

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ



**Διπλωματική Εργασία**  
**«Τεχνικές Πρόβλεψης Ζήτησης και Αποθεματική  
Πολιτική»**

ΒΟΛΟΣ, 03/06/2016

Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια: Νικούλη Ελευθερία

Επιβλέπων Καθηγητής: Κεβόρκ Ηλίας

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Οφείλω να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους οι οποίοι στάθηκαν πλάι μου σ' αυτήν την διπλωματική εργασία αλλά και σε όλη την πορεία των σπουδών μου.

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου του τμήματος Οικονομικών Επιστημών που όλα αυτά τα χρόνια με βοήθησαν να γνωρίσω το αντικείμενο των σπουδών μου έτσι όταν βγαίνοντας στην αγορά εργασίας να έχω τις σωστές βάσεις ώστε να το ασκήσω.

Ευχαριστώ τον εισηγητή μου, κ. Κεβόρκ Ηλία για την ανάθεση της διπλωματικής εργασίας και για τη συμβολή του ώστε να αντλήσω περισσότερες πληροφορίες για να φέρω εις πέρας την εργασία μου. Είναι ένας εξαιρετικός άνθρωπος και καθηγητής. Θεωρώ πως τον αντιπροσωπεύει η θέληση και η ευχαρίστηση να προσφέρει γνώση.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου για την ηθική τους συμπαράσταση και την υπομονή σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, όσο και στο κομμάτι της διπλωματικής μου, αλλά και για όσα μου έχουν προσφέρει στη ζωή.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αξιολογηθεί η καλύτερη μέθοδος πρόβλεψης πάνω σε δεδομένα διακοπτόμενης ζήτησης. Οι μέθοδοι πρόβλεψης που εξετάζονται είναι η απλή εκθετική εξομάλυνση, η μέθοδος του Croston και μια νέα μέθοδος που αναπτύχθηκε από τους Syntetos & Boylan. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι από το παράδειγμα του Croston, καθώς δεν υπάρχουν άλλα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία. Στα παρακάτω κεφάλαια θα αναπτυχθούν αυτές οι μέθοδοι, οι οποίες έρχεται η μία μετά την άλλη ώστε να βελτιώσουν την προβλεπτική μας ικανότητα. Τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία εξαρτάται η προβλεπτική ικανότητα είναι η επιλογή της κατάλληλης αρχικής τιμής για την πρόβλεψη μας και η επιλογή του κριτηρίου (measure). Ωστόσο, τα εμπειρικά αποτελέσματα της σύγκρισης των τριών αυτών μεθόδων αποδεικνύουν ότι δεν υπερέχει κάποια μέθοδος καθολικά έναντι των υπολοίπων, ανεξάρτητα από τα δύο σημεία διερεύνησης.

.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1.2 ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗΣ .....	5
1.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΕΙΚΤΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ .....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ .....	9
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ .....	9
2.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ .....	10
2.3 ΜΕΤΡΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ .....	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ CROSTON .....	20
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ .....	20
3.2 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CROSTON (ASSUMPTIONS OF CROSTON'S MODEL).....	23
3.3 THE SIZE-INTERVAL METHOD.....	24
3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING (SES) ΚΑΙ CROSTON'S METHOD ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΟΡΟ. ....	42
3.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING (SES) ΚΑΙ CROSTON'S METHOD ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΟ 5. ....	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΣ SBA (SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION) 50	
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ .....	50
4.2 ΜΕΤΡΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ.....	51
4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ (SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING- CROSTON'S METHOD- SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION) ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΟΡΟ.....	69
4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ (SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING- CROSTON'S METHOD- SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION) ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ 5.....	73
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	82
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	84

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διακοπτόμενη ζήτηση (γνωστή ως *intermittent demand*) των προϊόντων, έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να εμφανίζεται σποραδικά, δηλαδή να μεσολαμβάνει περιόδους, όπου αυτή είναι μηδενική. Αυτό είναι και το χαρακτηριστικό της που την κάνει ιδιαίτερη ως περίπτωση και απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση (Syntetos, 2001). Οι Silver et al (1998) όρισαν τη διακοπτόμενη ζήτηση ως «σπάνια με την έννοια ότι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών συναλλαγών είναι σημαντικά μεγαλύτερος από τη μονάδα χρονικής περιόδου, το τελευταίο είναι το διάστημα της ενημέρωσης της πρόβλεψης (σελ. 127)». Όταν εμφανιστεί ζήτηση, τότε το μέγεθος της ποικίλει και σε πολλές περιπτώσεις σε σημαντικό βαθμό, δηλαδή μπορεί να είναι σταθερό, μεταβλητό ή ακόμη και υψηλό. Η διακοπτόμενη ζήτηση συναντάται σε μονάδες διαχείρισης αποθεμάτων (*stock keeping units*) (Croston, 1972; Willemain et al, 1994) και ανταλλακτικών (*spare parts*) (Mitchell, 1962; Hollier, 1980; Strijbosch et al, 2000). Η διακοπτόμενη φύση των δεδομένων αυτών δημιουργεί σημαντικά προβλήματα τόσο στον έλεγχο των αποθεμάτων όσο και στη διαδικασία της πρόβλεψης. Η δυσκολία της πρόβλεψης δεν έγκειται μόνο στην ασυνέχεια των παρατηρήσεων αλλά και στη μεγάλη διακύμανση μεταξύ δύο μη μηδενικών παρατηρήσεων.

Ο Silver (1970) σημείωσε ότι «οι περισσότερες διαδικασίες ελέγχου απογραφής που χρησιμοποιούνται βασίζονται στις υποθέσεις σχετικά με την κατανομή της ζήτησης που είναι μη αξιόπιστες στην περίπτωση του ακανόνιστου (άμορφου- erratic) στοιχείου ζήτησης. Εάν αυτή δεν είναι η περίπτωση, οι διαδικασίες τείνουν να είναι υπολογιστικά δυσεπίλυτες (σελ. 87) ».

Για τα στελέχη των επιχειρήσεων που ασχολούνται με τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τη διαχείριση των αποθεμάτων διακοπτόμενης ζήτησης, είναι επιτακτική η ανάγκη καθορισμού κανόνων προμήθειας των απαιτητών και μόνο ποσοτήτων τους. Συνεπώς, η βελτίωση του τομέα των προβλέψεων καθώς και σε αυτό της διαχείρισης των αποθεμάτων, συνήθως μεταφράζεται σε σημαντική μείωση κόστους στις επιχειρήσεις, λόγω μικρότερων δεσμευμένων κεφαλαίων στις αποθήκες τους υπό μορφή ανταλλακτικών, τα οποία μένουν τις περισσότερες περιπτώσεις αχρησιμοποίητα και με την πάροδο του χρόνου απαξιώνονται και υποτιμάται η αξία τους, μεγιστοποιώντας έτσι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος. Αν ληφθεί υπ' όψιν και

η ανάγκη για μείωση των αποθηκευτικών χώρων, τότε γίνεται αισθητή η τεράστια σημασία και το οικονομικό όφελος κάθε προσπάθειας που ευδοκιμεί στον κλάδο των προβλέψεων.

Στην πράξη, οι μέθοδοι της εκθετικής εξομάλυνσης χρησιμοποιούνται συχνά όταν απαιτείται χειρισμός και πρόβλεψη δεδομένων διακοπτόμενης φύσης. Καθώς όμως οι μέθοδοι αυτοί αποδίδουν μεγαλύτερο βάρος στα πιο πρόσφατα δεδομένα, καταλήγουν σε ένα μοντέλο πρόβλεψης όπου οι εκτιμήσεις είναι μέγιστες έπειτα από μία εμφάνιση ζήτησης και ελάχιστες ακριβώς πριν από την περίοδο μη μηδενικής ζήτησης. Η αδυναμία λοιπόν, των μοντέλων εξομάλυνσης οδήγησε τους ερευνητές στην αναζήτηση νέων μεθόδων και τεχνικών για την αποτελεσματική πρόβλεψη χρονοσειρών με έντονη παρουσία μηδενικών τιμών. Σημαντική είναι και η αναφορά διαφορετικών μεγεθών περιγραφής αντίστοιχων χρονοσειρών που βοήθησε στην ακριβέστερη πρόβλεψη και η υπογράμμιση της σημασίας τους. Συνηθίζεται η εφαρμογή μίας μεθοδολογίας αποσύνθεσης που εξειδικεύεται μόνο στις χρονοσειρές διακοπτόμενης ζήτησης.

Τα στατιστικά μέτρα ακρίβειας χρησιμοποιούνται συνήθως για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των μεθόδων πρόβλεψης της ζήτησης. Σε τελική ανάλυση, όμως, αυτές οι μέθοδοι θα πρέπει να κρίνονται ανάλογα με το αν πραγματικά οδηγούν σε καλύτερη απόδοση τον έλεγχο των αποθεμάτων. Εμπειρικά αξιολογούν τέσσερις μεθόδους (απλός κινητός μέσος- simple moving average, απλή εκθετική εξομάλυνση- simple exponential smoothing, μέθοδος Croston- Croston's method, καθώς και η προσέγγιση των Syntetos-Boylan - Syntetos-Boylan approximation) ως προς τη στατιστική πρόβλεψη ακρίβειας και, το πιο σημαντικό, την αποδοτικότητα του συστήματος απογραφής.

## 1.2 ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗΣ

Οι σπάνιες εμφανίσεις ζήτησης ή τα ακανόνιστα μεγέθη ζήτησης δεν αφήνουν χρόνο η ζήτηση να εκπροσωπείται από την κανονική κατανομή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ζήτηση θα ονομάζεται μη-κανονική. Με τη χρήση αυτής της ονοματολογίας, δεν σημαίνει ότι όλες οι τακτικές, μη σποραδικές και μη ογκώδεις ζητήσεις αναγκαστικά κατανέμονται κανονικά. Μια διαφορετική κατανομή μπορεί να είναι πιο κατάλληλη, αν και η υπόθεση της κανονικότητας πρέπει να αντιπροσωπεύει λογικά πολλές περιπτώσεις στον πραγματικό κόσμο.

Η ακριβής πρόβλεψη της ζήτησης είναι ένα από τα πιο κρίσιμα ζητήματα της διαχείρισης των αποθεμάτων στις βιομηχανίες.

- Το πρόβλημα μοντελοποίησης της μελλοντικής κατανάλωσης καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο για ογκώδεις (lumpy) πρότυπα, που χαρακτηρίζονται από διαστήματα στα οποία δεν υπάρχει ζήτηση και, σε περιόδους με πραγματικές εμφανίσεις ζήτησης με μεγάλες διαφορές στα επίπεδα της. Ωστόσο, πολλές από αυτές τις μεθόδους μπορεί να έχουν κακές επιδόσεις όταν η ζήτηση για ένα προϊόν είναι ογκώδης. Το επίπεδο «διόγκωσης» των δεδομένων αποτελεί ουσιαστικά ένα μέτρο που υποδεικνύει πόσο μεγάλες είναι οι διαφορές στο μέγεθος της ζήτησης όταν αυτή εμφανίζεται. Ουσιαστικά είναι σαν ένα μέτρο της διακύμανσης που εμφανίζουν οι τιμές της ζήτησης από ένα σταθερό επίπεδο που θα αντιπροσώπευε τη μέση τιμή του ύψους της ζήτησης. Η ζήτηση που είναι άνιση όσον αφορά το χρονοδιάγραμμα και τις διακυμάνσεις των ποσοτήτων, μπορεί να απαιτήσει περισσότερες επενδύσεις στην απογραφή των εμπορευμάτων ή περισσότερο χρόνο ανταπόκρισης από τον προβλέψιμο.

- Ένα στοιχείο διακοπτόμενης ζήτησης αποτελεί ένα είδος με σπάνιες εμφανίσεις της ζήτησης.

- Ένα βραδύ- σπάνιο κινούμενο είδος (slow moving item) είναι ένα στοιχείο του οποίου η μέση ζήτηση ανά περίοδο είναι χαμηλή. Αυτό μπορεί να οφείλεται στις σπάνιες εμφανίσεις της ζήτησης, το χαμηλό μέσο όρο μεγεθών ζήτησης ή και τα δύο. Η περίπτωση της «αραιής» εμφάνισης ζήτησης δεν είναι τόσο περίεργη, όμως είναι ικανή έτσι ώστε να χαρακτηριστούν τα αντίστοιχα δεδομένα ως δεδομένα με μεγάλο πλήθος μηδενικών τιμών (high level of intermittency).

- Ένα ασταθές πρότυπο ζήτησης (erratic demand item) για ένα προϊόν του οποίου το μέγεθος της ζήτησης μεταβάλλεται και είναι απρόβλεπτο.

- A clumped demand item είναι ένα είδος διακοπτόμενης ζήτησης, η οποία όταν συμβαίνει, είναι σταθερή (ή σχεδόν σταθερή).

Σε προηγούμενες έρευνες, με βάση την πρόβλεψη μόνο, διαπιστώθηκε ότι τα συστήματα κατηγοριοποίησης θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τον αριθμό των περιόδων της μηδενικής ζήτησης, καθώς και τον συντελεστή μεταβολής του μεγέθους της ζήτησης (Syntetos et al., 2005). Η ανάπτυξη των συστημάτων κατηγοριοποίησης της ζήτησης δεν έχει λάβει τόσο την ακαδημαϊκή προσοχή, όπως της αξίζει. Κανόνες κατηγοριοποίησης της ζήτησης επιβάλλουν μεθόδους πρόβλεψης και ελέγχου των αποθεμάτων που πρέπει να χρησιμοποιούνται για διαφορετικές αποθηκευτικές

μονάδες. Κατά συνέπεια, οι εν λόγω κανόνες έχουν σημαντικές επιπτώσεις όσον αφορά τα αποθέματα και την ικανοποίηση του πελάτη.

Η κατηγοριοποίηση των εναλλακτικών τρόπων ζήτησης διευκολύνει την επιλογή της μεθόδου πρόβλεψης και αποτελεί βασικό στοιχείο πολλών λογισμικών πακέτων ελέγχου απογραφής. Παρά τη σημαντικότητα αυτού του θέματος όμως, το πρόβλημα της κατηγοριοποίησης των μοντέλων της ζήτησης έχει λάβει πολύ περιορισμένη προσοχή μέχρι στιγμής στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία. (Boylan., Syntetos and Karakostas, 2008)

### 1.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΕΙΚΤΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Η αξιολόγηση της δυναμικής της μεθόδου Croston, προσεγγίζοντας την με χρήση διαφορετικών μεθόδων πρόβλεψης από την προτεινόμενη στη βιβλιογραφία είναι μία ενδιαφέρουσα άποψη που όμως χρειάζεται πρακτική αξιολόγηση. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων και τη μεταξύ τους σύγκριση, υλοποιήθηκαν αλγόριθμοι για όλες τις μεθόδους πρόβλεψης. Έπειτα, υπολογίστηκαν οι επιλεχθέντες δείκτες σφάλματος με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα σφάλματα που χρησιμοποιούνται είναι τα εξής:

- Μέσο απόλυτο σφάλμα: mean absolute error (MAE)

Η μέση απόλυτη απόκλιση ορίζεται ως το άθροισμα των απόλυτων τιμών του σφάλματος της πρόβλεψης διαιρούμενο με τον αριθμό των περιόδων  $n$ , στις οποίες έγιναν προβλέψεις. Ο δείκτης αυτός χρησιμοποιείται ως μέτρο της ακρίβειας της μεθόδου πρόβλεψης έναντι των πραγματικών τιμών. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη τόσο μικρότερη είναι ακρίβεια της μεθόδου.

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα: mean squared error (MSE)

Το μέσο σφάλμα τετραγώνου ορίζεται ως το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων διαιρούμενο με τον αριθμό των χρονικών περιόδων  $n$ , στις οποίες έγιναν προβλέψεις. Ο δείκτης αυτός είναι ομοίως μέτρο ακρίβειας της πρόβλεψης. Η διαφορά του με το μέσο απόλυτο σφάλμα είναι ότι δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στα μεγάλα σφάλματα. Το MSE είναι η μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων των προβλεπόμενων τιμών της χρονοσειράς από τις αντίστοιχες πραγματικές. Η μονάδα μέτρησης του MSE όμως είναι εκφρασμένη στη μονάδα μέτρησης των τιμών των παρατηρήσεων υψωμένη όμως στο τετράγωνο.

- Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό: Mean Absolute Percentage Error (MAPE):



Το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα εξετάζει τη συμπεριφορά της απόλυτης τιμής του σφάλματος της πρόβλεψης σε σχέση με την πραγματική τιμή της χρονοσειράς. Το MAPE ορίζεται ως το άθροισμα των απόλυτων τιμών των σφαλμάτων της πρόβλεψης προς τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές της χρονοσειράς διαιρούμενο με τον αριθμό των χρονικών περιόδων  $n$ , στις οποίες έγιναν προβλέψεις. Το MAPE μετρά το μέγεθος του σφάλματος σε ποσοστιαίες μονάδες. (Jarrett J., 2002)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ

### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Γενικότερα, η εκθετική εξομάλυνση (Exponential Smoothing) είναι μέθοδος πρόβλεψης, η οποία προεκτείνει στοιχεία των ιστορικών δεδομένων στο μέλλον. Το μοντέλο της αντίστοιχης πρόβλεψης εφαρμόζεται στη δοθείσα χρονοσειρά αφού πρώτα τα αντίστοιχα δεδομένα έχουν εξομαλυνθεί έτσι ώστε να απομονωθούν τα πραγματικά πρότυπα από τις καθαρά τυχαίες διακυμάνσεις.

Οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στο πεδίο των προβλέψεων λόγω της απλότητας τους, των περιορισμένων απαιτήσεων τους για αποθήκευση δεδομένων και του μειωμένου υπολογιστικού φόρτου που απαιτούν. Επίσης, παρά την απλότητα που τις διακρίνει, σύμφωνα με αποτελέσματα πρακτικών μελετών, παρουσιάζουν ικανοποιητικά ποσοστά ακρίβειας σε σχέση με πιο πολύπλοκες μεθόδους, διότι δεν επηρεάζονται από τις ιδιομορφίες των προτύπων των δεδομένων ούτε από τυχαία εμφανιζόμενες ακραίες τιμές.

Σύμφωνα με τη Διμελή (2013), η συγκεκριμένη μέθοδος βασίζεται στην αρχή της υιοθέτησης φθινουσών σταθμίσεων για τις πιο παλιές παρατηρήσεις μιας χρονολογικής σειράς. Μια άλλη προσέγγιση, για να ληφθεί ένα εξομαλυντής που θα αντιδράσει για να επεξεργαστεί τις αλλαγές γρηγορότερα, είναι να δώσει γεωμετρικά φθίνουσα βαρύτητα στις τελευταίες παρατηρήσεις.

Σε κάθε χρονική στιγμή, υπολογίζεται το σφάλμα με σκοπό να κρατήσει την τιμή της πρόβλεψης αρκετά κοντά στο επίπεδο της πραγματικής χρονοσειράς. Για την παραγωγή της πρόβλεψης κάθε χρονική στιγμή, πρέπει να έχει υπολογιστεί η τιμή του επιπέδου από την πραγματική χρονοσειρά για την προηγούμενη χρονική στιγμή.

Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι η εκτιμώμενη σειρά σε χρόνο  $t$  βασίζεται στην προηγούμενη εκτίμηση προσαρμοσμένη στο σφάλμα εκτίμησης το χρόνο  $t - 1$ . Έστω, η πρόβλεψη για την αμέσως επόμενη περίοδο, αυτή ορίζεται ως:

$$Y_{t+1} = \alpha * Y_t + (1-\alpha) * \hat{Y}_t, \quad \text{όπου } 0 < \alpha \leq 1$$

Η πρόβλεψη  $Y_{t+1}$  αποτελεί το σταθμικό άθροισμα της αμέσως προηγούμενης παρατήρησης  $Y_t$  με συντελεστή  $\alpha$  και αυτής της αμέσως προηγούμενης πρόβλεψης  $\hat{Y}_t$ , με στάθμιση  $1 - \alpha$ .

## 2.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ

Ο προσδιορισμός της παραμέτρου εξομάλυνσης (smoothing parameter)  $\alpha$  είναι το πιο σημαντικό μέρος για την εξομάλυνση και την μελλοντική πρόβλεψη της χρονοσειράς μας. Η σταθερά  $\alpha$  αντανακλά το βαθμό εξομάλυνσης που θέλουμε να πετύχουμε με τη μέθοδο αυτή. Σχετικά με την τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης, η τιμή του δεν είναι μονοσήμαντη. Οι τιμές που λαμβάνει ανήκουν στο διάστημα 0 έως 1 και γενικά το κριτήριο που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE). Μικρές τιμές της  $\alpha$  οδηγούν σε μεγαλύτερη στάθμιση στις παλαιότερες τιμές και έτσι, τυχόν μεγάλες διακυμάνσεις στις πρόσφατες παρατηρήσεις της σειράς δεν θα επηρεάσουν σημαντικά την πρόβλεψη. Η μηδενική τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης σημαίνει ότι η πρόβλεψη θα μείνει ίδια για όλες τις χρονικές περιόδους. Γι' αυτό, χρησιμοποιείται ένα κατώτατο όριο για την τιμή της παραμέτρου έτσι ώστε να αποφεύγεται η μηδενική τιμή. Ενώ, με την τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης ίσος με τη μονάδα, η τιμή της πρόβλεψης ταυτίζεται κάθε φορά με την τιμή της προηγούμενης χρονικής περιόδου, δηλαδή είναι ίση με την τελευταία τιμή της χρονοσειράς.

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Καθορισμός μιας τιμής  $\alpha$ , όπου  $0 < \alpha \leq 1$ .
- Εκτίμηση του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (MSE) δεδομένου του  $\alpha$ .
- Επανάληψη της διαδικασίας επιλογής  $\alpha$  και καθορισμού MSE για πολλές διαδοχικές τιμές της  $\alpha$ .
- Επιλογή του άριστου  $\alpha$  ως αυτού που ελαχιστοποιεί το MSE κριτήριο.

Αν ο μέσος όρος της χρονοσειράς μεταβάλλεται, ο συντελεστής εξομάλυνσης θα πρέπει να είναι μεγάλος έτσι ώστε οι προβλέψεις να παρακολουθούν τις αντίστοιχες μεταβολές των δεδομένων. Αντίθετα, αν ο μέσος όρος είναι σχετικά σταθερός, τότε η τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης θα είναι μικρή.

Γενικότερα, η εκθετική εξομάλυνση είναι μέθοδος πρόβλεψης, η οποία προεκτείνει στοιχεία των ιστορικών δεδομένων στο μέλλον. Το μοντέλο της αντίστοιχης πρόβλεψης εφαρμόζεται στη δοθείσα χρονοσειρά αφού πρώτα τα αντίστοιχα δεδομένα έχουν εξομαλυνθεί έτσι ώστε να απομονωθούν τα πραγματικά πρότυπα από τις καθαρά τυχαίες διακυμάνσεις.

Οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στο πεδίο των προβλέψεων λόγω της απλότητας τους, των περιορισμένων απαιτήσεων τους για αποθήκευση δεδομένων και του μειωμένου υπολογιστικού φόρτου που απαιτούν. Επίσης, παρά την απλότητα που τις διακρίνει, σύμφωνα με αποτελέσματα πρακτικών μελετών, παρουσιάζουν ικανοποιητικά ποσοστά ακρίβειας σε σχέση με πιο πολύπλοκες μεθόδους, διότι δεν επηρεάζονται από τις ιδιομορφίες των προτύπων των δεδομένων και ούτε από τυχαία εμφανιζόμενες ακραίες τιμές.

Η εκθετική εξομάλυνση συχνά χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της ζήτησης σε συστήματα ελέγχου αποθεμάτων. Ωστόσο, εάν η ζήτηση είναι διακοπτόμενη, η μέθοδος αυτή παράγει σχεδόν πάντα ακατάλληλα επίπεδα αποθεμάτων. Η μέθοδος του Croston είναι κατάλληλη, εάν η ζήτηση εμφανίζεται τυχαία, με πολλές χρονικές περιόδους που δεν υπάρχει ζήτηση, όπου όταν υπάρχει ζήτηση, τα ιστορικά δεδομένα είναι τυχαία κατανομημένα, αυτόνομα ή σχεδόν ανεξάρτητα από το χρονικό διάστημα της ζήτησης. Τέτοια πρότυπα ζήτησης είναι γνωστά ως «θάμορφη ζήτηση» ή διακοπτόμενη, ακανόνιστη, τυχαία ή σποραδική.

Η ανάλυση δείχνει ότι η διακοπτόμενη ζήτηση σχεδόν πάντα δημιουργεί ακατάλληλα επίπεδα των αποθεμάτων. Η ζήτηση για σταθερές ποσότητες σε τακτά χρονικά διαστήματα μπορεί να παράγει τα επίπεδα των αποθεμάτων μέχρι να διπλασιάσει την ποσότητα που πραγματικά χρειάζεται. Μια μέθοδος για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες περιγράφεται, χρησιμοποιώντας ξεχωριστές εκτιμήσεις για το μέγεθος της ζήτησης, και τη συχνότητα της ζήτησης. Οι κανόνες για τον καθορισμό των επιπέδων των αποθεμάτων ασφαλείας, πρέπει επίσης να ρυθμίζονται πριν εξαντληθούν τα αποθέματα.

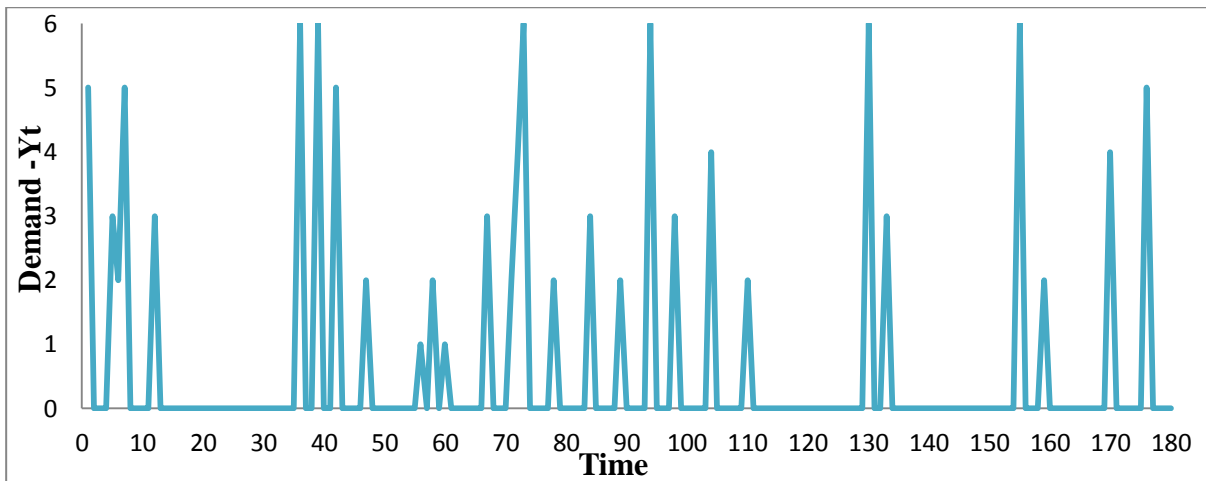
Τα μοντέλα εκθετικής εξομάλυνσης χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με τη γενική μορφή της γραφικής παράστασης της χρονοσειράς. Σύμφωνα λοιπόν με την κατηγοριοποίηση αυτή προκύπτουν τέσσερα μοντέλα τάσης: τα σταθερού επιπέδου, γραμμικής τάσης, εκθετικής τάσης και φθίνουσας τάσης.

Στην παρούσα εργασία, εφαρμόζουμε ένα παράδειγμα 180 παρατηρήσεων του Croston που αφορούν μηδενικές και μη μηδενικές ζητήσεις, οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 2.α του παραρτήματος. Στη συνέχεια, θέλουμε να προβλέψουμε τις τιμές της ζήτησης για διάφορες τιμές του  $\alpha$ . Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι μη μηδενικές ζητήσεις στον χρόνο στον οποίο συμβαίνουν.

**Πίνακας 2.2.1** Δεδομένα του Croston.

<b>Time</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>36</b>	<b>39</b>	<b>42</b>	<b>47</b>	<b>56</b>	<b>58</b>	<b>60</b>	<b>67</b>	<b>71</b>	
<b>Demand</b>	5	3	2	5	3	6	6	5	2	1	2	1	3	2	
<b>Time</b>	<b>72</b>	<b>73</b>	<b>78</b>	<b>84</b>	<b>89</b>	<b>94</b>	<b>98</b>	<b>104</b>	<b>110</b>	<b>130</b>	<b>133</b>	<b>155</b>	<b>159</b>	<b>170</b>	<b>176</b>
<b>Demand</b>	4	6	2	3	2	6	3	4	2	6	3	6	2	4	5

**Διάγραμμα 2.2.1** Δεδομένα του Croston



Ο μέσος όρος ζητήσεων ανά μεσοδιάστημα (Time average of demands per review interval) είναι 0.58, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{180} Y_t = \frac{1}{n} * (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t), \text{ όπου } Y_t \text{ είναι οι τιμές των ζητήσεών μας}$$

και n το πλήθος των ζητήσεων.

Στην πρώτη περίπτωση ξεκινάμε την ανάλυση της πρόβλεψης με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης (Simple Exponential Smoothing) με αρχική τιμή τον μέσο όρο των 180 παρατηρήσεων ( $Y_{1/0}=0.58$ ).

Έπειτα, για  $t=1$ :  $Y_{2/1} = \alpha * Y_1 + (1-\alpha) Y_{1/0} = 1.46$  ( $\alpha=0,2$ ) είναι δηλαδή η πρόβλεψη για το  $Y_2$  που διενεργείται τη χρονική στιγμή  $t=1$ . Για  $t=2$ :  $Y_{3/2} = \alpha * Y_2 + (1-\alpha) Y_{2/1} = 1.17$  τη χρονική στιγμή  $t=2$ . Με αυτόν τον τρόπο συνεχίζουμε τις προβλέψεις μας και τέλος για  $t=180$ :  $Y_{180/179} = \alpha * Y_{179} + (1-\alpha) Y_{179/178} = 0.63$  ( $\alpha=0,2$ ) είναι δηλαδή η πρόβλεψη για το  $Y_{180}$  που διενεργείται τη χρονική στιγμή  $t=179$ . Αναλυτικά τα αποτελέσματα και για τις 180 παρατηρήσεις παρουσιάζονται στον 2.β πίνακα του παραρτήματος. Όπου  $Y_t$ : η πραγματική τιμή τη χρονική στιγμή t και  $Y_{t/t-1}$ : η εκτιμημένη τιμή για τη χρονική στιγμή t, που διενεργείται τη στιγμή t-1.

