ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

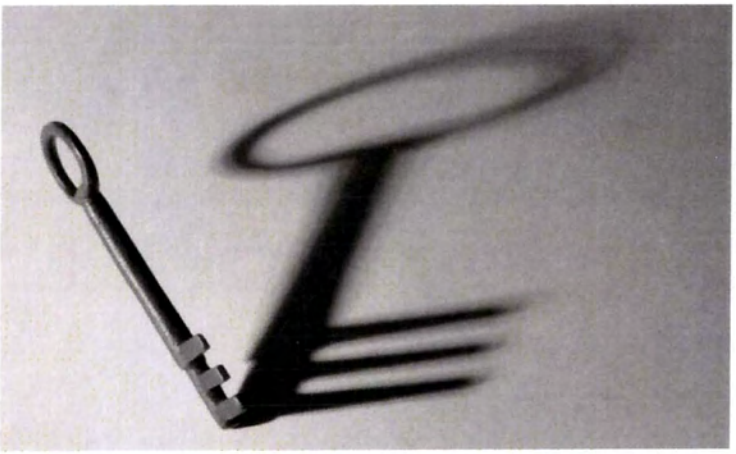
ΣΧΟΛΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΑΤΟΜΑ ΜΕ ΑΝΑΠΗΡΙΑ ΟΡΑΣΗΣ

τηςΜαγκλάραΓεωργίας



To **unlock** the door of **learning** all you need is a **KEY**

Επιβλέποντες Καθηγητές : Αργυρόπουλος Βασίλης

Σταθοπούλου Χαρίκλεια

Βόλος 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υπεύθυνο καθηγητή της παρούσας πτυχιακής εργασίας, τον κύριο Βασίλειο Αργυρόπουλο, που δέχτηκε να αναλάβει την επίβλεψη της εργασίας. Τον ευχαριστώ για τις πολύτιμες συμβουλές που μου υπέδειξε, την υποστήριξη που μου παρείχε και το χρόνο που αφιέρωσε στις διορθώσεις που απαιτούνταν, ώστε να φτάσει η εργασία αυτή στην τελική της μορφή. Η προθυμία, η καλή διάθεση και η αμέριστη συμπαράσταση που υπέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας αποτέλεσαν κινητήριο δύναμη.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Χαρίκλεια Σταθοπούλου που με τόση χαρά και προθυμία δέχτηκε να με τιμήσει με το να είναι η δεύτερη επιβλέπουσα της πτυχιακής μου.

Επιπρόσθετα, επιθυμώ να ευχαριστήσω το Σωματείο Ατόμων με Αναπηρία Όρασης «Μάγνητες Τυφλοί» και ιδιαίτερα τον πρόεδρο του, κύριο Λάμπρο Παρασκευά, για τη διαρκή εμψύχωση και τις συμβουλές που μου παρείχε. Ευχαριστώ, όμως, και τα μέλη του Σωματείου που δέχτηκαν να συμμετέχουν στην έρευνα της εργασίας, όπως και τις συμφοιτητριές μου. Χωρίς τη συμβολή και τη συνεργασία τους η εκπόνηση της έρευνας θα ήταν αδύνατη.

Τέλος, θεωρώ παράλειψη να μην ευχαριστήσω τους γονείς και φίλους μου, που με στήριξαν σε όλη τη διάρκεια της παρούσας πτυχιακής εργασίας δείχνοντας υπομονή και κατανόηση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας σχετίζεται με τα Μαθηματικά και συγκεκριμένα, με τον τρόπο που προσεγγίζονται τόσο από τους βλέποντες μαθητές όσο κυρίως από αυτούς με αναπηρία όρασης. Αναμφίβολα, ο όρος «Μαθηματικά» αφυπνίζει ανάμεικτα και διφορούμενα συναισθήματα και σκέψεις σε όλα τα παιδιά ανεξαιρέτως ηλικίας ή εκπαιδευτικής ανάγκης. Δεδομένου όμως, ότι τα Μαθηματικά συνιστούν ένα ευρύ πεδίο ανάλυσης και επεξεργασίας, αποφασίστηκε η εργασία αυτή να συγκεκριμενοποιηθεί σε μια ειδικότερη θεματική ενότητα, αυτή των κλασμάτων. Μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση έγινε φανερό ότι η έννοια του κλάσματοςσυνίσταται από ένα ερμηνευτικό πλαίσιο που την καθιστά πολύπλοκη. Το γεγονός αυτό, προκαλεί ένα σημαντικό αριθμό συγχύσεων και δυσκολιών στους μαθητές με οπτική αναπηρία, αλλά και στους συνομήλικους βλέποντες συμμαθητές τους.

Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα δεδομένα, αποφασίστηκε να εκπονηθεί μια μικρής εμβέλειας ποιοτική έρευνα που θα αναζητούσε τα συναισθήματα και τις δυσκολίες που προκαλούν τα κλάσματα, τον τρόπο που προσεγγίζονται, καθώς και τις μεθόδους διδασκαλίας και τα διδακτικά υλικά που αξιοποιούνται για την μετάδοση των σχετικών με αυτά γνώσεων. Τα δεδομένα αυτά θα προέρχονται από τελειόφοιτους παιδαγωγούς με και χωρίςαναπηρία όρασης, ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα ευρήματα για να διαπιστώσουμε ομοιότητες και αποκλίσεις.

Η συγκεκριμένη, λοιπόν, εργασία αρχίζει (Κεφάλαιο 2) με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση των τρόπων που αντιμετωπίζονται τα Μαθηματικά από τους μαθητές χωρίς προβλήματα όρασης. Αναζητούνται οι αιτίες που οδηγούν στην ανάπτυξη θετικών ή αρνητικών στάσεων, καθώς και οι παράγοντες που συντελούν σε αυτή την ανάπτυξη στάσεων. Ανάλογα δεδομένα αναζητούνται για τους μαθητές με αναπηρία όρασης στην επόμενη υπο-ενότητα. Στην τρίτη υπο-ενότητα, πραγματοποιείται μια επεξεργασία του φάσματος της έννοιας του κλάσματος, ενώ ακολουθεί συζήτηση για τον τρόπο που προσεγγίζονται τα κλάσματα από τους βλέποντες μαθητές αρχικά, και έπειτα, από τους μαθητές μα οπτική αναπηρία. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια εκτενή επεξεργασία των σχολικών εγχειριδίων, όπου αναζητούνται οι τρόποι με τους οποίους προβάλλεται στους μαθητές η έννοια του κλάσματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά σε στοιχεία που αφορούν στη δόμηση της ποιοτικής έρευνας. Γενικότερα, παρατίθεται η ερευνητική μεθοδολογία που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ στο Κεφάλαιο 5 καταγράφονται οι περιορισμοί της εν λόγω έρευνας. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται η συζήτηση των αποτελεσμάτων και καταγράφονται προτάσεις για μια αποτελεσματικότερη προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος από όλους τους μαθητές συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που έχουν αναπηρία όρασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στο πλαίσιο της παρούσας ενότητας, πραγματοποιείται μια εκτενής αναφορά στον τρόπο αντιμετώπισης του μαθήματος των Μαθηματικών. Αρχικά, παραθέτονται πληροφορίες για τον τρόπο που οι μαθητές γενικών σχολείων αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά, τα συναισθήματα που βιώνουν, αλλά και για τους παράγοντες που διαμορφώνουν τις αντίστοιχες θετικές ή αρνητικές στάσεις των παιδιών. Ακολουθεί μια σύντομη αναφορά σε μαθηματικές έννοιες που δυσκολεύουν τους μαθητές με ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο αντιμετώπισης και διαχείρισης της έννοιας του κλάσματος. Τέλος, η δεύτερη υπο-ενότητα αυτού του κεφαλαίου πραγματεύεται και πάλι τον τρόπο αντιμετώπισης των Μαθηματικών, καθώς και της έννοιας του κλάσματος, αυτή τη φορά από άτομα με προβλήματα όρασης.

2.1. Η Αντιμετώπιση των Μαθηματικών από τους Μαθητές Χωρίς Αναπηρία Όρασης

Είναι ευρύτατα αποδεκτό, ότι το μάθημα των Μαθηματικών είναι ένα μάθημα ύψιστης σημασίας, χρήσιμο και απαραίτητο εφόδιο για όλους τους μαθητές όχι μόνο στο χώρο του σχολείου αλλά και στην καθημερινή τους ζωή και στο μετέπειτα επαγγελματικό προσανατολισμό τους. Τα Μαθηματικά θεωρούνται ένα από τα βασικά μαθήματα, η γνώση του οποίου σχετίζεται άμεσα με την ολόπλευρη εξέλιξη του ατόμου και της κοινωνίας (Costello, 1991˙ Githua, 2013˙Howard, 2008˙Σαρακινού, 1999˙ Τζεκάκη, 2007□ Χαλάτσης, 1989). Χαρακτηριστικά η ChristineKeitel (στο Κολέζα, 2009, σελ. 339) αναφέρει ότι *«από την αρχή της κοινωνικής οργάνωσης, τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ποικίλες κοινωνικές ανάγκες: παραγωγή και κατανάλωση αγαθών, κατανομή του πλούτου, οργάνωση της εργασίας»*. Ανάλογη είναι και η τοποθέτηση του Χαλάτση (1989), αλλά και της Τζεκάκη (2007), που υποστηρίζει ότι η σημασία της μάθησης των Μαθηματικών δεν αμφισβητείται από κανέναν. Ως συνέπεια των παραπάνω παραδοχών, συναντά κανείς τα Μαθηματικά ως ένα βασικό μάθημα στα Αναλυτικά Προγράμματα του μεγαλύτερου φάσματος της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης σε όλες τις χώρες του κόσμου (Costello, 1991˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Hadietal., 2013). Έτσι και στην Ελλάδα, τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα βασικότερα υποχρεωτικά μαθήματα στο ωρολόγιο πρόγραμμα των δημοτικών σχολείων.

Την ίδια στιγμή, και οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν σε σημαντικό βαθμό τη χρησιμότητα αυτού του μαθήματος. Έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στην καθημερινότητά τους, για τη μετέπειτα πορεία τους στις μεγαλύτερες σχολικές βαθμίδες αλλά και για την επαγγελματική τους καριέρα (Φιλίππου & Χρίστου, 1997˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Howard, 2008˙Kislenko1, Grevholm1 & Lepik, 2007˙ Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999). Ωστόσο, παρά το ότι διακρίνουν αυτή τη σημασία, οι απόψεις τους παραμένουν εντός στενών και προκαθορισμένων πλαισίων (Kloosterman, Raymond&Emenaker, 1996), ενώ εξακολουθούν να αντιμετωπίζουν το μάθημα με αρνητική διάθεση ή ως ανιαρό (Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013˙Kislenko1, Grevholm1 & Lepik, 2007˙ Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999˙Sisman, 2007). Οι απόψεις αυτές αντικατοπτρίζουνόμως, την «κοινή γνώμη» ότι τα Μαθηματικά είναι ένα «δύσκολο», «δυσνόητο» μάθημα, που προκαλεί έντονα συναισθήματα άγχους ή φόβου στους μαθητές (Burton, 2009˙ Chap & Ernest, 1998˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Githua, 2013˙Lee &Johnston-Wilder, 2013˙ Σαρακινού, 1999), ένα μάθημα που μόνο «χαρισματικά» ή «προικισμένα» άτομα είτε μόνο τα αγόρια μπορούν να παρακολουθήσουν και να αποδώσουν(Βούργιας & Χρυσοστόμου-Βούργια, 2006˙ Chap & Ernest, 1998).

Είναι εμφανές, λοιπόν, ότι οι προαναφερθείσες στάσεις-μύθοι δημιουργούν μια σειρά αρνητικών στάσεων και κατ' επέκταση συναισθημάτων για τα Μαθηματικά (Chap & Ernest, 1998). Οι αρνητικές στάσεις, όπως και οι θετικές, μπορούν να επηρεάσουν καθοριστικά τη στάση και συμπεριφορά των μαθητών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Sullivan, Clarke&O'Shea, 2010). Τα «πιστεύω» αυτά είναι εξαιρετικά σημαντικά για την μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών αλλά και για τη συνολική ακαδημαϊκή τους πρόοδο (Dodeen etal., 2012), καθώς είτε διευκολύνουν τη μάθηση των Μαθηματικών είτε συνιστούν ένα τροχοπέδη (Γιαλαμάς & Κασιμάτη, 1999˙ Dodeenetal., 2012˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Εξάλλου τα συναισθήματα που διακατέχουν τους μαθητές είναι αυτά που καθορίζουν όχι μόνο το «τι» θα μάθουν, αλλά και το «πώς» θα το μάθουν (Howard & Whitaker, 2011).Οι στάσεις,λοιπόν και τα συναισθήματα που έχουν οι μαθητές για τα Μαθηματικά, διαφέρουν. Έτσι, κάποιοι νιώθουν ευχαρίστηση και ικανοποίηση, όταν καταφέρουν να επιλύσουν μια άσκηση, ορισμένοι αισθάνονται δυσφορία και απέχθεια, ενώ είναι πολλοί οι μαθητές που διακατέχονται από άγχος και φόβο για το μαθηματικό αντικείμενο. Οποιαδήποτε, όμως, και αν είναι τα συναισθήματα των παιδιών για τα Μαθηματικά, είτε θετικά είτε αρνητικά, επηρεάζουν την όλη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη να μελετήσουμε τόσο τα αρνητικά όσο και τα θετικά συναισθήματα που απορρέουν από την εμπλοκή με τα Μαθηματικά.

Μια από τις πιο συνηθισμένες στάσεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, η οποία επιδρά αρνητικά στις επιδόσεις τους (Burton, 2009˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Githua, 2013˙ Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999˙Σαρακινού, 1999), είναι η λεγόμενη μαθηματικοφοβία ή φοβία των Μαθηματικών ή αριθμοφοβία. Οι Φιλίππου και Χρίστου (1995) ορίζουν τη μαθηματική φοβία ως ένα αρνητικό συναίσθημα έναντι των Μαθηματικών ή ως μια αρνητική αντίδραση του ατόμου, όταν καλείτε να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα ή να επιτελέσει ένα έργο το οποίο περιλαμβάνει μια μαθηματική δραστηριότητα. Το αρνητικό αυτό συναίσθημα μπορεί να αναπτυχθεί από το νηπιαγωγείο αλλά και στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Burton, 2009˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Χαρακτηριστική είναι η έρευνα των Φιλίππου και Χρίστου (1995) σε κύπριους μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, σύμφωνα με την οποία ένα ποσοστό της τάξης του 20% των μαθητών νιώθει φόβο προς τα Μαθηματικά. Το ποσοστό αυτό είναι ανάλογο και σε αρκετές δυτικές χώρες.

Μια από τις κυριότερες αιτίες για την ύπαρξη μαθηματικοφοβίας είναι η πεποίθηση των μαθητών ότι δεν μπορούν να αλλάξουν ή να βελτιώσουν την επίδοσή τους στα Μαθηματικά (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Μια πεποίθηση που απορρέει από συνεχείς αποτυχίες που οδηγούν το μαθητή να πιστέψει ότι δεν έχει την ικανότητα να ανταπεξέλθει στις υπάρχουσες απαιτήσεις (Chap & Ernest, 1998˙Φιλίππου & Χρίστου, 1997˙Φιλίππου & Χρίστου, 1995), με αποτέλεσμα να χάνει την αυτοπεποίθησή και τα κίνητρα του για μάθηση και να κατακλύζεται από συναισθήματα φόβου κάθε φορά που εμπλέκεται σε μαθηματικές δραστηριότητες. Μια δεύτερη ισχυρή πίεση που δέχεται το παιδί αφορά την έμφαση που δίνεται από τους δασκάλους και το άμεσο περιβάλλον στην ταχύτητα και ακρίβεια των απαντήσεων (Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙Githua, 2013), αλλά και στην απομνημόνευση (Saritas & Akdemir, 2009). Η πίεση αυτή το ωθεί σε καταστάσεις άγχους και αποφυγής συμμετοχής στο μάθημα. Η συνθήκη αυτή εντείνεται όταν το μάθημα γίνεται με δασκαλοκεντρικό τρόπο και δεν επιτρέπει στο μαθητή την παραμικρή συμμετοχή (Σαρακινού, 1999). Τέλος, οι στάσεις φοβίας του μαθητή απέναντι στα Μαθηματικά εντείνονται από το φαινόμενο δημοσιότητας που ενδεχομένως θα πάρει μια λανθασμένη απάντηση που θα δώσει (Burton, 2009˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Η αντίδραση των συνομηλίκων και ειδικά μια αρνητική ανταπόκριση, φθείρει σε μεγάλο βαθμό το συναισθηματικό κόσμο του παιδιού, που προκειμένου να μην ξαναβιώσει ανάλογα συναισθήματα θα αποφεύγει τα Μαθηματικά.

Πέραν, όμως, των αρνητικών συναισθημάτων και στάσεων και του φαινομένου της μαθηματικής φοβίας, τα παιδιά αντιμετωπίζουν και με θετικές προοπτικές τα Μαθηματικά. Αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις που το μάθημα είναι συνοδό με τα δικά τους ενδιαφέροντα, τις ανάγκες τους, αλλά και όταν πραγματοποιείται με ευχάριστο και διαδραστικό τρόπο. Έρευνες έχουν αναδείξει ότι στις περιπτώσεις που το μάθημα εμπεριέχει την ενεργή συμμετοχή των μαθητών τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά(Attard, 2009˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Saritas & Akdemir, 2009), καθώς τα παιδιά έρχονται άμεσα σε επαφή με τη νέα γνώση, αναπτύσσουν νέες στρατηγικές αντιμετώπισης των μαθηματικών καταστάσεων (O'Rourke, Main & Ellis, 2013˙Saritas & Akdemir, 2009), ενώ αντιλαμβάνονται και τη σημασία που η κατακτηθείσα γνώση έχει. Ένας άλλος παράγοντας θετικής ενίσχυσης στον τρόπο αντιμετώπισης των Μαθηματικών αφορά τη διδασκαλία με τη χρήση παιχνιδιών, αλλά και της τεχνολογίας. Ειδικότερα, η χρήση των παιχνιδιών είναι ένας χαρούμενος, ενδιαφέρον, ενθαρρυντικός και με κίνητρα τρόπος διδασκαλίας (Afari, 2012˙ Attard, 2009˙Costello, 1991˙O'Rourke, Main & Ellis, 2013˙ Sullivan, Clarke& O'Shea, 2010), ενώ προσφέρει τη δυνατότητα διδασκαλίας νέων πολύπλοκων πληροφοριών. Την ίδια στιγμή θετικά αποτελέσματα απορρέουν και για την ακαδημαϊκή επίδοση των μαθητών (Hadietal., 2013˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013), αλλά και για την ενίσχυση των διαπροσωπικών σχέσεων εντός της τάξης (Afari, 2012˙Attard, 2009). Επίσης, έχει διαπιστωθεί ότι η χρήση παιχνιδιών στο μάθημα διατηρεί και αυξάνει τα επίπεδα αυτοπεποίθησης των μαθητών, αλλά και τη συγκέντρωσή τους κατά τη διάρκεια του μαθήματος (O'Rourke, Main & Ellis, 2013).

Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα και για τη χρήση τεχνολογικών επιτευγμάτων κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε διάφορες έρευνες αποδείχτηκε ότι οι μαθητές μπορούσαν να αναγνωρίσουν ότι η χρήση των υπολογιστών, των αριθμομηχανών ή των διαδραστικών πινάκων δεν ήταν μόνο για να παίζουν παιχνίδια, αλλά και για να μαθαίνουν (Lee & Johnston-Wilder, 2013˙O'Rourke, Main & Ellis, 2013˙Sullivan, Clarke& O'Shea, 2010). Ειδικότερα, η αξιοποίηση των υπολογιστών παρείχε στα παιδιά οπτικά ερεθίσματα, καθιστώντας το μάθημα πιο άμεσο και αντιληπτό (Costello, 1991˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013), αλλά και διασκεδαστικό. Επιπλέον, η χρήση του διαδικτύου φάνηκε να προωθεί τη θετική αντιμετώπιση των Μαθηματικών. Οι Lee και Johnston-Wilder (2013) αναφέρουν στην ερευνά τους ότι οι μαθητές ανταποκρίνονταν θετικά στη χρήση σχετικών με τα Μαθηματικά διαδικτυακών ισοτόπων που περιείχαν παιχνίδια και πληροφορίες, όπως το MyMaths, που χρησιμοποιείται ευρέως στην Αγγλίαή στη χρήση ειδικών λογισμικών, όπως το Grid Algebra. Ομοίως, η χρήση των διαδραστικών πινάκων τροφοδοτεί τα παιδιά με υλικό μέσω των πολυμέσων, δηλαδή, με εικόνα και ήχο, κάνοντας το μάθημα πιο εύκολα κατανοητό (Whyburn&Way, 2012). Ακόμη, η χρήση αριθμομηχανών με γραφικές δυνατότητες επιφέρει θετικά αποτελέσματα στην επίδοση των μαθητών, καθώς αποκτούν οπτική αίσθηση των δεδομένων που διαχειρίζονται, κατανοούν τη χρήση γραφημάτων και τα συνδέουν με άλλες γνώσεις τους, ενώ το μάθημα πραγματοποιείται με πιο ενεργό και ρεαλιστικό τρόπο (Grouws&Cebulla, 2000).

Με βάση τα παραπάνω ερευνητικά δεδομένα, συνάγεται ότι ο τρόπος που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές το μάθημα των Μαθηματικών, είτε με θετικές είτε με αρνητικές προοπτικές, εξαρτάται από μια σειρά παραγόντων, όπως ο τρόπος και τα μέσα διδασκαλίας, το αναλυτικό πρόγραμμα, το περιβάλλον μάθησης, καθώς και ο ίδιος ο ατομικός χαρακτήρας των μαθητών. Ωστόσο, οι σχετικές για τα Μαθηματικά απόψεις συνιστούν ένα πολυπαραγοντικό και περίπλοκο φαινόμενο. Στο σημείο αυτό θα γίνει μια εμπεριστατωμένη αναφορά σε μια σειρά ερευνών που αναδεικνύουν αξιοσημείωτους παράγοντες που διαμορφώνουν τις στάσεις και τη συμπεριφορά των παιδιών για τα Μαθηματικά. Προκειμένου να είναι πιο κατανοητός ο ρόλος που διαδραματίζουν αυτοί οι παράγοντες, η ανάλυσή τους θα γίνει με βάση την επιμέρους κατηγοριοποίηση που χρησιμοποιούν και οι Saritas και Akdemir (2009). Συγκεκριμένα, θα γίνει πρωτίστως αναφορά σε δημογραφικούς παράγοντες, ακολούθως σε παράγοντες σχετικούς με τη διδασκαλία και τέλος, σε ατομικούς.

Τέλος, εκτός της επεξεργασίας των προαναφερθέντων κατηγοριοποιημένων παραγόντων, θα γίνει αναφορά σε έναν εξίσου σημαντικό παράγοντα που αφορά την ίδια τη φύση του μαθήματος των Μαθηματικών.

2.1.1. Δημογραφικοί παράγοντες

Από τις κύριες επιδράσεις που φαίνεται να επηρεάζουν μερικές από τις στάσεις που αποκτούν οι μαθητές έναντι των Μαθηματικών είναι οι δημογραφικοί παράγοντες και αναλυτικότερα, το φύλο των μαθητών, το κοινωνικό-οικονομικό και μορφωτικό επίπεδο των γονέων. Μια πληθώρα ερευνών έχει πραγματοποιηθεί με στόχο να διερευνηθούν οι στάσεις που αναπτύσσουν τόσο τα αγόρια όσο και τα κορίτσια για τα Μαθηματικά. Τα δεδομένα των ερευνών ποικίλουν με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μια ξεκάθαρη εικόνα της επίδρασης του παράγοντα «φύλο». Ιστορικά, τα επιτεύγματα των κοριτσιών στα Μαθηματικά, σε μια σειρά από διαφορετικά ερευνητικά περιεχόμενα, ήταν χαμηλότερα από ότι αυτά των αγοριών (Afari, 2012˙Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙ Costello, 1991˙ Forgasz, 1992˙ Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999˙ Saritas & Akdemir, 2009˙ Skouras, 2014˙Vandecandelaere et al., 2012). Βέβαια, η εικόνα αυτή οφείλεται σε μια σειρά παραγόντων, όπως είναι τα κοινωνικά στερεότυπα, συναισθηματικοί λόγοι, ορμονικοί παράγοντες ή προγεννητικές εγκεφαλικές διαφορές (Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙ Skouras, 2014).

Από την ηλικία των 7 ετών οι μαθητές φανερώνουν διαφορές φύλου στον τρόπο αντίληψης των Μαθηματικών και στα επιτεύγματα που μπορούν να κατορθώσουν, ενώ στην ηλικία των 10, τα αγόρια βαθμολογούν τα επιτεύγματά τους πολύ περισσότερο από τα κορίτσια (Forgasz, 1992). Η έρευνα της Kurth (2007) στις Ηνωμένες Πολιτείες επιβεβαιώνει ότι τα αγόρια παρουσιάζουν πιο θετικές στάσεις για τα Μαθηματικά έναντι των κοριτσιών. Αντίστοιχα, είναι τα δεδομένα και για την Κύπρο, καθώς στην έρευνα των Φιλίππου και Χρίστου (1995, Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999) έγινε φανερό ότι τα αγόρια νιώθουν μεγαλύτερη ευχαρίστηση στα Μαθηματικά από ότι τα κορίτσια, ενώ είναι εκείνα που επιδιώκουν περισσότερο από τα κορίτσια να ικανοποιήσουν τους σημαντικούς άλλους (γονείς και εκπαιδευτικούς) με τις αποδόσεις τους.Επιπλέον, η αυτό-πεποίθηση των κοριτσιών όταν ασχολούνται με αυτό το μάθημα είναι αισθητά χαμηλότερη από ότι αυτή των αγοριών (Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙Forgasz, 1992˙ Vandecandelaere et al., 2012), ενώ βιώνουν έντονα συναισθήματα άγχους (Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009). Ακόμα και στις περιπτώσεις όπου οι εκπαιδευτικοί δημιουργούσαν το απαραίτητο κλίμα διδασκαλίας – με υψηλές προσδοκίες και ενθάρρυνση – τα κορίτσια εξακολουθούσαν να υστερούν αυτοπεποίθησης(Adermanetal., 1993˙ Forgasz, 1992), ενώ και όταν το μάθημα γίνεται με τη χρήση παιχνιδιών τα κορίτσια φαίνεται ότι δεν συμμετέχουν το ίδιο ενεργά με τα αγόρια (Afari, 2012). Διαφορές, όμως, αναδεικνύονται και κατά την αντιμετώπιση συγκεκριμένων μαθηματικών ενοτήτων. Για παράδειγμα, στη γεωμετρία τα κορίτσια αποδίδουν καλύτερα, ενώ τα αγόρια είναι καλύτερα στις μετρήσεις (Skouras, 2014). Ωστόσο, νεότερες έρευνες σε διεθνές επίπεδο είτε δεν παρουσιάζουνδιαφορές είτε αυτές είναι μικρές και με όχι τόση σημασία διαφορές στο τρόπο που τα δυο φύλα αποδίδουν σε μαθηματικές ασκήσεις και προβλήματα (Palsdottir, 2007˙ Skouras, 2014). Οι διαφορές ανάμεσα στα δυο φύλα είναι πιο εμφανείς όχι τόσο στην απόδοση, αλλά στο συναίσθημα αυτοπεποίθησης κατά την επαφή με τα Μαθηματικά και στον τρόπο διαχείρισης των ασκήσεων. Ειδικότερα, τα αγόρια είχαν περισσότερη αυτοπεποίθηση και ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά χρησιμοποιώντας στρατηγικές επεξεργασίας ενώ απολάμβαναν και την ύπαρξη ανταγωνισμού στο μάθημα, σε αντίθεση με τα κορίτσια που χρησιμοποιούσαν στρατηγικές ελέγχου και οργάνωναν πιο προσεκτικά τη μελέτη τους (Palsdottir, 2007).

Όσον αφορά στο κοινωνικό-οικονομικό υπόβαθρο της οικογένειας των μαθητών, αυτό φάνηκε να επηρεάζει σε κάποιο βαθμό τις μετέπειτα στάσεις των παιδιών. Συγκεκριμένα, ο παράγοντας αυτός σχετίζεται με την απόδοση των μαθητών, ενώ το υψηλό οικονομικό status ευνοεί την άμεση εμπλοκή των γονέων στην εκπαίδευση των παιδιών τους (Saritas & Akdemir, 2009) και κατ' επέκταση στην επιρροή που ασκούν στη διαμόρφωση θετικών περιβαλλόντων μάθησης. Σαφώς, ο ρόλος των γονέων είναι καθοριστικός τόσο για την ύπαρξη θετικών περιβαλλόντων μάθησης όσο και για την ύπαρξη γονέων-προτύπων που θα υποστηρίζουν τα παιδιά και θα τα ενθαρρύνουν να εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες (Attard, 2009). Την ίδια στιγμή, το μορφωτικό επίπεδο των γονέων επιδρά στην ακαδημαϊκή πρόοδο των παιδιών. Για παράδειγμα, οι μαθητές των οποίων οι γονείς είχαν λάβει εκπαίδευση μέχρι και την πρωτοβάθμια, λάμβαναν χαμηλότερους βαθμούς στα Μαθηματικά από ό,τι εκείνα τα παιδιά των οποίων οι γονείς είχαν υψηλότερα επίπεδα εκπαίδευσης (Saritas & Akdemir, 2009). Σύμφωνα πάλι, με την έρευνα των Φιλίππου και Χρίστου (1995) στην Κύπρο, το μορφωτικό επίπεδο των γονέων διαφοροποιεί μόνο τις στάσεις των μαθητών που σχετίζονται με τα κίνητρα για μάθηση.

2.1.2. Παράγοντες σχετικοί με τη διδασκαλία

Από την άλλη, μια σειρά παραγόντων σχετικών με τη διδασκαλία διαδραματίζουν έναν εξίσου σημαντικό – και ενδεχομένως τον πιο σημαντικό – ρόλο στην ανάπτυξη θετικών ή μη στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά. Και σε αυτή την κατηγορία παραγόντων υπάρχουν επιμέρους παράγοντες. Αρχικά, το αναλυτικό πρόγραμμα επιδρά καθοριστικά τόσο στο τι θα διδαχθεί όσο και στο πως θα διδαχθεί. Χαρακτηριστικά οι Saritas και Akdemir (2009,http://www.itdl.org/Journal/Dec_09/article03.htm) αναφέρουν ότι τα μέχρι τώρα Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών *«δεν είναι τόσο μια μορφή σκέψης αλλά ένα υποκατάστατο για τη σκέψη. Η διαδικασία μετρήσεων ή υπολογισμών περιλαμβάνει μόνο την ανάπτυξη μιας ρουτίνας χωρίς το παραμικρό περιθώριο για ευρηματικότητά ή για εργασίες που απαιτούν έκπληξη ή υποθέσεις, χωρίς ευκαιρίες για ανακάλυψη»*. Με τη θέση αυτή συμφωνεί και ο Vandecandelaere και οι συνεργάτες του (2012), που τονίζουν πώς ένα πρόγραμμα σπουδών που επικεντρώνεται στην σύλληψη εννοιών και τη δημιουργία σημασίας και νοήματος, βελτιώνει τα κίνητρα των μαθητών για να μάθουν Μαθηματικά. Δυστυχώς, όμως, τα αναλυτικά προγράμματα παραμένουν αυστηρά δομημένα και οργανωμένα (Howard, 2008˙Shen &Talavera, 2003),αλλά και προσηλωμένα στο να εκπληρώσουν προκαθορισμένους στόχους με τη χρήση συγκεκριμένων διδακτικών υλικών (Sullivan, Clarke& O'Shea, 2010). Η προσήλωση αυτή τα απομακρύνει από τις ανάγκες των μαθητών (Nordin, 2005˙Sisman, 2007), από αυτά τα πλαίσια μάθησης που θα καθιστούσαν ενδιαφέρον το μάθημα, αλλά και από τις πραγματικές εμπειρίες ζωής (Sisman, 2007), με αποτέλεσμα να καθίσταται η διδασκαλία των Μαθηματικών τυποποιημένη και κουραστική. Ταυτόχρονα, η πίεση του χρόνου για τη διδασκαλία της απαιτούμενης ύλης (Howard & Whitaker, 2011)δεν παρέχει τα απαιτούμενα χρονικά πλαίσια για βαθύτερη επεξήγηση και εμπέδωση των μαθηματικών στρατηγικών και του νοήματος που έχουν. Το μάθημα πραγματοποιείται κατά βάση εντός δασκαλοκεντρικών πλαισίων(O'Rourke, Main & Ellis, 2013) και ωθώντας τους μαθητές στη στείρα απομνημόνευση, που δεν ευνοεί την κατανόηση των όσων διδάσκονται ή την ανακάλυψη της αξίας αυτών, αλλά ούτε και τη σύνδεσή τους με άλλες γνώσεις (Saritas&Akdemir, 2009).

Τα στενά, λοιπόν, πλαίσια που δημιουργούν τα αναλυτικά προγράμματα οδηγούν τους μαθητές στη χρήση παθητικών ή αρνητικών συμπεριφορών απέναντι στα Μαθηματικά. Για το λόγο αυτό οι σύγχρονες έρευνες τονίζουν την ανάγκη αναθεώρησης των αναλυτικών προγραμμάτων με βάση τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, ώστε να αποτραπούν οι αρνητικές στάσεις (Afari, 2012). Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί το νέο αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών της Τουρκίας, το οποίο εμπεριέχει τη χρήση παιχνιδιών και υπολογιστών, αλλά και την ενεργή εμπλοκή των παιδιών στη διδασκαλία και απ' ότι φανερώνει η έρευνα της Sisman (2007) η ανταπόκριση των παιδιών απέναντι σε αυτό, καθώς και η απόδοσή τους είναι αρκετά θετική. Στο σημείο αυτό, αναδεικνύεται και πάλι η συσχέτιση των παιχνιδιών, της τεχνολογίας και της ενεργής συμμετοχής, που όπως προαναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, αποτελούν στοιχεία για την εγκαθίδρυση θετικών στάσεων για τα Μαθηματικά. Οι προαναφερθέντες παράγοντες μαζί με μια σειρά άλλων, που θα μελετηθούν παρακάτω, αποτελούν παράγοντες σχετικούς με τις μεθόδους διδασκαλίας και επηρεάζουν εξίσου τη διαμόρφωση στάσεων.

Στη βιβλιογραφία, επισημαίνεται ότι για να επιτύχουν οι μαθητές την κατάκτηση της επιθυμητής γνώσης θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να τους παρέχουν ουσιαστικές και αυθεντικές μαθησιακές γνώσεις (Saritas & Akdemir, 2009). Ωστόσο, η αποτελεσματική μάθηση δεν εξαρτάται μόνο από την ποιότητα των εργασιών, αλλά κυρίως από τον τρόπο που αυτές υλοποιούνται και προσφέρουν δυνατότητες μάθησης στα παιδιά, ωθώντας τα σε περαιτέρω πρόοδο και επιτυχία (Costello, 1991˙Saritas & Akdemir, 2009˙ Sullivan, Clarke& O'Shea, 2010). Εξαρτάται, δηλαδή, από τις μεθόδους και τους τρόπους διδασκαλίας. Στη σύγχρονη παιδαγωγική εποχή, γίνεται άμεσα φανερό μέσα από αρκετές έρευνες ότι οι μαθητές αποδίδουν και ικανοποιούνται περισσότερο από ένα μάθημα Μαθηματικών όταν αυτό πραγματοποιείται με μαθητοκεντρικό χαρακτήρα (Attard, 2009˙ O'Rourke, Main &

Ellis, 2013˙Saritas & Akdemir, 2009˙ Sullivan, Clarke& O'Shea, 2010˙ Sisman, 2007˙ Vandecandelaere & et al., 2012˙ Whyburn&Way, 2012). Τα ίδια τα παιδιά μέσα από δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση παιχνιδιών ή ηλεκτρονικών μέσων μετατρέπονται σε «αυτό-δασκάλους» (O'Rourke, Main & Ellis, 2013) ή «διαμεσολαβητές» (Whyburn&Way, 2012), που κατακτούν ενεργά τη γνώση μέσω της αυτό-καθοδηγούμενης μάθησης και της ελαστικότητας που τους παρέχεται στον τρόπο διαχείρισή της (Attard, 2009). Όταν οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στην κατάκτηση της γνώσης τότε όχι μόνο η αποτελεσματικότητά τους βελτιώνεται, αλλά και το ενδιαφέρον τους απέναντι στο μάθημα. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή, το μάθημα γίνεται μέσω ερωταποκρίσεων και/ή προκαθορισμένων κανόνων, οι μαθητές οδηγούνται σε μια «τεχνητά» κατασκευασμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Τζεκάκη, 2007), γεγονός που δημιουργεί αναπόφευκτα εμπόδια τόσο στην ανάπτυξη νέων εννοιών όσο και στην προέκταση των ήδη κατεκτημένων.

Έτσι, είναι πολυάριθμες οι έρευνες που επιβεβαιώνουν την προαναφερθείσα τοποθέτηση για ενεργή εμπλοκή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία και τα θετικά αποτελέσματα που αυτή επιφέρει (Afari, 2012˙ Attard, 2009˙Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙ Lee&Johnston-Wilder, 2013˙O'Rourke, Main&Ellis, 2013˙ Saritas&Akdemir, 2009˙ Sullivan, Clarke&O'Shea, 2010˙ Sisman, 2007˙ Vandecandelaere&etal., 2012˙ Whyburn&Way, 2012). Χαρακτηριστικά, οι Sullivan, Clarke και O'Shea (2010) σε σχετική τους εργασία, διαπίστωσαν ότι τα παιδιά απολαμβάνουν ιδιαίτερα τα Μαθηματικά όταν αυτά σχετίζονται με παιχνίδια, προβλήματα από την καθημερινή ζωή, τη χρήση συγκεκριμένων μοντέλων ή υλικών (Attard, 2009) για την εκμάθηση συγκεκριμένης ύλης (για παράδειγμα, εκμάθηση κλασμάτων με τη χρήση της τεχνικής με την πίτα) ή με φυσικές δραστηριότητες εκτός τάξης (Attard, 2009). Σε αυτές τις περιπτώσεις το μάθημα είναι πιο άμεσο και ευχάριστο για τα παιδιά, αλλά κυρίως αποκτά κάποιο νόημα και χρησιμότητα (Γιαλαμάς & Κασιμάτη, 1999˙ Sullivan, Clarke και O'Shea, 2010). Τόσο στην έρευνα των Sullivan, Clarke και O'Shea (2010) όσο και στης Attard (2009), όταν οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν ένα ευχάριστο μάθημα Μαθηματικών, η μεγάλη πλειοψηφία ανακαλούσε ένα μάθημα στο οποίο περιέχονταν δραστηριότητες εκτός τάξης, όπως μετρήσεις στον προαύλιο χώρο ή κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων.

Όπως, όμως, έχει προαναφερθεί και στην αρχή της ενότητας, οι μαθητές κατακλύζονται από θετικές στάσεις προς τα Μαθητικά και όταν χρησιμοποιούνται παιχνίδια ή ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Η συμπερίληψη αυτών των δυο στοιχείων στη διδασκαλία των Μαθηματικών βελτιώνει το κλίμα της τάξης και κυρίως, καλλιεργείται η ομαδικότητα (Attard, 2009˙Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013), ενώ οι μαθητές έχουν ισχυρά κίνητρα για να συμμετέχουν στο μάθημα, αλλά και για να συνεχίσουν την προσπάθεια. Την ίδια στιγμή, τα ίδια τα παιδιά ισχυρίζονται σε αρκετές έρευνες ότι τα Μαθηματικά τους φαίνονται πιο εύκολα και αποδίδουν καλύτερα σε αυτά όταν συνεργάζονται με τους συνομηλίκους τους (Afari, 2012˙ Attard, 2009˙ Clarke& O'Shea, 2010˙Γιαλαμάς &

Κασιμάτη, 1999˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Μακρίδης & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, 1999).

Εκτός, όμως, της πρακτικότητας και αμεσότητας της διδακτέας ύλης, της ύπαρξης τεχνολογικών επιτευγμάτων και του ομαδικού πνεύματος στην τάξη, που παρέχουν ισχυρά κίνητρα για εμπλοκή στη μαθηματική διαδικασία, ένας ακόμα σημαντικός παράγοντας είναι η πρόκληση. Ειδικότερα, οι μαθητές αναζητούν την πρόκληση μέσω από τις παραπάνω τεχνικές, με σκοπό να αυξήσουν τη συμμετοχή τους, αλλά και για να συμμετέχουν πιο ενεργά στην κατάκτηση της γνώσης που τους αφορά(Adermanetal., 1993˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Sullivan, Clarke και O'Shea, 2010), ενώ μέσω των προκλήσεων μειώνονται οι πιθανότητες να καταλήξει το μάθημα σε ανιαρό. Χαρακτηριστικά, το δείγμα μαθητών στην έρευνα των Lee και Johnston-Wilder (2013) δηλώνει ότι επιθυμεί παραπάνω προκλήσεις, ώστε να εμπλακούν στο μάθημα, αλλά και ότι δεν φοβάται τη «σκληρή δουλειά», αφού μέσω αυτής θα μάθει και θα βοηθηθεί περισσότερο. Τέλος, οι μέθοδοι διδασκαλίας που περιέχουν την ανάπτυξη στρατηγικών από μέρους των μαθητών – είτε μέσω των παιχνιδιών είτε μέσω των προκλήσεων – οδηγούν τόσο στην ανάπτυξη ευχάριστων συναισθημάτων όσο και στην αναγνώριση από μέρους των μαθητών ότι μπορούν να συμμετέχουν στα Μαθηματικά και να τα καταφέρουν (Barkatsas, Gialamas&Kasimatis, 2009˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013). Για παράδειγμα, η χρήση του παιχνιδιού Handheld Game Console (HGC) Nintendo DS σε δημοτικά της δυτικής Αυστραλίας, έδειξε ότι οι μαθητές έβρισκαν από τη μία το μάθημα διασκεδαστικό και ευχάριστο και από την άλλη, αναγνώριζαν την πρόκληση, ανέπτυσσαν νέες στρατηγικές και έκαναν ανεξάρτητες επιλογές με στόχο να πετύχουν (O'Rourke, Main & Ellis, 2013).

Με βάση και τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο παράγοντας «μέθοδοι διδασκαλίας» διαδραματίζεικαθοριστικό ρόλο για το αν οι μαθητές θα αναπτύξουν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα Μαθηματικά. Η αξιοποίηση μαθητοκεντρικών προσεγγίσεων, ομαδικών δραστηριοτήτων, των σύγχρονων τεχνολογικών επιτευγμάτων και των προκλήσεων μπορούν να διαμορφώσουν θετικούς τρόπους αντιμετώπισης του μαθήματος, αλλά και να ωθήσουν τα παιδιά στο να απολαμβάνουν τη διδασκαλία του. Η άμεση εμπλοκή και συμμετοχή στο μάθημα με ευχάριστο τρόπο οδηγεί τους μαθητές σε εμπειρίες, που κατ' επέκταση διαμορφώνουν τις μετέπειτα στάσεις τους. Ωστόσο, τις μεθόδους διδασκαλίας και τις εμπειρίες που τα παιδιά θα αποκτήσουν, τις επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί.

Θα πρέπει λοιπόν, στους παράγοντες επιτυχίας ή αποτυχίας των μαθητών στα Μαθηματικά να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας το ρόλου του ίδιου του δασκάλου. Ένας κατάλληλος δάσκαλος Μαθηματικών οφείλει να χαρακτηρίζεται από επιστημονική κατάρτιση, παιδαγωγική συμπεριφορά και διδακτική ικανότητα.Η συμπεριφορά του απέναντι στους μαθητές αλλά και στο μάθημα, καθώς και ο τρόπος διαχείρισης των καταστάσεων, που ο εκπαιδευτικός επιλέγει, αντανακλάται και στους μαθητές. Οι έρευνες των τελευταίων ετών κάνουν φανερό ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικώνεπηρεάζουν την επιλογή των διδακτικών μέσων και στρατηγικών, την επιλογή του περιεχομένου, ακόμα και του τρόπου που προσεγγίζουν τους μαθητές σε ατομικό ή ομαδικό επίπεδο (Barkatsas&Hunting, 1996˙ Chap & Ernest, 1998˙ Newman & Schwager, 1993). Την τοποθέτηση αυτή επιβεβαιώνουν και νεότερες έρευνες, σύμφωνα με τις οποίες οι πράξεις και στάσεις του εκπαιδευτικού στα Μαθηματικά επηρεάζουν σε μεγάλο και σημαντικό βαθμό τις στάσεις και επιδόσεις των μαθητών του (Dodeenetal., 2012˙Howard, 2008˙ Howard & Whitaker, 2011˙Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Saritas & Akdemir, 2009).

Καθώς οι στάσεις των εκπαιδευτικών είναι τόσο σημαντικές και αντανακλώνται στους μαθητές καθίσταται επιτακτική η ανάγκη να τις μελετήσουμε. Αρχικά, ένα μέρος των εκπαιδευτικών διακατέχεται από αρνητικά συναισθήματα, όπως άγχος ή ανικανότητα να διδάξουν το μάθημα των Μαθηματικών (Attard, 2009˙Howard, 2008). Στην έρευνά της σε υποψήφιους δασκάλους δημοτικών σχολείων, η Burton (2009) φανέρωσε ότι το 50% (32/62) του δείγματος διακατέχονταν από αρνητικά συναισθήματα προς τα Μαθηματικά, όπως αριθμοφοβία, ενώ μόλις 9/62 αντιμετώπιζαν θετικά το αντικείμενο. Συχνά, οι δάσκαλοι λαμβάνουν αυτή τη στάση έπειτα από τις δικές του τραυματικές εμπειρίες με τα Μαθηματικά (Attard, 2009˙ Burton, 2009˙ Howard, 2008). Θα πρέπει, λοιπόν, αυτές οι αρνητικές στάσεις να περιοριστούν και αυτό γιατί, καθώς ο εκπαιδευτικός βοηθά το μαθητή να ανακαλύψει τη νέα γνώση, επηρεάζει με τις στάσεις του τις δυνατότητες και επιδόσεις του μαθητή (Dodeenetal., 2012˙Saritas & Akdemir, 2009˙ Sullivan, Clarke&O'Shea, 2010) είτε ευνοώντας τον είτε όχι. Συνεπώς, η μεγιστοποίηση της επίδοσης των μαθητών, αλλά και η καλλιέργεια θετικών συναισθημάτων προς τα Μαθηματικά, περνά μέσα από τη σχέση που έχει ο ίδιος ο δάσκαλος με το αντικείμενο και με το μαθητή.

Με βάση τα παραπάνω πορίσματα, οι σύγχρονες έρευνες κάνουν λόγο για αλλαγή των στάσεων των εκπαιδευτικών μέσα από εκπαιδευτικά προγράμματα (Dodeenetal., 2012), για επιστημονική κατάρτιση από μέρους τους όλων των μαθηματικών θεμάτων και υποστήριξη του έργου και των προσπαθειών τους (Attard, 2009˙ Dodeenetal., 2012˙Saritas & Akdemir, 2009). Χαρακτηριστική στο σημείο αυτό είναι η τοποθέτηση της Τζεκάκη (2007) που υποστηρίζει ότι *«για να μπορέσει ο εκπαιδευτικός να διδάξει Μαθηματικά, πρέπει να γνωρίζει να διδάσκει Μαθηματικά»*. Ταυτόχρονα, και οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι ένα καλός δάσκαλος τους ενθαρρύνει, έχει υψηλές προσδοκίες, τους υποστηρίζει και τους ωθεί να αναπτύσσουν νέες στρατηγικές, θέτει υψηλής τάξης ερωτήσεις (Dodeenetal., 2012), χρησιμοποιεί ποικίλες στρατηγικές διδασκαλίας που καλύπτουν τις διάφορες προτιμήσεις των μαθητών, ενώ παρέχει ευκαιρίες για ανακάλυψη της νέας γνώσης και για συνεργασία (Attard, 2009˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013).

Ο εκπαιδευτικός, λοιπόν, σήμερα παρά ποτέ άλλοτε, που η γνώση πολλαπλασιάζεται με γεωμετρική πρόοδο, καλείται να δώσει ευκαιρίες επιτυχίας σε κάθε μαθητή με την επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων. Τέτοιες ευκαιρίες θα βοηθήσουν το παιδί ν' αναπτύξει την αυτοεικόνα και την αυτοπεποίθησή του. Η θετική ενίσχυση και η αμοιβή, η αποδοχή και ο δημοκρατικός διάλογος, η συνεργασία και η αλληλεγγύη με σκοπό τις δημιουργικές δραστηριότητες, προβάλλουν ως ο αντίποδας στις ήδη υπάρχουσες αρνητικές στάσεις έναντι των Μαθηματικών (Βούργιας & Χρυσοστόμου-Βούργια, 2006). Χαρακτηριστική είναι η τοποθέτηση των D' Augustine και Smith(1992), σύμφωνα με τους οποίους *«οι καλοί εκπαιδευτικοί επιδιώκουν να καλλιεργήσουν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας αλληλεπιδραστικούς τρόπους διδασκαλίας, οι οποίοι να εξασφαλίζουν την επικοινωνία τόσο μεταξύ παιδαγωγού και μαθητών όσο και μεταξύ των μαθητών»*. Για την ανάπτυξη, όμως, αυτών των παραμέτρων απαιτείται ένα κατάλληλο σχολικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον, το οποίο με τη σειρά του επηρεάζει και διαμορφώνει τη στάση των παιδιών για τα Μαθηματικά.

Η σημασία που έχει το περιβάλλον της τάξης για την ομαλή μετάδοση γνώσεων και την ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει τονισθεί από αρκετές έρευνες. Ειδικότερα, ο Howard (2008) στην εργασία του αναφέρει ότι σε τάξεις που παρέχεται ένα θετικό συναισθηματικό κλίμα, οι μαθητές ανέφεραν σημαντικά εγγενή κίνητρα, ύπαρξη πρόσθετης βοήθειας όταν τη χρειάζονταν, καθώς και θετικά συναισθήματα που σχετίζονται με το περιεχόμενο του μαθήματος. Επιπροσθέτως και οι ίδιοι οι μαθητές αναζητούν ένα ανάλογο περιβάλλον μάθησης όπου θα νιώθουν ασφαλείς, χαλαροί και ελεύθεροι να εκφράσουν τις απορίες, τις ερωτήσεις ή τα συναισθήματά τους (Afari, 2012˙ d' Ambrosio, 1985˙ Howard, 2008˙Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Saritas & Akdemir, 2009). Το ευχάριστο και φιλικό κλίμα της τάξης και η θετική ενθάρρυνση του εκπαιδευτικού ωθούν τα παιδιά να συνεχίσουν την προσπάθεια, αλλά και να διαπιστώσουν ότι τα Μαθηματικά είναι ευχάριστα και ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν. Επιπλέον, τα εκκολαπτόμενα αρνητικά συναισθήματα εξαλείφονται όταν το μέγεθος της τάξης είναι μικρό, ενώ προσφέρονται σε αυτή και δυνατότητες για ομαδική εργασία (Grouws&Cebulla, 2000˙Kloosterman, Raymond & Emenaker, 1996). Έτσι, οι Grouws και Cebulla (2000) υποστηρίζουν ότι η αξιοποίηση μικρών συνεργατικών ομάδων σε ασκήσεις, προβλήματα ή μαθηματικές δραστηριότητες αυξάνει την απόδοση των μαθητών στα Μαθηματικά.

Οδηγούμαστε λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι το περιβάλλον της τάξης, η οργάνωση και το κλίμα αυτής καθορίζουν τον τρόπο λειτουργίας του συνόλου των μαθητών, ενώ επηρεάζουν και τον τρόπο αντίληψης των Μαθηματικών. Συνολικά, όμως, παρατηρήσαμε ότι εκτός του περιβάλλοντος καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση αντιλήψεων φέρουν το αναλυτικό πρόγραμμα, οι μέθοδοι διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται, καθώς και οι ίδιες οι στάσεις των εκπαιδευτικών. Οι παράγοντες διδασκαλίας, δηλαδή, συνιστούν μια σειρά παραμέτρων που αναμφίβολα θέτουν ποικίλα πλαίσια που γεννούν στάσεις και πεποιθήσεις γύρω από τα Μαθηματικά. Ωστόσο, οι παράγοντες αυτοί δεν δρουν μονόπλευρα, αλλά βρίσκονται σε αλληλεπίδραση και αλληλεξάρτηση και με τους ατομικούς παράγοντες, που θα μελετηθούν ακολούθως.

2.1.3. Ατομικοί παράγοντες

Στον τρίτο άξονα κατηγοριοποίησης των παραγόντων, οι Saritas και Akdemir (2009) τοποθετούν τους ατομικούς παράγοντες. Στους παράγοντες αυτούς συγκαταλέγονται η αντίληψη των μαθητών για τα όσα μαθαίνουν και το ρόλο που έχουν σε αυτή τη διαδικασία, τα κίνητρα και η μαθηματική ικανότητα, που θα μελετήσουμε στην πορεία. Οι παράγοντες αυτοί, όπως θα διαπιστώσουμε και από την παρακάτω ανάλυση, συνδέονται άμεσα τόσο μεταξύ τους όσο και με τους παράγοντες που μελετήθηκαν ως τώρα.

Για να έχουν, λοιπόν, τα Μαθηματικά νόημα για τα παιδιά θα πρέπει να είναι χρήσιμα για εκείνα. Θα πρέπει, δηλαδή, η χρησιμότητα του μαθήματος να είναι ξεκάθαρη σε κάθε επίπεδο και διάσταση ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν πως όσα διδάσκονται τους βοηθούν σε ακαδημαϊκό και προσωπικό επίπεδο. Καθώς δεν υπάρχει ένα προκαθορισμένο ή προγραμματισμένο σύστημα που να επιτρέπει στους μαθητές να δράσουν ή να σκεφτούν με μαθηματικό τρόπο οι Saritas και Akdemir (2009) ισχυρίζονται πως μόνο αν οι μαθητές αναπτύξουν το δικό τους ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία θα μπορέσουν να κατανοήσουν εις βάθος την ουσία των Μαθηματικών. Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται και πάλι η ανάγκη για μαθητοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας ή αυτό-καθοδηγούμενη μάθηση, όπου τα παιδιά θα έχουν τον πρώτο λόγο, θα εκφράζουν τις ανάγκες τους, θα λαμβάνουν πρωτοβουλίες, θα θέτουν στόχους και θα μπορούν να ελέγχουν την πρόοδό τους, ενώ ο εκπαιδευτικός θα τους υποστηρίζει και θα τους βοηθάει να λάβουν αποφάσεις. Τη θέση αυτή επιβεβαιώνει και η έρευνα των O'Rourke, Main και Ellis (2013), καθώς μέσω της χρήσης του παιχνιδιού Handheld Game Console (HGC) Nintendo DSφάνηκε ότι τα παιδιά ήταν ανεξάρτητα, καλλιεργούσαν στρατηγικές και οργάνωναν μόνα τους τη γνώση, ενώ αυξάνονταν τα επίπεδα αυτοπεποίθησης και αυτό-βελτίωσης. Για να είναι, όμως, οι μαθητές ενεργοί θα πρέπει να έχουν ισχυρή θέληση και κυρίως να πιστεύουν πως έχουν την ικανότητα να πετύχουν.

Η μαθηματική ικανότητα αναφέρεται σε μια πληθώρα ερευνών ως ένας ακόμα σημαντικός παράγοντας που συνδέεται άμεσα με την απόδοση των παιδιών στα Μαθηματικά και κατ' επέκταση την ακαδημαϊκή τους επιτυχία (Φιλίππου & Χρίστου, 1997˙ Forgasz, 1992˙Gialamas&Kasimatis, 2009˙ Githua, 2013˙ Howard & Whitaker, 2011˙Howard, 2008˙Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013˙ Saritas & Akdemir, 2009˙ Shen & Talavera, 2003˙Vandecandelaere et al, 2012). Οι έρευνες δείχνουν (Φιλίππου & Χρίστου, 1997˙ Howard, 2008˙Shen & Talavera, 2003˙Vandecandelaere et al, 2012) ότι όταν τα παιδιά απολαμβάνουν την ενασχόληση με τα Μαθηματικά και έχουν θετικές εμπειρίες αισθάνονται ότι μπορούν να τα καταφέρουν και έτσι αυξάνεται θετικά η αυτό-αντίληψη που έχουν για τις ικανότητες τους, αλλά και η επίδοσή τους. Αντιθέτως, όπως αναφέρουν οι Howard (2008) και Howard και Whitaker (2008), όταν το παιδί αποτυγχάνει στο μάθημα καταβάλλεται από αρνητικά συναισθήματα, με αποτέλεσμα να αποστρέφεται τα Μαθηματικά και να έχει χαμηλά επίπεδα αυτό-αντίληψης που το οδηγούν σε χαμηλά επιτεύγματα. Επιπλέον, υψηλά επίπεδα αυτό-αντίληψης και εμπιστοσύνης στον εαυτό τους επιδεικνύουν οι μαθητές με καλές βαθμολογίες (Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Howard & Whitaker, 2011˙Shen & Talavera, 2003˙ Vandecandelaere et al, 2012), οι οποίοι επιθυμούν να έρχονται αντιμέτωποι με μαθηματικές καταστάσεις όσο δύσκολες ή εύκολες είναι, καθώς νιώθουν την πρόκληση που τους οδηγεί στην προσπάθεια και σε θετικά αποτελέσματα (Kloosterman, Raymond&Emenaker, 1996˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013). Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι μόνο στην έρευνα της Forgasz (1992) παρουσιάζεται συσχέτιση μεταξύ της απόδοσης στα Μαθηματικά και του φύλου, με τα κορίτσια να διακατέχονται από χαμηλότερα αισθήματα αυτοπεποίθησης και αυτό-αντίληψης έναντι των αγοριών, που είχαν ισχυρές θέσεις για τις επιδόσεις τους.

Συνολικά, οι ποικίλες μελέτες τονίζουν την ανάγκη για εμψύχωση των μαθητών και ενίσχυσης της αυτό-αντίληψης με σκοπό την ακαδημαϊκή βελτίωση των παιδιών. Οι συζητήσεις, ο διάλογος (Lee & Johnston-Wilder, 2013) και η χρήση παιχνιδιών (Afari, 2012˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013)φαίνεται να πετυχαίνουν αύξηση της αυτό-αντίληψης και της αυτό-αποτελεσματικότητας, αλλά και ενεργή συμμετοχή των παιδιών, χωρίς την ύπαρξη αρνητικών συναισθημάτων. Πέραν όμως, των συζητήσεων ή των παιχνιδιών είναι επιτακτική ανάγκη οι μαθητές να έχουν ισχυρά κίνητρα που θα τους οδηγούν στην επιτυχία στα Μαθηματικά. Τα κίνητρα αποτελούν τον τελευταίο, αλλά πολύ ισχυρό παράγοντα, που διαμορφώνει τις στάσεις των μαθητών, ενώ επηρεάζει άμεσα και την εικόνα που διαμορφώνουν για τις ικανότητές τους καθώς και την απόδοσή τους (Howard & Whitaker, 2011˙Shen & Talavera, 2003).

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Hardre (στο Howard, 2008) «*τα κίνητρα είναι από τους πιο χαρακτηριστικούς παράγοντες για την επιτυχία ή αποτυχία των μαθητών στο σχολείο*». Τα κίνητρα, είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά, συνδέονται άμεσα με τη διαμόρφωση στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά (Φιλίππου & Χρίστου,1997˙ Githua, 2013˙ Howard & Whitaker, 2011˙Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Nordin, 2005˙ Vandecandelaere et al, 2012). Πληθώρα ερευνών επιβεβαιώνει ότι η παροχή κινήτρων διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών (Githua, 2013˙Lee & Johnston-Wilder, 2013˙Nordin, 2005˙ Saritas & Akdemir, 2009) και οδηγεί σε ουσιαστική μάθηση, καθώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα και την ουσία όσων διδάσκονται (Afari, 2012˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013). Την ίδια στιγμή, η προώθηση των κινήτρων ωθεί σε αύξηση της απόδοσης των παιδιών, αλλά και στην καλλιέργεια του συναισθήματος ότι μπορούν να επιτύχουν στα Μαθηματικά (Githua, 2013˙ Howard & Whitaker, 2011˙ Howard, 2008˙Nordin, 2005˙ Vandecandelaere et al., 2012). Συνεπώς, η ύπαρξη θετικών εμπειριών και θετικής αυτό-εκτίμησης συνεπάγει τη δημιουργία θετικών αντιλήψεων για το μάθημα. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή, οι μαθητές δεν έχουν κίνητρα για να προσπαθήσουν, διακατέχονται από συναισθήματα απάθειας, φόβου, απογοήτευσης ή αποστροφής για τα Μαθηματικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνιστούν οι απόψεις των συμμετεχόντων στην έρευνα των Howard και Whitaker (2011). Αρχικά το δείγμα αποστρέφονταν τα Μαθηματικά και διακατέχονταν από αρνητικά συναισθήματά. Μετά όμως και τη σχετική παρέμβαση με την παροχή κινήτρων και την καλλιέργεια στρατηγικών, οι συμμετέχοντες δήλωναν ότι μπορούν να τα καταφέρουν στα Μαθηματικά, ενώ πίστευαν και στις ικανότητές τους.

Τα κίνητρα, λοιπόν, αποτελούν βασικό παράγοντα για την γέννηση θετικών συναισθημάτων και αντιλήψεων για τα Μαθηματικά. Για το λόγο αυτό, οι ερευνητές επισημαίνουν την ανάγκη για υποστήριξη και παρακίνηση των μαθητών με ισχυρά κίνητρα, εξωτερικά και εσωτερικά. Για παράδειγμα, η αξιοποίηση των παιχνιδιών παρακινεί τα παιδιά και οδηγεί σε καλές επιδόσεις (Afari, 2012˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013), ενώ το εξωτερικό κίνητρο για «καλούς βαθμούς» επιφέρει εξίσου θετικά αποτελέσματα (Lee & Johnston-Wilder, 2013). Σημαντικός, βέβαια, κρίνεται και ο ρόλος των εκπαιδευτικών και των γονέων που θα πρέπει να παρέχουν κίνητρα με νόημα για τα παιδιά και να συνδράμουν στις προσπάθειές τους δημιουργώντας θετικά και υποστηρικτικά περιβάλλοντα μάθησης (Afari, 2012˙ Howard & Whitaker, 2011˙ O'Rourke, Main & Ellis, 2013˙ Vandecandelaere et al., 2012).

2.1.4. Η φύση των Μαθηματικών

Πέραν όμως, των προαναφερθέντων κατηγοριοποιημένων παραγόντων που επηρεάζουν και διαμορφώνουν τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, δεν πρέπει να παραλείπουμε το σημαντικό ρόλο που η ίδια η φύση του μαθήματος έχει. Τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από αυστηρή λογική ιεραρχία και πυργοειδή διάταξη, που σημαίνει ότι οι μαθηματικές έννοιες, λόγω της φύσεώς τους, συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε να στηρίζονται στις προηγούμενες. Όπως υποστηρίζει και η Τζεκάκη (2007) *«τα Μαθηματικά οργανώνονται στη βάση της αξιωματικής θεμελίωσης η οποία ξεκινά από βασικές έννοιες και σχέσεις, πάνω στις οποίες οικοδομούνται όλες οι επόμενες έννοιες με ορισμούς και θεωρήματα»*. Μπορούμε, για παράδειγμα, να παρουσιάσουμε το οικοδόμημα των Μαθηματικών σαν έναν πύργο που κάθε πέτρα του στηρίζεται στις ήδη προϋπάρχουσες. Προκύπτει λοιπόν, μια αλυσοειδής διάταξη, που αν χαθεί ένας κρίκος να καταστρέφεται η συνοχή και η συνεκτικότητά της (Βαϊνάς, 1988˙Βαμβακούση, 2004˙ Chap & Ernest, 1998˙ Τζεκάκη, 2007). Η εκ φύσεως αυτή διάταξη του μαθήματος ευνοείται και από την σπειροειδή μορφή των Αναλυτικών Προγραμμάτων, αλλά και από το γεγονός ότι αυτά ευνοούν την υιοθέτηση είτε μηχανισμών αυτοματοποίησης της μαθηματικής σκέψης είτε μηχανισμών βασισμένων στον παπαγαλισμό με σκοπό την εξοικονόμηση χρόνου και κόπου.

Επιπλέον, κομμάτι της φύσης των Μαθηματικών είναι η γλώσσα που χρησιμοποιούν. Δεδομένου ότι η γλώσσα διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο για την ανάπτυξη κάθε τύπου μάθησης, είναι φυσικό επακόλουθο η κατανόηση και η επιτυχία στα Μαθηματικά να συνδέεται άμεσα και με παράγοντες σχετικούς με τη γλώσσα (Costello, 1991). Έτσι, είναι αρκετοί οι ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η υπερβολική χρήση ορολογίας, συμβόλων, τύπων και διαγραμμάτων, είναι δύσκολο να κατανοηθούν χωρίς τις κατάλληλες επεξηγήσεις και αυτό διότι τα Μαθηματικά χρησιμοποιούν μια ιδιαίτερη γλώσσα, που διαφέρει πολύ από τη φυσική γλώσσα του μαθητή (de Oliveira &Cheng, 2011˙Dossey, 1992˙ Gagatsisetal, 2009˙ Githua, 2013). Το παιδί τρομάζει από τις σχέσεις, τα σύμβολα και τα διαγράμματα, αν δεν τα κατανοήσει και δεν τα διδαχθεί σωστά (Καραγεώργου, 1994). Το γεγονός λοιπόν αυτό, δημιουργεί ανυπέρβλητα προβλήματα κατανόησης και οδηγεί τους μαθητές σε μια κατάσταση αποστροφής για το μάθημα και στη συνεπακόλουθη άμβλυνση αρνητικών συναισθημάτων και απόψεων. Την επιρροή της φύσης των Μαθηματικών στις σχετικές αντιλήψεις επιβεβαιώνουν και αρκετές έρευνες (Chap & Ernest, 1998˙Dossey, 1992˙ Lee & Johnston-Wilder, 2013˙ Nordin, 2005). Χαρακτηριστικά στην έρευνα των Chap και Ernest (1998), το 30% των συμμετεχόντων αναφέρθηκε στην επίδραση της φύσης και της επιστημολογίας των Μαθηματικών, καθιστώντας τον παράγοντα «φύση των Μαθηματικών» ως το δεύτερο σημαντικότερο λόγο στη διαμόρφωση στάσεων.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα ενότητα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια πληθώρα παραγόντων και παραμέτρων που διαμορφώνουν τις στάσεις των μαθητών έναντι των Μαθηματικών. Οι παράγοντες αυτοί μπορεί να ξεκινούν από το οικογενειακό ή σχολικό περιβάλλον, τη φύση του μαθήματος, τον τρόπο διδασκαλίας του, αλλά και τον τρόπο που ο κάθε μαθητή «βλέπει» τα Μαθηματικά. Συνεπώς, ποικίλλουν και επηρεάζουν άλλοτε σε μεγαλύτερο και άλλοτε σε μικρότερο βαθμό την ανάπτυξη στάσεων. Έτσι, τα συναισθήματα που ανακύπτουν με βάση τις στάσεις μπορεί να είναι ωφέλιμα ή επιζήμια για τους μαθητές. Οι θετικές στάσεις οδηγούν στην ικανοποίηση και στην απόλαυση που φέρει η συναναστροφή με το αντικείμενο, ενώ οι αρνητικές σε συμπεριφορές με χαρακτήρα αποσυντονισμού και αποδόμησης.Για όλους αυτούς τους λόγους, λοιπόν, θα πρέπει να δίνεται βαρύτητα στο ρόλο που οι ποικίλοι παράγοντες διαδραματίζουν στην μαθηματική εκπαίδευση και να πραγματοποιείται μια όσον τον δυνατόν καλύτερη αξιοποίηση και των σχετικών ερευνητικών ευρημάτων, ώστε να προσφέρεται ένα γόνιμο έδαφος στα παιδιά για την ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων και κατ' επέκταση στάσεων για τα Μαθηματικά.

2.2. Η αντιμετώπιση των Μαθηματικών από Μαθητές με Αναπηρία Όρασης

Και σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε τον τρόπο που αντιμετωπίζονται τα Μαθηματικά, αλλά αυτή τη φορά, από την οπτική γωνία των μαθητών με αναπηρία όρασης (ΑΟ). Όπως είναι επόμενο, ο τρόπος που αντιμετωπίζονται τα Μαθηματικά από τους μαθητές με προβλήματα όρασης έχει αρκετές ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές από εκείνη την προσέγγιση των βλεπόντων μαθητών. Έτσι, προκύπτει μια διαφορετική λίστα παραγόντων και αιτιών που συνδράμουν στη δημιουργία μιας εικόνας των παιδιών με ΑΟ για τα Μαθηματικά και τον τρόπο διαχείρισης των πολλαπλών εννοιών που περικλείουν. Προτού, όμως, επεξεργαστούμε αυτές τις παραμέτρους είναι επιτακτική ανάγκη να παραθέσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς για τα άτομα με ΑΟ.

2.2.1. Βασικοί ορισμοί και ταξινομήσεις

Σύμφωνα με τον Παγκόσμιο Οργανισμό Υγείας, άτομα που έχουν οπτική οξύτητα μεταξύ 6/18 και 3/60 θεωρείται ότι έχουν περιορισμένη όραση (μερική απώλεια όρασης), ενώ εκείνα των οποίων η οπτική οξύτητα είναι μικρότερη από 3/60 έχουν ολική απώλεια όρασης (στο Αργυρόπουλος, 2011). Στη χώρα μας, σύμφωνα με σχετικό νόμο (Ν. 958/ΦΕΚ 191/τ.Α'/14-8-1979, άρθρο 1) (στο Λιοδάκης, 2000) ισχύει ο ακόλουθος ορισμός: «Τυφλός, κατά την έννοια του παρόντος νόμου, νοείται παν πρόσωπο, το οποίον στερείται παντελώς της αντιλήψεως του φωτός ή του οποίου η οπτική οξύτης είναι μικρότερη το ενός εικοστού (1/20) της φυσιολογικής τοιαύτης». Την ίδια στιγμή, ο Λιοδάκης (2000) ταξινομεί τα άτομα με προβλήματα όρασης με βάση :

- το βαθμό της οπτικής οξύτητας ή καθαρότητας της όραση, το πλάτος και τη στενότητα του οπτικού τους πεδίου (ιατρική ταξινόμηση)
- τη χρήση της όρασης που γίνεται για εκπαιδευτικούς σκοπούς (εκπαιδευτική ταξινόμηση).

Γίνεται σαφές, λοιπόν, από την προηγούμενη ταξινόμηση ότι τόσο για την παρούσα εργασία, που έχει ως αντικείμενο τους μαθητές όσο και για τη γενικότερη εκπαιδευτική διαδικασία, η εκπαιδευτική ταξινόμηση των μαθητών με ΑΟ είναι πιο χρήσιμη.

Για το λόγο αυτό, στη βιβλιογραφία γίνεται λόγος για «μερικώς βλέποντα» άτομα, των οποίων η οπτική οξύτητα (με διορθωτικά μέσα) αξιολογείται ανάμεσα στο 20/70 και στο 6/60 και για «τυφλά» άτομα ή άτομα με «ολική απώλεια όρασης», των οποίων η οπτική οξύτητα (με διορθωτικά μέσα) είναι μικρότερη από 6/60 (Αργυρόπουλος, 2011˙ Shepherd, 2001˙ Τσιναρέλης, 2005). Συμπληρωματικά, οι Λιοδάκης (2000) και Shepherd (2001) αναφέρουν ότι «τυφλά» είναι τα άτομα, που ύστερα και από την καλύτερη δυνατή διορθωτική παρέμβαση, αδυνατούν να διαβάσουν έντυπα με συμβατική γραφή, μπορούν όμως, να μάθουν να διαβάζουν και να γράφουν και γενικότερα να εκπαιδευτούν με το ανάγλυφο σύστημα γραφής Braille˙ ενώ «αμβλύωπα» ή «μερικώς βλέποντα» είναι τα άτομα τα οποία ύστερα από την καλύτερη ιατρική διορθωτική παρέμβαση, αν και έχουν σοβαρή βλάβη στην όραση, μπορούν να μάθουν να διαβάζουν κοινά έντυπα με μεγεθυμένα τυπογραφικά στοιχεία ή/και με τη βοήθεια μεγεθυντικών οργάνων και συσκευών καθώς και να γράφουν με τη συμβατική γραφή. Πρέπει βέβαια, να τονιστεί ότι είναι λάθος να πιστεύουμε ότι ένα τυφλό άτομο έχει και ολική απώλεια όρασης, καθώς κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μπορεί να λειτουργεί ως άτομο με ολική απώλεια όρασης, ενώ υπό άλλες συνθήκες (όπως, καλός φωτισμός) να ενεργεί ως άτομο με μερική απώλεια όρασης (Αργυρόπουλος, 2011). Από την άλλη, ο Τσιναρέλης (2005) προεκτείνει την εκπαιδευτική ταξινόμηση σε τρεις κατηγορίες: α) μέτρια οπτική μειονεξία, β) σοβαρή οπτική μειονεξία και γ) βαριά οπτική μειονεξία. Βέβαια, όπως ο ίδιος τονίζει, η ταξινόμηση αυτή δεν στηρίζεται στα αποτελέσματα των test οπτικής ικανότητας, αλλά κυρίως στις απαιτούμενες ειδικές εκπαιδευτικές παρεμβάσεις προκειμένου τα παιδιά των παραπάνω κατηγοριών να εκπαιδευτούν και να μάθουν.

Πριν συνεχίσουμε στη μελέτη του τρόπου αντιμετώπισης των Μαθηματικών, πρέπει να τονίσουμε ότι ο πληθυσμός των παιδιών με μερική ή ολική απώλεια όρασης διακρίνεται από μεγάλη ετερογένεια (Αργυρόπουλος, 2011, Huebner, 2000). Τα παιδιά με ΑΟ έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, ιδιαίτερες ικανότητες και διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το νοητικό επίπεδο και τον τρόπο απόκτησης γνώσεων και γνωστικών δεξιοτήτων. Έχοντας αυτή την παρατήρηση κατά νου, θα αναζητήσουμε το πώς οι μαθητές με ΑΟ βλέπουν τα κλάσματα, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, καθώς και τα συναισθήματα που βιώνουν.

2.2.2. Αντιμετωπίζοντας τα Μαθηματικά

Όπως και για τους βλέποντες, έτσι και για τους μαθητές με ΑΟ τα Μαθηματικά συνιστούν το ίδιο σημαντικά στην καθημερινότητά τους. Για το λόγο αυτό όλοι οι μαθητές ανεξαιρέτως πρέπει να μάθουν να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο και να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο για να μάθουν. Παράλληλα, για τους μαθητές με ΑΟ, που δεν μπορούν να δουν το περιβάλλον στο σύνολό του, ο φυσικός κόσμος αποτελείται από μια σειρά από αντικείμενα γνώσης που πρέπει να τοποθετηθούν μαζί σαν ένα παζλ. Τα Μαθηματικά, λοιπόν, μπορούν να διαδραματίσουν κεντρικό ρόλο βοηθώντας τον εκάστοτε μαθητή να ολοκληρώσει το παζλ αυτό και να προετοιμαστεί για τη μελλοντική ζωή. Εξάλλου, σύμφωνα και με την Clamp (1997) «*το μάθημα των Μαθηματικών οφείλει να δώσει στο κάθε παιδί με ΑΟ τη δυνατότητα ανάπτυξης των δεξιοτήτων και της κατανόησης που θα του είναι απαραίτητα στην ενήλικη ζωή, των δεξιοτήτων μετασχολικών σπουδών και πρακτικής εξάσκησης και – τελικά – των δεξιοτήτων εργασίας*».

Παρά, όμως, την τόσο μεγάλη σημασία των Μαθηματικών και για τους μαθητές με ΑΟ υφίστανται δυσκολίες. Είναι αρκετές οι έρευνες που επιβεβαιώνουν την αδυναμία των μαθητών με ΑΟ στο να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του μαθήματος (Alajarmeh, Pontelli & Son, 2011˙Clamp, 1997˙ Csocsán, 2005˙ Kapperman, Heinze&Sticken, 2000˙ Kapperman, Heinze&Sticken, 1997˙ Pezeshki, Alamolhodaei & Radmehr, 2011˙ Stöger, Miesenberger & Batušić, 2004, κ.α.). Χαρακτηριστικά, οι Kapperman, Heinze και Sticken (1997) υποστηρίζουν ότι δεν είναι ασυνήθιστο να βρεις άτομα με ΑΟ που δεν γνωρίζουν τι ρέστα πρέπει να πάρουν όταν κάνουν μια συναλλαγή ή δεν μπορούν να υπολογίσουν τους τόκους όταν παίρνουν ένα δάνειο. Η έρευνα της Clamp το 1988 (στο Clamp, 1997) επιβεβαιώνει ότι κατά μέσον όρο τα παιδιά με ΠΟ υπολείπονται στην επίδοση από τους βλέποντες συνομηλίκους τους σε ποσοστό 16 έως 25%. Ανάλογη είναι και η θέση τωνGiesen, Cavenaugh και McDonnall (2012),που σημειώνουν ότι οι μαθητές με ΑΟ είναι σε ακαδημαϊκό επίπεδο 3 χρόνια πίσω έναντι των βλεπόντων συμμαθητών τους. Επιπλέον, στην ίδια έρευνα της Clamp αποκαλύπτει ότι λιγότεροι από το 50% των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που αντιμετωπίζουν ΑΟ μπορούν να ανταποκριθούν στις σχολικές απαιτήσεις των Μαθηματικών. Τη φτωχή επίδοση των μαθητών με ΑΟ σημειώνει και η Ferrell et. al. (2006). Επιπλέον, σύμφωνα με το NationalCenterforEducationStatistics (2002) μόλις το 6,8% των φοιτητών με ΑΟ θετικών και πολυτεχνικών σχολών λαμβάνει το πτυχίο bachelor, ενώ ο αριθμός τυφλών ατόμων δεν είναι αντιπροσωπευτικός σε επαγγέλματα που σχετίζονται με τα Μαθηματικά (Kapperman&Sticken, 2002˙Stevens, Edwards & Harling, 1997). Ωστόσο, η ιστορία των Μαθηματικών περιλαμβάνει ένα σημαντικό αριθμό τυφλών μαθηματικών, όπως ο Euler, oSaunderson, oMorin, ο Battles και φυσικά ο Nemeth (Jackson, 2002).

Την ίδια στιγμή, το Εθνικό Κέντρο για της Χαμηλής Συχνότητας Αναπηρίες (NationalCenteronLow-IncidenceDisabilities) (2004) μελετώντας τις δυσκολίες διαφόρων κατηγοριών μαθητών (με και χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες) σε διάστημα τριών χρόνων, επιβεβαιώνει τη δυσκολία των παιδιών με ΑΟ στα Μαθηματικά, ενώ οι ίδιες δυσκολίες είναι υψηλότερες συγκριτικά με αυτές τον βλεπόντων μαθητών. Και σε μια αντίστοιχη συγκριτική έρευνα των Pezeshki, Alamolhodaei και Radmehr (2011) έγινε φανερό ότι οι βλέποντες μαθητές απέδιδαν καλύτερα έναντι των τυφλών μαθητών του δείγματος. Τις μειωμένες επιδόσεις τους σε διάφορες μαθηματικές καταστάσεις αναδεικνύουν ποικίλες έρευνες. Για παράδειγμα, η έρευνα Clamp (1988, στο Clamp, 1997) έδειξε ότι στις απλές μαθηματικές πράξεις οι μαθητές με ΑΟ αντιμετώπιζαν πολύ περισσότερες δυσκολίες από τους βλέποντες συμμαθητές τους, αφού μόλις το 66,6% των 114 με ΑΟ του δείγματος καταλάβαινε λίγο τη διαίρεση και το πολλαπλασιασμό ολόκληρων αριθμών, ενώ το 36,6% αυτών δεν κατάφερνε να κάνει μια ολοκληρωμένη προσπάθεια σε ασκήσεις πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Ο Archambaultet. al.(2007)κάνει λόγο για πολλαπλές δυσκολίες στην εκτέλεση υπολογισμών, ενώ η Tanti (2006) αναφέρεται σε δυσκολίες στην απόκτηση των εννοιών του μεγέθους και του βάρους. Ακόμη, η Csocsán(2005) υποστηρίζει ότι μερικά από τα παιδιά με οπτική αναπηρία που φοιτούν στο δημοτικό σχολείο, δυσκολεύονται να αντιληφθούν αριθμήσιμες και μη αριθμήσιμες ποσότητες, καθώς και τη σχέση του μέρους με το σύνολο των αριθμών μέσω της αφής.Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι τα παιδιά με ΑΟ δυσκολεύονται να αποδώσουν με επιτυχία στα Μαθηματικά, ενώ οι αποδόσεις τους αυτές είναι συγκριτικά χαμηλότερες με αυτές των βλεπόντων συνομηλίκων τους.

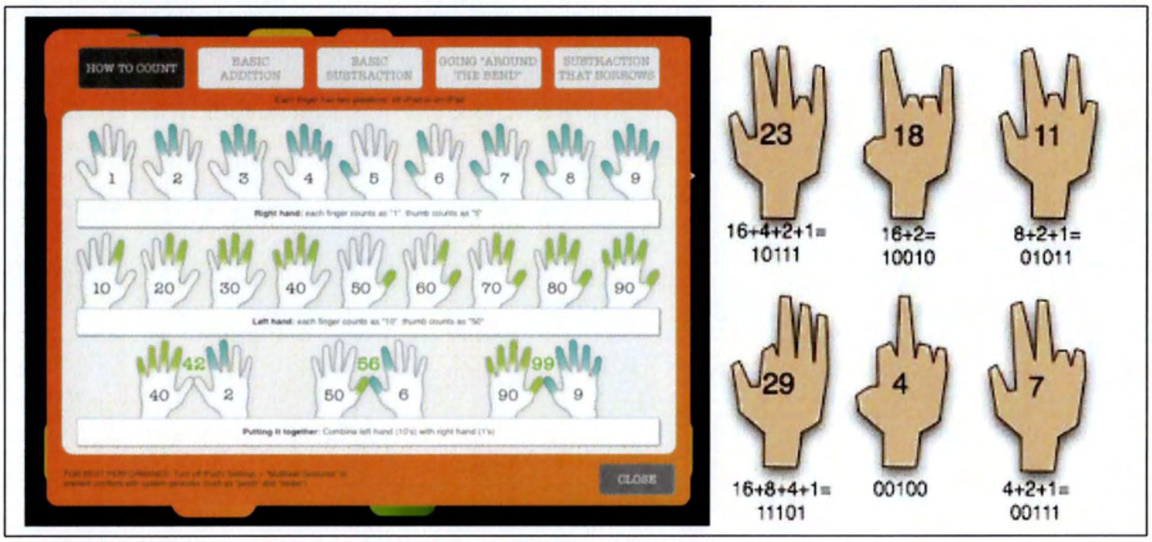
Οι χαμηλές, όμως, επιδόσεις και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΑΟ τους οδηγούν και στην ανάπτυξη αρνητικών συναισθημάτων και στάσεων για το μάθημα των Μαθηματικών. Ειδικότερα, η αδυναμία των μαθητών – και ειδικότερα των τυφλών – να δουν τα σύμβολα τους προκαλεί έντονη αγωνία (Tanti, 2006), ενώ οι χαμηλές αποδόσεις στην επίλυση προβλημάτων ωθούν στην καλλιέργεια αρνητικών στάσεων και δυσάρεστων συναισθημάτων για τα Μαθηματικά (Pezeshki, Alamolhodaei & Radmehr, 2011). Σύμφωνα και με την τελευταία έρευνα, οι 39 τυφλοί μαθητές του δείγματος είχαν περισσότερο αρνητικές στάσεις για τα Μαθηματικά έναντι των 58 βλεπόντων μαθητών. Επιπλέον, η Datta (2013) συμπληρώνει ότι αυτές οι αρνητικές στάσεις επιφέρουν και άλλες αρνητικές καταστάσεις, όπως έλλειψη κινήτρων, χαμηλή αυτό-αξιολόγηση και δυσκολίες στη συγκέντρωση, ενώ οι συνεχείς αποτυχίες των παιδιών τους οδηγούν στο να αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά ως ένα ασήμαντο μάθημα. Αντίστοιχη θέση έχουν και οι Kapperman, Heinze και Sticken (1997), που αναφέρουν ότι όταν οι μαθητές πιστέψουν πως η αύξηση της προσπάθειας και της επιμονής δεν θα επιφέρει κάποια αλλαγή στο αποτέλεσμα είτε ότι δεν έχουν τον έλεγχο στην επιτυχία ή αποτυχία στα Μαθηματικά, τότε αναπτύσσουν μια στάση ανικανότητας και παθητικότητας.

