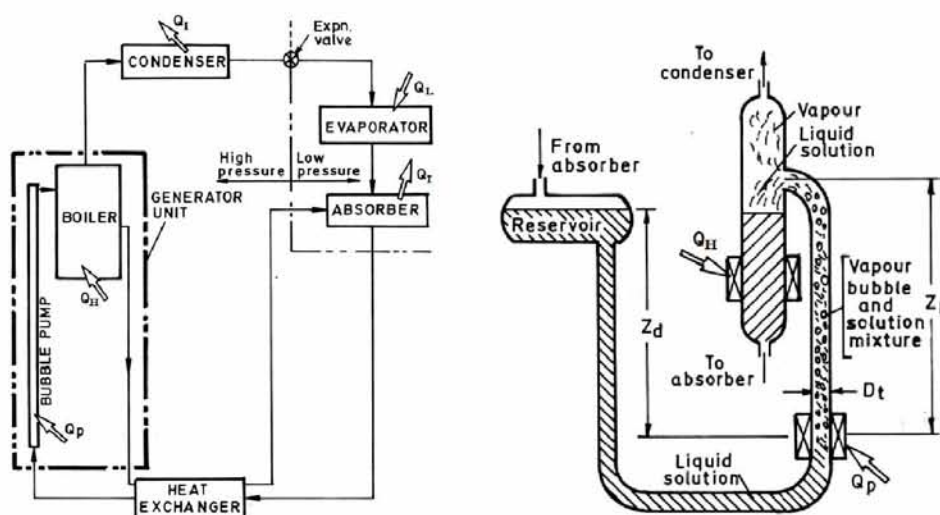
Στις εκδοχές που προηγήθηκαν παρατηρείται πως παντού, αν και τον κύκλο κινεί η θερμότητα Q_H που προσδίδεται εξωτερικά, είναι αναγκαία για τη λειτουργία της διάταξης η παρουσία της αντλίας που κυκλοφορεί το διάλυμα και διατηρεί την επιθυμητή διαφορά πιέσεως μεταξύ συμπυκνωτή κι εξατμιστήρα (M. Pfaff 1998). Άρα, όσο ελάχιστη κι αν είναι, υπάρχει κατανάλωση μηχανικού έργου-ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό καθιστά πολύ ενδιαφέρουσα την ιδέα ενός συστήματος ψύξεως με απορρόφηση φυσικής ανακυκλοφορίας στην οποία η άντληση του διαλύματος επιτυγχάνεται μέσω μιας αντλίας φυσαλίδων. Χρήσει του ζεύγους $NaOH - H_2O$ το 1989 οι Eriksson & Jernqvist υλοποίησαν ένα μετατροπέα θερμότητας φυσικής ανακυκλοφορίας ισχύος $10kW$ με συνολικό ύψος $14m$, αντιστοιχεί σε εσωτερική διαφορά πιέσεως στο σύστημα $1bar$, και συντελεστή λειτουργίας 0.26 (M. Pfaff 1998, P. Srikihirin 2001). Ωστόσο το ύψος της μηχανής πρέπει να διατηρείται σε λογικά όρια, ως $1.5m$ κατά τους Pfaff et al. (1998) κάτι που επιβάλλει χαμηλή πίεση λειτουργίας.

Εφόσον ένα σύστημα που χρησιμοποιεί το ζεύγος $H_2O - LiBr$ λειτουργεί υπό συνθήκες κενού, η διαφορά πίεσης συμπυκνωτή-εξατμιστήρα είναι πολύ μικρή και η αντλία φυσαλίδων μπορεί να την εξασφαλίσει. Μια τέτοια διάταξη εικονίζεται στο Σχήμα 2.14. Ο εξατμιστήρας κι ο απορροφητής βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Ο αναγεννητής έχει δυο επίπεδα που ενώνονται από την αντλία φυσαλίδων. Το κάτω βρίσκεται χαμηλότερα από τον απορροφητή και το πάνω ψηλότερα μαζί με το συμπυκνωτή. Από τον απορροφητή το αραιό διάλυμα κατευθύνεται στο κατώτερο τμήμα του αναγεννητή επιδράσει της βαρύτητας. Εκεί, στη βάση της αντλίας φυσαλίδων, η παροχή θερμότητας προκαλεί βρασμό με αποτέλεσμα να παράγεται πυκνό διάλυμα και ατμός ψυκτικού. Το μείγμα πληρώνει την αντλία δημιουργώντας στο εσωτερικό της μια στήλη ρευστού μικρότερης πυκνότητας από του αραιού διαλύματος, ώστε επιτυγχάνεται η ροή προς το άνω τμήμα. Εκεί ο ατμός και το πυκνό, υγρό διάλυμα διαχωρίζονται. Είναι δυνατόν στο σημείο αυτό να παρέχεται και επιπλέον θερμότητα για περαιτέρω εκρόφηση ψυκτικού. Το πυκνό διάλυμα, τελικώς, επιστρέφει στον απορροφητή υπό τη δράση της βαρύτητας και ο ατμός κατευθύνεται στο συμπυκνωτή (M. Pfaff 1998, P. Srikihirin 2001).



Σχήμα 2.14: Σύστημα απορρόφησης με αντλία φυσαλίδων (Πηγή: P. Srihirin et al. 2001)

Στο σχήμα 2.15 φαίνεται η διάταξη που μελετήθηκε από τους Pfaff et al. (1998) και μια λεπτομέρεια της αντλίας για καθεστώς ροής φυσαλίδων στο εσωτερικό της. Θερμότητα προσφέρεται εξωτερικά τόσο στη βάση της αντλίας για το σχηματισμό ελαφρότερου μείγματος πυκνού διαλύματος-ατμών ψυκτικού όσο και στο άνω τμήμα του αναγεννητή για την ολοκλήρωση της διεργασίας της εκρόφησης. Η θερμότητα στη βάση της αντλίας παρέχεται με ηλεκτρική αντίσταση ή μέσω της χημικής ενέργειας καυσίμου σε υψηλή θερμοκρασία είτε αξιοποιώντας την ηλιακή ενέργεια ή απόβλητη θερμότητα σε χαμηλότερη θερμοκρασία αναλόγως αν η θέρμανση είναι τοπική ή αφορά μεγαλύτερη επιφάνεια (Rattner A. 2018).



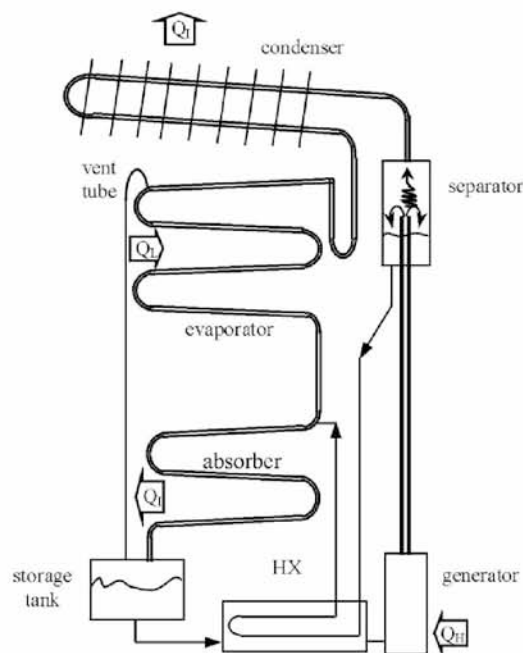
Σχήμα 2.15: Η διάταξη των Pfaff et al. (1998) και λεπτομέρεια της αντλίας για καθεστώς ροής φυσαλίδων (Πηγή: Pfaff M. et al. 1998)

2.6.8 Κύκλος απορρόφησης με διάχυση

Ακόμη μια διάταξη φυσικής ανακυκλοφορίας είναι το σύστημα ψύξεως με απορρόφηση και διάχυση *DAR* (diffusion absorption refrigeration system) που προτάθηκε πρώτη φορά το 1928 από τους Platen & Munters, φοιτητές του Βασιλικού Ινστιτούτου Τεχνολογίας της Σιτοκχόλμης. Χρησιμοποιεί $H_2O - NH_3$ όπου η διαφορά πίεσης μεταξύ συμπυκνωτή και εξατμιστήρα είναι πολύ υψηλή για να καλυφθεί από την αντλία φυσαλίδων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται και μια τρίτη ένωση, ένα βοηθητικό μη συμπυκνώσιμο αέριο (υδρογόνο ή ήλιο) που προστίθεται στον εξατμιστήρα και τον απορροφητή, ώστε να περιορίζει εντός τους τη μερική πίεση της αμμωνίας (P. Srihirin 2001). Έχει αποδειχθεί πως το ήλιο, αν και πιο ιξώδες, είναι καταλληλότερο (A. Taieb 2016).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.16, το αραιό διάλυμα του απορροφητή από το δοχείο που φυλάσσεται οδηγείται στον αναγεννητή διερχόμενο από εναλλάκτη όπου προθερμαίνεται από το θερμό πυκνό διάλυμα. Ο αναγεννητής αποτελείται ξανά από δυο μέρη ενωμένα με αντλία φυσαλίδων. Στο κατώτερο θερμαίνεται το

πυκνό διάλυμα από εξωτερική πηγή και βράζει. Το ζέον μείγμα διαλύματος-ατμών, ως ελαφρύτερο, διέρχεται από το σωλήνα στο ανώτερο τμήμα. Εκεί η αέρια φάση διαχωρίζεται από την υγρή που περνώντας από τον εναλλάκτη καταλήγει στην αρχή του απορροφητή. Το δε αέριο (μείγμα ατμών νερού και αμμωνίας) περνά από τον ανορθωτή και το συμπυκνωτή που είναι αερόψυκτοι. Ο επάνω κλάδος που είναι επικλινής προς το διαχωριστή λειτουργεί ως ανορθωτής. Οι ατμοί νερού συμπυκνώνονται και κυλούν πίσω στο διαχωριστή. Ο κάτω κλάδος είναι ο συμπυκνωτής όπου η αέρια αμμωνία υγροποιείται μαζί με όσο νερό δεν απομακρύνθηκε. Μετά το συμπυκνωτή ό,τι δεν υγροποιήθηκε μεταβαίνει στη δεξαμενή μέσω του πλαϊνού σωληνίσκου και απορροφάται στο υγρό. Το υγροποιημένο ψυκτικό συνεχίζει στον εξατμιστήρα. Η εκεί παρουσία του αδρανούς αερίου μειώνει πολύ τη μερική πίεση της αμμωνίας, ώστε εξατμίζεται σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία αφαιρώντας θερμότητα από τον ψυχόμενο χώρο. Οι ατμοί ψυκτικού με το αδρανές αέριο οδηγούνται στον απορροφητή και το ψυκτικό που τυχόν δεν εξατμίστηκε διοχετεύεται πάλι στη δεξαμενή (Α. Taieb 2016).



Σχήμα 2.16: Σύστημα απορρόφησης με διάχυση. Τα εργαζόμενα ρευστά είναι $H_2O - NH_3$ -βοηθητικό αέριο (Πηγή: P. Srikhirin et al. 2001)

Η διάταξη χρησιμοποιείται για περισσότερα από 80 έτη σε οικιακά ψυγεία και ψυγεία για κατασκηνωτές και καραβάνια. Είναι πλήρως θερμοκαθοδηγούμενη και δεν απαιτεί καθόλου μηχανικό έργο ή ηλεκτρισμό (P. Srikhirin 2001, Α. Taieb 2016). Η θερμική ενέργεια που χρειάζεται, μπορεί να προέρχεται από καύση, από τον ήλιο ή να είναι απόβλητη θερμότητα, παρέχεται σε θερμοκρασίες μεταξύ $90^{\circ}C$ και $200^{\circ}C$ (Α. Taieb 2016). Έτσι, μπορεί να λειτουργεί και σε περιοχές που δεν έχουν πρόσβαση σε ηλεκτρισμό. Ακόμη, η απουσία κινητών μερών καθιστά ένα τέτοιο σύστημα πιο αξιόπιστο, απαλλαγμένο από ανάγκες συντήρησης και πιο αθόρυβο στη λειτουργία του (P. Srikhirin 2001, Α. Taieb 2016). Ωστόσο, η δυναμικότητά του είναι συνήθως ως $50W$ πολύ μικρή, ο συντελεστής λειτουργίας χαμηλός 0.1 ως 0.2 και παρά το γεγονός ότι είναι κατάλληλο για ψυγείο, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές κλιματισμού (P. Srikhirin 2001). Η βελτίωση αυτής της πολλά υποσχόμενης τεχνολογίας απασχολεί πολυάριθμους ερευνητές ανά την υφήλιο ακόμη και σήμερα.

Παρά τους διάφορους κύκλους και τις ποικίλες τροποποιήσεις του συστήματος ψύξεως με απορρόφηση μιας βαθμίδας που έχουν προταθεί (λίγοι μόνο από αυτούς παρουσιάζονται εδώ) το μοναδικό σύστημα υψηλής απόδοσης που συναντάται στη βιομηχανία και το εμπόριο είναι εκείνο με δυο βαθμίδες που λειτουργεί με $H_2O - LiBr$.

Κεφάλαιο 3

Απορροφητής

3.1 Η σημασία της συσκευής

Παρά τα γοητευτικά του προτερήματα έναντι της συμπίεσης ατμού, ο κύκλος ψύξεως με απορρόφηση χαρακτηρίζεται ακόμη από χαμηλούς συντελεστές λειτουργίας κι αυτό δυσχεραίνει την εκτεταμένη χρήση του και την ενδεχόμενη επικράτησή του τουλάχιστον σε κάποιες εφαρμογές. Για τη βελτίωσή του προσφέρονται τρία ευρέα πεδία έρευνας, με πολυάριθμα αντικείμενα θεωρητικών, υπολογιστικών και πειραματικών μελετών. Αυτά είναι (P. Srihirin 2001):

- η ανάπτυξη νέων ζευγών εργαζομένων μέσων,
- η βελτίωση της απόδοσης του απορροφητή και
- η επινόηση νέων, πιο αποδοτικών κύκλων.

Η παρούσα εργασία εκπονείται στο δεύτερο πεδίο και πιο συγκεκριμένα ασχολείται με τον απορροφητή του συστήματος που ως εργαζόμενο μέσο χρησιμοποιεί ένα ζεύγος ψυκτικού-μη πιητικού απορροφητή, όπως νερό-βρωμιούχο λίθιο.

Η παραγωγή ψυκτικής ισχύος Q_L προϋποθέτει εξάτμιση συγκεκριμένης ποσότητας ψυκτικού, έστω \dot{a} ($\dot{a} [=] kg/s$), στη μονάδα του χρόνου. Η ποσότητα \dot{a} σχετίζεται με την ενθαλπία αλλαγής φάσης του ψυκτικού στις συνθήκες του εξατμιστήρα, δηλαδή με το πόση θερμότητα δύναται να απομακρύνει από τον ψυχόμενο χώρο ανά μονάδα μάζας του. Προκειμένου η ψύξη να παραχθεί κυκλικά πρέπει σε μόνιμες συνθήκες, εφόσον ποσότητα \dot{a} εξατμίζεται στη μονάδα του χρόνου, ίδια ποσότητα \dot{a} να απορροφάται στον απορροφητή και να αποστέλλεται μέσω της αντλίας στον αναγεννητή, \dot{a} ποσότητα να αναγεννάται και \dot{a} να συμπυκνώνεται στο συμπυκνωτή και να επιστρέφει και πάλι στον εξατμιστήρα, πάντα στην ίδια μονάδα χρόνου.

Το να εκροφηθεί το απορροφημένο ψυκτικό και να συμπυκνωθεί πλήρως είναι διεργασίες που επιτυγχάνονται ευκολότερα. Επομένως, το πόσο ικανοποιητικά θα υπηρετηθεί το φορτίο Q_L εξαρτάται από το πόσο αποτελεσματικά η απαιτούμενη ποσότητα \dot{a} θα μπορέσει να απορροφηθεί και να συνεχίσει τον κύκλο της. Αν το διάλυμα που η αντλία παρέχει στον αναγεννητή δεν είναι επαρκώς αραιό (δε φέρει επαρκή ποσότητα ψυκτικού ανά μονάδα χρόνου), το σύστημα δε διακινεί ποσότητα \dot{a} σε μόνιμες συνθήκες και η ψυκτική ισχύς που παράγει μειώνεται. Προκειμένου η ωφέλιμη θερμότητα να αυξηθεί στην αναγκαία τιμή, εντείνεται η λειτουργία της αντλίας, ώστε να κυκλοφορεί πιο γρήγορα το διάλυμα και να μεταφέρει τη σωστή μάζα ψυκτικού στον αναγεννητή. Σε αυτό το σημείο ίσως βοηθά η παρομοίωση της αντλίας με μια μηχανή προπόνησης αντισφαιριστών που εκτοξεύει μπαλάκια ένα-ένα. Αν επιλεγεί να στέλνει τρία μπαλάκια σε έξι δευτερόλεπτα, θα κάνει μία εκτόξευση κάθε δύο. Αντιθέτως, αν η απαίτηση είναι τρία μπαλάκια σε δύο δευτερόλεπτα, θα πρέπει να δουλέψει πιο έντονα, ώστε στο χρόνο αυτό να κάνει όλες τις αναγκαίες εκτοξεύσεις.

Όσο υψηλότερη είναι η απόδοση του απορροφητή, δηλαδή όσο πιο πολύ ψυκτικό απορροφάται στο πυκνό διάλυμα, τόσο πιο «πλούσια» είναι κάθε στροφή της αντλίας, στέλνει στον αναγεννητή περισσότερο ψυκτικό. Έτσι, υπηρετείται το Q_L με λιγότερες στροφές, άρα και μικρότερη κατανάλωση ισχύος. Συνεπώς, ο απορροφητής αποτελεί την πιο κρίσιμη συσκευή ενός συστήματος ψύξεως με απορρόφηση.

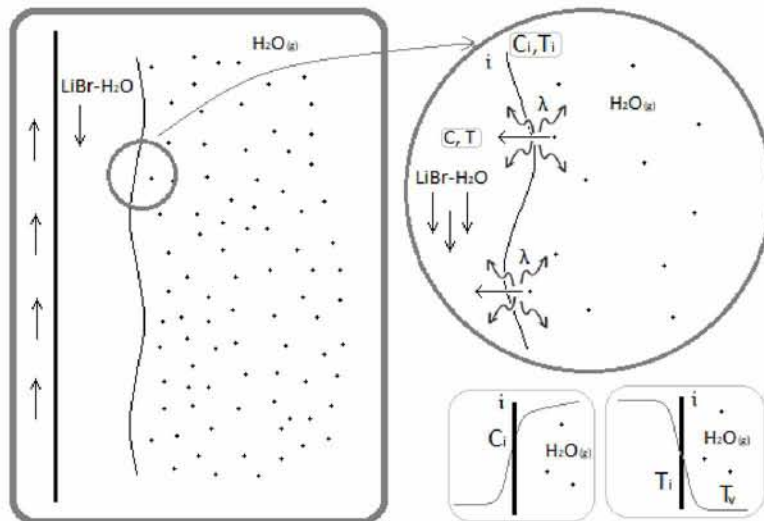
Εκτός από την καθοριστική επίδρασή του στην απόδοση του συστήματος, ο απορροφητής είναι η πιο κρίσιμη συσκευή και από πλευράς μεγέθους και κόστους απόκτησης μιας τέτοιας ψυκτικής μηχανής (J. Killion 2001).

3.2 Η διεργασία

Όπως είναι φανερό και από το όνομά του, η λειτουργία του απορροφητή συνίσταται στην εντός του απορρόφηση του ψυκτικού, που εξατμίστηκε στον εξατμιστήρα, από το υγρό διάλυμα που θα το μεταφέρει στην πίεση του συμπυκνωτή. Δηλαδή στο εσωτερικό του έρχονται σε επαφή η υγρή και η αέρια φάση και πραγματοποιείται μεταφορά μάζας προς την πρώτη (μόνο το ψυκτικό είναι πιητικό, επομένως δεν παραιτηρείται και μεταφορά μάζας άλατος από την υγρή στην αέρια φάση). Για να γίνει πιο αποτελεσματικά η μεταφορά μάζας απαιτούνται μεγάλες επιφάνειες επαφής, επομένως επιστρατεύονται ροές λεπιών, υγρών υμένων σε κεκλιμένα και κατακόρυφα επίπεδα, σε συστοιχίες διατεταγμένων, οριζοντίων κυλίνδρων, σε περιστρεφόμενους δίσκους ή και άλλες σύνθετες διατάξεις (P. Srikihirin 2001). Αντί για υμένες κάποιες λιγότερο κοινές προτάσεις χρησιμοποιούν φυσαλίδες (bubbles) ή εκνεφώματα (spray) (G. Grossman 1983).

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1, στον απορροφητή εισέρχεται ο ατμός ψυκτικού σε πίεση εξατμιστήρα (οι δυο συσκευές έχουν κοινή πίεση λειτουργίας p_v). Η αέρια φάση είναι καθαρό ψυκτικό, ενώ η υγρή ένα διάλυμά του, πυκνό σε μη πιητικό άλας. Αυτή η διαφορά συγκεντρώσεων ψυκτικού συνδέεται με διαφορά χημικών δυναμικών του στις δυο φάσεις, κάτι που αποτελεί την κινούσα δύναμη για την απορρόφηση του ατμού του στο διάλυμα.

Τα μόρια του αερίου προσεγγίζουν τη διεπιφάνεια υγρού-ατμού και κάποια από αυτά μεταβαίνουν στο υγρό (σκαρίφημα στον κύκλο). Η αλλαγή φάσης συνοδεύεται από έκλυση θερμότητας που ανά μονάδα μάζας ισούται με τη διαφορά ειδικής ενθαλπίας στην αέρια και την υγρή φάση ($H_a = h_g - h_l [=] J/kg$). Το μεγαλύτερο μέρος αυτής αποτελεί η ενθαλπία αλλαγής φάσης του ψυκτικού λ . Στη διεπιφάνεια i οι δυο φάσεις βρίσκονται σε ισορροπία. Η θερμοκρασία της T_i και η συγκέντρωσή της σε ψυκτικό C_i καθορίζονται από τις εμπλεκόμενες ουσίες και την πίεση λειτουργίας της συσκευής. Η απορροφηθείσα μάζα, στην πορεία, από τη διεπιφάνεια διαχέεται εντός του υγρού και ομοίως το μεγαλύτερο μέρος της εκλυόμενης θερμότητας. Κατά συνέπεια, το διάλυμα γίνεται διαρκώς αραιότερο σε άλας και θερμότερο. Η αύξηση της θερμοκρασίας του έχει σαν αποτέλεσμα τον περιορισμό της ικανότητάς του να απορροφά ατμό και γι' αυτό το λόγο ένα άλλο ρευστό το ψύχει-απάγει την παραγόμενη θερμότητα (στο σχήμα φαίνεται αριστερά να διέρχεται και αντίρροδη).



Σχήμα 3.1: Σκαρίφημα του εσωτερικού του απορροφητή και λεπτομέρειες της διεπιφάνειας

Λόγω της αλλαγής φάσης η μεταφορά μάζας συνεπάγεται μεταφορά θερμότητας και η μεταφορά θερμότητας επιδρά ξανά στη μεταφορά μάζας. Δηλαδή, τα δυο φαινόμενα είναι συζευγμένα. Κατ' αρχάς η ισορροπία των δυο φάσεων στη διεπιφάνεια σημαίνει πως ισχύει μια σχέση αντίστοιχη του νόμου του Raoult ($yP = x p_{sat}(T_i)$), δηλαδή η τάση ατμών του ψυκτικού στη διεπιφάνεια του υμένα ισούται με τη μερική του πίεση στην αέρια φάση. Στην παρούσα περίπτωση που η αέρια φάση είναι καθαρό ψυκτικό. Με αυτόν τον τρόπο τα μεγέθη T_i και C_i σχετίζονται. Τη μεταφορά μάζας προκαλούν οι διαφορές των συγκεντρώσεων του

ατμού και της κυρίως μάζας του υμένα από τη διεπιφανειακή συγκέντρωση. Επιπλέον, όση μάζα ατμού απορροφηθεί -αλλάζει φάση μεταβαίνοντας στην υγρή- τόση θα αποβάλλει θερμότητα, η έκλυση της οποίας συνεπάγεται αύξηση της T_i και κατά συνέπεια μεταβολή της $p_{sat}(T_i)$ και διαφοροποίηση της συνθήκης ισορροπίας. Προχωρώντας, λοιπόν, η διεργασία μεταβάλλονται τοπικά τόσο η θερμοκρασία και η συγκέντρωση όσο και οι κλίσεις τους και σε συνδυασμό με την αλλαγή της συνθήκης ισορροπίας στη διεπιφάνεια, τελικά, οι κινούμενες δυνάμεις για τα φαινόμενα δεν παραμένουν σταθερές (J. Killion 2001).

Στην ιδανική περίπτωση, με την απορρόφηση το διάλυμα φθάνει σε ισορροπία με τον ατμό. Στις συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας που επικρατούν στη συσκευή η απορρόφηση δε μπορεί να συνεχιστεί και η υγρή φάση αποχωρεί προς τον αναγεννητή φέροντας όσο περισσότερο ψυκτικό θα μπορούσε. Ωστόσο, δεν είναι αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα. Στο εσωτερικό του απορροφητή δεν επικρατούν συνθήκες ισορροπίας και το πυκνό σε άλας, υγρό διάλυμα απορροφά λιγότερο ψυκτικό από όσο θα μπορούσε φθάνοντας σε ισορροπία. Σαν αποτέλεσμα, στον αναγεννητή φθάνει διάλυμα πιο φτωχό σε ψυκτικό από ό,τι θα μπορούσε ιδεατώς, επομένως ο ρυθμός με τον οποίο η αντλία κυκλοφορεί το υγρό διάλυμα ανά μονάδα ψυκτικού που αναγεννάται υπερβαίνει τη θεωρητική τιμή (υπολογισμένη για επίτευξη ισορροπίας μεταξύ των φάσεων). Πειραματικές μελέτες δείχνουν πως ο πραγματικός ρυθμός ανακυκλοφορίας είναι 2 ως 5 φορές μεγαλύτερος του ιδανικού και άρα και ο συντελεστής λειτουργίας με τη σειρά του αρκετά μικρότερος (P. Srikuhirin 2001).

3.3 Η μοντελοποίηση της διεργασίας

Η μοντελοποίηση της λειτουργίας του απορροφητή, λόγω της κρισιμότητάς του στη διάταξη απασχολεί τους ερευνητές από την αρχή της ιδέας της ψύξεως με απορρόφηση. Τροφοδοτεί μεγάλο αριθμό εργασιών για περισσότερα από 40 έτη, λόγω της αρκετής δυσκολίας της. Στην πλειοψηφία τους οι απορροφητές χρησιμοποιούν πίπτοντες υγρούς υμένας, διότι προσφέρουν τη δυνατότητα επίτευξης υψηλών συντελεστών μεταφοράς μάζας και θερμότητας με μικρή πτώση πίεσης (J. Killion 2001).

3.3.1 Τα φαινόμενα μεταφοράς

Για την κατανόηση της λειτουργίας της συσκευής οφείλουν να περιγραφούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα φυσικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα εντός της. Λόγω της κίνησης του ρευστού μέσω της ροής του υμένα υπάρχει μεταφορά ορμής. Μάλιστα, η ροή αυτή διαθέτει και μια ελεύθερη επιφάνεια της οποίας η περιγραφή επηρεάζει τη διαμόρφωση των συνοριακών συνθηκών. Μέσω της ελεύθερης αυτής επιφάνειας που αποτελεί και τη διεπιφάνεια υγρού-ατμού πραγματοποιείται η μεταφορά μάζας του ψυκτικού μέσω αλλαγής φάσης. Έτσι, ο υμένας μεταφέρει τόσο ορμή όσο και θερμότητα και μάζα με το χαρακτηριστικό ότι οι δυο τελευταίες είναι συζευγμένες. Η υδροδυναμική συμπεριφορά έχει αποδειχθεί υψηλής σημασίας στην απόδοση του απορροφητή, καθώς φαινόμενα όπως τύρβη, σταγονίδια, ανάπτυξη επιφανειακών κυματισμών καθορίζουν την ανακατανομή των μορίων και της μεταφερόμενης θερμότητας εντός του υμένα, άρα την αποτελεσματική μεταφορά τόσο της μάζας όσο και της θερμότητας σε όλη του την έκταση (J. Killion 2001).

Είναι πολύ κοινές, στη χημική, κατά βάση, βιομηχανία, οι διεργασίες που περιλαμβάνουν ταυτόχρονη μεταφορά μάζας και θερμότητας. Ένας εύκολος χειρισμός της σύνθετης φύσης του προβλήματος είναι τα δυο φαινόμενα να μελετηθούν χωριστά. Και είναι πολύ συχνό η θερμική αλληλεπίδραση να είναι τόσο περιορισμένη, ώστε η διεργασία να αντιμετωπίζεται ως ισόθερμη (G. Grossman 1983). Ωστόσο, σε εφαρμογές όπως η ψύξη με απορρόφηση, που η μεταφορά μάζας χρησιμοποιείται προκειμένου να επιτευχθεί μεταφορά θερμότητας, η τελευταία είναι κεντρικής σημασίας (G. Grossman 1983), η συζευγμένη φύση των δυο φαινομένων δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί και η μελέτη ακολουθεί το δύσκολο μονοπάτι.

Το πρόβλημα μεταφοράς ορμής περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes και τα άλλα δυο φαινόμενα από τα αντίστοιχα διαφορικά ισοζύγια μεταφοράς. Οι συνοριακές συνθήκες οφείλουν να περιγράψουν την επαφή του υμένα με το στερεό, την κίνηση της διεπιφάνειας υγρού-ατμού, την εκεί ισορροπία και την επίδραση της μεταφοράς μάζας στη μεταφορά θερμότητας λόγω της έκλυσης της H_a .

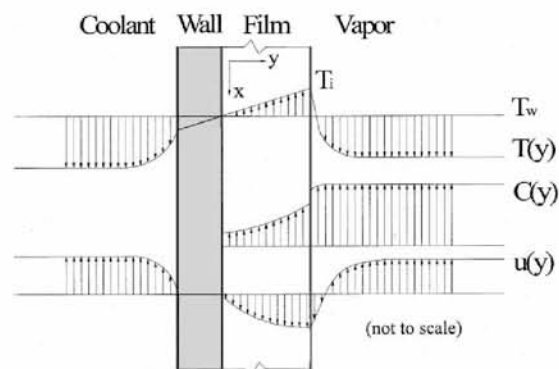
3.3.2 Προσπάθειες μοντελοποίησης

Στο ρου των ετών έχουν γίνει πολλές προσπάθειες που αφορούν ένα πλήθος καθεστώτων ροής του υμένα (στρωτός, τυρβώδης, με επιφανειακούς κυματισμούς) σε διάφορες γεωμετρίες με συνηθέστερους τους υμένες επί επιπέδου και τους υμένες επί οριζοντίων κυλίνδρων. Τα διάφορα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί ποικίλουν ως προς τις παραδοχές που κάνουν και τις θεωρήσεις με βάση τις οποίες επιλέγουν τις συνοριακές συνθήκες. Όπως είναι λογικό, με την πάροδο του χρόνου επιχειρείται να επιλυθεί το πρόβλημα σε όλο και πιο πλήρεις εκδοχές, αίρνιας, κατ' αρχάς, τις πιο αυθαίρετες κι έπειτα κι άλλες υποθέσεις. Οι λύσεις που προσφέρονται είναι τόσο αναλυτικές χρήσι της ανάλυσης Fourier (απαντώνται συνήθως στις παλαιότερες μελέτες) όσο και υπολογιστικές, κυρίως με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, καθώς η συνεχής πρόοδος των ηλεκτρονικών υπολογιστών προσέφερε περισσότερες δυνατότητες.

3.3.2.1 Ένα πρώτο μοντέλο

Μια από τις παλαιότερες προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος, που παρατίθεται από τους J. Killion & S. Garimella στην προσπάθειά τους να καταγράψουν τις μελέτες της αγγλόφωνης βιβλιογραφίας στο αντικείμενο αυτό το 2001 (σε αυτή τη μελέτη είναι βασισμένο το παρόν μέρος 3.3.2 του κεφαλαίου, εκτός από τα σημεία που αναγράφεται κάτι διαφορετικό), είναι εκείνη των Nakoryakov & Grigor'eva το 1977. Υποθέτουν πως ο υμένας είναι στρωτός και δημιουργείται επί επίπεδης αδιαπέρατης πλάκας με σταθερή θερμοκρασία, η διαβροχή της οποίας είναι πλήρης. Η απορρόφηση θεωρείται σε μόνιμες συνθήκες χωρίς να εμφανίζονται στη διεπιφάνεια διατμητικές τάσεις ή τάσεις λόγω κλίσεων της επιφανειακής τάσεως. Θεωρούν, ακόμη, πως η ισορροπία στη διεπιφάνεια αποκαθίσταται ακαριαίως, οι ιδιότητες των ρευστών είναι σταθερές, η διάχυση μάζας και η θερμική αγωγή είναι αμελητέες στη διεύθυνση ροής, οι μεταβολές του πάχους του υμένα λόγω της απορρόφησης είναι αμελητέες, η διαλυτότητα του νερού στον υμένα είναι άπειρη, το μόνιμο προφίλ ταχύτητας του υμένα είναι γραμμικό, δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας προς την αέρια φάση και οι συνθήκες εισόδου (θερμοκρασία και συγκέντρωση) είναι ομοιόμορφες.

Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με χωρισμό μεταβλητών και ανάλυση των αγνώστων συναρτήσεων σε σειρές Fourier. Εκτός από την αναλυτική παρουσιάζεται και μια προσεγγιστική λύση υποθέτοντας επιπροσθέτως γραμμικό θερμοκρασιακό προφίλ και κατανομή της συγκέντρωσης βασισμένη σε προσεγγιστική λύση οριακού στρώματος. Τα αποτελέσματα είναι μικρότερα από της αναλυτικής λύσης, αποκλίνουν πολύ στην είσοδο και ισχύουν μόνο στο εύρος του υμένα που, ενώ το θερμικό οριακό στρώμα έχει αναπτυχθεί, εκείνο της συγκέντρωσης εξελίσσεται ακόμη. Σε επόμενες μελέτες τους οι ίδιοι ερευνητές επιχειρήσαν να περιγράψουν την είσοδο και να επιτρέψουν στο πάχος του υμένα να μεταβάλλεται.



Σχήμα 3.2: Ενδεικτικά προφίλ θερμοκρασίας, συγκέντρωσης και ταχύτητας για στρωτό υμένα σε αντιρροή με τον ατμό και το ψυκτικό (Πηγή: Killion J. et al. 2001)

3.3.2.2 Η μελέτη του G. Grossman

Την ίδια περίοδο (1983) ο G. Grossman ασχολήθηκε επίσης με πίπτοια υμένα επί κεκλιμένου επιπέδου σε επαφή με ακίνητο ατμό σταθερής πίεσης. Θεωρεί στρωτή, μονοδιάστατη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή μη

δεχόμενη διατμητική τάση από τον ατμό στη διεπιφάνεια και υμένας χαρακτηριζόμενο από σταθερό πάχος. Οι υποθέσεις του δεν απέχουν πολύ από των προηγούμενων, γενικώς. Το υγρό διάλυμα αντιμετωπίζεται ως νευτώνικό ρευστό με ιδιότητες σταθερές, ανεξάρτητες της συγκέντρωσης και της θερμοκρασίας, η μάζα ατμού που απορροφάται θεωρείται πολύ μικρή σε σχέση με τη συνολική παροχή, ώστε το πάχος του υμένα και η μέση ταχύτητά του υποτίθενται σταθερά, αγνοούνται η μεταφορά θερμότητας στην αέρια φάση, η αγωγή και η διάχυση στη διεύθυνση ροής και θεωρείται ότι στη διεπιφάνεια επικρατεί ισορροπία μεταξύ των δυο φάσεων (G. Grossman 1983). Η κυρίως διαφορά είναι πως υποθέτει παραβολικό προφίλ ταχύτητας (λύση Nusselt) αντί του γραμμικού (G. Grossman 1983, J. Killion 2001).

Μελετά δυο περιπτώσεις τοιχώματος, ισοθερμοκρασιακό και αδιαβατικό και στην πρώτη θεωρεί πως το τοίχωμα έχει την ίδια θερμοκρασία με εκείνη του διαλύματος στην είσοδο, ώστε δεν αναπτύσσεται θερμικό οριακό στρώμα από την πλευρά του τοιχώματος. Χρησιμοποιεί κι αυτός γραμμική σχέση μεταξύ θερμοκρασίας και συγκέντρωσης ισορροπίας στη διεπιφάνεια και λαμβάνει την ενθαλπία απορρόφησης σταθερή, διότι το κυρίαρχο μέρος της αποτελεί η ενθαλπία αλλαγής φάσεως που θεωρείται ανεξάρτητη από θερμοκρασία και συγκέντρωση. Η επίλυση γίνεται και αναλυτικά αλλά και αριθμητικά και οι δύο κατά το συγγραφέα βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία. Σύγκριση των αποτελεσμάτων του με των παραπάνω ερευνητών τον οδηγεί στο συμπέρασμα πως το γραμμικό προφίλ οδηγεί σε 40% υποτίμηση του μήκους που απαιτείται για δεδομένο βαθμό ανάπτυξης του οριακού στρώματος. Η μελέτη του G. Grossman τροφοδότησε πολυάριθμες μετέπειτα εργασίες οι οποίες βασίστηκαν σε αυτή και προσπάθησαν να την επεκτείνουν, κυρίως αίροντας κάποια υπόθεση.

3.3.2.3 Κατοπινές μοντελοποιήσεις

Σύγχρονοι μελετητές του G. Grossman οι Andberg & Vliet (1983-1987) με αριθμητικό τρόπο προσέγγισαν το ίδιο πρόβλημα με το ισοθερμοκρασιακό τοίχωμα, το παραβολικό προφίλ και παρόμοιες υποθέσεις μη αγνοώνιας, ωστόσο την αύξηση του πάχους, της παροχής και της μέσης ταχύτητας του υμένα κατά την απορρόφηση και μη λαμβάνονιας γραμμική τη σχέση ισορροπίας. Συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι τα τελευταία ήσαν, γενικώς, σε συμφωνία με του μοντέλου, εκτός από την περιοχή της εισόδου. Επιπλέον, ανέπτυξαν μια σχέση για την εκτίμηση του απαιτούμενου μήκους του απορροφητή με βάση την επιθυμητή μεταβολή συγκέντρωσης και τις συνθήκες λειτουργίας. Στην πορεία απέδειξαν ότι στο απαιτούμενο μήκος τη σημαντικότερη επίδραση έχει η μαζική παροχή του διαλύματος. Εκτός από αυτά οι ίδιοι, πιθανώς πρώτοι απ' όλους, ανέπτυξαν και μια λύση για υμένα επί συστοιχίας οριζοντίων σωλήνων.

Άλλη μια επέκταση στο μοντέλο του G. Grossman επιχείρησαν οι van der Wekken & Wassenaar το 1988 υποθέτωντας ψύξη με ρευστό σταθερής θερμοκρασίας (αντί για ισοθερμοκρασιακό ή αδιαβατικό τοίχωμα), μελετώντας την περίπτωση που το ψυκτικό και ο υμένας βρίσκονται σε σταυρωτή ροή. Κι αυτοί θεώρησαν πεπερασμένη τη διαλυτότητα του ατμού στο διάλυμα διατηρώντας, όμως, τις λοιπές υποθέσεις ίδιες με τον Grossman. Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας του ψυκτικού αποτέλεσε βασική παράμετρο στη μελέτη. Παρατήρησαν πως, ενώ η αύξηση ενός μεγέθους μπορεί να επιφέρει σημαντική μεταβολή στους αδιάστατους συντελεστές μεταφοράς θερμότητας και μάζας, σε δεδομένο πρόβλημα αυτοί δε θα μεταβάλλονται παρά ελαχίστως κατά μήκος του υμένα.

Πολύ σύντομα, το 1989 μια άλλη ομάδα, οι Kawae, Shigechi, Kanemaru & Yamada με πεπερασμένες διαφορές επιχείρησαν να λύσουν το ίδιο πρόβλημα με τους Andberg & Vliet (πλήρως ανεπτυγμένη ροή με παραβολικό προφίλ ταχύτητας σε υμένα μεταβαλλόμενου πάχους χωρίς διάτμηση στη διεπιφάνεια από τον ατμό και επί ισοθερμοκρασιακού τοιχώματος) με τη διαφορά πως δε θεώρησαν σταθερές τις θερμοφυσικές ιδιότητες των ρευστών. Κατέληξαν, έτσι, στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή των ιδιοτήτων δεν έχει ιδιαίτερη επίδραση στο αποτέλεσμα, είναι μικρή γενικώς και πολύ μικρή στην είσοδο. Χαρακτηριστικά παρατίθεται πως η μάζα που απορροφάται σε ένα μήκος απορροφητή 10m με τις σταθερές ιδιότητες προβλέπεται μόλις 5% μικρότερη από εκείνη που υπολογίζεται επιτρέποντας στις ιδιότητες να μεταβάλλονται. Ακόμη, μελετώντας την επίδραση των παραμέτρων, για σταθερές ιδιότητες, έδειξαν πως η μαζική παροχή (πάχος εισόδου) και η θερμοκρασία, ξανά στην είσοδο, επιδρούν με σύνθετο τρόπο στην ολική απορροφώμενη μάζα. Μάλιστα, από το μοντέλο τους οδηγήθηκαν στο αποτέλεσμα πως για δεδομένο μήκος και θερμοκρασία τοιχώματος υπάρχει μια τιμή μαζικής παροχής που οδηγεί σε βέλτιστη μεταφορά μάζας.

Από 1989 ως το 1991 η Brauner και η ομάδα της ανέπτυξαν ένα μοντέλο προσπαθώντας να περιγράψουν την περιοχή κοντά στην είσοδο του υμένα μη θεωρώντας, ωστόσο, ότι το νερό είναι απείρως διαλυτό στο κατερχόμενο διάλυμα. Στην πορεία επεξεργάζονταν το μοντέλο του G. Grossman επιλύοντας μεν για αδιαβατικό και ισοθερμοκρασιακό τοίχωμα υποθέτοντας δε πως το πάχος του υμένα μεταβάλλεται, ο ατμός δεν είναι απείρως διαλυτός στο υγρό και η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας δεν είναι αμελητέα.

Εν τω μεταξύ, το 1990 οι Habib & Wood δημιούργησαν ένα μοντέλο στο οποίο ο ατμός βρίσκεται σε ομορροή με τον υμένα και δεν αγνοούνται η μεταφορά ορμής και θερμότητας προς την αέρια φάση. Το τοίχωμα θεωρείται ισοθερμοκρασιακό, το πάχος του υμένα σταθερό και ο ατμός απείρως διαλυτός στο υγρό. Από τις εξισώσεις μεταφοράς αγνοούν μόνο τους χρονομεταβαλλόμενους όρους και κανέναν άλλο και στη διεπιφάνεια επιτρέπουν την άσκηση διατμητικής τάσης από τον ατμό. Το αποτέλεσμα τους είναι πως στην έξοδο τόσο ο ατμός όσο και το διάλυμα προσεγγίζουν τη θερμοκρασία του τοιχώματος και πως ο ρυθμός απορρόφησης στην είσοδο παρουσιάζει μέγιστο και στην πορεία μειώνεται εκθετικά. Τα αποτελέσματά τους συμφωνούν με των Andberg & Vliet σε ό,τι αφορά τη συγκέντρωση στη διεπιφάνεια και την κυρίως μάζα.

Έπειτα, το 1992 σε μια πιο διαφορετική προσέγγιση οι Hajji & Worek ασχολήθηκαν με το χρονομεταβαλλόμενο πρόβλημα της απορρόφησης ατμού σε ακίνητο υμένα. Οι ιδιότητες θεωρήθηκαν σταθερές, ο ατμός απείρως διαλυτός στον υμένα και η μεταφορά θερμότητας στην αέρια φάση αγνοήθηκε. Στο στερεό υπό τον υμένα εφαρμόστηκαν συνθήκες τόσο σταθερής θερμοκρασίας όσο και σταθερής ειδικής ροής μάζας και θερμότητας. Τα εμπλεκόμενα μεγέθη αποτέλεσαν συναρτήσεις μόνο του χρόνου και του βάθους και οι μελετητές πρότειναν την αναγωγή των αποτελεσμάτων σε πίπτονα υμένα με τέτοιο τρόπο που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη ταχύτητα υμένα. Η επίλυση έγινε αναλυτικά.

Στην πορεία πραγματοποιήθηκαν πολλές παρόμοιες προσπάθειες όπου κάθε φορά αίρονται μία ή δύο υποθέσεις. Η πρώτη προσπάθεια άρσης πολλών ταυτοχρόνως πραγματοποιήθηκε το 1996 από τους Jernqvist & Koekum οι οποίοι αντιμετώπισαν τον πίπτονα, στρωτό υμένα επιτρέποντας στις θερμοφυσικές ιδιότητες να μεταβάλλονται, στο προφίλ ταχύτητας να αναπτύσσεται, στο πάχος του υμένα να αυξάνεται κατά την απορρόφηση. Η διαλυτότητα του νερού στο υγρό θεωρήθηκε πεπερασμένη και η σχέση της διεπιφανειακής ισορροπίας μη γραμμική. Ωστόσο, αγνοήθηκαν η διάτμηση στη διεπιφάνεια, η μεταφορά μάζας στην αέρια φάση, η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας και το τοίχωμα αντιμετωπίστηκε ως ισοθερμοκρασιακό.

Η ρευστοδυναμική συμπεριφορά του υμένα επιλυόταν ταυτοχρόνως με τα άλλα φαινόμενα μεταφοράς. Σε μια τέτοια προσέγγιση τη μεταβολή της διεπιφανειακής ταχύτητας στη διεύθυνση ροής επηρεάζουν τόσο η μεταβαλλόμενη υδροδυναμική συμπεριφορά όσο και η αύξηση της μάζικης παροχής λόγω της απορρόφησης και η μεταβολή των ιδιοτήτων (ιξώδες) λόγω μεταβολής της θερμοκρασίας και της συγκέντρωσης. Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα οδήγησε στο συμπέρασμα πως η θεώρηση του υμένα ως στρωτού δε συμφωνεί πάντα με τις πειραματικές παρατηρήσεις και πως η μοντελοποίηση της παρουσίας κυματισμών, ίσως βελτιώσει το αποτέλεσμα.

3.3.2.4 Η μελέτη των E. Hofmann και H. C. Kuhlmann

Μια πιο σύγχρονη μελέτη πραγματοποιήθηκε από τους E. Hofmann και H. C. Kuhlmann το 2012. Οι ερευνητές θεώρησαν και πάλι στρωτό, αδιατάρακτο υμένα, πλήρως ανεπτυγμένη ροή με παραβολικό προφίλ ταχύτητας, αγνοώντας την εγκάρσια συνιστώσα της και μη επιτρέποντας στον ατμό να ασκεί διατμητική τάση στη διεπιφάνεια. Οι ιδιότητες θεωρήθηκαν σταθερές, η απορροφώμενη μάζα επαρκώς μικρή, ώστε το πάχος του υμένα και η ταχύτητά του να θεωρηθούν κι αυτά σταθερά και αγνοήθηκε η μεταφορά θερμότητας προς την αέρια φάση. Η σχέση ισορροπίας στη διεπιφάνεια λήφθηκε γραμμική και στις διέπουσες εξισώσεις δεν αγνοήθηκαν οι όροι διάχυσης στη διεύθυνση ροής. Το πρόβλημα επιλύθηκε αριθμητικώς. Οι συγγραφείς αντιμετώπισαν τη συνθήκη μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα ως ιδιαίτερος κρίσιμη για τα αποτελέσματα. Γράφουν χαρακτηριστικά πως «το ψυχόμενο τοίχωμα αποτελεί την κινούσα δύναμη για τη διεργασία της απορρόφησης». Έτσι επιδιώχθηκε η εύρεση της προσέγγισης που προσφέρει συγχρόνως ικανοποιητικά αποτελέσματα και μικρό υπολογιστικό κόστος.

Κατ' αρχάς, θεωρώντας ότι το ψυκτικό βρίσκεται σε αντιρροή με τον υμένα και πραγματοποιεί ροή Poiseuille εντός καναλιού δεδομένου πάχους, χρησιμοποίησαν την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας σε αυτό και την επέλυσαν μαζί με τις εξισώσεις του υμένα συζευγνύοντας θερμικώς τα δυο ρευστά στο τοίχωμα, του

οποίου η θερμική αντίσταση αγνοήθηκε. Κατέληξαν, έτσι, πως κατά μήκος του τοιχώματος η κατανομή θερμοκρασίας εξαρτάται από το πάχος του καναλιού και την παροχή του ψυκτικού (αριθμός Re) και απέχει σημαντικά από τη γραμμική που είχε προταθεί από προηγούμενους ερευνητές. Ακόμη, για αρκετά φαρδιά κανάλια προέκυψε πως μια λογική παραδοχή είναι η σταθερότητα του τοπικού αριθμού Nusselt στο στερεό υπόστρωμα. Βασιζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση και προκειμένου να ανακουφίσουν την επίλυση από την παρουσία μιας ακόμη μερικής διαφορικής εξίσωσης (μεταφορά θερμότητας στο ψυκτικό) οι Hofmann και Kuhlmann εισήγαγαν μικτή οριακή συνθήκη τύπου Robin, συνήθη διαφορική εξίσωση, ώστε να εκφράζει τη μεταβολή θερμοκρασίας του ψυκτικού ως αποτέλεσμα της θερμότητας που με συναγωγή δέχεται από τον υμένα. «Τουλάχιστον ποιοτικώς», κατά τους συγγραφείς, τα αποτελέσματα δεν απέκλιναν ιδιαίτερος από την πλήρη περιγραφή, το υπολογιστικό φορτίο ήταν μικρότερο και χρησιμοποιήθηκε αυτή η προσέγγιση.

Επιπλέον, κατά την επεξεργασία των αποτελεσμάτων προέκυψε πως για κάθε αριθμό Nusselt υπάρχει για μικρές τιμές αριθμού Reynolds ένα μέγιστο, η μέγιστη μεταφορά-απορρόφηση μάζας ατμού στον υμένα, δηλαδή υπάρχει βέλτιστο πάχος υμένα, όπως και οι Kawae et al. παρατήρησαν. Την παρουσία του αποδίδουν στο γεγονός ότι στις συνθήκες αυτές η συναγωγή στη διεύθυνση ροής είναι αρκετά ισχυρή, ώστε να μην κορεστεί ο υμένας αλλά και αρκετά αργή, ώστε να εξασφαλίζει επαρκείς χρόνους επαφής για την πραγματοποίηση της διάχυσης στην εγκάρσια διεύθυνση. Κάποια ακόμη συμπεράσματά τους είναι πως η κατακόρυφη πλάκα είναι η βέλτιστη στην απορρόφηση ατμού, πιο επιμήκεις πλάκες είναι πιο αποδοτικές σε μεγάλους αριθμούς Reynolds, ενώ πιο βραχείς σε μικρότερους και πως η απόκλιση της συγκεντρώσεως εισόδου από τη συγκέντρωση ισορροπίας της διεπιφάνειας διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην απόδοση της διεργασίας (E. Hofmann 2012).

3.3.2.5 Τυρβώδης ροή

Ωστόσο, η προσπάθεια μοντελοποίησης της λειτουργίας του απορροφητή δεν εξαντλείται στη θεώρηση της στρωτής ροής για τον υμένα. Η τύρβη και οι κυματισμοί του έχουν αποειλέσει επίσης αντικείμενα μελέτης. Η τυρβώδης κίνηση μοντελοποιείται μέσω τροποποίησης των σταθερών που σχετίζονται με τη διάχυση, ήτοι της διαχυτότητας και της θερμοδιαχυτότητας. Η περιγραφή της τυχαιότητας και της πολυπλοκότητας της τύρβης αποφεύγονται χρησιμοποιώντας εμπειρικές σχέσεις. Οι διάφοροι μελετητές συμπεραίνουν ότι στην τυρβώδη ροή τα φαινόμενα μεταφοράς είναι πολύ ταχύτερα εν συγκρίσει με τη στρωτή και ενισχύονται περισσότερο αυξανόμενου του αριθμού Reynolds. Οι Grossman & Heath από το μοντέλο τους συμπέραναν πως οι συνιελεστές μεταφοράς παραμένουν σχεδόν σταθεροί κατά μήκος της πλάκας στη διεύθυνση ροής. Η μοντελοποίηση τέτοιων υμένων τροφοδοτείται σημαντικά από πειραματικά αποτελέσματα (J. Killion 2001).

3.3.2.6 Υμένες με επιφανειακούς κυματισμούς

Μία ακόμη σημαντική εκδοχή υδροδυναμικής συμπεριφοράς είναι η παρουσία κυμάτων στη διεπιφάνεια. Οι πίπτοντες υμένες και κυρίως οι κατακόρυφοι είναι εγγενώς ασταθείς ακόμη και σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Ένας συνήθης διαχωρισμός των κυματισμών είναι σε τριχοειδείς και αδρανειακούς. Οι πρώτοι χαρακτηρίζονται από μικρά πλάτη, ημιτονοειδείς μορφές, ομαλές συχνότητες και το εμπρόσθιο τμήμα τους προσανατολίζεται καθέτως στη διεύθυνση ροής. Τα δεύτερα έχουν μεγάλα πλάτη, απότομο μπροστινό τμήμα, ομαλότερο ακολουθόν και ταξιδεύουν μονήρη, ανάμεσά τους μεσολαθούν ικανά μήκη αδιατάρακτης ροής του υμένα. Στο εσωτερικό των αδρανειακών κυμάτων συχνά υπάρχουν περιοχές ανακυκλοφορίας που επηρεάζουν τα φαινόμενα μεταφοράς. Τα κύματα ταξιδεύουν πολύ ταχύτερα από τον ομαλό υμένα με αποτέλεσμα οι υμένες με κυματισμούς να χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερες μαζικές παροχές.

Στη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων η ρευστοδυναμική συμπεριφορά συνήθως καθορίζεται εκ των προτέρων και έπειτα μελετάται η απορρόφηση κάτι που είναι αρκετά επισφαλές μιας που η παρουσία της τελευταίας μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο. Ακόμη τα κύματα συνήθως θεωρούνται περιοδικά κάτι που δεν επιβεβαιώνεται πάντα πειραματικά ιδίως όσο ο αριθμός Reynolds μεγαλώνει. Το γενικό συμπέρασμα είναι πως η παρουσία των κυματισμών ενισχύει σημαντικά τα φαινόμενα μεταφοράς και αυξάνει την απορροφώμενη μάζα σε σχέση με τη στρωτή ροή. Αυτό από άλλους αποδίδεται στην έντονη ανάμειξη που προκαλούν, από άλλους στην αυξημένη εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας και στο γεγονός ότι το κύμα με αποτελεσματικό τρόπο εκθέτει και καλύπτει εσωτερικά στρώματα του υμένα, από άλλους και στα δύο.

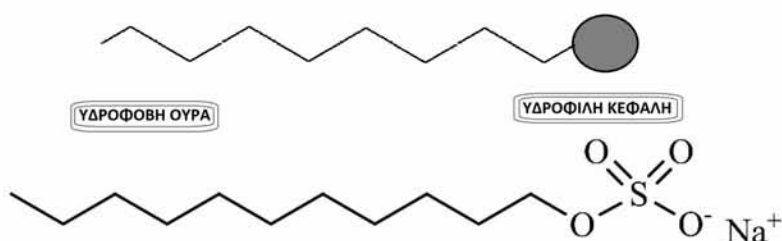
Κεφάλαιο 4

Επιφανειοδραστικά & Φαινόμενα Marangoni

4.1 Επιφανειοδραστικά

Οι αποδόσεις της συσκευής απορρόφησης είναι, γενικώς, χαμηλές, γεγονός που καθιστά σημαντική την προσπάθεια βελτίωσής τους. Έχει παρατηρηθεί πειραματικώς πως το ρυθμό απορρόφησης του ατμού στο διάλυμα νερού-*LiBr* μπορεί να ενισχύσει η παρουσία επιφανειοδραστικών, επομένως, κρίνεται σκόπιμο να αφιερωθεί αυτό το κεφάλαιο στις ουσίες αυτές και τη συμπεριφορά τους.

Επιφανειοδραστικό ή στην αγγλόφωνη ορολογία surfactant ή surface active substance καλείται η ουσία που προστιθέμενη σε ένα υγρό διάλυμα επηρεάζει την επιφανειακή τάση του. Τα επιφανειοδραστικά είναι, συνήθως, μεγάλα, οργανικά μόρια αποτελούμενα από ένα υδρόφιλο και ένα υδρόφοβο, ελαιώδες μέρος (Σχήμα 4.1). Το χαρακτηριστικό αυτό της αλυσίδας τους έχει σαν αποτέλεσμα να εκδηλώνουν ιδιαίτερη προτίμηση στο να βρίσκονται στις διεπιφάνειες, ώστε να εκθέτουν εκτός υγρής φάσης το υδρόφοβο τμήμα τους. Εκτός από διεπιφάνειες υγρού-αερίου, τα επιφανειοδραστικά μπορεί να βρίσκονται και σε διεπιφάνειες στερεού-υγρού, κάτι που λαμβάνουν υπόψιν στη μελέτη τους οι G. Karapetsas & V. Bontozoglou (2013). Στο εξής, ωστόσο, ο όρος «διεπιφάνεια» θα αναφέρεται αποκλειστικά σε διεπιφάνειες υγρού-αερίου. Χαρακτηριστικά παραδείγματα επιφανειοδραστικών είναι η οκτανόλη, η εξανόλη, η ισοπροπανόλη και το *SDS*.

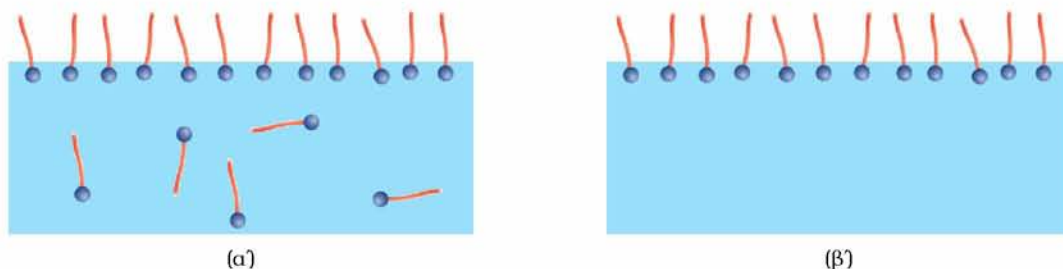


Σχήμα 4.1: Σκαρίφημα ενός μορίου επιφανειοδραστικού και η αλυσίδα του μορίου του επιφανειοδραστικού *SDS* (Πηγή: Bellettini I. et al. 2015, για το μόριο του *SDS*)

4.1.1 Διαλυτότητα

Με την προσθήκη τους σε ένα υγρό η συμπεριφορά των επιφανειοδραστικών εξαρτάται από τη διαλυτότητά τους. Ένα διαλυτό επιφανειοδραστικό απαντάται εκτός από τη διεπιφάνεια και στην κυρίως μάζα της υγρής φάσης. Όσο πιο διαλυτό είναι, τόσο περισσότερα μόρια μπορούν να μην εκτεθούν στη διεπιφάνεια. Όταν η διαλυτότητα μειώνεται, ο αριθμός αυτός περιορίζεται. Χαρακτηριστική οριακή περίπτωση που έχει μελετηθεί πολλαπλώς είναι εκείνη της μηδενικής διαλυτότητας, του αδιάλυτου επιφανειοδραστικού (insoluble surfactant). Τα μόριά του δε δύνανται να βρίσκονται στην κυρίως μάζα και συγκεντρώνονται όλα στη διεπιφάνεια

(Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2: Σκαρίφημα διαλυτού και αδιάλυτου επιφανειοδραστικού (Πηγή: <http://www.dataphysics.de> 2018)

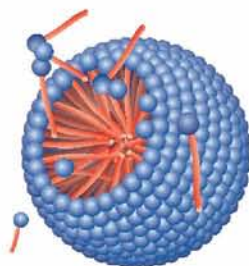
4.1.2 Χαρακτηριστικές συγκεντρώσεις

Η διεπιφάνεια, ως μια διδιάστατη περιοχή του χώρου, καταλαμβάνει κάποιο εμβαδόν πεπερασμένο. Με τη σειρά του το μόριο επιφανειοδραστικού καταλαμβάνει κάποιον όγκο στο χώρο αλλά και κάποια επιφάνεια, όπως στέκεται στις διεπιφάνειες. Η επιφάνεια αυτή εξαρτάται από το μέγεθός του και τον τρόπο με τον οποίο στέκεται. Από αυτά συμπεραίνεται πως η διεπιφάνεια δε γίνεται να φέρει παρά πεπερασμένο αριθμό μορίων. Υπάρχει μια μέγιστη διεπιφανειακή συγκέντρωση που συμβολίζεται με $\Gamma_{\infty} [=] \frac{\text{mol}}{\text{m}^2}$ και εκφράζει το μέγιστο αριθμό μορίων που μπορούν να χωρέσουν σε δεδομένη έκταση. Σχετίζεται άμεσα με την ελάχιστη επιφάνεια που καταλαμβάνει ένα μόριο στη διεπιφάνεια $A_m [=] \text{\AA}^2$ ως:

$$A_m = \frac{10^{20}}{\Gamma_{\infty} N_A}$$

όπου N_A ο αριθμός Avogadro (A. Prosser 2001). Για μόρια σιενά στοιχισμένα και καθέτως προσανατολισμένα στη διεπιφάνεια εκτιμάται πως $A_m \in [18, 20] \text{\AA}^2$ και μια μέγιστη τιμή επιφανειακής συγκέντρωσης είναι $8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{m}^2}$.

Μια ακόμη χαρακτηριστική συγκέντρωση που σχετίζεται με τα επιφανειοδραστικά είναι η κρίσιμη συγκέντρωση σχηματισμού μικυλλίων (critical micelle concentration ή CMC). Η συγκέντρωση αυτή αποτελεί την τιμή από την οποία και πάνω το διάλυμα περιέχει αρκετά μόρια στην κυρίως μάζα του, ώστε αλληλεπιδρούν και σχηματίζουν μεγάλες δομές, συνήθως σφαιρικού σχήματος, επιδιώκοντας να απομονώσουν εντός τους τις υδρόφοβες ουρές τους χρησιμοποιώντας τις υδρόφιλες κεφαλές ως τείχος με το διάλυμα (Σχήμα 4.3). Στην παρούσα εργασία όλες οι συγκεντρώσεις είναι μικρότερες της CMC.



Σχήμα 4.3: Σκαρίφημα μικυλλίου (Πηγή: <http://www.dataphysics.de> 2018)

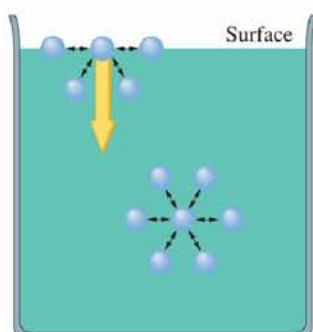
4.1.3 Επιφανειακή τάση

Όταν ένα υγρό περιέχεται σε ένα δοχείο, κάποια μόριά του, αναγκαστικά, θα βρίσκονται σε επαφή με την περιβάλλουσα αέρια φάση στη διεπιφάνεια υγρού-αερίου. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.4, ένα μόριο της κυρίως μάζας αλληλεπιδρά με τα περιβάλλοντα μόρια με ομοιόμορφο τρόπο, ώστε ισορροπεί. Αντιθέτως, ένα μόριο στη διεπιφάνεια έλκεται μόνο από τα κατώτερα του μόρια. Έτσι, η επιφάνεια τείνει να καμπυλώνεται προς το εσωτερικό του υγρού σε μία προσπάθεια να ελαττώσει την έκτασή της.

Στην περίπτωση του νερού, που είναι μόριο ιδιαίτερος πολικό και αλληλεπιδρά με ισχυρές ηλεκτρικές δυνάμεις (δεσμούς υδρογόνου) με τα γειτονικά μόρια, η δύναμη που δέχονται τα μόρια της διεπιφάνειας είναι μεγάλη, το ίδιο και η καμπύλωση (παρατηρείται ακόμη και σε ένα ποτήρι).

Αυτή η δύναμη που ασκείται από τα εσωτέρα μόρια του υγρού στα διεπιφανειακά ανά μονάδα μήκους της διεπιφάνειας ονομάζεται επιφανειακή τάση. Οι Ebbing D. & Gammon S. (2009) την ορίζουν ως την απαιτούμενη ενέργεια για την αύξηση της επιφάνειας ενός υγρού κατά μία μονάδα. Δηλαδή, η διεπιφάνεια αποτελεί θέση υψηλότερης ενέργειας για τα μόρια του υγρού σε σχέση με το εσωτερικό της υγρής φάσης, άρα και θέση δυσμενέστερη για ένα μόριο που επιθυμεί την ενεργειακά σταθερότερη κατάσταση.

Η προσθήκη μιας επιφανειοδραστικής ουσίας οδηγεί σε μείωση της επιφανειακής τάσης με τον εξής τρόπο. Τα μόρια του επιφανειοδραστικού επιδιώκουν μία θέση στη διεπιφάνεια, προκειμένου να απομακρύνουν από το νερό την υδρόφοβη ουρά τους. Από την άλλη πλευρά, τα μόρια του νερού προτιμούν μία θέση στο κυρίως σώμα του υγρού. Έτσι, καταλαμβάνοντας χώρο στη διεπιφάνεια, τα μόρια του επιφανειοδραστικού επιτρέπουν στα μόρια του νερού να απομακρυνθούν προς θέση ενεργειακά προτιμότερη. Επομένως, η κατάληψη διεπιφανειακών θέσεων από μόρια επιφανειοδραστικού μειώνει την επιφανειακή ενέργεια, άρα και την επιφανειακή τάση.



Σχήμα 4.4: Ανομοιόμορφη έλξη μορίου στη διεπιφάνεια εν αντιθέσει με την κυρίως μάζα (Πηγή: Ebbing D. & Gammon S. 2009)

Έστω ένα διάλυμα νερού-ανόργανου άλατος, όπως το $H_2O - LiBr$. Η βασική παράμετρος από την οποία εξαρτάται η επιφανειακή τάση ενός υγρού είναι η θερμοκρασία $\sigma = \sigma(T)$. Με την αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνεται η ενέργεια των μορίων, οι διαμοριακοί δεσμοί εξασθενούν και οι δυνάμεις που ασκούνται στα επιφανειακά μόρια χαλαρώνουν, ώστε η επιφανειακή τάση μειώνεται. Όταν στο διάλυμα ή στο καθαρό νερό υπάρχει επιφανειοδραστική ουσία, τα μόριά της καταλαμβάνουν θέσεις στη διεπιφάνεια επιτρέποντας σε μόρια του νερού να απομακρυνθούν από αυτή και η επιφανειακή τάση μειώνεται ξανά. Το βαθμό μείωσης της επιφανειακής τάσης επηρεάζει ο αριθμός μορίων επιφανειοδραστικού που θα εκτεθούν στη διεπιφάνεια, επομένως, εκτός από τη θερμοκρασία, η επιφανειακή τάση εξαρτάται και από την επιφανειακή συγκέντρωση του επιφανειοδραστικού $\sigma = \sigma(\Gamma, T)$.