### 2.3 ΜΕΤΡΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το επόμενο βήμα της συγκεκριμένης πρόβλεψης είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $f_t$  για μια τιμή  $Y$  σε χρόνο  $t$  (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_t - f_t$ , όπου η εκτίμηση  $f_t$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}$ . Ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει. Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_t - \tilde{Y}_{t/t-1}$  ( $f_t = \tilde{Y}_{t/t-1}$ ) θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας. Για παράδειγμα,  $e_1 = Y_1 - \tilde{Y}_{1/0} = 5 - 0.58 = 4.42$ ,  $e_2 = Y_2 - \tilde{Y}_{2/1} = 0 - 1.46 = -1.46$  . . . και τέλος  $e_{180} = Y_{180} - \tilde{Y}_{180/179} = 0 - 0.63 = -0.63$ . Αναλυτικά τα αποτελέσματα και για τις 180 παρατηρήσεις παρουσιάζονται στον 2.σ πίνακα του παραρτήματος.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1| = 4.42$ ,  $|e_2| = 1.46$ , . . . , και τέλος  $|e_{180}| = 0.63$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2 = 19.56$ ,  $e_2^2 = 2.14$ , . . . , και τέλος  $e_{180}^2 = 0.40$ . Όλα τα αποτελέσματα παραθέτονται στον πίνακα 2.σ του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1 = Y_1 - f_1$ ,  $e_2 = Y_2 - f_2$ , . . . , και  $e_n = Y_n - f_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

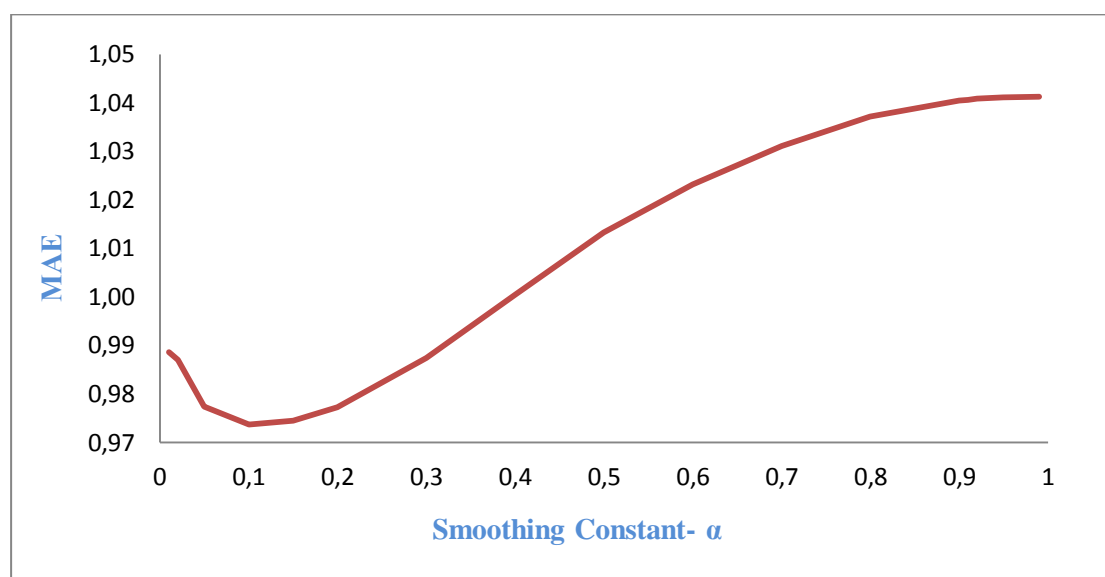
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |e_t|$
- και το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n e_t^2$

Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 2.3.1** MAE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή τον μέσο όρο 0.58.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)
0,01	MAE	0,9886
0,02	MAE	0,9870
0,05	MAE	0,9774
0,1	MAE	0,9737
0,15	MAE	0,9744
0,2	MAE	0,9772
0,3	MAE	0,9874
0,4	MAE	1,0005
0,5	MAE	1,0132
0,6	MAE	1,0232
0,7	MAE	1,0311
0,8	MAE	1,0372
0,9	MAE	1,0404
0,91	MAE	1,0406
0,92	MAE	1,0408
0,95	MAE	1,0411
0,99	MAE	1,0413

**Διάγραμμα 2.3.1** MAE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή τον μέσο όρο 0.58.



Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 0.9886 για  $\alpha=0.01$  όπου μειώνονται μέχρι το κατώτερο σημείο 0.9737 για  $\alpha=0.1$  και στη συνέχεια αυξάνονται σταδιακά μέχρι το 1.0413 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το

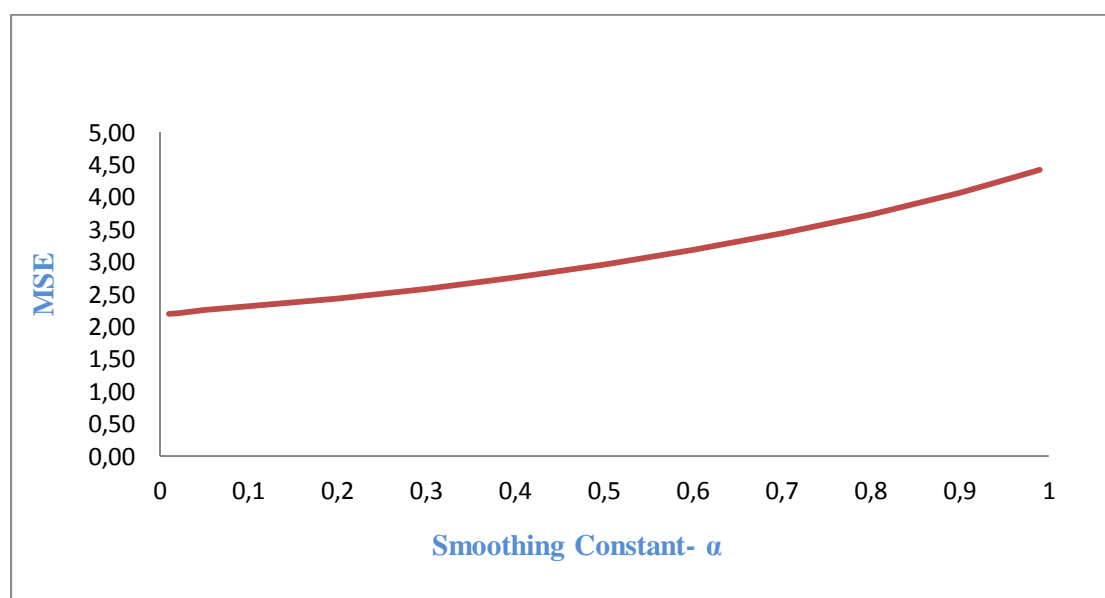
συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.1$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 0.9737.

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 2.3.2** MSE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή τον μέσο όρο 0.58.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)
0,01	MSE	2,1946
0,02	MSE	2,2094
0,05	MSE	2,2521
0,1	MSE	2,3144
0,15	MSE	2,3728
0,2	MSE	2,4349
0,3	MSE	2,5803
0,4	MSE	2,7546
0,5	MSE	2,9552
0,6	MSE	3,1821
0,7	MSE	3,4382
0,8	MSE	3,7296
0,9	MSE	4,0656
0,91	MSE	4,1021
0,92	MSE	4,1392
0,95	MSE	4,2541
0,99	MSE	4,4163

**Διάγραμμα 2.3.2** MSE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή τον μέσο όρο 0.58.





Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου αυξάνονται σταδιακά από το 2.1946 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 4.4163 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.1946 για  $\alpha=0.01$ .

Έπειτα, συνεχίζουμε την ανάλυση της πρόβλεψης με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης (Simple Exponential Smoothing) με αρχική τιμή την πρώτη τιμή ζήτησης για  $t=1$ , δηλαδή το 5.

Για  $t=1$ :  $Y_{2/1} = \alpha * Y_1 + (1-\alpha) Y_{1/0} = 5$  ( $\alpha=0.2$ ) είναι δηλαδή η πρόβλεψη για το  $Y_2$  που διενεργείται τη χρονική στιγμή  $t=1$ . Για  $t=2$ :  $Y_{3/2} = \alpha * Y_2 + (1-\alpha) Y_{2/1} = 0.5$  τη χρονική στιγμή  $t=2$ . Με αυτόν τον τρόπο συνεχίζουμε τις προβλέψεις μας και τέλος για  $t=180$ :  $Y_{180/179} = \alpha * Y_{179} + (1-\alpha) Y_{179/178} = 0.0045$  ( $\alpha=0.2$ ) είναι δηλαδή η πρόβλεψη για το  $Y_{180}$  που διενεργείται τη χρονική στιγμή  $t=179$ . Αναλυτικά τα αποτελέσματα και για τις 180 παρατηρήσεις παρουσιάζονται στον 2.d πίνακα του παραρτήματος. Όπου  $Y_t$ : η πραγματική τιμή τη χρονική στιγμή  $t$  και  $Y_{t/t-1}$ : η εκτιμημένη τιμή για τη χρονική στιγμή  $t$ , που διενεργείται τη στιγμή  $t-1$ .

Το επόμενο βήμα της συγκεκριμένης πρόβλεψης είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $f_t$  για μια τιμή  $Y$  σε χρόνο  $t$  (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_t - f_t$ , όπου η εκτίμηση  $f_t$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}$ . Ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει. Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_t - \tilde{Y}_{t/t-1}$  ( $f_t = \tilde{Y}_{t/t-1}$ ) θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας. Για παράδειγμα,  $e_1 = Y_1 - \tilde{Y}_{1/0} = 5 - 5 = 0$ ,  $e_2 = Y_2 - \tilde{Y}_{2/1} = 0 - 5 = -5$  . . . και τέλος  $e_{180} = Y_{180} - \tilde{Y}_{180/179} = 0 - 0.0045 = -0.0045$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1| = 0$ ,  $|e_2| = 5$ , . . ., και τέλος  $|e_{180}| = 0.0045$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2 = 0$ ,  $e_2^2 = 25$ , . . ., και τέλος  $e_{180}^2 = 0.00002$ . Όλα τα αποτελέσματα παραθέτονται στον πίνακα 2.e του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1 = Y_1 - f_1$ ,

$e_2 = Y_2 - f_2, \dots$ , και  $e_n = Y_n - f_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

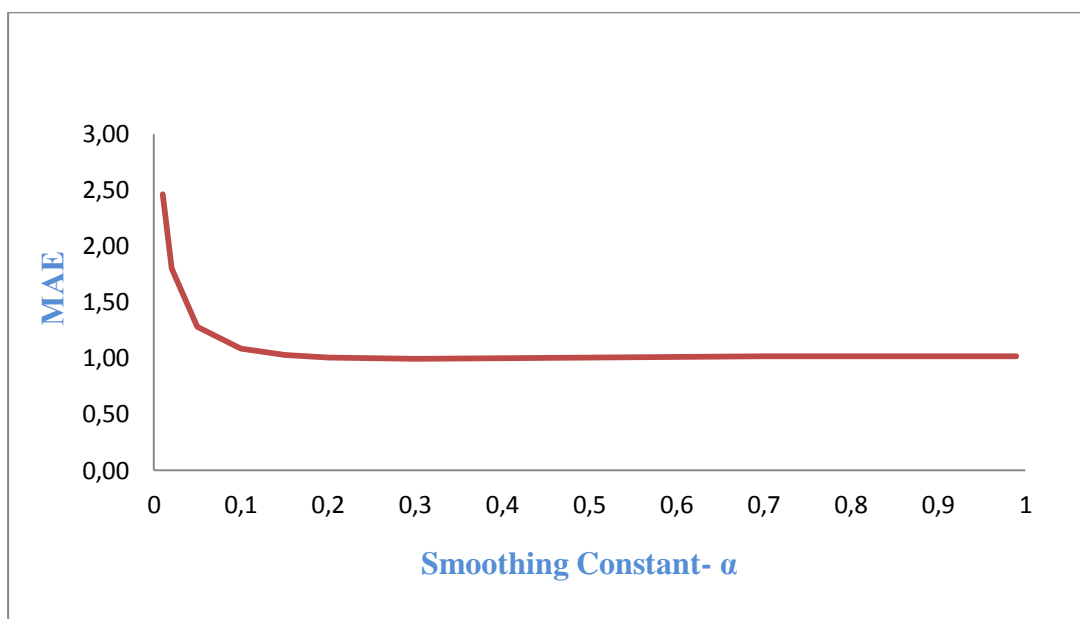
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |e_t|$
- και το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n e_t^2$

Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Παρουσιάζεται, λοιπόν, το κριτήριο MAE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 2.3.3** MAE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)
0,01	MAE	2,465
0,02	MAE	1,800
0,05	MAE	1,278
0,1	MAE	1,088
0,15	MAE	1,0270
0,2	MAE	1,004723
0,3	MAE	0,9944
0,4	MAE	1,0001
0,5	MAE	1,0078
0,6	MAE	1,0130
0,7	MAE	1,0167
0,8	MAE	1,0187
0,9	MAE	1,0186
0,91	MAE	1,0185
0,92	MAE	1,0183
0,95	MAE	1,0178
0,99	MAE	1,0169

**Διάγραμμα 2.3.3** MAE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή το 5.



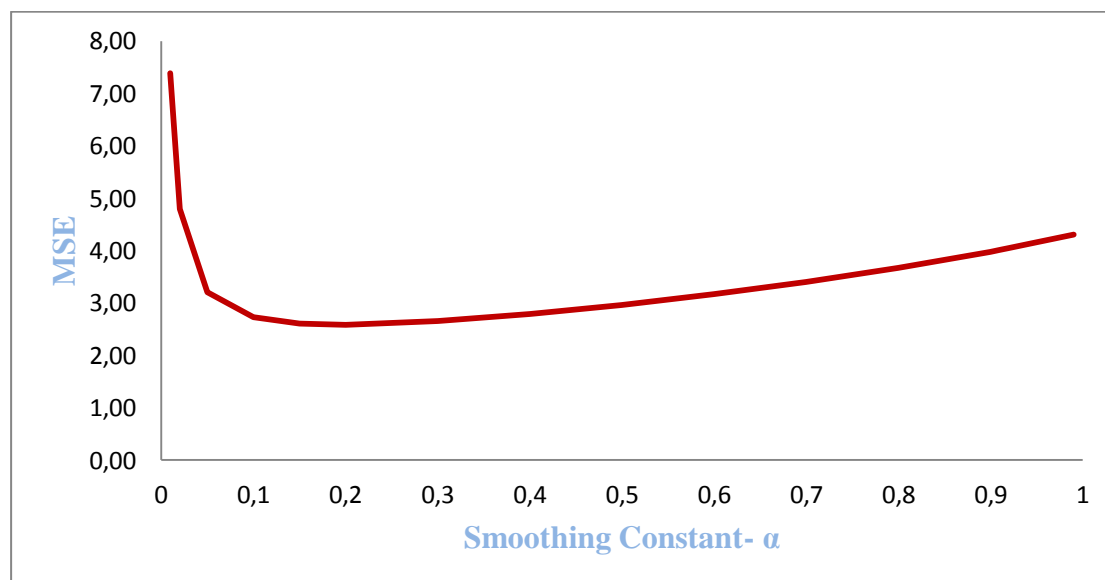
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 2.465 για  $\alpha=0.01$ , 1.80 για  $\alpha=0.02$  και στη συνέχεια μειώνονται σταδιακά μέχρι το 0.9944 για  $\alpha=0.3$  ενώ από το  $\alpha=0.4$  αυξάνονται σταδιακά (1.001) μέχρι το  $\alpha=0.8$  (1.0187) και στο τέλος από το 0.9 (1.0186) μειώνεται στο 1.0169 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.3$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 0.9944.

Παρακάτω, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 2.3.4** MSE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)
0,01	MSE	7,385
0,02	MSE	4,791
0,05	MSE	3,207
0,1	MSE	2,722
0,15	MSE	2,604
0,2	MSE	2,585
0,3	MSE	2,655
0,4	MSE	2,791
0,5	MSE	2,963
0,6	MSE	3,166
0,7	MSE	3,399
0,8	MSE	3,6674
0,9	MSE	3,9807
0,91	MSE	4,015
0,92	MSE	4,050
0,95	MSE	4,157
0,99	MSE	4,310

**Διάγραμμα 2.3.4** MSE Simple Exponential Smoothing με αρχική τιμή το 5.



Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου μειώνονται κατακόρυφα από το 7.385 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 2.585 για  $\alpha=0.2$ . Έπειτα, αυξάνεται πολύ σταδιακά από το 2.655 για  $\alpha=0.3$  μέχρι το 4.310 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.585 για  $\alpha=0.2$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ CROSTON

### 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η εκθετική εξομάλυνση συχνά χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της ζήτησης σε συστήματα ελέγχου αποθεμάτων. Ωστόσο, εάν η ζήτηση είναι διακοπτόμενη, η μέθοδος αυτή παράγει σχεδόν πάντα ακατάλληλα επίπεδα αποθεμάτων. Η μέθοδος του Croston είναι κατάλληλη, εάν η ζήτηση εμφανίζεται τυχαία, με πολλές χρονικές περιόδους που δεν υπάρχει ζήτηση, όπου όταν υπάρχει ζήτηση, τα ιστορικά δεδομένα είναι τυχαία κατανομημένα, αυτόνομα ή σχεδόν ανεξάρτητα από το χρονικό διάστημα της ζήτησης. Τέτοια πρότυπα ζήτησης είναι γνωστά ως "άμορφη ζήτηση" ή διακοπτόμενη, ακανόνιστη, τυχαία ή σποραδική.

Η ανάλυση δείχνει ότι η διακοπτόμενη ζήτηση σχεδόν πάντα δημιουργεί ακατάλληλα επίπεδα των αποθεμάτων. Η ζήτηση για σταθερές ποσότητες σε τακτά χρονικά διαστήματα μπορεί να παράγει τα επίπεδα των αποθεμάτων μέχρι να διπλασιάσει την ποσότητα που πραγματικά χρειάζεται. Μια μέθοδος για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες περιγράφεται, χρησιμοποιώντας ξεχωριστές εκτιμήσεις για το μέγεθος της ζήτησης, και τη συχνότητα της ζήτησης. Οι κανόνες για τον καθορισμό των επιπέδων των αποθεμάτων ασφαλείας, πρέπει επίσης να ρυθμιστούν πριν εξαντληθούν τα αποθέματα.

Το 1972, ο Croston πρότεινε μια εναλλακτική μέθοδο, η οποία λαμβάνει υπόψη τόσο το μέγεθος της ζήτησης όσο και το χρόνο μεταξύ των ζητήσεων. Στην πράξη, ο Croston εξήγαγε προβλέψεις εφαρμόζοντας ανεξάρτητα απλή εκθετική εξομάλυνση τόσο στις μη μηδενικές τιμές των χρονοσειρών όσο και στα χρονικά διαστήματα μεταξύ των μη μηδενικών τιμών των χρονοσειρών. Με τη διαδικασία αυτή η οποία ονομάζεται αποσύνθεση κατά Croston (Croston Decomposition) μπορεί να υπολογιστεί και έχει φυσική σημασία η μέση τιμή των μη μηδενικών ζητήσεων (Demand Size) αλλά και η μέση τιμή του διαστήματος μεταξύ των ζητήσεων (Intermittent Demand Intervals) ως απλοί μέσοι όροι. Οι δύο χρονοσειρές προεκτείνονται ανεξάρτητα, με χρήση της μεθόδου εκθετικής εξομάλυνσης σταθερού επιπέδου. Στη βιβλιογραφία ως παράμετρος εξομάλυνσης στην εφαρμογή της μεθόδου είναι συνήθως η χρήση της τιμής  $\alpha=0,05$ .

Οι Willemain et al. σύγκριναν την ενιαία εκθετική εξομάλυνση με τη μέθοδο του Croston. Η πρώτη είναι η μέθοδος στατιστικής πρόβλεψης που χρησιμοποιείται πιο συχνά στην πράξη και η τελευταία είναι η εκδοχή που υποστηρίζεται στην διαδικασία

της παραγωγής. Ο Croston σημείωσε ότι τα συστήματα εκθετικής εξομάλυνσης χρησιμοποιούνται συνήθως σε μεγάλα συστήματα ελέγχου αποθεμάτων, αλλά αυτή η εκθετική εξομάλυνση οδηγεί σε επίπεδα αποθεμάτων και διακοπές αποθεμάτων που είναι άχρηστα. Εκθετική εξομάλυνση εφαρμόζεται στη συνέχεια σε κάθε χρονοσειρά ξεχωριστά.

Ο Croston θέλησε, η ζήτηση να εμφανιστεί ως μια διαδικασία Bernoulli, καθιστώντας τα διαστήματα μεταξύ των ζητήσεων ανεξάρτητα και ταυτόχρονα κατανομημένα γεωμετρικά. Στην περίπτωση μιας διωνυμικής κατανομής, το πρόβλημα που έχουμε είναι η εύρεση της πιθανότητας  $x$  επιτυχιών σε  $n$  ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli. Επιπλέον, ένα τυχαίο πείραμα λέγεται πείραμα Bernoulli αν είναι δυνατόν να καταλήξει σε ένα από δύο μόνο, ξένα μεταξύ τους, ενδεχόμενα που η ένωσή τους αποτελεί τον δειγματικό χώρο. Συνήθως χρησιμοποιούμε τους όρους «επιτυχία» (success -S) και «αποτυχία» (failure -F) για τα ενδεχόμενα αυτά και συμβολίζουμε με  $p = P(S)$  και  $q = 1-p = P(F)$ ,  $0 \leq p \leq 1$ . Ο δειγματικός χώρος, δηλαδή, σ' ένα πείραμα Bernoulli αποτελείται από δύο μόνο σημεία, τα S και F (Χατζηνικολάου, 2002). Παραδείγματα πειραμάτων Bernoulli αποτελούν το στρίψιμο ενός νομίσματος (κεφάλι-γράμματα), η ποιότητα ενός βιομηχανικού προϊόντος (ελαττωματικό-μη ελαττωματικό), η γέννηση ενός παιδιού (αγόρι - κορίτσι) κ.λ.π. Η τυχαία μεταβλητή  $X$  λέγεται τυχαία μεταβλητή Bernoulli (Bernoulli random variable) και η κατανομή πιθανότητας της  $X$  λέγεται κατανομή Bernoulli (Bernoulli distribution). Με τον όρο γεωμετρική κατανομή εννοούμε έστω  $X$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Θα λέμε ότι η  $X$  ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή (geometric distribution) με παράμετρο  $p$  και θα συμβολίζουμε με  $X \sim G(x;p)$  αν  $P(X=x) = p q^x$ ,  $x=0,1,2,\dots$ ,  $0 < p < 1$ ,  $q=1-p$ .

Επίσης, ανέλαβε περαιτέρω το μέγεθος της ζήτησης να είναι κανονική κατανομή. Η συμβατική ενιαία εκθετική εξομάλυνση ενημερώνει και υπολογίζει την απογραφή εμπορευμάτων κάθε περίοδο είτε έχει είτε δεν έχει εμφανιστεί ζήτηση. Ο Croston έδειξε ότι όταν η σταθερή ζήτηση του μεγέθους  $\mu$  (μέση τιμή της μη μηδενικής ζήτησης) εμφανίζεται τακτικά κάθε περίοδο  $p$  (μέσος όρος των χρονικών περιόδων μεταξύ των ζητήσεων), η εκτιμώμενη ζήτηση ανά περίοδο σε σταθερή κατάσταση δεν είναι  $\mu/p$ . Όταν η ζήτηση είναι τυχαία, με μέση τιμή  $p$  και διακύμανση  $\sigma^2$  και έχει μια πιθανότητα Bernoulli  $1/p$ , που παρατηρείται σε κάθε υπό εξέταση περίοδο, η εκτίμηση γίνεται αμέσως μετά από μια ζήτηση που εμφανίζεται και έχει την αναμενόμενη τιμή.

Η μέθοδος του Croston καθιστά διαφορετικές εκτιμήσεις εκθετικής εξομάλυνσης του μέσου μεγέθους της ζήτησης και το μέσο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων. Η μέθοδος ενημερώνει τις εκτιμήσεις, αφού σημειωθεί ζήτηση, εάν η προθεσμία επανεξέτασης  $t$  δεν έχει ζήτηση, η μέθοδος αυξάνει μόνο τον αριθμό των χρονικών περιόδων από την τελευταία ζήτηση. Οι εκτιμήσεις ενημερώνονται μόνο όταν υπάρχει ζήτηση. Ο Croston έδειξε, επίσης, ότι η αναμενόμενη τιμή της εκτίμησης αμέσως μετά από ζήτηση είναι αμερόληπτη. Η διακύμανση είναι χαμηλότερη από ότι εκείνη την εκτίμηση της συμβατικής εκθετικής εξομάλυνσης. Όταν η ζήτηση παρουσιάζεται κάθε διάστημα ανασκόπησης, της μεθόδου Croston είναι ταυτόσημη με την συμβατική εκθετική εξομάλυνση.

Ο Croston, το 1972, έδειξε την ακαταλληλότητα της εκθετικής εξομάλυνσης ως μια μέθοδο πρόβλεψης σχετικά με την διακοπτόμενη ζήτηση. Θεωρώντας, λοιπόν, ένα σύστημα ελέγχου των αποθεμάτων ενημερώνονται ζητήσεις καθορισμένες, χρονικά διαστήματα μεταξύ των ζητήσεων τα οποία είναι πολύ μικρότερα από τους χρόνους μεταξύ των διαδοχικών ζητήσεων για το προϊόν.

Αρχικά, υπέθεσε ζήτηση μεγέθους ( $\mu$ ) να συμβαίνει κάθε ( $p$ ) διαστήματα. Συνεπώς, αν η πρώτη τιμή της ζήτησης συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $t=1$  η ζήτηση  $Y_t$  παρουσιάζεται ως:

$$Y_t = \begin{cases} \mu, & t = np + 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Όπου  $n=0,1,2,\dots$ , και  $p \geq 1$

Σύμφωνα με τη μέθοδό του, πραγματοποιείται εκθετική εξομάλυνση ξεχωριστά στο μέγεθος των ζητήσεων και στα διαστήματα μεταξύ αυτών. Η μέθοδος ενημερώνει τις εκτιμήσεις καθώς υπάρχουν ζητήσεις. Αν στην περίοδο εξέτασης  $t$  δεν υπάρχει ζήτηση, η μέθοδος αυξάνει μόνο τον αριθμό των χρονικών περιόδων από την τελευταία ζήτηση.

**Αν  $Y_t=0$ ,**

$$Z'_t = Z'_{t-1}$$

$$P'_t = P'_{t-1}$$

$$q = q + 1$$

**Αλλιώς,**

$$Z'_t = Z'_{t-1} + \alpha (Y_t - Z'_{t-1})$$

$$P'_t = P'_{t-1} + \alpha (q - P'_{t-1})$$

$$q = 1$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,

$q_t$  = το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση,

$P''_t$  = το εκθετικά εξομαλυμένο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ,

$Z''_t$  = το εκθετικά εξομαλυμένο μέγεθος της ζήτησης, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ .

Συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του μεγέθους της ζήτησης και των διαστημάτων μεταξύ τους, έχουμε την εκτίμηση της μέσης ζήτησης για την επόμενη περίοδο. Δηλαδή:

$$Y''_t = \frac{Z''_t}{P''_t}$$

Οι αποφάσεις για το σημείο αναπαραγωγής λαμβάνουν χώρα μόνο στις χρονικές περιόδους, οι οποίες ακολουθούνται με ζήτηση, σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$R_t = Z''_t + K * m_t$$

Όπου  $R_t$  = το σημείο αναπαραγωγής στο οποίο το απόθεμα αυξάνεται,

$m_t$  = η μέση εκτιμημένη τυπική απόκλιση των σφαλμάτων της πρόβλεψης της ζήτησης και,

$K$  = ο συντελεστής ασφαλείας.

### 3.2 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CROSTON (ASSUMPTIONS OF CROSTON'S MODEL)

Τρεις ακόμη υποθέσεις έγιναν από τον Croston στην ανάπτυξη του μοντέλου οι οποίες είναι οι εξής: η ανεξαρτησία μεταξύ του μεγέθους της ζήτησης και τα διαστήματα μεταξύ της ζήτησης, την ανεξαρτησία των διαδοχικών μεγεθών και της ανεξαρτησίας των διαδοχικών διαστημάτων μεταξύ της ζήτησης. Όσον αφορά την τελευταία υπόθεση, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η πιθανότητα μια ζήτηση που συμβαίνει να είναι ανεξάρτητη από το χρονικό διάστημα από την τελευταία εμφάνιση ζήτησης, έτσι ώστε αυτή η υπόθεση κατανομής είναι σταθερή ανεξάρτητα από τα χρονικά διαστήματα μεταξύ της ζήτησης.



### 3.3 THE SIZE-INTERVAL METHOD

Η μέθοδος SI συγκρίθηκε με τη SES (Simple Exponential Smoothing) σε θεωρητικά δεδομένα ζήτησης που δημιουργούνται σε ένα ευρύ φάσμα πιθανών συνθηκών. Θεωρήθηκαν πολλοί διαφορετικοί μέσοι όροι μεταξύ των διαστημάτων της ζήτησης (αρνητική εκθετική κατανομή), εξομάλυνση σταθερών τιμών, οι χρόνοι παράδοσης και οι κατανομές του μεγέθους της ζήτησης (αρνητική εκθετική, Erlang και ορθογώνια). Τα αποτελέσματα έχουν αναφερθεί στην μορφή της αναλογίας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) από τη μια μέθοδο με εκείνο της άλλης. Για διαφορετικό παράγοντα συνδυασμών δοκίμασε σε αυτό το πείραμα προσομοίωσης τη μέθοδο SI η οποία ήταν ανώτερη της SES για τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των ζητήσεων και ήταν μεγαλύτερη από 1.25 περιόδους επανεξέτασης. Με τον τρόπο αυτό, οι συγγραφείς έδειξαν πόσο η διακοπτόμενη ζήτηση θα πρέπει να είναι, ώστε να επωφεληθούν από τη μέθοδο SI (βασιζόμενη στη μέθοδο του Croston) περισσότερο από τη SES. Σε αυτό το στάδιο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η εκτίμηση της μέσης ζήτησης είναι πανομοιότυπη μεταξύ της μεθόδου του Croston και της μεθόδου SI.

Η έρευνα στον τομέα της πρόβλεψης και του ελέγχου των αποθεμάτων για τα στοιχεία της διακοπτόμενης ζήτησης έχει αναπτυχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια με νέα αποτελέσματα εφαρμοσμένα σε λογισμικό προϊόντων λόγω της πρακτικής τους σημασίας (Fildes et al., 2008). Η απλή εκθετική εξομάλυνση (SES) χρησιμοποιείται ευρέως στη βιομηχανία για να ασχοληθεί με τις πωλήσεις/δεδομένα της ζήτησης, αλλά είναι ακατάλληλη στο πλαίσιο της διακοπτόμενης ζήτησης. Αντίθετα, η μέθοδος του Croston θεωρείται ως το πρότυπο εκτίμησης για την εν λόγω μορφή ζήτησης. Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι υπάρχει περιθώριο για βελτίωση των εκτιμήσεων του Croston μέσω του υπολογισμού για την μεροληψία που ενσωματώνεται σ' αυτές.

Στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία, η διακοπτόμενη ζήτηση αναφέρεται συχνά ως άμορφη, σποραδική ή ακανόνιστη ζήτηση. Ένα εννοιολογικό πλαίσιο που εξυπηρετεί το σκοπό της διάκρισης μεταξύ αυτών των μη φυσιολογικών προτύπων ζήτησης έχει συζητηθεί από τους Boylan κ.ά.. (2007). Τέτοια στοιχεία μπορεί να αντιπροσωπεύουν συλλογικά μέχρι και το 60% της συνολικής αξίας των αποθεμάτων (Johnston et al. 2003) και είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα στον τομέα της αεροπορίας, της αυτοκινητοβιομηχανίας και της πληροφορικής. Συχνά είναι τα στοιχεία που διατρέχουν μεγαλύτερο κίνδυνο απαρχαίωσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το ίδιο παράδειγμα σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston.

Θέλουμε να προβλέψουμε τις τιμές της ζήτησης για διάφορες τιμές του  $\alpha$ . Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι μη μηδενικές ζητήσεις στον χρόνο στον οποίο συμβαίνουν.

<b>Time</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>36</b>	<b>39</b>	<b>42</b>	<b>47</b>	<b>56</b>	<b>58</b>	<b>60</b>	<b>67</b>	<b>71</b>	
<b>Demand</b>	5	3	2	5	3	6	6	5	2	1	2	1	3	2	
<b>Time</b>	<b>72</b>	<b>73</b>	<b>78</b>	<b>84</b>	<b>89</b>	<b>94</b>	<b>98</b>	<b>104</b>	<b>110</b>	<b>130</b>	<b>133</b>	<b>155</b>	<b>159</b>	<b>170</b>	<b>176</b>
<b>Demand</b>	4	6	2	3	2	6	3	4	2	6	3	6	2	4	5

Ο μέσος όρος ζητήσεων ανά μεσοδιάστημα (Time average of demands per review interval) είναι 0.58, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{180} Y_t = \frac{1}{n} * (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t), \text{ όπου } Y_t \text{ είναι οι τιμές των ζητήσεών μας}$$

και  $n$  το πλήθος των ζητήσεων.

Στην πρώτη περίπτωση ξεκινάμε την ανάλυση της πρόβλεψης σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston (Croston's Method) με αρχική τιμή τον μέσο όρο των θετικών ζητήσεων 3.58. Στον παρακάτω πίνακα, παραθέτονται κάποια βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά. Όπως, ο μέσος όρος των θετικών ζητήσεων είναι 3.59, ο μέσος όρος των μεσοδιαστημάτων είναι 6.04, η διακύμανση είναι 2.823 και τέλος η τυπική απόκλιση είναι 1.68.

<b>Time average of demands per review interval</b>	0,58
<b>Average size of demand</b>	3,59
<b>Average inter-arrival interval</b>	6,04
<b>Variance</b>	2,823
<b>Standard Deviation</b>	1,68

Η μεταβλητή  $q$  εκφράζει το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση μέχρι να έρθει η επόμενη τιμή της ζήτησης. Ένα παράδειγμα υπολογισμού της συγκεκριμένης μεταβλητής για τις πρώτες 12 παρατηρήσεις είναι το εξής:

Time	Demand	q
1	5	6,25
2	0	4
3	0	4
4	0	4
5	3	4
6	2	1
7	5	1
8	0	5
9	0	5
10	0	5
11	0	5
12	3	5

Για  $t=1$ , το  $q$  είναι ίσο με 6.25 διότι ξεκινάμε με τον μέσο όρο των τιμών της μεταβλητής  $q$  και μετά από την  $t=2$  με μηδενική ζήτηση μέχρι την  $t=5$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη θετική ζήτηση 3, η μεταβλητή  $q$  είναι ίση με 4 αφού έχουν περάσει 4 περίοδοι. Στη συνέχεια, από την  $t=5$  με ζήτηση 3 μέχρι την  $t=6$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη ζήτηση 2 έχει περάσει μια περίοδος γι' αυτό και το  $q=1$  και ούτε καθεξής.

Έχοντας υπολογίσει την μεταβλητή  $q$ , θα ορίσουμε τώρα την  $P''$  (το εκθετικά εξομαλυμένο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $P''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή  $q$ :

$$P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,

$q_{t-1}$  = το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση,

$P''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής μας.

