

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ**  
**ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ»**



**ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:**

**«Η αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας και του εκπαιδευτικού παιχνιδιού ως μία διδακτική προσέγγιση των χωρικών διαστάσεων σε μαθητές και μαθήτριες της Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου»**

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:**

**Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης**

**Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου**

**Μαρίτα Παπαρούση**

**ΒΟΛΟΣ 2017**

*Στα μάτια των παιδιών.  
Ελπίζω να τα βλέπουμε, όπως η ευτυχία επιβάλλει:  
λαμπερά, ενθουσιώδη, φιλοπερίεργα...*

## Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη .....	5
Ευχαριστίες .....	7
Εισαγωγή .....	8
Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό πλαίσιο .....	9
Μαθηματικά και λογοτεχνία .....	9
Ωφέλειες στη μάθηση.....	9
Ωφέλειες στη μνήμη.....	12
Διάνοιξη της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση .....	12
Ψυχολογικές ωφέλειες.....	13
Συνόψιση των ωφελειών .....	14
Τρόποι σύμπραξης .....	14
Η μαθηματική λογοτεχνία .....	17
Μαθηματικά και παιχνίδι .....	21
Ωφέλειες στη μάθηση.....	21
Διάνοιξη της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση .....	25
Ψυχολογικές ωφέλειες.....	26
Συνόψιση των ωφελειών .....	27
Τρόποι σύμπραξης .....	27
Το μαθηματικό παιχνίδι.....	28
Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γ΄ τάξη του δημοτικού .....	31
Κεφάλαιο 2: Ερευνητικός σχεδιασμός.....	33
Στόχος της έρευνας.....	33
Ερευνητικοί σκοποί .....	33
Περίγραμμα της έρευνας.....	34
Επιλογή μεθόδων διερεύνησης.....	35
Επιλογή και περιγραφή δείγματος.....	35
Ηθικό πλαίσιο .....	36
Χρόνος και φάσεις διεξαγωγής της έρευνας.....	38
Σχεδιασμός των διδακτικών υλικών .....	40
Περιγραφή των διδακτικών υλικών.....	40
Φάκελος επιστολής Τετράγωνου .....	41
Επιστολές Τετράγωνου.....	41

Φωτογραφία Τετράγωνου.....	44
Μακέτα Γεωμετρούπολης.....	44
Απογραφικό δελτίο Γεωμετρούπολης.....	45
Βραβείο συμμετοχής στον απογραφικό διαγωνισμό .....	46
Τάγκραμ.....	47
Γεωμετρικά στερεά .....	47
UNO σχημάτων.....	48
Κεφάλαιο 3: Συλλογή δεδομένων .....	50
Παρατήρηση .....	50
Συλλογή εγγράφων .....	51
Οπτικοακουστικό υλικό .....	51
Συνεντεύξεις .....	52
Κεφάλαιο 4: Παρουσίαση και ανάλυση δεδομένων .....	53
Περιγραφή εκπαιδευτικών συνεδριών .....	53
Πρώτη εκπαιδευτική συνεδρία .....	53
Δεύτερη εκπαιδευτική συνεδρία .....	62
Τρίτη εκπαιδευτική συνεδρία .....	69
Τέταρτη εκπαιδευτική συνεδρία .....	79
Πέμπτη εκπαιδευτική συνεδρία .....	85
Έκτη εκπαιδευτική συνεδρία .....	92
Έβδομη εκπαιδευτική συνεδρία.....	100
Όγδοη εκπαιδευτική συνεδρία .....	103
Ένατη εκπαιδευτική συνεδρία .....	109
Δέκατη εκπαιδευτική συνεδρία.....	113
Ενδέκατη εκπαιδευτική συνεδρία .....	117
Δωδέκατη εκπαιδευτική συνεδρία .....	122
Ομαδική συνέντευξη.....	123
Ερμηνεία στάσης, λόγου και ενεργειών.....	123
Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα.....	133
Κατανόηση και γνωστική πρόοδος.....	133
Συναισθηματική εμπλοκή και ποιότητα συμμετοχής .....	135
Κεφάλαιο 6: Συζήτηση.....	136
Βιβλιογραφία .....	138

## Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει την επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας και του εκπαιδευτικού παιχνιδιού: α) στην κατανόηση και στη γνωστική πρόοδο εννιάχρονων παιδιών σε θέματα της γεωμετρίας που σχετίζονται με τις διαστάσεις και β) στη συναισθηματική εμπλοκή και την ποιότητα συμμετοχής τους σε συναφείς, μαθηματικές δραστηριότητες. Για τον σκοπό αυτό, μελετήθηκαν ο λόγος και οι ενέργειες δύο μαθητών και δύο μαθητριών που κατά το σχολικό έτος 2016-2017 φοιτούσαν σε ένα τμήμα τρίτης τάξης δημοτικού.

Μετά από τη συμμετοχή τους σε ένα καινοτόμο, εκπαιδευτικό πρόγραμμα με τίτλο: «Αλληλογραφώντας με ένα Τετράγωνο» διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά κατέστησαν ικανά να κατονομάζουν τις τρεις χωρικές διαστάσεις, να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στο δισδιάστατο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο, να συνδέουν τον αριθμό των πλευρών με τον αριθμό των γωνιών ενός γεωμετρικού σχήματος καθώς με την ονομασία του σχήματος και να διακρίνουν τα γεωμετρικά σχήματα από τα στερεά σώματα. Ακόμη, βρέθηκε ότι τα παιδιά ανέπτυξαν μία βαθύτερη κατανόηση για διάφορους μαθηματικούς όρους. Σε αυτούς συμπεριλαμβάνονται οι ακόλουθοι: «πλευρά», «γωνία», «πολύγωνο», «κανονικότητα», «ανάπτυγμα».

Επιπλέον, δόθηκε έμφαση στην εξέταση της συναισθηματικής εμπλοκής των παιδιών στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα και στο πώς αυτή επηρέασε τη συνολική τους μαθησιακή συμμετοχή. Γι' αυτόν τον λόγο, το ενδιαφέρον στράφηκε στα συναισθήματα των παιδιών, όπως αυτά αποκαλύπτονταν μέσα από εκφράσεις του προσώπου τους, τον προφορικό και τον γραπτό λόγο καθώς και τις ενέργειές τους.

Τέλος, εντοπίστηκαν ενδιαφέρουσες απόψεις των παιδιών, οι οποίες αφορούν στη σύνδεση του κύκλου με τη σφαίρα, στην αναγνώριση των σχημάτων με βάση τα οπτικά τους χαρακτηριστικά, στη χρήση του χάρακα μόνο ως εργαλείο χάραξης ευθειών κι όχι ως εργαλείο μέτρησης και στη νοητική αναπαράσταση των αναπτυγμάτων του κύβου ως T ή ως σταυρού.

## Summary

This paper with title: "The use of mathematical literature and educational game as a didactical approach of spatial dimensions to pupils of Grade 3 of elementary school" examines the influence of mathematical literature and educational play in: (a) the understanding and cognitive progress of nine-year-olds in dimensional geometry and (b) the emotional involvement and quality of participation in related mathematical activities. For this purpose, the discourse and actions of four pupils (two girls and two boys) who during the school year 2016-2017 were studying in a third grade elementary school were studied.

After participating in an innovative, educational program titled "By corresponding with a Square" it was found that children were able to name the three spatial dimensions, to distinguish the difference between the two-dimensional field and the three-dimensional space, to associate the number of the sides with the number of angles of a geometric shape as with the name of the shape and to distinguish the geometric shapes from the solid bodies. It was also found that children developed a deeper understanding of various mathematical terms. These include the following: "side", "angle", "polygon", "regularity", "spread".

In addition, emphasis was placed on examining children's emotional involvement in the curriculum and how it affected their overall learning participation. For this reason, interest turned to children's feelings as they were revealed through their facial expressions, oral and written speech and their actions.

Finally, interesting children's views were identified regarding the connection of the circle with the sphere, the identification of the shapes based on their visual characteristics, the use of the ruler only as a straight line tool and not as a measuring tool and in the mental representation of the net of the cube as T or as a cross.

## Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να παραθέσω τις ευχαριστίες μου προς όλους τους ανθρώπους των οποίων η βοήθειά υπήρξε πολύτιμη για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές της εργασίας μου, κύριο Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή με γνωστικό πεδίο τη διδακτική των μαθηματικών, τον κύριο Κωνσταντίνο Χατζηκυριάκου, Αναπληρωτή Καθηγητή με γνωστικό πεδίο τη μαθηματική λογική και μαθηματική εκπαίδευση, και την κυρία Μαρίτα Παπαρούση, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια με γνωστικό πεδίο τη νεοελληνική λογοτεχνία και τη διδακτική της λογοτεχνίας του παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης του πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Δίχως την καθοδήγηση και την ανατροφοδότηση αυτών η συγγραφή της παρούσας εργασίας θα ήταν ανέφικτη.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Νικόλαο Ράπτη, εκπαιδευτικό και διευθύνοντα σύμβουλο των ιδιωτικών εκπαιδευτηρίων Μαίρης Ν. Ράπτου, που με τη συγκατάθεση και τη βοήθειά του κατάφερα να φέρω εις πέρας το πρακτικό κομμάτι της έρευνας. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τις συναδέλφους εκπαιδευτικούς Χαρίκλεια Ρεντίνα και Μαρία Ζήση, οι οποίες συμμετείχαν με ενθουσιασμό στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Τέλος, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για την ψυχολογική υποστήριξη και την κατανόηση που έδειξε όλο αυτό το διάστημα, προκειμένου να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.

## Εισαγωγή

*Αν οι αριθμοί δεν είναι όμορφοι, δεν ξέρω τι είναι όμορφο.*

*Paul Erdős (1913-1996 , Ούγγρος μαθηματικός)*

Τα μαθηματικά αποτελούν βασικό μάθημα σε κάθε αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης σε παγκόσμια κλίμακα. Η διδασκαλία του μαθηματικού μαθήματος είναι σημαντική για δύο κυρίως λόγους. Πρώτον, κάθε άνθρωπος χρειάζεται να έχει κατακτήσει ένα ελάχιστο επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, για να μπορέσει να χειριστεί ζητήματα της καθημερινότητας. Δεύτερον, η μαθηματική επιστήμη χρησιμεύει στον άνθρωπο, προκειμένου αυτός να κατανοήσει τον σύγχρονο τεχνολογικό πολιτισμό. Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά αξιοποιούνται στις περισσότερες περιπτώσεις ως εργαλειακή κι όχι ως αυτόνομη γνώση (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Από την πλευρά τους, οι εκπαιδευτικοί έχουν προσπαθήσει κατά καιρούς να προσφέρουν στους μαθητές τους μαθηματικά μαθήματα, όπου η μάθηση και η απόλαυση θα είναι συνοδοιπόροι. Οι εναλλακτικές διδακτικές οδοί που πρότειναν περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων την αξιοποίηση εκπαιδευτικών παιχνιδιών, τον πειραματισμό με ποικίλα διδακτικά υλικά και τη λειτουργική εισαγωγή παιδικών ιστοριών (Barnaby, 2015).

Η παρούσα εργασία θα διερευνήσει την επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας και των παιγνιωδών δραστηριοτήτων στη συμμετοχή, την κατανόηση και τη μάθηση παιδιών Γ΄ δημοτικού μες στη μαθηματική αίθουσα. Άραγε θα καταφέρει η συγκεκριμένη εκπαιδευτική παρέμβαση να διαλύσει τον αφηρημένο χαρακτήρα ορισμένων δυσνόητων για τα μικρά παιδιά μαθηματικών εννοιών, όπως είναι οι χωρικές διαστάσεις; Κι ακόμη ποιες θα είναι οι ψυχολογικές συνέπειες μιας τέτοιας εναλλακτικής, διδακτικής προσέγγισης;



## Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό πλαίσιο

*Η επιστήμη εμπλουτίζει τον νου.*

*Η λογοτεχνία εμπλουτίζει ολόκληρη την προσωπικότητα.*

*Nicolás Gómez Dávila (1913-1994, Κολομβιανός συγγραφέας)*

### Μαθηματικά και λογοτεχνία

#### Ωφέλειες στη μάθηση

Η αφήγηση ιστοριών αποτελεί μια διαχρονική μορφή επικοινωνίας, η οποία ελκύει ανθρώπους σε όλα τα ηλικιακά φάσματα, διότι διεγείρει τα συναισθήματα, τη φαντασία, τον συλλογισμό. Όπως οποιαδήποτε άλλη ανθρώπινη εμπειρία, η μαθηματική εμπειρία αναγνωρίζει λοιπόν έναν αξιόλογο σύμμαχο στα λογοτεχνήματα. Η οικοδόμηση των μαθηματικών που διαπερνούν μια προφορική αφήγηση ή ένα σχετικό λογοτεχνικό έργο βοηθά τα παιδιά να αναπτύξουν έννοιες, να λύσουν προβλήματα και να πραγματοποιήσουν συνδέσεις (Griffiths & Clyne, 1991).

Όταν τα παιδιά ακούνε αφηγήσεις ιστοριών ή διαβάζουν μόνα τους τις ιστορίες, συνθέτουν τις δικές τους προσωπικές, νοητικές εικόνες. Αυτές οι εικόνες τα βοηθάνε να κατανοήσουν το περιεχόμενο της αφηγηματικής δομής. Επαναφέροντας τη συζήτηση στα μαθηματικά, τα παιδιά αποκτούν το προνόμιο να τα κατανοήσουν καλύτερα. Με όχημα τη φαντασία τους, οπτικοποιούν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και εντάσσουν τη μαθηματική γνώση στις μοναδικές τους προσωπικές εμπειρίες. Η μαθηματική γνώση τότε πλέον δεν είναι συμβατική και ξεκομμένη από την ταυτότητά τους. Αντίθετα, γίνεται προσωπική, καθώς εμποτίζεται από την εκάστοτε παιδική προσωπικότητα. Παράλληλα, μέσα στη συλλογικότητα μιας σχολικής αίθουσας η ιστορία καθίσταται ένα κοινό σημείο αναφοράς και προσφέρει πλούσιες ευκαιρίες για μαθηματικούς διαλόγους και συναφείς δράσεις (Goral & Gnadinger, 2006).

Ο Wiley πιστεύει ότι όταν τα σχολικά Μαθηματικά εμπνέονται από μία παιδική ιστορία και τη χρήση εικόνων, οι μαθητές εμφανίζονται πιο πρόθυμοι να αντιληφθούν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες. Μάλιστα, καθώς η παιδική λογοτεχνία συχνά απεικονίζει καταστάσεις της πραγματικής ζωής, μπορεί να φέρει τα παιδιά σε επαφή με την επίλυση ρεαλιστικών μαθηματικών προβλημάτων καθώς και

να τους αφυπνίσει έναν ζωηρό ενθουσιασμό για την εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών (Wiley & Sons Στο: Barnaby, 2015, σ. 6).

Η σύνδεση των μαθηματικών με καταστάσεις της πραγματικής ζωής είναι εξαιρετικά σημαντική. Μέσω αυτής τα παιδιά αντιλαμβάνονται τον εξέχοντα ρόλο που διαδραματίζει η μαθηματική γνώση στην ανθρώπινη καθημερινότητα επεκτείνοντας τις εφαρμογές της και σε άλλα πλαίσια πέρα από το σχολικό περιβάλλον. Έτσι, παύουν να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά μόνο ως αριθμούς, υπολογισμούς και απομνημόνευση κανόνων. Ξεκινούν να τα εκτιμούν για την ιδιαίτερη συμβολή τους σε διάφορες εκφάνσεις της ζωής (Hellwig, Monroe, & Jacobs, 2000).

Η σύμπραξη μαθηματικής λογοτεχνίας και μαθηματικής διδασκαλίας επηρεάζει θετικά τα κίνητρα μάθησης των μικρών παιδιών. Καθώς ένα βιβλίο με διηγήματα αγγίζει τα ενδιαφέροντα, τις εμπειρίες και τις γνώσεις των παιδιών, αυξάνει το κίνητρό τους να εμπλακούν σε συναφείς με την πλοκή του βιβλίου μαθηματικές δραστηριότητες. Ειδικότερα, εάν ο εκπαιδευτικός προσφέρει στα παιδιά μαθηματικά έργα τα οποία συσχετίζονται με την υπόθεση του λογοτεχνικού διηγήματος, οι μαθητές και οι μαθήτριες εμφανίζουν αυξημένη προθυμία για τακτική και μεγαλύτερης διάρκειας συμμετοχή. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι ότι υπό αυτές τις προϋποθέσεις τα παιδιά επιζητούν εκούσια τη συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες (Hong, 1996).

Ακόμη, μία αξιόλογη ωφέλεια αποτελεί η διευκόλυνση στη γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στον ανεπίσημο προφορικό λόγο και στην αυστηρή μαθηματική γλώσσα. Επεξηγηματικά, ένα λογοτεχνικό βιβλίο με μαθηματικές αναφορές προσφέρει πληθώρα ευκαιριών στα παιδιά να εκφράσουν προφορικά τις μαθηματικές τους ιδέες και να εξασκηθούν στον μαθηματικό λόγο. Ακόμη, κι αν ο τελευταίος τους προκαλεί σύγχυση, η υπόθεση του βιβλίου παραμένει γι' αυτά ένα διαρκές σημείο αναφοράς (Griffiths, R., & L. Clyne, Στο: Hong, 1996, σ. 490).

Η συνεργασία λογοτεχνίας και Μαθηματικών μπορεί να έχει σαφώς και μια ενδιαφέρουσα πολύπλευρη και ωφέλιμη θέαση. Αποτελεί μια κοινή παραδοχή πως ο λόγος συνιστά τον ακρογωνιαίο λίθο για τη μάθηση κάθε γνωστικού αντικειμένου στο σχολικό πρόγραμμα. Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τα σχολικά Μαθηματικά. Η πρόσβαση στη μαθηματικό περιεχόμενο διέρχεται μέσα από μηνύματα, τα οποία εν πολλοίς έχουν ή/και απαιτούν τη λεκτική μορφή. Παρέχοντας, λοιπόν, περισσότερα λεκτικά μηνύματα μπορεί κανείς να αντλήσει ωφέλειες όχι μόνο στη μαθηματική του

κατανόηση αλλά και στη γλωσσική του επάρκεια. Φαίνεται συνεπώς πως η πρόοδος στη γλωσσική επάρκεια και η εξέλιξη της μαθηματικής μάθησης ενός ατόμου αλληλοεπηρεάζονται. Οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν πως το επίπεδο της γλωσσικής επάρκειας επηρεάζει και τον βαθμό συμμετοχής μέσα στη μαθηματική αίθουσα (Hellwig et al., 2000).

Συνακόλουθα, ένα κατάλληλο παιδικό λογοτέχνημα ως ένα προϊόν λόγου μπορεί να αποτελέσει το εφελτήριο για την ενίσχυση της μαθηματικής επικοινωνίας που λαμβάνει χώρα μέσα σε μία σχολική τάξη αλλά και για την ώθηση σε μία περαιτέρω γλωσσική πρόοδο. Αυτή η γλωσσική πρόοδος μπορεί να λάβει ποικίλες κατευθύνσεις, όπως είναι η αναγνωστική δεξιότητα, η γραφική δεξιότητα και η ικανότητα ανάπτυξης προφορικού λόγου, ανάλογα βέβαια με τις δραστηριότητες εμπλοκής.

Από δικές του έρευνες ο Bharath Sriraman υπογραμμίζει την ευεργετική επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας στην αύξηση του μαθητικού ενδιαφέροντος προς τον μαθηματικό κλάδο καθώς και στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των μαθητών, ιδίως όταν στο διδακτικό μικροσκόπιο μπαίνουν σύνθετα και ανώτερα μαθηματικά, όπως είναι η εξέταση διαφορετικών γεωμετριών (Sriraman, 2004).

Οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές συνδέουν τη διδακτική χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας με ωφέλειες στη μάθηση των διάφορων μονάδων μέτρησης του χρόνου, της θερμοκρασίας, του βάρους, του μήκους, των χρημάτων και του χώρου. Ακόμη, διαπιστώνουν ότι με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές και οι μαθήτριες μαθαίνουν με μεγαλύτερη ευχαρίστηση. Με βάση τα παραπάνω, η μαθηματική λογοτεχνία φαίνεται να είναι ένας ισχυρός σύμμαχος του εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία των διάφορων εννοιών της μέτρησης (Date et al., 2004).

Η Rajaa Albool σε σχετική της έρευνα διαπιστώνει ότι η μέθοδος της αφήγησης ιστοριών αυξάνει την ικανότητα των μαθητών και των μαθητριών να κατανοήσουν τις κλασματικές έννοιες και να λύσουν μαθηματικά προβλήματα. Μάλιστα, η Albool συνδέει την ενίσχυση της μαθηματικής απόδοσης των παιδιών με τις μαθησιακές δυνατότητες της φαντασίας, την οποία φαντασία διεγείρουν οι ίδιες οι ιστορίες! Τέλος, η ίδια ερευνήτρια καταλήγει στο συμπέρασμα πως τα παιδιά που μελετούν μαθηματικά μέσα από την αφήγηση ιστοριών αποκτούν περισσότερα μαθησιακά κίνητρα (Albool, 2012).

## Ωφέλειες στη μνήμη

Η εμπνευσμένη αξιοποίηση της λογοτεχνίας μέσα στη μαθηματική διδασκαλία μπορεί να αποφέρει κι άλλα οφέλη. Καταρχάς ισχυροποιεί την αποτελεσματική μνημονική διατήρηση των μαθηματικών πληροφοριών. Όταν τα μαθηματικά διδάσκονται μέσα από τη λογοτεχνία, παύουν να αποτελούν απλά δεδομένα. Αντίθετα, μεταλλάσσονται σε προσωπικές εμπειρίες. Έτσι, τη μνημονική αποθήκευσή τους εξυπηρετεί πλέον η επεισοδιακή μνήμη, η οποία σε σύγκριση με την έκδηλη μνήμη, έναν διαφορετικό τύπο μακροπρόθεσμης μνήμης, υπεύθυνο για την αποθήκευση των δεδομένων, είναι περισσότερο ισχυρή (Paradimitriou, 2003).

Ο παραπάνω ισχυρισμός για μια καλύτερη μνημονική διατήρηση δεν είναι μοναδικός. Έρευνες σχετικά με τη μνήμη και τις νοητικές αναπαραστάσεις καταδεικνύουν πως η χρήση σεναρίων διευκολύνει τα μικρά παιδιά να οργανώνουν μνημονικά τις εμπειρίες τους. Μάλιστα, συγκριτικά με τη χρήση φανταστικών σεναρίων, η χρήση ιεραρχικών ταξινομικών κατηγοριών μοιάζει υποδεέστερη ως προς την ίδια κατεύθυνση. Η μετάφραση αυτών των ερευνητικών πορισμάτων πιθανότατα σημαίνει ότι τα παιδιά μαθαίνουν πιο εύκολα, εάν υπάρξει σύνδεση της μαθηματικής διδασκαλίας με την αφηγηματική δομή μιας ιστορίας (Bruner, Στο: Hong, 1996, σ.479).

## Διάνοιξη της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση

Μία επιτακτική ανάγκη αποτελεί η διάνοιξη της πρόσβασης στη μαθηματική επιστήμη. Ένας τρόπος προκειμένου η εκπαιδευτική κοινότητα να το επιτύχει αυτό είναι να απευθύνει τη διδασκαλία σε περισσότερα είδη νοημοσύνης. Ο εν λόγω ισχυρισμός ασφαλώς έχει τις ρίζες του στη Θεωρία της Πολλαπλής Νοημοσύνης που πρότεινε ο διάσημος ψυχολόγος Howard Gardner. Βάσει αυτής της θεωρίας η νοημοσύνη δεν είναι μια ενιαία διανοητική ικανότητα. Αντίθετα, όπως υποστηρίζει ο Gardner, υπάρχουν οκτώ διακριτά είδη νοημοσύνης: η λογικομαθηματική, η γλωσσική, η μουσική, η χωρική, η σωματική/κιναισθητική, η διαπροσωπική και η ενδοπροσωπική (Gardner & Hatch, 1989).

Ωστόσο, κατά βάση η σχολική διδασκαλία αντιστοιχεί σε μόνο δύο είδη νοημοσύνης, τη λεκτική/γλωσσική και τη λογικομαθηματική με στόχο φυσικά την εκμάθηση των δεξιοτήτων της ανάγνωσης, της γραφής και του υπολογισμού. Με αυτόν τον τρόπο όμως το σχολείο αφήνει πιθανότατα αναξιοποίητα πέντε άλλα είδη νοημοσύνης! Επενδύοντας στην αφήγηση ιστοριών αποκτούμε πρόσβαση σε περισσότερα είδη (Shirley, 2005). Βέβαια, θα ήταν υπερβολικό να προσδοκούμε ως

εκπαιδευτικοί και ερευνητές να προσεγγίσουμε ένα συγκεκριμένο θέμα και με τα επτά είδη (Howard Gardner, 1995). Ωστόσο, πρόκειται για μια ελπιδοφόρα κατεύθυνση, ώστε το σχολείο να καλύψει τις ιδιαίτερες δυνατότητες μεγαλύτερου μέρους του μαθητικού πληθυσμού.

Μία πετυχημένη συνέργεια λογοτεχνίας και μαθηματικών διευρύνει επιπλέον την πρόσβαση στη μαθηματική μάθηση και επικοινωνία σε μεγάλες ανθρώπινες ομάδες που στερεοτυπικά υστερούν σε αυτό το πεδίο. Μπορούμε να αλιεύσουμε ένα κλασικό παράδειγμα από την αποφυγή αρκετών γυναικών να ασχοληθούν εντατικά με τα μαθηματικά. Αλλά και ανεξάρτητα από όλα τα παραπάνω, η αξιοποίηση ιστοριών, ως μία εναλλακτική διδακτική προσέγγιση, είναι επιθυμητή, διότι προσφέρει στο μαθηματικό μάθημα έναν πολυτροπικό χαρακτήρα (Papadimitriou, 2003).

### **Ψυχολογικές ωφέλειες**

Αξιοσημείωτες είναι και οι ωφέλειες σε ψυχολογικό επίπεδο. Τα αποτελέσματα διάφορων εκπαιδευτικών προγραμμάτων, στα οποία γινόταν μία διαθεματική σύνδεση της λογοτεχνίας και των μαθηματικών, όπως το CRISS και το SMILE, καταδεικνύουν μία αύξηση του μαθητικού μαθηματικού ενδιαφέροντος καθώς και τη βελτίωση της αυτοπεποίθησης αναφορικά με τη μαθηματική μάθηση (Ruiz, Thornton, & Cuero, 2010).

Ομοίως, ο James Michael Shirley ισχυρίζεται ότι η αξιοποίηση της αφήγησης ιστοριών συνεισφέρει δυναμικά στη δημιουργία ενός ευνοϊκού μαθησιακού περιβάλλοντος. Ο εκπαιδευτικός ο οποίος χρησιμοποιεί μία τέτοια τεχνική επενδύει στην ενσυναίσθηση και οικοδομεί ενωτικές γέφυρες με τους μαθητές του. Δεν παρουσιάζει απλά πληροφορίες. Τουναντίον προωθεί συζητήσεις σχετικά με το διδακτικό περιεχόμενο και του προσδίδει συναισθηματικό φορτίο (Shirley, 2005).

Επιπρόσθετα, κατάλληλα δείγματα μαθηματικής λογοτεχνίας προσφέρουν στα παιδιά ένα ενδιαφέρον και ασφαλές πεδίο, ώστε να εξερευνήσουν τα μαθηματικά. Μέσα σε ένα τέτοιο πεδίο οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν σταδιακά να συνδέσουν τις ιδέες τους με την επίσημη μαθηματική ορολογία και να γνωρίσουν χωρίς άγχος και αρνητισμό τους μαθηματικούς συμβολισμούς (Beard, Στο: Date et al., 2004, σ. 155). Ένα λογοτεχνικό βιβλίο παρουσιάζει στα παιδιά τις μαθηματικές έννοιες με τρόπους εύληπτους για την παιδική αντίληψη. Οποσδήποτε βοηθητική προς αυτή την κατεύθυνση είναι η συχνή ύπαρξη ζωηρών εικόνων στο βιβλίο ακόμη και απλών διαγραμμάτων. Έτσι, τα παιδιά μαθαίνουν μαθηματικά που όντως

καταλαβαίνουν και αυτό τα αποδεσμεύει από το μαθηματικό άγχος (Date et al., 2004).

### **Συνοψιση των ωφελειών**

Η Rina Zazkis και ο Peter Liljedahl συνοψίζουν στο βιβλίο τους πολλές από τις βασικές ωφέλειες της χρήσης μαθηματικής λογοτεχνίας στη μαθηματική αίθουσα. Χαρακτηριστικά, αναφέρουν πως η χρήση ιστοριών αυξάνει το ενδιαφέρον, ισχυροποιεί τη μνήμη και μειώνει το μαθητικό άγχος. Επιπρόσθετα, τονίζουν ότι η αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας δημιουργεί ένα άνετο και υποστηρικτικό κλίμα επικοινωνίας μέσα στην τάξη ενώ παράλληλα προωθεί τις δασκαλομαθητικές σχέσεις. Ακόμη, μέσα από τις ιστορίες οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και λαμβάνουν σημαντική βοήθεια όσον αφορά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Zazkis & Liljedahl, 2009).

Ύστερα από όλα αυτά, δεν προκαλεί καμία έκπληξη το γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί σε όλο τον κόσμο στρέφουν το ενδιαφέρον στις δυνατότητες για τη διδακτική αξιοποίηση της λογοτεχνίας στη μαθηματική διδασκαλία (Albool, 2012).

### **Τρόποι σύμπραξης**

Η διδακτική υποστήριξη της λογοτεχνίας προς τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να λάβει διάφορες μορφές. Σύμφωνα με τις Rachel Griffiths και Margaret Clyne, οι ιστορίες μπορούν να προσφέρουν ένα πλαίσιο το οποίο νοηματοδοτεί αφηρημένες ή/και σύνθετες μαθηματικές έννοιες, να προτείνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ή/και τον τρόπο επίλυσης του, να απεικονίσουν μία μαθηματική έννοια (Griffiths & Clyne, 1991).

Ο Χρήστος Παπαδημητρίου συμφωνεί με τις παραπάνω ερευνήτριες όσον αφορά στην απεικόνιση μίας σύνθετης μαθηματικής έννοιας, ωστόσο εντοπίζει κι άλλο πιθανό τρόπο διασύνδεσης της λογοτεχνίας και των μαθηματικών. Υποστηρίζει ότι η λογοτεχνία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη επιπρόσθετα στην τοποθέτηση μίας μαθηματικής ιδέας στο ιστορικό της πλαίσιο γενεσιουργίας (Papadimitriou, 2003).

Αναφορικά με την ιδέα της ιστορικής τοποθέτησης, ο παραπάνω ερευνητής όντας ένας άνθρωπος που ασχολείται κυρίως με τον τομέα της επιστήμης των υπολογιστών αναφέρει διάφορα παραδείγματα προχωρημένων μαθηματικών. Αυτό όμως δε χρειάζεται να αποτρέπει τους εκπαιδευτικούς της πρώτης και της δεύτερης εκπαιδευτικής βαθμίδας. Προπαντός εκεί αφθονούν οι ευκαιρίες να συστήσουμε στα παιδιά περίφημες μαθηματικές προσωπικότητες. Πόσο πιο πλούσιο θα γινόταν ένα

μαθηματικό μάθημα συστήνοντας στα παιδιά της τάξης μας τον Πυθαγόρα τον Σάμιο, καθώς τους διδάσκουμε το πυθαγόρειο θεώρημα, ή τον Θαλή τον Μιλήσιο, ενόσω τους εξηγούμε τι είναι παράλληλες ευθείες! Και επειδή ο διδακτικός χρόνος είναι συνήθως ελάχιστος, θα ήταν πρόσφορο να αξιοποιήσουμε για αυτές τις συστάσεις όχι μία εκτενή βιογραφία αλλά ένα παιδικό λογοτέχνημα με τους ίδιους πρωταγωνιστές.

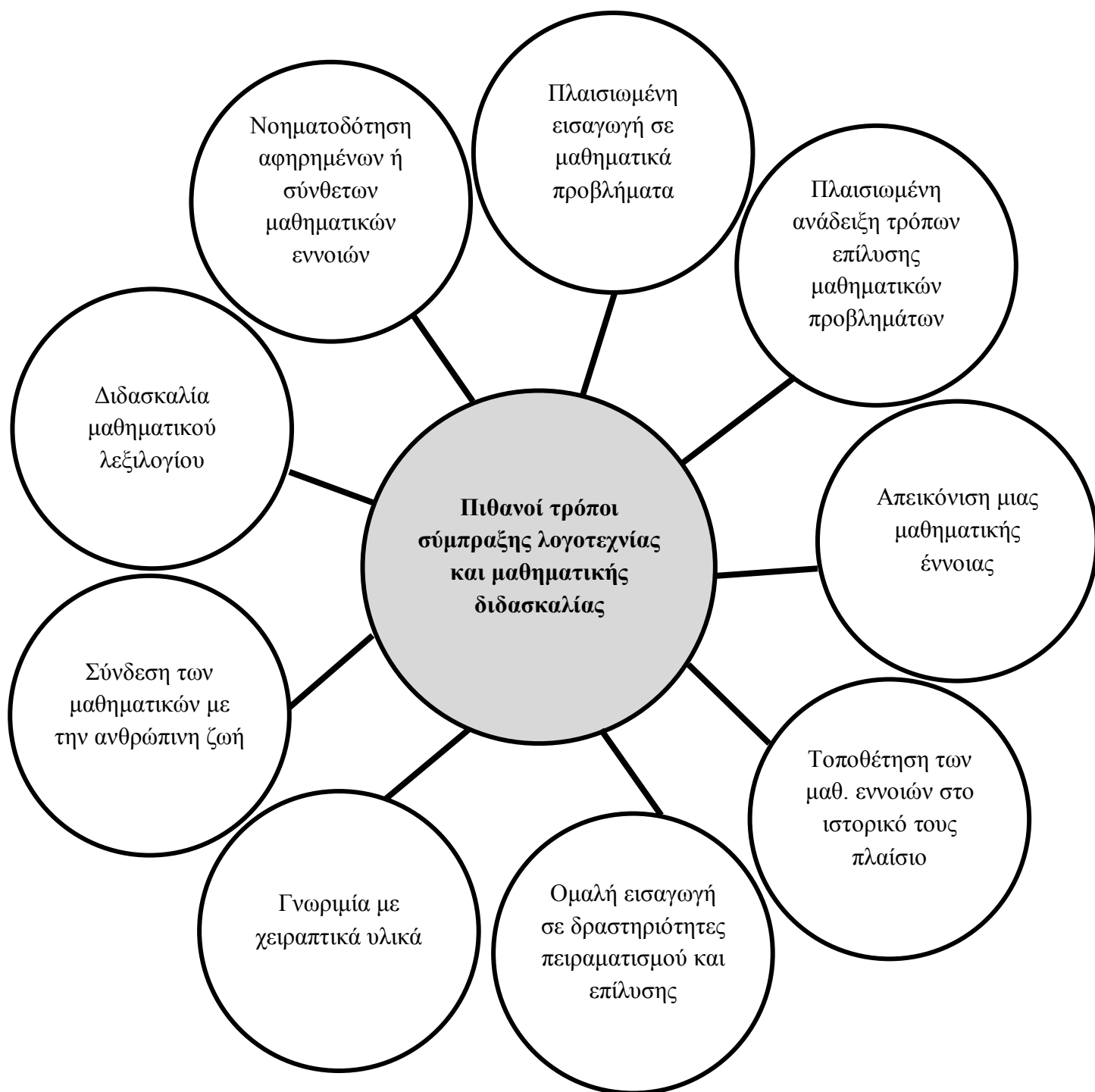
Ο ίδιος ερευνητής προσφέρει άφθονα παραδείγματα, τα οποία υποστηρίζουν και τον στόχο της διαηγούσας απεικόνισης μιας σύνθετης μαθηματικής έννοιας. Αναφέρουμε ενδεικτικά εδώ την πρότασή του να αποφύγουμε τη στεία διδασκαλία της εκθετικής αύξησης αφηγούμενοι στα παιδιά τη γνωστή ιστορία του σοφού, ο οποίος ζήτησε από τον χαλίφη να τοποθετήσει έναν κόκκο ρυζιού στο πρώτο τετράγωνο της σκακιέρας, δύο στο δεύτερο, τέσσερις στο τρίτο, και ούτω καθεξής. Μία τέτοια αφήγηση δίχως άλλο κεντρίζει πολύ περισσότερο τη μαθητική προσοχή από έναν συμβατικό τρόπο διδασκαλίας.

Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία μπορούμε να εντοπίσουμε κι άλλους τρόπους σύμπραξης. Η παιδική λογοτεχνία μπορεί σαφώς να αναδείξει ένα κατάλληλο πλαίσιο νοηματοδότησης των μαθηματικών και να προτείνει ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα στα παιδιά. Ωστόσο, η εκπαιδευτική ερευνητική κοινότητα θα ήταν σίγουρα ολιγαρκής εάν της αρκούσαν αυτές οι δύο κατευθύνσεις, καθώς η μαθηματική λογοτεχνία έχει πολλά ακόμη να προσφέρει στη μαθηματική διδασκαλία.

Πέρα από τους προαναφερθέντες τρόπους σύμπραξης, η παιδική λογοτεχνία μπορεί να συστήσει διάφορα χειραπτικά υλικά και να προτείνει πιθανούς τρόπους χρήσης αυτών, να καταστήσει εμφανή και να εξαίρει την αξία των μαθηματικών στις ανθρώπινες ζωές καθώς και να διδάξει λεξιλόγιο σχετικό με τη μαθηματική επιστήμη (Satariano, Στο: Hong, 1996, σ. 479)

Τέλος, μία πολύ ενδιαφέρουσα προοπτική της σύμπραξης λογοτεχνίας και μαθηματικής διδασκαλίας προσφέρουν η Rina Zazkis και ο Peter Liljedahl. Αυτοί οι δύο ερευνητές επισημαίνουν ότι οι ιστορίες μες στη μαθηματική αίθουσα δε χρειάζεται να τερματίζονται αναγκαστικά με την ολοκλήρωση της ανάγνωσης του βιβλίου. Αντίθετα, οι διάφορες συγκρούσεις της πλοκής της ιστορίας μπορούν κάλλιστα να αποτελέσουν στόχο προς επίτευξη για τα παιδιά. Έτσι, κατά τη διάρκεια ή/και προς το τέλος της ανάγνωσης αυτά θα έχουν την ευκαιρία να εμπλέκονται σε δραστηριότητες πειραματισμού και επίλυσης προβλημάτων, προκειμένου να διαχειριστούν τις διάφορες συγκρούσεις της πλοκής (Zazkis & Liljedahl, 2009).

Συγκεντρωτικά, ο αναγνώστης μπορεί να εντοπίσει όλους τους καταγεγραμμένους τρόπους σύμπραξης στο ακόλουθο σχήμα.



**Εικόνα 1.1.** Πιθανοί τρόποι σύμπραξης λογοτεχνίας και μαθηματικής διδασκαλίας



## Η μαθηματική λογοτεχνία

Στους περισσότερους ανθρώπους η λογοτεχνία και τα μαθηματικά μοιάζουν με δύο πλήρως διακριτά πεδία. Ωστόσο, αυτή η κοινή ιδέα δεν αντιπροσωπεύει πάντοτε την πραγματικότητα. Όντως έχουν υπάρξει από πολύ παλιά λογοτεχνικά έργα, τα οποία πραγματεύονται λιγότερο ή περισσότερο εμφανώς διάφορα μαθηματικά θέματα. Όταν ένα λογοτεχνικό κείμενο στοχεύει σε μια σύμπραξη της λογοτεχνίας και των μαθηματικών, τότε μπορεί κανείς να αναγνωρίσει ένα νέο, λογοτεχνικό είδος, τη λεγόμενη «μαθηματική λογοτεχνία». Φυσικά, για να ανήκει ένα βιβλίο σε αυτό το λογοτεχνικό είδος, δεν αρκούν απλά και μόνο αναφορές στη μαθηματική επιστήμη και στους γενεσιουργούς της, τους μαθηματικούς επιστήμονες. Αντίθετα, χρειάζεται ολόκληρη η θεματολογία του έργου να είναι στραμμένη σε ένα μαθηματικό θέμα (Μιχαηλίδης, 2002).

Μια ενδιαφέρουσα ταξινόμηση σχετικά με τη μαθηματική λογοτεχνία πραγματοποιεί η Ευγενία Κολέζα στο βιβλίο της «Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών». Σε μία προσπάθεια ανεύρεσης των μορφών σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και της λογοτεχνίας εντοπίζει τέσσερις υποκατηγορίες. Αυτές είναι οι εξής:

- 1) Η επίκληση στα μαθηματικά για την υποστήριξη μιας θεωρίας
  - 2) Τα μαθηματικά ως πηγή έμπνευσης
  - 3) Έμφαση της θεματολογίας στο μαθηματικό περιεχόμενο
  - 4) Έμφαση της θεματολογίας στα μαθηματικά και τους εκπαιδευτικούς στόχους
- (Κολέζα, 2009)

Βέβαια, όπως γίνεται εύκολα κατανοητό, η απλή επίκληση στα μαθηματικά δύσκολα δικαιολογεί την αναγνώριση ενός έργου ως μαθηματικού λογοτεχνήματος. Πραγματικά, το βιβλίο «Πόλεμος και Ειρήνη» του Lev Nikolayevich Tolstoy, που η Κολέζα εντάσσει σε αυτή την πρώτη κατηγορία, δεν μπορεί σε καμία περίπτωση διεκδικήσει μια εισαγωγή στην περιοχή της μαθηματικής λογοτεχνίας. Υπάρχουν φυσικά ορισμένες μαθηματικές αναφορές, αλλά αυτές είναι μάλλον ισχνές και δε διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Το ίδιο ισχύει και για ακόμη ένα αναφερόμενο βιβλίο, το «Αδελφοί Καραμιάζοφ» του Fyodor Mikhailovich Dostoyevsky. Η ένταξη των μαθηματικών εννοιών υπεισέρχεται στην υπόθεση και των δύο βιβλίων με τη μορφή μεταφορών και υπαινιγμών καταλαμβάνοντας οπωσδήποτε δευτερεύουσα σημασία στη συνολική πλοκή. Όπως πολύ σωστά αναφέρει η Ευγενία Κολέζα, στην

πρώτη κατηγορία ανήκει κάθε λογοτεχνικό κείμενο το οποίο: «...επικαλείται τα Μαθηματικά, για να στηρίξει μια θεωρία, υιοθετώντας έμμεσα την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι μια άρτια συγκροτημένη επιστήμη που μπορεί να εξηγήσει τα πάντα» (Κολέζα, 2009, σελ. 507).

Έχοντας εξετάσει την πρώτη από τις τέσσερις μορφές σχέσης μεταξύ μαθηματικών και λογοτεχνίας για την ανεύρεση ενός ορισμού του όρου «μαθηματική λογοτεχνία», σειρά έχουν οι υπόλοιπες τρεις μορφές. Ύστερα από μία σύντομη εξέταση, μπορεί κανείς να υποστηρίξει μία επικάλυψη. Πιο ειδικά, ένα βιβλίο το οποίο δημιουργείται με πηγή έμπνευσης τα Μαθηματικά είναι πολύ πιθανό να έχει σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο ή/και να υπηρετεί εκπαιδευτικούς στόχους. Υπάρχει λοιπόν εδώ μία ανάγκη για σαφέστερη οριοθέτηση, ίσως και σύμπτυξη των μορφών σχέσης.

Μια αξιόλογη προσέγγιση για τον ορισμό της μαθηματικής λογοτεχνίας επιχειρεί ο Τεύκρος Μιχαηλίδης. Σύμφωνα με τη θεώρησή του, μαθηματικά λογοτεχνήματα είναι όσα:

- 1) έχουν σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο και χρησιμοποιούν τη μυθοπλασία ως αφορμή για την εισαγωγή, ανάπτυξη ή/και διδασκαλία ορισμένων μαθηματικών εννοιών  
ή
- 2) έχουν πρωταγωνιστή έναν μαθηματικό και αναδεικνύουν μέσα από την πλοκή την ιδιότητά του (Μιχαηλίδης, 2002).

Οποσδήποτε, πρόκειται για μία γόνιμη θεώρηση του όρου «μαθηματική λογοτεχνία» στις περισσότερες περιπτώσεις. Ωστόσο, μία επίμονη εξέτασή της προξενεί ορισμένους προβληματισμούς. Συγκεκριμένα, η χρήση της μυθοπλασίας μόνο ως αφορμή υποβιβάζει σε κάποιο βαθμό τη λογοτεχνία σε πλαίσιο. Ακόμη, μία τέτοια θεώρηση ενδεχομένως αποκλείει την είσοδο σημαντικών έργων στην περιοχή της μαθηματικής λογοτεχνίας.

Σχετικά με το πρώτο σχόλιο, ο συγγραφέας Απόστολος Δοξιάδης στο βιβλίο του «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Goldbach» είναι ξεκάθαρος ως προς την αξία της λογοτεχνίας. Χαρακτηριστικά γράφει: «Για μένα, η λογοτεχνία είναι λογοτεχνία ανεξάρτητα από το θέμα και δικαιολογείται μόνο στο μέτρο που είναι καλή λογοτεχνία. Και αν και θαυμάζω τα βιβλία που γράφονται με σαφή στόχο να εξηγήσουν έναν χώρο, όπως “Ο Κόσμος της Σοφίας” του Jostein Gaarder για τη φιλοσοφία, και ο “Number Devil” του Hans Magnus Enzensberger για τα μυστήρια

των αριθμών, θεωρώ ότι λόγω αυτής της πρόθεσης αποκλείονται αυτοβούλως από τους στόχους της καθαρής μυθιστοριογραφίας. Και τα δύο παραδείγματα είναι σπουδαία βιβλία. Αλλά δεν είναι σπουδαία μυθιστορήματα» (Δοξιάδης, 2001).

Μέσα από τις διαφωτιστικές του σημειώσεις ο Απόστολος Δοξιάδης, επισημαίνει την αυθυπαρξία της λογοτεχνίας. Συνοψίζοντας τα λεγόμενά του, ένα μυθιστόρημα είναι καταρχήν λογοτέχνημα και, όπως είναι γνωστό, η λογοτεχνία αποτελεί ένα αυτόνομο πολιτισμικό φαινόμενο. Είναι ένα δημόσιο αγαθό που υπάρχει, για να προσφέρει κατά βάση αισθητική απόλαυση και όχι για να υπηρετήσει εξωλογοτεχνικούς σκοπούς. Συνεπώς, η λογοτεχνία δεν ταυτίζεται με τις μορφές λόγου που επιδιώκουν τη γνώση, την πειθώ ή τον φιλοσοφικό στοχασμό. Ο πυρήνας της είναι η δημιουργικότητα, η φαντασία και η αισθητική τέρψη (Παππάς, Κατσιγιάννης, & Διαμαντοπούλου, 2015). Συμπερασματικά, εξ ορισμού ένα μαθηματικό λογοτέχνημα δε δύναται να χρησιμοποιεί ως αφορμή τη μυθοπλασία, προκειμένου να επιτύχει γνωστικούς στόχους. Διότι εάν το κάνει, απομακρύνεται από το πεδίο των λογοτεχνημάτων.

Σχετικά τώρα με το δεύτερο σχόλιο, την άποψη περί αποκλεισμού σημαντικών έργων από την περιοχή της μαθηματικής λογοτεχνίας, εξαιρετικής σημασίας είναι η αναφορά σε συγκεκριμένα λογοτεχνικά βιβλία. Αντιπροσωπευτική είναι η σύγκριση δύο πολύ γνωστών έργων. Πρόκειται για τα βιβλία: «Οι περιπέτειες της Αλίκης στη Χώρα των θαυμάτων» και «Flatland». Και τα δύο έργα περιλαμβάνουν πάμπολλες μαθηματικές αναφορές. Συγγραφέας του πρώτου είναι ο Charles Lutwidge Dodgson, περισσότερο γνωστός με το ψευδώνυμο Lewis Carroll, ενώ συγγραφέας του δεύτερου είναι ο Edwin Abbott Abbott. Και οι δύο ήταν άνθρωποι με μαθηματικές σπουδές και ισχυρό μαθηματικό ενδιαφέρον, το οποίο μετέφεραν στα βιβλία τους. Μάλιστα, οι ομοιότητες των δύο έργων δε σταματούν εκεί, καθώς αμφότερα μέσω αλληγοριών καυτηριάζουν με έντονο τρόπο διάφορες αντιλήψεις της αντίστοιχης εποχής.

Ωστόσο, ο Τεύκρος Μιχαηλίδης παρά τα κοινά χαρακτηριστικά των δύο βιβλίων κατατάσσει βάσει της θεώρησής του μόνο το δεύτερο στη μαθηματική λογοτεχνία (Μιχαηλίδης, 2002). Ποιο κριτήριο άραγε διαφοροποιεί τόσο έντονα τα δύο βιβλία και συνάμα απαγορεύει τον χαρακτηρισμό του πρώτου ως μαθηματικού λογοτεχνήματος; Όπως ισχυρίζεται ο Μιχαηλίδης αναφερόμενος στη Flatland: «Το έργο, λοιπόν, έχει αφ' ενός όλα τα χαρακτηριστικά ενός μυθιστορήματος - ο μύθος και η αφήγηση είναι αναπόσπαστα στοιχεία του - και αφ' ετέρου ένα σαφώς

μαθηματικό υπόβαθρο, αφού η πλοκή του στηρίζεται θεμελιωδώς σε μαθηματικές έννοιες. Με αυτή την έννοια το χαρακτηρίζουμε ως το πρώτο κυριολεκτικά μαθηματικό μυθιστόρημα» (Μιχαηλίδης, 2002, σελ 638).

Πράγματι, στο σύνολό της η Flatland ασχολείται με συγγενείς μαθηματικές έννοιες από τον χώρο της γεωμετρίας. Ειδικότερα, όπως αναφέρει η περίληψη του βιβλίου: «Μια συναρπαστική περιπέτεια μαθηματικής φαντασίας σ' έναν διδιάστατο κόσμο, ο οποίος κατοικείται από νοήμονα γεωμετρικά σχήματα που κινούνται, μιλούν και έχουν ανθρώπινα αισθήματα. Την τελευταία ημέρα του 1999, παραμονή της νέας χιλιετίας, ο αφηγητής, ένα ορθολογικό Τετράγωνο, θα δει την ισορροπία της επίπεδης ζωής του να ανατρέπεται όταν ένας μυστηριώδης επισκέπτης του αποκαλύπτει τα μυστικά της Τρίτης Διάστασης» (Abbott, 2008). Από την άλλη πλευρά, στο βιβλίο «Οι περιπέτειες της Αλίκης στη Χώρα των θαυμάτων» οι μαθηματικές ιδέες είναι διασκορπισμένες και λιγότερο συγγενικές αναμεταξύ τους. Αλλού η μαθηματική αναφορά έχει ως θέμα την προπαίδεια και αλλού γίνεται νύξη για τους αρνητικούς αριθμούς (Κολέζα, 2009).

Το ερώτημα όμως είναι το εξής: Θα μπορούσε κάποιος να διηγηθεί την ιστορία χωρίς τις συγκεκριμένες μαθηματικές αναφορές; Η απάντηση είναι πιθανότατα όχι. Αντίθετα, σε ιστορίες όπως είναι «Ο μικρός πρίγκιπας» του Antoine de Saint Exupery, οι μαθηματικές αναφορές είναι ισχνές και δεν παίζουν καθοριστικό ρόλο στην πλοκή. Κατά την επίσκεψή του στον τέταρτο πλανήτη, ο μικρός πρίγκιπας γνωρίζει έναν επιχειρηματία ο οποίος μετρούσε τα άστρα. Ο εν λόγω άνθρωπος αγαπά τους αριθμούς και αραδιάζει αρκετές προσθέσεις μπροστά στον έκπληκτο μικρό πρίγκιπα. Ωστόσο, αυτές οι μαθηματικές πράξεις είναι απλώς διακοσμητικές. Οπότε, σε αυτήν την περίπτωση η ιστορία θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς τις συγκεκριμένες και λίγες ούτως ή άλλως μαθηματικές αναφορές, χωρίς να επηρεαστεί δραστικά η υπόθεση (Saint-Exupéry, 2016).

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στην ανάγκη ανεύρεσης ενός πιο εύστοχου και συμπεριληπτικού ορισμού του όρου «μαθηματικό λογοτέχνημα». Για παράδειγμα, ένας ορισμός θα μπορούσε να είναι ο ακόλουθος: ως μαθηματικό λογοτέχνημα νοείται κάθε λογοτεχνικό έργο που εμπεριέχει μαθηματικές αναφορές τις οποίες εάν στερούνταν θα παρουσίαζε κενά στην πλοκή του. Υπό μία τέτοια σκοπιά, ο δρόμος ανοίγει για την αναγνώριση περισσότερων έργων ως μαθηματικά λογοτεχνήματα και συνακόλουθα για τη μεγιστοποίηση των εκπαιδευτικών ευκαιριών προς αξιοποίηση. Πρόκειται, λοιπόν, κυρίως για μία διεύρυνση της οπτικής.

*Το παιχνίδι είναι το ξεφάντωμα του εφικτού.*

*Martin Buber (1878-1965, Αυστροεβραϊός φιλόσοφος)*

## **Μαθηματικά και παιχνίδι**

### **Ωφέλειες στη μάθηση**

Η έννοια που μπορεί να σκιαγραφήσει κάλλιστα τις σχέσεις παιχνιδιού και εκπαίδευσης είναι αυτή της ευμεταβλητότητας. Μέχρι και τον 18<sup>ο</sup> αιώνα οι ενήλικες εμπλεκόμενοι στην παιδική εκπαίδευση χρησιμοποιούν το παιχνίδι ως επί το πλείστον, για να αυξάνουν τη μαθητική συμμετοχή. Ωστόσο, με την πάροδο των αιώνων και κυρίως από το 1970 κι έπειτα ανάμεσα στην εκπαιδευτική ερευνητική κοινότητα κυριαρχεί ολοένα και περισσότερο η αντίληψη ότι το παιχνίδι είναι ένα μέσο που συνεισφέρει στη μάθηση του παιδιού. Ιδιαίτερα στη μαθηματική εκπαίδευση, οι εκπαιδευτικοί ερευνητές αναζητούν πιθανές ωφέλειες κυρίως στην κατεύθυνση των κινήτρων και των μαθησιακών επιδόσεων, οι οποίες να απορρέουν από τη χρήση παιχνιδιών με μαθηματικές προεκτάσεις. Η διδακτική αξιοποίηση τους σε διάφορες έρευνες δίνει λαμπρές υποσχέσεις (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2009).

