

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή εργασία

**ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΑΡΤΙΔΑΣ ΚΑΙ
ΧΡΟΝΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ ΜΕ 2
ΣΕΙΡΙΑΚΑ ΣΤΑΔΙΑ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ
ΖΗΤΗΣΗ**

υπό

ΟΛΥΜΠΙΑΣ ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου & Αεροναυπηγού Μηχανικού
Πανεπιστημίου Πατρών, 2005

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος

2009



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 7777/1
Ημερ. Εισ.: 08-12-2009
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ
658.5
ΧΑΤ

© 2009 Χατζηκωνσταντίνου Ολυμπία

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής

(Επιβλέπων)

Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος
Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Δημήτριος Παντελής
Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης
Λέκτορας Καθηγητής Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

*Στους γονείς μου,
Δημήτρη και Αριστέα
και στην αδερφή μου
Μαρία*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που μου προσέφεραν πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση κατά το διάστημα της εκπόνησης της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Θεωρώ ειλικρινή υποχρέωση να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον καθηγητή κ. Γ. Λυμπερόπουλο τόσο για την καθοδήγηση του ως επιβλέπων της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αλλά κυρίως για όλα αυτά που έχω αποκομίσει κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μου μαζί του.
- Τον επίκουρο καθηγητή κ. Δ. Παντελή για την εποικοδομητική και αδιάκοπη συνεισφορά στην πορεία ολοκλήρωσης της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.
- Και τον λέκτορα κ. Γ. Κοζανίδη για την άψογη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τους γονείς μου για την στήριξη που μου παρείχαν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Και τους φίλους μου και συνεργάτες που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής χρηματοδοτήθηκε από το έργο «03ΕΔ913 – Βελτιστοποίηση προγραμματισμού παραγωγής και διανομής προϊόντων σε χημική βιομηχανία παραγωγής ρητίνης PET» που συγχρηματοδοτείται στο πλαίσιο της Πράξης ΠΕΝΕΔ 2003, του Μέτρου 8.3 του Ε.Π. Ανταγωνιστικότητα – Γ' Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης, από πόρους του Δημόσιου (85%) και Ιδιωτικού Τομέα (15%). Το 75% της Δημόσιας Δαπάνης προήλθε από την Ευρωπαϊκή Ένωση – Ευρωπαϊκό Κοινοτικό Ταμείο, ενώ το 25% από το Ελληνικό Δημόσιο – Υπουργείο Ανάπτυξης – Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζεται ένα πρόβλημα βέλτιστου χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής (*Stochastic Economic Lot Scheduling Problem* ή SELSP) των δύο διαφορετικών προϊόντων που παράγει μία βιομηχανία διάταξης τύπου γραμμής παραγωγής. Ο κάθε τύπος προϊόντος παρέχεται σε δύο διαφορετικές μορφές (χύδην και σάκου) οι οποίες αποθηκεύονται σε δύο ξεχωριστούς χώρους αποθήκευσης τελικών προϊόντων πεπερασμένης χωρητικότητας. Η ζήτηση για κάθε τύπο προϊόντος και για κάθε μορφή του θεωρείται τυχαία ενώ όλοι οι χρόνοι μετάβασης της παραγωγικής διαδικασίας από ένα παραγόμενο προϊόν σε κάποιο άλλο θεωρούνται καθοριστικοί. Το συγκεκριμένο πρόβλημα μοντελοποιήθηκε ως μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (*Markov Decision Process* ή MDP) διακριτού χρόνου, όπου σε κάθε περίοδο αποφασίζεται αν θα πρέπει να αλλάξει η ρύθμιση της παραγωγικής διαδικασίας (*setup*) ώστε να ξεκινήσει η αλλαγή προϊόντος σε μία γειτονική βαθμίδα από αυτή που παραγόταν ή όχι. Η απόφαση αυτή προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, που ορίζεται από την υφιστάμενη ρύθμιση της παραγωγικής διαδικασίας και τα επίπεδα αποθέματος όλων των βαθμίδων (προϊόντων) στις δύο αποθήκες. Επίσης σε κάθε περίοδο θα πρέπει να αποφασισθεί αν θα πρέπει να σακιαστεί κάποιο προϊόν που βρίσκεται αποθηκευμένο στον πρώτο αποθηκευτικό χώρο ώστε να αυξηθεί το απόθεμα του δεύτερου ή όχι. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου προσδοκώμενου κόστους λειτουργίας της μονάδας στον άπειρο χρονικό ορίζοντα, μέσω της επίλυσης του προβλήματος MDP με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Το σύστημα επιλύεται παράλληλα και με προσομοίωση και παρουσιάζονται συγκριτικά τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν

από τον ακριβή τρόπο επίλυσης και την προσομοίωση για διάφορα σενάρια κατανομής της ζήτησης ανά προϊόν και ανά στάδιο. Ακόμη εξετάζεται το πώς επηρεάζεται η βέλτιστη τιμή του μέσου αναμενόμενου κόστους από παράγοντες όπως η κατανομή του συνολικού αποθηκευτικού χώρου μεταξύ των δύο σταδίων αποθήκευσης, η μεταβολή των παραμέτρων κόστους και η μεταβολή του ρυθμού σακιάσματος προϊόντων. Στη συνέχεια απλοποιείται το μοντέλο μέσω της απαλοιφής της ζήτησης σε μορφή σάκου και συγκρίνονται και πάλι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση του ακριβούς και ενός ευρετικού αλγορίθμου. Τέλος εξετάζεται το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους λειτουργίας που προκύπτει από τον ευρετικό αλγόριθμο σε σύγκριση με τη βέλτιστη λύση του ακριβούς αλγορίθμου για διάφορα σενάρια.

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | ΕΙΣΑΓΩΓΗ | 9 |
| 1.1 | ΓΕΝΙΚΑ | 9 |
| 1.2 | ΣΚΟΠΟΣ -ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | 10 |
| 1.3 | ΔΟΜΗ - ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ | 10 |
| 2 | ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ | 12 |
| 3 | ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ | 18 |
| 3.1 | ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ | 18 |
| 3.2 | ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ | 22 |
| 4 | ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ | 27 |
| 4.1 | ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΕΝΑΡΙΩΝ | 27 |
| 4.2 | ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΑΝΑ ΣΤΑΔΙΟ | 31 |
| 4.3 | ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΚΟΣΤΟΥΣ | 34 |
| 4.4 | ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΣΑΚΙΑΣΜΑΤΟΣ | 36 |
| 4.5 | ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΝΟΣ ΜΟΝΟ ΣΤΑΔΙΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ | 37 |
| 5 | ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΥΡΕΤΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ | 39 |
| 5.1 | ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ | 39 |
| 5.2 | ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΥΡΕΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ | 39 |
| 6 | ΣΥΝΟΨΗ, ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ | 43 |
| 6.1 | ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΠΑΡΤΙΔΩΝ | 43 |
| | ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 45 |
| | ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ | 48 |

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Μία από τις σχετικά σύγχρονες μεθόδους επίλυσης στοχαστικών συστημάτων είναι ο δυναμικός προγραμματισμός, μέσω του οποίου αποδίδεται η συνολικά βέλτιστη λύση ενός προβλήματος. Ωστόσο, η δυσκολία απεικόνισης ενός συστήματος με μαθηματικές σχέσεις και εξισώσεις καθώς και ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσής του με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού αυξάνει όσο αυξάνει η πολυπλοκότητα του πραγματικού συστήματος. Με στόχο τόσο τη μείωση της πολυπλοκότητας των δημιουργουμένων μοντέλων όσο και του χρόνου επίλυσής τους, αναπτύχθηκαν εναλλακτικές μέθοδοι επίλυσης όπως είναι και αυτή της προσομοίωσης. Μία μέθοδος προσομοίωσης δεν περιλαμβάνει μεθόδους βελτιστοποίησης παρά μόνο προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματος με βάση τους κανόνες λειτουργίας που εισάγονται στο μοντέλο προσομοίωσης. Για το λόγο αυτό, η ποιότητα της αποδιδόμενης λύσης είναι χειρότερη από αυτή που αποδίδεται από μία αναλυτική μέθοδο επίλυσης όπως είναι ο δυναμικός προγραμματισμός, ενώ αντιθέτως ο χρόνος επίλυσης είναι αισθητά ταχύτερος. Οι δύο αυτοί διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης του ίδιου πραγματικού προβλήματος έχουν εντελώς διαφορετικές απαιτήσεις προκειμένου το αποτέλεσμα το οποίο εξάγουν να είναι μαθηματικά αλλά και ρεαλιστικά αποδεκτό. Οι απαιτήσεις αυτές οδηγούν στα αντίστοιχα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου τα οποία θα αναλυθούν από την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία. Τα πλεονεκτήματα της κάθε μεθόδου καλύπτουν τα μειονεκτήματα της άλλης με αποτέλεσμα όχι μόνο η μία να μη παραγκωνίζει την άλλη αλλά αντιθέτως να αλληλοσυμπληρώνονται ως επιστημονικά εργαλεία επίλυσης σύνθετων συστημάτων.

1.2 Σκοπός -μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία διαμορφώνονται δύο προγράμματα προσέγγισης μίας ελληνικής χημικής βιομηχανίας παραγωγής ρητίνης PET, ένα δυναμικό και ένα προσομοίωσης. Η εταιρεία δραστηριοποιείται κυρίως στην παραγωγή διαφορετικών τύπων ρητίνης με συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, την οποία προμηθεύονται κυρίως εταιρείες εμφιαλώσεως ύδατος ή αναψυκτικών είτε σε χύδην μορφή είτε σε μορφή σάκου.

Τα δύο προγράμματα έχουν ως στόχο την εύρεση των βέλτιστων πολιτικών οι οποίες ελαχιστοποιούν το μέσο προσδοκώμενο κόστος της παραγωγικής διαδικασίας. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό μία τέτοια σύγκριση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού από τα αποτελέσματα των δύο προγραμμάτων μπορεί να υπολογιστεί το ποσοστιαίο σφάλμα της λύσης της προσομοίωσης του πραγματικού μοντέλου σε σύγκριση με τη βέλτιστη λύση του δυναμικού προγράμματος της παραγωγικής διαδικασίας, καθώς επίσης μπορεί να γίνει σύγκριση στους υπολογιστικούς χρόνους επίλυσης των συγκεκριμένων προγραμμάτων και να βγουν σημαντικά συμπεράσματα.

1.3 Δομή - περιεχόμενα

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο 2^ο κεφάλαιο γίνεται μία βιβλιογραφική επισκόπηση εργασιών που ασχολούνται με το πρόβλημα του βέλτιστου στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού παρτίδων (SELSP) και τις εφαρμογές του σε διάφορα πραγματικά προβλήματα.

Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή του στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού και της επίλυση του MDP μοντέλου του πραγματικού προβλήματος με 2 τύπους προϊόντων.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα εξέτασης διαφόρων περιπτώσεων με διαφορετική κατανομή της ζήτησης σε κάθε προϊόν, με δυναμικό προγραμματισμό και προσομοίωση και τα αντίστοιχα συμπεράσματα που προκύπτουν.

Στο 5^ο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή του ευρετικού αλγορίθμου καθώς επίσης παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του σε διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Και τέλος στο 6^ο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη του περιεχομένου της μεταπτυχιακής εργασίας καθώς και παρουσίαση των διαφόρων προτάσεων για μελλοντική έρευνα.

2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Εξαιτίας της θεωρητικής και πρακτικής σημασίας του, το SELSP έχει λάβει σημαντική προσοχή στη βιβλιογραφία. Μία περιεκτική ανασκόπηση σχετικών εργασιών περιέχεται στην εργασία των Sox et al. (1999) και Winands et al. (2005). Από αυτές τις εργασίες προκύπτει ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την επίλυση του SELSP. Η πρώτη αφορά την ανάπτυξη ενός κυκλικού προγράμματος παραγωγής το οποίο προκύπτει από τη χρήση μίας καθοριστικής προσέγγισης του στοχαστικού προβλήματος κατά την οποία αναπτύσσεται ένας κανόνας ελέγχου που εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο πρόγραμμα. Η βιβλιογραφία σε αυτή την προσέγγιση είναι σχετικά πλούσια και έχει αυξηθεί εξαιτίας της ανάπτυξης του καθοριστικού προβλήματος ELSP. Μερικές από τις πιο αντιπροσωπευτικές εργασίες που εφαρμόζουν κυκλικό πρόγραμμα παραγωγής είναι ο Gallego (1990, 1994), οι Bourland και Yano (1994), οι Fransoo et al. (1995), οι Federgruen και Katalan (1996), οι Leachman και Gascon (1998), οι Anupindi και Tayur (1998), οι Markowitz et al. (2000) και ο Markowitz και Wein (2001). Η ελκυστικότητα αυτής της προσέγγισης έγκειται στην ικανότητα να εξασφαλίζει μια πρακτική επίλυση σε προβλήματα με μεγάλο αριθμό προϊόντων. Για παράδειγμα, ο δυναμικός προγραμματισμός αποσυνθέτει ένα πρόβλημα σε 2 ευκολότερα υπο-προβλήματα όπως η διαδοχικότητα και η παρτιδοποίηση τα οποία επιλύονται διαδοχικά. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν ανταποκρίνεται θετικά σε τυχαίες αλλαγές της ζήτησης.

