

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

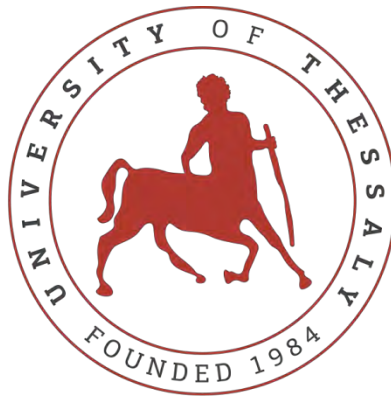
**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΠΑΡΑΣΙΤΙΚΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΑΠΟ ΦΥΣΙΚΕΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ**

Τεμπέλης Αθανάσιος

Βόλος, Σεπτέμβριος 2017

UNIVERSITY OF THESSALY

**DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND
COMPUTER ENGINEERING**



**UNIVERSITY OF
THESSALY**

**ALGORITHMS FOR THE EXTRACTION OF
PARASITIC ELECTRICAL QUANTITIES FROM
PHYSICAL STRUCTURES**

By

Tempelis Athanasios

Volos, September 2017

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια ολοκλήρωσης του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Πριν την παρουσίαση και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή Νέστωρα Ευμορφόπουλο για την πολύτιμη καθοδήγηση του, την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Γεώργιο Σταμούλη που δέχτηκε να είναι μέλος της διμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, καθώς και τους φίλους μου, που με υπομονή και κουράγιο πρόσφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Αλγόριθμοι εξαγωγής παρασιτικών στοιχείων από δοσμένες φυσικές γεωμετρίες

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία που ακολουθεί αποτελεί μια προσπάθεια εισαγωγής, επεξήγησης και κατανόησης των υπολογιστικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για να εξαχθούν οι παρασιτικές χωρητικότητες. Παρέχοντας και αναλύοντας τις κατάλληλες μαθηματικές μεθόδους, οι οποίες για το δικό μας σκοπό χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα που κατά βάση ασχοληθήκαμε, προσπαθούμε να προσεγγίσουμε και να εμβαθύνουμε κυρίως όχι τόσο στη λειτουργία του προγράμματος, αλλά περισσότερο στο υπολογιστικό κομμάτι του και στις προγραμματιστικές μεθόδους που χρησιμοποιεί. Όλες οι μαθηματικές και όχι μόνο μέθοδοι που θα αναφερθούν στη συνέχεια, έχουν υλοποιηθεί και σε προγραμματιστικό περιβάλλον (συγκεκριμένα σε γλώσσα C) αλλά αποφύγαμε να προσθέσουμε καθαρά κομμάτια κώδικα, καθώς πιστεύουμε πως η κατανόηση θα γινόταν πολύ πιο δύσκολη.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μαθηματική Περιγραφή Του Προβλήματος

1.1 Εισαγωγή	10
1.2 Περιγραφή Προβλήματος Χωρητικότητας	10
1.3 Υπολογισμός Ισοδύναμης Φόρτισης (ECF)	15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πίνακας Χωρητικοτήτων Maxwell

2.1 Εισαγωγή	23
2.2 Ανάλυση	23
2.3 Παράδειγμα	27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μαθηματικές μέθοδοι που υλοποιήθηκαν

3.1 Method of Moments (MOM)	29
3.2 Παραγοντοποίηση $A = LU$	
3.2.1 Εισαγωγή	32
3.2.2 Ανάλυση	32
3.3.3 Αλγόριθμος παραγοντοποίησης	36
3.3 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Περιγραφή FasterCap

4.1 Εισαγωγή	41
4.2 Αρχείο εισόδου	42
4.2.1 Patran neutral files	42
4.2.2 Generetic files	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραδείγματα – Αποτελέσματα

5.1 Τριγωνικό πάνελ	49
5.2 Σφαιρικό πάνελ	52
5.3 Παράλληλο πάνελ	54
5.4 Κυβικά πάνελς	56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Βιβλιογραφία	59
---------------------	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει και να εξηγήσει πως ο επιλύτης χωρητικότητας (capacitance solver) FasterCap μπορεί να αντιμετωπίσει αγωγούς αυθαίρετων σχημάτων ενσωματωμένους σε πολλαπλές, τμηματικές, διηλεκτρικές περιοχές. Το θεωρητικό υπόβαθρο για τις μεθόδους που θα χρησιμοποιηθούν είναι πολύ καλά εδραιωμένο, και η επίσημη μαθηματική άποψη μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία [1] και [2] τόσο για την τρισδιάστατη περίπτωση όσο και για την δισδιάστατη, αντίστοιχα. Σε αυτή την εργασία στόχος είναι να παρουσιάσουμε μια πιο μαθηματική, διαισθητική και κυρίως μηχανική άποψη της έννοιας αυτής, που μπορεί να εφαρμοστεί στην τρισδιάστατη περίπτωση. Αναφορικά τώρα με την δισδιάστατη, απαιτεί μία ελαφρώς διαφορετική μαθηματική διατύπωση, ωστόσο ισχύουν παρόμοιες μαθηματικές θεωρήσεις, και ως εκ τούτου δεν θα τις παρουσιάσουμε αναλυτικά σε αυτή την εργασία. Στην ενότητα 1.2 θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της χωρητικότητας. Στην ενότητα 1.3 θα περιγραφεί η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιηθεί στο πρόγραμμά μας (FasterCap).

1.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σύμφωνα με τον ορισμό, η χωρητικότητα C είναι ο ρυθμός της ηλεκτρικής φόρτισης του δυναμικού σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο, απομονωμένο αγωγό.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

Επεκτείνοντας τον συγκεκριμένο ορισμό, και ανάγοντάς τον σε ένα σύνολο από m αγωγούς, μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε αυτή τη μαθηματική σχέση στη μορφή

του πίνακα χωρητικότητας Maxwell [3] (θα ακολουθήσει εκτενής αναφορά σε επόμενο κεφάλαιο) :

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ο πίνακας χωρητικότητας Maxwell είναι ένας τετραγωνικός, συμμετρικός πίνακας. Περιέχει πραγματικά στοιχεία και οι διαστάσεις του είναι $m \times m$ (όσο και το πλήθος των αγωγών). Συνοψίζει τη σχέση ανάμεσα στον αγωγό δυναμικών V_i και στον αγωγό που παράγει ελεύθερες φορτίσεις Q_i . Το θετικό διαγώνιο στοιχείο $C_{i,i}$ αντιπροσωπεύει την αυτό-χωρητικότητα (self-capacitance) του αγωγού i , ενώ το αρνητικό μη διαγώνιο στοιχείο $C_{i,j}$ αντιπροσωπεύει τη συζευγμένη χωρητικότητα μεταξύ των αγωγών i και j .

Στόχος μας είναι να κατορθώσουμε να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα χωρητικότητας C . Ανακαλώντας τον νόμο του Coulomb, έχουμε στη διάθεσή μας μια απλή φόρμουλα για το ηλεκτρικό πεδίο ενός στατικού σημείου, φορτισμένο σε ελεύθερο χώρο. Μπορούμε, λοιπόν, άμεσα να αντλήσουμε τη γνωστή μαθηματική φόρμουλα για το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

(προσθέτοντας με αυθαίρετη σταθερά V_0 που τη θεωρούμε μηδενική για τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο)

Στην παραπάνω σχέση (3) η μεταβλητή q είναι η τιμή του φορτίου, ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού ($\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} A^2 s^2 kg^{-1} m^{-3}$), και r η απόσταση του φορτίου από το σημείο παρατήρησης.

Είναι δελεαστικό, επομένως, να προσπαθήσουμε να εκμεταλευτούμε μια παρόμοια σχέση, επεκτείνοντάς τη σε μια περιοχή ολοκλήρωσης, πάνω από ένα σύνολο φορτίσεων, για απευθείας υπολογισμό, ένα προς ένα, των στοιχείων $P_{i,j}$ του πίνακα P , που σχετίζεται με τις φορτίσεις Q των τάσεων V .

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m,1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω πίνακα P, μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα χωρητικότητας C.

Εύλογα, όμως, γεννιέται στον αναγνώστη η απορία εάν υπάρχει κάποια μέθοδος για να υπολογίσουμε τα στοιχεία $C_{i,j}$ του πίνακα C χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τον πίνακα P. Μετά από όλα αυτά, ο νόμος του Gauss μας δίνει μια απευθείας σχέση ανάμεσα στο φορτίο και στο ηλεκτρικό πεδίο, η οποία είναι το βαθμωτό (gradient) του δυναμικού. Όμως, για να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss, πρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, που είναι μια συνάρτηση των δυναμικών που εφαρμόζονται στους αγωγούς. Έτσι, πρέπει εμείς να λύσουμε πρώτα για το πεδίο που παράγεται στο χώρο από ένα συγκεκριμένο σύνολο τάσεων V, και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις φορτίσεις των αγωγών μέσω του νόμου του Gauss. Αυτό είναι πιθανό, και η βάση για τις “επονομαζόμενες” έμμεσες μεθόδους. Ονομάζονται έμμεσες από τη στιγμή που εμπλέκονται δύο διαφορετικά βήματα επίλυσης. Πρόκειται, επομένως, για μεθόδους που δεν χρησιμοποιούνται από το εργαλείο FasterCap, το οποίο χρησιμοποιεί άμεσες μεθόδους. Για μια ευρύτερη επεξήγηση και εισαγωγή στο θέμα υπάρχουν πληροφορίες στη βιβλιογραφία [4].

Με τον παραπάνω σκοπό κατά νου, λοιπόν, ας επισημάνουμε τα απαιτούμενα και απαραίτητα βήματα, αρχής γενομένης από τις εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

Όπου \vec{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, \vec{H} είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου, \vec{D} είναι η ηλεκτρική ροή, \vec{B} είναι η μαγνητική ροή, \vec{J} είναι η πυκνότητα του ρεύματος, και ρ η πυκνότητα όγκου χωρίς φόρτιση. Για μια στατική περίπτωση, οι

ποσότητες των πεδίων, δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Συνεπώς, το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο αποσυνδέονται και $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ καθώς επίσης και $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ είναι ίσα με το μηδέν.

Τώρα, για το δικό μας ηλεκτροστατικό πρόβλημα, ενδιαφερόμαστε κυρίως για το ηλεκτρικό πεδίο. Επιπρόσθετα, καθώς το ηλεκτροστατικό πεδίο υπάρχει μόνο στο εξωτερικό των αγωγών (εάν το ηλεκτρικό πεδίο δεν ήταν μηδέν στο εσωτερικό των αγωγών, τα ελεύθερα φορτία θα μπορούσαν να κινηθούν, επομένως το πεδίο που μας ενδιαφέρει δεν θα ήταν στατικό) η τρέχουσα πυκνότητα ρεύματος \vec{J} είναι μηδέν, δηλαδή δεν υφίσταται κανένα αγωγίμο ρεύμα. Μας απομένουν, λοιπόν, οι θεμελιώδεις εξισώσεις της ηλεκτροστατικής :

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (10)$$

Σε περιοχές όπου ο χώρος είναι γεμάτος με ομοιογενή, ισότροπα, μη διαπερατά, γραμμικά υλικά επικρατεί, επίσης, η ακόλουθη σχέση :

$$\vec{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\vec{E} \quad (11)$$

στην οποία το $\varepsilon(\mathbf{r})$ είναι η διαπερατότητα του υλικού. Υποθέτουμε ότι η διαπερατότητα του υλικού είναι σταθερή σε κάθε μια από τις περιοχές ενδιαφέροντος (δηλ. σταθερά κομμάτια). Ένας σίγουρος τρόπος για να λύσουμε το σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις (9), (10) και (11) είναι να ανάγουμε την εξίσωση (9) και να περιγράψουμε το \vec{E} με βάση ένα βαθμωτό δυναμικό :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (12)$$

Θεωρώντας ότι η κλίση του βαθμωτού (gradient) είναι πάντα ίση με το μηδέν, η εξίσωση (9) είναι αυτόματα αληθής. Με αντικατάσταση στις σχέσεις (10) και (11) προκύπτει η εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon(\mathbf{r})} \quad (13)$$

Για να είμαστε σε θέση να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση (13), χρειάζεται να καθορίσουμε κατάλληλες συνθήκες ορίων, οι οποίες να συνάδουν απόλυτα με το δικό

μας πρόβλημα. Θεωρούμε, επομένως, ως όριο, την επιφάνεια των αγωγών S_c , τις διεπαφές ανάμεσα στις περιοχές οι οποίες είναι “γεμάτες” με διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά S_d , και το δυναμικό να τείνει στο άπειρο. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, στο χώρο $\frac{R^3}{S}$ ανάμεσα στους αγωγούς και στις διηλεκτρικές επαφές (ο οποίος είναι ίσος με το συνολικό όγκο εάν αφαιρέσουμε τη μεταβλητή $S = S_c \cup S_d$) δεν υπάρχουν ελεύθερες φορτίσεις, επομένως η μεταβλητή ρ θα είναι μηδέν, και η εξίσωση (13) θα απλοποιηθεί στην αντίστοιχη εξίσωση Laplace (14).