Παρά, όμως, τις προηγούμενες συγκριτικές διαφορές μεταξύ μαθητών με ΑΟ και χωρίς, υπάρχουν και κοινά συναισθήματα. Συγκεκριμένα, στην έρευνα των Pezeshki, Alamolhodaei και Radmehr (2011) δεν βρέθηκαν διαφορές ως προς το άγχος που κατακλύζει τα παιδιά για τα Μαθηματικά, αφού τόσο οι βλέποντες μαθητές όσο και αυτοί με ΑΟ βρίσκονταν στα ίδια επίπεδα άγχους. Ανάλογα είναι και τα ευρήματα της Datta (2013), σύμφωνα με τα οποία κατά την περίοδο εξετάσεων ή διαγωνισμάτων οι μαθητές με ΑΟ βιώνουν συναισθήματα άγχους και στρες αντίστοιχα με αυτά των βλεπόντων συμμαθητών τους. Επίσης, η ίδια έρευνα καταλήγει στο ότι δεν υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ βλεπόντων και μη βλεπόντων μαθητών όσον αφορά το φόβο των παιδιών για τα Μαθηματικά. Τα δεδομένα αυτά συγκλίνουν με εκείνα των Kapperman, Heinze και Sticken (1997).

Παρ' όλα αυτά, κάτω υπό ορισμένες προϋποθέσεις οι μαθητές με ΑΟ δύναται να έχουν επιδόσεις αντίστοιχες με αυτές των βλεπόντων. Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται η σημασία που φέρουν ορισμένες παράμετροι στην καλλιέργεια θετικών στάσεων από τους μαθητές με ΑΟ για τα Μαθηματικά και στην συνεπαγόμενη επιτυχία τους. Έτσι, όπως και στην περίπτωση των μαθητών χωρίς αναπηρία όρασης, η χρήση κατάλληλου διδακτικού υλικού και η αξιοποίηση της τεχνολογίας, δύναται να επιτύχουν θετικές στάσεις αλλά και επιδόσεις. Ορισμένα από πιο γνωστά εργαλεία που διευκολύνουν την κατάκτηση των μαθηματικών όρων και απαντώνται στη βιβλιογραφία είναι:

- ✓ οι μηχανές γραφής braille (braillewriter), που χρησιμοποιούνται ως εργαλείο για την εκπόνηση υπολογισμών. Οι μαθητές εκτελούν τις πράξεις χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του κώδικα Nemeth – που θα εξεταστεί στην πορεία.
- ✓ ο άβακας
- ✓ το Fingermath ή Chisenbop, είναι το σύστημα μέτρησης με τα χέρια που επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων με ακρίβεια, χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής. Έχει πολλές ομοιότητες με τον άβακα.
- ✓ ομιλούντες αριθμογραμμές.

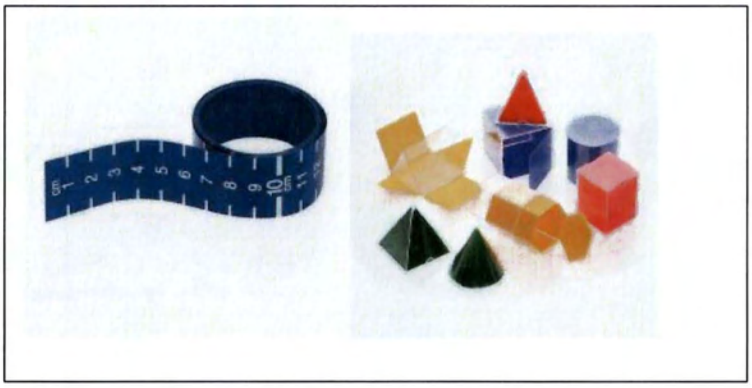
Εικόνα 1: braillewriter – άβακας



Εικόνα 2: μέτρηση με Fingermath ή Chisenbop

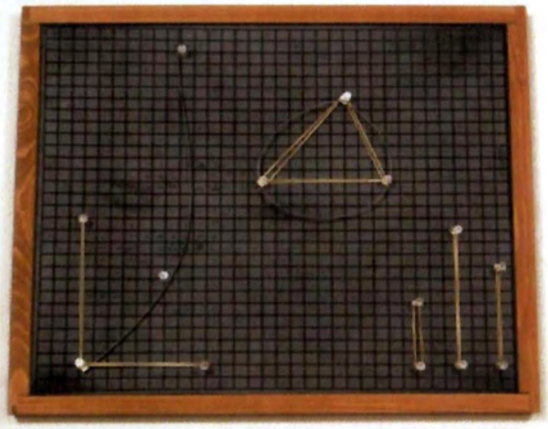
Εικόνα 3: ομιλούντα αριθμομηχανή

Η χρήση του καθενός από τα προηγούμενα εργαλεία διευκολύνει την πρόσβαση των μαθητών με αναπηρία όρασης στην μαθηματική γνώση. Για παράδειγμα, η χρήση του άβακα – μόνο του ή σε συνδυασμό και με άλλα υλικά ή/και συσκευές – είναι εξαιρετικά αποτελεσματική, καθώς βοηθά τα παιδιά με ΑΟ να κατανοήσουν εις βάθος τους αριθμούς, ενώ διευκολύνει περισσότερο την επίλυση ασκήσεων που με τη χρήση του braillewriter θα ήταν πιο χρονοβόρες (Kapperman, Heinze&Sticken, 1997). Αντίστοιχα, η μέτρηση με τη συμβολή του σώματος και ειδικότερα των χεριών, τα επονομαζόμενα και ως «Μαθηματικά του Σώματος», έχουν πολύπλευρο ρόλο στις μαθηματικές δραστηριότητες, αφού αποτελούν μια πολύ καλή μέθοδο για την εισαγωγή διαφορετικών μαθηματικών εννοιών, όπως των αριθμών, των διαστάσεων και των κατευθύνσεων (Csocsán, 2005˙ Healy, 2012).Η χρήση του υλικού Velcro κρίνεται εξίσου χρήσιμη, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον προσδιορισμό σημείων ή στην οριοθέτηση και γενικά, σε γεωμετρικές έννοιες, ενώ η χρήση γεωμετρικών σχημάτων, μαγνητικών καρτών, γραμμών/καρτελών με αριθμούς (σε μεγέθυνση ή με γραφή braille), όπως και η αριθμογραμμή, διευκολύνουν την κατάκτηση των αριθμών και αντίστοιχα και του μέτρου (RoyalNationalInstituteofBlindPeople). Επιπρόσθετα, για την εκπόνηση μετρήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν χάρακες, ξύλινο ή σιδερένιο αναδιπλούμενο μέτρο ή μεζούρες (Clamp, 1997). Τα υλικά αυτά βέβαια, θα πρέπει να έχουν επάνω τους είτε τους αριθμούς σε Braille είτε να είναι χαραγμένοι με άλλα σημάδια, ώστε να αντιλαμβάνονται οι μαθητές με ΑΟ ποιόν αριθμό μετράνε.



Εικόνα 4: αριθμογραμμή – γεωμετρικά σχήματα

Εκτός από τα προηγούμενα υλικά, εξίσου χρήσιμη παρουσιάζεται και η αξιοποίηση των οθονών αφής. Μέσα από τις οθόνες αυτές οι μαθητές με αναπηρία όρασης έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν τα σημεία, τις γραμμές, διάφορα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και τα γραφήματα μέσω ανάγλυφων αναπαραστάσεων (Kapperman, Heinze&Sticken, 1997˙ BlindnessDraft). Η χρήση αυτών των οθονών είναι απαραίτητη θα λέγαμε, καθώς προσφέρει στα παιδιά τη δυνατότητα να επεξεργαστούν στοιχεία δυο ή τριών διαστάσεων. Έτσι, εξαιρετικά οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να προσεγγιστούν και από τους μαθητές με ΑΟ, ενώ η συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία αυξάνεται με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν και τα Μαθηματικά με θετικό τρόπο.



Εικόνα 5: Οθόνη αφής

Από την άλλη, ζούμε σε μια εποχή όπου η χρήση της τεχνολογίας είναι κομμάτι της καθημερινότητάς μας και κατ' επέκταση και της μαθησιακής διαδικασίας. Δεδομένου ότι η χρήση της τεχνολογίας βελτιώνει τόσο τις αποδόσεις των μαθητών με ΑΟ όσο και τη συμμετοχή τους μέσα στην τάξη (Mann, 2006), πολλοί ερευνητές έχουν δημιουργήσει ποικίλα λογισμικά και προγράμματα, που σκοπό έχουν την υποστήριξη των μαθητών με αναπηρία όρασης στα Μαθηματικά. Έτσι, πολλά από τα προγράμματα αυτά εστιάζουν στην καλύτερη παρουσίαση του μαθηματικού περιεχομένου μέσα από το λόγο. Βασισμένα, για παράδειγμα, στο λόγο είναι ταπρογράμματα Maths Genie και Lambda (*Linear Access to Mathematics for Braille Device and Audio Synthesis)*. Το πρώτο,είναι ένα πρόγραμμα περιήγησης που αποσκοπεί στην κατανόηση των μαθηματικών τύπων με τη μεταφορά της μαθηματικής έκφρασης και του περιεχομένου της μέσω της φωνής (Archambaultet. al., 2007), ενώ το αρκετά διαδεδομένο πρόγραμμα Lambda, είναι ένα σύστημα ανάγνωσης και γραφής Μαθηματικών βασισμένο σε ένα καινούργιο κώδικα επικοινωνίας, που όπως δείχνουν οι έρευνες ενισχύει σε σημαντικό βαθμό τη βελτίωση των μαθητών με ΑΟ (Alajarmeh, Pontelli & Son, 2011˙ Archambaultet. al., 2007˙ Edwards, McCartney&Fogarolo, 2006˙ St□öger etal., 2006˙ Rowlett,2010). Και το project Mathtalk, όμως, βρίσκει ανταπόκριση σε μαθητές με ΑΟ, αφού χρησιμοποιεί τόσο τη συνθετική ομιλία όσο και τον ήχο εκτός εκείνου της ομιλίας για να επιτύχει την παρουσίαση σύνθετων μη οπτικών πληροφοριών (Stevens, Edwards &Harling, 1997). Την έκφραση των μαθηματικών προβλημάτων με τη χρήση της ομιλίας αξιοποιούν και on-line προγράμματα, όπως το AnimalWatch (Beal&Shaw, 2008) και το LiveMath (Alajarmeh, Pontelli & Son, 2011), που προσφέρουν αρκετές διαδραστικές ευκαιρίες για κατανόηση των εννοιών.

Sym-bol	Lambda braille cell	Speech	Meaning
//	⣷	*compound fraction*	Open compound fraction
⌀	⢌	*denominator*	Numerator -denominator separator
\\	⣾	*end fraction*	Close compound fraction
√	⣍	*compound root*	Open compound square root
	⣩	*close compound root*	Close square root
^	⡐	*to the power of*	Simple power
+-	⠖⠤	*plus or minus*	Plus or minus

Εικόνα 6: Το σύστημα Lambda, η αναπαράστασή του σε braille και σε προφορικό λόγο

Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι αξιοποιώντας εργαλεία, υλικά και προγράμματα, όπως τα προηγούμενα, οι μαθητές με αναπηρία όρασης έχουν πρόσβαση στον κόσμο των Μαθηματικών μέσα από μια ευχάριστη διαδικασία. Παράλληλα, διαπιστώνουν ότι δεν αποκλείονται από την εκπαιδευτική διαδικασία, αλλά αντιθέτως, μπορούν να συμμετέχουν ενεργά και να λειτουργούν σε σημαντικό βαθμό και αυτόνομα. Με τον τρόπο αυτό, τονώνεται η αυτό-πεποίθηση των παιδιών που μπορούν τώρα να κατακτήσουν τη γνώση, δημιουργούνται θετικές προοπτικές ως προς τα Μαθηματικά, ενώ βελτιώνονται και η αποδόσεις τους. Στην έρευνά τους, οι Beal και Shaw (2009) διαπίστωσαν ότι με τη χρήση ακουστικών παρουσιάσεων οι τυφλοί μαθητές της έρευνας απέδιδαν εξίσου καλά με τους βλέποντες.Σε κάθε περίπτωση, όμως, το υλικό προς χρήση πρέπει να είναι διαφοροποιημένο και προσαρμοσμένο στις ανάγκες του εκάστοτε μαθητή, ώστε να επιτευχθεί η κατάκτηση των επιδιωκόμενων μαθηματικών εννοιών μέσα από μια ευχάριστη και προσιτή διαδικασία (Alajarmeh, Pontelli & Son 2011˙ Durre, 2010˙ Ferrell et. al., 2006˙ BlindnessDraft). Επίσης, η χρήση της τεχνολογίας προϋποθέτει γνώσεις στη χρήση των υπολογιστών, ενώ θα πρέπει να ανταποκρίνεται επαρκώς στους διδακτικούς στόχους που τίθενται. Πρέπει βέβαια εδώ, να σημειωθεί ότι αρκετοί ερευνητές σημειώνουν ως ανασταλτικό παράγοντα στη μαθηματική εξέλιξη των παιδιών με οπτική αναπηρία, τις δυσκολίες που έχουν στην πρόσβαση στο διδακτικό υλικό και τα ποικίλα βοηθητικά εργαλεία και προγράμματα (Karshmer, et. al., 1999).Τέλος, οι δάσκαλοι που αξιοποιούν ανάλογο διδακτικό υλικό πρέπει να είναι καλά οργανωμένοι και να θέτουν υψηλές προσδοκίες, ενώ και οι γονείς είναι καλό να εμπλέκονται στην εκπαιδευτική διαδικασία – στο βαθμό που κάτι τέτοιο είναι εφικτό – καθώς ο ρόλος τους σχετίζεται ενεργά με τις αποδόσεις των παιδιών τους (Ukeli&Akem, 2013).

2.2.3. Ανασταλτικοί παράγοντες στην πρόσβαση των μαθητών με ΑΟ στα Μαθηματικά

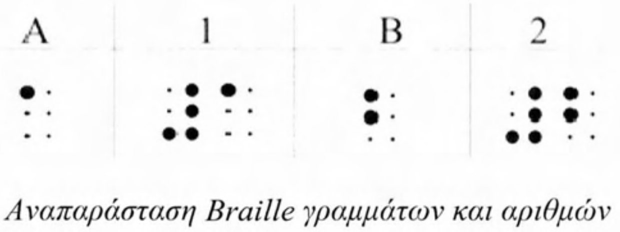
Ως εδώ, διαπιστώσαμε ότι πολλές από τις καταστάσεις που βιώνουν τα παιδιά με αναπηρία όρασης όταν καλούνται να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά, είναι ίδιες με εκείνες των βλεπόντων συμμαθητών τους, ενώ αυτό που μπορεί να διαφοροποιείται είναι η ένταση μιας συνθήκης ή ενός συναισθήματος. Αντίστοιχα, πολλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΑΟ είναι ίδιες με αυτές των βλεπόντων μαθητών, ενώ άλλες διαφοροποιούνται. Οι δυσκολίες αυτές γίνονται εμφανής από το δημοτικό και συνεχίζουν να υπάρχουν και στο πανεπιστήμιο, ενώ συχνά υφίστανται και στην ενήλικη καθημερινότητα. Για το λόγο αυτό, σημαντικός αριθμός ερευνητών έχει προσπαθήσει εκτός του να προσδιορίσει τις δυσκολίες των μαθητών με ΑΟ στα Μαθηματικά, να εντοπίσει τις αιτίες αυτών των δυσκολιών. Έτσι, οι ερευνητές καταλήγουν σε διάφορες θέσεις που άλλοτε συγκλίνουν και άλλοτε όχι.

Αρχικά, μια από τις πρώτες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΑΟ είναι αυτή της έλλειψης οπτικών εμπειριών για τα Μαθηματικά, που οφείλεται στην ολική η μερική απώλεια όρασης (Clamp, 1997˙ Durre, 2010˙ Τσιναρέλης, 2005). Οι μαθητές με ΑΟ δεν έχουν ευκαιρίες για τυχαία και αυθόρμητη γνώση, γεγονός που τους στερεί την απόκτηση μιας πληθώρας γνώσεων που οι συνομήλικοι τους αποκτούν εύκολα και χωρίς συστηματική εκπαίδευση (Kapperman, Heinze&Sticken, 2000˙ Λιοδάκης, 2000). Έτσι, τα βλέποντα παιδιά μαθαίνουν να διακρίνουν τα αντικείμενα ολόκληρα και να τα επεξεργάζονται με βάση το περιβάλλον τους. Αντιθέτως, τα παιδιά με ΑΟ δεν μπορούν να δουν ένα αντικείμενο στο σύνολό του και για αυτό το λόγο το επεξεργάζονται κινούμενοι από το μέρος στο όλο (Clamp, 1997˙ Csocsán, 2005˙ Κατσούλης κ.συν., 2010). Συνεπώς, η έλλειψη όρασης σε συνδυασμό με την απουσία απόκτησης τυχαίας γνώσης, κάνει τα Μαθηματικά λιγότερο προσβάσιμα, ενώ μειώνει και την αποτελεσματικότητα της αφής είτε παραμορφώνει την οπτική πρόσληψη (Clamp, 1997), δυσχεραίνοντας, συνολικά, την απόκτηση γνώσεων.

Την ίδια στιγμή, ο κόσμος των Μαθηματικών είναι βασισμένος στις εικόνες, στα σύμβολα και στις αναπαραστάσεις. Θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι από τη φύση τους ένας οπτικοποιημένος κόσμος, ειδικά αν αναλογιστούμε ότι και το 80% όσων διδάσκονται οι μαθητές είναι οπτικές πληροφορίες (Alajarmeh, Pontelli & Son, 2011).Οι οπτικές αναφορές είναι η βάση για την ανάπτυξη πολλαπλών μαθηματικών εννοιών, όπως η ποσότητα, η απόσταση, το μέγεθος ή το σχήμα. Το γεγονός ότι τα Μαθηματικά έχουν μια αφηρημένη φύση και βασίζονται στο οπτικοποιημένο υλικό και γενικότερα στην πρόσληψη πληροφοριών μέσω της εικόνας, δυσκολεύει τα παιδιά με ΑΟ (Alajarmeh, Pontelli & Son 2011˙ Archambaultet. al., 2007˙Buhagiar&Tanti, 2011˙Kapperman, Heinze&Sticken, 2000˙Kapperman, Heinze&Sticken, 1997˙ Najafi, Rostamy-Malkhalifeh&Amiripour, 2012˙ Stevens, Edwards &Harling, 1997˙ Tanti, 2006). Για παράδειγμα, η χωρική αντίληψη, η κατευθυντήρια αντίληψη, η κατανόηση της εικόνας ενός αντικειμένου, όπως και οι έννοιες της μάζας και του όγκου κατακτώνται καθυστερημένα από τους μαθητές με ΑΟ (Kapperman, Heinze&Sticken, 1997), αφού οι έννοιες αυτές δεν αποκτώνται εύκολα με γυμνό μάτι, όπως συμβαίνει με τους βλέποντες μαθητές, ενώ για να κατακτηθούν απαιτείται μια προσέγγιση από το μέρος στο όλο. Όπως σωστά τονίζει ηClamp (1997) «*το εύρος εξέλιξης των Μαθηματικών εννοιών συνδέεται με το εύρος των αντιληπτικών εμπειριών*».

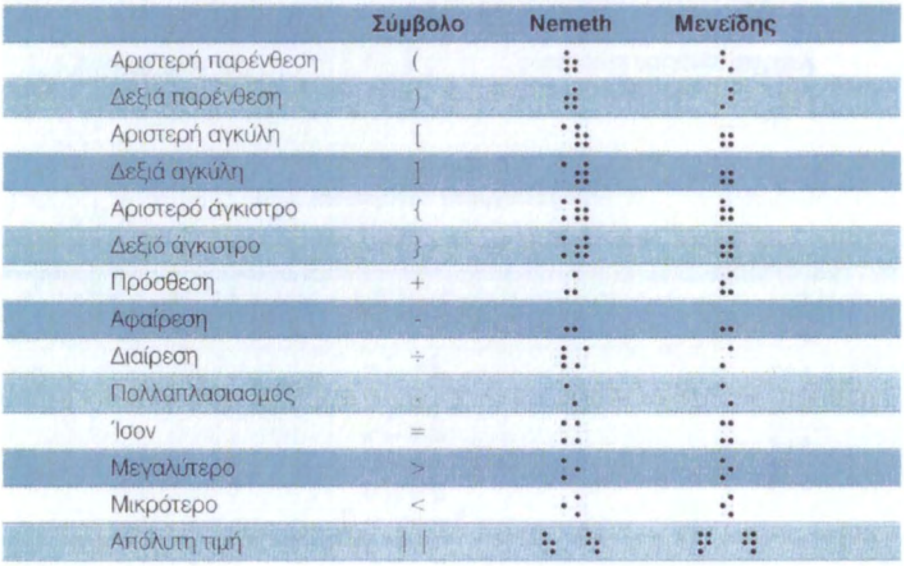
Την καθυστερημένη αυτή κατάκτηση των βασικών μαθηματικών εννοιών, ο Clamp την αποδίδει και σε μια άλλη σειρά λόγων, πέραν των περιορισμών που θέτει η ολική ή μερική απώλεια όρασης και η έλλειψη φυσικών μαθηματικών οπτικών ερεθισμάτων. Συγκεκριμένα, μέσα από την έρευνά του το 1978 (στο Clamp, 1997˙ στο Csocsán, 2005) καταλήγει ότι η αργοπορημένη κατάκτηση των σχετικών γνώσεων οφείλεται: α) στην υπανάπτυξη ειδικών μαθηματικών εννοιών, όπως αυτές της σειριοθέτησης, της ταξινόμησης ή της απόστασης και του χρόνου β) στη πολυπλοκότητα και βραδύτητα του απτικού υλικού και του κειμένου με μεγεθυσμένους χαρακτήρες ως μέσου εργασίας – στην πορεία θα γίνει εκτενέστερη αναφορά – και γ) στη δυσκολία ολοκλήρωσης ατομικής ερευνητικής εργασίας μέσα σε περιορισμένο χρονικό πλαίσιο. Όλοι αυτοί οι παράγοντες καθίστανται τροχοπέδη στην εξέλιξη των παιδιών με ΑΟ στα Μαθηματικά.

Ένας δεύτερος περιορισμός στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών με ΑΟ εκτείνεται στον τρόπο που τα Μαθηματικά αναπαριστώνται και κωδικοποιούνται για τους μαθητές με ΑΟ και ειδικότερα για τους ολικά τυφλούς μαθητές. Για να έχουν λοιπόν, πρόσβαση οι μαθητές με ΑΟ στα Μαθηματικά και γενικότερα στις Θετικές Επιστήμες, ο AbrahamNemeth δημιούργησε έναν κώδικα για να υποστηρίξει αυτές τις επιστήμες. Ο κώδικας αυτός πήρε την ονομασία του από τον ίδιο, δηλαδή, NemethCodeofBrailleMathematicsandScience και υιοθετήθηκε και επίσημα στις ΗΠΑ το 1956 (Kapperman, Heinze&Sticken, 2000). Η σημειογραφία του Braille των Μαθηματικών αξιοποιεί τα ίδια σύμβολα του εξάστιγμου που ακολουθεί και ο κώδικας Braille γραφής και ανάγνωσης, αλλά με βάση διαφορετικούς κανόνες. Για παράδειγμα, οι κουκίδες 1-4 χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το αγγλικό γράμμα «c», ενώ οι ίδιες κουκίδες στον κώδικα Nemeth δηλώνουν τον αριθμό 3.



Εικόνα 7: Αναπαράσταση Braille γραμμάτων και αριθμών

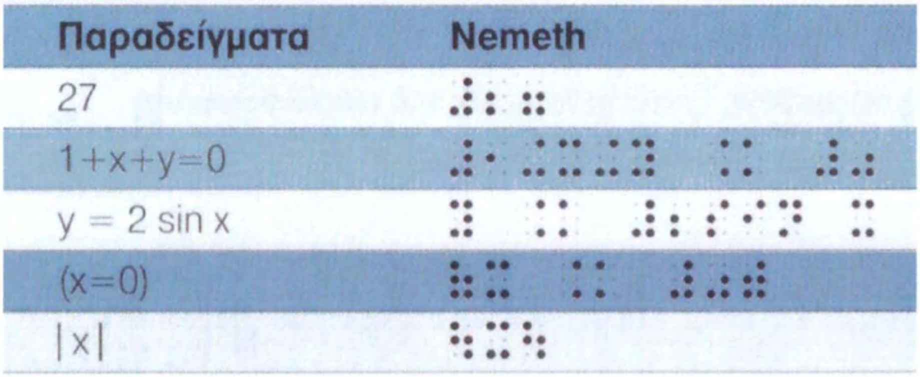
Παρά το γεγονός ότι υφίσταται ένας τόσος σημαντικός κώδικας που διευκολύνει την πρόσβαση των μαθητών με ΑΟ στα Μαθηματικά, αλλά και την επικοινωνία τους με τους διδάσκοντες, εξακολουθούν να υφίστανται δυσκολίες που απορρέουν από αυτόν. Η πρώτη δυσκολία εντοπίζεται στο γεγονός ότι ο κώδικας Nemeth δεν είναι ο επίσημος κώδικας επικοινωνίας στα Μαθηματικά για όλες τις χώρες (Archambaultet. al., 2007˙ Stevens, Edwards &Harling, 1997˙ Edwards, McCartney&Fogarolo, 2006). Είναι ο κώδικας που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη Αμερική, ενώ στις χώρες της Ευρώπης παρατηρούνται παραπάνω του ενός κώδικα, όπως στη Γερμανία που χρησιμοποιείται ο κώδικα έξι στιγμών Marburg και ο κώδικας οκτώ στιγμών StuttgartMathNotation. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνιστά και η χώρα μας που χρησιμοποιεί τόσο τον κώδικα Nemeth όσο και τον κώδικα του Μενεΐδη, ενώ δεν έχει αναπτύξει κάποιο άλλο σύστημα επιστημονικών συμβόλων κατά Braille που να είναι πλήρες, να καλύπτει πλήρως τις απαιτήσεις όλων των σχολικών βαθμίδων και να εφαρμόζεται σε όλη την ελληνική επικράτεια (Κουρουπέτρογλου & Φλωριάς, 2003). Ωστόσο, ο κώδικας του Μενεΐδη δεν κάλυπτε όλο το φάσμα των μαθηματικών συμβόλων και για αυτό τα τελευταία χρόνια και στη χώρα μας έχει επικρατήσει περισσότερο ο κώδικας Nemeth για τα Μαθηματικά (Κουρουπέτρογλου & Φλωριάς, 2003).



Εικόνα 8: Αναπαραστάσεις βασικών πράξεων και συμβόλων κατά Nemeth και Μενεΐδη

Αναλύοντας τώρα τις σχετικές με τη σημειογραφία των Μαθηματικών δυσκολίες, διαπιστώνουμε ότι αυτές είναι αρκετές και σημαντικές, ώστε να παρεμποδίζουν την πρόσβαση των μαθητών με ΑΟ στη μαθηματική γνώση. Αρχικά, οι Kapperman και Sticken (2002) υποστηρίζουν ότι μεγάλος αριθμός παιδιών με ΑΟ είναι μαθηματικά αναλφάβητοι, ενώ όπως σωστά συμπληρώνουν οι Kapperman, Heinze και Sticken (1997) «*χωρίς να διαβάζουν και να γράφουν τα σύμβολα που αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες, το πεδίο των Μαθηματικών είναι κλειστό για τα* *άτομα με οπτική αναπηρία*». Το μειωμένο αριθμό μαθητών με γνώσεις του κώδικα Nemeth επιβεβαιώνει και η έρευνα των Rosenblum και Amato (2004) με εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, σε δείγμα 135 εκπαιδευτικών μόλις το 15,2% είχε συναντήσει στην καριέρα του παραπάνω από 20 μαθητές που να γνωρίζουν τον κώδικα Nemeth. Την έλλειψη γνώσεων για τον συγκεκριμένο κώδικα επιβεβαιώνουν και άλλοι ερευνητές, όπως οι Kapperman, Heinze και Sticken(2000) και η Tanti (2006).

Τη δυσκολία, όμως, στην κατάκτηση του κώδικα Nemeth δικαιολογούν πολλοί παράγοντες. Πρώτον, ο κώδικας αυτός αποτελείται από το συνδυασμό πολλών χαρακτήρων του κώδικα Braille των λογοτεχνικών κειμένων. Δεδομένου ότι ο κώδικας Brailleτων κειμένων βασίζεται σε 6 κουκίδες, αυτό μας δίνει τη δυνατότητα της δημιουργίας το πολύ 64 συνδυασμών. Ως εκ τούτου, οι χαρακτήρες του Brailleείναι περιορισμένοι, αν αναλογιστούμε ότι απαιτούνται περισσότερα σύμβολα για την κωδικοποίηση των μαθηματικών συμβόλων (Archambaultet. al., 2007). Αυτό σημαίνει ότι για να τον κατακτήσουν οι μαθητές με ΑΟ πρέπει να απομνημονεύσουν μια σειρά πολλών διαφορετικών κανόνων και στρατηγικών (Archambaultet. al., 2007˙ Beal&Shaw, 2009˙Edwards, McCartney&Fogarolo, 2006˙ Figueiras &Arcavi, 2012˙Tanti, 2006). Η μάθηση και εξάσκηση σε αυτούς τους νέους περίπλοκους μηχανισμούς σημειογραφίας είναι αρκετά επίπονη και χρονοβόρα, ενώ το ίδιο χρονοβόρα είναι και η καταγραφή μαθηματικών πράξεων, προβλημάτων ή άλλων μαθηματικών εκφράσεων (Barbieri, Mosca & Sbattella, 2008˙ Karshmer & Bledsoe, 2002˙ Rosenblum&Amato, 2004˙ Stevens, Edwards &Harling, 1997˙ Τσιναρέλης, 2005). Επιπροσθέτως, το τυπωμένο Braille καταλαμβάνει μεγάλη έκταση (Edwards, McCartney&Fogarolo, 2006˙ Stevens, Edwards &Harling, 1997), γεγονός που μπορεί να αποστρέφει τους μαθητές, ενώ και η ίδια η γραμμικότητα του κώδικα περιπλέκει την κατάσταση. Ειδικότερα, οι μαθηματικές εκφράσεις είναι δυο διαστάσεων, αλλά η έκφρασή τους στον κώδικα Nemeth γίνεται με μόνο μια διάσταση (Alajarmeh, Pontelli & Son, 2011˙Archambaultet. al., 2007˙ Figueiras &Arcavi, 2012˙ Karshmer&Bledsoe, 2002˙Stevens, Edwards&Harling, 1997). Έτσι, χάνεται ένα σημαντικό κομμάτι της εικόνας μιας μαθηματικής έκφρασης, ενώ και η έκταση αυτής είναι μεγαλύτερη. Για παράδειγμα, η εξίσωση $a= \sqrt{\frac{X^2-y}{z}}$ σε γραμμική μορφή θα γράφονταν ως a= sqrt (((x super 2) – y) / z). Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και η πλοήγηση σε μια τέτοια μαθηματική έκφραση είναι περίπλοκη και απαιτεί καλές μνημονικές δεξιότητες (Figueiras &Arcavi, 2012˙ St□öger etal., 2006˙ St□öger, Miesenberger & Batušić, 2004), ώστε να θυμάται ο αναγνώστης τι ήταν αυτό που διάβασε στην αρχή και ορίζει την πράξη ή την εξίσωση.



Εικόνα 9: Παραδείγματα γραφής απλών μαθηματικών παραστάσεων

Επίσης, είναι αρκετά αρνητικό για τους μαθητές με ΑΟ το ότι τα λάθη κατά τη γραφή μιας μαθηματικής έκφρασης σε Braille είναι δύσκολο να διορθωθούν (Eggleston, 2006 στο Tanti, 2006), αφού στις περισσότερες περιπτώσεις για να διορθωθεί το λάθος πρέπει να γραφτεί εκ νέου η έκφραση, ενώ ένα πολύ μικρό λάθος ή μια παράλειψη μπορεί να δίνει μια εντελώς λανθασμένη απάντηση. Θα πρέπει λοιπόν, το Braille των Μαθηματικών να είναι ακριβές, ώστε να αποφευχθούν λάθη και συγχύσεις (Clamp, 1997˙ Kapperman, Heinze&Sticken, 1997).Για όλους αυτούς του λόγους, είναι αρκετοί οι μαθητές που αντιμετωπίζουν τον κώδικα Nemeth με απέχθεια και κατ' επέκταση και τα Μαθηματικά, ενώ λόγω του χρόνου που απαιτείται για να λυθεί, να διαβαστεί ή να ελεγχθεί ένα μαθηματικό κείμενο, πολλοί μαθητές οδηγούνται σε λάθη επειδή δεν διορθώνουν τα γραπτά τους (Eggleston, 2006 στο Tanti, 2006).

Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ότι ο κώδικας Nemeth για τα Μαθηματικά όσο και αν εξυπηρετεί βασικές ανάγκες για την πρόσβαση των μαθητών με ΑΟ στο μάθημα αυτό, δεν παύει να είναι αρκετά απαιτητικός και να έχει περιορισμούς. Εξάλλου δεν πρέπει να παραλείπουμε το γεγονός ότι δεν έχουν όλοι οι μαθητές με ΑΟ πρόσβαση σε βιβλία γραμμένα στον κώδικα Braille και ειδικότερα στον κώδικα Nemeth (Amato, 2002˙ Rosenblum&Amato, 2004˙ St□öger etal., 2006˙ St□öger, Miesenberger & Batušić, 2004). Για το λόγο αυτό η χρήση προγραμμάτων, όπως το Lambda και το Mathtalk – που βασίζονται στον προφορικό λόγο – προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες στους με ΑΟ να εισέλθουν και να κατακτήσουν τον κόσμο των Μαθηματικών, ενώ όλη αυτή η διαδικασία πετυχαίνεται, όπως είδαμε, με έναν ευχάριστο και προσιτό τρόπο που οδηγεί τα παιδιά στην ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων και στάσεων. Σε κάθε περίπτωση, όμως, οι μαθητές δεν μπορούν να επιτύχουν στα Μαθηματικά αν δε διδαχθούν και υποστηριχθούν κατάλληλα. Ανακύπτει, λοιπόν εδώ, ο σημαντικός ρόλος των εκπαιδευτικών και η επιρροή τους στον τρόπο που οι μαθητές με ΑΟ θα κατακτήσουν το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο.

Όπως και στην περίπτωση της εκπαίδευσης μαθητών τυπικής ανάπτυξης, έτσι και στην περίπτωση των μαθητών με ΑΟ, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι απαραίτητος στη μαθηματική εξέλιξη του εκάστοτε παιδιού. Παρά όμως, τη σημασία που φέρουν οι εκπαιδευτικοί, είναι συχνά εκείνοι που δυσχεραίνουν στα παιδιά με ΑΟ την πρόσληψη των μαθηματικών γνώσεων. Και αυτό γιατί σε πολλές περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλιπή κατάρτιση. Οι ελλείψεις αυτές δεν περιορίζονται μόνο στο κομμάτι των γενικών μαθηματικών γνώσεων, αλλά κυρίως στο πώς να γίνει η διδασκαλία των Μαθηματικών σε ένα μαθητή με ΑΟ και στον κώδικα επικοινωνίας μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή. Είναι αρκετές οι έρευνες που φέρνουν στο φως τόσο τα γνωστικά κενά όσο και το άγχος που βιώνουν οι εκπαιδευτικοί όταν καλούνται να διδάξουν μαθηματικές έννοιες σε μαθητές με αναπηρία όρασης. Για παράδειγμα, στην έρευνα του Wittenstein (1993), έγινε φανερό από τα ευρήματα ότι μόλις το 35,8% (N=1663) των εκπαιδευτικών είχε καλή γνώση του κώδικα Nemeth. Την έλλειψη γνώσεων επισημαίνει και η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας από τους Kapperman και Sticken (2003), όπως και άλλες έρευνες (Amato, 2004˙ Csocsán, 2005˙ Karshmer & Bledsoe, 2002˙Mann, 2006), ενώ σύμφωνα με τους Kapperman και Sticken (2003), όσο αυξάνονται οι απαιτήσεις των μαθημάτων τόσο αυξάνεται και το άγχος των δασκάλων. Χαρακτηριστικό αποτελεί και το εύρημα της Amato (2002), σύμφωνα με το οποίο το 25% των πανεπιστημιακών καθηγητών Braille υποστήριζε ότι οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί δεν είχαν κατακτήσει τις απαιτούμενες γνώσεις στον κώδικα Nemeth.

Την ίδια στιγμή, οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν ότι δεν διαθέτουν επαρκείς γνώσεις και δεξιότητες για να διδάξουν τον κώδικα Nemeth και να καλύψουν τις ανάγκες των μαθητών τους στο μαθηματικό τομέα (Kapperman&Sticken,2003). Σημαντικό ρόλο σε αυτή την ανεπάρκεια φέρει και η ελλιπής εκπαίδευση των δασκάλων, αφού το 20% των εκπαιδευτικών προγραμμάτων δεν παρέχει εξειδίκευση στον κώδικα Nemeth (Amato, 2002). Βέβαια, προτεραιότητα κάθε διδάσκοντα οφείλει να είναι η διδασκαλία των δεξιοτήτων των Μαθηματικών και όχι των δεξιοτήτων στο Braille των Μαθηματικών (Clamp, 1997). Αυτή η θέση, όμως, δεν αναιρεί την ανάγκη να είναι οι εκπαιδευτικοί πλήρως καταρτισμένοι. Παράλληλα, πέραν των γνώσεων του κώδικα οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν αναπτύξει σε ικανοποιητικό βαθμό τις δεξιότητες επικοινωνίας (Figueiras &Arcavi, 2012). Οι δεξιότητες αυτές είναι απαραίτητες καθώς διευκολύνουν την εποικοδομητική επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητή, ενώ βοηθάν τον πρώτο να επεξηγήσει καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και να αντιληφθεί ευκολότερα τα σημεία εκείνα που δεν γίνονται αντιληπτά από το μαθητή. Έτσι, αποτρέπονται τα κενά στις γνώσεις του παιδιού. Σε κάθε περίπτωση, όμως, ο εκπαιδευτικός οφείλει να είναι άρτια καταρτισμένος ως προς τις μαθηματικές έννοιες, ώστε να μπορέσει να τις εκφράσει ορθά και κατανοητά.

Πέραν, όμως, των βασικών μαθηματικών εννοιών, του κώδικα Nemeth και των επικοινωνιακών δεξιοτήτων, ο κάθε εκπαιδευτικός οφείλει να χρησιμοποιεί τις κατάλληλες μεθόδους διδασκαλίας και το σωστό υλικό έτσι ώστε να έχουν πρόσβαση οι μαθητές με ΑΟ στα Μαθηματικά. Εξάλλου, όπως τονίζουν οι Buhagiar και Tanti (2011) «*οι μαθητές με ΑΟ μπορούν να μάθουν Μαθηματικά όταν διδάσκονται με* *κατάλληλο τρόπο*». Για το λόγο αυτό, οι εκπαιδευτικοί ενδείκνυται να ασκούν μεθόδους και στρατηγικές διδασκαλίας οι οποίες να είναι αποδεκτές και εφαρμόσιμες στο πλαίσιο της τάξης, να εξασφαλίζουν την πρόσβαση στο εποπτικό υλικό και να είναι σύμφωνες με τις ανάγκες και τις υπάρχουσες δεξιότητες του παιδιού με αναπηρία όρασης (Durre, 2010). Επιπλέον, είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να είναι απόλυτα σαφής και ξεκάθαρος σε αυτά που ζητά από το μαθητή (RoyalNationalInstituteofBlindPeople˙ Spindler, 2006), ώστε να αποφεύγονται οι παρανοήσεις και να τονώνεται η αυτοπεποίθηση του παιδιού, που θα νιώθει ότι μπορεί να ακολουθήσει τη ροή του μαθήματος. Δηλαδή, ασαφείς φράσεις όπως, «αυτό» ή εκείνο» δεν συνιστώνται. Για παράδειγμα, για την έκφραση $\frac{2+\sqrt{x^2-3}}{y}$ ο εκπαιδευτικός μπορεί να πει: «x^2-3, πάρε την τετραγωνική ρίζα από αυτή την εξίσωση. Τώρα πρόσθεσε ένα 2 από μπροστά. Τέλος, διαίρεσε αυτό που έγραψες με το y». Βέβαια, είναι σημαντικό, οι εκπαιδευτικοί όποια μέθοδο και αν ακολουθούν για να διδάξουν, να παρέχουν στους μαθητές με ΑΟ αρκετό χρόνο για να αντιληφθούν μια έννοια ή για να λύσουν μια άσκηση (Csocsán, 2005˙ Figueiras &Arcavi, 2012˙ Tanti, 2006). Επιπροσθέτως, οι εκπαιδευτικοί έχουν χρέος να έχουν υψηλές προσδοκίες από τους μαθητές με αναπηρία όρασης και να τους υποστηρίζουν στο μέγιστο δυνατό βαθμό, διότι οι προϋποθέσεις αυτές επιφέρουν βελτίωση στις αποδόσεις των μαθητών (Giesen, Cavenaugh & McDonnall, 2012).

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στην ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα έρευνα των Najafi, Rostamy-Malkhalifeh και Amiripour (2012). Η παρούσα έρευνα πραγματεύεται την αξιοποίηση της συνεργατικής μάθησης ως μεθόδου για τη διδασκαλία τυφλών μαθητών. Σύμφωνα με τα ευρήματα, οι τυφλοί μαθητές βοηθιούνται από αυτή τη μέθοδο, αφού αυξάνονται και βελτιώνονται οι ακουστικές και επικοινωνιακές δεξιότητες τους, όπως και η κατάκτηση μαθηματικών εννοιών (συγκεκριμένα διδάχτηκαν με συνεργατική μάθηση οι πράξεις τις πρόσθεσης και αφαίρεσης). Επίσης, οι αδύναμοι μαθητές μέσω της αυξημένης επικοινωνίας με τους συμμαθητές τους μειώνουν τις δυσκολίες τους, ενώ είναι εξίσου θετικό το ότι οξύνεται η κριτική σκέψη των τυφλών μαθητών. Τη σημασία της συνεργατικής μάθησης στη μαθηματική παιδιών με οπτική αναπηρία υποστηρίζει και οιHealy (2012) και Archambaultet. al.(2007). Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνεργατική μάθηση μπορεί να αποτελέσει μια αποτελεσματική μέθοδο διδασκαλίας όχι μόνο για τους τυφλούς μαθητές αλλά και για τους μερικώς βλέποντες, αφού επιφέρει θετικά αποτελέσματα τόσο σε γνωστικό επίπεδο όσο και σε κοινωνικό επίπεδο λόγω των έντονων συναναστροφών που αναπτύσσουν μεταξύ τους όλοι οι μαθητές. Για όλες αυτές τις θετικές παραμέτρους, συνίσταται οι εκπαιδευτικοί να αξιοποιούν αυτή τη μέθοδο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, ενώ ο συνδυασμός της με το κατάλληλο διδακτικό υλικό δύναται να μεγιστοποιήσει τα θετικά αποτελέσματα.

2.2.4. Θετικοί παράγοντες για την επιτυχία στα Μαθηματικά

Προτού, κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο είναι απαραίτητο να αναφερθούμε σε μια συνολική αποτίμηση των παραμέτρων εκείνων που ωθούν τους μαθητές με ΑΟ σε επιτυχίες στο μάθημα των Μαθηματικών. Για μια καλύτερη επεξεργασία, λοιπόν, των παραγόντων αυτών, θα ακολουθήσουμε τα δεδομένα των Kapperman, Heinze και Sticken (1997) από το βιβλίο τους «*StrategiesforDevelopingMathematicSkillsinStudentswhoUseBraille*». Πρώτος, λοιπόν, σημαντικός παράγοντας επιτυχίας κρίνεται η εκπαίδευση των δασκάλων που μεταδίδουν γνώσεις σε μαθητές με οπτική αναπηρία. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατέχουν μια συλλογή μεθόδων διδασκαλίας, υλικών και διάφορων πηγών υποστήριξης, τότε δύναται να βοηθήσουν τους μαθητές τους με ΑΟ να αναπτύξουν αποτελεσματικά τις μαθηματικές γνώσεις. Σε άμεση σχέση με τους εκπαιδευτικούς είναι και ο επόμενος παράγοντας. Ειδικότερα, οι στρατηγικές μάθησης που διδάσκονται από τους διδάσκοντες, βοηθούν τους μαθητές να οργανωθούν και να διαχειριστούν αποδοτικά τα δεδομένα των ποικίλων μαθηματικών καταστάσεων, με αποτέλεσμα να μειώνονται τα λάθη και τα παιδιά να οδηγούνται στην επιτυχή λύση αυτών. Για παράδειγμα, οι δάσκαλοι έχουν χρέος να διδάξουν τα παιδιά πώς να καταγράφουν την εργασία τους σε Braille, πώς να εκτελούν νοητικές πράξεις στην αριθμητική και πώς να χρησιμοποιούν τον ειδικά προσαρμοσμένο εξοπλισμό των Μαθηματικών (Clamp, 1997˙Csocsán, 2005˙Kapperman, Heinze&Sticken, 2000).

Εν συντομία, θα αναφερθούμε σε μια τέτοια χρήσιμη στρατηγική μάθησης, που φέρει το όνομα του ακρωνύμου RAPS και διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με αυτή, ο μαθητής με αναπηρία όρασης ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- **R**= ReadandRap (διάβασε και επανέλαβε το πρόβλημα με δικά σου λόγια)
- **A**= Art (σχεδίασε ένα διάγραμμα ή χρησιμοποίησε αντικείμενα για να δείξεις το πρόβλημα)
- **P**= PlanandPredict (σκέψου ένα πλάνο για την επίλυση του προβλήματος και προέβλεψε ή εκτίμησε την απάντηση)
- **S**=Sylvia (τσέκαρε τις απαντήσεις με την αριθμομηχανή – που εδώ θα την ονομάζουμε Sylvia)

Σε κάθε περίπτωση, ανάλογες στρατηγικές σαν την προαναφερθείσα, ενδείκνυται να συνδυάζονται και με ερωτήσεις αυτό-ελέγχου και αυτό-αξιολόγησης, ώστε να προσεγγίζονται στο μέγιστο δυνατό βαθμό οι επιτυχείς αποδόσεις. Για παράδειγμα, οι συγγραφείς καταγράφουν μια τέτοια λίστα ερωτήσεων αυτό-αξιολόγησης που απαρτίζεται από παρακάτω πέντε ερωτήματα:

1. Γράφτηκαν οι σωστοί αριθμοί στο πρόβλημα;
2. Παρατάσσονται οι αριθμοί σωστά;
3. Είναι σωστά τα σύμβολα των πράξεων;
4. Ποια είναι η εκτιμώμενη απάντησή μου;

5. Ποια είναι η πραγματική απάντηση; Είναι λογική; Είναι κοντά στην εκτίμηση μου;

Πέραν, όμως, του ρόλου των εκπαιδευτικών και όσων μπορούν να μεταλαμπαδεύσουν στα παιδιά για να πετύχουν τους σκοπούς τους, θετικό ρόλο διαδραματίζουν και οι προσωπικές απόψεις των ίδιων των μαθητών με ΑΟ. Δηλαδή, όταν τα παιδιά πιστεύουν πως θα τα καταφέρουν και θα πετύχουν στα Μαθηματικά, τότε προσπαθούν περισσότερο και έχουν θετικά αποτελέσματα. Επακόλουθο των στάσεων αυτών είναι και ο τέταρτος παράγοντας επιτυχίας. Συγκεκριμένα, γίνεται λόγος για την απαλλαγή από το σχετικό με τα Μαθηματικά άγχος. Όταν τα παιδιά με ΑΟ βιώνουν συνεχείς αποτυχίες δεν έχουν κίνητρα για να προσπαθήσουν, ενώ πιστεύουν πως ότι και αν κάνουν θα αποτύχουν. Κατακλύζονται έτσι, από έντονο άγχος και φόβο. Αν όμως, οι μαθητές απαλλαγούν από αυτό τον ανασταλτικό παράγοντα της μαθηματικοφοβίας έχουν ευκαιρίες να συμμετέχουν στο μάθημα, να πιστέψουν στις δυνατότητές τους και τελικώς να πετύχουν. Ο τελευταίος παράγοντας υποστηρίζει ότι συνολικά οι θετικές στάσεις των μαθητών με ΑΟ απέναντι στα Μαθηματικά προωθούν τις επιτεύξεις των ίδιων. Για το λόγο αυτό, προτείνετε οι μαθητές να χρησιμοποιούν θετικές εκφράσεις όταν ασχολούνται με τα Μαθηματικά, όπως «εάν εργαστώ σωστά, τότε πιθανότατα θα πετύχω!» ή «μπορώ να λύσω αυτό το πρόβλημα, επειδή έχω λύσει επιτυχώς και άλλα προβλήματα, που μοιάζουν πολύ με αυτό».

Ολοκληρώνοντας το παρόν κεφάλαιο διαπιστώνουμε ότι όπως και για τους βλέποντες μαθητές, έτσι και για τους μαθητές με οπτική αναπηρία, τα Μαθηματικά αποτελούν ένα δύσκολο μάθημα που προκαλεί σε σημαντικό βαθμό αρνητικά συναισθήματα. Οι αιτίες που οδηγούν τους μαθητές με ΠΟ σε αρνητικές στάσεις αλλά και σε δυσκολίες είναι ποικίλες και άλλοτε συγκλίνουν με αυτές των βλεπόντων συνομηλίκων τους και άλλοτε όχι. Έτσι, από τη μια, η ίδια η φύση των Μαθηματικών σε συνδυασμό με την απώλεια όρασης θέτουν προκλήσεις, ενώ από την άλλη, ο κώδικας Nemeth για τα Μαθηματικά δημιουργεί με τα χαρακτηριστικά του εμπόδια στην πρόσληψη των μαθηματικών εννοιών. Επιπρόσθετα, το ελλιπές ακαδημαϊκό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών τόσο για το μάθημα των Μαθηματικών όσο και για τον τρόπο επικοινωνίας με τον οπτικά ανάπηρο μαθητή – σε επίπεδο γνώσεων του κώδικα Nemeth και σε επίπεδο επικοινωνιακών δεξιοτήτων – αποτρέπει τους μαθητές, ενώ ενδέχεται να οδηγήσει και στην απόκτηση λανθασμένων γνώσεων. Παρ' όλα αυτά, το γεγονός ότι οι μαθητές με ΠΟ δυσκολεύονται στην πρόσβαση στα Μαθηματικά, δε σημαίνει ότι δεν μπορούν να πετύχουν σε αυτά αναπτύσσοντας τις κατάλληλες δεξιότητες. Μέσα από συστηματική και οργανωμένη διδασκαλία, που θα αξιοποιεί τις δυνατότητες του παιδιού, θα βασίζεται σε αποδοτικές μεθόδους διδασκαλίας και θα εμπεριέχει πληθώρα εποπτικού υλικού (απτικό ή διάφορα λογισμικά), κάθε παιδί με αναπηρία όρασης δύναται να αναπτύξει μια ευνοϊκή εικόνα για τα Μαθηματικά και να αποδώσει ποιοτικά.

2.3. Η Έννοια του Κλάσματος

Στο παρόν κεφάλαιο αυτής της πτυχιακής εργασίας θα μελετηθεί η έννοια του κλάσματος. Ειδικότερα, θα παρατεθούν βασικοί ορισμοί και στοιχεία για το κλάσμα, αλλά και βασικές διαστάσεις που φέρει η ερμηνεία αυτού. Οι διάφορες ερμηνείες που θα προκύψουν μελετούνται και τεκμηριώνονται μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Επιπλέον, η έννοια του κλάσματος θα μελετηθεί σε συνάρτηση με τους ποικίλους τρόπους αναπαράστασης με τους οποίους δύναται να καταγραφεί ένα κλάσμα, ενώ θα τονιστεί και η σημασία που φέρουν η αναπαραστάσεις στην κατανόηση του κλάσματος.

2.3.1. Οι ερμηνείες του κλάσματος

Είναι γεγονός πως τα κλάσματα τα κλάσματα συνιστούν μια από βασικότερες έννοιες των Μαθηματικών, οι οποίες καθορίζουν την πορεία ενός παιδιού τόσο στην μαθηματική εκπαίδευση όσο και στην καθημερινότητά του μετέπειτα ως ενήλικα. Συνειδητά ή ασυνείδητα, λοιπόν, τα παιδιά χρησιμοποιούν στην καθημερινή ζωή την έννοια του κλάσματος (Mack, 1990˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Για παράδειγμα, μοιράζονται μεταξύ τους τις σοκολάτες τους, τις πίτες της μαμάς ή την πίτσα και την τούρτα των γενεθλίων. Την ίδια στιγμή οι συνταγές των γλυκών της μαμάς έχουν πάντα μέσα ποσότητες κλασμάτων (π.χ. ¼ του ποτηριού χυμό πορτοκαλιού ή ½ του κιλού αλεύρι κλπ). Αντιπροσωπευτική είναι η φράση της Κολέζα (2000) σύμφωνα με την οποία *«τα παιδιά έχουν μια αντίληψη των κλασμάτων πριν ακόμα τα διδαχτούν στο σχολείο: διαθέτουν ήδη κάποια άτυπα σχήματα που τους δίνουν την ελευθερία να ενεργήσουν (ορθά ή λανθασμένα) πέρα από τις αυστηρές δεσμεύσεις του τυπικού περιεχομένου της διδασκαλίας»*. Έτσι, οι μαθητές κατέχουν κάποιες πρώτες εμπειρίες για τη σημασία που έχουν τα κλάσματα στην καθημερινότητα. Οι εμπειρίες αυτές συνιστούν ένα σημαντικό υπόβαθρο, όπως θα δούμε παρακάτω, για τη βαθύτερη κατανόηση του κλάσματος, όταν αυτό παρουσιάζεται για πρώτη φορά στα σχολικά βιβλία.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι τα κλάσματα δεν είναι μια έννοια των σύγχρονων Μαθηματικών. Αντιθέτως, ιστορικά στοιχεία φανερώνουν ότι η έννοια αυτή προϋπήρχε και χρησιμοποιούνταν από την εποχή των αρχαίων Αιγύπτιων (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Εξαρχάκος 1993˙ Ζάντζος, 2009˙ Pinilla, 2007˙ Streefland, 1993˙ Χασάπης, 2000). Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνιστά το κτίσιμο των πυραμίδων (2700 π.Χ.), όπου είναι βέβαιο πως ήταν απαραίτητη η εκτεταμένη γνώση των αναλογιών και κατά συνέπεια, η χρήση των κλασμάτων ήταν αναγκαία (Γαγάτσης κ.συν., 2006). Ανάλογη ήταν η χρήση των κλασμάτων και τα επόμενα χρόνια από τους αρχαίους Βαβυλώνιους και Έλληνες (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Pinilla, 2007). Στα χρόνια που ακολούθησαν φαίνεται πως οι Άραβες ήταν εκείνοι που εισήγαγαν την έννοια και το συμβολισμό του κλάσματος με τη σημερινή του μορφή (Γαγάτσης κ.συν., 2006). Αν και η ακριβής εμφάνιση του κλάσματος με τη σημερινή του μορφή δεν έχει τοποθετηθεί χρονολογικά με ακρίβεια, είναι σίγουρο πως το 1202 μ.Χ. η χρήση του με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ είχε καθιερωθεί. Το στοιχείο αυτό επιβεβαιώνεται στο έργο *LiberAbaci* του Leonardo FibonacciPisano, όπου γίνονταν χρήση του κλάσματος με την καθιερωμένη πλέον μορφή του (Ζάντζος, 2009˙ Pinilla, 2007). Το 1748 ο μαθηματικός Euler είναι αυτός που έδωσε έναν πρώτο πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικά αφηρημένης έννοιας (Γαγάτσης κ.συν., 2006).

Η παραπάνω ιστορική αναδρομή κάνει φανερή την ύπαρξη κλασμάτων από τα αρχαία κιόλας χρόνια. Η ανάγκη εισαγωγής κλασματικών αριθμών παρουσιάστηκε, όταν οι άνθρωποι προσπάθησαν να περιγράψουν και να μετρήσουν μια ποσότητα που ήταν μόνο ένα μέρος ενός συνόλου (π.χ.: μισό μήλο, τα δυο τρίτα ενός χωραφιού) (Εξαρχάκος, 1993) ή όταν θέλησαν να συγκρίνουν ένα μέγεθος με ένα άλλο ομοειδές που το θεωρούσαν ως μονάδα (π.χ.: την απόσταση δυο πόλεων με το στάδιο ή το βάρος ενός αντικειμένου με το τάλαντον) (Εξαρχάκος, 1993˙ Χασάπης, 2000). Η αναγκαιότητα, όμως, ποσοτικοποίησης και αριθμητικής έκφρασης των σχέσεων μεταξύ ενός «μέρους» και του «όλου» ενός μεγέθους ή γενικότερα μεταξύ δυο οποιονδήποτε μεγεθών κατά την επίλυση προβλημάτων μέτρησης ή την εκτέλεση υπολογισμών, δε δίνει ως αποτέλεσμα πάντοτε φυσικό αριθμό (Εξαρχάκος, 1993˙ Κουλέτση, 2010˙ Χασάπης, 2000). Έτσι προέκυψε η άμεση ανάγκη δημιουργίας των κλασματικών αριθμών. Η έννοια του κλασματικού αριθμού καθορίστηκε αρχικά ως το αποτέλεσμα περιγραφής, υπολογισμού ή μέτρησης (Εξαρχάκος, 1993). Ωστόσο, οι διαρκώς αυξανόμενες ανάγκες των ανθρώπων και η πολλαπλή χρήση της έννοιας του κλάσματος οδήγησαν σε επέκταση των κλασματικών αριθμών, που σταδιακά αποκτήσαν μια πιο αφηρημένη έννοια.

Η σημασία, όμως, που τα κλάσματα φέρουν ως ιστορικά στοιχεία, αλλά και ως απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία της καθημερινότητας δεν αναιρούν το βαθμό δυσκολίας τους. Το γεγονός ότι δεν προκύπτουν μέσα από μια φυσική διαδικασία σκέψης, αλλά είναι ένα σύστημα περίπλοκο, κοινωνικά κατασκευασμένο και επικυρωμένο, που ικανοποιεί συγκεκριμένες ανθρώπινες ανάγκες (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Κολέζα, 2000), καθιστά τα κλάσματα μια έννοια δυσπρόσιτη στα παιδιά, αλλά και σε αρκετούς ενήλικες. Όπως διαπιστώθηκε και στην βιβλιογραφική ανασκόπηση προηγούμενης ενότητας, πολυάριθμες έρευνες επιβεβαιώνουν ότι τα κλάσματα παρά τη σημασία τους καθίστανται ως μια από τις δυσκολότερες έννοιες για τους μαθητές (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Gagatsisetal., 2009˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000˙ Marcou&Gagatsis, 2002˙Σολομωνίδου, 1999˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995), ενώ τα ποσοστά αποτυχίας στη διαχείρισή τους, όπως διαπιστώνεται, είναι αξιοσημείωτα (Pinilla, 2007).

Πέραν, όμως, από τις προαναφερθείσες πληροφορίες, είναι απαραίτητο να ορίσουμε την έννοια του κλάσματος. Στην παρούσα εργασία, λοιπόν, ως κλάσμα ορίζεται ένας αριθμός της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β είναι φυσικοί αριθμοί και $\beta \neq 0$(Εξαρχάκος, 1993˙ Ζάντζος, 2009˙ Howard &McKeeby, 1971˙ Park, Güçler

&McCrory, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Τζαλακώστας, 2011˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007˙ Χασάπης, 2000˙ Χατζηκυριάκου, 2013). Σε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ τους αριθμούς α και β τους αποκαλούμε «όρους» του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ και δηλώνουν μέτρα δυο μεγεθών της ίδιας ή διαφορετικής κατηγορίας, τα οποία είναι μετρημένα στην ίδια μονάδα μέτρησης (Χασάπης, 2000). Έχει ωστόσο καθιερωθεί και είναι ευρέως γνωστό ότι ο αριθμός α ονομάζεται «αριθμητής», ενώ ο αριθμός β ονομάζεται «παρανομαστής» του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ (Howard &McKeeby, 1971˙ Λεμονίδης κ.συν., 2006˙ Pinilla, 2007˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007˙ Χασάπης, 2000˙ Χατζηκυριάκου, 2013). Επιπλέον, η διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς α και β αποκαλείται «κλασματική γραμμή» (Howard &McKeeby, 1971).

Στην περίπτωση ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου ο αριθμητής (α) είναι μικρότερος από τον παρονομαστή (β) αναφερόμαστε σε «γνήσιο κλάσμα» (Κουλέτση, 2010˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007˙ Χατζηκυριάκου, 2013), ενώ σε αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή, ο αριθμητής (α) είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή (β), τότε αναφερόμαστε σε «καταχρηστικό κλάσμα» (Κουλέτση, 2010˙ Τζαλακώστας, 2011˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007˙ Χατζηκυριάκου, 2013). Αν βέβαια έχουμε ένα κλάσμα του οποίου ο παρανομαστής είναι το 10 ή ένα πολλαπλάσιό του, τότε μιλάμε για δεκαδικό κλάσμα (π.χ.: $\frac{5}{10}$ ή $\frac{30}{100}$) (Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007). Επίσης, όταν δυο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρανομαστή αποκαλούνται «ομώνυμα», ενώ αν οι παρανομαστές στους είναι διαφορετικοί, αποκαλούνται «ετερώνυμα» (Κακαδιάρης κ.συν., 2006˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007). Τέλος, κλάσματα με την ίδια αξία ονομάζονται «ισοδύναμα», δηλαδή, δυο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα αν ισχύει (Κακαδιάρης κ.συν, 2006˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Τζαλακώστας, 2011˙ Τριανταφυλλίδης & Σδρόλιας, 2007˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Χασάπης, 2000) :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\nu \cdot \gamma}{\nu \cdot \delta}, \text{ όπου } \nu \in Q$$

Δηλαδή, τα ισοδύναμα κλάσματα αποτελούν ταυτόσημες παραστάσεις του ίδιου ρητού αριθμού (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2006) και κατ' επέκταση ισοδύναμες μεταξύ τους εκφράσεις του ίδιου μέτρου ενός αριθμού (Χασάπης, 2000).

Την ίδια στιγμή, ο Χασάπης στο βιβλίο του *«Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις»* (2000) αναφέρει στον ορισμό του κλάσματος (σελ. 175) ότι για κάθε κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ ισχύει:

- Μια σχέση ισότητας, σύμφωνα με την οποία δυο κλάσματα $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ και $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ είναι ίσα αν και μόνο αν είναι $\alpha_1 = \alpha_2$ *και* $\beta_1 = \beta_2$ και

– Μια σχέση διάταξης, σύμφωνα με την όποια ένα κλάσμα $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ θα θεωρείται μικρότερο (συμβολικά <) ενός άλλου κλάσματος $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ αν και μόνο αν είναι $\alpha_1\,\beta_1\beta_2 < \alpha_2\,\beta_1\,\beta_2$.

Με βάση και τα προαναφερθέντα μπορούμε να πούμε ότι τα κλάσματα δεν αποτελούν μια απλή έννοια, αλλά αντιθέτως, συνιστούν μια σύνθετη και περίπλοκη έννοια. Και αυτό γιατί, η σημασία του κλάσματος δεν περιορίζεται στην έκφραση της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, αλλά περικλείει περισσότερες ερμηνείες από εκείνης που διαπιστώνουμε με μια πρώτη ματιά. Στο συμπέρασμα αυτό έχουν καταλήξει και αρκετοί ερευνητές, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η έννοια του κλάσματος φέρει αρκετές ερμηνείες ή παραπέμπει σε σχήματα. Αναφερόμενοι στα σχήματα μιλούμε για τις νοητικές κατασκευές που δημιουργούνται από την ανάγκη ενός ατόμου να λειτουργήσει σε ένα περιβάλλον, χρησιμοποιώντας εκείνα τα στοιχεία από τη γνώση του, τα οποία είναι κατάλληλα για τις συγκεκριμένες συνθήκες (Κολέζα, 2000). Ο αριθμός, ωστόσο, αυτών των ερμηνειών πολλές φορές ποικίλλει ανάμεσα στους ερευνητές, καθώς συχνά δίνεται έμφαση σε συγκεκριμένες ερμηνείες έναντι άλλων.

Ειδικότερα, ο Kieren (1976) αποτέλεσε έναν από τους πρώτους ερευνητές που υποστήριξε ότι η έννοια του κλάσματος επιδέχεται περαιτέρω ερμηνείες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόησή του (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous&Pitta-Pantazi, 2005˙ Σταματόπουλος, 2011). Αρχικά υποστήριξε ότι επιδέχεται τουλάχιστον εφτά ερμηνείες (Σταματόπουλος, 2011). Στην πορεία ωστόσο, περιόρισε τις ερμηνείες σε τέσσερις: στο πηλίκο, στη μέτρηση, στο λόγο και στον τελεστή (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Όπως η Κολέζα (2000) αναφέρει, ο Kieren δεν συμπεριλαμβάνει την κατασκευή του μέρους-όλου, διότι θεωρεί ότι διαχέεται στις περισσότερες από τις άλλες κατασκευές. Ωστόσο, στις μέρες μας έχει καθιερωθεί να αναφερόμαστε στις πέντε ερμηνείες που έδωσε ο Kieren στα κλάσματα, συμπεριλαμβάνοντας έτσι και αυτή του μέρους-όλου (Σταματόπουλος, 2011).

Σε ανάλογες θέσεις κατέληξαν και οι Behr, Lesh, Posh και Silver, που υποστήριξαν αρχικά ένα θεωρητικό μοντέλο ερμηνείας των κλασμάτων με τρεις κατασκευές-πτυχές (μέρους-όλου, πηλίκο και τελεστής) (Κολέζα, 2000), το οποίο αργότερα περιέλαβε και τις μορφές του λόγου και της μέτρησης (Κουλέτση, 2010). Όμοια είναι και η τοποθέτηση της Marshall (1993), που συνδυάζοντας τις προηγούμενες απόψεις των Kieren και Behr etal., επιχείρησε μια πιο σφαιρική θεώρηση των σχημάτων διακρίνοντας πέντε ερμηνείες ή σχήματα: μέρος-όλο, πηλίκο, λόγος, μέτρο και τελεστής (Κολέζα, 2000). Από την άλλη, οι Φιλίππου και Χρίστου (1995) στο βιβλίο τους *«Διδακτική των Μαθηματικών»*, αλλά και ο Εξαρχάκος (1993) στο βιβλίο του *«Διδακτική των μαθηματικών»* αναφέρονται σε τρεις ερμηνείες του κλάσματος. Συγκεκριμένα, κάνουν λόγο για το κλάσμα ως μέρος του όλου, ως διαίρεση (πηλίκο) και ως λόγος. Διαφοροποιημένη είναι και η τοποθέτηση των Howard καιMcKeeby (1971) που αναφέρονται στις ερμηνείες του κλάσματος με τη μορφή του μέρους-όλου, του πηλίκου και του τελεστή.

Γίνεται φανερό, λοιπόν, ότι υπάρχει μια ποικιλομορφία στις ερμηνείες που οι εκάστοτε ερευνητές διαπραγματεύονται. Ταυτοχρόνως, ακόμα και η ορολογία που χρησιμοποιείται για να αναφερθούν οι ερευνητές στις ερμηνείες του κλάσματος ποικίλλει. Έτσι, άλλοι χρησιμοποιούν τον όρο «κατασκευές», όπως ο Behr etal. και ο Kieren, ενώ η Marshall εκτός του όρου «κατασκευές» χρησιμοποιεί και αυτόν του «σχήματος» (Κολέζα, 2000). Συχνή είναι και η χρήση του όρου «ερμηνείες» (Ζάντζος, 2009˙ Howard&McKeeby, 1971˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Πιο σπάνια στη βιβλιογραφία συναντώνται ορολογίες, όπως «υποκατασκευές» (Ζάντζος, 2009), «καταστάσεις» (Χασάπης 2000) ή «πτυχές» (Κουλέτση, 2010). Σε κάθε περίπτωση, όμως, όλοι οι ερευνητές διαπραγματεύονται το ίδιο αντικείμενο.

Κατά γενική ομολογία, διαπιστώνουμε ότι το κλάσμα συντίθεται από διάφορες ερμηνείες, με κάθε ερμηνεία να αποτελεί μια διαφορετική άποψη για αυτό, ενώ όλες μαζί να συνθέτουν την έννοια του κλάσματος. Την ίδια στιγμή, κάθε ερμηνεία σχετίζεται με διαφορετικούς τρόπους σκέψης και με διαφορετικές γνωστικές δομές και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υποστηριχθεί ότι αν αναπτυχθεί μια από αυτές τις ερμηνείες, αναπτύσσονται παράλληλα και αυτόματα οι υπόλοιπες (Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Επιπλέον, κανένα σχήμα δεν μπορεί να σταθεί μόνο του (Ζάντζος, 2009), αφού καθένα από αυτά μας προσφέρει μια διαφορετική θεώρηση του κλάσματος. Τέλος, με εξαίρεση κάποιες περιπτώσεις λόγων, οι διαφορετικές αυτές ερμηνείες είναι ισόμορφες (Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000).

Με βάση τις παραπάνω διαπιστώσεις γίνεται σαφές ότι οι διάφορες ερμηνείες του κλάσματος έχουν άμεσες διδακτικές προεκτάσεις, που αναδεικνύουν ότι σε ένα πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά χρειάζεται να αναπτύσσονται περισσότερες από μια ή δυο ερμηνείες. Τη θέση αυτή έχουν υποστηρίξει αρκετοί ερευνητές, όπως ο Kieren και η Lamon (στο Gagatsisetal., 2009˙ στο Σταματόπουλος, 2011). Για το λόγο αυτό είναι επιτακτική ανάγκη να μελετήσουμε διεξοδικά την κάθε ερμηνεία. Για το σκοπό αυτό θα ακολουθήσουμε τα σχήματα του κλάσματος που υποστηρίζει η Marshall, όπως αυτά παρουσιάζονται στο βιβλίο *«Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»* της Κολέζα (2000).

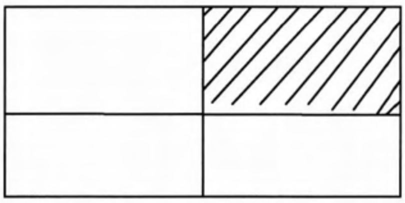
Αναλυτικότερα, θα μελετήσουμε το σχήμα του κλάσματος ως:
1. Μέρος-όλου (part-whole)
2. Πηλίκου (quotient)
3. Λόγος (ratio)
4. Μέτρο (measuring number)
5. Τελεστής (operator)

1. Το σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου»

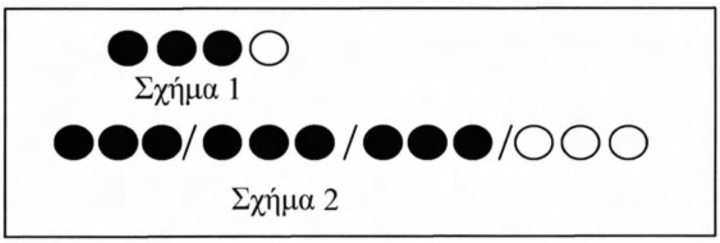
Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος του όλου αποτελεί εκείνη την ερμηνεία που πρωτοσυναντούν και οι περισσότεροι μαθητές στο σχολείο (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2009˙Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Η σημασία αυτής της ερμηνείας είναι καθοριστική, αφού θεωρείται θεμέλιο για τη γνώση των ρητών αριθμών και βασική για τις υπόλοιπες ερμηνείες (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2005˙ Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Κολέζα, 2009˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Σε αυτή την ερμηνεία το σύμβολο $\frac{\alpha}{\beta}$ που περιγράφει τη σχέση «μέρους-όλου», δηλώνει ότι ένας *α* αριθμός τμημάτων ή κομματιών περιέχεται στο *β*, που αντιπροσωπεύει το *«όλο»* (Γιαννέλος, 2011˙ Howard&McKeeby, 1971˙ Κολέζα, 2009˙ Κουλέτση, 2010˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Park, Güçler & McCrory, 2009). Υπάρχει, λοιπόν, ένα *«όλο»* που χωρίζεται σε *β* κομμάτια, όπου το κάθε κομμάτι συμβολίζεται ως $\frac{1}{\beta}$, ενώ αν αναφερόμαστε σε αρκετά κομμάτια χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\frac{\alpha}{\beta}$ (Κολέζα, 2009˙ Κουλέτση, 2010). Επιπροσθέτως, το «όλο» χωρίζεται ή διαιρείται σε ένα συγκεκριμένο αριθμό ισομεγεθών μερών (Charalambous, 2007˙ Κολέζα, 2009). Το μέγεθος των ξεχωριστών μερών του «όλου» εξαρτάται από τον αριθμό που θέλουμε να διαιρέσουμε τη συνολική ποσότητα, δηλαδή, το «όλο» (Κολέζα, 2009). Έτσι, σε όσα περισσότερα κομμάτια διαιρούμε την ολόκληρη ποσότητα, τόσο μικρότερα κομμάτια θα δημιουργούνται (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Κολέζα, 2000), ενώ ταυτόχρονα, η σχέση μεταξύ των μερών και του σύνολο διατηρείται, ανεξάρτητα από το μέγεθος, το σχήμα, τη διάταξη ή τον προσανατολισμό των ισοδύναμων τμημάτων (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007).

Με βάση και τον παραπάνω ορισμό και τα χαρακτηριστικά της διάστασης του κλάσματος ως «μέρος-όλου», αντιλαμβανόμαστε ότι η έννοια της διαμέρισης μιας ποσότητας ή ενός τμήματος/κομματιού είναι σημαντική (Ζάντζος, 2009˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000). Συγκεκριμένα, η διαμέριση είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη στρατηγικών ίσου μοιρασμού από τα παιδιά, αφού βοηθά στη βαθύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ του αριθμού των κομματιών και του μεγέθους τους, δηλαδή μεταξύ της σχέσης αριθμητή και παρανομαστή. Η διαμέριση, όμως, που πραγματοποιείται σε αυτή την περίπτωση ερμηνείας των κλασμάτων αφορά είτε διακριτές ποσότητες, όπως τα διάφορα αντικείμενα ή τα άτομα, είτε συνεχείς ποσότητες, όπως οι πίτσες ή τα ποικίλα γεωμετρικά σχήματα (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Güçler, Park & McCrory, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000). Ο Λεμονίδης κ.συν (2007, σελ. 72) ορίζουν ως *διακριτές* τις ποσότητες οι οποίες διαχωρίζονται μεταξύ τους και εμπεριέχουν τη μονάδα μέτρησης (π.χ. στην ποσότητα 5 μήλα, τα μήλα είναι διακριτά μεταξύ τους και μετριούνται με βάση το ένα μήλο), ενώ ως *συνεχείς ορίζουν τις* ποσότητες τις οποίες δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε και χρειάζονται μια εξωτερική αυθαίρετη μονάδα μέτρησης για να μετρηθούν (π.χ. το μήκος 5 μέτρα είναι συνεχής ποσότητα που μετριέται με την εξωτερική μονάδα μέτρησης το μέτρο, το οποίο ορίστηκε αυθαίρετα από τους ανθρώπους).

Όπως, όμως, είναι προφανές και από τους προαναφερθέντες ορισμούς οι δύο καταστάσεις των συνεχών και των διακριτών ποσοτήτων παρουσιάζουν διαφορές. Στις διακριτές ποσότητες χωρίζουμε ή είναι χωρισμένο το αντικείμενο σε ίσα κομμάτια από τα οποία παίρνουμε μερικά. Επίσης, υπάρχει πάντοτε μια μονάδα, αλλά τα αντικείμενα δεν είναι σίγουρο αν είναι οργανωμένα σε τόσες ισοδύναμες ομάδες όσες λέει ο παρονομαστής του κλάσματος. Επιπλέον, η Κολεζά (2000) αναφέρει ότι και το νοητικό σχήμα της σχέσης «μέρους-όλου» ενδέχεται να είναι διαφορετικό στην περίπτωση ενός διακριτού «όλου» και στην περίπτωση ενός συνεχούς «όλου». Αναλυτικότερα, στην περίπτωση ενός συνεχούς «όλου» το μέρος είναι **<u>ένα</u>** από τα ίσα τμήματα στα οποία χωρίζεται το «όλο» (Εξαρχάκος, 1993˙ Κολέζα, 2000). Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα μήλο και το κόψουμε σε 8 ίσα μέρη, τότε ο αριθμός $\frac{1}{8}$ παριστάνει το ένα από τα 8 ίσα μέρη, ενώ ο αριθμός $\frac{5}{8}$ παριστάνει τα 5 από τα 8 ίσα μέρη του μήλου ή όπως συμβαίνει στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος, όπου το γραμματοσκιασμένο ορθογώνιο αποτελεί το $\frac{1}{4}$ όλου του ορθογωνίου.



Αντίθετα, στην περίπτωση του διακριτού «όλου» το «μέρος» μπορεί να συντίθεται από περισσότερες από μια δομικές μονάδες (Εξαρχάκος, 1993˙ Κολέζα, 2000). Έτσι, στο Σχήμα 1ο ένας βόλος αποτελεί το $\frac{1}{4}$ του συνόλου των τεσσάρων βόλων. Αλλά επίσης, στο Σχήμα 2 οι τρεις βόλοι αποτελούν το $\frac{1}{4}$ του συνόλου των δώδεκα βόλων.



Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να παριστάνει (Howard&McKeeby, 1971˙ Εξαρχάκος, 1993)

- ένα ή περισσότερα από τα ίσα μέρη μιας μονάδας, είτε
- ένα ή περισσότερα από τα ίσα μέρη ενός συνόλου μονάδων

Στο σημείο αυτό καθίσταται επιτακτική ανάγκη να αναφερθεί ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» φέρει έναν σημαντικό περιορισμό. Ειδικότερα, ο Freudenthal (στο Ζάντζος, 2009, σελ.33˙ στο Κολέζα, 2000, σελ. 186) αναφέρει ότι *«η προσέγγιση στα κλάσματα από την οπτική γωνία της σχέσης «μέρος-όλου» είναι πολύ περιορισμένη όχι μόνο φαινομενολογικά αλλά και μαθηματικά, αφού αυτή η προσέγγιση αναφέρεται μόνο σε γνήσια κλάσματα (<1)...Η ανεπάρκεια της προσέγγισης εμφανίζεται όταν έρχεται η στιγμή της διδασκαλίας των μεικτών (καταχρηστικών) κλασμάτων (>1)»*. Με τη θέση αυτή συμφωνούν και οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007), που υποστηρίζουν ότι αν δεχτούμε ότι το κλάσμα παριστάνει μια σύγκριση μεταξύ του αριθμού των τμημάτων της μονάδας που διαμερίστηκαν προς το συνολικό αριθμό των τμημάτων στα οποία η μονάδα κατανέμεται, τότε ο αριθμητής του κλάσματος πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον παρονομαστή (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Σταματόπουλος, 2011). Συμπεραίνουμε έτσι, ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» δεν δύναται να καλύψει πλήρως το φάσμα της έννοιας του κλάσματος, αφού η αξιοποίηση αυτής της ερμηνείας μπορεί να εφαρμοστεί αποκλειστικά σε γνήσια κλάσματα. Υπό αυτή την οπτική, η ύπαρξη και κατ' επέκταση η διδασκαλία και των υπόλοιπων τεσσάρων ερμηνειών είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ορθή και πλήρη κατανόηση του κλάσματος.

2. Το σχήμα του κλάσματος ως «πηλίκο»

Και σε αυτή την ερμηνεία του κλάσματος η αναπαράσταση με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ παραμένει η ίδια. Αυτό που διαφοροποιείται είναι το νόημα που το κλάσμα περικλείει. Ειδικότερα, στην κατάσταση «πηλίκο» το α δεν αναπαριστά τα μέρη ενός όλου, αλλά την ποσότητα ή τα στοιχεία εκείνα που θα κατανεμηθούν ισομερώς, ενώ το δε β τον αριθμό των μερών της διαμέρισης (Charalambous, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Με άλλα λόγια, στο νοητικό σχήμα «πηλίκο» το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ερμηνεύεται ως διαίρεση α πραγμάτων σε β ίσα μέρη (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Γιαννέλος, 2011˙ Εξαρχάκος, 1993˙ Howard&McKeeby, 1971˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Τζαλακώστας, 2011˙ Toluk & Middleton, 2001˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995), δηλαδή διαιρούμε το α με το β $(\alpha \div \beta)$. Και σε αυτή την περίπτωση, ο διαιρετέος/παρανομαστής αναφέρεται στον αριθμό των αντικειμένων που θα μοιραστούν, ενώ ο διαιρέτης/αριθμητής στον αριθμό των ίσων κομματιών που θα μοιραστεί το κάθε αντικείμενο (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006). Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$ περιγράφει το ποσό της πίτσας που αντιστοιχεί σε καθένα από τα 4 άτομα που μοιράζονται 3 πίτσες. Από την άλλη, ο Γαγάτσης κ.συν. (2006) αναφέρονται με πιο απλά λόγια στην ερμηνεία του «πηλίκου» θέτοντάς το ως το αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρανομαστή. Την ίδια στιγμή, αρκετοί είναι οι ερευνητές που αναφέρονται στο «πηλίκο» αποδεχόμενοι ότι συνιστά το αποτέλεσμα της αλγεβρικής εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha, \beta \neq 0$ (Howard&McKeeby, 1971˙ Κολέζα, 2000˙

Güçler, Park & McCrory, 2009˙ Park, Güçler & McCrory, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Ορίζουν δηλαδή, την ερμηνεία του «πηλίκου» ως συνάρτηση αντίστροφή της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης (Κολέζα, 2000). Ωστόσο, όπως πολύ σωστά τονίζουν οι Toluk και Middleton (2001), είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να γίνει αντιληπτή αυτή η διάσταση του κλάσματος να υπάρχει μια καλή γνώση και αντίληψη της έννοιας της διαίρεσης.

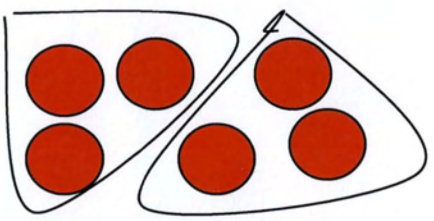
Παρατηρώντας τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τους ορισμούς που αποδίδονται στο κλάσμα ως «πηλίκο», διαπιστώνουμε ότι όπως και στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου», περιέχεται η έννοια της διαμέρισης. Ειδικότερα, η έννοια του «πηλίκου» βασίζεται στην έννοια της ισοδιαμέρισης (Ζάντζος, 2009˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011). Σύμφωνα με τη Lamon (2006, στο Σταματόπουλος, 2011), η ισοδιαμέριση είναι η διαδικασία διαίρεσης ενός ή περισσότερων αντικειμένων σε έναν αριθμό ξεχωριστών μεριδίων που δεν επικαλύπτονται, έχουν το ίδιο μέγεθος (ανεξάρτητα από το σχήμα τους) και εξαντλούν το όλο. Έτσι, με βάση και το παραπάνω παράδειγμα, οι 3 πίτσες θα πρέπει να μοιραστούν δίκαια, δηλαδή ισομερώς, στα 4 άτομα, ώστε μετά το μοίρασμα όλοι να έχουν την ίδια ποσότητα πίτσας.

Σε αντίθεση με το σχήμα του «μέρους-όλου», στο σχήμα του πηλίκου αναμιγνύονται δυο διαφορετικοί χώροι. Αναλυτικότερα, δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση ο αριθμητής και ο παρανομαστής ενός κλάσματος να παριστάνουν αντικείμενα του ίδιου είδους (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Γιαννέλος, 2011˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Στο παράδειγμά μας ο αριθμητής (3) αναφέρεται σε πίτσες, ενώ ο παρανομαστής (4) σε ανθρώπους. Λαμβάνοντας υπόψη το χαρακτηριστικό αυτό, αλλά και το τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ως «πηλίκο», διαπιστώνουμε ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του α με το β θα είναι μια αριθμητική τιμή και όχι τα μέρη που πήραμε από τη δίκαιη μοιρασιά, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του «μέρους-όλου». Κατ' επέκταση, δεν υπάρχει ο περιορισμός στο μέγεθος του αριθμητή, δηλαδή να πρέπει $\alpha<\beta$ (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011), αφού τώρα μπορεί να είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος του παρανομαστή και έτσι, το συνολικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο της μονάδας. Συνεπώς, η ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο» προσφέρεται για όλο το φάσμα των κλασμάτων, αφού αναφέρεται τόσο σε γνήσια όσο και σε καταχρηστικά κλάσματα.

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό, να αναφερθεί ότι είναι αρκετοί οι ερευνητές, όπως οι Charalambous και Pitta-Pantazi, ο Silver και ο Ohlsoon, που υποστηρίζουν ότι μπορεί να υπάρξει μια διάκριση δυο διαφορετικών ερμηνειών του «πηλίκου». Η Κολέζα (2000) στο βιβλίο της *«Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»* παραθέτει τις διακρίσεις που κάνουν οι Silver και Ohlsoon (σελ. 189-190). Ειδικότερα, ο πρώτος διαχωρίζει την ερμηνεία του «πηλίκου» σε *μεριστική* και *μετρική* ερμηνεία. Στην μεριστική ερμηνεία ο διαιρετέος μερίζεται σε τόσα μέρη όσα καθορίζει ο διαιρέτης, ενώ στην μετρική ο διαιρέτης μετρά κάποια ποσότητα η οποία επαναληπτικά εξάγεται από τον διαιρετέο. Από την άλλη, ο Ohlsoon αναφέρεται στις ερμηνείες του «πηλίκου» ως *διαμέριση*, όπου μια ποσότητα (διακριτή ή συνεχής) διαμερίζεται με το χωρισμό της σε ισοδύναμα μέρη και ως *αφαίρεση*, όπου το πηλίκο δείχνει πόσες φορές θα εκτελεστεί μια ενέργεια αφαίρεσης μιας ποσότητας από το σύνολο. Ανάλογη της θέσης του Ohlsoon είναι και η τοποθέτηση των Charalambous και Pitta-Pantazi (2007).