Ο Bert van Oers θεωρεί ότι το παιδικό παιχνίδι ενσωματώνει εγγενώς ορισμένες μαθησιακές διαδικασίες. Αναφορικά με τα μαθηματικά, πιστεύει ότι η παιγνιώδης δραστηριότητα προσφέρει πολλές ευκαιρίες μάθησης. Ορίζει μάλιστα δύο προϋποθέσεις για τη διαμόρφωση ενός τέτοιου μαθησιακά γόνιμου πλαισίου. Η πρώτη είναι ο πολύτροπος χειρισμός διάφορων μαθηματικών συμβόλων κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Η δεύτερη είναι ο αναστοχασμός των προηγούμενων δράσεων και η νοητική προσπάθεια για την αντιστοίχιση συμβόλων κι εννοιών με έναυσμα εύστοχα ερωτήματα από τον/την εκπαιδευτικό μετά τη λήξη του παιχνιδιού.

Ο ίδιος ερευνητής σε μία έρευνά του με παιδιά προσχολικής και πρωτοσχολικής ηλικίας, συγκεκριμένα τεσσάρων έως επτά χρόνων, εξέτασε παιχνίδια ρόλων, στα οποία υπήρχε εμπλοκή, υποστήριξη και καθοδήγηση από την πλευρά του/της εκπαιδευτικού. Ένας βασικός στόχος αυτής της καθοδηγούμενης συμμετοχής υπήρξε η προαγωγή της μαθηματικής σκέψης των μικρών παιδιών. Πιο συγκεκριμένα, τα μικρά παιδιά μέσα από το παιχνίδι ρόλων είχαν πολλές ευκαιρίες να πραγματοποιήσουν διάφορες μαθηματικές ενέργειες καθώς και να αντιληφθούν ορισμένες μαθηματικές έννοιες. Ο ερευνητής διέκρινε τις ακόλουθες ενέργειες: ταξινόμηση, μέτρηση, αντιστοίχιση, εκτίμηση κατά προσέγγιση, επίλυση απλών

μαθηματικών προβλημάτων και χρηματικές συναλλαγές. Ακόμη, κατέγραψε τις εξής λογικομαθηματικές έννοιες: ποσότητες, χρονικές και χωρικές τοποθετήσεις, σχηματοποιήσεις/συμβολισμοί και διαστάσεις. Συνεπώς, το παιχνίδι ρόλων μπορεί να περιλαμβάνει μία έντονη και συμβατή με την αληθινή ζωή μαθηματική δραστηριοποίηση. Εφόσον μάλιστα ο/η εκπαιδευτικός παρέχει στα παιδιά ανατροφοδότηση σχετικά με τις αναδυόμενες μαθηματικές έννοιες, αυτό πιθανώς σημαίνει ανάπτυξη του παιδικού, μαθηματικού συλλογισμού (van Oers, 1996).

Με παρόμοιο χειρισμό είναι δυνατόν ένα παιχνίδι και η συνακόλουθη συζήτηση παιδιών και εκπαιδευτικού να προάγει τον μαθηματικό συλλογισμό των παιδιών σχετικά με τη λογικομαθηματική έννοια της πιθανότητας. Σε μία ελληνική έρευνα παιδιά προσχολικής ηλικίας είχαν την ευκαιρία να παίξουν απλά πιθανοτικά παιχνίδια, να κάνουν αλλαγές στον σχεδιασμό τους και να συμμετάσχουν σε συζήτηση, προκειμένου να κατανοήσουν τι σημαίνει ο όρος «πιθανότητα» (Tatsis, Kafoussi, & Skoumpourdi, 2008)

Μία άλλη έρευνα κατέδειξε τον θετικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν απλά μαθηματικά παιχνίδια στους νοερούς μαθηματικούς υπολογισμούς. Σε αυτή την περίπτωση η ερευνήτρια σχεδίασε δύο απλά μαθηματικά παιχνίδια με κάρτες και ζάρια. Οι σκοποί αμφοτέρων των παιχνιδιών σχετίζονταν με μετατροπές κι αντιστοιχίσεις ακέραιων αριθμών, δεκαδικών αριθμών, κλασμάτων και ποσοστών. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της τάξης συμμετείχαν με ενθουσιασμό στα δύο παιχνίδια, πραγματοποίησαν μαθηματικές συζητήσεις, τεκμηρίωσαν προφορικά ορισμένες κινήσεις τους στο παιχνίδι κι αύξησαν την ικανότητά τους να εκτελούν μαθηματικές πράξεις με το μυαλό (Rowe, 2001).

Τα απλά μαθηματικά παιχνίδια μπορούν να έχουν μία θετική επιρροή και στις αρχικές επαφές των παιδιών με τα μαθηματικά. Μία έρευνα που έγινε στις Η.Π.Α. σε παιδιά προσχολικής ηλικίας (τριάμισι έως πεντέμισι ετών) έδειξε ότι ένα απλό μαθηματικό παιχνίδι προώθησε σημαντικά βασικές, μαθηματικές δεξιότητες. Συγκεκριμένα, το εν λόγω παιχνίδι ήταν επιτραπέζιο και περιελάμβανε διάφορα πόνια, ένα spinner με δύο πιθανές ενδείξεις και μία χαρτονένια επιφάνεια σχήματος ορθογωνίου χωρισμένη κατά μήκος σε δέκα ισομεγέθη τμήματα. Πάνω στο κάθε τμήμα αναγραφόταν ο αντίστοιχος αριθμός στην αριθμητική του μορφή, έτσι ώστε το παιχνίδι να θυμίζει μία κλασική αριθμογραμμή. Τα παιδιά τα οποία έπαιζαν υπό την καθοδήγηση των ερευνητών με το συγκεκριμένο παιχνίδι επέδειξαν εμφανή βελτίωση στην αναγνώριση αριθμών, στη σύγκριση μεγεθών, στην ακρίβεια εκτίμησης για την

τοποθέτηση αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή και στη μέτρηση (Ramani, Siegler, & Hitti, 2012).

Ακόμη όμως και δίχως να υπάρχει σαφής ανατροφοδότηση από τους ενήλικες, το παιχνίδι δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να συνομιλήσουν τόσο αναμεταξύ τους όσο και με τον/την εκπαιδευτικό. Η συζήτηση μπορεί να αφορά στην ορθότητα των κινήσεων, των απαντήσεων ή/και των στρατηγικών. Ανεξαρτήτως θεματολογίας όμως, το ενδιαφέρον στοιχείο είναι φυσικά ότι υπάρχουν περισσότερες ευκαιρίες για μαθηματικό διάλογο μες στην τάξη. Μία τέτοια προώθηση της μαθηματικής συζήτησης έχει καίρια σημασία, καθώς είναι σημαντικό τα παιδιά όχι μόνο να κάνουν μαθηματικά αλλά και να μιλάνε για τα μαθηματικά (Ernest, 1986).

Πέρα από τα παραπάνω, τα παιχνίδια που περιλαμβάνουν μαθηματικές δραστηριότητες συνιστούν ένα εξαιρετικό, εναλλακτικό πεδίο για εξάσκηση και εμπέδωση σε νεοαποκτηθείσες έννοιες και πράξεις (Ernest, 1986). Ακόμη και γνωστά εμπορικά παιχνίδια θα μπορούσαν να λειτουργήσουν επικοδομητικά προς αυτή την κατεύθυνση. Για παράδειγμα, μετά την τυπική διδασκαλία των προσθέσεων αριθμών μέχρι το έξι την κλασική εξάσκηση μπορεί να αντικαταστήσει ένα εμπορικό παιχνίδι Φιδάκι. Φυσικά, σε μία τέτοια περίπτωση είναι καλό ο/η εκπαιδευτικός να τονίσει στα παιδιά ότι για να κουνήσουν το πiónι τους, χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουν το άθροισμα των αριθμών που πέτυχαν με τα δύο ζάρια. Με αυτόν τον τρόπο τα παιδιά αντί να αφιερώνουν την ώρα τους σε τυποποιημένες ασκήσεις, μπορούν να παίζουν και να μαθαίνουν παράλληλα.

Εκτός από την εξάσκηση, τα μαθηματικά παιχνίδια μπορούν σαφώς να βοηθήσουν τα παιδιά να αποκτήσουν νέες μαθηματικές έννοιες και να εμβαθύνουν σε αυτές (Ernest, 1986). Και πάλι με απλές παραλλαγές, γνωστά εμπορικά παιχνίδια μπορούν να οδηγήσουν σε νέες μαθηματικές έννοιες. Τα χρωματιστά building blocks μπορούν για παράδειγμα να βοηθήσουν τα παιδιά, ώστε αυτά να διαμορφώσουν ορισμένους απλούς συλλογισμούς εξισώσεων, του τύπου ότι ένα κίτρινο τουβλάκι είναι ισοδύναμο με τρία γαλάζια τουβλάκια.

Επιπρόσθετα, τα μαθηματικά παιχνίδια προσφέρουν στα παιδιά δυνατότητες να σχεδιάσουν και να εξελίξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Αυτές περιλαμβάνουν τις μεθόδους δοκιμής και σφάλματος, την απλοποίηση σύνθετων έργων, την αναζήτηση μοτίβων, τη διαμόρφωση και τον έλεγχο υποθέσεων, την αιτιολογία, την απόδειξη και τη διάψευση (Ernest, 1986). Ένα εμπορικό παιχνίδι με

τέτοιες μαθηματικές προεκτάσεις είναι το «Μάντεψε ποιος», το οποίο επιτυγχάνει μία πρώτη εξοικείωση με τη δημιουργία και τη διάψευση υποθέσεων.

Πέρα από τα παραπάνω, οι παιγνιώδεις δραστηριότητες με μαθηματικό περιεχόμενο μπορούν να ενσωματώνουν περισσότερες από μία μαθηματικές έννοιες. Με αυτόν τον τρόπο τα παιδιά προσπαθούν να βρουν συνδέσεις ανάμεσα στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, κάνουν πειραματισμούς κι ανακαλύπτουν εναλλακτικές προσεγγίσεις για ένα δεδομένο μαθηματικό θέμα. Καθώς παίζουν το μαθηματικό παιχνίδι, οι μαθητές και οι μαθήτριες επικοινωνούν συχνά αναμεταξύ τους, ώστε να εκφράσουν προς τα υπόλοιπα παιδιά τις ιδέες και τους προβληματισμούς τους. Κατά αυτόν τον τρόπο το παιχνίδι ουσιαστικά ενισχύει τον μαθηματικό διάλογο που λαμβάνει χώρα μέσα στη σχολική αίθουσα (Caswell, 2002).

Ο Pierre van Hiele, ο οποίος είναι ευρέως γνωστός για τη θεωρία του σχετικά με την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης σε επίπεδα, προχωράει ένα βήμα παραπέρα. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας στο σχολείο είναι καλό να ξεκινάει με το παιχνίδι. Ο ίδιος όντας παιδαγωγός με πολυετή εμπειρία μέσα στις σχολικές αίθουσες προτείνει έναν κύκλο παιγνιωδών δραστηριοτήτων με υλικά, όπως το tangram puzzle, τα μοτίβα ψηφιδωτών, διάφορα χάρτινα γεωμετρικά σχήματα. Ως στόχο θέτει την ομαλή και πετυχημένη μετακίνηση του παιδικού γεωμετρικού συλλογισμού από το οπτικό επίπεδο στο περιγραφικό επίπεδο κι ύστερα στο επίπεδο της άτυπης επαγωγής. Επισημαίνει ότι μέσα από αυτόν τον διδακτικό κύκλο τα παιδιά προάγουν τη γεωμετρική τους σκέψη απολαμβάνοντας παράλληλα τη μαθησιακή διαδικασία, καθώς τα ίδια θεωρούν ότι απλά παίζουν. Μαθαίνουν λοιπόν αβίαστα, χωρίς να χρειάζεται να έχουν από πριν κάποια πρόθεση για μάθηση.

Κατά τον ίδιο τα περισσότερα παιδιά δεν έχουν φτάσει στο επίπεδο της άτυπης επαγωγής και συνεπώς αποτελεί πιθανότατα ματαιοπονία κάθε προσπάθεια για μία διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας βασισμένη σε ορισμούς κι αξιώματα. Σε αντίθεση με μία τέτοια αφηρημένη κι απόμακρη για τον παιδικό νου διδακτική προσέγγιση, ο Hiele αντιπροτείνει την οργάνωση κάθε μαθήματος γεωμετρίας σε τρεις επιμέρους φάσεις. Στην πρώτη φάση, την οποία ο ίδιος ονομάζει «φάση έρευνας», τα παιδιά παίζουν με τα διαθέσιμα υλικά ελεύθερα ανακαλύπτοντας έτσι τη δομή των διάφορων σχημάτων. Στη δεύτερη φάση, την οποία αποκαλεί «φάση άμεσου προσανατολισμού», οι ανατιθέμενες δραστηριότητες επικεντρώνουν την προσοχή των παιδιών στις ιδιότητες των σχημάτων. Στην τρίτη φάση, τη λεγόμενη «φάση της εξήγησης», ο/η εκπαιδευτικός εισάγει τη μαθηματική ορολογία και



προτρέπει τα παιδιά να τη χρησιμοποιούν στις διάφορες μαθηματικές συζητήσεις. Στην τέταρτη φάση, τη «φάση του ελεύθερου προσανατολισμού», ο/η εκπαιδευτικός προτείνει στα παιδιά δραστηριότητες με διάφορες πιθανές λύσεις. Στην πέμπτη και τελευταία φάση, δηλαδή τη «φάση της ενσωμάτωσης», ο/η εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τα παιδιά να ενώσουν/συνδυάσουν όσα έχουν μάθει (van Hiele, 1998).

### **Διάνοιξη της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση**

Στην αρχή της σχολικής του σταδιοδρομίας κάθε παιδί ξεκινάει με ένα διαφορετικό επίπεδο μαθηματικής γνώσης συγκριτικά με τα υπόλοιπα παιδιά. Αυτό το ξεχωριστό σημείο μαθησιακής εκκίνησης συχνά επηρεάζει ανάλογα τις σχολικές επιδόσεις του παιδιού τόσο στο δημοτικό σχολείο όσο και στη δευτεροβάθμια σχολική εκπαίδευση. Μάλιστα, η σχέση ανάμεσα στο πρώιμο και στο ύστερο επίπεδο μαθηματικής γνώσης είναι δύο φορές πιο δυνατή σε σύγκριση με την αντίστοιχη σχέση αναγνωστικής δεξιότητας (Duncan et al., 2007). Είναι σημαντικό, λοιπόν, να γίνουν έντονες προσπάθειες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες που ξεκινούν με ισχνές μαθηματικές γνώσεις να υπερκαλύπτουν τη μαθησιακή διαφορά με τα υπόλοιπα παιδιά όσο το δυνατόν νωρίτερα.

Η ενσωμάτωση μαθηματικών παιχνιδιών μέσα στη σχολική αίθουσα μοιάζει να είναι ένας εξαιρετικός σύμμαχος σε αυτές τις εκπαιδευτικές προσπάθειες. Παιχνίδια τα οποία προσομοιάζουν την αριθμογραμμή συστήνουν βασικές μαθηματικές δεξιότητες στα μικρά παιδιά, όπως είναι η ταυτοποίηση αριθμών, η κατανόηση των αριθμητικών μεγεθών και η μέτρηση. Ένα γνωστό εμπορικό παιχνίδι το οποίο ανταποκρίνεται στις παραπάνω προϋποθέσεις είναι το επιτραπέζιο «Φιδάκι». Ουσιαστικά, πρόκειται για μία αριθμογραμμή από τον αριθμό «ένα» μέχρι το «εκατό» χωρισμένη σε δέκα ισομήκη μέρη. Καθώς το παιδί παίζει, βιώνει οπτικά, ακουστικά, κιναισθητικά και χρονικά τους αριθμούς. Συνεπώς, το εν λόγω παιχνίδι προσφέρει μία πολυτροπική μαθηματική εμπειρία στο μικρό παιδί σχετικά με τη γραμμική αναπαράσταση των αριθμητικών μεγεθών (Siegler, 2009).

Φυσικά, το «Φιδάκι» αποτελεί ένα μονάχα παράδειγμα. Με όχημα τη φαντασία οι εκπαιδευτικοί γενικά και κυρίως οι νηπιαγωγοί μπορούν να σχεδιάσουν παρόμοια μαθηματικά παιχνίδια και να τα ενσωματώσουν μέσα στη μαθησιακή διαδικασία. Είναι πολύ σημαντικό να υπάρξει μία φροντίδα, ώστε όλα τα παιδιά να ξεκινούν τη φοίτηση στο δημοτικό σχολείο έχοντας κατακτήσει ορισμένες βασικές, μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες.

## Ψυχολογικές ωφέλειες

Ο Paul Ernest θεωρεί ότι η επίδραση του παιχνιδιού στον ψυχολογικό τομέα είναι ιδιαίτερα σημαντική. Η συμμετοχή σε παιχνίδια με μαθηματικές προεκτάσεις, όπως το σκάκι, η Μονόπολη, τα διάφορα παιχνίδια με την τράπουλα, γεννά στους παίκτες συναισθήματα ενθουσιασμού κι απόλαυσης εντείνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την εμπλοκή τους. Οποσδήποτε, η διδακτική αξιοποίηση των παιχνιδιών στο μαθηματικό μάθημα ανατρέπει τη διδακτική ρουτίνα εμπλουτίζοντας ευχάριστα τη μαθησιακή διαδικασία κι αυξάνει τη συμμετοχή των μαθητών. Επομένως, η εισαγωγή παιχνιδιών στη μαθηματική αίθουσα έχει ως πρωταρχικά πλεονεκτήματα την αύξηση των μαθητικών κινήτρων και της μαθητικής συμμετοχής. Μάλιστα, αυτού του είδους η ενεργητική συμμετοχή, όπως την προάγουν τα παιχνίδια, αποτελεί θεμέλιο λίθο για την επίτευξη της μάθησης, ειδικά της μαθηματικής μάθησης κατά πολλούς ψυχολόγους, όπως ο Piaget, ο Bruner και ο Dienes.

Επιπλέον, ο ίδιος ερευνητής αναγνωρίζει ως μία παράπλευρη ωφέλεια την ενίσχυση της συνεργασίας, καθώς τα περισσότερα παιχνίδια είναι ομαδικά. Η συμμετοχή σε μαθηματικά (κι όχι μόνο) παιχνίδια αντικαθιστά το άτομο με την ομάδα και ανταλλάσσει την ατομική εργασία με τη συνεργασία. Υπό αυτές τις συνθήκες η μαθηματική μάθηση παύει να είναι ατομική και γίνεται ομαδική. Τα παιδιά δρουν στο πλαίσιο ομάδων και καταλαβαίνουν σταδιακά ότι μόνο με μία επιτυχή διαχείριση του εαυτού τους ως μέρος της ομάδας μπορούν να παίξουν αποτελεσματικά. Μάλιστα, εξαιτίας του ότι το παιχνίδι είναι μια δραστηριότητα εξαιρετικά επιθυμητή από τα παιδιά, πολλές φορές η επιθυμία του ατόμου ή της ομάδας υποτάσσεται στις επιθυμίες των άλλων. Έτσι, ακόμα και μια ανταγωνιστική σχέση μπορεί να εξελιχθεί σε σχέση συνεργασίας, προκειμένου να υπάρξει παιχνίδι (Ernest, 1986).

Μία άλλη σημαντική, θετική συνέπεια των μαθηματικών παιχνιδιών αποτελεί η δημιουργία ενός υποστηρικτικού, μαθησιακού περιβάλλοντος, το οποίο απομακρύνει τον φόβο της αποτυχίας. Κάθε παιδί λαμβάνει υποστήριξη από τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης κι αυτή η θετική αλληλεπίδραση σταδιακά αυξάνει την αυτοπεποίθησή του. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν έχουν πλέον άγχος μήπως κάνουν κάποιο λάθος. Αντίθετα, απολαμβάνουν με ηρεμία τη μαθησιακή διαδικασία και οικοδομούν μαζί με τους συνομήλικους τους μία επαυξημένη μάθηση μέσα σε αυτό που ο Lev Vygotsky ονόμασε Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Caswell, 2002).

## Συνοψιση των ωφελειών

Ο Steven Nisbet και η Anne Williams συνοψίζουν στο άρθρο τους πολλά από τα βασικά οφέλη της ενσωμάτωσης μαθηματικών παιχνιδιών μες στη μαθηματική αίθουσα. Συγκεκριμένα, αναφέρουν πως η χρήση μαθηματικών παιχνιδιών και παιγνιωδών δραστηριοτήτων αυξάνει το μαθητικό ενδιαφέρον, εντείνει την ευχαρίστηση συμμετοχής, μειώνει το μαθητικό άγχος, ισχυροποιεί τα κίνητρα μάθησης και βελτιώνει την κατανόηση πάνω σε διάφορες μαθηματικές έννοιες. Μάλιστα, κατά τους δύο αυτούς ερευνητές η συνολική βελτίωση της μαθητικής στάσης απέναντι στο μαθηματικό μάθημα και η αύξηση της μαθηματικής κατανόησης αποτελούν δύο αλληλεξαρτώμενες μεταβλητές (Nisbet & Williams, 2009).

Άλλες ωφέλειες οι οποίες απορρέουν από τη διδακτική αξιοποίηση των μαθηματικών παιχνιδιών είναι η ενδυνάμωση του μαθηματικού διαλόγου μες στη σχολική αίθουσα, η προσφορά άφθονων μαθησιακών ευκαιριών για κάλυψη πιθανών γνωστικών κενών και η καλλιέργεια ενός ομαδικού πνεύματος κατά τη μαθηματική εργασία.

## Τρόποι σύμπραξης

Όπως και στην περίπτωση της λογοτεχνίας, μία συνεργασία παιχνιδιού και μαθηματικής μάθησης μπορεί να αποδώσει ποικίλα σχήματα αλληλεπίδρασης. Ο Bert Van Oers εντοπίζει δύο τέτοια σχήματα. Στο πρώτο σχήμα η μαθηματική μάθηση κρατάει τα πρωτεία της παραχωρώντας στο παιχνίδι μονάχα ένα μέρος της ως πρόσφορο έδαφος για την ενεργητική παιδική δράση. Το μαθηματικό παιχνίδι σε αυτή, λοιπόν, την περίπτωση έχει έναν δευτερεύοντα ρόλο λειτουργώντας μόνον επικουρικά ως ένα επιπρόσθετο μέσο εξάσκησης σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Στόχος εδώ είναι τα Μαθηματικά να γίνουν σε κάποιο βαθμό παιγνιώδη. Μπορεί κανείς να αναγνωρίσει το συγκεκριμένο σχήμα αλληλεπίδρασης σε γνωστά εμπορικά παιχνίδια, όπως το Ντόμινο, η Μονόπολη κ.ά.

Στο δεύτερο σχήμα αλληλεπίδρασης η μαθηματική μάθηση εκκινεί μέσα από το παιχνίδι, στο οποίο παραχωρεί έναν συμπληρωματικό ρόλο. Οπότε, εδώ στόχος αποτελεί η μαθηματικοποίηση της παιδικής παιγνιώδους δραστηριότητας. Αυτό το σχήμα διευρύνει ιδιαίτερα το φάσμα κι αναιρεί την ανάγκη για την ύπαρξη μίας προκαθορισμένης δομής στο μαθηματικό παιχνίδι. Ακόμη και οι αυθόρμητες μαθηματικές ενέργειες, όπως η αρίθμηση, η μέτρηση ή η σύγκριση, σε οποιοδήποτε

παιδικό παιχνίδι είναι μαθησιακά πρόσφορες. Χρησιμοποιώντας τες ο/η εκπαιδευτικός μπορεί μέσα από κατάλληλους διδακτικούς χειρισμούς, όπως εύστοχα ερωτήματα, να οδηγήσει το παιδί στη μαθηματική μάθηση (van Oers, 1996).

### **Το μαθηματικό παιχνίδι**

Τι εννοεί κανείς όμως με τον όρο «μαθηματικό παιχνίδι»; Ο Frank Tapson κατατάσσει τα μαθηματικά παιχνίδια σε δύο γενικές κατηγορίες:

- 1) τα εκπαιδευτικά μαθηματικά παιχνίδια  
και
- 2) τα γενικά μαθηματικά παιχνίδια (Tapson, 1997).

### ***Εκπαιδευτικά μαθηματικά παιχνίδια***

Στην πρώτη κατηγορία ο ίδιος εντάσσει όσα παιχνίδια σχεδιάζονται ειδικά για τη μαθηματική διδασκαλία. Τέτοια παιχνίδια προσφέρουν στα παιδιά ένα κατάλληλο πεδίο, για να εξασκήσουν και να ενισχύσουν διάφορες μαθηματικές ικανότητες και έννοιες, όπως για παράδειγμα οι συντεταγμένες, τα κλάσματα και οι αρνητικοί αριθμοί (Tapson, 1997). Προβαίνοντας στη σύσταση ειδικότερων υποκατηγοριών, τα εκπαιδευτικά μαθηματικά παιχνίδια μπορούν να έχουν σχεδιαστεί είτε από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό είτε να αφορούν εμπορικά προϊόντα.

Ορισμένες περιπτώσεις εκπαιδευτικών μαθηματικών παιχνιδιών που σχεδιάζονται από εκπαιδευτικούς είναι οι ακόλουθες:

- **Μαθηματικά επιτραπέζια παιχνίδια**, τα οποία μπορούν να αποτελούν παραλλαγές γνωστών εμπορικών παιχνιδιών, όπως το «Φιδάκι», ώστε η νίκη ενός παίκτη να εξαρτάται περισσότερο από μαθηματικές στρατηγικές παρά από την τύχη.

(Σε αυτήν την κατηγορία ανήκει το μαθηματικό παιχνίδι της παρούσας έρευνας.)

- **Μαθηματικά σταυρόλεξα**, όπου στόχος είναι η εύρεση του μαθηματικού όρου που αντιστοιχεί σε έναν ορισμό ή περιγραφή ή η εύρεση της λεκτικής γραφής που αντιστοιχεί σε κάποιο μαθηματικό σύμβολο. Για παράδειγμα:

### Οριζόντια

- 1) Αριθμός που αποτελείται από μία δεκάδα και έξι μονάδες
- 2) Πριν το δύο
- 3) Λέγεται το +
- 4) 9-2 (αντίστροφα)
- 5) Λέγεται διαφορετικά το 1

<sup>1</sup> Δ <sup>1</sup>	E <sup>2</sup>	Κ	Α	E <sup>3</sup>	Ξ	I <sup>4</sup>	
Υ	Ν			Κ		Σ	E <sup>5</sup>
Ο	Τ			Α		Ο	Ι
	<sup>2</sup> E	Ν	Α	Τ		Ν	Κ
	<sup>3</sup> Κ	Α	Ι	Ο			Ο
	<sup>4</sup> Α	Τ	Π	Ε			Σ
	<sup>5</sup> Μ	Ο	Ν	Α	Δ	Α	Ι

### Κατακόρυφα

- 1) Ο επόμενος αριθμός από το 1
- 2) 8+3
- 3) Αποτελείται από δέκα δεκάδες
- 4) Λέγεται το =
- 5) 2x10

Εικόνα 1.2. Παράδειγμα μαθηματικού σταυρόλεξου

- **Αριθμητικά ντόμινο**, όπου στόχος είναι το συνταίριασμα εικόνων, αριθμών, αριθμητικών λέξεων, δεκαδικών αριθμών, κλασμάτων, ποσοστών, πράξεων και αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα:

Αντιστοίχισε αριθμητικές λέξεις με αριθμούς

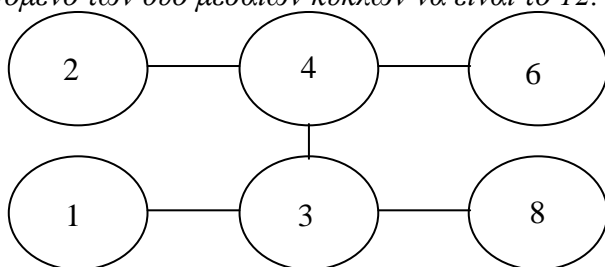
Δύο	7	Επτά	9	Εννιά	6
-----	---	------	---	-------	---

Εικόνα 1.3. Παράδειγμα μαθηματικού ντόμινο

- **Μαθηματικά αινίγματα**, όπου στόχος είναι η δημιουργία διάφορων μορφών μέσω κατάλληλων συνδυασμών αριθμών ή κινήσεων. Για παράδειγμα:

Τοποθέτησε με κατάλληλο τρόπο τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 6, 8, ώστε:

- α) το άθροισμα σε κάθε τριάδα κύκλων να είναι ο αριθμός 12,
- β) ο μεγαλύτερος αριθμός να βρίσκεται στον τελευταίο κύκλο,
- γ) το γινόμενο των δύο μεσαίων κύκλων να είναι το 12.



Εικόνα 1.4. Παράδειγμα μαθηματικού αινίγματος

(Παπαϊωάννου, 1989)

Διαφορετικές κατηγορίες και ταξινομήσεις υπάρχουν και για τα εμπορικά μαθηματικά παιχνίδια που κυκλοφορούν στο εμπόριο. Για παράδειγμα, εάν το κριτήριο της ταξινόμησης είναι τα μαθηματικά που εμπλέκουν, υπάρχουν οι εξής κατηγορίες μαθηματικών παιχνιδιών:

- παιχνίδια με αριθμούς ή/και πράξεις,
- παιχνίδια με γεωμετρικά σχήματα επίπεδα ή/και στερεά,
- πιθανολογικά παιχνίδια,
- παιχνίδια στρατηγικής,
- παιχνίδια με κάποιο άλλο μαθηματικό θέμα.

Εάν πάλι το κριτήριο της ταξινόμησης είναι ο τρόπος με τον οποίο το παιχνίδι παίζεται, υπάρχουν μαθηματικά παιχνίδια:

- κατασκευαστικά,
- επιτραπέζια,
- ηλεκτρονικά,
- ελεύθερης χρήσης (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2005).

### ***Γενικά μαθηματικά παιχνίδια***

Ο Frank Tapson αποδίδει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στα «γενικά μαθηματικά παιχνίδια». Ειδικότερα, ορίζει ως τέτοια όσα παιχνίδια:

- έχουν μόνο δύο παίκτες,
- απαιτούν κυρίως νοητικές και όχι φυσικές δραστηριότητες (εκτός από κίνηση των πιονιών, καταγραφή των αποτελεσμάτων κ.λπ.)
- παρέχουν ολοκληρωμένη πληροφόρηση κάθε στιγμή για την κατάσταση του παιχνιδιού (σε αντίθεση με το παίξιμο χαρτιών)
- οδηγούν στη νίκη μέσω της στρατηγικής και όχι της τύχης
- ολοκληρώνονται σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα
- προσφέρουν ευχαρίστηση
- απαιτούν τον ελάχιστο ειδικό εξοπλισμό.

Ένα πολύ γνωστό παιχνίδι το οποίο ανήκει σε αυτή την κατηγορία είναι η τρίλιζα (Tapson, 1997).

## Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γ' τάξη του δημοτικού

Ανάμεσα σε άλλα στοιχεία, ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην παρούσα εκπαιδευτική παρέμβαση έχει ο εντοπισμός ή η απουσία κοινών στόχων της έρευνας με τους επίσημους στόχους της σχολικής διδασκαλίας. Οι λόγοι είναι προφανείς. Καταρχάς μία πιθανή ευθυγράμμιση των στόχων αφενός επιτρέπει τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας των σχετικών προηγούμενων διδασκαλιών. Αφετέρου και υπό την προϋπόθεση ενός έστω ορισμένου βαθμού επιτυχίας στις προηγούμενες διδασκαλίες παρέχει ένα υπόβαθρο για την περαιτέρω εμπάθυνση στις διδαχθείσες μαθηματικές έννοιες. Εκτός από τα προαναφερθέντα, η ύπαρξη κοινών στόχων προσφέρει στην εκπαιδευτική παρέμβαση την ευκαιρία να εμπνεύσει εναλλακτικές διδακτικές επιλογές στην εκπαιδευτική κοινότητα για την προσέγγιση των διδακτέων μαθηματικών εννοιών.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθηματικές έννοιες οι οποίες διαδραματίζουν έναν ισχυρό ρόλο στην προκείμενη έρευνα προέρχονται κυρίως από τον γνωστικό άξονα της γεωμετρίας. Θέτοντας τη γεωμετρία ως τον άξονα γνωστικού περιεχομένου, το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών για τη Γ' τάξη του δημοτικού αναφέρει ως γενικούς στόχους:

- 1) την εξάσκηση στην περιγραφή, αναπαραγωγή και σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων καθώς και στην εφαρμογή τεχνικών σχεδίασης κάθετων ευθειών με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων,
- 2) την κατανόηση των εννοιών «κορυφή», «ακμή», «ορθή γωνία» και «έδρα»,
- 3) την εξάσκηση στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα.

Το αναλυτικό πρόγραμμα θέτει τους παρακάτω ειδικούς στόχους για τη θεματική ενότητα της γεωμετρίας:

- 1) τη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια οργάνων,
- 2) την αναπαραγωγή, την περιγραφή και τη σχεδίαση ορισμένων συνήθων επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (όπως το ορθογώνιο και τετράγωνο),
- 3) την περιγραφή και την αναπαράσταση ορισμένων συνήθων γεωμετρικών στερεών (όπως ο κύβος και η σφαίρα),
- 4) την αναπαραγωγή των αναπτυγμάτων του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και της τετραγωνικής πυραμίδας,
- 5) την χάραξη κάθετων ευθειών με τη βοήθεια οργάνων και την κατανόηση της έννοιας «ορθή γωνία»,

6) την κατασκευή του συμμετρικού ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003).

Αναφορικά με τους παραπάνω στόχους, μέχρι τη χρονική στιγμή της έναρξης της έρευνας οι περασμένες μαθηματικές διδασκαλίες είχαν θίξει ως έναν βαθμό όλους τους προηγούμενους ειδικούς στόχους εκτός από:

- 1) την αναπαραγωγή των αναπτυγμάτων του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και της τετραγωνικής πυραμίδας,
- 2) την κατασκευή του συμμετρικού ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας.



## Κεφάλαιο 2: Ερευνητικός σχεδιασμός

### Στόχος της έρευνας

Αυτή η έρευνα έχει στόχο να διερευνήσει την ποιότητα συμμετοχής, τον βαθμό κατανόησης και την εξέλιξη της μάθησης μαθητών και μαθητριών της Γ΄ τάξης δημοτικού όσον αφορά βασικά, μαθηματικά ζητήματα τα οποία σχετίζονται με τις διαστάσεις μέσα από ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα το οποίο προτείνει την αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας και του εκπαιδευτικού παιχνιδιού.

### Ερευνητικοί σκοποί

Ειδικότερα, το ενδιαφέρον στρέφεται στον καθορισμό της επίδρασης της αξιοποίησης της μαθηματικής λογοτεχνίας και του εκπαιδευτικού παιχνιδιού σε μαθητές και μαθήτριες της τρίτης τάξης του δημοτικού σχολείου όσον αφορά:

- ❖ στη διάκριση του δισδιάστατου επίπεδου και του τρισδιάστατου χώρου,
- ❖ στην εκμάθηση της ονομασίας των τριών διαστάσεων,
- ❖ στην κατανόηση των εννοιών «πλευρά» και «γωνία»,
- ❖ στη σύνδεση του αριθμού των πλευρών και των γωνιών,
- ❖ στην κατανόησή των εννοιών «κανονικότητα» κι «ανάπτυγμα»,
- ❖ στη διάκριση των δισδιάστατων σχημάτων από τα στερεά σώματα
- ❖ στη σύνδεση των δισδιάστατων και των τρισδιάστατων σχημάτων μέσω των αναπτυγμάτων,
- ❖ στην αναγνώριση και την εκμάθηση της ονομασίας ορισμένων δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων,
- ❖ στην ταύτιση των όρων «τρειςδιάστατο σχήμα» και «στερεό σώμα»,
- ❖ στη συναισθηματική εμπλοκή
- ❖ στον βαθμό συμμετοχής σε μαθηματικές δραστηριότητες.

Τις απάντησεις στους προαναφερθέντες σκοπούς της έρευνας υπαγορεύουν οι εκφράσεις, οι ομιλίες και οι ενέργειες των παιδιών καθώς και οι αλλαγές που συνέβησαν στο μαθησιακό κλίμα της μαθηματικής αίθουσας. Για τον λόγο αυτό έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αναλυτική περιγραφή όλων όσων τα παιδιά είπαν, έκαναν και αποκάλυψαν με τις χειρονομίες και τις εκφράσεις του προσώπου τους καθώς και στις διαμαθητικές αλληλεπιδράσεις.

## Περίγραμμα της έρευνας

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα της παρούσας εργασίας στηρίζεται σε ένα μαθηματικό λογοτεχνικό έργο. Πρόκειται για την πρωτότυπη νουβέλα του Άγγλου Edwin Abbott με τίτλο «Επιπεδοχώρα». (Ο αγγλικός, πρωτότυπος τίτλος είναι “Flatland”). Η Επιπεδοχώρα αποτελεί μια επίπεδη χώρα, η οποία κατοικείται από νοήμονα γεωμετρικά σχήματα που κινούνται, μιλούν και έχουν ανθρώπινα συναισθήματα. Σε αυτόν τον δισδιάστατο κόσμο υπάρχουν μόνο δύο διαστάσεις, το μήκος και το πλάτος.

Κεντρικός ήρωας του βιβλίου είναι ένα ευφύες τετράγωνο με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη γεωμετρία, το οποίο κάποια στιγμή δέχεται επίσκεψη από μία σφαίρα. Κατόπιν συνομιλιών μαζί της και έπειτα από την επίσκεψή του στη Χωροχώρα, δηλαδή τον τρισδιάστατο χώρο, το τετράγωνο αρχίζει να κηρύττει την ύπαρξη μίας ακόμη διάστασης, του ύψους.

Για τις ανάγκες βέβαια του εκπαιδευτικού προγράμματος και της έρευνας χρειάστηκε ορισμένο μόνο μέρος της πλοκής του βιβλίου. Καθώς το βιβλίο απευθύνεται κατά βάση σε ενήλικο κοινό, το κείμενό του δε συνάδει στο μεγαλύτερο εύρος του με το επίπεδο κατανόησης εννιάχρονων παιδιών. Γι’ αυτόν τον λόγο, έγιναν επιλογές συγκεκριμένων τμημάτων, τα οποία κρίθηκαν αντιπροσωπευτικά της συνολικής ιστορίας και συμβατά με τις δυνατότητες κατανόησης των παιδιών.

Όπως προαναφέρθηκε, το παρόν εκπαιδευτικό πρόγραμμα δεν απαιτεί τη συνολική ανάγνωση του βιβλίου. Αντίθετα, φέρνει τα μικρά παιδιά σε επαφή με την Επιπεδοχώρα μέσα από επιστολές που τους στέλνει το ίδιο το Τετράγωνο. Χωρίς κάποια προηγούμενη αναφορά και εντελώς απροειδοποίητα οι μαθητές και οι μαθήτριες έλαβαν ένα γράμμα από το Τετράγωνο, στο οποίο τους ζητούσε να γίνουν φίλοι δια αλληλογραφίας. Τα παιδιά με ιδιαίτερο ενθουσιασμό αποδέχτηκαν το κάλεσμα και έτσι ανέπτυξαν μια πρωτότυπη αλληλογραφία.

Μία, δύο ή και τρεις φορές κάθε εβδομάδα τα παιδιά αντάλλασσαν με τον ξεχωριστό, νέο τους φίλο γράμματα και προβληματισμούς προσπαθώντας να κατανοήσουν τον δισδιάστατο κόσμο του. Μάλιστα, σε κάθε νέα του επιστολή το Τετράγωνο ανέθετε στα παιδιά μία ξεχωριστή, μαθηματική εξερεύνηση. Οι εν λόγω μαθηματικές δραστηριότητες είχαν παιγνιώδη κι ανακαλυπτικό χαρακτήρα κι αποσκοπούσαν στην κατανόηση βασικών στοιχείων της επιπεδομετρίας και της στερεομετρίας.

## Επιλογή μεθόδων διερεύνησης

Γενικά, οι επιστημονικές μέθοδοι διερεύνησης διακρίνονται στις ποσοτικές και στις ποιοτικές. Η επιλογή της μεθόδου διερεύνησης είναι μείζονος σημασίας, γιατί καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο ο/η εκάστοτε επιστήμονας προσεγγίζει και υλοποιεί την έρευνά του. Η απόφαση λοιπόν για μία ποσοτική ή ποιοτική μέθοδο διαμορφώνει συνακόλουθα τα διάφορα στάδια σχεδιασμού και υλοποίησης μιας έρευνας, δηλαδή: τον προσδιορισμό του ερευνητικού προβλήματος, την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, τον προσδιορισμό σκοπού, τη συγκέντρωση δεδομένων, την ανάλυση και την ερμηνεία των δεδομένων, τη συγγραφή της εργασίας και την αξιολόγηση της έρευνας (Creswell, 2011).

Καθώς η παρούσα εκπαιδευτική έρευνα θέτει ως ζητούμενο τη διερεύνηση και την λεπτομερή κατανόηση, επιλέγει το μονοπάτι των ποιοτικών μεθόδων. Αυτό συνεπάγεται ότι στην παρούσα μελέτη τα φαινόμενα δε μελετώνται με χρήση αριθμητικών μετρήσεων, κάτι που αποτελεί άλλωστε χαρακτηριστικό των ποσοτικών μεθόδων. Ακόμη, η επιλογή της ποιοτικής οδού προσδίδει στην έρευνα έναν δυναμικό χαρακτήρα κατά την εξέλιξή της.

Όπως διαπιστώνεται και στη συνέχεια της εργασίας και ειδικότερα στο τέταρτο κεφάλαιο, στην εκκίνηση της διερεύνησης υπάρχει ένα προκαθορισμένο πλάνο, το οποίο όμως στην πορεία κάθε άλλο παρά στατικό μένει. Ειδικότερα, απρόσμενες παρατηρήσεις κι αναπάντεχες μαθητικές αποκρίσεις ενσωματώνουν νέες οπτικές στον σχεδιασμό και τον τροποποιούν. Τα προβλήματα, οι ιδιαιτερότητες και οι συνθήκες της υπό μελέτη κατάστασης δεν αποκρύπτονται. Τουναντίον γίνονται δεκτά ως αναφαίρετα στοιχεία του συγκεκριμένου πλαισίου, τα οποία συμβάλλουν στη σύλληψη μιας ολιστικής θεώρησης και ερμηνείας του μελετώμενου φαινομένου (Ζαφειρόπουλος, 2015).

## Επιλογή και περιγραφή δείγματος

Για την επιλογή του δείγματος έγινε χρήση σκόπιμης δειγματοληψίας (purposeful sampling), όπως συμβαίνει σε κάθε περίπτωση ποιοτικής έρευνας. Στη σκόπιμη δειγματοληψία ο ερευνητής/η ερευνήτρια επιλέγει εκ προθέσεως τα άτομα και τις τοποθεσίες για την έρευνα με κριτήριο τη δυνατότητα συγκέντρωσης μεγάλου πλούτου πληροφοριών (J. Creswell, 2011). Ως εκ τούτου, το παρόν εκπαιδευτικό πρόγραμμα εφαρμόστηκε στα εξήντα τρία (63) παιδιά που φοιτούσαν τη σχολική

χρονιά 2016-2017 στη τρίτη τάξη του δημοτικού σχολείου σε ένα ιδιωτικό σχολείο, το οποίο βρίσκεται στον δήμο Λαρισαίων.

Πιο αναλυτικά, τα εξήντα τρία παιδιά που συνθέτουν το δειγματοληπτικό πλαίσιο της έρευνας είναι κατανεμημένα στα τρία τμήματα ως εξής:

Τμήμα	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
Γ'1	13	9	22
Γ'2	13	8	21
Γ'3	13	7	20
Σύνολο	39	24	63

**Πίνακας 2.1.** Η κατανομή των παιδιών στα τρία τμήματα της τρίτης δημοτικού

Φυσικά, η ποιοτική κατεύθυνση της έρευνας βέβαια δεν επιτρέπει ένα τόσο μεγάλο δείγμα υποκειμένων. Ο λόγος είναι ότι ένα μεγάλο δείγμα μειώνει τη δυνατότητα για παροχή μιας λεπτομερούς εικόνας και εμποδίζει τη σύλληψη της πολυπλοκότητας ενός φαινομένου (J. Creswell, 2011). Με βάση τα παραπάνω, η ποιοτική έρευνα υποδεικνύει τον καθορισμό ενός μικρού αριθμού παρατηρουμένων, ώστε να αποτυπώσει και να αναδείξει εις βάθος τις ιδέες και τις στάσεις. Γι' αυτόν τον λόγο, παρότι και τα εξήντα τρία παιδιά συμμετείχαν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα, το δείγμα της έρευνας περιορίζεται μόνο σε τέσσερα παιδιά.

Ειδικότερα, τα τέσσερα αυτά παιδιά ανήκουν στο δεύτερο τμήμα της τρίτης δημοτικού, δηλαδή στο τμήμα στο οποίο υπεύθυνη δασκάλα είναι η υποφαινόμενη ερευνήτρια. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, πρόκειται για μια δειγματοληψία ευχέρειας/ευκολίας, δηλαδή μία μη πιθανοτική δειγματοληψία. Στη συγκεκριμένη δειγματοληπτική τεχνική το δείγμα σχηματίζεται με γνώμονα την ευκολία και τη διαθεσιμότητα των υποκειμένων. Φυσικά, τα εξαγόμενα αποτελέσματα δεν είναι γενικεύσιμα. Βέβαια, η παρούσα έρευνα είναι ποιοτική και ως τέτοια εκ φύσεως απομακρύνει το ενδιαφέρον της από τη γενίκευση των ευρημάτων. Συνεπώς, η αδυναμία γενίκευσης των συμπερασμάτων της στον ευρύτερο πληθυσμό δεν αποτελεί εδώ σημείο προβληματισμού (Ζαφειρόπουλος, 2015).

## Ηθικό πλαίσιο

Έρευνα και ηθική οφείλουν να συμπορεύονται. Ιδιαίτερα ο χώρος της εκπαιδευτικής έρευνας αγγίζει λεπτά και σύνθετα ζητήματα ηθικής. Ο λόγος είναι

εμφανής: «οι κοινωνικοί επιστήμονες έχουν γενικά μία ευθύνη όχι μόνο απέναντι στο επάγγελμά τους, στην αναζήτηση της γνώσης και της αλήθειας, αλλά και στα υποκείμενα στα οποία βασίζονται για τη δουλειά τους» (Cohen & Manion, 2000, σ.487). Προκειμένου να βγει αλώβητος από το δεοντολογικό ναρκοπέδιο, ο ερευνητής οφείλει να λάβει σοβαρά υπόψη του τις επιταγές της σχετικής βιβλιογραφίας καθώς και τους κανόνες της ερευνητικής πρακτικής.

Φυσικά, δεν υπάρχουν απόλυτες δεοντολογικές αρχές, αλλά χρειάζεται κάθε φορά να τις διακρίνουμε με γνώμονα το ιδιαίτερο ερευνητικό πλαίσιο. Βέβαια, ορισμένοι άξονες της ερευνητικής δεοντολογίας θεωρούνται αδιαπραγμάτευτοι και αξίζουν τη μέριμνά μας, όπως η πρόσβαση και η αποδοχή, η συνειδητή συναίνεση, ο σεβασμός στην ιδιωτικότητα (ανωνυμία, εμπιστευτικότητα) (Cohen & Manion, 2000).

Ξεκινώντας από τον πρώτο άξονα, δηλαδή την πρόσβαση και την αποδοχή, η προκείμενη έρευνα βαδίζει ένα βατό μονοπάτι χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Η θέση εργασίας της υποφαινόμενης ερευνήτριας ως δασκάλα στη γ' τάξη δημοτικού σε ένα ιδιωτικό σχολείο διευκολύνει ιδιαίτερα την εφαρμογή του εκπαιδευτικού προγράμματος.

Η συνειδητή συναίνεση αποτέλεσε ένα σημείο προβληματισμού για τη δεδομένη έρευνα. Ο προβληματισμός αυτός όφειλε την ύπαρξή του σε δύο κατά βάση αιτίες. Πρώτον, τα υποκείμενα της έρευνας είναι μικρά παιδιά. Ακριβώς εξαιτίας της ηλικίας τους είναι πιθανότερη η μερική μόνο αντίληψη του τι σημαίνει «επιστημονική έρευνα» από μία πλήρη κατανόηση. Δεύτερον η φύση της έρευνας είναι τέτοια που αποκλείει μία εξαρχής αποκάλυψη της διεξαγωγής της, διότι έτσι θα χανόταν η γοητεία της αλληλογραφίας με τον καινούριο φίλο των παιδιών, το Τετράγωνο.

Βέβαια, παρά τις όποιες βάσιμες ανησυχίες, ο σεβασμός της ελευθερίας και της αυτοδιάθεσης του κάθε υποκειμένου της έρευνας είναι αδιαπραγμάτευτος. Έτσι, καταβλήθηκαν προσπάθειες, ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή προσέγγιση στη συνειδητή συναίνεση. Συγκεκριμένα, η υποφαινόμενη ερευνήτρια δίχως να αποκαλύψει ότι διεξήγε έρευνα, πληροφόρησε εξαρχής τα παιδιά ότι την ενδιέφεραν πολύ οι ιδέες τους και ότι θα ήθελε να τις μελετήσει προσεκτικά. Αφού ολοκληρώθηκε το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, εξήγησε στους μικρούς μαθητές και στις μικρές μαθήτριες περί τίνος επρόκειτο. Ακόμη, έγιναν τρεις γραπτές ενημερώσεις στο

σύνολο των γονέων σχετικά με τις δραστηριότητες που απαρτίζουν το εκπαιδευτικό πρόγραμμα.

Για λόγους σεβασμού των προσωπικών δεδομένων, ακολουθείται ανωνυμία. Τα τέσσερα παιδιά που συνεισφέρουν στην έρευνα ως υποκείμενα του δείγματος θα αναφέρονται σε όλη την έκταση της εργασίας μόνο με τα αρχικά των ονομάτων τους. Έτσι, τα δύο αγόρια είναι ο Α. και ο Χ. ενώ τα δύο κορίτσια είναι η Σ. και η Φ.

Άξιο επισημάνσης σε αυτό το σημείο είναι ότι καθώς η δεδομένη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μία πραγματική σχολική αίθουσα και όχι σε ένα απομονωμένο εργαστήριο, τα τέσσερα παιδιά που αποτελούν το δείγμα επηρεάστηκαν με ποικίλους τρόπους τόσο στη διαμόρφωση των ιδεών τους όσο και στην επιλογή/εκτέλεση των φυσικών τους ενεργειών από τις ιδέες και τις ενέργειες των υπόλοιπων παιδιών. Το παραπάνω γεγονός φυσικά δε συνιστά κάποιο περιορισμό της έρευνας αλλά μάλλον πλεονέκτημα, καθώς διευρύνει την οπτική της ερευνητικής εξέτασης.

### **Χρόνος και φάσεις διεξαγωγής της έρευνας**

Η εφαρμογή της παρούσας έρευνας ξεκίνησε στις 24 Απριλίου και διήρκησε έως τις 15 Ιουνίου καταλαμβάνοντας μία συνολική χρονική έκταση οκτώ εβδομάδων. Ειδικότερα, έγιναν δεκατρείς (13) εκπαιδευτικές συνεδρίες, οι οποίες κατέλαβαν όλες μαζί δεκαέξι διδακτικές ώρες. Στον πίνακα των επόμενων δύο σελίδων παρατίθενται οι ημερομηνίες και μία σύντομη περιγραφή για κάθε εκπαιδευτική συνεδρία.

Αξίζει να επισημανθεί ότι ο αρχικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού προγράμματος τροποποιήθηκε με διάφορους τρόπους. Προστέθηκαν δύο συνεδρίες για τη σχεδίαση των αναπτυγμάτων, καθώς τα παιδιά δυσκολεύτηκαν σε αυτή τη δραστηριότητα. Ακόμη, εξαιτίας μίας αναβολής σε μία σχολική εκδήλωση το ημερήσιο πρόγραμμα διαταράχθηκε, καθώς τα παιδιά έπρεπε να κάνουν τις σχετικές με την εκδήλωση πρόβες. Αυτό διέκοψε την ομαλή ροή του εκπαιδευτικού προγράμματος κι έτσι υπάρχει ένα μεγάλο χρονικό κενό ανάμεσα στην ενδέκατη (25 Μαΐου) και στις δύο τελευταίες συνεδρίες (15 Ιουνίου). Αυτή η διακοπή δεν επέτρεψε την πραγματοποίηση μίας ακόμη συνεδρίας για ενασχόληση με το UNO σχημάτων.