Η άλλη προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιείται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία για την επίλυση του SELSP, βασίζεται στην ανάπτυξη ενός δυναμικού προγράμματος παραγωγής το οποίο καθορίζει ποιο προϊόν θα παραχθεί, λαμβάνοντας υπόψη την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, για παράδειγμα το επίπεδο

αποθέματος του προϊόντος για το οποίο βρίσκεται στημένη η παραγωγή (local rule), ή τη γενική κατάσταση του συστήματος (global rule). Ο Zipkin (1986) είναι ένα ενδεικτικό παράδειγμα ο οποίος προσεγγίζει τη δυναμική αλληλουχία χρησιμοποιώντας μία «local» πολιτική μεγέθους παρτίδας τύπου (s, Q) . Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιεί είτε ένα ευρετικό αλγόριθμο είτε την ανάλυση του βέλτιστου ελέγχου του προβλήματος. Η βιβλιογραφία που περιγράφει τις προσεγγίσεις της δυναμικής αλληλουχίας και ειδικότερα το «ρεύμα» των εργασιών που υιοθετεί την προοπτική του βέλτιστου ελέγχου είναι αρκετά περιορισμένο, εξαιτίας της δυσκολίας εύρεσης αναλυτικής λύσης ακόμη και σε προβλήματα μικρού μεγέθους, γεγονός το οποίο μετατρέπει σε υπολογιστική πρόκληση την αριθμητική επίλυση προβλημάτων ρεαλιστικού μεγέθους.

Από τους πρώτους ερευνητές που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα SELSP είναι οι Vergin και Lee (1978) οι οποίοι εξέτασαν απλούς ευρετικούς αλγορίθμους δυναμικής αλληλουχίας για το πρόβλημα SELSP με κόστος μετάβασης αλλά χωρίς μεταβατικούς χρόνους. Το συμπέρασμά τους είναι ότι ο ευρετικός αλγόριθμος που υπερτερεί είναι εκείνος όπου σε κάθε περίοδο υποδεικνύει τη μετάβαση της παραγωγής στο προϊόν με τις λιγότερες απομένουσες μέρες σε στοκ ή τις περισσότερες μέρες με απόθεμα σε έλλειψη, μεταξύ φυσικά των προϊόντων που έχουν λιγότερες μέρες σε διαθέσιμο στοκ από τον κρίσιμο αριθμό ημερών. Διαφορετικά εάν το προϊόν το οποίο παράγεται δεν υπερβαίνει το μέγιστο επίπεδο αποθέματος (απόλυτο και σχετικό) τότε η παραγωγή συνεχίζεται την επόμενη περίοδο, ενώ σε διαφορετική περίπτωση η παραγωγή παραμένει ανενεργή την επόμενη περίοδο.

Ο Graves (1980) μορφοποίησε το SELSP ως πρόβλημα διακριτού χρόνου στοχαστικού ελέγχου με δυναμική αλληλουχία. Πρώτα επίλυσε το πρόβλημα ενός

προϊόντος με κόστη διατήρησης και έλλειψης αποθέματος, καθώς και κόστος μετάβασης αλλά χωρίς μεταβατικούς χρόνους, όπου η απόφαση που πρέπει να ληφθεί σε κάθε περίοδο είναι αν η παραγωγική μονάδα θα παράγει ή θα μείνει ανενεργή. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε τη λύση του προβλήματος του ενός προϊόντος ως βάση μιας ευρετικής προσέγγισης για την επίλυση του προβλήματος πολλαπλών προϊόντων. Σύμφωνα με αυτή την ευρετική προσέγγιση, οι συγκρούσεις (conflicts) για τον προγραμματισμό διαφορετικών προϊόντων επιλύονται συγκρίνοντας τα διαφορεικά κόστη που προκύπτουν για κάθε μεμονωμένο και κάθε «σύνθετο» προϊόν, με βάση την ανάλυση του ενός προϊόντος. Το σύνθετο προϊόν είναι μία έννοια που εισάγει ο Graves για να βοηθήσει στην πρόληψη πιθανών συγκρούσεων στον προγραμματισμό του προβλήματος πολλαπλών προϊόντων. Η γενικότερη ιδέα είναι ότι το σύνθετο απόθεμα διαφόρων προϊόντων θα έπρεπε να υποδεικνύει την ανάγκη για άμεση παραγωγή στην περίπτωση όπου το απόθεμα του κάθε προϊόντος ξεχωριστά δεν υποδείκνυε μία τέτοια ανάγκη επειδή η ποσότητά του θα ήταν μόλις επαρκής.

Οι Qiu και Loulou (1995) μελετούν το πρόβλημα SELSP με ζητήσεις που ακολουθούν κατανομή Poisson, καθοριστικούς χρόνους επεξεργασίας και μετάβασης, κόστη μετάβασης και κόστη έλλειψης και διατήρησης αποθέματος. Οι συγγραφείς μοντελοποιούν το πρόβλημα ως μία ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (*Semi-Markov Decision Process*) που έχει ως στόχο τον καθορισμό του προϊόντος που θα παραχθεί -εφόσον παραχθεί κάποιο προϊόν- σε κάθε «στιγμή αναθεώρησης» του συστήματος, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το *εκπιπόμενο (discounted)* κόστος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα. Ως στιγμές αναθεώρησης ορίζονται εκείνα τα χρονικά σημεία όπου είτε η παραγωγική μονάδα είναι ανενεργή και κάποιες ζητήσεις έχουν έρθει, είτε κάποιο προϊόν έχει μόλις παραχθεί και η παραγωγική μονάδα είναι ελεύθερη. Για να

παράγουν σχεδόν βέλτιστες πολιτικές ελέγχου χρησιμοποιούν διαδοχικές προσεγγίσεις (*successive approximations*) επιλύοντας το πρόβλημα σε έναν περικομμένο (*truncated*) χώρο καταστάσεων αποθέματος και υπολογίζοντας τα όρια σφάλματος λόγω της περικοπής. Στην παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων τους για προβλήματα δύο προϊόντων αναφέρουν ότι τα συστήματα με περισσότερα προϊόντα περιορίζονται από την κατάρα της διαστατικότητας «*curse of dimensionality*».

Τέλος, οι Karmarkar και Yoo (1994) και οι Sox και Muckstadt (1997) αναπτύσσουν στοχαστικά μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα για το SELSP που θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν και ως SCLSP. Στη μοντελοποίησή τους θεωρούν καθοριστικούς χρόνους παραγωγής και αλλαγών, και χρησιμοποιούν την μέθοδο της χαλάρωσης Lagrange για την εύρεση βέλτιστων ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων σε προβλήματα μικρού μεγέθους.

Επίσης υπάρχει μια πληθώρα εργασιών δυναμικού προγραμματισμού που περιγράφουν συστήματα που υπόκεινται σε βλάβες και βασίζονται στη προσέγγιση ελέγχου ροής. Αρκετές εργασίες της δεδομένης βιβλιογραφίας υποθέτουν ότι η δυναμικότητα της παραγωγής αλλάζει συχνά εξαιτίας της αστοχίας και επισκευής των μηχανών, ενώ ο ρυθμός της ζήτησης παραμένει σταθερός.

Οι Kimemia και Gershwin (1983) βρίσκονται ανάμεσα στους πρώτους ερευνητές που δείχνουν ότι η βέλτιστη πολιτική ελέγχου για τα δεδομένα συστήματα είναι μία πολιτική ισοσταθμισμένου σημείου «*hedging point policy*» σύμφωνα με την οποία διατηρείται ένα θετικό πλεόνασμα αποθεμάτων των προϊόντων προκειμένου να καλυφθούν πιθανές ελλείψεις που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια αστοχίας των μηχανών.

Όταν ένα σύστημα δεν είναι απόλυτα προσαρμοσμένο αλλά απαιτεί ρυθμίσεις, οι Sharifnia et al. (1991) προτείνουν μία πολιτική προγραμματισμού «setup» η οποία χρησιμοποιεί «διαδρόμους» στο χώρο που ένα προϊόν βρίσκεται σε πλεόνασμα ή έλλειμμα καθορίζοντας τη περίοδο που πρέπει να γίνει αλλαγή στην παραγωγή προκειμένου η τροχιά του αποθέματος να οδηγηθεί στην επιθυμητή κατεύθυνση. Επίσης ερευνούν λεπτομερώς την περίπτωση όπου η επιθυμητή τροχιά οδηγεί στο ισοσταθμισμένο σημείο, και δείχνουν ότι σε αυτή την περίπτωση η τροχιά του αποθέματος που βρίσκεται σε πλεόνασμα ή έλλειμμα μπορεί να μην οδηγήσει σε ολοκληρωμένο κύκλο παραγωγής.

Σε μία άλλη σχετική εργασία οι Liberopoulos και Caramanis (1997) χρησιμοποιούν μία προσέγγιση MDP για την εύρεση του βέλτιστου ρυθμού παραγωγής και της μεταβατικής πολιτικής μιας παραγωγικής μονάδας που υπόκειται σε βλάβες και παρουσιάζει ασήμαντους ή τυχαίους χρόνους μετάβασης προκειμένου να ικανοποιήσει τη σταθερή τυχαία ζήτηση των δύο προϊόντων έχοντας κάνει υποθέσεις που αφορούν τα κόστη διατήρησης αποθέματος ή ελλείμματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της έρευνάς τους αποκαλύπτουν ότι η βέλτιστη μεταβατική πολιτική είναι μία πολιτική τύπου «διαδρόμου» η οποία ορίζει ένα ισοσταθμισμένο περιορισμένο κύκλο.

Παράλληλα οι Elhafsi και Bai (1997) ακολουθούν μία όμοια προσέγγιση για ένα όμοιο σύστημα παραγωγής 2 προϊόντων και δείχνουν ότι η δομή της βέλτιστης πολιτικής μετάβασης είναι μία παρόμοια πολιτική τύπου «διαδρόμου». Στην δική τους περίπτωση, ο διάδρομος είναι είτε ορθογώνιος είτε παράλληλος και εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος.

Η μελέτη του προβλήματος SELSP στην παρούσα διατριβή ακολουθεί το ρεύμα των εργασιών της βιβλιογραφίας που θεωρούν το SELSP ως ένα σύνθετο πρόβλημα

ελέγχου, διακριτού χρόνου, περιοδικής αναθεώρησης, με δυναμική διαδοχή της παραγωγής προϊόντων και σφαιρικό τρόπο επιλογής μεγέθους παρτίδας, και σχετίζεται περισσότερο με τις εργασίες του Graves (1980) και των Qiu και Loulou (1995). Η συγκεκριμένη προσέγγιση σχετίζεται επίσης και με τις εργασίες των Sharifnia et al. (1991), των Liberopoulos και Caramanis (1997), και των Elhafsi και Bai (1997) οι οποίοι χρησιμοποιούν μία ποιοτικώς όμοια προσέγγιση που διασφαλίζει μία πολιτική μετάβασης τύπου «διαδρόμου» όπως θα παρουσιαστεί στην Ενότητα 6.2. Η προσέγγιση της παρούσας ενότητας της διατριβής διαφέρει από προηγούμενες εργασίες στο ότι δημιουργεί μία νέα παραλλαγή του SELSP όπου οι μοναδικές επιτρεπτές αλλαγές είναι από μία βαθμίδα προϊόντος στην αμέσως υψηλότερη ή χαμηλότερη βαθμίδα. Αυτό το χαρακτηριστικό κάνει προβλήματα με μεγάλο αριθμό βαθμίδων προσιτά από ευρετικές μεθόδους επίλυσης που βασίζονται στην προσέγγιση του αρχικού προβλήματος με μικρότερα (ως προς τον αριθμό βαθμίδων) υπο-προβλήματα που είναι αριθμητικά ευκολότερο να επιλυθούν όπως θα παρουσιαστεί στην Ενότητα 5.

Οι Leachman και Gascon (1988) αναπτύσσουν μια δυναμική περιοδική πολιτική ελέγχου που καθορίζει ποια προϊόντα θα παραχθούν και σε ποιες ποσότητες με βάση τις δυναμικά υπολογισμένες λύσεις καθοριστικών ELSP που λαμβάνουν υπόψη μη στάσιμες κατανομές ζήτησης. Η λύση που προκύπτει από το καθοριστικό μοντέλο τροποποιείται εάν δύο ή περισσότερα προϊόντα είναι κοντά στο να εξαντληθούν τα αποθέματά τους ή βρίσκονται ήδη σε κατάσταση έλλειψης.

