

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου σε κυκλώματα με
μεγάλο αριθμό θυρών

Model Order Reduction techniques for circuits with
large number of ports

Διπλωματική Εργασία

Χρυσόστομος Α. Χατζηγεωργίου

Επιβλέποντες Καθηγητές : Νέστορας Ευμορφόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής

Γεώργιος Σταμούλης
Καθηγητής

Βόλος, Σεπτέμβριος 2015



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου σε κυκλώματα με
μεγάλο αριθμό θυρών

Διπλωματική Εργασία

Χρυσόστομος Α. Χατζηγεωργίου

Επιβλέποντες : Νέστορας Ευμορφόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής

Γεώργιος Σταμούλης
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την διμελή εξεταστική επιτροπή την 30^η Σεπτεμβρίου 2015.

.....
Ε. Ευμορφόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής

.....
Γ. Σταμούλης
Καθηγητής

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του Διπλώματος του Μηχανικού Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στα πλαίσια του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

.....

Χρυσόστομος Α. Χατζηγεωργίου

Διπλωματούχος Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Copyright © Chrysostomos Chatzigeorgiou, 2015
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Στην οικογένεια & στους φίλους μου

Με την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ολοκληρώνεται ένας κύκλος πέντε χρόνων σπουδών στο Τμήμα. Σε αυτό λοιπόν το σημείο νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου τους συμφοιτητές και τους καθηγητές με τους οποίους συναναστράφηκα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νέστορα Ευμορφόπουλο για την εμπιστοσύνη που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας στο πρόσωπό μου καθώς και για τη συνεχή καθοδήγηση του, αλλά επίσης και για τη δυνατότητα που μου έδωσε να εργαστώ στο εργαστήριο Ηλεκτρονικής του τμήματος. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον κ. Γιώργο Σταμούλη για τις υποδείξεις του.

Θα ήταν παράληψη αν δεν ευχαριστούσα όλα τα παιδιά του εργαστηρίου Ηλεκτρονικής που ήμασταν μαζί όλο αυτό το διάστημα, και ειδικότερα στον φίλο Χαράλαμπο Αντωνιάδη για τις σημαντικές υποδείξεις του αλλά και στον καλό μου φίλο Ευάγγελο Νόνα που ήμασταν μαζί όλο αυτό το διάστημα της διπλωματικής εργασίας αλλά και γενικότερα σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μας.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους καλούς φίλους Βαγγέλη Νόνα, Γιάννη Κωνσταντέλια, Γιώργο Γαρυφάλλου, Κώστα Θεμελή, Χρήστο Ιωαννίδη και Χρήστο Κωνσταντά που ήμασταν μαζί όλα αυτά τα χρόνια εντός και εκτός σχολής καθώς επίσης και στον καλό φίλο Δημήτρη Σαμαρά, αλλά το μεγαλύτερο ευχαριστώ πηγάζει στην οικογένεια μου, τα αδέρφια μου Δημήτρη, Γιάννη, Ευθυμία, Δέσποινα και στους γονείς μου Αναστάσιο και Μαρία, που χάρις στους δικούς τους αγώνες και θυσίες όλα αυτά τα χρόνια κατάφερα να πραγματοποιώ τα όνειρά μου και γενικότερα τα πάντα στη ζωή μου.

Χατζηγεωργίου Α. Χρυσόστομος
Βόλος, 2015

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων	v
Κατάλογος σχημάτων	vi
Κατάλογος Συντομογραφιών	vii
Περίληψη	viii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Περιγραφή του προβλήματος	1
1.2 Σκοπός της εργασίας	2
1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής Εργασίας	2
2 Μαθηματικό υπόβαθρο	5
2.1 Χώρος κατάστασης	5
Διάνυσμα κατάστασης	5
Δυναμικές εξισώσεις	5
2.2 Εξισώσεις MNA	7
Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία	7
Εξισώσεις τοπολογίας	7
Νόμοι του Kirchhoff	8
Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων	9
2.3 Γραμμικά συστήματα	12
Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις	12
Μηδενικά και Πόλοι	14
Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις	14
2.4 Ορθοκανονική βάση	16
2.5 Υπόχωροι Krylov	17
3 Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου	19
3.1 Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου SPRIM	19
Υλοποίηση της SPRIM	19
Παρατηρήσεις	21
4 Υλοποίηση της προσομοίωσης	25
4.1 Κατασκευή ενός προσομοιωτή	25
Αρχείο περιγραφής κυκλώματος	25

MNA σύστημα του κυκλώματος	26
Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου	26
Επιπρόσθετες παρατηρήσεις	27
5 Εκτίμηση της λύσης	29
5.1 Ανάλυση υλοποίησης	29
5.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης	30
5.3 Παρατηρήσεις	34
6 Επίλογος	35
6.1 Μελλοντικές προεκτάσεις	35
Βιβλιογραφία	37

Κατάλογος πινάκων

5.1	Ενδεικτικό benchmark	31
5.2	Χαρακτηριστικά του συστήματος μας	34

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Ενδεικτική μορφή MOR	2
2.1	Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC	5
2.2	Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία (αντίσταση, πυκνωτής και πηνίο)	7
2.3	Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα	8
2.4	Ενδεικτικό παράδειγμα: πορεία προς τον τελικό γράφο	9
2.5	Σύστημα με είσοδο και έξοδο	12
2.6	Αναπαράσταση M/Σ Laplace στο μιγαδικό επίπεδο	14
2.7	Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MN εξισώσεων	16
5.1	Ενδεικτική μορφή απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα	31
5.2	Ενδεικτική μορφή απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα με παραπάνω ακρίβεια	32
5.3	Ένα ακόμη παράδειγμα ενδεικτικής μορφής απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα	33

Κατάλογος Συντομογραφιών

MOR Model Order Reduction

SPRIM Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling

MNA Modified Nodal Analysis

NA Nodal Analysis

CAD Computer Aided Design

SPD Symmetric Positive Definite

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σαν στόχο τη μελέτη και υλοποίηση μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίτευξη υποβιβασμού τάξης μοντέλου σε κυκλώματα με μεγάλο αριθμό εισόδων και εξόδων. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι χρησιμοποιούνται τόσο στην προσομοίωση, όσο και στον σχεδιασμό των κυκλωμάτων.

Η συνεχής ανάγκη παραγωγής κυκλωμάτων με ανοχή σε λάθη αλλά και συμπεριφορά η οποία θα είναι κατά κύριο λόγο όπως την επιθυμεί ο σχεδιαστής, οδήγησε την επιστήμη στην συνεχή μοντελοποίηση των κυκλωμάτων σε περιβάλλοντα προσομοίωσης. Όμως, στο πέρασμα των χρόνων τα κυκλώματα έγιναν και θα συνεχίσουν να γίνονται όλο και πιο περίπλοκα. Για αυτόν λοιπόν το λόγο, έπρεπε να βρεθούν τρόποι οι οποίοι να επιτρέπουν την ευκολότερη και κυρίως γρηγορότερη προσομοίωση αυτών των κυκλωμάτων.

Για αυτόν λοιπόν το λόγο, στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε και υλοποιήσαμε τον αλγόριθμο *SPRIM* προκειμένου να πετύχουμε υποβιβασμό στην τάξη ενός κυκλώματος με μεγάλο αριθμό εισόδων και εξόδων.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Μέσα από την πάροδο των χρόνων, έχει παρατηρηθεί η αυξημένη χρήση τόσο των ηλεκτρονικών, όσο και των ηλεκτρικών συσκευών. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια την πολλαπλή χρήση ηλεκτρονικών και ηλεκτρικών στοιχείων στις συσκευές. Λόγο αυτής της αύξησης, η συμπεριφορά των κυκλωμάτων, πλέον, δε μπορεί να υπολογιστεί δίχως τη χρήση κάποιου προσομοιωτή. Κάθε κύκλωμα λοιπόν προσομοιώνεται σε κάποια υπολογιστική μονάδα, προκειμένου να διαπιστωθεί η ορθότητά του.

Θα ήταν πολύ χρονοβόρο, αλλά ταυτόχρονα και αρκετά δαπανηρό να κατασκευάζαμε κυκλώματα τα οποία τελικά δεν θα είχαν τη συμπεριφορά την οποία θα περιμέναμε. Οι προσομοιωτές αναλαμβάνουν, με βάση κάποια μαθηματικά μοντέλα, να αναλύσουν τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Προκειμένου λοιπόν να επιτευχθεί μια προσομοίωση, η μοντελοποίηση των κυκλωμάτων θα πρέπει να βασίζεται πάνω σε συγκεκριμένα εργαλεία και αλγορίθμους. Έτσι λοιπόν δημιουργήθηκαν τα εργαλεία CAD, τα οποία διευκολύνουν την μοντελοποίηση των κυκλωμάτων στο ευρύτερο σύνολο των μηχανικών.