<b>Εκπ/κή συνεδρία</b>	<b>Ημερομηνία</b>	<b>Περιγραφή</b>	<b>Διδ/κές ώρες</b>
1 <sup>η</sup>	24 Απριλίου	Παραλαβή του πρώτου γράμματος από το Τετράγωνο, προβληματισμός σχετικά με την παράξενη φωτογραφία του και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Μία (1)

2 <sup>η</sup>	25 Απριλίου	Παραλαβή του δεύτερου γράμματος από το Τετράγωνο, οπτικό πείραμα για την κατανόηση της όρασης σε έναν δισδιάστατο κόσμο και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Μία (1)
3 <sup>η</sup>	27 Απριλίου	Παραλαβή του τρίτου γράμματος από το Τετράγωνο, απτικό πείραμα για τη σύνδεση των πλευρών και των γωνιών με την ονομασία ενός δισδιάστατου σχήματος και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Δύο (2)
4 <sup>η</sup>	3 Μαΐου	Παραλαβή του τέταρτου γράμματος από το Τετράγωνο, βράβευση για το απτικό πείραμα και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Μία (1)
5 <sup>η</sup>	4 Μαΐου	Παραλαβή του πέμπτου γράμματος από το Τετράγωνο, αναφορά στην κανονικότητα, παιχνίδι με Tagram puzzle και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Δύο (2)
6 <sup>η</sup>	8 Μαΐου	Παραλαβή του έκτου γράμματος από το Τετράγωνο, σχεδίαση αναπτύγματος κύβου και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Μία (1)
7 <sup>η</sup>	9 Μαΐου	Παραλαβή του έβδομου γράμματος από το Τετράγωνο και ανεπιτυχείς απόπειρες σχεδίασης αναπτυγμάτων στερεών σχημάτων	Μία (1)
8 <sup>η</sup>	11 Μαΐου	Ανεπιτυχείς απόπειρες σχεδίασης αναπτυγμάτων στερεών σχημάτων	Μία (1)
9 <sup>η</sup>	16 Μαΐου	Παραλαβή του όγδοου γράμματος από το Τετράγωνο και συνδυασμοί γεωμετρικών σχημάτων για δημιουργία αναπτυγμάτων	Μία (1)
10 <sup>η</sup>	18 Μαΐου	Επιτυχής σχεδίαση αναπτυγμάτων και συγγραφή απαντητικής επιστολής	Μία (1)
11 <sup>η</sup>	25 Μαΐου	Παραλαβή του ένατου γράμματος από το Τετράγωνο και παιχνίδι με το UNO σχημάτων	Δύο (2)
12 <sup>η</sup>	15 Ιουνίου	Παιχνίδι με το UNO σχημάτων	Μία (1)
13 <sup>η</sup>	15 Ιουνίου	Ομαδική συνέντευξη	Μία (1)

## Σχεδιασμός των διδακτικών υλικών

Στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών ο σχεδιασμός υλικών για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων συνιστά ένα συχνό φαινόμενο. Βασικός στόχος αυτού του σχεδιασμού είναι κυρίως η αναπαράσταση ποικίλων αφηρημένων μαθηματικών εννοιών με συγκεκριμένο και σαφή τρόπο. Ενδιαφέρον στοιχείο αποτελεί το γεγονός ότι αυτός ο βασικός στόχος του σχεδιασμού και οι προθέσεις των εκπαιδευτικών για τη διδακτική αξιοποίηση τέτοιων υλικών δε συμπίπτουν πάντοτε. Κατά τις απόψεις των εκπαιδευτικών ο στόχος των διδακτικών υλικών είναι το πέρασμα από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, η διαφοροποίηση των διδακτικών τεχνικών, ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας, η εποπτική υποβοήθηση για την επίλυση προβλημάτων ή/και η επιβράβευση των μαθητών (Moyer & Jones, 2004).

Η παρούσα έρευνα απαιτήσε λόγω της φύσης των μαθηματικών της διάφορα υλικά. Αναγκαία συστατικά για τον σχεδιασμό τους υπήρξαν μία μακρά συλλογιστική πορεία και μία εκτεταμένη διερεύνηση. Έπρεπε οι όποιες επιλογές να υποβοηθούν τα παιδιά στις μαθησιακές τους εξερευνήσεις διευκολύνοντας τη μαθηματική νοηματοδότηση. Φυσικά, δεν υπάρχει κάποιο υλικό το οποίο λόγω των εγγενών χαρακτηριστικών του να αποκαλύπτει αυτόματα τη μαθηματική γνώση στον/στην μαθητευόμενο/η.

Αντίθετα, τα διάφορα διδακτικά υλικά δρουν ως εργαλεία, τα οποία ανάλογα με τον χειρισμό και την ερμηνεία τους μπορούν να διευκολύνουν ή όχι την πρόσβαση στη μαθηματική μάθηση. Σύμφωνα με τα παραπάνω η μαθησιακή πορεία αποτελεί ένα μοναδικό κάθε φορά φαινόμενο, το οποίο αναδύεται κάθε φορά εκ νέου στο εκάστοτε μαθησιακό πλαίσιο και δημιουργείται κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας μέσω των συγκεκριμένων χρήσεων. Βέβαια, η συστημική ανάλυση των χαρακτηριστικών των διδακτικών υλικών δεν απορρίπτεται. Τουναντίον θεωρείται ως αναγκαία για τη σχεδίαση και τη χρήση διδακτικών τεχνουργημάτων. Ωστόσο, η έμφαση χρειάζεται να δίδεται στο είδος των δραστηριοτήτων που περικλείουν τη μαθηματική δραστηριότητα (Meira, 1998).

## Περιγραφή των διδακτικών υλικών

Κατά τη διάρκεια του εκπαιδευτικού προγράμματος έγινε χρήση αρκετών διδακτικών υλικών, τα οποία αποτέλεσαν προϊόντα σχεδίασης της ίδιας της ερευνήτριας. Μοναδική εξαίρεση αποτελούν τα στερεά σώματα, που είναι εμπορικό προϊόν. Παρακάτω ακολουθεί μία σύντομη παρουσίαση συνοδευόμενη από εικόνες.



## Φάκελος επιστολής Τετράγωνο

Σε κάθε συνεδρία της εκπαιδευτικής παρέμβασης οι μαθητές και οι μαθήτριες των τριών τμημάτων της τρίτης δημοτικού παραλάμβαναν έναν φάκελο από το Τετράγωνο. Ο φάκελος αυτός είχε γραμμένα πάνω του τα στοιχεία του αποστολέα και του παραλήπτη καθώς και ένα κολλημένο ψεύτικο γραμματόσημο. Κατά αυτόν τον τρόπο, η αλληλογραφία των παιδιών με τον νέο φίλο τους, το Τετράγωνο, ομοιάζε περισσότερο με πραγματική. Μάλιστα, ο φάκελος με τα στοιχεία αποστολέα και παραλήπτη αποτέλεσε μία θαυμάσια ευκαιρία, ώστε να μάθουν τα παιδιά πώς πρέπει να συμπληρώνουν τα στοιχεία σε έναν φάκελο επιστολής. Τέλος, τα αναγραφόμενα στοιχεία προσέφεραν πλούσιες ευκαιρίες για συζήτηση και προβληματισμό μέσα στη σχολική αίθουσα.

### **Από:**

Τετράγωνο  
Μαθηματικών 12, Γεωμετρούπολη  
Επιπεδοχώρα  
Κόσμος των 2 διαστάσεων



### **Προς:**

3<sup>η</sup> τάξη δημοτικού των Εκπαιδευτηρίων Μ.Ν. Ράππου  
Καρδίτσης 21, Λάρισα  
Χωροχώρα  
Κόσμος των 3 διαστάσεων

**Εικόνα 2.1** Ο φάκελος επιστολών του Τετράγωνο

## Επιστολές Τετράγωνο

Σχεδόν σε κάθε συνεδρία αντιστοιχούσε μία επιστολή από το Τετράγωνο. Συνολικά τα παιδιά έλαβαν εννιά επιστολές από τον δια αλληλογραφίας φίλο τους.

Φυσικά, κάθε επιστολή είχε διαφορετικό περιεχόμενο, τη διαμόρφωση του οποίου καθόριζαν ο ειδικός στόχος κάθε συνεδρία και οι παιδικές ιδέες κι ενέργειες κατά την αμέσως προηγούμενη συνεδρία, όπως αυτές εκφράστηκαν μες στην τάξη κι όπως αποτυπώθηκαν στις απαντητικές επιστολές.

Προτού ξεκινήσει το εκπαιδευτικό πρόγραμμα, είχαν ήδη συγγραφεί οκτώ επιστολές με επιλογή κειμένων από το βιβλίο “Flatland” και τις απαιτούμενες προσθήκες μυθοπλασίας. Βέβαια, το βιβλίο απευθύνεται σε ενήλικο κι όχι τόσο σε παιδικό κοινό. Έτσι, ο λόγος του στα περισσότερα σημεία δεν είναι κατάλληλος για παιδιά Γ΄ τάξης δημοτικού. Ωστόσο, με προσεκτική επιλογή μπορεί κανείς να βρει αντιπροσωπευτικά της υπόθεσης αποσπάσματα εκφρασμένα με πιο βατό για το επίπεδο των παιδιών λόγο. Με την ενσωμάτωση αυτών των αποσπασμάτων στις επιστολές που λάμβαναν οι μικροί μαθητές και οι μικρές μαθήτριες μπορούσαν να γνωρίσουν την ιστορία του βιβλίου αποφεύγοντας ατελέσφορες αναγνωστικές προσπάθειες.

Βέβαια, αυτές οι αρχικές επιστολές αποτέλεσαν απλά και μόνο τον σκελετό. Ήδη από την έναρξη του προγράμματος, η ζωντανή φύση της ποιοτικής έρευνας κατέδειξε την ανάγκη για πολλές τροποποιήσεις του περιεχομένου αυτών των πρώτων επιστολών. Για να πιστέψουν τα παιδιά ότι όντως ένα νοήμον Τετράγωνο αλληλογραφεί μαζί τους, κάθε επιστολή έπρεπε να περιέχει απαντήσεις στα εκάστοτε ερωτήματά τους και σχολιασμό των διάφορων ιδεών και παρατηρήσεών τους. Μάλιστα, απαιτήθηκε η συγγραφή ακόμη μίας επιστολής, η οποία δεν προβλεπόταν στον εναρκτήριο σχεδιασμό.

Άξιο αναφοράς σε αυτό το σημείο αποτελεί το γεγονός ότι κάθε φορά η τροποποίηση αφορούσε στις επιστολές και των τριών τμημάτων και όχι μόνο του Γ΄2, όπου άνηκε το δείγμα. Έτσι, σε κάθε συνεδρία στην πραγματικότητα συγγράφονταν δεκαπέντε διαφορετικά γράμματα. Αυτά συμπεριλάμβαναν ένα κοινό μέρος, ώστε τα τρία τμήματα να διεξάγουν παράλληλα τις διάφορες δραστηριότητες, και ένα ξεχωριστό μέρος, στο οποίο το Τετράγωνο απαντούσε στα ερωτήματα και σχολίαζε τις ιδέες/παρατηρήσεις των παιδιών καθεμίας από τις πέντε ομάδες του κάθε τμήματος. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ενδεικτικά η πρώτη επιστολή του Τετραγώνου. (Όλες οι επιστολές παρατίθενται λεπτομερώς στο τέταρτο κεφάλαιο.)

Γεωμετρούπολη, 24/4/2017

Αγαπητά μέλη του Γ'2,

χαιρόμαι ιδιαίτερα που διαβάζετε την επιστολή μου αυτή τη στιγμή. Καταρχάς επιτρέψτε μου να σας συστηθώ: Είμαι το Τετράγωνο! Αποκαλώ του κόσμο, όπου γεννήθηκα και ζω, Επιπεδοχώρα, όχι γιατί αυτό είναι το όνομά του, αλλά για να καταλάβετε καλύτερα τη φύση του εσείς, ευτυχισμένοι αναγνώστες που έχετε το προνόμιο να ζείτε στον Χώρο.

Για να αντιληφθείτε καλύτερα τον κόσμο μου, φαντασθείτε ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί όπου ευθείες Γραμμές, Τρίγωνα, Τετράγωνα, Πεντάγωνα, Εξάγωνα και άλλα σχήματα, αντί να παραμένουν σταθερά στη θέση τους, κινούνται ελεύθερα στην επιφάνεια του χαρτιού χωρίς όμως να μπορούν να απομακρυνθούν προς τα πάνω ή προς τα κάτω! Φαντασθείτε λοιπόν αυτά τα σχήματα σαν σκιές με σκληρές και φωτεινές άκρες και θα έχετε σχηματίσει μια αρκετά σωστή ιδέα για τη χώρα μου και τους συμπατριώτες μου.

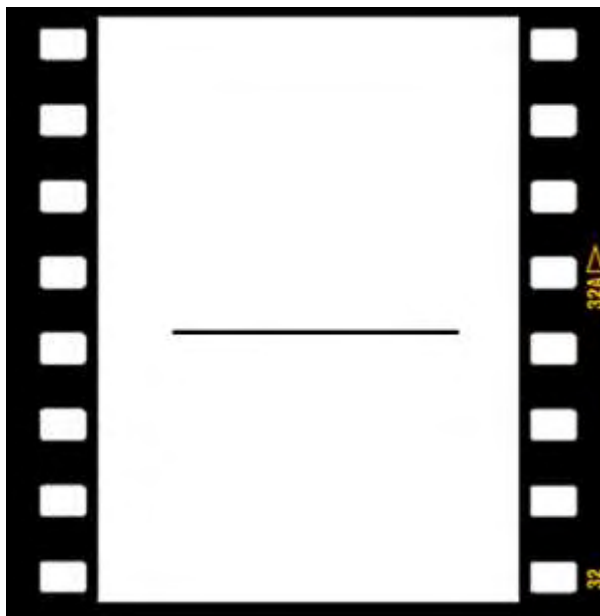
Θα ήθελα πολύ να γίνουμε φίλοι δια αλληλογραφίας! Φαντάζει απίστευτη πρόκληση για μένα να σας εξηγήσω τον άγνωστο κόσμο των δύο διαστάσεων και αντίστροφα να με ξεναγήσετε στον τρισδιάστατο κόσμο σας! Προκειμένου να γνωριστούμε καλύτερα, σας επισυνάπτω και μία φωτογραφία μου παρακάτω! Ελπίζω να σας αρέσει! Μου την τράβηξε ο πιο φημισμένος φωτογράφος της Γεωμετρούπολης! Περιμένω με ανυπομονησία τις σκέψεις, τις απορίες και τα πιθανά σχόλιά σας!

Με εκτίμηση,  
το Τετράγωνο

Εικόνα 2.2. Η πρώτη επιστολή του Τετράγωνου

### Φωτογραφία Τετράγωνου

Στο πρώτο του γράμμα το Τετράγωνο επισύναψε μία φωτογραφία του, η οποία απεικόνιζε μόνο μία γραμμή δέκα εκατοστών. Η φωτογραφία αυτή προκάλεσε έντονο προβληματισμό στα παιδιά, τα οποία διατύπωσαν ποικίλες απόψεις προσπαθώντας να ερμηνεύσουν την παράξενη φωτογραφία.



Εικόνα 2.3. Η φωτογραφία του Τετράγωνου

### Μακέτα Γεωμετρούπολης

Κατά την τρίτη συνεδρία για τις ανάγκες του πειράματος ψηλάφησης το Τετράγωνο έστειλε στα παιδιά μία μακέτα της Γεωμετρούπολης. Στόχος ήταν τα παιδιά να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας μόνο την αίσθηση της αφής. Με αυτόν τον τρόπο, τα παιδιά προσομοίωσαν στην πράξη τον τρόπο με τον οποίο ένας Επιπεδοχωρίτης αναγνωρίζει το σχήμα ενός άλλου Επιπεδοχωρίτη. Προκειμένου τα παιδιά να μην καταφύγουν στην αίσθηση της όρασης, οι παίκτες των διάφορων ομάδων κάλυπταν τα μάτια τους με μαντήλι. Η δραστηριότητα στο σύνολό της θυμίζει έντονα ένα ιδιαίτερο παιχνίδι τυφλόμυγας.

Τα σχήματα της μακέτας περιελάμβαναν: κύκλους, τρίγωνα, τετράγωνα, κανονικά πεντάγωνα, κανονικά εξάγωνα, κανονικά δεκάγωνα και κανονικά δωδεκάγωνα. Για λόγους ευκολίας τα κανονικά δωδεκάγωνα τελικά δε συμπεριλήφθηκαν στη μακέτα που πήραν τα παιδιά. Τα σχήματα ήταν όλα κατασκευασμένα από χαρτόνι και κολλημένα πάνω σε μεγάλα, πλαστικά κυπελάκια. Παρακάτω παρουσιάζεται μία φωτογραφία από τη μακέτα της Γεωμετρούπολης.



**Εικόνα 2.4.** Η μακέτα της Γεωμετρούπολης

### Απογραφικό δελτίο Γεωμετρούπολης

Κατά τη διάρκεια της ίδιας συνεδρίας και μετά την ψηλάφηση των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων στη μακέτα, οι μαθητές και οι μαθήτριες συμπλήρωσαν το απογραφικό δελτίο της Γεωμετρούπολης. Οδηγός για τη συμπλήρωσή του υπήρξε το υποτιθέμενο περσινό, τελικό, απογραφικό δελτίο.

#### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΑΠΟΓΡΑΦΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017

**Οδηγίες συμμετοχής στον διαγωνισμό απογραφής:** Όλες οι ενέργειες πρέπει να γίνονται στην Επιπεδοχώρα. Ενέργειες που είναι δυνατές μόνο στη Χωροχώρα, όπως το να δει κανείς τα γεωμετρικά σχήματα ή να τα ψηλαφίσει «από πάνω», απαγορεύονται αυστηρώς και συνεπάγονται αποκλεισμό του συγκεκριμένου συμμετέχοντα από τον διαγωνισμό.

<b>Σύνολο Γεωμετροουπολιτών:</b>
<b>Σύνολο κατηγοριών</b>
<b>Γεωμετροουπολιτών:</b>
<b>Κατηγορίες Γεωμετροουπολιτών:</b>
<b>Σύνολο γωνιών Γεωμετροουπολιτών:</b>
<b>Σύνολο πλευρών Γεωμετροουπολιτών:</b>
<b>Ονόματα παικτών ομάδας:</b>

**Εικόνα 2.5.** Δελτίο απογραφής της Γεωμετρούπολης προς συμπλήρωση

## ΤΕΛΙΚΟ ΑΠΟΓΡΑΦΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016

Σύνολο Γεωμετρουπολιτών:	20
Σύνολο κατηγοριών	6
Γεωμετρουπολιτών:	
Κατηγορίες Γεωμετρουπολιτών:	4 κύκλοι, 4 ισόπλευρα τρίγωνα, 5 τετράγωνα, 7 κανονικά πολύγωνα (Τα 7 κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνουν: 2 κανονικά πεντάγωνα, 3 κανονικά εξάγωνα, 2 κανονικά δεκάγωνα)
Σύνολο γωνιών	$12 + 20 + 10 + 18 + 20 = 80$
Γεωμετρουπολιτών:	
Σύνολο πλευρών	$12 + 20 + 10 + 18 + 20 = 80$
Γεωμετρουπολιτών:	

Εικόνα 2.6. Περσινό συμπληρωμένο δελτίο απογραφής της Γεωμετρούπολης

### Βραβείο συμμετοχής στον απογραφικό διαγωνισμό

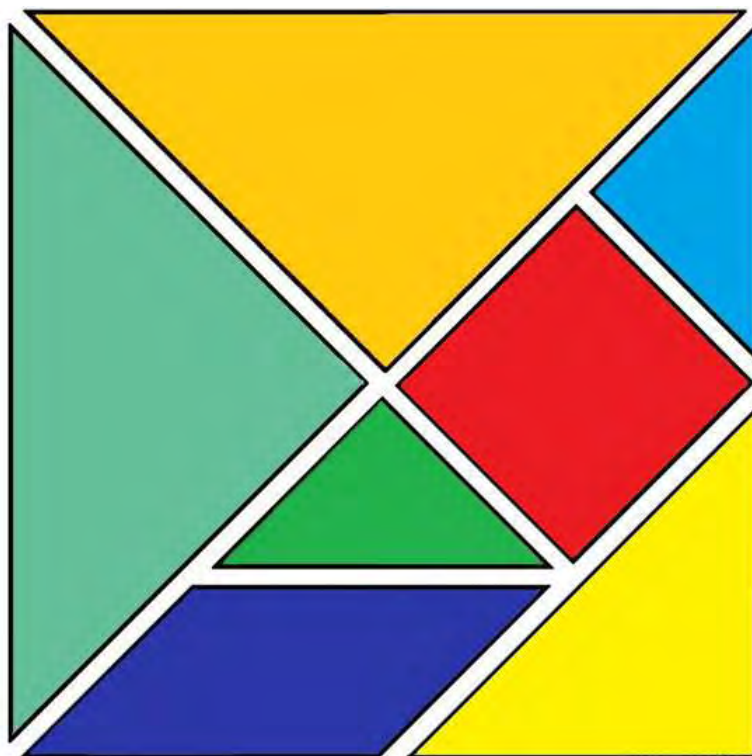
Στην τέταρτη συνεδρία κάθε ομάδα παιδιών έλαβε ένα βραβείο για τη συμμετοχή της στον διαγωνισμό για την απογραφή της Γεωμετρούπολης. Στο κενό τα ίδια τα παιδιά συμπλήρωσαν τα ονόματά τους ενώ το βραβείο αναρτήθηκε για μία βδομάδα σε ταμπλό της τάξης.



Εικόνα 2.7. Βραβείο συμμετοχής στον απογραφικό διαγωνισμό της Γεωμετρούπολης

## Τάγκραμ

Στην πέμπτη συνεδρία τα παιδιά συμμετείχαν σε μία δραστηριότητα, όπου χρειαζόταν μέσα από διάφορους πειραματισμούς να βρουν την κατάλληλη διάταξη, ώστε τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα ενός παζλ τάγκραμ να συνθέτουν ένα μεγάλο τετράγωνο. Το συγκεκριμένο παζλ τάγκραμ βρέθηκε έπειτα από αναζήτηση στο διαδίκτυο. Έγινε εκτύπωση και πλαστικοποίηση των επιμέρους κομματιών.



Εικόνα 2.8. Κομμάτια τάγκραμ

## Γεωμετρικά στερεά

Στην έκτη και στην έβδομη συνεδρία τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με διάφορα γεωμετρικά στερεά, προκειμένου να ανακαλύψουν και να σχεδιάσουν τα αναπτύγματά τους. Αυτά τα γεωμετρικά στερεά αποτελούν ένα εμπορικό προϊόν. Συμπεριλαμβάνουν έναν κύβο, ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έναν κώνο, έναν κύλινδρο, μία τριγωνική πυραμίδα, μία τετραγωνική πυραμίδα, ένα τριγωνικό πρίσμα και ένα εξαγωνικό πρίσμα. Το ιδιαίτερα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων γεωμετρικών στερεών είναι ότι τα παιδιά μπορούσαν να τα ξεδιπλώσουν και έτσι να ανακαλύψουν το ανάπτυγμα του καθενός. Ακολουθεί μία φωτογραφία των εν λόγω γεωμετρικών στερεών.



**Εικόνα 2.9.** Γεωμετρικά στερεά

### **UNO σχημάτων**

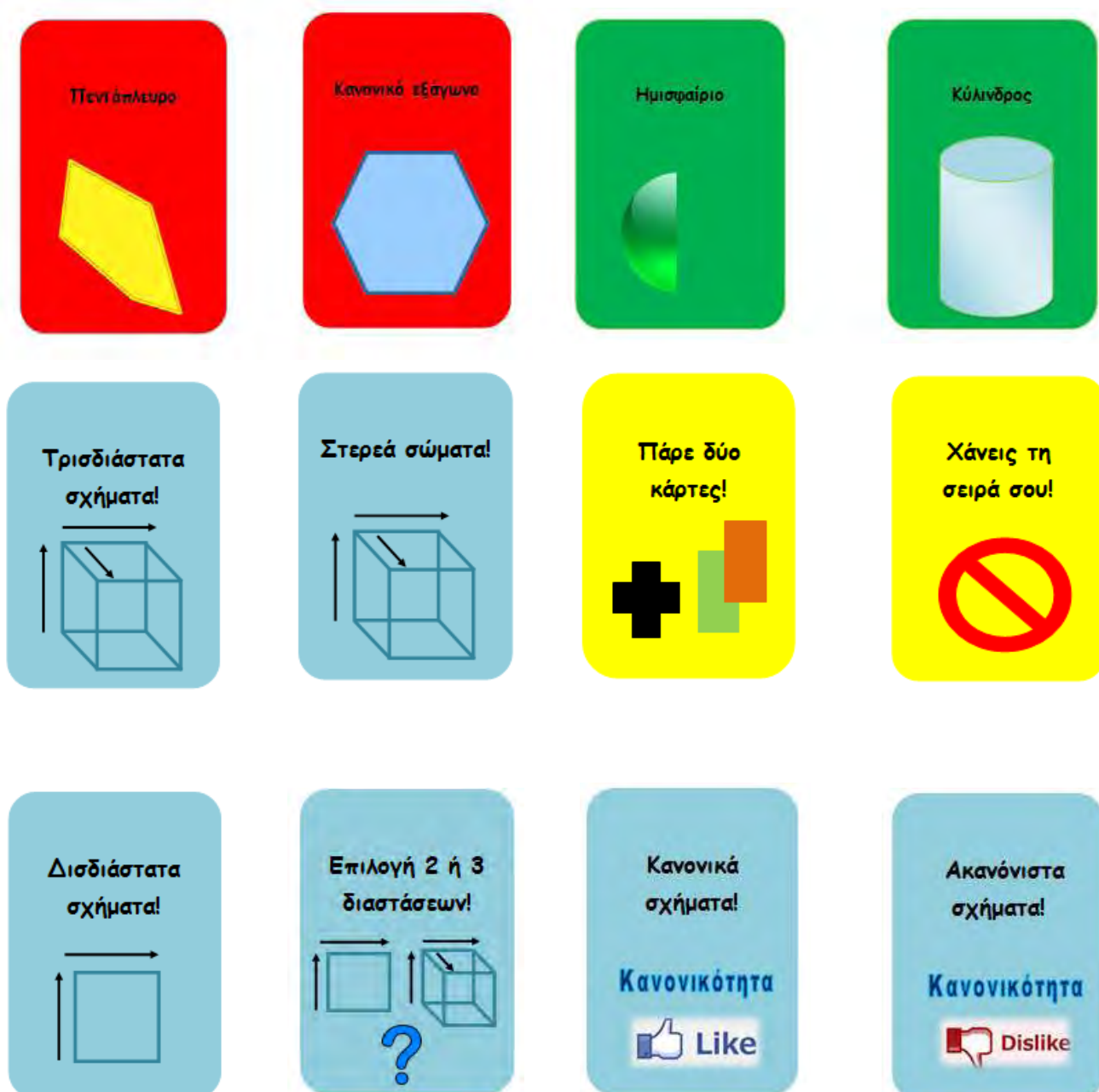
Το UNO σχημάτων αποτελεί παραλλαγή του γνωστού εμπορικού παιχνιδιού UNO. Η διαφορά εδώ είναι ότι η ομαδοποίηση των καρτών δεν έχει ως κριτήριο τα χρώματα και τους αριθμούς, αλλά γίνεται με βάση τις χωρικές διαστάσεις. Ειδικότερα, το εκπαιδευτικό παιχνίδι αποτελείται από κάρτες τεσσάρων χρωμάτων: κόκκινες, πράσινες, κίτρινες και μπλε. Κάθε χρώμα έχει τη δικιά του ξεχωριστή σημασία. Ειδικότερα, οι κόκκινες κάρτες αναπαριστούν γεωμετρικά σχήματα, οι πράσινες κάρτες στερεά σώματα, οι κίτρινες είναι οι κάρτες δράσης και οι μπλε οι μπαλαντέρ.

Οι κάρτες με γεωμετρικά σχήματα περιλαμβάνουν: τον κύκλο, το ημικύκλιο, την έλλειψη, το ισόπλευρο τρίγωνο, το ισοσκελές τρίγωνο, το σκαληνό τρίγωνο, το τετράγωνο, το ορθογώνιο, τον ρόμβο, το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο, το τετράπλευρο, το (κανονικό) πεντάγωνο, το πεντάπλευρο, το (κανονικό) εξάγωνο και το εξάπλευρο. Οι κάρτες με στερεά σώματα περιλαμβάνουν: τη σφαίρα, το ημισφαίριο, τον κύλινδρο, τον κύβο, το παραλληλεπίπεδο, τον κώνο, την τριγωνική πυραμίδα, την τετραγωνική πυραμίδα, το τριγωνικό πρίσμα, το πενταγωνικό πρίσμα και το εξαγωνικό πρίσμα. Οι κάρτες δράσης περιλαμβάνουν τις κάρτες «πάρε δύο», «χάνεις τα σειρά σου», «αλλαγή φοράς». Οι μπαλαντέρ περιλαμβάνουν τις κάρτες «γεωμετρικά σχήματα», «δισδιάστατα σχήματα», «στερεά σώματα», «τρισδιάστατα σχήματα», «επιλογή δύο ή τριών διαστάσεων» και «επιλογή δύο ή τριών διαστάσεων»



και πάρε τέσσερις», «κανονικά σχήματα», «σχήματα με όλες τις πλευρές ίσες» «ακανόνιστα σχήματα», «σχήματα με περιφέρεια».

Κάθε κάρτα οποιασδήποτε κατηγορίας υπάρχει από δύο φορές. Δηλαδή υπάρχουν 32 κόκκινες κάρτες, 22 πράσινες κάρτες, 6 κίτρινες κάρτες και 20 μπλε κάρτες. Συνολικά η τράπουλα στο Uno σχημάτων αποτελείται από 80 κάρτες. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικά ορισμένες κάρτες του παιχνιδιού.



Εικόνα 2.10. Κάρτες του UNO σχημάτων

### Κεφάλαιο 3: Συλλογή δεδομένων

Μία σημαντική πτυχή όσον αφορά στη συγκέντρωση των ποιοτικών δεδομένων είναι ο προσδιορισμός του είδους των δεδομένων. Στη συγκεκριμένη έρευνα κρίθηκε πιο κατάλληλος ένας συνδυασμός διαφορετικών δεδομένων. Ειδικότερα, διενεργήθηκε παρατήρηση, συγκεντρώθηκαν τα δείγματα εργασίας και οι επιστολές των παιδιών προς το Τετράγωνο, έγιναν βιντεοσκοπήσεις των συνεδριών και πραγματοποιήθηκε μία εστιασμένη ομαδική συνέντευξη.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι έγινε συλλογή στοιχείων από όλα τα παιδιά του τμήματος, παρότι κατά την ανάλυση η έρευνα εστιάζει σε τέσσερις επιλεγμένες περιπτώσεις. (Τα κριτήρια επιλογής των τεσσάρων παιδιών παρουσιάζονται στη σελίδα 57). Αυτό φυσικά συνέβη, διότι μέσα σε μία σχολική τάξη λαμβάνουν χώρα πολλές αλληλεπιδράσεις κάθε στιγμή. Έτσι, η ερώτηση, η απάντηση, η απορία και η ενέργεια ενός παιδιού μπορεί να προκαλέσει αλυσιδωτές αντιδράσεις στη σκέψη, στον λόγο και τη συμπεριφορά των υπόλοιπων μαθητών και μαθητριών.

#### Παρατήρηση

Η παρατήρηση αποτελεί μία ευρέως γνωστή μορφή συγκέντρωσης δεδομένων με πολυάριθμα πλεονεκτήματα αλλά και μερικά σαφή μειονεκτήματα. Κατά τη διάρκειά της ο ερευνητής/η ερευνήτρια παρακολουθεί από κοντά τους ερευνώμενους ανθρώπους και κρατά σημειώσεις πεδίου. Στα πλεονεκτήματα της παρατήρησης ανήκουν η εξέταση των πραγματικών συμπεριφορών, η μελέτη των μη λεκτικών συμπεριφορών και η καταγραφή πληροφοριών εντός πλαισίου. Στα μειονεκτήματα της παρατήρησης ανήκει οπωσδήποτε ο περιορισμός της πρόσβασης σε μερικές μόνο τοποθεσίες και καταστάσεις και οι αυξημένες δεξιότητες ακρόασης και οπτικής ανάλυσης που απαιτεί. Η βιβλιογραφία αναφέρει κι άλλα αρνητικά στοιχεία, όπως δυσκολία στην ανάπτυξη επαφών με τους ερευνώμενους (J. Creswell, 2011).

Ωστόσο, καθώς η υποφαινόμενη ερευνήτρια ήταν παράλληλα και η δασκάλα των παιδιών, όπως είναι φυσικό, δεν υπήρξε ούτε στιγμή αμηχανία ή πιθανότητα εξαπάτησης από την πλευρά των παιδιών. Η καθημερινή επαφή με τα υποκείμενα της έρευνας διευκόλυνε τον ρόλο του συμμετέχοντος παρατηρητή. Ο συμμετέχων παρατηρητής (participant observer) συμμετέχει στις διάφορες δραστηριότητες του πλαισίου παρατήρησης, όπως οι ερευνώμενοι. Πρόκειται για έναν ρόλο που

προσφέρει θαυμάσιες ευκαιρίες για συλλογή εμπειριών και απόψεων (J. Creswell, 2011).

### **Συλλογή εγγράφων**

Η συγκέντρωση προσωπικών εγγράφων μπορεί να συνδράμει σε μία έρευνα αποτελώντας μία πλούσια πηγή δεδομένων (Creswell, 2011). Στη δεδομένη έρευνα συλλέχθηκαν οι επιστολές των παιδιών, το συμπληρωμένο δελτίο απογραφής της Γεωμετρούπολης και τα διάφορα σχέδια που κάνανε για τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων.

### **Οπτικοακουστικό υλικό**

Η διπλή, ταυτόχρονη ταυτότητα της συγγραφέα της παρούσας έρευνας μες στην τάξη ως εκπαιδευτικού κι ως ερευνήτριας δυσχέραναν την επιτυχή παρατήρηση μίας συγκεκριμένης ομάδας παιδιών. Συχνά, υπήρχαν διακοπές, καθώς άλλες μαθητικές ομάδες χρειάζονταν για ποικίλους λόγους την παρουσία της δασκάλας δίπλα τους. Γι' αυτόν τον λόγο, συμπληρωματικά με την παρατήρηση έγινε βιντεοσκόπηση όλων των εκπαιδευτικών συνεδριών. (Ως συσκευή βιντεοσκόπησης χρησιμοποιήθηκε ένα κινητό τηλέφωνο με κάμερα). Η κατοπινή παρακολούθηση των βίντεο αποδείχθηκε ιδιαίτερα βοηθητική, καθώς πρόσθεσε νέα δεδομένα κυρίως όσον αφορά στην ψυχολογική εμπλοκή των παιδιών.

Γενικά, η βιντεοσκόπηση ναι μεν εξέπληξε σε κάποιο βαθμό τα παιδιά, ωστόσο δεν ήταν ένα ολότελα ξένο στοιχείο για αυτά. Ο λόγος είναι ότι καθώς το συγκεκριμένο σχολείο είναι ιδιωτικό, πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί είτε τραβούν φωτογραφίες είτε βιντεοσκοπούν στιγμές από το μάθημα ή μία εκδήλωση για διαφημιστικούς σκοπούς. Όπως απορρέει από τα παραπάνω, οι περισσότεροι μαθητές και οι περισσότερες μαθήτριες είναι εξοικειωμένοι/ες με τη λήψη φωτογραφιών ή βίντεο εντός του σχολικού χώρου και αισθάνονται άνετα με αυτό.

Βέβαια, σε σύνολο είκοσι ενός παιδιών υπήρξε ένας μαθητής που ένιωθε κάπως άβολα και δεν επιθυμούσε ούτε να τον φωτογραφηθεί ούτε να βιντεοσκοπηθεί. Καθώς αυτός ο μαθητής δεν ανήκε στα τέσσερα ερευνώμενα υποκείμενα, δεν προέκυψε κάποιο σοβαρό θέμα προς επίλυση.

Το κυρίαρχο πρόβλημα που προκάλεσε η βιντεοσκόπηση ήταν ότι γέννησε εξ αρχής την καχυποψία ότι πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα κι όχι για συνέχεια της τυπικής διδασκαλίας. Ακόμη, κάθε φορά που τα παιδιά έβλεπαν το κινητό με ενεργή την κάμερα, καταλάβαιναν ότι θα έρθει ένα γράμμα από το

Τετράγωνο. Αυτό το ζήτημα διευθετήθηκε γρήγορα με τον εξής τρόπο: η εκκίνηση της βιντεοσκόπησης από ένα σημείο κι έπειτα γινόταν αφού είχε γίνει ήδη η παραλαβή της επιστολής του Τετράγωνου από τα παιδιά.

## Συνεντεύξεις

Στην ποιοτική έρευνα πέρα από την παρατήρηση μία ακόμη διαδεδομένη μορφή συγκέντρωσης δεδομένων συνιστά η συνέντευξη. Ο ερευνητής/η ερευνήτρια θέτει στα υποκείμενα της έρευνας διάφορες ανοιχτές ερωτήσεις (open-ended questions), καταγράφει τις απαντήσεις τους, τις μεταγράφει και περνάει τα δεδομένα σε ένα αρχείο υπολογιστή. Η συνέντευξη συγκεντρώνει διάφορα πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, ο συνεντευκτής έχει μεγαλύτερο έλεγχο στα είδη των πληροφοριών που δέχεται σε σχέση με τον παρατηρητή. Από την άλλη πλευρά, ο συνεντευκτής προσλαμβάνει την πραγματικότητα μέσα από τις υποκειμενικές απόψεις των συνεντευξιζόμενων, χωρίς να έχει μία άμεση πρόσβαση στο τι πραγματικά συμβαίνει ή συνέβη, όπως ισχύει στην περίπτωση της παρατήρησης (Creswell, 2011).

Σε κάθε περίπτωση ένας αρμονικός συνδυασμός παρατήρησης και συνέντευξης μπορεί να δώσει πολλά περισσότερα δεδομένα. Τοιουτοτρόπως, μπορεί να επιτευχθεί πρόσβαση τόσο στην πραγματικότητα των υποκειμένων όσο και στην άποψη των υποκειμένων για την πραγματικότητά τους. Καθιστώντας τα προαναφερθέντα λεγόμενα πιο σαφή, η παρατήρηση αποκαλύπτει τις συμπεριφορές, και τον λόγο ενώ η συνέντευξη φανερώνει τις ερμηνείες των υποκειμένων για τις συμπεριφορές και τον λόγο, με άλλα λόγια τις σκέψεις τους.

Όσον αφορά στον αριθμό των συνεντευξιζόμενων, μία συνέντευξη μπορεί να είναι είτε προσωπική είτε εστιασμένη ομαδική. Στην πρώτη περίπτωση ο ερευνητής/η ερευνήτρια θέτει ερωτήσεις κάθε φορά σε έναν συνεντευξιζόμενο ενώ στη δεύτερη περίπτωση σε μία ολιγάριθμη ομάδα συνεντευξιζόμενων, συνήθως τεσσάρων έως έξι. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο ερευνητής/η ερευνήτρια εξοικονομεί πολύτιμο χρόνο και οι συνεντευξιζόμενοι έχουν τη δυνατότητα να αλληλεπιδράσουν παρέχοντας πιθανώς καλύτερες πληροφορίες (Creswell, 2011). Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε η εστιασμένη ομαδική συνέντευξη, καθώς ούτως ή άλλως τα υποκείμενα της έρευνας αποτελούσαν μία συγκεκριμένη ομάδα κατά τη διάρκεια του εκπαιδευτικού προγράμματος. Με βάση αυτό, υπήρχε η επιθυμία από τη μεριά της ερευνήτριας να διατηρηθεί η αλληλεπίδραση, όπως υπήρχε μες στην ομάδα, και κατά τη φάση της συνέντευξης.

## Κεφάλαιο 4: Παρουσίαση και ανάλυση δεδομένων

### Περιγραφή εκπαιδευτικών συνεδριών

Στη συνέχεια θα γίνει η περιγραφή καθεμιάς από τις δεκατρείς συνολικά εκπαιδευτικές συνεδρίες. Για την καλύτερη κατανόηση της ροής του εκπαιδευτικού προγράμματος κάθε περιγραφή θα συνοδεύουν η επιστολή του Τετράγωνου και η απαντητική επιστολή των παιδιών ή/και φωτογραφίες από τα έγγραφα, σχέδια ή συμπληρωμένες φόρμες, που παρήγαγε η ερευνώμενη ομάδα. Υπενθυμίζεται σε αυτό το σημείο ότι τα ερευνώμενα υποκείμενα είναι τέσσερα, δύο αγόρια και δύο κορίτσια. Τα αγόρια είναι ο Α. και ο Χ. και τα κορίτσια η Σ. και η Φ. (Τα κριτήρια για την κατανομή των παιδιών στις ομάδες παρουσιάζονται στη σελίδα 57). Βέβαια, για την πληρέστερη περιγραφή των εκπαιδευτικών συνεδριών σε αρκετά σημεία γίνονται αναφορές και στα υπόλοιπα παιδιά του τμήματος.

### Πρώτη εκπαιδευτική συνεδρία

Τα παιδιά καταφτάνουν στη σχολική αίθουσα λαχανιασμένα μετά το μάθημα γυμναστικής που έγινε την προηγούμενη διδακτική ώρα. Ένας παρατηρητικός μαθητής βλέπει το κινητό που είναι τοποθετημένο πάνω στην έδρα. Πηγαίνει πίσω και αντιλαμβάνεται ότι η κάμερα είναι σε λειτουργία. Αμέσως ξεκινάει να τριγυρίζει στην τάξη και να λέει στα υπόλοιπα παιδιά: «Ακούστε! Η κυρία μας βγάζει βίντεο!». Η έκπληξη στη φωνή του είναι εμφανής. Κάποια παιδιά δε δίνουν σημασία ενώ κάποια άλλα κοιτάζουν με απορία και διερευνητικό βλέμμα το κινητό προσπαθώντας να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα.

Μετά από σχετική οδηγία της δασκάλας τα παιδιά βγάζουν πάνω στο θρανίο τους το τετράδιο μαθηματικών, ώστε να αντιγράψουν κάποια προβλήματα από τον πίνακα. Ουσιαστικά πρόκειται για περισπασμό. Ο στόχος της δασκάλας εδώ είναι τα παιδιά να ξεχάσουν το ζήτημα της βιντεοσκόπησης και να επανέλθει το σύνηθες κλίμα της τάξης. Μετά από λίγα λεπτά τα παιδιά ηρεμούν.

Ξαφνικά ακούγονται τέσσερα δυνατά χτυπήματα από την κλειστή πόρτα της σχολικής αίθουσας. Τα παιδιά σηκώνουν άλλα με ανησυχία και άλλα με απορία τα κεφάλια τους από το τετράδιο. Κοιτάζουν επίμονα και απορημένα προς την πόρτα και ύστερα προς τη δασκάλα. Ρωτάνε τη δασκάλα: «Κυρία, ποιος;» Έπειτα γελάνε,

καθώς ποτέ πριν δεν έχει ξαναχτυπήσει τόσο δυνατά την πόρτα. Δύο παιδιά παρασέρνονται από τον ενθουσιασμό, εγκαταλείπουν τα θρανία τους και τρέχουν στην πόρτα. Την ανοίγουν γεμάτα περιέργεια, μα δε βλέπουν κανέναν. Ύστερα, το βλέμμα τους πέφτει πάνω στο γράμμα του Τετράγωνου, που βρίσκεται στο πάτωμα μπροστά ακριβώς από την πόρτα. (Πριν από κάθε συνεδρία αναλάμβανε κάποια συνάδελφος δασκάλα της Γ' δημοτικού να χτυπήσει δυνατά την πόρτα της τάξης και να περάσει το γράμμα κάτω από τη χαραμάδα). Τα δύο παιδιά παίρνουν με λαχτάρα την επιστολή στα χέρια τους, χωρίς να γνωρίζουν ακόμη περί τίνος πρόκειται. Άλλα παιδιά ξεκινούν φωναχτά υποθέσεις σχετικά με το ποιος χτύπησε την πόρτα ενώ ένα παιδί φωνάζει με ενθουσιασμό: «Γράμμα!».

Η δασκάλα παίρνει το γράμμα στα χέρια της και ζητάει από έναν μαθητή να διαβάσει τα στοιχεία του αποστολέα: «Από Τετράγωνο, Μαθηματικών 12, Γεωμετρούπολη, Επιπεδοχώρα, Κόσμος των 2 διαστάσεων». Όλα τα υπόλοιπα παιδιά παραμένουν σιωπηλά. Το γράμμα φαίνεται ότι τους έχει τραβήξει το ενδιαφέρον. Ορισμένα πιο αυθόρμητα παιδιά ανασηκώνονται από τα καθίσματά τους και πλησιάζουν τη δασκάλα που κρατάει το γράμμα.

Έπειτα, η δασκάλα διαβάσει κι αυτή τα στοιχεία αποστολέα με δυνατή φωνή στην τάξη και εξηγεί: «Το γράμμα αυτό το στέλνει ένα Τετράγωνο, το οποίο μένει στην οδό Μαθηματικών 12, σε μία πόλη που λέγεται Γεωμετρούπολη ενώ η χώρα του λέγεται Επιπεδοχώρα. Και ο κόσμος που βρίσκεται είναι ο κόσμος των δύο διαστάσεων». Μετά η δασκάλα διαβάσει τα στοιχεία παραλήπτη: «Προς: 3<sup>η</sup> τάξη δημοτικού των Εκπαιδευτηρίων Μ.Ν. Ράπτου, Καρδίτσης 21, Λάρισα, Χωροχώρα, Κόσμος των 3 διαστάσεων».

Κατόπιν ρωτάει μερικές φορές τα παιδιά σε ποια χώρα και σε ποιο κόσμο ζει το Τετράγωνο και σε ποια χώρα και σε ποιο κόσμο ζούνε οι άνθρωποι. Πρόθεση της εκπαιδευτικού εδώ είναι διπλή. Αφενός θέλει να διασφαλίσει ότι όλα τα παιδιά έχουν ακούσει και συγκρατήσει τις ονομασίες που χρησιμοποιούνται για τους διαφορετικούς τύπους διαμονής. Αφετέρου προσπαθεί να κάνει τα παιδιά να εστιάζουν στις διαφορές των ονομασιών και να τις συγκρίνουν.

Σε αυτό το χρονικό σημείο ορισμένα παιδιά αρχίζουν να ψιθυρίζουν θριαμβευτικά: «Το κατάλαβα!». Η δασκάλα ρωτάει τελικά τα παιδιά: «Να το ανοίξω;». Τα περισσότερα παιδιά ζητωκραυγάζουν: «Ναι!». Η δασκάλα ανοίγει τον φάκελο, επιδεικνύει τα περιεχόμενα του φακέλου στα παιδιά και ταυτόχρονα τα περιγράφει: «Ανοίγω και βλέπω μέσα δύο χαρτάκια».

Κατόπιν, ρωτάει τα παιδιά εάν επιθυμούν να διαβάσει το ένα χαρτάκι που αποτελεί το γράμμα. Αφού λάβει θετική απάντηση από το σύνολο της τάξης, ξεκινάει να διαβάζει με αργό ρυθμό το γράμμα. Σε αυτό το Τετράγωνο προσκαλεί τα παιδιά να γνωρίσουν τη χώρα του, την Επιπεδοχώρα, και εκφράζει την επιθυμία του να το βοηθήσουν να εξερευνήσει τη Χωροχώρα, δηλαδή τη Χώρα των τριών διαστάσεων. Η δασκάλα δίνει έμφαση δυναμώνοντας την ένταση της φωνής της σε συγκεκριμένα σημεία, τα οποία θεωρεί κρίσιμα για τη μαθητική κατανόηση. Ειδικότερα, τονίζει τις πρώτες τέσσερις σειρές της δεύτερης παραγράφου. Το γράμμα του Τετράγωνου παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Γεωμετρούπολη, 24/4/2017

Αγαπητά μέλη του Γ'2,

χαιρομαι ιδιαίτερα που διαβάζετε την επιστολή μου αυτή τη στιγμή. Καταρχάς επιτρέψτε μου να σας συστηθώ: Είμαι το Τετράγωνο! Αποκαλώ του κόσμου, όπου γεννήθηκα και ζω, Επιπεδοχώρα, όχι γιατί αυτό είναι το όνομά του, αλλά για να καταλάβετε καλύτερα τη φύση του εσείς, ευτυχοισμένοι αναγνώστες που έχετε το προνόμιο να ζείτε στον Χώρο.

Για να αντιληφθείτε καλύτερα τον κόσμο μου, φαντασθείτε ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί όπου ευθείες Γραμμές, Τρίγωνα, Τετράγωνα, Πεντάγωνα, Εξάγωνα και άλλα σχήματα, αντί να παραμένουν σταθερά στη θέση τους, κινούνται ελεύθερα στην επιφάνεια του χαρτιού χωρίς όμως να μπορούν να απομακρυνθούν προς τα πάνω ή προς τα κάτω! Φαντασθείτε λοιπόν αυτά τα σχήματα σαν σκιές με σκληρές και φωτεινές άκρες και θα έχετε σχηματίσει μια αρκετά σωστή ιδέα για τη χώρα μου και τους συμπατριώτες μου.

Θα ήθελα πολύ να γίνουμε φίλοι δια αλληλογραφίας! Φαντάζει απίστευτη πρόκληση για μένα να σας εξηγήσω τον άγνωστο κόσμο των δύο διαστάσεων και αντίστροφα να με ξεναγήσετε στον τρισδιάστατο κόσμο σας! Προκειμένου να γνωριστούμε καλύτερα, σας επισυνάπτω και μία φωτογραφία μου παρακάτω! Ελπίζω να σας αρέσει! Μου την τράβηξε ο πιο φημισμένος φωτογράφος της Γεωμετρούπολης! Περιμένω με ανυπομονησία τις σκέψεις, τις απορίες και τα πιθανά σχόλιά σας!

Με εκτίμηση,  
το Τετράγωνο

Εικόνα 4.1. Η πρώτη επιστολή του Τετράγωνου

Μάλιστα, η δασκάλα αφού διαβάζει το συγκεκριμένο χωρίο, το παραφράζει λέγοντας: «Είναι λοιπόν σε μία επιφάνεια και κινούνται δεξιά κι αριστερά, χωρίς να μπορούνε να πάνε ούτε πάνω ούτε κάτω». Συνοδεύει τα λόγια της με κινήσεις του ενός χεριού, υποδηλώνοντας έτσι την επιφάνεια, δηλαδή το δισδιάστατο επίπεδο, και το ύψος, το οποίο αντιστοιχεί στις λέξεις «πάνω» και «κάτω». Αφότου τελειώσει το γράμμα, δείχνει τη φωτογραφία του Τετράγωνου. (Η φωτογραφία φαίνεται στη σελίδα 43). Τα παιδιά εκπλήσσονται έντονα. Ρωτάνε: «Τι;» και γελούν. Ένας μαθητής μάλιστα σχολιάζει: «Αυτό δεν είναι Τετράγωνο, είναι μόνο μία γραμμή!». Τότε η Σ. λέει: «Μπορεί να μας έστειλε μία μόνο γραμμή του (όπου γραμμή ίσον πλευρά για την ίδια), για να δώσει (εννοεί τις υπόλοιπες) και στα άλλα τμήματα».

Η δασκάλα επιμένει ότι το Τετράγωνο γράφει στο γράμμα ότι έστειλε ολόκληρη τη φωτογραφία του. Ένας μαθητής πετάγεται και λέει ότι ίσως δεν είναι τόσο καλή η φωτογραφία. Μία άλλη μαθήτρια μπερδεύει το φιλμ, που ουσιαστικά αποτελεί το περίγραμμα της φωτογραφίας και είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, με το τετράγωνο σχήμα και υποθέτει ότι η γραμμή που βλέπουν αποτελεί το στόμα του Τετράγωνου. Ένας άλλος μαθητής θεωρεί επίσης ότι όλο το χαρτί είναι η φωτογραφία του Τετράγωνου. Πιστεύει ότι εάν περιστραφεί το χαρτί θα αποκαλυφθεί ένα τετράγωνο. Η δασκάλα περιστρέφει το χαρτί και ο μαθητής το παρατηρεί προσεκτικά. Η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά εάν το χαρτί έχει τετράγωνο σχήμα. Τότε η Σ. πετάγεται και λέει: «Όχι, είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο!».

Η δασκάλα δέχεται τον ισχυρισμό της Σ. λέγοντας: «Όντως η Σ. έχει δίκιο! Εάν κοιτάξετε καλύτερα το χαρτί, θα καταλάβετε ότι είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τι συμβαίνει όμως; Έχει κανείς κάποια σκέψη;» Ακόμη, ρωτάει τα παιδιά πώς λέγεται στη γλώσσα της γεωμετρίας αυτό που αποκαλούν γραμμή του σχήματος. Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι είχε προηγηθεί πριν από δύο μήνες συμβατική διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών καθώς και των μερών τους. Συνεπώς, η δασκάλα ανέμενε οι μαθητές και οι μαθήτριες να θυμούνται τον όρο «πλευρά», μία υπόθεση που τελικά δεν ίσχυε.

Η Φ. σηκώνει το χέρι και προτείνει τον όρο «έδρες», ο Α. προτείνει τον όρο «παράλληλες» ενώ ένας άλλος μαθητής προτείνει τον όρο «γωνίες». Κάπως έτσι αποδεικνύεται ότι τα παιδιά ναι μεν θυμούνται ορισμένους γεωμετρικούς όρους, ωστόσο τους συγχέουν μεταξύ τους. Τελικά τον ορθό όρο, δηλαδή την «πλευρά» εντοπίζει μία μαθήτρια.