3 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.1 Περιγραφή

Ο χρονικός προγραμματισμός της παραγωγής πολλαπλών προϊόντων, με τυχαία ζήτηση, σε μία παραγωγική μονάδα με περιορισμένη παραγωγική δυναμικότητα, σημαντικά κόστη και χρόνους μετάβασης από προϊόν σε προϊόν, είναι ένα κλασικό πρόβλημα στην ερευνητική περιοχή του προγραμματισμού παραγωγής, που συχνά αναφέρεται ως *στοχαστικό πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής* (*Stochastic Lot Scheduling Problem* ή SLSP). Οι Sox et al. (1999) διακρίνουν δύο εκδοχές του SLSP: το *στοχαστικό πρόβλημα του βέλτιστου χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής* (*Stochastic Economic Lot Scheduling Problem* ή SELSP) και το *στοχαστικό πρόβλημα της επιλογής μεγέθους παρτίδων παραγωγής σε συστήματα παραγωγής με περιορισμένη δυναμικότητα* (*Stochastic Capacitated Lot Sizing Problem* ή SCLSP). Το SELSP υποθέτει άπειρο ορίζοντα προγραμματισμού και στάσιμες κατανομές ζήτησης, ενώ το SCLSP υποθέτει πεπερασμένο ορίζοντα προγραμματισμού και επιτρέπει μη στάσιμες κατανομές ζήτησης. Το SELSP είναι κατάλληλο για συστήματα παραγωγής συνεχούς ροής, που απαντώνται συνήθως σε *βιομηχανίες διεργασιών* (*process industries*), ενώ το SCLSP εφαρμόζεται καλύτερα σε βιομηχανίες παραγωγής διακριτών τεμαχίων, όπως είναι οι βιομηχανίες παραγωγής Η/Υ και ηλεκτρονικών, ηλεκτρικού εξοπλισμού και συσκευών, εξοπλισμού μεταφορών, μηχανών και μηχανισμών, μεταλλικών προϊόντων, ξύλου και επίπλου, κτλ. Από την άλλη μεριά, οι βιομηχανίες διεργασιών επεξεργάζονται ύλη που ρέει συνεχώς, όπως συμβαίνει με προϊόντα πετρελαίου και άνθρακα, μεταλλουργικά προϊόντα, μη-μεταλλικά ανόργανα προϊόντα (π.χ. κεραμικά, γυαλί, τσιμέντο), βασικές χημικές ύλες, τρόφιμα και ποτά, προϊόντα χαρτιού, κτλ. Γενικά, οι βιομηχανίες διεργασιών είναι

έντασης κεφαλαίου και εστιάζουν στην παραγωγή προϊόντων σε μεγάλες ποσότητες και μικρή ποικιλία. Σε μια τυπική βιομηχανία διεργασιών η παραγωγή είναι συνεχής και τα διαφορετικά προϊόντα είναι στην πραγματικότητα διαφορετικές παραλλαγές της ίδιας οικογένειας προϊόντων που διαφέρουν ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά, όπως ποιότητα, μέγεθος, πάχος, κτλ.

Η καθοριστική εκδοχή του SELSP, το λεγόμενο ELSP, έχει τύχει αξιολογής προσοχής στη βιβλιογραφία τις τελευταίες δεκαετίες (Elmaghraby (1978) και Salomon (1991)). Οι αναλυτικές και ευρετικές λύσεις του ELSP παράγουν κυκλικά προγράμματα παραγωγής, που σε πολλά εργοστάσια παραγωγής πολλαπλών βαθμίδων μιας οικογένειας προϊόντων παίρνουν τη μορφή άκαμπτων «τροχών» παραγωγής, όπου όλες οι βαθμίδες παράγονται διαδοχικά σε κάθε κύκλο, ξεκινώντας από τη χαμηλότερη βαθμίδα, πηγαίνοντας στη υψηλότερη και επιστρέφοντας πίσω στη χαμηλότερη. Ενδιαφέρουσες επίσης μπορούν να χαρακτηριστούν οι πολιτικές που η παραγωγή αλλάζει στο προϊόν του οποίου το επίπεδο αποθέματος μηδενίζεται πρώτο (clearing policies), και το οποίο μπορεί ίσως να οδηγήσει τις τροχιές του αποθέματος να ακολουθούν χαοτική συμπεριφορά, δηλαδή να εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες ή να είναι μη-περιοδικές κτλ, όπως παρουσιάζεται από τους Chase et al. (1993). Δυστυχώς, τα κυκλικά προγράμματα παραγωγής δεν λειτουργούν καλά στο στοχαστικό πρόβλημα για δύο λόγους. Πρώτον, διότι αυτά εστιάζουν στο μέγεθος της παρτίδας και όχι στη δυναμική κατανομή της παραγωγικής δυναμικότητας, που είναι απαραίτητη σε προβλήματα όπου η ζήτηση μεταβάλλεται τυχαία, και δεύτερον, διότι στο στοχαστικό πρόβλημα τα αποθέματα των τελικών προϊόντων αποσκοπούν όχι μόνο στο να μειώσουν τον αριθμό των αλλαγών, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του καθοριστικού προβλήματος, αλλά και στο να δημιουργήσουν ένα προστατευτικό φράγμα έναντι της

ενδεχόμενης έλλειψης αποθέματος. Στο στοχαστικό πρόβλημα, η επιλογή του μεγέθους παρτίδας και η κατανομή της παραγωγικής δυναμικότητας πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ταυτόχρονα, ενώ η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα παραγωγής όπως περιγράφεται από Graves (1980).

Στη συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία μελετούμε μια παραλλαγή του SELSP στην οποία μια παραγωγική μονάδα πρέπει να παράγει και είτε να σακιάσει είτε όχι προϊόν. Η ζήτηση που δεν ικανοποιείται άμεσα από το απόθεμα χάνεται ενώ η διαθεσιμότητα των πρώτων υλών θεωρείται ότι είναι απρόσκοπτη. Η μονάδα παράγει ασταμάτητα και με σταθερό ρυθμό ενώ η επιλογή του συστήματος να σακιάσει με σταθερό ρυθμό 2 διαφορετικές βαθμίδες μιας οικογένειας προϊόντων είναι μεταβλητή απόφαση. Σε πολλές βιομηχανίες είναι σύνηθες να διαιρείται το ενδιάμεσο προϊόν που παράγεται κατά την διάρκεια μιας μετάβασης, έστω από τη βαθμίδα A στην βαθμίδα B, σε δύο μισά, και να χαρακτηρίζεται το πρώτο μισό ως A και το δεύτερο μισό ως B, ενώ στην πραγματικότητα η βαθμίδα του προϊόντος που παράγεται κατά τη διάρκεια της μετάβασης μεταβάλλεται σταδιακά από τη βαθμίδα A στη B. Στο συγκεκριμένο μοντέλο SELSP, για λόγους απλούστευσης, θεωρούμε ότι το προϊόν που παράγεται κατά τη διάρκεια μίας μετάβασης από τη βαθμίδα A στη βαθμίδα B χαρακτηρίζεται ως A, ενώ αυτό που παράγεται κατά τη διάρκεια της αντίστροφης μετάβασης χαρακτηρίζεται ως B. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, οι παραγόμενες ποσότητες των βαθμίδων A και B είναι οι ίδιες με αυτές που θα παράγονταν αν διαιρούσαμε την ποσότητα του ενδιάμεσου προϊόντος σε δύο μισά. Γίνεται επίσης η υπόθεση ότι οι χρόνοι μετάβασης από βαθμίδα σε βαθμίδα είναι καθοριστικοί και ίδιοι. Τα κόστη τα οποία μελετώνται στο πρώτο στάδιο αποθήκευσης είναι το κόστος μετάβασης, το κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα πλεονάζοντος προϊόντος, οποτεδήποτε

δεν υπάρχει αρκετός χώρος στον αποθηκευτικό χώρο για να αποθηκευτεί το παραχθέν σε μορφή χύδην προϊόν, και το κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα ελλειμματικού χύδην προϊόντος, οποτεδήποτε δεν υπάρχει αρκετό τελικό προϊόν στην αντίστοιχη αποθήκη για την ικανοποίηση της ζήτησης. Όσον αφορά το δεύτερο στάδιο αποθήκευσης τα κόστη που μελετώνται είναι το κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα προϊόντος σε μορφή σάκου οποτεδήποτε δεν υπάρχει αρκετό τελικό προϊόν στην αντίστοιχη αποθήκη για την ικανοποίηση της ζήτησης και το κόστος διατήρησης αποθέματος του προϊόντος που πλεονάζει και διατηρείται στην αποθήκη μετά την ικανοποίηση της ζήτησης. Οι παραπάνω υποθέσεις είναι ρεαλιστικές και βασίζονται σε ένα πραγματικό πρόβλημα δυναμικού χρονικού προγραμματισμού ενός εργοστασίου ρητίνης PET και παρουσιάζονται στην εργασία των Liberopoulos et al. (2009).

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μορφοποιήθηκε ως μια *Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων* (*Markov Decision Process*- MDP) διακριτού χρόνου, όπου σε κάθε χρονική περίοδο πρέπει να αποφασισθεί αν θα ξεκινήσει η αλλαγή προϊόντος σε μια γειτονική βαθμίδα ή αν θα παραμείνει η *ρύθμιση* (*setup*) της μονάδας ως έχει. Η απόφαση αυτή λαμβάνεται με βάση την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος η οποία ορίζεται από την τρέχουσα ρύθμιση της μονάδας και τα επίπεδα αποθέματος όλων των βαθμίδων στην αποθήκη. Επίσης σε κάθε χρονική περίοδο θα πρέπει να αποφασισθεί αν θα σακιαστεί κάποιο προϊόν ή θα παραμείνει αμετάβλητο το τελικό απόθεμα κάθε προϊόντος που βρίσκεται στον πρώτο αποθηκευτικό χώρο τελικών προϊόντων. Στόχο αποτελεί η ελαχιστοποίηση του μέσου μακροπρόθεσμου αναμενόμενου κόστους λειτουργίας της μονάδας για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Συγκεκριμένα, για το πρόβλημα με τις 2 βαθμίδες προϊόντος σε μορφή χύδην και με τις 2 βαθμίδες προϊόντος σε μορφή σάκου, επιλύθηκε αναλυτικά το ακριβές

πρόβλημα MDP χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων οπότε και προέκυψε κάποια αίσθηση για τη γενικότερη δομή της βέλτιστης πολιτικής.

3.2 Μορφοποίηση προβλήματος και επίλυσή του με δυναμικό προγραμματισμό

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται ένα μοντέλο διακριτού χρόνου παραγωγής 2 προϊόντων σε δύο διαφορετικούς τύπους. Σε κάθε χρονική περίοδο ο ρυθμός παραγωγής είναι σταθερός και ίσος με P μονάδες προϊόντος στο οποίο είναι στημένη η παραγωγή κατά την έναρξη της περιόδου. Εάν η παραγωγή ενώ είναι στημένη να παράγει ένα προϊόν επιλέξει να κάνει μετάβαση στην αρχή μιας περιόδου και να παράγει κάποιο άλλο προϊόν, τότε η παραγωγή υφίσταται ένα κόστος μετάβασης CC (change cost). Η ποσότητα του χύδην προϊόντος που παράγεται αποθηκεύεται στον πρώτο αποθηκευτικό χώρο τελικών προϊόντων ο οποίος έχει πεπερασμένη χωρητικότητα ίση με X μονάδες. Στη συνέχεια η παραγωγή έχει τη δυνατότητα είτε να σακιάσει είτε όχι οποιοδήποτε από τα 2 διαφορετικά προϊόντα με σταθερό ρυθμό σακιάσματος Q και να το αποθηκεύσει με τη μορφή σάκου σε ένα δεύτερο στη σειρά αποθηκευτικό χώρο ο οποίος έχει πεπερασμένη χωρητικότητα ίση με Y μονάδες. Οποτεδήποτε το στοκ ασφαλείας των τελικών σε μορφή χύδην προϊόντων υπερβεί τη χωρητικότητα του πρώτου αποθηκευτικού χώρου, υφίσταται ένα κόστος υπερχειλίσης CS (spill-over cost) ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος. Οι αποθηκευτικοί χώροι των τελικών προϊόντων μπορούν να περιέχουν οποιαδήποτε ποσότητα οποιουδήποτε προϊόντος την ίδια χρονική περίοδο αρκεί η συνολική ποσότητα προϊόντων να μην υπερβαίνει τη χωρητικότητά τους. Μετά την προσθήκη της παραγόμενης ποσότητας στον πρώτο αποθηκευτικό χώρο, θα πρέπει να ικανοποιηθεί ένα διάνυσμα τυχαίων ζητήσεων $\mathbf{D} \equiv (D_1, D_2)$, όπου D_n , $n = 1, 2$ είναι η ζήτηση για χύδην προϊόν n . Στη συνέχεια εάν η παραγωγή επιλέξει να σακιάσει, η ποσότητα του προϊόντος που θα

σακιαστεί θα είναι είτε ίση με το ρυθμό σακιάσματος αν υπάρχει αρκετό προϊόν στην πρώτη αποθήκη, ή ίση με την απομένουσα χωρητικότητα του δεύτερου αποθηκευτικού χώρου. Στη συνέχεια από τον δεύτερο αποθηκευτικό χώρο θα πρέπει να ικανοποιηθεί ένα αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{D}b \equiv (Db_1, Db_2)$, όπου Db_n , $n = 1, 2$ είναι η ζήτηση για σακευμένο προϊόν n . Οι ζητήσεις αυτές είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με γνωστή από κοινού κατανομή πιθανότητας. Για κάθε προϊόν n σε όποια μορφή και αν ζητείται, το τμήμα της ζήτησης το οποίο δε μπορεί να ικανοποιηθεί από το στοκ ασφαλείας των τελικών προϊόντων (εάν υπάρξει) χάνεται οπότε επέρχεται κόστος χαμένων πωλήσεων LS ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης. Παρόλο που σε πολλά πραγματικά προβλήματα και κυρίως στις βιομηχανίες επεξεργασίας, η αλλαγή στο P επιφέρει αστάθειες στην παραγωγική διαδικασία, εντούτοις το P δε θεωρείται μεταβλητή ελέγχου κατά τη διαδικασία προγραμματισμού. Ωστόσο, μπορεί να αναπροσαρμοστεί για να ταιριάζει με τη μέση αναμενόμενη ζήτηση όλων των προϊόντων, σε περίπτωση που η ζήτηση παρουσιάζει εποχικότητα ή άλλες μακροχρόνιες μεταβολές. Στην συγκεκριμένη εργασία θεωρείται ότι το P είναι σταθερό και ίσο με τη συνολική αναμενόμενη ζήτηση όλων των προϊόντων σε όποια μορφή ζητούνται. Το Q είναι μεταβλητή απόφασεως και θεωρείται επίσης σταθερό.