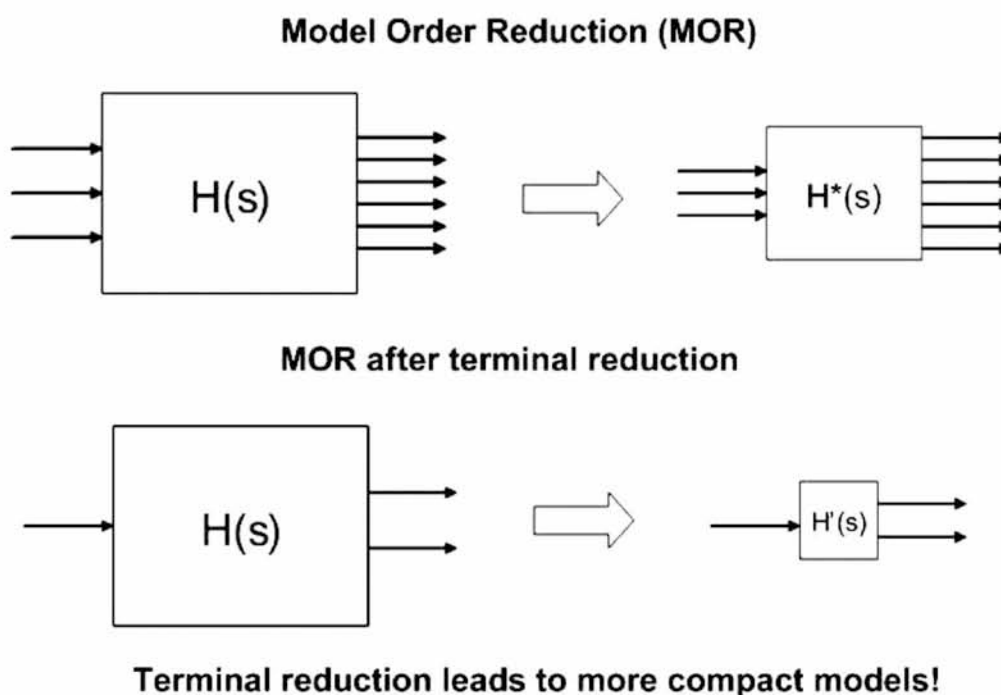
Αυτή η διαρκής αύξηση των στοιχείων έχει κάνει αρκετά περίπλοκη, όχι μόνο την κατασκευή των κυκλωμάτων, αλλά και την προσομοίωση τους ώστε να διαπιστωθεί η ορθότητά τους. Επειδή λοιπόν οι απαιτήσεις σε πόρους, κυρίως μνήμης και επεξεργαστικής δύναμης, τις οποίες τα κυκλώματα απαιτούσαν, φτάσαμε στο σημείο να αναθέτουμε την προσομοίωση τους σε όλο και δυνατότερα μηχανήματα. Εκτός αυτού όμως έχουμε αρχίσει να φάχνουμε και τρόπους, ώστε να απλοποιήσουμε αυτά τα κυκλώματα και να κάνουμε όλο και γρηγορότερη την προσομοίωση τους, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν γρηγορότερα αποτελέσματα.

Το μέγεθος των προβλημάτων που πρέπει να λύνουμε καθημερινά είναι αρκετά μεγάλο και συνήθως απαιτούνται μεγάλοι, αν όχι εξωπραγματικοί, ως προς τη λύση τους χρόνοι. Σαν μηχανικοί λοιπόν καλούμαστε να βρούμε τρόπο και λύση ώστε η προσομοίωση κυκλωμάτων να γίνεται πολύ γρηγορότερα και μέσα σε πραγματικούς χρόνους.

1.2 Σκοπός της εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι τόσο η μελέτη όσο και η υλοποίηση μιας μεθόδου η οποία θα βοηθήσει στην γρηγορότερη προσομοίωση κυκλωμάτων, ώστε να φανεί γρηγορότερα η ορθότητά τους όπως αναφέραμε παραπάνω. Βρήκαμε λοιπόν πως ένας τρόπος ώστε να ελαχιστοποιηθεί η έντονη χρήση μνήμης αλλά και επεξεργαστικής ισχύος είναι οι τεχνικές MOR. Πιο συγκεκριμένα το MOR είναι μια τεχνική η οποία βοηθά στη μείωση της πολυπλοκότητας των μαθηματικών μοντέλων κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Έτσι εφαρμόζοντας μια τέτοια μέθοδο είναι προφανές πως ο χρόνος της προσομοίωσης θα μειωθεί αρκετά, λόγω του μικρότερου αριθμού εξισώσεων που προκύπτουν για λύση.

Βέβαια στόχος μας είναι και η γρηγορότερη επίλυση των συστημάτων και έτσι μια γρηγορότερη προσομοίωση, αλλά σε καμία περίπτωση δε θα θέλαμε να έχουμε μείωση ως προς την ακρίβεια της λύσης μας. Μέσα από κατάλληλους ελέγχους τόσο στο αρχικό όσο και στο ελαχιστοποιημένο σύστημα που παρήγαγε το MOR είδαμε πως η ακρίβεια της λύσης μας δεν χαλούσε.



Σχήμα 1.1: Ενδεικτική μορφή MOR

1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής Εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 μας δίνεται ένα θεωρητικό υπόβαθρο ώστε να γίνουν ευκολότερα κατανοητά τα μαθηματικά εργαλεία που χρειαζόμαστε.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια εισαγωγή στις μεθόδους υποβιβασμού τάξης μοντέλου και εν συνεχεία γίνεται εκτενής αναφορά στον αλγόριθμο *SPRIM*, τόσο ως προς την υλοποίηση όσο και ως προς την επεξήγηση της.

Στο Κεφάλαιο 4 εκθέτουμε το τρόπο και τα βήματα με τον οποίο γίνεται μια προσομοίωση σήμερα, καθώς και το πως εμείς χρησιμοποιήσαμε τις μεθόδους υποβιβασμού τάξης μοντέλου στην προσομοίωση μας.

Μετά την περιγραφή και την πορεία της προσομοίωσης, στο Κεφάλαιο 5 εκθέτουμε τα αποτελέσματα που λάβαμε δοκιμάζοντας διάφορα πειράματα πάνω στο σύστημά μας και καταγράφοντας τη συμπεριφορά που παρουσιαζόταν από την εφαρμογή μας.

Τέλος, η παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 6, όπου αναφέρουμε τη συνολική εικόνα που αποκομίσαμε εργαζόμενοι πάνω σε αυτό το θέμα κατά τη διάρκεια όλης της έρευνας πάνω σε αυτό.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό υπόβαθρο

2.1 Χώρος κατάστασης

Ως κατάσταση (state) ενός συστήματος τη χρονική στιγμή t_0 ορίζουμε το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας τη χρονική στιγμή t_0 , η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$.

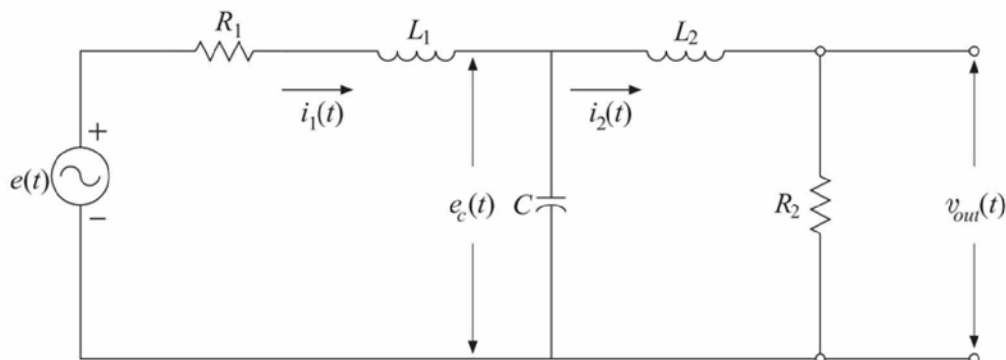
Διάνυσμα κατάστασης

Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος είναι γνωστές σαν μεταβλητές κατάστασης. Σαν διάνυσμα κατάστασης λοιπόν θεωρούμε ένα διάνυσμα, του οποίου οι συνιστώσες αποτελείται από τις μεταβλητές κατάστασης.

Δυναμικές εξισώσεις

Στη συνέχεια μέσα από ένα ενδεικτικό παράδειγμα, θα δείξουμε τον τρόπο κατασκευής των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος.

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC

Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff έχουμε:

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = R_1 i_1(t) - e_c(t) + e(t) \quad (2.1)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = -R_2 i_2(t) + e_c(t) \quad (2.2)$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \quad (2.3)$$

$$V_{out}(t) = i_2(t) R_2 \quad (2.4)$$

Όπως μπορούμε και εύκολα να καταλάβουμε, το ζητούμενο είναι η τάση στην έξοδο, δηλαδή το V_{out} . Σε αυτό το σημείο του προβλήματος, θα ήταν καλό να ορίζαμε τις μεταβλητές κατάστασης και εν συνεχεία το αντίστοιχο διάνυσμα κατάστασης. Επιλέγουμε ως μεταβλητές κατάστασης την τάση $e_c(t)$ η οποία εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή, και τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ που εμφανίζονται. Επομένως το διάνυσμα κατάστασης που δημιουργείται και το οποίο θα συμβολίσουμε σε αυτό το παράδειγμα με $\underline{x}(t)$ είναι:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix}$$

Κάνοντας μια μικρή αναδιάρθρωση των δυναμικών εξισώσεων του συστήματος, δηλαδή των σχέσεων (2.1) έως (2.4), προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{c} & \frac{-1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (2.5)$$

και

$$V_{out}(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Έτσι τις σχέσεις (2.5) και (2.6) μπορούμε να τις γράψουμε και ως

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b} e(t) \quad (2.7)$$

$$V_{out}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad (2.8)$$

Η εξίσωση που περιγράφεται στη σχέση (2.7) ονομάζεται καταστατική εξίσωση και η εξίσωση που περιγράφει η (2.8) εξίσωση εξόδου, όπου η γενική μορφή αυτών των εξισώσεων είναι

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad (2.9)$$

$$V_{out}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + du(t) \quad (2.10)$$

Οι εξισώσεις, λοιπόν, που δείχνουν τη συσχέτιση μεταξύ εισόδου, εξόδου αλλά και μεταβλητών κατάστασης, ονομάζονται δυναμικές.

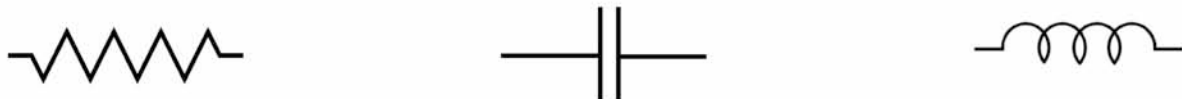
Το παραπάνω παράδειγμα, το οποίο μας έκανε σαφές τον τρόπο δημιουργίας της καταστατικής εξίσωσης όσο και της εξίσωσης εξόδου, για λόγους ευκολότερης κατανόησης αναφερόταν σε σύστημα το οποίο είχε σαν διέγερση μια είσοδο και έβγαζε μια έξοδο (Simple Input Simple Output). Εμάς, κατά κύριο λόγο, θα μας απασχολήσουν συστήματα με πολλαπλό αριθμό εισόδων όσο και εξόδων (Multiple Input Multiple Output).