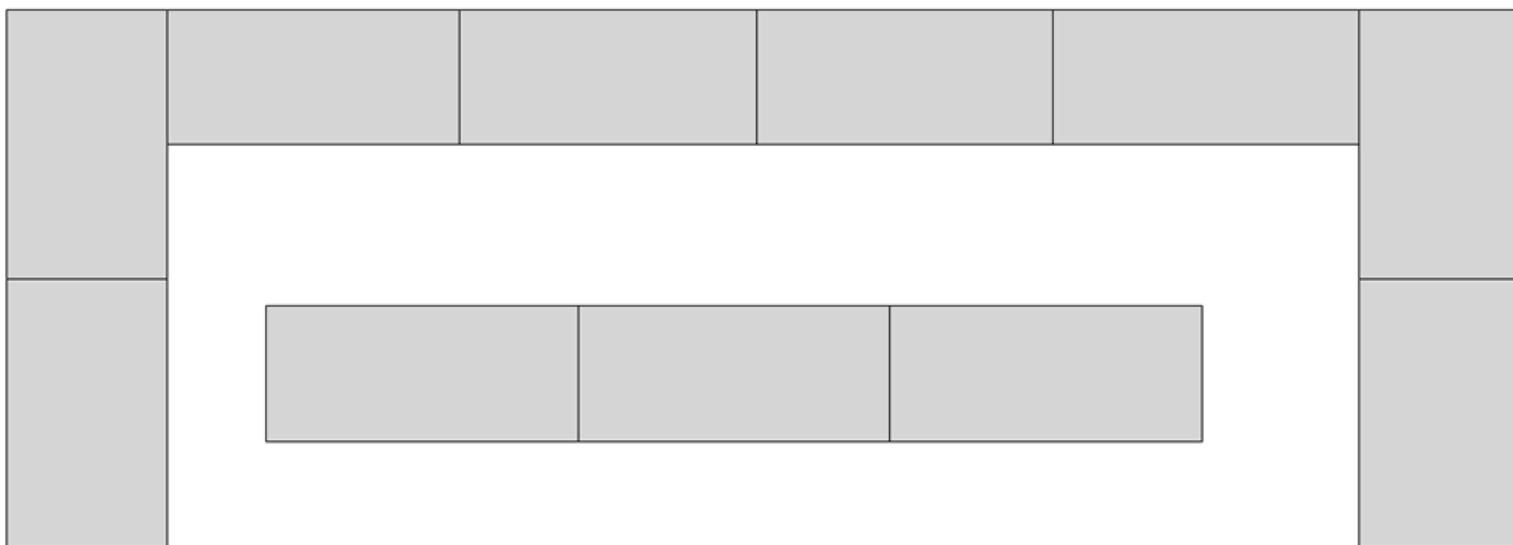


Μέχρι αυτό το σημείο λοιπόν οι παιδικές σκέψεις δείχνουν μία πλήρη αγνόηση της όρασης σε ένα δισδιάστατο επίπεδο. Μένουν στο προφανές, δηλαδή αναγνωρίζουν ότι η φωτογραφία του Τετράγωνου απεικονίζει μονάχα μία πλευρά/ γραμμή. Τα παιδιά μετά από παρότρυνση της εκπαιδευτικού αρχίζουν να προβληματίζονται πάνω στη σημασία της λέξης «διάσταση». Αρχικά, οι ιδέες τους φανερώνουν σύγχυση. Ένα αγοράκι σηκώνει το χέρι του και λέει χαρακτηριστικά: «Υπάρχουν τρεις διαστάσεις. Η μία είναι μακριά, η άλλη κοντά και η τρίτη μεσαία». Τελικά η Σ. λέει: «Ο κόσμος των δύο διαστάσεων είναι τα σχήματα, τα γεωμετρικά, που δεν είναι... (Σταματάει για λίγο να μιλάει και σκέφτεται). Εμείς ζούμε στον τρισδιάστατο κόσμο και είμαστε σαν κυβικά μέτρα. Αυτά ζούνε σε έναν κόσμο που έχουνε μόνο μία επιφάνεια, δεν υπάρχουν κι άλλες επιφάνειες».

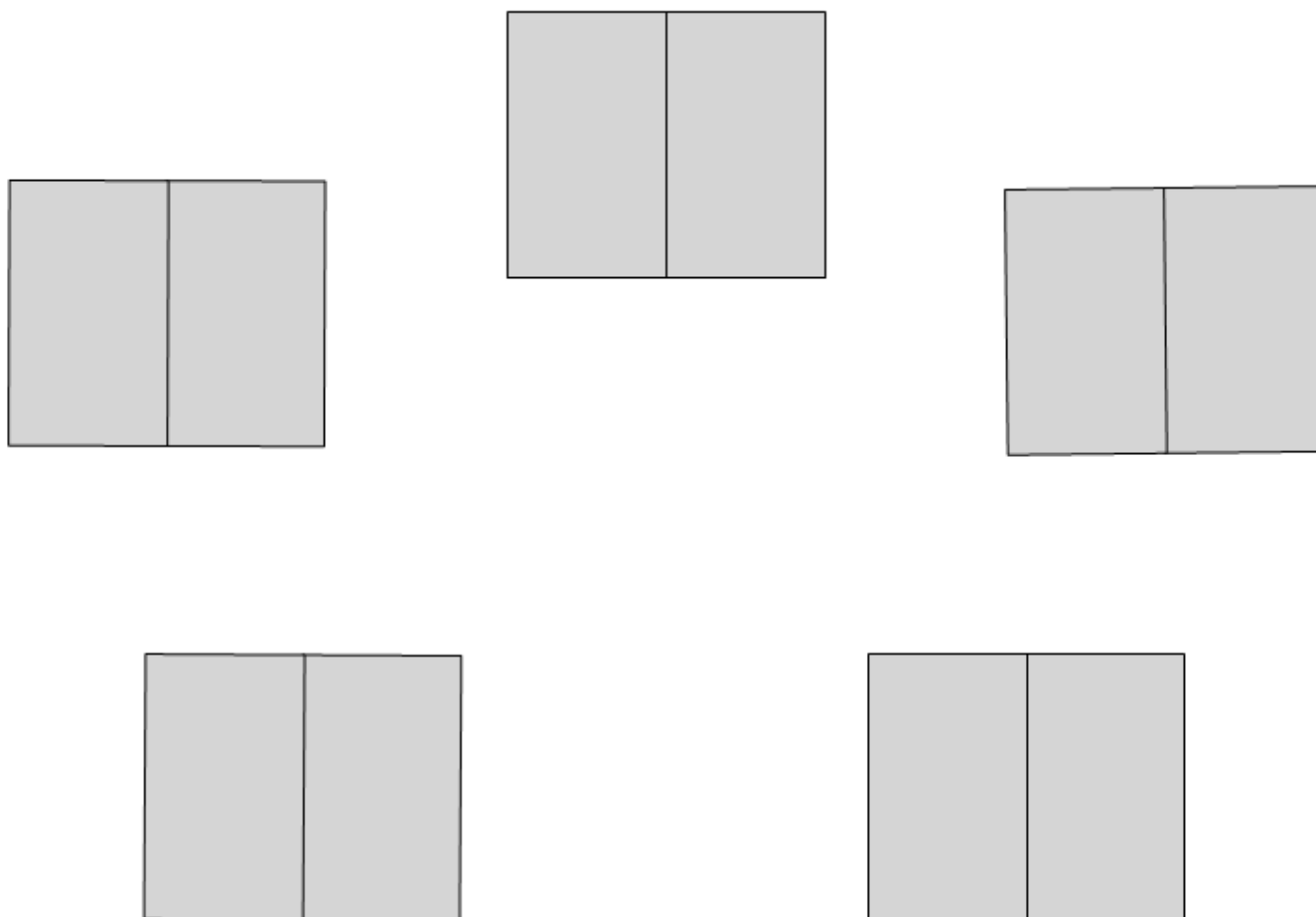
Το μικρό κορίτσι εκφράζει μία ακατέργαστη αλλά στον πυρήνα της ορθή σκέψη. Οπωσδήποτε, της λείπει το λεξιλόγιο, για να εκφράσει λεκτικά με ολοκληρωμένο τρόπο τη σκέψη της. Φαίνεται όμως ότι στο μυαλό της έχει αρχίσει να διαμορφώνει μία διάκριση ανάμεσα στους δισδιάστατους και τους τρισδιάστατους χώρους. Με αφορμή τα λόγια της Σ., η δασκάλα ξαναδιαβάζει τις τέσσερις πρώτες σειρές της δεύτερης παραγράφου του γράμματος. Έπειτα, παίρνει δύο αυτοσχέδια γεωμετρικά σχήματα και ξαναλέει τα ίδια λόγια σέρνοντας τα γεωμετρικά σχήματα στις επιφάνειες των μαθητικών θρανίων. Τα παιδιά ενθουσιάζονται πάλι. Ένας μαθητής λέει με πολλή χαρά: «Θα ταξιδέψουμε σε μία άλλη διάσταση!». Η δασκάλα επιβεβαιώνει αυτή τη σκέψη και τα υπόλοιπα παιδιά πανηγυρίζουν φωνάζοντας χαρούμενα: «Ναι!» και «Θα πάμε ταξίδι!».

Επόμενο βήμα είναι η αλλαγή της διάταξης των θρανίων. Καθ' όλη τη διάρκεια της χρονιάς η δασκάλα διατηρούσε τα θρανία της αίθουσας σε μία διάταξη που ομοιάζε με το γνωστό σχήμα Π. Για τις ανάγκες μίας συνεργατικής/ομαδοκεντρικής διδασκαλίας η διάταξη των θρανίων έπρεπε να τροποποιηθεί. Για τον σκοπό αυτό η δασκάλα είπε στους μαθητές να τοποθετήσουν τα θρανία ανά δύο αντικριστά κι να απομακρύνουν στα πλαϊνά της αίθουσας ένα θρανίο. Βέβαια, αν και αυτή η διάταξη θρανίων ευνοεί την ομαδοκεντρική διδασκαλία, υπάρχει ο κίνδυνος σε στιγμές χαλάρωσης οι μαθητικές ομάδες να μετατραπούν σε συντροφικές ελεύθερης συζήτησης (Ματσαγγούρας, 2006).

Στη συνέχεια απεικονίζεται η προγενέστερη και η μεταγενέστερη του εκπαιδευτικού προγράμματος διάταξη των θρανίων στη σχολική αίθουσα.



**Εικόνα 4.2.** Διάταξη θρανίων πριν την έναρξη του εκπαιδευτικού προγράμματος



**Εικόνα 4.3.** Διάταξη θρανίων μετά την έναρξη του εκπαιδευτικού προγράμματος

Μετά από λίγα λεπτά τα παιδιά μαζί με τη δασκάλα έχουν αλλάξει τη διάταξη των θρανίων και η δασκάλα κατανέμει τους μαθητές και τις μαθήτριες σε θρανία και ομάδες. Ο καθορισμός των ομάδων είχε γίνει πριν την έναρξη του προγράμματος από την ίδια τη δασκάλα χάριν οικονομίας χρόνου. Βασικές επιδιώξεις υπήρξαν οι ομάδες να είναι αφενός ανομοιογενείς ως προς το εσωτερικό τους κι αφετέρου συνολικά ισοδύναμες μεταξύ τους κατά το δυνατόν. Ως κριτήρια υιοθετήθηκαν τα ακόλουθα προτεινόμενα από τον Slavin: το επίπεδο ικανοτήτων, το φύλο, η εθνικότητα, η ύπαρξη ειδικών εκπαιδευτικών ικανοτήτων (Slavin, 1994).

Σε αυτό το σημείο αξίζουν να αναφερθούν τρία στοιχεία. Πρώτον, όλα τα παιδάκια στη συγκεκριμένα τάξη είναι ελληνικής καταγωγής. Γι' αυτόν τον λόγο, το κριτήριο της εθνικότητας στην ουσία αγνοήθηκε. Δεύτερον, η δασκάλα διατήρησε σταθερή τη σύνθεση των ομάδων καθ' όλη τη διάρκεια του εκπαιδευτικού προγράμματος. Τρίτον, τα τέσσερα υποκείμενα της έρευνας τοποθετήθηκαν για λόγους ευκολίας στην ίδια ομάδα.

Πέρα από τα παραπάνω κριτήρια, για την κατανομή των μαθητών στις ομάδες τους λήφθηκε υπόψη και ο χαρακτήρας των παιδιών καθώς και το επίπεδο του προφορικού τους λόγου. Κρίθηκε σκόπιμο να συνυπάρξουν στην ομάδα ενδιαφέροντος δύο παιδιά πιο εξωστρεφή (ο Α. και η Σ.) και δύο παιδιά πιο εσωστρεφή (η Φ. και ο Χ.), ώστε να ενισχυθεί η ποικιλομορφία της ομάδας. Τέλος, προτιμήθηκαν μαθητές και μαθήτριες, που δεν παρουσιάζουν κάποιο πρόβλημα στον προφορικό τους λόγο, ώστε να αποτυπωθούν πιο έντονα οι παιδικές σκέψεις και απόψεις.

Καθισμένα στις νέες τους θέσεις τα παιδιά τώρα συζητούν μαζί με τη δασκάλα τι σημαίνει να είναι κανείς «φίλος δια αλληλογραφίας». Αφού καταλήξουν στη σημασία της φράσης, η δασκάλα ξαναδιαβάζει στα παιδιά το γράμμα του Τετράγωνου. Μετά την κανονική ανάγνωση παραφράζει τις τέσσερις πρώτες σειρές της δεύτερης παραγράφου λέγοντας αντί για κόλλα χαρτιού αρχικά «αόρατη κόλλα χαρτιού» και μετά «επίπεδη επιφάνεια». Πραγματοποιείται λοιπόν ομαλά μία άτυπη διδασκαλία του όρου «επιφάνεια». Σύμφωνα με την ευκλείδεια θεώρηση: «επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει»(Ευκλείδης, n.d., σελ. 1).

Ακολουθεί μία συζήτηση τύπου ιδεοθύελλας, κατά την οποία η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά τι πιστεύουν ότι μπορούν να γράψουν στην απαντητική επιστολή. Τα παιδιά συμμετέχουν όμορφα εκφράζοντας όχι μόνο ιδέες τους αλλά και απορίες τους. *Ο Α. ρωτάει: «Κυρία, αφού δεν μπορούν να πάνε πάνω, πώς μπορούν να πάνε*

στο διάστημα;». Φυσικά, το γράμμα δεν υπάρχει αυτός ο ισχυρισμός. Ωστόσο, η ιδέα του Α. υποδηλώνει σε κάθε περίπτωση ότι το παιδί σκέφτεται πάνω στην έννοια του χώρου.

Η δασκάλα διαβάζει το γράμμα πάλι κι ο Α. αντιλαμβάνεται ότι το Τετράγωνο δε γράφει πουθενά για διάστημα. Το παιδί μένει για λίγα δευτερόλεπτα σκεπτικό και ύστερα ξαναμιλάει: «Κυρία, εκεί που λέει ότι η χώρα τους μοιάζει με μία κόλλα χαρτί, αλλά δεν πάνε ούτε πάνω ούτε κάτω, εννοεί ότι είναι κάπως σαν κολλημένα εκεί; Σαν να είναι μαγνήτες;». Η επανάληψη της φράσης «δεν πάνε ούτε πάνω ούτε κάτω» φαίνεται ότι προκαλεί αλυσιδωτές σκέψεις στο μικρό αγόρι. Η σκέψη ότι τα γεωμετρικά σχήματα κινούνται στον φανταστικό Κόσμο των Δύο Διαστάσεων σαν να τα κρατά δεσμευμένα μία φανταστική κόλλα ή σαν να τα έλκει μία μαγνητική δύναμη αποτελεί μία πολύ ενδιαφέρουσα προσέγγιση.

Ο Α. συνεχίζει: «Κυρία, πιστεύω τελικά ότι το Τετράγωνο μας έστειλε στη φωτογραφία μόνο μία γραμμή, για να μας δείξει πώς είναι η χώρα του». Από τον λόγο του Α. προκύπτουν δύο πράγματα. Πρώτον, το παιδί επιμένει να χρησιμοποιεί τη λέξη «γραμμή» αντί για τον ορθό μαθηματικό όρο «πλευρά». Δεύτερον, ο Α. προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο μία κατανόηση της όρασης σε έναν φανταστικό, διδιάστατο κόσμο, χωρίς όμως να μπορεί να εξηγήσει περαιτέρω τη σκέψη του λεκτικά. Η δασκάλα αναγνωρίζει ότι το παιδί έχει φτάσει φαινομενικά σε ένα τέλμα, οπότε κρίνει ότι πρέπει να συνεισφέρει στην πρόοδο της μαθητικής σκέψης. Έτσι, καλεί τα παιδιά να σκεφτούν τι βλέπει ένας φωτογράφος που βγάζει φωτογραφία και έπειτα να σκεφτούν σε ποιο κόσμο βρίσκονται οι άνθρωποι και σε ποιο κόσμο βρίσκεται το Τετράγωνο.

Τότε, ένας μαθητής από άλλη ομάδα προχωράει τον συλλογισμό του. Λέει: «Γιατί έχει βγάλει τη χώρα έτσι και το από πάνω είναι εκεί που μένουν». Συνοδεύει τα λόγια του με κινήσεις των χεριών, ώστε να περιγράψει με περισσότερη σαφήνεια τις σκέψεις του. Συγκεκριμένα, με το δεξί του χέρι αναπαριστά την Επιπεδοχώρα θέτοντας την παλάμη του σε οριζόντιο προσανατολισμό με ενωμένα τα δάχτυλα στο ύψος των ματιών του. Λαμβάνοντας έμπνευση από τον συμμαθητή της, η Φ. αναφωνεί: «Να σας δείξω; Ο κόσμος του είναι σαν αυτό το κομμάτι χαρτί (παίρνει το χαρτί με την υποτιθέμενη φωτογραφία). Ο φωτογράφος βγάζει όμως φωτογραφία πλάγια (δείχνει με το χέρι της) κι έτσι αυτό που βλέπει και βγάζει είναι μόνο μία γραμμή κι όχι τα σχήματα».

Με αυτές τις σκέψεις κατά νου όλες οι ομάδες ξεκινούν και γράφουν σε λευκές, απλές κόλλες Α4 την απαντητική επιστολή. Το γράμμα των υποκειμένων Α, Σ, Φ και Χ φαίνεται στην επόμενη σελίδα.

Αγαπητό μου τετραγωνί,  
Είμαστε μια ομάδα μαθητών που τα ονόματά μας  
είναι: Σ [redacted], Φ [redacted], Α [redacted] και Χ [redacted]. Χαιρόμαστε  
πολύ που παραλάβαμε το γράμμα σου. Θα θέλαμε  
πολύ να γίνουμε φίλοι, και να μάθουμε πολλά πράγμα-  
τα για τον κόσμο σου. Επίσης θα θέλαμε να δούμε το  
πρόσωπό σου, αλλά μάλλον ο φωτογράφος σε  
κοροϊδεψε ή απλώς έβγαλε τον κόσμο σου  
πλάγια και να μην φέρονται τα σχήματα που  
κατακόουν. Μπορείς να μας στείλεις μια φωτογραφία  
από τον κόσμο σου;  
Με αγάπη,  
τα παιδιά του Γ'2

**Εικόνα 4.4.** Η πρώτη απαντητική επιστολή των παιδιών

## Δεύτερη εκπαιδευτική συνεδρία

Η πόρτα χτυπάει δυνατά. Αυτή τη φορά δεν είναι κάποιο γράμμα αλλά ένας πολύ χοντρός, χαρτονένιος, γαλάζιος φάκελος. Τα παιδιά δείχνουν κι αυτή τη φορά πολύ ενθουσιασμένα. Η δασκάλα τα ρωτάει τι πιστεύουν ότι έχει μέσα το κουτί. Τα παιδιά δίνουν διάφορες απαντήσεις: γράμματα, φωτογραφίες, γλυκά, σοκολάτες, τούρτα, παγωτά, πατατάκια, κάποιο δώρο, ένα παζλ, παιχνίδια. Η δασκάλα ανοίγει μπροστά στα παιδιά τον φάκελο και αποκαλύπτει στα παιδιά το περιεχόμενό του: ένα γράμμα από το Τετράγωνο, γνώμονες και χρωματιστά χαρτόνια μεγέθους Α4.

Η δασκάλα δείχνει τους γνώμονες στα παιδιά και τα ρωτάει πώς πιστεύουν ότι λέγονται αυτά τα αντικείμενα. Οι απαντήσεις των παιδιών ποικίλλουν: χάρακες, μοιρογνωμόνια, τρίγωνοι χάρακες. Η δασκάλα αποκαλύπτει στα παιδιά την ορθή ονομασία, δηλαδή «γνώμονες». Ύστερα τα ρωτάει όλα αυτά που ανέφεραν, δηλαδή οι χάρακες, τα μοιρογνωμόνια, τα τρίγωνα και μαζί τους οι γνώμονες πώς λέγονται. Οι απαντήσεις των παιδιών είναι πολυάριθμες: σελιδοδείκτης, σχολικά είδη, γεωμετρικά σχήματα, γεωμετρικοί χάρακες, γεωμετρικά στερεά, γεωμετρικά είδη. Η Φ. μάλιστα λέει ότι λέγονται «σχήματα». Τελικά, η δασκάλα αποκαλύπτει στα παιδιά ότι όλα αυτά λέγονται γεωμετρικά όργανα.

Κατόπιν τα ξαναρωτάει: «Σε τι πιστεύετε ότι χρησιμεύουν τα γεωμετρικά όργανα;». Ένας μαθητής σηκώνει το χέρι και λέει: «Για να σχεδιάζουμε». Η δασκάλα επιμένει: «Με τους γνώμονες σχεδιάζουμε μήπως κάτι συγκεκριμένο; Γιατί εμείς έχουμε χάρακες με τους οποίους μπορούμε να σχεδιάσουμε. Γιατί το Τετράγωνο μας στέλνει γνώμονες;». Με το δάχτυλο τούς δείχνει την ορθή γωνία του γνώμονα. Ένας μαθητής σηκώνει το χέρι και λέει: «Με αυτό μπορούμε να κάνουμε εύκολα τις γωνίες».

Η δασκάλα ρωτάει πάλι: «Ποιες γωνίες; Όλες τις γωνίες; Μπορούμε να κάνουμε δηλαδή με αυτό μία οξεία ή μία αμβλεία γωνία;». Ένα παιδί πετάγεται και λέει ότι τέτοιες γωνίες κάνουμε εύκολα και με έναν απλό χάρακα. Η δασκάλα παίρνει τον γνώμονα και ταιριάζει την ορθή του γωνία στην ορθή γωνία που σχηματίζουν διάφορα αντικείμενα μες στην τάξη, όπως ο πίνακας, η πόρτα, το θρανίο. Επισημαίνει έπειτα στα παιδιά ότι όλες αυτές οι γωνίες έχουν κάτι κοινό. Ένας μαθητής σηκώνει χέρι και λέει ότι ο γνώμονας μετράει τις άκρες. Η δασκάλα επιμένει: «Τι κοινό έχουν όλες αυτές οι γωνίες;». Ο Α. λέει: «Είναι γωνίες των ενενήντα μοιρών». Η δασκάλα ρωτάει: «Δηλαδή πώς λέγονται αυτές οι γωνίες που είναι ενενήντα μοιρών;». Ένας μαθητής σηκώνει χέρι και λέει «ορθές γωνίες».

Μέχρι τώρα αυτό που φαίνεται έντονα είναι ότι τα παιδιά γνωρίζουν διάφορες έννοιες σχετικά με το μάθημα της γεωμετρίας, ωστόσο τις χρησιμοποιούν αδιαφοροποίητα. Με άλλα λόγια, δεν είναι σίγουρα για τη σημασία της καθεμίας. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιούν τη λέξη «άκρη» αντί για τη λέξη «γωνία», τον όρο «γεωμετρικά σχήματα» ή «γεωμετρικά στερεά» αντί για «γεωμετρικά όργανα» και τους όρους «χάρακας» ή «μοιρογνωμόνιο», για να αναφερθούν σε έναν γνώμονα.

Αφού τα παιδιά έχουν δει τα περιεχόμενα του φακέλου, ζητούν από τη δασκάλα να διαβάσει το γράμμα του Τετράγωνου. (Αυτό βρίσκεται στην επόμενη σελίδα.) Σε αυτό το Τετράγωνο προσπαθεί να εξηγήσει στα παιδιά ότι η αίσθηση της όρασης έχει περιορισμούς για τους κατοίκους της Επιπεδοχώρας. Όταν τα παιδιά αντιλαμβάνονται πως το Τετράγωνο απαντάει ξεχωριστά στα ερωτήματα κάθε ομάδας, ξαφνιάζονται ευχάριστα. Φαίνεται ότι αυτό ενισχύει περισσότερο την πεποίθηση ότι το Τετράγωνο είναι ένα υπαρκτό πρόσωπο, το οποίο αλληλογραφεί μαζί τους. Τους κινεί την περιέργεια το γεγονός ότι το Τετράγωνο δε γνωρίζει τι είναι το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ ενώ χαμογελούν στο άκουσμα της λέξης «πατινάζ».

Όσο ακούνε την ανάγνωση της δασκάλας και συγκεκριμένα εκεί που λέει: «Εδώ στην Επιπεδοχώρα, παίζουμε συχνά ένα παιχνίδι που το λέμε πατινάζ! Μας αρέσει πολύ να κυλάμε γρήγορα δεξιά, αριστερά, πίσω και μπρος», ένας μαθητής εκτελεί στον αέρα με τα χέρια του αντίστοιχες κινήσεις. Προφανώς διαμορφώνει νοερά μία εικόνα των κινήσεων που γίνονται στην Επιπεδοχώρα. Το ίδιο αγόρι μετά από λίγο πετάγεται και λέει: «Ευθεία δηλαδή». Το αγόρι πιθανόν αυτή τη στιγμή διαμορφώνει μία πρωτόλεια προσέγγιση του όρου «ευκλείδειο διάνυσμα» καθώς συνδέει την έννοια της ευθείας, η οποία υποδηλώνει διεύθυνση με την έννοια της φοράς.

Στη συνέχεια η δασκάλα βάζει τα παιδιά να αναρωτηθούν γιατί τους έστειλε το Τετράγωνο γνώμονες και χαρτόνια. *Η Σ. σηκώνει το χέρι και λέει: «Επειδή έλεγε να εξασκηθούμε στα... Εεε... Να καταλάβουμε τη φωτογραφία που μας έστειλε... Μάλλον αυτοί δεν μπορούν να δούνε όλα τα πράγματα και βλέπουν μόνο μία γραμμή και μας τα έδωσε αυτά, για να προσπαθήσουμε να καταλάβουμε πώς αυτοί βλέπουνε όλα τα σχήματα σαν μία γραμμή».*

Η δασκάλα επαναλαμβάνει την ερώτηση. *Η Φ. σηκώνει το χέρι και λέει: «Για να σχεδιάσουμε γραμμές και να εξασκηθούμε».* Τελικά ένας μαθητής λέει ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τους γνώμονες και τα χαρτόνια, προκειμένου να σχεδιάσουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Δεν έχει όμως μία συγκεκριμένη πρόταση

Αγαπητοί μαθητές, αγαπητές μαθήτριες,

με πλημμύρισε τεράστια χαρά όταν έλαβα το γράμμα σας! Από τότε που έμαθα για την ύπαρξη ενός κόσμου τριών διαστάσεων, επιθυμούσα πολύ να γνωρίσω κάποιους Χωροχωρίτες! Πίστευα δίχως καμία αμφιβολία ότι μία τέτοια επικοινωνία θα με έκανε να σκεφτώ από την αρχή πράγματα που μέχρι τώρα θεωρούσα δεδομένα. Οι επιστολές σας επιβεβαίωσαν αυτές μου τις σκέψεις! Όπως μου γράφατε, στη φωτογραφία που σας έστειλα, δε βλέπετε ένα τετράγωνο, αλλά μία γραμμή. Για μένα όπως και για όλους τους Επιπεδοχωρίτες αυτό είναι απόλυτα λογικό. Πώς γίνεται με την αίσθηση της όρασης να αντιληφθείς κάτι παραπάνω; Μόνο με την ψηλάφηση μπορείς να καταλάβεις περισσότερα.

Προφανώς όμως σε εσάς του Χωροχωρίτες η όραση είναι μάλλον πολύ ενισχυμένη ή απλά διαφορετική. Μάλλον θα φαντάζεστε ότι κι εμείς αντίστοιχα μπορούμε να διακρίνουμε οπτικά τα Τρίγωνα, τα Τετράγωνα και τα άλλα σχήματα. Κι όμως! Δε βλέπουμε τίποτα που να μας διευκολύνει να ξεχωρίσουμε μεταξύ τους τα διάφορα σχήματα. Δε βλέπουμε ούτε και θα ήταν ποτέ δυνατόν να δούμε τίποτε άλλο εκτός από ευθείες γραμμές. Μπορείτε να καταλάβετε το γιατί; Θα σας χρειαστούν μερικά γεωμετρικά σχήματα, μία οποιαδήποτε επίπεδη επιφάνεια και φυσικά να εξασκήσετε τα μάτια και το μυαλό σας! Περιμένω πώς και πώς τις εντυπώσεις σας! Άραγε θα καταφέρετε να μπειτε στη θέση ενός Επιπεδοχωρίτη και να δείτε όπως εμείς;

Προτού κλείσω, θέλω να σας κάνω κι εγώ βέβαια ορισμένες ερωτήσεις. Αυτό που ήθελα βασικά να σας ρωτήσω είναι... Τι είναι το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ; Μερικά παιδιά, συγκεκριμένα ο Α., η Ε., η Ζ., ο Ν. και ο Χ. με ρώτησαν εάν μου αρέσει το ποδόσφαιρο ή το μπάσκετ... Δυστυχώς δεν μπορώ να απαντήσω, γιατί δεν ξέρω καθόλου τι είναι αυτά. Υποψιάζομαι πάντως πως είναι κάποιο είδος παιχνιδιού, γιατί με ρώτησαν και τι ομάδα είμαι! Εδώ στην Επιπεδοχώρα, παίζουμε συχνά ένα παιχνίδι που το λέμε πατινάζ! Μας αρέσει πολύ να κυλάμε γρήγορα δεξιά, αριστερά, πίσω και μπρος! Ειδικά, η κολλητή μου, ένα κανονικό πεντάγωνο, ξετρελαίνεται! Εσείς πώς παίζετε το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ;

Με φιλικούς χαιρετισμούς,  
το Τετράγωνο

**Εικόνα 4.5.** Η δεύτερη επιστολή του Τετράγωνου



σχετικά με το τι να κάνουν στη συνέχεια με αυτά τα σχήματα. *Ο Α. τότε λέει: «Μπορεί να μας λέει...Εεε... Να μας έφερε αυτά τα χαρτιά, για να φανταστούμε τη χώρα του, να τη ζωγραφίσουμε και να την πάμε σε αυτό και θα μας απαντήσει αν είναι αυτή η χώρα του»*

*Η Σ. αμέσως μετά λέει: «Κατάλαβα! Αυτοί δεν είναι σαν να κινούνται πάνω σε ένα χαρτί. Μάλλον κινούνται στον αέρα και ο φωτογράφος τον έβγαλε έτσι!» Η Σ., όπως και ο μαθητής στο τέλος της πρώτης εκπαιδευτικής συνεδρίας, θέτει το δεξί της χέρι με ενωμένα τα δάχτυλα σε οριζόντιο προσανατολισμό. Προχωράει όμως ένα βήμα παραπέρα, καθώς θέτει το αριστερό της χέρι σε κατακόρυφο προσανατολισμό, μιμούμενη τον φακό της κάμερας.*

Στη συνέχεια τα παιδιά αλλάζουν πάλι τη διάταξη των θρανίων από σχήμα Π σε ένωση ανά ζεύγη, και η δασκάλα μοιράζει σε κάθε ομάδα τους γνώμονες και τα χαρτόνια. Ωστόσο, τα παιδιά εμφανίζονται αβέβαιοι. Δεν είναι σίγουρα για το τι είναι αυτό που πρέπει να σχεδιάσουν. Έτσι, ρωτούν επανειλημμένα τη δασκάλα. Αυτή αντιστρέφει την ερώτηση: «Εσείς τι πιστεύετε ότι χρειάζεται να σχεδιάσετε;». Ένας μαθητής απαντάει: «Σχήματα». Η δασκάλα επιμένει: «Τι σχήματα;». Το παιδί ανταποκρίνεται θετικά: «Τρίγωνο, τετράγωνο, κύκλο, πολύγωνο».

Έπειτα, η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά σε ποια σχήματα θεωρούν ότι είναι απαραίτητος ο γνώμονας. Ένα αγόρι λέει γενικά στα τρίγωνα. *Ο Α. είναι πιο σαφής: «Στα σχήματα που έχουν γωνίες ενενήντα μοιρών, για παράδειγμα στα τετράγωνα».* Η *Φ. συμπληρώνει: «Και στα παραλληλόγραμμα υπάρχουν τέτοιες γωνίες!».* Τα παιδιά έχοντας πλέον πιο σαφή τον στόχο της σχεδίασης, ξεκινούν να εργάζονται. Στην υπό μελέτη ομάδα μόνο δύο υποκείμενα η *Φ. και ο Α. επιχειρούν να χρησιμοποιήσουν τον γνώμονα. Μάλιστα, τον χρησιμοποιούν σαν να ήταν χάρακας, δηλαδή δεν αξιοποιούν εν τέλει την ορθή του γωνία, για να φτιάξουν η *Φ. ένα τρίγωνο και ο Α. ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η Σ. προσπαθεί να σχεδιάσει με απλό χάρακα ένα τετράγωνο, χωρίς όμως να μετρά το μήκος της κάθε πλευράς, για να εξασφαλίσει ότι θα είναι το ίδιο. Τέλος, ο Χ. δε χρησιμοποιεί κανένα γεωμετρικό όργανο και προσπαθεί να σχεδιάσει με το χέρι του έναν κύκλο.**

Αφού σχεδιάσουν ένα σχήμα ο καθένας στο προσωπικό του χαρτόνι, η δασκάλα τους λέει να το κόψουν. Αφού το κάνουν κι αυτό, η δασκάλα τους παροτρύνει να σκεφτούν πώς θα τα αξιοποιήσουν τα σχήματά τους. *Ο Α. σηκώνει το χέρι και λέει: «Μήπως να ζωγραφίσουμε μάτια και στόμα;».* Η δασκάλα τους λέει να σκεφτούν όσα έκαναν μερικά παιδιά με τα χέρια τους, για να καταλάβουν. *Η Φ.*

ξεκινάει πρώτη λέγοντας: «Βγήκε μία γραμμή, γιατί το Τετράγωνο είπε πως βλέπουμε μόνο γραμμές. Δηλαδή επειδή τα έβλεπαν με γραμμές, η φωτογραφία που τράβηξε ο φωτογράφος είναι με γραμμή». Μετά παίρνει ο Α. τον λόγο: «Επειδή τα έβλεπαν με γραμμές, έτσι ήταν μαθημένη και η φωτογραφική μηχανή και τα έβγαλε σαν γραμμή...». Ένα άλλο παιδί δείχνει στην τάξη το σχήμα του και λέει ότι κοιτώντας ο φωτογράφος πλάγια φυσικά βλέπει μόνο μία γραμμή και τίποτα άλλο.

Η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά εάν έχουν κάποια επίπεδη επιφάνεια κάπου κοντά τους, ώστε να βάλουν πάνω τα σχήματα. Ο Χ. κοιτάζει τον χώρο γύρω του ψάχνοντας κάτι που να αντιστοιχεί στον όρο «επίπεδη επιφάνεια». Ο Α. λέει ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν το θρανίο τους. Τα παιδιά βάζουν τα σχήματα πάνω στο θρανίο, αλλά τα παρατηρούν από πάνω. Η δασκάλα επιμένει: «Τα βάλουμε τα σχήματα πάνω στο θρανίο. Τι λέτε να κάνουμε τώρα; Να τα κοιτάμε από πάνω έτσι όπως είμαστε εμείς οι Χωροχωρίτες; Ή μήπως πρέπει να τα κοιτάξουμε κάπως διαφορετικά;». Η Σ. λέει: «Όχι!», όμως δεν εξηγεί πώς πρέπει να γίνει το κοίταγμα. Ο Χ. τότε αυθόρμητα κατεβάζει το βλέμμα του στο ύψος της επιφάνειας του θρανίου και παρατηρεί το σχήμα στο πλάι. Το ίδιο κάνει ακόμη ένας μαθητής, χωρίς να έχει δει τον Χ. Η δασκάλα προσέχει τον δεύτερο και του ζητάει να εξηγήσει στην υπόλοιπη τάξη τι κάνει.

Τώρα όλα τα παιδιά χαμηλώνουν το βλέμμα τους μέχρι το ύψος της επίπεδης επιφάνειας του θρανίου και παρατηρούν το σχήμα προσομοιώνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την αίσθηση της όρασης σε έναν φανταστικό, δισδιάστατο κόσμο. Το ένα μετά το άλλο τα παιδιά παραδέχονται ότι πλέον δεν αντικρίζουν το σχήμα στο σύνολο του. Αντίθετα αυτό που βλέπουν είναι απλά και μόνο μία γραμμή. Όταν η συζήτηση όμως επαναφέρει το ζήτημα του φωτογράφου, τα παιδιά παρουσιάζουν και πάλι μία σύγχυση. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι ο φωτογράφος είναι από τον τρισδιάστατο κόσμο και απλά κοίταξε πλάγια το σχήμα, γι' αυτό συνεπώς έβγαλε μόνο μία γραμμή.

Η δασκάλα ρωτάει το παιδί τότε: «Εμείς που είμαστε στον τρισδιάστατο κόσμο μπορούμε να πάμε πάνω και κάτω;» Το παιδί γνέφει καταφατικά. Η δασκάλα ξαναρωτά τότε: «Οπότε εφόσον όπως μου λες οι Χωροχωρίτες μπορούν να κινηθούν πάνω και κάτω, εάν ο φωτογράφος ήταν πράγματι Χωροχωρίτης δε θα μπορούσε να πάει από πάνω και να το βγάλω ολόκληρο το σχήμα;». Το παιδί δείχνει μπερδεμένο αρχικά. Τελικά απαντάει: «Ναι, θα μπορούσε». Η δασκάλα τελικά ρωτάει τα παιδιά: «Οπότε τι πιστεύετε; Ο συγκεκριμένος φωτογράφος ήταν Χωροχωρίτης ή

Επιπεδοχωρίτης;» Η Φ. απαντάει ότι ο φωτογράφος ήταν από τη χώρα του Τετράγωνου, δηλαδή ήταν Επιπεδοχωρίτης.

Έπειτα η δασκάλα καλεί τις ομάδες να αναπαραστήσουν την Επιπεδοχώρα χρησιμοποιώντας κάπως τα σχήματά τους. Πρώτη σηκώνεται η ομάδα των Α., Σ., Φ. και Χ. Τα παιδιά στέκονται αρχικά αμήχανα. Τελικά, η Σ., η Φ. και ο Χ. πιάνουν με το χέρι τους τα σχήματά τους και τα φέρνουν σε έναν οριζόντιο προσανατολισμό. Ο Α. κρατάει το δικό του σχήμα σε κατακόρυφο προσανατολισμό, αλλά γρήγορα παρατηρεί τα άλλα παιδιά της ομάδας του και αλλάζει κι αυτός την προσανατολισμό του σχήματός του. Ωστόσο, κρατούνε τα σχήματά τους σε διαφορετικό ύψος. Η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά μήπως πρέπει να φροντίσουν κάτι ακόμη. Η Σ. λέει: «Πρέπει να είναι στο ίδιο ύψος», Μάλιστα, με δική της πρωτοβουλία προσπαθεί να φέρει τα σχήματα των άλλων παιδιών στο ίδιο ύψος.

Τα υπόλοιπα παιδιά ενθουσιασμένα πλησιάζουν την ομάδα αυτή και προσπαθούν αν καταλάβουν πώς έβλεπε την εικόνα της λήψης του ο Επιπεδοχωρίτης φωτογράφος. Βέβαια, τα παιδιά κρατούν κάπως στραβά τα χαρτονένια σχήματά τους κι έτσι οι συμμαθητές τους μία βλέπουν γραμμές μία βλέπουν μισά σχήματα. Έτσι, η δασκάλα καλεί τα παιδιά να βρουν μία επίπεδη επιφάνεια, ώστε τοποθετήσουν εκεί τα σχήματά τους. Μάλιστα, προσθέτει: «Προφανώς και η Επιπεδοχώρα λέγεται έτσι, γιατί εκεί όλα είναι επίπεδα». Η Φ. υποδεικνύει το θρανίο ως μία επίπεδη επιφάνεια.

Αφού έχουν καταλήξει σε αυτή τη λύση, η δασκάλα τους μοιράζει χαρτιά, ώστε να γράψει κάθε ομάδα την απαντητική της επιστολή προς το Τετράγωνο. Και πάλι, όπως στην πρώτη εκπαιδευτική συνεδρία, πριν από τη συγγραφή της επιστολής πραγματοποιείται συζήτηση, ώστε τα παιδιά να μοιραστούν μεταξύ τους ιδέες σχετικά με το τι θα γράψουν. Τα παιδιά στα αλήθεια προτείνουν ένα σωρό πράγματα. Η δασκάλα, για να τους θυμίσει τι έλεγε το γράμμα του Τετράγωνου, τους το διαβάζει ακόμη μία φορά. Τα παιδιά ακούνε με προσήλωση.

Στην υπόλοιπο διαθέσιμο χρόνο της διδακτικής ώρας τα παιδιά αφιερώνονται στη συγγραφή επιστολών. Το γράμμα των υποκειμένων Α, Σ, Φ και Χ φαίνεται στην επόμενη σελίδα.

Αγαπώ μου τεράστιο,  
σου μιλάει πάλι ο φίλος σου : Δ. Φ.  
Αυτό που μας δες ότι μόνο με ψευδισμό  
μπορείς να καταλάβεις τα πράγματα είναι λάθος, γιατί  
στον προσδιορισμένο κόσμο που ζούμε είσαι σε εκόμισσε  
όρθιοι (καθώς) και βλέπουμε ολόκληρα τα πράγματα  
σου έχετε και χαρις ερωτήσεις, οι ερωτήσεις αυτές  
είναι οι είς, έχετε ελπίδα κι αν έχετε πως είναι,  
έχετε ψαχάκι, έχετε μια κωνοφόρο, έχετε παρτίδα και επένδυση, έχετε  
έχετε εφύλαξη, έχετε σχολεία, πιστεύετε στον Θεό, πιο είναι  
το σύμβολο, έχετε σημαία, έχετε εθνικό ύμνο και  
πιο είναι, έχετε ηλικία, έχετε όνομα,  
Με αγάπη  
οι φίλοι σου!

Εικόνα 4.6. Η δεύτερη απαντητική επιστολή των παιδιών

### Τρίτη εκπαιδευτική συνεδρία

Κάποιος χτυπάει την πόρτα της αίθουσας δυνατά! Τα παιδιά γεμάτα λαχτάρα ξεφωνίζουν: «Το Τετράγωνο είναι!». Κάποια μάλιστα τρέχουν να ανοίξουν την πόρτα. Αυτή τη φορά το Τετράγωνο τους έχει στείλει ένα τεράστιο δέμα! Οι μαθητές και οι μαθήτριες εντυπωσιάζονται πολύ. Η δασκάλα αρχίζει να ξετυλίγει σιγά-σιγά το δέμα και τα παιδιά παρακολουθούν με κομμένη την αναπνοή. Από μέσα βγάζει διάφορα αντικείμενα: πολύχρωμα μεγάλα μαντίλια, χαρτονένια γεωμετρικά σχήματα κολλημένα πάνω σε μικρά, πλαστικά πιατάκια, ορισμένα χαρτιά και ένα γράμμα.

Η δασκάλα παίρνει πρώτα το γράμμα του Τετράγωνου και το διαβάσει αργά στα παιδιά. Σε αυτό το Τετράγωνο ενημερώνει τα παιδιά για την αξία που έχει η αίσθηση της αφής στην αναγνώριση των Επιπεδοχωριτών αναμεταξύ τους. Ακόμη, προσκαλεί τα παιδιά να λάβουν μέρος σε έναν διαγωνισμό για την ανάδειξη του καλύτερου απογραφέα της Επιπεδοχώρας. Το γράμμα παρουσιάζεται στις επόμενες δύο σελίδες.

Η δασκάλα διαβάσει τώρα την τρίτη παράγραφο. Στο σημείο που λέει: «Μπορείτε να καταλάβετε ποια αίσθηση είναι αυτή;» σταματάει. Στρέφεται προς τα παιδιά και τους θέτει άμεσα την ερώτηση: «Αλήθεια, μπορούμε να καταλάβουμε;» Η Σ. απαντάει: «Αυτή η αίσθηση που λέει είναι η ψηλάφηση». Η δασκάλα εξηγεί στα παιδιά ότι η ψηλάφηση που αναφέρει μέσα το γράμμα είναι η γνωστή αίσθηση της αφής. Ρωτάει τα παιδιά αν θυμούνται ποια σημαντική γυναίκα βάσισε τη ζωή της στην αίσθηση της αφής, καθώς λόγω μιας αρρώστιας σε βρεφική ηλικία είχε χάσει την αίσθηση της όρασης και της ακοής. Αρκετά παιδιά σηκώνουν το χέρι. Ένας μαθητής παίρνει τον λόγο κι αποκρίνεται με σιγουριά: «Η Έλεν Κέλερ». (Κατά τη διάρκεια της χρονιάς ορισμένα γλωσσικά μαθήματα αφιερώνονται σε προσωπικότητες αξίες θαυμασμού και η Έλεν Κέλερ είναι μία από αυτές.)

Η δασκάλα σχολιάζει: «Άρα, πέρα από την Έλεν Κέλερ και στην Επιπεδοχώρα χρησιμοποιούν πάρα πολύ την ψηλάφηση». Κατόπιν συνεχίζει την ανάγνωση του γράμματος. Διακόπτει και πάλι σύντομα, για να ρωτήσει τα παιδιά αν γνωρίζουν τι είναι η απογραφή του πληθυσμού. Η Σ. παίρνει τον λόγο: «Πηγαίνουν όλοι οι κάτοικοι μιας χώρας εκεί που γεννήθηκαν και γράφουνε τα ονόματά τους κι έτσι βγαίνει πόσα, πόσοι άνθρωποι μένουν σε εκείνη τη χώρα». Έπειτα η δασκάλα συνεχίζει την ανάγνωση του γράμματος. Μόλις αναφέρει τη φράση «παιχνίδι τυφλόμυγας» ορισμένα αγόρια κοιτιούνται θριαμβευτικά και πανηγυρίζουν σιωπηλά.

Αγαπητοί μου νέοι φίλοι και φίλες,

χάρηκα πολύ με τις ερωτήσεις σας! Στ' αλήθεια ήταν πάρα πολλές. Ωστόσο, θα κάνω μία προσπάθεια να απαντήσω σε όλες. Ελπίζω να μην ξεχνάω καμία! Αρχικά να σας πω σχετικά με την οικογένειά μου! Έχω γονείς, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο, καθώς και ένα αδερφάκι που είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Οπότε, ναι. Και στου κόσμο των 2 διαστάσεων δύο σχήματα μπορούν να παντρευτούν και να κάνουν οικογένεια. Ακόμη, έχουμε σχολεία όπως και σπίτια και μαγαζιά! Εγώ πηγαίνω στην 6<sup>η</sup> τάξη του Πρότυπου Γεωμετρικού Σχολείου της Γεωμετρούπολης. Το σχολείο μου είναι από τα καλύτερα της περιοχής μου! Είμαι δώδεκα χρονών κι έχω γενέθλια στις 31 Μαΐου και να σας πω την αλήθεια, στεναχωριέμαι που δεν μπορώ να τα γιορτάζω κάθε χρόνο! Ευτυχώς φέτος ο Μάης έχει 31 ημέρες! Χεχε! Πέρα από τα παραπάνω, με ρωτήσατε εάν έχουμε θρησκεία και σε τι πιστεύουμε. Όπως μας συμβουλεύουν οι ιερείς-Κύκλοι μας, ένα είναι το ορθό δόγμα: «Φρόντιζε το Σχήμα σου»!

Από τις δικές σας επιστολές, διαπίστωσα ότι μετά από αρκετή σκέψη και πολλές προσπάθειες τα καταφέρατε! Μπορέσατε να προσεγγίσετε την οπτική ενός Επιπεδοχωρίτη. Πράγματι στην Επιπεδοχώρα, δηλαδή τη Χώρα των δύο διαστάσεων, η όρασή μας χαρακτηρίζεται μάλλον περιορισμένη σε σχέση με τη δικιά σας. Όταν λοιπόν ένας άλλος Επιπεδοχωρίτης έρχεται προς το μέρος μας, η γραμμή που βλέπουμε μεγαλώνει, ενώ όταν απομακρύνεται, μικραίνει. Αλλά αυτό που βλέπουμε είναι πάντα μια ευθεία γραμμή και τίποτα άλλο, ανεξάρτητα από το αν πρόκειται για Τρίγωνο, Τετράγωνο, Πεντάγωνο, Εξάγωνο, Κύκλο κ.λπ.

Έτσι κι αλλιώς, εμείς οι Επιπεδοχωρίτες, έχουμε καταφύγει σε μία άλλη αίσθηση, προκειμένου να διαπιστώσουμε το είδος του σχήματος που μας πλησιάζει κάθε φορά. Μπορείτε να μαντέψετε ποια είναι αυτή; Πρόκειται για μία αίσθηση πολύ ισχυρή για εμάς τους Επιπεδοχωρίτες. Μάλιστα οι πιο άξιοι στην ψηλάφηση επιλέγονται μέσα από διαγωνισμό και μετά από κατάλληλη εκπαίδευση διορίζονται απογραφείς του πληθυσμού!

*Εάν επιθυμείτε, μπορείτε κι εσείς να λάβετε μέρος σε αυτόν. Φυσικά ανεπίσημα, μιας και δεν είστε Επιπεδοχωρίτες κι οπωσδήποτε θα τηρηθούν κάποιοι παραπάνω περιορισμοί σε εσάς, για να είναι δίκαιος ο διαγωνισμός. Τι λέτε; Ενδιαφέρεστε; Εάν ναι, δεν έχετε παρά να δέσετε τα μάτια σας με ένα μαντήλι και να στηριχτείτε αποκλειστικά και μόνο στα χέρια σας. Σας στέλνω μαζί με την παρούσα επιστολή και μία μακέτα της Γεωμετρούπολης καθώς και το περσινό απογραφικό δελτίο της Γεωμετρούπολης! Αναρωτιέμαι πώς θα τα πάτε με μία απογραφή, κανονικό παιχνίδι τυφλόμυγας...*

*Με φιλικούς χαιρετισμούς,  
το Τετράγωνο*

*Υ.Σ.1 Τι εννοείται όταν γράφετε αν είμαι ψηλός ή κοντός; Τι σημαίνει η λέξη «όρθιος»; Πώς είναι να τρως και να πίνεις; Ακόμη, δεν καταλαβαίνω τι είναι η μπάλα. Εμείς εδώ στην Επιπεδοχώρα μια φορά δεν έχουμε τέτοιο πράγμα. Αλλά ούτε και τα ζώα ξέρω τι είναι! Τέλος, με ρωτήσατε αν έχουμε σημαία, αλλά εγώ πρώτη φορά ακούω τη λέξη «σημαία»! Είναι κάτι σαν την μπάλα κι αυτή;*

*Υ.Σ.2 Τώρα το θυμήθηκα! Με ρωτήσατε κι αν έχω μάτια! Φυσικά κι έχω! Έχω ένα μάτι που βρίσκεται εκεί που ενώνονται οι δύο από τις τέσσερις πλευρές μου.*

**Εικόνα 4.7.** Η τρίτη επιστολή του Τετράγωνου

Κατά την ανάγνωση των υστερόγραφων τα παιδιά αντιδρούν έντονα. Κάποια ανοίγουν το στόμα τους δείχνοντας έτσι τη μεγάλη τους απορία. Οι ερωτήσεις του Τετράγωνου φανερώουν την ύπαρξη ενός δισδιάστατου κόσμου πολύ διαφορετικού από τον δικό τους τρισδιάστατο κι αυτό τους προκαλεί μεγάλη εντύπωση. Καθώς η δασκάλα συνεχίζει να διαβάζει τις ερωτήσεις του Τετράγωνου, τα παιδιά ξεσπούν σε γέλια. Πιθανόν τους φαίνεται πολύ αστείο ότι υπάρχουν νοήμονα πλάσματα τα οποία αγνοούν συνηθισμένες λέξεις, όπως «ψηλός», «κοντός», «ζώα», «μπάλα» και «σημαία». Χαρακτηριστικά ένας μαθητής σχολιάζει: «Ούτε ξέρει!». Όταν δε ακούνε πως το Τετράγωνο έχει μόνο ένα μάτι, αρχίζουν να λένε: «Είναι ένας Κύκλωπας!»

Έπειτα η δασκάλα αρχίζει να θέτει διάφορες ερωτήσεις, προκειμένου τα παιδιά μέσα από μία συνεχή διατύπωση κι απόρριψη υποθέσεων να καταλάβουν κάπως τη δραστηριότητα της απογραφής. Τελικά τα παιδιά καταλήγουν ότι για να συμμετάσχουν στον διαγωνισμό απογραφής της Γεωμετρούπολης, χρειάζεται να μετρήσουν τις γωνίες ή τις πλευρές των διάφορων σχημάτων χρησιμοποιώντας μόνο την αίσθηση της αφής. Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης δραστηριότητας η αίθουσα αναδιαμορφώνεται. Η δασκάλα τοποθετεί πέντε θρανία στο μπροστινό μέρος της αίθουσας και τα παιδιά σπρώχνουν όλα τα υπόλοιπα θρανία στο πίσω μέρος. Σε καθένα από τα πέντε μπροστινά θρανία τοποθετούνται σε σειρά τα σχήματα που αντιστοιχούν σε μία μακέτα της Γεωμετρούπολης (Η μακέτα της Γεωμετρούπολης φαίνεται στη σελίδα 44).

Ύστερα η δασκάλα καλεί ένα παιδί από κάθε ομάδα, του δένει τα μάτια με ένα μαντήλι και το τοποθετεί κοντά σε ένα θρανίο. Τα υπόλοιπα παιδιά κάθε ομάδας κάθονται μαζί και η δασκάλα διανέμει σε κάθε ομάδα από δύο απογραφικά δελτία της Γεωμετρούπολης, ένα υποτιθέμενο περσινό συμπληρωμένο και ένα κενό φετινό. (Τα απογραφικά δελτία Γεωμετρούπολης 2016 και 2017 φαίνονται στις σελίδες 45 και 46). Κι ενώ όλα είναι έτοιμα, τα παιδιά φαίνονται ιδιαίτερα αβέβια σχετικά με το τι πρέπει να κάνουν. Καθώς ο χρόνος πιέζει, η δασκάλα τους καθιστά σαφή τη δραστηριότητα.