Η αλατιότητα του διαλύματος διαδραματίζει κι αυτή σημαντικό ρόλο, κυρίως όταν η επιφανειοδραστική ουσία παράγει ιόντα (ιοντισμός αλκοολών ή διάσπαση οργανικών αλάτων). Το μόριο του νερού είναι πολικό, επομένως, αλληλεπιδρά ηλεκτρικά με τα ιόντα του διαλύματος. Αυτή η ηλεκτρική αλληλεπίδραση δεσμεύει κάποια από τα επιφανειακά ενεργά ιόντα του επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα του διαλύματος (διαλυτό επιφανειοδραστικό). Αν στο διάλυμα νερού-επιφανειοδραστικού προσιεθεί ανόργανο άλας, όπως το $LiBr$, διίσταται και μεταξύ των ιόντων του και των μορίων του νερού αναπτύσσονται ισχυρότερες ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις. Τα μόρια νερού αλληλεπιδρώντας πιο έντονα με τα ιόντα του άλατος ελευθερώνουν τα δεσμευμένα ιόντα επιφανειοδραστικού που μεταβαίνουν πλέον στη διεπιφάνεια μειώνοντας περαιτέρω την επιφανειακή τάση. Η μείωση της συγκέντρωσης της κυρίως μάζας σε επιφανειοδραστικό λόγω της παρουσίας άλατος είναι γνωστή και ως salting out (E. Hihara 1993). Συνέπεια αυτού είναι η αύξηση της επιφανειακής συγκέντρωσης του επιφανειοδραστικού και η μείωση της επιφανειακής τάσης, η οποία, τελικώς, εξαρτάται και από τη σύσταση του διαλύματος $\sigma = \sigma(\Gamma, T, C)$.

4.1.4 Περιγραφή της προσρόφησης

Όταν ένα επιφανειοδραστικό είναι διαλυτό και βρίσκεται τόσο στη διεπιφάνεια όσο και στην κυρίως μάζα της υγρής φάσης, παρατηρείται ανταλλαγή των μορίων του μεταξύ των δύο αυτών περιοχών. Ο τρόπος με τον οποίο ένα μόριο μεταβαίνει στη διεπιφάνεια είναι αντίδραση προσρόφησης και ο τρόπος επιστροφής στην κυρίως μάζα αντίδραση εκρόφησης. Η κινητική των αντιδράσεων αυτών είναι σημαντική στον καθορισμό της επιφανειακής τάσης του διαλύματος.

Για την περιγραφή των αντιδράσεων προσρόφησης κι εκρόφησης χρησιμοποιούνται μοντέλα που ονομάζονται ισόθερμες, όταν αναφέρονται σε διεπιφάνεια που βρίσκεται σε ισορροπία με την κυρίως μάζα. Στο σημείο αυτό παίζει ρόλο αν το επιφανειοδραστικό είναι ηλεκτρολύτης και διίσταται στο υγρό (το ένα από τα δύο ιόντα προσροφάται στη διεπιφάνεια, ενώ το άλλο παραμένει στην κυρίως μάζα) ή αν δε δίνει ιόντα. Ακόμη, είναι σημαντική η αλατότητα, η τυχόν παρουσία, δηλαδή, κάποιου άλατος (ισχυρός ηλεκτρολύτης) του οποίου, όμως, κανένα ιόν δεν προσροφάται στη διεπιφάνεια.

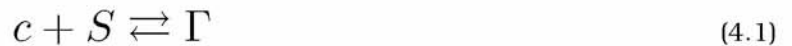
4.1.4.1 Το μοντέλο Langmuir

Το πιο απλό μοντέλο είναι η ισόθερμος Langmuir. Αφορά μη ιονικό επιφανειοδραστικό, ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση μονοσθενούς ιονικού, όποτε καλείται ψευδο-μη-ιονικό μοντέλο. Λαμβάνεται υπόψιν η διάσταση μα αγνοούνται οι επιδράσεις των φορτίων στην προσρόφηση και την επιφανειακή τάση καθώς και κάθε ηλεκτρική αλληλεπίδραση με τα λοιπά ιόντα του διαλύματος (A. Prosser 2001).



Σχήμα 4.5: Irving Langmuir (1881-1957) (Πηγή: <https://www.nobelprize.org> 2018)

Το μοντέλο του Langmuir υποθέτει πως ο ρυθμός προσρόφησης είναι ανάλογος της συγκεντρώσεως της κυρίως μάζας και των ελευθέρων θέσεων της διεπιφάνειας και ο ρυθμός εκρόφησης ανάλογος της επιφανειακής συγκεντρώσεως. Δηλαδή, χρησιμοποιείται η αμφίδρομη αντίδραση:



όπου c η συγκέντρωση της κυρίως μάζας, Γ η διεπιφανειακή συγκέντρωση και $S = \Gamma_\infty - \Gamma$ οι ελεύθερες θέσεις. Ακόμη ορίζονται τα k_a και k_d να αποικελούν τις κινητικές σταθερές των αντιδράσεων προσρόφησης (δεξιά) κι εκρόφησης (αριστερή) αντιστοίχως. Στην ισορροπία:

$$k_a c S = k_d \Gamma \Rightarrow k_a c (\Gamma_\infty - \Gamma) = k_d \Gamma \quad (4.2)$$

Κι ορίζοντας $K = \frac{k_a}{k_d}$ και $\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$ το βαθμό κάλυψης της διεπιφάνειας από τα μόρια του επιφανειοδραστικού:

$$(4.2) \Rightarrow c = \frac{\Gamma}{K (\Gamma_\infty - \Gamma)} = \frac{\gamma}{K (1 - \gamma)} \quad (4.3)$$

Η σχέση (4.3) αποικελεί την ισόθερμο Langmuir σε διαστατή μορφή. Συνδυάζοντας τη θεωρία του Gibbs κατά την οποία η μεταβολή της επιφανειακής τάσης σχετίζεται με τη μεταβολή του χημικού δυναμικού των

ουστατικών του διαλύματος, μετά από μια σύντομη διαδικασία που παρατίθεται από τον V. Bontozoglou (2018) προκύπτει πως η επιφανειακή τάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma - \sigma_o = RT\Gamma_\infty \ln(1 - \gamma) \quad (4.4)$$

όπου σ_o η επιφανειακή τάση του καθαρού διαλύτη, T η απόλυτη θερμοκρασία και R η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων.

Δεδομένων των K , Γ_∞ και της κατάστασης ισορροπίας η σχέση (4.4) μπορεί να δώσει την επιφανειακή τάση του διαλύματος. Οι σταθερές αυτές ποσότητες μπορούν να υπολογιστούν για κάθε συγκεκριμένο επιφανειοδραστικό σε διάλυμα συγκεκριμένης αλατότητας, ώστε να περιγράψει ικανοποιητικά το μοντέλο τις υπάρχουσες πειραματικές μετρήσεις. Επειδή η αλατότητα δε λαμβάνεται υπόψιν στις εξισώσεις, οι τιμές σταθερών που προκύπτουν μπορεί να μεταβάλλονται σημαντικά με τη μεταβολή της συγκεντρώσεως του άλατος (A. Prosser 2001).

Αν και το μοντέλο του Langmuir χρησιμοποιείται συχνά για την απλότητά του, παρουσιάζει κάποιους περιορισμούς. Εκτός από το ότι δε λαμβάνει υπόψιν την αλατότητα και τις ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ιόντων, κάτι που έχει αντίκτυπο και στις σταθερές, όταν ο βαθμός κάλυψης της διεπιφάνειας από τα μόρια του επιφανειοδραστικού γ τείνει στη μονάδα, δηλαδή, όταν η επιφανειακή συγκέντρωση τείνει στη μέγιστη και η διεπιφάνεια στον κορεσμό, η επιφανειακή τάση, λόγω του λογαρίθμου, ξεκινά να αποκλίνει προς το $-\infty$. Όμως, ο απειρισμός, ακόμη και οι αρνητικές τιμές της επιφανειακής τάσης δεν αντικατοπτρίζουν πραγματικές καταστάσεις. Η χαμηλότερη τιμή επιφανειακής τάσης που συνήθως παρατηρείται με υδρογονάνθρακες ως επιφανειοδραστικά στους $25^\circ C$ είναι $20mN/m$ (A. Prosser 2001).

4.1.4.2 Η διόρθωση των Kovalchuk et al.

Αφορμώμενοι από την παραπάνω αδυναμία του μοντέλου του Langmuir οι Kovalchuk et al. (2004) εισήγαγαν την έννοια της εγγενούς, διεπιφανειακής συμπίεσιότητας σε δυο διαστάσεις. Η μέγιστη διεπιφανειακή συγκέντρωση $\Gamma_\infty [=] \frac{mol}{m^2}$ εκφράζει τον αριθμό των mol -μορίων που απαιτείται για την κάλυψη ενός τετραγωνικού μέτρου. Οι συγγραφείς ορίζουν $\Omega_o [=] \frac{m^2}{mol}$ που εκφράζει την επιφάνεια που καταλαμβάνει ένα mol επιφανειοδραστικού σε άπειρη αραιότητα $\Gamma \rightarrow 0$. Αν οριστεί Ω η καταλαμβανόμενη επιφάνεια από ένα mol γενικώς, τότε, προσεγγίζοντας τον κορεσμό της διεπιφάνειας δεν ισχύει $\Omega = \Omega_o$, θεώρηση που αντιμετωπίζει τα μόρια ως σκληρά, ασυμπίεστα σώματα και χρησιμοποιείται στο μοντέλο Langmuir. Αντιθέτως, όπως προκύπτει από πειραματικές μελέτες, ισχύει $\Omega = \Omega_o(1 - \varepsilon\Pi)$, δηλαδή η καταλαμβανόμενη επιφάνεια δεν είναι σταθερή αλλά είναι μικρότερη από την Ω_o κατά $\Omega_o\varepsilon\Pi$, όπου ε η συμπίεσιότητα σε δυο διαστάσεις και Π η επιφανειακή πίεση. Αν σ_o η επιφανειακή τάση του καθαρού διαλύτη και σ η επιφανειακή τάση για την εκάστοτε διεπιφανειακή συγκέντρωση επιφανειοδραστικού Γ , η επιφανειακή πίεση ισούται με $\Pi = \sigma_o - \sigma$. Έτσι, πλέον, η μέγιστη διεπιφανειακή συγκέντρωση ισούται με $\Gamma_\infty = \frac{1}{\Omega_o(1 - \varepsilon\Pi)}$ και είναι μεγαλύτερη από εκείνη που προβλέπει το μοντέλο σκληρών σφαιρών, λόγω της συμπίεσιότητας. Ακόμη, ο βαθμός κάλυψης της διεπιφάνειας δεν ορίζεται ως $\gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$ αλλά ως $\gamma = \Gamma\Omega$, δηλαδή επιφανειακή συγκέντρωση του επιφανειοδραστικού επί την πραγματική επιφάνεια που καλύπτεται από την ποσότητα αυτή.

$$\gamma = \Gamma\Omega \Rightarrow \gamma = \Gamma\Omega_o(1 - \varepsilon\Pi) \quad (4.5)$$

Έτσι, με το νέο γ η ισόθερμος δεν αλλάζει μορφή $c = \frac{\gamma}{K(1 - \gamma)}$ και η επιφανειακή τάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\Pi\Omega_o(1 - \varepsilon\frac{\Pi}{2})}{RT} = -\ln(1 - \gamma) \quad (4.6)$$

μέσω της επιφανειακής πίεσης.

4.2 Φαινόμενα Marangoni

Φαινόμενο Marangoni, προς τιμήν του Ιταλού επιστήμονα Carlo Marangoni, ονομάζεται η εμφάνιση ροής και συναγωγής λόγω μεταβολών στην επιφανειακή τάση ενός υγρού (Σ. Σερπέτιση 2017). Οι ροές που επάγονται καλούνται κι αυτές ροές Marangoni. Η επιφανειακή τάση, όπως περιγράφηκε παραπάνω, εξαρτάται τόσο από τη θερμοκρασία όσο και από τη σύσταση του διαλύματος. Έτσι, οι μεταβολές της που πυροδοτούν την έναυση αυτών των φαινομένων μπορεί να προκαλούνται από κλίσεις της θερμοκρασίας ή της σύστασης της διεπιφάνειας.

Οι κλίσεις της επιφανειακής τάσης έχουν σαν αποτέλεσμα την άσκηση δυνάμεων στη διεπιφάνεια. Οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις απαντώνται στη βιβλιογραφία ως τάσεις Marangoni και εμφανίζονται ανεξαρτήτως της τυχόν διάτμησης από την υπερκείμενη αέρια φάση. Επειδή οι κλίσεις επιφανειακής τάσεως προκαλούν ανάπτυξη διατμητικών τάσεων και αυτές την εμφάνιση ροής, ένα σύστημα με κλίσεις στην επιφανειακή τάση δε μπορεί να είναι στατικό (<http://web.mit.edu> (2018)).



Σχήμα 4.6: Carlo Marangoni (1840-1925) (Πηγή: <http://www.breves-de-maths.fr> 2018)

Την εμφάνιση των ροών αυτών ανταγωνίζονται το ιξώδες, η διαχυτότητα (αν πρόκειται για κλίσεις συγκεντρώσεως) και η θερμική διαχυτότητα (αν πρόκειται για κλίσεις θερμοκρασίας). Ο αδιάστατος αριθμός Marangoni, που μπορεί να οριστεί για καθεμιά από τις δυο περιπτώσεις, εκφράζει τον ανταγωνισμό ανάμεσα στην κλίση της επιφανειακής τάσης και το συνδυασμό ιξώδους-διαχυτότητας, θερμικής ή μη αναλόγως το πρόβλημα (Σ. Σερπέτιση 2017).

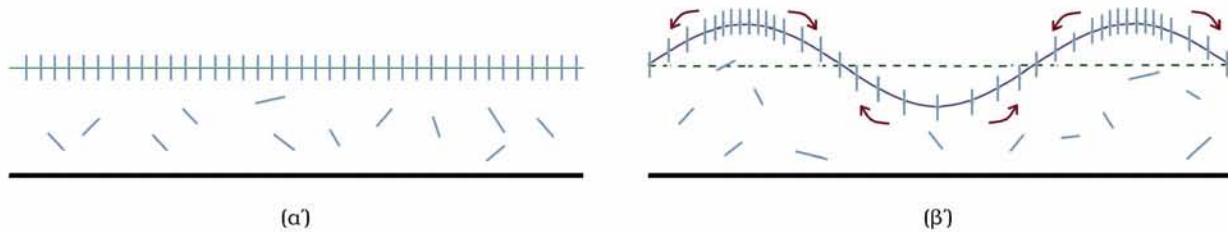
4.2.1 Κλίσεις επιφανειακής συγκεντρώσεως επιφανειοδραστικού- Η έννοια της ελαστικότητας

Έστω το διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου-επιφανειοδραστικού που δημιουργεί λεπτό υμένα επί οριζοντίου τοιχώματος. Ο υμένας είναι ακίνητος και χαρακτηρίζεται από σταθερή επιφανειακή συγκέντρωση Γ σε όλο το μήκος της διεπιφάνειάς του (Σχήμα 4.7a). Έστω, τώρα, μια επιφανειακή διαταραχή (π.χ. ημιτονοειδής, δεδομένου μήκους κύματος) που διαταράσσει το ισορροπών σύστημα. Η διαταραχή μεταβάλλει το σχήμα της διεπιφάνειας και τοπικά την επιφανειακή συγκέντρωση Γ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7b. Πιο συγκεκριμένα, στα όρη του κύματος παρατηρείται πύκνωση του επιφανειοδραστικού και στις κοιλάδες αραιώσή του. Στις πυκνές περιοχές η επιφανειακή συγκέντρωση είναι αυξημένη, επομένως, τοπικά η επιφανειακή τάση μειώνεται. Αντιθέτως, στις αραιότερες περιοχές η επιφανειακή συγκέντρωση είναι ελαττωμένη, πολλά μόρια νερού βρίσκονται και πάλι στη διεπιφάνεια και η επιφανειακή τάση αυξάνεται.

Αυτό σημαίνει πως δημιουργούνται επί της διεπιφάνειας περιοχές με διαφορετική επιφανειακή τάση, ώστε αναπτύσσονται τάσεις Marangoni. Η πυκνή περιοχή τείνει να απλωθεί, ενώ η αραιή τείνει να συρρικνωθεί. Στο Σχήμα 4.7b φαίνεται με τα κόκκινα βέλη η κίνηση που τείνει να πραγματοποιήσει η διεπιφάνεια. Οι τάσεις που αναπτύσσονται εφελκύνουν τα τμήματα υψηλότερης συγκεντρώσεως και θλίβουν τα ελάσσονος τείνοντας να επαναφέρουν τη διεπιφάνεια στην αρχική θέση ηρεμίας της. Η επίδραση αυτή των δυνάμεων που τείνει να σθήσει τον επιβαλλόμενο παλμό λειτουργεί σταθεροποιητικά για τον υμένα.

Η λειτουργία αυτή των επιφανειοδραστικών να αναχαιτίζουν την ανάπτυξη διεπιφανειακών διαταραχών

είναι γνωστή από πολύ παλιά (G. Karapetsas 2013). Το 1964 ο Whitaker πρώτος απέδωσε τη συμπεριφορά αυτή στην ελαστικότητα που αποκτά η διεπιφάνεια λόγω των κλίσεων επιφανειακής τάσης κάτι που επιβεβαιώθηκε τον ίδιο κιόλας χρόνο κατά την ταύτιση, στο όριο του αδιάλυτου επιφανειοδραστικού, της



Σχήμα 4.7: Αδιατάρακτος (α) και διατεταραγμένος (β) υμένας νερού-βρωμιούχου λιθίου-επιφανειοδραστικού

αριθμητικής του λύσης με την αναλυτική που εξήγαγε ο Benjamin (G. Karapetsas 2013). Η ελαστικότητα που η μεταβολή της επιφανειακής κατανομής του επιφανειοδραστικού προσδίδει στη διεπιφάνεια ορίζεται ως:

$$E = -\frac{d\sigma}{d\ln\Gamma} = -\Gamma\sigma_r \quad (4.7)$$

Μέσω της ελαστικότητας το πρόβλημα ροής συζευγνύεται με το πρόβλημα μεταφοράς μάζας (V. Bontozoglou 2018).

Σύμφωνα με τα μοντέλα προσρόφησης που προηγήθηκαν η ελαστικότητα υπολογίζεται από την εξίσωση (4.6) για το μοντέλο Langmuir (V. Bontozoglou 2018)

$$E = RT\Gamma_\infty \frac{\gamma}{1-\gamma} \quad (4.8)$$

και για το μοντέλο των V. Kovalchuk et al. (2004)

$$E = \left[\frac{\Omega_o(1-\varepsilon\Pi)}{RT\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\Pi} \right]^{-1} \quad (4.9)$$

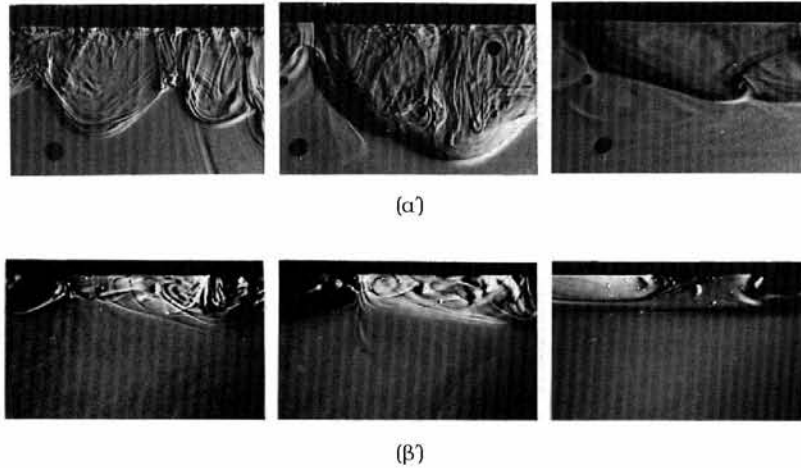
4.2.2 Φαινόμενα Marangoni στην ψύξη με απορρόφηση

Έχει παρατηρηθεί πολλαπλώς σε πειραματικές μελέτες πως στο διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου-επιφανειοδραστικού κατά την απορρόφηση ατμού εγείρονται ισχυρές ροές Marangoni και η δημιουργούμενη διεπιφανειακή τύρβη ενισχύει τη μεταφορά θερμότητας και μάζας, κάτι που δεν συμβαίνει κατά την απουσία του επιφανειοδραστικού (M. Hozawa 1991). Αυτό έχει διαπιστωθεί τόσο σε ακίνητους υμένες όσο και σε πίπτοντες. Μάλιστα, επειδή οι τελευταίοι συνήθως είναι στρωτοί, ο ρυθμός απορρόφησης είναι περιορισμένος από τη διάχυση, επομένως η διεπιφανειακή τύρβη μπορεί να ευνοήσει την αύξηση του (E. Hihara 1993).

Η εμφάνιση των φαινομένων Marangoni προϋποθέτει είτε εκρόφηση ή κίνηση προς τη διεπιφάνεια ουσίας που μειώνει την επιφανειακή τάση με αύξηση της συγκέντρωσης της είτε απορρόφηση ή απομάκρυνση από τη διεπιφάνεια ουσίας που αυξάνει την επιφανειακή τάση με αύξηση της συγκέντρωσης της (M. Hozawa 1991).

Οι Hozawa et al. (1991) πραγματοποιώντας πείραμα σε ακίνητο υμένα με επιφανειοδραστικά n-octanol και n-decanol απεικόνισαν τη συναγωγή (Σχήμα 4.8) που επηρέασε βάθος διαλύματος περίπου 10mm και 5mm αντιστοίχως. Ο ρυθμός απορρόφησης με n-octanol μετρήθηκε 2-2.5 φορές υψηλότερος εκείνου χωρίς την παρουσία της στο διάλυμα.

Στην πορεία οι Hihara et al. (1993) σε πείραμα πίπτοντος υμένα με επιφανειοδραστικό 1,2αιθυλο-1-εξανόλη μέτρησαν ρυθμούς απορρόφησης τετραπλάσιους ή πενταπλάσιους, ωστόσο οι διαφορές συγκεντρώσεων εισόδου-εξόδου ήσαν μικρότερες από τις αναγκαίες σε έναν απορροφητή.

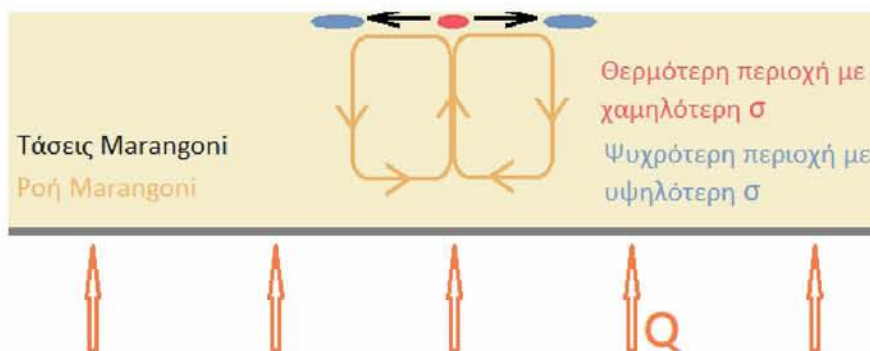


Σχήμα 4.8: Συναγωγή Marangoni σε διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου με (α) n-octanol και (β) n-decanol (Πηγή: Hozawa M. et al. 1991)

4.2.3 Κλίσεις θερμοκρασίας

Έστω διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου-επιφανειοδραστικού σχηματίζει επί οριζοντίου επιπέδου ακίνητο υμένα που βρίσκεται σε επαφή με ακίνητο υδρατμό ο οποίος απορροφάται στην υγρή φάση. Κατά την απορρόφηση, όμως, εκλύεται θερμότητα, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3, και η θερμοκρασία της διεπιφάνειας αυξάνεται.

Τάσεις Marangoni αναπτύσσονται στην περίπτωση που η διεπιφάνεια είναι ψυχρότερη από την κυρίως μάζα του ρευστού, όπως κατά τη θέρμανση του σιερικού τοιχώματος. Αν μια διαταραχή ωθήσει θερμότερες μάζες από το εσωτερικό του υγρού να ανέλθουν στη διεπιφάνεια, η επιφανειακή τους τάση θα είναι μικρότερη από των γειτονικών, λόγω υψηλότερης θερμοκρασίας. Επομένως, θα τείνουν να επεκταθούν, ενώ οι ψυχρότερες θα τείνουν να συμπιεστούν. Σαν αποτέλεσμα, επειδή το υγρό είναι ασυμπιέσιμο, δημιουργούνται κυκλοειδείς κινήσεις που εντοπίζονται μέχρι κάποιο βάθος (Σχήμα 4.9). Το φαινόμενο μπορεί να παρατηρηθεί και σε μεγαλύτερη κλίμακα, όπου, πλέον, λόγω της άνωσης, θερμότερες, άρα αραιότερες μάζες υγρού ανέρχονται στη διεπιφάνεια (αστάθεια Bénard).

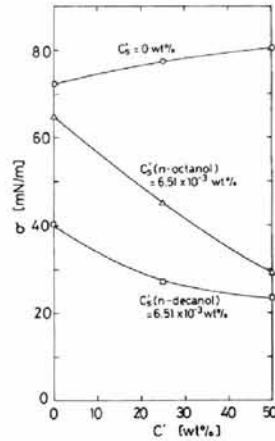


Σχήμα 4.9: Ροή Marangoni λόγω κλίσεων διεπιφανειακής θερμοκρασίας

Στην ψύξη με απορρόφηση, λόγω της συμπύκνωσης ατμού, η διεπιφάνεια του υμένα χαρακτηρίζεται από υψηλότερη θερμοκρασία και το εσωτερικό από χαμηλότερη. Έτσι, αν μια εσώτερη μάζα διαλύματος τείνει να κινηθεί προς τη διεπιφάνεια, η επιφανειακή της τάση θα είναι μεγαλύτερη, οι γειτονικές μάζες δε θα την εφελκύσουν και, τελικώς, η διαταραχή δε θα ενισχυθεί. Δηλαδή, στην ψύξη με απορρόφηση οι θερμοκρασιακές κλίσεις λειτουργούν σταθεροποιητικώς για τον υμένα.

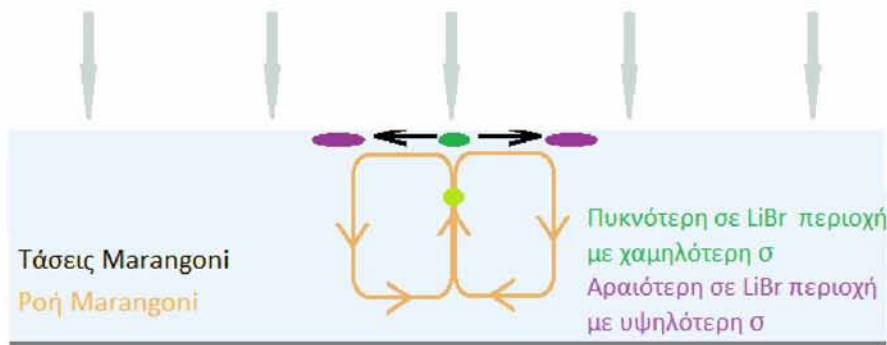
4.2.4 Κλίσεις συγκεντρώσεως άλατος

Έστω ξανά διάλυμα νερού-βρωμιούχου λιθίου-επιφανειοδραστικού που σχηματίζει επί οριζοντίου επιπέδου ακίνητο υμένα σε επαφή με ακίνητο υδραίμο που απορροφάται εντός του. Σύμφωνα με τους Hozawa et al. (1991) και όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10 η αύξηση της περιεκτικότητας σε *LiBr* σε διάλυμα χωρίς επιφανειοδραστικό οδηγεί σε αύξηση της επιφανειακής τάσης, ενώ παρουσία των επιφανειοδραστικών *n*-octanol και *n*-decanol σε μείωσή της.



Σχήμα 4.10: Μεταβολή επιφανειακής τάσης του διαλύματος νερού-βρωμιούχου λιθίου με παρουσία ή όχι επιφανειοδραστικού (Πηγή: Hozawa M. et al. 1991)

Έστω, λοιπόν, ο υμένας χωρίς το επιφανειοδραστικό. Αν γεννηθεί μια διαταραχή με τη ροπή να «ανεβάσει» προς τη διεπιφάνεια μια μάζα διαλύματος πλούσια σε *LiBr*, αυτή θα έχει υψηλότερη επιφανειακή τάση (σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 4.10) από τις παρακείμενες, αν φθάσει στη διεπιφάνεια, θα τις «τραβάει» και θα τείνει να επιστρέψει πάλι κάτω. Επομένως, η διαταραχή αυτή είναι ευσταθής, δε θα προκαλέσει ροή. Αντιθέτως, παρουσία επιφανειοδραστικού η επιφανειακή τάση μειώνεται με την αύξηση της συγκεντρώσεως του *LiBr* κι αν μια διαταραχή τείνει να ανεβάσει μια πιο πλούσια σε αυτό μάζα, οι παρακείμενές της στη διεπιφάνεια, αραιότερες σε άλας λόγω της απορρόφησης, θα την εφελκούν. Έτσι, δημιουργούνται κλίση επιφανειακής τάσεως, οι περιοχές με μεγαλύτερη συγκέντρωση σε νερό εφελκούν την πυκνότερη σε *LiBr* και εμφανίζεται στον υμένα ροή Marangoni (Σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11: Ροή Marangoni λόγω κλίσεων διεπιφανειακής συγκεντρώσεως σε υμένα νερού-*LiBr* με *n*-octanol

4.3 Το επιφανειοδραστικό SDS

Το *SDS*, μια πολύ κοινή επιφανειοδραστική ουσία, έχει χημικό τύπο $C_{12}H_{25}SO_4Na$ και πλήρη ονομασία Sodium Dodecyl Sulfate και sodium lauryl sulfate ή στην ελληνική γλώσσα θειικό δωδεκύλιο νάτριο και λαουροθειικό νάτριο (N. Κατσάνος 1999). Η μορφή του μορίου του $CH_3(CH_2)_{11}OSO_3^-Na^+$ φαίνεται στο Σχήμα 4.12. Το οργανικό τμήμα του αποτελεί την υδρόφοβη ουρά και η θειϊκή ομάδα την υδρόφιλη κεφαλή. Είναι ιονικό και μάλιστα ανιονικό επιφανειοδραστικό, καθώς στο διάλυμα διίσταται και το ανιόν προσροφάται στη διεπιφάνεια, ενώ το κατιόν νατρίου παραμένει στην κυρίως μάζα της υγρής φάσης. Είναι διαλυτό στο νερό, ωστόσο η διαλυτότητά του είναι πολύ περιορισμένη, εκδηλώνει έντονη προτίμηση για τη διεπιφάνεια.



Σχήμα 4.12: Μορφή και διάθεση του *SDS* (Πηγή: <https://leveling.en.made-in-china.com> 2018)

Επιηρεάζει την επιφανειακή τάση και λειτουργεί ως ισχυρός σταθεροποιητής των διεπιφανειακών διαταραχών, όπως έχει προκύψει από πειραματικές μελέτες (G. Karapetsas 2013). Πολυάριθμα πειράματα διεξάγονται χρησιμοποιώντας το, επομένως, απανιτάται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία, όπου και διατίθενται πολλά δεδομένα (A. Prosser 2001). Στην περίπτωση του το μοντέλο Langmuir μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ψευδο-μη-ιονικό μοντέλο. Οι A. Prosser et al. (2001) χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα παραθέτουν τις σταθερές K και Γ_{∞} για διάφορες τιμές αλατιότητας του διαλύματος. Κάποιες από αυτές παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα 4.1.

Αλατιότητα [$NaCl$] (mM)	K ($\frac{m^3}{mol}$)	Γ_{∞} ($\cdot 10^{-6} \frac{mol}{m^2}$)
0	0.0847	13
10	3.7	4.16
100	32.5	3.83

Πίνακας 4.1: Τιμές σταθερών K και Γ_{∞} για διάφορες αλατιότητες του διαλύματος νερού-*SDS* (Πηγή: A. Prosser et al. 2001)

Κεφάλαιο 5

Μοντελοποίηση του προβλήματος

5.1 Ο στόχος της εργασίας-Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, η εργασία αυτή ασχολείται με τον απορροφητή του συστήματος ψύξεως με απορρόφηση που χρησιμοποιεί το ζεύγος νερό-βρωμιούχο λίθιο. Επιδιώκεται να μελετηθεί ο πίπτων υμένας κατά την απορρόφηση υδρατμού στο υγρό διάλυμα το οποίο εκτός από το νερό και το άλας φέρει εντός του και ποσότητα επιφανειοδραστικής ουσίας διαλυτής στην κυρίως μάζα. Ο στόχος δεν είναι μια λεπτομερής περιγραφή των κατανομών των μεγεθών κατά μήκος της ροής σαν εκείνες του κεφαλαίου 3. Ο στόχος είναι να πραγματοποιηθεί γραμμική ανάλυση ευστάθειας στη διεπιφάνεια, ώστε να παρατηρηθεί πώς η παρουσία του επιφανειοδραστικού μπορεί να επιδράσει σε τυχόν εγειρόμενες διαταραχές και στην απόδοση της διεργασίας, δηλαδή στην απορρόφηση του ατμού.

Κατ' αρχάς, η γραμμική ανάλυση ευστάθειας πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια τομή του υμένα ($z - z'$ Σχήμα 5.1), όπου θεωρείται πως η ροή βρίσκεται σε μια δεδομένη μόνιμη κατάσταση (γνωστή είτε αναλυτικώς είτε αριθμητικώς), η οποία αποτελεί λύση των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται και βασική λύση (P. Drazin 2002). Στην πορεία η βασική λύση διαταράσσεται, δηλαδή θεωρείται πως στη ροή επιβάλλεται μια νέα κατάσταση η οποία, αποκλίνει ελαχίστως από την προηγούμενη. Με αυτόν τον τρόπο, στο όριο που η διαταραχή αυτή τείνει στο μηδέν οι εξισώσεις καθίστανται γραμμικές και μπορεί να προβλεφθεί η μορφή της λύσης τους με χρήση ιδιομορφών (normal mode analysis), βήμα που θα εξηγηθεί περαιτέρω στο κεφάλαιο 8, όπου πραγματοποιείται. Αποκτάται, έτσι, ένα πρόβλημα ιδιοτιμών από το οποίο, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές η βασική λύση χαρακτηρίζεται ευσταθής, αν όλες είναι αρνητικές ή έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και ασταθής, αν έστω και μια είναι θετική ή έχει θετικό πραγματικό μέρος (P. Drazin 2002).

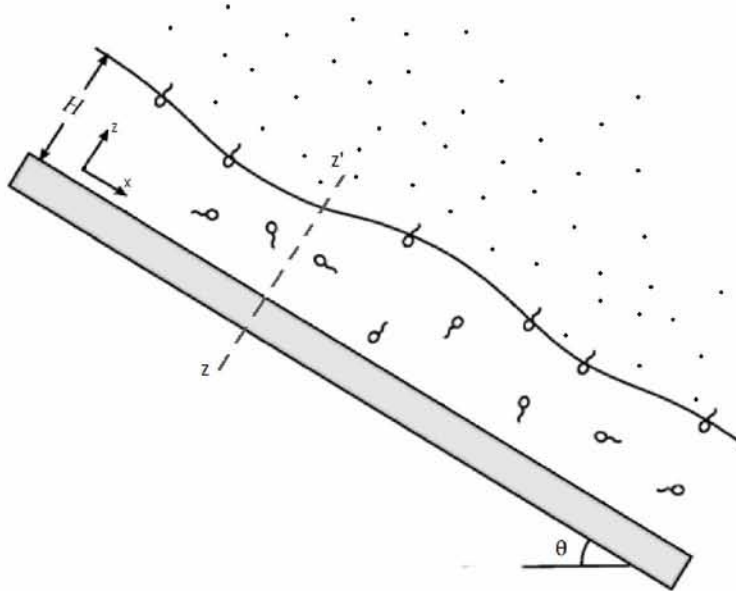
Επομένως, τη μοντελοποίηση του προβλήματος ακολουθούν η αδιαστατοποίηση, η γραμμικοποίηση και η ανάλυση ιδιομορφών μέχρι να αποκτηθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών από το οποίο είναι δυνατή η απόκτηση αποτελεσμάτων.

5.2 Περιγραφή προβλήματος και επιλογή εξισώσεων

Επί απείρου, επιπέδου, στερεού υποστρώματος κεκλιμένου κατά γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο σχηματίζεται πίπτων υμένας που αποτελεί υγρό διάλυμα $H_2O - LiBr$ και βρίσκεται σε επαφή με ατμό νερού σε σταθερή πίεση p_v . Ο ατμός απορροφάται στην υγρή φάση μέσω συμπύκνωσης στη διεπιφάνεια, οπότε εκλύεται θερμότητα που θεωρείται πως προσδίδεται αποκλειστικά στην υγρή φάση και καθόλου στην αέρια, λόγω της πολύ μεγαλύτερης θερμικής αγωγιμότητας της πρώτης. Το άλας είναι μη πιητικό, ώστε η αέρια φάση αποτελείται αποκλειστικά από νερό. Το διάλυμα θεωρείται πως συμπεριφέρεται ως νευτωνικό, ασυμπίεστο ρευστό οι ιδιότητες του οποίου (πυκνότητα ρ , κινηματικό ιξώδες ν , διαχυτικότητα D , θερμοδιαχυτότητα a , θερμική αγωγιμότητα k) παραμένουν σταθερές.

Ο υγρός υμένας εκτός από το άλας φέρει και ποσότητα επιφανειοδραστικής ουσίας διαλυτής στην κυρίως μάζα του σε συγκέντρωση μικρότερη από την κρίσιμη σχηματισμού μικυλλίων. Το επιφανειοδραστικό

επιλέγεται να μπορεί να είναι και πιητικό, αν και δε συμβαίνει στις ουσίες μεγάλου μοριακού βάρους που χρησιμοποιούνται συνήθως, ώστε να είναι δυνατή σύγκριση με άλλες εργασίες της βιβλιογραφίας που έχουν αυτή την παραδοχή. Θεωρείται πως προσροφάται μόνο στη διεπιφάνεια υγρού-ατμού κι όχι στο στερεό τοίχωμα, αν και στην πραγματικότητα μπορεί να συμβαίνει κι αυτό.



Σχήμα 5.1: Απορρόφηση υδρατμού σε πίπτονα υμένα με επιφανειοδραστικό

Για την περιγραφή του προβλήματος χρησιμοποιείται ορθοκανονικό (καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων (x, z) του οποίου ο x άξονας δείχνει στη διεύθυνση ροής και ο z στην εγκάρσια. Η ανάγκη ενός y άξονα στη διεύθυνση του βάθους εκλείπει, διότι το πρόβλημα είναι διδιάστατο (σύμφωνα με το θεώρημα του Squire, για εύρεση του ελαχίστου κρίσιμου αριθμού Reynolds επαρκεί η μελέτη διαταραχών σε δυο διαστάσεις (P. Drazin 2002)). Το στερεό τοίχωμα βρίσκεται στη θέση $z = 0$ και η διεπιφάνεια που έχει τη δυνατότητα να καμπυλώνεται στο ύψος $z = h(x, t)$ σε κάθε θέση x κάθε χρονική στιγμή t .

5.2.1 Μεταφορά ορμής

Έστω ότι η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση ροής είναι u και στην εγκάρσια διεύθυνση w , ώστε $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z$, όπου \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_z τα μοναδιαία διανύσματα στις αντίστοιχες διευθύνσεις. Έτσι, η μεταφορά ορμής μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση της συνέχειας και τις εξισώσεις Navier-Stokes ως:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g} = 0 \quad (5.2)$$

σε διανυσματική μορφή ή σε αλγεβρική στις διευθύνσεις x, z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - g_x = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g_z = 0 \quad (5.5)$$

όπου $g_x = g \sin\theta$, $g_z = -g \cos\theta$ οι αλγεβρικές τιμές των συνιστωσών της επιτάχυνσης της βαρύτητας g .

Για την ολοκλήρωση της μεταφοράς ορμής επιβάλλονται και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Στο στερεό τοίχωμα $z = 0$ θεωρείται μη ολίσθηση και μη διείσδυση της ορμής, επομένως:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow u = w = 0 \quad (5.6)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια $z = h(x, t)$ επιβάλλονται μια κινηματική συνθήκη και το ισοζύγιο δυνάμεων, που οφείλει να ικανοποιείται επί αυτής, διότι η διεπιφάνεια δεν έχει μάζα και αδράνεια. Σε ό,τι αφορά την κινηματική συνοριακή συνθήκη αυτή είναι η:

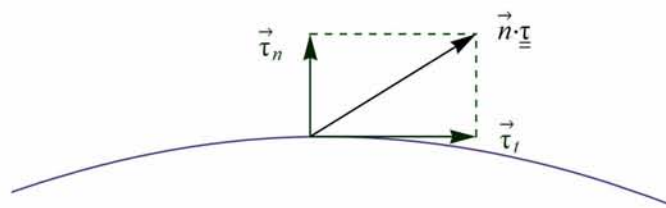
$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \acute{\eta} \quad h_t + u h_x = w \quad (5.7)$$

η ίδια που χρησιμοποιούν οι Karapetsas & Bontozoglou (2013 και 2014) και αποκτάται από τους ακόλουθους συλλογισμούς. Η διεπιφάνεια υγρού-ατμού δεν αποτελεί ξεχωριστό σώμα από τον υμένα. Την αποτελούν τα τελευταία μόρια του διαλύματος που βρίσκονται σε επαφή με τον ατμό. Η κίνηση της «ακριτικής» αυτής μάζας του υγρού αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση $z = h(x, t)$ της ελεύθερης επιφάνειας και σχετίζεται με την εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας w , το ρυθμό μεταβολής της θέσης στην εγκάρσια διεύθυνση. Ακόμη, όπως όταν σε ένα υγρό ρεύμα τοποθετείται φελλός και παρασυρόμενος βρίσκεται διαρκώς περιβρεχόμενος από την ίδια μάζα ρευστού, έτσι κι εδώ, «ακολουθώντας» τη μάζα του νερού στη διεπιφάνεια, παρατηρείται πως η θέση της μεταβάλλεται σύμφωνα με την υλική παράγωγο $\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ στο διδιάστατο πρόβλημα. Δηλαδή,

$$\frac{Dh}{Dt} = w \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$$

ο τρόπος που μεταβάλλεται το h ακολουθώντας μια μάζα νερού στη διεπιφάνεια ισούται με την w συνιστώσα της ταχύτητάς του.

Το ισοζύγιο δυνάμεων στην καμπυλωμένη, εν γένει, διεπιφάνεια αναλύεται σε δυο συνιστώσες, μια κάθετη και μια εφαπτομενική. Αν $\boldsymbol{\tau}$ ο τανυστής των τάσεων του ρευστού και \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, αυτή δέχεται δύναμη $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ με κάθετη συνιστώσα $\tau_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ και εφαπτομενική $\tau_t = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2, αν \mathbf{t} το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα.

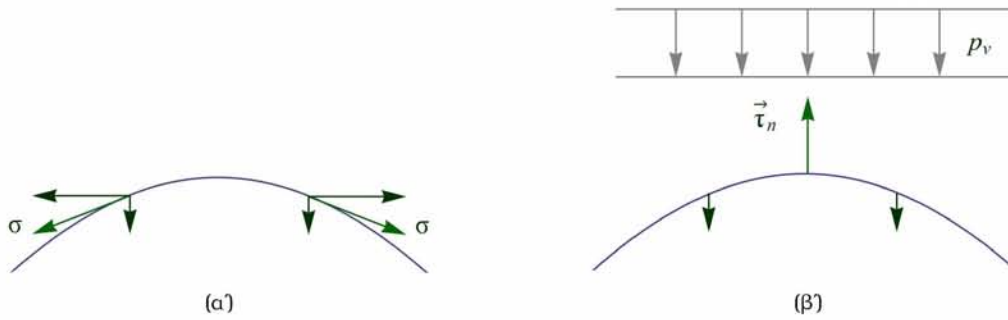


Σχήμα 5.2: Ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια

Στην κάθετη διεύθυνση ισχύει:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -p_v + 2\kappa\sigma \quad (5.8)$$

όπου p_v η πίεση του ατμού, κ η καμπυλότητα της διεπιφάνειας και σ η επιφανειακή τάση. Η επιφανειακή τάση είναι πάντα εφαπτομενική στο σημείο μιας μελετώμενης επιφάνειας και αναλύεται σε συνιστώσα παράλληλη και κάθετη στη διεύθυνση ροής. Το μέγεθος των συνιστωσών καθορίζεται από την καμπυλότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι τόσο πιο αυξημένη είναι η κάθετη συνιστώσα (Σχήμα 5.3). Συνήθως, σε ένα μήκος καμπύλης, οι οριζόντιες συνιστώσες αλληλοεξουδετερώνονται. Έτσι, την τ_n εξισορροπούν η πίεση που ασκεί ο ατμός και οι κάθετες στη διεύθυνση ροής συνιστώσες της επιφανειακής τάσεως.



Σχήμα 5.3: Επιφανειακή τάση (α) και ισοζύγιο δυνάμεων στην κατακόρυφη διεύθυνση (β)

Στην εφαπτομενική διεύθυνση ισχύει:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma \quad (5.9)$$

αντί της συνηθισμένης σχέσης $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = 0$, λόγω της παρουσίας του επιφανειοδραστικού, αφού η μη ομοιόμορφη κατανομή του οδηγεί σε κλίσεις επιφανειακής τάσεως στη διεπιφάνεια (Σχήμα 5.4) και διατηρούνται οριζόντιες συνιστώσες σ . Με ∇_s συμβολίζεται ο επιφανειακός τελεστής.



Σχήμα 5.4: Υπαρξη διατμητικών τάσεων λόγω κλίσεων συγκεντρώσεως επιφανειοδραστικού

5.2.2 Μεταφορά νερού και θερμότητας

Εκτός από ορμή ο ρέων υμένας μεταφέρει και το ψυκτικό που απορροφάται. Όμως, κατά την απορρόφηση, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, εκλύεται και θερμότητα που μεταφέρεται κι αυτή με τον υμένα. Οι εξισώσεις μεταφοράς θερμότητας και μάζας νερού, αν T η θερμοκρασία και \mathbb{C} η συγκέντρωση του νερού, είναι:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} - D \left(\frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.11)$$

Τα δυο φαινόμενα είναι συζευγμένα στη διεπιφάνεια, όπου ισχύουν η σχέση ισορροπίας των δυο φάσεων και ένα ισοζύγιο ενέργειας. Η σχέση ισορροπίας που συνδέει τη διεπιφανειακή θερμοκρασία T_i με τη διεπιφανειακή συγκέντρωση \mathbb{C}_i λαμβάνεται γραμμική της μορφής:

$$\mathbb{C}_i = aT_i + \beta \quad (5.12)$$

Οι σταθερές a και β προέρχονται από θερμοδυναμικά δεδομένα για το διάλυμα $H_2O - LiBr$. Η παρουσία του επιφανειοδραστικού, δεδομένης της μικρής ποσότητας που προστίθεται, θεωρείται πως δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά του ζεύγους $H_2O - LiBr$ ούτε επιδρά στο χημικό δυναμικό του νερού στην υγρή φάση, ώστε οι πληροφορίες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ξανά για να περιγράψουν την ισορροπία των δυο φάσεων. Η χρήση του γραμμικού μοντέλου ισορροπίας δεν είναι αβάσιμη και είναι πολύ κοινή στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, ο Grossman (1983) αναφέρει πως η εγκυρότητα της γραμμικής σχέσης έχει ελεγχθεί για τα

ζεύγη $H_2O - LiBr$ και $H_2O - LiCl$ και ισχύει για μεγάλο εύρος θερμοκρασιών και συγκεντρώσεων, ενώ οι Hofmann et al. (2012) παραθέτουν πως «η προσέγγιση αυτή είναι αποδεκτή για $H_2O - LiBr$ τουλάχιστον σε χαμηλές πιέσεις λειτουργίας του συστήματος».

Παράλληλα, στη διεπιφάνεια ισχύει και η συνθήκη

$$k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{z=h} = H_a D \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{z=h} \quad \text{ή} \quad k \partial_n T \Big|_{z=h} = H_a D \partial_n C \Big|_{z=h} \quad (5.13)$$

όπου $H_a = \left[\frac{J}{mol} \right]$ η διαφορά ειδικής ενθαλπίας του νερού στην αέρια και την υγρή φάση. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης $q = -k \partial_n T \Big|_{z=h}$ εκφράζει την ειδική ροή θερμότητας, ενώ ο όρος $n = -D \partial_n C \Big|_{z=h}$ την ειδική γραμμομοριακή ροή του υδρατιμού μέσω της διεπιφάνειας προς τον υμένα. Δηλαδή, αν απορροφώνται $n \frac{mol}{m^2s}$ εκλύονται $n H_a \frac{J}{m^2s}$, η ειδική ροή θερμότητας ισούται ακριβώς με την εκλύομενη θερμότητα από την απορροφώμενη μάζα, θεωρώντας πως δε θα μεταδοθεί θερμότητα και στην αέρια φάση κατά τη διεργασία αυτή.

Το τοίχωμα, όσον αφορά τη μεταφορά θερμότητας, επιλέγεται ισοθερμοκρασιακό:

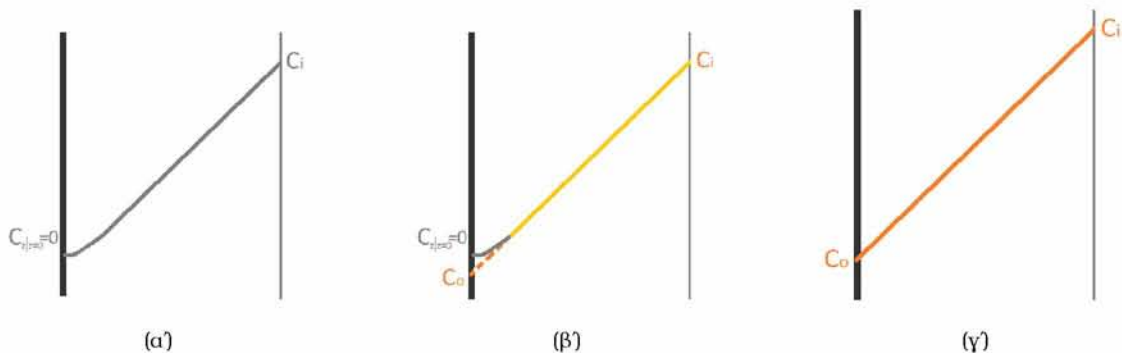
$$T = T_o \quad (5.14)$$

παρά το ότι μια τέτοια θεώρηση έχει αποδειχθεί υπερβολικά απλή για το πρόβλημα και συνθήκες μικτού τύπου προτείνονται ως καταλληλότερες (Hofmann 2012). Η παραδοχή αυτή γίνεται θεωρώντας πως ο υμένας ψύχεται με ρευστό που υφίσταται μικρή θερμοκρασιακή μεταβολή ($2 - 3^\circ C$) και κατά συνέπεια το στερεό υπόστρωμα βρίσκεται περίπου στη μέση θερμοκρασία του. Ακόμη, επαναλαμβάνεται πως ο στόχος της παρούσας εργασίας δεν είναι η εξαγωγή κατανομών για τα μεγέθη αλλά η ανάλυση γραμμικής ευστάθειας στην ελεύθερη επιφάνεια. Δηλαδή, περιορίζεται σε περιοχές κοντά στο $z = h(x, t)$, μακριά από το τοίχωμα και δεν αναμένεται η προσέγγιση αυτή να επηρεάσει σημαντικά τα αποτελέσματα.

Παρομοίως, για τη μεταφορά μάζας, παρά το ότι η πιο σωστή συνθήκη είναι η μη διαπερατότητα του τοιχώματος $\partial_z C \Big|_{z=0} = 0$, επιλέγεται ξανά συνθήκη Diriclet:

$$C = C_o \quad (5.15)$$

Στην κυρίως μάζα του υμένα και σε μόνιμες συνθήκες το προφίλ της συγκεντρώσεως του νερού C θα είναι γραμμικό, μεγαλύτερη ποσότητα θα βρίσκεται στη διεπιφάνεια, όπου συμβαίνει η απορρόφησή του και μικρότερη προς τα μέσα. Η γραμμικότητα αυτή οφείλει να μεταβληθεί κοντά στο μη διαπερατό τοίχωμα στο οποίο η κατανομή καταλήγει καθέτως, καθιστώντας το προφίλ πολυπλοκότερο (Σχήμα 5.5a). Θεωρώντας ότι η μεταβολή αυτή πραγματοποιείται πολύ κοντά στο στερεό (Σχήμα 5.5b), άρα μακριά από την επιφάνεια και λαμβάνοντας υπόψιν πως στόχος είναι η μελέτη διεπιφανειακών φαινομένων η εξέλιξη των οποίων εκτιμάται ότι δε θα επηρεαστεί από μια τροποποίηση σε τόσο μακρινά σημεία, προκειμένου να απλοποιηθεί η μορφή της βασικής λύσης, εφαρμόζεται η συνθήκη τιμής. Δηλαδή υιοθετείται πλασματική συνθήκη που παραπέμπει σε διαπερατό τοίχωμα με την υπόθεση ότι η απόκλιση από τη γραμμικότητα είναι ενιοπισμένη σε ένα πολύ μικρό μέρος του υμένα κοντά στο $z = 0$ και κέρδος τη γραμμική κατανομή του C .



Σχήμα 5.5: Κανονικό προφίλ συγκεντρώσεως (α), μικρή περιοχή με καμπυλότητα (β) και τελική υπόθεση (γ)

5.2.3 Μεταφορά επιφανειοδραστικού

Τέλος, ο υγρός υμένας μεταφέρει και το επιφανειοδραστικό, που είναι διαλυτό στην κυρίως μάζα και προσροφάται στη διεπιφάνεια υγρού-ατμού αλλά όχι στο τοίχωμα, όπως επιτρέπουν οι Karapetsas & Bontozoglou (2013). Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι χαρακτηριστικό της ουσίας αυτής να προτιμά να βρίσκεται στη διεπιφάνεια και να εκθέτει εκτός υγρής φάσης το υδρόφοβο τμήμα της, με αποτέλεσμα η συγκέντρωσή της εκεί Γ να είναι διαφορετική από της κυρίως μάζας c και μάλιστα τόσο μεγαλύτερη όσο λιγότερο διαλυτή είναι. Για την κυρίως μάζα ισχύει:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} - D_{sb} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.16)$$

με D_{sb} να είναι η διαχυτότητα του επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα. Η τιμή της διαφέρει από την D_{ss} που ορίζεται για την επιφάνεια. Μάλιστα, η τελευταία είναι, γενικώς, σημαντικά μικρότερη, είναι ευκολότερο για ένα μόριο να κινηθεί στην κυρίως μάζα παρά στη διεπιφάνεια. Η αργή διάχυση στη διεπιφάνεια είναι σημαντική. Αν ήταν πολύ γρήγορη, το επιφανειοδραστικό θα ανακατανεμόταν ταχύτατα σε μια ενδεχόμενη διαταραχή της επιφανειακής συγκέντρωσης λόγω της συναγωγής, οι κλίσεις του Γ θα εξομαλύνονταν και η διεπιφάνεια θα έχανε την ελαστικότητά της.

Το στερεό τοίχωμα θεωρείται αδιαπέρατο στην επιφανειοδραστική ουσία:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (5.17)$$

Σε ό,τι αφορά τη διεπιφάνεια πρέπει να περιγραφούν η κίνηση του επιφανειοδραστικού κι, εφόσον είναι διαλυτό, και η ανταλλαγή του με την κυρίως μάζα. Για το δεύτερο, θεωρούνται οι αντιδράσεις προσρόφησης κι εκρόφησης (4.1) κι έτσι, η ειδική ροή προς τη διεπιφάνεια ισούται με:

$$J = k_a c|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma$$

Στην περίπτωση που το επιφανειοδραστικό είναι πιητικό υπάρχει ανταλλαγή του και με την αέρια φάση με σταθερά μεταφοράς μάζας k_G . Στην εξίσωση προστίθεται ο όρος $-k_G(\Gamma - \Gamma_i)$, όπου Γ_i η διεπιφανειακή συγκέντρωση για διεπιφάνεια σε ισορροπία με τον ατμό της ουσίας αυτής.

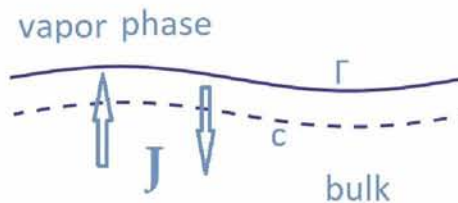
$$J = k_a c|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma - k_G(\Gamma - \Gamma_i)$$

Αυτό ισχύει από την πλευρά της διεπιφάνειας. Από την πλευρά της κυρίως μάζας, η ειδική ροή του επιφανειοδραστικού προς τη διεπιφάνεια εκφράζεται με το νόμο του Fick:

$$J = -D_{sb} \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{z=h}$$

Επειδή, όμως, η ειδική ροή είναι η ίδια ειδομένη από δυο πλευρές, οι εξισώσεις ανταλλαγής συνδυάζονται:

$$J = k_a c|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma - k_G(\Gamma - \Gamma_i) = -D_{sb} \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{z=h} \quad (5.18)$$



Σχήμα 5.6: Ανταλλαγή επιφανειοδραστικού μεταξύ διεπιφάνειας και κυρίως μάζας

Τέλος, η μεταφορά του επιφανειοδραστικού επί της διεπιφάνειας περιγράφεται με το επιφανειακό ισοζύγιο που προτείνουν οι Pereira & Kalliadasis (2008):

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Gamma \nabla_s \cdot \mathbf{u} = D_{s_s} \nabla_s^2 \Gamma + J \quad (5.19)$$

και προκύπτει παρακολουθώντας τη μεταβολή της συγκέντρωσης Γ μιας επιφανειακής μάζας νερού. Ο επιφανειακός τελεστής ∇_s συζητάται στο επόμενο κεφάλαιο. Οι πρώτοι δυο όροι αποτελούν την υλική παράγωγο $\frac{D\Gamma}{Dt}$ και αφορούν τη συσσώρευση και τη μεταφορά με συναγωγή. Στο δεξιό μέλος ο πρώτος όρος αφορά την επιφανειακή διάχυση και ο δεύτερος την ανταλλαγή με την κυρίως μάζα. Ο τελευταίος όρος του πρώτου μέλους περιγράφει τη μεταβολή στην επιφανειακή συγκέντρωση της ακολουθούμενης μάζας ως αποτέλεσμα της μεταβολής της επιφάνειας που καταλαμβάνει. Οι επιφανειακές ροές που επάγει το επιφανειοδραστικό έχουν σαν αποτέλεσμα η μάζα που μελετάται να αναπτύσσει διαφορετικές ταχύτητες στις διάφορες κατευθύνσεις με αποτέλεσμα να ευρύνεται, οπότε το επιφανειοδραστικό περιέχεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια και η επιφανειακή συγκέντρωση μειώνεται ή να συρρικνώνεται, οπότε το επιφανειοδραστικό περιέχεται σε μικρότερη επιφάνεια και η επιφανειακή συγκέντρωση αυξάνεται. Συνολικά, η επιφανειακή συγκέντρωση μεταβάλλεται λόγω συσσώρευσης, συναγωγής, επιφανειακής διάχυσης, ανταλλαγής με την κυρίως μάζα και μεταβολής της καταλαμβανόμενης επιφάνειας, λόγω των επιφανειακών ροών.

5.2.4 Συνολικό πρόβλημα

Από τα μεγέθη που ορίστηκαν όλα μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο αλλά σε ό,τι αφορά το χώρο δεν εξαρτώνται όλα από δύο διαστάσεις. Συγκεκριμένα, η θερμοκρασία, η πίεση, η συγκέντρωση του νερού, η ταχύτητα, η συγκέντρωση επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα είναι χωρικά μεγέθη και εξαρτώνται και από τις δυο διαστάσεις του χώρου ($T = T(t, x, z)$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}(t, x, z)$, $p = p(t, x, z)$, $c = c(t, x, z)$), ενώ η θέση της διεπιφάνειας, η επιφανειακή συγκέντρωση, η επιφανειακή τάση είναι επιφανειακά μεγέθη και εξαρτώνται μόνο από τη μια διεύθυνση του χώρου ($h = h(t, x)$, $\Gamma = \Gamma(t, x)$, $\sigma = \sigma(t, x)$).

Τελικώς, το συνολικό πρόβλημα αποτελείται από πέντε εξισώσεις πεδίου και δεκατρείς συνοριακές συνθήκες.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - g_x = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g_z = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} - D \left(\frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} - D_{s_b} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.25)$$

$$\circ z = 0$$

$$u = w = 0 \quad (5.26)$$

$$T = T_o \quad (5.27)$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_o \quad (5.28)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (5.29)$$

$$\circ z = h$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad (5.30)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -p_v + 2\kappa\sigma \quad (5.31)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma \quad (5.32)$$

$$\mathbb{C}_i = aT_i + \beta \quad (5.33)$$

$$k \partial_n T \Big|_{z=h} = H_a D \partial_n \mathbb{C} \Big|_{z=h} \quad (5.34)$$

$$J = k_a c \Big|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma - k_G (\Gamma - \Gamma_i) = -D_{s_b} \left. \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} \right|_{z=h} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Gamma \nabla_s \cdot \mathbf{u} = D_{s_s} \nabla_s^2 \Gamma + J \quad (5.36)$$

5.3 Μόνιμη λύση

Για την εξαγωγή της μόνιμης λύσης που θα έχει και το ρόλο της βασικής λύσης, ο υμένας θεωρείται αδιατάρακτος με πάχος H . Έτσι, το κάθετο διάνυσμα είναι το $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ και ο επιφανειακός τελεστής αφορά κλίση μόνο στη διεύθυνση ροής $\nabla_s = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x$. Ο υμένας δεν έχει ταχύτητα στην εγκάρσια διεύθυνση $w = 0$. Ακόμη, θεωρείται πως η μεταβολή των μεγεθών στη διεύθυνση ροής είναι αρκετά αργή, ιδίως εν συγκρίσει με τις μεταβολές της ελεύθερης επιφάνειας που πρόκειται να μελετηθούν και είναι σημαντικά ταχύτερες. Χάρη σε αυτή την υπόθεση μπορούν να αγνοηθούν οι παράγωγοι στη x διεύθυνση. Οι χρονικές παράγωγοι εκλείπουν απευθείας, εφόσον πρόκειται για μόνιμη κατάσταση. Η επιφανειακή συγκέντρωση του επιφανειοδραστικού, άρα και η επιφανειακή τάση είναι σταθερές $\Gamma(x) = \Gamma$ και $\sigma(x) = \sigma$, ώστε δεν επάγονται επιφανειακές ροές και στη διεπιφάνεια δεν ασκούνται διατμητικές τάσεις: $\boldsymbol{\tau} = -\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0$ από το νόμο του Newton.

Από τις εξισώσεις μεταφοράς ορμής προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(z)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - g_x = 0 \Rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g_x = 0 \Rightarrow$$

$$u(z) = -\frac{g_x}{2\nu} z^2 + c_1 z + c_2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - g_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g_z \Rightarrow p = \rho g_z z + c_3$$

Όμως στο τοίχωμα $u = 0 \Rightarrow u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ και στην αδιατάρακτη διεπιφάνεια $\tau = 0 \Rightarrow u_z|_{z=H} \Rightarrow c_1 = \frac{H g_x}{\nu}$, επομένως το προφίλ ταχύτητας στις μόνιμες συνθήκες είναι:

$$u(z) = -\frac{g_x}{2\nu} z^2 + \frac{g_x}{\nu} H z = \frac{g_x}{\nu} \left(H z - \frac{z^2}{2} \right) = \frac{g \sin \vartheta}{\nu} \left(H z - \frac{z^2}{2} \right) \quad (5.37)$$

παραβολικό, η γνωστή λύση Nusselt. Στην ελεύθερη επιφάνεια $u = u(H) = U = \frac{g \sin \vartheta H^2}{2\nu}$. Η πίεση είναι συνάρτηση τόσο του x όσο και του z : $p(x, z) = \rho g_z z + c_3(x)$. Όμως $p_x = 0 \Rightarrow c_3 = \text{constant}$, άρα $p(x, z) = \rho g_z z + c_3$. Ο υμένας στην επιφάνεια δέχεται την πίεση του αιμού και στο τοίχωμα την πίεση του αιμού και την υδροστατική πίεση του υπερκείμενου ρευστού, που είναι όλο μεγαλύτερη όσο μικρότερη είναι η γωνία κλίσης.

$$@z = 0: \quad p = p_v \quad \text{και}$$

$$@z = 0: \quad p = p_v - \rho g_z H$$

Άρα

$$p(x, z) = \rho g_z z + p_v + \rho g_z H \Rightarrow p(x, z) = -\rho g \cos \vartheta z + p_v + \rho g \cos \vartheta H \Rightarrow$$

$$p(x, z) = \rho g \cos \vartheta (H - z) + p_v \quad (5.38)$$

Στη μεταφορά θερμότητας και μάζας με απαλοισή των αντίστοιχων όρων προκύπτει:

$$T_z = 0 \Rightarrow T(z) = c_4 T + c_5 \quad \text{και} \quad C_z = 0 \Rightarrow C(z) = c_6 C + c_7$$

Όμως, στο στερεό υπόστρωμα $T = T_o$ και $C = C_o$ και στη διεπιφάνεια $T = T_i$ και $C = C_i$. Έτσι $c_4 = \frac{T_i - T_o}{H}$, $c_5 = T_o$, $c_6 = \frac{C_i - C_o}{H}$ και $c_7 = C_o$, άρα:

$$T(z) = \frac{T_i - T_o}{H} T + T_o \quad (5.39)$$

$$C(z) = \frac{C_i - C_o}{H} C + C_o \quad (5.40)$$

Από τη συνθήκη της σύζευξης τους προκύπτει ότι:

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H} = H_a D \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H} \Rightarrow k \frac{T_i - T_o}{H} = H_a D \frac{C_i - C_o}{H} \Rightarrow$$

$$T_i - T_o = \frac{H_a D}{k} (C_i - C_o) \quad (5.41)$$

Τέλος, για τη μεταφορά του επιφανειοδραστικού,

$$c(z) = c \quad (5.42)$$

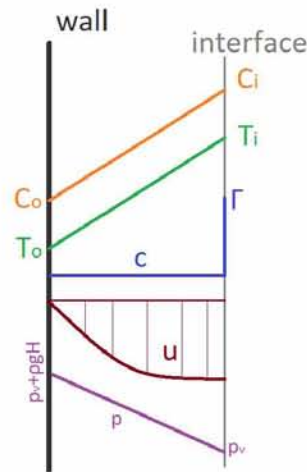
η ουσία αυτή έχει ομοιόμορφη συγκέντρωση στην κυρίως μάζα του υμένα. Επιπλέον, η διεπιφάνεια θα βρίσκεται σε ισορροπία με την κυρίως μάζα, δηλαδή η ειδική ροή του επιφανειοδραστικού θα μηδενίζεται:

$J = 0$. Αυτό προκύπτει από το επιφανειακό ισοζύγιο. Από την κινητική, αγνοώντας την πιητικότητα του επιφανειοδραστικού:

$$k_a c|_{z=H} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma = 0 \Rightarrow c = \frac{k_d \Gamma}{k_a (\Gamma_\infty - \Gamma)} \quad (5.43)$$

και από την ειδική ροή από την κυρίως μάζα προς τη διεπιφάνεια:

$$\frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (5.44)$$



Σχήμα 5.7: Σκαρίφημα μόνιμης λύσεως

Συνολικά, η μόνιμη λύση είναι η ακόλουθη:

$$w = 0 \quad (5.45)$$

$$u(z) = \frac{g \sin \vartheta}{\nu} \left(H z - \frac{z^2}{2} \right) \quad (5.46)$$

$$p(x, z) = \rho g \cos \vartheta (H - z) + p_v \quad (5.47)$$

$$C(z) = \frac{C_i - C_o}{H} C + C_o \quad (5.48)$$

$$T(z) = \frac{T_i - T_o}{H} T + T_o \quad (5.49)$$

$$J = 0 \quad (5.50)$$

$$T_i - T_o = \frac{H_a D}{k} (C_i - C_o) \quad (5.51)$$

$$\Gamma(x) = \Gamma \quad (5.52)$$

$$c = \frac{k_d \Gamma}{k_a (\Gamma_\infty - \Gamma)} \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (5.54)$$

Κεφάλαιο 6

Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (5.20)-(5.25) υπό τις συνοριακές συνθήκες (5.26)-(5.36) το οποίο δομήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για να περιγράψει το πρόβλημα του πίπτοντος υμένα με επιφανειοδραστικό που απορροφά ατμό του πιητικού συστατικού του πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Η ενέργεια αυτή επιφέρει το μεγάλο πλεονέκτημα το νέο σύστημα εξισώσεων να μπορεί περιγράψει μεγάλο αριθμό πραγματικών συστημάτων. Αυτό συμβαίνει, διότι οι επιμέρους ιδιότητες, διαστάσεις και τα άλλα μεγέθη που αφορούν κάποιο συγκεκριμένο σύστημα ομαδοποιούνται σε κατάλληλες αδιάστατες παραμέτρους που λαμβάνουν τιμές, επιλύεται με βάση αυτές το αδιάστατο πρόβλημα που είναι κοινό για όλες τις περιπτώσεις και στο τέλος τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να αναχθούν σε διαστατά για πλήθος ειδικών προβλημάτων με την αντίστροφη διαδικασία (αποσυνθέτοντας τα αδιάστατα μεγέθη).