Αρχικά, ας δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε πάλι με τον μέσο όρο της μεταβλητής  $q$  (6.25), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

t	Demand	q	Z'	P''
1	5	6,25	3,58621	6,25
2	0	4	3,86897	6,25
3	0	4	3,86897	6,25
4	0	4	3,86897	6,25
5	3	4	3,86897	6,25
6	2	1	3,69517	5,80000
7	5	1	3,35614	4,84000
8	0	5	3,68491	4,07200
9	0	5	3,68491	4,07200
10	0	5	3,68491	4,07200
11	0	5	3,68491	4,07200
12	3	5	3,68491	4,07200

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=1$  μέχρι και την  $t=5$  το  $P''$  είναι σταθερό στο 6.25. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $P''$  ισούται με 5.8, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 4 + (1-0.2) * 6.25 = 5.8$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 5.8 = 4.84$ . Για  $t=8$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 4.84 = 4.072$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $P''$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσουμε και την μεταβλητή  $Z''_t$  (το εκθετικά εξομαλυμένο μέγεθος της ζήτησης, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $Z''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή της ζήτησης:

$$Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,  $0 < \alpha < 1$ ,

$Z_{t-1}$  = η τιμή της ζήτησης την προηγούμενη περίοδο,

$Z''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής  $Z''_t$ .

Στη συνέχεια, θα δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε με τον μέσο όρο των θετικών ζητήσεων (3.586207), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

<b>t</b>	<b>Demand</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>
1	5	6,25	3,58621
2	0	4	3,86897
3	0	4	3,86897
4	0	4	3,86897
5	3	4	3,86897
6	2	1	3,69517
7	5	1	3,35614
8	0	5	3,68491
9	0	5	3,68491
10	0	5	3,68491
11	0	5	3,68491
12	3	5	3,68491

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=2$  μέχρι και την  $t=5$  το  $Z''_t$  είναι σταθερό στο 3.86897. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $Z''_t$  ισούται με  $3.69517$ , σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 3 + (1-0.2) * 3.86897 = 3.69517$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 2 + (1-0.2) * 3.69517 = 3.68491$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $Z''_t$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του μεγέθους της ζήτησης και των διαστημάτων μεταξύ τους, έχουμε την εκτίμηση της μέσης ζήτησης για την επόμενη περίοδο. Δηλαδή:

$$Y''_t = \frac{Z''_t}{P''_t}$$

Γι' αυτόν το λόγο παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα από το excel, την διαδικασία υπολογισμού σύμφωνα με το παραπάνω τύπο.

t	Demand	q	Z'	P''	Y''(t)
1	5	6,25	3,58621	6,25	0,57379
2	0	4	3,86897	6,25	0,61903
3	0	4	3,86897	6,25	0,61903
4	0	4	3,86897	6,25	0,61903
5	3	4	3,86897	6,25	0,61903
6	2	1	3,69517	5,80000	0,63710
7	5	1	3,35614	4,84000	0,69342
8	0	5	3,68491	4,07200	0,90494
9	0	5	3,68491	4,07200	0,90494
10	0	5	3,68491	4,07200	0,90494
11	0	5	3,68491	4,07200	0,90494
12	3	5	3,68491	4,07200	0,90494

Πιο συγκεκριμένα διαιρούμε το  $Z'_t$  με το  $P''_t$  και έτσι βρίσκουμε την πρόβλεψη που γίνεται την περίοδο t για την περίοδο t+1. Με άλλα λόγια, την t=1 διαιρούμε το 3.58621 με το 6.25, με αποτέλεσμα το  $Y''_t$  να ισούται με 0.57379. Την t=2 η επόμενη θετική ζήτηση όποτε συμβεί είναι το 0.61903, δηλαδή η επόμενη θετική ζήτηση είναι το 3. Με αυτόν τον τρόπο, την t=6 το  $Y''_t$  ισούται με 0.63710, είναι δηλαδή η πρόβλεψη μας για την επόμενη θετική ζήτηση που θα συμβεί, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή ζήτησης είναι 5. Στη συνέχεια, το  $Y''_t$  ισούται με 0.90494 από την t=8μέχρι την επόμενη θετική ζήτηση την t=12 με ζήτηση 3. Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3.a του παραρτήματος.

Το επόμενο βήμα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $Y''_t$  για μια τιμή Y σε χρόνο t (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_{t(demand)} - Y''_t$ , όπου ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_{t(demand)} - Y''_t$  θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας.

True (Yt)	Forecast (Y't)	Errors	Abs-error	Sq-error	et/Yt
5	0,57379	4,42621	4,42621	19,59131	0,88524
0	0,61903	-0,61903	0,61903	0,38320	0,00000
0	0,61903	-0,61903	0,61903	0,38320	0,00000
0	0,61903	-0,61903	0,61903	0,38320	0,00000
3	0,61903	2,38097	2,38097	5,66900	0,79366
2	0,63710	1,36290	1,36290	1,85750	0,68145
5	0,69342	4,30658	4,30658	18,54666	0,86132
0	0,90494	-0,90494	0,90494	0,81891	0,00000
0	0,90494	-0,90494	0,90494	0,81891	0,00000
0	0,90494	-0,90494	0,90494	0,81891	0,00000
0	0,90494	-0,90494	0,90494	0,81891	0,00000
3	0,90494	2,09506	2,09506	4,38928	0,69835

Για παράδειγμα,  $e_1 = Y_1 - Y'_1 = 5 - 0.57379 = 4.42621$ ,  $e_2 = Y_2 - Y'_2 = 0 - 0.61903 = -0.61903$ . . . και τέλος  $e_{180} = Y_{180} - Y'_{180} = 0 - 0.46529 = -0.46529$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1| = 4.42621$ ,  $|e_2| = 0.61903$ , . . . , και τέλος  $|e_{180}| = 0.46529$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2 = 19.59131$ ,  $e_2^2 = 0.38320$ , . . . , και τέλος  $e_{180}^2 = 0.21649$ . Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3.b του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1 = Y_1 - Y'_1$ ,  $e_2 = Y_2 - Y'_2$ , . . . , και  $e_n = Y_n - Y'_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

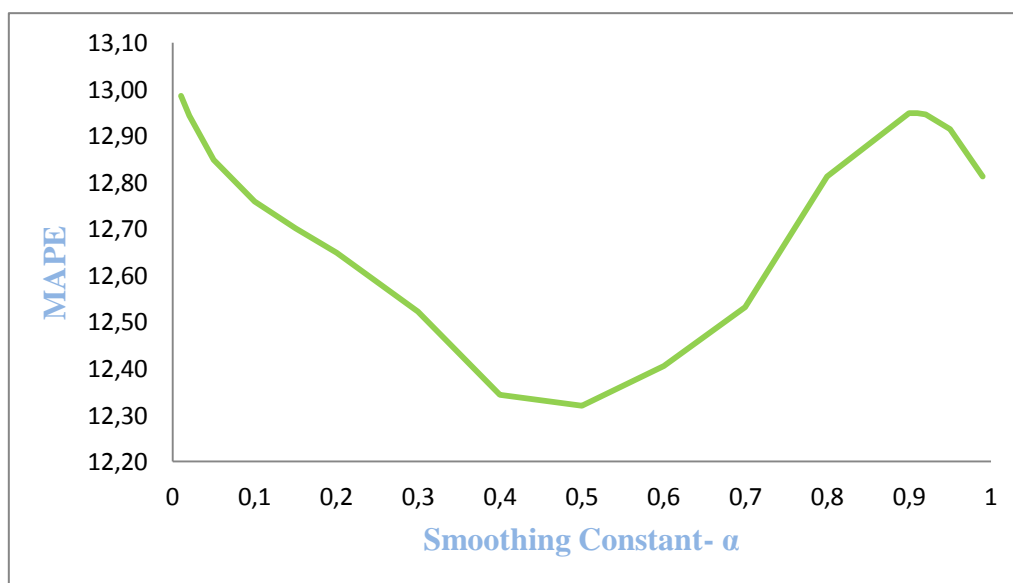
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |et|$
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error- MSE)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n et^2$
- Και το Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error- MAPE)  $MAPE = \left( \frac{1}{n} \sum_1^n et/Yt \right) * 100$ . Το MAPE μετρά το μέγεθος του σφάλματος σε ποσοστιαίες μονάδες.

Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAPE, MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAPE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.3.1** MAPE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
0,01	MAPE	12,9858
0,02	MAPE	12,9422
0,05	MAPE	12,8482
0,1	MAPE	12,7591
0,15	MAPE	12,7011
0,2	MAPE	12,6482
0,3	MAPE	12,5216
0,4	MAPE	12,3433
0,5	MAPE	12,3204
0,6	MAPE	12,4050
0,7	MAPE	12,5318
0,8	MAPE	12,8120
0,9	MAPE	12,9481
0,91	MAPE	12,9482
0,92	MAPE	12,9451
0,95	MAPE	12,9146
0,99	MAPE	12,8123

**Διάγραμμα 3.3.1** MAPE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.



Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 12.9858 για  $\alpha=0.01$ , και στη συνέχεια μειώνονται σταδιακά μέχρι το 12.3204 για  $\alpha=0.5$  ενώ από



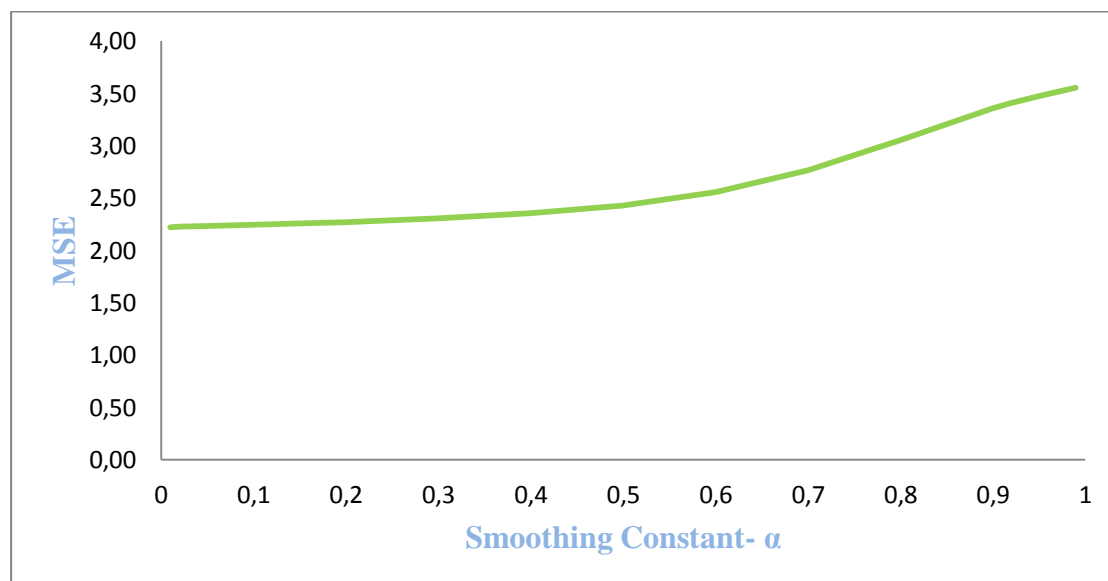
το  $\alpha=0.6$  αυξάνονται σταδιακά (12.4050) μέχρι το  $\alpha=0.91$  (12.9482) και στο τέλος από το 0.92 (12.9451) μειώνεται στο 12.8123 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.5$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 12.3204.

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.3.2** MSE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
0,01	MSE	2,2218
0,02	MSE	2,22423
0,05	MSE	2,2313
0,1	MSE	2,2433
0,15	MSE	2,2564
0,2	MSE	2,2712
0,3	MSE	2,3069
0,4	MSE	2,3547
0,5	MSE	2,4284
0,6	MSE	2,5545
0,7	MSE	2,7622
0,8	MSE	3,0516
0,9	MSE	3,3540
0,91	MSE	3,3805
0,92	MSE	3,4059
0,95	MSE	3,4749
0,99	MSE	3,5529

**Διάγραμμα 3.3.2** MSE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.



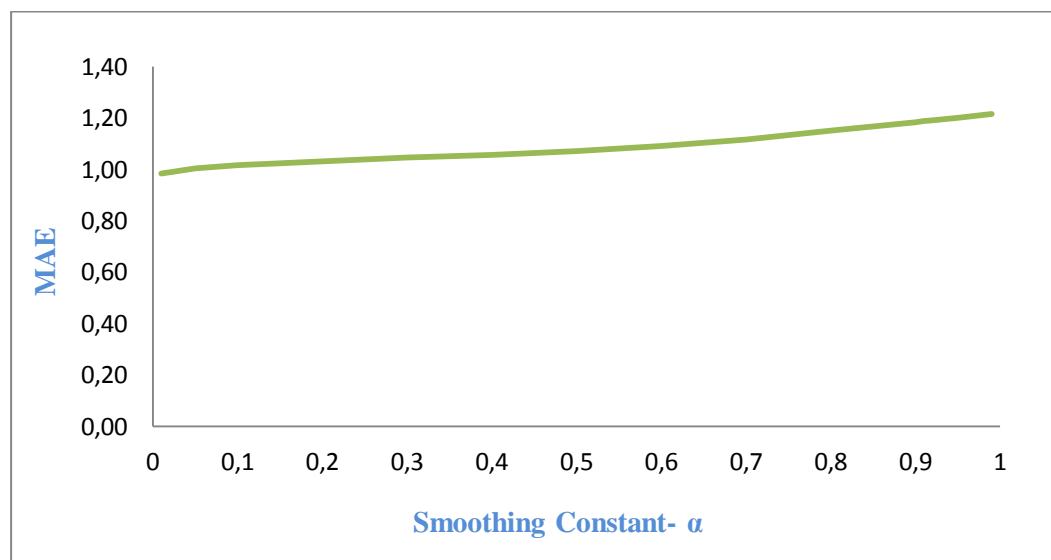
Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου αυξάνονται αργά και σταθερά από το 2.2218 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 3.5529 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.2218 για  $\alpha=0.01$ .

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAE.

**Πίνακας 3.3.3** MAE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
<b>0,01</b>	MAE	<b>0,9833</b>
<b>0,02</b>	MAE	0,9897
<b>0,05</b>	MAE	1,0031
<b>0,1</b>	MAE	1,0159
<b>0,15</b>	MAE	1,0244
<b>0,2</b>	MAE	1,0317
<b>0,3</b>	MAE	1,0447
<b>0,4</b>	MAE	1,0560
<b>0,5</b>	MAE	1,0706
<b>0,6</b>	MAE	1,0899
<b>0,7</b>	MAE	1,1153
<b>0,8</b>	MAE	1,1502
<b>0,9</b>	MAE	1,1837
<b>0,91</b>	MAE	1,1869
<b>0,92</b>	MAE	1,1900
<b>0,95</b>	MAE	1,1997
<b>0,99</b>	MAE	1,2145

**Διάγραμμα 3.3.3** MAE Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.



Τέλος, παρατηρούμε ότι οι τιμές του κριτηρίου αυξάνονται συνεχώς από το 0.9833 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 1.2145 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 0.9833 για  $\alpha=0.01$ .

Έπειτα, συνεχίζουμε την ανάλυση της πρόβλεψης με τη μέθοδο του Croston με αρχική τιμή την πρώτη τιμή ζήτησης για  $t=1$ , δηλαδή το 5.

Η μεταβλητή  $q$  εκφράζει το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση μέχρι να έρθει η επόμενη τιμή της ζήτησης. Ένα παράδειγμα υπολογισμού της συγκεκριμένης μεταβλητής για τις πρώτες 12 παρατηρήσεις είναι το εξής:

Time	Demand	$q$
1	5	6,25
2	0	4
3	0	4
4	0	4
5	3	4
6	2	1
7	5	1
8	0	5
9	0	5
10	0	5
11	0	5
12	3	5

Για  $t=1$ , το  $q$  είναι ίσο με 6.25 διότι ξεκινάμε με τον μέσο όρο των τιμών της μεταβλητής  $q$  και μετά από την  $t=2$  με μηδενική ζήτηση μέχρι την  $t=5$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη θετική ζήτηση 3, η μεταβλητή  $q$  είναι ίση με 4 αφού έχουν

περάσει 4 περιόδοι. Στη συνέχεια, από την  $t=5$  με ζήτηση 3 μέχρι την  $t=6$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη ζήτηση 2 έχει περάσει μια περίοδος γι' αυτό και το  $q=1$  και ούτε καθεξής.

Έχοντας υπολογίσει την μεταβλητή  $q$ , θα ορίσουμε τώρα την  $P''$  (το εκθετικά εξομαλυμένο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $P''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή  $q$ :

$$P''_t = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,

$q_{t-1}$  = το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση,

$P''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής μας.

Αρχικά, ας δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε πάλι με τον μέσο όρο της μεταβλητής  $q$  (6.25), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

Time	Demand	q	Z''	P''
1	5	6,25	5,00000	6,25
2	0	4	5,00000	6,25
3	0	4	5,00000	6,25
4	0	4	5,00000	6,25
5	3	4	5,00000	6,25
6	2	1	4,60000	5,80000
7	5	1	4,08000	4,84000
8	0	5	4,26400	4,07200
9	0	5	4,26400	4,07200
10	0	5	4,26400	4,07200
11	0	5	4,26400	4,07200
12	3	5	4,26400	4,07200

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=1$  μέχρι και την  $t=5$  το  $P''$  είναι σταθερό στο 6.25. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $P''$  ισούται με 5.8, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 4 + (1-0.2) * 6.25 = 5.8$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 5.8 = 4.84$ . Για  $t=8$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 4.84 = 4.072$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $P''$

παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζήτησεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσουμε και την μεταβλητή  $Z''_t$  (το εκθετικά εξομαλυμένο μέγεθος της ζήτησης, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $Z''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή της ζήτησης:

$$Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,  $0 < \alpha < 1$ ,

$Z_{t-1}$  = η τιμή της ζήτησης την προηγούμενη περίοδο,

$Z''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής  $Z''_t$ .

Στη συνέχεια, θα δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε με τον μέσο όρο των θετικών ζητήσεων (3.586207), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

Time	Demand	q	Z''
1	5	6,25	5,00000
2	0	4	5,00000
3	0	4	5,00000
4	0	4	5,00000
5	3	4	5,00000
6	2	1	4,60000
7	5	1	4,08000
8	0	5	4,26400
9	0	5	4,26400
10	0	5	4,26400
11	0	5	4,26400
12	3	5	4,26400

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ξεκινάμε με αρχική τιμή το 5, διότι δεν γνωρίζουμε τις προηγούμενες τιμές ζήτησης. Από την  $t=2$  μέχρι και την  $t=5$  το  $Z''_t$  είναι σταθερό στο 5 και την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $Z''_t$  ισούται με 4.6, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 3 + (1-0.2) * 5 = 4.6$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 5 + (1-0.2) * 4.6 = 4.08$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $Z''_t$

παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του μεγέθους της ζήτησης και των διαστημάτων μεταξύ τους, έχουμε την εκτίμηση της μέσης ζήτησης για την επόμενη περίοδο. Δηλαδή:

$$Y''_t = \frac{Z''_t}{P''_t}$$

Γι' αυτόν το λόγο παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα από το excel, την διαδικασία υπολογισμού σύμφωνα με το παραπάνω τύπο.

Time	Demand	q	Z''	P''	Y''(t)
1	5	6,25	5,00000	6,25	0,80000
2	0	4	5,00000	6,25	0,80000
3	0	4	5,00000	6,25	0,80000
4	0	4	5,00000	6,25	0,80000
5	3	4	5,00000	6,25	0,80000
6	2	1	4,60000	5,80000	0,79310
7	5	1	4,08000	4,84000	0,84298
8	0	5	4,26400	4,07200	1,04715
9	0	5	4,26400	4,07200	1,04715
10	0	5	4,26400	4,07200	1,04715
11	0	5	4,26400	4,07200	1,04715
12	3	5	4,26400	4,07200	1,04715

Πιο συγκεκριμένα διαιρούμε το  $Z''_t$  με το  $P''_t$  και έτσι βρίσκουμε την πρόβλεψη που γίνεται την περίοδο  $t$  για την περίοδο  $t+1$ . Με άλλα λόγια, την  $t=1$  διαιρούμε το 5 με το 6.25, με αποτέλεσμα το  $Y''_t$  να ισούται με 0.8. Την  $t=2$  η επόμενη θετική ζήτηση όποτε συμβεί είναι το 0.8, δηλαδή η επόμενη θετική ζήτηση είναι το 3. Με αυτόν τον τρόπο, την  $t=6$  το  $Y''_t$  ισούται με 0.79310, είναι δηλαδή η πρόβλεψη μας για την επόμενη θετική ζήτηση που θα συμβεί, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή ζήτησης είναι 5. Στη συνέχεια, το  $Y''_t$  ισούται με 1.04715 από την  $t=8$  μέχρι την επόμενη θετική ζήτηση την  $t=12$  με ζήτηση 3. Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3.c του παραρτήματος.

Το επόμενο βήμα της μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $Y''_t$  για μια τιμή  $Y$  σε χρόνο  $t$  (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή

πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_{t(\text{demand})} - Y''_t$ , όπου ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_{t(\text{demand})} - Y''_t$  θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας.

True (Yt)	Forecast (Y't)	Errors	Abs-error	Sq-error	et/Yt
5	0,80000	4,20000	4,20000	17,64000	0,84000
0	0,80000	-0,80000	0,80000	0,64000	0,00000
0	0,80000	-0,80000	0,80000	0,64000	0,00000
0	0,80000	-0,80000	0,80000	0,64000	0,00000
3	0,80000	2,20000	2,20000	4,84000	0,73333
2	0,79310	1,20690	1,20690	1,45660	0,60345
5	0,84298	4,15702	4,15702	17,28086	0,83140
0	1,04715	-1,04715	1,04715	1,09653	0,00000
0	1,04715	-1,04715	1,04715	1,09653	0,00000
0	1,04715	-1,04715	1,04715	1,09653	0,00000
0	1,04715	-1,04715	1,04715	1,09653	0,00000
3	1,04715	1,95285	1,95285	3,81362	0,65095

Για παράδειγμα,  $e_1 = Y_1 - Y''_1 = 5 - 0.8 = 4.2$ ,  $e_2 = Y_2 - Y''_2 = 0 - 0.8 = -0.8$ . . . και τέλος  $e_{180} = Y_{180} - Y''_{180} = 0 - 0.46554 = -0.46554$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1| = 4.2$ ,  $|e_2| = 0.8$ , . . . , και τέλος  $|e_{180}| = 0.46554$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2 = 17.64$ ,  $e_2^2 = 0.64000$ , . . . , και τέλος  $e_{180}^2 = 0.21673$ . Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3.d του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1 = Y_1 - Y''_1$ ,  $e_2 = Y_2 - Y''_2$ , . . . , και  $e_n = Y_n - Y''_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |e_t|$
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error- MSE)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n e_t^2$

- Και το Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error-MAPE)  $MAPE = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{e_t}{Y_t}\right) * 100$ . Το MAPE μετρά το μέγεθος του σφάλματος σε ποσοστιαίες μονάδες.

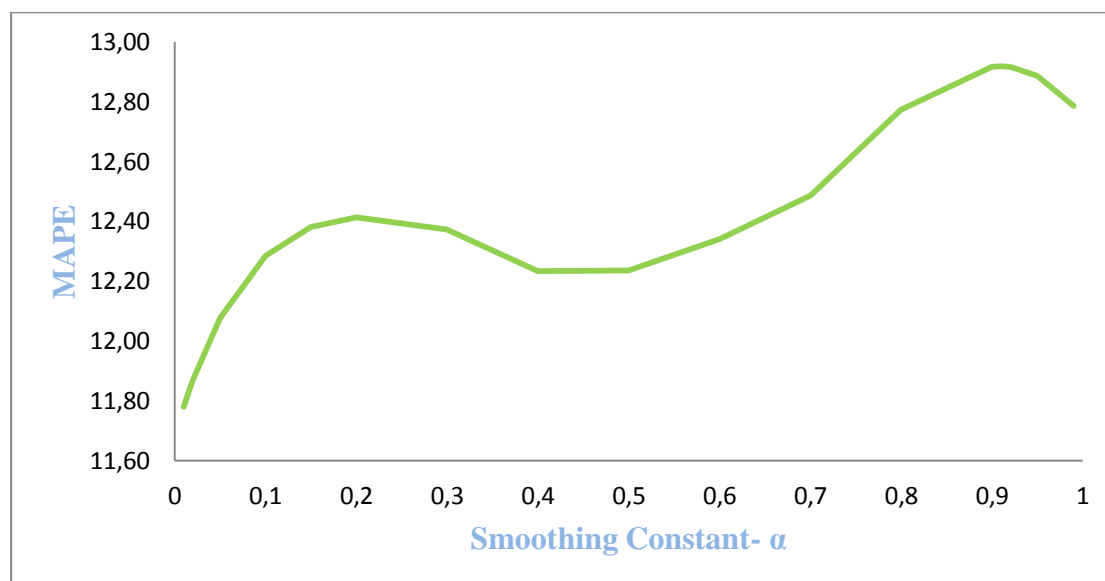
Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAPE, MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAPE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.3.4** MAPE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
0,01	MAPE	11,7798
0,02	MAPE	11,8680
0,05	MAPE	12,0772
0,1	MAPE	12,2843
0,15	MAPE	12,3810
0,2	MAPE	12,4140
0,3	MAPE	12,3717
0,4	MAPE	12,2338
0,5	MAPE	12,2367
0,6	MAPE	12,3402
0,7	MAPE	12,4850
0,8	MAPE	12,7737
0,9	MAPE	12,9170
0,91	MAPE	12,9178
0,92	MAPE	12,9153
0,95	MAPE	12,8865
0,99	MAPE	12,7862



**Διάγραμμα 3.3.4** MAPE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

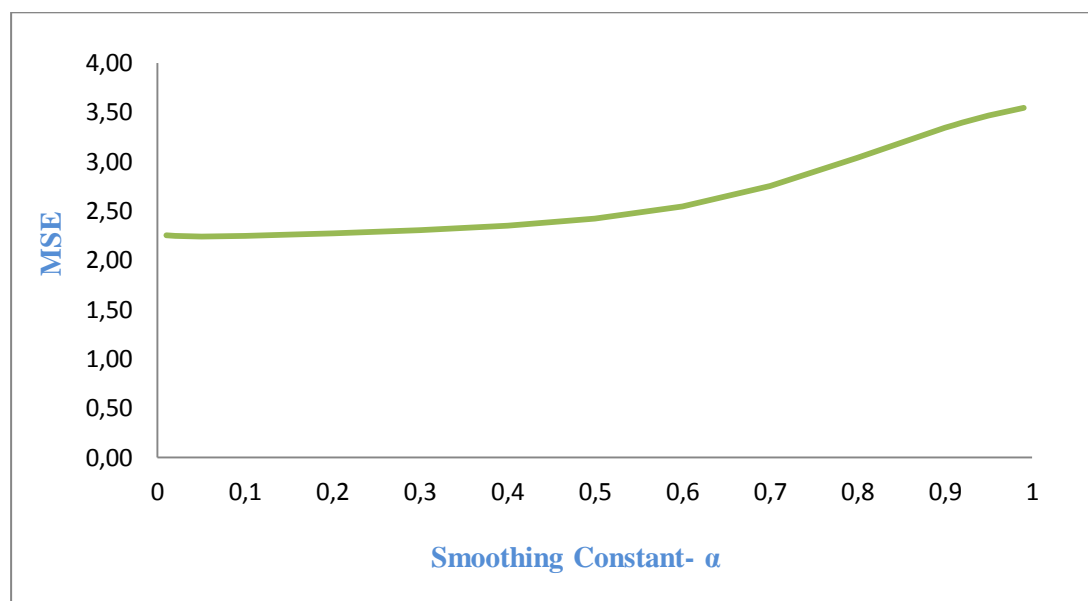


Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 11.7798 για  $\alpha=0.01$ , στη συνέχεια αυξάνονται σταδιακά μέχρι το 12.9178 για  $\alpha=0.91$  και έπειτα μειώνεται μέχρι το 12.7862 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.01$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 11.7798. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.3.5** MSE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
0,01	MSE	2,2542
0,02	MSE	2,2482
0,05	MSE	2,2407
0,1	MSE	2,2452
0,15	MSE	2,2567
0,2	MSE	2,2707
0,3	MSE	2,3035
0,4	MSE	2,3480
0,5	MSE	2,4195
0,6	MSE	2,5444
0,7	MSE	2,7514
0,8	MSE	3,0405
0,9	MSE	3,3429
0,91	MSE	3,3694
0,92	MSE	3,3948
0,95	MSE	3,4639
0,99	MSE	3,5418

**Διάγραμμα 3.3.5** MSE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.



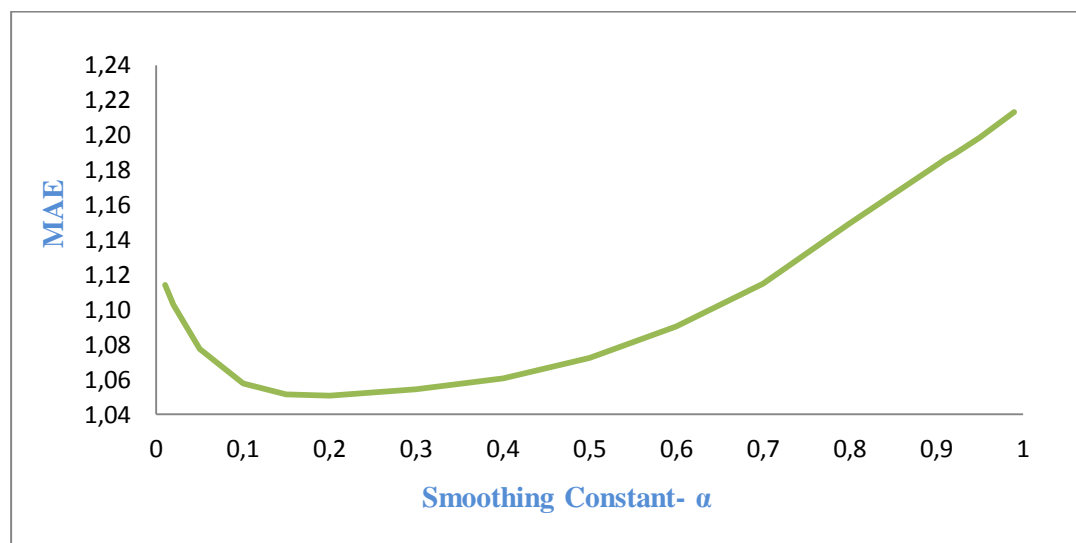
Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου μειώνονται από το 2.2542 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 2.2407 για  $\alpha=0.05$ . Στη συνέχεια, αυξάνεται από το 2.2452 για  $\alpha=0.1$  μέχρι το 3.5418 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.2407 για  $\alpha=0.05$ .

Παρουσιάζεται παρακάτω, το κριτήριο MAE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 3.3.6** MAE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Croston's Method
0,01	MAE	1,1141
0,02	MAE	1,1026
0,05	MAE	1,0776
0,1	MAE	1,0578
0,15	MAE	1,0515
0,2	MAE	1,0507
0,3	MAE	1,0545
0,4	MAE	1,0606
0,5	MAE	1,0723
0,6	MAE	1,0901
0,7	MAE	1,1149
0,8	MAE	1,1494
0,9	MAE	1,1826
0,91	MAE	1,1858
0,92	MAE	1,1889
0,95	MAE	1,1985
0,99	MAE	1,2132

**Διάγραμμα 3.3.6** MAE Croston's Method με αρχική τιμή το 5.



Τέλος, παρατηρούμε ότι οι τιμές του κριτηρίου μειώνονται συνεχώς από το 1.1141 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 1.0507 για  $\alpha=0.2$ . Έπειτα, από το 1.0545 για  $\alpha=0.3$  αυξάνεται μέχρι το 1.1985 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 1.0507 για  $\alpha=0.2$ .

### **3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING (SES) ΚΑΙ CROSTON'S METHOD ME APXIKH TIMH TON ΜΕΣΟ ΟΡΟ.**

Για να μπορέσουμε να αποφανθούμε για το ποια μέθοδος έχει το καλύτερο αποτέλεσμα, την καλύτερη πρόβλεψη δηλαδή, θα πρέπει να συγκρίνουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit).

