

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
«Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΕ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ »

ΤΗΣ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ ΣΑΛΑΒΑΣΙΑΗ ΔΗΜΗΤΡΑΣ

A.M.: 0110105

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ

ΒΟΛΟΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2013-2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ ΣΑΛΑΒΑΣΙΛΗ
ΔΗΜΗΤΡΑΣ

ΘΕΜΑ

«Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΕ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ »

ΒΟΛΟΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2013-2014

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελ.
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	6
 ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^Ο	
1. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	
1.1 Βασικοί ορισμοί πιθανοτήτων.....	7
1.2 Ορισμός πιθανότητας.....	9
1.3 Ιστορική αναδρομή της θεωρίας των πιθανοτήτων.....	10
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^Ο	
2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	
2.1 Σκοπός της έρευνας.....	12
2.2 Σύνδεση στόχων του αναλυτικού προγράμματος πιλοτικών σχολείων με τους στόχους της έρευνας.....	12
2.3 Ερευνητικά ερωτήματα.....	14
2.4 Θεωρητικό πλαίσιο έρευνας- προηγούμενες έρευνες-δυσκολίες μαθητών.....	15
2.5 Ανάλυση ερευνητικού σχεδιασμού-μεθοδολογία.....	16
2.6 Ανάδειξη πεδίου έρευνας και παρουσίαση των συμμετεχόντων της.....	17
2.7 Τεκμηρίωση της υιοθέτησης των συγκεκριμένων μεθόδων έρευνας.....	17
2.8 Ανάλυση των τεχνικών συλλογής ερευνητικών δεδομένων.....	18
2.8.1 Ορισμός ερωτηματολογίων.....	18
2.8.2 Τύποι και μορφές ερωτηματολογίων.....	18
2.8.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ερωτηματολογίων.....	19
2.9 Παρουσίαση-Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων-αποτελεσμάτων της έρευνας.....	21
2.10 Παρουσίαση αποτελεσμάτων - Αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με άλλες έρευνες.....	51

	Σελ.
Βιβλιογραφία.....	53
Παράρτημα- ερωτηματολόγιο.....	56

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία θεωρητική καταγραφή των στοιχείων που συνθέτουν την έννοια της πιθανότητας στα Μαθηματικά και τις αμφίδρομες δυσκολίες τόσο κατά την διδασκαλία τους όσο και κατά την εκμάθησή τους. Παράλληλα όμως διερευνώνται οι αντιληπτικές διεργασίες των παιδιών του Δημοτικού σχολείου σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του ενδεχομένου, του πειράματος τύχης ή του αιτιοκρατικού πειράματος, του δειγματικού χώρου, του βέβαιου και του αδύνατου ενδεχόμενου.

Οι βασικές πιθανοθεωρητικές έννοιες φαίνονται άρρηκτα συνδεδεμένες με την καθημερινή μας ζωή, με παραδείγματα τις προβλέψεις που κάνουμε για τον καιρό ή για το αποτέλεσμα ενός ποδοσφαιρικού αγώνα. Αλλά και τα παιδιά του δημοτικού σχολείου προβληματίζονται με έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων, ενώ παράλληλα προσπαθούν να ερμηνεύσουν ή να προβλέψουν διάφορα αποτελέσματα, όπως τί πιθανότητα υπάρχει να βγάλουν μία κόκκινη μπάλα από έναν σάκο με μισές κόκκινες και μισές πράσινες μπάλες.

Οι προβληματισμοί συνεχίζονται και στη διδακτική των πιθανοτήτων καθώς οι εκπαιδευτικοί έρχονται αντιμέτωποι με τις προκαταλήψεις των παιδιών σχετικά με ορισμένα ενδεχόμενα. Έτσι, εκείνα επηρεασμένα από την καθημερινή τους ζωή δίνουν δικές τους ερμηνείες προσαρμοσμένες στις προτιμήσεις τους. Ακόμη, αποτελεί γεγονός ότι η λεκτική διατύπωση από τους δασκάλους κάποιες φορές κάνει μη κατανοητά τα προβλήματα πιθανοτήτων και αυτό φαίνεται ως ένα σημείο κρίσιμο για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας τους.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κατά το ακαδημαϊκό έτος 2013-2014.

Το έναυσμα για την υλοποίησή της προήλθε από το ενδιαφέρον μου για τον τομέα της κατανόησης των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και ειδικότερα των πιθανοτήτων, ο οποίος αποτελεί ένα κλάδο που συμπεριλαμβάνεται στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το Δημοτικό σχολείο, ωστόσο συχνά παραγκωνίζεται λόγω έλλειψης διδακτικού χρόνου. Σε αυτή την απόφαση με βοήθησε ο επιβλέπωντας καθηγητής μου που με καθοδήγησε όχι μόνο στην πρωτοτυπία του θέματος αλλά και στην λειτουργικότητά του.

Έτσι, σε συνεργασία μαζί του καταλήξαμε στη συγκεκριμενοποίηση της θεματολογίας και στην επίσημη ανάληψη της πτυχιακής μου εργασίας, με αντικείμενο την κατανόηση της έννοιας των πιθανοτήτων στο Δημοτικό σχολείο.

Η φιλοσοφία για την διερεύνηση τους συγκεκριμένου θέματος αποτελεί συνδυασμό της ανάγκης για περαιτέρω γνώση σχετικά με την κατανόηση των πιθανοτήτων από παιδιά δημοτικού και της προσωπικής μου επιθυμίας να ασχοληθώ με ένα θέμα που τυγχάνει καινούριο για τα δεδομένα του ελληνικού σχολείου.

Η εργασία αποτελείται από δύο επιμέρους τμήματα: 1^ο) Θεωρητικό, όπου πραγματοποιείται μία λεπτομερής καταγραφή του θέματος και 2^ο) Πρακτικό, όπου περιλαμβάνεται η καταγραφή των απόψεων των μαθητών Δημοτικού για τις πιθανοθεωρητικές έννοιες.

Η δομή αυτή αποφασίστηκε και επιλέχθηκε με σκοπό την διεξαγωγή μίας ορθολογικής ανάπτυξης του θεματικού αντικειμένου της εργασίας, καθώς και την δημιουργία κειμένου με επικοινωνιακή, αμφίδρομη σχέση ώστε να είναι δυνατή η διεξαγωγή χρηστικών και κατανοητών συμπερασμάτων.

Μέρος πρώτο

Κεφάλαιο 1^ο

1.Πιθανότητες

1.1 Βασικοί ορισμοί πιθανοτήτων

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι βασικές πιθανοθεωρητικές έννοιες όπως είναι εκείνες του πειράματος τύχης, του δειγματοχώρου, του γεγονότος και της πιθανότητας. Ακολουθούν ο κλασσικός και ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

Πείραμα ονομάζουμε διαισθητικά την περιγραφή μίας ενέργειας που εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες, η οποία μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες πάντοτε συνθήκες όσες φορές θελήσουμε και μετά την συμπλήρωση αυτής να παρατηρηθούν κάποια αποτελέσματα (Γεωργίου Ρούσσα, 1998). Κάθε πείραμα παράγει ακριβώς ένα από μερικά δυνατά αποτελέσματα. Δεν υπάρχει περιορισμός στο τί αποτελεί ένα πείραμα, ωστόσο είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στη διαμόρφωση ενός μοντέλου πιθανότητας, υπάρχει μόνο ένα πείραμα. Άρα, τέσσερις ρίψεις ενός νομίσματος θεωρούνται ένα πείραμα και όχι τέσσερα πειράματα (Δημητρίου Π. Μπερτσικά, Γιάννη Ν. Τσιτσικλή, 2010).

Παρατηρούνται δύο κατηγορίες πειραμάτων με κριτήριο διαχωρισμού την επιρροή των συνθηκών στην ενέργεια. Η πρώτη κατηγορία, **τα αιτιοκρατικά**, είναι τα πειράματα εκείνα όπου η γνώση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες εκτελούνται, καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, το θερμαινόμενο αποσταγμένο νερό σε επιφάνεια θάλασσας στους 100^ο Κελσίου θα βράσει. Αντίθετα, **τα πειράματα τύχης ή τα τυχαία πειράματα** είναι εκείνα όπου η γνώση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες εκτελούνται, απλώς καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα (Γεωργίου Ρούσσα, 1998). Πιο συγκεκριμένα, «ένα πείραμα τύχης είναι κάθε διαδικασία που μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερα από ένα αποτελέσματα με αβεβαιότητα για το ποιο θα πραγματοποιηθεί. Ένα πείραμα τύχης, θεωρητικά, μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες

συνθήκες απεριόριστες φορές. Κάθε μια από τις επαναλήψεις αυτές ονομάζεται **δοκιμή**.»¹

Σύμφωνα με τον Athanasios Papoulis, υπάρχει διπλή σημασία των επαναλαμβανόμενων πειραμάτων τύχης. Ο ίδιος διακρίνει δύο ερμηνείες και φέρνει σαν παράδειγμα την ρίψη ενός νομίσματος. Η πρώτη, η οποία αποτελεί τη φυσική ερμηνεία, ισχυρίζεται ότι μία δοκιμή αποτελεί την ρίψη του νομίσματος μία φορά, ενώ η δεύτερη ως εννοιολογική ερμηνεία εκλαμβάνει τη δοκιμή ως την ρίψη του νομίσματος n φορές.

Η θεωρία των πιθανοτήτων κάνει εκτεταμένη χρήση συνόλων και μαθηματικών πράξεων συνόλων και επομένως υπάρχει επιτακτική ανάγκη για τον προσδιορισμό του. «**Σύνολο** είναι μία συλλογή αντικειμένων, τα οποία είναι στοιχεία του συνόλου».² Ένα **μοντέλο πιθανότητας** είναι μία μαθηματική περιγραφή μίας αβέβαιης κατάστασης. Τα μοντέλα πιθανοτήτων πρέπει να είναι σύμφωνα με ένα θεμελιώδες πλαίσιο, το οποίο συγκροτείται από δύο βασικά χαρακτηριστικά: «Ο **δειγματικός χώρος** Ω , ο οποίος είναι το σύνολο των δυνατών **αποτελεσμάτων** ενός πειράματος. Ο νόμος της πιθανότητας, ο οποίος αναθέτει σε ένα σύνολο A δυνατών αποτελεσμάτων (επίσης ονομαζόμενο γεγονός) ένα μη αρνητικό αριθμό $P(A)$ (ονομαζόμενο **πιθανότητα** του A) ο οποίος κωδικοποιεί τη γνώση

¹ Βλ. «Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα) –Νέο Πρόγραμμα Σπουδών», στο <http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20E2%80%94%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf>, πρόσβαση 1/12/13

² Βλ. Δημήτρη Π. Μπερτσεκάς, Γιάννη Ν. Τσιτσικλής «Εισαγωγή στις Πιθανότητες», εκδ. Τζιόλα, Αθήνα, 2010, σελ. 6-7

μας ή τα πιστεύω μας για τη συλλογική «πιθανοφάνεια» των στοιχείων του A.»³ Κάθε στοιχείο του δειγματοχώρου αποκαλείται δειγματοσημείο. (Γεωργίου Γρ. Ρούσσα,1998). «Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου, δηλαδή, μία συλλογή δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται γεγονός ή ενδεχόμενο.»⁴

1.2 Ορισμός πιθανότητας

Το 1900 ο D.Hilbert παρουσίασε την ανάγκη για μια αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων με μαθηματική αυστηρότητα τοποθετώντας την στον κατάλογο με τα σπουδαία άλυτα προβλήματα (Πολυχρόνης Μωυσιάδης, 2012). Από τότε ακολούθησαν διάφορες απόπειρες ορισμού της πιθανότητας μέχρι που τελικώς κατέληξαν στον ισχύοντα ορισμό.

Ο A.N. Kolmogorov το 1933 δημοσίευσε την σημερινά αποδεκτή **αξιωματική θεμελίωση**, η οποία όχι μόνο φάνηκε απλή και ικανοποιητική όσον αφορά την μαθηματική αυστηρότητα, αλλά έβαλε και τα θεμέλια για τις εφαρμογές της θεωρίας των πιθανοτήτων. «Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν: $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$. Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε την πιθανότητα (ω_i) . Ως πιθανότητα $P(A_i)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$, ορίζουμε το άθροισμα, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.»⁵ Ο ορισμός αυτός, ο οποίος είναι ο καθιερωμένος, δεν περιλαμβάνει περιπτώσεις κβαντικής μηχανικής, στατιστικής μηχανικής, στατιστικής Bayer κ.λ.π., διότι αντιμετωπίζει το εύρος των τιμών μίας

^{3,4} Βλ. Δημήτρη Π. Μπερτσέκας, Γιάννη Ν. Τσιτσικλής «Εισαγωγή στις Πιθανότητες», εκδ. Τζιόλα, Αθήνα, 2010, σελ. 6-7

⁵ Βλ. Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας, στο <http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A100/490/3186,12917/>, πρόσβαση 26/2/14

πιθανότητας μόνο στο διάστημα $[0,1]$ (Πολυχρόνης Μωησιάδης, 2012).

Ο **κλασσικός ορισμός** της πιθανότητας έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια και φαίνεται απλούστερος από τον αξιωματικό ορισμό. Μία εκ των δύο προϋποθέσεων του είναι το υπό μελέτη πείραμα να καταλήγει σε πεπερασμένο πλήθος αποτελεσμάτων, ενώ η δεύτερη καθορίζει πως τα απλά γεγονότα πρέπει να είναι ισοπίθανα, να έχουν δηλαδή ακριβώς την ίδια πιθανότητα να συμβούν (Γεωργίου Γρ. Ρούσσα). Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα ενός γεγονότος A ορίζεται ως εξής: $P(A) = (\text{αριθμός των δειγματοσημείων στα } A) / (\text{πλήθος δειγματοσημείων του } \Omega)$.

1.3 Ιστορική αναδρομή της θεωρίας των πιθανοτήτων

Η θεωρία των πιθανοτήτων δεν είναι κάτι καινούριο, καθώς έχει τις ρίζες της στα τυχερά παιχνίδια της αρχαιότητας στην Ελλάδα και στη Ρώμη. Δεν υπάρχει ωστόσο επιστημονική ανάπτυξη, καθώς το αριθμητικό σύστημα δεν διευκόλυνε τις πράξεις, μέχρις ότου το αραβικό σύστημα λειτούργησε επικουρικά στην εξέλιξη της θεωρίας των πιθανοτήτων. Αργότερα, βρέθηκε πρόσφορο έδαφος για αυτήν κατά τον δεύτερο μισό της πρώτης χιλιετίας όπως και στην Αναγέννηση.