6.1 Ανάλυση διανυσματικών όρων

Πριν την αδιαστατοποίηση, μια ιδιαίτερος χρήσιμη κίνηση είναι η ανάλυση των όρων των συνοριακών συνθηκών που βρίσκονται σε διανυσματική μορφή. Τέτοιου χειρισμού χρήζουν οι δυναμικές συνθήκες στη διεπιφάνεια (5.31) και (5.32), το επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς του επιφανειοδραστικού (5.36), η ανταλλαγή επιφανειοδραστικού με την κυρίως μάζα (5.35) και η συνθήκη ταυτόχρονης μεταφοράς μάζας και θερμότητας στη διεπιφάνεια (5.34).

Οι δυναμικές συνοριακές συνθήκες εμπλέκουν τον τανυστή των τάσεων, τα τοπικά διανύσματα στην καμπυλωμένη διεπιφάνεια και την καμπυλότητά της. Το πρόβλημα είναι διδιάστατο στις κατευθύνσεις x , z , επομένως ο τανυστής τάσεων έχει τη γενική μορφή:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Αποκλειστικά και μόνο στη χρήση αυτής της σχέσης οι δείκτες δεν εκφράζουν παράγωγο αλλά στοιχείο του τανυστή. Τα i, j αντιστοιχούν στις διευθύνσεις x και z αντιστοίχως, ενώ οι ταχύτητες u_i, u_j στις u, w συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{u} . Με δ_{ij} δέ συμβολίζεται ο μοναδιαίος τανυστής, γνωστός ως δέλτα του Kronecker. Πιο συγκεκριμένα, οι τρεις συνιστώσες του είναι:

$$\tau_{xx} = -p\delta_{xx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -p + 2\mu u_x \quad (6.1)$$

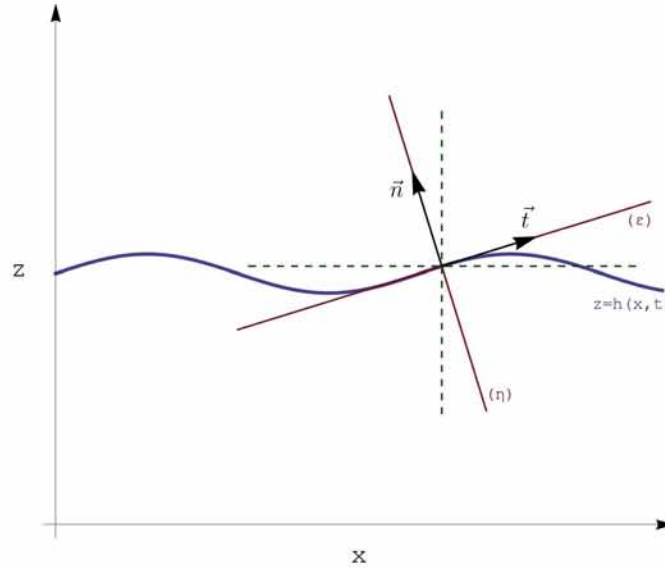
$$\tau_{zz} = -p\delta_{zz} + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = -p + 2\mu w_z \quad (6.2)$$

$$\tau_{xz} = -p\delta_{xz} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu(u_z + w_x) \quad (6.3)$$

Τα τοπικά μοναδιαία διανύσματα στη διεπιφάνεια είναι:

$$\vec{t} = \frac{(1, h_x)}{\sqrt{1 + h_x^2}} \quad \text{και} \quad \vec{n} = \frac{(-h_x, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2}} \quad (6.4)$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα (6.1). Για τον υπολογισμό τους θεωρείται στο $x - z$ επίπεδο καμπύλη $z = h(x, t)$. Σε τυχαίο σημείο άγεται η εφαπτομένη (ϵ) στην καμπύλη και η κάθετη σε αυτή (η). Επί αυτών κείνται τα ζητούμενα μοναδιαία διανύσματα \vec{t} , \vec{n} αντιστοίχως. Ο στόχος είναι να εκφραστούν στο βασικό σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι διευθύνσεις απεικονίζονται με τις διακεκομμένες γραμμές.



Σχήμα 6.1: Το κάθετο και το εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπυλωμένη διεπιφάνεια

Έστω εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{a} = (a, b)$ (επί της (ϵ) ευθείας) που αναλύεται σε δυο συνιστώσες στις διευθύνσεις x, z . Επιλέγεται αυθαιρέτως η x συνιστώσα να έχει μήκος 1: $a = 1$. Στο σημείο αυτό η κλίση της εφαπτομένης ισούται με την παράγωγο h_x ως: $h_x = \frac{b}{a} \xrightarrow{a=1} b = h_x$. Συνεπώς, $\vec{a} = (1, h_x)$. Για το κάθετο διάνυσμα, έστω \vec{k} , ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{k} = 0$, άρα $\vec{k} = (-h_x, 1)$. Προκειμένου να ληφθούν τα μοναδιαία, διαιρούνται με το κοινό τους μέτρο $\sqrt{1 + h_x^2}$, ώστε, τελικά:

$$\vec{t} = \frac{(1, h_x)}{\sqrt{1 + h_x^2}} \quad \text{και} \quad \vec{n} = \frac{(-h_x, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2}}$$

Η καμπυλότητα, με τη σειρά της, ορίζεται ως:

$$2\kappa = -\nabla_s \cdot \mathbf{n} = \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1 + h_x^2)^3}} \quad (6.5)$$

όπου ο επιφανειακός τελεστής ∇_s ορίζεται $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla$. Στο διδιάστατο πρόβλημα ισούται με:

$$\nabla_s = \frac{1}{1 + h_x^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} + h_x \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Παρατίθεται συνοπτικά ο υπολογισμός. Έστω \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_z τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις x και z αντιστοίχως και $n_x = -\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}$, $n_z = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}$ οι συνιστώσες του κάθετου διανύσματος, ώστε $\mathbf{n} = n_x\mathbf{e}_x + n_z\mathbf{e}_z$.

$$\mathbf{n}\mathbf{n} = \left\{ n_x n_z \right\} \left\{ n_x n_z \right\} = \begin{bmatrix} n_x n_x & n_z n_x \\ n_x n_z & n_z n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_z n_x \\ n_x n_z & n_z^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+h_x^2} \begin{bmatrix} h_x^2 & -h_x \\ -h_x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1+h_x^2} \begin{bmatrix} h_x^2 & -h_x \\ -h_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+h_x^2} & \frac{h_x}{1+h_x^2} \\ \frac{h_x}{1+h_x^2} & \frac{h_x^2}{1+h_x^2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+h_x^2} & \frac{h_x}{1+h_x^2} \\ \frac{h_x}{1+h_x^2} & \frac{h_x^2}{1+h_x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+h_x^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + h_x \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αναλύονται οι διανυσματικές μορφές των συνοριακών συνθηκών.

Κάθετη δυναμική συνθήκη

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -p_v + 2\kappa\sigma}$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{bmatrix} -h_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{Bmatrix} -h_x\tau_{xx} + \tau_{xz} \\ -h_x\tau_{xz} + \tau_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{Bmatrix} -h_x\tau_{xx} + \tau_{xz} \\ -h_x\tau_{xz} + \tau_{zz} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{bmatrix} -h_x & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+h_x^2} \left[-h_x(-h_x\tau_{xx} + \tau_{xz}) - h_x\tau_{xz} + \tau_{zz} \right] = \frac{h_x^2\tau_{xx} - 2h_x\tau_{xz} + \tau_{zz}}{1+h_x^2}$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του τανυστή τάσεων και ομαδοποιώντας κάποιους όρους:

$$\begin{aligned} h_x^2\tau_{xx} - 2h_x\tau_{xz} + \tau_{zz} &= h_x^2(-p + 2\mu u_x) - 2h_x\mu(u_z + w_x) - p + 2\mu w_z = \\ &= 2h_x^2\mu u_x - p(1+h_x^2) - 2h_x\mu(u_z + w_x) + 2\mu w_z \end{aligned}$$

Και η συνοριακή συνθήκη αντικαθιστώντας τον υπολογισμό αυτό και την καμπυλότητα γίνεται:

$$\frac{1}{1+h_x^2} \left(2h_x^2\mu u_x - p(1+h_x^2) - 2h_x\mu(u_z + w_x) + 2\mu w_z \right) = -p_v + \sigma \frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2}^3} \Rightarrow$$

$$(1+h_x^2)^{1/2} \left(2h_x^2\mu u_x - p(1+h_x^2) - 2h_x\mu(u_z + w_x) + 2\mu w_z \right) = -p_v(1+h_x^2)^{3/2} + \sigma h_{xx} \Rightarrow$$

$$2\mu(1+h_x^2)^{1/2} \left(h_x^2 u_x - h_x(u_z + w_x) + w_z \right) = (p - p_v)(1+h_x^2)^{3/2} + \sigma h_{xx} \xrightarrow{:(1+h_x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{h_x^2}{1+h_x^2} u_x - \frac{h_x}{1+h_x^2} (u_z + w_x) + w_z = \frac{p - p_v}{2\mu} + \frac{\sigma h_{xx}}{2\mu(1+h_x^2)^{3/2}}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας ισχύει: $u_x + w_z = 0 \Rightarrow u_x = -w_z$ και η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\frac{h_x^2 - 1}{1+h_x^2} u_x - \frac{h_x}{1+h_x^2} (u_z + w_x) = \frac{p - p_v}{2\mu} + \frac{\sigma h_{xx}}{2\mu(1+h_x^2)^{3/2}} \quad (6.7)$$

Εφαπτομενική δυναμική συνθήκη

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma}$$

Έχοντας το γινόμενο $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ από την κάθετη συνθήκη,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{Bmatrix} -h_x \tau_{xx} + \tau_{xz} \\ -h_x \tau_{xz} + \tau_{zz} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{bmatrix} 1 & h_x \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{1+h_x^2} \left[-h_x \tau_{xx} + \tau_{xz} + h_x (-h_x \tau_{xz} + \tau_{zz}) \right] = \frac{-h_x \tau_{xx} + h_x \tau_{zz} + \tau_{xz} (1 - h_x^2)}{1+h_x^2} \end{aligned}$$

Όπου αντικαθιστώντας και πάλι τις συνιστώσες τ_{xx} , τ_{xz} , τ_{zz} :

$$\begin{aligned} -h_x \tau_{xx} + h_x \tau_{zz} + \tau_{xz} (1 - h_x^2) &= -h_x (-p + 2\mu u_x) + h_x (-p + 2\mu w_z) + \mu (1 - h_x^2) (u_z + w_z) = \\ &= 2\mu h_x (w_z - u_x) + \mu (1 - h_x^2) (u_z + w_x) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και από την εξίσωση της συνέχειας την ταχύτητα w_z ως $u_x = -w_z$:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{1+h_x^2} \left(2\mu h_x (w_z - u_x) + \mu (1 - h_x^2) (u_z + w_x) \right) = \frac{1}{1+h_x^2} \left(-4\mu h_x u_x + \mu (1 - h_x^2) (u_z + w_x) \right)$$

Σε ό,τι αφορά το δεξί μέλος:

$$\nabla_s \sigma = \frac{1}{1+h_x^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + h_x \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial \sigma}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma &= \frac{1}{1+h_x^2} \begin{Bmatrix} \sigma_x + h_x \sigma_z \\ h_x \sigma_x + h_x^2 \sigma_z \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{bmatrix} 1 & h_x \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+h_x^2)^{3/2}} (\sigma_x + h_x \sigma_z + h_x^2 \sigma_x + h_x^3 \sigma_z) = \frac{(1+h_x^2)(\sigma_x + h_x \sigma_z)}{(1+h_x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_x + h_x \sigma_z}{\sqrt{1+h_x^2}} \end{aligned}$$

Η επιφανειακή τάση, ωστόσο, αποτελεί συνάρτηση τριών άλλων μεγεθών: της συγκέντρωσης του επιφανειοδραστικού στη διεπιφάνεια, της συγκέντρωσης του νερού στο διάλυμα και της θερμοκρασίας του υμένα,

ώστε $\sigma = \sigma(\Gamma, \mathbb{C}, T)$. Από τα μεγέθη αυτά το πρώτο είναι επιφανειακό $\Gamma = \Gamma(x, t)$ και τα λοιπά δυο χωρικά $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x, z, t)$, $T = T(x, z, t)$. Επομένως, από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbb{C}} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_\mathbb{C} \mathbb{C}_x + \sigma_T T_x \\ \sigma_z &= \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbb{C}} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} = \sigma_\mathbb{C} \mathbb{C}_z + \sigma_T T_z, \quad \text{διότι } \Gamma_z = 0\end{aligned}$$

Τελικώς,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma &= \frac{\sigma_x + h_x \sigma_z}{\sqrt{1 + h_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} (\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_\mathbb{C} \mathbb{C}_x + \sigma_T T_x + h_x \sigma_\mathbb{C} \mathbb{C}_z + h_x \sigma_T T_z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} (\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_\mathbb{C} (\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z))\end{aligned}$$

Συνολικά,

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \nabla_s \sigma \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + h_x^2} \left(-4\mu h_x u_x + \mu(1 - h_x^2)(u_z + w_x) \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} (\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_\mathbb{C} (\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z)) \\ -4\mu h_x u_x + \mu(1 - h_x^2)(u_z + w_x) &= \sqrt{1 + h_x^2} (\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_\mathbb{C} (\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z))\end{aligned} \quad (6.8)$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\boxed{\Gamma_t + u \Gamma_x + \Gamma(\nabla_s \cdot \mathbf{u}) = D_{s_s} \nabla_s^2 \Gamma + J}$$

Επεξεργασία χρειάζονται ο όρος της επιφανειακής μεταφοράς $\Gamma(\nabla_s \cdot \mathbf{u})$ και ο διαχυτικός όρος $\nabla_s^2 \Gamma$, βαθμωτό μέγεθος, που δύναται να γραφεί ως $\nabla_s \cdot \nabla_s \Gamma$. Ξεκινώντας από τον δεύτερο:

$$\nabla_s \Gamma = \frac{1}{1 + h_x^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + h_x \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_x \\ h_x \Gamma_x \end{array} \right\}$$

διότι $\Gamma = \Gamma(x, t) \Rightarrow \Gamma_z = 0$ και οι όροι που το περιέχουν εκλείπουν. Εν συνεχεία:

$$\nabla_s^2 \Gamma = \nabla_s \cdot \nabla_s \Gamma = \frac{1}{1 + h_x^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} + h_x \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \cdot \left[\begin{array}{cc} \Gamma_x & h_x \Gamma_x \\ 1 + h_x^2 & 1 + h_x^2 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{1 + h_x^2} \left[\left(\frac{\Gamma_x}{1 + h_x^2} \right)_x + h_x \left(\frac{h_x \Gamma_x}{1 + h_x^2} \right)_x \right] = A$$

$$\bullet \left(\frac{\Gamma_x}{1 + h_x^2} \right)_x = \frac{1}{(1 + h_x^2)^2} (\Gamma_{xx} (1 + h_x^2) - 2\Gamma_x h_x h_{xx}) = \frac{\Gamma_{xx} + \Gamma_{xx} h_x^2 - 2\Gamma_x h_x h_{xx}}{(1 + h_x^2)^2}$$

$$\bullet \left(\frac{h_x \Gamma_x}{1+h_x^2} \right)_x = \frac{1}{(1+h_x^2)^2} \left((1+h_x^2)(\Gamma_{xx} h_x + \Gamma_x h_{xx}) - h_x \Gamma_x 2h_x h_{xx} \right) =$$

$$\frac{1}{(1+h_x^2)^2} (\Gamma_{xx} h_x + \Gamma_x h_{xx} + \Gamma_{xx} h_x^3 + \Gamma_x h_{xx} h_x^2 - 2\Gamma_x h_x^2 h_{xx})$$

Έτσι, η αρχική παράσταση γίνεται:

$$A = \frac{1}{1+h_x^2} \frac{1}{(1+h_x^2)^2} (\Gamma_{xx} + \Gamma_{xx} h_x^2 - 2\Gamma_x h_x h_{xx} + \Gamma_{xx} h_x + \Gamma_x h_{xx} + \Gamma_{xx} h_x^3 + \Gamma_x h_{xx} h_x^2 - 2\Gamma_x h_x^2 h_{xx})$$

$$= \frac{1}{(1+h_x^2)^3} [\Gamma_{xx} (1+h_x^2)^2 - \Gamma_x h_{xx} h_x (1+h_x^2)^2] = \frac{1}{(1+h_x^2)^3} [\Gamma_{xx} (1+h_x^2) - \Gamma_x h_x h_{xx}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που παρουσιάζουν οι Pereira et al. (2008). Για τον όρο της επιφανειακής μεταφοράς $\Gamma(\nabla_s \cdot \mathbf{u})$ και, ειδικότερα, για την επιφανειακή απόκλιση της ταχύτητας ισχύει:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{1+h_x^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + h_x \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \\ h_x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + h_x^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \end{array} \right\} \cdot [u \quad w]$$

$$= \frac{1}{1+h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x w_x + h_x^2 w_z) = \frac{1}{1+h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x (w_x + h_x w_z))$$

Συνθήκη σύζευξης μεταφοράς μάζας και θερμότητας

$$\boxed{k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=h} = H_a D \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=h} \quad \text{ή} \quad k \partial_n T \Big|_{z=h} = H_a D \partial_n \mathbb{C} \Big|_{z=h}}$$

Η κατευθυνόμενη παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης A ορίζεται ως $\partial_n A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} = \nabla A \cdot \mathbf{n}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} -h_x \\ 1 \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} = \frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Επομένως, για τις συναρτήσεις T και \mathbb{C} :

$$\bullet \nabla T \cdot \mathbf{n} = \partial_n T = \frac{-h_x T_x + T_z}{\sqrt{1+h_x^2}} \quad \bullet \nabla \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} = \partial_n \mathbb{C} = \frac{-h_x \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_z}{\sqrt{1+h_x^2}}$$

Όλες οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο $z = h$ και κανένας όρος δε μηδενίζεται εκ των προτέρων, εφόσον $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x, z, t)$ και $T = T(x, z, t)$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση:

$$k \frac{-h_x T_x + T_z}{\sqrt{1+h_x^2}} = H_a D \frac{-h_x \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_z}{\sqrt{1+h_x^2}} \Rightarrow k(-h_x T_x + T_z) = H_a D(-h_x \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_z) \quad (6.9)$$

Συνθήκη ανταλλαγής επιφανειοδραστικού με την κυρίως μάζα

$$J = -D_{sb} \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{z=h}$$

Απο την προηγούμενη συνοριακή συνθήκη έχει υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος.

$$\partial_n c = \frac{-h_x c_x + c_z}{\sqrt{1 + h_x^2}}$$

Έτσι,

$$J = -\frac{D_{sb}}{\sqrt{1 + h_x^2}} (-h_x c_x|_{z=h} + c_z|_{z=h}) \quad (6.10)$$

και ολοκληρώνεται το βήμα αυτό, ώστε ακολουθεί η αδιαστατοποίηση.

6.2 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

6.2.1 Οι κλίμακες

Τα εμπλεκόμενα μεγέθη αδιαστατοποιούνται με βάση χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος, όταν αυτά είναι προφανή, ενώ, όταν δε συμβαίνει αυτό, η αδιαστατοποίηση βασίζεται στη μορφή της μόνιμης λύσης.

* Μήκη: Για την αδιαστατοποίηση μεγεθών μήκους χρησιμοποιείται το εκάστοτε πάχος του αδιατάρακτου υμένα Nusselt H .

$$\bar{x} = \frac{x}{H} \quad \bar{z} = \frac{z}{H} \quad \bar{h} = \frac{h}{H}$$

* Ταχύτητες: Για την αδιαστατοποίηση ταχυτήτων χρησιμοποιείται η ταχύτητα της διεπιφάνειας του κατακόρυφου, αδιατάρακτου υμένα Nusselt $U = \frac{gH^2}{2\nu}$.

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U} \Rightarrow \bar{u} = \frac{u}{U} \quad \text{και} \quad \bar{w} = \frac{w}{U}$$

* Χρόνος: Για την αδιαστατοποίηση του χρόνου ακολουθείται η συνήθεια να χρησιμοποιείται ο λόγος του χαρακτηριστικού μήκους, εδώ H , προς τη χαρακτηριστική ταχύτητα, εδώ U .

$$\bar{t} = \frac{t}{H/U} = \frac{Ut}{H}$$

* Συγκέντρωση νερού: Από τη μόνιμη λύση για τον αδιατάρακτο υμένα Nusselt

$C = \frac{C_i - C_o}{H}z + C_o$. Έτσι, το αδιάστατο μέγεθος ορίζεται ως:

$$\tilde{C} = \frac{C - C_o}{C_i - C_o}$$

* Θερμοκρασία υμένα: Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο, από τη μόνιμη λύση για τον αδιατάρακτο υμένα

Nusselt $T = \frac{T_i - T_o}{H}z + T_o$ και η αδιάστατη θερμοκρασία ορίζεται:

$$\tilde{T} = \frac{T - T_o}{T_i - T_o}$$

* Επιφανειακή συγκέντρωση επιφανειοδραστικού: Στη διεπιφάνεια επιλέγεται ως χαρακτηριστική συγκέντρωση εκείνη που αντιστοιχεί στον κορεσμό (maximum packing) Γ_∞ .

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$$

* Συγκέντρωση επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα: Επιλέγεται ο λόγος Γ_∞/H να αποτελεί τη χαρακτηριστική συγκέντρωση στην κυρίως μάζα του υμένα, αφού το πηλίκο αυτό έχει διαστάσεις γραμμομορίων ανά μονάδα όγκου.

$$\bar{c} = \frac{c}{\Gamma_\infty/H} = \frac{cH}{\Gamma_\infty}$$

* Πίεση: Γ' ακόμη μια φορά από τη μόνιμη λύση $p = p_v + \rho g_z (H - z)$ η αδιάστατη πίεση ορίζεται:

$$\bar{p} = \frac{p - p_v}{\rho g H}$$

* Ειδική ροή επιφανειοδραστικού από τη διεπιφάνεια στην κυρίως μάζα: Χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός χαρακτηριστικού χρόνου και μέγιστης επιφανειακής συγκέντρωσης, ώστε η κλίμακα να έχει κι αυτή μονάδες γραμμομορίων ανά μονάδα χρόνου κι επιφανείας.

$$\tilde{J} = \frac{J}{\frac{\Gamma_\infty U}{H}} = \frac{JH}{\Gamma_\infty U}$$

* Επιφανειακή τάση: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες τιμές, όπως του καθαρού νερού σε δεδομένη θερμοκρασία ή του διαλύματος $H_2O - LiBr$ συγκεκριμένη σύσταση και θερμοκρασία ή και η τιμή της στη διεπιφάνεια του υμένα σε μόνιμες συνθήκες. Για περισσότερη ευκολία επιλέγεται η επιφανειακή τάση του καθαρού νερού στη θερμοκρασία λειτουργίας του απορροφητή.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_o}$$

Συνολικά, τα διαστατά μεγέθη μπορούν να εκφραστούν με βάση τα αδιάστατα:

$$x = \bar{x}H \quad z = \bar{z}H \quad h = \bar{h}H \quad u = \bar{u}U \quad w = \bar{w}U \quad t = \bar{t}\frac{H}{U}$$

$$\Gamma = \tilde{\Gamma}\Gamma_\infty \quad c = \bar{c}\frac{\Gamma_\infty}{H} \quad p = p_v + \rho g H \bar{p} \quad J = \tilde{J}\frac{\Gamma_\infty U}{H} \quad \sigma = \bar{\sigma}\sigma_o$$

$$C = C_o + \tilde{C}(C_i - C_o) \quad T = T_o + \tilde{T}(T_i - T_o)$$

6.2.2 Εξισώσεις πεδίου

Εξισώσεις Navier-Stokes

✎ x διεύθυνση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - g_x = 0$$

Υπολογίζοντας κάθε έναν όρο:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{u}U)}{\partial\left(\bar{t}\frac{H}{U}\right)} = \frac{U^2}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\bar{u}U)}{\partial(\bar{x}H)} = \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\bar{u}U)}{\partial(\bar{x}H)^2} = \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{U}{H^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p_v + \rho g H \bar{p})}{\partial(\bar{x}H)} = \frac{\rho g H}{H} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \rho g \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

Ακόμη, $g_x = g \sin\vartheta$, ϑ η γωνία του επιπέδου ροής του υμένα. Με αντικατάσταση όλων των ανωτέρω προκύπτει η αδιάστατη εξίσωση.

$$\frac{U^2}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} U \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} U \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\rho} \rho g \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \nu \frac{U}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) - g \sin\vartheta = 0$$

Βγάζοντας κοινούς παράγοντες:

$$\frac{U^2}{H} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) + g \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \sin\vartheta \right) - \nu \frac{U}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) = 0$$


Διαιρώντας με τις σταθερές και συμβολίζοντας με δείκτες τις παραγώγους:

$$\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{w} \bar{u}_z + \frac{gH}{U^2} (\bar{p}_x - \sin\vartheta) - \frac{\nu}{HU} (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{zz}) = 0$$

Στο σημείο αυτό ορίζεται ο αριθμός Reynolds $Re = \frac{HU}{\nu}$ που με την αντικατάσταση του $U = \frac{gH^2}{2\nu}$ γίνεται $Re = \frac{gH^3}{2\nu^2}$ και αποτελεί το λόγο αδρανειακών-ιξωδών δυνάμεων που επιδρούν στη ροή. Με την ίδια αντικατάσταση υπολογίζεται και το άλλο κλάσμα κλιμάκων $\frac{gH}{U^2} = \frac{4\nu^2}{gH^3} = \frac{2}{Re}$. Έτσι, αφαιρώντας πλέον και τις παύλες (ιδιαίτερος συμβολισμός των αδιάστατων μεγεθών), η αδιάστατη εξίσωση καταλήγει:

$$\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{w} \bar{u}_z + \frac{2}{Re} (\bar{p}_x - \sin\vartheta) - \frac{1}{Re} (\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{zz}) = 0 \Rightarrow$$

$$Re(u_t + u u_x + w u_z) + 2(p_x - \sin\vartheta) - u_{xx} - u_{zz} = 0 \quad (6.11)$$

 z διεύθυνση

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g_z = 0$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία κι εφόσον $g_z = g \cos\vartheta$ η αντικατάσταση των διαστατών δίνει:

$$\frac{U^2}{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} U \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} U \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\rho} \rho g \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \nu \frac{U}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) + g \cos\vartheta = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{w}_t + \bar{u} \bar{w}_x + \bar{w} \bar{w}_z + \frac{gH}{U^2} (\bar{p}_z + \cos\vartheta) - \frac{\nu}{HU} (\bar{w}_{xx} + \bar{w}_{zz}) = 0 \xrightarrow{Re = \frac{HU}{\nu}}$$

$$\bar{w}_t + \bar{u} \bar{w}_x + \bar{w} \bar{w}_z + \frac{2}{Re} (\bar{p}_z + \cos\vartheta) - \frac{1}{Re} (\bar{w}_{xx} + \bar{w}_{zz}) = 0 \Rightarrow$$

$$Re(w_t + u w_x + w w_z) + 2(p_z + \cos\vartheta) - w_{xx} - w_{zz} = 0 \quad (6.12)$$

Εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U}{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Αγνοώντας τις παύλες:

$$u_x + w_z = 0 \quad (6.13)$$

Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Εφόσον $T = T_o + \tilde{T}(T_i - T_o)$ υπολογίζονται οι διάφοροι όροι της εξίσωσης.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(T_o + \tilde{T}(T_i - T_o))}{\partial \left(\bar{t} \frac{H}{U} \right)} = U \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{t}} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(T_o + \tilde{T}(T_i - T_o))}{\partial(\bar{x} H)} = \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_i - T_o) \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial(\bar{x} H)^2} = \frac{T_i - T_o}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{x}^2} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_i - T_o}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{z}^2}$$

Κι αυτή γίνεται:

$$U \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} U \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} U \frac{T_i - T_o}{H} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} = \alpha \frac{T_i - T_o}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{\alpha}{U H} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Το αντίστροφο του αδιάστατου κλάσματος που δημιουργείται μπροστά από τους όρους θερμικής διαχύσεως ορίζεται ως ο θερμικός αριθμός Peclet $Pe_H = \frac{U H}{\alpha} = \frac{g H^3}{2\nu \alpha}$, λόγος της συναγωγής προς την αγωγή θερμότητας, ώστε να συγκρίνει τους δυο αυτούς τρόπους μεταφοράς της. Αντικαθιστώντας τον, συμβολίζοντας τις παραγώγους με δείκτες και, τελικώς, αγνοώντας και τις παύλες:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Pe_H} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \Rightarrow \tilde{T}_t + \bar{u} \tilde{T}_x + \bar{w} \tilde{T}_z - Pe_H^{-1} (\tilde{T}_{xx} + \tilde{T}_{zz}) = 0$$

$$T_t + u T_x + w T_z - Pe_H^{-1} (T_{xx} + T_{zz}) = 0 \quad (6.14)$$

Εξίσωση μεταφοράς νερού

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} \right)$$

Το διαστατό μέγεθος $\mathbb{C} = \mathbb{C}_o + \tilde{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_o)$ είναι πλήρως αντίστοιχο της θερμοκρασίας, οι όροι υπολογίζονται με όμοιο τρόπο.

$$\frac{\partial \tilde{\mathbb{C}}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{\mathbb{C}}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}} = \frac{D}{U H} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbb{C}}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Ξανά ορίζεται ο αριθμός Peclet $Pe = \frac{U H}{D} = \frac{g H^3}{2\nu D}$, λόγος της συναγωγής προς τη διάχυση, κατά τη μεταφορά του ψυκτικού, αυτή τη φορά, εντός του υμένα. Αντικαθιστώντας, συμβολίζοντας τις παραγώγους με δείκτες και αγνοώντας και παύλες:

$$\mathbb{C}_t + u \mathbb{C}_x + w \mathbb{C}_z - Pe^{-1} (\mathbb{C}_{xx} + \mathbb{C}_{zz}) = 0 \quad (6.15)$$

Εξίσωση μεταφοράς μάζας για το επιφανειοδραστικό

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D_{sb} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

Με την αντικατάσταση του $c = \bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{H}$ οι παράγωγοι γίνονται:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \left(\bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{H} \right)}{\partial \left(\bar{t} \frac{H}{U} \right)} = \frac{\Gamma_\infty U}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \left(\bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{H} \right)}{\partial (\bar{x} H)} = \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\Gamma_\infty}{H} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial (\bar{x} H)^2} = \frac{\Gamma_\infty}{H^3} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\Gamma_\infty}{H^3} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2}$$

Τοποθετώντας τα στην εξίσωση λαμβάνεται:

$$\frac{\Gamma_\infty U}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} U \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} U \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} = D_{sb} \frac{\Gamma_\infty}{H^3} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} = \frac{D_{sb}}{U H} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Ορίζοντας για το επιφανειοδραστικό $Pe_{sb} = \frac{U H}{D_{sb}}$, για την κυρίως μάζα του υμένα, και αγνοώντας τις παύλες:

$$c_t + u c_x + w c_z - Pe_{sb}^{-1} (c_{xx} + c_{zz}) = 0 \quad (6.16)$$

6.2.3 Συνοριακές συνθήκες

✎ Στο υπόστρωμα $z = 0$ (στην ιελική μορφή παραλείπονται οι παύλες):

Συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης

$$u = 0 \quad \& \quad w = 0 \Rightarrow \bar{u} = 0 \quad \& \quad \bar{w} = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \& \quad w = 0 \quad (6.17)$$

Συνθήκη ισοθερμοκρασιακού υποστρώματος

$$T = T_o \Rightarrow \tilde{T} = \frac{T_o - T_o}{T_i - T_o} \Rightarrow \tilde{T} = 0 \Rightarrow T = 0 \quad (6.18)$$

Συνθήκη σταθερής συγκέντρωσης ψυκτικού στο τοίχωμα

$$C = C_o \Rightarrow \tilde{C} = \frac{C_o - C_o}{C_i - C_o} \Rightarrow \tilde{C} = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (6.19)$$

Συνθήκη μη διείσδυσης επιφανειοδραστικού

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} \right|_{z=0} \Rightarrow \left. \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} \right|_{z=0} \Rightarrow \bar{c}_z = 0 \Rightarrow c_z = 0 \quad (6.20)$$

✎ Στη διεπιφάνεια $z = h$:

Κινηματική συνθήκη

$$h_t + u h_x = w \Rightarrow \frac{\partial(\bar{h}H)}{\partial\left(\bar{t}\frac{H}{U}\right)} + \bar{u}U \frac{\partial(\bar{h}H)}{\partial(\bar{x}H)} = U\bar{w} \Rightarrow \frac{UH}{H} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{t}} + \bar{u} \frac{UH}{H} \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}} = U\bar{w} \Rightarrow \bar{h}_t + \bar{u}\bar{h}_x = \bar{w}$$

$$\Rightarrow h_t + u h_x = w \quad (6.21)$$

Κάθετη δυναμική συνθήκη

Εφόσον $h_x = \bar{h}_x$, $u_x = \frac{U}{H}\bar{u}_x$, $u_z = \frac{U}{H}\bar{u}_z$, $w_x = \frac{U}{H}\bar{w}_x$ και $h_{xx} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(H\bar{h})}{\partial(Hx)^2} = \frac{1}{H} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{1}{H} \bar{h}_{xx}$:

$$\frac{h_x^2 - 1}{1 + h_x^2} u_x - \frac{h_x}{1 + h_x^2} (u_z + w_x) = \frac{p - p_v}{2\mu} + \frac{\sigma h_{xx}}{2\mu(1 + h_x^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{h}_x^2 - 1}{1 + \bar{h}_x^2} \frac{U}{H} \bar{u}_x - \frac{\bar{h}_x}{1 + \bar{h}_x^2} \frac{U}{H} (\bar{u}_z + \bar{w}_x) = \frac{\rho g H}{2\mu} \bar{p} + \frac{\sigma_o}{2\mu} \frac{\sigma \bar{h}_{xx}}{H(1 + \bar{h}_x^2)^{3/2}} \cdot \frac{H}{U} \xrightarrow{\cdot H/U}$$

$$\frac{\bar{h}_x^2 - 1}{1 + \bar{h}_x^2} \bar{u}_x - \frac{\bar{h}_x}{1 + \bar{h}_x^2} (\bar{u}_z + \bar{w}_x) = \frac{\rho g H^2}{2\mu U} \bar{p} + \frac{\sigma_o}{2\mu U} \frac{\sigma \bar{h}_{xx}}{(1 + \bar{h}_x^2)^{3/2}}$$

Σε ό,τι αφορά τους δυο λόγους σταθερών που εμφανίζονται, ο συντελεστής του όρου πιέσεως ισούται με μονάδα και το αποτέλεσμα είναι άμεσο με την αντικατάσταση της ταχύτητας $U = \frac{gH^2}{2\nu}$. Ο άλλος αδιάστατος συντελεστής καλείται αριθμός Weber $We = \frac{\sigma_o}{2\mu U} = \frac{\sigma_o}{\rho g H^2} = \frac{Ka}{(2Re)^{2/3}}$. Με Ka συμβολίζεται ο αριθμός Kapitza $Ka = \frac{\sigma_o}{\rho g^{1/3} \nu^{4/3}}$ και η χρήση του είναι βολική, αφού εξαρτάται αποκλειστικά από τις ιδιότητες του ρευστού. Οι δυο αριθμοί συγκρίνουν τις τριχοειδείς με τις ιξώδεις δυνάμεις που ενεργούν στον υμένα. Παραλείποντας, τελικώς, τις παύλες:

$$p + \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} u_x + \frac{h_x}{1 + h_x^2} (u_z + w_x) + We \sigma \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = 0 \quad (6.22)$$

Εφαπτομενική δυναμική συνθήκη

$$-4\mu h_x u_x + \mu(1 - h_x^2)(u_z + w_x) = \sqrt{1 + h_x^2} \left(\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_c (\mathbf{C}_x + h_x \mathbf{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z) \right)$$

Όλες οι αναγωγές των μεγεθών σε αδιάστατη μορφή έχουν προηγηθεί εκτός από εκείνες των όρων της παρένθεσης του δεξιού μέλους. Έτσι,

$$\sigma_\Gamma = \frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma} = \frac{\partial(\bar{\sigma}\sigma_o)}{\partial(\Gamma_\infty\tilde{\Gamma})} = \frac{\sigma_o}{\Gamma_\infty} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tilde{\Gamma}} = \frac{\sigma_o}{\Gamma_\infty} \bar{\sigma}_\Gamma \quad \Gamma_x = \frac{\partial\Gamma}{\partial x} = \frac{\Gamma_\infty}{H} \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\bar{x}} = \frac{\Gamma_\infty}{H} \tilde{\Gamma}_x$$

$$\sigma_c = \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{C}} = \frac{\partial(\bar{\sigma}\sigma_o)}{\partial(\mathbf{C}_o + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_o))} = \frac{\sigma_o}{\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_o} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tilde{\mathbf{C}}} = \frac{\sigma_o}{\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_o} \bar{\sigma}_c$$

$$\mathbf{C}_x = \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial x} = \frac{\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_o}{H} \tilde{\mathbf{C}}_x \quad \text{και} \quad \mathbf{C}_z = \frac{\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_o}{H} \tilde{\mathbf{C}}_z$$

$$\sigma_T = \frac{\partial\sigma}{\partial T} = \frac{\partial(\bar{\sigma}\sigma_o)}{\partial(T_o + \tilde{T}(T_i - T_o))} = \frac{\sigma_o}{T_i - T_o} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\tilde{T}} = \frac{\sigma_o}{T_i - T_o} \bar{\sigma}_T$$

$$T_x = \frac{T_i - T_o}{H} \tilde{T}_x \quad \text{και} \quad T_z = \frac{T_i - T_o}{H} \tilde{T}_z$$

Και τα γινόμενα υπολογίζονται :

$$\sigma_{\Gamma} \Gamma_x = \frac{\sigma_o}{\Gamma_{\infty}} \bar{\sigma}_{\Gamma} \frac{\Gamma_{\infty}}{H} \tilde{\Gamma}_x = \frac{\sigma_o}{H} \bar{\sigma}_{\Gamma} \tilde{\Gamma}_x$$

$$\sigma_{\mathcal{C}} (\mathcal{C}_x + h_x \mathcal{C}_z) = \frac{\sigma_o}{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o} \bar{\sigma}_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}{H} (\tilde{\mathcal{C}}_x + \bar{h}_x \tilde{\mathcal{C}}_z) = \frac{\sigma_o}{H} \bar{\sigma}_{\mathcal{C}} (\tilde{\mathcal{C}}_x + \bar{h}_x \tilde{\mathcal{C}}_z)$$

$$\sigma_T (T_x + h_x T_z) = \frac{\sigma_o}{T_i - T_o} \bar{\sigma}_T \frac{T_i - T_o}{H} (\tilde{T}_x + \bar{h}_x \tilde{T}_z) = \frac{\sigma_o}{H} \bar{\sigma}_T (\tilde{T}_x + \bar{h}_x \tilde{T}_z)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση :

$$\begin{aligned} -4\mu \bar{h}_x \frac{U}{H} \bar{u}_x + \mu (1 - \bar{h}_x^2) \frac{U}{H} (\bar{u}_z + \bar{w}_x) &= \sqrt{1 + \bar{h}_x^2} \left(\sigma_{\Gamma} \Gamma_x + \sigma_{\mathcal{C}} (\mathcal{C}_x + \bar{h}_x \mathcal{C}_z) + \sigma_T (T_x + \bar{h}_x T_z) \right) \Rightarrow \\ -4\bar{h}_x \bar{u}_x + (1 - \bar{h}_x^2) (\bar{u}_z + \bar{w}_x) &= \frac{H}{\mu U} \sqrt{1 + \bar{h}_x^2} \frac{\sigma_o}{H} \left(\bar{\sigma}_{\Gamma} \tilde{\Gamma}_x + \bar{\sigma}_{\mathcal{C}} (\tilde{\mathcal{C}}_x + \bar{h}_x \tilde{\mathcal{C}}_z) + \bar{\sigma}_T (\tilde{T}_x + \bar{h}_x \tilde{T}_z) \right) \end{aligned}$$

Όμως, έχει οριστεί ήδη ο αριθμός Weber $We = \frac{\sigma_o}{2\mu U}$ και η εξίσωση λαμβάνει την τελική της αδιάστατη μορφή :

$$-4h_x u_x + (1 - h_x^2)(u_z + w_x) = 2We \sqrt{1 + h_x^2} \left(\sigma_{\Gamma} \Gamma_x + \sigma_{\mathcal{C}} (\mathcal{C}_x + h_x \mathcal{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z) \right) \quad (6.23)$$

Συνθήκη ισορροπίας

$$\mathcal{C}_i = a T_i + \beta \Rightarrow \mathcal{C}_o + \tilde{\mathcal{C}}_i (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o) = a \left(T_o + \tilde{T} (T_i - T_o) \right) + \beta \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_i (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o) = a \tilde{T} (T_i - T_o) + \beta + a T_o - \mathcal{C}_o \Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_i = a \frac{T_i - T_o}{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o} \tilde{T}_i + \frac{a T_o + \beta - \mathcal{C}_o}{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}$$

$$\mathcal{C}_i = a T_i + b \quad (6.24)$$

Όπου $a = a \frac{T_i - T_o}{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}$ και $b = \frac{a T_o + \beta - \mathcal{C}_o}{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}$

Συνθήκη σύζευξης μεταφοράς μάζας και θερμότητας

$$\begin{aligned} k (-h_x T_x + T_z) &= H_a D (-h_x \mathcal{C}_x + \mathcal{C}_z) \Rightarrow k \frac{T_i - T_o}{H} (-\bar{h}_x \tilde{T}_x + \tilde{T}_z) = H_a D \frac{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}{H} (-\bar{h}_x \tilde{\mathcal{C}}_x + \tilde{\mathcal{C}}_z) \Rightarrow \\ -\bar{h}_x \tilde{T}_x + \tilde{T}_z &= \frac{H_a D}{k} \frac{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}{T_i - T_o} (-\bar{h}_x \tilde{\mathcal{C}}_x + \tilde{\mathcal{C}}_z) \end{aligned}$$

Ονομάζοντας μ το λόγο των διαστατών σταθερών του δεξιού μέλους $\mu = \frac{H_a D}{k} \frac{\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_o}{T_i - T_o}$ και αφαιρώντας τις παύλες :

$$-h_x T_x + T_z = \mu (-h_x \mathcal{C}_x + \mathcal{C}_z) \quad (6.25)$$

Ειδική ροή επιφανειοδραστικού

Η κινητική της ρόφησης στη διεπιφάνεια και η ανιαλλαγή με την κυρίως μάζα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$J = k_a c|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma = -\frac{D_{sb}}{\sqrt{1+h_x^2}} (-h_x c_x|_{z=h} + c_z|_{z=h})$$

Έστω, κατ' αρχάς, η πρώτη εξίσωση:

$$J = k_a c|_{z=h} (\Gamma_\infty - \Gamma) - k_d \Gamma \Rightarrow \tilde{J} \frac{\Gamma_\infty U}{H} = k_a \bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{H} (\Gamma_\infty - \Gamma_\infty \tilde{\Gamma}) - k_d \Gamma_\infty \tilde{\Gamma} \stackrel{\Gamma_\infty}{\Rightarrow}$$

$$\tilde{J} \frac{U}{H} = k_a \bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{H} (1 - \tilde{\Gamma}) - k_d \tilde{\Gamma} \stackrel{H/U}{\Rightarrow} \tilde{J} = k_a \bar{c} \frac{\Gamma_\infty}{U} (1 - \tilde{\Gamma}) - k_d \frac{H}{U} \tilde{\Gamma} \Rightarrow$$

Σε αυτό το σημείο ο αδιάστατος συντελεστής του τελευταίου όρου ορίζεται να αποτελεί τη σταθερά K_{KIN} , $K_{KIN} = \frac{k_d H}{U}$ η οποία συγκρίνει το ρυθμό εκρόφησης του επιφανειοδραστικού από τη διεπιφάνεια με τη συναγωγή, το ρυθμό, δηλαδή, με τον οποίο μεταφέρεται στη διεύθυνση ροής. Οι μικρές τιμές $K_{KIN} \ll 1$ σημαίνουν πως μια μικρή μείωση της συγκέντρωσης της επιφανειοδραστικής ουσίας στην κυρίως μάζα κοντά στη διεπιφάνεια δε συνεπάγεται σημαντικές διαφοροποιήσεις στην επιφανειακή συγκέντρωση, διότι ο ρυθμός εκρόφησης είναι πολύ αργός εν συγκρίσει με τη συναγωγή (G. Karapetsas 2013).

$$\tilde{J} = \frac{k_a \Gamma_\infty}{U} \bar{c} (1 - \tilde{\Gamma}) - K_{KIN} \tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{J} = K_{KIN} \left[\frac{k_a \Gamma_\infty}{U K_{KIN}} \bar{c} (1 - \tilde{\Gamma}) - \tilde{\Gamma} \right] \Rightarrow$$

$$\tilde{J} = K_{KIN} \left[\frac{k_a \Gamma_\infty}{k_d H} \bar{c} (1 - \tilde{\Gamma}) - \tilde{\Gamma} \right]$$

με την αντικατάσταση του K_{KIN} . Η άλλη αδιάστατη παράμετρος τίθεται ξ , $\xi = \frac{k_a \Gamma_\infty}{k_d H} = K \frac{\Gamma_\infty}{H}$, αν K ονομασιεί ο λόγος των σταθερών ταχύτητας της αντίδρασης $K = \frac{k_a}{k_d}$ που έχει διαστάσεις αντίστροφης συγκέντρωσης $K [=] m^3/mol$. Η δε παράμετρος ξ αποτελεί ένα μέτρο της διαλυτότητας του επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα του υμένα. Πιο συγκεκριμένα, μικρές τιμές του $\xi \ll 1$ αναφέρονται σε πολύ διαλυτές ουσίες. Η αντίδραση προσρόφησης είναι πολύ πιο αργή από την αντίδραση εκρόφησης με αποτέλεσμα μεγάλη ποσότητα να βρίσκεται στην κυρίως μάζα. Αντιθέτως, όταν $\xi \gg 1$ η αντίδραση προσρόφησης κυριαρχεί, η εκρόφηση είναι πολύ αργή και το περισσότερο επιφανειοδραστικό δεσμεύεται στη διεπιφάνεια. Οι πολύ μεγάλες τιμές ξ αντιστοιχούν στην οριακή περίπτωση του αδιάλυτου επιφανειοδραστικού (G.Karapetsas 2013). Τελικώς:

$$\tilde{J} = K_{KIN} \left[\xi \bar{c} (1 - \tilde{\Gamma}) - \tilde{\Gamma} \right]$$

Στην ειδική περίπτωση του πιητικού επιφανειοδραστικού προστίθεται και ο όρος $-K_G(\Gamma - \Gamma_{eq})$, $K_G = \frac{k_G H}{U}$ που προκύπτει κατά το χειρισμό της εξίσωσης, όπως το K_{KIN} . Το Γ_{eq} αποτελεί την αδιάστατη επιφανειακή συγκέντρωση σε ισορροπία με τον ατμό του επιφανειοδραστικού (αδιάστατη συγκέντρωση στην αέρια φάση c_G) που σχετίζονται από το νόμο του Henry ως $\Gamma_i = m c_G$.

$$J = K_{KIN} \left[\xi \bar{c} (1 - \Gamma) - \Gamma \right] - K_G (\Gamma - \Gamma_{eq}) \quad (6.26)$$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται :

$$J = -\frac{D_{sb}}{\sqrt{1+h_x^2}}(-h_x c_x + c_z) \Rightarrow \tilde{J} \frac{\Gamma_\infty U}{H} = -\frac{D_{sb}}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\Gamma_\infty}{H^2} (-\bar{h}_x \bar{c}_x + \bar{c}_z) \Rightarrow$$

$$\tilde{J} = -\frac{D_{sb}}{HU} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (-\bar{h}_x \bar{c}_x + \bar{c}_z)$$

Έχει ήδη οριστεί $Pe_{sb} = \frac{UH}{D_{sb}}$ ο αριθμός Peclet για το επιφανειοδραστικό στην κυρίως μάζα, συνεπώς, χωρίς τις παύλες :

$$J = -\frac{1}{Pe_{sb}} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (-h_x c_x + c_z) \quad (6.27)$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\Gamma_t + u\Gamma_x + \Gamma \frac{1}{1+h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x(w_x + h_x w_z)) = D_{s_s} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x + J$$

Εκτός από το Γ_t και τον όρο $\left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x$ όλα έχουν υπολογιστεί.

$$\Gamma_t = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial \left(\tilde{\Gamma} \frac{\Gamma_\infty}{H} \right)}{\partial \left(\bar{t} \frac{H}{U} \right)} = \frac{\Gamma_\infty U}{H} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{t}}$$

$$\left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right) = \frac{\Gamma_\infty}{H} \frac{1}{H} \left(\frac{\tilde{\Gamma}_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x = \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \left(\frac{\tilde{\Gamma}_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x$$

Έτσι,

$$\frac{\Gamma_\infty U}{H} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} U \frac{\Gamma_\infty}{H} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{x}} + \frac{\Gamma_\infty \tilde{\Gamma}}{1+h_x^2} \frac{U}{H} (\bar{u}_x + \bar{h}_x \bar{u}_z + \bar{h}_x (\bar{w}_x + \bar{h}_x \bar{w}_z)) = \frac{D_{s_s} \Gamma_\infty}{H^2 \sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\tilde{\Gamma}_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x + \tilde{J} \frac{\Gamma_\infty U}{H} \xrightarrow{\frac{\Gamma_\infty U}{H}}$$

$$\tilde{\Gamma}_t + \bar{u} \tilde{\Gamma}_x + \frac{\tilde{\Gamma}}{1+\bar{h}_x^2} (\bar{u}_x + \bar{h}_x \bar{u}_z + \bar{h}_x (\bar{w}_x + \bar{h}_x \bar{w}_z)) = \frac{D_{s_s}}{UH} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\tilde{\Gamma}_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x + \tilde{J}$$

Αν $Pe_{s_s} = \frac{UH}{D_{s_s}}$ ο αριθμός Peclet για τη μεταφορά του επιφανειοδραστικού στη διεπιφάνεια, ώστε να συγκρίνει τη συναγωγή και τη διάχυσή του επί αυτής, το ισοζύγιο λαμβάνει την τελική μορφή του :

$$\Gamma_t + u\Gamma_x + \frac{\Gamma}{1+h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x(w_x + h_x w_z)) = \frac{1}{Pe_{s_s}} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x + J \quad (6.28)$$

Εξισώσεις επιφανειακής τάσεως κι ελαστικότητας

Τέλος, οφείλουν να αδιαστατοποιηθούν και οι εξισώσεις που δίνουν σε κατάσταση ισορροπίας την επιφανειακή τάση και την ελαστικότητα. Κατ' αρχάς, η ελαστικότητα ορίστηκε ως:

$$E = -\Gamma \frac{d\sigma}{d\Gamma} = -\tilde{\Gamma} \Gamma_{\infty} \frac{d(\bar{\sigma}_o \sigma)}{\tilde{\Gamma} \Gamma_{\infty}} = -\sigma_o \tilde{\Gamma} \frac{d\bar{\sigma}}{d\tilde{\Gamma}}$$

Ορίζοντας την αδιάστατη ελαστικότητα και αγνοώντας τις παύλες:

$$e = \frac{E}{\sigma_o} = -\Gamma \sigma_{\Gamma}$$

Για τα δυο μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν:

📌 Μοντέλο Langmuir

Η σχέση (4.4) για την επιφανειακή τάση, διαιρώντας με σ_o και παραλείποντας τις παύλες, γίνεται:

$$\sigma = 1 + \frac{RT\Gamma_{\infty}}{\sigma_o} \ln(1 - \gamma) \quad (6.29)$$

ενώ η (4.8) για την ελαστικότητα:

$$e = \frac{RT\Gamma_{\infty}}{\sigma_o} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \quad (6.30)$$

📌 Μοντέλο Kovalchuk et al.

Η σχέση (4.6) για την επιφανειακή τάση, αντικαθιστώντας τα διαστατά με αδιάστατα μεγέθη και λαμβάνοντας υπόψιν πως η συμπίεσιότητα είναι διαστατή $\varepsilon [=] \frac{m}{N} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \sigma_o \varepsilon$ και $\Pi = \sigma_o - \sigma$ και, τελικώς, παραλείποντας τις παύλες:

$$\begin{aligned} (\sigma_o - \sigma)(2 - \varepsilon(\sigma_o - \sigma)) &= -\frac{2RT}{\Omega_o} \ln(1 - \gamma) \Rightarrow (\sigma_o - \sigma_o \bar{\sigma})(2 - \bar{\varepsilon} \frac{\sigma_o - \sigma_o \bar{\sigma}}{\sigma_o}) = -\frac{2RT}{\Omega_o} \ln(1 - \gamma) \Rightarrow \\ (1 - \sigma)(2 - \varepsilon(1 - \sigma)) &= -\frac{2RT}{\sigma_o \Omega_o} \ln(1 - \gamma) \end{aligned} \quad (6.31)$$

ενώ η (4.8) για την ελαστικότητα παρομοίως:

$$e = \left[\frac{\sigma_o \Omega_o (1 - \varepsilon(1 - \sigma))}{RT \frac{\gamma}{1 - \gamma}} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon(1 - \sigma)} \right]^{-1} \quad (6.32)$$

6.2.4 Συνολικό αδιάστατο πρόβλημα

ΛΙΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$Re(u_t + u u_x + w u_z) + 2(p_x - \sin\vartheta) - u_{xx} - u_{zz} = 0 \quad (6.33)$$

$$Re(w_t + u w_x + w w_z) + 2(p_z + \cos\vartheta) - w_{xx} - w_{zz} = 0 \quad (6.34)$$

$$u_x + w_z = 0 \quad (6.35)$$

$$T_t + u T_x + w T_z - Pe_H^{-1}(T_{xx} + T_{zz}) = 0 \quad (6.36)$$

$$\mathbb{C}_t + u \mathbb{C}_x + w \mathbb{C}_z - Pe^{-1}(\mathbb{C}_{xx} + \mathbb{C}_{zz}) = 0 \quad (6.37)$$

$$c_t + u c_x + w c_z - Pe_{sb}^{-1}(c_{xx} + c_{zz}) = 0 \quad (6.38)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\odot z = 0$$

$$u = 0 \quad \& \quad w = 0 \quad (6.39)$$

$$T = 0 \quad (6.40)$$

$$\mathbb{C} = 0 \quad (6.41)$$

$$c_z = 0 \quad (6.42)$$

$$\odot z = 1$$

$$h_t + u h_x = w \quad (6.43)$$

$$p + \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} u_x + \frac{h_x}{1 + h_x^2} (u_z + w_x) + We \sigma \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = 0 \quad (6.44)$$

$$-4h_x u_x + (1 - h_x^2)(u_z + w_x) = 2We \sqrt{1 + h_x^2} (\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_c (\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) + \sigma_T (T_x + h_x T_z)) \quad (6.45)$$

$$\mathbb{C}_i = \mathbf{a} T_i + \mathbf{b} \quad (6.46)$$

$$-h_x T_x + T_z = \mu (-h_x \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_z) \quad (6.47)$$

$$J = K_{KIN} [\xi c (1 - \Gamma) - \Gamma] - K_G (\Gamma - \Gamma_{eq}) \quad (6.48)$$

$$J = -\frac{1}{Pe_{sb}} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (-h_x c_x + c_z) \quad (6.49)$$

$$\Gamma_t + u\Gamma_x + \frac{\Gamma}{1+h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x(w_x + h_x w_z)) = \frac{1}{Pe_{ss}} \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)_x + J \quad (6.50)$$

Με τις αδιάστατες παραμέτρους που ορίστηκαν συγκεντρωμένες.

$$Re = \frac{HU}{\nu} \quad Pe_H = \frac{UH}{\alpha} \quad Pe = \frac{UH}{D} \quad Pe_{sb} = \frac{UH}{D_{sb}} \quad Pe_{ss} = \frac{UH}{D_{ss}}$$

$$We = \frac{Ka}{(2Re)^{2/3}} \quad Ka = \frac{\sigma_o}{\rho g^{1/3} \nu^{4/3}} \quad a = a \frac{T_i - T_o}{C_i - C_o} \quad b = \frac{aT_o + \beta - C_o}{C_i - C_o}$$

$$\mu = \frac{H_a D}{k} \frac{C_i - C_o}{T_i - T_o} \quad K_{KIN} = \frac{k_d H}{U} \quad K_G = \frac{k_G H}{U} \quad \xi = \frac{k_a}{k_d} \frac{\Gamma_\infty}{H}$$

6.2.5 Μόνιμη λύση

Εφόσον ο χειρισμός των εξισώσεων γίνεται στην αδιάστατη μορφή τους, είναι σημαντικό να εκφραστεί με αντίστοιχο τρόπο και η μόνιμη λύση που εξήχθη στο προηγούμενο κεφάλαιο.

▷ Ύψος διαταραχής-Αδιατάρακτος υμένας

$$h = H \Rightarrow \bar{h} = 1 \Rightarrow h = 1 \quad (6.51)$$

▷ Ταχύτητα

$$w = 0 \Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w = 0 \quad (6.52)$$

$$u(z) = \frac{g \sin\vartheta}{\nu} \left(H z - \frac{z^2}{2} \right) \Rightarrow U \bar{u}(\bar{z}) = \frac{g \sin\vartheta}{\nu} \left(H^2 \bar{z} - \frac{H^2 \bar{z}^2}{2} \right) \xrightarrow{U = \frac{gH^2}{2\nu}} \bar{u}(\bar{z}) = \sin\vartheta (2\bar{z} - \bar{z}^2) \Rightarrow$$

$$u(z) = \sin\vartheta (2z - z^2) \quad (6.53)$$

▷ Πίεση

$$p(z) = -\rho g_z z + p_v + \rho g_z H \Rightarrow \frac{p - p_v}{\rho g H} = \cos\vartheta \left(1 - \frac{z}{H} \right) \Rightarrow \bar{p}(\bar{z}) = \cos\vartheta \left(1 - \frac{\bar{z}H}{H} \right) \Rightarrow$$

$$\bar{p}(\bar{z}) = \cos\vartheta (1 - \bar{z}) \Rightarrow p(z) = \cos\vartheta (1 - z) \quad (6.54)$$

▷ Συγκέντρωση νερού στον υμένα

$$C(z) = \frac{C_i - C_o}{H} z + C_o \Rightarrow \frac{C(z) - C_o}{C_i - C_o} = \frac{z}{H} \Rightarrow \tilde{C}(\bar{z}) = \bar{z} \Rightarrow C(z) = z \quad (6.55)$$

▷ Θερμοκρασία υμένα

$$T(z) = \frac{T_i - T_o}{H} z + T_o \Rightarrow \frac{T(z) - T_o}{T_i - T_o} = \frac{z}{H} \Rightarrow \tilde{T}(\bar{z}) = \bar{z} \Rightarrow T(z) = z \quad (6.56)$$

▷ Σύζευξη μεταφοράς θερμότητας και μάζας στη διεπιφάνεια

$$T_i - T_o = \frac{H_a D}{k} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_o) \Rightarrow \frac{H_a D}{k} \frac{\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_o}{T_i - T_o} \Rightarrow \mu = 1 \quad (6.57)$$

▷ Ειδική ροή επιφανειοδραστικού

$$J = 0 \Rightarrow \tilde{J} = 0 \Rightarrow J = 0 \quad (6.58)$$

▷ Επιφανειακή συγκέντρωση επιφανειοδραστικού

$$\Gamma(x) = \Gamma \Rightarrow \Gamma(x) = \Gamma_\infty \tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Gamma}(\bar{x}) = \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Gamma(x) = \Gamma \quad (6.59)$$

▷ Σχέση συγκεντρώσεων ισορροπίας διεπιφάνειας-κυρίως μάζας

$$c(z) = \frac{k_d \Gamma}{k_a (\Gamma_\infty - \Gamma)} \Rightarrow \frac{\bar{c}(\bar{z}) \Gamma_\infty}{H} = \frac{k_d \Gamma \Gamma_\infty}{k_a (\Gamma_\infty - \Gamma_\infty \tilde{\Gamma})} \Rightarrow \bar{c}(\bar{z}) = \frac{H k_d \Gamma}{k_a \Gamma_\infty (1 - \Gamma)} \Rightarrow$$

$$c(z) = \frac{H \Gamma}{K \Gamma_\infty (1 - \Gamma)} \Rightarrow c(z) = \frac{\Gamma}{\xi(1 - \Gamma)} \quad (6.60)$$

▷ Αδιαπέρατη διεπιφάνεια για το επιφανειοδραστικό της κυρίως μάζας (απουσία ειδικής ροής από την κυρίως μάζα)

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\Gamma_\infty}{H^2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=1} = 0 \Rightarrow \bar{c}_z|_{\bar{z}=1} = 0 \Rightarrow c_z|_{z=1} = 0 \quad (6.61)$$

Συνολικά η αδιάστατη μόνιμη λύση:

$$u(z) = \sin \vartheta (2z - z^2) \quad (6.62) \quad w = 0 \quad (6.68)$$

$$p(z) = \cos \vartheta (1 - z) \quad (6.63) \quad h = 1 \quad (6.69)$$

$$\mathbb{C}(z) = z \quad (6.64) \quad \Gamma(x) = \Gamma \quad (6.70)$$

$$T(z) = z \quad (6.65) \quad J = 0 \quad (6.71)$$

$$c(z) = \frac{\Gamma}{\xi(1 - \Gamma)} \quad (6.66) \quad \mu = 1 \quad (6.72)$$

$$c_z|_{z=1} = 0 \quad (6.67)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο εξής χρησιμοποιούνται μόνο τα αδιάστατα μεγέθη χωρίς τις παύλες. Κάθε αναφορά σε διαστατό συνοδεύεται από κατάλληλη διευκρίνιση.

Κεφάλαιο 7

Γραμμικοποίηση εξισώσεων

7.1 Επιβολή διαταραχής

Ο πίπτων υμένας που μοντελοποιήθηκε στο 5^ο κεφάλαιο θεωρείται πως δημιουργήθηκε και έχουν επικρατήσει μόνιμες συνθήκες, ώστε περιγράφεται πλέον από τη μόνιμη λύση (εξισώσεις (6.62)-(6.72)). Ως λύση του προβλήματος, η μόνιμη λύση ικανοποιεί τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες (6.33)-(6.50) και στο εξής συμβολίζεται με παύλα πάνω από κάθε συνάρτηση. Αυτή πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ευστάθειας. Το γεγονός ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις συνεπάγεται ότι:

$$Re(\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + \bar{w}\bar{u}_z) + 2(\bar{p}_x - \sin\vartheta) - \bar{u}_{xx} - \bar{u}_{zz} = 0 \quad (7.1)$$

$$Re(\bar{w}_t + \bar{u}\bar{w}_x + \bar{w}\bar{w}_z) + 2(\bar{p}_z + \cos\vartheta) - \bar{w}_{xx} - \bar{w}_{zz} = 0 \quad (7.2)$$

$$\bar{u}_x + \bar{w}_z = 0 \quad (7.3)$$

$$\bar{T}_t + \bar{u}\bar{T}_x + \bar{w}\bar{T}_z - Pe_H^{-1}(\bar{T}_{xx} + \bar{T}_{zz}) = 0 \quad (7.4)$$

$$\bar{C}_t + \bar{u}\bar{C}_x + \bar{w}\bar{C}_z - Pe^{-1}(\bar{C}_{xx} + \bar{C}_{zz}) = 0 \quad (7.5)$$

$$\bar{c}_t + \bar{u}\bar{c}_x + \bar{w}\bar{c}_z - Pe_{sb}^{-1}(\bar{c}_{xx} + \bar{c}_{zz}) = 0 \quad (7.6)$$

@z = 0

$$\bar{u} = 0 \quad \& \quad \bar{w} = 0 \quad (7.7)$$

$$\bar{T} = 0 \quad (7.8)$$

$$\bar{C} = 0 \quad (7.9)$$

$$\bar{c}_z = 0 \quad (7.10)$$

@z = 1

$$\bar{h}_t + \bar{u}\bar{h}_x = \bar{w} \quad (7.11)$$

$$\bar{p} + \frac{1 - \bar{h}_x^2}{1 + \bar{h}_x^2} \bar{u}_x + \frac{\bar{h}_x}{1 + \bar{h}_x^2} (\bar{u}_z + \bar{w}_x) + We\bar{\sigma} \frac{\bar{h}_{xx}}{(1 + \bar{h}_x^2)^{3/2}} = 0 \quad (7.12)$$

$$-4\bar{h}_x\bar{u}_x + (1 - \bar{h}_x^2)(\bar{u}_z + \bar{w}_x) = 2We\sqrt{1 + \bar{h}_x^2} \left(\bar{\sigma}_\Gamma \bar{\Gamma}_x + \bar{\sigma}_c (\bar{C}_x + \bar{h}_x \bar{C}_z) + \bar{\sigma}_T (\bar{T}_x + \bar{h}_x \bar{T}_z) \right) \quad (7.13)$$

$$-\bar{h}_x \bar{T}_x + \bar{T}_z = \mu (-\bar{h}_x \bar{C}_x + \bar{C}_z) \quad (7.14)$$

$$\bar{C}_i = a\bar{T}_i + b \quad (7.15)$$

$$\bar{J} = K_{KIN} \left[\xi \bar{c} (1 - \bar{\Gamma}) - \bar{\Gamma} \right] - K_G (\bar{\Gamma} - \Gamma_{eq}) = -\frac{Pe_{sb}^{-1}}{\sqrt{1 + \bar{h}_x^2}} (-\bar{h}_x \bar{c}_x + \bar{c}_z) \quad (7.16)$$

$$\bar{\Gamma}_t + \bar{u}\bar{\Gamma}_x + \frac{\bar{\Gamma}}{1 + \bar{h}_x^2} (\bar{u}_x + \bar{h}_x \bar{u}_z + \bar{h}_x (\bar{w}_x + \bar{h}_x \bar{w}_z)) = \frac{Pe_{ss}^{-1}}{\sqrt{1 + \bar{h}_x^2}} \left(\frac{\bar{\Gamma}_x}{\sqrt{1 + \bar{h}_x^2}} \right)_x + \bar{J} \quad (7.17)$$

Έστω ότι η ροή υφίσταται μια πολύ μικρή διαταραχή γύρω από τη μόνιμη λύση, ώστε κάθε μέγεθος A να ισούται με τη μόνιμη τιμή του \bar{A} συν μια ελάχιστη τονούμενη ποσότητα A' κατά την οποία αποκλίνει από αυτή. Με αυτόν τον τρόπο τα εμπλεκόμενα μεγέθη γράφονται :


$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & \Gamma &= \bar{\Gamma} + \Gamma' & w &= \bar{w} + w' \xrightarrow{\bar{w}=0} w = w' \\ p &= \bar{p} + p' & T &= \bar{T} + T' & h &= \bar{h} + h' \xrightarrow{\bar{h}=1} h = 1 + h' \\ c &= \bar{c} + c' & C &= \bar{C} + C' & J &= \bar{J} + J' \xrightarrow{\bar{J}=0} J = J' \end{aligned}$$

Η επιβαλλόμενη διαταραχή θεωρείται πολύ μικρή, έστω τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Λόγω του μικρού της μεγέθους $A' \ll \bar{A}$ οι εξισώσεις μπορούν να γραμμικοποιηθούν αγνοώντας ως αμελητέους τους όρους $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, δηλαδή τους όρους γινομένων διαταραχών.