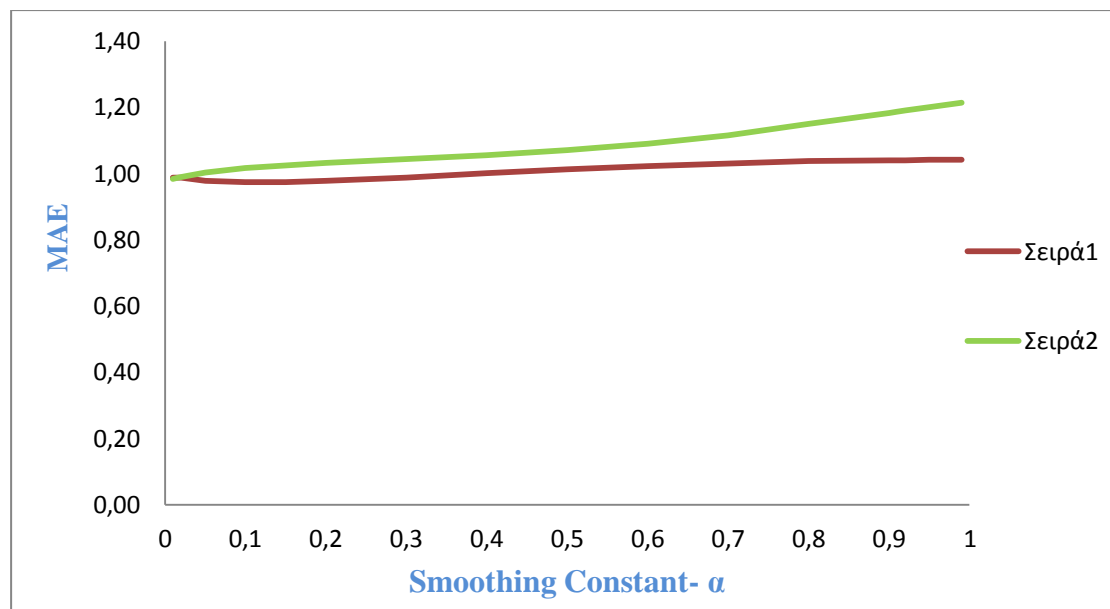
Στην περίπτωση της αρχικής τιμής τον μέσο όρο των ζητήσεων (0.58), θα συγκρίνουμε το κριτήριο του παρακάτω πίνακα. Η καλύτερη μέθοδος με την καλύτερη πρόβλεψη θα είναι αυτή που θα έχει την μικρότερη τιμή του κριτηρίου. Το κριτήριο MAPE δεν υφίσταται για την απλή εκθετική εξομάλυνση (SES).

Συγκεντρωτικά έχουμε και για τις δύο μεθόδους:

**Πίνακας 3.4.1** MAE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)	Croston's Method
0,01	MAE	0,9886	0,9833
0,02	MAE	0,9870	0,9897
0,05	MAE	0,9774	1,0031
0,1	MAE	0,9737	1,0159
0,15	MAE	0,9744	1,0244
0,2	MAE	0,9772	1,0317
0,3	MAE	0,9874	1,0447
0,4	MAE	1,0005	1,0560
0,5	MAE	1,0132	1,0706
0,6	MAE	1,0232	1,0899
0,7	MAE	1,0311	1,1153
0,8	MAE	1,0372	1,1502
0,9	MAE	1,0404	1,1837
0,91	MAE	1,0406	1,1869
0,92	MAE	1,0408	1,1900
0,95	MAE	1,0411	1,1997
0,99	MAE	1,0413	1,2145

**Διάγραμμα 3.4.1** MAE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το μέσο όρο.



Σειρά 1= SES, Σειρά 2= Croston's Method

Αρχικά, στο κριτήριο MAE, για  $\alpha=0.01$  καλύτερη είναι η μέθοδος του Croston καθώς  $0.9833 < 0.9886$ . Άρα, με τη μεθόδου θα έχουμε καλύτερες προβλέψεις για

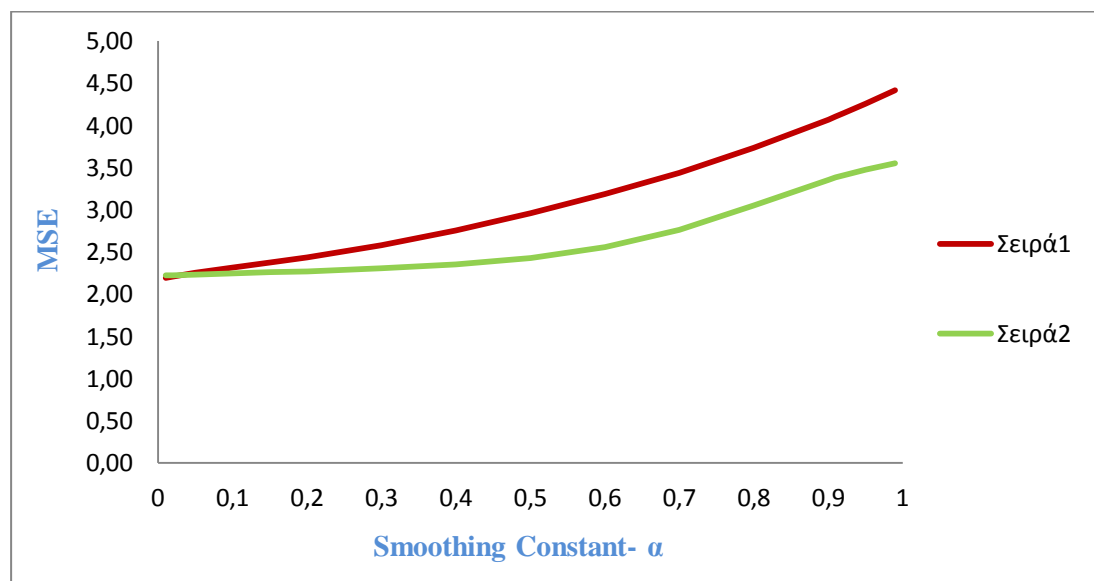
$\alpha=0.01$ . Ωστόσο, για  $\alpha=0.02$  μέχρι  $\alpha=0.99$  στην απλή εκθετική εξομάλυνση οι τιμές του κριτηρίου είναι μικρότερες από τις τιμές της μεθόδου του Croston. Έτσι, η βέλτιστη μέθοδος που θα πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η Simple Exponential Smoothing (SES).

Έπειτα, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το κριτήριο MSE και για τις δύο μεθόδους.

**Πίνακας 3.4.2** MSE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το μέσο όρο.

$\alpha$	<u>Measures</u>	<u>Simple Exponential Smoothing (SES)</u>	<u>Croston's Method</u>
<b>0,01</b>	MSE	<b>2,1946</b>	2,2218
<b>0,02</b>	MSE	<b>2,2094</b>	2,22423
<b>0,05</b>	MSE	2,2521	<b>2,2313</b>
<b>0,1</b>	MSE	2,3144	<b>2,2433</b>
<b>0,15</b>	MSE	2,3728	<b>2,2564</b>
<b>0,2</b>	MSE	2,4349	<b>2,2712</b>
<b>0,3</b>	MSE	2,5803	<b>2,3069</b>
<b>0,4</b>	MSE	2,7546	<b>2,3547</b>
<b>0,5</b>	MSE	2,9552	<b>2,4284</b>
<b>0,6</b>	MSE	3,1821	<b>2,5545</b>
<b>0,7</b>	MSE	3,4382	<b>2,7622</b>
<b>0,8</b>	MSE	3,7296	<b>3,0516</b>
<b>0,9</b>	MSE	4,0656	<b>3,3540</b>
<b>0,91</b>	MSE	4,1021	<b>3,3805</b>
<b>0,92</b>	MSE	4,1392	<b>3,4059</b>
<b>0,95</b>	MSE	4,2541	<b>3,4749</b>
<b>0,99</b>	MSE	4,4163	<b>3,5529</b>

**Διάγραμμα 3.4.2** MSE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το μέσο όρο.



Σειρά 1= SES, Σειρά 2= Croston's Method

Στο συγκεκριμένο κριτήριο, παρατηρούμε ότι για  $\alpha=0.01$  και  $\alpha=0.02$  μικρότερες είναι οι τιμές της Simple Exponential Smoothing, δηλαδή για  $\alpha=0.01$  το  $2.1946 < 2.2218$  και για  $\alpha=0.02$  έχουμε  $2.2094 < 2.22423$ . Άρα, για τις δύο πρώτες τιμές  $\alpha$  καλύτερη πρόβλεψη θα μας δώσει η απλή εκθετική εξομάλυνση, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές η καλύτερη πρόβλεψη θα είναι με τη μέθοδο Croston, καθώς οι τιμές του  $\alpha$  της συγκεκριμένης μεθόδου είναι μικρότερες από την Simple Exponential Smoothing.

Τέλος, εδώ επιβεβαιώνεται ότι η Croston's Method βελτίωσε σημαντικά την απλή εκθετική εξομάλυνση.

### 3.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING (SES) ΚΑΙ CROSTON'S METHOD ME APXIKH TIMH TO 5.

Για να μπορέσουμε να αποφανθούμε για το ποια μέθοδος έχει το καλύτερο αποτέλεσμα, την καλύτερη πρόβλεψη δηλαδή, θα πρέπει να συγκρίνουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit).

Στην περίπτωση της αρχικής τιμής 5, θα συγκρίνουμε το κριτήριο του παρακάτω πίνακα. Η καλύτερη μέθοδος με την καλύτερη πρόβλεψη θα είναι αυτή που θα έχει

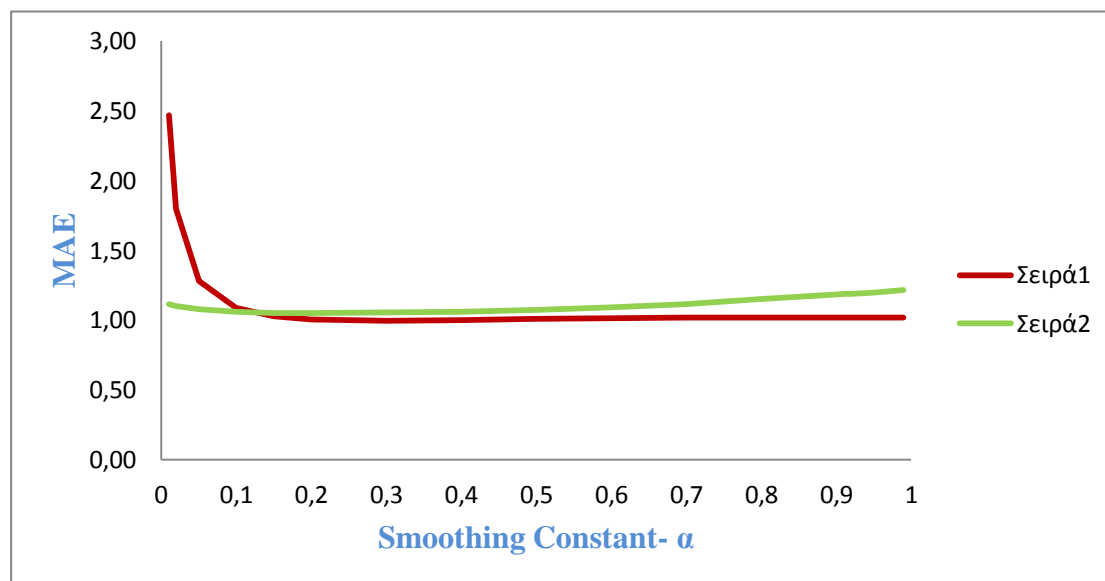
την μικρότερη τιμή του κριτηρίου. Το κριτήριο MAPE δεν υφίσταται για την απλή εκθετική εξομάλυνση (SES).

Συγκεντρωτικά έχουμε και για τις δύο μεθόδους:

**Πίνακας 3.5.1** MAE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)	Croston's Method
0,01	MAE	2,465	1,1141
0,02	MAE	1,800	1,1026
0,05	MAE	1,278	1,0776
0,1	MAE	1,088	1,0578
0,15	MAE	1,0270	1,0515
0,2	MAE	1,004723	1,0507
0,3	MAE	0,9944	1,0545
0,4	MAE	1,0001	1,0606
0,5	MAE	1,0078	1,0723
0,6	MAE	1,0130	1,0901
0,7	MAE	1,0167	1,1149
0,8	MAE	1,0187	1,1494
0,9	MAE	1,0186	1,1826
0,91	MAE	1,0185	1,1858
0,92	MAE	1,0183	1,1889
0,95	MAE	1,0178	1,1985
0,99	MAE	1,0169	1,2132

**Διάγραμμα 3.5.1** MAE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το 5.



Σειρά 1= SES, Σειρά 2= Croston's Method

Αρχικά, στο κριτήριο MAE, για  $\alpha=0.01$ ,  $\alpha=0.05$  και  $\alpha=0.1$  καλύτερη είναι η μέθοδος του Croston καθώς  $1.1141 < 2.465$ ,  $1.0776 < 1.278$  και  $1.0578 < 1.088$  αντίστοιχα. Άρα, με τη μέθοδό του θα έχουμε καλύτερες προβλέψεις για τα συγκεκριμένα  $\alpha$ . Ωστόσο, για  $\alpha=0.02$  και  $\alpha=0.15$  μέχρι  $\alpha=0.99$  στην απλή εκθετική εξομάλυνση οι τιμές του κριτηρίου είναι μικρότερες από τις τιμές της μεθόδου του Croston. Έτσι, η βέλτιστη μέθοδος που θα πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η Simple Exponential Smoothing (SES).

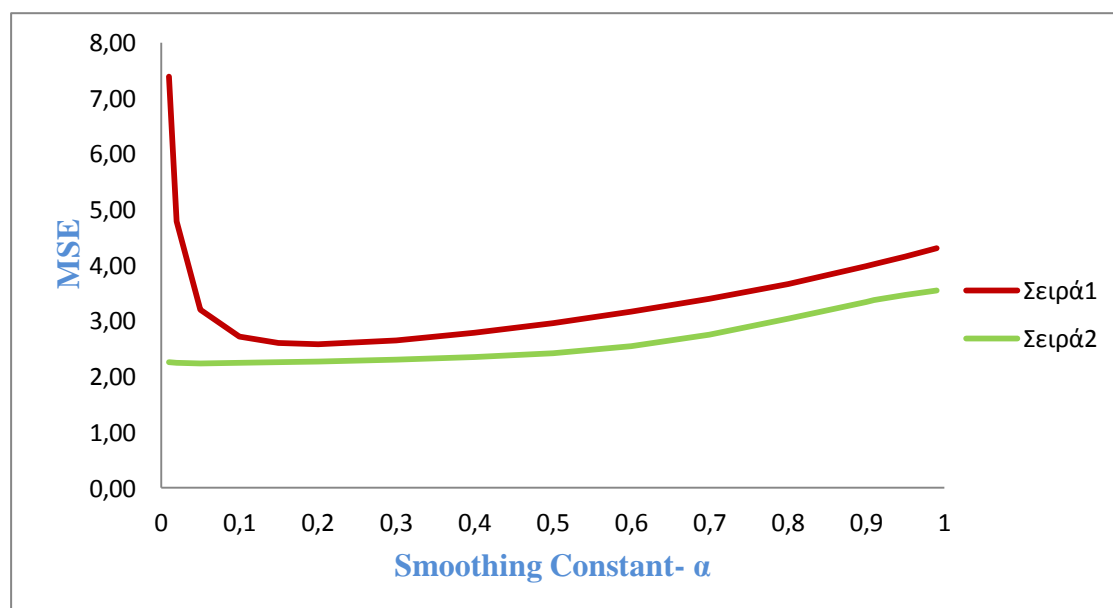
Έπειτα, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το κριτήριο MSE και για τις δύο μεθόδους.



**Πίνακας 3.5.2** MSE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	<u>Measures</u>	<u>Simple Exponential Smoothing (SES)</u>	<u>Croston's Method</u>
0,01	MSE	7,385	2,2542
0,02	MSE	4,791	2,2482
0,05	MSE	3,207	2,2407
0,1	MSE	2,722	2,2452
0,15	MSE	2,604	2,2567
0,2	MSE	2,585	2,2707
0,3	MSE	2,655	2,3035
0,4	MSE	2,791	2,3480
0,5	MSE	2,963	2,4195
0,6	MSE	3,166	2,5444
0,7	MSE	3,399	2,7514
0,8	MSE	3,6674	3,0405
0,9	MSE	3,9807	3,3429
0,91	MSE	4,015	3,3694
0,92	MSE	4,050	3,3948
0,95	MSE	4,157	3,4639
0,99	MSE	4,310	3,5418

**Διάγραμμα 3.5.2** MSE Simple Exponential Smoothing -Croston's Method με αρχική τιμή το 5.



Σειρά 1= SES, Σειρά 2= Croston's Method

Στο συγκεκριμένο κριτήριο, παρατηρούμε ότι για όλα τα  $\alpha$  μικρότερες είναι οι τιμές της μεθόδου Croston. Έτσι, καλύτερη πρόβλεψη θα είναι με τη μέθοδο Croston, καθώς οι τιμές του  $\alpha$  της συγκεκριμένης μεθόδου είναι μικρότερες από την Simple Exponential Smoothing.

Τέλος, και σε αυτήν την περίπτωση επιβεβαιώνεται ότι η Croston's Method βελτίωσε σημαντικά την απλή εκθετική εξομάλυνση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΣ SBA (SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION)

### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η μέθοδος Croston έχει αποδειχθεί μεγίστης αξίας για τους κατασκευαστές που αντιμετωπίζουν δεδομένα διακοπτόμενης φύσης. Παρά όμως τη σπουδαιότητα αυτής της μεθόδου πρόβλεψης, οι εμπειρικές ενδείξεις δεν συμφωνούν με την εφαρμογή της, καθώς τα κέρδη από την αντίστοιχη εφαρμογή είναι χειρότερα του αναμενόμενου, συγκρινόμενη με απλούστερες τεχνικές πρόβλεψης. Μετά από αυτήν τη διαπίστωση, ο Συντέτος και ο Boylan (2001), προσπαθώντας να εντοπίσουν το αίτιο αυτής της απροσδόκητης συμπεριφοράς, διαπίστωσαν ότι η μέθοδος Croston παρουσιάζει μια θετική μεροληψία (positively biased), δηλαδή μια αισιόδοξη τάση στα αποτελέσματα των προβλέψεων της. Ένα άλλο σημαντικό επίσης επίτευγμα της έρευνας τους ήταν η σύνδεση του επιπέδου της αισιόδοξης τάσης της μεθόδου με την τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\alpha$  που χρησιμοποιείται για την προέκταση των δύο αποσυντιθέμενων χρονοσειρών. Η μέγιστη μεροληψία μάλιστα παρατηρήθηκε όταν η παράμετρος εξομάλυνσης  $\alpha$  λάβει τη μέγιστη τιμή της δηλαδή  $\alpha=1$ . Γενικά, παρατηρήθηκε μία αναλογία της θετικής μεροληψίας της μεθόδου με τις μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ , και η μέθοδος Croston να ενδείκνυται μόνο όταν το  $\alpha$  είναι μικρότερο του 0.15.

Η μέθοδος λοιπόν που αναπτύχθηκε, πήρε το όνομά της από τους προαναφερόμενους. Ονομάζεται, δηλαδή, SBA (Syntetos and Boylan Approximation) και αποτελεί μία τροποποίηση της Croston's Method, στην οποία η πρόβλεψη υπολογίζεται από τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο:

$$F_{SBA} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * F_{\text{demands}} / F_{\text{intervals}}$$

Μεταγενέστερες εμπειρικές μελέτες και μελέτες προσομοίωσης (Syntetos & Boylan, 2005; Teunter & Sani, 2009) έδειξαν πως η αρχική μέθοδος Croston παρουσιάζει μικρότερη θετική μεροληψία εάν υπάρχουν λίγες μη μηδενικές τιμές στη ζήτηση ενώ η τροποποιημένη μέθοδος των Συντέτου και Boylan έχει μικρότερη μεροληψία εάν παρατηρούνται περισσότερες μηδενικές τιμές στη ζήτηση.

## 4.2 ΜΕΤΡΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε πάλι στον παρακάτω πίνακα τις μη μηδενικές ζητήσεις στον χρόνο στον οποίο συμβαίνουν.

<b>Time</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>	<b>36</b>	<b>39</b>	<b>42</b>	<b>47</b>	<b>56</b>	<b>58</b>	<b>60</b>	<b>67</b>	<b>71</b>	
<b>Demand</b>	5	3	2	5	3	6	6	5	2	1	2	1	3	2	
<b>Time</b>	<b>72</b>	<b>73</b>	<b>78</b>	<b>84</b>	<b>89</b>	<b>94</b>	<b>98</b>	<b>104</b>	<b>110</b>	<b>130</b>	<b>133</b>	<b>155</b>	<b>159</b>	<b>170</b>	<b>176</b>
<b>Demand</b>	4	6	2	3	2	6	3	4	2	6	3	6	2	4	5

Ο μέσος όρος ζητήσεων ανά μεσοδιάστημα (Time average of demands per review interval) είναι 0.58, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{180} Y_t = \frac{1}{n} * (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t), \text{ όπου } Y_t \text{ είναι οι τιμές των ζητήσεών μας}$$

και n το πλήθος των ζητήσεων.

Στην πρώτη περίπτωση ξεκινάμε την ανάλυση της πρόβλεψης σύμφωνα με τη μέθοδο των Syntetos and Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο των 3.58. Στον παρακάτω πίνακα, παραθέτονται κάποια βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά τα οποία παραμένουν ίδια και στη μέθοδο του Syntetos and Boylan Approximation. Όπως, ο μέσος όρος των θετικών ζητήσεων είναι 3.59, ο μέσος όρος των μεσοδιαστημάτων είναι 6.04, η διακύμανση είναι 2.823 και τέλος η τυπική απόκλιση είναι 1.68.

<b>Time average of demands per review interval</b>	0,58
<b>Average size of demand</b>	3,59
<b>Average inter-arrival interval</b>	6,04
<b>Variance</b>	2,823
<b>Standard Deviation</b>	1,68

Η μεταβλητή q εκφράζει το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση μέχρι να έρθει η επόμενη τιμή της ζήτησης. Ένα παράδειγμα υπολογισμού της συγκεκριμένης μεταβλητής για τις πρώτες 12 παρατηρήσεις είναι το εξής:

Time	Demand	q
1	5	6,25
2	0	4
3	0	4
4	0	4
5	3	4
6	2	1
7	5	1
8	0	5
9	0	5
10	0	5
11	0	5
12	3	5

Για  $t=1$ , το  $q$  είναι ίσο με 6.25 διότι ξεκινάμε με τον μέσο όρο των τιμών της μεταβλητής  $q$  και μετά από την  $t=2$  με μηδενική ζήτηση μέχρι την  $t=5$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη θετική ζήτηση 3, η μεταβλητή  $q$  είναι ίση με 4 αφού έχουν περάσει 4 περιόδους. Στη συνέχεια, από την  $t=5$  με ζήτηση 3 μέχρι την  $t=6$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη ζήτηση 2 έχει περάσει μια περίοδος γι' αυτό και το  $q=1$  και ούτε καθεξής.

Έχοντας υπολογίσει την μεταβλητή  $q$ , θα ορίσουμε τώρα την  $P''$  (το εκθετικά εξομαλυσμένο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $P''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή  $q$ :

$$P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,

$q_{t-1}$  = το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση,

$P''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής μας.

Αρχικά, ας δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε πάλι με τον μέσο όρο της μεταβλητής  $q$  (6.25), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

<b>t</b>	<b>Demand</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>	<b>P''</b>
1	5	6,25	3,58621	6,25
2	0	4	3,86897	6,25
3	0	4	3,86897	6,25
4	0	4	3,86897	6,25
5	3	4	3,86897	6,25
6	2	1	3,69517	5,80000
7	5	1	3,35614	4,84000
8	0	5	3,68491	4,07200
9	0	5	3,68491	4,07200
10	0	5	3,68491	4,07200
11	0	5	3,68491	4,07200
12	3	5	3,68491	4,07200

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=1$  μέχρι και την  $t=5$  το  $P''$  είναι σταθερό στο 6.25. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $P''$  ισούται με 5.8, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 4 + (1-0.2) * 6.25 = 5.8$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 5.8 = 4.84$ . Για  $t=8$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 4.84 = 4.072$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $P''$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσουμε και την μεταβλητή  $Z''_t$  (το εκθετικά εξομαλυμένο μέγεθος της ζήτησης, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $Z''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή της ζήτησης:

$$Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,  $0 < \alpha < 1$ ,

$Z_{t-1}$  = η τιμή της ζήτησης την προηγούμενη περίοδο,

$Z''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής  $Z''_t$ .

Στη συνέχεια, θα δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε με τον μέσο όρο των θετικών ζητήσεων (3.586207), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

<b>t</b>	<b>Demand</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>
1	5	6,25	3,58621
2	0	4	3,86897
3	0	4	3,86897
4	0	4	3,86897
5	3	4	3,86897
6	2	1	3,69517
7	5	1	3,35614
8	0	5	3,68491
9	0	5	3,68491
10	0	5	3,68491
11	0	5	3,68491
12	3	5	3,68491

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=2$  μέχρι και την  $t=5$  το  $Z''_t$  είναι σταθερό στο 3.86897. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $Z''_t$  ισούται με  $3.69517$ , σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 3 + (1-0.2) * 3.86897 = 3.69517$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 2 + (1-0.2) * 3.69517 = 3.68491$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $Z''_t$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Για να υπολογίσουμε το  $Y''$  έχουμε τον ακόλουθο τύπο, όπου είναι και η μοναδική διαφορά σε σχέση με την μέθοδο του Croston.

Δηλαδή:

$$F_{SBA} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * F_{demands} / F_{intervals}$$

Γι' αυτόν το λόγο παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα από το excel, την διαδικασία υπολογισμού σύμφωνα με το παραπάνω τύπο.

Time	Demand	q	Z''	P''	Y''(t)
1	5	6,25	3,586207	6,25	0,51641
2	0	4	3,868966	6,25	0,55713
3	0	4	3,868966	6,25	0,55713
4	0	4	3,868966	6,25	0,55713
5	3	4	3,868966	6,25	0,55713
6	2	1	3,695172	5,8	0,57339
7	5	1	3,356138	4,84	0,62408
8	0	5	3,68491	4,072	0,81444
9	0	5	3,68491	4,072	0,81444
10	0	5	3,68491	4,072	0,81444
11	0	5	3,68491	4,072	0,81444
12	3	5	3,68491	4,072	0,81444

Πιο συγκεκριμένα, διαιρούμε το  $Z''_t$  με το  $P''_t$  και έπειτα πολλαπλασιάζουμε με το  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  και έτσι βρίσκουμε την πρόβλεψη που γίνεται την περίοδο  $t$  για την περίοδο  $t+1$ . Με άλλα λόγια, την  $t=1$  έχουμε  $(1 - \frac{0,2}{2}) * 3.58621/6.25$  για  $\alpha=0.2$ , με αποτέλεσμα το  $Y''_t$  να ισούται με 0,51641. Την  $t=2$  η επόμενη θετική ζήτηση όποτε συμβεί είναι το 0,55713, δηλαδή η επόμενη θετική ζήτηση είναι το 3. Με αυτόν τον τρόπο, την  $t=6$  το  $Y''_t$  ισούται με 0,57339, είναι δηλαδή η πρόβλεψη μας για την επόμενη θετική ζήτηση που θα συμβεί, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή ζήτησης είναι 5. Στη συνέχεια, το  $Y''_t$  ισούται με 0,81444 από την  $t=8$  μέχρι την επόμενη θετική ζήτηση την  $t=12$  με ζήτηση 3. Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.a του παραρτήματος.

Το επόμενο βήμα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $Y''_t$  για μια τιμή  $Y$  σε χρόνο  $t$  (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_{t(demand)} - Y''_t$ , όπου ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_{t(demand)} - Y''_t$  θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας.



True (Yt)	Forecast (Y''t)	Errors	Abs-error	Sq-error	et/Yt
5	0,51641	4,48359	4,48359	20,10255	0,89672
0	0,55713	-0,55713	0,55713	0,31039	0,00000
0	0,55713	-0,55713	0,55713	0,31039	0,00000
0	0,55713	-0,55713	0,55713	0,31039	0,00000
3	0,55713	2,44287	2,44287	5,96761	0,81429
2	0,57339	1,42661	1,42661	2,03522	0,71331
5	0,62408	4,37592	4,37592	19,14872	0,87518
0	0,81444	-0,81444	0,81444	0,66332	0,00000
0	0,81444	-0,81444	0,81444	0,66332	0,00000
0	0,81444	-0,81444	0,81444	0,66332	0,00000
0	0,81444	-0,81444	0,81444	0,66332	0,00000
3	0,81444	2,18556	2,18556	4,77665	0,72852

Για παράδειγμα,  $e_1=Y_1- Y''_1=5-0.51641=4.48359$ ,  $e_2=Y_2- Y''_2=0-0.55713=-0.55713$ . . . και τέλος  $e_{180}=Y_{180}- Y''_{180}=0-0.41876=-0.41876$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1|=4.48359$ ,  $|e_2|=0.55713$ , . . . , και τέλος  $|e_{180}|=0.41876$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2=20.10255$ ,  $e_2^2=0.31039$ , . . . , και τέλος  $e_{180}^2=0.17536$ . Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.b του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1= Y_1- Y''_1$ ,  $e_2= Y_2- Y''_2$ , . . . , και  $e_n= Y_n- Y''_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

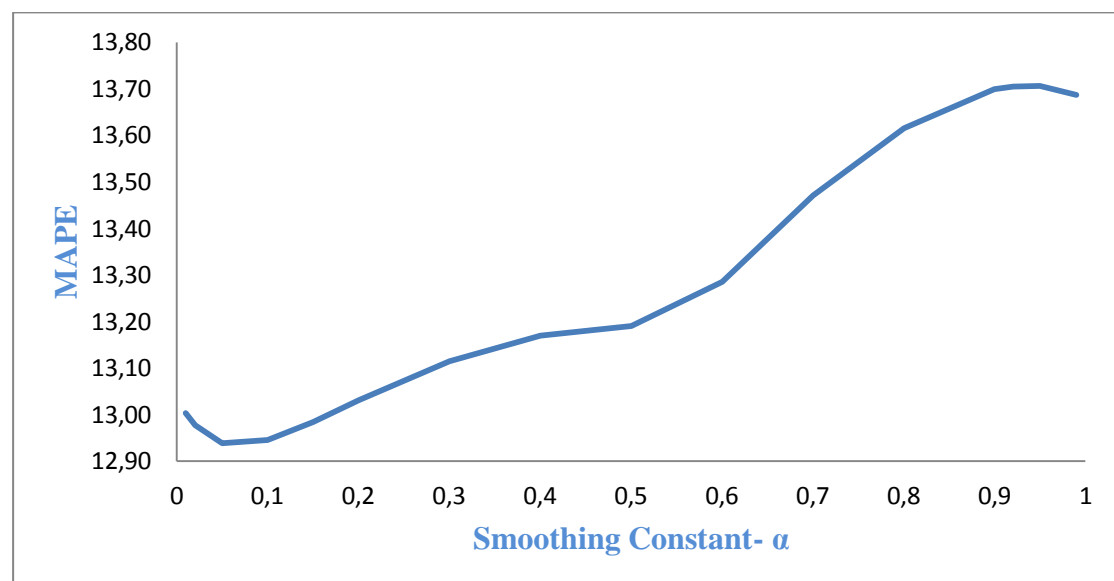
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |et|$
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error- MSE)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n et^2$
- Και το Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error- MAPE)  $MAPE = \left(\frac{1}{n} \sum_1^n et/Yt\right) * 100$ . Το MAPE μετρά το μέγεθος του σφάλματος σε ποσοστιαίες μονάδες.

Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAPE, MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAPE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.1** MAPE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

<u><math>\alpha</math></u>	<u>Measures</u>	<u>Syntetos &amp; Boylan Approximation</u>
0,01	MAPE	13,0033
0,02	MAPE	12,9776
0,05	MAPE	12,9389
0,1	MAPE	12,9450
0,15	MAPE	12,9843
0,2	MAPE	13,0311
0,3	MAPE	13,1149
0,4	MAPE	13,1701
0,5	MAPE	13,1910
0,6	MAPE	13,2858
0,7	MAPE	13,4705
0,8	MAPE	13,6159
0,9	MAPE	13,6989
0,91	MAPE	13,7025
0,92	MAPE	13,7051
0,95	MAPE	13,7061
0,99	MAPE	13,6874

**Διάγραμμα 4.2.1** MAPE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο.



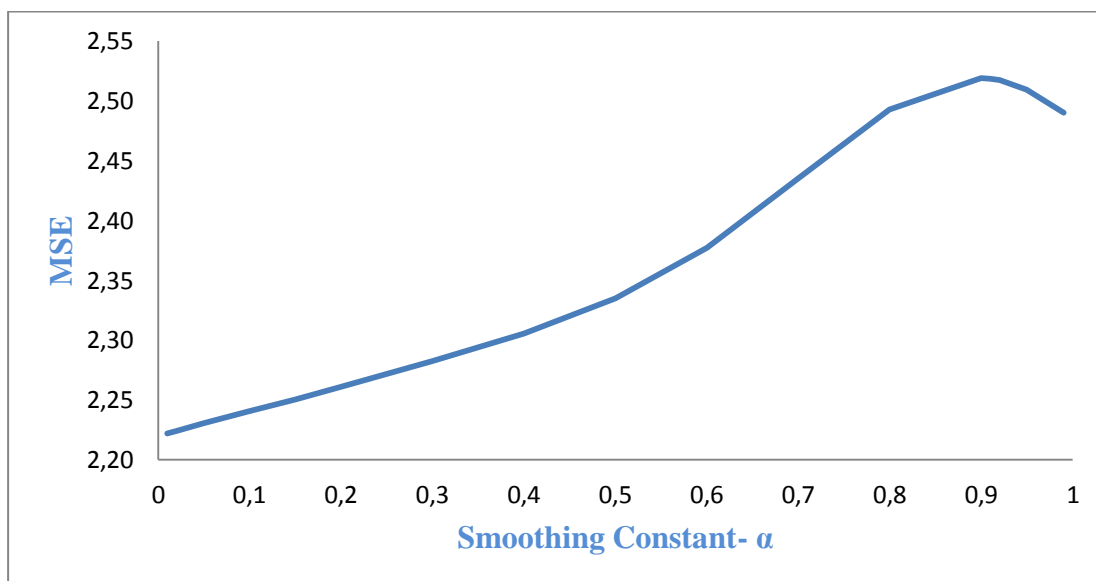
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 13.0033 για  $\alpha=0.01$ , και στη συνέχεια μειώνονται σταδιακά μέχρι το 12.9389 για  $\alpha=0.05$  ενώ από το  $\alpha=0.1$  αυξάνονται σταδιακά (12.9450) μέχρι το  $\alpha=0.95$  (13.7061) και στο τέλος μειώνεται στο 13.6874 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.05$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 12.9389.