Το πρόβλημα των ορίων που προκύπτει επομένως είναι το ακόλουθο:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \text{in } R^3 \setminus S \quad (14)$$

$$\varphi = v, \quad \text{on } S_c \quad (15)$$

$$\varphi^+ = \varphi^-, \quad \text{on } S_d \quad (16)$$

$$\varepsilon^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = \varepsilon^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n}, \quad \text{on } S_d \quad (17)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \quad (18)$$

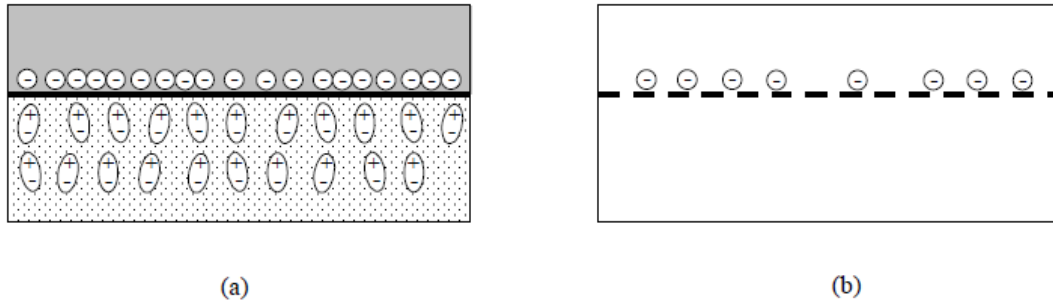
Στο οποίο οι εξισώσεις (15) – (18) μας παρέχουν τις απαραίτητες συνθήκες για όλα τα όρια γύρω από το χώρο που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, η εξίσωση (15) δηλώνει ότι το δυναμικό της επιφάνειας των αγωγών θα πρέπει να είναι ίσο με το δυναμικό V που μας έχει δοθεί. Οι εξισώσεις (16) και (17) μας δίνουν τις συνθήκες κατά μήκος της διηλεκτρικής επαφής. Πιο αναλυτικά η εξίσωση (16) επισημαίνει ότι το δυναμικό πρέπει να είναι μια συνεχής συνάρτηση και το βασικό συστατικό της ηλεκτρικής ροής \vec{D}_n πρέπει να διατηρείται στην επιφάνεια S_d (17). Τέλος το όριο στην εξίσωση (18) έχει την τιμή μηδέν καθώς ορίζεται ως η τιμή του δυναμικού στο άπειρο.

1.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ (EQUIVALENT – CHARGE FORMULATION)

Για τον υπολογισμό της χωρητικότητας, το μόνο που απαιτείται είναι το επαγόμενο ελεύθερο φορτίο των αγωγών. Αν ανατρέξουμε λίγο πιο πάνω, και πιο συγκεκριμένα στην εξίσωση (3), είμαστε σε θέση να σκεφτούμε να λύσουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αντικαθιστώντας τους αγωγούς και τα διηλεκτρικά με ελεύθερο χώρο καθώς επίσης λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη επιρροή στο δυναμικό πεδίο τοποθετώντας ένα λεπτό στρώμα σταθερών φορτίων στις επιφάνειες S_d και S_c . Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε το δυναμικό φορτίο που παράγεται από αυτή την αλλαγή του φορτίου.

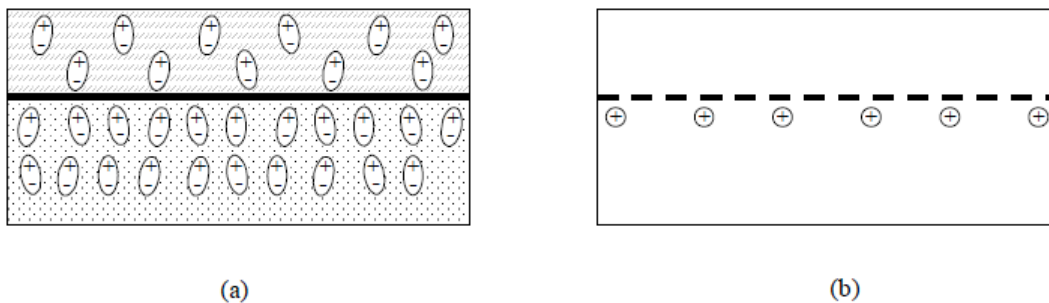
Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως Equivalent – Charge Formulation (ECF).

Συγκεκριμένα, από τη στιγμή που σε κάθε αγωγό που σχετίζεται με τη διηλεκτρική επιφάνεια το συνολικό φορτίο είναι το σύνολο των ελεύθερων φορτίσεων, θα αντικαταστήσουμε αυτή τη διεπαφή (του αγωγού με τη διηλεκτρική επιφάνεια) με μια επιφάνεια φορτίου πυκνότητας σ_c ισοδύναμη με τη συνολική πυκνότητα φορτίου. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα 1.1 . Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι δηλώνουμε πως $\sigma_t = \sigma_f + \sigma_p$, όπου σ_t είναι η συνολική πυκνότητα φορτίου, σ_f είναι η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου, και σ_p είναι η πολωμένη πυκνότητα φορτίου. Πράγμα που σημαίνει πως οι παραπάνω μεταβλητές είναι προσημασμένες. Σε γενικές γραμμές, η μεταβλητή σ_t θα είναι, σε απόλυτη τιμή, μικρότερη από την σ_f , καθώς το ελεύθερο φορτίο αντισταθμίζεται σε κάποιο βαθμό από τα φραγμένα όρια της διπολικής φόρτισης του διηλεκτρικού, που ευθυγραμμίζονται δημιουργώντας ένα πλέγμα φόρτισης (εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου) . Πρέπει να σημειώσουμε ότι η επίδραση του διηλεκτρικού ερχόμενο σε επαφή με την επιφάνεια του αγωγού, υπολογίζεται με μια σχετική διηλεκτρική τιμή ϵ . Δηλαδή υφίσταται η σχέση $\sigma_f = \epsilon \sigma_t$, η οποία μας επισημαίνει ότι το ελεύθερο φορτίο του αγωγού είναι ϵ φορές μεγαλύτερο από το συνολικό φορτίο της επιφάνειας. Βασικά η παρουσία του διηλεκτρικού αναγκάζει τη συσσώρευση του φορτίου ϵ φορές μεγαλύτερη από το φορτίο που θα είχαμε χωρίς το διηλεκτρικό, για την ίδια εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού. Αυτός είναι φυσικά ο λόγος που υψηλής “ορατότητας” (permittivity) διηλεκτρικά χρησιμοποιούνται ως παρεμβολείς (interposers) ανάμεσα σε πλάκες ενός πυκνωτή για να αυξήσουν την τιμή της χωρητικότητας του.



Σχήμα 1.1 (a) Διεπαφή αγωγού – διηλεκτρικού (conductor – to – dielectric interface) και (b) το ισοδύναμο ECF μοντέλο.

Με παρόμοιο τρόπο, από τη στιγμή που σε κάθε διηλεκτρική με διηλεκτρική διεπαφή (dielectric-to-dielectric interface) το συνολικό φορτίο είναι το φορτίο πόλωσης, αντικαθιστούμε τη διηλεκτρική επαφή με την πυκνότητα φορτίου επιφάνειας σ_d που είναι ισοδύναμη με το σύνολο που προκύπτει από την πολωμένη πυκνότητα φορτίου. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.2. Σε αυτή την περίπτωση, η διαφορά ανάμεσα στην πολωμένη πυκνότητα φορτίου στην διεπαφή δίνει τη συνολική πολωμένη πυκνότητα φορτίου.



Σχήμα 1.2 (a) Διεπαφή διηλεκτρικού – διηλεκτρικού (dielectric – to – dielectric interface) και (b) το ισοδύναμο ECF μοντέλο.

Έχουμε πλέον μια ρύθμιση των φορτίων σε ελεύθερο χώρο. Ως εκ τούτου, μπορούμε εύκολα να γράψουμε το δυναμικό ως μια υπέρθεση των δυναμικών εξαιτίας της πυκνότητας φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού σ_c και στην πολωμένη πυκνότητα φορτίου σ_d , ως ακολούθως :

$$\varphi(x) = \int_{S_c} \frac{\sigma_c(x')}{4\pi\epsilon_0|x-x'|} dS_{x'} + \int_{S_d} \frac{\sigma_d(x')}{4\pi\epsilon_0|x-x'|} dS_{x'} \quad (19)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (19), $x \in R^3$ είναι ένα σημείο στο χώρο στο οποίο εμείς εκτιμούμε και υπολογίζουμε το δυναμικό, εξαιτίας του αγωγού και των πολωμένων φορτίσεων, και κάνουμε χρήση της λεγόμενης συνάρτησης Green για τον ελεύθερο χώρο [4]. Περισσότερο διαισθητικά, όμως, μπορεί να θεωρήθει ως επέκταση της εξίσωσης (3).

Τώρα πρέπει να πληρούμε τις προϋποθέσεις (14) – (18). Σημειώνουμε επίσης ότι, το δυναμικό που ορίζεται στην εξίσωση (19) ικανοποιεί, ήδη, πλήρως την εξίσωση Laplace (14), είναι συνεχής συνάρτηση στο R^3 , ικανοποιεί την εξίσωση (16) και διασπάται όπως το $\frac{1}{x}$, όπως απαιτείται από την εξίσωση (18). Χρειαζόμαστε, επομένως, να ταιριάξουμε κατάλληλα τις συνθήκες ορίων – φραγμάτων που απομένουν, δηλαδή, την εξίσωση (15) και (17). Άρα, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (19), (15) και (17) για να φτιάξουμε ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο θα μοιάζει με το σύστημα (4), όπου θα αντικαταστήσουμε το φ , όπως μας δίνεται από την εξίσωση (19), στην εξίσωση (17). Στη συνέχεια θα λύσουμε για να υπολογίσουμε τη μεταβλητή σ , έχοντας ως δεδομένο τις τιμές των δυναμικών V_i επι των αγωγών. Μιας και οι συνολικές πυκνότητες των φορτίων σ_c είναι γνωστές, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τα ελεύθερα φορτία Q_i που επάγονται στους αγωγούς, ενσωματώνοντας το αποτέλεσμα του ακόλουθου ολοκληρώματος στις περιοχές των αγωγών.

$$Q_i = \int_{S_{ci}} \sigma_c(x) \epsilon(x) dS_x \quad (20)$$

Να σημειώσουμε εδώ, ότι αν παραμελήσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με την μεταβλητή ϵ θα υπολογίσουμε μόνο τις συνολικές φορτίσεις, αλλά εξαιτίας του υπολογισμού της χωρητικότητας (εξίσωση 2) πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα ελεύθερα επαγωγικά φορτία και όχι το σύνολο αυτών.