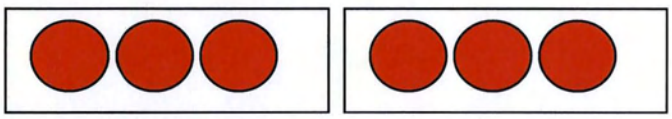
Επικουρικό καθίσταται το ακόλουθο παράδειγμα, όπου γίνονται εμφανής οι περαιτέρω διακρίσεις στην αρχική ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το πηλίκο 6 3 = 2 και ότι αναφερόμαστε σε μπάλες.

- 6 (μπάλες) 2 = 3 (μπάλες)



Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια διαμέριση, όπου το πηλίκο καθορίζει το περιεχόμενο καθενός από τα τμήματα της διαμέρισης.

- 6 (μπάλες) 3 (μπάλες) = 2



Σε αυτή την περίπτωση έχουμε να κάνουμε με μια επαναλαμβανόμενη αφαίρεση, όπου το πηλίκο καθορίζει τον αριθμό των επαναλαμβανόμενων αφαιρέσεων.

Οι παραπάνω διακρίσεις μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση των κλασμάτων μέσα από παραδείγματα, όπως «3 κυκλικά γλυκά μοιράζονται σε 4 παιδιά». Έτσι, στη διαίρεση 3 (γλυκά) 4 (παιδιά) = - (του γλυκού) έχουμε μια κατάσταση διαμέρισης, αφού το 3 δηλώνει κατάσταση, ενώ το 4 δείχνει πόσες φορές θα γίνει το μοίρασμα (φέρει το ρόλο τελεστή). Αντιθέτως, στην περίπτωση που έχουμε μια επαναλαμβανόμενη αφαίρεση το ίδιο πρόβλημα θα διατυπώνονταν ως εξής «Αν από 3 γλυκά κάθε παιδί πάρει τα - του γλυκού, πόσα παιδιά θα πάρουν γλυκό;». Εδώ η διαίρεση θα είχε τη μορφή 3 (γλυκά) - (του γλυκού) = 4 (παιδιά).

Με βάση τα προαναφερθέντα παραδείγματα και ολοκληρώνοντας την παρουσίαση της ερμηνείας του κλάσματος ως «πηλίκο» πρέπει να γίνει μια σημαντική παρατήρηση. Το γεγονός ότι η κατάσταση της διαμέρισης εκφράζεται αλγοριθμικά με μια διαίρεση – αποδεχόμενοι την ερμηνεία ότι το κλάσμα είναι διαίρεση – δεν συνεπάγει ότι μπορούμε να μεταφέρουμε την ορολογία της διαίρεσης σε πραγματικές καταστάσεις διαμέρισης (Κολέζα, 2000). Στο τελευταίο παράδειγμα, μοιράσαμε 3 γλυκά σε 4 παιδιά, δεν είναι δυνατόν να διαιρέσουμε 3 γλυκά με 4 παιδιά. Επιπλέον, κατά την εκτέλεση της διαίρεσης $3 \div 4$ χρησιμοποιούμε τη φράση «το 4 χωράει ή δεν χωράει στο 3», αλλά η ίδια φράση δεν φέρει κανένα νόημα στο να «χωρέσουν» 4 παιδιά σε 3 γλυκά. Επομένως, η αλγοριθμική έκφραση του κλάσματος ως διαίρεση δεν είναι λανθασμένη, αλλά η εννοιολογική και γλωσσική του διάσταση χρήζει προσοχής. Κατανοούμε, λοιπόν, ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο» καλύπτει μόνο μια πτυχή του κλάσματος, ενώ βρίσκεται σε άμεση συνάρτηση με την κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης και της διαμέρισης.

3. Το σχήμα του κλάσματος ως «λόγος»

Το νοητικό σχήμα του κλάσματος ως «λόγος» διαφέρει σημαντικά από τα δυο προηγούμενα σχήματα. Αναλυτικότερα, το κλάσμα ως «λόγος» εκφράζει την αριθμητική σχέση δυο ποσοτήτων, όπου το μέγεθος της μιας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος της άλλης ποσότητας (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Γιαννέλος, 2011˙ Εξαρχάκος, 1993˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995˙ Χασάπης, 2000). Για παράδειγμα, η σχέση του αριθμού των αγοριών προς των αριθμό των κοριτσιών μιας σχολικής τάξης είναι $\frac{4}{5}$. Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, το κλάσμα για να δείξουμε μια σύγκριση, όπως αυτή μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών. Για το λόγο αυτό σε αρκετές έρευνες το κλάσμα ως «λόγος» αναφέρεται ως συγκριτικός δείκτης παρά ως αριθμός (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000˙ Χρυσανθακοπούλου, 2009). Διαφωτιστική στο σημείο αυτό φαίνεται να είναι η τοποθέτηση και ο ορισμός που παραθέτει ο Χασάπης (2000) στο βιβλίο «*Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*». Ειδικότερα, αναφέρει ότι (σελ. 187) *«Οι καταστάσεις σύγκρισης των μέτρων δυο μεγεθών της ίδιας ή διαφορετικής κατηγορίας προκύπτουν από μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει μέρη και μέτρα μιας κατηγορίας μεγεθών σε μέρη και μέτρα της ίδιας ή διαφορετικής κατηγορίας μεγεθών στη βάση μιας πολλαπλασιαστικής σχέσης. Στα πλαίσια αυτά, η σχέση των μερών δυο μεγεθών της ίδιας (α να β) ή διαφορετικής (α προς β) κατηγορίας επιβάλλεται ή είναι δυνατός να εκφραστεί με ένα κλάσμα* $\frac{\alpha}{\beta}$, *που αποκαλείται λόγος των δυο μεγεθών».*

Με βάση και τα παραπάνω στοιχεία στην ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος» παρατηρούμε ότι δεν γίνεται λόγος για κάποιου είδους διαμέριση (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Γιαννέλος, 2011), όπως συμβαίνει στο σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου» ή ως «πηλίκο». Δηλαδή, δεν υπάρχει κάποιος επιμερισμός μιας ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων. Επιπλέον, τα μεγέθη σε ένα κλάσμα που έχει χαρακτήρα «λόγου» μπορεί να είναι είτε ομοιογενή (π.χ: 2 κομμάτια από τα 5 κομμάτια) είτε ετερογενή (π.χ: 3 χιλιόμετρα ανά 1 ώρα) (Εξαρχάκος, 1993˙ Σταματόπουλος, 2010˙ Χασάπης, 2000). Ένα ακόμα χαρακτηριστικό της ερμηνείας αυτής είναι η σταθερότητα και η συμμεταβολή που διακρίνει τους λόγους (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000). Αυτό σημαίνει ότι όταν μεταβάλλεται το ένα μέγεθος μεταβάλλεται και το δεύτερο μέγεθος με ένα συγκεκριμένο τρόπο – πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται – ενώ η σχέση τους παραμένει σταθερή. Δηλαδή, τα δυο μεγέθη σε ένα κλάσμα με την ερμηνεία του «λόγου» βρίσκονται σε μια σχέση αναλογίας (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Χασάπης, 2000). Η βαθύτερη κατανόηση του χαρακτηριστικού αυτού είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς βοηθάει στην περαιτέρω κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας και κατ' επέκταση στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Χρυσανθακοπούλου, 2009).

Στο σημείο αυτό επιβάλλεται να αναφερθεί μια διάκριση της έννοιας του «λόγου». Συγκεκριμένα, η Κολέζα (2000) κάνει λόγο για δυο διαφορετικούς χώρους μέτρησης, που μπορούν να συνδεθούν με δυο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος αφορά μια «μεταξύ» (των χώρων) στρατηγική, οπότε έχουμε ένα λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής ή όπως συνήθως αναφέρεται, έναν «εξωτερικό λόγο» (externalratio). Από την άλλη, η δεύτερη σύνδεση αφορά μια «εντός» (του ίδιου χώρου) στρατηγική, οπότε και αναφερόμαστε σε έναν «εσωτερικό λόγο» (internalratio). Τα παρακάτω παραδείγματα φανερώνουν τις διαφορετικές διαστάσεις που φέρει κάθε φορά η έννοια του «λόγου» :

- Παράδειγμα 1^{o} :

Σε μια τάξη Α υπάρχουν 8 αγόρια και 12 κορίτσια, ενώ σε μια τάξη Β υπάρχουν 6 αγόρια και 8 κορίτσια. Σε ποιά τάξη υπάρχουν αναλογικά περισσότερα αγόρια, στην Α ή στην Β;

Μπορούμε να συγκρίνουμε τους λόγους $\frac{\alpha\gamma\acute{o}\rho\iota\alpha}{\kappa o\rho\acute{\iota}\tau\sigma\iota\alpha}$ σε κάθε τάξη. Να συγκρίνουμε δηλαδή τους λόγους: $\frac{8\ \alpha\gamma\acute{o}\rho\iota\alpha}{12\ \kappa o\rho\acute{\iota}\tau\sigma\iota\alpha}$ και $\frac{6\ \alpha\gamma\acute{o}\rho\iota\alpha}{8\ \kappa o\rho\acute{\iota}\tau\sigma\iota\alpha}$
Οι λόγοι αυτοί είναι «εξωτερικοί λόγοι», γιατί συγκρίνουνε μεταξύ τους δύο διαφορετικούς χώρους μέτρησης (αγόρια, κορίτσια).

- Παράδειγμα 2^{o}

Ένα αυτοκίνητο στα 100 χιλιόμετρα καταναλώνει 12 λίτρα βενζίνη και ένα άλλο αυτοκίνητο καταναλώνει 8 λίτρα βενζίνη. Ποιά σχέση έχει η κατανάλωση του δεύτερου αυτοκίνητου με το πρώτο;

Το δεύτερο αυτοκίνητο καταναλώνει $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ φορές λιγότερο από το πρώτο. Η κατανάλωση, λοιπόν, του δεύτερου αυτοκινήτου είναι τα 2/3 του πρώτου.

Σε αυτό το παράδειγμα συγκρίνουμε μέτρα από τους ίδιους χώρους μέτρησης (λίτρα), οπότε λέμε έχουμε έναν «εσωτερικό λόγο».

Την ίδια στιγμή ωστόσο, υπάρχουν προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν και με τους δυο τρόπους, κάνοντας έτσι ακόμα πιο φανερή τη διάκριση. Για παράδειγμα, «7 κορίτσια μοιράζονται 3 πίτσες και 3 αγόρια μοιράζονται 1 πίτσα. Ποιος θα φάει περισσότερη πίτσα, τα αγόρια ή τα κορίτσια;». Η λύση έχει ως εξής:

➔ Με μια «μεταξύ» στρατηγική συγκρίνοντας τους «εξωτερικούς» λόγους έχουμε

$\frac{3\ πίτσες}{7\ κορίτσια}$ και $\frac{1\ πίτσα}{3\ αγόρια}$

Για να είναι οι λόγοι ισοδύναμοι πρέπει εφόσον οι πίτσες είναι τριπλάσιες να είναι και τα κορίτσια τριπλάσια, δηλαδή 9. Επειδή όμως τα κορίτσια είναι 7, αναλογεί στο καθένα περισσότερη πίτσα απ' ότι στα αγόρια.

➔ Με μια «εντός» στρατηγική συγκρίνοντας τους «εσωτερικούς» λόγους έχουμε

$\frac{3\ πίτσες}{1\ πίτσα}$ και $\frac{7\ κορίτσια}{3\ αγόρια}$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι μπορούμε να εκφράσουμε ένα κλάσμα ως λόγο μέσα από δυο διαφορετικούς χώρους μέτρησης. Ωστόσο, οι δυο αυτές εκφράσεις έχουν αξιοσημείωτες μεταξύ τους διαφορές. Αρχικά, ο «εσωτερικός λόγος» είναι ένας καθαρός αριθμός (Κολέζα, 2000). Αντιθέτως, ο «εξωτερικός λόγος» ορίζει ένα νέο μέγεθος που εκφράζει τη σχέση μεταξύ των δυο αρχικών μεγεθών, στην ουσία δηλαδή, είναι ένα «μέγεθος πηλίκο» (Κολέζα, 2000). Μια επιπλέον διαφορά είναι ότι μπορούμε να προσθέσουμε «εξωτερικούς λόγους», αλλά όχι «εσωτερικούς» (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Δηλαδή, η ένωση δυο λόγων $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$μπορεί να δοθεί ως πρόσθεση των $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Χασάπης, 2000). Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντιπαράθεση με τον κλασικό αλγόριθμο πρόσθεσης των κλασμάτων, όπου $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta+\delta}$. Έτσι, για παράδειγμα, αν έχουμε μια συνταγή μαγειρικής όπου προσθέτουμε 20gr ζάχαρης για κάθε 200gr αλεύρι και ψάχνουμε να βρούμε πόση ζάχαρη χρειαζόμαστε για 400gr αλεύρι, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να βρούμε το λόγο της ζάχαρης προς το αλεύρι και να τον διπλασιάσουμε. Δηλαδή, ο λόγος είναι $\frac{20\ ζάχαρης}{200\ αλεύρι}$, οπότε αν διπλασιάσουμε την ποσότητα έχουμε $\frac{20}{200} + \frac{20}{200} = \frac{40}{400}$. Συνεπώς η λύση στο πρόβλημα του παραδείγματος (δηλαδή τα 40gr ζάχαρης) δίνεται μέσα από την απλή πρόσθεση των λόγων.

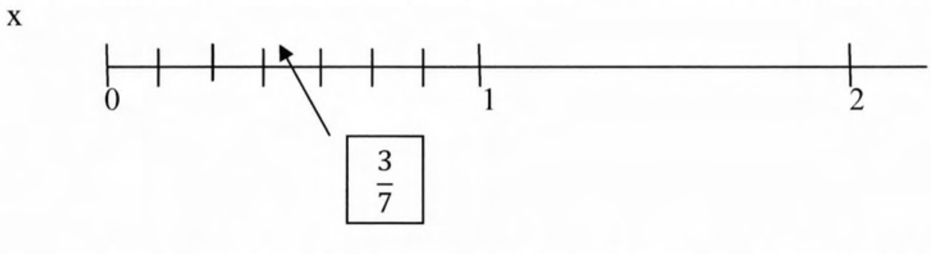
Προτού ολοκληρωθεί η επεξεργασία του κλάσματος ως «λόγος», επιβάλλεται να αναφερθεί ένας ακόμα βασικός όρος, που συνδέεται στενά με αυτή την ερμηνεία. Η έννοια για την οποία γίνεται λόγος είναι αυτή της αναλογίας. Ειδικότερα, ως αναλογία ορίζεται η σύγκριση δυο λόγων που είναι μεταξύ τους ίσοι (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2006˙ Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χασάπης, 2000). Για παράδειγμα, οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία, γιατί είναι ίσοι (αφού $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$). Έτσι, ο Χασάπης (2000) προεκτείνει τον ορισμό αναφέροντας ότι η αναλογία δηλώνει την ισοδυναμία δυο σχέσεων μεταξύ μέτρων μεγεθών και όχι το ταυτόσημο δυο συμβολικών εκφράσεων, όπως συμβαίνει στα κλάσματα, ή την ισότητα δυο μέτρων, όπως συμβαίνει αντίστοιχα στους ρητούς. Λαμβάνοντας υπόψη αυτόν τον ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι οι αναλογίες για να σχηματιστούν βασίζονται στην ερμηνεία του «λόγου». Βέβαια, οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) χαρακτηριστικά αναφέρουν ότι η έννοια των λόγων συχνά χρησιμοποιείται εναλλακτικά με την ιδέα των αναλογιών. Ωστόσο, μια τέτοια χρήση της παρούσας ερμηνείας δυσχεραίνει τόσο την κατανόηση αυτής όσο και των αναλογιών ως μαθηματική έννοια, αλλά και τη γενικότερη αντίληψη του κλάσματος.

Με βάση τους ορισμούς και τα στοιχεία που προαναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η έννοια του κλάσματος ως «λόγος» είναι αρκετά σημαντική, αφού παρέχει έναν ακόμη τρόπο έκφρασης σχέσεων μεταξύ μεγεθών ή ποσοτήτων. Ταυτόχρονα, αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό για την ανάπτυξη της έννοιας των αναλογιών, που βοηθούν σημαντικά στην επίλυση μιας σειράς προβλημάτων, ενώ την ίδια στιγμή, η ερμηνεία αυτή παρέχει ένα σημαντικό υπόβαθρο και για την κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων, αλλά και περαιτέρω μαθηματικών εννοιών, όπως οι δεκαδικοί και τα ποσοστά.

4. Το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο»

Σε αυτή την ερμηνεία το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θεωρείται ως ένα σημείο πάνω σε έναν άξονα (αριθμογραμμή), ενώ προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος $\frac{1}{\beta}$ για τον καθορισμό μιας απόστασης (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Charalambous, 2007˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Γιαννέλος, 2011˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Güçler, Park & McCrory, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Η συμβολική αναπαράσταση του κλάσματος ως μέτρο συνοδεύεται στις περισσότερες περιπτώσεις από την οπτική αναπαράσταση μιας ευθείας (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Μπορεί, δηλαδή, το κλάσμα να παρουσιαστεί ως ένα σημείο πάνω στην αριθμητική γραμμή μεταξύ δύο ακεραίων (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Σταματόπουλος, 2011). Επάνω στην ευθεία αυτή θέτουμε αυθαίρετα το σημείο μηδέν, ενώ η ευθεία είναι χωρισμένη σε μοναδιαία τμήματα, καθένα από τα οποία είναι μοιρασμένο σε β κομμάτια (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙Ζάντζος, 2009˙ Güçler, Park & McCrory, 2009˙

Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011). Έτσι, η μονάδα μέτρησης της αριθμητικής γραμμής, μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε μικρότερες μονάδες, παρουσιάζοντας διαφορετικά ονόματα κλασμάτων. Για παράδειγμα, «Πόσο απέχει το x από το 0;»



Στο σχήμα αυτό υπάρχουν ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά που πρέπει να κατανοηθούν, ώστε να γίνει πλήρως αντιληπτή η έννοια του κλάσματος ως «μέτρο», διαφορετικά τα χαρακτηριστικά αυτά λειτουργούν με περιοριστικό χαρακτήρα. Αρχικά, μια βασική γνώση σε αυτή την ερμηνεία είναι ότι το κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ λειτουργεί ως μονάδα μέτρησης διατηρώντας την απόλυτη αξία του, ανεξαρτήτως της θέσης του στην αριθμογραμμή (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Αυτό σημαίνει ότι για τον καθορισμό ενός οποιουδήποτε μήκους πρέπει το κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά, ξεκινώντας από το μηδέν. Κατ' επέκταση, για να γίνει κατανοητό αυτό το χαρακτηριστικό θα πρέπει πρωτίστως να είναι εξίσου κατακτημένη και η γνώση για το μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\beta}$. Δεδομένου ότι σε μια ευθεία τοποθετούμε αυθαίρετα το σημείο μηδέν και τη χωρίζουμε σε μοναδιαία τμήματα, επιβάλλεται ο καθορισμός της μονάδας να είναι προσεκτικός και σωστός (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Κολέζα, 2000), ειδικά όταν δεν υπάρχει σημασιολογική ταύτιση ανάμεσα στη συμβολική αναπαράσταση και στην αντίστοιχη οπτική, ώστε να αποφεύγονται παρανοήσεις κατά την τοποθέτηση των κλασμάτων πάνω στις ευθείες. Για παράδειγμα, σε ένα σχήμα, όπως το επόμενο, είναι εξαιρετικά δύσκολο να εντοπίσουμε το κλάσμα $\frac{5}{8}$.

Επιπροσθέτως, όταν θέλουμε να μετρήσουμε κάτι, αλλά η μονάδα μέτρησης δεν ταιριάζει με κάποιο ακέραιο αριθμό φορών στην ποσότητα που πρέπει να μετρηθεί, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι απαραίτητη η χρήση ενός κλασματικού αριθμού. Το κλάσμα αυτό, όμως, γίνεται αντιληπτό ως ένας αριθμός και όχι ως δυο ξεχωριστοί, ως μια ποσότητα και ως *πόσο* από κάτι (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Güçler, Park & McCrory, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Καθώς η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο» συνδέεται με τη χρήση της αριθμογραμμής, η εκτίμηση του μεγέθους των κλασμάτων γίνεται πιο ξεκάθαρη και σαφής, ενώ ταυτόχρονα, ενισχύεται και η γνώση περαιτέρω θεμελιωδών εννοιών των κλασματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα, οι πράξεις με κλάσματα (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007), η πυκνότητα, η διαδοχικότητα, η μοναδικότητα και το άπειρο των κλασματικών αριθμών (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Ζάντζος, 2009˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Stafylidou & Vosniadou, 2004). Εκτός όμως, από αυτές τις έννοιες, το κλάσμα ως «μέτρο» με τη βοήθεια και της αριθμογραμμής ενισχύει και την κατανόηση της τόσο σημαντικής έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Και αυτό γιατί, όταν διαφορετικές μονάδες που απαρτίζουν την αριθμητική γραμμή καλύπτουν την ίδια απόσταση, τότε προκύπτει ισοδυναμία κλαμάτων. Δηλαδή η αριθμητική γραμμή επιλύει το πρόβλημα των ενδιάμεσων αριθμών, αφού αναπαριστά το κλάσμα που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο αρχικά κλάσματα. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται κατανοητή όχι μόνο η αντίληψη των ενδιάμεσων αριθμών, αλλά και η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων αποκτά οπτική αναπαράσταση και καθίσταται πιο χειροπιαστή.

Παρατηρώντας όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι και σε αυτό το σχήμα του κλάσματος έχουμε τη δραστηριότητα «χωρίζω-παίρνω», όπως και στο σχήμα «μέρος-όλου». Συνδέεται, δηλαδή, η ερμηνεία του «μέτρου» με τη διαδικασία της διαμέρισης (Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011), δεδομένου ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι αποτέλεσμα της επανάληψης του μοναδιαίου κλάσματος $\frac{1}{\beta}$. Τέλος, είναι επιτακτική ανάγκη να αναφερθεί η τοποθέτηση των Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) για τις υποστάσεις που περικλείονται στην κατασκευή του κλάσματος ως «μέτρο». Πρώτον, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θεωρείται ένας αριθμός, ο οποίος μεταφέρει την ποσοτική προσωπικότητα των κλασμάτων, δηλαδή, το πόσο μεγάλο το κλάσμα είναι, την τιμή του. Δεύτερον, το κλάσμα αυτό συνδέεται και με το μέτρο που αποδίδεται σε κάποιο διάστημα, δηλαδή, η απόσταση στην αριθμογραμμή εκφράζει το μέτρο. Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό ότι το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο» προσφέρει μια άλλη θεώρηση στην ερμηνεία της έννοιας του κλάσματος, παρέχοντας σημαντικά εργαλεία και θέτοντας βασικά θεμέλια για την κατανόηση τόσο της αρχικής και καθοριστικής έννοιας του κλάσματος όσο και των περαιτέρω σχετικών με αυτό εννοιών.

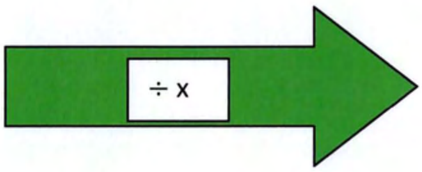
5. Το σχήμα του κλάσματος ως «τελεστής»

Η τελευταία ερμηνεία που φέρει η έννοια του κλάσματος είναι αυτή του «τελεστή» ή όπως αναφέρεται από ορισμένους ερευνητές του «πολλαπλασιαστή» (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011). Σε αυτή την περίπτωση μια ποσότητα χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό ή την κατασκευή μιας άλλης ποσότητας (Γιαννέλος, 2011˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010). Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως «τελεστής» λειτουργεί ως μια «μηχανή» που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη (Charalambous, 2007˙ Howard &McKeeby, 1971˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Güçler, Park & McCrory, 2009). Δηλαδή, ο τελεστής λειτουργεί ως ένας μετασχηματιστής/πολλαπλασιαστής που μετατρέπει το αρχικό ποσό σε ένα άλλο τελικό ποσό. Για αυτό το λόγο, ερευνητές όπως η Lamon (1999, στο Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007), ο Behr (1993, στο Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007) και οι Howard καιMcKeeby (1971), ορίζουν τους «τελεστές» ως μετασχηματιστές που επιμηκύνουν ή σμικραίνουν ευθύγραμμα τμήματα, αυξάνουν ή μειώνουν τον αριθμό των εργασιών σε μια σειρά από διακριτά αντικείμενα ή μετατρέπουν μια εικόνα σε ένα γεωμετρικό επίπεδο σχεδιάζοντας μια μεγαλύτερη ή μικρότερη εικόνα του ίδιου σχήματος. Κατ' επέκταση, ο «τελεστής» λειτουργεί ως μια συνάρτηση η οποία εφαρμόζεται σε αριθμούς, σύνολα, αντικείμενα ή επιφάνειες (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Έτσι, για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ αντιμετωπίζεται ως συνάρτηση που μετασχηματίζει γεωμετρικά σχήματα σε όμοια γεωμετρικά σχήματα με λόγο ομοιότητας $\frac{\alpha}{\beta}$ή μετασχηματίζει σύνολα σε νέα σύνολα με πλήθος στοιχείων $\frac{\alpha}{\beta}$φορές το πλήθος των στοιχείων των αρχικών συνόλων. Τα ακόλουθα ενδεικτικά παραδείγματα παρουσιάζουν το κλάσμα ως «τελεστή» σε διάφορες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1^{ο}

Έχω $1\,^{2}/_{3}$ φλιτζάνια γάλα. Η συνταγή που έχω απαιτεί $2\,^{3}/_{4}$ φλιτζάνια γάλα. Κατά πόσο πρέπει να μειώσω τις ποσότητες των άλλων συστατικών της συνταγής ώστε να χρησιμοποιήσω τα $1\,^{2}/_{3}$ φλιτζάνια γάλα που έχω αντί τα $2\,^{3}/_{4}$;

$2\,^{3}/_{4}$



$1\,^{2}/_{3}$

Παράδειγμα 2^{ο}

Φτιάξε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που θα είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτού που φαίνεται στο αρχικό σχέδιο.

αρχικό σχήμα/αρχική «ποσότητα» τελική «ποσότητα»

Παράδειγμα 3^{ο}

Ένα σπίτι έχει ύψος 8 μέτρα. Σε δύο μήνες το ύψος του έγινε 12 μέτρα. Πόσες φορές αυξήθηκε το ύψος του σπιτιού;

Το ύψος του σπιτιού αυξήθηκε κατά $\frac{12}{8}$ φορές ή $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ = 1,5 φορές.

Με βάση τον αρχικό ορισμό, αλλά και τα παραδείγματα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι συγκεκριμένο σχήμα κλάσματος εμπεριέχεται στο γενικότερο σχήμα του κλάσματος ως «λόγος» (Κολέζα, 2000). Το σχήμα, ωστόσο, του «τελεστή» θεωρεί το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως μια οντότητα και όχι ως ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (Κουλέτση, 2010). Δηλαδή, το κλάσμα ως «τελεστής» μπορεί να παίξει το ρόλο ενός αυτόνομου μηχανισμού του οποίου η λειτουργία είναι να μετασχηματίζει. Έτσι, στο 3^{ο} παράδειγμα, στο ύψος 8 μέτρα όταν ενεργεί ο τελεστής $\frac{3}{2}$ πραγματοποιούνται δύο λειτουργίες: το 8 πολλαπλασιάζεται με το 3, δηλαδή, μεγεθύνεται 3 φορές και διαιρείται με το 2, δηλαδή, σμικραίνει 2 φορές. Ως εκ τούτου, πραγματοποιείται μια μεγέθυνση και μια σμίκρυνση, χωρίς όμως, να έχει σημασία ποιος μετασχηματισμός πραγματοποιείται πρώτος και ποιος δεύτερος (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Howard &McKeeby, 1971). Επίσης, στην ερμηνεία αυτή, ο Γαγάτσης κ.συν. (2006) διαπιστώνουν ότι το γινόμενο των κλασμάτων, σε αντίθεση με το γινόμενο των ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται.

Την ίδια στιγμή, σε έρευνά τους για την αντίληψη των κλασμάτων από μαθητές, οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) αναφέρουν ότι η σύλληψη της έννοιας του κλάσματος ως «τελεστή» δύναται να πραγματοποιηθεί με δυο τρόπους: είτε ως μια ενιαία συνάρτηση, που προκύπτει ως σύνθεση δυο πολλαπλασιαστικών πράξεων, είτε ως δυο συναρτήσεις που εφαρμόζονται διαδοχικά. Παρόλα αυτά όμως, και στις δυο συνθήκες μπορούμε να αντιληφθούμε τον «τελεστή» ως μια εφαρμογή στη δεδομένη ποσότητα του αριθμητή, που ακολουθείται από την ποσότητα που εφαρμόζεται αντίστοιχα και στον παρανομαστή, χωρίς όπως προαναφέραμε, να διαδραματίζει κάποιο ρόλο η σειρά εκτέλεσης των πράξεων.

Ολοκληρώνοντας την ερμηνεία του κλάσματος ως «τελεστής», πρέπει να τονιστεί η σημασία που φέρει και αυτή η ερμηνεία, καθώς ενισχύει την κατανόηση τόσο του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011) όσο των μεικτών κλασματικών αριθμών.

Στον πίνακα της επόμενης σελίδας, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι διαφορετικές διαστάσεις που θα έπαιρνε ένας κλασματικός αριθμός με βάση το σχήμα του κλάσματος που θα χρησιμοποιούσαμε για την ερμηνεία του.

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ $\frac{3}{4}$	
Ερμηνεία	*Παράδειγμα*
Μέρος-όλου	3 από τα 4 ίσα μέρη μιας ποσότητας ή συνόλου αντικειμένων
Πηλίκου	τα $\frac{3}{4}$ είναι το ποσό που κάθε άτομο παίρνει (3 διαιρούμενο με το 4)
Λόγος	3 μέρη τσιμέντου προς 4 μέρη άμμου
Μέτρο	$\frac{3}{4}$είναι η απόσταση 3 κλασματικών μερών (μοναδιαίων κλασμάτων ίσων με $\frac{1}{4}$) από την αρχή 0 την αριθμογραμμής
Τελεστής	$\frac{3}{4}$ από κάτι που είτε μεγαλώνει είτε μικραίνει (μεγέθυνση-σμίκρυνση)

Έχοντας μελετήσει και αναλύσει και τις 5 ερμηνείες του κλάσματος οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι παρά το γεγονός ότι τα διάφορα σχήματα είναι ανεξάρτητες κατασκευές όσον αφορά το εννοιολογικό και μαθηματικό τους περιεχόμενο, συνδέονται στενά μεταξύ τους. Το χαρακτηριστικό αυτό επιβεβαιώνεται και από τον παραπάνω πίνακα, όπου φαίνεται ο ξεκάθαρος, πλήρης και διακριτός ρόλος που φέρει η εκάστοτε πτυχή του κλάσματος. Παρά το διακριτό ρόλο, όμως, η σύνδεση ανάμεσα στις ερμηνείες παραμένει. Έτσι, ερευνητές όπως ο Γιαννέλος (2011), η Κολέζα (2000) και ο Δαφέρμος (1998) συγκλίνουν ως προς την ύπαρξη ενός συνεκτικού ιστού ανάμεσα στις ερμηνείες, που βασίζεται σε τρεις βασικές έννοιες:

1. την έννοια της ίσης διαμέρισης ή ισοδιαμέρισης
2. την έννοια της μονάδας και
3. την έννοια της ποσότητας

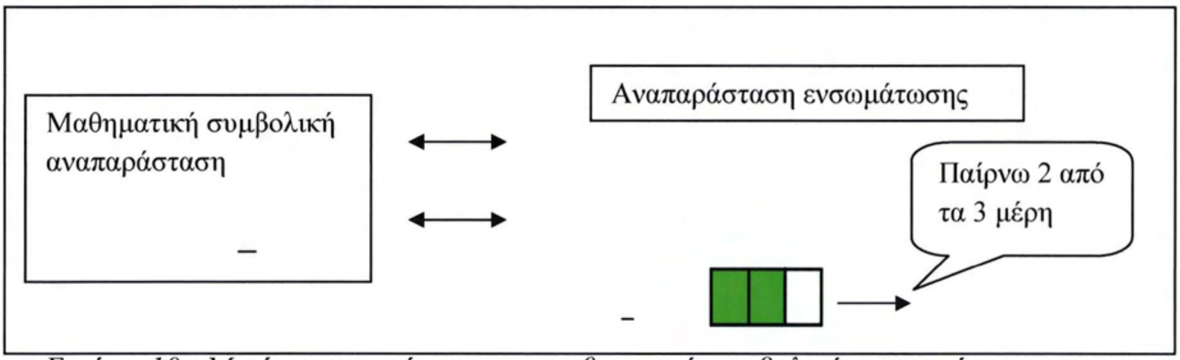
Η έννοια της ισοδιαμέρισης – διαίρεση ενός όλου σε συγκεκριμένο αριθμό μερών, τα οποία είναι ίσα, δεν επικαλύπτονται και εξαντλούν το όλο – είναι πρωτίστης σημασίας για τη συγκρότηση της έννοιας του κλάσματος. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε ότι συχνά παρομοιάζεται με τη σημασία που φέρει η απαρίθμηση για τους φυσικούς αριθμούς (Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011). Από την άλλη, η έννοια της μονάδας αποτελεί θεμελιώδη έννοια, καθώς από τον τρόπο που επιλέγονται και μετασχηματίζονται οι μονάδες προσδιορίζονται και οι διακρίσεις ανάμεσα στα διάφορα σχήματα του κλάσματος (Γιαννέλος, 2011˙ Δαφέρμος, 1998). Την ίδια στιγμή, η έρευνα των Stafylidou και Vosniadou (2004) επιβεβαιώνει την ανάγκη για ανάπτυξη της έννοιας της μονάδας, ενώ οι Baturo και Cooper (1999) αναφέρουν ότι η ικανότητα των παιδιών να ερμηνεύουν τα κλάσματα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αντίληψή τους για την κλασματική μονάδα. Πρέπει βέβαια, να σημειωθεί ότι η μονάδα αναφοράς του κλάσματος μπορεί να αποτελείται από ένα, από περισσότερα του ενός ή από μέρος ενός αντικειμένου. Τέλος, τα κλάσματα συνιστούν αναπαραστάσεις ποσοτήτων (Κολέζα, 2000). Το χαρακτηριστικό αυτό φέρει επικουρικό ρόλο σε μια πιο σφαιρική αντίληψη των κλασμάτων, δεδομένου ότι ενώ στους φυσικούς αριθμούς υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση με το πλήθος των αντικειμένων, στα κλάσματα μια απεικονιζόμενη ποσότητα μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικό κλάσμα ανάλογα με τη μονάδα αναφοράς. Για παράδειγμα, το  αντιστοιχεί στο ¼ αν η μονάδα αναφοράς είναι , στο 1/8 αν η μονάδα είναι . Ακόμη, ενώ στους φυσικούς κάθε αριθμός αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο πλήθος αντικειμένων, στα κλάσματα μια ποσότητα μπορεί να περιγράφεται με περισσότερα του ενός κλάσματα (Σταματόπουλος, 2011).

Πέραν, όμως όλων αυτών των βασικών σημείων για το κλάσμα, τις ερμηνείες που φέρει, τη σημασία που έχουν και τις μεταξύ τους συνισταμένες δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα κλάσματα δεν μπορούν να σταθούν μόνα τους. Αντιθέτως η παρουσίαση των κλασμάτων συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων, που ενισχύουν τη μαθησιακή διαδικασία και την εις βάθος εμπέδωση του φάσματος του κλάσματος. Τις αναπαραστάσεις αυτές θα μελετήσουμε εν συντομία στην επόμενη ενότητα.

2.3.2. Η έννοια του κλάσματος και οι αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία για τον κόσμο των Μαθηματικών και κατ' επέκταση και για την κατανόηση των κλασματικών εννοιών. Τη θέση αυτή προάγουν αρκετοί ερευνητές που τονίζουν το σημαντικό ρόλο των αναπαραστάσεων για την οικοδόμηση της έννοιας του κλάσματος και τον καθορισμό αυτού που διδάσκεται (Deliyianni & Gagatsis, 2013˙ Feenstra, etal., 2011˙ Gagatsis, etal., 2009˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Güçler, Park & McCrory, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Nicolaou & Pitta-Pantazi, 2010˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009˙ Χατζημανώλης, 2008˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012˙ Wong & Evans, 2007). Χαρακτηριστικά οι Πατσιομίτου και Εμβαλωτής (2009) αναφέρουν ότι *«οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σημαντικά εργαλεία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, γιατί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα»*. Επιπλέον, οι Lesh και Landau (1983, στο Χρυσανθακοπούλου, 2012) μίλησαν για τον καθοριστικό ρόλο των αναπαραστάσεων στη διευκόλυνση της κατανόησης και χρήσης των νοητικών σχημάτων των κλασμάτων, υποστηρίζοντας ότι οι τρόποι αναπαράστασης της έννοιας δίνουν τη δυνατότητα «μεταφράσεων» οι οποίες κάνουν τις ιδέες στο μυαλό των μαθητών να έχουν νόημα, καθώς η σκέψη και η κατανόηση του παιδιού περνάν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Από την άλλη, οι έρευνες της Lamon (2007, στο Güçler, Park&McCrory, 2009) επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές που «κινούνται» με άνεση κατά την επαφή με ερμηνείες του κλάσματος και με διάφορες αναπαραστάσεις κατακτούν και κατανοούν πλήρως την έννοια του κλάσματος.

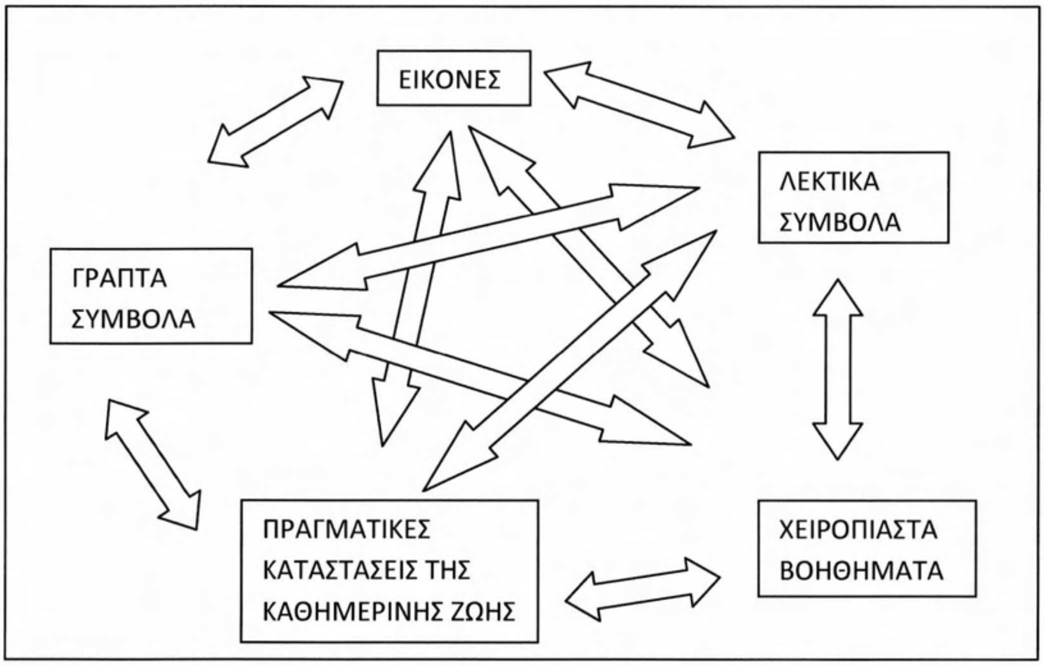
Στο σημείο αυτό, όμως, είναι απαραίτητο να ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο «αναπαράσταση». Η Κολέζα στο βιβλίο της *«Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»* (2000) υποστηρίζει ότι οι αναπαραστάσεις αποτελούν *«μεταφορικά συστήματα έκφρασης, δηλαδή, δανείζονται στοιχεία από μια περιοχή για να διασαφηνίσουν ή να διαφωτίσουν κάτι από μια άλλη περιοχή»*. Ανάλογη θέση έχουν και αρκετοί ερευνητές που συγκλίνουν στο ότι οι αναπαραστάσεις συμβολίζουν ή αναπαριστούν κάτι χρησιμοποιώντας μια σειρά εργαλείων, όπως εικόνες, πίνακες ή ζωγραφιές (Deliyianni & Gagatsis, 2013˙ Marcou&Gagatsis, 2002˙ Κουλέτση, 2010˙ Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χατζημανώλης, 2008). Μια εξίσου σημαντική έννοια για τις αναπαραστάσεις που οδηγεί σε κατάκτηση της γνώσης, είναι αυτή η διαδικασία της μετάφρασης. Ειδικότερα, με τον όρο αυτόν εννοείται η διαδικασία μετακίνησης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη (Marcou&Gagatsis, 2002˙ Παντσίδης, 2006). Χαρακτηριστικά, η έρευνα των Deliyianni και Gagatsis (2013) καταδεικνύει ότι η ευελιξία στην μετακίνηση εντός πολλαπλών αναπαραστάσεων έχει σημαντικό στην κατανόηση των κλασμάτων, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Ωστόσο, η μετακίνηση δεν είναι μια απλή διαδικασία, καθώς όπως επιβεβαιώνει και η έρευνα των Marcou και Gagatsis (2002) η ικανότητα των μαθητών να μεταφέρονται από την μια αναπαράσταση στην άλλη είναι φτωχή, με αποτέλεσμα να μην είναι ικανοί να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ των ερμηνειών και να μην κατανοούν εις βάθος την ιδέα του κλάσματος. Ανάλογα είναι και τα ευρήματα στην έρευνα των Deliyianni και Gagatsis (2013). Επιπλέον, έρευνα Marcou και Gagatsis (2002) έκανε φανερό ότι η μετακίνηση από τη διαγραμματική στη συμβολική αναπαράσταση είναι πιο διαχειρίσιμη από τους μαθητές έναντι της μετακίνησης από την προφορική στη διαγραμματική αναπαράσταση. Για να επιτύχουν, βέβαια, οι μαθητές στη διαδικασία της μετάφρασης θα πρέπει να γνωρίζουν πώς αναπαρίστανται τα κλάσματα με τη χρήση εικόνων και χειριστικών αντικειμένων.



Εικόνα 10: Μετάφραση ανάμεσα στη μαθηματική συμβολική αναπαράσταση και την αναπαράσταση ενσωμάτωσης

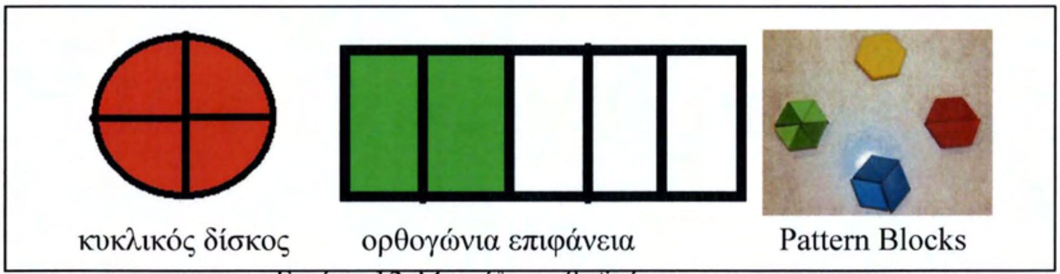
Προτού, όμως, προχωρήσουμε σε μια περιγραφή βασικών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα, πρέπει να τονιστεί ότι κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί μεμονωμένα, καθώς οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε εξαιρετικά δομημένα συστήματα και είτε έχουν έναν υποκειμενικό χαρακτήρα είτε έναν πιο συμβατικό και πολιτισμικό (Χατζημανώλης, 2008). Την ίδια στιγμή, κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας του κλάσματος, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται, ενώ μπορούν να αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο και όχι σε διαφορετικά είδη αριθμών (Παντσίδης, 2006). Για το λόγο αυτό, είναι πολλοί οι ερευνητές που θέτουν τη χρήση πολλών διαφορετικών αναπαραστάσεων και μοντέλων ως βασικό στοιχείο για την υποστήριξη των παιδιών κατά την κατασκευή της έννοιας του κλάσματος (Deliyianni & Gagatsis, 2013˙ Feenstra, etal., 2010˙ Gagatsis, etal., 2009˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000). Παρόλα αυτά, είναι αρκετές και οι καταγραφές που επιβεβαιώνουν τις δυσκολίες των μαθητών στη διαχείριση των σχετικών αναπαραστάσεων. Ειδικότερα, η έρευνα των Marcou και Gagatsis (2002), έκανε φανερό ότι οι μαθητές δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι οι διάφορες αναπαραστάσεις συνιστούν διαφορετικούς τρόπους έκφρασης της ίδιας ιδέας, αλλά θεωρούν ότι κάθε αναπαράσταση αφορά μια συγκεκριμένη ιδέα. Παράλληλα, ο Χατζημανώλης αναφέρει ότι διάφορες έρευνες έχουν δείξει ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού θεωρούνται από τα παιδιά ότι αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς. Ανάλογες έρευνες παρουσιάζει και η Κολέζα (2000), ενώ ο Γαγάτσης κ.συν. (2006) τονίζουν τις παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών κατά τον χειρισμό των αναπαραστάσεων, καθώς όπως συμπεραίνουν οι μαθητές επικεντρώνονται στην ίδια την αναπαράσταση του αντικειμένου και όχι στην έννοια του κλάσματος. Διαπιστώνοντας αυτές τις δυσκολίες ο Gagatsis, etal. (2009) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές οφείλουν να χειριστούν τα κλάσματα μέσα από τις αναπαραστάσεις, αλλά και να μπορούν να μεταφέρονται από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, ώστε να κατακτήσουν την έννοια του κλάσματος και να δημιουργήσουν υψηλές συνδέσεις μεταξύ των ερμηνειών.

Για την αναπαράσταση λοιπόν, των κλασμάτων καταγράφονται στη βιβλιογραφία μια σειρά διαφορετικών ειδών αναπαράστασης. Έτσι, ο Γαγάτσης και οι συνεργάτες του (2006) αναφέρουν ότι για τη διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται κυρίως χρήση εικονικών και διαγραμματικών αναπαραστάσεων, που προσφέρουν στους μαθητές τη δυνατότητα οπτικής επεξεργασίας των δεδομένων. Από την άλλη, ο Van de Walle (2007) κάνει λόγο για μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων. Τα μοντέλα αυτά είναι 3: τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού, τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης και τα μοντέλα συνόλων. Την ίδια στιγμή, η Κολέζα (2000) καταγράφει το μοντέλο της αριθμογραμμής, καθώς και τα διακριτά και συνεχή μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων. Μπορούμε να πούμε ότι τα μοντέλα που σημειώνει η Κολέζα συγκλίνουν με αυτά του Van de Walle, αφού το μοντέλο της αριθμογραμμής παραπέμπει στο αντίστοιχο μοντέλο μήκους, ενώ τα συνεχή μοντέλα περικλείουν μοντέλα εμβαδού ή μέτρησης και τα διακριτά περικλείουν μοντέλα συνόλων. Δηλαδή, η Κολέζα κατηγοριοποιεί τις αναπαραστάσεις με μια πιο ευρεία διάσταση βασισμένη στο αν αναπαριστώνται διακριτές ή συνεχείς ποσότητες. Για διακριτά και συνεχή μοντέλα αναπαράστασης κάνει λόγο και η Κουλέτση (2010), η οποία παραθέτει θέσεις που συμπίπτουν με αυτές της Κολέζα και του Σταματόπουλου, ενώ και οι Τριανταφυλλίδης και Σδρόλιας (2007) αναφέρονται στα μοντέλα εμβαδού, μήκους, συνόλων ή διακριτών αντικειμένων ως τα μοντέλα εκείνα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την αναπαράσταση των κλασμάτων. Τέλος, η Χρυσανθακοπούλου (2012) παραθέτει τη πρόταση των Lesh και Landau, που προτείνουν ένα «διαδραστικό» μοντέλο για τα συστήματα αναπαράστασης (*Εικόνα 11*), όπου δίνεται σημασία τόσο στο κάθε ένα σύστημα από αυτά ξεχωριστά, αλλά και στις μεταξύ τους μεταφράσεις και αλληλεπιδράσεις.



Εικόνα 11: Το διαδραστικό μοντέλο των Lesh και Landau

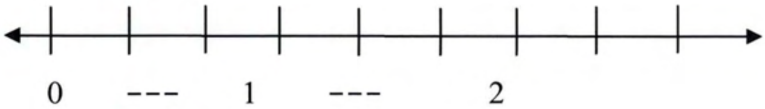
Αναλύοντας τα μοντέλα, όπως αυτά παρουσιάζονται από την Κολέζα (2000) και τον Σταματόπουλο (2011), διαπιστώνουμε ότι στα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού περιλαμβάνονται ορθογώνιες επιφάνειες, κυκλικοί δίσκοι, γεωπίνακες, διάστικτοι καμβάδες, pattern blocks, διπλωμένο χαρτί. Σε αυτά τα μοντέλα μια επιφάνεια αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, η οποία διαιρείται σε ίσα μέρη. Μερικά παραδείγματα μοντέλων περιοχής ή εμβαδού φαίνονται στην εικόνα της επόμενης σελίδας.



Εικόνα 12:Μοντέλα εμβαδού

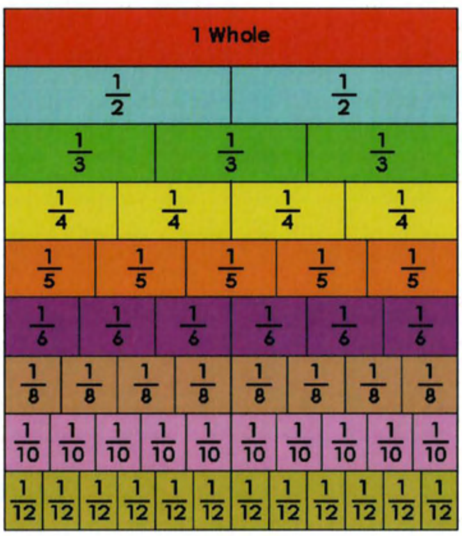
Τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης δεν έχουν μεγάλες διαφορές από τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού. Η βασική διαφορά συνίσταται στο ότι στα μοντέλα μήκους συγκρίνουμε μήκη, ενώ στα μοντέλα εμβαδού συγκρίνουμε εμβαδά (Σταματόπουλος, 2011). Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται οι λωρίδες κλασμάτων, ευθύγραμμα τμήματα, διπλωμένες λωρίδες χαρτιού και η αριθμογραμμή. Μοντέλα αυτής της κατηγορίας φαίνονται στα παρακάτω σχήματα της επόμενης σελίδας.

ευθύγραμμα τμήματα

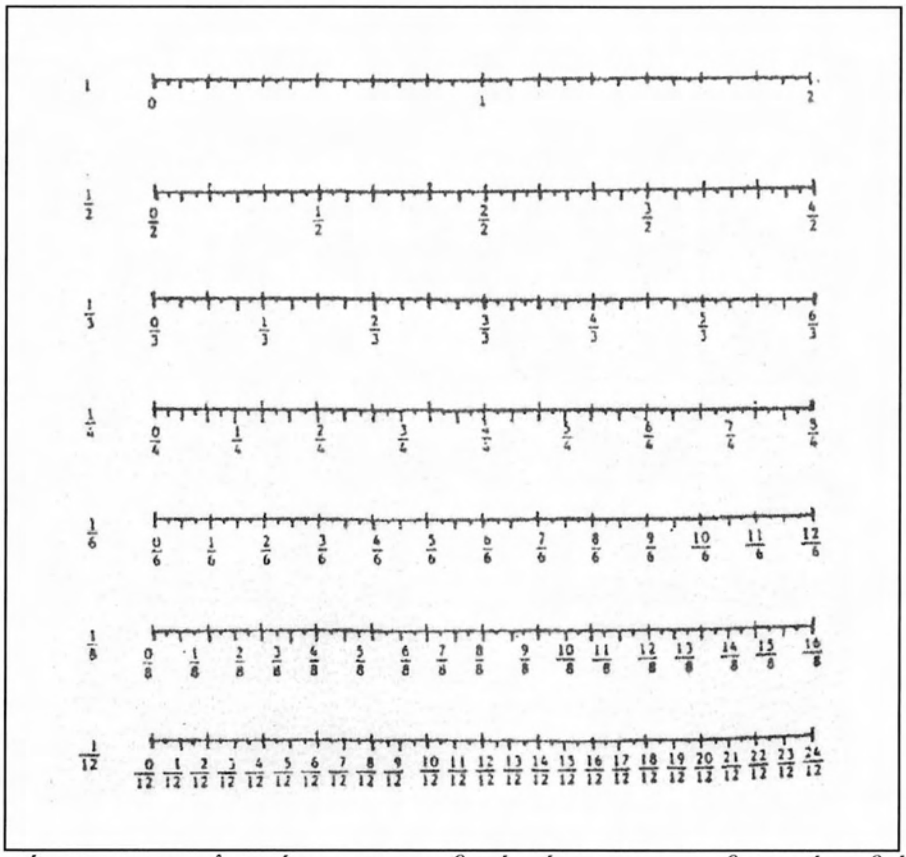


αριθμογραμμή

Εκτός των παραπάνω μοντέλων παρουσίασης της αριθμογραμμής, υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος. Συγκεκριμένα, το «κουτί των κλασμάτων» (Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011) συνιστά μια δημιουργική δραστηριότητα για τα παιδιά, που διευκολύνει με ευχάριστο τρόπο την κατανόηση του κλάσματος. Στην ακόλουθη εικόνα παρουσιάζεται ένα μέρος του κουτιού.



Εικόνα 13:Το κουτί των κλασμάτων

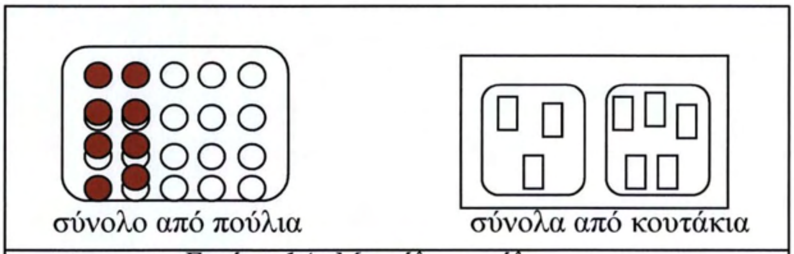


Η αναπαράσταση των κλασμάτων ως αριθμοί πάνω στην αριθμητική ευθεία (από Κολέζα 2000)

Όπως έχουμε αναφέρει, όμως, η αριθμογραμμή συνδέεται άμεσα με την οπτική αναπαράσταση της ερμηνείας του κλάσματος ως «μέτρο». Για αυτό το λόγο η Κολέζα (2000) διακρίνει την αριθμογραμμή ως ένα «μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων», το οποίο μάλιστα είναι απαραίτητο για την κατανόηση όχι μόνο της ερμηνείας του «μέτρου» αλλά για όλο το φάσμα των ερμηνειών, καθώς και για την κατανόηση των πράξεων με κλάσματα. Η ανάδειξη της αριθμογραμμής ως ένα ξεχωριστό μοντέλο αναπαράστασης έγκειται στις διαφορές που έχει με τα άλλα μοντέλα. Ειδικότερα, η Κολέζα (2000) καταγράφει τρεις διαφορές: α) το μοντέλο αυτό είναι συνεχές, δεν υπάρχει δηλαδή, διαχωρισμός μεταξύ των μονάδων, β) ένα σημείο της αριθμογραμμής δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δυο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς και γ) η αριθμογραμμή εμπεριέχει την ιδέα της επανάληψης της μονάδας, αλλά και της διαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων. Έτσι, καταλήγουμε στο ότι η αριθμογραμμή απαιτεί συνδυασμό μεταξύ οπτικής και συμβολικής αναπαράστασης.

Οι ιδιότητες αυτές της αριθμογραμμής ως μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων, την καθιστούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο όχι μόνο για την ανάπτυξη της ερμηνείας του «μέτρου», αλλά και για ανάπτυξη και κατανόηση και των υπόλοιπων ερμηνειών. Ωστόσο, οι ίδιες αυτές ιδιότητες προκαλούν και δυσκολίες στα παιδιά, καθώς δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τη μονάδα αναφοράς ή να χειριστούν τη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011). Από τη άλλη, όμως, η αριθμογραμμή ως εργαλείο αναπαράστασης εγκαθιδρύει και ενισχύει όχι μόνο τις ερμηνείες, αλλά και την κατανόηση βασικών εννοιών για το κλάσμα, όπως τη διάταξη των κλασμάτων, τα ισοδύναμα κλάσματα, καθώς και την εκτέλεση πράξεων με κλάσματα (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Κολέζα, 2000˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006).

Στην τελευταία διάκριση κατά τον Van de Walle, περιλαμβάνονται τα μοντέλα συνόλων. Σε αυτά τα μοντέλα αναπαράστασης περιέχονται διάφορα σύνολα αντικειμένων. Σε αυτά, το σύνολο αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, ενώ τα μέρη εκφράζονται με υποσύνολα του αρχικού συνόλου (Σταματόπουλος, 2011). Παραδείγματα μοντέλων συνόλων απεικονίζονται παρακάτω.



Εικόνα 14: Μοντέλο συνόλων

Ωστόσο, είναι ανάγκη να αναφέρουμε μια βασική διαφορά ανάμεσα στα μοντέλα. Ειδικότερα, η κλασματική μονάδα στα συνεχή μοντέλα εμβαδού είναι ένα ενιαίο τμήμα της συνολικής επιφάνειας, ενώ στο διακριτό μοντέλο των συνόλων η μονάδα δύναται να είναι ένα αντικείμενο ή περισσότερα (Κολέζα, 2000). Τα διακριτά μοντέλα προϋποθέτουν την αντίληψη ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων ως μια οντότητα. Επιπλέον, τα αντικείμενα σε ένα τέτοιο μοντέλο, εκτός του ενδεχόμενου να είναι περισσότερα του ενός, μπορεί να είναι όμοια ή διαφορετικά μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό, οι έρευνες έχουν δείξει ότι η διαχείριση μιας συνεχής αναπαράστασης είναι ευκολότερη από ότι μιας διακριτής αναπαράστασης (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Hunting, 1986˙ Κολέζα, 2000)

Από την παραπάνω σύντομη περιγραφή των μοντέλων που συνήθως χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι στα μοντέλα περιλαμβάνονται τόσο εικονικές αναπαραστάσεις όσο και διάφορα υλικά. Το ποια αναπαράσταση ή ποιο υλικό θα επιλέξουμε εξαρτάται κάθε φορά από τη διαφορετική μορφή που παίρνει ένα κλάσμα (μέρος-όλου, λόγος, μέτρο, κλπ) και που επιδιώκουμε να διδάξουμε. Για παράδειγμα, η αναδίπλωση του χαρτιού μπορεί να είναι ο τέλειος τρόπος αναπαράστασης κλάσματος όταν πρόκειται για τις σχέσεις μέρος-όλου ή για τα ισοδύναμα κλάσματα, αλλά μπορεί να αποπροσανατολίσει τελείως την κατανόηση των μαθητών όταν πρόκειται για πρόσθεση κλασμάτων. Επιπρόσθετα, ένα συγκεκριμένο μοντέλο που βοηθά στην κατανόηση ένα παιδί, μπορεί να μην είναι το ίδιο αποδοτικό για την κατανόηση του ίδιου νοητικού σχήματος σε ένα άλλο παιδί ή ακόμη, να μην είναι αποδοτικό για την κατανόηση άλλου νοητικού σχήματος κλάσματος από το ίδιο παιδί. Έτσι, τίθεται ως στόχος η αναγνώριση εκείνων των μοντέλων και υλικών, των οποίων η δομή ταιριάζει στη δομή του συγκεκριμένου νοητικού σχήματος του κλάσματος το οποίο διδάσκεται.

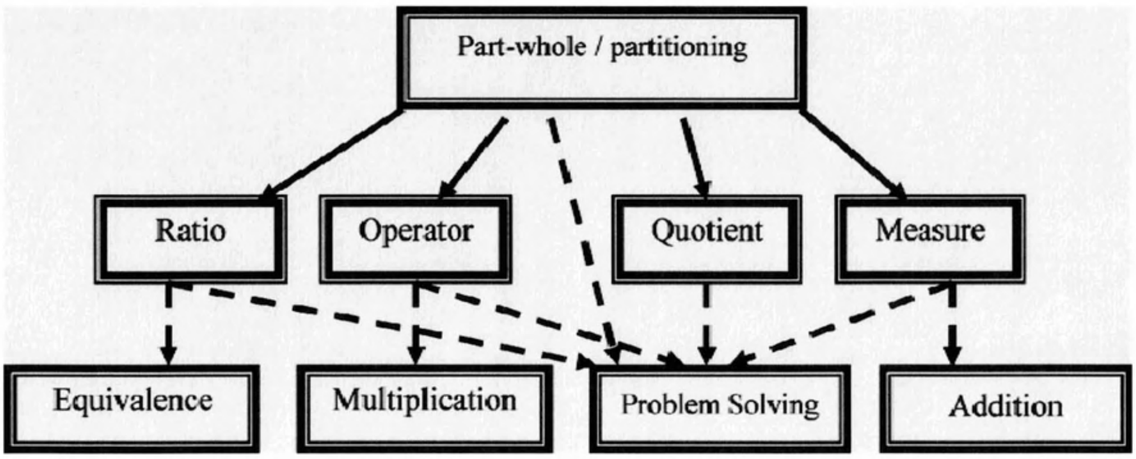
Σύμφωνα λοιπόν και με τη βιβλιογραφία, οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται κατά κόρον για τη διδασκαλία τηςέννοιας των κλασμάτων είναι αναπαραστάσεις μοντέλων εμβαδού ή μέτρησης (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000) και τα διακριτά μοντέλα συνόλων (Κολέζα, 2000). Την ίδια στιγμή, λόγω του ότι τα μοντέλα επιφάνειας ή εμβαδού θωρούνται πιο εύκολα στη χρήση από τα διακριτά μοντέλα, πραγματοποιείται μια εκτεταμένη χρήση αυτών κατά τη διδασκαλία (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011), που ενδέχεται να περιορίσει την αντίληψη των μαθητών για την έννοια του κλάσματος. Ένας γενικότερος, επίσης, περιορισμός που υπάρχει στη χρήση μοντέλων για τη διδασκαλία των κλασμάτων είναι ότι τα διάφορα μοντέλα δεν διαθέτουν εγγενή μαθηματικά χαρακτηριστικά που να παραπέμπουν άμεσα στις μαθηματικές έννοιες (Σταματόπουλος, 2011) και γι' αυτό οι μαθητές είναι δυνατόν να δημιουργήσουν διαφορετικό νόημα από αυτό που η χρήση του μοντέλου υποδεικνύει. Το γεγονός αυτό, όπως προαναφέραμε, καταγράφεται σε μια σειρά ερευνών σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν την κάθε αναπαράσταση σαν κάτι μεμονωμένο, που αναφέρεται σε συγκεκριμένη έννοια του κλάσματος. Έτσι, η απλή παρουσίαση αναπαραστάσεων για τα κλάσματα δεν εξασφαλίζει την αποτελεσματικότητά τους, αφού για να κατανοηθούν σωστά από τους μαθητές θα πρέπει να συνδυάζονται με το ανάλογο διδακτικό πλαίσιο. Ο τρόπος παρουσίασης της αναπαράστασης, η γλώσσα που θα χρησιμοποιηθεί, η σύνδεση της αναπαράστασης με το αντικείμενο μελέτης αλλά και με άλλα αντικείμενα ή αναπαραστάσεις, θα αποτελέσουν ένα θετικό πλαίσιο για την κατανόηση τόσο της έννοιας που διδάσκεται όσο και της αναπαράστασης ή των αναπαραστάσεων με τις οποίες εκφράζεται.

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι εάν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των κλασμάτων επικεντρωνόμαστε σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο αναπαράστασης, τότε αναπόφευκτα θα οδηγούμαστε σε ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000˙ Marcou&Gagatsis, 2002). Και αυτό γιατί, αυτή η έμφαση σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις περιορίζει το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών, οι οποίοι θα παραμένουν προσκολλημένοι σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις που δεν ενισχύουν την πλήρη κατάκτηση των ερμηνειών και κατ' επέκταση την ολόπλευρη ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος. Απώτερος στόχος, λοιπόν, της διδασκαλίας οφείλει να είναι η αποδέσμευση του κλάσματος από κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο αναπαράστασης, μέσα από την επανειλημμένη χρήση των κλασμάτων σε διάφορα πλαίσια αναπαράστασης, ώστε τελικά οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι αυτό που κάθε φορά μένει σταθερό είναι η έννοια του κλάσματος, να αποδεσμεύσουν το κλάσμα από τις διάφορες αναπαραστάσεις και να κατασκευάσουν το τυπικό μαθηματικό περιεχόμενο του κλάσματος

2.2.3. Οι μέθοδοι διδασκαλίας του κλάσματος

Λαμβάνοντας υπόψη μας όσα μελετήσαμε μέχρι τώρα για το κλάσμα, τις ερμηνείες που φέρει και τους τρόπους αναπαράστασης αυτού, διαπιστώνουμε το σημαντικό ρόλο που φέρει κάθε φορά ο τρόπος διδασκαλίας αυτών των εννοιών για την απόκτησή τους. Ωστόσο, η διδασκαλία και κατ' επέκταση η κατανόησή των κλασμάτων και των αναπαραστάσεών τους δεν είναι μια εύκολη υπόθεση, καθώς όπως έχουμε προαναφέρει, η πολύπλευρη διάσταση της έννοιας του κλάσματος με τις ποικίλες ερμηνείες καθίσταται πρωταρχικός παράγοντας δυσκολίας και πολυπλοκότητας. Παρόλα αυτά, είναι αρκετοί οι ερευνητές που μελέτησαν διάφορους τρόπους διδασκαλίας της έννοιας του κλάσματος και κατέγραψαν σημαντικές σχετικές παρατηρήσεις, με σκοπό να προάγουν μια όσο το δυνατόν πληρέστερη διδασκαλία του κλάσματος.

Έχουμε τονίσει και σε άλλα σημεία αυτής της εργασίας ότι η ανάπτυξη του κλάσματος ως «μέρος-όλου» είναι πρωτίστης σημασίας τόσο για την ανάπτυξη και των άλλων ερμηνειών όσο για την κατανόηση του κλάσματος και των σχετικών με αυτό διαδικασιών (πράξεις, σύγκριση και διάταξη, κ.ο.κ). Κατανοώντας αυτή την ιδιαίτερη σημασία του «μέρος-όλου» οι Behr, Lesh, Post και Silver το 1983 (στο Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ στο Charalambous&Pitta-Pantazi, 2005˙ στο Κουλέτση, 2010) πρότειναν ένα θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας (*Εικόνα 15*) που συνδέει τις διαφορετικές ερμηνείες με τις βασικές λειτουργίες των κλασμάτων και την επίλυση προβλημάτων. Τα συμπαγή βέλη της εικόνας υποδηλώνουν σχέσεις μεταξύ κλασματικών ερμηνειών και πράξεων, ενώ τα διακεκομμένα υποδηλώνουν υποτιθέμενες σχέσεις.



Εικόνα 15: Το θεωρητικό μοντέλο των Behr, Lesh, Post και Silver που συνδέει τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος με τις πράξεις και την επίλυση προβλημάτων.

Μια προσεκτικότερη εξέταση του παραπάνω διαγράμματος αποκαλύπτει μια σειρά βασικών παρατηρήσεων. Πρώτον, για άλλη μια φορά σημειώνεται η ερμηνεία του «μέρος-όλου» μαζί με την έννοια της ισοδιαμέρισης ως θεμελιώδους σημασίας για την ανάπτυξη της κατανόησης των υπόλοιπων τεσσάρων ερμηνειών των κλασμάτων. Δεύτερον, το διάγραμμα δείχνει ότι η ερμηνεία του «λόγου» θεωρείται ως ο πιο «φυσικός» τρόπος για την προώθηση και τη διδασκαλία της έννοιας της ισοδυναμίας και ακολούθως για την εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων. Από την άλλη, οι ερμηνείες του «τελεστή» και του «μέτρου» καθίστανται χρήσιμες για την ανάπτυξη της κατανόησης του πολλαπλασιασμό και της πρόσθεση των κλασμάτων αντίστοιχα. Τέλος, η κατανόηση και των πέντε ερμηνειών του κλάσματος θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχή επίλυση των σχετικών με τα κλάσματα προβλημάτων.

Το μοντέλο αυτό μελετούν και επιβεβαιώνουν οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007, 2005) με την διεξαγωγή μιας έρευνας σε 646 μαθητές Πέμπτης και Έκτης Δημοτικού στην Κύπρο. Ειδικότερα, κάποιοι από τους στόχους της έρευνας είναι ο εντοπισμός ενδεχόμενων διαφορών στις επιδόσεις των μαθητών στις διάφορες ερμηνείες, αλλά και η εξέταση εκείνου του βαθμού επίδοσης που αντανακλά το θεωρητικό μοντέλο των Behr, Lesh, Post και Silver. Τα ευρήματα, λοιπόν, της έρευνας κατέδειξαν ότι οι μαθητές απέδιδαν καλύτερα σε δραστηριότητες σχετικές με την ερμηνεία του «μέρος-όλου», ενώ οι αποδόσεις τους ήταν χαμηλότερες στην περίπτωση της ερμηνείας του «μέτρου». Έτσι, οι ερευνητές τονίζουν ότι τα αποτελέσματα αυτά αντανακλούν τη διαφορετική έμφαση που δίνεται στην εκάστοτε ερμηνεία κατά τη διαδικασία διδασκαλίας.

Όσον αφορά τα ευρήματα για το σχετικό μοντέλο διδασκαλίας, αυτά επιβεβαιώνουν την κυριαρχία και δικαιολογούν την τοποθέτηση του «μέρος-όλου» στην κορυφή του μοντέλου, καθώς διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο για την κατανόηση της πολύπλευρης διάστασης του κλάσματος. Χαρακτηριστικά αναφέρουν (2005, σελ. 2-238) ότι *«τα ευρήματα δικαιολογούν την παραδοσιακή προσέγγιση διδασκαλίας με τη χρήση αυτής της ερμηνείας (του «μέρος-όλου») ως ένα τρόπο διδασκαλίας των κλασμάτων»*. Την ίδια στιγμή, η έρευνα καταδεικνύει ότι η κυριαρχία αυτής της πτυχής της έννοιας του κλάσματος συνηγορεί στην ερμηνεία διαφορετικού ποσοστού των υπολοίπων πτυχών: σε μεγάλο βαθμό του «λόγου»και του «τελεστή»και σε πολύ μικρότερου του *«πηλίκου»* και του «μέτρου». Οι αξιοσημείωτες διαφορές στα ποσοστά διακύμανσης ανάμεσα στη χρήση των διάφορων ερμηνειών μπορεί κατά τους Charalambous και Pitta-Pantazi να δικαιολογείται από τη διαφορετική έμφαση που δίνεται στη διδασκαλία για την κάθε ερμηνεία. Εκτός αυτής της προφανής έμφασης, οι ερευνητές καταγράφουν τρεις εξίσου σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν και δικαιολογούν σε κάποιο βαθμό όχι μόνο την απόδοση των μαθητών στις ποικίλες δραστηριότητες με σχήματα κλασμάτων, αλλά και την έμφαση στην ερμηνεία «μέρος-όλου».

Αρχικά, σημειώνουν ότι βασικές ιδέες, όπως η σύγκριση ποσοτήτων, είναι ενσωματωμένες στις ερμηνείες του «μέρος-όλου», του «λόγου» και του «τελεστή», ενώ οι ίδιες αυτές ιδέες δεν απαιτούνται για την κατανόηση των άλλων δυο ερμηνειών. Επιπλέον, οι ερμηνείες του «μέτρου» και του «πηλίκου» μπορούν να διδαχθούν και να κατανοηθούν και με τη χρήση άλλων ιδεών, όπως με την έννοια της κλασματικής μονάδας, που δεν περικλείονται στο παρόν μοντέλο διδασκαλίας. Τέλος, ακόμα και αν οι μαθητές καλλιεργήσουν μια ικανοποιητική αντίληψη για το κλάσμα μέσω του «μέρος-όλου», μπορεί να εξακολουθούν να έχουν δυσκολίες στην κατανόηση του «μέτρου» και του «πηλίκου». Παρά τους ποικίλους, λοιπόν, παράγοντες που συνδράμουν στην έμφαση και χρήση των εκάστοτε ερμηνειών, τα ερευνητικά αποτελέσματα συγκλίνουν στο ότι η ερμηνεία του «μέρος-όλου» πρέπει να θεωρείται αναγκαία για τη διδασκαλία και αντίληψη του κλάσματος, αλλά όχι απαραίτητη συνθήκη για την κατανόηση και των υπόλοιπων ερμηνειών ή ιδεών για τα κλάσματα.

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι το θεωρητικό μοντέλο διδασκαλίας των κλασμάτων των Behr, Lesh, Post και Silver συνιστά ένα μόνο πρώτο σχεδιασμό για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Αναμφίβολα η δομή του μοντέλου είναι απλή, σαφής και διευκολύνει τη μετάδοση των σχετικών γνώσεων και όπως επιβεβαίωσαν οι Charalambous και Pitta-Pantazi ανταποκρίνεται στη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών ερμηνειών και στον τρόπο που αυτές συνδέονται με βασικές έννοιες των κλασμάτων. Ωστόσο, κατά τη χρήση του χρειάζεται προσοχή, ώστε να μην δίνεται περισσότερη βαρύτητα στην ερμηνεία του «μέρος-όλου» επειδή αποτελεί τη βάση του μοντέλου. Ανάλογη έμφαση θα πρέπει να παρέχεται σε όλα τα σχετικά σχήματα του κλάσματος, ώστε να δομηθεί μια ενιαία αντίληψη για το κλάσμα που θα εμπεριέχει και τις πέντε ερμηνείες, τις μεταξύ τους σχέσεις, καθώς και τις σχέσεις όλων των ερμηνειών με βασικές κλασματικές έννοιες και πράξεις.

Από την άλλη, ο Γαγάτσης κ.συν. (2006) υποστηρίζει ότι για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων απαιτείται η έμφαση στις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών με σκοπό μία ολοκληρωμένη οικοδόμηση της έννοιας του κλάσματος μέσα από την τακτική εναλλαγής αναπαραστάσεων. Δηλαδή, προτείνει μια αρχική έμφαση στην αντιμετώπιση του κλάσματος ως «μέρος-όλου» – μιας και είναι πιο οικεία ιδέα για τους μαθητές – που θα οδηγεί στις άλλες τέσσερις ερμηνείες με τη βοήθεια εικονικών, συμβολικών και λεκτικών αναπαραστάσεων. Έμφαση, όμως, στις εμπειρίες και την άτυπη γνώση των μαθητών δίνει και η Κολέζα (2000), καθώς υποστηρίζει ότι η σύνδεση των συμβολικών αναπαραστάσεων με καταστάσεις, διαδικασίες ή/και μοντέλα που έχουν νόημα για τα παιδιά ή συνιστούν προσωπικές εμπειρίες θα βοηθήσουν στο να καταστεί αντιληπτό το νόημα των συμβόλων και διαδικασιών που χαρακτηρίζουν τα κλάσματα.

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε τον τρόπο σκέψης του Γαγάτση και των συνεργατών του όπως αυτός καταγράφεται στα Πρακτικά του 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου (2006, σελ. 108):
«*Στη βάση λοιπόν αυτή, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο διδασκαλίας, το οποίο να πλησιάζει τη σκέψη των παιδιών. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να ξεκινά από την ορθή αντίληψη των παιδιών, ότι ο χωρισμός επιφάνειας ή αντικειμένων βασίζεται κατά κανόνα στη δίκαιη μοιρασιά-μοιράζω σε ίσα μέρη. Από εκεί και πέρα μπορούμε να κτίσουμε πάνω σε αυτό, ζητώντας από τους μαθητές να ασκηθούν σε αυτό, χρησιμοποιώντας όχι μόνο μοντέλα αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας αλλά και μη*

ομοιόμορφο υλικό. Με άλλα λόγια κατά τον διαμερισμό μιας επιφάνειας θα μπορούσε να χρησιμοποιείται όχι μόνο ο συνήθης χωρισμός γεωμετρικών σχημάτων σε ίσα μέρη αλλά και ο συνδυασμός διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων, όπως τρίγωνα, τετράγωνα, ορθογώνια. Έτσι λοιπόν, τα παιδιά θα αντιληφθούν ότι μπορούμε να έχουμε μέρη ίσα μεταξύ τους, αλλά και μέρη ισοδύναμα σε μέγεθος, που να αναπαριστούν την ίδια ποσότητα. [...]Θα πρέπει να δίνεται έμφαση στη διδασκαλία μέσω της αριθμητικής γραμμής και έμφαση στη διδασκαλία και αξιολόγηση της μάθησης με αριθμητική γραμμή. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής βοηθά στον εντοπισμό παρανοήσεων των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος και τη μονάδα αναφοράς συμβάλλοντας έτσι τόσο στην κατανόηση της έννοιας, όσο και στις πράξεις με κλάσματα. [...]Σε κάθε βήμα θα πρέπει να τονίζονται συνειδητά οι σχέσεις με προηγούμενα διδαχθέντα σημεία και τυχόν ομοιότητες με τη δομή του συστήματος και των πράξεων των ακεραίων, ώστε να διευκολύνεται η οικοδόμηση συσχετιστικής και κατ' επέκταση εννοιολογικής κατανόησης για τα κλάσματα (σύνδεση εννοιολογικής-διαδικαστικής γνώσης)».

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το μοντέλο αυτό συγκλίνει σε κάποια σημεία με το προαναφερθέν. Έτσι, η διδασκαλία του κλάσματος σε αυτό το μοντέλο ξεκινά με αφετηρία περιπτώσεις ισοδιαμέρισης οικείων καταστάσεων για τα παιδιά. Η διαδικασία, όμως, της ισοδιαμέρισης παραπέμπει κατά κύριο λόγο στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Συνεπώς, και αυτό το μοντέλο έχει ως βάση για την ανάπτυξη της κλασματικής ιδέας το «μέρος-όλου». Αυτό που διαφοροποιεί αυτό το μοντέλο από το προηγούμενο, είναι η έμφαση που δίνει στην προϋπάρχουσα γνώση την οποία «εκμεταλλεύεται» για να εισάγει νέες ερμηνείες και έννοιες. Επίσης, στο μοντέλο αυτό διαπιστώνεται ιδιαίτερη έμφαση και στη χρήση ποικίλων αναπαραστάσεων, που αποσκοπούν να εδραιώσουν ποικιλοτρόπως τις κλασματικές ιδέες.

Πέραν, όμως των προτεινόμενων μοντέλων για τη διδασκαλία των κλασμάτων εγείρεται μια ακόμα σημαντική διάσταση για την οργάνωση της σχετικής διδασκαλίας. Ειδικότερα, το ζήτημα που τίθεται αφορά την επιλογή του μέσου, δηλαδή του τρόπου αναπαράστασης, που θα χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή, διδασκαλία, εφαρμογή και εμπέδωση του κλάσματος. Έτσι, οι στόχοι σε μια συγκεκριμένη διδασκαλία ενδέχεται να είναι ίδιοι και αυτό που να διαφοροποιείται να είναι τα διαφορετικά μέσα που αξιοποιούνται για την επίτευξη του στόχου. Κατά κύριο λόγο, λοιπόν, μιλάμε για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες που αξιοποιούνται για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Η έμφαση σε αυτή τη διάκριση των ποσοτήτων είναι σημαντική, καθώς όπως έχει ξαναειπωθεί σε αυτή την εργασία, οι ενέργειες που πραγματοποιούνται για το χωρισμό συνεχών ποσοτήτων είναι διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιούνται για το διαχωρισμό διακριτών ποσοτήτων. Επομένως, οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα μπορεί να είναι διαφορετικές αν η διδασκαλία δώσει έμφαση σε ένα από τα δυο είδη ποσοτήτων (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Hunting, 1986˙ Κολέζα, 2000).

Στο σχολείο, η διδασκαλία των κλασμάτων βασίζεται κυρίως σε συνεχή μοντέλα, δίνοντας με αυτό τον τρόπο έμφαση στην «ισότητα» των μερών του «όλου» (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000). Τα συνεχή μοντέλα επιτρέπουν επαναλαμβανόμενες και απεριόριστων επιλογών υποδιαιρέσεις. Αντιθέτως, ένα διακριτό μοντέλο επιτρέπει την εφαρμογή άτυπων στρατηγικών μοιράσματος που δεν τονίζουν τόσο το «όλο», προσφέροντας έτσι, μια διευρυμένη αντίληψη του κλάσματος, αναδεικνύοντας την ισοδυναμία των μερών και διευκολύνοντας το πέρασμα στην ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος». Επιπλέον, ένα διακριτό μοντέλο δεν προσφέρεται για μια «κατά γράμμα» ερμηνεία του κλάσματος (Κολέζα, 2000). Για παράδειγμα, σε ένα συνεχές μοντέλο διδασκαλίας το κλάσμα $\frac{1}{4}$ σημαίνει «ένα από τα τέσσερα», ενώ το ίδιο κλάσμα σε ένα διακριτό μοντέλο μπορεί να σημαίνει «τέσσερα από τα δεκαέξι».

Λαμβάνοντας υπόψη τους αυτές τις σημαντικές παρατηρήσεις, η Κολέζα (2000) και ο Γαγάτσης κ.συν. (2006) τονίζουν ότι κάθε φορά η επιλογή του μοντέλου διδασκαλίας που αφορά τις ποσότητες που θα αξιοποιηθούν, πρέπει να γίνεται με βάση το σχήμα του κλάσματος που επιδιώκεται να αναδείξει η διδασκαλία. Η παρουσίαση μιας έννοιας του κλάσματος μέσα από μια ποικιλία φυσικών πλαισίων θα ενισχύσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας. Επίσης, ο Behretal. (1981, στο Κολέζα, 2000 σελ.229) αναφέρουν ότι η εισαγωγή των κλασμάτων με μια συγκεκριμένη αναπαράσταση συνιστά πρόκληση για τα παιδιά, καθώς οι επόμενες μορφές αναπαράστασης που θα συναντήσουν, θα ωθήσουν τα παιδιά να ξανασκεφτούν την κατεκτημένη έννοια και να προβληματιστούν σχετικά με τις ομοιότητες και τις διαφορές των μοντέλων.

Πριν ολοκληρωθεί αυτή η υποενότητα είναι απαραίτητο να γίνει μια σύντομη παρατήρηση. Μέχρι τώρα έχουν γίνει αρκετές αναφορές στη χρήση γεωμετρικών σχημάτων για το χωρισμό επιφανειών. Η αξιοποίηση όμως, αυτών των σχημάτων ως συνεχών μοντέλων αναπαράστασης των κλασμάτων προϋποθέτει την ύπαρξη μιας καλής γνώσης των γεωμετρικών σχημάτων όσον αφορά τις ιδιότητές τους (π.χ.: κατανόηση του εμβαδού ενός σχήματος) και τη χρήση των μερών τους (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Σταματόπουλος, 2011). Σε περίπτωση που τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει έννοιες σχετικές με τα γεωμετρικά σχήματα, θα δυσκολευτούν να αντιληφθούν τις σχετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων και συνεπώς, ελλοχεύει ο κίνδυνος λανθασμένης αντίληψης των νοητικών σχημάτων που θα οδηγεί σε εσφαλμένη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Για άλλη μια φορά καταλήγουμε στο γενικό συμπέρασμα ότι η ερμηνεία στην οποία δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία είναι αυτή του «μέρος-όλου». Αν και αυτή η ερμηνεία είναι απαραίτητη για την αντίληψη των υπόλοιπων ερμηνειών, καθώς και του κλάσματος συνολικά δεν είναι αρκετή για να αναπτυχθεί όλο το εύρος των ιδεών και εννοιών που το κλάσματα περικλείει, ώστε να περιοριστούν οι λανθασμένοι χειρισμοί των μαθητών. Η επιβεβαίωση αυτών των θέσεων απορρέει όχι μόνο από την έρευνα των Charalambous και Pitta-Pantazi (2007, 2005), αλλά και από άλλους ερευνητές (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Κολέζα, 2000˙ Κουλέτση, 2010˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995) που έχουν καταλήξει σε αντίστοιχες θέσεις. Δεν πρέπει, όμως, να παραλείπουμε το ενδεχόμενο η κυριαρχία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» να απορρέει από την ίδια τη δομή των αναλυτικών προγραμμάτων και όχι από τη φύση του κλάσματος και τις περαιτέρω ερμηνείες του. Εξάλλου, όπως η Steefland (1991, στο Charalambous και Pitta-Pantazi, 2007) σημειώνει «*όταν κάτι διδάσκεται με έναν ορισμένο τρόπο, αυτό έχει συνέπειες στο πώς μαθαίνεται*». Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτή την ερμηνεία λόγω και της θέσης που της προσδίδουν τα αναλυτικά προγράμματα. Παρόλα αυτά το συμπέρασμα είναι ένα: η διδασκαλία σχετικών γνώσεων (τι δηλώνει, πως αναπαρίσταται κ.ο.κ) για κάθε ερμηνεία, ο συνδυασμός και η εφαρμογή αυτών των γνώσεων οδηγούν σε ουσιαστική κατανόηση και απόκτηση επάρκειας στη χρήση των κλασμάτων.