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.2** MSE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

<u><math>\alpha</math></u>	<u>Measures</u>	<u>Syntetos &amp; Boylan Approximation</u>
<b>0,01</b>	MSE	2,2218
<b>0,02</b>	MSE	2,22418
<b>0,05</b>	MSE	2,2306
<b>0,1</b>	MSE	2,2405
<b>0,15</b>	MSE	2,2505
<b>0,2</b>	MSE	2,2608
<b>0,3</b>	MSE	2,2822
<b>0,4</b>	MSE	2,3054
<b>0,5</b>	MSE	2,3347
<b>0,6</b>	MSE	2,3773
<b>0,7</b>	MSE	2,4347
<b>0,8</b>	MSE	2,4928
<b>0,9</b>	MSE	2,5188
<b>0,91</b>	MSE	2,5182
<b>0,92</b>	MSE	2,5170
<b>0,95</b>	MSE	2,5093
<b>0,99</b>	MSE	<b>2,4900</b>

**Διάγραμμα 4.2.2** MSE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή του μέσο όρο.



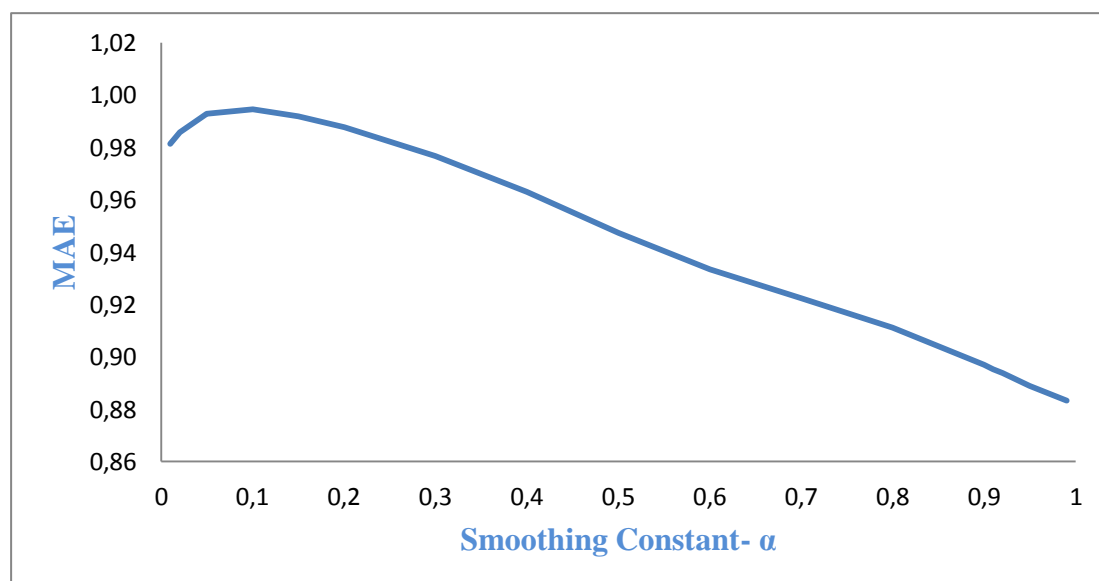
Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου αυξάνονται συνεχώς από το 2.2218 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 2.5182 για  $\alpha=0.91$  και στη συνέχεια μειώνεται από 2.5170 για  $\alpha=0.92$  μέχρι το 2.4900 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.4900 για  $\alpha=0.99$ .

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAE για όλα τα  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.3** MAE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MAE	0,9813
0,02	MAE	0,9857
0,05	MAE	0,9928
0,1	MAE	0,9946
0,15	MAE	0,9919
0,2	MAE	0,9876
0,3	MAE	0,9766
0,4	MAE	0,9630
0,5	MAE	0,9473
0,6	MAE	0,9334
0,7	MAE	0,9225
0,8	MAE	0,9111
0,9	MAE	0,8969
0,91	MAE	0,8953
0,92	MAE	0,8937
0,95	MAE	0,8889
0,99	MAE	0,8833

**Διάγραμμα 4.2.3** MAE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή τον μέσο όρο.



Τέλος, παρατηρούμε ότι οι τιμές του κριτηρίου αυξάνονται συνεχώς από το 0.9813 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 0.9946 για  $\alpha=0.1$ . Ωστόσο, για  $\alpha=0.15$  (0.9919) μειώνεται μέχρι το 0.8833 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 0.8833 για  $\alpha=0.99$ .

Έπειτα, συνεχίζουμε την ανάλυση της πρόβλεψης μας με τη μέθοδο του Syntetos and Boylan (2001) με αρχική τιμή την πρώτη τιμή ζήτησης για  $t=1$ , δηλαδή το 5.

Η μεταβλητή  $q$  εκφράζει το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση μέχρι να έρθει η επόμενη τιμή της ζήτησης. Ένα παράδειγμα υπολογισμού της συγκεκριμένης μεταβλητής για τις πρώτες 12 παρατηρήσεις είναι το εξής:

Time	Demand	q
1	5	6,25
2	0	4
3	0	4
4	0	4
5	3	4
6	2	1
7	5	1
8	0	5
9	0	5
10	0	5
11	0	5
12	3	5

Για  $t=1$ , το  $q$  είναι ίσο με 6.25 διότι ξεκινάμε με τον μέσο όρο των τιμών της μεταβλητής  $q$  και μετά από την  $t=2$  με μηδενική ζήτηση μέχρι την  $t=5$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη θετική ζήτηση 3, η μεταβλητή  $q$  είναι ίση με 4 αφού έχουν περάσει 4 περίοδοι. Στη συνέχεια, από την  $t=5$  με ζήτηση 3 μέχρι την  $t=6$  που συναντάμε την αμέσως επόμενη ζήτηση 2 έχει περάσει μια περίοδος γι' αυτό και το  $q=1$  και ούτε καθεξής.

Έχοντας υπολογίσει την μεταβλητή  $q$ , θα ορίσουμε τώρα την  $P''$  (το εκθετικά εξομαλυμένο διάστημα μεταξύ των ζητήσεων, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $P''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή  $q$ :

$$P''_t = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,

$q_{t-1}$  = το χρονικό διάστημα από την τελευταία ζήτηση,

$P''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής μας.

Αρχικά, ας δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε πάλι με τον μέσο όρο της μεταβλητής  $q$  (6.25), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

Time	Demand	$q$	$Z''$	$P''$
1	5	6,25	5,00000	6,25
2	0	4	5,00000	6,25
3	0	4	5,00000	6,25
4	0	4	5,00000	6,25
5	3	4	5,00000	6,25
6	2	1	4,60000	5,80000
7	5	1	4,08000	4,84000
8	0	5	4,26400	4,07200
9	0	5	4,26400	4,07200
10	0	5	4,26400	4,07200
11	0	5	4,26400	4,07200
12	3	5	4,26400	4,07200

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από την  $t=1$  μέχρι και την  $t=5$  το  $P''$  είναι σταθερό στο 6.25. Την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $P''$  ισούται με 5.8, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 4 + (1-0.2) * 6.25 = 5.8$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 5.8 = 4.84$ . Για  $t=8$ , έχουμε  $P'' = \alpha * q_{t-1} + (1-\alpha) * P''_{t-1} = 0.2 * 1 + (1-0.2) * 4.84 = 4.072$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $P''$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσουμε και την μεταβλητή  $Z''_t$  (το εκθετικά εξομαλυμένο μέγεθος της ζήτησης, ενημερωμένο μόνο εάν υπάρχει ζήτηση την περίοδο  $t$ ).

Για τον υπολογισμό του  $Z''_t$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο, χρησιμοποιώντας και την μεταβλητή της ζήτησης:

$$Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1}$$

όπου  $\alpha = 0$  συντελεστής εξομάλυνσης,  $0 < \alpha < 1$ ,

$Z_{t-1}$  = η τιμή της ζήτησης την προηγούμενη περίοδο,

$Z''_{t-1}$  = η προηγούμενη τιμή της μεταβλητής  $Z''_t$ .

Στη συνέχεια, θα δούμε ένα παράδειγμα πάνω στα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε με τον μέσο όρο των θετικών ζητήσεων (3.586207), διότι δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της ζήτησης που έχουμε στα δεδομένα μας.

Time	Demand	q	Z''
1	5	6,25	5,00000
2	0	4	5,00000
3	0	4	5,00000
4	0	4	5,00000
5	3	4	5,00000
6	2	1	4,60000
7	5	1	4,08000
8	0	5	4,26400
9	0	5	4,26400
10	0	5	4,26400
11	0	5	4,26400
12	3	5	4,26400

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ξεκινάμε με αρχική τιμή το 5, διότι δεν γνωρίζουμε τις προηγούμενες τιμές ζήτησης. Από την  $t=2$  μέχρι και την  $t=5$  το  $Z''_t$  είναι σταθερό στο 5 και την  $t=6$ , για  $\alpha=0.2$  το  $Z''_t$  ισούται με 4.6, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 3 + (1-0.2) * 5 = 4.6$ . Για  $t=7$ , έχουμε  $Z''_t = \alpha * Z_{t-1} + (1-\alpha) * Z''_{t-1} = 0.2 * 2 + (1-0.2) * 4.6 = 4.08$ . Έτσι, από την  $t=8$  μέχρι την  $t=12$  η τιμή του  $Z''_t$  παραμένει η ίδια καθώς σύμφωνα με τη μέθοδο του Croston παραμένει ίδια η τιμή σε όλα τις μηδενικές ζητήσεις μέχρι και την επόμενη θετική ζήτηση.

Για να υπολογίσουμε το  $Y''$  έχουμε τον ακόλουθο τύπο, όπου είναι και η μοναδική διαφορά σε σχέση με την μέθοδο του Croston.

Δηλαδή:

$$FSBA = (1 - \alpha/2) * F_{demands} / F_{intervals}$$

Γι' αυτόν το λόγο παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα από το excel, την διαδικασία υπολογισμού σύμφωνα με το παραπάνω τύπο.



Time	Demand	q	Z''	P''	Y''(t)
1	5	6,25	5	6,25	0,72
2	0	4	5	6,25	0,72
3	0	4	5	6,25	0,72
4	0	4	5	6,25	0,72
5	3	4	5	6,25	0,72
6	2	1	4,6	5,8	0,713793
7	5	1	4,08	4,84	0,758678
8	0	5	4,264	4,072	0,942436
9	0	5	4,264	4,072	0,942436
10	0	5	4,264	4,072	0,942436
11	0	5	4,264	4,072	0,942436
12	3	5	4,264	4,072	0,942436

Πιο συγκεκριμένα, διαιρούμε το  $Z''_t$  με το  $P''_t$  και έπειτα πολλαπλασιάζουμε με το  $(1-\alpha/2)$  και έτσι βρίσκουμε την πρόβλεψη που γίνεται την περίοδο  $t$  για την περίοδο  $t+1$ . Με άλλα λόγια, την  $t=1$  έχουμε  $(1-0.2/2) * 5/6.25$  για  $\alpha=0.2$ , με αποτέλεσμα το  $Y''_t$  να ισούται με 0.72 μέχρι την  $t=5$ . Με αυτόν τον τρόπο, την  $t=6$  το  $Y''_t$  ισούται με 0.713793, είναι δηλαδή η πρόβλεψη μας για την επόμενη θετική ζήτηση που θα συμβεί, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή ζήτησης είναι 5. Στη συνέχεια, το  $Y''_t$  ισούται με 0.942436 από την  $t=8$  μέχρι την επόμενη θετική ζήτηση την  $t=12$  με ζήτηση 3. Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.c του παραρτήματος.

Το επόμενο βήμα της μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τα σφάλματα (errors,  $e_t$ ). Δεδομένης της εκτίμησης  $Y''_t$  για μια τιμή  $Y$  σε χρόνο  $t$  (δηλ.  $Y_t$ ) θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μιας ακριβούς ή μη-ακριβούς εκτίμησης το οποίο θα είναι συνάρτηση της παρατήρησης μας. Έτσι ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης (ή πρόβλεψης) ως:  $e_t = Y_{t(\text{demand})} - Y''_t$ , όπου ορίζεται και ως εκτίμηση της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead). Επομένως, το σφάλμα  $e_t$  ορίζεται και ως σφάλμα της αμέσως επομένης τιμής (one-step ahead forecast error). Με άλλα λόγια υπολογίζουμε την απόκλιση της παρατηρούμενης τιμής από την (μη παρατηρήσιμη) πραγματική αξία της τιμής που μας ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με τον τύπο  $e_t = Y_{t(\text{demand})} - Y''_t$  θα υπολογίσουμε παρακάτω τα σφάλματα της πρόβλεψης μας.

True (Yt)	Forecast Y'(t)	Errors	Abs-Error	Sq-Error	et/Yt
5	0,72	4,28	4,28	18,3184	0,856
0	0,72	-0,72	0,72	0,5184	0
0	0,72	-0,72	0,72	0,5184	0
0	0,72	-0,72	0,72	0,5184	0
3	0,72	2,28	2,28	5,1984	0,76
2	0,7138	1,2862	1,2862	1,6543	0,6431
5	0,7587	4,2413	4,2413	17,9888	0,8483
0	0,9424	-0,9424	0,9424	0,8882	0,0000
0	0,9424	-0,9424	0,9424	0,8882	0,0000
0	0,9424	-0,9424	0,9424	0,8882	0,0000
0	0,9424	-0,9424	0,9424	0,8882	0,0000
3	0,9424	2,0576	2,0576	4,2336	0,6859

Για παράδειγμα,  $e_1=Y_1- Y''_1 = 5- 0.72= 4.28$ ,  $e_2=Y_2- Y''_2= 0- 0.72 = -0.72$ . . . και τέλος  $e_{180}=Y_{180}- Y''_{180} = 0- 0.41899= -0.41899$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές των σφαλμάτων (absolute errors). Αρχικά, έχουμε την απόλυτη τιμή  $|e_1| = 4.28$ ,  $|e_2| = 0.72$ , . . . , και τέλος  $|e_{180}| = 0.41899$ . Ωστόσο, βρίσκουμε και τις τετραγωνικές τιμές των σφαλμάτων (sqrt-errors), δηλαδή  $e_1^2=18.3184$ ,  $e_2^2= 0.5184$ , . . . , και τέλος  $e_{180}^2= 0.17555$ . Αναλυτικότερα, όλα τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.d του παραρτήματος. Δεδομένων των σφαλμάτων μας:  $e_1= Y_1- Y''_1$ ,  $e_2= Y_2- Y''_2$ , . . . , και  $e_n= Y_n- Y''_n$ , μπορούμε να εκτιμήσουμε τα λεγόμενα Μέτρα ορθής πρόβλεψης (goodness of fit). Αυτά μπορούν να είναι το:

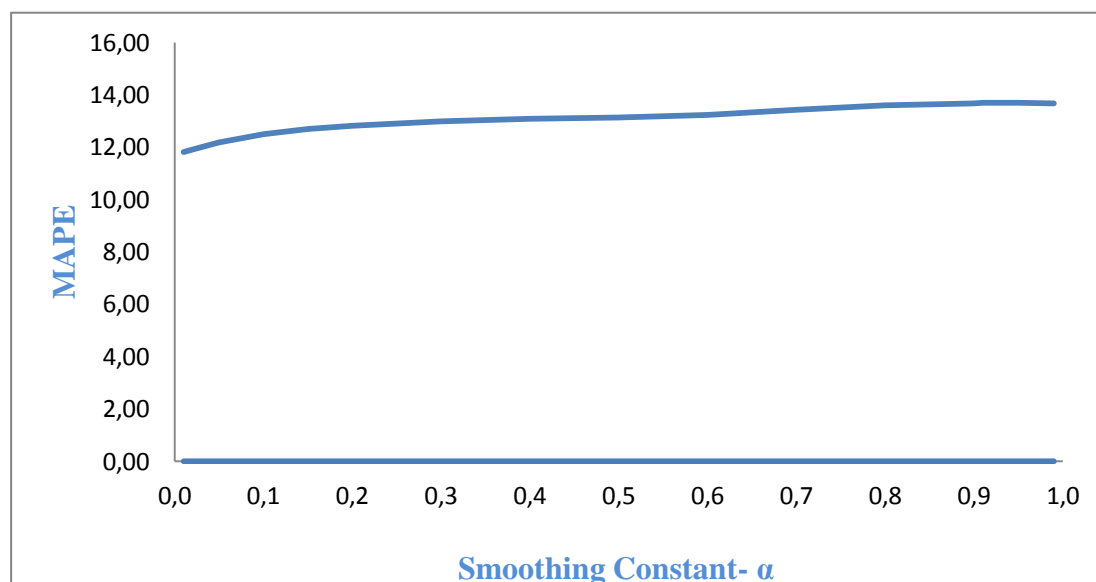
- Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE)  $MAE = \frac{1}{n} \sum_1^n |et|$
- Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error- MSE)  $MSE = \frac{1}{n} \sum_1^n et^2$
- Και το Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error- MAPE)  $MAPE= (\frac{1}{n} \sum_1^n et/Yt) * 100$ . Το MAPE μετρά το μέγεθος του σφάλματος σε ποσοστιαίες μονάδες.

Η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου εκθετικής εξομάλυνσης. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε το MAPE, MAE και το MSE για διάφορες τιμές του  $\alpha$ , όπως: 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MAPE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.4** MAPE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MAPE	11,8033
0,02	MAPE	11,9141
0,05	MAPE	12,1872
0,1	MAPE	12,4940
0,15	MAPE	12,6882
0,2	MAPE	12,8204
0,3	MAPE	12,9875
0,4	MAPE	13,0825
0,5	MAPE	13,1282
0,6	MAPE	13,2404
0,7	MAPE	13,4380
0,8	MAPE	13,5925
0,9	MAPE	13,6818
0,91	MAPE	13,6859
0,92	MAPE	13,6890
0,95	MAPE	13,6914
0,99	MAPE	13,6742

**Διάγραμμα 4.2.4** MAPE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου ξεκινάνε με 11.8033 για  $\alpha=0.01$  και στη συνέχεια αυξάνονται σταδιακά μέχρι το 13.6914 για  $\alpha=0.95$ . Έπειτα, μειώνεται μέχρι το 13.6742 για  $\alpha=0.99$ . Η πρόβλεψη μας σύμφωνα με το

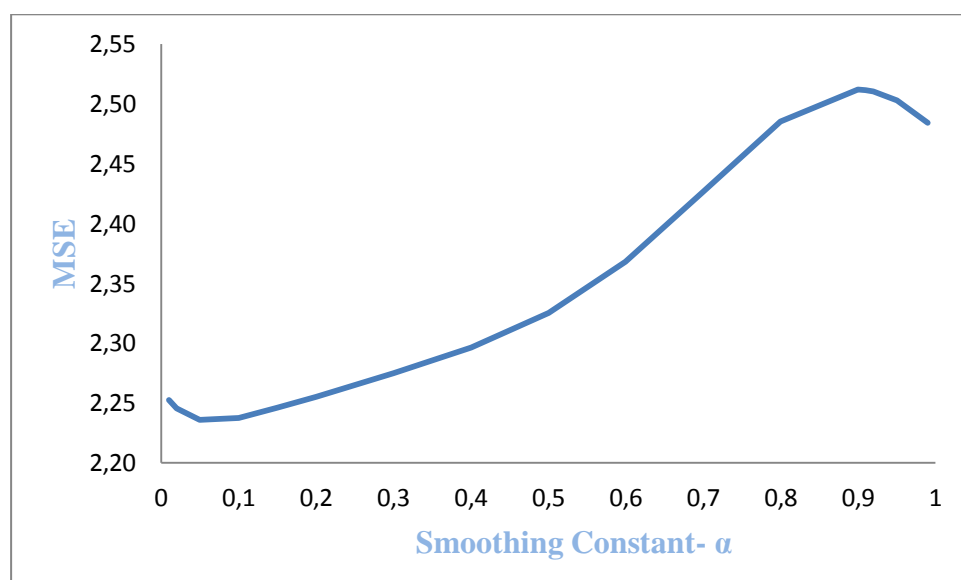
συγκεκριμένο κριτήριο βελτιστοποιείται για  $\alpha=0.01$  στην οποία συναντάμε την μικρότερη τιμή 11.8033.

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται το κριτήριο MSE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.5** MSE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MSE	2,2527
0,02	MSE	2,2456
0,05	MSE	2,2359
0,1	MSE	2,2376
0,15	MSE	2,2459
0,2	MSE	2,2554
0,3	MSE	2,2748
0,4	MSE	2,2963
0,5	MSE	2,3252
0,6	MSE	2,3681
0,7	MSE	2,4263
0,8	MSE	2,4852
0,9	MSE	2,5120
0,91	MSE	2,5115
0,92	MSE	2,5104
0,95	MSE	2,5030
0,99	MSE	2,4840

**Διάγραμμα 4.2.5** MSE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Διακρίνουμε, λοιπόν, ότι οι τιμές του κριτηρίου μειώνονται από το 2.2527 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 2.2359 για  $\alpha=0.05$ . Στη συνέχεια, αυξάνεται από το 2.2376 για  $\alpha=0.1$  μέχρι το 2.5120 για  $\alpha=0.9$  και μετά μειώνεται από το 2.5115 για  $\alpha=0.91$  μέχρι

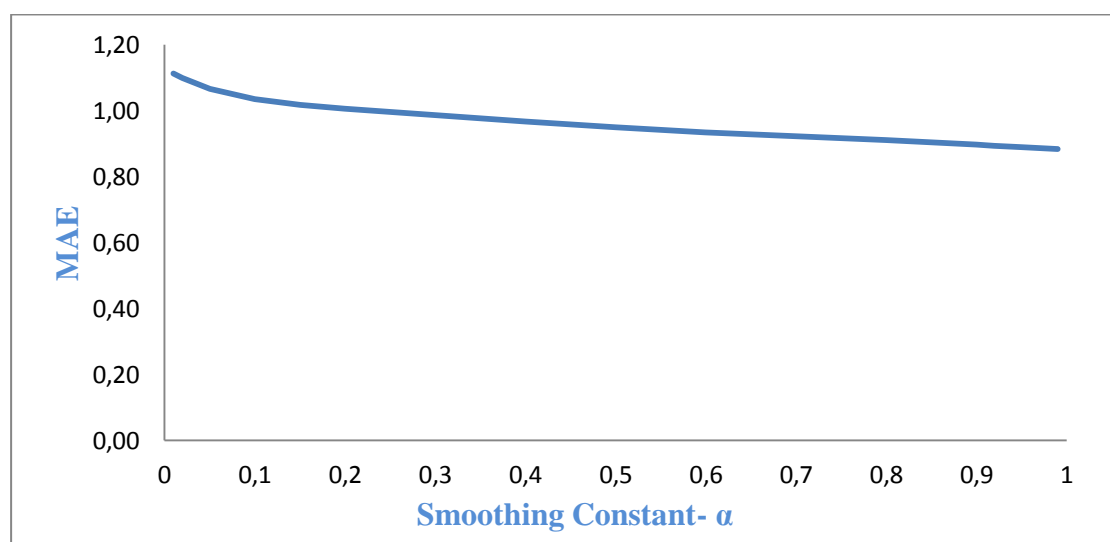
το 2.4840 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 2.2359 για  $\alpha=0.05$ .

Παρακάτω, παρουσιάζεται το κριτήριο MAE για όλες τις τιμές του  $\alpha$ .

**Πίνακας 4.2.6** MAE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MAE	1,1114
0,02	MAE	1,0975
0,05	MAE	1,0655
0,1	MAE	1,0345
0,15	MAE	1,0170
0,2	MAE	1,004722
0,3	MAE	0,9850
0,4	MAE	0,9667
0,5	MAE	0,9486
0,6	MAE	0,9335
0,7	MAE	0,9221
0,8	MAE	0,9106
0,9	MAE	0,8964
0,91	MAE	0,8947
0,92	MAE	0,8931
0,95	MAE	0,8883
0,99	MAE	0,8826

**Διάγραμμα 4.2.6** MAE Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Τέλος, παρατηρούμε ότι οι τιμές του κριτηρίου μειώνονται συνεχώς από το 1.1114 για  $\alpha=0.01$  μέχρι και το 0.8826 για  $\alpha=0.99$ . Έτσι, η μικρότερη τιμή για την οποία η πρόβλεψη μας είναι καλύτερη είναι η 0.8826 για  $\alpha=0.99$ .

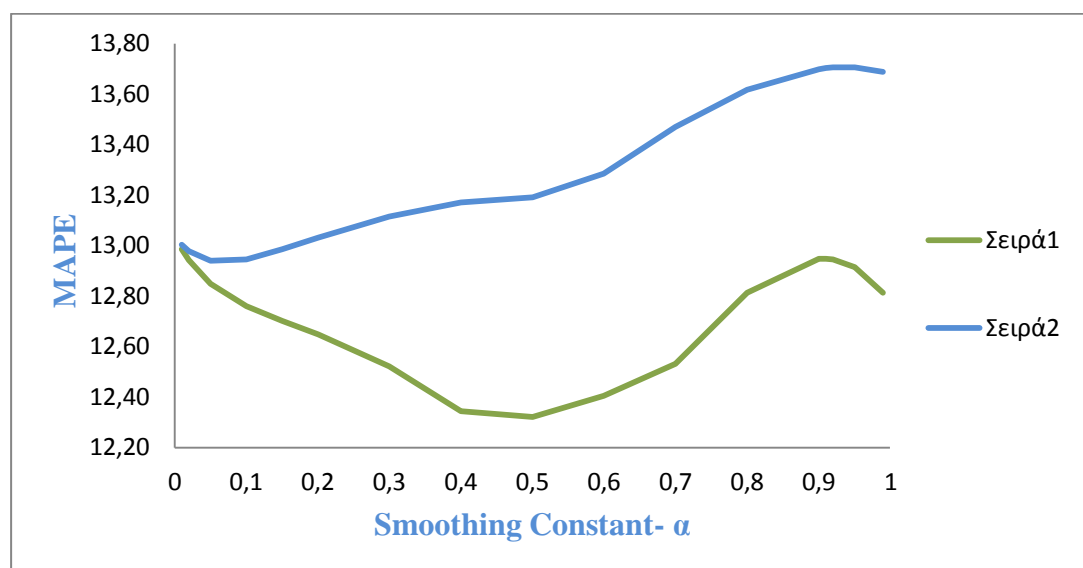
### 4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ (SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING- CROSTON'S METHOD- SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION) ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΟΡΟ.

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση μας με το Μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error-MAPE). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MAPE για την Croston's Method και την Syntetos & Boylan Approximation, καθώς το MAPE δεν υφίσταται για την Simple Exponential Smoothing.

**Πίνακας 4.3.1** MAPE Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.

<u><math>\alpha</math></u>	<u>Measures</u>	<u>Croston's Method</u>	<u>Syntetos &amp; Boylan Approximation</u>
<b>0,01</b>	MAPE	12,9858	13,0033
<b>0,02</b>	MAPE	12,9422	12,9776
<b>0,05</b>	MAPE	12,8482	12,9389
<b>0,1</b>	MAPE	12,7591	12,9450
<b>0,15</b>	MAPE	12,7011	12,9843
<b>0,2</b>	MAPE	12,6482	13,0311
<b>0,3</b>	MAPE	12,5216	13,1149
<b>0,4</b>	MAPE	12,3433	13,1701
<b>0,5</b>	MAPE	12,3204	13,1910
<b>0,6</b>	MAPE	12,4050	13,2858
<b>0,7</b>	MAPE	12,5318	13,4705
<b>0,8</b>	MAPE	12,8120	13,6159
<b>0,9</b>	MAPE	12,9481	13,6989
<b>0,91</b>	MAPE	12,9482	13,7025
<b>0,92</b>	MAPE	12,9451	13,7051
<b>0,95</b>	MAPE	12,9146	13,7061
<b>0,99</b>	MAPE	12,8123	13,6874

**Διάγραμμα 4.3.1** MAPE Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.



Σειρά 1= Croston's Method, Σειρά 2= Syntetos & Boylan

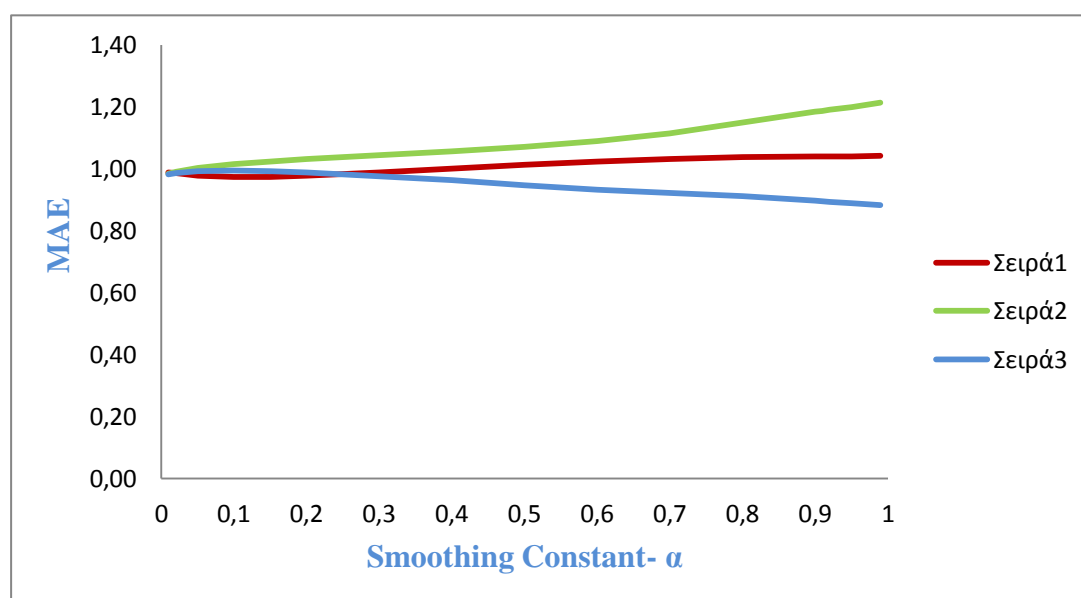
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για όλες τις τιμές του  $\alpha$  μικρότερες είναι οι τιμές στην μέθοδο του Croston. Με άλλα λόγια, καλύτερη πρόβλεψη θα έχουμε με την μέθοδο αυτή. Για παράδειγμα, έχουμε  $12.9858 < 13.0033$  για  $\alpha=0.01$  και  $12.9422 < 12.9776$  για  $\alpha=0.02$ . Συγκεκριμένα, στο παραπάνω κριτήριο το ολικό ελάχιστο μας το δίνει η μέθοδος του Croston με την τιμή 12.8123.

Συνεχίζουμε την ανάλυση μας με το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MAE και για τις τρεις μεθόδους.