Το παιχνίδι αφής-απογραφική δραστηριότητα των σχημάτων ξεκινά! Τα παιδιά που είναι σηκωμένα κι έχουν καλυμμένα τα μάτια τους αγγίζουν πλευρικά τα διάφορα σχήματα με τα δυο τους χέρια. Μετρώντας τον αριθμό γωνιών ή πλευρών προσπαθούν να συμπεράνουν ποια σχήματα βρίσκονται τοποθετημένα μπροστά τους. Δεν επιτρέπεται ούτε να δουν τα σχήματα ούτε να τα αγγίξουν από πάνω, καθώς το παιχνίδι προσομοιώνει τις διαδικασίες αναγνώρισης των Επιπεδοχωριτών και στην





**Εικόνα 4.8.** Ετοιμασία για τον απογραφικό διαγωνισμό

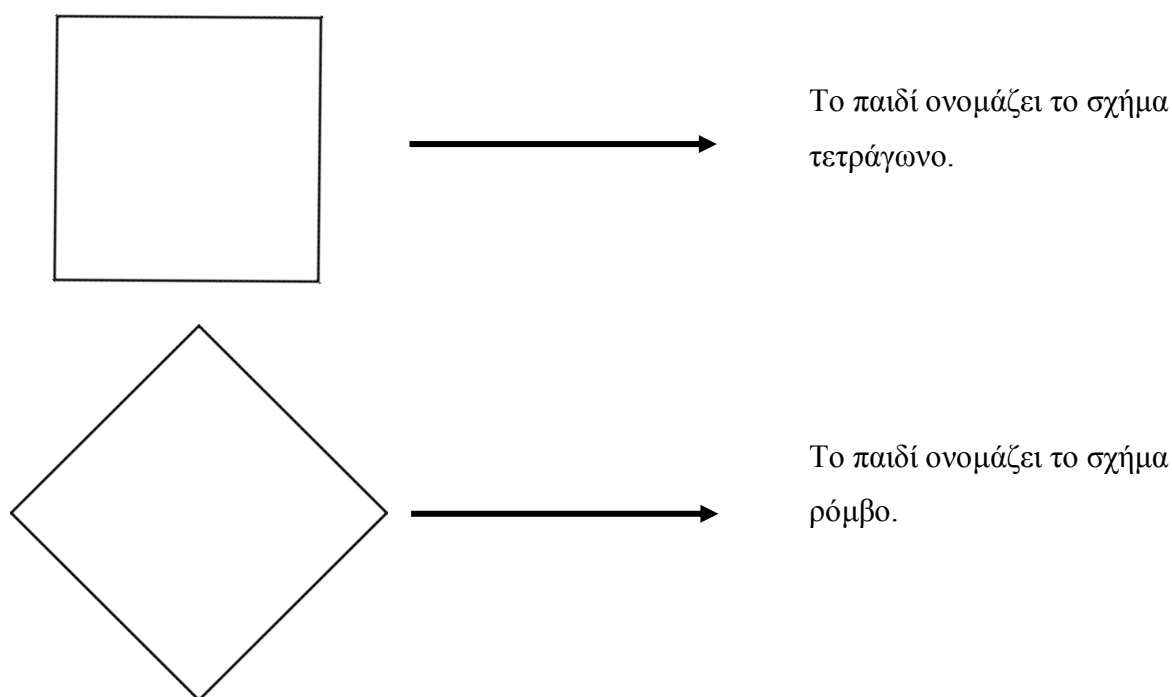


**Εικόνα 4.9.** Η ψηλάφηση των σχημάτων με καθοδήγηση βοηθού

Επιπεδοχώρα δεν υπάρχει η διάσταση του ύψους. Όταν βεβαιώνονται για το σχήμα που αγγίζουν, το ανακοινώνουν δυνατά και η ομάδα τους καταγράφει το αποτέλεσμα στην πίσω όψη του απογραφικού δελτίου 2017.

Καθώς το παιχνίδι προχωρά, τα παιδιά εναλλάσσουν τους ρόλους τους. Αυτό γίνεται για δύο λόγους κυρίως. Αφενός έτσι όλα τα παιδιά συμμετέχουν στο παιχνίδι τυφλόμυγας κι αφετέρου με τις πολλαπλές καταμετρήσεις τα παιδιά κρατούν μόνο τις απαντήσεις με το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισης θεωρώντας τις υπόλοιπες ως λανθασμένες εκτιμήσεις. Η παιγνιώδης διαδικασία απογραφής της Γεωμετρούπολης αποδεικνύεται θορυβώδης και δύσκολη, καθώς τα παιδιά που ψηλαφίζουν τα σχήματα φωνάζουν όλα μαζί και τα παιδιά που καταγράφουν τις απαντήσεις δυσκολεύονται μερικές φορές να αντιληφθούν ποιος λέει τι.

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που προέκυψε από αυτό το παιχνίδι είναι ότι τα παιδιά συγχέουν έντονα δύο γεωμετρικά σχήματα, το τετράγωνο και τον ρόμβο. Μάλιστα, θεωρούν κριτήριο για τον έναν ή τον άλλο χαρακτηρισμό μονάχα τον προσανατολισμό του σχήματος. Εάν το παιδί ψηλαφίσει ένα τετράγωνο το οποίο έχει περιστραφεί έτσι, ώστε να σχηματίζει με την κάθετο γωνία σαράντα πέντε μοιρών ( $45^\circ$ ), θεωρεί τότε ότι πρόκειται για ρόμβο κι όχι για τετράγωνο. Για την πληρέστερη κατανόηση του αναγνώστη, στη συνέχεια παρατίθεται επεξήγηση των περιπτώσεων μέσω αντίστοιχων σχημάτων.



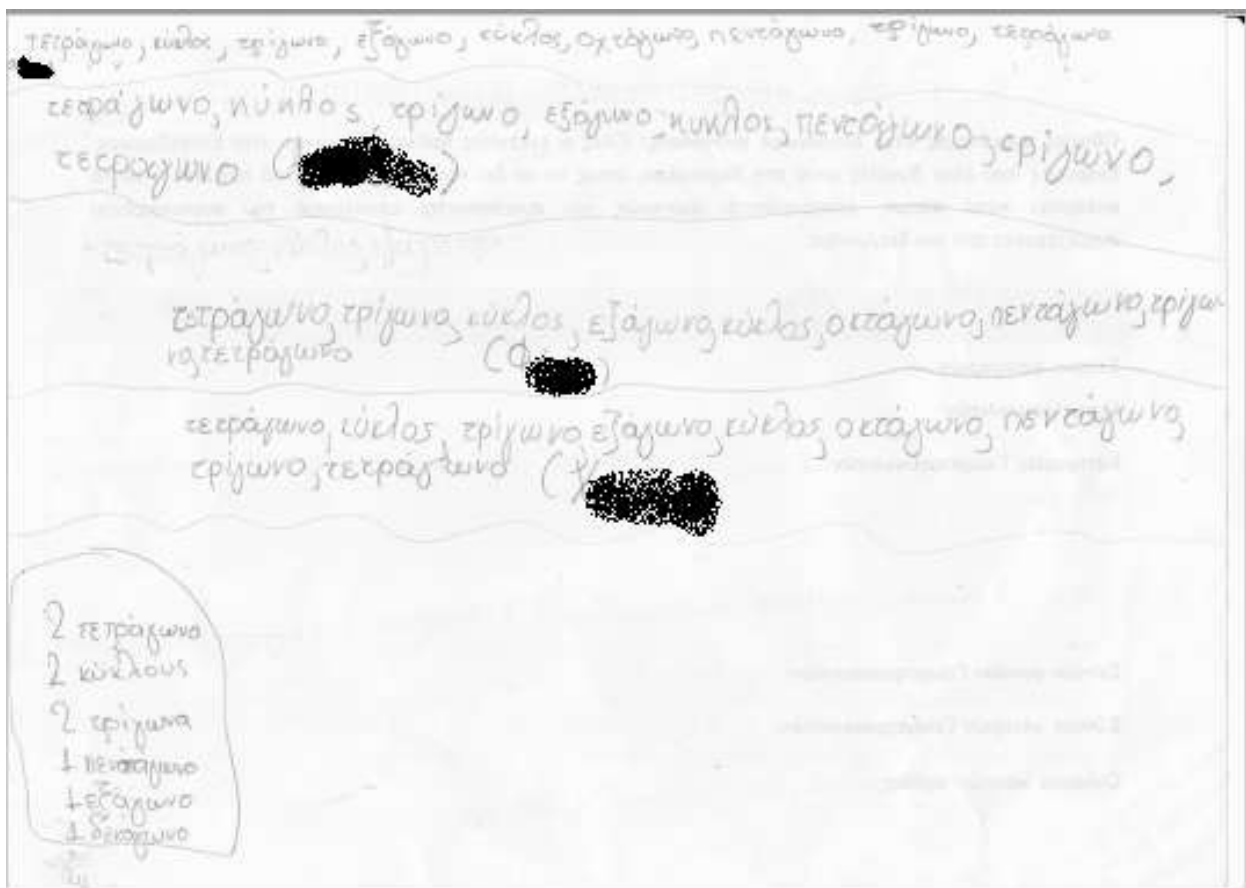
**Εικόνα 4.10.** Η θεώρηση του περιστρεμμένου τετράγωνου ως ρόμβου

Τελικά, στο τέλος της πρώτης διδακτικής ώρας και με τη βοήθεια συναδέλφων τα παιδιά ολοκληρώνουν το παιχνίδι αναγνώρισης των σχημάτων στη μακέτα της Γεωμετρούπολης. Κατά τη δεύτερη διδακτική ώρα χρειάζεται να συμπληρώσουν τα απογραφικά δελτία. Η δασκάλα συμβουλεύει τους μαθητές και τις μαθήτριες να εξετάσουν το περσινό απογραφικό δελτίο. Έπειτα τους παρακινεί να σκεφτούν τι είδους πληροφορίες χρειάζεται να συμπληρώσουν σε κάθε κατηγορία με βάση το συμπληρωμένο περσινό απογραφικό δελτίο. Για να τους βοηθήσει, η δασκάλα τους ρωτάει ξεχωριστά για κάθε κατηγορία.

Αυτό παίρνει αρκετή ώρα, καθώς τα παιδιά φαίνονται μπερδεμένα και χρειάζεται να ακουστούν κάθε φορά τρεις τουλάχιστον απόψεις παιδιών, μέχρι να καταλήξουν όλοι σε μία αποδεκτή απάντηση. Ακόμη, σε αυτό το σημείο τα παιδιά δε δείχνουν τόσο ενθουσιασμένα όσο προηγουμένως. Η διαδικασία γίνεται μάλλον τυποποιημένα. Θα ήταν καλύτερο ενδεχομένως εδώ να υπήρχε περισσότερος χρόνος, ώστε τα παιδιά να λειτουργήσουν πιο αυτόνομα. Θα βοηθούσε σίγουρα και μία τροποποίηση του απογραφικού δελτίου, ώστε αυτό να είναι περισσότερο κατανοητό για τα παιδιά. Ειδικότερα, τα παιδιά βρίσκουν δυσνόητα τα τρία πρώτα πεδία του δελτίου, δηλαδή: το σύνολο Γεωμετροπολιτών, το σύνολο κατηγοριών Γεωμετροπολιτών και τις κατηγορίες Γεωμετροπολιτών. Αντίθετα, βρίσκουν πιο εύκολα τι χρειάζεται να γράψουν στα δύο τελευταία πεδία, δηλαδή το σύνολο γωνιών Γεωμετροπολιτών και το σύνολο πλευρών Γεωμετροπολιτών.

Ο στόχος της δραστηριότητας, δηλαδή η σύνδεση του αριθμού των γωνιών και του αριθμού των πλευρών με την ονομασία των σχημάτων φαίνεται να επιτυγχάνεται. Για τα παιδιά δεν είναι δεδομένο ότι ένα κανονικό πεντάγωνο έχει πέντε πλευρές και πέντε γωνίες. Σε σχετικές ερωτήσεις της δασκάλας σκέφτονται πρώτα και μετά απαντούν. Ακόμη, τα παιδιά δε θεωρούν αυτονόητο ότι οι πλευρές και οι γωνίες ενός σχήματος είναι ισάριθμες. Έτσι, όταν έχουν γράψει τον αριθμό των γωνιών και πάνε να συμπληρώσουν το επόμενο πεδίο, δηλαδή τον αριθμό των πλευρών, ξεκινούν πάλι να υπολογίζουν.

Όσπου ένας μαθητής σηκώνει χέρι και λέει ότι μπορούν να γράψουν ό,τι ακριβώς έγραψαν στον αριθμό των γωνιών. Η δασκάλα ρωτάει το σύνολο της τάξης: «Εσείς συμφωνείτε με αυτό; Γιατί πιστεύετε ότι ο συμμαθητής σας προτείνει να γράψουμε ακριβώς τους ίδιους αριθμούς;». Ο Α., η Σ. και η Φ. σηκώνουν το χέρι τους. Τα υπόλοιπα παιδιά εξακολουθούν να σιωπούν όμως.



### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΑΠΟΓΡΑΦΙΚΟ ΔΕΛΤΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017

**Οδηγίες συμμετοχής στον διαγωνισμό απογραφής:** Όλες οι ενέργειες πρέπει να γίνονται στην Επιτεδοχώρα. Ενέργειες που είναι δυνατές μόνο στη Χωροχώρα, όπως το να δει κανείς τα γεωμετρικά σχήματα ή να τα ψηλαφίσει «από πάνω», απαγορεύονται αυστηρώς και συνεπάγονται αποκλεισμό του συγκεκριμένου συμμετέχοντα από τον διαγωνισμό.

Συνολή Γεωμετροουπολιτών: 9

Σύνολο κατηγοριών: 6

Γεωμετροουπολιτών:

Κατηγορίες Γεωμετροουπολιτών: 2 κύκλοι, 2 ισόπλευρα τρίγωνα, 2 τετράγωνα, 3 κανονικά πολύγωνα

Εσα 3 κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται: 1 τετράγωνο, 1 εξάγωνο, 1 δεκάγωνο

Σύνολο γωνιών Γεωμετροουπολιτών:  $6+8+5+6+10 = 35$

Σύνολο πλευρών Γεωμετροουπολιτών:  $6+8+5+6+10 = 35$

Όνοματα παικτών ομάδας: [Redacted]

Εικόνα 4.11. Το συμπληρωμένο απογραφικό δελτίο (οπίσθια και εμπρόσθια όψη)

Θέλοντας να προωθήσει τον συλλογισμό των παιδιών, η δασκάλα ρωτάει το ίδιο παιδί: «Εσύ αλήθεια γιατί προτείνεις να γράψουμε τους ίδιους αριθμούς;». Το παιδί απαντάει ότι πρόσεξε ότι στο περσινό, απογραφικό δελτίο τα πεδία «Σύνολο γωνιών Γεωμετρουπολιτών» και «Σύνολο πλευρών Γεωμετρουπολιτών» είναι συμπληρωμένα με τα ίδια ακριβώς αριθμητικά στοιχεία. Η δασκάλα ρωτά πάλι: «Γιατί όμως ισχύει κάτι τέτοιο; Γιατί υπάρχουν οι ίδιοι αριθμοί στο σύνολο γωνιών και στο σύνολο πλευρών; Αφού είναι άλλο πράγμα οι γωνία από την πλευρά. Για ποιο λόγο;»

Ο Α., η Σ. και η Φ. σηκώνουν και πάλι έντονα το χέρι. Όμως αυτή τη φορά σηκώνουν κι άλλα παιδιά το χέρι. Η Φ. παίρνει τον λόγο και απαντάει: «Γιατί οι πλευρές είναι ίσες με τις γωνίες!». Η δασκάλα επιβεβαιώνει την ιδέα του κοριτσιού: «Όντως οι πλευρές είναι ίσες σε αριθμό με τις γωνίες σε κάθε σχήμα. Έτσι ένα τρίγωνο έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες, ένα τετράγωνο τέσσερις πλευρές και τέσσερις γωνίες και ούτω καθεξής». Κατόπιν, τα παιδιά ολοκληρώνουν τη συμπλήρωση του απογραφικού δελτίου.

Έρχεται η ώρα, για να γράψουν γράμμα προς το Τετράγωνο. Η δασκάλα διαβάζει μία φορά το γράμμα, ώστε να θυμηθούν τα παιδιά το περιεχόμενό του. Φτάνει στη δεύτερη παράγραφο: «Όταν λοιπόν ένας άλλος Επιπεδοχωρίτης έρχεται προς το μέρος μας, η γραμμή που βλέπουμε μεγαλώνει, ενώ όταν απομακρύνεται, μικραίνει. Αλλά αυτό που βλέπουμε είναι πάντα μια ευθεία γραμμή και τίποτα άλλο, ανεξάρτητα από το αν πρόκειται για Τρίγωνο, Τετράγωνο, Πεντάγωνο, Εξάγωνο, Κύκλο κ.λπ.»

Η Σ. αντιδράει λέγοντας: «Κυρία, αφού οι κύκλοι δεν έχουν γραμμές, πώς βλέπουμε μια γραμμή;». Η δασκάλα εσκεμμένα δεν εξηγεί στο κορίτσι, αντίθετα το αφήνει να προβληματιστεί περισσότερο πάνω σε αυτή του την απορία. Από τον λόγο της μικρής κοπέλας προκύπτουν δύο συμπεράσματα. Πρώτον, το κορίτσι ταυτίζει στο μυαλό της έννοια της γραμμής με την έννοια της ευθείας (γραμμής). Με βάση αυτό η μικρή κοπέλα δεν εντάσσει την καμπύλη γραμμή στην ευρύτερη κατηγορία των γραμμών. Αντίθετα τη διακρίνει από τις τελευταίες θεωρώντας τη ως κάτι διαφορετικό. Δεύτερον, η μαθήτρια φαίνεται ότι δεν έχει κατανοήσει πλήρως την όραση σε έναν φανταστικό, δισδιάστατο κόσμο.

Η δασκάλα διαβάζει τώρα τα υστερόγραφα στο γράμμα του Τετράγωνου. Διακόπτει για λίγο την ανάγνωση και ρωτάει τα παιδιά γιατί κατά τη δική τους άποψη το Τετράγωνο δεν μπορεί να καταλάβει τι είναι «ψηλός» και «κοντός». Η Σ. λέει:

Αγαπητοί μου, Τετάρτη,

Είπατε και πάλι οι φίλοι σου [redacted] και [redacted] και [redacted]. Μας άρεσε ο τρόπος του παιχνιδιού που μεσάνεφερες στο γράμμα σου! Επίσης σημαία είναι ένα παιδί [redacted]. Συγχαριστήματα με την δικιά σας θρησκεία πάνω σε ένα ξύλο. Ζώα είναι κι αυτά ζωντανά πλασμάτα που τρώνε και πίνουν. [redacted] μερικά απ' αυτά μπορεί να τα έχει για κατοικίδια. Η πέζει φώνα σημαίνει πως [redacted] παίρνει θάλασσα ή κρέας και τα μαγειρεύει μέσα σε βάζες στο σώμα σε μαρούλι και τα καθαρίζει. Η μπόλα είναι ένα φουσκωτό και ελαστικό κέλυφος που παίζουμε με αυτή. Αλήθεια τα σπείρα σας πως είναι; Μπορεί να μας τα σπείρα έχετε πρώτα, τη νύχτα έγινε το φεγγάρι και τ'άστρες έχετε λεπτά ή ρούχα. Επίσης ξύραδες να μας απομένουν σε κάποιες φουσκωτές.

Με αγάπη,  
 οι φίλοι  
 η μαμά σου

ΤΟ ΟΝΟΜΑ ΣΑΣ

Εικόνα 4.12. Η τρίτη απαντητική επιστολή των παιδιών

«Γιατί στην Επιπεδοχώρα όλοι είναι επίπεδοι και δεν είναι ούτε κοντοί ούτε ψηλοί». Το κορίτσι συνοδεύει τα λόγια του από κινήσεις των χεριών της. Συγκεκριμένα ανεβοκατεβάζει τα χέρια της υποδηλώνοντας έτσι διαφορές ύψους. Η δασκάλα ρωτάει: «Δηλαδή ποια διάσταση δεν υπάρχει στην Επιπεδοχώρα». Η Σ. και ο Α. λένε σχεδόν ταυτόχρονα: «Το ύψος!». Η δασκάλα επιβεβαιώνει αυτή τη σκέψη: «Πράγματι σε μία χώρα επίπεδη δεν υπάρχει το ύψος. Οπότε είναι λογικό το Τετράγωνό μας να μη γνωρίζει τι σημαίνει ψηλός και κοντός ή να μην ξέρουν τι είναι η σημαία».

Η δασκάλα ολοκληρώνει την ανάγνωση. Ακολουθεί μία συζήτηση σχετικά με το τι μπορούν να γράψουν τα παιδιά στο γράμμα τους. Ο Χ. προτείνει την εξής ερώτηση: «Το βράδυ έχετε φεγγάρι;». Πρόκειται στ' αλήθεια για μία ενδιαφέρουσα απορία, η οποία μαρτυρά ότι το παιδί έχει ξεκινήσει να αντιλαμβάνεται τις διαφορές ανάμεσα σε έναν δισδιάστατο και σε έναν τρισδιάστατο κόσμο. Πάνω από όλα το παιδί δείχνει να έχει ξεκινήσει να κατανοεί τις συνέπειες μίας υποθετικής έλλειψης της τρίτης διάστασης, δηλαδή του ύψους.

Την υπόλοιπη ώρα τα παιδιά ασχολούνται με τη συγγραφή νέου γράμματος προς το Τετράγωνο. Η δασκάλα περνάει από κάθε θρανίο και τα παιδιά με ενθουσιασμό της δείχνουν τι έχουν γράψει στο Τετράγωνο. Της λένε με περηφάνια ότι έχουν εξηγήσει στο Τετράγωνο πολλά από όσα αυτό τους ρωτάει στο γράμμα του. Καθώς έχει μείνει λίγος διαθέσιμος χρόνος, η δασκάλα παροτρύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να συνοδέψουν τις εξηγήσεις τους με αντίστοιχες ζωγραφιές.

### **Τέταρτη εκπαιδευτική συνεδρία**

Ορισμένα δυνατά χτυπήματα στην πόρτα σηματοδοτούν την άφιξη ενός νέου γράμματος από το Τετράγωνο. Τα παιδιά ξεκινούν να φωνάζουν ενθουσιασμένα: «Το Τετράγωνο! Το Τετράγωνο!». Η δασκάλα ανοίγει την πόρτα και βρίσκει ακριβώς απέξω έναν άσπρο, χαρτονένιο κουτί με ένα κόκκινο ερωτηματικό πάνω του. Το αναπάντεχο αυτό κουτί με την ιδιαίτερη εμφάνισή του κεντρίζει το ενδιαφέρον των παιδιών και τους προκαλεί έκπληξη. Όλοι και όλες αναρωτιούνται για το περιεχόμενό του και περιμένουν με ανυπομονησία να το ανοίξει η δασκάλα.

Η αποκάλυψη έρχεται, καθώς η δασκάλα το ανοίγει. Μέσα βρίσκονται διάφορα αντικείμενα: ένα γράμμα από το Τετράγωνο, μερικά χαρτιά που πάνω λένε «Βράβευση συμμετοχής» και ένα τιμητικό, χρυσό κύπελλο. Ιδιαίτερα το κύπελλο ως αντικείμενο προξενεί έντονο θαυμασμό από τα παιδιά.

Με αργές κινήσεις η δασκάλα ανοίγει τον φάκελο της επιστολής και παίρνει στα χέρια της το γράμμα του Τετράγωνου. Τα παιδιά κάνουν απόλυτη ησυχία. Είναι φανερό ότι επιθυμούν πολύ να ακούσουν τι τους γράφει ο καινούριος τους φίλος. Η δασκάλα ξεκινάει να διαβάζει. (Το γράμμα φαίνεται στις σελίδες 80 και 81).

Σε αυτό το γράμμα το Τετράγωνο πληροφορεί τους μαθητές και τις μαθήτριες ότι τα συμπληρωμένα απογραφικά δελτία διαβιβάστηκαν στην αρμόδια διεύθυνση. Μάλιστα, η διεύθυνση απονέμει ορισμένες βραβεύσεις συμμετοχής, τις οποίες το Τετράγωνο προωθεί στα παιδιά του Γ΄2. Τέλος, θέτει στα παιδιά συγκεκριμένες ερωτήσεις, όπως το αν τους δυσκόλεψε κάποιος όρος που βρήκαν στο απογραφικό δελτίο ή αν συνάντησαν κατά τον διαγωνισμό ψηλάφησης όλα τα σχήματα που περίμεναν ότι θα βρουν.

Η δασκάλα διαβάζει τώρα τις ομάδες που τα κατάφεραν πολύ καλά στον απογραφικό διαγωνισμό. Τα παιδιά τα οποία ακούνε τα ονόματά τους πανηγυρίζουν συγκρατημένα αλλά με έκδηλο ενθουσιασμό. Κατόπιν η δασκάλα διαβάζει τώρα τη δεύτερη παράγραφο και σταματάει για λίγο. Ρωτάει τα παιδιά: «Δηλαδή, παιδιά, αυτοί, για να καταλάβουν το σχήμα, πάνε και το αγγίζουν όλο γύρω-γύρω; Αγγίζουν για παράδειγμα όλες τις πλευρές;» Οι ερωτήσεις αυτές οι οποίες παρεμβάλλονται στην ανάγνωση στοχεύουν στην ανάδειξη των σημαντικότερων πληροφοριών και στην ανίχνευση της μαθητικής κατανόησης.

Ένας μαθητής απαντάει: «Αγγίζουν τις γωνίες, όχι τις πλευρές». Η δασκάλα ξαναρωτάει: «Όλες τις γωνίες; Παραδείγματος χάριν σε ένα κανονικό δεκαπεντάγωνο αγγίζουν και τις δεκαπέντε γωνίες του;». Ο ίδιος μαθητής λέει: «Όχι. Μερικές γωνίες» Ένας άλλος μαθητής φαίνεται ακόμη πιο μπερδεμένος: «Αγγίζουν τη γραμμή μπροστά». Πιθανόν με τη λέξη «γραμμή» εννοεί την πλευρά. Μία μαθήτρια έχει μία διαφορετική άποψη: «Αγγίζουν τις γωνίες και τα πλευρά». Εδώ το μικρό κορίτσι συγχέει δύο ομόηχες λέξεις. Πρόκειται για την «πλευρά» γένους θηλυκού και ενικού αριθμού και τα «πλευρά» γένους ουδέτερου και πληθυντικού αριθμού.

Η εκπαιδευτικός σχολιάζει με διάθεση αστεϊσμού: «Εννοείς τα πλευρά που έχουν οι άνθρωποι εδώ;» ενώ ταυτόχρονα δείχνει τα πλευρά του ανθρώπινου σώματος. Συμπληρώνει: «Μάλλον εννοείς τις πλευρές» Το κορίτσι γνέφει καταφατικά. Βλέποντας πως κανένα παιδί δεν έχει καταλάβει, η δασκάλα επαναλαμβάνει την ανάγνωση της ίδιας παραγράφου. Αυτή τη φορά σηκώνονται περισσότερα χέρια. Ένα κορίτσι δίνει τη σωστή απάντηση: «Ψηλαφίζουν μόνο μία



γωνία του άλλου Επιπεδοχωρίτη». Η δασκάλα επαναλαμβάνει με έμφαση: «Ψηλαφίζουν μόνο μία γωνία».

Η δασκάλα ολοκληρώνει την ανάγνωση και ρωτάει: «Παιδιά, αλήθεια συναντήσατε όλα τα γεωμετρικά σχήματα που περιμένατε ότι θα συναντήσετε;». Η αρχική απάντηση σύσσωμης της τάξης είναι «Ναι». Η δασκάλα επιμένει: «Όλα δηλαδή τα σχήματα που ξέρετε εσείς τα βρήκατε, τα ψηλαφίσατε, σωστά;». Μία μαθήτρια τώρα σηκώνει το χέρι και ισχυρίζεται ότι δε βρήκε όλα τα σχήματα που γνωρίζει. Ωστόσο στην ερώτηση ποια είναι αυτά τα σχήματα που δε συνάντησε, δε δίνει κάποια απάντηση. Ο Χ. σηκώνει το χέρι και λέει: «Όχι όλα! Εγώ τα δεκάγωνο δεν κατάλαβα».

Η δασκάλα διαβάσει και πάλι το σχετικό χωρίο από το γράμμα, γιατί πάλι δεν είναι σίγουρη ότι κατάλαβαν τα παιδιά. Τώρα τα σηκωμένα χέρια είναι οπωσδήποτε περισσότερα. Ένα αγόρι λέει ότι δε συνάντησε τον κύλινδρο. Εδώ φαίνεται μία σύγχυση ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα και τα γεωμετρικά στερεά. Η Σ. ισχυρίζεται ότι δε βρήκαν τον ρόμβο. Αυτή η απάντηση ξεσηκώνει αντιδράσεις, καθώς άλλα παιδιά λένε «Τον βρήκαμε! Τον βρήκαμε!». Τα παιδιά φαίνονται προβληματισμένα σχετικά με το τι ισχύει. Ένας άλλος μαθητής λέει τότε: «Δε βρήκαμε το ορθογώνιο τρίγωνο». Η Σ. ακούγοντας τη λέξη «ορθογώνιο» δείχνει να θυμάται κάτι. Κατόπιν λέει: «Ούτε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο». Μία μαθήτρια προτείνει το εξάγωνο, αν και κανονικό εξάγωνο υπήρχε στη μακέτα της Γεωμετρούπολης.

Η επόμενη ερώτηση προς το σύνολο της τάξης είναι η εξής: «Γιατί πιστεύετε, παιδιά, ότι δεν τα συναντήσατε; Έχετε καμία ιδέα;». Ένας μαθητής λέει: «Γιατί δεν μπορούσε (εννοεί το Τετράγωνο) να τα στείλει όλα». Ο Α. λέει: «Εεε... Γιατί... Δεν ήθελε από την πρώτη φορά που το κάνουμε να έχουμε δυσκολευτεί πολύ». Μία μαθήτρια λέει: «Μπορεί να μην έχουν στην Επιπεδοχώρα όλα τα σχήματα. Να έχουν κάποια». Η δασκάλα αφήνει το ερώτημα να πλανάται, χωρίς να προσθέσει κάτι παραπάνω και συνεχίζει μέχρι το τέλος την ανάγνωση της επιστολής.

Τα παιδιά απορούν και γελάνε με την άγνοια του Τετράγωνου για πράγματα τόσο οικεία σε αυτά, όπως τα ρούχα, το νερό, το φεγγάρι και τα αστέρια. Μάλιστα, κάποια αγόρια απογοητεύονται που το Τετράγωνο είναι κίτρινο. Είναι φανερό πως θεωρούν το κίτρινο ένα «κοριτσιίστικο χρώμα» αποκαλύπτοντας πως οι έμφυλες διαφορές στην προτίμηση χρωμάτων κάνουν την εμφάνισή τους από μικρές παιδικές ηλικίες (Κωστοπούλου, 2005).

Αγαπητοί μαθητές, αγαπητές μαθήτριες,

μόλις έλαβα τα απογραφικά σας δελτία, τα προώθησα στη διεύθυνση απογραφικών διαδικασιών, εργασιών και εικασιών Γεωμετρούπολης! Μάλιστα μου έδωσαν και τα βραβεία συμμετοχής σας! Θα τα βρείτε μέσα στον φάκελο. Αλήθεια πώς σας φάνηκε ο διαγωνισμός ψηλάφησης; Από ό,τι είδα ορισμένες ομάδες τα κατάφεραν άψογα! Αναφέρομαι στην ομάδα του Χ., της Φ., του Α. και της Σ., στην ομάδα της Β., του Μ., του Χρ. και της Στ. και στην ομάδα της Ε., του Ν., της Ζ. και του Αστ. Εύγε σε αυτούς και μπράβο σε όλους για την καλή προσπάθεια!

Φαντάζομαι πως για εσάς που έχετε μάθει να ανταποκρίνεστε στο περιβάλλον σας βασιζόμενοι κυρίως στην αίσθηση της όρασης, η ψηλάφηση θα ήταν μία ασυνήθιστη και μάλλον χρονοβόρα διαδικασία. Βέβαια, εμείς έχουμε επιταχύνει και απλοποιήσει τη διαδικασία αναγνώρισης. Ειδικότερα, χάρη στη μακροχρόνια εμπειρία μας και την εκπαίδευσή που ξεκινά από το σχολείο και συνεχίζεται με την καθημερινή πρακτική, μπορούμε με την αφή να διακρίνουμε αμέσως αν πρόκειται για τη γωνία ενός ισόπλευρου Τριγώνου, ενός Τετραγώνου ή ενός κανονικού Πενταγώνου. Κατά κανόνα λοιπόν αρκεί η ψηλάφηση μιας μόνο γωνίας ενός Συνεπιπεδοχωρίτη, για να καταλάβουμε το σχήμα του!

Ας επανέλθω όμως σε εσάς! Άραγε υπήρξαν σημεία που σας προβλημάτισαν, πεδία που σας δυσκόλεψαν ή όροι που σας μπέρδεψαν; Βρήκατε όλα τα σχήματα που περιμένατε ότι θα συναυτήσετε; Εάν όχι, ποια γεωμετρικά σχήματα δε συναυτήσατε; Θα χαρώ να διαβάσω τους προβληματισμούς και τις απορίες σας. Δεσμεύομαι μάλιστα ότι θα προσπαθήσω να δώσω εξηγήσεις, όπου πιθανόν τις χρειάζεστε.

Τέλος, θα προσπαθήσω να απαντήσω στις ερωτήσεις που μου θέσατε στο προηγούμενο γράμμα! Το σπίτι μου μοιάζει με ένα κανονικό πεντάγωνο που είναι λίγο ανοικτό σε δύο από τις πέντε πλευρές του. Τα ανοίγματα αυτά αποτελούν τις δύο πόρτες του σπιτιού. Θα σας έστειλα μία φωτογραφία του, αλλά πολύ φοβάμαι ότι το μόνο που θα βλέπατε θα ήταν πάλι μία γραμμή.

*Με ρωτήσατε αν έχουμε χρώματα! Φυσικά και έχουμε, εγώ παραδείγματος χάριν είμαι κίτρινο. Είναι ωραία τα χρώματα, ευχάριστα στο μάτι. Τα διακρίνεις αμέσως, χωρίς να χρειάζεται να ψηλαφίζεις γωνίες και τέτοια. Δε φοράμε «ρούχα» και βασικά δεν ξέρουμε τι είναι τα ρούχα.*

*Μουσική έχουμε, όταν τραγουδάμε εμείς κάποια μελωδία. Στο σχολείο διδασκόμαστε κυρίως Αριθμητική και Γεωμετρία, ενώ η δασκάλα μας είναι ένα σοφό κανονικό δωδεκάγωνο. Πόσα πράγματα μας μαθαίνει καθημερινά!*

*Διακοπές κάνουμε κάθε έβδομη μέρα, κάθε Κυριακή δηλαδή, για μία μέρα, αλλά και όταν έχει πολλή ζέστη ή πολύ κρύο επίσης, καθώς τότε είναι ανυπόφορο να μετακινηθούμε «τσουλώντας» δεξιά, αριστερά, μπροστά και πίσω στην Επιπεδοχώρα. Νερό δεν έχουμε ούτε και θάλασσες και δεν μπορώ να φανταστώ πώς είναι να κάνεις μπάνιο. Αλήθεια πώς είναι; Από παιχνίδια, μας αρέσει πιο πολύ το πατινάζ. Αρκεί να μην έχει πολλή ζέστη ή πολύ κρύο, όπως σας είπα και πριν.*

*Κάτι μου γράψατε σχετικά με τη μέρα και τη νύχτα. Λοιπόν... Το πρωί το καταλαβαίνουμε, γιατί υπάρχει φως. Το βράδυ δεν έχει τόσο φως. Υπάρχει περισσότερο σκοτάδι και έτσι μπορεί να συγκρουστούμε μεταξύ μας, άμα κάνουμε καμιά νυχτερινή βόλτα. Γι' αυτό και τις αποφεύγουμε! Τώρα το φεγγάρι και τα αστέρια που αναφέρατε, υποθέτω ότι κάποια σχέση θα έχει με το πρωί και το βράδυ... Αλλά δεν είμαι και σίγουρο εντελώς.*

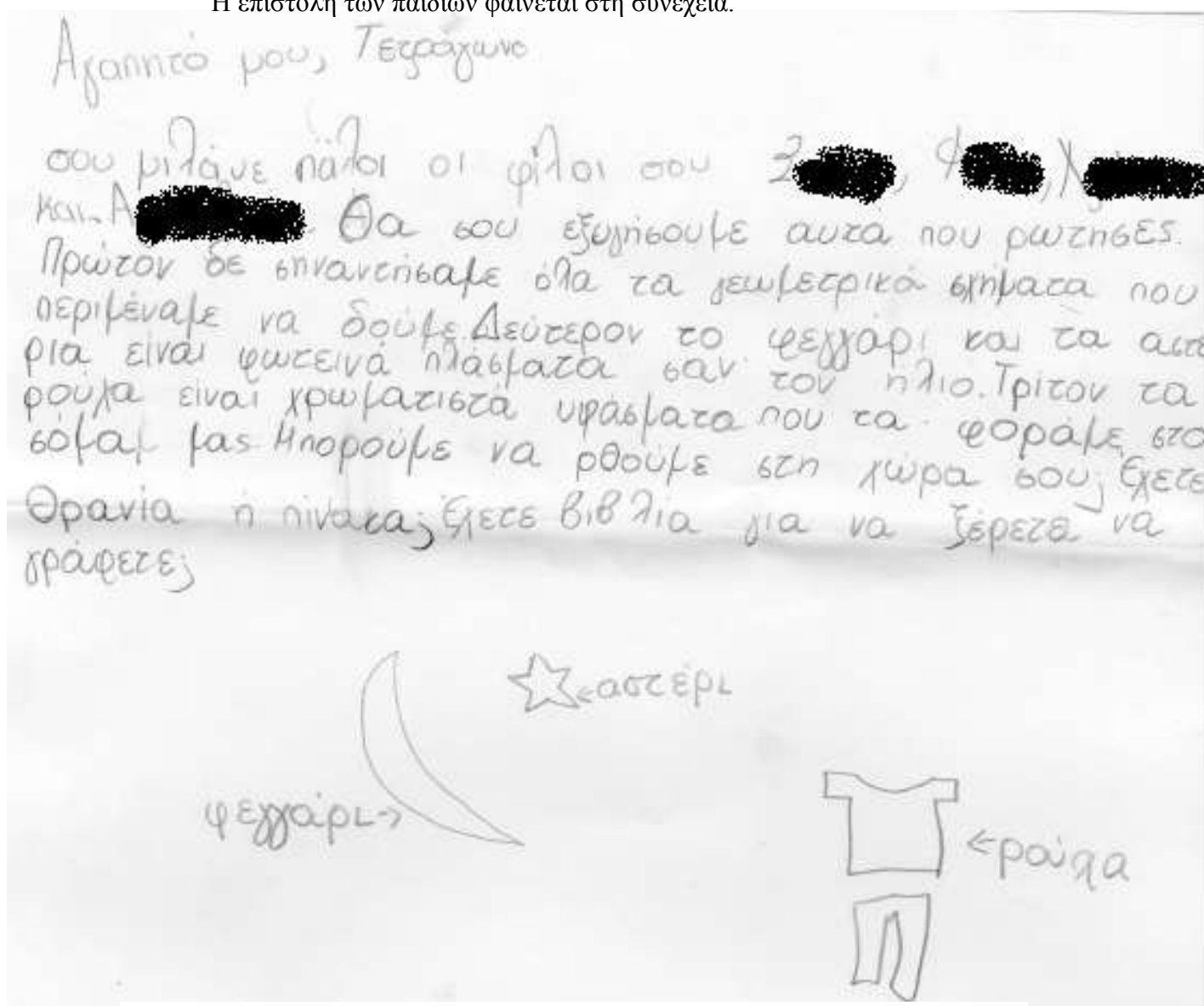
*Φιλικά,  
το Τετράγωνο*

**Εικόνα 4.13.** Η τέταρτη επιστολή του Τετράγωνου

Αφού γίνουν όλα αυτά, η δασκάλα απονέμει σε κάθε μαθητική ομάδα μία βράβευση για τη συμμετοχή της στον απογραφικό διαγωνισμό. (Οι βραβεύσεις συμμετοχής φαίνονται στη σελίδα 46). Τα παιδιά παραλαμβάνουν με χαρά τη βράβευση της ομάδας τους. Στη συνέχεια συμπληρώνουν στον κενό χώρο τα ονόματά τους. Έπειτα, σηκώνονται και η δασκάλα τραβά τις αναμνηστικές φωτογραφίες των ομάδων με το κύπελλο και το βραβείο τους. Αυτή η διαδικασία διαρκεί αρκετή ώρα.

Η υπόλοιπη ώρα αφιερώνεται στη συζήτηση και συγγραφή της απαντητικής επιστολής. Τα παιδιά εκφράζουν διάφορες σκέψεις τους. Για παράδειγμα, λένε ότι πρέπει σίγουρα να απαντήσουν στις ερωτήσεις του Τετράγωνου. Αποφασίζουν να του γράψουν για τα γεωμετρικά σχήματα που δε συνάντησαν και να προσπαθήσουν να του ξεδιαλύνουν τις απορίες τους. Η δασκάλα τους υπενθυμίζει τις απορίες του Τετράγωνου σχετικά με τη θάλασσα, την κολύμβηση, το φεγγάρι, τα αστέρια κ.λπ.

Η επιστολή των παιδιών φαίνεται στη συνέχεια.



**Εικόνα 4.14.** Η τέταρτη απαντητική επιστολή των παιδιών

## Πέμπτη εκπαιδευτική συνεδρία

Κάποιος χτυπάει για ακόμη μια φορά δυνατά την πόρτα! Το Τετράγωνο έχει αφήσει έναν χοντρό φάκελο μεγέθους A4. Η δασκάλα τον παίρνει και τον ανοίγει μπροστά στα παιδιά. Μέσα του υπάρχει μία επιστολή από τον φανταστικό διαλληλογραφίας φίλο των παιδιών και πολλά μεγάλα, χρωματιστά σχήματα διαφορετικά μεταξύ τους. Η δασκάλα ξεκινάει την ανάγνωση του γράμματος. Σε αυτό το Τετράγωνο εξηγεί στα παιδιά πόσο σημαντική θεωρούν οι Επιπεδοχωρίτες την κανονικότητα. Ακόμη, προσκαλεί τα παιδιά να συμμετάσχουν σε μια δραστηριότητα, στην οποία χρειάζεται να βρουν την κατάλληλη διάταξη, ώστε να σχηματίσουν ένα κανονικό σχήμα (τετράγωνο) με διάφορα κομμάτια από ένα παζλ Tagram.

Μόλις η δασκάλα διαβάσει και τη δεύτερη παράγραφο του γράμματος, διακόπτει για λίγο την ανάγνωση και ρωτάει τα παιδιά αν κατάλαβαν τι είναι η κανονικότητα. Ένας μαθητής λέει: «Στη Γεωμετρούπολη πρέπει να υπάρχουν μόνο κανονικά σχήματα», χωρίς να προσθέσει κάτι άλλο. Μετά μία μαθήτρια παίρνει τον λόγο: «Κάποια σχήματα είναι σαν να είναι ακανόνιστα. Σαν να είναι περίεργα». Η δασκάλα θέτει αλλιώς τώρα την ερώτηση: «Τι σημαίνει κανονικό και τι σημαίνει ακανόνιστο σχήμα;». Η Φ. απαντάει: «Κανονικό σημαίνει όταν έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες». Τον ορισμό για τα ακανόνιστα σχήματα δίνει μία άλλη μαθήτρια: «Ακανόνιστο είναι το σχήμα που δεν έχει ούτε ίσες πλευρές ούτε ίσες γωνίες». Η χρήση του συμπλεκτικού συνδέσμου αποκαλύπτει ότι ενδεχομένως για το μικρό κορίτσι οι πλευρές και οι γωνίες ενός σχήματος δεν έχουν κάποια άμεση σχέση μεταξύ τους.

Μετά η δασκάλα ρωτάει γιατί στην Επιπεδοχώρα δεν είναι επιθυμητά τα ακανόνιστα σχήματα. Η Σ. απαντάει: «Γιατί θα τους παίρνει πολλή ώρα να ψηλαφίζουν συνέχεια, για να καταλάβουν ποιο σχήμα είναι». Η δασκάλα δέχεται την απάντηση και συνεχίζει την ανάγνωση της επιστολής του Τετράγωνου. Βρίσκεται τώρα στη μέση της τρίτης παραγράφου και συγκεκριμένα στο σημείο όπου το Τετράγωνο γράφει: «Μήπως εσείς, που είστε προικισμένοι με την τρίτη διάσταση...». Η δασκάλα εσκεμμένα σταματάει, χωρίς να διαβάσει τη συνέχεια και ρωτάει τα παιδιά ποια διάσταση υπάρχει επιπλέον στη Χωροχώρα, η οποία δεν υπάρχει στην Επιπεδοχώρα.

(Το γράμμα του Τετράγωνου φαίνεται στις δύο επόμενες σελίδες.)

Αγαπητοί μαθητές, αγαπητές μαθήτριες,

στα γράμματά σας μου εκφράσατε την έκπληξη που νιώσατε όταν πουθενά στην Γεωμετρούπολη δε συναντήσατε ένα παραλληλόγραμμο, ένα τραπέζιο, έναν ρόμβο ή ένα ισοσκελές τρίγωνο. Κατανοώ απόλυτα το ξάφνιασμά σας. Πιστεύω μάλιστα ότι έχω κι εγώ την ευθύνη μου σε αυτό.

Θα έπρεπε να έχω ήδη αναφερθεί μέχρι τώρα στην αρχή της Κανονικότητας. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την αρχή, κάθε πλάσμα στην Επιπεδοχώρα πρέπει να είναι ένα Κανονικό Σχήμα με Κανονική κατασκευή. Θέλω να πω ότι σε κάθε σχήμα, Τρίγωνο, Τετράγωνο ή οποιοδήποτε Πολύγωνο όλες οι πλευρές πρέπει να είναι ίσες. Διότι αν οι πλευρές μας ήταν άνισες, τότε και οι γωνίες μας θα ήταν άνισες. Επομένως, για να διακρίνει κανείς το σχήμα ενός Συνεπιπεδοχωρίτη, δε θα αρκούσε η ψηλάφηση μιας και μόνο γωνίας, αλλά θα έπρεπε να ψηλαφήσει την κάθε γωνία ξεχωριστά. Φαντάζεστε πόσο χρόνο θα απαιτούσε κάτι τέτοιο; Χωρίς Κανονικότητα, θα περνούσαμε ολόκληρη τη ζωή μας ψηλαφώντας και μελετώντας την περίμετρο των γνωστών μας!

Έτσι, ο Νόμος είναι πολύ αυστηρός όσον αφορά στα Ακανόνιστα Σχήματα. Αυτά, μόλις διαγνωσθούν ως Ακανόνιστα, φυλακίζονται. Παρά τον σεβασμό που έχω προς τους Νομοθέτες μας, σεναχωριέμαι για την καταδίκη αυτών των καημένων σχημάτων. Μήπως εσείς, που είστε προικισμένοι με την τρίτη διάσταση, αυτή του ύψους, θα μπορούσατε να βρείτε κάποιο τρόπο να γίνουν κανονικά; Εάν κατορθώνατε με κάποιον τρόπο να καταστήσετε κανονικά έστω λίγα από τα ακανόνιστα σχήματα, θα σας ήμασταν παντοτινά ευγνώμονες όλοι στην Επιπεδοχώρα!

Μ., Σ., Χ. και Β., τι είναι κύλινδρος; Τον αναφέρετε μαζί με άλλα σχήματα που γνωρίζετε και δε συναντήσατε. Ωστόσο, εδώ στην Επιπεδοχώρα δεν υπάρχει κανένας Επιπεδοχωρίτης-κύλινδρος. Μαλλιά δεν έχουμε, έχουμε όμως ο καθένας από ένα μάτι. Πώς αλλιώς θα βλέπαμε; Εγώ, παραδείγματος χάριν, έχω ένα μάτι σε μία γωνία μου. Φυσικά και έχουμε σχολικά προϊόντα, όπως μολύβι και γόμα. Πώς αλλιώς θα γράφαμε; Μόνο που εδώ η γραφή και η ανάγνωση γίνεται με διαφορετικό τρόπο από ό,τι σε εσάς στη Χωροχώρα.

*Ε., Αστ., Ν. και Ζ. με ρωτήσατε αν έχουμε αέρα στον ουρανό και αν βλέπουμε τον ήλιο. Για σκεφτείτε λίγο μόνοι σας όμως! Πιστεύετε ότι μπορούμε να δούμε πάνω ή κάτω;*

*Χ., Μ., Ο. και Π., χαίρομαι που προσπαθήσατε να μου εξηγήσετε τι είναι η θάλασσα. Όμως εδώ στην Επιπεδοχώρα δεν έχουμε θάλασσες. Πιστεύω ότι αυτό μάλλον έχει σχέση με το ότι στον κόσμο μας έχουμε δύο διαστάσεις ενώ στον κόσμο σας υπάρχουν τρεις διαστάσεις.*

*Σ., Φ., Χ. και Α., μετά χαράς θα δεχόμουν να σας φιλοξενήσω εάν ερχόσασταν στον κόσμο μου! Όμως δεν είμαι σίγουρος εάν είναι αυτό εφικτό... Εκτός εάν φυσικά υπάρχει τρόπος να γίνετε δισδιάστατοι σας εμάς.*

*Με εκτίμηση,  
το Τετράγωνο*

**Εικόνα 4.15.** Η πέμπτη επιστολή του Τετράγωνου

Ένας μαθητής απαντάει: «Εεε... Έχουμε... Δεν έχουν... Έχουμε... Μπορούμε να βλέπουμε από πάνω». Η δασκάλα ρωτάει πάλι: «Πώς λέγεται αυτό το πάνω και βαθιά;». Η Φ. λέει: «Εμείς έχουμε την τρισδιάστατη χώρα ενώ εκείνοι δεν έχουν την τρισδιάστατη». Η δασκάλα ξαναρωτά: «Ωραία. Εμείς μένουμε σε μία τρισδιάστατη χώρα. Ποια είναι όμως αυτή η τρίτη διάσταση;». Η Σ. λέει: «Το ύψος!». Η δασκάλα συμπληρώνει: «Αυτοί έχουν μήκος και πλάτος ενώ εμείς έχουμε μήκος, πλάτος και ύψος!».

Η δασκάλα διαβάζει τώρα την τελευταία παράγραφο της πρώτης σελίδας του γράμματος. Ρωτάει τους μαθητές και τις μαθήτριες: «Γιατί, παιδιά, πιστεύετε ότι δεν υπάρχουν κύλινδροι στην Επιπεδοχώρα;». Ο Α. λέει με σιγουριά: «Επειδή είναι τρισδιάστατος!». Συνεχίζοντας την ανάγνωση στη δεύτερη σελίδα της επιστολής η δασκάλα ρωτάει: «Μπορούν τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα να έχουν ουρανό κι αν ακόμη τον έχουν, μπορούν να τον βλέπουνε;». Ένας μαθητής απαντάει: «Όχι, δεν μπορούνε, επειδή δεν έχουν ύψος».

Η επόμενη ερώτηση προκύπτει από τη δήλωση του Τετράγωνου στο γράμμα του ότι στην Επιπεδοχώρα δεν έχουνε θάλασσες. Η δασκάλα ζητάει από τα παιδιά να βρουνε την αιτία. Ένας μαθητής απαντάει: «Επειδή οι θάλασσες... Δεν μπορούνε να πάνε κάτω (Εννοεί τους Επιπεδοχωρίτες)». Η δασκάλα ρωτάει πάλι γιατί. Ένα αγόρι απαντάει ότι η θάλασσα έχει βάθος. Η δασκάλα επιμένει: «Τι εννοείς; Δηλαδή τι έχει η θάλασσα;». Ένα κορίτσι λέει επίσης για το βάθος. Η δασκάλα παίρνει την ευκαιρία να εξηγήσει στα παιδιά ότι το βάθος είναι μία λέξη που αναφέρεται ουσιαστικά στο ύψος. Χαρακτηριστικά εξηγεί στα παιδιά: «Τι είναι βάθος; Βάθος είναι ύψος προς τα κάτω. Είναι ουσιαστικά η ίδια διάσταση!».

Η ανάγνωση της επιστολής του Τετράγωνου έχει ολοκληρωθεί. Η δασκάλα ζητάει από τα παιδιά να συνοψίσουν τον σκοπό της σημερινής δραστηριότητας. Ένας μαθητής απαντάει: «Το Τετράγωνο μας ζητάει να κάνουμε τα ακανόνιστα σχήματα κανονικά». Η δασκάλα με τη βοήθεια ορισμένων παιδιών μοιράζει τα κομμάτια από ένα παζλ Tagram σε κάθε ομάδα. Τα παιδιά δείχνουν ενθουσιασμένα κατά την επαφή με αυτό το χειραπτικό υλικό. Ωστόσο οι αρχικές τους δραστηριότητες με το υλικό παρεκκλίνουν από τον στόχο της δραστηριότητας. Άλλες ομάδες με τα κομμάτια σχηματίζουν δεντράκια κι άλλες σπιτάκια.

Προκειμένου να επανέλθουν στον στόχο της δραστηριότητας, η δασκάλα παίρνει ένα-ένα τα σχήματα και ρωτάει τα παιδιά να τα αναγνωρίσουν και να τα χαρακτηρίσουν ως κανονικά ή ακανόνιστα. Πράγματι τα παιδιά μετά από λίγο



ξεκινούν να πειραματίζονται. Συνδυάζουν με ποικίλους τρόπους τα σχήματα του παζλ προσπαθώντας να βρουν τη λύση του, δηλαδή να δημιουργήσουν ένα μεγάλο τετράγωνο. (Το παζλ Tagram φαίνεται στη σελίδα 46).

Φυσικά, προκειμένου τα παιδιά να συνθέσουν ένα τετράγωνο, χρειάζεται πρώτα να καταλάβουν ότι το αποτέλεσμα της σύνθεσης των μερών του παζλ είναι ένα τετράγωνο. Προς το παρόν γνωρίζουν μόνο ότι πρέπει να ενώσουν τα ακανόνιστα σχήματα και να φτιάξουν μέσα από την ένωσή τους ένα μεγάλο κανονικό σχήμα. Η δασκάλα, για να διευκολύνει τα παιδιά, τα ρωτάει τι τους θυμίζουν τα διάφορα κομμάτια του παζλ. Ένας μαθητής λέει ότι του θυμίζουν ένα σπιτάκι. Η δασκάλα του εξηγεί ότι το σπιτάκι δεν αποτελεί ένα κανονικό σχήμα. Μετά μια μαθήτρια βρίσκει ότι στόχος είναι να φτιάξουν ένα μεγάλο τετράγωνο.

