



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Σύνοψη Επαναληπτικών Μεθόδων για τις Εξισώσεις
Ροής Ενέργειας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέποντες : Εμμανουήλ Βάβαλης
Καθηγητής Π.Θ.

Αικατερίνη Χούστη
Καθηγήτρια Π.Θ.

Βόλος, Ιούνιος 2015

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βάβαλη Εμμανουήλ, καθηγητή του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, που μου εμπιστεύτηκε την παρούσα διπλωματική εργασία. Η συμβουλή του ήταν πολύ σημαντική τόσο με την βιβλιογραφία που μου πρότεινε όσο και με το χρόνο που δαπάνησε για την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου και συναδέλφους μου, ιδιαίτερα την κυρία Παπαστεφάνου Ηλιάννα και τον κύριο Μλαδένη Αντώνιο για την ηθική συμπαράσταση τους και το κουράγιο που μου έδιναν όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Κωνσταντίνο και Στυλιανή και την αδερφή μου, Σταυρούλα που χωρίς την δική τους στήριξη και συμπαράσταση δεν θα μπορούσα να είχα ολοκληρώσει τις σπουδές μου.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Εισαγωγή

Η αριθμητική ανάλυση ασχολείται με την ανάπτυξη μεθόδων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Τα κύρια χαρακτηριστικά τους είναι ότι για την εύρεση της λύσης απαιτείται ένας πεπερασμένος αριθμός πράξεων.

Στις μέρες μας για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων χρησιμοποιούνται Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές, γεγονός που δεν επιτρέπει να βρεθεί η λύση με ακρίβεια, εξαιτίας των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης. Γ' αυτό το λόγο τα αποτελέσματα που βρίσκουμε είναι προσεγγιστικά. Άρα από την στιγμή που δεν είναι εφικτό να βρεθεί η λύση με ακρίβεια, προσπαθούμε να βρούμε την μέθοδο που θα μας οδηγήσει στη λύση με όσο πιο καλή προσέγγιση γίνεται.

Σήμερα οι αναλύσεις ροών φορτίων είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εξασφάλιση της λειτουργίας των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, αρχικά θα μελετήσουμε τις κλασσικές επαναληπτικές μεθόδους και τα σφάλματα που μεταδίδονται κατά τους υπολογισμούς καθώς και τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της βέλτιστης προσεγγιστικής λύσης, λαμβάνοντας υπόψη μας τους περιορισμούς που προκύπτουν για τους ζυγούς και τις γεννήτριες.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Abstract

The numerical analysis is concerned with the development of methods for solving mathematical problems. Their main characteristics are that, for finding the solution a finite number of operations is required.

Nowadays, we use computers to solve such problems, which does not allow to find the solution precisely because of rounding errors. That is why the results we find are approximate. So if it is not possible to find the solution accurately, we try to find the method that will lead us to the solution in as good an approximation as possible.

Today freight flow analysis is a prerequisite for ensuring the operation of electricity systems.

In this thesis, first we study the classical repeatable methods and the errors that are transmitted during calculations and the methods used to determine the optimal approximate solution taking into consideration the limitations arising on the scales and generators.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Περιεχόμενα

0 Εισαγωγή – Περίληψη της εργασίας

1 Επαναληπτικές μέθοδοι	1
1.1 Εισαγωγή στις επαναληπτικές μεθόδους	1
1.2 Μέθοδος Jacobi	3
1.3 Μέθοδος Gauss – Seidel	4
1.4 Μέθοδος Successive Over-Relaxation (SOR)	5
1.5 Ταχύτητα σύγκλισης	6
1.6 Πίνακες με την ιδιότητα property(A)	7
1.7 Συνεπώς διατεταγμένοι (consistently ordered) πίνακες και πίνακες κανονικής μορφής (normal form)	7
1.8 Πίνακες μετάθεσης P (Permutation Matrices)	8
1.9 Block επαναληπτικοί μέθοδοι	9
1.10 Σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές των Jacobi και SOR επαναληπτικών πινάκων	10
2 Μέθοδος συζυγών παραγώγων (Conjugate Gradient) .	13
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Η μέθοδος Steepest Descent	15
2.3 Η μέθοδος Conjugate Directions	20
2.4 Η μέθοδος Conjugate Gradients	23
2.5 Προσαρμογή της μεθόδου των συζυγών παραγώγων (Preconditioning)	28
3 Μελέτη της ροής φορτίου	34
3.1 Εισαγωγή	34
3.2 Μέθοδος Gauss-Seidel	35
3.3 Μέθοδος Newton – Raphson	36
3.4 Μέθοδος Fast decouple Newton-Raphson	39
3.5 Σύγκριση επαναληπτικών μεθόδων	40
Βιβλιογραφία	43

Κεφάλαιο 1

Επαναληπτικές μέθοδοι

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Σκοπός των επαναληπτικών μεθόδων είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων της μορφής:

$$Ax = b, A \in \mathbb{C}^{n,n}, \det(A) \neq 0, b \in \mathbb{C}^n \quad (1.1)$$

Η βασική ιδέα των επαναληπτικών μεθόδων είναι ότι ξεκινάμε με μια προσέγγιση της λύσης, έστω $x^{(0)}$ και κατασκευάζουν μία ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, η οποία κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις συγκλίνει στη λύση του προς επίλυση συστήματος. Συγκεκριμένα θεωρούμε μια διάσπαση του πίνακα A

$$A = M - N,$$

με μόνους περιορισμούς

- i. Ο πίνακας M να είναι αντιστρέψιμος.
- ii. Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών αγνώστων M να λύνεται με πολύ λιγότερες πράξεις απ ό τι ένα άλλο με πίνακα A

Η εύρεση του M δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση διότι πέρα από τους 2 περιορισμούς που αναφέραμε παραπάνω, ο M πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε

$$\rho(T) \equiv \rho(M^{-1}N) < 1$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διάσπαση $A = M - N$, M αντιστρέψιμος, έχουμε

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b$$

$$\Leftrightarrow x = Tx + c,$$

όπου $T = M^{-1}N$ και $c = M^{-1}b$.

Επομένως η νέα εξίσωση που προέκυψε υποδεικνύει την κατασκευή του αλγορίθμου

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{C}$ οποιοδήποτε. Ο πίνακας T στον αλγόριθμο είναι γνωστός ως επαναληπτικός πίνακας του αλγορίθμου.

Ο αλγόριθμος παράγει ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, η οποία κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις συγκλίνει στη λύση $x = A^{-1}b$ του γραμμικού συστήματος της (1.1).

Σύγκλιση επαναληπτικών αλγορίθμων

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγόμενων από τον αλγόριθμο διανυσμάτων στη λύση $x = A^{-1}b$ του συστήματος είναι η $\rho(T) < 1$
- Ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση του αλγορίθμου στη λύση του συστήματος είναι η

$$\|T\| < 1,$$

όπου $\| \cdot \|$ μια οποιαδήποτε φυσική norm.

Οι 3 βασικές επαναληπτικές μέθοδοι που θα μελετήσουμε παρακάτω είναι οι **Jacobi**, **Gauss-Seidel** και η **Successive Over-relaxation(SOR)**. Για να ορίσουμε τις παραπάνω μεθόδους είναι σημαντικό να θεωρήσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι μη-μηδενικά $a_{ii} \neq 0$, $i=1(1)n$. Συνεπώς η ι-οστή εξίσωση της (1.1) γράφεται

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right\}, i=1(1)n \quad (1.3)$$

Οι επαναληπτικές μέθοδοι βασίζονται στην διάσπαση του πίνακα A .

$$A = D - L - U, \quad (1.4)$$

όπου

- $D = \text{diag}(A)$, δηλαδή διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστοιχα του A, a_{ii}
- L κάτω τριγωνικός πίνακας και
- U άνω τριγωνικός πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το γραμμικό σύστημα της (1.1) γράφεται:

$$Dx = Lx + Ux + b \quad (1.5)$$

1.2 Μέθοδος Jacobi

Για να υπάρξει η μέθοδος θα πρέπει ο $M = D$ να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή να ισχύει $\det(M) = \det(D) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \neq 0$. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνονται από τον τύπο:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\}, i = 1(1)n, \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Οπότε από τις εξισώσεις (1.5) και (1.6) η μέθοδος του Jacobi σε μορφή πίνακα είναι η ακόλουθη:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} (L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

όπου $B = D^{-1}(L+U)$ είναι ο Jacobi επαναληπτικός πίνακας.

Κριτήριο σύγκλισης

- Για τη σύγκλιση της μεθόδου Jacobi πρέπει να ισχύει

$$\rho(T) = \rho(M^{-1}N) = \rho(D^{-1} (L + U)) < 1$$

- Επειδή όμως είναι σχετικά δύσκολο να εκτιμηθεί η φασματική ακτίνα, ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνουν οι διαδοχικές αντικαταστάσεις είναι ο πίνακας A ή ο ανάστροφος του να είναι διαγωνίως υπερέχων, δηλαδή να ισχύει :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$$

1.3 Μέθοδος Gauss – Seidel

Για να υπάρχει η μέθοδος θα πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος του $M = D - L$ που είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος αν $\det(D-L) \neq 0$ που ισοδυναμεί με $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνονται από τον τύπο:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\}, i = 1(1)n, \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Οπότε από τις εξισώσεις (1.5) και (1.8) η μέθοδος του Gauss-Seidel σε μορφή πίνακα είναι η ακόλουθη:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(k)} + (D - L)^{-1} b, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

όπου $G = (D - L)^{-1} U$ είναι ο Gauss-Seidel επαναληπτικός πίνακας.

Κριτήριο σύγκλισης

- Για τη σύγκλιση της μεθόδου Gauss-Seidel πρέπει να ισχύει $\rho(T) = \rho(M^{-1}N) = \rho((D - L)^{-1} U) < 1$
- Επιπλέον ένα άλλο κριτήριο για την σύγκλιση της μεθόδου αυτής είναι ο πίνακας A να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

1.4 Μέθοδος Successive Over-Relaxation (SOR)

Η μέθοδος της SOR αποτελεί μια μονοπαραμετρική γενίκευση της μεθόδου Gauss-Seidel. Συγκεκριμένα, θεωρώντας τη διάσπαση (1.3) με $\det(D) \neq 0$ ορίζουμε το ρυθμιστή πίνακα :

$$M_\omega = 1/\omega (D - \omega L), \omega \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad (1.10)$$

όπου η παράμετρος ω καλείται παράμετρος υπερχαλάρωσης.

Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(k+1)}$ δίνονται από τον τύπο:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\}, i = 1(1)n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Οπότε από τις εξισώσεις (1.5) και (1.11) η μέθοδος της SOR σε μορφή πίνακα είναι η ακόλουθη:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} \{ (1-\omega)D + \omega U \} x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b \quad (1.12)$$

όπου $H(\omega) = (D - \omega L)^{-1} \{ (1-\omega)D + \omega U \}$ είναι ο SOR επαναληπτικός πίνακας.

Είναι φανερό από την (1.11), ότι για $\omega = 1$ η SOR μέθοδος δίνει αυτή των Gauss-Seidel.

Κριτήριο σύγκλισης

Η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου SOR εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρου ω .

- Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου είναι η

$$|\omega - 1| < 1, \omega \in \mathbb{C} \text{ ή } \omega \in (0, 2), \omega \in \mathbb{R}$$

- Έστω ότι ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας τότε $\forall \omega \in (0, 2)$ η SOR μέθοδος συγκλίνει.

1.5 Ταχύτητα σύγκλισης

Ορισμός 1.1 : Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο k και για μια φυσική νόρμα είναι $\|A^k\| < 1$, τότε η ποσότητα

$$R(A^k) = -\frac{1}{k} \ln \|A^k\|_2 \quad (1.13)$$

καλείται μέση ταχύτητα σύγκλισης για k επαναλήψεις.

Αν $\|B^k\|_2 < 1$ και $R(A^k) < R(B^k)$, τότε ο B είναι επαναληπτικά ταχύτερος του A για k επαναλήψεις.

Ο παραπάνω ορισμός έχει μεγάλη σημασία όταν $k \rightarrow \infty$ και μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$R_\infty(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(A^k) = -\ln(\rho(A)). \quad (1.14)$$

Η $R_\infty(A)$ καλείται μέση ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης

Θεώρημα Stein-Rosemberg : Αν ο Jacobi επαναληπτικός πίνακας B , που συσχετίζεται με τον A , δεν περιέχει αρνητικά στοιχεία τότε μία και μόνο μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι έγκυρη

1. $\rho(B) = \rho(G) = 0$
2. $0 < \rho(G) < \rho(B) < 1$
3. $1 = \rho(B) = \rho(G)$
4. $1 < \rho(B) < \rho(G)$

Συνεπώς οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel είτε και οι 2 συγκλίνουν είτε και οι 2 αποκλίνουν.

Πόρισμα : Έστω $B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$ τότε

$$R_\infty((D-l)^{-1}U) > R_\infty(D^{-1}(L+U)), \quad (1.15)$$

που σημαίνει ότι η Gauss-Seidel είναι ασυμπτωτικά γρηγορότερη από τη Jacobi.

1.6 Πίνακες με την ιδιότητα property(A)

Ορισμός 2.1 : Ένας $N \times N$ πίνακας $A=(a_{ij})$ έχει την ιδιότητα property(A) εάν υπάρχουν 2 ξένα σύνολα μεταξύ τους S και T τ.ω.

$$S \cup T = W$$

Θεώρημα 2.1 : Ένας πίνακας A έχει την ιδιότητα property(A) αν \exists ένα διάνυσμα γραμμής $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ τ.ω. αν $a_{ij} \neq 0$ και $i \neq j$ τότε :

$$|\gamma_i - \gamma_j| = 1$$

$\underline{\gamma}$ = διάνυσμα διάταξης για το πίνακα A

1.7 Συνεπώς διατεταγμένοι (consistently ordered) πίνακες και πίνακες κανονικής μορφής (normal form)

Η έννοια της συνεπής διάταξης είναι σημαντική για την SOR επαναληπτική μέθοδο , για την επίλυση των εξισώσεων:

$$Ax = b$$

Αν ο πίνακας A είναι συνεπώς διατεταγμένος και ικανοποιεί ορισμένες από τις ιδιότητες σύγκλισης τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την βέλτιστη παράμετρο ω , η οποία μεγιστοποιεί τον ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης της SOR μεθόδου.

Ο ορισμός της συνεπής διάταξης δόθηκε από τον D. Young και εφαρμόστηκε μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις πινάκων, τους πίνακες με την ιδιότητα Property(A) που αναφέραμε παραπάνω.

Ορισμός 3.1 : Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ με την ιδιότητα property(A) λέγεται συνεπώς διατεταγμένος αν \exists διάνυσμα διάταξης $\underline{\gamma} = \{ \gamma_i \}_{i=1}^N$ τ.ω. αν $a_{ij} \neq 0$ και $j > i$ τότε :

$$\gamma_j - \gamma_i = 1$$

και αν $a_{ij} \neq 0$ και $i > j$ τότε :

$$\gamma_i - \gamma_j = 1$$

Ορισμός 3.2 : Ένας δοθείσας πίνακας A με την ιδιότητα $\text{property}(A)$ λέγεται ότι είναι σε κανονική μορφή αν το διάνυσμα $\underline{\gamma} = \{\gamma_i\}_{i=1}^N$ είναι διάνυσμα διάταξης για τον πίνακα A .

Σημείωση : Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν ένας πίνακας A είναι κανονικής μορφής τότε είναι και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

1.8 Πίνακας μετάθεσης P (Permutation Matrices)

Ένας πίνακας μετάθεσης P είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος σε κάθε γραμμή και στήλη έχει μερικούς 1 και όλα τα άλλα στοιχεία 0.

Ο πίνακας μετάθεσης που προκύπτει από την εναλλαγή της i -οστής και της j -οστής γραμμής του ταυτοτικού πίνακα λέγεται στοιχειώδης πίνακας μετάθεσης και ορίζεται P_{ij} .

Αν ο πίνακας A έχει την ίδια τάξη με τον P_{ij} τότε έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- i. $P_{ij}A = A$ με ανταλλαγή της i -οστής και της j -οστής γραμμής
- ii. $AP_{ij} = A$ με ανταλλαγή της i -οστής και της j -οστής στήλης
- iii. $P_{ij} = P_{ij}^{-1} = P_{ij}^T$
- iv. $PAP^T \underline{x} = P \underline{\beta}$

Όλες οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούν την i -οστή εξίσωση για να εκφράσουν τον άγνωστο $x_i^{(k+1)}$.

Στην Jacobi επαναληπτική μέθοδο η $(k+1)$ -οστή επαναληπτική τιμή της συνιστώσας x_i εκφράζεται με την k -οστή επαναληπτική τιμή των άλλων συνιστωσών. Αυτό συνεπάγεται ότι η τάξη στην οποία λύνεται η επαναληπτική εξίσωση δεν επιδράει στην τιμή των διαδοχικών επαναλήψεων. Σε αντίθεση και στην Gauss–Seidel και στην SOR μέθοδο οποιαδήποτε αλλαγή στην τάξη στην οποία λύνεται η επαναληπτική εξίσωση θα επηρεάσει τον ρυθμό σύγκλισης των μεθόδων.

1.9 Block επαναληπτικοί μέθοδοι

Θεώρημα 4.1 : Έστω ο πίνακας A έχει την ιδιότητα $\text{property}(A)$ με διάνυσμα διάταξης $\underline{\chi} = \{\chi_i\}_{i=1}^N$ τότε \exists ένας πίνακας μετάθεσης P τ.ω. ο PAP^T να είναι κανονικής μορφής, άρα και συνεπώς διατεταγμένος.

Θεώρημα 4.2 : Ένας πίνακας A με την ιδιότητα $\text{property}(A)$ είναι κανονικής μορφής ανν έχει block 3-διαγώνια μορφή, όπου όλα τα D_i είναι τετραγωνικοί διαγώνιοι πίνακες.

$$\begin{pmatrix} D_1 & A_1 & \dots \\ B_1 & \ddots & A_{M-1} \\ \vdots & B_{M-1} & D_M \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Σημείωση : Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η block δομή της κανονικής μορφής που σχετίζεται με το διάνυσμα διάταξης $\underline{\chi}$ καθορίζεται πλήρως από τον αριθμό των ξεχωριστών συνιστωσών του $\underline{\chi}$. Συνεπώς ο PAP^T που είναι κανονικής μορφής έχει block 3-διαγώνια μορφή, όπου

- i. M είναι ο αριθμός των ξεχωριστών συνιστωσών του $\underline{\chi}$.
- ii. Κάθε D_i είναι τετραγωνικός πίνακας τάξης n_i , όπου n_i είναι ο αριθμός των συνιστωσών του $\underline{\chi}$ ίσος με $i-1$.

Ορισμός 4.1 : Ένας $N \times N$ πίνακας A έχει την ιδιότητα $\text{property}(A)$ αν \exists ένας $N \times N$ πίνακας μετάθεσης P , τ.ω. ο PAP^T να έχει την μορφή $\begin{pmatrix} D_1 & A \\ B & D_2 \end{pmatrix}$, όπου D_1 και D_2 είναι τετραγωνικοί πίνακες.

1.10 Σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές των Jacobi και SOR επαναληπτικών συνεπώς διατεταγμένων πινάκων

Η σχέση ανάμεσα στην ιδιοτιμή λ του SOR επαναληπτικού πίνακα $H(\omega)$, της ιδιοτιμής μ του Jacobi επαναληπτικού πίνακα B και της παραμέτρου ω είναι:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2 \quad (1.17)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω .

Λήμμα 1.1 : Έστω ο πίνακας A έχει block 3-διαγώνια μορφή και μπορεί να εκφραστεί με τον συνήθη τρόπο που είχαμε αναφέρει και προηγουμένως $A = D - L - U$. Ο $A(\alpha)$ ορίζεται ως:

$$A(\alpha) = D - \alpha L - \alpha^{-1} U, \text{ με } \alpha \neq 0$$

Τότε :

$$\det A(\alpha) = \det A$$

Έστω ο $N \times N$ πίνακας A έχει block 3-διαγώνια μορφή, όπου τα D_i είναι τετραγωνικοί πίνακες. Ο A μπορεί να διασπαστεί σε $A = D - L - U$, όπου D ένας $N \times N$ πίνακας και L, U κάτω και άνω τριγωνικός πίνακας αντίστοιχα. Συνεπώς οι Jacobi και SOR επαναληπτικοί πίνακες είναι αντιστοίχως

Για τον Jacobi

$$\begin{aligned} B &= D^{-1}(L+U) \\ \Rightarrow B &= E + F \end{aligned} \quad (1.18)$$

Για την SOR

$$\begin{aligned} H(\omega) &= (D - \omega L)^{-1} \{ (1 - \omega)D + \omega U \} \\ &= (I - \omega D^{-1}L)^{-1} \{ (1 - \omega)I + \omega D^{-1}U \} \\ \Rightarrow H(\omega) &= (I - \omega E)^{-1} \{ (1 - \omega)I + \omega F \} \end{aligned} \quad (1.19)$$

όπου $E = D^{-1}L$ (1.20) και $F = D^{-1}U$ (1.21)

Θεώρημα 5.1 : Πέρα από τις ιδιοτιμές $\mu_i = 0$, οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα Jacobi, προκύπτουν σε ζευγάρια ίδιου μέτρου και αντίθετου προσήμου.

Θεώρημα 5.2 : Αν $\omega \neq 0$ και λ είναι μη-μηδενική ιδιοτιμή του SOR επαναληπτικού πίνακα $H(\omega)$ και μ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2,$$

τότε το μ είναι ιδιοτιμή του Jacobi επαναληπτικού πίνακα B. Ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή αν το μ είναι ιδιοτιμή του Jacobi επαναληπτικού πίνακα B και το λ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση τότε λ είναι ιδιοτιμή του SOR επαναληπτικού πίνακα H(ω).

