



**Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας**

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ
ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΧΩΡΟ**

Μητσιάνης Ευάγγελος

Επιβλέπων καθηγητής : Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Βόλος 2018



**Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας**

Department of Electrical and Computer Engineering

DIPLOMA THESIS

**ANALYSIS OF PROPAGATION OF
ELECTROMAGNETIC WAVES IN FREE SPACE**

Mitsianis Evangelos

Supervisor: Evmorfopoulos Nestor

Volos 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΧΩΡΟ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μητσιάνης Ευάγγελος

(Υπογραφή)

.....

Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

(Υπογραφή)

.....

Σταμούλης Γεώργιος

Καθηγητής Π.Θ.

(Υπογραφή)

.....

ΜΗΤΣΙΑΝΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Π.Θ.

©2018 – ALL RIGHTS RESERVED

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη μελέτη της διάδοσης και της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από αντικείμενα διαφόρων ιδιοτήτων, που βρίσκονται σε ελεύθερο χώρο, και την επίλυση προβλημάτων σκέδασης αναλυτικά και στη συνέχεια υπολογιστικά κάνοντας χρήση της μεθόδου των ροπών, η οποία υλοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB .

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση της ιστορίας της ανάπτυξης της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο υπολογίζεται η εξίσωση Helmholtz σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων και γίνεται μια εισαγωγή στους εγκάρσιους μαγνητικούς και εγκάρσιους ηλεκτρικούς ρυθμούς κυματοδότησης και η εφαρμογή των παραπάνω σε έναν κυματοδηγό κυκλικής διατομής. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται η κυματική εξίσωση σε μορφή άπειρου αθροίσματος και, με βάση αυτήν την ανάπτυξη, επιλύονται αναλυτικά τα προβλήματα σκέδασης από αγωγίμο και διηλεκτρικό κύλινδρο άπειρου μήκους.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η ολοκληρωτική εξίσωση, που περιέχει το προς υπολογισμό πεδίο, και επιλέγονται οι συναρτήσεις βάσης και βάρους, που θα χρησιμοποιηθούν από τη μέθοδο των ροπών. Έπειτα, γίνεται υπολογιστική επίλυση του προβλήματος σκέδασης από αγωγίμο κύλινδρο άπειρου μήκους, κατά την οποία διαδικασία χρησιμοποιούνται οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και παρουσιάζονται οι επαγόμενες πυκνότητες ρεύματος και τα πεδία που προκύπτουν από την υλοποίηση της μεθόδου των ροπών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επισημαίνονται οι διαφορές μεταξύ των δισδιάστατων και τρισδιάστατων προβλημάτων και επιλύεται το πρόβλημα σκέδασης από αγωγίμο σωλήνα τετραγωνικής διατομής πεπερασμένου μήκους. Επίσης παρουσιάζονται οι επαγόμενες πυκνότητες ρεύματος και τα πεδία που έχουν υπολογιστεί από την τρισδιάστατη υλοποίηση της μεθόδου των ροπών.

Abstract

The current diploma thesis' subject is the study of propagation and scattering of electromagnetic waves from various objects in free space, and the analytical and computational solution of scattering problems using the method of moments, implemented in MATLAB environment.

In the first chapter a quick retrospect of the history of electromagnetic history is presented.

In the second chapter Helmholtz equation in cylindrical coordinates is calculated and an introduction to the transverse magnetic and electric modes is made, and then the above are used to calculate the transverse field components in a circular waveguide. Afterwards, the wave equation is expanded in the form on infinite series, and is used to solve the problems of scattering from conducting and dielectric infinite cylinders.

In the third chapter, the integral equation containing the field is formed, and the weighting and basis functions that will be used by the method of moments are chosen. Then the problem of scattering from an infinite conducting cylinder is solved computationally using the method of moments and the electric and magnetic field integral equations, and the resulting induced current densities and fields are presented.

In the fourth chapter the differences between two dimensional and three dimensional problems are stated, and the problem of scattering from a square pipe of finite length is solved computationally using a three dimensional implementation of the method of moments. The resulting induced current density and fields are then presented.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα

1.1 Εισαγωγή.....	1
-------------------	---

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

2.1 Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.....	3
2.2 Κυματική εξίσωση και εξίσωση Helmholtz.....	4
2.3 Λύση της εξίσωσης Helmholtz.....	5
2.4 Οι εγκάρσιες συνιστώσες των ηλεκτρικών και μαγνητικών κυμάτων.....	7
2.6 Ανάλυση των TE και TM ρυθμών σε κυματοδηγό κυκλικής διατομής.....	8
2.6 Η εξίσωση επίπεδου κύματος σε μορφή άπειρου αθροίσματος.....	11
2.7 Σκέδαση.....	14
2.7.1 Αγωγίμος κύλινδρος.....	15
2.7.2 Διηλεκτρικός κύλινδρος.....	19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η Μέθοδος των Ροπών

3.1 Εισαγωγή.....	26
3.2 Η ολοκληρωτική εξίσωση.....	27
3.3 Οι συναρτήσεις βάσης και βάρους.....	33
3.4 Σκέδαση από αγωγίμο κύλινδρο.....	35
3.5 Παράδειγμα εφαρμογής Μεθόδου των Ροπών.....	41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Η Μέθοδος των Ροπών σε Τρεις Διαστάσεις

4.1 Εισαγωγή.....	44
4.2 Σκέδαση από αγωγίμο σωλήνα τετραγωνικής διατομής.....	45

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 2.....	51
MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 3.....	54
MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 4.....	57
Συναρτήσεις MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν.....	60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα

1.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων ασχολείται με ρεύματα, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία τα οποία παράγονται από φορτία σε κίνηση ή ακίνητα. Συνεπώς αποτελεί ένα απαραίτητο εργαλείο τόσο για τον κλάδο των ηλεκτρολόγων μηχανικών όσο και για των φυσικών, διότι παίζει βασικό ρόλο στην κατανόηση, την κατασκευή και τη λειτουργία διαφόρων συστημάτων όπως συσκευές μικροκυμάτων, κεραιές, υπολογιστές, ραντάρ, ενσύρματες και ασύρματες επικοινωνίες.

Η μελέτη του ηλεκτρομαγνητισμού αποτελείται από θεωρητικές έννοιες οι οποίες αναπτύχθηκαν από διάφορους επιστήμονες συμπεριλαμβανόμενων των Faraday, Ampere, Gauss, Coulomb, Lenz. Στη συνέχεια οι ιδέες αυτές ενώθηκαν και συνδυαστήκαν από τον Maxwell, δημιουργώντας ένα σύνολο διανυσματικών εξισώσεων, γνωστό ως εξισώσεις του Maxwell. Σημαντικό κλάδο του ηλεκτρομαγνητισμού επίσης αποτελούν οι εφαρμογές των προαναφερθέντων εννοιών για το σχεδιασμό συστημάτων.

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων του Maxwell με συγκεκριμένες συνοριακές τιμές. Οι εξισώσεις αυτές είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού, οι οποίες είναι συζευγμένες, και μπορούν να αποξευχθούν μόνο εάν αυξήσουμε το βαθμό τους. Για κάθε πεδίο, ακολουθώντας μια τέτοιου είδους διαδικασία οδηγούμαστε σε μια αποξευγμένη μερική διαφορική εξίσωση δεύτερου βαθμού η οποία ονομάζεται κυματική εξίσωση. Σε πολλές περιπτώσεις, οι διανυσματικές κυματικές εξισώσεις απλοποιούνται σε ένα σύνολο βαθμωτών εξισώσεων, τις εξισώσεις Helmholtz, οι οποίες έχουν πάρει το όνομα τους από τον Herman von Helmholtz.

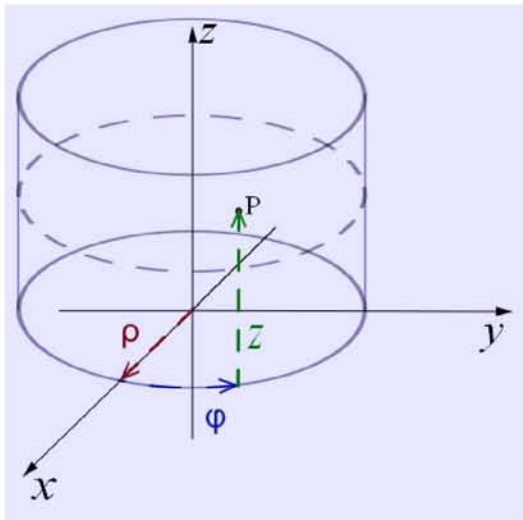
Σε πολλές περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος, η αναλυτική εύρεση των παραπάνω λύσεων δεν είναι πιθανή. Σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται χρήση υπολογιστικών μεθόδων, μία εκ των οποίων είναι και η Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments), με βάση την οποία επιλύονται διάφορα προβλήματα στην παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

2.1 Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Στην εικόνα 2.1 φαίνονται οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) του σημείου P . Η φ αποτελεί την γωνία προβολής του ρ στο επίπεδο xy με τον θετικό άξονα x , η ρ είναι η απόσταση του P από τον άξονα z και η z είναι όμοια με τις Καρτεσιανές Συντεταγμένες.



Εικόνα 2.1. Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Οι (ρ, φ, z) προκύπτουν από τις Καρτεσιανές Συντεταγμένες (x, y, z) ως εξής:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι:

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}, \quad \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}, \quad \hat{z} = \hat{z}$$

Οι απειροστές μετατοπίσεις είναι:

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\varphi = \rho d\varphi, \quad dl_z = dz, \quad dl = d\rho \hat{\rho} + d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$$

Και το στοιχείο όγκου είναι: $d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$.

2.2 Κυματική εξίσωση και εξίσωση Helmholtz

Έστω ότι έχουμε την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u. \quad (2.2.1)$$

Υποθέτουμε πως η συνάρτηση $u(\mathbf{r}, t)$ μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων, συγκεκριμένα της $\psi(\mathbf{r})$ η οποία είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή t και της $T(t)$ η οποία είναι ανεξάρτητη από το \mathbf{r} . Καταλήγουμε λοιπόν στη μορφή:

$$u(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})T(t). \quad (2.2.2)$$

Αντικαθιστώντας την (2.2.2) στη (2.2.1) παίρνουμε:

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (2.2.3)$$

Παρατηρούμε πως το αριστερό μέρος της (2.2.3) εξαρτάται μόνο από το \mathbf{r} , ενώ το δεξί της μέλος εξαρτάται μόνο από το t , οπότε η σχέση αυτή θα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν και τα δύο μέρη ισούνται με μια σταθερά. Παίρνουμε λοιπόν τις σχέσεις:

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = -k^2 \quad (2.2.4)$$

και

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \quad (2.2.5).$$

Τροποποιώντας τη σχέση (2.2.4) καταλήγουμε στην εξίσωση Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

η οποία αναπαριστά μια μορφή της κυματικής εξίσωσης που είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

2.3 Λύση της εξίσωσης Helmholtz

Η εξίσωση Helmholtz $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0. \quad (2.3.1)$$

Οι μερικές της λύσεις μπορούν να βρεθούν με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και ονομάζονται κυλινδρικές κυματικές εξισώσεις. Αν υποθέσουμε ότι η ψ έχει τη μορφή:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (2.3.2)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.3.1) αντικαθιστώντας την ψ από την (2.3.2) και διαιρώντας με $P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$:

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (2.3.3)$$

Στην (2.3.3) παρατηρούμε πως όλοι οι όροι εκτός του τετάρτου είναι ανεξάρτητοι από την z , το οποίο σημαίνει πως ο τέταρτος όρος είναι σταθερός, ή:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + h^2Z = 0. \quad (2.3.4)$$

Η λύση της (2.3.4) είναι γνωστή και είναι η:

$$Z(z) = A_h e^{-jhz} + B_h e^{jhz}. \quad (2.3.5)$$

Άρα, έχοντας υπόψη την (2.3.4) και πολλαπλασιάζοντας με ρ^2 η (2.3.3) απλοποιείται σε:

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (k^2 - h^2)\rho^2 = 0. \quad (2.3.6)$$

Στην (2.3.6) παρατηρούμε πως ο τρίτος όρος εξαρτάται μόνο από τη φ και οι υπόλοιποι όροι εξαρτούνται μόνο από τη ρ , οπότε μπορεί να ξαναγραφτεί ως δύο εξισώσεις:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho} + (k^2 - h^2)\rho^2 = m^2. \quad (2.3.8)$$

Οι (2.3.7) και (2.3.8) μπορούν να ξαναγραφτούν ως:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (2.3.9)$$

$$\rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + [(k_\rho\rho)^2 - m^2]P = 0. \quad (2.3.10)$$

Η λύση της (2.3.9) είναι γνωστή και είναι η:

$$\Phi(\varphi) = c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi. \quad (2.3.11)$$

Η λύση της (2.3.10) είναι επίσης γνωστή και είναι η:

$$P(\rho) = \alpha_m J_m(k_\rho\rho) + b_m Y_m(k_\rho\rho). \quad (2.3.12)$$

Ως J_m και Y_m συμβολίζονται οι κυλινδρικές εξισώσεις Bessel του πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Παίρνοντας τις λύσεις από τις (2.3.5), (2.3.11) και (2.3.12) και αντικαθιστώντας στην (2.3.2) παίρνουμε μία μερική λύση της (2.3.1):

$$\psi(\rho, \varphi, z) = [\alpha_m J_m(k_\rho\rho) + b_m Y_m(k_\rho\rho)][c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi][A_h e^{-jhz} + B_h e^{jhz}]$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (2.3.1) θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός όλων των πιθανών λύσεων:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_m \int [\alpha_m J_m(k_\rho\rho) + b_m Y_m(k_\rho\rho)][c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi] \times [A_h e^{-jhz} + B_h e^{jhz}] dh .$$

2.4 Οι εγκάρσιες συνιστώσες των ηλεκτρικών και μαγνητικών κυμάτων

Ένας ομοιόμορφος κυματοδηγός μπορεί να υποστηρίξει εγκάρσιους ηλεκτρικούς (TE) και εγκάρσιους μαγνητικούς (TM) ρυθμούς κυματοδότησης. Ρυθμός κυματοδότησης είναι η μετρούμενη ένταση πεδίου σε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Οι εγκάρσιες συνιστώσες για τον TE ρυθμό υπολογίζονται ως εξής:

$$E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{k_\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (2.4.1)$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad (2.4.2)$$

$$H_\rho = -\frac{jk_z}{k_\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad (2.4.3)$$

$$H_\varphi = -\frac{jk_z}{k_\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \quad (2.4.4)$$

Οι εγκάρσιες συνιστώσες για τον TM ρυθμό υπολογίζονται ως εξής:

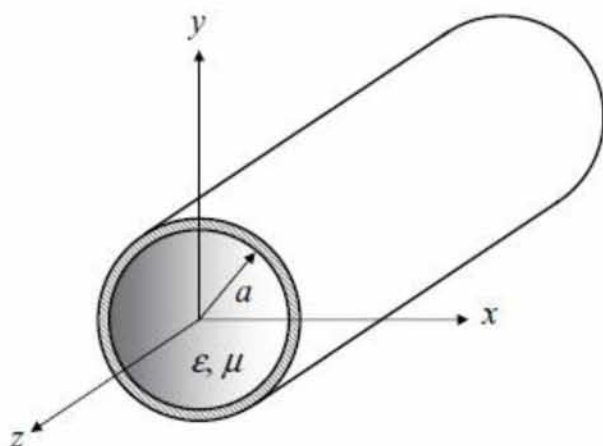
$$E_\rho = -\frac{jk_z}{k_\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (2.4.5)$$

$$E_\varphi = -\frac{jk_z}{k_\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (2.4.6)$$

$$H_\rho = \frac{j\omega\varepsilon}{k_\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (2.4.7)$$

$$H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (2.4.8)$$

2.5 Ανάλυση των TM και TE ρυθμών σε κυματοδηγό κυκλικής διατομής



Εικόνα 2.2. Κυματοδηγός κυκλικής διατομής

Στην εικόνα 2.2 φαίνεται ένας κυματοδηγός κυκλικής διατομής, ακτίνας a , ο οποίος είναι ομοιόμορφα γεμισμένος με αγώγιμο υλικό με δεκτικότητα ϵ και διαπερατότητα μ . Στην ενότητα 2.2 υπολογίσαμε τη συνάρτηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος ως:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = [\alpha_m J_m(k_\rho \rho) + b_m Y_m(k_\rho \rho)][c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi][A_h e^{-jhz} + B_h e^{jhz}]. \quad (2.5.1)$$

Αυτό που πρέπει να κάνουμε τώρα είναι να υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών της (2.5.1) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος. Ξεκινάμε την ανάλυσή μας για τους TM ρυθμούς.