2.4. Η Αντιμετώπιση των Κλασμάτων από τους Μαθητές Χωρίς Αναπηρία Όρασης

Όπως έχει προαναφερθεί και στην προηγούμενη ενότητα της παρούσας εργασίας, τα κλάσματα συνιστούν ένα σημαντικό κεφάλαιο στην εκπαίδευση των Μαθηματικών. Η σημασία τους είναι καθοριστικής φύσης για την ολόπλευρη ανάπτυξη ενός παιδιού τόσο σε γνωστικό και συναισθηματικό επίπεδο όσο και σε κοινωνικό. Χαρακτηριστικά ο Mazzocco et. al. (2013) αναφέρει ότι η γνώση των μαθητών του Δημοτικού για τα κλάσματα συνιστά σημαντικό προβλεπτικό δείκτη επιτυχίας για την μετέπειτα επιτυχία των παιδιών σε επόμενες σχολικές βαθμίδες. Η σπουδαιότητα, όμως, των κλασμάτων για τα ανώτερα Μαθηματικά συνιστά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς μια πρόκληση η οποία φέρει αξιοσημείωτες δυσκολίες.

Παρά, λοιπόν, τον καθοριστικό ρόλο των κλασμάτων στην πορεία ενός μαθητή, η αντιμετώπιση αυτής της έννοιας εξακολουθεί να συνοδεύεται από αρνητικά συναισθήματα φόβου ή απογοήτευσης, καθώς και από ποικίλες δυσκολίες. Εξάλλου, η έννοια του κλάσματος θεωρείται η πιο περίπλοκη και απαιτητική έννοια των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Ειδικότερα, η έρευνα της Wu (1999) σημειώνει ότι πολλοί μαθητές εγκαταλείπουν την προσπάθεια κατανόησης και διαχείρισης των κλασμάτων, καθώς βιώνουν συναισθήματα αποστροφής και σύγχυσης όταν καλούνται να επεξεργαστούν καταστάσεις με διαφορετικό τρόπο από εκείνο που μέχρι τώρα αξιοποιούσαν στη διαχείριση των ακέραιων αριθμών. Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν την εννοιολογική φύση των κλασμάτων, με αποτέλεσμα να κατακτούν ένα επιφανειακό επίπεδο γνώσεων, που κατά βάση αφορά διαδικαστικές γνώσεις (Isiksal & Cakiroglu, 2011˙ Pantziara & Philippou, 2012). Ανάλογα ευρήματα που καταδεικνύουν και επιβεβαιώνουν τις δυσκολίες των παιδιών στα κλάσματα σημειώνονται σε πολυάριθμες εργασίες τόσο στο εξωτερικό όσο και στην Ελλάδα (Baturo, 2004˙ Baturo&Cooper, 1999˙ Bezuk&Cramer, 1989˙ Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Deliyianni&Gagatsis, 2013˙ Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Γιαννέλος, 2011˙ Ζάντζος, 2009˙ Feenstra, et. al., 2010˙ Hasemann, 1981˙ Isiksal&Cakiroglu, 2011˙ Lo&Luo, 2012˙ Mazzoccoetal, 2013˙ Nicolaou&Pitta-Pantazi, 2010˙ Norton&Boyce, 2013˙ Nunes, 2006˙Pantziara&Philippou, 2012˙ Pinilla, 2007˙ Prediger, 2011˙ Wu, 1999˙ Χατζημανώλης, 2008˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι στις διάφορες έρευνες της Εθνικής Αξιολόγησης Εκπαιδευτικής Προόδου (NAEP) σημειώθηκε προφανή έλλειψη κατανόησης των κλασμάτων σε διάφορες ηλικίες μαθητών. Για παράδειγμα, η αξιολόγηση έδειξε ότι μόλις το 35% των 13χρονων μαθητών μπορούσε να απαντήσει σωστά στην ερώτηση $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$. Την ίδια στιγμή, αξιοσημείωτα ποσοστά αποτυχίας στη διαχείριση των κλασμάτων σημειώνονται και από τους εκπαιδευτικούς. Για παράδειγμα, σε δείγμα 85 υποψήφιων δασκάλων στις

ΗΠΑ μόνο το 64% μπόρεσε να επιλύσει σωστά μια στοιχειώδη διαίρεση του τύπου «$4 \div \frac{1}{4}$» ή «$\frac{2}{9} \div \frac{3}{8}$».

Με βάση και τα προαναφερθέντα διαπιστώνουμε ότι ενώ τα κλάσματα έχουν μεγάλη σημασία ως γνωστικό αντικείμενο εξακολουθούν να συνιστούν ένα από τα πιο επίπονα και δύσκολα κομμάτια των Μαθηματικών. Είναι ολοφάνερο ότι πολλοί εκπαιδευτικού θεωρούν ότι είναι δύσκολο να μεταδώσουν τις κλασματικές έννοιες, ενώ πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να τις κατανοήσουν. Λαμβάνοντας υπόψη τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών σε καταστάσεις με κλάσματα, πολυάριθμες έρευνες προσπαθούν να εντοπίσουν αυτές τις αιτίες των δυσκολιών, να τις κατονομάσουν και να τις ομαδοποιήσουν.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας, διαπιστώσαμε ότι η έννοια του κλάσματος δεν είναι μονοδιάστατη, αλλά αντιθέτως απαρτίζεται από επιμέρους ερμηνείες που βοηθούν στην σωστή διαχείριση ενός κλάσματος ανάλογα με την κατάσταση-πρόβλημα. Οι πολλαπλές ερμηνείες του κλάσματος, καθώς και οι διάφορες αναπαραστάσεις που συνεπάγονται, συνιστούν έναν από τους πρωταρχικούς παράγοντες δυσκολίας στα κλάσματα. Επιπλέον, η κατανόηση των κλασμάτων απαιτεί την κατανόηση και τον συντονισμό της διαχείρισης διαφόρων ισχυρών μαθηματικών διαδικασιών, όπως η διαμέριση, η αναγωγή στη μονάδα και οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις (Baturo, 2004). Αναγνωρίζοντας αυτή την πολυπλοκότητα της έννοιας του κλάσματος και μελετώντας τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών, οι Newstead και Murray (1998) καταγράφουν τρεις ευρύτερες αιτίες που προκαλούν τις δυσκολίες των μαθητών. Αυτές είναι οι ακόλουθες:

1. Ο τρόπος και η σειρά με την οποία το περιεχόμενο των κλασμάτων παρουσιάζεται αρχικά στους μαθητές, εκθέτοντας τους σε μια περιορισμένη ποικιλία κλασμάτων (κυρίως σε μισά και τέταρτα) αξιοποιώντας προκατανεμημένους χειρισμούς/καταστάσεις
2. Το περιβάλλον της τάξης, στο οποίο η έλλειψη ευκαιριών και οι άτυπες και συχνά λανθασμένες αντιλήψεις των κλασμάτων δεν παρακολουθούνται ούτε επιλύονται
3. Η ακατάλληλη εφαρμογή των συστημάτων των ακέραιων αριθμών, με αποτέλεσμα την ερμηνεία των ψηφίων ενός κλάσματος στην ονομαστική τους αξία ή τη διαχείριση του αριθμητή και παρονομαστή ως ξεχωριστών ακέραιων αριθμών.

Ανάλογες θέσεις σημειώνει στην εργασία του και ο Ζάντζος (2009), κατατάσσοντας την υπεργενίκευση των ακεραίων αριθμών και τη λανθασμένη εφαρμογή τους στα κλάσματα ως μια από τις βασικότερες πηγές δυσκολίας. Από την άλλη, ο Γαγάτσης και οι συνεργάτες του (2006) αναγνωρίζοντας τις πολλαπλές δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών αποδίδουν τις δυσκολίες αυτές σε τέσσερις γενικότερες κατηγορίες εμποδίων. Οι κατηγορίες αυτές έχουν ως εξής: α) δυσκολίες λόγω της εννοιολογικής φύσης των ρητών αριθμών, β) δυσκολίες στο συμβολισμό και τις αναπαραστάσεις των κλασμάτων, γ) δυσκολίες στις διαδικασίες λογισμού με κλασματικούς αριθμούς και δ) επιστημολογικά εμπόδια. Η παραπάνω ομαδοποίηση περικλείει μια σειρά πολλών και διαφορετικών δυσκολιών τόσο για τα κλάσματα ευρύτερα όσο και για τις επιμέρους ερμηνείες. Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι Φιλίππου και Χρίστου (1995), με εξαίρεση τις δυσκολίες λόγω επιστημολογικών εμποδίων, αναγνωρίσουν και αξιοποιούν αυτή την κατηγοριοποίηση, ενώ για δυσκολίες εξαιτίας του συμβολισμού και των αναπαραστάσεων των κλασμάτων κάνει λόγω και ο Ζάντζος (2009). Τέλος, ο Γιαννέλος (2011) μελετώντας τη σχετική βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι το ζήτημα της αποτυχίας και των λαθών των μαθητών στην κατανόηση και τη διαχείριση των κλασμάτων προκύπτει από το γεγονός ότι: α) τα κλάσματα (και η χρήση τους) δεν είναι φυσικοί αριθμοί, αλλά μια κοινωνικά κατασκευασμένη έννοια (διαδικασία) η οποία έγινε για να εξυπηρετήσει συγκεκριμένες ανάγκες, με αποτέλεσμα τα κλάσματα να αντιμετωπίζονται όπως οι ακέραιοι και β) δεν γίνεται διδασκαλία και ενεργοποίηση όλων των νοητικών σχημάτων-μοντέλων του κλάσματος, δηλαδή του κλάσματος ως «μέρους-όλου», του κλάσματος ως «πηλίκου», του κλάσματος ως «λόγου», του κλάσματος ως «τελεστή», του κλάσματος ως «μέτρησης».

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μελετήσουμε διεξοδικότερα τόσο τις επιμέρους δυσκολίες των παιδιών στα κλάσματα όσο και των ίδιων των εκπαιδευτικών. Για μια καλύτερη, λοιπόν, επεξεργασία των ερευνητικών πορισμάτων θα αξιοποιήσουμε τη στοιχειώδη διάταξη του Γαγάτση κ. συν. που σημειώθηκε προηγουμένως. Σε κάθε περίπτωση, θα αναφέρονται μιας προς μια οι δυσκολίες κάθε επιμέρους κατηγορίας, ενώ θα παραθέτεται πλούσιο υλικό με τα αποτελέσματα προηγούμενων σχετικών ερευνών.

2.4.1. Λάθη – παρανοήσεις επιστημολογικής φύσης

Ορισμένα σημαντικά λάθη οφείλονται στο επιστημολογικό εμπόδιο που συνδέεται με την αντίληψη των φυσικών αριθμών και εκφράζεται μέσα από την τάση, δηλαδή, των παιδιών να μεταφέρουν ιδιότητες από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ρητών. Τα λάθη αυτά δύναται να αφορούν κατά βάση τις τέσσερις βασικές πράξεις μεταξύ κλασμάτων, αλλά και ακεραίων με κλάσματα, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Isiksal&Cakiroglu,2011˙ Prediger, 2011˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Ειδικότερα, εντοπίζονται βασικά λάθη σε τρία επίπεδα.

Αρχικά, τόσο η διαίρεση με κλάσμα ή η διαίρεση κλασμάτων όσο και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ κλασμάτων και κλασμάτων με ακέραιο σε πολλές περιπτώσεις δημιουργούν δυσκολία στους μαθητές, ενώ δυσκολίες στις αντίστοιχες πράξεις υπάρχουν και με τους μεικτούς κλασματικούς αριθμούς. Στη διαίρεση η συνηθισμένη ενέργεια «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» πολλές φορές δημιουργείδυσκολίες για αρκετό καιρό. Οι μαθητές εφαρμόζουν λανθασμένα τον κανόνα ή ξεχνούν ποιον αριθμό να αντιστρέψουν, καθώς αυτή η διαδικασία μπορεί να φανεί πολύ απόμακρη και μυστηριώδης για πολλούς μαθητές. Επιπλέον, το γεγονός ότι η διαίρεση κλασμάτων δίνει ως αποτέλεσμα έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον αριθμό που διαιρείται, έρχεται σε αντίθεση με την μέχρι τώρα γνώση των παιδιών για τη διαίρεση των ακέραιων αριθμών όπου το αποτέλεσμα είναι μικρότερο **του** διαιρετέου. Αντίστοιχες δυσκολίες υπάρχουν και στην εφαρμογή του κανόνα του πολλαπλασιασμού (πολλαπλασιάζω αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή) (Hasemann, 1981). Η έρευνας της Prediger (2011) έδειξε ότι σε δείγμα 830 μαθητών ποσοστό λιγότερο του 33% ολοκλήρωσε τις σχετικές ασκήσεις με πολλαπλασιασμό, ενώ μόνο το 5% μπορούσε να διατυπώσει ένα κατάλληλο πρόβλημα με ένα δοθέν κλασματικό πολλαπλασιασμό. Τα παραπάνω δεδομένα επιβεβαιώνονται και από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Αναλυτικότερα, η έρευνα των Isiksal και Cakiroglu (2011) με εκπαιδευτικούς κατέστησε φανερό ότι λάθη όπως η αντιστροφή του διαιρετέου αντί του διαιρέτη, η αντιστροφή και του διαιρέτη και του διαιρετέου και ο πολλαπλασιασμός των αριθμητών και των παρανομαστών είναι μερικά από τα βασικότερα και συχνότερα λάθη που συναντούν οι εκπαιδευτικοί από τα παιδιά. Η ίδια έρευνα, έκανε φανερό ότι στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού οι μαθητές δυσκολεύονται, με αποτέλεσμα να λειτουργούν εσφαλμένα βρίσκοντας κοινούς παρανομαστές και έπειτα εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό, αντιστρέφοντας και πολλαπλασιάζοντας το δεύτερο παρανομαστή είτε πολλαπλασιάζοντας το ολόκληρο μέρος ή τον αριθμητή του μεικτού κλάσματος. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι τα λάθη στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι πολλά και σε διαφορετικά επίπεδα, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνουν όχι μόνο την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων, αλλά και την ευρύτερη αντίληψη του κλάσματος.

Από την άλλη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν με δυσκολία την πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων. Μία από τις πιο γνωστές παρανοήσεις που εκφράζουν οι μαθητές σε σχέση με την πρόσθεση κλασμάτων είναι η οριζόντια πρόσθεση των αντίστοιχων αριθμητών και παρονομαστών των δύο κλασμάτων (Amato, 2005˙ Bezuk&Cramer, 1989˙ Wu, 1999).Για παράδειγμα, στην πρόσθεση $\frac{4}{8}$ + $\frac{3}{8}$ οι μαθητές δίνουν ως απάντηση το κλάσμα $\frac{7}{16}$. Στο σημείο αυτό χρειάζεται να επισημάνουμε ότι αυτό το είδοςπαρανόησης δεν το διαθέτουν μόνο μαθητές, αλλά έχει διαπιστωθεί και σε μελλοντικούςεκπαιδευτικούς (Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011). Αξιοσημείωτο προσοχής είναι και ένα από τα πορίσματα της έρευνας των Newstead και Murray (1998). Σύμφωνα με αυτό, ακόμη και αν οι μαθητές δεν είχαν προηγουμένως διδαχτεί την πρόσθεση των κλασμάτων, είναι ανησυχητικό ότι δεν ήταν σε θέση να κρίνουν στην πράξη $\frac{7}{8}$ + $\frac{7}{8}$ότι το 30 και το 165 δεν είναι λογικές απαντήσεις.

Στο τελευταίο επίπεδο δυσκολιών συγκαταλέγονται τα λάθη στην πρόσθεση και αφαίρεση ετερωνύμων κλασμάτων. Και σε αυτή την περίπτωση πράξεων, οι μαθητές ακολουθούν την διαδικασία πρόσθεσης αριθμητών και έπειτα παρανομαστών (Bezuk&Cramer, 1989˙Hasemann, 1981˙ Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Ενδεικτικά, απαντούν ότι $\frac{1}{5}+\frac{3}{7}$ ισούται με $\frac{4}{12}$. Έρευνες σημειώνουν ότι μόλις το ένα τρίτο των 13χρονων και τα δύο τρίτα των 17χρονων μαθητών μπορούν να εκτελέσουν σωστά την πρόσθεση $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (Bezuk&Cramer, 1989˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Επιπλέον, για την ίδια πρόσθεση ο Post (1981, στο Ζάντζος, 2009) αναφέρει ότι περισσότεροι από το 60% των μαθητών που τελειώνουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση προσθέτουν τους αριθμητές και παρανομαστές όταν θέλουν να υπολογίσουν το σχετικό άθροισμα. Ανάλογα είναι και τα ευρήματα της έρευνας του Hasemann (1981) όπου μόνο το 19% των 97 μαθητών της έρευνας ήταν σε θέση να απαντήσει σωστά στην πράξη $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, ενώ το 35% των μαθητών εκτελούσαν την πράξη αξιοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Συντριπτικά είναι και τα δεδομένα από την Εθνική Αξιολόγηση Εκπαιδευτικής Προόδου (NAEP), όπου οι μαθητές κλήθηκαν να εκτιμήσουν την απάντηση στην πρόσθεση $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ έχοντας ως επιλεγόμενες απαντήσεις τους αριθμούς 1, 2, 19, 21 και το «δεν ξέρω». Μόνο το 24% των μαθητών επέλεξε τη σωστή απάντηση «2», ενώ το 55% επέλεξε το «19» ή το «21», πρόσθεσαν δηλαδή είτε τους αριθμητές είτε τους παρονομαστές.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι πέρα από τα προηγούμενα τρία επίπεδα επιστημολογικών δυσκολιών που καταγράφει ο Γαγάτσης κ. συν. (2006) και επιβεβαιώνουν και άλλες έρευνες, μπορούμε στην κατηγορία αυτών των δυσκολιών να εντάξουμε μια ακόμα. Ειδικότερα, αναφερόμαστε στις δυσκολίες που υπάρχουν στη διαχείριση των μεικτών κλασματικών αριθμών. Πέρα από τις δυσκολίες που υπάρχουν στην εκτέλεση πράξεων με μεικτούς αριθμούς, η βιβλιογραφία καταγράφει δυσκολίες και στη μετατροπή μεικτών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα. Χαρακτηριστικά, η έρευνα του Γιαννέλου (2011) σε δείγμα 200 μαθητών της ΣΤ΄ τάξης έδειξε ότι το μόνο το 50% των μαθητών απάντησε σωστά στη μετατροπή του κλάσματος $3\frac{2}{5}$, το 45% των μαθητών που απάντησαν λάθος έδωσαν την ίδια απάντηση, δηλαδή ότι ο μεικτός ισούται με $\frac{5}{5}$ – προφανώς πρόσθεσαν τον ακέραιο με τον αριθμητή του κλάσματος (3+2=5) – ενώ το 10% δεν απάντησε στην ερώτηση. Φαίνεται, λοιπόν, με βάση και το προαναφερθέν δεδομένο ότι δεν έχει κατακτηθεί επαρκώς η μηχανική δεξιότητα μετατροπής του μεικτού σε κλάσμα, ενώ πιθανώς να υπάρχει στρεβλή αντίληψη για τη σχέση ενός κλάσματος ως «ποσότητας» με την ακέραιη μονάδα.

Με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν για τα εμπόδια επιστημολογικής φύσης στην εκμάθηση των κλασμάτων, διαπιστώνουμε ότι αυτά κατά πλείστον αφορούν τη διαχείριση των κλασματικών πράξεων. Έγινε ξεκάθαρα φανερό ότι οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικές ελλείψεις σε ποικίλα επίπεδα που καθίστανται τροχοπέδη στην κατανόηση και εμβάθυνση στην έννοια του κλάσματος. Όπως σημειώθηκε, συχνά οι μαθητές παρερμηνεύουν τους σχετικούς κανόνες για την εκτέλεση των πράξεων ή τους εφαρμόζουν λανθασμένα. Είναι αρκετοί εκείνοι οι ερευνητές που αποδίδουν τις δυσκολίες αυτές στη στείρα απομνημόνευση των κανόνων και στην ελλιπή κατανόηση και εφαρμογή αυτών με τρόπους μη ρεαλιστικούς και απομακρυσμένους από την πραγματικότητα των παιδιών (Bezuk&Cramer, 1989˙ Hasemann, 1981˙Isiksal&Cakiroglu, 2011). Την ίδια στιγμή, πληθώρα ερευνητών αποδίδει αυτά τα λάθη στο γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρανομαστή. Αποδίδουν, δηλαδή, τις δυσκολίες σε εμπόδια εννοιολογικής φύσης, που θα διαπραγματευτούμε ακολούθως. Συνεπώς, η έλλειψη κατανόησης των βασικών κλασματικών εννοιών και κανόνων καθιστά τους μαθητές αδύναμους να επισημάνουν τα λάθη τους και να φωτίσουν τη σύγχυση τους σχετικά με την εκτέλεση πράξεων με κλάσματα. Αναμφίβολα, όμως, μια καλά οργανωμένη διδασκαλία με την αξιοποίηση πολλαπλών ερμηνειών και αναπαραστάσεων μπορεί να αποτρέψει λάθη σαν τα παραπάνω. Για παράδειγμα, η αξιοποίηση ενός λογισμικού για τα κλάσματα βελτίωσε τις αποδόσεις των παιδιών με ευχάριστο τρόπο (Σολομωνίδου, 1999), ενώ η χρήση δυο και περισσότερων αναπαραστάσεων βοηθά στην κατανόηση της ιδέας της πρόσθεσης (Amato, 2005˙ Marcou&Gagatsis, 2002).

2.4.2. Λάθη – παρανοήσεις εννοιολογικής φύσης

Οι σχετικές δυσκολίες των κλασματικών αριθμών με εννοιολογικό χαρακτήρα, οφείλονται κατά βάση στην πυκνή δομή των ρητών αριθμών σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών, οι οποίοι αποτελούν το μοντέλο πάνω στο οποίο οργανώνεται η οικοδόμηση της έννοιας του κλασματικού αριθμού. Παράλληλα, αυτή η πυκνή δομή ωθεί τους μαθητές στο να μην μπορούν να αντιληφθούν το κλάσμα ως αριθμό που εκφράζει μια ποσότητα (Amato, 2005˙ Γιαννέλος, 2011˙ Κουλέτση, 2010˙ Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή στο να το αντιλαμβάνονται μεμονωμένα ως μέρος μιας ποσότητας (Amato, 2005). Γίνεται φανερό ότι η καταχρηστική μεταφορά της γνώσης από το πεδίο των φυσικών αριθμών στο πεδίο του συνόλου των ρητών δημιουργεί δυσκολίες στα παιδιά (Χατζημανώλης, 2008), καθώς προϋποθέτει μια εννοιολογική τροποποίηση στο σύστημα γνώσεων τους. Επιπλέον, το γεγονός ότι η έννοια του κλάσματος είναι ένα κοινωνικά κατασκευασμένο και επικυρωμένο σύστημα, προκαλεί περισσότερες δυσκολίες στα παιδιά (Κολέζα, 2000). Δεδομένου ότι τα κλάσματα είναι διαφορετικά από τους φυσικούς αριθμούς και επίσης, συνιστούν μια έννοια περίπλοκη και εξεζητημένη, οι μαθητές καλούνται να αναπτύξουν νέες κατάλληλες εικόνες, δράσεις και γλώσσα για να ανταπεξέλθουν στην τυπική δουλειά με κλάσματα.

Ως σημαντικότερες, λοιπόν, δυσκολίες εννοιολογικής φύσης αναφέρονται στη βιβλιογραφία οι εξής:

α) Η σύνδεση του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$με την απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών α και β.

Για άλλη μια φορά οι έρευνες επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τον κλασματικό αριθμό ως αριθμό (Γιαννέλος, 2011˙ Σταματόπουλος, 2011), αλλά τον αντιλαμβάνονται ως μια κατασκευή η οποία έχει ίδια χαρακτηριστικά, νόημα και τρόπο διαχείρισης με τους φυσικούς αριθμούς (Γιαννέλος, 2011). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Cramer και Whitney (2010, στο Σταματόπουλος, 2011) όταν μαθητές ρωτήθηκαν πόσοι αριθμοί βρίσκονται στη λίστα «26, 1/3, 1/5, 132» αρκετοί από αυτούς απάντησαν ότι ήταν έξι και όχι τέσσερις αριθμοί. Αντίστοιχα ευρήματα έχει και η έρευνα του Γιαννέλου σε ελληνικό πληθυσμό, όπου σε σχετική ερώτηση με στόχο τη διερεύνηση του αν οι μαθητές έχουν αντιληφθεί ότι τα κλάσματα ως συμβολική έκφραση αντιπροσωπεύουν μια ειδική σχέση ανάμεσα στους δυο όρους τους, οι οποίοι όροι δεν υπόκεινται σε διαχείριση ως μεμονωμένοι φυσικοί αριθμοί, φάνηκε ότι το 80% των 200 μαθητών του δείγματος δεν αντιλαμβάνεται την έννοια του κλάσματος με τον ενδεδειγμένο τρόπο. Εκτός, όμως, από τους μαθητές, περιορισμένη αντίληψη του κλάσματος ως αριθμού φαίνεται πως έχουν και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί (Amato, 2005).

β) Ο λογιστικός χειρισμός των αριθμητών ανεξάρτητα από τους παρονομαστές.
Είναι κοινό λάθος των μαθητών να χειρίζονται ένα κλάσμα λαμβάνοντας ως ξεχωριστές οντότητες τον αριθμητή και των παρανομαστή (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007˙ Mazzoccoetal, 2013˙ Newstead & Murray, 1998˙ Nicolaou&Pitta-Pantazi, 2010˙ Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Stafylidou&Vosniadou, 2004˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012) και όχι ως συσχετιζόμενες οντότητες που καθιστούν το κλάσμα αριθμό, μια μοναδική οντότητα και του προσδίδουν τη δική του αξία. Τη δυσκολία αυτή επιβεβαιώνει και η εργασία του Γιαννέλου (2011) όπου έγινε φανερό ότι τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται ότι η αξία (ως ποσότητα που αντιπροσωπεύει) ενός κλάσματος εξαρτάται από τη σχέση αριθμητή και παρονομαστή και από την (αρχική) ποσότητα στην οποία αυτό το κλάσμα (ως σχέση) αναφέρεται. Την ίδια στιγμή, η Χρυσανθακοπούλου (2012) αναφέρει ότι συχνά οι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια και σημασία του παρανομαστή. Αυτή η λανθασμένη διαχείριση του κλάσματος εντείνει και εντείνεται από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν και δεν αξιοποιούν το κλάσμα ως έναν αριθμό, ενώ απόρροια αυτής της λανθασμένης αντιμετώπισης είναι και η εσφαλμένη εκτέλεση πράξεων με κλάσματα, αφού οι μαθητές για την εκτέλεση των πράξεων αξιοποιούν μεμονωμένα είτε τον αριθμητή είτε τον παρανομαστή είτε και τους δυο όρους.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι οι παραπάνω δυο δυσκολίες δεν έχουν αρνητικά αποτελέσματα μόνο στη διαχείριση του κλάσματος και στην εκτέλεση σχετικών πράξεων, αλλά θέτουν εμπόδια και στην σύγκριση και διάταξη των κλασματικών αριθμών. Έτσι, οι μαθητές συγκρίνουν κλάσματα λαμβάνοντας αποκλειστικά υπόψη τους είτε τον αριθμητή είτε τον παρανομαστή (Γιαννέλος, 2011˙ Newstead & Murray, 1998). Όπως είναι επόμενο, οι μαθητές συγκρίνουν ευκολότερα κλάσματα με τον ίδιο παρανομαστή απ' ότι με διαφορετικό (Mazzoccoetal, 2013). Επιπλέον, η βιβλιογραφία σημειώνει την τάση οι μαθητές να επιλέγουν ως μεγαλύτερο εκείνο το κλάσμα με τον μεγαλύτερο παρανομαστή (Newstead & Murray, 1998). Ανάλογη συμπεριφορά στη διαχείριση των κλασμάτων εντοπίζει και η έρευνα των Stafylidou και Vosniadou (2004). Αναλυτικότερα, οι ερευνήτριες διαπίστωσαν ότι οι μαθητές είχαν την τάση να πιστεύουν είτε ότι «η αξία του κλάσματος αυξάνεται καθώς η αξία του αριθμητή ή του παρονομαστή αυξάνεται» είτε ότι «η αξία του κλάσματος αυξάνει καθώς η αξία του αριθμητή ή του παρονομαστή μειώνεται».

Ωστόσο, η ελλιπής κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού και ο διαχωρισμός του αριθμητή από τον παρανομαστή δυσχεραίνουν την αντίληψη του μεγέθους ενός κλάσματος. Η αντίληψη, όμως, της ιδέας του μεγέθους ενός κλάσματος είναι απαραίτητη για τις διαδικασίες της σύγκρισης και διάταξης, καθώς και για την απόκτηση εννοιολογικής γνώσης για τα κλάσματα (Nicolaou&Pitta-Pantazi, 2010). Ο συνδυασμός, λοιπόν αυτών των παρανοήσεων, οδηγεί τους μαθητές σε ελλιπή γνώση των κλασμάτων και σε λανθασμένη διαχείριση των σχετικών με αυτά ενεργειών.

γ) Η αντίληψη ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα, όπως ανάμεσα στο $\frac{1}{3}$ και στο $\frac{2}{3}$, δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός.
Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των ρητών αριθμών εκφράζει το γεγονός ότι μεταξύ δυο οποιονδήποτε ρητών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άλλος αριθμός (Ζάντζος, 2009˙ Psycharis&Latsi&Kynigos, 2007˙ Stafylidou&Vosniadou, 2004). Με μαθηματικούς όρους, μεταξύ δυο οποιωνδήποτε ρητών αριθμών υπάρχει ένα άπειρο πλήθος ρητών αριθμών, δηλαδή, το σύνολο αυτών των αριθμών είναι πυκνό, γιατί ακριβώς αναφέρεται σε μέτρα συνεχών μεγεθών, πράγμα βέβαια που δεν ισχύει στους ακέραιους (Χασάπης, 2000). Αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας είναι η ύπαρξη νοητικών δυσχερειών στη συγκρότηση της έννοιας του κλάσματος, αφού οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν την ύπαρξη ενδιάμεσων κλασμάτων. Οι μαθητές για παράδειγμα, χειρίζονται δυο κλάσματα με την λογική των ακεραίων είτε δεν εντοπίζουν ενδιάμεσους κλασματικούς αριθμούς, καθώς με βάση τη λογική τους ανάμεσα στο 1 και το 2 (των αριθμητών των παραπάνω κλασμάτων) δεν υπάρχει ενδιάμεσος αριθμός (Ζάντζος, 2009).

δ) Η αντίληψη ότι η κλασματική μονάδα είναι σταθερό μέγεθος.
Όπως έχει προαναφερθεί στην ενότητα μελέτης των κλασμάτων, η έννοια της κλασματικής μονάδας συνιστά βασικό πυλώνα ανάπτυξης τόσο της κλασματικής ιδέας όσο και των επιμέρους ερμηνειών του κλάσματος. Παρά τη σημασία της όμως, οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη σημασία και το ρόλο της μονάδας αναφοράς των κλασμάτων (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Psycharis&Latsi&Kynigos, 2007˙ Σταματόπουλος, 2011), ενώ δυσκολεύονται συχνά και στον προσδιορισμό αυτής (Psycharis&Latsi&Kynigos, 2007). Η έρευνα των Stafylidou και Vosniadou (2004) έδειξε ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής ισούται με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ισοδύναμο με την μονάδα. Πρέπει επίσης, να σημειώσουμε ότι η έρευνα του Amato (2005) έδειξε ότι οι μαθητές αδυνατούσαν να συνδέσουν το κλάσμα $\frac{5}{5}$ με τον ακέραιο αριθμό 1.

ε) Η κυριαρχία της αντίληψης της σχέσης μέρους-μέρους, αντί της σχέσης μέρους-όλου (Γαγάτσης κ. συν., 2006).

στ) Η δυσκολία των παιδιών να υπερβούν την κλασματική ποσότητα, να αποσυνδέσουν, δηλαδή, το $\frac{\alpha}{\beta}$του *X* από το *X* και να οικοδομήσουν τελικά την έννοια του κλασματικού αριθμού.

Σε συνάρτηση με τις προηγούμενες δυσκολίες και κυρίως με το λανθασμένο χειρισμό των κλασμάτων ως δυο ανεξάρτητων αριθμών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αντίληψη της αξίας (ποσότητας) που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα (κλάσμα ως ποσότητα) (Γιαννέλος, 2011˙ Ζάντζος, 2009). Η έρευνα των Newstead και Murray (1998) κατέστησε φανερή την αδυναμία των μαθητών να δουν το κλάσμα ως μια ποσότητα, ως μια σχέση ανάμεσα σε δυο αριθμούς. Παράλληλα, σε σχετική ερώτηση της έρευνας του Γιαννέλου (2011) για την αντίληψη του κλάσματος ως ποσότητα μόνο οι μισοί από τους 200 συμμετέχοντες απάντησαν ορθά. Οι λανθασμένες αυτές απαντήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα δεν γίνεται ενεργοποίηση του νοητικού μοντέλου του κλάσματος ως «μέτρο», ώστε να γίνει αντιληπτό ότι το κλάσμα αντιπροσωπεύει μια ποσότητα και κατ' επέκταση, ότι το κλάσμα μπορεί να αντιπροσωπεύει ποσότητα μικρότερη ή και μεγαλύτερη από την ακέραιη μονάδα (Γιαννέλος, 2011). Εκτενέστερη αναφορά και κατανόηση αυτής της δυσκολίας θα πραγματοποιηθεί σε επόμενη παράγραφο παρουσίασης των παρερμηνειών στην περίπτωση του κλάσματος ως «μέτρο».

2.4.3. Λάθη – παρανοήσεις συμβολικής και αναπαραστατικής φύσης

Στο σημείο αυτό θα αναζητήσουμε τα λάθη και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και σχετίζονται με την αναπαράσταση και το συμβολισμό των κλασμάτων. Για μια πιο σαφή κατανόηση αυτών των δυσκολιών, θα μελετήσουμε ξεχωριστά την κάθε ερμηνεία, με απώτερο σκοπό οι σχετικές δυσκολίες τόσο στην έκφραση όσο και στην αναπαράσταση αυτών να γίνουν αντιληπτές. Πρέπει βέβαια, να σημειωθεί ότι παρανοήσεις συμβολικού χαρακτήρα θα συζητηθούν περαιτέρω και κατά την μελέτη των δυσκολιών διδακτικής φύσης.

Α. Λάθη – παρανοήσεις στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου»

Όπως πολλάκις έχει γίνει φανερό από αυτή την έρευνα, το σχήμα του «μέρος-όλου» συνιστά την πιο κοινή και διαδεδομένη ερμηνεία του κλάσματος. Είναι αυτή η ερμηνεία την οποία πρωτοσυναντούν οι περισσότεροι μαθητές και την οποία κατακτούν και διαχειρίζονται σε μεγαλύτερο και αποδοτικότερο βαθμό. Χαρακτηριστικά, η έρευνα των Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) διαπίστωσε ότι σε σχετικές δραστηριότητες με την ερμηνεία του «μέρος-όλου», η μέση βαθμολογία των παιδιών ήταν 75%. Παρά, ωστόσο, το θεμελιακό χαρακτήρα και την ευκολία που το σχήμα αυτό ενέχει, η υπερβολική έμφαση και ισχύ που του δίνεται ευθύνεται σύμφωνα με πολλούς ερευνητές για πολλές από τις παρανοήσεις και αδυναμίες που παρουσιάζουν οι μαθητές (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000) τόσο κατά τη γενικότερη διαχείριση της έννοιας του κλάσματος όσο και της ίδιας της ερμηνείας. Ειδικότερα, η έμφαση σε αυτή την ερμηνεία ευθύνεται σε σημαντικό βαθμό για την αδυναμία των παιδιών να αντιμετωπίσουν το κλάσμα ως αριθμό (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000). Έτσι, τα παιδιά βλέπουν το κλάσμα $\frac{2}{3}$ ως τα «2 μέρη από τα 3 ενός συνόλου» και όχι ως ένα αυθύπαρκτο αριθμό, με συνέπεια να έχουμε λάθη της μορφής «$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{3}{8}$».

Παράλληλα, έχει επισημανθεί ότι η ερμηνεία του «μέρος-όλου» περιορίζεται αποκλειστικά σε γνήσια κλάσματα. Σε συνδυασμό και με τον περιορισμένο παραδοσιακό διδακτικό εύρος αυτής της ερμηνείας οι παρανοήσεις εντείνονται. Δηλαδή, το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται ως συχνά παραδείγματα ο χωρισμός γλυκών (π.χ.: σοκολάτες, καραμέλες κ.α.) ή τροφίμων (π.χ.: πίτσες, πίτες κ.α.) – που συνεπάγουν τη χρήση μόνο γνήσιων κλασμάτων – εξοικειώνει από την μια τους μαθητές, αλλά από την άλλη, δημιουργεί προβλήματα όταν καλούνται να διαχειριστούν αφηρημένες διαμερίσεις ποσοτήτων. Έτσι, ο μαθητής οδηγείται σε αυθαίρετες αποφάσεις, όπως «$\frac{1}{2}$ φορά το γύρο της πλατείας» είναι το ίδιο με το «$\frac{1}{2}$ του συνόλου» και ταυτόχρονα, περνά βεβιασμένα στους αριθμητικούς αλγορίθμους για να καταλήξει στην ισοπέδωση της έννοιας του κλάσματος (Κολέζα, 2000). Συνολικό αποτέλεσμα όλης αυτής της συνθήκης καθίσταται η αδυναμία των μαθητών να διαχειριστούν όλο το φάσμα των κλασμάτων, αλλά και να αναπτύξουν και τα υπόλοιπα νοητικά σχήματα της έννοιας του κλάσματος.

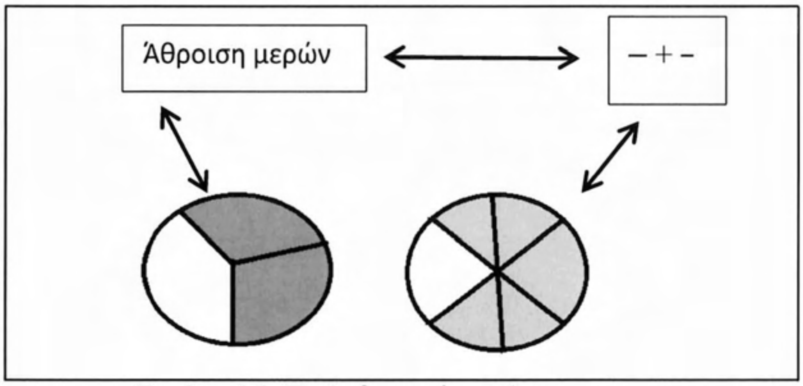
Συμπληρωματικά στις προηγούμενες θέσεις, η Κολέζα (2000) υποστηρίζει ότι οι πιθανές αιτίες στην κατασκευή της ερμηνείας αυτής συνδέονται από την μία με τη φύση του «όλου» και τον τρόπο χωρισμού του και από την άλλη, με την αναγνώριση του «μέρους». Ουσιαστικά, γίνεται λόγος για το αν το «όλο» είναι συνεχές ή διακριτό και για το αν οι μαθητές μπορούν να δουν το «μέρος» του κλάσματος, δηλαδή τον αριθμητή και τη σχέση που τον διακρίνει με τον παρανομαστή. Αρχικά, έχουμε διαπιστώσει, ότι ανάμεσα σε ένα διακριτό και ένα συνεχές «όλο» υπάρχουν σημαντικές διαφορές που δύναται να μπερδέψουν ένα μαθητή. Έτσι, καθίσταται δύσκολο για ένα μαθητή να συνειδητοποιήσει ότι ένα διακριτό «όλο» δύναται να αποτελείται από περισσότερες της μιας δομικές μονάδες. Αυτό άλλωστε επιβεβαιώνουν και τα ερευνητικά ευρήματα, με βάση τα οποία η εργασία με ένα συνεχές «όλο» και κατ’ επέκταση ένα συνεχές μοντέλο αναπαράστασης είναι πιο πρόσφορη για τα παιδία σε σύγκριση με τη χρήση διακριτών «όλων» και αναπαραστάσεων (Γαγάτσης κ.συν., 2006˙ Hunting, 1986˙ Κολέζα, 2000˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Αν και η επαφή με κλάσματα που χαρακτηρίζονται από συνεχές «όλο» ή ως μέρος μιας συνεχούς επιφάνειας θωρείται ευκολότερη, εξακολουθούν να υφίστανται δυσκολίες. Συγκεκριμένα, οι μαθητές ενδέχεται να δυσκολεύονται στην αναγνώριση του κλάσματος, αφού εστιάζουν τη προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Φιλίππου & Χρίστου, 1995), με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν μεμονωμένα τον αριθμητή και αντίστοιχα τον παρανομαστή. Ακόμη, μπορεί να μην κατανοούν ότι τα μέρη πρέπει να είναι ισοδύναμα, για να ισχύει η σχέση που αντανακλά το κλάσμα και έτσι, να οδηγούνται σε εσφαλμένους χειρισμούς (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Κολέζα, 2000).

Αντίστοιχη βέβαια, δυσκολία υπάρχει και όταν η διδασκαλία και εργασία των κλασμάτων πραγματοποιείται με τη χρήση μοντέλων συνόλου (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Ταυτόχρονα, οι μαθητές κατά την αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος συνόλου αντικειμένων ενδέχεται να μην αναφέρονται σε μέρος του συνόλου των αντικειμένων αλλά σε λόγο (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Επίσης, τα παιδιά δυσκολεύονται να απαντήσουν σε ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρονομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Τις προηγούμενες τοποθετήσεις επιβεβαιώνει χαρακτηριστικά και η έρευνα του Γιαννέλου (2011) σε δείγμα 200 μαθητών Έκτης τάξης. Σε σχετική ερώτηση που αποσκοπούσε στο να καταγράψει το βαθμό κατά τον οποίο ο κάθε μαθητής είχε κατανοήσει ότι το κλάσμα δεν αναφέρεται αποκλειστικά σε διαμέριση συνεχών ποσοτήτων ως «όλο» αλλά και διακριτών, τα ευρήματα ήταν συντριπτικά. Ειδικότερα, όλοι οι μαθητές (100%) επιμέρισαν μια συνεχή ποσότητα, έναν κύκλο, ένα ορθογώνιο (ως «όλο») σε τμήματα και κανένας δεν επιμέρισε διακριτή ποσότητα ως «όλο». Επιπλέον, φανερώθηκε ότι τα μέρη του «όλου» συνήθως εκλαμβάνονται από τους μαθητές ως κομμάτια ενός αντικειμένου και αποφεύγεται η θεώρησή τους ως ισοδύναμων υποσυνόλων ενός συνόλου, δηλαδή, δεν δύναται να διαχειριστούν ένα διακριτό «όλο». Γίνεται ολοφάνερη, λοιπόν, η μονοδιάστατη και στενή αντίληψη της έννοιας του κλάσματος από τα παιδιά, καθώς και εμμονή στο «κόβω το ένα στα τρία ή στα τέσσερα κ.ο.κ». Η ύπαρξη αυτής της εμμονή δυσκολεύει την κατανόηση και του καταχρηστικού κλάσματος, αλλά και του ότι η ποσότητα που αντιπροσωπεύει το κλάσμα εξαρτάται από την πληθικότητα του συνόλου στο οποίο αυτό ανάγεται.

Βλέπουμε, όμως ότι οι δυσκολίες των μαθητών δεν περιορίζονται μόνο στο τρόπο με τον οποίο εκφράζεται το «όλο» ή το «μέρος», αλλά και στο μοντέλο αναπαράστασης που χρησιμοποιείται. Ειδικότερα, η έρευνα του Amato (2005) επιβεβαιώνει τη θέση του Kerlake (1986) με βάση την οποία η γεωμετρική αναπαράσταση της ερμηνείας του «μέρος-όλου» αναστέλλει την κατανόηση των κλασμάτων ως αριθμών, ενώ η χρήση διαγραμμάτων ενδέχεται να ερμηνευθεί από τα παιδιά ως ένας ιδιαίτερος τρόπος που αντιπροσωπεύει δύο ακέραιους αριθμούς και όχι μια αναπαράσταση ενός μόνο αριθμό. Επίσης, τα διάφορα μοντέλα αναπαράστασης δεν βοηθούν τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη σχέση μεταξύ ενός ολόκληρου σχήματος και του ακέραιου αριθμό «1» (Amato, 2005), δυσχεραίνοντας έτσι και τα προβλήματα εννοιολογικής φύσης. Την ίδια στιγμή, και οι έρευνες των Wong και Evans (2007) και των Newstead και Murray (1998) φανερώνουν την αδυναμία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν και να διαχειριστούν διαφορετικά μοντέλα αναπαραστάσεων για την έκφραση του «μέρος-όλου».

Επιπροσθέτως, ο Ζάντζος (2009) και η Κολέζα (2000) σημειώνουν ότι οι αναπαραστάσεις και οι χωρισμοί του «όλου», που χρησιμοποιούνται στην παρούσα ερμηνεία, προκαλούν προβληματισμούς στα παιδιά κατά την εκτέλεση κλασματικών πράξεων και συγκρίσεων. Συγκεκριμένα, η Κολέζα (2000) θεωρεί ότι λάθη όπου εκτελείται μεμονωμένη πρόσθεση των αριθμητών και αντίστοιχα των παρανομαστών οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στη λανθασμένη ερμηνεία των αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία της διαμέρισης. Για παράδειγμα, το άθροισμα – + – δεν μπορεί να ερμηνευθεί με βάση την αναπαράσταση της παρακάτω εικόνας. Οι μαθητές καταλήγουν στο να προσθέτουν τα χρωματισμένα μέρη και τα μέρη των δυο κύκλων συνολικά για να καταλήξουν στη λανθασμένη απάντηση –.



Εικόνα 16: Πρόσθεση κλασμάτων

Ακόμη, ο Ζάντζος (2009) αναφέρει ότι οι μαθητές έχουν τη λανθασμένη τάση να νομίζουν ότι το – είναι μεγαλύτερο από το – , γιατί το ίδιο «όλο» χωρίστηκε σε περισσότερα κομμάτια. Δηλαδή, οι μαθητές κάνουν λάθη κατά τις συγκρίσεις επειδή δεν είναι προσεκτικοί για το μέγεθος του «όλου» από τα οποία προέρχονται τα «μέρη».

Συνολικά, διαπιστώνουμε ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» αν και είναι η πιο διαδεδομένη εμπεριέχει σημαντικές δυσκολίες που δύναται να προκαλέσουν μια σειρά προβλημάτων στην ανάπτυξη της ίδιας της ερμηνείας, των υπόλοιπων ερμηνειών, καθώς και των κλασματικών πράξεων. Συνεπώς, η επιλογή του «όλου» και των αναπαραστάσεων αυτού πρέπει να είναι εξαιρετικά προσεκτική, ώστε να αποφεύγονται παρανοήσεις σαν αυτές που καταγράφτηκαν προηγουμένως.

Β. Λάθη – παρανοήσεις στην ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο»

Παρά το γεγονός ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο» είναι εξαιρετικά σημαντική για την ανάπτυξη τόσο της έννοιας του κλάσματος και των επακόλουθων πράξεων όσο και για τους δεκαδικούς αριθμούς, η σχετική βιβλιογραφία για τις δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διαχείριση της ερμηνεία αυτής είναι πενιχρή. Ωστόσο, τα λιγοστά ερευνητικά δεδομένα αναδεικνύουν την ύπαρξη σημαντικών δυσκολιών στην αντίληψη αυτής της ερμηνείας (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Charalambous, 2007˙ Κουλέτση, 2012˙ Newstead & Murray, 1998). Αναλυτικότερα, ο Γαγάτσης κ. συν. (2006) υποστηρίζει ότι αν και γίνεται αναφορά σε προβλήματα διαίρεσης από την καθημερινή ζωή, οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν το κλάσμα ως διαίρεση ανάμεσα σε δύο αριθμούς. Οι δυσκολίες εμφανίζονται εντονότερα σε καταστάσεις όπου η διαμέριση δεν καταλήγει σε ακέραιο αριθμό (Κολέζα, 2000). Για παράδειγμα, σε μια συχνή καθημερινή ερώτηση όπως, «πόση ποσότητα σοκολάτας θα φάνε έξι παιδιά, αν υπάρχουν μόνο 4 σοκολάτες;», τα παιδιά διστάζουν και δυσκολεύονται να απαντήσουν. Ταυτόχρονα, η έρευνα των Newstead και Murray (1998) κατέδειξε ότι κοινό λάθος των μαθητών ήταν η αδυναμία να ερμηνεύσουν το κλάσμα ως διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή. Για το λόγο αυτό, υποστήριξαν ότι η κατανόηση αυτής της ερμηνείας συνιστά και δείκτη κατανόησης των κλασμάτων. Από την άλλη, ο Charalambous (2007) σε σχετική κλίμακα δυσκολίας στη διαχείριση των διάφορων ερμηνειών, υποστηρίζει ότι αν και οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεσαίου βαθμού δυσκολίες στην ερμηνεία του «πηλίκου» απαιτούνται περαιτέρω έρευνες, καθώς η έρευνα έδειξε ότι η ερμηνεία αυτή έχει χαμηλού βαθμού τιμές διάκρισης. Επιπλέον, η Κολέζα (2000) θεωρεί ότι είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να δυσκολεύονται σε αυτό το σχήμα λόγω του ότι ενώ τα μέρη που προκύπτουν από τη διαμέριση είναι ίσα μεταξύ τους, οι τρόποι διαμέρισης ποικίλουν. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ακόμα δυσκολία στην αντίληψη του κλάσματος ως «πηλίκο», δύναται να απορρέει από προηγούμενη ελλιπή γνώση των μαθητών στη διαίρεση μερισμού και μέτρησης, που συνδέονται άμεσα με αυτή την ερμηνεία. Τέλος, είναι αρκετά ενδιαφέρον το γεγονός ότι σε έρευνά του με μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, ο Σταματόπουλος (2011) ανέδειξε την εξαιρετικά μικρή συχνότητα χρήσης της ερμηνεία του κλάσματος ως διαίρεση, αφού μόλις 5 στους 200 μελλοντικούς εκπαιδευτικούς την είχαν αξιοποιήσει για να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της έρευνας.

Γ. Λάθη – παρανοήσεις στην ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος»

Και σε αυτή την περίπτωση ερμηνείας της έννοιας του κλάσματος, οι δυσκολίες των μαθητών δεν έχουν διερευνηθεί εκτενώς. Έτσι, οι παρανοήσεις που οι μαθητές έχουν συχνά απορρέουν από εσφαλμένες αντιλήψεις σχετικά με τον ορισμό του «λόγου» και του τι αυτός εκφράζει. Μια δυσκολία με την πτυχή του «λόγου» είναι ότι οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την έννοια των σχετικών ποσών για να κατανοήσουν πλήρως την έννοια των κλασμάτων αναλογίας (Marshall, 1993: Ζάντζος, 2009˙ στο Κουλέτση, 2010). Πρέπει, δηλαδή, να συνειδητοποιήσουν τη σχέση μεταξύ των δυο ποσοτήτων και να κατανοήσουν την ιδιότητα ότι οι δυο ποσότητες σε μια σχέση λόγου αλλάζουν μαζί. Σε περίπτωση που οι σχέση αυτή δεν καταστεί αντιληπτή άμεσα από τα παιδιά τότε υπάρχουν δυσχέρειες όχι μόνο στην ανάπτυξη του σχήματος του «λόγου», αλλά και στην κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων (Lamon, 1999: στο Ζάντζος, 2009). Άλλη μια δυσκολία που μπορεί να ανακύψει, σχετίζεται με τη σειρά αναφοράς του κάθε επιμέρους συνόλου (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$ μπορεί να εκφράζει 3 αγόρια για κάθε 4 κορίτσια ή 3:4, αλλά ο λόγος των κοριτσιών προς τα αγόρια είναι 4:3. Αυτό προκύπτει μέσα από συγκρίσεις μεταξύ επιμέρους ομάδων εντός μιας ολότητας. Στον αντίποδα αυτών των δυσκολιών, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί φαίνεται πως επιλέγουν με σημαντικό ποσοστό (21,5% σε δείγμα 200 φοιτητών) την ερμηνεία του «λόγου» για να εκφράσουν μια έννοια του κλάσματος, θέτοντας αυτή την ερμηνεία τη δεύτερη σε συχνότητα χρήσης μετά την ερμηνεία του «μέρος-όλου».

Δ. Λάθη – παρανοήσεις στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο»

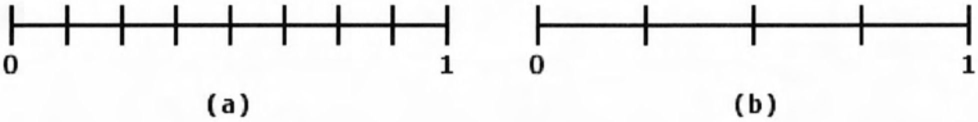
Αν και όπως αναφέρει ο Χατζημανώλης (2008) μετά από ανασκόπηση νεότερων ερευνών, η αξιοποίηση της ερμηνείας του «μέτρου» για τα κλάσματα και κατ' επέκταση η χρήση της αναπαράστασης της αριθμογραμμής εισάγει με φυσικό τρόπο τα παιδιά στην τυπική γνώση των κλασμάτων και στις σχετικές με αυτά διαδικασίες, οι δυσκολίες στη διαχείριση αυτής της ερμηνείας εξακολουθούν να υφίστανται. Τις δυσκολίες αυτές επιβεβαιώνουν αρκετές έρευνες. Ειδικότερα, η έρευνα του Charalambous (2007) σε πλήθος 672 κύπριων μαθητών έκανε ολοφάνερη τη δυσκολία των παιδιών στη χρήση του κλάσματος ως «μέτρο», αφού οι οκτώ από τις έντεκα σχετικές ασκήσεις/δραστηριότητες κατατάχτηκαν ως οι πιο δύσκολες συγκριτικά και με τις υπόλοιπες δραστηριότητες με άλλες ερμηνείες του κλάσματος. Από την άλλη, οι Baturo και Cooper (1999) διαπίστωσαν ότι μόλις το 16,7% του δείγματός τους μπορούσε να επιλύσει ολόσωστα εργασίες με το κλάσμα ως «μέτρο». Την ίδια στιγμή, ο Γιαννέλος (2011) συμπεραίνει ότι οι μαθητές αδυνατούν να ενεργοποιήσουν το σχήμα του «μέτρου», αφού στις δυο σχετικές ερωτήσεις της έρευνάς του ποσοστό του 50% και άνω απαντούσε λανθασμένα.

Στο σημείο αυτό και προτού προχωρήσουμε στην εκτενέστερη επεξεργασία των δυσκολιών που ακολουθούν την ερμηνεία αυτή του κλάσματος, είναι ενδιαφέρον να γίνει μια ιδιαίτερη μνεία στην τοποθέτηση του Charalambous (2007). Σύμφωνα με τα λεγόμενά του στο άρθρο «DevelopingandTestingaScaleforMeasuringStudents' UnderstandingofFractions», *«μια συγκροτημένη αντίληψη της έννοιας του μέτρου απαιτεί οι μαθητές να κατανοούν ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κλασμάτων υπάρχει ένας άπειρος αριθμός άλλων κλασμάτων»*. Ωστόσο, όπως διαπιστώσαμε κατά την μελέτη των παρανοήσεων εννοιολογικής φύσης, μεγάλο μέρος μαθητών αδυνατεί να αναπτύξει μια τέτοια ιδέα για την έννοια του κλάσματος. Συνεπώς, είναι άμεσο επακόλουθο της συγκεκριμένης έλλειψης να υπάρχουν δυσκολίες και στην αντίληψη και διαχείριση της ερμηνεία του μέτρου, αλλά και στον εντοπισμό ή την τοποθέτηση ενός κλάσματος στην αριθμογραμμή.

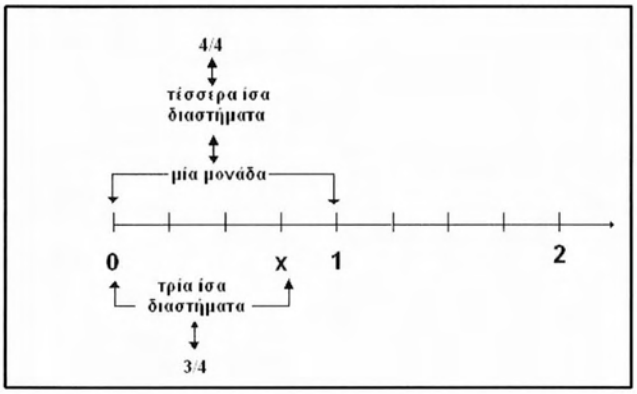
Όπως ήδη γνωρίζουμε, η χρήση της αριθμητικής γραμμής στην αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος βασίζεται στο ότι τα κλάσματα αποτελούν σημεία πάνω στη γραμμή και ταυτόχρονα αποστάσεις από το σημείο 0. Κατά τη μελέτη της ερμηνείας αυτής, διαπιστώσαμε ότι για να τοποθετήσει επιτυχώς κάποιος το κλάσμα επάνω στην αριθμογραμμή πρέπει να έχει κατανοήσει ότι το κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ λειτουργεί ως μονάδα μέτρησης και χρησιμοποιείται επαναληπτικά, ξεκινώντας από το μηδέν, τόσες φορές όσες υποδεικνύει το κλάσμα. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να τοποθετούν έναν αριθμό στην αριθμογραμμή και αντιστρόφως, να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν έναν αριθμό που παριστάνεται επάνω στην αριθμογραμμή από ένα συγκεκριμένο σημείο. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή είναι δύσκολη τόσο για τους μικρούς όσο και για τους μεγαλύτερους μαθητές, αφού δε σχετίζεται εύκολα με την καθημερινή τους εμπειρία (Ζάντζος, 2009˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012). Χαρακτηριστικά, η έρευνα των Wong και Evans (2007) έκανε φανερό ότι οι μαθητές είχαν δυσκολίες στο να προσδιορίσουν ένα κλάσμα με τη χρήση της αριθμογραμμής, αφού μόλις το 33,3% (n=11σε πλήθος 33 μαθητών) τοποθέτησε το σημείο «P» σωστά στην αριθμογραμμή, ενώ ανάλογα είναι και τα ευρήματα της έρευνας των Baturo και Cooper (1999). Επακόλουθο, αυτής της δυσκολίας προσδιορισμού των κλασμάτων σε μοντέλα αριθμογραμμών, είναι και οι δυσκολίες στην επίλυση πράξεων, στη σύγκριση και διάταξη αλλά και στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων με τη χρήση αυτών των μοντέλων (Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Psycharis&Latsi&Kynigos, 2007).

Ουσιαστικά, μπορούμε να κάνουμε λόγο για έντονες δυσκολίες των παιδιών στη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμητικής γραμμής (Baturo&Cooper, 1999˙ Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Wong και Evans, 2007˙ Yanik, Helding&Baek, 2006˙ Χατζημανώλης, 2008). Η έρευνα της Michaelidou (2003, στο Χατζημανώλης, 2008) διαπραγματεύτηκε την επίδοση των μαθητών σε έργα τα οποία εξέταζαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής. Τα ευρήματα έδειξαν ότι οι μαθητές συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας, με τα αποτελέσματα να φανερώνουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν την αριθμητική ευθεία για να εκφράσουν την έννοια του κλάσματος και για να εκτελέσουν πράξεις. Παράλληλα, η έρευνα των Yanik,Helding και Baek (2006) κατέστησε φανερό ότι πολλοί μαθητές χρησιμοποιούσαν την οπτική εικόνα της αριθμογραμμής σαν μια ενότητα, χωρίς να μπορούν να τη δουν ως μια συνεχή συλλογή από επαναληπτικές μονάδες, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν.

Οι δυσκολίες σχετικά με την αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος πάνω στην αριθμητική γραμμή, σύμφωνα με διάφορους ερευνητές (Baturo&Cooper, 1999˙ Charalambous&Pitta-Pantazi, 2007˙ Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Παντσίδης, 2006˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Χατζημανώλης, 2008˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012), σχετίζονται τόσο με το μήκος όσο και με τις υποδιαιρέσεις της αριθμογραμμής. Τα παιδιά μπορούν άνετα να τοποθετήσουν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή, όταν η αριθμογραμμή έχει χωριστεί σε τόσα κομμάτια όσα ορίζει ο παρονομαστής του κλάσματος. Αντιθέτως, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή είτε δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος είτε δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος. Δυσκολεύονται, για παράδειγμα, να τοποθετήσουν το κλάσμα $\frac{7}{8}$ σε μια αριθμογραμμή – όπως αυτές του ακόλουθου σχήματος – που είναι χωρισμένη σε τέταρτα, δεύτερα ή δέκατα έκτα (Behr & Post, 1992 στο Χρυσανθακοπούλου, 2012). Επίσης, οι Charalambous και Pitta-Pantazi (2007) αναφέρουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν επιπρόσθετες δυσκολίες όταν το μήκος της αριθμογραμμής είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.



Η αριθμογραμμή θεωρείται το πιο απαιτητικό μοντέλο για την αναπαράσταση των κλασμάτων, αφού για την τοποθέτηση ενός αριθμού στην αριθμογραμμή απαιτείται η αντίληψη της απόστασης του αριθμού από το μηδέν, καθώς και η δυνατότητα εκτίμησης του μεγέθους ενός κλάσματος. Σε συνάρτηση με τις δυσκολίες που επιφέρει η αλλαγή στο μήκος ή στις υποδιαιρέσεις της αριθμογραμμής, υπάρχουν δυσκολίες και στην αναγνώριση της μονάδας αναφοράς του κλάσματος στην αριθμητική γραμμή. Μια κοινή παρανόηση είναι η τοποθέτηση του κλάσματος – στο – της απόστασης από το 0 στο 2 (Amato, 2005). Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η Pinilla (2007), ο χειρισμός του μηδενός δημιουργεί μεγάλα προβλήματα όχι μόνο για την ερμηνεία του «μέτρου», αλλά και για τη γενικότερη διαχείριση της έννοιας του κλάσματος. Επιπλέον, έχουμε αναφέρει ότι το μοντέλο της αριθμογραμμής είναισυνεχές, ώστε να μην υπάρχει ένας οπτικός διαχωρισμός ανάμεσα στις διαδοχικέςμονάδες. Η αριθμογραμμή σε αυτό το ζήτημα έρχεται σε αντίθεση με άλλεςαναπαραστάσεις που προβάλλουν τη διακριτότητα ενός συνόλου. Μια άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι οι μαθητές μετρούν τα σημεία αντί για ταδιαστήματα προκειμένου να προσδιορίσουν ένα δεδομένο κλάσμα (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Χατζημανώλης, 2008). Το στοιχείο αυτό επιβεβαιώνεται και στη έρευνα των Baturo και Cooper (1999), όπου οι μαθητές μετρούσαν τις διαχωριστικές γραμμές, αντί των διαστημάτων και ως εκ τούτου, η καταμέτρηση συμπεριελάμβανε και το μηδέν. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το κλάσμα μέσα από την ερμηνεία του «μέρος-όλου» θεωρώντας, έτσι, τη μονάδα ως μεγαλύτερη από όλο το κλάσμα και αντιμετωπίζοντας πολλές φορές τον ακέραιο αριθμό της αριθμογραμμής ως μια μονάδα και όχι το τμήμα από το μηδέν ως το ένα. Για παράδειγμα,στην *Εικόνα 17* που ακολουθεί είναι πιθανό να αναγνωρίσουν στη θέση του x το κλάσμα – και όχι τοκλάσμα –



Εικόνα 17: Ο προσδιορισμός του x ως – αντί για –

(English, 1993: στο Χατζημανώλης, 2008)

Όπως, σωστά αναφέρει η Κολέζα (2000), ο σωστός καθορισμός της μονάδας, ειδικά όταν δεν υπάρχει σημασιολογική ταύτιση μεταξύ της συμβολικής και οπτικής αναπαράστασης, είναι απαραίτητος, ώστε να γίνει με ορθό τρόπο αντιληπτή η ερμηνεία του μέτρου και να αποφευχθούν οι παρανοήσεις από την πλευρά των παιδιών. Σε συμφωνία με τη θέση αυτή βρίσκεται και η έρευνα της Χρυσανθακοπούλου, που επιβεβαιώνει τις δυσκολίες των παιδιών της Γ΄ Δημοτικού να τοποθετήσουν τα κλάσματα στην αριθμογραμμή όταν δεν ήταν καθορισμένη η μονάδα αναφοράς.

Ολοκληρώνοντας, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι μαθητές συχνά αποδίδουν στην αναπαράσταση της αριθμητικής ευθείας φυσικά χαρακτηριστικά, όπως το πάχος, ενώ δεν θεωρούν την ευθεία ως σύνολο από σημεία ή ακόμη δεν θεωρούν ότι αριθμοί και σημεία μπορούν να τεθούν σε μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία (Χατζημανώλης, 2008). Πέραν, όμως, των προαναφερθέντων δυσκολιών που είτε αφορούν τη χρήση της αριθμογραμμής ως αναπαράσταση είτε απορρέουν από βασικές ελλείψεις στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, δεν πρέπει να παραλείπουμε το γεγονός ότι πολλές από τις προαναφερθείσες παρανοήσεις και δυσκολίες ενδέχεται να απορρέουν από την ελλιπή εκπαίδευση στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο» και από την αντίστοιχη έμφαση στην ερμηνεία του «μέρος-όλου». Συνεπώς, η αναπαράσταση της αριθμητικής ευθείας δεν επαρκεί, για να μεταφέρει στους μαθητές τις μαθηματικές ιδέες που κρύβονται πίσω από τους κλασματικούς αριθμούς, αλλά παράλληλα με τις άλλες ερμηνείες του κλάσματος δύναται να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση των παιδιών για το κλάσμα, ώστε να αποτραπούν λάθη σαν τα προαναφερθέντα.

Ε. Λάθη-παρανοήσεις στην ερμηνεία του κλάσματος ως «τελεστή»

Όπως έχει τονιστεί και σε άλλο σημείο της εργασίας αυτής, η ερμηνεία του «τελεστή» είναι εξαιρετικά σημαντική για την ανάπτυξη του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων. Παρά τη σημασία αυτή, οι έρευνες δείχνουν ότι η χρήση της είναι περιορισμένη τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς, με αποτέλεσμα οι δυσκολίες σε αυτή την ερμηνεία να μην είναι ευρέως γνωστές. Ωστόσο, οι λιγοστές έρευνες καθιστούν σαφές ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να δουλέψουν με αυτό το σχήμα του κλάσματος. Ειδικότερα, ο Charalambous (2007) μελετώντας τις αποδόσεις στις διάφορες ερμηνείες, κατέληξε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν σε σημαντικό βαθμό στις 5 σχετικές ασκήσεις με το κλάσμα ως «τελεστή». Συγκεκριμένα, στη σχετική διάταξη δυσκολίας που προέκυψε από τα δεδομένα, δυο από τις πέντε δραστηριότητες/ασκήσεις κατατάχτηκαν ως μεσαίου βαθμού δυσκολίας, ενώ οι άλλες τρεις ως αρκετά δύσκολες. Την ίδια στιγμή, και η έρευνα του Γιαννέλου (2011) έκανε φανερό ότι τα παιδιά δεν είχαν αναπτύξει επαρκώς το νοητικό σχήμα του «τελεστή». Οι παραπάνω δυσκολίες θα μπορούσαν να αποδοθούν στο γεγονός ότι η έννοια του «τελεστή» είναι στενά συνδεδεμένη με την ιδέα της λειτουργίας του μετασχηματισμού, η οποία είναι σχετικά δύσκολη να κατανοηθεί από τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου (Charalambous, 2007).

2.4.4. Λάθη – παρανοήσεις διδακτικής φύσης

Όπως, έχει σημειωθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, ο τρόπος διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών είναι εξαιρετικά σημαντικός για την εμβάθυνση τόσο στην έννοια του κλάσματος όσο και στις συνεπακόλουθες ερμηνείες αυτής. Ωστόσο, η διδασκαλία των κλασμάτων δεν είναι μια απλή και εύκολη διαδικασία, αλλά αντιθέτως, συνιστά έναν επίπονο και μακρύ δρόμο μέχρι την κατάκτηση των στοιχειωδών γνώσεων. Είναι, λοιπόν, φυσικό να ανακύπτουν ποικίλες δυσκολίες διδακτικής φύσης, που σχετίζονται από τη μια με τον τρόπο που διδάσκεται το κλάσμα και από την άλλη με τον τρόπο που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν και διαχειρίζονται την έννοια.

Έχει πολλές φορές τονιστεί ότι το κλάσμα συνιστά μια σύνθετη και πολύπλοκη έννοια, που απαρτίζεται από επιμέρους ερμηνείες, με αποτέλεσμα η κατανόηση αυτής της έννοιας να χαρακτηρίζεται από δυσκολίες. Η Pinilla (2007) υποστηρίζει ότι εκτός από τους μαθητές, οι οποίοι δεν διακατέχονται από την απαραίτητη ωριμότητα, ώστε να κατασκευάσουν με πληρότητα την έννοια του κλάσματος και οι δάσκαλοι αγνοούν την εννοιολογική και γνωστική πολυπλοκότητα αυτής της έννοιας. Σε προηγούμενες παραγράφους σημειώθηκε ότι προβλήματα και λάθη στις διάφορες ερμηνείες αλλά και στις βασικές ιδέες για το κλάσμα αντιμετωπίζουν όχι μόνο τα παιδιά αλλά και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί. Ενδεικτικά, οι δάσκαλοι δυσκολεύονται να «δουν» το κλάσμα ως αριθμό (Amato, 2005), ενώ επιλέγουν με μικρή συχνότητα την ερμηνεία του «πηλίκου» και του «τελεστή» για να εκφράσουν έναν κλασματικό αριθμό (Σταματόπουλος, 2011). Επιπλέον, είναι αρκετές οι έρευνες που επιβεβαιώνουν ότι ένα υψηλό ποσοστό εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν διαθέτει επαρκείς γνώσεις για το αντικείμενο των κλασμάτων, ώστε να το διδάξουν αποτελεσματικά στα παιδιά (Harvey, 2011˙ Leinhardt & Smith, 1985˙ Ward&Thomas, 2007). Χαρακτηριστικά, σε σχετική τους έρευνα με θέμα την αξιολόγηση των γνώσεων των δασκάλων για τα κλάσματα, οι Ward και Thomas (2007) διαπίστωσαν ότι το 27% των 53 δασκάλων του δείγματος θεωρούσε τον εαυτό του ως αδύναμο ή πολύ αδύναμο για να διδάξει την έννοια του κλάσματος. Ακόμα πιο δυσάρεστο είναι το εύρημα της εκτενής έρευνας του Ward (2010, στο Harvey, 2011), όπου παρά το γεγονός ότι το 85% των νεοζηλανδών εκπαιδευτικών μπορούσε να διατάξει σωστά τα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{4}{8}$, μόλις το 30% αυτών ήταν σε θέση να περιγράψει πως θα υποστήριζε τους μαθητές στο να χρησιμοποιήσουν μια εννοιολογική προσέγγιση για τη διάταξη αυτών των κλασμάτων. Παράλληλα προς αυτά τα ευρήματα, θα μπορούσαμε εύλογα να υποστηρίξουμε ότι και η προηγούμενη διδακτική «εμπειρία/πρακτική» των διδασκόντων μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας, οδηγώντας τους σε διδακτικές συμπεριφορές οι οποίες είναι έξω από το πλαίσιο των κατάλληλων δραστηριοτήτων και του συνεπαγόμενου διδακτικού τρόπου ο οποίος απαιτείται για την έννοια του κλάσματος. Συνεπώς, η αδυναμία των ίδιων των διδασκόντων να διαχειριστούν αποτελεσματικά την έννοια του κλάσματος, πυροδοτεί επακόλουθες δυσκολίες και στα παιδιά, αφού από την στιγμή που ο εκάστοτε εκπαιδευτικός δεν είναι σε θέση να χειριστεί ο ίδιος έναν κλασματικό αριθμό ή ένα πρόβλημα με κλάσματα δεν θα μπορέσει να μεταδώσει τις απαραίτητες γνώσεις και στον μαθητικό πληθυσμό της τάξης του. Για το λόγο αυτό η Baturo (2004) τονίζει ότι η βελτίωση των μαθηματικών γνώσεων των εκπαιδευτικών συνιστά μια ισχυρή μέθοδο για την βελτίωση και ενίσχυση των γνώσεων των παιδιών.

Από την άλλη, ο τρόπος διδασκαλίας του κλάσματος είναι εκείνος που μεγιστοποιεί τον βαθμό των δυσκολιών των παιδιών (Haser&Ubuz, 2003). Αξιοσημείωτη είναι η τοποθέτηση των Empson, Levi και Carpenter (2010) που υποστηρίζουν ότι η δυσκολία των κλασμάτων δεν σχετίζεται με το αν είναι εγγενώς εύκολα ή δύσκολα, αλλά με το πώς διδάσκονται. Στη σχετική υπο-ενότητα για τις μεθόδους διδασκαλίας του κλάσματος, διαπιστώθηκε ότι σε σημαντικό βαθμό η ερμηνεία του «μέρος-όλου» είναι εκείνη την οποία πρωτοσυναντούν τα παιδιά, ενώ είναι και η ερμηνεία που οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν κατά κόρον για να διδάξουν το κλάσμα. Δυστυχώς, όμως, η έμφαση σε αυτή την ερμηνεία ενδέχεται να δημιουργήσει παρανοήσεις στον τρόπο σκέψης των παιδιών, καθώς είναι πολύ πιθανό να αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως «μέρος-όλου» σαν τη μοναδική διάσταση του κλάσματος και να μάθουν να διαχειρίζονται με επάρκεια αποκλειστικά αυτή την ερμηνεία. Ωστόσο, ο Σταματόπουλος (2011) αναφέρει ότι η εστίαση σε κάποια από τις βασικές έννοιες του κλάσματος θα μπορούσε να γίνει μετην επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων, που θα διαπραγματεύονται μια συγκεκριμένη έννοια, θα οδηγούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων και τη γενίκευση και κατ' επέκταση, στην κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος. Η ακατάλληλη, όμως και μη αντιπροσωπευτική επιλογή παραδειγμάτων που δεν επικεντρώνονται στα κύρια χαρακτηριστικά του κλάσματος και δεν περιορίζονται στα σχετικά με την έννοια στοιχεία, δυσχεραίνει τους μαθητές στις γενικεύσεις και στη μάθηση της έννοιαςτου κλάσματος. Παράλληλα, σύμφωνα με τους Zodik και Zaslavsky (2008) η επιλογή των παραδειγμάτων αποτελεί πρόκληση για τον εκπαιδευτικό και εξαρτάται από τη μαθηματική του γνώση, από τη γνώση που διαθέτει για τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές και από τον τρόπο που μετασχηματίζει τη μαθηματική γνώση για να είναι κατανοητή στους μαθητές. Κατ' επέκταση, λοιπόν, η μη οργανωμένη και λανθασμένη επιλογή παραδειγμάτων μπορεί να κάνει περισσότερο κακό απ' ότι καλό στην αντίληψη των παιδιών για τα κλάσματα.

Εκτός από την έμφαση στην ερμηνεία του «μέρος-όλου», η παραδοσιακή διδασκαλία περιλαμβάνει και την πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων (σύμβολο κλάσματος, αλγόριθμοι) (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Ηέμφαση αυτή στη διαδικαστική γνώση και την αλγοριθμική προσέγγιση, αναφορικά με τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, κατατείνει στη μηχανική εφαρμογή των διαδικασιών και των κανόνων από τους μαθητές με αποτέλεσμα τη δυσκολία στην κατανόησή τους (Γαγάτσης κ. συν., 2006˙ Κουλέτση, 2010). Όπως υποστηρίζει η Κουλέτση (2010), η πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων από τους εκπαιδευτικούς, που είναι πιο κοντά στον τρόπο σκέψης ενός ενήλικα απ' ότι ενός παιδιού, έχουν ως αποτέλεσμα την ελλιπή κατανόηση των κλασμάτων από τα παιδιά και κατ' επέκταση, τη δυσκολία μετατροπής τους από τη μια μορφή αναπαράστασής τους στην άλλη. Ωστόσο, τόσο ο Γαγάτσης κ. συν. (2006) όσο και ο Γιαννέλος (2011) καταγράφουν ότι οι δάσκαλοι προτιμούν για τη διδασκαλία των κλασμάτων και των σχετικών εννοιών και σχέσεων τη συμβολική προσέγγιση έναντι της οπτικής. Αποτέλεσμα αυτής της προτίμησης σε συνδυασμό και με τις ελλιπείς γνώσεις για τα κλάσματα, είναι οι μαθητές να κάνουν λάθη, καθώς επηρεάζονται από τους φυσικούς αριθμούς και δυσκολεύονται να συνδέσουν την οπτική αντίληψη μιας έννοιας με τη συμβολική της. Για παράδειγμα, η έρευνα των Μπούρικα, Πέτρου και Χάλκου (2002, στο Γιαννέλος, 2011), έκανε φανερό ότι οι μαθητές κατανοούν ότι $\frac{1}{5}>\frac{1}{10}$ όταν κάνουν βιωματική (εποπτική) αναπαράσταση της σχέσης αυτής, ενώ όταν έρχονται αντιμέτωποι με τη συμβολική αναπαράσταση της σχέσης αυτής, τότε θεωρούν ότι $\frac{1}{5}<\frac{1}{10}$, αφού λειτουργούν όντας επηρεασμένοι από τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, όταν δίνεται σημασία στη διαδικαστική γνώση (κανόνων, αλγορίθμων, διαδικασιών), οι γνώσεις αυτές μαθαίνονται μηχανικά, μένοντας ασύνδετες με την έννοια του κλάσματος, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μη γνωρίζουν το γιατί τις εφαρμόζουν και να οδηγούνται σε λάθη επιστημολογικής, εννοιολογικής ή αναπαραστατικής φύσης.

Επιπλέον, η διδασκαλία των κλασματικών αριθμών δεν είναι εύκολη, καθώς αυτοί δεν βρίσκονται στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών, σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς, για το μέγεθος των οποίων σχηματίζουν από μικρή ηλικία σαφή αντίληψη μέσω των εμπειριών τους. Όπως σωστά θέτει η Χρυσανθακοπούλου (2012), εκτός από τη μελέτη της ανάπτυξης των ιδεών των παιδιών σχετικά με τα κλάσματα και τις αναμενόμενες δυσκολίες, είναι ανάγκη να σταθούμε και στη σταθερότητα ή την αστάθεια των ιδεών αυτών. Έτσι, καθώς το παιδί διδάσκεται όλο το φάσμα της έννοιας του κλάσματος, οι αρχικές αντιλήψεις του πρέπει να μετατραπούν σε προοδευτικά πιο σύνθετα συστήματα ιδεών. Για παράδειγμα, ιδέες που ισχύουν σε συγκεκριμένα πλαίσια, όπως το ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ή ότι το κλάσμα είναι μέρος του όλου, αποπροσανατολίζουν ή τελικά, δεν είναι χρήσιμες όταν επεκτείνονται σε νέα πεδία. Ο εκπαιδευτικός σε αυτή την επανεξέταση και τον επαναπροσδιορισμό των ήδη εγκατεστημένων αντιλήψεων οφείλει να υποστηρίξει το μαθητή, παρέχοντάς του ποικίλα γόνιμα παραδείγματα και βιώματα, τα οποία έχει χρέος αρχικά ο ίδιος να κατανοεί και να ενστερνίζεται. Σε περίπτωση που ο δάσκαλος αδυνατεί να διακρίνει τις δικές του αντιλήψεις για τους φυσικούς και κλασματικούς αριθμούς, θα μεταφέρει εσφαλμένες ιδέες και στο παιδί προκαλώντας του έντονες παρανοήσεις για την εννοιολογική φύση των κλασμάτων. Όπως, είναι φυσικό, φράσεις του τύπου «το κατάλαβες» ή «δεν το κατάλαβες» δεν αποτελούν τα άκρα του δίπολου για την κατανόηση της έννοιαςτου κλάσματος, αλλά τους ενδιάμεσους σταθμούς στο εποικοδομητικό χτίσιμο της γνώσης των κλασματικών αριθμών.

Πέραν του παγιωμένου τρόπου διδασκαλίας των κλασμάτων, ακόμα και ο τρόπος παρουσίασης αυτών είναι συγκεκριμένος, στερεότυπος και συχνά πολύ καθοδηγούμενος (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Για παράδειγμα ο μαθητής καλείται να σκιαγραφήσει τα $\frac{3}{4}$ ενός ορθογωνίου ή ενός κύκλου, τα οποία είναι εκ των προτέρων χωρισμένα σε 4 ίσα μέρη. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές απλά καταμετρούν τόσα μέρη, όσα και ο αριθμητής του κλάσματος. Όταν, λοιπόν, το σχήμα παρουσιάζεται με στερεότυπη μορφή, δηλαδή χωρισμένο σε τόσα μέρη όσα και ο παρονομαστής του κλάσματος, οι μαθητές ακολουθούν πάντα την ίδια διαδικασία για να σκιάσουν την επιφάνεια που τους ζητείται. Έτσι, ο Γαγάτσης και οι συνεργάτες του (2006) σημειώνουν ότι «*επειδή οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται έχουν μια στερεότυπη μορφή σχημάτων, ο διαχωρισμός αυτών των σχημάτων τείνει να εξελιχθεί σε στερεότυπο*». Η επιλογή, όμως, αυτού του μοντέλου αναπαράστασης οδηγεί στο σχηματισμό ενός στερεοτύπου στο μυαλό των μαθητών που καταλήγει σε εσφαλμένες αντιλήψεις. Αναλυτικότερα, η διαδικασία καταμέτρησης κάνει τους μαθητές να επικεντρώνουν την προσοχή τους μόνο στον αριθμητή του κλάσματος, αγνοώντας τον παρονομαστή. Αυτό έχει ως επακόλουθο να ενισχύεται η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν το κλάσμα ως μία ποσότητα, ως έναν αριθμό που η σημασία του προέρχεται από τη σχέση που έχει ο αριθμητής με τον παρονομαστή. Συνολικό αποτέλεσμα αυτής της συνθήκης καθίσταται είτε η πρόκληση είτε η επιδείνωση των δυσκολιών εννοιολογικής φύσης. Τη θέση αυτή υποστηρίζουν τόσο ο Amato (2005) όσο και ο Γαγάτσης κ. συν. (2006).

Η χρήση, όμως, της παραπάνω αναπαράστασης δεν είναι η μοναδική αιτία πρόκλησης των παρανοήσεων διδακτικής φύσης. Όπως έχει ειπωθεί σε αντίστοιχη υπο-ενότητα, για τη διδασκαλία της έννοια των κλασμάτων χρησιμοποιούνται με μεγάλη συχνότητα οι αναπαραστάσεις εμβαδού επιφάνειας. Έτσι, τα γεωμετρικά σχήματα και το εμβαδόν τους λειτουργούν ως το άλλο πλαίσιο «μεταφοράς», οι ιδιότητες του οποίου αποτελούν το υπόβαθρο ανάδειξης των χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων των κλασματικών αριθμών (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Παρ' όλα αυτά, σε περίπτωση που προηγούμενες γνώσεις για τα γεωμετρικά σχήματα και την έννοια του εμβαδού δεν είναι επαρκώς κατεκτημένες, οδηγούν τα παιδιά σε λανθασμένη διαχείριση των αναπαραστάσεων και συνεπώς, σε εσφαλμένη ανάπτυξη της κλασματικής ιδέας. Την ίδια στιγμή, λόγω του ότι τα μοντέλα επιφάνειας ή εμβαδού θωρούνται πιο εύκολα στη χρήση από τα διακριτά μοντέλα, πραγματοποιείται μια εκτεταμένη χρήση αυτών κατά τη διδασκαλία (Ζάντζος, 2009˙ Κολέζα, 2000˙ Σταματόπουλος, 2011), που ενδέχεται να περιορίσει όχι μόνο την αντίληψη των μαθητών για την έννοια του κλάσματος, αλλά και να δημιουργήσει προβλήματα στη διαχείριση των διακριτών μοντέλων. Στο σημείο αυτό, είναι καλό να αναφερθεί η γνώμη του Γαγάτση και των συνεργατών του (2006), καθώς σύμφωνα με αυτή, η συνύπαρξη δύο σχημάτων δημιουργεί προϋποθέσεις για εννοιολογική σύγχυση, δεδομένου ότι για παράδειγμα, η πρόσθεση εμφανίζεται ως ένωση των μερών, αλλά όχι ως ένωση του όλου. Επιπροσθέτως, τα διάφορα σχήματα που χρησιμοποιούνται ως αναπαραστάσεις για την ερμηνεία του «μέρος-όλου» μπορεί να οδηγήσουν σε παρανοήσεις, ανάλογα με το πώςτις αντιλαμβάνονται οι μαθητές (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές αντί να επικεντρώνουν την προσοχή τους στην έννοια του κλάσματος, επικεντρώνονται στην ίδια την αναπαράσταση του αντικειμένου, παραμένουν προσκολλημένοι αποκλειστικά στην αναπαράσταση και δεν δομούν μια συνολική εικόνα του κλάσματος. Από την άλλη, και τα μοντέλα αναπαραστάσεων των υπόλοιπων ερμηνειών προκαλούν δυσάρεστες καταστάσεις. Όπως χαρακτηριστικά είδαμε, το μοντέλο της αριθμογραμμής μπερδεύει τα παιδιά λόγω του ότι είναι συνεχές και όχι διακριτό, ενώ η δομή του δεν χαρακτηρίζεται από καθολική σαφήνεια.