Κατά τον 16^ο αιώνα, ο Girolamo Cardano, ένας αμφιλεγόμενος ιταλός μαθηματικός, δημοσίευσε σωστές μεθόδους υπολογισμών πιθανοτήτων για τυχερά παιχνίδια, όπως ζάρια και χαρτιά. Ωστόσο, «η θεωρία των πιθανοτήτων οφείλει την αναγωγή της σε επιστήμη στην αλληλογραφία δύο μεγάλων επιστημόνων, των Pierre de Fermat και Blaise Pascal (1654) που παρακινήθηκαν από τον παίκτη Chevalier de Mèrè.»⁶

⁶ Βλ. Ιστορία της έννοια της Πιθανότητας, στο http://users.auth.gr/hara/courses/history_of_math/2012/%CE%99%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CF%84%CE%B7%CF%82%20%CE%AD%CE%BD%CE%BD%CE%BF%CE%B9%CE%B1%CF%82%20%CF%84%CE%B7%CF%82%20%CE%A0%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%CF%8223_05_12.pdf, πρόσβαση 26/2/14

Τον 18^ο αιώνα θεμελιώνεται η πρώτη σύνδεση θεωρητικών αποτελεσμάτων και εμπειρικών γεγονότων από τον Jacob Bernoulli, ο οποίος μελέτησε επαναλαμβανόμενες ρίψεις νομίσματος και εισήγαγε τον πρώτο νόμο μεγάλων αριθμών (Δημητρίου Π. Μπερτσεκά, Γιάννη Ν. Τσιτσικλή,2010). Πολλοί μαθηματικοί τον μιμήθηκαν και προσπάθησαν και οι ίδιοι να συνεισφέρουν σημαντικά στην ανάλυση πραγματικών φαινομένων και στη χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων, όπως ο Daniel Bernoulli, ο Leibniz, ο Bayes και ο Lagrange. Έκτοτε παρατηρήθηκε η δημιουργία διάφορων βιβλίων από μαθηματικούς, τα οποία ανέταξαν την θεωρία των πιθανοτήτων στα Μαθηματικά ως νέο κλάδο τους.

Τον 19^ο αιώνα ο Laplace περιλαμβάνοντας στο βιβλίο του πολλές πρωτότυπες συνεισφορές, όπως είναι η γενική απόδειξη του κεντρικού οριακού θεωρήματος, κατόρθωσε να ασκήσει μεγάλη επιρροή και να θεμελιώσει την σπουδαιότητα της θεωρίας των πιθανοτήτων σαν ποσοτικό πεδίο (Δημητρίου Π. Μπερτσεκά, Γιάννη Ν. Τσιτσικλή,2010). Ο Andrien-Marie Legendre ανέπτυξε την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων και ασχολήθηκε με την εφαρμογή των πιθανοτήτων σε αστρονομικές προβλέψεις συμβάλλοντας στον καθορισμό τροχιών των κομητών με νέες μεθόδους. Στη διάρκεια του ίδιου αιώνα ο Poisson εξέδωσε βιβλίο με πρωτότυπες συνεισφορές, όπως την κατανομή Poisson (Πολυχρόνης Μωησιάδης).

Η θεωρία των πιθανοτήτων κατά τον 20^ο αιώνα είχε εισχωρήσει πλέον στη μηχανική και στην επιστήμη καθώς έχει την ικανότητα να περιγράφει και να ερμηνεύει τους περισσότερους τύπους φαινομένων αβεβαιότητας που προκύπτουν στην πράξη.

Μέρος δεύτερο

Κεφάλαιο 2^ο

2.1 Σκοπός έρευνας

Βασικός σκοπός αυτής της ερευνητικής προσπάθειας είναι η διερεύνηση των απόψεων, αντιλήψεων, θέσεων, στάσεων και ιδεών που έχουν οι μαθητές της Στ' Δημοτικού μη πιλοτικού σχολείου σχετικά με βασικές έννοιες πιθανοτήτων.

Επιμέρους στόχοι της έρευνας αποτελούν οι εξής:

- Η καταγραφή της προσέγγισης των παιδιών Στ' Δημοτικού σχετικά με τις έννοιες του βέβαιου και αδύνατου ενδεχόμενου σε αιτιοκρατικό πείραμα.
- Η διερεύνηση των απόψεων των παιδιών όσον αφορά το αιτιοκρατικό πείραμα ή το πείραμα τύχης.
- Η καταγραφή του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και της πειραματικής πιθανότητας.
- Η διερεύνηση της αντίληψης της πιθανότητας από μαθητές Στ' Δημοτικού, οι οποίοι δεν την έχουν διδαχθεί στο σχολείο.

2.2 Σύνδεση στόχων του αναλυτικού προγράμματος πιλοτικών σχολείων με τους στόχους της έρευνας

Οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος συνάδουν με τους στόχους της έρευνας προκειμένου να ερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές της έκτης Δημοτικού ενός μη πιλοτικού σχολείου μπορούν να ανταποκριθούν χωρίς προηγούμενη διδασκαλία στις απαιτήσεις των πιλοτικών σχολείων, όσον αφορά την θεματική ενότητα των στοχαστικών μαθηματικών. Υπάρχουν ωστόσο διαφοροποιήσεις καθώς η έρευνα δεν επικεντρώνεται σε όλο το φάσμα των στόχων του αναλυτικού προγράμματος, αλλά δίνει έμφαση στα σημεία που έχουν καταγραφεί παραπάνω. Σύμφωνα με το αναλυτικό

πρόγραμμα των πιλοτικών σχολείων «οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να:

- Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (κατηγορικά).
- Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν (υλικά, καταμέτρηση με γραμμές).
- Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και σε διαγράμματα όπως τα ραβδογράμματα.
- Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε μία άλλη.
- Συγκρίνουν πληροφορίες στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης δεδομένων.
- Περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα (δειγματικός χώρος) σε απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου.
- Χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο-άδικο (τριών ή περισσότερων ενδεχομένων).
- Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο.
- Υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένου.»⁷

⁷ Βλ. «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» στο <http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CF%8C%CF%82%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%8D.pdf>, πρόσβαση 1/12/13

2.3 Ερευνητικά ερωτήματα

Συνοπτικά θα λέγαμε ότι με την παρούσα εργασία διερευνώνται οι απόψεις παιδιών Στ' Δημοτικού σχολείου για τις έννοιες του δειγματικού χώρου ενός πειράματος, του αιτιοκρατικού πειράματος και του περάματος τύχης, του βέβαιου και αδύνατου ενδεχομένου και της πιθανότητας. Με τον όρο δειγματικό χώρο, εννοούμε τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος που αποτελείται από δοκιμές καθώς επίσης με τον όρο πιθανότητα εννοούμε το σύνολο των ευνοϊκών ενδεχομένων προς το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συγκεκριμένα τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν και έχουν ως αποδέκτες τα παιδιά της έκτης δημοτικού ήταν τα εξής:

Ερώτημα 1^ο: Ο δειγματικός χώρος σχετίζεται με το αν το πείραμα είναι τύχης ή αιτιοκρατικό;

Ερώτημα 2^ο: Μπορούν να συνδέσουν ποσοστό με πιθανότητα;

Ερώτημα 3^ο: Μπορούν να καταγράψουν τον δειγματικό χώρο σε ένα πείραμα τύχης και να βρουν τα ενδεχόμενα;

Ερώτημα 4^ο: Μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα και να κατανοήσουν ότι αν αυξάνεται ο δειγματικός χώρος ενώ το ζητούμενο ενδεχόμενο συνεχίζει να είναι απλό, τότε η πιθανότητα να κερδίσει μικραίνει;

Ερώτημα 5^ο: Κατανοούν οι μαθητές ότι με σταθερό δειγματικό χώρο αν το ενδεχόμενο έχει περισσότερα στοιχεία, έχει μεγαλύτερη πιθανότητα;

Ερώτημα 6^ο : Κατανοούν οι μαθητές το βέβαιο και αδύνατο ενδεχόμενο;



2.4 Θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας-προηγούμενες έρευνες-δυσκολίες μαθητών

Βασικό σημείο αναφοράς της εργασίας αποτελεί ο τρόπος σκέψης και η αντίληψη των παιδιών σχετικά με τις θεμελιώδεις αρχές της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, οι οποίες συνυπάρχουν σε καθημερινή βάση με τη ζωή τους και δεν συνδέονται μόνο με τα μαθηματικά του σχολείου. Αυτό το γεγονός έχει ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση πιθανολογικών απόψεων από μέρους των παιδιών σε διάφορα στάδια της ηλικίας τους τα οποία έχουν ερευνηθεί.

Σύμφωνα με την πτυχιακή εργασία του Αντωνόπουλου Κωνσταντίνου (2010), η προσχολική εκπαίδευση δείχνει να είναι πρόσφορο έδαφος για την υλοποίηση απλών πιθανολογικών πειραμάτων υπό την μορφή ομαδικών παιγνιωδών δραστηριοτήτων, αφού τα ερευνητικά ευρήματά του συγκλίνουν στην δυνατότητα διδασκαλίας βασικών πιθανολογικών εννοιών στο Νηπιαγωγείο, μέσα από την εκπόνηση ειδικά στοχευμένων εκπαιδευτικών προγραμμάτων.

Όσον αφορά την ηλικιακή τάξη του Δημοτικού σχολείου ο Κωνσταντίνου καταλήγει στο γεγονός ότι η κατανόηση πιθανολογικών καταστάσεων από τους μαθητές είναι πολύ ασταθής, καθώς ύστερα από ελαφρά τροποποίηση μίας διδακτικής μεταβλητής επέρχεται ουσιαστική διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει πραγματική κατανόηση και μάθηση.

Σχετικά με την εξέλιξη της σκέψης των παιδιών δημοτικού όσον αφορά τις πιθανολογικές εκφράσεις οι Σκουμπουρδή και Καλαβάσης υποστηρίζουν πως είναι αναγκαία και εφικτή η διδασκαλία των πιθανοτήτων από τις μικρές τάξεις του δημοτικού, αρκεί η εισαγωγή αυτή να πραγματοποιηθεί με τη χρήση κατάλληλων πιθανολογικών εκφράσεων ανάλογα με την ηλικία του μαθητή. Η δυσκολία των μαθητών έγκειται στη μη εξοικείωσή τους με προβλήματα πιθανοτήτων, τα οποία παραγκωνίζονται μέσα από τα σχολικά βιβλία και στην παρουσίαση τέτοιων προβλημάτων, με λανθασμένο για την ηλικία τους λεξιλόγιο.

Σύμφωνα με την Καφούση οι ιδέες των μαθητών της Ε' και ΣΤ' δημοτικού σχετικά με πιθανολογικά ζητήματα φαίνονται να στηρίζονται

κυρίως σε υποκειμενικές ερμηνείες. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην καταγραφή του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, δεν χρησιμοποιούν την αναλογία και δεν έχουν συνειδητοποιήσει το ρόλο των επαναλήψεων σε ένα πείραμα. Επίσης, η προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας στα υπάρχοντα διδακτικά βιβλία βασίζεται στον κλασικό ορισμό και έτσι δεν δίνεται στον μαθητή η ευκαιρία να χτίσει σταδιακά τη μαθηματική γνώση μέσα από την πορεία: πρόβλεψη-πείραμα-μοντελοποίηση προβλήματος.

2.5 Ανάλυση ερευνητικού σχεδιασμού-Μεθοδολογία

Για την πραγματοποίηση της μελέτης αρχικά προσδιορίστηκαν οι στόχοι της έρευνας οι οποίοι συμβαδίζουν με τους στόχους που έχει θέσει το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και επιλέχθηκε ως τεχνική για τη συλλογή των δεδομένων, τη διερεύνηση και τον έλεγχο της έρευνας, το ερωτηματολόγιο, υπό την μορφή δραστηριοτήτων. Το πρωτογενές υλικό που ήθελα να συλλέξω προτίμησα να προέρχεται από τάξη η οποία δεν έχει επεξεργαστεί στο παρελθόν την έννοια της πιθανότητας στο σχολικό πλαίσιο, προκειμένου να διαφανούν οι γνήσιες και αυθεντικές μαθητικές απόψεις χωρίς διδακτική παρέμβαση. Ωστόσο, επιθυμητό ήταν το ηλικιακό επίπεδο της ΣΤ' δημοτικού με στόχο οι αποδέκτες των ερωτήσεων να έχουν διδαχτεί τα κλάσματα και τα ποσοστά που είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την Θεωρία των πιθανοτήτων και τους κλασικούς ορισμούς της πιθανότητας.

Η έρευνα αποτελείται από φύλλα εργασίας τα οποία διανεμήθηκαν στους μαθητές και η επεξεργασία τους έγινε ομαδικά. Η συμμετοχική επεξεργασία είχε ως σκοπό την ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των μαθητών, την ευκαιρία για προσωπική διερεύνηση, τον χώρο για επιχειρηματολογία και τελικά την αποσαφήνιση και ανάδειξη της ιδέας του κάθε μαθητή για το ερώτημα που είχε τεθεί. Οι μαθητές απάντησαν χωρίς ιδιαίτερες διδακτικές καθοδηγήσεις, οι οποίες όμως δόθηκαν εκεί που φαινόταν απαραίτητο.

Τα φύλλα εργασίας δημιουργήθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε τα παιδιά να μπουν σε σταδιακές διαδικασίες σκέψης και να συμβαδίζουν με τις παραστάσεις της ζωής τους και τα ενδιαφέροντά τους. Αρχικά τέθηκαν

προβληματισμοί σχετικά με την τυχαιότητα των πειραμάτων, έπειτα με την πειραματική πιθανότητα, την καταγραφή του δειγματικού χώρου ενός και δύο σταδίων, την σύγκριση πιθανοτήτων καθώς και του βέβαιου και αδύνατου ενδεχομένου.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας έγινε εφαρμογή των εκπαιδευτικών τεχνικών που ενισχύουν την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών. Σκοπό της ερωτηματοθεσίας μαζί με τα χειραπτικά υλικά και το παιχνίδι που χρησιμοποιήθηκαν , όπως τα ζάρια, η τράπουλα και το «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί», αποτελεί η βιωματική μάθηση μέσα από την οποία το παιδί ανακαλύπτει μόνο του τη γνώση.

Κατά την εκπόνηση της εργασίας χρησιμοποιήσα πρωτογενείς πηγές δεδομένων καθώς επίσης και αδημοσίευτο υλικό που συγκέντρωσα απευθείας από τους μαθητές.

2.6 Ανάδειξη πεδίου έρευνας και παρουσίαση των συμμετεχόντων της

Η μελέτη αυτή αποτελεί μία έρευνα της οποίας τα δεδομένα συλλέχθηκαν στο τυπικό δημοτικό σχολείο Νέας Αγχιάλου «Ευγένειο». Η έρευνα διεξήχθη το μήνα Απρίλιο του 2014 σε τάξη της ΣΤ' δημοτικού η οποία αριθμούσε συνολικά 19 παιδιά, 10 αγόρια και 9 κορίτσια. Η επιλογή της τάξης έγινε έπειτα από συνεννόηση του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

2.7 Τεκμηρίωση της υιοθέτησης των συγκεκριμένων μεθόδων έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με ερευνητικό εργαλείο το ερωτηματολόγιο. Η συνειδητή αυτή επιλογή θεώρησα πως εξυπηρετεί την ελεύθερη έκφραση των παιδιών όσο και την ανωνυμία τους, στοιχείο το οποίο ενθαρρύνει την ειλικρίνεια στις απαντήσεις που επρόκειτο να δοθούν. Επίσης, ως ερευνητικό εργαλείο μου έδωσε την ευχέρεια να απαντηθούν οι ίδιες ερωτήσεις από πολλά παιδιά ταυτόχρονα, χωρίς να χρειαστεί να χρονοτριβήσω, αφού δόθηκαν ερωτηματολόγια αυτο-συμπλήρωσης. Στη συνέχεια αναλύονται οι τύποι και οι μορφές των ερωτηματολογίων.

2.8 Ανάλυση των τεχνικών συλλογής ερευνητικών δεδομένων

2.8.1 Ορισμός ερωτηματολογίων

Το ερωτηματολόγιο είναι ένα σύνολο γραπτών (ή σε ηλεκτρονική μορφή) ερωτήσεων που σχετίζονται με ένα πρόβλημα, τις οποίες ο ερευνητής απευθύνει ομοιόμορφα στα υποκείμενα του δείγματος, προκειμένου έτσι να συγκεντρώσει τις απαραίτητες πληροφορίες. «Οι ερωτήσεις μπορεί να αναφέρονται σε γνώμες, απόψεις, αντιλήψεις, στάσεις, αξίες, συμπεριφορές, γνώσεις, ενδιαφέροντα, προτιμήσεις, προσδοκίες, συναισθήματα, κ.λπ.»⁸ Ο τρόπος σύνταξης κι εφαρμογής του ερωτηματολογίου δεν είναι μία εύκολη υπόθεση, καθώς ασκεί μεγάλη επίδραση στην ποιότητα των δεδομένων που θα συλλεχθούν (είδος ερωτήσεων, διατύπωσή τους, σαφήνεια, σειρά των ερωτήσεων, έκταση ερωτηματολογίου, κ.λπ.). (Ανδρεαδάκης 2006-2007)



⁸ Βλ. Ν. Ανδρεαδάκης, Επίκουρος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Επιστημών Αγωγής, Παιδαγωγικό τμήμα, παρουσίαση power point στο μάθημα «Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία», 2006-2007, σελ.- 2, στο http://www.google.gr/url?sa=t&rect=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDkQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.edc.uoc.gr%2Fptde%2Fmathimata_diktyo%2Fandreadakis%2Fferwthmatologio2006-2007.ppt&ei=fAhLUaXOO8y2Pb6dgZAD&usg=AFQjCNEhHB6aH9DKuy9sGc3MuXw_gnzGYw, πρόσβαση 21/3/2014.

2.8.2 Τύποι και μορφές ερωτηματολογίων

Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι με τους οποίους χορηγείται ένα ερωτηματολόγιο :

- Αυτό-συμπλήρωση, κατά την οποία οι ερωτώμενοι συμπληρώνουν μόνοι τους τις απαντήσεις. Σε αυτή την περίπτωση το ερωτηματολόγιο είτε αποστέλλεται με το ταχυδρομείο επιτρέποντάς μας έτσι να έχουμε μεγάλα δείγματα με σχετικά μικρή προσπάθεια, είτε το παραδίδουμε εμείς οι ίδιοι δίνοντας στον ερωτώμενο τον απαραίτητο χρόνο συμπλήρωσής του και παραλαμβάνοντάς το μετά τη συμπλήρωση.
- Πρόσωπο με πρόσωπο συνέντευξη, όπου ο συνεντευκτής θέτει τις ερωτήσεις παρόντος του αποκρινόμενου και επίσης συμπληρώνει ο ίδιος το ερωτηματολόγιο.
- Τηλεφωνική συνέντευξη, Ο συνεντευκτής επικοινωνεί με τους αποκρινόμενους τηλεφωνικά, θέτοντάς τους τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου και καταγράφοντας τις απαντήσεις. (Robson 2007)

2.8.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ερωτηματολογίων

«Οι ερευνητές έχουν συνήθως ισχυρές και συχνά πολωμένες απόψεις σχετικά με τη θέση και τη σημασία των δειγματοληπτικών ερευνών. Μερικοί θεωρούν τη δειγματοληπτική έρευνα ως την κεντρική στρατηγική του πραγματικού κόσμου.»⁹ (Robson 2007)

Πλεονεκτήματα ερωτηματολογίων:

- Είναι συχνά ο μόνος ή ο ευκολότερος τρόπος για την ανάκληση πληροφοριών από ένα μεγάλο σύνολο ανθρώπων.
- Προσφέρει μια σχετικά απλή και άμεση προσέγγιση για τη μελέτη στάσεων, αξιών, πεποιθήσεων και κινήτρων.

⁹ Βλ. C. Robson «Η έρευνα του πραγματικού κόσμου», εκδ. Gutenberg, Αθήνα, 2007, σελ. - 271

- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη συλλογή πληροφοριών οι οποίες είναι δυνατό να γενικευτούν σχεδόν από οποιοδήποτε ανθρώπινο πληθυσμό.
- Μπορούν να είναι εξαιρετικά αποτελεσματικά για την παραγωγή μεγάλων συνόλων δεδομένων, με σχετικά χαμηλό κόστος, σε σύντομο χρονικό διάστημα.
- Επιτρέπουν την ανωνυμία, η οποία μπορεί να ενθαρρύνει την ειλικρίνεια στις περιπτώσεις που αφορούν ευαίσθητα θέματα.

(Robson 2007)

Μειονεκτήματα ερωτηματολογίων:

- Τα δεδομένα δέχονται επιρροές από τα χαρακτηριστικά των ερωτώμενων όπως τη μνήμη τους, τις γνώσεις τους, την εμπειρία τους, τα κίνητρά τους κ.α.
- Οι ερωτώμενοι συχνά δεν αναφέρουν οπωσδήποτε τις πεποιθήσεις τους, τις στάσεις τους με ακρίβεια καθώς μπορεί να υπάρξει μια μεροληψία απόκρισης στηριζόμενη στην κοινωνική αποδοχή.
- Συνήθως έχουν χαμηλά ποσοστά απόκρισης, καθώς κατά κανόνα δεν γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά των αποκρινόμενων και κατά συνέπεια αν το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό.
- Μπορεί να εντοπιστούν ασάφειες ή παρανοήσεις στις ερωτήσεις.
- Οι ερωτώμενοι μπορεί να μην πάρουν τα ερωτηματολόγια στα σοβαρά και ο ερευνητής να μην είναι σε θέση να το αντιληφθεί.

(Robson 2007)



2.9 Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

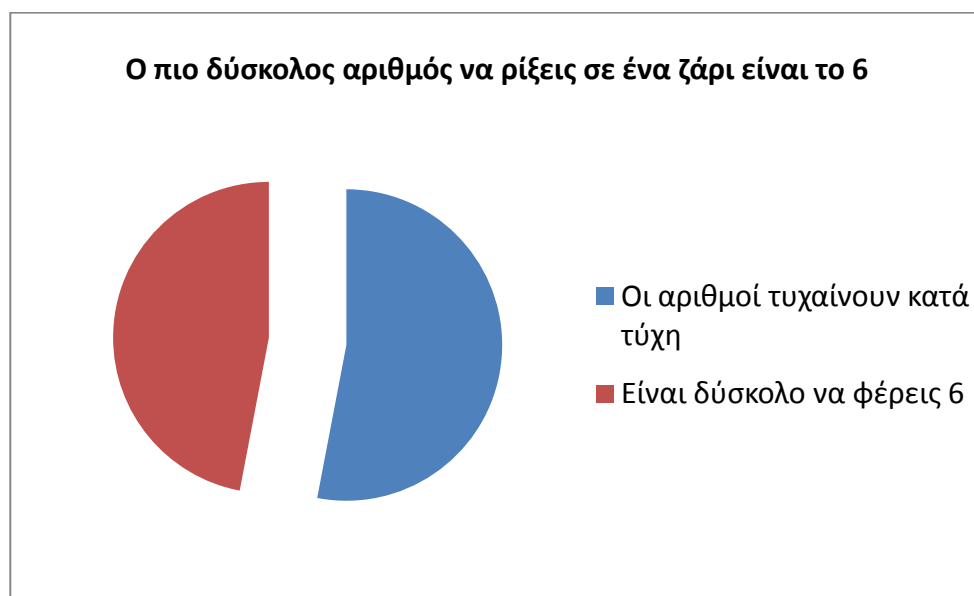
Ερώτημα 1^ο: Ο δειγματικός χώρος σχετίζεται με το αν το πείραμα είναι τύχης ή αιτιοκρατικό;

1^Α: Ο πιο δύσκολος αριθμός να ρίξεις σε ένα ζάρι είναι το 6.

Πίνακας 1. Ο πιο δύσκολος αριθμός να ρίξεις σε ένα ζάρι είναι το 6.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Οι αριθμοί τυχαίνουν κατά τύχη»	10	53
«Είναι δύσκολο να φέρεις 6»	9	47
Σύνολο	19	100

Σχήμα 1. Ο πιο δύσκολος αριθμός να ρίξεις σε ένα ζάρι είναι το 6.



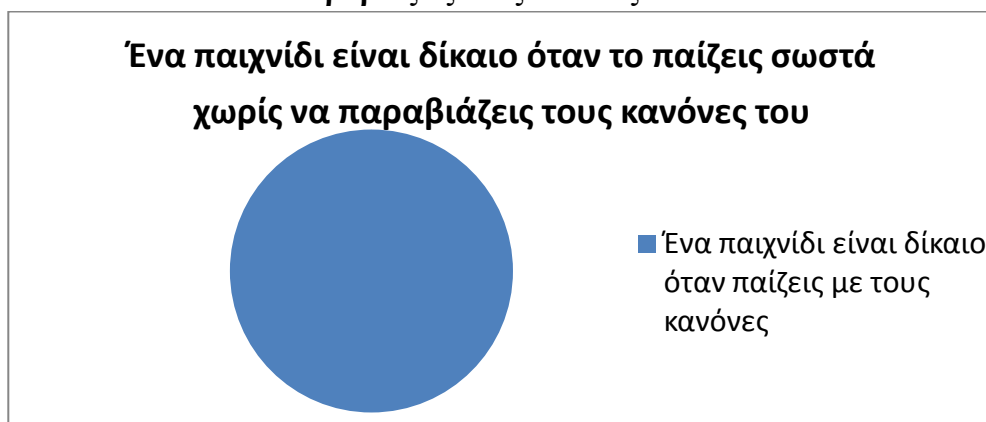
Στο ερώτημα αυτό παρατηρούμε ότι οι γνώμες των μαθητών είναι περίπου μοιρασμένες στη μέση, καθώς το 53% απαντά σωστά πως οι αριθμοί τυχαίνουν κατά τύχη ενώ το υπόλοιπο 47% πιστεύει πως το έξι είναι δύσκολος αριθμός για να φέρει κάποιος σε μία ρίψη ζαριού. Επομένως, τα παιδιά φαίνεται να μην έχουν ξεκαθαρίσει τι σημαίνει πείραμα τύχης και θεωρούν πως τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Την άποψη αυτή συμπληρώνει και η εξής φράση ενός παιδιού «Δύσκολα φέρνω έξι, συνήθως πέντε μου τυχαίνει». Αυτή η άποψη φανερώνει πως δεν έγινε διαχωρισμός της πειραματικής πιθανότητας από την θεωρητική.

1^B: Ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν το παίζεις σωστά χωρίς να παραβιάζεις τους κανόνες του.

Πίνακας 2. Ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν το παίζεις σωστά χωρίς να παραβιάζεις τους κανόνες του.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν παίζεις με τους κανόνες»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 2. Ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν το παίζεις σωστά χωρίς να παραβιάζεις τους κανόνες του.



Η ολομέλεια της τάξης υποστηρίζει πως ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν παίζεις σύμφωνα με τους κανόνες του. Κανένας μαθητής δεν υποστήριξε την άποψη ότι οι κανόνες πρέπει να είναι δίκαιοι για να είναι και το παιχνίδι δίκαιο. Αυτό δείχνει ότι δεν διαχωρίζουν τη δίκαιη μοιρασιά. Οι μαθητές σε αυτό το ερώτημα επικεντρώθηκαν σε προσωπικά τους βιώματα καθώς υποστήριξαν πως «αν παίζουμε με τους κανόνες μπορούμε να παίζουμε για ώρα χωρίς να μαλώνουμε» και πως «είναι πιο καλά να παίζεις με τους κανόνες γιατί είναι όλοι χαρούμενοι».

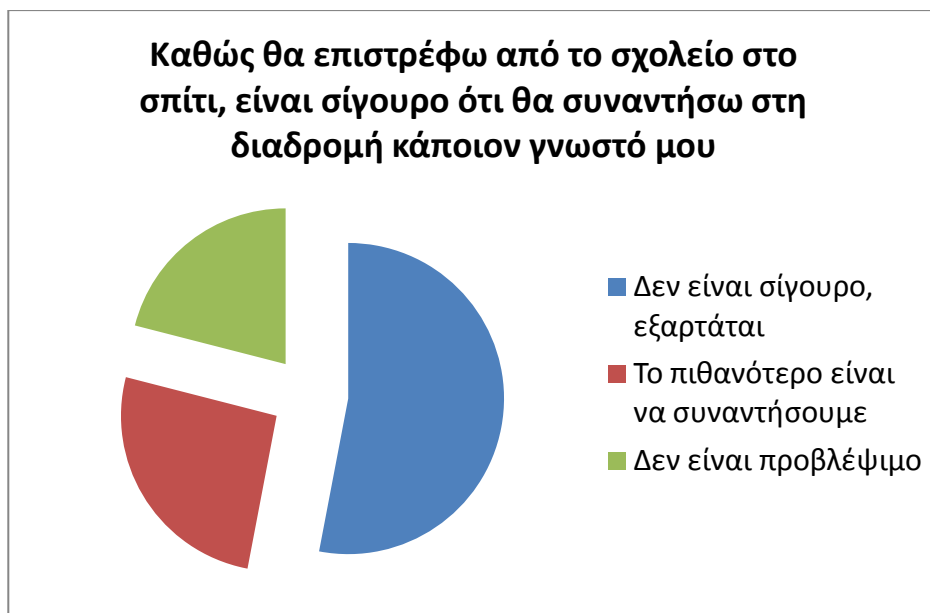
1^Γ: Καθώς θα επιστρέφω από το σχολείο στο σπίτι, είναι σίγουρο ότι θα συναντήσω στη διαδρομή κάποιον γνωστό μου.

Πίνακας 3. Καθώς θα επιστρέφω από το σχολείο στο σπίτι, είναι σίγουρο ότι θα συναντήσω στη διαδρομή κάποιον γνωστό μου.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Δεν είναι σίγουρο, εξαρτάται»	10	53
«Το πιθανότερο είναι να συναντήσουμε»	5	26
«Δεν είναι προβλέψιμο»	4	21
Σύνολο	19	100



Σχήμα 3. Καθώς θα επιστρέφω από το σχολείο στο σπίτι, είναι σίγουρο ότι θα συναντήσω στη διαδρομή κάποιον γνωστό μου.



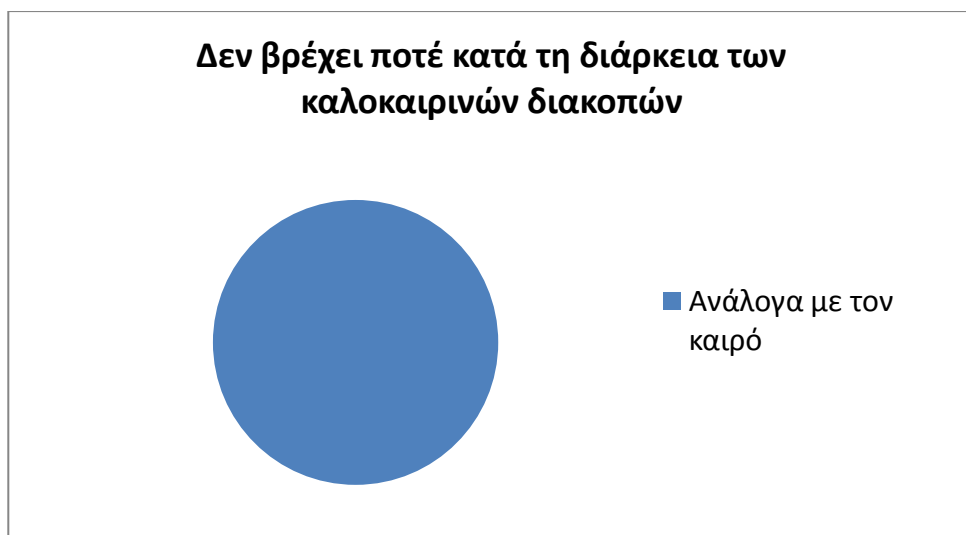
Σε αυτό το ερώτημα φαίνεται πως τα παιδιά εμπλέχθηκαν νοητικά σε διαχωρισμό πειράματος τύχης από αιτιοκρατικό πείραμα. Υποστήριξαν στην πλειοψηφία τους πως εξαρτάται αν θα δουν κάποιον γνωστό τους κατά την επιστροφή τους από το σχολείο στο σπίτι καθώς συμπεριέλαβαν υπόψη τους τις αστάθμητες (τυχαίες) παραμέτρους. Συγκεκριμένα υποστήριξαν πως «αν γυρίσω με το σχολικό σίγουρα θα συναντήσω γνωστούς μου, δεν γίνεται να μην δω κανέναν γιατί θα είμαστε στο λεωφορείο». Αυτή η απάντηση δόθηκε αφού έγινε μια μικρή διδακτική παρέμβαση καθώς τους ρώτησα αν οι απαντήσεις τους ισχύουν για όλα τα παιδιά που πάνε σχολείο. Μικρό φαίνεται το ποσοστό που έκρινε σύμφωνα με τα βιώματά του και όπως χαρακτηριστικά ειπώθηκε «δεν θα δω κανέναν λογικά γιατί οι συγγενείς μου μένουν μακριά».

1^Δ: Δεν βρέχει ποτέ κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών.

Πίνακας 4. Δεν βρέχει ποτέ κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Ανάλογα με τον καιρό»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 4. Δεν βρέχει ποτέ κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών.



Σε αυτό το ερώτημα παρατηρούμε πως όλοι οι μαθητές έλαβαν υπόψη τους τον αστάθμητο παράγοντα του καιρού και θεώρησαν το πείραμα αιτιοκρατικό. Προσπάθησαν να φέρουν διάφορα παραδείγματα στο μυαλό τους όπως τις φράσεις «αν πάμε στη Σαχάρα δεν θα βρέξει αλλά θα απαντήσω πως μπορεί να βρέχει κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών» και «στην Αφρική δεν θα βρέξει», δηλώνοντας πως βρήκαν τις

εξαιρέσεις του κανόνα αλλά η γενίκευση υποστηρίζει πως βρέχει κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών.

1^E: Εάν αγοράσεις πολλά λαχεία, είναι σίγουρο ότι θα κερδίσεις.

Πίνακας 5. Εάν αγοράσεις πολλά λαχεία, είναι σίγουρο ότι θα κερδίσεις.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Είναι θέμα τύχης»	9	47
«Όσο περισσότερα λαχεία αγοράζεις, τόσο περισσότερες πιθανότητες έχεις»	5	26,5
«Έχεις πιθανότητες να κερδίσεις και να μην κερδίσεις»	5	26,5
Σύνολο	19	100

Σχήμα 5. Εάν αγοράσεις πολλά λαχεία, είναι σίγουρο ότι θα κερδίσεις.



Στο ερώτημα αυτό όλοι οι μαθητές υποστηρίζουν πως αν αγοράσεις πολλά λαχεία δεν είναι σίγουρο πως θα κερδίσεις. Οι απαντήσεις τους ποικίλουν, ωστόσο συγκλίνουν στο ότι σκέφτονται σύμφωνα με την θεωρία των πιθανοτήτων και όχι σύμφωνα με προσωπικές τους εμπειρίες ή προσδοκίες. Φαίνεται ακόμη πως θεωρούν πείραμα τύχης το λαχείο και πως αν αυξηθούν τα στοιχεία του ευνοϊκού ενδεχομένου (λαχεία που έχουμε αγοράσει) ενώ ο δειγματικός χώρος παραμένει σταθερός (αριθμός συνολικών λαχείων), τότε η πιθανότητα αυξάνεται.

1^{ΣΤ}: Είναι πιο εύκολο να φέρεις κορώνα παρά γράμματα όταν ρίχνεις ένα κέρμα.

Πίνακας 6. Είναι πιο εύκολο να φέρεις κορώνα παρά γράμματα όταν ρίχνεις ένα κέρμα.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Ανάλογα πως θα γυρίσει το κέρμα»	6	32
«Είναι κατά τύχη»	8	42
«Τύχαμε περισσότερες φορές γράμματα»	5	26
Σύνολο	19	100



Σχήμα 6. Είναι πιο εύκολο να φέρεις κορώνα παρά γράμματα όταν ρίχνεις ένα κέρμα.



Σε αυτό το ερώτημα φαίνεται ότι το 42% των παιδιών θεωρούν σωστό το αληθές, δηλαδή ότι είναι θέμα τύχης το αποτέλεσμα από τη ρίψη ενός κέρματος (σε αμερόληπτο κέρμα όπως είναι αυτά που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην καθημερινότητά τους). Σχεδόν το ένα τρίτο των μαθητών συγγέει την θεωρητική με την πειραματική πιθανότητα, διότι πριν απαντήσουν έβγαλαν ένα κέρμα και αφού το έριξαν μερικές φορές παρατήρησαν ποια από τις δύο πλευρές τυχαίνει πιο συχνά. Οι υπόλοιποι υποστηρίζουν την άποψη ότι το κέρμα έχει μία συγκεκριμένη συμπεριφορά στο αέρα και αυτό εξαρτάται από το πως θα το ρίξουν ή πόσο ψηλά θα πάει, το οποίο φαίνεται μέσα από τις προτάσεις τους «αν ξεκινάει το κέρμα από κορώνα θα τύχει γράμματα και αν ξεκινάει από γράμματα θα βγει κορώνα», «έχει ρόλο πόση δύναμη βάζεις και αν το κέρμα πάει ψηλά ή χαμηλά», «αν ρίξεις δίευρω που είναι βαρύ, δύσκολα γυρίζει και τυχαίνεις το ίδιο από αυτό που ξεκινάς». Σε διερευνητικές ερωτήσεις που τους έθεσα όπως το πόσο βαρύ θεωρούν το δίευρω, τι θα συνέβαινε αν είχαν ένα ευρώ και πόση δύναμη πρέπει να βάλουμε για να βγει γράμματα τα παιδιά φάνηκε πως προσπάθησαν να βρουν απαντήσεις όμως στο τέλος ήταν αβέβαια για τις αρχικές εκτιμήσεις που είχαν κάνει.

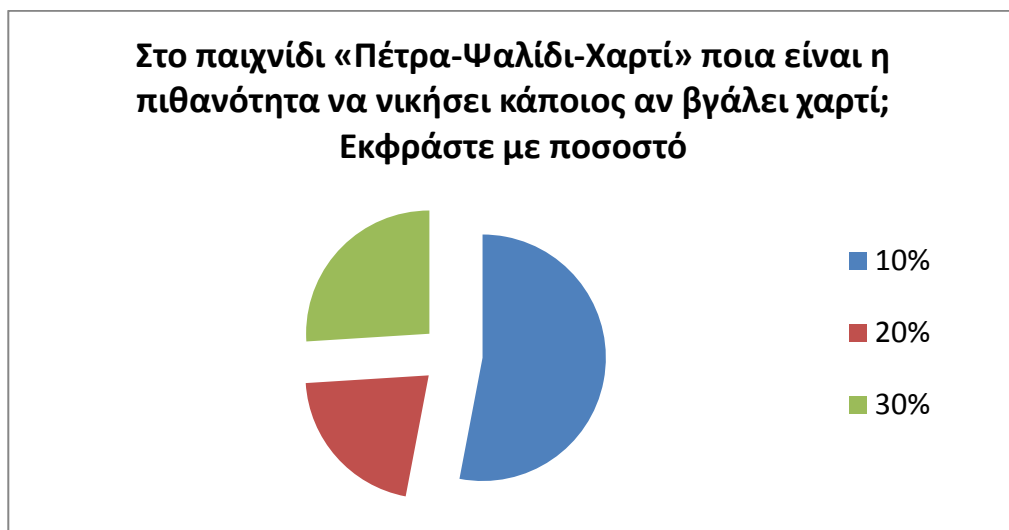
Ερώτημα 2^ο: Μπορούν να συνδέσουν ποσοστό με πιθανότητα;

1. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει χαρτί; Εκφράστε με ποσοστό.

Πίνακας 7. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει χαρτί; Εκφράστε με ποσοστό.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«10%»	10	53
«20%»	4	21
«30%»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 7. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει χαρτί; Εκφράστε με ποσοστό.

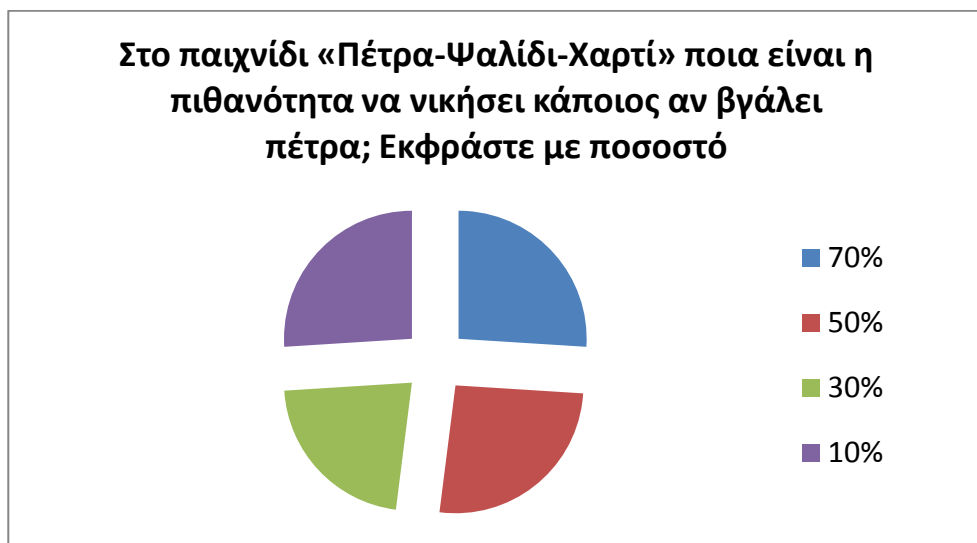


1. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει πέτρα; Εκφράστε με ποσοστό.

Πίνακας 8. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει πέτρα; Εκφράστε με ποσοστό.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«70%»	5	26
«50%»	5	26
«30%»	4	22
«10%»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 8. Στο παιχνίδι «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί» ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει πέτρα; Εκφράστε με ποσοστό.



Σύμφωνα με τον δειγματικό χώρο που είχαν ετοιμάσει τα παιδιά οι απαντήσεις τους είναι όλες σωστές τόσο για το ποσοστό που νικάει η πέτρα όσο για το ποσοστό που νικάει το ψαλίδι.. Έπαιξαν το παιχνίδι μεταξύ τους και κάθε φορά κατέγραφαν ποιος νίκησε και με ποιον συνδυασμό, όπως υποδείκνυαν οι οδηγίες. Παίρνοντας τις πληροφορίες από τον δειγματικό χώρο διαίρεσαν το πλήθος των ευνοϊκών ενδεχομένων με το πλήθος των ενδεχομένων. Έτσι, συνέδεσαν με επιτυχία την πιθανότητα του ευνοϊκού ενδεχομένου με τον αντίστοιχο ποσοστό δημιουργώντας κλάσμα. Εδώ οι μαθητές βασίστηκαν στην πειραματική πιθανότητα την οποία φαίνεται να χειρίζονται με περισσότερη άνεση.



Ερώτημα 3^ο: Μπορούν να καταγράψουν τον δειγματικό χώρο σε ένα πείραμα τύχης και να βρουν τα ενδεχόμενα;

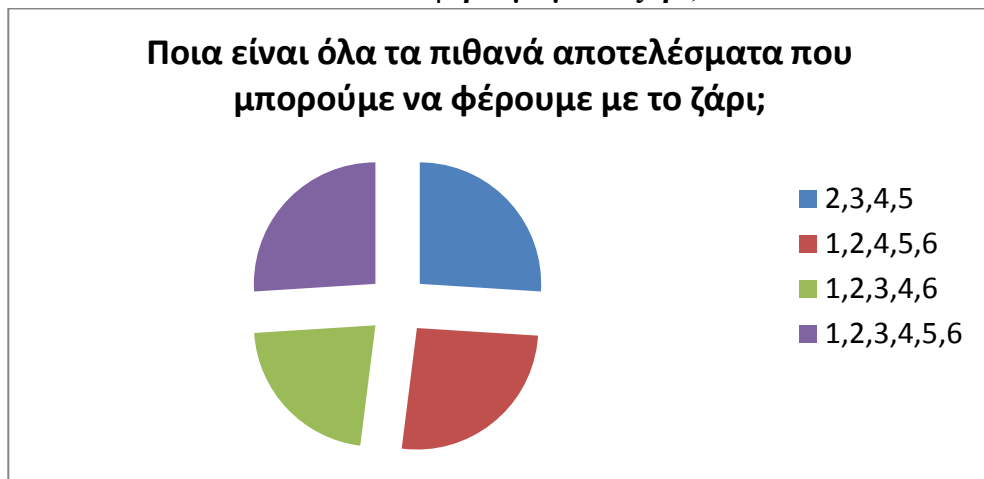
Ρίξτε ένα ζάρι για 10 φορές. Καταγράψτε τα αποτελέσματα.

1. Ποια είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούμε να φέρουμε με το ζάρι;

Πίνακας 9. Ποια είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούμε να φέρουμε με το ζάρι;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«2,3,4,5»	5	26
«1,2,4,5,6»	5	26
«1,2,3,4,6»	4	22
«1,2,3,4,5,6»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 9. Ποια είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούμε να φέρουμε με το ζάρι;



Σε αυτή την ερώτηση φαίνεται πως τα παιδιά απαντούν σύμφωνα με την πειραματική πιθανότητα, για αυτό και το 74% από αυτά δεν απάντησε πως όλα τα ενδεχόμενα ενός ζαριού αριθμημένο μέχρι το έξι είναι οι αριθμοί από το ένα μέχρι το έξι. Αφού έδωσαν τις απαντήσεις τους, ρώτησα τους μαθητές που δεν είχαν γράψει τον αριθμό πέντε αν υπάρχει το ενδεχόμενο να ρίξω το ζάρι και να τύχει πέντε. Μου απάντησαν πως γίνεται αλλά πως εκείνοι στις δέκα ρίψεις που έκαναν δεν το έτυχαν. Επομένως δεν θεώρησαν πιθανά ενδεχόμενα όλα τα δυνατά που υπάρχουν αλλά όλα εκείνα που τους έτυχαν σε δέκα ρίψεις. Να σημειώσουμε πως όλα τα παιδιά έκανα σωστή καταγραφή του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης που πραγματοποίησαν. Ορισμένες χαρακτηριστικές τους απόψεις είναι οι εξής: «δεν φέραμε το πέντε, οπότε είναι το 1,2,3,4,6», «φέραμε περισσότερες φορές το δύο και το πέντε, οπότε είναι αυτά τα δύο».

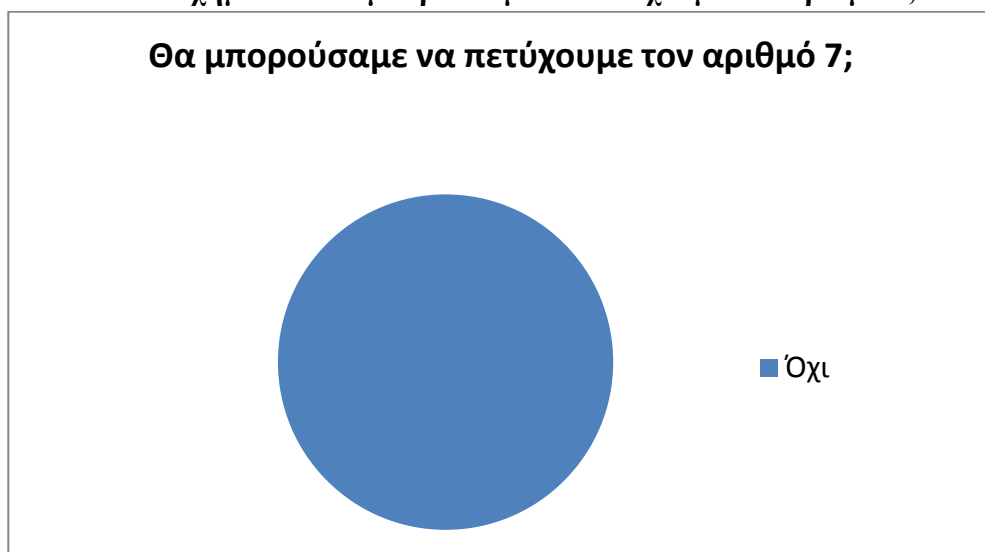


2. Θα μπορούσαμε να πετύχουμε τον αριθμό 7;

Πίνακας 10. Θα μπορούσαμε να πετύχουμε τον αριθμό 7;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Όχι»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 10. Θα μπορούσαμε να πετύχουμε τον αριθμό 7;



Οι μαθητές με απόλυτη επιτυχία αντιλήφθηκαν πως το ενδεχόμενο επτά δεν μπορεί ποτέ να ανήκει στα δυνατά αποτελέσματα μιας ρίψης ζαριού αριθμημένο από το ένα έως το έξι. Συγκεκριμένα ανέφεραν πως «μέχρι το έξι φτάνει το ζάρι» και «αν είχαμε δύο ζάρια μπορεί να το πετυχαίναμε».

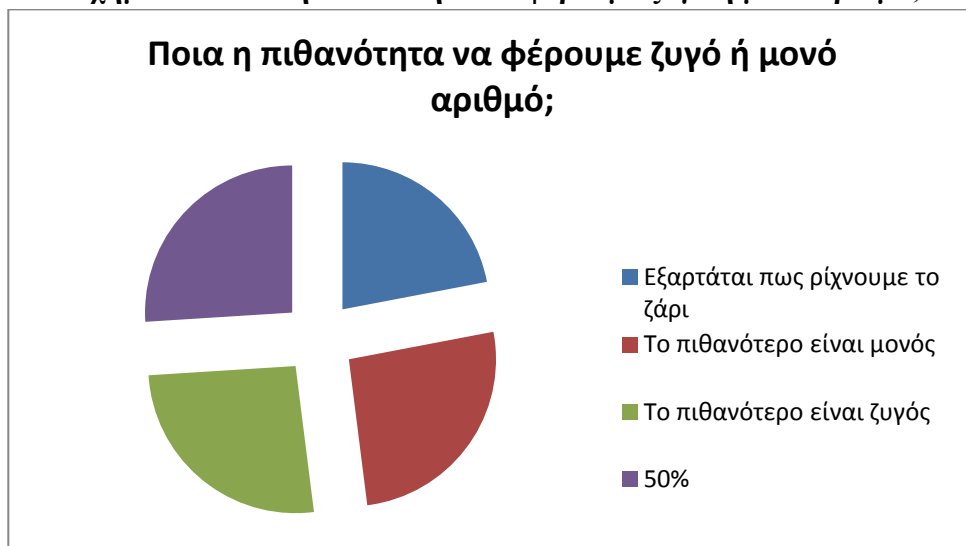


3. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ζυγό ή μονό αριθμό;

Πίνακας 11. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ζυγό ή μονό αριθμό;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Εξαρτάται πως ρίχνουμε το ζάρι»	4	22
«Το πιθανότερο είναι μονός»	5	26
«Το πιθανότερο είναι ζυγός»	5	26
«50%»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 11. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ζυγό ή μονό αριθμό;



Σε αυτό το ερώτημα μόνο το ένα τρίτο σχεδόν της ολομέλειας απάντησε σωστά, δηλαδή 50%. Οι υπόλοιποι πιστεύουν πως υπάρχουν παράγοντες που καθορίζουν το αποτέλεσμα και ότι το πείραμα είναι αιτιοκρατικό και όχι πείραμα τύχης. Τέσσερα παιδιά αναφέρουν για ακόμη μία φορά πως το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον τρόπο που θα ρίξουμε το

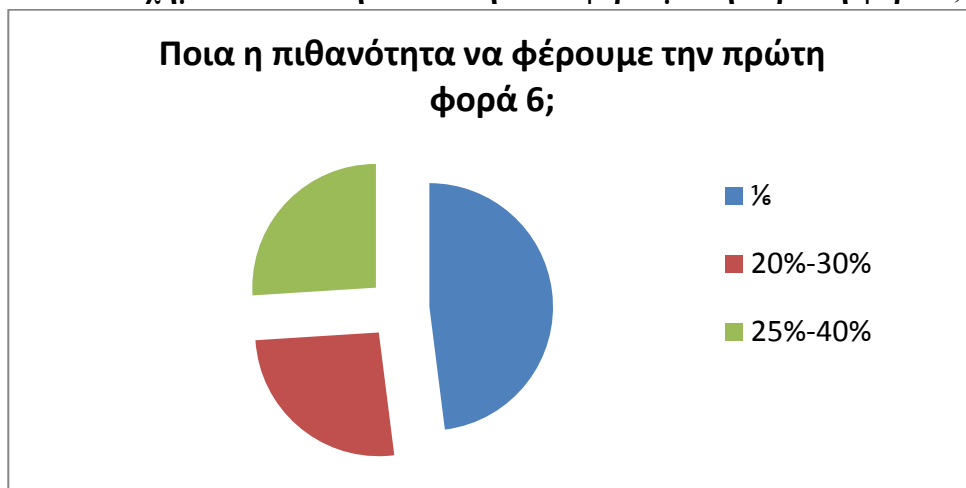
ζάρι, ενώ τα δέκα από αυτά αποφασίζουν πως θα τύχουν σίγουρα ή μονό ή ζυγό αναφέροντας «περισσότερο φέρνω ζυγούς αριθμούς» και «κατά τη γνώμη μου πιο πιθανό είναι να φέρουμε ζυγό γιατί δεν είναι συγκεκριμένο, οπότε είναι ανάλογα με την πιθανότητα της στιγμής».

4. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 6;

Πίνακας 12. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 6;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«←»	9	48
«20%-30%»	5	26
«25%-40%»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 12. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 6;



Το ποια είναι πιθανότητα να φέρουμε τον αριθμό έξι με την πρώτη φορά με την ρίψη ενός ζαριού προβληματίσε τους μαθητές, οι οποίοι έδωσαν ποικίλες απαντήσεις. Σχεδόν οι μισοί απάντησαν σωστά ότι η

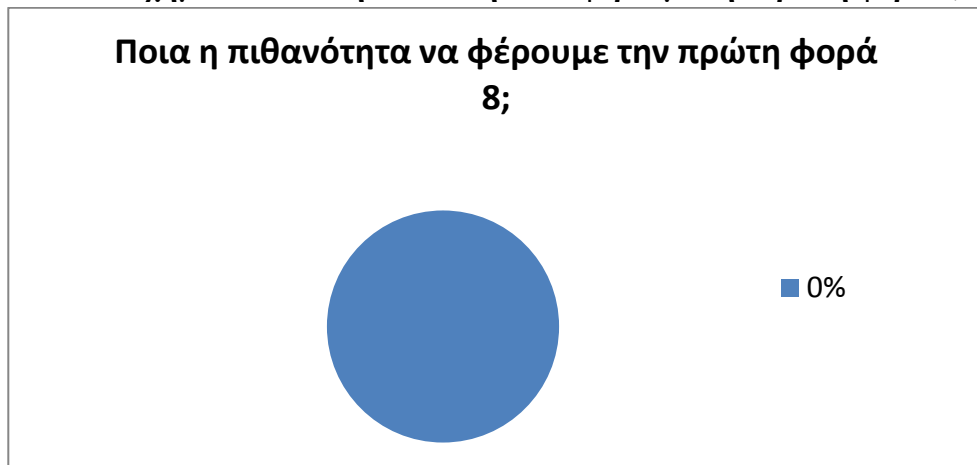
πιθανότητα ισούται με το ένα έκτο, σκεπτόμενοι ότι τα δυνατά ενδεχόμενα του πειράματος τύχης της ρίψης ενός ζαριού αριθμημένο μέχρι το έξι, είναι έξι και ότι το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι ένα. Δημιουργώντας το κλάσμα βρήκαν το αποτέλεσμα. Οι υπόλοιποι μαθητές έκριναν με βάση τις προσωπικές τους απόψεις και εμπειρίες σχολιάζοντας «περίπου 20% με 30% γιατί στις δέκα φορές που ρίξαμε δεν τύχαμε το έξι, αν το τυχαίναμε τότε οι πιθανότητες θα ήταν περίπου 50%» και «το πέντε το τυχαίνω περίπου 80% και το ένα 10%». Εδώ ο δεύτερος μαθητής φαίνεται να μην αντιμετωπίζει το σύνολο των πιθανοτήτων ενός δειγματικού χώρου σαν τη μονάδα, όπως ορίζει ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

5. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 8;

Πίνακας 13. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 8;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«0%»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 13. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε την πρώτη φορά 8;



Εδώ διαφαίνεται το αδύνατο ενδεχόμενο, καθώς η ολομέλεια των παιδιών θεώρησε αδύνατο πως υπάρχει η πιθανότητα να φέρουμε με την πρώτη φορά της ρίψης ενός ζαριού αριθμημένο μέχρι το έξι τον αριθμό οκτώ. Αυτή η θέση τους αποκαλύπτεται και στη φράση ενός μαθητή «με ένα ζάρι δεν γίνεται, αν είχαμε δύο θα γινόταν».

Ερώτημα 4^ο: Μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα και να κατανοήσουν ότι αν αυξάνεται ο δειγματικός χώρος ενώ το ζητούμενο ενδεχόμενο συνεχίζει να είναι απλό, τότε η πιθανότητα να κερδίσει μικραίνει;

«Σε μία μακρινή χώρα η λοταρία παίζεται με 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 4. Αυτές οι μπάλες είναι τοποθετημένες σε έναν σάκο. Για να παίξεις επιλέγεις έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 4. Κερδίζεις εφόσον ο αριθμός που έχεις επιλέξει είναι ίδιος με τον αριθμό που αναγράφεται στη μπάλα, η οποία κληρώνεται, τραβιέται δηλαδή τυχαία από τον σάκο».

A. Πιο πιθανό είναι να νικήσεις ή να χάσεις σε αυτή τη λοταρία; Ποια η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος στη λοταρία;

Πίνακας 14. Ποια η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος στη λοταρία;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«50%»	4	21
«25%»	15	79
Σύνολο	19	100



Σχήμα 14. Ποια η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος στη λοταρία;



Η πλειοψηφία των μαθητών κατανοούν ότι η πιθανότητα να νικήσει κάποιος σε μία λοταρία με τέσσερα δυνατά αποτελέσματα και με το ευνοϊκό ενδεχόμενο ένα είναι το 25%. Αυτό το ποσοστό εμφανίζεται δια μέσου του κλασικού ορισμού της πιθανότητας. Σε αυτό το πείραμα τύχης ενός σταδίου τέσσερις μαθητές υποστηρίζουν ότι έχουμε τις ίδιες πιθανότητες να νικήσουμε και να χάσουμε και θεώρησαν δύο τα ενδεχόμενα, αυτά της νίκης και της ήττας, όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν «οι πιθανότητες είναι 50-50 γιατί ή θα κερδίσεις ή θα χάσεις».

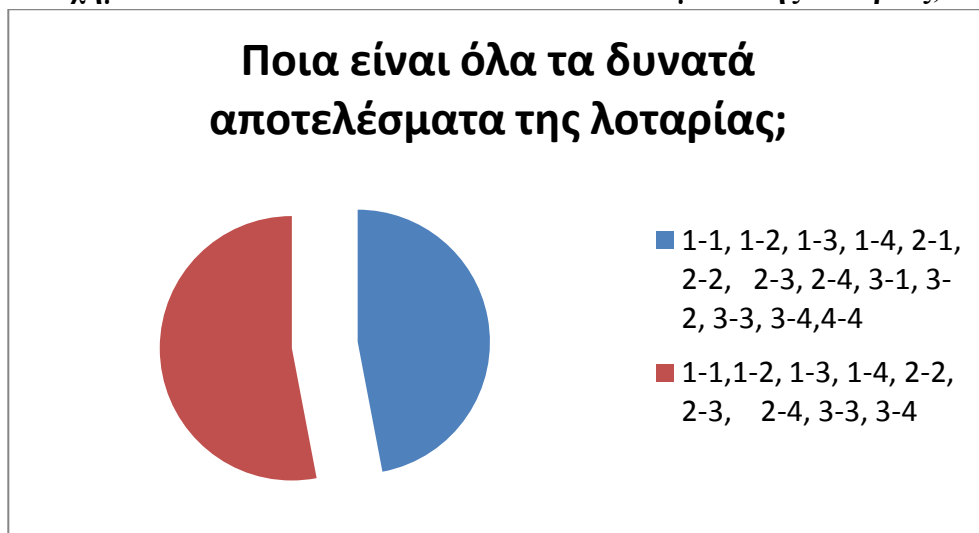
«Οι υπεύθυνοι της λοταρίας συνειδητοποιούν ότι είναι πολύ εύκολο να κερδίσεις κι έτσι αποφασίζουν να δυσκολέψουν το τυχερό παιχνίδι. Η καινούρια λοταρία παίζεται πάλι με 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 4 και τοποθετημένες σε έναν σάκο. Όμως, για να παίξεις επιλέγεις 2 αριθμούς και κερδίζεις εφόσον αυτοί οι αριθμοί ταιριάζουν σε οποιαδήποτε σειρά με τις 2 μπάλες που κληρώνονται.»

Β. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα της λοταρίας;

Πίνακας 15. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα της λοταρίας;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4,4-4»	9	47
«1-1,1-2, 1-3, 1-4, 2-2, 2-3, 2-4, 3-3, 3-4»	10	53
Σύνολο	19	100

Σχήμα 15. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα της λοταρίας;



Οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτό το ερώτημα δηλώνουν πως σε πειράματα δύο σταδίων δεν μπορούν να καταγράψουν σωστά τον δειγματικό τους χώρο. Το 47 % των μαθητών ξεκινώντας να καταγράφει τον δειγματικό χώρο συμπεριέλαβε και ενδεχόμενα όπως «1-2, 2-1» αλλά τελικά όταν έφτασαν στον αριθμό τέσσερα δεν συνέχισαν την καταγραφή. Σε αντίθεση, οι υπόλοιποι θεώρησαν πως τα ενδεχόμενα «1-2,2-1» δεν είναι δύο διαφορετικά αλλά ένα ενδεχόμενο το οποίο σημαίνει το ίδιο για αυτούς.

Γ. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λόττο;

Πίνακας 16. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λόττο;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«6,25%»	5	26,5
«10%»	5	26,5
«16%»	2	10,5
«25%»	3	16
«50%»	5	26,5
Σύνολο	19	100

Σχήμα 16. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λόττο;



Οι απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λόττο σε αυτό το πείραμα δύο σταδίων ποικίλουν. Μόνο το 26,5% από αυτούς απαντά σωστά, δηλαδή 6,25%, το οποίο φανερώνεται μέσα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Οι υπόλοιποι κρίνουν με διαφορετικά κριτήρια προκειμένου να δώσουν τις απαντήσεις τους όπως «αφού πριν ήταν 25% οι πιθανότητες, τώρα που έχουμε δύο

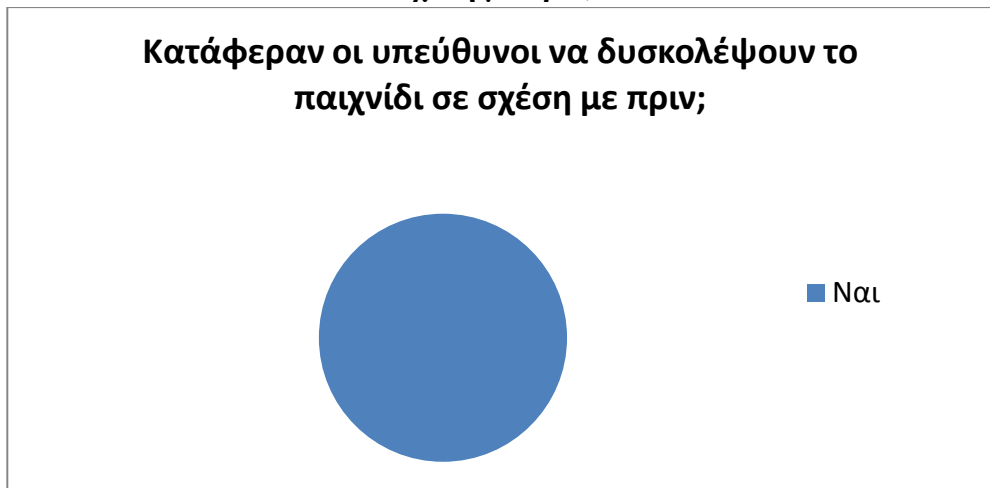
σάκους θα είναι 50%» και «αν είχαμε τέσσερις σάκους θα κάναμε 25% επί 4= 100%, θα κερδίζαμε σίγουρα». Εδώ φαίνεται πως η πλειοψηφία των μαθητών δεν αντιλαμβάνεται πως όταν ο δειγματικός χώρος αυξάνεται ενώ το ευνοϊκό ενδεχόμενο παραμένει απλό, τότε η πιθανότητα μειώνεται.

Δ. Κατάφεραν οι υπεύθυνοι να δυσκολέψουν το παιχνίδι σε σχέση με πριν;

Πίνακας 17. Κατάφεραν οι υπεύθυνοι να δυσκολέψουν το παιχνίδι σε σχέση με πριν;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Ναι»	14	100
Σύνολο	14	100

Σχήμα 17. Κατάφεραν οι υπεύθυνοι να δυσκολέψουν το παιχνίδι σε σχέση με πριν;



Όλοι οι μαθητές που απάντησαν υποστηρίζουν πως οι υπεύθυνοι κατάφεραν να δυσκολέψουν το παιχνίδι επειδή η πιθανότητα να νικήσουμε μειώθηκε. Ένας μαθητής μπερδεύοντας τις σκέψεις του απάντησε πως «δεν τα κατάφεραν γιατί πριν ήταν 25% ενώ τώρα είναι 6,25%, αφού μειώθηκε το ποσοστό το έκαναν πιο εύκολο», ενώ στη συνέχεια υποστήριξε πως το

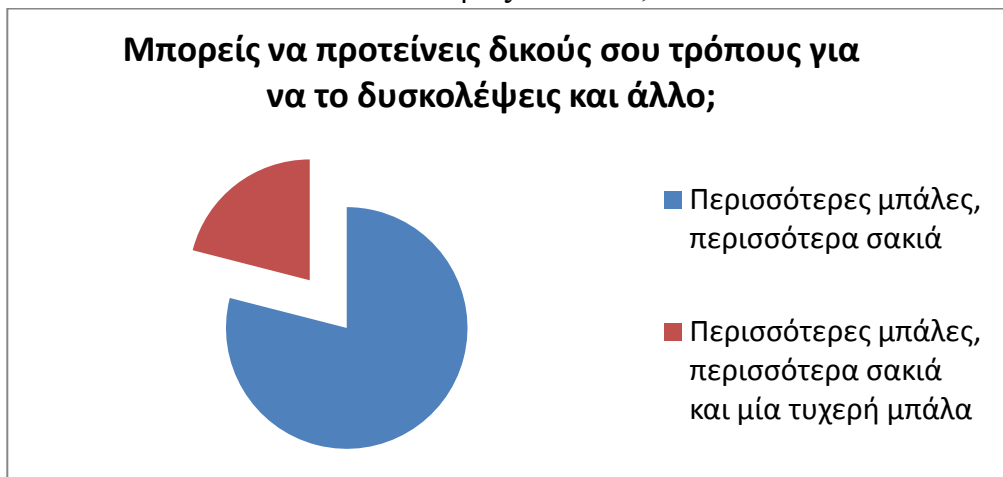
δυσκόλεψαν. Πέντε από τους μαθητές δυσκολεύτηκαν πολύ στο να απαντήσουν και τελικά δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα. Αυτό συνέβη, διότι ενώ βρήκαν ότι ανέβηκε το ποσοστό επιτυχίας στο λόττο αντιλαμβανόμενοι ότι το παιχνίδι δυσκόλεψε, αλλά με τα μαθηματικά δεν μπορούσαν να το ερμηνεύσουν. Τελικά δεν αναθεώρησαν την αρχική τους εκτίμηση επιτυχίας στο λόττο, η οποία αποτέλεσε την δυσκολία τους στο να απαντήσουν το συγκεκριμένο ερώτημα.

Ε. Μπορείς να προτείνεις δικούς σου τρόπους για να το δυσκολέψεις και άλλο;

Πίνακας 18. Μπορείς να προτείνεις δικούς σου τρόπους για να το δυσκολέψεις και άλλο;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Περισσότερες μπάλες, περισσότερα σακιά»	15	79
«Περισσότερες μπάλες, περισσότερα σακιά και μία τυχερή μπάλα»	4	21
Σύνολο	19	100

Σχήμα 18. Μπορείς να προτείνεις δικούς σου τρόπους για να το δυσκολέψεις και άλλο;



Η ολομέλεια των μαθητών αντιλαμβάνεται πως για να δυσκολέψουν το λόττο πρέπει να αυξηθεί ο δειγματικός χώρος του αυξάνοντας τις μπάλες και τα σακιά. Μάλιστα τέσσερις μαθητές σκέφτηκαν να προσθέσουν και μια τυχερή μπάλα, σκεπτόμενοι το λόττο που υπάρχει και στη χώρα μας λέγοντας «θα βάλουμε πολλούς σάκους και πολλούς αριθμούς και έναν τυχερό αριθμό, όπως γίνεται στο Τζόκερ».

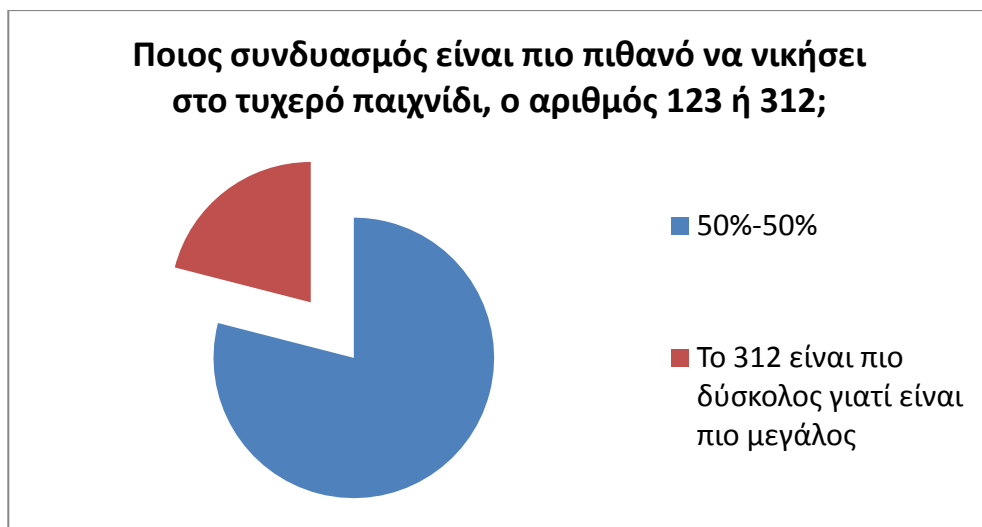
ΣΤ. Τώρα το παιχνίδι παίζεται με τρεις κληρώσεις. Ποιος συνδυασμός είναι πιο πιθανό να νικήσει στο τυχερό παιχνίδι, ο αριθμός 123 ή 312; Γιατί;

Πίνακας 19. Τώρα το παιχνίδι παίζεται με τρεις κληρώσεις. Ποιος συνδυασμός είναι πιο πιθανό να νικήσει στο τυχερό παιχνίδι, ο αριθμός 123 ή 312; Γιατί;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«50%-50%»	15	79
«Το 312 είναι πιο δύσκολος γιατί είναι πιο μεγάλος»	4	21
Σύνολο	19	100



Σχήμα 19. Τώρα το παιχνίδι παίζεται με τρεις κληρώσεις. Ποιος συνδυασμός είναι πιο πιθανό να νικήσει στο τυχερό παιχνίδι, ο αριθμός 123 ή 312; Γιατί;



Σε αυτό το ερώτημα το 79% των μαθητών απαντά πως οι πιθανότητες είναι 50%-50%, εφόσον υπάρχουν δύο ενδεχόμενα και εμείς διαλέγουμε το ένα. Οι απαντήσεις των υπόλοιπων τεσσάρων έχουν ενδιαφέρον ως προς τον τρόπο σκέψης, οι οποίοι θεωρούν πως το 312 είναι πιο δύσκολος γιατί είναι πιο μεγάλος, σημειώνοντας ακόμη ότι «θα ήταν κάποιος τρελός για να παίξει το 123, όπως ο Τρελαντώνης στο καφέ της Χαράς», «είναι πιο εύκολο το 312 γιατί είναι πιο μεγάλος αριθμός» και «δεν θα βγει το 123 γιατί είναι δύσκολο να τα πετύχεις με τη σειρά».

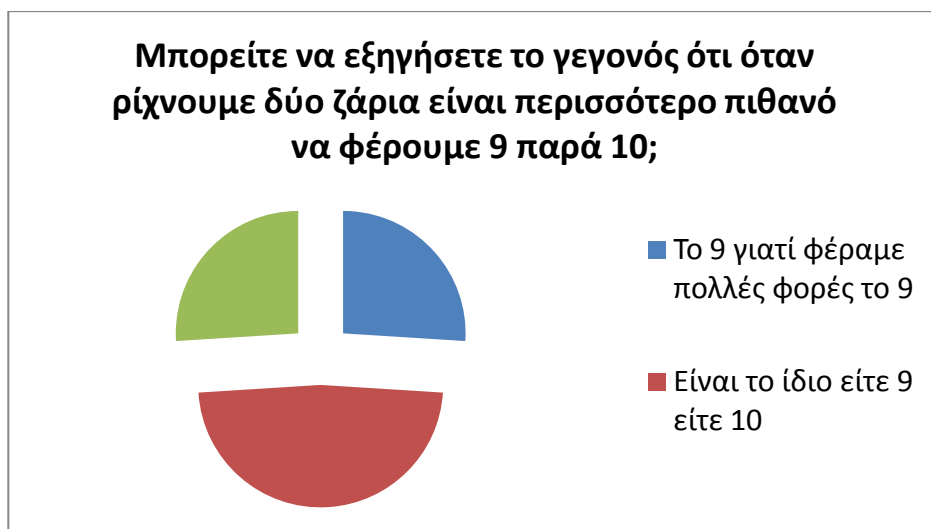
Ερώτημα 5^ο: Κατανοούν οι μαθητές ότι με σταθερό δειγματικό χώρο αν το ενδεχόμενο έχει περισσότερα στοιχεία, έχει μεγαλύτερη πιθανότητα;

A. Μπορείτε να εξηγήσετε το γεγονός ότι όταν ρίχνουμε δύο ζάρια είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 παρά 10;

Πίνακας 20. Μπορείτε να εξηγήσετε το γεγονός ότι όταν ρίχνουμε δύο ζάρια είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 παρά 10;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Το 9 γιατί φέραμε πολλές φορές το 9»	5	26
«Είναι το ίδιο είτε 9 είτε 10»	9	48
«Το 9 γιατί είναι πολλοί οι συνδυασμοί του»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 20. Μπορείτε να εξηγήσετε το γεγονός ότι όταν ρίχνουμε δύο ζάρια είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 παρά 10;



Σε αυτό το ερώτημα φαίνεται ότι μόνο το 26% αντιλαμβάνεται ότι επειδή τα ενδεχόμενα των συνδυασμών του εννιά είναι περισσότερα από τα ενδεχόμενα του δέκα τότε είναι περισσότερο πιθανό όταν ρίχνουμε δύο ζάρια να φέρουμε εννιά παρά δέκα. Σχεδόν οι μισοί υποστηρίζουν πως τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, ενώ το 26% θεωρεί με βάση την πειραματική πιθανότητα πως πιθανότερο είναι το εννιά γιατί του έτυχε τις περισσότερες

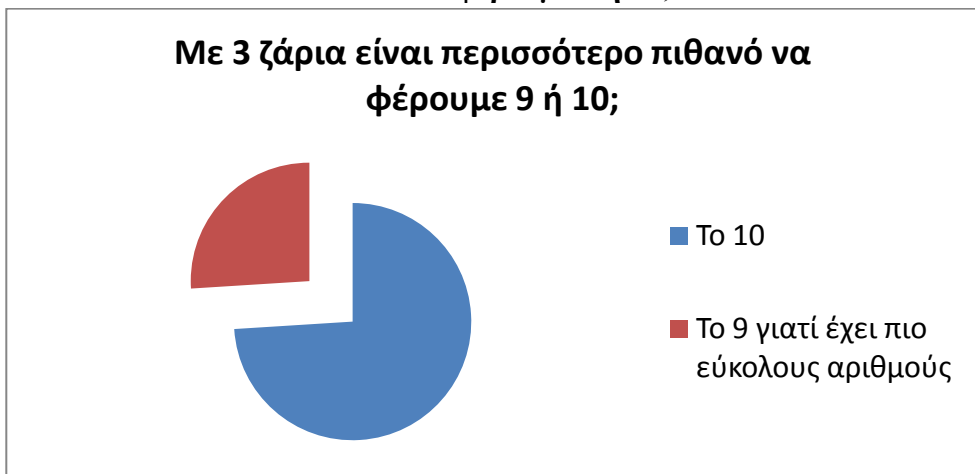
φορές. Πολλές προτάσεις διατυπώθηκαν όπως «είναι το ίδιο πιθανά, το 9 βγαίνει με το 6+3 και 5+4 και το 10 με το 5+5 και 6+4», «το 5+4 είναι το ίδιο με το 4+5» και «δεν παίζει ρόλο η σειρά, το ίδιο κάνει αν είναι ίδιοι οι αριθμοί». Σε αυτό το πείραμα δύο σταδίων οι μαθητές από μόνοι τους ξεκίνησαν να κάνουν την καταγραφή του δειγματικού χώρου και έθεσαν το θέμα αν το 5+4 είναι το ίδιο με το 4+5. Οι περισσότεροι θεώρησαν πως είναι ίδιο.

B. Τι συμβαίνει τώρα αν έχουμε 3 ζάρια; Είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 ή 10;

Πίνακας 21. Τι συμβαίνει τώρα αν έχουμε 3 ζάρια; Είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 ή 10;

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«Το 10»	14	74
«Το 9 γιατί έχει πιο εύκολους αριθμούς»	5	26
Σύνολο	19	100

Σχήμα 21. Τι συμβαίνει τώρα αν έχουμε 3 ζάρια; Είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 ή 10;



Εδώ παρατηρούμε πως οι μαθητές κατά 26% θεωρούν πως το εννιά έχει εύκολους αριθμούς. Οι υπόλοιποι μαθητές απάντησα με σιγουριά το 10 χωρίς όμως να έχουν δημιουργήσει τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

Ερώτημα 6^ο : Κατανοούν οι μαθητές το βέβαιο και αδύνατο ενδεχόμενο;

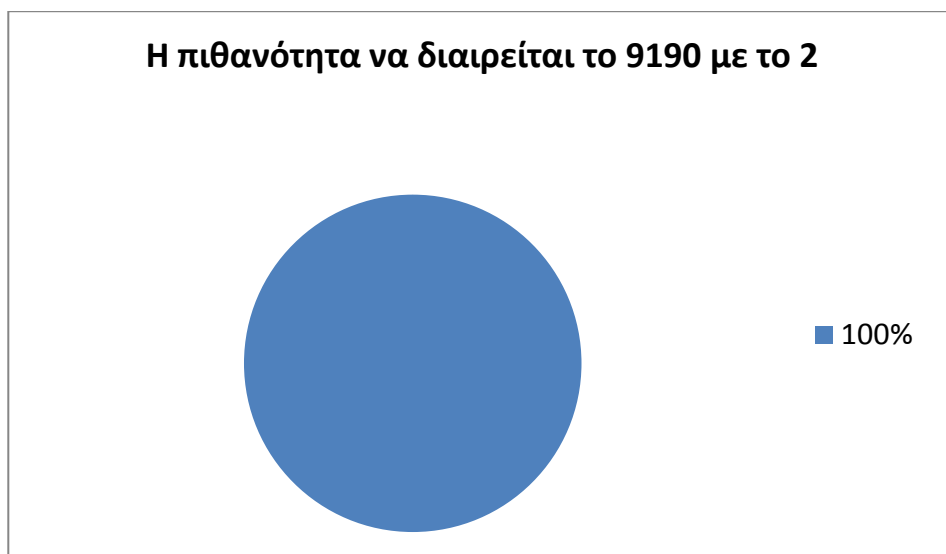
Δίνεται ο αριθμός 9190. Να βρείτε την πιθανότητα να διαιρείται κάθε φορά με τους εξής αριθμούς: 2,3,5,10. Τί παρατηρείτε;

Η πιθανότητα να διαιρείται με το 2

Πίνακας 22. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 2.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«100%»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 22. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 2.

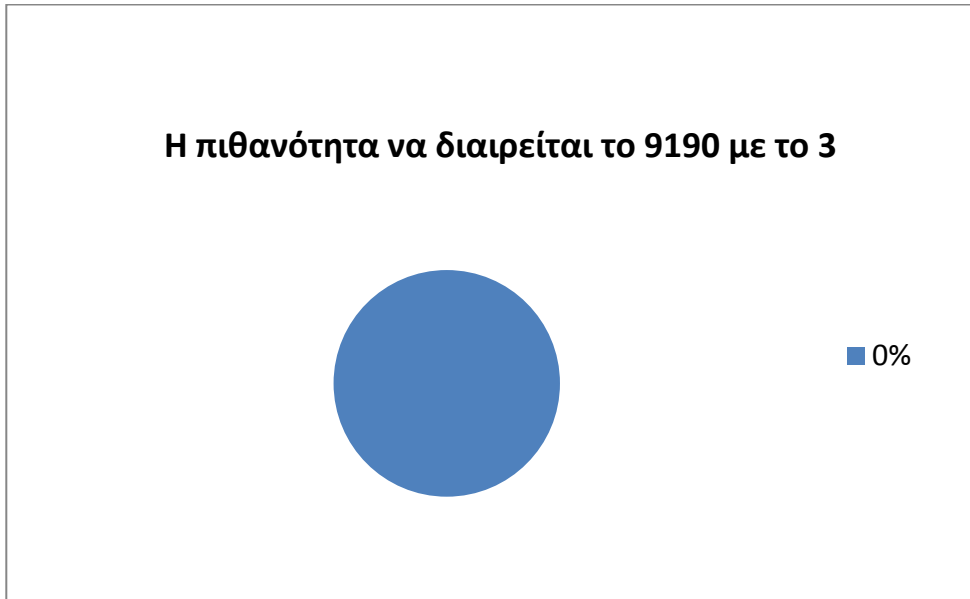


Η πιθανότητα να διαιρείται με το 3

Πίνακας 23. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 3.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«0%»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 23. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 3.

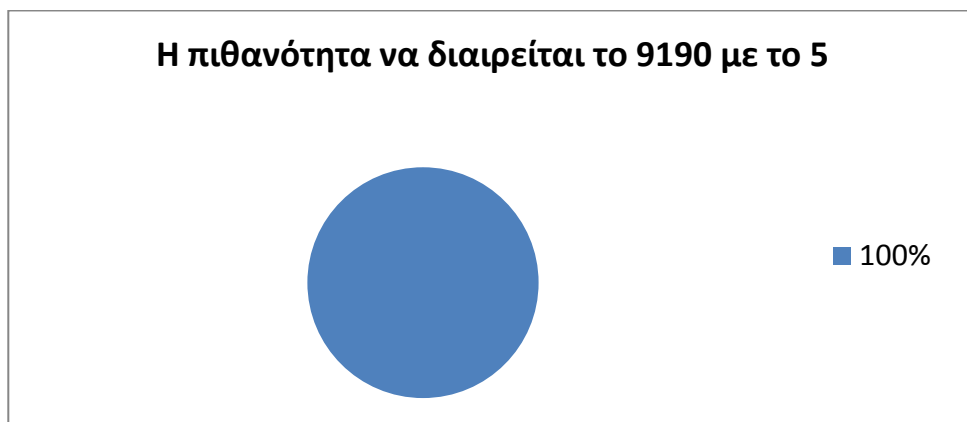


Η πιθανότητα να διαιρείται με το 5

Πίνακας 24. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 5.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«100%»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 24. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 5.

