

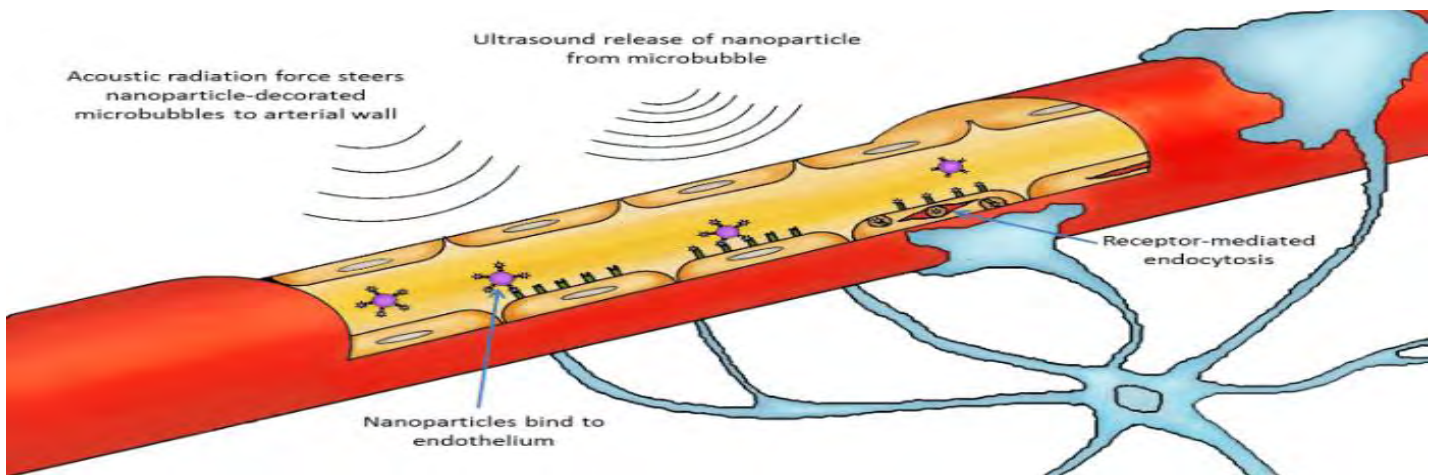
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΛΗΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΥΠΟ
ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ**

υπό

ΣΤΥΛΙΑΝΗ ΤΑΓΑΡΑΚΗ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2018

© 2018 Στυλιανή Ταγαράκη

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

UNIVERSITY OF THESSALY
SCHOOL OF ENGINEERING
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING

Diploma Thesis

***NUMERICAL STUDY OF TRANSLATING AND PULSATING
COATED MICROBUBBLES IN A TUBE SUBJECTED TO ACOUSTIC
DISTURBANCES***

by

STYLIANI TAGARAKI

Diploma thesis submitted to the Department of Mechanical Engineering of the School of Engineering of the University of Thessaly in partial fulfillment of the requirements for the degree of Diploma of Mechanical Engineer

2018

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
 Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Μαρία Βλαχομήτρου
 Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
 Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Βασίλειος Μποντόζογλου
 Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
 Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση για την επιστημονική του καθοδήγηση, ο οποίος με ιδιαίτερο ζήλο, υπομονή και μεθοδικότητα προσπάθησε να μου μεταδώσει τις γνώσεις του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, την Δρ. Μαρία Βλαχομήτρου, ένα από τα πρόσωπα που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας, για την επιστημονική αλλά και ψυχολογική στήριξή της και τον Καθηγητή κ. Βασίλειο Μποντόζογλου για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Μανώλη και Κική, τα αδέρφια μου Νίκο, Παναγιώτη και Κώστα καθώς και τις Δέσποινα και Στέλλα για την αγάπη τους και τη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Εν συνεχεία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον άνθρωπο, με τον οποίο μοιραστικά τα χρόνια της φοιτητικής μου ζωής Γιάννη, για την αγάπη του και την ψυχολογική του υποστήριξη. Φυσικά, ευχαριστώ και τους φίλους μου Χριστίνα, Κατερίνα και Μάριο και την αγαπημένη μου ξαδέρφη Εύη για την συμπαράσταση και τη στήριξή τους.

Αφιερώνω την εργασία αυτή στους γονείς μου, Μανώλη και Κική, ως ελάχιστη ένδειξη ευγνωμοσύνης για τα ανεξάντλητα αποθέματα της αγάπης και της δύναμής τους.

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
ΜΙΚΡΟΦΙΣΑΛΙΔΑΣ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΛΗΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΓΩΓΟ
ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ**

ΣΤΥΛΙΑΝΗ ΤΑΓΑΡΑΚΗ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2018

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης, Καθηγητής Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής

Περίληψη

Παρόλο, που οι τεχνικές υπερήχων Doppler είναι μία πολύ επιτυχημένη μέθοδος μέτρησης της ροής σε μεγάλα αγγεία, δεν μπορούν να αποδώσουν την απαιτούμενη ευαισθησία ώστε να παρέχουν πληροφορίες για πολύ μικρά αγγεία. Έτσι, οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agents έχουν κάνει την εμφάνισή τους τα τελευταία χρόνια στη διαγνωστική ιατρική για τη βελτίωση της απεικόνισης μέσω υπερήχων αλλά και σε άλλες εφαρμογές, όπως είναι η μεταφορά φαρμάκων. Όμως, παρά τις εκτεταμένες εργαστηριακές και κλινικές μετρήσεις η δυναμική συμπεριφορά των φουσαλίδων, εγείρει ακόμα πολλά αναπάντητα ερωτήματα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται προσπάθεια να κατανοηθεί η δυναμική συμπεριφορά φουσαλίδας με ελαστική επίστρωση που εκτελεί ταλαντώσεις μέσα σε αγωγό κυκλικής διατομής, σαν συνάρτηση των ιδιοτήτων του κελύφους της, των παραμέτρων της επιβαλλόμενης ακουστικής διαταραχής και του πεδίου ροής που την περιβάλλει.

Η προσέγγιση του προβλήματος που θεωρείται στην εργασία αυτή θέτει την φουσαλίδα μέσα σε κυλινδρικό αγωγό με άκαμπτο τοίχωμα και υποθέτει αξονική συμμετρία. Για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της φουσαλίδας αλλά και του τρόπου που αλληλεπιδρά αυτή με τους υπερήχους καταστρώνονται τρία διαφορετικά προβλήματα.

Η ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας έχει μελετηθεί μέχρι σήμερα κυρίως για μη περιορισμένες ροές. Έχει όμως αποδειχθεί ότι η φυσική συχνότητα της μικροφουσαλίδας επηρεάζεται ισχυρά από τον περιορισμό της σε τριχοειδή αγγεία. Στο πρώτο πρόβλημα, μελετάται η επίδραση του μεγέθους της διατομής του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας, όταν αυτή βρίσκεται στο κέντρο ενός αγωγού στα άκρα του οποίου επιβάλλεται μία ακουστική συνημιτονοειδής διαταραχή.

Στο δεύτερο πρόβλημα, που αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία, πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μικροφουσαλίδας που βρίσκεται μέσα σε αγωγό στον οποίο επιβάλλεται βαθμίδα πίεσης που έχει ως αποτέλεσμα την μεταφορική κίνηση της φουσαλίδας. Επίσης, εξετάζεται η σχέση της ταχύτητας της ροής με την ταχύτητα που αποκτά η φουσαλίδα σε μόνιμη κατάσταση και μελετάται η επίδραση των ιδιοτήτων του κελύφους στη δυναμική συμπεριφορά της φουσαλίδας.

Το τελευταίο πρόβλημα που εξετάζεται, είναι η επίδραση των παραμέτρων της ροής, της επιβαλλόμενης ακουστικής διαταραχής αλλά και των ιδιοτήτων του κελύφους της, καθώς

η φουσαλίδα εκτελεί μεταφορική κίνηση και ταλαντώνεται ταυτόχρονα. Στο πρόβλημα αυτό η φουσαλίδα βρίσκεται σε αγωγό στα άκρα του οποίου επιβάλλεται ακουστική διαταραχή, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει και βαθμίδα πίεσης.

Για κελύφη από λιπίδιο ο καταστατικός νόμος που περιγράφει τη μεμβράνη είναι ο μη γραμμικός νόμος Mooney – Rivlin ενώ για τα πολυμερή κελύφη θεωρήθηκε ο καταστατικός νόμος neo – Hookean. Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων έγινε με τη μέθοδο Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων και για την κατασκευή του πλέγματος χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές μέθοδοι: η μέθοδος μετασχηματισμού spine και η τροποποιημένη ελλειπτική τεχνική.

Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν συγκρίθηκαν με υπάρχουσες υπολογιστικές μελέτες, θεωρητικές προσεγγίσεις και πειραματικές έρευνες και διαπιστώθηκε ότι το παρόν υπολογιστικό μοντέλο αποδίδει με αξιοπιστία την δυναμική απόκριση μικροφουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος μέσα σε αγωγό κυκλικής διατομής.

Διαπιστώθηκε ότι η σχέση του μεγέθους της φουσαλίδας με το μέγεθος του αγωγού επηρεάζει σημαντικά την ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας, αλλά και την σχέση της ταχύτητας της φουσαλίδας με την ταχύτητα της ροής. Πιο συγκεκριμένα, η ιδιοσυχνότητα ταλαντώσεων όγκου βαίνει μειούμενη καθώς αυξάνεται η ακτίνα ισορροπίας της ταλαντούμενης φουσαλίδας σε σχέση με αυτήν του αγωγού. Τέλος, σημαντικό ρόλο στην δυναμική απόκριση της φουσαλίδας έχουν επίσης οι παράμετροι της ακουστικής διαταραχής που επιβάλλεται αλλά και οι ιδιότητες του κελύφους της μικροφουσαλίδας.

Abstract

Microbubbles are currently used as ultrasound contrast agents. However, they are, still, under intensive investigation for their applications in physiological and molecular imaging, drug and gene delivery.

The most favorable condition for the transfer of energy from an ultrasonic field to a gas bubble occurs when the frequency of the ultrasonic field equals the resonance frequency of the bubble. The resonance frequency of gas microbubbles has been investigated up to now mainly in unbound liquids. Nevertheless, when microbubbles are confined in small regions, their resonance frequency is strongly affected by the surrounding boundaries. At this diploma thesis, a numerical study is presented of the resonance frequency of the volume oscillations of gas microbubbles in a viscid, incompressible fluid subjected to non – linear disturbance. The liquid is contained in a finite-length tube with rigid wall when the bubble is not small with respect to the tube diameter. The overall interaction problem is solved using the finite element methodology. The results show that the resonance frequency decreases remarkably below its free value with decreasing vessels radius.

Furthermore, two additional problems are countered at this work. At the second problem, a parametric study of the dynamic response of a microbubble confined in a tube, in which there is a constant pressure drop, is presented. It is, finally, shown that the bubble's velocity relative to the maximum velocity of the flow in the tube is decreasing while the size of the bubble is becoming significant relative to the tube size. There is also studied the bubble's shell properties, and it is shown that the bending resistance of the shell has a significant role in the bubble's behavior. The larger the tensile resistance is, relative to the bending resistance, the smaller is the expansion of the microbubble.

At the third problem, except of the pressure drop of the flow, there is a sinusoidal pressure disturbance. Thus, the microbubble is transferred and oscillated simultaneously. The influence of parameters such as the volume rate flow and the tube diameter relative to the bubble's is examined. It is shown that the relation between the volume flow rate and the amplitude of the volume and shape oscillations is inversely proportional. While, the relation of tube radius with the bubble's oscillations is proportional, the more confined is the flow, the amplitude of the shape oscillations is increasing. As for the disturbance parameters, it is shown

that the frequency's influence is not univocal but it is related with the resonance frequency of the microbubble. Furthermore, it seems that a larger amplitude of the disturbance, induces larger bubble's velocity. At last, it is shown that the bigger the shear modulus of bubble's shell is, it is more possible for buckling to occur.

Περιεχόμενα

1.	Εισαγωγή	1
1.1	Ιστορική αναδρομή	1
1.2	Λειτουργία μικροφουσαλίδων με ελαστικό περίβλημα Contrast Agents	2
1.3	Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	4
1.4	Οργάνωση διπλωματικής εργασίας.....	9
2.	Κατάστρωση Προβλήματος.....	10
2.1	Πρόβλημα 1 ^ο : Ταλάντωση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής.	15
2.2	Πρόβλημα 2 ^ο : Μεταφορική κίνηση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω βαθμίδας πίεσης.....	17
2.3	Πρόβλημα 3 ^ο : Μεταφορική κίνηση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω συνδυασμού βαθμίδας πίεσης και ακουστικής διαταραχής.....	19
3.	Αριθμητική Επίλυση	21
3.1	Δημιουργία πλέγματος	21
3.1.1	Ελλειπτική τεχνική κατασκευής πλέγματος	22
3.1.2	Κατασκευή πλέγματος με τη μέθοδο spine.....	26
3.2	Αριθμητική επίλυση συστήματος	28
3.3	Σύγκριση αριθμητικών μεθόδων	29
4.	Παραμετρική μελέτη - Αποτελέσματα	32
4.1	Πρόβλημα 1 ^ο : Ταλάντωση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής.	32
4.2	Πρόβλημα 2 ^ο : Μεταφορική κίνηση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω βαθμίδας πίεσης.....	35
4.3	Πρόβλημα 3 ^ο : Μεταφορική κίνηση φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω συνδυασμού βαθμίδας πίεσης και ακουστικής διαταραχής.....	43
5.	Συμπεράσματα	56
	Βιβλιογραφία	59

Πίνακες

<i>Πίνακας 2.1</i> Τιμές ιδιοτήτων φυσαλίδας και περιβάλλοντος υγρού.....	14
<i>Πίνακας 2.2</i> Τιμές ιδιοτήτων περιβάλλοντος υγρού της φυσαλίδας.....	14
<i>Πίνακας 3.1</i> Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου ποινης στην κινούμενη διεπιφάνεια. 25	
<i>Πίνακας 4.1</i> Το αδιάστατο μέτρο κάμψης kb (εξίσωση (2.26)) για πολυμερικό κέλυφος και κέλυφος από λιπίδιο σύμφωνα με της ιδιότητες του πίνακα 2.1.	41

Σχήματα

Σχήμα 1.1 Φυσική ιδιοσυχνότητα φυσαλίδας τοποθετημένης στο κέντρο αγωγού ακτίνας Rt και μήκους L συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας της φυσαλίδας $R0Rt$ για λόγο $LRt = 10$. Αποτελέσματα υπολογιστικής μεθόδου με <i>boundary elements</i> (Οğuz και Prosperetti [32]), σχέσης (1.2) για μεγάλες φυσαλίδες (<i>Large Bubbles equation</i>) και σχέσης (1.3) για μικρές φυσαλίδες (<i>Small Bubbles equation</i>).	6
Σχήμα 1.2 Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης της εργασίας των Butler et al. [33]	7
Σχήμα 2.1 Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας μέσα σε αγωγό	10
Σχήμα 2.2 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε ακουστική διαταραχή μέσα σε αγωγό	15
Σχήμα 2.3 Στάσιμο κύμα για πλάτος διαταραχής της πίεσης $\varepsilon=0,2$ και συχνότητα διαταραχής 1MHz για τις αδιάστατες χρονικές στιγμές $t1 = 0$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $t2 = \pi$ (πράσινη καμπύλη). Αγωγός αναλογίας μήκους προς ακτίνα $LRt = 10$ και αναλογίας ακτίνας αγωγού προς ακτίνα φυσαλίδας $RtR0 = 1,1$	15
Σχήμα 2.4 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε μεταφορική κίνηση λόγω παροχής Q μέσα σε αγωγό	17
Σχήμα 2.5 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε μεταφορική κίνηση λόγω παροχής Q μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικών διαταραχών	19
Σχήμα 3.1 Σχηματική αναπαράσταση φυσικού και υπολογιστικού πεδίου για φυσαλίδα μέσα σε τριχοειδή αγωγό	21
Σχήμα 3.2 Πλέγμα ($\alpha=2, LR0=12$) κατασκευασμένο με την ελλειπτική τεχνική, ($z \times r = (40+50+40) \times 40$).	22
Σχήμα 3.3 Πλέγμα ($\alpha=2, LR0=12$) κατασκευασμένο με την μέθοδο <i>spine</i> , ($z \times r = (40+50+40) \times 40$).	22
Σχήμα 3.4 α Στιγμιότυπου $t = 13,4$ σχήματος φυσαλίδας, χρονική εξέλιξη ακτινικής ιδιομορφής $b P0$ και $c P2$ από ελλειπτική μέθοδο, $40 + 50 + 40 \times 40$, και μέθοδο <i>spine</i> $20 + 40 +$	

20 × 10, σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR_0 = 12$ και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3$, υπό ακουστική διαταραχή συχνότητας $f = 0.72\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 0,1, \dots, 30$

Σχήμα 3.5 Σχηματική απεικόνιση πλέγματος την χρονική στιγμή $t = 7,4$, για επιφανειακό μέτρο διαστολής $\chi = 2,4\text{Nm}$ μέσα σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $\alpha = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5, \dots, 31$

Σχήμα 4.1 Διάγραμμα ιδιοσυχνότητας φουσαλίδας – ακτίνας φουσαλίδας σε κανονικοποιημένη μορφή. (*spine*) – υπολογιστικά αποτελέσματα με κατασκευή πλέγματος μέσω της μεθόδου *spine*, (*elliptic*) – υπολογιστικά αποτελέσματα μέσω της ελλειπτικής κατασκευής πλέγματος, (*Large Bubbles equation*) – αναλυτική προσεγγιστική σχέση (1.2), (*Small Bubbles equation*) – αναλυτική προσεγγιστική σχέση (1.3). 33

Σχήμα 4.2 Μεταβολή ιδιοσυχνότητας με την μεταβολή του λόγου $1\alpha = R_0Rt$. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθοδολογίας πεπερασμένων στοιχείων με τα αποτελέσματα συνοριακών στοιχείων των Οğuz και Prosperetti [32]. 34

Σχήμα 4.3 Μεταβολή ιδιοσυχνότητας με την μεταβολή του λόγου $\alpha = RtR_0$. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθοδολογίας πεπερασμένων στοιχείων με τα αποτελέσματα συνοριακών στοιχείων των Οğuz και Prosperetti [32]. 35

Σχήμα 4.4 α Ακτινική ιδιομορφή P_0 , β στιγμιότυπο $t = 75$ σχήματος φουσαλίδας για διαφορετικά πλέγματα, για αγωγό αδιάστατου μήκους $LR_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$ 36

Σχήμα 4.5 Ροϊκή συνάρτηση στον αγωγό από τον άξονα συμμετρίας και πάνω ($0 \leq r \leq 2$ και $1 \leq z \leq 15$) για αγωγό αδιάστατης ακτίνας $RtR_0 = 2$ και αδιάστατου μήκους $LR_0 = 25$ για παροχή $Q = 4 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$ και αδιάστατο χρόνο $a t = 0,2$, $b t = 10$, $c t = 50$ και $d t = 100, \dots, 37$

Σχήμα 4.6 α Χρονική εξέλιξη ακτινικής ιδιομορφής P_0 και β στιγμιότυπα σχήματος της φουσαλίδας τη χρονική στιγμή $t = 150$ για διαφορετικές παροχές νερού για αγωγό αδιάστατου μήκους $LR_0 = 25$, και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3, \dots, 38$

- Σχήμα 4.7** Χρονική εξέλιξη *a* ιδιομορφής *P1* *b* ταχύτητας κέντρου μάζας της φυσαλίδας για διαφορετικές παροχές νερού σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$ και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3$ 39
- Σχήμα 4.8** *a* Ακτινική ιδιομορφή *P0*, *b* στιγμιότυπο $t = 150$ σχήματος φυσαλίδας, για αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες α 39
- Σχήμα 4.9** Λόγος ταχύτητας φυσαλίδας προς μέγιστη ταχύτητα ροής συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας του αγωγού $a = RtR0$ για διαφορετικές παροχές υγρού καθώς $t \rightarrow \infty$ 40
- Σχήμα 4.10** *a* Ακτινική ιδιομορφή *P0*, *b* ιδιομορφή *P1*, *c* ιδιομορφή σχήματος *P2* και *d* στιγμιότυπο σχήματος φυσαλίδας $t = 25,6$, για αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}$, για διαφορετικά μέτρα διάτμησης *G3D*. 42
- Σχήμα 4.11** Στιγμιότυπο σχήματος φυσαλίδας σε μόνιμη κατάσταση $t = 120$, για αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}$, για διαφορετικά μέτρα διάτμησης *G3D*. 43
- Σχήμα 4.12** *a* Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών *P0*, *P1* και *P2* *b* χρονική εξέλιξη αξονικής ταχύτητας κέντρου μάζας για λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 4 \cdot 10^{-11}$ και ακουστικής διαταραχής συχνότητας $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 0,5$ 44
- Σχήμα 4.13** *a* Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών *P0* και *P2* και *b* στιγμιότυπα σχήματος φυσαλίδας για λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11}$ και ακουστικής διαταραχής συχνότητας $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$ 45
- Σχήμα 4.14** Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών *a* *P0*, *b* *P1*, *c* *P2* και *d* *P3* και *e* στιγμιότυπα σχήματος φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές συχνότητες διαταραχής. 46

- Σχήμα 4.15** Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών a P0, b P1, c P2 και d P3 φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $a = 2$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές παροχές. 48
- Σχήμα 4.16** Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών a P0, b P1, c P2 και d P3 για φυσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες αγωγού $a = R t R0$ 50
- Σχήμα 4.17** α Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών όγκου P0 και σχήματος P2 και στιγμιότυπα σχήματος την αδιάστατη χρονική στιγμή b $t = 2,6$ και c $t = 2,6$ για φυσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες αγωγού $a = R t R0$ 51
- Σχήμα 4.18** Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών a P0, b P1, c P2 και d P3 σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$ και συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$, για διαφορετικά πλάτη διαταραχής $\varepsilon \equiv e$ 52
- Σχήμα 4.19** α Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών P0, P2 και P3 και b στιγμιότυπα σχήματος φυσαλίδας την αδιάστατη χρονική στιγμή $t = 8,6$ για φυσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$ και συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$, για διαφορετικά πλάτη διαταραχής $\varepsilon \equiv e$ 53
- Σχήμα 4.20** Σχηματική απεικόνιση πλέγματος την χρονική στιγμή $t = 7,4$, για φυσαλίδα μέτρου επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{Nm}$ μέσα σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$ 54
- Σχήμα 4.21** α Στιγμιότυπα φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $LR0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$ για διαφορετικά μέτρα επιφανειακής διαστολής του κελύφους. b Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών σχήματος ανώτερης τάξης για την περίπτωση μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{Nm}$ 55

1. Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή

Ανέκαθεν, η απεικόνιση των εσωτερικών οργάνων του ανθρώπινου σώματος αποτελούσε πρόκληση για τον ιατρικό κλάδο. Έτσι, η ανακάλυψη των ακτινών x από τον Γερμανό ερευνητή φυσικό Ρέντγκεν το 1895 αποτέλεσε μεγάλο επιστημονικό επίτευγμα. Όμως τελικά αποδείχθηκε ότι οι ακτίνες x, επειδή ανήκουν στις ιονίζουσες ακτινοβολίες, προσδίδουν στον οργανισμό ραδιενέργεια, η οποία προκαλεί βλάβες στους ιστούς και θέτει σε κίνδυνο τον οργανισμό που εκτίθεται σ' αυτές.

Τα τελευταία χρόνια, έχουν κάνει την εμφάνισή τους στις εφαρμογές απεικόνισης οι υπέρηχοι. Οι υπέρηχοι είναι ήχοι υψηλής συχνότητας που δεν μπορεί να αντιληφθεί ο άνθρωπος με την ακοή του. Υπάρχουν όμως άλλοι ζωντανοί οργανισμοί, όπως τα δελφίνια ή οι νυχτερίδες που χρησιμοποιούν τους υπέρηχους για τον εντοπισμό τροφής, εμποδίων και συγχρόνως για επικοινωνία. Μπορούν δηλαδή να «δουν» χρησιμοποιώντας ως φορέα πληροφορίας τον ήχο αντί για το φως που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος. Αν και ο άνθρωπος γνώριζε για τη δυνατότητα αυτή, οι πρώτες προσπάθειες χρήσης υπερήχων ως μέσου απεικόνισης έγιναν μόλις στις αρχές του 20^{ου} αιώνα και αναπτύχθηκαν κυρίως για στρατιωτικούς σκοπούς. Η εφαρμογή των υπερήχων στην ιατρική ξεκίνησε να διαδίδεται μετά τα 1950, με την ανάπτυξη συστημάτων απεικόνισης σε πραγματικό χρόνο να γίνεται 20 χρόνια αργότερα. Έτσι η χρήση υπερήχων ως διαγνωστικό μέσω στην ιατρική εδραιώθηκε, μιας και, μεταξύ άλλων, μπορούν να παρέχουν την δυνατότητα απεικόνισης των ιστών και της ροής του αίματος, με μικρότερο κόστος από τις ακτίνες x και κυρίως χωρίς να βάζουν σε κίνδυνο την υγεία του εκάστοτε οργανισμού.

Αν και οι υπέρηχοι αποτελούν ένα σπουδαίο όργανο στην ιατρική απεικόνιση, ωστόσο δεν μπορούν να δώσουν πάντα μία αρκετά σαφή εικόνα της περιοχής που απεικονίζουν. Για μεγάλα αγγεία η τεχνική υπερήχων Doppler είναι μία πολύ επιτυχημένη μέθοδος απεικόνισης, η μέθοδος όμως αυτή δεν μπορεί να παρέχει την απαραίτητη ευαισθησία που απαιτείται για την απεικόνιση πολύ μικρών αγγείων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με την χρήση μικροφουσαλίδων με ελαστικό περίβλημα, τύπου Contrast Agent. Την ανακάλυψη των φουσαλίδων αυτών έκανε ο Dr. Claude Joyner στα τέλη του 1960 [1], όταν, κατά τη διάρκεια

εκτέλεσης ήχο – καρδιογραφήματος τύπου m για την παρακολούθηση μίας αορτικής ρίζας, παρατήρησε παροδική αύξηση του υπερηχητικού σήματος έπειτα από κάθε υπερβαλβική έγχυση αλατούχου διαλύματος στην αορτή.

Τα πρώτα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αιωρήματα φυσαλίδων σε βίο – συμβατά υγρά, τα οποία αν και δεν ήταν τόσο λειτουργικά, παρείχαν μία μικρή βελτίωση επανασκέδασης του ηχητικού σήματος. Έπειτα, αναπτύχθηκαν μικροφυσαλίδες με περίβλημα από πολυμερή, λιπίδια ή άλλους σύνθετους υδρογονάνθρακες, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στη διανομή φαρμάκων ή γονιδίων ή ακόμα και ως θεραπευτικά μέσα που διαλύουν τους θρόμβους του αίματος.

1.2 Λειτουργία μικροφυσαλίδων με ελαστικό περίβλημα Contrast Agents

Οι μικροφυσαλίδες τύπου Contrast Agent, στη σημερινή τους μορφή, είναι φυσαλίδες που περιβάλλονται από εξωτερικό περίβλημα το οποίο παρουσιάζει ελαστικές ιδιότητες. Στο εσωτερικό τους περιέχουν αέριο, συνήθως διαλυτό στο αίμα και η διάμετρός τους κυμαίνεται μεταξύ 1 και 10 μm . Το μέγεθος αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κατά τις κλινικές μετρήσεις απαιτείται ένας μικρός αριθμός εξ' αυτών, τους επιτρέπει να διέρχονται μέσω των αγγείων με το ενδεχόμενο καρδιακής εμβολής να περιορίζεται στο ελάχιστο. Οι φυσαλίδες μπορεί να εισάγονται στον οργανισμό είτε με τη μορφή ροφήματος, είτε ενδοφλέβια ή ακόμα και με τη μορφή κλύσματος, ενώ το εξωτερικό τους περίβλημα χρησιμεύει στην αργή διάχυση του αερίου στο αίμα και τη μεταφορά της φυσαλίδας στο επιθυμητό σημείο χωρίς ουσιαστική αλλοίωση.

Με τη χρήση των μικροφυσαλίδων υπάρχει σημαντική βελτίωση στην επανασκέδαση του ηχητικού σήματος, λόγω της συμπίεστικότητας του περικλειόμενου αερίου [2] και των επαγόμενων μη γραμμικών ταλαντώσεων που αυτές εκτελούν, με αποτέλεσμα την μεγιστοποίηση της διαφοράς με το ηχητικό σήμα που παράγουν οι γειτονικοί ελαστικοί ιστοί και την καλύτερη απεικόνιση των ανθρωπίνων οργάνων και της ροής του αίματος. Όταν διαταραχθεί το πεδίο της πίεσης με ένα συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα, τότε η μικροφυσαλίδα αρχίζει να ταλαντώνεται και να εκπέμπει ένα ισχυρό σήμα πίεσης λόγω σκέδασης, το οποίο μπορεί να αναλυθεί προκειμένου να εξαχθεί το φάσμα συχνοτήτων ταλάντωσης [3]. Το φάσμα αυτό θα περιέχει μόνο την επιβαλλόμενη συχνότητα διαταραχής, αν η διαταραχή είναι μικρή (γραμμική), ενώ θα περιέχει και άλλες (υποαρμονικές ή

υπεραρμονικές) αν η διαταραχή είναι αρκετά μεγάλη. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να ταυτοποιηθεί το συγκεκριμένο σωματίδιο. Ωστόσο, επειδή η διαταραχή της πίεσης δεν γίνεται αντιληπτή μόνο από τις μικροφουσαλίδες, αλλά και από τα ανθρώπινα όργανα, τα οποία έχουν το δικό τους φάσμα συχνοτήτων, είναι απαραίτητο προκειμένου να ταυτοποιηθεί η τοποθεσία των φουσαλίδων αλλά και η κατάσταση του ανθρώπινου ιστού, να είναι γνωστό το φάσμα συχνοτήτων των μικροφουσαλίδων ή τουλάχιστον ένα σημαντικό τμήμα αυτού. Έτσι, λόγω της αυξημένης αντίθεσης του επανασκεδαζόμενου σήματος που εκπέμπεται από την ταλαντούμενη μικροφουσαλίδα και τους γειτονικούς ιστούς, καθίσταται δυνατή η αναγνώρισή τους και η εξαγωγή χρήσιμων διαγνωστικών πληροφοριών.