Ο στόχος αποδεικνύεται ιδιαίτερα δύσκολος για τα παιδιά. Οι μαθητές και οι μαθήτριες προσπαθούν ξανά και ξανά, αλλά αποτυγχάνουν να βρουν τη λύση στο παζλ Tagram. Το θετικό στοιχείο είναι ότι αν και η δραστηριότητα ήταν οπωσδήποτε απαιτητική, τα παιδιά στ' αλήθεια βάζουν τα δυνατά τους. Η εμπλοκή τους στο μαθησιακό έργο είναι πλήρης και δε δείχνουν καμία διάθεση παραίτησης. Το παζλ τους κεντρίζει το ενδιαφέρον και τους προκαλεί ευχαρίστηση. Η δασκάλα περνάει από κάθε ομάδα και παρακολουθεί την πορεία της.

Η πρώτη διδακτική ώρα περνάει δίχως κάποια ομάδα να έχει κατακτήσει τον στόχο της δραστηριότητας. Την επόμενη διδακτική ώρα γίνεται μία απόπειρα η δραστηριότητα να πραγματοποιηθεί συλλογικά από όλα τα παιδιά και με υποστήριξη από την εκπαιδευτικό. Τα κομμάτια ενός παζλ Tagram μεταφέρονται στο πάτωμα της σχολικής αίθουσας και έρχεται κάθε φορά ένα παιδί ενώ τα υπόλοιπα παιδιά παρακολουθούν. Αυτή τη φορά τα αποτελέσματα είναι καλύτερα. *Ο Α. φτάνει αρκετά κοντά στη λύση του παζλ και τελικά το παζλ λύνεται ολοκληρωτικά από τη Φ.* Οι μαθητές και οι μαθήτριες πανηγυρίζουν μαζί με τη δασκάλα.

Ο υπόλοιπος χρόνος αφιερώνεται σε συζήτηση γύρω από το γράμμα του Τετράγωνου και στη συγγραφή απαντητικής επιστολής. (Η επιστολή των παιδιών φαίνεται στην επόμενη σελίδα). Η συζήτηση περιστρέφεται γύρω από τα ακανόνιστα σχήματα και τον στόχο της δραστηριότητας. Ποικίλες σκέψεις ακούγονται. Έχει ενδιαφέρον η διαρκής επεξεργασία των μαθητικών απαντήσεων με συνεχείς ερωτήσεις από τη δασκάλα. *Η Σ. λέει: «Θα βγάλουμε κάποια άτομα από τη φυλακή».* Η δασκάλα ρωτάει: «Δηλαδή; Μπορεί να το πει κάποιος ολοκληρωμένα;» Ένας μαθητής απαντάει: «Κάποια σχήματα που είναι στη φυλακή θα τα βγάλουν και



θα κάνουν ένα ολοκληρωμένο σχήμα». Η δασκάλα ρωτάει πάλι: «Ολοκληρωμένα σχήματα λέγονται;» Ένας μαθητής λέει τελικά: «Θα γίνουν ένα μεγάλο κανονικό σχήμα».

Η συζήτηση τώρα παίρνει άλλη τροπή με μία αναπάντεχη ερώτηση από τη μεριά της δασκάλας: «Φταίνε τα ακανόνιστα σχήματα που γεννήθηκαν ακανόνιστα;» Η Σ. μουρμουρίζει «όχι». Ένας μαθητής λέει ότι αρχικά ήταν κανονικά και στην πορεία έγιναν ακανόνιστα. Η Σ. παίρνει τον λόγο: «Εγώ νομίζω πως γεννήθηκαν έτσι και δε φταίνε γι' αυτό». Η δασκάλα ύστερα ρωτάει τα παιδιά πώς πιστεύουν τα ίδια ότι θα αξιοποιήσουν οι Επιπεδοχωρίτες τη δυνατότητα δημιουργίας κανονικών σχημάτων από πολλά μικρότερα ακανόνιστα σχήματα: «Πώς πιστεύετε ότι θα χρησιμοποιήσουν την ανακάλυψή μας στον δισδιάστατο κόσμο; Θα κάνουν ενώσεις και θα εξαφανιστούν τα ακανόνιστα για πάντα;» Η Σ. λέει: «Αφού συνεχώς γεννιούνται, θα γεννηθούν κι άλλα διάφορα σχήματα (Εννοεί ακανόνιστα). Οπότε εμείς μπορούμε να τους πούμε ή έναν τρόπο πώς να τους ξεχωρίζουμε ή να τους δείξουμε τον τρόπο που τα βάλουμε εμείς έτσι και να μην ξαναμπεί κανένας στη φυλακή».

Κατόπιν η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά εν θεωρούν ότι χρειάζεται να ξαναπροσπαθήσουν να εξηγήσουν στο Τετράγωνο τι είναι η θάλασσα και τα αστέρια, δεδομένου ότι δε φαίνεται να καταλαβαίνει. Η Σ. προτείνει: «Να του πούμε συγγνώμη, γιατί δε σκεφτήκαμε ότι εσείς δεν μπορείτε να πάτε προς τα κάτω... Ξεχάσαμε ότι δεν μπορείτε να πάτε προς τα κάτω και θα προσπαθήσουμε να μη σας ρωτήσουμε ξανά πράγματα που εσείς δεν μπορείτε να έχετε». Μία μαθήτρια συμπληρώνει ότι είναι σημαντικό να προσπαθούμε να μπαίνουμε στη θέση των άλλων.

Παρόλα αυτά τα παιδιά δείχνουν να προβληματίζονται πολύ που τα γεωμετρικά σχήματα δεν έχουν θάλασσα κι αστέρια. Μετά από σκέψη ένας μαθητής σηκώνει το χέρι και λέει: «Να τους πούμε άμα θέλουνε να έχουνε θάλασσα να βάλουνε ένα...». Ένας μαθητής τότε πετάγεται και λέει: «Να βάλουν καράβια». Ο πρώτος διαφωνεί: «Όχι, καράβι. Γιατί έχει ύψος». Η δασκάλα σχολιάζει: «Πράγματι ένα καράβι έχει ύψος και η θάλασσα έχει βάθος. Δηλαδή ύψος από κάτω». Ο πρώτος μαθητής σκέφτεται πάλι και λέει: «Να βάλουνε από κάτω... Δηλαδή, άμα είναι σαν έτσι (αναπαριστά με τα χέρια του μία αόρατη επιφάνεια η οποία βρίσκεται στον αέρα) να βάλουνε λίγο μόνο νερό κι αυτό θα γεμίσει και θα μπορούνε να κολυμπάνε». Η δασκάλα προσπαθεί να του εξηγήσει ότι και λίγα χιλιοστά προς τα πάνω ή προς τα κάτω αποτελούν ύψος.

Ο μαθητής ο οποίος είχε πει πριν για τα καράβια σηκώνει το χέρι και λέει: «Να προσπαθήσουνε όλα τα σχήματα στη Γεωμετρούπολη να γίνουν κάπως τρισδιάστατα σαν εμάς, για να μπορούν να έχουν θάλασσα κι ό,τι έχουμε εμείς». Αυτή η πρόταση φαίνεται να πυροδοτεί κι άλλες. *Η Σ. παίρνει τον λόγο και λέει: «Να πάρουνε τέσσερα τετράγωνα, να ενωθούν και να γίνουν τρισδιάστατα κι έτσι θα μπορέσουν να κάνουν τον κόσμο τους τρισδιάστατο».* Όπως διαπιστώνει κανείς, η μαθήτρια έχει στο μυαλό της το ανάπτυγμα του κύβου σε ημιτελή τουλάχιστον μορφή, καθώς αναφέρει μόνο τέσσερα κι όχι έξι τετράγωνα.

### **Έκτη εκπαιδευτική συνεδρία**

Κάποιος χτυπάει δυνατά την πόρτα της τάξης και πριν προλάβει κάποιο παιδί να την ανοίξει, ένας φάκελος γλιστράει κάτω από τη χαραμάδα. Η δασκάλα παίρνει τον φάκελο και διαβάζει τα στοιχεία αποστολέα. Είναι πάλι από το Τετράγωνο. Ανοίγει τον φάκελο και μέσα βρίσκει ένα γράμμα και ορισμένα χρωματιστά ζάρια. Τα παιδιά εντυπωσιάζονται. Ξεκινάει η ανάγνωση της επιστολής του Τετράγωνου. Σε αυτό το έκτο του γράμμα το Τετράγωνο εκφράζει την επιθυμία όλων των Επιπεδοχωριτών να επισκεφτούν τον κόσμο των τριών διαστάσεων και να γνωρίσουν τη Χωροχώρα και τους κατοίκους της από κοντά. (Το γράμμα του Τετράγωνου φαίνεται στην επόμενη σελίδα).

Ακολουθεί στην τάξη συζήτηση σχετικά με την αποκωδικοποίηση της επιστολής του Τετράγωνου και την ερμηνεία του όρου «ανάπτυγμα». Ένας μαθητής συνοψίζει το περιεχόμενο της επιστολής: «Το Τετράγωνο θέλει να γίνει τρισδιάστατο, να γίνει κύβος δηλαδή». *Ο Α. λέει: «Με τα ζάρια πρέπει να κάνουμε έναν κύβο».* Η δασκάλα επιμένει ρωτώντας: «Αφού τα ζάρια κύβος δεν είναι;» Ο Α. μένει σιωπηλός και σκεπτικός. Μία μαθήτρια λέει: «Με αυτά να κάνουμε ένα τετράγωνο τρισδιάστατο». Σημασία δεν έχουν μόνο τα λόγια της μαθήτριας αλλά και οι κινήσεις των χεριών της στην προκειμένη περίπτωση. Το μικρό κορίτσι όσο μιλάει ασυναίσθητα σχεδόν με τα χέρια της μοιάζει να παίρνει ανύπαρκτα τετράγωνα να τα σηκώνει και να τα ενώνει σχηματίζοντας το στερεό σώμα του κύβου. *Η Σ. παίρνει τον λόγο: «Θα τα βάλουμε κάτω κολλητά το ένα στο άλλο. Θα βάλουμε τέσσερα κάτω, μετά πάνω, μετά πάνω, πάνω-πάνω, και μετά θα γίνει ένας μεγάλος κύβος κι έτσι θα πούμε και στο Τετράγωνο...»*

Γεωμετρούπολη, 8/5/2017

Αγαπητοί φίλοι, αγαπητές φίλες,

από τη στιγμή που έλαβα τα γράμματά σας, με έχει κατακλύσει ένας υπέροχος ευθουσιασμός! Ομολογώ ότι όταν την προηγούμενη φορά απευθύνηκα στη δικιά σας σοφία, ω τρισδιάστατα ευφυή όντα, η ελπίδα μου για εύρεση λύσης ήταν στ' αλήθεια πολύ μικρή. Ωστόσο η ιδέα της ένωσης ακανόνιστων σχημάτων με ταρακούνησε!

Αμέσως μετέφερα τα νέα στον βασιλιά μας, τον μεγάλο Κύκλο! Αυτός ζήτησε από τους πιο σοφούς μας γεωμέτρους να εξετάσουν την ορθότητα των ιδεών σας και αυτοί τις βρήκαν απολύτως σωστές! Η συνέχεια αποτελεί το πιο μεγάλο ιστορικό γεγονός που έχουμε βιώσει στην Επιπεδοχώρα! Τα Ακανόνιστα Σχήματα αποφυλακίστηκαν!

Φαίνεται ότι εάν στο μήκος και στο πλάτος προστεθεί το ύψος, η οπτική αλλάζει για πάντα! Όλοι οι Επιπεδοχωρίτες έχουμε συνεπαρθεί από τις δυνατότητες που έχετε στον Κόσμο των Τριών διαστάσεων. Έτσι, θα θέλαμε πολύ να έρθουμε να σας επισκεφτούμε! Μάλιστα, ο Χ., ο Π., ο Μ. και η Ο. μου έδωσαν μία ιδέα. Στο προηγούμενο γράμμα τους αναφέρουν ότι, άμα ενωθούμε πολλά τετράγωνα μαζί, μπορούμε να φτιάξουμε ένα τρισδιάστατο σχήμα, έναν κύβο συγκεκριμένα. Μπορείτε να μου δείξετε με ποιον τρόπο θα γίνουμε εμείς τα τετράγωνα στερεά σώματα; Τολμώ να υποθέσω ότι, όπως με ενώσεις μετατρέψατε τα Ακανόνιστα Σχήματα σε Κανονικά, με κάποιο παρόμοιο τρόπο θα μπορέσετε να μας ενώσετε και να μετατρέψετε τη δισδιάστατη μορφή μας σε τρισδιάστατη. Θέλουμε να αναπτυχθούμε, θέλουμε να γίνουμε αναπτύγματα!

Με φιλικούς χαιρετισμούς,  
το Τετράγωνο

Υ.Σ. Σ., Β., Χ. και Μ., πράγματι κι εμείς στην Επιπεδοχώρα έχουμε κάτι σαν ονοματεπώνυμο, για να ξεχωρίζουμε ίδια σχήματα μεταξύ τους. Εμένα συγκεκριμένα με φωνάζουν Τετραγωνάκι Κιτρινάκι, γιατί είμαι κίτρινο στο χρώμα. Α, και γενέθλια έχω στις 31 Μαΐου. Αλλά γιατί ρωτάτε; Μήπως θέλετε να μου κάνετε κάποιο δώρο; Αχ, τρελαίνομαι για δώρα κι εκπλήξεις!

**Εικόνα 4.17.** Η έκτη επιστολή του Τετράγωνου

Η δασκάλα της λέει ότι τα ζάρια είναι όμως ήδη κύβοι. Ένας μαθητής λέει τότε: «Μας έστειλε ζάρια, επειδή είναι κυβικά, και το Τετράγωνο είναι κι αυτό τετράγωνο και να δείξουμε με τα ζάρια πώς να γίνει κι αυτό, δηλαδή πώς να γίνει κι αυτό τρισδιάστατο». Αυτή η σκέψη αν και δεν έχει εκφραστεί σωστά δίνει έμπνευση στα άλλα παιδιά και προωθεί περαιτέρω τη δική τους σκέψη. Στη συνέχεια ακούγονται διάφορες ενστάσεις, οι οποίες αποκαλύπτουν ότι τα παιδιά έχουν συλλάβει στο μυαλό τους την ιδέα ενός δισδιάστατου κόσμου. Έτσι, για παράδειγμα, ένας μαθητής λέει: «Αυτό δε γίνεται, γιατί πρέπει να πάει ο ένας πάνω στον άλλο, και δε γίνεται να πηδήξουν».

Η δασκάλα τους λέει ότι αυτό ακριβώς ζητάει το Τετράγωνο, να του δείξουμε πώς να γίνει κύβος. Ρωτάει ύστερα τα παιδιά από τι αποτελείται ένας κύβος. Ένα παιδί λέει: «Από τετράγωνα». Η δασκάλα ρωτάει τώρα από πόσα τετράγωνα αποτελείται. Η δασκάλα ζητάει από έναν μαθητή και να μετρήσεις τις έδρες-τετράγωνα του κύβου-ζάρι. Ο μαθητής σηκώνεται και μετράει έξι τετράγωνα. Η δασκάλα ζητάει από τους μαθητές να βρουν τον κατάλληλο τρόπο ένωσης των τετραγώνων, με άλλα λόγια το ανάπτυγμα ενός κύβου. *Ο Χ. παρατηρεί τον κύβο ζάρι που έχει μπροστά του, δίχως να μιλάει. Ο Α. λέει: «Μπορούμε να πάρουμε ένα χαρτί, να το κόψουμε και να σχηματίσουμε... Να τα κόψουμε... Να κόψουμε έξι τετράγωνα και να τα κολλήσουμε». Όσο ο Α. μιλάει η Φ. και ο Χ. χρησιμοποιώντας τη φαντασία τους αναπαριστούν με κινήσεις των χεριών τους στον αέρα τον τρόπο με τον οποίο διπλώνει ένα ανάπτυγμα κύβου.*

Η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά τι πιστεύουν ότι εννοεί το Τετράγωνο με τον όρο «ανάπτυγματα». *Ο Α. απαντάει λακωνικά: «Να μεγαλώσουν». Η Φ. λέει: «Να έχουν ύψος». Η Σ. δίνει μία εξήγηση η οποία απομακρύνεται από τον χώρο των μαθηματικών: «Αναπτύσσομαι σημαίνει ότι είμαι μικρός και μεγαλώνω».* Η δασκάλα προσπαθεί να επαναφέρει τη συζήτηση: «Αναπτύσσομαι σημαίνει όντως αυτό. Ανάπτυγμα όμως; Μήπως η λέξη «ανάπτυγμα» έχει μία ξεχωριστή σημασία στα μαθηματικά;» Οι μαθητές και οι μαθήτριες παραμένουν σιωπηλοί όμως.

Κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της ένα φύλλο χαρτί, μολύβια, γόμες, χάρακες και δύο ζάρια, προκειμένου να σχεδιάσουν το ανάπτυγμα του κύβου. Τα παιδιά στην αρχή μένουν να κοιτούν τα διάφορα αντικείμενα, χωρίς να καταλαβαίνουν τι πρέπει να κάνουν. Η δασκάλα τους λέει: «Προφανώς χρειάζεται να σχεδιάσετε κάτι. Για προσπαθήστε!». Τα παιδιά αρχίζουν τις προσπάθειές τους, ωστόσο δεν καταλαβαίνουν ακόμη ότι το ζητούμενο σχέδιο είναι ένα ανάπτυγμα κύβου.

Ένας μαθητής παίρνει το χαρτί και προσπαθεί να σχεδιάσει ένα κύβο, ο οποίος να φανερώνει ότι αποτελείται από έξι τετράγωνα. Το σχέδιο του μαθητή παρουσιάζεται στη συνέχεια.



**Εικόνα 4.18.** Σχέδιο κύβου από μαθητή

Όπως φαίνεται από το σχέδιό του, σκοπός του μαθητή εδώ δεν είναι να σχεδιάσει ένα ανάπτυγμα κύβου, αλλά να αναδείξει την τρισδιάστατη ταυτότητα του κύβου ως στερεό σώμα και την ολότητα του ως ένωση δισδιάστατων σχημάτων, συγκεκριμένα τετραγώνων. Η δασκάλα εξηγεί στην τάξη με απλά λόγια την πρόθεση του μαθητή: «Ο Π. πήρε το χαρτί και προσπάθησε να δείξει στο Τετράγωνο πώς γίνεται να γίνει ένας κύβος από πολλά τετραγωνάκια». Κατόπιν παίρνει το σχέδιο του μαθητή και το ζωγραφίζει. Συνεχίζει: «Αλλά στην πραγματικότητα, επειδή εκεί πέρα τα πάντα είναι δισδιάστατα, άμα στείλουμε ένα τέτοιο σχέδιο στο Τετράγωνο, το μόνο που θα μπορούσε να δει το Τετράγωνο θα ήταν αυτό εδώ το περίεργο πολύγωνο! Άρα μήπως πρέπει να κάνουμε κάτι άλλο;» Κατόπιν δείχνει το ζωγραφισμένο πλέον σχέδιο στην τάξη. (Το σχέδιο φαίνεται στη συνέχεια).



**Εικόνα 4.19.** Η μετατροπή του κύβου σε ακανόνιστο εξάπλευρο

Ένας μαθητής προτείνει: «Να κόψουμε το χαρτί. Να σχηματίσουμε ένα T και να το διπλώσουμε». Μία άλλη μαθήτρια παίρνει αφορμή από αυτό που είπε πριν ο συμμαθητής της και λέει: «Μπορούμε να κόψουμε πολλά τετράγωνα, να τα κολλήσουμε και να σχηματίσουμε έναν κύβο. Να του τον στείλουμε, αυτός (εννοεί το Τετράγωνο) να τον παρατηρήσει και να δει πώς γίνεται». Η Φ. λέει: «Μπορούμε στο χαρτί να σχεδιάσουμε πολλά τετράγωνα και να βάλουμε συν (+) και να τα ενώσουμε και στο τελευταίο, μόλις τελειώσουμε, ίσον (=) ένας κύβος». Η Σ. λέει: «Να σχεδιάσουμε ένα T και μετά να δείξουμε με βελάκια πώς θα ενωθούν».

Η δασκάλα προσπαθεί να υποβοηθήσει τα παιδιά λέγοντας: «Δεν μπορείτε να σχεδιάσετε τα τετράγωνα κατευθείαν, ούτως ώστε αν υψωθούνε και κολληθούνε να γίνει ένας κύβος; Σαν να ξετυλιγεται δηλαδή ένας κύβος; Για σκεφτείτε... Πώς γίνεται να ξετυλιχτεί ένας κύβος; Να σπαστούνε, να διαλυθούνε τα τετράγωνα από τα οποία αποτελείται». Ο Α. σηκώνει τότε με λαχτάρα το χέρι και λέει: «Εεε... Να κάνουμε έναν σταυρό... Εεε... Να... Αυτόν... Να σχηματίσουμε πάνω του έξι τετράγωνα, αλλά στο ίδιο μέγεθος που είναι και ο σταυρός και μετά να τα κλείσουμε... Να κλείσουμε αυτόν τον σταυρό και να κάνουμε... Και μετά να τα κολλήσουμε». Η δασκάλα επαινεί τον μαθητή για τη σκέψη του, αλλά του λέει επίσης ότι δε χρειάζεται να κολλήσουν κάτι, διότι το Τετράγωνο αντιλαμβάνεται μόνο δισδιάστατες μορφές.

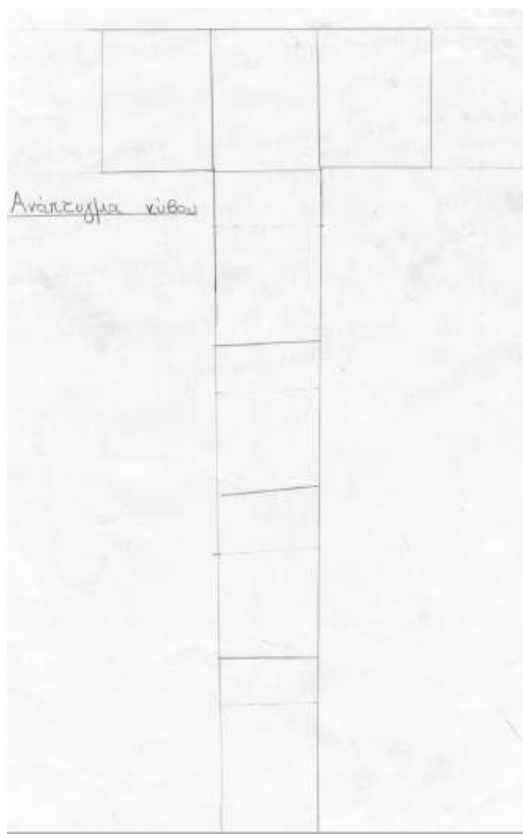
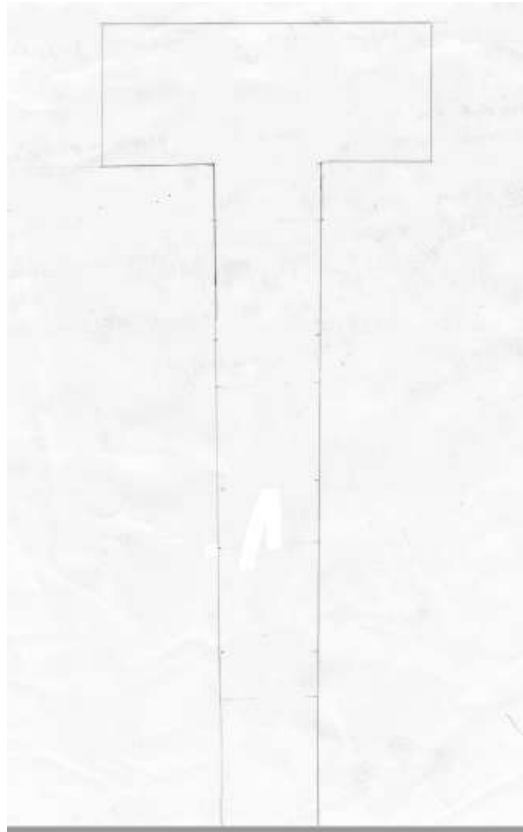
Όσο ο Α. εκφράζει προφορικά τις σκέψεις του, η Σ. έχει πάρει το χαρτί και έναν χάρακα και προσπαθεί να σχεδιάσει κάτι. Την ίδια ώρα μία άλλη μαθήτρια λέει: «Να σχεδιάσουμε που είπε ο Α. αυτόν τον σταυρό και να μην τα κολλήσουμε αυτά και να τα πιάσει το Τετράγωνο και να καταλάβει πώς είναι ένας κύβος και πώς ενώνονται τα τετράγωνα. Να μην τον έχουμε ενώσει τον κύβο». Η δασκάλα παίρνει ένα ζάρι και προτρέπει τα παιδιά να ξετυλίξουν το ζάρι-κύβο στη φαντασία τους.

Ο μαθητής ο οποίος μίλησε από την αρχή για ένα T έχει πάρει τη λευκή κόλλα χαρτιού μπροστά του και σχεδιάζει ένα μεγάλο T με τον χάρακα. Κάθε τόσο σταματάει και παρατηρεί το σχέδιό του. Στ' αλήθεια σχεδιάζει ένα μεγάλο και παχύ γράμμα T. Κατόπιν στέκεται και το προσέχει σκεπτικός. Τότε μία άλλη μαθήτρια από την ομάδα του τού λέει να τραβήξει γραμμές, ώστε να διακρίνονται τα τετράγωνα.

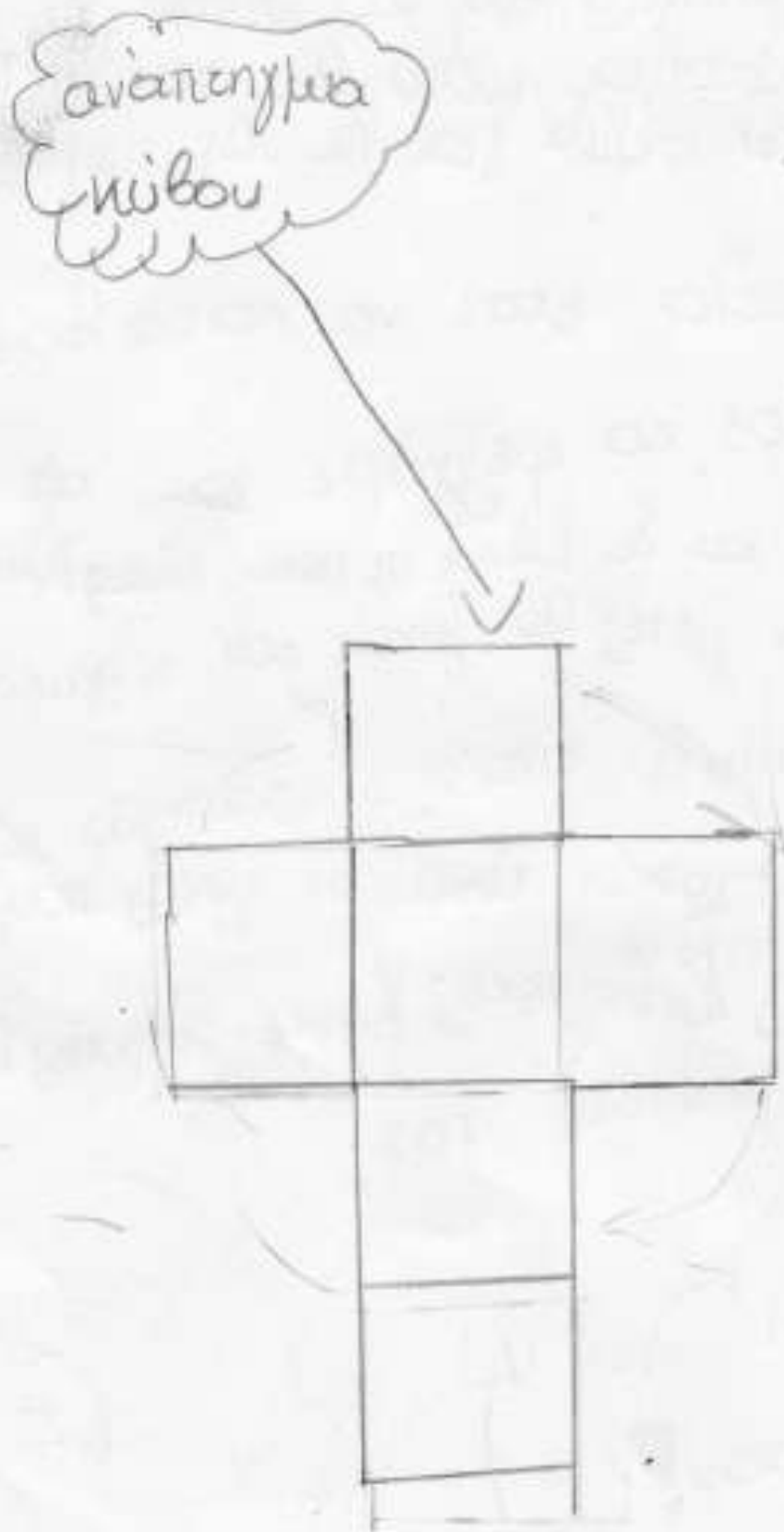
Ο μαθητής λέει: «Άμα τα κόβαμε, θα τα σηκώναμε και θα τα κλείναμε» κάνοντας ταυτόχρονα παραστατικές κινήσεις με τα χέρια του. Πλέον όλη η τάξη έχει αντιληφθεί τον στόχο της δραστηριότητας. Μάλιστα ορισμένες ομάδες είχαν ήδη ξεκινήσει παράλληλα με τη συγκεκριμένη ομάδα να σχεδιάζουν κάτι παρόμοιο.



Παρακάτω φαίνονται οι σχεδιαστικές προσπάθειες του μαθητή σε αρχικό και τελικό στάδιο.



**Εικόνα 4.20.** Το ανάπτυγμα του κύβου ως μεγάλο T



**Εικόνα 4.21.** Το ανάπτυγμα του κύβου ως σταυρός από την ερευνώμενη ομάδα

Αγαπητό μου,

Τεράστιο σου φιλάμε, παλι οι φίλοι σου  
[redacted] και [redacted] σήμερα καταφέραμε να κλείσουμε το  
απόγευμα κλεινό το απόγευμα, κίβω θα σου δίνει την  
νύχτα, μόνια στην πίσω σελίδα για να δεις πως θα γίνεται  
φιλολογία σου. Μπορείς έτσι να πασα δαίβου, πως  
θάλασσα, ο ουρανός, το φεγγάρι και τα αστέρια  
πως καταφέρνεται και δε βλέπεις απανω κίβω; Άνθρα όταν  
γεννιέσαι ποσο κερών είσαι; Οι γονείς σου τι χράιμα είναι,  
τι σχήμα και τι χράιμα είναι ο παππούς σου και  
η μαμά σου; Πόσαν κερών είναι οι γονείς σου; Έχει μαμά  
έχεις νοσο κόφειο; Ξεθαινέει; Έχεις αίμα; Έχεις σβ  
πως είναι τα μοτίβια σου;



Εικόνα 4.22. Η έκτη απαντητική επιστολή των παιδιών

Το ενδιαφέρον στοιχείο σε αυτή τη δραστηριότητα είναι ότι τα παιδιά ανακαλύπτουν από μόνα τους τα διαφορετικά αναπτύγματα κύβου. Αν και τα συνηθέστερα αναπτύγματα ήταν το «Γ» και ο «Σταυρός», οι μαθητές και οι μαθήτριες σκέφτηκαν κι άλλους πιθανούς τρόπους ένωσης έξι τετραγώνων προς σχηματισμός ενός κύβου. Η δασκάλα παροτρύνει τα παιδιά να εντοπίσουν κι άλλα αναπτύγματα επισημαίνοντας ότι είναι ζήτημα προσανατολισμού κι ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχουν έξι ισομεγέθη τετράγωνα.

Επιπλέον, διαπιστώνεται για ακόμη μία φορά ότι τα παιδιά δεν κρίνουν αναγκαίο ένα τετράγωνο να έχει ίσες πλευρές. Τους αρκεί να μοιάζει οπτικά το σχήμα με ένα τετράγωνο έστω και λίγο. Έτσι, χρησιμοποιούν τον χάρακα, μόνο για να διασφαλίσουν ότι η γραμμή που θα τραβήξουν είναι ευθεία κι όχι καμπύλη ή τεθλασμένη. Δε χρησιμοποιούν τα σημειωμένα χιλιοστά κι εκατοστά που έχει πάνω ένας χάρακας, παρότι έχουν κάνει μαθήματα στο παρελθόν για τη χρήση του χάρακα και τη σχεδίαση τετράγωνου με χάρακα.

### **Έβδομη εκπαιδευτική συνεδρία**

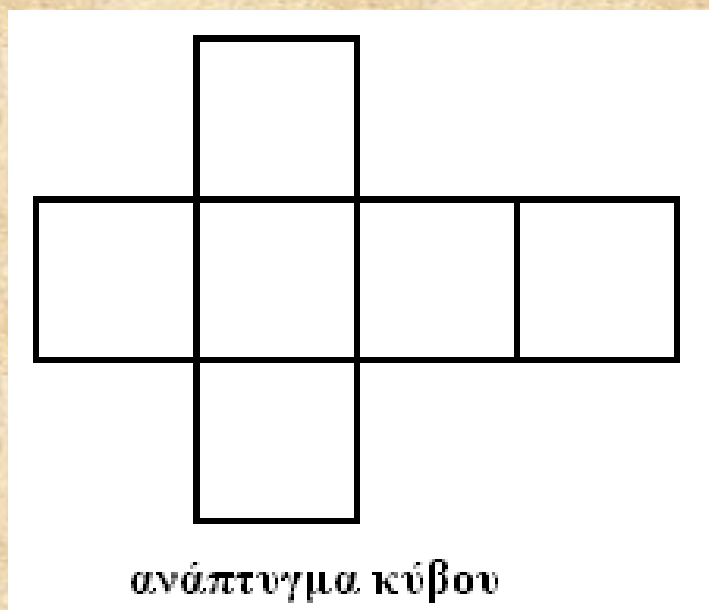
Τα παιδιά παραλαμβάνουν το έβδομο γράμμα από το Τετράγωνο. (Το γράμμα φαίνεται στις δύο επόμενες σελίδες). Σε αυτό το Τετράγωνο παρουσιάζει το ανάπτυγμα ενός κύβου και παροτρύνει τα παιδιά να σχεδιάσουν τα αναπτύγματα κι άλλων στερεών σωμάτων, όπως είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ο κώνος, ο κύλινδρος, η τριγωνική πυραμίδα και η τετραγωνική πυραμίδα. Αφού γίνει η ανάγνωση της επιστολής, η δασκάλα μοιράζει από ένα διαφορετικό γεωμετρικό στερεό σε κάθε ομάδα. (Τα γεωμετρικά στερεά που μοιράστηκαν φαίνονται στη σελίδα 48). Πρόκειται για τα εξής στερεά σώματα: τριγωνική πυραμίδα, τετραγωνική πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος και εξαγωνικό πρίσμα.

Κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της δέκα περίπου λεπτά να παρατηρήσει προσεκτικά το σχήμα και να σχεδιάσει το ανάπτυγμά του. Μετά το πέρα του χρονικού αυτού διαστήματος κάθε τρισδιάστατο σχήμα μεταφέρεται στην αμέσως επόμενη ομάδα, ούτως ώστε στο τέλος της διδακτικής ώρας να έχουν περάσει όλα τα στερεά σώματα από όλες τις ομάδες. Οι ομάδες ξεκινούν τις σχεδιαστικές τους προσπάθειες. Η δασκάλα περνάει από κάθε ομάδα και παρατηρεί τα μαθητικά σχέδια. Προτρέπει τα παιδιά να ξετυλίγουν με τη φαντασία τους τα γεωμετρικά στερεά, ώστε να βρίσκουν τα αναπτύγματά τους.

Αγαπητοί φίλοι, αγαπητές φίλες,

η προσπάθειά σας για σύνθεση τρισδιάστατων σχημάτων με δομικά υλικά εμάς, τα διδιάστατα σχήματα μάλλον προχωράει καλά. Τουλάχιστον αυτό καταλαβαίνουμε από τα γράμματά σας. Δυστυχώς όμως δεν μπορούμε να καταλάβουμε ορισμένες λέξεις που χρησιμοποιείτε στα γράμματά σας, όπως «πάνω» και «κάτω»... Μην ξεχνάτε ότι στον Κόσμο των δύο διαστάσεων δεν υπάρχει ύψος παρά μόνο μήκος και πλάτος.

Μήπως θα μπορούσατε να μας κάνετε διδιάστατα σχέδια με αναπτύγματα κι άλλων στερεών; Εάν βλέπαμε το ανάπτυγμα του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ή του κυλίνδρου, ίσως να κατανοούσαμε καλύτερα τις οδηγίες σας. Οι μεγάλοι Γεωμέτρεις με βάση τις οδηγίες σας μπόρεσαν να σχεδιάσουν το ανάπτυγμα του Κύβου ως εξής:



Ανυπομονούμε να δούμε τα αναπτύγματα και των υπόλοιπων τρισδιάστατων σχημάτων! Άραγε πώς να είναι το ανάπτυγμα ενός κώνου ή μιας πυραμίδας; Μπορείτε να το σκεφτείτε;

Με φιλικούς χαιρετισμούς,  
το Τετράγωνο

Υ.Σ. 1 Φ., Α., Σ. και Χ., στο προηγούμενο γράμμα σας μου κάνατε μπόλικες ερωτήσεις. Πολλές από τις ερωτήσεις σας είχαν σχέση με τη ζωή εδώ στον Κόσμο των δύο διαστάσεων. Λοιπόν, όταν ένα νέο σχήμα γεννιέται είναι φυσικά μίας ημέρας. Καθώς το σώμα μας διαφέρει από αυτό που έχετε εσείς στο μυαλό σας, δε χρειαζόμαστε το οξυγόνο ή το αίμα, για να ζήσουμε. Ωστόσο, υπάρχει κι εδώ η κατάσταση του θανάτου. Σχετικά με τη μουσική τώρα, βέβαια και υπάρχει! Άλλωστε ο ήχος δεν έχει σχέση με το αν οι διαστάσεις είναι δύο ή τρεις, νομίζω.

Υ.Σ.2 Σ., Χ., Β. και Μ., εμένα η δασκάλα μου είναι ένα σοφό κανονικό δωδεκάγωνο! Χαίρομαι που αγαπάτε τη δασκάλα σας, κι εγώ αγαπώ τη δική μου, γιατί μου μαθαίνει τόσα πράγματα κάθε μέρα στο σχολείο!

Υ.Σ.3 Ο., Χ., Π. και Μ., μένω στον Κόσμο των δύο διαστάσεων, αλλά τώρα που προσπαθείτε να με κάνετε τρισδιάστατο ίσως καταφέρω να σας επισκεφτώ! Ακόμη, δε χτυπάω εγώ την πόρτα σας. Εγώ δίνω τα γράμματά μου κάθε φορά στο ταχυδρομείο. Ίσως να σας χτυπάει την πόρτα κάποιος ταχυδρόμος.

Υ.Σ.4 Αστ., Ζ., Ν. και Ε., η Ελλάδα ανήκει στην Χωροχώρα, που είναι μία μεγάλη χώρα στον Κόσμο των τριών Διαστάσεων. Τι εννοείτε όταν με ρωτάτε πώς βλέπω τα γράμματά σας;

**Εικόνα 4.23.** Η έβδομη επιστολή του Τετράγωνου

Τα παιδιά ωστόσο αντιμετωπίζουν διάφορες δυσκολίες όχι μόνο στο να σχεδιάσουν τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων όσο και στο να τα ονομάσουν. Αρκετές φορές λοιπόν είτε ονομάζουν τα στερεά σύμφωνα με τα αντικείμενα της καθημερινότητας που τους θυμίζουν είτε συγγέουν τα γεωμετρικά στερεά μεταξύ τους. Έτσι, η τριγωνική πυραμίδα χαρακτηρίζεται ως «σκηνή», ο κώνος ως «χωνάκι» και η τετραγωνική πυραμίδα ως «σκεπή» ενώ το εξαγωνικό πρίσμα παρερμηνεύεται ως κύλινδρος. Η εκπαιδευτικός αντιλαμβανόμενη αυτή τη σύγχυση παίρνει στα χέρια της τα διάφορα γεωμετρικά στερεά και ζητάει από όλους τους μαθητές και όλες τις μαθήτριες να προτείνουν ονομασίες.

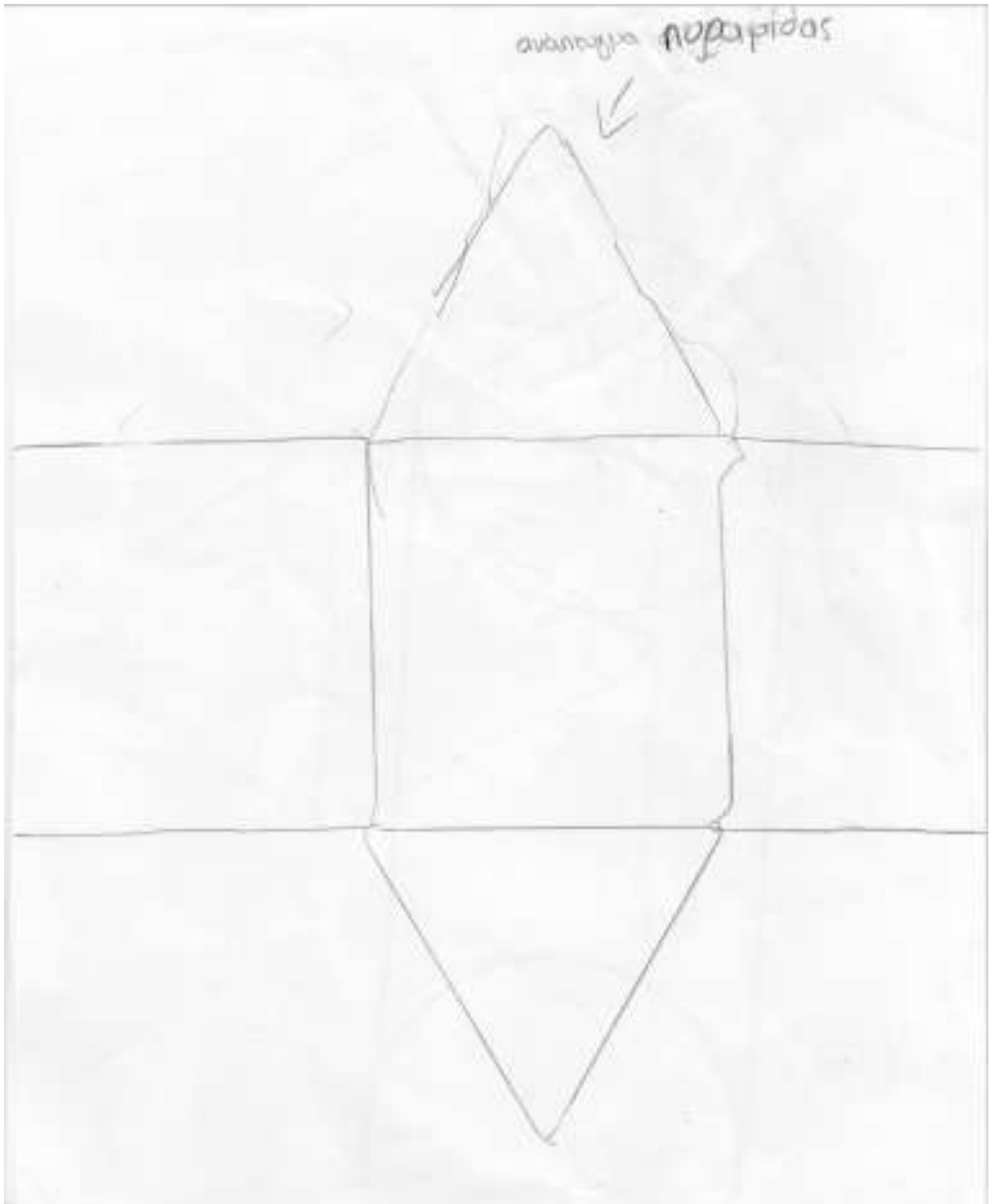
Παράλληλα, τους βοηθάει να δώσουν έμφαση στα διαφορετικά χαρακτηριστικά κάθε τρισδιάστατου σχήματος. Στην περίπτωση της τετραγωνικής και της τριγωνικής πυραμίδας παρακινεί τα παιδιά να εστιάσουν στο σχήμα της βάσης, ώστε να τις διακρίνουν. Στην περίπτωση του εξαγωνικού πρίσματος, καθώς οι μαθητές δεν το έχουν ξανασυναντήσει ποτέ πριν, τους αποκαλύπτει η ίδια την ονομασία του.

### **Όγδοη εκπαιδευτική συνεδρία**

Καθώς η έβδομη εκπαιδευτική συνεδρία δεν επάρκεσε, ο αρχικός προγραμματισμός του εκπαιδευτικού προγράμματος αναπροσαρμόστηκε στα νέα δεδομένα. Συγκεκριμένα, πάρθηκε η απόφαση να αφιερωθεί ακόμη μία ώρα για τη σχεδίαση των αναπτύγμάτων των στερεών σωμάτων, προκειμένου οι μαθητές και οι μαθήτριες να ολοκληρώσουν τα σχέδιά τους με τα αναπτύγματα των τρισδιάστατων σχημάτων.

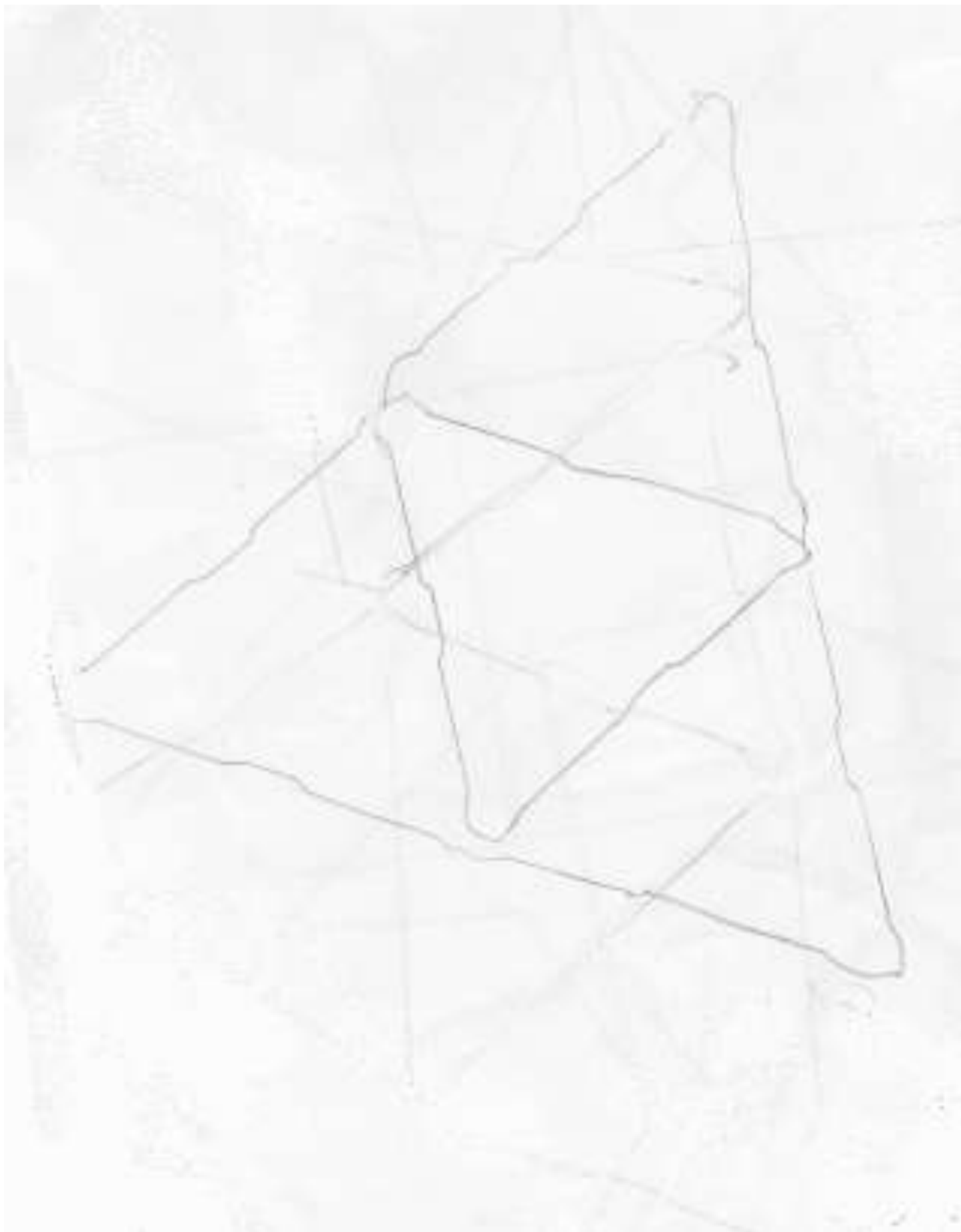
Ιδιαίτερα ενδιαφέρον στοιχείο αποτελεί η εμπνευσμένη ιδέα των παιδιών να χρησιμοποιήσουν τα ίδια τα στερεά σώματα σαν γεωμετρικό όργανο πολλαπλών χρήσεων για τα σχέδιά τους. Άλλοτε λοιπόν χρησιμοποιούν τις ακμές των σχημάτων σαν χάρακα και άλλοτε αξιοποιούν την κλειστή καμπύλη γραμμή συγκεκριμένων στερεών, για να σχεδιάσουν σωστά τον κύκλο. Αυτό φάνηκε ιδιαίτερα χρήσιμο για τη σχεδίαση του αναπτύγματος του κυλίνδρου και του κώνου, καθώς τα παιδιά δεν είχαν στη διάθεσή τους διαβήτη.

Παρά τις επίμονες μαθητικές προσπάθειες, τα παιδικά σχέδια των αναπτύγμάτων παρουσιάζουν μία φανερή απόκλιση από τα ορθά όσον αφορά στα «δύσκολα» αναπτύγματα του κώνου και του κυλίνδρου. Τα σχέδια αναπτύγματος των ερευνώμενων υποκειμένων παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες.

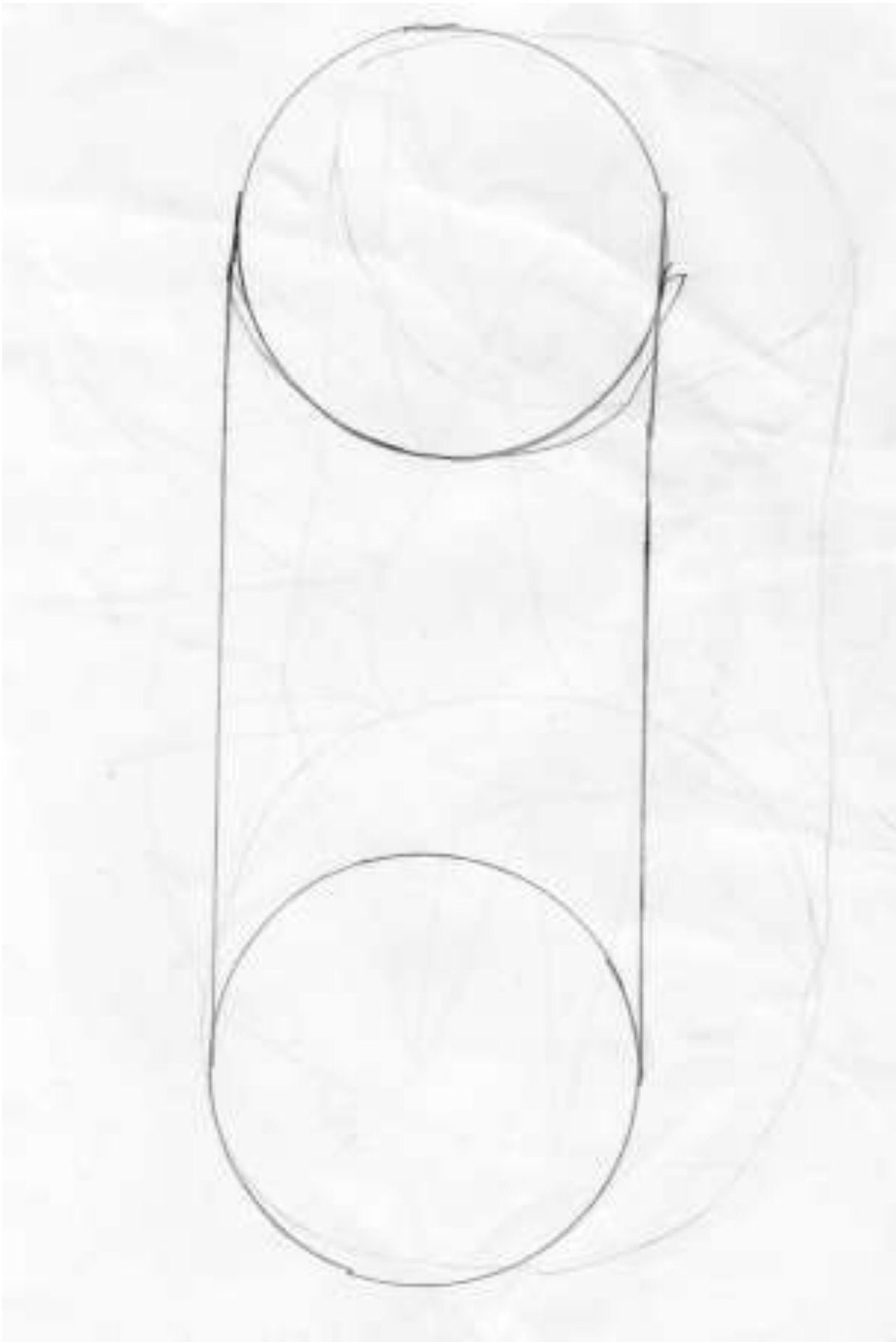


**Εικόνα 4.24.** Το ανάπτυγμα της τετραγωνικής πυραμίδας σύμφωνα με την παιδική σκέψη

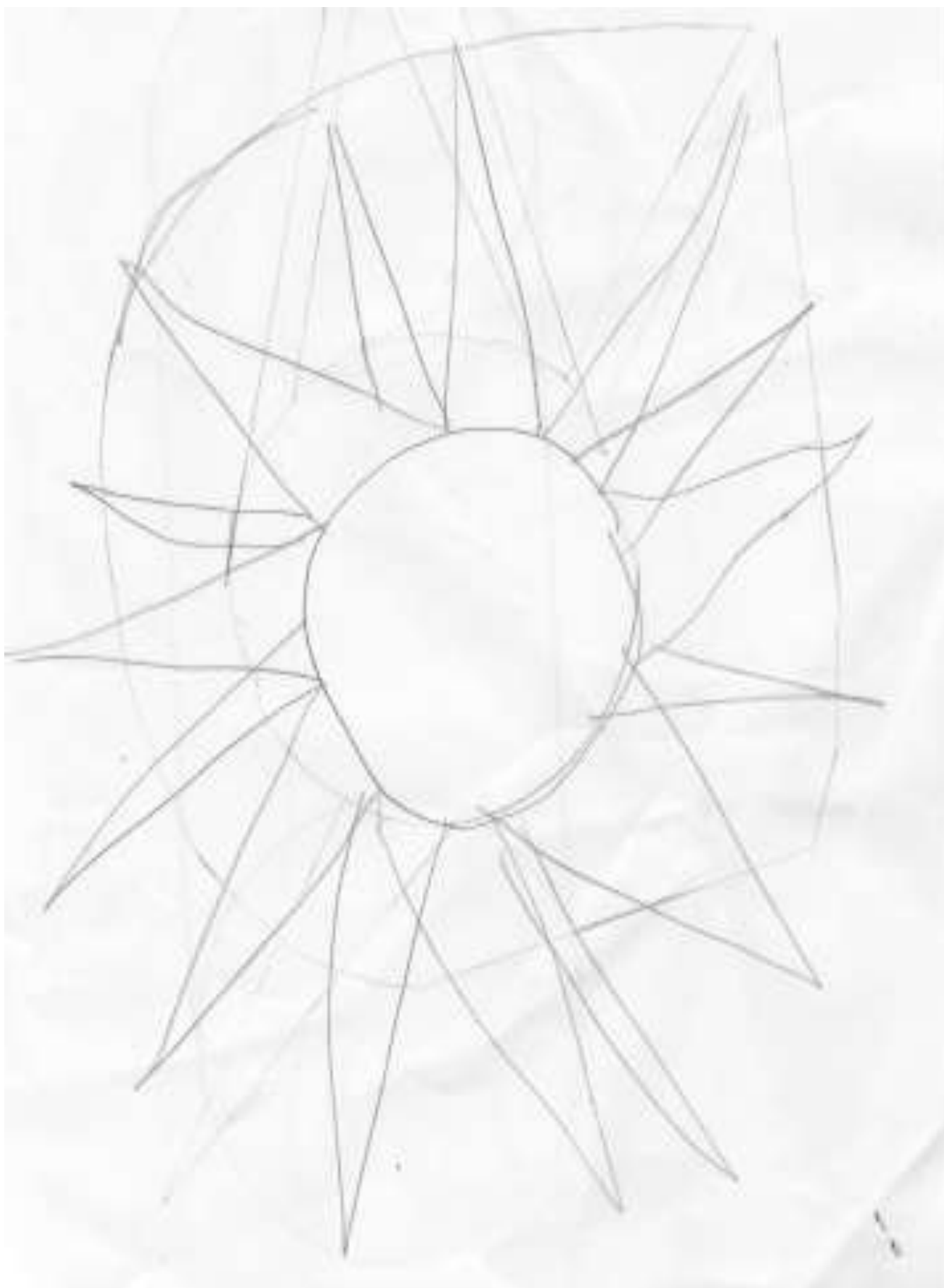




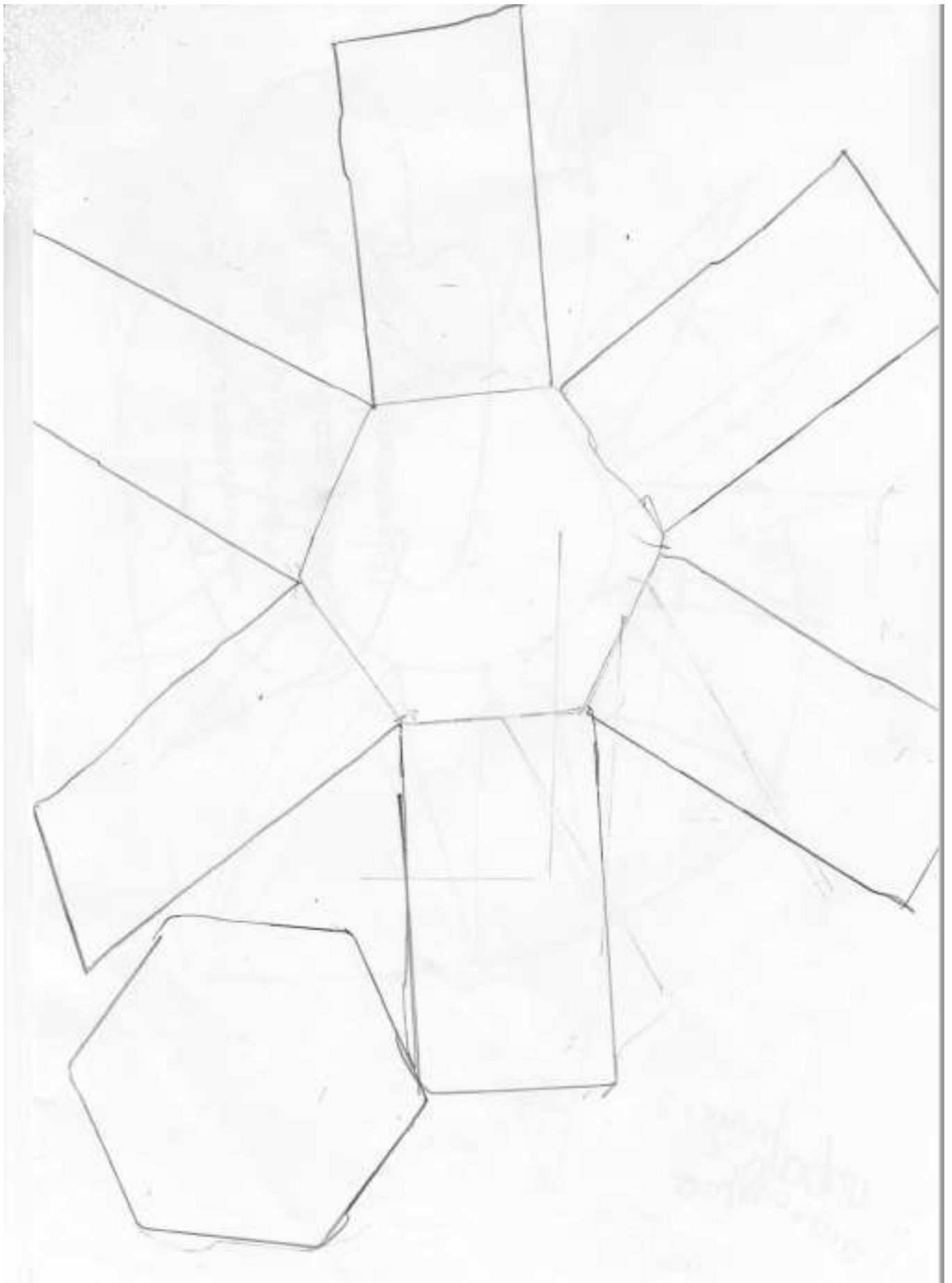
**Εικόνα 4.25.** Το ανάπτυγμα της τριγωνικής πυραμίδας σύμφωνα με την παιδική σκέψη



**Εικόνα 4.26.** Το ανάπτυγμα του κυλίνδρου σύμφωνα με την παιδική σκέψη



**Εικόνα 4.27.** Το ανάπτυγμα του κώνου σύμφωνα με την παιδική σκέψη



**Εικόνα 4.28.** Το ανάπτυγμα του εξαγωνικού πρίσματος σύμφωνα με την παιδική σκέψη

## Ένατη εκπαιδευτική συνεδρία

Καθώς τα παιδιά δεν έχουν καταφέρει ακόμη να σχεδιάσουν τα ορθά αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, το Τετράγωνο τους στέλνει πάλι γράμμα, παρότι δεν έχει λάβει κάποια απαντητική επιστολή. Πρόκειται για ακόμη μία τροποποίηση του αρχικού προγραμματισμού του εκπαιδευτικού προγράμματος. Η σχεδίαση των αναπτυγμάτων αποδείχτηκε πολύ δυσκολότερη για τους μικρούς μαθητές και τις μικρές μαθήτριες, από ό,τι είχε εκτιμηθεί.

Τα παιδιά παραλαμβάνουν το όγδοο γράμμα από το Τετράγωνο μέσα στο γνωστό πλέον άσπρο κουτί με το κόκκινο ερωτηματικό. (Το γράμμα του Τετράγωνου φαίνεται στην επόμενη σελίδα). Εκτός από την επιστολή, μέσα στο κουτί υπάρχουν διάφοροι Επιπεδοχωρίτες, Πρόκειται για διάφορα κανονικά και ακανόνιστα χαρτονένια, δισδιάστατα σχήματα, τα οποία αποτελούν μέρη αναπτυγμάτων. Τα παιδιά αυτή τη φορά καλούνται να σχεδιάσουν τα αναπτύγματα διάφορων στερεών σωμάτων έχοντας για βοηθήματα τόσο τα δισδιάστατα σχήματα όσο και τα στερεά σώματα.

Αυτή τη φορά τα τρισδιάστατα σχήματα των οποίων αναμένεται να γίνει το ανάπτυγμα είναι περισσότερα από την προηγούμενη εκπαιδευτική συνεδρία. Συγκεκριμένα, τα στερεά σώματα που τα παιδιά έχουν στη διάθεσή τους είναι ο κύβος, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το τριγωνικό πρίσμα, το εξαγωνικό πρίσμα, η τριγωνική πυραμίδα, η τετραγωνική πυραμίδα, ο κώνος και ο κύλινδρος. Τα προαναφερθέντα στερεά φαίνονται στη σελίδα 48.

Προκειμένου να διευκολύνει τα παιδιά να πραγματοποιήσουν με επιτυχία τη δραστηριότητα εύρεσης αναπτυγμάτων, η δασκάλα τα παρακινεί να συνεργαστούν όλα μαζί σε επίπεδο τάξης. Τοποθετεί το άσπρο κουτί σε δύο ενωμένα θρανία μίας ομάδας και καλεί τους μαθητές και τις μαθήτριες να πλησιάσουν, για να πειραματιστούν με τους συνδυασμούς των δισδιάστατων σχημάτων.

Ένας μαθητής λέει: «Θα πάρουμε τέσσερα τρίγωνα και θα τα κολλήσουμε μαζί, για να γίνουνε... Και θα του (εννοεί του Τετράγωνου) τα στείλουμε, για να δούνε πώς θα γίνουνε (εννοεί οι Επιπεδοχωρίτες-τρίγωνα) μια πυραμίδα». Μαζί με τη δασκάλα ο μαθητής αναζητούν από κοινού μέσα στο κουτί τέσσερα ισομεγέθη τρίγωνα. Μόλις τα εντοπίσουν, τα κρατούν ενωμένα με τα χέρια τους στον αέρα με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτά να σχηματίζουν μία τριγωνική πυραμίδα. Τα υπόλοιπα παιδιά ενθουσιάζονται και πλησιάζουν, για να επεξεργαστούν την τρισδιάστατη ένωση των τεσσάρων τριγώνων.

Γεωμετρούπολη, 16/5/2017

Αγαπητοί φίλοι, αγαπητές φίλες,

εδώ και μέρες δεν έχω λάβει γράμμα σας! Ελπίζω να είστε καλά! Υποθέτω ότι έχετε αφοσιωθεί στην προσπάθειά σας να σχεδιάσετε τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων. Αλήθεια πώς τα πάτε; Βρήκατε πώς χρειάζεται να ενωθούν τα διάφορα δισδιάστατα σχήματα, ώστε να προκύψουν τρισδιάστατα;

Για να βοηθήσουμε όσο μπορούμε, σας στέλνουμε ορισμένους Επιπεδοχωρίτες, μερικοί είναι κανονικά σχήματα κι άλλοι ακανόνιστα. Για να δούμε... Τι μπορείτε να κάνετε με αυτούς;

Όλοι εδώ περιμένουμε με ιδιαίτερη ανυπομονησία τα νέα σας!

Με φιλικούς χαιρετισμούς,  
το Τετράγωνο

**Εικόνα 4.29.** Η όγδοη επιστολή του Τετράγωνου

Το επόμενο σχήμα που βγάζει η δασκάλα από το κουτί είναι ακανόνιστο και φαντάζει ιδιαίτερα περίεργο στα μάτια των παιδιών. Πρόκειται για την κυρτή ή παράπλευρη, όπως αλλιώς λέγεται, επιφάνεια ενός κώνου. Η Σ. το κοιτάζει για λίγα δευτερόλεπτα και μετά λέει: «Αυτό θα το τλίζουμε και θα βάλουμε από κάτω έναν κύκλο!» Ο μαθητής ο οποίος συνέλαβε πριν το ανάπτυγμα της τριγωνικής πυραμίδας συμφωνεί. Τώρα η Σ. μαζί με τη δασκάλα βρίσκουν έναν κατάλληλο σε μέγεθος κύκλο και σχηματίζουν έναν κώνο στον αέρα.

Η δασκάλα τώρα ζητά από τους δύο μαθητές να ξανασχηματίσουν την τριγωνική πυραμίδα και τον κώνο χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά σχήματα. Αφού τα δύο παιδιά το καταφέρουν, τους καλεί να «ανοίξουν» τα υψωμένα μέρη των στερεών σωμάτων τους, ώστε να σχηματίσουν τα αναπτύγματα. Και πάλι οι μαθητές εργάζονται με επιτυχία. Όσο οι δύο μαθητές εργάζονται, τα υπόλοιπα παιδιά παρακολουθούν με πολλή προσοχή. Κατόπιν η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά τι είναι αυτό που σχημάτισαν. Ο μαθητής και η μαθήτρια απαντούν ότι πρόκειται για το ανάπτυγμα της πυραμίδας και του κώνου αντίστοιχα.

Έπειτα η δασκάλα βγάζει από το κουτί έξι παραλληλόγραμμα, τα οποία ανά δύο είναι ισομεγέθη μεταξύ τους, και ρωτάει τα παιδιά τι πιστεύουν ότι μπορούν να σχηματίσουν από την ένωσή τους. Ένας μαθητής λέει: «Ένα τετράγωνο». Ένας άλλος μαθητής απαντάει: «Μπορούμε να φτιάξουμε ένα παραλληλόγραμμο». Η δασκάλα του δείχνει τα παραλληλόγραμμα και του λέει ότι δε χρειάζεται να φτιάξουν ένα παραλληλόγραμμο, γιατί έχουν ήδη. Ο μαθητής ξαναμιλάει: «Όχι τέτοια. Ένα τρισδιάστατο παραλληλόγραμμο». Η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά πώς λέγεται το τρισδιάστατο παραλληλόγραμμο. Ο Α. απαντάει: «Ορθογώνιο» και μετά συμπληρώνει «Παραλληλόγραμμο». Ένας άλλος μαθητής τον διορθώνει: «Παραλληλεπίπεδο!». Η Φ. μαζί με συμμαθητές και συμμαθήτριές της συνεργάζονται, ώστε να σχηματίσουν από τα παραλληλόγραμμα ένα παραλληλεπίπεδο. Κατόπιν με τη βοήθεια της εκπαιδευτικού το ξεδιπλώνουν σχηματίζοντας το ανάπτυγμα του παραλληλεπίπεδου.

Η δασκάλα τώρα βγάζει έναν κύκλο και ρωτάει τα παιδιά ποια σχήματα δεν έχουν φτιάξει ακόμη. Ένας μαθητής παίρνει τον λόγο: «Θα βάλουμε σε ένα ορθογώνιο δύο κύκλους και θα γίνει ένας κύβος... Εεε... Ένας κύλινδρος!» Ο μαθητής ψάχνει μέσα στο κουτί μέχρι να βρει το κατάλληλο σε μέγεθος παραλληλόγραμμο κι έναν κύκλο, ο οποίος έχει ίδιο μέγεθος με τον πρώτο. Αφού βρεθούν τα κατάλληλα σχήματα, ο μαθητής μαζί με τη Φ. προσπαθούν να σχηματίσουν τον κύλινδρο.

Ύστερα τον ξεδιπλώνουν και σχηματίζουν το ανάπτυγμα του κυλίνδρου.

Ένας μαθητής, ο οποίος περιεργάζεται τα εναπομείναντα σχήματα που υπάρχουν στο κουτί, εντοπίζει ένα κανονικό εξάγωνο κι αναφωνεί: «Πρέπει να το κάνουμε ένα σχήμα!» Ταυτόχρονα συνεχίζει να ψάχνει μες στο κουτί, ώσπου εντοπίζει έξι παραλληλόγραμμα και ακόμη ένα εξάγωνο. Κάποιοι μαθητές λένε: «Να τα κάνουμε εξάγωνο!» Η δασκάλα τους εξηγεί ότι δύο από τα οκτώ συνολικά σχήματα είναι ούτως ή άλλως κανονικά εξάγωνα. Παρότι οι μαθητές και οι μαθήτριες δε θυμούνται την ονομασία του αντίστοιχου στερεού σώματος, φαίνονται πολύ πρόθυμοι να σχηματίσουν μαζί το εξαγωνικό πρίσμα. Έπειτα το ξεδιπλώνουν σχηματίζοντας το ανάπτυγμα. Ορισμένα παιδιά μουρμουρίζουν τη λέξη «πρίσμα». *Η Σ. το ακούει και τελικά βρίσκει την ονομασία του στερεού: «Κυρία, κάτι με πρίσμα... Εξαγωνικό πρίσμα;»*

Η δασκάλα τώρα παίρνει μία τριγωνική και μία τετραγωνική πυραμίδα στα χέρια της και ρωτάει τα παιδιά πώς λέγονται αυτά τα δύο στερεά σώματα. *Η Φ. απαντάει: «Πυραμίδες!»* Η δασκάλα ρωτάει μετά: «Αλλά ποια είναι η διαφορά στις πυραμίδες μου; Για κοιτάζτε λίγο! (Τους δείχνει τις βάσεις των δύο πυραμίδων)» Ένας μαθητής απαντάει: «Η μία έχει βάση τρίγωνο ενώ η άλλη έχει βάση τετράγωνο».

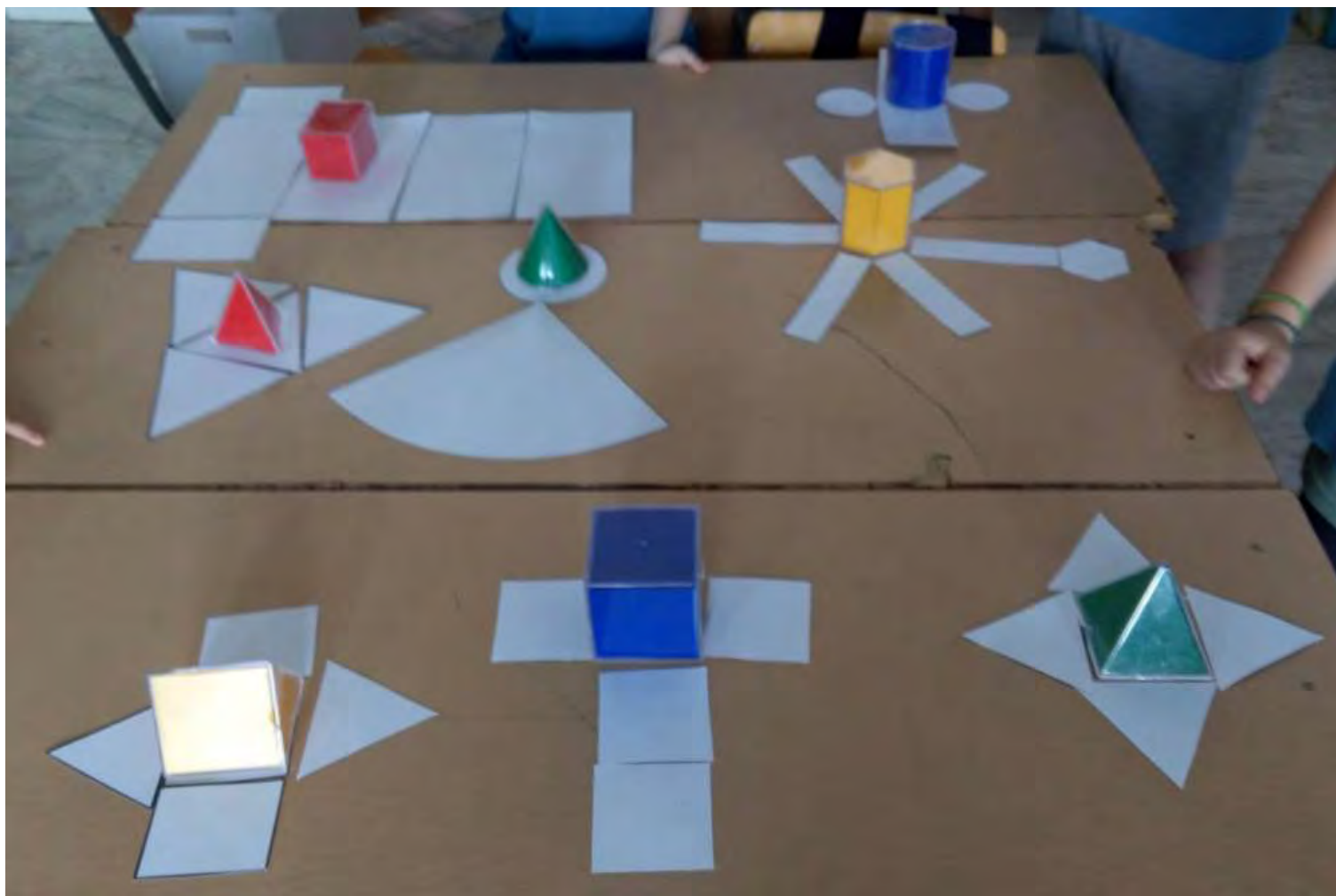
Τα παιδιά φτιάχνουν συλλογικά τα αναπτύγματα της τετραγωνικής πυραμίδας. Ύστερα καταπιάνονται με τον κύβο. Η δασκάλα τα ρωτάει πώς φτιάχνεται ο κύβος. *Η Σ. απαντάει: «Με τέσσερα τετράγωνα... Έξι! Με έξι τετράγωνα!»* Ορισμένα παιδιά λένε: «Να φτιάξουμε έναν σταυρό!» Η δασκάλα προτείνει στα παιδιά να βρουν διάφορα πιθανά αναπτύγματα του κύβου. *Ο Χ. δείχνει τα αναπτύγματα σχήματος T και σταυρού.* Ένας άλλος μαθητής προτείνει ένα διαφορετικό ανάπτυγμα για τον κύβο. Συνολικά τα τρία αναπτύγματα, τα οποία προτάθηκαν, φαίνονται παρακάτω.



**Εικόνα 4.30.** Τα τρία πιθανά αναπτύγματα του κύβου σύμφωνα με την παιδική σκέψη



Το τελευταίο σχήμα είναι το εξαγωνικό πρίσμα. Οι μαθητές και οι μαθήτριες σε συνεργασία καταφέρνουν να φτιάξουν το αντίστοιχο ανάπτυγμα. Στο τέλος η δασκάλα καλεί τα παιδιά να τοποθετήσουν πάνω στα διάφορα αναπτύγματα τα αντίστοιχα στερεά σώματα και να τα ονομάσουν. Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται επιτυχώς. Ακολουθεί η σχετική φωτογραφία.



**Εικόνα 4.31.** Τα στερεά σώματα και τα αναπτύγματά τους

#### **Δέκατη εκπαιδευτική συνεδρία**

Σε αυτή τη συνεδρία τα παιδιά καταπιάνονται με τη συγγραφή της απαντητικής επιστολής προς το Τετράγωνο. Όπως κάθε φορά, πριν ξεκινήσει κάθε ομάδα να γράφει το γράμμα της, διεξάγεται μες στην τάξη μία συζήτηση. Ειδικότερα, τα παιδιά εκφράζουν προφορικά τις σκέψεις τους σχετικά με το τι θα μπορούσαν να συμπεριλάβουν στην απαντητική επιστολή. Πρόκειται για ένα σημαντικό μέρος του

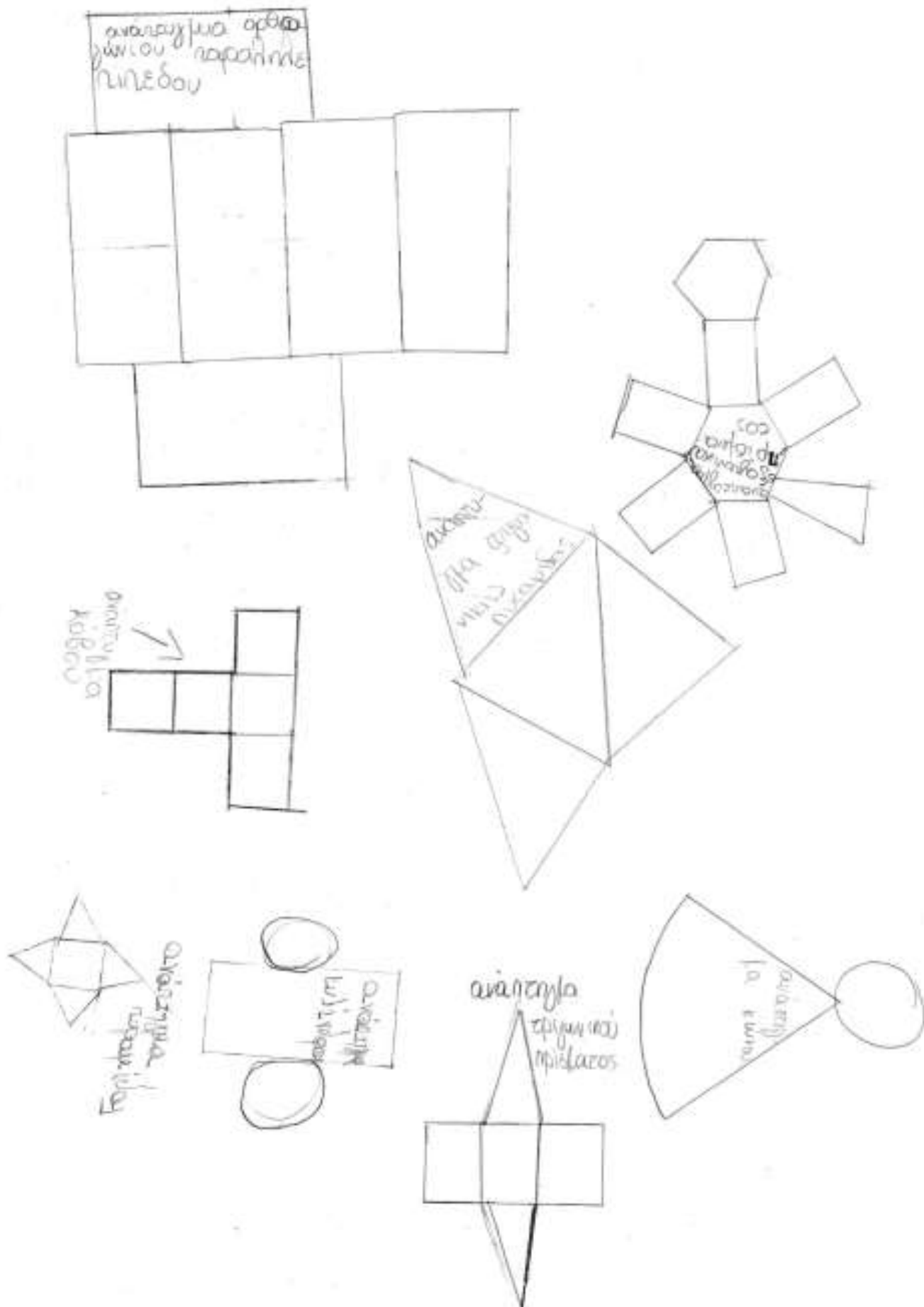
εκπαιδευτικού προγράμματος, καθώς τα παιδιά κατά αυτόν τον τρόπο αλληλεπιδρούν σε επίπεδο τάξης και ενισχύουν τις ιδέες τους ακούγοντας τις προτάσεις των συμμαθητών και συμμαθητριών τους.

Η δασκάλα τροφοδοτεί τη συζήτηση κάθε τόσο θέτοντας στα παιδιά ερωτήσεις ανοιχτού τύπου. Στην αρχή του διαλόγου τα παιδιά ασχολούνται κυρίως με την εξήγηση της αργοπορίας τους όσον αφορά στην αποστολή νέου γράμματος. Συγκεκριμένα, μιλούν για την τελετή λήξης του σχολείου και τις πολλές πρόβες που δεν τους επέτρεψαν να ασχοληθούν πολύ με την αλληλογραφία τους. *Υστερα, ο Χ. αναφέρεται στο τι κατάφεραν στην τελευταία τους δραστηριότητα: «Βρήκαμε την άσκηση που μας είχε βάλει με τα... Με το ανάπτυγμα κύβου...» Η Φ. συμπληρώνει: «Καταφέραμε να μετατρέψουμε τα δισδιάστατα σχήματα σε τρισδιάστατα σχήματα».*

Έπειτα, η δασκάλα δείχνει στον διαδραστικό πίνακα της αίθουσας τη φωτογραφία με τα αναπτύγματα και τα στερεά (βλ. εικόνα 4.29) και ρωτάει τα παιδιά πώς θα μπορούσαν να περιγράψουν τα αναπτύγματα στο Τετράγωνο. *Η Σ. λέει: «Να εκτυπώσουμε τη φωτογραφία και να του τη στείλουμε! Ή θα μπορούσαμε να τα αντιγράψουμε. Να αντιγράψουμε πώς κάναμε τα αναπτύγματα»* Η δασκάλα εξηγεί στα παιδιά ότι θα μπορούσαν συνεπώς να σχεδιάσουν τα αναπτύγματα με μολύβι και χάρακα.

Πριν ξεκινήσουν τα παιδιά να σχεδιάζουν, η εκπαιδευτικός τους ζητά να κατονομάσουν τα διάφορα γεωμετρικά στερεά, ώστε να επαναφέρουν τις ονομασίες στη μνήμη τους. Τα παιδιά θυμούνται τις περισσότερες ονομασίες, ενώ μοναδική δυσκολία φαίνεται να έχουν με την απομνημόνευση της λέξης «πρίσμα». *Η Σ. και η Φ. εμφανίζουν υψηλή συμμετοχή στη συζήτηση. Η Σ. βρίσκει την ονομασία για την τετραγωνική πυραμίδα, το τριγωνικό πρίσμα και το εξαγωνικό πρίσμα. Η Φ. βρίσκει την ονομασία για το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και την τριγωνική πυραμίδα. Για την τελευταία βέβαια δε θυμάται ακριβώς την ονομασία και προτείνει τον όρο «πυραμίδα τριγώνου».*

Αφού τα παιδιά βρούνε τις ονομασίες όλων των στερεών σωμάτων, ξεκινούν τη σχεδίαση των αναπτυγμάτων των οκτώ τρισδιάστατων σχημάτων. Κατόπιν, αφιερώνονται στη συγγραφή της απαντητικής επιστολής. Τα σχέδια των αναπτυγμάτων καθώς και το γράμμα των παιδιών φαίνονται στην επόμενη και στη μεθεπόμενη σελίδα αντίστοιχα.



Εικόνα 4.32. Τα ορθά αναπτύγματα των στερεών σωμάτων

Αγαπητό μας Τετράγωνο,  
αγκαλιά σου δε σου στέλνουμε γραμμά για πολλές  
μέρες. Ο λόγος που δε σου στέλνουμε τόσα καιρό είναι, ότι  
δεν κάνουμε προβες για τη χειροί λίξη. Αλλά παρόλα  
ανά σου γράφαμε τα ανατομήματα στην πίσω σελίδα.

Με αγάπη,

Φ. [redacted], Σ. [redacted], Α. [redacted] και Χ. [redacted] ♡

Εικόνα 4.33. Η έβδομη απαντητική επιστολή των παιδιών

Κατά τη διάρκεια της σχεδίασης η δασκάλα ρωτάει τα παιδιά εάν πιστεύουν ότι έχουν όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά όργανα, ώστε να σχεδιάσουν με επιτυχία καθένα από τα οκτώ αναπτύγματα. Υπενθυμίζεται σε αυτό το σημείο ότι τα παιδιά διαθέτουν μόνο χάρακα. *Ο Χ. παίρνει τον λόγο και λέει: «Όχι, δε χρειάζεται... Χρειάζονται κι άλλα, όπως το μοιρογνωμόνιο...»* Η δασκάλα τον ρωτάει τι μπορεί κανείς να σχεδιάσει με το μοιρογνωμόνιο. *Ο Χ. απαντάει: «Έναν κύκλο...»* *Ο Α. λέει: «Μπορεί να χρειαστούμε και γνώμονα».* Η δασκάλα ρωτάει σε ποιο σχέδιο χρειάζεται ο γνώμονας. *Ο Α. απαντάει με αβεβαιότητα: «Τρίγωνα... Και ρόμβους;»*

Τότε τον λόγο παίρνει ένας άλλος μαθητής: «Μπορεί να χρειαστούμε ένα μεγάλο μοιρογνωμόνιο, για να κάνουμε... Εεε... Το σχήμα στον κώνο να...» Η δασκάλα του δείχνει στον πίνακα το καμπύλο τμήμα στην κυρτή επιφάνεια του κώνου και τον ρωτάει εάν αναφέρεται σε αυτό. Ο μαθητής γνέφει καταφατικά. Η δασκάλα ρωτάει μετά τα παιδιά εάν γνωρίζουν πώς μπορεί κανείς να σχεδιάσει κύκλους. *Η Σ. λέει: «Τους κύκλους... Μπορούμε με το μοιρογνωμόνιο να κάνουμε το μισό κυκλάκι και το άλλο μισό και να βγει κύκλος».*

### **Ενδέκατη εκπαιδευτική συνεδρία**

Στην ενδέκατη συνεδρία τα παιδιά παραλαμβάνουν το ένατο και τελευταίο γράμμα από το Τετράγωνο. (Το γράμμα εμφανίζεται στην επόμενη σελίδα). Σε αυτό το Τετράγωνο ευχαριστεί τα παιδιά για την όμορφη φιλική σχέση που ανέπτυξαν δια αλληλογραφίας. Ακόμη, εκφράζει τον ενθουσιασμό όλων των Επιπεδοχωριτών για τη σχεδίαση αναπτυγμάτων, καθώς τα αναπτύγματα συνιστούν έναν τρόπο, ώστε τα δισδιάστατα σχήματα να επισκέπτονται τον Κόσμο των Τριών Διαστάσεων.

Το Τετράγωνο προσκαλεί τους μαθητές και τις μαθήτριες του Γ'2 στον Κόσμο των Δύο Διαστάσεων, σχολιάζοντας όμως παράλληλα ότι μία τέτοια επίσκεψη δεν είναι λογικά εφικτή. Τέλος, δωρίζει στα παιδιά ένα παιχνίδι, προκειμένου να εκφράσει την ευγνωμοσύνη του προς αυτά. Πρόκειται φυσικά για το πρωτότυπο, μαθηματικό παιχνίδι με την ονομασία «Υπο σχημάτων», το οποίο αποτελεί παραλλαγή του γνωστού εμπορικού παιχνιδιού. (Το παιχνίδι παρουσιάζεται στις σελίδες 47 και 48).

Καθώς η δασκάλα ξεκινάει να διαβάζει τη δεύτερη παράγραφο της επιστολής του Τετράγωνου, διακόπτει την ανάγνωσή της και ρωτάει τα παιδιά γιατί κατά τη δική τους άποψη είναι αδύνατο να επισκεφτούν τον Κόσμο των Δύο Διαστάσεων. Μία

Αγαπητοί μου φίλοι και αγαπητές μου φίλες,

σας ευχαριστούμε μέσα από την επίπεδη καρδιά μας που ασχοληθήκατε με τόσο ενθουσιασμό και βρήκατε τα αναπτύγματα των τρισδιάστατων σχημάτων ή στερεών σωμάτων, όπως αλλιώς τα αποκαλούμε. Μέσω αυτών των αναπτυγμάτων καταφέρατε στ' αλήθεια να χτίσετε μια γέφυρα, η οποία συνδέει τις δύο και τις τρεις διαστάσεις του χώρου! Η επίσκεψή μας στον τρισδιάστατο κόσμο σας, τη Χωροχώρα, μας γέμισε με όμορφες εμπειρίες που οπωσδήποτε ποτέ δε θα ξεχάσουμε όλοι εμείς, τα ταπεινά γεωμετρικά σχήματα. Ωστόσο, έπρεπε να γυρίσουμε πίσω στην Επιπεδοχώρα μας, διότι αυτή θα είναι πάντοτε το σπίτι μας.

Μιλώντας εκ μέρους όλων των γεωμετρικών σχημάτων εκφράζω την επιθυμία μας να σας προσκαλέσουμε με τη σειρά μας στον τρισδιάστατο κόσμο μας. Γνωρίζουμε βέβαια πως αυτό δεν είναι λογικά δυνατό. Παρόλα αυτά ελπίζουμε να μας σκέφτεστε κάθε φορά που διαβάζετε τις σελίδες ενός βιβλίου, θαυμάζετε έναν πίνακα ζωγραφικής, στέκεστε προσηλωμένοι μπροστά σε μία οθόνη υπολογιστή ή απλά χαζεύετε την ήρεμη επιφάνεια της θάλασσας.

Με βαθύτατη εκτίμηση,  
ο φίλος σας, το Τετράγωνο.

Υ.Σ. Ως ένα μικρό δώρο για όλα όσα έχετε κάνει για εμάς, καθίσαμε όλοι οι Επιπεδοχωρίτες και σχεδιάσαμε ένα παιχνιδάκι για εσάς! Το αποκαλούμε *Υπο σχημάτων* και σας το χαρίζουμε με πολλή-πολλή αγάπη! Ελπίζουμε να το απολαύσετε!

**Εικόνα 4.34.** Η ένατη επιστολή του Τετράγωνου

μαθήτρια λέει: «Γιατί είμαστε τρισδιάστατοι, δεν μπορούμε να γίνουμε δισδιάστατοι, δηλαδή να γίνουμε αναπτύγματα».

Εάν και το μικρό κορίτσι δίνει μία πολύ σωστή απάντηση, η δασκάλα θέλει να εξετάσει τις απόψεις και των υπόλοιπων παιδιών. Γι' αυτό ρωτάει: «Θα μπορούσατε να βρείτε έναν τρόπο, ώστε να γίνουμε δισδιάστατοι; Θα μπορούσαμε; Η Β. λέει ότι δε γίνεται. Πιστεύετε κι εσείς ότι δε γίνεται ή υπάρχει κάποιος τρόπος;» Η Σ. λέει: «Άμα ξαπλώσουμε, μπορούμε να γίνουμε κι εμείς δισδιάστατοι». Η δασκάλα την καλεί να ξαπλώσει μες στην αίθουσα, για να ελέγξουν τον ισχυρισμό της. Η Σ. γελάει από αμηχανία και λέει ότι δε θέλει. Ταυτόχρονα αρκετά παιδιά σηκώνουν τα χέρια τους και ζητούν από τη δασκάλα να ξαπλώσουν αυτά στο πάτωμα της αίθουσας.

Η δασκάλα επιλέγει τον Α. Ο Α. γεμάτος ενθουσιασμό και με ένα πλατύ χαμόγελο σηκώνεται από το θρανίο του και ξαπλώνει πάνω στην εξέδρα της αίθουσας. Μετά η δασκάλα ζητάει από τα υπόλοιπα παιδιά να παρατηρήσουν τον Α. και να πούνε πόσες διαστάσεις πιστεύουν ότι έχει τώρα που είναι ξαπλωμένος. Ένας μαθητής λέει: «Και πάλι πιστεύω ότι έχει τρεις διαστάσεις, γιατί τα πόδια του είναι όρθια, δεν κάθονται ακριβώς κάτω, τα χέρια του κάνουν λίγο μία καμπύλη και το κεφάλι του δε φαίνεται ακριβώς ίσιο, είναι λίγο εκεί που είναι η κοιλιά του». Ένας άλλος μαθητής προτείνει κάτι: «Να γίνουμε σαν το χάρακα και να ξαπλώσουμε». Η δασκάλα ρωτάει το παιδί: «Γίνεται να γίνουμε σαν τον χάρακα και να ξαπλώσουμε;» Το παιδί απαντάει αρνητικά.

Ο μαθητής παραμένει ξαπλωμένος και η δασκάλα ξαναρωτά: «Πόσες διαστάσεις πιστεύετε ότι έχει ο Α.; Δύο ή τρεις;» Η Σ. απαντάει: «Δύο, γιατί δε γίνεται... Γιατί ακόμη και τα σχήματα έχουν ένα πολύ μικρό ύψος, γιατί άμα δεν είχαν καθόλου ύψος δε θα υπήρχαν». Η δασκάλα δέχεται ως σωστό τον ισχυρισμό του μικρού κοριτσιού: «Πράγματι τα γεωμετρικά σχήματα στην Επιπεδοχώρα έχουν ένα ελάχιστο ύψος, αλλιώς δε θα υπήρχαν. Είναι όμως τόσο μικρό που το θεωρούμε ασήμαντο. Πιστεύετε ότι ο Α. έχει ένα ελάχιστο ύψος;» Τα παιδιά δείχνουν να προβληματίζονται τώρα.

Η δασκάλα λέει στη Σ., στη Φ. και στον Χ. να πλησιάσουν τον ξαπλωμένο Α. και να ελέγξουν από κοντά τις διαστάσεις του. Ο Χ. δε θυμάται ποιες είναι οι διαστάσεις, οπότε ο Α. αναλαμβάνει να τον βοηθήσει: «Είναι το μήκος, το πλάτος και το ύψος». Ακόμη κι όταν όμως ακούει πώς λέγονται οι τρεις διαστάσεις, ο Χ. στέκεται διστακτικός και λέει: «Κυρία, μόνο το ύψος μπορώ να δείξω». Η Φ. τότε με τα χέρια

της δείχνει το μήκος του σώματος του Α. Η δασκάλα επισημαίνει: «Αυτή λοιπόν είναι η πρώτη διάσταση, το μήκος δηλαδή».

Η δασκάλα καλεί έπειτα τη Σ. να δείξει προς τα παιδιά τη δεύτερη διάσταση: «Σ. ποια είναι η δεύτερη διάσταση;» Η Σ. απαντάει με σιγουριά: «Το πλάτος!» και μετά με τα χέρια της δείχνει το πλάτος του σώματος του Α. Συγκεκριμένα, μιας και το ανθρώπινο σώμα δεν έχει ένα ενιαίο πλάτος, η Σ. επιλέγει να υποδείξει ως πλάτος αυτό της μέσης του.

Ο Χ. τώρα δείχνει με τα χέρια του την τρίτη διάσταση, δηλαδή το ύψος. Ως ύψος υποδεικνύει την κάθετη απόσταση από τη μέση του Α. μέχρι την κοιλιά του. Η δασκάλα συμπληρώνει ότι υπάρχουν διάφορες λέξεις που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητά μας, προκειμένου να αναφερθούμε στη διάσταση του ύψους, όπως η λέξη «πάχος». Μία μαθήτρια αναφέρει ότι πέρα από τη λέξη «πάχος» μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη λέξη «βάθος», όταν θέλει να δηλώσει ύψος προς τα κάτω.

Μετά από όλα αυτά τα παιδιά καταλαβαίνουν ότι οι άνθρωποι έχουν τρεις διαστάσεις. Η δασκάλα συνεχίζει την ανάγνωση του γράμματος. Μόλις ολοκληρώσει τη δεύτερη παράγραφο του γράμματος, ρωτάει τα παιδιά γιατί θεωρούν ότι το Τετράγωνο τους ζητάει να το σκέφτονται όταν αντικρίζουν επιφάνειες, όπως η οθόνη του υπολογιστή. Ένας μαθητής λέει: «Γιατί αυτά που είπε είναι δισδιάστατα!»

Αφού η ανάγνωση ολοκληρωθεί, η δασκάλα παρουσιάζει στα παιδιά μία-μία τις κάρτες από το UNO σχημάτων. Από κοινού όλη η τάξη ερμηνεύει τη σημασία των καρτών δράσης και μπαλαντέρ στο παιχνίδι με βάση τα βιώματα που έχουν από το παίξιμο του συνηθισμένου εμπορικού παιχνιδιού UNO. Ύστερα ασχολούνται με τις κόκκινες και τις πράσινες κάρτες. Ο Χ. λέει ότι οι κόκκινες κάρτες αντιστοιχούν στα δισδιάστατα σχήματα και η Φ. ότι οι πράσινες κάρτες είναι τα τρισδιάστατα σχήματα.

Ενδιαφέρουσα είναι η συζήτηση που προκύπτει με αφορμή τις απόπειρες ερμηνείας δύο καρτών μπαλαντέρ. Πρόκειται για τις κάρτες που δηλώνουν τα κανονικά και τα ακανόνιστα σχήματα. (Οι συγκεκριμένες κάρτες παρουσιάζονται στη σελίδα 48). Αφού προταθούν ποικίλες ερμηνείες, κάποια στιγμή τα παιδιά καταλήγουν στην ορθή. Σχετικά με την πρώτη κάρτα, η Σ. λέει: «Ο επόμενος (παίκτης) πρέπει να ρίξει ένα κανονικό, δισδιάστατο σχήμα». Κατόπιν η δασκάλα ζητάει από τα παιδιά να της ονοματίσουν ορισμένα κανονικά, δισδιάστατα σχήματα. Η Σ. προτείνει το τετράγωνο, μία άλλη μαθήτρια προτείνει το ισόπλευρο τρίγωνο ενώ η Φ. λέει για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η δασκάλα εξηγεί στη Φ. ότι το ορθογώνιο



παραλληλόγραμμο δεν είναι κανονικό σχήμα, διότι οι πλευρές του είναι μόνο ανά δύο ίσες.

*Ο Χ. προτείνει τον κύκλο ως κανονικό σχήμα.* Η δασκάλα στέκεται σκεφτική και λέει ότι δεν είναι σίγουρη εάν ο κύκλος θεωρείται κανονικό σχήμα. *Η Σ. τότε λέει: «Κυρία, όμως είχε πει πως οι ιερείς τους είναι κύκλοι!»* Η δασκάλα λέει προς τη Σ.: «Τι πιστεύεις για τους κύκλους; Υπάρχει ουσιαστικά κύκλος; Οι ιερείς τους τι θα μπορούσαν να είναι;» *Η Σ. απαντάει: «Εξάγωνα... Εεε... Πολύγωνα!»* Η δασκάλα λέει τότε: «Πράγματι, οι κύκλοι στην Επιπεδοχώρα είναι κανονικά πολύγωνα, τα οποία έχουν άπειρο αριθμό πλευρών και γωνιών και είναι οπότε κανονικά σχήματα!» (Η θεώρηση του κύκλου ως κανονικού πολύγωνου με άπειρο αριθμό πλευρών υπάρχει πράγματι μες στην «Επιπεδοχώρα» του Abbott).

*Σχετικά με την κάρτα για τα ακανόνιστα σχήματα, ο Α. προτείνει τη σωστή ερμηνεία: «(Πρέπει) να ρίξουμε ένα ακανόνιστο σχήμα!»* Η δασκάλα ζητάει από τα παιδιά να τις ονοματίσουν τα σχήματα τα οποία θεωρούν ότι εντάσσονται στην κατηγορία των ακανόνιστων σχημάτων. *Η Φ. προτείνει σωστά αυτή τη φορά το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ο Α. τον ρόμβο.* Η πρόταση του Α. σηκώνει θύελλα αντιδράσεων στην τάξη, καθώς ορισμένα παιδιά υποστηρίζουν ότι ο ρόμβος αποτελεί ένα κανονικό σχήμα. Τελικά, τη λύση τη δίνει η Σ, η οποία *τεκμηριώνει την άποψη ότι ο ρόμβος είναι ακανόνιστο σχήμα, καθώς παρότι έχει ίσες σε μήκος πλευρές, έχει άνισες γωνίες.*

Η εξέταση και η ερμηνεία των διάφορων καρτών έχει φτάσει στο τέλος της. Η δασκάλα καλεί τα τέσσερα παιδιά της ερευνώμενης ομάδας, δηλαδή τον Α., τη Σ, τη Φ. και τον Χ., να παίξουν πρώτα. Στόχος είναι η πραγματοποίηση ενός πρότυπου παιχνιδιού και η παράλληλη παρακολούθησή του από τους υπόλοιπους μαθητές και τις υπόλοιπες μαθήτριες, ούτως ώστε να καταλάβουν όλοι τους κανόνες του παιχνιδιού.

Η δασκάλα μοιράζει από επτά κάρτες σε καθένα από τα τέσσερα παιδιά. Μόλις τελειώσει ρίχνει κάτω την πρώτη κάρτα. Είναι ένας κύβος. Ρωτάει τα παιδιά τι θα μπορούσαν να ρίξουν πάνω στον κύβο. Ένας μαθητής λέει: «Ένα άλλο τρισδιάστατο σχήμα». *Ο Α. συμπληρώνει με κάποια αβεβαιότητα: «Ένα τετράγωνο;»* Η δασκάλα δέχεται κι αυτή την κίνηση ως σωστή κι επισημαίνει στα παιδιά ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στον κύβο και στο τετράγωνο, καθώς το ανάπτυγμα του κύβου αποτελείται από τετράγωνα.

Τα παιδιά κατανοούν γρήγορα τον τρόπο με τον οποίο παίζεται το παιχνίδι και παίζουν με ιδιαίτερη προσήλωση. Πέρα από τις κάρτες δράσης και μπαλαντέρ τις οποίες ρίχνουν ανεξάρτητα από την κάρτα που υπάρχει ήδη πάνω στο τραπέζι, οι υπόλοιπες κινήσεις των παιδιών ακολουθούν τα παρακάτω μοτίβα:

- α) δισδιάστατο σχήμα πάνω στο δισδιάστατο σχήμα, π.χ. κύκλος πάνω σε τετράγωνο,
- β) τρισδιάστατο σχήμα πάνω στο τρισδιάστατο σχήμα, π.χ. σφαίρα πάνω σε κώνο,
- γ) δισδιάστατο σχήμα το οποίο είναι μέρος αναπτύγματος του τρισδιάστατου σχήματος, π.χ. τετράγωνο πάνω σε κύβο,
- δ) τρισδιάστατο σχήμα του οποίου το ανάπτυγμα περιλαμβάνει το δισδιάστατο σχήμα, π.χ. κύλινδρος πάνω σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

### **Δωδέκατη εκπαιδευτική συνεδρία**

Κατά τη δωδέκατη συνεδρία του εκπαιδευτικού προγράμματος τα παιδιά απολαμβάνουν για ακόμη μία φορά το παιχνίδι με το Uno σχημάτων ανά ομάδες. Είναι άξιο αναφοράς ότι στον αρχικό προγραμματισμό του εκπαιδευτικού προγράμματος προβλέπονταν τρεις κι όχι δύο συνεδρίες αφιερωμένες στο παιχνίδι Uno σχημάτων. Λόγω διάφορων εξωτερικών συνθηκών ο αρχικός προγραμματισμός ανατράπηκε και οι συνεδρίες με το παιχνίδι περιορίστηκαν σε δύο.

Όσον αφορά στο παιχνίδι με το UNO σχημάτων, υπάρχουν διάφορες ενδιαφέρουσες συζητήσεις και γόνιμοι προβληματισμοί σχετικά με την ανάλυση και ταξινόμηση των σχημάτων. Συνοπτικά, αυτές οι συζητήσεις αφορούν την κατάταξη του ρόμβου στα ακανόνιστα σχήματα και τη σχέση κανονικού εξάγωνου και εξαγωνικού πρίσματος.

Σχετικά με τον ρόμβο, τα τέσσερα υποκείμενα της έρευνας ομόφωνα συμφωνούν ότι είναι ένα ακανόνιστο σχήμα. Ωστόσο, η τεκμηρίωση της άποψής τους διαφέρει. Η Φ. λέει: «(Είναι) ακανόνιστο, γιατί δε γίνεται ανάπτυγμα για κανονικό». Η Σ. λέει: «Γιατί αποτελείται από δύο τρίγωνα που δεν είναι ισόπλευρα». Ο Α. λέει: «Ακανόνιστο είναι ένα σχήμα που δεν έχει ίσες πλευρές» Μετά από παρατήρηση του ρόμβου, ο Α. παραδέχεται πως έχει ίσες πλευρές, αλλά επιμένει ότι ο ρόμβος είναι ακανόνιστο σχήμα εξαιτίας των γωνιών του. Δεν μπορεί όμως να τεκμηριώσει εκτενέστερα την άποψή του. Η Φ. παίρνει ξανά τον λόγο: «Μπορεί να είναι ακανόνιστο, γιατί άμα το ψηλαφίσουμε και πιάσουμε τη μία γωνία και τη δεύτερη, νομίζουμε ότι είναι τρίγωνο». Η Σ. λέει: «Είναι ακανόνιστο, γιατί αυτές (δείχνει τις

αντικριστές) οι δύο γωνίες είναι αμβλείες κι αυτές οι δύο είναι...» Ο Α. συμπληρώνει: «Οξείες».

Κάποια στιγμή ο Α. ρίχνει μία κάρτα που απεικονίζει ένα κανονικό εξάγωνο κι ο Χ. ρίχνει από πάνω μία κάρτα που δείχνει ένα εξαγωνικό πρίσμα. Η Σ. λέει πως δεν είναι σωστή αυτή η κίνηση του Χ. Η Φ. διαφωνεί: «Γίνεται!» Ο Χ. τεκμηριώνει την άποψή του: «Έχει ένα εξάγωνο εδώ κι ένα κάτω (δείχνει τις εξαγωνικές βάσεις του εξαγωνικού πρίσματος). Είναι ένα τρισδιάστατο εξάγωνο». Η Φ. λέει: « Επειδή υπάρχει εδώ πάνω εξάγωνο κι εδώ εξάγωνο (δείχνει κι αυτή τις εξαγωνικές βάσεις του στερεού) και το εξάγωνο φτιάχνει το εξαγωνικό πρίσμα». Η Σ. πείθεται, και λέει ότι πρόκειται για ανάπτυγμα.