Παρατηρήσεις

- i. Αν $\omega = 1$ τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\lambda^2 = \lambda\mu^2, \text{ άρα } \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \mu^2$$

Οπότε, αν ο πίνακας A που έχει property(A) είναι της κανονικής μορφής

$$\begin{pmatrix} D_1 & A_1 & \cdots \\ B_1 & \ddots & A_{M-1} \\ \vdots & B_{M-1} & D_M \end{pmatrix}$$

Τότε η Gauss-Seidel μέθοδος συγκλίνει αν συγκλίνει και η Jacobi μέθοδος. Αν συγκλίνουν και οι 2 μέθοδοι τότε

$$\rho\{H(1)\} = \{\rho(B)\}^2 < 1 \quad (1.22)$$

Και συνεπώς από τον ορισμό

$$R_\infty\{H(1)\} = 2R_\infty(B), \quad (1.23)$$

Συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει ασυμπτωτικά 2 φορές πιο γρήγορα από την μέθοδο της Jacobi.

- ii. Η σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές των Jacobi και SOR επαναληπτικών μεθόδων ισχύει για κάθε συνεπώς διατεταγμένο πίνακα και όχι μόνο για πίνακες που έχουν την κανονική μορφή.
- iii. Αν ο πίνακας A της εξίσωσης $Ax = b$ είναι ασυνεπώς διατεταγμένος τότε ο property(A) συνεπάγεται την ύπαρξη ενός πίνακα μετάθεσης P τ.ω. ο PAP^T να είναι συνεπώς διατεταγμένος. Οπότε η εξίσωση $Ax = b$ μπορεί να εκφραστεί με την μορφή :

$$PAP^T P \underline{x} = P \underline{\beta} \quad (1.24)$$

Η παραπάνω μορφή μας δείχνει ότι η σχέση $(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2$ ισχύει. Αυτή είναι η σημασία του property(A).

Εφόσον οι ιδιοτιμές του Jacobi πίνακα που σχετίζεται με τον πίνακα A και τον PAP^T είναι ίδιες συνεπάγεται ότι η το θεώρημα ισχύει για κάθε πίνακα με την ιδιότητα property(A) ακόμα κι αν αυτός είναι ασυνεπώς διατεταγμένος.

- iv. Από την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι η ιδιοτιμή λ_i του $H(\omega)$ εξαρτάται μόνο από την ιδιοτιμή μ_i και την παράμετρο ω . Εφόσον η ιδιοτιμή του Jacobi πίνακα B δεν αλλάζει κατά τον μετασχηματισμό του πίνακα A σε PAP^T , συμπεραίνουμε ότι και ο SOR επαναληπτικός πίνακας $H(\omega)$ θα έχει το ίδιο σύνολο των ιδιοτιμών. Συνεπώς η SOR επαναληπτική μέθοδος θα έχει τον ίδιο ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης.

Υπολογισμός της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου υπερχαλάρωσης ω

Η σχέση $(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2$ μας οδηγεί στον υπολογισμό της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου υπερχαλάρωσης ω , η οποία ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα $\rho\{H(\omega)\}$ και μεγιστοποιεί τον ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης $R_\infty\{H(\omega)\}$ της SOR επαναληπτικής μεθόδου. Ο προσδιορισμός του ω_{opt} έχει ανάγκη την φασματική ακτίνα $\rho(B)$ του πίνακα Jacobi.

Θεώρημα 6.1 : Έστω ο πίνακας A είναι συνεπώς διατεταγμένος και έχει την ιδιότητα $property(A)$ με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο. Αν όλες οι ιδιοτιμές του Jacobi επαναληπτικού πίνακα B , που σχετίζεται με τον A , είναι πραγματικές και ισχύει

$0 < \rho(B) < 1$ τότε:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \{1 - \rho(B)\}^{1/2}} \quad (1.25)$$

και

$$\rho\{H(\omega_{opt})\} = \omega_{opt} - 1 \quad (1.26)$$

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως η SOR μέθοδος που εφαρμόζεται στις εξισώσεις $Ax = b$, συγκλίνει για $\omega \in (0,2)$.

Κεφάλαιο 2

Conjugate Gradient Method

(Μέθοδος συζυγών παραγώγων)

Οι μέθοδοι συζυγών κλίσεων πιθανότατα παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Schmidt το 1908, και επαναπροσδιορίστηκαν εκ νέου από τους Fox, Huskey και Wilkinson το 1948. Στις αρχές της δεκαετίας του πενήντα, η μέθοδος CG ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τους Hestenes και Stiefel. Τα όρια σύγκλισης για CG στα Chebyshev πολυώνυμα αναπτύχθηκαν από τον Kaniel. Μια πιο ενδελεχής ανάλυση των CG σύγκλισης παρέχονται από τους Van der Sluis και Van der Vorst. Η CG μέθοδος διαδόθηκε ως μια επαναληπτική μέθοδο για μεγάλους πίνακες από τον Reid το 1971.

Η CG μέθοδος γενικεύτηκε σε μη γραμμικά προβλήματα το 1964 από τους Fletcher και Reeves, βασισμένοι σε μια εργασία των Davidon, Fletcher και Powell. Σύγκλιση των μη γραμμικών CG με ανακριβείς line searches αναλύθηκαν από τον Daniel. Η επιλογή του β συζητήθηκε από τους Gilbert και Nocedal.

2.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος συζυγών κλίσεων είναι η κυριότερη επαναληπτική μέθοδος για επίλυση μεγάλων αραιών συστημάτων της μορφής

$$Ax = b \quad (2.1)$$

Όπου x ένα άγνωστο διάνυσμα, b ένα γνωστό διάνυσμα και A ένας γνωστός τετραγωνικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Επαναληπτικές μέθοδοι όπως η CG είναι κατάλληλη για αραιούς πίνακες. Αν ο πίνακας A είναι πυκνός τότε προτιμότερο είναι να λύσουμε τον πίνακα με πίσω αντικατάσταση. Ο χρόνος που χρειάζεται για να παραγωγίσουμε έναν πυκνό πίνακα A είναι ίσος με τον χρόνο που χρειαζόμαστε να επιλύσουμε το σύστημα επαναληπτικά. Επιπλέον οι άμεσες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του συστήματος παύουν να είναι κατάλληλες εξαιτίας της περιορισμένης μνήμης και χρόνου. Έτσι για μεγάλα αραιά συστήματα εφαρμόζουμε επαναληπτικές μεθόδους που έχουν μικρότερο κόστος, ικανοποιητική μνήμη και εκτελούνται πιο γρήγορα.

Τετραγωνική μορφή

Η μέθοδος βασίζεται στην ισοδυναμία ανάμεσα στην λύση ενός γραμμικού συστήματος και την ελαχιστοποίηση τετραγωνικής συνάρτησης.

Μια τετραγωνική μορφή είναι μια βαθμωτή, τετραγωνική συνάρτηση ενός διανύσματος με μορφή

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c \quad (2.2)$$

Όπου A είναι ένας πίνακας, x και b διανύσματα και c μια σταθερά. Αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, η $f(x)$ ελαχιστοποιείται από την λύση του $Ax=b$. Πράγματι η κλίση μιας τετραγωνικής μορφής ορίζεται από τον τύπο

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Η κλίση μας δείχνει την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της $f(x)$. Έτσι μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την $f(x)$, μηδενίζοντας την κλίση της.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2} A^T x + \frac{1}{2} A x - b \quad (2.4)$$

και αν ο A είναι συμμετρικός η σχέση (2.4) γίνεται

$$f'(x) = A x - b \quad (2.5)$$

Παρατηρούμε ότι μηδενίζοντας την κλίση $f'(x)$ η σχέση (2.5) γίνεται ισοδύναμη με την αρχική μας σχέση $Ax=b$. Επομένως η λύση του συστήματος x αποτελεί κρίσιμο σημείο της $f(x)$. Αν ο A είναι θετικά ορισμένος η λύση του συστήματος είναι το σημείο ελαχίστου της $f(x)$. Αν ο A δεν είναι συμμετρικός τότε η CG θα βρει μια λύση του συστήματος

$$\frac{1}{2} (A^T + A) x = b$$

όπου $\frac{1}{2} (A^T + A)$ είναι συμμετρικός.

2.2 Η μέθοδος Steepest Descent

Στην μέθοδο που θα μελετήσουμε τώρα, ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο $x_{(0)}$ προσπαθούμε να βρούμε το σημείο ελαχίστου. Έτσι προκύπτει μία ακολουθία προσεγγίσεων $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots$, μέχρι να φτάσουμε πολύ κοντά στη λύση x . Σε κάθε $x_{(i)}$ που βρίσκουμε αναζητούμε την κατεύθυνση με το μέγιστο ρυθμό μείωσης της f , που είναι αντίθετη της $f'(x)$ δηλαδή αναζητούμε την

$$-f'(x_{(i)}) = b - Ax_{(i)} \quad (2.6)$$

Θα ορίσουμε κάποιες χρήσιμες ποσότητες όπως το σφάλμα και το υπόλοιπο. Το σφάλμα $e_{(i)} = x_{(i)} - x$ (2.7) είναι ένα διάνυσμα που δείχνει πόσο μακριά είμαστε από την λύση x ενώ το υπόλοιπο $r_{(i)} = b - Ax_{(i)}$ (2.8) είναι ένα διάνυσμα που μας δείχνει πόσο μακριά είμαστε από την πραγματική τιμή του b . Προφανώς ισχύει

$$r_{(i)} = -Ae_{(i)} \quad (2.9)$$

αλλά πιο σημαντική σχέση που ισχύει είναι

$$r_{(i)} = -f'(x_{(i)}) \quad (2.10)$$

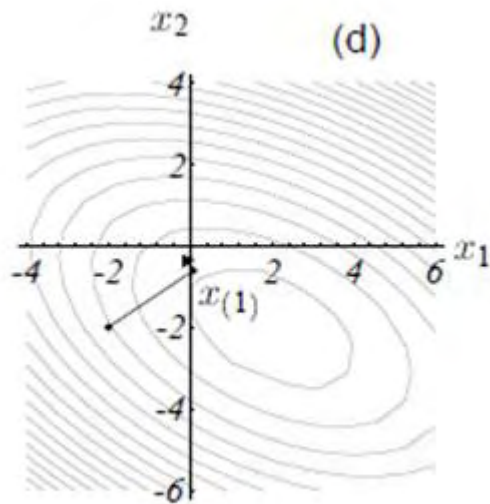
Η σχέση (2.10) συνδέει το υπόλοιπο με την κατεύθυνση μέγιστου ρυθμού μείωσης της f .