Την ίδια στιγμή, κατά τη γενικότερη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος, δεν επιχειρείται μία συνειδητοποιημένη σύνδεση και συσχέτιση της έννοιας των κλασμάτων με τους δεκαδικούς και τους ακεραίους, ώστε οι μαθητές να εντοπίζουν τι κρατάμε και τι πετάμε από τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις (Γαγάτσης κ. συν., 2006). Πέραν, όμως, από τις παραπάνω συσχετίσεις δεν πραγματοποιούνται ούτε συγκρίσεις μεταξύ των κλασμάτων και των φυσικών αριθμών ή των κλασμάτων και των δεκαδικών, με απώτερο σκοπό να διαπιστώσουν τα παιδιά τα κοινά σημεία που μπορούν να αξιοποιήσουν ή τις διαφορές που πρέπει να προσέξουν. Έτσι, παρά την σημασία που φέρουν τα κλάσματα, οι διδάσκοντες παραμένουν προσκολλημένοι στην παγιωμένη, αυτοματοποιημένη και στείρα μετάδοσή τους, με αποτέλεσμα οι δυσκολίες των παιδιών να εντείνονται. Όπως, αναφέρει και η Pinilla (2007), οι εκπαιδευτικοί προτιμούν τις παγιωμένες διδακτικές μεθόδους για την μετάδοση των κλασμάτων αντί των μη-διδακτικών μεθόδων (π.χ.: βιωματικές μέθοδοι διδασκαλίας) που οδηγούν σε ουσιαστική γνώση, με αποτέλεσμα τη σχεδόν πλήρη αποτυχία των παιδιών στην εκμάθηση των κλασμάτων. Για το λόγο αυτό, ο Γιαννέλος (2011) λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα βιβλιογραφικά δεδομένα, καθώς και τα ευρήματα της έρευνάς του, υποστηρίζει ότι η απουσία μηχανικής προσέγγισης και αποσπασματικής απομόνωσης ορισμών και ιδιοτήτων των κλασμάτων, σε συνδυασμό με την εμφατική καθοδήγηση του μαθητή να ανακαλύψει επαγωγικά τους νόμους που διέπουν τα κλάσματα, θα βοηθήσει στην εις βάθος κατανόηση των κλασμάτων και στην αποβολή λανθασμένων συνηθειών και λαθών στη διαχείριση καταστάσεων με κλάσματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν ότι το 1 ως αριθμητής του $\frac{1}{10}$ αντιπροσωπεύει κάτι μικρότερο από το 1 ως αριθμητή του $\frac{1}{5}$.

Προτού ολοκληρωθεί η μελέτη των λαθών και παρανοήσεων διδακτικής φύσης στην αντιμετώπιση της έννοιας του κλάσματος, πρέπει να σημειωθεί ένα ακόμα επικείμενος παράγοντας δυσκολίας. Ειδικότερα, ερευνητές όπως ο Γιαννέλος (2011) και η Κολέζα (2000) σημειώνουν ότι το γεγονός ότι τα κλάσματα εισάγονται σχετικά αργά στη σχολική ύλη – στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα τα κλάσματα εισάγονται πρώτη φορά στην Τρίτη Δημοτικού – ίσως κάνει ακόμα δυσχερέστερη την κατανόησή τους, καθώς έχουν ήδη παγιωθεί στους μαθητές τα γνωστικά σχήματα που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αυτά τα ήδη εδραιωμένα σχήματα και για το χειρισμό των κλασμάτων και να καταλήγουν σε εσφαλμένους χειρισμούς. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί ξέροντας ότι οι μαθητές τους έχουν κατακτήσει και αποκτήσει ευχέρεια στο χειρισμό και στις πράξεις των ακεραίων από τα προηγούμενα χρόνια, υποκύπτουν συχνά στην λανθασμένη ιδέα ότι τα παιδιά θα κατακτήσουν εξίσου εύκολα και την ιδέα του κλάσματος (Γιαννέλος, 2011). Δεν συνειδητοποιούν, δηλαδή, ότι τα κλάσματα συνιστούν μια καινούργια, άγνωστη και μη φυσική για τον μαθητή έννοια, η οποία από τη μια απαιτεί πολύ χρόνο για τη βαθιά κατανόησή της και από την άλλη, προϋποθέτει έναν άρτιο και πολύπλευρο τρόπο διδασκαλίας από την πλευρά του εκπαιδευτικού.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα υπο-ενότητα, καταλήγουμε στο εύλογο συμπέρασμα ότι η συνολική διαδικασία διδασκαλίας των κλασματικών εννοιών ενέχει μια σειρά σημαντικών παραγόντων για την ανάπτυξη λαθών και παρανοήσεων από μέρους των μαθητών. Για την αποφυγή αυτών των δυσμενών σφαλμάτων, είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση όχι στη διδασκαλία στερεότυπων αλγοριθμικών δραστηριοτήτων, αλλά να προτάσσεται επίμονα η οπτική αναπαράσταση των κλασμάτων και των σχέσεών τους και όχι η συμβολική. Μέσα από μια ορθολογική και οργανωμένη προσέγγιση θα επιτευχθεί με γόνιμο τρόπο η κατάκτηση των κλασματικών εννοιών και των πράξεων μεταξύ κλασμάτων.

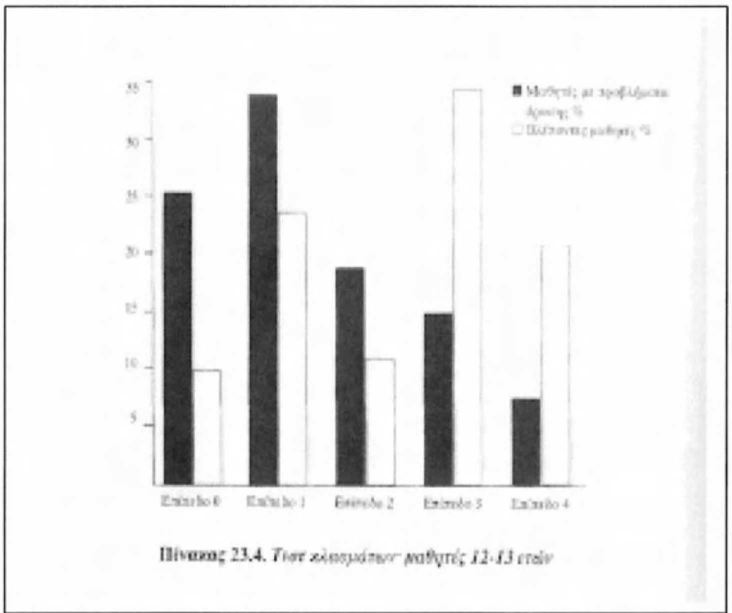
Στο σημείο αυτό, ολοκληρώθηκε η μελέτη για την αντιμετώπιση του φάσματος της έννοιας του κλάσματος από τους μαθητές. Έγινε ξεκάθαρα φανερό ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν πολλαπλές δυσκολίες σε διάφορα επίπεδα και οι οποίες προέρχονται από ποικίλες πηγές. Αναμφίβολα οι δυσκολίες αυτές δεν υφίστανται μεμονωμένα, αλλά αντιθέτως, είτε συνυπάρχουν με άλλες είτε συνιστούν αφορμές για την δημιουργία νέων δυσκολιών. Την ίδια στιγμή, η εκμάθηση των κλασμάτων με προκαθορισμένους τρόπους, καθώς και η προσκόλληση στη χρήση συγκεκριμένων κανόνων – ρουτινών (Haser&Ubuz, 2003˙ Newstead & Murray, 1998), οδηγούν σε αρνητικά αποτελέσματα στον τρόπο που τα παιδιά διαχειρίζονται την έννοια του κλάσματος. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται σωστή οργάνωση της διδασκαλίας (παραδείγματα, μέθοδοι, μέσα), κατάλληλη επιλογή κλασματικών αναπαραστάσεων και αξιοποίηση όλων των ερμηνειών, ώστε να περιοριστούν οι παρανοήσεις και τα λάθη στον ελάχιστο δυνατό βαθμό και να δομηθεί από τους μαθητευόμενους μια σταθερή αντιληπτική θεμελίωση για την έννοια του κλάσματος.

2.5. Τα Κλάσματα για τους Μαθητές με Αναπηρία Όρασης

Σε προηγούμενα κεφάλαια αυτής της εργασίας αναδείχτηκε η σημασία που φέρει η έννοια του κλάσματος στην καθημερινότητα, αλλά και για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Εξάλλου, καθημερινά γύρω μας συναναστρεφόμαστε κλασματικούς αριθμούς, από τις συνταγές μαγειρικής μέχρι και τις αγορές μας στο σούπερ μάρκετ μιλούμε αξιοποιώντας τα κλάσματα. Διαπιστώσαμε, όμως, ότι παρά το ευρύ φάσμα κλασμάτων που μας περιβάλλει, οι βλέποντες μαθητές αντιμετωπίζουν τα κλάσματα με ανάμεικτα συναισθήματα, που στις περισσότερες περιπτώσεις ξεκινούν με συναισθήματα φόβου και κατά την εκπαιδευτική πορεία επέρχονται κάποιες περιπτώσεις πιο θετικές στάσεις. Επιπλέον, και οι επιδόσεις των βλεπόντων μαθητών καθιστούν σαφές ότι υπάρχουν πολλαπλές δυσκολίες στη διαχείριση της έννοιαςτου κλάσματος, ενώ τα ποικίλα λάθη που γίνονται από τα παιδιά εξαρτώνται και από την ερμηνεία του κλάσματος που διαπραγματεύονται.

Τις παραπάνω δυσκολίες, ωστόσο, δεν τις συναντούμε αποκλειστικά στους βλέποντες μαθητές. Αντιθέτως, και οι μαθητές με ΑΟ αντιμετωπίζουν προκλήσεις όταν καλούνται να διαχειριστούν κλασματικούς αριθμούς. Κάποιες, λοιπόν, από τις δυσκολίες τους συμπίπτουν με εκείνες των βλεπόντων συμμαθητών τους, ενώ άλλες απορρέουν από άλλους παράγοντες, που θα μελετήσουμε παρακάτω. Θα περίμενε, βέβαια, κάποιος ότι οι μαθητές με ΑΟ θα αντιμετώπιζαν περισσότερες δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, ωστόσο, αυτή η θέση δεν τεκμηριώνεται ερευνητικά, γιατί η σχετική βιβλιογραφία είναι ελλιπής. Συγκεκριμένα, ο αριθμός των επιστημονικών ερευνών που διαπραγματεύονται τους τρόπους διαχείρισης του κλάσματος και τις αποδόσεις των παιδιών με ΑΟ είναι περιορισμένος, ενώ περισσότερη βαρύτητα έχει δοθεί από τους ερευνητές στην καταγραφή μιας σειράς μεθόδων και υλικών διδασκαλίας που θα διευκολύνουν την κατάκτηση της έννοιας.

Κατά την επισκόπηση, λοιπόν, της βιβλιογραφίας εντοπίστηκαν μόνο τρεις πηγές που είχαν αναφορές στη σχέση της έννοιας του κλάσματος και στους μαθητές με ΑΟ. Η Clampστην έρευνά της το 1988 (στο Clamp, 1997) διαπίστωσε μέσα από τα testπου έδωσε σε μαθητές με και χωρίς ΑΟ ηλικίας 12-13 χρονών, ότι το ποσοστό των μαθητών με προβλήματα όρασης που απάντησε στο κάθε test ήταν από 16 έως 35% μικρότερο από το ποσοστό βλεπόντων μαθητών της ίδιας ηλικίας. Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται ξεκάθαρα οι αποκλίσεις που εντόπισε η Clamp ανά επίπεδο. Την ίδια στιγμή, οι Bealκαι Shaw(2009) διαπίστωσαν ότι οι τυφλοί μαθητές του δείγματος τους απέδιδαν καλύτερα στα προβλήματα με αριθμούς έναντι εκείνων με κλάσματα, ενώ είχαν περισσότερες πιθανότητες να κάνουν λάθη στα προβλήματα με κλάσματα απ' ότι σε εκείνα με αριθμητικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, απάντησαν σωστά στο 82% των αριθμητικών προβλημάτων έναντι του 59% στα προβλήματα με κλάσματα. Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, τόσο οι βλέποντες μαθητές της έρευνας όσο και οι τυφλοί συμφωνούσαν ως προς το ότι τα αριθμητικά προβλήματα είναι ευκολότερα από εκείνα με κλάσματα. Παράλληλα, οι βλέποντες και οι τυφλοί μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα απέδωσαν καλύτερα στα εύκολα προβλήματα, όπου ζητούνταν οι αναγνώριση του αριθμητή και του παρανομαστή, απ' ότι στα δυσκολότερα προβλήματα, που περιείχαν πράξεις με ετερώνυμα κλάσματα. Μάλιστα, φάνηκε ότι οι τυφλοί μαθητές απέδιδαν ικανοποιητικά στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, ενώ αντιμετώπιζαν περισσότερες δυσκολίες όταν καλούνταν να βρουν τον κοινό παρανομαστή των κλασμάτων για να εκτελέσουν μια πράξη. Δυσκολίες, όμως, στην εκπόνηση πράξεων σημειώνουν και οι Kapperman, Heinzeκαι Sticken (1997), που υποστηρίζουν ότι αν οι απλές πράξεις είναι μια φορά δύσκολες για τους μαθητές με ΑΟ, οι πράξεις με κλάσματα είναι ακόμα δυσκολότερες. Ακόμη, οι ίδιοι ερευνητές σημειώνουν ότι η κατάκτηση του πολλαπλασιασμού με κλάσματα είναι δύσκολη από τους μαθητές με ΑΟ, ενώ οι δυσκολίες γίνονται εντονότερες όταν έχουμε να κάνουμε με την πράξη της διαίρεσης (και Kapperman, Heinze&Sticken, 2000).

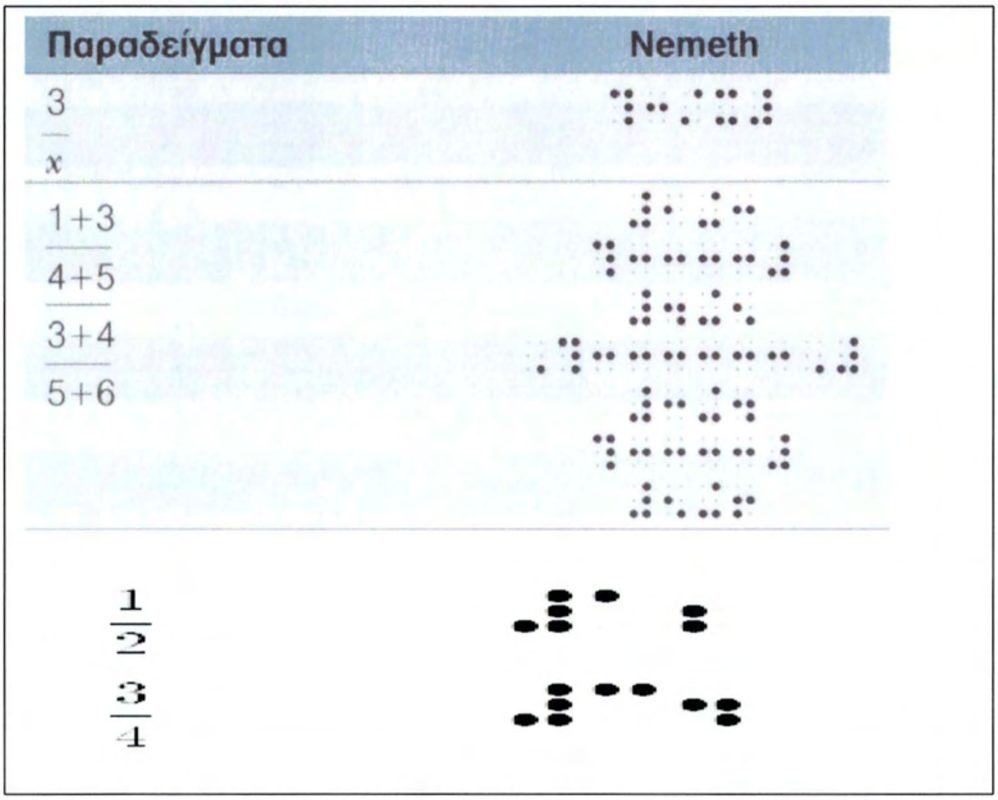


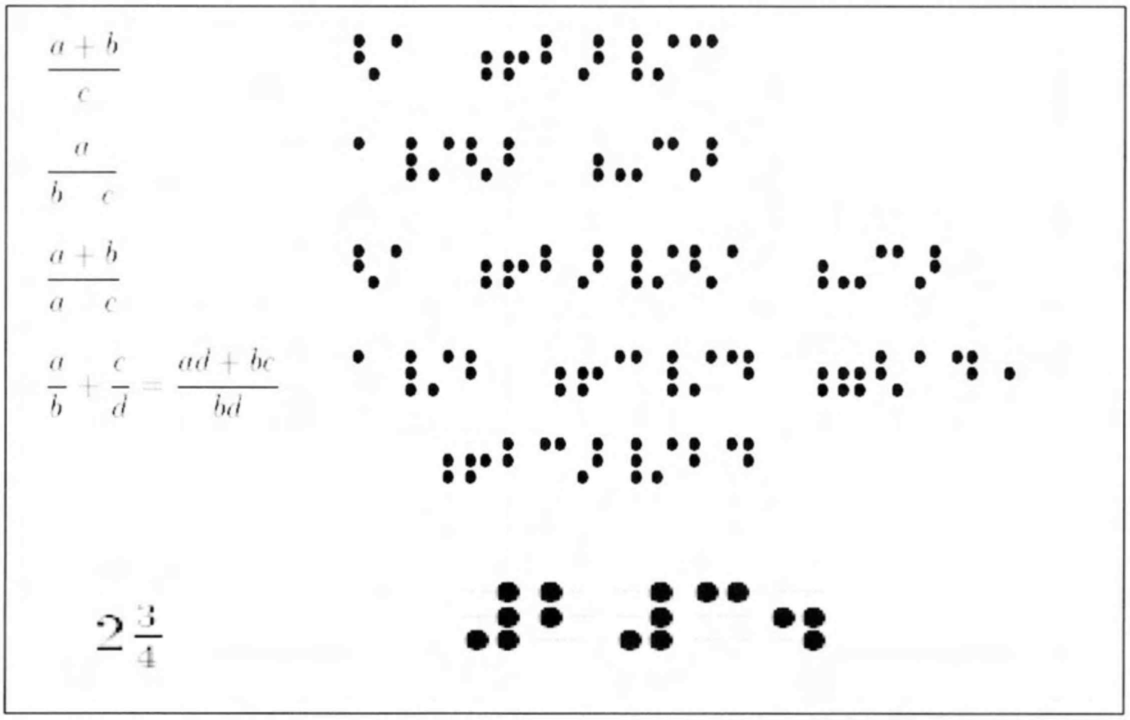
Εικόνα 18: οι αποδόσεις των μαθητών με ΑΟ (μαύρο χρώμα) και οι αποδόσεις των βλεπόντων μαθητών (λευκό χρώμα) στα σχετικά με τα κλάσματα test

Στην προσπάθειά τους να αναγνωρίσουν τις αιτίες που οδηγούν τους μαθητές με ΑΟ να αντιμετωπίζουν δυσμενώς την έννοια του κλάσματος, οι ερευνητές επικαλούνται διάφορους παράγοντες. Έτσι, ως πρωταρχική αιτία καθίστανται οι δυσκολίες που εξορισμού υπάρχουν στη σημειογραφία του κώδικα Nemethγια τα Μαθηματικά και που κατ' επέκταση ισχύουν και για τους κλασματικούς αριθμούς (Archambaultet. al., 2007˙ Κουρουπέτρογλου & Φλωριάς, 2003). Ειδικότερα, ο κώδικας αυτός χρησιμοποιεί μια σειρά συνδυασμένων χαρακτήρων για να δηλώσει έναν κλασματικό αριθμό, ενώ υπάρχει και μια σειρά κανόνων για να γραφτεί ένα κλάσμα. Συγκεκριμένα, η καταγραφή ενός κλασματικού αριθμού σε braille απαιτεί τον προσδιορισμό τριών χαρακτήρων: του αριθμητή, της κλασματικής γραμμής και του παρανομαστή του κλάσματος. Όπως είναι επόμενο, η καταγραφή ενός και μόνο κλάσματος είναι μακροσκελής, ενώ και η ανάγνωση αυτού απαιτεί την ύπαρξη καλών μνημονικών δεξιοτήτων, αφού ο αναγνώστης πρέπει να θυμάται τι είναι αυτό που διάβασε στην αρχή ενός κλάσματος. Την ίδια στιγμή, με βάση και τους κανόνες που διέπουν τον κώδικα Nemeth, η αναπαράσταση των απλών κλασμάτων είναι διαφορετική από εκείνη των σύνθετων κλασμάτων, καθώς σε κάθε περίπτωση αξιοποιούνται διαφορετικοί ενδείκτες για να υποδηλωθεί η κάθε περίπτωση κλάσματος (Κουρουπέτρογλου & Φλωριάς, 2003˙ Nemeth, 1972).

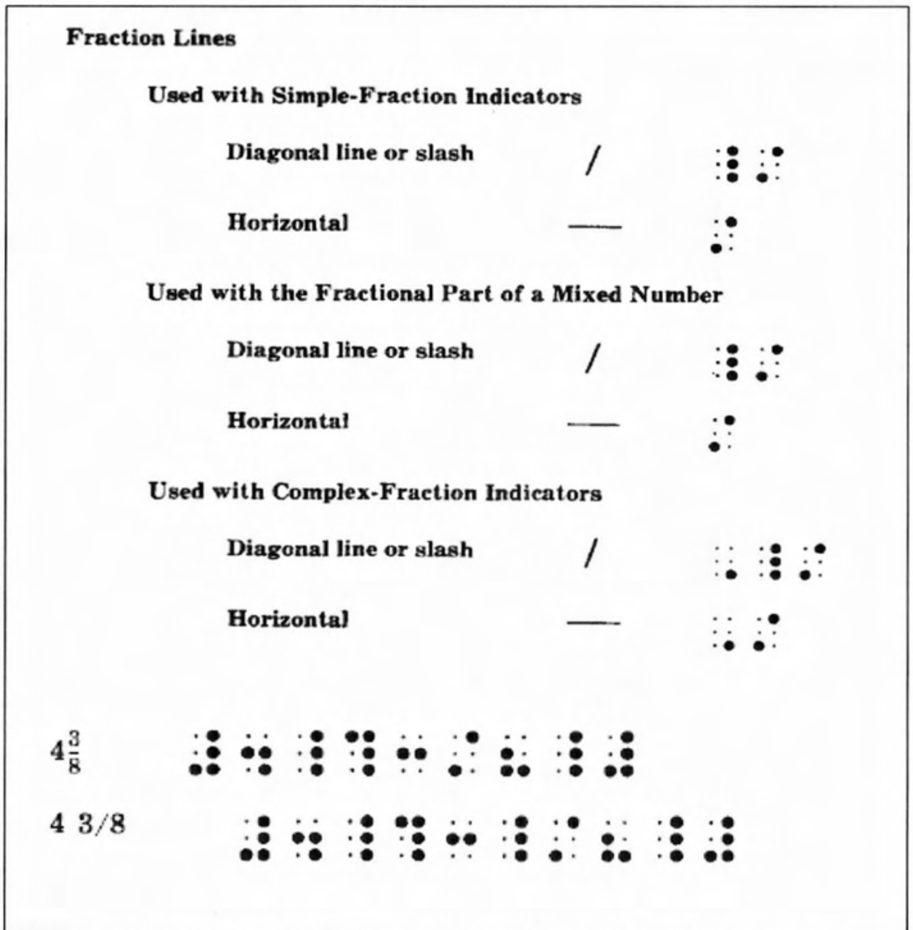
Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι στη γραφή braille το κλάσμα δεν γράφεται με τον κλασικό τρόπο, αλλά ο αριθμητής και ο παρονομαστής γράφονται στην ίδια ευθεία με τα κατάλληλα σύμβολα, συνεπάγεται ότι η γραφή της απλοποίησης, του σύνθετου κλάσματος, καθώς και αυτού που ονομάζουμε «καπελάκι» και το σημειώνουμε για να μετατρέψουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμαθα είναι πολύπλοκη και περίπλοκη (Λαμπροπούλου, 2004). Ακόμη, με βάση το «BrailleMathematicsNotation» (2005) του RoyalNationalInstituteoftheBlind, χρησιμοποιείται, με ελάχιστες εξαιρέσεις, το ίδιο σύμβολο του κώδικα για να υποδείξει την κλασματική γραμμή (–) αλλά και την πλάγια γραμμή (/). Από την άλλη, σύμφωνα με τον κώδικα Nemeth (1972) χρησιμοποιούνται διαφορετικοί συμβολισμοί για την αναπαράσταση της οριζόντιας γραμμής και της διαγώνιας γραμμής, που κάθε φορά διαφοροποιούνται με βάση αν δηλώνουν από ή σύνθετο κλασματικό αριθμό.

Στις εικόνες που ακολουθούν αναδεικνύεται η έκταση της καταγραφής ενός κλάσματος και οι σύνθετοι κανόνες που απαρτίζουν έναν κλασματικό αριθμό, ενώ και οι πίνακες φανερώνουν τους πολλαπλούς κανόνες που ο χρήστης του κώδικα καλείται να κατακτήσεις, ώστε να μπορεί να διαβάζει και να γράφει κλασματικούς αριθμούς.

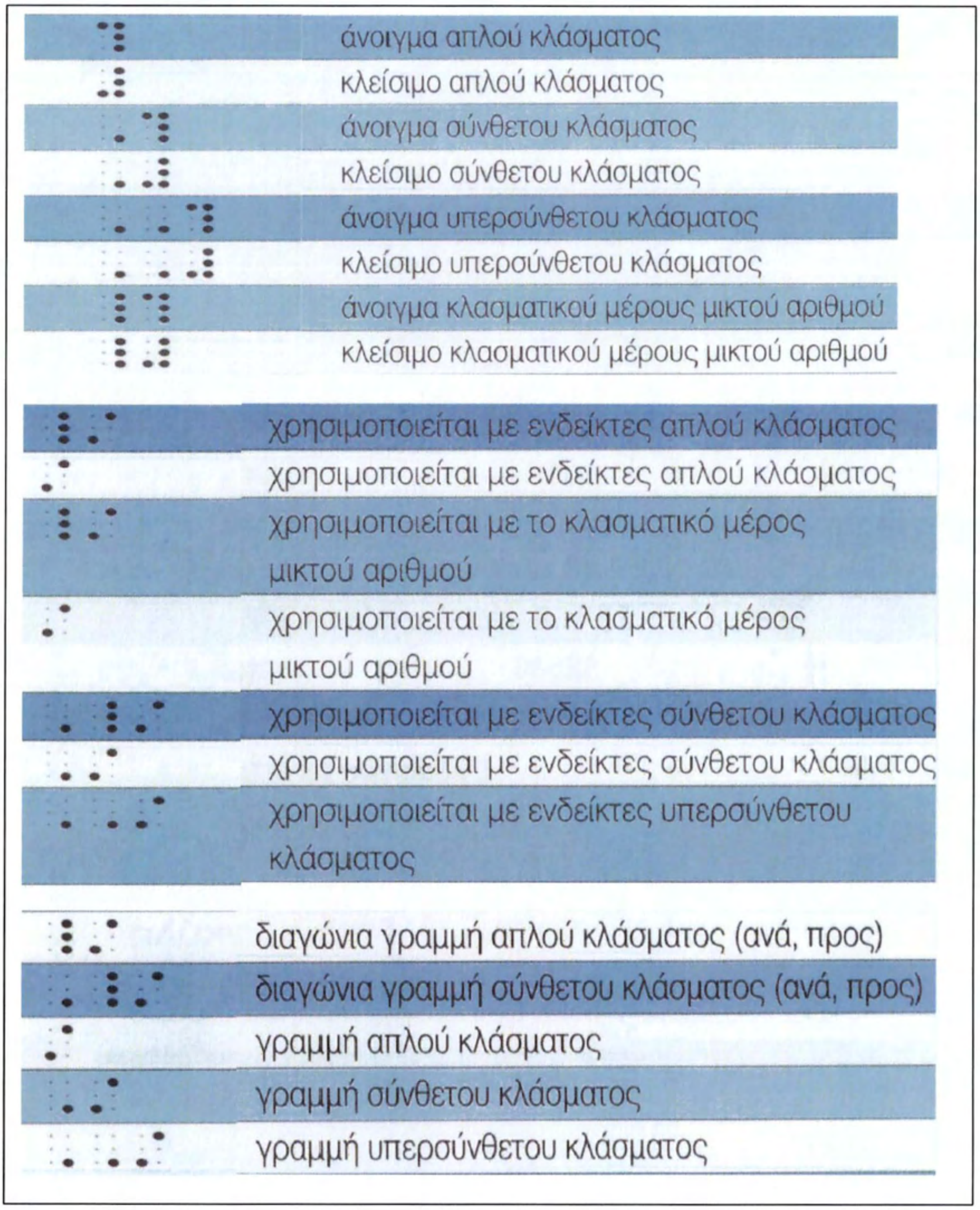




Εικόνα 19: κλασματικοί αριθμοί και τύποι γραμμένοι στον κώδικα Nemeth



Εικόνα 20 : η κλασματική γραμμή σε διάφορες περιπτώσεις



Εικόνα 21: ενδείκτες κλασμάτων

Είναι ολοφάνερο ότι η χρήση του κώδικα Nemeth για την έκφραση κλασματικών αριθμών όσο και αν διευκολύνει την ανάγνωση και γραφή τους, δεν μηδενίζει τα προβλήματα, ώστε να κατακτάται με άνεση η έννοια του κλάσματος. Η εκτενής καταγραφή ενός απλού κλάσματος, η προϋπόθεση να χρησιμοποιούνται οι σωστοί κανόνες και τα σωστά σύμβολα κάθε φορά, καθώς και το γεγονός ότι ο μαθητής καλείται να θυμάται τόσους πολλούς διαφορετικούς κανόνες και σύμβολα, εντείνουν δυσμενώς τη σχέση ανάμεσα σε μαθητές με ΑΟ και την έννοια του κλάσματος. Επιπροσθέτως, όπως σημειώθηκε προηγουμένως, δεν υπάρχει ένας κοινός κώδικας brailleγια τα Μαθηματικά. Πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ευρέως καθορισμένα σύμβολα που να δηλώνουν και τα κλάσματα. Για παράδειγμα, στην Ιταλία οι δείκτες για τον αριθμητή είναι διαφορετικοί από εκείνους του παρανομαστή, ενώ δεν υπάρχει δείκτης για την κλασματική γραμμή (Archambaultet. al., 2007).

Πέραν, όμως, της χρήσης του συστήματος γραφής και ανάγνωσης braille, οι μαθητές με ΑΟ χρησιμοποιούν και τα διάφορα προγράμματα και λογισμικά. Στην περίπτωση των κλασμάτων η χρήση αντίστοιχων τεχνολογικών βοηθημάτων έχει διττό ρόλο. Από τη μια, διευκολύνουν την πρόσβαση των μαθητών με ΑΟ στον κόσμο των κλασμάτων απλοποιώντας τις σύνθετες μαθηματικές εκφράσεις, από την άλλη όμως, δεν παρέχουν μια ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας. Ειδικότερα, ο St□ögerκαι οι συνεργάτες του (2006) σημειώνουν ότι τα συστήματα και προγράμματα υποστηρικτικής πλοήγησης, όσο χρήσιμα και αν είναι στα Μαθηματικά, φέρουν κάποια προβλήματα, όπως στην περίπτωση των κλασμάτων, όπου αναφέρουν μόνο την κλασματική γραμμή, τον αριθμητή και τον παρανομαστή. Σε περίπτωση που ο χρήστης χρειάζεται περισσότερες πληροφορίες για έναν κλασματικό αριθμό ή έκφραση θα πρέπει να δώσει νέες εντολές στο πρόγραμμα. Έτσι, και πάλι καλείται ο μαθητής-χρήστης να απομνημονεύσει και άλλους κανόνες, ώστε να βρίσκει τις πληροφορίες που του είναι απαραίτητες.

Αναγνωρίζοντας, λοιπόν, τις δυσκολίες που υπάρχουν από τους μαθητές με ΑΟ όταν εργάζονται με κλασματικούς αριθμούς η βιβλιογραφία προσπαθεί να βρει και να καταγράψει μια σειρά μεθόδων διδασκαλίας που θα ενισχύσουν την κατάκτηση του κλάσματος. Βέβαια, καμία διδασκαλία δεν είναι επιτυχημένη αν δεν εσωκλείει και μια ποικιλία από εποπτικά υλικά. Έτσι, πέρα από τις μεθόδους διδασκαλίας οι ερευνητές καταγράφουν και σχετικό εκπαιδευτικό υλικό το οποίο δίνει τη δυνατότητα για μια βιωματική προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος, ενώ και η αξιοποίηση της τεχνολογίας συνδράμει στην επίτευξη αυτού του στόχου.

Ξεκινώντας ο εκπαιδευτικός τη διδασκαλία των κλασμάτων, πρέπει να διδάξει πρωτίστως στους μαθητές με ΑΟ την έννοια του «μέρος» και του «όλου». Για να επιτευχθεί η κατάκτηση αυτών των δυο βασικών ιδεών, πρέπει ο εκπαιδευτικός να παρέχει παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, όπως το να δώσει στα παιδιά διάφορα πραγματικά αντικείμενα, όπως φρούτα ή ψωμί, και να τους ζητήσει να επεξεργαστούν το σχήμα και το μέγεθός τους (CouncilforEducationofPeoplewithVisualImpairment, 2005˙ Λαμπροπούλου, 2004). Στην πορεία θα ζητήσει από τα παιδιά αρχικά, να τα κόψουν στη μέση και στην πορεία και σε μικρότερα κομμάτια, ενώ πάλι οι μαθητές θα κλιθούν να επεξεργαστούν το σχήμα και το μέγεθος των κομματιών. Με τον τρόπο αυτό, ο κάθε μαθητής με ΑΟ έχει την ευκαιρία να εξερευνήσει το ίδιο φρούτο στην αρχή ολόκληρο και μετά κομμένο σε διάφορα κομμάτια, με αποτέλεσμα να μπορεί να αντιληφθεί την έννοια της ισοδιαμέρισης – που είναι βασική για την έννοια του κλάσματος – καθώς και αυτές του «όλου» και του «μέρους». Επιπλέον, οι Kapperman, Heinzeκαι Sticken (2000) υποστηρίζουν πως χρειάζονται περισσότερα του ενός μοντέλα/υλικά για να κατακτηθεί επαρκώς η έννοια του μοιράζω στα δυο, δηλαδή, το κλάσμα $\frac{1}{2}$ και κατ' επέκταση η κλασματική μονάδα. Για παράδειγμα, η χρήση απτικών μοντέλων και σχημάτων, όπως κύκλοι, τρίγωνα, καρδιές, αστέρια, τετράγωνα και ορθογώνια, τα οποία μπορούν με διάφορους τρόπους, όπως οριζοντίως, καθέτως ή διαγωνίως, να κοπούν/χωριστούν στη μέση, βοηθούν στην ανάδειξη της ιδέας της ισοδιαμέρισης.

Εξίσου βασικό σημείο συνιστά και η διδασκαλία για το ποιο μέρος του κλάσματος είναι ο αριθμητής, ποιο ο παρανομαστής και ποιο η κλασματική γραμμή. Ειδικά στην περίπτωση των μαθητών που χρησιμοποιούν των κώδικα Nemeth, πρέπει να καταστεί σαφές ότι τα σύμβολα που βρίσκονται ανάμεσα από το δείκτη ανοίγματος του κλάσματος και την κλασματική γραμμή αποτελεί τον αριθμητή του κλάσματος, ενώ τα σύμβονλα ανάμεσα στην κλασματική γραμμή και το δείκτη κλεισίματος του κλάσματος απαρτίζουν τον παρανομαστή (Kapperman, Heinze&Sticken, 2000). Σε συνδυασμό με αυτό, πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι και στην περίπτωση διδασκαλίας των κλασμάτων, οι μαθητές με ΑΟ που χρησιμοποιούν των κώδικα Nemeth πρέπει να διδάσκονται επαρκώς και με ακρίβεια τους κανόνες (BrailleMathematicsNotation, 2005), ενώ και η γλώσσα επικοινωνίας ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και το παιδί πρέπει να δομηθεί κατάλληλα, ώστε να αποφεύγονται οι ενδεχόμενες συγχύσεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε το κλάσμα $\frac{2}{5}$ και ο διδάσκοντας αναφέρεται στο «2» ως «το 2 στην κορυφή», τότε δεν είναι απαραίτητο ο μαθητής να έχει καταλάβει σε ποιο ψηφίο αναφέρεται ο δάσκαλός του.

Πέραν όλων αυτών, οι ερευνητές δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην κατάκτηση των τεσσάρων βασικών πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Για την επιτυχή κατάκτηση αυτών των πράξεων η βιβλιογραφία συνιστά τη χρήση πολλαπλών υλικών. Έτσι, οι Kapperman, Heinzeκαι Sticken (1997, 2000) προτείνουν τη χρήση κύκλων από χαρτόνι (cardboardcircle) που θα «κόβονται» στα αντίστοιχα κομμάτια που το κλάσμα υποδηλώνει. Για παράδειγμα για την πρόσθεση $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χάρτινους κύκλους χωρισμένους στα τέσσερα, όπου τρία κομμάτια του ενός κύκλου θα αναπαριστούν το κλάσμα $\frac{3}{4}$ και δυο κομμάτια του άλλου κύκλου θα αναπαριστούν το κλάσματα $\frac{1}{2}$. Έπειτα, ενώνουμε τα κομμάτια από τους δυο κύκλους και έτσι, έχουμε πέντε κομμάτια που αντιπροσωπεύουν το κλάσμα $\frac{5}{4}$. Τοποθετώντας τα πέντε κομμάτια σε έναν κύκλο που απαρτίζεται από τέσσερα κομμάτια, διαπιστώνουμε ότι χωράνε τα τέσσερα και περισσεύει ένα. Έτσι, προκύπτει η απάντηση $1\frac{1}{4}$ για την πράξη αυτή. Με ανάλογο τρόπο, δύναται να διδαχθεί και η πράξη της αφαίρεσης.

Από την άλλη, όπως προαναφέρθηκε, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων είναι πιο απαιτητικές για τους μαθητές με ΑΟ. Ο διδάσκοντας για να επιδείξει για παράδειγμα, τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων $\frac{1}{2}$

και$\frac{3}{4}$ μπορεί να χρησιμοποιήσει κα πάλι χάρτινους κύκλους. Αυτή τη φορά ο κύκλος θα είναι χωρισμένος σε οκτώ κομμάτια. Για να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{3}{4}$ σε $\frac{6}{8}$, χρησιμοποιούνται έξι κομμάτια του κύκλου, που το καθένα αποτελεί το $\frac{1}{8}$ του κύκλου. Το μισό, όμως, του 6 είναι το 3, οπότε $\frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Αντιστοίχως, μπορούμε να χωρίσουμε κατάλληλα το χάρτινο κύκλο για να διδάξουμε τη διαίρεση των κλασμάτων.

Εκτός των κύκλων που φτιάχνουμε με χαρτόνι, η διεθνής βιβλιογραφία προτείνει τη χρήση και άλλων υλικών με τα οποία μπορεί να προωθεί στους μαθητές με ΑΟ η γνώση για τους κλασματικούς αριθμούς. Έτσι, είναι ευρέως διαδεδομένη η χρήση χωρισμένων τετραγώνων για τα κλάσματα, μαγνητικών σφαιρών και κύβων, αναδιπλωμένων χαρτιών, καθώς και του πίνακα με κλάσματα (fractionboard) ή όπως αλλιώς είναι γνωστό το κουτί των κλασμάτων (Kapperman, Heinze&Sticken, 2000˙RoyalNationalInstituteofBlindPeople).Επιπλέον, το CouncilforEducationofPeoplewithVisualImpairment (2005) συνιστά τη διδασκαλία των κλασματικών πράξεων με τη χρήση του άβακα και των σχετικών κανόνων που τον διέπουν, ενώ σε συγκεκριμένες συνθήκες συνίσταται και η χρήση ομιλούντων αριθμομηχανών. Φυσικά, πέραν των απτών υλικών, και τα ποικίλα λογισμικά μπορούν να συνεισφέρουν στην κατάκτηση της έννοιας. Για παράδειγμα, το πρόγραμμα Lambda διευκολύνει την κατανόηση των κλασμάτων, γιατί απλοποιεί τα δεδομένα οδηγώντας τους μαθητές με ΑΟ σε νέα, που αντιστοιχούν σε αυτά που ένας βλέποντας μαθητής θα κατακτούσε με μια ματιά, ενώ περιορίζει σημαντικά και τις πολλαπλές μηχανικές ενέργειες, που συχνά απαιτούν απομνημόνευση σύνθετων και περίπλοκων εκφράσεων (Edwards, McCartney&Fogarolo, 2006).

Δεδομένου ότι μιλάμε για την έννοια του κλάσματος, δεν πρέπει να παραλείψουμε να σχολιάσουμε τις σχετικές έννοιες και ερμηνείες που απαρτίζουν την έννοια και σχετίζονται με την εκπαίδευση των μαθητών με ΑΟ. Μια λοιπόν, βασική έννοια που αποσκοπείτε να αναπτύξουν εξ' αρχής οι μαθητές με ΑΟ είναι αυτή του μερισμού ποσοτήτων και γενικότερα της ισοδιαμέρισης. Όπως σημειώθηκε, μέσα από τη χρήση και επεξεργασία φρούτων, γεωμετρικών σχημάτων και άλλων υλικών επιδιώκεται να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαδικασία μερισμού αλλά και το αποτέλεσμα αυτής. Με βάση όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες σελίδες, διαπιστώνουμε επίσης, εύκολα ότι για την μοναδική ερμηνεία που γίνεται αναφορά είναι αυτή του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Η σχετική βιβλιογραφία για την διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθητές με ΑΟ δίνει έμφαση στην κατανόηση της ερμηνείας αυτής. Η συντριπτική πλειοψηφία των ερευνητών καθιστά την ερμηνεία του «μέρους-όλου» ως την βασική ερμηνεία που πρέπει να διδαχτούν οι μαθητές με ΑΟ (CouncilforEducationofPeoplewithVisualImpairment, 2005˙ Kapperman, Heinze&Sticken, 2000˙Kapperman, Heinze&Sticken, 1997˙RoyalNationalInstituteofBlindPeople). Μάλιστα, στοεγχειρίδιοτουCouncilforEducationofPeoplewithVisualImpairment (2005) ορισμόςπουδίνεται για την έννοια του κλάσματος είναι ο ορισμός της ερμηνείας του «μέρος-όλου». Στο σημείο αυτό πρέπει να πούμε πως η τόση έμφαση στην έννοια της ισοδιαμέρισης και κατ' επέκταση στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου», είναι σε κάποιο βαθμό δικαιολογημένη. Και αυτό γιατί, όπως τονίστηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, η έννοια του μερισμού και ειδικότερα της ισοδιαμέρισης είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της έννοιαςτου κλάσματος, αλλά και για την ανάπτυξη των πολλαπλών ερμηνειών που την απαρτίζουν. Την ίδια στιγμή, η έμφαση στο σχήμα του «μέρους-όλου» δικαιολογείται λόγω του ότι το σχήμα αυτό αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη τόσο της έννοιαςτου κλάσματος συνολικά όσο και για την ανάπτυξη και κατανόηση και των υπόλοιπων τεσσάρων ερμηνειών.

Εικόνα 22: εποπτικό υλικό για τη διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθητές με ΑΟ

Ωστόσο, είναι απαραίτητο οι μαθητές με ΑΟ να γνωρίσουν και να εξοικειωθούν και με τις υπόλοιπες ερμηνείες του κλάσματος (αυτές του «πηλίκου», του «μέτρου», του «λόγου» και του «τελεστή»), ώστε να κατέχουν μια σφαιρική και ολοκληρωμένη εικόνα για το κλάσμα. Βέβαια, μοναδική εξαίρεση στη βιβλιογραφία που κάνει λόγο και για άλλη ερμηνεία εκτός του «μέρους-όλου» συνιστούν τα έργα των Kapperman, Heinzeκαι Sticken (1997, 2000). Αναλυτικότερα, οι συγγραφείς αυτοί αναφέρονται εμμέσως και στην ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκου». Για να είμαστε πιο σαφής, αναφέρουν ότι οι μαθητές με ΑΟ πρέπει να κατανοήσουν ποιος είναι ο αριθμητής και ποιος ο παρανομαστής του κλάσματος προτού προχωρήσουν στη διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή. Δεν δίνονται, όμως, περαιτέρω λεπτομέρειες για το πώς θα κατακτηθεί η έννοια ή το τι υλικά δύναται να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη κατάκτησης της γνώσης, αφού υπάρχει μόνο αναφορά στο ότι εκτελείται η πράξη της διαίρεσης.

Συνολικά, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η έννοια του κλάσματος δεν είναι εύκολη όχι μόνο για τους βλέποντες μαθητές αλλά και για τους μαθητές με ΑΟ και ενδεχομένως, με ένα αυξημένο βαθμό δυσκολίας, εξαιτίας του λόγου ότι η απώλεια όρασης δημιουργεί δυσκολίες της θεώρησης του όλου έτσι όπως ολιστικά την προσλαμβάνει το ανθρώπινο μάτι. Προβλήματα στην κατάκτηση και διαχείριση της έννοιας υφίστανται. Αυτό που διαφοροποιείται είναι οι πηγές από τις οποίες προέρχονται οι δυσκολίες στα κλάσματα. Έτσι, είδαμε ότι για τους μαθητές με ΑΟ υπάρχουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση του κλάσματος εξαιτίας τόσο των γενικότερων δυσκολιών στην πρόσβαση στη μαθηματική γνώση όσο και στη χρήση του κώδικα Nemeth. Ωστόσο, μέσα από κατάλληλη παρουσίαση και με τη χρήση πολλαπλών διδακτικών υλικών και λογισμικών, η έννοια του κλάσματος μπορεί να κατακτηθεί σε ικανοποιητικό βαθμό και από τους μαθητές με ΑΟ. Όπως είναι επόμενο, δεδομένου ότι εκ φύσεως η έννοια του κλάσματος δεν είναι απλή, απαιτείται καλή οργάνωση και χρήση των εποπτικών υλικών ώστε να επιτευχθεί αποτελεσματικά η κατάκτησή της. Για τον ίδιο λόγο όμως, η έμφαση που δίνεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» δεν αρκεί για μια την ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης εικόνας για τα κλάσματα, όσο καλά και αν είναι οργανωμένη και προετοιμασμένη μια διδασκαλία. Πέραν της ερμηνείας του «μέρους-όλου», είναι χρέος όλων των εκπαιδευτικών να παρέχουν στους μαθητές με ΑΟ τις απαραίτητες ευκαιρίες για γνώση και των εναπομείναντων τεσσάρων ερμηνειών. Έτσι μόνο οι μαθητές με ΑΟ θα έχουν μια άρτια άποψη για την έννοια του κλάσματος, καθώς η κατάκτηση όλου του φάσματος των ερμηνειών δύναται να περιορίσει πιθανές συγχύσεις και λάθη.

2.6. Οι Ερμηνείες των Κλασμάτων στα Σχολικά Εγχειρίδια του Δημοτικού

Όπως έχει προαναφερθεί από την αρχή αυτής της εργασίας, τα Μαθηματικά συνιστούν ένα από τα πιο σημαντικά μαθήματα του σχολικού προγράμματος. Το γεγονός αυτό φανερώνεται και επιβεβαιώνεται εξ' αρχής και στο νέο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) των Μαθηματικών (2003). Ειδικότερα, η συμβολή των Μαθηματικών θεωρείται καθοριστική για την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας του μαθητή και την καλλιέργεια της μεθοδικής σκέψης, της παρατηρητικότητας, της οργάνωσης, της δημιουργικής φαντασίας, καθώς και μιας σειράς επιπλέον δεξιοτήτων. Η ανάπτυξη αυτών των σχετικών δεξιοτήτων πραγματοποιείται μέσα από τους διάφορους γνωστικούς άξονες που το ΔΕΠΠΣ ορίζει.

Ένας, λοιπόν, από αυτούς τους άξονες αφορά στη μετάδοση γνώσεων σχετικών με τα κλάσματα, που όπως έχει τονιστεί, η αξία τους είναι καθοριστική για την καλλιέργεια σωστού τρόπου σκέψης από τα παιδιά, αλλά και για την απόκτηση βασικών γνώσεων που χρειάζονται και στην καθημερινή ζωή. Δεδομένης και της αξίας που φέρουν, τα κλάσματα εισάγονται και μελετώνται σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Αυτό που ποικίλει από τάξη σε τάξη είναι ο τρόπος που γίνεται η παρουσίαση και επεξεργασία της έννοιας. Έτσι, όπως είναι φυσικό, στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού δεν πραγματοποιείται μια απευθείας επαφή με την έννοια του κλάσματος, αλλά αντιθέτως, εισάγονται βασικές έννοιες που θέτουν τα θεμέλια για το μετέπειτα ορισμό του κλάσματος. Προχωρώντας σε επόμενες τάξεις, το κλάσμα παρουσιάζεται με πιο αναλυτικό τρόπο, αλλά και μέσα από τις διάφορες ερμηνείες που περικλείει.

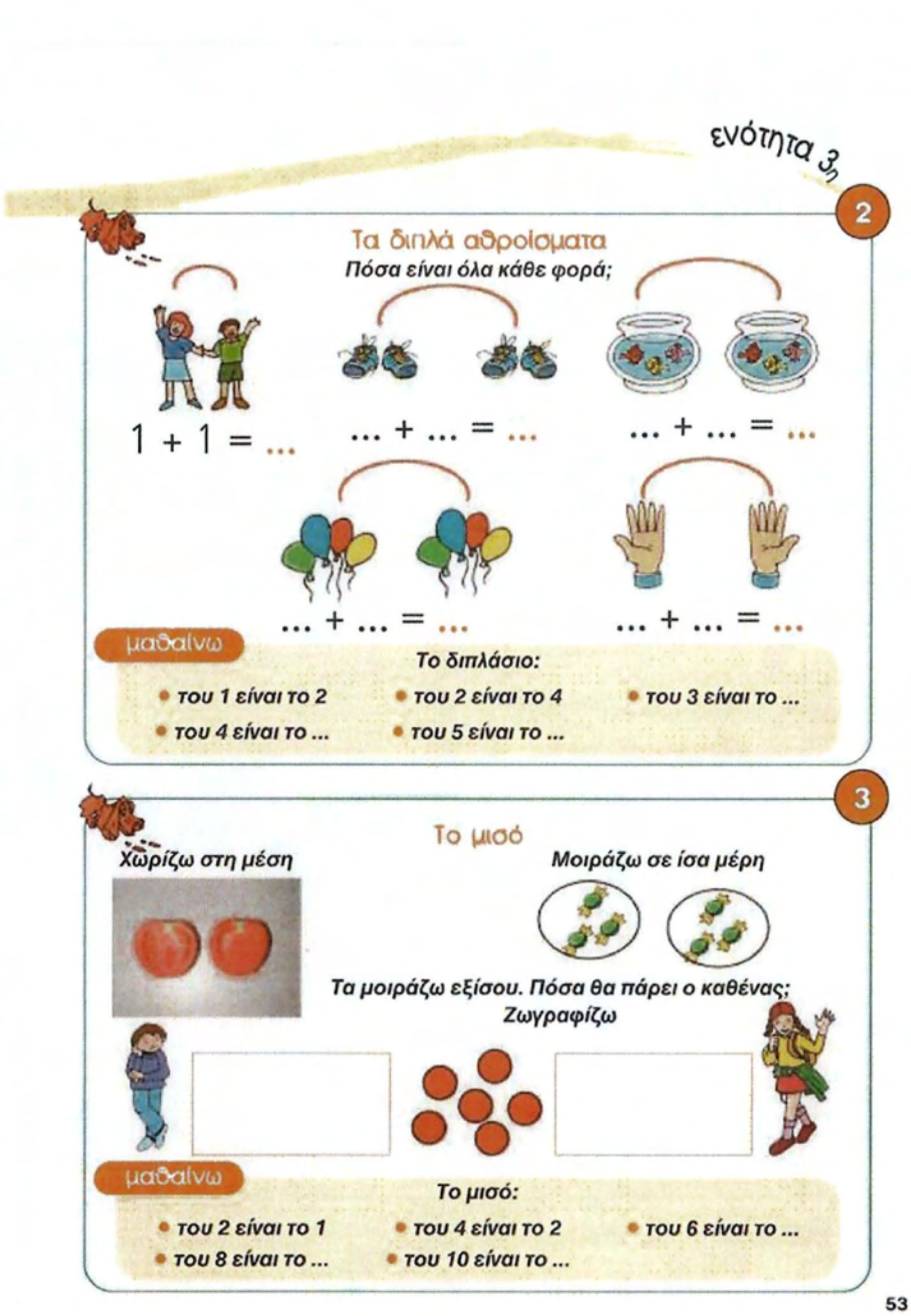
Λαμβάνοντας υπόψη ότι από την πρώτη κιόλας τάξη του Δημοτικού παρουσιάζονται θεμελιώδεις έννοιες για το κλάσμα, αλλά και ότι η έννοια του κλάσματος διαρκώς επεκτείνεται και εμπλουτίζεται με το πέρασμα των σχολικών χρόνων, μπορούμε να κάνουμε λόγο για μια σπειροειδή παρουσίασή της έννοιας του κλάσματος μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια (Βαϊνάς, 1995). Δηλαδή, το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας κάθε τάξης αναφέρεται στην έννοια του κλάσματος, ενώ κάθε φορά επαναλαμβάνεται ένα μεγάλο μέρος των ήδη υπαρχουσών γνώσεων των προηγούμενων τάξεων και έπειτα διδάσκονται και κατακτώνται οι νέες γνώσεις. Την ίδια στιγμή και ανάλογα και με το μαθηματικό επίπεδο που προϋποθέτει η εκάστοτε σχολική τάξη, η έννοια του κλάσματος αναδεικνύεται και ερμηνεύεται μέσα από τα διάφορα σχήματα που έχει. Να επισημάνουμε δε ότι η ποικιλομορφία στην ερμηνεία του κλάσματος σημειώνεται και στο νέο πρόγραμμα σπουδών (2003), όπου αναφέρεται ότι υπάρχουν τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος.Ειδικότερα, γίνεται αναφορά στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος εμβαδού κάποιου χωρίου, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής.Αναφορές επίσης, γίνονται και στα βιβλία του δασκάλου, όπου αναφέρεται ότι το κλάσμα έχει διάφορες ερμηνείες (γίνεται αναφορά στα 5 σχήματα που έχουμε μελετήσει), χωρίς ωστόσο, να γίνεται κάποιος περεταίρω σχολιασμός σχετικός με το τι εκφράζουν ή πως θα έπρεπε να διδαχθούν.

Με γνώμονα τα παραπάνω στοιχεία αλλά και τις ερμηνείες του κλάσματος που έχουμε μελετήσει, θα ακολουθήσει μια διεξοδική μελέτη του κάθε σχολικού εγχειριδίου ξεχωριστά, ενώ θα γίνονται αναφορές και σχόλια και για τα αντίστοιχα τετράδια εργασιών. Σε κάθε περίπτωση, θα γίνεται αναφορά στο τι προβλέπεται από το ΔΕΠΠΣ για την εκάστοτε τάξη, θα αναζητηθούν βασικές έννοιες και στοιχεία του κλάσματος που διδάσκονται, καθώς και οι ερμηνείες που παρουσιάζονται στους μαθητές.

2.6.1. Τα Κλάσματα στην Α΄ Δημοτικού

Όπως είναι φυσικό και επόμενο, η έννοια του κλάσματος δεν εισάγεται αυτούσια στην πρώτη τάξη, καθώς το γνωστικό υπόβαθρο που οι μαθητές κατέχουν με την εισαγωγή τους στο σχολείο αφορά κατά βάση στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις, όπως είναι η απαρίθμηση αριθμών ή η αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι, το ΔΕΠΠΣ για την Α΄ τάξη του Δημοτικού σχολείου δεν προβλέπει κάποια άμεση επαφή με το αντικείμενο. Αντιθέτως, θέτει ως γενικό στόχο την εξοικείωση των μαθητών με καταστάσεις επανάληψης ίσων ποσοτήτων και διαμερισμού (μερισμού). Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι ο στόχος αυτός είναι πρωτίστης σημασίας, δεδομένου του ότι η έννοια της ισοδιαμέρισης είναι θεμελιώδης για την συγκρότηση του κλάσματος και των ερμηνειών του. Η εξοικείωση των μαθητών με το μοίρασμα ίσων ποσοτήτων θα βοηθήσει και θα διευκολύνει στην αντίληψη του κλάσματος ως «μέρος-όλου», ως «πηλίκο» ή ως «μέτρο».

Αναλυτικότερα, στο *Κεφάλαιο 19* οι μαθητές έρχονται σε μια πρώτη επαφή με την έννοια του μερισμού. Με βάση και το βιβλίο του δασκάλου, ένας από τους διδακτικούς στόχους αυτού του κεφαλαίου, είναι η γνωριμία των μαθητών με τους όρους «διπλάσιο» και «μισό», καθώς και η εξάσκησή τους στην εύρεση του διπλάσιου των αριθμών μέχρι το 5 και του μισού των ζυγών αριθμών μέχρι και το 10. Έτσι, οι μαθητές γνωρίζουν τα διπλά αθροίσματα (το διπλάσιο του 1 είναι το 2, το διπλάσιο του 2 είναι το 4, κ.ο.κ.). και αμέσως μετά, μαθαίνουν την έννοια του «μισού», της αντίστροφης, δηλαδή, διαδικασίας του «διπλάσιου». Εκεί, τα παιδιά καλούνται να μοιράσουν στη μέση διάφορες ποσότητες αντικειμένων, όπως βόλους και καραμέλες. Μέσα από τα παραδείγματα και τις εικόνες οι μαθητές μαθαίνουν ότι το μισό του 2 είναι το 1, το μισό του 4 είναι το 2, το μισό του 6 είναι το 3, κ.ο.κ. Η εμπέδωση της νέας έννοιας πραγματοποιείται και μέσα από τις ασκήσεις του τετραδίου εργασιών των μαθητών, όπου οι ασκήσεις απαιτούν το χωρισμό ποσοτήτων αντικειμένων στη μέση και την καταγραφή των αντίστοιχων ποσών.



Εικόνα 22: Α΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 19

Προχωρώντας προς τα τελευταία μαθήματα της διδακτέας ύλης της πρώτης τάξης, οι μαθητές ξανασυναντούν καταστάσεις μερισμού. Αυτή τη φορά ένας από τους στόχους του *Κεφαλαίου 59* αφορά και την άσκηση των παιδιών σε εμπειρικές καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς σε ίσα μέρη. Συγκεκριμένα, οι μαθητές σε μία άσκηση του βιβλίου, καλούνται να μοιράσουν ένα σύνολο αντικειμένων (9 καρύδια) σε 3 μέρη (σε 3 γουρουνάκια), με σκοπό τα αντικείμενα να μοιραστούν εξίσου και στα 3 μέρη (δηλαδή, όλα τα γουρουνάκια να πάρουν τον ίδιο αριθμό καρυδιών). Αντίστοιχη είναι και η δραστηριότητα που υπάρχει στο τετράδιο εργασιών.

Λαμβάνοντας, όμως, υπόψη και το υπόλοιπο πλαίσιο του *Κεφαλαίου 59*, διαπιστώνουμε ότι η επανάληψη σε διαδικασίες μερισμού πραγματοποιείται με αφορμή την εξάσκηση των μαθητών σε εμπειρικές καταστάσεις πολλαπλασιασμού με τη μορφή της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και διαίρεσης με τη μορφή της μοιρασιάς. Το πλαίσιο αυτό είναι ιδανικό, καθώς προετοιμάζει τα παιδιά στο να αντιληφθούν σε ένα πρώτο στάδιο ότι η διαίρεση συνεπάγεται το μοίρασμα μιας ποσότητας αντικειμένων σε ίσα μέρη. Κατ' επέκταση, η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης μιας ποσότητας σε ίσα εξίσου μέρη, θα ενισχύσει αργότερα και την κατανόηση της αντίληψης της ερμηνείας του κλάσματος ως «πηλίκο».

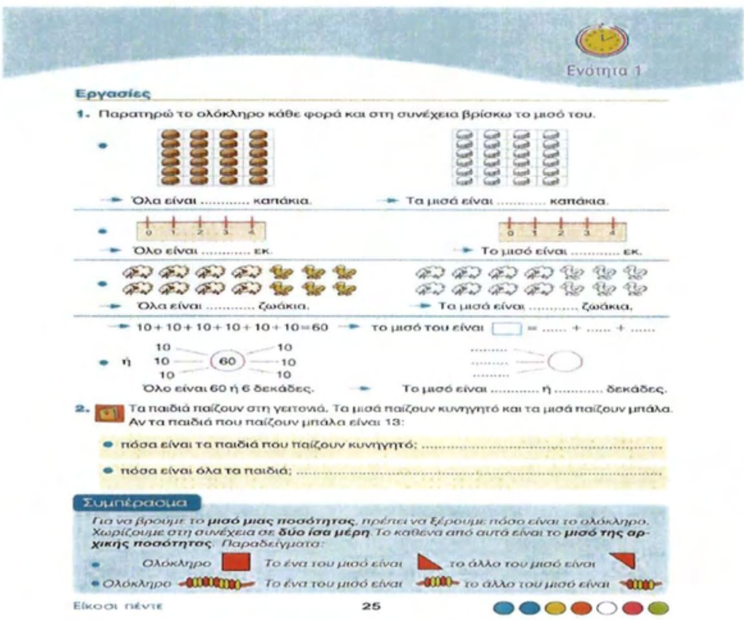
Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι από την πρώτη κιόλας τάξη του Δημοτικού Σχολείου γίνεται μια έμμεση αναφορά στα κλάσματα και συγκεκριμένα σε θεμελιώδεις έννοιες που απαρτίζουν το κλάσμα ως μαθηματική έννοια. Αρχικά, η επαφή των μαθητών με την έννοια του «μισού» και μετέπειτα η εξάσκηση σε καταστάσεις ίσης μοιρασιάς αντικειμένων καθίσταται απαραίτητη για την καλλιέργεια της έννοιας της ισοδιαμέρισης. Η έννοια αυτή κρίνεται καθοριστικής σημασίας, αφού συνθέτει το σύνολο των ερμηνειών του κλάσματος, θέτοντας ένα πρώτο σημείο αναφοράς για τη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος που θα ακολουθήσει. Κατέχοντας έτσι, την έννοια της ισοδιαμέρισης, τα παιδιά όταν διδαχτούν την έννοια του κλάσματος θα μπορούν να καταλάβουν ότι η ποσότητα που το εκάστοτε κλάσμα αναφέρει, χωρίζεται σε ανάλογα με τον παρανομαστή, ίσα μέρη. Επίσης, η επανάληψη της έννοιας της ισοδιαμέρισης προς το τέλος της σχολικής χρονιάς και η εφαρμογή της υπάρχουσας γνώσης σε εμπειρικές καταστάσεις με τις οποίες σχετίζεται η καθημερινότητα των μαθητών (όπως για παράδειγμα, η δίκαια μοιρασιά των καραμελών μεταξύ των φίλων ή αδερφών) καθιστά ακόμα πιο χειροπιαστή την έννοια στα παιδιά, ενώ την ίδια στιγμή, προετοιμάζει το έδαφος για την ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Έτσι, οι μαθητές ολοκληρώνουν την Α΄ τάξη έχοντας δεχτεί ένα σημαντικό υπόβαθρο γνώσεων και επιρροών, που χωρίς να το γνωρίζουν, θα τους χρειαστεί σε επόμενες τάξεις για την ανάπτυξη της ιδέας του κλάσματος.

2.6.2. Τα Κλάσματα στη Β΄ Δημοτικού

Η Β΄ Δημοτικού ως συνέχεια της πρώτης τάξης και με βάση και το «σπειροειδές αξίωμα», που διακρίνει το αναλυτικό πρόγραμμα, αναφέρεται εκ νέου στην έννοια του διαμερισμού. Έτσι, ο άξονας γνωστικού περιεχομένου που αφορά τους *Αριθμούς και τις Πράξεις*, όπως αυτός καθορίζεται από το ΔΕΠΠΣ,θέτει ως έναν ακόμα διδακτικό στόχο την κατανόηση της έννοιας του διαμερισμού (μερισμού) από την πλευρά των μαθητών. Καλούνται, λοιπόν, τα παιδιά να περάσουν από τις εμπειρικές καταστάσεις και τα παραδείγματα εξοικείωσης, που συνάντησαν στην προηγούμενη τάξη, σε πιο σύνθετες καταστάσεις όπου η έννοια του μερισμού είναι ακόμα πιο εμφανής. Μέσα από τις νέες συνθήκες διερεύνησης της έννοιας αποσκοπείτε η εις βάθος κατανόηση καταστάσεων που παραπέμπουν όλο και πιο πολύ στην έννοια του κλάσματος.

Η εισαγωγή στην έννοια του διαμερισμού πραγματοποιείται από το *7ο* κιόλας *Κεφάλαιο* του σχολικού εγχειριδίου. Το μάθημα ξεκινά ζητώντας από τους μαθητές να μοιράσουν μια σοκολάτα 4 κομματιών στη μέση και μάλιστα με περισσότερους του ενός τρόπους, ενώ καλούνται αμέσως μετά να επαναλάβουν τη διαδικασία σε μια μεγαλύτερη ποσότητα (σοκολάτα με 12 κομμάτια). Για να επιτύχουν στη δραστηριότητα, τα παιδιά καλούνται να ανακαλέσουν τις γνώσεις που έχουν για τη δίκαιη μοιρασιά μέσα από την ανάκληση της έννοιας του «μισού» και του «διπλάσιου». Ο συνδυασμός της υπάρχουσας γνώσης με τη νέα δραστηριότητα αποσκοπεί στο να μπορέσουν οι μαθητές να αξιοποιήσουν την έννοια του «μισού» για να βρουν το ολόκληρο, αλλά και για να εκτελούν δίκαιες μοιρασιές ποσοτήτων όπου δεν θα περισσεύει τίποτα. Διδάσκεται, λοιπόν, με αυτόν τον τρόπο η διαίρεση της εκάστοτε μονάδας σε δυο ίσα μέρη.

Η διαίρεση, όμως, σε 2 ίσα μέρη δεν αφορά μόνο ποσότητες, όπως αυτή της σοκολάτας που προαναφέρθηκε. Αντιθέτως, οι ασκήσεις που το σχολικό βιβλίο περιέχει αφορούν τόσο την επεξεργασία συνεχών όσο και διακριτών ποσοτήτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν το μισό ενός τμήματος της αριθμογραμμής, το μισό ενός συνόλου ζώων, το μισό μιας επιφάνειας και το μισό ενός αριθμού μέχρι και το 100. Επιπλέον, καλούνται να εφαρμόσουν και την αντίστροφη διαδικασία, όπου από το μισό μιας δοθείσας ποσότητας θα πρέπει να εντοπίσουν το όλο. Τέλος, μια σειρά ασκήσεων των ίδιων απαιτήσεων του τετραδίου εργασιών, βοηθά στην μέγιστη εμπέδωση της έννοιας του μερισμού σε 2 ίσες ποσότητες.


Ενότητα 1

Εργασίες

1. Παρατηρώ το ολόκληρο κάθε φορά και στη συνέχεια βρίσκω το μισό του.

- Όλα είναι .... καπάκια. → Τα μισά είναι .... καπάκια.
- Όλο είναι .... εκ. → Το μισό είναι .... εκ.
- Όλα είναι .... ζωάκια. → Τα μισά είναι .... ζωάκια.

→ 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60 → το μισό του είναι ☐ = ... + ... + ...

- ή Όλο είναι 60 ή 6 δεκάδες. → Το μισό είναι .... ή .... δεκάδες.

2. Τα παιδιά παίζουν στη γειτονιά. Τα μισά παίζουν κυνηγητό και τα μισά παίζουν μπάλα. Αν τα παιδιά που παίζουν μπάλα είναι 13:

- πόσα είναι τα παιδιά που παίζουν κυνηγητό; ....
- πόσα είναι όλα τα παιδιά; ....

Συμπέρασμα

*Για να βρούμε το **μισό μιας ποσότητας**, πρέπει να ξέρουμε πόσο είναι το ολόκληρο. Χωρίζουμε στη συνέχεια σε **δύο ίσα μέρη**. Το καθένα από αυτά είναι το **μισό της αρχικής ποσότητας**. Παραδείγματα:*

- *Ολόκληρο — Το ένα του μισό είναι — το άλλο του μισό είναι*
- *Ολόκληρο — Το ένα του μισό είναι — το άλλο του μισό είναι*

Είκοσι πέντε 25

Εικόνα 23: Β΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 7

Σε ανάλογο κλίμα κυμαίνονται και το *Κεφάλαιο 9* και το *Κεφάλαιο 30* του β΄ τεύχους του σχολικού εγχειριδίου. Για να είμαστε πιο σαφής, στην πρώτη περίπτωση πραγματοποιείται και πάλι μια έμμεση επανάληψη της έννοιας του «διπλάσιου» και του «μισού» για αριθμούς μέχρι το 100, αφού οι έννοιες αυτές θεωρούνται απαραίτητες για την εύρεση της αξίας θέσης ενός ψηφίου, αλλά και για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών, που συνιστούν το διδακτικό αντικείμενο του μαθήματος. Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 30* συναντούμε την έννοια της δίκαιης μοιρασιάς, μόνο που αυτή τη φορά αναδεικνύεται μέσα από τη διαίρεση. Πιο αναλυτικά, τα παιδιά καλούνται να μοιράσουν διάφορες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε στο τέλος της εκάστοτε διαδικασίας ο καθένας ή το καθετί να κατέχει την ίδια ποσότητα αντικειμένων/ποσοτήτων. Τίθεται δηλαδή, ως στόχος η επίλυση προβλημάτων μερισμού με τη χρήση ποικίλων στρατηγικών. Οι στρατηγικές αυτές όμως, βασίζονται στην έννοια της διαίρεσης ως αντίστροφης διαδικασίας του πολλαπλασιασμού ή ως διαδικασίας διαδοχικών αφαιρέσεων. Παρ' όλα αυτά, για τη σωστή επίλυση των προβλημάτων, αλλά και για την ουσιαστική κατανόηση του διαμερισμού ποσοτήτων σε ίσα επιμέρους τμήματα, εξακολουθεί να είναι κρίσιμη η χρησιμότητα της έννοιας του «διπλάσιου» και του «μισού».

Με λίγα λόγια, παρατηρούμε ότι τόσο στο *Κεφάλαιο 9* όσο και στο *30* πραγματοποιείται μια διεξοδική επεξεργασία και εμπέδωση της έννοιας του μερισμού και πιο ειδικά της έννοιας της ισοδιαμέρισης. Η αξιοποίηση του «διπλάσιου» και του «μισού» στα διάφορα παραδείγματα εφοδιάζει τους μαθητές με πλούσιες εμπειρίες, που θα φανούν πολύ χρήσιμες όταν διδαχθεί η έννοια του κλάσματος. Και αυτό γιατί όπως έχει τονιστεί αρκετές φορές σε αυτή την εργασία, η ισοδιαμέριση, που παρουσιάζεται με άμεσο και έμμεσο τρόπο στους μαθητές, συνιστά μια καθοριστικής σημασίας έννοια για τη σύλληψη του κλάσματος και των ερμηνειών του. Η κατανόηση της διαδικασίας ίσου μερισμού μιας ποσότητας θα είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τα σχήματα του κλάσματος, όπως αυτό του «μέρος-όλου» και του «μέτρου», όπου τα παιδιά θα κλιθούν να συλλάβουν και να επεξεργαστούν τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Παράλληλα με τα παραπάνω, είναι αρκετά σημαντικό το ότι οι μαθητές ανακαλύπτουν και έρχονται σε επαφή με τις διάφορες στρατηγικές με τις οποίες μπορεί να εκτελεστεί μια μοιρασιά αντικειμένων ή ποσοτήτων. Η στρατηγική της διαίρεσης που κατά κύριο λόγο αξιοποιείται εδώ θα διαδραματίσει σημαντικό ρόλο κατά τη διδασκαλία του κλάσματος ως διαίρεση. Ειδικότερα, τα παιδιά θα μπορούν να ξεχωρίσουν πότε ένα κλάσμα ως «πηλίκο» αναφέρεται στα τμήματα μιας διαμέρισης και πότε καθορίζει τον αριθμό των επαναλαμβανόμενων αφαιρέσεων. Επιπλέον, η διδασκαλία της διαμέρισης όχι μόνο σε επιφάνειες και αριθμούς, αλλά και σε διακριτές ποσότητες, θα αποτρέψει σε σημαντικό βαθμό τις ενδεχόμενες συγχύσεις κατά τη διαμέριση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων στην περίπτωση του κλάσματος ως «μέρος-όλου».

Πέραν, όμως, όλων των παραπάνω γνώσεων που σχετίζονται έντονα με την έννοια της ισοδιαμέρισης και προετοιμάζουν το έδαφος για την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος σε επόμενες τάξεις, πρέπει να αναφέρουμε ότι είναι ιδιαίτερης σημασίας και η γνώση που αποκτούν οι μαθητές για την αριθμογραμμή και το μέτρο. Συγκεκριμένα, στα *Κεφάλαια 4* και *42* του σχολικού εγχειριδίου οι μαθητές γνωρίζουν και εξοικειώνονται με την έννοια της αριθμογραμμής και του μέτρου. Μαθαίνουν πώς να μετρούν, καθώς και πώς να βρίσκουν ή να διατάσουν έναν αριθμό σε ένα χάρακα ή σε μια αριθμογραμμή. Οι γνώσεις αυτές, καθώς και η εξοικείωση στο χειρισμός τους, κρίνονται απαραίτητες ώστε να μπορούν τα παιδιά να κατανοήσουν αργότερα το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο», αφού αυτό συνδέεται άμεσα με την οπτική αναπαράσταση της αριθμογραμμής.

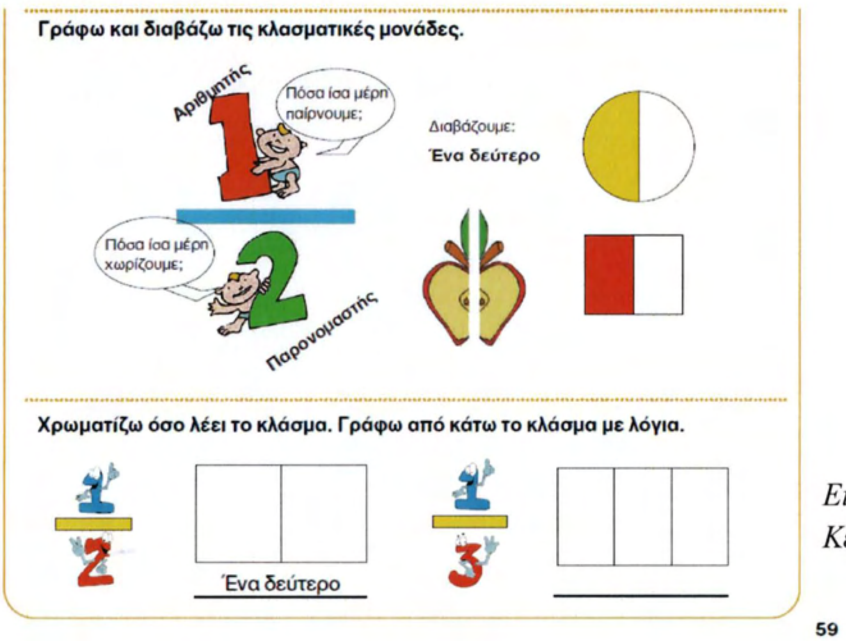
Μέσα από την επαναλαμβανόμενη επαφή με την έννοια του μερισμού και συγκεκριμένα της ισοδιαμέρισης, τόσο κατά την Α΄ τάξη όσο και κατά τη Β΄, δημιουργούνται γερές βάσεις που θα πλαισιώσουν αργότερα την αντίληψη που θα αποκτήσουν οι μαθητές για το κλάσμα. Ταυτόχρονα, η επαφή και οι ασκήσεις με το μέτρο και την αριθμογραμμή ενισχύουν αυτές τις βάσεις, έτσι ώστε όταν διδαχθούν τα κλάσματα να μπορούν τα παιδιά να χειρίζονται με περισσότερη ευκολία τις σχετικές ασκήσεις με το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο». Συνολικά, μπορούμε να πούμε ότι στη Δευτέρα Δημοτικού πραγματοποιείται μια διεξοδική επαφή με βασικές και καθοριστικές έννοιες που περιβάλλουν το κλάσμα, όπως η ισοδιαμέριση, η διαίρεση ή το μέτρο, με απώτερο σκοπό να προϊδεαστούν οι μαθητές για την επερχόμενη γνωριμία με τα «απλά» κλάσματα, που θα ακολουθήσει στην επόμενη σχολική τάξη.

2.6.3. Τα Κλάσματα στη Γ΄ Δημοτικού

Στην Γ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου οι μαθητές εισάγονται για πρώτη φορά με άμεσο και ξεκάθαρο τρόπο στα «απλά» κλάσματα. Για την επαφή αυτή αφιερώνεται μια ολόκληρη ενότητα του σχολικού εγχειριδίου (η *4η Ενότητα* του α΄ τεύχους του βιβλίου του μαθητή), ενώ προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) να αφιερωθούν τουλάχιστον 10 διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Την ίδια στιγμή, στόχος του κάθε εκπαιδευτικού οφείλει να είναι η γνωριμία των παιδιών με τα κλάσματα με τη βοήθεια κατάλληλων αναπαραστάσεων ή φυσικών μοντέλων όπως, το ρολόι με τις υποδιαιρέσεις του, τα γεωμετρικά σχήματα με άξονες συμμετρίας , οι υποδιαιρέσεις μηκών, το κόψιμο ενός μήλου ή μιας σοκολάτας με το χρωματισμό των ανάλογων μερών, που δηλώνονται στο εκάστοτε κλάσμα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, λοιπόν, της προαναφερόμενης ενότητας, δηλαδή στο *Κεφάλαιο 22*, μέσα από παραδείγματα με συνταγές μαγειρικής, με σχήματα με άξονες συμμετρίας, με αναφορές στα τέταρτα της ώρας, αλλά και με διάφορα αντικείμενα, όπως καραμέλες, οι μαθητές θα εισαχθούν στα κλάσματα. Βέβαια, όλα τα παραδείγματα του βιβλίου που αναφέρθηκαν αποτελούν θεματικούς χώρους με τους οποίους καθημερινά τα παιδιά έρχονται σε επαφή. Χρησιμοποιούνται, δηλαδή, βιωματικές καταστάσεις με σκοπό να εκφράσουν οι μαθητές τις άτυπες γνώσεις και σχήματα που αντιλαμβάνονται για την έννοια του κλάσματος. Εξάλλου, αυτές οι άτυπες γνώσεις φέρουν ιδιαίτερη σημασία (Κολεζά, 2000), αφού καθιστούν την παρουσίαση του κλάσματος λιγότερο τρομακτική στα παιδιά, δείχνοντάς τους με απλό τρόπο ότι αυτό που βλέπουν σε μια συνταγή ως « αλεύρι» ή εκφράσεις, όπως «περπατάω ένα τέταρτο από το σπίτι στο σχολείο», δηλώνουν μια μαθηματική έννοια που ονομάζεται κλάσμα.

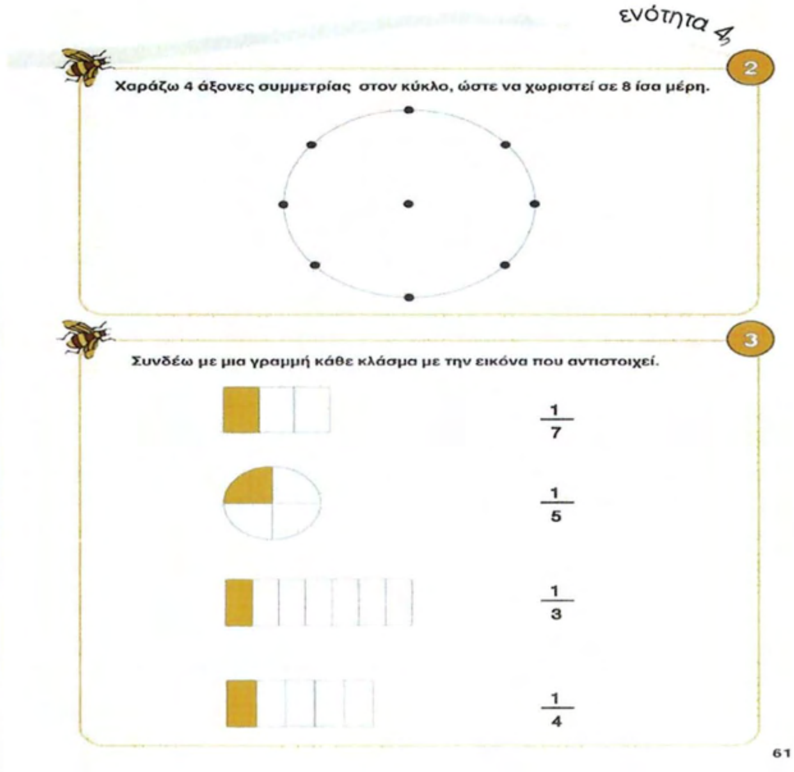
Πέραν της αξιοποίησης των προσωπικών βιωμάτων των μαθητών για την εισαγωγή στα κλάσματα, γίνεται στο κεφάλαιο αυτό και μια εκ νέου αναφορά στην ισοδιαμέριση. Αυτή τη φορά, τα παιδιά καλούνται να χωρίσουν άξονες συμμετρίας στη μέση, για να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι κάθε φορά ένας άξονας συμμετρίας χωρίζει ένα σχήμα σε δυο ίσα μέρη. Μέσω, όμως, αυτής της δραστηριότητας και της κατανόησης του μοιρασμού ενός αντικειμένου σε δυο ίσα μέρη, γίνεται και η πρώτη αναφορά στο κλάσμα – . Επιπλέον, η εικόνα του κλάσματος – στο βιβλίο συνοδεύεται από την κατονομασία του πως ονομάζεται ο αριθμός «1» και πως ο αριθμός «2», αλλά και το τι εκφράζει ο κάθε αριθμός στο κλάσμα (Εικόνα 24). Δηλαδή, οι μαθητές μαθαίνουν ότι ο αριθμός «1» ονομάζεται *αριθμητής* και εκφράζει *τα πόσα μέρη παίρνουμε* από μια ποσότητα, ενώ ο αριθμός «2» αποκαλείται *παρανομαστής* και δηλώνει *το ποσό των ίσων μερών* που χωρίστηκε η συγκεκριμένη ποσότητα. Οι ασκήσεις που ακολουθούν, τόσο στο σχολικό βιβλίο όσο κυρίως στο τετράδιο εργασιών, καλούν τους μαθητές να γράψουν το κλάσμα που μια εικόνα δείχνει, καθώς και να πραγματοποιήσουν χωρισμούς, διπλώσεις και μοιρασιές σε ίσα μέρη και να αξιολογήσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεριδίων της διανομής.



Εικόνα 24: Γ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 22

Η παραπάνω παρουσίαση του πρώτου μαθήματος για τα κλάσματα καθιστά ξεκάθαρο ότι η πρώτη διδασκαλία και επιρροή που τα παιδιά δέχονται για τα κλάσματα, εκτείνεται γύρω από την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Η προσήλωση στην ερμηνεία αυτή θεωρείται στο σημείο αυτό απαραίτητη, δεδομένου του ότι οι μαθητές οφείλουν να γνωρίσουν και να κατανοήσουν πρώτα την ερμηνεία αυτή και μετέπειτα τις υπόλοιπες. Εξάλλου, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» συνιστά προϋπόθεση για την ανάπτυξη και των υπόλοιπων ερμηνειών (Ζάντζος, 2009˙ Σταματόπουλος, 2011˙ Κολεζά, 2009˙ Χρυσανθακοπούλου, 2012).

Στα δύο επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν, δηλαδή στα *Κεφάλαια 23* και *24*, τόσο μέσα από βιωματικές όσο και μέσα από παιγνιώδεις καταστάσεις, οι μαθητές μαθαίνουν τη συμβολική γραφή των κλασματικών μονάδων, αλλά και τους απλούς κλασματικούς αριθμούς. Έτσι λοιπόν, στην πρώτη περίπτωση μέσα από μια δραστηριότητα με πολλαπλά επίπεδα, τα παιδιά μαθαίνουν πώς να αναπαριστούν το κλάσμα στις διάφορες περιπτώσεις (παρουσιάζεται το κλάσμα σε κείμενο, ως εικόνα και ως μαθηματική έκφραση). Επίσης, οι μαθητές μαθαίνουν πώς να συμβολίζουν τις κλασματικές μονάδες σε αναπαραστάσεις αλλά και την αντίστροφη διαδικασία. Την ίδια στιγμή, σε όλες τις παραπάνω δραστηριότητες εξακολουθεί να υπάρχει έντονα ο χωρισμός συνεχών και διακριτών ποσοτήτων, που σε συνδυασμό με την κατάκτηση της συμβολικής γραφής κάνει ακόμα πιο φανερό στα παιδιά το τι εκφράζουν οι ποικίλες ποσότητες.



Εικόνα 25: Γ΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 23

Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 24* γίνεται μια πλήρης εφαρμογή της μόλις κατακτηθείσας γνώσης για τη γραφή των κλασμάτων. Η προηγούμενη γνώση όμως, συνδυάζεται αυτή τη φορά με την έννοια του απλού κλάσματος. Εισάγεται, δηλαδή, το απλό κλάσμα με βάση τις κλασματικές μονάδες. Έτσι για παράδειγμα, οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν ότι το $\frac{2}{3}$ είναι 2 φορές το $\frac{1}{3}$. Όπως είναι φυσικό, οι μαθητές διδάσκονται πώς να συμβολίζουν τα απλά κλάσματα, καθώς και το τι εκφράζει ο αριθμητής και ο παρανομαστής ενός απλού κλάσματος. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, όπως και στο τετράδιο εργασιών, πραγματοποιείται η εφαρμογή της νέας γνώσης τόσο σε διακριτές ποσότητες, όπως καραμέλες και μωσαϊκά, αλλά και σε συνεχείς, όπως ευθύγραμμα τμήματα.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στα δυο προηγούμενα κεφάλαια η έννοια του κλάσματος εδραιώθηκε ακόμα περισσότερο. Και αυτό γιατί, εκτός από τη θεμελιώδη διάσταση που φέρει η έννοια της ισοδιαμέρισης, οι μαθητές γνώρισαν μια ακόμα βασική έννοια, αυτή της κλασματικής μονάδας. Η κατανόηση της κλασματικής μονάδας όχι μόνο θα βοηθήσει στην κατανόηση των απλών κλασμάτων, αλλά θα κάνει και πιο φανερές τις διαστάσεις/ερμηνείες που το κλάσμα φέρει. Επιπλέον, διευρύνθηκε η πρώτη εικόνα που είχαν αποκτήσει τα παιδιά για το κλάσμα, αφού αυτό παρουσιάστηκε και αξιοποιήθηκε, εκτός ως «μέρος-όλου» και ως «μέτρο» μέσω των ασκήσεων εύρεσης του τι αντιπροσωπεύουν διάφορα ευθύγραμμα τμήματα σε μια αριθμογραμμή.

Η αναφερόμενη στα κλάσματα ενότητα του σχολικού εγχειριδίου ολοκληρώνεται με τη διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων. Στο *Κεφάλαιο 25* του βιβλίου, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την έννοια της ισοδυναμίας, που αποτελεί βασική ιδιότητα των κλασμάτων. Ωστόσο, δεν γίνεται μια διεξοδική παρουσίαση των ισοδύναμων κλασμάτων. Τα παιδιά γνωρίζουν τα κλάσματα αυτά μέσα από πραγματικά παραδείγματα της καθημερινής ζωής που τους είναι οικεία, όπως είναι το μοίρασμα μια πίτσας στη μέση με διαφορετικούς τρόπους. Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται από το βιβλίο, αλλά και το τετράδιο εργασιών, αναφέρονται αποκλειστικά σε διακριτά μεγέθη, όπως σοκολάτες, χωρισμένα ορθογώνια και νομίσματα. Σε κάθε περίπτωση, τελικός στόχος είναι να καταλάβουν τα παιδιά ότι για παράδειγμα, τα κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ και $\frac{4}{12}$ είναι μεταξύ τους ίσα και εκφράζουν το ίδιο ακριβώς μέρος μιας ποσότητας.

Με βάση τα όσα σχολιάσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να πούμε ότι η πρώτη επαφή των παιδιών με τα κλάσμα καλύπτει σε σημαντικό βαθμό σημαντικές παραμέτρους του κλάσματος ως έννοια. Συγκεκριμένα, τα παιδιά αξιοποιούν τις προηγούμενες γνώσεις τους για το δίκαιο μοίρασμα ποσοτήτων για να μπορέσουν να κατανοήσουν τι εκφράζει ένα κλάσμα. Παράλληλα, η έννοια της ισοδιαμέρισης σε συνδυασμό με τη διδασκαλία της κλασματικής μονάδας θέτουν ισχυρά θεμέλια, που συνδράμουν ακόμα περισσότερο στην βαθύτερη κατανόηση του κλάσματος, ενώ προετοιμάζουν και το έδαφος για την αντίληψη των διαφορετικών ερμηνειών που το κλάσμα περικλείει. Επιπλέον, οι μαθητές εργάζονται σε ασκήσεις/δραστηριότητες αξιοποιώντας κατά κύριο λόγο το σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Βέβαια, δεν γνωρίζουν ότι διδάχτηκαν και χρησιμοποιούν μόνο μια από τις πέντε ερμηνείες που το κλάσμα φέρει, καθώς ο ορισμός που τους παρέχεται για το κλάσμα είναι ο ορισμός της ερμηνείας του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Συνεπώς, οι μαθητές αποδέχονται και αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως γενικότερη έννοια με την έννοια που αυτό έχει ως «μέρος-όλου». Η σύγχυση αυτή μπορεί να μην είναι τόσο εμφανής στην αρχή, αλλά πρέπει να αποτραπεί, ώστε να μην σχηματίσουν τα παιδιά ένα λανθασμένο νοητικό σχήμα για την έννοια του κλάσματος. Μπορούμε, ωστόσο, να πούμε ότι η χρήση ενός ευθύγραμμου τμήματος για την εύρεση διαφόρων ποσοτήτων με την έκφραση ενός κλάσματος, δίνει με έναν έμμεσο τρόπο μια άλλη διάσταση στην αρχική έννοια, αυτή της ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο». Παρ' όλα αυτά, είναι αναγκαίο να παρουσιαστεί αναλυτικότερα η ερμηνεία του «μέτρου», αλλά και των υπόλοιπων ερμηνειών για να είναι όσον το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη η γνώση των μαθητών.

Η ενασχόληση όμως, με τα κλάσματα για την Τρίτη τάξη δεν τελειώνει στην *Ενότητα 4*. Αντιθέτως, οι μαθητές ξανασυναντούν τα κλάσματα με μια νέα διάσταση στην *Ενότητα 6*. Συγκεκριμένα, στο *Κεφάλαιο 34* οι μαθητές αξιοποιούν όσα έμαθαν για τα κλάσματα για να μπορέσουν να μελετήσουν τα δεκαδικά κλάσματα, δηλαδή, τα κλάσματα στα οποία ο παρανομαστής είναι δύναμη του 10. Οι εφαρμογές του σχολικού βιβλίου ασκούν τα παιδιά στα δεκαδικά κλάσματα, δηλαδή, στο δέκατο, το εκατοστό και το χιλιοστό, αλλά και στις μεταξύ τους μετατροπές. Ακόμη, οι μαθητές εξασκούνται στο να βρίσκουν και να γράφουν ένα δεκαδικό κλάσμα ως άθροισμα άλλων δεκαδικών κλασμάτων (π.χ.: $\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$), αλλά και ως άθροισμα ενός ακέραιου και ενός δεκαδικού κλάσματος μικρότερου της μονάδας (π.χ.: $\frac{23}{10} = 2 + \frac{3}{10}$). Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι σε αυτό το κεφάλαιο οι μαθητές ανακαλούν όσα διδάχτηκαν στην ενότητα 4 για να εκφράσουν μια νέα διάσταση του κλάσματος, αυτή του δεκαδικού κλάσματος. Η κατανόηση της νέας αυτής έννοιας είναι αρκετά σημαντική, αφού θα αξιοποιηθεί στο αμέσως επόμενο μάθημα για να παρουσιαστεί το κλάσμα ως «πηλίκο».

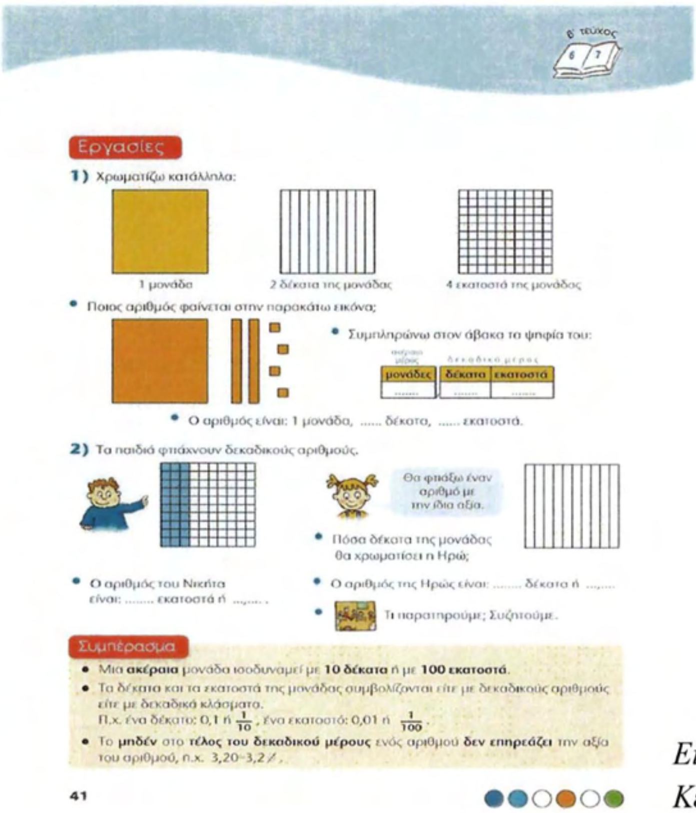
Στο κεφάλαιο, λοιπόν, που ακολουθεί τη διδασκαλία του δεκαδικού κλάσματος, οι μαθητές θα γνωρίσουν την ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Αναλυτικότερα, στόχος αυτού του μαθήματος είναι η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού αξιοποιούνται τα δεκαδικά κλάσματα. Πιο ειδικά, παρουσιάζεται στα παιδιά ένα δεκαδικό κλάσμα και η δυνατότητα που αυτό έχει να εκφραστεί με τη μορφή $\alpha \div \beta$. Η ιδιότητα της έκφρασης του κλάσματος και ως διαίρεση γενικεύεται εκτός των δεκαδικών κλασμάτων για όλο το φάσμα των κλασμάτων. Την ίδια στιγμή, η δυνατότητα αναπαράστασης του κλάσματος ως διαίρεση και η εκτέλεση αυτής της διαίρεσης δίνουν ως αποτέλεσμα ένα δεκαδικό αριθμό, που συνδέεται πρωτίστως με τα δεκαδικά κλάσματα και κατ' επέκταση με τα κλάσματα γενικότερα. Έτσι, οι μαθητές εξοικειώνονται με ασκήσεις μετατροπής των δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, εκτελώντας κάθε φορά την απαραίτητη διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρανομαστή. Στα επόμενα δυο μαθήματα της ενότητας, γίνεται η απαραίτητη επεξεργασία των δεκαδικών αριθμών, ώστε αυτά να καταστούν κατανοητά από τα παιδιά. Σε όλες, ωστόσο, τις περιπτώσεις παραδειγμάτων και ασκήσεων αναδεικνύεται, είτε με άμεσο είτε με έμμεσο τρόπο, η αξία και η χρησιμότητα που έχει το δεκαδικό κλάσμα για τους δεκαδικούς αριθμούς.

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι στην Τρίτη τάξη του Δημοτικού, όπου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια του κλάσματος για πρώτη φορά, το κλάσμα αντιμετωπίζεται με τρεις διαφορετικές ερμηνείες. Αυτές είναι α) το κλάσμα ως «μέρος-όλου», β) το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο» και γ) το κλάσμα ως «πηλίκο». Η παρουσίαση αυτών των τριών διαφορετικών ερμηνειών του κλάσματος είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς η έννοια του κλάσματος δεν μένει προσκολλημένη σε μια μονοσήμαντη διάσταση. Αντιθέτως, το πεδίο ανάπτυξης των κλασμάτων διευρύνεται και παρουσιάζεται και η αξία που έχουν για την ανάπτυξη και άλλων βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως αυτή των δεκαδικών αριθμών. Επίσης, οι μαθητές μπορούν για ακόμα μια φορά, να καταλήξουν μέσα από την μέχρι τώρα εμπειρία τους στο ότι οι έννοιες της ισοδιαμέρισης και της κλασματικής μονάδας διαδραμάτισαν ένα καθοριστικό ρόλο για την ευκολότερη κατανόηση όλων των ερμηνειών του κλάσματος. Δεν πρέπει να παραλείψουμε ότι προκειμένου να βρουν οι μαθητές το μέρος ενός όλου ή το πηλίκο μιας διαίρεσης-μοιρασιάς, κλήθηκαν να χωρίσουν σε ίσα μέρη συνεχείς αλλά και διακριτές ποσότητες. Γεωμετρικές περιοχές, σύνολα διακριτών αντικειμένων, καθώς και η αριθμογραμμή είναι τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται πιο συχνά για να αντιπροσωπεύσουν κλάσμα στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ τάξης. Στις γεωμετρικές περιοχές (τα γεωμετρικά σχήματα δεν είναι χωρισμένα) ως συνεχείς ποσότητες, περιλαμβάνονται κύκλοι και ορθογώνια και στις διακριτές ποσότητες, καραμέλες και νομίσματα. Συνολικά, μπορούμε να πούμε ότι στην Τρίτη τάξη τα παιδιά ήρθαν αντιμέτωπα με διάφορες καταστάσεις που τους παρείχαν σημαντικές πληροφορίες και γνώσεις τόσο για το κλάσμα ως έννοια όσο και για έναν πιο άνετο χειρισμό όλων των κλασμάτων και των ερμηνειών διαμέσου της κατάκτησης ποικίλων στρατηγικών και της εξοικείωσης στην επίλυση μιας πληθώρας ασκήσεων.

2.6.4. Τα Κλάσματα στη Δ΄ Δημοτικού

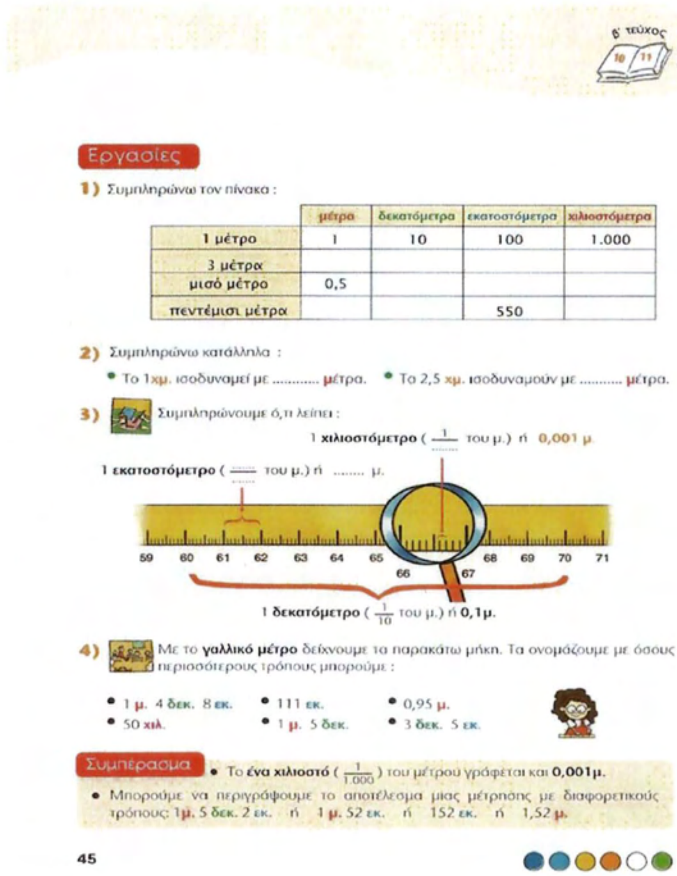
Στη Δ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου δεν πραγματοποιείται καμία αποκλειστική και ξεκάθαρη αναφορά στην έννοια του κλάσματος ή κάποιος εμπλουτισμός αυτής. Αντιθέτως, η μόνη επαφή που έχουν οι μαθητές με τα κλάσματα είναι μέσω των δεκαδικών αριθμών και της διδασκαλίας επάνω σε αυτούς. Έτσι, με βάση και το ΔΕΠΠΣ για τη συγκεκριμένη σχολική βαθμίδα, ορίζεται τα κλάσματα και συγκεκριμένα τα δεκαδικά κλάσματα, να συναντώνται κατά τη διδασκαλία μετατροπής ενός δεκαδικού αριθμού σε κλασματική δεκαδική γραφή και το αντίστροφο. Ακόμη, επαφή με τα δεκαδικά πάντα κλάσματα, προβλέπεται κατά τη διδασκαλία τοποθέτησης δεκαδικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών με προσεγγιστικές διαδικασίες επάνω στην αριθμογραμμή. Στην ανάλυση των σχετικών κεφαλαίων για τους δεκαδικούς που ακολουθεί, θα διαπιστώσουμε τον βαθμό ανάδειξης των κλασμάτων, καθώς και τον τρόπο που αυτά παρουσιάζονται στους μαθητές.

Ειδικότερα, στο *Κεφάλαιο 15* πραγματοποιείται μια επανάληψη των όσων γνωρίζουν ήδη οι μαθητές για τους δεκαδικούς αριθμούς. Κατά την επανάληψη αυτή είναι ξεκάθαρο ότι θα υπάρξει μια έντονη αναφορά και στα δεκαδικά κλάσματα, δεδομένου ότι οι δεκαδικοί αριθμοί προέρχονται από αυτά. Τόσο στο σχολικό βιβλίο όσο και στο τετράδιο εργασιών, οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν δεκαδικά κλάσματα. Συγκεκριμένα, τους ζητείτε να καταγράψουν δεκαδικά κλάσματα και έπειτα να τα μετατρέψουν σε δεκαδικούς αριθμούς ή να κάνουν το αντίστροφο, να μετατρέψουν, δηλαδή, έναν δεκαδικό σε κλάσμα. Για να επιτύχουν, όμως, οι μαθητές σε αυτή την απαίτηση οφείλουν να ανακαλέσουν και να εφαρμόσουν τη διαδικασία της διαίρεσης μεταξύ αριθμητή και παρανομαστή, να αντιμετωπίσουν με λίγα λόγια, το κλάσμα ως «πηλίκο». Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η ανάκληση των κατακτημένων γνώσεων για τους δεκαδικούς πραγματοποιείται ταυτόχρονα με την ανάκληση γνώσεων για το κλάσμα και ειδικότερα για την ερμηνεία του κλάσματος ως διαίρεση. Το γεγονός αυτό είναι αρκετά σημαντικό, αφού διατηρεί την επαφή των μαθητών με τα κλάσματα, ενώ φανερώνει για ακόμα μια φορά την αξία του σχήματος του «πηλίκου», παραμερίζοντας σε κάποιο βαθμό την αρχική έμφαση που είχε δοθεί στην ερμηνεία του «μέρος-όλου».



Εικόνα 26: Δ΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 15

Στα επόμενα δυο κεφάλαια, όπου εκτελείται μια πρώτη επεξεργασία των δεκαδικών αριθμών, εξακολουθούν να υπάρχουν αναφορές σε δεκαδικά κλάσματα, αλλά αυτή τη φορά είναι σε μικρότερο βαθμό. Αναλυτικότερα, στο *Κεφάλαιο 16* τα παιδιά εξοικειώνονται με τα νομίσματα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Για να το πετύχουν αυτό, είναι αρκετές οι φορές που καλούνται να εκφράσουν μια σχέση μεταξύ νομισμάτων με τη βοήθεια δεκαδικών κλασμάτων. Για παράδειγμα, τους ζητείται να σημειώσουν ότι το  ισοδυναμεί με — του  ή 0,01 €. Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 17*, τα παιδιά μαθαίνουν να μετρούν και να εκφράζουν ποικιλοτρόπως – με χιλιόμετρα, μέτρα, εκατοστά κ.ο.κ – το μήκος. Και πάλι, είναι φορές που καλούνται να γράψουν τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων μέτρησης, εκτός της δεκαδικής μορφής και με δεκαδικό κλάσμα. Σε αυτό το κεφάλαιο, όμως, εκτός από την απλή καταγραφή δεκαδικών κλασμάτων και την μετατροπή τους σε δεκαδικούς αριθμούς, τα παιδιά διδάσκονται πώς να εντοπίζουν και να σημειώνουν ένα δεκαδικό στην αριθμογραμμή. Την ίδια στιγμή, οι δεκαδικοί αυτοί παρουσιάζονται και με τη μορφή δεκαδικών κλασμάτων. Έτσι, οι μαθητές μαθαίνουν πώς να διαχειρίζονται όχι μόνο τους δεκαδικούς, αλλά και τα κλάσματα πάνω σε μια αριθμογραμμή. Η μάθηση αυτή κρίνεται εξαιρετικά σημαντική, καθώς προσφέρει το γόνιμο έδαφος για την αντίληψη του κλάσματος ως «μέτρο».


β' τεύχος

Εργασίες

1) Συμπληρώνω τον πίνακα :

	μέτρα	δεκατόμετρα	εκατοστόμετρα	χιλιοστόμετρα
1 μέτρο	1	10	100	1.000
3 μέτρα				
μισό μέτρο	0,5			
πεντέμισι μέτρα			550	

2) Συμπληρώνω κατάλληλα :

- Το 1χμ. ισοδυναμεί με .... μέτρα.
- Το 2,5 χμ. ισοδυναμούν με .... μέτρα.

3) Συμπληρώνουμε ό,τι λείπει :

4) Με το **γαλλικό μέτρο** δείχνουμε τα παρακάτω μήκη. Τα ονομάζουμε με όσους περισσότερους τρόπους μπορούμε :

- 1 μ. 4 δεκ. 8 εκ.
- 111 εκ.
- 0,95 μ.
- 50 χιλ.
- 1 μ. 5 δεκ.
- 3 δεκ. 5 εκ.

Συμπέρασμα

- Το **ένα χιλιοστό** ($\frac{1}{1.000}$) του μέτρου γράφεται και **0,001μ.**
- Μπορούμε να περιγράφουμε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης με διαφορετικούς τρόπους: 1μ. 5 δεκ. 2 εκ. ή 1 μ. 52 εκ. ή 152 εκ. ή 1,52 μ.

45

Εικόνα 27: Δ΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 17

Στη συνέχεια των κεφαλαίων για τους δεκαδικούς εξακολουθεί να υπάρχει αναφορά στην έννοια του κλάσματος κατά βάση μέσω των δεκαδικών κλασμάτων. Οι σχετικές αναφορές συνιστούν στην πλειοψηφία τους την καταγραφή του δεκαδικού αριθμού με κλασματική μορφή ή την αντίστροφη διαδικασία. Πιο ξεκάθαρη αναφορά στα κλάσματα και κυρίως στις διάφορες ερμηνείες που έχουν, πραγματοποιείται στο *Κεφάλαιο 24*. Στο μάθημα αυτό ανακαλούνται βασικές γνώσεις για τα κλάσματα, όπως αυτή της ισοδιαμέρισης, ενώ αναδεικνύονται και οι ερμηνείες του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και ως «πηλίκο», αλλά και η σύνδεση του δεύτερου σχήματος με τους δεκαδικούς αριθμούς. Περισσότερη έμφαση βέβαια, δίνεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο», καθώς οι ασκήσεις του μαθήματος προβάλουν ως την πιο εύκολη λύση για την εύρεση ενός δεκαδικού την εκτέλεση της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρανομαστή του κλάσματος. Επιπροσθέτως, και στα τελικά συμπεράσματα του μαθήματος, προβάλλονται για πρώτη φορά στα παιδιά με ξεκάθαρο και σαφή τρόπο α) ότι κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως δεκαδικό κλάσμα και αντιστρόφως και β) ότι κάθε δεκαδικός αριθμός και κάθε δεκαδικό κλάσμα μπορεί να γραφτεί ως αποτέλεσμα μιας διαίρεσης που έχει ως διαιρέτη το 10, το 100, το 1000 κ.ο.κ. Μέσω, λοιπόν, αυτού του μαθήματος επιδιώκεται να επεκταθούν και να σταθεροποιηθούν οι γνώσεις για τη σύνδεση των δεκαδικών κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς με την πράξη της διαίρεσης.

Ολοκληρώνοντας την αξιολόγηση του σχολικού εγχειριδίου της Τετάρτης τάξης, είμαστε σε θέση να αναφέρουμε ότι παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει μια αυτούσια επαφή των μαθητών με τα κλάσματα, εξακολουθούν να υπάρχουν ισχυρές επιρροές, που διατηρούν την κλασματική εικόνα στο μυαλό των παιδιών. Η εικόνα των κλασμάτων, έστω και αν αυτή γίνεται μέσω των δεκαδικών κλασμάτων, συνεχίζει να υπάρχει και να φανερώνει στα παιδιά πόσο σημαντική είναι για τον κόσμο των Μαθηματικών. Διαπιστώσαμε, όμως, από την μελέτη του βιβλίου ότι πιο έντονα παρουσιάζεται και διδάσκεται στους μαθητές η ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Αναμφίβολα, η έμφαση που δίνεται σε αυτή την ερμηνεία είναι δικαιολογημένη αν αναλογιστούμε ότι συνιστά απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη και κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Επίσης, η ενασχόληση με την αριθμογραμμή παραπέμπει στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο», ενώ ταυτόχρονα η εξάσκηση εύρεσης δεκαδικών και κλασμάτων πάνω στη αριθμογραμμή βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν εις βάθος ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και δύναται να εντοπιστεί σε μια αριθμογραμμή ή μεζούρα. Γενικότερα, σε αυτή την τάξη τα κλάσματα και συγκεκριμένα τα δεκαδικά κλάσματα, επαναλαμβάνονται και επεξεργάζονται μέσω των δεκαδικών αριθμών, βοηθώντας τα παιδιά να ανακαλέσουν υπάρχουσες κατακτημένες γνώσεις για τα κλάσματα, να εδραιώσουν ακόμα πιο πολύ τις γνώσεις αυτές, αλλά και να προετοιμαστούν για όσα θα ακολουθήσουν στην επόμενη τάξη.

2.6.5. Τα Κλάσματα στην Ε΄ Δημοτικού

Οι μαθητές καταφτάνουν στην Πέμπτη τάξη του Δημοτικού κατέχοντας σημαντικές γνώσεις για το κλάσμα και έχοντας πιο πρόσφατες τις σχετικές γνώσεις για τα δεκαδικά κλάσμα. Επιπλέον, έχουν συναντήσει και δουλέψει πιο εντατικά τις ερμηνείες του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και ως «πηλίκο», ενώ σε μικρότερο βαθμό ήρθαν σε επαφή με την ερμηνεία του «μέτρου». Έχοντας αυτό το γνωστικό υπόβαθρο, το ΔΕΠΠΣ αυτής της τάξης θέτει ως στόχο να μπορούν οι μαθητές στο τέλος της ακαδημαϊκής χρονιάς να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ κλασματικών αριθμών. Η κατάκτηση των βασικών πράξεων με κλάσματα σε συνδυασμό με τη διδασκαλία και ανάπτυξη ποικίλλων στρατηγικών, στοχεύουν στο να καταστούν ικανοί οι μαθητές στην επίλυση απλών προβλημάτων με κλάσματα. Ακόμη, προβλέπεται οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με νέες έννοιες, όπως αυτή των ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων, της απλοποίησης των κλασμάτων, της σύγκρισης και διάταξης αυτών, αλλά και της μετατροπής κλασμάτων σε μεικτούς αριθμούς.

Με όσα λοιπόν, προβλέπονται και από το ΑΠΣ, τα παιδιά εισάγονται σε έννοιες σχετικές με τα κλάσματα στη *2η Ενότητα* του σχολικού εγχειριδίου. Συγκεκριμένα, στο *Κεφάλαιο 7* τα παιδιά ανακαλούν τις γνώσεις τους για τις έννοιες των δεκαδικών αριθμών και παράλληλα και για τα δεκαδικά κλάσματα. Η έννοια που προβάλλεται έντονα στο κεφάλαιο αυτό είναι η έννοια της μονάδας αναφοράς. Οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν ότι εκφράζουμε μια ποσότητα, όπως για παράδειγμα το μισό μιας τούρτας, με βάση μια αρχική ποσότητα, δηλαδή, μια αρχική μονάδα αναφοράς, που για το παράδειγμά θα ήταν μια ολόκληρη τούρτα. Επίσης, υπενθυμίζεται στους μαθητές ότι ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί και με κλασματική μορφή, καθώς και το αντίστροφο. Για να επιτευχθεί αυτό όμως, απαιτείται η αντιμετώπιση του κλάσματος με το σχήμα του «πηλίκου». Συνεπώς, τα παιδιά καλούνται να ανακαλέσουν όσα μάθανε σχετικά με αυτή την ερμηνεία στην προηγούμενη σχολική χρονιά. Τέλος, εκτός της προαναφερθείσας μετατροπής, οι μαθητές μαθαίνουν πώς να εκφράζουν – προφορικά και γραπτά – έναν αριθμό με διάφορους τρόπους, όπως με συμμιγή, με ακέραιο, με δεκαδικό, με διαίρεση ή κλάσμα.

Και στο επόμενο κεφάλαιο του βιβλίου, δηλαδή στο *Κεφάλαιο 8*, γίνεται αναφορά στα κλάσματα και συγκεκριμένα, στα δεκαδικά κλάσματα. Ειδικότερα, τα παιδιά καλούνται να αναπτύξουν δεξιότητες σύγκρισης μεταξύ δεκαδικών αριθμών και κατ' επέκταση μεταξύ δεκαδικών κλασμάτων. Μέσα από απλά προβλήματα, καλούνται να συγκρίνουν διάφορες ποσότητες αλλά και να τις διατάξουν. Επιπλέον, για να επιτύχουν στις ποικίλες συγκρίσεις, οι μαθητές αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τα ισοδύναμα κλάσματα μετατρέποντας με αυτόν τον τρόπο μέσω απλών βημάτων ετερώνυμα κλάσμα σε ομώνυμα. Τέλος, στο τετράδιο εργασιών υπάρχει μια πληθώρα ασκήσεων εμπέδωσης, που απαιτούν τη σύγκριση τόσο δεκαδικών αριθμών όσο και δεκαδικών κλασμάτων, ενώ μια από τις ασκήσεις απαιτεί τη διάταξη αριθμών σε μια αριθμογραμμή. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι οι μαθητές σιγά-σιγά μαθαίνουν να διαχειρίζονται τους δεκαδικούς αριθμούς και τα δεκαδικά κλάσματα, ενώ για να το πετύχουν αυτό αξιοποιούν βασικές έννοιες, όπως αυτή των ισοδύναμων κλασμάτων.

Στο αμέσως επόμενο μάθημα (*Κεφάλαιο 9*) επεκτείνονται οι γνώσεις για τη διάταξη των δεκαδικών αριθμών και πραγματοποιείται μια εκτενής εμπέδωση στις έννοιες της σύγκρισης και διάταξης. Σε αυτό το κεφάλαιο, η έννοια των δεκαδικών κλασμάτων δεν προβάλλεται τόσο πολύ. Το μοναδικό σημείο που γίνεται αναφορά, σχετίζεται με τη διάταξη ορισμένων δεκαδικών αριθμών και των αντίστοιχων δεκαδικών κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή. Με αυτόν τον τρόπο διατηρείται η επαφή με την έννοια του κλάσματος, ενώ προβάλλεται και η δυνατότητα τοποθέτησης των κλασμάτων επάνω στον άξονα. Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 10*, οι μαθητές διδάσκονται πώς να επιλύουν προβλήματα πράξεων με δεκαδικούς εντός διαφορετικών πλαισίων. Μια, λοιπόν, από τις στρατηγικές που διδάσκεται αξιοποιεί τα δεκαδικά κλάσματα. Οι μαθητές μαθαίνουν να εκτιμούν γρήγορα με νοερούς υπολογισμούς ένα αποτέλεσμα αντικαθιστώντας τους δεκαδικούς αριθμούς με δεκαδικά κλάσματα, που έχουν την ίδια αξία και διευκολύνουν τις πράξεις. Οι επιπλέον ασκήσεις και εφαρμογές του τετραδίου εργασιών καθιστούν ακόμα πιο ξεκάθαρα το πόσο διευκολύνονται οι πράξεις με την μετατροπή των δεκαδικών σε κλάσματα.

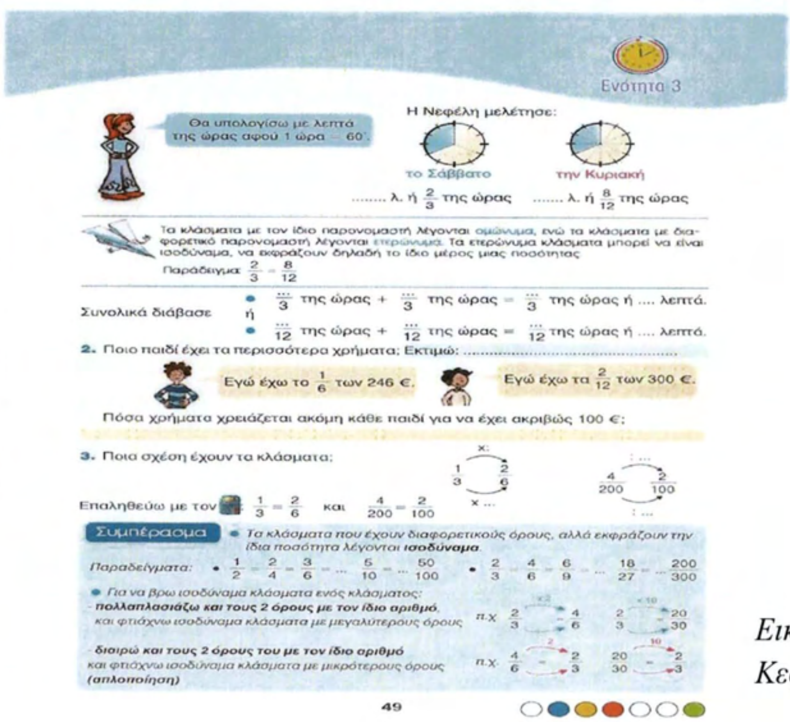
Με την ολοκλήρωση του σχολιασμού των μαθημάτων της *2ης Ενότητας* που αναφέρονται σε κλασματικές έννοιες, μπορούμε να πούμε ότι τα παιδιά διατηρούν μια επαρκή με συντηρητικό χαρακτήρα επαφή με το κλάσμα. Αρχικά, η κατανόηση της έννοιας της μονάδας αναφοράς ευνοεί την καλλιέργεια της αντίληψης του «όλου» για το οποίο γίνεται λόγος και το οποίο εκφράζει το εκάστοτε κλάσμα. Η κατανόηση αυτής της έννοιας καθίσταται σημαντική, δεδομένου του ότι οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι κάθε κλάσμα εκφράζει μια ποσότητα, είτε συνεχή είτε διακριτή. Σημαντική, όμως, έννοια που ανακαλούν και χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι και αυτή των ισοδύναμων κλασμάτων. Η κατανόηση και αξιοποίησή τους φανερώνει στα παιδιά πως ορισμένες μαθηματικές καταστάσεις διευκολύνονται από την έννοια αυτή. Ακόμη, όπως διαπιστώθηκε μέχρι τώρα, γίνεται λόγος μόνο για τα δεκαδικά κλάσματα. Η έμφαση αυτή είναι δικαιολογημένη, ειδικά αν αναλογιστούμε ότι στην παρούσα ενότητα γίνεται κατά βάση επεξεργασία των δεκαδικών αριθμών, αλλά και ότι οι αριθμοί αυτοί θεωρούνται συνέχεια των δεκαδικών κλασμάτων. Η γενικότερη προβολή και έμφαση στα δεκαδικά κλάσματα φανερώνει όχι μόνο τη σημασία αυτών των κλασμάτων για τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά και για το σύνολο των αριθμών, καθώς έννοιες σχετικές με τα κλάσματα, όπως η ισοδυναμία και η μονάδα αναφοράς, καθιστούν ευκολότερη τη διαχείριση και επίλυση προβλημάτων.

Παράλληλα, μέσα από όσα κεφάλαια του βιβλίου μελετήσαμε ως εδώ, παρατηρούμε ότι γίνεται αναφορά στην ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο», ενώ με έμμεσο τρόπο πραγματοποιείται σχετική αναφορά και για την ερμηνεία του «μέτρου». Οι αναφορές στο σχήμα του «πηλίκου» είναι πιο έκδηλες, αφού οι δεκαδικοί αριθμοί παρουσιάζονται ως διαίρεση του κλάσματος. Εξάλλου, και το σχολικό εγχειρίδιο καλεί τα παιδιά μέσα από ασκήσεις να αναπαραστήσουν το κλάσμα με αυτή τη μορφή. Από την άλλη, για το σχήμα του κλάσματος ως «μέτρο» γίνεται έμμεσος λόγος μόνο δυο φορές μέσα από εφαρμογές του βιβλίου. Ωστόσο, είναι σημαντικό που έστω και σε μικρό βαθμό, αναδεικνύεται το σχήμα αυτό και διατηρούν οι μαθητές μια επαφή, ενώ η ανάδειξη ότι τα δεκαδικά κλάσματα και κατ' επέκταση όλα τα κλάσματα, μπορούν να τοποθετηθούν πάνω σε μια αριθμογραμμή και να εκφράσουν μια ποσότητα βοηθά τα παιδιά να αντιληφθούν το κλάσμα ως αριθμό. Το στοιχείο αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό αν σκεφτούμε και ότι σημαντικό ποσοστό μαθητών δεν μπορεί να αντιμετωπίσει και να χειριστεί το κλάσμα ως ενιαίο αριθμό. Τέλος, μπορούμε να συμπληρώσουμε ότι η προβολή της μονάδα αναφοράς βοηθάει να κατανοήσουν οι μαθητές το «όλο» για το οποίο γίνεται λόγος σε ένα κλάσμα, στοιχείο αρκετά σημαντικό για όλες τις ερμηνείες που το κλάσμα φέρει.

Στο δεύτερο μάθημα της *3ης Ενότητας* (*Κεφάλαιο 15*) οι μαθητές ξανασυναντούν τα δεκαδικά κλάσματα. Αυτή τη φορά καλούνται να αξιοποιήσουν το δεκαδικό κλάσμα ως στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων. Ειδικότερα, χρησιμοποιείται το δεκαδικό κλάσμα για αναγωγή στη δεκαδική κλασματική μονάδα με σκοπό να βρεθεί μια ποσότητα. Έτσι, οι μαθητές μαθαίνουν πως αν γνωρίζουν το δεκαδικό μέρος μιας ποσότητας και θέλουν να βρουν όλη την ποσότητα ή ένα μέρος αυτής, το μόνο που χρειάζεται να κάνουν είναι αναγωγή στη δεκαδική κλασματική μονάδα. Η διαδικασία, όμως, αυτή προϋποθέτει τη γνώση του κλάσματος ως «πηλίκο». Πρώτον, γιατί τα παιδιά θα πρέπει να είναι σε θέση να εκτελέσουν τη διαίρεση για να μετατρέψουν το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό – καθώς και την αντίστροφη διαδικασία – και δεύτερον να εκτελέσουν μια νέα διαίρεση και να αναγάγουν το αποτέλεσμα στη μονάδα για να βρουν στο τέλος ένα άλλο μέρος της ποσότητας ή το «όλο» αυτής. Για παράδειγμα, αν τα $\frac{4}{10}$ μιας ποσότητας είναι 32 τότε τα $\frac{9}{10}$ της ίδιας ποσότητας θα είναι 72, αφού τα $\frac{4}{10}$ είναι 32 τότε το $\frac{1}{10}$ είναι $32 \div 4 = 8$, τότε τα $\frac{9}{10}$ είναι $9 \times 8 = 72$.

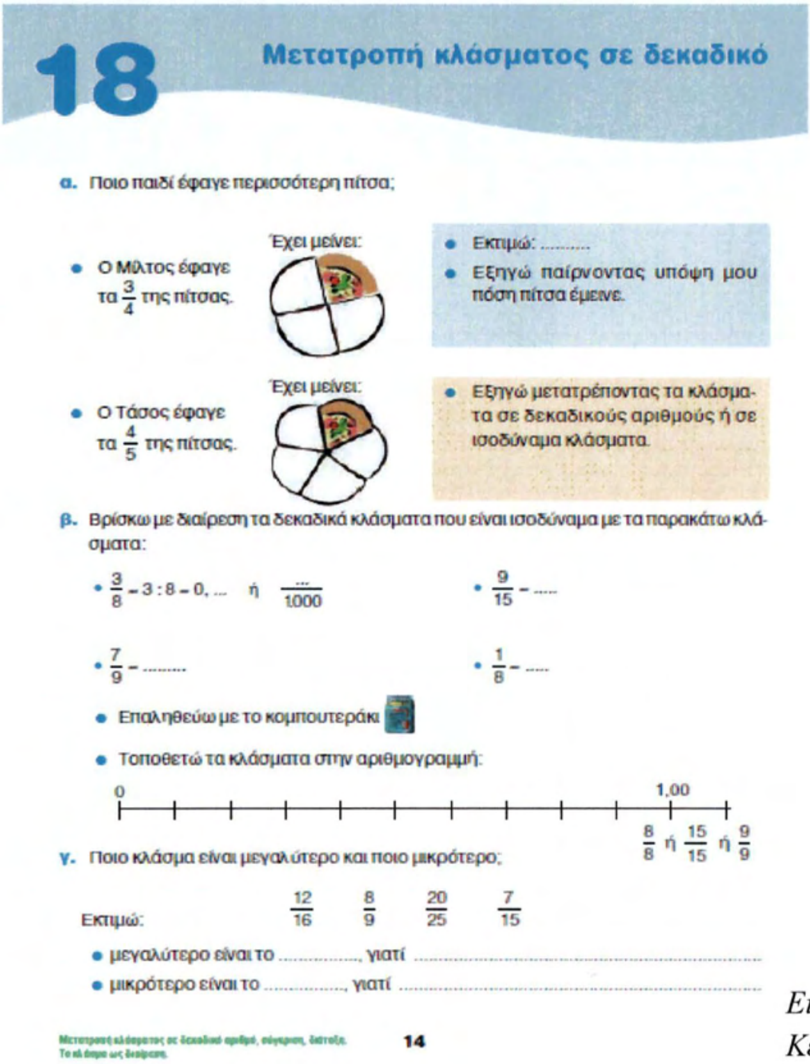
Το κεφάλαιο που ακολουθεί αυτή τη φορά (*Κεφάλαιο 16*) δεν αναφέρεται αποκλειστικά στα δεκαδικά κλάσματα, αλλά σε όλο το φάσμα των κλασμάτων, παρέχοντας γενικές μεν αλλά θεμελιώδεις δε έννοιες για την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, στο μάθημα αυτό διδάσκεται, επεξεργάζεται και επεκτείνεται η έννοια της κλασματικής μονάδας. Μέσα από ασκήσεις και δραστηριότητες με γεωμετρικά σχήματα, τα παιδιά αντιλαμβάνονται ότι η κλασματική μονάδα ή το μοναδιαίο κλάσμα ($\frac{1}{\beta}$) δείχνει σε πόσα ίσα μέρη έχει χωριστεί μια μονάδα. Ακόμη, οι μαθητές εξασκούνται στη σύγκριση και διάταξη των κλασματικών μονάδων. Για ακόμα μια φορά, για τη διάταξη των κλασματικών μονάδων αξιοποιείται η αριθμογραμμή, γεγονός που παραπέμπει στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο». Στο κεφάλαιο αυτό επίσης, τα παιδιά χρησιμοποιούν τόσο ομώνυμα όσο και ετερώνυμα κλάσματα για να συνθέσουν τη μονάδα αναφοράς, δηλαδή, το όλο μιας ποσότητας. Για παράδειγμα, $1= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ή $1= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$. Τέλος, κυρίως μέσω των ασκήσεων του τετραδίου εργασιών, οι μαθητές εξασκούνται στο να εκτελούν νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα είτε για να συνθέσουν μια μονάδα αναφοράς είτε για να συγκρίνουν κλασματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αναζητούν ποιος αριθμός λείπει ώστε — + …. = 2 (πρέπει να σημειώσουν το κλάσμα —) είτε συγκρίνουν το άθροισμα - + - με το άθροισμα - + - (- + ->- + -).

Κατέχοντας βασικές εισαγωγικές έννοιες για τα κλάσματα, τα παιδιά προχωρούν στο *Κεφάλαιο 17*, όπου ξανασυναντούν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. Σε αυτή τη σχολική βαθμίδα οι μαθητές δεν γνωρίζουν απλώς ότι τα ισοδύναμα κλάσματα εκφράζουν με διαφορετικούς όρους την ίδια ποσότητα, όπως είχε γίνει στην Γ΄ Δημοτικού, αλλά εξοικειώνονται με την αναγνώριση αυτών, ενώ διδάσκονται και πώς να τα δημιουργούν. Μαθαίνουν δηλαδή, να βρίσκουν τα ισοδύναμα κλάσματα ενός κλάσματος, είτε πολλαπλασιάζοντας είτε διαιρώντας και τους δυο όρους με τον ίδιο αριθμό. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με την απλοποίηση ενός κλάσματος, έννοια καινούργια αλλά απαραίτητη για την ευκολότερη διεξαγωγή συγκρίσεων και πράξεων. Μετατρέποντας τα κλάσματα σε ισοδύναμα, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η σύγκριση των κλασμάτων καθίσταται τώρα ευκολότερη. Επιπροσθέτως, τα παιδιά συναντούν και δυο νέες ορολογίες σχετικές με τα κλάσματα. Αυτές αφορούν τα ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα, τα οποία τα παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν, καθώς και να αναγνωρίζουν ότι κάποια ετερώνυμα κλάσματα είναι και ισοδύναμα. Σε συνδυασμό και με τις ασκήσεις του τετραδίου εργασιών, οι μαθητές καλλιεργούν τις γνώσεις τους αλλά και τις δεξιότητές τους για τη διαχείριση τόσο των ισοδύναμων κλασμάτων όσο και των αντίστοιχων ετερώνυμων και ομώνυμων κλασμάτων.



Εικόνα 27: Ε΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 17

Στο *κεφάλαιο 18* που ακολουθεί, λαμβάνει χώρα μια εκτενής και ξεκάθαρη παρουσίαση της ερμηνείας του κλάσματος ως «πηλίκο». Συγκεκριμένα, οι μαθητές διδάσκονται πώς να μετατρέπουν κάθε κλάσμα – σε δεκαδικό αριθμό εκτελώντας τη διαίρεση αριθμητή με παρανομαστή, *α β*. Εντούτοις, η εκτέλεση αυτής της διαίρεσης συνιστά διαδικασία την οποία έχουν ξανασυναντήσει οι μαθητές από τη Γ΄ τάξη και την οποία μέχρι τώρα αξιοποιούσαν για την δημιουργία των δεκαδικών αριθμών. Αυτή τη φορά όμως, η γνώση αυτή γενικεύεται πέραν των δεκαδικών κλασμάτων και εγκαθιδρύεται ως ένας ακόμη τρόπος έκφρασης των κλασμάτων. Καταλήγοντας, στο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε μια επιπλέον στρατηγική σύγκρισης των ετερώνυμων κλασμάτων. Αυτή τη φορά, οι μαθητές συγκρίνουν αυτά τα κλάσματα είτε μετατρέποντάς τα σε δεκαδικούς αριθμούς είτε σε ομώνυμα κλάσματα. Για παράδειγμα, –>– γιατί, 3 4=0,75 > 2 5=0,40 ή γιατί, – = —>– = —. Ταυτόχρονα, οι ασκήσεις του τετραδίου καθιστούν ακόμα πιο ξεκάθαρες τις παραπάνω έννοιες, καθώς μέσα από τις ασκήσεις εμπέδωσης τα παιδιά κατακτούν ακόμα περισσότερο τα κλάσματα και την ερμηνεία αυτών ως «πηλίκο/διαίρεση», ενώ η άσκηση τοποθέτησης κάποιων κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή προβάλλει μερικώς και τη διάσταση του κλάσματος ως «μέτρο».


18 Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό

α. Ποιο παιδί έφαγε περισσότερη πίτσα;

- Ο Μίλτος έφαγε τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας. Έχει μείνει:
- Ο Τάσος έφαγε τα $\frac{4}{5}$ της πίτσας. Έχει μείνει:

- Εκτιμώ: ....
- Εξηγώ παίρνοντας υπόψη μου πόση πίτσα έμεινε.

- Εξηγώ μετατρέποντας τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς ή σε ισοδύναμα κλάσματα.

β. Βρίσκω με διαίρεση τα δεκαδικά κλάσματα που είναι ισοδύναμα με τα παρακάτω κλάσματα:

- $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,...$ ή $\frac{...}{1000}$
- $\frac{9}{15} =$ .....
- $\frac{7}{9} =$ ....
- $\frac{1}{8} =$ .....

- Επαληθεύω με το κομπιουτεράκι
- Τοποθετώ τα κλάσματα στην αριθμογραμμή:

0   1,00

$\frac{8}{8}$ ή $\frac{15}{15}$ ή $\frac{9}{9}$

γ. Ποιο κλάσμα είναι μεγαλύτερο και ποιο μικρότερο;

Εκτιμώ: $\frac{12}{16}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{20}{25}$ $\frac{7}{15}$

- μεγαλύτερο είναι το ...., γιατί ....
- μικρότερο είναι το ...., γιατί ....

14

Εικόνα 27: Ε΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 18

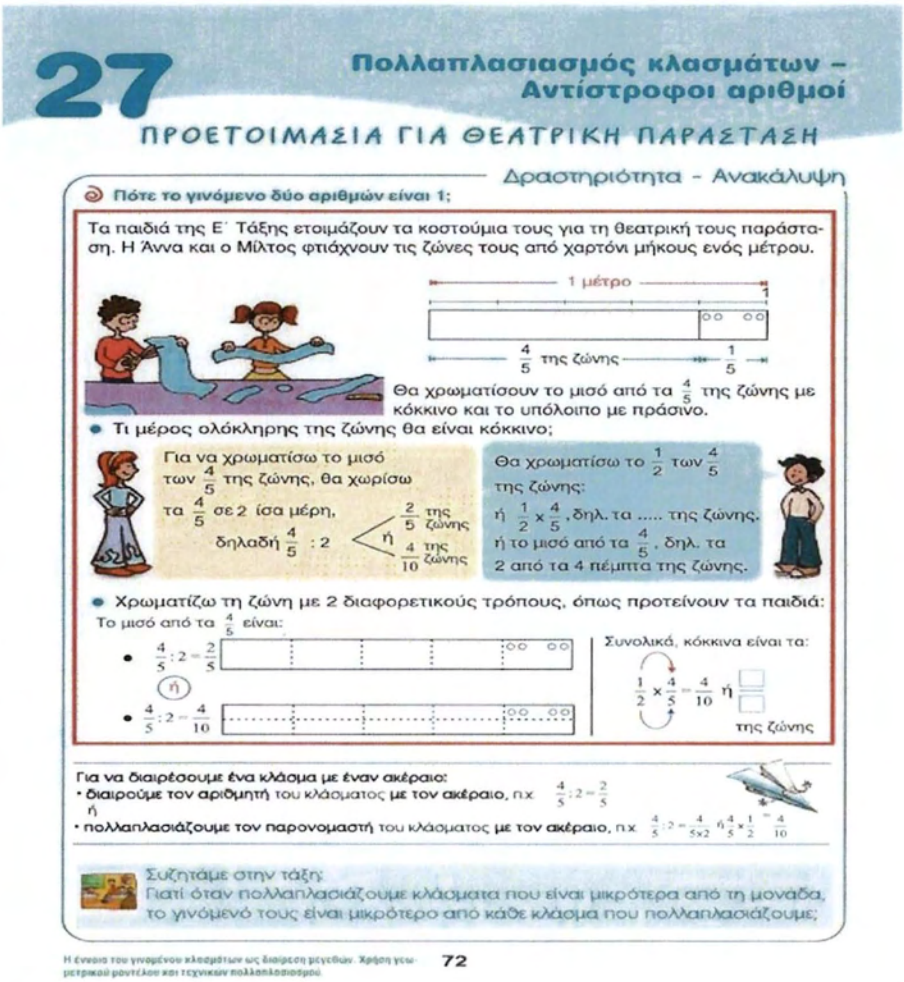
Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 19* η έννοια του κλάσματος αντιμετωπίζεται μέσα στην καθημερινότητα των παιδιών, καθώς και μέσα από βιωματικές καταστάσεις. Τα παιδιά μέσα από παραδείγματα της καθημερινότητας διαπιστώνουν ότι ένα κλάσμα δύναται να εκφράσει με ποικίλες και διαφορετικές συμβολικές μορφές μια ποσότητα. Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται και στο επόμενο κεφάλαιο (*Κεφάλαιο 20*), όπου και πάλι γίνεται φανερό ότι μια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικές μορφές αριθμών, ανάμεσα στις οποίες είναι τα κλάσματα και οι μεικτοί αριθμοί. Την ίδια στιγμή, στο *Κεφάλαιο19* προβάλλεται και διδάσκεται και η έννοια των μεικτών αριθμών, μέσα από οικεία παραδείγματα, όπως είναι οι συνταγές μαγειρικής. Τα παιδιά μαθαίνουν πώς να μετατρέπουν ένα μεικτό αριθμό σε απλό κλάσμα, αλλά και πώς να εκτελούν πράξεις μεταξύ ενός ακεραίου και ενός κλάσματος. Μαθαίνουν, δηλαδή, ότι όταν πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή ενός κλάσματος με έναν ακέραιο αριθμό το κλάσμα μεγαλώνει, ενώ όταν διαιρούμε τον αριθμητή ενός κλάσματος ή πολλαπλασιάζουμε τον παρανομαστή του με έναν ακέραιο αριθμό, τότε το κλάσμα μικραίνει. Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 20* τα παιδιά μαθαίνουν πώς να συνθέτουν έναν αριθμό (για την παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει μόνο η σύνθεση κλασματικών αριθμών) ως άθροισμα, διαφορά γινόμενο ή πηλίκο άλλων αριθμών (κλασματικών, δεκαδικών ή ακεραίων. Για παράδειγμα, $\frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} =$ $1- \frac{6}{8} = \frac{4}{4} - \frac{16}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές έρχονται όλο και πιο κοντά με την έννοια του κλάσματος και μπορούν τώρα έμπρακτα να κατανοήσουν τη χρησιμότητα που φέρει σε πολλές διαστάσεις της ζωής μας.

Κατά γενική ομολογία, με την ολοκλήρωση και αυτής της ενότητας, διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν το κλάσμα πέραν της μέχρι τότε διάστασης που γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν στη Δ΄ τάξη αλλά και στα προηγούμενα κεφάλαια, δηλαδή, αυτή τη διάσταση του κλάσματος ως δεκαδικό κλάσμα. Κατακτήθηκαν και εδραιώθηκαν αξιοσημείωτες έννοιες, όπως αυτή της κλασματικής μονάδας, που συνιστά συνδετικό και βασικό στοιχείο και των πέντε ερμηνειών που το κλάσμα έχει. Ωστόσο, η προβολή της κλασματικής μονάδας πραγματοποιήθηκε αποκλειστικά μέσα από γεωμετρικά σχήματα. Τα γεωμετρικά σχήματα του σχολικού βιβλίου, έτσι όπως είναι χωρισμένα, αποτελούν διακριτές ποσότητες, γεγονός που ενδεχομένως να δυσχεραίνει τη γενίκευση της κλασματικής μονάδας και σε συνεχείς ποσότητες. Καλό θα ήταν να υπήρχαν αντίστοιχα παραδείγματα εφαρμογής και σε συνεχείς ποσότητες. Άλλη μια σημαντική έννοια που διδάχτηκε και εφαρμόστηκε, αφορά τη μονάδα αναφοράς. Τώρα οι μαθητές εμπεδώνουν όσα είχαν κατακτήσει μέσα από εφαρμογές που απαιτούν τη σύνθεση ποικίλων μονάδων αναφοράς μέσα από διαφορετικούς τρόπους. Παράλληλα με τα προαναφερθέντα, τα παιδιά γνώρισαν και νέους όρους σχετικούς με τα κλάσματα, όπως τα ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα, η απλοποίηση των κλασμάτων, καθώς και τα μεικτά κλάσματα, ενώ επέκτειναν τις γνώσεις τους για τα ισοδύναμα κλάσματα. Η εφαρμογή αυτών των γνώσεων βοηθάει τους μαθητές να κατανοούν καλύτερα και να απλοποιούν τα δεδομένα τους, ώστε να επιλύουν ευκολότερα τις διάφορες ασκήσεις. Χαρακτηριστική εφαρμογή των παραπάνω αποτελεί η διάταξη των κλασμάτων, αφού η αξιοποίηση των γνώσεων αυτών καθιστά πιο άνετη τη διαδικασία σωστού εντοπισμού και διάταξης των κλασματικών αριθμών στην αριθμογραμμή.

Όσον αφορά τις διάφορες ερμηνείες που προβάλλονται στην ενότητα, αυτές είναι και πάλι η ερμηνεία του «πηλίκου», ενώ σε μικρότερο βαθμό παρουσιάζεται η ερμηνεία του «μέτρου». Ειδικότερα, η ερμηνεία του «πηλίκου» διευρύνεται ακόμα περισσότερο απ' ότι στην *2η Ενότητα* του βιβλίου. Στην περίπτωση αυτής της ενότητας (*3η Ενότητα*) οι μαθητές γενικεύουν την υπάρχουσα γνώση για τη μετατροπή ενός δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδικό και διδάσκονται ότι κάθε κλάσμα μπορεί να γραφτεί με δεκαδική μορφή μετά και τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή του εκάστοτε κλάσματος. Με αυτό τον τρόπο το σχήμα του «πηλίκου» αποκτά έναν καθολικό χαρακτήρα εφαρμογής. Από την άλλη, το σχήμα του «μέτρου» προβάλλεται μέσα από ελάχιστες ασκήσεις, όπου οι μαθητές διατάσσουν κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή. Παρά το μικρό βαθμό προσήλωσης στην ερμηνεία αυτή, είναι σημαντικό το ότι αναφέρεται καθώς παρέχει μια ακόμα διάσταση στο κλάσμα, ενώ αναδεικνύει ότι το κλάσμα είναι αριθμός και δύναται να αντιμετωπιστεί αναλόγως.

Καθώς τα μαθήματα προχωράνε, οι μαθητές εισάγονται σε νέες και όλο και πιο εξειδικευμένες έννοιες του κλάσματος, αφού επεκτείνουν τις μέχρι τότε κατακτημένες γνώσεις τους περνώντας από νοερές καταστάσεις σε πιο πρακτικές. Έτσι, στην *4η Ενότητα* του σχολικού εγχειριδίου τα παιδιά θα ξανασυναντήσουν το δεκαδικό κλάσμα, ενώ θα διδαχθούν και στρατηγικές για την επίτευξη πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στο *Κεφάλαιο 22* οι μαθητές συναντούν για πρώτη φορά την έννοια του ποσοστού. Η έννοια αυτή, βέβαια, είναι συνυφασμένη με την έννοια των δεκαδικών κλασμάτων και κατ' επέκταση και των δεκαδικών αριθμών. Τα παιδιά μαθαίνουν τι σημαίνει το «ποσοστό», ενώ παράλληλα διδάσκονται ότι μπορούν να εκφράσουν ένα ποσοστό ως δεκαδικό κλάσμα ή η ως δεκαδικό αριθμό, καθώς και το αντίστροφο. Την ίδια στιγμή, οι ασκήσεις τόσο αυτού του κεφαλαίου όσο και του *Κεφαλαίου 23*, καθώς και οι αντίστοιχες του τετραδίου εργασιών, καταδεικνύουν τη χρησιμότητα που έχει η έννοια του ποσοστού στην καθημερινή ζωή. Δεδομένου, όμως, ότι ένα ποσοστό μπορεί να εκφραστεί και ως δεκαδικό κλάσμα, διαπιστώνουμε ότι για άλλη μια φορά φανερώνεται και η σημασία του κλάσματος στην καθημερινότητα των ανθρώπων.

Μετά από κάποια άλλα κεφάλαια της ενότητας, τα παιδιά ξανασυναντούν τα κλάσματα και συγκεκριμένα, συναντούν πράξεις με κλάσματα. Ειδικότερα, στο *Κεφάλαιο 27*, μέσα από την οπτική αναπαράσταση χωρισμού ενός μέτρου σε ίσα μέρη – κατάσταση που παραπέμπει στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο» – οι μαθητές ανακαλούν όσα γνωρίζουν για τη διαίρεση μιας κλασματικής ποσότητας με έναν ακέραιο. Πέραν της εμπέδωσης και επέκτασης της υπάρχουσας γνώσης, τα παιδιά μαθαίνουν να χωρίζουν μια μονάδα αναφοράς σε ίσα μέρη με διάφορους τρόπους. Μέσα όμως, από αυτό το χωρισμό τα παιδιά επεξεργάζονταν δυο έννοιες: α) την έννοια της ισοδιαμέρισης και β) τους αντίστροφους αριθμούς. Αν και η πρώτη έννοια είναι γνωστή από την Α΄ κιόλας τάξη του Δημοτικού, είναι σημαντικό το ότι ανακαλείται και δείχνει εκ νέου πόσο σημαντική έννοια είναι για την αντιμετώπιση του κλάσματος, ενώ η παρουσίασή της τόσο μέσω γεωμετρικών σχημάτων όσο και μέσω της αριθμογραμμής καθιστά πιο χειροπιαστή την αντίληψη της έννοιας. Από την άλλη, μέσω του ίσου χωρισμού μιας μονάδας αναφοράς, τα παιδιά διδάσκονται και τους αντίστροφους αριθμούς, δηλαδή, τους αριθμούς που το γινόμενό τους είναι 1 (π.χ.: οι αριθμοί 15 και — είναι αντίστροφοι γιατί, 15 — = 1). Η νέα αυτή γνώση παρέχει έναν ακόμα τρόπο επίλυσης της διαίρεσης του κλάσματος με έναν ακέραιο, αφού τώρα τα παιδιά μπορούν απλώς να πολλαπλασιάσουν το κλάσμα με τον αντίστροφο του ακεραίου. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι είναι πολύ βασικό που στο μάθημα αυτό οι μαθητές διδάσκονται καθαυτό τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού μεταξύ κλασμάτων, δηλαδή μαθαίνουν ότι - - = — (π.χ.: - - = — = —). Συνέπεια αυτής της νέας γνώσης, είναι ότι οι μαθητές εξοικειώνονται σιγά-σιγά σε προβλήματα αναζήτησης του μέρους μιας ποσότητας χρησιμοποιώντας τώρα εκτός την αναγωγή στην κλασματική μονάδα και την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα, τα — των — είναι — — = — = — .



27 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων – Αντίστροφοι αριθμοί

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΘΕΑΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πότε το γινόμενο δύο αριθμών είναι 1;

Τα παιδιά της Ε΄ Τάξης ετοιμάζουν τα κοστούμια τους για τη θεατρική τους παράσταση. Η Άννα και ο Μίλτος φτιάχνουν τις ζώνες τους από χαρτόνι μήκους ενός μέτρου.

1 μέτρο

$\frac{4}{5}$ της ζώνης $\frac{1}{5}$

Θα χρωματίσουν το μισό από τα $\frac{4}{5}$ της ζώνης με κόκκινο και το υπόλοιπο με πράσινο.

- Τι μέρος ολόκληρης της ζώνης θα είναι κόκκινο;

Για να χρωματίσω το μισό των $\frac{4}{5}$ της ζώνης, θα χωρίσω τα $\frac{4}{5}$ σε 2 ίσα μέρη, δηλαδή $\frac{4}{5}$: 2 — $\frac{2}{5}$ της ζώνης ή $\frac{4}{10}$ της ζώνης

Θα χρωματίσω το $\frac{1}{2}$ των $\frac{4}{5}$ της ζώνης: ή $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$, δηλ. τα ..... της ζώνης. ή το μισό από τα $\frac{4}{5}$, δηλ. τα 2 από τα 4 πέμπτα της ζώνης.

- Χρωματίζω τη ζώνη με 2 διαφορετικούς τρόπους, όπως προτείνουν τα παιδιά:

Το μισό από τα $\frac{4}{5}$ είναι:

- $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$

ή

- $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{10}$

Συνολικά, κόκκινα είναι τα:

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$ ή $\frac{\square}{\square}$ της ζώνης

Για να διαιρέσουμε ένα κλάσμα με έναν ακέραιο:
- **διαιρούμε τον αριθμητή** του κλάσματος **με τον ακέραιο**, π.χ. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$

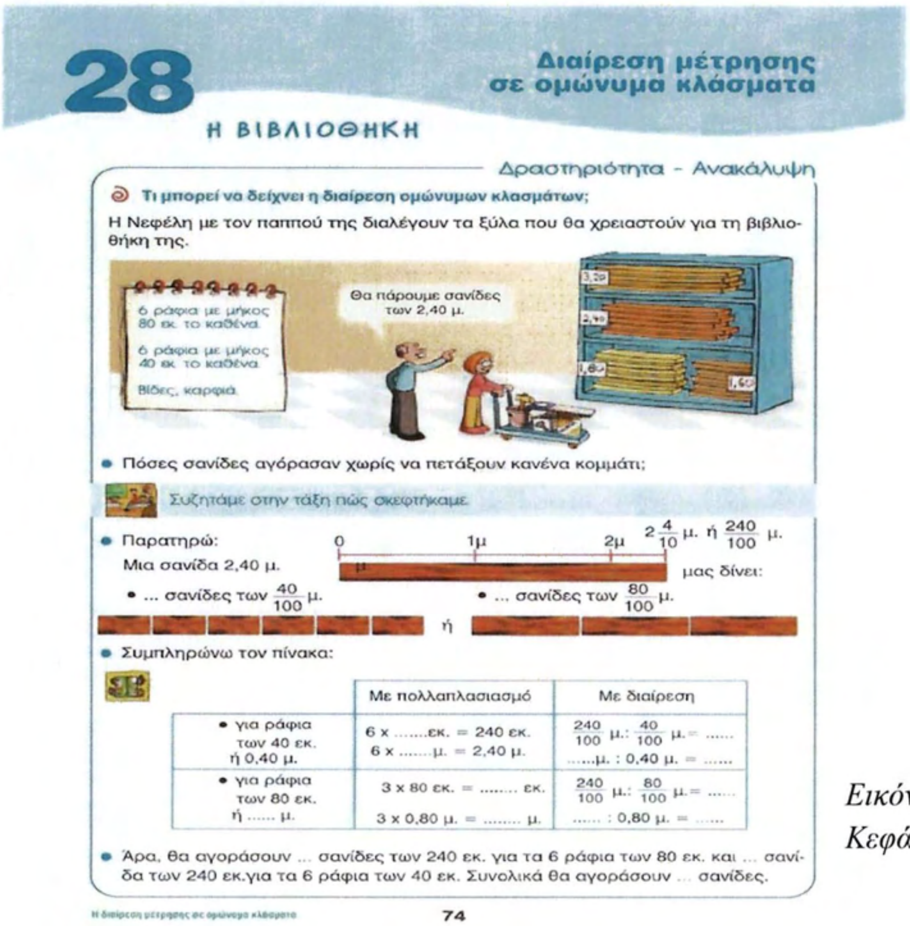
ή
- **πολλαπλασιάζουμε τον παρονομαστή** του κλάσματος **με τον ακέραιο**, π.χ. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \times 2}$ ή $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{10}$

Συζητάμε στην τάξη:
Γιατί όταν πολλαπλασιάζουμε κλάσματα που είναι μικρότερα από τη μονάδα, το γινόμενό τους είναι μικρότερο από κάθε κλάσμα που πολλαπλασιάζουμε;

72

Εικόνα 28: Ε΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 15

Συνεχίζοντας, στο *Κεφάλαιο 28*τα παιδιά εξακολουθούν να διδάσκονται πράξεις μεταξύ κλασμάτων. Αυτή τη φορά, σειρά έχει η διδασκαλία της διαίρεσης μέτρησης σε ομώνυμα κλάσματα. Για την επίτευξη αυτού του στόχου χρησιμοποιούνται οι ερμηνείες του κλάσματος ως «πηλίκο», αλλά και ως «μέτρο». Αρχικά, οι μαθητές καλούνται μέσω μιας αριθμογραμμής με τη μορφή ξύλινης σανίδας να υπολογίσουν πόσες φορές χωράει μια συγκεκριμένη ποσότητα στη δοθείσα αριθμογραμμή. Οι ασκήσεις που ακολουθούν στο βιβλίο, ωθούν τα παιδιά να αντιληφθούν ότι αυτό που τους ζητείται κάθε φορά είναι να βρουν πόσες φορές χωράει μια ποσότητα μέσα σε μια άλλη ποσότητα. Για να το πετύχουν αυτό, το μόνο που χρειάζεται να κάνουν είναι η διαίρεση μεταξύ του αριθμητή διαιρέτη και του αριθμητή διαιρετέου (π.χ.: — — = 13 3 = 4, δηλαδή, τα — χωράνε 4 στα —) και το αποτέλεσμα θα είναι αυτό που θα μας δείξει πόσες χωράει το μικρό κλάσμα στο μεγάλο. Την ίδια στιγμή, οι μαθητές μαθαίνουν να εκτελούν τη διαίρεση και μεταξύ ετερώνυμων κλασμάτων, αρκεί βέβαια να μπορούν να μετατρέψουν εύκολα τα κλάσματα σε ομώνυμα και να κάνουν την αντίστοιχη διαίρεση. Για να το πετύχουν αυτό, όμως, τα παιδιά θα πρέπει να έχουν κατανοήσει τόσο την απλοποίηση των κλασμάτων και τον πολλαπλασιασμό αυτών όσο και ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός συνιστούν αντίστροφες διαδικασίες.


28 Διαίρεση μέτρησης σε ομώνυμα κλάσματα

Η ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Τι μπορεί να δείχνει η διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων;

Η Νεφέλη με τον παππού της διαλέγουν τα ξύλα που θα χρειαστούν για τη βιβλιοθήκη της.

- Πόσες σανίδες αγόρασαν χωρίς να πετάξουν κανένα κομμάτι;

Συζητάμε στην τάξη πώς σκεφτήκαμε.

- Παρατηρώ:
Μια σανίδα 2,40 μ. ($2\frac{4}{10}$ μ. ή $\frac{240}{100}$ μ.) μας δίνει:
  - ... σανίδες των $\frac{40}{100}$ μ. ή
  - ... σανίδες των $\frac{80}{100}$ μ.
- Συμπληρώνω τον πίνακα:

	Με πολλαπλασιασμό	Με διαίρεση
• για ράφια των 40 εκ. ή 0,40 μ.	6 x ....εκ. = 240 εκ. 6 x ....μ. = 2,40 μ.	$\frac{240}{100}$ μ.: $\frac{40}{100}$ μ.= ....μ. : 0,40 μ. = ...
• για ράφια των 80 εκ. ή ...... μ.	3 x 80 εκ. = ... εκ. 3 x 0,80 μ. = ... μ.	$\frac{240}{100}$ μ.: $\frac{80}{100}$ μ.= .... : 0,80 μ. = ...

- Άρα, θα αγοράσουν ... σανίδες των 240 εκ. για τα 6 ράφια των 80 εκ. και ... σανίδα των 240 εκ.για τα 6 ράφια των 40 εκ. Συνολικά θα αγοράσουν ... σανίδες.

Η διαίρεση μέτρησης σε ομώνυμα κλάσματα 74

Εικόνα 29: Ε΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 28

Η *4η Ενότητα* του σχολικού βιβλίου ολοκληρώνεται χωρίς άλλες αναφορές σε κλασματικές έννοιες. Ανασκοπώντας την ενότητα αυτή, διαπιστώνουμε ότι για ακόμα μια φορά τα παιδιά διαπίστωσαν τη χρησιμότητα και αξία των κλασμάτων στην καθημερινότητα μέσω της έννοιας του ποσοστού. Από την άλλη, τα άλλα δυο κεφάλαια που μελετήσαμε, αναφέρονταν στις πράξεις τόσο μεταξύ κλασμάτων όσο και μεταξύ κλασμάτων και ακέραιων αριθμών. Η μετάδοση των σχετικών γνώσεων για αυτές τις πράξεις βασίστηκε από την μια στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο» και από την άλλη, στην ερμηνεία του «πηλίκου». Όσον αφορά την ερμηνεία του «μέτρου», οι μαθητές μέσω και των οπτικών αναπαραστάσεων με μέτρα ή αριθμογραμμές, διαπίστωσαν ότι μπορούν να συνθέσουν ένα κλάσμα μέσα από την πρόσθεση/επανάληψη των ίσων κομματιών, στα οποία χωρίζεται το εκάστοτε σχήμα. Ουσιαστικά, τα παιδιά ασυνείδητα επαναλαμβάνουν μια ποσότητα, δηλαδή ένα μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\beta}$, για να εντοπίσουν μια άλλη ποσότητα ή για να συνθέσουν μια νέα ποσότητα. Αξιοποιούσαν εν ολίγοις, το σχήμα του «μέτρου». Από την άλλη, το σχήμα του «πηλίκου» αναδεικνύεται κατά τη διδασκαλία της πράξης της διαίρεσης. Ειδικότερα, αν λάβουμε υπόψη μας και τις διακρίσεις που υπάρχουν για την ερμηνεία του «πηλίκου» (πηλίκο ως διαμέριση ή ως αφαίρεση), καθώς και ότι η διαίρεση που διδάσκεται είναι η διαίρεση μέτρησης, μπορούμε να εμβαθύνουμε και να αναφέρουμε ότι ουσιαστικά στο συγκεκριμένο κεφάλαιο διαπραγματευόμαστε την ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο αφαίρεσης». Δηλαδή, το πηλίκο αυτό καθορίζει των αριθμό των επαναλαμβανόμενων αφαιρέσεων ή κοινώς, το πόσες φορές χωράει μια ποσότητα σε μια άλλη ποσότητα.

Μέσω των ασκήσεων και εφαρμογών τόσο του σχολικού εγχειριδίου όσο και του τετραδίου εργασιών, τα παιδιά εξοικειώνονται με αυτές τις δυο ερμηνείες και τις χρησιμοποιούν, ακόμα και αν δεν γνωρίζουν τις ακριβείς ορολογίες και ορισμούς για αυτές τις ερμηνείες. Πέραν, όμως, των ερμηνειών που παρουσιάζονται στην παρούσα ενότητα, πρέπει να τονιστεί ότι είναι σημαντικό που για ακόμα μια φορά προβάλλεται η έννοια της ισοδιαμέρισης, δεδομένου του ότι σε όλες τις περιπτώσεις πράξεων οι ποσότητες που χρησιμοποιούνταν ήταν χωρισμένες σε ανάλογα ίσα μέρη. Η έννοια αυτή καταδεικνύει ξανά τη σημασία που φέρει γενικά για την έννοια του κλάσματος, ενώ τώρα προβλήθηκε και η σημασία που φέρει για τα δυο σχήματα του κλάσματος. Επιπροσθέτως, τα παιδιά καλλιεργούν απλές άτυπες τεχνικές για τη μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμων, γεγονός που προετοιμάζει το έδαφος για τη μετέπειτα διδασκαλία συγκεκριμένων τεχνικών μετατροπής. Ολοκληρώνοντας, πρέπει να αναφέρουμε ότι σε αυτή την ενότητα τα διάφορα σχήματα και οι εικόνες που περιλαμβάνονται συνιστούν τόσο διακριτές (π.χ.: χωρισμένα γεωμετρικά σχήματα, το μέτρο) όσο και συνεχείς (π.χ.: ο χρόνος) ποσότητες. Η χρήση και των δυο μορφών ποσοτήτων είναι πολύ θετική, καθώς διευρύνει και γενικεύει τις γνώσεις των μαθητών για τις πράξεις σε όλα τα επίπεδα.

Στηνενότητα που έπεται (*5η Ενότητα*) στο *Κεφάλαιο 34*, γίνεται και πάλι λόγος για τις πράξεις με κλάσματα και συγκεκριμένα για την πράξη της διαίρεσης ενός ακεραίου αριθμού με ένα κλάσμα, ενός κλάσματος με έναν ακέραιο και της διαίρεσης μεταξύ κλασμάτων. Τα ποικίλα προβλήματα που παρουσιάζονται με τις διάφορες κατηγορίες διαίρεσης με κλάσματα, αποσκοπούν στην ανάπτυξη διαφόρων στρατηγικών που θα καθιστούν ικανά τα παιδιά να τα επιλύσουν εύκολα και σωστά. Μια από τις στρατηγικές που αξιοποιούν οι μαθητές για τη διαίρεση μεταξύ δυο κλασμάτων, είναι αυτή που διδαχτήκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή, το να κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα και να εκτελέσουν την πράξη. Εκτός, όμως, από αυτή την ήδη γνωστή στρατηγική, σε αυτό το κεφάλαιο οι μαθητές διδάσκονται μια ευρύτερη στρατηγική, που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση. Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική/τεχνική, για να εκτελέσουμε οποιαδήποτε διαίρεση με κλάσμα, αρκεί να αντιστρέψουμε τους όρους του διαιρέτη (κλάσματος ή ακεραίου) και αντί για διαίρεση να κάνουμε πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, $4 \div \frac{5}{6} = 4 \times \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$ ή $\frac{7}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{14}{8}$. Τα πολλά προβλήματα τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και του τετραδίου εργασιών, βοηθάν τους μαθητές να εφαρμόσουν και να εξοικειωθούν με αυτή τη στρατηγική. Παρά την ευκολία που αυτή η στρατηγική έχει για την εκτέλεση της διαίρεσης, καθίσταται απαραίτητη προϋπόθεση να μπορέσουν οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά της διαίρεσης από τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα. Να αντιληφθούν, δηλαδή, ότι στη διαίρεση το πηλίκο είναι μεγαλύτερο από το κλάσματα που διαιρούνται, ενώ στον πολλαπλασιασμό μικρότερο. Εφόσον τα παιδιά κατανοήσουν σωστά αυτή την τόσο σημαντική διαφορά, θα είναι σε θέση να εκτελέσουν σωστά τόσο την πράξη του πολλαπλασιασμού όσο και της διαίρεσης.

Για την βαθύτερη κατανόηση αυτής της διαφοράς, στο *Κεφάλαιο 35* πραγματοποιείται μια εκτενής επεξεργασία διαφόρων προβλημάτων στα οποία εμπεριέχονται και κλασματικοί αριθμοί. Ειδικότερα, οι μαθητές μέσω και των εφαρμογών διαπιστώνουν ότι μπορούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα με διαφορετικές στρατηγικές, όπως υπολογίζοντας με πολλαπλασιασμό είτε με διαίρεση. Αυτό που είναι σημαντικό, είναι να κατακτήσουν οι μαθητές την ικανότητα να οργανώνουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα, ώστε να επιλέγουν κάθε φορά την καταλληλότερη στρατηγική επίλυσης του προβλήματος. Η ικανότητα αυτή, όπως είναι φυσικό, θα κατακτηθεί μετά από αρκετές εφαρμογές της γνώσης. Σε κάθε περίπτωση, μέσα από τις ασκήσεις τα παιδιά ενεργοποιούν και σταθεροποιούν τις γνώσεις τους που αφορούν την έννοια του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με κλάσματα, ενώ διαπιστώνουν και τη σχέση αυτών των δυο πράξεων ως αντίστροφες.

Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 39* οι μαθητές διδάσκονται τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ ετερώνυμων κλασμάτων. Για την επίτευξη αυτών των πράξεων, τα παιδιά διδάσκονται πώς να μετατρέπουν τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα, δηλαδή, σε ισοδύναμα κλάσματα με κοινό παρανομαστή. Ορισμένες από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές, όπως για παράδειγμα η μετατροπή των κλασμάτων σε ισοδύναμα ή σε δεκαδικά κλάσματα. Παράλληλα, όμως με αυτές τις στρατηγικές, καλλιεργείται και η στρατηγική εύρεσης του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου (Ε.Κ.Π.) και των Κοινών Πολλαπλάσιων (Κ.Π.) των παρανομαστών. Κατακτώντας μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές αυτές τις στρατηγικές, τα παιδιά είναι σε θέση να επιλύσουν οποιαδήποτε πράξη αξιοποιώντας κάθε φορά την καταλληλότερη στρατηγική.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στα τελευταία κεφάλαια που σχολιάσαμε, οι μαθητές κατακτούν και επεκτείνουν τις πράξεις με κλάσματα (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Άλλοτε εφαρμόζουν ήδη κατακτημένες στρατηγικές για τον εκάστοτε υπολογισμό και άλλοτε διδάσκονται και αξιοποιούν νέες στρατηγικές. Έτσι, στα προαναφερόμενα κεφάλαια δεν γίνεται ευθύς λόγος για κάποια από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος. Ωστόσο, η κατάκτηση των βασικών πράξεων είναι απαραίτητη για όλες τις ερμηνείες, ενώ για ακόμα μια φορά προβάλλεται η αξία θεμελιωδών εννοιών που δεσπόζουν και τις πέντε ερμηνείες. Μια βασική έννοια που τονίζεται είναι αυτή της ποσότητας, καθώς μέσα από τις ασκήσεις τα παιδιά αντιλαμβάνονται ότι τα κλάσματα αποτελούν αναπαραστάσεις ποσοτήτων, οι οποίες κάθε φορά τροποποιούνται ανάλογα με τον αριθμό του κλάσματος και τη μονάδα αναφοράς, ενώ κάθε φορά οι διάφορες ποσότητες αλλάζουν με βάση και τις πράξεις. Τέλος, η κατάκτηση πολλαπλών στρατηγικών για την επίλυση των πράξεων βοηθάει τους μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη, ώστε να μπορούν κάθε φορά να κρίνουν ποια στρατηγική θα είναι εκείνη που θα τους προσφέρει το σωστό αποτέλεσμα με τον πιο εύκολο τρόπο.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνουμε την επεξεργασία των σχολικών εγχειριδίων της Ε΄ τάξης του Δημοτικού. Όπως παρατηρούμε και από την έκταση της επεξεργασίας, πραγματοποιείται μια αρκετά μεγάλη ανάλυση των κλασμάτων σε αυτή την τάξη. Οι μαθητές ανακαλούν υπάρχουσες γνώσεις, επεκτείνουν τις γνώσεις αυτές, ενώ διδάσκονται και νέα στοιχεία σχετικά με τα κλάσματα. Συνοπτικά, η αρχική επαφή των μαθητών αυτής της τάξης με τα κλάσματα γίνεται μέσω των δεκαδικών κλασμάτων, με την ανάκληση γνώσεων σχετικών με τις μετατροπές μεταξύ δεκαδικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, τη σύγκριση και διάταξη δεκαδικών κλασμάτων και αριθμών, ενώ διδάσκεται και η έκφραση δεκαδικών κλασμάτων με τη μορφή ποσοστών. Μέσα και από τις εφαρμογές τόσο του βιβλίου όσο και του τετραδίου εργασιών γίνεται εμφανής η έντονη σημασία που έχουν τα δεκαδικά κλάσματα όχι μόνο για τη δημιουργία των δεκαδικών αριθμών, αλλά πρωτίστως για πρακτικές καταστάσεις τις καθημερινότητας. Η σημασία αυτών των κλασμάτων επιβεβαιώνεται και σε άλλα διάσπαρτα κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου όπου διάφοροι αριθμοί εκφράζονται και με δεκαδική κλασματική μορφή (π.χ.: μονάδες μέτρησης του μέτρου).

Πέραν, όμως, των δεκαδικών κλασμάτων, τα παιδιά έρχονται σε επαφή και με αρκετές παλιές αλλά και νέες έννοιες των κλασμάτων. Έτσι, διδάσκονται τα ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα, τους μεικτούς αριθμούς, τους αντίστροφους αριθμούς, τη μονάδα αναφοράς και τη σύνθεση αυτής, την αναγωγή στην κλασματική μονάδα και την απλοποίηση, ενώ ξανασυναντούν έννοιες, όπως αυτή της ισοδιαμέρισης, της κλασματικής μονάδας και των ισοδύναμων κλασμάτων. Οι μαθητές μαθαίνουν να διαχειρίζονται τις νέες αυτές έννοιες, καθώς και πώς να τις εφαρμόζουν σωστά στα αντίστοιχα πλαίσια. Η κατάκτηση όλων αυτών των πρωτάκουστων για τα παιδιά εννοιών, πραγματοποιείται μέσα από πολλά παραδείγματα και ασκήσεις, αλλά και τη σύνδεσή τους με άλλες ήδη γνωστές έννοιες. Από την άλλη, οι ήδη γνωστές έννοιες διευρύνονται και καλλιεργούνται περισσότερο, ενώ οι μαθητές μαθαίνουν και πώς να τις αξιοποιούν και σε άλλες καταστάσεις. Επιπροσθέτως, στην Πέμπτη τάξη γίνεται και η διδασκαλία των τεσσάρων βασικών πράξεων τόσο μεταξύ κλασμάτων όσο και μεταξύ κλασμάτων και ακέραιων αριθμών. Για να καταστούν τα παιδιά ικανά να εκτελούν αυτές τις πράξεις διδάσκονται απλές αλλά και πιο σύνθετες στρατηγικές. Αυτή η ποικιλία στρατηγικών παρέχει τη δυνατότητα στα παιδιά να επιλέγουν την καταλληλότερη κάθε φορά στρατηγική για τη σωστή επίλυση της πράξης ή του προβλήματος.

Όσον αφορά στις ερμηνείες του κλάσματος διαπιστώνουμε ότι στην τάξη αυτή προβάλλονται κατά βάση η ερμηνεία του «πηλίκου» καθώς και η ερμηνεία του «μέτρου». Εκτενέστερη είναι η επεξεργασία της πρώτης ερμηνείας. Αρχικά, οι μαθητές ανακαλούν ότι οι δεκαδικοί αριθμοί προέρχονται από τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή ενός δεκαδικού κλάσματος και διδάσκονται πώς να αξιοποιούν την ιδιότητα αυτή για τη σύγκριση και διάταξη τόσο των δεκαδικών αριθμών όσο και των δεκαδικών κλασμάτων. Ωστόσο, σε επόμενα μαθήματα η ερμηνεία του «πηλίκου» διευρύνεται και έτσι οι μαθητές διδάσκονται ότι η διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρανομαστή ενός κλάσματος μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις περιπτώσεις κλασμάτων. Η καθολικότητα αυτή που αποκτά η ερμηνεία του «πηλίκου» είναι πολύ σημαντική, καθώς τώρα οι μαθητές μαθαίνουν πώς να διαχειρίζονται με πιο εύκολο τρόπο καταστάσεις σύγκρισης και διάταξης τόσο κλασμάτων όσο και ακέραιων αριθμών. Εκτός από αυτή τη γενική διάσταση της ερμηνεία του «πηλίκου», οι μαθητές εμβαθύνουν στην ερμηνεία μέσω και της διαίρεσης μέτρησης, που παραπέμπει στην ερμηνεία του «πηλίκου ως αφαίρεση». Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι είναι σημαντικό που τα παιδιά διδάσκονται και χειρίζονται την ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Ωστόσο, θα ήταν θετικό να γνώριζαν ότι η διαίρεση αριθμητή με παρανομαστή δεν συνιστά μια στρατηγική/τεχνική για την διευκόλυνση της σύγκρισης ή της διάταξης, αλλά μια ακόμα διαφορετική εκδοχή στον τρόπο αναπαράστασης των κλασμάτων. Γι’ αυτό το λόγο θα ήταν καλό να κατονομάζεται η ερμηνεία, ώστε να ξέρουν τα παιδιά τι είναι αυτό που χρησιμοποιούν, ενώ θα ήταν εξίσου καλό να διδάσκονταν και την άλλη διάκριση της ερμηνείας του «πηλίκου», δηλαδή το «πηλίκο ως διαμέριση», ώστε να έχουν την πλήρη εικόνα της παρούσας ερμηνείας.

Από την άλλη, οι αναφορές στην ερμηνεία του «μέτρου» είναι πιο περιορισμένες και πραγματοποιούνται κατά βάση μέσω συγκεκριμένων ασκήσεων. Οι ασκήσεις αυτές συνοδεύονται στην πλειοψηφία από την οπτική αναπαράσταση μιας αριθμογραμμής ή ενός μέτρου. Έτσι, οι μαθητές παρατηρούν ότι το εκάστοτε οπτικό σχήμα είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη που αντιπροσωπεύουν ένα κλάσμα. Επίσης, τα παιδιά μαθαίνουνε να τοποθετούν πάνω στις αριθμογραμμές κλάσματα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί, εκτός του ότι μαθαίνουνε να διατάσσουν σωστά τα κλάσματα, καλλιεργούν και την αίσθηση ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και λειτουργεί αντιστοίχως. Η αίσθηση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, αφού βοηθάει τα παιδιά να αντιληφθούν τα κλάσματα με πιο φυσικό τρόπο και ως κάτι χειροπιαστό, περιορίζοντας την αίσθηση ότι διαχειρίζονται κάτι νοητό.

Τέλος, σε συνδυασμό με τις δυο παραπάνω ερμηνείες τονίζονται και επεκτείνονται δυο πολύ σημαντικές έννοιες τόσο για τα κλάσματα συνολικά όσο και για τις ερμηνείες. Ειδικότερα, προβάλλεται για ακόμα μια φορά η έννοια της ισοδιαμέρισης και της κλασματικής μονάδας. Κατά βάση η προβολή αυτών των δυο εννοιών γίνεται μέσα από οπτικές αναπαραστάσεις με εικόνες και γεωμετρικά σχήματα που είναι ισομερώς χωρισμένα. Δυστυχώς, όμως, στη συντριπτική πλειοψηφία τα γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιούνται έτσι όπως είναι χωρισμένα (με διακεκομμένες γραμμές) συνιστούν διακριτές ποσότητες. Το γεγονός αυτό χρήζει προσοχής, καθώς δεν πρέπει τα παιδιά να σχηματίσουν μια μονόπλευρη εικόνα για την ισοδιαμέριση, που θα αφορά μόνο το χωρισμό διακριτών ποσοτήτων, αλλά να εκπαιδευτούν και σε αντίστοιχες συνεχείς ποσότητες. Στον αντίποδα, η επεξεργασία της έννοιας της μονάδας αναφοράς βοηθά τα παιδιά να αντιληφθούν τι είναι εκείνο το αντικείμενο ή η ποσότητα που το κλάσμα δηλώνει. Συνεπώς, η κατανόηση και η επέκταση των γνώσεων για αυτές τις θεμελιώδεις έννοιες ενισχύουν τόσο την αντίληψη του τι εκφράζει ένα κλάσμα και το ρόλο του όσο και την κατανόηση και σύνδεση των ερμηνειών που αναπαριστούν το κλάσμα.

Συνολικά, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στην Πέμπτη τάξη ισχυροποιούνται οι ήδη κατεκτημένες γνώσεις, ενώ την ίδια στιγμή παρουσιάζονται και κατακτώνται και νέες βασικές έννοιες. Παρά το μεγάλο όγκο γνώσεων και πληροφοριών για τα κλάσματα που κατακλύζουν τους μαθητές, θέτονται σημαντικές βάσεις τόσο για την εις βάθος κατανόηση των δυο ερμηνειών που παρουσιάστηκαν όσο και για την διδασκαλία νέων στοιχείων και ερμηνειών στην επόμενη τάξη.

2.6.6. Τα Κλάσματα στηΣΤ΄ Δημοτικού

Φτάνοντας στην τελευταία τάξη του Δημοτικού Σχολείου, τα παιδιά κατέχουν ένα εξαιρετικά μεγάλο όγκο γνώσεων και πληροφοριών σχετικά με την έννοια του κλάσματος. Στα προηγούμενα σχολικά χρόνια μελέτησαν τόσο θεμελιώδεις έννοιες για το κλάσμα όσο και ένα μεγάλο μέρος των ερμηνειών που το διακατέχουν. Στην Έκτη τάξη, λοιπόν, όπως προβλέπεται και από το ΔΕΠΠΣ, οι μαθητές θα ανακαλέσουν, θα αξιοποιήσουν, θα επεξεργαστούν και θα επεκτείνουν ήδη γνωστές έννοιες, όπως αυτή της ισοδιαμέρισης, της διάταξης και σύγκρισης κλασμάτων, καθώς και των πράξεων, ενώ θα γνωρίσουν και νέες έννοιες, όπως αυτή των λόγων και των αναλογιών, που σχετίζονται άμεσα με τα κλάσματα. Μέσα από την επεξεργασία του σχολικού εγχειριδίου θα διαπιστώσουμε το βαθμό ενασχόλησης των μαθητών με την έννοια του κλάσματος, αλλά και τις ερμηνείες εκείνες του κλάσματος τις οποίες τα παιδιά είτε επαναλαμβάνουν είτε διδάσκονται για πρώτη φορά.

Ξεκινώντας την επεξεργασία του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών, οι μαθητές συναντούν τα κλάσματα στην πρώτη κιόλας *Θεματική Ενότητα* και συγκεκριμένα στο *Κεφάλαιο 3*. Για ακόμα μια φορά, η πρώτη επαφή των παιδιών με τα κλάσματα γίνεται διαμέσου των δεκαδικών αριθμών. Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η σημασία που έχει η μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα, καθώς και η αντίστροφη αυτή διαδικασία, για την κατανόηση καθημερινών καταστάσεων. Τα παιδιά ανακαλούν τις στρατηγικές που ήδη γνωρίζουν σχετικά με αυτή τη μετατροπή, όπως είναι αυτή κατά την οποία εκτελούν τη διαίρεση αριθμητή με παρανομαστή για να προκύψει ο δεκαδικός αριθμός (ερμηνεία κλάσματος ως «πηλίκο»), ενώ μαθαίνουν ένα νέο κανόνα/στρατηγική για την εκπόνηση της διαδικασίας. Μέσα, λοιπόν, από αυτό το πρώτο σχετικό με τα κλάσματα μάθημα, πραγματοποιείται μια πρώτη επανάληψη υπάρχουσων γνώσεων, διδάσκονται νέες στρατηγικές διαχείρισης των δεδομένων και κυρίως διατηρείται η επαφή των μαθητών με την έννοια ώστε να είναι ευκολότερη η μετάβαση στα επόμενα μαθήματα.

Συνεχίζοντας, στο *Κεφάλαιο 19*, οι μαθητές ανακαλούν βασικές γνώσεις για τα κλάσματα, τις οποίες συνδυάζουν και επεκτείνουν με άλλες νεότερες. Αναλυτικότερα, οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες και τα προβλήματα του βιβλίου και του τετραδίου εργασιών, επεξεργάζονται το κλάσμα ως «μέρος-όλου». Μαθαίνουν τι δηλώνει ένα ανάλογο κλάσμα, αλλά και πως σχηματίζεται. Επαναλαμβάνουν ποιο μέρος του κλάσματος είναι ο αριθμητής και ποιο ο παρανομαστής, ενώ μαθαίνουν και τον όρο της κλασματικής γραμμής. Την ίδια στιγμή, επαναλαμβάνουν τον ορισμό της τόσο σημαντικής έννοιας της κλασματικής μονάδας και διδάσκονται να αναγνωρίζουν πότε ένα κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας (αριθμητής < παρανομαστή), μεγαλύτερο αυτής (αριθμητής > παρανομαστή) και πότε ίσο με τη μονάδα (αριθμητής= παρανομαστή). Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι στο κεφάλαιο αυτό γίνεται λόγος και για τα μεικτά κλάσματα. Οι μαθητές επαναλαμβάνουν τη σχετική γνώση για τη μετατροπή μεικτών αριθμών σε απλά κλάσματα, ενώ διδάσκονται πώς να εκτελούν και την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, πώς να μετατρέπουν ένα απλό κλάσμα σε μεικτό αριθμό.

Λαμβάνοντας υπόψη και την παραπάνω σύντομη αλλά περιεκτική περίληψη των όσων μαθαίνουν τα παιδιά για τα κλάσματα στο παρόν κεφάλαιο, μπορούμε να πούμε ότι είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι τα παιδιά έρχονται σε επαφή με βασικούς όρους που συνιστούν την έννοια του κλάσματος, ενώ επεκτείνουν τις γνώσεις τους για την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Πέραν, όμως, όλων των εννοιών που επεξεργάστηκαν οι μαθητές και περιβάλλουν τον ορισμό του κλάσματος, δόθηκε και ένας ορισμός της έννοιαςτου κλάσματος. Συγκεκριμένα, στο σημείο παρουσίασης των συνολικών συμπερασμάτων των όσων παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο, αναφέρεται ότι *«ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται κλάσμα»* (*Εικόνα 30*). Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο προσοχής ότι ο γενικότερος ορισμός του κλάσματος, έτσι όπως καταγράφεται στο σχολικό εγχειρίδιο, παραπέμπει στον ορισμό που φέρει το σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Βέβαια, αντίστοιχη παρουσίαση αυτού του ορισμού υπάρχει και στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης. Το γεγονός αυτό, όπως είναι φυσικό, συγχέει την όποια εικόνα είχαν τα παιδιά όχι μόνο για την γενικότερη έννοια του κλάσματος, αλλά και για τις ερμηνείες του «πηλίκου» και του «μέτρου», που μέχρι τώρα είχαν διαπραγματευτεί, ενώ δυσχεραίνει και την αντίληψη του κλάσματος ως έννοια και ως αριθμό, από τη στιγμή που οι ορισμοί δεν είναι ξεκάθαροι και σαφείς. Επιπλέον, η σύγχυση αυτή δεν καθίσταται θετική και για την καλλιέργεια της αίσθησης ότι όλες οι ερμηνείες – τόσο για τις τρεις που έχουν κατακτήσει τα παιδιά όσο και για τις πέντε συνολικά – συνδέονται άμεσα μεταξύ τους για τη σύνθεση μιας πλήρης εικόνας του κλάσματος ως έννοια.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Κλάσμα	Παραδείγματα
Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα**. Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$. Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα**.	Το $\frac{3}{5}$ είναι το κλάσμα που δηλώνει το σκιασμένο μέρος του παρακάτω ορθογωνίου.
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.	$\frac{3}{4} < 1$ και $\frac{10}{12} < 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.	$\frac{4}{4} = 1$ και $\frac{12}{12} = 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.	$\frac{5}{4} > 1$ και $\frac{17}{12} > 1$
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό**.	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ και $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

Εικόνα 30: ΣΤ΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 19

Από την άλλη, η τόση έμφαση στο κλάσμα ως «μέρος-όλου» μπορεί να θεωρηθεί σε κάποιο βαθμό δικαιολογημένη. Και αυτό γιατί, η ερμηνεία αυτή, όπως έχει προαναφερθεί στην παρούσα εργασία, είναι καθοριστικής σημασίας, αφού θεωρείται θεμέλιο τόσο για τη γνώση των ρητών αριθμών όσο και βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη των υπόλοιπων ερμηνειών. Ωστόσο, είναι επιτακτική ανάγκη να γίνεται ένας πιο ξεκάθαρος προσδιορισμός ανάμεσα στον γενικότερο ορισμό του κλάσματος και στον αντίστοιχο της ερμηνείας του «μέρους-όλου». Ένας τέτοιος σαφής διαχωρισμός θα αποτρέψει τις πιθανές παρερμηνείες από την πλευρά των παιδιών και παράλληλα, θα ενισχύσει τη συνολική καλλιέργεια των σχημάτων του κλάσματος.

Στο αμέσως ακόλουθο κεφάλαιο (*Κεφάλαιο 20*), τα παιδιά διαπραγματεύονται μια άλλη διάσταση του κλάσματος. Αυτή τη φορά το περιεχόμενο του μαθήματος αναφέρεται στο κλάσμα ως ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης, δηλαδή, στην ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο». Μέσα από τις δραστηριότητες του εγχειριδίου οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις που έχουν για την αντιμετώπιση του κλάσματος – ως διαίρεση *α* *β*, ενώ διαπιστώνουν για άλλη μια φορά ότι μπορούν να μετατρέψουν το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό (ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια) ή το αντίστροφο. Και σε αυτό το μάθημα καταγράφεται ένας ακόμα ορισμός για το κλάσμα. Συγκεκριμένα, το σχολικό βιβλίο σημειώνει: *«το κλάσμα εκφράζει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρανομαστή του»*. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι ο ορισμός αυτός, για πρώτη φορά, παρουσιάζει και κατονομάζει με ξεκάθαρο τρόπο το σχήμα του κλάσματος ως «πηλίκο». Ωστόσο, έτσι όπως παρουσιάζεται ο ορισμός στα τελικά συμπεράσματα του μαθήματος, είναι σαν να καταγράφεται ένας νέος ορισμός που το κλάσμα φέρει και ο οποίος δεν συνδέεται με τον ορισμό του προηγούμενου μαθήματος. Δηλαδή, δεν γίνεται ξεκάθαρο στους μαθητές ότι και οι δυο ορισμοί είναι σωστοί και ότι απλώς εκφράζουν ακριβώς το ίδιο πράγμα, δηλαδή το κλάσμα – , με διαφορετικές διαστάσεις/ερμηνείες. Εν ολίγοις, η παρουσίαση της ερμηνείας του «πηλίκου» με αυτόν τον τρόπο καθίσταται τροχοπέδη για την ομαλή ανάπτυξη των δυο ερμηνειών που διδάχτηκαν, για τη σύνδεση αυτών, αλλά πρωτίστως για την σύνθεση μιας ενιαίας εικόνας για την έννοια του κλάσματος.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

	Παραδείγματα
Κλάσμα Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα**. Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρανομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρανομαστής}}$. Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα**.	Το $\frac{3}{5}$ είναι το κλάσμα που δηλώνει το σκιασμένο μέρος του παρακάτω ορθογωνίου.
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.	$\frac{3}{4} < 1$ και $\frac{10}{12} < 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.	$\frac{4}{4} = 1$ και $\frac{12}{12} = 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό**.	$\frac{5}{4} > 1$ και $\frac{17}{12} > 1$ $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ και $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

Εικόνα 31: ΣΤ΄ Δημοτικού, Κεφάλαιο 20

Για άλλη μια φορά και δεδομένου ότι και το ΑΠΣ των Μαθηματικών είναι σπειροειδές, γίνεται λόγος για τα ισοδύναμα κλάσματα. Συγκεκριμένα, στο *Κεφάλαιο 21* οι μαθητές ξανασυναντούν και επεξεργάζονται γνωστές έννοιες για τα ισοδύναμα κλάσματα, όπως είναι η αναγνώριση και δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων, καθώς και η απλοποίηση αυτών. Επιπλέον, επεκτείνουν τις γνώσεις αυτές, αφού μαθαίνουνε νέες στρατηγικές για να ελέγχουν αν δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους αυτών. Την ίδια στιγμή, διδάσκονται μια νέα έννοια, αυτή του ανάγωγου κλάσματος, δηλαδή του κλάσματος που δεν μπορεί να απλοποιηθεί. Αντίστοιχη ανάκληση γνώσεων γίνεται και στο *Κεφάλαιο 22*, όπου τα παιδιά συναντούν έννοιες που είχαν επεξεργαστεί και σε προηγούμενες σχολικές τάξεις και κυρίως στην Πέμπτη. Έτσι, επεξεργάζονται εκ νέου ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα και τους τρόπους μετατροπής ετερώνυμων κλασμάτων σε αντίστοιχα ομώνυμα. Αμέσως μετά, καλούνται να διατάξουν τα κλάσματα, μόνο που σε αυτό το μάθημα μαθαίνουν να εκτελούν τη διάταξη αυτή κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Επίσης, οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους για τη διάταξη κλασμάτων και επάνω και στην αριθμογραμμή. Τέλος, είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι στα συμπεράσματα και των δυο κεφαλαίων καταγράφονται με απλό και σαφή τρόπο οι ορισμοί των ισοδύναμων κλασμάτων, της απλοποίησης και των ανάγωγων κλασμάτων, καθώς και οι τεχνικές δημιουργίας ισοδύναμων κλασμάτων, μετατροπής ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και διάταξης αυτών.

Η *Θεματική Ενότητα* που μελετάμε, ολοκληρώνεται με την επανάληψη και εφαρμογή των γνώσεων για τις τέσσερις βασικές πράξεις μέσα από την επίλυση προβλημάτων. Έτσι στο *Κεφάλαιο 23* γίνεται αναφορά στις πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, ενώ στο *Κεφάλαιο 24* στις αντίστοιχες πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Τα παιδιά ανακαλούν και εφαρμόζουν τις τεχνικές που κατέχουν για την επίλυση αυτών των πράξεων τόσο μεταξύ κλασμάτων όσο και μεταξύ κλασμάτων με μεικτούς ή δεκαδικούς αριθμούς. Επιπλέον, ως νέα γνώση συνίσταται η απόκτηση μιας σειράς βημάτων για την επίλυση είτε προβλημάτων είτε αριθμητικών παραστάσεων με κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς. Όλες αυτές οι γνώσεις και οι τεχνικές εκπόνησης πράξεων καταγράφονται συνοπτικά για άλλη μια φορά στα συμπεράσματα του μαθήματος, ενώ η εφαρμογή τους πραγματοποιείται με εκτενή τρόπο τόσο στο σχολικό βιβλίο όσο και στο αντίστοιχο τετράδιο εργασιών.

Συνολικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ύλη της ενότητας αυτής συνιστά μια εκτενή επανάληψη και προέκταση των όσων διδάχτηκαν οι μαθητές κατά κύριο λόγο στην προηγούμενη σχολική βαθμίδα. Το γεγονός αυτό από τη μια δικαιολογείται από τη σπειροειδή δομή του ΑΠΣ και από την άλλη επιβεβαιώνει αυτή τη δομή. Έτσι, τα παιδιά ανακαλούν και επεκτείνουν την εφαρμογή των σχετικών γνώσεων για τη μετατροπή δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και το αντίστροφο, τη μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, την αναγνώριση και δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων, τη διαχείριση μεικτών κλασμάτων, τη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, καθώς και την εκτέλεση των βασικών πράξεων. Την ίδια στιγμή, όμως, διδάσκονται και νέες έννοιες, όπως τα ανάγωγα κλάσματα, αλλά και νέες τεχνικές και στρατηγικές τόσο για τις ποικίλες μετατροπές με κλάσματα όσο και για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Πέραν, όμως, όλων αυτών των γνώσεων, είναι εξαιρετικά σημαντικό ότι αφιερώνονται δυο κεφάλαια (*19 και 20*) για την επεξεργασία δυο ερμηνειών, αυτή του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και του κλάσματος ως «πηλίκο». Όπως διαπιστώσαμε και από την παραπάνω ανάλυση των σχετικών κεφαλαίων, σε κάθε περίπτωση παρατίθενται σχετικοί ορισμοί καθώς και μια σειρά δραστηριοτήτων και ασκήσεων μέσω των οποίων γίνεται η κατανόηση της ερμηνείας. Ωστόσο, και στα δυο κεφάλαια καταγράφονται δυο διαφορετικοί ορισμοί για το κλάσμα. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές που δε θα μπορέσουν να αντιληφθούν ποιος ορισμός πρέπει να χρησιμοποιείται για το κλάσμα. Άλλωστε και στους αρχικούς καταγεγραμμένους στόχους του εκάστοτε μαθήματος υπάρχει μια σύγχυση ως προς τις εκφράσεις που απευθύνονται στις δυο ερμηνείες, αφού στη μια περίπτωση (*Κεφάλαιο 19*) αναγράφεται ως στόχος *«η μελέτη της έννοιας του κλάσματος ως μέρος-όλου»*, ενώ στην άλλη περίπτωση *«η διαπίστωση ότι το κλάσμα είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης»*. Και στις δυο περιπτώσεις γίνεται λόγος για δυο διαφορετικά σχήματα του κλάσματος, μόνο που οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται δε βοηθάν στο να γίνει αντιληπτή αυτή η διάκριση των ερμηνειών. Οι υπογραμμισμένες λέξεις είναι αυτές που ενισχύουν περαιτέρω τον κίνδυνο να αντιληφθούν με λανθασμένο τρόπο τα παιδιά το κλάσμα ως έννοια καθώς και τις ερμηνείες αυτού. Συνεπώς, το μπέρδεμα που θα προκύψει στο μυαλό των μαθητών δεν βοηθάει στο να αντιληφθούν ότι ένα κλάσμα μπορεί να εκφράζει με διαφορετικούς τρόπους μια κατάσταση. Για το λόγο αυτό καθίσταται επιτακτική ανάγκη να παρουσιάζονται οι δυο ερμηνείες με πιο ξεκάθαρο τρόπο, αλλά και να συνδέονται μεταξύ τους, ώστε από τη μια να διαφαίνεται ότι απευθύνονται στη ίδια κατάσταση και από την άλλη ότι το πετυχαίνουν αυτό με διαφορετικές εκφράσεις/ερμηνείες.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι για ακόμα μια φορά αναδείχτηκε εμμέσως και η ερμηνεία του «μέτρου». Έτσι, όπως έχουμε διαπιστώσει και από τα σχολικά εγχειρίδια των προηγούμενων τάξεων, η ερμηνεία αυτή παρουσιάστηκε για ακόμα μια φορά μέσω ασκήσεων, τόσο στο σχολικό βιβλίο όσο και στο τετράδιο εργασιών, που ζητούσαν την τοποθέτηση ή διάταξη κλασμάτων επάνω στην αριθμογραμμή. Συγκεκριμένα, αυτού του τύπου ασκήσεις απαντώνται στα *Κεφάλαια 20 και 22*. Μπορεί και πάλι να μην γίνεται ξεκάθαρη αναφορά και καταγραφή αυτής της ερμηνείας, είναι όμως, σημαντικό το ότι αναδεικνύεται η δυνατότητα τοποθέτησης των κλασμάτων – έκφραση του κλάσματος ως «μέτρο» – πάνω στον άξονα και η ανάδειξη της λειτουργίας τους ως αριθμοί.

Εκτός, όμως, των προαναφερθέντων ερμηνειών του κλάσματος ως «μέρος-όλου», ως «πηλίκο» και ως «μέτρο», που έχουν συναντήσει οι μαθητές τόσο στην προαναφερθείσα θεματική ενότητα όσο και σε προηγούμενες σχολικές τάξεις, στην Έκτη πραγματοποιείται μια επαφή των παιδιών και με την ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος». Ειδικότερα, η *3η Θεματική Ενότητα* του σχολικού εγχειριδίου αφιερώνεται τόσο στη διδασκαλία των λόγων όσο και των αναλογιών. Συγκεκριμένα, στο *Κεφάλαιο 30* οι μαθητές μέσα και από τα ερωτήματα των αρχικών δραστηριοτήτων, διδάσκονται ότι το αποτέλεσμα της σύγκρισης δυο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται λόγος και ότι αυτό το κλάσμα έχει ως αριθμητή το ένα μέγεθος και παρανομαστή το άλλο. Την ίδια στιγμή οι ασκήσεις τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και του τετραδίου εργασιών εμπεριέχουν τόσο εξωτερικούς όσο και εσωτερικούς λόγους. Οι μαθητές δεν διδάσκονται αυτές τις δύο διακρίσεις, αλλά είναι σημαντικό ότι μέσω των εφαρμογών καλλιεργούν την αίσθηση ότι μπορούν να συγκρίνουν λόγους τόσο εντός των ίδιων χώρων όσο και εκτός. Επιπλέον, διαπιστώνουν μέσω και πάλι των ασκήσεων ότι υπάρχουν λόγοι που είναι μεταξύ τους αντίστροφοι (π.χ.: $\frac{7}{8}$ και $\frac{8}{7}$).

Από την άλλη, στο *Κεφάλαιο 31* οι γνώσεις για την έννοια του λόγου προεκτείνονται και οδηγούν στην έννοια της αναλογίας. Για άλλη μια φορά μέσα από τα ερωτήματα δραστηριοτήτων της καθημερινότητας οι μαθητές οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι στις περιπτώσεις σύγκρισης δυο λόγων που είναι ίσοι μεταξύ τους προκύπτει μια αναλογία. Έτσι, σιγά-σιγά μέσα από ασκήσεις εξοικειώνονται με τη σύγκριση λόγων, αλλά και την αναγνώριση της ισότητας δυο λόγων. Επιπλέον, διδάσκονται το σχηματισμό αναλογίας από ένα λόγο, δημιουργώντας έναν άλλο λόγο ίσο με των πρώτο, χρησιμοποιώντας αντίστοιχες τεχνικές με αυτές των κλασμάτων (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δυο όρους με κάποιον αριθμό). Ανακαλούν, αξιοποιούν και συνδέουν με αυτόν τον τρόπο και βασικές γνώσεις προηγούμενων μαθημάτων. Την ίδια στιγμή, στο επόμενο κεφάλαιο (*Κεφάλαιο 32*) τα παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τη σχέση των όρων της αναλογίας, δηλαδή, ότι πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Ακόμη, διδάσκονται πώς να αξιοποιούν μια αναλογία για να βρουν έναν άγνωστο όρο.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι οι έννοιες των δυο προηγούμενων κεφαλαίων συνδέονται άμεσα με το λόγο, δηλαδή, με την ερμηνεία εκείνη του κλάσματος ως «λόγο». Η κατάκτηση των γνώσεων για τις αναλογίες και η σύνδεση αυτών με την έννοια του λόγου είναι εξαιρετικά σημαντική για τα επόμενα μαθήματα της ενότητας, καθώς αξιοποιούνται για την κατάκτηση νέων γνώσεων, όπως τα ανάλογα ποσά και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, αλλά και για τη επίλυση αρκετών προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Οι σχετικές αναφορές για τα κλάσματα και τις ερμηνείες στη ΣΤ΄ τάξη ολοκληρώνονται στη *3η Ενότητα* με τους λόγους και τις αναλογίες. Μέσα από όσα συνάντησαν και εφάρμοσαν οι μαθητές, εμπλουτίστηκαν οι γνώσεις τους για τις ερμηνείες του κλάσματος, καθώς τώρα στις ήδη κατακτημένες ερμηνείες προστίθεται και μια τέταρτη, αυτή του κλάσματος ως «λόγος». Μπορούμε να πούμε ότι η ερμηνεία αυτή παρουσιάστηκε και διδάχτηκε με διεξοδικό και ξεκάθαρο τρόπο. Οι διάφορες εφαρμογές βοήθησαν τα παιδιά να αντιληφθούν ότι ο λόγος συνιστά μια άλλη έκφραση του κλάσματος, αλλά και ότι ένας λόγος εκφράζει τη συγκριτική σχέση δυο καταστάσεων και δεν λειτουργεί ως αριθμός. Επιπροσθέτως, η διδασκαλία των αναλογιών ενίσχυσε και προέκτεινε την κατανόηση των λόγων, ενώ ανάδειξε τη χρησιμότητά τους σε καθημερινές συνθήκες. Συνεπώς, ως μια συνολική αποτίμηση μπορούμε να αναφέρουμε ότι η ερμηνεία αυτή κατέχει την πιο ολοκληρωμένη και εμπεριστατωμένη παρουσίαση συγκριτικά με τις παρουσιάσεις – άμεσες και έμμεσες – των υπόλοιπων ερμηνειών.

Συμπερασματικά, η παρουσίαση των κλασμάτων στην τελευταία τάξη του δημοτικού συνιστά μια εκτενή επανάληψη όλων όσων διδάχτηκαν τα παιδιά μέχρι αυτή τη σχολική βαθμίδα με βασικό στοιχείο την καταγραφή μιας σειρά διαφορετικών ορισμών. Έτσι, ανακαλούνται προϋπάρχουσες γνώσεις και δεξιότητες, καθώς και τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, οι οποίες είτε διευρύνονται είτε αξιοποιούνται ως βάση για την ανάπτυξη νέων γνώσεων. Επιπλέον, ανάκληση και επέκταση πραγματοποιείται και για τις ερμηνείες του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και ως «πηλίκο», ενώ στάσιμη παραμένει η έμμεση παρουσίαση μέσω εφαρμογών της ερμηνείας του «μέτρου». Ως νέα βασική γνώση καθίσταται η επαφή με τους λόγους και τις αναλογίες, που παραπέμπουν στο σχήμα του κλάσματος ως «λόγο», ενώ μέσω αυτού του σχήματος ολοκληρώνεται με ένα θετικό τρόπο το σύνολο των ερμηνειών του κλάσματος που διδάσκονται σ' όλο το Δημοτικό Σχολείο.

Συνολική αποτίμηση

Κάπου εδώ ολοκληρώνεται η εκτενής ανάλυση και ο σχολιασμός εκείνων των μαθημάτων των σχολικών εγχειριδίων (βιβλίων του μαθητή και τετραδίων εργασιών) όλων των βαθμίδων που αναφέρονται ή επεξεργάζονται έννοιες σχετικές με τα κλάσματα. Έχοντας εκπονήσει την παραπάνω επεξεργασία είμαστε σε θέση να εξάγουμε έναν αριθμό συνολικών συμπερασμάτων που αφορούν όσα μελετήσαμε. Πρώτον, επιβεβαιώθηκε μέσα από την παρουσίαση των διαφόρων εννοιών ότι το ΑΠΣ των Μαθηματικών έχει καθολικό σπειροειδή χαρακτήρα. Έτσι, η παρουσίαση του κλάσματος και των ερμηνειών του φέρουν αυτό το σπειροειδή χαρακτήρα, καθώς στις πρώτες τάξεις (Α΄ και Β΄) θέτονται βασικές έννοιες για την αντίληψη του κλάσματος, ενώ στις επόμενες παρουσιάζονται αναλυτικότερα βασικοί ορισμοί και στοιχεία του κλάσματος, αλλά και οι διάφορες ερμηνείες που συμπληρώνονται μέχρι και το τέλος του Δημοτικού. Ανάλογη αντιμετώπιση έχουν και πολλές έννοιες που παρουσιάζονται επιφανειακά σε μια τάξη και αναλύονται ή εφαρμόζονται περισσότερο σε επόμενες, όπως για παράδειγμα, με τα δεκαδικά κλάσματα. Επιπλέον, ήταν αρκετές οι φορές που οι διάφορες έννοιες απλώς ανακαλούνταν σε επόμενες τάξεις, ώστε να αξιοποιηθούν για τη μετάδοση γνώσεων για άλλες νέες έννοιες ή για τη διδασκαλία των ερμηνειών.

Η συνολική επεξεργασία, όμως, των βιβλίων ανέδειξε και μια σειρά πολλών ορολογιών και εννοιών που διδάσκονται και αφορούν άμεσα την έννοια του κλάσματος. Έτσι, οι μαθητές κατακλύζονται με γνώσεις που αφορούν τη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, τα ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα και πώς να μετατρέπουν τα δεύτερα σε ομώνυμα, σε μετατροπές κλασμάτων σε δεκαδικούς ή μεικτούς αριθμούς και την αντίστροφη διαδικασία, μαθαίνουν τα ισοδύναμα κλάσματα αλλά και πώς να τα δημιουργούν, διδάσκονται την κλασματική μονάδα και τη μονάδα αναφοράς, την απλοποίηση των κλασμάτων, αλλά και τα ανάγωγα κλάσματα, καθώς και μια σειρά διαφόρων στρατηγικών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν είτε για να διαχειριστούν αυτές τις έννοιες είτε για να επιλύσουν προβλήματα. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις διδασκαλίας των παραπάνω εννοιών, η πρώτη επαφή των παιδιών πραγματοποιούνταν μέσα από εμπειρικές καταστάσεις και παραδείγματα της καθημερινότητας με τα οποία οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι (π.χ.: συνταγές μαγειρικής για την εισαγωγή στα μεικτά κλάσματα). Ακόμη, οι μαθητές διδάσκονται τις τέσσερις βασικές πράξεις μεταξύ κλασμάτων αλλά και μεταξύ κλασμάτων και ακέραιων αριθμών, καθώς και διάφορες τεχνικές για να τις εκτελούν (π.χ.: αντιστροφή ενός κλάσματος για την εκτέλεση μιας διαίρεσης). Όπως είδαμε οι πράξεις διδάσκονται αρχικά στην Ε΄ τάξη, ενώ επεκτείνονται και εφαρμόζονται περισσότερο στην ΣΤ΄.

Έκτος, όμως, από την ανάκληση ή επέκταση γνώσεων για τους παραπάνω όρους υπήρχε μια βασική έννοια του κλάσματος που δέσποζε σε όλες τις σχολικές τάξεις του Δημοτικού. Αυτή η έννοια δεν είναι άλλη από την έννοια της ισοδιαμέρισης. Από την Πρώτη κιόλας τάξη παρουσιάζεται η ισοδιαμέριση μέσα από καταστάσεις μερισμού και ίσης μοιρασιάς, ενώ μέχρι και την Έκτη εξακολουθεί να αναδεικνύει το καθοριστικό ρόλο της για την ανάπτυξη και κατανόηση τόσο της έννοιας του κλάσματος όσο και των τεσσάρων ερμηνειών που απαντώνται στο Δημοτικό. Αυτό που διαφοροποιείται για την κάθε σχολική βαθμίδα είναι ο τρόπος παρουσίασης της έννοιας. Οι ποικίλοι τρόποι αναφοράς στην ισοδιαμέριση μέσα από εμπειρικές καταστάσεις (π.χ.: δίκαιη μοιρασιά μιας πίτσας) αλλά και μέσα από μαθηματικές συνθήκες (π.χ.: κόψιμο ενός άξονα σε δυο ίσα μέρη), βοηθούν στο να κατανοήσουν οι μαθητές τι είναι αυτό, δηλαδή η ποσότητα, που ισοδιαμερίζεται αλλά και το πώς διαμερίζεται σε ίσα μέρη με τη χρήση διαφόρων τεχνικών. Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι η προβολή τόσο της έννοιας της ισοδιαμέρισης όσο και των εννοιών της κλασματικής μονάδας και της μονάδας αναφοράς, θέτουν το κατάλληλο πλαίσιο για να μπορέσουν οι μαθητές στην πορεία να συνδέσουν μεταξύ τους τις διάφορες ερμηνείες του κλάσματος.

Η έμφαση στην έννοια της ισοδιαμέρισης σε όλες τις σχολικές τάξεις δικαιολογείται αν αναλογιστούμε τη σημασία αυτής της έννοια για την ανάπτυξη της ιδέας του κλάσματος και κυρίως των ερμηνειών του. Έτσι, η προβολή κάθε φορά αυτής της έννοιας προϊδέαζε τους μαθητές για την επακόλουθη παρουσίαση μιας ερμηνείας. Εξαίρεση συνιστούν οι δυο πρώτες τάξεις του Δημοτικού, όπου η ισοδιαμέριση απλώς προετοίμαζε το έδαφος για την εισαγωγή στα απλά κλάσματα στην Τρίτη τάξη. Οδηγούμαστε λοιπόν, σε ένα τέταρτο και βασικό συμπέρασμα που αφορά στις ερμηνείες του κλάσματος που διδάσκονται στο Δημοτικό Σχολείο. Ανακαλώντας όσα συναντήσαμε για τις ερμηνείες καταγράφουμε 4 διαφορετικές. Αναλυτικότερα, στα σχολικά εγχειρίδια προβάλλονται και διδάσκονται από την Γ΄ τάξη και μετά, η ερμηνεία του κλάσματος: α) ως «μέρος-όλου» β) ως «πηλίκο» γ) ως «μέτρο» και δ) ως «λόγος». Η ερμηνεία για την οποία δεν γίνεται καμία αναφορά σε κανένα από τα σχολικά βιβλία είναι αυτή του κλάσματος ως «τελεστή».

Όπως διαπιστώσαμε, η πρώτη ερμηνεία που διδάσκονται οι μαθητές είναι αυτή του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Έχουμε ξανασημειώσει ότι η προβολή πρώτα αυτής της ερμηνείας βοηθά στην αντίληψη της έννοιας του κλάσματος, ενώ θέτει τον ακρογωνιαίο λίθο και για την ανάπτυξη των υπόλοιπων ερμηνειών. Ωστόσο, τόσο στην Γ΄ τάξη, όπου πραγματοποιείται η πρώτη αναφορά στα κλάσματα, όσο και στη ΣΤ΄ η ανάλυση αυτής της ερμηνείας σημειώνεται ως βασική ανάλυση του κλάσματος. Την ίδια στιγμή, οι ορισμοί που καταγράφονται γενικά για το κλάσμα ως έννοια είναι οι ίδιοι ορισμοί που φέρει το κλάσμα ως «μέρος-όλου». Κατ' αυτόν τον τρόπο, τα παιδιά αναπτύσσουν την ιδέα του κλάσματος μονόπλευρα, ενώ δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι το σχήμα του «μέρους-όλου» συνιστά μια διαφορετική διάσταση του κλάσματος και όχι το κλάσμα καθαυτό.

Από την άλλη, η διδασκαλία της ερμηνείας του «πηλίκου» δύναται να αποτρέψει σε κάποιο βαθμό την προαναφερθείσα σύγχυση. Οι μαθητές αρχικά (στη Γ΄ τάξη) μέσω της διδασκαλίας των δεκαδικών κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ και ως διαίρεση $\alpha \div \beta$. Στην πορεία των σχολικών τάξεων επεκτείνουν αυτή την έκφραση του κλάσματος και μαθαίνουν να τη χρησιμοποιούν σε διάφορες συνθήκες. Επίσης, τα παιδιά επεξεργάζονται και μια από τις δυο περαιτέρω ερμηνείες που φέρει αυτό το σχήμα. Έστω και έμμεσα μέσα από τις ασκήσεις μαθαίνουν να χειρίζονται το «πηλίκο ως αφαίρεση». Καλό, βέβαια, θα ήταν να γνωρίζανε και το «πηλίκο ως διαμέριση», ώστε να έχουν μια συνολική εικόνα αυτής της ερμηνείας. Παρ' όλα αυτά όπως είδαμε, στη ΣΤ΄ υπάρχει και πάλι μια σύγχυση στον ορισμό που καταγράφεται για το σχήμα του «πηλίκου». Έτσι, είναι και πάλι ανάγκη να διδαχθεί στα παιδιά ότι το κλάσμα ως διαίρεση είναι ένας ακόμα τρόπος έκφρασης ενός κλάσματος, όπως αυτός του «μέρος-όλου».

Η τρίτη ερμηνεία που πραγματεύονται τα σχολικά εγχειρίδια αφορά το «μέτρο». Η συνολική ανάλυση των βιβλίων μας έδειξε ότι το σχήμα αυτό του κλάσματος παρουσιάζεται αποκλειστικά με έμμεσο τρόπο και πάντα μέσω ασκήσεων που εμπεριέχουν οπτικές αναπαραστάσεις αριθμογραμμών. Σε όλες τις περιπτώσεις ασκήσεων και εφαρμογών τα παιδιά καλούνταν να διατάξουν κλασματικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμές και άξονες. Σε καμία περίπτωση δεν πραγματοποιήθηκε ξεκάθαρη επεξεργασία της ερμηνείας ούτε δόθηκε κάποιος σχετικός ορισμός. Ωστόσο, ακόμα και αυτή η απλή διάταξη των κλασμάτων καλλιεργούσε στους μαθητές την αίσθηση ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και λειτουργεί αντιστοίχως, ενώ ήταν φορές που τα παιδιά έπρεπε να αξιοποιήσουν και το μοναδιαίο κλάσμα – που αποτελεί βασικό στοιχείο αυτού του σχήματος – για να επιτύχουν αυτή τη διάταξη.

Τέλος, η ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος» ολοκληρώνει το πάνελ των ερμηνειών που αναφέρονται στο Δημοτικό. Τα παιδιά συναντούν αυτή την ερμηνεία στην τελευταία τάξη, καθώς για την αντίληψη της είναι απαραίτητο να έχουν κατανοήσει πρωτίστως βασικά στοιχεία του κλάσματος, αλλά και των υπόλοιπων ερμηνειών. Το κλάσμα ως «λόγος» παρουσιάζεται με αναλυτικό τρόπο, ενώ η σύνδεσή του με τις αναλογίες ωθεί τα παιδία στο να κατανοήσουν ότι η έκφραση του κλάσματος λειτουργεί με συγκριτικό χαρακτήρα και διευκολύνει ποικίλες καταστάσεις της καθημερινότητας. Επίσης, ο ορισμός που δίνεται για αυτή την ερμηνεία του κλάσματος είναι πιο ξεκάθαρος συγκριτικά με τους άλλους δυο – του «μέρους-όλου» και του «πηλίκου» – ενώ η προβολή μέσω των ασκήσεων τόσο εσωτερικών όσο και εξωτερικών λόγων καθιστά την ερμηνεία αυτή ως την πιο ολοκληρωμένη ερμηνεία που διδάχτηκε σε όλο το Δημοτικό.

Γενικά, καταλήγουμε στο ότι είναι ύψιστης σημασίας το ότι οι διάφορες ερμηνείες παρουσιάζονται και διδάσκονται στα σχολικά εγχειρίδια. Ωστόσο, προτείνεται οι ερμηνείες να διδάσκονται με πιο ξεκάθαρο και ολοκληρωμένο τρόπο, ώστε να κατακτούνται από την πλευρά των μαθητών σωστά. Έτσι, επιβάλλεται να γίνεται μια πιο ξεκάθαρη επεξεργασία της ερμηνείας του «μέτρου» και όχι μέσα από εφαρμογές να καλλιεργούν τα παιδιά μια μερική μόνο εικόνα αυτού του σχήματος. Επιπλέον, μια ολοκληρωμένη παρουσίαση της κάθε ερμηνείας συνεπάγει ότι πρέπει να καταγράφονται όλες οι ενδιάμεσες διαστάσεις/ερμηνείες που αυτή περιέχει. Παράλληλα, οι διάφορες ποσότητες που χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ένα κλάσμα πρέπει να είναι τόσο συνεχείς όσο και διακριτές. Δηλαδή, η έμφαση που παρατηρήθηκε στη χρήση διακριτών σχημάτων (π.χ.: χωρισμένα γεωμετρικά σχήματα, σοκολάτες) θα πρέπει να εμπλουτιστεί με μια ανάλογη έμφαση και σε συνεχείς ποσότητες (π.χ.: χρόνος, μέτρο). Ακόμη, είναι επιτακτική ανάγκη να ονοματοδοτείται η κάθε ερμηνεία που διδάσκεται και να δίνονται πιο σαφείς ορισμοί, που να δηλώνουν κάθε φορά ότι η εκάστοτε ερμηνεία αποτελεί ένα διαφορετικό τρόπο έκφρασης και αντιμετώπισης του κλάσματος, ώστε κάθε σύγχυση μεταξύ της γενικής διάστασης του κλάσματος και των διαφόρων ερμηνειών να αποφεύγεται. Τέλος, ενδείκνυται να διδάσκεται και η ερμηνεία του κλάσματος ως «τελεστή», με σκοπό να υπάρχει απαρτία των ερμηνειών που έχει ένα κλάσμα τόσο για να καλλιεργείται μια συνολική εικόνα των εκφράσεων που ένα κλάσμα έχει όσο και για να μην παραμένουν οι μαθητές προσκολλημένοι στις συγκεκριμένες ερμηνείες που διδάχτηκαν.

Στους παρακάτω πίνακες της επόμενης σελίδας γίνεται μια συνολική κωδικοποιημένη αποτίμηση των ερμηνειών και των βασικών εννοιών που περικλείουν την έννοια του κλάσματος και απαντώνται στην εκάστοτε σχολική τάξη.

ΟΙ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΑΝΑ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ					
ΤΑΞΗ	***μέρος-όλου***	***πηλίκο***	***μέτρο***	***λόγος***	***τελεστής***
Α΄ Δημοτικού					
Β΄ Δημοτικού					
Γ΄ Δημοτικού	✓	✓ (μέσα από τα δεκαδικά κλάσματα)	✓		
Δ΄ Δημοτικού	✓	✓ (μέσα από τα δεκαδικά κλάσματα)	✓		
Ε΄ Δημοτικού		✓ (και πηλίκο ως αφαίρεση)	✓		
ΣΤ΄ Δημοτικού	✓	✓	✓	✓	

ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΝΑ ΤΑΞΗ			
ΤΑΞΗ	***ισοδιαμέριση***	***κλασματική μονάδα***	***μονάδα αναφοράς***
Α΄ Δημοτικού	✓		
Β΄ Δημοτικού	✓		
Γ΄ Δημοτικού	✓	✓	
Δ΄ Δημοτικού	✓		
Ε΄ Δημοτικού			✓
ΣΤ΄ Δημοτικού		✓	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Στόχος της έρευνας

Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση διαπιστώνουμε ότι το μάθημα των Μαθηματικών αποτελεί ένα ευρύ πεδίο πολλαπλών δυσκολιών για τους μαθητές είτε αυτοί έχουν αναπηρία όρασης είτε όχι. Την ίδια στιγμή, η έννοια του κλάσματος, ως υποενότητα του μαθηματικού φάσματος, δυσχεραίνει περισσότερο το σύνολο των μαθητών. Οι λόγοι που προκαλούν δυσκολίες στη διαχείριση της έννοιας του κλάσματος είναι σε κάποιες περιπτώσεις ίδιες ανάμεσα στους μαθητές με ΠΟ και στους βλέποντες συμμαθητές τους, ενώ σε άλλες διαπιστώσαμε πως διαφοροποιούνται. Αναμφίβολα, πάντως, η ίδια η φύση της έννοιας του κλάσματος συνιστά έναν από τους πρώτους παράγοντες που δύναται να δημιουργήσει προκλήσεις στην κατάκτησή της. Και αυτό γιατί, τα διαφορετικά ερμηνευτικά πλαίσια που περικλείει η έννοια του κλάσματος (το κλάσμα ως «μέρος-όλου», ως «πηλίκο», ως «λόγος», ως «τελεστής» και ως «μέτρο») καθιστούν πιο περίπλοκη και σύνθετη τη διαδικασία κατανόησης της έννοιας. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι το κλάσμα – οι ερμηνείες του και οι βασικές έννοιες που το απαρτίζουν – παρουσιάζεται από την Α΄ Δημοτικού και κάθε επόμενη τάξη εμπλουτίζεται και αναλύεται περαιτέρω, ενώ σε κάθε περίπτωση αναδεικνύεται η έμφαση που δίνεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου».

Λαμβάνοντας υπόψη μας τα προηγούμενα δεδομένα που προέκυψαν από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας, στόχοι της παρούσας έρευνας αποτελούν:

1. η διερεύνηση των στάσεων και συναισθημάτων για τα κλάσματα από συμμετέχοντες με και χωρίς αναπηρία όρασης, καθώς και της σημασίας που φέρουν στα πλαίσια του Δημοτικού Σχολείου,
2. η διερεύνηση των τρόπων μέσω των οποίων διδάχθηκαν τα κλάσματα συμμετέχοντες με και χωρίς αναπηρία όρασης, και
3. η διερεύνηση των τρόπων μέσω των οποίων συμμετέχοντες με και χωρίς αναπηρία όρασης θα προσέγγιζαν την έννοια του κλάσματος για να την μεταδώσουν στους μαθητές.

Με γνώμονα αυτούς τους στόχους, η έρευνα δεν επιδιώκει τη γενίκευση των ευρημάτων της, αλλά αναζητά διάφορες θέσεις και απόψεις, που θα ανακύψουν μέσα από συνεντεύξεις, και θα επικαλύπτουν τους προαναφερόμενους στόχους.

3.2. Είδος έρευνας

Δεδομένου ότι δεν αποτελεί στόχο της εν λόγω εργασίας η γενίκευση των αποτελεσμάτων της και η εξαγωγή ποσοτικών δεδομένων, αυτή θα έχει ποιοτικό χαρακτήρα. Γενικά, κάθε ποιοτική έρευνα στοχεύει στην περιγραφή, ανάλυση, ερμηνεία και κατανόηση κοινωνικών φαινομένων, καταστάσεων και χαρακτηριστικών κοινωνικών ομάδων απαντώντας κυρίως στα ερωτήματα «πώς» και γιατί» (Ιωσηφίδης, 2008). Σύμφωνα και με αυτή τη γενική αρχή των ποιοτικών ερευνών, η αναφερόμενη έρευνα θα προσπαθήσει να ερμηνεύσει τον τρόπο που αντιμετωπίζονται τα Μαθηματικά και ειδικότερα τα κλάσματα από δυο διαφορετικές ομάδες, μια των ατόμων με αναπηρία όρασης και μια των βλεπόντων. Καθώς, όμως, θα ληφθούν δεδομένα και από τις δυο ομάδες, τα οποία και θα αντιπαραβάλουμε, η παρούσα έρευνα αποκτά και συγκριτικό χαρακτήρα. Μέσα από τη σύγκριση των θέσεων των δυο ομάδων, θα διαπιστώσουμε κοινά σημεία και αποκλίσεις, ενώ δίνεται η ευκαιρία για μια πιο αναλυτική και ποιοτική προβολή των θέσεων αυτών.

3.3. Δειγματοληψία

3.3.1. Επιλογή δείγματος

Για την εκπόνηση της παρούσας έρευνας, χρειάστηκε, όπως προαναφέραμε, να λάβουν μέρος δυο διαφορετικές ομάδες συμμετεχόντων. Στην πρώτη, ανήκουν άτομα με αναπηρία όρασης, ενώ στη δεύτερη συμμετέχουν βλέποντες. Καθώς, σκοπός αυτής της εργασίας δεν είναι η γενίκευση των αποτελεσμάτων της, αλλά η αναζήτηση των σχετικών με τα κλάσματα συναισθημάτων, δυσκολιών και τρόπων διδασκαλίας, ο συνολικός αριθμός του δείγματος δεν είναι μεγάλος. Ειδικότερα, καθεμία από τις δυο κατηγορίες συμμετεχόντων απαρτίζεται από 3 άτομα, δηλαδή, ο συνολικός αριθμός του δείγματος αυτής της εργασίας είναι 6 συμμετέχοντες.

Στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να γίνει λόγος για τον τρόπο επιλογής του δείγματος. Αρχικά, η στρατηγική δειγματοληψίας που ακολουθήθηκε είναι αυτή του δείγματος μη πιθανοτήτων. Δηλαδή, η επιλεκτικότητα η οποία ενσωματώνεται σε ένα δείγμα μη πιθανοτήτων, προέρχεται από την εστίαση αυτής της έρευνας σε μια συγκεκριμένη ομάδα (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Πρωτίστως, λοιπόν, έγινε η επιλογή των συμμετεχόντων με οπτική αναπηρία, η οποία καθόρισε και την μετέπειτα επιλογή του δείγματος των βλεπόντων. Έτσι, η επιλογή των συμμετεχόντων αυτών έγινε με βάση την άμεση πρόσβαση στον πληθυσμό των ατόμων με προβλήματα όρασης στην πόλη του Βόλου. Με τη βοήθεια και του Σωματείου Ατόμων με Αναπηρία Όρασης Ν.Μαγνησίας «ΜΑΓΝΗΤΕΣ ΤΥΦΛΟΙ» εντοπίστηκε το απαραίτητο δείγμα. Συγκεκριμένα, επιλέχτηκαν 3 γυναίκες. Η πρόσβαση, όμως, στο συγκεκριμένο αριθμό συμμετεχόντων με ΑΟ καθόρισε και τον αντίστοιχο αριθμό συμμετεχόντων στην ομάδα των βλεπόντων. Παρακάτω, θα γίνει εκτενέστερη αναφορά για τα χαρακτηριστικά του δείγματος.

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως για την επιλογή τους δείγματος, είναι φανερό ότι η στρατηγική δειγματοληψίας που ακολουθήθηκε είναι αυτή της «βολικής» δειγματοληψίας ή εναλλακτικά, όπως αναγράφεται στη βιβλιογραφία, της συμπτωματικής ή ευκαιριακής (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Ουσιαστικά δηλαδή, η δειγματοληψία αυτή περιλαμβάνει άτομα τα οποία βρίσκονται κοντά στον ερευνητή και εξασφαλίζουν τη λειτουργία τους ως υποκείμενα που συμμετέχουν και βοηθούν στη συνέχεια της ερευνητικής διαδικασίας (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Κοινώς, το δείγμα συνιστούν άτομα στα οποία υπάρχει εύκολη και άμεση πρόσβαση. Βέβαια, από μια άλλη ερευνητική σκοπιά, μπορούμε να τοποθετήσουμε τη στρατηγική δειγματοληψίας ως δειγματοληψία ποσόστωσης. Και αυτό γιατί στη συγκεκριμένη τεχνική δειγματοληψίας, η επιλογή των συμμετεχόντων στην ερευνητική διαδικασία γίνεται με βάση κάποια ήδη γνωστά χαρακτηριστικά του συνολικού πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται οι συμμετέχοντες (Ιωσηφίδης, 2008). Στην ουσία, γνωρίζουμε εξ' αρχής την ανάγκη για συμμετοχή ατόμων με ΑΟ σε αυτή την έρευνα, καθώς και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και ανάγκες που διέπουν αυτόν τον πληθυσμό.

3.3.2. Χαρακτηριστικά του δείγματος

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε κάποια περαιτέρω χαρακτηριστικά των δυο ομάδων συμμετεχόντων της έρευνας. Συγκεκριμένα, θα γίνει λόγος για δημογραφικά χαρακτηριστικά και για τις ιδιαίτερες ανάγκες των μετεχόντων της ομάδας των ατόμων με αναπηρία όρασης. Προτού, όμως, προχωρήσουμε σε μια επεξεργασία των χαρακτηριστικών της εκάστοτε ομάδας, είναι πρωταρχική ανάγκη τα σημειώσουμε κάποια κοινά χαρακτηριστικά.

Αρχικά, και οι 6 συμμετέχοντες είναι γυναίκες, ενώ όλες τους φοιτούν ή φοίτησαν σε κάποιο από τα παιδαγωγικά τμήματα (ειδικής ή γενικής αγωγής) της χώρας μας. Επίσης, όλες τους εισήλθαν στις πανεπιστημιακές σχολές τους προερχόμενες από τη θεωρητική κατεύθυνση. Το γεγονός ότι οι συμμετέχουσες προέρχονται από παιδαγωγικά τμήματα, όπως προαναφέρθηκε, αποτελεί βασικό στοιχείο αυτής της έρευνας, αφού από τη μια η έρευνα απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς και από την άλλη, συνιστά στόχο μας η αναζήτηση του τρόπου που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί με και χωρίς ΑΟ την έννοια του κλάσματος και του τρόπου που τη μεταδίδουν στους μαθητές τους. Τα άλλα δυο χαρακτηριστικά αποτέλεσαν σε σημαντικό βαθμό και κριτήρια για την επιλογή του δείγματος. Όπως προαναφέρθηκε η επιλογή του δείγματος της ομάδας των συμμετεχόντων με ΑΟ, έγινε με βάση την πρόσβαση σε αυτή την κοινωνική ομάδα. Ωστόσο, το γεγονός ότι όλες οι συμμετέχουσες αυτής της ομάδας είναι γυναίκες, όπως και οι συμμετέχουσες της ομάδας των βλεπόντων, ανταποκρίνεται στα αριθμητικά δεδομένα, σύμφωνα με τα οποία ο γυναικείος πληθυσμός είναι πιο αντιπροσωπευτικός στα παιδαγωγικά τμήματα έναντι του αντρικού. Την ίδια στιγμή, ανάλογα δεδομένα καθιστούν σαφές ότι η συντριπτική πλειοψηφία φοιτητών παιδαγωγικών τμημάτων εισάγονται στα τμήματά τους έπειτα από εξετάσεις στη θεωρητική κατεύθυνση. Συνεπώς, το δείγμα που επιλέχθηκε όφειλε να είναι αντιπροσωπευτικό αυτών των δεδομένων.

Α) Δείγμα ατόμων με αναπηρία όρασης

Όπως προαναφέρθηκε προηγουμένως, την ομάδα αυτή του δείγματος συνιστούν 3 γυναίκες με ηλικίες 21 έως 24 έτη. Οι δυο συμμετέχουσες έχουν μειωμένη όραση, ενώ η τρίτη έχει ολική απώλεια όρασης. Στην πρώτη περίπτωση, οι δυο κοπέλες έχουν αλμπινισμό. Ο αλμπινισμός είναι μια κληρονομική πάθηση που συνδέεται τόσο με την έλλειψη χρωστικής ή την αδυναμία του σώματος να παράγει μελανίνη όσο και με σοβαρά προβλήματα όρασης (Mason, 1997). Τα άτομα με αλμπινισμό σπάνια έχουν μεγαλύτερη οπτική οξύτητα από 6/36 στο TestSnellen. Από την άλλη, η τρίτη συμμετέχουσα είναι εκ γενετής τυφλή. Όσον αφορά στην εκπαίδευση που έλαβαν οι συμμετέχουσες, και οι τρεις εκπαιδεύτηκαν σε γενικά σχολεία και μάλιστα η μια εξ' αυτών σε μουσικό σχολείο. Στη δεδομένη χρονική στιγμή, οι δυο συμμετέχουσες φοιτούν στο Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής στον τρίτο και τέταρτο χρόνο αντίστοιχα, ενώ η τρίτη συμμετέχουσα αποφοίτησε από Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης και εργάζεται τα τελευταία χρόνια σε σχολικές μονάδες ειδικής αγωγής.

Β) Δείγμα βλεπόντων

Και αυτή την ομάδα του δείγματος την αποτελούν 3 γυναίκες με ηλικίες από 22 έως 23 έτη. Οι τρεις συμμετέχουσες είναι τεταρτοετείς φοιτήτριες του Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής. Στο πλαίσιο της σχολής έχουν εκπονήσει την πρακτική τους άσκηση τόσο σε γενικά σχολεία όσο και σε σχολικές μονάδες ειδικής αγωγής και συνεπώς, έχουν μια μικρή εμπειρία των συνθηκών διδασκαλίας.

3.4. Εργαλεία Συλλογής Δεδομένων

Σχεδιάζοντας το ερευνητικό κομμάτι αυτής της εργασίας, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ημιδομημένων συνεντεύξεων για να πραγματοποιηθεί η συλλογή των δεδομένων. Το συγκεκριμένο είδος συνέντευξης επιλέχτηκε, επειδή επιτρέπει την απόκτηση μιας λεπτομερής εικόνας των πεποιθήσεων, των στάσεων και των απόψεων ενός ατόμου για ένα συγκεκριμένο θέμα – στην περίπτωσή μας για την έννοια του κλάσματος – καθώς παρέχει περισσότερη ευελιξία (Αβραμίδης & Καλύβα, 2006). Στις ημιδομημένες συνεντεύξεις υπάρχουν προκαθορισμένες ερωτήσεις, αλλά η διάταξη αυτών δεν είναι εκ των προτέρων καθορισμένη, ενώ σε καμία περίπτωση οι ερωτήσεις δεν υπαγορεύουν την πορεία της συζήτησης (Αβραμίδης & Καλύβα, 2006˙ Ιωσηφίδης, 2008˙ Cohen, Manion & Morrison, 2008).

Έχοντας κατά νου την παραπάνω δομή για τις συνεντεύξεις, δημιουργήθηκε ένα πρωτόκολλο συνέντευξης. Το πρωτόκολλο αυτό, στην τελική του μορφή, απαρτίζεται από οκτώ (8) ερωτήσεις. Στην επόμενη υπο-ενότητα θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάστηκε και έφτασε στην τελική του μορφή το προαναφερθέν πρωτόκολλο. Επίσης, στο τέλος της εργασίας αυτής, υπάρχει παράρτημα με τις ερωτήσεις που αποτέλεσαν τον οδηγό συνέντευξης.

3.5. Ερευνητικός Σχεδιασμός

3.5.1. Πιλοτική έρευνα

Για να έχουν, όπως ειπώθηκε προηγουμένως, οι συνεντεύξεις μια δομή κατά την εκπόνησή τους, δημιουργήθηκε ένας οδηγός/πρωτόκολλο συνέντευξης. Με βάση αυτό το πρωτόκολλο καταγράφηκαν σε πρώτη φάση 10 ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις αυτές διαπραγματεύονταντις στάσεις απέναντι στην έννοια του κλάσματος, τους τρόπους που διδάχτηκαν τα κλάσματα, τα διδακτικά υλικά που αξιοποιούνταν και τέλος, την καταγραφή προτεινόμενων σχεδίων διδασκαλίας με την αξιοποίηση διαφορετικών προσεγγίσεων της έννοιαςτου κλάσματος. Για να ελεγχθεί όμως το κατά πόσο οι δέκα αυτές ερωτήσεις του οδηγού καλύπτουν τους στόχους της έρευνας, εκπονήθηκε, αρχικά, μια πιλοτική έρευνα. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν 2 συνεντεύξεις με τελειόφοιτες φοιτήτριες του ΠΤΕΑ, οι οποίες δεν αντιμετώπιζαν κάποια ΑΟ.

Μέσα από την επεξεργασία και ανάλυση των δυο πιλοτικών συνεντεύξεων αναδείχθηκαν ορισμένες ελλείψεις σε κάποιες από τις ερωτήσεις, οι οποίες προκαλούσαν ασάφειες και δεν βοηθούσαν τους συνεντευξιαζόμενους να απαντήσουν ολοκληρωμένα. Ακόμη, φάνηκε ότι οι απαντήσεις σε κάποιες ερωτήσεις είτε επικάλυπταν τις προσδοκώμενες απαντήσεις άλλων ερωτήσεων είτε δεν ανταποκρίνονταν στους αρχικούς στόχους της έρευνας. Πέραν αυτών των ευρημάτων, δόθηκε μέσα από τις συνεντεύξεις της πιλοτικής έρευνας η ευκαιρία να υπολογιστεί ένας μέσος όρος χρονικής διάρκειας που θα χρειαστεί η πραγματοποίησή της κάθε συνέντευξης.

3.5.2. Τελικό Πρωτόκολλο Συνέντευξης

Λαμβάνοντας υπόψη όσα προέκυψαν από την πιλοτική έρευνα, έγιναν οι απαραίτητες τροποποιήσεις και βελτιώσεις στο αρχικό πρωτόκολλο συνέντευξης. Συγκεκριμένα, ορισμένες ερωτήσεις συμπτύχτηκαν, ώστε να μην επαναλαμβάνονται οι ίδιες απαντήσεις, ενώ στις ερωτήσεις που ζητούν την κατάθεση προτεινόμενων σχεδίων διδασκαλίας προστέθηκαν και παραδείγματα με συγκεκριμένους κλασματικούς αριθμούς και καθορισμένες σχολικές τάξεις, έτσι ώστε να υπάρχει σε κάποιο βαθμό ένα προκαθορισμένο πλαίσιο, που θα αποτρέπει τις γενικολογίες και ασάφειες.

Έτσι, καταλήξαμε στη σύνθεση και καταγραφή 8 ερωτήσεων, που κάλυπταν επαρκώς τους στόχους της έρευνας. Συγκεκριμένα, οι πρώτες τρείς ερωτήσεις (Ερώτηση 1, 2, 3) και η τελευταία ερώτηση (Ερώτηση 8), αποβλέπουν στον εντοπισμό των συναισθημάτων, των στάσεων και των δυσκολιών που σχετίζονται με τα κλάσματα, καθώς και με τη σημασία που αυτά έχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Από την άλλη, οι Ερωτήσεις 4 και 5 αναζητούν τους τρόπους διδασκαλίας και τα υλικά που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της έννοιαςτου κλάσματος. Τέλος, οι Ερωτήσεις 6 και 7 ζητούν από τους συνεντευξιαζόμενους να οργανώσουν και να προτείνουν τα δικά τους σχέδια διδασκαλίας διδασκαλίας, αξιοποιώντας διαφορετικές προσεγγίσεις του κλάσματος και αναφέροντας εκείνες τις γνώσεις που θεωρούν προαπαιτούμενες για τη διδασκαλία του κλάσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ

4.1. Συλλογή Δεδομένων

Έχοντας ολοκληρωμένο τον οδηγό συνέντευξης, πραγματοποιήθηκαν οι έξι συνεντεύξεις για τη συλλογή των δεδομένων. Σε επικοινωνία πάντα με τις συνεντευξιαζόμενες εκπαιδευτικούς, ορίστηκε η ώρα και ο τόπος συνάντησης με την εκάστοτε συμμετέχουσα. Έτσι, οι τρεις εκ των συνεντεύξεων έλαβαν χώρα στις οικείες των συνεντευξιαζόμενων, ενώ άλλες δυο πραγματοποιήθηκαν στο χώρο του Σωματείο «Μάγνητες Τυφλοί». Η τελευταία συνέντευξη έγινε στο σπίτι της ερευνήτριας. Σε κάθε περίπτωση, επιδιώχτηκε οι συνεντεύξεις να πραγματοποιηθούν σε οικείους χώρους για τις συμμετέχουσες, ώστε να νιώθουν οικειότητα και άνεση με τον περιβάλλοντα χώρο προκειμένου να εκφραστούν ελεύθερα και να απαντήσουν όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένα και αντικειμενικά. Όλες οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν, αφού δόθηκε και η σύμφωνη συγκατάθεση των εκπαιδευτικών. Οι ηχογραφήσεις έγιναν με την χρήση κινητών τηλεφώνων και ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τέλος, πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι η μέση χρονική διάρκεια των συνεντεύξεων είναι τα 7,5 λεπτά. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο προσοχής η μεγάλη χρονική απόκλιση που υπάρχει ανάμεσα στις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών με αναπηρία όρασης και τις αντίστοιχες των βλεπόντων. Συγκεκριμένα, οι συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών με ΑΟ είχαν κατά μέσο όρο διάρκεια τα 5 λεπτά, ενώ εκείνες των βλεπόντων εκπαιδευτικών διήρκησαν κατά μέσο όρο 10 λεπτά. Διαπιστώνουμε ότι οι συνεντεύξεις των βλεπόντων εκπαιδευτικών είχαν διπλάσια χρονική διάρκεια, γεγονός που μπορεί εκ των προτέρων να προϊδεάσει και για την ποσότητα τον δεδομένων που θα ληφθούν.

4.2. Επεξεργασία Δεδομένων

Μετά και τη συλλογή των δεδομένων μέσα από τις συνεντεύξεις, ξεκίνησε η επεξεργασία αυτών. Σε πρώτη φάση, απομαγνητοφωνήθηκαν όλες οι ηχογραφήσεις των συνεντεύξεων και καταγράφηκαν με μορφή κειμένου. Έπειτα, με βάση και τη δομή του πρωτοκόλλου συνέντευξης, ξεκίνησε η επεξεργασία της εκάστοτε συνέντευξης. Η επεξεργασία έγινε με βάση τη δομή του πρωτοκόλλου και συγκεκριμένα, τις τρεις θεματικές στις οποίες δύναται να χωριστεί. Υπενθυμίζουμε ότι στην πρώτη κατηγορία ερωτήσεων εντάσσονται εκείνες που διαπραγματεύονται τα συναισθήματα, τις στάσεις και τις δυσκολίες που σχετίζονται με τα κλάσματα, καθώς και με τη σημασία που αυτά έχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Από την άλλη, η δεύτερη θεματική ενότητα ερωτήσεων αποβλέπει στον εντοπισμό των τρόπων διδασκαλίας και των υλικών που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της έννοιαςτου κλάσματος, ενώ στην τρίτη κατηγορία ερωτήσεων ζητούνται από τις συνεντευξιαζόμενες εκπαιδευτικούς προτάσεις για την οργάνωση ενός σχεδίου διδασκαλίας που θα αξιοποιεί διαφορετικές προσεγγίσεις του κλάσματος και θα περικλείει και εκείνες τις γνώσεις που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί προαπαιτούμενες για τη διδασκαλία του κλάσματος.

Για κάθε, λοιπόν, κατηγορία/ενότητα ερωτήσεων εντοπίζονταν και σημειώνονταν τα βασικά σημεία και οι φράσεις ή λέξεις-κλειδιά, που αντιπροσώπευαν χαρακτηριστικά το περιεχόμενο των ερωτήσεων. Η διαδικασία αυτή ακολουθήθηκε και για τις έξι συνεντεύξεις της παρούσας έρευνας. Στο τελευταίο στάδιο, συγκεντρώθηκαν συνολικά τα ευρήματα από τις συνεντεύξεις και ομαδοποιήθηκαν με γνώμονα την κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων του πρωτοκόλλου συνέντευξης. Στην επόμενη ενότητα θα αναλυθούν λεπτομερώς τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων βασισμένα και πάλι στην προαναφερθείσα κατηγοριοποίηση.

4.3. Αποτελέσματα Έρευνας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα καταγραφούν τα ευρήματα που προέκυψαν από την καταγραφή και επεξεργασία των έξι συνεντεύξεων με βάση την ομαδοποίηση που προέκυψε. Προτού, όμως, προχωρήσουμε στην παράθεση των δεδομένων είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι τα ευρήματα της έρευνας θα παρατίθενται τόσο με συνολικό όσο και με συγκριτικό χαρακτήρα. Δηλαδή, θα γίνεται ξεκάθαρο πότε συγκλίνουν οι θέσεις των εκπαιδευτικών με ΑΟ με εκείνες των βλεπόντων εκπαιδευτικών και πότε διαφοροποιούνται, ενώ σε αυτές τις περιπτώσεις των αντικρουόμενων ευρημάτων θα γίνονται εκτενέστερες συγκρίσεις και καταγραφές.

4.3.1. Συναισθήματα, στάσεις και δυσκολίες σχετικά με την έννοια του κλάσματος

Μελετώντας τα δεδομένα των συνεντεύξεων διαπιστώνουμε ότι οι συμμετέχουσες καταλαμβάνονται από μια πληθώρα ανάμεικτων συναισθημάτων προς την έννοια του κλάσματος. Αναλυτικότερα, σε τέσσερις από τις συνεντεύξεις εντοπίστηκαν εντόνως αρνητικά συναισθήματα, τα οποία φανέρωναν τόσο συστολή ως προς τη διαχείριση της έννοιας όσο και φόβο. Λέξεις όπως «άγχος», «αγωνία» και «τρόμος» συμπεριλαμβάνονταν ανάμεσα στα λεγόμενα των συνεντευξιαζόμενων. Χαρακτηριστική συνιστά η απάντηση της δεύτερης βλέπουσας εκπαιδευτικού του δείγματος στη σχετική ερώτηση: «*Νιώθω τρόμο, φόβο. Δεν αισθάνομαι άνετα μαζί τους (με τα κλάσματα). Θεωρώ ότι και μια άσκηση Γ΄ ή Δ΄ δημοτικού να μου βάλεις δεν θα καταφέρω να τη λύσω.*». Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι τα προαναφερθέντα δεδομένα απορρέουν από δυο βλέπουσες εκπαιδευτικούς και από δυο εκπαιδευτικούς με αναπηρία όρασης.

Από την άλλη, οι θέσεις των άλλων δυο συμμετεχόντων είναι αντιδιαμετρικές. Ειδικότερα, η βλέπουσα εκπαιδευτικός αναφέρει ότι νιώθει οικειότητα και κατανόηση ως προς την έννοια του κλάσματος. Σύμφωνα και με τα λεγόμενά της η στάση της αυτή οφείλεται στη συνολικά καλή εικόνα που έχει για τα κλάσματα και στις καλές γνώσεις που πιστεύει πως έχει. Από την άλλη, η εκπαιδευτικός με ΑΟ είχε μια πιο ουδέτερη στάση απέναντι στην έννοια. Για εκείνη τα σχετικά συναισθήματα εξαρτώνται από το βαθμό δυσκολίας του κλάσματος. Δηλαδή, αν η έννοια είναι απλή και προσεγγίσιμη τότε δεν υφίστανται αρνητικά συναισθήματα, ενώ όταν αυξάνεται η δυσκολία ή η σύνθεση ενός κλασματικού αριθμού ή προβλήματος επέρχονται αρνητικές θέσεις απέναντι στο κλάσμα.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι τόσο οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί όσο και εκείνες με ΑΟ φορτίζονται αρνητικά όταν πρέπει να σχολιάσουν τα κλάσματα ή όταν χρειάζεται να ενασχοληθούν με αυτά. Την ίδια στιγμή, γίνεται φανερό μέσα από τις θέσεις των δυο προαναφερθέντων εκπαιδευτικών ότι υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν τη διαμόρφωση μιας συνολικής εικόνας για τα κλάσματα. Η διαμόρφωση αυτή δύναται να επηρεαστεί είτε από την ίδια τη φύση και τις δυσκολίες της έννοιας του κλάσματος είτε από το γνωστικό υπόβαθρο του εκάστοτε εκπαιδευτικού.

Όσον αφορά τη δεύτερη ερώτηση του πρωτοκόλλου που σχετίζεται με τις εντυπώσεις που αποκομίσθηκαν από την επαφή με την έννοια του κλάσματος και εντάσσεται σε αυτή την κατηγορία ερωτήσεων, γίνεται φανερό ότι οι συνολικές εντυπώσεις των συνεντευξιαζόμενων εκπαιδευτικών με και χωρίς ΑΟ δεν είναι θετικές. Συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε τη λέξη «δύσκολο» για να χαρακτηρίσει τη συνολική εντύπωση που αποκόμισε. Σε όλες τις περιπτώσεις αναδύονταν η δύσκολη φύση της έννοιας του κλάσματος που εντείνονταν καθώς προχωρούσαν οι σχολικές τάξεις. Όπως χαρακτηριστικά σημείωσε και η τρίτη εκπαιδευτικός με ΑΟ του δείγματος, για εκείνη η επαφή με τα κλάσματα οδήγησε στην καλλιέργεια μιας αίσθησης περιέργειας, αφού η έννοια δεν ήταν ούτε φυσική ούτε αυτονόητη. Πρέπει βέβαια εδώ να σημειωθεί ότι η μοναδική που δεν έκανε λόγο για τη δυσνόητη φύση του κλάσματος είναι τρίτη βλέπουσα εκπαιδευτικός. Για εκείνη η επαφή με τα κλάσματα βοήθησε στην ανάπτυξη της αίσθησης χρησιμότητας που φέρουν ως έννοια στην καθημερινή ζωή.

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνολικές εκτιμήσεις των εκπαιδευτικών για την έννοια του κλάσματος, συνεχίζουμε αναζητώντας τις ειδικότερες δυσκολίες που τους οδήγησαν στην απόκτηση των προαναφερθέντων δυσμενών στάσεων. Έτσι, τόσο οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ όσο και οι βλέποντες παρέθεσαν μια σειρά δυσκολιών που δυσχεραίνουν τη διαχείριση των κλασματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, οι δυο βασικότερες δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί τόσο με ΑΟ όσο και χωρίς σχετίζονται με τη μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και με την επίλυση κλασματικών πράξεων. Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι δυο από τις τρεις συνεντευξιαζόμενες με ΑΟ τόνισαν ότι οι δυσκολίες κατά την εκτέλεση πράξεων ήταν εντονότερες όταν η ζητούμενη πράξη αφορούσε τη διαίρεση. Όπως ισχυρίζεται η τρίτη εκπαιδευτικός με ΑΟ η επίλυση διαιρέσεων ήταν δύσκολη, γιατί δεν φαίνονταν λογικό το να πραγματοποιούνται δυο-τρεις διαιρέσεις ταυτόχρονα. Πέραν όμως αυτών των δύο πιο συχνών δυσκολιών κατά τη διαχείριση των κλασματικών αριθμών, αναφέρθηκαν και κάποιες άλλες δυσκολίες που αφορούσαν τη γενικότερη επίλυση προβλημάτων με κλάσματα, ενώ για μια από τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς υφίστανται δυσκολίες στη διαχείριση και μετατροπή των μεικτών κλασμάτων.

Αναζητώντας τις αιτίες που οδήγησαν σε αυτές τις συγκεκριμένες δυσκολίες εντοπίζουμε και πάλι μια ποικιλία από διαφορετικές πηγές. Η πιο κοινή, λοιπόν, αιτία δυσκολίας σύμφωνα τόσο με τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς όσο και με εκείνες με ΑΟ είναι η ίδια η φύση της έννοιας. Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως μια αφηρημένη και ταυτόχρονα σύνθετη έννοια που δεν είναι ούτε αυτονόητη ούτε και φυσική. Αποτέλεσμα, όμως όπως είδαμε, αυτής της προσέγγισης είναι να αντιμετωπίζεται η έννοια του κλάσματος με δισταγμό και φόβο. Παράλληλα, δυο από τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς αποδίδουν τις σχετικές με το κλάσμα δυσκολίες και στην έλλειψη εξοικείωσης με την έννοια, ενώ αναφέρουν και την ελλιπή σύνδεση του κλάσματος με άλλες γνώσεις. Συμπληρωματικά σε αυτές τις δυσκολίες, προστίθενται και εκείνες που σχετίζονται με την πολυπλοκότητα των σχετικών με το κλάσμα κανόνων. Εδώ γίνεται λόγος από δυο εκπαιδευτικούς, μια βλέπουσα και μια με ΑΟ, σε εκείνους τους κανόνες που αξιοποιούνται για τη μετατροπή των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, δηλαδή στην κοινή χρήση της διαδικασίας με τα «καπελάκια». Προτού ολοκληρώσουμε, όμως, τις σχετικές αιτίες δυσκολιών κατά τη διαχείριση της έννοιας του κλάσματος πρέπει να αναφερθεί ακόμα μια σημαντική πηγή δυσκολίας. Η κατάθεση αυτής της αιτίας προέρχεται από την εκπαιδευτικό με την ολική απώλεια όρασης. Σύμφωνα με εκείνη λοιπόν, οι δυσκολίες κατά την επαφή με τα κλάσματα απορρέουν από τον ίδιο των κώδικα επικοινωνίας που χρησιμοποιεί για να διαβάσει και τα γράψει κλασματικούς αριθμούς, δηλαδή από τον κώδικα Nemethκαι τον κώδικα του Μενεΐδη. Για την ακρίβεια, όπως η ίδια ισχυρίζεται, τα σύμβολα, τα σημεία στίξης και οι σχετικοί κανόνες τις προκαλούν δυσκολίες στη διαχείριση των κλασμάτων. Παρακάτω παρατίθεται η εξαιρετικά χαρακτηριστική θέση της πρώτης βλέπουσας εκπαιδευτικού για τους λόγους που τη δυσκολεύουν στην αντιμετώπιση των κλασμάτων.

> *«Πιο πολύ με δυσκολεύουν (τα κλάσματα), γιατί από εκεί που ήταν – νομίζω δηλαδή – ένα πολύ χειροπιαστό πράγμα, δηλαδή από εκεί που μας λέγανε (οι δάσκαλοι) για παράδειγμα χωρίστε την πίτσα σε 8 κομμάτια ξαφνικά έπρεπε να προσθέτουμε κομμάτια της πίτσας και να τα κάνουμε και ομώνυμα. Υπήρχε δηλαδή, μια διαδικασία πολύ διαφορετική από τα κομμάτια της πίτσαςμε τα οποία ξεκινήσαμε, δεν υπήρχε μια σύνδεση πως από το χειροπιαστό θα πάω στο αφηρημένο.»*
>
> (πρώτη βλέπουσα εκπαιδευτικός)

Στο σημείο αυτό, επιβάλλεται να σχολιαστεί το γεγονός ότι όλες οι συμμετέχουσες στην έρευνα δυσκολεύτηκαν να ανακαλέσουν τις σχετικές με τα κλάσματα δυσκολίες που τις διακατείχαν. Χρειάστηκε, δηλαδή, να περάσει ένα χρονικό διάστημα για να σκεφτούν πριν δώσουν κάποια απάντηση. Μάλιστα, οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί της έρευνας αυτής σε σύγκριση με τις εκπαιδευτικούς με ΑΟ, χρειάστηκαν ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα προτού απαντήσουν στη σχετική ερώτηση. Την ίδια στιγμή, πρέπει να τονίσουμε ότι σε δυο από τις τρεις συνεντεύξεις με τις εκπαιδευτικούς χωρίς αναπηρία όρασης, εκτός από τη μεσολάβηση ενός εύλογου χρονικού διαστήματος χρειάστηκε να δοθούν από την ερευνήτρια και κάποια παραδείγματα σχετικά με τα κλάσματα, προκειμένου να κατανοηθεί επακριβώς τι είναι αυτό που αναζητά η συγκεκριμένη ερώτηση και παρωθηθούν οι συνεντευξιαζόμενες σε κάποια δική τους απάντηση.

Διερευνώντας, τώρα, περαιτέρω τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών τίθεται το ερώτημα κατά πόσο αυτές υφίστανται ακόμα. Δυστυχώς, έγινε ξεκάθαρο από την πρώτη στιγμή ότι οι δυσκολίες των εκπαιδευτικών υφίστανται ακόμα και σήμερα παρά την όλη εκπαίδευση που δέχτηκαν. Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι μπορεί να υπάρχουν κάποιες μικρές βελτιώσεις και να έχουν βελτιωθεί σε κάποια γνωστικά σημεία, ωστόσο και πάλι δεν πιστεύουν ότι έχουν βελτιωθεί επαρκώς προκειμένου να εξαλειφθούν οι δυσκολίες και να νιώσουν ικανοί να διδάξουν. Οι προαναφερθείσες δυσκολίες υφίστανται σε σημαντικό βαθμό μέχρι σήμερα τόσο για τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς της έρευνας όσο και για εκείνες με ΑΟ. Παρακάτω παρατίθενται δυο χαρακτηριστικές θέσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με αυτό το ζήτημα.