2.2 Εξισώσεις MNA

Σε αυτό το σημείο έχουμε φτάσει στο επίπεδο να παρουσιάσουμε το τρόπο με τον οποίο προσομοιώνουμε τα κυκλώματά μας. Όλα ξεκινούν από το διάβασμα ενός κυκλώματος. Αυτό γίνεται μέσω μίας διαδικασίας, η οποία έχει σαν σκοπό την ανάγνωση και κατανόηση ενός κυκλώματος μέσα από μια προκαθορισμένη μορφή που θα δοθεί μέσα από κάποιο αρχείο. Θα περιγράψουμε αναλυτικά όλα τα στάδια της δημιουργίας των MNA εξισώσεων.

Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία

Τα γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία είναι η αντίσταση, το πηνίο και ο πυκνωτής. Κατά την αναγνώριση αυτών των στοιχείων μέσα από την ανάγνωση του αρχείου που περιγράφει το κύκλωμα, θέτουμε τον πρώτο κόμβο ως θετικά ορισμένο και τον δεύτερο ως αρνητικά ορισμένο.



Σχήμα 2.2: Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία (αντίσταση, πυκνωτής και πηνίο)

Επίσης γνωρίζουμε από τη φυσική πως το ρεύμα πηγαιίνει από το υψηλότερο προς το χαμηλότερο δυναμικό. Ακόμη ένα κύκλωμα χωρίς πηγές, είτε τάσης είτε ρεύματος, δεν έχει λύση.

$$u(t) = a + f(t)$$

$$i(t) = a + f(t)$$

Εξισώσεις τοπολογίας

Έστω $V = 0, 1, \dots, n - 1$ το σύνολο των κόμβων(nodes) ή κορυφών(vertices) και $E = e_1, \dots, e_m$ το σύνολο των m κλάδων(branches) ή ακμών(edges). Ο ελαττωμένος πίνακας πρό-

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

σπτώσης, ως προς τον κόμβο αναφοράς, όπου είναι η γείωση και θα τον συμβολίζουμε με 0, του γράφου του κυκλώματος ορίζεται ως:

$$A_{i,j} = \begin{cases} +1 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ δε συνδέεται με τον κόμβο } i. \end{cases}$$

Οι διαστάσεις του πίνακα A είναι $(n - 1) \times m$

Νόμοι του Kirchhoff

Εαν:

$$\underline{u}(t) = [u_1(t) \quad , \dots, \quad u_m(t)]^T \quad (2.11)$$

$$\underline{V}(t) = [V_1(t) \quad , \dots, \quad V_m(t)]^T \quad (2.12)$$

$$\underline{i}(t) = [i_1(t) \quad , \dots, \quad i_m(t)]^T \quad (2.13)$$

Από το νόμο τάσεων του Kirchhoff (Kirchhoff Voltage Law ή KVL) έχουμε:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t)$$

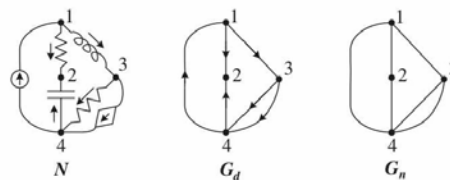
που μας λέει δηλαδή πως η τάση κατά μήκος κάθε κλάδου, είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού των άκρων του κόμβου.

Από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (Kirchhoff Current Law ή KCL) έχουμε:

$$A \underline{i}(t) = 0$$

που μας λέει δηλαδή πως το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που προσπίπτουν είναι 0.

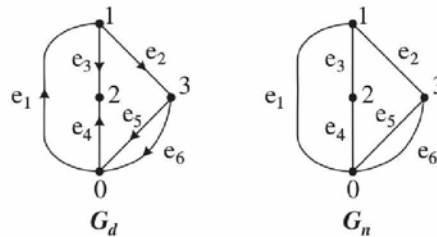
Ακολουθεί ένα σύντομο παράδειγμα που δείχνει τον τρόπο δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης μέσα από ένα κύκλωμα.



Σχήμα 2.3: Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα

Στην εικόνα (2.3) φαίνεται ένα ενδεικτικό κύκλωμα με μικρό αριθμό στοιχείων, όπου με βάση τις διαδικασίες που περιγράψαμε φτάσαμε στο τελικό γράφο του σχήματος (2.4). Από τους κανόνες σχετικά με την κατασκευή του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης προκύπτει ο εξής πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 2.4: Ενδεικτικό παράδειγμα: πορεία προς τον τελικό γράφο

Από τον KVL έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Τέλος, από τον KCL έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων

Τα m στοιχεία του κυκλώματος χωρίζονται σε δυο ομάδες:

- 1) Στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή

$$i_k(t) = g_k u(t) + C_k \frac{du_k(t)}{dt} + S_k(t) \quad (2.14)$$

Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται αντιστάσεις, χωρητικότητες και πηγές ρεύματος.

- 2) Στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις δε μπορούν να γραφτούν όπως παραπάνω. Περιλαμβάνονται πηγές τάσης και αυτεπαγωγές.

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

Χωρίζουμε τον ελαττωμένο πίνακα πρόσπτωσης A και τα διανύσματα $\underline{i}(t)$ και $\underline{u}(t)$ σε υπό-πίνακες και υπό-διανύσματα που αντιστοιχούν στις δυο ομάδες στοιχείων ως εξής:

$$A = [A_1 \quad A_2] \quad (2.15)$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\underline{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

όπου οι υπό-πίνακες έχουν τις εξής διαστάσεις:

$$A_1 \rightarrow (n-1) \times m_1,$$

$$A_2 \rightarrow (n-1) \times m_2,$$

$$u_1 \rightarrow m_1 \times 1,$$

$$u_2 \rightarrow m_2 \times 1,$$

$$i_1 \rightarrow m_1 \times 1,$$

$$i_2 \rightarrow m_2 \times 1.$$

Στους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέσαμε πως m_1 είναι τα στοιχεία της ομάδας 1, δηλαδή για αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος, και m_2 τα στοιχεία της ομάδας 2, δηλαδή πηλίκια και πηγές τάσης ($m = m_1 + m_2$).

Από τον KCL όπως είδαμε και παραπάνω ισχύει:

$$A\underline{i}(t) = \underline{0} \Leftrightarrow A_1 i_1(t) + A_2 i_2(t) \quad (2.18)$$

και από τον KVL:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) = A_1^T \underline{V}(t) \\ u_2(t) = A_2^T \underline{V}(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

καθώς

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}$$

με:

$$A_1^T \rightarrow m_1 \times (n-1)$$

$$A_2^T \rightarrow m_2 \times (n-1)$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας 1 γράφονται υπό τη μορφή πίνακα:

$$\underline{i}_1(t) = G\underline{u}_1(t) + C \frac{d\underline{u}_1(t)}{dt} + \underline{S}_1(t) \quad (2.20)$$

όπου:

G : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_1 \times m_1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των αντιστάσεων και μηδενικά σε εκείνες των χωρητικότητων και των πηγών ρεύματος.

C : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_1 \times m_1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στην θέση των χωρητικότητων.

\underline{S}_1 : είναι ένα διάνυσμα $m_1 \times 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των πηγών ρεύματος.

$i_k = g_k u_k(t)$: όταν ο k -κλάδος είναι αντίσταση.

$i_m = C_m \frac{du_m(t)}{dt}$: όταν ο m -κλάδος είναι χωρητικότητα.

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας 2 γράφονται υπό τη μορφή πίνακα:

$$\underline{u}_2(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + \underline{S}_2(t) \quad (2.21)$$

όπου:

L : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης $m_2 \times m_2$ και μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των αυτεπαγωγών.

\underline{S}_2 : είναι ένα διάνυσμα $m_2 \times 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία στη θέση των πηγών τάσης.

Κάνοντας αντικατάσταση την πρώτη σχέση της (2.19) στη (2.20) και στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης στην (2.18) έχουμε την εξής σχέση:

$$A_1 G A_1^T \underline{V}(t) + A_1 C A_1^T \frac{d\underline{V}(t)}{dt} + A_2 i_2(t) = -A_1 \underline{S}_1(t) \quad (2.22)$$

Επίσης με ανάλογη λογική, κάνοντας αντικατάσταση τη δεύτερη σχέση της (2.19) στην (2.21) έχουμε τη σχέση:

$$A_2^T \underline{V}(t) - L \frac{Di_2(t)}{dt} = \underline{S}_2(t) \quad (2.23)$$

Η (2.22) είναι σύστημα με $(n - 1)$ εξισώσεις και η (2.23) είναι σύστημα m_2 εξισώσεων με $(n - 1) + m_2$ αγνώστους των $\underline{V}(t)$ και $i_2(t)$.

Ακολουθεί μια τελευταία αναλυτική και συμπυκνωμένη περιγραφή των διαστάσεων του κάθε πίνακα:

$$A_1 \rightarrow (n - 1) \times m_1,$$

$$G \rightarrow m_1 \times m_1,$$

$$A_1^T \rightarrow m_1 \times (n - 1),$$

$$\underline{V} \rightarrow (n - 1) \times 1,$$

$$A_2 \rightarrow (n - 1) \times m_2,$$

$$i_2 \rightarrow m_2 \times 1,$$

$$\begin{aligned} A_2^T &\rightarrow m_2 \times (n-1), \\ \underline{V} &\rightarrow (n-1) \times 1, \\ &\rightarrow m_2 \times m_2, \\ \underline{i}_2 &\rightarrow m_2 \times 1. \end{aligned}$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων εξισώσεων, δηλαδή των (2.22) και (2.23), μας δίνει ένα σύστημα διάστασης $[(n-1) + m_2] \times [(n-1) + m_2]$, το οποίο το γράφουμε σε έναν επεκταμένο σύνθετο πίνακα:

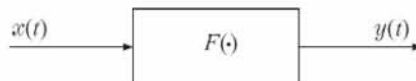
$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ -A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}(t) \\ \underline{i}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{V}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \underline{S}_1(t) \\ \underline{S}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

όπου η σχέση (2.24) περιγράφει την *MN Analysis* του συστήματος.