Ακόμα, πολύ σημαντική είναι η γνώση της ιδιοσυχνότητας της φουσαλίδας, διότι όταν η τελευταία βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού το επανασκεδαζόμενο σήμα πίεσης που εκπέμπει είναι μέγιστο με αποτέλεσμα να γίνεται πολύ ευκολότερη η ταυτοποίησή της. Επίσης, ένα άλλο ανοικτό πεδίο έρευνας είναι ο ορισμός για κάθε φουσαλίδα, αναλόγως των ιδιοτήτων της (ακτίνα, πάχος μεμβράνης, μέτρο ελαστικότητας του υλικού), ενός παραθύρου συχνοτήτων και πιέσεων ασφαλείας, ώστε να μην καταρρέει. Αυτό είναι σημαντικό, διότι υπάρχουν εφαρμογές της ιατρικής όπου οι μικροφουσαλίδες χρησιμοποιούνται για την δημιουργία πόρων στην επιφάνεια κυττάρων για την αύξηση της απορροφητικότητάς τους σε φάρμακα, πρωτεΐνες, ή συγκεκριμένα γονίδια, με αποτέλεσμα την καλύτερη και αποδοτικότερη θεραπεία. Η δημιουργία πόρων πραγματοποιείται από το ροϊκό πεδίο που δημιουργείται λόγω της ταλάντωσης της φουσαλίδας σε περιβάλλον υπερήχων. Επομένως η μη κατάρρευση της φουσαλίδας είναι καίριας σημασίας σε αυτήν την εφαρμογή.

Επιπλέον, η μελέτη των συχνοτήτων και πιέσεων κατάρρευσης της φουσαλίδας είναι χρήσιμη και για τις περιπτώσεις που η κατάρρευση αποτελεί το ζητούμενο της εφαρμογής, όπως στη χρήση των μικροφουσαλίδων για τη μεταφορά φαρμάκων σε μη υγιείς περιοχές του σώματος [4]. Κατά τη μέθοδο αυτή, οι μικροφουσαλίδες λόγω των ιδιοτήτων της μεμβράνης, προσκολλώνται επιλεκτικά στα άρρωστα κύτταρα. Έπειτα, με την επιβολή μίας μεγάλης διαταραχής της πίεσης σπάνε και απελευθερώνουν το φάρμακο στα κύτταρα αυτά. Επειδή, όμως υπάρχει ένα μέγιστο όριο στην τιμή της πίεσης στους οργανισμούς ($P_{max} = 1.6MPa$), είναι απαραίτητο να μελετηθεί η σχέση των ιδιοτήτων της μικροφουσαλίδας με το πλάτος διαταραχής της πίεσης για το οποίο η φουσαλίδα καταρρέει.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Μέχρι σήμερα αν και έχουν γίνει πολλές έρευνες σχετικά με τις μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agents οι περισσότερες από αυτές θέτουν τη φουσαλίδα σε περιβάλλον μη περιορισμένης ροής (Plesset και Prosperetti [15], Prosperetti et al. [16], Feng και Leal [21], Khismatullin [19] και Khabeev [22]). Όμως λόγω της μη γραμμικής ταλάντωσης της φουσαλίδας, όταν τα αγγεία είναι πολύ μικρά και το μέγεθος της φουσαλίδας γίνεται σημαντικό, η φυσική συχνότητα της φουσαλίδας επηρεάζεται σημαντικά από τα σύνορα κοντά στη φουσαλίδα και από το μέγεθος της ίδιας (Oğuz και Prosperetti [32], Krasovitski et al. [34] και Broumas et al. [35]). Οι Oğuz και Prosperetti [32] και Sassaroli και Hynynen [30], [29] υπήρξαν από τους πρώτους στην έρευνα της επίδρασης άκαμπτου τοιχώματος αγωγού στην ιδιοσυχνότητα των συμβατικών μικροφουσαλίδων χωρίς ελαστικό περίβλημα, χρησιμοποιώντας μία γραμμική προσεγγιστική μέθοδο. Προέβλεψαν ότι η φυσική συχνότητα της φουσαλίδας μέσα σε αγωγό με απολύτως στερεό τοίχωμα μειώνεται με τη μείωση του μεγέθους του αγωγού και με την αύξηση του μεγέθους της φουσαλίδας.

Όπως αναφέρεται και παραπάνω, οι κύριες περιοχές έρευνας σχετικά με τις μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent έχουν να κάνουν με την ελεγχόμενη ταλάντωσή τους και με τις συνθήκες που αυτές οδηγούνται σε θραύση, είτε όταν αυτό είναι επιθυμητό είτε όχι. Η παρούσα εργασία δεν ασχολείται άμεσα με τις συνθήκες που οδηγούν τη φουσαλίδα σε κατάρρευση, όμως μελετά την επίδραση των συνθηκών, στις οποίες βρίσκεται η μικροφουσαλίδα, στην ιδιοσυχνότητά της. Πιο συγκεκριμένα αν και υπάρχει αναλυτική προσεγγιστική σχέση που προσδιορίζει την ιδιοσυχνότητα φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα, αυτή η σχέση βασίζεται σε μη περιορισμένη ροή. Το γεγονός όμως, ότι η διάμετρος των αγγείων του αίματος κυμαίνεται από 4 έως 8 μm , καθιστά τη ροή κάθε άλλο παρά περιορισμένη αφού το εύρος διαμέτρου των φουσαλίδων κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα. Είναι σκόπιμο λοιπόν να μελετηθεί η επίδραση του περιορισμού της ροής στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας.

Η αναλυτική σχέση που υπολογίζει την ιδιοσυχνότητα φουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα σύμφωνα με τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε από τους Tsiglifis και Pelekasis [38] και άλλους ερευνητές [44], [45]:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = -\frac{2\mu_s}{\rho\hat{R}_0^2} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{4\mu_s}{\rho\hat{R}_0^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho\hat{R}_0^3}\left(3\gamma(2\sigma + \hat{P}_{st}\hat{R}_0) - 2\sigma + \frac{2\chi}{1-\nu}\right)} \quad (1.1)$$

όπου, ρ η πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού, \hat{R}_0 η αρχική ακτίνα της φυσαλίδας, γ η πολυτροπική σταθερά του αερίου, \hat{P}_{st} η στατική πίεση του περιβάλλοντος ρευστού, χ και μ_s το επιφανειακό μέτρο ελαστικότητας και το ιξώδες της μεμβράνης και ν ο λόγος Poisson. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την επίλυση του γραμμικού προβλήματος ανιζώδους και αστρόβιλης ροής γύρω από σφαιρική μικροφυσαλίδα με την μέθοδο των γραμμικών διαταραχών.

Οι Oğuz και Prosperetti [32] προτείνουν μία προσεγγιστική σχέση για τον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας για περιορισμένη ροή. Η σχέση αυτή βασίζεται στην υπόθεση, ότι το μέγεθος της φυσαλίδας είναι μεγάλο σε σχέση με την ακτίνα του αγωγού. Για φυσαλίδα τοποθετημένη στο κέντρο του αγωγού ο λόγος της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας για περιορισμένη ροή προς την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας για μη περιορισμένη ροή δίνεται σύμφωνα με τους Oğuz και Prosperetti από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{a}{\sqrt{\frac{\hat{L}}{\hat{R}_0} - \frac{4}{3a^2} + 2\frac{\Delta L}{\hat{R}_0}}} \quad (1.2)$$

όπου $a = \hat{R}_t/\hat{R}_0$, \hat{R}_t η ακτίνα του αγωγού, \hat{L} το μήκος του αγωγού και $\Delta L = 1,22\hat{R}_t$. Ο όρος ΔL είναι ένα γεωμετρικό μήκος που ουσιαστικά προστίθεται στο μήκος του αγωγού για να ληφθεί υπόψιν η επίδραση της μάζας του ρευστού που βρίσκεται έξω από τον αγωγό.

Αυτό, που προέκυψε συγκρίνοντας με τα υπολογιστικά αποτελέσματα που βρέθηκαν με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων από του συγγραφείς είναι ότι για φυσαλίδες μικρές σε σχέση με τον αγωγό η σχέση (1.2) δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Έτσι, για την περίπτωση των μικρών φυσαλίδων τα υπολογιστικά αποτελέσματα συγκρίθηκαν και με τη σχέση που ανέπτυξε ο Devin Charles (1958) [28]:

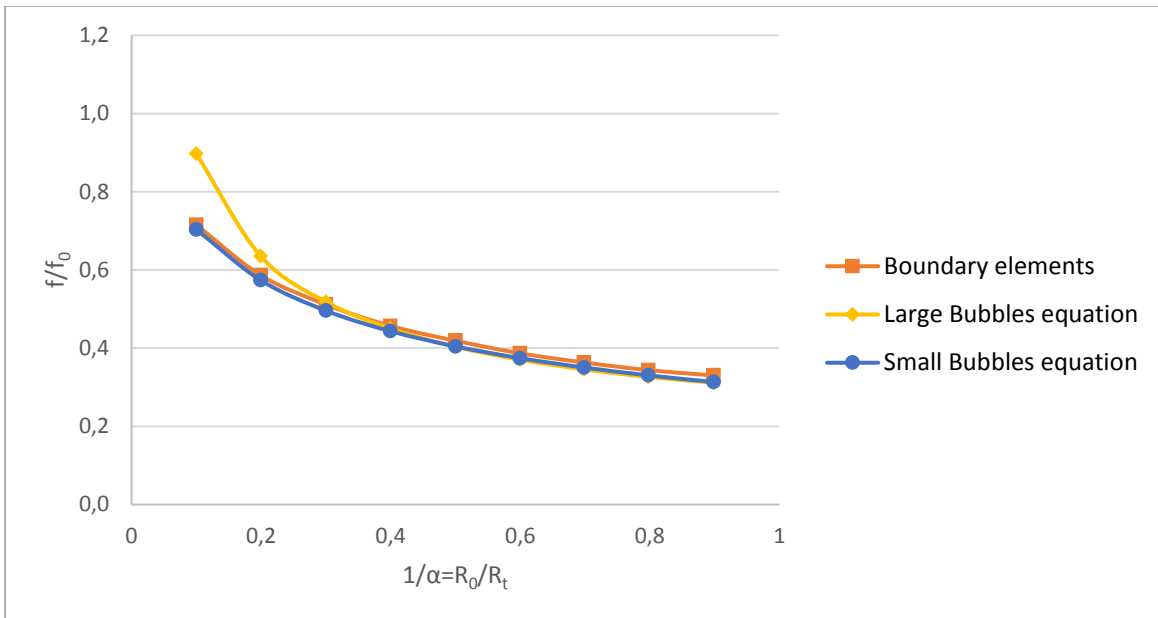
$$\frac{f}{f_0} = \left[1 + \frac{2}{a} \left(\frac{\frac{1}{2}\hat{L} + \Delta L}{\hat{R}_t} - 1.108 \right) \right]^{-1/2} \quad (1.3)$$

Για κλίμακα μεγεθών της φυσαλίδας σε σχέση με τον αγωγό που την περιέχει που καλύπτει μικρές αλλά και μεγάλες φυσαλίδες η παραπάνω μελέτη [32] προτείνει μία πιο γενική προσεγγιστική λύση για την συχνότητα συντονισμού, υποθέτοντας ιδανική ροή στο περιβάλλον ρευστό και περίπου σφαιρικό σχήμα για την μικροφυσαλίδα, που λαμβάνει στην μορφή:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{-2\mu_s \varphi_r}{\rho R_0^2 \varphi} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4\mu_s}{\rho R_0^2} \right)^2 + \frac{\varphi}{\varphi_r \rho \hat{R}_0^3} \left(3\gamma(2\sigma + \hat{P}_{st} \hat{R}_0) - 2\sigma + \frac{2\chi}{1-\nu} \right)} \quad (1.4)$$

Ο λόγος $\varphi_r/\varphi \equiv (\partial\varphi/\partial r)/\varphi$ της παραπάνω σχέσης προκύπτει από την επίλυση του γραμμικού προβλήματος ανιζώδους και αστρόβιλης ροής μεταξύ σφαίρας και τοιχώματος με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και τον υπολογισμό της εν λόγω ποσότητας επάνω στην επιφάνεια της σφαιρικής μικροφουσαλίδας.

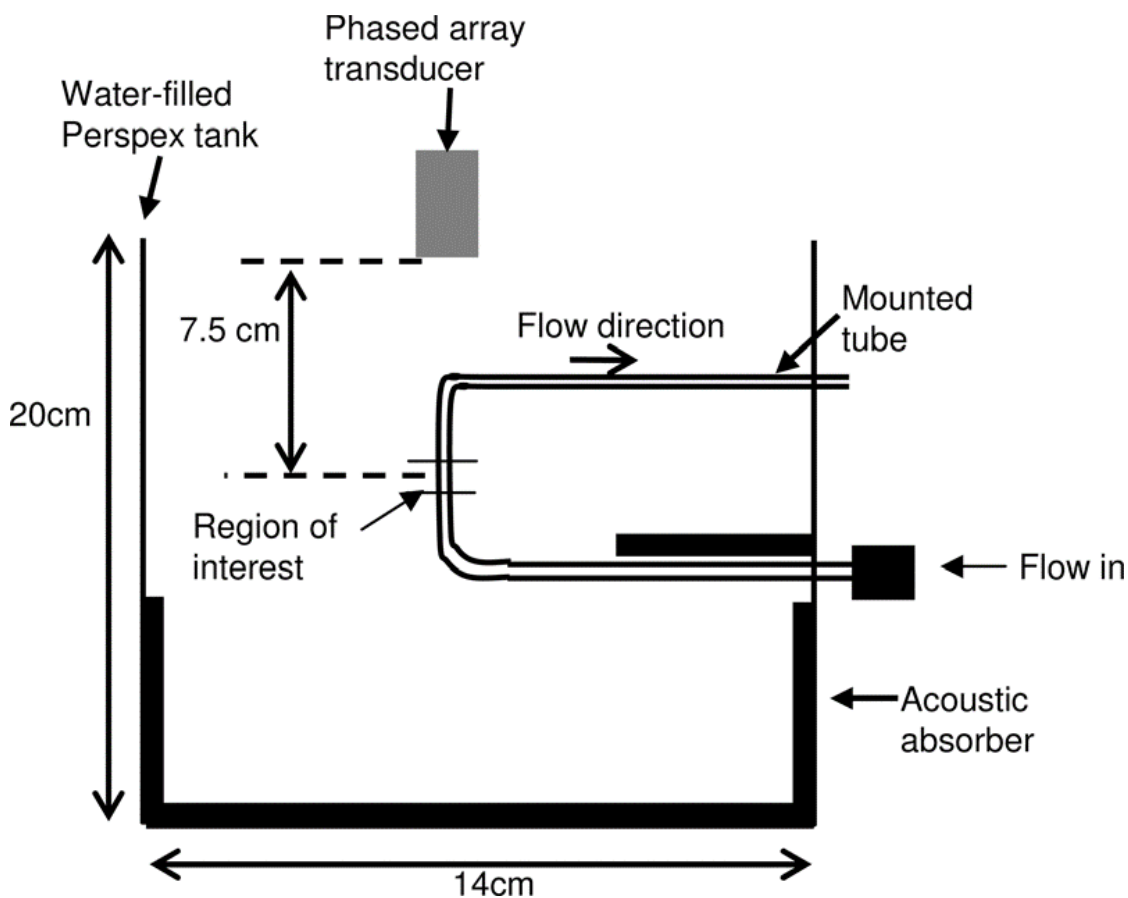
Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων στο άρθρο [32], σχέση (1.4), όπως αυτά ανακτήθηκαν από εικόνα του άρθρου. Επίσης παρουσιάζονται οι καμπύλες που λαμβάνονται από τις σχέσεις (1.2) και (1.3). Τα διάγραμμα αυτό είναι υπολογισμένο για λόγο $\hat{L}/\hat{R}_t = 10$.



Σχήμα 1.1 Φυσική ιδιοσυχνότητα φουσαλίδας τοποθετημένης στο κέντρο αγωγού ακτίνας \hat{R}_t και μήκους \hat{L} συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας της φουσαλίδας \hat{R}_0/\hat{R}_t για λόγο $\hat{L}/\hat{R}_t = 10$. Αποτελέσματα υπολογιστικής μεθόδου με *boundary elements* (Oğuz και Prosperetti [32]), σχέσης (1.2) για μεγάλες φουσαλίδες (*Large Bubbles equation*) και σχέσης (1.3) για μικρές φουσαλίδες (*Small Bubbles equation*).

Οι μέχρι τώρα πειραματικές έρευνες που έχουν διεξαχθεί έχουν δείξει ότι η παρουσία τοιχωμάτων που περιορίζουν τη ροή επηρεάζει σημαντικά το πεδίο ροής γύρω από την φουσαλίδα [7], [8], όπως επίσης και την ακουστική απόκριση της φουσαλίδας [9]. Επίσης έρευνες οπτικής απεικόνισης έχουν δείξει ότι το πλάτος ταλάντωσης της φουσαλίδας μειώνεται με την παρουσία των τοιχωμάτων του αγωγού [10], [23] και [31].

Μία πρόσφατη πειραματική έρευνα της οποίας η διάταξη μπορεί να παρομοιαστεί μέρος του προβλήματος που μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι αυτή που παρουσιάζεται στην εργασία [33]. Κατά την έρευνα αυτή λήφθηκαν οι αποκρίσεις δύο διαφορετικών τύπων φυσαλίδων, σε στενούς αγωγούς, όταν αυτές υπεβλήθησαν σε ακουστική διαταραχή όμοια με αυτή που χρησιμοποιείται για την ιατρική απεικόνιση. Χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά ήδη αγωγών, αγωγοί διαμέτρου 200 μm από κυτταρίνη και αγωγοί διαμέτρου 50 μm από ακριλικό υλικό. Η σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποιήθηκε κατά την έρευνα αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 1.2. Ο αγωγός είναι τοποθετημένος σε μία Perspex δεξαμενή γεμάτη νερό η οποία έχει προηγουμένως βράσει και έχει αφηθεί να κρυώσει σε θερμοκρασία δωματίου. Οι μικροφυσαλίδες τροφοδοτούνται στον μεγαλύτερο αγωγό μέσω βαρύτητας από δοχείο τοποθετημένο σε μαγνητικό αναδευτήρα 40cm πάνω από την δεξαμενή. Για τον μικρότερο αγωγό διαμέτρου 50 μm χρησιμοποιήθηκε σύριγγα οδηγός. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε ένας υπερηχητικός σαρωτής Philips Sonos 5500 με μορφοτροπέα φάσης S3. Ο ακουστικός παλμός που προέκυψε ήταν 1.6MHz.



Σχήμα 1.2 Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης της εργασίας των Butler et al. [33]

Χρησιμοποιήθηκαν δύο ήδη μικροφουσαλίδων Definity[®] και biSphere[™] των οποίων οι μηχανισμοί απόκρισης έχουν ήδη μελετηθεί σε προηγούμενες έρευνες [11], [12] και [13]. Οι μικροφουσαλίδες Definity[®] περιέχουν αέριο φθοράνθρακα σε κέλυφος από λιπίδιο ενώ οι μικροφουσαλίδες biSphere[™] είναι άκαμπτα πολυμερή κελύφη από πολυμερές πολυλακτίδιο και αλβουμίνη και περιέχουν άζωτο.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι καθώς αυξάνεται η ενεργός τιμή της θεμελιώδους και της δεύτερης αρμονικής συχνότητας ταλάντωσης της πίεσης με αντίστοιχη αύξηση του μεγέθους της φουσαλίδας τα δύο είδη φουσαλίδων έχουν διαφορετική συμπεριφορά.

Επιπλέον, παρατηρήθηκαν ασύμμετρες παραμορφώσεις στις φουσαλίδες πριν την κατάρρευσή τους. Οι συγγραφείς προτείνουν σύμφωνα με τα αποτελέσματά τους, ότι οι παραμορφώσεις αυτές είναι υπεύθυνες για τη μεταφορά της ενέργειας από την θεμελιώδη στην δεύτερη αρμονική και την επακόλουθη μείωση του πλάτους ταλάντωσης. Επίσης, για το μικρότερο αγωγό η δεύτερη αρμονική είναι μεγαλύτερη απ' ότι για τον αγωγό διαμέτρου 200μm. Ένα ακόμα συμπέρασμα που προέκυψε από την έρευνα έχει να κάνει με τη διάρκεια ζωής των μικροφουσαλίδων. Οι φουσαλίδες από πολυμερές επιβίωσαν και στους δύο αγωγούς από τον δεύτερο παλμό στο 100%. Αντιθέτως, οι μικροφουσαλίδες από λιπίδια επιβίωσαν στον αγωγό διαμέτρου 200μm κατά 99% και στον αγωγό 50μm κατά 68%.

Ένας σημαντικός περιορισμός του πειράματος αυτού είναι ότι δεν μπορεί να παρατηρηθεί η επίδραση του μεγέθους της φουσαλίδας στην απόκρισή της, λόγω έλλειψης πληροφοριών για το μέγεθος των μικροφουσαλίδων. Παρά τον περιορισμό αυτό, μπορούν να ληφθούν συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της φουσαλίδας καθώς μεταβάλλεται το μέγεθος της διατομής του αγωγού και του πλάτους διαταραχής της πίεσης. Έτσι, τελικά αυτό που προέκυψε είναι ότι η αύξηση της δεύτερης αρμονικής στον αγωγό διαμέτρου 50μm και για τα δύο είδη μικροφουσαλίδων οφείλεται στην μείωση της διαμέτρου του αγωγού. Τέλος, παρατηρήθηκε ότι η αύξηση είτε της ταχύτητας του κελύφους της φουσαλίδας είτε της επιτάχυνσής του, οφείλεται στην μείωση του μεγέθους του αγωγού και στη μείωση του πλάτους ταλάντωσης, μεταβολή η οποία οδηγεί και στην απώλεια της σφαιρικότητας της μικροφουσαλίδας.

1.4 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας

Το υπόλοιπο της εργασίας αυτής χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες, στις οποίες παρουσιάζεται αναλυτικά το αντικείμενο που αυτή πραγματεύεται. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζονται τρία προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα αφορά την ταλάντωση της φυσαλίδας μέσα σε αγωγού στο οποίο τα άκρα επιβάλλεται ακουστική διαταραχή της πίεσης. Στο δεύτερο πρόβλημα μελετάται η μεταφορική κίνηση της φυσαλίδας που προκαλείται λόγω βαθμίδας πίεσης μέσα στον αγωγό ενώ δεν επιβάλλεται καμία ακουστική διαταραχή. Τέλος, στο τρίτο πρόβλημα η φυσαλίδα υποβάλλεται σε ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση και ταλάντωση αφού στον αγωγό επιβάλλεται εκτός από την πτώση πίεσης και ακουστική διαταραχή στα άκρα του.

Στη 2^η ενότητα παρουσιάζονται αναλυτικά τα παραπάνω προβλήματα και καταστρώνονται οι εξισώσεις που διέπουν το κάθε πρόβλημα καθώς και οι συνοριακές συνθήκες.

Στην 3^η ενότητα παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Μελετώνται δύο τρόποι κατασκευής πλέγματος, η ελλειπτική τεχνική και η μέθοδος *spline* και συγκρίνονται τα αποτελέσματά τους. Επίσης παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται και στην ελλειπτική μέθοδο αλλά και στην αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων για τη ροή.

Στην 4^η ενότητα γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος σε Fortran για κάθε πρόβλημα. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα που προβλέπουν προσεγγιστικές αναλυτικές εξισώσεις, άλλες υπάρχουσες υπολογιστικές μελέτες και πειράματα που έχουν παρουσιασθεί την ενότητα 1.3.

Τέλος, στην 5^η ενότητα παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. Κατάστροση Προβλήματος

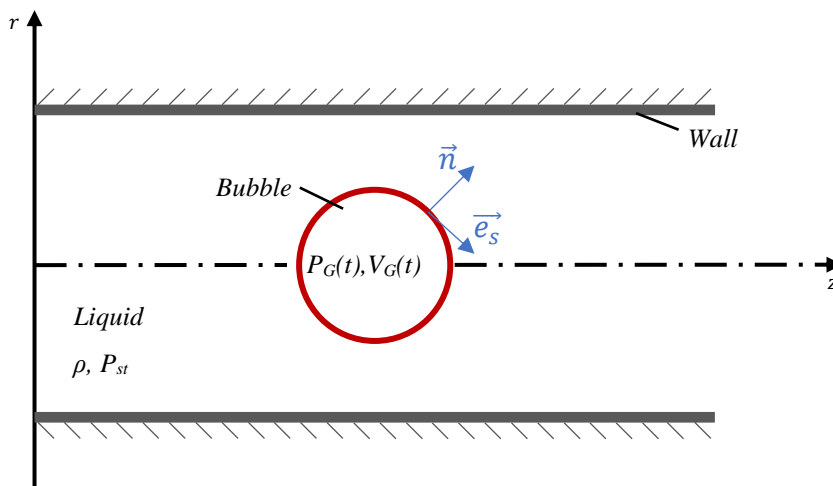
Στην παρούσα μελέτη εξετάζεται η συμπεριφορά φυσαλίδας με κέλυφος μέσα σε αγωγό με σταθερό τοίχωμα στο πλαίσιο τριών διαφορετικών προβλημάτων.

Στο πρώτο πρόβλημα επιβάλλεται μία συνημιτονοειδής ακουστική διαταραχή στην πίεση στην είσοδο και στην έξοδο του αγωγού και μελετάται η επίδραση των τοιχωμάτων του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας.

Στο δεύτερο πρόβλημα εισέρχεται στον αγωγό μία παροχή υγρού με αποτέλεσμα τη δημιουργία πτώσης πίεσης στον αγωγό αλλά και τη μεταφορική κίνηση της φυσαλίδας. Σ' αυτή την περίπτωση μελετάται η επιρροή διαφόρων παραμέτρων, όπως η παροχή του υγρού και η ακτίνα του αγωγού σε σχέση με την ακτίνα της φυσαλίδας, στην ταχύτητα και στο σχήμα της φυσαλίδας.

Τέλος, το τρίτο πρόβλημα είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων προβλημάτων, δηλαδή ενώ περνάει μέσα από τον αγωγό μία παροχή υγρού ταυτόχρονα επιβάλλεται μία ακουστική διαταραχή στα άκρα του.

Το πρόβλημα και στις τρεις περιπτώσεις αντιμετωπίζεται αξονοσυμμετρικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 με τον \hat{z} – άξονα να αποτελεί τον άξονα συμμετρίας. Σε απόσταση \hat{R}_t από τον \hat{z} – άξονα βρίσκεται το τοίχωμα του κυκλικού αγωγού.



Σχήμα 2.1 Σχηματική απεικόνιση φυσαλίδας μέσα σε αγωγό

Επίσης, θεωρείται φυσαλίδα ακτίνας \hat{R}_0 και επιφανειακής τάσης σ που περιέχει ιδανικό αέριο και η οποία είναι βυθισμένη σε ασυμπίεστο υγρό πυκνότητας ρ και ιξώδους μ . Για την

αδιαστατοποίηση των εξισώσεων χρησιμοποιούνται η ακτίνα της φυσαλίδας \hat{R}_0 ως χαρακτηριστικό μήκος, η ποσότητα $\omega_f \hat{R}_0$ ως χαρακτηριστική ταχύτητα και η κλίμακα $1/\omega_f$ ως χαρακτηριστικός χρόνος, όπου ω_f είναι η συχνότητα της ακουστικής διαταραχής ή στην περίπτωση που δεν υπάρχει ακουστική διαταραχή η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας. Αρκετά μακριά από τα τοιχώματα έχουμε ατμοσφαιρική πίεση \hat{P}_{st} . Η αδιαστατοποίηση της πίεσης γίνεται με την ποσότητα $\rho \omega_f^2 \hat{R}_0^2$. Οι τονισμένοι χαρακτήρες υποδηλώνουν ποσότητες με διαστάσεις.

Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή σε αδιάστατη μορφή και στις τρεις περιπτώσεις είναι οι εξισώσεις Navier Stokes (2.1) και η εξίσωση της συνέχειας (2.2):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = -\bar{\nabla} P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} \quad (2.1)$$

όπου $\bar{u} = (u_r, u_z, 0)$, $Re = \frac{\rho \omega_f^2 \hat{R}_0^2}{\mu}$ ο αριθμός Reynolds της ροής γύρω από τη φυσαλίδα. Η επίδραση του όρου λόγω βαρύτητας θεωρείται αμελητέα για οριζόντιους αγωγούς.

$$\bar{\nabla} \bar{u} = 0 \quad (2.2)$$

Στον άξονα συμμετρίας για τα τμήματα εκτός φυσαλίδας ισχύει η κινηματική συνθήκη:

$$u_r(r=0) = 0 \text{ και } \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.3)$$

Επίσης, η κινηματική συνθήκη την διεπιφάνεια της φυσαλίδας είναι:

$$u_r = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.4)$$

Για την περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων της διεπιφάνειας χρησιμοποιείται η λαγκρατζιανή μεταβλητή ξ , η οποία συνδέεται με το μήκος τόξου της διεπιφάνειας με τη σχέση:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.5)$$

Στο τοίχωμα η ταχύτητα της ροής είναι μηδενική:

$$u_r(r=a) = 0 \text{ και } u_z(r=a) = 0 \quad (2.6)$$

όπου, a η αδιάστατη ακτίνα του αγωγού, ενώ η αδιάστατη ακτίνα της φυσαλίδας R_{eq} είναι:

$$R_{eq} = \frac{\hat{R}}{\hat{R}_0} \text{ και } a = \frac{\hat{R}_t}{\hat{R}_0} \quad (2.7)$$

Επειδή στο πρόβλημα που μελετάται το κέλυφος βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή θεωρούμε ότι δεν υπάρχει προένταση, και συνεπώς ισχύει ότι $R(t=0) = R_{eq} = 1$.