### **Ομαδική συνέντευξη**

Στην τελευταία συνεδρία πραγματοποιείται η ομαδική συνέντευξη με τα τέσσερα ερευνώμενα υποκείμενα: τον Α., τη Σ, τη Φ. και τον Χ. Οι ερωτήσεις που τίθενται στα παιδιά αφορούν τρεις άξονες: την αξιολόγηση του εκπαιδευτικού προγράμματος, τον έλεγχο της κατανόησής τους και της γνωστικής τους προόδου. Για λόγους συντομίας δε γίνεται εδώ πλήρης απομαγνητοφώνηση της ομαδικής συνέντευξης. Όλη η συνέντευξη διαρκεί μία διδακτική ώρα, δηλαδή σαράντα πέντε λεπτά, και η αυτούσια μεταφορά όλου του διαλόγου ανάμεσα στα παιδιά και την ερευνήτρια δεν κρίνεται σκόπιμη.

Αντίθετα, παρατίθενται μόνο ορισμένα της σημεία στο επόμενο κεφάλαιο, τα οποία θεωρούνται πολύτιμα για την πληρέστερη ερμηνεία της στάσης, του λόγου και των ενεργειών των δύο μαθητών και των δύο μαθητριών. Ακόμη, καταβάλλεται προσπάθεια αυτά τα σημεία της συνέντευξης να συνδεθούν με συγκεκριμένες λεκτικές διατυπώσεις και συμπεριφορές των παιδιών. Στόχος είναι να σχηματιστεί ένα πιο αναλυτικό και ευκρινές πορτραίτο της μαθητικής συμμετοχής στο εν λόγω εκπαιδευτικό πρόγραμμα.

### **Ερμηνεία στάσης, λόγου και ενεργειών**

Καθ' όλη τη διάρκεια του εκπαιδευτικού προγράμματος υπήρχε διάχυτο το συναίσθημα του ενθουσιασμού. Τα παιδιά κάθε φορά που χτυπούσε η πόρτα αναφωνούσαν με λαχτάρα: «Το Τετράγωνο!» Αλλά και σε διάφορες στιγμές της σχολικής μέρας αναφέρονταν σε αυτό κι έδειχναν πολλή ανυπομονησία για το επόμενο γράμμα. Όλος αυτός ενθουσιασμός και η ανυπομονησία εκφράζονταν όχι

μόνο στις εκφράσεις του προσώπου τους και στα λόγια τους αλλά και στη γενικότερη συμπεριφορά τους.

Συγκεκριμένα, κατά τις διδακτικές ώρες που αφιερώνονταν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα τα παιδιά αντιδρούσαν με αυθόρμητο τρόπο ξεχνώντας τις τυπικές συμβάσεις ενός σχολικού μαθήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ότι σηκώνονταν από τη θέση τους, δίχως να πάρουν άδεια, κι έτρεχαν να ανοίξουν αρκετές φορές μόνα τους την πόρτα, για να διαπιστώσουν εάν πίσω από αυτή βρίσκεται το Τετράγωνο. Ομοίως, χωρίς δεύτερη σκέψη εγκατέλειπαν το θρανίο τους, για να πλησιάσουν τα διάφορα πράγματα που έστελνε κάθε φορά ο διαλληλογραφίας φίλος τους, καθώς επιθυμούσαν να τα περιεργαστούν.

Γενικά, στην τάξη κατά τις εκπαιδευτικές συνεδρίες επικρατούσε ένα πιο χαλαρό από ό,τι συνήθως κλίμα επικοινωνίας ανάμεσα στην εκπαιδευτικό και στα παιδιά. Τα παιδιά ένιωθαν πιο ελεύθερα να εκφραστούν και δε φανέρωσαν ούτε στιγμή κάποιο άγχος για την ενασχόλησή τους με τις μαθηματικές δραστηριότητες του προγράμματος, παρότι αυτές δεν είναι τόσο καλά ορισμένες όσο μία τυπική, μαθηματική άσκηση. Μάλιστα, αυτό το χαρακτηριστικό, δηλαδή ο αινιγματικός υπαινιγμός για τη φύση και τον σκοπό των μαθηματικών δραστηριοτήτων αύξησε κατά πολύ τη μαθητική συμμετοχή. Το Τετράγωνο τους αποκάλυπτε κάθε φορά ορισμένα μόνο στοιχεία, τα οποία χρειαζόταν να τα αποκωδικοποιήσουν, ώστε να εμπλακούν στην εκάστοτε δραστηριότητα και συνακόλουθα να γράψουν την απαντητική επιστολή.

Βέβαια, στην τρίτη τάξη του δημοτικού οι μαθητές και οι μαθήτριες βρίσκονται σε ηλικία που αντιλαμβάνονται ότι δεν μπορεί στην πραγματικότητα ένα τετράγωνο να αλληλογραφεί μαζί τους. Ωστόσο, η αρχική δυσπιστία των παιδιών κλονίστηκε αρκετά, όταν διαπίστωσαν πως στα γράμματά του το Τετράγωνο τους απαντούσε προσωπικά σε κάθε τους σχόλιο ή απορία. *Ο Α. ανέφερε σχετικά στην ομαδική συνέντευξη: «Η αλληλογραφία μας φάνηκε λίγο περίεργη, επειδή δεν είναι φυσιολογικό να μιλάει ένα δισδιάστατο σχήμα με ένα άτομο που μένει στη χώρα των τριών διαστάσεων».*

Ακόμη, κυρίαρχα ήταν τα στοιχεία της έκπληξης και της ευχαρίστησης. Τα παιδιά ποτέ δεν ήξεραν τι τους επεφύλασσε η επόμενη εκπαιδευτική συνεδρία. Αν και αυτή πάντοτε σχετιζόταν με την προηγούμενη, πρότεινε μία ολότελα διαφορετική, μαθηματική δραστηριότητα. Αυτό το στοιχείο της έκπληξης ανέτρεπε τη

συνηθισμένη ροή μίας διδακτικής ώρας στο σχολείο κι έτσι διατηρούσε αμείωτο το μαθητικό ενδιαφέρον κι αύξανε την προσήλωση των παιδιών.

Πέρα από το ότι τα παιδιά ξαφνιάζονταν κάθε φορά με όσα τους έγραφε το Τετράγωνο, έδειχναν ακόμη να απολαμβάνουν στ' αλήθεια αυτή τη γραπτή επικοινωνία. Ενδεικτικά, στην ερώτηση της συνέντευξης «Πώς σας φάνηκε η αλληλογραφία σας με το Τετράγωνο;», η Σ. απάντησε: «Τέλεια!». *Ακόμη, ο Α. και η Σ. δήλωσαν ότι θα ήθελαν να συνεχιστεί η αλληλογραφία με το Τετράγωνο, η Φ. εξέφρασε την επιθυμία της το Τετράγωνο να τους κάνει έκπληξη και να επισκεφτεί το Γ'2 ενώ ο Χ. είπε ότι θα ήθελε με κάποιο τρόπο να δει από κοντά την Επιπεδοχώρα.*

Καθώς ενδιαφέρονταν γι' αυτό που συνέβαινε μες στην τάξη, τα παιδιά συμμετείχαν με ιδιαίτερη προσήλωση κι επιμονή, ακόμη και σε απαιτητικές δραστηριότητες, όπως η λύση του παζλ Tagram. Σε ένα σύννηθες, μαθηματικό μάθημα αρκετά παιδιά παρατούν τη δραστηριότητα ή ζητούν βοήθεια από τη δασκάλα, όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Η διαχείριση της δυσκολίας γινόταν λοιπόν με έναν πιο συναισθηματικά ώριμο τρόπο. Τα παιδιά δέχονταν ότι η νέα μάθηση μπορεί να απαιτεί κάποιο κόπο, αλλά αυτό δεν τους αποθάρρυνε. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του Χ. κατά τη διάρκεια της συνέντευξης: *«Η αλληλογραφία με το Τετράγωνο ήταν, θεωρώ, αρκετά δύσκολη, αλλά ήταν ένας τρόπος μάθησης, οπότε ήταν λογικό».*

Πέρα από τα ψυχολογικά οφέλη και τη βελτίωση της στάσης των παιδιών απέναντι στο μαθηματικό μάθημα, πολύ σημαντική είναι η πρόοδος που έδειξαν στη γνωστική τους κατανόηση. Αν και οι χωρικές διαστάσεις είναι ένα σύνθετο μαθηματικό ζήτημα, για να κατανοηθεί από εννιάχρονα παιδιά, η ανταπόκριση ήταν υψηλή.

Οπωσδήποτε στις αρχικές συνεδρίες τα παιδιά δεν μπορούσαν να ανιχνεύσουν τις διαφορές ανάμεσα στον τρισδιάστατο, γνωστό κόσμο και σε έναν φανταστικό, δισδιάστατο. Έτσι, στα γράμματά τους πολλές φορές έθεταν στο Τετράγωνο ερωτήσεις για τον κόσμο του εμπνεόμενα από τη δική τους, τρισδιάστατη πραγματικότητα. Πολλές συχνές ήταν οι ερωτήσεις για την ύπαρξη στην Επιπεδοχώρα ζώων, σημαίας, μπάλας ποδοσφαίρου ή ακόμη και ουράνιων σωμάτων. *Όπως χαρακτηριστικά σχολίασε η Φ.: «Η αλληλογραφία με το Τετράγωνο μου φάνηκε λίγο περίπλοκη, γιατί μας λέει πράγματα που εμείς ξεχνάμε ότι είναι μόνο δύο διαστάσεις».*

Ωστόσο, καθώς περνούσαν οι συνεδρίες του εκπαιδευτικού προγράμματος, τα παιδιά αντιλαμβάνονταν ολοένα και περισσότερο τις διαφορές ανάμεσα σε μία

δισδιάστατη επιφάνεια και στον τρισδιάστατο χώρο. Έτσι, όταν τα παιδιά ρωτήθηκαν στη συνέντευξη γιατί ρωτούν στα γράμματά τους εάν στην Επιπεδοχώρα του υπάρχουν ζώα, σημαία, φαγητά, παιχνίδια, μέσα μαζικής μεταφοράς κ.λπ., η Σ. είπε: «Εγώ πιστεύω πως κάναμε κάποιες ερωτήσεις, επειδή ξεχνούσαμε κάποιες φορές ότι αυτό (εννοεί το Τετράγωνο) είναι διαφορετικό, αλλά νομίζω ότι το ρωτήσαμε, γιατί νομίσαμε ότι και στην Επιπεδοχώρα, όπως τα σπίτια μας είναι διαφορετικά, αυτό μας είχε πει ότι τα σπίτια τους είναι σχήματα επίπεδα, φανταστήκαμε ότι και τα αυτοκίνητα και η σημαία και τα πράγματα θα ήταν κι αυτά επίπεδα».

Σχετικά με την ύπαρξη ή όχι φεγγαριού κι αστεριών στην Επιπεδοχώρα, ο Α. δήλωσε: «Εγώ νομίζω πως κάναμε λάθος γι' αυτό. Γιατί και πάλι αν είχαν βγει, δε θα μπορούσαν να τα δουν και να ξέρουν αν έβγαιναν, γιατί δεν μπορούν να κοιτάζουν πάνω». Η Σ. συμπλήρωσε: «Εγώ συμφωνώ με τον Α., γιατί δεν πρόκειται να μπορέσουν κάποτε να κοιτάζουν πάνω. Αλλά κι επειδή ο κόσμος τους είναι δισδιάστατος, άμα αυτά υπήρχαν, θα έπρεπε να είναι πάνω τους, δηλαδή θα έπρεπε να είναι στην επιφάνεια που είναι (εννοεί την επιφάνεια της Επιπεδοχώρας), γιατί δεν υπάρχει πάνω». Τέλος, η Φ. σχολίασε: «Εγώ πιστεύω πως άμα έβγαινε έτσι κι αλλιώς το φεγγάρι και τα αστέρια... Δε θα μπορούσαν να βγούνε... Γιατί στον κόσμο του (εννοεί το Τετράγωνο) όλα είναι δισδιάστατα και τα αστέρια και το φεγγάρι δεν μπορούνε να πάνε πάνω, στο ύψος».

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ήταν οι απαντήσεις των παιδιών στην ερώτηση της συνέντευξης: «Πού πιστεύετε ότι βρίσκεται αυτή τη στιγμή το Τετράγωνο;» τα παιδιά απαντούν πολύ διαφορετικά μεταξύ τους. Η Φ. είπε: «Πιστεύω ότι αυτή τη στιγμή το Τετράγωνο βρίσκεται, άμα θέλει, στο αεροπλάνο, για να 'ρθει εδώ!» Ο Α. πρόσθεσε: «Τώρα πιστεύω πως το Τετράγωνο παίρνει εισιτήριο, για να μπει στο αεροπλάνο!»

Ορμώμενη από αυτές τις απαντήσεις, η ερευνήτρια ρώτησε κατόπιν τα παιδιά ποιες από τις απαντήσεις που έδωσαν θεωρούν ότι όντως μπορεί να ισχύουν. Ο Α. απάντησε: «Θα μπορούσαν να ισχύει η δική μου και της Φ., δηλαδή ότι παίρνει αεροπλάνο κι έρχεται εδώ, γιατί θέλουμε να το δούμε κιόλας και μπορεί να έχει κι αυτό την αγωνία πώς είμαστε και να θέλει να έρθει εδώ πέρα». Ο Χ. διαφώνησε με την άποψη περί αεροπλάνου: «Εγώ δεν το πιστεύω την απάντηση που έδωσε ο Α., γιατί είναι σαν να αλλάζει η περιγραφή του, να μην είναι δισδιάστατο, να είναι τρισδιάστατο». Η Φ. επέμενε: «Εγώ πιστεύω το αντίθετο, γιατί στο προτελευταίο μας γράμμα είχαμε κάνει τα αναπτύγματα ενός κύβου. Οπότε, μπορεί να ενωθεί με διάφορα άλλα τετράγωνα και να μπει στο αεροπλάνο».

Οι παραπάνω δηλώσεις υποδηλώνουν μία έντονη σύγκρουση ανάμεσα στην κατανόησή της δισδιάστατης Επιπεδοχώρας και τις επιθυμίες των παιδιών. Συγκεκριμένα, ενώ ο Α. σε άλλες στιγμές έχει επιδείξει μία καλή κατανόηση των συνθηκών που επικρατούν σε έναν δισδιάστατο κόσμο, εδώ παρασύρεται από την επιθυμία του αφήνοντας τη φαντασία κι όχι τη γνώση του να επικρατήσει. Ο Χ. εμφανίζεται αντίθετα πολύ σίγουρος ότι ο συμμαθητής του έκανε έναν εσφαλμένο συλλογισμό, καθώς αντιλαμβάνεται ότι μία πτήση με αεροπλάνο προϋποθέτει οπωσδήποτε την ύπαρξη της τρίτης διάστασης. Η Φ. επιχειρεί μία διαφορετική προσέγγιση στο ζήτημα, ώστε να γεφυρώσει τη σύγκρουση ανάμεσα στην επιθυμία της να δει το Τετράγωνο από κοντά και στη γνώση της ότι δεν υπάρχει ύψος στην Επιπεδοχώρα. Έτσι, προτείνει την ένωση του Τετράγωνου με άλλα τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν τον τρισδιάστατο κύβο, ο οποίος στο μυαλό της φαίνεται να έχει ελεύθερη πρόσβαση στη Χωροχώρα.

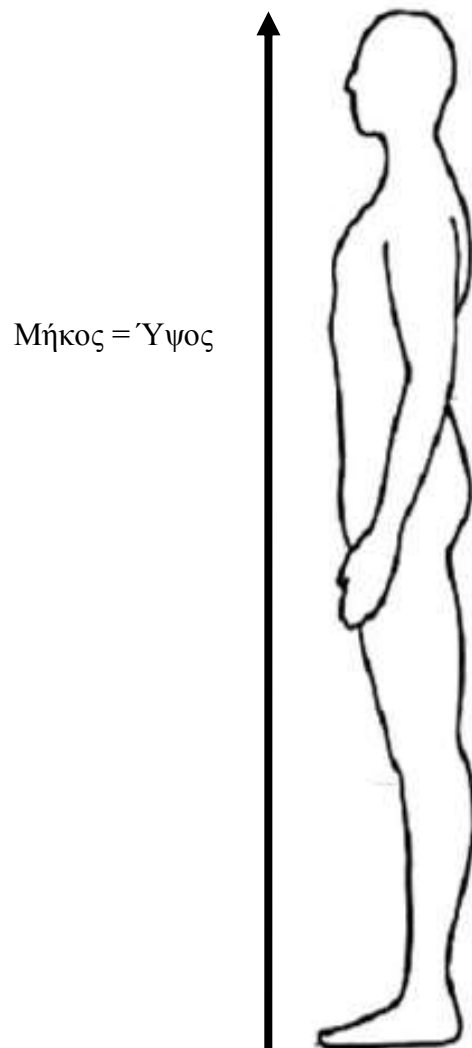
Παρότι και τα τέσσερα παιδιά έδειξαν να κατανοούν τις διαφορές ανάμεσα στις συνθήκες μίας δισδιάστατης επιφάνειας κι ενός τρισδιάστατου χώρου, δεν ήταν σίγουρα ποιες διαστάσεις υπάρχουν στην Επιπεδοχώρα. Η Φ. ξεκίνησε να λέει «Είναι το ύψος και...», δίχως να προσθέσει κάτι παραπάνω. Τελικά ο Χ. πρότεινε μετά από λίγη ώρα το μήκος και το πλάτος. Στο τέλος όλα τα παιδιά συμφώνησαν ότι αυτές είναι οι διαστάσεις στη χώρα που ζει το Τετράγωνο.

Αντίθετα, σχετικά με τις διαστάσεις στον Κόσμο των Τριών Διαστάσεων και τα τέσσερα παιδιά συμφώνησαν εξαρχής. Όλα τις κατονόμασαν δίχως δισταγμό: μήκος, πλάτος, ύψος. Δυσκολεύτηκαν όμως να ξεχωρίσουν ποια διάσταση είναι το μήκος, ποια το πλάτος και ποια το ύψος, όταν τους ζητήθηκε να υποδείξουν τις τρεις διαστάσεις πάνω σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Η συχνότερη σύγχυσή τους αφορά στο μήκος και στο πλάτος, ενώ ως ύψος όλα τα παιδιά υπέδειξαν μία διεύθυνση η οποία είναι κάθετη προς το έδαφος της γης.

Επιπλέον, σύμφωνα με τα παιδιά όταν ένα αντικείμενο αλλάξει τον προσανατολισμό του, αλλάζουν και οι διαστάσεις του. Συγκεκριμένα, σε ένα όρθιο κουτί τα ερευνώμενα υποκείμενα ονομάτισαν άλλη διεύθυνση ως ύψος από ό,τι στο ίδιο κουτί όταν αυτό ήταν κανονικά ακουμπισμένο πάνω σε μία επιφάνεια. Το ίδιο συνέβη κι όταν κλήθηκαν να ονοματίσουν τις διαστάσεις στο ανθρώπινο σώμα. Συγκεκριμένα, όταν το ανθρώπινο σώμα είναι ξαπλωμένο, τα παιδιά μπόρεσαν με σχετική ευκολία να ξεχωρίσουν τις τρεις διαστάσεις. Όταν όμως ήταν όρθιο, υπέδειξαν την ίδια διεύθυνση τόσο για το μήκος όσο και για το ύψος.



**Εικόνα 4.35.** Επιτυχής διάκριση του μήκους και του ύψους σε ξαπλωμένο σώμα



**Εικόνα 4.36.** Λανθασμένη ταύτιση του μήκους και του ύψους σε όρθιο σώμα



Αντίθετα με τη σύγχυση που φανέρωσαν τα παιδιά στο θέμα των διαστάσεων, οι απαντήσεις τους σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα, τα αναπτύγματα, τα είδη των τριγώνων και τα κανονικά και ακανόνιστα πολύγωνα ήταν αρκετά ικανοποιητικές. Οι μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες συμμετείχαν, η λογοτεχνική ιστορία της Επιπεδοχώρας και το παιχνίδι με το UNO σχημάτων βελτίωσαν τις γνώσεις και την κατανόησή τους, ενώ παράλληλα ώθησαν τα παιδιά να ασκήσουν την παρατηρητικότητα τους και να πειραματιστούν.

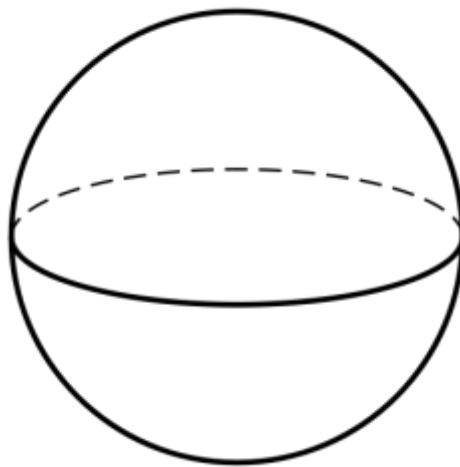
Στο κάλεσμα της ερευνήτριας να κατονομάσουν διάφορους Επιπεδοχωρίτες, τα παιδιά άντλησαν έμπνευση και βοηθήθηκαν από την ιστορία του βιβλίου, όπως τους την αφηγήθηκε το Τετράγωνο. *Ο Α. είπε: «Ήταν τα ιερά σχήματα, οι κύκλοι...» Η Φ. συνέχισε: «Ήταν οι γονείς του που... Η μαμά του ήταν ένα τρίγωνο κι ο μπαμπάς του ένα τετράγωνο, νομίζω». Η Σ. είπε: «Οι κάτοικοι από την Επιπεδοχώρα μπορεί να είναι ισοσκελές (εννοεί ισοσκελή) τρίγωνα, διάφορα ενωμένα ακανόνιστα σχήματα που του είχαμε δώσει τη λύση, για να γίνουνε κανονικά, τρίγωνα, τετράγωνα...» Τέλος, η Φ. συμπλήρωσε: «Πολύγωνα». Τα παιδιά επεξήγησαν τον όρο «Πολύγωνο» μέσα από διάφορα παραδείγματα. *Ο Χ. είπε: «Εξάγωνο», ο Α. «Δεκάγωνο», η Σ. «Πεντάγωνο» και η Φ. «Οκτάγωνο».**

Με βάση αυτές τις απαντήσεις διαπιστώνεται ότι τα παιδιά ως πολύγωνα ορίζουν αυτά τα σχήματα τα οποία έχουν περισσότερες από τέσσερις πλευρές και τέσσερις γωνίες. Δεν είναι τυχαίο που αναφέρουν ξεχωριστά το τρίγωνο και το τετράγωνο από το πολύγωνο και στα παραδείγματά τους για την κατηγορία των πολυγώνων δε συμπεριλαμβάνουν τα τρίγωνα και τα τετράγωνα.

Όσον αφορά στη σχέση ανάμεσα στις γωνίες και τις πλευρές ενός σχήματος, τα παιδιά έδειξαν να έχουν καταλάβει ότι υπάρχει μία απόλυτη εξάρτηση. *Ο Α. είπε χαρακτηριστικά: «Αν είναι, ας πούμε, έξι οι γωνίες, θα είναι έξι και οι πλευρές!» Η Σ. αρχικά επέδειξε μία σύγχυση πάνω σε αυτό το θέμα, καθώς όπως υποστήριξε: «Κάθε δύο γραμμές σχηματίζουν μία γωνία». Ωστόσο δεν μπόρεσε να προτείνει κάποιο σχήμα με άνισο αριθμό πλευρών και γωνιών και τελικά άλλαξε την αρχική της άποψη. Ακόμη σε αυτό το σημείο, φαίνεται ότι το κορίτσι παλινδρομεί στην καθημερινή του γλώσσα όσον αφορά στην προτίμηση της λέξης «γραμμή» σε σύγκριση με τον μαθηματικό ορθό όρο «πλευρά». Ασφαλώς, πρόκειται για μία παλινδρόμηση, καθώς σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιούσε τον όρο «πλευρά».*

Πέρα από τα παραπάνω, ενδιαφέρουσα υπήρξε η σύνδεση του κύκλου με τη σφαίρα στον παιδικό νου. Στο τρίτο τους γράμμα τα παιδιά περιέγραψαν στο

Τετράγωνο την μπάλα, που έχει σφαιρικό σχήμα, ως έναν φουσκωτό και τρισδιάστατο κύκλο. Σε σχετική ερώτηση της ερευνήτριας κατά τη συνέντευξη ο Χ. εξήγησε: «Σκεφτήκαμε ότι δε θα ήξεραν τη σφαίρα, επειδή είναι τρισδιάστατη, κι επειδή τα πράγματα που εξηγούσαμε... είχαν ύψος, είπαμε για τη σφαίρα, είπαμε για την μπάλα που είναι σφαίρα και είπαμε για τον κύκλο που τον ήξεραν». Ο Α. συμπλήρωσε: «Τη μεταφέραμε (εννοεί τη λέξη «παρομοιάσαμε») ως κύκλο, γιατί μπορούμε να έχουμε μία σφαίρα κι αν τη δούμε από μία πλευρά της φαίνεται σαν κύκλος ενώ αν τη γυρνάμε όλη την ώρα φαίνεται σαν τρισδιάστατος κύκλος που μπορεί να κυλήσει...» Τα λεγόμενα του δεύτερου μαθητή φανερώνουν μία διαισθητική γνώση ότι η τομή μιας σφαίρας με ένα επίπεδο είναι κύκλος. Ενδεχομένως το παιδί θεωρεί τη σφαίρα ως ένα σχήμα που προκύπτει από τη συνεχή περιστροφή ενός κύκλου.



**Εικόνα 4.37.** Ο κύκλος ως τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο



**Εικόνα 4.38.** Η σφαίρα ως περιστρεφόμενος κύκλος

Η Σ. και η Φ. διαφώνησαν με τον ορισμό της μπάλας/σφαίρας ως τρισδιάστατου κύκλου. Ειδικότερα, η Σ. είπε: «Εγώ νομίζω ότι είπαμε τρισδιάστατο κύκλο την μπάλα, επειδή η μπάλα είναι φουσκωτή, είναι τρισδιάστατη, έχει μέσα αέρα. Κι επειδή η μπάλα, δηλαδή... Βασικά εγώ νομίζω ότι κάναμε λάθος, επειδή η σφαίρα δεν μπορεί να σχηματιστεί από ένα κύκλο». Η Φ. πρόσθεσε: «Πιστεύω πως χρησιμοποιήσαμε τον τρισδιάστατο κύκλο, γιατί τότε δεν είχαμε κάνει τα αναπτύγματα και δεν ήξεραν τη σφαίρα και ήξεραν τον κύκλο». Γνωρίζοντας ότι η σφαίρα δεν έχει κάποιο ανάπτυγμα, όπως έχουν τα υπόλοιπα στερεά σώματα, τα δύο κορίτσια επιχείρησαν να αντισταθούν στη διαισθητική τους αντίληψη πως ο κύκλος και η σφαίρα έχουν κάποια σχέση. Έτσι, προσπάθησαν να συμμορφώσουν τα λεγόμενά τους με τη γνώση τους ότι ο κύκλος δεν αποτελεί μέρος του αναπτύγματος της σφαίρας. Ωστόσο, ο λόγος τους και κυρίως ο λόγος της δεύτερης μαθήτριας φανερώνει ότι η διαισθητική αντίληψη είναι ιδιαίτερα ισχυρή.

Σε ερώτηση σχετικά με τα ακανόνιστα σχήματα ο Α. ανέφερε τον ρόμβο, η Σ. το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και η Φ. το «ακανόνιστο τρίγωνο». Σε κάλεσμα της ερευνήτριας να προτείνουν κάποια «ακανόνιστα τρίγωνα», ο Α. είπε: «Το ανισόπλευρο τρίγωνο, δηλαδή δεν είναι ισόπλευρο. Που έχει γωνίες όχι  $90^\circ$  αλλά περισσότερων μοιρών ή και λιγότερων». Η Σ. πρότεινε ως περιπτώσεις ακανόνιστων τριγώνων το «σκανδιναβικό τρίγωνο» (εννοώντας το σκαληνό τρίγωνο) και το ισοσκελές τρίγωνο.

Το αγόρι δείχνει να αντιλαμβάνεται τον ορισμό του κανονικού πολύγωνα, ότι δηλαδή κανονικό πολύγωνο ονομάζεται αυτό που έχει ίσες όλες του τις πλευρές κι όλες του τις γωνίες. Για κάποιο λόγο αποδίδει στην ορθή γωνία, τη γωνία των ενενήντα μοιρών δηλαδή, μία ιδιότητα κανονικότητας. Στην ίδια ερμηνεία συγκλίνει και η αρχική άποψη της Φ. στην ενδέκατη συνεδρία ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ένα κανονικό σχήμα.

Σε κάθε περίπτωση τα παιδιά φαίνεται ότι «αναγνωρίζουν και κατονομάζουν τα σχήματα βασισμένα στα καθολικά, οπτικά χαρακτηριστικά τους» (Van de Walle, 2007, σελ. 517). Ειδικότερα, όταν συμμετείχαν στον απογραφικό διαγωνισμό στην τρίτη εκπαιδευτική συνεδρία συμπεραίνουν ότι ένα σχήμα είναι τετράγωνο, μόνο και μόνο αγίζοντας τις τέσσερις πλευρές του και τις τέσσερις γωνίες του. Μάλιστα, αν το τετράγωνο ήταν περιστρεμμένο (βλ. σελ 75), το θεωρούσαν ρόμβο. Τα παιδιά εστίαζαν, λοιπόν, στη μορφή κι όχι στις ιδιότητες του σχήματος. Συνεπώς, τα παιδιά βρίσκονται στο στάδιο 0 ή αλλιώς στάδιο της νοερής απεικόνισης σύμφωνα με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele (Van de Walle, 2007).

Ένα ακόμη γεγονός που υπερισχύει αυτή την κατάταξη στο πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης είναι η σχεδίαση κατά προσέγγιση. Συγκεκριμένα, τα παιδιά χρησιμοποιούσαν πάντοτε τον χάρακα ως εργαλείο χάραξης ευθειών γραμμών κι όχι ως εργαλείο μέτρησης. Έτσι, τόσο στην όγδοη όσο και στη δέκατη εκπαιδευτική συνεδρία, όπου προσπάθησαν να σχεδιάσουν τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, το ενδιαφέρον των παιδιών στράφηκε αποκλειστικά στο να κάνουν σωστά τα ευθύγραμμα τμήματα στα τετράπλευρά τους. Κανένα όμως δε σκέφτηκε να μετρήσει τα εκατοστά των πλευρών, ώστε να διασφαλίσει ότι το σχήμα που σχεδιάζει είναι όντως τετράγωνο ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τους αρκούσε που έμοιαζαν οπτικά με το τετράπλευρο που είχαν στο μυαλό τους.

## Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας συμφωνούν με την ισχύουσα βιβλιογραφία σε ό,τι αναφέρεται σχετικά με τα οφέλη από τη διδακτική αξιοποίηση της λογοτεχνίας και του παιχνιδιού σε ζητήματα προαγωγής της γεωμετρικής σκέψης, ανάπτυξης νέων εννοιών, πραγματοποίησης συνδέσεων, βελτίωσης της κατανόησης, ενδυνάμωσης του μαθηματικού διάλογου, αύξησης της συμμετοχής, επιμονής στο μαθησιακό έργο, ενίσχυσης του μαθηματικού ενδιαφέροντος, μείωσης του μαθηματικού άγχους, θετικής συναισθηματικής εμπλοκής, καλλιέργειας της φαντασίας και της κριτικής σκέψης και δημιουργίας υποστηρικτικού κι ευνοϊκού μαθησιακού περιβάλλοντος.

Χάριν ευχρηστίας στην ανάγνωση τα διάφορα ευρήματα της έρευνας ταξινομούνται και παρουσιάζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- α) την κατανόηση και τη γνωστική πρόοδο
- β) τη συναισθηματική εμπλοκή και την ποιότητα συμμετοχής.

### Κατανόηση και γνωστική πρόοδος

Όπως προκύπτει από την περιγραφή και την ερμηνεία του λόγου και των ενεργειών των παιδιών, οι μικροί μαθητές και οι μικρές μαθήτριες κατάφεραν στο τέλος του εκπαιδευτικού προγράμματος να διακρίνουν το δισδιάστατο επίπεδο από τον τρισδιάστατο χώρο, να κατονομάζουν τις τρεις διαστάσεις και να διακρίνουν τα δισδιάστατα, γεωμετρικά σχήματα από τα τρισδιάστατα, στερεά σώματα. Μάλιστα, αύξησαν τις γνώσεις τους και την κατανόησή τους σχετικά με τις ονομασίες και τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και των στερεών σωμάτων ερχόμενοι σε επαφή με τα χειραπτικά υλικά, αναλύοντας τα χαρακτηριστικά των σωμάτων για τη σχεδίαση των αναπτυγμάτων και παίζοντας το παιχνίδι UNO σχημάτων. Ακόμη, αντιλήφθηκαν ότι ένα σχήμα έχει ισάριθμο αριθμό πλευρών και γωνιών κι ότι αυτός ο αριθμός καθορίζει την ονομασία του μέσα από τις δραστηριότητες του απογραφικού διαγωνισμού Γεωμετρούπολης.

Πέρα από τα παραπάνω, τα παιδιά εγκατέλειψαν σταδιακά τον άτυπο όρο «γραμμή» και τον αντικατέστησαν από τον μαθηματικά ορθό όρο «πλευρά». Βέβαια, αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπήρχαν παλινδρομήσεις, γεγονός το οποίο αποδεικνύει ότι δεν υπήρξε οριστική μετάβαση από την καθημερινή στη μαθηματική γλώσσα. Οι μαθητές και οι μαθήτριες εξοικειώθηκαν ακόμη με τον όρο «γωνία», την οποία αρχικά περιέγραφαν μόνο με κινήσεις των χεριών τους. Υπενθυμίζεται ότι στην

πρώτη εκπαιδευτική συνεδρία τα παιδιά έκαναν μία αδιαφοροποίητη χρήση ποικίλων γεωμετρικών όρων φανερώνοντας έτσι την έλλειψη ουσιαστικής κατανόησης στο νόημα του κάθε όρου.

Οι γεωμετρικοί όροι «ανάπτυγμα» και «κανονικότητα» κατανοήθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Τα παιδιά αντιλήφθηκαν πως τα στερεά σώματα συντίθενται από την τρισδιάστατη ένωση διάφορων γεωμετρικών σχημάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η νοητική αναπαράσταση του αναπτύγματος του κύβου ως ένα  $T$  ή ως σταυρό. Σχετικά με την κανονικότητα, τα παιδιά κατέστησαν ικανά να προτείνουν διάφορα κατάλληλα σχήματα, προκειμένου να περιγράψουν τα κανονικά και τα ακανόνιστα σχήματα.

Αναφορικά με τον όρο «πολύγωνο» τα παιδιά επέδειξαν μία μερική κατανόηση, καθώς χαρακτήρισαν ως πολύγωνα μόνο τα σχήματα που έχουν περισσότερες από τέσσερις πλευρές και γωνίες. Με αυτόν τον τρόπο, απέκλεισαν εσφαλμένα από την κατηγορία «πολύγωνα» τα τρίγωνα και τα τετράγωνα. Ωστόσο, δεν υπήρχε κάποια βοήθεια ούτε από τη λογοτεχνική ιστορία ούτε από το παιχνίδι προς τα παιδιά, ώστε να σχηματίσουν μία ορθή κατανόηση του όρου. Αντίθετα, η μορφή του απογραφικού δελτίου διακρίνει τα τρίγωνα και τα τετράγωνα από τα υπόλοιπα πολύγωνα μπερδεύοντας τα παιδιά. Συνεπώς, σε αυτό το σημείο χρειάζεται να αναγνωριστεί ένα προβληματικό σημείο του αντίστοιχου υλικού, το οποίο σε περίπτωση επαναληπτικής εφαρμογής του εκπαιδευτικού προγράμματος πρέπει να διορθωθεί.

Ιδιαίτερη δυσκολία αντιμετώπισαν τα παιδιά στο να υποδείξουν τις τρεις διαστάσεις ενός στερεού σώματος. Συγκεκριμένα, φανέρωσαν μία αβεβαιότητα ως προς το ποια διάσταση να χαρακτηρίσουν μήκος και ποια ως πλάτος. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει για την τρίτη διάσταση, το ύψος. Οποσδήποτε τα παιδιά έβρισκαν το ύψος ευκολότερα από τις άλλες δύο διαστάσεις. Ειδικότερα, χαρακτήριζαν σταθερά ως ύψος την διεύθυνση που είναι κάθετη με το έδαφος. Ωστόσο, μπερδεύονταν πολύ όταν ένα αντικείμενο άλλαζε προσανατολισμό. Στην περίπτωση ενός σηκωμένου αντικείμενου ή του όρθιου ανθρώπινου σώματος, ταύτιζαν το μήκος με το ύψος. Πιθανότατα αυτό σχετίζεται με τη χρήση της φράσης «ύψος ανθρώπου» στην καθημερινή ζωή, την οποία χρησιμοποιούμε, για να αναφερθούμε στο μήκος του σώματος από το κεφάλι μέχρι τα πόδια.

Η θεώρηση του περιστρεμμένου τετράγωνου ως ρόμβου και γενικά η απόδοση ονομασιών στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τα οπτικά τους

χαρακτηριστικά κρίθηκε συμβατή με το στάδιο της νοερής απεικόνισης, όσον αφορά στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Σε αυτό το συμπέρασμα οδηγεί κι η χρήση του χάρακα ως εργαλείου χάραξης ευθειών κι όχι ως οργάνου μέτρησης. Με άλλα λόγια, τα παιδιά ενδιαφέρονταν μόνο για την εμφάνιση του σχήματος ενώ δεν τα απασχολούσε η συνέπεια στις γεωμετρικές ιδιότητές του.

Τέλος, εντοπίστηκαν δύο ενδιαφέρουσες απόψεις των παιδιών. Η πρώτη περιλαμβάνει μία διαισθητική σύνδεση του κύκλου με τη σφαίρα. Παρότι τα παιδιά έμαθαν ότι δεν υπάρχει ουσιαστικά ανάπτυγμα για τη σφαίρα, αντιλαμβάνονταν μία σύνδεση μεταξύ των δύο σχημάτων. Η δεύτερη άποψη αναφέρεται στην απόδοση της ιδιότητας της κανονικότητας στην ορθή γωνία. Συγκεκριμένα, τα παιδιά θεωρούσαν αρχικά πως όσα σχήματα έχουν ορθές γωνίες είναι συνακόλουθα και κανονικά πολύγωνα.

### **Συναισθηματική εμπλοκή και ποιότητα συμμετοχής**

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα «Αλληλογραφώντας με ένα Τετράγωνο» εισήγαγε ένα θετικό συναισθηματικό κλίμα μες στην τάξη, στο οποίο κυριαρχούσε ο ενθουσιασμός, η ανυπομονησία και το στοιχείο της έκπληξης. Τα παιδιά έδειχναν να απολαμβάνουν τη μαθησιακή διαδικασία, χωρίς να ταλαιπωρούνται από συναισθήματα άγχους. Γενικά, το θετικό αυτό κλίμα οδήγησε στην ενδυνάμωση του μαθηματικού ενδιαφέροντος και σε μία αυξημένη εμπλοκή τους στις μαθησιακές δραστηριότητες. Μάλιστα, τα παιδιά φανέρωσαν αυξημένη προθυμία για μεγαλύτερης διάρκειας συμμετοχή, καθώς επέμεναν στις δραστηριότητες και διαχειρίζονταν τις δυσκολίες του μαθησιακού έργου με αποφασιστικότητα.

Ακόμη, τόσο η αξιοποίηση της λογοτεχνίας όσο και η ενσωμάτωση εκπαιδευτικών παιχνιδιών μες στη σχολική αίθουσα καλλιέργησαν άφθονες ευκαιρίες για μαθηματικό διάλογο και πολλά άλλα οφέλη. Ακόμη κι όταν η μαθηματική γλώσσα ήταν δυσνόητη για τα παιδιά, η υπόθεση της ιστορίας παρέμενε ένα διαρκές σημείο αναφοράς. Επιπρόσθετα, η μαθηματική λογοτεχνία θεωρείται ότι ενδυνάμωσε τον συλλογισμό, τη φαντασία και την κριτική σκέψη στα παιδιά. Από την άλλη πλευρά, το UNO σχημάτων παρείχε πολλές ευκαιρίες όχι μόνο για εξάσκηση στη μαθηματική γλώσσα αλλά και για λεπτομερή παρατήρηση, ανάλυση και ταξινόμηση των σχημάτων. Και όλα αυτά τα παιδιά τα έκαναν, επειδή στο καθένα υπήρχε η επιθυμία για τη νίκη και συνακόλουθα η επιθυμία για κατάλληλες και πετυχημένες κινήσεις.

## Κεφάλαιο 6: Συζήτηση

Η έρευνα αυτή μπορεί να αφυπνίσει το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών, οι οποίοι διδάσκουν μαθηματικά στα παιδιά. Αν και απευθύνεται κατά κύριο λόγο σε δασκάλους και δασκάλους, δηλαδή σε εκπαιδευτικούς που υπηρετούν στα δημοτικά σχολεία, η παρούσα εργασία σκιαγραφεί δυναμικές που ενισχύουν τη διδακτική ευελιξία κι άλλων εκπαιδευτικών. Μπορεί να εμπνεύσει, για παράδειγμα, τόσο νηπιαγωγούς όσο και καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, να ενσωματώσουν στη μαθηματική τους διδασκαλία λογοτεχνικά βιβλία και εκπαιδευτικά παιχνίδια.

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα είναι ιδιαίτερα ευέλικτο και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να το τροποποιήσουν κατά βούληση. Μέσα από απλουστεύσεις ή εμπλουτισμούς είναι δυνατόν να προσαρμόσουν τους διδακτικούς στόχους στις απαιτήσεις της τάξης στην οποία διδάσκουν. Για παράδειγμα, εφόσον το παρόν πρόγραμμα διευρυνθεί, μπορεί να συμπεριλάβει μεγαλύτερο μέρος της πλοκής του βιβλίου «Flatland», ενσωματώνοντας τις ονειρικές επισκέψεις του Τετράγωνου στη Σημειοχώρα και στη Γραμμοχώρα. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο/η εκπαιδευτικός θα έχει την ευκαιρία να φέρει τους μαθητές/τις μαθήτριες σε επαφή με την πραγματικότητα της μηδενικής ή/και της μίας διάστασης και να υπάρξει προβληματισμός για το τι σημαίνουν στα μαθηματικά οι όροι «σημείο» και «γραμμή».

Ένα μεγάλο προτέρημα του συγκεκριμένου προγράμματος είναι ότι εξυπηρετεί δυνητικά διδακτικούς στόχους από διάφορα γνωστικά πεδία. Συγκεκριμένα, τα παιδιά τα οποία συμμετείχαν στο δίμηνο εκπαιδευτικό πρόγραμμα δεν ασχολήθηκαν μόνο με τα μαθηματικά αλλά και με την παραγωγή γραπτού λόγου. Καθώς αντάλλασσαν γράμματα με τον δια αλληλογραφίας φανταστικό τους φίλο, μνήθηκαν στο κειμενικό είδος της επιστολής. Χωρίς να έχει προηγηθεί κάποια επίσημη διδασκαλία, μέσα από την παρατήρηση των επιστολών του Τετράγωνου, έμαθαν ότι ένα γράμμα περιλαμβάνει το χωροχρονικό πλαίσιο (τόπος και χρόνος αποστολής), την προσφώνηση, το κυρίως κείμενο, την αποφώνηση και την υπογραφή. Ακόμη, έμαθαν τι σημαίνει «υστερόγραφο». Σε περίπτωση, λοιπόν, που το παρόν πρόγραμμα εφαρμοστεί σε κάποια τάξη γυμνασίου ή λυκείου, υπάρχουν γόνιμες συνθήκες για μία επιτυχή συνεργασία μεταξύ των μαθηματικών και των φιλολόγων.

Επιπλέον, η «Επιπεδοχώρα» του Abbott μπορεί να αποτελέσει τη βάση όχι μόνο για μαθηματικούς αλλά και για κοινωνικούς διαλόγους μες στην τάξη. Άλλωστε, πέρα από ένα μαθηματικό λογοτέχνημα αποτελεί ταυτόχρονα μία



«καυστική κοινωνική σάτιρα της βικτωριανής Αγγλίας», όπως αναγράφεται και στο οπισθόφυλλο του βιβλίου (Abbott, 2008). Θέματα όπως η στεγανοποιημένη, ταξική δομή και η υποβαθμισμένη κοινωνική θέση της γυναίκας (η οποία στο αυθεντικό κείμενο αντιστοιχεί σε ένα μονοδιάστατο ον, τη γραμμή) παραμένουν επίκαιρα στη σύγχρονη εποχή. Υπό αυτό το πρίσμα, το εν λόγω βιβλίο διανοίγει το μαθηματικό μάθημα παρέχοντας ευκαιρίες για κοινωνικό προβληματισμό και κριτική σκέψη.

Επιπλέον, ορισμένες δραστηριότητες τους εκπαιδευτικού προγράμματος «Αλληλογραφώντας με ένα Τετράγωνο» προσφέρουν ευκαιρίες για ευαισθητοποίηση πάνω σε σοβαρά ζητήματα, όπως τα προβλήματα όρασης και ο ρατσισμός. Συγκεκριμένα, ο απογραφικός διαγωνισμός της Γεωμετρούπολης μπορεί να αποτελέσει την αφορμή για συζητήσεις σχετικά με την τύφλωση και το σύστημα γραφής κι ανάγνωσης Braille. Ακόμη, η φυλάκιση των ακανόνιστων σχημάτων μπορεί να τροφοδοτήσει έναν διάλογο πάνω στη διαφορετικότητα και στην αναγκαιότητα σεβασμού στην ετερότητα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, ο ευέλικτος χειρισμός του δεδομένου εκπαιδευτικού προγράμματος μπορεί να προσφέρει όχι μόνο αρκετά μαθησιακά οφέλη στο μαθηματικό μάθημα αλλά και να καλλιεργήσει ευκαιρίες για σύνδεση των μαθηματικών με την παραγωγή λόγου και τον κοινωνικό προβληματισμό. Σε κάθε περίπτωση όμως, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να γνωρίζει ότι οι απαιτήσεις σε χρόνο είναι αυξημένες και η λεπτομερής οργάνωση αναγκαία. Επιπρόσθετα, σε ορισμένες δραστηριότητες, όπως ο απογραφικός διαγωνισμός της Γεωμετρούπολης, ενδεχομένως κρίνεται σκόπιμη η υποστήριξη από συναδέλφους εκπαιδευτικούς μες στην τάξη. Συνεπώς, το παρόν πρόγραμμα είναι ναι μεν πολλά υποσχόμενο αλλά οπωσδήποτε απαιτητικό κατά την εφαρμογή του.

Βέβαια, η επαναληπτική πραγματοποίηση του προγράμματος σε παρόμοιες ή διαφορετικές συνθήκες θα αποτελούσε αναμφισβήτητα μία πολύτιμη συνεισφορά για τον έλεγχο των συμπερασμάτων αυτής της εργασίας. Άλλωστε, ο μικρός αριθμός των ερευνώμενων υποκειμένων περιορίζει σημαντικά την αξιοπιστία των ερμηνειών που αποδόθηκαν στον λόγο και στις ενέργειες των παιδιών. Οπωσδήποτε, λοιπόν η επανάληψη της έρευνας αποτιμάται ως μία επιθυμητή διαδικασία, η οποία έχει τη δυνατότητα να προσθέσει νέες οπτικές και δυνατότητες στο παρόν εκπαιδευτικό πρόγραμμα.

# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

- Δοξιάδης, Α. (2001). *Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ*. Αθήνα: Καστανιώτη.
- Ευκλείδης. (n.d.). *Στοιχείων α'*: Βιβλίον Ι. In *Στοιχεία Ευκλείδου*. Αλεξάνδρεια.
- Ζαφειρόπουλος, Κ. (2015). *Πώς γίνεται μια επιστημονική εργασία; Επιστημονική έρευνα και συγγραφή εργασιών* (2η έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Κριτική.
- Καψάλης, Α., & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των Μαθηματικών. *ΜΑΚΕΔΝΟΝ*, (6), 95–115.
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών* (3η έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.
- Κωστοπούλου, Ε. (2005). *Το χρώμα στο σχέδιο: Μια προσπάθεια διερεύνησης της σχέσης χρώματος και συναισθήματος*. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.
- Ματσαγγούρας, Η. (2006). *Θεωρία και πράξη της διδασκαλίας: Χώρος, ομάδα, πειθαρχία, μέθοδος*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Μιχαηλίδης, Τ. (2002). Μαθηματική λογοτεχνία: Μια πρόκληση. In *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας* (pp. 634–642).
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.
- Παπαϊωάννου, Ζ. (1989). Μαθηματικά παιχνίδια. *Ανοιχτό Σχολείο, Μάρτιος/Απ(22)*, 8–12.
- Παππάς, Φ., Κατσιγιάννης, Α., & Διαμαντοπούλου, Λ. (2015). *Εισαγωγή στη Νεοελληνική Φιλολογία*. Αθήνα.
- Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2009). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, (47), 138–154.
- Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2005). Ταξινόμηση του εκπαιδευτικού παιχνιδιού: σύνδεση με τη Θεωρία Παιγνίων. In *Οι Σύγχρονες Εφαρμογές των*

- Μαθηματικών και η Αξιοποίησή τους στην Εκπαίδευση* (pp. 504–514). Λαμία.
- Abbott, E. (2008). *Flatland: η Επιπεδοχώρα*. Αθήνα: Αιώρα.
- Albool, R. M. (2012). The Effect of Utilizing Storytelling Strategy in Teaching Mathematics on Grade Four Students ' Achievement and Motivation towards Learning Mathematics. *International Conference: The Future of Education, 2*.
- Barnaby, D. (2015). The use of Children's Literature to Teach Mathematics to improve Confidence and Reduce Math Anxiety, 59.
- Caswell, R. (2002). The Value of Play to Enhance Mathematical Learning in the Middle. *Thought A Review Of Culture And Idea*, 217–224.
- Cohen, L., & Manion, L. (2000). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.
- Creswell, J. (2011). *Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας*. (X. Τσορμπατζούδης, Ed.) (A'). Αθήνα: Ίων.
- Creswell, J. W. (2011). *Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας*. (Τσορμπατζούδης Χαράλαμπος, Ed.). Αθήνα: Εκδόσεις Έλλην.
- Date, P. U. B., Type, P. U. B., Price, E., Kurz, T. L., Bartholomew, B., Price, R. R., ... Lennon, C. (2004). Supporting Math Skills with Children's Stories. *Kappa Delta Pi Record*, 48(4), 154–162. <http://doi.org/10.1080/00228958.2012.734017>
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., ... Japel, C. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. <http://doi.org/http://dx.doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428.supp>
- Ernest, P. (1986). Games: A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in School*, 15(1), 2–5. <http://doi.org/10.1038/106644a0>
- Gardner, H. (1995). Reflections on Multiple Intelligences: Myths and Messages. *Phi Delta Kappan*, 77(3), 200–209. <http://doi.org/10.1002/ss.327>

- Gardner, H., & Hatch, T. (1989). Educational implications of the theory of multiple intelligences. *Educational Researcher*, 18(8), 4–10.  
<http://doi.org/10.3102/0013189X018008004>
- Goral, M. B., & Gnadinger, C. M. (2006). Using Storytelling to Teach Mathematics Concepts. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 4–8.
- Griffiths, R., & Clyne, M. (1991). The power of story: Its role in learning Mathematics. *The Australian Mathematics Teacher*, 47(1), 42–45.
- Hellwig, S. J., Monroe, E. E., & Jacobs, J. S. (2000). Making Informed Choices: Selecting Children’s Trade Books for Mathematics Instruction. *Teaching Children Mathematics*, 7(3), 138–143.
- Hong, H. (1996). Effects of mathematics learning through children’s literature on math achievement and dispositional outcomes. *Early Childhood Research Quarterly*, 11(4), 477–494. [http://doi.org/10.1016/S0885-2006\(96\)90018-6](http://doi.org/10.1016/S0885-2006(96)90018-6)
- Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in Mathematical Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121–142. <http://doi.org/10.2307/749895>
- Moyer, P. S., & Jones, M. G. (2004). Controlling Choice: Teachers, Students, and Manipulatives in Mathematics Classrooms. *School Science and Mathematics*, 104(1), 16–31. <http://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2004.tb17978.x>
- Nisbet, S., & Williams, A. (2009). Improving students’ attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher*, 65(3), 25–37.
- Papadimitriou, C. H. (2003). MythematiCS: in praise of storytelling in the teaching of computer science and math. *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(4), 7–9.  
<http://doi.org/10.1145/960492.960494>
- Ramani, G. B., Siegler, R. S., & Hitti, A. (2012). Taking it to the classroom: Number board games as a small group learning activity. *Journal of Educational Psychology*, 104(3), 661–672. <http://doi.org/10.1037/a0028995>
- Rowe, J. C. (2001). An experiment in the use of games in teaching of mental arithmetic. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1–20.

- Ruiz, E. C., Thornton, J. S., & Cuero, K. K. (2010). Integrating Literature in Mathematics: A Teaching Technique for Mathematics Teachers. *School Science and Mathematics*, 110(5), 235–237. <http://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2010.00030.x>
- Saint-Exupéry, A. (2016). *Ο μικρός πρίγκιπας*. Αθήνα: Ψυχογιός.
- Shirley, J. M. (2005). *Storyteller, story-teacher: A portrait of three teachers' use of story in elementary classes*. Georgia State University.
- Siegler, R. S. (2009). Improving the numerical understanding of children from low-income families. *Child Development Perspectives*, 3(2), 118–124. <http://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00090.x>
- Slavin, R. E. (1994). *A Practical Guide to Cooperative Learning*.
- Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the Sequel): Imagination as a Pathway to Advanced Mathematical Ideas and Philosophy. *Australian Mathematics Teacher*, 60(1), 17–23.
- Tapson, F. (1997). Mathematical Games. *Mathematics in School*, 26(4), 2–6.
- Tatsis, K., Kafoussi, S., & Skoumpourdi, C. (2008). Kindergarten children discussing the fairness of probabilistic games: The creation of a primary discursive community. *Early Childhood Education Journal*, 36(3), 221–226. <http://doi.org/10.1007/s10643-008-0283-y>
- Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά: Για δημοτικό και γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή διαδικασία* (6th ed.). Αθήνα: Επίκεντρο.
- van Hiele, P. (1998). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*.
- van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play. *European Early Childhood Education Research Journal*, 4(1), 71–87. <http://doi.org/10.1080/13502939685207851>
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling T*. Rotterdam: Sense Publishers.