Αρχικά, υποθέτουμε πως το κύμα διαδίδεται προς την κατεύθυνση $+z$, άρα ο όρος $B e^{jhz}$ θα πρέπει να φύγει, συνεπώς

$$B_h = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

Επίσης, η ψ πρέπει να είναι πεπερασμένη, άρα ο όρος $b_m Y_m(k_\rho \rho)$ πρέπει να φύγει, διότι η Y_m τείνει στο άπειρο για πολύ μικρά ορίσματα, συνεπώς

$$b_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Η φ εκτελεί πλήρη περιστροφή από 0 έως 2π , άρα το m θα έχει μοναδική λύση η οποία θα είναι ακέραια.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, και συμπτύσσοντας όλες τις σταθερές στην C_1 η (2.5.1) γίνεται:

$$E_z = C_1 J_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}.$$

Γνωρίζουμε ότι $E_z(\alpha, \varphi, z) = 0$. Ο μοναδικός τρόπος για να μηδενιστεί η E_z είναι να μηδενιστεί η $J_m(k_\rho \rho)$, οπότε

$$J_m(k_\rho \alpha) = 0 \Rightarrow k_\rho \alpha = \chi_{mn} \Rightarrow k_\rho = \frac{\chi_{mn}}{\alpha},$$

όπου με χ_{mn} συμβολίζουμε τη n -οστή ρίζα της J_m .

Η σταθερά διάδοσης του TM_{mn} ρυθμού υπολογίζεται ως εξής:

$$k_z^{TM} = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\chi_{mn}}{\alpha}\right)^2}.$$

Έχοντας υπολογίσει την E_z , μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8) της ενότητας 2.4 για να πάρουμε τις εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού κύματος, για τον TM_{mn} ρυθμό.

$$E_\rho = -C_1 \frac{jk_z}{k_\rho} J'_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = \mp C_1 \frac{jm k_z}{\rho k_\rho^2} J_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}$$

$$H_\rho = \pm C_1 \frac{jm \omega \epsilon}{\rho k_\rho^2} J_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}$$

$$H_\varphi = -C_1 \frac{j \omega \epsilon}{k_\rho} J'_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}$$

Περνώντας τώρα στους TE ρυθμούς, ξεκινάμε πάλι από την εξίσωση του κύματος:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = [\alpha_m J_m(k_\rho \rho) + b_m Y_m(k_\rho \rho)] [c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi] [A_h e^{-jh z} + B_h e^{jh z}]. \quad (2.4.1)$$

Οι σταθερές B_h και b_m θα πρέπει να είναι 0 για όλα τα m και h , διότι και πάλι ισχύουν οι ίδιες συνθήκες. Επίσης το m θα έχει μοναδική λύση η οποία θα είναι ακέραια. Άρα, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και συμπτυσσοντας όλες τις σταθερές στην C_2 , για τους TE ρυθμούς η (2.5.1) γίνεται:

$$H_z = C_2 J_m(k_\rho \rho) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-jk_z z}.$$

Η συνοριακή συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την k_ρ είναι η

$$E_\varphi(\alpha, \varphi, z) = 0. \quad (2.5.2)$$

Από τη σχέση (2.4.2) της προηγούμενης ενότητας παίρνουμε:

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \frac{j\omega\mu}{k_\rho} C_2 J'_m(k_\rho \rho) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}. \quad (2.5.3)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.2) στην (2.5.3):

$$\frac{j\omega\mu}{k_\rho} C_2 J'_m(k_\rho a) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z} = 0. \quad (2.5.4)$$

Για να μηδενιστεί η (2.5.4) θα πρέπει ο όρος $J'_m(k_\rho a)$ να ισούται με 0:

$$J'_m(k_\rho a) = 0 \Rightarrow k_\rho a = \chi'_{mn} \Rightarrow k_\rho = \frac{\chi'_{mn}}{a},$$

όπου με χ'_{mn} συμβολίζουμε τη n -οστή ρίζα της J'_m .

Η σταθερά διάδοσης του TE_{mn} ρυθμού υπολογίζεται ως εξής:

$$k_z^{TE} = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\chi'_{mn}}{a}\right)^2}.$$

Έχοντας υπολογίσει την H_z , μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) της ενότητας 2.4 για να πάρουμε τις εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού κύματος, για τον TE_{mn} ρυθμό.

$$E_\rho = \mp C_2 \frac{j\omega\mu}{\rho k_\rho^2} J_m(k_\rho \rho) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}$$

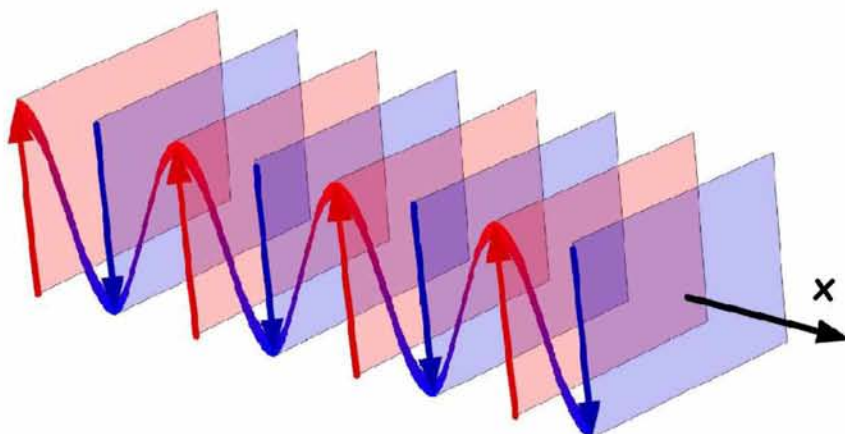
$$E_\varphi = C_2 \frac{j\omega\mu}{k_\rho} J'_m(k_\rho \rho) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}$$

$$H_\rho = -C_2 \frac{jk_z}{k_\rho} J'_m(k_\rho \rho) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}$$

$$H_\varphi = \mp C_2 \frac{jk_z}{\rho k_\rho^2} J_m(k_\rho \rho) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}.$$

2.6 Η εξίσωση επίπεδου κύματος σε μορφή άπειρου αθροίσματος

Έστω ένα επίπεδο κύμα το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$ σε ένα μέσο, με κυματαριθμό ίσο με k , όπως φαίνεται στην εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3. Επίπεδο κύμα, διαδιδόμενο προς την κατεύθυνση x .

Το κύμα αυτό εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$\psi = e^{-jkx},$$

ή, σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\psi = e^{-jk\rho\cos\varphi}.$$

Γνωρίζουμε ότι η ψ ικανοποιεί την βαθμωτή εξίσωση Helmholtz, άρα αν θέλαμε να την εκφράσουμε σε μορφή άπειρου αθροίσματος, θα μπορούσαμε να το κάνουμε εξισώνοντας την με ένα άπειρο άθροισμα κυλινδρικών κυματικών συναρτήσεων

$$\psi = e^{-jk\rho\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k\rho) e^{jn\varphi}, \quad (2.6.1)$$

και στη συνέχεια υπολογίζοντας τους συντελεστές c_n . Για να το επιτύχουμε αυτό, πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $e^{-jn\varphi}$ και έπειτα την ολοκληρώνουμε για φ από 0 έως 2π :

$$\int_0^{2\pi} e^{-jk\rho\cos\varphi} e^{-jn\varphi} d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \int_0^{2\pi} e^{jn\varphi} e^{-jm\varphi} d\varphi \Rightarrow$$

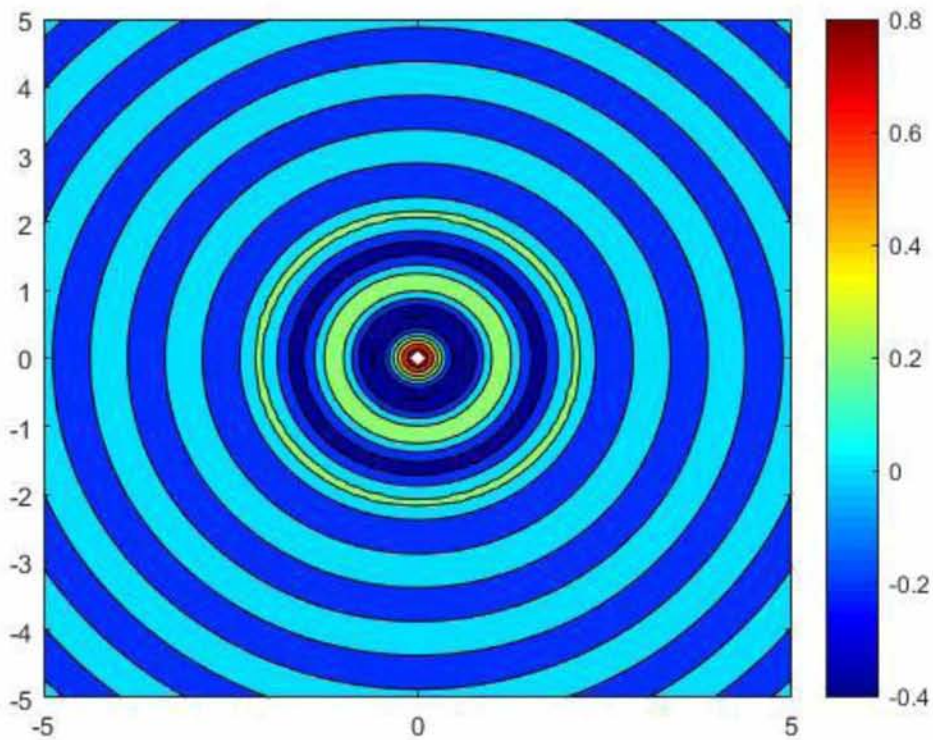
$$\int_0^{2\pi} e^{j(k\rho\cos\varphi+m\varphi)} d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \int_0^{2\pi} e^{j(n-m)\varphi} d\varphi \Rightarrow$$

$$2\pi j^m J_m(k\rho) = 2\pi c_m J_m(k\rho) \Rightarrow c_m = (-j^m) = j^{-m}.$$

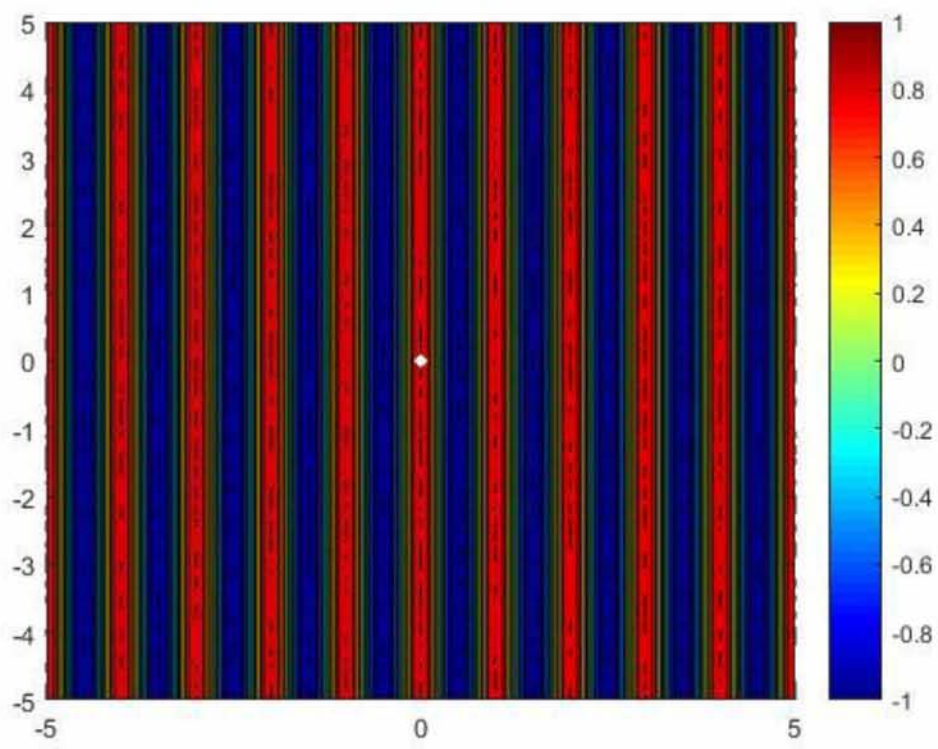
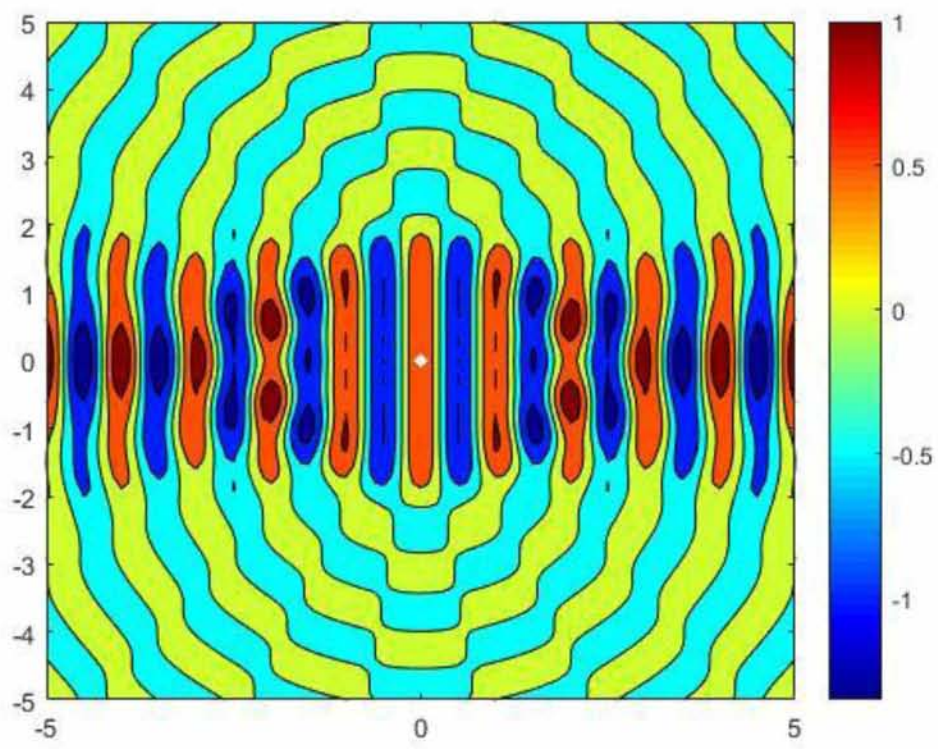
Αντικαθιστώντας στη (2.6.1), παίρνουμε:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.6.2)$$

Στην εικόνα 2.4 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της (2.6.2) για n από -1 έως 1 , -10 έως 10 και -80 έως 80 αντίστοιχα. Οι διαστάσεις x και y μετριοούνται σε πολλαπλάσια του μήκους κύματος λ . Το MATLAB script που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία της εικόνας, καθώς και τα scripts που χρησιμοποιήθηκαν για τις γραφικές παραστάσεις στην υπόλοιπη εργασία, βρίσκονται στο παράρτημα.



Εικόνα 2.4. Γραφικές παραστάσεις της (2.5.2). (συνέχεια στην επόμενη σελίδα.)



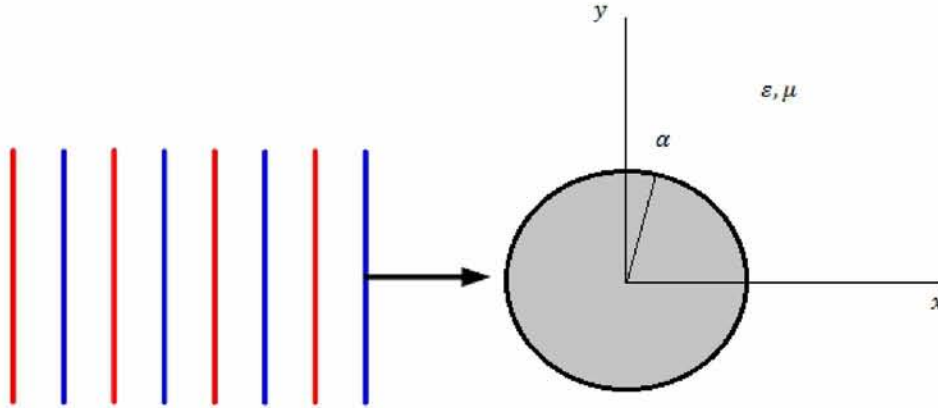
2.7 Σκέδαση

Το φαινόμενο της σκέδασης συμβαίνει όταν υπάρχει κάποιο εμπόδιο στο μέσο μέσα στο οποίο ταξιδεύει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, οι διαστάσεις του οποίου είναι κατά συνήθη θεώρηση παρόμοιες με το μήκος κύματος λ .

Σε αυτήν την ενότητα θα λύσουμε το πρόβλημα της σκέδασης, υπολογίζοντας το σκεδαζόμενο πεδίο στην περίπτωση που το εμπόδιο αποτελείται από έναν αγωγίμο η διηλεκτρικό κύλινδρο, κάνοντας χρήση της μετατροπής ενός επίπεδου κύματος σε κυλινδρικό, την οποία παίρνουμε από τη σχέση (2.6.2).

2.7.1 Αγώγιμος Κύλινδρος

Έστω ένας αγώγιμος κύλινδρος ακτίνας α , που βρίσκεται σε ένα ομογενές μέσο με δεκτικότητα ε και διαπερατότητα μ .



Εικόνα 2.5. Σκέδαση επίπεδου κύματος από έναν αγώγιμο κύλινδρο.