Έστω ότι ξεκινάμε από ένα σημείο $x_{(0)}$ τότε το επόμενο σημείο θα δίνεται από τη σχέση

$$x_{(1)} = x_{(0)} - ar_{(0)} \quad (2.11)$$

όπου ο συντελεστής a πρέπει να ελαχιστοποιεί την f . Ο a ελαχιστοποιεί την f όταν η κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{d}{da} f(x_{(1)})$ μηδενίζεται. Από τον κανόνα της αλυσίδας

$\frac{d}{da} f(x_{(1)}) = f'(x_{(1)})^T \frac{d}{da} x_{(1)} = f'(x_{(1)})^T r_{(0)}$ (2.12) και θέτοντας την έκφραση ίσον με το μηδέν, συμπεραίνουμε ότι η τιμή του a θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε τα $f'(x_{(1)})^T$ και $r_{(0)}$ πρέπει να είναι ορθογώνια μεταξύ τους όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4

Σύμφωνα με την σχέση του κανόνα της αλυσίδας (2.12) και την (2.10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 r_{(1)}^T r_{(0)} &= 0 \\
 (b - Ax_{(1)})^T r_{(0)} &= 0 \\
 (b - A(x_{(0)} + ar_{(0)}))^T r_{(0)} &= 0 \\
 (b - Ax_{(0)})^T r_{(0)} &= a(Ar_{(0)})^T r_{(0)} \\
 r_{(0)}^T r_{(0)} &= ar_{(0)}^T (Ar_{(0)}) \\
 a &= \frac{r_{(0)}^T r_{(0)}}{r_{(0)}^T (Ar_{(0)})}
 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας για την μέθοδο Steepest Descent καταλήγουμε :

$$r_{(i)} = b - Ax_{(i)} \quad (2.8)$$

$$a_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i)}^T Ar_{(i)}} \quad (2.13)$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + a_{(i)} r_{(i)} \quad (2.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.11) με τον πίνακα $-A$ και προσθέτοντας το b έχουμε:

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - a_{(i)} Ar_{(i)} \quad (2.14)$$

Άρα η σχέση (2.8) είναι απαραίτητη μόνο για τον υπολογισμό του $r_{(0)}$, ενώ η σχέση (2.14) χρησιμοποιείται για τους περαιτέρω υπολογισμούς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το γινόμενο Ar να χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο μια φορά σε κάθε βήμα. Το μειονέκτημα αυτού του τρόπου είναι ότι ο υπολογισμός των x_i μπορεί να μην δώσει ακριβή προσέγγιση της λύσης x λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να περιοριστεί αν εφαρμόζουμε περιοδικά την σχέση (2.8) για τον προσδιορισμό του υπολοίπου.

Σύγκλιση της μεθόδου Steepest Descent

Θα εξετάσουμε 2 περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το σφάλμα e_i να είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με ιδιοτιμή λe_i και στη δεύτερη περίπτωση που είναι πιο γενική το σφάλμα να μην είναι ιδιοδιάνυσμα.

Ας αναλύσουμε τώρα την πρώτη περίπτωση. Το υπόλοιπο είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα με τιμή

$$r_{(i)} = -Ae_{(i)} = -\lambda_e e_{(i)} \quad (2.15)$$

Οπότε η σχέση (2.11) μας δίνει

$$\begin{aligned} e_{(i+1)} &= e_{(i)} + \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i)}^T A r_{(i)}} r_{(i)} \\ &= e_{(i)} + \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{\lambda_e r_{(i)}^T r_{(i)}} (-\lambda_e e_{(i)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν επιλέξουμε $\alpha_{(i)} = \lambda_e^{-1}$ έχουμε απευθείας σύγκλιση.

Τώρα θα αναλύσουμε την πιο γενική περίπτωση όπου το e_i δεν είναι ιδιοδιάνυσμα. Το e_i θα το εκφράσουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων τα οποία θα πρέπει να είναι ορθοκανονικά. Αποδεικνύεται ότι αν ο A είναι συμμετρικός, έχει ένα σύνολο n ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων $u_j, j=1, \dots, n$ και προκύπτει η ιδιότητα

$$u_j^T u_k = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Το σφάλμα εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων

$$e_{(i)} = \sum_{j=1}^n \xi_j u_j \quad (2.16)$$

Όπου το ξ_j το μήκος κάθε συνιστώσας του σφάλματος $e_{(i)}$. Άρα από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$r_{(i)} = -Ae_{(i)} = -\sum_j \xi_j \lambda_j u_j \quad (2.17)$$

$$\|e_{(i)}\|^2 = e_{(i)}^T e_{(i)} = \sum_j \xi_j^2 \quad (2.18)$$

$$e_{(i)}^T A e_{(i)} = \sum_j \xi_j^2 \lambda_j \quad (2.19)$$

$$\|r_{(i)}\|^2 = r_{(i)}^T r_{(i)} = \sum_j \xi_j^2 \lambda_j^2 \quad (2.20)$$

$$r_{(i)}^T A r_{(i)} = \sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3 \quad (2.21)$$

Αναπτύσσοντας την σχέση (2.11) και σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} e_{(i+1)} &= e_{(i)} + \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{r_{(i)}^T A r_{(i)}} r_{(i)} \\ &= e_{(i)} + \frac{\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^2}{\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3} r_{(i)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε ότι αν το σφάλμα $e_{(i)}$ έχει μόνο μια συνιστώσα ιδιοδιανύσματος τότε η σύγκλιση επιτυγχάνεται σ' ένα βήμα επιλέγοντας $\alpha_{(i)} = \lambda_e^{-1}$.

Σε περίπτωση τώρα που όλα τα ιδιοδιανύσματα έχουν τιμή λ τότε η παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned} e_{(i+1)} &= e_{(i)} + \frac{\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^2}{\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3} (-\lambda e_{(i)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Στην γενική περίπτωση για να βρούμε ένα φράγμα για την σύγκλιση της Steepest Descent, ορίζουμε την νόρμα ενέργειας $\|e\|_A = (e^T A e)^{1/2}$. Η χρήση αυτής της νόρμας είναι πιο εύκολη από της Ευκλείδειας και συμπεραίνουμε ότι η ελαχιστοποίηση της τιμής της νόρμας ενέργειας $\|e_{(i)}\|_A$ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της $f(x_{(i)})$

Άρα αναλύοντας την νόρμα ενέργειας έχουμε

$$\begin{aligned}\|e_{(i+1)}\|_A^2 &= e_{(i+1)}^T A e_{(i+1)} \\ &= \|e_{(i)}\|_A^2 \omega^2\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\text{όπου } \omega^2 = 1 - \frac{\sum_j (\xi_j^2 \lambda_j^2)^2}{(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3)(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j)} \quad (2.24)$$

Συνεπώς η ανάλυση εξαρτάται από την μέγιστη τιμή του άνω ορίου για το ω . Μετά από πράξεις το ω που προσδιορίζει το ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου γράφεται σαν συνάρτηση του μ και κ .

$$\omega^2 = 1 - \frac{(\kappa^2 + \mu^2)^2}{(\kappa + \mu^2)(\kappa^3 + \mu^2)} \quad (2.25)$$

Διατηρώντας το κ σταθερό η παραπάνω εξίσωση μεγιστοποιείται όταν $\mu = \pm \kappa$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$\omega \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad (2.26)$$

Όπου κ είναι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A , που ισούται με το λόγο της μεγαλύτερης (λ_{\max}) προς τη μικρότερη (λ_{\min}) ιδιοτιμή του πίνακα.

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (2.27)$$

Όσο πιο μεγάλη τιμή έχει ο κ τόσο πιο αργή θα είναι η σύγκλιση της μεθόδου Steepest Descent.

Τελικά προκύπτει :

$$\|e_{(i)}\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^i \|e_{(0)}\|_A \quad (2.28)$$

$$\text{και } \frac{f(x_{(i)}) - f(x)}{f(x_{(0)}) - f(x)} = \frac{\frac{1}{2} e_{(i)}^T A e_{(i)}}{\frac{1}{2} e_{(0)}^T A e_{(0)}} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{2i} \quad (2.29)$$

2.3 Η μέθοδος Conjugate Directions (Μέθοδος των συζυγών κατευθύνσεων)

Στη μέθοδο της απότομης καθόδου (Steepest Descent) συχνά κινούμαστε σε κατευθύνσεις που κινηθήκαμε σε προηγούμενες επαναλήψεις. Όπως είναι αναμενόμενο θα ήταν προτιμότερο σε κάθε βήμα να κινούμαστε σε κατευθύνσεις στις οποίες δεν είχαμε κινηθεί προηγουμένως. Άρα σε κάθε βήμα θα είμαστε σε μια νέα διεύθυνση. Η βασική ιδέα είναι η επιλογή ενός συνόλου ορθογώνιων κατευθύνσεων (search directions) $d_{(0)}, d_{(1)}, \dots, d_{(n-1)}$ όπου σε κάθε μια από αυτές θα πραγματοποιούμε ένα βήμα. Μετά από ακριβώς n βήματα θα έχουμε φτάσει στη λύση. Το πρώτο βήμα υπολογίζει την x_1 συντεταγμένη της λύσης, το δεύτερο βήμα τη x_2 κ.ο.κ. Γενικά, σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα σημείο

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + a_{(i)} d_{(i)} \quad (2.30)$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του $a_{(i)}$, στηρίζομαστε στο γεγονός ότι $e_{(i+1)}$ πρέπει να είναι ορθογώνιο προς το $d_{(i)}$, έτσι ώστε να μην χρειαστεί ποτέ να επανέρθουμε στην κατεύθυνση. Επομένως, από αυτήν την συνθήκη και την σχέση (2.30) προκύπτει

$$\begin{aligned} d_{(i)}^T e_{(i+1)} &= 0 \\ d_{(i)}^T (e_{(i)} + a_{(i)} d_{(i)}) &= 0 \\ a_{(i)} &= - \frac{d_{(i)}^T e_{(i)}}{d_{(i)}^T d_{(i)}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Δυστυχώς ακολουθώντας τον παραπάνω τρόπο καταλήγουμε σε πρόβλημα, αφού για τον υπολογισμό του $a_{(i)}$ χρειαζόμαστε να ξέρουμε την λύση του προβλήματος, δηλαδή το $e_{(i)}$. Για να λύσουμε τώρα το πρόβλημα αντί για ορθογώνιες θα χρησιμοποιήσουμε A- ορθογώνιες κατευθύνσεις. Δύο διανύσματα $d_{(i)}$ και $d_{(j)}$ είναι A-ορθογώνια, ή συζυγής (conjugate), αν

$$d_{(i)}^T A d_{(j)} = 0$$

Η προϋπόθεση μας τώρα είναι το $e_{(i+1)}$ να είναι A-ορθογώνιο προς το $d_{(i)}$. Αυτή η συνθήκη ορθογωνιότητας είναι ισοδύναμη με την εύρεση του ελάχιστου σημείου κατά μήκος της κατεύθυνσης $d_{(i)}$, όπως συμβαίνει και στην μέθοδο απότομης καθόδου. Αυτό αποδεικνύεται, θέτοντας την κατευθυνόμενη παράγωγο ίσον με μηδέν και σύμφωνα και πάλι με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{d}{da} f(x_{(i+1)}) = f'(x_{(i)})^T \frac{d}{da} x_{(i+1)} = 0$$

$$-r_{(i+1)}^T d_{(i)} = 0$$

$$d_{(i)}^T A e_{(i+1)} = 0$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις η σχέση για το $a_{(i)}$ είναι

$$\begin{aligned} a_{(i)} &= -\frac{d_{(i)}^T A e_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \\ &= \frac{d_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Σε αντίθεση με τη σχέση (2.31) μπορούμε να υπολογίσουμε την έκφραση αυτή. Παρατηρούμε ότι αν σαν διανύσματα αναζήτησης $d_{(i)}$ χρησιμοποιούσαμε τα διανύσματα $r_{(i)}$, η παραπάνω εξίσωση για το $a_{(i)}$ θα ήταν πανομοιότυπη με αυτή που χρησιμοποιείται στη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Για να αποδείξουμε ότι η διαδικασία αυτή υπολογίζει τη λύση x σε n βήματα, εκφράζουμε τον όρο λάθους σαν ένα γραμμικό συνδυασμό των κατευθύνσεων αναζήτησης.