**Πίνακας 4.3.2** MAE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.

$\alpha$	<u>Measures</u>	<u>Simple Exponential Smoothing (SES)</u>	<u>Croston's Method</u>	<u>Syntetos &amp; Boylan Approximation</u>
<b>0,01</b>	MAE	0,9886	0,9833	<b>0,9813</b>
<b>0,02</b>	MAE	0,9870	0,9897	<b>0,9857</b>
<b>0,05</b>	MAE	<b>0,9774</b>	1,0031	0,9928
<b>0,1</b>	MAE	<b>0,9737</b>	1,0159	0,9946
<b>0,15</b>	MAE	<b>0,9744</b>	1,0244	0,9919
<b>0,2</b>	MAE	<b>0,9772</b>	1,0317	0,9876
<b>0,3</b>	MAE	0,9874	1,0447	<b>0,9766</b>
<b>0,4</b>	MAE	1,0005	1,0560	<b>0,9630</b>
<b>0,5</b>	MAE	1,0132	1,0706	<b>0,9473</b>
<b>0,6</b>	MAE	1,0232	1,0899	<b>0,9334</b>
<b>0,7</b>	MAE	1,0311	1,1153	<b>0,9225</b>
<b>0,8</b>	MAE	1,0372	1,1502	<b>0,9111</b>
<b>0,9</b>	MAE	1,0404	1,1837	<b>0,8969</b>
<b>0,91</b>	MAE	1,0406	1,1869	<b>0,8953</b>
<b>0,92</b>	MAE	1,0408	1,1900	<b>0,8937</b>
<b>0,95</b>	MAE	1,0411	1,1997	<b>0,8889</b>
<b>0,99</b>	MAE	1,0413	1,2145	<b>0,8833</b>

**Διάγραμμα 4.3.2** MAE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο .



Σειρά 1=SES, Σειρά 2= Croston's Method, Σειρά 3= Syntetos & Boylan



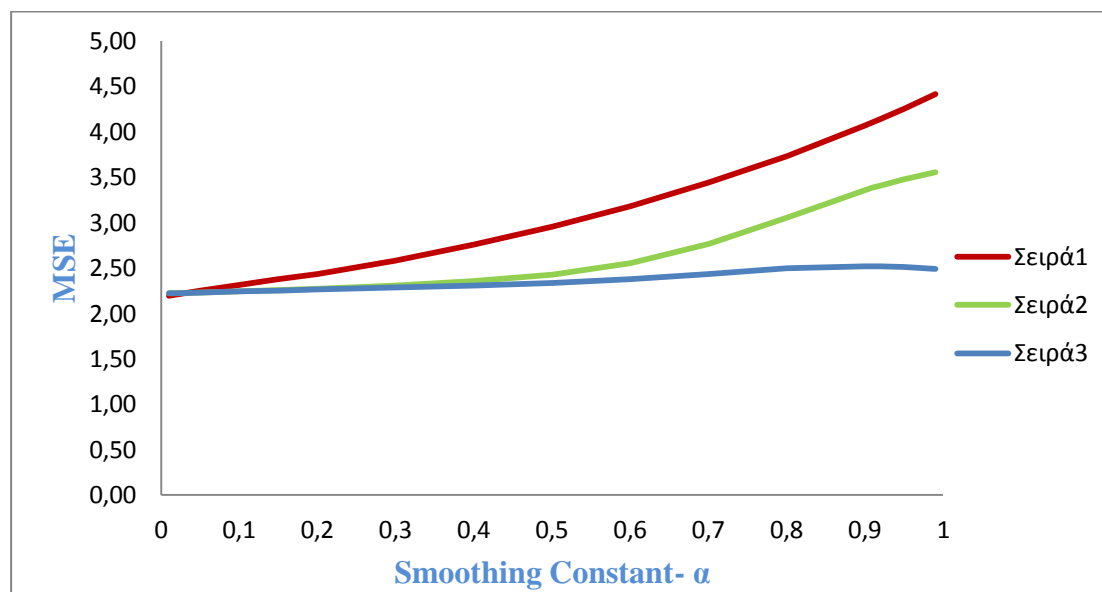
Αυτό που διακρίνουμε από τον παραπάνω διάγραμμα είναι ότι για  $\alpha=0.01$  και  $\alpha=0.02$  η καλύτερη μέθοδος είναι αυτή του Syntetos & Boylan, για  $\alpha=0.05$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.15$  και  $\alpha=0.2$  καλύτερες προβλέψεις θα κάνουμε με την Simple Exponential Smoothing. Ενώ, για  $\alpha=0.3$  μέχρι και το τελευταίο  $\alpha=0.99$  η προτιμότερη μέθοδος είναι του Syntetos & Boylan Approximation. Διαπιστώνουμε, έτσι λοιπόν, ότι στο κριτήριο Mean Absolute Error την καλύτερη/μικρότερη τιμή θα μας την δώσει η Syntetos & Boylan Approximation, δηλαδή 0.8833, η οποία διακρίνεται εύκολα και στο διάγραμμα.

Τέλος, θα αναλύσουμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error) MSE. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MSE και για τις τρεις μεθόδους.

**Πίνακας 4.3.3** MSE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)	Croston's Method	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MSE	2,1946	2,22178	2,22181
0,02	MSE	2,2094	2,22423	2,22418
0,05	MSE	2,2521	2,2313	2,2306
0,1	MSE	2,3144	2,2433	2,2405
0,15	MSE	2,3728	2,2564	2,2505
0,2	MSE	2,4349	2,2712	2,2608
0,3	MSE	2,5803	2,3069	2,2822
0,4	MSE	2,7546	2,3547	2,3054
0,5	MSE	2,9552	2,4284	2,3347
0,6	MSE	3,1821	2,5545	2,3773
0,7	MSE	3,4382	2,7622	2,4347
0,8	MSE	3,7296	3,0516	2,4928
0,9	MSE	4,0656	3,3540	2,5188
0,91	MSE	4,1021	3,3805	2,5182
0,92	MSE	4,1392	3,4059	2,5170
0,95	MSE	4,2541	3,4749	2,5093
0,99	MSE	4,4163	3,5529	2,4900

**Διάγραμμα 4.3.3** MSE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.



Σειρά 1=SES, Σειρά 2= Croston's Method, Σειρά 3= Syntetos & Boylan

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι σύμφωνα με το κριτήριο MSE η καλύτερη μέθοδος για όλα τα  $\alpha$  είναι αυτή του Syntetos & Boylan εκτός από το  $\alpha=0.01$ , όπου προτιμάται η Croston's Method. Όπως στο MAE, έτσι και στο Mean Squared Error (MSE) η μέθοδος που μας δίνει το ολικό ελάχιστο είναι αυτή του Syntetos & Boylan Approximation (2.4900).

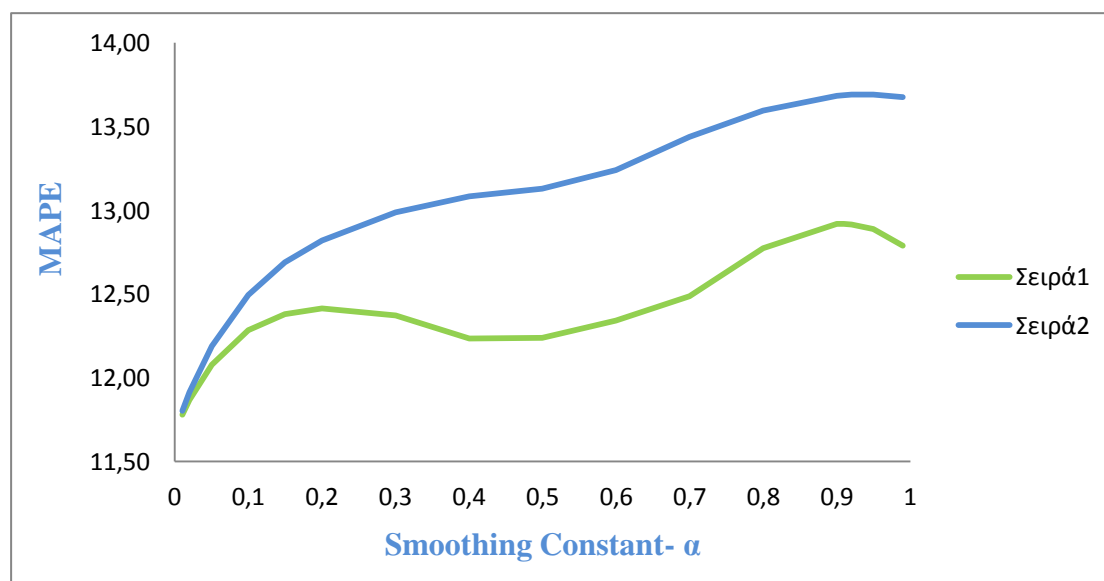
#### 4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ (SIMPLE EXPONENTIAL SMOOTHING-CROSTON'S METHOD- SYNTETOS & BOYLAN APPROXIMATION) ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ 5.

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση μας με το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα σε ποσοστό (Mean Absolute Percentage Error-MAPE). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MAPE για την Croston's Method και την Syntetos & Boylan Approximation, καθώς το MAPE δεν υφίσταται για την Simple Exponential Smoothing.

**Πίνακας 4.4.1** MAPE Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Croston's Method	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MAPE	11,7798	11,8033
0,02	MAPE	11,8680	11,9141
0,05	MAPE	12,0772	12,1872
0,1	MAPE	12,2843	12,4940
0,15	MAPE	12,3810	12,6882
0,2	MAPE	12,4140	12,8204
0,3	MAPE	12,3717	12,9875
0,4	MAPE	12,2338	13,0825
0,5	MAPE	12,2367	13,1282
0,6	MAPE	12,3402	13,2404
0,7	MAPE	12,4850	13,4380
0,8	MAPE	12,7737	13,5925
0,9	MAPE	12,9170	13,6818
0,91	MAPE	12,9178	13,6859
0,92	MAPE	12,9153	13,6890
0,95	MAPE	12,8865	13,6914
0,99	MAPE	12,7862	13,6742

**Διάγραμμα 4.4.1** MAPE Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Σειρά 1= Croston's Method, Σειρά 2= Syntetos & Boylan

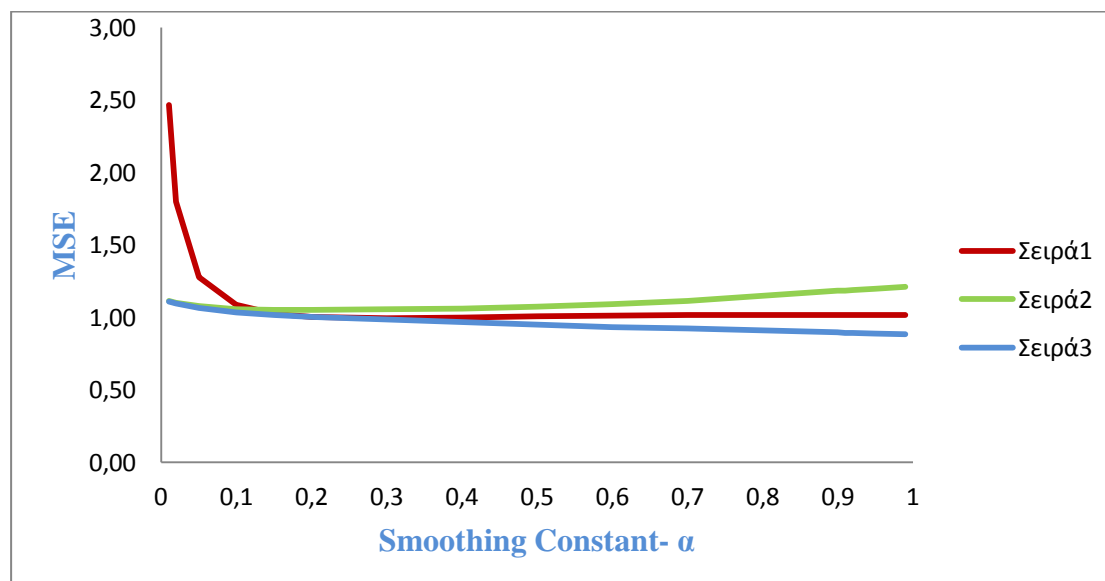
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για όλες τις τιμές του  $\alpha$  μικρότερες είναι οι τιμές στην μέθοδο του Croston. Με άλλα λόγια, καλύτερη πρόβλεψη θα έχουμε με την μέθοδο αυτή. Για παράδειγμα, έχουμε  $11.7798 < 11.8033$  για  $\alpha=0.01$  και  $11.8680 < 11.9141$  για  $\alpha=0.02$ . Επίσης, το ολικό ελάχιστο σε αυτό το κριτήριο μας το δίνει η Croston's Method με την τιμή 12.7862.

Συνεχίζουμε την ανάλυση μας με το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error- MAE). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MAE και για τις τρεις μεθόδους.

**Πίνακας 4.4.2** MAE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)	Croston's Method	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MAE	2,465	1,1141	1,1114
0,02	MAE	1,800	1,1026	1,0975
0,05	MAE	1,278	1,0776	1,0655
0,1	MAE	1,088	1,0578	1,0345
0,15	MAE	1,0270	1,0515	1,0170
0,2	MAE	1,004723	1,0507	1,004722
0,3	MAE	0,9944	1,0545	0,9850
0,4	MAE	1,0001	1,0606	0,9667
0,5	MAE	1,0078	1,0723	0,9486
0,6	MAE	1,0130	1,0901	0,9335
0,7	MAE	1,0167	1,1149	0,9221
0,8	MAE	1,0187	1,1494	0,9106
0,9	MAE	1,0186	1,1826	0,8964
0,91	MAE	1,0185	1,1858	0,8947
0,92	MAE	1,0183	1,1889	0,8931
0,95	MAE	1,0178	1,1985	0,8883
0,99	MAE	1,0169	1,2132	0,8826

**Διάγραμμα 4.4.2** MAE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Σειρά 1=SES, Σειρά 2= Croston's Method, Σειρά 3= Syntetos & Boylan

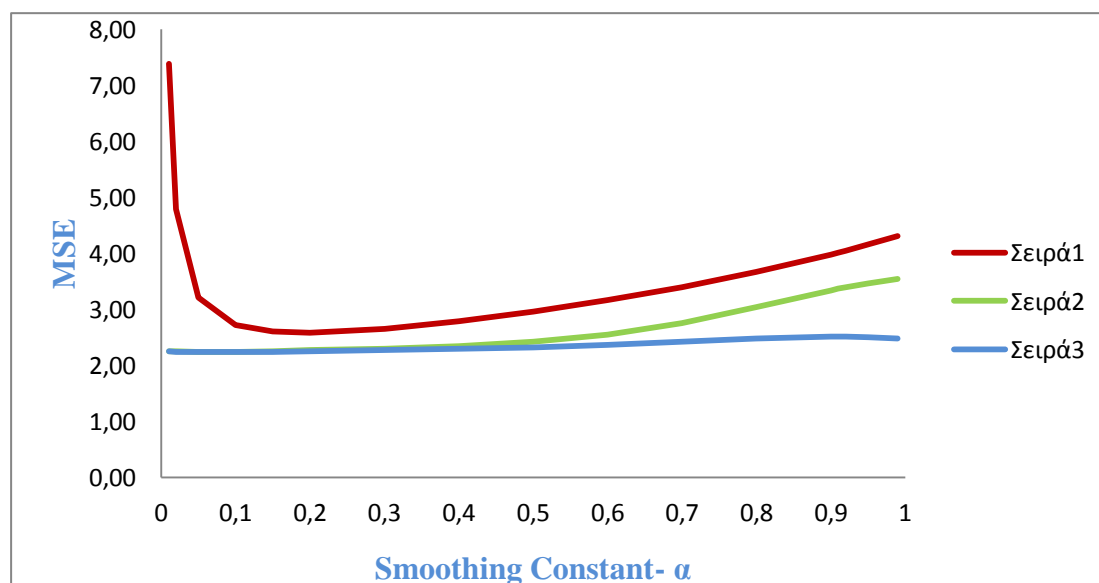
Αυτό που διακρίνουμε από τον παραπάνω πίνακα και διάγραμμα είναι ότι για όλα τα  $\alpha$  η καλύτερη μέθοδος είναι αυτή του Syntetos & Boylan. Έτσι, επιβεβαιώνεται η βελτιστοποίηση των προβλέψεων σε σχέση με τις πρώτες δύο μεθόδους. Επιπρόσθετα, το ολικό ελάχιστο του παραπάνω κριτηρίου δίνεται από την Syntetos & Boylan Approximation με τιμή 0.8826.

Τέλος, θα αναλύσουμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error- MSE). Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου MSE και για τις τρεις μεθόδους.

**Πίνακας 4.4.3** MSE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

$\alpha$	Measures	Simple Exponential Smoothing (SES)	Croston's Method	Syntetos & Boylan Approximation
0,01	MSE	7,385	2,2542	2,2527
0,02	MSE	4,791	2,2482	2,2456
0,05	MSE	3,207	2,2407	2,2359
0,1	MSE	2,722	2,2452	2,2376
0,15	MSE	2,604	2,2567	2,2459
0,2	MSE	2,585	2,2707	2,2554
0,3	MSE	2,655	2,3035	2,2748
0,4	MSE	2,791	2,3480	2,2963
0,5	MSE	2,963	2,4195	2,3252
0,6	MSE	3,166	2,5444	2,3681
0,7	MSE	3,399	2,7514	2,4263
0,8	MSE	3,6674	3,0405	2,4852
0,9	MSE	3,9807	3,3429	2,5120
0,91	MSE	4,015	3,3694	2,5115
0,92	MSE	4,050	3,3948	2,5104
0,95	MSE	4,157	3,4639	2,5030
0,99	MSE	4,310	3,5418	2,4840

**Διάγραμμα 4.4.3** MSE SES- Croston's Method- Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.



Σειρά 1=SES, Σειρά 2= Croston's Method, Σειρά 3= Syntetos & Boylan

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι σύμφωνα με το κριτήριο MSE η καλύτερη μέθοδος για όλα τα  $\alpha$  είναι αυτή του Syntetos & Boylan, καθώς πάλι επιβεβαιώνεται η βελτιστοποίηση των προβλέψεων σε σχέση με τις πρώτες δύο μεθόδους. Όπως, επίσης η συγκεκριμένη μέθοδος μας δίνει την μικρότερη τιμή στο σύνολο όλων των τιμών για όλα τα  $\alpha$  και για τις τρεις μεθόδους (2.4840).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ασχοληθήκαμε με την διακοπτόμενη ζήτηση (intermittent demand) των προϊόντων, η οποία έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να εμφανίζεται σποραδικά, δηλαδή να μεσολαβούν περίοδοι, όπου αυτή είναι μηδενική. Αυτό είναι και το χαρακτηριστικό της που την κάνει ιδιαίτερη ως περίπτωση και απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση.

Για τα στελέχη των επιχειρήσεων που ασχολούνται με τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τη διαχείριση των αποθεμάτων διακοπτόμενης ζήτησης, είναι επιτακτική η ανάγκη καθορισμού κανόνων προμήθειας των απαιτητών και μόνο ποσοτήτων τους. Συνεπώς, η βελτίωση του τομέα των προβλέψεων καθώς και σε αυτό της διαχείρισης των αποθεμάτων, συνήθως μεταφράζεται σε σημαντική μείωση κόστους στις επιχειρήσεις, λόγω μικρότερων δεσμευμένων κεφαλαίων στις αποθήκες τους υπό μορφή ανταλλακτικών, τα οποία μένουν τις περισσότερες περιπτώσεις αχρησιμοποίητα και με την πάροδο του χρόνου απαξιώνονται και υποτιμάται η αξία τους, μεγιστοποιώντας έτσι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος. Αν ληφθεί υπ' όψιν και η ανάγκη για μείωση των αποθηκευτικών χώρων, τότε γίνεται αισθητή η τεράστια σημασία και το οικονομικό όφελος κάθε προσπάθειας που ευδοκιμεί στον κλάδο των προβλέψεων.

Οι προβλέψεις αποτελούν αριθμητικούς υπολογισμούς των μελλοντικών επιπέδων των πωλήσεων, της ζήτησης, των επενδύσεων, του κόστους, των τιμών κ.α. για μια εταιρεία, μια βιομηχανία, ένα φορέα της οικονομίας ή τη συνολική οικονομία. Σύμφωνα με τους Fildes et al. (2008), η έρευνα στον τομέα των προβλέψεων και του ελέγχου των αποθεμάτων για τα είδη της διακοπτόμενης ζήτησης έχει αναπτυχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια με νέα αποτελέσματα εφαρμοσμένα σε λογισμικά προϊόντα εξαιτίας της πρακτικής σημαντικότητάς τους. Ο σκοπός της πρόβλεψης είναι να βοηθήσει τη διεύθυνση να προγραμματίσει τις απαιτήσεις για marketing, των πρώτων υλών, του προσωπικού, της παραγωγής, των υπηρεσιών, της δημιουργίας εγκαταστάσεων κ.α. Οι έξυπνες, επιστημονικές και καλοπροετοιμασμένες προβλέψεις θα πρέπει να είναι ακριβείς ώστε να επιτρέπουν καλύτερο σχεδιασμό και έλεγχο. Για να επιτευχθεί όμως η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη θα πρέπει να επιλεγεί η καταλληλότερη μέθοδος προβλέψεων για τη συγκεκριμένη χρονοσειρά.

Έτσι, στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του Croston, καθώς δεν υπάρχουν άλλες διαθέσιμες σειρές ζήτησης στη



βιβλιογραφία, σύμφωνα με εναλλακτικές μέθοδοι διενέργειας προβλέψεων όταν έχουμε διακοπτόμενη ζήτηση. Επιπλέον, βασικό εργαλείο του Croston είναι η απλή εκθετική εξομάλυνση (SES), η οποία έχει ως σημαντικό πρόβλημα με ποια τιμή θα ξεκινήσει ο προβλεπτικός τύπος υπολογισμού των προβλέψεων. Γι' αυτό τον λόγο, η ανάλυση μας πραγματοποιήθηκε με δύο επιλογές ως αρχική τιμή, τον μέσο όρο των θετικών παρατηρήσεων μας (3.58) και την αρχική τιμή 5, που ξεκινάνε τα δεδομένα μας. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων και τη μεταξύ τους σύγκριση, υλοποιήθηκαν αλγόριθμοι για όλες τις μεθόδους πρόβλεψης. Έπειτα, υπολογίστηκαν οι επιλεχθέντες δείκτες σφάλματος με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα σφάλματα που χρησιμοποιούνται είναι τα εξής: μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE), μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) και το μέσο απόλυτο σφάλμα σε ποσοστό (MAPE).

Αρχικά, αναπτύχθηκε η μέθοδος της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, όπου με αρχική τιμή το μέσο όρο στο κριτήριο MAE η μικρότερη τιμή είναι το 0.9737 για  $\alpha=0.1$  και στο MSE είναι η τιμή 2.1946 για  $\alpha=0.01$ . Ενώ, με αρχική τιμή το 5, η μικρότερη τιμή του κριτηρίου MAE είναι η 0.9944 για  $\alpha=0.3$  και του MSE η 2.585 για  $\alpha=0.2$ . Στη συνέχεια παρουσιάστηκε η μέθοδος του Croston, η οποία προσπάθησε να βελτιώσει τις προβλέψεις σχετικά με την απλή εκθετική εξομάλυνση. Για παράδειγμα, με αρχική τιμή το μέσο όρο, για το κριτήριο MAPE μικρότερη είναι η τιμή 12.3204 για  $\alpha=0.5$ , στο MSE έχουμε την τιμή 2.2218 για  $\alpha=0.01$  και στο MAE η 0.9833 για  $\alpha=0.01$ . Επιπρόσθετα, με αρχική τιμή το 5, έχουμε για το κριτήριο MAPE μικρότερη είναι η τιμή 11.7798 για  $\alpha=0.01$ , στο MSE έχουμε την τιμή 2.2407 για  $\alpha=0.5$  και στο MAE η 1.0507 για  $\alpha=0.2$ .

Τέλος, παρουσιάστηκε η μέθοδος των Συντέτου και του Boylan (2001), οι οποίοι προσπάθησαν να εντοπίσουν το αίτιο αυτής της απροσδόκητης συμπεριφοράς της Croston's Method και διαπίστωσαν ότι παρουσιάζει μια θετική μεροληψία (positively biased), δηλαδή μια αισιόδοξη τάση στα αποτελέσματα των προβλέψεων της. Σύμφωνα, λοιπόν, με την ανάλυσή μας, με αρχική τιμή το 3.58, η μικρότερη τιμή στο MAPE είναι 12.9389 για  $\alpha=0.05$ , στο MSE καλύτερη πρόβλεψη θα έχουμε για  $\alpha=0.99$  καθώς εκεί παρατηρείται η μικρότερη τιμή (2.49) και στο MAE έχουμε την 0.8833 για  $\alpha=0.99$ . Ενώ, με αρχική τιμή το 5, στο MAPE είναι η 11.8033 για  $\alpha=0.01$ , στο MSE την 2.2359 για  $\alpha=0.05$  και για το MAE η μικρότερη τιμή είναι η 0.8826 για  $\alpha=0.99$ .

Συγκρίνοντας και τις τρεις μεθόδους μας, με αρχική τιμή το μέσο όρο, στο MAPE η καλύτερη μέθοδος πρόβλεψης είναι του Croston, ενώ στο MAE και στο

MSE για τα περισσότερα  $\alpha$  καλύτερη προβλεπτική μέθοδος είναι των Syntetos & Boylan Approximation. Ωστόσο, έχοντας αρχική τιμή το 5, τα αποτελέσματα στο MAPE είναι τα ίδια, αλλά για τα άλλα δύο κριτήρια η καλύτερη μέθοδος είναι των Syntetos & Boylan Approximation για όλα τα  $\alpha$  και όχι για τα περισσότερα που ήταν με αρχική τιμή το 3.58.

Η καλύτερη προβλεπτική μέθοδος εξαρτάται από την επιλογή της αρχικής τιμής και την επιλογή του κριτηρίου. Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι καμία μεθοδολογία δεν υπερέχει καθολικά έναντι των υπολοίπων, ανεξάρτητα από τα δύο σημεία διερεύνησης. Έτσι, θα πρέπει να διερευνηθεί η ανομοιομορφία αυτών σε σχέση με μεταβολές του κόστους του συστήματος των αποθεμάτων. Ελπίζουμε, η συνεισφορά μας να αποτελέσει σημείο αναφοράς για περισσότερη αναλυτική δουλειά πάνω σε αυτόν τον τομέα, καθώς επίσης να διευκολύνει στην καλύτερη κατανόηση σε θέματα σχετιζόμενα με την μοντελοποίηση της διακοπτόμενης ζήτησης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Δημελή Σ., (2013), «Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης χρονολογικών σειρών», Εκδόσεις ΟΠΑ, Αθήνα, σελ. 14-15.
- Χατζηνικολάου Δ., (2002), «Στατιστική για Οικονομολόγους», Printshop A.E., Ιωάννινα, σελ. 109-111.
- Jarrett J., (2002), «Μέθοδοι προβλέψεων για οικονομικές επιχειρηματικές αποφάσεις», Gutenberg, Αθήνα.

### Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Boylan J.E., Syntetos A. A. and Karakostas G. C., (2008), “Classification for forecasting and stock control: a case study”, Journal of the Operational Research Society, Palgrave Macmillan Journals, Vol. 59, No. 4, pp. 473-481.
- Croston J.D., (1972), “Forecasting and stock control for intermittent demands”, Opl Res Q, Vol. 23, pp. 289-304.
- Eaves AHC, BG Kingsman BG., (2004), “Forecasting for the ordering and stock- holding of spare sparts”, Journal of the Operational Research Society, Vol. 55, pp. 431-437.
- Fildes R., Nikolopoulos K., Crone S. and Syntetos A.A., (2008), “Forecasting and operational research: a review”, J Oper Res Soc, Vol. 59, pp. 1150-1172.
- Hollier R.H., (1980), “The distribution of spare parts”, Int J Prod Res, Vol. 18, pp. 665-675.
- Johnston F.R., Boylan J.E. and Shale E.A., (2003), “An examination of the size of orders from customers, their characterization and the implications for inventory control of slow moving items”, Journal of the Operational Research Society, Vol. 54, pp. 833-837.
- Mitchell. G.H., (1962), “Problems of controlling slow-moving engineering spares”, Opl Res Q, Vol. 13, pp. 23-39.
- Silver E.A., (1970), “Some ideas related to the inventory control of items having erratic demand patterns”, CORS Journal, Vol. 8, pp. 87-100.

- Silver E.A., Pyke D.F. and Peterson R., (1998), “Inventory management and production planning and scheduling”, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Strijbosch L.W.G., Heuts R.M.J. and van der Schoot, E.H.M, (2000), “A combined forecast-inventory control procedure for spare parts”. *J Opl Res Soc*, Vol. 51, pp. 1184-1192.
- Syntetos A. A., (2001), “FORECASTING OF INTERMITTENT DEMAND”, Ph.D. Thesis, Business School, Buckinghamshire Chilterns University College, Brunel University.
- Syntetos, A.A. and Boylan, J.E., (2001), “On the bias of intermittent demand estimates”, *Int J Production Economics*, Vol. 71, pp. 457-466
- Syntetos A. A. and Boylan J.E., (2005), “The accuracy of intermittent demand estimates”, *Int J Forecasting*, Vol.21, pp. 303-314.
- Syntetos A. A. and Boylan J.E., (2006), “On the stock control performance of intermittent demand estimators”, *Int. J. Production Economics*, Vol. 103,pp. 36–47.
- Syntetos A. A. and Boylan J.E. and Croston J.D., (2005), “On the categorization of demand patterns”, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 56, pp. 495-503.
- Teunter, R., Sani, B., (2009), “On the bias of Croston’s forecasting method”, *European Journal of Operational Research* 194, pp. 177–183.
- Syntetos, A.A. and Boylan, J.E., (2001), “On the bias of intermittent demand estimates”, *Int J Production Economics*, Vol. 71, pp. 457-466.
- Willemain, T.R., Smart, C.N., Shockor, J.H. and DeSautels, P.A., (1994), “Forecasting intermittent demand in manufacturing: a comparative evaluation of Croston’s method”, *International Journal of Forecasting*, Vol. 10, pp. 529–538.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 2.α Δεδομένα του Croston

t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt
1	5	46	0	91	0	136	0
2	0	47	2	92	0	137	0
3	0	48	0	93	0	138	0
4	0	49	0	94	6	139	0
5	3	50	0	95	0	140	0
6	2	51	0	96	0	141	0
7	5	52	0	97	0	142	0
8	0	53	0	98	3	143	0
9	0	54	0	99	0	144	0
10	0	55	0	100	0	145	0
11	0	56	1	101	0	146	0
12	3	57	0	102	0	147	0
13	0	58	2	103	0	148	0
14	0	59	0	104	4	149	0
15	0	60	1	105	0	150	0
16	0	61	0	106	0	151	0
17	0	62	0	107	0	152	0
18	0	63	0	108	0	153	0
19	0	64	0	109	0	154	0
20	0	65	0	110	2	155	6
21	0	66	0	111	0	156	0
22	0	67	3	112	0	157	0
23	0	68	0	113	0	158	0
24	0	69	0	114	0	159	2
25	0	70	0	115	0	160	0
26	0	71	2	116	0	161	0
27	0	72	4	117	0	162	0
28	0	73	6	118	0	163	0
29	0	74	0	119	0	164	0
30	0	75	0	120	0	165	0
31	0	76	0	121	0	166	0
32	0	77	0	122	0	167	0
33	0	78	2	123	0	168	0
34	0	79	0	124	0	169	0
35	0	80	0	125	0	170	4
36	6	81	0	126	0	171	0
37	0	82	0	127	0	172	0
38	0	83	0	128	0	173	0
39	6	84	3	129	0	174	0
40	0	85	0	130	6	175	0
41	0	86	0	131	0	176	5
42	5	87	0	132	0	177	0
43	0	88	0	133	3	178	0
44	0	89	2	134	0	179	0
45	0	90	0	135	0	180	0

**Πίνακας 2.β SES προβλέψεις με αρχική τιμή το 0.58.**

<b>t</b>	<b>Yt+1/t</b>	<b>t</b>	<b>Yt+1/t</b>	<b>t</b>	<b>Yt+1/t</b>	<b>t</b>	<b>Yt+1/t</b>
1	0,5778	41	1,4540	81	0,7354	121	0,0742
2	1,4622	42	1,1632	82	0,5883	122	0,0594
3	1,1698	43	1,9306	83	0,4707	123	0,0475
4	0,9358	44	1,5444	84	0,3765	124	0,0380
5	0,7487	45	1,2356	85	0,9012	125	0,0304
6	1,1989	46	0,9884	86	0,7210	126	0,0243
7	1,3591	47	0,7908	87	0,5768	127	0,0195
8	2,0873	48	1,0326	88	0,4614	128	0,0156
9	1,6699	49	0,8261	89	0,3691	129	0,0125
10	1,3359	50	0,6609	90	0,6953	130	0,0100
11	1,0687	51	0,5287	91	0,5562	131	1,2080
12	0,8550	52	0,4230	92	0,4450	132	0,9664
13	1,2840	53	0,3384	93	0,3560	133	0,7731
14	1,0272	54	0,2707	94	0,2848	134	1,2185
15	0,8217	55	0,2166	95	1,4278	135	0,9748
16	0,6574	56	0,1732	96	1,1423	136	0,7798
17	0,5259	57	0,3386	97	0,9138	137	0,6239
18	0,4207	58	0,2709	98	0,7311	138	0,4991
19	0,3366	59	0,6167	99	1,1848	139	0,3993
20	0,2693	60	0,4934	100	0,9479	140	0,3194
21	0,2154	61	0,5947	101	0,7583	141	0,2555
22	0,1723	62	0,4758	102	0,6066	142	0,2044
23	0,1379	63	0,3806	103	0,4853	143	0,1635
24	0,1103	64	0,3045	104	0,3882	144	0,1308
25	0,0882	65	0,2436	105	1,1106	145	0,1047
26	0,0706	66	0,1949	106	0,8885	146	0,0837
27	0,0565	67	0,1559	107	0,7108	147	0,0670
28	0,0452	68	0,7247	108	0,5686	148	0,0536
29	0,0361	69	0,5798	109	0,4549	149	0,0429
30	0,0289	70	0,4638	110	0,3639	150	0,0343
31	0,0231	71	0,3711	111	0,6911	151	0,0274
32	0,0185	72	0,6968	112	0,5529	152	0,0220
33	0,0148	73	1,3575	113	0,4423	153	0,0176
34	0,0118	74	2,2860	114	0,3539	154	0,0140
35	0,0095	75	1,8288	115	0,2831	155	0,0112
36	0,0076	76	1,4630	116	0,2265	156	1,2090
37	1,2061	77	1,1704	117	0,1812	157	0,9672
38	0,9649	78	0,9363	118	0,1449	158	0,7738
39	0,7719	79	1,1491	119	0,1160	159	0,6190
40	1,8175	80	0,9193	120	0,0928	160	0,8952