2.3 Γραμμικά συστήματα

Στο σχήμα (2.5), η έξοδος του $y(t)$ στη γενική της μορφή γράφεται ως

$$y(t) = F[x(t)]$$



Σχήμα 2.5: Σύστημα με είσοδο και έξοδο

Ένα σύστημα το οποίο είναι σε ηρεμία, θα λέμε πως είναι γραμμικό αν και μόνο αν δοθέντων δύο οποιονδήποτε σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ισχύει

$$F[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 F[x_1(t)] + \alpha_2 F[x_2(t)]$$

Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

Μια συνάρτηση $H(s)$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, η οποία περιγράφει μια σχέση μεταξύ του μετασχηματισμού *Laplace* της εξόδου και της εισόδου του συστήματος, υπό την προϋπόθεση πως το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως με κατάλληλες ενέργειες, έχοντας σαν σημείο εκκίνησης τις

εξισώσεις (2.9) και (2.10) που είχαμε ασχοληθεί σε παραπάνω ενότητα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος. Παίρνοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μια από αυτές τις σχέσεις έχουμε:

$$sX(s) - \underline{x}(0) = AX(s) + \underline{b}V(s) \Rightarrow$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{b}V(s)$$

και

$$Y(s) = \underline{c}^T \underline{X}(s) + dV(s) \quad (2.25)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες, όταν δηλαδή έχει νόημα η συνάρτηση μεταφοράς έχουμε τα παρακάτω:

$$\frac{\underline{X}(s)}{V(s)} = (sI - A)^{-1}\underline{b}$$

$$\frac{Y(s) - dV(s)}{V(s)\underline{c}^T} = X(s) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s) - dV(s)}{V(s)\underline{c}^T} = (sI - A)^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$

$$Y(s) - dV(s) - (sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) - V(s)((sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T + d) = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = V(s)((sI - A)^{-1}\underline{b}V(s)\underline{c}^T + d) \Rightarrow$$

και τελικά προκύπτει η σχέση:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d \quad (2.26)$$

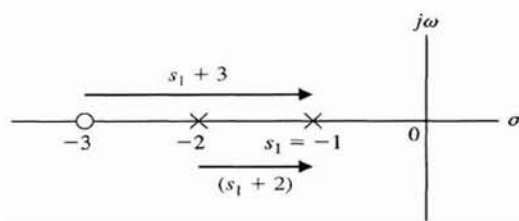
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα έχει να προσέξουμε πως συστήματα με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο από αυτόν του παρανομαστή δε μπορούν να περιγραφούν από δυναμικές εξισώσεις στο χώρο κατάστασης, επομένως δεν έχουν λύση. Αυτό συμβαίνει επειδή το σύστημά μας θα πρέπει να είναι ΦΕΦΕ (φραγμένη είσοδος φραγμένη έξοδος) ευσταθές, που είναι με βάση τις παραπάνω συνθήκες, δηλαδή βαθμός αριθμητή μικρότερος από τον βαθμό του παρανομαστή. Σε αντίθετη περίπτωση, από τη διαίρεση αριθμητή με παρανομαστή προκύπτουν όροι της μορφής cs^k , $k > 0$. Αυτοί οι όροι είναι δυνατόν να προκαλέσουν την παρουσία μη φραγμένων σημάτων στην έξοδο, ακόμη και αν η είσοδος του συστήματος είναι φραγμένη. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα σε αυτό. Έστω ότι ένας όρος της $H(s)$ είναι ίσος με cs και και ως είσοδος η βηματική συνάρτηση $u(t)$ όπου ο μετασχηματισμός Laplace δίνει $\frac{1}{s}$. Τότε η αντίστοιχη έξοδος που δίνεται ως $L^{-1}\{cs\frac{1}{s}\} = c\delta(t)$ είναι προφανώς μη φραγμένη.

Μηδενικά και Πόλοι

Από την συνάρτηση μεταφοράς που υπολογίσαμε παραπάνω μπορούμε να βγάλουμε μερικά χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του συστήματος. Πιο πριν όμως θα ορίσουμε δυο έννοιες τις οποίες θα ήταν καλό να θυμηθούμε.

Ορίζουμε λοιπόν σαν μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς, τις τιμές εκείνες για τις οποίες το πολυώνυμο του αριθμητή έχει μηδενική τιμή. Αντίστοιχα, πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ορίζονται οι τιμές εκείνες, για τις οποίες μηδενίζεται το πολυώνυμο του παρονομαστή της συνάρτησης.

Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γίνει στο μιγαδικό επίπεδο, με τη χρήση των μηδενικών και των πόλων.



Σχήμα 2.6: Αναπαράσταση M/Σ Laplace στο μιγαδικό επίπεδο

Ο yy' άξονας όπως βλέπουμε απεικονίζει το φανταστικό κομμάτι και το xx' το πραγματικό κομμάτι. Επίσης με \times συμβολίζουμε τους πόλους και με \circ τα μηδενικά.

Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις

Θα ήταν χρήσιμο σε αυτή τη φάση, να παρουσιάσουμε πιο ξεκάθαρα το πώς σχετίζονται οι MNA εξισώσεις με τις δυναμικές. Έστω οι MNA εξισώσεις

$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_{in}(t)$$

και

$$u_{out}(t) = L^T x \tag{2.27}$$

Οι παραπάνω είναι οι MNA εξισώσεις ενός MIMO συστήματος και το x είναι το διάνυσμα κατάστασης. Επίσης $U_{in}(t)$ είναι το διάνυσμα των διεγέρσεων εισόδου μεγέθους N_i , δηλαδή όσος και ο αριθμός των εισόδων και $U_{out}(t)$ είναι το διάνυσμα των εξόδων μεγέθους N_o , όσος δηλαδή και ο αριθμός των εξόδων. Φέρνοντας στο νου την εξίσωση (2.24) βλέπουμε πως είναι στην ίδια ακριβώς μορφή, απλά έχουμε ονομάσει τους πίνακες και δε δίνουμε την αναλυτική τους περιγραφή. Σε παραπάνω ενότητα επίσης δείξαμε και τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Laplace. Πράττοντας όμοια και στις εξισώσεις της (2.27) έχουμε την εξής συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = L^T (G + sC)^{-1} B \tag{2.28}$$

Θα αποδείξουμε λοιπόν πως οι παραπάνω MNA εξισώσεις, είναι όμοιες με τις δυναμικές.

Υποθέτουμε πως ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος. Τότε πολλαπλασιάζοντας με αυτόν έχουμε:

$$\begin{aligned} G\underline{x} + C\dot{\underline{x}} &= Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ C^{-1}G\underline{x} + C^{-1}C\dot{\underline{x}} &= C^{-1}Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ \dot{\underline{x}} &= -C^{-1}G\underline{x} + C^{-1}Bu_{in}(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ας θέσουμε τώρα

$$\begin{aligned} A &= -C^{-1}G \\ b &= C^{-1}B \end{aligned} \quad (2.30)$$

Κάνουμε αντικατάσταση τις σχέσης της (2.30) στη σχέση της (2.29) και έχουμε

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + bu_{in}$$

όπου είναι η καταστατική εξίσωση στη μορφή που δείξαμε στη σχέση (2.9) (όμοια βλέπουμε πως είναι και εξίσωση της εξόδου απλά διαφέρει ο συμβολισμός, το L δηλαδή είναι c). Έτσι λοιπόν φτάνουμε και στη σχέση της συνάρτησης μεταφοράς όπως αποδείξαμε σε προηγούμενο χωρείο, δηλαδή στην εξίσωση:

$$H(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} b$$

Η συμπεριφορά κάθε *port* μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$YV = I$$

ή

$$ZI = V$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Y περιέχει αγωγιμότητες, ο V τάσεις και ο I ρεύματα.

Στον πίνακα Y οι μόνες πηγές που επιτρέπονται στο κύκλωμα, είναι οι πηγές τάσης κατά μήκος των *ports*. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε κάποιες αντικαταστάσεις στις MNA εξισώσεις. Το $u_{in}(t)$ αλλάζει σε $u_p(t)$ που είναι το διάνυσμα των τάσεων στα *ports* και το $u_{out}(t)$ σε $i_p(t)$ που είναι το διάνυσμα των ρευμάτων.

Επιπλέον, οι έξοδοι μπορούν να υπολογισθούν από τις εισόδους και μπορεί να φανεί πως $B = -L$. Έτσι οι σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} Gx + C \frac{dx}{dt} &= Bu_p(t) \\ i_p(t) &= -B^T x \end{aligned}$$

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

και ο πίνακας αντιμετάθεσης

$$Y(s) = -B^T(G + sC)^{-1}B$$

Και για τον πίνακα Z αντίστοιχα παίρνουμε

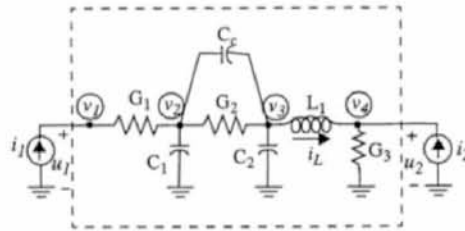
$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_p(t)$$

$$i_p(t) = B^T x$$

Έτσι

$$Z(s) = B^T(G + sC)^{-1}B$$

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο θα φανούν όλα πιο ξεκάθαρα. Έστω το παρακάτω κύκλωμα: Δημιουργούμε τους πίνακες G , C και B , ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι



Σχήμα 2.7: Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MN εξισώσεων

το x :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2) & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (C_1 + C_2) & -C_c & 0 & 0 \\ 0 & -G_c & (C_c + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -L_1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_4 \\ I_L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_p = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, I_p = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, L = B$$

2.4 Ορθοκανονική βάση

Ένα σύνολο διανυσμάτων, το οποίο είναι ταυτόχρονα γραμμικώς ανεξάρτητο αλλά και παράγει τον χώρο, ονομάζεται βάση του διανυσματικού χώρου.

Δύο διανύσματα θα λέμε πως είναι κάθετα μεταξύ τους όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Ορθογώνια βάση ενός διανυσματικού χώρου είναι μια βάση στην οποία κάθε διάνυσμά της είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα της βάσης.

Ορίζουμε λοιπόν ως Ορθοκανονική βάση ενός διανυσματικού χώρου μια ορθογώνια βάση, της οποίας κάθε διάνυσμα έχει μέτρο 1.

Από οποιαδήποτε βάση μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική, με κάποια διαδικασία ορθοκανονικοποίησης.