Στην κατάσταση ισορροπίας η αδιάστατη πίεση P_G στο εσωτερικό της φυσαλίδας συνδέεται με την αδιάστατη πίεση P_{st} μέσω της εξίσωσης Young – Laplace:

$$P_G(t = 0) = P_{st} + \frac{2}{We} \quad (2.8)$$

όπου $We = \frac{\rho \omega_f^2 \hat{R}_0^2}{\sigma}$ ο αριθμός Weber, ο οποίος συγκρίνει τις δυνάμεις αδράνειας με τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης, με το σ να είναι η επιφανειακή τάση και το ρ η πυκνότητα του περιβάλλοντος υγρού.

Για τη διακύμανση της πίεσης στο εσωτερικό της φυσαλίδας σε σχέση με το χρόνο θεωρούμε αδιαβατική μεταβολή. Η μεταφορά θερμότητας μεταξύ φυσαλίδας και υγρού αγνοείται ενώ η πυκνότητα και το ιξώδες του αερίου θεωρούνται αμελητέα:

$$P_G(t = 0)V_G^\gamma(t = 0) = P_G(t)V_G^\gamma(t) \quad (2.9)$$

όπου V_G ο αδιάστατος όγκος της φυσαλίδας σε κάθε χρονική στιγμή, με $V_G(t = 0) = 4\pi/3$ και γ σταθερά του αερίου.

Το ισοζύγιο δυνάμεων στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας σε αδιάστατη μορφή είναι:

$$\left(-P\underline{I} + \frac{1}{Re}\underline{\tau}_l\right) \cdot \bar{n} + P_G \cdot \bar{n} = \frac{(\bar{\nabla}_s \cdot \bar{n})\bar{n}}{We} + \bar{\Delta F} = \frac{2k_m}{We}\bar{n} + \bar{\Delta F} \quad (2.10)$$

όπου \underline{I} , $\underline{\tau}_l$ ο μοναδιαίος και ο αποκλίνων τανυστής τάσεων του υγρού αντίστοιχα, $\bar{\nabla}_s$, k_m η επιφανειακή κλίση και η μέση καμπυλότητα αντίστοιχα, $\bar{\Delta F}$ η δύναμη που ασκείται στη διεπιφάνεια λόγω των ιξωδοελαστικών ιδιοτήτων της μεμβράνης και \bar{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην διεπιφάνεια με φορά προς το εσωτερικό της ροής:

$$\bar{n} = \frac{z_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \bar{e}_r - \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \bar{e}_z \text{ και } k_m = \frac{k_s + k_\phi}{2} \quad (2.11)$$

όπου k_s, k_ϕ οι καμπυλότητες στις δύο κύριες διευθύνσεις με:

$$k_s = \frac{r_\xi z_{\xi\xi}}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}} - \frac{z_\xi r_{\xi\xi}}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}} \text{ και } k_\phi = \frac{z_\xi}{r(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}} \quad (2.12)$$

Η δύναμη λόγω ελαστικότητας της μεμβράνης $\bar{\Delta F}$ δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta F} &= \Delta F_n \cdot \bar{n} + \Delta F_t \cdot \bar{e}_s = \\ & \left[k_s \tau_{ss} + k_\phi \tau_{\phi\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial S} (rq) \right] \bar{n} - \left[\frac{\partial \tau_{ss}}{\partial S} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} (\tau_{ss} - \tau_{\phi\phi}) + k_s q \right] \bar{e}_s, \quad \mu\epsilon \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$q = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial S} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r m_s) - m_\varphi \right] \quad (2.14)$$

όπου $\tau_{ss}, \tau_{\varphi\varphi}$ οι ελαστικές τάσεις της μεμβράνης και m_s, m_φ οι ροπές κάμψης της στις δύο κύριες διευθύνσεις, q οι διατμητικές τάσεις και $\bar{e}_s = \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \bar{e}_r + \frac{z_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \bar{e}_z$ το μοναδιαίο

εφαπτομενικό διάνυσμα στη διεπιφάνεια. Για τις ροπές κάμψης ισχύει:

$$m_s = \frac{k_b}{\lambda_\varphi} (K_s + \nu K_\varphi) \text{ και } m_\varphi = \frac{k_b}{\lambda_s} (K_\varphi + \nu K_s) \quad (2.15)$$

όπου k_b είναι το μέτρο δυσκαμψίας του κελύφους, ν ο λόγος Poisson και K_s, K_φ είναι οι καμπτικές τάσεις στην εφαπτομενική και αζιμούθια διεύθυνση αντίστοιχα:

$$K_s = \lambda_s k_s - k_s^R \text{ και } K_\varphi = \lambda_\varphi k_\varphi - k_\varphi^R. \quad (2.16)$$

όπου τα k_s^R και k_φ^R αναφέρονται στην αδιάστατη ακτίνα καμπυλότητας στις κύριες διευθύνσεις, εκεί που η μεμβράνη δεν δέχεται καμπτικές ροπές. Για σφαιρικό σχήμα $k_s^R = k_\varphi^R = 1$.

Για κελύφη φυσαλίδων τα οποία μαλακώνουν με την επιβολή των τάσεων, όπως τα λιπίδια ισχύει ο καταστατικός νόμος Mooney – Rivlin, για τον οποίο οι τάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [39]:

$$\hat{\tau}_{ss}^{MR} = \frac{G_s}{\lambda_s \lambda_\varphi} \left(\lambda_s^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\varphi)^2} \right) [1 + b(\lambda_\varphi^2 - 1)] + \frac{2\mu_s}{\lambda_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$\hat{\tau}_{\varphi\varphi}^{MR} = \frac{G_s}{\lambda_s \lambda_\varphi} \left(\lambda_\varphi^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\varphi)^2} \right) [1 + b(\lambda_s^2 - 1)] + \frac{2\mu_s}{\lambda_\varphi} \frac{\partial \lambda_\varphi}{\partial t}, \quad (2.18)$$

όπου λ_s και λ_φ είναι οι παραμορφώσεις στις δύο κύριες διευθύνσεις, μ_s είναι το επιφανειακό διασταλτικό ιξώδες της μεμβράνης και G_s το επιφανειακό μέτρο διάτμησης του κελύφους:

$$\mu_s = 3\mu_{3D}\delta \text{ και } G_s = G_{3D}\delta, \quad (2.19)$$

Στις παραπάνω σχέσεις δ είναι το πάχος του κελύφους της φυσαλίδας σε m , μ_{3D} το διασταλτικό ιξώδες του σε $Pa \cdot s$ και G_{3D} το μέτρο διάτμησης της μεμβράνης σε Pa . Οι σχέσεις (2.17) και (2.18) δίνουν τις ελαστικές τάσεις σε $Pa \cdot m$ ενώ σε αδιάστατη μορφή είναι:

$$\tau_{ss}^{MR} = \frac{E}{3\lambda_s \lambda_\varphi} \left(\lambda_s^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\varphi)^2} \right) [1 + b(\lambda_\varphi^2 - 1)] + \frac{2}{Re_s} \frac{1}{\lambda_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial t} \text{ και} \quad (2.20)$$

$$\tau_{\varphi\varphi}^{MR} = \frac{E}{3\lambda_s \lambda_\varphi} \left(\lambda_\varphi^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\varphi)^2} \right) [1 + b(\lambda_s^2 - 1)] + \frac{2}{Re_s} \frac{1}{\lambda_\varphi} \frac{\partial \lambda_\varphi}{\partial t}, \quad (2.21)$$

όπου E είναι το αδιάστατο μέτρο ελαστικότητας και Re_s ο αριθμός Reynolds της μεμβράνης:

$$E = \frac{\chi}{\rho \omega_f^2 \hat{R}_0^3} \text{ και } Re_s = \frac{\rho \omega_f \hat{R}_0^3}{\mu_s}. \quad (2.22)$$

όπου $\chi = 3G_{3D}\delta$ είναι το επιφανειακό μέτρο διαστολής.

Για την περίπτωση κελύφους από πολυμερές υλικό θεωρήθηκε ο neo – Hookean γραμμικός καταστατικός νόμος, για τον οποίο τάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\tau_{ss}^H = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\lambda_\phi} \left(\lambda_s^2 - 1 + \nu(\lambda_\phi^2 - 1) \right) \quad (2.23)$$

$$\tau_{\phi\phi}^H = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{2\lambda_s} \left(\lambda_\phi^2 - 1 + \nu(\lambda_s^2 - 1) \right) \quad (2.24)$$

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί κυρίως η συμπεριφορά λιπιδίου, ενώ θα γίνει προσπάθεια για σύγκριση και με πολυμερές υλικό κελύφους με τα χαρακτηριστικά του πίνακα 2.1. Επίσης, στον πίνακα 2.2 παρατίθενται οι ιδιότητες της ροής. Όλες οι μεταβλητές στους πίνακες έχουν ορισθεί παραπάνω.

Πίνακας 2.1 Τιμές ιδιοτήτων φυσαλίδας και περιβάλλοντος υγρού

	$\hat{R}_0(\mu\text{m})$	$\mu_{3D}(\text{Pa}\cdot\text{s})$	$\chi(\text{N/m})$	$k_b(\text{N}\cdot\text{m})$	\mathbf{b}	$\sigma(\text{N/m})$
Λιπίδιο	3,6	20	0,24	$3 \cdot 10^{-14}$	0	0,051
Πολυμερές	1	7	6,1	$3,61 \cdot 10^{-16}$	-	0

Πίνακας 2.2 Τιμές ιδιοτήτων περιβάλλοντος υγρού της φυσαλίδας

γ	$\mu(\text{Pa}\cdot\text{s})$	$\rho(\text{kg/m}^3)$	ν
1,07	0,001	998	0,5

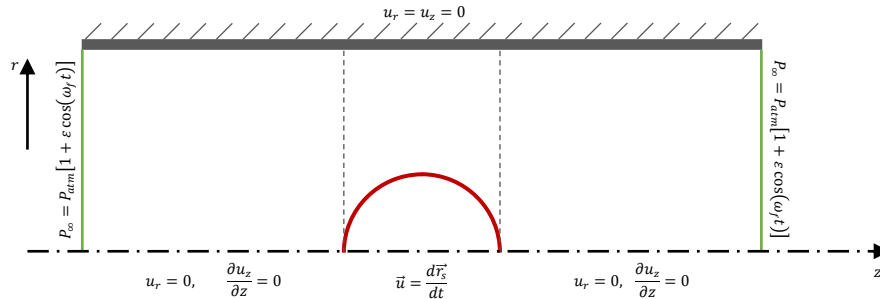
Το μέτρο κάμψης k_b σε κελύφη όπως αυτό των λιπιδίων δεν μπορεί να υπολογιστεί από κάποια σχέση με ακρίβεια γι' αυτό και θεωρείται ότι το μέτρο δυσκαμψίας και το μέτρο επιφανειακής διαστολής χ είναι οι δύο ανεξάρτητες ελαστικές παράμετροι που χαρακτηρίζουν το κέλυφος της μεμβράνης μαζί με το ιξώδες της τελευταίας μ_s [47]. Για την περίπτωση κελύφους από πολυμερές, το μέτρο κάμψης μπορεί να συσχετιστεί με το πάχος και το μέτρο διάτμησης του κελύφους:

$$k_b = \frac{3G_{3D}\delta^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.25)$$

Ο παρακάτω αδιάστατος αριθμός αποτελεί το αδιάστατο μέτρο κάμψης και συγκρίνει την αντίσταση λόγω εφελκυσμού με την αντίσταση λόγω κάμψης.

$$\tilde{k}_b = \frac{k_b}{\chi \hat{R}_0^2} \quad (2.26)$$

2.1 Πρόβλημα 1^ο: Ταλάντωση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής.

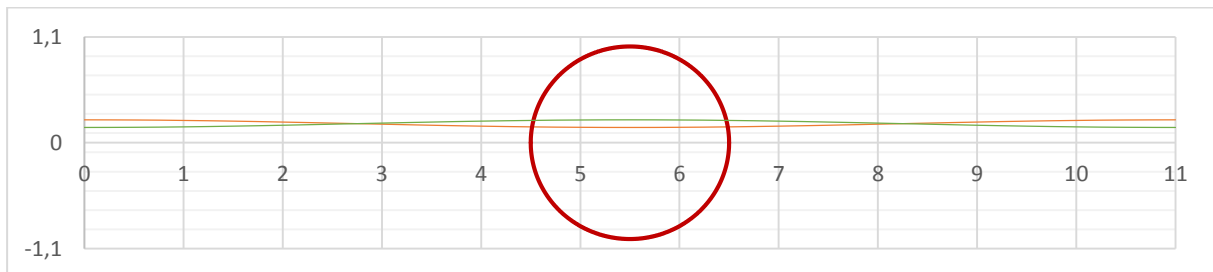


Σχήμα 2.2 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε ακουστική διαταραχή μέσα σε αγωγό

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα η φυσαλίδα βρίσκεται μέσα σ' έναν αγωγό στα άκρα του οποίου επιβάλλεται μία συνημιτονοειδής διαταραχή της πίεσης συχνότητας ω_f και πλάτους ε ενώ το πεδίο ταχυτήτων είναι αδιατάρακτο (σχήμα 2.2).

Στην πραγματικότητα με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα με μήκος κύματος πολύ μεγαλύτερο από το μέγεθος της φυσαλίδας. Αυτό έχει ως συνέπεια την ευστάθεια της υπόθεσης ότι η πίεση σε μία περιοχή λίγο πριν και λίγο μετά την φυσαλίδα δεν αλλάζει κατά την διεύθυνση z ($\frac{\partial P}{\partial z} = 0$), παρά μόνο με τον χρόνο (σχήμα 2.3). Η κυματική εξίσωση της διαταραχής της πίεσης είναι η παρακάτω:

$$P = P_{st} \left[1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi z}{\hat{L}/\hat{R}_0}\right) \cos(\omega_f \hat{t}) \right] \quad (2.27)$$



Σχήμα 2.3 Στάσιμο κύμα για πλάτος διαταραχής της πίεσης $\varepsilon=0,2$ και συχνότητα διαταραχής 1MHz για τις αδιάστατες χρονικές στιγμές $t_1 = 0$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $t_2 = \pi$ (πράσινη καμπύλη). Αγωγός αναλογίας μήκους προς ακτίνα $\hat{L}/\hat{R}_t = 10$ και αναλογίας ακτίνας αγωγού προς ακτίνα φυσαλίδας $\hat{R}_t/\hat{R}_0 = 1,1$.

Στο σχήμα 2.3 φαίνεται η μεταβολή της πίεσης για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0,2$ και συχνότητα διαταραχής 1MHz για έναν αρκετά στενό αγωγό σε σχέση με την φουσαλίδα και παρατηρείται ότι όντως η μεταβολή της πίεσης κατά τον οριζόντιο άξονα στην περιοχή της φουσαλίδας είναι πολύ μικρή. Για να εξασφαλιστεί η παραπάνω υπόθεση στις προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε πλάτος διαταραχής της πίεσης $\varepsilon = 0,1$, ωστόσο στο σχήμα 2.3, χρησιμοποιήθηκε μεγαλύτερο πλάτος διαταραχής επειδή για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0,1$ δεν θα ήταν ευκρινής η ταλάντωση.

Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή σ' αυτήν την περίπτωση είναι οι εξισώσεις Navier – Stokes, εξίσωση (2.1), και η εξίσωση της συνέχειας, εξίσωση (2.2). Επίσης ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες που έχουν περιγραφεί παραπάνω για τον άξονα συμμετρίας και για τη διεπιφάνεια της φουσαλίδας, εξισώσεις (2.3) και (2.4). Η κινηματική συνθήκη στα τοιχώματα του αγωγού δίνεται από την σχέση (2.6). Η μεταβολή της πίεσης εσωτερικό της φουσαλίδας θεωρείται αδιαβατική και περιγράφεται από την εξίσωση (2.9) ενώ στη διεπιφάνεια της φουσαλίδας ισχύει το ισοζύγιο δυνάμεων της εξίσωσης (2.10).

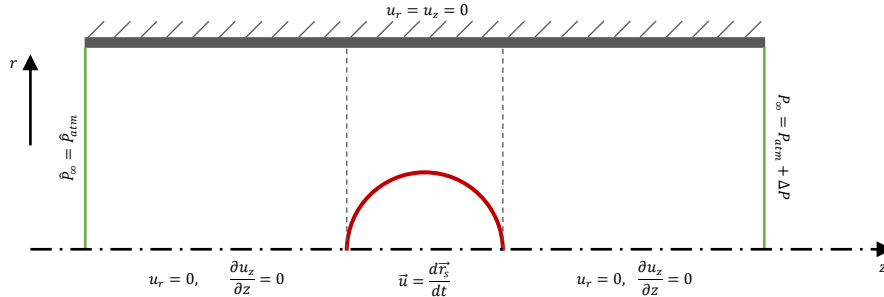
Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος κατά την αξονική διεύθυνση και μακριά από την ταλαντούμενη φουσαλίδα παίρνουν την μορφή:

$$\underline{z = 0}: \vec{u} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow P_{\infty} = P_{atm}[1 + \varepsilon \cos(\omega_f t)] \quad (2.28)$$

$$\underline{z \rightarrow \infty}: \vec{u} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow P_{\infty} = P_{atm}[1 + \varepsilon \cos(\omega_f t)] \quad (2.29)$$

Το επίκεντρο του ενδιαφέροντος σ' αυτό το πρόβλημα είναι η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φουσαλίδας καθώς ο λόγος της ακτίνας του αγωγού προς την ακτίνα της φουσαλίδας, a , μειώνεται, ξεκινώντας από μία αρκετά μεγάλη τιμή του a ώστε η ροή να μπορεί να προσομοιασθεί με συνθήκες μη περιορισμένης ροής.

2.2 Πρόβλημα 2^ο: Μεταφορική κίνηση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω βαθμίδας πίεσης.



Σχήμα 2.4 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε μεταφορική κίνηση λόγω παροχής Q μέσα σε αγωγό

Σ' αυτήν την ενότητα η φυσαλίδα δεν υποβάλλεται σε ακουστική διαταραχή αλλά μεταφέρεται λόγω της παροχής υγρού Q που περνάει μέσα από τον αγωγό ακτίνας \hat{R}_t και μήκους \hat{L} . Θεωρείται μόνιμη ροή, αστρόβιλη και το πεδίο των ταχυτήτων θεωρείται αξονοσυμμετρικό.

Στο πεδίο της ροής επιλύονται οι r και z συνιστώσες των εξισώσεων Navier – Stokes μαζί με την εξίσωση συνέχειας, οι οποίες έχουν τη μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} + \mu \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \hat{z}^2} \right] + \rho g_r \quad (2.30)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} \right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \mu \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial \hat{z}^2} \right] + \rho g_z$$

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial (r \hat{u}_r)}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (2.31)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στον άξονα συμμετρίας και στο τοίχωμα του αγωγού είναι οι εξής:

$$\underline{\text{Για } \hat{r} = 0}: \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} \Big|_{\hat{r}=0} = 0 \text{ και} \quad (2.32)$$

$$\underline{\text{Για } \hat{r} = \hat{R}_t}: \hat{u}_z(\hat{R}_t) = 0$$

Ως αρχικές συνθήκες του προβλήματος για την περιοχή του πεδίου ροής εκτός της φυσαλίδας θεωρούνται οι συνθήκες της πλήρως ανεπτυγμένης ροής:

$$\hat{u}_r = \hat{u}_\theta = 0, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = 0 \text{ και} \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = 0 \Rightarrow \hat{u}_z = \hat{u}_z(\hat{r}) \quad (2.34)$$

Επομένως, η εξίσωση Navier – Stokes στην \hat{z} – κατεύθυνση αγνοώντας την επίδραση της βαρύτητας γίνεται:

$$-\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \mu \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} \right) = 0, \quad 0 \leq \hat{r} \leq \hat{R}_t, \quad (2.35)$$

όπου \hat{R}_t είναι η ακτίνα του αγωγού.

Ολοκληρώνοντας την (2.35) δύο φορές ως προς \hat{r} και εφαρμόζοντας τις συνθήκες (2.32) λαμβάνεται το παρακάτω πεδίο ταχυτήτων, το οποίο αποτελεί την αρχική συνθήκη του προβλήματος σε όλο τον αγωγό εκτός της φουσαλίδας.

$$\hat{u}_z(\hat{r}) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} \frac{\hat{R}_t^2}{4\mu} \left(1 - \frac{\hat{r}^2}{\hat{R}_t^2} \right), \quad 0 \leq \hat{r} \leq \hat{R}_t \quad (2.36)$$

Για την ογκομετρική παροχή ισχύει:

$$Q = 2\pi \int_0^{\hat{R}_t} \hat{u}_z \hat{r} d\hat{r} \Rightarrow Q = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} \frac{\pi \hat{R}_t^4}{8\mu} \quad (2.37)$$

Όσον αφορά την πτώση πίεσης επειδή είναι σταθερή ισχύουν τα παρακάτω:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} = c \Rightarrow \hat{P}(\hat{z}) = c_1 \hat{z} + c_2 \quad (2.38)$$

Εφαρμόζοντας τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες για την πίεση

$$\begin{aligned} \text{Για } \hat{z} = 0: \hat{P}(0) = \hat{P}_1 &\Rightarrow c_2 = \hat{P}_1 \\ \text{Για } \hat{z} = \hat{L}: \hat{P}(\hat{L}) = \hat{P}_2 &\Rightarrow c_1 = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\hat{L}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

στη σχέση (2.38) προκύπτει η κατανομή της πίεσης:

$$\hat{P}(\hat{z}) = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\hat{L}} \hat{z} + \hat{P}_1 \quad (2.40)$$

Επιλύοντας την (2.37) ως προς $\partial \hat{P}$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες προκύπτει η πτώση πίεσης:

$$\int_{\hat{P}_1}^{\hat{P}_2} d\hat{P} = -\frac{8\mu Q}{\pi \hat{R}_t^4} \int_0^{\hat{L}} d\hat{z} \Rightarrow \hat{P}_2 - \hat{P}_1 = -\frac{8\mu Q}{\pi \hat{R}_t^4} \hat{L} \quad (2.41)$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.40) και (2.41) προκύπτει τελικά η κατανομή της πίεσης:

$$\hat{P}(z) = \hat{P}_1 - \frac{8\mu Q}{\pi \hat{R}_t^4} \hat{z}, \quad 0 \leq \hat{z} \leq \hat{L} \quad (2.42)$$

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων χρησιμοποιούνται οι ποσότητες που έχουν

περιγραφεί παραπάνω. Εφόσον, η πίεση στο αριστερό άκρο του αγωγού είναι ατμοσφαιρική η αδιάστατη πίεση είναι $P_1 = P_{st}$, όπου:

$$P_{st} = \frac{\hat{P}_{st}}{\rho\omega_f^2\hat{R}_0^2} \quad (2.43)$$

Επομένως η αδιαστατοποιημένη κατανομή της ταχύτητας και της πίεσης στις αρχικές συνθήκες διαμορφώνεται ως εξής:

$$u_z(r) = \frac{4Q}{\pi\omega_f\hat{R}_0^3a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.44)$$

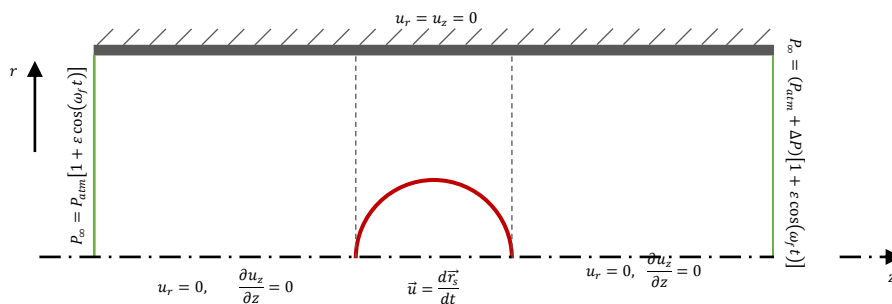
$$P(z) = P_{st} - \frac{8\mu Q}{\pi\rho\omega_f^2\hat{R}_0^5a^4}z, \quad 0 \leq z \leq \frac{\hat{L}}{\hat{R}} \quad (2.45)$$

Από την τελευταία σχέση μπορεί να προκύψει και η πτώση πίεσης στο δεξί άκρο του αγωγού σε αδιάστατη μορφή:

$$\Delta P = -\frac{8\mu Q\hat{L}}{\pi\rho\omega_f^2\hat{R}_0^6a^4} \quad (2.46)$$

Για τη διεπιφάνεια της φυσαλίδας ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες που έχουν περιγραφεί στην ενότητα κατάστρωσης του προβλήματος (2.4) και το ισοζύγιο δυνάμεων της εξίσωσης (2.10). Η μεταβολή της εσωτερικής πίεσης της φυσαλίδας θεωρείται και σ' αυτήν την περίπτωση αδιαβατική και περιγράφεται από την εξίσωση (2.9).

2.3 Πρόβλημα 3^ο: Μεταφορική κίνηση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω συνδυασμού βαθμίδας πίεσης και ακουστικής διαταραχής.



Σχήμα 2.5 Σχηματική αναπαράσταση πεδίου ροής για φυσαλίδα που υποβάλλεται σε μεταφορική κίνηση λόγω παροχής Q μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικών διαταραχών

Στο 3^ο πρόβλημα μελετάται η μεταφορά και η ταλάντωση της φυσαλίδας λόγω της πτώσης πίεσης και των ακουστικών διαταραχών. Σ' αυτό το πρόβλημα πέραν από την δημιουργία πτώσης πίεσης λόγω παροχής υγρού Q επιβάλλεται μία συνημιτονοειδής διαταραχή γωνιακής συχνότητας ω_f και πλάτους διαταραχής ε . Κατά συνέπεια ισχύουν οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 2.2, δηλαδή η κατανομή της ταχύτητας και της πίεσης δίνονται για τις αρχικές συνθήκες δίνονται από τις σχέσεις (2.44) και (2.45), αντίστοιχα.

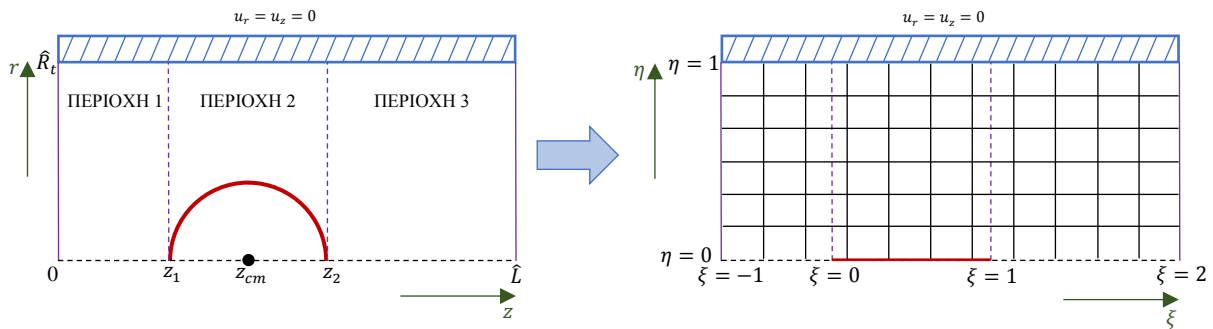
Η διαφοροποίηση αυτό του προβλήματος από το 2^ο πρόβλημα έγκειται στις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του αγωγού:

$$\begin{aligned} \text{Για } \hat{z} = 0: \hat{P}(0) &= \hat{P}_{st}[1 + \varepsilon \cos(\omega_f \hat{t})] \\ \text{Για } \hat{z} = \hat{L}: \hat{P}(\hat{L}) &= (\hat{P}_{st} + \Delta\hat{P})[1 + \varepsilon \cos(\omega_f \hat{t})] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες που έχουν περιγραφεί στις ενότητες 2.1 – 2.3 για τον άξονα συμμετρίας και για τη διεπιφάνεια της φυσαλίδας, εξισώσεις (2.3) και (2.4), παραμένουν ίδιες. Το ίδιο ισχύει και για την κινηματική συνθήκη στα τοιχώματα του αγωγού, η οποία δίνεται από την σχέση (2.6). Επιπλέον η μεταβολή της πίεσης θεωρείται αδιαβατική και περιγράφεται από την εξίσωση (2.9). Τέλος, για τη διεπιφάνεια της φυσαλίδας ισχύει και το ισοζύγιο δυνάμεων της εξίσωσης (2.10).

3. Αριθμητική Επίλυση

3.1 Δημιουργία πλέγματος



Σχήμα 3.1 Σχηματική αναπαράσταση φυσικού και υπολογιστικού πεδίου για φυσαλίδα μέσα σε τριχοειδή αγωγή

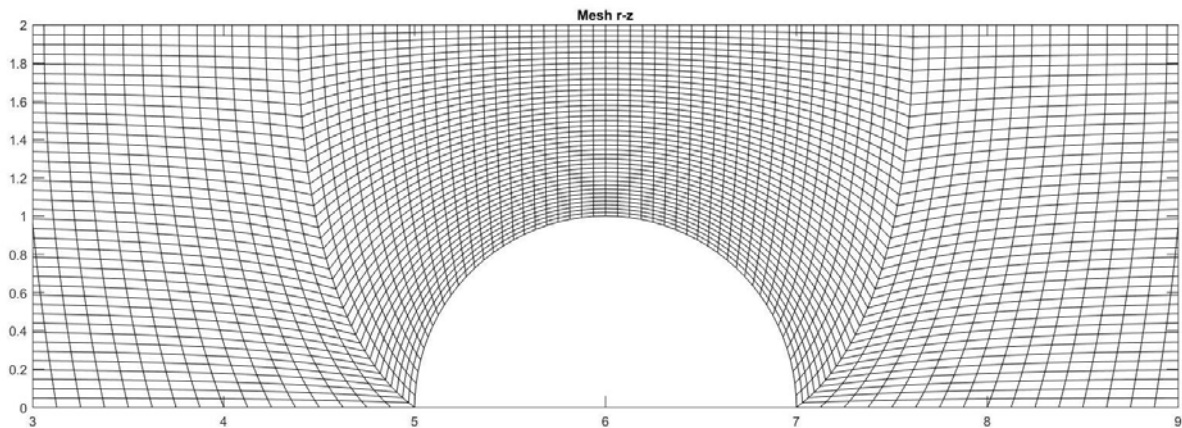
Για τη δημιουργία πλέγματος ακολουθήθηκαν δύο διαφορετικές μεθοδολογίες, η τεχνική της ελλειπτικής κατασκευής πλέγματος και η μέθοδος μετασχηματισμού spine.