<b>161</b>	0,7162	<b>166</b>	0,2347	<b>171</b>	0,8769	<b>176</b>	0,2873
<b>162</b>	0,5729	<b>167</b>	0,1877	<b>172</b>	0,7015	<b>177</b>	1,2299
<b>163</b>	0,4583	<b>168</b>	0,1502	<b>173</b>	0,5612	<b>178</b>	0,9839
<b>164</b>	0,3667	<b>169</b>	0,1202	<b>174</b>	0,4490	<b>179</b>	0,7871
<b>165</b>	0,2933	<b>170</b>	0,0961	<b>175</b>	0,3592	<b>180</b>	0,6297

**Πίνακας 2.ε SES Σφάλματα με αρχική τιμή το 0.58.**

<b>Errors</b>	<b>Abs-error</b>	<b>Sqrt-error</b>	<b>et/Yt</b>
4,4222	4,4222	19,5560	0,8844
-1,4622	1,4622	2,1381	0,0000
-1,1698	1,1698	1,3684	0,0000
-0,9358	0,9358	0,8758	0,0000
2,2513	2,2513	5,0685	0,7504
0,8011	0,8011	0,6417	0,4005
3,6409	3,6409	13,2559	0,7282
-2,0873	2,0873	4,3569	0,0000
-1,6699	1,6699	2,7884	0,0000
-1,3359	1,3359	1,7846	0,0000
-1,0687	1,0687	1,1421	0,0000
2,1450	2,1450	4,6012	0,7150
-1,2840	1,2840	1,6486	0,0000
-1,0272	1,0272	1,0551	0,0000
-0,8217	0,8217	0,6753	0,0000
-0,6574	0,6574	0,4322	0,0000
-0,5259	0,5259	0,2766	0,0000
-0,4207	0,4207	0,1770	0,0000
-0,3366	0,3366	0,1133	0,0000
-0,2693	0,2693	0,0725	0,0000
-0,2154	0,2154	0,0464	0,0000
-0,1723	0,1723	0,0297	0,0000
-0,1379	0,1379	0,0190	0,0000
-0,1103	0,1103	0,0122	0,0000
-0,0882	0,0882	0,0078	0,0000
-0,0706	0,0706	0,0050	0,0000
-0,0565	0,0565	0,0032	0,0000
-0,0452	0,0452	0,0020	0,0000
-0,0361	0,0361	0,0013	0,0000
-0,0289	0,0289	0,0008	0,0000
-0,0231	0,0231	0,0005	0,0000
-0,0185	0,0185	0,0003	0,0000
-0,0148	0,0148	0,0002	0,0000
-0,0118	0,0118	0,0001	0,0000
-0,0095	0,0095	0,0001	0,0000
5,9924	5,9924	35,9091	0,9987
-1,2061	1,2061	1,4546	0,0000
-0,9649	0,9649	0,9309	0,0000

5,2281	5,2281	27,3332	0,8714
-1,8175	1,8175	3,3033	0,0000
-1,4540	1,4540	2,1141	0,0000
3,8368	3,8368	14,7210	0,7674
-1,9306	1,9306	3,7271	0,0000
-1,5444	1,5444	2,3853	0,0000
-1,2356	1,2356	1,5266	0,0000
-0,9884	0,9884	0,9770	0,0000
1,2092	1,2092	1,4623	0,6046
-1,0326	1,0326	1,0663	0,0000
-0,8261	0,8261	0,6824	0,0000
-0,6609	0,6609	0,4367	0,0000
-0,5287	0,5287	0,2795	0,0000
-0,4230	0,4230	0,1789	0,0000
-0,3384	0,3384	0,1145	0,0000
-0,2707	0,2707	0,0733	0,0000
-0,2166	0,2166	0,0469	0,0000
0,8268	0,8268	0,6835	0,8268
-0,3386	0,3386	0,1146	0,0000
1,7291	1,7291	2,9899	0,8646
-0,6167	0,6167	0,3803	0,0000
0,5066	0,5066	0,2567	0,5066
-0,5947	0,5947	0,3537	0,0000
-0,4758	0,4758	0,2263	0,0000
-0,3806	0,3806	0,1449	0,0000
-0,3045	0,3045	0,0927	0,0000
-0,2436	0,2436	0,0593	0,0000
-0,1949	0,1949	0,0380	0,0000
2,8441	2,8441	8,0889	0,9480
-0,7247	0,7247	0,5252	0,0000
-0,5798	0,5798	0,3361	0,0000
-0,4638	0,4638	0,2151	0,0000
1,6289	1,6289	2,6535	0,8145
3,3032	3,3032	10,9108	0,8258
4,6425	4,6425	21,5530	0,7738
-2,2860	2,2860	5,2257	0,0000
-1,8288	1,8288	3,3445	0,0000
-1,4630	1,4630	2,1404	0,0000
-1,1704	1,1704	1,3699	0,0000
1,0637	1,0637	1,1314	0,5318
-1,1491	1,1491	1,3204	0,0000
-0,9193	0,9193	0,8450	0,0000
-0,7354	0,7354	0,5408	0,0000
-0,5883	0,5883	0,3461	0,0000
-0,4707	0,4707	0,2215	0,0000
2,6235	2,6235	6,8826	0,8745
-0,9012	0,9012	0,8122	0,0000
-0,7210	0,7210	0,5198	0,0000



-0,5768	0,5768	0,3327	0,0000
-0,4614	0,4614	0,2129	0,0000
1,6309	1,6309	2,6597	0,8154
-0,6953	0,6953	0,4835	0,0000
-0,5562	0,5562	0,3094	0,0000
-0,4450	0,4450	0,1980	0,0000
-0,3560	0,3560	0,1267	0,0000
5,7152	5,7152	32,6635	0,9525
-1,4278	1,4278	2,0387	0,0000
-1,1423	1,1423	1,3048	0,0000
-0,9138	0,9138	0,8351	0,0000
2,2689	2,2689	5,1481	0,7563
-1,1848	1,1848	1,4039	0,0000
-0,9479	0,9479	0,8985	0,0000
-0,7583	0,7583	0,5750	0,0000
-0,6066	0,6066	0,3680	0,0000
-0,4853	0,4853	0,2355	0,0000
3,6118	3,6118	13,0447	0,9029
-1,1106	1,1106	1,2334	0,0000
-0,8885	0,8885	0,7894	0,0000
-0,7108	0,7108	0,5052	0,0000
-0,5686	0,5686	0,3233	0,0000
-0,4549	0,4549	0,2069	0,0000
1,6361	1,6361	2,6768	0,8180
-0,6911	0,6911	0,4777	0,0000
-0,5529	0,5529	0,3057	0,0000
-0,4423	0,4423	0,1957	0,0000
-0,3539	0,3539	0,1252	0,0000
-0,2831	0,2831	0,0801	0,0000
-0,2265	0,2265	0,0513	0,0000
-0,1812	0,1812	0,0328	0,0000
-0,1449	0,1449	0,0210	0,0000
-0,1160	0,1160	0,0134	0,0000
-0,0928	0,0928	0,0086	0,0000
-0,0742	0,0742	0,0055	0,0000
-0,0594	0,0594	0,0035	0,0000
-0,0475	0,0475	0,0023	0,0000
-0,0380	0,0380	0,0014	0,0000
-0,0304	0,0304	0,0009	0,0000
-0,0243	0,0243	0,0006	0,0000
-0,0195	0,0195	0,0004	0,0000
-0,0156	0,0156	0,0002	0,0000
-0,0125	0,0125	0,0002	0,0000
5,9900	5,9900	35,8806	0,9983
-1,2080	1,2080	1,4592	0,0000
-0,9664	0,9664	0,9339	0,0000
2,2269	2,2269	4,9591	0,7423
-1,2185	1,2185	1,4847	0,0000

-0,9748	0,9748	0,9502	0,0000
-0,7798	0,7798	0,6081	0,0000
-0,6239	0,6239	0,3892	0,0000
-0,4991	0,4991	0,2491	0,0000
-0,3993	0,3993	0,1594	0,0000
-0,3194	0,3194	0,1020	0,0000
-0,2555	0,2555	0,0653	0,0000
-0,2044	0,2044	0,0418	0,0000
-0,1635	0,1635	0,0267	0,0000
-0,1308	0,1308	0,0171	0,0000
-0,1047	0,1047	0,0110	0,0000
-0,0837	0,0837	0,0070	0,0000
-0,0670	0,0670	0,0045	0,0000
-0,0536	0,0536	0,0029	0,0000
-0,0429	0,0429	0,0018	0,0000
-0,0343	0,0343	0,0012	0,0000
-0,0274	0,0274	0,0008	0,0000
-0,0220	0,0220	0,0005	0,0000
-0,0176	0,0176	0,0003	0,0000
-0,0140	0,0140	0,0002	0,0000
5,9888	5,9888	35,8653	0,9981
-1,2090	1,2090	1,4617	0,0000
-0,9672	0,9672	0,9355	0,0000
-0,7738	0,7738	0,5987	0,0000
1,3810	1,3810	1,9072	0,6905
-0,8952	0,8952	0,8014	0,0000
-0,7162	0,7162	0,5129	0,0000
-0,5729	0,5729	0,3282	0,0000
-0,4583	0,4583	0,2101	0,0000
-0,3667	0,3667	0,1345	0,0000
-0,2933	0,2933	0,0860	0,0000
-0,2347	0,2347	0,0551	0,0000
-0,1877	0,1877	0,0352	0,0000
-0,1502	0,1502	0,0226	0,0000
-0,1202	0,1202	0,0144	0,0000
3,9039	3,9039	15,2403	0,9760
-0,8769	0,8769	0,7689	0,0000
-0,7015	0,7015	0,4921	0,0000
-0,5612	0,5612	0,3150	0,0000
-0,4490	0,4490	0,2016	0,0000
-0,3592	0,3592	0,1290	0,0000
4,7127	4,7127	22,2091	0,9425
-1,2299	1,2299	1,5126	0,0000
-0,9839	0,9839	0,9681	0,0000
-0,7871	0,7871	0,6196	0,0000
-0,6297	0,6297	0,3965	0,0000

Πίνακας 2.d SES προβλέψεις με αρχική τιμή το 5.

t	Yt+1/t
1	5
2	5
3	0,5
4	0,05
5	0,005
6	2,7005
7	2,07005
8	4,707005
9	0,470701
10	0,04707
11	0,004707
12	0,000471
13	2,700047
14	0,270005
15	0,027
16	0,0027
17	0,00027
18	2,7E-05
19	2,7E-06
20	2,7E-07
21	2,7E-08
22	2,7E-09
23	2,7E-10
24	2,7E-11
25	2,7E-12
26	2,7E-13
27	2,7E-14
28	2,7E-15
29	2,7E-16
30	2,7E-17
31	2,7E-18
32	2,7E-19
33	2,7E-20
34	2,7E-21
35	2,7E-22
36	2,7E-23
37	5,4
38	0,54
39	0,054
40	5,4054
41	0,54054
42	0,054054
43	4,505405
44	0,450541
45	0,045054
46	0,004505
47	0,000451
48	1,800045
49	0,180005
50	0,018
51	0,0018
52	0,00018
53	1,8E-05
54	1,8E-06
55	1,8E-07
56	1,8E-08
57	0,9
58	0,09
59	1,809
60	0,1809
61	0,91809
62	0,091809
63	0,009181
64	0,000918
65	9,18E-05
66	9,18E-06
67	9,18E-07
68	2,7
69	0,27
70	0,027
71	0,0027
72	1,80027
73	3,780027
74	5,778003
75	0,5778
76	0,05778
77	0,005778
78	0,000578
79	1,800058
80	0,180006
81	0,018001
82	0,0018
83	0,00018
84	1,8E-05
85	2,700002
86	0,27
87	0,027
88	0,0027
89	0,00027
90	1,800027
91	0,180003
92	0,018
93	0,0018
94	0,00018
95	5,400018
96	0,540002
97	0,054
98	0,0054
99	2,70054
100	0,270054
101	0,027005
102	0,002701
103	0,00027
104	2,7E-05
105	3,600003
106	0,36
107	0,036
108	0,0036
109	0,00036
110	3,6E-05
111	1,800004
112	0,18
113	0,018
114	0,0018
115	0,00018
116	1,8E-05
117	1,8E-06
118	1,8E-07
119	1,8E-08
120	1,8E-09
121	1,8E-10
122	1,8E-11
123	1,8E-12
124	1,8E-13
125	1,8E-14
126	1,8E-15
127	1,8E-16
128	1,8E-17
129	1,8E-18
130	1,8E-19
131	5,4
132	0,54
133	0,054
134	2,7054
135	0,27054
136	0,027054
137	0,002705
138	0,000271
139	2,71E-05
140	2,71E-06
141	2,71E-07
142	2,71E-08
143	2,71E-09
144	2,71E-10
145	2,71E-11
146	2,71E-12
147	2,71E-13
148	2,71E-14
149	2,71E-15
150	2,71E-16
151	2,71E-17
152	2,71E-18
153	2,71E-19
154	2,71E-20
155	2,71E-21
156	5,4
157	0,54
158	0,054
159	0,0054
160	1,80054
161	0,180054
162	0,018005

<b>163</b>	0,001801
<b>164</b>	0,00018
<b>165</b>	1,8E-05
<b>166</b>	1,8E-06
<b>167</b>	1,8E-07

<b>168</b>	1,8E-08
<b>169</b>	1,8E-09
<b>170</b>	1,8E-10
<b>171</b>	3,6
<b>172</b>	0,36

<b>173</b>	0,036
<b>174</b>	0,0036
<b>175</b>	0,00036
<b>176</b>	3,6E-05
<b>177</b>	4,500004

<b>178</b>	0,45
<b>179</b>	0,045
<b>180</b>	0,0045

**Πίνακας 2.e** SES Σφάλματα με αρχική τιμή το 5.

et	et	et^2	et/Yt
0	0	0	0,0000
-5	5	25	0,0000
-0,5	0,5	0,25	0,0000
-0,05	0,05	0,0025	0,0000
2,995	2,995	8,970025	0,9983
-0,7005	0,7005	0,49070025	0,3503
2,92995	2,92995	8,584607003	0,5860
-4,707005	4,707005	22,15589607	0,0000
-0,4707005	0,4707005	0,221558961	0,0000
-0,04707005	0,04707005	0,00221559	0,0000
-0,004707005	0,004707005	2,21559E-05	0,0000
2,9995293	2,9995293	8,997176019	0,9998
-2,70004707	2,70004707	7,29025418	0,0000
-0,270004707	0,270004707	0,072902542	0,0000
-0,027000471	0,027000471	0,000729025	0,0000
-0,002700047	0,002700047	7,29025E-06	0,0000
-0,000270005	0,000270005	7,29025E-08	0,0000
-2,70005E-05	2,70005E-05	7,29025E-10	0,0000
-2,70005E-06	2,70005E-06	7,29025E-12	0,0000
-2,70005E-07	2,70005E-07	7,29025E-14	0,0000
-2,70005E-08	2,70005E-08	7,29025E-16	0,0000
-2,70005E-09	2,70005E-09	7,29025E-18	0,0000
-2,70005E-10	2,70005E-10	7,29025E-20	0,0000
-2,70005E-11	2,70005E-11	7,29025E-22	0,0000

-2,70005E-12	2,70005E-12	7,29025E-24	0,0000
-2,70005E-13	2,70005E-13	7,29025E-26	0,0000
-2,70005E-14	2,70005E-14	7,29025E-28	0,0000
-2,70005E-15	2,70005E-15	7,29025E-30	0,0000
-2,70005E-16	2,70005E-16	7,29025E-32	0,0000
-2,70005E-17	2,70005E-17	7,29025E-34	0,0000
-2,70005E-18	2,70005E-18	7,29025E-36	0,0000
-2,70005E-19	2,70005E-19	7,29025E-38	0,0000
-2,70005E-20	2,70005E-20	7,29025E-40	0,0000
-2,70005E-21	2,70005E-21	7,29025E-42	0,0000
-2,70005E-22	2,70005E-22	7,29025E-44	0,0000
6	6	36	1,0000
-5,4	5,4	29,16	0,0000
-0,54	0,54	0,2916	0,0000
5,946	5,946	35,354916	0,9910
-5,4054	5,4054	29,21834916	0,0000
-0,54054	0,54054	0,292183492	0,0000
4,945946	4,945946	24,46238183	0,9892
-4,5054054	4,5054054	20,29867782	0,0000
-0,45054054	0,45054054	0,202986778	0,0000
-0,045054054	0,045054054	0,002029868	0,0000
-0,004505405	0,004505405	2,02987E-05	0,0000
1,999549459	1,999549459	3,998198041	0,9998
-1,800045054	1,800045054	3,240162197	0,0000
-0,180004505	0,180004505	0,032401622	0,0000
-0,018000451	0,018000451	0,000324016	0,0000
-0,001800045	0,001800045	3,24016E-06	0,0000
-0,000180005	0,000180005	3,24016E-08	0,0000
-1,80005E-05	1,80005E-05	3,24016E-10	0,0000

05			
-1,80005E-06	1,80005E-06	3,24016E-12	0,0000
-1,80005E-07	1,80005E-07	3,24016E-14	0,0000
0,999999982	0,999999982	0,999999964	1,0000
-0,900000002	0,900000002	0,810000003	0,0000
1,91	1,91	3,648099999	0,9550
-1,809	1,809	3,272481	0,0000
0,8191	0,8191	0,67092481	0,8191
-0,91809	0,91809	0,842889248	0,0000
-0,091809	0,091809	0,008428892	0,0000
-0,0091809	0,0091809	8,42889E-05	0,0000
-0,00091809	0,00091809	8,42889E-07	0,0000
-9,1809E-05	9,1809E-05	8,42889E-09	0,0000
-9,1809E-06	9,1809E-06	8,42889E-11	0,0000
2,999999082	2,999999082	8,999994491	1,0000
-2,700000092	2,700000092	7,290000496	0,0000
-0,270000009	0,270000009	0,072900005	0,0000
-0,027000001	0,027000001	0,000729	0,0000
1,9973	1,9973	3,98920729	0,9986
2,19973	2,19973	4,838812073	0,5499
2,219973	2,219973	4,928280121	0,3700
-5,7780027	5,7780027	33,3853152	0,0000
-0,57780027	0,57780027	0,333853152	0,0000
-0,057780027	0,057780027	0,003338532	0,0000
-0,005778003	0,005778003	3,33853E-05	0,0000
1,9994222	1,9994222	3,997689133	0,9997
-1,80005778	1,80005778	3,240208011	0,0000
-0,180005778	0,180005778	0,03240208	0,0000
-0,018000578	0,018000578	0,000324021	0,0000
-0,001800058	0,001800058	3,24021E-06	0,0000
-0,000180006	0,000180006	3,24021E-08	0,0000
2,999981999	2,999981999	8,999891997	1,0000
-2,7000018	2,7000018	7,29000972	0,0000
-0,27000018	0,27000018	0,072900097	0,0000

- 0,027000018	0,027000018	0,000729001	0,0000
- 0,002700002	0,002700002	7,29001E-06	0,0000
1,99973	1,99973	3,998920072	0,9999
-1,800027	1,800027	3,240097201	0,0000
-0,1800027	0,1800027	0,032400972	0,0000
-0,01800027	0,01800027	0,00032401	0,0000
- 0,001800027	0,001800027	3,2401E-06	0,0000
5,999819997	5,999819997	35,99784	1,0000
-5,400018	5,400018	29,1601944	0,0000
-0,5400018	0,5400018	0,291601944	0,0000
-0,05400018	0,05400018	0,002916019	0,0000
2,994599982	2,994599982	8,967629052	0,9982
- 2,700540002	2,700540002	7,292916301	0,0000
-0,270054	0,270054	0,072929163	0,0000
-0,0270054	0,0270054	0,000729292	0,0000
-0,00270054	0,00270054	7,29292E-06	0,0000
- 0,000270054	0,000270054	7,29292E-08	0,0000
3,999972995	3,999972995	15,99978396	1,0000
- 3,600002701	3,600002701	12,96001944	0,0000
-0,36000027	0,36000027	0,129600194	0,0000
- 0,036000027	0,036000027	0,001296002	0,0000
- 0,003600003	0,003600003	1,296E-05	0,0000
-0,00036	0,00036	1,296E-07	0,0000
1,999964	1,999964	3,999856001	1,0000
-1,8000036	1,8000036	3,24001296	0,0000
-0,18000036	0,18000036	0,03240013	0,0000
- 0,018000036	0,018000036	0,000324001	0,0000
- 0,001800004	0,001800004	3,24001E-06	0,0000
-0,00018	0,00018	3,24001E-08	0,0000
-1,8E-05	1,8E-05	3,24001E-10	0,0000
-1,8E-06	1,8E-06	3,24001E-12	0,0000
-1,8E-07	1,8E-07	3,24001E-14	0,0000
-1,8E-08	1,8E-08	3,24001E-16	0,0000
-1,8E-09	1,8E-09	3,24001E-18	0,0000
-1,8E-10	1,8E-10	3,24001E-20	0,0000

-1,8E-11	1,8E-11	3,24001E-22	0,0000
-1,8E-12	1,8E-12	3,24001E-24	0,0000
-1,8E-13	1,8E-13	3,24001E-26	0,0000
-1,8E-14	1,8E-14	3,24001E-28	0,0000
-1,8E-15	1,8E-15	3,24001E-30	0,0000
-1,8E-16	1,8E-16	3,24001E-32	0,0000
-1,8E-17	1,8E-17	3,24001E-34	0,0000
-1,8E-18	1,8E-18	3,24001E-36	0,0000
6,0000	6,0000	36,0000	1,0000
-5,4000	5,4000	29,1600	0,0000
-0,5400	0,5400	0,2916	0,0000
2,9460	2,9460	8,6789	0,9820
-2,7054	2,7054	7,3192	0,0000
-0,2705	0,2705	0,0732	0,0000
-0,0271	0,0271	0,0007	0,0000
-0,0027	0,0027	7,31919E-06	0,0000
-0,0003	0,0003	7,31919E-08	0,0000
-0,000027	0,000027	7,31919E-10	0,0000
-2,7054E-06	2,7054E-06	7,31919E-12	0,0000
-2,7054E-07	2,7054E-07	7,31919E-14	0,0000
-2,7054E-08	2,7054E-08	7,31919E-16	0,0000
-2,7054E-09	2,7054E-09	7,31919E-18	0,0000
-2,7054E-10	2,7054E-10	7,31919E-20	0,0000
-2,7054E-11	2,7054E-11	7,31919E-22	0,0000
-2,7054E-12	2,7054E-12	7,31919E-24	0,0000
-2,7054E-13	2,7054E-13	7,31919E-26	0,0000
-2,7054E-14	2,7054E-14	7,31919E-28	0,0000
-2,7054E-15	2,7054E-15	7,31919E-30	0,0000
-2,7054E-16	2,7054E-16	7,31919E-32	0,0000
-2,7054E-17	2,7054E-17	7,31919E-34	0,0000
-2,7054E-18	2,7054E-18	7,31919E-36	0,0000
-2,7054E-19	2,7054E-19	7,31919E-38	0,0000
-2,7054E-20	2,7054E-20	7,31919E-40	0,0000
6,0000	6,0000	36,0000	1,0000
-5,4000	5,4000	29,1600	0,0000
-0,5400	0,5400	0,2916	0,0000
-0,0540	0,0540	0,0029	0,0000
1,9946	1,9946	3,97842916	0,9973
-1,8005	1,8005	3,2419	0,0000
-0,1801	0,1801	0,0324	0,0000
-0,0180	0,0180	0,0003	0,0000
-0,0018	0,0018	3,24194E-06	0,0000
-0,0002	0,0002	3,24194E-08	0,0000



-1,80054E-05	1,80054E-05	3,24194E-10	0,0000
-1,80054E-06	1,80054E-06	3,24194E-12	0,0000
-1,80054E-07	1,80054E-07	3,24194E-14	0,0000
-1,80054E-08	1,80054E-08	3,24194E-16	0,0000
-1,80054E-09	1,80054E-09	3,24194E-18	0,0000
4,0000	4,0000	16,0000	1,0000
-3,6000	3,6000	12,9600	0,0000
-0,3600	0,3600	0,1296	0,0000
-0,0360	0,0360	0,0013	0,0000
-0,0036	0,0036	1,296E-05	0,0000
-0,0004	0,0004	0,00000013	0,0000
5,0000	5,0000	24,9996	1,0000
-4,5000	4,5000	20,2500	0,0000
-0,4500	0,4500	0,2025	0,0000
-0,0450	0,0450	0,0020	0,0000
-0,0045	0,0045	0,0000	0,0000

**Πίνακας 3.α** Croston's Method αποτελέσματα με αρχική τιμή το 0.58.

<b>t</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>	<b>P''</b>	<b>Y''(t)</b>
<b>1</b>	6,25	3,58621	6,25	0,57379
<b>2</b>	4	3,86897	6,25	0,61903
<b>3</b>	4	3,86897	6,25	0,61903
<b>4</b>	4	3,86897	6,25	0,61903
<b>5</b>	4	3,86897	6,25	0,61903
<b>6</b>	1	3,69517	5,80000	0,63710
<b>7</b>	1	3,35614	4,84000	0,69342
<b>8</b>	5	3,68491	4,07200	0,90494
<b>9</b>	5	3,68491	4,07200	0,90494
<b>10</b>	5	3,68491	4,07200	0,90494
<b>11</b>	5	3,68491	4,07200	0,90494
<b>12</b>	5	3,68491	4,07200	0,90494
<b>13</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>14</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>15</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>16</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>17</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>18</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332

<b>19</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>20</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>21</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>22</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>23</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>24</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>25</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>26</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>27</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>28</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>29</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>30</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>31</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>32</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>33</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>34</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>35</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>36</b>	24	3,54793	4,25760	0,83332
<b>37</b>	3	4,03834	8,20608	0,49212
<b>38</b>	3	4,03834	8,20608	0,49212
<b>39</b>	3	4,03834	8,20608	0,49212
<b>40</b>	3	4,43067	7,16486	0,61839
<b>41</b>	3	4,43067	7,16486	0,61839
<b>42</b>	3	4,43067	7,16486	0,61839
<b>43</b>	5	4,54454	6,33189	0,71772
<b>44</b>	5	4,54454	6,33189	0,71772
<b>45</b>	5	4,54454	6,33189	0,71772
<b>46</b>	5	4,54454	6,33189	0,71772
<b>47</b>	5	4,54454	6,33189	0,71772
<b>48</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>49</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>50</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>51</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>52</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>53</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>54</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>55</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>56</b>	9	4,03563	6,06551	0,66534
<b>57</b>	2	3,42851	6,65241	0,51538
<b>58</b>	2	3,42851	6,65241	0,51538
<b>59</b>	2	3,14280	5,72193	0,54926
<b>60</b>	2	3,14280	5,72193	0,54926
<b>61</b>	7	2,71424	4,97754	0,54530

62	7	2,71424	4,97754	0,54530
63	7	2,71424	4,97754	0,54530
64	7	2,71424	4,97754	0,54530
65	7	2,71424	4,97754	0,54530
66	7	2,71424	4,97754	0,54530
67	7	2,71424	4,97754	0,54530
68	4	2,77139	5,38203	0,51493
69	4	2,77139	5,38203	0,51493
70	4	2,77139	5,38203	0,51493
71	4	2,77139	5,38203	0,51493
72	1	2,61712	5,10563	0,51259
73	1	2,89369	4,28450	0,67539
74	5	3,51495	3,62760	0,96895
75	5	3,51495	3,62760	0,96895
76	5	3,51495	3,62760	0,96895
77	5	3,51495	3,62760	0,96895
78	5	3,51495	3,62760	0,96895
79	6	3,21196	3,90208	0,82314
80	6	3,21196	3,90208	0,82314
81	6	3,21196	3,90208	0,82314
82	6	3,21196	3,90208	0,82314
83	6	3,21196	3,90208	0,82314
84	6	3,21196	3,90208	0,82314
85	5	3,16957	4,32166	0,73341
86	5	3,16957	4,32166	0,73341
87	5	3,16957	4,32166	0,73341
88	5	3,16957	4,32166	0,73341
89	5	3,16957	4,32166	0,73341
90	5	2,93566	4,45733	0,65861
91	5	2,93566	4,45733	0,65861
92	5	2,93566	4,45733	0,65861
93	5	2,93566	4,45733	0,65861
94	5	2,93566	4,45733	0,65861
95	4	3,54853	4,56587	0,77719
96	4	3,54853	4,56587	0,77719
97	4	3,54853	4,56587	0,77719
98	4	3,54853	4,56587	0,77719
99	6	3,43882	4,45269	0,77230
100	6	3,43882	4,45269	0,77230
101	6	3,43882	4,45269	0,77230
102	6	3,43882	4,45269	0,77230
103	6	3,43882	4,45269	0,77230
104	6	3,43882	4,45269	0,77230

<b>105</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>106</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>107</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>108</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>109</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>110</b>	6	3,55106	4,76215	0,74568
<b>111</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>112</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>113</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>114</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>115</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>116</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>117</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>118</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>119</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>120</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>121</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>122</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>123</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>124</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>125</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>126</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>127</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>128</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>129</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>130</b>	20	3,24084	5,00972	0,64691
<b>131</b>	3	3,79268	8,00778	0,47362
<b>132</b>	3	3,79268	8,00778	0,47362
<b>133</b>	3	3,79268	8,00778	0,47362
<b>134</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>135</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>136</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>137</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>138</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>139</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>140</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>141</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>142</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>143</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>144</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>145</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>146</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870
<b>147</b>	22	3,63414	7,00622	0,51870

148	22	3,63414	7,00622	0,51870
149	22	3,63414	7,00622	0,51870
150	22	3,63414	7,00622	0,51870
151	22	3,63414	7,00622	0,51870
152	22	3,63414	7,00622	0,51870
153	22	3,63414	7,00622	0,51870
154	22	3,63414	7,00622	0,51870
155	22	3,63414	7,00622	0,51870
156	4	4,10731	10,00498	0,41053
157	4	4,10731	10,00498	0,41053
158	4	4,10731	10,00498	0,41053
159	4	4,10731	10,00498	0,41053
160	11	3,68585	8,80398	0,41866
161	11	3,68585	8,80398	0,41866
162	11	3,68585	8,80398	0,41866
163	11	3,68585	8,80398	0,41866
164	11	3,68585	8,80398	0,41866
165	11	3,68585	8,80398	0,41866
166	11	3,68585	8,80398	0,41866
167	11	3,68585	8,80398	0,41866
168	11	3,68585	8,80398	0,41866
169	11	3,68585	8,80398	0,41866
170	11	3,68585	8,80398	0,41866
171	6	3,74868	9,24319	0,40556
172	6	3,74868	9,24319	0,40556
173	6	3,74868	9,24319	0,40556
174	6	3,74868	9,24319	0,40556
175	6	3,74868	9,24319	0,40556
176	6	3,74868	9,24319	0,40556
177	6	3,99894	8,59455	0,46529
178	6	3,99894	8,59455	0,46529
179	6	3,99894	8,59455	0,46529
180	6	3,99894	8,59455	0,46529

**Πίνακας 3.β** Croston's Method σφάλματα με αρχική τιμή το 0.58

Errors	Abs-error	Sq-error	et/Yt
4,4262	4,4262	19,5913	0,8852
-0,6190	0,6190	0,3832	0,0000



-0,7177	0,7177	0,5151	0,0000
1,2823	1,2823	1,6442	0,6411
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
-0,6653	0,6653	0,4427	0,0000
0,3347	0,3347	0,1120	0,3347
-0,5154	0,5154	0,2656	0,0000
1,4846	1,4846	2,2041	0,7423
-0,5493	0,5493	0,3017	0,0000
0,4507	0,4507	0,2032	0,4507
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
-0,5453	0,5453	0,2973	0,0000
2,4547	2,4547	6,0256	0,8182
-0,5149	0,5149	0,2652	0,0000
-0,5149	0,5149	0,2652	0,0000
-0,5149	0,5149	0,2652	0,0000
1,4851	1,4851	2,2054	0,7425
3,4874	3,4874	12,1620	0,8719
5,3246	5,3246	28,3515	0,8874
-0,9689	0,9689	0,9389	0,0000
-0,9689	0,9689	0,9389	0,0000
-0,9689	0,9689	0,9389	0,0000
-0,9689	0,9689	0,9389	0,0000
1,0311	1,0311	1,0631	0,5155
-0,8231	0,8231	0,6776	0,0000
-0,8231	0,8231	0,6776	0,0000
-0,8231	0,8231	0,6776	0,0000
-0,8231	0,8231	0,6776	0,0000
-0,8231	0,8231	0,6776	0,0000
2,1769	2,1769	4,7387	0,7256
-0,7334	0,7334	0,5379	0,0000
-0,7334	0,7334	0,5379	0,0000
-0,7334	0,7334	0,5379	0,0000
-0,7334	0,7334	0,5379	0,0000

