ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ»

Η Διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την χρήση εκπαιδευτικών διαδραστικών λογισμικών

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΛΑΝΤΖΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Υπεύθυνος
Διονύσης Βαβουγυιός

Λαμία, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΦΑΛΕΙΑ, ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΜΕΓΑΛΟΥ ΟΓΚΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ»

Η Διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την χρήση εκπαιδευτικών διαδραστικών λογισμικών

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΛΑΝΤΖΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων
Διονύσης Βαβουγυιός

Λαμία, Νοέμβριος 2016

«Υπεύθυνη Δήλωση μη λογοκλοπής και ανάληψης προσωπικής ευθύνης»

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, και γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα και ενυπογράφως ότι η παρούσα εργασία με τίτλο [«Η Διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την χρήση εκπαιδευτικών διαδραστικών λογισμικών»] αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές από τις οποίες χρησιμοποίησα δεδομένα, ιδέες, φράσεις, προτάσεις ή λέξεις, είτε επακριβώς (όπως υπάρχουν στο πρωτότυπο ή μεταφρασμένες) είτε με παράφραση, έχουν δηλωθεί κατάλληλα και ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο ΔΗΛΩΝ

Ημερομηνία 10/11/2016

Η Διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την χρήση εκπαιδευτικών διαδραστικών λογισμικών

ΚΑΛΑΝΤΖΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Τριμελής Επιτροπή:

Διονύσης Βαβουγυιός (επιβλέπων)

Γεώργιος Σταμούλης

Αθανάσιος Λουκόπουλος

Επιστημονικός Σύμβουλος:

Δωρόθεος -Ευάγγελος Αγγέλης

Πίνακας περιεχομένων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Επιθυμώ να ευχαριστήσω τους κ.κ: Γεώργιο Σταμούλη Πρόεδρο του τμήματος Πληροφορικής της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας , κ. Διονύση Βαβουγυιό, Πρόεδρο του Τμήματος ΠΤΕΑ του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και τον κ. Αθανάσιο Λουκόπουλο Λέκτορα του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, οι οποίοι είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής, για την τιμή που μου έκαναν να δεχθούν την συμμετοχή τους στην επιτροπή της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας μου.

Επίσης ευχαριστώ τον κ Δωρόθεο –Ευάγγελο Αγγέλη , Διδάσκοντα ΠΔ 407/80 ,που από την θέση του Επιστημονικού Συμβούλου, συνέβαλε με την καθοδήγησή του, τις πολύτιμες συμβουλές και την αμέριστη βοήθειά του στην εκπόνηση της εργασίας

Τους ευχαριστώ όλους, για τη συνεργασία τους και για την εξασφάλιση ενός ιδανικού περιβάλλοντος εργασίας κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού , τόσο στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, όσο και κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία με την βοήθεια εκπαιδευτικών λογισμικών έχουν κατασκευασθεί διαδραστικές εφαρμογές, που αφορούν το Πυθαγόρειο θεώρημα που διδάσκεται στην Β Γυμνασίου των σχολείων της χώρας.

Οι διαδραστικές εφαρμογές αναφέρονται στο ευθύ του Πυθαγορείου θεωρήματος ,στο αντίστροφο αυτού και στην διερεύνηση της ισχύς του για κανονικά πολύγωνα που έχουν πλευρές, τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, καθώς και την γενίκευσή του, που αφορά το Θεώρημα του Πάππου . Οι εφαρμογές έχουν χρησιμοποιηθεί ως βοηθητικό υλικό, αφενός μεν για υποστήριξη της παραδοσιακής διδασκαλίας αφετέρου δε για την κατανόηση και διερεύνηση μαθηματικών εννοιών,

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι να διερευνηθεί αν οι διαδραστικές εφαρμογές συνέβαλλαν στην καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος από τους μαθητές. Για την διερεύνηση του παραπάνω ερωτήματος απαντήθηκε ερωτηματολόγιο από τους μαθητές.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας αναφέρονται ιστορικά στοιχεία για τον Πυθαγόρα όπως την ζωή του, την κοσμοθεωρία του και στοιχεία που αφορούν το διάσημο θεώρημά του.

Στο δεύτερο μέρος αναφέρονται στοιχεία που αφορούν την χρησιμότητα των νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών καθώς και τα είδη των εκπαιδευτικών λογισμικών .

Στο τρίτο μέρος γίνεται η ανάλυση των διαδραστικών εφαρμογών που χρησιμοποιήθηκαν στην διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος .

Στο τέταρτο μέρος γίνεται η ανάλυση των ερωτήσεων που τέθηκαν στους μαθητές με την μορφή ερωτηματολογίου.

Στο πέμπτο μέρος γίνεται σύνοψη των συμπερασμάτων και κατατίθενται προτάσεις.

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ο Πυθαγόρας

1.1 Γέννηση καταγωγή

Ο Πυθαγόρας υπήρξε γιος του Μνήσαρχου και της Πυθαΐδας. Γεννήθηκε το 572 π.Χ. στη Σάμο και πέθανε το 490 π.Χ. στην Κάτω Ιταλία. Αυτό σημαίνει ότι έζησε την ίδια περίπου εποχή με τον Λάο Τσε της Κίνας, τον Βούδα των Ινδιών και τον Ζωροάστρη της Περσίας. Υπήρξε μαθηματικός, θεωρητικός της Μουσικής, φιλόσοφος, ηγέτης αρχαίου θρησκευτικού και πολιτικού κινήματος και ιδρυτής της Πυθαγόρειας Σχολής. Είναι βέβαιο ότι έμεινε 22 χρόνια στην Αίγυπτο κοντά στους ιερείς της Μέμφιδας, της Ηλιούπολης και της Διόσπολης, της πόλης του Δία. Όταν όμως ο βασιλιάς των Περσών Καμβύσης κατέλαβε την Αίγυπτο, ο Πυθαγόρας μεταφέρθηκε αιχμάλωτος στη Βαβυλώνα και έτσι είχε την ευκαιρία να συναναστραφεί και με τους Χαλδαίους και τους Πέρσες σοφούς. Ελευθερώθηκε μετά από 12 χρόνια με τη μεσολάβηση του Δημοκήδη, του Έλληνα προσωπικού γιατρού του βασιλιά Καμβύση. Λέγεται ακόμα ότι πήγε και στην Ινδία, όπου του δόθηκε το όνομα Γιαβαντσάρια ή Γιουναντσάρια, δηλαδή Έλληνας Διδάσκαλος. Επέστρεψε στη Σάμο σε ηλικία πλέον 56 ετών. Ωστόσο, δεν έμελλε να παραμείνει αρκετά στη Σάμο, γιατί ο τύραννος Πολυκράτης διοικούσε απολυταρχικά την πατρίδα του. Έτσι έφυγε και εγκαταστάθηκε τελικά στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας, όπου ίδρυσε την Πυθαγόρεια Σχολή. Οι ιδέες του έκαναν ξεχωριστή εντύπωση, κυρίως στους νέους, και γρήγορα οδηγήθηκε στο δικαστήριο με την κατηγορία της διαφθοράς των νέων και της αθεΐας, όπου όμως τελικά αθωώθηκε. Σχετικά με τον θάνατό του, κατά μία εκδοχή πέθανε εξόριστος στο Μεταπόντιο, σύμφωνα όμως με μια άλλη δολοφονήθηκε σε μια επιδρομή των δημοκρατικών με αρχηγό τον Κόνωνα εναντίον της Πυθαγόρειας σχολής. Πάντως είναι βέβαιο ότι η σχολή του Πυθαγόρα στον Κρότωνα έκλεισε για πολιτικούς λόγους και πολλοί από τους μαθητές του εξοντώθηκαν.

1.2 Οι βασικές ιδέες της κοσμοθεωρίας του.

Το αντικείμενο ενασχόλησης του Πυθαγόρα ήταν η καθοδήγηση μιας «εταιρείας». Αυτή η εταιρεία ήταν μία μυστική, θρησκευτική κίνηση, που είχε αναπτύξει και έντονη πολιτική δραστηριότητα. Οι Πυθαγόρειοι του 5ου αιώνα π.Χ συγκαταλέγονται στους πιο σημαντικούς επιστήμονες του καιρού τους και ο Πυθαγόρας φαίνεται να ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για την επιστήμη.

Ο Πυθαγόρας ήταν υποστηρικτής της Μετεμψύχωσης. Πίστευε, δηλαδή, ότι μετά τον θάνατο η ψυχή του ανθρώπου, αν είναι «τέλεια», μεταβαίνει και ενώνεται με τον Θεό, ενώ αν ο άνθρωπος έχει διαπράξει αμαρτήματα κατά τη διάρκεια της ζωής του, επιστρέφει για τιμωρία και εξαγνισμό. Σήμερα ο Πυθαγόρας, εξαιτίας των αντιλήψεών του περί θρησκείας και ηθικής, θεωρείται ένας από τους μεγάλους παιδαγωγούς της αρχαίας Ελλάδας. Αυτός ήταν, άλλωστε, που δίδαξε πρώτος την εσωτερική αφοσίωση, τη μετριοφροσύνη, την ευσέβεια, την εμπιστοσύνη και τη «σωματική» αγνότητα.

Τα μαθηματικά όμως για τον Πυθαγόρα ήταν κάτι πολύ περισσότερο. Ήταν η γέφυρα και το μέσον επικοινωνίας μεταξύ του ορατού και του αόρατου κόσμου και όχι απλώς ένας τρόπος κατανόησης και διαχείρισης της φύσεως.

Ο Πυθαγόρας λοιπόν πίστευε ότι τα υλικά αντικείμενα «είναι» αριθμοί ή «ομοιάζουν» με αριθμούς. Αληθεύει όμως η άποψη αυτή;

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας μας δίνει την απάντηση… διατυπώνοντας τη θέση ότι κάθε πύκνωμα ύλης μέσα στο σύμπαν, δηλαδή ένα αστέρι, ένας γαλαξίας και κάθε υλικό αντικείμενο γύρω μας, είναι ισότιμο και ισοδύναμο με έναν καθαρό αριθμό που αντιστοιχεί στην καμπυλότητα του χώρου, την οποία το αντικείμενο καταλαμβάνει. Η σχέση που περιγράφει όλα τα προηγούμενα είναι η παρακάτω όπου (ε) είναι η καμπυλότητα και (ρ) η πυκνότητα ενός υλικού αντικειμένου Με τον τρόπο αυτό τα πάντα μέσα στο Σύμπαν εκφράζονται με έναν καθαρό αριθμό, όπως ακριβώς περιέγραψε και ο Πυθαγόρας ήδη από τον 6ο π.Χ. αιώνα

Σχ1 Πυθαγόρειο Θεώρημα και Σχετικότητα /Πηγή: Δανέζης

Μια άλλη σημαντική ανακάλυψη που αποδίδεται στον Πυθαγόρα είναι οι ιδιότητες που σχηματίζουν εκείνα τα στερεά, που αργότερα έγιναν γνωστά ως πλατωνικά. Αυτά είναι η πυραμίδα, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο, μολονότι ο ίδιος θεωρούσε τη σφαίρα ως το πιο τέλειο στερεό.

Στην αριθμητική η συμβολή του Πυθαγόρα δεν ήταν τόσο σημαντική όσο η συμβολή του στην επιστήμη της Γεωμετρίας. Παρ' όλα αυτά ο Πυθαγόρας είναι εκείνος ο φιλόσοφος που δημιούργησε τον Πυθαγόρειο Πίνακα ή Άβακα, τον πασίγνωστο σε όλους μας πίνακα πολλαπλασιασμού ή αλλιώς προπαίδεια. Ένας πίνακας που δίνει τα γινόμενα των δέκα πρώτων ακέραιων αριθμών μεταξύ τους. Ο Πυθαγόρας όμως ήταν αυτός που πρώτος έθεσε τις βάσεις της επιστήμης της Μουσικής με μια επιστημονικά θεμελιωμένη θεωρία.

Στο πεδίο της Αστρονομίας οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι η Γη είναι σφαιρική. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας δίδασκε ότι η ημέρα και η νύχτα είναι το αποτέλεσμα της περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της, άποψη που έγινε γνωστή από τον Ικέτα και τον Έκφαντο

Ήταν ο πρώτος σοφός που χώρισε τη Γη σε πέντε κλιματικές ζώνες που εκτείνονταν από τον παγωμένο βόρειο πόλο μέχρι τις θερμότερες περιοχές του ισημερινού. Και πάλι ήταν ο πρώτος που έδειξε ότι το πρωινό και το απογευματινό αστέρι που έλαμπε στον ουρανό ήταν ο ίδιος πλανήτης, η λαμπρή Αφροδίτη. Ακόμη ο Πυθαγόρας δέχτηκε πρώτος πως η Γη περιφέρεται γύρω από το «Κεντρικό Πυρ» (την «Εστία του Παντός») και δημιουργείται έτσι μια περιστρεφόμενη «ουράνια σφαίρα».

1.3 Μεταφυσική και θεωρία των αριθμών.

Η θεωρία των αριθμών είναι το πιο χαρακτηριστικό στοιχείο του Πυθαγορισμού. Τα αντικείμενα «είναι» αριθμοί ή «ομοιάζουν» με αριθμούς.

Ο Πυθαγόρας «συνέλαβε» τους αριθμούς κατά την προσπάθειά του να βρει μια πρωταρχική, άϋλη, αναλλοίωτη αρχή των όντων. Οι αριθμοί είναι αυτοί λοιπόν που αποτελούν την πρώτη αρχή, την προσδιοριστική δύναμη του κόσμου και στη σχέση ανάμεσά τους βρίσκεται η ουσία των όντων. Για το λόγω του ότι είναι αυτή η ίδια η ουσία του κόσμου και όχι απλώς σύμβολα ποσοτικών σχέσεων, οι αριθμοί θεωρούνται «ιεροί». Ακόμη και οι αφηρημένες έννοιες στον Πυθαγορισμό συνδέονται με τους αριθμούς. Π.χ. η δικαιοσύνη συνδέεται με τον αριθμό 4 δηλαδή με τον πρώτο τετραγωνικό αριθμό και ο γάμος με τον αριθμό 5. Ο άνθρωπος παριστάνεται με τον αριθμό 250 κ.λ.π. Οι ψυχολογικοί συνειρμοί που λειτούργησαν εδώ δεν έχουν αποσαφηνιστεί.

Κοσμική Αρμονία: στον Πυθαγορισμό κοσμική σημασία έχει η «ιερή δεκάδα»: η μυστική της ονομασία, τετρακτύς της δεκάδας, συνεπάγεται ότι 1+2+3+4=10, αλλά μπορεί να νοηθεί και ως το «τέλειο τρίγωνο».

Όπως είπαμε η ουσία των όντων σύμφωνα με τον Πυθαγόρα είναι οι αριθμοί. Επιπλέον πίστευε ότι το σύμπαν προήλθε από το χάος και απέκτησε μορφή με το μέτρο και την αρμονία, γι’ αυτό και πρώτος το ονόμασε «Κόσμο», δηλαδή τάξη και αρμονία.

Αρμονία όμως για το σώμα είναι η ψυχή, η οποία διατηρεί κάποια συμμετρία ανάμεσα στο υλικό και το πνευματικό στοιχείο του ανθρώπου. Η ψυχή έχει τις ιδιότητες της ταυτότητας, της ετερότητας, της στάσης και της κίνησης. Αυτή είναι η «τετρακτύς» για την ψυχή. Αυτές οι φιλοσοφικές του αντιλήψεις επηρέασαν τον Πλάτωνα, ο οποίος αργότερα θεωρεί ότι η αρμονία της μουσικής καθρεφτίζει την αρμονία της ψυχής.

Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα το σύμπαν βρίσκεται σε διάταξη αρμονίας και η θεωρία του, η θέασή του, είναι αυτή που φέρνει την κάθαρση. Αυτό οδήγησε στη θεωρία του Πυθαγόρα για την «Αρμονία των σφαιρών». Το σύνολο των ήχων, δηλαδή, που παράγονται από την περιστροφή των πλανητών, ανάλογα πάντα με την απόστασή τους από τη γη, και οι οποίοι ,όμως, δεν ακούγονται

1.4 Ιστορική επισκόπηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

«Εστίν ουν πρόνοια η μεν ανωτάτω και πρώτη του πρώτου θεού νόησις είτε και βούλησις ούσα ευεργέτις απάντων, καθ' ην πρώτως έκαστα των θείων δια παντός άριστά τε και κάλλιστα κεκόσμηται».

Πλούταρχος, «Ηθικά», Τόμος 15, Περί Ειμαρμένης, 572F.

Ένα από τα πιο συναρπαστικά και ασφαλώς πιο φημισμένα και χρήσιμα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το λεγόμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι «σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών». Αν υπάρχει ένα θεώρημα του οποίου η γέννηση δικαιούται να θεωρηθεί μια μεγάλη στιγμή στα μαθηματικά, τότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι το πιο κατάλληλο, γιατί είναι ίσως το πρώτο πραγματικά μεγάλο Θεώρημα των μαθηματικών. Όταν όμως αρχίζουμε να εξετάζουμε την προέλευση του Θεωρήματος, τότε είναι σαν να ψάχνουμε σε θολά νερά (Maor, 2007).

Αν και η παράδοση έχει αποδώσει το περίφημο θεώρημα στον Πυθαγόρα, η εξέταση πήλινων πινάκων με σφηνοειδή γραφή, που βρέθηκαν στην Μεσοποταμία τον 20^{ο} αιώνα, αποκαλύπτει ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που έζησαν πάνω από χίλια χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, γνώριζαν το Θεώρημα. Το θεώρημα γνώριζαν επίσης οι αρχαίοι Ινδοί και Κινέζοι της εποχής του Πυθαγόρα ή και νωρίτερα, όπως αποδεικνύεται από σχετικές εργασίες τους (Van der Waerden, 2000). Αυτές οι μη ελληνικές και πιθανόν προελληνικές αναφορές στο Θεώρημα δεν περιέχουν όμως αποδείξεις του, και ίσως είναι αλήθεια ότι ο Πυθαγόρας ή κάποιο μέλος της διάσημης αδελφότητας του ήταν ο πρώτος που έδωσε μια λογική απόδειξη στο θεώρημα (Maor, 2007).

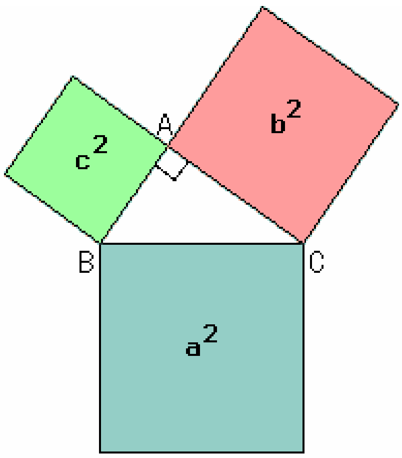
Αν και οι ρίζες του είναι στη Γεωμετρία, το Θεώρημα που αποδίδεται παγκοσμίως στον Πυθαγόρα έχει βρει εφαρμογή σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης, καθαρό ή εφαρμοσμένο. Ευρέως πάνω από τετρακόσιες αποδείξεις του είναι γνωστές, και ο αριθμός τους μεγαλώνει ακόμα. Ο κατάλογος περιλαμβάνει μια αρχική απόδειξη από τον μελλοντικό αμερικανό Πρόεδρο Garfield, μια άλλη από τον δωδεκάχρονο τότε Albert Einstein, από το Leonardo da Vinci, και πολλούς άλλους. Μερικές από αυτές τις αποδείξεις είναι συναρπαστικές στην απλότητά τους, ενώ άλλες είναι απίστευτα σύνθετες (Maor, 2007).

Το ίδιο το Θεώρημα είναι γνωστό με διάφορα ονόματα: το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», το « Θεώρημα της υποτείνουσας», το «Θεώρημα της εκατόμβης» ή απλά «Ευκλείδης Ι. 47», αποκαλούμενο έτσι επειδή παρατίθεται ως πρόταση 47 στο βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Σχ.2 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη

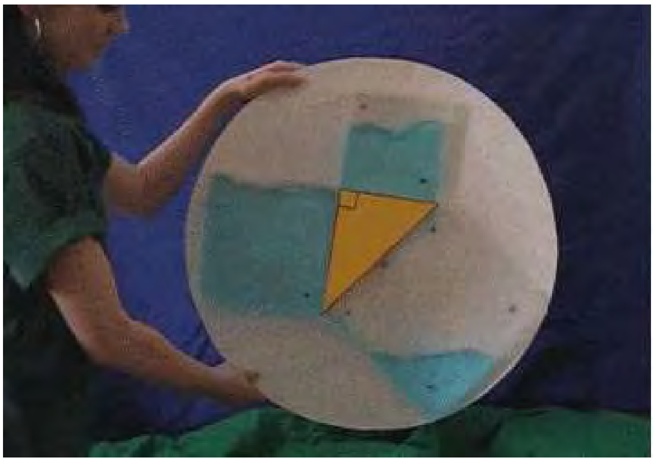
Πηγή: lostatlantis.gr

Σήμερα σκεφτόμαστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως αλγεβρική σχέση $a^2+b^2=c^2$, από την οποία το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να βρεθεί, λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των άλλων δύο πλευρών. Αλλά ο Πυθαγόρας δεν την αντιλήφθηκε έτσι. Γι' αυτόν ήταν μια γεωμετρική δήλωση για τα εμβαδά. Ήταν μόνο με την ανάπτυξη της σύγχρονης άλγεβρας, περίπου το 16ο αιώνα, όταν το Θεώρημα εξοικειώθηκε στην αλγεβρική του μορφή (Heath, 1956). Είναι σημαντικό να αντέξει αυτό στο μυαλό, εάν πρόκειται να επισημάνουμε την εξέλιξη του Θεωρήματος κατά τη διάρκεια των 2.500 ετών από τότε που ο Πυθαγόρας υποθετικά το απέδειξε πρώτος και το έκανε αθάνατο. Και δεν ήταν ούτε καν ο πρώτος που ανακάλυψε το Θεώρημα. Ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους και ενδεχομένως στους Κινέζους, τουλάχιστον χίλια έτη πριν από αυτόν (Van der Waerden, 2000).



Σχ.3 Εμβαδά και Πυθαγόρειο Θεώρημα /.Πηγή: Καστανιώτης

Ο Maor (2007) αναφέρει ότι, ο Elisha Scott Loomis (1852-1940), ένας εκκεντρικός δάσκαλος μαθηματικών από το Οχάιο, ξόδεψε μια ολόκληρη ζωή συλλέγοντας όλες τις γνωστές αποδείξεις – 371 από αυτές – και στηριζόμενος σε αυτές έγραψε το The Pythagorean Proposition (1927). Ο Loomis υποστήριξε ότι στο Μεσαίωνα, απαιτήθηκε πως όταν ένας σπουδαστής παίρνει το μεταπτυχιακό του στα μαθηματικά θα πρέπει να προσφέρει μία νέα και πρωτότυπη απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Αυτό είχε κεντρίσει το ενδιαφέρον των σπουδαστών και των δασκάλων, οδηγώντας τους να βρίσκουν πάντα νέες και καινοτόμες αποδείξεις. Μερικές από αυτές είναι βασισμένες στην ομοιότητα των τριγώνων, άλλες στη διαμέριση, άλλες ακόμα και σε αλγεβρικούς τύπους και μερικές χρησιμοποιούν τα διανύσματα. Υπάρχουν ακόμη και «αποδείξεις» («οι επιδείξεις» θα ήταν μια καλύτερη λέξη) βασισμένες σε φυσικές συσκευές. Σε ένα επιστημονικό μουσείο στο Τελ Αβίβ στο Ισραήλ, υπάρχει μια τέτοια επίδειξη (βλ. σχήμα 4), ένα κατασκευασμένο ορθογώνιο τρίγωνο από πλεξιγκλάς, στο οποίο χρωματιστό υγρό που ρέει ελεύθερα μεταξύ των τετραγώνων που στηρίζονται στην υποτείνουσα και στις δυο κάθετες πλευρές, δείχνει ότι ο όγκος του υγρού στο πρώτο τετράγωνο είναι ίσος με το συνδυασμένο όγκο στα άλλα δύο.



Σχ4 Πυθαγόρειο
Θεώρημα/Πηγή:youtube.com

Πάνω σε αυτή την επίδειξη υπάρχει μια διαδραστική εφαρμογή στο διαδίκτυο στην διευθυνση https://lh6.googleusercontent.com/PdFUqvPS2v4/UM2Lr4PyrGI/AAAAAAAApml/nGYrw5MO4mg/s360/temp_righttriangle.gif όπου κάποιος έχει μια διαισθητική απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τεχνολογίες πληροφορικής στην εκπαίδευση και Μαθηματικά

2.1 Παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ και θεωρητικές αρχές μάθησης.

Ο υπολογιστής παρέχει τη δυνατότητα για πολλαπλή αναπαράσταση των εννοιών. Επειδή, όπως επισημαίνεται από τον Tall (1991), υπάρχει μεγάλη απόσταση μεταξύ της προσωπικής αντίληψης για μια έννοια (concept image) που διαμορφώνουν οι μαθητές και του αντικειμενικού ορισμού της έννοιας (concept definition), το κατάλληλο εκπαιδευτικό λογισμικό μπορεί να βοηθήσει στη μείωση αυτής της απόστασης, αναπαριστώντας μία έννοια με πολλαπλούς τρόπους.

Μια άλλη αρχή στην οποία βασίζεται η παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ είναι αυτή της συνεργατικής μάθησης. Η τάξη που «δουλεύει» με εκπαιδευτικό λογισμικό συνήθως συμπεριλαμβάνει μαθητές οργανωμένους σε ομάδες ώστε να τους εντάξει στη διαδικασία της συνεργατικής μάθησης, δηλαδή της διδακτικής στρατηγικής κατά την οποία οι μαθητές προσπαθούν εργαζόμενοι σε μικρές ομάδες να επιτύχουν ένα κοινό μαθησιακό στόχο. Αυτή η πρακτική στοχεύει στη διερεύνηση των εννοιών και την ανακάλυψη της γνώσης μέσα από συζήτηση. Βασίζεται επίσης στην αξιοποίηση των ικανοτήτων των καλυτέρων μαθητών προς όφελος των πιο αδύνατων. Έτσι ο μαθητής κερδίζει και σε μαθησιακό αλλά και σε κοινωνικό επίπεδο (Slavin 1987, Johnson and Johnson 1987). Η συνεργατική μάθηση ενισχύει την ανάπτυξη επικοινωνιακών δεξιοτήτων, ικανοτήτων δόμησης της συνεργασίας, αναζήτησης έκφρασης, ανταλλαγής απόψεων και ιδεών. Ενθαρρύνει την ανάπτυξη διαλογικής σχέσης μεταξύ των συμμετεχόντων με αυξανόμενο βαθμό ατομικής και συλλογικής ευθύνης.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί η δυνατότητα που προσφέρει ο υπολογιστής για διαθεματική προσέγγιση ενός γνωστικού αντικειμένου. Η αντιμετώπιση και μελέτη μιας έννοιας υπό το πρίσμα πολλών διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων ή επιστημών συμβάλλει αποτελεσματικά στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής και του πλαισίου της ενώ ενισχύει την ανάπτυξη κριτικής, αναλυτικής και συνθετικής σκέψης. Η διαθεματική προσέγγιση μπορεί να υλοποιηθεί όταν η διδασκαλία καλύπτει περισσότερες από μια επιστήμες που σχετίζονται με το ίδιο γνωστικό αντικείμενο και δίνει στο μαθητή τη δυνατότητα να αναζητήσει μόνος του τη σχέση μεταξύ τους.

Στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας η πληροφορία παρουσιάζεται από τον εκπαιδευτικό σε ένα προκαθορισμένο πλαίσιο, συνήθως με γλώσσα «αφηρημένη».

Σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές καλούνται, βασιζόμενοι στη θεωρία που έχουν προηγουμένως διδαχθεί, να γενικεύσουν και να δημιουργήσουν πιθανές συνδέσεις μεταξύ των συνθηκών ενός προβλήματος που τους τίθεται και των αναγκαίων πράξεων για την επίλυση του προβλήματος.

Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές, αν και μπορούν να απομνημονεύσουν μια πληροφορία δύσκολα μπορούν να την «ανασύρουν» και να τη χρησιμοποιήσουν όταν αυτή χρειάζεται για την επίλυση ενός προβλήματος (Bansford et al., 1990, Pelerman 1992). Η γνώση δηλαδή που αποκτάται με αυτό τον τρόπο χαρακτηρίζονται ως αδρανής.

Η χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού μπορεί να βοηθήσει στο να παρουσιαστεί ένα κεντρικό γεγονός ή μια κατάσταση προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε μαθητές και εκπαιδευτικοί σε συνεργασία να ανασύρουν την προϋπάρχουσα γνώση ή και να οικοδομήσουν νέα.

Σε μια τέτοια διδασκαλία το χρησιμοποιούμενο λογισμικό πρέπει να είναι εστιασμένο στο πρόβλημα και να προκαλεί το ενδιαφέρον του μαθητή. Η έρευνα έχει δείξει πως μέσα από τέτοιες δομές οι μαθητές αποκτούν χρήσιμη γνώση, δηλαδή γνώση που μπορεί να ανασυρθεί και να χρησιμοποιηθεί όταν βρεθεί στο κατάλληλο πλαίσιο.

Άλλα μοντέλα μάθησης μέσω υπολογιστή χρησιμοποιούν τις ατομικές διαφορές μεταξύ των μαθητών ως το βασικό μέσο εκτίμησης του μαθησιακού αποτελέσματος (Carroll, 1963). Αυτό συμβαίνει επειδή πράγματι όλοι οι μαθητές δεν έχουν την ίδια προηγούμενη γνώση και εμπειρία, την ίδια προδιάθεση και τις ίδιες δεξιότητες, δεν κινητοποιούνται από τις ίδιες αιτίες και δεν έχουν τον ίδιο τρόπο να μαθαίνουν. Πρέπει λοιπόν να δίνεται στο μαθητή, μέσω του περιβάλλοντος / προγράμματος που χρησιμοποιεί, η δυνατότητα

- να συνειδητοποιεί τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία του,
- να εντοπίζει πιθανά λάθη στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος

• να αναπτύσσει νέα στρατηγική για την επιτυχία του μαθησιακού του στόχου • να επιβάλει στην μαθησιακή διαδικασία το δικό του ρυθμό εκμάθησης

• να δοκιμάζει όσες φορές θέλει την άποψή του ή τις γνώσεις του χωρίς να φοβάται ότι θα χαρακτηρισθεί άσχημα.

Το τελευταίο σημείο αφορά την αποενοχοποίηση του λάθους, σύνδρομο το οποίο έχει αποτρέψει πολλούς μαθητές από την εμπλοκή τους στην περιπέτεια της μάθησης.

Η συμβολή του υπολογιστή και των ΤΠΕ γενικότερα στην εξατομικευμένη διδασκαλία και μάθηση είναι ιδιαιτέρως σημαντική σε σχολικές τάξεις 25-30 μαθητών όπου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει αφενός να διαχειριστεί την τάξη ως σύνολο, αφετέρου να παρακολουθήσει και να καθοδηγήσει κάθε μαθητή ξεχωριστά λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προσωπικές του μαθησιακές δυσκολίες. Θα πρέπει λοιπόν το λογισμικό:

• Να δίνει τη δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης των εννοιών

• Να διευκολύνει την εξατομικευμένη και ανακαλυπτική μάθηση

• Να προωθεί τη συνεργατική μάθηση

• Να ενισχύει τη διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία και στη μάθηση

• Να συμβάλει στην αύξηση της ενεργητικής και αυτόνομης συμπεριφοράς των μαθητών.

2.2 Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Η πρώτη τεχνολογία, οι αριθμητικοί υπολογιστές, προκάλεσαν 'θόρυβο, ότι δηλαδή θα γίνουν απαραίτητο εργαλείο για κάθε μαθητή και οτι θα υποκαταστήσουν την ανάγκη να κάνουμε πράξεις με το χέρι. Πολύ γρήγορα, ήρθε ο αντίλογος ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν τους κανόνες και τη σημασία των πράξεων και ο μόνος τρόπος να τις καταλάβουν είναι να κάνουν πράξεις οι ίδιοι.

Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων στο εκπαιδευτικό μας σύστημα έχει νόημα μόνο όταν στοχεύει σε κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό μας σύστημα συνεχίζουν να εκλαμβάνονται από την κοινωνία ως ένα κατακερματισμένο γνωστικό αντικείμενο, μια θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων της θεωρίας και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και να διακρίνουν τη χρησιμότητά τους, καθώς συχνά εμφανίζονται αποστασιοποιημένες από την καθημερινότητά τους, χωρίς άμεση εφαρμογή στην επίλυση κάποιου χειροπιαστού προβλήματος.

Για την περίπτωση των μαθηματικών η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο όταν χρησιμοποιούνται ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας (Χρονάκη, 2000, Ματσαγγούρας, 1987, Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης, 2002).
Με τον όρο 'εκφραστικά εργαλεία' εννοούμε εργαλεία λογισμικού που είναι σχεδιασμένα ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν μοντέλα με μέσο τις πολλαπλές και αλληλεξαρτώμενες μαθηματικές αναπαραστάσεις, να πειραματίζονται με τη συμπεριφορά τους και να τα αλλάζουν συχνά και με ευκολία, να χειρίζονται, να αναλύουν και να συσχετίζουν δεδομένα. Τα εργαλεία αυτά επίσης υποστηρίζουν τη διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών που είναι κατακερματισμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση, η Ευκλείδια, η διαφορική, η διανυσματική και η αναλυτική γεωμετρία και η τριγωνομετρία στην γεωμετρική και την αλγεβρική της έκφανση. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικο-μαθηματική σκέψη τις οποίες είναι αδύνατο να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα. Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη διδακτική των μαθηματικών (Κυνηγός, 2007).

2.3 Πως η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει περισσότερους μαθητές να μάθουν μαθηματικά.

Αν οι προηγούμενες γενιές δεν χρειάστηκαν την τεχνολογία για να μάθουν μαθηματικά, σήμερα τα παιδιά μας τη χρειάζονται.

Η κοινωνία και οι ανάγκες της κινούνται με βάση την εξέλιξη της τεχνολογίας και σύμφωνα με την εξέλιξη της τεχνολογίας κινούνται και τα μαθηματικά κάθε εποχής αλλά και η διδασκαλία τους. Εξαιτίας της τεχνολογίας, περισσότεροι μαθητές σήμερα από ότι παλαιότερα έχουν την ευκαιρία να εξερευνήσουν πτυχές των μαθηματικών που λίγα προικισμένα ταλέντα θα είχαν τη δυνατότητα να φτάσουν με την φαντασία τους.

Το εκπαιδευτικό λογισμικό, είναι το κατάλληλο περιβάλλον για κάποιον να «κάνει» μαθηματικά και όχι απλά να ακούσει γι' αυτά αλλά να εμπλακεί ενεργητικά ο ίδιος με αυτά, δίνοντας την ευκαιρία για πειραματισμό, παρατήρηση, συμπέρασμα και δικαιολόγηση.

Το διαδίκτυο φαίνεται να ανοίγει το δρόμο για μια νέα εκπαιδευτική εποχή, όπου οι ανισότητες των μαθητών στη μάθηση θα μειώνονται από την άποψη του ότι η μάθηση θα μπορεί να γίνεται στο χρόνο και στον τόπο του μαθητή.
Η μάθηση μέσω του διαδικτύου αξιοποιεί τα επιτεύγματα της τεχνολογίας, για να προσφέρει στους μαθητές ακόμα περισσότερα οφέλη, τόσο στο πλαίσιο του περιεχομένου των μαθηματικών όσο και στο πλαίσιο της επικοινωνίας με άλλους συμμαθητές τους.

Έτσι ο μαθητής μιας απομακρυσμένης (από την τοποθεσία του εκπαιδευτικού οργανισμού) περιοχής μπορεί να βρει στοιχεία που τον ενδιαφέρουν ή ακόμη να συμμετέχει σε συζητήσεις στο διαδίκτυο μέσα από την δημιουργία εικονικών κοινοτήτων χωρίς να φύγει από τον τόπο διαμονής του.

Με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει τους προσωπικούς του ρυθμούς στη μάθηση, προσαρμοσμένους στις ανάγκες και τις αναζητήσεις του.

Έτσι, τα σχολεία και οι εκπαιδευτικοί αποκτούν νέους ρόλους, με κύριους προσανατολισμούς την προετοιμασία μαθητών για τη νέα κοινωνία της γνώσης, της δημιουργίας και της τεχνολογίας

2.4 Τι είδους μαθηματικά αναμένουμε να μάθουν οι μαθητές μας

Ποια είναι τα μαθηματικά που χρειάζεται κάποιος; Την απάντηση την διαμορφώνουν οι ίδιες οι ανάγκες και οι τεχνολογικές εξελίξεις της κοινωνίας.

Τα μαθηματικά που θα μάθουν οι μαθητές μας αλλάζουν, διότι αλλάζουν τα διαθέσιμα εργαλεία.

Το ποδήλατο είναι μια μορφή τεχνολογίας (η πιο απλή). Το αντίστοιχο παράδειγμα του ποδηλάτου για τα μαθηματικά είναι το χαρτί και το μολύβι. Το αυτοκίνητο είναι ένα τεχνολογικό επίτευγμα, όμως για να το οδηγήσουμε πρέπει να αναπτύξουμε νέες δεξιότητες και τεχνικές και αποκομίζουμε διαφορετικές εμπειρίες.

Το ίδιο συμβαίνει με τη χρήση των νέων τεχνολογιών και του υπολογιστή στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων καθώς και γεωμετρικών κατασκευών γίνεται διαφορετικά στο περιβάλλον χαρτί –μολύβι από ότι σε ένα περιβάλλον εκπαιδευτικού λογισμικού. Οι μαθητές μπορούν μέσα σε λίγο χρόνο να παρατηρήσουν μια σειρά από διαφορετικές μορφές της ίδιας κατασκευής στην οθόνη του υπολογιστή και να διατυπώσουν εικασίες για τις κοινές ιδιότητες των διαφορετικών μορφών των κατασκευών αυτών.

Από επιστημονική άποψη αλλάζει η Μαθηματική λογική που μαθαίνουν οι μαθητές μας Μαθηματικά. Ο παραδοσιακός τρόπος μαθηματικής γνώσης των παιδιών στηριζόταν στην Παραγωγική μέθοδο λόγω απουσίας εργαλείων και ως εκ τούτου η Μαθηματική γνώση των παιδιών γινόταν με μεταφορά κανόνων από τον καθηγητή στο μαθητή. Τώρα τα μαθηματικά συνδέονται με την εμπειρία των ανθρώπων και τις κοινωνικές πρακτικές, ως εκ τούτου δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη της επαγωγικής λογικής μέσα από την εμπειρία και αναγνωρίζεται η σημασία της διαπραγμάτευσης των απόψεων για την οικοδόμηση της Μαθηματικής γνώσης.

Μια άλλη αντίληψη των μαθηματικών, η οποία επίσης αναθεωρείται, είναι το αλάθητο των μαθηματικών προτάσεων. Για αιώνες, κάθε αλήθεια στα μαθηματικά θεωρείτο ακριβής και διαχρονική. Η πεποίθηση αυτή καταρρίφθηκε από τη στιγμή που δημιουργήθηκε η μη Ευκλείδεια γεωμετρία, που είχε ως αποτέλεσμα πολλά από τα θεωρήματα του Ευκλείδη να θεωρούνται όχι απόλυτες αλλά "κατά συνθήκη αλήθειες". Η σύγχρονη αντίληψη υποστηρίζει ότι τα τα μαθηματικά ή τουλάχιστον ένα μέρος τους είναι ημι-εμπειρική επιστήμη που, επιδέχεται αποδείξεις αναιρέσεις και βελτιώσεις. Έτσι τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως υπόθεση και δικαίωμα όλων και όχι ορισμένων οι οποίοι διαθέτουν ειδικές ικανότητες.

2.5 Πως τα μαθηματικά που διδάσκονται στα σχολεία διαφοροποιούνται με τη χρήση της τεχνολογίας.

Η είσοδος των υπολογιστών έχει ήδη επηρεάσει τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο και τα μαθηματικά που «χρειάζεται» κανείς.

Για παράδειγμα ο αλγόριθμος προσδιορισμού της τετραγωνικής ρίζας ενός οποιουδήποτε αριθμού απουσιάζει εδώ και αρκετά χρόνια από την εκπαίδευση αφού πλέον μπορεί κανείς να τον υπολογίσει με τον υπολογιστή τσέπης (το ίδιο και ο υπολογισμός λογαρίθμων και άλλα θέματα).

Στο νέο διδακτικό πλαίσιο ο δάσκαλος παύει να αποτελεί τη μοναδική εστία γνώσης για την τάξη του. Από την άλλη μεριά αναγνωρίζεται η σημασία του ενεργητικού ρόλου του μαθητή στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης του και δεν του αποδίδεται ο ρόλος του παθητικού δέκτη.

Εκτός από ποιο συμμετοχικός, ο νέος ρόλος του μαθητή αποκτά και μεγαλύτερο νόημα πλέον για τον ίδιο καθώς νιώθει ο ίδιος ότι να κατασκευάζει μαθηματικά αντικείμενα στην οθόνη ως αποτέλεσμα των χειρισμών του, είναι μια νέα πρόκληση γι' αυτόν να μάθει πώς να αξιοποιεί καλύτερα τις δυνατότητες του υπολογιστή του, καλύτερα ίσως από τους υπόλοιπους στην τάξη- ακόμα και από τον ίδιο τον δάσκαλο. Είναι μια πρόκληση γι' αυτόν επίσης να φτιάξει όσο το δυνατό πιο όμορφα σχήματα στην οθόνη, με περισσότερα μαθηματικά.

Η σημασία της πρότερης γνώσης και των ιδιαιτεροτήτων των μαθητών στη μάθησή τους θεωρείται ως κάτι αναμενόμενο, το οποίο αναιρεί τη μέθοδο της μετωπικής και ομοιόμορφης διδασκαλίας για όλους τους μαθητές.

Η αποδοχή των ιδιαιτεροτήτων των μαθητών επιβάλλει την έμφαση στην αξιολόγηση της εξέλιξης τους σε σχέση με τον εαυτό τους και όχι σε σχέση με τους άλλους μαθητές της τάξης.

Επιπλέον η γνώση αναγνωρίζεται ως διαδικασία κατασκευής οπότε με αυτό τον τρόπο δίνεται έμφαση στη μαθησιακή διαδικασία αυτή καθαυτή και όχι στο αποτέλεσμα. Ως εκ τούτου αναγνωρίζεται η ανάγκη ανάπτυξης κριτικής σκέψης του μαθητή και παραμερίζεται η απομνημόνευση. Η τήρηση των αναλυτικών προγραμμάτων στα πλαίσια του διδακτικού χρόνου δύναται να μην αποτελεί το κύριο μέλημα της διδακτικής πράξης των εκπαιδευτικών το οποίο κυρίως τους προκαλεί άγχος για εισαγωγή εκπαιδευτικών καινοτομιών. Η συνεργατική προσέγγιση στη γνώση αποτελεί επιτακτική ανάγκη των σύγχρονων κοινωνιών. Επιπλέον έχει αναγνωριστεί ο ρόλος της επικοινωνίας στην ανάπτυξη των υψηλών νοητικών διεργασιών του παιδιού μέσα από τη διεύρυνση της ζώνης της εγγύτερης ανάπτυξή του.

Αναγνωρίζεται ακόμη ο ρόλος των εργαλείων ως διαμεσολαβητών στη διαδικασία της μάθησης καθώς και ο καταλυτικός ρόλος των ΤΠΕ στην αλλαγή του πλαισίου στο οποίο συντελείται η μάθηση.

2.6 Πως η χρήση της τεχνολογίας αλλάζει την διδακτική μας στην πράξη.

Με τη χρήση της Τεχνολογίας αλλάζουν οι ρόλοι καθηγητών και μαθητών. Με την είσοδο της τεχνολογίας δίνονται στο καθηγητή νέες ευκαιρίες πειραματισμού για να αναπτύξει νέες διδακτικές προσεγγίσεις και να γίνει πιο δημιουργικός στο μάθημα του. Οι επιστημολογικές και φιλοσοφικές αντιλήψεις του καθηγητή για το αντικείμενο του επίσης μεταβάλλονται και έχει ο ίδιος την ευκαιρία να βρει και νέο νόημα στις γνώσεις και τις τεχνικές που χρησιμοποιούσε μέχρι τώρα στο επιστημονικό του πεδίο. Αγορεύει λιγότερο καθώς έχει πλέον απέναντι του όχι ένα παθητικό ακροατήριο αλλά δραστήριους μικρούς-ερευνητές που συμμετέχουν δραστικά στην κατασκευή της γνώσης μέσα στην τάξη. Ο καθηγητής αποκτά ρόλο συνεργάτη και ψυχολογικού υποστηρικτή παρά ρόλο απλού διαβιβαστή της πληροφορίας. Θα πρέπει επίσης να γνωρίζει τις δυνατότητες του εργαλείου και της τεχνολογίας ώστε να είναι σε θέση να το ελέγξει.

Έναν υπολογιστή μπορεί ο μαθητής να τον συμβουλευτεί και να τον «ρωτήσει» ανά πάσα στιγμή. Ακόμα και στο σπίτι. Ενώ αντίθετα ο καθηγητής τις πιο πολλές φορές δε θα ήταν εκεί να απαντήσει ή θα υπήρχε ακόμα και ο κίνδυνος της αρνητικής βαθμολόγησης του από κάποια «κακή» ερώτηση που θα φανέρωνε τα κενά του.

Η κριτική από τους συμμαθητές είναι επίσης ένα σημείο που αποτρέπει τους μαθητές να πλησιάζουν το καθηγητή και να διατυπώνουν τις ερωτήσεις που τους απασχολούν. Και αυτό ισχύει τόσο στους αδύνατους μαθητές, όσο και στους καλούς, από φόβο μήπως στιγματιστούν για τη συμπεριφορά τους, ή κάποια ευμενή συμπεριφορά του καθηγητή στο πρόσωπο τους σε βάρος των υπολοίπων αντίστοιχα. Είναι όλοι αυτοί παράγοντες του γνωστού φόβου για τα μαθηματικά που αντιμετωπίζουν πολλά παιδιά, η γνωστή μαθηματικο-φοβία.

Αντίθετα μάλιστα η δουλειά των μαθητών μπορεί να γίνει με συνεργασία μεταξύ τους σε ομάδες, αναλαμβάνοντας σε τακτικά διαστήματα συγκεκριμένα έργα (projects)τα οποία μπορούν να έχουν και διαθεματική προσέγγιση, τα αποτελέσματα των οποίων ανακοινώνονται στην τάξη. Όλες οι γνώμες ακούγονται, όλοι συμμετέχουν, η γνώση διαμορφώνεται μέσα στην τάξη από το σύνολο της τάξης και αυξάνει η αυτοπεποίθηση των μαθητών.

Οι μαθητές έχουν περισσότερο χρόνο να σκεφτούν τα πραγματικά θέματα των μαθηματικών που αφορούν το πρόβλημα και να πειραματιστούν με τους υπολογιστές και να ανακαλύψουν τη δική τους γνώση ή να επιβεβαιώσουν τα αποτελέσματα των ασκήσεων και των παραδειγμάτων του βιβλίου καθώς το σχολικό βιβλίο (όπως και οποιοδήποτε άλλο στατικό μέσο) δεν προσφέρει τις ίδιες δυνατότητες στον μαθητή και δεν ασχολείται καν.

Αποτελεί όμως υποχρέωση του δασκάλου να επιμορφώνεται τακτικότερα και να παρακολουθεί τις εξελίξεις όσον αφορά τα θέματα και τις σύγχρονες κατεύθυνσης τις διδακτικής όπως και των ίδιων των μαθηματικών, ώστε να εμπλουτίζει την εργασία της τάξης με δραστηριότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά και να ενημερώνεται για τις τεχνολογικές εξελίξεις πριν τον ξεπεράσουν, ώστε να διατηρεί το μάθημα του «ζωντανό» και να κερδίσει τους ακροατές του.

Η αξιοποίηση της ΤΠΕ για τη μετεξέλιξη των εκπαιδευτικών πρακτικών είναι εφικτή αλλά απαιτεί σημαντικές αλλαγές, ιδίως στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διαδικασία της μάθησης καθώς και στις αντιλήψεις τους για το ρόλο της ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η υλοποίηση αυτών των αλλαγών προϋποθέτει την ενεργό συμμετοχή των ίδιων των διδασκόντων και απαιτεί συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, ιδίως στις εκπαιδευτικές χρήσεις της ΤΠΕ.

2.7 Χαρακτηριστικά Εκπαιδευτικού Λογισμικού

Το εκπαιδευτικό λογισμικό το οποίο υποστηρίζει την εναλλαγή των ρόλων μαθητή-διδάσκοντα, την ανάπτυξη «ανοιχτών» ή και «κλειστών» εργασιών, για διαφορετικές επιδιώξεις, διαφορετικές ηλικίες, διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις, και είναι προσαρμόσιμο σε διαφορετικές εκπαιδευτικές ανάγκες και το οποίο επιτρέπει την ομαδική ή συνεργατική διδασκαλία περικλείει τουλάχιστον τα παρακάτω σημαντικά χαρακτηριστικά:

- ***Διαλογικότητα*** ως σύνολο από λειτουργίες μέσα από τη μέγιστη δυνατή *οπτικοποίηση* (visualisation) τόσο του περιβάλλοντος διεπαφής (user interface) όσο και των σχέσεων ή κανόνων που διέπουν τα δρώμενα στην περιοχή εργασίας. Η οπτικοποίηση είναι καθοριστικό σημείο στην υποστήριξη της ανάπτυξης συλλογισμών και ευνοεί το πέρασμα από το συλλογισμό στα αντικείμενα στο συλλογισμό με αφηρημένες έννοιες.

- ***Προσομοίωση***, που προωθεί την έννοια της μάθησης μέσα από συγκεκριμένες καταστάσεις. Στις κανονικές συνθήκες εργασίας μέσα στην τάξη, με τις τεχνικές προσομοίωσης επιδιώκεται η «μίμηση» συνθηκών, όπου οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για να αναπαραγάγουν μια εμπειρία παρόμοια με την πραγματικότητα.

- ***Άμεσο χειρισμό*** του χώρου εργασίας με κατευθείαν επιτέλεση λειτουργιών πάνω στα αντικείμενα της περιοχής εργασίας με επιλογές κοινά αποδεκτές και αναγνωρίσιμες αλλά και ταυτόχρονης υποστήριξης τρόπων για ποσοτική εισαγωγή δεδομένων για τις περιπτώσεις όπου απαιτείται ακρίβεια παραμέτρων.

- ***Πολλαπλές αναπαραστάσεις*** οι οποίες να βασίζονται στην ιδέα ότι η μάθηση με διερεύνηση μπορεί να επιτευχθεί αν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, με την προϋπόθεση ότι αυτές οι μεταβάσεις έχουν νόημα γι’ αυτούς.

Η κεντρική ιδέα που οφείλει να διέπει τα διερευνητικά περιβάλλοντα που θα χρησιμοποιηθούν, είναι ότι η αντιμετώπιση δραστηριοτήτων και η επίλυση προβλημάτων γίνεται μέσα από την εκπόνηση εργασιών που σχετίζονται με ρεαλιστικές καταστάσεις. Τέτοιες καταστάσεις είναι στενά συνδεδεμένες με καθημερινά προβλήματα και θέματα που αντιμετωπίζουμε στη ζωή μας τα οποία αναπόφευκτα έχουν διαθεματικό χαρακτήρα.

2.8 Εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά

Στην περιοχή των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί αξιόλογα λογισμικά, τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν αυτά που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για εκπαιδευτικούς σκοπούς, όπως π.χ. Cabri, Sketchpad,Geogebra Sinderella, Function Probe, Αβάκιο και άλλα.

Στη δεύτερη, περιλαμβάνονται αυτά που έχουν τη δυνατότητα να εκτελούν και συμβολικούς υπολογισμούς, τα λεγόμενα συμβολικά συστήματα ή πακέτα (Computer Algebra Systems ή CAS) και είναι κατάλληλα, τόσο για ερευνητικούς σκοπούς όσο και για εκπαιδευτική χρήση, όπως το Mathematica, Derive, Maple, Mathcad και άλλα (Peschek, 1998. Leinba C. Poutney, J., 2002 όπ. αναφ. Τουμάσης, Μπ., 2004).

Τα εξελιγμένα μαθηματικά λογισμικά προσφέρουν σε ορισμένες περιπτώσεις μια ισχυρή εποπτική μαρτυρία για την αλήθεια ή όχι μιας πρότασης. Μολονότι όμως είναι ιδανικά για πειραματισμό, εξερεύνηση, επεξεργασία δεδομένων και εκτέλεση υπολογισμών, δεν έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν μια απόδειξη, κάτι που απαιτεί την ανθρώπινη επινοητικότητα, την οποία προς το παρόν, η υπάρχουσα τεχνολογία δεν είναι σε θέση να ενσωματώσει σε ένα λογισμικό πακέτο (Hoyles & Jones, 1998).

Η εξέλιξη της τεχνολογίας των υπολογιστών που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών εμφανίζεται να ενισχύει την άρση παλιών εμποδίων (π.χ. αναπαράστασης) και τη διάθεση μέσων που περιλαμβάνουν δυνατότητες για μοντελοποίηση από μέρους των μαθητών, για χρήση πολλαπλών και διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων, για δυναμικό χειρισμό και κιναισθητική διαχείριση των εικονιζομένων στη οθόνη. Τα ψηφιακά εργαλεία είναι

Α) Εργαλεία κυρίως για να κάνει μαθηματικά με αυτά ο μαθητής.
Β) Παράλληλα, είναι εργαλεία με τα οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάσει δραστηριότητες για τους μαθητές του.
Γ) Τέλος, με τα ίδια αυτά εργαλεία ο μαθηματικός μπορεί να ασχοληθεί επιστημονικά ο ίδιος με τα μαθηματικά στο δικό του επίπεδο.

2.9 Κύρια χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την διδακτική των μαθηματικών

Τα κύρια χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών λογισμικών θα πρέπει να εστιάζονται τόσο στις τεχνολογικές όσο και στις παιδαγωγικές παραμέτρους που διαθέτουν ώστε να μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά στο μάθημα των μαθηματικών. Ο όρος 'τεχνολογικές παράμετροι' αναφέρεται κυρίως στις προσφερόμενες λειτουργικότητες ενός εκπαιδευτικού λογισμικού και εξετάζεται αλληλένδετος με την παιδαγωγική βαρύτητα που αυτές κατέχουν στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησής τους στο μάθημα των μαθηματικών. Τέτοιες παράμετροι αφορούν δυνατότητες όπως:

Η έκφραση μαθηματικών ιδεών και νοημάτων, που σχετίζεται με τη μελέτη μιας γνωστικής περιοχής των μαθηματικών και μπορεί να αφορά ένα σύνολο μαθηματικών εννοιών..

Η ύπαρξη πολλαπλών διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη δυνατότητα συμβολικής έκφρασης μέσω γλωσσών προγραμματισμού και την ύπαρξη γραφικών αναπαραστάσεων, όπου οι αλλαγές στη μια αναπαράσταση επιφέρουν αλλαγές και στις υπόλοιπες που συνδέονται με αυτή. Οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις μπορεί να αφορούν διαφορετικές γνωστικές περιοχές των μαθηματικών όπως άλγεβρα-ανάλυση, γεωμετρία, στατιστική, πιθανότητες.

Διερεύνηση-πειραματισμός. Το λογισμικό πρέπει να αφήνει περιθώρια ανάπτυξης εικασιών και υποθέσεων για όσα συμβαίνουν στη οθόνη, ενισχύοντας παράλληλα τις προϋποθέσεις για αφαιρετική σκέψη και αναστοχασμό. Ο μαθητής πρέπει να μπορεί να πειραματιστεί με διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλλάζοντας παραμέτρους, αποδομώντας και μετασχηματίζοντας μαθηματικά αντικείμενα και κατασκευές, βασιζόμενος κυρίως στην ανατροφοδότηση του υπολογιστή

Υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας. Το λογισμικό πρέπει να υποστηρίζει τη δυνατότητα σχεδιασμού δραστηριοτήτων που ενισχύουν την επικοινωνιακή διάσταση της μάθησης των μαθηματικών με άξονα τη συνεργατική μάθηση ανάμεσα και μεταξύ ομάδων μαθητών.

2.10 Κατηγορίες εκπαιδευτικού λογισμικού για τη διδακτική των μαθηματικών

Κατηγορία: συμβολική έκφραση μέσω του προγραμματισμού.
Λογισμικό: **Χελωνόκοσμος** (Αβάκιο).

Κατηγορία: δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων.
Λογισμικό: **Geometer's Sketchpad ή GSP, Cabri Geometre ή Cabri, Geogebra**
Αυτά τα τρία λογισμικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ισοδύναμα και εναλλακτικά.

Κατηγορία: χειρισμός αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων
Λογισμικό: **Function Probe ή FP**

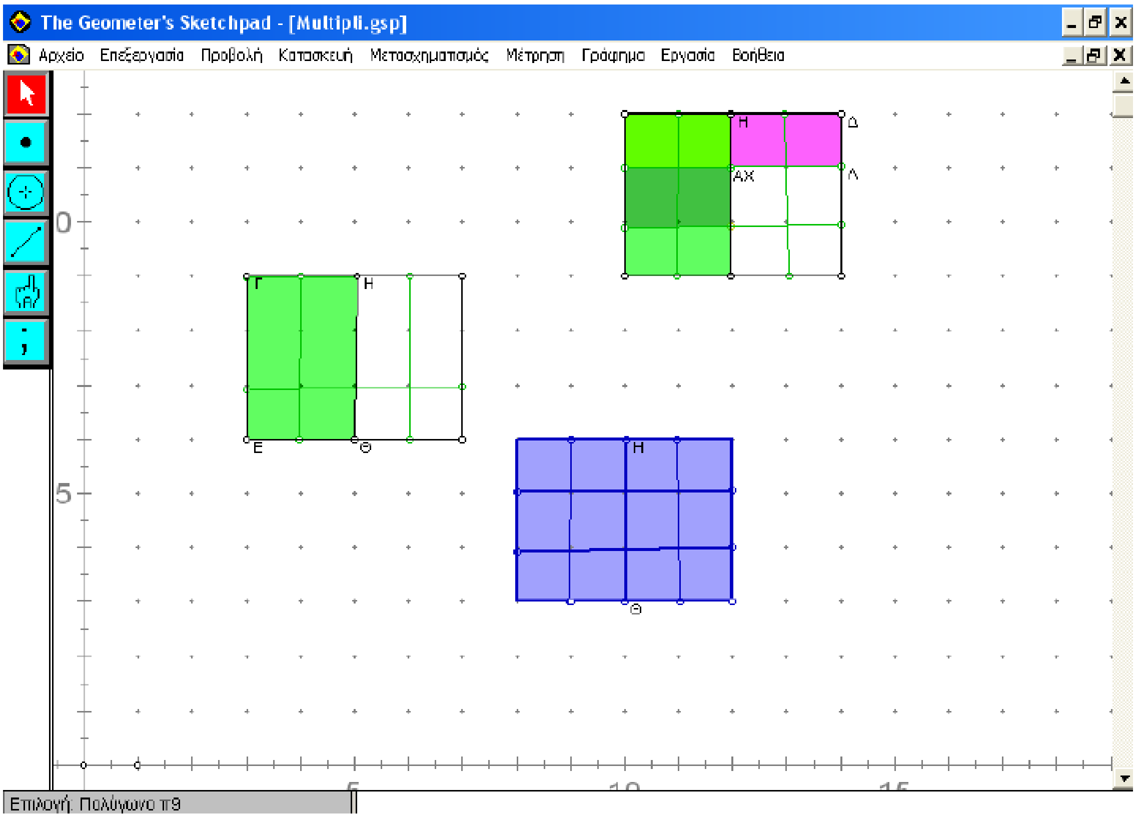
Κατηγορία: διαχείριση δεδομένων
Λογισμικό: **Ταξινομούμε** (Αβάκιο)

Κατηγορία: προσομοιώσεις μοντέλων και καταστάσεων
Λογισμικό: **Modelus**

2.11 Ανάλυση των μαθηματικών Λογισμικών

2.11.1 Geometer's Sketchpad

Το Geometer's Sketchpad , είναι πρόγραμμα δυναμικής Γεωμετρίας για διερεύνηση και μελέτη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με δυνατότητα παρουσίασης γραφημάτων μεταξύ μεταβλητών. Αναπτύχθηκε ως μέρος του προγράμματος οπτικής Γεωμετρίας, ενός προγράμματος χρηματοδοτούμενου από το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών (NSF). Δημιουργός του είναι ο Nicholas Jackiw. Σχεδιάστηκε αρχικά ως εργαλείο διδασκαλίας και μάθησης ενώ η ποικιλία των δυνατοτήτων και των τρόπων χρήσης του το καθιστά ιδανικό εργαλείο για γεωμετρική εξερεύνηση.



ΣΧ 5 Λογισμικό Geometer's Sketchpad

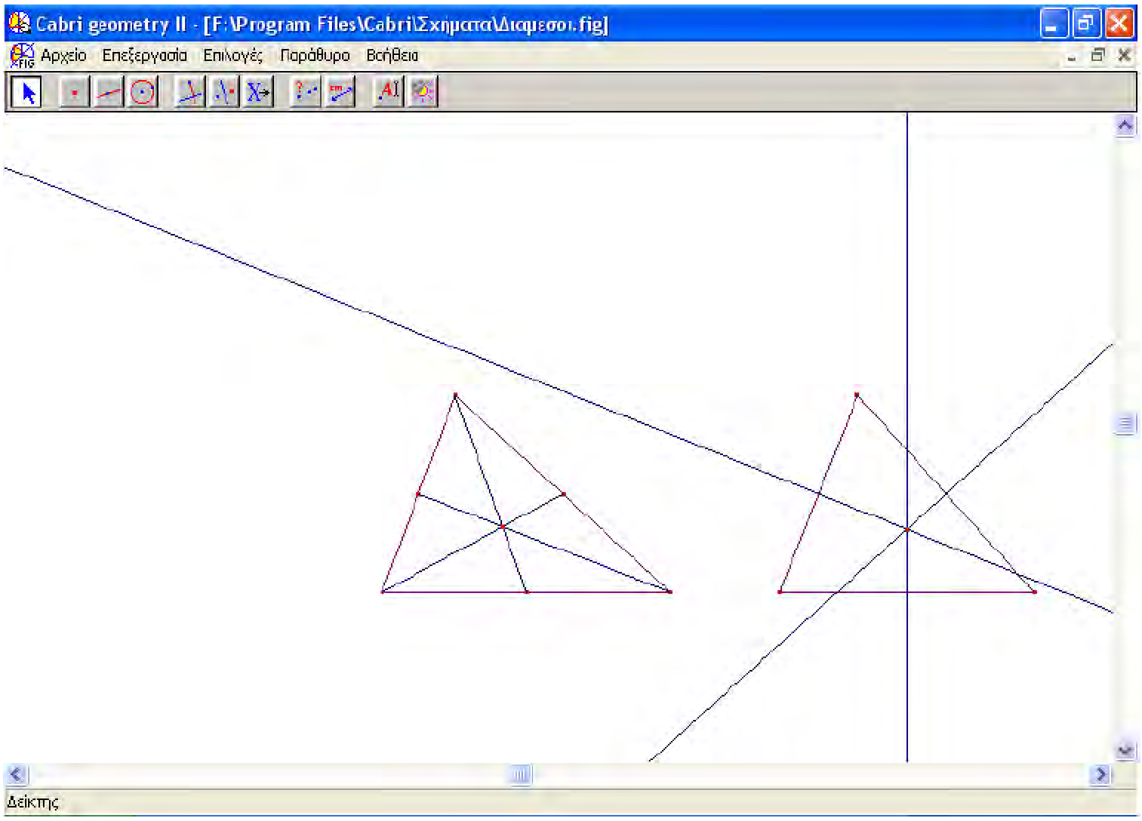
Το βασικό του χαρακτηριστικό είναι ότι ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να μετασχηματίζει τα σχήματα που δημιουργεί, ενώ διατηρούνται οι γεωμετρικές σχέσεις και οι ιδιότητες τις κατασκευής. Έτσι με την παρατήρηση των χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται και αυτών που διατηρούνται αμετάβλητα η κάθε κατασκευή οδηγεί με φυσικό τρόπο σε γενικεύσεις. Η οθόνη του υπολογιστή μετατρέπεται σε ένα δυναμικό πίνακα, Στον οποίο μπορούν να σχεδιάσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια περισσότερα πολύπλοκα σχήματα τα οποία έχουν τη δυνατότητα να παραμορφωθούν και να μετασχηματισθούν κατά άπειρους τρόπους χωρίς την ανάγκη σβησίματος και σχεδίασης από την αρχή. Έτσι οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων ανακαλύπτονται, ενώ το μάθημα της γεωμετρίας γίνεται συναρπαστικό τόσο για τον δάσκαλο όσο και για τους μαθητές.

Η πρώτη έκδοση του Sketchpad για Windows παρουσιάστηκε τον Μάρτιο του 1993 και επαναστατικοποίησε τη διδασκαλία της Ευκλείδιας Γεωμετρίας. Τα αναδρομικά στοιχεία εντολών στην έκδοση αυτή κατέστησαν δύναμη, μεταξύ άλλων, την κατασκευή φράκταλ. Μια αρκετά αναβαθμισμένη έκδοση παρουσιάστηκε τον Απρίλιο του 1995 και εμπεριείχε αναλυτικές και γραφικές δυνατότητες, κατασκευάσιμους γεωμετρικούς τρόπους, τόξα, βελτιωμένο μαθηματικό συμβολισμό, εργαλεία αρχείων εντολών και μετασχηματισμούς.

Το Sketchpad σχεδιάζει σημεία, ευθύγραμμα σχήματα, διαθέτει διαβήτη για την κατασκευή κύκλων , μπορεί να ορίσει τόξα , κυκλικούς τομείς και κυκλικά τμήματα. Τα προκατασκευασμένα αρχεία εντολών που διαθέτει δίνουν την δυνατότητα να κατασκευάζεται ότι δεν κάνει άμεσα με εντολές από τα μενού που διαθέτει. Επιπλέον δίνει τη δυνατότητα εισαγωγής πίνακα τιμών και αποτύπωσης των τιμών του σε σύστημα συντεταγμένων, έχει την δυνατότητα να μαρκάρει γωνίες, λόγους, διανύσματα, αποστάσεις, να επιλέγει μετρήσεις και όλα αυτά να χρησιμοποιούνται για γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Διαθέτει πολύ καλή βοήθεια. Ιδιαίτερα ελκυστικές είναι οι ισχυρές δυνατότητες του Sketchpad, αναφορικά με μετασχηματισμούς και τη δημιουργία αρχείων εντολών για την εξερεύνηση ευκλείδιων γεωμετριών.

2.11.2 Cabri - geometry

Το λογισμικό Cabri – geometry (Laborde & Bellemain 1990) είναι προϊόν του ινστιτούτου για την πληροφορική και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά του Πανεπιστήμιου Joseph Fourier της Grenoble της Γαλλίας και του CNRS (Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας Της Γαλλίας) . Το Cabri – Geometry II είναι αποτέλεσμα ολοκληρωτικής αναθεώρησης των πρώτων εκδόσεων του Cabri – geometry και προέρχεται από ομάδα επιστημόνων που ανήκουν στον χώρο της πληροφορικής των μαθηματικών, όπως και της διδακτικής των μαθηματικών, με στόχο να προσφέρει νέα δυναμική στον χώρο της δυναμικής Γεωμετρίας .



Σχ 6 Λογισμικό Cabri

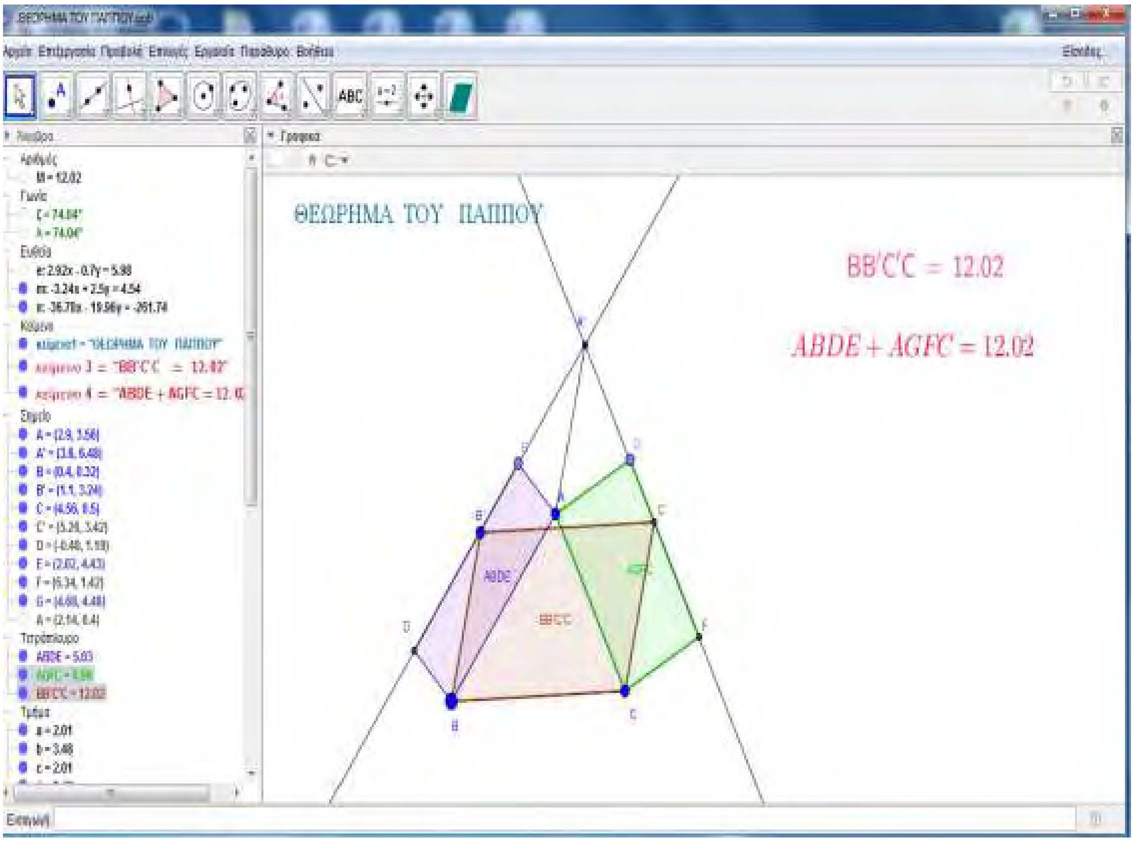
Το λογισμικό εξελληνίστηκε και διατίθεται για χρήση στα Γυμνάσια, Λύκεια, ΤΕΕ που συμμετέχουν στην Οδύσσεια – Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας. Αποτελείται από ένα πακέτο ισχυρών κατασκευαστικών υπολογιστικών εργαλείων για τη δημιουργία γεωμετρικών δραστηριοτήτων και εφαρμογών, η λειτουργία του οποίου βασίζεται στην αμφίδρομη σχέση με τον χρήστη. Το περιβάλλον Cabri – geometry χαρακτηρίζεται ως δυναμικό περιβάλλον για την μάθηση γεωμετρικών εννοιών. Η δυναμικότητα αναφέρεται στην δυνατότητα εμφάνισης στην οθόνη του υπολογιστή μια απειρίας ψηφιακών γραφικών αναπαραστάσεων μιας γεωμετρικής κατασκευής που δημιουργείται από τον συνδυασμό απλών στοιχειωδών κατασκευών που υπάρχουν στο περιβάλλον διεπαφής του μικρόκοσμου.

Το Cabri έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει άμεσα μερικά αντικείμενα, για παράδειγμα , σχεδιάζει άμεσα τρίγωνα, κωνικές τομές, μεσοκαθέτους τμημάτων, διανύσματα και αθροίσματα διανυσμάτων, πολύγωνα και κανονικά πολύγωνα, ελέγχει τρία σημεία είναι συνευθειακά, ελέγχει αν δύο σημεία ισαπέχουν από κάποιο άλλο , δημιουργεί μεταβολείς εύκολα, δημιουργεί πολλαπλά animation με απλές κινήσεις, μαρκάρει εύκολα γωνίες, δίνει την δυνατότητα να υπάρχουν στο ίδιο σχέδιο πολλά συστήματα συντεταγμένων ορθά, πλάγια , κανονικά ή μη και μια ποικιλία κουμπιών για τη μορφοποίηση των κειμένων.

Οι μετρήσεις μπορούν να ακολουθούν παραμονεύοντας πάντα δίπλα τους, ακόμη μπορούν να ενσωματώνονται μέσα σε κείμενα. Επιτρέπει τόσο την κατασκευή όσο και τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων, δίνοντας με αυτόν τον τρόπο κίνητρα στο μαθητή προκειμένου να επεκτείνει τις αναζητήσεις του στον χώρο της γεωμετρίας. Το λογισμικό δίνει την δυνατότητα να καταγράψεις και να σώσεις σε αρχεία κατασκευές ως ‘μακροεντολές’ για μελλοντική χρήση.

2.11.3 Geogebra

Βραβευμένο πρόγραμμα που αναπτύχθηκε από τον Αυστριακό μαθηματικό Markus Hohenwarter ως βοήθημα για την διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία. Πρόσφατα έτυχε χορηγίας από την Αυστριακή Ακαδημία Επιστημών, την Αυστριακή κυβέρνηση και το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών των ΗΠΑ για την περαιτέρω ανάπτυξή του. Γύρω από την Geogebra έχει δημιουργηθεί μια μεγάλη δραστήρια κοινότητα μαθηματικών από όλο τον κόσμο.



Σχ 7 Λογισμικό Geogebra

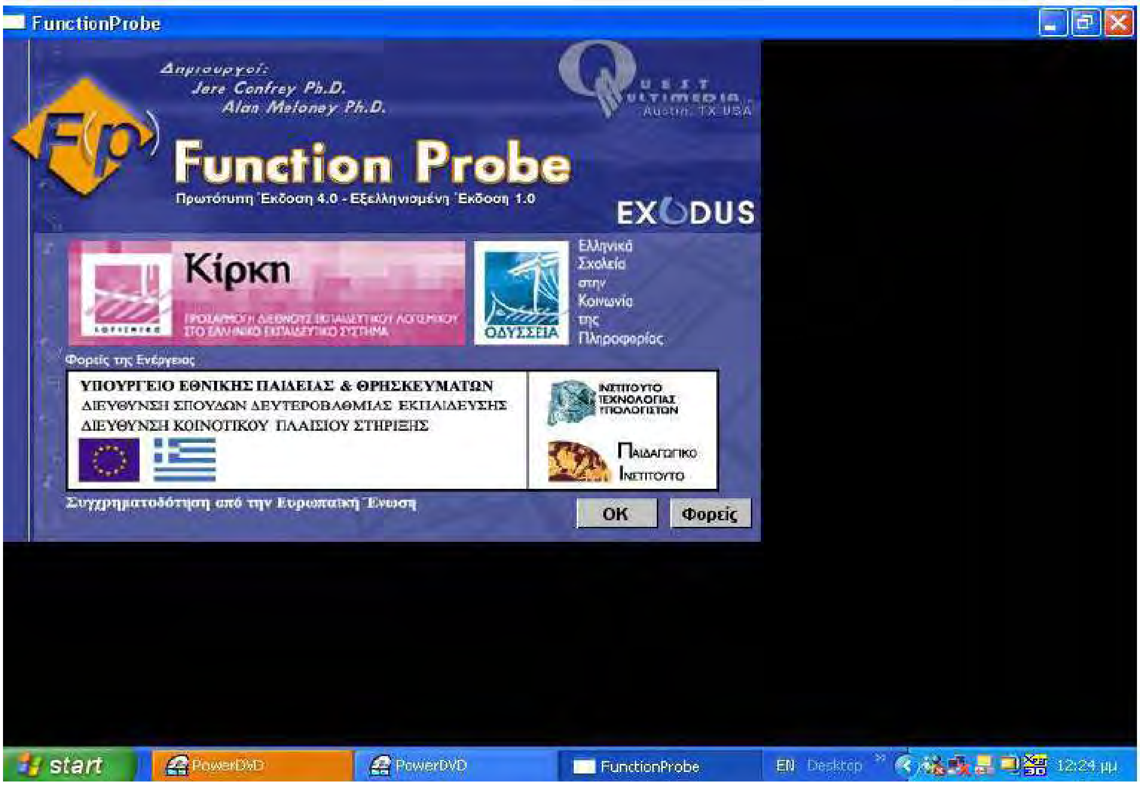
Το πρόγραμμα Geogebra είναι ένα δυναμικό εργαλείο για Γεωμετρία, Ανάλυση και Λογισμό. Η Geogebra **συνδυάζει χαρακτηριστικά προγραμμάτων**

δυναμικής γεωμετρίας (Geometer's Sketchpad, Cabri, Cinderella, EucliDraw, WinGeom) και προγραμμάτων γραφικών παραστάσεων (Graphmat, WinPlot). Παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας δυναμικού φύλλου εργασίας σε μορφή ιστοσελίδας (htlm). Δημιουργεί γραφικά σε γλώσσα Postcript (eps) αλλά αν τα γραφικά του εξαχθούν (με την εντολή export) σε μορφή png μπορούν να εισαχθούν ως εικόνες σε έγγραφα του Microsoft Word και άλλων εφαρμογών. Εξίσου καλά μπορούν να εισαχθούν με Αντιγραφή – Επικόλληση.

Πρόκειται για Ελεύθερο Μαθηματικό λογισμικό για εκμάθηση και διδασκαλία το οποίο παρέχει επίσης δυνατότητα για κινούμενα γραφικά, δυναμικό χειρισμό και δημιουργία μεταβολέα, αλγεβρική επεξεργασία και λογιστικά φύλλα και απευθύνεται σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης από το Δημοτικό μέχρι την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

2.11.4 Function Probe

Το Function Probe είναι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο κατάλληλο για την επεξεργασία και μοντελοποίηση δεδομένων που διαχειρίζονται καταστάσεις από την Άλγεβρα, την Τριγωνομετρία, τη Στατιστική και την Ανάλυση. Εξελληνίστηκε με υπεύθυνο φορέα συντονισμό και εκτέλεσης του έργου το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (ΙΤΥ) και δόθηκε στα σχολεία το 2002.



Σχ 8 Λογισμικό Function Probe

Τα βασικά του χαρακτηριστικά είναι ότι τα τρία παράθυρα συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε ο χρήστης να είναι σε θέση να στέλνει πληροφορίες από το ένα στο άλλο και να χειρίζεται πολλαπλές αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών, παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής πινάκων με τιμές και συσχετίσεων ανάμεσα σε αυτές, παρέχει τη δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ενώ ταυτόχρονα εμφανίζει την αλλαγή που επιφέρει ο μετασχηματισμός αυτός στον τύπο της, παρέχει τη δυνατότητα πραγματοποίησης απλής γραμμικής παλινδρόμησης σε ένα διάγραμμα διασποράς με το χέρι και αυτόματα , παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής κουμπιών στην αριθμομηχανή για εκτέλεση υπολογισμών που επαναλαμβάνονται συχνά. Τέλος, ο χρήστης μπορεί να στέλνει σημεία από ένα πίνακα δεδομένων σε ένα παράθυρο γραφήματος.

2.11.5 Αβάκιο

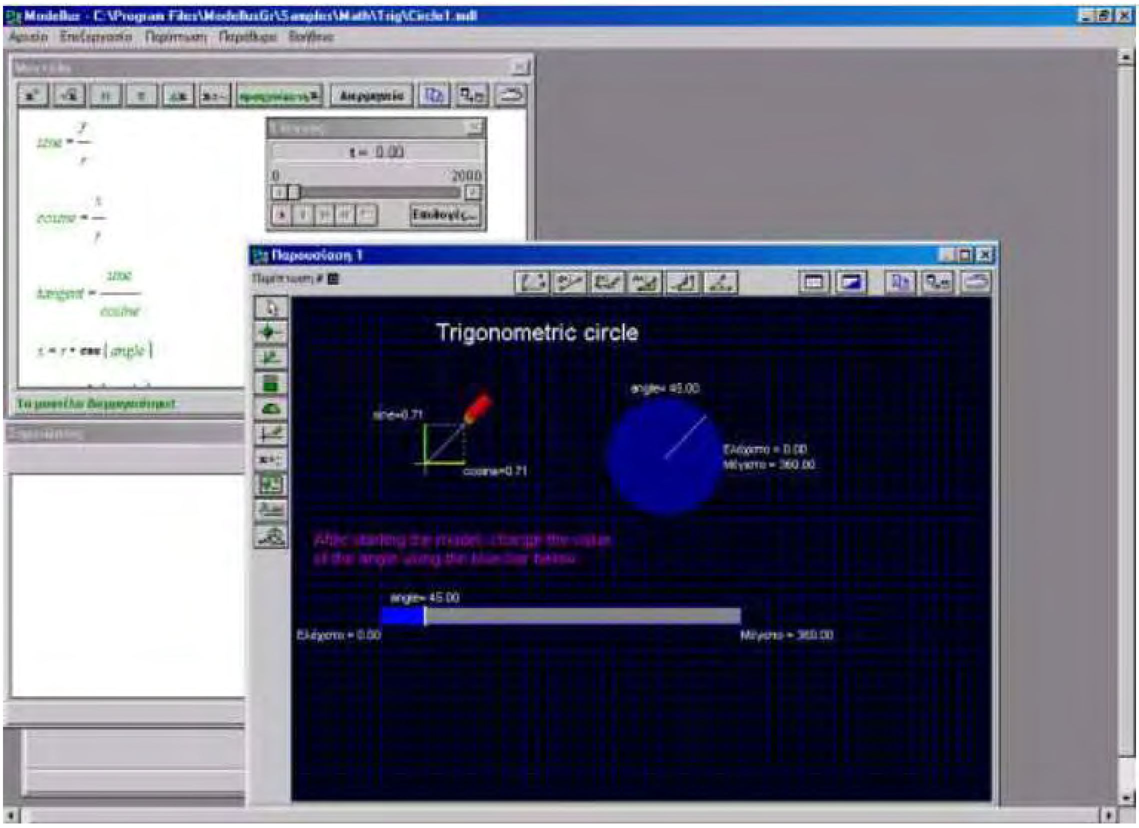
Το αβάκιο είναι μια ισχυρή εφαρμογή Java για διερευνητική μάθηση, με την οποία μπορεί κανείς να κατασκευάσει και να διαχειριστεί ‘μικρόκοσμους’ οι οποίοι αποτελούνται από ‘ψηφίδες’ συνδεδεμένες μεταξύ τους, ώστε να είναι σε θέση ο δημιουργός – συγγραφέας των μικρόκοσμων να υλοποιήσει μία ή περισσότερες εκπαιδευτικές δραστηριότητες από διάφορα γνωστικά πεδία (Μαθηματικά, Γεωγραφία, Ιστορία, Γλώσσες κ.α.)

Σχ 9 Λογισμικό Αβάκιο

Μπορεί κανείς να δημιουργήσει δικές του ψηφίδες ή να τροποποιήσει αυτές που ήδη υπάρχουν. Οι ψηφίδες αναπαριστούν γνωστικές οντότητες του γνωστικού χώρου (για παράδειγμα ένα ρολόι ή προβολέας χαρτών κ.ά) και θεωρούνται δομικά υλικά υψηλού επιπέδου για τη σύνθεση μικρόκοσμων. Παρέχουν τη δυνατότητα προγραμματισμού με τη γλώσσα logo, διαμορφώνονται όπως θέλουμε και διασυνδέονται με άλλες ψηφίδες που μπορεί να έχουν κατασκευαστεί από άλλους συγγραφείς.

2.11.6 Modellus

Το λογισμικό Modellus δημιουργήθηκε με την λογική ότι << η μοντελοποίηση μέσω υπολογιστή των εννοιών της επιστήμης αποτελεί τόσο πολύ καθημερινή πρακτική στους επιστημονικούς και τεχνολογικούς χώρους, ώστε μπορεί να θεωρηθεί σαν μία Τρίτη θεμελιώδης μεθοδολογία της επιστήμης παράλληλη με τις ήδη σαφώς ανεγνωρισμένες μεθοδολογίες της θεωρίας και του πειράματος>>.



Σχ 10 Λογισμικό Modellus

Το Modellus προσφέρει στους μαθητές μια διανοητική εμπειρία μάθησης πολλαπλών επιπέδων με την οποία δημιουργούν, προσομειώνουν και αναλύουν αλληλεπιδραστικά μοντέλα στον ΗΥ ,το οποία προκύπτουν είτε από πειραματικά δεδομένα ,είτε από θεωρητική σκέψη. Πρόκειται για ένα ανοικτό λογισμικό ,το οποίο προσδιορίζει τους αποδέκτες τόσο στην δευτεροβάθμια όσο και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και στα επιστημονικά πεδία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Χαρακτηρίζεται με τον όρο ,ανοικτό λογισμικό ,διότι δεν προσφέρει από μόνο του κάποια ύλη μαθημάτων του σχολικού αναλυτικού προγράμματος , αλλά προσφέρει μία πληθώρα εργαλείων με τα οποία μπορούμε να μοντελοποιήσουμε αντλώντας γνώσεις από άλλες πηγές προκειμένου να πετύχουμε την καλύτερη κατανοήσή τους .είτε για πιστοποίηση της εγκυρότητα τους, είτε ακόμη και της δυναμικής αμφισβήτησή τους.

Η μοντελοποίηση αυτή γίνεται με την βοήθεια του λογισμικού και υλοποιείται με εικόνες, κινούμενες εικόνες, βίντεο, γραφήματα, πίνακες κ.λ.π. Πιο συγκεκριμένα γνωρίζοντας κάποιος ένα φυσικό νόμο μπορεί να ανακαλύψει την μαθηματική σχέση που τον περιγράφει ή και αντίθετα μπορεί να δώσει νόημα σε μαθηματικές σχέσεις στον φυσικό κόσμο που τον περιβάλλει.

Το λογισμικό περιέχει κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία ώστε μέσα από το παραθυρικό περιβάλλον εργασίας να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκπαίδευση με δύο τρόπους.

Ο πρώτος είναι να χρησιμοποιηθεί σαν εργαλείο συγγραφής εκπαιδευτικού λογισμικού από την μεριά του διδάσκοντα .Προετοιμάζει δηλαδή ο δάσκαλος γράφοντας τους κατάλληλους μαθηματικούς τύπους στο παράθυρο εργασίας του λογισμικού , μια προσομοίωση ενός φαινομένου την οποία θέτει στην διάθεση των μαθητών. Η διδακτική στρατηγική του δασκάλου καθορίζει από εκεί και πέρα ως εξής , είτε να παρουσιάσει απλώς στους μαθητές το φαινόμενο ή αλλιώς να τους δημιουργήσει γραφικά εργαλεία μεταβολής παραμέτρων, έτσι ώστε, αυτοί αλλάζοντας κάποιους παράγοντες να κατανοήσουν καλύτερα την συμπεριφορά του φαινομένου.

Ο δεύτερος και περισσότερο ουσιαστικός τρόπος χρησιμοποίησης του εκπαιδευτικού λογισμικού είναι να δοθεί στους μαθητές υπό μορφή εργασίας η διερεύνηση ενός φαινομένου των μαθηματικών ή των φυσικών επιστημών. Οι μαθητές θα πρέπει από μόνοι τους να ανακαλύψουν τους μαθηματικούς τύπους, που θα τους βοηθήσουν στο να εξηγήσουν το φαινόμενο .Εδώ το θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό σαν εργαλείο προσομοίωσης

Είναι απαραίτητη μία εκ των προτέρων εξοικείωση του μαθητή με τον τρόπο λειτουργίας του εκπαιδευτικού λογισμικού και μια αναπτυγμένη μαθηματική γνώση και ικανότητα. Το λογισμικό Modellus κυρίως απευθύνεται σε μαθητές Λυκείου.

2.12 Πλεονεκτήματα μειονεκτήματα μαθηματικών Λογισμικών

2.12.1 Geometer's Sketchpad

Το «The Geometer's Sketchpad» είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, της Άλγεβρας και της Τριγωνομετρίας. Είναι ένα «ανοικτό» περιβάλλον, ιδανικό για την οργάνωση δραστηριοτήτων *διερευνητικής μάθησης* στο σχολικό εργαστήριο αλλά, και στο σπίτι. Αξιοποιεί τις δυνατότητες των νέων τεχνολογιών λαμβάνοντας υπόψη τις νέες τάσεις για διερευνητική προσέγγιση στη σχεδίαση του λογισμικού (με πολλαπλές αναπαραστάσεις, άμεσο χειρισμό κ.τ.λ.). Με τις δυνατότητες που διαθέτει βοηθά στην κατανόηση με ολοκληρωμένο τρόπο εννοιών και διαδικασιών μέσα από την *επίλυση προβλημάτων* και τον *πειραματισμό.*

Η παιδαγωγική προσέγγιση του λογισμικού στηρίζεται στην άποψη ότι η μάθηση προϋποθέτει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στο κοινωνικό πλαίσιο της τάξης, το οποίο αποτελείται πρωταρχικά από τον εκπαιδευτικό (μέσω των διδακτικών του παρεμβάσεων), το μαθητή και από την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα διδακτικά εργαλεία (π.χ. βιβλία, υπολογιστικά περιβάλλοντα κ.α.).

Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση, το λογισμικό:

· Προσφέρει ένα θεματικό πλαίσιο το οποίο διευρύνει την φαντασία των ενεργητικά ενασχολούμενων με αυτό δημιουργώντας κίνητρο για μάθηση.

· Η δυνατότητα σχεδίασης και κατασκευής δι-διάστατων αντικειμένων προσφέρει την δυνατότητα ενεργητικής ενασχόλησης των μαθητών και εμπλουτίζει τις γνωστικές και μεταγνωστικές τους εικόνες.

· Αποτελείται από «εικόνες» οι οποίες παίζουν τον ρόλο «φυσικών μεταφορών» ή/και «οπτικών αναπαραστάσεων» μαθηματικών εννοιών με δυνατότητα διαβάθμισης της γνωστικής τους επεξεργασίας (π.χ. διαισθητική, πρακτική και φορμαλιστική επεξεργασία εννοιών).

· Η χρήση της γεωμετρίας γίνεται μέσω οπτικών και λεκτικών κωδίκων οι οποίοι με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση (π.χ. προτεινόμενη μέσα από ένα διδακτικό σενάριο, ή/και με την παρέμβαση του καθηγητή) βοηθούν στην εποικοδόμηση μαθηματικών εννοιών.

Η διδακτική προσέγγιση σε ένα τέτοιο περιβάλλον προσφέρει και ενθαρρύνει την:

· Απόκτηση εμπειριών από την ενεργή ενασχόληση των μαθητών με το φυσικό και γεωμετρικό χώρο που παρέχεται (π.χ. κατασκευή, σχεδιασμός, παρατήρηση)

· Επικοινωνία αυτών των εμπειριών και των προσπαθειών τους για την προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών που επεξεργάζονται μέσα από κατάλληλες ασκήσεις και τεχνολογικά εργαλεία.

· Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων της μαθηματικής έννοιας και προσέγγισής της με τεχνολογικά και παραδοσιακά εργαλεία (π.χ. κανόνας, διαβήτης, σχεδιαστικά υλικά).

Η σημαντικότερη δυνατότητα του «The Geometer's Sketchpad» είναι η δυνατότητα της άμεσης διαχείρισης των μαθηματικών αντικειμένων και σχημάτων και την επεξεργασία των την επεξεργασία γεωμετρικών και εννοιών ολιστικά και από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Ο καθηγητής / μαθητής, αφού δημιουργήσει ένα σχήμα μπορεί να το μεγεθύνει, να το μετακινήσει, να εξετάσει αν συμπίπτει με άλλο παρόμοιο, πράγμα που βέβαια δεν μπορεί να γίνει με τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας.

Η δυνατότητα της κίνησης και της ταυτόχρονης παρακολούθησης της αλλαγής των διαφόρων στοιχείων και μεγεθών του σχήματος, δίνει τη δυνατότητα της χρήσης της «εικασίας» και του πειραματισμού στη διδακτική πράξη, κάτι που έχει μεγάλη ανάγκη η διδακτική των Μαθηματικών.

Το «The Geometer's Sketchpad» μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν εργαλείο επίλυσης προβλημάτων, όπως π.χ. στην εύρεση γεωμετρικών τόπων, αφού παρέχει τη δυνατότητα να διαγράφεται στην οθόνη η γραμμή που σχηματίζεται από τις διαδοχικές θέσεις ενός επιλεγμένου σημείου κατά την κίνηση των παραμετρικών στοιχείων του σχήματος.

2.12.2 Modellus:

. **Τα πλεονεκτήματα του Λογισμικού**

α**. Όσον αφορά το περιβάλλον εργασίας**

• Τρέχει και σε παλιότερη τεχνολογία με ικανοποιητική ταχύτητα.
• Εύκολο στην εξοικείωση και εκμάθηση γιατί πέραν του παραθυρικού περιβάλλοντος είναι και δομημένο με τέτοιο τρόπο ώστε, σε κάθε παράθυρο, να υπάρχουν βοηθητικά εργαλεία με επεξηγήσεις.
• Είναι κατάλληλο όχι μόνο για προσομοιώσεις αλλά και για μοντελοποιήσεις.

Επιτρέπει στο δάσκαλο να κατασκευάζει τα δικά του σενάρια χωρίς να απαιτείται καμία προηγούμενη γνώση στον προγραμματισμό.
• Είναι κατάλληλο για πολλές ειδικότητες.
• Κάθε δραστηριότητα/μοντέλο αποθηκεύεται σαν ξεχωριστό αρχείο. Έτσι ο διδάσκων μπορεί να την ανακαλεί και βέβαια έχει όλη την ευχέρεια να τη βελτιώνει αλλά και να εμπλουτίζει τη συλλογή με νέα μοντέλα.

β. **Από παιδαγωγική σκοπιά**

1. Χρησιμοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις (ένας τεράστιος πλούτος με πίνακες τιμών, γραφικές παραστάσεις, προσομοιώσεις, αρχικές συνθήκες, σταθερές του προβλήματος, διανύσματα).

2. Επιτρέπει τον άμεσο χειρισμό αντικειμένων.

3. Επιτρέπει στο μαθητή να δοκιμάζει, με μεγάλη ευκολία, τις ιδέες του.

4. Υποστηρίζει τη σκηνοθεσία του περιβάλλοντος εργασίας.

5. Η ευρύτητα των γνωστικών αντικειμένων, παρέχει τη δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ διδασκόντων διαφορετικών ειδικοτήτων.

6. Όσον αφορά τους μαθητές του Γυμνασίου, μπορεί να τους ασκήσει σε θέματα περιγραφής, ερμηνείας και πρόβλεψης σε όλη τη διδακτέα ύλη των αντίστοιχων μαθημάτων δηλαδή τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

7. Για τους μαθητές του Λυκείου η στόχοι μπορεί να είναι υψηλότεροι όπως η μοντελοποίηση και η καλλιέργεια νοητικών δεξιοτήτων στην αντιμετώπιση προβλημάτων

Μειονέκτημα του λογισμικού

Μπορεί να θεωρηθεί η μη υποστήριξη ήχου και video. Τα στοιχεία αυτά όμως δεν είναι απαραίτητα για την οικοδόμηση εννοιών και νόμων.

2.12.3 Geogebra

.

Πλεονεκτήματα

1. Μια έκφραση στο παράθυρο της Άλγεβρας αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο του παράθυρου της γεωμετρίας και αντίστροφα.

2. Είναι ελεύθερο λογισμικό.

3. Η δραστηριότητα που αναπτύσσεται για μία συνάρτηση χρησιμοποιείται για οποιαδήποτε άλλη μόνο με την αλλαγή του τύπου της συνάρτησης.

4. Έχει διπλό τρόπο εισαγωγής αντικειμένων. Με τα κουμπιά και το μενού αλλά και από την εισαγωγή με τύπους.

5. Άμεση εισαγωγή εξισώσεων και συναρτήσεων.

6. Δυνατότητα κατασκευής δρομέα για τον έμμεσο δυναμικό χειρισμό

αντικειμένων.

8. Κατασκευή δυναμικού σημείου.

9. Εισαγωγή εικόνας στην κατασκευή.

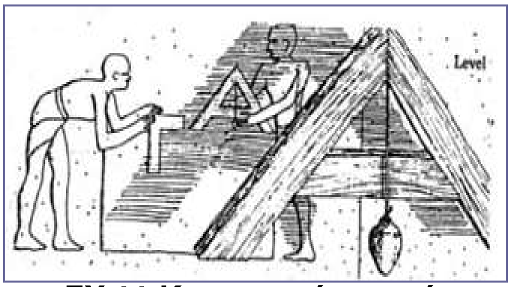
10. Εισαγωγή τύπων με το LaTeX.

ΤΡΙΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διδακαλία της Γεωμετρίας με διαδραστικές εφαρμογές.

3.1 Η χρησιμότητα της Γεωμετρίας στο σχολείο.

Η Γεωμετρία αντικατοπτρίζει το χώρο που ζουν, αναπνέουν και κινούνται τα παιδιά. Αυτό το χώρο τα παιδιά πρέπει να μάθουν να τον εξερευνούν, να τον ανακατασκευάζουν, να τον κάνουν πιο πρακτικό για τη ζωή τους (D.Clements & M. Battista, 1992).



ΣΧ 11 Κατασκευή με χρήση ΠΘ

Είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε τουλάχιστον τρείς χιλιετίες π.χ ως <<τέχνη>> υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν <<τέχνη >> για μέτρηση γής (Γεώ-μετρία). Μετά τις πλημμύρες του Νείλου, οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν εμπειρική γεωμετρία, για να υπολογίσουν τα όρια των χωραφιών τους

Βέβαια, η Γεωμετρία, ενώ αρχικά εξυπηρετούσε πρακτικούς σκοπούς για τον άνθρωπο στη συνέχεια απέκτησε και θεωρητική υπόσταση. Έτσι η «πρακτική» Γεωμετρία εξελίχθηκε στο σύστημα θεωρημάτων και αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η σχολική Γεωμετρία ασχολείται με τα αντικείμενα του χώρου, των σχέσεων, των μμετασχηματισμών και τη διατύπωση των μαθηματικών αξιωμάτων που έχουν κατασκευαστεί για να τα παραστήσουν (Fehr H.F., 1973).

Η Γεωμετρία συνδυάζει την λογική σκέψη, την ομορφιά και την αρμονία καλλιεργώντας το αισθητήριο της καλαισθησίας. . Λύνοντας γεωμετρικά προβλήματα ο μαθητής καλλιεργεί την λογική του, αναπτύσσει την ερευνητική του ικανότητα,να μαθαίνει να αναλύει τα προβλήματα και έρχεται σε επαφή με τη διαδικασία της απόδειξης που αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας.

Ο μαθητής αναγνωρίζει, περιγράφει, αναλύει και ταξινομεί τα δεδομένα ενός γεωμετρικού προβλήματος, κάνει τις απαραίτητες συγκρίσεις, συνδυασμούς και μετασχηματισμούς, προβαίνει σε αποδείξεις και βγάζει συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων. Έτσι, προσεγγίζει την αξιωματική πλευρά της Γεωμετρίας και αναπτύσσει την ικανότητα να εξερευνά και να συγκρίνει διάφορα γεωμετρικά συστήματα.[1]

3.2 Παραδοσιακή Γεωμετρία και Δυναμική Γεωμετρία.

Η γεωμετρία διδασκόταν όλα τα παρελθόντα χρόνια και εξακολουθεί να διδάσκεται με παραδοσιακό τρόπο. Κυριαρχεί η διδασκαλία των αποδείξεων, θεωρημάτων, πορισμάτων και λημμάτων, που αποσκοπούν στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. Τα εργαλεία των μαθητών ήταν και είναι τα βασικά: χαρτί μολύβι, κανόνας και διαβήτης.

Η διδασκαλία της γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά όργανα αλλά και βοηθητικά εργαλεία όπως, για παράδειγμα, διαφανές χαρτί, είναι διαδικασία κουραστική, χρονοβόρα και πολλές φορές αναποτελεσματική λόγω της μη επίτευξης μεγάλης ακρίβειας στα σχήματα.

Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι τα σχήματα που κατασκευάζονται με αυτό τον τρόπο είναι στατικά και πρέπει, προκειμένου να πειραματιστεί κανείς, είτε να ξανακατασκευάσει το σχήμα, είτε να φανταστεί νοερά πώς θα μπορεί να αλλάξει μορφή όταν κάποια στοιχεία άλλάζουν θέση.

Ως ένα απλό παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών) ενός τριγώνου. Θα πρέπει να κατασκευαστούν διαφορετικά είδη τριγώνων με μεγάλη ακρίβεια και να διαπιστωθεί η θέση του ,ως προς το τρίγωνο. Δηλαδή πότε βρίσκεται εντός του τριγώνου, εκτός και πότε πάνω στο τρίγωνο..

Τις παραπάνω αδυναμίες της παραδοσιακής Γεωμετρίας έρχεται να καλύψει η Δυναμική Γεωμετρία.

---

1 **Ντζιαχρήστος**, **Β.**, **Κολέζα**, **Ε.** 1990, "Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στα σχολεία

Αντικείμενα όπως σημεία, ευθείες και κύκλοι σε έναν περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας σχετίζονται μεταξύ τους με γεωμετρικούς περιορισμούς όπως, όταν οποιοδήποτε από τα αντικείμενα σύρονται (drag) τα άλλα αντικείμενα δυναμικά ανανεώνουν τον εαυτό τους έτσι ώστε οι περιορισμοί να διατηρούνται. Το σύρσιμο (dragging), το οποίο είναι η καρδιά της δυναμικής γεωμετρίας, απελευθερώνει ένα σχήμα από τον συμβατικό του ρόλο που είναι η αναπαράσταση ή η τυπική περίπτωση, και μετατρέπεται σε μία γενική περίπτωση στην οποία αναφέρονται τα Μαθηματικά.(Nicholas Jackiw, 1996)

Σε ελάχιστο χρόνο οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουν άπειρα σχήματα με μεγάλη ακρίβεια. Ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος είναι αυτός που δημιουργεί το κίνητρο για μάθηση για τους μαθητές ενισχύοντάς τους την αυτοπεποίθηση.

Το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας τους επιτρέπει να κάνουν δικές τους υποθέσεις και να τις εξετάζουν εύκολα και γρήγορα. Μετά τον πειραματισμό και την εξερεύνηση οδηγείται ο μαθητής στην γενίκευση .

Ο De Villiers περιγράφει πώς μέσα από περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να καλλιεργηθεί η διερεύνηση με ερωτήσεις του τύπου «τι θα γινόταν αν …», ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν σε ανακαλύψεις και γενικεύσεις.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας δίνουν τη δυνατότητα στον χρήστη να μετασχηματίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα που σχεδιάζει συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο. Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει στο χρήστη να μετακινήσει ελεύθερα ορισμένα στοιχεία του σχήματος που κατασκεύασε για να παρατηρήσει με ποιόν τρόπο ανταποκρίνονται δυναμικά άλλα στοιχεία του σχήματος στις αλλαγές αυτές. Πλεονέκτημα αποτελεί το ότι το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικούς περιορισμούς της αρχικής κατασκευής και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές τους συνέπειες.

Τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας προσφέρουν αυτή την αίσθηση της μαγείας, με τη δημιουργία και το συνεχή μετασχηματισμό διαγραμμάτων και άλλων μαθηματικών μορφών. Αντίθετα από την ανθρώπινη νοητική φαντασία, η οθόνη του υπολογιστή μπορεί επίσης να κρατήσει συγκεκριμένες εικόνες για παρατήρηση και διερεύνηση και, επιπλέον, είναι ένας δημόσιος χώρος, που καθιστά τις δυναμικές φαντασίες, ορατές σε όλους (Johnston- Wilder & Pimm, 2005).

. Οι δυναμικοί γεωμετρικοί μικρόκοσμοι επιτρέπουν τους μαθητές να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με σχετικά μεγάλη ακρίβεια να διατυπώσουν τις υποθέσεις τους και να τις ελέγξουν εύκολα για ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων με το να διερευνήσουν τις δεδομένες ιδιότητες των κατασκευών τους ή ακόμα και να ανακαλύψουν νέες.

Μια σημαντική δυνατότητα είναι αυτή της κίνησης των σχημάτων με σύρσιμο (drag), που επιτρέπει στους μαθητές να χειριστούν τα σχήματα και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους άμεσα, καθιστώντας την κατασκευή και την εξέταση των υποθέσεων μία ευχάριστη και δημιουργική δραστηριότητα (Ράπτης Α., Βοσνιάδου Σ., Γρηγοριάδου Μ. & Κυνηγός Χ., 2004).

Βασικό χαρακτηριστικό των δυναμικών λογισμικών είναι η δυναμική τροποποίηση, η μετακίνηση και ο μετασχηματισμός των σχημάτων, με διατήρηση, όμως, των βασικών σχέσεων και ιδιοτήτων τους. Είναι σαν τα σχήματα να αντιδρούν στους χειρισμούς του χρήστη, ακολουθώντας τους νόμους της Γεωμετρίας, ακριβώς όπως τα υλικά αντικείμενα αντιδρούν, σύμφωνα με τους νόμους της Φυσικής (Laborde et all, 2006).

Τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας προσφέρουν την αίσθηση της μαγείας, με τη δημιουργία και το συνεχή μετασχηματισμό διαγραμμάτων και άλλων μαθηματικών μορφών. Αντίθετα από την ανθρώπινη νοητική φαντασία, η οθόνη του υπολογιστή μπορεί επίσης να κρατήσει συγκεκριμένες εικόνες για παρατήρηση και διερεύνηση και, επιπλέον, είναι ένας δημόσιος χώρος, που καθιστά τις δυναμικές φαντασίες, ορατές σε όλους (Johnston- Wilder & Pimm, 2005)

Έρευνες υποστηρίζουν ότι οι ΤΠΕ ενισχύουν τη διδασκαλία και τη μάθηση στα μαθηματικά (Gentile et al, 1994), ότι οι ΤΠΕ μπορούν να αυξήσουν σε μεγάλο βαθμό την αντίληψη σε θέματα γεωμετρίας (Gentile et al, 1994).

Όπως έχουν δείξει οι έρευνες, τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, με τη δράσης τους ως γνωστικοί αναδιοργανωτές και όχι μόνο ως ενισχυτές των ανθρώπινων ικανοτήτων (Jones, 2001), μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να αναβαθμίσουν τη γεωμετρική σκέψη τους πολύ πιο γρήγορα παρά με τη παραδοσιακή γεωμετρία (Koh,1999, Keith Jones,2001), λόγω της δυνατότητας παροχής πλούσιων εμπειριών, αλλά και της δυνατότητας διαφοροποίησης έτσι ώστε κάθε παιδί να εργάζεται με τις δυνατότητες του. Το περιβάλλον που παρέχουν τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, είναι το πλέον κατάλληλο για ανάπτυξη του πειραματισμού, της διερεύνησης, της δημιουργικότητας,για να φτάσουν τα παιδιά στη μάθηση αλλά και ανάπτυξη της σκέψης τους.

3.3 Η έννοια του σεναρίου

3.3.1 Τι είναι ένα σενάριο

Ως *σενάριο* εννοούμε ένα σύνθετο εργαλείο περιγραφής της διδασκαλίας για μια συγκεκριμένη περιοχή ενός γνωστικού αντικειμένου με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας. Η υλοποίηση ενός σεναρίου περιλαμβάνει την εφαρμογή μιας σειράς εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στην τάξη που με τη σειρά τους μπορεί να εξειδικεύονται σε φύλλα εργασίας για τους μαθητές. Τόσο ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων όσο και η διαδικασία εφαρμογής τους αποτελούν κύρια αντικείμενα του σεναρίου που τεκμηριώνουν τόσο τις επιλογές των δραστηριοτήτων ("τι σχεδιάζεται, γιατί-πού-πώς-για πόσο") όσο και τις αναμονές από την εφαρμογή τους στην πράξη ("τι αναμένεται να γίνει"). Έτσι, μια πολλαπλότητα πτυχών της διδακτικής πράξης όπως οι δράσεις των μαθητών και ο ρόλος του διδάσκοντα, η χωροχρονική οργάνωση του μαθήματος και η διδακτική διαχείριση της εφαρμογής των δραστηριοτήτων στην πράξη περιγράφονται στο σενάριο. Ένα σενάριο, λοιπόν, αποτελεί ένα "σύνθετο" εργαλείο και όχι ένα απλό κομμάτι αναλυτικού προγράμματος που μπορεί να εστιάζει στη διδασκαλία μιας ή περισσότερων εννοιών συνδυάζοντας περισσότερα διδακτικά μέσα όπως π.χ. περισσότερα του ενός λογισμικά, σημειώσεις, ιστοσελίδες, όργανα (π.χ. πίνακας, διαβήτης), προκειμένου να επιτευχθεί ένα μαθησιακό αποτέλεσμα (Μακρή κ.α., 2006).

3.3.2 Τα χαρακτηριστικά ενός σεναρίου μαθηματικών

Ο σχεδιασμός ενός σεναρίου εκλαμβάνεται ως μία πρόκληση να σκεφτεί ο εκπαιδευτικός καινούριους τρόπους διδακτικής προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών που περιλαμβάνουν την προσωπική εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες με πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Σε αντίθεση με τα σχέδια μαθήματος και τα επίσημα έγγραφα του αναλυτικού προγράμματος που αποτελούν συνήθως τεχνικά κείμενα με λεπτομερείς διδακτικές οδηγίες προς το διδάσκοντα (Φλουρής 1992), τα σενάρια διακρίνονται για τον επιτελικό τους χαρακτήρα και τα περιθώρια επιλογών στο διδάσκοντα να ενσωματώσει την εφαρμογή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στη δική του εκπαιδευτική στρατηγική και στόχους. Με αυτή την έννοια ένα σενάριο μπορεί να λειτουργήσει ως ένας στρατηγικός καταλύτης, που στοχεύει να εμπλέξει τους συμμετέχοντες σε καινοτόμες δράσεις οι οποίες τους παρέχουν τη δυνατότητα να γνωρίσουν απρόσμενες μαθησιακές και διδακτικές καταστάσεις (Κυνηγός, 2007).

Εκτός από τις συνήθεις αναφορές σε συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους και ύλη, ένα σενάριο λαμβάνει υπόψη και τις κοινωνικές διαστάσεις και παραμέτρους του μαθησιακού περιβάλλοντος καθώς και τους περιορισμούς που προέρχονται από το σχολικό ή το ευρύτερο πολιτισμικό πλαίσιο. Για παράδειγμα, ο χρόνος που απαιτείται για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων και οι απαραίτητες δράσεις των συμμετεχόντων προδιαγράφονται με σαφήνεια ώστε να μπορεί ο εκπαιδευτικός να κρίνει αν και σε ποια μέρη της διδασκαλίας μιας έννοιας θα εστιάσει κατά την εφαρμογή ανάλογα με το συνολικό διδακτικό σχεδιασμό της ύλης. Επιπρόσθετα, η εμπειρία εφαρμογής μπορεί να δώσει χρήσιμες ενδείξεις τόσο για την επέκταση μιας δραστηριότητας όσο και για την επαναχρησιμοποίησή της σε διαφορετικό κοινό, ηλικία και εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό του σεναρίου είναι η τεκμηρίωση των λειτουργικοτήτων της τεχνολογίας με αποκλειστική έμφαση στους μαθησιακούς στόχους που αφορούν τη διδασκαλία των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών. Τα υπολογιστικά εργαλεία, δηλαδή, δεν θεωρείται ότι προάγουν τη μάθηση επειδή διαθέτουν κάποια ιδιαίτερα ‘οντολογικά' χαρακτηριστικά. Αντίθετα, η παιδαγωγική τους αξία καθορίζεται μέσα από τη χρήση τους και στο πλαίσιο συγκεκριμένων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Αυτή η έμφαση στη χρήση επιτρέπει την αναφορά στην κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης που πηγάζει από την δυνατότητα ανάπτυξης διαφορετικών ρόλων για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, που διαφέρουν ριζικά από το παραδοσιακό σχήμα του 'πομπού-δέκτη'.

3.3.3 Η δομή ενός σεναρίου

Ένα σενάριο δεν κατατάσσεται σε κάποιο συγκεκριμένο κειμενικό ή αφηγηματικό είδος και έτσι δεν υπάρχει κάποια αυστηρή δομή με βάση την οποία οφείλει να γραφτεί. Παρόλα αυτά και με βάση τα όσα προηγήθηκαν είναι προφανές ότι ένα σενάριο οφείλει να ενσωματώνει ένα σύνολο παραμέτρων που αφορούν αφενός το σχεδιασμό του μαθήματος και τις παιδαγωγικές αρχές στις οποίες βασίστηκε όσο και στην τεκμηριωμένη περιγραφή του τρόπου με τον οποίο αναμένεται να αξιοποιηθούν τα χρησιμοποιούμενα υπολογιστικά εργαλεία κατά την εφαρμογή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στην τάξη.

Για την περιγραφή των σεναρίων-προτύπων που παρατίθενται στο επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε μια συγκεκριμένη δομή που βασίστηκε στη σύνθεση αντίστοιχων προτάσεων από ερευνητικές ομάδες διαφορετικών χωρών με εμπειρία στη γραφή σεναρίων για τη διδακτική των μαθηματικών[2] Η δομή αυτή βασίζεται στην ομαδοποίηση των ακόλουθων βασικών αξόνων: Ο πρώτος αφορά την ταυτότητα του σεναρίου, ο δεύτερος το σκεπτικό της δημιουργίας του σεναρίου, ο τρίτος το πλαίσιο εφαρμογής, ο τέταρτος την ανάλυση των δραστηριοτήτων και ο έκτος την επέκταση του σεναρίου

[2] ' α)ESCALATE' Enhancing SCience Appeal in Learning through Argumentative inTEraction FP6-2004-Science-and-Society-11, 020790 (2006-2008), http://www.escalate.org.il/engsite/home/default.asp

β)'Kaleidoscope' - Concepts and Methods for Exploring the Future of Learning with Digital Technologies, # 507838, 'TEL' - 'Technology-enhanced Learning and Access to Cultural Heritage', Network of Excellence, FP6-2002-IST Action line.3.1.12 (2004-2007). http://www.noe-kaleidoscope.org/ και http://telma.noe-kaleidoscope.org

4. Σενάριο εφαρμογής πυθαγορείου Θεωρήματος.

1. **Τίτλος:** Πυθαγόρειο Θεώρημα

2. **Ταυτότητα του σεναρίου.**

- **Συγγραφέας :**
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Γεωμετρία
- **Θέμα:** Μελέτη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και της γεωμετρικής ερμηνείας του.
- **Βασική ιδέα**. Με τη χρήση ειδικών κατασκευασμένων εφαρμογών για το σενάριο οι μαθητές θα μελετήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και θα διαπραγματευτούν διαφορετικές αναπαραστάσεις του θεωρήματος (συμβολική, γεωμετρική, αριθμητική). Η δυνατότητα ταυτόχρονης δυναμικής διαχείρισης συμβολικής και γεωμετρικής αναπαράστασης του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα μπορούσε να δημιουργήσει ευνοϊκές καταστάσεις για την κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τους μαθητές.

3. **Σκεπτικό του Σεναρίου.**

- **Καινοτομίες:** Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα χειρισμού πολλαπλών και διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων του Πυθαγορείου Θεωρήματος, καθώς και δυναμικού χειρισμού αντικειμένων.

Προστιθέμενη αξία: Οι μαθητές με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος διδάσκονται το θεώρημα κυρίως μέσα από ένα μαθηματικό τύπο τον οποίο καλούνται να μάθουν να διαχειρίζονται με αριθμούς χωρίς να έχουν ιδιαίτερη γεωμετρική εποπτεία του θέματος. Στο νέο μαθησιακό περιβάλλον του λογισμικού, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με διαδικασίες διερεύνησης, διεξαγωγής πειραμάτων, παρατήρησης, μεθοδικής καταγραφής δεδομένων, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων, συνεργάζονται μεταξύ τους, συνδιαλέγονται και επιχειρηματολογούν. Επιπλέον, θα έχουν τη δυνατότητα να συνδέσουν το ΠΘ με την επίλυση προβλημάτων εμβαδών.

- **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα:** οι μαθητές μαθαίνουν συνήθως «παπαγαλία» το Πυθαγόρειο Θεώρημα, χωρίς να αντιλαμβάνονται γεωμετρικά τι σημαίνει η φράση «το τετράγωνο της υποτείνουσας» ή «το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών». Συνήθως συγχέουν τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα και παρατηρείται αδυναμία λεκτικής διατύπωσης του θεωρήματος. Από την άλλη μεριά συνήθως δεν παρουσιάζουν δυσκολία στη χρήση του μαθηματικού τύπου του Π.Θ. με συγκεκριμένους αριθμούς.

- **Θεωρητικό πλαίσιο.** Προτείνεται μια εποικοδομιστική διαδικασία κατασκευής της γνώσης στο πλαίσιο της ομάδας και της τάξης μέσω κατευθυνόμενης διερεύνησης.

▪ **<u>Πλαίσιο εφαρμογής.</u>**

- **Σε ποιους απευθύνεται.** Μαθητές Β΄ Γυμνασίου
- **Χρόνος υλοποίησης.** Δύο (2) διδακτικές ώρες.
- **Χώρος υλοποίησης.** Οι μαθητές θα εργαστούν στην αίθουσα στο εργαστήριο υπολογιστών ή στην αίθουσα νέων τεχνολογιών..
- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.**

Ως προς την τεχνολογία και τους υπολογιστές: Βασικές λειτουργίες του Geogebra.

Ως προς τα Μαθηματικά: Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογώνια τρίγωνα

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία.

Για τη διεξαγωγή της δραστηριότητας απαιτούνται:

α) Το λογισμικό Geogebra που είναι ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας εγκεκριμένο από το Υπουργείο Παιδείας.

β) Η αίθουσα των Νέων Τεχνολογιών του σχολείου η το εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου που όμως στους υπολογιστές θα είναι εγκαταστημένο το λογισμικό με τα απαιτούμενα αρχεία και φύλλα εργασίας.

γ) Ένας βιντεοπροβολέας ή ένας διαδραστικός πίνακας για την απεικόνιση στοιχείων του σεναρίου σε οθόνη προβολής.

Συνοδευτικό Υλικό για τον μαθητή:

Α) Βασικές οδηγίες χρήσης του λογισμικού (θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό)

Β) Τετράδιο (ώστε να κρατούν σημειώσεις κατά την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν παρατηρήσεις και συμπεράσματα).

Γ) Φύλλα εργασίας (θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό με στόχο να καθοδηγηθούν οι μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων)

- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.**

Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 2 ατόμων. Με αυτό τον τρόπο αναπτύσσεται ομαδική εργασία, συνεργασία, ανταλλαγή απόψεων και ιδεών και επικοινωνία των μαθητών στη διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου.

Ο ρόλος των μαθητών: ενεργητικός (δεν είναι παθητικοί αποδέκτες όπως στην παραδοσιακή τάξη), οι μαθητές πειραματίζονται, διερευνούν, διαπραγματεύονται, διατυπώνουν εικασίες, ελέγχουν και συνεργάζονται.

Ο ρόλος του διδάσκοντα: συνεργάτης, επισκέπτεται τους μαθητές και παρεμβαίνει όταν του ζητηθεί, θέτει ερωτήσεις ανοιχτές προς διαπραγμάτευση. Δεν είναι αυτός που μεταφέρει τη γνώση αλλά ο διαμεσολαβητής, ο καθοδηγητής και ο εμψυχωτής του έργου και της δραστηριοποίησης των μαθητών. Δημιουργεί ένα περιβάλλον αλληλεπίδρασης των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με το Εκπαιδευτικό Λογισμικό.

- **Στόχοι της δραστηριότητας**.
    - Εξοικείωση με γεωμετρική αναπαράσταση – γεωμετρική Ερμηνεία Π.Θ.
    - Συμβολική έκφραση Πυθαγορείου Θεωρήματος με αλγεβρική σχέση.
    - Λεκτική διατύπωση Πυθαγορείου Θεωρήματος.

- **<u>Ανάλυση της δραστηριότητας.</u>**

- **Η περιγραφή των επιμέρους δραστηριοτήτων.**

Αρχικά ο εκπαιδευτικός μέσα από κατάλληλο φύλλο εργασίας μπορεί να ελέγξει τις προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών σχετικά με τα στοιχεία ορθογωνίου τριγώνου και το εμβαδό τετραγώνου, έτσι ώστε αν χρειαστεί να παρέμβει κατάλληλα. Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το Π.Θ. μέσω της εφαρμογής που έχει έτοιμη ο εκπαιδευτικός.

Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές αναμένεται να έχουν μια πρώτη οπτική αντίληψη για την γεωμετρική ερμηνεία του Π.Θ. μέσα από την οποία θα παρακινηθούν στη συνέχεια να διερευνήσουν και να «ανακαλύψουν» τη μαθηματική σχέση με την οποία εκφράζεται το Π.Θ. Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές αναμένεται να συσχετίσουν αρχικά οπτικά τα τετράγωνα που δημιουργούνται εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου (με ακμές τις πλευρές του τριγώνου) με τις πλευρές του τριγώνου. Ο εκπαιδευτικός μπορεί σε αυτό το στάδιο να ζητήσει από τους μαθητές να «διαβάσουν» το σχήμα και να αναγνωρίσουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Αναμένεται οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι η γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από ένα τρίγωνο και 3 τετράπλευρα, αλλά να μην αναγνωρίσουν ότι πρόκειται για ορθογώνιο και τετράγωνα αντίστοιχα. Μέσω συζήτησης μεταξύ των ομάδων και με αλληλεπίδραση με το λογισμικό αναμένεται να καταλήξουν στη σωστή απάντηση.

Στη συνέχεια οι μαθητές θα παρακινηθούν να διερευνήσουν τη σχέση που έχουν τα εμβαδά αυτών των τετραγώνων, αξιοποιώντας συνδυαστικά τα εργαλεία για αυτόματες μετρήσεις, το σύρσιμο και την πινακοποίηση (εμφάνιση αριθμητικών μετρήσεων). Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης που αντιστοιχεί στο άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσα με τα αποτελέσματα της στήλης του εμβαδού του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου.

Στην επόμενη φάση οι μαθητές θα τρέξουν μόνοι τους τις εφαρμογές «pythagorean1,2,3.ggb» έτσι ώστε να εξοικειωθούνε με το συγκεκριμένο εργαλείο του λογισμικού. και με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, μέσα από κατάλληλο φύλλο εργασίας, να επαναλάβουν τις μετρήσεις και να θα διερευνήσουν τη σχέση του εμβαδού του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου και του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου και θα διατυπώσουν εικασίες, αξιοποιώντας κατά κύριο λόγο το σύρσιμο, συνδυαστικά με τα εργαλεία για αυτόματες μετρήσεις, και πινακοποίηση.

Στη συνέχεια θα ζητηθεί από τους μαθητές να εκφράσουν τις παρατηρήσεις τους με μαθηματική σχέση, αξιοποιώντας τον τύπο του εμβαδού των τετραγώνων.

Τέλος θα ζητηθεί από τους μαθητές να διατυπώσουν λεκτικά την παραπάνω μαθηματική σχέση, χρησιμοποιώντας στην διατύπωση αυτή τις τρεις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

4. **Αξιολόγηση**

   Από την επιτόπια παρατήρηση των μαθητών στην εξέλιξη του σεναρίου, τη διαχείριση του χρόνου, τις ερωτήσεις που θα διατυπωθούν, τις δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές και τα φύλλα εργασίας τους θα αξιολογήσουμε το σενάριο στην κατεύθυνση της επίτευξης των εκπαιδευτικών στόχων έτσι ώστε να επανασχεδιαστεί όπου ενδεχομένως χρειαστεί.

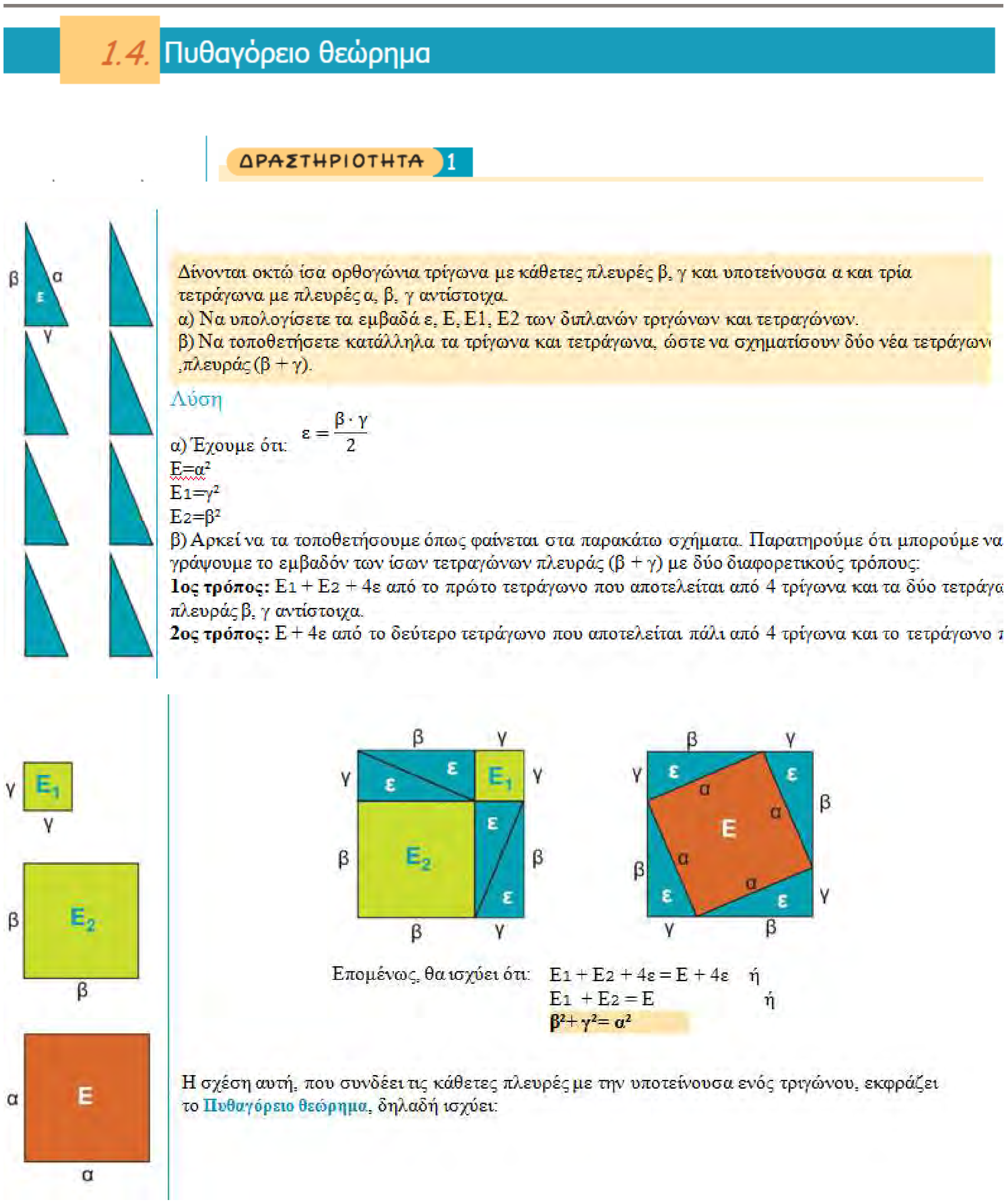
5. **Επέκταση της δραστηριότητας.**

   Αντίστροφο πυθαγορείου Θεωρήματος, Εφαρμογή του Πυθαγορείου με κατασκευή, στις πλευρές του τριγώνου ,κανονικών πολυγώνων, διαφορετικών πλευρών κάθε φορά καθώς και ημικυκλίων. . Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος (Θεώρημα του Πάππου) .

6. **Βιβλιογραφία.** Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, Βιβλία Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου για τον μαθητή και τον εκπαιδευτικό, Εγχειρίδιο Λογισμικού.

5. Αναπαραστάσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας.

Παραθέτουμε τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας του Πυθαγορείου θεωρήματος που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Β γυμνασίου και διδάσκεται στα Γυμνάσια της Β/θμιας Εκπαίδευσης με μία στατική εικόνα .



1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, Ε, Ε1, Ε2 των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.
β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα ,πλευράς (β + γ).

Λύση

α) Έχουμε ότι: $ε = \frac{β \cdot γ}{2}$
$Ε=α^2$
$Ε1=γ^2$
$Ε2=β^2$

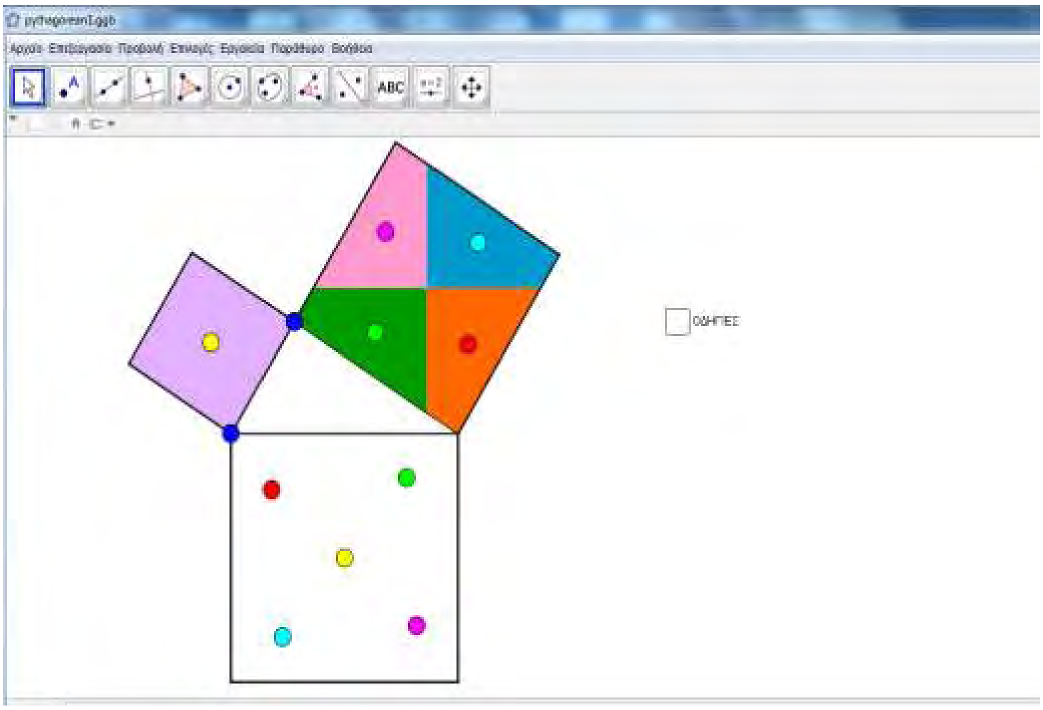
β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς (β + γ) με δύο διαφορετικούς τρόπους:
1ος τρόπος: Ε1 + Ε2 + 4ε από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.
2ος τρόπος: Ε + 4ε από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο

Επομένως, θα ισχύει ότι: Ε1 + Ε2 + 4ε = Ε + 4ε ή
Ε1 + Ε2 = Ε ή
$β^2 + γ^2 = α^2$

Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:

Για την διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος, με τις νέες τεχνολογίες, ως βοηθητικό υλικό ,πειραματισμού και εξερεύνησης κατασκευάστηκαν έξη εφαρμογές με το εκπαιδευτικό λογισμικό Geogebra. Οι τρείς εφαρμογές αναφέρονται στο ευθύ του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Μία εφαρμογή αναφέρεται στην κατανόηση του αντιστρόφου του Θεωρήματος .Η Πέμπτη αναφέρεται στην επέκταση του θεωρήματος ,που όμως στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου κατασκευάζονται κανονικά πολύγωνα. Η τελευταία εφαρμογή είναι το γνωστό Θεώρημα του Πάππου που είναι η επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

5.1 Εφαρμογή 1.

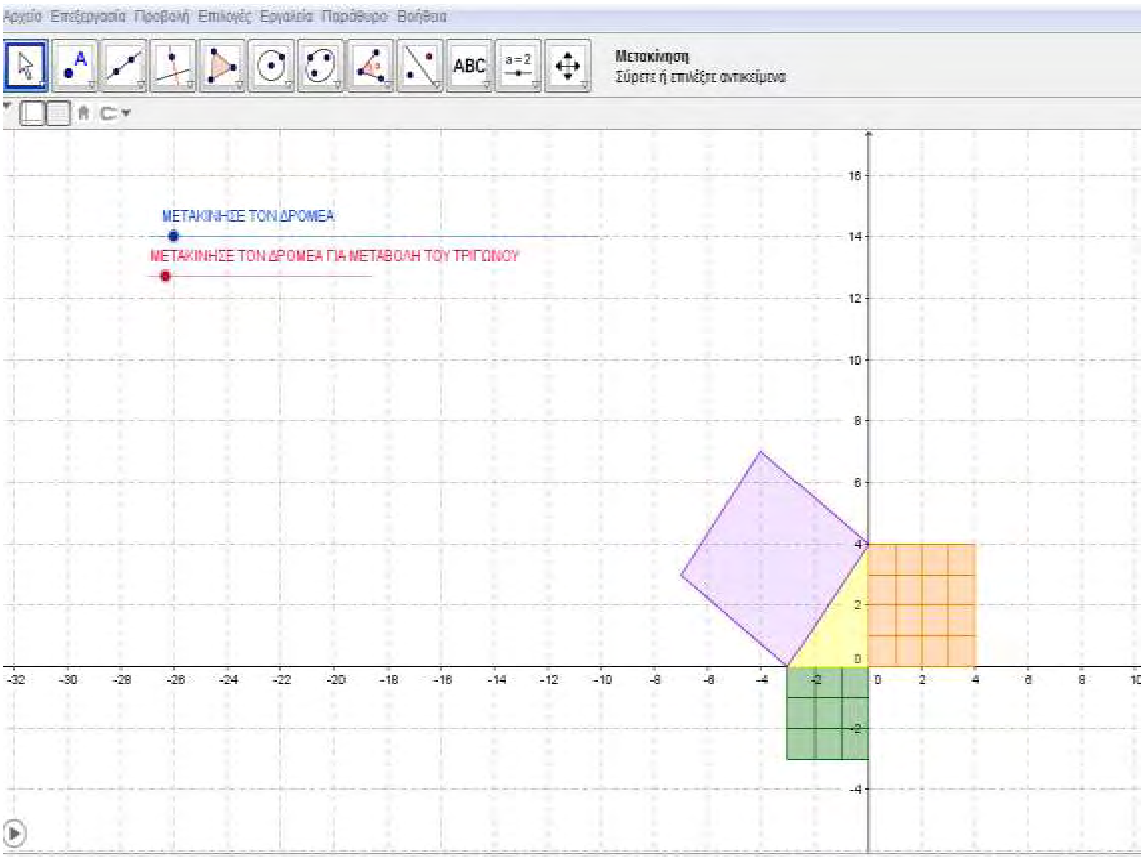


Δίνεται στους μαθητές το αρχείο **pythagoren1.ggb**.Οι μαθητευόμενοι έχουν την δυνατότητα να διαπιστώσουν ότι το μεγάλο τετράγωνο αποτελείται από τα επί μέρους κομμάτια των άλλων δύο μικρών τετραγώνων. Επίσης μπορούν να διαπιστώσουν ότι αυτό συμβαίνει όχι μόνο για το συγκεκριμένο τρίγωνο αλλά και για άλλα τρίγωνα τα οποία προκύπτουν από αυξομείωση του μεγέθους του αρχικού.Εδώ χρησιμοποιείται αυτό που συχνά αποκαλούμε «σύρσιμο» και είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων .

Η λειτουργία του συρσίματος (drag mode), παρέχει, άμεσα, τη δυνατότητα δυναμικών μετασχηματισμών και διαμόρφωσης δυναμικών όψεων των γεωμετρικών κατασκευών και σχημάτων, με αποτέλεσμα, μόνο οπτικές διαφοροποιήσεις, αφού οι βασικές τους γεωμετρικές ιδιότητες παραμένουν αναλλοίωτες. Μέσω της απειρίας των σχημάτων, οι μαθητές μπορούν να διατυπώνουν υποθέσεις, όσον αφορά στις κοινές ιδιότητες των σχημάτων, και να οδηγούνται, επαγωγικά, σε γενικεύσεις.

5.2 Εφαρμογή 2.

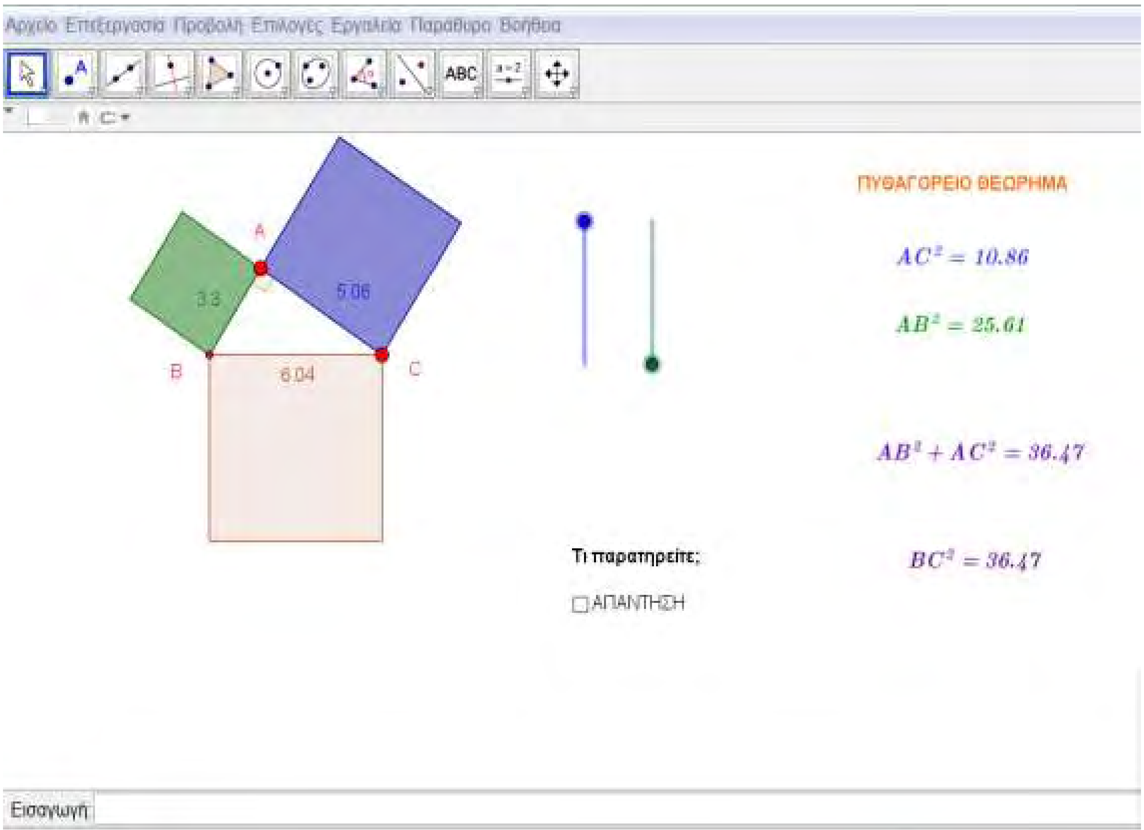
Δίνεται στους μαθητές το αρχείο **pythagoren2.ggb.** Οι μαθητές εδώ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης ένα τετράγωνο πλευράς 1cm έχουν την δυνατότητα μέσα από την εφαρμογή να κατανοήσουν την μέτρηση εμβαδού σχήματος. Στην συνέχεια μπορούν, να μετρήσουν τα εμβαδά των δυο τετραγώνων, που έχουν πλευρές τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Τέλος μετακινώντας τον δρομέα να δουν και να διαπιστώσουν ότι το μεγάλο τετράγωνο, έχει σαν εμβαδό το άθροισμα των τετραγωνικών μονάδων των 2 μικρών τετραγώνων. Στην συνέχεια με τον δεύτερο δρομέα μπορούν να αλλάξουν το μέγεθος του τριγώνου και να πειραματιστούν με εμβαδά των τετραγώνων. Το πλεονέκτημα της 2ης εφαρμογής είναι ότι η εικασία της πρώτης εφαρμογής εδώ γίνεται με την βοήθεια της μονάδας μέτρησης πιο συγκεκριμένη. Από το στάδιο της εικασίας τώρα έχουμε περάσει στο στάδιο του πειραματισμού και της διατύπωσης υπόθεσης.



pythagorean2.ggb

5.3 Εφαρμογή 3.

Δίνεται στους μαθητές το αρχείο **pythagoren3.ggb.** Σκοπός της εφαρμογής είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές την αλγεβρική σχέση που συνδέει τα τετράγωνα. Στην οθόνη του υπολογιστή παρατηρούν τις μετρήσεις των μηκών των πλευρών του τριγώνου καθώς και τετράγωνα αυτών εκφρασμένα αυτή την φορά αλγεβρικά. Ταυτόχρονα μετακινώντας τους δρομείς έχουν την δυνατότητα οπτικής εικόνας της Γεωμετρικής σχέσης. Παρατηρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μετά από επαναλαμβανόμενες αυξομειώσεις των μηκών των πλευρών του τριγώνου οδηγούνται στην εξαγωγή συμπεράσματος.



pythagoren3.ggb

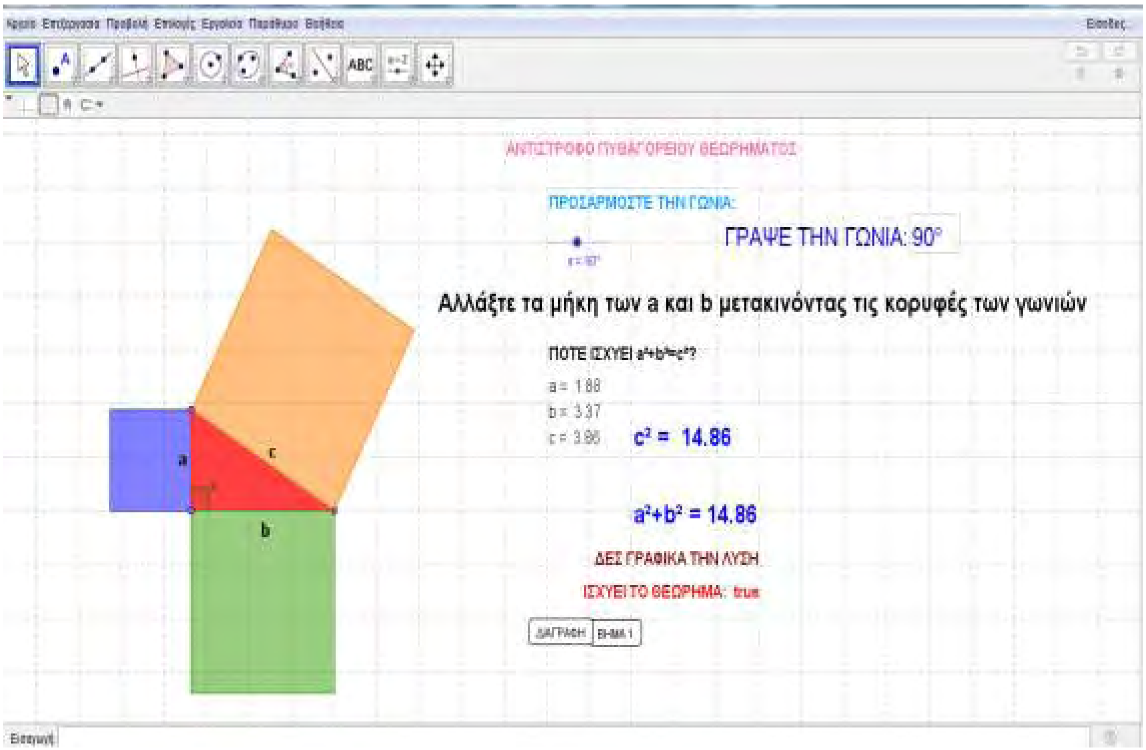
Στις τρεις πρώτες εφαρμογές έχουμε πετύχει να εμπλέξουμε τους μαθητές στην παρακάτω διαδικασία

Πειραματισμός- Παρατήρηση-Εικασία-Ανακάλυψη-Συμπέρασμα (Διατύπωση)

5.4 Εφαρμογή 4.

Δίνεται στους μαθητές το αρχείο **antipyth.ggb.** Σκοπός της εφαρμογής είναι οι μαθητές να ανακαλύψουν και να κατανοήσουν ότι η γνωστή αλγεβρική σχέση ισχύει μόνο για ορθογώνια τρίγωνα.

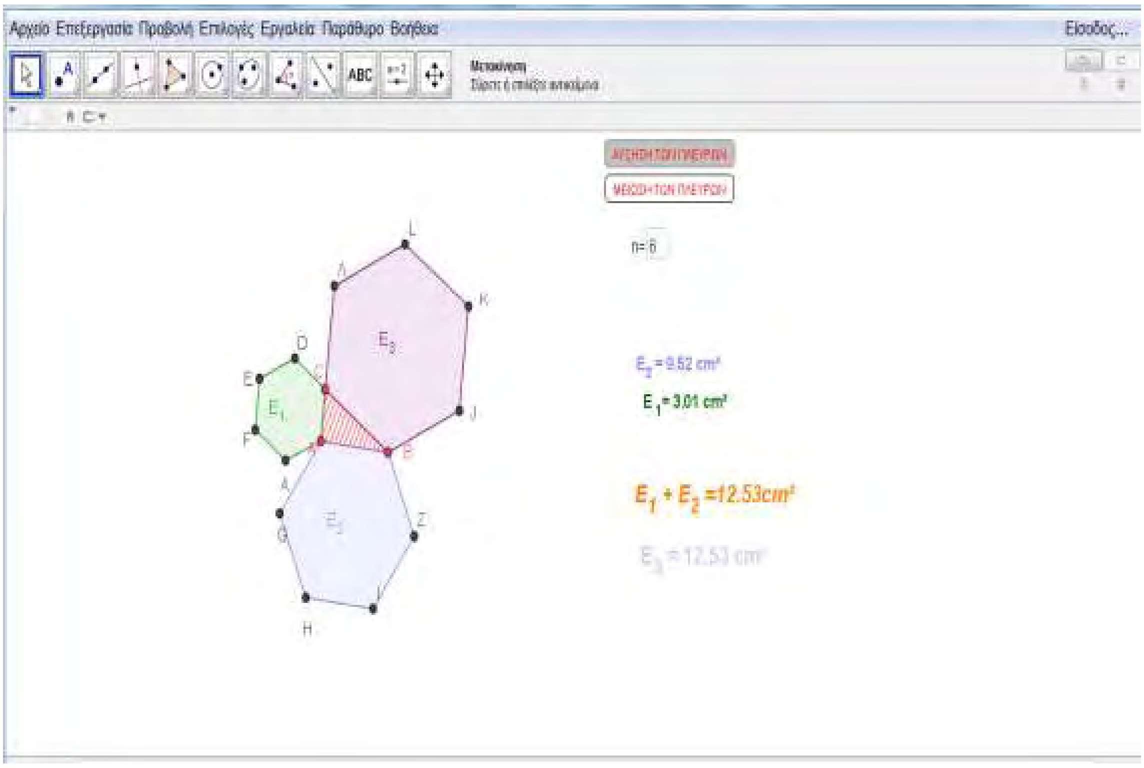
Για την επίτευξη του σκοπού αυτού έχει κατασκευαστεί ένας δρομέας ο οποίος μεταβάλλει την γωνία ενός τριγώνου δίνοντας της αλγεβρικές τιμές από 0- 180 μοίρες. Οι μαθητές με πειραματισμό θα ανακαλύψουν ότι η σχέση ισχύει όταν η γωνία λάβει την τιμή 90.Σε αυτή την περίπτωση θα παρατηρήσουν και μήνυμα στην οθόνη τους και στην συνέχεια μπορούν να έχουν ανατροφοδότηση για την ισχύ του θεωρήματος.



antipyth.ggb

5.5 Εφαρμογή 5.

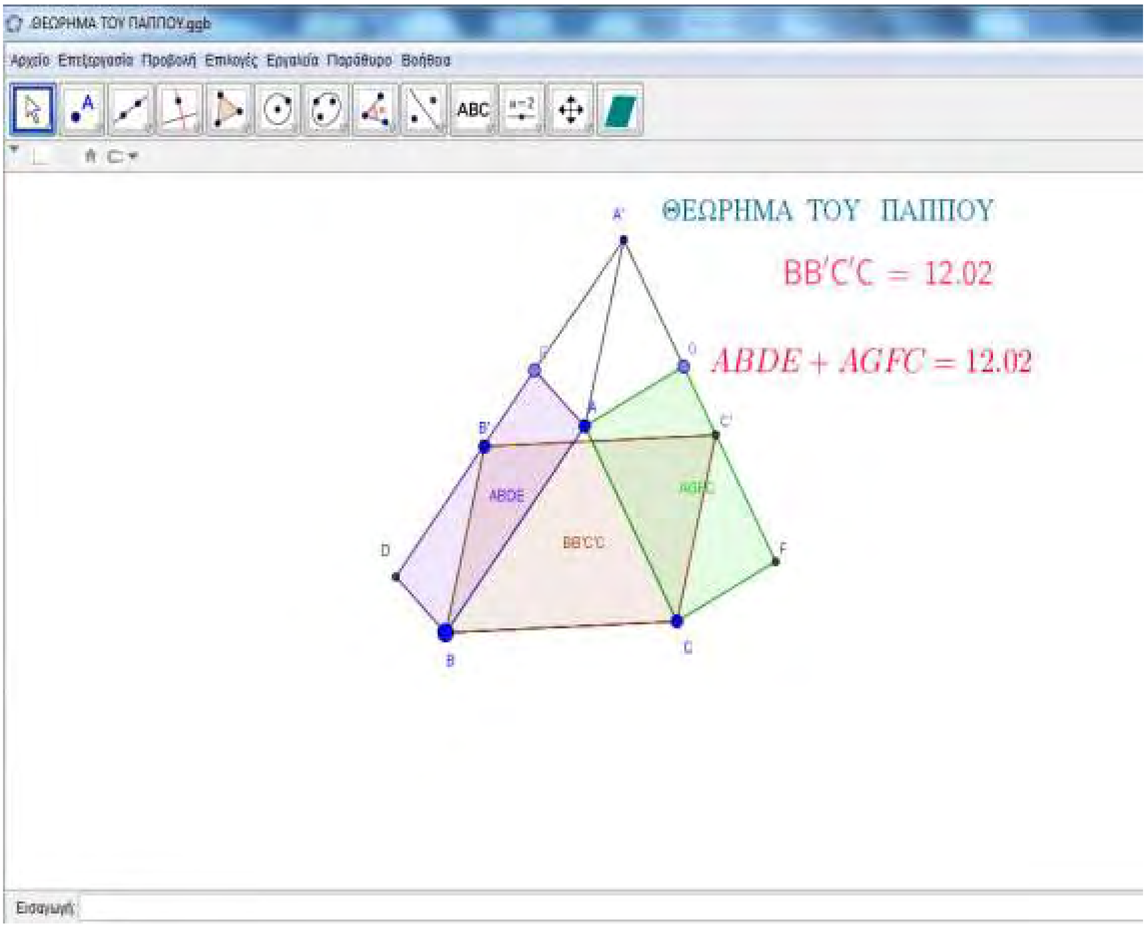
Δίνεται στους μαθητές το αρχείο **regular polyg.ggb**, Στο ερώτημα << Πιστεύεται ότι ισχύει η σχέση στη περίπτωση που αντί για τετράγωνα είχαμε κανονικά πολύγωνα ;>>. Υπάρχει μια έκδηλη αμηχανία να δοθεί απάντηση στο ερώτημα. Με την εφαρμογή υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής κανονικών πολυγώνων πληκτρολογώντας μόνο των αριθμό των πλευρών που θέλουμε. Πειραματιζόμενοι παρατηρούν ότι η σχέση ισχύει και για κανονικά πολύγωνα.



5.6 Εφαρμογή 6.

Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι το παρακάτω θεώρημα του Πάππου που αφορά πλέον οποιοδήποτε τρίγωνο.

Σε κάθε τρίγωνο ABC (Σχήμα 2) το παραλληλόγραμμο BB΄C΄C που κατασκευάζεται στην μια από τις πλευρές του εσωτερικά του τριγώνου και έτσι ώστε οι δύο κορυφές του B΄ και C΄ να βρίσκονται εκτός του τριγώνου, είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των παραλληλογράμμων ABDE και ACFG που κατασκευάζονται στις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου έτσι ώστε οι πλευρές τους που είναι παράλληλες στις πλευρές του τριγώνου να διέρχονται από τις κορυφές του πρώτου παραλληλογράμμου. Οι μαθητές πειραματιζόμενοι διαπιστώνουν ότι πράγματι ισχύει κάτω από τις παραπάνω προυποθέσεις.



6.Η γενίκευση του Πάππου-Γεωμετρική Απόδειξη

Η γενίκευση κινείται σε δύο άξονες .Πρώτο αναφέρεται σε οποιοδήποτε τρίγωνο και δεύτερον πάνω στις πλευρές του τριγώνου σχεδιάζονται παραλληλόγραμμα. Να σημειωθεί ότι η έννοια του παραλληλογράμμου είναι γενικότερη της έννοιας του τετραγώνου .Η γενίκευση του Πάππου περιέχεται στο πρώτο μέρος του βιβλίου IV της Συναγωγής (έργο του Πάππου).Η μαθηματική του απόδειξη έχει ως εξής.

Αποδεικνύεται πρώτα ότι τα τρίγωνα *A΄B΄C΄* και *ABC* είναι ίσα. Επίσης, ισοδύναμα είναι τα παραλληλόγραμμα *BB΄A΄A* = *BDEA* και CC΄A΄A = CFGA, επειδή έχουν ίσες βάσεις και ύψη. Επομένως, *BB΄A΄C΄C* - *B΄A΄C΄* = *BB΄C΄C*

ή

BB΄A΄C΄C - *BAC* = *BB΄A΄A*+*A΄ACF* ή

BB΄A΄C΄C - *BAC* = *BDEA*+*CFGA*.

ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Η ατέρμονη προσπάθεια του ανθρώπου για την κατανόηση του κόσμου ,για την εξήγηση φυσικών και κοινωνικών φαινομένων ,για την ανάπλαση του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος προς όφελός του και για την βελτίωση των όρων ζωής του εν γένει σχηματοποιείται μέσα από την εμπειρία ,τη λογική και την έρευνα.[3] Τα τρία αυτά μέσα που έχουν επιστρατευτεί προς την κατεύθυνση της κατάκτησης της γνώσης και της κατανόησης του κόσμου αποτελούν ένα συμπαγές πλαίσιο ,του οποίου τα συνθετικά μέρη και οι λειτουργικές του παράμετροι αλληλοσυμπληρώνονται και αλληλεπικαλύπτονται.

Ο Μ Βάμβουκας αναφέρει<< Η εκπαιδευτική λειτουργία και η λειτουργία της έρευνας είναι αλληλένδετες. Δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε εντελώς τη μία από την άλλη .Η επιτυχία της πρώτης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την δεύτερη>>.[4] Όταν δεν τηρηθεί αυτή ακριβώς η σύνδεση ,την οποία αναφέρει ο Μ Βάμβουκας ,τότε είναι που η εκπαιδευτική λειτουργία περιέρχεται σε μία κατάσταση αστάθειας και αβεβαιότητας σχετικά με την ικανοποίηση των στόχων της και των αποτελεσμάτων που θα παραγάγει.

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να καταγράψει , τις απόψεις και στάσεις μαθητών της Β τάξης του Γυμνασίου, όσο αφορά την κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος κατά την διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας με την χρήση των νέων τεχνολογιών και ειδικότερα με την χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών.

Η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά και περισσότερο

---

3 MOULY G (1978) Educational Research: The Art and Science of Investigation, Boston :Allyn and Bacon

4 ΒΑΜΒΟΥΚΑΣ (1998) Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία Αθήνα: Γρηγόρης σ.σ 75-76

στην Γεωμετρία ήταν η αφορμή για την παρούσα έρευνα .

Θεώρησα σκόπιμο να καταγραφούν οι απόψεις των μαθητών όσο αφορά τα ποσοτικά χαρακτηριστικά σε ένα συγκεκριμένο θεώρημα στο οποίο έχω διαπιστώσει ότι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολία κατανόησής του, όσο και πρακτικής εφαρμογής του.

Ειδικότερα θα εξετασθεί αν οι νέες τεχνολογίες στα μαθηματικά συμβάλλουν στην κατανόηση της Γεωμετρίας ,στην εμπέδωση γεωμετρικών εννοιών, σχημάτων καθώς και στην συσχέτιση αυτών μεταξύ τους .Τέλος θα εξετασθεί αν οι τεχνολογίες βοηθούν τους μαθητές να διατυπώσουν εικασίες μέσα από τον πειραματισμό, να προχωρήσουν στην μοντελοποίηση και στην διατύπωση συμπερασμάτων.

Μία τέτοιου είδους προσπάθεια καταγραφής, με σκοπό. την σύνθεση ενός γενικού πλαισίου ερμηνείας των απόψεων των μαθητών ,περιλαμβάνει και παραμέτρους οι οποίες αποτελούν και τους επιμέρους στόχους της έρευνας.

1. Σχολικό βιβλίο.
2. Γεωμετρία.
3. Μαθηματικά
4. Παραδοσιακή διδασκαλία.
5. Νέες Τεχνολογίες
6. Λογισμικά.
7. Διδασκαλία μαθήματος.

4.2 Διαδικασία της έρευνας.

Το ζήτημα της διδασκαλίας ενός μαθήματος έχει απασχολήσει τους ερευνητές τόσο σε θεωρητικό, όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο ,παρουσιάστηκαν οι παράμετροι που θα καθορίσουν το πλαίσιο του εγχειρήματος καθώς και την παιδαγωγική του διάσταση.

Το ερωτηματολόγιο επιλέχτηκε ως το προσφορότερο εργαλείο για την καταγραφή των απόψεων ενός μεγάλου αριθμού μαθητών [5] για κατανόηση του πυθαγορείου Θεωρήματος αλλά και να συλλέξει τις απόψεις τους για τις δυνατότητες αποτελεσματικής χρήσης των ΤΠΕ στην τάξη.

Το ερωτηματολόγιο αποτελεί το περισσότερο χρησιμοποιημένο , αλλά και το πιο παρεξηγημένο ερευνητικό εργαλείο. Και το γεγονός αυτό οφείλεται στην εσφαλμένη, αλλά ευρέως διαδεδομένη, άποψη ότι δεν υπάρχει ερευνητικό πεδίο στο οποίο να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί .Από την άλλη , το ερωτηματολόγιο θεωρείται το προσφορότερο εργαλείο για ερευνητικές προσπάθειες, αλλά και το εργαλείο με το οποίο είναι εξοικειωμένοι οι περισσότεροι από τους ερευνητές.

Η έρευνα με ερωτηματολόγιο, χάρη στην μεθοδολογική της ευελιξία, κρίνεται κατάλληλη για έρευνες που δίνουν έμφαση στην όσο το δυνατό πληρέστερη απεικόνιση μιας υπάρχουσας κατάστασης. Αποσκοπεί στη συστηματική συλλογή εμπειρικών δεδομένων για την υπάρχουσα κατάσταση, τις τυπικές μορφές συμπεριφοράς και τις επικρατούσες τάσεις, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, σε «μεγάλες μάζες» Πληθυσμού, για «τρέχοντα» θέματα. Μας επιτρέπει να Φωτίσουμε το μελετώμενο Φαινόμενο από διάφορες πλευρές και να εντοπίσουμε μεταβλητές και σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, τις οποίες άλλες μεθοδολογικές στρατηγικές, λόγων των προαπαιτούμενων περιοριστικών ελέγχων, πιθανόν να παράβλεπαν (Παρασκευόπουλος, 1993).

Οι έρευνες με ερωτηματολόγιο διενεργούνται με μεθοδολογικό τρόπο και αποβλέπουν κυρίως στην πληρέστερη απεικόνιση-περιγραφή του φαινομένου και στη γενίκευση των ευρημάτων σε ευρύτερα ομοειδή σύνολα. Κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι ο έλεγχος των μεταβλητών γίνεται «εκ των υστέρων». Ο τελικός σκοπός της επιστημονικής έρευνας είναι η διατύπωση, με βάση τις εμπειρικώς διαπιστούμενες αιτιώδεις σχέσεις, γενικών αρχών και νόμων που να ερμηνεύουν τα φαινόμενα (Παρασκευόπουλος, 1993).

Το ερωτηματολόγιο παρέχει χρήσιμα και σημαντικά αποτελέσματα όταν έχει συνταχθεί και χρησιμοποιηθεί σωστά, και αυτό εξασφαλίζεται από ψυχομετρικούς δείκτες.(συντελεστής α του Cronbach) που μετρούν την εγκυρότητα και εσωτερική συνοχή των εννοιών που περιλαμβάνει.

---

[5] HOINVILLE G &JOWELL R (1978) Survey Methods Practice . London: Heinemann
BAILEY K (1978) Methods of Social Research London:Collier-McMillan

Στην παρούσα έρευνα επιλέχτηκε το ερωτηματολόγιο ως εργαλείο έρευνας για τους εξής κύριους λόγους.

1. Το ερωτηματολόγιο προκαλεί το ενδιαφέρον των ερωτώμενων και αυξάνει τη συμμετοχή στην ερευνητική διαδικασία.[6]
2. Η απόφαση για την αναγκαιότητα να χρησιμοποιηθεί μεγάλος αριθμός υποκειμένων καθώς και οι τεχνικές της έρευνας προσφέρονται για τη χρήση ερωτηματολογίου.[7]
3. Το ερωτηματολόγιο προσφέρεται για συλλογή πληροφοριών σχετικά με τις απόψεις και τις αντιλήψεις υποκειμένων οι οποίες είναι δύσκολο να παρατηρηθούν.[8]
4. Η δυνατότητα που παρέχει το ερωτηματολόγιο για συχνές δοκιμές ,βελτιώσεις, αλλαγές έτσι ώστε να προκύψει διαμορφωμένο για τη καλύτερη χρήση του.[9]

4.3 Το δείγμα της έρευνας

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε το σχολικό έτος 2015-16. Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας βασιστήκαμε στο προκαθορισμένο αναλυτικό πρόγραμμα ,τα βιβλία του εκπαιδευτικού καθώς και στις εφαρμογές των λογισμικών τα οποία είχαν εκ των προτέρων κατασκευαστεί. Για την επίτευξη του σκοπού της έρευνας, τα υποκείμενα αποτέλεσαν 93 μαθητές της Β τάξης Γυμνασίου της Λαμίας. Για τις εφαρμογές των Λογισμικών χρησιμοποιήθηκε Laptop και διαδραστικός πίνακας.

6 JAVEAU J(1996) σ 50.

7 DAVIDSON J (1970). Outdoor Recreation Surveys: The Design and The Use of Questionnaires for Site Surveys. London: Countryside Commission.

8 FRAISE P. & PIAGET J. (1970). Traite de Psychologie Experimentale. Paris: PUF, σ. 98.

9 JAVEAU J. (1996). σ. 148.

4.4 Μερικά χαρακτηριστικά του ερωτηματολογίου.

Κατανομή των μαθητών κατά Φύλλο

Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα οι μαθητές στο δείγμα είναι 93 μαθητές εκ των οποίων το 43% αντιστοιχεί σε μαθητές και το υπόλοιπο 57% αντιστοιχεί σε μαθήτριες.

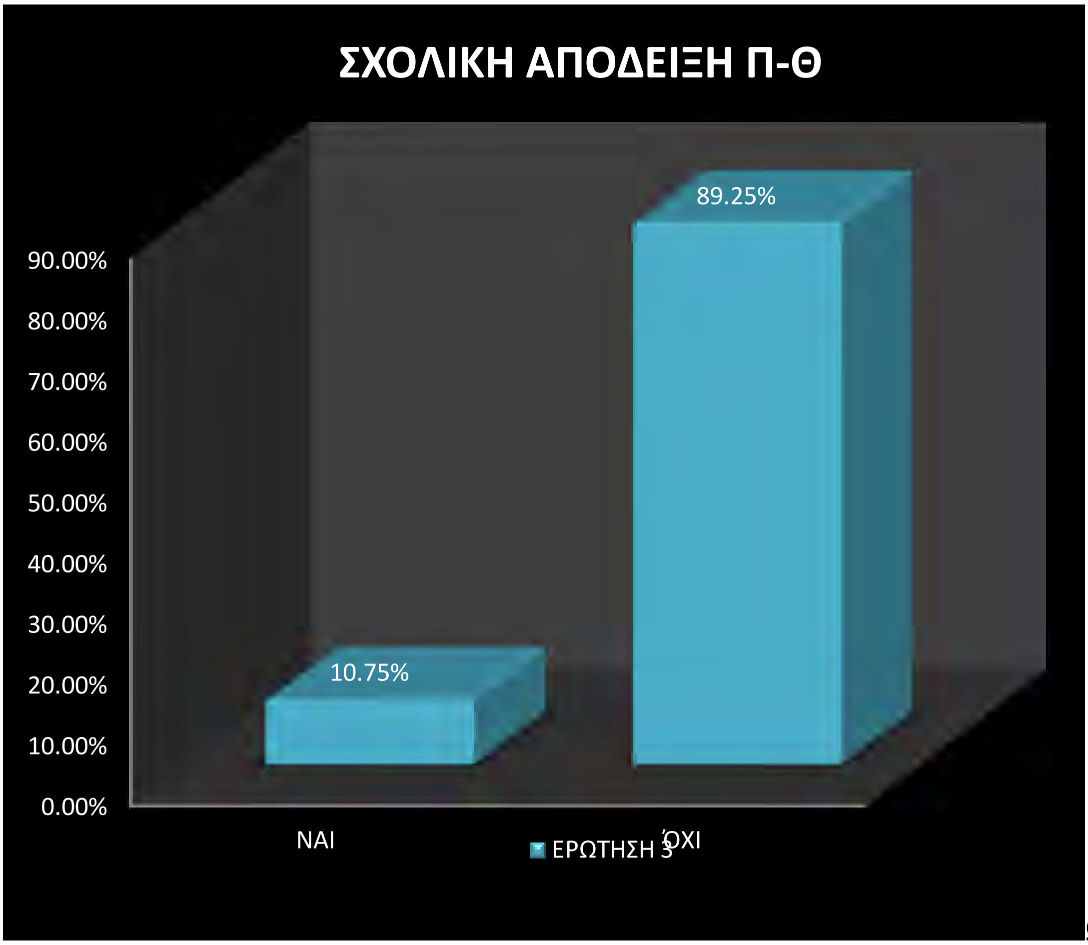
Φύλο	***N***	***%***
ΜΑΘΗΤΗΣ	40	43
ΜΑΘΗΤΡΙΑ	53	57
ΣΥΝΟΛΟ	93	100

-

Στο ερώτημα αν αντιμετωπίζεται δυσκολίες με το μάθημα της Γεωμετρίας 63 μαθητές(ποσοστό 67,74 %) απάντησαν ότι έχουν δυσκολίες ενώ 30 μαθητές (ποσοστό 32,26%) απάντησαν ότι δεν έχουν δυσκολία με το μάθημα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

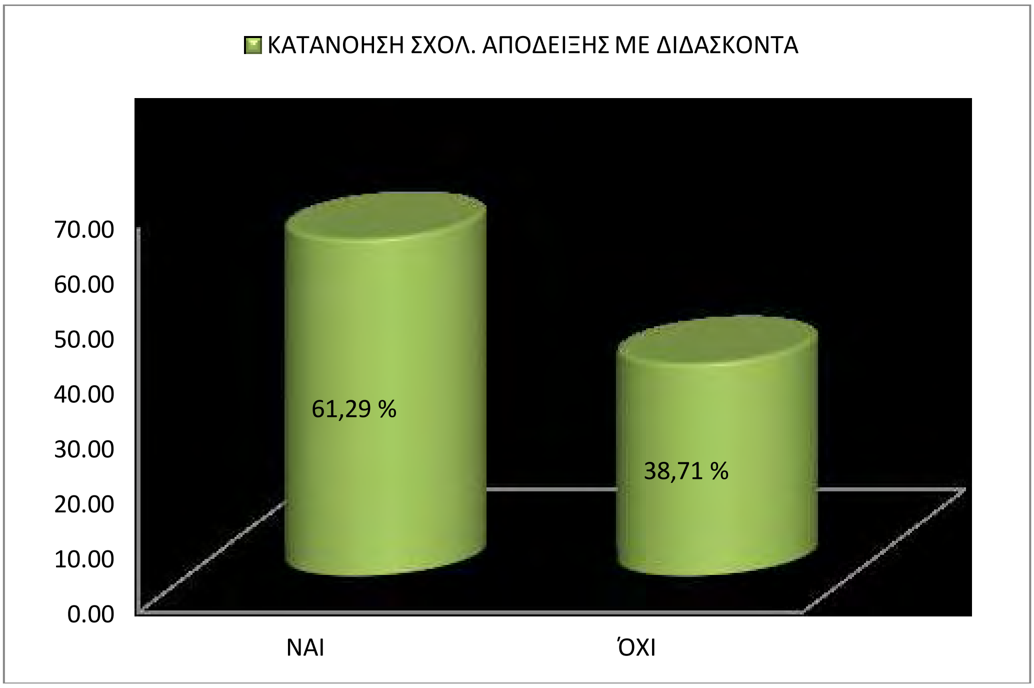
Στο ερώτημα αν η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο είναι κατανοητή από αυτούς ,μόνο 10 μαθητές (ποσοστό 10.75%) απάντησε Ναι οι υπόλοιποι 83 μαθητές (ποσοστό 89,25%) απάντησε Όχι.



Ω

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Στο ίδιο ερώτημα αν η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο είναι κατανοητή με την βοήθεια του διδάσκοντος από αυτούς 57 μαθητές (ποσοστό 61,29%) απάντησε Ναι οι υπόλοιποι 36 μαθητές (ποσοστό 38,71%) απάντησε Όχι.

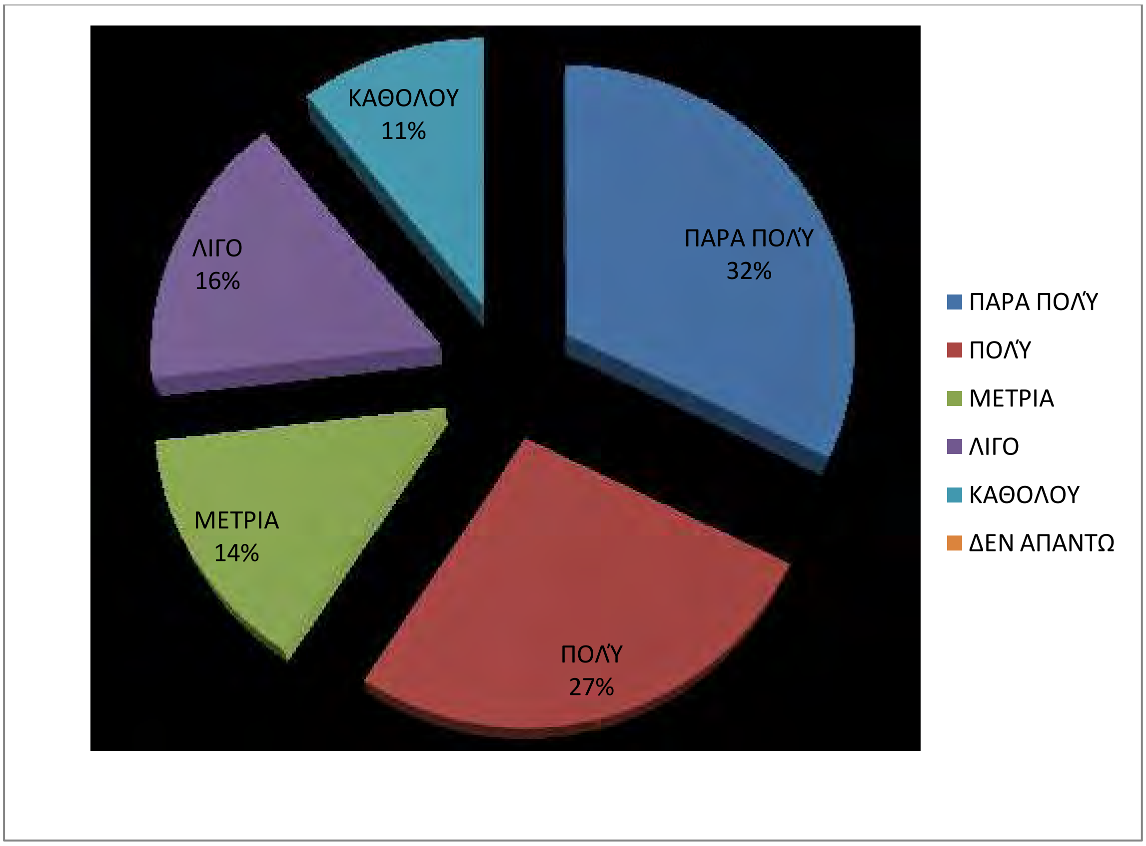


ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στο ερώτημα αν είχατε δυσκολίες στην κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με την παραδοσιακή παράδοση 60 μαθητές (ποσοστό 64,51 %) απάντησαν Ναι, οι υπόλοιποι 33 (ποσοστό 35,49%) απάντησαν Όχι.

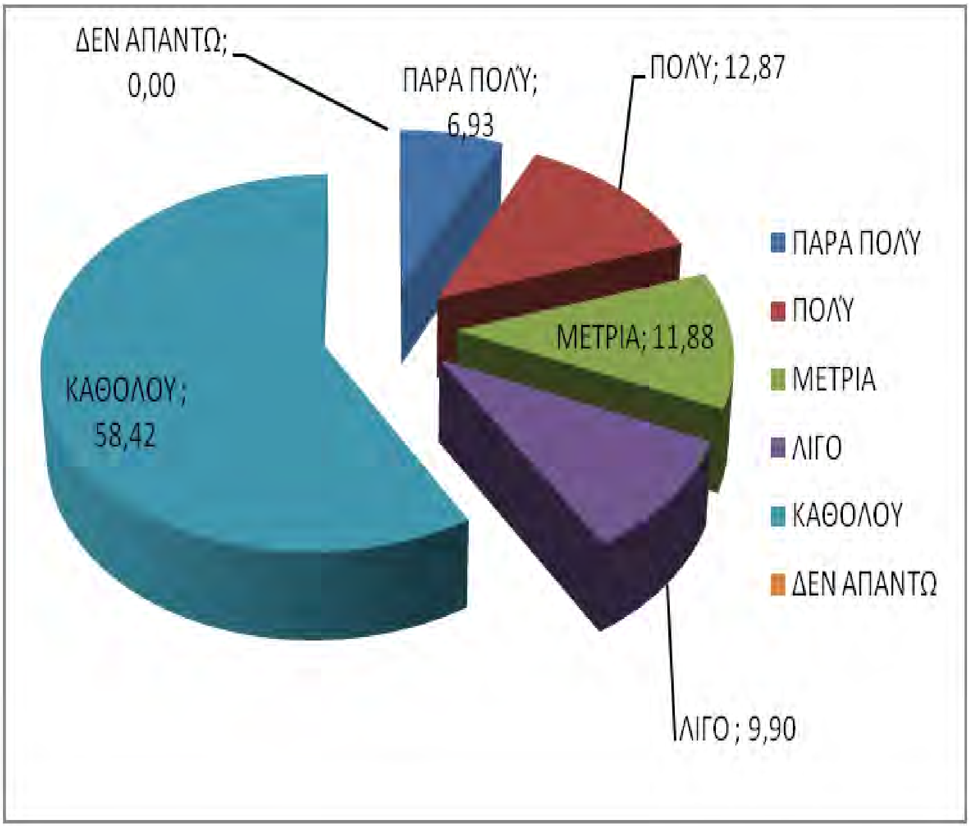
ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Η επόμενη ερώτηση που ζητήθηκε από τους μαθητές ήταν να μας απαντήσουν για τον βαθμό δυσκολίας κατανόησης του Πυθαγορείου θεωρήματος με την παραδοσιακή διδασκαλία.. Επιλέχθηκε η κλίμακα Likert με τις παρακάτω επιλογές,(5= Πάρα πολύ,4=Πολύ,3= Μέτρια,2= Λίγο,1= καθόλου).Οι απαντήσεις αποτυπώνονται ως εξής Πάρα πολύ 32 % ,Πολύ 27 %, Μέτρια 14% , Λίγο 16%, καθόλου11%



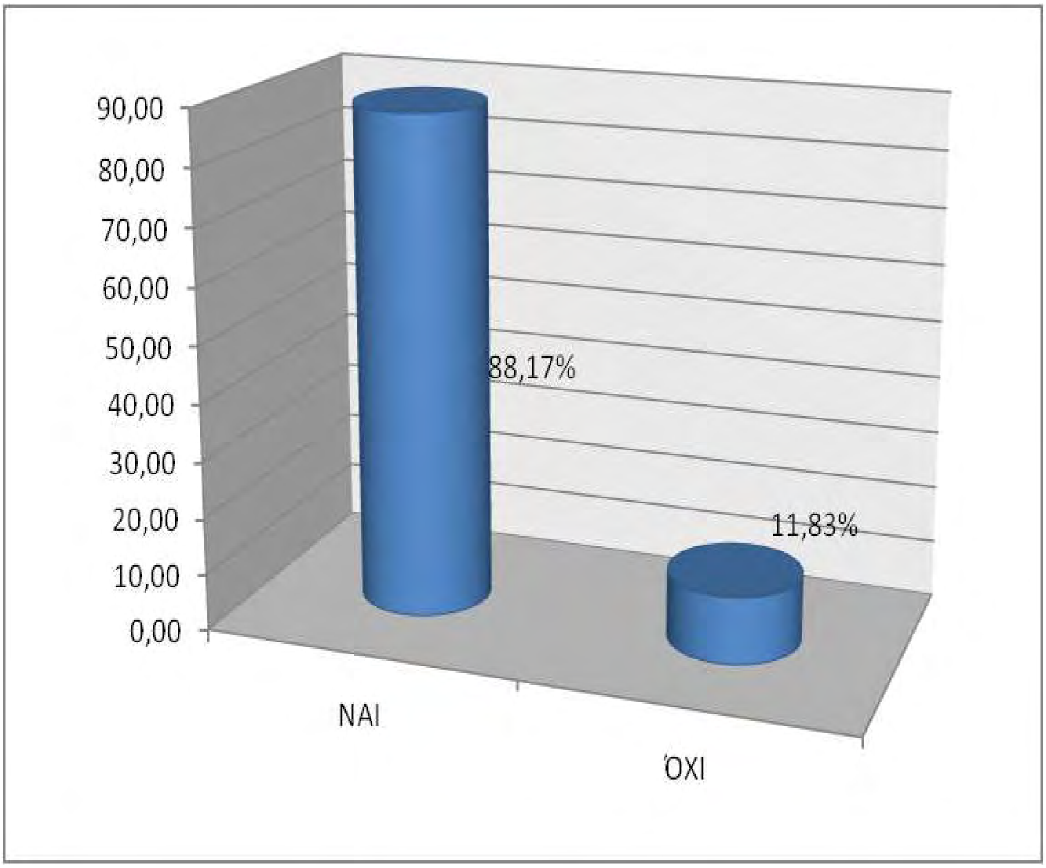
ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Η επόμενη ερώτηση που ζητήθηκε από τους μαθητές ήταν να μας απαντήσουν για τον βαθμό δυσκολίας κατανόησης του Πυθαγορείου θεωρήματος μετά την χρησιμοποίηση των εφαρμογών με την χρησιμοποίηση του λογισμικού Geogebra Οι απαντήσεις αποτυπώνονται ως εξής Πάρα πολύ 6.93 % ,Πολύ 12,87 %, Μέτρια 11,88 % , Λίγο 9.90%, καθόλου 58.42%



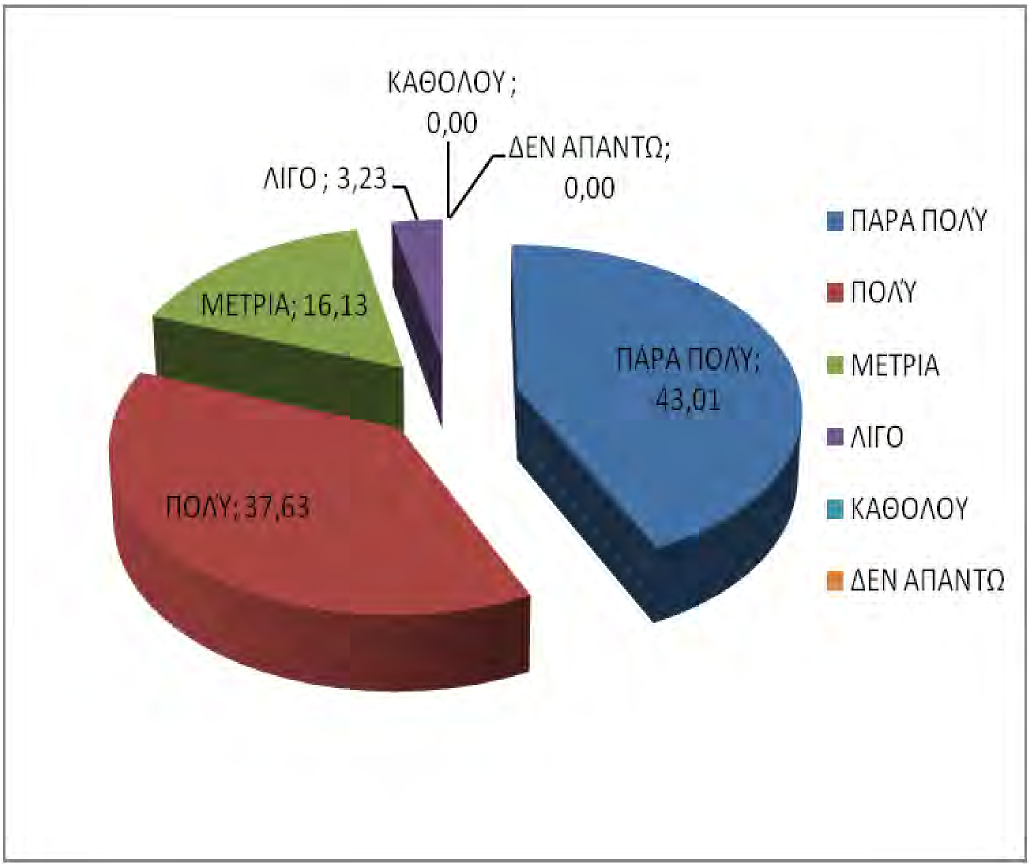
ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Στην ερώτηση αν το λογισμικό ήταν ενδιαφέρον το 88,17% των μαθητών απάντησαν Ναι και μόλις το 11,83% είπαν όχι.



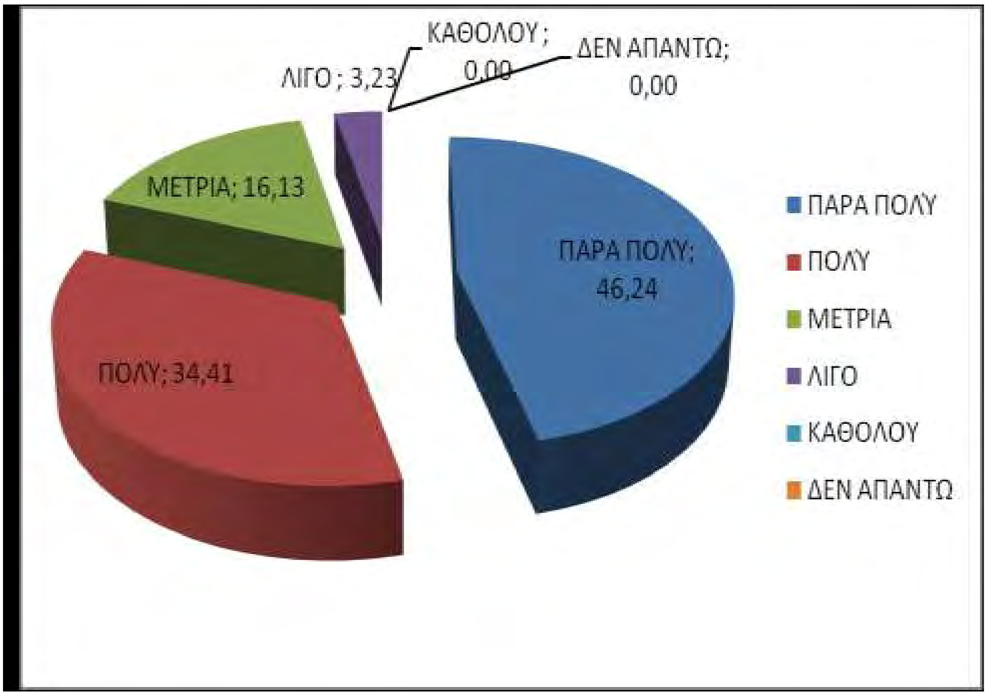
ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Η επόμενη ερώτηση που απευθύναμε στους μαθητές αφορούσε την γνώμη τους ,σχετικά με την διδασκαλία με την χρήση του λογισμικού και κατά πόσο απεκόμισαν την αίσθηση ότι αλλάζει η μάθηση. Οι απαντήσεις που έδωσαν συνοψίζονται στα εξής. Πάρα πολύ 40 μαθητές (ποσοστό 43,01 %) ,Πολύ 35 μαθητές(ποσοστό 37,63 %,) Μέτρια 15 μαθητές (ποσοστό 16,13 %) , Λίγο 3 μαθητές (ποσοστό 3,23%), καθόλου μαθητές 0 (ποσοστό 0%)



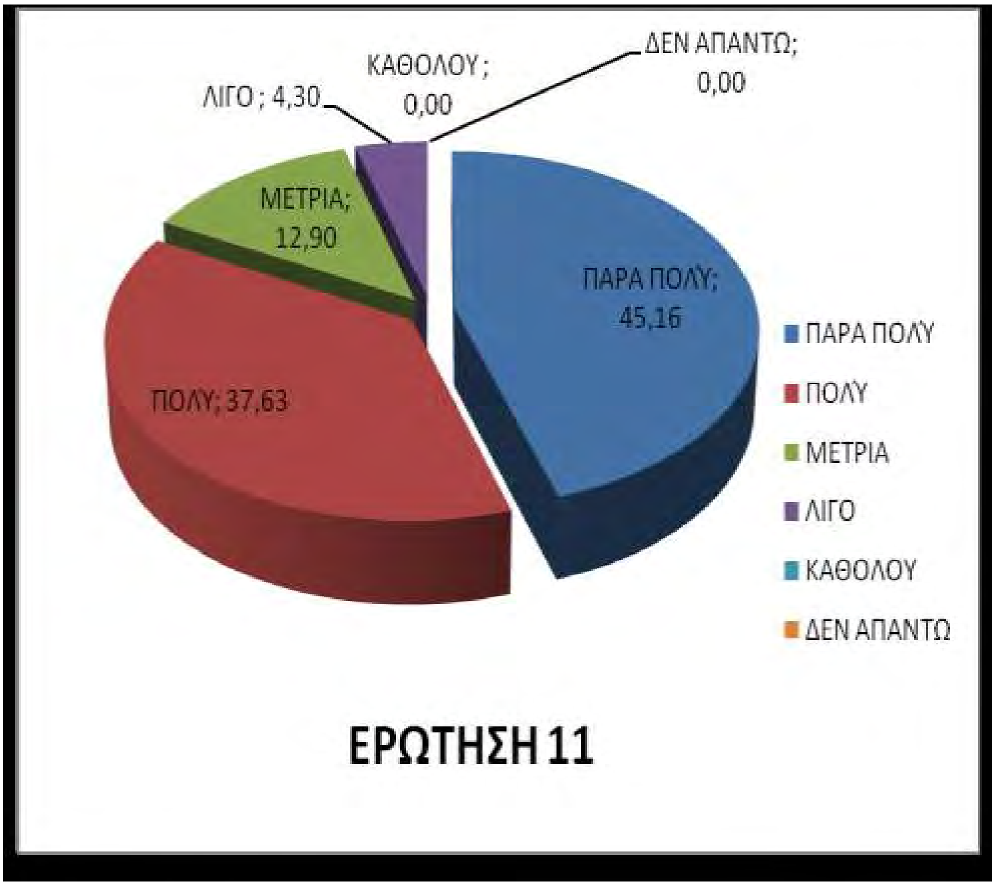
ΕΡΩΤΗΣΗ 9

Η Επομένη ερώτηση αναφερόταν στο λογισμικό και κατά πόσο αυτό τους φάνηκε ικανοποιητικό αφενός και αφετέρου κατά πόσο κάλυψαν τις μαθησιακές τους ανάγκες. Οι απαντήσεις αντιστοιχούν στα παρακάτω αποτελέσματα, Πάρα πολύ 43 μαθητές (ποσοστό 46,24 %) ,Πολύ 32 μαθητές (ποσοστό 34.41 %,) Μέτρια 15 μαθητές (ποσοστό 16,13 %) , Λίγο 3 μαθητές (ποσοστό 3,23%), καθόλου μαθητές 0 (ποσοστό 0%)

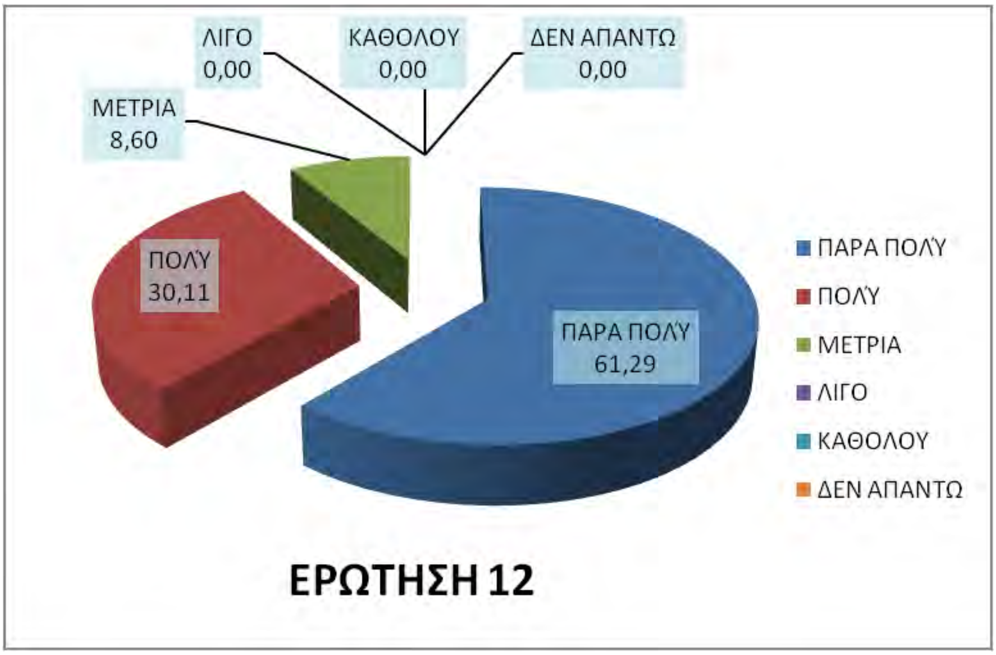


ΕΡΩΤΗΣΗ 10

Στο ερώτημα θεωρείται ότι η χρήση λογισμικών βοηθάει τους μαθητές στην μάθηση, οι απαντήσεις που δόθηκαν είναι Πάρα πολύ 42 μαθητές (ποσοστό 45,16 %) ,Πολύ 35 μαθητές(ποσοστό 37,63 %,) Μέτρια 12 μαθητές (ποσοστό 12,90 %) , Λίγο 4 μαθητές (ποσοστό 4,30%), καθόλου μαθητές 0 (ποσοστό 0%)

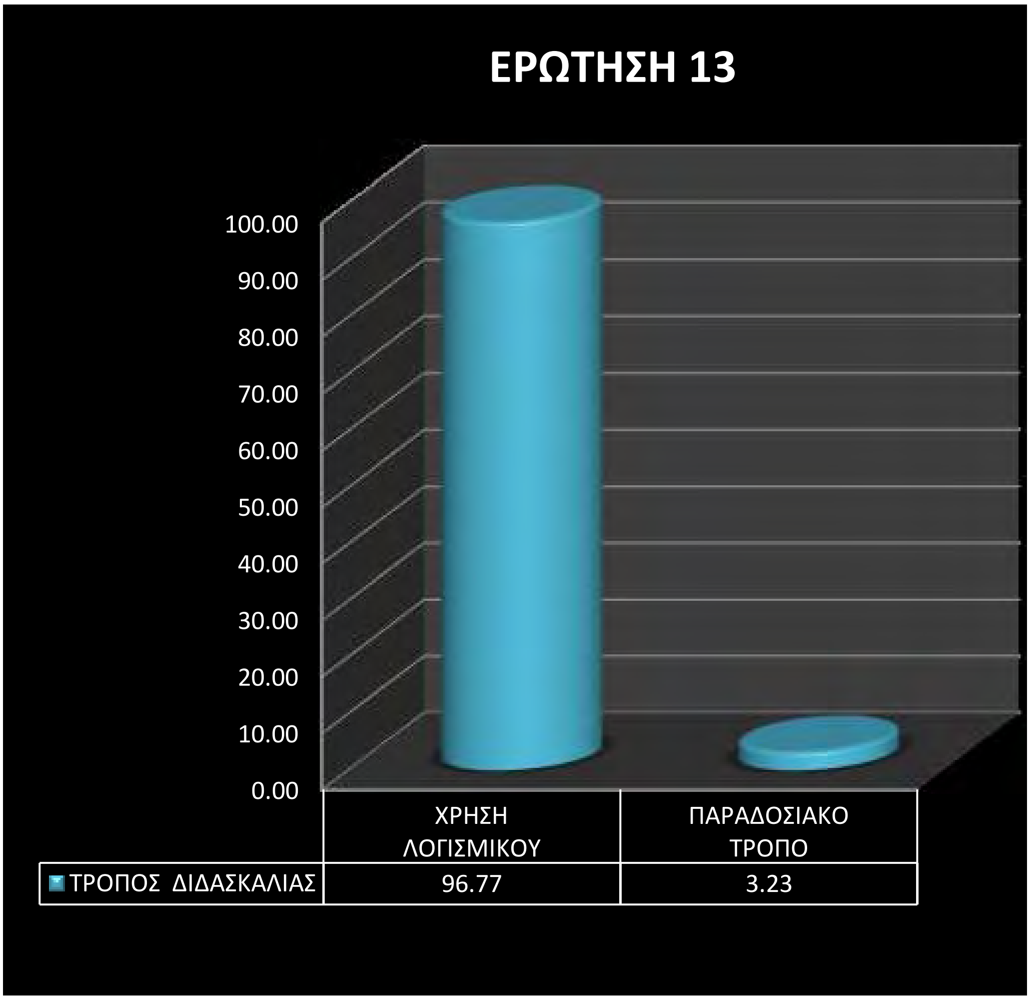


Η επόμενη ερώτηση είχε σαν στόχο να ανιχνεύσουμε τις απόψεις των μαθητών σχετικά με το αν η διδασκαλία και η μάθηση αλλάζει συγκεκριμένα με την τρόπο που διδάχθηκε το πυθαγόρειο Θεώρημα. .Οι απαντήσεις που έδωσαν είναι οι εξής Πάρα πολύ 57 μαθητές (ποσοστό 61,29 %) ,Πολύ 28 μαθητές(ποσοστό 30,11 %,) Μέτρια 8 μαθητές (ποσοστό 8,60 %) , Λίγο 0 μαθητές (ποσοστό 0 %), καθόλου μαθητές 0 (ποσοστό 0%)

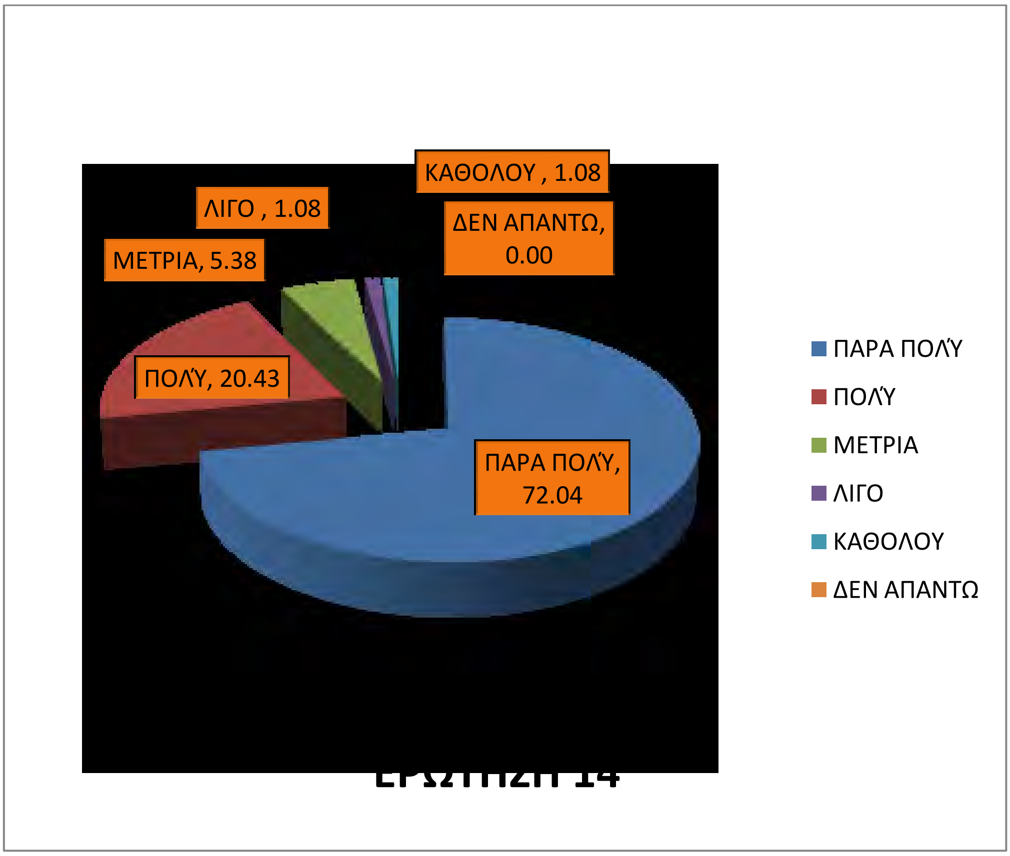


Στην ερώτηση πως θα θέλατε να διδάσκεται το μάθημά σας ,με την παραδοσιακή διδασκαλία, με τη χρήση Λογισμικού;

Οι απαντήσεις που έδωσαν είναι οι εξής: Με την χρήση λογισμικού 90 μαθητές (ποσοστό 96,77 %) και 3 μαθητές (ποσοστό 3,23 %) με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα είναι αποτυπωμένα στο παρακάτω διάγραμμα.



Το τελευταίο ερώτημα που θέσαμε στους μαθητές και θέλαμε την απόψή τους είναι για το αν επιθυμούσαν στην διδασκαλία των μαθηματικών το μάθημα να γίνονταν με την χρήση Λογισμικού. Οι απαντήσεις που έδωσαν είναι οι εξής Πάρα πολύ 67 μαθητές (ποσοστό 72,04 %) ,Πολύ 19 μαθητές(ποσοστό 20,43 %,) Μέτρια 5 μαθητές (ποσοστό 5,38 %) , Λίγο 1 μαθητές (ποσοστό1, 0 8%), καθόλου μαθητές 1 (ποσοστό1,08%)



ΠΕΜΠΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συμπεράσματα- Προτάσεις

5.1 Συμπεράσματα

Η τεχνολογία συνιστά κίνητρο για τους μαθητές καθώς τους παρέχει ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες μαθησιακές δραστηριότητες (Sandholtz al, 1997) Η δημιουργία δραστηριοτήτων στο υπολογιστικό περιβάλλον μπορεί να βοηθήσει στην ενοποίηση διαφορετικών διδακτικών συμπεριφορών αλλά και να ενισχύσει τη θετική στάση των μαθητών απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο. Πρέπει να επισημανθεί επίσης ότι καθώς οι περισσότεροι μαθητές έχουν θετική στάση απέναντι στον υπολογιστή, μπορούν να δημιουργηθούν καταστάσεις μάθησης που παρέχουν κίνητρα για ενεργητική συμμετοχή των μαθητών σε καταστάσεις μάθησης.

Από την απάντηση της ερώτησης 2 του ερωτηματολογίου τα 2/3 περίπου των μαθητών (ποσοστό 67,74 %) αντιμετωπίζει δυσκολία με το μάθημα της γεωμετρίας. Με βάσει τις παραπάνω παρατηρήσεις και σε αντιδιαστολή ,με την απάντηση της ερώτησης 8, που αφορά το λογισμικό (ποσοστό 88,7 % το βρήκε ενδιαφέρον), φαίνεται ότι οι μαθητές με μεγαλύτερη ευκολία και καλύτερη προδιάθεση μπορεί να εμπλακούν στην εκπαιδευτική διαδικασία με απώτερο σκοπό την μάθηση.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των ερωτήσεων 6 και 7, της έρευνας που πραγματοποιήθηκε, με την βοήθεια του λογισμικού και των κατάλληλων εφαρμογών ένα αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών οδηγήθηκε στην κατανόηση του και τελικά στην διατύπωση του, σε αντίθεση ,με την παραδοσιακή διδασκαλία. Η διαπίστωση αυτή ενισχύεται και από τις απαντήσεις των ερωτήσεων 9,10 και 11. Αυτός άλλωστε ήταν και ο στόχος της διδασκαλίας με τις νέες Τεχνολογίες. Εδώ συμπίπτουν τα αποτελέσματα της έρευνας και με άλλες έρευνες που έγιναν στην Ελλάδα και στο εξωτερικό , που δείχνουν ότι οι μαθητές αξιολογούν θετικά τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα σε θέματα που σχετίζονται με την καλύτερη κατανόηση των εννοιών και τον ευχάριστο τρόπο προσέγγισής τους, την ενεργητική μάθηση και συνεργασία (Μπαραλός & Πολιτίδου, 2008, σ.748) καθώς επίσης και το ότι τα δυναμικά περιβάλλοντα διευκολύνουν την καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και ενθαρρύνουν τους μαθητές να κινηθούν προς υψηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης πέραν μιας στραγγαλιστικής απομνημόνευσης ιδιοτήτων, κάποιων γεωμετρικών σχημάτων (Ustun & Ubuz, 2004).

.

Δεν είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς ότι το εκπαιδευτικό λογισμικό είναι σε θέση να εξασφαλίσει τη μάθηση των Μαθηματικών, εξαλείφοντας τις δυσκολίες που παρατηρούνται στα παραδοσιακά περιβάλλοντα . Όπως κάθε εργαλείο που επινοείται και κατασκευάζεται από τα ανθρώπινα όντα, η χρήση των ΤΠΕ μπορεί να επιλύσει κάποια προβλήματα αλλά και να δημιουργήσει κάποια άλλα. Η οποιαδήποτε αξιολόγηση σχετικά με την υπεροχή της ή όχι στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θα επιτευχθεί μέσα στην διδακτική πρακτική..Αυτό φαίνεται και από την απάντηση της ερώτησης 9 αν σας δημιουργήθηκε η αίσθηση ότι αλλάζει η διδασκαλία και η μάθηση με την βοήθεια λογισμικών. Ένα ποσοστό 19,28 % απάντησε επιφυλακτικά.

Από τις απαντήσεις των ερωτήσεων 13 και 14 προκύπτει η επιθυμία της συντριπτικής πλειοψηφίας των μαθητών το μάθημα της Γεωμετρίας να διδάσκεται με τις ΤΠΕ και μάλιστα με την χρήση λογισμικού. Σε μεγάλο δε ποσοστό ,όπως προκύπτει από την απάντηση της ερώτησης 12, η αίσθηση των μαθητών είναι, ότι αλλάζει ουσιαστικά, ο τρόπος διδασκαλίας, καθώς επίσης και ο τρόπος μάθησή τους που μέχρι τώρα είχαν γνωρίσει.

Ο παραδοσιακός ρόλος του εκπαιδευτικού ως μεταφορέα της γνώσης απαιτείται να αντικατασταθεί με τον σύγχρονο τρόπο διδασκαλίας όπου οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες ,συνεργατικά πειραματίζονται ,ανακαλύπτουν και μαθαίνουν , οι δε εκπαιδευτικοί να χειρίζονται και να προσαρμόζονται στις ραγδαίες αλλαγές της κοινωνίας και της εκπαίδευσης.

Η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος ενισχύει την παραπάνω άποψη. Συνεπώς οι καθηγητές καλούνται να αλλάξουν στάση και η προτεραιότητά τους, πλέον δεν είναι ο έλεγχος και το μπλοκάρισμα της ροής των πληροφοριών, αλλά η εξασφάλιση των συνθηκών εκείνων, μέσα από τις οποίες, η εκπαίδευση θα διαμορφώσει και θα αναπτύξει ένα ολοκληρωμένο άτομο σε όλα τα επίπεδα (γνωστικό, συναισθηματικό, ψυχοκινητικό) και όχι μόνο στη γνωστική του πλευρά .

.

5.2 Προτάσεις

Οι δυνατότητες που μας παρέχουν οι νέες τεχνολογίες και μέσα έκφρασης δεν είναι δυνατό να αγνοηθούν. Οι νέες αυτές τεχνολογικές εξελίξεις θα μεταβάλλουν τη μορφή του σημερινού κόσμου. Εκπαιδευτικοί και νέες τεχνολογίες αλληλοσυμπληρώνονται. Ενώ οι υπολογιστές θα χρησιμοποιούνται ως αστείρευτη πηγή πληροφοριών, οι εκπαιδευτικοί θα προάγουν την ενεργό συμμετοχή, τη συνεργασία, την ανάληψη πρωτοβουλιών και την κριτική σκέψη

Η ένταξη της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στο εκπαιδευτικό μας σύστημα έχει νόημα μόνο όταν στοχεύει σε κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία.[10] Τα τελευταία χρόνια είναι πλέον ξεκάθαρο ότι καινοτομίες στο αναλυτικό πρόγραμμα και στις διδακτικές μεθόδους μπορούν να είναι επιτυχείς και αποτελεσματικές μόνο όταν λάβουμε υπόψη «τί» κάνει ο εκπαιδευτικός με αυτές τις καινοτομίες (Steiner, 1987).

Είναι επιτακτική ανάγκη για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα να προσδιορίσει και να υιοθετήσει ένα ολοκληρωμένο μοντέλο, αφενός επιμόρφωσης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών και αφετέρου επαρκούς εκπαίδευσης των υποψήφιων εκπαιδευτικών, το οποίο θα στοχεύει στην ενσωμάτωση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση. Η επιτυχία του μοντέλου αυτού καθορίζεται από

- την επαρκή αιτιολόγηση της ένταξης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία με όρους παιδαγωγικής και διδακτικής.
- την υιοθέτηση των ΤΠΕ ως εκπαιδευτικών και μαθησιακών εργαλείων.
- την απόκτηση στέρεων και διαχρονικών δεξιοτήτων χρήσης των ΤΠΕ.
- την συνεχή παιδαγωγική υποστήριξη και την απόκτηση

[10] ΕΑΙΤΥ, Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών - Τεύχος 1 (Γενικό Μέρος-, 2008)

δεξιοτήτων ενσωμάτωσης των ΤΠΕ στη διδακτική πρακτική.

- την καλλιέργεια γενικότερης κουλτούρας σχετικά με την εφαρμογή των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Για την διδασκαλία των μαθηματικών με τις νέες τεχνολογίες κρίνεται απαραίτητο από τους εκπαιδευτικούς η χρήση κατάλληλου σεναρίου όπως αυτό που παρουσιάστηκε στην εργασία αυτή.. Αν είναι εφικτό, καλό θα ήταν να εντάσσεται στην μαθησιακή διαδικασία με περισσότερα από ένα κεφάλαιο διδακτέας ύλης ή δύο διαφορετικά μαθήματα (πχ Άλγεβρα ,Γεωμετρία) ή ακόμη και περισσότερα μαθήματα (πχ Μαθηματικά ,Φυσική). Με άλλα λόγια θα ήταν σκόπιμο ένα σενάριο να εξασφαλίζει την διαθεματικότητα διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων.

Όσον αφορά τους μαθητές. μετά το πέρας της διδασκαλίας στο σχολείο, ο μαθητής μένει μόνος για να μελετήσει το αντικείμενο που διδάχθηκε. Η εμπειρία όμως έχει δείξει, ότι οι μαθητές χρειάζονται βοήθεια κατά την διάρκεια της μελέτης τους στο σπίτι. Έτσι, πολλοί μαθητές, καθώς μελετούν, θα ήθελαν να υπήρχε η δυνατότητα να ανατρέξουν ή και να επαναλάβουν το μάθημα που διδάχθηκαν στην σχολική τάξη. Αν σε αυτούς τους μαθητές συμπεριλάβουμε και πιθανόν κάποιους που ήταν απόντες κατά την διάρκεια της παράδοσης, τότε γίνεται φανερό ότι αυτές οι δραστηριότητες που έχουν διδαχθεί στο σχολείο καλό θα ήταν να είναι προσβάσιμες στους μαθητές και από το σπίτι τους. Έτσι ένα επιπλέον έργο του εκπαιδευτικού είναι η διάθεση της συγκεκριμένης διδακτικής δραστηριότητας με ηλεκτρονικό τρόπο:

α) Στην ηλεκτρονική Τάξη.

β)Σύνδεσμος στην ιστοσελίδα του σχολείου με πρόσβαση εντός και εκτός του σχολικού περιβάλλοντος.

γ)Διάθεση και επιπλέον υλικό για περαιτέρω εξάσκηση και κατανόηση.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΨΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΟΥ ΔΙΔΑΧΘΗΚΑΝ ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕ ΤΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1.**Φύλο**

ΜΑΘΗΤΗΣ	
ΜΑΘΗΤΡΙΑ	

2.**Αντιμετωπίζετε δυσκολίες στο μάθημα της Γεωμετρίας..**

α) Ναι ❑ β) Όχι ❑

3. **Η απόδειξη με τα σχήματα που υπάρχει στο βιβλίο σας, για την κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος (χωρίς την εξήγηση του καθηγητού σας) είναι αντιληπτή από σας**.

α) Ναι ❑ β) Όχι ❑

4. **Η απόδειξη με τα σχήματα που υπάρχει στο βιβλίο σας, για την κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος (με την εξήγηση του καθηγητού σας) έγινε αντιληπτή από σας**.

α) Ναι ❑ β) Όχι ❑

5.**Ειχατε δυσκολίες στην κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος κατά την παράδοση από τον καθηγητή σας.**

α) Ναι ❑ β) Όχι ❑

.**6. Συμπληρώστε τον βαθμό δυσκολίας κατανόησης του πυθαγορείου**

Θεωρήματος με την παραδοσιακή διδασκαλία.

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

7**. Συμπληρώστε τον βαθμό δυσκολίας κατανόησης του πυθαγορείου Θεωρήματος με την χρήση του λογισμικού**.

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

8.. Η χρήση του λογισμικού στην Γεωμετρία σας φάνηκε ενδιαφέρουσα.

α) Ναι ❑ β) Όχι ❑

9. **Σας δημιουργήθηκε η αίσθηση ότι αλλάζει ουσιαστικά η διδασκαλία και η μάθηση με την βοήθεια των λογισμικών;**

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

10. **Το λογισμικό που χρησιμοποιήσατε σας φάνηκε ικανοποιητικό ώστε να καλύψει της μαθησιακές ανάγκες σας;**

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

11. **θεωρείτε ότι η χρήση λογισμικών (όπου είναι δυνατόν) στην διδασκαλία βοηθάει στην μάθηση:**

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

12 **Σας δημιουργήθηκε η αίσθηση ότι αλλάζει ουσιαστικά η διδασκαλία και η μάθηση με τον τρόπο που διδάχθηκε το πυθαγόρειο θεώρημα;**

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

13. **Με ποιον από τους παρακάτω τρόπους θα θέλατε να διδάσκεται το μάθημα των μαθηματικών.**

Με τον παραδοσιακό τρόπο	
Με την βοήθεια λογισμικών	

14. **Θα επιθυμούσατε καθημερινά στο μαθημά σας να χρησιμοποιείται λογισμικά για την Διδασκαλία των μαθηματικών ;**

Πάρα πολύ	Πολύ	Μέτρια	Λίγο	Καθόλου	Δεν απαντώ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

1. Alessi, S. & Trollip, S. (2001). *Πολυμέσα και Εκπαίδευση*. Αθήνα: Μ. Γκιούρδας
2. Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Παιδιά Σχολεία και Υπολογιστές*. Αθήνα: Gutenberg

3. Eves, H. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών- ως το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία.

4. Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών-μετά το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία

5. ΕΑΙΤΥ, Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών - Τεύχος 1 (Γενικό Μέρος-, 2008)

6. ΕΑΙΤΥ, Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών - Τεύχος 1 (Ειδικό Μέρος ΠΕ03- 2008)

7. ΙΤΥ (2003), Περί εκπαιδευτικού Λογισμικού

8. Κόμης Βασίλης (2004) Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των τεχνολογιών της πληροφορίας και των Επικοινωνιών

9. Μαστρογιάννης Αλέξιος (2010) ΤΠΕ και Μαθηματικά: Ωφελιμότητα, περιττότητα ή ουτοπία; (Συνέδριο ΤΠΕ στην εκπαιδευση).

10. Σχολικό Βιβλίο Μαθηματικών Β Γυμνασίου Εκδοση 2016.

11. Τζιμογιάννης, Α. (2002), Προετοιμασία του σχολείου της Κοινωνίας της

Πληροφορίας. Προς ένα ολοκληρωμένο μοντέλο ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, Σύγχρονη Εκπαίδευση, 122, 55-65 .

12. Κυριαζής Αθανάσιος, Ψυχάρης Σαράντος & Κορρές Κωνσταντίνος (2012). Η διδασκαλία και μάθηση των Θετικών Επιστημών με τη βοήθεια του Υπολογιστή: Μοντελοποίηση, Προσομοίωση και εφαρμογές. Εκδόσεις Παπαζήση.

13. Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Αθήνα: Τυπωθήτω

Ξενόγλωσση

1. Aarnes, J. & Knudtzon, S. (2003). Conjecture and Discovery in Geometry. A dialogue between exploring with dynamic geometric software (DGS) and mathematical reasoning. *PICME 2003*, Växjö, May 9th- 11th

2. Accascina, G. & Margiotta, G. & Rogora, E. (2005). Making bad conjectures and incomplete proofs with good drawings within a dynamic geometry environment. *ICTMT7*- Bristol, 26-29, July 2005

3. Bartolini Bussi, M. & Chiappini, G. & Reggiani, M. & Robutti, O. (2004). Learning Mathematics with tools. *In proceedings of IMCE-10*, Copenhage

   Johnston- Wilder S. & Pimm D. (2005). *Teaching Secondary Mathematics with ICT*.Open University Press

4. Jonassen, D. & Howland, J. (2003). *Learning to Solve Problems with Technology. A Constructivist Perspective*. Pearon Education Inc, Upper Saddle River, New Jersey

5. Laborde, C. & kynigos, C. & Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *In Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. A. Gutiırrez,P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers

6. Lovász, L. & Pelikán, J. & Vesztergombi, K. (2003). Discrete Mathematics Elementary and Beyond. *Springer* National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA: NCTM

7. Olkun, S. & Sinoplu, B. & Deryakulu, D. (2005). Geometric exploration with dynamic geometry applications base onVan Hiele levels. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*

8. Üstün, I. & Ubuz, B. (2004). Student's Development of Geometrical Concepts Through a Dynamic Learning Environment. *The 10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004

Ιστοσελίδες

1. Ο Πυθαγόρας https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

2. Η ιστορία του Πυθαγόρα και του πυθαγορείου Θεωρήματος. (Παπαδοπούλου Γεωργία-Ευθυμίου Βασίλης) www.math.uoc.gr

3. Η φιλοσοφία του Πυθαγόρα και της Σχολής του. www.antitetradia.gr/

4. Πυθαγόρας ο Σάμιος www.manosdanezis.gr/

5. 118 proofs of the Pythagorean theorem http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

6. Λογισμικό Geogebra https://www.geogebra.org/ materials