7.2 Γραμμικοποίηση εξισώσεων

7.2.1 Εξισώσεις πεδίου

Εξισώσεις Navier-Stokes

 x διεύθυνση

$$Re(u_t + u u_x + w u_z) + 2(p_x - \sin\vartheta) - u_{xx} - u_{zz} = 0$$

Αντικαθιστώντας τα μεγέθη στη νέα τους μορφή :

$$\begin{aligned} u_t &= \bar{u}_t + u'_t \xrightarrow{\bar{u}_t=0} u_t = u'_t \\ u u_x &= (\bar{u} + u')(\bar{u}_x + u'_x) = \bar{u}\bar{u}_x + \bar{u}u'_x + \bar{u}_x u' + \cancel{u'u'_x}^0 = \bar{u}\bar{u}_x + \bar{u}u'_x + \bar{u}_x u' \\ w u_z &= (\bar{w} + w')(\bar{u}_z + u'_z) = \bar{w}\bar{u}_z + \bar{w}u'_z + \bar{u}_z w' + \cancel{w'u'_z}^0 = \bar{w}\bar{u}_z + \bar{w}u'_z + \bar{u}_z w' \\ p_x &= \bar{p}_x + p'_x \\ u_{xx} &= \bar{u}_{xx} + u'_{xx} \\ u_{zz} &= \bar{u}_{zz} + u'_{zz} \end{aligned}$$

Και η εξίσωση γίνεται :

$$\begin{aligned} Re(u'_t + \bar{u}\bar{u}_x + \bar{u}u'_x + \bar{u}_x u' + \bar{w}\bar{u}_z + \bar{w}u'_z + \bar{u}_z w') + 2(\bar{p}_x + p'_x - \sin\vartheta) - \bar{u}_{xx} - u'_{xx} - \bar{u}_{zz} - u'_{zz} &= 0 \Rightarrow \\ Re(\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + \bar{w}\bar{u}_z) + Re(u'_t + \bar{u}u'_x + \bar{u}_x u' + \bar{w}u'_z + \bar{u}_z w') + 2(\bar{p}_x - \sin\vartheta) + 2p'_x - \bar{u}_{xx} - u'_{xx} - \bar{u}_{zz} - u'_{zz} &= 0 \xrightarrow{(7.1)} \\ Re(u'_t + \bar{u}u'_x + \bar{u}_x u' + \bar{w}u'_z + \bar{u}_z w') + 2p'_x - u'_{xx} - u'_{zz} &= 0 \end{aligned}$$

Όμως, από τη μόνιμη λύση (6.62)-(6.72):

$$\bar{u} = \sin\vartheta(2z - z^2), \text{ επομένως } \bar{u}_x = 0 \text{ \& } \bar{u}_z = 2\sin\vartheta(1 - z) \text{ και } \bar{w} = 0$$

Όστε:

$$Re\left(u'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)u'_x + 2\sin\vartheta(1 - z)w'\right) + 2p'_x - u'_{xx} - u'_{zz} = 0 \quad (7.18)$$

☞ z διεύθυνση

$$Re(w_t + u w_x + w w_z) + 2(p_z + \cos\vartheta) - w_{xx} - w_{zz} = 0$$

Αντικαθιστώντας τα μεγέθη στη νέα τους μορφή:

$$w_t = \bar{w}_t + w'_t \xrightarrow{\bar{w}=0} w_t = w'_t$$

$$u w_x = (\bar{u} + u')(\bar{w}_x + w'_x) = \bar{u}\bar{w}_x + \bar{u}w'_x + \bar{w}_x u' + \cancel{u'w'_x}^0 = \bar{u}\bar{w}_x + \bar{w}_x u' + \bar{u}w'_x + \bar{w}_x u'$$

$$w w_z = (\bar{w} + w')(\bar{w}_z + w'_z) = \bar{w}\bar{w}_z + \bar{w}w'_z + \bar{w}_z w' + \cancel{w'w'_z}^0 = \bar{w}\bar{w}_z + \bar{w}w'_z + \bar{w}_z w'$$

$$p_z = \bar{p}_z + p'_z$$

$$w_{xx} = \bar{w}_{xx} + w'_{xx}$$

$$w_{zz} = \bar{w}_{zz} + w'_{zz}$$

Και η εξίσωση γίνεται:

$$Re(\bar{w}_t + w'_t + \bar{u}\bar{w}_x + \bar{u}w'_x + \bar{w}_x u' + \bar{w}\bar{w}_z + \bar{w}w'_z + \bar{w}_z w') + 2(\bar{p}_z + p'_z + \cos\vartheta) - \bar{w}_{xx} - w'_{xx} - \bar{w}_{zz} - w'_{zz} = 0$$

$$Re(\bar{w}_t + \bar{u}\bar{w}_x + \bar{w}\bar{w}_z) + Re(w'_t + \bar{u}w'_x + \bar{w}_x u' + \bar{w}w'_z + \bar{w}_z w') + 2(\bar{p}_z + \cos\vartheta) + 2p'_z - \bar{w}_{xx} - w'_{xx} - \bar{w}_{zz} - w'_{zz} = 0 \xrightarrow{(7.2)}$$

$$Re(w'_t + \bar{u}w'_x + \bar{w}_x u' + \bar{w}w'_z + \bar{w}_z w') + 2p'_z - w'_{xx} - w'_{zz} = 0 \xrightarrow{(6.62),(6.68)}$$

$$Re\left(w'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)w'_x\right) + 2p'_z - w'_{xx} - w'_{zz} = 0 \quad (7.19)$$

Εξίσωση της συνέχειας

$$u_x + w_z = 0 \Rightarrow \bar{u}_x + u'_x + \bar{w}_z + w'_z = 0 \xrightarrow{(7.3)} u'_x + w'_z = 0 \quad (7.20)$$

Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας

$$T_t + uT_x + wT_z - Pe_H^{-1}(T_{xx} + T_{zz}) = 0$$

Υπολογίζονται:

$$T_t = \bar{T}_t + T'_t$$

$$uT_x = (\bar{u} + u')(\bar{T}_x + T'_x) = \bar{u}\bar{T}_x + \bar{u}T'_x + u'\bar{T}_x + \cancel{u'T'_x}^0 = \bar{u}\bar{T}_x + \bar{u}T'_x + u'\bar{T}_x$$

$$wT_z = (\bar{w} + w')(\bar{T}_z + T'_z) = \bar{w}\bar{T}_z + \bar{w}T'_z + w'\bar{T}_z + \cancel{w'T'_z}^0 = \bar{w}\bar{T}_z + \bar{w}T'_z + w'\bar{T}_z$$

$$T_{xx} = \bar{T}_{xx} + T'_{xx}$$

$$T_{zz} = \bar{T}_{zz} + T'_{zz}$$

Και η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή :

$$\begin{aligned}\bar{T}_t + T'_t + \bar{u}\bar{T}_x + \bar{u}T'_x + u'\bar{T}_x + \bar{w}\bar{T}_z + \bar{w}T'_z + w'\bar{T}_z &= Pe_H^{-1}(\bar{T}_{xx} + T'_{xx} + \bar{T}_{zz} + T'_{zz}) \Rightarrow \\ \bar{T}_t + \bar{u}\bar{T}_x + \bar{w}\bar{T}_z + T'_t + \bar{u}T'_x + u'\bar{T}_x + \bar{w}T'_z + w'\bar{T}_z &= Pe_H^{-1}(\bar{T}_{xx} + \bar{T}_{zz}) + Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz}) \xrightarrow{(7.4)} \\ T'_t + \bar{u}T'_x + u'\bar{T}_x + \bar{w}T'_z + w'\bar{T}_z &= Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz})\end{aligned}$$

Αλλά από τη μόνιμη λύση $\bar{u} = \bar{u}(z) = \sin\vartheta(2z - z^2)$, $\bar{w} = 0$ και $\bar{T} = \bar{T}(z) = z$, επομένως:

$$T'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)T'_x + w' - Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz}) = 0 \quad (7.21)$$

Εξίσωση μεταφοράς νερού

$$\mathbb{C}_t + u\mathbb{C}_x + w\mathbb{C}_z - Pe^{-1}(\mathbb{C}_{xx} + \mathbb{C}_{zz}) = 0$$

Λόγω της πλήρους αντιστοιχίας της εξίσωσης μεταφοράς νερού με εκείνη της μεταφοράς θερμότητας, η τελική μορφή είναι ακριβώς η ίδια.

$$\mathbb{C}'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)\mathbb{C}'_x + w' - Pe^{-1}(\mathbb{C}'_{xx} + \mathbb{C}'_{zz}) = 0 \quad (7.22)$$

Εξίσωση μεταφοράς μάζας για το επιφανειοδραστικό

$$c_t + uc_x + wc_z - Pe_{s_b}^{-1}(c_{xx} + c_{zz}) = 0$$

Και αυτή η εξίσωση παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τα δυο προηγούμενα ισοζύγια. Η αντικατάσταση των διατεταραγμένων μεγεθών σε συνδυασμό με την (7.6) δίνει :

$$c'_t + \bar{u}c'_x + u'\bar{c}_x + \bar{w}c'_z + w'\bar{c}_z - Pe_{s_b}^{-1}(c'_{xx} + c'_{zz}) = 0$$

Στη μόνιμη κατάσταση, ωστόσο, η συγκέντρωση επιφανειοδραστικού c είναι σταθερή $c = \frac{\Gamma}{\xi(1-\Gamma)}$, οπότε

$$c'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)c'_x - Pe_{s_b}^{-1}(c'_{xx} + c'_{zz}) = 0 \quad (7.23)$$

7.2.2 Συνοριακές συνθήκες

☞ Στο υπόστρωμα $z = 0$:

Συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης

$$u = 0 \quad \& \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = 0 \quad \& \quad w' = 0 \quad (7.24)$$

Συνθήκη ισοθερμοκρασιακού υποστρώματος

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = 0 \quad (7.25)$$

Συνθήκη σταθερής συγκέντρωσης ψυκτικού στο τοίχωμα

$$\mathbb{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}' = 0 \quad (7.26)$$

Συνθήκη μη διείσδυσης επιφανειοδραστικού

$$c_z = 0 \quad \Rightarrow \quad c'_z = 0 \quad (7.27)$$

διότι $\bar{u}(0) = \bar{w} = \bar{T}(0) = \mathbb{C}(0) = \bar{c}_z = 0$.

Στη διεπιφάνεια $z = h$:

Στη διεπιφάνεια όλα τα μεγέθη είναι υπολογισμένα στο σημείο $z = h$. Ωστόσο, η μόνιμη λύση αφορά αδιατάρακτο υμένα πάχους H , άρα $z = h = 1$. Από την αντικατάσταση των διατεταραγμένων μεγεθών αναμένεται να προκύψουν εντός των συνοριακών συνθηκών όροι $\bar{A}(h)$, δηλαδή τιμές της μόνιμης λύσης στη νέα θέση της διεπιφάνειας $h = 1 + h'$ όπου ο υπολογισμός δεν είναι άμεσος. Επειδή η παρούσα ανάλυση αφορά μια πολύ μικρή διαταραχή $h \ll H$, καθίσταται δυνατόν οι ποσότητες αυτές να υπολογιστούν μέσω αναπτύγματος Taylor γύρω από το $z = 1$ με μετατόπιση h' , όπως ακολουθεί. Στα αποτελέσματα διατηρούνται όροι σταθεροί και πρώτης τάξεως μόνο. Όροι δευτέρας τάξεως $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και άνω αγνοούνται ως αμελητέοι.

$$\cdot \bar{u} = \bar{u}(z = h) = \bar{u}(z = 1 + h') = \bar{u}(1) + \bar{u}_z(1) \cdot h' = \sin\vartheta(2 \cdot 1 - 1^2) + h' \sin\vartheta(1 - 1) = \sin\vartheta$$

$$\cdot \bar{u}_z = \bar{u}_z(z = h) = \bar{u}_z(z = 1 + h') = \bar{u}_z(1) + \bar{u}_{zz}(1) \cdot h' = 2\sin\vartheta \cdot 0 - 2\sin\vartheta \cdot h' = -2\sin\vartheta \cdot h'$$

$$\cdot \bar{p} = \bar{p}(z = h) = \bar{p}(z = 1 + h') = \bar{p}(1) + \bar{p}_z(1) \cdot h' = 0 + h'(-\cos\vartheta) = -\cos\vartheta \cdot h'$$

$$\cdot \bar{T} = \bar{T}(z = h) = \bar{T}(z = 1 + h') = \bar{T}(1) + \bar{T}_z(1) \cdot h' = 1 + 1 \cdot h' = h' + 1$$

$$\cdot \bar{T}_z = \bar{T}_z(z = h) = \bar{T}_z(z = 1 + h') = \bar{T}_z(1) + \bar{T}_{zz}(1) \cdot h' = 1$$

$$\cdot \bar{C} = \bar{C}(z = h) = \bar{C}(z = 1 + h') = \bar{C}(1) + \bar{C}_z(1) \cdot h' = 1 + 1 \cdot h' = h' + 1$$

$$\cdot \bar{C}_z = \bar{C}_z(z = h) = \bar{C}_z(z = 1 + h') = \bar{C}_z(1) + \bar{C}_{zz}(1) \cdot h' = 1$$

Επειδή στις μόνιμες συνθήκες κανένα μέγεθος δεν αποτελεί συνάρτηση του x , οι παράγωγοι ως προς αυτό είναι μηδενικές $\bar{A}_x = \bar{A}_x(h) = 0$ και δε χρειάζεται ανάπτυγμα Taylor.

Κινηματική συνθήκη

$$h_t + u h_x = w \Rightarrow h_t + (\bar{u} + u')(\bar{h}_x + h'_x) = \bar{w} + w' \Rightarrow h_t + \bar{u}\bar{h}_x + \bar{u}h'_x + u'\bar{h}_x + u'h'_x = w'$$

$$\xrightarrow{\bar{h}_x=0} h_t + \bar{u}h'_x = w' \Rightarrow h_t + \sin\vartheta h'_x = w' \quad (7.28)$$

Κάθετη δυναμική συνθήκη

$$p + \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} u_x + \frac{h_x}{1 + h_x^2} (u_z + w_x) + We\sigma \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{p} + p' + \frac{1 - (h'_x)^2}{1 + (h'_x)^2} (\bar{u}_x + u'_x) + \frac{h'_x}{1 + (h'_x)^2} (\bar{u}_z + u'_z + \bar{w}_x + w'_x) + We\sigma \frac{h'_{xx}}{(1 + (h'_x)^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{p} + p' + u'_x + h'_x \bar{u}_z + h'_x u'_z + h'_x \bar{w}_x = -We h'_{xx} \bar{\sigma} - We h'_{xx} \sigma' \Rightarrow$$

$$- \cos\vartheta \cdot h' + p' + u'_x - 2\sin\vartheta h' h'_x = -We h'_{xx} \bar{\sigma} \Rightarrow$$

$$p' + u'_x - h' \cos\vartheta = -We \bar{\sigma} h'_{xx} \quad (7.29)$$

Εφαπτομενική δυναμική συνθήκη

$$-4h_x u_x + (1 - h_x^2)(u_z + w_x) = 2We\sqrt{1 + h_x^2} \left(\sigma_\Gamma \Gamma_x + \sigma_c(\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) + \sigma_T(T_x + h_x T_z) \right)$$

Λόγω των πολλών εμπλεκόμενων όρων είναι προτιμότερο να υπολογιστούν χωριστά κι έπειτα να αντικατασταθούν στην εξίσωση.

$$h_x u_x = h'_x (\overline{u}_x + u'_x) = h'_x u'_x \rightarrow 0$$

$$(1 - h_x^2)(u_z + w_x) = (1 - (h'_x)^2)(\overline{u}_z + u'_z + \overline{w}_x + w'_x) = \overline{u}_z + u'_z + w'_x$$

$$\sqrt{1 + h_x^2} = \sqrt{1 + (h'_x)^2} = 1$$

$$\sigma_\Gamma \Gamma_x = \sigma_\Gamma (\overline{\Gamma}_x + \Gamma'_x) = \sigma_\Gamma \Gamma'_x$$

$$\sigma_c(\mathbb{C}_x + h_x \mathbb{C}_z) = \sigma_c(\overline{\mathbb{C}}_x + \mathbb{C}'_x + h'_x(\overline{\mathbb{C}}_z + \mathbb{C}'_z)) = \sigma_c(\mathbb{C}'_x + h'_x \overline{\mathbb{C}}_z + h'_x \mathbb{C}'_z) = \sigma_c(\mathbb{C}'_x + h'_x \overline{\mathbb{C}}_z)$$

$$\sigma_T(T_x + h_x T_z) = \sigma_T(\overline{T}_x + T'_x + h'_x(\overline{T}_z + T'_z)) = \sigma_T(T'_x + h'_x \overline{T}_z + h'_x T'_z) = \sigma_T(T'_x + h'_x \overline{T}_z)$$

Μέσω αυτών και κατόπιν με αντικατάσταση των αποτελεσμάτων των αναπτυγμάτων Taylor η συνθήκη γίνεται :

$$\begin{aligned} \overline{u}_z + u'_z + w'_x &= 2We \left(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c(\mathbb{C}'_x + h'_x \overline{\mathbb{C}}_z) + \sigma_T(T'_x + h'_x \overline{T}_z) \right) \Rightarrow \\ -2h' \sin\theta + u'_z + w'_x &= 2We \left(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c(\mathbb{C}'_x + h'_x) + \sigma_T(T'_x + h'_x) \right) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Οι ποσότητες σ_Γ , σ_c και σ_T δε διαταράσσονται. Πηγάζουν από τη συσχέτιση $\sigma = \sigma(\Gamma, \mathbb{C}, T)$, άρα αποτελούν φυσικοχημικές παραμέτρους που δε σχετίζονται με το πρόβλημα ροής.

Συνθήκη ισορροπίας

Η μόνιμη λύση Nusselt ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας, όπως φαίνεται και στην εξίσωση (7.15), $\overline{\mathbb{C}}_i = a\overline{T}_i + b$. Όμως, στη διεπιφάνεια στην περίπτωση αυτή ισχύει $T_i = T(h = 1) = 1$ και $\mathbb{C}_i = \mathbb{C}(h = 1) = 1$ και η σχέση παίρνει την ιδιαίτερη μορφή $a + b = 1$ στις μόνιμες συνθήκες.

$$\mathbb{C}_i = aT_i + b \xrightarrow{\mathbb{C}_i = \mathbb{C} \ \& \ T_i = T} \overline{\mathbb{C}} + \mathbb{C}' = a(\overline{T} + T') + b \Rightarrow h' + 1 + \mathbb{C}' = a(h' + 1 + T') + b \Rightarrow$$

$$h' + 1 + \mathbb{C}' = ah' + a + aT' + b \xrightarrow{a+b=1} \mathbb{C}' = -h' + ah' + aT' \Rightarrow$$

$$\mathbb{C}' = aT' + (a - 1)h' \quad (7.31)$$

Συνθήκη σύζευξης μεταφοράς μάζας και θερμότητας

$$-h_x T_x + T_z = \mu(-h_x \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_z) \Rightarrow -h'_x(\overline{T}_x + T'_x) + \overline{T}_z + T'_z = \mu(-h'_x(\overline{\mathbb{C}}_x + \mathbb{C}'_x) + \overline{\mathbb{C}}_z + \mathbb{C}'_z) \Rightarrow$$

$$-h'_x \overline{T}_x - h'_x T'_x + \overline{T}_z + T'_z = \mu(-h'_x \overline{\mathbb{C}}_x - h'_x \mathbb{C}'_x + \overline{\mathbb{C}}_z + \mathbb{C}'_z) \Rightarrow$$

$$\overline{T}_z + T'_z = \mu(\overline{\mathbb{C}}_z + \mathbb{C}'_z)$$

Εφόσον στη μόνιμη λύση $-\bar{h}_x \bar{T}_x + \bar{T}_z = \mu(-\bar{h}_x \bar{C}_x + \bar{C}_z)$ και $\bar{h}_x = 0$ γίνεται $\bar{T}_z = \mu \bar{C}_z$. Επομένως,

$$T'_z = \mu C'_z \quad (7.32)$$

Ειδική ροή επιφανειοδραστικού, ανιαλλαγή διεπιφάνειας-κυρίως μάζας

$$\bar{J} = K_{KIN} \left[\xi \bar{c} (1 - \bar{\Gamma}) - \bar{\Gamma} \right] - K_G (\bar{\Gamma} - \Gamma_{eq}) = -\frac{Pe_{sb}^{-1}}{\sqrt{1 + \bar{h}_x^2}} (-\bar{h}_x \bar{c}_x + \bar{c}_z)$$

Υπολογίζοντας τους εμπλεκόμενους όρους:

$$h_x c_x = h'_x (\bar{c}_x + c'_x) = h'_x c'_x \rightarrow 0$$

$$c(1 - \Gamma) = (\bar{c} + c')(1 - \bar{\Gamma} + \Gamma') = \bar{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \bar{c}\Gamma' + c' - c'\bar{\Gamma} - c'\Gamma' = \bar{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \bar{c}\Gamma' + c' - c'\bar{\Gamma}$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση μαζί με τα υπόλοιπα διατεταραγμένα μεγέθη:

$$\bar{J} + J' = K_{KIN} \left[\xi \bar{c} (1 - \bar{\Gamma}) - \xi (\bar{c}\Gamma' + c' - c'\bar{\Gamma}) - \bar{\Gamma} - \Gamma' \right] - K_G (\bar{\Gamma} - \Gamma_{eq}) - K_G \Gamma' = -Pe_{sb}^{-1} (\bar{c}_z + c'_z)$$

Τελικώς, χρήση της (7.16) η σχέση καταλήγει σε:

$$J' = K_{KIN} \left[-\xi (\bar{c}\Gamma' + c' - c'\bar{\Gamma}) - \Gamma' \right] - K_G \Gamma' = -Pe_{sb}^{-1} c'_z \Rightarrow$$

$$J' = K_{KIN} \left[\xi c' (1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c}\Gamma' - \Gamma' \right] - K_G \Gamma' = -Pe_{sb}^{-1} c'_z \quad (7.33)$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\Gamma_t + u\Gamma_x + \frac{\Gamma}{1 + h_x^2} (u_x + h_x u_z + h_x (w_x + h_x w_z)) = \frac{1}{Pe_{s_s}} \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} \left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right)_x + J$$

Όλοι σχεδόν οι όροι έχουν ήδη υπολογιστεί προηγουμένως. Γινόμενα παραγώγων ταχυτήτων στη x διεύθυνση με το h_x καταλήγουν πάντοτε αμελητέα και απομένουν ο όρος της επιφανειακής διάχυσης και το γινόμενο $u\Gamma_x$. Το $h_x u_z$ υπενθυμίζεται πως ισούται με $\bar{u}_z h'_x$.

$$\Gamma_t = \bar{\Gamma}_t + \Gamma'_t$$

$$u\Gamma_x = (\bar{u} + u')(\bar{\Gamma}_x + \Gamma'_x) = (\bar{u} + u')\Gamma'_x = \bar{u}\Gamma'_x + u'\Gamma'_x = \bar{u}\Gamma'_x$$

$$\left(\frac{\Gamma_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right)_x = \frac{\Gamma_{xx} (1 + h_x^2) - (\bar{\Gamma}_x + \Gamma'_x) h'_x h'_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} = \frac{\bar{\Gamma}_{xx} + \Gamma'_{xx} (1 + (h'_x)^2) - \Gamma'_x h'_x h'_{xx}}{(1 + (h'_x)^2)^{3/2}} = \Gamma'_{xx}$$

Αντικαθιστώντας,

$$\Gamma'_t + \bar{u}\Gamma'_x + \bar{\Gamma}u'_x + \bar{\Gamma}\bar{u}_z h'_x = Pe_{s_s}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \Rightarrow$$

$$\Gamma'_t + \sin\theta \Gamma'_x + \bar{\Gamma}u'_x + \bar{\Gamma}(-2\sin\theta) h'_x h'_{xx} = Pe_{s_s}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \Rightarrow$$

$$\Gamma'_t + \sin\theta \Gamma'_x + \bar{\Gamma}u'_x = Pe_{s_s}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \quad (7.34)$$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα, το συνολικό γραμμικοποιημένο πρόβλημα γύρω από τη μόνιμη λύση (6.62)-(6.72) για μια πολύ μικρή διαταραχή είναι:

ΛΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$Re \left(u'_t + \sin\vartheta(2z - z^2) u'_x + 2\sin\vartheta(1 - z) w' \right) + 2p'_x - u'_{xx} - u'_{zz} = 0 \quad (7.35)$$

$$Re \left(w'_t + \sin\vartheta(2z - z^2) w'_x \right) + 2p'_z - w'_{xx} - w'_{zz} = 0 \quad (7.36)$$

$$u'_x + w'_z = 0 \quad (7.37)$$

$$T'_t + \sin\vartheta(2z - z^2) T'_x + w' - Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz}) = 0 \quad (7.38)$$

$$C'_t + \sin\vartheta(2z - z^2) C'_x + w' - Pe^{-1}(C'_{xx} + C'_{zz}) = 0 \quad (7.39)$$

$$c'_t + \sin\vartheta(2z - z^2) c'_x - Pe_{s_b}^{-1}(c'_{xx} + c'_{zz}) = 0 \quad (7.40)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

@ $z = 0$

$$u' = 0 \quad \& \quad w' = 0 \quad (7.41)$$

$$T' = 0 \quad (7.42)$$

$$C' = 0 \quad (7.43)$$

$$c'_z = 0 \quad (7.44)$$

@ $z = 1$

$$h'_t + \sin\vartheta h'_x = w' \quad (7.45)$$

$$p' + u'_x - h' \cos\vartheta = -We\bar{\sigma} h'_{xx} \quad (7.46)$$

$$-2h' \sin\vartheta + u'_z + w'_x = 2We \left(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c (C'_x + h'_x) + \sigma_T (T'_x + h'_x) \right) \quad (7.47)$$

$$C' = aT' + (a - 1)h' \quad (7.48)$$

$$T'_z = \mu C'_z \quad (7.49)$$

$$J' = K_{KIN} \left[\xi c' (1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \Gamma' - \Gamma' \right] - K_G \Gamma' = -Pe_{s_b}^{-1} c'_z \quad (7.50)$$

$$\Gamma'_t + \sin\vartheta \Gamma'_x + \bar{\Gamma} u'_x = Pe_{s_s}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \quad (7.51)$$

Πλέον το πρόβλημα έχει αναχθεί σε γραμμικό με αγνώστους τις συναρτήσεις των διαταραχών. Πέραν της απόκτησης γραμμικών, άρα ευκολότερα διαχειρίσιμων εξισώσεων, μέσω της απαλοιφής των γινομένων των αγνώστων, η διαδικασία της γραμμικοποίησης προσφέρει μια διευκόλυνση ακόμη. Το πεδίο επίλυσης από $z : 0 \rightarrow h'$, όπου h' άγνωστη συνάρτηση, μετατρέπεται στο $z : 0 \rightarrow 1$, που είναι σαφώς ορισμένο. Αυτό επιτεύχθη, εφόσον όλες οι μόνιμες τιμές των συναρτήσεων στη διεπιφάνεια προσεγγίστηκαν στο $z = 1$ και οι αποκλίσεις από τη θέση αυτή, λόγω των μικρών διαταραχών, παρέμειναν να εκφράζονται μέσω του h' σε όρους που προέκυψαν από τα αναπτύγματα Taylor.

7.3 Εισαγωγή ροϊκής συνάρτησης

Για διδιάστατη, ασυμπίεστη ροή ορίζεται η ροϊκή συνάρτηση $\psi = \psi(x, z)$ με τέτοιο τρόπο, ώστε $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ και $w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Επειδή η σχέση αυτή ισχύει και στις μόνιμες συνθήκες $\bar{u} = \bar{\psi}_z$ και $\bar{w} = -\bar{\psi}_x$, θα έχει και για τις διαταραχές την ίδια μορφή $u' = \psi'_z$ και $w' = -\psi'_x$. Με τη χρήση της ροϊκής συνάρτησης η εξίσωση της συνέχειας ικανοποιείται ταυτοτικά. Η παρουσία της ενοποιεί σε μια μεταβλητή ψ τις δυο συνιστώσες u και w της ταχύτητας και γι' αυτό εισάγεται στις παραπάνω εξισώσεις.

$$\begin{array}{ccccc} u' = \psi'_z & u'_{xx} = \psi'_{zxx} & u'_{zz} = \psi'_{zzz} & w'_x = -\psi'_{xx} & w'_{xx} = -\psi'_{xxx} \\ u'_x = \psi'_{zx} & u'_z = \psi'_{zz} & w' = -\psi'_x & w'_z = -\psi'_{xz} & w'_{zz} = -\psi'_{xzz} \end{array}$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά:

$$Re(\psi'_{zt} + \sin\vartheta(2z - z^2)\psi'_{zx} - 2\sin\vartheta(1 - z)\psi'_x) + 2p'_x - \psi'_{zxx} - \psi'_{zzz} = 0 \quad (7.52)$$

$$Re(-\psi'_{xt} - \sin\vartheta(2z - z^2)\psi'_{xx}) + 2p'_z + \psi'_{xxx} + \psi'_{xzz} = 0 \quad (7.53)$$

$$\psi'_{zx} - \psi'_{zx} = 0 \quad (7.54)$$

$$T'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)T'_x - \psi'_x - Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz}) = 0 \quad (7.55)$$

$$C'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)C'_x - \psi'_x - Pe^{-1}(C'_{xx} + C'_{zz}) = 0 \quad (7.56)$$

$$c'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)c'_x - Pe_{sb}^{-1}(c'_{xx} + c'_{zz}) = 0 \quad (7.57)$$

@ $z = 0$

$$\psi'_z = 0 \quad \& \quad -\psi'_x = 0 \quad (7.58)$$

$$T' = 0 \quad (7.59)$$

$$C' = 0 \quad (7.60)$$

$$c'_z = 0 \quad (7.61)$$

@ $z = 1$

$$h'_t + \sin\vartheta h'_x = -\psi'_x \quad (7.62)$$

$$p' + \psi'_{zx} - h' \cos\vartheta = -We\bar{\sigma} h'_{xx} \quad (7.63)$$

$$-2h' \sin\vartheta + \psi'_{zz} - \psi'_{xx} = 2We \left(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c (C'_x + h'_x) + \sigma_T (T'_x + h'_x) \right) \quad (7.64)$$

$$C' = aT' + (a - 1)h' \quad (7.65)$$

$$T'_z = \mu C'_z \quad (7.66)$$

$$J' = K_{KIN} \left[\xi c' (1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \Gamma' - \Gamma' \right] - K_G \Gamma' = -Pe_{sb}^{-1} c'_z \quad (7.67)$$

$$\Gamma'_t + \sin\vartheta \Gamma'_x + \bar{\Gamma} \psi'_{zx} = Pe_{ss}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \quad (7.68)$$

Μετά την εισαγωγή της ροϊκής συνάρτησης είναι δυνατή και η συνένωση των δυο εξισώσεων Navier-Stokes σε μία, μέσω απαλοιφής των όρων πιέσεως. Για το σκοπό αυτό η (7.52) παραγωγίζεται ως προς z και η (7.53) ως προς x .

$$(7.52) \Rightarrow \text{Re} \left(\psi'_{zzt} + \sin\vartheta \left((2z - z^2) \psi'_{zzx} + 2(1-z) \psi'_{zx} \right) - 2\sin\vartheta \left((1-z) \psi'_{xz} - \psi'_x \right) \right) + 2p'_{xz} - \psi'_{zxxz} - \psi'_{zzzz} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Re} \left(\psi'_{zzt} + \sin\vartheta (2z - z^2) \psi'_{zzx} + 2\sin\vartheta \psi'_x \right) + 2p'_{xz} - \psi'_{zxxz} - \psi'_{zzzz} = 0 \quad (7.69)$$

$$(7.53) \Rightarrow \text{Re} \left(-\psi'_{xxt} - \sin\vartheta (2z - z^2) \psi'_{xxx} \right) + 2p'_{zx} + \psi'_{xxxx} + \psi'_{xzzx} = 0 \quad (7.70)$$

Αφαιρώντας την (7.70) από την (7.69) προκύπτει:

$$\text{Re} \left(\psi'_{zzt} + \psi'_{xxt} + \sin\vartheta (2z - z^2) (\psi'_{zzx} + \psi'_{xxx}) + 2\sin\vartheta \psi'_x \right) - \psi'_{zzzz} - \psi'_{xxxx} - 2\psi'_{xzzx} = 0 \quad (7.71)$$

Ακόμη, για τον όρο πιέσεως που εμφανίζεται στην κάθετη οριακή συνθήκη (7.63):

$$(7.52) \Rightarrow p'_x = \frac{\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - \text{Re} \left(\psi'_{zt} + \sin\vartheta (2z - z^2) \psi'_{zx} - 2\sin\vartheta (1-z) \psi'_x \right)}{2} \xrightarrow{z=1}$$

$$p'_x = \frac{\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - \text{Re} \left(\psi'_{zt} + \sin\vartheta \psi'_{zx} \right)}{2} \quad (7.72)$$

επειδή η γραμμικοποιημένη εξίσωση αφορά τη διεπιφάνεια $z = 1$ και

$$(7.63) \Rightarrow p'_x + \psi'_{zxx} - h'_x \cos\vartheta = -We \bar{\sigma} h'_{xxx} \quad (7.73)$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (7.72) και (7.73):

$$\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - \text{Re} \left(\psi'_{zt} + \sin\vartheta \psi'_{zx} \right) + 2\psi'_{zxx} - 2h'_x \cos\vartheta = -2We \bar{\sigma} h'_{xxx} \Rightarrow$$

$$3\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - \text{Re} \left(\psi'_{zt} + \sin\vartheta \psi'_{zx} \right) = 2h'_x \cos\vartheta - 2We \bar{\sigma} h'_{xxx} \quad (7.74)$$

Και κατόπιν της τροποποίησης αυτής το συνολικό πρόβλημα γίνεται το ακόλουθο που αποτελείται από τέσσερις εξισώσεις πεδίου και δεκατρείς συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Re} \left(\psi'_{zzt} + \psi'_{xxt} + \sin\vartheta (2z - z^2) (\psi'_{zzx} + \psi'_{xxx}) + 2\sin\vartheta \psi'_x \right) - \psi'_{zzzz} - \psi'_{xxxx} - 2\psi'_{xzzx} = 0 \quad (7.75)$$

$$T'_t + \sin\vartheta (2z - z^2) T'_x - \psi'_x - Pe_H^{-1} (T'_{xx} + T'_{zz}) = 0 \quad (7.76)$$

$$C'_t + \sin\vartheta (2z - z^2) C'_x - \psi'_x - Pe^{-1} (C'_{xx} + C'_{zz}) = 0 \quad (7.77)$$

$$c'_t + \sin\vartheta (2z - z^2) c'_x - Pe_{s_b}^{-1} (c'_{xx} + c'_{zz}) = 0 \quad (7.78)$$

@ $z = 0$

$$\psi'_z = \psi'_x = 0 \quad (7.79)$$

$$T' = 0 \quad (7.80)$$

$$C' = 0 \quad (7.81)$$

$$c'_z = 0 \quad (7.82)$$

@z = 1

$$h'_t + \sin\vartheta h'_x = -\psi'_x \quad (7.83)$$

$$3\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - \text{Re}(\psi'_{zt} + \sin\vartheta \psi'_{zx}) = 2h'_x \cos\vartheta - 2We\bar{\sigma} h'_{xxx} \quad (7.84)$$

$$-2h' \sin\vartheta + \psi'_{zz} - \psi'_{xx} = 2We \left(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c (\mathbb{C}'_x + h'_x) + \sigma_T (T'_x + h'_x) \right) \quad (7.85)$$

$$\mathbb{C}' = \mathbf{a}T' + (\mathbf{a} - 1)h' \quad (7.86)$$

$$T'_z = \mu \mathbb{C}'_z \quad (7.87)$$

$$J' = K_{KIN} \left[\xi c' (1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \Gamma' - \Gamma' \right] - K_G \Gamma' = -Pe_{s_b}^{-1} c'_z \quad (7.88)$$

$$\Gamma'_t + \sin\vartheta \Gamma'_x + \bar{\Gamma} \psi'_{zx} = Pe_{s_s}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \quad (7.89)$$

Κεφάλαιο 8

Ανάλυση Ιδιομορφών - Normal mode analysis

8.1 Η μορφή της λύσης

Οι εξισώσεις που αποκτήθηκαν στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου με την εισαγωγή της ροϊκής συνάρτησης $\psi(x, z)$ έχουν τα εξής δυο χαρακτηριστικά. Κατ' αρχάς, είναι γραμμικές. Δεν απαντιούνται πιθανά όροι γινομένων αγνώστων. Ακόμη, οι συντελεστές τους είναι είτε σταθερές είτε αποτελούν αποκλειστικά συναρτήσεις του z . Σε αυτό βασίζεται το παρόν βήμα της ανάλυσης ευστάθειας που στη βιβλιογραφία ονομάζεται Normal Mode Analysis.

Σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όταν οι συντελεστές όλων των όρων είναι σταθεροί, οι λύσεις είναι εκθετικές ως προς όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές που γίνεται παραγωγή. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται εδώ είναι συναρτήσεις της μιας εκ των μεταβλητών, του z . Είναι, επομένως, εύλογο να υποθεθεί πως η μορφή της λύσης θα είναι εκθετική ως προς το χρόνο και τη x διεύθυνση του χώρου που δεν εμπλέκονται στους συντελεστές. Ως προς το z , αν υπάρχει εξάρτηση της συνάρτησης από αυτό, η μορφή της λύσης δεν είναι γνωστή και συμβολίζεται με καπελάκι να πολλαπλασιάζει το εκθετικό. Αν δεν υπάρχει εξάρτηση, η συνάρτηση με το καπελάκι είναι απλώς σταθερά. Για παράδειγμα,

$$\psi'(x, z, t) = \hat{\psi}(z) e^{\lambda t + i k x} \quad \text{και} \quad h(x, t) = \hat{h} e^{\lambda t + i k x}$$

Συνολικά, για όλες τις συναρτήσεις διαταραχών υποτίθεται πως:

$$\begin{bmatrix} \psi'(x, z, t) \\ T'(x, z, t) \\ C'(x, z, t) \\ c'(x, z, t) \\ h'(x, t) \\ \Gamma'(x, t) \\ J'(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}(z) \\ \hat{T}(z) \\ \hat{C}(z) \\ \hat{c}(z) \\ \hat{h} \\ \hat{\Gamma} \\ \hat{J} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t + i k x}$$

Η εξάρτηση από το χρόνο και τη x διεύθυνση του χώρου επιλέγεται κοινή για όλα τα μεγέθη. Αυτό δεν είναι αβάσιμο. Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό, αν μια συνάρτηση έχει από το x ή το t , που δεν εμπλέκονται στους συντελεστές, εξάρτηση κάποιας μορφής, τότε και οι υπόλοιπες συναρτήσεις θα έχουν ίδιας μορφής εξάρτηση από αυτό. Έτσι, ο εκθετικός όρος είναι ίδιος για όλα.

Ο συντελεστής του x k επιλέγεται πραγματικός αριθμός και καλείται αδιάστατος κυματαριθμός ή στο εξής απλώς κυματαριθμός. Αποτελεί καθαρό αριθμό (αδιάστατη ποσότητα) και αφορά διαταραχή περιοδική και

χωρικός ομοιόμορφη με μήκος κύματος L . Εκφράζει τη χωρική συχνότητα, πόσα μήκη κύματος χωρούν σε δεδομένο μήκος. Εδώ ορίζεται ως $k = \frac{2\pi H}{L}$. Επιλέγοντας διαφορετικό κυματαριθμό μελετάται διαφορετική διαταραχή, δηλαδή διαφορετικό κύμα. Οι διαταραχές λόγω του όρου e^{ikx} είναι τριγωνομετρικές, διότι $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$. Στη φύση οι διαταραχές είναι τυχαίες αλλά αυτό δε δημιουργεί πρόβλημα, αφού κάθε περιοδική διαταραχή περιγράφεται ως επαλληλία όλων των αρμονικών που την αποτελούν.

Ο συνειλεστής του χρόνου λ είναι ιδιοτιμή του προβλήματος και επιλέγεται να είναι μιγαδικός αριθμός: $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, όπου λ_R και λ_I το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος αντιστοίχως. Αντικαθιστώντας το τελευταίο, ο εκθετικός όρος λαμβάνει τη μορφή:

$$e^{\lambda t + ikx} = e^{(\lambda_R + i\lambda_I)t + ikx} = e^{\lambda_R t + i(\lambda_I t + kx)} = e^{\lambda_R t} \cdot e^{ik(x + \frac{\lambda_I}{k} t)}$$

Ο δεύτερος παράγοντας $e^{i(\lambda_I t + kx)} = e^{ik(x + \frac{\lambda_I}{k} t)} = \cos(\lambda_I t + kx) + i \sin(\lambda_I t + kx)$ αποτελεί ένα κύμα με φάση $\lambda_I t + kx$ που μένει σταθερή για παρατηρητή κινούμενο με τη φασική ταχύτητα, την ταχύτητα διάδοσης του κύματος $C = -\frac{\lambda_I}{k}$ (παρατηρητής κινούμενος με την ταχύτητα αυτή, δηλαδή μαζί με το κύμα, βλέπει κάθε στιγμή το σημείο που βρίσκεται-κοιτά στην ίδια θέση-απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας με το προηγούμενο που κοιτούσε την προηγούμενη χρονική στιγμή). Το φανταστικό, λοιπόν, μέρος της ιδιοτιμής οδηγεί στον καθορισμό της ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής.

Το πραγματικό μέρος της, από την άλλη, δεν καθορίζει τη διάδοση αλλά την εξέλιξη της διαταραχής. Πολλαπλασιαζόμενο μόνο με το χρόνο δημιουργεί ένα πραγματικό εκθέτη, ώστε, αν $\lambda_R < 0$, ο όρος $e^{\lambda_R t}$ με την πάροδο του χρόνου σβήνει, ομοίως και η διαταραχή. Αντιθέτως, αν $\lambda_R > 0$, ο όρος $e^{\lambda_R t} \rightarrow \infty$ απειρίζεται καθώς περνά ο χρόνος, η διαταραχή μεγαλώνει. Στην πρώτη περίπτωση που η διαταραχή αποσβέννεται η ροή δε μεταβάλλεται και είναι ευσταθής, ενώ αν αναπτύσσεται καθίσταται ασταθής.

Ο όρος normal mode analysis χρησιμοποιείται για να περιγράψει το γεγονός ότι η κίνηση του συστήματος αναλύεται σε αρμονικές (ημιτονοειδείς) κινήσεις modes ανεξάρτητες και ορθογωνικές μεταξύ τους normal (<http://www.bioinfo.rpi.edu>). Θεωρείται πως όλα τα μέρη του συστήματος κινούνται ημιτονοειδώς, με κοινή συχνότητα και βρίσκονται σε φάση.

Συνολικά, η εκθετική μορφή ως προς x, t πηγάζει από τις εξισώσεις. Εφόσον πρόκειται να μελετηθούν ημιτονοειδείς και χωρικός ομοιόμορφες διαταραχές, πρέπει ως προς το x να δημιουργούνται τριγωνομετρικοί όροι e^{ikx} . Οι όροι αυτοί καθιστούν κυματόμορφη τη διεπιφάνεια. Επειδή, όμως, το πρόβλημα είναι δυναμικό, εμπλέκεται και ο χρόνος, επιλέγεται η ιδιοτιμή να είναι μιγαδική, ώστε να καθορίζονται μέσω αυτής η διάδοση και η εξέλιξη του κυματισμού. Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων ανάγεται σε πρόβλημα ιδιοτιμών.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται χρονική ανάλυση ευστάθειας (temporal stability analysis), διότι θεωρεί μια χωρικός ομοιόμορφη περιοδική διαταραχή και μελετά την εξέλιξή της στο χρόνο.

8.2 Αντικατάσταση της λύσης

Με βάση την υπόθεση για τη μορφή της λύσης υπολογίζονται οι όροι των εξισώσεων (7.75)-(7.89):

Ροϊκή συνάρτηση

$$\begin{aligned}\psi'_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\psi} e^{\lambda t + ikx}) = \hat{\psi} ik e^{\lambda t + ikx} \\ \psi'_{xx} &= \hat{\psi} (ik)^2 e^{\lambda t + ikx} = -\hat{\psi} k^2 e^{\lambda t + ikx} \\ \psi'_{zz} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\hat{\psi} e^{\lambda t + ikx}) = \hat{\psi}_{zz} e^{\lambda t + ikx} \\ \psi'_{xz} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(\hat{\psi} e^{\lambda t + ikx}) = \hat{\psi}_z ik e^{\lambda t + ikx} \\ \psi'_{zt} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}(\hat{\psi} e^{\lambda t + ikx}) = \lambda \hat{\psi}_z e^{\lambda t + ikx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_{zzt} &= \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_{zz} e^{i k x} e^{\lambda t} \lambda = \lambda \hat{\psi}_{zz} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{xxt} &= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{\lambda t + i k x} \right) = \hat{\psi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda e^{\lambda t + i k x}) = \lambda i k \hat{\psi} e^{\lambda t} i k e^{i k x} \\
&= -\lambda k^2 \hat{\psi} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{zzx} &= \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial x} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_{zz} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\lambda t + i k x}) = i k \hat{\psi}_{zz} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{zxx} &= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_z (i k)^2 e^{\lambda t + i k x} = -\hat{\psi}_z k^2 e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{xxx} &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi} e^{\lambda t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{i k x} \right) = \hat{\psi} e^{\lambda t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (i k e^{i k x}) \right) = \hat{\psi} (i k)^3 e^{\lambda t + i k x} \\
&= -i k^3 \hat{\psi} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{zzz} &= \frac{\partial^3}{\partial z^3} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_{zzz} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{zzzz} &= \frac{\partial^4}{\partial z^4} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_{zzzz} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{xxxx} &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \frac{\partial}{\partial x} \psi'_{xxx} = -i k^3 \hat{\psi} e^{\lambda t} \frac{\partial}{\partial x} (e^{i k x}) = -i^2 k^4 \hat{\psi} e^{\lambda t + i k x} = k^4 \hat{\psi} e^{\lambda t + i k x} \\
\psi'_{zzxx} &= \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} (\hat{\psi} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\psi}_{zz} e^{\lambda t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{i k x}) = -k^2 \hat{\psi}_{zz} e^{\lambda t + i k x}
\end{aligned}$$

Θερμοκρασία & Συγκέντρωση ατμού

$$\begin{aligned}
T'_t &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{T} e^{\lambda t + i k x}) = \lambda \hat{T} e^{\lambda t + i k x} & \mathcal{C}'_t &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{C} e^{\lambda t + i k x}) = \lambda \hat{C} e^{\lambda t + i k x} \\
T'_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{T} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{T} i k e^{\lambda t + i k x} & \mathcal{C}'_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{C} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{C} i k e^{\lambda t + i k x} \\
T'_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\hat{T} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{T}_z e^{\lambda t + i k x} & \mathcal{C}'_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\hat{C} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{C}_z e^{\lambda t + i k x} \\
T'_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{T} i k e^{\lambda t + i k x}) = -k^2 \hat{T} e^{\lambda t + i k x} & \mathcal{C}'_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{C} i k e^{\lambda t + i k x}) = -k^2 \hat{C} e^{\lambda t + i k x} \\
T'_{zz} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{T} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{T}_{zz} e^{\lambda t + i k x} & \mathcal{C}'_{zz} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{C} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{C}_{zz} e^{\lambda t + i k x}
\end{aligned}$$

Συγκέντρωση επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα

$$\begin{aligned}
c'_t &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{c} e^{\lambda t + i k x}) = \lambda \hat{c} e^{\lambda t + i k x} \\
c'_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{c} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{c} i k e^{\lambda t + i k x} \\
c'_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{c} i k e^{\lambda t + i k x}) = -k^2 \hat{c} e^{\lambda t + i k x} \\
c'_{zz} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{c} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{c}_{zz} e^{\lambda t + i k x}
\end{aligned}$$

Θέση διεπιφάνειας & διεπιφανειακή συγκέντρωση επιφανειοδραστικού

$$\begin{aligned}
h'_t &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{h} e^{\lambda t + i k x}) = \lambda \hat{h} e^{\lambda t + i k x} & \Gamma'_t &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\Gamma} e^{\lambda t + i k x}) = \lambda \hat{\Gamma} e^{\lambda t + i k x} \\
h'_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{h} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{h} i k e^{\lambda t + i k x} & \Gamma'_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\Gamma} e^{\lambda t + i k x}) = \hat{\Gamma} i k e^{\lambda t + i k x} \\
h'_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{h} e^{\lambda t + i k x}) = -i k^3 \hat{h} e^{\lambda t + i k x} & \Gamma'_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{\Gamma} i k e^{\lambda t + i k x}) = -k^2 \hat{\Gamma} e^{\lambda t + i k x}
\end{aligned}$$

Έχοντας υπολογίσει όλες αυτές τις ποσότητες που εμφανίζονται στις εξισώσεις, αντικαθιστώντας, οι εκθετικοί όροι εμφανίζονται παντού και κατά συνέπεια απαλείφονται. Επειδή δε αυτό ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, δεν εμφανίζεται καθόλου, το βήμα αυτό υπονοείται. Για την απόκτηση του αποτελέσματος αμέσως μετά την αντικατάσταση αρκεί ο πολλαπλασιασμός των εξισώσεων με $e^{\lambda t + i k x}$.

8.2.1 Εξισώσεις πεδίου

Εξίσωση ροής

$$\begin{aligned}
& Re(\psi'_{zzt} + \psi'_{xxt} + \sin\vartheta(2z - z^2)(\psi'_{zzx} + \psi'_{xxx}) + 2\sin\vartheta\psi'_x) - \psi'_{zzzz} - \psi'_{xxxx} - 2\psi'_{xxzz} = 0 \Rightarrow \\
& Re\left(\lambda\hat{\psi}_{zz} - \lambda k^2\hat{\psi} + \sin\vartheta(2z - z^2)ik\hat{\psi}_{zz} - k^3\hat{\psi} + 2\sin\vartheta ik\hat{\psi}\right) - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\psi}_{zz} = 0 \Rightarrow \\
& Re\left[(\hat{\psi}_{zz} - k^2\hat{\psi})(\lambda + ik\sin\vartheta(2z - z^2)) + 2\sin\vartheta ik\hat{\psi}\right] - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\psi}_{zz} = 0 \quad (8.1)
\end{aligned}$$

Στην παρούσα μορφή της η εξίσωση ροής ονομάζεται και εξίσωση Orr-Sommerfeld.

Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας

$$\begin{aligned}
& T'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)T'_x - \psi'_x - Pe_H^{-1}(T'_{xx} + T'_{zz}) = 0 \Rightarrow \\
& \hat{T}\lambda + ik\hat{T}\sin\vartheta(2z - z^2) - ik\hat{\psi} = Pe_H^{-1}(\hat{T}_{zz} - k^2\hat{T}) \Rightarrow \\
& \left[\lambda + ik\sin\vartheta(2z - z^2)\right]\hat{T} - ik\hat{\psi} = Pe_H^{-1}(\hat{T}_{zz} - k^2\hat{T}) \quad (8.2)
\end{aligned}$$

Εξίσωση μεταφοράς νερού

$$\begin{aligned}
& C'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)C'_x - \psi'_x - Pe^{-1}(C'_{xx} + C'_{zz}) = 0 \Rightarrow \\
& \hat{C}\lambda + ik\hat{C}\sin\vartheta(2z - z^2) - ik\hat{\psi} = Pe^{-1}(\hat{C}_{zz} - k^2\hat{C}) \Rightarrow \\
& \left[\lambda + ik\sin\vartheta(2z - z^2)\right]\hat{C} - ik\hat{\psi} = Pe^{-1}(\hat{C}_{zz} - k^2\hat{C}) \quad (8.3)
\end{aligned}$$

Εξίσωση μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\begin{aligned}
& c'_t + \sin\vartheta(2z - z^2)c'_x - Pe_{s_b}^{-1}(c'_{xx} + c'_{zz}) = 0 \Rightarrow \hat{c}\lambda + ik\hat{c}\sin\vartheta(2z - z^2) = Pe_{s_s}^{-1}(\hat{c}_{zz} - k^2\hat{c}) \Rightarrow \\
& \left[\lambda + ik\sin\vartheta(2z - z^2)\right]\hat{c} = Pe_{s_s}^{-1}(\hat{c}_{zz} - k^2\hat{c}) \quad (8.4)
\end{aligned}$$

8.2.2 Συνοριακές συνθήκες

☞ Στο στερεό υπόστρωμα $z = 0$:

$$\psi'_z = \psi'_x = T' = C' = c'_z \Rightarrow \hat{\psi}_z = ik\hat{\psi} = \hat{T} = \hat{C} = \hat{c}_z = 0 \Rightarrow \hat{\psi}_z = \hat{\psi} = \hat{T} = \hat{C} = \hat{c}_z = 0 \quad (8.5)$$

☞ Στη διεπιφάνεια $z = 1$:

Κινηματική συνθήκη

$$h'_t + \sin\vartheta h'_x = -\psi'_x \Rightarrow \hat{h}\lambda + ik\hat{h}\sin\vartheta = -ik\hat{\psi} \Rightarrow \hat{h}(\lambda + ik\sin\vartheta) = -ik\hat{\psi} \quad (8.6)$$

Κάθετη δυναμική συνθήκη

$$\begin{aligned}
3\psi'_{zxx} + \psi'_{zzz} - Re(\psi'_{zt} + \sin\vartheta \psi'_{zx}) &= 2h'_x \cos\vartheta - 2We\bar{\sigma} h'_{xxx} \Rightarrow \\
-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - Re(\lambda + ik \sin\vartheta)\hat{\psi}_z &= (2ik \cos\vartheta + 2We\bar{\sigma} ik^3)\hat{h} \Rightarrow \\
-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - Re(\lambda + ik \sin\vartheta)\hat{\psi}_z &= 2ik(\cos\vartheta + We\bar{\sigma} k^2)\hat{h}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Εφαπτομενική δυναμική συνθήκη

$$\begin{aligned}
-2h' \sin\vartheta + \psi'_{zz} - \psi'_{xx} &= 2We(\sigma_\Gamma \Gamma'_x + \sigma_c(\mathbb{C}'_x + h'_x) + \sigma_T(T'_x + h'_x)) \Rightarrow \\
-2\sin\vartheta \hat{h} + \hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} &= 2Weik(\sigma_\Gamma \hat{\Gamma} + \sigma_c(\hat{\mathbb{C}} + \hat{h}) + \sigma_T(\hat{T} + \hat{h}))
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Εξίσωση διεπιφανειακής ισορροπίας

$$\mathbb{C}' = aT' + (a-1)h' \Rightarrow \hat{\mathbb{C}} = a\hat{T} + (a-1)\hat{h} \tag{8.9}$$

Συνθήκη σύζευξης μεταφοράς μάζας και θερμότητας

$$T'_z = \mu \mathbb{C}'_z \Rightarrow \hat{T}_z = \mu \hat{\mathbb{C}}_z \tag{8.10}$$

Ειδική ροή επιφανειοδραστικού, ανταλλαγή διεπιφάνειας-κυρίως μάζας

$$\begin{aligned}
J' &= K_{KIN} [\xi c'(1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \Gamma' - \Gamma'] - K_G \Gamma' = -Pe_{sb}^{-1} c'_z \Rightarrow \\
\hat{J} &= K_{KIN} [\xi \hat{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}] - K_G \hat{\Gamma} = -Pe_{sb}^{-1} \hat{c}_z
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\begin{aligned}
\Gamma'_t + \sin\vartheta \Gamma'_x + \bar{\Gamma} \psi'_{zx} &= Pe_{ss}^{-1} \Gamma'_{xx} + J' \Rightarrow \lambda \hat{\Gamma} + ik \sin\vartheta \hat{\Gamma} + \bar{\Gamma} \hat{\psi}_z ik = \hat{J} - Pe_{ss}^{-1} k^2 \hat{\Gamma} \Rightarrow \\
\lambda \hat{\Gamma} + ik \sin\vartheta \hat{\Gamma} + Pe_{ss}^{-1} k^2 \hat{\Gamma} &= \hat{J} - \bar{\Gamma} \hat{\psi}_z ik \Rightarrow \\
\hat{\Gamma}(\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{ss}^{-1} k^2) &= \hat{J} - \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Έχει δημιουργηθεί, λοιπόν, το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$Re\left[(\hat{\psi}_{zz} - k^2 \hat{\psi})(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)) + 2\sin\vartheta ik \hat{\psi}\right] - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\psi}_{zz} = 0 \quad (8.13)$$

$$\hat{T}\left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)\right] - ik \hat{\psi} = Pe_H^{-1}(\hat{T}_{zz} - k^2 \hat{T}) \quad (8.14)$$

$$\hat{C}\left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)\right] - ik \hat{\psi} = Pe^{-1}(\hat{C}_{zz} - k^2 \hat{C}) \quad (8.15)$$

$$\hat{c}\left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)\right] = Pe_{s_s}^{-1}(\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) \quad (8.16)$$

@ $z = 0$

$$\hat{\psi}_z = \hat{\psi} = \hat{T} = \hat{C} = \hat{c}_z = 0 \quad (8.17)$$

@ $z = 1$

$$\hat{h}(\lambda + ik \sin\vartheta) = -ik \hat{\psi} \quad (8.18)$$

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - Re(\lambda + ik \sin\vartheta)\hat{\psi}_z = 2ik(\cos\vartheta + We\bar{\sigma}k^2)\hat{h} \quad (8.19)$$

$$-2\sin\vartheta \hat{h} + \hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} = 2Weik\left(\sigma_\Gamma \hat{\Gamma} + \sigma_c(\hat{C} + \hat{h}) + \sigma_T(\hat{T} + \hat{h})\right) \quad (8.20)$$

$$\hat{C} = a\hat{T} + (a-1)\hat{h} \quad (8.21)$$

$$\hat{T}_z = \mu \hat{C}_z \quad (8.22)$$

$$\hat{J} = K_{KIN}\left[\xi \hat{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}\right] - K_G \hat{\Gamma} = -Pe_{s_b}^{-1} \hat{c}_z \quad (8.23)$$

$$\hat{\Gamma}(\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1} k^2) = \hat{J} - \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik \quad (8.24)$$

8.2.3 Το τελικό πρόβλημα ιδιοτιμών

Το πρόβλημα αποτελείται από τέσσερις εξισώσεις πεδίου, μια τετάρτης τάξεως και τρεις δευτέρας, και δεκατριές συνοριακές συνθήκες, πέντε στο υπόστρωμα και οκτώ στη διεπιφάνεια. Επειδή οι ποσότητες $\hat{\Gamma}$, \hat{J} και \hat{h} είναι σταθερές, οι οκτώ εξισώσεις της διεπιφάνειας δύνανται να ελαττωθούν σε πέντε, τις απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, για την ειδική ροή επιφανειοδραστικού:

$$\hat{J} = -Pe_{s_b}^{-1} \hat{c}_z$$

Ακόμη, από την κινητική του, προκύπτει για την επιφανειακή συγκέντρωση:

$$K_{KIN}\left[\xi \hat{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \xi \bar{c} \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}\right] - K_G \hat{\Gamma} = -Pe_{s_b}^{-1} \hat{c}_z \Rightarrow -Pe_{s_b}^{-1} \hat{c}_z = K_{KIN} \xi \hat{c}(1 - \bar{\Gamma}) - K_{KIN} \hat{\Gamma}(\xi \bar{c} + 1) - K_G \hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{K_{KIN} \xi (1 - \bar{\Gamma})}{K_{KIN} (\xi \bar{c} + 1) + K_G} \hat{c} + \frac{Pe_{s_b}^{-1}}{K_{KIN} (\xi \bar{c} + 1) + K_G} \hat{c}_z \Rightarrow \hat{\Gamma} = \gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z$$

$$\text{όπου } \gamma = \frac{K_{KIN} \xi (1 - \bar{\Gamma})}{K_{KIN} (\xi \bar{c} + 1) + K_G} \text{ και } \delta = \frac{Pe_{s_b}^{-1}}{K_{KIN} (\xi \bar{c} + 1) + K_G}.$$

Τέλος, για την διαταραχή της θέσης της διεπιφάνειας πρέπει να επιλεγεί μια από τις τρεις συνθήκες: κινηματική, κάθετη δυναμική, επαπτομενική δυναμική. Επιλέγεται η επαπτομενική δυναμική, διότι από τις

άλλες θα υπεισελάθουν όλοι με λ^2 που καταστρέφουν τη γραμμικότητα και τη μορφή που επιδιώκεται να έχει το πρόβλημα ιδιοτιμών. Με αυτόν τον τρόπο:

$$\hat{h} = \frac{\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T})}{2\sin\vartheta + 2Weik(\sigma_c + \sigma_T)}$$

Έτσι, οι υπόλοιπες πέντε συνθήκες (η συνθήκη σύζευξης δεν αλλάζει) γίνονται:

Κινηματική συνθήκη

$$\hat{h}(\lambda + ik\sin\vartheta) = -ik\hat{\psi}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + ik\sin\vartheta) \left(\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T}) \right) &= -2ik(\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))\hat{\psi} \Rightarrow \\ (\lambda + ik\sin\vartheta) \left(\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T}) \right) &+ 2ik(\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))\hat{\psi} = 0 \end{aligned}$$

Κάθετη δυναμική συνθήκη

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - Re(\lambda + ik\sin\vartheta)\hat{\psi}_z = 2ik(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})\hat{h}$$

$$\begin{aligned} 2(-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - Re(\lambda + ik\sin\vartheta)\hat{\psi}_z)(\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T)) &= \\ = 2ik(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma}) \left(\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T}) \right) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ik(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})\hat{\psi}_{zz} - (\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))\hat{\psi}_{zzz} + ik^3(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})\hat{\psi} \\ + (\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))(3k^2 + Re(\lambda + ik\sin\vartheta))\hat{\psi}_z \\ + 2k^2 We(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T}) &= 0 \end{aligned}$$

Εξίσωση διεπιφανειακής ισορροπίας

$$\hat{C} = a\hat{T} + (a-1)\hat{h} \Rightarrow$$

$$2(\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))(\hat{C} - a\hat{T}) = (a-1) \left(\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c \hat{C} + \sigma_T \hat{T}) \right)$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού

$$\hat{\Gamma}(\lambda + ik\sin\vartheta + Pe_{ss}^{-1}k^2) = \hat{J} - \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik \Rightarrow$$

$$\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z(\lambda + ik\sin\vartheta + Pe_{ss}^{-1}k^2) = -Pe_{sb}^{-1}\hat{c}_z - \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik \Rightarrow$$

$$\hat{c}\gamma(\lambda + ik\sin\vartheta + Pe_{ss}^{-1}k^2) + \hat{c}_z \left[\delta(\lambda + ik\sin\vartheta + Pe_{ss}^{-1}k^2) + Pe_{sb}^{-1} \right] + \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik = 0$$

Τελικώς, το πρόβλημα ιδιοτιμών που πρόκειται να επιλυθεί είναι το ακόλουθο.

$$Re \left[(\hat{\psi}_{zz} - k^2 \hat{\psi})(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)) + 2 \sin\vartheta ik \hat{\psi} \right] - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\psi}_{zz} = 0 \quad (8.25)$$

$$\hat{T} \left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2) \right] - ik \hat{\psi} = Pe_H^{-1} (\hat{T}_{zz} - k^2 \hat{T}) \quad (8.26)$$

$$\hat{C} \left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2) \right] - ik \hat{\psi} = Pe^{-1} (\hat{C}_{zz} - k^2 \hat{C}) \quad (8.27)$$

$$\hat{c} \left[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2) \right] = Pe_{s_s}^{-1} (\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) \quad (8.28)$$

$$@z = 0$$

$$\hat{\psi}_z = \hat{\psi} = \hat{T} = \hat{C} = \hat{c}_z = 0 \quad (8.29)$$

$$@z = 1$$

$$\hat{T}_z = \mu \hat{C}_z \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} ik(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})\hat{\psi}_{zz} - (\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))\hat{\psi}_{zzz} + ik^3(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})\hat{\psi} \\ + (\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))(3k^2 + Re(\lambda + ik \sin\vartheta))\hat{\psi}_z \\ + 2k^2 We(\cos\vartheta + Wek^2\bar{\sigma})(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c\hat{C} + \sigma_T\hat{T}) = 0 \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} 2(\sin\vartheta + Weik(\sigma_c + \sigma_T))(\hat{C} - \mathbf{a}\hat{T}) = \\ = (\mathbf{a} - 1) \left(\hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik(\sigma_\Gamma(\gamma\hat{c} + \delta\hat{c}_z) + \sigma_c\hat{C} + \sigma_T\hat{T}) \right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

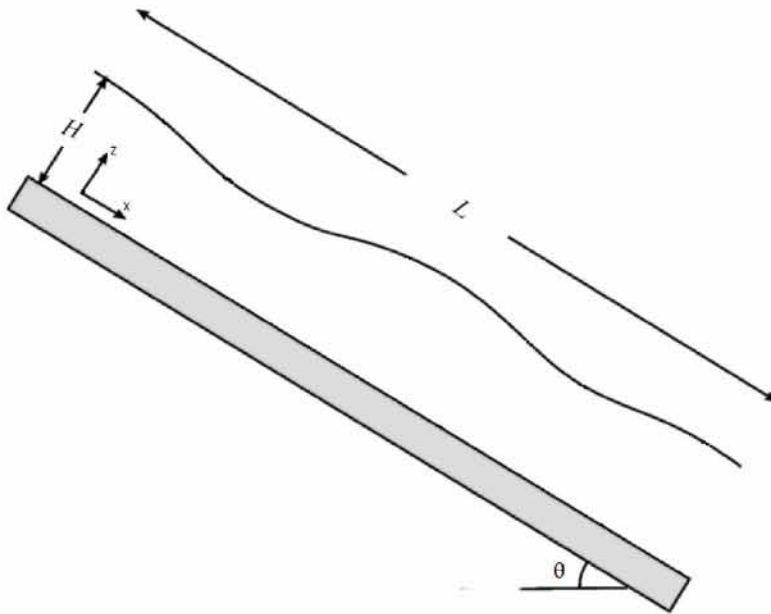
$$\hat{c}\gamma(\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1}k^2) + \hat{c}_z \left[\delta(\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1}k^2) + Pe_{s_b}^{-1} \right] + \hat{\psi}_z \bar{\Gamma} ik = 0 \quad (8.33)$$

Κεφάλαιο 9

Ευστάθεια καθαρού υμένα

9.1 Το πρόβλημα

Του προβλήματος του πίπτοντος υμένα με επιφανειοδραστικό κατά την απορρόφηση ατμού, το οποίο δομήθηκε προηγουμένως, προηγούνται δυο απλούστερα προβλήματα. Το πρώτο εξ αυτών, στο οποίο αφιερώνεται και το παρόν κεφάλαιο, αφορά τον πίπτοντα «καθαρό» υμένα, δίχως, δηλαδή, την παρουσία επιφανειοδραστικού.



Σχήμα 9.1: Ο «καθαρός» υμένας - το απλό ρευστοδυναμικό πρόβλημα

Επί κεκλιμένου στερεού υποστρώματος γωνίας κλίσης $\vartheta \in [0^\circ, 90^\circ]$ κατέρχεται ρευστό σχηματίζοντας λεπτό υμένα πάχους $z = h(x, t)$. Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 9.1 το παρόν αποτελεί πρόβλημα μεταφοράς ορμής, συνεπώς η ροή διέπεται από τις εξισώσεις Navier - Stokes στις διευθύνσεις x και z . Στο στερεό υπόστρωμα ισχύουν οι συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείδυσης, ενώ στη διεπιφάνεια ισχύουν η κινηματική συνθήκη και το ισοζύγιο δυνάμεων εκπεφρασμένο σε δύο συνιστώσες, μία εφαπτομενική και μία κάθετη.

Για την ανάλυση ευστάθειας οι εξισώσεις πεδίου και οι συνοριακές συνθήκες αδιαστατοποιούνται και γραμμικοποιούνται στο όριο μιας ελάχιστης διαταραχής ακριβώς όπως προηγουμένως και με τον ίδιο τρόπο εισάγεται η ροϊκή συνάρτηση και πραγματοποιείται normal mode analysis, ώστε λαμβάνεται η εξίσωση Orr - Somerfeld και οι ακόλουθες οριακές συνθήκες που διαφέρουν από τις (8.25)-(8.33) στο ότι περιλαμβάνουν μόνο τους όρους μεταφοράς ορμής.

Εξίσωση Orr - Somerfeld

$$Re \left[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2))(\hat{\psi}_{zz} - k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\psi}_{zz} = 0 \quad (9.1)$$

Συνοριακές Συνθήκες στο Υπόστρωμα (@ $z = 0$)

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_z = 0 \quad (9.2)$$

Συνοριακές Συνθήκες στη Διεπιφάνεια (@ $z = 1$)

$$\hat{h}(\lambda + ik \sin\vartheta) = -\hat{\psi} ik \quad (9.3)$$

$$-2\sin\vartheta \hat{h} + \hat{\psi}_{zz} + k^2\hat{\psi} = 0 \quad (9.4)$$

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - \hat{\psi}_z Re(\lambda + ik \sin\vartheta) = 2ik(\cot\vartheta + We k^2)\hat{h} \quad (9.5)$$

Η διαφορική εξίσωση πεδίου Orr - Somerfeld είναι συνήθως τετάρτης τάξεως. Προκειμένου να είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμη, ορίζεται νέα συνάρτηση $\hat{\varphi} = \hat{\psi}_{zz}$, ώστε ανάγεται σε σύστημα δυο συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως ως εξής:

$$Re \left[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2))(\hat{\varphi} - k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\varphi}_{zz} - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\varphi} = 0$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\psi}_{zz}$$

Οι οριακές συνθήκες περιορίζονται σε δύο με την αντικατάσταση του \hat{h} από την εφαπτομενική δυναμική συνθήκη:

$$\hat{h} = \frac{\hat{\psi}_{zz} + k^2\hat{\psi}}{2\sin\vartheta} \Rightarrow \hat{h} = \frac{\hat{\varphi} + k^2\hat{\psi}}{2\sin\vartheta}$$

Κινηματική Συνθήκη

$$(\lambda + ik \sin\vartheta)(\hat{\varphi} + k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} = 0$$

Κάθετη Δυναμική Συνθήκη

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\varphi}_z - \hat{\psi}_z Re(\lambda + ik \sin\vartheta) = ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) (\hat{\varphi} + k^2\hat{\psi})$$

Έτσι προκύπτει το προς διακριτοποίηση πρόβλημα ιδιοτιμών με δυο εξισώσεις πεδίου και δύο οριακές συνθήκες ανά άκρο.

$$Re \left[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2))(\hat{\varphi} - k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\varphi}_{zz} - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\varphi} = 0 \quad (9.6)$$

$$\hat{\psi}_{zz} - \hat{\varphi} = 0 \quad (9.7)$$

$$@z = 0 \quad (9.8)$$

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_z = 0 \quad (9.9)$$

$$@z = 1 \quad (9.10)$$

$$(\lambda + ik \sin\vartheta)(\hat{\varphi} + k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} = 0 \quad (9.11)$$

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\varphi}_z - \hat{\psi}_z Re(\lambda + ik \sin\vartheta) - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) (\hat{\varphi} + k^2\hat{\psi}) = 0 \quad (9.12)$$

9.2 Διακριτοποίηση-Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Για τη διακριτοποίηση και επίλυση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων κατά Galerkin (οι συναρτήσεις βάρους ταυτίζονται με τις συναρτήσεις βάσεως που προσεγγίζουν τις άγνωστες μεταβλητές). Τα στοιχεία επιλέχθηκαν ισομήκη και τετραγωνικά (τρεις κόμβοι ανά στοιχείο), ενώ οι συναρτήσεις βάσεως πολυώνυμα Lagrange δεύτερης τάξεως.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ξεκινά με τη διακριτοποίηση του φυσικού πεδίου επίλυσης σε υποχωρία, τα στοιχεία. Το παρόν πρόβλημα είναι μονοδιάστατο, συνεπώς τα στοιχεία είναι διαστήματα. Εφόσον επιλέγονται δευτέρας τάξεως, εμπλέκονται τρία σημεία, ειδικότερα τα άκρα και το μέσον τους (M. Βλαχομήτρου 2017).

Εντός των στοιχείων οι άγνωστες συναρτήσεις προσεγγίζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί πολυωνύμων Lagrange ως:

$\psi(z) = \psi_1 \omega_1(z) + \psi_2 \omega_2(z) + \dots = \sum_{j=1}^n \psi_j \omega_j(z)$, όπου ψ_1, ψ_2, \dots οι ζητούμενες τιμές της αγνώστου συναρτήσεως στους κόμβους, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots$ τα πολυώνυμα μέσω των οποίων γίνεται η προσέγγιση και n ο αριθμός των κόμβων ανά στοιχείο (τάξη στοιχείου+1).

Η προσέγγιση αυτή των αγνώστων συναρτήσεων αντικαθίσταται στη διαφορική εξίσωση. Έστω συνήθης διαφορική εξίσωση m τάξεως, μιας αγνώστου συναρτήσεως ψ και εκπεφρασμένη στην πεπλεγμένη μορφή της:

$$F(z, \psi(z), \psi^{(1)}(z), \psi^{(2)}(z), \dots, \psi^{(m)}(z)) = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

όπου $\psi^{(k)}(z) = \frac{d^k \psi(z)}{dz^k}$, $k = 1, 2, \dots, m$ και F πραγματική συνάρτηση $m + 2$ μεταβλητών (Α. Ζούπας 2015). Αν σε αυτή την εξίσωση αντικατασταθεί η προσέγγιση της $\psi(z)$, έστω $\psi_h^e(z)$ στο e στοιχείο, η F δε θα ισούται με μηδέν αλλά με κάποιο υπόλοιπο που εκφράζει το βαθμό στον οποίο δεν ικανοποιείται η εξίσωση από την προσέγγιση $\psi_h^e(z) = \sum_{j=1}^n \psi_j^{(e)} \omega_j(z)$:

$$F(z, \psi_h^e(z), \psi_h^{e(1)}(z), \psi_h^{e(2)}(z), \dots, \psi_h^{e(m)}(z)) = R^{(e)}(z, \psi_1^{(e)}, \psi_2^{(e)}, \dots, \psi_n^{(e)})$$

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και εξισώσεις περισσοτέρων αγνώστων είτε συνήθεις είτε μερικές. Η επιλογή της ειδικής αυτής περίπτωσης εξυπηρετεί αποκλειστικά την απλοποίηση των παραστάσεων.

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σε κάθε ένα στοιχείο με άκρα z_a, z_b το σταθμισμένο ολοκλήρωμα του υπολοίπου R οφείλει να ισούται με μηδέν:

$$\int_{z_a}^{z_b} \tau_i(z) R^{(e)}(z, \psi_1^{(e)}, \psi_2^{(e)}, \dots, \psi_n^{(e)}) dz = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Οι συναρτήσεις $\tau_i(z)$ αποτελούν τις συναρτήσεις βάρους. Εφόσον εδώ χρησιμοποιείται η μέθοδος Galerkin, οι συναρτήσεις βάρους είναι ίδιες με τις συναρτήσεις βάσεως, δηλαδή:

$$\tau_i(z) = \omega_i(z)$$

Στο παρόν πρόβλημα, λοιπόν, οι δυο διαφορικές εξισώσεις πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους και ολοκληρώνονται στο πεδίο μελέτης. Στο εξής παραλείπονται στις συναρτήσεις $\hat{\psi}, \hat{\varphi}, \omega$ οι παρενθέσεις που δηλώνουν πως εξαρτώνται από το z . Οι δείκτες εξακολουθούν να δηλώνουν την παράγωγο ως προς την υποδεικνύμενη μεταβλητή.

$$\begin{aligned} (9.6) &\Rightarrow \int_0^1 \left[\operatorname{Re} \left[(\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)) (\hat{\varphi} - k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin \vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\varphi}_{zz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\varphi} \right] \omega_i dz = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 \left[\operatorname{Re} \left[(\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)) (\hat{\varphi} - k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin \vartheta \hat{\psi} \right] - \frac{d^2 \hat{\varphi}}{dz^2} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\varphi} \right] \omega_i dz = 0 \quad (9.13) \end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα χρησιμοποιείται η σχέση της παραγώγου γινομένου $((fg)' = f'g + fg')$, ώστε η εξίσωση να υποβιβαστεί σε πρώτης τάξεως:

$$\frac{d^2\hat{\varphi}}{dz^2}\omega_i = \frac{d\hat{\varphi}}{dz}\omega_i - \frac{d\hat{\varphi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} \Rightarrow \int_0^1 \hat{\varphi}_{zz}\omega_i dz = [\hat{\varphi}_z\omega_i]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} dz$$

Αντικαθιστώντας,

$$\int_0^1 \left\{ \left[\operatorname{Re}[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2))(\hat{\varphi} - k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta\hat{\psi}] - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\varphi} \right] \omega_i + \frac{d\hat{\varphi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} \right\} dz - [\hat{\varphi}_z\omega_i]_0^1 = 0 \quad (9.14)$$

Ομοίως για τη δεύτερη εξίσωση:

$$\hat{\psi}_{zz} - \hat{\varphi} = 0 \Rightarrow \int_0^1 (\hat{\psi}_{zz} - \hat{\varphi})\omega_i dz = 0 \quad (9.15)$$

Με τον ίδιο τρόπο:

$$\int_0^1 \hat{\psi}_{zz}\omega_i dz = [\hat{\psi}_z\omega_i]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\hat{\psi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} dz$$

Και λαμβάνεται:

$$\int_0^1 \left(\frac{d\hat{\psi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} + \hat{\varphi}\omega_i \right) dz - [\hat{\psi}_z\omega_i]_0^1 = 0 \quad (9.16)$$

Οι τελευταίες εξισώσεις (9.14) και (9.16) που εξήχθησαν αποτελούν και τις ασθενείς μορφές των (9.13), (9.15) αντιστοίχως. Οι όροι που προκύπτουν στις αγκύλες συνεισφέρουν μόνο στα σύνορα του πεδίου επίλυσης και αλληλοαναιρούνται στους λοιπούς εσωτερικούς κόμβους. Έτσι, ο χειρισμός τους σχετίζεται με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών που πραγματοποιείται παρακάτω.

Το αμέσως επόμενο βήμα αποτελεί ο διαχωρισμός των όρων που περιέχουν την ιδιοτιμή και η μεταφορά τους στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Αυτό αφορά την πρώτη εξίσωση, αφού η δεύτερη δεν περιλαμβάνει όρους με ιδιοτιμή.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \left[\operatorname{Re} \left[ik \sin\vartheta(2z - z^2)(\hat{\varphi} - k^2\hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta\hat{\psi} \right] - k^4\hat{\psi} + 2k^2\hat{\varphi} \right] \omega_i + \frac{d\hat{\varphi}}{dz}\frac{d\omega_i}{dz} \right\} dz - [\hat{\varphi}_z\omega_i]_0^1 = \\ = -\lambda \int_0^1 \operatorname{Re}(\hat{\varphi} - k^2\hat{\psi})\omega_i dz \quad (9.17) \end{aligned}$$

Στην πορεία οι άγνωστες συναρτήσεις $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ προσεγγίζονται στους κόμβους μέσω των συναρτήσεων βάσεως ως:

$$\hat{\psi} = \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(z) \quad \text{και} \quad \hat{\varphi} = \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \omega_j(z) \quad (9.18)$$

ενώ οι παράγωγοί τους από τις παραγώγους των τελευταίων, καθώς είναι συνεχείς εντός του στοιχείου:

$$\hat{\psi}_z = \sum_{j=1}^n \frac{d\omega_j}{dz} \hat{\psi}_j \quad \text{και} \quad \hat{\varphi}_z = \sum_{j=1}^n \frac{d\omega_j}{dz} \hat{\varphi}_j \quad (9.19)$$

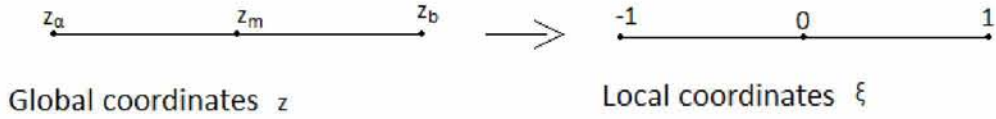
Αντικαθιστώντας στις ολοκληρωτικές εξισώσεις (9.17) και (9.16) με τη σειρά:

$$\int_0^1 \left\{ \hat{\psi} \left[2Reik \sin\vartheta - k^4 - Reik^3 \sin\vartheta (2z - z^2) \right] \omega_i + \hat{\varphi} \left[Reik \sin\vartheta (2z - z^2) + 2k^2 \right] \omega_i + \frac{d\hat{\varphi}}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} \right\} dz - \left[\hat{\varphi}_z \omega_i \right]_0^1 = -\lambda \int_0^1 Re(\hat{\varphi} - k^2 \hat{\psi}) \omega_i dz$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left\{ \hat{\psi}_j \left[2Reik \sin\vartheta - k^4 - Reik^3 \sin\vartheta (2z - z^2) \right] \omega_i \omega_j + \hat{\varphi}_j \left[\frac{d\omega_j}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} + \left[Reik \sin\vartheta (2z - z^2) + 2k^2 \right] \omega_i \omega_j \right] \right\} dz - \left[\hat{\varphi}_z \omega_i \right]_0^1 = -\lambda \sum_{j=1}^n \int_0^1 Re(\omega_i \omega_j \hat{\varphi}_j - k^2 \omega_i \omega_j \hat{\psi}_j) dz \quad (9.20)$$

και

$$\int_0^1 \left(\frac{d\hat{\psi}}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} + \hat{\varphi} \omega_i \right) dz - \left[\hat{\psi}_z \omega_i \right]_0^1 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\frac{d\omega_i}{dz} \frac{d\omega_j}{dz} \hat{\psi}_j + \omega_i \omega_j \hat{\varphi}_j \right) dz - \left[\hat{\psi}_z \omega_i \right]_0^1 = 0 \quad (9.21)$$



Σχήμα 9.2: Μετατροπή συστήματος συντεταγμένων στοιχείου

Κάθε στοιχείο μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός τοπικού συστήματος συντεταγμένων. Στο μέσον του ανατίθεται η αρχή του συστήματος αυτού και τα άκρα ορίζονται ως -1 και 1 αντιστοίχως (Σχήμα 9.2). Ο μετασχηματισμός από το ολικό στο τοπικό σύστημα, στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, είναι γραμμικός:

$$\xi = \frac{2z - (z_a + z_b)}{z_b - z_a} = \frac{2z - (z_a + z_b)}{h_e} \quad \eta \quad z = \frac{\xi h_e}{2} + \frac{z_a + z_b}{2} \quad (9.22)$$

όπου $h_e = z_b - z_a$ το μήκος του κάθε στοιχείου. Χάρη στο γραμμικό χαρακτήρα του ισχύει:

$$d\xi = \frac{2}{h_e} dz \Rightarrow dz = \frac{h_e}{2} d\xi \Rightarrow \frac{dz}{d\xi} = \frac{h_e}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{d\xi}{dz} = \frac{2}{h_e} \quad (9.23)$$

Μετασχηματίζοντας, λοιπόν, τις διακριτοποιημένες εξισώσεις (9.20) και (9.21) στο τοπικό σύστημα:

$$\sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \left\{ \left[2Reik \sin\vartheta - k^4 - Reik^3 \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) \right] \omega_i \omega_j \frac{h_e}{2} \hat{\psi}_j + \left[\frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} + \left[Reik \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + 2k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \right] \hat{\varphi}_j \right\} d\xi - \left[\hat{\varphi}_z \omega_i \right]_0^1 = -\lambda \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 Re(\omega_i \omega_j \hat{\varphi}_j - k^2 \omega_i \omega_j \hat{\psi}_j) \frac{h_e}{2} d\xi \quad (9.24)$$

για την πρώτη όπου εμπλέκονται και τα άκρα του στοιχείου λόγω του z , ενώ η δεύτερη γίνεται :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \left(\frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\omega_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} \hat{\psi}_j + \omega_i \omega_j \hat{\varphi} \right) \frac{h_e}{2} d\xi - \left[\hat{\psi}_z \omega_i \right]_0^1 &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} \hat{\psi}_j + \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \hat{\varphi}_j \right) d\xi - \left[\hat{\psi}_z \omega_i \right]_0^1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.25)$$

Οι (9.24) και (9.25) αποτελούν τις τελικώς διακριτοποιημένες διέπουσες εξισώσεις. Έχουν αναχθεί πλέον σε αλγεβρικές ως προς τις άγνωστες τιμές $\hat{\psi}_j$, $\hat{\varphi}_j$ των συναρτήσεων $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$ στους κόμβους του στοιχείου. Από τη μορφή τους προκύπτει πως σε κάθε στοιχείο δημιουργείται ένα τοπικό σύστημα εξισώσεων. Στο πρόβλημα αυτό, εφόσον υπάρχουν τρεις κόμβοι ανά στοιχείο και δύο άγνωστοι ανά κόμβο, ο τοπικός πίνακας θα είναι 6×6 . Η πρώτη εξίσωση θα καταλαμβάνει τις περιπές και η δεύτερη τις άριες γραμμές του. Οι συντελεστές των αγνώστων προκύπτουν από τις εξισώσεις:

Πρώτη εξίσωση:

$$\hat{\psi}_j : P_{ij} = \int_{-1}^1 \left[2Reik \sin\vartheta - k^4 - Reik^3 \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) \right] \omega_i \omega_j \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : \Sigma_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} + \left[Reik \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + 2k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \right] d\xi$$

Δεύτερη εξίσωση:

$$\hat{\psi}_j : K_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : \Upsilon_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j d\xi$$

ώστε ο τοπικός πίνακας γίνεται :

$$[L] = \begin{bmatrix} P_{11} & \Sigma_{11} & P_{12} & \Sigma_{12} & P_{13} & \Sigma_{13} \\ K_{11} & \Upsilon_{11} & K_{12} & \Upsilon_{12} & K_{13} & \Upsilon_{13} \\ P_{21} & \Sigma_{21} & P_{22} & \Sigma_{22} & P_{23} & \Sigma_{23} \\ K_{21} & \Upsilon_{21} & K_{22} & \Upsilon_{22} & K_{23} & \Upsilon_{23} \\ P_{31} & \Sigma_{31} & P_{32} & \Sigma_{32} & P_{33} & \Sigma_{33} \\ K_{31} & \Upsilon_{31} & K_{32} & \Upsilon_{32} & K_{33} & \Upsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει και ο πίνακας δεξιά από τους όρους που περιλαμβάνουν την ιδιοτιμή λ και το σύστημα του στοιχείου προκύπτει :

$$[L]\{x\} = \lambda[G]\{x\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \Sigma_{11} & P_{12} & \Sigma_{12} & P_{13} & \Sigma_{13} \\ K_{11} & \Upsilon_{11} & K_{12} & \Upsilon_{12} & K_{13} & \Upsilon_{13} \\ P_{21} & \Sigma_{21} & P_{22} & \Sigma_{22} & P_{23} & \Sigma_{23} \\ K_{21} & \Upsilon_{21} & K_{22} & \Upsilon_{22} & K_{23} & \Upsilon_{23} \\ P_{31} & \Sigma_{31} & P_{32} & \Sigma_{32} & P_{33} & \Sigma_{33} \\ K_{31} & \Upsilon_{31} & K_{32} & \Upsilon_{32} & K_{33} & \Upsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\psi}_3 \\ \hat{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} T_{11} & M_{11} & T_{12} & M_{12} & T_{13} & M_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & M_{21} & T_{22} & M_{22} & T_{23} & M_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & M_{31} & T_{32} & M_{32} & T_{33} & M_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{\psi}_3 \\ \hat{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

όπου από την (9.24):

$$\hat{\psi}_j : T_{ij} = \int_{-1}^1 \text{Re} \omega_i \omega_j k^2 \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : M_{ij} = - \int_{-1}^1 \text{Re} \omega_i \omega_j \frac{h_e}{2} d\xi$$

και $\{x\}$ το διάνυσμα των αγνώστων.

Στην πορεία επιλέγοντας για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων ανά στοιχείο τρία σημεία Gauss και τα αντίστοιχα βάρη, μέσω ενός πίνακα συνεκικότητας οι τοπικοί πίνακες δομούν το συνολικό σύστημα εξισώσεων για όλο το φυσικό πεδίο επίλυσης. Απομένει η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών.

Σημεία Gauss	Βάρη
0	0.88888888888889
± 0.7745966692	0.55555555555556

Πίνακας 9.1: Σημεία ολοκλήρωσης Gauss και αντίστοιχα βάρη για ολοκλήρωση τριών σημείων

Οι συνοριακές συνθήκες τόσο στο υπόστρωμα όσο και στη διεπιφάνεια εφαρμόζονται ως Diriclet (essential), συνεπώς οι όροι στις αγκύλες που προέκυψαν στην εξαγωγή της ασθενούς μορφής και προαναφέρθηκε πως συνεισφέρουν μόνο στα άκρα, τελικώς αγνοούνται πλήρως, λόγω της φύσεως των οριακών συνθηκών. Οι τελευταίες είναι δύο ανά άκρο, επομένως καταλαμβάνουν τις δύο πρώτες και τις δύο τελευταίες σειρές των ολικών πινάκων.

Στο υπόστρωμα $z = 0$ εφαρμόζονται στο πρώτο στοιχείο και ειδικότερα στον πρώτο κόμβο του $\xi = -1$:

$$\hat{\psi} = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(-1) = 0 \Rightarrow \hat{\psi}_1 \omega_1(-1) + \hat{\psi}_2 \omega_2(-1) + \hat{\psi}_3 \omega_3(-1) = 0 \quad (9.26)$$

$$\hat{\psi}_z = 0 \Rightarrow \hat{\psi}_z(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \left. \frac{d\omega_j}{dz} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{2}{h_e} \hat{\psi}_j \left. \frac{d\omega_j}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \left. \frac{d\omega_j}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0 \quad (9.27)$$

Και οι δύο σχέσεις αφορούν το $\hat{\psi}_j$, επομένως οι αντίστοιχες στήλες για το $\hat{\varphi}_j$ μένουν μηδενικές. Δεν υπάρχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο στον δεξιό πίνακα $[G]$ για τις παρούσες εξισώσεις.

Στη διεπιφάνεια $z = 1$ εφαρμόζονται στο τελευταίο στοιχείο και ειδικότερα στον τελευταίο κόμβο του κόμβο $\xi = 1$:

Κινηματική Συνθήκη:

$$(\lambda + ik \sin\vartheta)(\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda \hat{\varphi} + \lambda k^2 \hat{\psi} + ik \sin\vartheta \hat{\varphi} + ik^3 \sin\vartheta \hat{\psi} + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} = 0 \Rightarrow$$

$$ik \sin\vartheta \hat{\varphi} + ik \sin\vartheta (k^2 + 2) \hat{\psi} = -\lambda \hat{\varphi} - \lambda k^2 \hat{\psi} \Rightarrow$$

$$ik \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \omega_j(1) + ik \sin\vartheta (k^2 + 2) \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(1) = -\lambda \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \omega_j(1) - \lambda k^2 \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(1) \quad (9.28)$$

Κάθετη Δυναμική Συνθήκη:

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\varphi}_z - \hat{\psi}_z \operatorname{Re}(\lambda + ik \sin\vartheta) - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) (\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi}) = 0 \Rightarrow$$

$$-3k^2 \hat{\psi}_z + \hat{\varphi}_z - \lambda \operatorname{Re} \hat{\psi}_z - \operatorname{Re} ik \sin\vartheta \hat{\psi}_z - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \hat{\varphi} - ik^3 \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \hat{\psi} = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}_z - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \hat{\varphi} - 3k^2 \hat{\psi}_z - \operatorname{Re} ik \sin\vartheta \hat{\psi}_z - ik^3 \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \hat{\psi} = \lambda \operatorname{Re} \hat{\psi}_z$$

Αντικαθιστώντας την προσέγγιση των συναρτήσεων από τις (9.18) και (9.19), ομαδοποιώντας για κάθε άγνωστο και ανάγοντας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[\left. \frac{d\omega_j}{dz} \right|_{z=1} - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \hat{\varphi}_j \\ & + \sum_{j=1}^n \left[\left. -3k^2 \frac{d\omega_j}{dz} \right|_{z=1} - \operatorname{Re} ik \sin\vartheta \left. \frac{d\omega_j}{dz} \right|_{z=1} - ik^3 \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \hat{\psi}_j = \lambda \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \left. \frac{d\omega_j}{dz} \right|_{z=1} \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^n \left[\left. \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \right|_{\xi=1} - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \hat{\varphi}_j \\ & + \sum_{j=1}^n \left[\left. \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \right|_{\xi=1} \left(-3k^2 - \operatorname{Re} ik \sin\vartheta \right) - ik^3 \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \hat{\psi}_j = \lambda \operatorname{Re} \frac{2}{h_e} \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \left. \frac{d\omega_j}{d\xi} \right|_{\xi=1} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Έτσι οι μιγαδικοί πίνακες $[L]$, $[G]$ είναι έτοιμοι και το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $[L]\{x\} = \lambda[G]\{x\}$ μπορεί να επιλυθεί προς εύρεση των τιμών εκείνων του βαθμωτού λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, για τις οποίες το σύστημα επιδέχεται λύση πέραν της τετριμμένης.

9.3 Επίλυση-Αριθμός στοιχείων

Η απόκτηση των ιδιοτιμών του προβλήματος αυτού υλοποιείται από το βασικό πρόγραμμα το οποίο δέχεται ως δεδομένα κατ' αρχάς τον αριθμό των στοιχείων κι έπειτα την γωνία κλίσης της στερεάς πλάκας, τον κυματαριθμό, τον αριθμό Reynolds και τον αριθμό Kapitza. Μετά τον υπολόγισμό τους οι ιδιοτιμές εξάγονται σε αρχείο δεδομένων.

Η επίλυση προγραμματίστηκε σε Fortran με τη χρήση της βιβλιοθήκης Lapack (χρησιμοποιήθηκε η υπορουτίνα zggeev που επιλύει γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για μη συμμετρικούς, μιγαδικούς πίνακες διπλής ακρίβειας), ενώ η επεξεργασία των αποτελεσμάτων και η γραφική τους απεικόνιση πραγματοποιήθηκαν στο Origin και το Matlab.

Για τη μελέτη που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκαν 50 στοιχεία, ώστε να επιτυγχάνεται ικανοποιητική σύγκλιση στις τιμές των ιδιοτιμών. Η σύγκριση για την επιλογή του αριθμού των στοιχείων έγινε για κατακόρυφο υμένα $\vartheta = 90^\circ$, αριθμό Reynolds $Re = 1$, αριθμό Kapitza $Ka = 3000$ και κυματαριθμό $k = 0.01$. Βασίστηκε στο πραγματικό μέρος της πιο ασταθούς ιδιοτιμής, διότι το φανταστικό σταθεροποιείται πολύ νωρίς. Η επιδιωκόμενη ταύτιση είναι τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Για 50 στοιχεία η ταύτιση είναι ικανοποιητική, δεν επηρεάζει την απεικόνιση και η επιδίωξη περαιτέρω ακρίβειας δε δικαιολογείται από το υπερβολικό υπολογιστικό κόστος και τη μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού χρόνου.

Αριθμός Στοιχείων	Πραγματικό Μέρος Ασταθούς Ιδιοτιμής
30	0.406946756D-04
40	0.406988238D-04
50	0.407007147D-04
60	0.407017314D-04
70	0.407023402D-04
100	0.407031932D-04
200	0.407031932D-04

Πίνακας 9.2: Δοκιμές για $Re = 1$, $k = 0.01$, $\vartheta = 90^\circ$ και διαφόρους αριθμούς στοιχείων

9.4 Αποτελέσματα

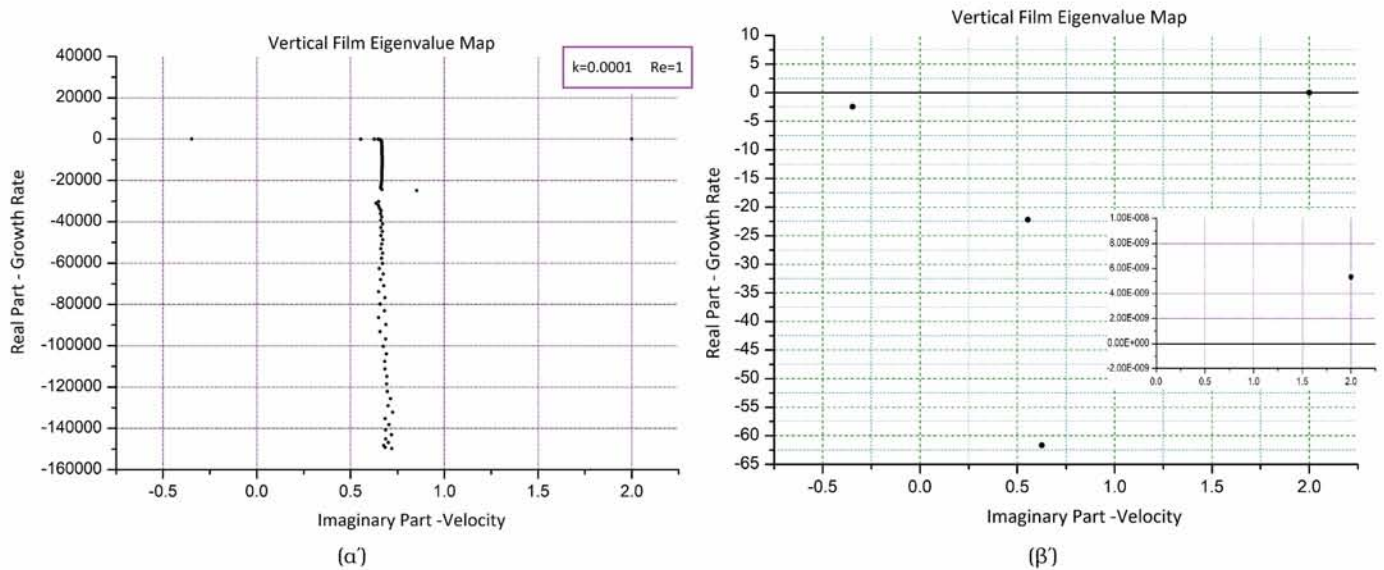
9.4.1 Οι χάρτες ιδιοτιμών

Στο βασικό πρόγραμμα υπολογισμού των ιδιοτιμών ορίζεται $Ka = 3000$. Έτσι, επιλέγεται συγκεκριμένο ρευστό και για κάθε συνδυασμό των λοιπών παραμέτρων Re , k , ϑ προκύπτουν οι ιδιοτιμές σε έναν κατάλογο μιγαδικών αριθμών. Αυτή η επιλογή του αριθμού Karitza ισχύει για όλα όσα ακολουθούν, αν δε διευκρινίζεται κάτι διαφορετικό.

Το πραγματικό μέρος $Re(\lambda)$ εκφράζει το ρυθμό ανάπτυξης της διαταραχής. Η τελευταία για $Re(\lambda) < 0$ είναι ευσταθής και αποσβέννυται ενώ για $Re(\lambda) > 0$ είναι ασταθής και διαδίδεται ενισχυόμενη. Στο $Re(\lambda) = 0$ εκδηλώνεται οριακή ευστάθεια.

Το φανταστικό μέρος, από την άλλη μεριά, διαιρεμένο με τον αδιάστατο κυματαριθμό $-\frac{Im(\lambda)}{k \sin\vartheta}$ εκφράζει την αδιάστατη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής. Η αδιαστατοποίηση βασίζεται στην επιφανειακή ταχύτητα του κατακόρυφου υμένα, επομένως το ημίτονο χρησιμεύει στην έκφραση της ταχύτητας διάδοσης σε σχέση με την εκάστοτε διεπιφανειακή ταχύτητα για οποιαδήποτε κλίση.

Οι ιδιοτιμές τοποθετούνται σε γράφημα όπου ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο πραγματικό και ο οριζόντιος στο τροποποιημένο φανταστικό τους μέρος. Η μορφή του γραφήματος είναι κοινή για τους διάφορους συνδυασμούς παραμέτρων. Ενδεικτικά παρατίθεται η ακόλουθη.



Σχήμα 9.3: (α) Χάρτης ιδιοτιμών για $Re = 1$, $k = 0.0001$, $\vartheta = 90^\circ$ & (β) Λεπτομέρεια κοντά στο 0

Παρατηρείται πως ο μεγαλύτερος αριθμός ιδιοτιμών συγκεντρώνεται στο εύρος 0.6-0.7 του οριζόντιου άξονα. Δηλαδή, οι διαταραχές αυτές διαδίδονται με ταχύτητα $\frac{2}{3}U \rightsquigarrow 0.67$ αδιάστατη, τιμή ίση με τη μέση ταχύτητα του υμένα σε μόνιμες συνθήκες $\bar{U} = \frac{g \sin\theta H^2}{3\nu}$. Τα πραγματικά τους μέρη είναι πολύ αρνητικά, επομένως οι διαταραχές αποσβέννυνται. Επίσης, ένας αριθμός ιδιοτιμών στην παρούσα κλίμακα φαίνεται να βρίσκεται πολύ κοντά στο 0. Μια μεγέθυνση φανερώνει πως οι περισσότερες, πλην μιας, είναι ευσταθείς και μάλιστα αρκετά, εφόσον η πιο ασταθής από αυτές έχει πραγματικό μέρος τάξης $\mathcal{O}(1)$ κατ' απόλυτο τιμή. Μόνο μία φαίνεται πάνω στην οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$, η πιο ασταθής από όλες τις ιδιοτιμές (στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπως φάνεται από το ένθετο γράφημα, είναι όντως ασταθής).

Αυτή είναι χαρακτηριστικό πως βρίσκεται πάντα στο δεξιό μέρος του γραφήματος και η ταχύτητα διάδοσης της ισούται με 2 (ή σχεδόν 2 αν πρόκειται για μεγαλύτερους κυματαριθμούς k), όταν είναι ασταθής και είναι μεγαλύτερη του 2, όταν είναι ευσταθής. Η παρατήρηση αυτή συμβαδίζει με όσα έχουν αποδειχθεί από (M. Smith 1990), ότι δηλαδή σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds η αστάθεια εκδηλώνεται στην επιφάνεια του υμένα και για την περίπτωση διαταραχής απείρου μήκους κύματος: $k \rightarrow 0$ η ταχύτητα διάδοσης ισούται με 2. Η επιφανειακή διαταραχή, λοιπόν, διαδίδεται με ταχύτητα διπλάσια από εκείνη με την οποία κινείται η διεπιφάνεια στη διεύθυνση ροής.

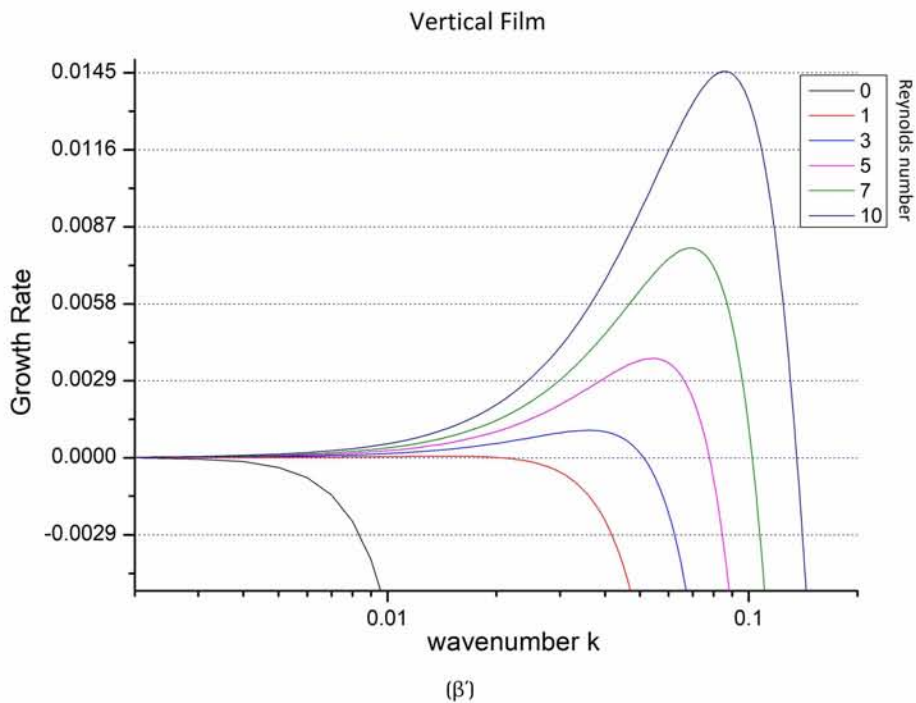
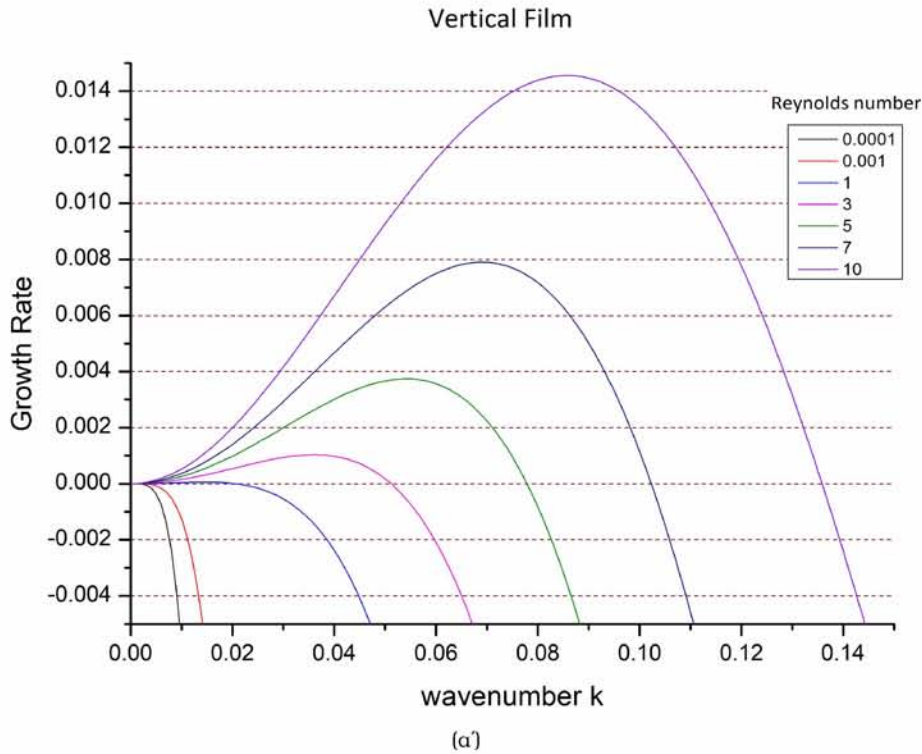
Εφόσον το αν η ροή θα παραμείνει ευσταθής ή θα καταστεί ασταθής καθορίζεται από το πραγματικό μέρος της πλέον ασταθούς ιδιοτιμής, που αφορά τη διαταραχή της διεπιφάνειας του υμένα στους χαμηλούς αριθμούς Reynolds που απασχολούν την εργασία αυτή, ακολουθεί η μελέτη της εξάρτησής του από τις διάφορες παραμέτρους: τον κυματαριθμό k , τον αριθμό Reynolds Re , τον αριθμό Kapitza Ka και τη γωνία κλίσης του επιπέδου του στερεού υποστρώματος του υμένα θ . Στο εξής οι όροι ρυθμός ανάπτυξης ή ρυθμός εξέλιξης της διαταραχής καθώς και πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής $Re(\lambda)$ εναλλάσσονται ισοδυναμώς.

9.4.2 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού

Το βασικό πρόγραμμα τροποποιείται, ώστε για δεδομένη γωνία θ και αριθμό Reynolds να υπολογίζεται το πραγματικό μέρος της πιο ασταθούς ιδιοτιμής για ένα εύρος κυματαριθμών. Σύμφωνα με τα υπάρχοντα αποτελέσματα (M. Smith 1990) ο κατακόρυφος υμένας για διαταραχή απείρου μήκους κύματος: $l \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow 0$ αναμένεται να είναι οριακά ευσταθής σε $Re = 0$. Ωστόσο, η αριθμητική επίλυση είναι αδύνατον να πραγματοποιηθεί για $Re = 0$ ή $k = 0$. Για τον αριθμό Reynolds χρησιμοποιούνται ελάχιστες τιμές στο διάστημα $[10^{-6}, 10^{-3}]$. Για τον κυματαριθμό, η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι 10^{-4} . Μικρότερες τιμές επιφέρουν αριθμητικές αστάθειες που εμποδίζουν την παρακολούθηση του φαινομένου, καθώς η διπλή ακρίβεια παύει να αρκεί στην περίπτωση όρων με k^2 ή k^3 που είναι πολύ συχνοί στις εξισώσεις. Για $k = 10^{-4}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλες οι τιμές Re του παραπάνω διαστήματος, χωρίς ουσιαστική διαφορά στα αποτελέσματα: ο υμένας προκύπτει οριακά ευσταθής.

Στα γραφήματα που ακολουθούν φαίνεται για γωνία $\theta = 90^\circ$ και κυματαριθμούς στο εύρος $[10^{-4}, 0.3]$ ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής για αριθμούς Reynolds ως 10 σε γραμμικό και λογαριθμικό οριζόντιο άξονα. Παρήχθησαν με βήμα κυματαριθμού $\Delta k = 10^{-4}$ για $k \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ και $\Delta k = 10^{-3}$ για $k \in [10^{-3}, 0.3]$. Από το πρώτο επιβεβαιώνεται πως αριθμοί Reynolds ως 10^{-3} είναι αντίστοιχοι της τιμής $Re = 0$ της αναλυτικής επίλυσης, δείχνουν τον υμένα οριακά ευσταθή, αφού εφάπτονται στην οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$ για $k \rightarrow 0$, ενώ οι μεγαλύτεροι κυματαριθμοί $k > 0$ είναι ευσταθείς (οι καμπύλες οδεύουν απότομα στα αρνητικά όσο ο κυματαριθμός αυξάνεται).

Αυξανόμενου του αριθμού Reynolds η μορφή των καμπυλών είναι συγκεκριμένη. Για $k \rightarrow 0$ η διαταραχή εξακολουθεί να είναι οριακά ευσταθής, όλες οι καμπύλες τείνουν στο $Re(\lambda) = 0$ ανεξαρτήτως αριθμού Reynolds. Ωστόσο, σε μεγαλύτερους k , πεπερασμένα μήκη κύματος, ένα μέρος τους περνά στο θετικό ημίαξονα, κάποιες ιδιοτιμές ξεκινούν να αποκτούν θετικό ρυθμό ανάπτυξης. Από την οριακή ευστάθεια η καμπύλη αυξάνεται ως ένα μέγιστο και έπειτα μειώνεται ως που να τμήσει τον οριζόντιο άξονα, ολοκληρώνοντας το εύρος των ασταθών κυματαριθμών. Από κει και πέρα περνά στα αρνητικά και μεγαλύτερες τιμές k είναι ευσταθείς.



Σχήμα 9.4: Ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού για διάφορες τιμές Re

Το σημείο τομής της καμπύλης με τον οριζόντιο άξονα αντιστοιχεί σε κυματαριθμό που στο συγκεκριμένο αριθμό Reynolds είναι οριακώς ευσταθής. Δηλαδή για τη διαταραχή αυτή η τιμή του αριθμού Reynolds αντιστοιχεί στον κρίσιμο της Reynolds. Είναι χαρακτηριστικό πως σε όλες τις περιπτώσεις η ρίζα είναι «ζεκάθαρη», δηλαδή δεν υπάρχει κάποια περιοχή κυματαριθμών που σε δεδομένο Reynolds μεταβαίνουν στην αστάθεια, η οριακή ευστάθεια αφορά μόνο μια πεπερασμένη διαταραχή σε μια τιμή Re . Η αλλαγή είναι απότομη. Ο οριακός κυματαριθμός είναι οριακώς ευσταθής, ο αμέσως προηγούμενος είναι ασταθής και ο αμέσως επόμενος ευσταθής. Η αύξηση του αριθμού Reynolds επιφέρει αύξηση της τιμής του οριακού

κυματαριθμού και, ακόμη, αύξηση της θέσης και της τιμής του μεγίστου, τουλάχιστον στο εύρος τιμών των παραμέτρων που εικονίζεται.

Στο λογαριθμικό άξονα φαίνεται εντονότερα η κοινή συμπεριφορά για $k \rightarrow 0$, η διαταραχή αυτή είναι πάντοτε οριακώς ευσταθής. Η αστάθεια αφορά πάντοτε μεγαλύτερους-πεπερασμένους κυματαριθμούς. Μάλιστα, για $k \leq 0.006$ οι κυματαριθμοί, αν και ασταθείς, δεν έχουν πολύ μεγάλους ρυθμούς ανάπτυξης και δεν επηρεάζονται ιδιαίτερος από την αύξηση του αριθμού Reynolds, κάτι που δε συμβαίνει με την αύξηση του k , όπου ο ρυθμός ανάπτυξης μεταβάλλεται έντονα σε ταχύτερες ροές. Το $Re = 0$ του διαγράμματος αντιστοιχεί σε $Re = 0.0001$ στην αριθμητική επίλυση και η τεθλασμένη μορφή της καμπύλης οφείλεται στη μεγάλη κλίση της σε κυματαριθμούς ίδιας τάξης μεγέθους με το βήμα υπολογισμού.

Σε δεδομένο αριθμό Reynolds $Re > 0$, π.χ. $Re = 5$ (Σχήμα 9.4), παρατηρείται πως η αστάθεια αφορά μικρούς κυματαριθμούς (μεγάλα μήκη κύματος), ενώ οι μεγαλύτεροι από τον οριακό (μικρότερα μήκη κύματος) είναι ευσταθείς. Αυτή η συμπεριφορά σχετίζεται άμεσα με το ισοζύγιο δυνάμεων και τη συνεισφορά της επιφανειακής τάσης.



Σχήμα 9.5: (α) Οι συνιστώσες της επιταχύνσεως της βαρύτητας & (β) οι επιδράσεις τους σε μια διαταραχή

Στον υμένα ενεργούν τρεις βασικές δυνάμεις: η βαρύτητα, οι ιξώδεις δυνάμεις και η επιφανειακή τάση. Σε ό,τι αφορά τη βαρύτητα, για υμένα επί επιπέδου κλίσης $\tan\theta$, αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μια στη διεύθυνση ροής και μια κάθετη (Σχήμα 9.5α). Έτσι, και η επιτάχυνση της βαρύτητας αναλύεται σε $\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_z$, όπου $|\vec{g}_x| = g \cos\theta$ και $|\vec{g}_z| = g \sin\theta$ τα μέτρα των δυο συνιστωσών της. Η κάθετη-z συνιστώσα αποσβέννει τη διαταραχή, την «τραβάει» προς το υπόστρωμα, ενώ η x συνιστώσα την ενισχύει, αφού αν κάποιος κυματισμός ανυψωθεί τον παρασύρει στη διεύθυνση ροής.

Οι ιξώδεις δυνάμεις λειτουργούν αποσβέννοντας τις διαταραχές και σταθεροποιώντας τη ροή.

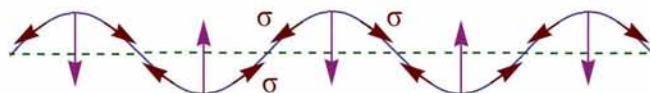
Τέλος, η επιφανειακή τάση εμπλέκεται στις διεπιφανειακές οριακές συνθήκες μέσω του όρου $2\kappa\sigma$, όπου κ η καμπυλότητα, όπως γράφηκε ήδη στο κεφάλαιο 5. Μάλιστα η συνεισφορά της είναι ανάλογη τόσο της καμπυλότητας $\kappa = \frac{1}{R}$ όσο και της επιφανειακής τάσης του ρευστού (ως δύναμης ανά μονάδα μήκους) $\sigma [=] \frac{N}{m}$. Σε διαταραχές μικρού μήκους κύματος, δηλαδή μεγαλύτερων κυματαριθμών, η ακτίνα είναι πολύ μικρή (Σχήμα 9.5β). Μικρή ακτίνα καμπυλότητας συνεπάγεται μεγάλη καμπυλότητα, επομένως ισχυρή συνεισφορά του όρου $2\kappa\sigma$ για δεδομένο ρευστό (σ συγκεκριμένο):

$$R \ll \Rightarrow \kappa \gg \Rightarrow 2\kappa\sigma \uparrow$$

Η αυξημένη καμπυλότητα καθιστά τον όρο επιφανειακής τάσης σημαντικό και η διαταραχή σβήνει.

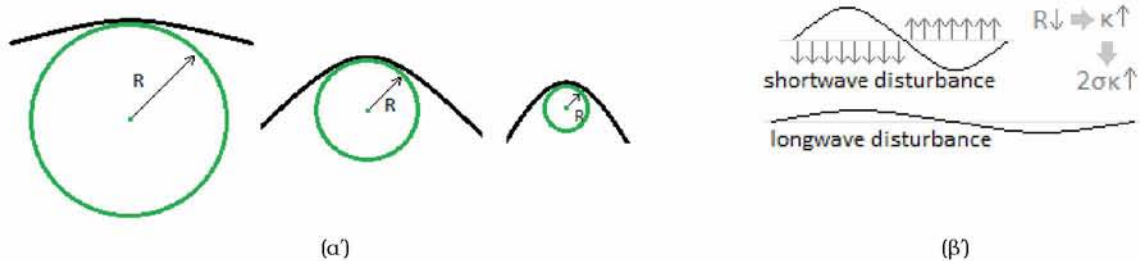
Αντιθέτως, στις διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος και ειδικότερα απείρου μήκους κύματος:

$$k \rightarrow 0 \Rightarrow l \rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow \kappa \rightarrow 0 \Rightarrow 2\kappa\sigma \rightarrow 0$$



Σχήμα 9.6: Η σταθεροποιητική επίδραση της επιφανειακής τάσεως σε κυματισμούς με καμπυλότητα

Το άπειρο μήκος κύματος αντιστοιχεί σε ανεπαίσθητη διαταραχή τόσο που η ακτίνα καμπυλότητας τείνει στο άπειρο και η καμπυλότητα στο 0. Έτσι, η συνεισφορά του όρου επιφανειακής τάσης χάνεται. Η τελευταία εκλείπει και δε μπορεί να οθήσει τις διαταραχές ή είναι υπερβολικά μικρή, ώστε να το κατορθώσει. Συνεπώς, οι διαταραχές αυτές δε μπορούν να σταθεροποιηθούν και διαδίδονται πάντοτε.



Σχήμα 9.7: (α) Ακτίνα καμπυλότητας διαταραχών αυξανομένου του κυματαριθμού & (β) Η σημασία της καμπυλότητας στον όρο επιφανειακών δυνάμεων

Ακόμη, η αύξηση του αριθμού Reynolds πραγματοποιείται με αύξηση της ογκομετρικής παροχής του ρευστού, άρα αύξηση του πάχους του υμένα και η ροή γίνεται ταχύτερη. Η αύξηση της ταχύτητας οδηγεί σε ισχυρότερες αδρανιακές δυνάμεις που λειτουργούν ενισχύοντας τις διαταραχές. Αν αυτή η ενίσχυση υπερβεί τη σταθεροποιητική δράση της επιφανειακής τάσης, η διαταραχή καθίσταται ασταθής. Αυτό δικαιολογεί τη διαρκή αύξηση του οριακού κυματαριθμού. Οι συνεχώς μεγαλύτερες αδρανιακές δυνάμεις που αναπτύσσονται, καθώς ο Re αυξάνεται, ξεπερνούν τις επιφανειακές όλο και πιο καμπύλων κυματισμών (μεγαλύτερου κυματαριθμού), η επιφανειακή τάση δε μπορεί να τους αποσβέσει και μεγαλώνει το εύρος των ασταθών κυματαριθμών.

Και στα δυο γραφήματα παρατηρείται πως οι μεγαλύτεροι κυματαριθμοί από τη στιγμή που θα περιέλθουν στην αστάθεια είναι περισσότερο ασταθείς από τους μικρούς που είναι μεν ασταθείς για περισσότερες τιμές αριθμού Reynolds, ωστόσο οι ρυθμοί ανάπτυξής τους παραμένουν διαρκώς χαμηλοί. Επίσης, η αύξηση του αριθμού Reynolds επιφέρει ραγδαία αύξηση του ρυθμού ανάπτυξής τους, το ίδιο k αναπτύσσεται πολύ ταχύτερα σε γρηγορότερη ροή.

Σε ό,τι αφορά την επίδραση της γωνίας στη σχέση του κυματαριθμού με το ρυθμό εξέλιξης της διαταραχής, παίζει ρόλο ο ορισμός του αριθμού Reynolds στη διαδικασία της αδιαστατοποίησης. Έχει οριστεί στο κεφάλαιο 6 $Re = \frac{UH}{\nu} = \frac{gH^3}{2\nu}$ όπου U η επιφανειακή ταχύτητα του αδιατάρακτου και κατακόρυφου υμένα Nusselt που στο εξής συμβολίζεται με U_o . Ένας άλλος ορισμός του αριθμού Reynolds βασίζεται στην επιφανειακή ταχύτητα του εκάστοτε υμένα $U = U_o \sin\theta$ συμπεριλαμβάνοντας τη γωνία κλίσης του επιπέδου ροής: $Re = \frac{UH}{\nu} \sin\theta = \frac{gH^3}{2\nu} \sin\theta$. Αν με βάση τον πρώτο ορισμό συμβολιστεί ως Re_o , ισχύει $Re = \sin\theta Re_o$. Δηλαδή σε δεδομένη τιμή Re αντιστοιχεί μεγαλύτερος Re_o και ίσος με $\frac{Re}{\sin\theta}$. Αυτή η διαφοροποίηση καθιστά συχνά αναγκαία τη διαίρεση με το ημίτονο της γωνίας $\sin\theta$, όπως για παράδειγμα στην εκτίμηση της ταχύτητας διάδοσης μιας διαταραχής $C = -\frac{Im(\lambda)}{k \sin\theta}$, ώστε αυτή κάθε φορά να συγκρίνεται με εκείνη της διεπιφάνειας. Ενδεικτικά, για γωνία 45° παρατίθενται κάποιες αντιστοιχίες στον ακόλουθο πίνακα:

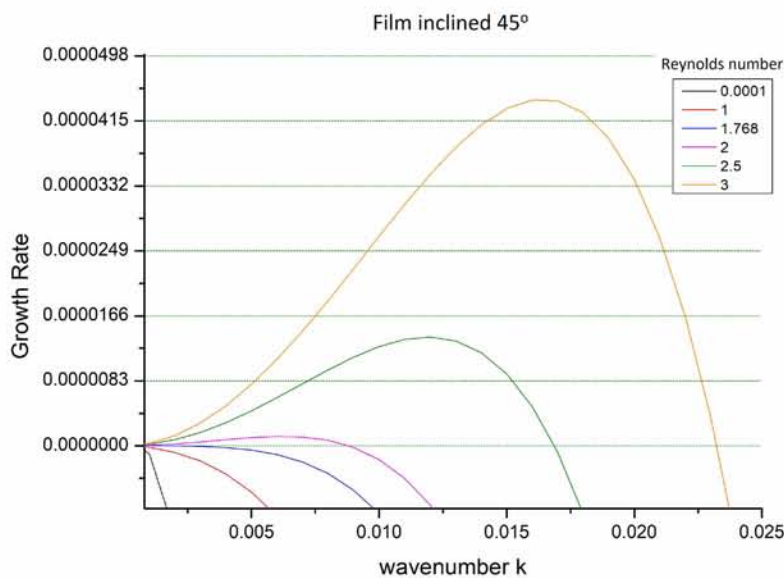
Re_o	Re	Re	Re_o
1	0.0707	1	$\sqrt{2} = 1.41$
2	$\sqrt{2}$	1.25	1.768

Πίνακας 9.3: Αντιστοιχίες τιμών για διαφορετικούς ορισμούς του αριθμού Reynolds και γωνία $\theta = 45^\circ$

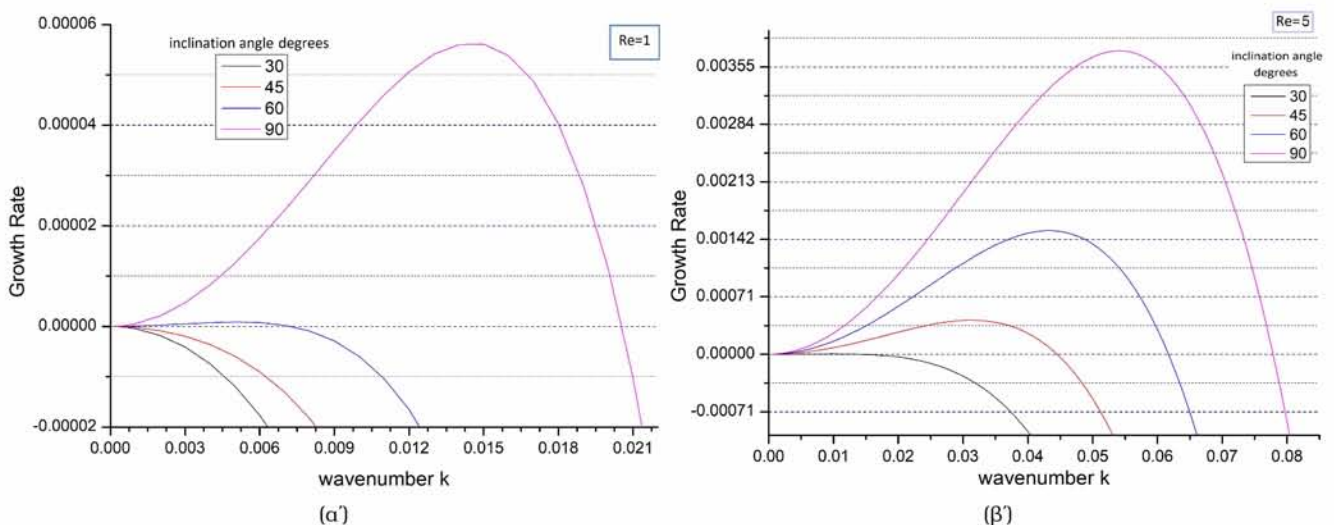
Σύμφωνα με τον M. Smith (1990) για διαταραχές απείρου μήκους κύματος ο κρίσιμος αριθμός Reynolds ισούται με $Re_{cr} = \frac{5}{4} \cot\theta$, ορισμένος με τον δεύτερο τρόπο. Μέχρι αυτή την τιμή όλοι ανεξαιρέτως οι κυματαριθμοί είναι ευσταθείς. Για τις 45° αυτό φαίνεται στο Σχήμα 9.8, αφού ως τον $Re = 1.25$ ή $Re_o = 1.768$ οι καμπύλες βρίσκονται πλήρως κάτω από την οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$, όλες οι διαταραχές αποσβέννυνται.

Στη συγκεκριμένη αυτή τιμή η καμπύλη εφάπτεται εκεί για $k \rightarrow 0$, ενώ οι επόμενες παρουσιάζουν εύρος ασταθών κυματαριθμών ολοένα αυξανόμενο. Η συμπεριφορά, κατά τα άλλα, είναι κοινή με του κατακόρυφου υμένα. Η μόνη διαφορά τους έγκειται στον κρίσιμο αριθμό Reynolds.

Αυτό οφείλεται στο ότι καθώς η γωνία κλίσης μειώνεται, η συνιστώσα της βαρύτητας στη διεύθυνση ροής που σχετίζεται με το ημίτονό της και προκαλεί ενίσχυση των διαταραχών διαρκώς μικραίνει. Αντιθέτως η z συνιστώσα που σταθεροποιεί τον υμένα όλο και μεγαλώνει με αποτέλεσμα να σταθεροποιούνται ακόμη και τα άπειρα μήκη κύματος, αν και απουσιάζει η επιφανειακή τάση λόγω της μηδενικής καμπυλότητας της διεπιφάνειας. Στον κατακόρυφο υμένα η διεύθυνση ροής ταυτίζεται με τη διεύθυνση άσκησης του βάρους και η σταθεροποιητική κάθετη συνιστώσα εκλείπει πλήρως. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο αριθμός Reynolds που αντιστοιχεί σε οριακή ευστάθεια να ισούται με μηδέν, δηλαδή από τη στιγμή που δημιουργείται καθεστώς ροής, αυτή είναι ασταθής.



Σχήμα 9.8: Ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού για διάφορες τιμές Re σε κεκλιμένο υμένα 45°



Σχήμα 9.9: Ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού για (α) $Re = 1$ & (β) $Re = 5$ και διάφορες γωνίες

Προκειμένου να διευκρινιστεί περαιτέρω η επίδραση της γωνίας, στα δύο γραφήματα του σχήματος 9.9 φαίνεται για δύο συγκεκριμένες τιμές του αριθμού Reynolds η καμπύλη για τέσσερις γωνίες ϑ . Ο αριθμός Reynolds αντιστοιχεί σε Re_o . Στο πρώτο $Re_o = 1$ οι ροές στις δύο πρώτες κλίσεις είναι ευσταθείς, δηλαδή ο κρίσιμος τους Reynolds είναι μεγαλύτερος. Στις υπόλοιπες η ροή είναι ασταθής και μάλιστα στον κατακόρυφο πολύ ασταθέστερη των υπολοίπων. Η καμπύλη για τις 60° έχει χαμηλούς ρυθμούς ανάπτυξης, αφού $Re_{cr} = \frac{5}{4} \cot 60 = 0.722$ ή $Re_{ocr} = 0.833$, ο $Re_o = 1$ δεν απέχει πολύ από τον κρίσιμο της. Για $Re_o = 5$ η ροή είναι ασταθής σε όλες τις εικονιζόμενες γωνίες. Οι ρυθμοί ενίσχυσης είναι υψηλότεροι από πριν.

Η συμπεριφορά στους μικρούς κυματαριθμούς είναι ίδια για όλες τις γωνίες. Για $Re \geq Re_{cr}$ η διαταραχή άπειρου μήκους κύματος είναι συνεχώς οριακά ευσταθής και τα πεπερασμένα αλλά μεγάλα μήκη κύματος γίνονται ασταθή με μικρούς ρυθμούς ανάπτυξης. Ωστόσο, όσο το μήκος κύματος μικραίνει η ενίσχυση είναι όλο και ταχύτερη, καθώς η κλίση του επιπέδου ροής αυξάνεται.

Αν δεν αναγράφεται διαφορετικά, στο εξής ο συμβολισμός Re αναφέρεται στον ορισμό που χρησιμοποιήθηκε στην αδιαστατοποίηση.

9.4.3 Η επίδραση του αριθμού Kapitza

Αυτό το σημείο είναι κατάλληλο για αναφορά στην επίδραση του αριθμού Kapitza που σχετίζεται με το είδος του ρευστού και υπολογίζεται από τις ιδιότητές του ως: $Ka = \frac{\sigma}{\rho g^{1/3} \nu^{3/4}}$. Η παράμετρος αυτή, λόγω της παρουσίας του ιξώδους, εξαρτάται και από τη θερμοκρασία. Η πλέον χρησιμοποιούμενη τιμή στο κεφάλαιο αυτό: $Ka = 3000$ αντιστοιχεί σε νερό θερμοκρασίας περιβάλλοντος $18^\circ C$ ως $20^\circ C$. Μεγάλες τιμές της παραμέτρου χαρακτηρίζουν λεπτόρευστα υγρά, ενώ μικρότερες πιο παχύρευστα.

Για τις υπόλοιπες παραμέτρους ορισμένες ως $Re = 1$ και $\vartheta = 90^\circ$ παρατίθενται στο Σχήμα 9.10 οι καμπύλες ρυθμού ενίσχυσης-κυματαριθμού για τρεις τιμές αριθμού Kapitza από τρεις διαφορετικές τάξεις μεγέθους. Το $Ka = 3000$ συζητήθηκε ήδη. Το $Ka = 100$ αφορά ένα ρευστό σαν τη γλυκερίνη της οποίας η επιφανειακή τάση είναι παρόμοια με του νερού και το ιξώδες της πολύ υψηλότερο και το $Ka = 10$ κάποιο έλαιο σιλικόνης, ρευστό πολύ ιξώδες και με πολύ μικρή επιφανειακή τάση. Το εύρος κυματαριθμών παραμένει $[10^{-4}, 0.3]$.

Από τη μορφή των καμπυλών φαίνεται πως η συμπεριφορά είναι κοινή. Κατ' αρχάς, στο όριο του μηδενικού κυματαριθμού καθώς και στους μικρούς μη μηδενικούς οι καμπύλες ταυτίζονται, δηλαδή στα μεγάλα μήκη κύματος η συμπεριφορά είναι ανεξάρτητη του αριθμού Kapitza. Η διαταραχή για $l \rightarrow \infty$ είναι οριακά ευσταθής ασχέτως του μεγέθους της επιφανειακής τάσης, αφού η μηδενική καμπυλότητα εξαλείφει τη συνεισφορά του όρου $2\kappa\sigma$. Από κει και πέρα, ωστόσο, οι διαφοροποιήσεις είναι σημαντικές. Η μείωση του αριθμού Kapitza οδηγεί σε υμένες πιο ασταθείς στα μικρότερα μήκη κύματος. Στον ίδιο κυματαριθμό η αστάθεια γίνεται όλο και εντονότερη σε μικρότερους Ka , καθώς τους αντιστοιχούν πολύ μεγαλύτεροι ρυθμοί εξέλιξης. Επίσης, παρατηρείται αύξηση της θέσης και της τιμής του μεγίστου καθώς και του οριακού κυματαριθμού. Συγκεκριμένα, το μέγιστο για $Ka = 3000$ είναι δυο τάξεις μεγέθους μικρότερο από εκείνο για $Ka = 100$ και τρεις από το αντίστοιχο του $Ka = 10$. Τέλος, στην περίπτωση του $Ka = 10$ δεν ολοκληρώνεται το εύρος ασταθών κυματαριθμών στο διάστημα υπολογισμού.

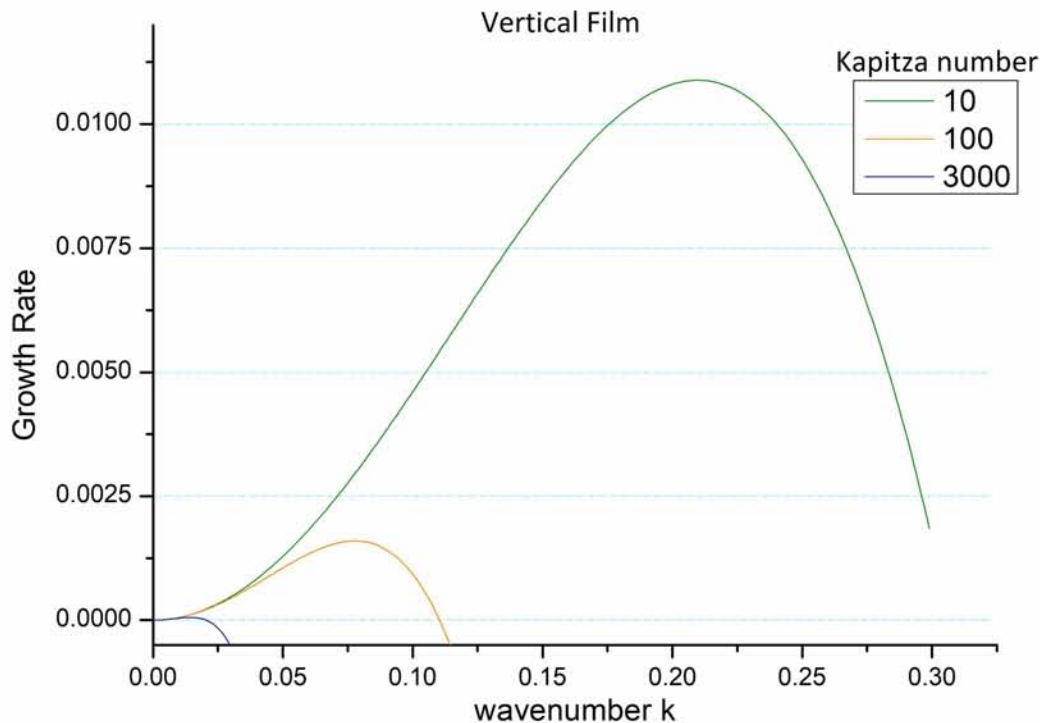
Το ότι ένας δεδομένος κυματαριθμός καθίσταται όλο και ασταθέστερος με τη μείωση του Ka σε ροές ίδιου αριθμού Reynolds επαληθεύεται και αναλυτικά (C. Pozrikidis 1997), διότι αποδεικνύεται πως στα μεγάλα, πεπερασμένα μήκη κύματος:

$$Re_{cr} = \frac{5}{4}(\cot\vartheta + Ka k^2)$$

δηλαδή η διαταραχή θα ήταν πιο ευσταθής σε έναν υμένα νερού παρά σε έναν υμένα γλυκερίνης.

Ωστόσο, ο κοινός αριθμός Reynolds για δυο ρευστά με παρόμοιες, γενικώς, ιδιότητες αλλά διαφορετικό ιξώδες έχει σαν αποτέλεσμα να συγκρίνονται υμένες διαφορετικού πάχους. Το πιο ιξώδες ρευστό θα απαιτεί μεγαλύτερη παροχή, ώστε να πετύχει τον ίδιο αριθμό Reynolds και μεγαλύτερη παροχή οδηγεί σε πιο παχύ και γρήγορο υμένα, άρα υποκείμενο σε ισχυρότερες αδρανειακές δυνάμεις, άρα πιο ασταθή στους μεγαλύτερους κυματαριθμούς. Η σύγκριση με βάση κοινό πάχος αδιατάρακτου υμένα H θα αναδεικνυε πιο ευσταθή τον υμένα του ιξώδους ρευστού, εφόσον θα αντιστοιχούσε σε μικρότερο αριθμό Reynolds ($Re = \frac{gH^3}{2\nu}$: H κοινό, $\nu \uparrow \Rightarrow Re \downarrow$).

Συνολικά, η τιμή του αριθμού Kapitza είναι σημαντική στα μικρότερα μήκη κύματος, όπου ο όρος $2k\sigma$ δεν εκλείπει και η επιφανειακή τάση μπορεί να αναχαιτίσει διαταραχές συγκεκριμένης καμπυλότητας αναλόγως το μέγεθός της.



Σχήμα 9.10: Ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού για $Re = 1$ και διάφορες τιμές Ka σε κατακόρυφο υμένα

9.4.4 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του αριθμού Reynolds

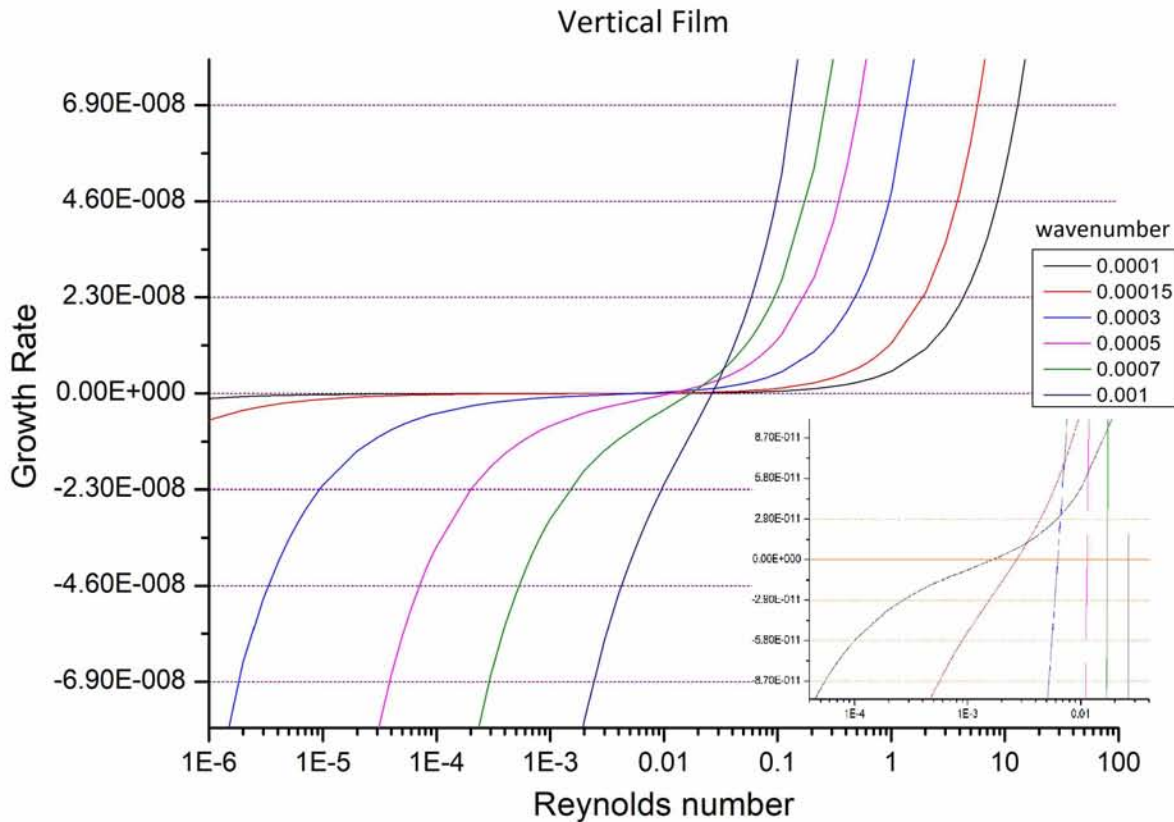
Το βασικό πρόγραμμα τροποποιείται, ώστε για δεδομένη γωνία ϑ και κυματαριθμό να υπολογίζεται το πραγματικό μέρος της πιο ασταθούς ιδιοτιμής για ένα εύρος αριθμών Reynolds. Παρατίθεται μόνο το αποτέλεσμα για κατακόρυφο υμένα, διότι η γωνία δεν οδηγεί σε άλλη διαφορά πέραν της μεταθέσεως της ίδιας εικόνας σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds.

Η μορφή των καμπυλών είναι διαρκώς συγκεκριμένη και ειδικότερα γνησίως αύξουσα. Σε δεδομένο κυματαριθμό παρατηρείται ευστάθεια στους μικρούς αριθμούς Reynolds, οριακή ευστάθεια σε δεδομένη τιμή που αντιστοιχεί στον κρίσιμο Re_{cr} και φαίνεται ως σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα (ρίζα) και αστάθεια για κάθε άλλη μεγαλύτερη τιμή $Re > Re_{cr}$. Δηλαδή, όσο ο αριθμός Reynolds είναι μικρός και οι αδρανειακές δυνάμεις δεν είναι πολύ ισχυρές, η επιφανειακή τάση αρκεί να αποσβέσει μια διαταραχή πεπερασμένου μήκους κύματος. Ωστόσο, από ένα σημείο και έπειτα ο υμένας έχει καταστεί αρκετά ταχύς, οι αδρανειακές δυνάμεις υπερβαίνουν τις επιφανειακές και ο κυματαριθμός περνά στην αστάθεια με διαρκώς αυξανόμενο ρυθμό ενίσχυσης, παρατήρηση που συνάδει με εκείνη του γραφήματος ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού (Σχήμα 9.4).

Ακόμη, αυξανόμενου του κυματαριθμού αυξάνεται και ο κρίσιμος αριθμός Reynolds, καθώς τα μικρότερα μήκη κύματος έχουν μεγαλύτερη καμπυλότητα, άρα υπόκεινται σε ισχυρότερες επιφανειακές δυνάμεις. Η αύξηση του κυματαριθμού μοιάζει να επιδρά και στην κλίση της καμπύλης, αυτή γίνεται όλο και πιο απότομη. Αυτό είναι εμφανές τόσο στο κυρίως γράφημα όσο και στη λεπτομέρεια που εστιάζει στις ρίζες των καμπυλών. Για παράδειγμα, το $k = 10^{-4}$ βρίσκεται στην περιοχή της οριακής ευστάθειας για ένα πολύ μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds. Για τιμές $Re \in [10^{-5}, 10^2]$ (τέσσερις τάξεις μεγέθους) ο ρυθμός εξέλιξης

είναι τάξης $\mathcal{O}(11)$. Στις επόμενες τιμές k , ωστόσο, το εύρος αυτό συνεχώς περιορίζεται και γίνεται όλο και πιο ευδιάκριτη η μετάβαση στην αστάθεια χωρίς την ανάγκη της λεπτομέρειας.

Φαίνεται, λοιπόν, ξανά πως στον ίδιο αριθμό Reynolds στους μεγαλύτερους κυματαριθμούς αντιστοιχούν μεγαλύτεροι ρυθμοί ανάπτυξης. Από τη στιγμή που ένα πεπερασμένο μήκος κύματος γίνει ασταθές, ενισχύεται περισσότερο από τα μεγαλύτερά του με την αύξηση του Reynolds, ώστε αναμένεται η αρμονική του να επιδράσει και στο σχήμα της διεπιφάνειας.



Σχήμα 9.11: Ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής συναρτήσει του αριθμού Reynolds για διάφορες τιμές κυματαριθμών σε κατακόρυφο υμένα

Το Σχήμα 9.11 είναι επίσης κατάλληλο για την επιβεβαίωση των περιορισμών της αριθμητικής επίλυσης στις χαμηλές τιμές κυματαριθμών και αριθμών Reynolds. Ο ρυθμός εξέλιξης του ελάχιστου δυνατού κυματαριθμού 10^{-4} είναι τάξης $\mathcal{O}(11)$ στο εύρος αριθμών Reynolds $[10^{-6}, 10^{-2}]$ που δικαιολογεί τον προηγούμενο ισχυρισμό πως τιμή αντίστοιχη του $Re = 0$ μπορεί να επιλεγεί στο διάστημα $[10^{-6}, 10^{-3}]$. Για το γράφημα αυτό το βήμα του αριθμού Reynolds επιλέχθηκε ως εξής: $\Delta Re = 10^{-6}$ για $Re < 10^5$, $\Delta Re = 10^{-5}$ για $Re < 10^4$ κ.ο.κ ως $Re = 100$. Στο γεγονός ότι το βήμα σε κάθε τάξη μεγέθους είναι αντίστοιχο και η απεικόνιση γίνεται σε λογαριθμικό άξονα οφείλεται η κάποτε τεθλασμένη μορφή των καμπυλών που, όμως, δεν αλλοιώνει τα αποτελέσματα.

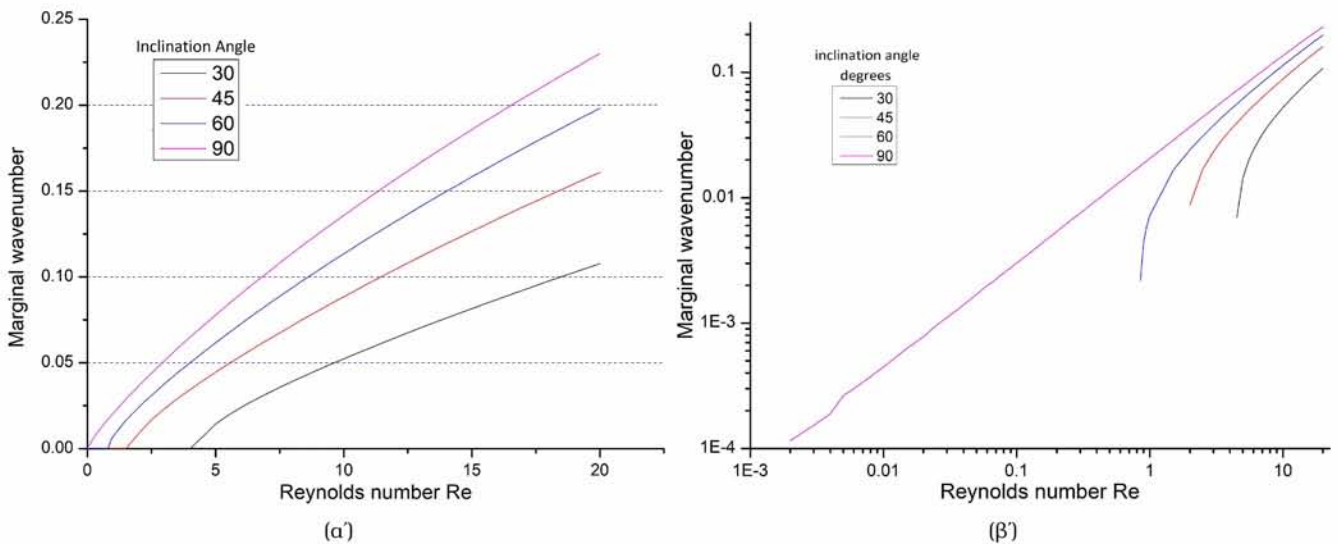
9.4.5 Ο οριακός κυματαριθμός

Αποτελεί τη ρίζα του γραφήματος ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού, συνεπώς εκατέρωθέν του ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής έχει διαφορετικό πρόσημο. Από το ίδιο γράφημα για $Re = 20$ παρατηρείται πως ο οριακός κυματαριθμός βρίσκεται μεταξύ 0.2 και 0.3. Έτσι, για 100 τιμές $Re \in [10^{-4}, 20]$ με βήμα $\Delta Re = 10^{-4}$ για $Re < 10^3$, $\Delta Re = 10^{-3}$ για $Re < 10^2$, $\Delta Re = 0.005$ για $Re < 0.1$, $\Delta Re = 0.05$ για $Re < 1$ και $\Delta Re = 0.5$ για τα υπόλοιπα ως $Re \leq 20$ προγραμματίζεται η εύρεση της ρίζας με τη μέθοδο της διχοτόμησης στο εύρος κυματαριθμών $[10^{-4}, 0.3]$. Η ακρίβεια επιδιώκεται στα τέσσερα ψηφία με

13 διχοτομήσεις του διαστήματος αναζήτησης. Μετά την τελευταία ο οριακός κυματαριθμός εκτιμάται στο τελικό διάστημα που προέκυψε μέσω του κανόνα του μοχλού:

$$k_m = \frac{|Re(\lambda_{down})| k_{up} + |Re(\lambda_{up})| k_{down}}{|Re(\lambda_{down})| + |Re(\lambda_{up})|}$$

όπου k_{down} και k_{up} τα άκρα του τελικού διαστήματος και $Re(\lambda_{down}), Re(\lambda_{up})$ οι ρυθμοί ενίσχυσης που τους αντιστοιχούν. Ο εκάστοτε αριθμός Reynolds και ο οριακός κυματαριθμός εξάγονται σε αρχείο δεδομένων. Τα αποτελέσματα εικονίζονται τόσο σε γραμμικούς όσο και σε λογαριθμικούς άξονες.



Σχήμα 9.12: Ο οριακός κυματαριθμός συναρτίζεται του αριθμού Reynolds για διάφορες γωνίες κλίσεως του υμένα (α) σε γραμμικούς & (β) σε λογαριθμικούς άξονες

Όπως ήδη παρατηρήθηκε και από το γράφημα ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού, ο οριακός κυματαριθμός αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Reynolds, καθώς, όσο η ροή γίνεται πιο γρήγορη, οι αδρανειακές δυνάμεις γίνονται ισχυρότερες και οι επιφανειακές δυνάμεις ακόμη και διαταραχών με καμπυλότητα δεν επαρκούν να τις αποσβέσουν. Οι καμπύλες είναι γνησίως μονότονες.

Στο γραμμικό φαίνεται πως στην αρχή (σε χαμηλούς Reynolds) ο ρυθμός αύξησης είναι μεγάλος και στην πορεία μειώνεται ως που σε ένα σημείο μοιάζει να σταθεροποιείται. Στο λογαριθμικό, σε ό,τι αφορά τον κατακόρυφο υμένα, εκτός από μια περιοχή στην αρχή, είναι ευθεία γραμμή. Η μη συγκεκριμένη συμπεριφορά ως $Re = 0.004$ αποδίδεται σε αριθμητικά αίτια. Το ίδιο και η τεθλασμένη μορφή των καμπυλών στο Σχήμα 9.12α στην έναρξή τους.

Ο οριακός κυματαριθμός είναι ο κυματαριθμός που παύει να είναι ευσταθής στο συγκεκριμένο αριθμό Reynolds, άρα αυτός ο αριθμός Reynolds είναι ο κρίσιμος του. Ουσιαστικά, λοιπόν, το διάγραμμα αντιστοιχεί σε κυματαριθμό-κρίσιμο αριθμό Reynolds, αφού κάθε αριθμός Reynolds αντιστοιχίζεται σε έναν οριακά ευσταθή κυματαριθμό και κάθε κυματαριθμός στον κρίσιμο του Reynolds.

Η επίδραση της γωνίας είναι η αναμενόμενη. Όσο το επίπεδο ροής κλίνει προς το οριζόντιο η καμπύλη αργεί να ξεκινήσει, το πρώτο οριακά ευσταθές πεπερασμένο μήκος κύματος εμφανίζεται σε όλο και υψηλότερο αριθμό Reynolds, ένας κυματαριθμός γίνεται οριακά ευσταθής σε μεγαλύτερο αριθμό Reynolds και στον ίδιο αριθμό Reynolds αντιστοιχεί όλο και πιο μικρός k_m μειωμένης της γωνίας ϑ . Φαίνεται για μια φορά ακόμη πως η καθετη στη ροή συνιστώσα της βαρύτητας σταθεροποιεί τον υμένα και οι αδρανειακές δυνάμεις οφείλουν να αυξηθούν περισσότερο, προκειμένου να καταστήσουν ασταθή έναν πεπερασμένο διεπιφανειακό κυματισμό, αφού εκτός από τις επιφανειακές δυνάμεις πρέπει να ξεπεράσουν και τις κάθετες βαρυτικές.

Στο λογαριθμικό διάγραμμα, στο μη κατακόρυφο επίπεδο, οι καμπύλες ξεκινούν σε μεγαλύτερο Reynolds με μια καμπυλότητα και προσδευτικά καταλήγουν σε ευθείες παράλληλες σε εκείνη του κατακόρυφου

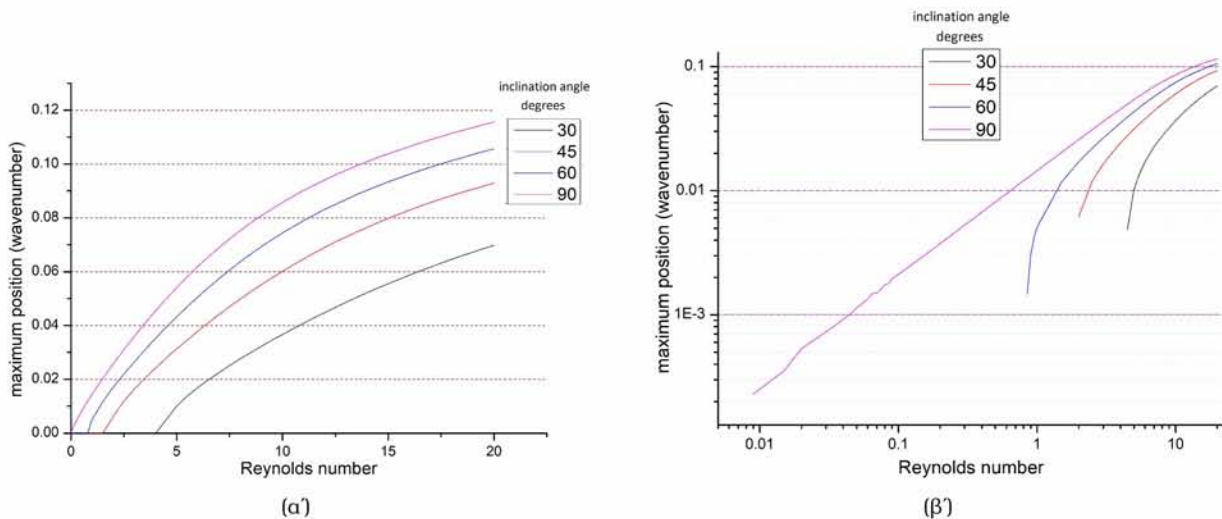
επιπέδου. Το γεγονός ότι μοιάζουν «κομμένες» στην αρχή τους οφείλεται στο ότι μάλλον είναι κατακόρυφες εκεί, αφού ο αριθμός Reynolds που ξεκινούν είναι κοντά στον κρίσιμο για τις διαταραχές $l \rightarrow \infty$ που εμφανίζονται πρώτες.

9.4.6 Η θέση και η τιμή του μεγίστου

Αφορούν κι αυτά το γράφημα ρυθμού ενίσχυσης-κυματαριθμού. Η τιμή του μεγίστου μπορεί να αποκτηθεί άμεσα, δεδομένης της θέσης του, έτσι το πρόγραμμα τροποποιείται καταλλήλως, ώστε αυτό να επιτευχθεί. Το μέγιστο αφορά το εύρος των ασταθών κυματαριθμών το οποίο είναι καθορισμένο. Είναι βέβαιο πως κάθε φορά, για κάθε τιμή του αριθμού Reynolds η θέση του θα βρίσκεται στο διάστημα $[10^{-4}, k_m]$. Έτσι, εισάγονται τα προηγούμενα αποτελέσματα (Re, k_m) και ξεκινά η διαδικασία εύρεσης.

Η πρώτη δοκιμή πραγματοποιείται στο μέσον του $[10^{-4}, k_m]$. Εκεί υπολογίζεται το $Re(\lambda)$ και αποθηκεύονται τόσο ο κυματαριθμός k όσο και ο ρυθμός εξέλιξης που του αντιστοιχεί σε κατάλληλες μεταβλητές. Η επόμενη δοκιμή γίνεται στο $k + 0.0001$. Στο σημείο αυτό γίνεται εκτίμηση της παραγώγου: $\frac{\Delta Re(\lambda)}{\Delta k}$, με βάση το πρόσημό της επιλέγεται το διάστημα που περιέχει το μέγιστο (δεξιά μισό, αν είναι θετική και αριστερό, αν είναι αρνητική) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται ως την ικανοποίηση του κριτηρίου σύγκλισης: το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-4} . Το σφάλμα υπολογίζεται ως διαφορά κυματαριθμών.

Ο υπολογισμός δε δίνει αποτέλεσμα όταν ο οριακός κυματαριθμός είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το Δk , επομένως για $k_m < 0.0004$ δεν εκτελείται καν. Αφού υπολογιστεί η θέση του μεγίστου, βρίσκεται, η τιμή του και εξάγονται σε αρχείο. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται σε γραμμικούς και λογαριθμικούς άξονες.

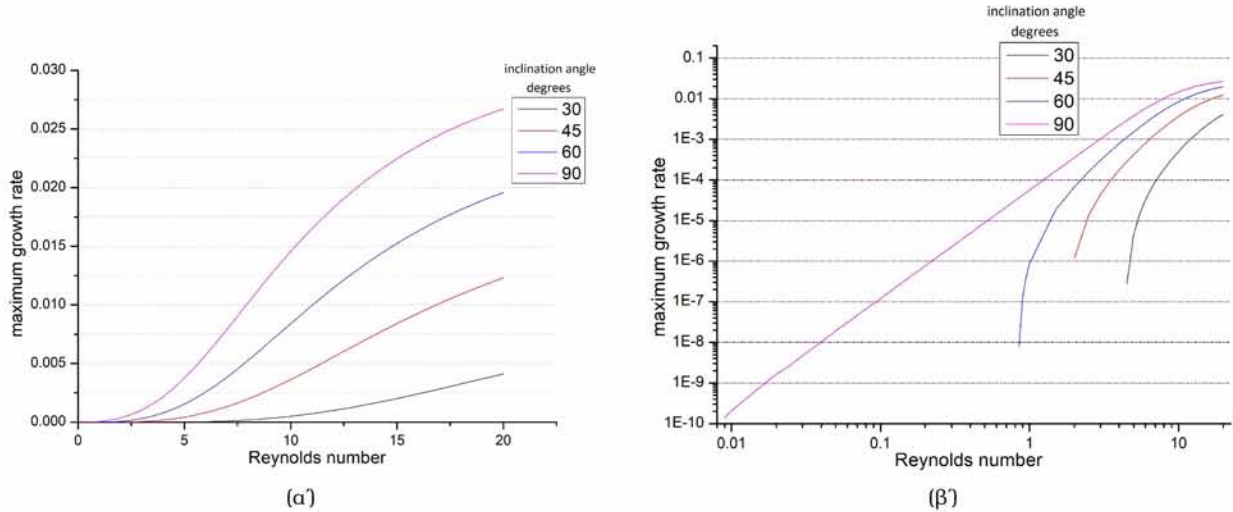


Σχήμα 9.13: Η θέση μεγίστου συναρτήσει του αριθμού Reynolds για διάφορες γωνίες κλίσεως του υμένα (α) σε γραμμικούς & (β) σε λογαριθμικούς άξονες

Η ύπαρξη του μεγίστου σημαίνει ότι υπάρχει μια διαταραχή που ευνοείται περισσότερο και η μεταβολή του με τον αριθμό Reynolds υποδεικνύει ότι το ποια διαταραχή θα ευνοηθεί και πόσο εξαρτάται από το πάχος του υμένα, διαφορετικές συνθήκες ροής οδηγούν σε διαφορετικό μέγιστο (k_{max}, max) . Η συμπεριφορά του πιο ευνοούμενου κυματαριθμού στους γραμμικούς άξονες μοιάζει με εκείνη του οριακού μόνο που αφορά αρκετά μικρότερες τιμές. Οι καμπύλες είναι κοίλες και γνησίως αύξουσες. Η θέση του μεγίστου αυξάνεται διαρκώς με μειούμενο ρυθμό. Στους λογαριθμικούς οι μορφές είναι πάλι αντίστοιχες του σχήματος 9.12β.

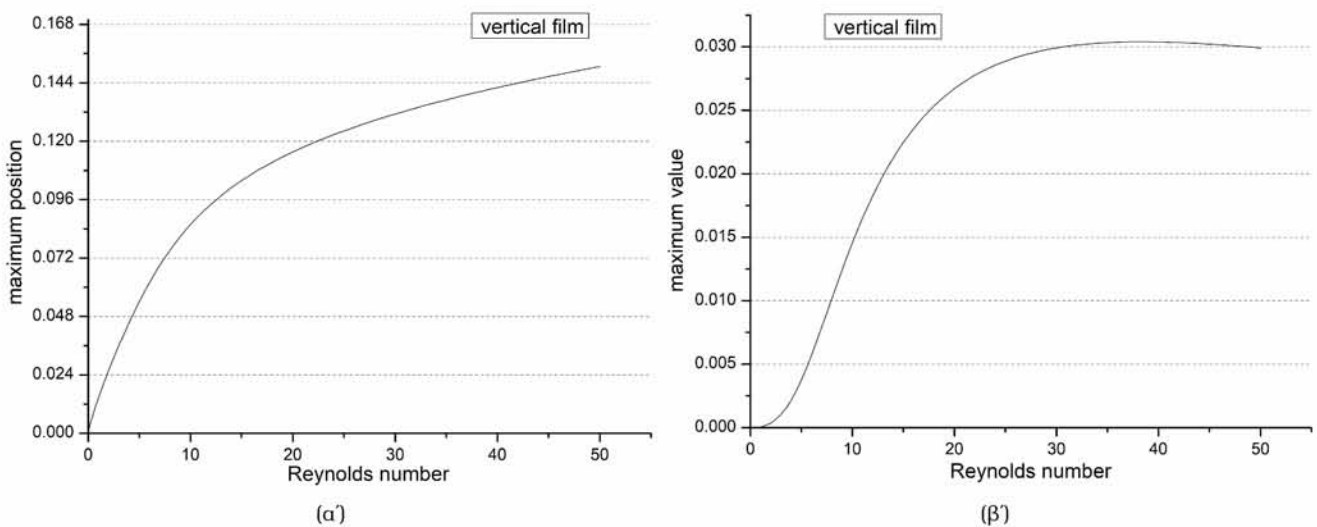
Η τιμή του μεγίστου στους γραμμικούς άξονες αυξάνεται συνεχώς. Σε μικρούς αριθμούς Reynolds αντιστοιχούν μικρές τιμές και σε ποιο γρήγορες ροές μεγαλύτερες, δηλαδή η αύξηση του αριθμού Reynolds έχει σαν αποτέλεσμα η εκάστοτε πλέον ευνοούμενη διαταραχή να ευνοείται όλο και περισσότερο. Οι καμπύλες παρουσιάζουν σημείο καμπής αριστερά του οποίου είναι κυρτές και δεξιά κοίλες, δηλαδή υπάρχει σημείο

όπου ο ρυθμός αύξησης του $Re(\lambda)$ από αύξων ξεκινά να μειώνεται. Στο λογαριθμικό η καμπύλη του κατακόρυφου υμένα είναι ευθεία από πολύ νωρίς και σε κάποιο σημείο αποκτά καμπυλότητα. Οι υπόλοιπες δεν είναι ευθείες σε κάποιο διάστημα. Ξεκινούν σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds και έχουν διαρκώς κοίλη μορφή. Αυτό κινεί το ενδιαφέρον για το τι ακολουθεί την τιμή $Re = 20$.



Σχήμα 9.14: Το μέγιστο συναρτήσει του αριθμού Reynolds για διάφορες γωνίες κλίσεως του υμένα (α) σε γραμμικούς & (β) σε λογαριθμικούς άξονες

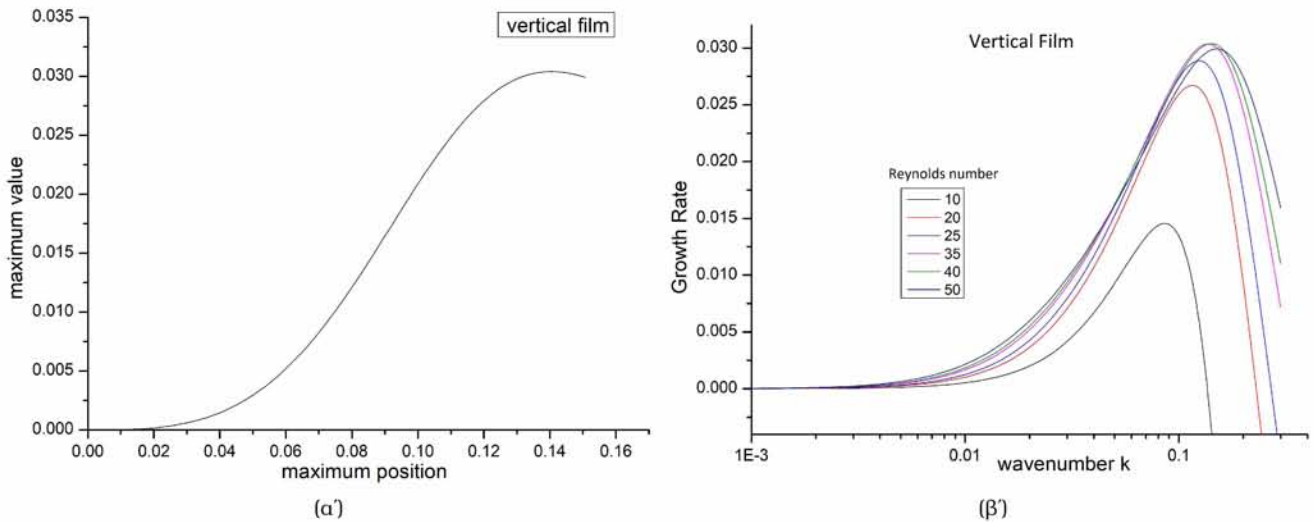
Γι' αυτό το σκοπό με το ίδιο βήμα αριθμού Reynolds στο $[10^{-4}, 50]$ και διάστημα αναζήτησης $[10^{-4}, 0.45]$ αποκτούνται νέα αποτελέσματα που απεικονίζονται σε γραμμικούς άξονες. Παρατηρείται ότι η θέση του μεγίστου αυξάνεται συνεχώς με μεταβαλλόμενο ρυθμό που μειώνεται και μοιάζει να στεθεροποιείται από την τιμή $Re = 35$ και έπειτα. Το μέγιστο έχει πιο ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Η καμπύλη γίνεται κοίλη και στην περιοχή $[35, 40]$ παρουσιάζει μέγιστο μετά το οποίο καθίσταται φθίνουσα. Αυτό σημαίνει πως, ενώ στην αρχή η πιο ευνοούμενη διαταραχή έχει αυξανόμενο ρυθμό ενίσχυσης, αυτός ξεκινά να μειώνεται μετά το σημείο καμπής και μετά το μέγιστο γίνεται ρυθμός μείωσης. Δηλαδή, ενώ ο ευνοούμενος κυματαριθμός συνεχίζει να αυξάνεται, από κάποια τιμή Re και εξής ο ρυθμός ενίσχυσής του μειώνεται, η ευνοούμενη διαταραχή παύει να ευνοείται τόσο όσο στις πιο αργές ροές.



Σχήμα 9.15: Το μέγιστο (α) και η θέση (β) του συναρτήσει του αριθμού Reynolds για κατακόρυφο υμένα

Η γωνία επιδρά ξανά με τον ίδιο τρόπο. Χωρίς να διαφοροποιείται η μορφή των καμπυλών το φαινόμενο μετατοπίζεται σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds με τη μείωση της γωνίας. Το πρώτο μέγιστο αργεί να εμφανιστεί σε πιο κεκλιμένα επίπεδα.

Τέλος, στο Σχήμα 9.16α φαίνεται η τιμή του μεγίστου ως συνάρτηση της θέσης του. Η καμπύλη αυτή θα λαμβανόταν και στο γράφημα ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού, με την ένωση των μεγίστων όλων των καμπυλών από διαφορετικές τιμές αριθμών Reynolds. Το σημείο καμψής και το μέγιστο εμφανίζονται κι εδώ. Ως εκ τούτου οι καμπύλες $Re(\lambda) - k$ αναμένεται να μπλέκονται μεταξύ τους στους μεγαλύτερους Re , κάτι που επαληθεύεται στο διπλανό διάγραμμα.



Σχήμα 9.16: (α) Το μέγιστο συναρτήσει της θέσης του σε κατακόρυφο υμένα & (β) Καμπύλες $Re(\lambda) - k$ σε κατακόρυφο υμένα και μεγάλους αριθμούς Reynolds

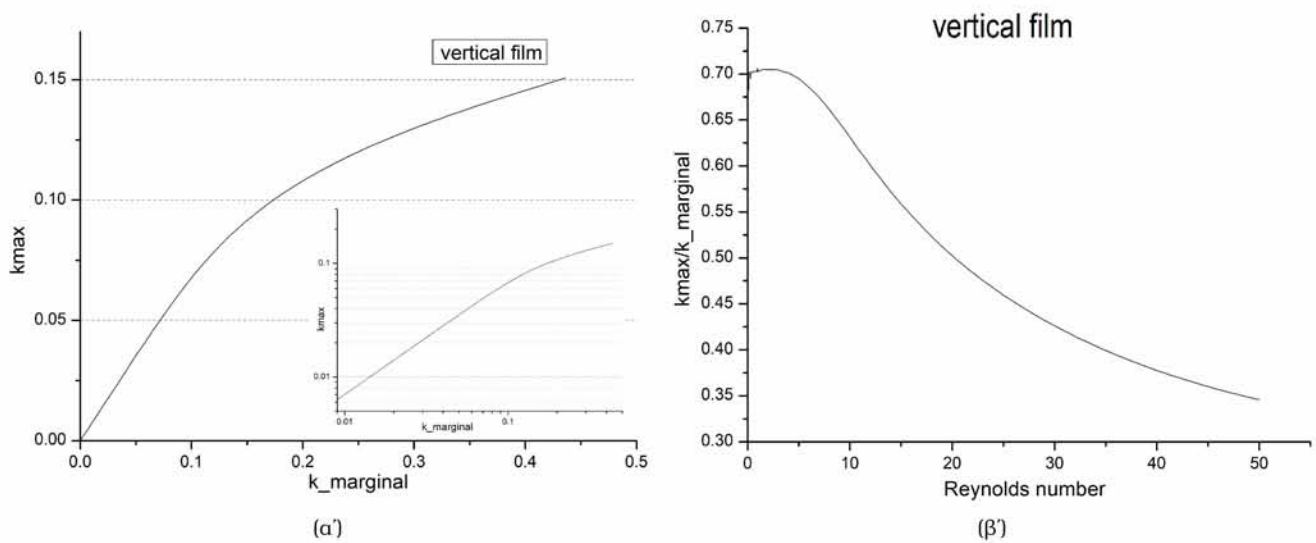
Τιμές αριθμού Reynolds $Re \geq 50$ δε μελετώνται σκοπίμως, διότι αφ' ενός είναι αρκετά μεγάλες για πίπτοντα υμένα και αφ' ετέρου σταδιακά εγείρονται και άλλοι είδους αστάθειες πέραν της διεπιφανειακής που αποτελεί το αντικείμενο του ενδιαφέροντος.

9.4.7 Ο οριακός κυματαριθμός και η θέση του μεγίστου

Η παρόμοια μορφή των καμπυλών του οριακού κυματαριθμού και της θέσης του μεγίστου συναρτήσει του αριθμού Reynolds καθιστά ενδιαφέρουσα την εξερεύνηση της μεταξύ τους σχέσης. Για το λόγο αυτό δημιουργούνται δυο διαγράμματα. Στο ένα φαίνεται η θέση μεγίστου συναρτήσει του οριακού κυματαριθμού και στο άλλο ο λόγος των δυο κυματαριθμών συναρτήσει του αριθμού Reynolds για κατακόρυφο υμένα.

Στους γραμμικούς άξονες η μορφή της καμπύλης είναι παρόμοια με εκείνης κάθε κυματαριθμού ξεχωριστά συναρτήσει του αριθμού Reynolds. Αν και σε μια πιο γρήγορη ροή και τα δυο αυξάνονται, αυτή η αύξηση δε συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο, ο οριακός κυματαριθμός αυξάνεται ταχύτερα. Στο λογαριθμικό, στην αρχή η σχέση τους είναι ευθεία γραμμή και στην πορεία γίνεται κοίλη καμπύλη από την οποία φαίνεται ξανά η μείωση του ρυθμού αύξησης του πιο ευνοούμενου κυματαριθμού. Ενώ σε μικρούς αριθμούς Reynolds η θέση μεγίστου είναι πολύ κοντά στον οριακό κυματαριθμό $k_{max} \in [\frac{2}{3}k_m, k_m]$, για $Re \leq 20$ γίνεται υποδιπλάσιό του.

Η παρατήρηση αυτή είναι πιο ξεκάθαρη στην απεικόνιση του λόγου $\frac{k_{max}}{k_m}$. Η καμπύλη είναι ασταθής στην αρχή ως περίπου $Re = 1$ αλλά εξομαλύνεται. Είναι εμφανές πως ο λόγος διαρκώς μειώνεται και η θέση του μεγίστου απομακρύνεται συνεχώς από τη ρίζα. Από τιμές $\frac{2}{3}k_m$ καταλήγει να προσεγγίζει το $\frac{1}{3}k_m$ για $Re = 50$.

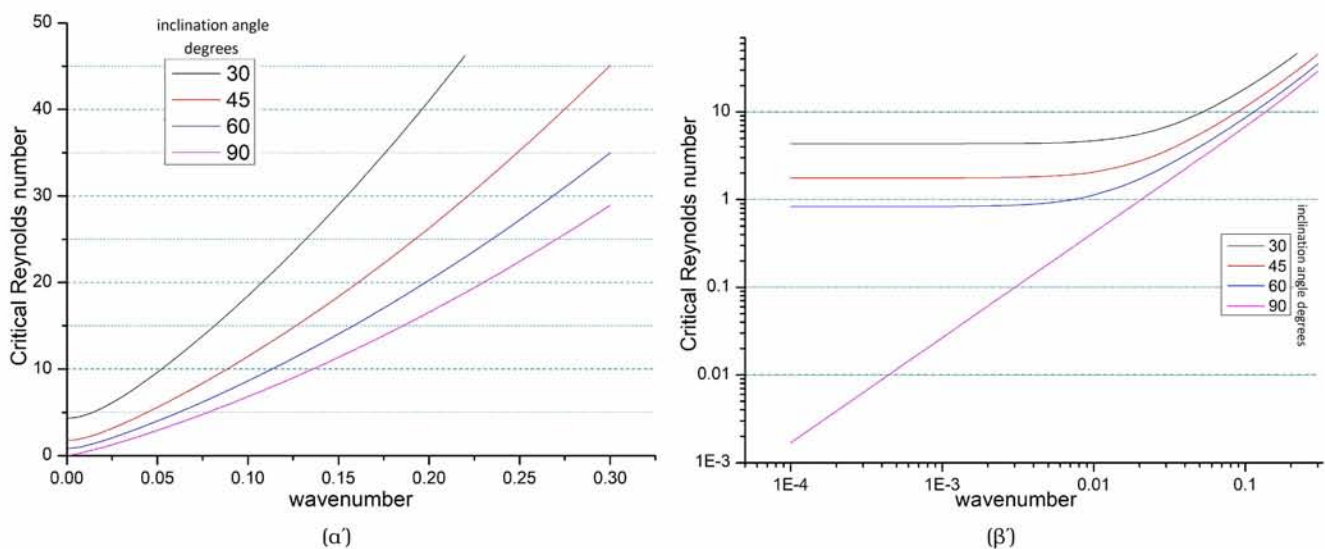


Σχήμα 9.17: (α) Η θέση μεγίστου συναρτήσει του οριακού κυματαριθμού σε κατακόρυφο υμένα & (β) Ο λόγος των δυο κυματαριθμών συναρτήσει του αριθμού Reynolds

9.4.8 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού

Το πρόγραμμα υπολογισμού των καμπυλών ρυθμού ενίσχυσης-αριθμού Reynolds τροποποιείται, ώστε να βρίσκει τη ρίζα με τη μέθοδο της διχοτόμησης, όπως περιγράφηκε και προηγουμένως. Η μονοτονία των καμπυλών διευκολύνει την αναζήτηση η οποία γίνεται στο διάστημα αριθμών Reynolds $[10^{-6}, 20]$. Η ακρίβεια σύγκλισης επιλέχθηκε 10^{-6} .

Εφόσον υπολογίζεται ο κρίσιμος αριθμός Reynolds κάθε κυματαριθμού, το διάγραμμα αναμένεται να έχει ίδια μορφή με το οριακός κυματαριθμός-αριθμός Reynolds με τη διαφορά ότι οι άξονες έχουν τοποθετηθεί ανάποδα. Ακόμη, επειδή η σύγκλιση πραγματοποιείται στον αριθμό Reynolds που δεν εμπλέκεται στις εξισώσεις σε άλλη δύναμη πέραν της πρώτης, η δυνατή ακρίβεια εκτίμησης είναι υψηλότερη και αναμένεται περιορισμός των αριθμητικών σφαλμάτων.



Σχήμα 9.18: Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού σε (α) γραμμικούς και (β) λογαριθμικούς άξονες

Πράγματι, στους γραμμικούς άξονες βλέπει κανείς ότι η εικόνα είναι ακριβώς η ίδια. Ωστόσο, οι κα-

μπύλες είναι εντελώς ομαλές από την έναρξή τους, δίχως τεθλασμένη μορφή σε κάποιο σημείο τους. Μάλιστα, φαίνεται να ξεκινούν σχεδόν κάθετες στον άξονα των αριθμών Reynolds, δηλαδή στην έναρξη της αστάθειας μια μικρή μεταβολή στον κυματαριθμό, έστω dk , δε συνεπάγεται μεταβολή του κρίσιμου αριθμού Reynolds και αντιστρόφως μια μικρή μεταβολή του αριθμού Reynolds δε συνεπάγεται μεταβολή του οριακού κυματαριθμού. Με τη μείωση της γωνίας η συμπεριφορά είναι η ίδια σε όλο και υψηλότερους κυματαριθμούς.

Το ίδιο είναι πιο ξεκάθαρο στους λογαριθμικούς άξονες. Οι άλλοτε «κομμένες» καμπύλες πλέον φαίνονται ευθείες στην περιοχή που δε μπορούσαν να απεικονιστούν. Αυτό σχετίζεται με το ότι εδώ η αναζήτηση κρίσιμου Reynolds γίνεται για κάθε ένα κυματαριθμό και δεν υπάρχει δυσκολία αν σε κάποιους αντιστοιχούν ίδιοι Re_{cr} . Αντιθέτως, κατά την αναζήτηση του οριακού κυματαριθμού που γινόταν για κάθε τιμή αριθμού Reynolds, όταν του αντιστοιχούσαν περισσότερες από μία τιμές δεν ήταν δυνατό να τις υπολογίσει όλες με την παρούσα αριθμητική τεχνική.

Στην περίπτωση του κατακόρυφου επιπέδου, η καμπύλη είναι ευθεία γραμμή σε όλο το εύρος υπολογισμού. Αν ήταν δυνατόν η αριθμητική προσομοίωση να φθάσει ως το 0, εκεί αναμένεται ότι κι αυτή θα παρουσίαζε καμπυλότητα. Οι κεκλιμένοι υμένας, μετά την καμπύλη περιοχή τους τείνουν επίσης σε ευθείες ίδιας κλίσης πάνω από του κατακόρυφου επιπέδου, αφού σε έναν κυματαριθμό αντιστοιχεί όλο και μεγαλύτερος κρίσιμος αριθμός Reynolds μειουμένης της γωνίας.

Από το Σχήμα 9.18 επιβεβαιώνεται η αριθμητική φύση των ανωμαλιών που εμφανίζονται στις καμπύλες του σχήματος 9.12 και οφείλονται στους αυξημένους περιορισμούς ακριβούς εκτίμησης που υπεισέρχονται από τις δυνάμεις στις οποίες υψώνεται ο κυματαριθμός στις εξισώσεις και από το ότι δε μπορούν να απεικονιστούν κατακόρυφες καμπύλες μέσω βήματος κυματαριθμού, όπως χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως.

9.4.9 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει της γωνίας

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικός ο τρόπος ορισμού του αριθμού Reynolds, επομένως ανακαλείται ο συμβολισμός $Re_o = \frac{gH^3}{2\nu}$ και $Re = \frac{gH^3}{2\nu} \sin\theta$.

Το πρόγραμμα τροποποιείται μία φορά ακόμη, ώστε για δεδομένο κυματαριθμό να βρίσκει για κάθε γωνία κλίσης του επιπέδου ροής $\theta \in [5^\circ, 90^\circ]$ του υμένα τον κρίσιμο αριθμό Reynolds. Για το οριζόντιο επίπεδο $\theta = 0^\circ$ δε μπορούν να ληφθούν αποτελέσματα από το πρόγραμμα. Ο υπολογισμός του κρίσιμου Reynolds γίνεται ξανά με τη μέθοδο της διχοτόμησης και επιδιώκεται ακρίβεια 10^{-6} . Τα αποτελέσματα αναπαρίστανται σε γραμμικούς άξονες.

Κατ' αρχάς, όλες οι καμπύλες είναι φθίνουσες. Σε μικρές γωνίες αντιστοιχούν πολύ μεγάλες τιμές και κοντά στις 90° όλο και μικρότερες. Δηλαδή, όσο πιο επικλινές είναι το επίπεδο ροής η κάθετη σε αυτή συνιστώσα της βαρύτητας, που λειτουργεί σταθεροποιητικά, μικραίνει, με αποτέλεσμα κάθε κυματαριθμός να καθίσταται ασταθής σε πιο αργή ροή, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds γίνεται πιο μικρός.

Ακόμη, φαίνεται ξανά πως οι μικρότεροι κυματαριθμοί περνούν πιο γρήγορα στην αστάθεια. Οι καμπύλες τους εμφανίζονται στο κάτω-αριστερό μέρος του διαγράμματος και τους αντιστοιχούν για όλες τις γωνίες μικρότεροι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds. Μάλιστα, για $k \rightarrow 0$ (φαίνεται για την ελάχιστη δυνατή τιμή $k = 10^{-4}$ στην ένθετη μεγέθυνση) $Re_{cr} = 0$, η ροή είναι πάντα ασταθής, για κάθε αριθμό Reynolds. Αντιθέτως, οι μεγαλύτεροι κυματαριθμοί έχουν $Re_{cr} > 0$ ακόμη και σε κατακόρυφη ροή, επομένως, σε καταλλήλως αργές ροές αποσβέννυνται και δεν εμφανίζονται.

Η αρκετά μακροσκοπική απεικόνιση του σχήματος 9.19 δείχνει τις καμπύλες για $k = 0.0001$, $k = 0.001$ και $k = 0.01$ να ταυτίζονται και μόνο εκείνη για $k = 0.1$ να απέχει αρκετά. Μια πιο κοντινή παρατήρηση δείχνει πως και ο $k = 0.01$ διαφοροποιείται σε όλες τις γωνίες και κυρίως στις μεγαλύτερες, όπου του αντιστοιχούν μεγαλύτεροι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds από τους μικρότερους κυματαριθμούς. Αν και πάντα ευσταθέστερός τους, στον κατακόρυφο υμένα ο $k = 0.01$ είναι περισσότερο ευσταθής από τους $k = 0.0001$ και $k = 0.001$ σε σχέση με μικρότερες γωνίες. Αυτό συνάδει με την διαπίστωση από το Σχήμα 9.186 ότι στους μικρότερους κυματαριθμούς η συμπεριφορά είναι παρόμοια ως προς τον κρίσιμο αριθμό Reynolds με την ελάττωση της γωνίας. Οι μικροί κυματαριθμοί στα μικρά θ τείνουν να είναι το ίδιο ευσταθείς.

Οι υπόλοιποι δύο $k = 0.0001$ και $k = 0.001$ μοιάζουν να ταυτίζονται σε όλες τις γωνίες. Μολονότι απέχουν μια τάξη μεγέθους η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια. Χρειάζεται αρκετή μεγέθυνση, για να φανεί ότι στις 70° διαχωρίζονται κι αυτές, στις 80° έχουν σαφή απόσταση και στις 90° ο μεν $k = 0.0001$ έχει

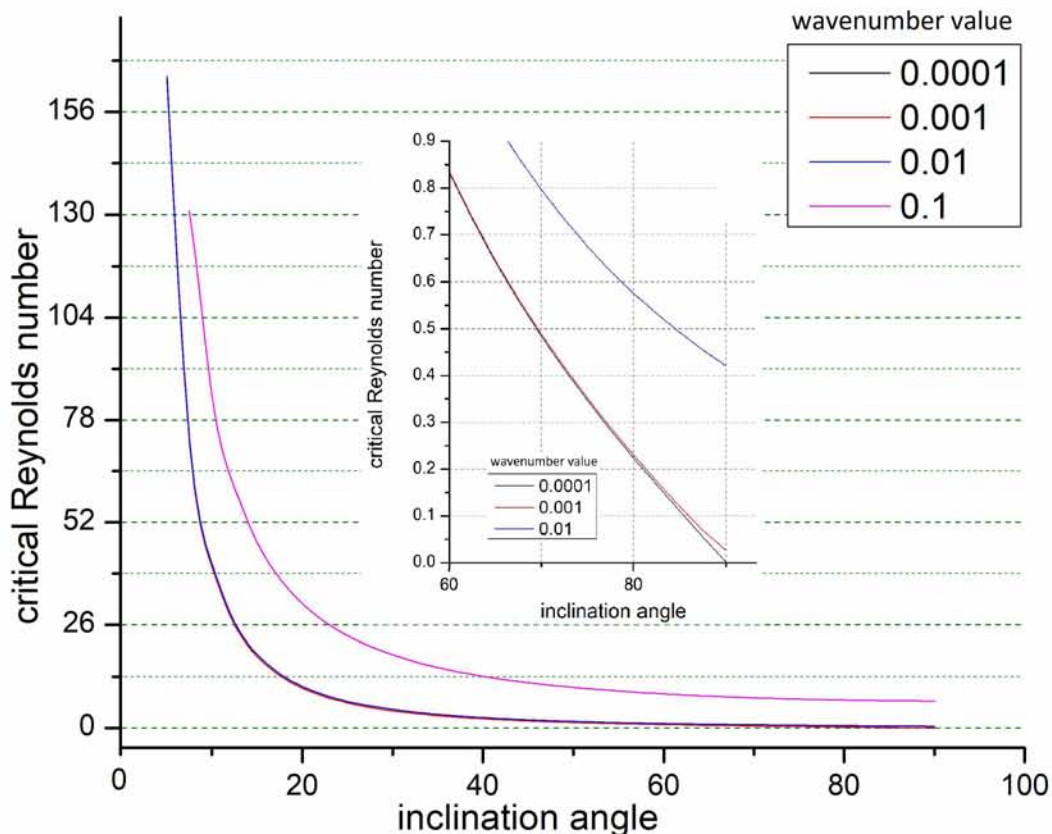
$Re_{cr} = 0$, ο δε $k = 0.001$ $Re_{cr} > 0$ αλλά μικρότερο του 0.05. Επιβεβαιώνεται, έτσι ξανά πως ο ελάχιστος δυνατός κυματαριθμός αν και περιορίζεται στο 10^{-4} δίνει αποτελέσματα σαν αυτά που η αναλυτική λύση (M. Smith 1990) προβλέπει για $k \rightarrow 0$. Αυτό γίνεται εμφανές και πιο κάτω.

Ο διαχωρισμός στις υψηλές γωνίες μόνο σχετίζεται με τη σταθεροποιητική δράση της επιφανειακής τάσης και της κάθετης συνιστώσας βαρύτητας. Επειδή και οι δυο κυματισμοί είναι πολύ μεγάλου μήκους κύματος, η επιφανειακή τάση στον $k = 0.0001$ είναι σχεδόν μηδενική και στον $k = 0.001$ πολύ μικρή, οπότε στις μικρές γωνίες τον καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει η βαρύτητα και οι διαφορές εξαλείφονται. Ωστόσο, πλησιάζοντας το επίπεδο ροής το κατακόρυφο, η βαρυτική συνιστώσα μειώνεται, επομένως, όσο μικρή κι αν είναι η επιφανειακή τάση συνεισφέρει και οι καμπύλες ξεχωρίζουν. Όταν δε εκλείπει πλήρως g_z , απομένει μόνη και δημιουργεί τη διαφορά σταθεροποιώντας τον $k = 0.001$.

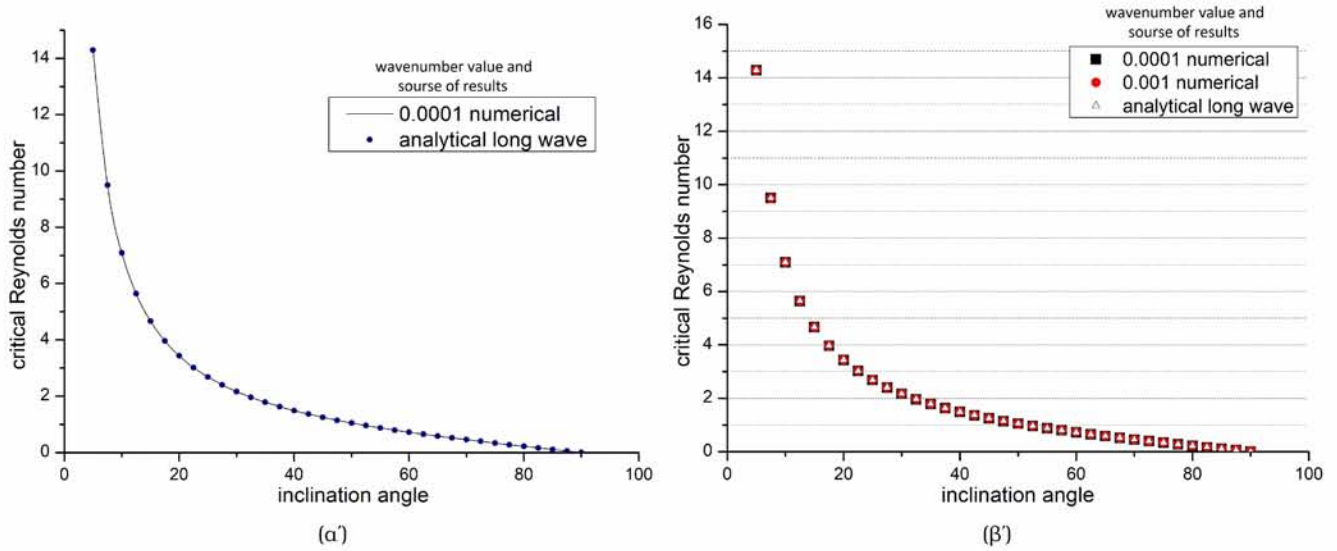
Όπως αναφέρθηκε και στο 9.4.2 υπάρχει αναλυτική λύση $Re_{cr} = Re_{cr}(\vartheta)$ για τις διαταραχές απείρου μήκους κύματος:

$$Re_{cr} = \frac{5}{4} \cot \vartheta$$

όπου ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως $Re = \frac{gH^3}{2\nu} \sin \vartheta$. Αναπαριστώντας στο ίδιο γράφημα την αναλυτική και την αριθμητική λύση πολλαπλασιασμένη με $\sin \vartheta$, ώστε ο Re_o να γίνει Re και να είναι εφικτή η σύγκριση, παρατηρείται πλήρης ταύτιση στον κυματαριθμό $k = 0.0001$. Η αριθμητική επίλυση συμβαδίζει με τα αναλυτικά αποτελέσματα, ώστε επιβεβαιώνεται η εγκυρότητά της. Μακροσκοπικά, η ταύτιση αφορά όλες τις γωνίες και για $k = 0.001$. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 9.206.

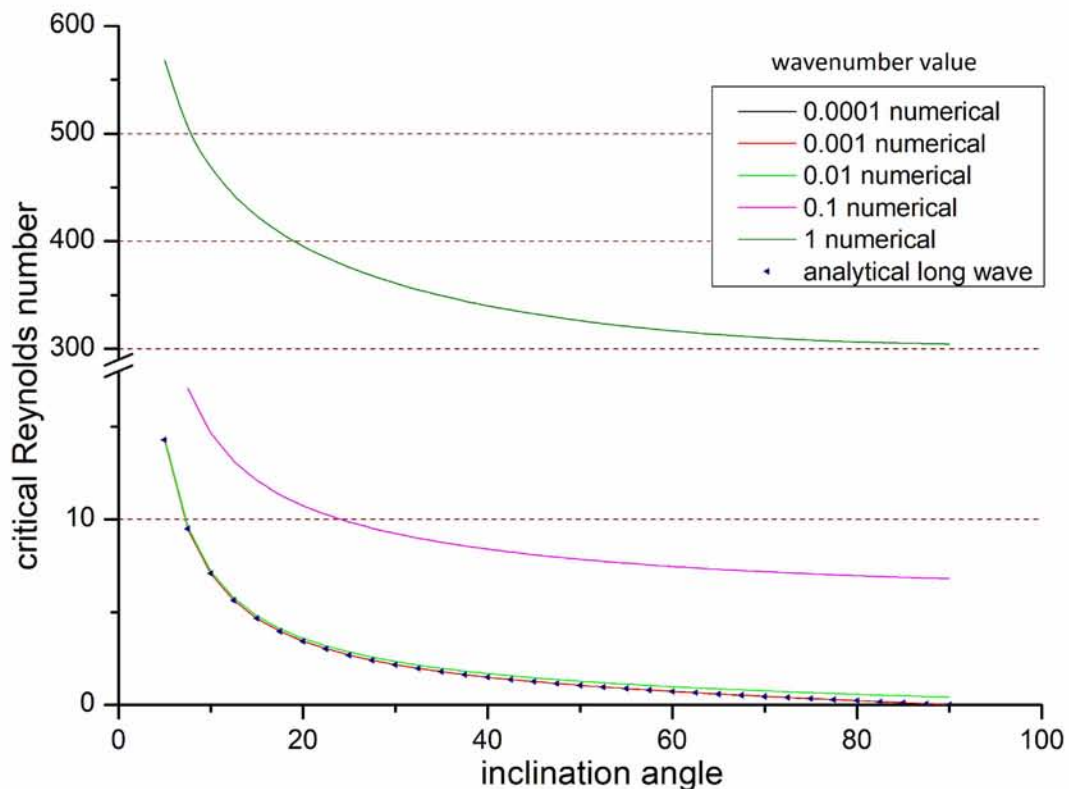


Σχήμα 9.19: Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds Re_o συναρτήσει της γωνίας



Σχήμα 9.20: Η αριθμητική (α) και η αναλυτική (β) λύση στο όριο του μηδενικού κυματαριθμού

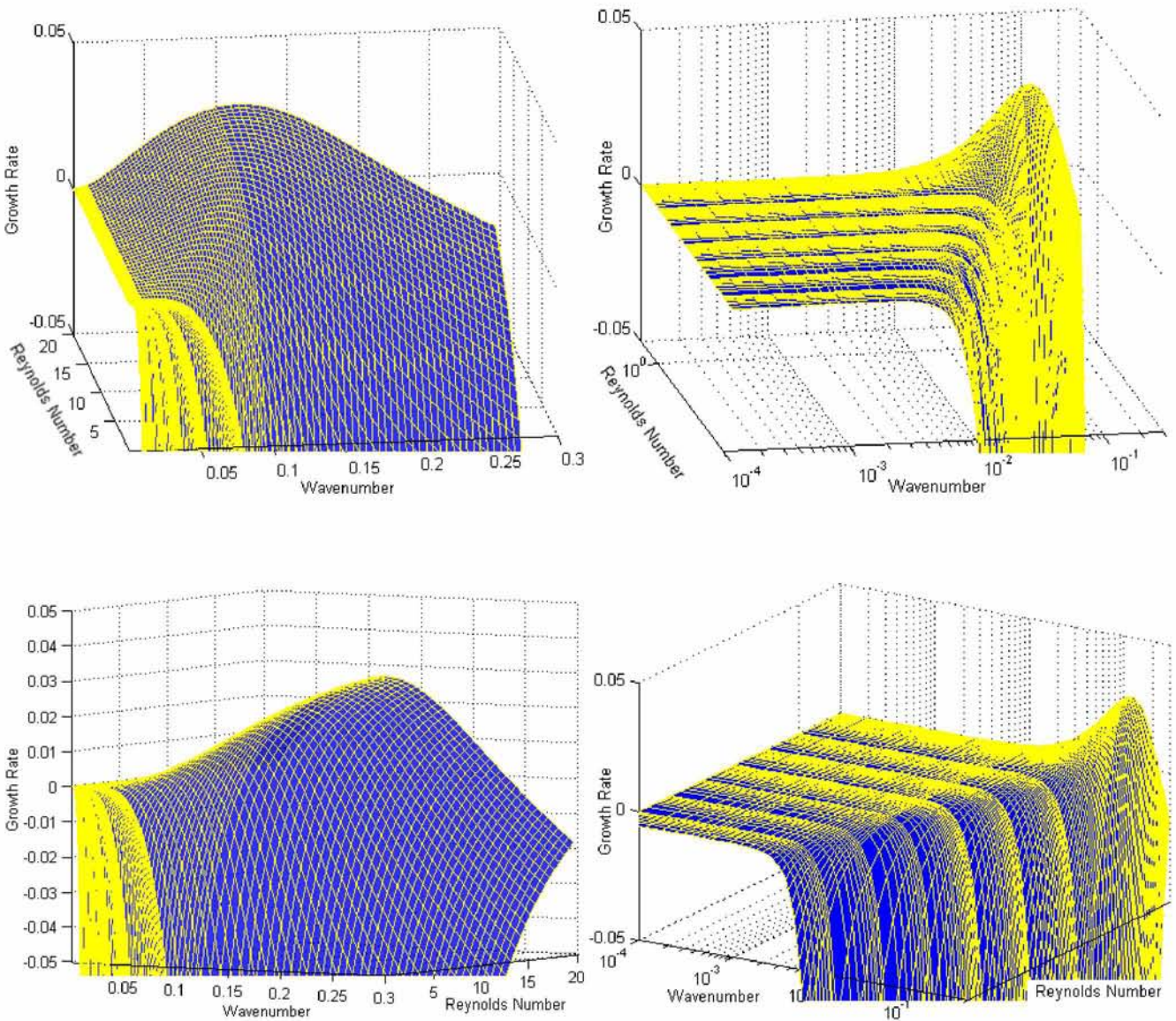
Στο τελευταίο γράφημα συμπεριλαμβάνεται και η συμπεριφορά των πιο μεγάλων κυματαριθμών. Οι μορφές των καμπυλών δε αλλάζουν, ωστόσο μετατοπίζονται πιο ψηλά σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds για όλες τις γωνίες, αφού $k \uparrow \Rightarrow \kappa \uparrow \Rightarrow 2\kappa\sigma \uparrow$, η επίδραση της επιφανειακής τάσης γίνεται όλο και πιο σημαντική στην απόσβεση διαταραχών πεπερασμένου μήκους κύματος.



Σχήμα 9.21: Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds Re συναρτίζει της γωνίας σε μεγαλύτερο εύρος κυματαριθμών

9.4.10 Τρισδιάστατη απεικόνιση

Έχοντας επιλέξει το ρευστό μέσω του αριθμού Kapitza απομένουν τρεις ακόμη παράμετροι για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών: ο αριθμός Reynolds, ο κυματαριθμός και η γωνία κλίσης του επιπέδου ροής. Για δεδομένη γωνία και συγκεκριμένα για κατακόρυφο υμένα φαίνονται παρακάτω τα αποτελέσματα σε τρεις άξονες. Ο ρυθμός ενίσχυσης της κάθε διαταραχής ως $k = 0.3$ αναπαρίσταται τόσο συναρτήσει του κυματαριθμού όσο και συναρτήσει του αριθμού Reynolds, ώστε προκύπτει μια επιφάνεια από 12.360 σημεία σε γραμμικούς και λογαριθμικούς άξονες.



Σχήμα 9.22: Διάγραμμα τριών διαστάσεων ρυθμού ενίσχυσης-κυματαριθμού-αριθμού Reynolds

Τα γραφήματα δεν προσφέρουν κάποιο επιπλέον αποτέλεσμα από τα ρυθμός ενίσχυσης-κυματαριθμός και ρυθμός ενίσχυσης-αριθμός Reynolds αλλά παρέχουν μια εικόνα για το πώς μπορούν να εικονιστούν και τα τρία μεγέθη σε ένα γράφημα, ώστε σε κάθε ζεύγος παραμέτρων (k, Re) να αντιστοιχίζεται ο κατάλληλος ρυθμός ανάπτυξης της πιο ασταθούς διαταραχής. Και στα δυο αναγνωρίζονται εύκολα οι μορφές των σχημάτων 9.4 και 9.11 που προηγήθηκαν.

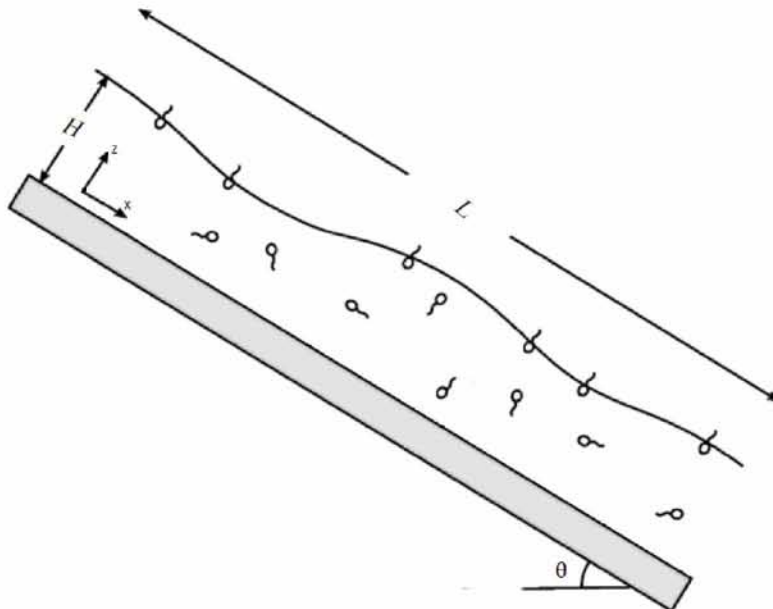
Κεφάλαιο 10

Ευστάθεια υμένα με επιφανειοδραστικό

10.1 Το πρόβλημα

Το δεύτερο πρόβλημα πριν την ενασχόληση με αυτό που διακριτοποιήθηκε είναι ο πίπτων υμένας με επιφανειοδραστικό, δηλαδή το προηγούμενο πρόβλημα του καθαρού υμένα με επιπλέον τη μεταφορά μάζας του επιφανειοδραστικού, που εκδηλώνει την προτίμηση να βρίσκεται στη διεπιφάνεια.

Ξανά επί κεκλιμένου στερεού υποστρώματος γωνίας κλίσης $\vartheta \in [0^\circ, 90^\circ]$ κατέρχεται ρευστό που φέρει μικρή ποσότητα επιφανειοδραστικής ουσίας διαλυτής και στην κυρίως μάζα του, σχηματίζοντας λεπτό υμένα πάχους $z = h(x, t)$. Πλέον, ενώ το πρόβλημα της μεταφοράς ορμής παραμένει και η ροή διέπεται από τις εξισώσεις Navier - Stokes στις διευθύνσεις x και z (Σχήμα 10.1), εμφανίζεται και η μεταφορά μάζας του επιφανειοδραστικού, ώστε απαιτείται μια εξίσωση ακόμα για την περιγραφή της. Στο στερεό τοίχωμα ισχύουν η συνθήκη μη ολίσθησης και η μη διείσδυσης τόσο για την ορμή όσο και για τη μάζα, ενώ στη διεπιφάνεια ισχύουν η κινηματική συνθήκη, το ισοζύγιο δυνάμεων εκπεφρασμένο σε δύο συνιστώσες, μία εφαπτομενική και μία κάθετη, το επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς μάζας για το επιφανειοδραστικό και οι σχέσεις που περιγράφουν την ανταλλαγή του μεταξύ της διεπιφάνειας και της κυρίως μάζας του υμένα.



Σχήμα 10.1: Ο υμένας με επιφανειοδραστικό - πρόβλημα μεταφοράς ορμής και μάζας (Πηγή: G. Karapetsas et al. 2013)

Ακόμη μια φορά για την ανάλυση ευστάθειας οι εξισώσεις πεδίου και οι συνοριακές συνθήκες αδιαστατοποιούνται και γραμμικοποιούνται στο όριο μιας ελάχιστης διαταραχής, εισάγεται η ροϊκή συνάρτηση και

πραγματοποιείται ανάλυση ιδιομορφών, ώστε λαμβάνεται η εξίσωση Orr - Somerfeld, η εξίσωση μεταφοράς μάζας και οι ακόλουθες οριακές συνθήκες που διαφέρουν από τις (8.25)-(8.33) στο ότι περιλαμβάνουν τους όρους μεταφοράς ορμής και μάζας του επιφανειοδραστικού δίκτυου, όμως, την εμπλοκή όρων σχετικών με την απορρόφηση ατμού.

Εξίσωση Orr - Somerfeld

$$Re \left[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)) (\hat{\psi}_{zz} - k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\psi}_{zzzz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\psi}_{zz} = 0 \quad (10.1)$$

Εξίσωση Μεταφοράς Μάζας Επιφανειοδραστικού

$$[\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)] \hat{c} = Pe_s^{-1} (\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) \quad (10.2)$$

Συνοριακές Συνθήκες στο Υπόστρωμα (@ $z = 0$)

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_z = 0 \quad (10.3)$$

$$\hat{c}_z = 0 \quad (10.4)$$

Συνοριακές Συνθήκες στη Διεπιφάνεια (@ $z = 1$)

$$\hat{h}(\lambda + ik \sin\vartheta) = -\hat{\psi} ik \quad (10.5)$$

$$-2\sin\vartheta \hat{h} + \hat{\psi}_{zz} + k^2 \hat{\psi} = 2We ik \sigma_\Gamma \hat{\Gamma} \quad (10.6)$$

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\psi}_{zzz} - \hat{\psi}_z Re(\lambda + ik \sin\vartheta) = 2ik(\cos\vartheta + We k^2 \bar{\sigma}) \hat{h} \quad (10.7)$$

$$\hat{\Gamma}(\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_s^{-1} k^2) = \hat{J} - \hat{\psi}_z ik \bar{\Gamma} \quad (10.8)$$

$$\hat{J} = -Pe_s^{-1} \hat{c}_z \quad (10.9)$$

$$\hat{J} = K_{KIN} [\xi \hat{c}(1 - \bar{\Gamma}) - \hat{\Gamma} - \xi \bar{c} \hat{\Gamma}] - K_G \hat{\Gamma} \quad (10.10)$$

Η εξίσωση Orr - Somerfeld, τετάρτης τάξεως, οριζοντίας $\hat{\varphi} = \hat{\psi}_{zz}$, εκφράζεται ως σύστημα δυο εξισώσεων δευτέρας τάξεως:

$$Re \left[(\lambda + ik \sin\vartheta(2z - z^2)) (\hat{\varphi} - k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\varphi}_{zz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\varphi} = 0$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\psi}_{zz}$$

και οι έξι συνοριακές συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μπορούν να γίνουν τρεις με αντικατάσταση των παραμέτρων \hat{h} , $\hat{\Gamma}$, \hat{J} ως κατωτέρω. Από την εφαπτομενική δυναμική συνθήκη (10.6):

$$\hat{h} = \frac{\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi} - 2We ik \sigma_\Gamma \hat{\Gamma}}{2\sin\vartheta}$$

από το ισοζύγιο μεταφοράς επιφανειοδραστικού προς τη διεπιφάνεια από πλευράς της κυρίως μάζας (10.9):

$$\hat{J} = -Pe_s^{-1} \hat{c}_z$$

και από την κινητική των ανυδράσεων ρόφησης-εκρόφησης του στη διεπιφάνεια (10.10):

$$\hat{\Gamma} = \gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z$$

όπου

$$\gamma = \frac{K_{KIN} \xi (1 - \bar{\Gamma})}{K_{KIN} (1 + \xi \bar{c}) + K_G} \quad \kappa \alpha \iota \quad \delta = \frac{P e_s^{-1}}{K_{KIN} (1 + \xi \bar{c}) + K_G}$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει το συνολικό πρόβλημα ιδιοτιμών με τρεις εξισώσεις πεδίου και τρεις οριακές συνθήκες ανά άκρο:

$$Re \left[(\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)) (\hat{\varphi} - k^2 \hat{\psi}) + 2ik \sin \vartheta \hat{\psi} \right] - \hat{\varphi}_{zz} - k^4 \hat{\psi} + 2k^2 \hat{\varphi} = 0 \quad (10.11)$$

$$\hat{\psi}_{zz} - \hat{\varphi} = 0 \quad (10.12)$$

$$[\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)] \hat{c} = P e_s^{-1} (\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) \quad (10.13)$$

@z = 0

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_z = 0 \quad (10.14)$$

$$\hat{c}_z = 0 \quad (10.15)$$

@z = 1

$$(\lambda + ik \sin \vartheta) (\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi} - 2We ik \sigma_T (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z)) + 2ik \sin \vartheta \hat{\psi} = 0 \quad (10.16)$$

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\varphi}_z - \hat{\psi}_z Re(\lambda + ik \sin \vartheta) - ik \left(\cot \vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin \vartheta} k^2 \right) (\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi} - 2We ik \sigma_T (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z)) = 0 \quad (10.17)$$

$$(\lambda + ik \sin \vartheta + P e_s^{-1} k^2) (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z) = -P e_s^{-1} \hat{c}_z - \hat{\psi}_z ik \bar{\Gamma} \quad (10.18)$$

10.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων

Η διακριτοποίηση πραγματοποιήθηκε ξανά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κατά Galerkin με στοιχεία ισομήκη και τετραγωνικά (τρεις κόμβοι ανά στοιχείο) και συναρτήσεις βάσεως και βάρους πολυώνυμα Lagrange δευτέρας τάξεως. Και πάλι παραλείπονται στις συναρτήσεις $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$, ω οι παραθέσεις που δηλώνουν πως εξαρτώνται από το z . Οι δείκτες εξακολουθούν να δηλώνουν την παράγωγο ως προς την υποδεικνύμενη μεταβλητή.

Κατ' αρχάς, οι εξισώσεις πεδίου πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους και ολοκληρώνονται στο πεδίο μελέτης, στην πορεία δε υποβιβάζεται η τάξη τους, χρήσει της σχέσης $(fg)' = f'g + fg'$, για την απόκτηση της ασθενούς μορφής τους. Οι δυο εξισώσεις στις οποίες διασπάστηκε η Orr - Somerfeld είναι ίδιες με τις (9.6) και (9.7) και απευθείας λαμβάνονται οι (9.16) και (9.17) από τη διακριτοποίηση. Απομένει μόνο η διακριτοποίηση της (10.13):

$$\begin{aligned} (10.13) &\Rightarrow [\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)] \hat{c} - P e_s^{-1} (\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 \left[[\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)] \hat{c} - P e_s^{-1} (\hat{c}_{zz} - k^2 \hat{c}) \right] \omega_i dz = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 \left\{ \left[[\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)] \hat{c} + P e_s^{-1} k^2 \hat{c} \right] \omega_i + P e_s^{-1} \frac{d\hat{c}}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} \right\} dz - P e_s^{-1} [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 \left\{ \left[[\lambda + ik \sin \vartheta (2z - z^2)] + P e_s^{-1} k^2 \right] \hat{c} \omega_i + P e_s^{-1} \frac{d\hat{c}}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} \right\} dz - P e_s^{-1} [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

διότι

$$\int_0^1 \hat{c}_{zz} \omega_i dz = [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\hat{c}}{dz} \frac{d\omega_i}{dz} dz$$

Προσεγγίζοντας τις άγνωστες συναρτήσεις $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, \hat{c} στους κόμβους μέσω των συναρτήσεων βάσεως:

$$\hat{\psi} = \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(z) \quad \text{και} \quad \hat{\varphi} = \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \omega_j(z) \quad \text{και} \quad \hat{c} = \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \omega_j(z) \quad (10.20)$$

και τις συνεχείς εντός του στοιχείου παραγώγους τους ως:

$$\hat{\psi}_z = \sum_{j=1}^n \frac{d\omega_i}{dz} \hat{\psi}_j \quad \text{και} \quad \hat{\varphi}_z = \sum_{j=1}^n \frac{d\omega_i}{dz} \hat{\varphi}_j \quad \text{και} \quad \hat{c}_z = \sum_{j=1}^n \frac{d\omega_i}{dz} \hat{c}_j \quad (10.21)$$

προκύπτουν οι (9.20) και (9.21) για τη μεταφορά ορμής, ενώ για τη μεταφορά του επιφανειοδραστικού:

$$\sum_{j=1}^n \int_0^1 \left\{ \left[\lambda + ik \sin\vartheta (2z - z^2) + Pe_s^{-1} k^2 \right] \omega_i \omega_j + Pe_s^{-1} \frac{d\omega_i}{dz} \frac{d\omega_j}{dz} \right\} dz \cdot \hat{c}_j - Pe_s^{-1} [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 = 0 \quad (10.22)$$

Τέλος, ανάγοντας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού (9.22):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \left\{ \left[\lambda + ik \sin\vartheta \left(\xi h_e + z_a + z_b - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + Pe_s^{-1} k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \right. \\ \left. + Pe_s^{-1} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} \frac{2}{h_e} \right\} d\xi \hat{c}_j - Pe_s^{-1} [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 = 0 \\ \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \left\{ \left[ik \sin\vartheta \left(\xi h_e + z_a + z_b - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + Pe_s^{-1} k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \right. \\ \left. + Pe_s^{-1} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} \frac{2}{h_e} \right\} d\xi \cdot \hat{c}_j - Pe_s^{-1} [\hat{c}_z \omega_i]_0^1 = -\lambda \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j d\xi \cdot \hat{c}_j \quad (10.23) \end{aligned}$$

Οι (9.24), (9.25) και (10.25) αποτελούν τις διέπουσες εξισώσεις ανηγμένες σε αλγεβρικές ως προς τις άγνωστες τιμές $\hat{\psi}_j$, $\hat{\varphi}_j$, \hat{c}_j των συναρτήσεων $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$, \hat{c} στους κόμβους κάθε στοιχείου. Το τοπικό σύστημα εξισώσεων, εφόσον υπάρχουν τρεις κόμβοι ανά στοιχείο και τρεις άγνωστοι ανά κόμβο, θα είναι 9×9 . Οι συντελεστές των αγνώστων προκύπτουν από τις εξισώσεις:

Πρώτη εξίσωση (όπως πριν):

$$\hat{\psi}_j : P_{ij} = \int_{-1}^1 \left[2Reik \sin\vartheta - k^4 - Reik^3 \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) \right] \omega_i \omega_j \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : \Sigma_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} + \left[Reik \sin\vartheta \left(\xi h_e + (z_a + z_b) - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + 2k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j \right] d\xi$$

Δεύτερη εξίσωση (όπως πριν):

$$\hat{\psi}_j : K_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : \Upsilon_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j d\xi$$

Τρίτη εξίσωση:

$$\hat{c}_j : E_{ij} = \int_{-1}^1 \left\{ \left[ik \sin\vartheta \left(\xi h_e + z_a + z_b - \left(\frac{\xi h_e + z_a + z_b}{2} \right)^2 \right) + P e_s^{-1} k^2 \right] \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j + P e_s^{-1} \frac{d\omega_i}{d\xi} \frac{d\omega_j}{d\xi} \frac{2}{h_e} \right\} d\xi$$

ώστε ο τοπικός πίνακας γίνεται:

$$[L] = \begin{bmatrix} P_{11} & \Sigma_{11} & 0 & P_{12} & \Sigma_{12} & 0 & P_{13} & \Sigma_{13} & 0 \\ K_{11} & \Upsilon_{11} & 0 & K_{12} & \Upsilon_{12} & 0 & K_{13} & \Upsilon_{13} & 0 \\ 0 & 0 & E_{11} & 0 & 0 & E_{12} & 0 & 0 & E_{13} \\ P_{21} & \Sigma_{21} & 0 & P_{22} & \Sigma_{22} & 0 & P_{23} & \Sigma_{23} & 0 \\ K_{21} & \Upsilon_{21} & 0 & K_{22} & \Upsilon_{22} & 0 & K_{23} & \Upsilon_{23} & 0 \\ 0 & 0 & E_{21} & 0 & 0 & E_{22} & 0 & 0 & E_{23} \\ P_{31} & \Sigma_{31} & 0 & P_{32} & \Sigma_{32} & 0 & P_{33} & \Sigma_{33} & 0 \\ K_{31} & \Upsilon_{31} & 0 & K_{32} & \Upsilon_{32} & 0 & K_{33} & \Upsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & E_{31} & 0 & 0 & E_{32} & 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

Αποκτώντας από τους όρους που περιλαμβάνουν την ιδιοτιμή λ και τον δεξιό πίνακα το σύστημα του στοιχείου προκύπτει:

$$[L]\{x\} = \lambda[G]\{x\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \Sigma_{11} & 0 & P_{12} & \Sigma_{12} & 0 & P_{13} & \Sigma_{13} & 0 \\ K_{11} & \Upsilon_{11} & 0 & K_{12} & \Upsilon_{12} & 0 & K_{13} & \Upsilon_{13} & 0 \\ 0 & 0 & E_{11} & 0 & 0 & E_{12} & 0 & 0 & E_{13} \\ P_{21} & \Sigma_{21} & 0 & P_{22} & \Sigma_{22} & 0 & P_{23} & \Sigma_{23} & 0 \\ K_{21} & \Upsilon_{21} & 0 & K_{22} & \Upsilon_{22} & 0 & K_{23} & \Upsilon_{23} & 0 \\ 0 & 0 & E_{21} & 0 & 0 & E_{22} & 0 & 0 & E_{23} \\ P_{31} & \Sigma_{31} & 0 & P_{32} & \Sigma_{32} & 0 & P_{33} & \Sigma_{33} & 0 \\ K_{31} & \Upsilon_{31} & 0 & K_{32} & \Upsilon_{32} & 0 & K_{33} & \Upsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & E_{31} & 0 & 0 & E_{32} & 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{\psi}_3 \\ \hat{\varphi}_3 \\ \hat{c}_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} T_{11} & M_{11} & 0 & T_{12} & M_{12} & 0 & T_{13} & M_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11} & 0 & 0 & N_{12} & 0 & 0 & N_{13} \\ T_{21} & M_{21} & 0 & T_{22} & M_{22} & 0 & T_{23} & M_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{21} & 0 & 0 & N_{22} & 0 & 0 & N_{23} \\ T_{31} & M_{31} & 0 & T_{32} & M_{32} & 0 & T_{33} & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & N_{32} & 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{\psi}_3 \\ \hat{\varphi}_3 \\ \hat{c}_3 \end{bmatrix}$$

όπου από την πρώτη εξίσωση:

$$\hat{\psi}_j : T_{ij} = \int_{-1}^1 Re \omega_i \omega_j k^2 \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\hat{\varphi}_j : M_{ij} = - \int_{-1}^1 Re \omega_i \omega_j \frac{h_e}{2} d\xi$$

από την τρίτη:

$$\hat{c}_j : N_{ij} = - \int_{-1}^1 \frac{h_e}{2} \omega_i \omega_j d\xi$$

και $\{x\}$ το διάνυσμα των αγνώστων.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων ανά στοιχείο γίνεται με τα ίδια τρία σημεία Gauss και τα αντίστοιχα βάρη τους. Εφόσον δεν αλλάξει η τάξη των στοιχείων, ο πίνακας συνεκτικότητας θα παραμείνει ακριβώς ίδιος.

Οι συνοριακές συνθήκες και στα δυο άκρα εφαρμόζονται ξανά ως Diriclet (essential). Οι όροι στις αγκύλες, ως εκ τούτου, παραλείπονται και πάλι. Ανά άκρο υπάρχουν τρεις εξισώσεις, επομένως καταλαμβάνουν τις τρεις πρώτες και τις τρεις τελευταίες σειρές των πινάκων $[L]$ και $[G]$ του συστήματος.

Στο υπόστρωμα $z = 0$ εφαρμόζονται στον πρώτο κόμβο του πρώτου στοιχείου $\xi = -1$:

$$\hat{\psi} = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(-1) = 0 \Rightarrow \hat{\psi}_1 \omega_1(-1) + \hat{\psi}_2 \omega_2(-1) + \hat{\psi}_3 \omega_3(-1) = 0 \quad (10.24)$$

$$\hat{\psi}_z = 0 \Rightarrow \hat{\psi}_z(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{2}{h_e} \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \quad (10.25)$$

$$\hat{c}_z = 0 \Rightarrow \hat{c}_z(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{2}{h_e} \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \quad (10.26)$$

Οι αντίστοιχες στήλες για το $\hat{\varphi}_j$ μένουν μηδενικές, καθώς δεν εμπλέκεται στις οριακές συνθήκες του υποστρώματος. Δεν υπάρχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο στον δεξιό πίνακα $[G]$ για τις παρούσες εξισώσεις.

Στη διεπιφάνεια $z = 1$ εφαρμόζονται στον τελευταίο κόμβο του τελευταίου στοιχείου $\xi = 1$:

Κινηματική Συνθήκη:

$$(\lambda + ik \sin\vartheta) (\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik \sigma_\Gamma (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z)) + 2ik \sin\vartheta \hat{\psi} = 0$$

$$(\lambda + ik \sin\vartheta) \sum_{j=1}^n \left(\omega_j \hat{\varphi}_j + k^2 \omega_j \hat{\psi}_j - 2Weik \sigma_\Gamma \left(\gamma \omega_j \hat{c}_j + \delta \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{dz} \right) \right) + 2ik \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \omega_j \hat{\psi}_j = 0$$

$$(\lambda + ik \sin\vartheta) \sum_{j=1}^n \left(\omega_j \hat{\varphi}_j + k^2 \omega_j \hat{\psi}_j - 2Weik \sigma_\Gamma \left(\gamma \omega_j + \delta \frac{d\omega_j}{d\xi} \frac{2}{h_e} \right) \hat{c}_j \right) + 2ik \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \omega_j \hat{\psi}_j = 0$$

$$\begin{aligned} ik \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \left[\omega_j(1) \hat{\varphi}_j + k^2 \omega_j(1) \hat{\psi}_j - 2Weik \sigma_\Gamma \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \frac{2}{h_e} \right) \hat{c}_j + 2\omega_j(1) \hat{\psi}_j \right] \\ = -\lambda \sum_{j=1}^n \left[\omega_j(1) \hat{\varphi}_j + k^2 \omega_j(1) \hat{\psi}_j - 2Weik \sigma_\Gamma \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \frac{2}{h_e} \right) \hat{c}_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ik(k^2 + 2) \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \omega_j(1) \hat{\psi}_j + ik \sin\vartheta \sum_{j=1}^n \omega_j(1) \hat{\varphi}_j + 2Weik^2 \sin\vartheta \sigma_\Gamma \sum_{j=1}^n \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) \hat{c}_j \\ = -\lambda k^2 \sum_{j=1}^n \omega_j(1) \hat{\psi}_j - \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j(1) \hat{\varphi}_j + 2\lambda Weik \sigma_\Gamma \sum_{j=1}^n \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) \hat{c}_j \end{aligned} \quad (10.27)$$

Κάθετη Δυναμική Συνθήκη:

$$-3\hat{\psi}_z k^2 + \hat{\varphi}_z - \hat{\psi}_z \operatorname{Re}(\lambda + ik \sin\vartheta) - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) (\hat{\varphi} + k^2 \hat{\psi} - 2Weik \sigma_\Gamma (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z)) = 0$$

$$\begin{aligned} -3k^2 \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} + \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} - \operatorname{Re}(\lambda + ik \sin\vartheta) \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \\ \cdot \left(\sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \omega_j(1) + k^2 \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \omega_j(1) - 2Weik \sigma_\Gamma \left(\gamma \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \omega_j(1) + \delta \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας για κάθε άγνωστο και ανάγοντας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \left[(-3k^2 - Re ik \sin\vartheta) \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} - ik^3 \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \\ & + \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \left[\frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} - ik \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \omega_j(1) \right] \\ & - 2We k^2 \sigma_\Gamma \left(\cot\vartheta + \frac{We \bar{\sigma}}{\sin\vartheta} k^2 \right) \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) = \lambda Re \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \quad (10.28) \end{aligned}$$

Επιφανειακό ισοζύγιο μεταφοράς μάζας για το επιφανειοδραστικό:

$$\begin{aligned} & (\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1} k^2) (\gamma \hat{c} + \delta \hat{c}_z) = -Pe_s^{-1} \hat{c}_z - \hat{\psi}_z ik \bar{\Gamma} \Rightarrow \\ & (\lambda + ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1} k^2) \left(\gamma \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \omega_j(1) + \delta \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} \right) = -Pe_s^{-1} \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} - ik \bar{\Gamma} \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{d\omega_j}{dz} \Big|_{z=1} \\ & \lambda \left(\gamma \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \omega_j(1) + \delta \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) + [ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1} k^2] \left(\gamma \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \omega_j(1) + \delta \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) \\ & + Pe_s^{-1} \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} + ik \bar{\Gamma} \sum_{j=1}^n \hat{\psi}_j \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \Rightarrow \\ & \sum_{j=1}^n \left[(ik \sin\vartheta + Pe_{s_s}^{-1} k^2) \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) + Pe_s^{-1} \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right] \hat{c}_j + ik \bar{\Gamma} \sum_{j=1}^n \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \hat{\psi}_j \\ & = -\lambda \sum_{j=1}^n \left(\gamma \omega_j(1) + \delta \frac{2}{h_e} \frac{d\omega_j}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \right) \hat{c}_j \quad (10.29) \end{aligned}$$

Έτσι οι μιγαδικοί πίνακες $[L]$, $[G]$ είναι έτοιμοι και το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $[L]\{x\} = \lambda[G]\{x\}$ μπορεί να επιλυθεί.

10.3 Περιγραφή της επίλυσης

Η απόκτηση των ιδιοτιμών του προβλήματος αυτού υλοποιείται από το βασικό πρόγραμμα το οποίο δέχεται ως δεδομένα κατ' αρχάς τον αριθμό των στοιχείων κι έπειτα τις παραμέτρους του προβλήματος. Μετά τον υπολογισμό τους οι ιδιοτιμές εξάγονται σε αρχείο δεδομένων.

Η επίλυση προγραμματίστηκε σε Fortran με τη χρήση της βιβλιοθήκης Lapack και για τα διαγράμματα χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια προγράμματα.

Δημιουργήθηκαν δυο εκδοχές του κυρίως προγράμματος. Και οι δύο έχουν κοινό τρόπο υπολογισμού των πινάκων $[L]$ και $[G]$, ωστόσο διαφέρει ο σκοπός τους. Η μεν πρώτη υλοποιήθηκε με σκοπούς επαλήθευσης της εγκυρότητας των υπολογισμών η δε δεύτερη για την εξαγωγή αποτελεσμάτων.

10.3.1 Έλεγχος εγκυρότητας του υπολογισμού των πινάκων

Το πρόγραμμα επαλήθευσης δε διαφέρει ιδιαίτερος από το βασικό κώδικα του κεφαλαίου 9. Στόχος ήταν η αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων των G. Karapetsas & V. Bontozoglou (2013). Μετά τον αριθμό των στοιχείων, στα δεδομένα εισόδου, ορίζονται ο αδιάστατος κυματαριθμός της διαταραχής, ο αριθμός Reynolds

και η γωνία κλίσης του σιερού επιπέδου επί του οποίου πραγματοποιείται η ροή. Έπειτα, εισάγονται ο αριθμός Kapitza και οι αριθμοί Schmidt για τη μεταφορά του επιφανειοδραστικού στην κυρίως μάζα και τη διεπιφάνεια, η διαλυτότητα του επιφανειοδραστικού στο υγρό και η σταθερά K_{KIN} που σχετίζει το χαρακτηριστικό χρόνο συναγωγής με το χαρακτηριστικό χρόνο εκρόφησης. Τέλος, διασαφηνίζεται και πώς η μάζα επιφανειοδραστικού έχει προστεθεί στο διάλυμα.

Σε ό,τι αφορά την προστιθέμενη μάζα επιφανειοδραστικού στο διάλυμα M_{tot} ισχύει πως ισούται κάθε στιγμή με το άθροισμα της ποσότητας που βρίσκεται στην κυρίως μάζα και της ποσότητας που έχει προσροφηθεί στη διεπιφάνεια.

$$M_{tot} = \int_0^L \int_0^H c \, dx \, dz + \int_0^L \Gamma \, dx \quad (10.30)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, όπου και οι δύο συγκεντρώσεις είναι σταθερές, ισχύει:

$$M_{tot} = c L H + \Gamma L \quad (10.31)$$

Με βάση τις κλίμακες που έχουν οριστεί στο 6.2.1:

$$M_{tot} = \bar{c} \Gamma_\infty L H + \bar{\Gamma} \Gamma_\infty L \Rightarrow \frac{M_{tot}}{L \Gamma_\infty} = \bar{c} + \bar{\Gamma} \Rightarrow \bar{M}_{tot} = \bar{c} + \bar{\Gamma} \quad (10.32)$$

όπου $\bar{M}_{tot} = \frac{M_{tot}}{L \Gamma_\infty}$ η αδιάστατη ολική μάζα. Ακόμη, στην ισορροπία ισχύει $\bar{c} = \frac{\bar{\Gamma}}{\xi(1 - \bar{\Gamma})}$. Παραλείποντας τις ενδείξεις μόνιμης κατάστασης (παύλες) και συνδυάζοντας τις σχέσεις προκύπτει τριώνυμο με αποδεκτή λύση:

$$c = \frac{-1 - \xi + M_{tot} \xi + \sqrt{4M_{tot} \xi + (1 + \xi - M_{tot} \xi)^2}}{2\xi} \quad (10.33)$$

$$\Gamma = \frac{-1 - \xi + M_{tot} \xi + \sqrt{4M_{tot} \xi + (1 + \xi - M_{tot} \xi)^2}}{1 - \xi + M_{tot} \xi + \sqrt{4M_{tot} \xi + (1 + \xi - M_{tot} \xi)^2}} \quad (10.34)$$

Η λύση αυτή είναι η ίδια με εκείνη που παρουσιάζουν οι G. Karapetsas et al. (2013) για την περίπτωση που $\beta_a = \frac{H c_{cmc}}{\Gamma_\infty} = 1$. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να επισημανθεί πως οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν για την αδιαστατοποίηση της συγκέντρωσης στην κυρίως μάζα την κρίσιμη συγκέντρωση σχηματισμού μικυλλίων. Επομένως, η αδιάστατη μάζα ισούται στην περίπτωση αυτή με $\bar{M}_{tot}^{(2013)} = \frac{M_{tot}}{L H c_{cmc}}$. Η σχέση μεταξύ των δυο αδιάστατων μαζών είναι σημαντική, εφόσον πρόκειται να γίνει σύγκριση.

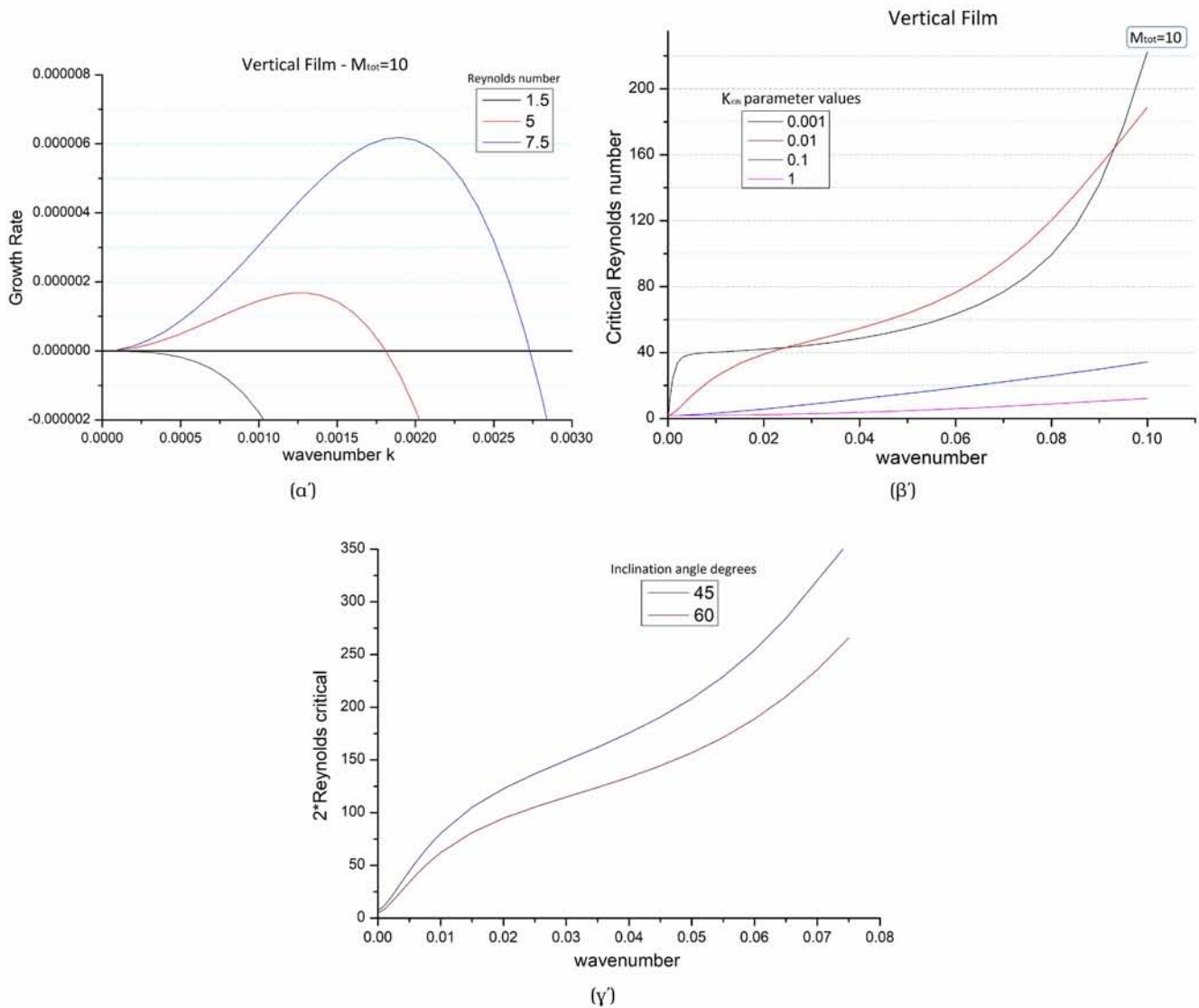
$$\bar{M}_{tot} = \frac{M_{tot}}{L \Gamma_\infty} = \frac{M_{tot}}{L H c_{cmc}} \frac{H c_{cmc}}{\Gamma_\infty} = \bar{M}_{tot}^{(2013)} \frac{1}{\beta_a} \quad (10.35)$$

Επομένως, για $\beta_a = 0.01$ και $\bar{M}_{tot}^{(2013)} = 0.1$, προκύπτει $\bar{M}_{tot} = 10$.

Ακόμη ένα μέγεθος που χρήζει τροποποιήσεως είναι η κινητική παράμετρος K_{KIN} , λόγω της διαφορετικής χαρακτηριστικής ταχύτητας που επιλέγεται στις δυο μοντελοποιήσεις. Η διαφοροποίηση αυτή αναμένεται να επιδρά όταν η γωνία κλίσεως που μελετάται είναι μικρότερη των 90° . Αντικαθιστώντας τους δυο ορισμούς της ταχύτητας U στον ορισμό της σταθεράς, προκύπτει $K_{KIN} = K_{KIN}^{(2013)} \sin \vartheta$.

Αφού εισαχθούν τα δεδομένα, υπολογίζονται οι αριθμοί Péclet του επιφανειοδραστικού, οι συγκεντρώσεις ισορροπίας από τις σχέσεις (10.35) και (10.36) και οι παράμετροι γ και δ . Απομένει μόνο ο προσδιορισμός της επιφανειακής τάσης σε μόνιμες συνθήκες, πληροφορία που παρέχουν μοντέλα όπως εκείνα που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.1.4. Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν την εξίσωση του Sheludko $\sigma = [1 + \Gamma(\Sigma^{1/3} - 1)]^{-3}$ με Σ το λόγο τιμών επιφανειακής τάσης καθαρού υγρού και υγρού με μέγιστη συγκέντρωση επιφανειοδραστικού. Το σ_Γ αποκτάται με παραγωγήση.

Η σύγκριση έγινε με αναπαραγωγή των διαγραμμάτων 4, κάποιων καμπυλών του 6α και 13. Η ταύτιση των αποτελεσμάτων είναι εμφανής ποιοτικά αλλά και ποσοτικά, όσο είναι δυνατόν να διακρίνει κανείς δι' οφθαλμού τιμές από ένα γράφημα. Οι καμπύλες του πρώτου διαγράμματος αποκτήθηκαν με βήμα $\Delta k = 0.0001$ από τροποποίηση του βασικού προγράμματος σαν την περιγραφόμενη στο 9.4.2. Το δεύτερο προήλθε από τροποποίηση αντίστοιχη εκείνης στο 9.4.8. Το βήμα ήταν $\Delta k = 0.0001$ για $k \in [10^{-4}, 10^{-3}]$, $\Delta k = 0.001$ για $k \in [10^{-3}, 10^{-2}]$, $\Delta k = 0.005$ για $k \in [0.01, 0.1]$ και $\Delta k = 0.02$ για $k > 0.1$. Το τρίτο προήλθε από το ίδιο με τη διαφορά πως αντί για την κινητική σταθερά μεταβαλλόταν η γωνία κλίσεως.



Σχήμα 10.2: Αναπαραγωγή των γραφημάτων (α) 4 και (β) 13 (γ) 6α των G. Karapetsas & V. Bontozoglou (2013)

Σημειώνεται πως, ενώ στο Σχήμα 10.2β στον κατακόρυφο άξονα φαίνεται ο κρίσιμος αριθμός Reynolds, στο άρθρο τους οι συγγραφείς παρουσιάζουν το διπλάσιό του. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: $Ka = 3000$, $\vartheta = 90^\circ$, $\Sigma = 2$, $M_{tot} = 10$ ($M_{tot}^{(2013)} = 0.1$ και $\beta_a = 0.01$), $Sc_i = 100$, $Sc_b = 10$ και στο Σχήμα 10.2α $K_{KIN} = 0.01 \sin \vartheta$.

Συμπεραίνεται, έτσι, πως το πρόγραμμα λειτουργεί σωστά (ως προς το σχηματισμό των πινάκων) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περαιτέρω δοκιμές.

10.3.2 Η λειτουργία του βασικού προγράμματος

Η δεύτερη εκδοχή του βασικού προγράμματος είναι προσανατολισμένη στη μελέτη του συστήματος νερού-SDS, για το οποίο υπάρχουν διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, επομένως παρουσιάζει κάποιες διαφορές με την προηγούμενη. Κατ' αρχάς, μετά τον αριθμό των στοιχείων, στα δεδομένα εισόδου ορίζονται ο αδιάστατος κυματαριθμός, ο αριθμός Reynolds και η γωνία κλίσης. Εφόσον πρόκειται για συγκεκριμένο ρευστό, επιλέγεται μια θερμοκρασία λειτουργίας, η οποία εισάγεται επίσης, και βρίσκονται οι ιδιότητες του καθαρού υγρού σε αυτή, συγκεκριμένα πυκνότητα, δυναμικό ιξώδες και επιφανειακή τάση.

Αντί για άμεσο ορισμό της διαχυτότητας ορίζονται οι αριθμοί Schmidt του επιφανειοδραστικού ως $Sc_i = 100$ και $Sc_b = 10$. Η επιλογή αυτή βασίζεται στους G. Karapetsas et al. (2013) οι οποίοι αφ' ενός χρησιμοποίησαν τις τιμές αυτές, αφ' ετέρου έδειξαν πως η επίδραση του αριθμού Schmidt δεν είναι σημαντική στο αποτέλεσμα. Ακόμη, για το επιφανειοδραστικό, προσδιορίζονται η μέγιστη διεπιφανειακή συγκέντρωση και ο λόγος των κινητικών σταθερών. Για το ζεύγος νερό-SDS τα δυο αυτά δεδομένα προέρχονται από τους A. Prosser et al. (2001). Ακόμη, απαιτούνται η τιμή της σταθεράς για πιητικό επιφανειοδραστικό που, ωστόσο εδώ τίθεται παντού ίση με μηδέν, και η τιμή της κινητικής σταθεράς εκρόφησης k_d . Τέλος, εισάγεται και η συνολική ποσότητα επιφανειοδραστικού που περιέχεται στο διάλυμα.

Από αυτά τα δεδομένα το πρώτο βήμα είναι να υπολογιστούν το κινηματικό ιξώδες και οι αριθμοί Kapitza, Weber και Péclet. Έπειτα, υπολογίζονται από τη λύση Nusselt το ύψος H και η μέγιστη ταχύτητα του υμένα U (τα μεγέθη της αδιαστατοποίησης), ώστε στην πορεία βρίσκονται με βάση αυτά η διαλυτότητα και η σταθερά που σχετίζει τη συναγωγή με την εκρόφηση. Οι σχέσεις (10.36) και (10.37) παρέχουν και πάλι τις συγκεντρώσεις ισορροπίας και ακολουθεί ο υπολογισμός των γ και δ . Για την επιφανειακή τάση χρησιμοποιείται το μοντέλο Langmuir (εξισώσεις (4.4) και (4.8)). Η επιφανειακή τάση και η ελαστικότητα υπολογίζονται σε μόνιμες συνθήκες, με βάση την τιμή του Γ από την (10.37).

Οι βασικές ανεξάρτητες παράμετροι του προβλήματος αυτού είναι τέσσερις. Από τη στιγμή που επιλεγεί συγκεκριμένο ρευστό απομένουν να επιλεγούν αριθμός Reynolds, ο κυματαριθμός, η γωνία κλίσης και η ποσότητα του επιφανειοδραστικού.

10.3.3 Επιλογή αριθμού στοιχείων

Για τη μελέτη που ακολουθεί χρησιμοποιήθηκαν 50 στοιχεία, ώστε να επιτυγχάνεται ικανοποιητική σύγκλιση στις τιμές των ιδιοτιμών. Η σύγκριση για την επιλογή του αριθμού των στοιχείων έγινε στο δεύτερο από τα προαναφερθέντα προγράμματα για κατακόρυφο υμένα νερού με SDS ($\vartheta = 90^\circ$), αριθμό Reynolds $Re = 10$, κυματαριθμό $k = 0.001$, μάζα επιφανειοδραστικού $M_{tot} = 0.1$ και σταθερά εκρόφησης $k_d = 0.001s^{-1}$. Οι υπόλοιπες παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον πίνακα 10.1 και χρησιμοποιούνται έτσι παντού στο εξής, εκτός αν διευκρινίζεται κάτι διαφορετικό.

$T = 298K$	$\rho = 997.09 \frac{kg}{m^3}$
$\mu = 0.00089313 Pa \cdot s$	$\sigma = 0.072 \frac{N}{m}$
$Sc_i = 100$	$Sc_b = 10$
$\Gamma_\infty = 13 \cdot 10^{-6} \frac{mol}{m^2}$	$K = 0.0847$
$K_G = 0$	

Πίνακας 10.1: Τιμές δεδομένων εισόδου: ιδιότητες καθαρού νερού και σταθερές για το SDS

Η επιλογή αριθμού στοιχείων βασίστηκε στο πραγματικό μέρος της πιο ασταθούς ιδιοτιμής, διότι το φανταστικό σταθεροποιείται πολύ νωρίς. Για 50 στοιχεία η ταύτιση είναι ικανοποιητική (με στρογγυλοποίηση στο 6^ο δεκαδικό ψηφίο επιτυγχάνεται ακρίβεια στο 5^ο), δεν επηρεάζει την απεικόνιση και η επιδίωξη περαιτέρω ακρίβειας δε έχει κάποια χρησιμότητα.

Αριθμός Στοιχείων	Πραγματικό Μέρος Ασταθούς Ιδιοτιμής
30	0.178904943D-05
40	0.178933367D-05
50	0.178946357D-05
60	0.178953593D-05
70	0.178957595D-05

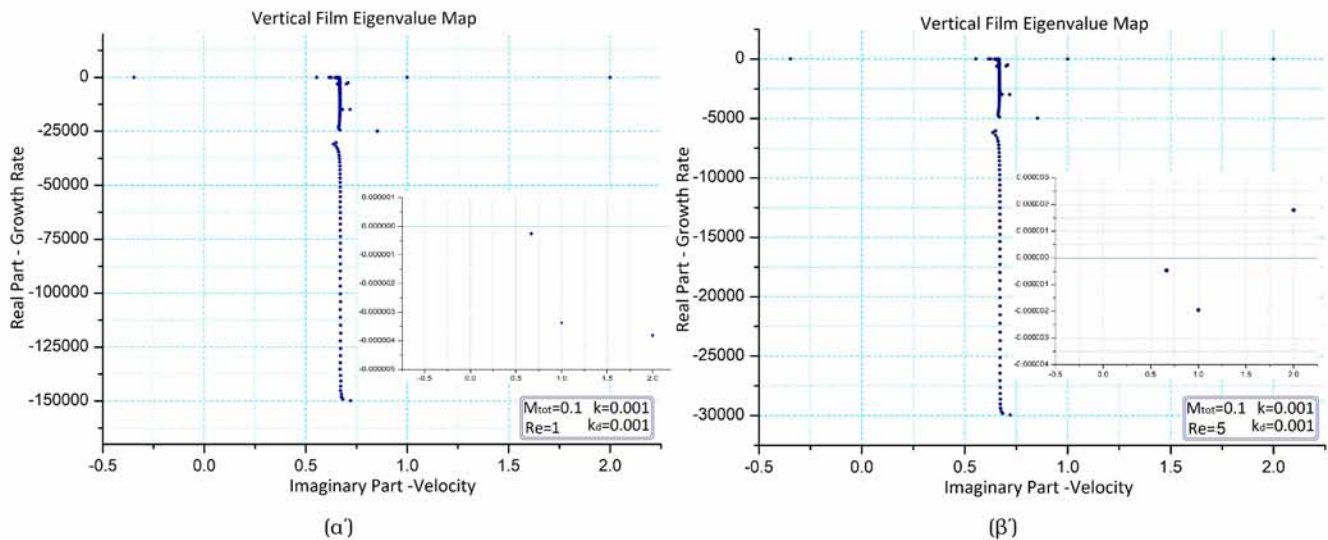
Πίνακας 10.2: Δοκιμές για $Re = 10$, $k = 0.001$, $\vartheta = 90^\circ$, $M_{tot} = 0.1$ και $k_d = 0.001s^{-1}$ και διαφόρους αριθμούς στοιχείων

10.4 Αποτελέσματα

10.4.1 Οι χάρτες ιδιοτιμών

Στο βασικό πρόγραμμα εισάγονται τα δεδομένα του πίνακα 10.1 για νερό με SDS χωρίς την παρουσία άλατος σε θερμοκρασία 298K, τιμή περιβάλλοντος, όπου και οι A. Prosser et al. (2001) παρέχουν τις τιμές Γ_∞ , K . Οι υπόλοιπες παράμετροι επιλέγονται $\vartheta = 90^\circ$, $M_{tot} = 0.1$, $k = 0.001$, $k_d = 0.001s^{-1}$ και για τα υπόλοιπα κοινά μελετώνται δυο τιμές αριθμού Reynolds: $Re = 1$ και $Re = 5$. Οι ιδιοτιμές που υπολογίζονται τοποθετούνται σε διάγραμμα με κατακόρυφο άξονα το πραγματικό μέρος τους και οριζόντιο το τροποποιημένο φανταστικό $-\frac{Im(\lambda)}{k \sin\vartheta}$ που εκφράζει τη φασική ταχύτητα του κύματος αδιαστατοποιημένη με τη μόνιμη ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας.

Η μορφή του γραφήματος (Σχήμα 10.3) δε διαφέρει από το Σχήμα 9.3, οι ιδιοτιμές κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο. Οι περισσότερες συγκεντρώνονται στην περιοχή φασικής ταχύτητας 0.67 που αντιστοιχεί στη μέση ταχύτητα του υμένα. Οι ιδιοτιμές αυτές χαρακτηρίζονται από πολύ αρνητικά πραγματικά μέρη, επομένως αντιστοιχούν σε πολύ ευσταθείς διαταραχές.



Σχήμα 10.3: Χάρτες ιδιοτιμών για (α) $Re = 1$ και (β) $Re = 5$

Οι πιο ασταθείς διαταραχές, που βρίσκονται πολύ κοντά στην οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$ είναι τρεις. Η πρώτη βρίσκεται πολύ κοντά στην οριζόντιο μονίμως και για το εύρος δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν έχει αδιάστατη φασική ταχύτητα κοντά στο 0.67. Είναι πάντοτε ευσταθής παρά το πολύ μικρό της πραγματικό μέρος και θεωρείται πως αποτελεί υδροδυναμική διαταραχή, που διαδίδεται σε διεύθυνση αντίθετη από τη διεύθυνση ροής.

Η δεύτερη διαταραχή είναι επίσης πάντοτε ευσταθής κι έχει αδιάστατη φασική ταχύτητα περίπου μονάδα (στο εύρος των δοκιμών μεταβαλλόταν μεταξύ 0.9 και 1.15). Αυτή είναι μάλλον η «ιδιομορφή συγκεντρώσεως»

που σύμφωνα με τους G. Karapetsas et al. (2014) εντοπίστηκε κατά τη μελέτη αδιάλυτου επιφανειοδραστικού από τους Blyth & Pozdrikidis το 2004 και Pereira & Kalliadasis το 2008 και παρατηρείται και στην περίπτωση του διαλυτού επιφανειοδραστικού.

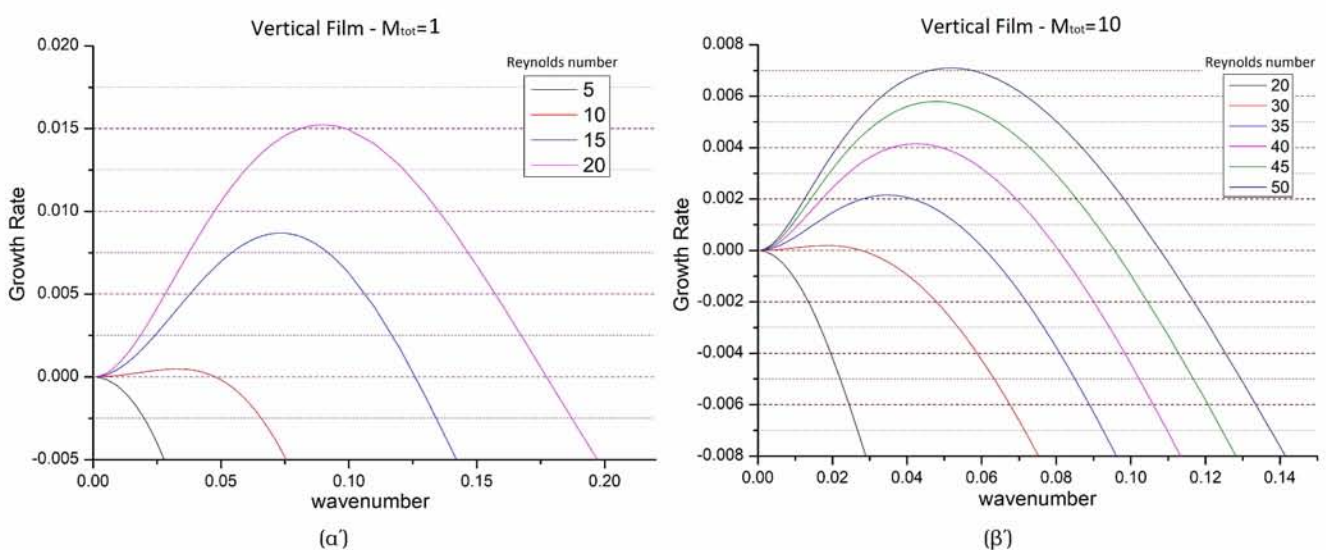
Η τελευταία αποτελεί τη μελετώμενη ιδιομορφή που αφορά τη διεπιφανειακή διαταραχή. Η διαταραχή διαδίδεται, όπως και στην περίπτωση του υμένα καθαρού συστατικού, με αδιάστατη ταχύτητα 2 στο όριο του απείρου μήκους κύματος, όπως απέδειξαν οι G. Karapetsas et al. (2014). Για δεδομένες τις τιμές των λοιπών παραμέτρων, η διαταραχή γίνεται ασταθής πάνω από έναν αριθμό Reynolds και περνά πάνω από την οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$ (Σχήμα 10.36).

10.4.2 Ο ρυθμός ανάπτυξης της διαταραχής συναρτήσει του κυματαριθμού

Είναι εμφανές από τα σχήματα 10.2α και 10.4 πως η επίδραση του κυματαριθμού στο ρυθμό ανάπτυξης της διαταραχής δε διαφέρει ποιοτικά από τα αποτελέσματα του 9.4.2. Ωστόσο, το ίδιο αποτέλεσμα αποκτάται, πλέον, για τόσο υψηλότερους αριθμούς Reynolds όσο μεγαλύτερη είναι η προστιθέμενη μάζα επιφανειοδραστικού. Ο κατακόρυφος υμένας με επιφανειοδραστικό δεν είναι πια οριακώς ευσταθής στο $Re = 0$ αλλά ευσταθής με τον κυματαριθμό $k \rightarrow 0$ να είναι ο πιο ασταθής από όλους (εγγύτερος στην οριζόντιο $Re(\lambda) = 0$). Αυξανόμενου του αριθμού Reynolds, πρώτος αυτός καθίσταται οριακώς ευσταθής και στην πορεία μικρότερα μήκη κύματος περνούν στην αστάθεια με υψηλότερους ρυθμούς ενίσχυσης από το $k \rightarrow 0$ που φαίνεται να μένει πάντα στην οριακή ευστάθεια. Ο ρυθμός ενίσχυσης των πεπερασμένων μηκών κύματος αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Reynolds και η καμπύλη παρουσιάζει πάλι μέγιστο, δηλαδή υπάρχει ένας περισσότερο ευνοούμενος κυματαριθμός. Όταν το εύρος των ασταθών κυματαριθμών, που αυξάνεται με την αύξηση του Re , ολοκληρωθεί, η καμπύλη περνά απότομα στα αρνητικά. Τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με τους G. Karapetsas et al. (2013)

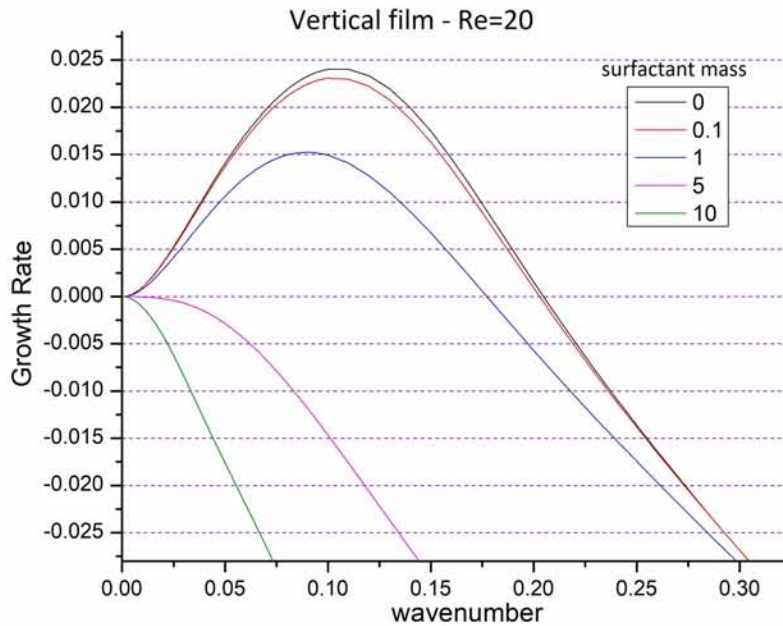
Ο ελάχιστος κυματαριθμός που χρησιμοποιήθηκε ήταν ξανά το 10^{-4} για του ίδιους αριθμητικούς λόγους που αναφέρθηκαν και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Χαρακτηριστικό είναι πως ακόμη και ο κατακόρυφος υμένας είναι ευσταθής με την προσθήκη επιφανειοδραστικού όχι μόνο στο $Re = 0$ αλλά και σε μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή το επιφανειοδραστικό σταθεροποιεί τους κυματισμούς ακόμη και του απείρου μήκους κύματος, που στον καθαρό υμένα η επιφανειακή τάση δεν μπορεί να αναχαιτίσει, μέσω των τάσεων Marangoni-των κλίσεων της (μηχανισμός 4.2.1). Τις αδρανειακές δυνάμεις που τείνουν να ενισχύσουν τις διαταραχές δεν ανταγωνίζεται μόνο η επιφανειακή τάση, όπως πριν, αλλά και οι τάσεις Marangoni. Στην περίπτωση που το επίπεδο της ροής είναι κεκλιμένο εμφανίζεται



Σχήμα 10.4: Καμπύλες ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds και μάζα επιφανειοδραστικού (α) $M_{tot} = 1$ και (β) $M_{tot} = 10$ στο διάλυμα

και η κάθετη στη ροή συνιστώσα της βαρύτητας, επομένως η μετάβαση στην αστάθεια απαιτεί υψηλότερους αριθμούς Reynolds (παχύτεροι και ταχύτεροι υμένες με μεγαλύτερη αδράνεια). Έτσι, εδώ μελετάται μόνο ο κατακόρυφος υμένας ως ο πιο ασταθής.



Σχήμα 10.5: Καμπύλες ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού για διάφορες μάζες επιφανειοδραστικού στο διάλυμα και αριθμό Reynolds $Re = 20$

Ο βαθμός στον οποίο σταθεροποιείται ο υμένας εξαρτάται από την προστιθέμενη μάζα επιφανειοδραστικού. Αυτό είναι εμφανές τόσο στο Σχήμα 10.4 όσο και στο Σχήμα 10.5. Στο 10.4α που η αδιάστατη μάζα επιφανειοδραστικού είναι $M_{tot} = 1$ ο $Re = 5$ είναι ευσταθής, ενώ από $Re = 10$ και πάνω ο η διαταραχή είναι ασταθής. Συγκεκριμένα, για $Re = 20$ ο μέγιστος ρυθμός ενίσχυσης είναι περίπου 0.015. Στο Σχήμα 10.4β όπου $M_{tot} = 10$, ο $Re = 20$ είναι πλήρως ευσταθής, ο $Re = 30$ είναι ασταθής και ο $Re = 50$, παρά το ότι είναι ασταθής έχει μέγιστο ρυθμό ενίσχυσης 0.007, υποδιπλάσιο από του $Re = 20$ στο διπλανό γράφημα. Το εύρος των ασταθών κυματαριθμών είναι κι αυτό μικρότερο.

Ακόμη, στο Σχήμα 10.5 φαίνονται πάλι οι καμπύλες ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού για $Re = 20$ και διάφορες τιμές μάζας επιφανειοδραστικού. Η μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στο καθαρό νερό, όπου είναι εμφανές πως είναι η πιο ασταθής από όλες τις περιπτώσεις. Η σταδιακή προσθήκη SDS σταθεροποιεί τον υμένα, στην αρχή λίγο, στην πορεία περισσότερο, ώστε για $M_{tot} = 5$ και $M_{tot} = 10$ καθίσταται ευσταθής.

10.4.3 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού - Η σημασία της κινητικής των αντιδράσεων

Η σημασία της κινητικής των αντιδράσεων προσρόφησης κι εκρόφησης του επιφανειοδραστικού γίνεται μέσω της σταθεράς εκρόφησης k_d που εμπλέκεται στην αδιάστατη παράμετρο K_{KIN} . Η τελευταία $K_{KIN} = \frac{k_d H}{U}$ συγκρίνει τους χαρακτηριστικούς χρόνους της συναγωγής και της εκρόφησης.

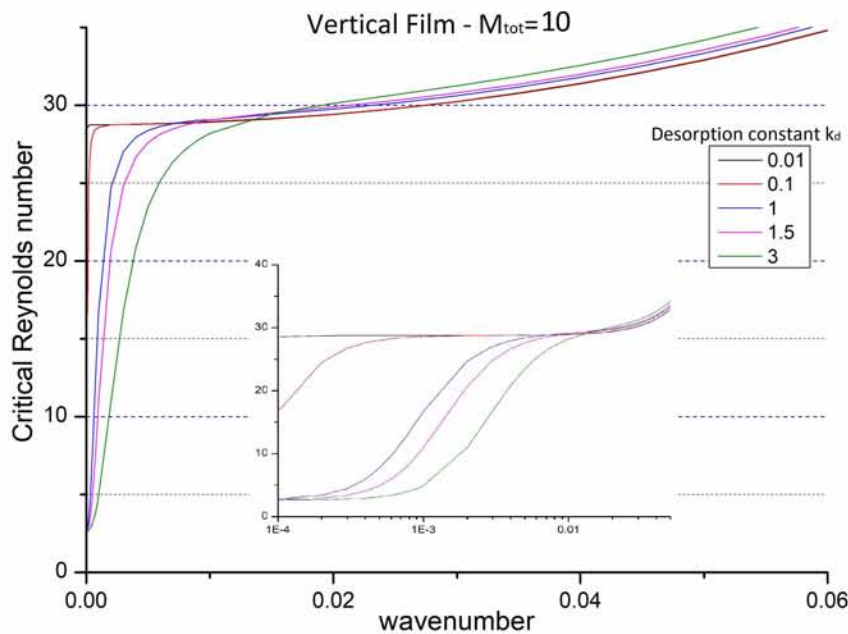
Ένας κυματισμός προκαλεί παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας από την αδιατάρακτη κατάσταση και αυτή η παραμόρφωση έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση κλίσεων της επιφανειακής συγκεντρώσεως Γ . Οι κλίσεις έχουν δύο βασικές συνέπειες. Κατ' αρχάς, το επιφανειοδραστικό δεν είναι πια ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διεπιφάνεια, όπως στη μόνιμη κατάσταση. Οι τοπικές διαφορές επιφανειακής συγκεντρώσεως συνεπάγονται τοπικές διαφορές επιφανειακής τάσεως και οι τοπικές διαφορές επιφανειακής τάσεως τάσεις Marangoni κι επιφανειακές ροές.

Δεύτερον, η τοπική διαφοροποίηση της διεπιφανειακής συγκεντρώσεως Γ από τη μόνιμη τιμή $\bar{\Gamma}$, εφόσον το επιφανειοδραστικό είναι διαλυτό και βρίσκεται και στην κυρίως μάζα, διαταράσσει την ισορροπία

διεπιφάνειας-κυρίως μάζας, ώστε τείνουν να αναπτυχθούν τοπικές μαζικές ροές επιφανειοδραστικού αποσκοπώντας στην επίτευξη νέας ισορροπίας. Το μέγεθος των ροών αυτών από τη σχέση (5.18) και η αποκατάσταση εκ νέου ισορροπίας καθορίζονται από τις κινητικές σταθερές k_a και k_d .

Οι διαταραχές άπειρου μήκους κύματος ίσως μπορεί να θεωρηθεί πως δεν διαταράσσουν ή επηρεάζουν ελάχιστα την ισορροπία λόγω της μηδαμινής-ανεπαίσθητης παραμόρφωσης της διεπιφάνειας, κατά την παραδοχή των G. Karapetsas et al. (2014). Αντιθέτως, οι μεγάλοι κυματαριθμοί παραμορφώνουν αρκετά την ελεύθερη επιφάνεια και η ισορροπία δεν μπορεί να διατηρηθεί. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10.2β όταν οι αντιδράσεις είναι πολύ γρήγορες σε σχέση με τη συναγωγή οι τοπικές ροές μάζας είναι έντονες, εξομαλύνουν τοπικά την απόκλιση από την ισορροπία και εξασθενούν μέσω ταχύτατων ανακατανομών τις κλίσεις επιφανειακής συγκεντρώσεως άρα τις τάσεις Marangoni που σταθεροποιούν τη ροή. Γι' αυτό οι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds είναι αρκετά χαμηλοί. Μια οριακή συμπεριφορά αποτελεί εκείνη του αδιάλυτου επιφανειοδραστικού, το οποίο βρίσκεται μόνο στη διεπιφάνεια. Σε αυτήν την περίπτωση, που τα διαλυτά επιφανειοδραστικά προσεγγίζουν για μικρές τιμές k_d , τα μόρια μοιάζουν παγιδευμένα στη διεπιφάνεια και δεν εμφανίζονται ροές μάζας να αμβλύνουν τις κλίσεις Γ που προκύπτουν λόγω της διαταραχής, άρα και τις αναπτυσσόμενες τάσεις, ώστε οι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds διατηρούνται διαρκώς υψηλοί.

Το γράφημα, ωστόσο, έχει δυο ακόμη αξιοπρόσεκτα σημεία. Το πρώτο είναι πως κάποιες ενδιάμεσες τιμές της σταθεράς εκρόφησης στους μεν μικρούς κυματαριθμούς αντιστοιχούν σε κρίσιμους αριθμούς Reynolds μικρότερους σε σχέση με το αδιάλυτο επιφανειοδραστικό, ωστόσο αποδεικνύονται ικανότερες του στη σταθεροποίηση ενός εύρους πεπερασμένων μηκών κύματος. Το δεύτερο είναι πως για μικρές τιμές της σταθεράς, δηλαδή αργή εκρόφηση σε σχέση με τη συναγωγή, το επιφανειοδραστικό συμπεριφέρεται ως αδιάλυτο στα πεπερασμένα μήκη κύματος, επομένως σχεδόν δεν υπάρχει ανταλλαγή με την κυρίως μάζα, η σταθεροποίηση είναι ισχυρή κι επιτυγχάνονται υψηλοί, κρίσιμοι αριθμοί Reynolds. Αντιθέτως, στα άπειρα μήκη κύματος λειτουργεί ως διαλυτό. Πιθανώς εκεί η παραμόρφωση της διεπιφάνειας δεν είναι αρκετά μεγάλη κι αν και αργή η εκρόφηση επιτρέπει κάποιες ανακατανομές, ώστε οι κρίσιμοι αριθμοί Reynolds μειώνονται ως κάποια θετική τιμή.