1,2666	1,2666	1,6042	0,6333
-0,6586	0,6586	0,4338	0,0000
-0,6586	0,6586	0,4338	0,0000
-0,6586	0,6586	0,4338	0,0000
-0,6586	0,6586	0,4338	0,0000
5,3414	5,3414	28,5304	0,8902
-0,7772	0,7772	0,6040	0,0000
-0,7772	0,7772	0,6040	0,0000
-0,7772	0,7772	0,6040	0,0000
2,2228	2,2228	4,9409	0,7409
-0,7723	0,7723	0,5964	0,0000
-0,7723	0,7723	0,5964	0,0000
-0,7723	0,7723	0,5964	0,0000
-0,7723	0,7723	0,5964	0,0000
-0,7723	0,7723	0,5964	0,0000
3,2277	3,2277	10,4180	0,8069
-0,7457	0,7457	0,5560	0,0000
-0,7457	0,7457	0,5560	0,0000
-0,7457	0,7457	0,5560	0,0000
-0,7457	0,7457	0,5560	0,0000
-0,7457	0,7457	0,5560	0,0000
1,2543	1,2543	1,5733	0,6272
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
-0,6469	0,6469	0,4185	0,0000
5,3531	5,3531	28,6556	0,8922
-0,4736	0,4736	0,2243	0,0000



-0,4736	0,4736	0,2243	0,0000
2,5264	2,5264	6,3826	0,8421
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
-0,5187	0,5187	0,2691	0,0000
5,4813	5,4813	30,0446	0,9135
-0,4105	0,4105	0,1685	0,0000
-0,4105	0,4105	0,1685	0,0000
-0,4105	0,4105	0,1685	0,0000
1,5895	1,5895	2,5264	0,7947
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
-0,4187	0,4187	0,1753	0,0000
3,5813	3,5813	12,8260	0,8953
-0,4056	0,4056	0,1645	0,0000
-0,4056	0,4056	0,1645	0,0000
-0,4056	0,4056	0,1645	0,0000
-0,4056	0,4056	0,1645	0,0000

-0,4056	0,4056	0,1645	0,0000
4,5944	4,5944	21,1089	0,9189
-0,4653	0,4653	0,2165	0,0000
-0,4653	0,4653	0,2165	0,0000
-0,4653	0,4653	0,2165	0,0000
-0,4653	0,4653	0,2165	0,0000

**Πίνακας 3.ε** Croston's Method αποτελέσματα με αρχική τιμή το 5.

<b>Time</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>	<b>P''</b>	<b>Y''(t)</b>
<b>1</b>	6,25	5,00000	6,25	0,80000
<b>2</b>	4	5,00000	6,25	0,80000
<b>3</b>	4	5,00000	6,25	0,80000
<b>4</b>	4	5,00000	6,25	0,80000
<b>5</b>	4	5,00000	6,25	0,80000
<b>6</b>	1	4,60000	5,80000	0,79310
<b>7</b>	1	4,08000	4,84000	0,84298
<b>8</b>	5	4,26400	4,07200	1,04715
<b>9</b>	5	4,26400	4,07200	1,04715
<b>10</b>	5	4,26400	4,07200	1,04715
<b>11</b>	5	4,26400	4,07200	1,04715
<b>12</b>	5	4,26400	4,07200	1,04715
<b>13</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>14</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>15</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>16</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>17</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>18</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>19</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>20</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>21</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>22</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>23</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>24</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>25</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>26</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>27</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>28</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>29</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>30</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>31</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213
<b>32</b>	24	4,01120	4,25760	0,94213

33	24	4,01120	4,25760	0,94213
34	24	4,01120	4,25760	0,94213
35	24	4,01120	4,25760	0,94213
36	24	4,01120	4,25760	0,94213
37	3	4,40896	8,20608	0,53728
38	3	4,40896	8,20608	0,53728
39	3	4,40896	8,20608	0,53728
40	3	4,72717	7,16486	0,65977
41	3	4,72717	7,16486	0,65977
42	3	4,72717	7,16486	0,65977
43	5	4,78173	6,33189	0,75518
44	5	4,78173	6,33189	0,75518
45	5	4,78173	6,33189	0,75518
46	5	4,78173	6,33189	0,75518
47	5	4,78173	6,33189	0,75518
48	9	4,22539	6,06551	0,69662
49	9	4,22539	6,06551	0,69662
50	9	4,22539	6,06551	0,69662
51	9	4,22539	6,06551	0,69662
52	9	4,22539	6,06551	0,69662
53	9	4,22539	6,06551	0,69662
54	9	4,22539	6,06551	0,69662
55	9	4,22539	6,06551	0,69662
56	9	4,22539	6,06551	0,69662
57	2	3,58031	6,65241	0,53820
58	2	3,58031	6,65241	0,53820
59	2	3,26425	5,72193	0,57048
60	2	3,26425	5,72193	0,57048
61	7	2,81140	4,97754	0,56482
62	7	2,81140	4,97754	0,56482
63	7	2,81140	4,97754	0,56482
64	7	2,81140	4,97754	0,56482
65	7	2,81140	4,97754	0,56482
66	7	2,81140	4,97754	0,56482
67	7	2,81140	4,97754	0,56482
68	4	2,84912	5,38203	0,52938
69	4	2,84912	5,38203	0,52938
70	4	2,84912	5,38203	0,52938
71	4	2,84912	5,38203	0,52938
72	1	2,67929	5,10563	0,52477
73	1	2,94344	4,28450	0,68700
74	5	3,55475	3,62760	0,97992
75	5	3,55475	3,62760	0,97992

<b>76</b>	5	3,55475	3,62760	0,97992
<b>77</b>	5	3,55475	3,62760	0,97992
<b>78</b>	5	3,55475	3,62760	0,97992
<b>79</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>80</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>81</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>82</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>83</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>84</b>	6	3,24380	3,90208	0,83130
<b>85</b>	5	3,19504	4,32166	0,73931
<b>86</b>	5	3,19504	4,32166	0,73931
<b>87</b>	5	3,19504	4,32166	0,73931
<b>88</b>	5	3,19504	4,32166	0,73931
<b>89</b>	5	3,19504	4,32166	0,73931
<b>90</b>	5	2,95603	4,45733	0,66318
<b>91</b>	5	2,95603	4,45733	0,66318
<b>92</b>	5	2,95603	4,45733	0,66318
<b>93</b>	5	2,95603	4,45733	0,66318
<b>94</b>	5	2,95603	4,45733	0,66318
<b>95</b>	4	3,56483	4,56587	0,78076
<b>96</b>	4	3,56483	4,56587	0,78076
<b>97</b>	4	3,56483	4,56587	0,78076
<b>98</b>	4	3,56483	4,56587	0,78076
<b>99</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>100</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>101</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>102</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>103</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>104</b>	6	3,45186	4,45269	0,77523
<b>105</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>106</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>107</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>108</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>109</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>110</b>	6	3,56149	4,76215	0,74787
<b>111</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>112</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>113</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>114</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>115</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>116</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>117</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>118</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858

<b>119</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>120</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>121</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>122</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>123</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>124</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>125</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>126</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>127</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>128</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>129</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>130</b>	20	3,24919	5,00972	0,64858
<b>131</b>	3	3,79935	8,00778	0,47446
<b>132</b>	3	3,79935	8,00778	0,47446
<b>133</b>	3	3,79935	8,00778	0,47446
<b>134</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>135</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>136</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>137</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>138</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>139</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>140</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>141</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>142</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>143</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>144</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>145</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>146</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>147</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>148</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>149</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>150</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>151</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>152</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>153</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>154</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>155</b>	22	3,63948	7,00622	0,51946
<b>156</b>	4	4,11159	10,00498	0,41095
<b>157</b>	4	4,11159	10,00498	0,41095
<b>158</b>	4	4,11159	10,00498	0,41095
<b>159</b>	4	4,11159	10,00498	0,41095
<b>160</b>	11	3,68927	8,80398	0,41905
<b>161</b>	11	3,68927	8,80398	0,41905

162	11	3,68927	8,80398	0,41905
163	11	3,68927	8,80398	0,41905
164	11	3,68927	8,80398	0,41905
165	11	3,68927	8,80398	0,41905
166	11	3,68927	8,80398	0,41905
167	11	3,68927	8,80398	0,41905
168	11	3,68927	8,80398	0,41905
169	11	3,68927	8,80398	0,41905
170	11	3,68927	8,80398	0,41905
171	6	3,75141	9,24319	0,40586
172	6	3,75141	9,24319	0,40586
173	6	3,75141	9,24319	0,40586
174	6	3,75141	9,24319	0,40586
175	6	3,75141	9,24319	0,40586
176	6	3,75141	9,24319	0,40586
177	6	4,00113	8,59455	0,46554
178	6	4,00113	8,59455	0,46554
179	6	4,00113	8,59455	0,46554
180	6	4,00113	8,59455	0,46554

**Πίνακας 3. d** Croston's Method σφάλματα με αρχική τιμή το 5.

<b>Errors</b>	<b>Abs-error</b>	<b>Sq-error</b>	<b>et/Yt</b>
4,2000	4,2000	17,6400	0,8400
-0,8000	0,8000	0,6400	0,0000
-0,8000	0,8000	0,6400	0,0000
-0,8000	0,8000	0,6400	0,0000
2,2000	2,2000	4,8400	0,7333
1,2069	1,2069	1,4566	0,6034
4,1570	4,1570	17,2809	0,8314
-1,0472	1,0472	1,0965	0,0000
-1,0472	1,0472	1,0965	0,0000
-1,0472	1,0472	1,0965	0,0000
-1,0472	1,0472	1,0965	0,0000
1,9528	1,9528	3,8136	0,6509
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000

-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
-0,9421	0,9421	0,8876	0,0000
5,0579	5,0579	25,5821	0,8430
-0,5373	0,5373	0,2887	0,0000
-0,5373	0,5373	0,2887	0,0000
5,4627	5,4627	29,8413	0,9105
-0,6598	0,6598	0,4353	0,0000
-0,6598	0,6598	0,4353	0,0000
4,3402	4,3402	18,8376	0,8680
-0,7552	0,7552	0,5703	0,0000
-0,7552	0,7552	0,5703	0,0000
-0,7552	0,7552	0,5703	0,0000
-0,7552	0,7552	0,5703	0,0000
1,2448	1,2448	1,5496	0,6224
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
-0,6966	0,6966	0,4853	0,0000
0,3034	0,3034	0,0920	0,3034
-0,5382	0,5382	0,2897	0,0000
1,4618	1,4618	2,1369	0,7309
-0,5705	0,5705	0,3254	0,0000
0,4295	0,4295	0,1845	0,4295
-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000
-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000

-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000
-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000
-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000
-0,5648	0,5648	0,3190	0,0000
2,4352	2,4352	5,9301	0,8117
-0,5294	0,5294	0,2802	0,0000
-0,5294	0,5294	0,2802	0,0000
-0,5294	0,5294	0,2802	0,0000
1,4706	1,4706	2,1627	0,7353
3,4752	3,4752	12,0772	0,8688
5,3130	5,3130	28,2280	0,8855
-0,9799	0,9799	0,9602	0,0000
-0,9799	0,9799	0,9602	0,0000
-0,9799	0,9799	0,9602	0,0000
-0,9799	0,9799	0,9602	0,0000
1,0201	1,0201	1,0406	0,5100
-0,8313	0,8313	0,6911	0,0000
-0,8313	0,8313	0,6911	0,0000
-0,8313	0,8313	0,6911	0,0000
-0,8313	0,8313	0,6911	0,0000
-0,8313	0,8313	0,6911	0,0000
2,1687	2,1687	4,7033	0,7229
-0,7393	0,7393	0,5466	0,0000
-0,7393	0,7393	0,5466	0,0000
-0,7393	0,7393	0,5466	0,0000
-0,7393	0,7393	0,5466	0,0000
1,2607	1,2607	1,5893	0,6303
-0,6632	0,6632	0,4398	0,0000
-0,6632	0,6632	0,4398	0,0000
-0,6632	0,6632	0,4398	0,0000
-0,6632	0,6632	0,4398	0,0000
5,3368	5,3368	28,4816	0,8895
-0,7808	0,7808	0,6096	0,0000
-0,7808	0,7808	0,6096	0,0000
-0,7808	0,7808	0,6096	0,0000
2,2192	2,2192	4,9250	0,7397
-0,7752	0,7752	0,6010	0,0000
-0,7752	0,7752	0,6010	0,0000
-0,7752	0,7752	0,6010	0,0000
-0,7752	0,7752	0,6010	0,0000
-0,7752	0,7752	0,6010	0,0000
3,2248	3,2248	10,3991	0,8062
-0,7479	0,7479	0,5593	0,0000





-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
-0,5195	0,5195	0,2698	0,0000
5,4805	5,4805	30,0363	0,9134
-0,4110	0,4110	0,1689	0,0000
-0,4110	0,4110	0,1689	0,0000
-0,4110	0,4110	0,1689	0,0000
1,5890	1,5890	2,5251	0,7945
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
3,5810	3,5810	12,8232	0,8952
-0,4059	0,4059	0,1647	0,0000
-0,4059	0,4059	0,1647	0,0000
-0,4059	0,4059	0,1647	0,0000
-0,4059	0,4059	0,1647	0,0000
-0,4059	0,4059	0,1647	0,0000
4,5941	4,5941	21,1061	0,9188
-0,4655	0,4655	0,2167	0,0000
-0,4655	0,4655	0,2167	0,0000
-0,4655	0,4655	0,2167	0,0000
-0,4655	0,4655	0,2167	0,0000

**Πίνακας 4.a** Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το μέσο όρο.

<b>Time</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>	<b>P''</b>	<b>Y''(t)</b>
<b>1</b>	6,25	3,586207	6,25	0,51641
<b>2</b>	4	3,868966	6,25	0,55713
<b>3</b>	4	3,868966	6,25	0,55713

4	4	3,868966	6,25	0,55713
5	4	3,868966	6,25	0,55713
6	1	3,695172	5,8	0,57339
7	1	3,356138	4,84	0,62408
8	5	3,68491	4,072	0,81444
9	5	3,68491	4,072	0,81444
10	5	3,68491	4,072	0,81444
11	5	3,68491	4,072	0,81444
12	5	3,68491	4,072	0,81444
13	24	3,547928	4,2576	0,74998
14	24	3,547928	4,2576	0,74998
15	24	3,547928	4,2576	0,74998
16	24	3,547928	4,2576	0,74998
17	24	3,547928	4,2576	0,74998
18	24	3,547928	4,2576	0,74998
19	24	3,547928	4,2576	0,74998
20	24	3,547928	4,2576	0,74998
21	24	3,547928	4,2576	0,74998
22	24	3,547928	4,2576	0,74998
23	24	3,547928	4,2576	0,74998
24	24	3,547928	4,2576	0,74998
25	24	3,547928	4,2576	0,74998
26	24	3,547928	4,2576	0,74998
27	24	3,547928	4,2576	0,74998
28	24	3,547928	4,2576	0,74998
29	24	3,547928	4,2576	0,74998
30	24	3,547928	4,2576	0,74998
31	24	3,547928	4,2576	0,74998
32	24	3,547928	4,2576	0,74998
33	24	3,547928	4,2576	0,74998
34	24	3,547928	4,2576	0,74998
35	24	3,547928	4,2576	0,74998
36	24	3,547928	4,2576	0,74998
37	3	4,038343	8,20608	0,44290
38	3	4,038343	8,20608	0,44290
39	3	4,038343	8,20608	0,44290
40	3	4,430674	7,164864	0,55655
41	3	4,430674	7,164864	0,55655
42	3	4,430674	7,164864	0,55655
43	5	4,544539	6,331891	0,64595
44	5	4,544539	6,331891	0,64595
45	5	4,544539	6,331891	0,64595
46	5	4,544539	6,331891	0,64595

47	5	4,544539	6,331891	0,64595
48	9	4,035631	6,065513	0,59881
49	9	4,035631	6,065513	0,59881
50	9	4,035631	6,065513	0,59881
51	9	4,035631	6,065513	0,59881
52	9	4,035631	6,065513	0,59881
53	9	4,035631	6,065513	0,59881
54	9	4,035631	6,065513	0,59881
55	9	4,035631	6,065513	0,59881
56	9	4,035631	6,065513	0,59881
57	2	3,428505	6,65241	0,46384
58	2	3,428505	6,65241	0,46384
59	2	3,142804	5,721928	0,49433
60	2	3,142804	5,721928	0,49433
61	7	2,714243	4,977543	0,49077
62	7	2,714243	4,977543	0,49077
63	7	2,714243	4,977543	0,49077
64	7	2,714243	4,977543	0,49077
65	7	2,714243	4,977543	0,49077
66	7	2,714243	4,977543	0,49077
67	7	2,714243	4,977543	0,49077
68	4	2,771395	5,382034	0,46344
69	4	2,771395	5,382034	0,46344
70	4	2,771395	5,382034	0,46344
71	4	2,771395	5,382034	0,46344
72	1	2,617116	5,105627	0,46133
73	1	2,893693	4,284502	0,60785
74	5	3,514954	3,627601	0,87205
75	5	3,514954	3,627601	0,87205
76	5	3,514954	3,627601	0,87205
77	5	3,514954	3,627601	0,87205
78	5	3,514954	3,627601	0,87205
79	6	3,211963	3,902081	0,74083
80	6	3,211963	3,902081	0,74083
81	6	3,211963	3,902081	0,74083
82	6	3,211963	3,902081	0,74083
83	6	3,211963	3,902081	0,74083
84	6	3,211963	3,902081	0,74083
85	5	3,169571	4,321665	0,66007
86	5	3,169571	4,321665	0,66007
87	5	3,169571	4,321665	0,66007
88	5	3,169571	4,321665	0,66007
89	5	3,169571	4,321665	0,66007

<b>90</b>	5	2,935656	4,457332	0,59275
<b>91</b>	5	2,935656	4,457332	0,59275
<b>92</b>	5	2,935656	4,457332	0,59275
<b>93</b>	5	2,935656	4,457332	0,59275
<b>94</b>	5	2,935656	4,457332	0,59275
<b>95</b>	4	3,548525	4,565866	0,69947
<b>96</b>	4	3,548525	4,565866	0,69947
<b>97</b>	4	3,548525	4,565866	0,69947
<b>98</b>	4	3,548525	4,565866	0,69947
<b>99</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>100</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>101</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>102</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>103</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>104</b>	6	3,43882	4,452692	0,69507
<b>105</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>106</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>107</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>108</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>109</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>110</b>	6	3,551056	4,762154	0,67111
<b>111</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>112</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>113</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>114</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>115</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>116</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>117</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>118</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>119</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>120</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>121</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>122</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>123</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>124</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>125</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>126</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>127</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>128</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>129</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>130</b>	20	3,240845	5,009723	0,58222
<b>131</b>	3	3,792676	8,007779	0,42626
<b>132</b>	3	3,792676	8,007779	0,42626

<b>133</b>	3	3,792676	8,007779	0,42626
<b>134</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>135</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>136</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>137</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>138</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>139</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>140</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>141</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>142</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>143</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>144</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>145</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>146</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>147</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>148</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>149</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>150</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>151</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>152</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>153</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>154</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>155</b>	22	3,634141	7,006223	0,46683
<b>156</b>	4	4,107313	10,00498	0,36947
<b>157</b>	4	4,107313	10,00498	0,36947
<b>158</b>	4	4,107313	10,00498	0,36947
<b>159</b>	4	4,107313	10,00498	0,36947
<b>160</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>161</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>162</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>163</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>164</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>165</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>166</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>167</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>168</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>169</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>170</b>	11	3,68585	8,803983	0,37679
<b>171</b>	6	3,74868	9,243186	0,36501
<b>172</b>	6	3,74868	9,243186	0,36501
<b>173</b>	6	3,74868	9,243186	0,36501
<b>174</b>	6	3,74868	9,243186	0,36501
<b>175</b>	6	3,74868	9,243186	0,36501



-0,7500	0,7500	0,5625	0,0000
-0,7500	0,7500	0,5625	0,0000
-0,7500	0,7500	0,5625	0,0000
5,2500	5,2500	27,5627	0,8750
-0,4429	0,4429	0,1962	0,0000
-0,4429	0,4429	0,1962	0,0000
5,5571	5,5571	30,8813	0,9262
-0,5566	0,5566	0,3097	0,0000
-0,5566	0,5566	0,3097	0,0000
4,4434	4,4434	19,7442	0,8887
-0,6460	0,6460	0,4173	0,0000
-0,6460	0,6460	0,4173	0,0000
-0,6460	0,6460	0,4173	0,0000
-0,6460	0,6460	0,4173	0,0000
1,3540	1,3540	1,8335	0,6770
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
-0,5988	0,5988	0,3586	0,0000
0,4012	0,4012	0,1610	0,4012
-0,4638	0,4638	0,2151	0,0000
1,5362	1,5362	2,3598	0,7681
-0,4943	0,4943	0,2444	0,0000
0,5057	0,5057	0,2557	0,5057
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
-0,4908	0,4908	0,2409	0,0000
2,5092	2,5092	6,2962	0,8364
-0,4634	0,4634	0,2148	0,0000
-0,4634	0,4634	0,2148	0,0000
-0,4634	0,4634	0,2148	0,0000
1,5366	1,5366	2,3610	0,7683
3,5387	3,5387	12,5222	0,8847
5,3922	5,3922	29,0753	0,8987
-0,8721	0,8721	0,7605	0,0000
-0,8721	0,8721	0,7605	0,0000



-0,8721	0,8721	0,7605	0,0000
-0,8721	0,8721	0,7605	0,0000
1,1279	1,1279	1,2723	0,5640
-0,7408	0,7408	0,5488	0,0000
-0,7408	0,7408	0,5488	0,0000
-0,7408	0,7408	0,5488	0,0000
-0,7408	0,7408	0,5488	0,0000
-0,7408	0,7408	0,5488	0,0000
2,2592	2,2592	5,1039	0,7531
-0,6601	0,6601	0,4357	0,0000
-0,6601	0,6601	0,4357	0,0000
-0,6601	0,6601	0,4357	0,0000
-0,6601	0,6601	0,4357	0,0000
1,3399	1,3399	1,7954	0,6700
-0,5928	0,5928	0,3514	0,0000
-0,5928	0,5928	0,3514	0,0000
-0,5928	0,5928	0,3514	0,0000
-0,5928	0,5928	0,3514	0,0000
5,4072	5,4072	29,2383	0,9012
-0,6995	0,6995	0,4893	0,0000
-0,6995	0,6995	0,4893	0,0000
-0,6995	0,6995	0,4893	0,0000
2,3005	2,3005	5,2925	0,7668
-0,6951	0,6951	0,4831	0,0000
-0,6951	0,6951	0,4831	0,0000
-0,6951	0,6951	0,4831	0,0000
-0,6951	0,6951	0,4831	0,0000
-0,6951	0,6951	0,4831	0,0000
3,3049	3,3049	10,9226	0,8262
-0,6711	0,6711	0,4504	0,0000
-0,6711	0,6711	0,4504	0,0000
-0,6711	0,6711	0,4504	0,0000
-0,6711	0,6711	0,4504	0,0000
-0,6711	0,6711	0,4504	0,0000
1,3289	1,3289	1,7659	0,6644
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000
-0,5822	0,5822	0,3390	0,0000



-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
-0,3768	0,3768	0,1420	0,0000
3,6232	3,6232	13,1276	0,9058
-0,3650	0,3650	0,1332	0,0000
-0,3650	0,3650	0,1332	0,0000
-0,3650	0,3650	0,1332	0,0000
-0,3650	0,3650	0,1332	0,0000
-0,3650	0,3650	0,1332	0,0000
4,6350	4,6350	21,4832	0,9270
-0,4188	0,4188	0,1754	0,0000
-0,4188	0,4188	0,1754	0,0000
-0,4188	0,4188	0,1754	0,0000
-0,4188	0,4188	0,1754	0,0000

**Πίνακας 4.ε** Syntetos & Boylan Approximation με αρχική τιμή το 5.

<b>Time</b>	<b>q</b>	<b>Z''</b>	<b>P''</b>	<b>Y''(t)</b>
<b>1</b>	6,25	5	6,25	0,72
<b>2</b>	4	5	6,25	0,72
<b>3</b>	4	5	6,25	0,72
<b>4</b>	4	5	6,25	0,72
<b>5</b>	4	5	6,25	0,72
<b>6</b>	1	4,6	5,8	0,713793
<b>7</b>	1	4,08	4,84	0,758678
<b>8</b>	5	4,264	4,072	0,942436
<b>9</b>	5	4,264	4,072	0,942436
<b>10</b>	5	4,264	4,072	0,942436
<b>11</b>	5	4,264	4,072	0,942436
<b>12</b>	5	4,264	4,072	0,942436
<b>13</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>14</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>15</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>16</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>17</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>18</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>19</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914

<b>20</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>21</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>22</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>23</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>24</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>25</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>26</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>27</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>28</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>29</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>30</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>31</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>32</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>33</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>34</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>35</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>36</b>	24	4,0112	4,2576	0,847914
<b>37</b>	3	4,40896	8,20608	0,483552
<b>38</b>	3	4,40896	8,20608	0,483552
<b>39</b>	3	4,40896	8,20608	0,483552
<b>40</b>	3	4,727168	7,164864	0,593794
<b>41</b>	3	4,727168	7,164864	0,593794
<b>42</b>	3	4,727168	7,164864	0,593794
<b>43</b>	5	4,781734	6,331891	0,679664
<b>44</b>	5	4,781734	6,331891	0,679664
<b>45</b>	5	4,781734	6,331891	0,679664
<b>46</b>	5	4,781734	6,331891	0,679664
<b>47</b>	5	4,781734	6,331891	0,679664
<b>48</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>49</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>50</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>51</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>52</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>53</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>54</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>55</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>56</b>	9	4,225388	6,065513	0,626962
<b>57</b>	2	3,58031	6,65241	0,484378
<b>58</b>	2	3,58031	6,65241	0,484378
<b>59</b>	2	3,264248	5,721928	0,513432
<b>60</b>	2	3,264248	5,721928	0,513432
<b>61</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>62</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335

<b>63</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>64</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>65</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>66</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>67</b>	7	2,811398	4,977543	0,508335
<b>68</b>	4	2,849119	5,382034	0,476438
<b>69</b>	4	2,849119	5,382034	0,476438
<b>70</b>	4	2,849119	5,382034	0,476438
<b>71</b>	4	2,849119	5,382034	0,476438
<b>72</b>	1	2,679295	5,105627	0,472296
<b>73</b>	1	2,943436	4,284502	0,618296
<b>74</b>	5	3,554749	3,627601	0,881925
<b>75</b>	5	3,554749	3,627601	0,881925
<b>76</b>	5	3,554749	3,627601	0,881925
<b>77</b>	5	3,554749	3,627601	0,881925
<b>78</b>	5	3,554749	3,627601	0,881925
<b>79</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>80</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>81</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>82</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>83</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>84</b>	6	3,243799	3,902081	0,74817
<b>85</b>	5	3,195039	4,321665	0,665377
<b>86</b>	5	3,195039	4,321665	0,665377
<b>87</b>	5	3,195039	4,321665	0,665377
<b>88</b>	5	3,195039	4,321665	0,665377
<b>89</b>	5	3,195039	4,321665	0,665377
<b>90</b>	5	2,956031	4,457332	0,596866
<b>91</b>	5	2,956031	4,457332	0,596866
<b>92</b>	5	2,956031	4,457332	0,596866
<b>93</b>	5	2,956031	4,457332	0,596866
<b>94</b>	5	2,956031	4,457332	0,596866
<b>95</b>	4	3,564825	4,565866	0,70268
<b>96</b>	4	3,564825	4,565866	0,70268
<b>97</b>	4	3,564825	4,565866	0,70268
<b>98</b>	4	3,564825	4,565866	0,70268
<b>99</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>100</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>101</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>102</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>103</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>104</b>	6	3,45186	4,452692	0,697707
<b>105</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086

<b>106</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086
<b>107</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086
<b>108</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086
<b>109</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086
<b>110</b>	6	3,561488	4,762154	0,673086
<b>111</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>112</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>113</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>114</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>115</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>116</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>117</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>118</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>119</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>120</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>121</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>122</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>123</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>124</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>125</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>126</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>127</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>128</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>129</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>130</b>	20	3,24919	5,009723	0,583719
<b>131</b>	3	3,799352	8,007779	0,427012
<b>132</b>	3	3,799352	8,007779	0,427012
<b>133</b>	3	3,799352	8,007779	0,427012
<b>134</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>135</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>136</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>137</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>138</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>139</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>140</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>141</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>142</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>143</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>144</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>145</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>146</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>147</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518
<b>148</b>	22	3,639482	7,006223	0,467518

149	22	3,639482	7,006223	0,467518
150	22	3,639482	7,006223	0,467518
151	22	3,639482	7,006223	0,467518
152	22	3,639482	7,006223	0,467518
153	22	3,639482	7,006223	0,467518
154	22	3,639482	7,006223	0,467518
155	22	3,639482	7,006223	0,467518
156	4	4,111586	10,00498	0,369859
157	4	4,111586	10,00498	0,369859
158	4	4,111586	10,00498	0,369859
159	4	4,111586	10,00498	0,369859
160	11	3,689268	8,803983	0,377141
161	11	3,689268	8,803983	0,377141
162	11	3,689268	8,803983	0,377141
163	11	3,689268	8,803983	0,377141
164	11	3,689268	8,803983	0,377141
165	11	3,689268	8,803983	0,377141
166	11	3,689268	8,803983	0,377141
167	11	3,689268	8,803983	0,377141
168	11	3,689268	8,803983	0,377141
169	11	3,689268	8,803983	0,377141
170	11	3,689268	8,803983	0,377141
171	6	3,751415	9,243186	0,365272
172	6	3,751415	9,243186	0,365272
173	6	3,751415	9,243186	0,365272
174	6	3,751415	9,243186	0,365272
175	6	3,751415	9,243186	0,365272
176	6	3,751415	9,243186	0,365272
177	6	4,001132	8,594549	0,418989
178	6	4,001132	8,594549	0,418989
179	6	4,001132	8,594549	0,418989
180	6	4,001132	8,594549	0,418989

Πίνακας 4.d Syntetos & Boylan Approximation σφάλματα με αρχική τιμή το 5.

<u>Errors</u>	<u>Abs-Error</u>	<u>Sq-Error</u>	<u>et/Yt</u>
4,2800	4,2800	18,3184	0,8560
-0,7200	0,7200	0,5184	0,0000





-0,6797	0,6797	0,4619	0,0000
1,3203	1,3203	1,7433	0,6602
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
-0,6270	0,6270	0,3931	0,0000
0,3730	0,3730	0,1392	0,3730
-0,4844	0,4844	0,2346	0,0000
1,5156	1,5156	2,2971	0,7578
-0,5134	0,5134	0,2636	0,0000
0,4866	0,4866	0,2367	0,4866
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
-0,5083	0,5083	0,2584	0,0000
2,4917	2,4917	6,2084	0,8306
-0,4764	0,4764	0,2270	0,0000
-0,4764	0,4764	0,2270	0,0000
-0,4764	0,4764	0,2270	0,0000
1,5236	1,5236	2,3212	0,7618
3,5277	3,5277	12,4447	0,8819
5,3817	5,3817	28,9627	0,8970
-0,8819	0,8819	0,7778	0,0000
-0,8819	0,8819	0,7778	0,0000
-0,8819	0,8819	0,7778	0,0000
-0,8819	0,8819	0,7778	0,0000
1,1181	1,1181	1,2501	0,5590
-0,7482	0,7482	0,5598	0,0000
-0,7482	0,7482	0,5598	0,0000
-0,7482	0,7482	0,5598	0,0000
-0,7482	0,7482	0,5598	0,0000
-0,7482	0,7482	0,5598	0,0000
2,2518	2,2518	5,0707	0,7506
-0,6654	0,6654	0,4427	0,0000
-0,6654	0,6654	0,4427	0,0000
-0,6654	0,6654	0,4427	0,0000
-0,6654	0,6654	0,4427	0,0000



-0,4270	0,4270	0,1823	0,0000
2,5730	2,5730	6,6203	0,8577
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
-0,4675	0,4675	0,2186	0,0000
5,5325	5,5325	30,6084	0,9221
-0,3699	0,3699	0,1368	0,0000
-0,3699	0,3699	0,1368	0,0000
-0,3699	0,3699	0,1368	0,0000
1,6301	1,6301	2,6574	0,8151
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
-0,3771	0,3771	0,1422	0,0000
3,6229	3,6229	13,1251	0,9057
-0,3653	0,3653	0,1334	0,0000
-0,3653	0,3653	0,1334	0,0000
-0,3653	0,3653	0,1334	0,0000
-0,3653	0,3653	0,1334	0,0000

-0,3653	0,3653	0,1334	0,0000
4,6347	4,6347	21,4807	0,9269
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000
-0,4190	0,4190	0,1756	0,0000