Οποιοδήποτε κύμα που προσπίπτει στον κύλινδρο μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση ενός TM πολωμένου και ενός TE πολωμένου κύματος, τα οποία δεν έχουν συνιστώσα για το μαγνητικό και ηλεκτρικό τους πεδίο αντίστοιχα στην κατεύθυνση x . Άρα, αναλύοντας μόνο για αυτά τα δύο κύματα καλύπτουμε όλες τις περιπτώσεις.

Κάνοντας χρήση της (2.6.2), το TM πολωμένο κύμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\psi = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi}.$$

Το κύμα αυτό ονομάζεται προσπίπτον κύμα και στο εξής θα συμβολίζεται ως E_z^{inc} . Λόγω του E_z^{inc} δημιουργείται ηλεκτρικό ρεύμα στην επιφάνεια του κυλίνδρου, πράγμα που δημιουργεί ένα δεύτερο πεδίο, το οποίο ονομάζεται σκεδαζόμενο πεδίο και στο εξής θα συμβολίζεται ως E_z^{sc} . Για να εκφράσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο, χρησιμοποιούμε την κυλινδρική εξίσωση κύματος, αλλά στη θέση της συνάρτησης Bessel τοποθετούμε την συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους, διότι το πεδίο αυτό απομακρύνεται από τον κύλινδρο καθώς διαδίδεται. Η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους και n -οστού βαθμού συμβολίζεται ως $H_n^{(2)}$. Οπότε, το σκεδαζόμενο πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E_z^{sc} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.1.1)$$

Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή των σταθερών c_n . Για να το πετύχουμε αυτό χρειαζόμαστε μια συνοριακή συνθήκη. Ξέρουμε ότι το συνολικό πεδίο E_z ισούται με 0 για $\rho = \alpha$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το συνολικό πεδίο ισούται με το άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου πεδίου. Οπότε:

$$E_z(\alpha, \varphi, z) = 0 \Rightarrow E_z^{inc}(\alpha, \varphi, z) + E_z^{sc}(\alpha, \varphi, z) = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(ka) e^{jn\varphi} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(ka) e^{jn\varphi} \Rightarrow$$

$$c_n = -j^{-n} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.7.1.1) παίρνουμε:

$$E_z^{sc} = -C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, το TE πολωμένο κύμα μπορεί να εκφραστεί ως

$$H_z^{inc} = C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi},$$

και το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο ως

$$H_z^{sc} = C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.1.2)$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή των σταθερών d_n , θα κάνουμε χρήση της συνθήκης που θέλει την συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_φ να ισούται με 0, για $\rho = \alpha$.

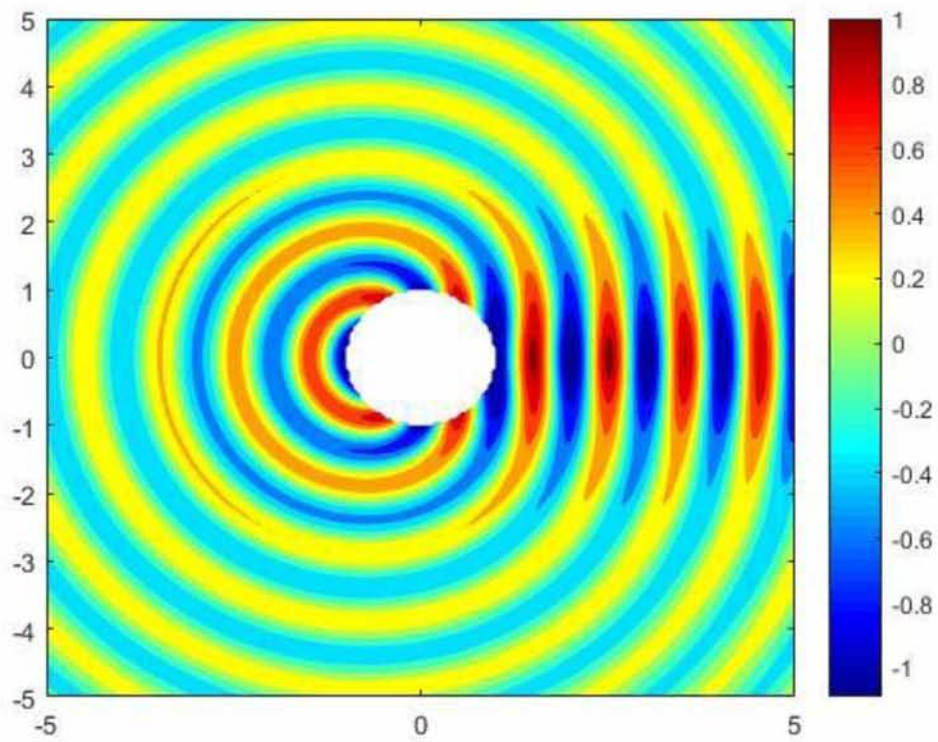
$$E_\varphi(\alpha, \varphi, z) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial (H_z^{inc} + H_z^{sc})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha} = 0 \Rightarrow$$

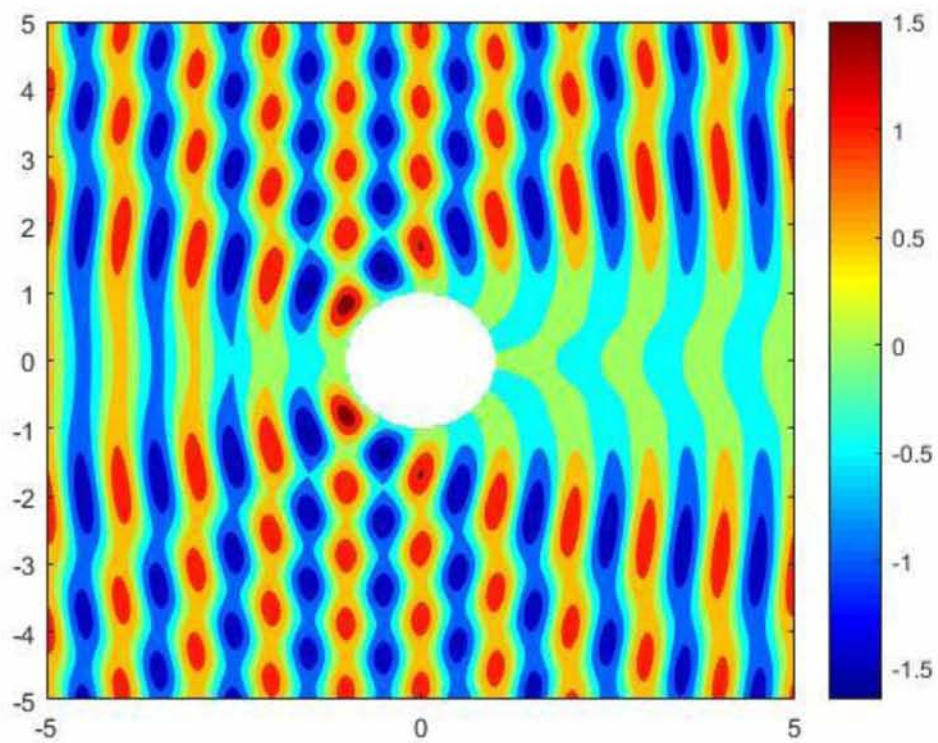
$$-\frac{1}{j\omega\epsilon} C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [j^{-n} J_n'(k\rho) + d_n H_n^{(2)'}] e^{jn\varphi} = 0 \Rightarrow d_n = -j^{-n} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.7.1.2) παίρνουμε:

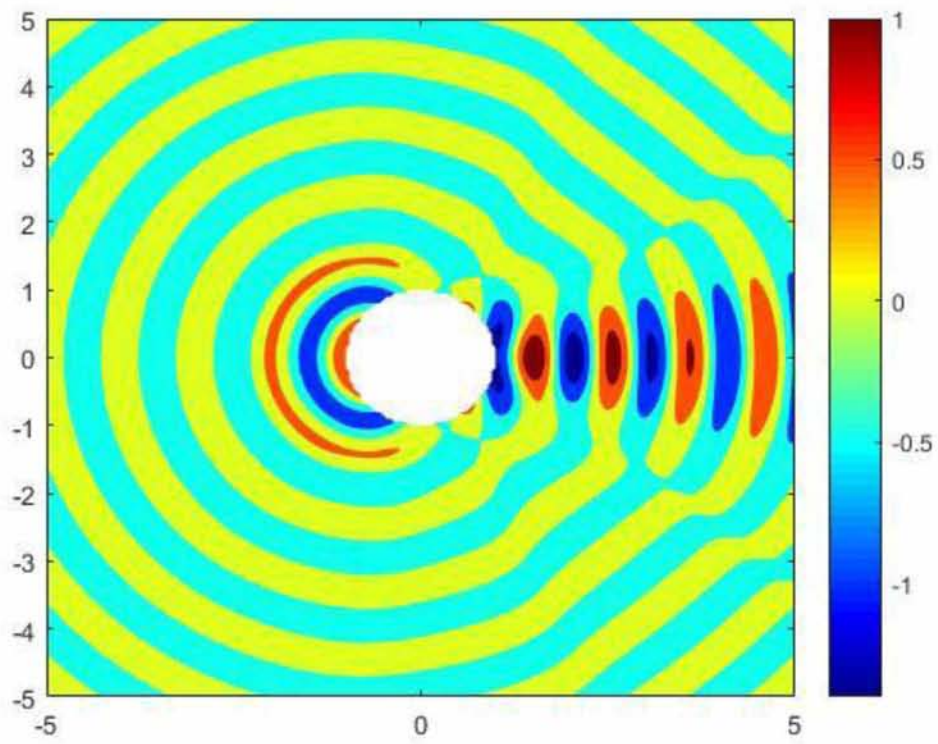
$$H_z^{sc} = -C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}.$$



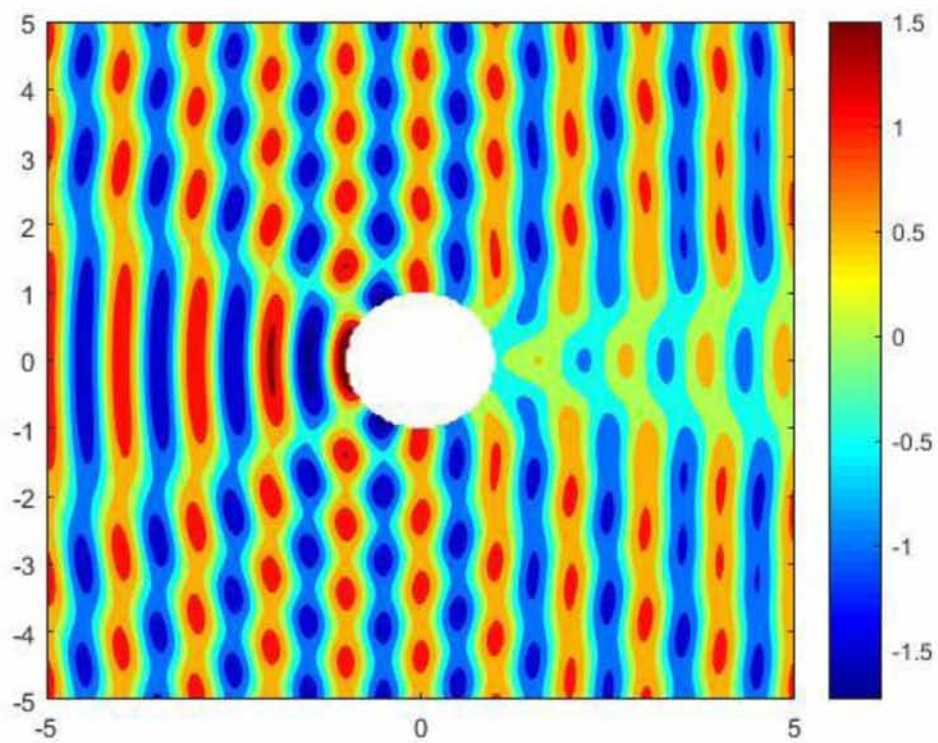
Εικόνα 2.6. Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο από αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ .



Εικόνα 2.7. Συνολικό ηλεκτρικό πεδίο για αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ .



Εικόνα 2.8. Σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο από αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ .



Εικόνα 2.9. Συνολικό μαγνητικό πεδίο για αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ .

2.7.2 Διηλεκτρικός κύλινδρος

Επιστρέφουμε στο σενάριο της εικόνας 2.5, αλλά αυτήν τη φορά υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό δεκτικότητας ϵ_d και διαπερατότητας μ_d , και βρίσκεται σε μέσο με δεκτικότητα ϵ και διαπερατότητα μ . Για το προσπίπτον κύμα ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με την περίπτωση του αγωγίμου κυλίνδρου. Έστω $\epsilon_r = \epsilon_d/\epsilon$ η σχετική δεκτικότητα, $\mu_r = \mu_d/\mu$ η σχετική διαπερατότητα, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ η σύνθετη αντίσταση του μέσου, $\eta_d = \sqrt{\mu_d/\epsilon_d}$ η σύνθετη αντίσταση του διηλεκτρικού υλικού και $k_d = \omega\sqrt{\epsilon_d\mu_d}$ ο κυματαριθμός για το διηλεκτρικό υλικό, όπου $\omega = 2\pi f$ με f τη συχνότητα λειτουργίας του συστήματος.

Ξεκινάμε με την περίπτωση του ΤΜ πολωμένου προσπίπτοντος κύματος. Έστω E_z^{int} το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου, το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε σαν άπειρο άθροισμα κυλινδρικών κυματικών συναρτήσεων ως:

$$E_z^{int} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_d \rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.1)$$

Από την ανάλυση για τον αγωγίμο κύλινδρο παίρνουμε:

$$E_z^{inc} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.2)$$

$$E_z^{sc} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.3)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}. \quad (2.7.2.4)$$

Εφαρμόζοντας την (2.7.2.4) στις (2.7.2.1), (2.7.2.2) και (2.7.2.3) παίρνουμε:

$$H_\varphi^{int} = \frac{C_1}{j\eta_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n'(k_d \rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.5)$$

$$H_\varphi^{inc} = \frac{C_1}{j\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n'(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.6)$$

$$H_\varphi^{sc} = \frac{C_1}{j\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)'}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.7)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο για τις παραπάνω σχέσεις πρέπει να είναι συνεχές για $\rho = \alpha$, οπότε

$$E_z^{int}(\alpha, \varphi, z) = E_z^{inc}(\alpha, \varphi, z) + E_z^{sc}(\alpha, \varphi, z) \Rightarrow$$

$$C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_d a) e^{jn\varphi} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\alpha) e^{jn\varphi} + C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)}(k\alpha) e^{jn\varphi} \Rightarrow$$

$$c_n J_n(k_d a) = j^{-n} J_n(k\alpha) + d_n H_n^{(2)}(k\alpha). \quad (2.7.2.8)$$

και

$$H_\varphi^{int}(\alpha, \varphi, z) = H_\varphi^{inc}(\alpha, \varphi, z) + H_\varphi^{sc}(\alpha, \varphi, z) \Rightarrow$$

$$\frac{C_1}{j\eta_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n'(k_d \alpha) e^{jn\varphi} = \frac{C_1}{j\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n'(k\alpha) e^{jn\varphi} + \frac{C_1}{j\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)'}(k\alpha) e^{jn\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{\eta_d} c_n J_n'(k_d \alpha) = j^{-n} J_n'(k\alpha) + d_n H_n^{(2)'}(k\alpha). \quad (2.7.2.9)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των c_n και d_n , λύνοντας το σύστημα δύο εξισώσεων από τις σχέσεις (2.7.2.8) και (2.7.2.9). Η αναλυτική διαδικασία επίλυσης είναι πολύπλοκη και δεν εξυπηρετεί το σκοπό της παρούσας ενότητας, οπότε παρουσιάζουμε κατευθείαν τη λύση:

$$c_n = \frac{j^{-(n+1)}}{\pi k \alpha} \frac{2\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\mu_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J_n'(k_d a)}$$

$$d_n = -j^{-n} \frac{\sqrt{\mu_r} J_n'(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} J_n(k\alpha) J_n'(k_d a)}{\sqrt{\mu_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J_n'(k_d a)}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.7.2.1) και (2.7.2.3) παίρνουμε:

$$E_z^{int} = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^{-(n+1)}}{\pi k \alpha} \frac{2\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\mu_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J_n'(k_d a)} J_n(k_d \rho) e^{jn\varphi}$$

$$E_z^{sc} = -C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{\sqrt{\mu_r} J_n'(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} J_n(k\alpha) J_n'(k_d a)}{\sqrt{\mu_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\epsilon_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J_n'(k_d a)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}.$$

Περνάμε τώρα στην περίπτωση του ΤΕ πολωμένου προσπίπτοντος κύματος. Έστω H_z^{int} το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου, το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε σαν άπειρο άθροισμα κυλινδρικών κυματικών συναρτήσεων ως:

$$H_z^{int} = C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n J_n(k_d \rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.10)$$

Από την ανάλυση για τον αγωγίμο κύλινδρο παίρνουμε:

$$H_z^{inc} = C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.11)$$

$$H_z^{sc} = C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.12)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$E_\varphi = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}. \quad (2.7.2.13)$$