2.5 Υπόχωροι Krylov

Προκειμένου να δημιουργήσουμε μια βάση σε έναν πίνακα, χρησιμοποιούμε την ακολουθία *Krylov*. Όμως αυτή η ακολουθία δεν είναι ορθοκανονική. Για αυτό το λόγο υπάρχουν κατάλληλοι μέθοδοι οι οποίες κάνουν αυτές τις ακολουθίες ορθοκανονικές. Εμείς, στη δική μας υλοποίηση για τη δημιουργία υποχώρου *Krylov*, χρησιμοποιήσαμε την επαναληπτική μέθοδο *Arnoldi*, η οποία βασίζεται στην εξής σχέση:

$$\text{colsp}(R, AR, A^2, \dots, A^k R) = K_r(A, R, q)$$

όπου $k = \frac{q}{N}$ ο αριθμός των επαναλήψεων και N ο αριθμός των *I/O*.

Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν ενδεικτικό ψευδο-κώδικα με την υλοποίηση της *Arnoldi*.

Algorithm 1 Arnoldi Algorithm

```

1: procedure Arnoldi( $A, V, m$ )
2:  $q_1 = \frac{v}{\|v\|}$ ;
3:   for  $j = 0; j < m; j_{++}$  do
4:      $z = Aq_j$ ;
5:     for  $i = 0; i < j; i_{++}$  do
6:        $h_{i,j} = q_i^T z$ ;
7:        $z = z - h_{i,j}q_i$ ;
8:     end for
9:      $h_{j+1,j} = \|z\|$ ;
10:    if  $h_{j+1,j} == 0$  then
11:      quit;
12:    end if
13:     $q_{j+1} = \frac{z}{h_{j+1,j}}$ ;
14:  end for
15: end procedure

```

Έτσι έχουμε τη δημιουργία των πινάκων $Q_m \rightarrow n \times m$ και $H_m \rightarrow (m+1) \times m$. Από αυτούς τους δύο πίνακες βλέπουμε πως ισχύει η σχέση:

$$AQ_m = Q_{m+1}H_m \quad (2.31)$$

Όπου ο πίνακας Q_m είναι της μορφής

$$Q_m = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m] \quad (2.32)$$

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

και ο πίνακας H_m είναι της μορφής

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Οι μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (*MOR*) είναι τεχνικές οι οποίες αποσκοπούν στη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ή των μαθηματικών μοντέλων κατά τη διάρκεια κάποιας προσομοίωσης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα περιγράψουμε μια τέτοια μέθοδο αναλυτικά.

3.1 Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου SPRIM

Ένας από τους σημαντικότερους αλγορίθμους MOR είναι αυτός της SPRIM. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της SPRIM, είναι πως κατά την εφαρμογή της διατηρεί τη δομή του συστήματος. Οι πίνακες, όπως περιγράψαμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, αποτελούνται από υπό-πίνακες και οι πράξεις γίνονται στα υπό-μπλόκ του κάθε πίνακα.

Υλοποίηση της SPRIM

Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υλοποίησης του αλγορίθμου. Η υλοποίηση της SPRIM βασίζεται πάνω στην MN ανάλυση του συστήματος και πιο συγκεκριμένα όπως αυτή περιγράφεται στη σχέση (2.24). Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των βημάτων κατά την υλοποίηση της SPRIM.

Αρχικά δίνουμε σαν είσοδο τους εξής πίνακες:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3. Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Στη συνέχεια δημιουργούμε τους πίνακες A και R ως εξής:

$$A \equiv (G + sC)^{-1}C \quad (3.4)$$

$$R \equiv (G + sC)^{-1}B \quad (3.5)$$

Έπειτα, δημιουργούμε τον υπό-χώρο *Krylov* με όποια μέθοδο θέλουμε. Εμείς στην υλοποίησή μας χρησιμοποιήσαμε την *Arnoldi*.

$$\text{span}V_n = K_n(A, R) \quad (3.6)$$

όπου ελέγχουμε τον πίνακα από τα αριστερά προς τα δεξιά, διαγράφουμε τις γραμμικά εξαρτημένες στήλες του.

Αμέσως μετά, σπάμε τον πίνακα V_n σε block

$$V_n = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

και σε μορφή padding έχουμε

$$\tilde{V}_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

Μετά απ' όλα αυτά είμαστε έτοιμοι ώστε να υπολογίσουμε τους νέους μας πίνακες που έχουν δημιουργηθεί μετά την ελαχιστοποίηση. Έτσι έχουμε:

$$\tilde{G}_1 = V_1^T G_1 V_1 \quad (3.8)$$

$$\tilde{G}_2 = V_2^T G_2 V_2 \quad (3.9)$$

$$\tilde{C}_1 = V_1^T C_1 V_1 \quad (3.10)$$

$$\tilde{C}_2 = V_2^T C_2 V_2 \quad (3.11)$$

$$\tilde{B}_1 = V_1^T B_1 \quad (3.12)$$

και μέσω αυτών τους πίνακες:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2^T \\ -\tilde{G}_2^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\tilde{C}_n = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Τέλος, από τους νέους πίνακες υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τον εξής τρόπο:

$$\tilde{Z}_n(s) = \tilde{B}_n^T (\tilde{G}_n + s\tilde{C}_n)^{-1} \tilde{B}_n \quad (3.16)$$

Παρατηρήσεις

Μέσα από τη μελέτη της μεθόδου παρατηρήσαμε αρκετά πράγματα. Αλλά ας τα δούμε όλα με τη σειρά. Στην εξίσωση (3.3) παρατηρούμε πως $\underline{S}_2(t) = 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή οι πίνακες που δέχεται σαν όρισμα η *SPRIM* πρέπει να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, η αλλιώς *SPD*. Στην προσομοίωση κυκλωμάτων ένας πίνακας είναι *SPD* όταν δεν περιέχει πηγές τάσης και αυτεπαγωγές, δηλαδή στοιχεία της ομάδας 2.

Ακόμη παρατηρήσαμε το εξής:

$$\begin{aligned} \text{Έστω } G &= \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}. \\ V_n^T G V_n &= \\ \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2^T \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1 G_1 & V_1^T G_2^T \\ -V_2^T G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T G_1 V_1 & V_1^T G_2^T V_2 \\ -V_2^T G_2 V_1 & 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T G_1 V_1 & (V_2^T G_2 V_1)^T \\ -V_2^T G_2 V_1 & 0 \end{bmatrix} & \end{aligned} \quad (3.17)$$

Τώρα, αν στην (3.17) θέσουμε $\tilde{G}_1 = V_1^T G_1 V_1$ και $\tilde{G}_2 = V_2^T G_2 V_1$ προκύπτει η σχέση (3.13), δηλαδή:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2^T \\ -\tilde{G}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα για τους πίνακες $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ και $V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} V_n^T C V_n &= \\ \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

3. Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου

$$\begin{bmatrix} V_1^T C_1 & 0 \\ 0 & V_2^T C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T C_1 V_1 & 0 \\ 0 & V_2^T C_2 V_2 \end{bmatrix}$$

Τώρα, αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $\tilde{C}_1 = V_1^T C_1 V_1$ και $\tilde{C}_2 = V_2^T C_2 V_2$ προκύπτει η σχέση (3.14), δηλαδή:

$$\tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$$

Και τέλος για τους πίνακες $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $V_n = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} V_n^T B &= \\ \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} V_1^T B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

Τώρα, αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $\tilde{B}_1 = V_1^T B_1$ προκύπτει η σχέση (3.15), δηλαδή:

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης είδαμε πως, οι r μη-μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα U είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το ίδιο συμβαίνει και με τις r στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Ακόμη, η συμπεριφορά του κυκλώματος δεν αλλάζει. Παραμένει δηλαδή παθητική, όπως επίσης είναι απλό να γίνει η σύνθεση του νέου κυκλώματος.

Τέλος, ας θεωρήσουμε πως όλες οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος είναι ημιτονοειδείς διεγέρσεις της ίδιας συχνότητας. Για ένα γραμμικό σύστημα οι αποκρίσεις $\underline{u}(t)$, $\underline{V}(t)$ και $\underline{i}(t)$ θα είναι επίσης ημιτονοειδείς της ίδιας συχνότητας.

Ένα ημιτονοειδές σήμα πλάτους A , κυκλικής συχνότητας ω και φάσης ϕ γράφεται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\dot{S}(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = Ae^{j\phi} e^{j\omega t} = \dot{A}e^{j\omega t}, \quad (3.18)$$

όπου $\dot{A} \equiv Ae^{j\phi}$ ο παραστατικός μιγαδικός αριθμός (phasor) του σήματος $\dot{S}(t)$, ο οποίος ενσωματώνει την πληροφορία πλάτους και φάσης.

Σε αυτή τη μορφή, οι εξισώσεις των πινάκων των στοιχείων της ομάδας $G_1 \rightarrow (R, L, C)$ και της ομάδας $G_2 \rightarrow (V, L)$ γράφονται στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση ως:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{i}}_1 e^{j\omega t} &= G \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + C \dot{\underline{u}}_1 \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) + \dot{\underline{S}}_1 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{i}}_1 e^{j\omega t} &= G \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + j\omega C \dot{\underline{u}}_1 e^{j\omega t} + \dot{\underline{S}}_1 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{i}}_1 &= (G + j\omega C) \dot{\underline{u}}_1 + \dot{\underline{S}}_1\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{u}}_2 e^{j\omega t} &= L \dot{\underline{i}}_2 \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) + \dot{\underline{S}}_2 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{u}}_2 e^{j\omega t} &= j\omega L \dot{\underline{i}}_2 e^{j\omega t} + \dot{\underline{S}}_2 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \dot{\underline{u}}_2 &= j\omega L \dot{\underline{i}}_2 + \dot{\underline{S}}_2\end{aligned}\quad (3.20)$$

Από τις εξισώσεις τοπολογίας (KCL και KVL) στις σχέσεις (2.28) και (2.29) προκύπτει το μιγαδικό σύστημα MNA:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1(G + j\omega C)A_1^T & A_2 \\ -A_2^T & -j\omega L \end{bmatrix}}_{\tilde{G}(j\omega)} \begin{bmatrix} \dot{\underline{U}} \\ \dot{\underline{i}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \dot{\underline{S}}_1 \\ \dot{\underline{S}}_2 \end{bmatrix}\quad (3.21)$$

Όπου ο πίνακας $\tilde{G}(j\omega)$ εξαρτάται από τη συχνότητα $\omega = 2\pi f$.