Σχήμα 10.6: Κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει του κυματαριθμού για $M_{tot} = 10$, $\vartheta = 90^\circ$ και διάφορες τιμές της κινητικής σταθεράς εκρόφησης k_d

Στο Σχήμα 10.6, όπου το αποτέλεσμα εξειδικεύεται στο ζεύγος νερό-SDS, η εικόνα δε διαφέρει ιδιαίτερα. Όπως αναφέρεται και πιο κάτω, από παλαιότερα πειραματικά δεδομένα από το Εργαστήριο Φυσικών Διεργασιών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για το σύστημα αυτό προέκυψε πως οι τιμές $k_d \in [0.1s^{-1}, 1s^{-1}]$ είναι κατάλληλες για την περιγραφή της εκρόφησης. Ωστόσο, για το γράφημα δοκιμάστηκαν και κάποιες

ακόμη. Στο μικρό, εσωτερικό διάγραμμα φαίνεται η περιοχή έναρξης των καμπυλών σε λογαριθμικούς άξονες.

Για $k_d = 0.01s^{-1}$ το SDS συμπεριφέρεται ως αδιάλυτο, ενώ για καμία από τις τιμές που δοκιμάστηκαν δε λαμβάνεται η συμπεριφορά $K_{KIN} = 0.1$ του σχήματος 10.26. Για $k_d = 1 - 3s^{-1}$ όλες οι καμπύλες ξεκινούν από την ίδια θετική τιμή και κάποια στιγμή περνούν πάνω από τη μαύρη καμπύλη. Για $k_d = 0.1s^{-1}$ η γραμμή ξεκινά από υψηλότερη τιμή κρίσιμου αριθμού Reynolds σε σχέση με την προηγούμενη δέση καμπυλών και σύντομα ταυτίζεται με τη μαύρη. Δηλαδή, το SDS στις τιμές που αποκτήθηκαν πειραματικώς συμπεριφέρεται λιγότερο ή περισσότερο ως διαλυτό στα άπειρα μήκη κύματος και στα πεπερασμένα ως αδιάλυτο.

10.4.4 Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds συναρτήσει της ποσότητας επιφανειοδραστικού - Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα

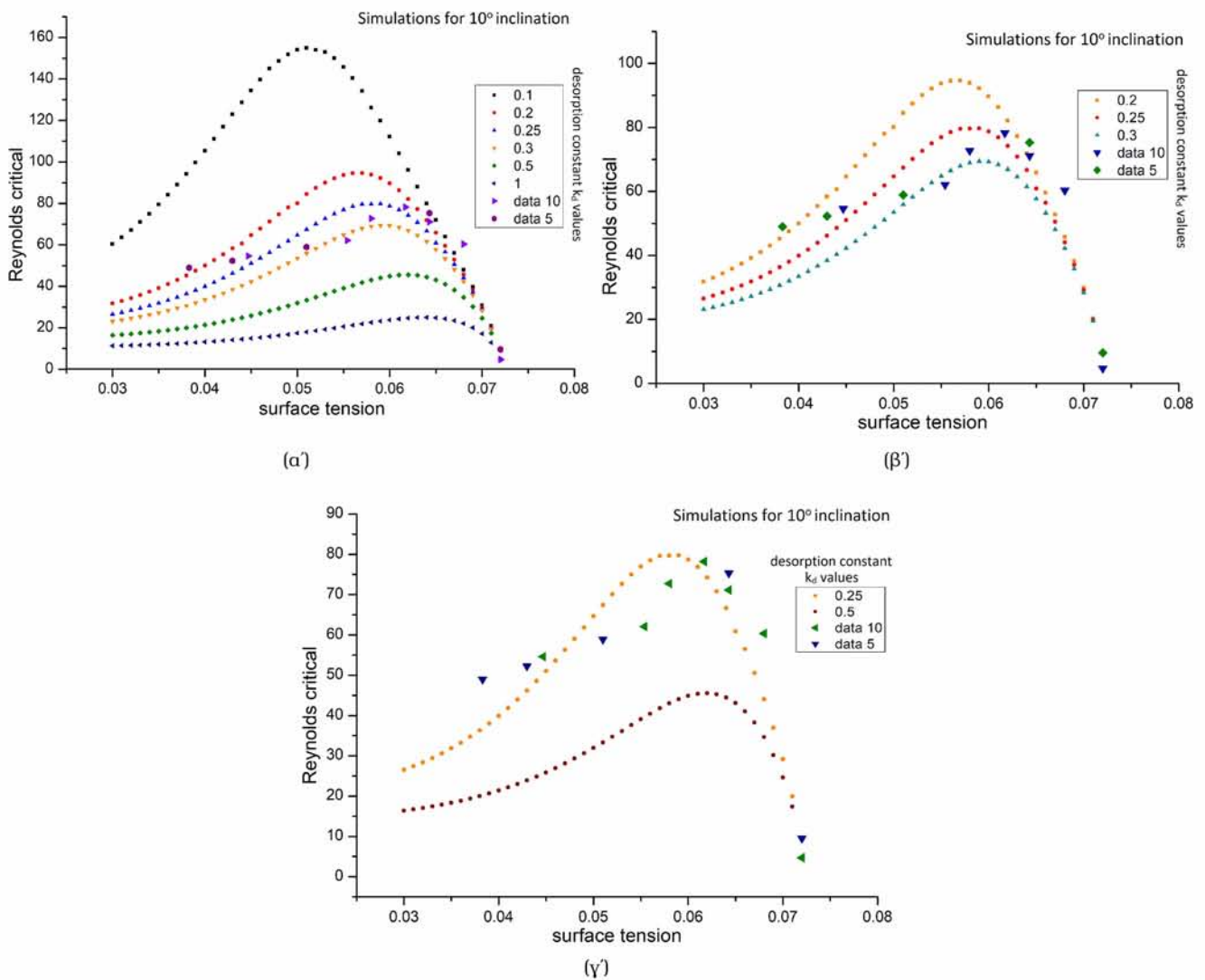
Κατά την ανάπτυξη ενός μοντέλου για ένα πρόβλημα αποτελεί σημαντικό και πολύ ενδιαφέρον βήμα η σύγκριση με υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα και ο έλεγχος της ικανότητάς του να τα προβλέπει για τις διάφορες τιμές των σταθερών που προκύπτουν από την επεξεργασία των μετρήσεων. Για το σκοπό αυτό στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται τα πειραματικά δεδομένα των A. Georgantaki et al. (2016) που αποκτήθηκαν στις εγκαταστάσεις του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και παρέχονται στη μορφή κρίσιμου αριθμού Reynolds-επιφανειακής τάσεως διαλύματος, διότι είναι ευκολότερο κι ασφαλέστερο να προσδιοριστεί η τελευταία παρά η κάθε φορά προστιθέμενη μάζα επιφανειοδραστικού. Τα αποτελέσματα αφορούν πίπτονια υμένα νερού με διάφορες ποσότητες SDS σε γωνίες κλίσεως $\vartheta = 5^\circ$ και $\vartheta = 10^\circ$. Το νερό του υμένα προήλθε από το δίκτυο ύδρευσης και η αλατινότητά του είχε μετρηθεί $30 - 50mM$ επομένως, οι τιμές των σταθερών Γ_∞ , K εκτιμώνται από τον πίνακα 4.1 ως $\Gamma_\infty = 4 \cdot 10^{-6} \frac{mol}{m^2}$, $K = 4 \frac{m^3}{mol}$. Η κινητική σταθερά εκρόφησης k_d του επιφανειοδραστικού είχε υπολογιστεί πως βρίσκεται στο εύρος $[0.1, 1]s^{-1}$ σε άλλη πειραματική μελέτη (Π. Κάκιας 2018).

Μια βασική διαφοροποίηση του πραγματικού πειράματος από το υπολογιστικό αποτελεί το γεγονός ότι η διαταραχή δεν επιλέγεται μέσω του αδιάστατου κυματαριθμού αλλά επιβάλλεται στη ροή με μια συχνότητα f που πρέπει να ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς. Για το σκοπό αυτό ανακαλείται ο ορισμός του αδιάστατου κυματαριθμού $k = \frac{2\pi H}{L}$, όπου L το μήκος κύματος της διαταραχής. Η επιβαλλόμενη συχνότητα, από την άλλη πλευρά, σχετίζεται με τη φασική ταχύτητα της διαταραχής ως $c = Lf = f \frac{2\pi H}{k}$. Αν η συχνότητα είναι επαρκώς μικρή, ώστε η διαταραχή να τείνει στο όριο του απείρου μήκους κύματος ή να αντιστοιχεί σε κάποια μεγάλη πεπερασμένη τιμή ($k \mathcal{O}(10^{-3})$), μπορεί να θεωρηθεί πως $c \simeq 2$, αδιαστατοποιημένη με την πραγματική ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας. Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις λαμβάνεται για τον κυματαριθμό $k = \frac{\pi H f}{U \sin\vartheta}$, όπου U η ταχύτητα που χρησιμοποιήθηκε στην αδιαστατοποίηση. Οι παραπάνω μελετητές καταλήγουν στο συμπέρασμα πως οι συχνότητες $0.125Hz$, $0.25Hz$ και $0.5Hz$ δεν προκαλούν κάποια διαφοροποίηση και μπορεί όλες να θεωρηθεί πως προσεγγίζουν το άπειρο μήκος κύματος. Γι' αυτό το λόγο στις ακόλουθες προσομοιώσεις επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί η δεύτερη τιμή.

Προκειμένου να παραχθούν τα αποτελέσματα στην ίδια μορφή με των συγγραφέων το πρόγραμμα επίλυσης τροποποιείται ως εξής. Εκτός των άλλων παραμέτρων των οποίων μπορεί να προσαρμόζονται οι τιμές, αντί του κυματαριθμού από το αρχείο δεδομένων εισάγεται η συχνότητα της διαταραχής. Έπειτα, εφόσον πρόκειται να αναζητηθεί κρίσιμος Reynolds, δημιουργούνται επαναληπτικοί βρόχοι για την εύρεση ρίζας με διχοτόμηση: ο εξωτερικός είναι ο βρόχος της επιφανειακής τάσεως του διαλύματος κι ο εσωτερικός ο βρόχος της σύγκλισης. Εντός του τελευταίου υπολογίζεται ο κρίσιμος Reynolds με επιδιωκόμενη ακρίβεια 10^{-3} . Για κάθε τιμή αριθμού Reynolds που δοκιμάζεται υπολογίζονται οι αριθμοί Weber και Peclé για τη διάχυση του επιφανειοδραστικού στη διεπιφάνεια και την κυρίως μάζα, το πραγματικό πάχος του υμένα, η χαρακτηριστική ταχύτητα κι ο κυματαριθμός με βάση τη συχνότητα. Ακολουθούν η διαλυτότητα, οι συγκεντρώσεις ισορροπίας (η διεπιφανειακή από το μοντέλο Langmuir με δεδομένη επιφανειακή τάση), οι κινητικές παράμετροι και η ελαστικότητα πριν κληθούν τα υποπρογράμματα σχηματισμού των πινάκων κι εύρεσης των ιδιοτιμών.

Το εύρος τιμών επιφανειακής τάσεως του διαλύματος είναι $0.072N/m$, για καθαρό νερό στη δεδομένη θερμοκρασία, έως $0.03N/m$, από τις πιο χαμηλές τιμές που προκύπτουν παρουσία επιφανειοδραστικού στα πειράματα. Οι τιμές επιφανειακής τάσεως μειώνονται στον εξωτερικό βρόχο από την $0.072N/m$ με βήμα $0.001N/m$. Τέλος, επειδή στα πειραματικά δεδομένα ο αριθμός Reynolds είναι βασισμένος στην εκάστοτε μέση ταχύτητα του υμένα, το αποτέλεσμα της επίλυσης τροποποιείται καταλλήλως, ώστε να είναι συγκρίσιμα ($Re(U_{mean}) = \frac{2}{3} Re \sin\theta$). Αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό πως η χρήση της διεπιφανειακής ταχύτητας του κατακόρυφου, αδιατάρακτου υμένα Nusselt ως χαρακτηριστικής ταχύτητας δεν αποτελεί την καλύτερη επιλογή, διότι στις υψηλές γωνίες οι τιμές του αριθμού Reynolds είναι πολύ μεγάλες ($\mathcal{O}(10^3)$) κάτι που αυξάνει υπερβολικά το εύρος αναζήτησής του και, κατά συνέπεια, τον υπολογιστικό χρόνο.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα απεικονίζονται για διάφορες τιμές της σταθεράς εκρόφησης k_d μαζί με τα πειραματικά που διακρίνονται από το χαρακτηρισμό *data* στο υπόμνημα και το μεγαλύτερο μέγεθος κουκίδων. Ο αριθμός πλάι στη λέξη *data* υποδηλώνει την κλίση υμένα που οι τιμές αφορούν, σε μοίρες. Η επίδραση της γωνίας σε τόσο μικρές κλίσεις δεν προκύπτει τόσο σημαντική από το πείραμα.



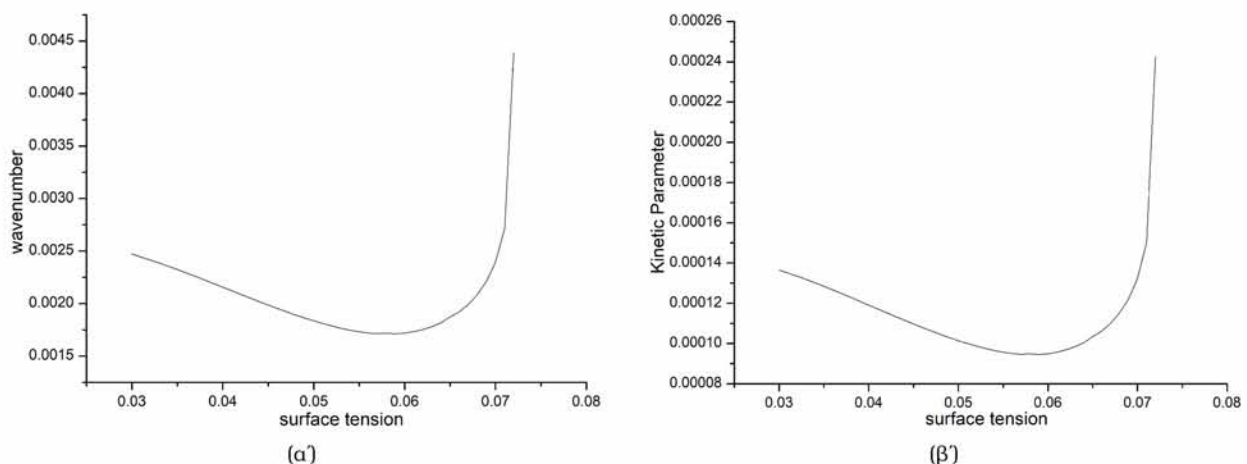
Σχήμα 10.7: Σύγκριση πειραματικών κι αριθμητικών αποτελεσμάτων για κλίση 10° και διάφορες τιμές k_d

Στο Σχήμα 10.7α φαίνονται αριθμητικά αποτελέσματα για τιμές k_d στο δεδομένο εύρος και κλίση 10° μαζί με τα πειραματικά. Είναι εμφανές ότι ποιοτικώς τουλάχιστον η μορφή των καμπυλών είναι κοινή. Το μοντέλο προβλέπει επιτυχώς τη μορφή και την τάξη μεγέθους των πειραματικών αποτελεσμάτων. Είναι χαρα-

κτηριστικό ότι όλες οι περιπτώσεις ξεκινούν από το ίδιο ακριβώς σημείο, δηλαδή η αριθμητική προσομοίωση για την περίπτωση του καθαρού νερού (όσον αφορά το επιφανειοδραστικό, διότι υπάρχει και το άλας), σε συγκεκριμένη γωνία, οδηγεί στον πειραματικό αριθμό Reynolds. Με μια περισσότερο λεπτομερή παρατήρηση διακρίνεται πως πιο κοντά στις μετρήσεις βρίσκονται τα σημεία για $k_d = 0.2, 0.25, 0.3s^{-1}$ (Σχήμα 10.7β). Όλα τα εικονιζόμενα αποτελέσματα για τις 10° ξεκινούν από την ίδια τιμή κρίσιμου Reynolds, αυξάνονται, παρουσιάζουν μέγιστο και στην πορεία φθίνουν. Ωστόσο, οι κλίσεις των καμπυλών διαφέρουν αρκετά. Κάνένα από τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν προβλέπει επαρκώς την απότομη αύξηση των πειραματικών στις χαμηλές συγκεντρώσεις επιφανειοδραστικού αλλά ούτε και τη θέση του μεγίστου που προκύπτει πάντοτε μετατοπισμένη προς μεγαλύτερες συγκεντρώσεις επιφανειοδραστικού. Ακόμη, μετά το μέγιστο οι μετρήσεις μοιάζουν να ελαττώνονται απότομα ως μια δεδομένη τιμή κι έπειτα να φθίνουν με πολύ αργό ρυθμό, ενώ τα αποτελέσματα της προσομοίωσης μετά το μέγιστο μειώνονται στην αρχή πιο ομαλά κι έπειτα πιο πολύ και πιο απότομα. Για $k_d = 0.2s^{-1}$ οι προβλεπόμενες τιμές είναι πολύ μεγαλύτερες, πιο καλά παρακολουθούν τα πειραματικά αποτελέσματα οι τιμές $k_d = 0.25 - 0.3s^{-1}$ με καλύτερη την $k_d = 0.25s^{-1}$ που προβλέπει ακριβέστερα την τιμή του μεγίστου. Στο Σχήμα 10.7γ φαίνεται πως από τα σημεία για $k_d = 0.25s^{-1}$ προκύπτει καλύτερα το μέγιστο, ενώ για $k_d = 0.5s^{-1}$ η θέση του.

Η συμφωνία θεωρείται ικανοποιητική, διότι το SDS είναι ένα ανιονικό επιφανειοδραστικό και το μοντέλο Langmuir ένα ψευδο-μη-ιονικό μοντέλο προσρόφησης στο οποίο αγνοούνται οι ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις των μορίων που, όμως, μπορεί να διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο (V. Bontozoglou 2018). Η συμπεριφορά του SDS είναι πολύ πιο σύνθετη και μάλλον απαιτούνται πιο κατάλληλα μοντέλα για την περιγραφή της.

Η μη μονότονη καμπύλη που δημιουργούν τα αποτελέσματα οφείλεται στη διαλυτότητα του επιφανειοδραστικού και την κινητική της ανταλλαγής του με την κυρίως μάζα. Σύμφωνα με τους A. Georgantaki et al. (2016) το γεγονός ότι το μέγιστο συναντάται σε μικρές συγκεντρώσεις επιφανειοδραστικού στο διάλυμα σχετίζεται με το ότι η μάζα SDS στον κυρίως υμένα είναι μικρή και δε δύναται μέσω των αντιδράσεων ανταλλαγής να εξομαλύνει τις διεπιφανειακές κλίσεις συγκεντρώσεως που προκαλεί η διαταραχή και λειτουργούν σταθεροποιώντας τη ροή. Αντιθέτως, καθώς προστίθεται περισσότερο επιφανειοδραστικό, η επιφανειακή τάση μειώνεται μεν περαιτέρω ο δε κρίσιμος αριθμός Reynolds μειώνεται κι αυτός, αφού η αύξηση της μάζας του επιφανειοδραστικού στο διάλυμα συνεπάγεται μεγαλύτερη διαθέσιμη ποσότητα ικανή να εξομαλύνει σε ένα βαθμό, μέσω της ανταλλαγής, στις σταθεροποιητικές κλίσεις της επιφανειακής συγκεντρώσεως.



Σχήμα 10.8: Κυματαριθμός της διαταραχής και κινητική παράμετρος για κλίση 10° και $k_d = 0.25s^{-1}$

Στο σχήμα 10.8 φαίνονται ο αδιάστατος κυματαριθμός που αντιστοιχεί στη δεδομένη συχνότητα διαταραχής και η κινητική παράμετρος K_{KIN} . Η τελευταία είναι τάξεως $\mathcal{O}(10^{-4})$, ενώ ο κυματαριθμός $\mathcal{O}(10^{-3})$, ώστε μπορεί να θεωρηθεί περίπου $c = 2$. Αν και η συχνότητα είναι σταθερή, δεν ισχύει το ίδιο για τον κυματαριθμό που μεταβάλλεται κάθε φορά λόγω της μεταβολής της ταχύτητας και του ύψους που συνεπάγεται η αλλαγή του αριθμού Reynolds. Η καμπύλη πάλι δεν είναι μονότονη, παρουσιάζει ελάχιστο στα $0.06N/m$

και μεγαλύτερες τιμές εκατέρωθεν. Η υψηλότερη τιμή αντιστοιχεί στον καθαρό υμένα. Εντός της τάξεως μεγέθους η διαφοροποίηση δεν είναι σημαντική, ωστόσο πρόκειται για κυματαριθμούς αρκετά μεγαλύτερους από το $k \rightarrow 0$ που αντιστοιχεί στο άπειρο μήκος κύματος. Αυτό πιθανώς σημαίνει πως η διεπιφάνεια δεν παραμένει σε ισορροπία με την κυρίως μάζα κι ένα αναλυτικό μοντέλο, όπως των G. Karapetsas et al. (2014) που αφορά το άπειρο μήκος κύματος δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Κλείνοντας, πρέπει να αναφερθεί πως παρά το ότι τα αποτελέσματα φαίνονται λογικά, υπήρξαν κάποια προβλήματα στο βήμα αυτό. Ένα από τα πιο σημαντικά ήταν πως για την ίδια τιμή k_d τα σημεία για τις δυο γωνίες απείχαν περισσότερο από ό,τι μετρήθηκε στο πείραμα. Έτσι το υποκεφάλαιο αυτό (10.4.4) παρουσιάζεται με επιφύλαξη.

Αντί Κεφαλαίου 11 - Αντί Επιλόγου

Αγαπητέ αναγνώστη,

Με βάση τη δομή της εργασίας κι όσα προηγήθηκαν, σ' αυτό το σημείο μάλλον περίμενες ένα κεφάλαιο 11 να αναφέρεται στην ευσιτάθεια υμένα με επιφανειοδραστικό κατά την απορρόφηση ατμού. Για να είμαι ειλικρινής, κι εγώ αυτό περίμενα όχι μόνο ξεκινώντας την εργασία αλλά και ως λίγους μήνες πριν, οπότε συνειδητοποίησα πως κάτι τέτοιο δεν προλάβαινε ούτε καν ν' αρχίσει πόσο μάλλον να τελειώσει στο διαθέσιμο χρόνο.

Θα είναι ψέμα να πω πως η διαπίστωση αυτή μου άρεσε. Ήταν ο στόχος μα δε γινόταν να φθάσω ως εκεί. Ο καθηγητής μου, ωστόσο, με διαβεβαίωσε πως η ως εδώ δουλειά επαρκεί για διπλωματική εργασία. Λίγο, όμως, το πείσμα, λίγο η τελειομανία, δεν ήθελα να το αφήσω. Πολύ καιρό με βασάνισε η σκέψη να καθυστερήσω την υποβολή της εργασίας και την αποφοίτησή μου, προκειμένου να συνεχίσω λίγο ακόμη.

Τη διέξοδο έδωσαν δύο ερωτήσεις. «Πότε τελειώνει η έρευνα;» και «Τι σε εμποδίζει να παίζεις και μετά το πτυχίο με αυτό το πρόβλημα, αφού τόσο σου άρεσε;». Οι απαντήσεις, μονολεκτικές και μάλλον προφανείς, με έπεισαν πλήρως.

Ολοκληρώνοντας τον κύκλο των προπτυχιακών μου σπουδών δε γνωρίζω τι θα ακολουθήσει. Ωστόσο, θα ήθελα σύντομα να δω το κεφάλαιο αυτό να γεμίζει σε κάποια εργασία είτε δική μου είτε κάποιου άλλου.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε ο κύκλος ψύξεως με απορρόφηση ως μια εφικτή εναλλακτική λύση πιο φιλική στο περιβάλλον και δυνάμει πιο οικονομική στη λειτουργία αντί της επικρατούσας διατάξεως με συμπύεση ατμού. Συζητήθηκαν διάφορες εκδοχές του κύκλου, ωστόσο η μελέτη επικεντρώθηκε στη λειτουργία της συσκευής απορρόφησης του συστήματος που ως εργαζόμενο μέσο χρησιμοποιεί το ζεύγος $H_2O - LiBr$ και τη βελτίωσή της, καθώς αντιμετωπίστηκε ως το πλέον κρίσιμο τμήμα της μηχανής. Ειδικότερα:

- Περιγράφηκε η λειτουργία της συσκευής και παρατέθηκαν με χρονολογική σειρά μερικά μοντέλα.
- Λόγω της πειραματικής παρατηρήσεως πως η προσθήκη επιφανειοδραστικών ουσιών στο διάλυμα απορρόφησης μπορεί να βελτιώσει την απόδοση της διεργασίας, παρουσιάστηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά τους και η επίδρασή τους στη ροή μέσω της εμφάνισης φαινομένων Marangoni.
- Αναπτύχθηκε μοντέλο, ώστε να περιγραφούν με τον πληρέστερο δυνατό τρόπο όλα τα φαινόμενα μεταφοράς που εμπλέκονται στη ροή πίπτοντος υμένα $H_2O - LiBr$ επί επιπέδου στερεού υποστρώματος που φέρει επιφανειοδραστικό και απορροφά ατμό νερού. Ιδιαίτερη προσοχή δώθηκε στις συνοριακές συνθήκες της διεπιφάνειας, ώστε να ενσωματωθεί στο μοντέλο η συμπεριφορά της ελεύθερης επιφάνειας, λόγω της συμπύκνωσης του ατμού και της παρουσίας επιφανειοδραστικού.
- Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ανάλυση ευστάθειας, το πρόβλημα αδιαστατοποιήθηκε και γραμμικοποιήθηκε στο όριο μιας απειροελάχιστης διαταραχής και εξήχθη μέσω της ανάλυσης ιδιομορφών το πρόβλημα ιδιοτιμών.
- Από το παραπάνω πρόβλημα διατηρήθηκαν μόνο οι όροι που αφορούν τη μεταφορά ορμής και το πρόβλημα που προέκυψε (πρόβλημα Orr - Sommerfeld) διακριτοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στην πορεία πραγματοποιήθηκε εκτενής παραμετρική μελέτη κατά την οποία χρησιμοποιήθηκαν 50 στοιχεία και αναπαρήχθησαν αποτελέσματα γνωστά από τη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι:
 - Οι χάρτες ιδιοτιμών παρουσιάζουν την αναμενόμενη μορφή και η πλέον ασταθής διαταραχή είναι η διεπιφανειακή που διαδίδεται με αδιάστατη, φασική ταχύτητα κοντά στο 2 με $c = 2$ στην περίπτωση του απείρου μήκους κύματος.
 - Ο κατακόρυφος υμένας για αριθμό Reynolds $Re = 0$ είναι οριακώς ευσταθής και ασταθής για κάθε άλλη μεγαλύτερη τιμή. Μάλιστα, πρόκειται για αστάθεια απείρου μήκους κύματος, διότι αυτό πρώτο καθίσταται οριακώς ευσταθές.
 - Η διαταραχή $k \rightarrow 0$ παραμένει πάντοτε οριακώς ευσταθής από τον κρίσιμο αριθμό Reynolds και έπειτα, ωστόσο οι αμέσως μεγαλύτεροι κυματισμοί περνούν σαφώς στην αστάθεια.
 - Η αύξηση του αριθμού Reynolds έχει σαν αποτέλεσμα όλο και περισσότερα πεπερασμένα μήκη κύματος να καθίστανται ασταθή, φαινόμενο που σχετίζεται με τη σταθεροποιητική επίδραση της επιφανειακής τάσεως και την υψηλότερη συνεισφορά της σε κυματισμούς με μεγαλύτερη καμπυλότητα.
 - Ο ρυθμός ενίσχυσης των κυματισμών μεγάλου μήκους κύματος είναι, γενικώς, χαμηλός, ενώ για τα μικρότερα μήκη κύματος είναι υψηλότερος κι αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Reynolds.
 - Για κάθε τιμή αριθμού Reynolds υπάρχει ένα πεπερασμένο μήκος κύματος που βρίσκεται στην οριακή ευστάθεια και η τιμή του αυξάνεται με την αύξηση του Re .

- Η μείωση της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου ροής του υμένα μεταθέτει την έναρξη της αστάθειας σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds, λόγω της παρουσίας αυξανόμενης συνιστώσας της βαρύτητας κάθετης στη διεύθυνση ροής, που λειτουργεί σταθεροποιητικώς.
 - Η επίδραση του αριθμού Kapitza δεν είναι ισχυρή στα μεγάλα μήκη κύματος, ωστόσο στα πεπερασμένα μικρότερες τιμές Ka αντιστοιχούν σε πιο ασταθείς υμένες συγκρίνοντας με κοινό αριθμό Reynolds.
 - Κάθε κυματαριθμός χαρακτηρίζεται από έναν κρίσιμο αριθμό Reynolds που αυξάνεται με την αύξησή του.
 - Το γράφημα ρυθμού ανάπτυξης-κυματαριθμού παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή υπάρχει πλέον ευνοούμενος κυματαριθμός. Η θέση του μεγίστου αυξάνεται με τον αριθμό Reynolds και η τιμή του μεγίστου παρουσιάζει μέγιστο στην περιοχή $Re \in [35, 40]$ μετά την οποία μειώνεται αργά.
 - Σε κάθε κυματαριθμό αντιστοιχεί μεγαλύτερος κρίσιμος αριθμός Reynolds όσο μειώνεται η γωνία κλίσεως του επιπέδου ροής.
 - Στο όριο του απείρου μήκους κύματος η αριθμητική λύση ταυτίζεται με την υπάρχουσα αναλυτική $Re_{cr} = \frac{5}{4} \cot \theta$.
- Από το πρόβλημα ιδιοτιμών διατηρήθηκαν οι όροι που αφορούν τη μεταφορά ορμής και μάζας επιφανειοδραστικού. Το πρόβλημα που προέκυψε διακριτοποιήθηκε και πάλι με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Πραγματοποιήθηκε έλεγχος εγκυρότητας των προγραμμάτων με αναπαραγωγή αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας. Χρησιμοποιήθηκαν ξανά 50 στοιχεία. Η ανιαλλαγή του επιφανειοδραστικού μεταξυ διεπιφανείας και κυρώς μάζας επιχειρήθηκε να περιγραφεί μέσω του ψευδο-μη-ιονικού μοντέλου Langmuir. Στη συνέχεια επιχειρήθηκε η εξαγωγή αποτελεσμάτων εξειδικευμένων στο σύστημα νερού-*SDS* και η σύγκριση των αριθμητικών με πειραματικά δεδομένα. Παρατηρήθηκε ότι:
 - Οι χάρτες ιδιοτιμών παρουσιάζουν ξανά την ίδια μορφή. Οι πιο ασταθείς διαταραχές είναι τρεις, ωστόσο μόνο η διεπιφανειακή περνά στην αστάθεια.
 - Η διεπιφανειακή διαταραχή διαδίδεται με αδιάστατη, φασική ταχύτητα κοντά στο 2 με $c = 2$ στην περίπτωση του απείρου μήκους κύματος, αποτέλεσμα σε πλήρη συμφωνία με τα βιβλιογραφικά δεδομένα.
 - Η αστάθεια είναι ξανά μεγάλου μήκους κύματος, διότι πρώτος ο κυματαριθμός $k \rightarrow 0$ καθίσταται ασταθής.
 - Ο κατακόρυφος υμένας είναι πάλι ο πιο ασταθής, ωστόσο η εμφάνιση της αστάθειας μετατοπίζεται σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds. Η μετατόπιση αυτή εξαρτάται από την ποσότητα επιφανειοδραστικού στο διάλυμα.
 - Αύξηση της μάζας επιφανειοδραστικού στο διάλυμα για συγκεκριμένο αριθμό Reynolds μπορεί να καταστήσει λιγότερο ασταθή και βαθμιαίως να σταθεροποιήσει μια διαταραχή.
 - Τις διαταραχές τείνουν να ενισχύσουν οι αδρανειακές δυνάμεις τις οποίες ανιαγωνίζονται, εκτός από τις τριχοειδείς και τις κάθετες στη ροή βαρυτικές, και οι δυνάμεις Marangoni που αναπτύσσονται λόγω κλίσεων επιφανειακής τάσεως.
 - Στις πειραματικώς υπολογισθείσες τιμές σταθεράς εκρόφησης k_d για το σύστημα νερού-*SDS* ($0.1s^{-1}$ και $1s^{-1}$) στη μεν πρώτη το επιφανειοδραστικό συμπεριφέρεται σχεδόν πλήρως ως αδιάλυτο σε όλα τα μήκη κύματος (με εξαίρεση μόνο το άπειρο, όπου μοιάζει ελαφρώς διαλυτό) στη δε δεύτερη ως διαλυτό σε κάποια μεγάλα μήκη κύματος και ως αποτελεσματικότερο του αδιάλυτου στη σταθεροποίηση κάποιου εύρους μικρότερων.
 - Σε ό,τι αφορά τα πειραματικά δεδομένα, αυτά παρήχθησαν με κάποια σταθερή συχνότητα διαταραχής, επομένως εξήχθη σχέση από την οποία για γνωστή τιμή συχνότητας να υπολογίζεται ο αδιάστατος κυματαριθμός που χαρακτηρίζει τη διαταραχή.
 - Η χρήση του μοντέλου Langmuir, παρά το γεγονός ότι αγνοεί τις ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις μεταξυ των μορίων, επιτρέπει ικανοποιητική πρόβλεψη των πειραματικών αποτελεσμάτων, καθώς τα αριθμητικά παρακολουθούν ποιοτικά τη μορφή τους και έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Από το δεδομένο εύρος τιμών της σταθεράς εκρόφησης προκύπτει πως οι πιο ιδανικές στην αναπαραγωγή των πειραμα-

τικών βρίσκονται μεταξύ $0.25 - 0.3s^{-1}$. Υπάρχει συμφωνία αλλά όχι ταύτιση, κάτι που σε ένα βαθμό αποδίδεται στο ότι το μοντέλο δεν περιγράφει τη συμπεριφορά των ιόντων στο διάλυμα.

- Οι κυματαριθμοί που υπολογίζονται με βάση την επιβαλλόμενη συχνότητα είναι αρκετά μικροί, αντιστοιχούν σε μεγάλα μήκη κύματος που, ωστόσο, είναι πεπερασμένα. Αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα να μην επικρατεί ισορροπία μεταξύ κυρίως μάζας και διεπιφάνειας, ώστε ένα αναλυτικό μοντέλο με μια τέτοια υπόθεση πιθανώς δε δύναται να εκτιμήσει τις πειραματικές τιμές.
- Οι κυματαριθμοί που υπολογίζονται δεν είναι σταθεροί αλλά η τιμή τους διαφοροποιείται εντός της τάξης μεγέθους τους, καθώς αυξάνεται η ποσότητα επιφανειοδραστικού στο διάλυμα. Παρατηρείται ελάχιστο στις χαμηλές συγκεντρώσεις.

Μια μελλοντική μελέτη, εκτός από την επίλυση του προβλήματος του υμένα με επιφανειοδραστικό κατά τη διεργασία της απορρόφησης, που η παρούσα εργασία άφησε άθικτο, μπορεί να επικεντρωθεί και στο σύστημα νερό-*SDS*. Το μοντέλο του Langmuir αντιμετωπίζει τα μόρια του επιφανειοδραστικού ως σκληρές σφαίρες. Έτσι, είναι ενδιαφέρον να διερευνηθεί η επίδραση της συμπιεστότητας των μορίων σε υψηλές συγκεντρώσεις, όταν η διεπιφάνεια τείνει στον κορεσμό. Αναμένεται μέσω αυτού, κατά τη σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα, τα αριθμητικά αποτελέσματα να ακολουθούν καλύτερα την παρατηρηθείσα συμπεριφορά μετά το μέγιστο, σημειώνοντας λιγότερο απότομες κλίσεις.

Ακόμη, το μοντέλο του Langmuir αγνοεί τις ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ιόντων του διαλύματος και των ιόντων επιφανειοδραστικού. Έχουν αναπτυχθεί και πιο πολύπλοκα μοντέλα, όπως το Frumkin-Davies που προσπαθούν να ενσωματώσουν κι αυτή τη συμπεριφορά. Επομένως, μιας που το *SDS* διίσταται στο διάλυμα μπορεί να επιχειρηθεί και με τη χρήση ενός τέτοιου μοντέλου η σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα με πιθανή μια καλύτερη δυνατότητα πρόβλεψης.

Επιπλέον, αν είναι εφικτό, ίσως μπορούσε να αναπτυχθεί κι ένα αναλυτικό μοντέλο που να συμφωνεί με τις πειραματικές μετρήσεις, θεωρώντας μεν μεγάλα μήκη κύματος αλλά όχι ισορροπία της κυρίως μάζας με τη διεπιφάνεια, όσον αφορά τη συγκέντρωση του επιφανειοδραστικού.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Στην ελληνική γλώσσα

- οΑνδρίτσος Ν. (2017). Ενέργεια και περιβάλλον [πανεπιστημιακές σημειώσεις σε ηλεκτρονική μορφή]. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Μάθημα: «Τεχνολογία Βιομηχανικής Αντιρρόπησης», Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018 . Βόλος
- οΒλαχομήτρου Μ. Προσωπικές σημειώσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος «Υπολογιστική ρευστομηχανική με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων». Εαρινό εξάμηνο 2017
- οΖούπας Α. (2015). Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις [πανεπιστημιακές σημειώσεις σε ηλεκτρονική μορφή]. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Μάθημα: «Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις», Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015 . Βόλος
- οΚάκιος Π. (2018) Μειρήσεις δυναμικής επιφανειακής τάσης υδατικών διαλυμάτων SDS (Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών. Βόλος
- οΚατσάνος Ν. (1999). Φυσικοχημεία-Βασική θεώρηση (Έκδοση 3^η), Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση
- οΣερπέτιση Σ. (2017) Θεωρητική και υπολογιστική μελέτη της ανάπτυξης δομών κατά την εξάτμιση λεπτών υμένων πολλαπλών συστατικών λόγω φαινομένων Marangoni (Διδακτορική Διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Τμήμα Χημικών Μηχανικών. Θεσσαλονίκη
- οΤεγόπουλος & Φυτράκης (1989), Ελληνικό Λεξικό, Εκδόσεις Αρμονία Α.Ε., Αθήνα

Στην αγγλική γλώσσα

- οBellettini I., Eisingb R., Felipe A., Domingos J., Minattid E. & Machadod V. . Association Of Branched Polyethylene Imine With Surfactants In Aqueous Solution. *Quimica Nova* 2015; 38
- οBontozoglou V. . The effect of adsorption modeling on the stability of surfactant-laden liquid film flow. *Acta Mechanica* 2018; 229: 535–547
- οCengel Y. & Boles M. (2013). Θερμοδυναμική για μηχανικούς (7^η έκδ. βελτιωμένη) Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα
- οCengel Y. & Boles M. (2015). Thermodynamics: an engineering approach (8th edition) McGraw-Hill Education, New York
- οChoudhury B., Saha B. B., Chatterjee P. K. & Sarkar J. P. . An overview of developments in adsorption refrigeration systems towards a sustainable way of cooling. *Applied Energy* 2013; 104: 554–567
- οDrazin P. (2002). Introduction to Hydrodynamic Stability Cambridge University Press, Cambridge
- οEbbing D. & Gammon S. (2009). General Chemistry (9th edition) Houghton Mifflin Company, Boston
- οGeorgantaki A., Vlachogiannis M. & Bontozoglou V. . Measurements of the stabilisation of liquid film flow by the soluble surfactant sodium dodecyl sulfate (SDS). *International Journal of Multiphase Flow* 2016; 86: 28–34

- Grossman G. . Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. International Journal of Heat and mass transfer 1983; 26: 357-371
- Hihara E. & Saito T. . Effect of surfactant on falling film absorption. International Journal of Refrigeration 1993; 16: 339-346
- Hofmann E. & Kuhlmann H. C. . On the optimum mass transferr of flat absorbing falling films. International Journal of Heat and mass transfer 2012; 55: 7686-7697
- Horbaniuc B. (2004). Refrigeration & Air-Conditioning. At Encyclopedia of Energy (Volume 5). Elsevier Inc.
- Hozawa M., Inoue M., Sato J., Tsukada T. & Imaishi M. . Marangoni convection during steam absorption into aqueous LiBr solution with surfactant. Journal of Chemichal Engineering of Japan 1991; 24: 209-241
- Karapetsas G. & Bontozoglou V. . The primary instability of falling films in the presence of soluble surfactants. Journal of Fluid Mechanichs 2013; 729: 123-150
- Karapetsas G. & Bontozoglou V. . The role of surfactants on the mechanism of the long-wave instability in liquid film flows. Journal of Fluid Mechanichs 2014; 741: 139-155
- Killion J. & Garimella S. . A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. International Journal of Refrigeration 2001; 24: 755-797
- Kovalchuk I.V. & Loglio G., Fainerman B.V. & Miller R. . Interpretation of surface dilational elasticity data based on an intrinsic two-dimensional interfacial compressibility model. Journal of Colloid and Interface Science 2004; 270: 475-482
- Pfaff M., Saravanan R., Maiya M. P. & Murthy S. S. . On the transport equation for an interfacial quantity. European Physical Journal Applied Physics 2008; 44: 211-214
- Pfaff M., Saravanan R., Maiya M. P. & Murthy S. S. . Studies on bubble pump for a water-lithium bromide vapour absorption refrigerator. International Journal of Refrigeration 1998; 21: 452-562
- Pozrikidis C. (1997). Introduction to theoretical and computational fluid dynamics Oxford University Press, New York
- Prosser A. & Franses E. . Adsorption and surface tension of ionic surfactants at the air-water interface: review and evaluation of equilibrium models. Colloids and Surfaces 2001; 178: 1-40
- Rattner A. & Garimella S. . Simulation of Taylor flow evaporation for bubble-pump applications. International Journal of Heat and Mass Transfer 2018; 116: 231-247
- Smith M. . The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. Journal of Fluid Mechanichs 1990; 217: 469-485
- Srikhirin P., Aphornratana S. & Chungpaibulpatana S. . A review of absorption refrigeration technologies. Renewable and Sustainable Energy Reviews 2001; 5: 343-372
- Stephan K. . History of absorption heat pumps and working pair developments in Europe. International Journal of Refrigeration 1983; 6: 160-166
- Taieb A., Mejbri K. & Bellagi A. . Detailed thermodynamic analysis of a diffusion-absorption refrigeration cycle. Energy 2016; 115: 418-434

Διαδικτυακοί ιστότοποι

- [http : //web.mit.edu/2.21/www/Lec – notes/Sur facetension/Lecture4.pdf](http://web.mit.edu/2.21/www/Lec%20notes/SurfaceTension/Lecture4.pdf)
- [http : //www.bioinfo.rpi.edu/bystrc/courses/biol4550/lecture20](http://www.bioinfo.rpi.edu/bystrc/courses/biol4550/lecture20)

Παράρτημα

Βασικό πρόγραμμα υπολογισμού ιδιοτιμών στο πρόβλημα του καθαρού υμένα

```
program Simple_Film_Stability
  implicit none

  !Variables' declaration
  integer*8 nelelem, ierr, nmode, nequation
  integer*8 i, j, k, l, m, n

  real*8 lelem, dz
  real*8 wavenumber, Re, We, Ka, theta, pi, surfteu
  real*8 weight(3), Gauss_points(3)

  complex*16, parameter :: iu=(0.d0, 1.d0)

  real*8, allocatable, dimension(:) :: z
  complex*16, allocatable, dimension(:, :) :: Alpha, Beta
  complex*16, allocatable, dimension(:) :: alpha_vector, beta_vector
  integer*8, allocatable, dimension(:, :) :: conn

  !Solving Routine Further Arguments
  integer info
  real*8, allocatable, dimension(:) :: RWORK
  complex*16, allocatable, dimension(:, :) :: VL, VR
  complex*16, allocatable, dimension(:) :: WORK

  pi=dacos(-1.d0)

  !File opening
  open(10, file='input.dat', status='old')
  open(11, file='output.dat', status='unknown')

  !Reading data
  read(10, *) nelelem
  read(10, *) wavenumber, Re, Ka, theta, surfteu

  theta=theta*pi/180.d0

  weight(1)=0.55555555555556d0
  weight(2)=0.88888888888889d0
  weight(3)=0.55555555555556d0

  Gauss_points(1)=-0.7745966692d0
  Gauss_points(2)=0.d0
  Gauss_points(3)=0.7745966692d0

  !Number of nodes
  nnode=2*nelelem+1
  !Number of equations
  nequation=2*nnode

  !Weber number
  We=Ka/(2.d0*Re)**(2.d0/3.d0)

  !Allocation of matrixes
  allocate (conn(nelelem, 3), Alpha(nequation, nequation), Beta(nequation, nequation), stat=ierr)
  if(ierr.ne.0) then
    write(*, *) 'Wrong memory allocation'
```

```

        stop
    end if

    allocate (z(nnode),alpha_vector(nequation),beta_vector(nequation),stat=ierr)
    if(ierr.ne.0) then
        write(*,*) 'Wrong memory allocation '
        stop
    end if

    allocate (VR(nequation,nequation),VL(nequation,nequation),RWORK(8*nequation),WORK(4*nequation),stat=ierr)
    if(ierr.ne.0) then
        write(*,*) 'Wrong memory allocation '
        stop
    end if

    !Connectivity matrix
    do i=1,nelem
        do j=1,3
            conn(i,j)=2*i+j-2
        end do
    enddo

    !Element length for equal elements L=1
    lelem= 1.d0/nelem
    !Nodes' distance
    dz=lelem/2

    !Grid construction
    z(1)=0.d0
    do i=2,mnode
        z(i)=z(i-1)+dz
    enddo

    !call subroutines
    call massmatrices(Alpha,Beta)
    call boundary_conditions_substrate
    call boundary_conditions_interface

    !Initialisation of routine arguements
    WORK=0.d0
    RWORK=0.d0

    !call eigenvalue finding routine zggev
    call zggev( 'N', 'N', nequation, Alpha, nequation, Beta, nequation, alpha_vector, beta_vector, VL, nequation, VR,&
        & nequation, WORK, 4*nequation, RWORK, info )

    do i=1,nequation
        if(abs(beta_vector(i))<1e-6) then
            cycle
        else
            alpha_vector(i)=alpha_vector(i)/beta_vector(i)
            write(11,'(1x,500(D15.9,5x)) ') real(alpha_vector(i)), -imag(alpha_vector(i))/wavenumber
        endif
    enddo
enddo

contains

subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
implicit none
real*8 ksi,shap(3),dshape(3)

shap(1)=0.5d0*(ksi-1.d0)*ksi
shap(2)=1.d0-ksi**2.d0
shap(3)=0.5d0*(ksi+1.d0)*ksi

!Derivative calculation for shape functions
dshape(1)=ksi-0.5d0
dshape(2)=-2.d0*ksi
dshape(3)=ksi+0.5d0
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine massmatrices(Alpha,Beta)
implicit none

```

```

real*8 shap(3),dshape(3)
complex*16 part1,part2,part3,part4
complex*16 Alpha(nequation,nequation),local(6,6),Rho(3,3),Sigma(3,3),Upsilon(3,3),Kappa(3,3)
complex*16 Beta(nequation,nequation),Taf(3,3),Mi(3,3),Ni(6,6)
integer*8 i,j,k,iel,irow,jcol

!Initialising Alpha & Beta matrices
Alpha=0.d0
Beta=0.d0

!Local matrices' creation
do iel=1,nelem
  !Initialisations
  local=0.d0
  Rho=0.d0
  Sigma=0.d0
  Kappa=0.d0
  Upsilon=0.d0

  Ni=0.d0
  Taf=0.d0
  Mi=0.d0

  do k=1,3 !For 3 Gauss Points
    !subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
    call quadratic_lagrange(Gauss_points(k),shap,dshape)
    !Rho matrix
    do i=1,3
      do j=1,3
        !2Re sin(th) ik -k^4
        part1=2.d0*Re*dsin(theta)*iu*wavenumber-wavenumber**4.d0
        !ksi*he+za+zb-((ksi*he+za+zb)/2)^2
        part2=Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))+z(conn(iel,3))-((Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))&
          & +z(conn(iel,3)))/2.d0)**2.d0
        !Re sin(th) ik^3
        part3=Re*iu*dsin(theta)*wavenumber**3.d0

        Rho(i,j)=Rho(i,j)+weight(k)*(part1-part3*part2)*shap(i)*shap(j)*lelem/2.d0
      enddo
    enddo
    !Sigma matrix
    do i=1,3
      do j=1,3
        !ksi*he+za+zb-((ksi*he+za+zb)/2)^2
        part2=Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))+z(conn(iel,3))-((Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))&
          & +z(conn(iel,3)))/2.d0)**2.d0
        !Re sin(th) ik
        part3=Re*iu*dsin(theta)*wavenumber

        Sigma(i,j)=Sigma(i,j)+weight(k)*(2.d0/lelem*dshape(i)*dshape(j)+(2.d0*wavenumber**2.d0+part3*part2)&
          & *lelem/2.d0*shap(i)*shap(j))
      enddo
    enddo
    !Kappa matrix
    do i=1,3
      do j=1,3
        Kappa(i,j)=Kappa(i,j)+weight(k)*2.d0/lelem*dshape(i)*dshape(j)
      enddo
    enddo
    !Upsilon matrix
    do i=1,3
      do j=1,3
        Upsilon(i,j)=Upsilon(i,j)+weight(k)*lelem/2.d0*shap(i)*shap(j)
      enddo
    enddo

    !Taf matrix
    do i=1,3
      do j=1,3
        Taf(i,j)=Taf(i,j)+weight(k)*Re*shap(i)*shap(j)*wavenumber**2.d0*lelem/2.d0
      enddo
    enddo
  enddo
enddo

```

```

!Mi matrix
do i=1,3
  do j=1,3
    Mi(i,j)=Mi(i,j)-weight(k)*Re*shap(i)*shap(j)*lelem/2.d0
  enddo
enddo

!local matrix
do i=1,3
  do j=1,3
    local(2*i-1,2*j-1)=Rho(i,j)
    local(2*i-1,2*j)=Sigma(i,j)
    local(2*i,2*j-1)=Kappa(i,j)
    local(2*i,2*j)=Upsilon(i,j)
  enddo
enddo

!Local eigenvalue matrix Ni
do i=1,3
  do j=1,3
    Ni(2*i-1,2*j-1)=Taf(i,j)
    Ni(2*i-1,2*j)=Mi(i,j)
  enddo
enddo

!Allocate local in global Alpha & Beta matrices
do i=1,6
  !Globally, which row
  if(i==1) then
    irow=2*conn(iel,i)-1
  else
    irow=irow+1
  end if

  do j=1,6
    !Global column
    if(j==1) then
      jcol=2*conn(iel,j)-j
    else
      jcol=jcol+1
    end if

    Alpha(irow,jcol)=Alpha(irow,jcol)+local(i,j)

    Beta(irow,jcol)=Beta(irow,jcol)+Ni(i,j)
  enddo
enddo
enddo

end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine boundary_conditions_substrate !Diriclet conditions
implicit none
real*8 shap(3),dshape(3)
integer*8 i,jcol

!First two rows all zeros
Alpha(1:2,1:nequation)=0.d0
Beta(1:2,1:nequation)=0.d0 ! no factors with lamda

!subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
call quadratic_lagrange(-1.d0,shap,dshape)
do i=1,3
  Alpha(1,2*i-1)=shap(i)
  Alpha(2,2*i-1)=dshape(i)
end do
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine boundary_conditions_interface !Diriclet conditions
implicit none

```

```

real*8 shap(3),dshape(3)
integer*8 i,jcol

!Last two rows all zeros
Alpha(nequation-1:nequation,1:nequation)=0.d0
Beta(nequation-1:nequation,1:nequation)=0.d0

!subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
call quadratic_lagrange(1.d0,shap,dshape)
do i=1,3

!Global column
if(i==1) then
    jcol=2*conn(nelem,i)-i
else
    jcol=jcol+2
end if

!Interfacial kinetic condition
Alpha(nequation-1,jcol)=dsin(theta)*iu*wavenumber*(wavenumber**2.d0+2.d0)*shap(i) !psi
Alpha(nequation-1,jcol+1)=dsin(theta)*iu*wavenumber*shap(i) !phi

Beta(nequation-1,jcol)=-wavenumber**2.d0*shap(i) !psi
Beta(nequation-1,jcol+1)=-shap(i) !phi

!Interfacial vertical force balance
Alpha(nequation,jcol)=-3.d0*wavenumber**2.d0*dshape(i)*2.d0/lelem-Re*dsin(theta)*iu*wavenumber*dshape(i)&
& *2.d0/lelem-We*iu*wavenumber**5.d0*surften/dsin(theta)*shap(i) !psi
Alpha(nequation,jcol+1)=dshape(i)*2.d0/lelem-We/dsin(theta)*iu*wavenumber**3.d0*surften*shap(i)
!phi

Beta(nequation,jcol)=Re*dshape(i)*2.d0/lelem !psi
enddo
end subroutine

end program

```


Βασικό πρόγραμμα υπολογισμού ιδιοτιμών στο πρόβλημα του υμένα με επιφανειοδραστικό

```
program Surfactant_Laden_Film_Stability
  implicit none

  !Variables' declaration
  integer*8 neleem, ierr, nmode, nequation
  integer*8 i, j, k, l, m, n

  real*8 lelem, dz
  real*8 wavenumber, Re, Ka, We, theta, surfTEN_eq, H, U, T
  real*8 Pe_s, gamma, delta, Pe_s_surf, elasticity
  real*8 density, viscosity, kin_visc, surfTEN, Scb, Sci
  real*8 MaxPack, Kinetic_constant, K_G, k_d
  real*8 solubility, K_kin, surfTEN_concentration, mass
  real*8 equil_concentration_i, equil_concentration_b, D
  real*8 weight(3), Gauss_points(3), pi, gravity_acceleration, R

  complex*16, parameter :: iu=(0.d0, 1.d0)

  real*8, allocatable, dimension(:) :: z
  complex*16, allocatable, dimension(:, :) :: Alpha, Beta
  complex*16, allocatable, dimension(:) :: alpha_vector, beta_vector
  integer*8, allocatable, dimension(:, :) :: conn

  !Solving Routine Further Arguments
  integer info
  real*8, allocatable, dimension(:) :: WORK
  complex*16, allocatable, dimension(:, :) :: VL, VR
  complex*16, allocatable, dimension(:) :: WORK

  !Constants
  pi=dacos(-1.d0)
  gravity_acceleration=9.80665d0
  R=8.3144598d0

  !File opening
  open(10, file='input.dat', status='old')
  open(11, file='output.dat', status='unknown')

  !Reading data
  !Number of elements
  read(10, *) neleem
  !Basic 3 film parameters
  read(10, *) wavenumber, Re, theta
  !Operating temperature in KELVIN, affects properties
  read(10, *) T
  !Fluid & surfactant properties
  read(10, *) density, viscosity, surfTEN, Scb, Sci
  !Surfactant and kinetics
  read(10, *) MaxPack, Kinetic_constant, K_G, k_d
  !Surfactant added mass per unit depth (y axis)
  read(10, *) mass

  weight(1)=0.55555555555556d0
  weight(2)=0.88888888888889d0
  weight(3)=0.55555555555556d0

  Gauss_points(1)=-0.7745966692d0
  Gauss_points(2)=0.d0
  Gauss_points(3)=0.7745966692d0

  !Number of nodes
  nmode=2*nelem+1
  !Number of equations
  nequation=3*nmode

  !Inclination angle in radians
  theta=theta*pi/180.d0

  !kinematic viscosity
  kin_visc=viscosity/density
```

```

!Kapitza number
Ka=surften/density/gravity_acceleration**(1.d0/3.d0)/kin_visc**(4.d0/3.d0)
!Weber number
We=Ka/(2.d0*Re)**(2.d0/3.d0)

!Peclet number for the bulk
Pe_s=Re*Scb
!Peclet number for the interface
Pe_s_surf=Re*Sci

!Film steady state height and velocity (Nusselt)
H=(2.d0* kin_visc**2.d0/gravity_acceleration*Re)**(1.d0/3.d0)
U=Re*kin_visc/H

!Surfactant solubility
solubility=Kinetic_constant*MaxPack/H

!Equilibrium concentrations
D=dsqrt(4.d0*mass*solubility+(1.d0+solubility-mass*solubility)**2.d0)
equil_concentration_i=(-1.d0-solubility+mass*solubility+D)/(1.d0-solubility+mass*solubility+D)
equil_concentration_b=(-1.d0-solubility+mass*solubility+D)/(2.d0*solubility)

!Kinetics
K_kin=H*k_d/U
gamma=K_kin*solubility*(1.d0-equil_concentration_i)/(K_kin*(1.d0+solubility*equil_concentration_b)+K_G)
delta=1.d0/Pe_s/(K_kin*(1.d0+solubility*equil_concentration_b)+K_G)

!Equilibrium surface tension
surften_eq=1.d0*R*T*MaxPack*dlog(1.d0-equil_concentration_i)/surften

!Elasticity at equilibrium
elasticity=R*T*MaxPack/surften*equil_concentration_i/(1.d0-equil_concentration_i)

!surften_concentration, derivative of surface tension with concentration, if mass=0 is NOT defined,
!calculation avoided
surften_concentration=-R*T*MaxPack/surften/(1.d0-equil_concentration_i)

!Allocation of matrixes
allocate (conn(nelem,3),Alpha(nequation,nequation),Beta(nequation,nequation),stat=ierr)
if(ierr.ne.0) then
    write(*,*) 'Wrong memory allocation'
    stop
end if

allocate (z(nnode),alpha_vector(nequation),beta_vector(nequation),stat=ierr)
if(ierr.ne.0) then
    write(*,*) 'Wrong memory allocation'
    stop
end if

allocate (VR(nequation,nequation),VL(nequation,nequation),RWORK(8*nequation),WORK(4*nequation),stat=ierr)
if(ierr.ne.0) then
    write(*,*) 'Wrong memory allocation'
    stop
end if

!Connectivity matrix
do i=1,nelem
    do j=1,3
        conn(i,j)=2*i+j-2
    end do
enddo

!Element length for equal elements L=1
lelem= 1.d0/nelem
!Nodes' distance
dz=lelem/2

!Grid construction
z(1)=0.d0
do i=2,nnode
    z(i)=z(i-1)+dz
enddo

```

```

!call subroutines
call massmatrices(Alpha,Beta)
call boundary_conditions_substrate
call boundary_conditions_interface

!Initialisation of routine arguments
WORK=0.d0
RWORK=0.d0

!call eigenvalue finding routine zggev
call zggev( 'N', 'N', nequation, Alpha, nequation, Beta, nequation, alpha_vector, beta_vector, VL, nequation,&
& VR, nequation, WORK, 4*nequation, RWORK, info )

do i=1,nequation
  if(abs(beta_vector(i))<1e-6) then
    cycle
  else
    alpha_vector(i)=alpha_vector(i)/beta_vector(i)
    write(11, '(1x,500(D15.9,5x)) ') real(alpha_vector(i)), -imag(alpha_vector(i))/wavenumber/dsin(theta)
  endif
enddo

contains

subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
implicit none
real*8 ksi,shap(3),dshape(3)

shap(1)=0.5d0*(ksi-1.d0)*ksi
shap(2)=1.d0-ksi**2.d0
shap(3)=0.5d0*(ksi+1.d0)*ksi

!Derivative calculation for shape functions
dshape(1)=ksi-0.5d0
dshape(2)=-2.d0*ksi
dshape(3)=ksi+0.5d0
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

subroutine massmatrices(Alpha,Beta)
implicit none
real*8 shap(3),dshape(3)
complex*16 part1,part2,part3,part4,part5,part6,part7,part8
complex*16 Alpha(nequation,nequation),localA(9,9)
complex*16 Beta(nequation,nequation),localB(9,9)
integer*8 i,j,k,lrow,lcol,iel,irow,jcol,psi_loc(3)

!Initialising Alpha & Beta matrices
Alpha=0.d0
Beta=0.d0

!Give psi_loc values: psi unknown variable positions in local vector of unknowns
psi_loc(1)=1
psi_loc(2)=4
psi_loc(3)=7

!Local matrices' creation
do iel=1,nelem
  !Initialisations
  localA=0.d0
  localB=0.d0

  do k=1,3 !For 3 Gauss Points
    !subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
    call quadratic_lagrange(Gauss_points(k),shap,dshape)

!Local matrices creation
    do i=1,3
      !First element of node matrix row
      lrow=psi_loc(i)

      do j=1,3
        !First element of node matrix column

```

```

lcol=psi_loc(j)

!Rho
!2Re sin(th) ik -k^4
part1=2.d0*Re*dsin(theta)*iu*wavenumber-wavenumber**4.d0
!ksi*he+za+zb-((ksi*he+za+zb)/2)^2
part2=Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))+z(conn(iel,3))-((Gauss_points(k)*lelem+z(conn(iel,1))&
& +z(conn(iel,3)))/2.d0)**2.d0
!Re sin(th) ik^3
part3=Re*iu*dsin(theta)*wavenumber**3.d0

localA(lrow,lcol)=localA(lrow,lcol)+weight(k)*(part1-part3*part2)*shap(i)*shap(j)*lelem/2.d0

!Sigma
!Re sin(th) ik^3
part4=Re*iu*dsin(theta)*wavenumber

localA(lrow,lcol+1)=localA(lrow,lcol+1)+weight(k)*(2.d0/lelem*dshape(i)*dshape(j)+&
& (2.d0*wavenumber**2.d0+part4*part2)*lelem/2.d0*shap(i)*shap(j))

!Kappa
localA(lrow+1,lcol)=localA(lrow+1,lcol)+weight(k)*2.d0/lelem*dshape(i)*dshape(j)

!Ypsilon
localA(lrow+1,lcol+1)=localA(lrow+1,lcol+1)+weight(k)*lelem/2.d0*shap(i)*shap(j)

!Epsilon
!ik sin(theta)*part2+k^2/Pe_s
part5=iu*wavenumber*dsin(theta)*part2 + wavenumber**2.d0/Pe_s

localA(lrow+2,lcol+2)=localA(lrow+2,lcol+2)+weight(k)*(part5*lelem/2.d0*shap(i)*shap(j)+&
& 2.d0/lelem*dshape(i)*dshape(j)/Pe_s)

!Taf
localB(lrow,lcol)=localB(lrow,lcol)+weight(k)*Re*shap(i)*shap(j)*wavenumber**2.d0*lelem/2.d0
!Mi
localB(lrow,lcol+1)=localB(lrow,lcol+1)-weight(k)*Re*shap(i)*shap(j)*lelem/2.d0
!Ni
localB(lrow+2,lcol+2)=localB(lrow+2,lcol+2)-weight(k)*shap(i)*shap(j)*lelem/2.d0

enddo
enddo
enddo

!Allocate local in global Alpha & Beta matrices
do i=1,9
!Find global row
if(i==1) then
irow=3*(conn(iel,1)-1)+1
else
irow=irow+1
endif

do j=1,9
!Find global column
if(j==1) then
jcol=3*(conn(iel,1)-1)+1
else
jcol=jcol+1
endif

Alpha(irow,jcol)=Alpha(irow,jcol)+localA(i,j)
Beta(irow,jcol)=Beta(irow,jcol)+localB(i,j)
enddo
enddo
enddo

end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine boundary_conditions_substrate !Diriclet conditions
implicit none

```

```

real*8 shap(3),dshape(3)
integer*8 i ,jcol ,psi_loc(3)

!First three rows all zeros – first node of first element
Alpha(1:3,1:nequation)=0.d0
Beta(1:3,1:nequation)=0.d0 ! no factors with lamda

!Give psi_loc values: psi unknown variable positions in local vector of unknowns
psi_loc(1)=1
psi_loc(2)=4
psi_loc(3)=7

!subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
call quadratic_lagrange(-1.d0,shap,dshape)
do i=1,3
  !Find column
  jcol=psi_loc(i)

  Alpha(1,jcol)=shap(1) !psi
  Alpha(2,jcol)=dshape(i) !psi
  Alpha(3,jcol+2)=dshape(i) !c
end do
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine boundary_conditions_interface !Diriclet conditions
implicit none
real*8 shap(3),dshape(3)
integer*8 i ,jcol ,psi_loc(3)

!Last three rows all zeros – last node of last element
Alpha(nequation-2:nequation,1:nequation)=0.d0
Beta(nequation-2:nequation,1:nequation)=0.d0

!Give psi_loc values: psi unknown variable positions in local vector of unknowns
psi_loc(1)=1
psi_loc(2)=4
psi_loc(3)=7

!subroutine quadratic_lagrange(ksi,shap,dshape)
call quadratic_lagrange(1.d0,shap,dshape)
do i=1,3

  !Global column
  jcol=3*(conn(nelem,1)-1)+psi_loc(i)

  !Interfacial kinetic condition
  Alpha(nequation-2,jcol)=dsin(theta)*iu*wavenumber*(wavenumber**2.d0+2.d0)*shap(i) !psi
  Alpha(nequation-2,jcol+1)=dsin(theta)*iu*wavenumber*shap(i) !phi
  Alpha(nequation-2,jcol+2)=2.d0*We*wavenumber**2.d0*dsin(theta)*surften_concentration&
& *(gamma*shap(i)+delta*2.d0/lelem*dshape(i)) !c

  Beta(nequation-2,jcol)=-wavenumber**2.d0*shap(i) !psi
  Beta(nequation-2,jcol+1)=-shap(i) !phi
  Beta(nequation-2,jcol+2)=2.d0*We*iu*wavenumber*surften_concentration*&
& (gamma*shap(i)+delta*2.d0/lelem*dshape(i)) !c

  !Interfacial vertical force balance
  Alpha(nequation-1,jcol)=-3.d0*wavenumber**2.d0*dshape(i)*2.d0/lelem&
& *(dcotan(theta)-Re*dsin(theta)*iu*wavenumber*dshape(i)*2.d0/lelem-iu*&
& *wavenumber**3.d0+We/dsin(theta)*wavenumber**2.d0*surften_eq)*shap(i) !psi
  Alpha(nequation-1,jcol+1)=dshape(i)*2.d0/lelem-iu*wavenumber*(dcotan(theta)&
& +We/dsin(theta)*wavenumber**2.d0*surften_eq)*shap(i) !phi
  Alpha(nequation-1,jcol+2)=-2.d0*We*wavenumber**2.d0*surften_concentration*(dcotan(theta)&
& +We/dsin(theta)*wavenumber**2.d0*surften_eq)*(gamma*shap(i)&
& +delta*2.d0/lelem*dshape(i)) !c

  Beta(nequation-1,jcol)=Re*dshape(i)*2.d0/lelem !psi

  !Interfacial transfer equation
  Alpha(nequation,jcol)=iu*wavenumber*equil_concentration_i*dshape(i)*2.d0/lelem !psi
  Alpha(nequation,jcol+2)=(dsin(theta)*iu*wavenumber + wavenumber**2.d0/Pe_s_surf)*&
& (gamma*shap(i)+delta*2.d0/lelem*dshape(i)) + 2.d0/lelem*dshape(i)/Pe_s !c

```

```
        Beta(nequation , jcol+2)=-gamma*shap(i)-delta*2.d0/lelem*dshape(1)    !c
    enddo
end subroutine

end program
```