Εφαρμόζοντας την (2.6.2.13) στις (2.6.2.10), (2.6.2.11) και (2.6.2.12) παίρνουμε:

$$E_\varphi^{int} = \frac{C_2 \eta d}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n J'_n(k_d \rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.14)$$

$$E_\varphi^{inc} = \frac{C_2 \eta}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J'_n(k\rho) e^{jn\varphi} \quad (2.7.2.15)$$

$$E_\varphi^{sc} = \frac{C_2 \eta}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_n H_n^{(2)'}(k\rho) e^{jn\varphi}. \quad (2.7.2.16)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο για τις παραπάνω σχέσεις πρέπει να είναι συνεχές για $\rho = \alpha$, οπότε

$$\begin{aligned} H_z^{int}(\alpha, \varphi, z) &= H_z^{inc}(\alpha, \varphi, z) + H_z^{sc}(\alpha, \varphi, z) \Rightarrow \\ C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n J_n(k_d \alpha) e^{jn\varphi} &= C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\alpha) e^{jn\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_n H_n^{(2)}(k\alpha) e^{jn\varphi} \Rightarrow \\ c'_n J_n(k_d \alpha) &= j^{-n} J_n(k\alpha) + d'_n H_n^{(2)}(k\alpha). \quad (2.7.2.17) \end{aligned}$$

και

$$E_\varphi^{int}(\alpha, \varphi, z) = E_\varphi^{inc}(\alpha, \varphi, z) + E_\varphi^{sc}(\alpha, \varphi, z) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_2 \eta_d}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n J'_n(k_d \alpha) e^{jn\varphi} \\
&= \frac{C_2 \eta}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J'_n(k\alpha) e^{jn\varphi} + \frac{C_2 \eta}{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d'_n H_n^{(2)'}(k\alpha) e^{jn\varphi} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\eta_d}{\eta} c'_n J'_n(k_d \alpha) = j^{-n} J'_n(k\alpha) + d'_n H_n^{(2)'}(k\alpha). \quad (2.7.2.18)
\end{aligned}$$

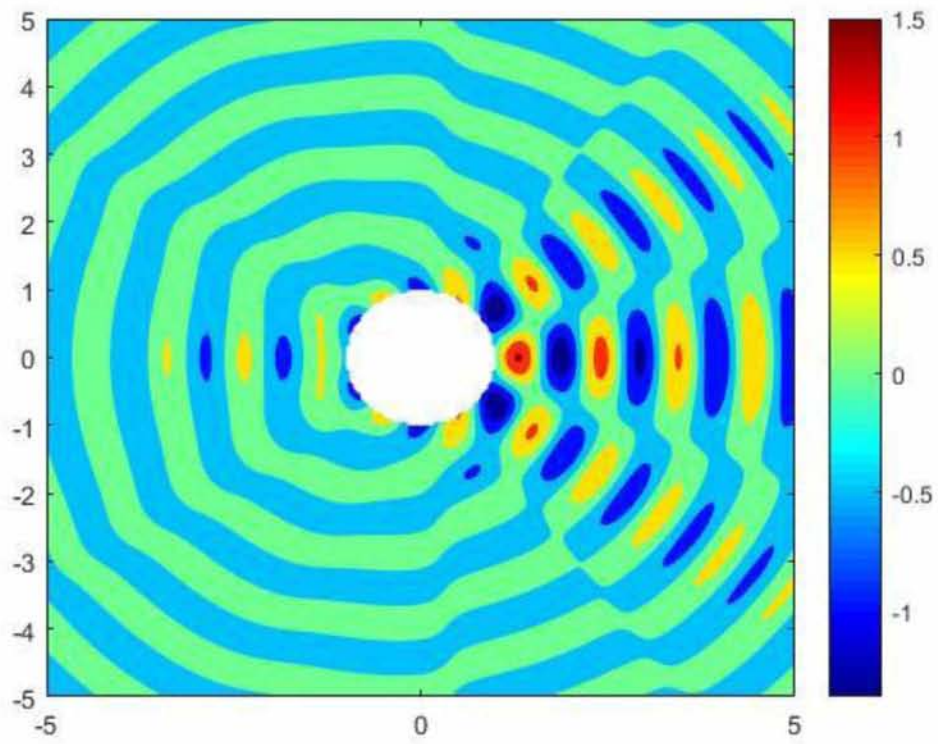
Και σε αυτήν την περίπτωση παρουσιάζουμε κατευθείαν τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2.7.2.17) και (2.7.2.18):

$$\begin{aligned}
c'_n &= \frac{j^{-(n+1)}}{\pi k \alpha} \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J'_n(k_d a)} \\
d'_n &= -j^{-n} \frac{\sqrt{\varepsilon_r} J'_n(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} J_n(k\alpha) J'_n(k_d a)}{\sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J'_n(k_d a)}.
\end{aligned}$$

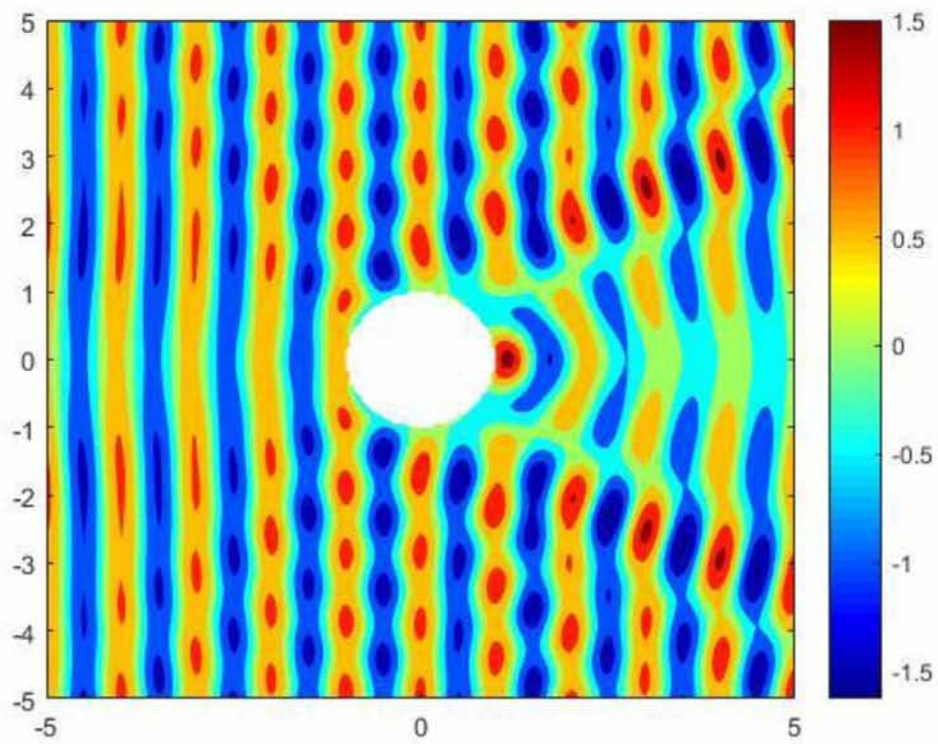
Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.7.2.10) και (2.7.2.12) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
H_z^{int} &= C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^{-(n+1)}}{\pi k \alpha} \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J'_n(k_d a)} J_n(k_d \rho) e^{jn\varphi} \\
H_z^{sc} &= -C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{\sqrt{\varepsilon_r} J'_n(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} J_n(k\alpha) J'_n(k_d a)}{\sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)'}(k\alpha) J_n(k_d a) - \sqrt{\mu_r} H_n^{(2)}(k\alpha) J'_n(k_d a)} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\varphi}.
\end{aligned}$$

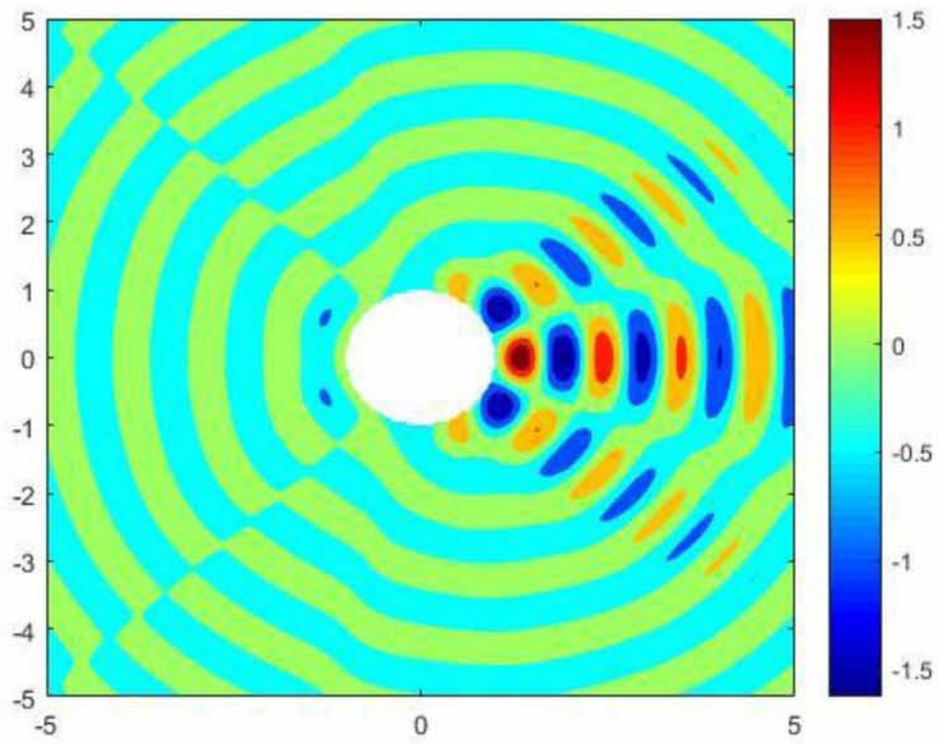
Για τις γραφικές παραστάσεις των εικόνων 2.10, 2.11, 2.12 και 2.13 θεωρούμε πως το διηλεκτρικό υλικό του κυλίνδρου έχει σχετική δεκτικότητα $\varepsilon_r = 4$ και σχετική διαπερατότητα $\mu_r = 1$, σε σχέση με το μέσο στο οποίο βρίσκεται. Επίσης θεωρούμε πως ο κύλινδρος έχει ακτίνα $a = 1\lambda$.



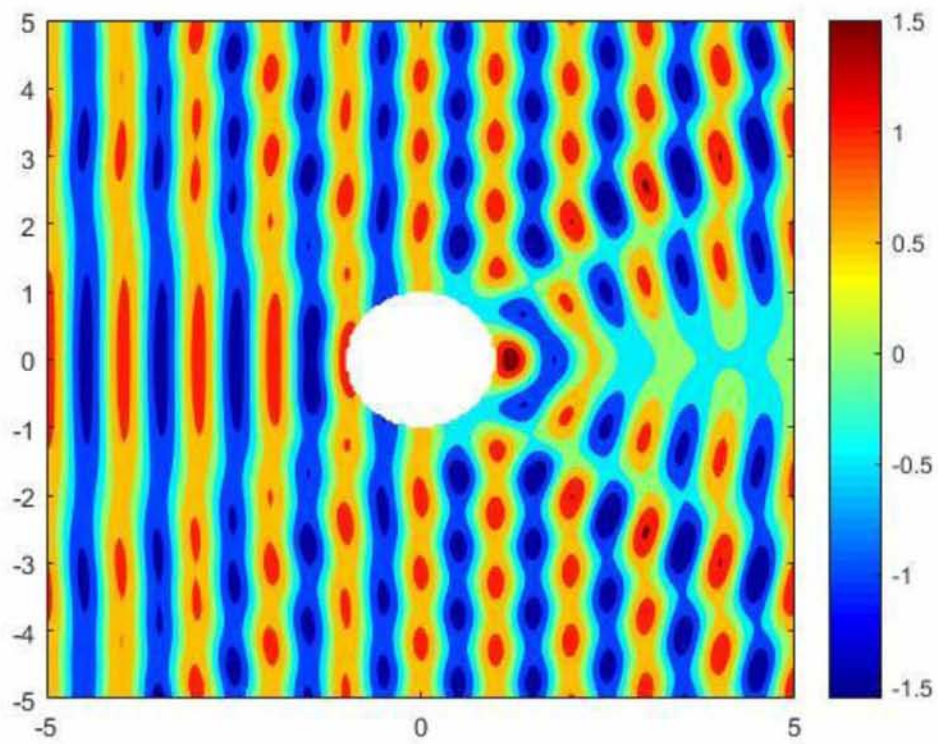
Εικόνα 2.10. Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο από διηλεκτρικό κύλινδρο.



Εικόνα 2.11. Συνολικό ηλεκτρικό πεδίο για διηλεκτρικό κύλινδρο.



Εικόνα 2.12. Σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο από διηλεκτρικό κύλινδρο.



Εικόνα 2.13. Συνολικό μαγνητικό πεδίο για διηλεκτρικό κύλινδρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η Μέθοδος των Ροπών

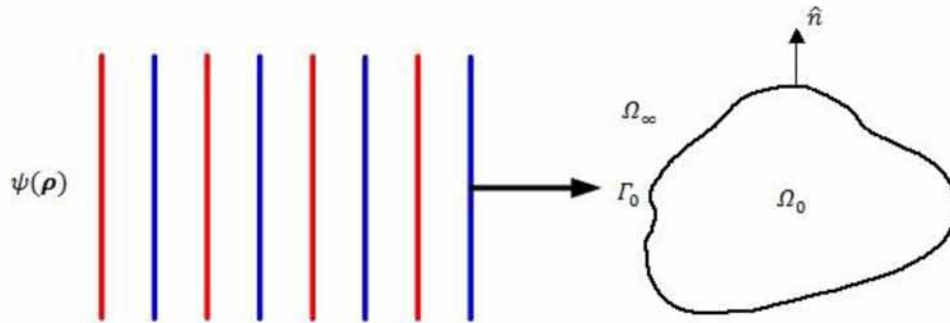
3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των ροπών (method of moments) είναι μια από τις επικρατέστερες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για υπολογιστική επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, και αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική στην επίλυση προβλημάτων ακτινοβολίας και σκέδασης.

Για να είναι η υπολογιστική επίλυση εφικτή, πρέπει η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα συνοριακών τιμών να μετατραπεί σε ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων που μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, καθιστώντας έτσι την επίλυση του μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή εφικτή.

Σημαντικό ρόλο στη διαδικασία επίλυσης παίζει η ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος λόγω του προσπίπτοντος πεδίου στο αντικείμενο που μας ενδιαφέρει, κάνοντας χρήση της μεθόδου των ροπών. Στη συνέχεια, η πυκνότητα ρεύματος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου και συνολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

3.2 Η ολοκληρωτική εξίσωση



Εικόνα 3.1. Εγκάρσια διατομή αντικειμένου σε ελεύθερο χώρο και προσπίπτον κύμα.

Έστω ένα αντικείμενο αφηρημένου σχήματος που βρίσκεται σε ελεύθερο χώρο, ο άξονας του οποίου συμπίπτει με τον άξονα z , η διατομή του οποίου παραμένει σταθερή καθώς εκτείνεται στο άπειρο στην z κατεύθυνση. Έστω, επίσης, ένα επίπεδο κύμα που παράγεται από μια πηγή $\psi(\boldsymbol{\rho})$ το οποίο δεν αλλάζει στην κατεύθυνση z και προσπίπτει στο αντικείμενο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1. Το \hat{n} συμβολίζει το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το Γ_0 την περίμετρο της διατομής του αντικειμένου, το Ω_0 τον χώρο στο εσωτερικό του αντικειμένου και το Ω_∞ τον χώρο στο εξωτερικό του.

Λόγω ανεξαρτησίας από την συντεταγμένη z , το πρόβλημα ανάγεται σε δισδιάστατο. Έστω $k_0 = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός. Η συνάρτηση κύματος $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο Ω_∞ , η οποία σε αυτήν την περίπτωση είναι μη ομογενής:

$$\nabla^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) + k_0^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) = \psi(\boldsymbol{\rho}). \quad (3.2.1)$$

Το πρώτο βήμα για τη διαμόρφωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι η χρήση της συνάρτησης Green ελεύθερου χώρου G_0

$$G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|),$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz της σχέσης (3.2.1) διότι

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') + k_0^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (3.2.2)$$

όπου με δ συμβολίζουμε τη συνάρτηση delta του Dirac.

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3.2.1) με $G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$, τη σχέση (3.2.2) με $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ και αφαιρώντας την (3.2.2) από την (3.2.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) - \varphi(\boldsymbol{\rho}) \nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') + G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') k_0^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) - \varphi(\boldsymbol{\rho}) k_0^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \\ = G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) + \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \Rightarrow \end{aligned}$$

$$G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) - \varphi(\boldsymbol{\rho}) \nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) + \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'). \quad (3.2.3)$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε την (3.2.3) στην περιοχή εξωτερικά του αντικειμένου:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\infty} [G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) - \varphi(\boldsymbol{\rho}) \nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')] d\Omega \\ = \iint_{\Omega_\infty} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) + \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d\Omega. \end{aligned}$$

Ορίζοντας ως Ω_ψ την περιοχή όπου $\psi(\boldsymbol{\rho}) \neq 0$, η παραπάνω σχέση ξαναγράφεται ως:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\infty} [G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{\rho}) - \varphi(\boldsymbol{\rho}) \nabla^2 G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')] d\Omega \\ = \iint_{\Omega_\psi} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) d\Omega + \iint_{\Omega_\infty} \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d\Omega. \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με Γ_0 έναν κύκλο η ακτίνα του οποίου τείνει στο άπειρο και εφαρμόζοντας το θεώρημα Green στο αριστερό μέλος της σχέσης (3.2.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right] d\Gamma + \oint_{\Gamma_\infty} \left[G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right. \\ \left. - \varphi(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n} \right] d\Gamma - \iint_{\Omega_\psi} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) d\Omega \\ = \iint_{\Omega_\infty} \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d\Omega. \end{aligned}$$

Όμως, το κύμα πρέπει να φθίνει όσο απομακρύνεται από την πηγή, συνεπώς το ολοκλήρωμα στον κύκλο με ακτίνα που τείνει στο άπειρο θα ισούται με 0, άρα:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right] d\Gamma - \iint_{\Omega_\psi} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}) d\Omega \\ = \iint_{\Omega_\infty} \varphi(\boldsymbol{\rho}) \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d\Omega = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{\rho}'), & \boldsymbol{\rho}' \in \Omega_\infty \\ 0, & \boldsymbol{\rho}' \in \Omega_0 \end{cases}. \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

Αυτό που θέλουμε να πετύχουμε είναι η διαμόρφωση μια ολοκληρωτικής εξίσωσης στο σύνορο του αντικειμένου για τον υπολογισμό της φ , για τον οποίο σκοπό βοηθάει να αλλάξουμε θέσεις στα $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\rho}'$ στη σχέση (3.2.5), καταλήγοντας στην:

$$\oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] d\Gamma' - \iint_{\Omega_\psi} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}') d\Omega' = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_0 \end{cases}. \quad (3.2.6)$$

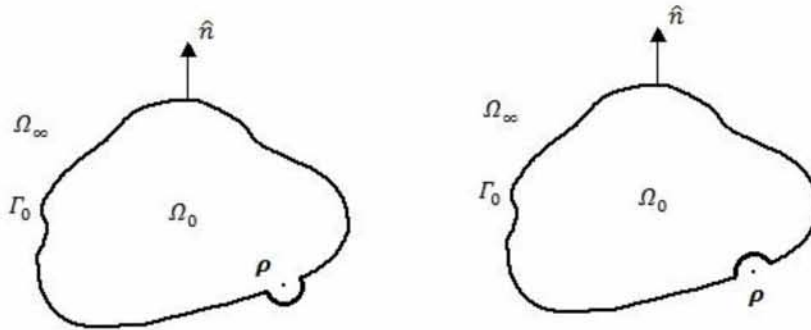
Παρατηρούμε πως τα $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\rho}'$ στην έκφραση της G_0 εμφανίζονται ως διαφορά μέσα σε απόλυτη τιμή, οπότε δεν χρειάζεται να αλλάξουν οι θέσεις τους. Το αριστερό μέρος της σχέσης (3.2.6) αποτελείται από δύο ολοκληρώματα, το πρώτο εκ των οποίων υπολογίζεται στο σύνορο του αντικείμενου του εκάστοτε προβλήματος. Αν δεν έχουμε κάποιο αντικείμενο, το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται και μένει μόνο το δεύτερο, το οποίο στην ουσία αναπαριστά το προσπίπτον κύμα φ^{inc} :

$$\varphi^{inc}(\boldsymbol{\rho}) = - \iint_{\Omega_\psi} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}') d\Omega'.$$

Συνεπώς, μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση (3.2.6) ως:

$$\varphi^{inc}(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_0 \end{cases}. \quad (3.2.7)$$

Παρατηρώντας την (3.2.7), συμπεραίνουμε πως εάν γνωρίζουμε τις τιμές του πεδίου και της παραγώγου του πεδίου στο σύνορο του αντικείμενου που μας ενδιαφέρει ($\varphi(\boldsymbol{\rho}')$ και $\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}$ αντίστοιχα), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο επιθυμούμε, πλην του συνόρου, διότι σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = 0$.



Εικόνα 3.2. Διαμόρφωση του συνόρου για αποφυγή μηδενισμού του $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|$.

Για να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό, θα πρέπει να εκφράσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα στη σχέση (3.2.7) ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων, το πρώτο εκ των οποίων θα είναι το

$$\oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] d\Gamma'$$

αλλά αφαιρώντας μια κυκλική περιοχή ακτίνας ε γύρω από το σημείο $\boldsymbol{\rho}$, και το δεύτερο θα είναι το ολοκλήρωμα της

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}$$

στη μισή κυκλική περιοχή ακτίνας ε , καθώς το ε θα τείνει στο 0, δηλαδή:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] d\Gamma' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_0 - 2\varepsilon} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4j} \int_0^\pi \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - H_0^{(2)}(k\varepsilon) \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \varepsilon d\varphi \right\}, \quad (3.2.8) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της

$$G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|).$$

Για πολύ μικρά ορίσματα όπως το ε , η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους μηδενικού βαθμού παίρνει τη μορφή:

$$H_0^{(2)}(\varepsilon) = 1 - j \ln\left(\frac{\gamma \varepsilon}{2}\right), \quad \gamma \approx 1.781,$$

άρα:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4j} \int_0^\pi \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial H_0^{(2)}(k\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - H_0^{(2)}(k\varepsilon) \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \varepsilon d\varphi = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4j} \int_0^\pi \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \left[1 - j \ln\left(\frac{\gamma k \varepsilon}{2}\right) \right]}{\partial \varepsilon} - \left[1 - j \ln\left(\frac{\gamma k \varepsilon}{2}\right) \right] \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] \varepsilon d\varphi = \\ & \quad - \frac{1}{2} \varphi(\boldsymbol{\rho}). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.6) παίρνουμε

$$\varphi^{inc}(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{\Gamma_0} \left[\varphi(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} \right] d\Gamma' = \frac{1}{2} \varphi(\boldsymbol{\rho}) \quad (3.2.9)$$

για $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0$, η οποία είναι η ολοκληρωτική εξίσωση που ψάχνουμε.

Περνώντας σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, έστω ότι έχουμε το πρόβλημα σκέδασης από έναν αγωγίμο κύλινδρο άπειρου μήκους, όπως δείξαμε στην εικόνα 2.5. Έστω $Z_0 = \mu_0/\varepsilon_0$, $s_{i,z}(\boldsymbol{\rho})$ η πηγή του προσπίπτοντος πεδίου και $J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}')$ η επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος στο σύνορο του κυλίνδρου.

Για την περίπτωση TM πόλωσης, το ηλεκτρικό πεδίο $E_z(\boldsymbol{\rho})$ θα πρέπει να ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 E_z(\boldsymbol{\rho}) + k_0^2 E_z(\boldsymbol{\rho}) = jk_0 Z_0 s_{i,z}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty.$$

Στο σύνορο του κυλίνδρου θα πρέπει να ισχύει:

$$E_z(\boldsymbol{\rho}') = 0, \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0$$

$$\frac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} = jk_0 Z_0 J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}'), \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.2.9), παίρνουμε:

$$E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma' = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0.$$

Εάν από την παραπάνω σχέση υπολογίσουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος $J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}')$ στο σύνορο του κυλίνδρου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο E_z σε οποιοδήποτε σημείο $\boldsymbol{\rho}$ του Ω_∞ από τη σχέση

$$E_z(\boldsymbol{\rho}) = E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma', \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty. \quad (3.2.10)$$

Για την περίπτωση TE πόλωσης, το ηλεκτρικό πεδίο $H_z(\boldsymbol{\rho})$ θα πρέπει να ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 H_z(\boldsymbol{\rho}) + k_0^2 H_z(\boldsymbol{\rho}) = -[\nabla \times \mathbf{s}_i(\boldsymbol{\rho})], \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty.$$

Στο σύνορο του κυλίνδρου θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial H_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} = 0, \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0$$

$$H_z(\boldsymbol{\rho}') = -J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}'), \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.2.9), παίρνουμε:

$$H_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma' = -\frac{1}{2} J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0.$$

Εάν από την παραπάνω σχέση υπολογίσουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος $J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}')$ στο σύνορο του κυλίνδρου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο E_z σε οποιοδήποτε σημείο $\boldsymbol{\rho}$ του Ω_∞ από τη σχέση

$$H_z(\boldsymbol{\rho}) = H_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma', \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty. \quad (3.2.11)$$

3.3 Οι συναρτήσεις βάσης και βάρους

Κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με τη μέθοδο των ροπών, διαμορφώνουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, από την οποία μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την άγνωστη επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος ή φορτίου στο σύνορο του εκάστοτε αντικειμένου. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε όμως είναι ότι η πυκνότητα αυτή είναι μέρος ενός ολοκληρώματος, συνεπώς πρέπει να βρούμε έναν τρόπο για να λύσουμε ως προς την άγνωστη πυκνότητα υπολογιστικά. Για να το πετύχουμε αυτό, θα ξεκινήσουμε από μια απλή περίπτωση, και στη συνέχεια θα επεκταθούμε στη λύση των ολοκληρωτικών εξισώσεων της προηγούμενης ενότητας.

Έστω S η επιφάνεια ενός αντικειμένου, $\rho_s(\mathbf{r}')$ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του αντικειμένου αυτού και $\varphi(\mathbf{r})$ το δυναμικό που δημιουργείται στο σημείο \mathbf{r} λόγω της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος, το οποίο θα είναι σταθερό στην επιφάνεια του αντικειμένου. Εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι άγνωστη, και το δυναμικό στην επιφάνεια του αντικειμένου γνωστό και ίσο με Φ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την $\rho_s(\mathbf{r}')$ από την εξής ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\Phi = \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_s(\mathbf{r}') dS', \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S, \quad (3.3.1)$$

όπου

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

η εξίσωση του Green. Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε την $\rho_s(\mathbf{r}')$ με τέτοιο τρόπο, ώστε η επίλυση της (3.3.1) μέσω υπολογιστή να είναι εφικτή. Για να το πετύχουμε αυτό, θα προσεγγίσουμε την $\rho_s(\mathbf{r}')$ ως πεπερασμένο άθροισμα συναρτήσεων βάσης v_n πολλαπλασιασμένες με κατάλληλους συντελεστές c_n :

$$\rho_s(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N c_n v_n(\mathbf{r}'). \quad (3.3.2)$$

Στην ουσία υποδιαιρέσαμε την επιφάνεια S σε N επιφάνειες, και τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε καθεμία από αυτές, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερή εάν οι επιφάνειες είναι αρκετά μικρές. Αντικαθιστώντας την (3.3.2) στην (3.3.1) παίρνουμε:

$$\Phi = \sum_{n=1}^N c_n \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_n(\mathbf{r}') dS'. \quad (3.3.3)$$

Για να καταστήσουμε την παραπάνω εξίσωση επιλύσιμη από έναν υπολογιστή, θα πρέπει να την μετατρέψουμε σε εξίσωση με πίνακες. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν την εξίσωση (3.3.3) με ένα σύνολο συναρτήσεων βάρους $w_m(\mathbf{r})$, και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε σε όλη την επιφάνεια S :

$$\sum_{n=1}^N c_n \iint_S w_m(\mathbf{r}) \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_n(\mathbf{r}') dS' dS = \iint_S w_m(\mathbf{r}) \Phi dS, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.4)$$

Αν συμβολίσουμε το γινόμενο των δύο διπλών ολοκληρωμάτων στο αριστερό μέρος της (3.3.4) ως A_{mn} και το δεξί της μέλος ως b_m , τότε η (3.3.4) ξαναγράφεται ως:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} c_n = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

η οποία εάν λυθεί δίνει μια προσεγγιστική λύση για την $\rho_s(\mathbf{r}')$.

Συγκεκριμένα, αν με s_n συμβολίσουμε τη n -οστή επιφάνεια και με \mathbf{r}_m το κέντρο της m -οστής επιφάνειας, μια συνάρτηση βάσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η συνάρτηση παλμού:

$$v_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1, & \mathbf{r}' \in s_n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

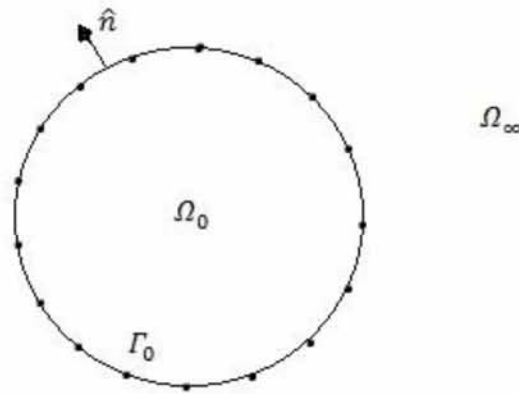
και μια συνάρτηση βάρους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η

$$w_m(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m),$$

η οποία στην ουσία παίρνει υπόψη την σχέση (3.3.3) μόνο στο κέντρο της m -οστής επιφάνειας. Η τεχνική αυτή ονομάζεται αντιστοίχιση σημείων (point matching).

3.4 Σκέδαση από αγωγίμο κύλινδρο

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα σκέδασης από έναν αγωγίμο κύλινδρο άπειρου μήκους. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντιστοίχισης σημείων και παλμικές συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης, πρέπει πρώτα να χωρίσουμε το σύνορο της εγκάρσιας τομής του κυλίνδρου σε N τμήματα.



Εικόνα 3.3. Χωρισμός του συνόρου σε N τμήματα.

Έχουμε ήδη διαμορφώσει τις ολοκληρωτικές εξισώσεις που χρειαζόμαστε στην ενότητα 3.2. Για την περίπτωση TM πόλωσης, η ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου είναι η

$$E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma' = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0. \quad (3.4.1)$$

Έστω $\boldsymbol{\rho}_n$ το κέντρο του n -οστού τμήματος του συνόρου και s_n το μήκος του n -οστού τμήματος του συνόρου (το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι ίδιο για όλα τα τμήματα). Εφαρμόζοντας αντιστοίχιση σημείων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} J_n = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.2)$$

όπου

$$A_{mn} = jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') d\Gamma'$$

$$b_m = E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}_m).$$

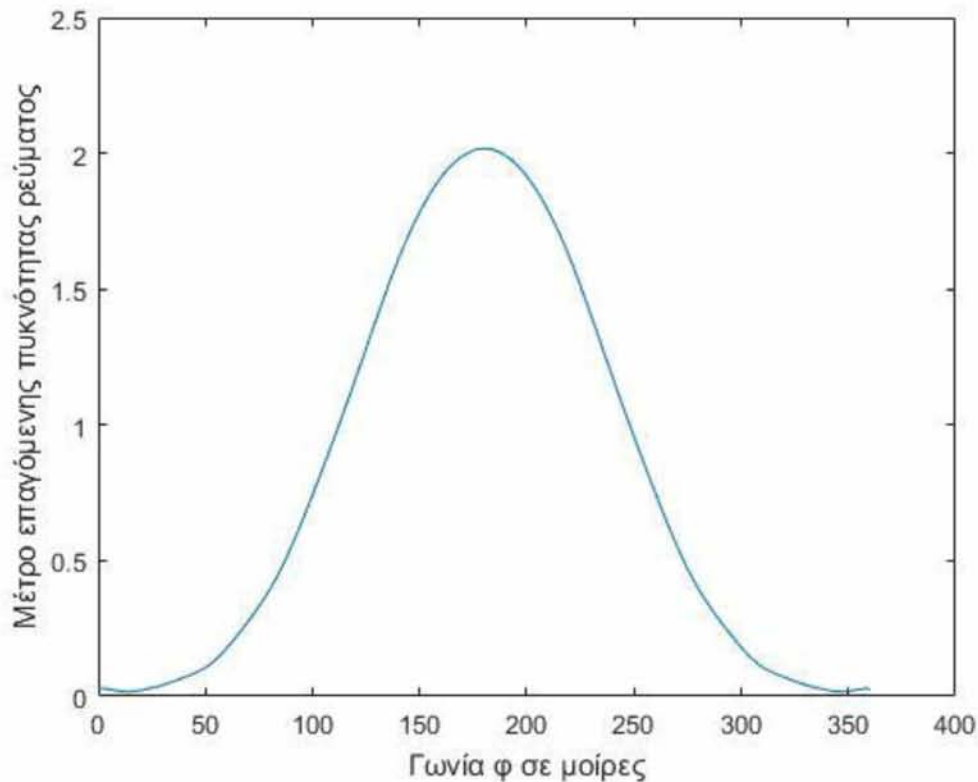
Εάν $m \neq n$, τότε οι όροι A_{mn} μπορούν να υπολογιστούν κάνοντας χρήση του ορισμού της $G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ ως

$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 s_n}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n|).$$

Αν όμως $m = n$, θα ισχύει $|\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n| = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της συνάρτησης Hankel μηδενικού βαθμού δεύτερου είδους για μικρά ορίσματα και για $\gamma = 1.781$ παίρνουμε

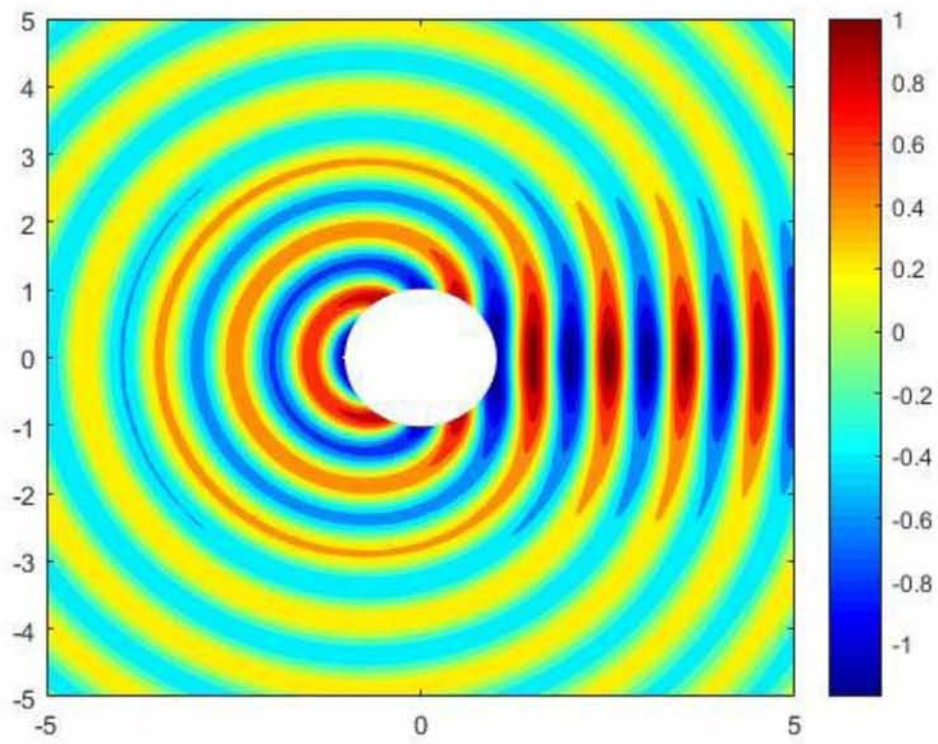
$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 s_n}{4} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{k_0 \gamma s_n}{4e}\right) \right].$$

Λύνοντας το σύστημα της εξίσωσης (3.4.2) παίρνουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_n στα σημεία $\boldsymbol{\rho}_n$. Για $N = 540$ τμήματα και προσπίπτον κύμα μοναδιαίου πλάτους, η γραφική παράσταση της J_n φαίνεται στην εικόνα 3.4.

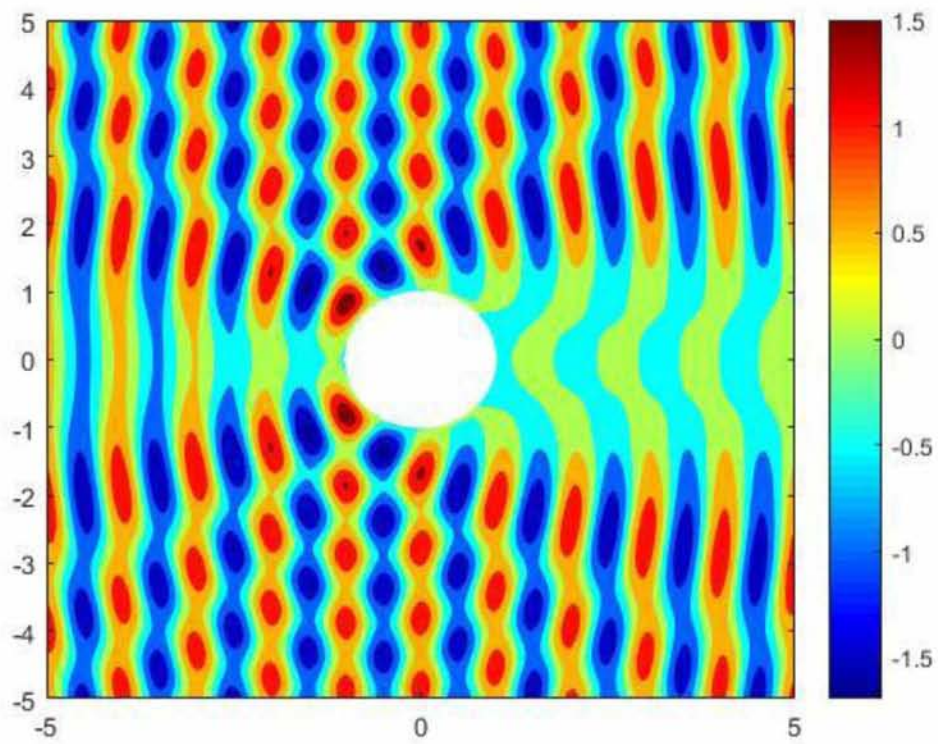


Εικόνα 3.4. Μέτρο επαγόμενης πυκνότητας ρεύματος για TM πόλωση.

Έχοντας υπολογίσει την J_n , μπορούμε να βρούμε το συνολικό και σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο όπου επιθυμούμε από τη σχέση (3.2.10). Για κύλινδρο ακτίνας 1λ τα πεδία αυτά έχουν υπολογιστεί σε 201×201 σημεία σε ένα χώρο $10\lambda \times 10\lambda$ και φαίνονται στις εικόνες 3.5 και 3.6.



Εικόνα 3.5. Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο, υπολογισμένο με μέθοδο των ροπών.



Εικόνα 3.6. Συνολικό ηλεκτρικό πεδίο, υπολογισμένο με μέθοδο των ροπών.

Για την περίπτωση ΤΕ πόλωσης, η ολοκληρωτική εξίσωση μαγνητικού πεδίου είναι η

$$H_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma' = -\frac{1}{2} J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0.$$

Εφαρμόζοντας αντιστοίχιση σημείων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} J_n = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.3)$$

όπου

$$A_{mn} = \begin{cases} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma' - \frac{1}{2}, & m = n \\ \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma', & m \neq n \end{cases}$$

$$b_m = H_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}_m).$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να υπολογίσουμε την κάθετη παράγωγο της $G_0(\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}')$. Κάνοντας χρήση του ορισμού της G_0 και των ιδιοτήτων των συναρτήσεων Hankel παίρνουμε:

$$\frac{\partial G_0(\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} = \frac{k_0}{4j} H_1^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}'|) \frac{\hat{n}' \cdot (\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}')}{|\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}'|}$$

Άρα, για $m \neq n$, οι όροι A_{mn} θα υπολογίζονται ως:

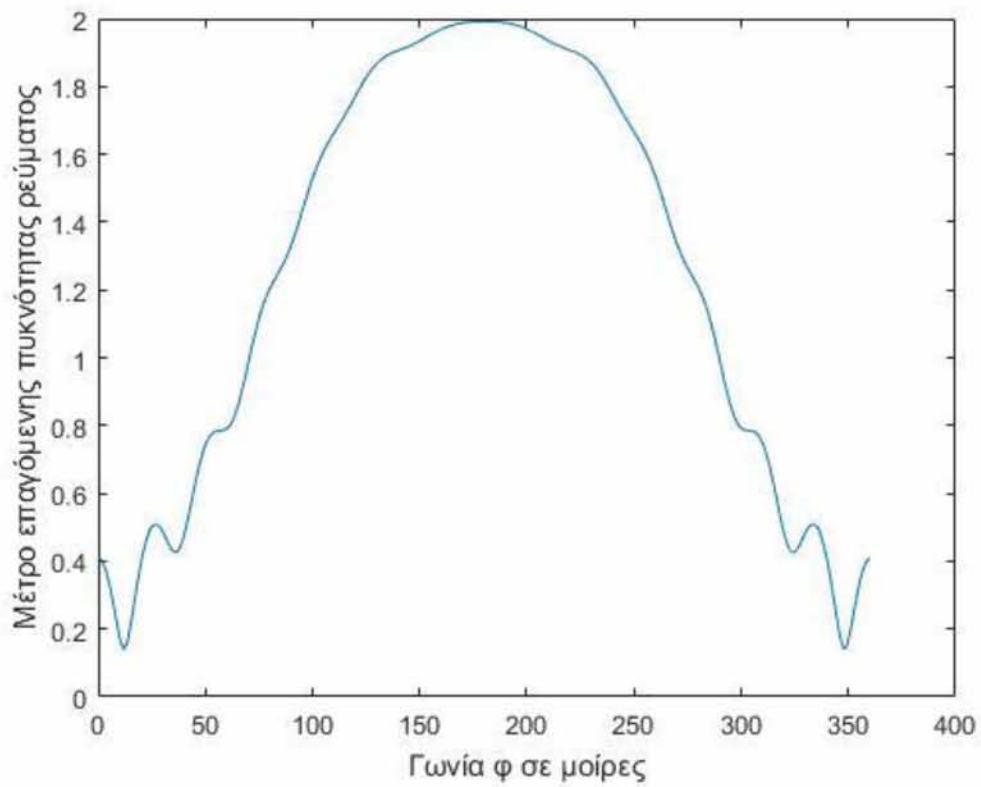
$$A_{mn} = \frac{k_0 s_n}{4j} H_1^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n|) \frac{\hat{n}' \cdot (\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n)}{|\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n|},$$

όπου \hat{n}' το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\boldsymbol{\rho}_n$.

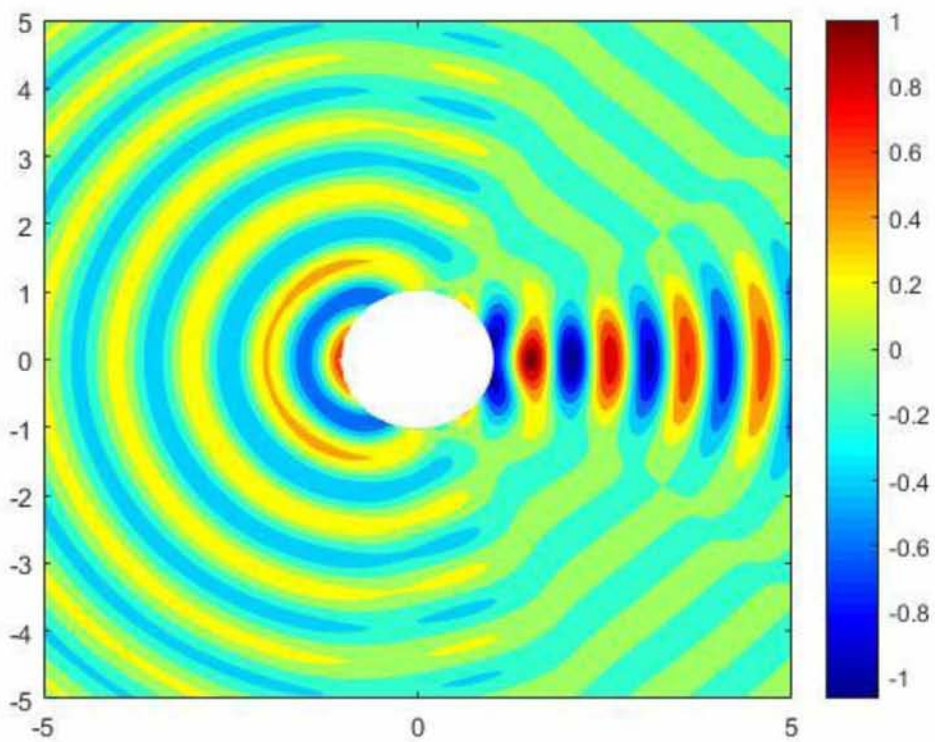
Για $m = n$, οι όροι A_{mn} θα ισούνται με $-1/2$.

Λύνοντας το σύστημα της εξίσωσης (3.4.3) παίρνουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_n στα σημεία $\boldsymbol{\rho}_n$. Για $N = 240$ τμήματα και προσπίπτον κύμα μοναδιαίου πλάτους, η γραφική παράσταση της J_n φαίνεται στην εικόνα 3.7.

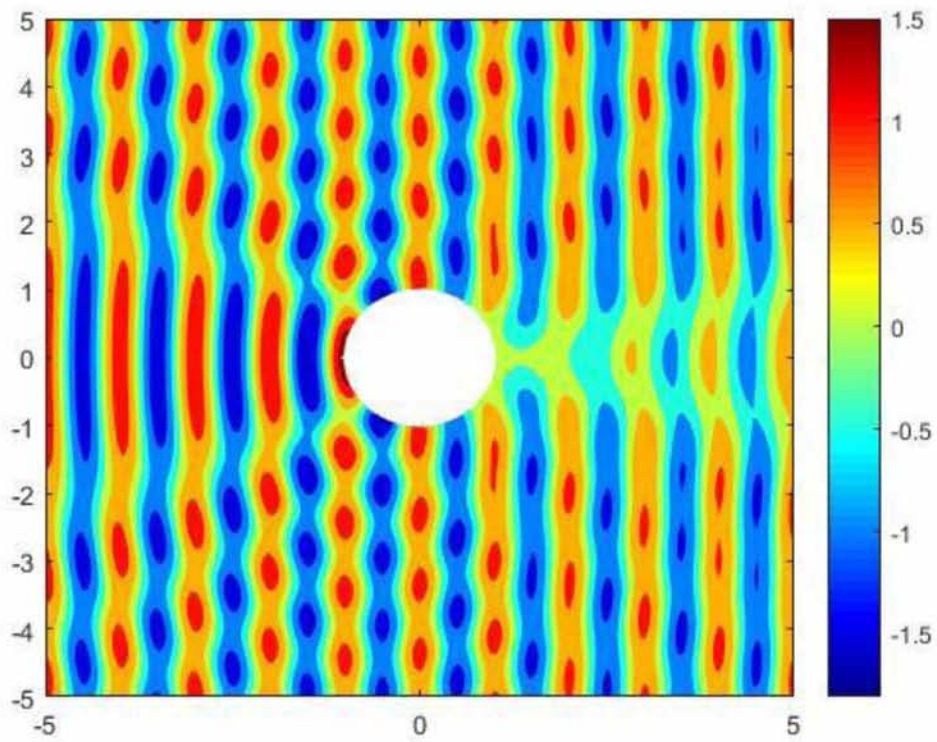
Έχοντας υπολογίσει την J_n , μπορούμε να βρούμε το συνολικό και σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο όπου επιθυμούμε από τη σχέση (3.2.11). Για κύλινδρο ακτίνας 1λ τα πεδία αυτά έχουν υπολογιστεί σε 201×201 σημεία σε ένα χώρο $10\lambda \times 10\lambda$ και φαίνονται στις εικόνες 3.8 και 3.9.



Εικόνα 3.7. Μέτρο επαγόμενης πυκνότητας ρεύματος για TE πόλωση.



Εικόνα 3.8. Σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο, υπολογισμένο με μέθοδο των ροπών.



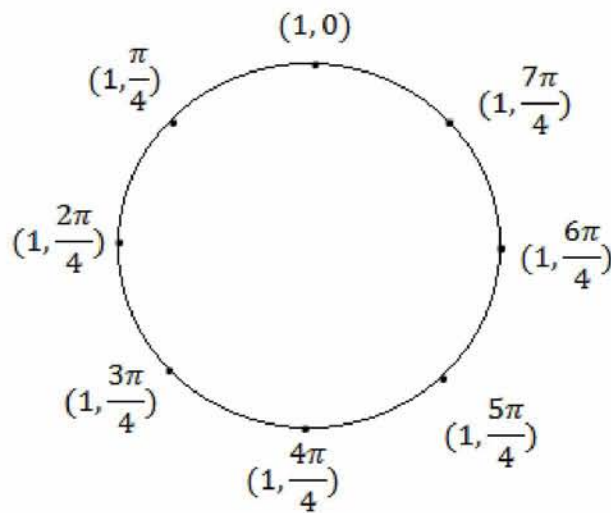
Εικόνα 3.9. Συνολικό μαγνητικό πεδίο, υπολογισμένο με μέθοδο των ροπών.

Η υλοποίηση της μεθόδου των ροπών σε MATLAB που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των επαγόμενων πυκνοτήτων ρεύματος και των πεδίων αυτής της ενότητας βρίσκεται στο παράρτημα.

3.5 Παράδειγμα εφαρμογής Μεθόδου των Ροπών

Έχοντας ως σκοπό την περαιτέρω κατανόηση της Μεθόδου των Ροπών, μπορούμε να επιστρέψουμε για άλλη μια φορά στο πρόβλημα σκέδασης από αγωγίμο κύλινδρο άπειρου μήκους ακτίνας 1λ και να δούμε ακριβώς σε ποιο σύστημα καταλήγουμε, εάν χωρίσουμε το σύνορο του κυλίνδρου σε ένα μικρό αριθμό τμημάτων.

Χωρίζουμε λοιπόν το σύνορο Γ_0 σε $N = 8$ τμήματα, τα κέντρα ρ_n των οποίων φαίνονται στην παρακάτω εικόνα. Το μήκος s_n των τμημάτων σε αυτήν την περίπτωση θα είναι ίδιο για $n = 1, 2, \dots, 8$ και θα ισούται με $\pi/4$.



Εικόνα 3.10. Κέντρα των τμημάτων του συνόρου για $N = 8$.

Για το παράδειγμα αυτό θα ασχοληθούμε με την περίπτωση TM πολωμένου προσπίπτοντος κύματος. Για την περίπτωση αυτή, η ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου είναι η

$$E_z^{inc}(\rho) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') J_{s,z}(\rho') d\Gamma' = 0, \quad \rho \in \Gamma_0.$$

Εφαρμόζοντας αντιστοίχιση σημείων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} J_n = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.2)$$

όπου

$$A_{mn} = jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') d\Gamma'$$

$$b_m = E_z^{inc}(\rho_m).$$

Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, αν ισχύει $m \neq n$ θα έχουμε:

$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 s_n}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n|),$$

ενώ για $m = n$:

$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 s_n}{4} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{k_0 \gamma s_n}{4e}\right) \right].$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1.23 + 1.17j & -0.29 + 0.34j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -0.29 + 0.34j \\ -0.29 + 0.34j & 1.23 + 1.17j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -0.08 - 0.32j \\ -0.08 - 0.32j & -0.29 + 0.34j & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -0.05 + 0.28j \\ -0.05 + 0.28j & -0.08 - 0.32j & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0.19 + 0.20j \\ 0.19 + 0.20j & -0.05 + 0.28j & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & -0.05 + 0.28j \\ -0.05 + 0.28j & 0.19 + 0.20j & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & -0.08 - 0.32j \\ -0.08 - 0.32j & -0.05 + 0.28j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & -0.29 + 0.34j \\ -0.29 + 0.34j & -0.08 - 0.32j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1.23 + 1.17j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \\ J_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 + 0.00j \\ -0.26 + 0.96j \\ 1.00 - 0.00j \\ -0.26 - 0.96j \\ 1.00 - 0.00j \\ -0.26 - 0.96j \\ 1.00 + 0.00j \\ -0.26 + 0.96j \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό εύκολα μπορεί να λυθεί για τις τιμές της J_n , τις οποίες στη συνέχεια μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην

$$E_z(\boldsymbol{\rho}) = E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') J_{s,z}(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma', \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty,$$

για να υπολογίσουμε το πεδίο οπουδήποτε μας ενδιαφέρει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η Μέθοδος των Ροπών σε Τρείς Διαστάσεις

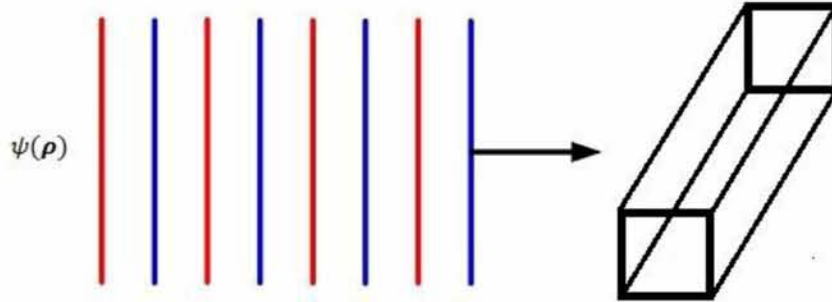
4.1 Εισαγωγή

Όταν καλούμαστε να επιλύσουμε προβλήματα σκέδασης από αντικείμενα τα οποία έχουν συγκρίσιμες διαστάσεις στις x , y και z κατευθύνσεις, δεν είναι σωστό να θεωρήσουμε πως θα έχουμε ίδια αποτελέσματα για οποιαδήποτε εγκάρσια τομή του αντικειμένου, και έτσι δεν μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημά μας σε ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων.

Σε αυτές τις περιπτώσεις οπότε θα πρέπει να κάνουμε χρήση μιας υλοποίησης της μεθόδου των ροπών που λαμβάνει υπόψη το παραπάνω γεγονός και υπολογίζει την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος σε σημεία του τρισδιάστατου πλέον χώρου. Το θεωρητικό υπόβαθρο παραμένει ίδιο με αυτό του προηγούμενου κεφαλαίου, αλλά ο τρόπος χωρισμού της συνοριακής επιφάνειας σε τμήματα προσαρμόζεται στο γεγονός ότι πλέον έχουμε να κάνουμε με τμήματα δύο διαστάσεων.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου αντιμετωπίζεται ένα τρισδιάστατο πρόβλημα το οποίο δεν μπορεί να αναχθεί σε δύο διαστάσεις, και έτσι γίνεται εφαρμογή των παραπάνω με σκοπό την επίλυση του προβλήματος σκέδασης.

4.2 Σκέδαση από αγωγίμο σωλήνα τετραγωνικής διατομής



Εικόνα 4.1. Προσπίπτον κύμα σε σωλήνα τετραγωνικής διατομής.

Έστω ένας αγωγίμος σωλήνας τετραγωνικής διατομής που βρίσκεται σε ελεύθερο χώρο, ο άξονας του οποίου συμπίπτει με τον άξονα z , η διατομή του οποίου παραμένει σταθερή στην z κατεύθυνση. Έστω, επίσης, ένα επίπεδο κύμα που παράγεται από μια πηγή $\psi(\boldsymbol{\rho})$ το οποίο δεν αλλάζει στην κατεύθυνση z , ταξιδεύει προς την κατεύθυνση $+x$ και προσπίπτει στο σωλήνα, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.1.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος $J_\psi(\boldsymbol{\rho})$ στο σύνορο Γ_0 το οποίο σε αυτήν την περίπτωση αποτελείται από την επιφάνεια του σωλήνα, για την περίπτωση TM πόλωσης.

Έστω Ω_0 ο χώρος στο εσωτερικό του σωλήνα, Ω_∞ ο χώρος στο εξωτερικό του και

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

η εξίσωση του Green ελεύθερου χώρου. Το ηλεκτρικό πεδίο $E_z(\boldsymbol{\rho})$ θα πρέπει να ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 E_z(\boldsymbol{\rho}) + k_0^2 E_z(\boldsymbol{\rho}) = jk_0 Z_0 \psi(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty.$$

Στο σύνορο του σωλήνα θα πρέπει να ισχύει:

$$E_z(\boldsymbol{\rho}') = 0, \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0$$

$$\frac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} = jk_0 Z_0 \psi(\boldsymbol{\rho}'), \quad \boldsymbol{\rho}' \in \Gamma_0.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (3.2.9) του κεφαλαίου 3, παίρνουμε:

$$E_z^{inc}(\boldsymbol{\rho}) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') J_\psi(\boldsymbol{\rho}') d\Gamma' = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0. \quad (4.2.1)$$

Το επόμενο βήμα για να λύσουμε την (4.2.1) είναι να χωρίσουμε το Γ_0 σε τμήματα, έτσι ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε αντιστοίχιση σημείων. Τα τμήματα αυτά θα έχουν τη μορφή τετραγώνων πλευράς ίσης με το μήκος κύματος λ . Για σωλήνα ύψους 1λ , πλάτους 1λ και μήκους 25λ η διαδικασία περιγράφεται από την εικόνα 4.2.



Εικόνα 4.2. Χωρισμός της επιφάνειας σε τετραγωνικά τμήματα.

Εφαρμόζοντας αντιστοίχιση σημείων και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση παλμού ως συνάρτηση βάσης, προσεγγίζουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος στο n -οστό τετραγωνικό τμήμα ως μια μοναδική τιμή στο κέντρο του.

Έστω ρ_n το κέντρο του n -οστού τμήματος του συνόρου και α_n το εμβαδόν του n -οστού τμήματος του συνόρου (το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι ίδιο για όλα τα τμήματα). Από την αντιστοίχιση σημείων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} J_{\psi,n} = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.2)$$

όπου

$$A_{mn} = jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') d\Gamma'$$

$$b_m = E_z^{inc}(\rho_m).$$

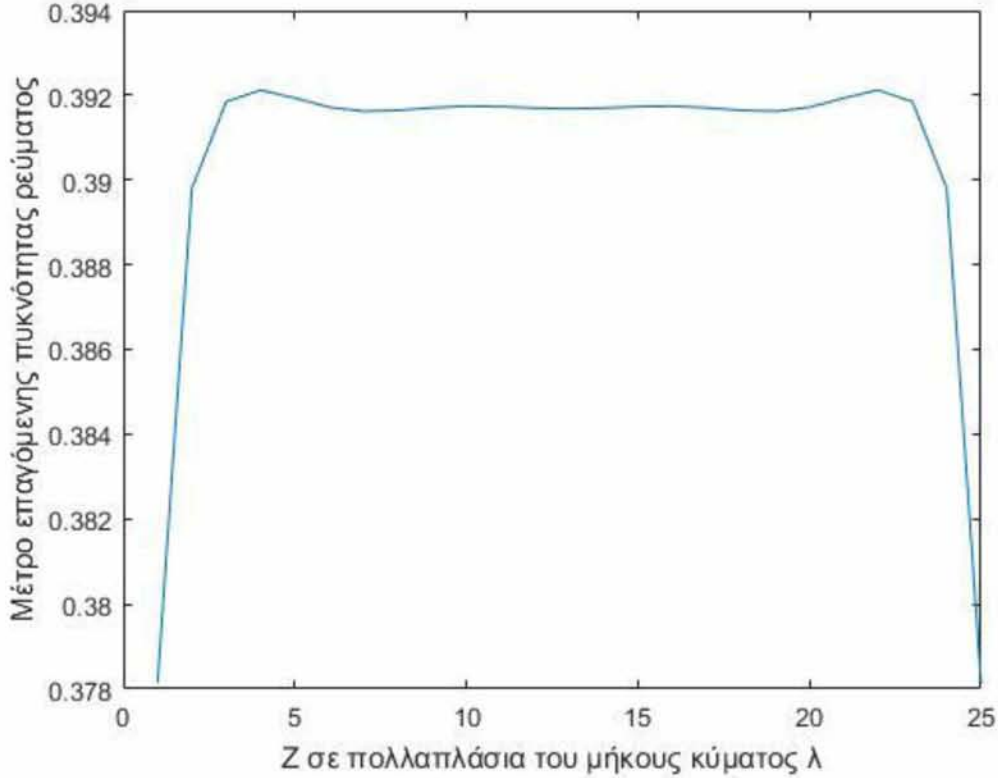
Εάν $m \neq n$, τότε οι όροι A_{mn} μπορούν να υπολογιστούν κάνοντας χρήση του ορισμού της $G_0(\rho, \rho')$ ως

$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 \alpha_n}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\rho_m - \rho_n|).$$

Αν όμως $m = n$, θα ισχύει $|\rho_m - \rho_n| = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της συνάρτησης Hankel μηδενικού βαθμού δεύτερου είδους για μικρά ορίσματα και για $\gamma = 1.781$ παίρνουμε

$$A_{mn} = \frac{k_0 Z_0 \alpha_n}{4} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{k_0 \gamma \alpha_n}{4e}\right) \right].$$

Λύνοντας το σύστημα της εξίσωσης (4.2.2) παίρνουμε την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος $J_{\psi,n}$ στα σημεία ρ_n . Για προσπίπτον κύμα μοναδιαίου πλάτους, η γραφική παράσταση της $J_{\psi,n}$ φαίνεται στην εικόνα 4.3.

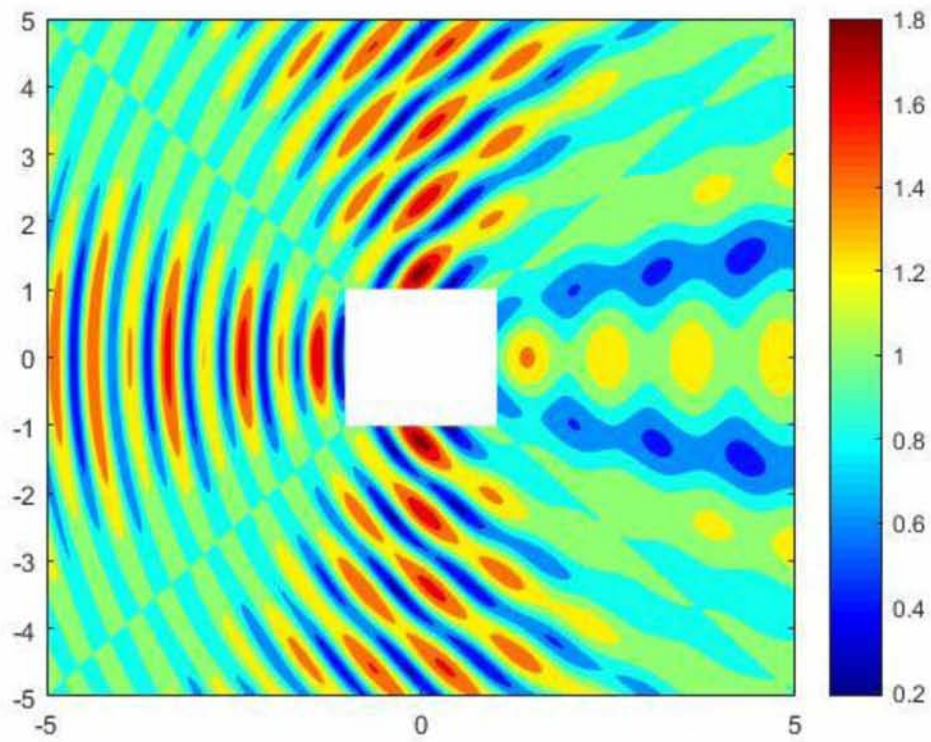


Εικόνα 4.3. Μέτρο επαγόμενης πυκνότητας ρεύματος κατά μήκος του σωλήνα.

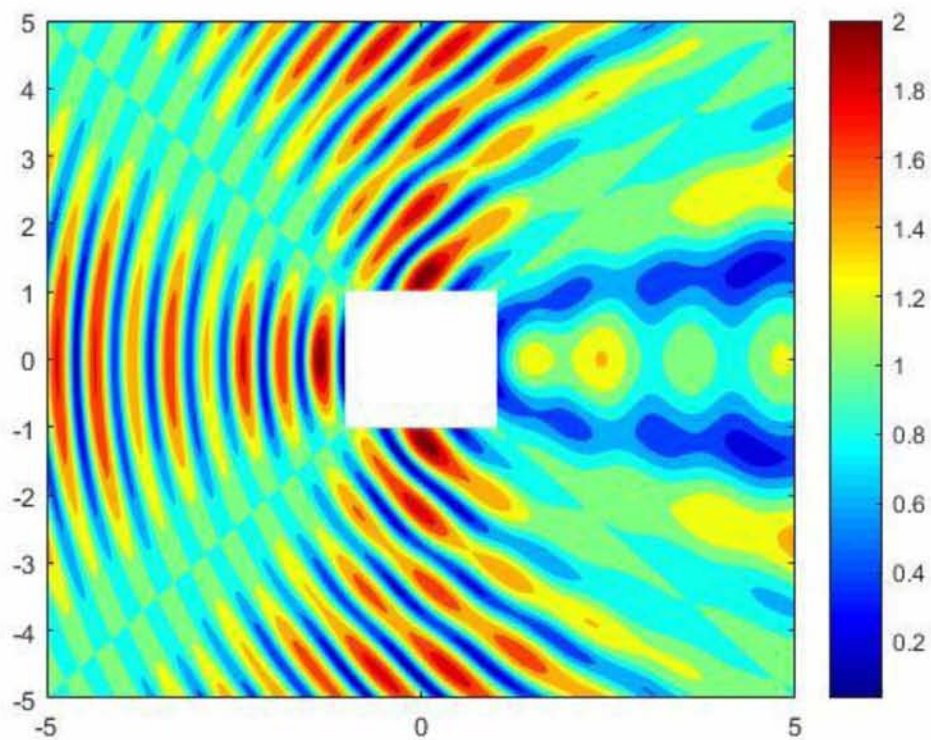
Έχοντας υπολογίσει την $J_{\psi,n}$, μπορούμε να βρούμε το συνολικό και σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο όπου επιθυμούμε από τη σχέση

$$E_z(\rho) = E_z^{inc}(\rho) - jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0} G_0(\rho, \rho') J_{z,n}(\rho') d\Gamma'. \quad \rho \in \Omega_\infty. \quad (3.2.10)$$

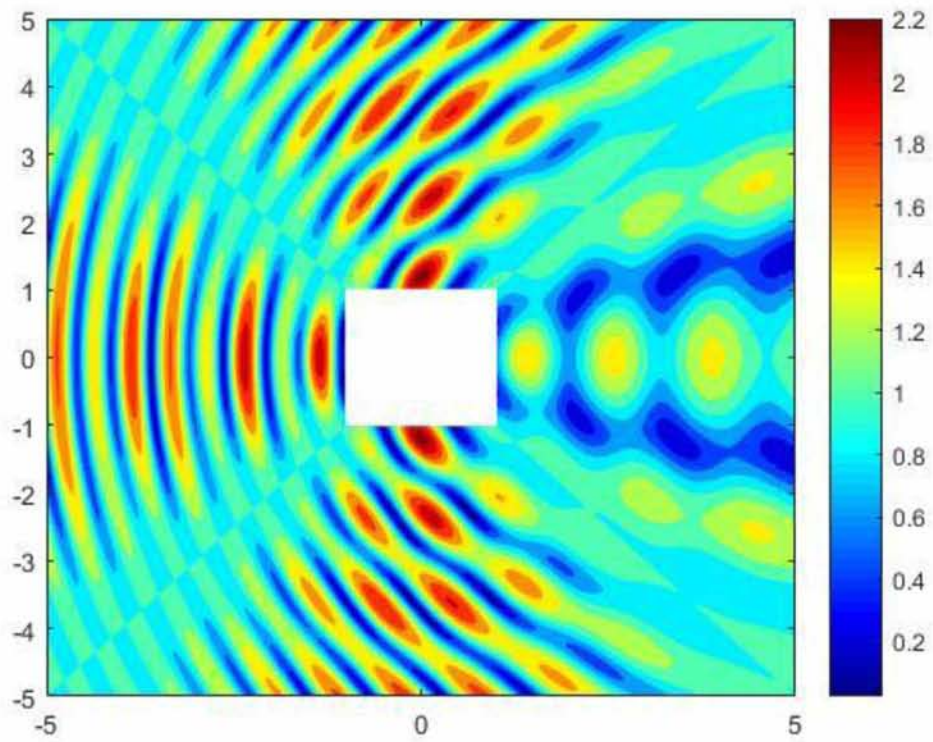
Τα πεδία έχουν υπολογιστεί σε 201×201 σημεία σε ένα επίπεδο εμβαδού $10\lambda \times 10\lambda$ κάθετο στον άξονα του σωλήνα σε απόσταση 0.5λ , 2.5λ , και 10.5λ από την αρχή του σωλήνα αντίστοιχα και τα μέτρα τους φαίνονται στις εικόνες 4.4 και 4.5 και 4.6.