Κεφάλαιο 4

Υλοποίηση της προσομοίωσης

4.1 Κατασκευή ενός προσομοιωτή

Κάθε προσομοίωση ξεκινά από το σημείο στο οποίο θα λάβουμε ένα αρχείο, το οποίο περιγράφει μέσα από έναν προκαθορισμένο τρόπο απεικόνισης κοινώς αποδεκτό μια συγκεκριμένη κυκλωματική συνδεσμολογία. Αυτή η μορφή απεικόνισης είναι όμοια για όλες σχεδόν τις εφαρμογές πάνω στην προσομοίωση κυκλωμάτων.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω το αρχείο το οποίο λαμβάνουμε έχει μια συγκεκριμένη μορφή. Κάθε στοιχείο έχει το δικό του προκαθορισμένο όνομα καθώς και μια συγκεκριμένη μορφή, από την οποία ορίζουμε τις διάφορες παραμέτρους του κάθε στοιχείου.

Αρχείο περιγραφής κυκλώματος

Όπως προαναφέραμε, το αρχικό στάδιο για τη δημιουργία ενός προσομοιωτή είναι το διάβασμα ενός αρχείου το οποίο περιγράφει το κύκλωμα. Αυτή την πληροφορία που διαβάζουμε από το αρχείο θα πρέπει να τη μεταφέρουμε στον προσομοιωτή μας. Για αυτό το λόγο διαβάζουμε το αρχείο γραμμή γραμμή και στη συνέχεια όλες τις παραμέτρους του κάθε στοιχείου.

Καθώς διαβάζουμε το αρχείο, πρέπει να αποθηκεύσουμε όλη αυτή την πληροφορία σε κάποια κατάλληλη δομή, ώστε να μη χρειάζεται να χρησιμοποιούμε συνεχώς το αρχείο σε ο,τι κάνουμε στη συνέχεια. Κάθε αρχείο περιέχει κόμβους, στους οποίους κάθε στοιχείο που περιέχεται συνδέεται με κάποιους από αυτούς. Όπως καταλαβαίνουμε λοιπόν μέσα και από τις γνώσεις μας στις δομές δεδομένων, μια από τις καλύτερες επιλογές πάνω σε δομή για το πρόβλημα μας, είναι η αποθήκευση σε πίνακα κατακερματισμού (*hashtable*), ώστε να μας βοηθήσει στην ευκολότερη τακτοποίηση των στοιχείων μας.

Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτής της δομής δεδομένων, είναι η γρηγορότερη αναζήτηση σε σχέση πάντα με τις άλλες.

MNA σύστημα του κυκλώματος

Έπειτα και αφού βεβαιωθούμε πως όλα πήγαν καλά με το διάβασμα του αρχείου και την αποθήκευση της πληροφορίας του στη δομή δεδομένων μας, έχουμε να κατασκευάσουμε το σύστημα MNA του κυκλώματος. Η διαδικασία αυτή έχει περιγραφεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 και σε αυτή τη φάση δε θα μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες.

Η βασική ιδέα είναι πως κάθε στοιχείο που διαβάζεται από το αρχείο και αποθηκεύεται στη δομή δεδομένων, ανήκει και σε μια συγκεκριμένη ομάδα στοιχείων που επηρεάζουν ανάλογα τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Αυτές οι ομάδες είναι δύο. Η ομάδα 1, η οποία περιέχει αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος και η ομάδα 2, η οποία περιέχει πηνία και πηγές τάσεις.

Αφού δημιουργήσουμε λοιπόν αυτές τις δύο ομάδες στοιχείων, χρησιμοποιούμε τους νόμους του *kirchhoff* και με τη βοήθεια αυτών καταλήγουμε στο MNA σύστημα του κυκλώματος μας. Τα βήματα κατασκευής του MNA συστήματος είναι ακριβώς ίδια με αυτά που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2.

Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Αφού μοντελοποιήσουμε λοιπόν το κύκλωμα που μας δόθηκε από το αρχικό αρχείο, και βγάλουμε το MNA σύστημα του κυκλώματος, είμαστε σε θέση πλέον να χρησιμοποιήσουμε κάποια μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου προκειμένου να απλοποιήσουμε αυτό το σύστημα και εν συνεχεία να λυθεί το κύκλωμα πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η μέθοδος MOR που μελετήθηκε αλλά και υλοποιήθηκε είναι η SPRIM. Ο αλγόριθμος της περιγράφηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.

Η SPRIM θα λάβει ως αρχικό όρισμα τους πίνακες C , G και B όπου ο ορισμός αυτών έχει δοθεί στο κεφάλαιο 2. Έπειτα έχοντας αυτές τις εισόδους, εφαρμόζεται αναλυτικά ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3 προκειμένου να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, μέσα από τη δημιουργία δηλαδή της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος και της συνάρτησης μεταφοράς που προκύπτει μετά τη χρήση της SPRIM να λάβουμε τα συμπεράσματα που θέλουμε.

Εδώ θα ήταν καταλυτικό να αναφέρουμε πως οι πίνακες μας θα πρέπει να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι (SPD), επομένως μέσα από κατάλληλη διαδικασία στο αρχικό διάβασμα του αρχείου φροντίσαμε να αφαιρέσουμε τις πηγές τάσης και να τις αντικαταστήσουμε ανάλογα, ώστε να προκύπτει ισοδύναμο κύκλωμα με αυτό που μας δόθηκε στην αρχή και χωρίς τη χρήση αυτών.

Επίσης, θα θέλαμε να αναφέρουμε πως για τη δημιουργία υπό-χώρων *Krylov*, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος *Arnoldi*, της οποίας ο αλγόριθμος παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

Τέλος, ο αλγόριθμος της *SPRIM*, αναφέρει πως μετά τη δημιουργία υπό-χώρου *Krylov* έχουμε να διαβάσουμε το αποτέλεσμα του πίνακα από τα αριστερά προς τα δεξιά και να διαγράψουμε κάθε στήλη η οποία είναι γραμμικά εξαρτημένη. Αυτό εμείς το πετύχαμε εφαρμόζοντας παραγοντοποίηση *LU*. Βλέποντας μετά την παραγοντοποίηση που υπάρχει μηδενικό οδηγό στοιχείο, συμπεράναμε πως και η αντίστοιχη στήλη είναι γραμμικώς εξαρτημένη, οπότε πηγαίνοντας στον αρχικό μας πίνακα διαγράψαμε την αντίστοιχη στήλη.

Επιπρόσθετες παρατηρήσεις

Από τη νέα αυτή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να δημιουργηθεί ένα νέο ισοδύναμο κύκλωμα για το οποίο όμως απαιτούνται πολύ λιγότερες απαιτήσεις προκειμένου να λυθεί. Με βάση τις κουβέντες που κάναμε και στην αρχή της εργασίας είναι προφανές πως αναφερόμαστε σε γρηγορότερη λύση του συστήματος, αλλά και σε λιγότερες απαιτήσεις μνήμης. Είναι απολύτως βέβαιο πως το νέο συρρικνωμένο σύστημα θα χρειάζεται λιγότερη χρήση μνήμης, αλλά ακόμη θα λύνεται και γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό.

Κεφάλαιο 5

Εκτίμηση της λύσης

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιάσουμε το τρόπο υλοποίησης της λύσης μας, καθώς και ορισμένα ενδεικτικά αποτελέσματα που αντλήσαμε από κάποια πειραματικά αρχεία περιγραφής κυκλωμάτων της *IBM* αλλά και του εργαστηρίου ηλεκτρονικής του τμήματος.

5.1 Ανάλυση υλοποίησης

Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας εκτός από τη μελέτη των μεθόδων *MOR* και των υπό-χώρων *Krylov* υλοποιήσαμε και τις αντίστοιχες μεθόδους. Υλοποιήσαμε λοιπόν τις μεθόδους της διπλωματικής μας στη γλώσσα προγραμματισμού *C*.

Πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο *MOR* που μελετήσαμε και υλοποιήσαμε, την *SPRIM*, για τη δημιουργία υπό-χώρων *Krylov* χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο *Arnoldi*. Επιπλέον υλοποιήθηκαν μέθοδοι αντιστροφής των πινάκων. Όλες οι μέθοδοι προγραμματίστηκαν σε *C* και επαληθεύτηκαν από το *MATLAB*.

Έτσι λοιπόν προγραμματίζοντας όλα τα παραπάνω ήμασταν σε θέση να πραγματοποιήσουμε προσομοιώσεις ώστε να διαπιστώσουμε και στην πράξη τις δυνατότητες που μας παρέχει ένας αλγόριθμος *MOR*, δηλαδή κατά κύριο λόγο πόση μείωση θα πάρουμε στα διάφορα κυκλώματα μετά τη χρήση του αλγορίθμου.

Ξέρουμε πως ισχύει $s = 2\pi f$. Επομένως θα πρέπει να γίνει κάποια κατάλληλη επιλογή συχνότητας ώστε να γίνει η δημιουργία των πινάκων (πχ $G+sC$). Επίσης θα πρέπει να ορίσουμε και με κατάλληλο τρόπο τον αριθμό των επαναλήψεων που θα κάνει η μέθοδος *Arnoldi* προκειμένου να δημιουργηθεί ο υπό-χώρος *Krylov*. Έτσι λοιπόν ο αριθμός των επαναλήψεων της *Arnoldi* υπολογίζεται από τη σχέση, $n = \lceil \frac{q}{N} \rceil$, ανάλογα με το αν το $\frac{q}{N}$ είναι ακέραιος ή όχι.

Ας υποθέσουμε πως το μέγεθος του πίνακα *C* και *G* είναι $size \times size$ και το μέγεθος του πίνακα *B* είναι $size \times size_B$.