Για το πρώτο πρόβλημα που αφορά την επίδραση των τοιχωμάτων του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας, χρησιμοποιήθηκε η ελλειπτική μέθοδος κατασκευής πλέγματος η οποία, αν και απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο, υπερέχει της μεθόδου spine όταν οι παραμορφώσεις γίνονται έντονες. Η ελλειπτική τεχνική βασίζεται στην επίλυση μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης για κάθε συντεταγμένη του υπολογιστικού πεδίου, ώστε το φυσικό πεδίο να μπορέσει να απεικονιστεί επιτυχώς στο υπολογιστικό πεδίο. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται είναι ένας συνδυασμός σταθμισμένων συναρτήσεων οι οποίες ελέγχουν την ομαλότητα, την ορθογωνιότητα και την πυκνότητα του πλέγματος. Συνεπώς, σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες, οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται επηρεάζουν τελικά την ποιότητα του πλέγματος που θα προκύψει. Η συγκεκριμένη εργασία βασίστηκε σ' έναν οιωνή – ελλειπτικό μετασχηματισμό όπως αυτός αναπτύχθηκε από τους Vlachomitrou και Pelekasis [1]. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει το πλεονέκτημα, ότι μπορεί να ακολουθήσει ικανοποιητικά τις μεγάλες παραμορφώσεις του όγκου ελέγχου απαιτώντας την ελάχιστη δυνατή ανακατασκευή πλέγματος.

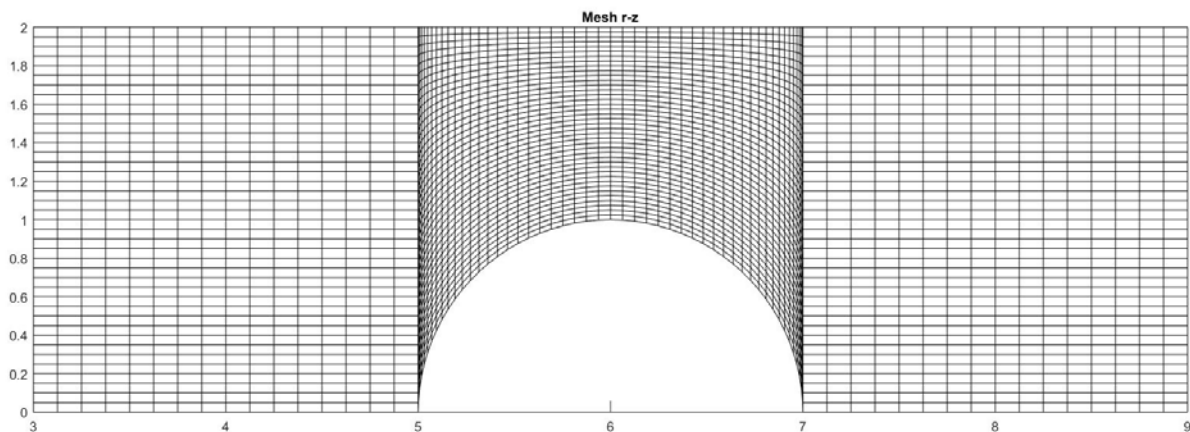
Όταν προχώρησε η εργασία στο δεύτερο και τρίτο πρόβλημα έγινε απόπειρα να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός spine, διότι είναι πιο απλός, απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και οι παραμορφώσεις που αντιμετωπίζονταν δεν ήταν τόσο μεγάλες ώστε να μην μπορεί

να αντεπεξέλθει. Η δημιουργία πλέγματος με τη μέθοδο spine επιτυγχάνεται με ένα κατάλληλο μετασχηματισμό που μετατρέπει το εκάστοτε φυσικό πεδίο επίλυσης σ' ένα ορθογώνιο υπολογιστικό πεδίο. Συνεπώς, γίνεται αντιληπτό ότι η διαφορά σε υπολογιστικό χρόνο είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την ελλειπτική μεθοδολογία, στην οποία απαιτείται σε κάθε χρονικό βήμα επίλυση διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένα στοιχεία και για το πλέγμα.

Στα σχήματα 3.2 και 3.3 παρουσιάζονται δύο πλέγματα που κατασκευάστηκαν με την ελλειπτική τεχνική και τη μεθοδολογία spine αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2 Πλέγμα ($\alpha=2$, $\hat{L}/\hat{R}_0=12$) κατασκευασμένο με την ελλειπτική τεχνική, ($z \times r=(40+50+40) \times 40$).



Σχήμα 3.3 Πλέγμα ($\alpha=2$, $\hat{L}/\hat{R}_0=12$) κατασκευασμένο με την μέθοδο spine, ($z \times r=(40+50+40) \times 40$).

3.1.1 Ελλειπτική τεχνική κατασκευής πλέγματος

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, το πρώτο πρόβλημα αντιμετωπίστηκε αρχικά με την τεχνική της ελλειπτική κατασκευής πλέγματος, αν και κατόπιν προέκυψε ότι και η μέθοδος

spine δούλευε ικανοποιητικά. Σ' αυτήν την ενότητα λοιπόν, θα παρουσιαστεί η τεχνική ελλειπτικής κατασκευής.

Για την κατασκευή του πλέγματος το πεδίο επίλυσης χωρίζεται σε τρία επιμέρους τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Έτσι το πλέγμα κατασκευάζεται πρώτα στην περιοχή 1, δηλαδή από το $z = 0$ έως το $z = z_1$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ως οριακές συνθήκες τις συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν στη γραμμή $z = z_1$ κατασκευάζεται στην περιοχή 2 και αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των σημείων της γραμμής $z = z_2$ κατασκευάζεται το πλέγμα στην περιοχή 2.

Το αρχικό σχήμα της φυσαλίδας περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{(z - z_{cm})^2}{R_{eq}^2} = 1 \quad (3.1)$$

Για $b = R_{eq}$ το σχήμα είναι ημισφαιρικό. Για να κατασκευασθεί, όμως, σωστά το αρχικό πλέγμα γύρω από την σφαιρική φυσαλίδα πρέπει η διαδικασία κατασκευής να γίνει σταδιακά. Επομένως η κατασκευή του πλέγματος γίνεται βηματικά από $b = 0$ έως $b = R_{eq}$, όπου έχουμε και το σφαιρικό σχήμα που θα αποτελέσει το αρχικό πλέγμα για την αριθμητική επίλυση της ροής.

Κατά την κατασκευή του πλέγματος για τις αρχικές συνθήκες $b = 0$, θεωρείται η παρακάτω λύση:

$$r = r_{\infty} \eta \quad (3.2)$$

$$z = \begin{cases} \xi z_1 + z_1, & -1 \leq \xi \leq 0 \\ \xi(z_2 - z_1) + z_1, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \xi \cdot (z_{\infty} - z_2) + 2z_2 - z_{\infty}, & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

όπου $r_{\infty} = a$, $z_2 = z_1 + 2R_{eq}$ και $z_{\infty} = L/\hat{R}_0$.

Θεωρείται λοιπόν ο μετασχηματισμός $(r, z, t) \xrightarrow{|J|} (\eta, \xi, t)$, όπου $|J|$ η ιακωβιανή του μετασχηματισμού ίση με:

$$|J| = r_{\eta} z_{\xi} - r_{\xi} z_{\eta}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \text{ και } -1 \leq \xi \leq 2 \quad (3.4)$$

Δηλαδή, κάθε σωματίδιο που την χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση (r, z) αντιστοιχίζεται μέσω του μετασχηματισμού σε ένα σημείο του πλέγματος με συντεταγμένες (η, ξ) . Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των κόμβων στο υπολογιστικό πεδίο χρειάζεται η επίλυση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων [37]:

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \bar{\nabla} \xi = 0 \quad (3.5)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \eta = 0 \quad (3.6)$$

Η πρώτη εξίσωση (3.5) παράγει τις η – καμπύλες, δηλαδή τις καμπύλες του πλέγματος, οι οποίες πρέπει να είναι σχεδόν κάθετες στην επιφάνεια και στις οποίες το ξ είναι σταθερό, ενώ η δεύτερη εξίσωση (3.6) παράγει τις ξ – καμπύλες οι οποίες είναι σχεδόν παράλληλες προς την διεπιφάνεια και πρέπει να μπορούν να ακολουθήσουν τις παραμορφώσεις της. Στην εξίσωση (3.5) τη διαφορά από την γνωστή ελλειπτική μεθοδολογία κάνει ο όρος της

παρένθεσης. Ο όρος $\sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}}$ εξασφαλίζει σχεδόν την καθετότητα των η – καμπυλών στη

διεπιφάνεια, ενώ το ε_1 είναι μία εμπειρική παράμετρος που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1 και καθορίζει την ομαλότητα του πλέγματος σε σχέση με την ορθογωνιότητά του. Η τιμή της παραμέτρου καθορίζεται για κάθε πρόβλημα με δοκιμή και σφάλμα. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρείται $\varepsilon_1 = 0,1$.

Για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων (3.5) και (3.6) χρησιμοποιείται η Galerkin μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και οι εξισώσεις του πλέγματος παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\iint \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \bar{\nabla} \xi \cdot \bar{\nabla} B_i \, drdz + L_1 \quad (3.7)$$

$$\iint \bar{\nabla} \eta \cdot \bar{\nabla} B_i \, drdz = 0 \quad (3.8)$$

όπου B_i οι διτετραγωνικές λαγκρατζιανές συναρτήσεις βάσης. Οι επικαμπύλιοι όροι που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης στις εξισώσεις του πλέγματος μηδενίζονται, ώστε να επιβληθεί με τον τρόπο αυτό η ορθογωνιότητα των καμπυλών του πλέγματος στα σύνορα.

Στα σύνορα, που οι συντεταγμένες είναι γνωστές, δεν γράφεται η αντίστοιχη εξίσωση πλέγματος αλλά η τιμή της συντεταγμένης επιβάλλεται ως ουσιαστική οριακή συνθήκη. Έτσι αντί των εξισώσεων (3.7) και (3.8) στα σύνορα εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες:

$$\xi = -1 \rightarrow z = 0 \quad (3.9)$$

$$\xi = 2 \rightarrow z = z_{\infty} = \frac{L}{R_0} \quad (3.10)$$

και

$$\eta = 0 \rightarrow r = \begin{cases} 0, & \text{για } -1 \leq \xi < 0 \text{ και } 1 < \xi \leq 2 \\ b\sqrt{1 - (z - z_{cm})^2}, & \text{για } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\eta = 1 \rightarrow r = r_{\infty} = a$$

Η συνοριακή συνθήκη που δίνεται από την σχέση (3.11) για $\eta = 0$ και $0 \leq \xi \leq 1$, δηλαδή για το σχήμα της διεπιφάνειας, χρησιμοποιείται μόνο στη διαδικασία υπολογισμού του αρχικού σφαιρικού σχήματος της φυσαλίδας.

Επιπλέον, στα σύνορα, επειδή απαιτείται έλεγχος της κατανομής των κόμβων χρησιμοποιείται η μέθοδος της ποινής [40]. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η μέθοδος της ποινής χρειάζεται να εφαρμοστεί μόνο για την κινούμενη διεπιφάνεια, δηλαδή στο $\eta = 0$ και στις ξ – καμπύλες που ξεκινούν από τους πόλους τις φυσαλίδας $\xi = 0$ και $\xi = 1$. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (3.7) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\iint \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_{\xi}^2 + z_{\xi}^2}{r_{\eta}^2 + z_{\eta}^2}} + 1 - \varepsilon_1 \right) \bar{\nabla}_{\xi} \cdot \bar{\nabla} B_i dr dz + L \int \frac{\partial B_i}{\partial \xi} \sqrt{w_1 r_{\xi}^2 + w_2 z_{\xi}^2} d\xi = 0 \quad (3.12)$$

όπου το L είναι η παράμετρος ποινής και παίρνει τιμές $L = O(10^3 - 10^5)$ και w_1, w_2 είναι βάρη για τα οποία ισχύει $w_1 + w_2 = 2$ και τα οποία επιλέγονται συνήθως με δοκιμή και σφάλμα. Για $w_1 = w_2 = 1$ οι κόμβοι του πλέγματος ισοκατανέμονται. Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος που πραγματεύεται η εργασία επιλέχθηκαν οι παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους ποινής και τα βάρη.

Πίνακας 3.1 Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου ποινής στην κινούμενη διεπιφάνεια

	L	w_1
$\eta = 0$	10^3	1
$\xi = 0$	10^3	0.5
$\xi = 1$	10^3	0.5

Για την εφαρμογή των παραπάνω εξισώσεων που εισήχθησαν σ' αυτήν την ενότητα χρειάζεται να υπολογιστούν οι χωρικές και χρονικές παράγωγοι των μεταβλητών. Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας όπως παρακάτω.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \eta_r \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_r \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.15)$$

όπου:

$$\eta_r = \frac{z_\xi}{|J|}, \eta_z = -\frac{r_\xi}{|J|} \quad (3.16)$$

$$\xi_r = -\frac{z_\eta}{|J|}, \xi_z = \frac{r_\eta}{|J|} \quad (3.17)$$

και $drdz = |J|d\eta d\xi$.

Για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της φουσαλίδας χρησιμοποιείται το ισοζύγιο δυνάμεων για τον υπολογισμό του σχήματος της διεπιφάνειας αντί για τη σχέση (3.11). Το ισοζύγιο δυνάμεων επιλύεται με την Galerkin μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Λόγω, όμως της ύπαρξης τέταρτης μερικής χωρικής παραγωγού στο ισοζυγίου, η διακριτοποίηση στη διεπιφάνεια πραγματοποιείται με κυβικές συναρτήσεις splines. Βέβαια, επειδή το ισοζύγιο δυνάμεων δεν μπορεί να εφαρμοστεί ως φυσική συνοριακή συνθήκη, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ως ανεξάρτητη σχέση για τον υπολογισμό του σχήματος της διεπιφάνειας. Έπειτα, το σχήμα που προκύπτει αποτελεί την ουσιαστική συνοριακή συνθήκη για τον υπολογισμό του πλέγματος.

3.1.2 Κατασκευή πλέγματος με τη μέθοδο spine

Και στη μεθοδολογία spine για την κατασκευή του πλέγματος το πεδίο επίλυσης χωρίζεται σε τρία επιμέρους τμήματα όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1. Ο μετασχηματισμός του φυσικού πεδίου (r, z) στο ορθογώνιο υπολογιστικό πεδίο (η, ξ) επιτυγχάνεται με τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

Περιοχή 1: $(-1 \leq \xi < 0)$

$$\eta = \frac{r}{a}, \quad \begin{cases} r = 0 \rightarrow \eta = 0 \\ r = a \rightarrow \eta = 1 \end{cases} \text{ και} \quad (3.18)$$

$$\xi = \frac{z - z_1}{z_1}, \quad \begin{cases} z = 0 \rightarrow \xi = -1 \\ z = z_1 \rightarrow \xi = 0 \end{cases}$$

Περιοχή 2: $(0 \leq \xi \leq 1)$

$$\eta = \frac{r - f_1(\xi, t)}{a - f_1(\xi, t)}, \quad \begin{cases} r = f_1(\xi, t) \rightarrow \eta = 0 \\ r = a \rightarrow \eta = 1 \end{cases} \text{ και} \quad (3.19)$$

$$z = f_2(\xi, t), \quad \begin{cases} z_1 = f_2(0, t) \\ z_2 = f_2(1, t) \end{cases}$$

Περιοχή 3: ($1 < \xi \leq \xi_\infty$)

$$\eta = \frac{r}{a}, \quad \begin{cases} r = 0 \rightarrow \eta = 0 \\ r = a \rightarrow \eta = 1 \end{cases} \text{ και} \quad (3.20)$$

$$\xi = \frac{z}{z_2}, \quad \begin{cases} z = z_2 \rightarrow \xi = 1 \\ z = z_\infty \rightarrow \xi = \xi_\infty \end{cases}$$

Στους παραπάνω μετασχηματισμούς έχουν εισαχθεί οι συναρτήσεις $f_1(\xi, t)$ και $f_2(\xi, t)$ που δίνουν τις συντεταγμένες των κόμβων της διεπιφάνειας καθώς αυτή αλλάζει με τον χρόνο, στην r – και z – κατεύθυνση αντίστοιχα. Για το αρχικό σφαιρικό σχήμα οι συναρτήσεις αυτές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$f_1(\xi, 0) = R_{eq} \sin(\pi\xi) \quad (3.21)$$

$$f_2(\xi, 0) = z_1 + R_{eq}[1 - \cos(\pi\xi)] \quad (3.22)$$

Όπως στη συμβαίνει και με την ελλειπτική μεθοδολογία, για την μελέτη της συμπεριφοράς της φυσαλίδας με το πέρασμα του χρόνου απαιτείται να χρησιμοποιηθεί το ισοζύγιο δυνάμεων.

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής και του ισοζυγίου δυνάμεων κατά το μετασχηματισμό θα χρειαστεί ο υπολογισμός των παραγώγων των μεταβλητών του υπολογιστικού πεδίου ως προς τις μεταβλητές του φυσικού πεδίου, οι οποίες για τον μετασχηματισμό $spine$ που περιγράφηκε παραπάνω είναι:

$$\eta_r = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{για } -1 \leq \xi < 0 \text{ και } 1 < \xi \leq 2 \\ \frac{1}{a - f_1}, & \text{για } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \text{ και } \eta_z = \begin{cases} 0, & \text{για } -1 \leq \xi < 0 \text{ και } 1 < \xi \leq 2 \\ \frac{1}{f_{2,\xi}}, & \text{για } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\xi_r = 0, \quad \xi_z = \begin{cases} \frac{1}{z_1}, & \text{για } -1 \leq \xi < 0 \\ \frac{f_{1,\xi}(\eta - 1)}{(a - f_1)f_{2,\xi}}, & \text{για } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{z_2}, & \text{για } 1 < \xi \leq 2 \end{cases} \quad (3.24)$$

3.2 Αριθμητική επίλυση συστήματος

Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται η Galerkin μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Και για τα τρία προβλήματα η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης του συστήματος για τη ροή είναι ίδια. Αυτό, που αλλάζει σε κάθε πρόβλημα είναι οι αρχικές συνθήκες για την ταχύτητα και οι οριακές συνθήκες για την πίεση, οι οποίες έχουν περιγραφεί εκτενώς στις ενότητες 2.1 – 2.3.

Η προσομοίωση της ταχύτητας και της πίεσης γίνεται με τη χρήση διτετραγωνικών και διγραμμικών συναρτήσεων βάσης Lagrange αντίστοιχα, ενώ για τη διεπιφάνεια όπως έχει ήδη αναφερθεί χρησιμοποιούνται συναρτήσεις βάσεις splines, αφού για φουσαλίδα με ελαστικό περίβλημα στο ισοζύγιο δυνάμεων (2.10) απαιτείται ο υπολογισμός χωρικής παραγώγου τέταρτης τάξεως. Η προσομοίωση της πίεσης με διγραμμικές συναρτήσεις βάσης δηλαδή μίας τάξης μικρότερες απ' ό τι για την ταχύτητα είναι αναγκαία για την αποφυγή αριθμητικών διαταραχών λόγω μη ικανοποίησης του κριτηρίου ευστάθειας των Babuska – Brezzi [41] – [43]. Για τη χρονική ολοκλήρωση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το πλήρως άρρητο σχήμα Euler.

Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις ορμής (2.1) και συνέχειας (2.2) γίνονται:

$$\iiint B_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \bar{e}_k dV + \iiint B_i (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} \cdot \bar{e}_k dV + \iiint B_i \bar{\nabla} p \cdot \bar{e}_k dV - \frac{1}{Re} \iiint B_i \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{e}_k dV = 0 \quad (3.25)$$

$$\iiint B_{l,i} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} dV = 0 \quad (3.26)$$

όπου B_i , $B_{l,i}$ οι διτετραγωνικές και διγραμμικές συναρτήσεις βάσης Lagrange αντίστοιχα. Ο διαφορικός όγκος dV είναι $dV = r dr dz d\theta$. Το \bar{e}_k αναφέρεται στα μοναδιαία διανύσματα \bar{e}_r , \bar{e}_z ώστε να προκύψουν οι συνιστώσες του ισοζυγίου ορμής στην r και z κατεύθυνση. Με παραγοντική ολοκλήρωση η εξίσωση (3.25) δίνει:

$$\iiint B_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \bar{e}_k dV + \iiint B_i (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} \cdot \bar{e}_k dV - \iiint p \bar{\nabla} (B_i \bar{e}_k) dV + \frac{1}{Re} \iiint \bar{\tau} : \bar{\nabla} (B_i \bar{e}_k) dV + \oint B_i \bar{N} \cdot \left(p \bar{I} - \frac{1}{Re} \bar{\tau} \cdot \bar{e}_k \right) dA = 0 \quad (3.27)$$

όπου $dA = r dS d\theta$. Στην παραπάνω εξίσωση το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα επιβιώνει μόνο πάνω στη διεπιφάνεια, όπου το διάνυσμα \bar{N} ισούται με $-\bar{n}$, και μπορεί να αντικατασταθεί από το ισοζύγιο δυνάμεων (2.10). Επειδή όμως, όπως έχει προαναφερθεί, στην περίπτωση φουσαλίδας με ελαστικό κέλυφος το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα απαιτεί τον υπολογισμό μέχρι

και τέταρτης χωρικής παραγώγου, κάτι που είναι αδύνατο με τις λαγκρατζιανές συναρτήσεις βάσης B_i , η εξίσωση (3.27) δεν γράφεται πάνω στη διεπιφάνεια αλλά αντικαθίσταται από τις εξισώσεις κινηματικής συνθήκης (2.4) οι οποίες επιβάλλονται ως αναγκαίες οριακές συνθήκες.

Το ισοζύγιο δυνάμεων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του σχήματος της διεπιφάνειας και διακριτοποιείται με συναρτήσεις βάσης κυβικών splines:

$$\int b_i \left(-p \underline{\underline{I}} + \frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}}_l \right) \cdot \bar{n} dS + \int b_i P_G \cdot \bar{n} dS - \int b_i \frac{2k_m}{We} \bar{n} dS + \int b_i \overline{\Delta F} dS = 0 \quad (3.28)$$

όπου b_i οι μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσεις splines και $dS = \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} d\xi$ το μήκος ολοκλήρωσης.

Η μη γραμμικότητα των εξισώσεων αντιμετωπίζεται με η μέθοδο Newton – Raphson. Αν M, N είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στις δύο κατευθύνσεις τότε σε κάθε επανάληψη της Newton – Raphson επιλύεται ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{dC}} = \underline{\underline{R}} \quad (3.29)$$

όπου $\underline{\underline{R}}$ το διάνυσμα των υπολοίπων, $\underline{\underline{dC}}$ το διάνυσμα των αγνώστων και $\underline{\underline{J}}$ η ιακωβιανή του συστήματος, η οποία προκύπτει από την παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους. Το διάνυσμα των αγνώστων περιλαμβάνει τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας, την πίεση του υγρού, την πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας και το σχήμα της. Ο πίνακας $\underline{\underline{J}}$ είναι σε μορφή τόξου (Αrrow) στις στήλες του οποίου αντιστοιχούν η πίεση και το σχήμα της διεπιφάνειας.

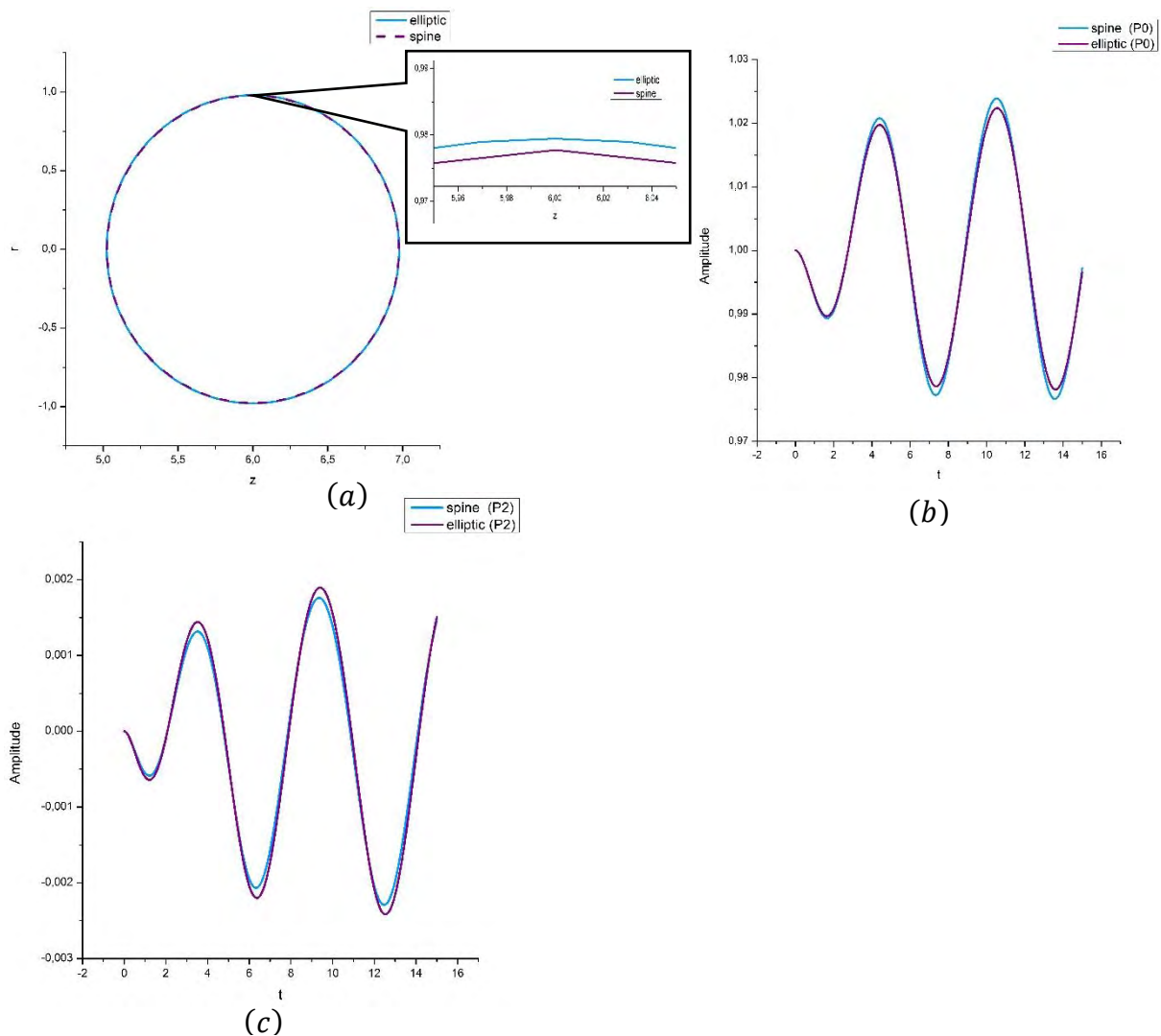
Η υλοποίηση της παραπάνω μεθοδολογίας στην μορφή κώδικα fortran γίνεται στο πλαίσιο Ερευνητικού Προγράμματος, που χρηματοδοτείται από το Ίδρυμα Σταύρος Νιάρχος, από την Μεταδιδακτορική Υπότροφο του Εργαστηρίου κ. Μαρία Βλαχομήτρου. Ενώ, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας διαμορφώθηκαν μόνο οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος που μελετάται.

3.3 Σύγκριση αριθμητικών μεθόδων

Σ' αυτήν την ενότητα, γίνεται σύγκριση των δύο μεθόδων δημιουργίας πλέγματος που περιγράφηκαν παραπάνω για την απόδοση τους στο πρώτο πρόβλημα, όπου η φυσαλίδα ταλαντώνεται λόγω ακουστικής διαταραχής.

Επειδή το ζητούμενο του συγκεκριμένου προβλήματος ήταν να βρεθεί η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας, καθώς περιορίζεται η ροή που την περιβάλλει, δεν κρίθηκε

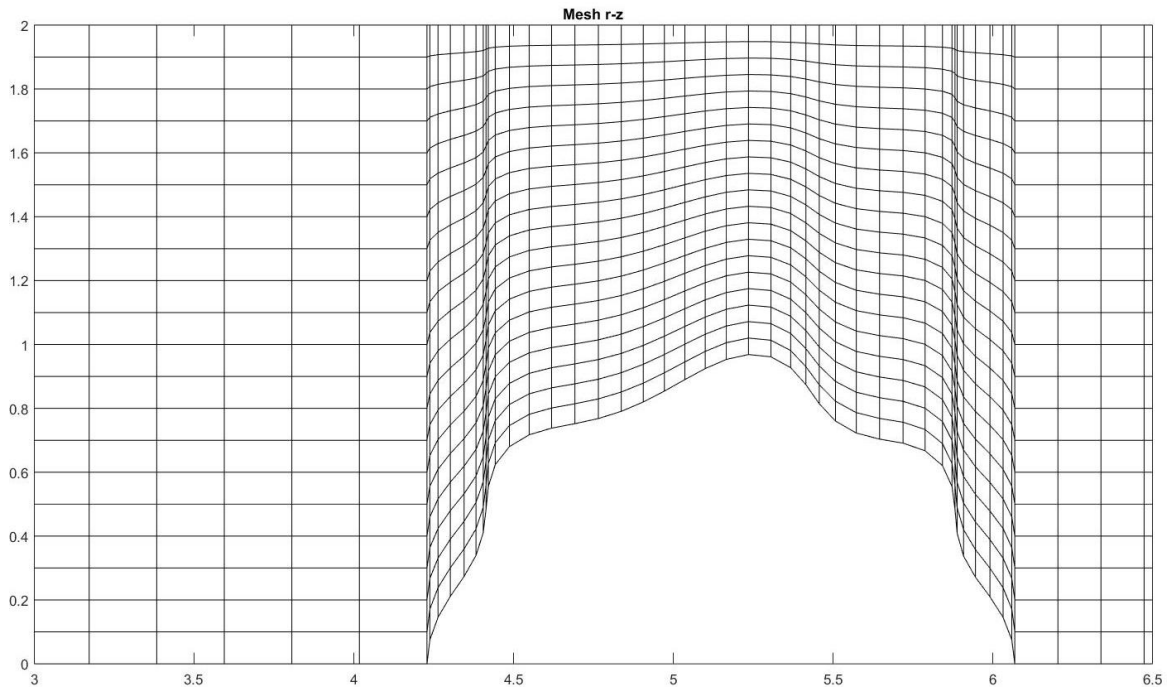
σκόπιμο να δοκιμαστούν διαταραχές με μεγάλο πλάτος, με αποτέλεσμα να μη δημιουργούνται μεγάλες παραμορφώσεις στη φουσαλίδα. Έτσι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4 οι διαφορές ανάμεσα στην ελλειπτική μέθοδο και τη μέθοδο spine είναι πολύ μικρές. Πιο συγκεκριμένα, με την μέθοδο spine η φουσαλίδα φαίνεται να έχει ελαφρώς μεγαλύτερη μεταβολή της ακτίνας 3.4(a) και 3.4(b), ενώ στην ιδιομορφή σχήματος 3.4(c) η ταλάντωση φαίνεται να έχει μεγαλύτερο πλάτος με την ελλειπτική μέθοδο. Αυτό είναι ένα λογικό αποτέλεσμα αφού το άθροισμα των ενεργειών που προκαλούν τις ταλαντώσεις όγκου και σχήματος πρέπει να είναι σταθερό.



Σχήμα 3.4 (α) Στιγμιότυπον ($t = 13,4$) σχήματος φουσαλίδας, χρονική εξέλιξη ακτινικής ιδιομορφής (b) P_0 και (c) P_2 από ελλειπτική μέθοδο, $(40 + 50 + 40) \times 40$, και μέθοδο spine $(20 + 40 + 20) \times 10$, σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 12$ και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3$, υπό ακουστική διαταραχή συχνότητας $f = 0.72\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 0,1$.

Αυτό που προέκυψε, τελικά, είναι ότι η τεχνική ελλειπτικής κατασκευής πλέγματος θα μπορούσε να αντικατασταθεί από τη μεθοδολογία *spline* για το πρώτο πρόβλημα που μελετάται στην παρούσα εργασία, διότι όλα τα σχήματα που προέκυψαν ήταν σφαιρικά.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος *spline* για την επίλυση του δεύτερου και του τρίτου προβλήματος, διότι είναι πιο γρήγορη και διότι στην πλειοψηφία των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν μπορούσε να αντεπεξέλθει χωρίς κάποιο πρόβλημα. Όμως, για μερικές δοκιμές στις οποίες προέκυψαν μεγαλύτερες παραμορφώσεις η μέθοδος *spline* κρίθηκε ανεπαρκής. Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται το τελευταίο σχήμα της φυσαλίδας που μπόρεσε να εξαχθεί μέσω της μεθόδου *spline* για μία περίπτωση που η παραμόρφωση της φυσαλίδας ήταν αρκετά μεγάλη.



Σχήμα 3.5 Σχηματική απεικόνιση πλέγματος την χρονική στιγμή $t = 7,4$, για επιφανειακό μέτρο διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$ μέσα σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$.

4. Παραμετρική μελέτη - Αποτελέσματα

4.1 Πρόβλημα 1^ο: Ταλάντωση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό υπό την επίδραση ακουστικής διαταραχής.

Σ' αυτό το πρόβλημα όπως έχει ήδη αναφερθεί εξετάζεται η επιρροή των τοιχωμάτων του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας f_0 . Για μη περιορισμένη άτριβη ροή και γραμμικές διαταραχές η αναλυτική σχέση που υπολογίζει την ιδιοσυχνότητα φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα δίνεται από την παρακάτω σχέση (1.1). Για λιπίδιο με τις ιδιότητες του πίνακα 2.1 η ιδιοσυχνότητα φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα με βάση τη σχέση αυτή είναι $f_0 = 1\text{MHz}$.

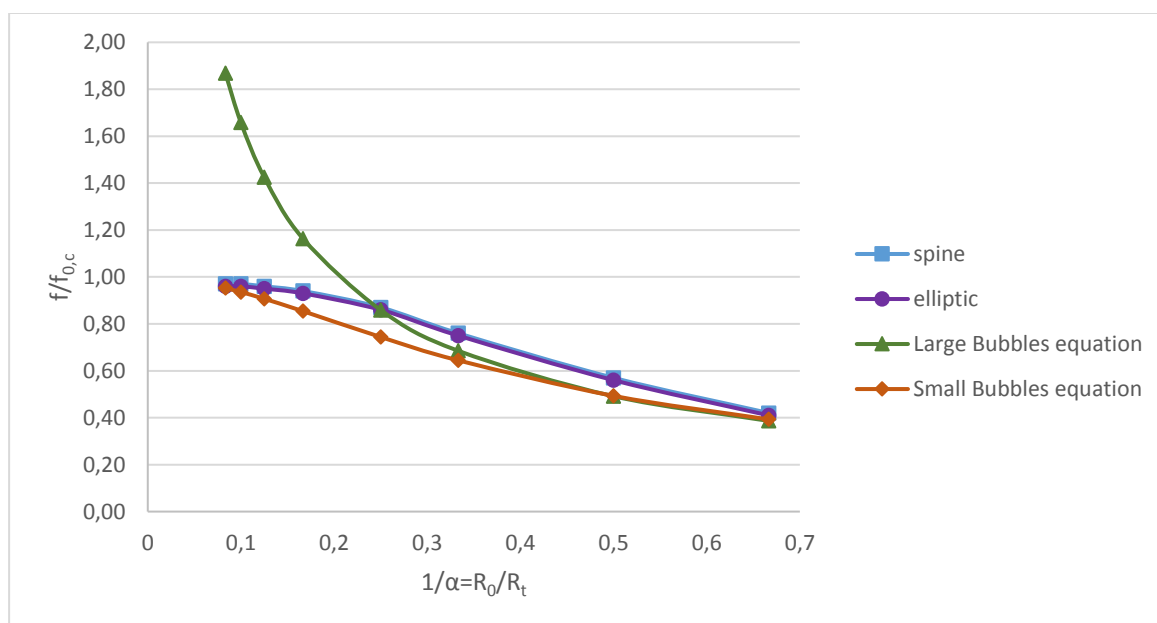
Αρχικά, για να εξεταστεί η επίδραση της ύπαρξης τοιχωμάτων στην ιδιοσυχνότητα του αγωγού επιλέχθηκε σταθερό μήκος αγωγού και σταθερή ακτίνα φυσαλίδας με $\hat{L}/\hat{R}_0 = 12$ ενώ αυτό που μεταβάλλονταν ήταν ο λόγος της ακτίνας του αγωγού προς την ακτίνα της φυσαλίδας $\alpha = \hat{R}_t/\hat{R}_0$, ξεκινώντας από αρκετά μεγάλους λόγους ούτως ώστε η ροή να μπορεί να παρομοιασθεί με μη περιορισμένη ροή. Έπειτα, παρατηρήθηκε η μεταβολή της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας όσο ο λόγος α μειώνεται, δηλαδή όσο ο αγωγός στενεύει.

Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα λόγων ακτίνας $1/\alpha = \hat{R}_0/\hat{R}_t$ – λόγων ιδιοσυχνότητας f/f_0 , όπου f η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας, όπως αυτή υπολογίστηκε μέσω της αριθμητικής ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες, για διαφορετικές διατομές αγωγών. Παρουσιάζονται αποτελέσματα που προέκυψαν από κατασκευή πλέγματος με τη μέθοδο spine και με την ελλειπτική τεχνική.

Παρατηρείται, ότι με τη μέθοδο spine οι τιμές που υπολογίστηκαν για την ιδιοσυχνότητα είναι ελαφρώς υψηλότερες σε σχέση με την ελλειπτική τεχνική, χωρίς η διαφορά αυτή όμως να φαίνεται σημαντική. Πιθανώς, με μεγαλύτερη πυκνωση και στις δύο μεθόδους να εξαλειφόταν αυτή η διαφορά. Επίσης, αυτό που παρατηρείται είναι ότι η σχέση (1.2), η οποία απεικονίζεται στο διάγραμμα από την καμπύλη «Large Bubbles equation» ενώ αποκρίνεται σχετικά καλά για μικρούς λόγους $\alpha \leq 4$, δηλαδή για μεγάλες φυσαλίδες σε σχέση με το μέγεθος του αγωγού, για μικρές φυσαλίδες σε αναλογία με το μέγεθος του αγωγού τα αποτελέσματα που δίνει είναι κατά πολύ εκτός της πραγματικότητας. Αντιθέτως η σχέση (1.3) είναι προσεγγίζει αρκετά καλά τα υπολογιστικά αποτελέσματα.

Επιπλέον, αυτό που παρατηρείται στο παραπάνω διάγραμμα είναι ότι καθώς η ακτίνα του αγωγού μεγαλώνει σε σχέση με την ακτίνα της φυσαλίδας, η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας τείνει στην τιμή της ιδιοσυχνότητας της φυσαλίδας για μη περιορισμένη ροή ($1/a \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow f_0$).

Τέλος, αυτό που συμπεραίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 4.1 είναι ότι ο περιορισμός της ροής παίζει μεγάλο ρόλο στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας. Όταν η διατομή του αγωγού μικρύνει τόσο ώστε η ακτίνα του να είναι διπλάσια της ακτίνας της φυσαλίδας η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας πέφτει περίπου στο 50% της ιδιοσυχνότητάς για μη περιορισμένη ροή, που δίνεται από την σχέση (1.1).



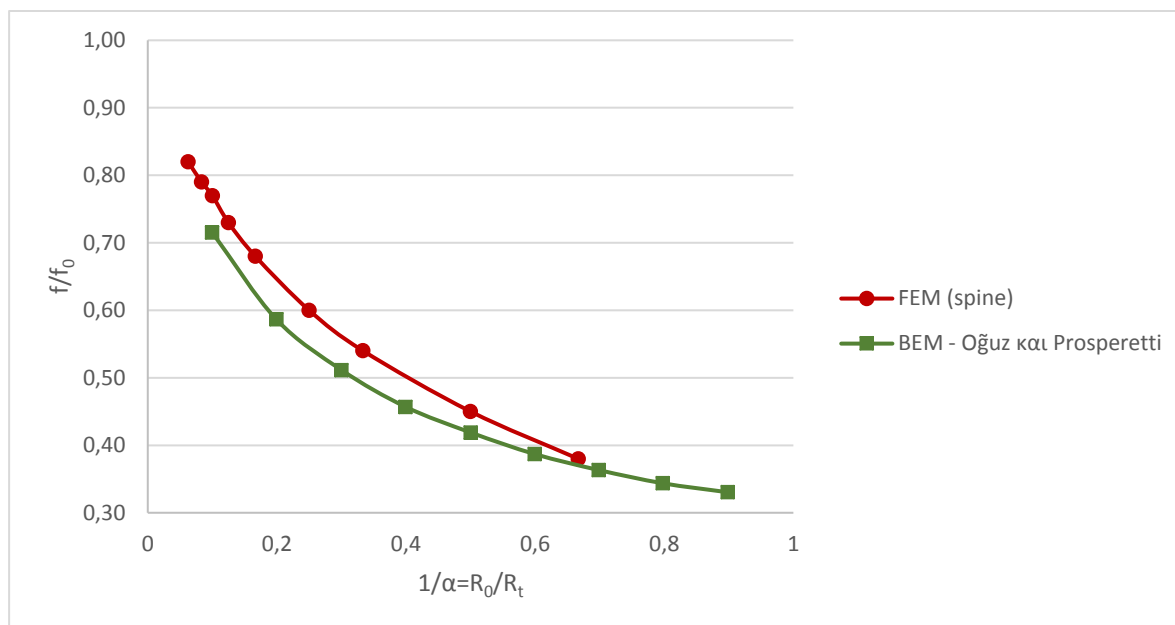
Σχήμα 4.1 Διάγραμμα ιδιοσυχνότητας φυσαλίδας – ακτίνας φυσαλίδας σε κανονικοποιημένη μορφή. (spine) – υπολογιστικά αποτελέσματα με κατασκευή πλέγματος μέσω της μεθόδου spine, (elliptic) – υπολογιστικά αποτελέσματα μέσω της ελλειπτικής κατασκευής πλέγματος, (Large Bubbles equation) – αναλυτική προσεγγιστική σχέση (1.2), (Small Bubbles equation) – αναλυτική προσεγγιστική σχέση (1.3).

Παρόλα αυτά, στο διάγραμμα 4.1 δεν επιτυγχάνεται η σχεδόν απόλυτη ταύτιση της σχέσης (1.3) με τα υπολογιστικά αποτελέσματα που επιτυγχάνεται στο σχήμα 1.1, το οποίο απεικονίζει τα αποτελέσματα των Oğuz και Prosperetti [32].

Για να εξασφαλιστεί η ευστάθεια της υπόθεσης ότι η πίεση παραμένει σταθερή χωρικά σε μία μικρή περιοχή πριν και μετά τη φυσαλίδα και ότι η μεταβολή της είναι μόνο συνάρτηση του χρόνου εξετάστηκε η κατανομή των πιέσεων στον αγωγό αλλά και για να μπορεί να

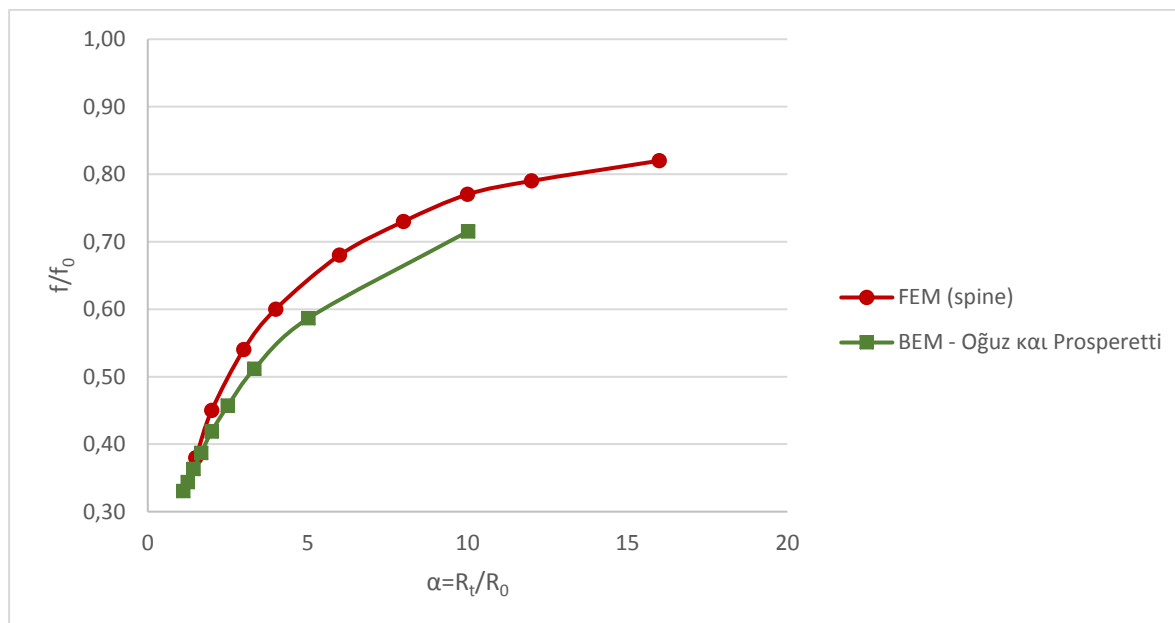
επιτευχθεί σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των Oğuz και Prosperetti έγινε επανάληψη της διαδικασίας για σταθερό λόγο $\hat{L}_t/\hat{R}_t = 10$.

Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που εξήχθησαν για την ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας καθώς μεταβάλλεται ο λόγος $1/a = \hat{R}_0/\hat{R}_t$, για σταθερό λόγο $\hat{L}_t/\hat{R}_t = 10$ συγκριτικά με τα αποτελέσματα των Oğuz και Prosperetti.



Σχήμα 4.2 Μεταβολή ιδιοσυχνότητας με την μεταβολή του λόγου $1/a = \hat{R}_0/\hat{R}_t$. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθοδολογίας πεπερασμένων στοιχείων με τα αποτελέσματα συνοριακών στοιχείων των Oğuz και Prosperetti [32].

Αν και στο παραπάνω σχήμα δεν φαίνεται ξεκάθαρα, και σ' αυτήν την περίπτωση, η ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας τείνει στην ιδιοσυχνότητα για μη περιορισμένη ροή, καθώς η φυσαλίδα γίνεται πολύ μικρή σε σχέση με το μέγεθος του αγωγού. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να γίνει πιο ξεκάθαρη αν τα αποτελέσματα παρουσιαστούν ως προς τον αντίστροφο λόγο στον οριζόντιο άξονα, δηλαδή τον λόγο της ακτίνας του αγωγού προς την ακτίνα της φυσαλίδας.

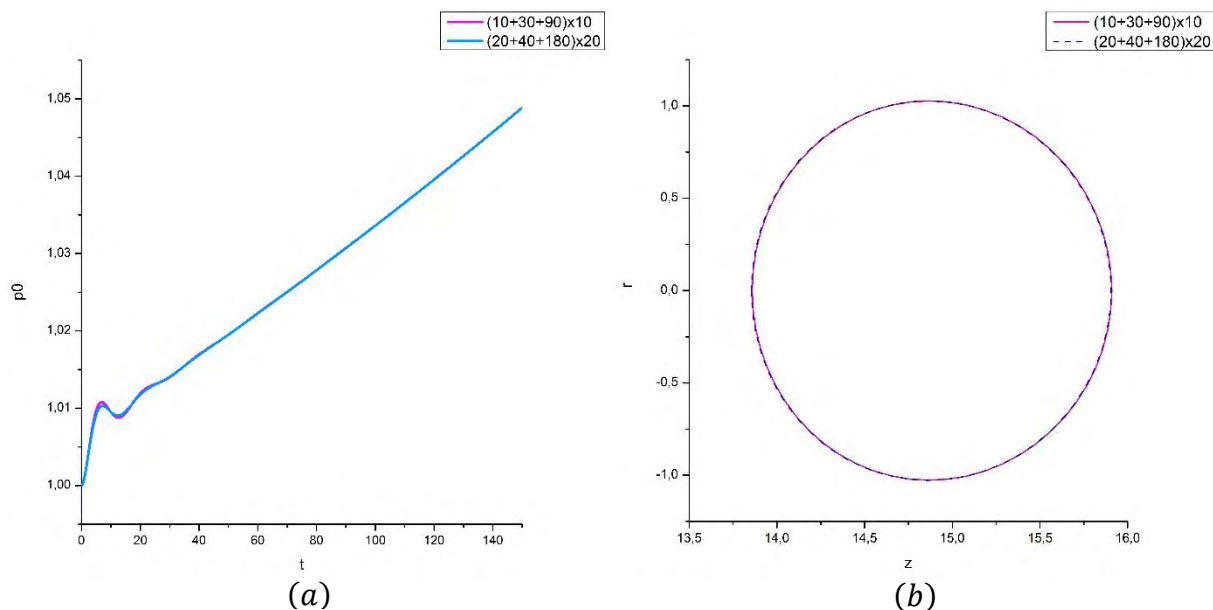


Σχήμα 4.3 Μεταβολή ιδιοσυχνότητας με την μεταβολή του λόγου $a = \hat{R}_t/\hat{R}_0$. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθοδολογίας πεπερασμένων στοιχείων με τα αποτελέσματα συνοριακών στοιχείων των Oğuz και Prosperetti [32].

4.2 Πρόβλημα 2^ο: Μεταφορική κίνηση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω βαθμίδας πίεσης.

Σ' αυτό το πρόβλημα εξετάζεται η συμπεριφορά της φυσαλίδας καθώς αλλάζει η παροχή Q του νερού για συγκεκριμένο αγωγό και καθώς αλλάζει η ακτίνα του αγωγού σε σχέση με την ακτίνα της φυσαλίδας a για συγκεκριμένη παροχή.

Πριν όμως εξεταστεί η συμπεριφορά της φυσαλίδας σε σχέση με της φυσικές παραμέτρους του προβλήματος που προαναφέρθηκαν εξετάζεται η ποιότητα των αποτελεσμάτων για διαφορετική πυκνωση πλέγματος.

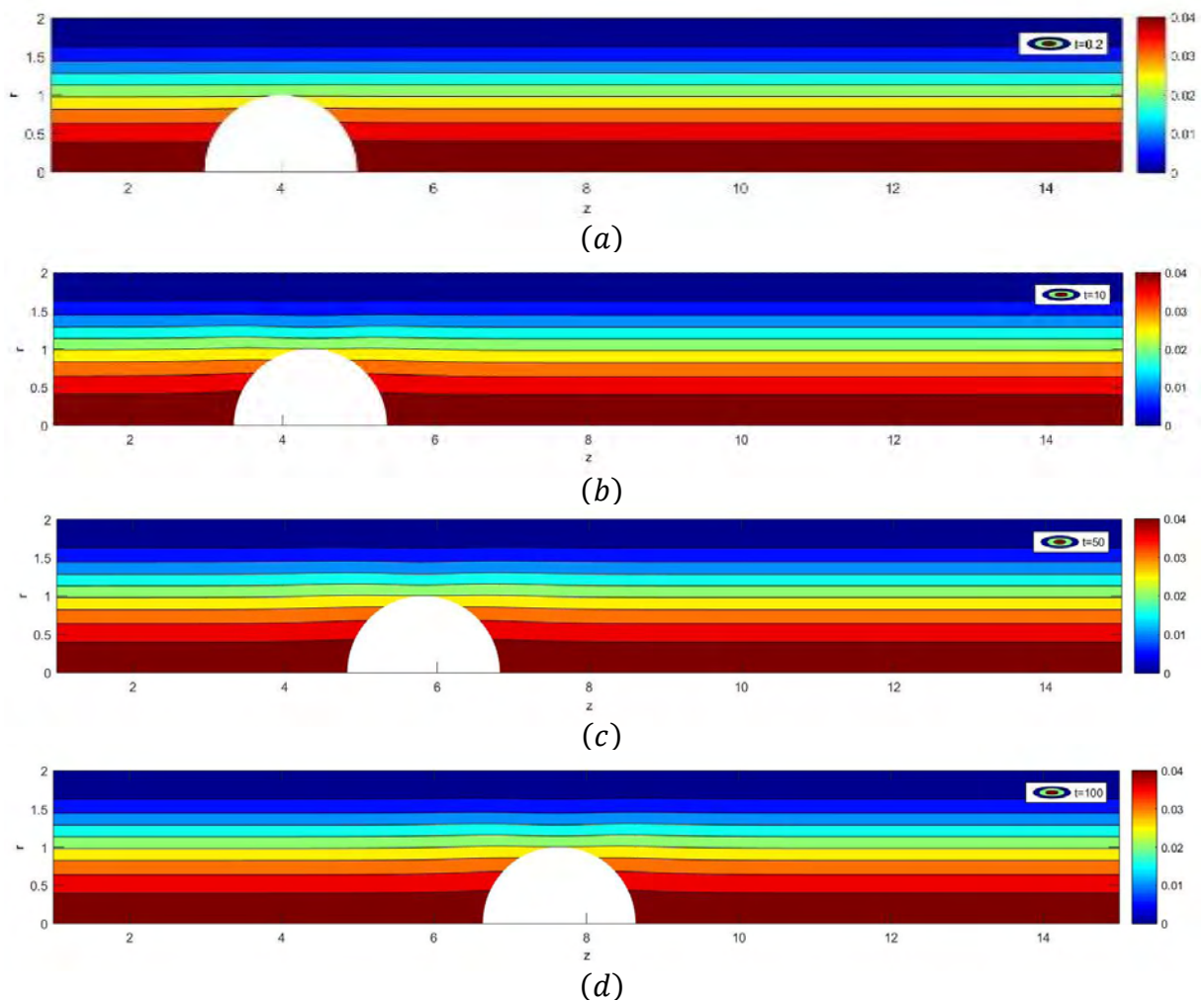


Σχήμα 4.4 (a) Ακτινική ιδιομορφή P_0 , (b) στιγμιότυπο ($t = 75$) σχήματος φυσαλίδας για διαφορετικά πλέγματα, για αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 4.4(a) παρουσιάζεται μία μικρή μεταβατική περίοδος η οποία ακολουθείται από μία σχεδόν γραμμική αύξηση της ακτίνας της φυσαλίδας. Σε ότι αφορά το σχήμα της φυσαλίδας 4.4(b) δεν φαίνεται κάποια αισθητή διαφορά ανάμεσα στα δύο πλέγματα.

Ενδιαφέρον είναι ότι ο όγκος της φυσαλίδας αυξάνεται με σταθερή κλίση, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4(a). Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι υπάρχει μία σταθερή πτώση πίεσης στον αγωγό με αποτέλεσμα η πίεση έξω από την φυσαλίδα να μειώνεται συστηματικά σε σχέση με την εσωτερική πίεση. Έτσι η φυσαλίδα προσπαθώντας να έρθει σε ισορροπία με το περιβάλλον της διογκώνεται, δηλαδή μειώνει σταδιακά την πίεση στο εσωτερικό της.

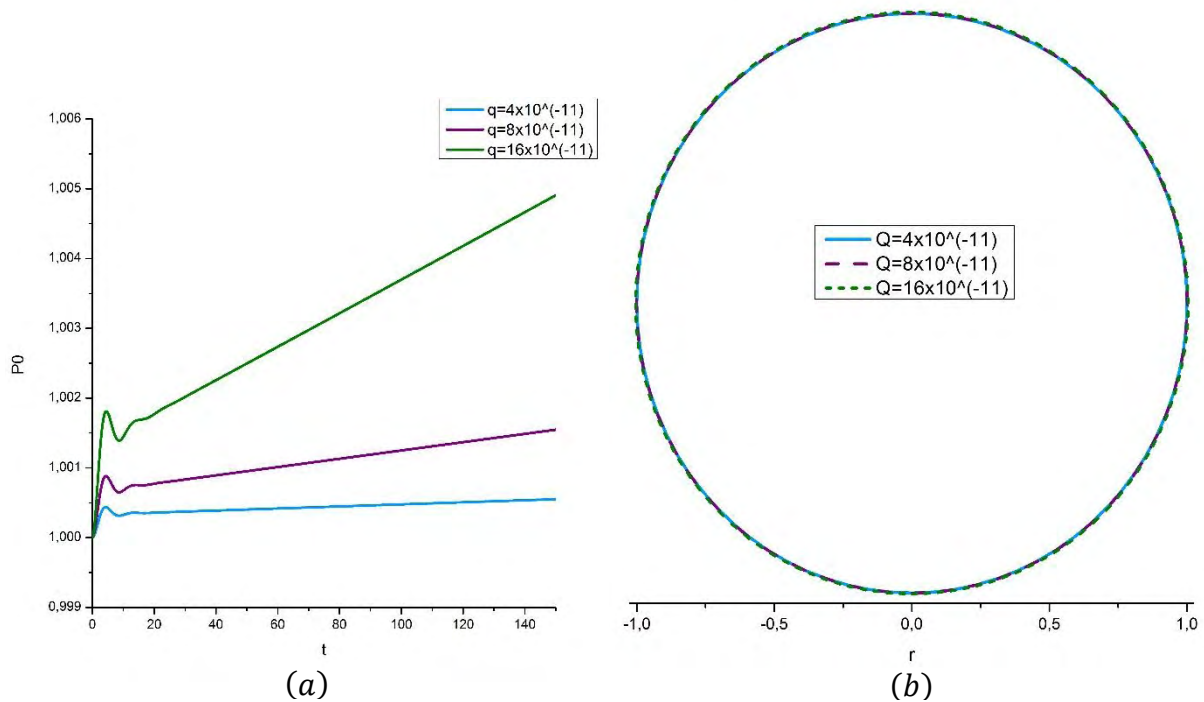
Επιπλέον στο σχήμα 4.74.5 παρατηρείται ότι το πεδίο της ροής παραμένει αμετάβλητο μακριά από τη φυσαλίδα, ενώ φαίνεται και η μεταφορική κίνηση της φυσαλίδας. Η διογκωση της φυσαλίδας συμβαίνει πολύ αργά στη συγκεκριμένη περίπτωση κι έτσι δεν είναι ορατή με γυμνό μάτι.



Σχήμα 4.5 Ροϊκή συνάρτηση στον αγωγό από τον άξονα συμμετρίας και πάνω ($0 \leq r \leq 2$ και $1 \leq z \leq 15$) για αγωγό αδιάστατης ακτίνας $\frac{\hat{R}_t}{R_0} = 2$ και αδιάστατου μήκους $\frac{\hat{L}}{R_0} = 25$ για παροχή $Q = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$ και αδιάστατο χρόνο (a) $t = 0.2$, (b) $t = 10$, (c) $t = 50$ και (d) $t = 100$.

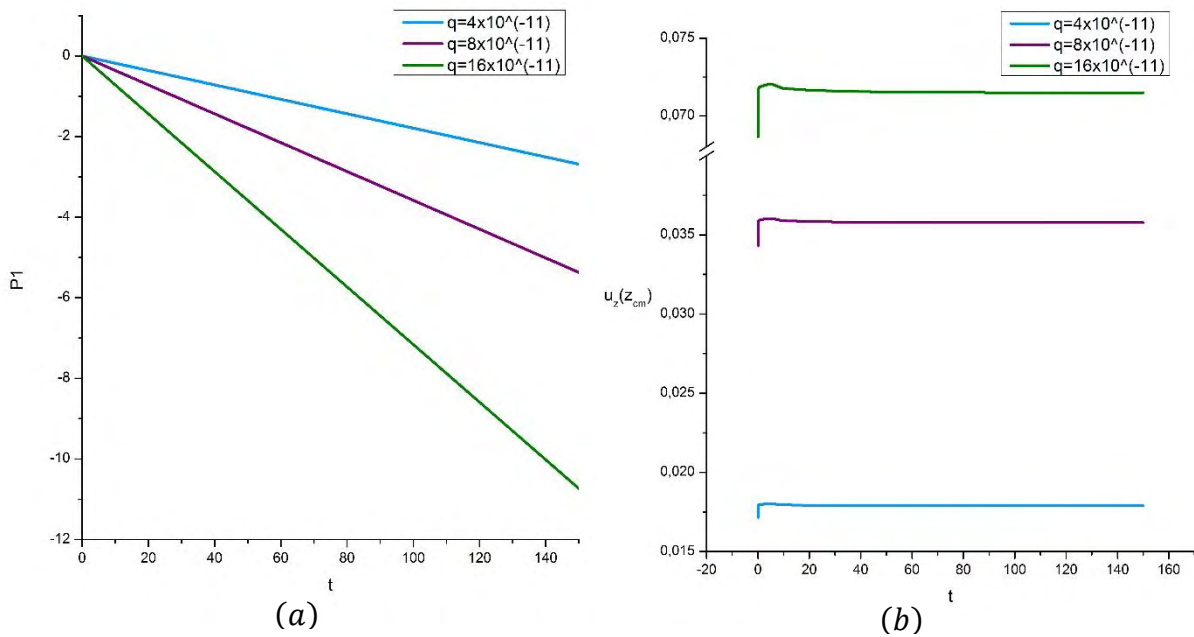
Εξετάζοντας την παράμετρο της παροχής, παρατηρείται στο σχήμα 4.6(a) ότι όσο αυξάνεται η παροχή του υγρού, αυξάνεται και η κλίση της ιδιομορφής P_0 , γεγονός το οποίο δικαιολογείται όπως εξηγήθηκε και παραπάνω, αφού η αύξηση της παροχής συνεπάγεται και αύξηση κατ' απόλυτη τιμή της πτώσης πίεσης. Η αύξηση του όγκου της φυσαλίδας καθώς αυξάνει η παροχή φαίνεται και στα στιγμιότυπα του σχήματος 4.6(b), όπου απεικονίζεται το σχήμα της φυσαλίδας για διαφορετικές παροχές στον ίδιο αγωγό για αδιάστατο χρόνο $t = 150$. Μιας και οι διαφορές της ακτίνας για τις διαφορετικές παροχές (σχήμα 4.6(a)) είναι πολύ μικρές η διόγκωση λόγω της αύξησης της παροχής φαίνεται πολύ αμυδρά στα στιγμιότυπα.

Στην πραγματικότητα, για τον ίδιο χρόνο η φυσαλίδα έχει μεταφερθεί πιο μακριά όσο μεγαλύτερη είναι η παροχή. Όμως, για ευνόητους λόγους στο σχήμα οι φυσαλίδες έχουν μεταφερθεί στο ίδιο κέντρο μάζας, ούτως ώστε να μπορεί να επιτευχθεί η σύγκριση του σχήματος, οπότε ο z – άξονας έχει παραληφθεί.



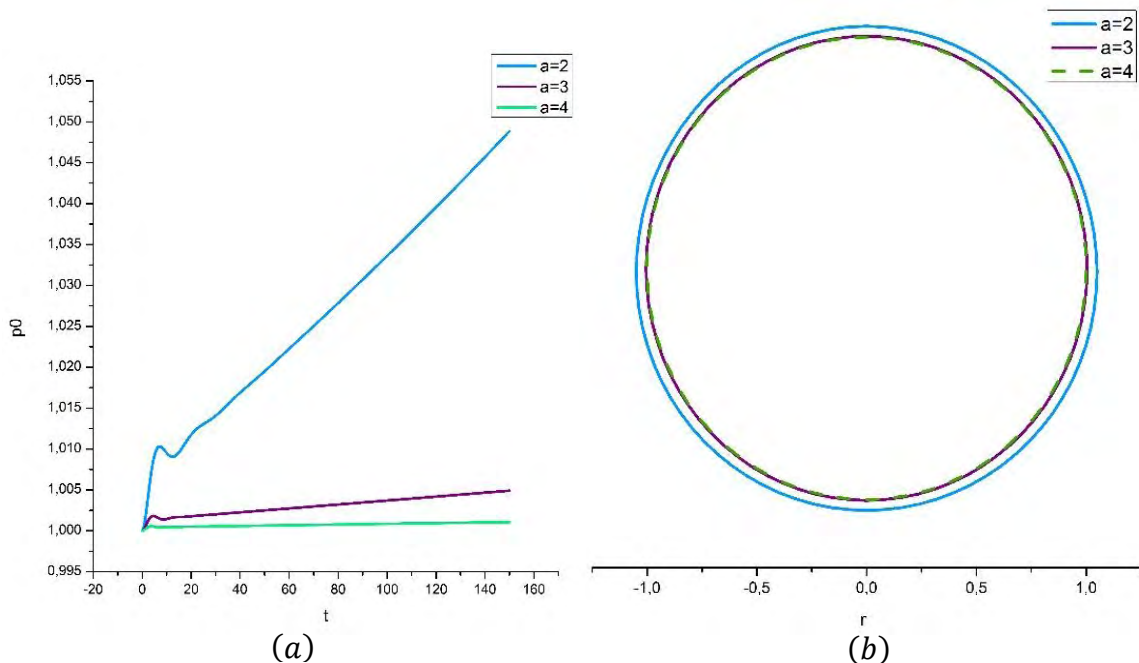
Σχήμα 4.6 (a) Χρονική εξέλιξη ακτινικής ιδιομορφής P_0 και (b) στιγμιότυπα σχήματος της φυσαλίδας τη χρονική στιγμή $t = 150$ για διαφορετικές παροχές νερού για αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3$.

Επίσης, παρατηρείται στο σχήμα 4.7(a) η χρονική εξέλιξη της ιδιομορφής P_1 , η οποία εκφράζει τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας ($P_1 = z_{cm} - z$). Φαίνεται λοιπόν, η φυσαλίδα να κινείται εξ' αρχής με σταθερή ταχύτητα και στις τρεις περιπτώσεις παροχών που απεικονίζονται, με την ταχύτητα να αυξάνει όσο αυξάνει η παροχή. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται και από το σχήμα 4.7(b), όπου παριστάνεται η αξονική ταχύτητα του κέντρου μάζας της φυσαλίδας για τις διαφορετικές παροχές. Και από αυτό το σχήμα, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η φυσαλίδα σχεδόν αμέσως αποκτά σταθερή ταχύτητα.



Σχήμα 4.7 Χρονική εξέλιξη (a) ιδιομορφής P_1 (b) ταχύτητας κέντρου μάζας της φυσαλίδας για διαφορετικές παροχές νερού σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$ και αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 3$.

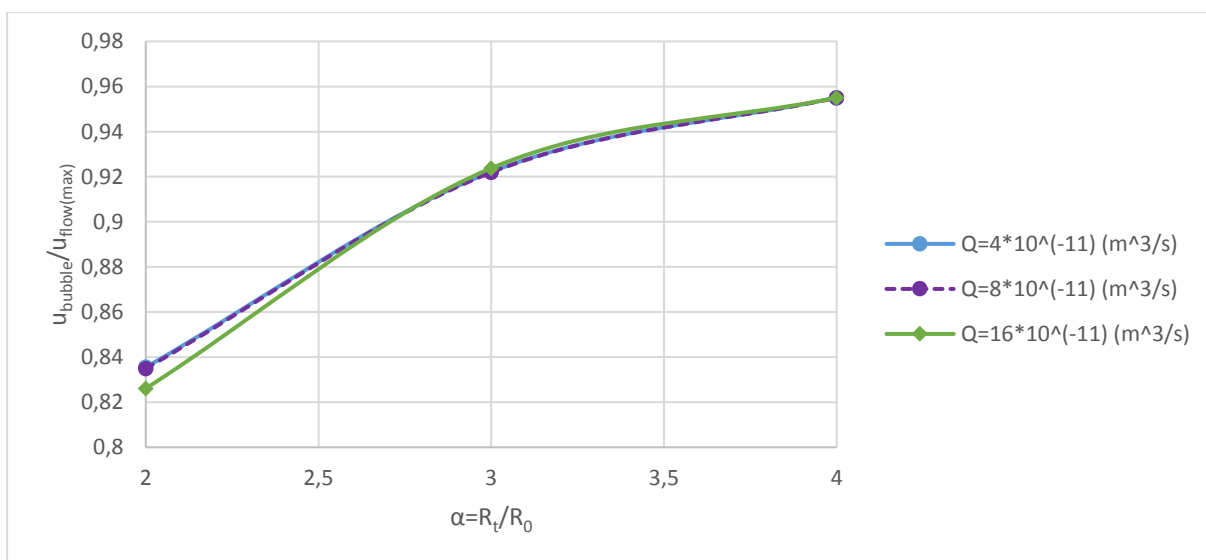
Όπως με την αύξηση της παροχής, έτσι και με την μείωση της διατομής του αγωγού η πτώση πίεσης αυξάνεται με αποτέλεσμα να αυξάνεται η διόγκωση της φυσαλίδας. Στο σχήμα 4.8 φαίνεται αυτή η μεταβολή του όγκου της φυσαλίδας στην χρονική εξέλιξη της ακτινικής ιδιομορφής P_0 αλλά και στα στιγμιότυπα της φυσαλίδας καθώς μειώνεται η ακτίνα του αγωγού.



Σχήμα 4.8 (a) Ακτινική ιδιομορφή P_0 , (b) στιγμιότυπο ($t = 150$) σχήματος φυσαλίδας, για αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες a .

Ένα ακόμα ενδιαφέρον ζήτημα, είναι η παρατήρηση της σχέσης της ταχύτητας της φυσαλίδας με την ταχύτητα της ροής, αφού όπως προέκυψε το σύστημα υγρού φυσαλίδας έρχεται πολύ γρήγορα σε μόνιμη κατάσταση. Στο σχήμα 4.9 παρατηρείται, ότι ο λόγος ταχυτήτων $u_{bubble}/u_{flow}^{(max)}$ αυξάνεται με την αύξηση της ακτίνας του αγωγού σε σχέση με την ακτίνα της φυσαλίδας. Αυτό που συμπεραίνεται, δηλαδή, είναι ότι όσο η ροή γύρω από την φυσαλίδα πλησιάζει τις συνθήκες μη περιορισμένης ροής η ταχύτητα της φυσαλίδας τείνει να πιάσει την ταχύτητα του ρευστού, ενώ όσο η ροή περιορίζεται παρατηρείται ότι η ταχύτητα της φυσαλίδας μειώνεται σε σχέση με την ταχύτητα του ρευστού.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει από το παρακάτω σχήμα είναι ότι όσο μεγαλώνει ο λόγος α η παροχή του υγρού δεν φαίνεται να παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην σχέση των ταχυτήτων. Αντίθετα, για πιο περιορισμένες ροές, δηλαδή για μικρότερους λόγους α , παρατηρείται μικρής τάξης μείωση του λόγου ταχυτήτων $u_{bubble}/u_{flow}^{(max)}$ κατά την αύξηση της παροχής.



Σχήμα 4.9 Λόγος ταχύτητας φυσαλίδας προς μέγιστη ταχύτητα ροής συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας του αγωγού ($\alpha = R_t/R_0$) για διαφορετικές παροχές υγρού καθώς $t \rightarrow \infty$.

Η τελευταία παράμετρος της οποίας η επίδραση επιχειρήθηκε να μελετηθεί είναι αυτή των ιδιοτήτων του κελύφους της φυσαλίδας. Ένα μέτρο σύγκρισης του υλικού του κελύφους της μικροφυσαλίδας είναι το αδιάστατο μέτρο κάμψης $\tilde{k}_b = k_b/(\chi R_0^2)$. Ο αδιάστατος αυτός αριθμός συγκρίνει την αντίσταση λόγω κάμψης με την αντίσταση λόγω εφελκυσμού και ουσιαστικά εκφράζει την σχετική αντίσταση του κελύφους σε λυγισμό. Στον πίνακα 2.1

δίνονται οι ιδιότητες της φυσαλίδας από πολυμερές κέλυφος, ενώ αυτό που παρατηρείται στον πίνακα 4.1 είναι ότι για τις ιδιότητες αυτές το κέλυφος από λιπίδιο έχει δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο \tilde{k}_b σε σχέση με αυτό από το πολυμερές υλικό.

Πίνακας 4.1 Το αδιάστατο μέτρο κάμψης \tilde{k}_b (εξίσωση (2.26)) για πολυμερικό κέλυφος και κέλυφος από λιπίδιο σύμφωνα με τις ιδιότητες του πίνακα 2.1.

Υλικό κελύφους	\tilde{k}_b
Λιπίδιο	$9,65 \cdot 10^{-3}$
Υποθετικό λιπίδιο ($G_{3D} = 800 \text{ MPa}$)	$9,65 \cdot 10^{-4}$
Πολυμερές	$5,93 \cdot 10^{-5}$

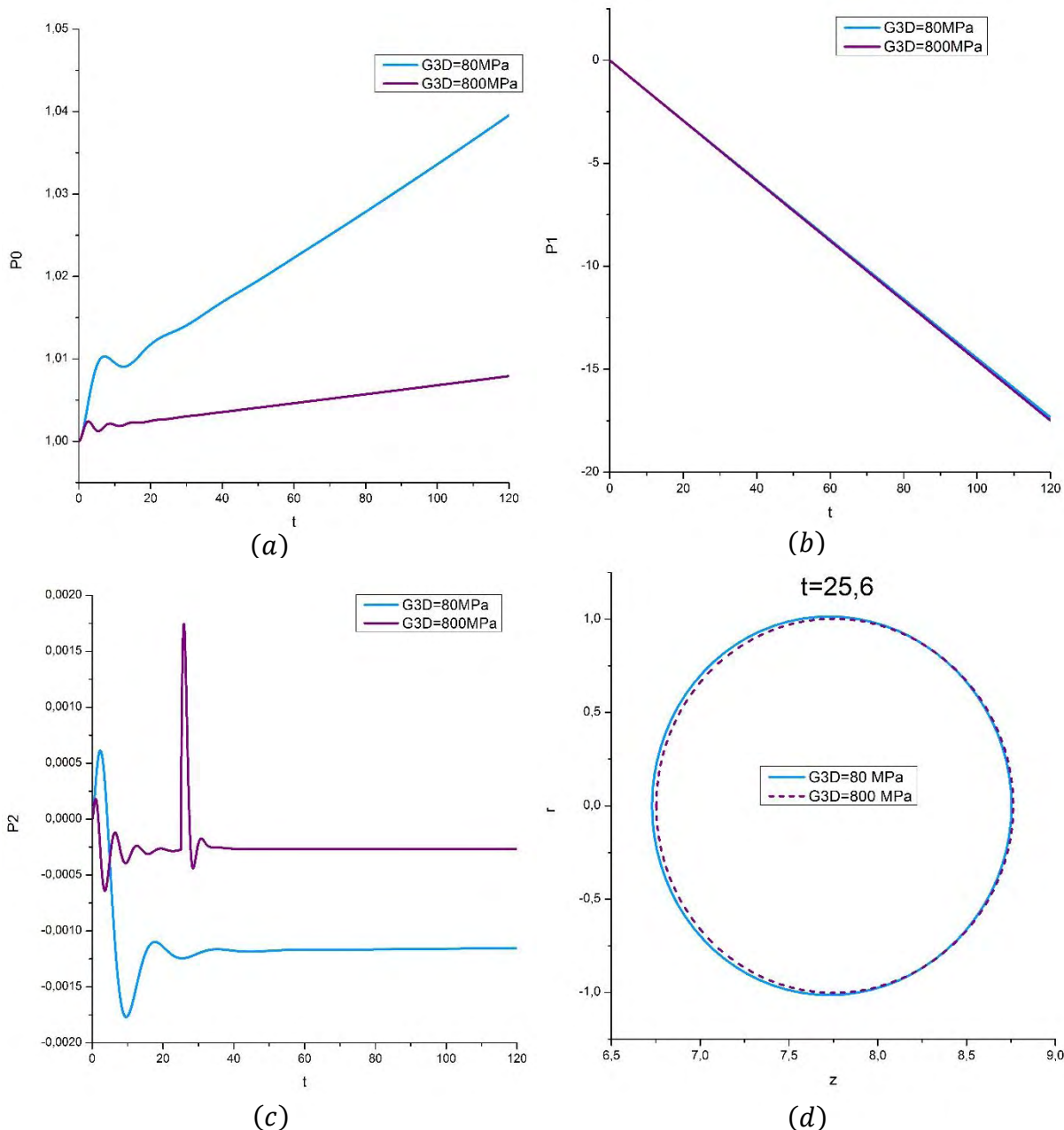
Αρχικά, έγινε προσπάθεια να εξαχθούν αποτελέσματα για φυσαλίδα από κέλυφος πολυμερούς υλικού, ώστε να γίνει σύγκριση με τη συμπεριφορά της φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο. Διαπιστώθηκε, όμως, ότι ο κώδικάς με την μέθοδο κατασκευής πλέγματος *spine* που χρησιμοποιείται σε αυτό το πρόβλημα δεν μπόρεσε να αντεπεξέλθει.

Για να παρατηρηθεί, ωστόσο η επίδραση του αδιάστατου αριθμού \tilde{k}_b στην συμπεριφορά της φυσαλίδας δοκιμάστηκε φυσαλίδα με τις ιδιότητες του λιπιδίου αλλά πολύ μεγαλύτερο μέτρο διάτμησης. Πιο συγκεκριμένα, αντί για μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 0,24 \text{ N/m}$ χρησιμοποιήθηκε μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$, με όλες τις άλλες ιδιότητες του πίνακα 2.1 για το λιπίδιο να παραμένουν ίδιες. Αυτό, είχε σαν αποτέλεσμα τον υποδεκαπλασιασμό του αδιάστατου μέτρου κάμψης σε σχέση με αυτό του αρχικού λιπιδίου.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η περίπτωση κελύφους με μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$ είναι υποθετική. Ο σκοπός της προσομοίωσης με αυτό το μέτρο διάτμησης είναι να παρατηρηθεί η συμπεριφορά της φυσαλίδας με την μείωση του αδιάστατου αριθμού \tilde{k}_b . Επειδή, λοιπόν, δεν κατέστη δυνατή η σύγκριση με φυσαλίδα κελύφους πολυμερούς υλικού, το οποίο, πράγματι, έχει πολύ μικρότερο αδιάστατο μέτρο κάμψης, έγινε αυτή η υπόθεση.

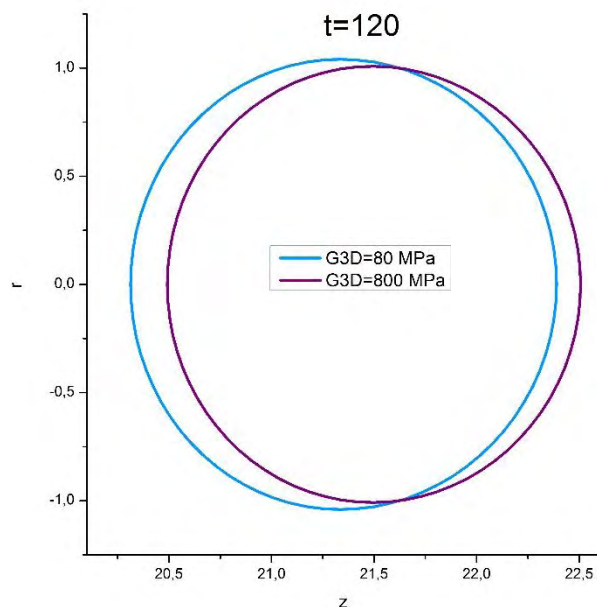
Στο σχήμα 4.10 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των ιδιομορφών όγκου και σχήματος για τα διαφορετικά μέτρα επιφανειακής διαστολής. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η φυσαλίδα με το μεγαλύτερο μέτρο επιφανειακής διαστολής, δηλαδή με το μικρότερο αδιάστατο μέτρο κάμψης διογκώνεται πολύ λιγότερο 4.10(a). Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στο γεγονός ότι για μεγαλύτερο μέτρο διάτμησης η αντίσταση σε εφελκυσμό είναι μεγαλύτερη.

Η φυσαλίδα και στις δύο περιπτώσεις αποκτά σταθερή ταχύτητα ενώ φαίνεται ότι το μέτρο επιφανειακής διαστολής δεν επηρεάζει σημαντικά την ταχύτητά της 4.10(b). Επίσης για την περίπτωση του λιπιδίου με το μικρότερο αδιάστατο μέτρο κάμψης μεγαλύτερη μεταβατική περίοδος και παρατηρείται η μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας, αλλά με το πέρασμα του χρόνου το σχήμα έρχεται σε μόνιμη κατάσταση 4.10(c).



Σχήμα 4.10 (α) Ακτινική ιδιομορφή P_0 , (β) ιδιομορφή P_1 , (γ) ιδιομορφή σχήματος P_2 και (δ) στιγμιότυπο σχήματος φυσαλίδας ($t = 25,6$), για αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, για διαφορετικά μέτρα διάτμησης G_{3D} .

Σε μόνιμη κατάσταση η φυσαλίδα έχει σφαιρικό σχήμα και στις δύο περιπτώσεις, ενώ ο όγκος της φυσαλίδας με κέλυφος μεγαλύτερου μέτρου διάτμησης, είναι μικρότερος (σχήμα 4.11).



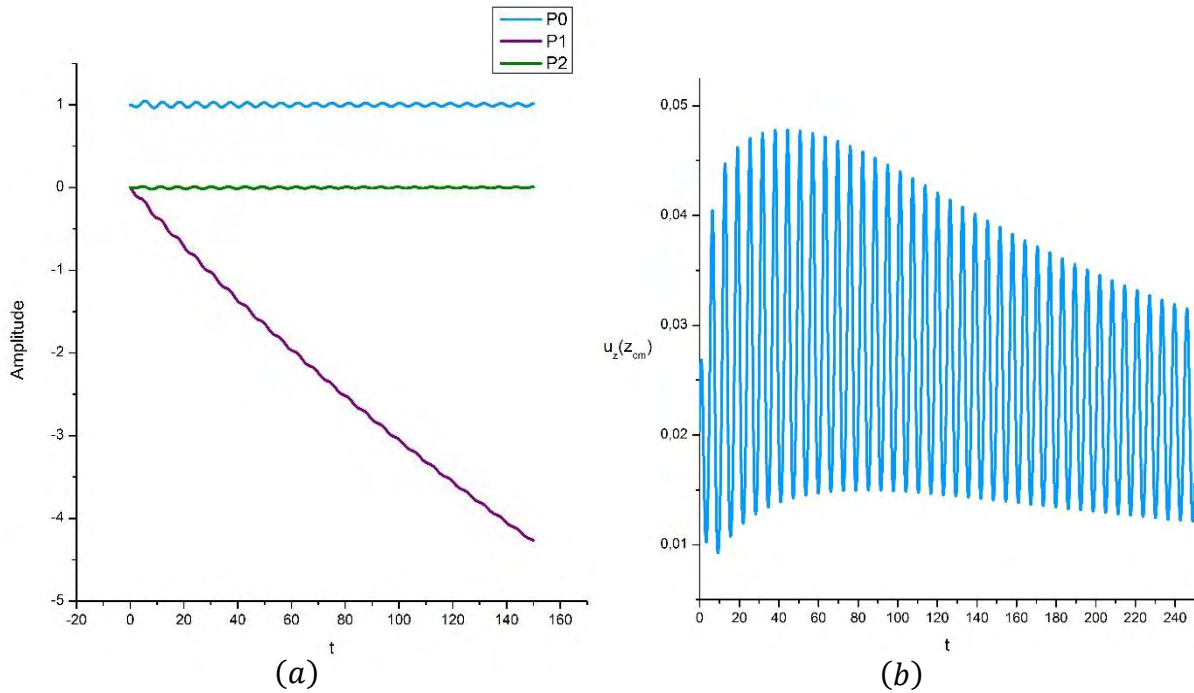
Σχήμα 4.11 Στιγμιότυπο σχήματος φυσαλίδας σε μόνιμη κατάσταση ($t = 120$), για αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$ και για παροχή $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, για διαφορετικά μέτρα διάτμησης G_{3D} .

4.3 Πρόβλημα 3^ο: Μεταφορική κίνηση φυσαλίδας με ελαστικό περίβλημα μέσα σε αγωγό, λόγω συνδυασμού βαθμίδας πίεσης και ακουστικής διαταραχής.

Στο τρίτο πρόβλημα εξετάζεται η συμπεριφορά της φυσαλίδας καθώς αλλάζουν διάφορες παράμετροι, όπως η παροχή υγρού Q , η ακτίνα του αγωγού σε σχέση με την ακτίνα της μικροφυσαλίδας a , η συχνότητα f της ακουστικής διαταραχής, το πλάτος της ακουστικής διαταραχής και το μέτρο διάτμησης της φυσαλίδας G_{3D} .

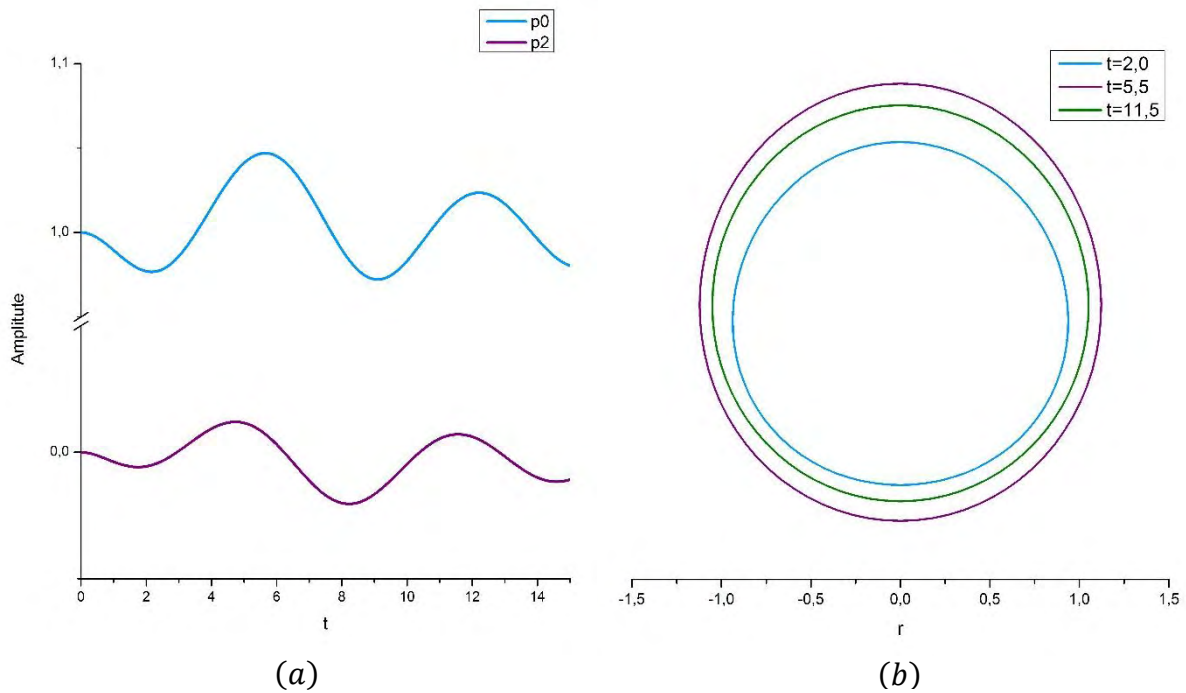
Πριν όμως, ξεκινήσει η παραμετρική μελέτη είναι σκόπιμο να σχολιασθούν κάποια αποτελέσματα ούτως ώστε να γίνει καλύτερα αντιληπτό το πρόβλημα και η συμπεριφορά της μικροφυσαλίδας. Έτσι, παρουσιάζεται, αρχικά, το διάγραμμα 4.12(a) που απεικονίζει τη χρονική εξέλιξη των ιδιομορφών P_0 , P_1 και P_2 για συγκεκριμένο αγωγό, σταθερή παροχή Q και συγκεκριμένη ακουστική διαταραχή. Όπως συμπεραίνεται από την ακτινική ιδιομορφή P_0 , η φυσαλίδα κάνει ταλαντώσεις όγκου, λόγω της ακουστικής διαταραχής που της επιβάλλεται, ενώ ταυτόχρονα λόγω της παροχής του υγρού μετακινείται το κέντρο μάζας της, όπως φαίνεται από τη χρονική μεταβολή της ιδιομορφής P_1 . Επίσης, εμφανίζονται κάποιες ταλαντώσεις

σχήματος μικρής όμως τάξεως μέσω της ιδιομορφή P_2 , ενώ παρατηρείται ότι το πλάτος και των ταλαντώσεων όγκου άλλα και των ταλαντώσεων σχήματος μειώνεται με το χρόνο και τείνει να φτάσει μία μόνιμη κατάσταση. Οι ιδιομορφές σχήματος ανώτερης τάξης δεν συμπεριλήφθηκαν στο διάγραμμα, διότι θεωρήθηκαν πολύ μικρές. Δυστυχώς, λόγω τεχνικών προβλημάτων δεν στάθηκε δυνατό να τρέξει ο κώδικας για περισσότερο χρόνο ούτως ώστε να φτάσει το πρόβλημα σε μόνιμη κατάσταση.



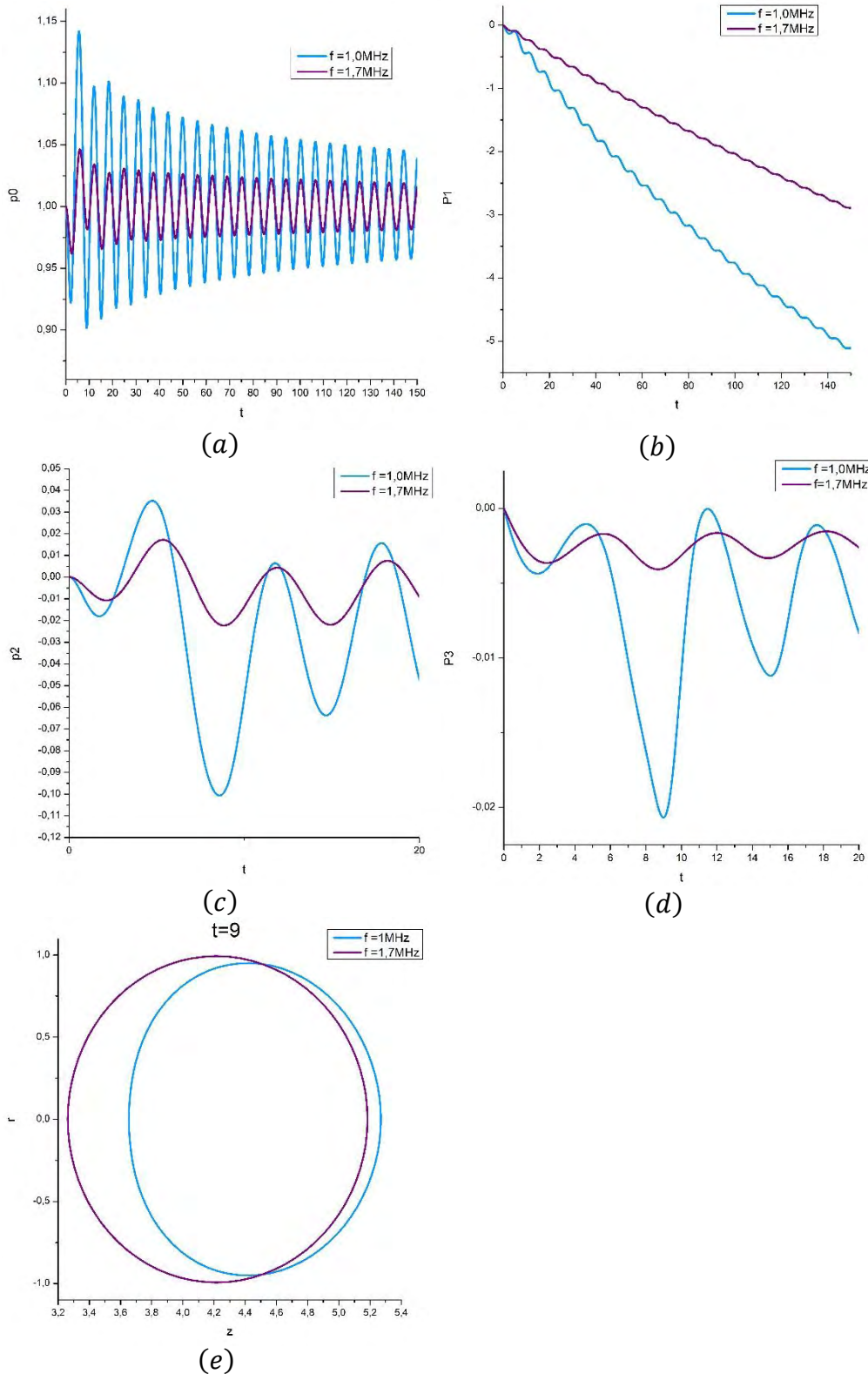
Σχήμα 4.12 (a) Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών P_0 , P_1 και P_2 (b) χρονική εξέλιξη αξονικής ταχύτητας κέντρου μάζας για λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 4 \cdot 10^{-11}$ και ακουστικής διαταραχής συχνότητας $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 0,5$.

Έτσι παρατηρείται στο σχήμα 4.12(b) ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας δεν έχει φτάσει ακόμα σ' ένα σταθερό πλάτος ταλάντωσης.



Σχήμα 4.13 (a) Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών P_0 και P_2 και (b) στιγμιότυπα σχήματος φυσαλίδας για λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11}$ και ακουστικής διαταραχής συχνότητας $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$.

Στο παραπάνω σχήμα οι ταλαντώσεις όγκου που παρατηρούνται από την ακτινική ιδιομορφή P_0 , 4.13(a), παρατηρούνται και στα στιγμιότυπα με το σχήμα της φυσαλίδας, 4.13(b). Επίσης φαίνονται κάποιες μικρές ταλαντώσεις σχήματος μέσω της μεταβολής της ιδιομορφής P_2 , σχήμα 4.13(a), όπου η παραμόρφωση διακρίνεται και στα στιγμιότυπα της φυσαλίδας. Και σε αυτά τα στιγμιότυπα ο z – άξονας έχει παραληφθεί διότι το κέντρο μάζας της φυσαλίδας έχει μεταφερθεί κατά τον άξονα z για κάθε χρονική στιγμή στο τρέχον κέντρο μάζας της φυσαλίδας ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση.

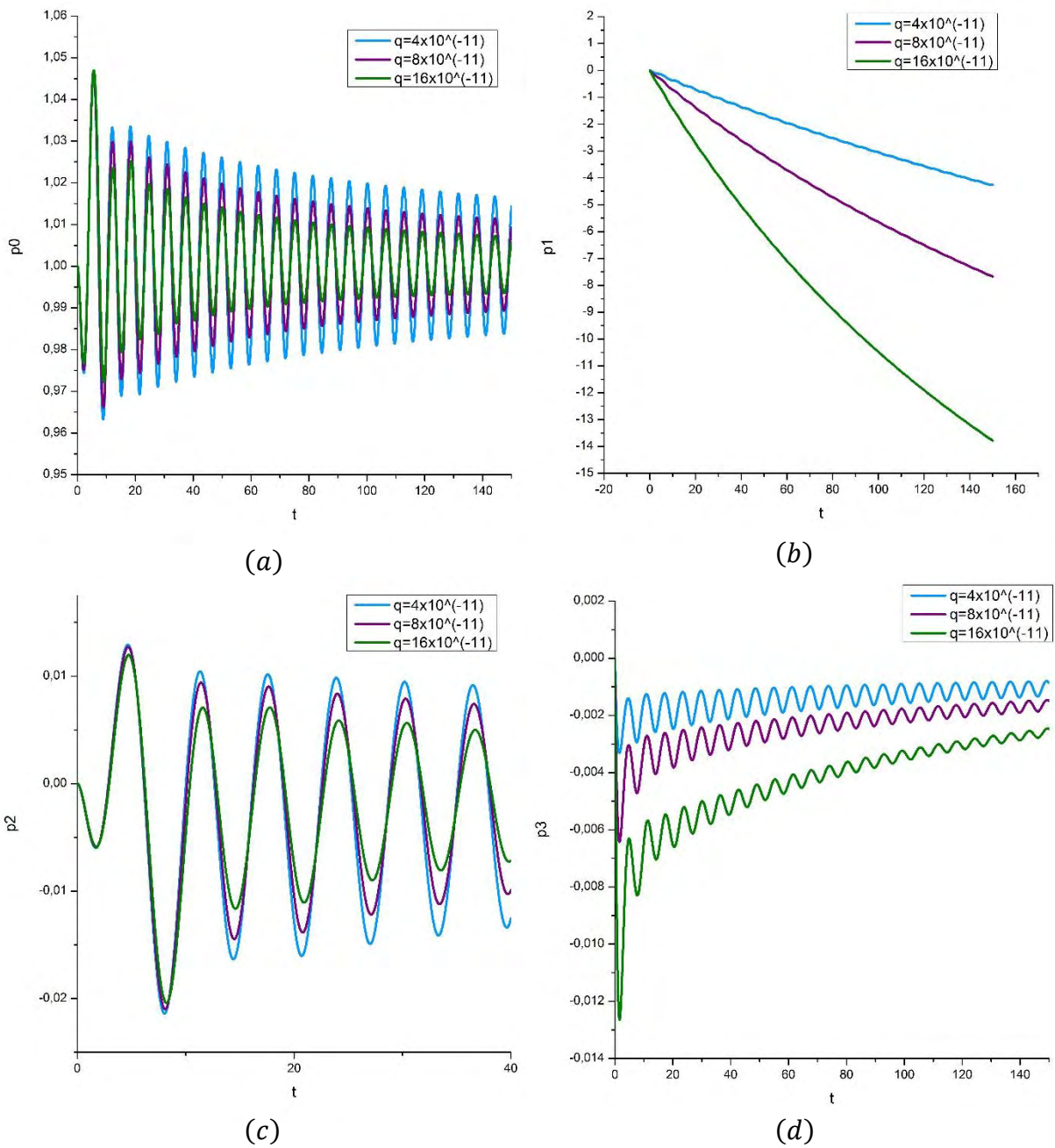


Σχήμα 4.14 Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών (α) P_0 , (β) P_1 , (γ) P_2 και (δ) P_3 και (ε) στιγμιότυπα σχήματος φουσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, παροχής $Q = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές συχνότητες διαταραχής.

Αφού εξήχθησαν οι πληροφορίες που παρέχουν οι ιδιομορφές όγκου και σχήματος της φυσαλίδας, είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί η μεταβολή τους καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του προβλήματος. Στο σχήμα 4.14 παρουσιάζεται η επίδραση της συχνότητας της διαταραχής στη συμπεριφορά της φυσαλίδας. Αρχικά, παρατηρείται ότι το πλάτος ταλάντωσης της ακτινικής ιδιομορφής 4.14(a) είναι πολύ μεγαλύτερο για τη μικρότερη συχνότητα διαταραχής, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για τις ταλαντώσεις σχήματος. Αυτό, δικαιολογείται από το γεγονός ότι η συχνότητα $f = 1\text{MHz}$ είναι πιο κοντά στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας f_0 . Επίσης, αυτό που προκύπτει εμμέσως από την ιδιομορφή P_1 , 4.14(b), είναι ότι για μικρότερη συχνότητα η φυσαλίδα αναπτύσσει μεγαλύτερη ταχύτητα. Τέλος, στα στιγμιότυπα σχήματος 4.14(e), παρατηρείται έντονη διαφορά στο σχήμα για τις διαφορετικές συχνότητες με το σχήμα της φυσαλίδας στην οποία επιβάλλεται διαταραχή συχνότητας $f = 1\text{MHz}$ να είναι μη συμμετρικό. Το γεγονός αυτό είναι αποτέλεσμα του μεγάλου πλάτους της ακουστικής διαταραχής και της ενδεχόμενης εμφάνισης της P_2 καθώς και άλλων υψηλότερων ιδιομορφών μέσω αρμονικού συντονισμού με τις ταλαντώσεις όγκου.

Στο σχήμα 4.15 παρουσιάζεται η επίδραση της παροχής στην χρονική εξέλιξη της ακτινικής ιδιομορφής της φυσαλίδας P_0 , της ιδιομορφής P_1 και των ιδιομορφών σχήματος P_2 και P_3 . Τελικά, ο P_1 αναπτύσσεται και λόγω της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ γειτονικών ιδιομορφών P_n και P_{n+1} γεγονός που εξηγεί την συστηματική εμφάνιση όλο και πιο ασύμμετρων σχημάτων της φυσαλίδας προϊόντος του χρόνου, με την αύξηση του πλάτους της ακουστικής διαταραχής ε .

Αυτό που επίσης παρατηρείται είναι ότι τόσο το πλάτος των ταλαντώσεων όγκου όσο και το πλάτος των ταλαντώσεων σχήματος είναι αντιστρόφως ανάλογα της παροχής του υγρού. Δηλαδή όσο αυξάνεται η παροχή υγρού τόσο μειώνεται το πλάτος των ταλαντώσεων. Αντιθέτως, η ταχύτητα της φυσαλίδας αυξάνεται με την αύξηση της παροχής του υγρού. Αυτό που προκύπτει από την παρατήρηση αυτή είναι ότι όσο αυξάνεται η παροχή του ρευστού δίνεται περισσότερη ενέργεια στην μεταφορική κίνηση της φυσαλίδας παρά στις ταλαντώσεις του όγκου της και του σχήματός της.

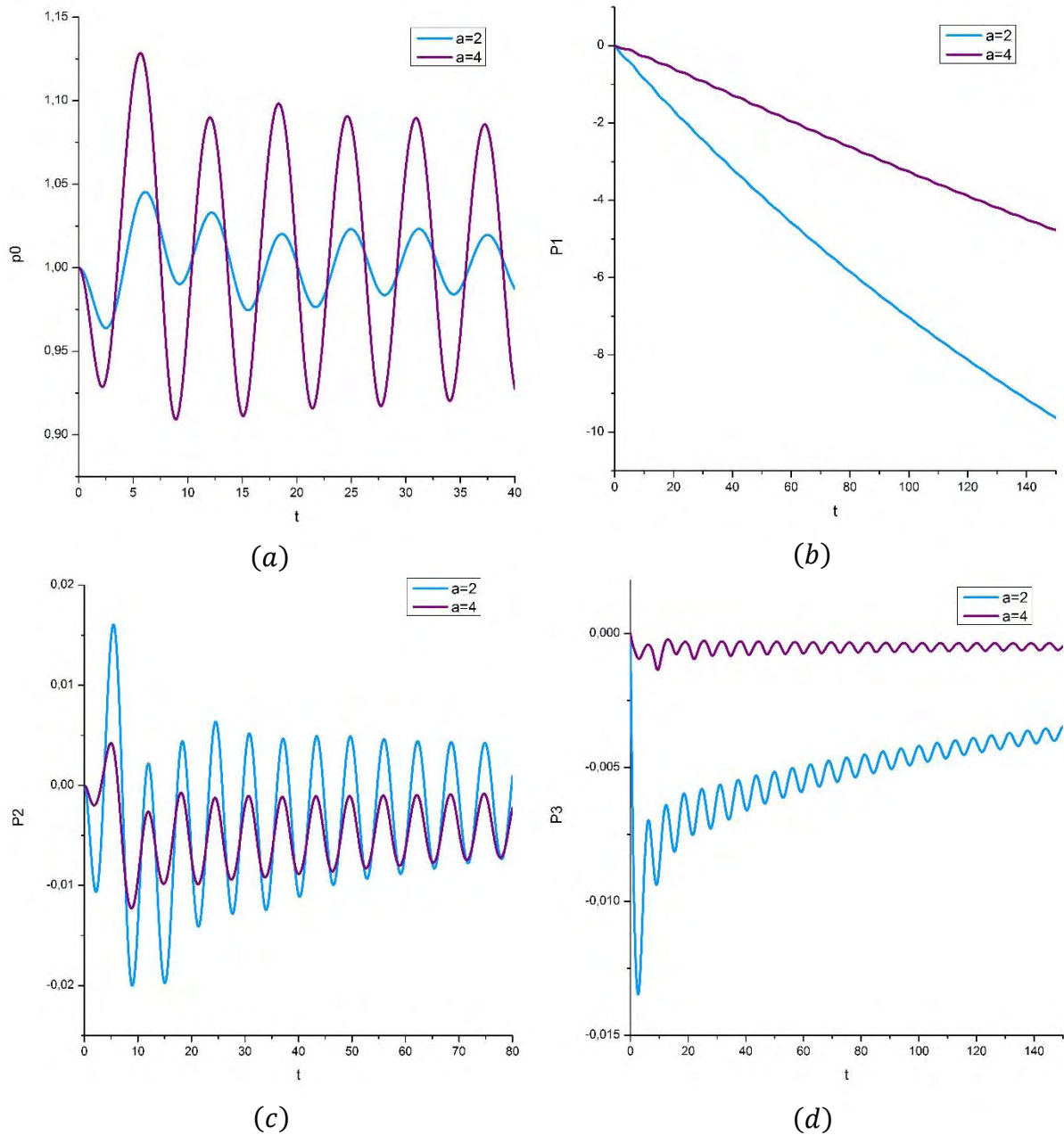


Σχήμα 4.15 Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών (α) P_0 , (β) P_1 , (γ) P_2 και (δ) P_3 φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας $\alpha = 2$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές παροχές.

Μία, ακόμη, ενδιαφέρουσα παράμετρος, της οποίας η επίδραση έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών μελετών, όπως της πειραματικής μελέτης των Butler et al. [33], που παρουσιάστηκε λεπτομερώς στην ενότητα 1.3, είναι αυτή του μεγέθους του αγωγού σε σχέση με το μέγεθος της ακτίνας. Στο σχήμα 4.16(a) παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις όγκου της

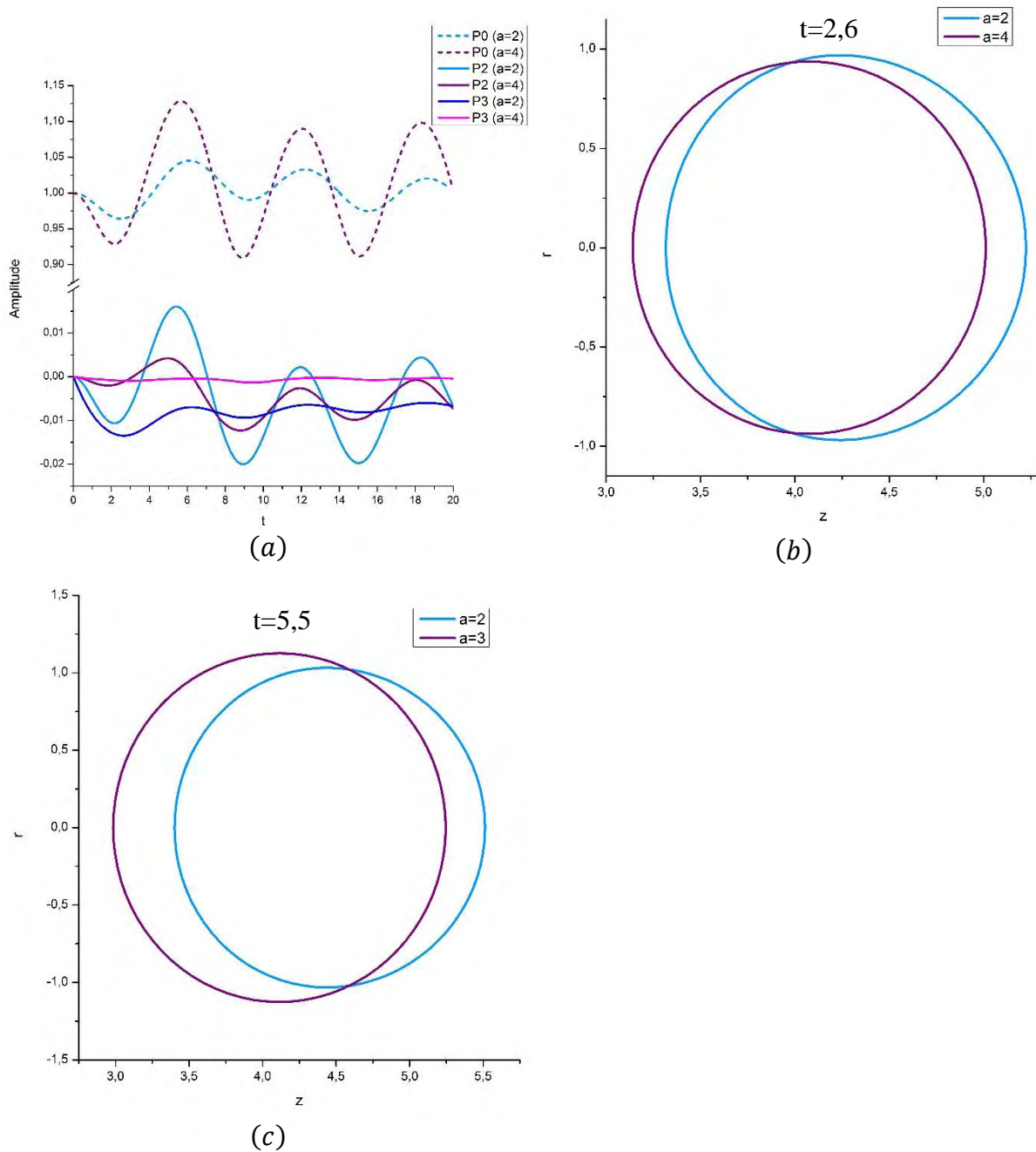
φυσαλίδας που βρίσκεται στον μεγαλύτερο αγωγό είναι πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες αυτής που βρίσκεται στον πιο μικρό αγωγό. Αντιθέτως, το πλάτος των ταλαντώσεων σχήματος είναι πολύ μεγαλύτερο για τον αγωγό με τη μικρότερη διατομή 4.16(c) και 4.16(d). Πιο συγκεκριμένα, ο αγωγός με τη μεγαλύτερη ακτίνα σε σχέση με την ακτίνα της, φυσαλίδας ($a = 4$) δεν φαίνεται να παρουσιάζει ασύμμετρες παραμορφώσεις αφού η ιδιομορφή P_3 του σχήματος 4.16(d) είναι σχεδόν μηδενική. Αντιθέτως ο αγωγός με αδιάστατη ακτίνα ($a = 2$) αναμένεται να παρουσιάσει και μη συμμετρικά σχήματα. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με της πειραματικής μελέτης των Butler et al. [33], στην οποία επίσης παρατηρήθηκαν εντονότερες παραμορφώσεις σχήματος για τον αγωγό της μικρότερης διατομής σε σχέση με αυτόν της μεγαλύτερης, και μάλιστα μη συμμετρικές.

Ωστόσο, η σχέση της ταχύτητας της φυσαλίδας με το μέγεθος της διατομής του αγωγού, 4.16(b), παραμένει αντιστρόφως ανάλογη, όπως έχει ήδη παρατηρηθεί και στο 2^ο πρόβλημα.



Σχήμα 4.16 Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών (α) P_0 , (β) P_1 , (γ) P_2 και (δ) P_3 για φουσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες αγωγού $a = \hat{R}_t/\hat{R}_0$.

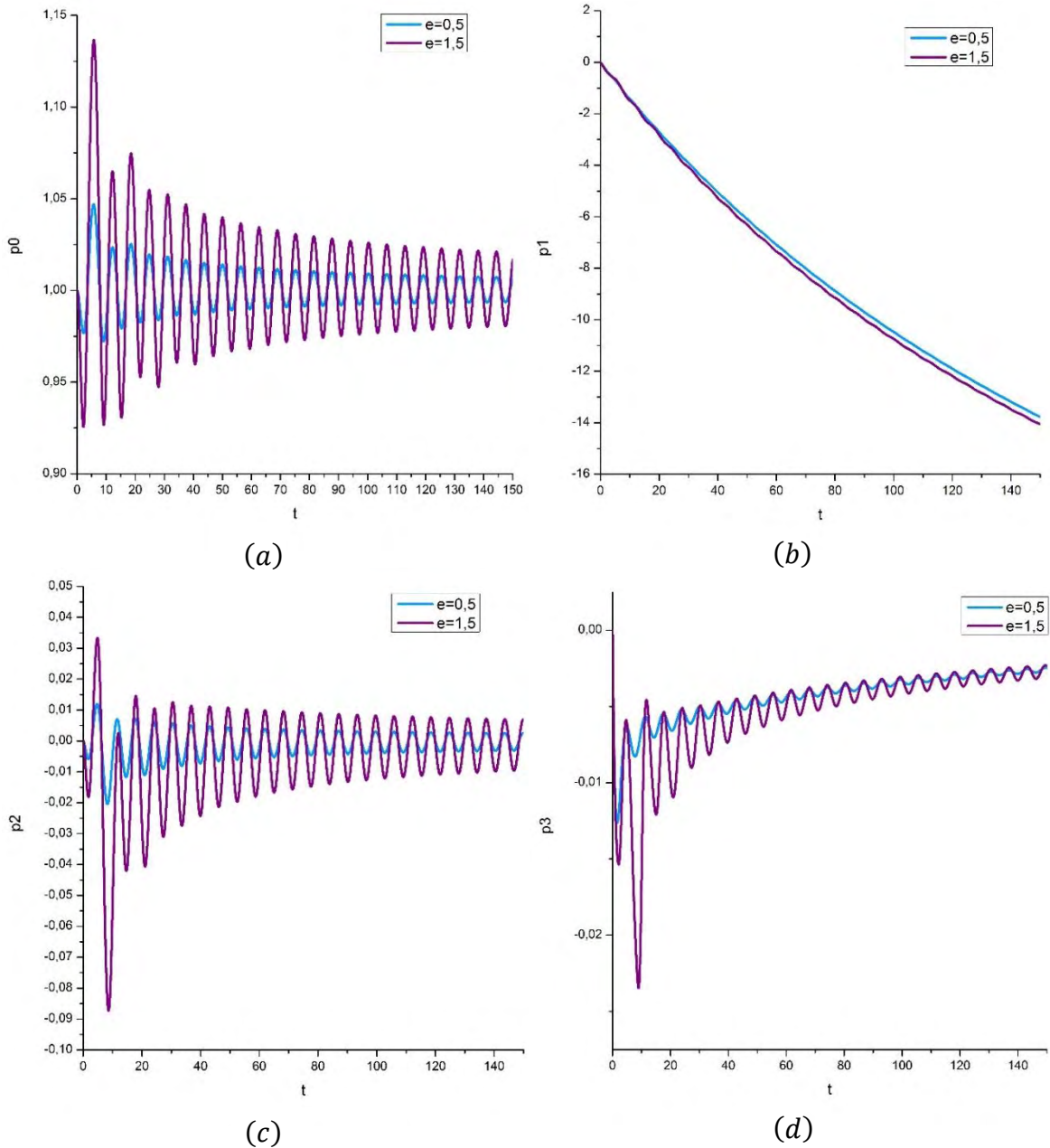
Τέλος, στο σχήμα 4.17, παρατηρούνται οι μεταβολές όγκου και σχήματος σε συμφωνία με τις ιδιομορφές για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές.



Σχήμα 4.17 (α) Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών όγκου (P_0) και σχήματος (P_2) και στιγμιότυπα σχήματος την αδιάστατη χρονική στιγμή (b) $t = 2,6$ και (c) $t = 2,6$ για φυσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1,7\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$, για διαφορετικές αδιάστατες ακτίνες αγωγού $a = \hat{R}_t/\hat{R}_0$.

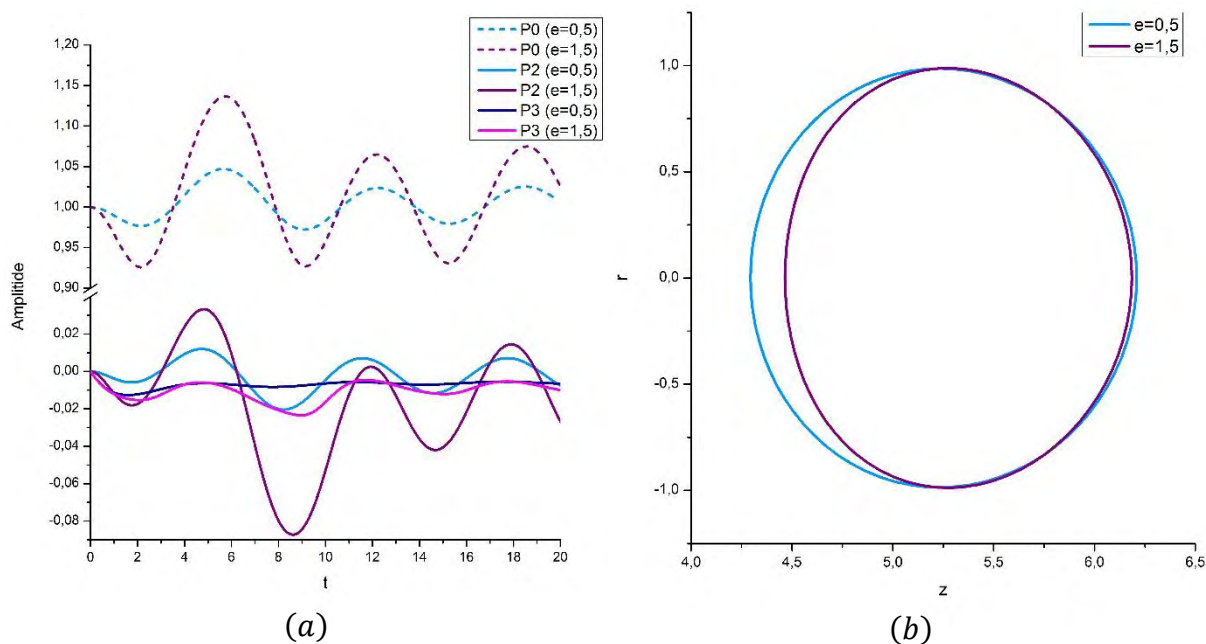
Ακόμα, παρατηρείται η επίδραση του πλάτους της επιβαλλόμενης διαταραχής της πίεσης στη συμπεριφορά της φυσαλίδας. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.18, και το πλάτος των ταλαντώσεων όγκου 4.18(α) και το πλάτος των ταλαντώσεων σχήματος 4.18(c) και 4.18(d)

είναι μεγαλύτερο για την περίπτωση της επιβολής διαταραχής μεγαλύτερου πλάτους, όπως ήταν αναμενόμενο. Όμως, παρατηρείται επίσης ότι για μεγαλύτερο πλάτος διαταραχής η φουσαλίδα αναπτύσσει ελαφρώς μεγαλύτερη ταχύτητα. Επιπλέον, φαίνεται ότι και για τις δύο περιπτώσεις πλατών διαταραχής το πλάτος των ταλαντώσεων όγκου και σχήματος μειώνονται με τον χρόνο και τείνει να φτάσει σε μία σταθερή τιμή.



Σχήμα 4.18 Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών (α) P_0 , (β) P_1 , (γ) P_2 και (δ) P_3 σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$ και συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$, για διαφορετικά πλάτη διαταραχής $\varepsilon \equiv e$.

Επιπροσθέτως, στο σχήμα 4.19 παριστάνονται συγκριτικά οι ιδιομορφές όγκου και σχήματος 4.19(α), όπου παρατηρείται ότι για $\varepsilon = 1,5$ παρουσιάζεται και η ιδιομορφή σχήματος τρίτης τάξης, ενώ για $\varepsilon = 0,5$ η ιδιομορφή αυτή είναι σχεδόν μηδενική. Επίσης, φαίνεται ότι η μέγιστη παραμόρφωση σχήματος συμβαίνει στο αδιάστατο χρονικό διάστημα $8 \leq t \leq 9$. Πράγματι, όπως φαίνεται στα στιγμιότυπα του σχήματος της φυσαλίδας 4.19(β), υπάρχει έντονη μη συμμετρική παραμόρφωση για την αδιάστατη χρονική στιγμή για $t = 8,6$. Επίσης, επιβεβαιώνεται από τα στιγμιότυπα, ότι το μέγεθος της παραμόρφωσης είναι πολύ μεγαλύτερο για την περίπτωση του μεγαλύτερου πλάτους διαταραχής.

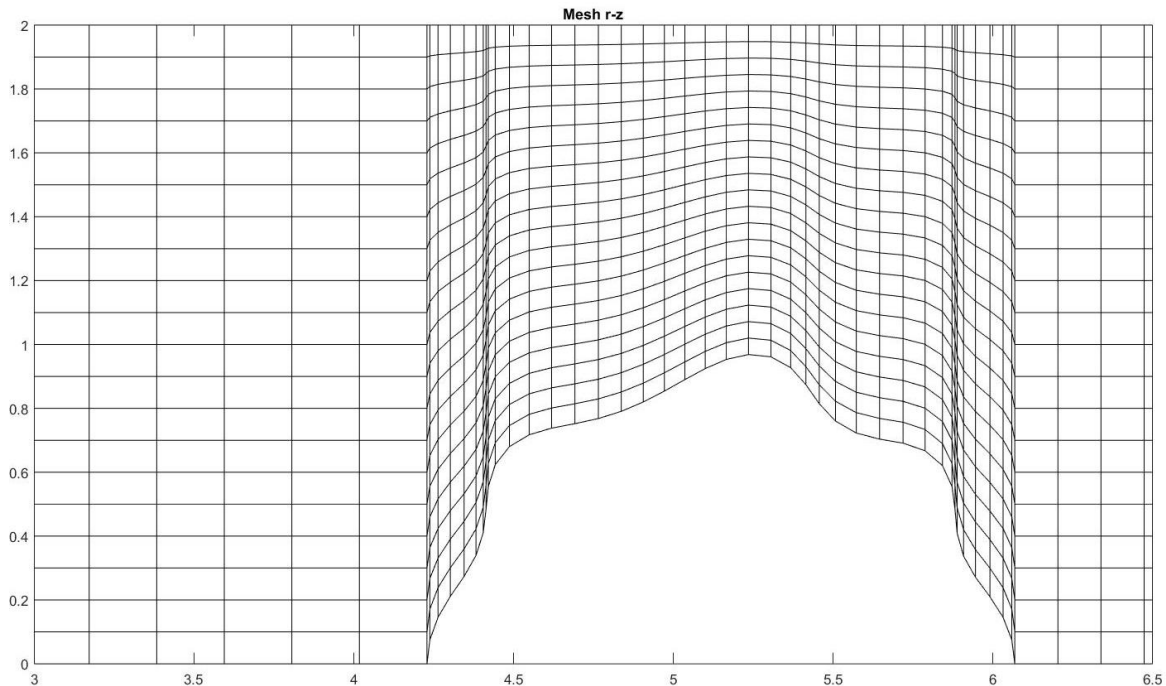


Σχήμα 4.19 (α) Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών P_0 , P_2 και P_3 και (β) στιγμιότυπα σχήματος φυσαλίδας την αδιάστατη χρονική στιγμή $t = 8,6$ για φυσαλίδα με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$ και συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$, για διαφορετικά πλάτη διαταραχής $\varepsilon \equiv e$.

Η τελευταία παράμετρος της οποίας η επίδραση επιχειρήθηκε να μελετηθεί και σε αυτό το πρόβλημα είναι αυτή των ιδιοτήτων του κελύφους της φυσαλίδας οι οποίες μπορούν να συγκριθούν, όπως αναλύθηκε και στην ενότητα 4.2, μέσω του αδιάστατου μέτρου κάμψης \tilde{k}_b . Επειδή όμως και σε αυτήν την περίπτωση διαπιστώθηκε, ότι ο κώδικας δεν μπόρεσε να αντεπεξέλθει για τη φυσαλίδα με κέλυφος πολυμερούς υλικού, χρησιμοποιήθηκε και εδώ μία σύγκριση με του κελύφους από λιπίδιο των ιδιοτήτων του πίνακα 2.1 με κέλυφος ίδιων όλων των ιδιοτήτων εκτός του μέτρου διάτμησης. Για το μέτρο επιφανειακής διαστολής θεωρήθηκε

$\chi = 2,4 \text{ N/m}$ ώστε και σ' αυτήν την περίπτωση να μειωθεί το αδιάστατο μέτρο κάμψης \tilde{k}_b για να έρθει πιο κοντά στην περίπτωση του πολυμερικού κελύφους.

Αν και ο κώδικας κατάφερε να δουλέψει σε αυτήν την περίπτωση, δεν κατάφερε να προχωρήσει πέραν της αδιάστατης χρονικής στιγμής $t = 7,4$. Το τελευταίο πλέγμα που κατάφερε να εξαχθεί φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



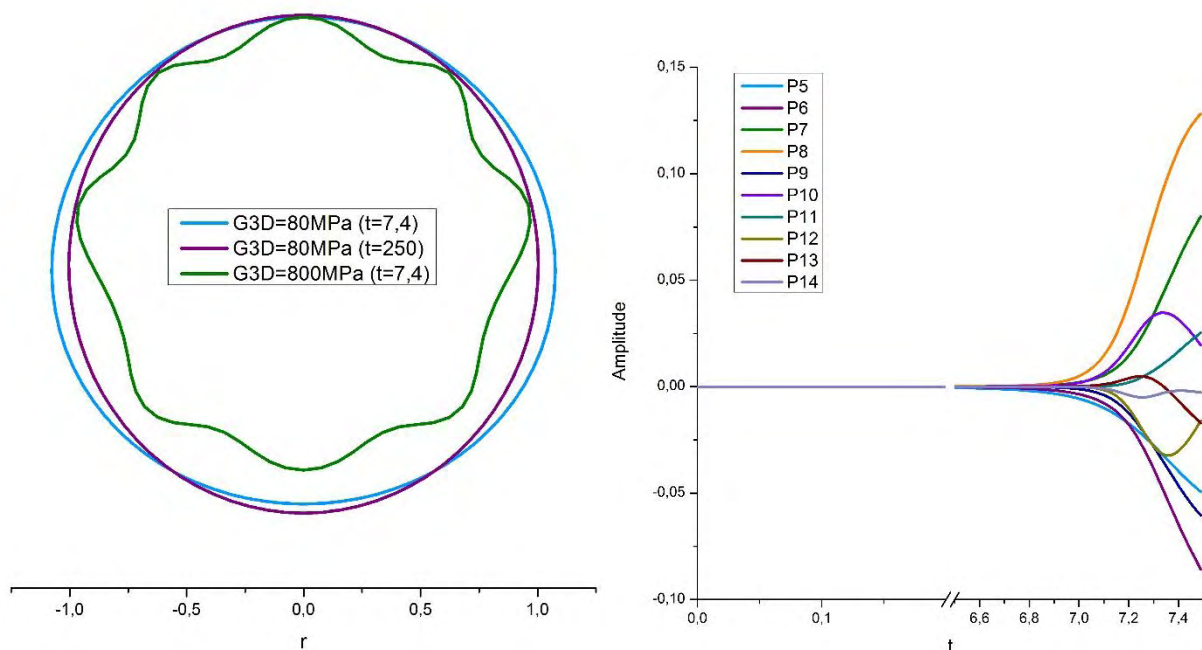
Σχήμα 4.20 Σχηματική απεικόνιση πλέγματος την χρονική στιγμή $t = 7,4$, για φουσαλίδα μέτρου επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$ μέσα σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 4.20 η παραμόρφωση της φουσαλίδας είναι πολύ μεγαλύτερη από κάθε άλλη περίπτωση που έχει καταγραφεί παραπάνω, λόγω της προτίμησης που παρουσιάζει στον λυγισμό σαν αποτέλεσμα του μικρότερου αδιάστατου μέτρου κάμψης. Παράλληλα, φαίνεται ότι τα στοιχεία σε κάποιες περιοχές τείνουν να αλληλοκαλυφθούν γεγονός, που οδηγεί και τον κώδικα σε αδιέξοδο. Στην περίπτωση αυτή αναμένεται η χρήση της ελλειπτικής μεθόδου να διευκολύνει την διεξαγωγή προσομοιώσεων.

Τέλος, στο σχήμα 4.21 γίνεται σύγκριση του σχήματος της φουσαλίδας από λιπίδιο ($\chi = 0,24 \text{ N/m}$) με αυτό της φουσαλίδας με το υποθετικό μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$. Παρατηρείται ασύμμετρη παραμόρφωση και για τις δύο περιπτώσεις. Στην

περίπτωση όμως του μεγαλύτερου μέτρου επιφανειακής διαστολής η παραμόρφωση αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη.

Η φυσαλίδα με το μεγαλύτερο μέτρο επιφανειακής διαστολής παρουσιάζει λυγισμό ($\chi = 2,4 \text{ N/m}$ ($t = 7,4$)), σε αντίθεση με την φυσαλίδα με το μικρότερο μέτρο επιφανειακής διαστολής ($\chi = 0,24 \text{ N/m}$ ($t = 7,4$)), η οποία μετά από ένα διάστημα έρχεται σε μόνιμη κατάσταση ($\chi = 0,24 \text{ N/m}$ ($t = 250$)) χωρίς να έχει προηγηθεί λυγισμός. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το γεγονός αυτό φαίνεται να συνδέεται με την τιμή του αδιάστατου μέτρου κάμψης, το οποίο στην πραγματικότητα εκφράζει την αντίσταση του κελύφους σε λυγισμό, και για την περίπτωση του κελύφους με το μεγαλύτερο μέτρο διάτμησης η αντίσταση σε λυγισμό είναι πολύ μικρότερη.



Σχήμα 4.21 (α) Στιγμιότυπα φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο σε αγωγό αδιάστατου μήκους $\hat{L}/\hat{R}_0 = 25$, αδιάστατης ακτίνας αγωγού $a = 2$, παροχής $Q = 16 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}$, συχνότητας διαταραχής $f = 1\text{MHz}$ και πλάτους διαταραχής $\varepsilon = 1,5$ για διαφορετικά μέτρα επιφανειακής διαστολής του κελύφους. (β) Χρονική εξέλιξη ιδιομορφών σχήματος ανώτερης τάξης για την περίπτωση μέτρο επιφανειακής διαστολής $\chi = 2,4 \text{ N/m}$.

5. Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μελετήθηκε αρχικά η επίδραση των τοιχωμάτων του αγωγού στην ιδιοσυχνότητα μικροφουσαλίδας με ελαστικό περίβλημα. Διαπιστώθηκε ότι η ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας μειώνεται έντονα καθώς το μέγεθος της ακτίνας της πλησιάζει την ακτίνα του αγωγού. Ενώ όταν το μέγεθος της φουσαλίδας είναι πολύ μικρό σε σχέση με αυτό του αγωγού, η τιμή της ιδιοσυχνότητά της τείνει σε αυτήν της μη περιορισμένης ροής (2.1).

Επίσης παρατηρήθηκε ότι και το μήκος του αγωγού παίζει ρόλο στην ιδιοσυχνότητα της φουσαλίδας, ο οποίος όμως καθώς μεγαλώνει ο λόγος του μήκους προς την ακτίνα του αγωγού περιορίζεται. Αυτό που κρίθηκε σημαντικό όμως είναι ότι για την ευστάθεια του μοντέλου είναι σημαντικό ο αγωγός να έχει αρκετά μεγάλο μήκος σε σχέση με την φουσαλίδα, έτσι ώστε να μην υφίσταται χωρική μεταβολή της πίεσης στην περιοχή κοντά στη φουσαλίδα.

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύθηκε με δύο διαφορετικές μεθόδους κατασκευής πλέγματος την μέθοδο spine και την ελλειπτική μέθοδο, και διαπιστώθηκε ότι και οι δύο ανταποκρίνονται καλά στο πρόβλημα. Εφόσον, δεν υπάρχουν παραμορφώσεις σχήματος στη συγκεκριμένη περίπτωση πέραν από τη μεταβολή του όγκου της φουσαλίδας, η μέθοδος spine αντεπεξέρχεται στη λύση του προβλήματος και επομένως προτιμάται, διότι απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο. Όμως η εμφάνιση έντονης παραμόρφωσης σχήματος απαιτεί την χρήση της ελλειπτικής μεθόδους ως βέλτιστης διαδικασίας παραγωγής πλέγματος.

Έπειτα μελετήθηκε η συμπεριφορά της φουσαλίδας μέσα σε αγωγό με βαθμίδα πίεσης, χωρίς την ύπαρξη ακουστικών διαταραχών. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται ότι η φουσαλίδα αποκτά πολύ γρήγορα μία σταθερή ταχύτητα μικρότερη ή ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ροής. Όσο η ροή γύρω από την φουσαλίδα πλησιάζει τις συνθήκες μη περιορισμένης ροής η ταχύτητα της φουσαλίδας τείνει να πιάσει την ταχύτητα του ρευστού, ενώ όσο η ροή περιορίζεται παρατηρείται ότι η ταχύτητα της φουσαλίδας μειώνεται σε σχέση με την ταχύτητα της ροής. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι, ενώ όσο μεγαλώνει ο λόγος $\alpha = \hat{R}_t / \hat{R}_0$ η παροχή του υγρού δεν φαίνεται να παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην σχέση των ταχυτήτων, ενώ για πιο περιορισμένες ροές, δηλαδή για μικρότερους λόγους α , παρατηρείται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η παροχή τόσο μικρότερος είναι ο λόγος της ταχύτητας της φουσαλίδας προς την ταχύτητα της ροής.

Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι η φυσαλίδα διαστέλλεται συνεχώς μειώνοντας έτσι την πίεση στο εσωτερικό της και «προσπαθώντας» να έρθει σε ισορροπία με την πίεση στην οποία βρίσκεται το περιβάλλον της, η οποία καθώς μεταφέρεται η φυσαλίδα είναι όλο και μικρότερη, λόγω της πτώσης πίεσης που επικρατεί στον αγωγό. Αυτή η διόγκωση φαίνεται ότι είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερες παροχές ή για μικρότερες διατομές αγωγού, διότι και οι δύο αυτές μεταβολές αυξάνουν την πτώση πίεσης στον αγωγό.

Επειδή, κατά την προσπάθεια σύγκρισης φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο με την φυσαλίδα από πολυμερικό κέλυφος ο κώδικας αδυνατούσε να δώσει αποτέλεσμα, για την μελέτη της επίδρασης των ιδιοτήτων του κελύφους στη συμπεριφορά της φυσαλίδας συγκρίθηκαν δύο περιπτώσεις λιπιδίου με διαφορετικό αδιάστατο μέτρο κάμψης. Προέκυψε, λοιπόν ότι και οι δύο φυσαλίδες αποκτούν σταθερή ταχύτητα και ο όγκος αυξάνεται σταθερά λόγω της πτώσης πίεσης στον αγωγό. Όμως, η φυσαλίδα με κέλυφος μικρότερου αδιάστατου μέτρου ακαμψίας διογκώνεται με πολύ μικρότερο ρυθμό, γεγονός που οφείλεται στη μεγαλύτερη αντίσταση του κελύφους της σε εφελκυσμό.

Κατά το τρίτο πρόβλημα που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά της φυσαλίδας για ταυτόχρονη μεταφορική κίνηση και ταλάντωση. Όπως φάνηκε από την χρονική εξέλιξη των ιδιομορφών η φυσαλίδα τείνει να έρθει σε μόνιμη κατάσταση με ένα σταθερό πλάτος ταλαντώσεων όγκου, μικρότερο από το αρχικό, ενώ οι ταλαντώσεις σχήματος τείνουν να εξαφανιστούν.

Διαπιστώθηκε, επίσης, ότι η συχνότητα της διαταραχής της πίεσης επηρεάζει σημαντικά την ταχύτητα της φυσαλίδας και βρέθηκε ότι για την μικρότερη συχνότητα διαταραχής, η οποία στις δοκιμές που έγιναν είναι πιο κοντά στην ιδιοσυχνότητα της φυσαλίδας, η ταχύτητα που αποκτά η φυσαλίδα είναι μεγαλύτερη.

Επιπροσθέτως, προέκυψε ότι, καθώς μικραίνει η διατομή του αγωγού ή καθώς μεγαλώνει η ογκομετρική παροχή που εισέρχεται στον αγωγό, πέραν της αύξησης της ταχύτητας, παρατηρείται και αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του όγκου της φυσαλίδας αλλά και του πλάτους των ταλαντώσεων σχήματος.

Ακόμη, φάνηκε ότι και το πλάτος διαταραχής έχει μία μικρή επίδραση στην ταχύτητα της φυσαλίδας, με το μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης να προσδίδει μεγαλύτερη ταχύτητα στη φυσαλίδα, λόγω της μη γραμμικής ανάπτυξης του P_1 σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των εμφανιζόμενων ιδιομορφών σχήματος. Επιπλέον για μεγαλύτερο πλάτος διαταραχής, οι

ταλαντώσεις όγκου και σχήματος αυξάνονται σημαντικά, και σε κάποιες περιπτώσεις εμφανίζονται και μη συμμετρικά σχήματα.

Τέλος, κατά την προσπάθεια σύγκρισης φυσαλίδας με κέλυφος από λιπίδιο με την φυσαλίδα από πολυμερικό κέλυφος ο κώδικας αδυνατούσε να δώσει αποτέλεσμα. Έτσι για την σύγκριση των ιδιοτήτων του κελύφους στη συμπεριφορά της φυσαλίδας συγκρίθηκαν δύο περιπτώσεις λιπιδίου με διαφορετικό αδιάστατο μέτρο κάμψης και προέκυψε ότι το κέλυφος με μικρότερο μέτρο κάμψης, έρχεται σε λυγισμό. Το αποτέλεσμα αυτό ευσταθεί, διότι μικρότερο αδιάστατο μέτρο κάμψης συνεπάγεται μικρότερη αντίσταση σε λυγισμό. Στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος, έγινε κατασκευή πλέγματος με τη μέθοδο *spline*, αλλά φάνηκε ότι η μέθοδος δεν είναι επαρκής, λόγω των μεγάλων παραμορφώσεων που εμφανίζονται.

Εν κατακλείδι, η δυναμική συμπεριφορά της φυσαλίδας επηρεάζεται από πάρα πολλές παραμέτρους, των οποίων η επίδραση σκιαγραφείται ήδη, αλλά για πολλές από αυτές δεν είναι ακόμα ξεκάθαρη. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται περαιτέρω εμβάθυνση στην επιρροή των παραμέτρων αυτών ούτως ώστε να δημιουργηθούν αναλυτικές σχέσεις που να μπορούν να προβλέψουν τη συμπεριφορά των μικροφυσαλίδων στις συνθήκες χρήσης στους σε πρακτικές εφαρμογές.

Ένα ακόμα βήμα, πιο κοντά στην πραγματικότητα των εφαρμογών για τις οποίες προορίζονται οι μικροφυσαλίδες, είναι να αντικατασταθεί η υπόθεση του απολύτως στερεού τοιχώματος του αγωγού, με ένα τοίχωμα αντίστοιχων ιδιοτήτων όπως αυτές των αγγείων του ανθρώπινου οργανισμού. Επιπλέον, σημαντικό θα ήταν να μελετηθεί το τρισδιάστατο πρόβλημα χωρίς την υπόθεση της αξονικής συμμετρίας για την ακριβέστερη αποτίμηση της κατάστασης των ζωτικών οργάνων, που επιτυγχάνεται μέσω των ακουστικών μετρήσεων των τριχοειδών αγγείων, με χρήση μικροφυσαλίδων με ελαστική επίστρωση.

Βιβλιογραφία

- [1] Gramiak, R., & Shah, P. M., *Echocardiography of the Aortic Root*. Investigative Radiology, **3(5)**, 1968.
- [2] de Jong, N., & Ten Cate, F. J., *New ultrasound contrast agents and technological innovations.*, Ultrasonics, **34(2–5)**, 587–590, 1996.
- [3] Khismatullin, D. B., & Nadim, A., *Radial oscillations of encapsulated microbubbles in viscoelastic liquids*. Physics of Fluids, **14(10)**, 3534–3557, 2002.
- [4] Rouffiac, V., Duret, J.-S., Peronneau, P., Dehez, N., Opolon, P., Roche, A., & Lassau, N., *Combination of HIFU therapy with contrast-enhanced sonography for quantitative assessment of therapeutic efficiency on tumor grafted mice.*, Ultrasound in Medicine & Biology, **32(5)**, 729–740., 2006.
- [5] Vlachomitrou, M. & Pelekasis, N. *Nonlinear interaction between a boundary layer and a liquid film*. J. Fluid Mech. **638**, 199, (2009).
- [6] Vlachomitrou, M. & Pelekasis, N. *Dynamic simulation of a coated microbubble in an unbounded flow: response to a step change in pressure*. J. Fluid Mech. **822**, 717–761 (2017).
- [7] Lauterborn, W., & Bolle, H., *Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary*. Journal of Fluid Mechanics, **72(2)**, 391–399, 1975.
- [8] Brujan, E.-A., Nahen, K., Schmidt, P., & Vogel, A. *Dynamics of laser-induced cavitation bubbles near an elastic boundary*. F. Fluid Mech., **433**, 251–281, 2001.
- [9] Zhao, S., Kruse, D. E., Ferrara, K. W., & Dayton, P. A. *Acoustic response from adherent targeted contrast agents*. The Journal of the Acoustical Society of America, **120(6)**, EL63-EL69, 2006.
- [10] Garbin, V, D Cojoc, E Ferrari, E Di Fabrizio, M L J Overvelde, S M van der Meer, de Jong N., D Lohse, and M Versluis, “*Changes in Microbubble Dynamics near a Boundary Revealed by Combined Optical Micromanipulation and High-Speed*

- Imaging.*” Applied Physics Letters **90** (11). American Institute of Physics: 114103, 2007.
- [11] Sboros, V, S D Pye, T A Anderson, C M Moran, and W N McDicken. “*Acoustic Rayleigh Scattering at Individual Micron-Sized Bubbles.*” Applied Physics Letters **90** (12). American Institute of Physics: 123902, 2007.
- [12] Thomas, D H, P Looney, R Steel, N Pelekasis, W N McDicken, T Anderson, and V Sboros, “*Acoustic Detection of Microbubble Resonance.*” Applied Physics Letters **94** (24). American Institute of Physics: 243902, 2009.
- [13] Thomas, D H, M B Butler, A Dermitzakis, T Anderson, W N McDicken, and V Sboros, “*The Acoustic Scatter from Single biSphere Microbubbles.*” Ultrasound in Medicine & Biology **36** (11). Elsevier: 1884–92, 2010.
- [14] de Jong, N., Cornet, R., & Lancée, C. T., *Higher harmonics of vibrating gas-filled microspheres. Part one: simulations*, Ultrasonics, **32**(6), 455–459, 1994.
- [15] Plesset, M. S., & Prosperetti, A. (1977). *Bubble Dynamics and Cavitation*. Annual Review of Fluid Mechanics, **9**(1), 145–185.
- [16] Prosperetti, Andrea, Lawrence A Crum, and Kerry W Commander, “*Nonlinear Bubble Dynamics.*” The Journal of the Acoustical Society of America **83** (2). Acoustical Society of America: 502–14, 1988.
- [17] Qin, S., & Ferrara, K. W. *Acoustic response of compliant microvessels containing ultrasound contrast agents*. Physics in Medicine and Biology, **51**(20), 5065–5088, 2006.
- [18] Martynov, S., Stride, E., & Saffari, N. *The natural frequencies of microbubble oscillation in elastic vessels*. The Journal of the Acoustical Society of America, **126**(6), 2963–2972, 2009.
- [19] Khismatullin, D. B. *Resonance frequency of microbubbles: Effect of viscosity*. The Journal of the Acoustical Society of America, **116**(3), 1463–1473, 2004.
- [20] Khismatullin, D. B., & Nadim, A. *Radial oscillations of encapsulated microbubbles in viscoelastic liquids*. Physics of Fluids, **14**(10), 3534–3557, 2002

- [21] Feng, Z. C., & Leal, L. G., *NONLINEAR BUBBLE DYNAMICS*. Annual Review of Fluid Mechanics, **29(1)**, 201–243, 1997.
- [22] Khabeev, N. S., *Resonance properties of soluble gas bubbles*. International Journal of Heat and Mass Transfer, **49(5–6)**, 1022–1026, 2006.
- [23] Caskey, C. F., Kruse, D. E., Dayton, P. A., Kitano, T. K., & Ferrara, K. W. *Microbubble oscillation in tubes with diameters of 12, 25, and 195 microns*. Applied Physics Letters, **88(3)**, 33902, 2006.
- [24] Prosperetti, A., *Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids*. The Journal of the Acoustical Society of America, **61(1)**, 17–27, 1977.
- [25] Klibanov, A. L., *Targeted delivery of gas-filled microspheres, contrast agents for ultrasound imaging*. Advanced Drug Delivery Reviews, **37(1–3)**, 139–157, 1999.
- [26] Geng, X., Yuan, H., Oğuz, H. N., & Prosperetti, A., *The oscillation of gas bubbles in tubes: Experimental results*. The Journal of the Acoustical Society of America, **106(2)**, 674–681, 1999.
- [27] de Jong, N., Bouakaz, A., & Frinking, P., *Harmonic imaging for ultrasound contrast agents*. In 2000 IEEE Ultrasonics Symposium. Proceedings. An International Symposium (Cat. No.00CH37121) (Vol. 2, pp. 1869–1876 vol.2), 2000.
- [28] Devin, Charles., “*Resonant Frequencies of Air Bubbles Generated in Open-Ended Pipes.*” The Journal of the Acoustical Society of America **30 (7)**. Acoustical Society of America: 697, 1958.
- [29] Sassaroli, E., & Hynynen, K., *Resonance frequency of microbubbles in small blood vessels: a numerical study*. Physics in Medicine and Biology, **50(22)**, 5293–5305, 2005.
- [30] Sassaroli, E., and K Hynynen, “*Forced Linear Oscillations of Microbubbles in Blood Capillaries.*” The Journal of the Acoustical Society of America **115 (6)**. Acoustical Society of America: 3235–43, 2004.

- [31] Qin, S., & Ferrara, K. W., *The Natural Frequency of Nonlinear Oscillation of Ultrasound Contrast Agents in Microvessels*. *Ultrasound in Medicine and Biology*, **33(7)**, 1140–1148., 2007.
- [32] Oğuz, H. N., & Prosperetti, A. *The natural frequency of oscillation of gas bubbles in tubes*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **103(6)**, 3301–3308, 1998.
- [33] Butler, M. B., Thomas, D. H., Silva, N., Pye, S. D., & Sboros, V., *On the acoustic response of microbubbles in arteriole sized vessels.*, *Applied Physics Letters*, **99(19)**, 193702, 2011.
- [34] Krasovitski, Boris, and Eitan Kimmel, “*Gas Bubble Pulsation in a Semiconfined Space Subjected to Ultrasound.*” *The Journal of the Acoustical Society of America* **109 (3)**. Acoustical Society of America: 891–98, 2001.
- [35] Broumas, Amy R, Rachel E Pollard, Susannah H Bloch, Erik R Wisner, Stephen Griffey, and Katherine W Ferrara, “*Contrast-Enhanced Computed Tomography and Ultrasound for the Evaluation of Tumor Blood Flow.*” *Investigative Radiology* **40 (3)**: 134–47, 2005.
- [36] Vlachomitrou M. & Pelekasis N., *Dynamic simulation of a coated microbubble in an unbounded flow: Response to a step change in pressure*, *Journal of Fluid Mechanics*, **822**, 717-761, 2017.
- [37] Dimakopoulos Y., J. Tsamopoulos, *A quasi-elliptic transformation for moving boundary problems with large anisotropic deformations*, *J. Comp. Phys.*, **192**, 494-522, 2003.
- [38] Tsiglifis, K., & Pelekasis, N., *Nonlinear oscillations and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects* *Nonlinear oscillations and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects.*, *Physics of Fluids*, 2005.
- [39] Tsiglifis, K. & Pelekasis, N. A. *Nonlinear radial oscillations of encapsulated microbubbles subject to ultrasound: The effect of membrane constitutive law*. *J. Acoust. Soc. Am.* **123**, 4059–4070 (2008).
- [40] Christodoulou, K. N., & Scriven, L. E., *Discretization of free surface flows and other moving boundary problems*, *J. Comp. Phys.*, **99(1)**, 39–55, 1992.

- [41] Babuška, I., *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numerische Mathematik, **20(3)**, 179–192, 1973.
- [42] Babuška, I., *Error-bounds for finite element method*, Numerische Mathematik, **16(4)**, 322–333, 1971.
- [43] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. R.A.I.R.O. Analyse numerique/Numerical Analysis, **8**, 129–151, 1974.
- [44] de Jong, N., Hoff, L., Skotland, T., & Bom, N. Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres: Theoretical considerations and some measurements, Ultrasonics, **30(2)**, 95–103, 1992.
- [45] de Jong, N, Bouakaz, A., & Frinking, P., *Basic Acoustic Properties of Microbubbles*, Echocardiography, **19(3)**, 229–240, 2002.
- [46] Tsiglifis, K. & Pelekasis, N. A. *Parametric stability and dynamic buckling of an encapsulated microbubble subject to acoustic disturbances*. Phys. Fluids **23**, 12102 (2011).
- [47] BARTHÈS-BIESEL, D., DIAZ, A. & DHENIN, E. *Effect of constitutive laws for two-dimensional membranes on flow-induced capsule deformation*. J. Fluid Mech. **460**, 211–222 (2002).
- [48] Lytra, A. & Pelekasis, N. *Static response and stability of coated microbubbles—multiplicity of solutions and parameter estimation*. Fluid Dyn. Res. **46**, 41422 (2014).