Το πρόβλημα του δυναμικού προγραμματισμού μορφοποιήθηκε ως μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων MDP διακριτού χρόνου όπου η κατάσταση του συστήματος στην αρχή της κάθε περιόδου ορίζεται ως ένα διάνυσμα $\mathbf{z} \equiv (s, x_1, x_2, y_1, y_2)$, όπου ως s ορίζεται το προϊόν στο οποίο είναι στημένο το σύστημα παραγωγής κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης περιόδου, ως x_n ορίζεται το επίπεδο αποθέματος για το προϊόν n σε μορφή χύδην στην αρχή της περιόδου, $n = 1, 2$ και ως y_n ορίζεται το επίπεδο αποθέματος για το προϊόν n σε μορφή σάκου στην αρχή της περιόδου, $n = 1, 2$.

Σημειώνεται ότι $s \in \{1, 2\}$, ενώ το σύνολο των επιτρεπτών επιπέδων αποθέματος για το πρώτο στάδιο αποθήκευσης καθορίζεται από τους ακεραίους αριθμούς $x_n, n = 1, 2$ όπου $0 \leq \sum_n x_n \leq X$, απ' όπου προκύπτει ότι το μέγεθος του χώρου καταστάσεων (state space) ισούται με $(N \cdot X^N)/2$ όπου $N=2$, ενώ για το δεύτερο στάδιο αποθήκευσης καθορίζεται από τους ακεραίους $y_n, n = 1, 2$, όπου $0 \leq \sum_n y_n \leq Y$ απ' όπου προκύπτει ότι το μέγεθος του χώρου καταστάσεων ισούται με $(N \cdot Y^N)/2$ όπου $N=2$. Η μεταβλητή αποφάσεως u στην αρχή κάθε περιόδου ορίζει αν θα υπάρξει μετάβαση σε ένα γειτονικό προϊόν ή αν η παραγωγική διαδικασία θα μείνει αμετάβλητη. Εάν η απόφαση που λαμβάνεται είναι η έναρξη μιας αλλαγής, τότε η νέα ρύθμιση της παραγωγής θα εμφανιστεί στην αρχή της επόμενης περιόδου αφού ο χρόνος μιας αλλαγής είναι ίσος με μία περίοδο. Επίσης η μεταβλητή αποφάσεως l στην αρχή κάθε περιόδου ορίζει αν θα σακιαστεί ή όχι κάποιο προϊόν καθώς επίσης και ποιο είναι το προϊόν που θα σακιαστεί. Εάν η απόφαση που λαμβάνεται είναι να σακιαστεί κάποιο προϊόν τότε η αλλαγή στο απόθεμά του θα εμφανιστεί στην αρχή της επόμενης περιόδου αφού ο χρόνος σακιάσματος είναι ίσος με μία περίοδο.

Η κατάσταση του συστήματος στην αρχή της περιόδου είναι \mathbf{z} , οι αποφάσεις που λαμβάνονται είναι u και l , ενώ οι ζητήσεις που πρέπει να ικανοποιηθούν είναι \mathbf{D} και \mathbf{Db} . Εάν $g(\mathbf{z}, u, l, \mathbf{D}, \mathbf{Db})$ είναι το κόστος που επέρχεται κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης περιόδου και $\mathbf{z}' \equiv (s', x_1', x_2', y_1', y_2') = f(\mathbf{z}, u, l, \mathbf{D}, \mathbf{Db})$ είναι η κατάσταση του συστήματος στην αρχή της επόμενης περιόδου τότε είναι φανερό ότι ισχύει:

$$s' = u$$

$$x_n' = (x_n'' - q(\mathbf{z}) \cdot I_{n=l})^+, n = 1, 2$$

$$y_n' = (y_n + [\min(q(\mathbf{z}), x_n'')] I_{n=l} - Db_n)^+, n = 1, 2$$

$$x_n'' = (x_n + p(\mathbf{z}) \cdot I_{n=s} - D_n)^+, n = 1, 2$$

όπου $p(\mathbf{z})$ είναι η παραγόμενη ποσότητα που προστίθεται στον αποθηκευτικό χώρο των τελικών προϊόντων όταν η παραγόμενη συνολική ποσότητα είναι ίση με P μονάδες και η ζήτηση δεν έχει ικανοποιηθεί, ενώ x_n'' είναι το απόθεμα του προϊόντος n που βρίσκεται στον 1^ο αποθηκευτικό χώρο μετά την ικανοποίηση της ζήτησης προϊόντος σε μορφή χύδην και πριν την πιθανή απόφαση σακιάσματος. Η ποσότητα $p(\mathbf{z})$ ισούται με $p(\mathbf{z}) \equiv \min(P, X - \sum_n x_n)$, όπου I_a είναι η δυαδική μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή 1 εάν a είναι αληθές και 0 αλλιώς, και $(x)^+ \equiv \max(0, x)$, επίσης $q(\mathbf{z})$ είναι η παραγόμενη ποσότητα που προστίθεται στον αποθηκευτικό χώρο των τελικών προϊόντων όταν η παραγόμενη συνολική ποσότητα είναι ίση με Q μονάδες και η ζήτηση δεν έχει ικανοποιηθεί. Η ποσότητα αυτή ισούται με $q(\mathbf{z}) \equiv \min(Q, Y - \sum_n y_n)$, όπου I_b είναι η δυαδική μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή 1 εάν b είναι αληθές και 0 αλλιώς, και $(y)^+ \equiv \max(0, y)$. Επιπρόσθετα ισχύει:

$$g(\mathbf{z}, u, l, \mathbf{D}, \mathbf{Db}) = CC \cdot I_{u \neq s} + CS \cdot (P - p(\mathbf{z})) + \sum_n CL_n \cdot (D_n - x_n - p(\mathbf{z}) \cdot I_{n=s})^+ + \sum_n CL_n \cdot (Db_n - y_n - (\min(q(\mathbf{z}), x_n'') \cdot I_{n=l})^+ + \sum_n HC_n \cdot y_n'$$

Η αντικειμενική συνάρτηση έχει ως στόχο την εύρεση μιας πολιτικής που εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, $u = \mu(\mathbf{z})$ και $l = \nu(\mathbf{z})$, η οποία να ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο μέσο αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο. Για την εύρεση αυτής της πολιτικής απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων δυναμικού προγραμματισμού Bellman, οι οποίες για το συγκεκριμένο πρόβλημα γράφονται ως

$$J + V(\mathbf{z}) = \min_{u \in U, l \in L} T_{u,l}(V(\mathbf{z})), \quad U=1, 2 \text{ και } L=1, 2, 3$$

όπου J είναι το βέλτιστο (ελάχιστο) μέσο προσδοκώμενο κόστος ανά περίοδο, $V(\mathbf{z})$ είναι το διαφορικό κόστος ξεκινώντας από την κατάσταση \mathbf{z} , και $T_{u,l}(\cdot)$ είναι ένας τελεστής ο οποίος ορίζεται ως $T_{u,l}(V(\mathbf{z})) \equiv E_{D,Db} \{g(\mathbf{z}, u, l, \mathbf{D}, \mathbf{Db}) + V(\mathbf{z}')\}$. Η μεταβλητή u παίρνει τις τιμές 1 και 2 (απόφαση μετάβασης στο προϊόν 1 ή 2), ενώ η μεταβλητή l

παίρνει τιμές 1, 2 ή 3 (απόφαση για σάκιασμα των προϊόντων 1 ή 2 ή κανενός προϊόντος). Η ελαχιστοποίηση των εξισώσεων Bellman καθορίζει τη βέλτιστη πολιτική του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση \mathbf{z} που δίνεται από τους όρους $\mu^*(\mathbf{z})$ και $v^*(\mathbf{z})$.

Για την επίλυση των εξισώσεων Bellman χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων των βέλτιστων διαφορικών συναρτήσεων κόστους, η οποία είναι μία επαναληπτική μέθοδος. Ο όρος $V_k(\mathbf{z})$ δίνει τη συνάρτηση διαφορικού κόστους για την k επανάληψη. Αρχικά ορίζεται $V_0(\mathbf{z}) = 0, \forall \mathbf{z}$. Οι τιμές της $(k + 1)$ επανάληψης δίνονται από την προηγούμενη επανάληψη μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας υπολογισμού της συνάρτησης:

$$V_{k+1}(\mathbf{z}) = T(V_k(\mathbf{z})) - T(V_k(\check{\mathbf{z}})) \quad (3.1)$$

όπου $T(V_k(\mathbf{z})) = \min_{u \in U, l \in L} T_{u,l}(V_k(\mathbf{z}))$ και $\check{\mathbf{z}}$ είναι μια αυθαίρετα επιλεγμένη αρχική κατάσταση. Σημειώνεται ότι σε κάθε επανάληψη το διαφορικό κόστος για την ειδική κατάσταση είναι ίσο με μηδέν. Υποθέτοντας ότι οι επαναλήψεις συγκλίνουν σε κάποιες τιμές $V(\mathbf{z})$, με βάση την επαναληπτική εξίσωση αυτές θα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση $T(V(\check{\mathbf{z}})) + V(\mathbf{z}) = T(V(\mathbf{z}))$. Τέλος μια σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης και της εξίσωσης Bellman αποκαλύπτει ότι $J = T(V(\check{\mathbf{z}}))$.

Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, υπολογίζονται για κάθε μία επανάληψη $k = 1, 2, \dots$ οι μέγιστες και ελάχιστες διαφορές των $V_k^U = \max_{\mathbf{z}} \{V_k(\mathbf{z}) - V_{k-1}(\mathbf{z})\}$ και $V_k^L = \min_{\mathbf{z}} \{V_k(\mathbf{z}) - V_{k-1}(\mathbf{z})\}$. Η διαδικασία τερματίζεται όταν $|V_k^U - V_k^L| < \varepsilon \cdot T(V_k(\check{\mathbf{z}}))$, όπου ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός.

4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των προβλημάτων με 2 τύπους προϊόντων που ζητούνται με δύο διαφορετικές μορφές ζήτησης. Αρχικά, επιλύεται ένα παράδειγμα 2 προϊόντων σε μορφή χύδην και σε μορφή σάκου για διάφορα σενάρια με διαφορετική κατανομή στη ζήτηση χρησιμοποιώντας την ακριβή μέθοδο επίλυσης και γίνεται ανάλυση της βέλτιστης πολιτικής μετάβασης. Ταυτόχρονα μελετάται εάν υπάρχει επίδραση διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος στην τιμή του βέλτιστου μέσου προσδοκώμενου κόστους ανά περίοδο καθώς και στον υπολογιστικό χρόνο της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων.

4.1 Εξέταση διαφόρων σεναρίων

Αρχικά, επιλύεται ένα παράδειγμα 2 προϊόντων ($N = 2$), με $P = 3$ και $Q = 3$, όπου για διαφορετικές κατανομές της ζήτησης των 2 προϊόντων σε μορφή χύδην και των αντίστοιχων προϊόντων σε μορφή σάκου εφαρμόζεται η διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων όπως αυτή περιγράφηκε στην Ενότητα 3.2. Σε κάθε περίπτωση, υποτίθεται ότι τα διάφορα κόστη παίρνουν τις εξής τιμές: $CC=1$, $CS=1$, $LS=1$ και $HC=1$. Σημειώνεται ότι η περίπτωση 1 είναι η ονομαστική περίπτωση όπου η ζήτηση είναι ισοκατανομημένη ανά προϊόν και ανά στάδιο αποθήκευσης.

Για κάθε παράδειγμα γίνεται η υπόθεση ότι η ζήτηση κάθε προϊόντος σε οποιαδήποτε μορφή είναι πανομοιότυπης κατανομής με μία από τις τυχαίες μεταβλητές D_j , όπου $j = A, B, C, D, E$ των οποίων οι κατανομές δίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1. Πιθανότητα κατανομής ζήτησης $\Pr(D_j = i)$

| j | I | | | | $E[D_j]$ |
|-----|------|------|------|------|----------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| A | 0,85 | 0,05 | 0,1 | 0 | 0,25 |
| B | 0,65 | 0,25 | 0,05 | 0,05 | 0,5 |
| C | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0 | 0,75 |
| D | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0 | 1 |
| E | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 1,5 |

Έτσι αναπτύχθηκαν 15 διαφορετικές περιπτώσεις σε καθεμία εκ των οποίων το σετ των κατανομών πιθανότητας των ζητήσεων για τα 2 διαφορετικά προϊόντα σε μορφή χύδην και μορφή σάκου (α , β , γ και δ) είναι όμοιο και τέτοιο ώστε η συνολική αναμενόμενη ζήτηση να είναι ίση με το ρυθμό παραγωγής. Η διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων είναι η σειρά με την οποία εμφανίζονται αυτές οι κατανομές στην αλυσίδα των επιτρεπτών μεταβάσεων. Για παράδειγμα, στη 1^η περίπτωση του παραδείγματος των προϊόντων α , β , γ και δ , γίνεται η υπόθεση ότι οι ζήτησεις των προϊόντων είναι πανομοιότυπης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής D_C , η οποία έχει προσδοκώμενη τιμή ίση με 0,75. Με άλλα λόγια, και τα τέσσερα προϊόντα έχουν την ίδια ζήτηση.

Πιο αναλυτικά στις περιπτώσεις 1-5, η ζήτηση είναι ισοκατανεμημένη ανά στάδιο ($D_\alpha + D_\beta = D_\gamma + D_\delta = 1,5$) στις περιπτώσεις 6-10 η ζήτηση στο πρώτο στάδιο είναι διπλάσια από εκείνη του δεύτερου σταδίου ($D_\alpha + D_\beta = 2$ και $D_\gamma + D_\delta = 1$) ενώ στις περιπτώσεις 11-15 η ζήτηση στο πρώτο στάδιο είναι υποδιπλάσια από εκείνη του δεύτερου σταδίου ($D_\alpha + D_\beta = 1$ και $D_\gamma + D_\delta = 2$).

Αρχικά, επιλύθηκε κάθε περίπτωση για την εύρεση της βέλτιστης λύσης με βάση τη μέθοδο της διαδοχικής προσέγγισης η οποία περιγράφεται στην Ενότητα 3.2 με κριτήριο σύγκλισης $\varepsilon = 0,001$. Έπειτα, επιλύθηκε κάθε περίπτωση αφού έγιναν 60 προσομοιώσεις οι οποίες χρησιμοποίησαν την βέλτιστη πολιτική του ακριβούς



αλγορίθμου καθεμία με χρονικό ορίζοντα 100.000 χρονικές μονάδες. Η προσομοίωση αυτή αναπτύχθηκε προκειμένου να επαληθευτούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του ακριβούς αλγορίθμου για τις διαφορετικές περιπτώσεις που εξετάστηκαν με μια διαφορετική μέθοδο η οποία δίνει λύση σε μικρότερο υπολογιστικό χρόνο, καθώς και για την ύπαρξη της ως εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιήσει την πολιτική ενός ευρετικού αλγορίθμου και να δώσει μια ικανοποιητική λύση ανάλογη της ποιότητας του ευρετικού αλγορίθμου.

Τα προκύπτοντα αποτελέσματα του παραδείγματος των 2 προϊόντων, για $X = 10$ και $Y = 10$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Για κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα απεικονίζουν τον αριθμό των επαναλήψεων της διαδοχικής προσέγγισης μέχρι την σύγκλιση και ο οποίος ορίζεται ως k_c (όπου κριτήριο σύγκλισης ορίζεται το $\varepsilon = 0,001$), ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος CPU αναφέρεται σε ώρες σε H/Y Intel Pentium Core i7 με επεξεργαστή 2.67 GHz και μνήμη 3GB, και το βέλτιστο μέσο αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο J . Ακόμη παρουσιάζεται ο χρόνος επίλυσης της εναλλακτικής μεθόδου CPU_{sim} σε ώρες σε H/Y Intel Pentium Core i7 με επεξεργαστή 2.67 GHz και μνήμη 3GB που βασίστηκε στην προσομοίωση του πραγματικού μοντέλου, το μέσο αναμενόμενο κόστος J_{sim} καθώς και το διάστημα εμπιστοσύνης του CI .

Πίνακας 2. Αποτελέσματα των 15 περιπτώσεων

| Περίπτωση | Σενάριο ζήτησης | Ακριβής αλγόριθμος | | | Προσομοίωση | | |
|-----------|-----------------|--------------------|-------|-------|-------------|-----------|--------|
| | | k_c | CPU | J | CPU_{sim} | J_{sim} | CI |
| 1 | C,C,C,C | 28 | 0,416 | 3,004 | 0,087 | 3,005 | 0,0014 |
| 2 | B,D,C,C | 49 | 0,978 | 2,978 | 0,087 | 2,977 | 0,0013 |
| 3 | D,B,B,D | 49 | 1,301 | 2,535 | 0,088 | 2,536 | 0,0015 |
| 4 | B,D,B,D | 48 | 1,276 | 2,418 | 0,087 | 2,418 | 0,0016 |
| 5 | C,C,B,D | 48 | 0,963 | 2,513 | 0,087 | 2,513 | 0,0014 |
| 6 | D,D,B,B | 48 | 1,255 | 2,181 | 0,088 | 2,181 | 0,0011 |
| 7 | E,B,B,B | 48 | 2,234 | 2,199 | 0,087 | 2,198 | 0,0011 |
| 8 | B,E,A,B | 107 | 2,863 | 2,140 | 0,087 | 2,140 | 0,0016 |
| 9 | D,D,A,C | 108 | 1,628 | 2,082 | 0,087 | 2,082 | 0,0013 |
| 10 | B,E,C,A | 107 | 2,872 | 2,141 | 0,087 | 2,142 | 0,0012 |
| 11 | B,B,B,E | 47 | 2,217 | 2,715 | 0,088 | 2,713 | 0,0018 |
| 12 | A,C,D,D | 37 | 0,564 | 2,925 | 0,087 | 2,926 | 0,0013 |
| 13 | C,A,B,E | 47 | 1,242 | 2,731 | 0,087 | 2,732 | 0,0020 |
| 14 | A,C,B,E | 48 | 1,27 | 2,619 | 0,087 | 2,62 | 0,0019 |
| 15 | B,B,D,D | 25 | 0,668 | 2,965 | 0,088 | 2,965 | 0,0016 |

Από τα αποτελέσματα του πίνακα φαίνεται ότι το μικρότερο μέσο αναμενόμενο κόστος εμφανίζεται στις περιπτώσεις 6-10, όπου η συνολική ζήτηση των προϊόντων β και δ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ζήτηση των προϊόντων α και γ. Επιπρόσθετα η ζήτηση στο 1^ο στάδιο αποθήκευσης είναι συνολικά μεγαλύτερη από εκείνη του 2^{ου} σταδίου αποθήκευσης. Το μικρότερο κόστος του συγκεκριμένου σετ περιπτώσεων παρουσιάζει η περίπτωση 9 όπου η ζήτηση των προϊόντων α και β στο 1^ο στάδιο είναι ισοκατανομημένη ενώ στο 2^ο στάδιο υπερτερεί η ζήτηση του προϊόντος δ. Στη συνέχεια μικρότερο κόστος εμφανίζουν οι περιπτώσεις 3-5 όπου η συνολική ζήτηση των προϊόντων β και δ είναι μεγαλύτερη ή ίση της αντίστοιχης ζήτησης των προϊόντων α και γ, ενώ η ζήτηση των δύο σταδίων είναι ισοδύναμη. Το μικρότερο κόστος του συγκεκριμένου σετ περιπτώσεων το παρουσιάζει η περίπτωση 4 όπου ενώ η ζήτηση των σταδίων είναι ισοδύναμη, υπερτερεί σε μέγεθος η συνολική ζήτηση των προϊόντων β και δ έναντι των άλλων περιπτώσεων. Στη συνέχεια ακολουθεί το σετ των

περιπτώσεων 11-15 όπου η ζήτηση των προϊόντων β και δ είναι μεγαλύτερη ή ίση με εκείνη των προϊόντων α και γ και η συνολική ζήτηση του σταδίου 2 είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ζήτηση του σταδίου 1. Το μικρότερο κόστος του συγκεκριμένου σετ περιπτώσεων το παρουσιάζει η περίπτωση 14 όπου υπερτερεί η ζήτηση των προϊόντων β και δ έναντι των άλλων περιπτώσεων. Τέλος ακολουθούν οι περιπτώσεις 1-2 στις οποίες η συνολική ζήτηση των προϊόντων β και δ είναι μεγαλύτερη ή ίση της αντίστοιχης ζήτησης των προϊόντων α και γ ενώ η ζήτηση των 2 σταδίων είναι ισοδύναμη, με μικρότερο κόστος εκείνο της περίπτωσης 2 όπου η συνολική ζήτηση των προϊόντων β και δ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ζήτηση των προϊόντων α και γ .

Επίσης από τα αποτελέσματα των διαφόρων σεναρίων προκύπτουν για το κόστος των σετ των περιπτώσεων 1-5 και 11-15 (όπου $\alpha + \beta \leq \gamma + \delta$) οι ακόλουθες σχέσεις:

$$(\alpha=\beta, \gamma=\delta) > (\alpha<\beta, \gamma=\delta) > (\alpha<\beta, \gamma>\delta) > (\alpha=\beta, \gamma<\delta) > (\alpha<\beta, \gamma<\delta)$$

ενώ για το σετ των περιπτώσεων 6-10 (όπου $\alpha + \beta > \gamma + \delta$) ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\alpha>\beta, \gamma=\delta) > (\alpha=\beta, \gamma=\delta) > (\alpha<\beta, \gamma>\delta) > (\alpha<\beta, \gamma<\delta) > (\alpha=\beta, \gamma<\delta)$$

Ωστόσο η μέθοδος της προσομοίωσης επαληθεύει την τιμή της βέλτιστης λύσης για κάθε Περίπτωση που εξετάζεται δίνοντας κόστος ακρίβειας 2^{00} ή 3^{00} δεκαδικού σε σχέση με το κόστος της ακριβούς μεθόδου. Ακόμη η μέθοδος της προσομοίωσης είναι ταχύτερη από 4 έως 33 φορές έναντι της ακριβούς μεθόδου.

4.2 Μεταβολή της κατανομής του αποθηκευτικού χώρου ανά στάδιο

Στη συγκεκριμένη παράγραφο γίνεται μελέτη της επίδρασης της χωρητικότητας του αποθηκευτικού χώρου ανά στάδιο και παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα στον Πίνακα 3. Η πρώτη στήλη του πίνακα απεικονίζει τη χωρητικότητα του πρώτου αποθηκευτικού χώρου, ενώ η δεύτερη στήλη απεικονίζει τη χωρητικότητα του

δεύτερου αποθηκευτικού χώρου. Η συνολική χωρητικότητα είναι ίση με $X + Y = 20$ μονάδες, ενώ οι ζητήσεις των 4 προϊόντων είναι πανομοιότυπης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής D_C , η οποία έχει προσδοκώμενη τιμή ίση με 0,75. Έτσι για τιμές του X από 6 έως 20 και αντίστοιχα για τιμές του Y από 0 έως 14 χωρίς να παραβιάζεται η συνθήκη της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος που ισούται με 20 μονάδες, προκύπτουν τα αποτελέσματα επίλυσης του ακριβούς αλγορίθμου τα οποία φαίνονται στον Πίνακα 3. Πιο αναλυτικά παρουσιάζονται ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου kc , ο υπολογιστικός χρόνος σε ώρες CPU καθώς και το βέλτιστο αναμενόμενο κόστος J .

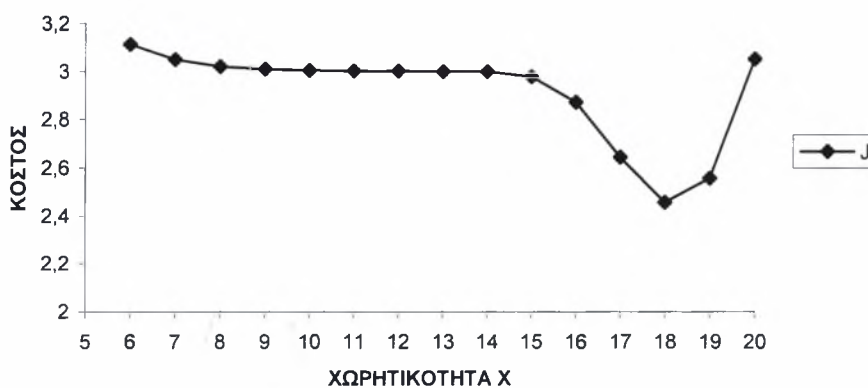
Πίνακας 3: Αποτελέσματα μεταβολής της κατανομής του αποθηκευτικού χώρου

| X | Y | kc | CPU | J |
|-----|-----|------|--------|--------|
| 6 | 14 | 36 | 0,4117 | 3,1122 |
| 7 | 13 | 34 | 0,442 | 3,0492 |
| 8 | 12 | 30 | 0,3649 | 3,0203 |
| 9 | 11 | 30 | 0,4437 | 3,0101 |
| 10 | 10 | 28 | 0,4167 | 3,004 |
| 11 | 9 | 27 | 0,4002 | 3,0018 |
| 12 | 8 | 26 | 0,3685 | 3,0006 |
| 13 | 7 | 29 | 0,3779 | 3,0001 |
| 14 | 6 | 32 | 0,3747 | 3,0000 |
| 15 | 5 | 37 | 0,3657 | 2,9789 |
| 16 | 4 | 32 | 0,2552 | 2,8716 |
| 17 | 3 | 41 | 0,2447 | 2,6446 |
| 18 | 2 | 47 | 0,1865 | 2,4570 |
| 19 | 1 | 60 | 0,1312 | 2,5579 |
| 20 | 0 | 67 | 0,0535 | 3,0518 |

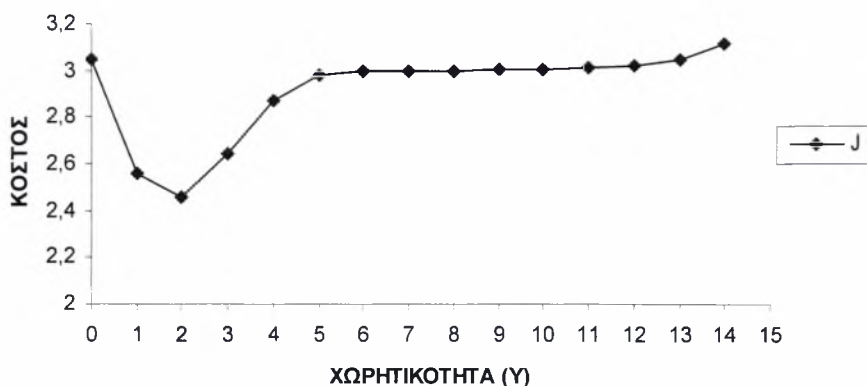
Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η χωρητικότητα του 1^{ου} αποθηκευτικού χώρου X το μέσο αναμενόμενο κόστος μειώνεται (βλέπε Γράφημα 1)

ενώ όσο αυξάνεται η χωρητικότητα του 2^{ου} αποθηκευτικού χώρου Y το μέσο αναμενόμενο κόστος αυξάνεται (βλέπε Γράφημα 2). Η παραπάνω διαπίστωση δικαιολογείται εξαιτίας του γεγονότος ότι στο 1^ο στάδιο αποθήκευσης χρεώνονται τα κόστη CC , CS , και LS ενώ στο 2^ο στάδιο αποθήκευσης χρεώνονται τα κόστη LS και HC και έτσι διαπιστώνεται ότι είναι προτιμότερο η χωρητικότητα του 1^{ου} σταδίου να είναι μεγαλύτερη από εκείνη του 2^{ου} σταδίου. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι ο βέλτιστος συνδυασμός των X και Y είναι $X = 18$ και $Y = 2$ που δίνει το ελάχιστο μέσο αναμενόμενο κόστος $J = 2,457$. Ο συγκεκριμένος βέλτιστος συνδυασμός προκύπτει εξαιτίας του ότι η ζήτηση στο 2^ο στάδιο αποθήκευσης είναι μικρότερη ή ίση του 2.

Επιπρόσθετα σημειώνεται ότι εάν η χωρητικότητα του 2^{ου} σταδίου πέσει κάτω από την τιμή 2 το μέσο αναμενόμενο κόστος θα αυξηθεί κάτι το οποίο οφείλεται στη μη ικανοποίηση της ζήτησης προϊόντος σε μορφή σάκου επιβάλλοντας στην παραγωγή κόστος χαμένων πωλήσεων LS . Τέλος παρατηρείται ότι ο μικρότερος υπολογιστικός χρόνος επίλυσης εμφανίζεται στην περίπτωση όπου η χωρητικότητα του 2^{ου} σταδίου είναι μηδέν όπου σε αυτή την περίπτωση η πολυπλοκότητα του συστήματος μειώνεται εξαιτίας της απαλοιφής του 2^{ου} σταδίου αποθήκευσης.



Γράφημα 1: Αναπαράσταση μέσου προσδοκώμενου κόστους σε συνάρτηση του X



Γράφημα 2: Αναπαράσταση μέσου προσδοκώμενου κόστους σε συνάρτηση του Υ

4.3 Μεταβολή στις τιμές των παραμέτρων κόστους

Στην συγκεκριμένη παράγραφο γίνεται μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων κόστους στη τιμή του βέλτιστου αναμενόμενου κόστους. Έτσι για την Περίπτωση 1 (βλέπε Παράγραφο 4.1) όπου η ζήτηση είναι ισοδύναμη ανά προϊόν και ανά στάδιο εξετάσαμε διάφορες περιπτώσεις είτε μηδενίζοντας την τιμή μιας παραμέτρου κόστους είτε διπλασιάζοντας αυτή ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παίρνουν την τιμή 1. Στους Πίνακες 4-5 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων κόστους CC , CS , HC , LS , ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου kc , ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης CPU καθώς και το μέσο αναμενόμενο κόστος J . Έτσι στον Πίνακα 6 φαίνονται οι περιπτώσεις όπου η τιμή μιας παραμέτρου είναι ίση με μηδέν.

Πίνακας 4: Αποτελέσματα περιπτώσεων με μηδενική τιμή κάποιας παραμέτρου

| Περίπτωση | Παράμετροι κόστους | | | | Ακριβής αλγόριθμος | | |
|-----------|--------------------|-----------|-----------|-----------|--------------------|------------|----------|
| | <i>CC</i> | <i>CS</i> | <i>HC</i> | <i>LS</i> | <i>kc</i> | <i>CPU</i> | <i>J</i> |
| <i>A</i> | 0 | 1 | 1 | 1 | 34 | 0,913 | 2,661 |
| <i>B</i> | 1 | 0 | 1 | 1 | 26 | 0,701 | 2,022 |
| <i>C</i> | 1 | 1 | 0 | 1 | 56 | 1,517 | 0,419 |
| <i>D</i> | 1 | 1 | 1 | 0 | 27 | 0,725 | 2,023 |

Για την Περίπτωση 1 (βλέπε Παράγραφος 4.1) όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι ίσες με 1 ισχύει: $kc = 28$, $CPU = 0,416$ και $J = 3,004$. Από τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα προκύπτει ότι εάν μηδενίσουμε το *HC*, το βέλτιστο μέσο αναμενόμενο κόστος παίρνει την μικρότερη τιμή $J = 0,419$ σε σύγκριση με τα κόστη των υπολοίπων περιπτώσεων *A*, *B* και *D* καθώς και σε σύγκριση με το κόστος της Περίπτωσης 1. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται διότι το κόστος διατήρησης αποθέματος *HC* το οποίο επιβάλετε στο απόθεμα του προϊόντος που διατηρείται στο 2^ο στάδιο αποθήκευσης, επιφέρει την μεγαλύτερη ποσοστιαία επίδραση στο βέλτιστο μέσο αναμενόμενο κόστος. Επίσης ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης της περίπτωσης *c* είναι ο μεγαλύτερος σε σύγκριση με τους υπολοίπους. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται εξαιτίας του ότι $HC = 0$, όπου ενώ η παραγωγή επιλέγει να σακιάζει λόγω έλλειψης χωρητικότητας του 2^{ου} σταδίου αποθήκευσης το σύστημα δεν έχει την δυνατότητα να διατηρεί επιπλέον απόθεμα της χωρητικότητάς του, με αποτέλεσμα να αυξάνεται γενικά η πολυπλοκότητα του συστήματος.

Στη συνέχεια στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των περιπτώσεων όπου η τιμή μιας παραμέτρου κόστους διπλασιάζεται σε σχέση με τις υπόλοιπες.

Πίνακας 5: Αποτελέσματα περιπτώσεων με διπλάσια τιμή κάποιας παραμέτρου

| Περίπτωση | Παράμετροι κόστους | | | | Ακριβής αλγόριθμος | | |
|-----------|--------------------|-----------|-----------|-----------|--------------------|------------|----------|
| | <i>CC</i> | <i>CS</i> | <i>HC</i> | <i>LS</i> | <i>kc</i> | <i>CPU</i> | <i>J</i> |
| <i>E</i> | 2 | 1 | 1 | 1 | 23 | 0,621 | 3,146 |
| <i>F</i> | 1 | 2 | 1 | 1 | 34 | 0,926 | 3,338 |
| <i>G</i> | 1 | 1 | 2 | 1 | 24 | 0,649 | 3,971 |
| <i>H</i> | 1 | 1 | 1 | 2 | 30 | 0,809 | 3,338 |

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 5 φαίνεται ότι την μεγαλύτερη ποσοστιαία επίδραση στη τιμή του βέλτιστου αναμενόμενου κόστους επιφέρει η παράμετρος κόστους *HC*. Εάν διπλασιάσουμε την τιμή του *HC* το βέλτιστο αναμενόμενο κόστος ισούται με $J = 3,971$ τιμή μεγαλύτερη των κοστών των περιπτώσεων *E*, *F*, και *H*. Επίσης η τιμή αυτή του κόστους όπως και οι τιμές των κοστών των περιπτώσεων *E*, *F*, και *H* είναι μεγαλύτερες της τιμής του κόστους της Περίπτωσης 1 (βλέπε Κεφάλαιο 4.1) κάτι το αναμενόμενο αφού σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις η τιμή μιας παραμέτρου κόστους διπλασιάζεται και άρα και το συνολικό βέλτιστο αναμενόμενο κόστος αυξάνεται.

4.4 Μεταβολή του ρυθμού σακιάσματος

Στην συγκεκριμένη παράγραφο γίνεται μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του ρυθμού σακιάσματος Q ο οποίος θεωρείται ως μεταβλητή απόφασεως. Η συγκεκριμένη παράμετρος για τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες ισούται με $Q = 3$. Έτσι κρίθηκε απαραίτητο να μελετηθεί η συμπεριφορά του μοντέλου σε περιπτώσεις που ο ρυθμός σακιάσματος αυξηθεί ή μειωθεί. Πιο αναλυτικά στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται οι τιμές της παραμέτρου Q , ο αριθμός των επαναλήψεων του

αλγορίθμου kc , ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης CPU καθώς και το μέσο αναμενόμενο κόστος J .

Πίνακας 6: Αποτελέσματα μεταβολής ρυθμού σακιάσματος Q

| Παράμετρος σακιάσματος | Ακριβής αλγόριθμος | | | |
|------------------------|--------------------|------|-------|-------|
| | Q | kc | CPU | J |
| | 0 | 28 | 0,418 | 3,149 |
| | 1 | 30 | 0,455 | 2,409 |
| | 2 | 29 | 0,435 | 2,681 |
| | 3 | 28 | 0,416 | 3,004 |

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6 παρατηρείται ότι το ελάχιστο μέσο αναμενόμενο κόστος προκύπτει για ρυθμό σακιάσματος ίσο με 1 και αυτό επειδή το σύστημα επιλέγει να σακιάσει όσο το δυνατό μικρότερη ποσότητα διότι αποθηκεύοντας αυτή στο 2^ο στάδιο αποθήκευσης επιβάλλεται στο απόθεμα κόστος διατήρησης αποθέματος HC το οποίο επιφέρει την μεγαλύτερη ποσοστιαία επίδραση στο βέλτιστο μέσο αναμενόμενο κόστος. Ακόμη παρατηρείται ότι για ρυθμό σακιάσματος ίσο με 0 το μέσο αναμενόμενο κόστος παίρνει την μεγαλύτερη τιμή και αυτό διότι το σύστημα επιλέγει να μην σακιάσει με αποτέλεσμα να χάνεται η ζήτηση σε μορφή σάκου και να επιβάλλεται κόστος χαμένων πωλήσεων.

4.5 Παραγωγική διαδικασία ενός μόνο σταδίου αποθήκευσης

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσεται ένα μοντέλο στο οποίο υπάρχει ένας μόνο χώρος αποθήκευσης τελικών προϊόντων συνολικής χωρητικότητας ίσης με το άθροισμα των χωρητικοτήτων των δύο σταδίων αποθήκευσης (βλέπε Περίπτωση 1 Παράγραφο 4.1), δηλαδή $X+Y=20$ ενώ η συνολική ζήτηση των 2 προϊόντων η οποία ικανοποιείται

από το συγκεκριμένο στάδιο ισούται με το άθροισμα των ζητήσεων των προϊόντων (α και γ) και (β και δ) αντίστοιχα. Ο ρυθμός παραγωγής παραμένει σταθερός και ισούται με $P = 3$, ενώ είναι λογικό εξαιτίας της απαλοιφής του δεύτερου σταδίου αποθήκευσης ο ρυθμός σακιάσματος να είναι ίσος με $Q = 0$. Τα κόστη τα οποία επέρχονται στην συγκεκριμένη παραγωγική διαδικασία είναι τα εξής: $CC = CS = LS = 1$. Ο αλγόριθμος ο οποίος αναπτύσσεται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης είναι ένας ακριβής αλγόριθμος και θεωρεί δεδομένη την κατανομή του αθροίσματος των ζητήσεων κάθε προϊόντος. Το βέλτιστο κόστος ισούται με $J = 0,381$ ενώ ο υπολογιστικός χρόνος ισούται με $CPU = 0,96$ δευτ/πτα. Ο λόγος για τον οποίο το κόστος είναι μικρότερο σε σύγκριση με το βέλτιστο κόστος του αρχικού μοντέλου είναι λόγω της ανυπαρξίας των κοστών που εμφανιζόταν στο 2^ο στάδιο αποθήκευσης (HC και LS), ενώ ο μικρότερος υπολογιστικός χρόνος είναι εξαιτίας της μικρότερης πολυπλοκότητας του μοντέλου.

5 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΥΡΕΤΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

5.1 Περιγραφή

Εάν θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα του ενός σταδίου αποθήκευσης που περιγράφηκε στην Ενότητα 4.5 είναι ένα ψευδοπρόβλημα του πραγματικού προβλήματος με τα δύο στάδια αποθήκευσης, η βέλτιστη λύση του ακριβούς αλγορίθμου του ψευδοπροβλήματος υποθέτει ότι τα αποθέματα του ενός σταδίου αποθήκευσης προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x_{1\psi\mu\delta} = x_1 + y_1$$

$$x_{2\psi\mu\delta} = x_2 + y_2$$

Για την ανάλυση της βέλτιστης πολιτικής $\mu^*(\mathbf{z})$ και $\nu^*(\mathbf{z})$ του ακριβούς αλγορίθμου του μοντέλου με ένα μόνο στάδιο αποθήκευσης αναπτύχθηκε ένας ευρετικός αλγόριθμος (βλέπε Παράρτημα) ο οποίος χρησιμοποιεί ως δεδομένο τις βέλτιστες τιμές του διαφορικού κόστους $V(\mathbf{z})$ προκειμένου να βρει τις καλύτερες πολιτικές $\mu_{\psi\mu\delta}(\mathbf{z})$ και $\nu_{\psi\mu\delta}(\mathbf{z})$ που δίνουν την μικρότερη τιμή στο μέσο αναμενόμενο κόστος εκτελώντας μία επανάληψη της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Στη συνέχεια η ευρετική πολιτική του ψευδοπροβλήματος ορίζεται ως δεδομένο του ακριβούς αλγορίθμου της μοντελοποίησης του πραγματικού προβλήματος ο οποίος χωρίς τον κλάδο της βελτιστοποίησης δίνει το μέσο προσδοκώμενο κόστος.