Η δημιουργία των νέων πινάκων θα δώσει πίνακες με τις εξής διαστάσεις:

$$\begin{aligned}
 A &\longrightarrow (size \times size) \times (size \times size) \rightarrow size \times size \\
 R &\longrightarrow (size \times size) \times (size \times size_B) \rightarrow size \times size_B \\
 \tilde{G} &\longrightarrow new_size \times new_size \\
 \tilde{C} &\longrightarrow new_size \times new_size \\
 \tilde{B} &\longrightarrow new_size \times size_B
 \end{aligned}$$

και τελικά θα λάβουμε συνάρτηση μεταφοράς που θα είναι της παρακάτω διάστασης:

$$\begin{aligned}
 Z &= \tilde{B}^T (\tilde{G} + s\tilde{C})^{-1} \tilde{B} \\
 Z &\longrightarrow (size_B \times new_size) \times (new_size \times new_size) \times (new_size \times size_B) \\
 Z &\longrightarrow (size_B \times size_B) \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Κάνοντας αντίστοιχη διαδικασία και για τη διάσταση της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος έχουμε:

$$\begin{aligned}
 Z &= B^T (G + sC)^{-1} B \\
 Z &\longrightarrow (size_B \times size) \times (size \times size) \times (size \times size_B) \\
 Z &\longrightarrow (size_B \times size_B) \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις (5.1) και (5.2) βλέπουμε πως η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού, αλλά και του ελαττωμένου κυκλώματος που προέκυψε από τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου, έχουν την ίδια διάσταση.

Ακόμη θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε πως η φυσική σημασία του *size* είναι ουσιαστικά ο αριθμός των *states* (δηλαδή *nodevoltages*) και αυτός του *size_B* ο αριθμός των *I/O ports*.

5.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης

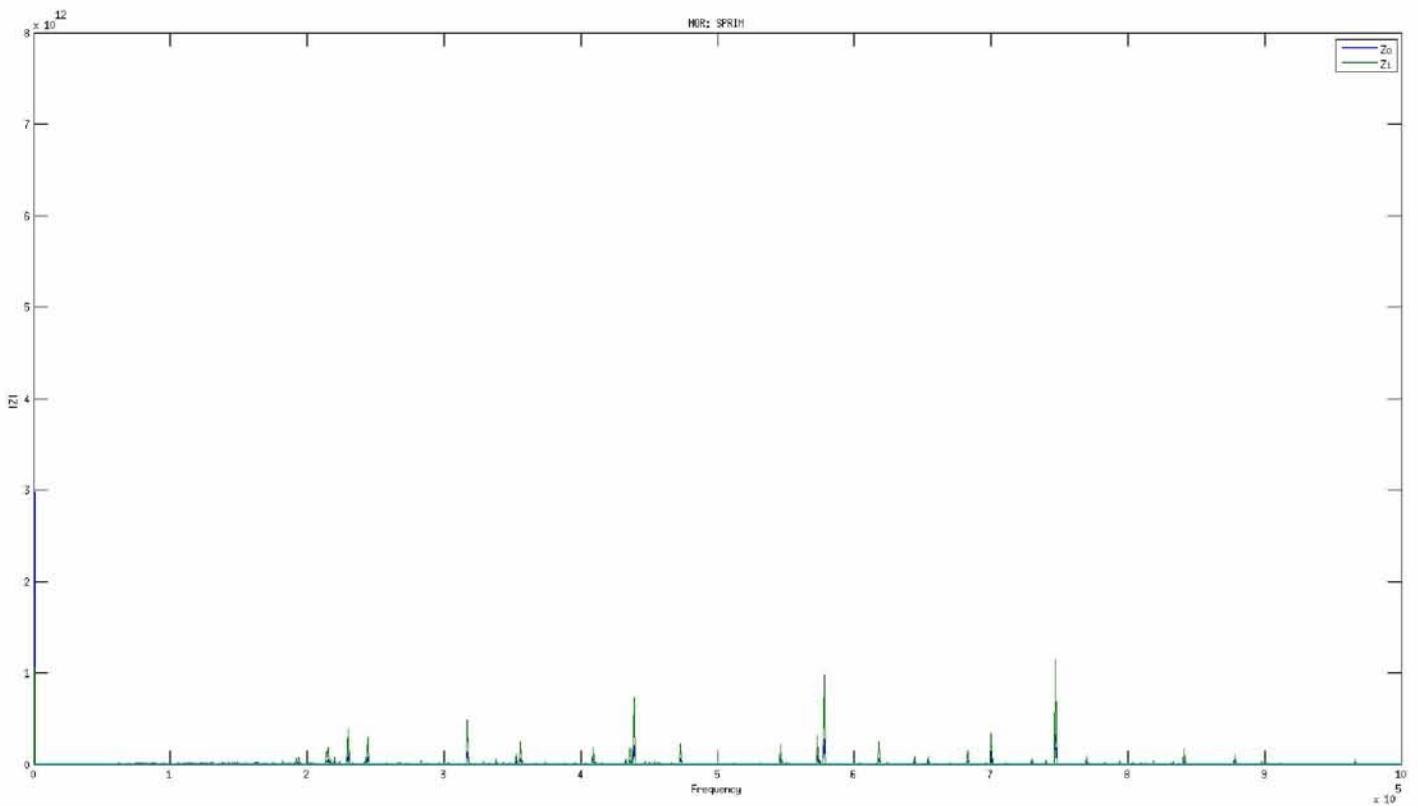
Για να ελέγξουμε την ορθότητα της λύσης μας, χρειάστηκε να κάνουμε προσομοιώσεις. Αρχικά σε κυκλώματα μικρού μεγέθους ώστε να μας είναι ευκολότερο να αντλήσουμε συμπεράσματα ως προς την ορθότητα της λύσης μας και στη συνέχεια προσομοιώσαμε κυκλώματα μεγάλου μεγέθους για πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα και εκτίμηση της υλοποίησης μας.

Στον πίνακα 5.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ενός ενδεικτικού κυκλώματος που χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο της υλοποίησής μας. Επίσης οι πίνακες *C* και *G* είναι διάστασης 1882×1882 .

Name	Αριθμός θυρών	Αριθμός κόμβων	Αριθμός inductive branches
ibmpg	5	1161	721

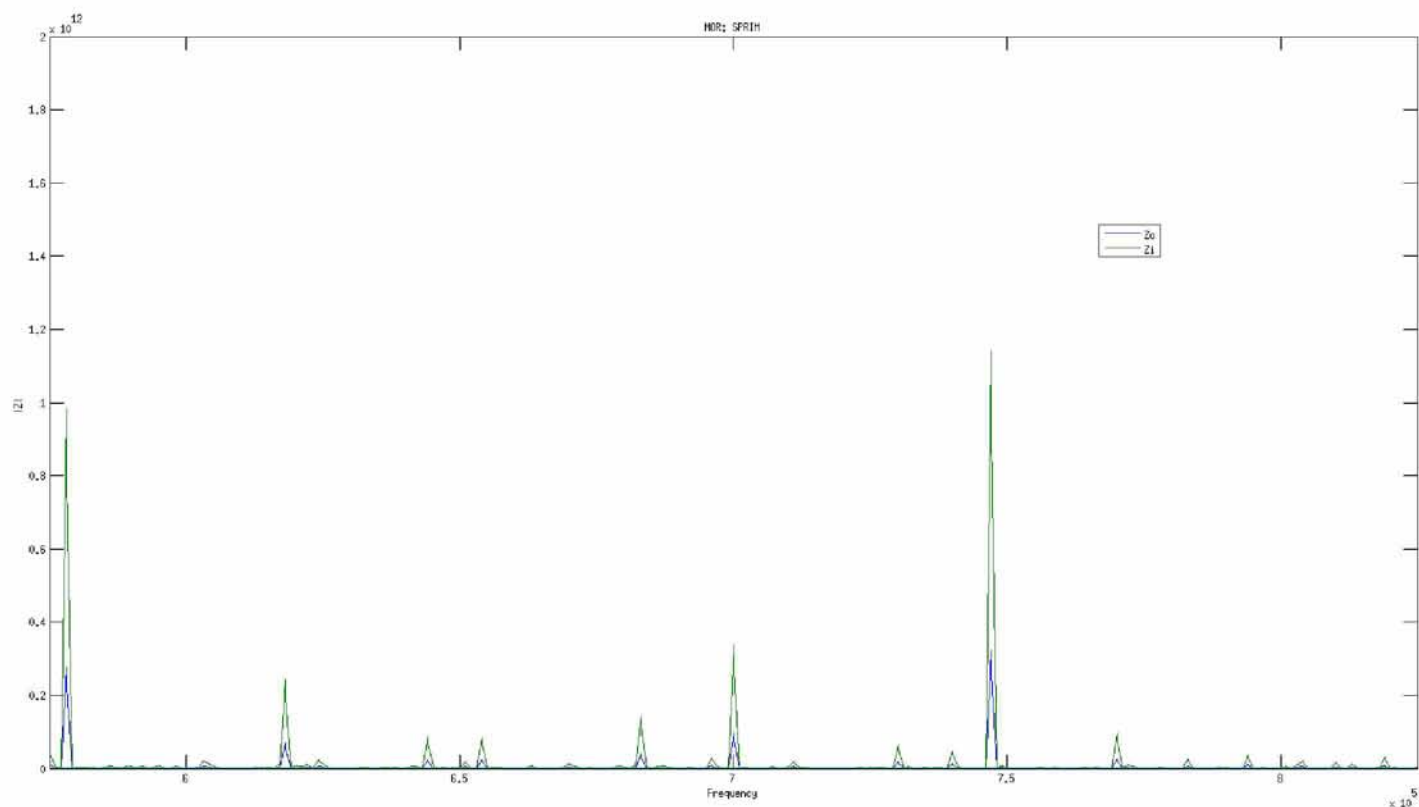
Πίνακας 5.1: Ενδεικτικό benchmark

Παρακάτω παραθέτουμε μια ενδεικτική κυματομορφή της απόκρισης συχνότητας, δηλαδή της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος και του ελαττωμένου μοντέλου ως προς τη συχνότητα.