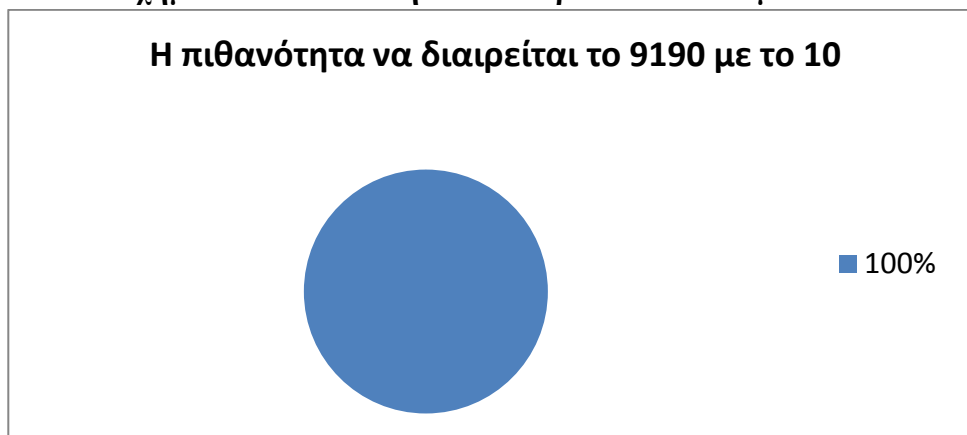


Η πιθανότητα να διαιρείται με το 10

Πίνακας 25. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 10.

Απαντήσεις παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
«100%»	19	100
Σύνολο	19	100

Σχήμα 25. Η πιθανότητα να διαιρείται το 9190 με το 10.



Στο τέλος τους ερωτήματος τα παιδιά απάντησαν πως είναι βέβαιο ότι το 9190 θα διαιρείται πάντα με τους αριθμούς δύο, πέντε και δέκα, ενώ είναι αδύνατο να διαιρεθεί ποτέ με το τρία. Οι μαθητές έδωσαν φυσικά αυτές τις απαντήσεις και φάνηκε πως δεν δυσκολεύτηκαν στο να βρουν τα ποσοστά και να κάνουν τις παρατηρήσεις τους σύμφωνα με το βέβαιο ενδεχόμενο που είναι το 100% και το αδύνατο που εκφράζεται με 0%.

2.10 Παρουσίαση αποτελεσμάτων - Αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με άλλες έρευνες

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1. Οι μαθητές φαίνεται πως μπορούν να διακρίνουν ένα πείραμα τύχης από ένα αιτιοκρατικό πείραμα.
2. Σε πειράματα τύχης ή αιτιοκρατικά πειράματα οι μαθητές φαίνεται πως μπορούν να συνδέσουν ποσοστό με πιθανότητα.
3. Σε πειράματα τύχης φαίνεται πως οι μαθητές εμπλέκουν το υποκειμενικό στοιχείο και δυσκολεύονται να καταγράψουν τον δειγματικό χώρο τους.
4. Οι μαθητές φαίνεται πως μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα και να κατανοήσουν ότι αν αυξάνεται ο δειγματικός χώρος ενώ το ζητούμενο ενδεχόμενο συνεχίζει να είναι απλό, τότε η πιθανότητα να κερδίσει μικραίνει.
5. Οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν ότι με σταθερό δειγματικό χώρο αν το ενδεχόμενο έχει περισσότερα στοιχεία, έχει μεγαλύτερη πιθανότητα;
6. Οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται το βέβαιο και το αδύνατο ενδεχόμενο.
7. Οι μαθητές φαίνεται πως με μικρή διδακτική παρέμβαση αλλάζουν τις απαντήσεις τους.

Κέντρο ενδιαφέροντος αποτελεί το γεγονός πως όσα παιδιά έδιναν αρχικά λανθασμένες απαντήσεις μετά από διδακτική παρέμβαση και καθοδηγητικές ερωτήσεις έβρισκαν από μόνα τους την σωστή απάντηση. Δίνεται επομένως έμφαση στην χρησιμότητα της διδασκαλίας της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προκειμένου οι μαθητές όχι μόνο να ανατρέψουν τις λανθασμένες εναλλακτικές τους ιδέες αλλά και να εμπλακούν σε διαδικασίες σκέψεων που θα τους οδηγήσουν στην ορθές απαντήσεις και στην καλύτερη αντίληψη για τον κόσμο γύρω τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με την έρευνα της Καφούση (1999), αφού και σε εκείνη εντοπίζουμε ισχυρό το υποκειμενικό στοιχείο το οποίο επηρεάζει αρνητικά τις απόψεις των παιδιών σχετικά με

τις πιθανότητες και τους δημιουργεί λανθασμένες εναλλακτικές ιδέες. Οι Φραγκίσκος και Σκουμπουρδή (2001) φαίνεται να συμφωνούν και να συμπληρώνουν αυτό το συμπέρασμα καθώς επισημαίνουν ότι η έλλειψη εμπειρίας από την πλευρά των μαθητών σχετικά με τις φυσικές καταστάσεις που περιέχουν έννοιες των πιθανοτήτων εξηγεί σε μεγάλο βαθμό την φτωχή ικανότητά τους στα θέματα αυτά. Οι ίδιοι συνάγουν το συμπέρασμα πως τα παιδιά πιστεύουν ότι κάποιοι αριθμοί στο ζάρι έρχονται ευκολότερα και κάποιοι δυσκολότερα, όπως διαφαίνεται και από την ανάλυση των ερευνητικών στοιχείων αυτής της έρευνας. Ο Κωνσταντίνου (2006) καταλήγει στην άποψη ότι οι μαθητές μετά απο διδακτική παρέμβαση αλλάζουν τις απόψεις τους σχετικά με τις πιθανότητες, το οποίο στοιχείο διαφαινόταν καθόλη τη διάρκεια συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων της παρούσας εργασίας.

Βιβλιογραφία

1. Ελληνική

- 1) Μπερτσακάς, Δ. – Τσιτσικλής, Γ. (2010), Εισαγωγή στις πιθανότητες, εκδόσεις Τζόλια, Αθήνα
- 2) Papoulis, A. (2002), πιθανότητες, τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες, εκδόσεις Τζόλια, 3^η έκδοση, Θεσσαλονίκη
- 3) Ρούσσα, Γ. (1998), Θεωρία πιθανοτήτων, εκδόσεις ΖΗΤΗ, β' έκδοση, Θεσσαλονίκη
- 4) Τζιαφέτα, Γ. (1984), Εισαγωγικά μαθήματα θεωρίας πιθανοτήτων, Ε.Μ.Π. , 2^η έκδοση, Αθήνα
- 5) Χασάπης, Δ. (2000), Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών, αριθμοί και αριθμητικές πράξεις, Μεταίχμιο επιστήμες, Αθήνα

2. Διαδίκτυο

- 1) Ιστορία της έννοιας της πιθανότητας, Μουσιάδης Πολυχρόνης, http://users.auth.gr/hara/courses/history_of_math/2012/%CE%99%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CF%84%CE%B7%CF%82%20%CE%AD%CE%BD%CE%BD%CE%BF%CE%B9%CE%B1%CF%82%20%CF%84%CE%B7%CF%82%20%CE%A0%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%CF%8223_05_12.pdf, πρόσβαση 1/12/13
- 2) Διαισθητικές αντιλήψεις μαθητών δημοτικού για την έννοια της πιθανότητας, Κωνσταντίνου Κώστας, Τάνου Γεωργία, Ηλία Ιλιάδα, Γαγάτσης Αθανάσιος, Τμήμα επιστημών της αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, http://www.pek.org.cy/Proceedings_2006/1.%20kefalaiο%201%20Themata%20mathimatikis%20Paideias/1.20.%20K.%20Konstantinou%20et%20al..pdf , πρόσβαση στις 22/1/14
- 3) Η εξέλιξη της σκέψης των παιδιών του δημοτικού όσον αφορά στις πιθανολογικές εκφράσεις, Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Καλαβάσης Φραγκίσκος,

http://www.ltee.gr/uploads/ltee_pubs/skoumpourdi/p008_skoumpourdi.pdf, πρόσβαση 15/12/13

- 4) Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό) Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων, «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα) –Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη», Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, <http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/news/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CF%8C%CF%82%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%8D.pdf> , πρόσβαση 1/12/13
- 5) Παράδοση: Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία, θεματική ενότητα: ερωτηματολόγιο-συνέντευξη, Ν. Ανδρεαδάκης, http://www.google.gr/url?sa=t&ret=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CDkQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.education.gr%2Fpftde%2Fmathimata_diktyo%2Fandreadakis%2Ferwthmatologio2006-2007.ppt&ei=fAhLUaXOO8y2Pb6dgZAD&usg=AFQjCNEhHB6aH9DKuy9sGc3MuXw_gnzGYw , πρόσβαση, 22/3/14
- 6) Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, <http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/news/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf> , πρόσβαση 1/12/13
- 7) Απόψεις παιδιών για την έννοια της πιθανότητας και ο βαθμός κατανόησης του τρόπου παρουσίασης των προβλημάτων, Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Καλαβάσης Φραγκίσκος,

<http://karydis.ionio.gr/hdml.gr/pdfs/conferences/152.pdf> .\),
πρόσβαση 22/1/14

- 8) Οι ιδέες των παιδιών της Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού για την έννοια της Πιθανότητας, Καρούση Σόνια, <http://www.hms.gr/apothema/?s=sa&i=4838>, πρόσβαση 1/2/14
- 9) Η πιθανολογική σκέψη στο Νηπιαγωγείο: έρευνα και προοπτικές, Αντωνόπουλος Κωνσταντίνος, <http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/handle/10889/3639> , πρόσβαση 1/2/14
- 10) Πιθανότητες ΣΤ' Δημοτικού, Αιζενμπαχ Σοφία, <http://www.mathlab.upatras.gr/wp-content/uploads/2013/09/%CE%A3%CF%84-%CE%A0%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B5%CF%82-.pdf> , πρόσβαση 22/2/14
- 11) Στοιχεία πιθανοτήτων και στατιστικής, Παγγέ Τζένη, <http://www.uoi.gr/schools/early-childhood/statistics/statistics.htm>, πρόσβαση 18/3/14

Παράρτημα-ερωτηματολόγιο

Δραστηριότητες:

1. Πιθανώς!

Χωριστείτε σε ομάδες των 4 ή 5 ατόμων. Κάθε ομάδα θα συζητήσει με τα μέλη της αν συμφωνεί ή αν διαφωνεί για κάθε μία από τις προτάσεις που αναγράφονται στις κάρτες και γιατί. Παρουσιάστε προφορικά και γραπτά τις θέσεις σας.

A) Ο πιο δύσκολος αριθμός να ρίξεις σε ένα ζάρι είναι το 6.

.....
.....

B) Ένα παιχνίδι είναι δίκαιο όταν το παίζεις σωστά χωρίς να παραβιάζεις τους κανόνες του.

.....
.....

Γ) Καθώς θα επιστρέφω από το σχολείο στο σπίτι, είναι σίγουρο ότι θα συναντήσω στη διαδρομή κάποιον γνωστό μου.

.....
.....

Δ) Δεν βρέχει ποτέ κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών.

.....
.....

E) Εάν αγοράσεις πολλά λαχεία, είναι σίγουρο ότι θα κερδίσεις.

.....
.....

ΣΤ) Είναι πιο εύκολο να φέρεις κορώνα παρά γράμματα όταν ρίχνεις ένα κέρμα.

.....
.....

2. Πέτρα, ψαλίδι, χαρτί!

Παίξτε για 10 γύρους το παιχνίδι. Καταγράψτε ποιος νίκησε κάθε φορά και με ποιον συνδυασμό.

Ποια η πιθανότητα να νικήσει κάποιος αν βγάλει χαρτί; Αν βγάλει πέτρα; Εκφράστε με κλάσμα και ποσοστό.

.....
.....

3. Ρίξτε ένα ζάρι για 10 φορές. Καταγράψτε τα αποτελέσματα. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούμε να φέρουμε με το ζάρι;

.....
.....

Θα μπορούσαμε να πετύχουμε τον αριθμό 7;

.....
.....

Ποια η πιθανότητα να φέρουμε ζυγό ή μονό αριθμό;

.....
.....

Ποια η πιθανότητα να φέρουμε με την πρώτη φορά 6;

.....
.....

Με την πρώτη φορά 8;

.....
.....

4. Λοταρία

«Σε μία μακρινή χώρα η λοταρία παίζεται με 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 4. Αυτές οι μπάλες είναι τοποθετημένες σε έναν σάκο. Για να παίξεις επιλέγεις έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 4. Κερδίζεις εφόσον ο αριθμός που έχεις επιλέξει είναι ίδιος με τον αριθμό που αναγράφεται στη μπάλα, η οποία κληρώνεται, τραβιέται δηλαδή τυχαία από τον σάκο.»

A. Πιο πιθανό είναι να νικήσεις ή να χάσεις σε αυτή τη λοταρία;
Ποια η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος στη λοταρία;

.....
.....

Οι υπεύθυνοι της λοταρίας συνειδητοποιούν ότι είναι πολύ εύκολο να κερδίσεις κι έτσι αποφασίζουν να δυσκολέψουν το τυχερό παιχνίδι. Η καινούρια λοταρία παίζεται πάλι με 4 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 4 και τοποθετημένες σε έναν σάκο. Όμως, για να παίξεις επιλέγεις 2 αριθμούς και κερδίζεις εφόσον αυτοί οι αριθμοί ταιριάζουν σε οποιαδήποτε σειρά με τις 2 μπάλες που κληρώνονται.»

B. Ποια είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα της λοταρίας;

.....
.....

Γ. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λότο;

.....
.....

Δ. Κατάφεραν οι υπεύθυνοι να δυσκολέψουν το παιχνίδι σε σχέση με πριν;

.....
.....

E. Μπορείς να προτείνεις δικούς σου τρόπους για να το δυσκολέψεις και άλλο;

.....
.....

ΣΤ. Τώρα το παιχνίδι παίζεται με τρεις κληρώσεις. Ποιος συνδυασμός είναι πιο πιθανό να νικήσει στο τυχερό παιχνίδι, ο αριθμός 123 ή 312; Γιατί;

.....
.....

5. Α. Μπορείτε να εξηγήσετε το γεγονός ότι όταν ρίχνουμε δύο ζάρια είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 παρά 10;

.....
.....

Β. Τι συμβαίνει τώρα αν έχουμε 3 ζάρια; Είναι περισσότερο πιθανό να φέρουμε 9 ή 10;

.....
.....

6. Δίνεται ο αριθμός 9190. Να βρείτε την πιθανότητα να διαιρείται κάθε φορά με τους εξής αριθμούς: 2,3,5,10. Τί παρατηρείτε;

.....
.....