$$e_{(0)} = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{(j)} d_{(j)} \quad (2.33)$$

Για να βρούμε τις τιμές του $\delta_{(j)}$, λόγω του ότι οι κατευθύνσεις αναζήτησης είναι A-ορθογώνιες, πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της εξίσωσης με $d_{(k)}^T A$ και προκύπτει

$$\begin{aligned} d_{(k)}^T A e_{(0)} &= \sum_j \delta_{(j)} d_{(k)}^T A d_{(j)} \\ d_{(k)}^T A e_{(0)} &= \delta_{(k)} d_{(k)}^T A d_{(k)} \end{aligned}$$

Πραγματοποιώντας τις πράξεις βρίσκουμε μια σχέση για το $\delta_{(k)}$

$$\delta_{(k)} = \frac{d_{(k)}^T A e_{(k)}}{d_{(k)}^T A d_{(k)}} \quad (2.34)$$

Από τις εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι $a_{(i)} = -\delta_{(i)}$. Η σχέση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διαδικασία κατασκευής της λύσης x από τις συνιστώσες του μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν μια διαδικασία μείωσης του όρου σφάλματος.

$$\begin{aligned} e_{(i)} &= e_{(0)} + \sum_{j=0}^{i-1} a_{(j)} d_{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{(j)} d_{(j)} - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{(j)} d_{(j)} \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \delta_{(j)} d_{(j)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Μετά από n επαναλήψεις, κάθε συνιστώσα έχει αφαιρεθεί και $e_{(n)} = 0$

Το πρόβλημα που προκύπτει τελικά στη μέθοδο των συζυγών κατευθύνσεων (Conjugate Directions) είναι ότι για να δημιουργήσουμε κάθε νέο διάνυσμα αναζήτησης πρέπει να διατηρούμε στη μνήμη όλα τα προηγούμενα. Για να δημιουργήσουμε ένα σύνολο A -ορθογώνιων κατευθύνσεων χρειαζόμαστε μια διαδικασία της μορφής Gram-Schmidt η οποία ισοδυναμεί με την επίλυση συστήματος με απαλοιφή Gauss. Εξαιτίας αυτών των μειονεκτημάτων η μέθοδος αυτή δεν είναι και η πιο κατάλληλη. Στην συνέχεια θα αναλύσουμε την μέθοδο των συζυγών παραγώγων (Conjugate Gradient).

2.4 Η Μέθοδος των Συζυγών Παραγώγων

Αφού έχουμε αναλύσει παραπάνω τη μέθοδο Steepest Descent και την μέθοδο Conjugate Directions είμαστε σε θέση τώρα να παρουσιάσουμε την μέθοδο των συζυγών παραγώγων (Conjugate Gradient). Γενικά η μέθοδος των συζυγών παραγώγων είναι σαν την μέθοδο των συζυγών κατευθύνσεων αλλά οι κατευθύνσεις αναζήτησης κατασκευάζονται από την συζυγία των υπολοίπων, θέτοντας $u_i = r_{(i)}$.

Η επιλογή μας αυτή έχει νόημα για διάφορους λόγους. Αρχικά, αφού το υπόλοιπο $r_{(i)}$ χρησιμοποιείται και στη μέθοδο Steepest Descent είναι λογικά να χρησιμοποιηθεί και στη μέθοδο Conjugate Gradient. Επίσης, χαρακτηρίζεται από την σημαντική ιδιότητα ότι είναι ορθογώνιο προς τις προηγούμενες κατευθύνσεις αναζήτησης γεγονός που εξασφαλίζει την παραγωγή μιας νέας γραμμικά ανεξάρτητης κατεύθυνσης αναζήτησης, εκτός και αν το υπόλοιπο είναι μηδέν πράγμα που φανερώνει ότι έχουμε δώσει λύση στο πρόβλημα μας. Επιπλέον ο υπόχωρος που ορίζεται από τα υπόλοιπα $r_{(i)}$ είναι ισοδύναμος με το D_i και ισχύει

$$r_{(i)}^T r_{(j)} = 0, i \neq j \quad (2.36)$$

Η αναδρομική σχέση για την εύρεση υπολοίπου $r_{(i+1)} = r_{(i)} - a_{(i)} Ad_{(i)}$ φανερώνει ότι κάθε νέο υπόλοιπο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του προηγούμενου υπολοίπου και του γινομένου $Ad_{(i-1)}$. Επομένως ο χώρος $D_{(i)}$ μπορεί να οριστεί :

$$\begin{aligned} D_{(i)} &= span\{d_{(0)}, Ad_{(0)}, A^2 d_{(0)}, \dots, A^{i-1} d_{(0)}\} \\ &= span\{r_{(0)}, Ar_{(0)}, A^2 r_{(0)}, \dots, A^{i-1} r_{(0)}\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ο υπόχωρος αυτός ή αλλιώς Krylov υπόχωρος έχει την ιδιότητα ότι ο AD_i περιλαμβάνεται στο D_{i+1} , γεγονός που δηλώνει ότι το υπόλοιπο $r_{(i+1)}$ είναι A-ορθογώνιο προς το D_i .

Μέσα από μια διαδικασία μορφής Gram-Schmidt κατανοούμε ότι δεν χρειάζεται να αποθηκεύσουμε τα προηγούμενα διανύσματα αναζήτησης για να εξασφαλίσουμε την A-ορθογωνιότητα των νέων διανυσμάτων αναζήτησης. Αυτό το πλεονέκτημα δείχνει την σημασία της μεθόδου Conjugate Gradient διότι τόσο η χωρική όσο και η χρονική πολυπλοκότητα μειώνεται ανά επανάληψη από $O(n^2)$ σε $O(m)$ όπου m ο αριθμός των μη-μηδενικών στοιχείων του πίνακα A.

Επομένως ο αλγόριθμος της μεθόδου Conjugate Gradient είναι :

$$d_{(0)} = r_{(0)} = b - Ax_{(0)} \quad (2.38)$$

$$a_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}} \quad (2.39)$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + a_{(i)} d_{(i)} \quad (2.40)$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - a_{(i)} A d_{(i)} \quad (2.41)$$

$$\beta_{(i+1)} = \frac{r_{(i+1)}^T r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T r_{(i)}} \quad (2.42)$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)} d_{(i)} \quad (2.43)$$

Σύγκλιση της μεθόδου Conjugate Gradients

Η μέθοδος των συζυγών παραγώγων συγκλίνει στη βέλτιστη λύση μετά από n επαναλήψεις. Στην πράξη όμως, εξαιτίας των σφαλμάτων που προκύπτουν λόγω των αριθμητικών υπολογισμών, χάνεται η A -ορθογωνιότητα των διανυσμάτων αναζήτησης.

Στις μέρες μας η μέθοδος CG χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων πολύ μεγάλου μεγέθους, όπου δεν είναι εφικτή η εκτέλεση του αλγορίθμου ακόμα και για n επαναλήψεις. Το γεγονός αυτό καθιστά την ανάλυση της σύγκλισης της μεθόδου ιδιαίτερα σημαντική.

Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου είναι πανομοιότυπη με της Steepest Descent. Άρα οι συνθήκες κάτω από τις οποίες συγκλίνει η μέθοδος CG έχουν αναλυθεί παραπάνω.

Ιδανικά Πολύνομα

Όπως είδαμε και παραπάνω στην ανάλυση της μεθόδου Conjugate Gradients, η τιμή $e_{(i)}$ σε κάθε επανάληψη δίνεται από την σχέση

$$e_{(i)} = e_{(0)} + D_{(i)} \quad (2.44)$$

Όπου $D_{(i)} = \text{span}\{r_{(0)}, Ar_{(0)}, A^2r_{(0)}, \dots, A^{i-1}r_{(0)}\}$

$$= \text{span}\{Ae_{(0)}, A^2e_{(0)}, A^3e_{(0)}, \dots, A^ie_{(0)}\}$$

Ο Κρυλον υπόχωρος εκτός από την ιδιότητα ότι ο AD_i περιλαμβάνεται στο D_{i+1} που αναφέραμε στην ανάλυση της μεθόδου, έχει και μια εξίσου πολύ σημαντική ιδιότητα

$$e_{(i)} = (I + \sum_{j=1}^i \psi_j A^j) e_{(0)} \quad (2.45)$$

Η μέθοδος Conjugate Gradient επιλέγει τους συντελεστές ψ_j έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν την $\|e_{(i)}\|_A$.

Η παραπάνω έκφραση στη παρένθεση $(I + \sum_{j=1}^i \psi_j A^j) e_{(0)}$ μπορεί να εκφραστεί σαν ένα πολυώνυμο, $P_i(\lambda)$. Συνεπώς η επίδραση του πολυωνύμου στο σφάλμα μας δίνει

$$e_{(i)} = P_i(A) e_{(0)} \quad (2.46)$$

Και όπως στην μέθοδο Steepest Descent εκφράζουμε το $e_{(0)}$ σαν γραμμικό συνδυασμό ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων μοναδιαίου μέτρου.

Άρα

$$e_{(0)} = \sum_{j=1}^n \xi_j u_j \quad (2.47)$$

Και έτσι έχουμε

$$e_{(i)} = \sum_{j=1}^n \xi_j P_i(\lambda_j) u_j$$

$$Ae_{(i)} = \sum_{j=1}^n \xi_j P_i(\lambda_j) \lambda_j u_j$$

$$\|e_{(i)}\|_A^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 [P_i(\lambda_j)]^2 \lambda_j \quad (2.48)$$

Η μέθοδος CG βρίσκει το πολυώνυμο που ελαχιστοποιεί την έκφραση αυτή, η σύγκλιση όμως καθορίζεται από τη σύγκλιση του χειρότερου ιδιοδιανύσματος. Έστω ότι $\Lambda(A)$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A , οπότε η σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται από το $\Lambda(A)$.

$$\begin{aligned} \|e_{(i)}\|_A^2 &\leq \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \sum_j \xi_j^2 \lambda_j \\ &= \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \|e_{(0)}\|_A^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Η μέθοδος των συζυγών παραγώγων συγκλίνει γρηγορότερα αν υπάρχουν διπλές ιδιοτιμές και καταλήγει στην ακριβή λύση μετά από n επαναλήψεις. Έστω ότι διαθέτουμε αριθμητική άπειρης ακρίβειας, ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για την εύρεση της ακριβούς λύσης είναι ίσος το πολύ με τον αριθμό των διακριτών ιδιοτιμών. Επιπλέον η σύγκλιση της μεθόδου επιτυγχάνεται σε λιγότερες επαναλήψεις αν οι ιδιοτιμές είναι σχετικά συγκεντρωμένες μέσα σε διάστημα $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ λόγω ότι η επιλογή ενός πολυωνύμου που επιβάλλει μικρή τιμή στη σχέση είναι απλούστερη.

Chebyshev πολυώνυμα

Σ αυτήν την περίπτωση θα δείξουμε ότι είναι χρήσιμο να ελαχιστοποιήσουμε την σχέση (2.49) σε όλο το διάστημα $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ επιλέγοντας το κατάλληλο πολυώνυμο. Αυτού του είδους τα πολυώνυμα βασίζονται στα Chebyshev πολυώνυμα.