Μετά από όλη αυτή την επίπονη και άκρως μαθηματική ανάλυση, είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε τους όρους $C_{i,j}$ της εξίσωσης (2). Αυτό μπορεί να γίνει με έναν εύκολο σχετικά τρόπο, αφού καθορίσουμε ένα σύνολο από m διανύσματα τάσεων V_k (δηλαδή, το διάνυσμα τάσης V_1 αποτελείται από το πρώτο στοιχείο V_1 που είναι ίσο με την μονάδα, ενώ τα ακόλουθα στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν, το διάνυσμα τάσης V_2 αποτελείται από το δεύτερο στοιχείο που είναι ίσο με την μονάδα ενώ τα ακόλουθα στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν, και με την ίδια λογική σκέψης

συνεχίζουμε). Ως εκ τούτου, πολλαπλασιάζοντας με V_1 την εξίσωση (2) θα προκύψει ένα διάνυσμα Q_1 το οποίο θα αποτελείται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα χωρητικότητας C . Επιλύοντας συνολικά m προβλήματα θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε ολόκληρο τον πίνακα χωρητικότητας C . Χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο τη στιγμή που το σύστημα των εξισώσεών μας μοιάζει με το αντίστοιχο σύστημα της εξίσωσης (4), ενώ παράλληλα δεν υπάρχει καμία άμεση γνώση για την εξίσωση (2) και η μέθοδος που περιγράφεται παραπάνω είναι ισοδύναμη με την αντιστροφή του πίνακα P της εξίσωσης (4) (Αναλυτική περιγραφή για την διαδικασία αντιστροφής πίνακα θα ακολουθήσει σε επόμενο κεφάλαιο) . Αξίζει εδώ να προστεθεί ότι ο λόγος που δεν επιχειρούμε την άμεση αντιστροφή του πίνακα P είναι καθαρά θέμα πολυπλοκότητας. Η άμεση αντιστροφή του πίνακα P έχει μια πολυπλοκότητα της τάξης του N^3 , όπου το N είναι το μέγεθος του πίνακα και γίνεται πολύ γρήγορα υπολογιστικά δυσεπίλυτο καθώς αυξάνεται ο αριθμός N . Το πρόγραμμα FasterCap από την άλλη, χρησιμοποιεί ένα σύστημα επιτάχυνσης που επιτρέπει την αντιμετώπιση του προβλήματος με την πολυπλοκότητα να είναι της τάξης NM , όπου το M είναι ο αριθμός των αγωγών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μπορεί να εκτελέσει τον πολλαπλασιασμό του πίνακα – διανύσματος $P \times \sigma$ για N λειτουργίες. Οι λεπτομέρειες για την επιτυχή αυτή επιτάχυνση δεν αποτελούν αυτοσκοπό αυτής εδώ της εργασίας, οπότε δεν θα εμβαθύνουμε περισσότερο σε αυτή τη μέθοδο (στην περίπτωση όμως που ο αναγνώστης θα ήθελε να ενημερωθεί, λεπτομέρειες υπάρχουν στην βιβλιογραφία, και πιο συγκεκριμένα στις παραπομπές [4] και [5]).

Για λόγους πληρότητας, οφείλουμε μια τελευταία σημείωση. Μπορεί κάποιος εύκολα να παρατηρήσει ότι το σύστημα των εξισώσεων το οποίο προκύπτει από τις εξισώσεις (19),(15) και (17), ακόμη και αν ξεετάζει πλήρως την επεξεργασία των πολλαπλών, μερικών σταθερών διηλεκτρικών περιοχών στον υπολογισμό της χωρητικότητας, δεν συνάδει απόλυτα με την εξίσωση (4). Πράγματι, το σύστημα δεν μπορεί να γραφεί άμεσα ως αποτέλεσμα του πραγματικού πίνακα P πολλαπλασιασμένο με το διάνυσμα σ , δίνοντάς μας μια απλή μαθηματική λύση. Θα “ αποκρυπτογραφήσουμε ” επομένως, τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για να μετατρέψει αυτές τις εξισώσεις σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Ας υποθέσουμε ότι η συνεισφορά του φορτίου μπορεί να προσεγγιστεί διαιρώντας την επιφάνεια των αγωγών σε n πάνελς, για καθένα από τα οποία η πυκνότητα φορτίου θεωρείται σταθερή. Αυτή η θεώρηση μπορεί να δημιουργήσει κάποιο σφάλμα, αλλά αν ο αριθμός των πάνελς είναι αρκετά μεγάλος (η διακριτοποίηση είναι αρκετά λεπτή) το σφάλμα μπορεί να περιέχεται κάτω από ένα καθορισμένο όριο. Εξαιτίας της διακριτοποίησης, η εξίσωση (19) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα, μιας και σε κάθε πάνελ η σταθερή πυκνότητα φορτίου σ , μπορεί να βγει εκτός του ολοκληρώματος της σχέσης (21).

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{nc} \sigma_{ck} \int_{S_{ck}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|} dS_{x'} + \quad (21)$$

$$\sum_{k=nc+1}^n \sigma_{dk} \int_{S_{dk}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|} dS_{x'}$$

Όπου nc είναι το πλήθος των πάνελς στο οποίο έχουν χωριστεί οι επιφάνειες των αγωγών, $n - nc$ είναι το πλήθος των πάνελς στο οποίο έχουν χωριστεί οι διηλεκτρικές διεπαφές, σ_{ck} είναι η πυκνότητα φορτίου στα k -ιστά πάνελς αγωγών και S_{ck} είναι η επιφάνειά του, σ_{dk} είναι η πυκνότητα φορτίου επιφάνειας στο k -ιστό διηλεκτρικό πάνελ και S_{dk} είναι η επιφάνειά του. Ας υπολογίσουμε τώρα το δυναμικό $\varphi(x)$ στο κέντρο του πρώτου πάνελ αγωγού, θεωρώντας ότι η μεταβλητή x είναι γνωστή. Τα ολοκληρώματα τώρα εξαρτώνται μόνο από τις σταθερές και από γεωμετρικές παραμέτρους, οι οποίες είναι σταθερές, δεδομένου ότι η γεωμετρία δεν αλλάζει, και μπορούν να υπολογιστούν με γνωστές μεθόδους ολοκλήρωσης, δίνοντας ως αποτέλεσμα πραγματικές τιμές. Αφού το δυναμικό στην επιφάνεια του αγωγού είναι μια από τις συνθήκες φραγμάτων που έχουμε θέσει (σχέση (15)), για το πρώτο πάνελ έχουμε το εξής:

$$v_1 = \sum_{k=1}^{nc} \sigma_{ck} \int_{S_{ck}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x_1 - x'|} dS_{x'} + \quad (22)$$

$$\sum_{k=nc+1}^n \sigma_{dk} \int_{S_{dk}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x_1 - x'|} dS_{x'}$$

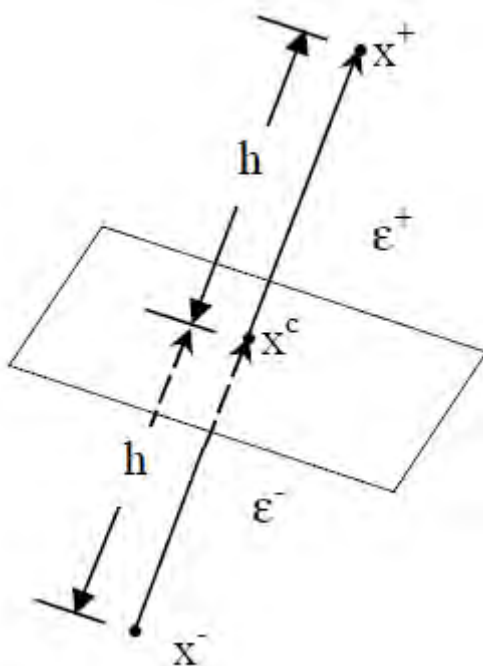
Όπου x_1 είναι το κέντρο του πρώτου πάνελ, και v_1 είναι το δυναμικό στο πρώτο πάνελ. Να σημειωθεί εδώ ότι το δυναμικό v_1 θεωρείται γνωστό από το V , μιας και όλη η επιφάνεια του κάθε αγωγού έχει το ίδιο δυναμικό. Επομένως το δυναμικό σε κάθε πάνελ που συνδέεται με τον αντίστοιχο αγωγό είναι το ίδιο. Αν συνεχίσουμε να γράφουμε και άλλες nc εξισώσεις παρόμοιες με την εξίσωση (22) μια κάθε πάνελ του κάθε αγωγού, θα έχουμε ένα σύστημα από nc εξισώσεις με n αγνώστους.

Υποκαταστήνοντας την εξίσωση (21) στην εξίσωση (17), η οποία είναι η τελευταία οριακή συνθήκη που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμη, μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε το πρόβλημάς μας, δημιουργώντας τις εναπομείναντες $n - nc$ εξισώσεις. Ένας απλός τρόπος για να φέρουμε την εξίσωση (17) με την (21) σε γραμμική μορφή είναι να προσεγγίσουμε τις παραγώγους της εξίσωσης (17)

χρησιμοποιώντας διαιρούμενες διαφορές κατασκευασμένες κοντά στο πάνελ που έχουμε “στοχεύσει” όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.

$$\varepsilon^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} - \varepsilon^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = 0 \approx \frac{(\varphi_c - \varphi^+)}{h} - \frac{(\varphi^- - \varphi_c)}{h} \quad (23)$$

Και με τη χρήση της εξίσωσης (21) να αξιολογήσουμε το δυναμικό στα δεδομένα σημεία του χώρου.



Σχήμα 1.3 Τα πιθανά παράγωγα και στις δύο πλευρές ενός διηλεκτρικού πάνελ προσεγγίζονται με διαιρούμενες διαφορές.

Γράφοντας τώρα $n - n_c$ εξισώσεις, μια για κάθε πάνελ στα οποία κάθε διηλεκτρική επιφάνεια έχει χωριστεί, μας παρέχει επομένως, τις τελευταίες σειρές για να ολοκληρώσουμε το σύστημα των εξισώσεων το οποίο μπορεί να συνοψιστεί στην ακόλουθη μορφή πίνακα ως εξής :

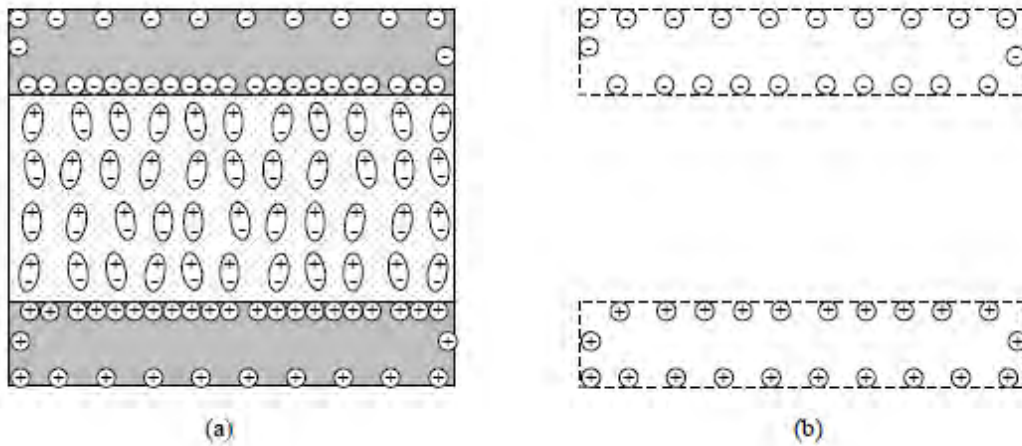
$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{nc,1} & \cdots & p_{nc,n} \\ d_{nc+1,1} & \cdots & d_{nc+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_{nc} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Όπου q_i είναι το συνολικό φορτίο του πάνελ i , v_i είναι η συνολική τάση στο πάνελ i , και $p_{i,j}$ και $d_{i,j}$ είναι οι συντελεστές που προκύπτουν από τις εξισώσεις (22) και (23). Να σημειώσουμε ότι το q_i είναι ίσο με $\frac{\sigma_i}{a_i}$, όπου a_i είναι η περιοχή του πάνελ, από τη στιγμή που έχουμε θεωρήσει ότι η πυκνότητα φορτίου δεν μεταβάλλεται σε όλο το πάνελ, έτσι μπορούμε να εισάγουμε τον γεωμετρικό παράγοντα $\frac{1}{a_i}$ απευθείας στους συντελεστές $p_{i,j}$ και $d_{i,j}$.

Το σύστημα (24) μπορεί να λυθεί για ένα δοσμένο σύνολο δυναμικών v και να βρεθεί το αντίστοιχο φορτίο q . Σημειώνουμε ότι το σύστημά μας δεν είναι ίδιο με το σύστημα (4), το οποίο αποτελείται μόνο από m εξισώσεις και λαμβάνει υπόψη μόνο τα συνολικά φορτία Q των αγωγών και τα δυναμικά τους V . Όμως η σχέση (24) είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με την σχέση (4) μιας και κάθε αγωγός απαρτίζεται πλήρως από ένα σύνολο πάνελς. Έτσι, σε ελεύθερο χώρο, το σύνολο των φορτίσεων από q_{c1} σε q_{c2-1} , όπου το $c1$ είναι ο δείκτης του πρώτου πάνελ και $c2-1$ είναι ο δείκτης του τελευταίου πάνελ σε ένα σύνολο από πάνελς στο οποίο ο πρώτος αγωγός έχει διαχωριστεί επιτυχώς, και ισούται με Q_1 , και ούτω καθεξής. Από την άλλη πλευρά, $v_{c1} = v_{c1+1} = \dots = v_{c2-1} = V_1$, δεδομένου ότι η επιφάνεια των αγωγών είναι ισοδυναμική. Η τελευταία παρατήρηση σχετίζεται με τη σύνδεση ανάμεσα στο q και στο Q όταν υπάρχουν διηλεκτρικά. Σε αυτή την περίπτωση αξίζει να θυμηθούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο ECF, έτσι ώστε το q να είναι το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια των πάνελς και όχι το ελεύθερο φορτίο. Πρέπει, συνεπώς, να ληφθεί υπόψη ότι η παρουσία του διηλεκτρικού ερχόμενο σε επαφή διαμέσου της επιφάνειας του αγωγού (20), οδηγεί στην διακριτική του μορφή, κατά την εξέταση των διακριτικών πάνελς:

$$Q_i = \sum_{j=c_i}^{c_{i+1}-1} \epsilon_j q_j \quad (25)$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει επίσης αν διαφορετικά μέρη του αγωγού είναι σε επαφή με διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά, μας επιτρέπει μια διαφορετική σχετική ορατότητα (permittivity) ϵ_j για κάθε πάνελ, για τη διαχείριση διάφορων περιπτώσεων, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4 (a) Παράλληλος πυκνωτής πλάκας με διηλεκτρικό πληρωτικό (a) και το Μοντέλο σχηματισμού ισοδύναμης φόρτισης (b). Η πλευρά σε κάθε μια από τις δύο αγωγίμες πλάκες του πυκνωτή που είναι σε επαφή με το διηλεκτρικό υλικό πρέπει να συσσωρεύει περισσότερα φορτία για να αντισταθμίσει τα πολωμένα φορτία σε σχέση με τις άλλες τρεις πλευρές που είναι ενσωματωμένες στον αέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΩΝ MAXWELL

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο πίνακας χωρητικότητας που υπολογίζεται από το πρόγραμμα FasterCap και από τα περισσότερα προγράμματα επίλυσης χωρητικότητας έχει τη μορφή του πίνακα χωρητικότητας του Maxwell. Το θέμα του πίνακα χωρητικότητας του Maxwell εξηγείται αρκετά αναλυτικά σχεδόν σε όλα τα καλά ηλεκτρομαγνητικά βιβλία, αλλά εμείς θα παρουσιάσουμε την απαραίτητη θεωρητική ανάλυση, με μια πρακτική προσέγγιση.

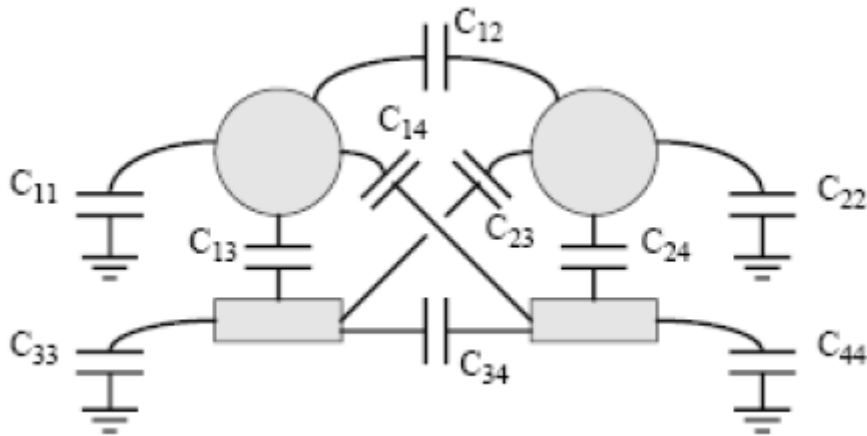
2.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ο πίνακας χωρητικότητας Maxwell μας παρέχει τη σχέση ανάμεσα στις τάσεις ενός συνόλου αγωγών και των φορτίων των αγωγών αυτών. Για παράδειγμα, για ένα γενικό σύνολο αγωγών, η ακόλουθη σχέση είναι απολύτως έγκυρη:

$$Q = C \cdot V \quad (1)$$

Όπου C είναι ο πίνακας χωρητικότητας Maxwell, και V και Q είναι τα διανύσματα της τάσης και του φορτίου αντίστοιχα. Η σχέση μεταξύ των στοιχείων του πίνακα C και των φυσικών χωρητικότητας ανάμεσα σε ένα σύνολο αγωγών θα μπορεί τώρα να διαχωριστεί.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα σύνολο από τέσσερις αγωγούς, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Εδώ, οι αμοιβαίες χωρητικότητες καθώς επίσης και οι αυτό – χωρητικότητες είναι σαφώς σχεδιασμένες.



Σχήμα 2.1 Χωρητικότητες μεταξύ των τεσσάρων αγωγών

Σύμφωνα με τη Φυσική το φορτίο Q_1 του αγωγού #1, που μας δίνει τις τάσεις V_1 , V_2 , V_3 , V_4 επί των τεσσάρων αγωγών είναι :

$$Q_1 = C_{11} \cdot V_1 + C_{12} \cdot (V_1 - V_2) + C_{13} \cdot (V_1 - V_3) + C_{14} \cdot (V_1 - V_4) \quad (2)$$

Το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη σχέση:

$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14}) \cdot V_1 - C_{12} \cdot V_2 - C_{13} \cdot V_3 - C_{14} \cdot V_4 \quad (3)$$

Έτσι η πρώτη γραμμή του πίνακα χωρητικοτήτων Maxwell C είναι :

$$\begin{vmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14} & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο υπολογίζοντας το φορτίο και για τους τέσσερις αγωγούς που έχουμε, ο πίνακας χωρητικοτήτων Maxwell θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{bmatrix} C_{11}+C_{12}+ \\ +C_{13}+C_{14} & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} \\ -C_{21} & C_{21}+C_{22}+ \\ +C_{23}+C_{24} & -C_{23} & -C_{24} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_{31}+C_{32}+ \\ +C_{33}+C_{34} & -C_{34} \\ -C_{41} & -C_{42} & -C_{43} & C_{41}+C_{42}+ \\ +C_{43}+C_{44} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Αν τώρα, επεκτείνουμε την παραπάνω μορφή σε μία πιο γενική περίπτωση και όχι στο περιορισμό των τεσσάρων αγωγών, τότε :

$$\begin{bmatrix} C_{11}+C_{12}+ \\ +\dots+C_{1n} & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{21}+C_{22}+ \\ +\dots+C_{2n} & \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{m1} & -C_{n2} & \dots & C_{n1}+C_{n2}+ \\ +\dots+C_{nm} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές των χωρητικότητων που χρησιμοποιούνται στα προγράμματα χωρητικότητας τύπου SPICE είναι οι τιμές C_{xy} , και όχι απευθείας οι τιμές που εμφανίζονται σαν στοιχεία στον πίνακα χωρητικότητας Maxwell.

Για παράδειγμα, στην δική μας περίπτωση των τεσσάρων αγωγών, το στοιχείο στην πρώτη στήλη, πρώτη σειρά στον πίνακα χωρητικότητας του Maxwell, είναι $C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14}$, ενώ στο SPICE θα πρέπει να δηλώσουμε μια πυκνότητα ανάμεσα στον πρώτο κόμβο και στη γείωση (GND) με την τιμή C_{11} , μια πυκνότητα μεταξύ του πρώτου και του δευτέρου κόμβου C_{12} , και ούτω καθεξής. Αυτό σημαίνει ότι μερικές απλές λειτουργίες είναι σε γενικές γραμμές απαραίτητες για να διαχωρίσουν τις τιμές των C_{xy} χωρητικότητας από τις χωρητικότητες που βρίσκονται στον πίνακα Maxwell.

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Παρακάτω θα ακολουθήσει ένα μικρό παράδειγμα που σκόπος του είναι να δημιουργήσει την πρώτη επαφή και εξοικίωση με τον πίνακα χωρητικότητας Maxwell, να βοηθήσει στην κατανόηση του υπολογισμού του καθώς επίσης και να επισημάνει κάποιες μικρές διαφορές με τις πυκνότητες που υπολογίζονται από κάποια άλλα προγράμματα.

Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα χωρητικότητας Maxwell για δυο αγωγούς. (Αφού το πλήθος των αγωγών είναι ίσο με δύο, μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε πως ο πίνακας χωρητικότητας Maxwell θα έχει διαστάσεις 2 x 2)

$$\begin{pmatrix} 4nF & -1nf \\ -1nF & 3nF \end{pmatrix}$$

Από τον παραπάνω πίνακα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις πυκνότητες :

$$C_{11} = 4nF - 1nF = 3nF$$

$$C_{22} = 3nF - 1nF = 2nF$$

$$C_{12} = C_{21} = -(-1nF) = 1nF$$

Το αρχείο εισόδου που ανταποκρίνεται σε ένα πρόγραμμα SPICE θα μοιάζει με το ακόλουθο κείμενο:

```
C11 node1 0          3n
C22 node2 0          3n
C12 node1 node2     1n
```


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ

3.1 METHOD OF MOMENTS (MOM)

Πρόκειται για μια μαθηματική τεχνική, η οποία χρησιμοποιείται για να μετατρέψει τις ολοκληρωμένες εξισώσεις, εξισώσεις δηλαδή που λύνονται με την απαραίτητη χρήση ολοκληρωμάτων, σε γραμμικά συστήματα τα οποία μπορούν να λυθούν αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή, ή πιο εξειδικευμένα, έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρήσαμε το πρόβλημα του υπολογισμού μιας άγνωστης συνεισφοράς φορτίου σε μια πλάκα έχοντας ως δεδομένο το δυναμικό αυτής. Βασική μας προσέγγιση ήταν να επεκτείνουμε την άγνωστη ποσότητα χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από γνωστές συναρτήσεις με άγνωστους συντελεστές. Στη συνέχεια μετατρέπαμε την τελική μας εξίσωση σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων ικανοποιώντας πάντα τις οριακές συνθήκες, σε αυτή την περίπτωση το ηλεκτρικό δυναμικό, σε ένα σύνολο σημείων ενός αντικειμένου (συνήθως αγωγού). Το τελικό γραμμικό σύστημα που προέκυπτε, λυνόταν στη συνέχεια αριθμητικά για τους άγνωστους συντελεστές. Ας επισημοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία δίνοντάς της μια συγκεκριμένη μορφή, εισάγοντας μια μέθοδο σταθμισμένων υπολοίπων γνωστή ως την Μέθοδο των Στιγμών (Method of Moments (MOM)). Εξετάζουμε το γενικευμένο πρόβλημα [9]

$$L(f) = g \quad (1)$$

Όπου το L είναι ένας γραμμικός τελεστής(operator), g είναι μια γνωστή συνάρτηση εξαναγκασμού, και f είναι η άγνωστη μεταβλητή μας. Στα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, το L τυπικά είναι ένας διαφορικός τελεστής, f είναι η άγνωστη συνάρτηση (που περιέχει λογικά το ρεύμα, το φορτίο κτλ.) και g είναι μια γνωστή πηγή διέγερσης (προσπίπτων φορτίο). Ας επεκτείνουμε το f σε ένα σύνολο από N σταθμισμένων βάσεων συναρτήσεις,

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (2)$$

όπου η μεταβλητή a_n αντιστοιχεί στις άγνωστες σταθμισμένες μεταβλητές. Επειδή το L είναι γραμμικό, η συνεισφορά της (2) στη σχέση (1) παράγει

$$\sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \approx g \quad (3)$$

όπου το υπόλοιπο είναι

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \quad (4)$$

Οι βασικές συναρτήσεις έχουν επιλεγεί για να μοντελοποιήσουν την αναμενόμενη συμπεριφορά της άγνωστης συνάρτησης διαμέσου του δικού της χώρου, και μπορούν να κλιμακωθούν σε βαθμίδες ή σε διανύσματα ανάλογα με το πρόβλημα. Αν οι βασικές συναρτήσεις έχουν “τοπική υποστήριξη” στο δικό τους χώρο, τότε είναι γνωστές με το όνομα « σφαιρικές ή ολοκληρωτικού – τομέα » βασικές συναρτήσεις (global or entire – domain). Ας γενικοποιήσουμε τώρα τη μέθοδο για την οποία προηγουμένως επιβάλλαμε τις οριακές συνθήκες. Ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο ή « στιγμή » ανάμεσα στη βασική συνάρτηση $f_n(\mathbf{r}')$ και στην συνάρτηση ελέγχου ή σταθμισμένη συνάρτηση $f_m(\mathbf{r})$ ως

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_{f_m} f_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{f_n} f_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (5)$$

όπου τα ολοκληρώματα είναι γραμμικά, επιφανειακά ή ολοκληρώματα όγκου που εξαρτώνται από τις βασικές συναρτήσεις και από τις συναρτήσεις ελέγχου. Απαιτώντας το εσωτερικό γινόμενο της κάθε συνάρτησης ελέγχου με τη συνάρτηση υπολοίπου να είναι μηδέν, προκύπτει

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle f_m, L(f_n) \rangle = \langle f_m, g \rangle \quad (6)$$

Το οποίο έχει ως αποτέλεσμα μια εξίσωση πίνακα διαστάσεων $N \times N$ $Za = b$ με στοιχεία του πίνακα

$$z_{mn} = \langle f_m, L(f_n) \rangle \quad (7)$$

Και στοιχεία του αριστερού διανύσματος

$$b_m = \langle f_m, g \rangle \quad (8)$$

Στην μέθοδο MOM, κάθε βασική συνάρτηση αλληλεπιδρά με όλες τις άλλες συναρτήσεις μέσω της συνάρτησης Green και το τελικό σύστημα του πίνακα είναι πλήρες. Όλα τα στοιχεία του πίνακα πρέπει οπωσδήποτε να αποθηκεύονται ρητά στη μνήμη. Αυτό μπορεί να συγκριθεί με άλλους αλγορίθμους και κυρίως με πίνακες οι οποίοι είναι αραιοί, συμμετρικοί και τα περισσότερα στοιχεία τους είναι μηδέν. [10]

3.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ $A = LU$

3.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U .

Ο πίνακας L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω από τη διαγώνιο ενώ ο πίνακας U περιέχει τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή.

3.2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι η παραγοντοποίηση του πίνακα A σε ένα κάτω και πάνω τριγωνικό μέρος μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή :

$$LU = A$$

Όπου

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας αυτή την “ αποσύνθεση ”, μπορούμε να λύσουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$A \cdot x = (L \cdot U) \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b$$

Λύνοντας πρώτα την εξίσωση

$$L \cdot y = b$$

Στην οποία το y παίρνει τιμές σύμφωνα με την ακόλουθη προς τα πίσω αντικατάσταση

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right] \quad i > 1$$

Και μετά λύνοντας την εξίσωση

$$U \cdot x = y$$

Και το x παίρνει τιμές σύμφωνα με την προς τα πίσω αντικατάσταση

$$x_N = \frac{y_N}{u_{NN}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{k=i+1}^N u_{ik} x_k \right] \quad i < N$$

Το μόνο που μας μένει τώρα είναι να καθορίσουμε τα στοιχεία του πίνακα L και του πίνακα U . Εάν εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό των παραπάνω πινάκων LU , θα έχουμε ένα πλήθος από N^2 εξισώσεις για τις $N^2 + N$ άγνωστες μεταβλητές l_{ij} και u_{ij} . Επειδή η διαγώνιος αντιπροσωπεύεται δύο φορές, έχουμε την ευχέρεια να καθορίσουμε μόνοι μας ένα πλήθος από N αγνώστους, έτσι επιλέγουμε

$$l_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Ως εκ τούτου

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Και μπορούμε αμέσως να θέσουμε $u_{11} = a_{11}$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα L με την πρώτη στήλη του πίνακα U, θα πάρουμε

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

.....

Και χρησιμοποιώντας την ίδια λογική για την δεύτερη στήλη του πίνακα U θεωρώντας ότι $u_{12} = a_{12}$ και

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} [a_{32} - l_{31}u_{12}]$$

$$l_{42} = \frac{1}{u_{22}} [a_{42} - l_{41}u_{12}]$$

.....

Το οποίο οδηγεί σε μια γενικοποιημένη μέθοδο γνωστή ως τον Αλγόριθμο του Crout [13]. Για κάθε στήλη $j = 1, 2, \dots, N$ πρώτα επιλύουμε για τα στοιχεία του πίνακα U τα οποία βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο, για παράδειγμα

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, j$$

Και μετά επιλύουμε αντιστοίχως για τα στοιχεία του πίνακα L που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο,

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right] \quad i = j + 1, j + 2, \dots, N$$

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο, τα στοιχεία που απαιτούνται σε κάθε βήμα θα έχουν υπολογιστεί ήδη τη στιγμή που τα χρειαζόμαστε. Ο πίνακας A μπορεί, επομένως, να παραγοντοποιηθεί στο χώρο, χωρίς να χρειάζεται επιπλέον πληροφορία για τους πίνακες L και U . Ένας πρακτικός αλγόριθμος παραγοντοποίησης LU μπορεί επίσης να ενσωματωθεί τμηματικά στρεφόμενος για να σιγουρέψει την αριθμητική σταθερότητα σε κάθε βήμα της διαδικασίας. Η διαδικασία της LU παραγοντοποίησης και της προς τα πίσω αντικατάστασης έχει την ίδια πολυπλοκότητα με την απαλοιφή Gauss [14].

Από τη στιγμή που η παραγοντοποίηση έχει ολοκληρωθεί, μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί για έναν αυθαίρετο αριθμό στην αριστερή πλευρά του πίνακα. Ο παραγοντοποιημένος πίνακας μπορεί, επομένως, να γραφεί, να αποθηκευτεί και να διαβαστεί αργότερα ανάποδα εάν είναι απαραίτητο, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε και να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα δεύτερη φορά.

3.2.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$ μέσω της παραγοντοποίησης LU

```
% Διαγωνοποίηση
```

```
For k = 1 : n - 1
    For i = k + 1 : n
        a(i, k) = a(i, k) / a(k, k)
        for j = k + 1 : n
            a(i, j) = a(i, j) - a(i, k) · a(k, j)
        end
    end
end
end
```

```
% Αντικατάσταση προς τα εμπρός ( forward substitution ) για την επίλυση του
συστήματος  $Ld = b$ 
```

```
x(1) = b(1)
for i = 2 : n
    s = 0
    for j = 1 : i - 1
        s = s + a(i, j) * x(j)
    end
    x(i) = b(i) - s
end
end
```

% Αντικατάσταση προς τα πίσω (backward substitution) για την επίλυση του συστήματος $Ux = d$

```
x ( n ) = x ( n ) / a ( n , n )  
for i = n - 1 : -1 : 1  
    s = 0  
    for j = i + 1 to n  
        s = s + a ( i , j ) * x ( j )  
    end  
    x ( i ) = ( x ( i ) - s ) / a ( i , i )  
end
```

Η παραγοντοποίηση LU απαιτεί $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις, οι οποίες είναι ίδιες με αυτές της απαλοιφής Gauss. Όμως, το βασικό πλεονέκτημα είναι ότι μόλις ο πίνακας A αποσυντεθεί σε $A = LU$, το στάδιο της αντικατάστασης μπορεί να διεξαχθεί αποτελεσματικά για διαφορετικές τιμές του b . Να σημειωθεί εδώ ότι το βήμα απομάκρυνσης στην απαλοιφή Gauss χρειάζεται $\frac{n^3}{3} + O(n)$ πράξεις, σε αντίθεση με n^2 πράξεις που απαιτούνται για την αντικατάσταση.

3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Πριν περάσουμε στην ανάλυση του τρόπου υπολογισμού ενός αντίστροφου πίνακα, καλό θα ήταν να επισημανθούν κάποιες βασικές πολύ σημαντικές αρχές οι οποίες ισχύουν και πρέπει να τηρούνται. Πιο συγκεκριμένα, ένας πίνακας A θεωρείται αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν, υπάρχει ένας άλλος πίνακας B έτσι ώστε $BA = I$ και $AB = I$. (όπου I ο μοναδιαίος πίνακας $[11]$). Υπάρχει το πολύ μόνο ένας τέτοιος πίνακας B , τον οποίο ονομάζουμε αντιστρέψιμο του A και συμβολίζεται με A^{-1} .

Τώρα, ας θεωρήσουμε τον παρακάτω τετραγωνικό πίνακα A διαστάσεων $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα A , λοιπόν, ορίζεται ως εξής : $A^{-1} = \frac{1}{A} \text{adj}A$ (σχέση 1) .

Για να τον υπολογίσουμε,θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα ($\det A$) του πίνακα A [12]. Αν η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν τότε ο πίνακας αυτός δεν έχει αντίστροφο. Αν η ορίζουσα έχει μη μηδενική τιμή τότε ο πίνακας έχει αντίστροφο, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Εφόσον η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός, βρίσκουμε τα συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα A και δημιουργούμε έναν καινούριο πίνακα B με τα στοιχεία που έχουμε βρει. Ορίζουμε το συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} ίσο με $(-1)^{i+j}$ επί την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε τη σειρά και τη στήλη του στοιχείου a_{ij} . Το συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} το συμβολίζουμε με c_{ij} .

$$B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Στη συνέχεια βρίσκουμε τον ανάστροφο του πίνακα B, ο οποίος έχει γραμμές τις στήλες του B, και στήλες τις γραμμές του B. Ισούται δηλαδή με

$$B^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Ο ανάστροφος του πίνακα B όμως ισούται με τον συμπληρωματικό (adjA) του πίνακα A. Με αντικατάσταση στη σχέση 1 μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον αντίστροφο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ FASTERCAP

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το FasterCap είναι ένα εργαλείο που υπολογίζει τις παρασιτικές χωρητικότητες σε πηνία, αντιστάσεις και πυκνωτές. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα επίλυσης χωρητικότητας ελεύθερου, ανοιχτού κώδικα το οποίο είναι διαθέσιμο τόσο για λειτουργικά συστήματα Windows όσο και για Linux. Μπορεί να προσομοιώσει , κομψά και σταθερά, αγωγίμες δομές σύνθετης διαπερατότητας ενσωματωμένες σε διηλεκτρικά μέσα. Πριν ακολουθεί η εκτενής ανάλυση, καλό θα ήταν να γίνει μια αναφορά στο τι εννοούμε παρασιτική εξαγωγή.

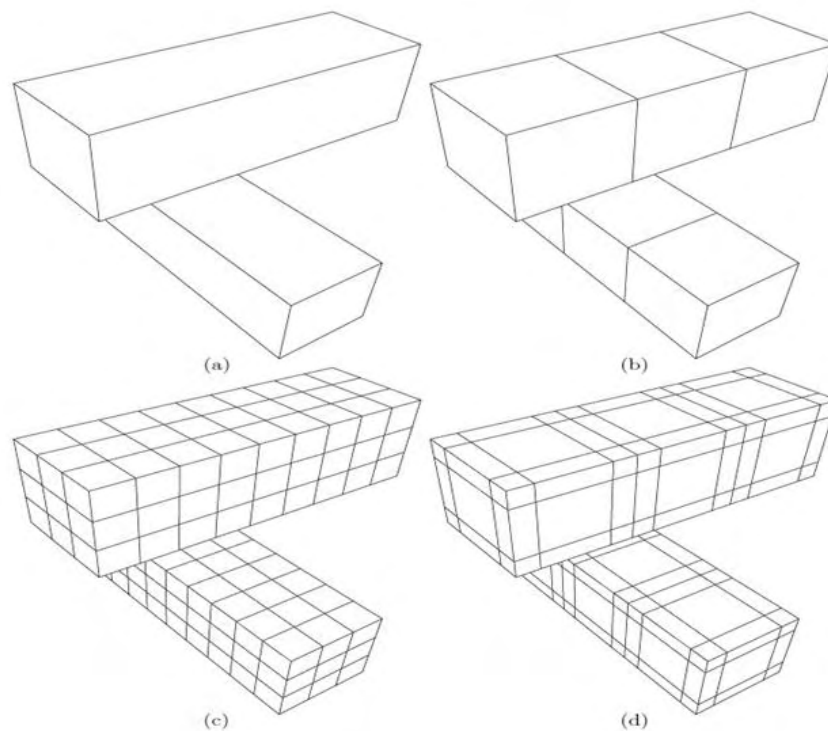
Στην ηλεκτρονική αυτοματοποίηση σχεδιασμού, η παρασιτική εξόρυξη είναι υπολογισμός των παρασιτικών επιδράσεων τόσο στις σχεδιαζόμενες συσκευές όσο και στις απαιτούμενες διασυνδέσεις καλωδίωσης ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος: παρασιτικές χωρητικότητες, παρασιτικές αντιστάσεις και παρασιτικές επαγωγικές, κοινώς ονομαζόμενες παρασιτικές συσκευές, παρασιτικά στοιχεία ή απλά παρασιτικά. Ο κύριος σκοπός της παρασιτικής εξαγωγής είναι να δημιουργηθεί ένα ακριβές αναλογικό μοντέλο του κυκλώματος, έτσι ώστε οι λεπτομερείς προσομοιώσεις να μιμούνται την πραγματική ψηφιακή και αναλογική αντίδραση κυκλώματος. Οι αποκρίσεις ψηφιακού κυκλώματος χρησιμοποιούνται συχνά για την κάλυψη των βάσεων δεδομένων για την καθυστέρηση του σήματος και τον υπολογισμό φόρτωσης όπως: ανάλυση χρονισμού, ανάλυση ισχύος, προσομοίωση κυκλώματος και ανάλυση ακεραιότητας σήματος. Τα αναλογικά κυκλώματα εκτελούνται συχνά σε λεπτομερείς πάγκους δοκιμών για να υποδείξουν εάν τα πρόσθετα παρασιτικά στοιχεία θα εξακολουθούν να επιτρέπουν στο σχεδιασμένο κύκλωμα να λειτουργεί. [18]

4.2 ΑΡΧΕΙΟ ΕΙΣΟΔΟΥ

Το εργαλείο FasterCap υποστηρίζει δύο ειδών αρχεία εισόδου. Τα generic files και τα αρχεία που δημιουργούνται από το Patran Modeler. Μπορούμε επίσης να δημιουργησουμε ένα συνδυασμό αυτών των δύο αρχείων σε ένα λίστα αρχείου εισόδου (list input file).

4.2.1 PATRAN NEUTRAL FILES

Τα Patran Neutral αρχεία είναι αρχεία γενικού σκοπού, τριών διαστάσεων. Μπορούν να υποστηρίξουν γραφικές παραστάσεις και επιτρέπουν τη δημιουργία και την ανάλυση σύνθετων δομών. Ένα Patran neutral αρχείο περιγράφει έναν αγωγό ως μια συλλογή από διασυνδεδεμένα στρώματα (patches).



Ένα διασυνδεδεμένο στρώμα (patch) είναι μια δυσδιάστατη επιφάνεια που αποτελείται από τέσσερα πλέγματα (grids). Μπορούμε επίσης να έχουμε και ένα hyper patch που αποτελείται από οκτώ πλέγματα (grids). Τα διασυνδεδεμένα στρώματα περιγράφονται ως ένα σύνολο από τριγωνικά ή τετραγωνικά στοιχεία.

Ακολουθούν δύο ενδεικτικά παραδείγματα του τρόπου δημιουργίας των πλεγμάτων.

```
GRID, 1, , 0.0/0.0/0.0
GRID, 2, , 1.0/0.0/0.0
GRID, 3, , 1.0/1.0/0.0
GRID, 4, , 0.0/1.0/0.0
GRID, 5, , 0.0/0.0/3.0
GRID, 6, , 1.0/0.0/3.0
GRID, 7, , 1.0/1.0/3.0
GRID, 8, , 0.0/1.0/3.0
GRID, 9, , -1.0/2.0/1.0
GRID, 10, , -1.0/2.0/2.0
GRID, 11, , -1.0/3.0/2.0
GRID, 12, , -1.0/3.0/1.0
GRID, 13, , 2.0/2.0/1.0
GRID, 14, , 2.0/2.0/2.0
GRID, 15, , 2.0/3.0/2.0
GRID, 16, , 2.0/3.0/1.0
```

Στο παραπάνω αρχείο εισόδου μπορούμε να διαπιστώσουμε την δημιουργία δεκαέξι τριγωνικών πλεγμάτων. Ο αύξωντας αριθμός (1 – 16) που υπάρχει μετά το όνομα των πλεγμάτων δηλώνει το πλήθος τους, ενώ οι αριθμοί που ακολουθούν μας δίνουν τις συντεταγμένες αυτών των πλεγμάτων στον τρισδιάστατο χώρο.

```
PATCH, 1, QUAD, , 1/2/3/4
PATCH, 2, QUAD, , 5/6/7/8
PATCH, 3, QUAD, , 1/4/8/5
PATCH, 4, QUAD, , 4/3/7/8
PATCH, 5, QUAD, , 3/2/6/7
PATCH, 6, QUAD, , 2/1/5/6
PATCH, 7, QUAD, , 9/10/11/12
PATCH, 8, QUAD, , 13/14/15/16
PATCH, 9, QUAD, , 9/12/16/13
PATCH, 10, QUAD, , 12/11/15/16
PATCH, 11, QUAD, , 11/10/14/15
PATCH, 12, QUAD, , 10/9/13/14
```

Ενώ σε αυτό το αρχείο εισόδου δημιουργούμε τετραγωνικά πλέγματα και οι αριθμοί στο τέλος κάθε γραμμής (1/2/3/4) μας δίνουν τις γωνίες μεταξύ των πλευρών των πλεγμάτων.

4.2.2. GENERIC FILES

Πρόκειται για μια πιο απλοποιημένη μορφή αρχείου εισόδου. Όλες οι συντεταγμένες κάθε πάνελ περιγράφονται σε μια σειρά, μαζί με το όνομα του αγωγού στον οποίο ανήκουν.

```
* Three plates structure
*
* lower contact
*
* triangle.txt : geometry file name
* 2.0 : permittivity
* 0.0 0.0 0.0 : 3D offset

C      triangle.txt    2.0    0.0 0.0 0.0

* dielectric interface
*
* triangle.txt : geometry file name
* 2.0 : outer permittivity
* 1.0 : inner permittivity
* 0.0 0.0 0.5 : 3D offset
* 0.25 0.25 0.0 : outer reference point

D      2.0 1.0          0.0 0.0 0.5    0.25 0.25 0.0

* upper contact
*

C      triangle.txt    1.0    0.0 0.0 1.0

File triangle.txt

* simple triangle
* plate : conductor name
* 0 0 0 1 0 0 0 1 0 : 3D vertices
*                          of the triangle

T      plate  0 0 0 1 0 0  0 1 0
End
```

Η παραπάνω περιγραφή αποτελεί ένα απλό αρχείο εισόδου για μια δομή που αποτελείται από τρία τριγωνικά πάνελς.

Πιο αναλυτικά, οι γραμμές που ξεκινούν με αστερίσκο (*) αποτελούν τα σχόλια του αρχείου εισόδου και δεν λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό. Οι γραμμές που ξεκινούν με το γράμμα C περιέχουν την επιφάνεια του αγωγού. Στη συνέχεια ακολουθεί το όνομα του αρχείου που μας ενδιαφέρει (π.χ. triangle.txt). Η επόμενη μεταβλητή αντιστοιχεί στην εξωτερική ορατότητα της επιφάνειάς μας, δηλαδή στην διηλεκτρική της σταθερά. Τέλος οι τιμές που ακολουθούν αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία του πίνακα που εφαρμόζονται σε όλα τα πάνελ του συγκεκριμένου φακέλου.

Δηλαδή πρόκειται για συντεταγμένες στον τρισδιάστατο χώρο. Οι γραμμές που ξεκινούν με το γράμμα D, αποτελούν την διηλεκτρική επιφάνεια. Οι δύο τιμές μεταβλητών που ακολουθούν (2.0 και 1.0) μας δίνουν αντίστοιχα την εσωτερική και την εξωτερική διηλεκτρική σταθερά. Ακολουθούν αναλόγως οι συντεταγμένες για το εσωτερικό και εξωτερικό σημείο αναφοράς. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί πώς θα πρέπει η επιφάνεια του αγωγού να αντιστοιχίζεται ακριβώς με την διηλεκτρική σταθερά είτε του εσωτερικού είτε του εξωτερικού σημείου αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι στην πρώτη αναφορά της επιφάνειας του αγωγού (C triangle.txt 2.0 0.0 0.0 0.0) η διηλεκτρική σταθερά έχει την τιμή δύο, πράγμα που σημαίνει ότι για να γίνουν και σωστοί υπολογισμοί θα πρέπει οι συντεταγμένες του να συνυπολογιστούν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες της διηλεκτρικής επιφάνειας που έχουν διηλεκτρική σταθερά ίση με δύο. Στο δικό μας παράδειγμα η αντιστοίχιση θα γίνει με την πρώτη τριάδα των συντεταγμένων της διηλεκτρικής επιφάνειας, δηλαδή με το εσωτερικό σημείο αναφοράς. Τα αρχικά γράμματα T και Q αντιστοιχούν αναλόγως σε τριγωνικά ή τετραγωνικά πάνελς ακολουθούμενα από τις συντεταγμένες των γωνιών του. Επιπροσθέτως, μπορούμε να έχουμε στο αρχείο εισόδου μας το αρχικό γράμμα G που υποδηλώνει την γείωση των αγωγών, ή το γράμμα B όπου υποδηλώνει τον αγωγό των διηλεκτρικών ορίων. Κάθε γραμμή στο τέλος της μπορεί να έχει τους τελεστές [+] ή [-] που υποδηλώνουν την κατεύθυνση του πεδίου στο χώρο, αν είναι εσωτερικά ή εξωτερικά της επιφάνειας. Τέλος, υπάρχει η περίπτωση ένας αγωγός να βρίσκεται διαχωρισμένος σε δύο ή / και σε περισσότερα αρχεία. Οπότε θα πρέπει με κάποιο τρόπο να μπορούμε να συνδέσουμε τις πληροφορίες και των δύο ή περισσότερων αρχείων. Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ότι το αρχείο εισόδου μας έχει αυτή την μορφή

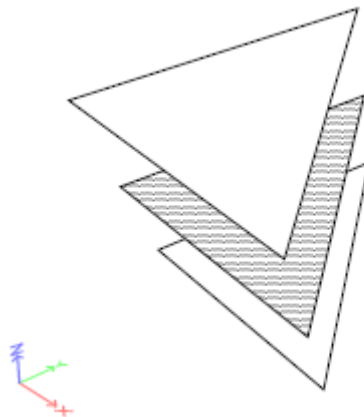
```

C      first_file      3.0    <tx> <ty> <tz> +
C      second_file     4.0    <tx> <ty> <tz> +
C      last_file       3.0    <tx> <ty> <tz> +

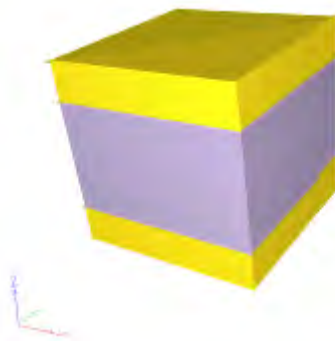
```

Τότε θα πρέπει να ομαδοποιήσουμε τους αγωγούς μας δηλώνοντάς τους σε μία ομάδα (group < number >) όπου στον τομέα number βάζουμε τον αριθμό που έχουμε δώσει σε καθένα από τους αγωγούς μας.

Το παραπάνω αρχείο εισόδου αντιστοιχεί στο ακόλουθο σχήμα τριγωνικών πάνελς στον τρισδιάστατο χώρο.



Ένας πραγματικός πυκνωτής παραλλήλων πλακών έχει « πανοπλία » με πεπερασμένο πάχος. Το σχήμα που ακολουθεί σε τρισδιάστατη μορφή μας δείχνει την εγκάρσια διατομή ενός τέτοιου πυκνωτή, όταν ο χώρος μεταξύ των πλακών γεμίζει με διηλεκτρικό μέσο.



Το αρχείο εισόδου για το παραπάνω τετραγωνικό σχήμα είναι το ακόλουθο

- * Capacitor
- *
- * This capacitor is made by a dielectric
- * material with relative permittivity
- * equal to 3.0, sandwiched between
- * two square metal contacts
- * with finite thickness

- * lower contact

```

C    capacitor_contact_sides.txt  1.0  0.0 0.0 0.0 +
C    plate.txt                    1.0  0.0 0.0 0.0 +
C    plate.txt                    3.0  0.0 0.0 0.2

```

* dielectric medium

```

D    capacitor_diel_sides.txt    1.0 3.0      0.0 0.0 0.2
0.5 0.5 0.5 -

```

* upper contact

```

C    capacitor_contact_sides.txt  1.0  0.0 0.0 0.8 +
C    plate.txt                    3.0  0.0 0.0 0.8 +
C    plate.txt                    1.0  0.0 0.0 1.0

```

File capacitor_contact_sides.txt

* conductor-dielectric interface

```

Q    1    1 1 0 1 0 0 1 0 0.2    1 1 0.2
Q    1    0 1 0 1 1 0 1 1 0.2    0 1 0.2
Q    1    1 0 0 0 0 0 0 0.2    1 0 0.2
Q    1    0 0 0 0 1 0 0 1 0.2    0 0 0.2
End

```

File capacitor_diel_sides.txt

* air-dielectric interface

```

Q    1    1 1 0 1 0 0 1 0 0.6    1 1 0.6
Q    1    0 1 0 1 1 0 1 1 0.6    0 1 0.6
Q    1    1 0 0 0 0 0 0 0.6    1 0 0.6
Q    1    0 0 0 0 1 0 0 1 0.6    0 0 0.6
End

```

File plate.txt

* top or bottom capacitor plate

```

Q    1    0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0
End

```

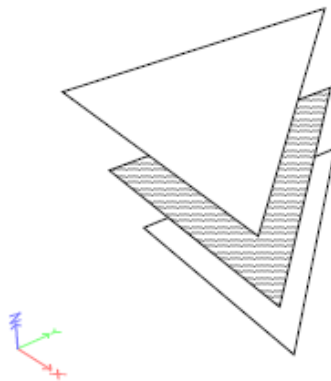
Σε αυτή την περίπτωση ο προσδιορισμός του αρχείου εισόδου μας πρέπει να θεωρήσει το γεγονός ότι διαφορετικές πλευρές των πλακών των αγωγών έρχονται σε επαφή με διαφορετικά υλικά (π.χ. υπάρχει αέρας στις πλευρές, το διηλεκτρικό μέσο εσωτερικά και εξωτερικά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΑΝΕΛ

Αυτό το πρώτο παράδειγμα είναι χρήσιμο για επεξηγηματικούς κυρίως σκοπούς, αλλά δεν στοχεύει στο να παρουσιάσει μια πραγματική φυσική κατάσταση. Θα ασχοληθούμε με ένα απλή τριγωνική δομή πάνελ, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, όπου τα εξώτατα (outmost) πάνελς είναι αγωγίμα, ενσωματωμένα σε διαφορετικά διηλεκτρικά μέσα, ενώ το εσωτερικό πάνελ αντιπροσωπεύει την διηλεκτρική διεπαφή.



Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις που κάνουν το πρόβλημά μας να μην μπορεί να σταθεί με σεβασμό στη φυσική πραγματικότητα.

Το πρώτο είναι ότι, για να διατηρήσουμε το πρόβλημα όσο πιο απλό γίνεται, για να παρουσιάσουμε μια εφαρμογή των μεθόδων που έχουν χρησιμοποιηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, θεωρούμε ότι η πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή σε όλα τα πάνελς. Αυτό είναι πολύ μακριά από την πραγματικότητα, γιατί ακόμη και σε μία προσεγγιστική λύση, θα χωρίζαμε κάθε πάνελ σε ένα σύνολο από μικρότερα, για να διατηρήσουμε τη συνεισφορά της πυκνότητας φορτίου χαμηλότερη από συγκεκριμένα όρια.

Το δεύτερο είναι ότι η διηλεκτρική διεπαφή δεν είναι ολοκληρωμένη, καθώς γενικά θα έπρεπε να περικλείει μια κλειστή επιφάνεια χώρου. Χάνουμε έτσι κάποιες από τις βασικές οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει στο 1^ο κεφάλαιο.

Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για τη λύση μας είναι έγκυρη γενικά, όπως εξηγήσαμε, και μπορεί να εφαρμοστεί σε μια πιο περίπλοκη δομή δίνοντας ακριβή αποτελέσματα.

Θα χρειαστεί να ανατρέξουμε στο 1^ο κεφάλαιο για να θυμηθούμε κάποιες βασικές συναρτήσεις. Θα υπολογίσουμε το γεωμετρικό ολοκλήρωμα της σχέσης (21) για τα σημεία x που απαιτούνται για να σχηματίσουμε το σύστημα (24) όπου $x = x_1$ και $x = x_2$ όπου x_1 και x_2 είναι τα κέντρα του πρώτου πάνελ αγωγού και του δεύτερου αντίστοιχα, και για τις διαιρούμενες διαφορές της σχέσης (23) στην διηλεκτρική διεπαφή (με h αρκετά μικρό με σεβασμό στις διαστάσεις του πάνελ). Αποκτούμε επομένως το ακόλουθο αριθμητικό σύστημα (κλιμακούμενο από τη σταθερά $4\pi\epsilon_0$).

$$\begin{bmatrix} 37.699 & -2.569 & 2.569 \\ 1.703 & 4.814 & 0.951 \\ 1.703 & 0.951 & 4.814 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Το πρώτο πάνελ είναι η διηλεκτρική επαφή, καθώς το δεύτερο και το τρίτο πάνελ αποτελούν το χαμηλότερο και το υψηλότερο αγωγίμο πάνελ αντίστοιχα. Αυτό είναι εμφανές κίολας από από τις αριθμητικές τιμές της παραπάνω σχέσης. Τα στοιχεία $p_{2,2}$ και $p_{3,3}$ αποτελούν τους αυτό – συντελεστές του δυναμικού, δηλαδή το $p_{2,2}$ είναι το δυναμικό στο κέντρο του δεύτερου πάνελ εξαιτίας της φόρτισης που παρουσιάζεται στο ίδιο πάνελ, και ούτω καθεξής. Μιας και τα πάνελς είναι γεωμετρικά ιδανικά, επίσης οι τιμές είναι οι ίδιες. Αυτές οι παράμετροι υπολογίζονται από έναν όρο μιας εξίσωσης παρόμοιας με την (22), ενώ στην περίπτωση των τριγωνικών πάνελς :

$$p_{2,2} = \frac{1}{a_T} \int_T \frac{1}{|x_1 - x'|} dS_{x'}$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να υπολογιστεί αξιολογώντας το ολοκλήρωμα αναλυτικά ή αριθμητικά, σύμφωνα με την απαιτούμενη ακρίβεια. Τα στοιχεία $p_{2,3}$ και $p_{3,2}$ είναι οι κοινοί συντελεστές του δυναμικού, δηλαδή το στοιχείο $p_{2,3}$ είναι το δυναμικό στο κέντρο του δεύτερου πάνελ εξαιτίας της φόρτισης που παρουσιάζεται στο τρίτο πάνελ. Μια παρόμοια παρατήρηση ισχύει και για το στοιχείο $p_{3,2}$. Τα στοιχεία $p_{1,3}$, $p_{3,2}$, $p_{2,3}$ είναι σχετικά με την διηλεκτρική διεπαφή του πάνελ. Και υπολογίζονται μέσω της σχέσης (23), αξιολογούμενο στο κέντρο του πάνελ.

Για να αποκτήσουμε την πυκνότητα θα πρέπει να λύσουμε το παραπάνω σύστημα για δύο διανύσματα: $[0 \ 1 \ 0]^T$ και $[0 \ 0 \ 1]^T$. Αυτό είναι αρκετό μιας και το μόνο που

πρέπει να ξέρουμε είναι το επογάμενο φορτίο των αγωγών όπου το πρώτο πάνελ αιγείρεται σε μοναδιαίο δυναμικό και το δεύτερο γειώνεται, και αντιστρόφως. Λύνοντας το σύστημα για το διάνυσμα $[0 \ 1 \ 0]^T$ και τελικά πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα $4\pi\epsilon_0$ καταλήγουμε στο διάνυσμα φορτίου $q = [0.196 \ 2.347 \ -0.533]^T \cdot 10^{-11}$. Αυτός είναι επομένως ο διακανονισμός φορτίου που παράγει τάση ένα volt επί του πρώτου αγωγού πάνελ και τάση μηδέν volt στο δεύτερο αγωγό πάνελ, και πληρεί πλήρως τις οριακές συνθήκες της συνέχειας για ένα κανονικό στοιχείο την ηλεκτρικής ροής D στην διηλεκτρική επιφάνεια (προφανώς σύμφωνα με ανάλογες προσεγγίσεις). Μπορούμε να θυμηθούμε πως ο πρώτος αγωγός(ο χαμηλός) είναι ενσωματωμένος με το διηλεκτρικό μέσο με σχετική «ορατότητα» ίση με δύο, έτσι θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το συνολικό φορτίο με αυτό τον παράγοντα για να πάρουμε το ελεύθερο επαγώμενο φορτίο πάνω στον αγωγό. Τα ελεύθερα φορτία για τους δύο αγωγούς είναι 46.94 pF και -0.533pF αντίστοιχα. Αυτά είναι τα δύο πρώτα στοιχεία του πίνακα χωρητικότητας Maxwell. Επιλύοντας για το διάνυσμα $[0 \ 0 \ 1]^T$ και πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα $4\pi\epsilon_0$ οδηγούμαστε σε ένα διάνυσμα φορτίου με τιμές $q = [-0.196 \ -0.417 \ 2.463]^T \cdot 10^{-11}$. Πολλαπλασιάζοντας ξανά με το δύο θα έχουμε τις τιμές -0.834pF και 24.63pF. Έχουμε λύσει το πρόβλημά μας και καταλήγουμε στον ακόλουθο πίνακα χωρητικότητας:

$$\begin{bmatrix} 46.94 & -0.533 \\ -0.834 & 24.63 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}$$

5.2 ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΑΝΕΛ

Πρόκειται για ένα πυκνωτή σφαιρικής γεωμετρίας όπου τα πάνελ του είναι τετραγωνικά.

1^η περίπτωση

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 3
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 104
  Number of conductor panels: 104
  Number of dielectric interface panels: 0
  Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
  Number of conductors: 1
No expansions at level 3 (lowest)
No expansions at level 2
Percentage of multiplies done by multipole: 0%
Warning: no multipole acceleration

ITERATION DATA
Starting on column 1 (SPHERE%GROUP1)
1 2 3

CAPACITANCE MATRIX, nanofarads
      1
SPHERE%GROUP1 1      0.1063
```

2^η περίπτωση

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 3
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 768
  Number of conductor panels: 768
  Number of dielectric interface panels: 0
  Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
  Number of conductors: 1
No expansions at level 3 (lowest)
Percentage of multiplies done by multipole: 76.1%

ITERATION DATA
Starting on column 1 (SPHERE%GROUP1)
1 2

CAPACITANCE MATRIX, nanofarads
      1
SPHERE%GROUP1 1      0.1105
```

3^η περίπτωση

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 3
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 1200
Number of conductor panels: 1200
Number of dielectric interface panels: 0
Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
Number of conductors: 1
Percentage of multiplies done by multipole: 77.8%

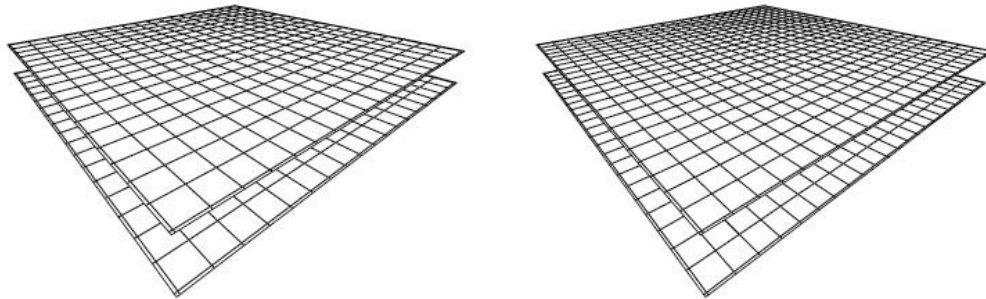
ITERATION DATA
Starting on column 1 (SPHERE%GROUP1)
1 2

CAPACITANCE MATRIX, nanofarads
          1
SPHERE%GROUP1 1      0.1108
```

Παρατηρώντας προσεκτικά όλα τα παραπάνω, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως καθώς αυξάνεται ο αριθμός των πάνελς αυξάνεται και η χωρητικότητα. Έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΝΕΛ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (nF)
1 ^η περίπτωση	104	0.1063
2 ^η περίπτωση	768	0.1105
3 ^η περίπτωση	1200	0.1108

5.3 ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΠΑΝΕΛ



1^η περίπτωση

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 4
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 800
Number of conductor panels: 800
Number of dielectric interface panels: 0
Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
Number of conductors: 2
No expansions at level 4 (lowest)
Percentage of multiplies done by multipole: 85.7%

ITERATION DATA
Starting on column 1 (1%GROUP1)
1 2 3
Starting on column 2 (2%GROUP1)
1 2 3 4

CAPACITANCE MATRIX, nanofarads
          1          2
1%GROUP1 1      0.1265      -0.1038
2%GROUP1 2      -0.1038      0.1265
```

2^η περίπτωση

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 4
Overall permittivity factor: 1
Title: ` `
Total number of panels: 1250
Number of conductor panels: 1250
Number of dielectric interface panels: 0
Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
Number of conductors: 2
No expansions at level 4 (lowest)
Percentage of multiplies done by multipole: 88.9%

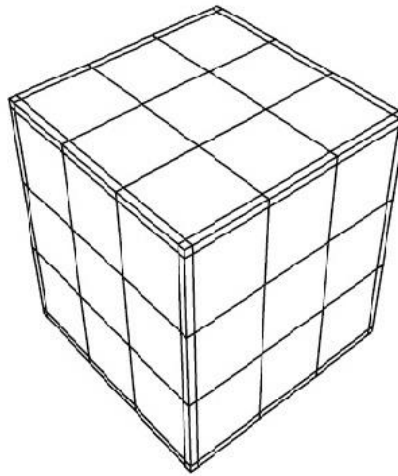
ITERATION DATA
Starting on column 1 (1%GROUP1)
1 2 3 4
Starting on column 2 (2%GROUP1)
1 2 3 4

CAPACITANCE MATRIX, nanofarads
          1          2
1%GROUP1 1    0.1267   -0.104
2%GROUP1 2   -0.104    0.1267
```

Όπως και παραπάνω, έτσι και εδώ η αύξηση στον αριθμό των πάνελς, συνεπάγεται μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΝΕΛ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (nF)
1 ^η περίπτωση	800	0.1265
2 ^η περίπτωση	1250	0.1267

5.4 ΚΥΒΙΚΑ ΠΑΝΕΛ



Για κάθε ακμή χρησιμοποιούνται πέντε πάνελ

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 3
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 150
Number of conductor panels: 150
Number of dielectric interface panels: 0
Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
Number of conductors: 1
No expansions at level 3 (lowest)
Percentage of multiplies done by multipole: 72.6%

ITERATION DATA
Starting on column 1 (1%GROUP1)
1 2 3 4

CAPACITANCE MATRIX, picofarads
1
%GROUP1 1      73.28
```


Για κάθε ακμή χρησιμοποιούνται επτά πάνελ

```
INPUT SUMMARY
Expansion order: 2
Number of partitioning levels: 3
Overall permittivity factor: 1
Title: ''
Total number of panels: 294
Number of conductor panels: 294
Number of dielectric interface panels: 0
Number of thin conductor on dielectric interface panels: 0
Number of conductors: 1
Percentage of multiplies done by multipole: 50%

ITERATION DATA
Starting on column 1 (1%GROUP1)
1 2 3 4 5 6

CAPACITANCE MATRIX, picofarads
1
1%GROUP1 1      73.4
```

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΝΕΛ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (nF)
5 πάνελ	150	73.28
7 πάνελ	294	73.4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] S. M. Rao, T.K. Sarkar, R.F. Harrington, “The Electrostatic Field of Conducting Bodies in Multiple Dielectric Media”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 32, No.11, Nov 1984
- [2] C. Wei, R. F. Harrington, J. R. Mautz, T. K. Sarkar, “Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 32, No. 4, Apr 1985
- [3] A. R. Djordjevic, R. F. Harrington, T. K. Sarkar, “Evaluation of quasi-static matrix parameters for multiconductor transmission lines using Galerkin's method”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 42, No. 7, 1994
- [4] K. S. Nabors, “Efficient Three-Dimensional Capacitance Calculation”, PhD thesis at the Massachusetts Institute of Technology, May 1993
- [5] K. S. Nabors, J. White , “Multipole-Accelerated Capacitance Extraction Algorithms for 3-D Structures with Multiple Dielectrics”, IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 39, No. 11, Nov 1992
- [6] E. Di Lorenzo, “The Maxwell Capacitance Matrix”, WP110301, Mar 2011, <http://www.fastfieldsolvers.com>
- [7] U. Van Rienen, “Numerical Methods in Computational Electrodynamics”, Springer-Verlag, 2001
- [8] FasterCap’s online help; the software is available from <http://www.fastfieldsolvers.com/>
- [9] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, Numerical recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1992.
- [10] W. B. Gordon, “Far-field approximations to the kirchoff-helmholtz representations of scattered fields,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 23, 590–592, July 1975.
- [11] [https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%AF%CE%BD%CE%B1%CE%BA%CE%B1%CF%82_\(%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC\)#.CE.A4.CE.B1.CF.85.CF.84.CE.BF.CF.84.CE.B9.CE.BA.CF.8C.CF.82_.CF.80.CE.AF.CE.BD.CE.B1.CE.BA.CE.B1.CF.82](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%AF%CE%BD%CE%B1%CE%BA%CE%B1%CF%82_(%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC)#.CE.A4.CE.B1.CF.85.CF.84.CE.BF.CF.84.CE.B9.CE.BA.CF.8C.CF.82_.CF.80.CE.AF.CE.BD.CE.B1.CE.BA.CE.B1.CF.82)

- [12] <https://en.wikipedia.org/wiki/%CE%9F%CF%81%CE%AF%CE%B6%CE%BF%CF%85%CF%83%CE%B1>
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Crout_matrix_decomposition
- [14] https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination
- [15] <http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods/>
- [16] Steven Chapra and Raymond Canale, Numerical Methods for Engineers, Fourth Edition, McGrawHill, 2002 (see Sections 10.1-10.2).
- [17] http://csep10.phys.utk.edu/guidry/phys594/lectures/linear_algebra/lanotes/node3.html
- [18] https://en.wikipedia.org/wiki/Parasitic_extraction
- [19] https://www.fastfieldsolvers.com/Papers/The_Treatment_of_Dielectrics_in_FasterCap_WP130527_R01.pdf
- [20] https://www.fastfieldsolvers.com/Papers/The_Maxwell_Capacitance_Matrix_WP110301_R01.pdf
- [21] https://www.fastfieldsolvers.com/Papers/EM_solvers_basics_170606.pptx
- [22] The Method of Moments in Electromagnetics, Walton C. Gibson
- [23] <http://ieeexplore.ieee.org/document/1127927/>
- [24] ANSYS Tutorial: Capacitance (GUI Method)
- [25] <https://www.comsol.com/blogs/how-to-calculate-a-capacitance-matrix-in-comsol-multiphysics/>
- [26] <http://www2.engr.arizona.edu/~cmsl/Publications/Interconnect%20Modeling%20and%20Simulation/accurcap.pdf>