> *«Το να ασχοληθώ με τα κλάσματα δεν με δυσκολεύει, αλλά το να τα διδάξω μοιάζει βασικά αδύνατον αυτή τη στιγμή και δεδομένου ότι θα κλιθώ να τα διδάξω δεν νομίζω ότι ναι το έχω κατακτήσει εγώ για να λύσω μια άσκηση, αλλά δεν έχει κατακτηθεί εξ' ολοκλήρου. Αν το είχα κατακτήσει ολοκληρωτικά θα ήμουν και σε θέση να το εξηγήσω ή να το μεταδώσω.»*
>
> (πρώτη βλέπουσα εκπαιδευτικός)

> *«Ναι, με δυσκολεύουν ακόμα και μπορώ να πω ότι δυσκολεύομαι περισσότερο τώρα.»*
>
> (πρώτη εκπαιδευτικός με ΑΟ)

Την ενότητα ερωτήσεων για τα συναισθήματα, τις στάσεις και τις δυσκολίες σχετικά με την έννοια του κλάσματος συμπληρώνουν οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη θέση των κλασμάτων στο δημοτικό σχολείο. Μελετώντας τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών για το αν πρέπει να διδάσκονται οι κλασματικοί αριθμοί στο δημοτικό, καθίσταται αμέσως σαφές ότι η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών συμφωνεί θετικά στο να διδάσκονται. Εξαίρεση, εδώ, συνιστά μια από τις εκπαιδευτικούς με ΑΟ, η οποία δήλωσε ότι δεν γνωρίζει κάτι σχετικό, οπότε και δεν τοποθετήθηκε επί του θέματος. Όσον αφορά τις απόψεις των υπόλοιπων εκπαιδευτικών επί του θέματος, αυτές θέτουν ως βασική αιτιολογία στο να διδάσκονται τα κλάσματα από το δημοτικό, τη χρησιμότητα και αναγκαιότητα που αυτά έχουν τόσο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων όσο και στη γνωστική προετοιμασία των παιδιών για τις μετέπειτα εκπαιδευτικές βαθμίδες. Ωστόσο, δυο από τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς αν και σημειώνουν τη σημασία των κλασμάτων καταθέτουν κάποιες παραμέτρους για τη διδασκαλία τους. Συγκεκριμένα, υποστηρίζουν ότι πρέπει να διδάσκονται τα κλάσματα από το δημοτικό σχολείο αλλά με διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας, έτσι ώστε να γίνουν αντιληπτά και πλήρως κατανοητά από όλους ανεξαιρέτως τους μαθητές, ενώ θέτουν και ως βασική προϋπόθεση την κατάλληλη και επαρκή κατάρτιση από μέρους των ίδιων των εκπαιδευτικών. Ενδιαφέρουσα, τέλος, είναι και η τοποθέτηση της τρίτης εκπαιδευτικού με ΑΟ, σύμφωνα με την οποία μπορεί να διδάσκεται η έννοια του κλάσματος στο δημοτικό, αλλά όχι τόσο διευρυμένα. Δηλαδή, προτείνει τη διδασκαλία μόνο των βασικών κλασματικών εννοιών, όπως αυτή του «μοιράζω», που θα βοηθήσουν το παιδί να θέσει σημαντικές βάσεις. Στη συνέχεια καταγράφονται δυο από τις πιο αντιπροσωπευτικές απόψεις των εκπαιδευτικών.

«Ναι πρέπει να διδάσκονται τα κλάσματα. Είναι αναγκαίο, γιατί χρησιμοποιείται πολλές φορές η έννοια των κλασμάτων στην καθημερινότητάς μας, ακόμα και όταν οι περισσότεροι δεν συνειδητοποιούμε το πότε, όπως για παράδειγμα, όταν πηγαίνεις σ' ένα σούπερ μάρκετ και ζητάς $\frac{1}{4}$ *τυρί φέτα.»*

(τρίτη βλέπουσα εκπαιδευτικός)

«Η έννοια του □ μοιράζω □ ναι. Τώρα τα κλάσματα με όλα αυτά, τις πράξεις και τους σχετικούς κανόνες, δεν είμαι σίγουρη αν πρέπεινα διδάσκονται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού. Εντάξει στην Ε΄και στην ΣΤ΄ κάποια πράγματα παραπάνω μπορούν να διδαχτούν, αλλά απότην Α΄ ή τη Γ΄ δημοτικού είναι πολύ νωρίς. Το παιδί δεν έχει μπει σε μια σίγουρη κατάσταση, ενώ και οι πράξεις (με την ευρείαέννοια) δενείναι απόλυτα κατανοητές. Τα κλάσματα έχουν πράξεις μέσα στις πράξεις,όπως γίνεται με τη διαίρεση των κλασμάτων. Οπότε είναι καλύτεραναμπούνε πρώτα οι βάσεις, να σταθεροποιηθεί η κατάσταση και να κατακτηθούν οι απλές έννοιες, ώστε εισαχθούνε αργότερα τα κλάσματα αναλυτικότερα.»

(τρίτη εκπαιδευτικός με ΑΟ)

4.3.2. Τρόποι διδασκαλίας και διδακτικά υλικά κατά τη διδασκαλία της κλασματικής έννοιας

Σε αυτή την ενότητα θα διαπραγματευτούμε τις απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις ερωτήσεις 4 και 5 του πρωτοκόλλου συνέντευξης. Αρχικά, στην Ερώτηση 4, που αφορούσε το κατά πόσο ο τρόπος διδασκαλίας των κλασμάτων ήταν αρεστός στους εκπαιδευτικούς όταν τα διδάχτηκαν, δόθηκαν απαντήσεις που καθιστούσαν σαφές ότι τόσο για τις δασκάλες με ΑΟ όσο και για τις βλέπουσες οι τρόποι διδασκαλίας που αξιοποιήθηκαν για τη μετάδοση της έννοιας του κλάσματος δεν ήταν σε καμία περίπτωση δημοφιλείς ή προσιτοί. Οι έξι εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων δεν ήταν προσιτή εξαιτίας της προσήλωσης που υφίσταντο στο σχολικό εγχειρίδιο και των ανεπαρκών τρόπων διδασκαλίας που αξιοποιούνταν από τους δασκάλους. Μάλιστα, μια από τις εκπαιδευτικούς με ΑΟ σημειώνει και την έλλειψη διδακτικών υλικών και σαφών επεξηγήσεων, που θα διευκόλυναν την πρόσβαση στην κατανόηση της έννοιας. Γενικά, από τα λεγόμενα και των βλεπόντων εκπαιδευτικών και αυτών με ΑΟ, γίνεται σαφές ότι η διδασκαλία των κλασματικών αριθμών πραγματοποιείτο με έναν καθαρά παραδοσιακό τρόπο που βασίζονταν στο σχολικό βιβλίο και την αυθεντία του εκάστοτε εκπαιδευτικού, με αποτέλεσμα να μην είναι τα κλάσματα ένα ευχάριστο κομμάτι των μαθηματικών για τους συμμετέχοντες της έρευνας.

Αναζητώντας περισσότερες πληροφορίες για τα διδακτικά υλικά, οι συμμετέχουσες καλούνται να ανακαλέσουν εκείνα τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για τη δική τους εκπαίδευση. Κατά τη διαδικασία αυτή, αναδείχτηκε σε σημαντικό βαθμό η απουσία διδακτικών υλικών και μέσων για την μετάδοση των σχετικών με τα κλάσματα εννοιών. Δυστυχώς, κατά την εκπαιδευτική τους πορεία στο σχολείο τόσο οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί όσο και εκείνες με ΑΟ δεν συνάντησαν πληθώρα χειροπιαστών διδακτικών υλικών. Συγκεκριμένα, τα μέσα που αξιοποιούνταν κατά τη διδασκαλία αφορούσαν κυρίως νοητά παραδείγματα και όχι πρακτικές καταστάσεις. Δηλαδή, γίνεται λόγος για τα απλά παραδείγματα που χρησιμοποιούνται εντός των δυο διαστάσεων του χαρτιού των σχολικών βιβλίων και αφορούν κατά βάση την προβολή εικόνων. Έτσι, παρατέθηκαν από τις συμμετέχουσες κυρίως αναφορές στη χρήση νοητών υλικών – που αναπαριστώνται σε εικόνες – όπως πίτες, πίτσες, σοκολάτες ή φρούτα. Βέβαια, μοναδική εξαίρεση εδώ συνιστά η τοποθέτηση της εκπαιδευτικού με ολική απώλεια όρασης, η οποία διδάχτηκε τα κλάσματα και συγκεκριμένα την ερμηνεία του «μέρος-όλου» με τη χρήση εποπτικών υλικών, όπως φρούτα και πλαστικές πίτσες.

Λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ή μη διδακτικών υλικών, εγείρεται το ερώτημα κατά πόσο – έστω και η αποκλειστική χρήση των σχολικών εγχειριδίων – δύναται να διευκολύνει ή να δυσκολέψει την κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος. Σύμφωνα λοιπόν και με τα δεδομένα που προέκυψαν, τα νοητά παραδείγματα του σχολικού βιβλίου δεν βοήθησαν αρκετά, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η έννοια του κλάσματος τόσο για τις εκπαιδευτικούς με ΑΟ όσο και για τις βλέπουσες. Ακόμα και για την εκπαιδευτικό με ολική απώλεια όρασης που χειρίστηκε υλικά για κατακτήσει τα κλάσματα, υπήρχαν δυσκολίες κατά τη διαχείριση αυτών. Συνολικά, δηλαδή, βλέπουμε πως η γενικότερη απουσία κατάλληλων διδακτικών υλικών και η έμφαση στα παραδείγματα των σχολικών εγχειριδίων καθίσταται τροχοπέδη στην ανάπτυξη της κλασματικής ιδέας. Ορισμένες από τις παρακάτω απόψεις των εκπαιδευτικών προβάλλουν με ξεκάθαρο τρόπο τα προαναφερθέντα συμπεράσματα.

> *«Όχι, δεν υπήρχαν καθόλου διδακτικά υλικά. βασικά, χρησιμοποιούνταν μόνα τα παραδείγματα του εγχειριδίου. Γι' αυτό είμαι σίγουρη. Στο δημοτικό προτιμούνταν το εγχειρίδιο και χρωματίζαμε πίτσες, χρωματίζαμε τριγωνάκια, αλλά τίποτε άλλο πέρα από τις δυο διαστάσεις της φωτοτυπίας, δεν υπήρχε κάτι πέρα από αυτό. Καθόλουεποπτικό υλικό. Μόνα τα κλασσικά νοητά παραδείγματα με πίτσες,ρολόγια και σοκολάτες. Δεν υπήρχε αριθμογραμμή ή κάτι άλλο. Δενυπήρχε γενικά η γενίκευση. Νομίζαμε (ότι τα κλάσματα είναι) μόνο αυτό,*

στην πίτσα ή τη σοκολάτα. Δεν μπορούσαμε να καταλάβουμε πως και απλά πράγματα μπορούν να χωριστούν. Τι σημαίνει κλάσμα στην ουσία, δεν το αντιλαμβανόμασταν. ... Το υλικό αυτό καθεαυτό δεν με βοήθησε. Οι επεξηγήσεις των δασκάλων πάνω στα υλικά με βοήθησαν περισσότερο»

(πρώτη βλέπουσα εκπαιδευτικός)

«Χρησιμοποιούσαν οι δάσκαλοί μου κάτι φρούτα που τα κόβανε στη μέση ή μας φέρνανε πλαστικές πίτσες να τις χωρίσουμε. Δεν υπήρχαν αριθμογραμμές. Με δυσκόλευαν, αλλά μπόρεσα να καταλάβω και κάποια πράγματα»

(πρώτη εκπαιδευτικός με ΑΟ)

«Νοητά παραδείγματα θυμάμαι κυρίως, εικόνες από το βιβλίο και άλλα τέτοια. Έτσι και έτσι, δεν βοήθησαν ιδιαίτερα πολύ.»

(δεύτερη εκπαιδευτικός με ΑΟ)

4.3.3. Προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος και προτεινόμενα σχέδια διδασκαλίας

Η τελευταία ενότητα των κατηγοριοποιημένων ερωτήσεων του πρωτοκόλλου συνέντευξης αποβλέπει κυρίως στον εντοπισμό εκείνων των ερμηνειών της έννοιας του κλάσματος που αξιοποιούνται συχνότερα από τις εκπαιδευτικούς του δείγματος για να προσεγγίσουν και να ερμηνεύσουν έναν κλασματικό αριθμό. Ξεκινώντας με την επεξεργασία των δεδομένων της 6^{ης} και 7^{ης} ερώτησης του οδηγού συνέντευξης, όπου ζητείται από τις συνεντευξιαζόμενες στην πρώτη ερώτηση να εξηγήσουν με διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης πως θα δίδασκαν το κλάσμα $\frac{3}{4}$ σε μαθητές ΣΤ΄ δημοτικού και στη δεύτερη, να προτείνουν ένα σχέδιο διδασκαλίας για τα κλάσματα στην ίδια τάξη, γίνεται ολοφάνερη η κυριαρχία της ερμηνείας του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Τόσο οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί όσο και οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ μένουν προσκολλημένες στη διαχείριση του κλάσματος με αυτή την ερμηνεία.

Αναλυτικότερα, και οι έξι συμμετέχουσες της έρευνας θα δίδασκαν το προαναφερθέν κλάσμα, αλλά και γενικότερα την έννοια του κλάσματος, μέσα από τη διαδικασία «χωρίζω τόσα και παίρνω τόσα», δηλαδή, ως «μέρος-όλου». Η εμμονή σε αυτή την ερμηνεία καθίσταται σαφής από το γεγονός ότι κάθε φορά που κάποια από τις συμμετέχουσες ήθελε να αναφερθεί σε κάποιο παράδειγμα με κλάσματα ή να περιγράψει τη χρήση ενός διδακτικού υλικού για τα κλάσματα το πραγματοποιούσε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Μάλιστα, η πρώτη βλέπουσα εκπαιδευτικός ήταν σε θέση να αναγνωρίσει ότι δεν μπορούσε να προσεγγίσει το κλάσμα $\frac{3}{4}$ με κάποιον άλλον τρόπο. Συγκεκριμένα δηλώνει:

«Νομίζω είναι λίγο δύσκολο να ξεφύγω από αυτή τη λογική, δηλαδή μοιράζω στα 4 και παίρνω 3. Και με άλλο υλικό να το σκεφτώ πάλι νομίζω αυτό θα έκανα, δηλαδή, και ένα κομμάτι να παίρναμε θα το χωρίζαμε σε 4 κομμάτια και θα χρωματίζαμε 3 από τα 4. Δεν μπορώ,

δηλαδή, να ξεφύγω από αυτή τη λογική, δεν ξέρω κιόλας αν υπάρχει και κάτι άλλο, δεν το κατέχω αυτό. Θα έπρεπε να το έχω μελετήσει, δεν έχω κάτι στο μυαλό μου πέρα από το μοιράζω και παίρνω 3.»

Από την άλλη, η έμφαση και εμμονή στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» διαφαίνεται και από την τοποθέτηση της δεύτερης εκπαιδευτικού με ΑΟ, η οποία αναφέρει στην πρότασή της για τη γενικότερη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος:

«Θα προσπαθούσα να εισάγω την έννοια του μέρους και του όλου , που βασικά γι' αυτό χρησιμοποιούμε τα κλάσματα στα Μαθηματικά ...»

Συνολικά, λοιπόν, στη μαθηματική λογική των εκπαιδευτικών της παρούσας έρευνας δεσπόζει για τα κλάσματα η ερμηνεία του «μέρος-όλου». Οι εκπαιδευτικοί όσο και αν προσπάθησαν να σκεφτούν εναλλακτικές παραμέτρους για να προσεγγίσουν την έννοια του κλάσματος δεν τα κατάφεραν. Όλες τους οι προσπάθειες να προσεγγίσουν την έννοια παραπέμπουν άμεσα ή έμμεσα στην παραπάνω κλασματική ερμηνεία. Βέβαια, μοναδική εξαίρεση στην προαναφερθείσα εκτεταμένη προσκόλληση συνιστούν σε κάποιο βαθμό τα λεγόμενα της δεύτερης βλέπουσας εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα, η παρούσα εκπαιδευτικός όταν ρωτήθηκε, για δεύτερη φορά, αν μπορούσε να προσεγγίσει το κλάσμα $\frac{3}{4}$ με διαφορετικούς τρόπους απάντησε:

«Γίνεται απλοποίηση...; Μπορούμε να κάνουμε το κλάσμα και δεκαδικό, δηλαδή, να κάνουμε τη διαίρεση 3÷4.»

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω πρόταση, η συνεντευξιαζόμενη απαντά αρχικά με ερωτηματικό τόνο, γεγονός που υποδεικνύει ότι δεν νιώθει βέβαιη για την απάντησή της. Επίσης, δεν γίνεται ξεκάθαρο αν η εκπαιδευτικός κατανοεί πλήρως τη διαφορετική αυτή ερμηνεία του κλάσματος ως «πηλίκο» ή αν απλώς έχει συνδέσει τη διαδικασία διαίρεσης του αριθμητή με τον παρανομαστή με τους δεκαδικούς. Σε κάθε περίπτωση πάντως, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός ότι έστω και εμμέσως έγινε αναφορά και σε μια άλλη ερμηνεία των κλασμάτων, αυτή του κλάσματος ως «πηλίκο», πέρα από την ερμηνεία του «μέρος-όλου». Πρέπει βέβαια, να σημειώσουμε ότι και η δεύτερη εκπαιδευτικός αναφέρθηκε πρώτα στην ερμηνεία και προσέγγιση του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και μετέπειτα στην ερμηνεία του «πηλίκου».

Ως τώρα, λοιπόν, τονίστηκε πολλάκις η έμφαση που υπάρχει στην αντιμετώπιση και διαχείριση των κλασματικών αριθμών με την ερμηνεία του «μέρος-όλου». Αν και όλοι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν σε σημαντικό βαθμό προσκόλληση σε αυτή την ερμηνεία, τα ευρήματα έδειξαν πως υφίσταντο και διαφοροποιήσεις στον τρόπο που εκπονείτε η διδασκαλία. Αυτό που διαφοροποιούνταν από εκπαιδευτικό σε εκπαιδευτικό, με βάση τα δεδομένα, είναι η διδακτική μέθοδος προσέγγισης και κυρίως τα εποπτικά υλικά και παραδείγματα που θα αξιοποιούνταν για να μεταδοθούν οι σχετικές γνώσεις.

Έτσι, και οι τρεις βλέπουσες εκπαιδευτικοί θα χρησιμοποιούσαν για να διδάξουν το κλάσμα μια ποικιλία υλικών και παραδειγμάτων με αντικείμενα προσιτά στα παιδιά, όπως σοκολάτες, χωρισμένους κύβους, διπλωμένα χαρτιά, κύκλους και τετράγωνα, καθώς και την τεχνική χωρισμού του θρανίου ή του δαπέδου της τάξης σε επιμέρους μέρη. Μεγάλη έμφαση επίσης, δίνουν οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί στην αξιοποίηση πρακτικών αντικειμένων της καθημερινότητας των παιδιών, όπως η χρήση πλαστελίνης και οι συνταγές μαγειρικής. Χρήση αριθμογραμμών θα έκανε μόνο μια από τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς, που υποστηρίζει ότι οι αριθμογραμμές βοηθάνε τα παιδιά, καθώς προσφέρουν οπτικά ερεθίσματα ώστε το παιδί να αντιληφθεί τα διαστήματα και τον χωρισμό αυτών. Μάλιστα, η ίδια εκπαιδευτικός σημειώνει ότι δε θα χρησιμοποιούσε το ρολόι ή εικόνες ρολογιών για να διδάξει τα κλάσματα, αφού πιστεύει πως το υλικό αυτό με τους επιμέρους διαμερισμούς του προκαλεί συγχύσεις στους μαθητές. Πολύ ενδιαφέρον, όμως, είναι το γεγονός ότι δυο εκ των τριών βλεπόντων εκπαιδευτικών θα αξιοποιούσαν και την τεχνολογία για να διδάξουν τα κλάσματα, χρησιμοποιώντας διάφορα λογισμικά και προγράμματα. Εξίσου, ενδιαφέρουσα είναι και η πρόταση πάλι δυο βλεπόντων δασκάλων, οι οποίες θα μετέδιδαν τις σχετικές με το κλάσμα γνώσεις χρησιμοποιώντας και τα ίδια τα παιδία, δηλαδή θα αξιοποιούσαν ψυχοκινητικές μεθόδους διδασκαλίας. Για παράδειγμα, η πρώτη βλέπουσα εκπαιδευτικός αναφέρει:

> *«Θα χρησιμοποιούσα ίσως και ομάδες μαθητών. Με έναν πιο ψυχοκινητικό τρόπο, δηλαδή, να χωρίσουμε τα παιδιά σε 4 μέρη/ομαδούλες και οι 3 από αυτές να παίξουν κουτσό και οι άλλες να τρέξουν, κάπως έτσι.».*

Από την άλλη, τα προτεινόμενα διδακτικά υλικά των εκπαιδευτικών με ΑΟ ήταν πιο περιορισμένα. Ειδικότερα, ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση πρακτικών και χειροπιαστών υλικών, όπως φρούτα ή τούρτες, έδωσε μόνο η πρώτη εκπαιδευτικός με ΑΟ, η οποία έχει ολική απώλεια όρασης. Οι άλλες δυο εκπαιδευτικοί υποστήριξαν τη χρήση πιο αφηρημένων διαδικασιών, όπως για παράδειγμα, τη διαμέριση διαφόρων εικόνων και σχημάτων και το χρωματισμό αυτών με βάση τον αντίστοιχο κάθε φορά κλασματικό αριθμό. Παρατηρούμε, δηλαδή, μια προσκόλληση στα στενά πλαίσια του χαρτιού και της φωτοτυπίας. Ενδιαφέρουσα εδώ, είναι η πρόταση της δεύτερης εκπαιδευτικού με ΑΟ, η οποία υποστήριξε ότι θα δίδασκε την έννοια του κλάσματος και συγκεκριμένα την ερμηνεία του «μέρος-όλου», αξιοποιώντας οικεία παραδείγματα από άλλα μαθήματα. Πιο αναλυτικά αναφέρει: «*Θα προσπαθούσα να εισάγω την έννοια του □ μέρους □ και του □ όλου □ ... και μέσα από άλλα μαθήματα, όπως ας πούμε από τη Γεωγραφία. Δείχνουμε κάτι που είναι ολόκληρο και μετά το χωρίζουμε σε κομμάτια, όπως είναι η γη χωρισμένη σε ηπείρους, που η καθεμιά καταλαμβάνει συγκεκριμένη έκταση*». Τέλος, μόνο η τρίτη εκπαιδευτικός με ΑΟ υποστήριξε ότι θα χρησιμοποιούσε σε ένα σχέδιο διδασκαλίας για τα κλάσματα αριθμογραμμές και χάρακες, χωρίς όμως, να δώσει περαιτέρω διευκρινήσεις για το πώς ακριβώς θα αξιοποιούσε αυτά τα δυο υλικά.

Όσον αφορά στις μεθόδους και τρόπους διδασκαλίας που θα ακολουθούσαν οι έξι εκπαιδευτικοί της έρευνας, προκύπτει από τα δεδομένα των συνεντεύξεων ότι υπάρχει και πάλι μεγάλη ποικιλία στις απαντήσεις, ενώ και μεταξύ των εκπαιδευτικών με ΑΟ και χωρίς υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις. Διεξοδικότερα, και οι έξι εκπαιδευτικοί θα αξιοποιούσαν σε πρώτο στάδιο παραδείγματα της καθημερινότητας, ώστε να εισάγουν την ιδέα των κλασμάτων. Θα φέρνανε, δηλαδή, στο μάθημα διάφορα υλικά και εικόνες, ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν πρακτικά την βασική έννοια του κλάσματος, ενώ όλοι θα χρησιμοποιούσαν και όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά παραδείγματα. Μετά και από αυτό το στάδιο, οι εκπαιδευτικοί της έρευνας προτείνουν διάφορους τρόπους που θα προσέγγιζαν την έννοια. Έτσι, μια από τις βλέπουσες εκπαιδευτικούς θα αξιοποιούσε την τεχνική του καταιγισμού ιδεών, προκειμένου να διαπιστώσει τι γνωρίζουν ήδη οι μαθητές για τα κλάσματα και έπειτα, μέσα από παραδείγματα και παρωθητικές ερωτήσεις θα οδηγούσε τους μαθητές στην ανακάλυψη νέων εννοιών για τα κλάσματα. Για μια άλλη βλέπουσα εκπαιδευτικό, η διδασκαλία των κλασμάτων θα ξεκινούσε από διαδικασίες μερισμού διαφόρων οικείων αντικειμένων και θα προχωρούσε στην κατάκτηση των βασικών εννοιών και στοιχείων ενός κλάσματος με τη βοήθεια των ερωταποκρίσεων, ώστε να ωθηθούν οι μαθητές στην εξοικείωση με τα κλάσματα, ενώ μετά και την κατάκτηση αυτών των γνώσεων θα συνέχιζε τη διδασκαλία των τεσσάρων βασικών πράξεων με κλάσματα.

Από τη άλλη πλευρά, και οι τρεις εκπαιδευτικοί με ΑΟ θα ξεκινούσαν μια σχετική διδασκαλία για τα κλάσματα χρησιμοποιώντας πρώτα παραδείγματα και οικείες καταστάσεις για τους μαθητές. Πέραν, όμως, αυτών, δυο από τις τρεις εκπαιδευτικούς με ΑΟ θα προχωρούσαν στην μετάδοση των γνώσεων για τα κλάσματα με δυο διαφορετικούς τρόπους. Συγκεκριμένα, η πρώτη θα ξεκινούσε από τη διδασκαλία του μισού, δηλαδή από το κλάσμα $\frac{1}{2}$, όπου θα δίδασκε το χωρισμό επιφανειών, εικόνων και αντικειμένων στα δύο και στην πορεία, θα συνέχιζε τη διδασκαλία της ιδέας «κόβω σε κομμάτια και μοιράζω». Δηλαδή, θα δίδασκε τη διαδικασία της ισοδιαμέρισης και μάλιστα, όπως ισχυρίστηκε, θα ξεκινούσε πρώτα από απλούς ζυγούς αριθμούς και έπειτα θα προχωρούσε σε πιο σύνθετα παραδείγματα. Την ίδια στιγμή, η άλλη εκπαιδευτικός με ΑΟ έκανε λόγο για τη διδασκαλία των κλασμάτων ξεκινώντας από τις έννοιες του «όλου» και του «μέρους». Όπως ανέφερε, θα δίδασκε πρώτα στα παιδία πώς να αναγνωρίζουν ένα σύνολο και πως ένα μέρος αυτού και αμέσως μετά θα προχωρούσε την μετάδοση των εννοιών και γνώσεων για το κλάσμα ως «μέρος-όλου».

Πέραν, όλων των προαναφερθέντων ευρημάτων για τις ερμηνείες που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, τις μεθόδους διδασκαλίας και τα υλικά, που απορρέουν από τις δυο σχετικές ερωτήσεις του πρωτοκόλλου συνέντευξης, δεν γίνεται να μην αναφέρουμε και τα ευρήματα που προκύψαν από την $7^{η}$ ερώτηση και αφορούν εκείνες τις γνώσεις που οι εκπαιδευτικοί θεωρούν προαπαιτούμενες, έτσι ώστε να διδάξουν την έννοια του κλάσματος. Από την επεξεργασία, λοιπόν, των δεδομένων αναδείχτηκε μια σειρά πολλαπλών γνώσεων που θεωρούνται από τους εκπαιδευτικούς με ΑΟ και χωρίς απαραίτητες. Έτσι, πρώτη σε συχνότητα προαπαιτούμενη γνώση συνιστά η γνώση επίλυσης πράξεων και ειδικότερα, τονίζεται η ανάγκη για καλή γνώση πρώτα της πράξης της διαίρεσης και έπειτα του πολλαπλασιασμού. Τη θέση αυτή υποστηρίζουν δυο βλέποντες εκπαιδευτικοί και δυο με ΑΟ. Επόμενη βασική γνώση για δυο βλέποντες εκπαιδευτικούς και μια εκπαιδευτικό με ΑΟ, αποτελεί η γενικότερη επίγνωση των αριθμών και των σχετικών με αυτούς εννοιών. Ακόμη, μια από τις εκπαιδευτικούς με ΑΟ υποστηρίζει ότι είναι απαραίτητο να υπάρχουν γνώσεις σχετικά με τις αριθμογραμμές και την διαχείριση αυτών, ενώ για μια βλέπουσα εκπαιδευτικό συνιστά βασική προϋπόθεση η γνώση της έννοιας ενός «όλου» και ενός «μέρους». Τέλος, για άλλη μια βλέπουσα εκπαιδευτικό καθίσταται βασικό σημείο η γνώση των πολλαπλάσιων, καθώς υποστηρίζει ότι βοηθάνε τόσο στη διαδικασία του πολλαπλασιασμού όσο και σε εκείνη της απλοποίησης.

Γίνεται φανερό, λοιπόν, για άλλη μια φορά ότι το επίκεντρο στη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος είναι η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Και οι έξι εκπαιδευτικοί θα ακολουθούσαν σε μια οργανωμένη διδασκαλία τους μεθόδους και τεχνικές που παραπέμπουν σε αυτή την ερμηνεία. Βέβαια, όπως είδαμε κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς της έρευνας θα μετέδιδαν πρωτίστως και βασικές κλασματικές έννοιες, όπως αυτή του μερισμού και της ισοδιαμέρισης, ενώ θα αξιοποιούσαν και διάφορες τεχνικές διδασκαλίας. Σε κάθε περίπτωση πάντως, αυτό που δεν διαφοροποιείται ανάμεσα στους βλέποντες εκπαιδευτικούς και εκείνους με ΑΟ είναι η ανάγκη για αξιοποίηση ποικιλίας υλικών και παραδειγμάτων, προκειμένου να μεταδοθούν σωστά οι γνώσεις, ενώ και όλοι οι εκπαιδευτικοί τόνισαν την ανάγκη για αρκετή πρακτική εξάσκηση ώστε οι σχετικές με το κλάσμα γνώσεις να καταστούν κατανοητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΣΥΖΗΤΗΣΗ–ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω αποτελέσματα σε συνδυασμό με όσα καταγράφηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια κατά τη βιβλιογραφική επισκόπηση, είμαστε σε θέση να σημειώσουμε μια σειρά γενικότερων συμπερασμάτων τόσο για τις στάσεις απέναντι στην έννοια του κλάσματος όσο και για τη σχετική διδασκαλία αυτής. Προτού, βέβαια, προχωρήσουμε, είναι ανάγκη να επαναλάβουμε ότι τα συμπεράσματα αυτά δεν μπορούν να γενικευτούν στο σύνολο των εκπαιδευτικών με και χωρίς ΑΟ, αλλά οφείλουν και πρέπει να αποτελέσουν ένα πρώτο υλικό για την εξαγωγή πιο διευρυμένων συμπερασμάτων, αλλά και για την αλλαγή βασικών σημείων κατά την επαφή και διδασκαλία με την έννοια του κλάσματος.

Πρώτο συμπέρασμα, λοιπόν, τίθεται το γεγονός ότι τόσο οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ όσο και οι βλέπουσες εκπαιδευτικοί του δείγματος δυσκολεύονται στη διαχείριση της έννοιας του κλάσματος. Μάλιστα, οι δυσκολίες αυτές φαίνεται πως προϋπήρχαν από τα σχολικά χρόνια, ενώ εξακολουθούν σε σημαντικό βαθμό να υφίστανται και ως σήμερα. Ταυτόχρονα, βιώνουν έντονα συναισθήματα, που αντιπροσωπεύονται κατά κόρον από άγχος και συστολή, και παραπέμπουν συνολικά σε μια αρνητική στάση απέναντι στην έννοια. Βέβαια, τα ευρήματα αυτά δεν αποκλίνουν από εκείνα της διεθνής βιβλιογραφίας, αλλά αντιθέτως, συνάδουν με αυτά. Όπως είχαμε σημειώσει κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, οι μαθητές αντιμετωπίζουν με αρνητικές στάσεις και φόβο γενικά την έννοια του κλάσματος, ενώ και οι αποδόσεις τους σε σχετικές εργασίες είναι χαμηλές. Η θέση αυτή, βέβαια, είναι κοινή είτε γίνεται λόγος για μαθητές χωρίς ΑΟ είτε για μαθητές με ΑΟ. Όπως είναι φυσικό, μέρος των δυσκολιών που ενυπάρχουν στα σχολικά χρόνια, ακολουθεί και στην μετέπειτα καθημερινή και επαγγελματική ζωή. Έτσι, εκείνοι οι μαθητές που εκπαιδεύονται ως δάσκαλοι «κουβαλάνε» ένα μέρος αυτών των δυσκολιών και όταν καλούνται να διδάξουν σχετικές με τις δυσκολίες του έννοιες. Όπως φαίνεται και από διάφορα ερευνητικά εγχειρήματα, αξιοσημείωτα ποσοστά εκπαιδευτικών – βλεπόντων και με ΑΟ – αντιμετωπίζουν προκλήσεις κατά τη διαχείριση και διδασκαλία της έννοιαςτου κλάσματος, ενώ συχνά αναφέρουν ότι δεν νιώθουν επαρκής στο να μεταδώσουν με επιτυχία τις σχετικές με τα κλάσματα γνώσεις.

Όσον αφορά στις δυσκολίες των εκπαιδευτικών, διαπιστώσαμε ότι αυτές επικεντρώνονται στο κομμάτι των τεσσάρων βασικών πράξεων με κλάσματα και ειδικότερα, στους κανόνες που διέπουν την εκτέλεση αυτών των πράξεων. Μπορούμε, λοιπόν, να κάνουμε λόγο για την ύπαρξη κυρίως επιστημολογικών δυσκολιών και εμποδίων κατά τη διαχείριση των κλασματικών αριθμών. Βέβαια, οι δυσκολίες αυτές χαρακτηρίζουν σε μεγάλο βαθμό τόσο τους βλέποντες μαθητές όσο και εκείνους με ΑΟ, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα χαμηλά ποσοστά επιδόσεων σε διεθνής έρευνες. Συνεπώς, όσοι από αυτούς τους μαθητές σπουδάσουν σε παιδαγωγικά τμήματα θα συνεχίζουν να φέρουν κάποιες – αν όχι όλες – τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν όντας μαθητές. Επιπροσθέτως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μέρος της ευθύνης για τις αρνητικές στάσεις και επιδόσεις των μαθητών – και μελλοντικών εκπαιδευτικών – σε δραστηριότητες με κλάσματα, έχει και ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας. Από τα ευρήματα αυτής της έρευνας, διαφαίνεται ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας με τον οποίο διδάχτηκαν οι εκπαιδευτικοί την έννοια του κλάσματος. Μια διδασκαλία που παραμένει προσκολλημένη στο σχολικό εγχειρίδιο και που περιορίζεται κατά βάση μόνο σε εκείνα που το βιβλίο προσφέρει και που αφορούν κυρίως εικόνες και παραδείγματα, που συχνά δεν μπορούν να κατανοηθούν εντός των στενών πλαισίων της σχολικής τάξης, χωρίς έτσι, να υπάρχει δημιουργία και αξιοποίηση επιπρόσθετου εκπαιδευτικού υλικού.

Η επίδραση των σχολικών εγχειριδίων, όμως, μπορεί να γίνει αντιληπτή και από τα διδακτικά υλικά, με τα οποία διδάχτηκαν οι εκπαιδευτικοί την έννοια του κλάσματος και με τα οποία θα δίδασκαν και οι ίδιοι την έννοια. Αναλυτικότερα, διαπιστώθηκε ότι τα υλικά με τα οποία διδάχτηκαν οι εκπαιδευτικοί της έρευνας την έννοια του κλάσματος προέρχονταν αποκλειστικά από το σχολικό βιβλίο και τις σχετικές εικόνες που αυτό περιέχει. Μόνο η εκπαιδευτικός με αναπηρία όρασης και συγκεκριμένα ολική απώλεια όρασης, είχε διδαχτεί την έννοια με τη χρήση πιο πρακτικών και χειροπιαστών υλικών. Για όλους τους άλλους εκπαιδευτικούς οι γνώσεις τους για τα κλάσματα από το δημοτικό βασίζονταν σε εικόνες με πίτσες, σοκολάτες ή διάφορα γεωμετρικά σχήματα.

Η κυριαρχία, όμως, των εικόνων με διάφορα σχήματα και αντικείμενα για τη διδασκαλία του κλάσματος, όπως αναδεικνύεται από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, είναι απαραίτητη για να αποκτήσουν οι μαθητές μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος και να την κατανοήσουν βαθύτερα. Συνεπώς, η έμφαση στη χρήση οπτικοποιημένου υλικού μπορεί σε κάποιο βαθμό να είναι δικαιολογημένη. Για το λόγο αυτό, στις προτάσεις τους για τη διδασκαλία των κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί της έρευνας χρησιμοποιούν τόσο εικόνες όσο και πιο πρακτικά και καθημερινά παραδείγματα με κλάσματα και χειροπιαστά υλικά, τονίζοντας σε κάθε περίπτωση τη συνεισφορά τους στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας. Έτσι, τόσο οι βλέποντες εκπαιδευτικοί όσο και εκείνοι με ΑΟ, κατονομάζουν μια ποικιλία υλικών που θα χρησιμοποιούσαν, όπως πλαστελίνες, φρούτα, τρισδιάστατα υλικά, χωρισμένα χαρτόνια και κύβους.

Λαμβάνοντας υπόψη μας τις προτάσεις των εκπαιδευτικών και όσα απορρέουν από τα ευρήματα της έρευνας ανακύπτουν τρία βασικά συμπεράσματα που αφορούν τη χρήση των διδακτικών υλικών. Πρώτον, τα προτεινόμενα διδακτικά υλικά από τους εκπαιδευτικούς αφορούν κυρίως διακριτές ποσότητες και όχι συνεχείς. Συνεπώς, οι μαθητές θα περιορίζουν το γνωστικό τους υπόβαθρο με το να δημιουργούν μια εικόνα για την έννοια του κλάσματος, την οποία θα μπορούν να περιγράψουν, ερμηνεύσουν και κατανοήσουν μόνο μέσα από διακριτές ποσότητες. Σε περίπτωση που κλιθούν να διαχειριστούν τα κλάσματα μέσα από συνεχείς αναπαραστάσεις και υλικά, ενδέχεται να αντιμετωπίσουν σημαντικές δυσκολίες. Δεύτερον, οι εκπαιδευτικοί εμμένουν στη χρήση εικόνων και απτικών υλικών και δεν αξιοποιούν όσο θα μπορούσαν και θα έπρεπε την αριθμογραμμή. Όπως είδαμε, μόνο μια εκ των έξι εκπαιδευτικών, η οποία αντιμετωπίζει οπτικές δυσκολίες, θα χρησιμοποιούσε χάρακες και αριθμογραμμές. Έτσι, για άλλη μια φορά, ενδέχεται τα παιδιά να σχηματίσουν μια μερική εικόνα για τις δυνατότητες αναπαράστασης του κλάσματος, ενώ η ελλιπή χρήση αριθμογραμμών αποτρέπει και την καλλιέργεια της ερμηνείας του κλάσματος ως «πηλίκο».

Ένα τρίτο συμπέρασμα εδώ, σχετίζεται με την ποσότητα και ποιότητα των προτεινόμενων διδακτικών υλικών από τους βλέποντες εκπαιδευτικούς και εκείνους με ΑΟ. Διεξοδικότερα, οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ παρέθεσαν προτάσεις με ένα περιορισμένο αριθμητικά εποπτικό υλικό, ενώ την ίδια στιγμή οι προτάσεις αυτές βασίζονταν σε απλά καθημερινά παραδείγματα και αντικείμενα, χωρίς να περιέχουν ιδέες που θα προκαλούσαν το ενδιαφέρον των μαθητών. Από την άλλη, οι βλέποντες εκπαιδευτικοί εξέφρασαν προτάσεις για τη χρήση πολύ περισσότερων υλικών, τα οποία ήταν πιο ευφάνταστα και προκλητικά, όπως η χρήση τρισδιάστατων αντικειμένων αλλά και των ίδιων των μαθητών. Επίσης, αρκετά ενδιαφέρουσα ήταν και η σχετική πρόταση για την εφαρμογή λογισμικών, προκειμένου να μεταδοθούν οι σχετικές με το κλάσμα γνώσεις. Συνολικά, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι τόσο οι βλέποντες εκπαιδευτικοί όσο και εκείνοι με ΑΟ, παραθέτουν προτάσεις για τη χρήση διδακτικών υλικών, οι οποίες είναι σε σημαντικό βαθμό επηρεασμένες από εκείνα τα υλικά με τα οποία διδάχτηκαν οι ίδιοι την έννοια. Ωστόσο, οι βλέποντες εκπαιδευτικοί προεκτείνουν τις προηγούμενες εμπειρίες τους και αξιοποιούν και νέα πιο ρεαλιστικά, προσιτά και προκλητικά υλικά που θα καταστήσουν πιο σαφή και κατανοητή την έννοια του κλάσματος.

Πέραν, όμως, των παραπάνω συμπερασμάτων για τις δυσκολίες που υφίστανται κατά τη διαχείριση των κλασματικών αριθμών, καθώς και για τα διδακτικά υλικά που δύναται να βοηθήσουν στην μετάδοση των σχετικών γνώσεων, καταλήγουμε και σε μια σειρά τοποθετήσεων για τις ερμηνείες που απαρτίζουν τα κλάσματα. Συγκεκριμένα, καθίσταται ξεκάθαρο, πως η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» κυριαρχεί στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών. Τόσο μέσα από τις προσεγγίσεις τους στην έννοια του κλάσματος όσο και από τα διδακτικά υλικά που προτείνουν – υλικά που συνιστούν διακριτές ποσότητες προωθούν και διευκολύνουν την κατάκτηση της ερμηνείας του «μέρος-όλου» – οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ και εκείνοι χωρίς, φανερώνεται η επικράτηση της ερμηνείας αυτής. Βέβαια, το συμπέρασμα αυτό δεν πρέπει να μας αιφνιδιάζει, καθώς πολλές φορές έχει τονιστεί στην παρούσα εργασία ότι η διεθνής βιβλιογραφία αναγνωρίζει την έμφαση σε αυτή την ερμηνεία. Επίσης, η ερμηνεία αυτή κατέχει καθοριστικό ρόλο στη μετάδοση τόσο των βασικών εννοιών που σχετίζονται με τα κλάσματα όσο και στην προώθηση των υπόλοιπων τεσσάρων ερμηνειών – του κλάσματος ως «πηλίκου», ως «μέτρο», ως «λόγος» και ως «τελεστής».

Έτσι, αυτό που θα έπρεπε να μας προκαλεί ιδιαίτερη εντύπωση, είναι το γεγονός ότι μόνο μια βλέπουσα εκπαιδευτικός έκανε λόγο για μια άλλη ερμηνεία του κλάσματος πέραν αυτής του «μέρος-όλου». Για την ακρίβεια, η εκπαιδευτικός αυτή αναφέρθηκε στην ερμηνεία του «πηλίκου». Ωστόσο, η αναφορά της αυτή έγινε με έμμεσο τρόπο και χωρίς να επιβεβαιώνει το αν είναι πλήρως αντιληπτή. Παρ' όλα αυτά, είναι άξιο απορίας το ότι καμία άλλη εκπαιδευτικός δεν αναφέρθηκε, έστω και εμμέσως, σε κάποια άλλη από τις ερμηνείες του κλάσματος εκτός εκείνης του «μέρος-όλου». Κάθε προσπάθεια προσέγγισης της έννοιας του κλάσματος καταλήγει στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου» είναι βαθιά εδραιωμένη στις γνώσεις των εκπαιδευτικών.

Βεβαία, την προσκόλληση αυτή μπορούμε να την ερμηνεύσουμε και να την αιτιολογήσουμε αν λάβουμε υπόψη μας ορισμένα πλαίσια. Δηλαδή, πρέπει να σκεφτούμε ότι ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί διδάχτηκαν την έννοια του κλάσματος είναι παραδοσιακός και έχει ως επίκεντρο το σχολικό βιβλίο. Όπως όμως είδαμε από την επεξεργασία των σχολικών εγχειριδίων, αυτά δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα και έμφαση στην ερμηνεία του «μέρος-όλου», ενώ και τα υλικά και παραδείγματα που προωθούν την κατανόηση του κλάσματος παραπέμπουν στην προηγούμενη ερμηνεία. Κατ' επέκταση, είναι επόμενο και οι εκπαιδευτικοί της έρευνας να διαχειρίζονται με περισσότερη άνεση αυτή την ερμηνεία.

Ένα ακόμα τελικό και βασικό συμπέρασμα, αφορά τις ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς με ΑΟ και εκείνους χωρίς. Έγινε φανερό, ότι τόσο οι βλέποντες εκπαιδευτικοί όσο και εκείνοι με ΑΟ αντιμετωπίζουν με προκαταλήψεις και αρνητισμό την έννοια του κλάσματος, ενώ δυσκολίες στη διαχείριση της έννοιας υφίστανται και για τους δυο. Επιπροσθέτως, τόσο οι μεν όσο και οι δε, διδάχτηκαν τα κλάσματα με έναν παραδοσιακό τρόπο, που επικεντρώνονταν στο σχολικό εγχειρίδιο, δεν χαρακτηρίζονταν από πλούσιο εποπτικό υλικό και επικεντρώνονταν κατά βάση στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Αποτέλεσμα αυτής της διδασκαλίας, είναι να είναι ακόμα και σήμερα οι εκπαιδευτικοί επικεντρωμένοι στην ερμηνεία του «μέρος-όλου». Όπως είδαμε, και οι βλέποντες εκπαιδευτικοί και εκείνοι με ΑΟ διαχειρίζονταν, προσέγγιζαν και ερμήνευαν τους κλασματικούς αριθμούς βασισμένοι σε αυτή την ερμηνεία. Εκτός, όμως, από αυτά τα κοινά σημεία, ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς με ΑΟ και τους βλέποντες υφίσταντο μια σημαντική διαφορά, που σχετίζεται με τα διδακτικά υλικά και εργαλεία. Διεξοδικότερα, οι βλέποντες εκπαιδευτικοί κατέθεσαν μια σειρά υλικών και εργαλείων πολύ πιο διευρυμένη από εκείνη των εκπαιδευτικών με ΑΟ, ενώ οι προτάσεις τους περιείχαν τόσο κοινά υλικά όσο και πιο πρωτότυπα και ευφάνταστα για τους μαθητές. Επιπλέον, αυτοί οι διδάσκοντες θα αξιοποιούσαν και τα τεχνολογικά επιτεύγματα, με τα οποία τα παιδία είναι τόσο εξοικειωμένα, προκειμένου να μεταδώσουν τις σχετικές με το κλάσμα γνώσεις. Στον αντίποδα, οι εκπαιδευτικοί με ΑΟ παρουσίασαν πιο περιορισμένες προτάσεις για την αξιοποίηση εποπτικών υλικών, οι οποίες κυρίως παρέπεμπαν σε εκείνα τα διδακτικά υλικά με τα οποία είχαν και οι ίδιοι εκπαιδευτεί. Σε κάθε περίπτωση, από τις θέσεις των εκπαιδευτικών με ΑΟ για τα διδακτικά υλικά απουσίαζαν η πρωτοτυπία, η καινοτομία και η φαντασία, που θα προκαλούσαν το ενδιαφέρον των μαθητών και ταυτόχρονα, θα καθιστούσαν πιο προσιτή την έννοια του κλάσματος.

Έχοντας, λοιπόν, κατά νου όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα που απορρέουν από την έρευνα και την βιβλιογραφία, καταλήγουμε σε μια σειρά ιδεών και προτάσεων, που δύναται να καταστήσουν πιο προσιτή την έννοια του κλάσματος και να περιορίσουν τα σχετικά με αυτή λάθη. Γενικά, διαπιστώσαμε την απουσία διαφοροποιημένου διδακτικού υλικού και κατάλληλων μεθόδων διδασκαλίας που θα μπορούσαν να καταστήσουν προσεγγίσιμο όλο το φάσμα της έννοιας του κλάσματος στα παιδιά με αναπηρία όρασης. Για το λόγο αυτό, κυρίαρχη πρόταση αυτής της εργασίας συνιστά η αναζήτηση και αξιοποίηση διαφοροποιημένων μεθόδων διδασκαλίας, που θα καλύπτουν τις ανάγκες όλων των μαθητών συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που έχουν αναπηρία όρασης, ενισχύοντας με αυτό τον τρόπο τη διαδικασία συνεκπαίδευσης. Αυτές οι διαφοροποιημένες μέθοδοι, οφείλουν να περιλαμβάνουν μια πληθώρα εκπαιδευτικών υλικών, που θα αποσκοπούν στο να παρουσιάσουν με πιο ευχάριστο τρόπο την έννοια του κλάσματος. Τα υλικά αυτά δύναται να είναι απτικά και πρακτικά ή να έχουν την μορφή προφορικών παραδειγμάτων και καταστάσεων, που θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να είναι ρεαλιστικά και να ανταποκρίνονται στον κόσμο των μαθητών. Την ίδια στιγμή, και η χρήση της τεχνολογίας πρέπει στις μέρες μας να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαιδευτικής διαδικασίας, καθώς όπως επισημαίνουν ποικίλες έρευνες, οι μαθητές χάρη σε αυτή συμμετέχουν πιο ενεργά στο μάθημα, ενώ βελτιώνονται και οι αποδόσεις τους.

Μια δεύτερη πρόταση που απορρέει από τα προηγούμενα ευρήματα και συμπεράσματα της εργασίας αυτής, είναι η ανάγκη να περιοριστεί η τόσο έντονη έμφαση που δίνεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος-όλου». Είναι γεγονός, πως η ερμηνεία αυτή αποτελεί θεμέλιο λίθο για την ανάπτυξη της κλασματικής ιδέας, ωστόσο, θα πρέπει να μην αποτελεί ταυτόσημη έννοια με εκείνη του κλάσματος. Δηλαδή, είναι χρέος των εκπαιδευτικών να διανέμουν ισομερώς την έμφασή τους και στις πέντε ερμηνείες του κλάσματος. Μια ολοκληρωμένη και καλά οργανωμένη διδασκαλία του κλάσματος συνεπάγει την βαθύτερη κατανόηση αυτού και την αποτροπή αρνητικών στάσεων καθώς και σφαλμάτων.

Συμπερασματικά, η έννοια του κλάσματος είναι μεν δύσκολη για τους μικρούς και μεγάλους μαθητές, καθώς και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, όμως δεν είναι ακατόρθωτο να κατακτηθεί. Μέσα από κατάλληλες εκπαιδευτικές διαδικασίες και με τη χρήση πληθώρας υλικών η έννοια του κλάσματος μπορεί να καταστεί κατανοητή και προσιτή τόσο για τους μαθητές με αναπηρία όρασης όσο και για τους βλέποντες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Λίγο πριν ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία, είναι επιτακτική ανάγκη να αναφερθούν κάποιοι βασικοί περιορισμοί που συνυπάρχουν σε αυτή την έρευνα. Αρχικά, όπως έχει τονιστεί και σε άλλα σημεία αυτής της εργασίας, δεν είναι πρωταρχικός στόχος της έρευνας η γενίκευση των αποτελεσμάτων της. Συνεπώς, τα ευρήματα που προέκυψαν, δεν είναι δυνατόν να έχουν καθολική και απόλυτη ισχύ. Αντιθέτως, μπορούν και πρέπει τα ευρήματα αυτά να αξιοποιηθούν με τέτοιο τρόπο που θα μας βοηθήσει να βελτιώσουμε τη διαδικασία μετάδοσης και εκμάθησης των κλασματικών αριθμών. Την ίδια στιγμή, και ο ίδιος ο χαρακτήρας της έρευνας δεν ευνοεί τη γενίκευση των ευρημάτων της. Και αυτό γιατί, η έρευνα είναι ποιοτική και συνεπώς, δεν μπορεί να μας δώσει ποσοτικά δεδομένα. Σε αυτό συνηγορεί και το γεγονός ότι ο αριθμός του δείγματος είναι μικρός, μόλις έξι εκπαιδευτικοί. Παράλληλα οι έξι αυτοί εκπαιδευτικοί δεν συνιστούν αντιπροσωπευτικό δείγμα του συνολικού αριθμού των εκπαιδευτικών, ενώ το γεγονός ότι το δείγμα αποτελούν μόνο γυναίκες δεν μπορεί να αποδώσει μια συνολική εικόνα του συνόλου της πολυδιάστατης κοινότητας των εκπαιδευτικών.

Ένας επιπρόσθετος περιορισμός αυτής της έρευνας είναι και η έλλειψη μιας πιο διευρυμένης πιλοτικής έρευνας. Εκτενέστερα, θα ήταν ιδανικό να είχε εκπονηθεί μια πιλοτική έρευνα με περισσότερους από δυο εκπαιδευτικούς, ενώ θα έπρεπε σε μια τέτοια έρευνα να συμπεριληφθούν όχι μόνο βλέποντες εκπαιδευτικοί, αλλά και εκπαιδευτικοί με αναπηρία όρασης. Με τον τρόπο αυτό, θα μπορούσαν να αποκαλυφθούν σημεία της έρευνας και κυρίως του πρωτοκόλλου συνέντευξης που δεν γίνονται σαφή ή χρειάζονται τροποποιήσεις και βελτιώσεις, ώστε να κατανοηθούν πλήρως από τους συνεντευξιαζόμενους.

Βασικός, όμως, περιορισμός στην έρευνα είναι και η αποτυχία εφαρμογής εγκυρότητας και αξιοπιστίας κατά την διενέργεια εκπόνησης τόσο των συνεντεύξεων όσο και κατά τη φάση επεξεργασίας των δεδομένων. Έτσι, πρωτίστως, δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για την ύπαρξη εξωτερικής εγκυρότητας, καθώς όπως τονίστηκε και προηγουμένως, τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν στον ευρύτερο πληθυσμό. Ταυτόχρονα, η εγκυρότητα και η αξιοπιστία της έρευνας δεν διασφαλίζονται πλήρως, καθώς το όλο ερευνητικό εγχείρημα πραγματοποιείται από έναν ερευνητή και μόνο. Το γεγονός ότι ο έλεγχος τόσο των μεθόδων όσο και της ανάλυσης των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν από ένα και μόνο άτομο ενέχει τον κίνδυνο ύπαρξης λαθών, τα οποία ενδέχεται να μην εντοπίστηκαν ούτε κατά την επαναληπτική διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων.

Με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν λοιπόν, είναι σαφές ότι η ολοκλήρωση της εργασίας τελέστηκε υπό συγκεκριμένους ανασταλτικούς παράγοντες. Ο πολύ μικρός αριθμός των συμμετεχόντων και ο λιγοστός χρόνος εκπόνησης της εργασίας λειτούργησαν ανασταλτικά για τη διερεύνηση σε βάθος. Πολύ περισσότερο βέβαια, δε θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε τη γενίκευση των συμπερασμάτων που ανέκυψαν μέσα από την εκπόνηση της παρούσας έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΩΤΟΚΟΛΛΟ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

1. Τι συναισθήματα σου προκαλεί το άκουσμα της λέξης «κλάσματα»;
2. Μετά και την επαφή σου και εκμάθηση βασικών εννοιών για τα κλάσματα, τι εντυπώσεις αποκόμισες για αυτά;
3. Υπήρχαν έννοιες/πράγματα που σε δυσκόλευαν με τα κλάσματα; Ποια ήταν αυτά; Γιατί σε δυσκόλευαν; Σε δυσκολεύουν ακόμα;
4. Σου άρεσε ο τρόπος διδασκαλίας της έννοιαςαπό τους δασκάλους σου;
5. Α) Κατά τη διδασκαλία της έννοιαςτου κλάσματος, χρησιμοποιούνταν διδακτικά υλικά, όπως αριθμογραμμές ή χωρισμένοι κύβοι;
   Β) (σε περίπτωση θετικής απάντησης) Τα υλικά που χρησιμοποιούνταν για να ερμηνεύσουν την έννοια του κλάσματος σε διευκόλυναν ή σε δυσκόλευαν στην κατανόησή της έννοιας;
6. Πως θα εξηγούσες το κλάσμα $\frac{3}{4}$ σ' ένα μαθητή της ΣΤ' δημοτικού; Πρότεινε διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης.
7. Πώς θα οργάνωνες ένα σχέδιο διδασκαλίας για τα κλάσματα σε παιδιά ΣΤ' δημοτικού; Ποιες γνώσεις θεωρείς ότι είναι προαπαιτούμενες για να διδάξεις τα κλάσματα;
8. Θεωρείς ότι πρέπει να διδάσκονται τα κλάσματα στο δημοτικό σχολείο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ8
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

7.1 Ξενόγλωσσηβιβλιογραφία

Afari, E. (2012).Teaching mathematics in game learning environment.*International Review of Contemporary Learning Research*, 1(1), 33-45.

Alajarmeh, N., Pontelli, E., & Son, T. (2011). From “Reading" Math to “Doing" Math: A NewDirection in Non-visual Math Accessibility. *Universal Access in Human-Computer Interaction. Applications and Services*, Part IV, 501-510.

Amato, S. (2005). Developing Students’ Understanding of the Concept of Fractions as Numbers. In Chick, H., & Vincent, J. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 49-56. Melbourne: PME.

Amato, S. (2002). Standards for Competence in Braille Literacy Skills in Teacher Preparation Programs. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, *96*(3), 143-153.

Anderman, E., Roeser, R., Blumenfeld, P., Harold, R., & Wigfield, A. (1993). Perceptions of Mathematics Classroom Climate: A Multilevel Study. *At the annual meeting of the American Psycological Association, Toronto, Canada.*

Archambault, D., Stöger, B., Batušic, M., Fahrengruber, C., & Miesenberger, K. (2007). Mathematical working environments for the Blind: what is needed now?.*In the 7th IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies, Niigata, Japan.*

Attard, C. (2009). Student perspectives of mathematics teaching and learning in the upper primary classroom. In *Annual Meeting of the International Conference on Science and Mathematics Education, Penang, Malaysia.* Διαθέσιμο στο http://www.academia.edu/428124/Student_Perspectives_of_Mathematics_Teaching_and_Learning_In_the_Upper_Primary_Classroom.

Baturo, A. (2004) Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In Hoines, M., & Fugelstad, A. (Eds.).*Proceedings 28th Annual Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Education,* 2, 95-102, Bergen, Norway.

Baturo, A., & Cooper, T. (1999) Fractions, reunitisation andthe number-line representation.In*Proceedings of the 23rd Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa.

Barkatsas, A., Kasimatis, K., & Gialamas, V. (2009). Learning secondary mathematics with technology: Exploring the complex interrelationship between students' attitudes, engagement, gender and achievement. *Computers & Education*, *52*(3), 562-570.

Barkatsas, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research on cognitive, metacognitive, and affective aspects of problem solving. *Nordic Studies in Math Education*, *4*(4), 1-30.

Barbieri, T., Mosca, L., & Sbattella, L. (2008). Learning math for visually impaired users. In *Computers Helping People with Special Needs* (pp. 907-914).

Beal, C., & Shaw, E. (2009). An online math problem solving system for middle school students who are blind. *Journal of Online Learning and Teaching*, *5* (4), 630-638.

Beal, C., & Shaw, E. (2008,). Working memory and math problem solving by blind middle and high school students: Implications for universal access. *Proceedings of the 19th International Conference of the Society for Information Technology and Teacher Education, Las Vegas*, 5011-5016.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? In P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Braille Mathematics Notation (2005). *Royal National Institute of the Blind.*

Buhagiar, M., & Tanti, M (2011). Working Toward the Inclusion of Blind Students in Malta: The Case of Mathematics Classrooms. *Journal of Theory and Practice in Education*, 7(1), 59-78.

Burton, M. (2009). Exploring the Changinh Perception of Mathematics Among Elementary Teacher Candidates Through Drawing. In Swars, S., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta,* 5, 363-370.

Chap, S., & Ernest, P. (1998). A Survey of Public Images of Mathematics Lim. *British Society for Research into Learning Mathematics*, 7.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In Chick, H., & Vincent, J. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 233-240.

Clamp, S. (1997). Mathematics. In Mason, H., & McCall, S. (1997). *Visual Impairment: Access to Education for Children and Young People*. David Fulton Publishers, 23, 218-235.

Clarke, D., & O'Shea, H. (2010). Students' opinions about characteristics of their desired mathematics lessons. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C. (Eds.). *Shaping the future of mathematical education. Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia*, 2, 531-538. Freemantle: MERGA.

Costello, J. (1991). *Teaching and learning mathematics 11-16*. Taylor & Francis.

d'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics*, 44-48.

Datta, P. (2013). Test Anxiety: Benign or Malignant for Students with Vision Impairment?. *Disability Studies Quarterly*, *33*(3).Διαθέσιμοστο http://dsq-sds.org/article/view/3313/3266

D' Augustine, C., & Smith, C. (1992). *Teaching elementary school mathematics*. HarperCollins Publishers.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: a longitudinal study. *Educational Psychology*, *33*(4), 427-442.

de Oliveira, L., & Cheng, D. (2011). Language and the Multisemiotic Nature of Mathematics. *Reading Matrix: An International Online Journal*, 11(3), 255-268.

Dodeen, H., Abdelfattah, F., Shumrani, S., & Hilal, M. A. (2012). The effects of teachers' qualifications, practices, and perceptions on student achievement in TIMSS mathematics: A comparison of two countries. *International Journal of Testing*, *12*(1), 61-77.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence.*Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *39*, 48.

Durre, I. (2010). Success for blind students in mathematics and science: The importance of thinking outside the box. In *Seventh International Conference on Higher Education and Disability: Innsbruck, Austria*.

Edwards, A. D., McCartney, H., & Fogarolo, F. (2006). Lambda: a multimodal approach to making mathematics accessible to blind students. In *Proceedings of the 8th international ACM SIGACCESS conference on Computers and accessibility* (pp. 48-54). ACM.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T (2010). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In Cai, J., & Knuth, E. (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, andInstructional Perspectives*. New York: Springer.

Feenstra, L., Aleven, V., Rummel, N., Rau, M., & Taatgen, N. (2011). Thinking with your hands: interactive graphical representations in a tutor for fractions learning. In Biswas, G., et al. (Eds.). *Artificial Intelligence in Education,* 453–455.

Feenstra, L., Aleven, V., Rummel, N., & Taatgen, N. (2010). Multiple interactive representations for fractions learning. In *Intelligent Tutoring Systems*, 221-223.

Ferrell, K. A., Buettel, M., Sebald, A. M., & Pearson, R. (2006). *American printing house for the blind mathematics research analysis*. Technical report, National Center on Low-Incidence Disabilities-University of Northern Colorado.

Figueiras, L., & Arcavi (2012). Learning to See: The Viewpoint of the Blind. In *Preconference Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education , Seoul, Korea.*

Forgasz, H. J. (1992). Gender and perceptions of mathematics achievement amongst year 2 students. In *Space–The first and final frontier. Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 15, 285-293.

Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). The structure of students' beliefs about the use of representations and their performance on the learning of fractions. *Educational Psychology*, *29*(6), 713-728.

Gagatsis, A., & Marcou, A. (2002). Representations and learning of Mathematics: Two sides of the same coin? In a. Gagatsis, L. Kyriakides, N. Tsaggaridou, E. Ftiaka &M. Koutsoulis (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the Cypriot Pedagogical Association: The Educational Research in the Era of Globalization*, Vol. B (pp. 263-287). Nicosia: Pedagogical Association of Cyprus, (in Greek).

Giesen, M., Cavenaugh, B., & McDonnall, M. (2012). Academic Supports, Cognitive Disability and Mathematics Achievement for Visually Impaired Youth: A Multilevel Modeling Approach. *International Journal of Special Education*, *27* (1), 17-26.

Githua, B (2013). Secondary School Students' Perceptions of Mathematics Formative Evaluation and the Perceptions' Relationship to their Motivation to Learn the Subject by Gender in Nairobi and Rift Valley Provinces, Kenya. *Asian Journal of Social Sciences & Humanities*, 2(1), 174-183.

Grouws, D., & Cebulla, K. (2000). Improving Student Achievement in Mathematics. Educational Practices Series--4.

Güçler, B., Park, J., & McCrory, R. (2009). Affordances of visual representations: The case of fraction multiplication. In *Proceedings of the 31 St Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.5, 1116-1124.

Hadi, N., Noor, N., Halim, S., Alwadood, Z., & Azmi, N. (2013,). The effect of mathematics games to the student perception of mathematics subject: A case study in Sekolah Kebangsaan Bukit Kuda, Klang. In *Proceedings of the 20th National Symposium on Mathematics Sciences. Research in Mathematical Sciences: A Catalyst for Creativity and Innovation,* 1522(1), 441-447. AIP Publishing.

Harvey, R. (2011). Challenging and extending a student teacher's concepts of fractions using an elastic strip. *Mathematics: Traditions and [new] practices*, 333-339.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational studies in mathematics*, *12*(1), 71-87.

Haser, C., & Ubuz, B. (2003). Students' conception of Fractions: a study of 5th grade. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 64-69.

Healy, L. (2012). Hands that see, hands that speak: Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. In *Preconference Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 298-316).

Howard, L., &Whitaker, M. (2011). Unsuccessful and Successful Mathematics Learning: Developmental Students' Perceptions. *Journal of Developmental Education*, 35(2), 2-16.

Howard, L. (2008). Developmental Students' Perceptions of Unsuccessful and Successful Mathematics Learning. Doctoral dissertation, UTAH STATE UNIVERSITY.

Howard, F., & McKeeby, P. (1971). *Teaching modern mathematics in the elementary school.* Addison-Wesley, Second Edition.

Huebner, K. (2000). Visual Impairment. In *Foundations of Education: Instructional Strategies for Teaching Children and Youths with Visual Impairments,* 1(2), 55-76. American Foundation for the Blind.Second Edition.

Hunting, R. (1986). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(1), 49-66.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 213-230.

Jackson, A. (2002). Communications-The World of Blind Mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, *49*(10), 1246-1251.

Kapperman, G., & Sticken, J. (2003). Practice Report: A Case for Increased Training in the Nemeth Code of Braille Mathematics for Teachers of Students Who Are Visually Impaired. *Journal of Visual Impairment & Blindness*,97(2), 110-112.

Kapperman, G., & Sticken, J. (2002). A Software Tutorial for Learning the Nemeth Code of Braille Mathematics. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 96(12), 855-57.

Kapperman, G., Heinze, T., & Sticken, J. (2000). Mathematics. In Koenig, A., & Holbrook, C. (Eds). *Foundations of Education: Instructional Strategies for Teaching Children and Youths with Visual Impairments,* 2(10), 371-399. American Foundation for the Blind.Second Edition.

Kapperman, G., Heinze, T., & Sticken, J. (1997). Strategies for developing mathematics skills in students who use braille. *Research and Development Institute*.

Karshmer, A., & Bledsoe, C. (2002). Access to mathematics by blind students. In Heidelberg. K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler (Eds.). *Computers helping people with special needs,* (pp. 471-476). Springer Berlin

Karshmer, A., Gupta, G., Geiger, S., & Weaver, C. (1999). Reading and writing mathematics: The MAVIS1 Project. *Behavior & Information Technology*, *18*(1), 2-10.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*, London: NFER-Nelson.

Kloosterman, P., Raymond, A., & Emenaker, C. (1996). Students' Beliefs about Mathematics: A Three-Year Study. *Elementary School Journal*, *97*(1), 39-56.

Kurth, K. (2007). *Factors which influence females' decision to remain in science.* South Bend, IN: Indiana University

Lee, C., & Johnston-Wilder, S. (2013). Learning mathematics-letting the pupils have their say. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 163-180.

Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77(3), 247.

Lo, J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 481-500.

Mann, C. (2006). Educational Options for Blind and Visually Impaired Students: A Literature Review. *Washington State Institute.*

Mathematics Made Easy for Children with Visual Impairment. Διαθέσιμο στο http://icevi.org/pdf/Mathematics_%20Made_%20Easy%20for%20Children_%20with%20_Visual%20Impairment.pdf

Mazzocco, M., Myers, G., Lewis, K., Hanich, L. & Murphy, M. (2013). Limited knowledge of fraction representations differentiates middle school students with mathematics learning disability (dyscalculia) versus low mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*,115(2), 371-387.

Najafi, M., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Amiripour, P. (2012). The Effect of efficiency of cooperative learning method on increasing blind students' perception of mathematical conceptions. *Journal of Applied Mathematics, Islamic Azad University of Lahijan,* Vol.8, No.4(31), 57-63.

National Center on Low-Incidence Disabilities (2004). *Statewide Assessment Results for Students with Low-Incidence.* Διαθέσιμοστοhttp://nclid.unco.edu/outcomes/

Newman, R., &Schwager, M. (1993). Students' perceptions of the teacher and classmates in relation to reported help seeking in math class. *The Elementary School Journal*, 94(1), 3-17.

Newstead, K. and Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In Olivier, A., & Newstead, K. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 295-302. Stellenbosch, SouthAfrica.

Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2010). A new theoretical model for understanding fractions at the elementary school. *University of Cyprus*. Διαθέσιμοστο http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/2/CERME7_WG2_Nicolaou-Pitta.pdf

Nordin, A. (2005). Students' Perception on Teaching and Learning Mathematics in English. *Buletin Pendidikan Sains dan Matematik Johor*, *14*(1).

Norton, A., & Boyce, S. (2013). A cognitive core for common state standards. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 266-279.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., & Hurry, J. (2006). Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programme (TLRP) Research Briefing*.

O'Rourke, J., Main, S., & Ellis, M. (2013). 'It doesn't seem like work, it seems like good fun': perceptions of primary students on the use of Handheld Game Consoles in mathematics classes. *Technology, Pedagogy and Education*, *22*(1), 103-120.

Osana, H., & Pitsolantis, N. (2011). Addressing the struggle to link form and understanding in fractions instruction. *British Journal of Educational Psychology*. British Journal of Educational Psychology, 83, 29–56.

Palsdottir, G. (2008). Girls beliefs about the learning of mathematics. *Beliefs and Mathematics: Festschrift in honor of Guenter Toerner's 60th Birthday*, 147-158.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). The structure of students' beliefs about the use of representations and their performance on the learning of fractions. *Educational Psychology*, *29*(6), 713-728.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 61-83.

Park, J.,Güçler, B., & McCrory, R. (2009). Extension from Whole Numbers to Fractions. Διαθέσιμο στο
http://meet.educ.msu.edu/pubs/aera2010/Park_Gucler_McCrory_ExtensionFINAL.pdf

Pinilla M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *ActaDidactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.

Poorya, P., Hassan, A., & Farzad, R. (2011). A predictive model for mathematical performance of blind and seeing students. *Educational Research*, *2*(2), 864-873.

Prediger, S. (2011). Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(2), 65-88.

Psycharis, G., Latsi, M., & Kynigos, C. (2007). Meanings for fraction as number-measure by exploring the number line. In *Proceedings of the 5th Conference of the European Research in Mathematics Education.*

Rosenblum, P., & Amato, S. (2004). Preparation in and Use of the Nemeth Braille Code for Mathematics by Teachers of Students with Visual Impairments. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, *98*(8), 484-495.

Rowlett, P. (2010). Workshop report…Visual impairment in maths, stats and operational research (MSOR). *MSOR Connection,* 10(2), 45-48.

Saritas, T., & Akdemir, O. (2009). Identifying Factors Affecting the Mathematics Achievement of Students for Better Instructional Design. *International Journal of Instructional Technology & Distance Learning*,6(12),ISSN 1550-6908.

Shepherd, I. (2001). *Providing learning support for blind or visually impaired students undertaking fieldwork and related activities*. Cheltenham and Gloucester College of Higher Education, Geography Discipline Network (GDN).

Shen, C., & Talavera, O. (2003). The Effects of Self-perception on Students' Mathematics and Science Achievement in 38 Countries Based on TIMSS 1999 Data. Διαθέσιμο στο http://fmwww.bc.edu/repec/nasug2003/shen.pdf.

Skouras, A. (2014). Factors associated with middle-school mathematics achievement in Greece: the case of algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(1), 12-34.

Spindler, R. (2006). Teaching mathematics to a student who is blind. *Teaching Mathematics and its applications*, *25*(3), 120-126.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Stevens, R. D., Edwards, A. D., & Harling, P. A. (1997). Access to mathematics for visually disabled students through multimodal interaction. *Human–Computer Interaction*, *12*(1-2), 47-92.

Stöger, B., Batušić, M., Miesenberger, K., & Haindl, P. (2006). Supporting blind students in navigation and manipulation of mathematical expressions: Basic requirements and strategies. In *Computers Helping People with Special Needs*, 1235-1242

Stöger, B., Miesenberger, K., & Batušić, M. (2004). Mathematical working environment for the blind motivation and basic ideas. In *Computers Helping People with Special Needs*, 656-663.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics,* 25, 109-135.

Sullivan, P., Clarke, D., & O'Shea, H. (2010). Students' Opinions about Characteristics of Their Desired Mathematics Lessons. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 531-538.

Sisman, G. (2007).Teachers' and students' perceptions about the newly developed mathematics curriculum: A case from Turkey.Διαθέσιμο στο http://www.academia.edu/432464/Teachers_and_students_perceptions_about_the_newly_developed_mathematics_curriculum_A_case_from_Turkey

Tanti, M. (2006). *Teaching mathematics to a blind student: A case study*. Unpublished Master in Education dissertation, University of Exeter, UK.

Teaching Maths to pupils with vision impairment. Part of Teaching National Curriculum Subjects. *Royal National Institute of Blind People*.Διαθέσιμοστοhttp://www.pathstoliteracy.org/sites/pathstoliteracy.perkinsdev1.org/files/uploaded-files/maths.doc

Teaching Strategies for Students that are Blind and Low Vision.*Office for Students with Disabilities*.Valencia Community College,

The Nemeth Braille code for Mathematics and Science Notation: 1972 Revision. *American Printing House for the Blind.*

Toluk, Z., & Middleton, J. (2001). The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment. In *PME CONFERENCE,* 4, 4-265.

Ukeli, V., & Akem, I. (2013). Parental Role in Mathematics Achievement of Visually Impaired Students in Benue State. *Journal of Educational and Social Research*, *3*(5), 25-36.

Vandecandelaere, M., Speybroeck, S., Vanlaar, G., De Fraine, B., & Van Damme, J. (2012). Learning environment and students' mathematics attitude. *Studies in Educational Evaluation*, *38*(3), 107-120.

Ward, J. & Thomas, G (2007). What do teachers know about fractions. *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects 2006*, 128-138.

Whyburn, L., & Way, J. (2012). Student Perceptions of the Influence of IWBs on Their Learning in Mathematics. *Australian Educational Computing*, *27*(1), 23-27.

Wittenstein, S. (1993). Braille training and teachers' attitudes: *Journal of Visual Impairment and Blindness*, 88, 516-524.

Wong, M., & Evans, D. (2007). Students' conceptual understanding of equivalent fractions. In *Mathematics: Essential Research, Essential Practice (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*, 2, 824-833.

Wu, H. (1999). *Some remarks on the teaching of fractions in elementary school*. Διαθέσιμο στοhttp://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf

Yanik, B., Helding, B., &Baek, J. (2006). Students' difficulties in understanding fractions as measures. In *Proceedings of the joint meeting of PME*, 32, 323-325.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008) Characteristics of teacher's choice of examples in and forthe mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 165-182.

7.2. Ελληνικήβιβλιογραφία

Αβραμίδης, Η. &Καλύβα, Ε. (2006). *Μέθοδοι Έρευνας στην Ειδική Αγωγή. Θεωρία και Εφαρμογές*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Αργυρόπουλος, Β. (2011). Η εκπαίδευση παιδιών με σοβαρά προβλήματα όρασης: ερευνητική και πρακτική προσέγγιση στο χώρο της διδασκαλίας. Στο Παντελιάδου, Σ., & Αργυρόπουλος, Β. (Επιμ.). *Ειδική Αγωγή. Από την έρευνα στη διδακτική πράξη*. Αθήνα: Πεδίο.

Βαϊνάς, Κ. (1995). *Συμβολή στη Διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού*. Ρέθυμνο: Τυποσπουδή.

Βαϊνάς, Κ. (1988). Η χαρούμενη διάθεση του παιδιού και η... διδασκαλία των Μαθηματικών. Από την Ανθρωπολογική Παιδαγωγική του Otto Friedrich Bollnow στη Διδακτική των Μαθηματικών του Martin

Wagenschein. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 39, 46-55.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Δ., & Σαΐτης, Α. (2010). *Μαθηματικά Δ΄Δημοτικού,* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Δ., & Σαΐτης, Α. (2010). *Μαθηματικά Δ΄Δημοτικού,Βιβλίο του Δασκάλου*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Βαμβακούση, Ξ. (2004). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών*(Διδακτορική Διατριβή).

Βούργιας, Χ., & Χρυσοστόμου-Βούργια, Σ. (2006). Στάσεις και Απόψεις των Μαθητών και των Γονιών για το Μάθημα των Μαθηματικών: Αρωγός ή Τροχοπέδη;.Στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Η., &Μοδέστου, Μ. (Επιμ.). *Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο: Προτεραιότητες και Προοπτικές. Πρακτικά 9^{ο} συνέδριο ΠαιδαγωγικήςΕταιρίας Κύπρου*, 135-144.

Cohen, L., Manion, L., &Morrison, K (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Μεταίχμιο.

Csocsán, E. (2005). Το πρόγραμμα διδασκαλίας των μαθηματικών και η εφαρμογή του σε μαθητές με σοβαρά προβλήματα όρασης στη γενική εκπαίδευση. Στο Ζώνιου-Σιδέρη, Α & Σπανδάγου, Η. (Επιμ).*Εκπαίδευση και Τύφλωση: Σύγχρονεςτάσεις και προοπτικές*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 191-204.

Γιαλαμάς, Β., & Κασιμάτη, Α. (1999). Τα «πιστεύω» των μαθητών (ηλικίας 12-15) για τα μαθηματικά. *Πρακτικά 14^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 16, 14-24. Μυτιλήνη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά- Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; Στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Η., &Μοδέστου, Μ. (Επιμ.). *Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο: Προτεραιότητες και Προοπτικές. Πρακτικά 9^{ο} συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου*, 99-110.

Γιαννέλος, Α. (2011). Αντιλήψεις μαθητών Στ' Δημοτικού για τα κλάσματα. *Επιστημονικό Βήμα*, 15, 173-185.

Δαφέρμος, Β. (1998). Εννοιολογικές μορφές του ρητού αριθμού, ανάπτυξη, αιτιολόγηση και λειτουργία αυτών ως αυτόνομων διδακτικών μοντέλων. *Ερευνητική Διάσταση στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 3, 3-43,

Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών: εκπαίδευση και μαθηματικά, ειδική διδακτική των μαθηματικών, ειδικά θέματα διδακτική μαθηματικών, 3η έκδοση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Ζάντζος, Ι. (2009). *Η διερεύνηση της έννοιας των ρητών αριθμών ως «κλάσεις ισοδυναμίας ισοδύναμων κλασμάτων» με χρήση ειδικών εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας* (Μεταπτυχιακή εργασία). Αθήνα. Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων της Πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης Αθηνών.

Ιωσηφίδης, Θ. (2008). *Ποιοτικές μέθοδοι έρευνας στις κοινωνικές επιστήμες*. Αθήνα: Εκδόσεις Κριτική.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2010). *Μαθηματικά Ε΄Δημοτικού,* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2010). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Δασκάλου*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Καραγεώργου, Δ. (1994). Παράγοντες που καλλιεργούν και συντηρούν τη Μαθηματικοφοβία. *Εκπαιδευτικά*, 36,116-141.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., & Σοφού, Β. (2010). *Μαθηματικά Β΄Δημοτικού,* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., & Σοφού, Β. (2010). *Μαθηματικά Β΄Δημοτικού, Βιβλίο του Δασκάλου* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Κασσωτάκη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2010). *Μαθηματικά ΣΤ΄Δημοτικού,* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Κασσωτάκη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2010). *Μαθηματικά ΣΤ΄Δημοτικού, Βιβλίο του Δασκάλου*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Κατσούλης, Φ, Αργυρόπουλος, Β, Βαΐτσης, Ν., Τσιάλλιου, Ε., Κουλούσης, Ε., & Πράνταλος, Γ. (2010). Σχέδια εργασίας για την αντίληψη της έννοιας της κλίμακας και της απόστασης από μαθητές με σοβαρά προβλήματα όρασης: από τη θεωρία στην πράξη. *Από τα Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Γεωγραφικού Συνεδρίου, Αθήνα*, σελ. 763-771.

Κολεζά, Ε. (2009). Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών,*Δ΄ έκδοση* Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: LeaderBooks.

Κουλέτση, Ε. (2010). *Οι Εννοιολογικές Μεταφορές και η Χρήση τους από τους Καθηγητές στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. (Μεταπτυχιακή εργασία). Αθήνα. Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων της Πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης Αθηνών.

Κουρουπέτρογλου, Γ., & Φλωριάς, Ε. (2003). *Επιστημονικά σύμβολα κατά Braille στον Ελληνικό χώρο. Εφαρμογή σε Συστήματα Πληροφορικής για Τυφλούς*. Αθήνα: Εκδόσεις ΚΕΑΤ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2010). *Μαθηματικά Α΄Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (5ηεκδ.).Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2010). *Μαθηματικά Α΄Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής , Βιβλίο Δασκάλου* (5ηεκδ.).Αθήνα:ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2010). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου* (2η έκδ.) ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λιοδάκης, Δ (2000). *Εκπαιδευτικά Προγράμματα για τυφλούς*. Αθήνα: Άτραπος.

Μακρίδης, Γ. & Μιχαηλίδου-Ευριπίδου, Α. (1999). Στάσεις και Πεποιθήσεις των Μαθητών στα Μαθηματικά. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 16, 34-42. Μυτιλήνη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Παντσίδης, Χ. (2006). *Ο Ρόλος των Αναπαραστάσεων στην Κατανόηση των Κλασμάτων*. (Διπλωματική εργασία). Αθήνα. Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων της Πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης Αθηνών.

Πατσιομίτου, Α., & Εμβαλωτής, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 2(3), 247-272. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Σαρακινού, Ε. (1999). Άγχος για τα Μαθηματικά και Επίδοση: μια σύντομη αναδρομή στην θεωρία και στην έρευνα. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*,(16),70-80. Μυτιλήνη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Σολομωνίδου, Χ. (1999). Οικοδόμηση εννοιών σχετικών με τα κλάσματα από παιδιά Δημοτικού με τη βοήθεια του λογισμικού ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΑ. *Πρακτικά 1ου συνεδρίου Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορικής & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*. Ιωάννινα. Διαθέσιμο στο http://www.etpe.eu/new/conf?cid=2

Σταματόπουλος, Κ. (2011). *Η μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος*. (Διπλωματική εργασία). Αθήνα. Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων της Πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης Αθηνών.

Τζαλακώστας, Ρ. (2011). *Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης*. Διαθέσιμο στο http://www.slideshare.net/rtzalako/ss-5774250

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα: προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Αθήνα: Gutenberg

Τριανταφυλλίδης, Τ., & Σδρόλιας, Κ. (2007). *Βασικές Μαθηματικές Έννοιες για τον Εκπαιδευτικό της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, Αριθμός έκδοσης 362*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Τσιναρέλης, Γ. (2005). *Εκπαίδευση και Άτομα με Προβλήματα Όρασης*. Αθήνα. Ανακτήθηκε στις 11/12/2013 από τη Ψηφιακή Βιβλιοθήκη – Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση». Διαθέσιμο στο http://repository.edulll.gr/edulll/handle/10795/1084

ΥΠΕΠΘ (2004). Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Ειδικής Αγωγής. *Διαφοροποιημένο Δ.Ε.Π.Σ. & Α.Π.Σ. για Τυφλούς Μαθητές*. Διαθέσιμο στοhttp://www.pi-schools.gr/special_education_new/html/gr/8emata/analytika/analytika.htm

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1997). Συναισθηματικός τομέας και Μαθηματική Παιδεία. Η έρευνα στον Ελλαδικό και το Διεθνή χώρο. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 14, 28-47. Μυτιλήνη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Φιλίππου, Γ.,& Χρίστου, Κ. (1995).*Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδάνος.

Φιλίππου, Γ.,& Χρίστου, Κ. (1995). Συναισθηματικός τομέας, αριθμοφοβία και διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Μ. Καΐλα (Επιμ.).*Η σχολική αποτυχία*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 75-151.

VandeWalle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά: για Δημοτικό και Γυμνάσιο, μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Χαλάτσης, Α. (1989). Βασικές Έννοιες Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη:Α.Π.Θ. έκδοση: υπηρεσία δημοσιευμάτων

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών: αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2013). *Μαθηματικά για τη Δασκάλα και τον Δάσκαλο: Αριθμοί, Σύνολα, Σχήματα, Β΄ έκδοση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Σοφία.

Χατζημανώλης, Ν. (2008). *Η ευθεία ως αναπαραστασιακό εργαλείο για την κατανόηση της πυκνότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών*. (Μεταπτυχιακή εργασία). Αθήνα. Ανακτήθηκε από τη βάση δεδομένων της Πανεπιστημιακής βιβλιοθήκης Αθηνών.

Χρυσανθακοπούλου, Α. (2012). *Ο βαθμός κατανόησης από τους μαθητές της Γ΄ τάξης Δημοτικού, της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού, του συμβολισμού του κλάσματος και των ισοδύναμων κλασμάτων, μετά από διδασκαλία με βάση το σχολικό βιβλίο*. (Διπλωματική εργασία). Πάτρα.