Τα Chebyshev πολυώνυμα βαθμού i είναι :

$$T_i(\omega) = \frac{1}{2} [(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^i + (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^i] \quad (2.50)$$

Και έχουν την ιδιότητα

- $T_i(\omega) \leq 1$ στο διάστημα $\omega \in [-1, 1]$
- $T_i(\omega)$ είναι μέγιστο στο διάστημα $\omega \notin [-1, 1]$

Επομένως η σχέση (2.49) ελαχιστοποιείται επιλέγοντας σαν πολυώνυμο

$$P_i(\lambda) = \frac{T_i\left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min} - 2\lambda}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right)}{T_i\left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right)} \quad (2.51)$$

Και έτσι καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\|e_{(i)}\|_A &\leq T_i \left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} \right)^{-1} \|e_{(0)}\|_A \\
&= T_i \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{-1} \|e_{(0)}\|_A \\
&= 2 \left[\left(\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1} \right)^i + \left(\frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1} \right)^i \right]^{-1} \|e_{(0)}\|_A
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Ο δεύτερος όρος μέσα στις τετράγωνες παρενθέσεις συγκλίνει στο 0 καθώς το i αυξάνεται. Έτσι προκύπτει:

$$\|e_i\|_A = 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1} \right)^i \|e_0\|_A \tag{2.53}$$

Η σχέση (2.53) μας δίνει ένα φράγμα για το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου CG σε σχέση με το δείκτη της κατάστασης κ του πίνακα A .

Πολυπλοκότητα

Υποθέτουμε ότι επιθυμούμε να εκτελεστούν πολλές επαναλήψεις για να ελαττωθεί η νόρμα σφάλματος κατά ένα παράγοντα ε , δηλαδή $\|e_i\|_A \leq \varepsilon \|e_0\|_A$. Αποδεικνύεται ότι το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων που χρειάζεται η μέθοδος **Steepest Descent** και **CG** είναι αντίστοιχα:

$$i \leq \left\lceil \frac{1}{2} \kappa \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil \tag{2.54}$$

$$i \leq \left\lceil \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) \right\rceil \tag{2.55}$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η χρονική πολυπλοκότητα της πιο απότομης καθόδου είναι $O(m\kappa)$ ενώ των συζυγών παραγωγών είναι $O(m\sqrt{\kappa})$. Οι δύο αλγόριθμοι έχουν χωρική πολυπλοκότητα ίση με $O(N)$.

Ξεκίνημα και Τερματισμός

Στις παρουσιάσεις των μεθόδων που εξετάσαμε προηγουμένως, αυτή της απότομης καθόδου και των συζυγών κατευθύνσεων, αρκετές λεπτομέρειες έχουν παραλειφθεί, όπως πως να διαλέξουμε ένα σημείο εκκίνησης και πότε να σταματήσει.

Ξεκίνημα

Εάν έχουμε μια πρόχειρη εκτίμηση της τιμής του x , το χρησιμοποιούμε σαν αρχική τιμή $x_{(0)}$. Εάν όχι, θέτουμε $x_{(0)} = 0$. Και οι δύο μέθοδοι θα συγκλίνουν τελικά στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Η μη γραμμική ελαχιστοποίηση είναι πιο περίπλοκη καθώς μπορεί να υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα και έτσι η επιλογή του σημείου εκκίνησης θα καθορίσει αν θα συγκλίνουν ή όχι.

Τερματισμός

Όταν η μέθοδος της απότομης κάθοδο ή CG φθάνει στο ελάχιστο σημείο, το υπόλοιπο γίνεται μηδέν, και αν οι (2.13) και (2.42) αξιολογούνται μια επανάληψη αργότερα, η διαίρεση με το μηδέν θα έχει αποτέλεσμα. Φαίνεται, λοιπόν, ότι πρέπει να σταματήσει αμέσως, όταν το υπόλοιπο είναι μηδέν. Για να περιπλέξουμε τα πράγματα όμως, συσσωρευμένο σφάλμα στρογγυλοποίησης στην αναδρομική σύνθεση του υπολοίπου (σχέση 2.41) μπορεί να δώσει ένα ψευδές μηδενικό υπόλοιπο. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί με την επανεκκίνηση με την (σχέση 2.38).

2.5 Προσαρμογή της μεθόδου των συζυγών παραγωγών (Preconditioning)

Η preconditioning τεχνική βελτιώνει το δείκτη κατάστασης ενός πίνακα. Υποθέτουμε ότι M είναι ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας που προσεγγίζει τον πίνακα A , αλλά ευκολότερος στην αντιστροφή. Θα επιλύσουμε το σύστημα $Ax=b$, εμμέσως επιλύοντας το

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (2.56)$$

Εάν $\kappa(M^{-1}A) \ll \kappa(A)$ ή οι ιδιοτιμές του $M^{-1}A$ είναι καλύτερα ομαδοποιημένες από αυτές του A , μπορούμε αναδρομικά να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα με τη μέθοδο των συζυγών παραγωγών, σε λιγότερα βήματα από το αρχικό πρόβλημα. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι $M^{-1}A$ δεν είναι ούτε συμμετρικός, ούτε θετικά ορισμένος ακόμα και αν οι M, A είναι.

Παρακάμπτουμε τη δυσκολία αυτή, γιατί για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο M υπάρχει ένας πίνακας E που ικανοποιεί την ιδιότητα $EE^T = M$. Οι πίνακες $M^{-1}A$ και $E^{-1}AE^T$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Πράγματι, αν v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $M^{-1}A$ με ιδιοτιμή λ , τότε το $E^T v$ είναι επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα του $E^{-1}AE^T$ με ιδιοτιμή λ .

$$\begin{aligned}
(E^{-1}AE^{-T})(E^T v) &= (E^T E^{-T})E^{-1}Av \\
&= E^T M^{-1}Av \\
&= \lambda E^T v
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Η επίλυση του $Ax = b$ προκύπτει έμμεσα από την επίλυση του

$$\begin{aligned}
E^{-1}AE^{-T}x &= E^{-1}b \\
x &= E^T x
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Αφού ο $E^{-1}AE^{-T}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, το διάνυσμα x μπορεί να βρεθεί από την μέθοδο της απότομης καθόδου ή των συζυγή παραγώγων. Η διαδικασία CG που χρησιμοποιείται για να λυθεί το σύστημα ονομάζεται Transformed Preconditioned Conjugate Gradient Method:

$$\begin{aligned}
\widehat{d}_{(0)} &= \widehat{r}_{(0)} = E^{-1}b - E^{-1}AE^{-T}\widehat{x}_{(0)}, \\
a_{(i)} &= \frac{\widehat{r}_{(i)}^T \widehat{r}_{(i)}}{\widehat{d}_{(i)}^T E^{-1}AE^{-T}\widehat{d}_{(i)}}, \\
\widehat{x}_{(i+1)} &= \widehat{x}_{(i)} + a_{(i)}\widehat{d}_{(i)}, \\
\widehat{r}_{(i+1)} &= \widehat{r}_{(i)} - a_{(i)}E^{-1}AE^{-T}\widehat{d}_{(i)}, \\
\beta_{(i+1)} &= \frac{\widehat{r}_{(i+1)}^T \widehat{r}_{(i+1)}}{\widehat{r}_{(i)}^T \widehat{r}_{(i)}}, \\
\widehat{d}_{(i+1)} &= \widehat{r}_{(i+1)} + \beta_{(i+1)}\widehat{d}_{(i)}.
\end{aligned}$$

Μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο υπολογισμός του πίνακα E . Για αυτό το λόγο, θέτουμε $\widehat{r}_{(i)} = E^{-1}r_{(i)}$, $\widehat{d}_{(i)} = E^T d_{(i)}$ και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες $\widehat{x}_{(i)} = E^T x_{(i)}$ και $E^{-T}E^{-1} = M^{-1}$, παράγουμε την Untransformed Preconditioned Conjugate Gradient Method:

$$\begin{aligned}
r_{(0)} &= b - Ax_{(0)}, \\
d_{(0)} &= M^{-1}r_{(0)}, \\
a_{(i)} &= \frac{r_{(i)}^T M^{-1}r_{(i)}}{d_{(i)}^T A d_{(i)}}, \\
x_{(i+1)} &= x_{(i)} + a_{(i)}d_{(i)}, \\
r_{(i+1)} &= r_{(i)} - a_{(i)}A d_{(i)}, \\
\beta_{(i+1)} &= \frac{r_{(i+1)}^T M^{-1}r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T M^{-1}r_{(i)}}, \\
d_{(i+1)} &= M^{-1}r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)}d_{(i)}.
\end{aligned}$$

Ο πίνακας E δεν εμφανίζεται στις παραπάνω εξισώσεις. Απαιτείται μόνο η γνώση του M^{-1} .

Η μέθοδος CG σε κανονικές εξισώσεις

Οι CG μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λυθούν συστήματα, όπου ο A δεν είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και ούτε τετραγωνικός. Μια λύση για το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων

$$\min_x \|Ax - b\|^2 \quad (2.59)$$

μπορεί να βρεθεί θέτοντας την παράγωγο της παραπάνω έκφρασης ίση με 0:

$$A^T Ax = A^T b \quad (2.60)$$

Εάν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας και nonsingular, η λύση στην (2.60) είναι η λύση του $Ax=b$. Εάν πάλι ο A δεν είναι τετραγωνικός και το σύστημα έχει περισσότερες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις από ότι μεταβλητές, τότε δεν ξέρουμε αν υπάρχει μια λύση για το $Ax=b$ αλλά είναι πάντα σίγουρο ότι θα βρεθεί μια τιμή του x που θα ελαχιστοποιεί την (2.59).

Ο $A^T A$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Εάν το σύστημα $Ax=b$ έχει περισσότερες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις από ότι μεταβλητές, τότε ο $A^T A$ είναι nonsingular και μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι Steepest Descent και CG.

Η μη γραμμική Συζυγών Κλίσεων Μέθοδος (nonlinear CG method)

Η CG μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελαχιστοποιήσει μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$, της οποίας η παράγωγος f' μπορεί να υπολογισθεί. Η βελτιστοποίηση αυτή μπορεί να συμβεί σε διάφορες εφαρμογές όπως στην μηχανική σχεδίαση ή στα νευρωνικά δίκτυα κατάρτισης.

Στην μη γραμμική CG μέθοδο, το υπόλοιπο θέτεται ίσο με το αρνητικό της παραγώγου, $r_{(i)} = -f'(x_{(i)})$. Όπως και στην γραμμική CG μέθοδο, μια τιμή της $a_{(i)}$ που ελαχιστοποιεί την $f(x_{(i)} + a_{(i)}d_{(i)})$, μπορεί να βρεθεί εξασφαλίζοντας ότι η παράγωγος είναι ορθογώνια προς την κατεύθυνση αναζήτησης. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε αλγόριθμο για να βρούμε τις ρίζες της $\left[f'(x_{(i)} + a_{(i)}d_{(i)}) \right]^T d_{(i)}$.