5.2 Αριθμητικά αποτελέσματα ευρετικής μεθόδου

Έτσι για διάφορες περιπτώσεις διαφορετικής κατανομής της ζήτησης των προϊόντων όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 έγινε επίλυση του μοντέλου ενός σταδίου αποθήκευσης για την εύρεση της βέλτιστης λύσης με βάση τη μέθοδο της

διαδοχικής προσέγγισης η οποία περιγράφεται στην Ενότητα 3.2 με κριτήριο σύγκλισης $\varepsilon = 0,001$. Έπειτα, επιλύθηκε κάθε περίπτωση χρησιμοποιώντας την ευρετική προσέγγιση η οποία περιγράφηκε στην Ενότητα 5.1. Κατά την εφαρμογή του ευρετικού αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε το βέλτιστο διαφορικό κόστος προκειμένου να βρεθούν οι πολιτικές που ελαχιστοποιούν το μέσο αναμενόμενο κόστος.

Ένας τρόπος αξιολόγησης της ευρετικής πολιτικής είναι η χρήση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων των συναρτήσεων διαφορικού κόστους $V^h(\mathbf{z})$. Συγκεκριμένα εάν συμβολιστούν με $V_k^h(\mathbf{z})$ οι τιμές του διαφορικού κόστους για την k επανάληψη, τότε οι τιμές της $(k + 1)$ επανάληψης υπολογίζονται από την προηγούμενη επανάληψη μέσω της ισοδύναμης έκφρασης (3.1) χωρίς την ελαχιστοποίηση:

$$V_{k+1}^h(\mathbf{z}) = T_u^h(V_k^h(\mathbf{z})) - T_u^h(V_k^h(\mathbf{z})) \quad (5.1)$$

Σημειώνεται ότι όπως στον περιορισμό (3.1) σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας της εξίσωσης (5.1) το διαφορικό κόστος της ειδικής κατάστασης \mathbf{z} θέτεται ίσο με 0. Υποθέτοντας ότι οι τιμές κάθε επανάληψης συγκλίνουν σε κάποιες τιμές $V(\mathbf{z})$, το προσδοκώμενο μέσο κόστος ανά περίοδο της ευρετικής πολιτικής δίνεται από τη σχέση $J^h = T_u^h(V^h(\mathbf{z}))$.

Σε όλες τις περιπτώσεις, γίνεται υπόθεση ότι $CC = CS = LS = HC = 1$ και $P = 3$ ενώ τα αποτελέσματα του παραδείγματος των 2 προϊόντων, για $X = 10$ και $Y = 10$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 7. Οι υπολογιστικοί χρόνοι CPU αναφέρονται σε ώρες σε H/Y Intel Pentium Core i7 με επεξεργαστή 2.67 GHz και μνήμη 3GB. Για τον ευρετικό αλγόριθμο παρουσιάζεται ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος CPU^h σε ώρες που απαιτείται για την επίλυσή του. Ο χρόνος που απαιτείται για να αποτιμηθεί η ευρετική πολιτική χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο (value iteration method) είναι

σημαντικός, ενώ η εναλλακτική μέθοδος που χρησιμοποιεί την προσομοίωση του συστήματος διακριτού χρόνου είναι αρκετά γρηγορότερη.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής του ευρετικού αλγορίθμου σε 7 από τις περιπτώσεις που έχουν παρουσιαστεί στον Πίνακα 2. Πιο αναλυτικά παρουσιάζεται το μέσο προσδοκώμενο κόστος ανά περίοδο που ορίζεται από J^h , ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος CPU^h σε ώρες που απαιτείται για την επίλυση του ευρετικού αλγορίθμου καθώς και η ποσοστιαία αύξηση του κόστους μεταξύ της ευρετικής και βέλτιστης πολιτικής.

Πίνακας 7. Αποτελέσματα επίλυσης ακριβούς και ευρετικού αλγορίθμου

| Περίπτωση | Σενάριο Ζήτησης | Ακριβής | | | Ευρετικός | | % διαφορά Κόστους |
|-----------|--------------------|------------|-------|-------|------------|--------|----------------------|
| | | Αλγόριθμος | | | Αλγόριθμος | | |
| | | kc | CPU | J | CPU^h | J^h | |
| 1 | <i>C,C,C,C</i> | 28 | 0,416 | 3,004 | 0,061 | 3,2343 | 7,67 |
| 2 | <i>B,D,C,C</i> | 49 | 0,978 | 2,978 | 0,177 | 3,1523 | 5,86 |
| 3 | <i>D,B,B,D</i> | 49 | 1,3 | 2,535 | 0,302 | 3,1759 | 25,26 |
| 7 | <i>E,B,B,B</i> | 48 | 2,234 | 2,199 | 0,317 | 2,2435 | 2,01 |
| 8 | <i>B,E,A,C</i> | 107 | 2,863 | 2,139 | 0,363 | 2,2643 | 5,82 |
| 9 | <i>D,D,A,C</i> | 108 | 1,628 | 2,082 | 0,211 | 2,2638 | 8,75 |
| 10 | <i>B,E,C,A</i> | 107 | 2,872 | 2,141 | 0,371 | 2,3301 | 8,85 |

Από τα παραπάνω αποτελέσματα επίλυσης του ευρετικού αλγορίθμου προκύπτει ότι μεγαλύτερο κόστος παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου η ζήτηση είναι ισοκατανομημένη μεταξύ των σταδίων αποθήκευσης και ισχύει $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 1,5$

δηλαδή οι Περιπτώσεις 1-3 με μεγαλύτερο κόστος εκείνο της Περίπτωσης 1 (όπου $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$) στην οποία η ζήτηση είναι ισοκατανομημένη μεταξύ των σταδίων αποθήκευσης αλλά και μεταξύ των προϊόντων.

Στη συνέχεια έπονται οι Περιπτώσεις 7-10 όπου η ζήτηση του πρώτου σταδίου είναι μεγαλύτερη από εκείνη του πρώτου και ισχύει $\alpha + \beta = 2$ και $\gamma + \delta = 1$, με μεγαλύτερο κόστος εκείνο της Περίπτωσης 7 (όπου $\alpha > \beta$ και $\gamma = \delta$).

Τέλος, η μέση αύξηση του κόστους της λύσης που αποδίδει ο ευρετικός αλγόριθμος σε σχέση με εκείνο της ακριβούς μεθόδου είναι 13,63%, ενώ η διασπορά του κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 2,01% για την περίπτωση 7 και 25,26% για την περίπτωση 3. Ωστόσο η ευρετική μέθοδος είναι ταχύτερη από 4 έως 8 φορές έναντι της ακριβούς μεθόδου.

6 ΣΥΝΟΨΗ, ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

6.1 Στοχαστικό πρόβλημα βέλτιστου χρονικού προγραμματισμού παρτίδων

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ανέπτυξε μία βελτιωμένη προσέγγιση του SELSP μέσω της οποίας αναπτύχθηκε ένα μοντέλο MDP. Το μοντέλο MDP επιλύθηκε αριθμητικά για 15 διαφορετικά σενάρια προβλημάτων με 2 διαφορετικούς τύπους προϊόντων και εξήχθησαν σημαντικά συμπεράσματα για την επίδραση των παραμέτρων του προβλήματος (παράμετροι κόστους, χωρητικότητα χώρων αποθήκευσης και ρυθμός σακιάσματος). Επίσης μελετήθηκε η βέλτιστη πολιτική μεταβάσεων η οποία διαιρεί το 1^ο στάδιο αποθήκευσης δηλαδή το χώρο καταστάσεων X , σε δύο περιοχές, καθεμία από τις οποίες χαρακτηρίζεται από διαφορετική πολιτική μετάβασης, καθώς και η βέλτιστη πολιτική σακιάσματος η οποία διαιρεί το 2^ο στάδιο αποθήκευσης, δηλαδή το χώρο καταστάσεων Y , σε τρεις περιοχές, καθεμία από τις οποίες χαρακτηρίζεται επίσης από διαφορετική πολιτική.

Επίσης έγινε προσομοίωση του πραγματικού προβλήματος και συγκρίθηκαν τα αριθμητικά αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς μεθόδου. Ειδικότερα, στα παραδείγματα των 2 τύπων προϊόντων προέκυψε ότι η ευρετική προσέγγιση ήταν κατά 4 έως 33 φορές ταχύτερη από την αριθμητική επίλυση της ακριβούς λύσης, ενώ ταυτόχρονα το κόστος που έδωσε η μέθοδος της προσομοίωσης κάνοντας χρήση της βέλτιστης πολιτικής ταυτιζόταν με ακρίβεια 2^{ου} ή 3^{ου} δεκαδικού με εκείνο της ακριβούς μεθόδου. Ακόμη, τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ζήτηση στο 1^ο στάδιο αποθήκευσης τόσο καλύτερη είναι η τιμή του βέλτιστου κόστους. Τέλος αναπτύχθηκε ευρετικός αλγόριθμος ο οποίος εφαρμόστηκε σε 7

σενάρια και προέκυψε ότι η ευρετική προσέγγιση είναι κατά 4 έως 8 φορές ταχύτερη, ενώ η διασπορά του κόστους κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 2,01% για την περίπτωση 7 και 25,26% για την περίπτωση 3.

Μια πιθανή κατεύθυνση για μελλοντική έρευνα θα ήταν η ανάπτυξη ενός αποδοτικότερου ευρετικού αλγορίθμου που θα δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια στο μέσο αναμενόμενο κόστος. Μια άλλη πιθανή κατεύθυνση αποτελεί η επέκταση του μοντέλου ώστε να συμπεριλαμβάνονται και άλλοι τύποι αποθήκευσης τελικών προϊόντων εκτός των χώρων αποθήκευσης τελικών προϊόντων που παρουσιάστηκαν στο μοντέλο που περιγράφηκε. Για παράδειγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλαπλοί παράλληλοι χώροι αποθήκευσης τελικών προϊόντων (π.χ βιομηχανικά σιλό) στα οποία αποθηκεύεται ένας τύπος προϊόντος σε δεδομένη χρονική περίοδο όπως παρουσιάζεται από τους Liberopoulos et al. (2009) για την περίπτωση της χημικής βιομηχανίας που ενέπνευσε την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Anupindi, R., Tayur, S., (1998). Managing stochastic multiproduct systems: model, measures, and analysis. *Operations Research* 46 (3) S98-S111.
- Bourland, K.E., Yano, C.A., (1994). The strategic use of capacity slack in the economic lot scheduling problem with random demand. *Management Science* 40 (12) 1690-1704.
- Chase, C., Serrano, J., Ramadge, P.J., (1993). Periodicity and chaos from switched flow systems: Contrasting examples of discretely controlled continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1) 70-83.
- Elhafsi, M., Bai, S.X., (1997). Optimal and near-optimal control of a two-part-type stochastic manufacturing system with dynamic setups. *Production and Operations Management* 6 (4) 419-438.
- Elmaghraby, S.E. (1978). The economic lot scheduling problem (ELSP): Review and extensions. *Management Science* 24 (6) 587-598.
- Federgruen, A., Katalan, Z., (1996). The stochastic economic lot scheduling problem: cyclical base stock policies with idle times. *Management Science* 42 (6) 783-796.
- Fransoo, J.C., Sridharan, V., Bertrand, J.W.M., (1995). A hierarchical approach for capacity coordination in multiple products single-machine production systems with stationary stochastic demands. *European Journal of Operational Research* 86 (1) 57-72.
- Gallego, G., (1990). Scheduling the production of several items with random demands in a single facility. *Management Science* 36 (12) 1579-1592.

- Gallego, G., (1994). When is a base stock policy optimal in recovering disrupted cyclic schedules? *Naval Research Logistics* 41 (1) 317-333.
- Graves, S.C. (1980). The multi-product production cycling problem. *AIIE Transactions* 12 (3) 233-240.
- Karmarkar, U.S., Yoo., J., (1994). The stochastic dynamic product cycling problem. *European Journal of Operational Research* 73 360-373.
- Kimemia, J.G., Gershwin, S.B. (1983). An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing systems. *IIE Transactions* 15 (4), 353-362.
- Leachman, R.C., Gascon, A., (1988). A heuristic scheduling policy for multi-item, single-machine production systems with time-varying, stochastic demands. *Management Science* 34 (3) 377-390.
- Liberopoulos, G., Kozanidis, G. Hatzikonstantinou, O., (2009). Production scheduling of a multi-grade PET resin plant. *Computers and Chemical Engineering* (in press: [doi:10.1016/j.compchemeng.2009.05.017](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.05.017)).
- Liberopoulos, G., Caramanis, M., (1997). Numerical investigation of optimal policies for production flow control and set-up scheduling: lessons from two-part-type failure prone FMSs. *International Journal of Production Research* 35 (8), 2109-2133.
- Markowitz, D.M., Reiman, M.I., Wein, L.M., (2000). The stochastic economic lot scheduling problem: heavy traffic analysis of dynamic cyclic policies. *Operations Research* 48 (1) 136-154.
- Markowitz, D.M., Wein, L.M., (2001). Heavy traffic analysis of dynamic cyclic policies: a unified treatment of the single machine scheduling problem. *Operations Research* 49 (2) 246-270.