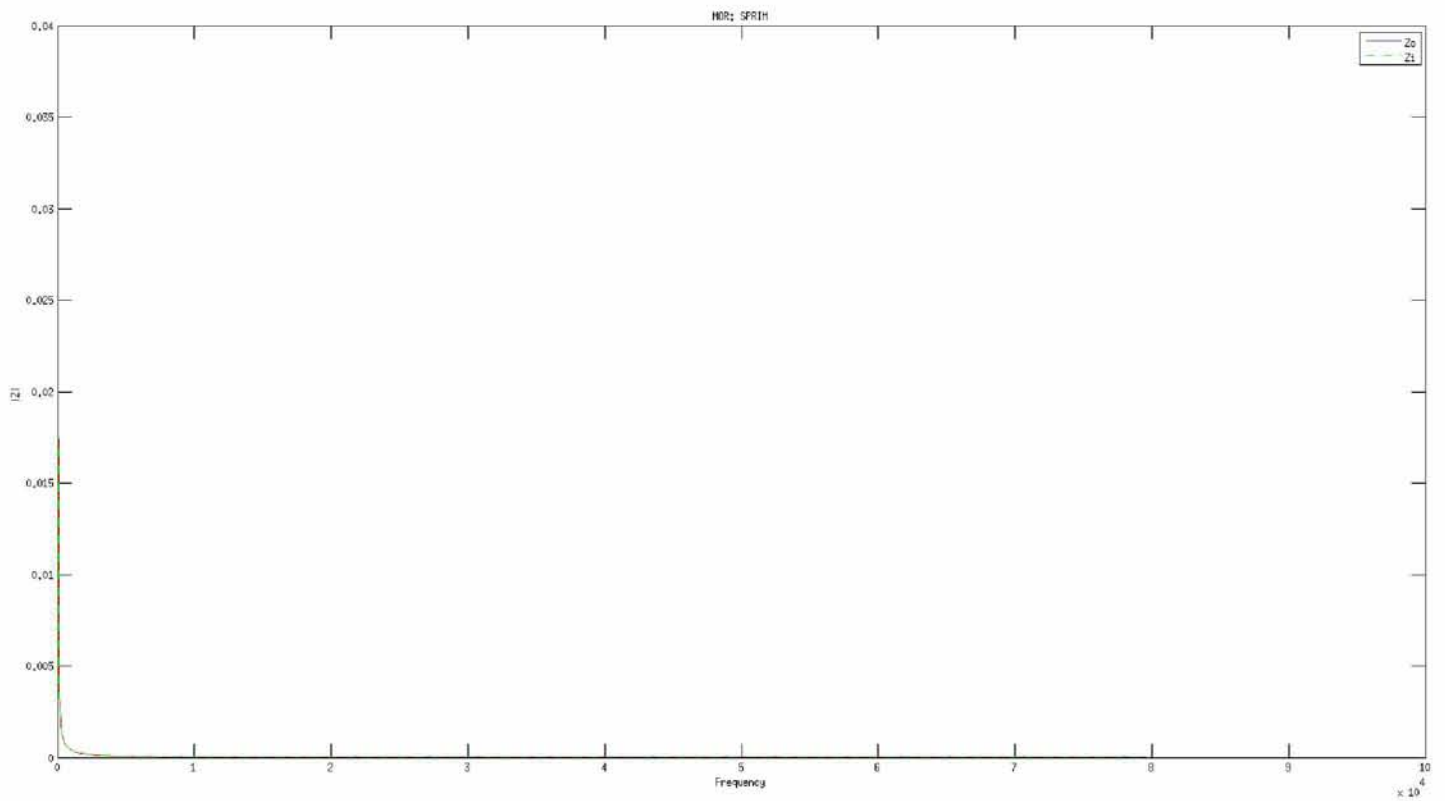
Σχήμα 5.1: Ενδεικτική μορφή απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα

5. Εκτίμηση της λύσης



Σχήμα 5.2: Ενδεικτική μορφή απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα με παραπάνω ακρίβεια

5.2. Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης



Σχήμα 5.3: Ένα ακόμη παράδειγμα ενδεικτικής μορφής απόκρισης εισόδου και εξόδου ως προς τη συχνότητα

5.3 Παρατηρήσεις

Μέσα από τα πειράματα που τρέξαμε παρατηρήσαμε πως η συνάρτηση μεταφοράς που αρχικού κυκλώματος και του μετέπειτα ελαττωμένου κυκλώματος συμπίπτουν. Αυτό βέβαια, μέσα από τη μελέτη που έχουμε κάνει καταλαβαίνουμε πως είναι απόλυτα λογικό και σωστό, επειδή η συμπεριφορά του νέου ελαττωμένου κυκλώματος πρέπει να είναι η ίδια ή αρκετά όμοια με τη συμπεριφορά του αρχικού μας κυκλώματος.

Οι κώδικες για την ανάγκη της παρούσας διπλωματικής εργασίας, όπως αναφέραμε ξανά, γράφτηκαν στην γλώσσα προγραμματισμού *C*, ενώ οι προσομοιώσεις έγιναν πάνω σε σύστημα που είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

OS Version	Linux 3.16.2 – 201.fc20.x86_64
KDE SC Version	4.14.7
PROCESSOR	Intel(R) Core(TM) i7 – 3770 CPU @ 3.40GHz
PROCESSOR Max Speed	3900
Total Physical memory	7.68 GiG
Compiler	gcc version 4.8.320140911 (Red Hat 4.8.3 – 7) (GCC)

Πίνακας 5.2: Χαρακτηριστικά του συστήματός μας

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Μέσα από την παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε σε βάθος μια από τις πλέον σύγχρονες, αλλά ταυτόχρονα και πολλά υποσχόμενες τεχνικές που απασχολούν την έρευνα αλλά και τη βιομηχανία τη σημερινή εποχή. Γενικότερα, εστιάσαμε στο τι είναι μια προσομοίωση, τι χρειάζεται για να γίνει και πως γίνεται να μοντελοποιηθεί ένα κύκλωμα που δίνεται μέσα από ένα αρχείο περιγραφής κυκλώματος, αλλά ο βασικότερος σκοπός μας κυμάνθηκε στον τρόπο με τον οποίο μπορούν αυτά τα κυκλώματα να λυθούν γρηγορότερα και με τη χρήση όσο δυνατόν γίνεται λιγότερων πόρων του συστήματος.

Μέσα από τη μελέτη που έγινε πάνω στο *MOR* και συγκεκριμένα στον αλγόριθμο *SPRIM* καταφέραμε να μειώσουμε αρκετά τη χρήση των πόρων του συστήματος, δηλαδή τη χρήση μνήμης που απαιτούνταν για την αρχική μας προσομοίωση σε σχέση με τη νέα, αλλά και της επεξεργαστικής ισχύος αφού το νέο σύστημα που καλούμασταν να λύσουμε είναι αρκετά πιο απλό σε σχέση με το αρχικό.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, δεν ασχοληθήκαμε με τη λύση του μετέπειτα απλοποιημένου συστήματος, παρά μόνο με τη δημιουργία ενός νέου ισοδύναμου και ταυτόχρονα ελαχιστοποιημένου μοντέλου, το οποίο θα λυνόταν με τον ίδιο τρόπο με το αρχικό, αλλά η ταχύτητα και οι πόροι που συστήματος του νέου σε σχέση με το αρχικό θα ήταν αρκετά μικρότερα.

6.1 Μελλοντικές προεκτάσεις

Πιθανές προεκτάσεις στην παρούσα εργασία θα μπορούσαν να 'ναι:

- Ολοκλήρωση του συστήματος έτσι ώστε να δημιουργήσουμε ένα νέο αρχείο περιγραφής κυκλώματος και λύση αυτού του νέου κυκλώματος.
- Μελέτη της ακρίβειας των δύο λύσεων, του αρχικού και του νέου κυκλώματος.
- Ίσως κάποια παραλληλοποίηση ορισμένων σταδίων της υλοποίησης προκειμένου να έχουμε και από εκεί γρηγορότερα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Schilders, Wilhelmus HA, Henk A. Van der Vorst, and Joost Rommes. Model order reduction: theory, research aspects and applications. Vol. 13. Berlin, Germany:: Springer, 2008. APA
- [2] Celik, Mustafa, Lawrence Pileggi, and Altan Odabasioglu. IC interconnect analysis. Springer Science and Business Media, 2002.
- [3] Antoulas, Athanasios C. Approximation of large-scale dynamical systems. Vol. 6. Siam, 2005.
- [4] Tan, Sheldon, and Lei He. Advanced model order reduction techniques in VLSI design. Cambridge University Press, 2007.
- [5] Najm, Farid N. Circuit simulation. John Wiley and Sons, 2010.
- [6] Davis, Timothy A. Direct methods for sparse linear systems. Vol. 2. Siam, 2006.
- [7] Θεοδωρίδης, Σ., Κ. Μπερμπερίδης, and Α. Κοφίδης. "Εισαγωγή στη θεωρία σημάτων και συστημάτων." Αθήνα: Τυπωθήτω-Εκδόσεις Γιώργου Δαρδανού (2003).
- [8] Strang, Gilbert. Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (απόδοση στα ελληνικά: Π.Παμφίλος). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1995).
- [9] Freund, Roland W. "SPRIM: structure-preserving reduced-order interconnect macromodeling." Proceedings of the 2004 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design. IEEE Computer Society, 2004.
- [10] Benner, Peter, Lihong Feng, and Evgenii B. Rudnyi. "Using the superposition property for model reduction of linear systems with a large number of inputs." Proceedings of the 18th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. 2008.
- [11] Feldmann, Peter, and Frank Liu. "Sparse and efficient reduced order modeling of linear subcircuits with large number of terminals." Computer Aided Design, 2004. ICCAD-2004. IEEE/ACM International Conference on. IEEE, 2004.
- [12] Silva, João, and L. Miguel Silveira. "On the effectiveness of reducing large linear networks with many ports." Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. IEEE International Symposium on. IEEE, 2007.

- [13] Feldmann, Peter. "Model order reduction techniques for linear systems with large numbers of terminals." Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe-Volume 2. IEEE Computer Society, 2004.
- [14] Li, Peng, and Weiping Shi. "Model order reduction of linear networks with massive ports via frequency-dependent port packing." Proceedings of the 43rd annual Design Automation Conference. ACM, 2006.
- [15] Elfadel, Ibrahim M., and David D. Ling. "A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport RLC networks." Proceedings of the 1997 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design. IEEE Computer Society, 1997.
- [16] IBM Power Grid Benchmarks