Υπάρχουν δύο επιλογές για τον υπολογισμό της τιμής του β , η Fletcher-Reeves και η Polak-Ribiere formula:

$$\beta_{(i+1)}^{FR} = \frac{r_{(i+1)}^T r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T r_{(i)}} \quad (2.61) , \quad \beta_{(i+1)}^{PR} = \frac{r_{(i+1)}^T (r_{(i+1)} - r_{(i)})}{r_{(i)}^T r_{(i)}} \quad (2.62)$$

Η μέθοδος Fletcher-Reeves συγκλίνει αν το σημείο εκκίνησης είναι αρκετά κοντά στο επιθυμητό ελάχιστο, ενώ η μέθοδος Polak-Ribiere μπορεί, σε σπάνιες περιπτώσεις, κάνει κύκλους απείρως χωρίς να συγκλίνει. Ωστόσο, η Polak-Ribiere συχνά συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα.

Nonlinear CG method:

$$d_{(0)} = r_{(0)} = -f'(x_{(0)})$$

Find $a_{(i)}$ that minimizes $f(x_{(i)} + a_{(i)}d_{(i)})$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + a_{(i)}d_{(i)}$$

$$r_{(i+1)} = -f'(x_{(i+1)})$$

$$\beta_{(i+1)} = \frac{r_{(i+1)}^T r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T r_{(i)}} \quad \text{or} \quad \beta_{(i+1)} = \max \left\{ \frac{r_{(i+1)}^T (r_{(i+1)} - r_{(i)})}{r_{(i)}^T r_{(i)}}, 0 \right\}$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)}d_{(i)}$$

General Line Search

Δύο επαναληπτικές μεθόδους για την εύρεση ριζών είναι η μέθοδος Newton-Raphson και η μέθοδος Secant. Και οι δύο μέθοδοι απαιτούν η f να είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Η Newton-Raphson απαιτεί ακόμα να μπορεί να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της $f(x+ad)$ ως προς το a .

Η μέθοδος Newton-Raphson βασίζεται στην προσέγγιση της σειράς Taylor:

$$\begin{aligned} f(x+ad) &\approx f(x) + a \left[\frac{d}{da} f(x+ad) \right]_{a=0} + \frac{a^2}{2} \left[\frac{d^2}{da^2} f(x+ad) \right]_{a=0} \\ &= f(x) + a [f'(x)]^T d + \frac{a^2}{2} d^T f''(x) d \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\frac{d}{da} f(x+ad) \approx [f'(x)]^T d + ad^T f''(x)d \quad (2.64)$$

Όπου $f''(x)$ είναι ο πίνακας Hessien

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση $f(x+ad)$ ελαχιστοποιείται θέτοντας την (2.64) ίσο με 0 και παίρνουμε:

$$a = -\frac{f'^T d}{d^T f'' d}$$

Για να εκτελέσουμε μια πιο ακριβή line search, χωρίς τον υπολογισμό της f'' , η Secant μέθοδος προσεγγίζει την 2^η παράγωγο της $f(x+ad)$, υπολογίζοντας την 1^η παράγωγο στα διακριτά σημεία $a=0$ και $a=\sigma$, όπου σ είναι ένας αυθαίρετος, μικρός, μη-μηδενικός αριθμός.

$$\frac{d^2}{da^2} f(x+ad) \approx \frac{\left[\frac{d}{da} f(x+ad) \right]_{a=\sigma} - \left[\frac{d}{da} f(x+ad) \right]_{a=0}}{\sigma} \quad \sigma \neq 0$$

$$= \frac{[f'(x+\sigma d)]^T d - [f'(x)]^T d}{\sigma} \quad (2.65)$$

όπου γίνεται μια καλύτερη προσέγγιση στην 2^η παράγωγο, όσο τα a, σ προσεγγίζουν το 0. Εάν αντικαταστήσουμε την (2.65) για τον τρίτο όρο της Taylor επέκτασης (εξίσωση 2.63), τότε έχουμε:

$$\frac{d}{da} f(x+ad) \approx [f'(x)]^T d + \frac{a}{\sigma} \{ [f'(x+\sigma d)]^T d - [f'(x)]^T d \}.$$

Ελαχιστοποιούμε $f(x+ad)$, θέτοντας την παράγωγο ίση με 0:

$$a = -\sigma \frac{[f'(x)]^T d}{[f'(x+\sigma d)]^T d - [f'(x)]^T d} \quad (2.66)$$

Το μεγαλύτερο πρόβλημα με τις 2 μεθόδους είναι ότι δεν μπορούν να ξεχωρίσουν το μέγιστο από το ελάχιστο. Το αποτέλεσμα της μη γραμμικής CG μεθόδου εξαρτάται αποκλειστικά από το αρχικό σημείο, και αν η CG με Newton-Raphson ή την Secant ξεκινάει κοντά σε ένα τοπικό maximum, είναι πιθανό να συγκλίνουν προς αυτό το σημείο.

Κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματά της. Η Newton-Raphson έχει καλύτερο ρυθμό σύγκλισης, και προτιμάται εάν το $d^T f'' d$ μπορεί να υπολογισθεί γρήγορα, για παράδειγμα σε $O(n)$. Η Secant απαιτεί μόνο την 1^η παράγωγο της f , αλλά η επιτυχία της εξαρτάται από την καλή επιλογή της παραμέτρου σ .

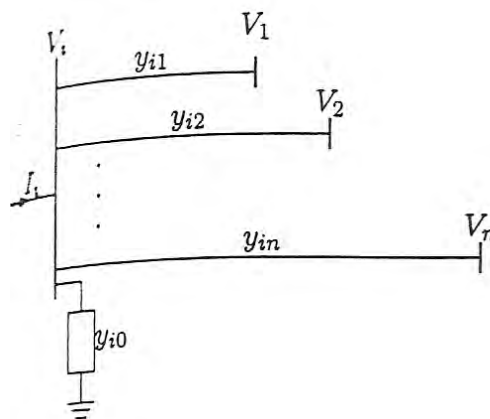
Μελέτη της ροής φορτίου

3.1 Εισαγωγή

Σ αυτό το κομμάτι της εργασίας θα μελετήσουμε τις ροές φορτίου. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς των ροών φορτίου μπορούν να επιλύσουν με μεγάλη ακρίβεια τις μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για μεγάλα συστήματα. Οι τρεις βασικές επαναληπτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τις μελέτες ροών φορτίου είναι η **μέθοδος Gauss-Seidel**, η **μέθοδος Newton-Raphson** και η **ταχεία αποζευγμένη μέθοδος (Fast decouple Newton- Raphson)**.

Εξισώσεις ροής φορτίου

Θεωρούμε έναν τυπικό ζυγό ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1 : Τυπικός Ζυγός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας

Οι γραμμές μεταφοράς παριστάνονται με το ισοδύναμο π μοντέλο. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff σ' αυτό το ζυγό καταλήγουμε :

$$\begin{aligned} I_i &= y_{i0}V_i + y_{i1}(V_i - V_1) + y_{i2}(V_i - V_2) + \dots + y_{in}(V_i - V_n) = \\ &= (y_{i0} + y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in})V_i - y_{i1}V_1 - y_{i2}V_2 - \dots - y_{in}V_n \\ \Rightarrow I_i &= V_i \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij}V_j, \quad j \neq i \end{aligned}$$

(3.1)

Η ισχύς στο ζυγό i είναι :

$$S_i = P_i + jQ_i = V_i I_i^*$$

$$\Rightarrow I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας το I_i της (3.2) στην (3.1) έχουμε :

$$I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} = V_i \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j, \quad j \neq i \quad (3.3)$$

Από την εξίσωση (3.3) καταλήγουμε σ'ένα αλγεβρικό σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων που πρέπει να λυθεί με επαναληπτικές μεθόδους. Θα εξετάσουμε αναλυτικά τις 3 επαναληπτικές μεθόδους

1. Μέθοδος Gauss-Seidel
2. Μέθοδος Newton – Raphson
3. Ταχεία Αποζευγμένη Μέθοδος Ροής Φορτίου (Fast decouple Newton- Raphson)

➤ 3.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Στην μελέτη ροής ισχύος είναι απαραίτητο να λυθούν τα σύνολα μη γραμμικών εξισώσεων που αντιστοιχούν στην παραπάνω εξίσωση. Με την μέθοδο Gauss – Seidel λύνουμε ως προς V_i και έχουμε :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} + \sum y_{ij} V_j^{(k)}}{\sum y_{ij}}, \quad j \neq i \quad (3.4)$$

P_i^{sch} και Q_i^{sch} είναι η πραγματική και η φαινόμενη ισχύς του δικτύου αντίστοιχα και y_{ij} είναι η παρούσα αγωγιμότητα

Το ρεύμα εισόδου στον ζυγό i θεωρείται θετικό. Για αυτό, για τους ζυγούς στους οποίους η ενεργός και άεργος ισχύς εισέρχονται, όπως στους ζυγούς παραγωγής (generators), τα P_i^{sch} και Q_i^{sch} έχουν θετικές τιμές. Για τους ζυγούς φορτίου όπου η ενεργός και η άεργος ισχύς εξέρχονται, τα P_i^{sch} και Q_i^{sch} έχουν αρνητικές τιμές. Η εξίσωση (3.3) επιλύεται ως προς P_i και Q_i , οπότε έχουμε:

$$P_i^{(k+1)} = \text{Real} \left[V_i^{*(k)} \left\{ V_i^{(k)} \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right\} \right], \quad j \neq i \quad (3.5)$$

$$Q_i^{(k+1)} = \text{Imaginary} \left[V_i^{*(k)} \left\{ V_i^{(k)} \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right\} \right], \quad j \neq i \quad (3.6)$$

Τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα αγωγιμοτήτων Y_{bus} είναι $Y_{ij} = -y_{ij}$ και τα διαγώνια στοιχεία είναι $Y_{ii} = \sum y_{ij}$. Συνεπώς η εξίσωση (3.4) γίνεται :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} - \sum_{j=i}^n y_{ij} V_j^{(k)}}{Y_{ii}} \quad (3.7)$$

Άρα,

$$P_i^{(k+1)} = \text{real} \left[V_i^{*(k)} \left\{ V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{i=1, j \neq i}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right\} \right], \quad j \neq i \quad (3.8)$$

$$Q_i^{(k+1)} = \text{imaginary} \left[V_i^{*(k)} \left\{ V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{i=1, j \neq i}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right\} \right], \quad j \neq i \quad (3.9)$$

όπου το Y_{ii} περιλαμβάνει τις αγωγιμότητες που γειώνονται στον εν λόγω ζυγό i .