- Qiu, J., Loulou, R., (1995). Multiproduct production/inventory control under random demands. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (2) 350-356.
- Salomon, M., (1991). Deterministic lotsizing models for production planning. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin.
- Sharifnia, A., Caramanis, M., Gershwin, S.B. (1991). Dynamic setup scheduling and flow control in manufacturing systems. *Discrete Event Dynamic Systems* 1 (2) 149-175.
- Sox, C.R., Jackson, P.L., Bowman, A., Muckstadt, J.A., (1999). A review of the stochastic lot scheduling problem. *International Journal of Production Economics* 62 (3) 181-200.
- Sox, C.R., Muckstadt, J.A., (1997). Optimization-based planning for the stochastic lot-sizing problem. *IIE Transactions* 29 (5) 349-357.
- Vergin, R.C., Lee, T.N., (1978). Scheduling rules for the multiple product single-machine system with stochastic demand. *INFOR* 16 (1) 64-73.
- Winands, E.M.M., Adan, I.J.B.F., van Houtum, G.J., (2005). The stochastic economic lot scheduling problem: A survey. Working Paper. Beta Research School for Operations Management and Logistics, Technical University of Eindhoven.
- Zipkin, P.H., (1986). Models for design and control of stochastic multi-item batch production systems. *Operations Research* 34 (1) 91-104.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΒΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (DP_STOR_EXACT):

ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ

- Αλγόριθμος εύρεσης ακριβούς βέλτιστης λύσης

```
load('C:\Documents and Settings\Master  
user\Desktop\work\STORAGE\SENARIO1\DATA_STOR_1.mat')
```

```
BIG=100000;  
n11=1;  
X11=1;  
X21=1;  
Y11=1;  
Y21=1;  
X=10;  
Y=10;  
  
for y1=0:Y  
    for y2=0:(Y-y1)  
        for x1=0:X  
            for x2=0:(X-x1)  
                for n=1:2  
                    V(n,x1+1,x2+1,y1+1,y2+1)=0;  
                end  
            end  
        end  
    end  
end  
%MAIN LOOP  
cont=1;  
count=0;  
tic  
while cont==1  
    count=count+1  
    for x1=0:X  
        for x2=0:X-x1  
            xx=[x1 x2];  
            PROD1=min(PMAX,X-x1-x2);  
            CX=CS*(PMAX-PROD1);  
            for y1=0:Y  
                for y2=0:(Y-y1)  
                    yy=[y1 y2];  
                    PROD2=min(QMAX,Y-y1-y2);  
                    for n=1:2  
                        C=BIG;
```



```

VMIN=BIG;
VMAX=-BIG;
for n=1:2
    for x1=1:X+1
        for x2=1:X+2-x1
            for y1=1:Y+1
                for y2=1:Y+2-y1
                    temp=V(n,x1,x2,y1,y2);
                    V(n,x1,x2,y1,y2)=W(n,x1,x2,y1,y2)-W(n11,X11,X21,Y11,Y21);
                    VDIFF1=V(n,x1,x2,y1,y2)-temp;
                    if VDIF1<VMIN
                        VMIN=VDIFF1;
                    end
                    if VDIF1>VMAX
                        VMAX=VDIFF1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

if abs(VMAX-VMIN)>e*W(n11,X11,X21,Y11,Y21)
    cont=1;
else
    cont=0;
end
aa=abs(VMAX-VMIN)
bb=W(n11,X11,X21,Y11,Y21)
cc=e*W(n11,X11,X21,Y11,Y21)

end
tt=toc

```

ΒΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (SIM_STOR_EXACT) :

- Αλγόριθμος προσομοίωσης πραγματικού μοντέλου

```
load('C:\Documents and Settings\Master
user\Desktop\work\STORAGE\SENARIO1\DP_STOR_EXACT_1.mat');
load('C:\Documents and Settings\Master
user\Desktop\work\STORAGE\SENARIO1\DATA_STOR_1.mat');

R = 60;
T = 100000;

Ccum=0;
Csqcum=0;
CINDcum=[0 0 0 0 0 0];
tcum=0;
CCI=0;

for i=1:R
[CTOT,tsim,C1,C2,CC3,CC4]=SIM_STOR(X,PMAX,Y,QMAX,U1,U2,DD,PP,DIM,C
C,CS,LS,HC,N,T);
CTOTMAT(i)=CTOT;
TSIMMAT(i)=tsim;
CINDMAT(i, :, :, :, :, :)= [C1 C2 CC3 CC4]/T;
Ccum=Ccum+CTOT;
CINDcum=CINDcum + [C1 C2 CC3 CC4]/T;
Csqcum = Csqcum + CTOT^2;
tcum=tcum+tsim;
end

Caver = Ccum/R
CINDaver = CINDcum/R
CCConfInter = 2.04*sqrt((Csqcum - R*Caver^2)/(R*(R-1)));
taver = tcum/R;
```

ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (SIM_STOR):

- Αναλυτικός αλγόριθμος προσομοίωσης

```
function
[CTOT,tsim,C1,C2,CC3,CC4]=SIM_STOR(X,PMAX,Y,QMAX,U1,U2,DD,PP,DIM,C
C,CS,LS,HC,N,T);
CP = [zeros(N,1) cumsum(PP,2)];
C1 = 0;      % change cost
C2 = 0;      % spillover cost
CC3(1:2) = 0; % lost sales cost in silo
CC4(1:2) = 0; % holding cost + lost sales cost in warehouse
CTOT = 0;
% Initial state
n = 2;
x = [2 2];
y = [2 2];
tic
for t=1:T
    m = U1(n,x(1)+1,x(2)+1,y(1)+1,y(2)+1);
    l = U2(n,x(1)+1,x(2)+1,y(1)+1,y(2)+1);
    PROD1 = min(PMAX, X - sum(x));
    PROD2 = min(QMAX, Y - sum(y));
    p1 = PROD1*([1 2]==n);
    p2 = PROD2*([1 2]==l);
    C1 = C1 + CC*(m~=n);
    C2 = C2 + CS*(PMAX - PROD1);
    % Generate random indices to the demand vector
    TT=sum(bsxfun(@gt,rand(N,1),CP),2);
    for i=1:N
        D(i)=DD(i,TT(i));
    end
    xc = x + p1 - D(1:2);
    xb = max(0, xc);
    x = max(xb - p2,0);
    CC3 = CC3 - LS*bsxfun(@times,xc<0,xc);
    yb = y + min(p2,xb)-D(3:4);
    y = max(0, yb);
    CC4 = CC4 - LS*bsxfun(@times,yb < 0,yb) + HC*y;
    n = m;
end
CTOT = (C1 + C2 + sum(CC3) + sum(CC4))/t;
tsim=toc;
```

ΒΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (DP_STOR_ONESTAGE) :

- Αλγόριθμος εύρεσης ακριβούς λύσης σε μοντέλο με ένα στάδιο αποθήκευσης

```
load('C:\Documents and Settings\Administrator\Επιφάνεια
εργασίας\worknew\STORAGE\SENARIO1\DATA_STOR_1.mat')
BIG=100000;
n11=1;
X11=1;
X21=1;
X=20;
[D1,P1,DIM1]=CONVOLVE2dem(DD(1,:),PP(1,:),DIM(1),DD(3,:),PP(3,:),DIM(3,:));
[D2,P2,DIM2]=CONVOLVE2dem(DD(2,:),PP(2,:),DIM(2),DD(4,:),PP(4,:),DIM(4,:));
for n=1:2
    for x1=0:X
        for x2=0:(X-x1)
            V(n,x1+1,x2+1)=0;
        end
    end
end

%MAIN LOOP
cont=1;
count=0;
tic
while cont==1
    count=count+1
    for n=1:2
        for x1=0:X
            for x2=0:(X-x1)
                C=BIG;
                for m=1:2
                    if m~=n
                        C1=CC;
                    else
                        C1=0;
                    end
                    PROD=PMAX;
                    if x1+x2+PMAX>X
                        PROD=X-x1-x2;
                        C1=C1+CS*(PMAX-PROD);
                    end
                    xx(1)=x1;
                    xx(2)=x2;
                    for d1=1:DIM1
                        for d2=1:DIM2
```

```

        dd(1)=D1(d1);
        dd(2)=D2(d2);
        for j=1:2
            if j==n
                p=PROD;
            else p=0;
            end
            if xx(j)+p>dd(j)
                y(j)=xx(j)+p-dd(j);
            else
                y(j)=0;
                C1=C1+LS*(dd(j)-xx(j)-p)*P1(d1)*P2(d2);
            end
        end
        C1=C1+V(m,y(1)+1,y(2)+1)*P1(d1)*P2(d2);
    end
end
if C1<C
    C=C1;
    W(n,x1+1,x2+1)=C;
    U(n,x1+1,x2+1)=m;
end
end
end
end
end
VMIN=BIG;
VMAX=-BIG;
for n=1:2
    for x1=1:X+1
        for x2=1:X+2-x1
            temp=V(n,x1,x2);
            V(n,x1,x2)=W(n,x1,x2)-W(n11,X11,X21);
            VDIFF1=V(n,x1,x2)-temp;
            if VDIFF1<VMIN
                VMIN=VDIFF1;
            end
            if VDIFF1>VMAX
                VMAX=VDIFF1;
            end
        end
    end
end
end
if abs(VMAX-VMIN)>e*W(n11,X11,X21)
    cont=1;
else
    cont=0;
end
end

```



```
aa=abs(VMAX-VMIN)
bb=W(n11,X11,X21)
cc=e*W(n11,X11,X21)
end
toc
tt = toc
```

ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΙΓΟΡΙΘΜΟΣ (CONVOLVE2DEM):

- Αλγόριθμος εύρεσης κατανομής αθροίσματος ζήτησης 2 προϊόντων

```
function [DSUM,PSUM,DIMSUM]=CONVOLVE2dem(D1,P1,DIM1,D2,P2,DIM2)
```

```
count=1;
for i=1:DIM1
    for j=1:DIM2
        Dtot(count) = D1(i) + D2(j);
        Ptot(count) = P1(i)*P2(j);
        count = count + 1;
    end
end
[Dfin,i1]=sort(Dtot);
Pfin=Ptot(i1);
DSUM(1) = Dfin(1);
PSUM(1) = Pfin(1);
DIMSUM = 1;
for i=2:DIM1*DIM2
    if Dfin(i) ~= DSUM(DIMSUM)
        DIMSUM = DIMSUM + 1;
        DSUM(DIMSUM) = Dfin(i);
        PSUM(DIMSUM) = Pfin(i);
    else
        PSUM(DIMSUM) = PSUM(DIMSUM) + Pfin(i);
    end
end
end
```

ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (GEN_U_HEUR_STOR):

- Ευρετικός αλγόριθμος εύρεσης πολιτικής

```
load('C:\Documents and Settings\Administrator\Επιφάνεια
εργασίας\worknew\STORAGE\SENARIO1\DATA_STOR_1.mat')
load('C:\Documents and Settings\Administrator\Επιφάνεια
εργασίας\worknew\DP_STOR_ONESTAGE\DP_STOR_ONESTAGE_1.mat','U','V');
```

```
BIG=10000000;
for x1=0:X
    for x2=0:X-x1
        xx=[x1 x2];
        PROD1=min(PMAX,X-x1-x2);
        CX=CS*(PMAX-PROD1);
        for y1=0:Y
            for y2=0:(Y-y1)
                yy=[y1 y2];
                PROD2=min(QMAX,Y-y1-y2);
                for n=1:2
                    C=BIG;
                    for m=1:2
                        C1=CX+CC*(m~n);
                        for l=1:3
                            C2=C1;
                            for d1=1:DIM(1)
                                for d2=1:DIM(2)
                                    dd(1)=DD(1,d1);
                                    dd(2)=DD(2,d2);
                                    for j=1:2
                                        p1=PROD1*(j==n);
                                        p2=PROD2*(j==1);
                                        xc(j)=xx(j)+p1-dd(j);
                                        xb(j)=max(0,xc(j));
                                        xa(j)=max(xb(j)-p2,0);
                                        C2=C2+LS*max(0,-xc(j))*PP(1,d1)*PP(2,d2);
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
for d3=1:DIM(3)
    for d4=1:DIM(4)
        db(1)=DD(3,d3);
        db(2)=DD(4,d4);
        for j=1:2
            p2=PROD2*(j==1);
            yb(j)=yy(j)+min(p2,xb(j))-db(j);
            ya(j)=max(0,yb(j));
            C2=C2+(LS*max(0,-
yb(j))+HC*ya(j))*PP(1,d1)*PP(2,d2)*PP(3,d3)*PP(4,d4);
```


ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (DP_STOR_NoOPT):

- Βέλτιστος αλγόριθμος εύρεσης μέσου αναμενόμενου κόστους (χωρίς βελτιστοποίηση)

```
load('C:\Documents and Settings\Administrator\Επιφάνεια
εργασίας\worknew\DP_STOR_ONESTAGE\GEN_U_HEUR_STOR_1.mat');
load('C:\Documents and Settings\Administrator\Επιφάνεια
εργασίας\worknew\STORAGE\SENARIO\DATA_STOR_1.mat')
BIG=100000;
n11=1;
X11=1;
X21=1;
Y11=1;
Y21=1;
for y1=0:Y
    for y2=0:(Y-y1)
        for x1=0:X
            for x2=0:(X-x1)
                for n=1:2
                    V(n,x1+1,x2+1,y1+1,y2+1)=0;
                end
            end
        end
    end
end
end
%MAIN LOOP
cont=1;
count=0;
tic
while cont==1
    count=count+1
    for x1=0:X
        for x2=0:X-x1
            xx=[x1 x2];
            PROD1=min(PMAX,X-x1-x2);
            CX=CS*(PMAX-PROD1);
            for y1=0:Y
                for y2=0:(Y-y1)
                    yy=[y1 y2];
                    PROD2=min(QMAX,Y-y1-y2);
                    for n=1:2
                        C=BIG;
                        m=U1(n,x1+1,x2+1,y1+1,y2+1);
                        C1=CX+CC*(m~=n);
                        l=U2(n,x1+1,x2+1,y1+1,y2+1);
                        C2=C1;
```


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000102428