Εικόνα 4.4. Μέτρο συνολικού ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση 0.5λ από την αρχή του σωλήνα.



Εικόνα 4.5. Μέτρο συνολικού ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση 2.5λ από την αρχή του σωλήνα.



Εικόνα 4.6. Μέτρο συνολικού ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση 10.5λ από την αρχή του σωλήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 2

```
% Δημιουργία γραφικής παράστασης της εικόνας 2.4.
clear all;

x = -5:0.1:5;
y = -5:0.1:5;

k = 2*pi;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

Z=0;

for (n=-80:1:80)

    Z = Z+(1i)^(-n)*besselj(n, k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan(Y./X));

end

contourf(X, Y, real(Z));
colormap(jet);
colorbar;
```

```
% Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων 2.6 και 2.7.

x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
a = 1;
k = 2*pi;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

Einc=0;
Esc=0;

for (n=-80:1:80)

    Einc = Einc+(1i)^(-n)*besselj(n,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

for (n=-215:1:215)

    Esc = Esc-((1i)^(-n))*(besselj(n, k*a)/besselh(n, 2, k*a))*besselh(n, 2,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

Ez = Einc + Esc;

contourf(X, Y, real(Esc), 'edgecolor', 'none');
```

```

colormap(jet);
colorbar;

% Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων 2.8 και 2.9.

x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
a = 1;
k = 2*pi;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

Hinc=0;
Hsc=0;

for (n=-80:1:80)

    Hinc = Hinc+(1i)^(-n)*besselj(n,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

for (n=-215:1:215)

    Hsc = Hsc-((1i)^(-n))*(besseljd(n, k*a)/besselh2d(n, k*a))*besselh(n, 2,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

Hz = Hinc + Hsc;

contourf(X, Y, real(Hsc), 'edgecolor', 'none');
colormap(jet);
colorbar;

```

```

% Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων 2.10 και 2.11.

```

```

x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
a = 1;
er = 4;
mr = 1;
k = 2*pi;
kd = 2*k;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

Einc=0;
Esc=0;

for (n=-80:1:80)

    Einc = Einc+(1i)^(-n)*besselj(n,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

for (n=-215:1:215)

```

```

    d1 = sqrt(mr)*besseljd(n, k*a)*besselj(n, kd*a)-sqrt(er)*besselj(n,
k*a)*besseljd(n, kd*a);
    d2 = sqrt(mr)*besselh2d(n, k*a)*besselj(n, kd*a)-sqrt(er)*besselh(n, 2,
k*a)*besseljd(n, kd*a);
    d = d1/d2;

    Esc = Esc-((li)^(-n))*d*besselh(n, 2,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(li*n.*atan2(Y, X));

end

Ez = Einc + Esc;

contourf(X, Y, real(Esc), 'edgecolor', 'none');
colormap(jet);
colorbar;

% Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων 2.12 και 2.13.

x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
a = 1;
er = 4;
mr = 1;
k = 2*pi;
kd = 2*k;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

Hinc=0;
Hsc=0;

for (n=-80:1:80)

    Hinc = Hinc+(li)^(-n)*besselj(n,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(li*n.*atan2(Y, X));

end

for (n=-215:1:215)

    d1 = sqrt(er)*besseljd(n, k*a)*besselj(n, kd*a)-sqrt(mr)*besselj(n,
k*a)*besseljd(n, kd*a);
    d2 = sqrt(er)*besselh2d(n, k*a)*besselj(n, kd*a)-sqrt(mr)*besselh(n, 2,
k*a)*besseljd(n, kd*a);
    d = d1/d2;

    Hsc = Hsc-((li)^(-n))*d*besselh(n, 2,
k.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(li*n.*atan2(Y, X));

end

Hz = Hinc + Hsc;

contourf(X, Y, real(Hsc), 'edgecolor', 'none');
colormap(jet);
colorbar;

```

MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 3

%Υλοποίηση της Μεθόδου των Ροπών για αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ με χωρισμό
%του συνόρου σε N = 540 τμήματα. Υπολογισμός των πεδίων σε 201X201 σημεία σε
%ένα χώρο 10λX10λ. TM πόλωση. Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων
3.4, 3.5 και 3.6.

```
clear all;

phi = 0 : (2*pi-2*pi/1080)/539 : 2*pi-2*pi/1080;
sn = 2*pi/540;
gama = 1.781;
k0 = 2*pi;
z0 = 1;

V=0;

for (n=-80:1:80)

    V = V+(1i)^(n)*besselj(n, 2*pi).*exp(1i*n.*phi);

end

for (m=1:1:540)
    for (n=1:1:540)

        if (m==n)
            Z(m, n) = ((k0*z0*sn)/4)*(1-
1i*(2/pi)*log((k0*gama*sn)/(4*exp(1))));
        else

            d = sqrt(2 - 2*cos(phi(m)-phi(n)));

            Z(m, n) = ((k0*z0*sn)/4)*besselh(0, 2, k0*d);

        end
    end
end

J=Z\V';

plot(abs(J));

x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
[X, Y] = meshgrid(x, y);

r=0;

for (n=1:1:540)
    r(n)=1;
end

[xs, ys] = pol2cart(phi, r);

Ei=0;

for (n=-80:1:80)

    Ei = Ei+(1i)^(-n)*besselj(n,
2*pi.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));

end

Ei=80*Ei;
```



```

for (i=1:1:201)
    for (j=1:1:201)
        Et(i, j) = Ei(i, j);
        for (n=1:1:540)
            Et(i, j) = Et(i, j) - li*k0*z0*G0(X(i, j), Y(i,j), xs(n),
ys(n))*J(n);
        end
    end
end

Es = Et - Ei;
Es = Es/80;
Et = Et/80;

contourf(X, Y, real(Et), 'edgecolor', 'none');
hold on;
rectangle('Position', [-1 -1 2 2], 'Curvature', [1 1], 'facecolor', [1 1 1],
'edgecolor', 'w');
colormap(jet);
colorbar;

```

%Υλοποίηση της Μεθόδου των Ροπών για αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας 1λ με χωρισμό
%του συνόρου σε N = 240 τμήματα. Υπολογισμός των πεδίων σε 201X201 σημεία σε
%ένα χώρο 10λX10λ. ΤΕ πόλωση. Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων
3.7, 3.8 και 3.9.

```

clear all;

phi = 0 : (2*pi-2*pi/1080)/239 : 2*pi-2*pi/1080;
r=0;

for (n=1:1:240)
    r(n)=1;
end
[xs, ys] = pol2cart(phi, r);
sn = 2*pi/240;
gama = 1.781;
k0 = 2*pi;
z0 = 1;

V=0;

for (n=-80:1:80)
    V = V+(1i)^(n)*besselj(n, 2*pi).*exp(1i*n.*phi);
end

for (m=1:1:240)
    for (n=1:1:240)
        if (m==n)
            Z(m, n) = -0.5;
        else
            d = sqrt((xs(m)-xs(n))^2+(ys(m)-ys(n))^2);
            [xa, ya]=pol2cart(phi(n), 1);
            [xb, yb]=pol2cart(phi(n), 2);
            normal = [xb, yb]-[xa, ya];

```

```

        dif = [xs(m) ys(m)]-[xs(n) ys(n)];
        Z(m, n) = ((k0*sn)/4i)*besselh(1, 2, k0*d)*(dot(normal, dif)/d);
    end
end
end
J=Z\V';
plot(abs(J));
x = -5:0.05:5;
y = -5:0.05:5;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
r=0;
for (n=1:1:240)
    r(n)=1;
end
[xs, ys] = pol2cart(phi, r);
Hi=0;
for (n=-80:1:80)
    Hi = Hi+(1i)^(-n)*besselj(n,
2*pi.*(sqrt(X.^2+Y.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Y, X));
end
Hi=50*Hi;
for (i=1:1:201)
    for (j=1:1:201)
        Ht(i, j) = Hi(i, j);
        for (n=1:1:240)
            d = sqrt((X(i, j)-xs(n))^2+(Y(i, j)-ys(n))^2);
            [xa, ya]=pol2cart(phi(n), 1);
            [xb, yb]=pol2cart(phi(n), 2);
            normal = [xb, yb]-[xa, ya];
            dif = [X(i, j) Y(i, j)]-[xs(n) ys(n)];
            Ht(i, j) = Ht(i, j) - (k0/4i)*besselh(1, 2, k0*d)*(dot(normal,
dif)/d)*J(n);
        end
    end
end
Hs = Ht - Hi;
Hs = Hs/50;
Ht = Ht/50;
contourf(X, Y, real(Ht), 'edgecolor', 'none');
hold on;
rectangle('Position', [-1 -1 2 2], 'Curvature', [1 1], 'facecolor', [1 1 1],
'edgecolor', 'w');
colormap(jet);
colorbar;

```

MATLAB scripts για το Κεφάλαιο 4

```
%Υλοποίηση της Μεθόδου των Ροπών για αγώγιμο σωλήνα τετραγωνικής διατομής  
ύψους 1λ, πλάτους 1λ  
%και μήκους 25λ με χωρισμό του συνόρου σε N = 100 τμήματα. Υπολογισμός των  
πεδίων σε 201X201 σημεία σε  
%ένα χώρο 10λX10λ. TM πόλωση.  
%Δημιουργία γραφικών παραστάσεων των εικόνων 4.3, 4.4 και 4.5 και 46.
```

```
clear all;  
  
k0 = 2*pi;  
z0 = 1;  
  
x = [0 0.5 0 -0.5];  
y = [0.5 0 -0.5 0];  
  
incA=0;  
incB=0;  
incC=0;  
incD=0;  
  
for (n=-80:1:80)  
  
    incA = incA+(1i)^(n)*besselj(n,  
2*pi*sqrt((x(1))^2+((y(1))^2)))*exp(1i*n.*atan2(y(1), x(1)));  
  
    incB = incB+(1i)^(n)*besselj(n,  
2*pi*sqrt((x(2))^2+((y(2))^2)))*exp(1i*n.*atan2(y(2), x(2)));  
  
    incC = incC+(1i)^(n)*besselj(n,  
2*pi*sqrt((x(3))^2+((y(3))^2)))*exp(1i*n.*atan2(y(3), x(3)));  
  
    incD = incD+(1i)^(n)*besselj(n,  
2*pi*sqrt((x(4))^2+((y(4))^2)))*exp(1i*n.*atan2(y(4), x(4)));  
  
end  
  
for (n=1:4:97)  
  
    X(n) = x(1);  
    Y(n) = y(1);  
  
    q(n) = incA;  
  
end  
  
for (n=2:4:98)  
  
    X(n) = x(2);  
    Y(n) = y(2);  
  
    q(n) = incB;  
  
end  
  
for (n=3:4:99)  
  
    X(n) = x(3);  
    Y(n) = y(3);  
  
    q(n) = incC;  
  
end
```

```

for (n=4:4:100)

    X(n) = x(4);
    Y(n) = y(4);

    q(n) = incD;

end

for (n=1:1:25)

    index = (n-1)*4;
    value = n - 0.5;

    Z(index+1) = value;
    Z(index+2) = value;
    Z(index+3) = value;
    Z(index+4) = value;

end

P = zeros(100, 100);

for (i=1:1:100)
    for (j=1:1:100)

        if (i==j)

            P(i, j) = (pi/2)*(1-(2j/pi)*log(2*pi*1.781/4*exp(1)));

        else

            P(i, j) = (pi/2)*besselh(0, 2, sqrt((X(j)-X(i))^2+(Y(j)-
Y(i))^2+(Z(j)-Z(i))^2));

        end

    end

end

end

J = P\q';

for (i=1:1:25)

    dens(i) = abs(J(i*4));

end

xf = -5:0.05:5;
yf = -5:0.05:5;
Zf = 2.5;
[Xf, Yf] = meshgrid(xf, yf);

Ei=0;

for (n=-80:1:80)

    Ei = Ei+(1i)^(-n)*besselj(n,
2*pi.*(sqrt(Xf.^2+Yf.^2))).*exp(1i*n.*atan2(Yf, Xf));

end

for (i=1:1:201)
    for (j=1:1:201)

        Et(i, j) = Ei(i, j);

        for (n=1:1:100)

```

```

        Et(i, j) = Et(i, j) - li*k0*z0*G03D(Xf(i, j), Yf(i, j), Zf, X(n),
Y(n), Z(n))*J(n);

        end

    end

end

Es = Et - Ei;

plot(dens);
xlabel('Z σε πολλαπλάσια του μήκους κύματος λ');
ylabel('Μέτρο επαγόμενης πυκνότητας ρεύματος');

contourf(Xf, Yf, abs(Et), 'edgecolor', 'none');
hold on;
rectangle('Position', [-1 -1 2 2], 'Curvature', [0 0], 'facecolor', [1 1 1],
'edgecolor', 'w');
colormap(jet);
colorbar;

```

Συναρτήσεις MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν

%Υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης Green για τα σημεία (x1, y1) και (x2, y2).

```
function [ g ] = G0( x1, y1, x2, y2 )  
    k0 = 2*pi;  
    d = sqrt((x1-x2).^2+(y1-y2)^2);  
    g = (1/4i)*besselh(0, 2, k0*d);  
end
```

%Υπολογισμός της τιμής της παραγώγου της συνάρτησης BesselJ βαθμού s στο σημείο z.

```
function [ a ] = besselj( s, z )  
if(s==0)  
    a = -besselj(1, z);  
else  
    a = 0.5*(besselj( s-1, z) - besselj( s+1, z));  
end  
end
```

%Υπολογισμός της τιμής της παραγώγου της συνάρτησης BesselY βαθμού s στο σημείο z.

```
function [ a ] = bessely( s, z )  
if(s==0)  
    a = -bessely(1, z);  
else  
    a = 0.5*(bessely( s-1, z) - bessely( s+1, z));  
end  
end
```

%Υπολογισμός της τιμής της παραγώγου της συνάρτησης Hankel βαθμού s
%δεύτερου είδους στο σημείο z.

```
function [ a ] = besselh2d( s, z )  
if(s==0)  
    a = besselj(0, z) - 1i*bessely(0, z);  
else  
    a = 0.5*(besselh( s-1, 2, z) - besselh( s+1, 2, z));  
end  
end
```

```
%Υπολογισμός της τιμής της συνάρτησης Green τριων διαστάσεων για τα  
σημεία (x1, y1, z1)  
%και (x2, y2, z2).
```

```
function [ g ] = G03D( x1, y1, z1, x2, y2, z2 )
```

```
    k0 = 2*pi;
```

```
    d = sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2+(z1-z2)^2);
```

```
    g = (1/4i)*besselh(0, 2, k0*d);
```

```
end
```


ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] *JM. Jin., “Theory and Computation of Electromagnetic Fields”, IEEE Press, John Wiley & Sons, 2011*
- [2] *David J. Griffiths, “Introduction to Electrodynamics”, Prentice Hall, New Jersey, 1999*
- [3] *Roger F. Harrington, “Field Computation by Moment Methods”, IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1993*
- [4] *Constantine A. Balanis, “Advanced Engineering Electromagnetics”, John Wiley & Sons, 2012*
- [5] *Walton C. Gibson, “The Method of Moments in Electromagnetics”, CRC Press, Chapman & Hall, 2008*
- [6] *K. Nabors, J. White, “FastCap: A Multipole Accelerated 3-D Capacitance Extraction Program”, IEEE Trans. On Computer-Aided Design, Vol. 10, No. 11, Nov. 1991*