➤ 3.3 Μέθοδος Newton – Raphson

Για ένα τυπικό ζυγό του συστήματος που εικονίζεται στο σχήμα 1, το ρεύμα που εισέρχεται στο ζυγό i γράφεται λαμβάνοντας υπόψη τον πίνακα αγωγιμοτήτων ως εξής:

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_{(j)} \quad (3.10)$$

Όπου στην παραπάνω εξίσωση, το j περιλαμβάνει το ζυγό i . Σε πολική μορφή η εξίσωση (3.10) γράφεται:

$$I_i = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| < \theta_{ij} + \delta_j \quad (3.11)$$

Η μιγαδική ισχύς στο ζυγό i είναι:

$$P_i - jQ_i = V_i^* I_i \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας από την (3.11) το I_i στην (3.12) έχουμε:

$$P_i - jQ_i = |V_i| < -\delta_i \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| < \delta_{ij} + \delta_j \quad (3.13)$$

Χωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (3.14)$$

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (3.15)$$

Οι εξισώσεις (3.14) και (3.15) αποτελούν ένα σύνολο από μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ανεξάρτητων μεταβλητών. Έχουμε δύο εξισώσεις για κάθε ζυγό φορτίου, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις, και μία εξίσωση για κάθε ζυγό σταθερής τάσης (PV), που δίνεται από την (3.14). Αναπτύσσοντας τις σε σειρά Taylor για την αρχική εκτίμηση και παραλείποντας όλους τους όρους μεγαλύτερης τάξης καταλήγουμε στο παρακάτω σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Για ζυγούς σταθερής τάσης PV, τα μέτρα των τάσεων είναι γνωστά. Επομένως, αν m ζυγοί του συστήματος είναι ελεγχόμενης τάσης, τότε m εξισώσεις που περιλαμβάνουν τα ΔQ και ΔV και τις αντίστοιχες στήλες του Ιακωβιανού πίνακα, διαγράφονται. Έτσι, υπάρχουν $n - 1$ περιορισμοί πραγματικής ισχύος και $n - 1 - m$ περιορισμοί άεργου ισχύος, και ο Ιακωβιανός πίνακας είναι τάξης $(2n - 2 - m) \times (2n - 2 - m)$.

Ο πίνακας J_1 είναι τάξης $(n - 1) \times (n - 1)$,

Ο πίνακας J_2 είναι τάξης $(n - 1) \times (n - 1 - m)$,

Ο πίνακας J_3 τάξης $(n - 1 - m) \times (n - 1)$ και

Ο πίνακας J_4 τάξης $(n - 1 - m) \times (n - 1 - m)$.

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_1 είναι :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \neq i} |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j), \quad j \neq i$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_2 είναι :

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = 2 |V_i| |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} + \sum_{j \neq i} |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_j|} = |V_i| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j), \quad j \neq i$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_3 είναι :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \neq i} |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j), \quad j \neq i$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_4 είναι :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -2 |V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} - \sum_{j \neq i} |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_j|} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j), \quad j \neq i$$

Οι όροι $\Delta P_i^{(k)}$ και $\Delta Q_i^{(k)}$ είναι η διαφορά μεταξύ των αρχικών και υπολογιζόμενων τιμών, γνωστών σαν υπόλοιπα ισχύος, και δίνονται από:

$$\Delta P_i^{(k)} = P_i^{sch} - P_i^{(k)} \quad (3.17)$$

$$\Delta Q_i^{(k)} = Q_i^{sch} - Q_i^{(k)} \quad (3.18)$$

Οι νέες εκτιμήσεις των τάσεων των ζυγών είναι :

$$\delta_i^{(k+1)} = \delta_i^{(k)} + \Delta \delta_i^{(k)} \quad (3.19)$$

$$|V_i^{(k+1)}| = |V_i^{(k)}| + \Delta |V_i^{(k)}| \quad (3.20)$$

Η μέθοδος Newton-Raphson απαιτεί την αντιστροφή του Ιακωβιανού πίνακα σε κάθε επανάληψη, γεγονός που απαιτεί αρκετό χρόνο και χώρο στον υπολογιστή. Εξαιτίας αυτού έχουν προταθεί διάφορες παραλλαγές της μεθόδου προκειμένου να αποφεύγεται η αντιστροφή του Ιακωβιανού πίνακα σε κάθε επανάληψη. Η μέθοδος που έχει επικρατήσει είναι η Ταχεία Αποζευγμένη Μέθοδος Ροής Φορτίου (Fast decouple Newton-Raphson) την οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

➤ **3.4 Ταχεία Αποζευγμένη Μέθοδος Ροής Φορτίου (Fast decouple Newton-Raphson)**

Η μέθοδος Fast decouple Newton-Raphson είναι μια προέκταση της μεθόδου Newton-Raphson. Επειδή οι γραμμές μεταφοράς ενός συστήματος ισχύος έχουν πολύ μεγάλο λόγο X/R, οι μεταβολές της πραγματικής ισχύος ΔP είναι λιγότερο ευαίσθητες σε μεταβολές του μέτρου της τάσης και περισσότερο ευαίσθητες σε μεταβολές στη φάση των γωνιών $\Delta \delta$. Ομοίως, η άεργος ισχύς είναι λιγότερο ευαίσθητη σε αλλαγές στη γωνία και είναι σχεδόν ανεξάρτητες σε μεταβολές του μέτρου της τάσης. Επομένως, είναι λογικό οι πίνακες J_2 και J_3 του Ιακωβιανού πίνακα να τίθενται ίσοι με 0. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι χρειάζεται να αντιστραφούν 2 μικρότερων διαστάσεων πίνακες αντί για ολόκληρο τον Ιακωβιανό πίνακα, περιορίζοντας έτσι τον υπολογιστικό φόρτο της αντιστροφής. Έτσι, η σχέση (3.16) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Οι σχέσεις που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα για τα ΔP και ΔQ

$$\Delta P = J_1 \Delta \delta = \left[\frac{\partial P}{\partial \delta} \right] \Delta \delta \quad (3.22)$$

$$\Delta Q = J_4 \Delta |V| = \left[\frac{\partial Q}{\partial |V|} \right] \Delta |V| \quad (3.23)$$

δείχνουν ότι η εξίσωση (3.21) διαχωρίζεται σε δύο αποζευγμένες εξισώσεις που απαιτούν σημαντικά λιγότερο χρόνο για να λυθούν συγκριτικά με το χρόνο που απαιτείται για τη λύση της (3.16). Επιπλέον, μπορεί να γίνει σημαντική απλοποίηση αν εξαλείψουμε την ανάγκη να υπολογιστούν ξανά οι πίνακες J_1 και J_4 κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης.

3.5 Σύγκριση επαναληπτικών μεθόδων:

- Η μέθοδος Gauss-Seidel έχει το πλεονέκτημα, ότι έχει μικρές απαιτήσεις σε μνήμη ηλεκτρονικών υπολογιστών και ότι ο υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη είναι σχετικά μικρός. Ωστόσο, το βασικό μειονέκτημα της είναι ότι χρειάζεται μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια, άρα ο ρυθμός σύγκλισης της είναι αρκετά αργός.
- Η μέθοδος Newton-Raphson χρονολογείται από το 1960. Είναι η ταχύτερη ως προς τη σύγκλιση μέθοδος και είναι αρκετά αξιόπιστη ως προς την αποτελεσματικότητά της. Το μειονέκτημα της είναι ότι απαιτεί σημαντική μνήμη στον υπολογιστή, αφού είναι αναγκαία η αντιστροφή του Ιακωβιανού πίνακα σε κάθε επανάληψη.
- Η ταχεία αποζευγμένη μέθοδος εξοικονομεί χρόνο και μνήμη έναντι της μεθόδου Newton-Raphson καθώς δεν απαιτείται η αντιστροφή του Ιακωβιανού σε κάθε επανάληψη. Η λύση που προκύπτει είναι εξίσου ακριβής και αξιόπιστη όσο και αυτής της Newton-Raphson. Η μέθοδος αυτή, μειονεκτεί στο γεγονός ότι απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις από την Newton-Raphson για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια, δηλαδή ο ρυθμός σύγκλισής της είναι πιο αργός. Ωστόσο, ο αργός ρυθμός σύγκλισης αντισταθμίζεται πλήρως από την αύξηση της ταχύτητας υπολογισμών.

Παρακάτω απεικονίζουμε την σχέση των μεθόδων εικονικά σύμφωνα με τα συστήματα ενέργειας που εφαρμόστηκαν (IEEE 5-bus, IEEE 30-bus και Nigerian 28-bus 330KV).

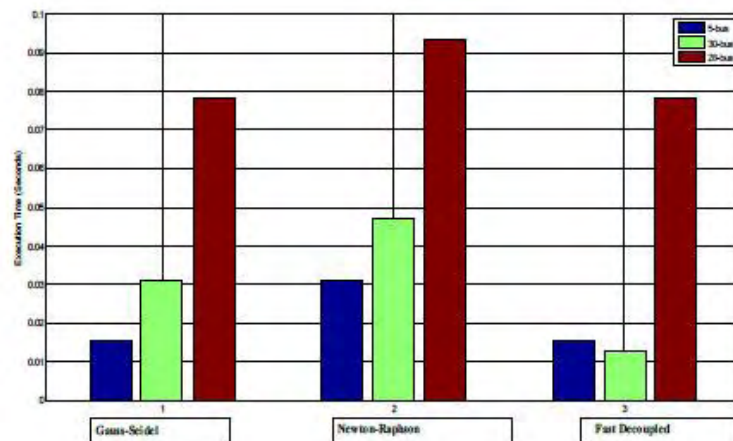


Figure 2: Comparison of the Execution Time obtained with the 3- Test Bus Systems.

Στο σχήμα 2 φαίνεται ότι ο υπολογιστικός χρόνος που χρειάζεται η μέθοδος Fast decouple Newton-Raphson ανά επανάληψη είναι σημαντικά μικρότερος από της μεθόδου Newton-Raphson.

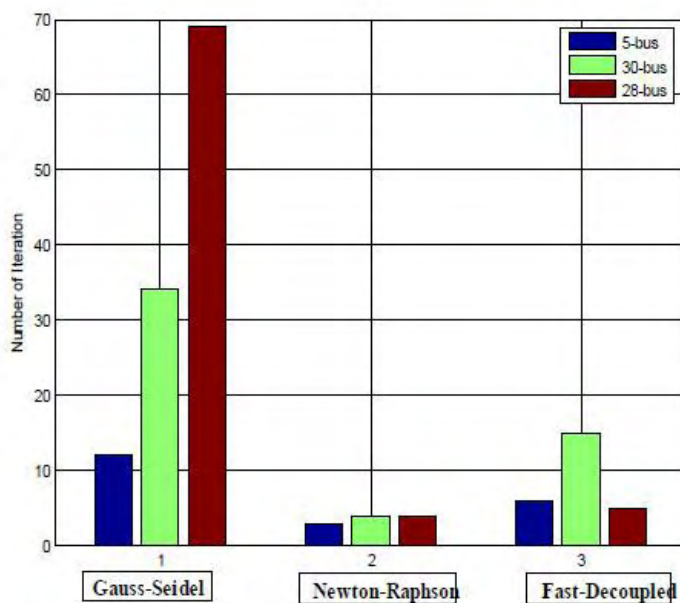


Figure 3: Comparison of the number of Iteration obtained with the 3- Test Bus Systems

Στο σχήμα 3 φαίνεται ότι η μέθοδος Gauss-Seidel χρειάζεται πολύ μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων για μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τις άλλες 2 μεθόδους και ότι η

μέθοδος Newton-Raphson χρειάζεται λιγότερο αριθμό επαναλήψεων από την μέθοδο Fast decouple Newton-Raphson.

Βιβλιογραφία

- [1] N. Papamichael Basic iterative methods
- [2] Jonathan Richard Shewchuk, An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain, August 4, 1994
- [3] Adejumobi I.A., Adepoju G.A. Hamzat K. A., Iterative Techniques for Load Flow Study: A Comparative Study for Nigerian 330kv Grid System as a Case Study
- [4] Β. ΔΟΥΓΑΛΗΣ & Δ.ΝΟΥΤΣΟΣ & Α.ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΣ, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Ιωάννινα 2012
- [5] C. Pozrikidis, Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική