



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών  
Υπολογιστών**

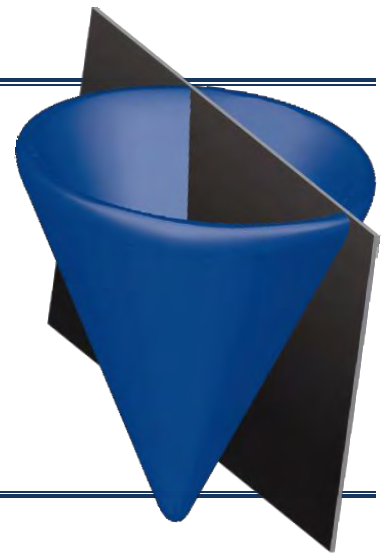
**Μεταπτυχιακή Διατριβή**

**Ερίνα – Γεωργία Αζιζάου**

---

**«Βελτιστοποίηση μεγέθους πυλών υπό προδιαγραφές  
καθυστέρησης και κατανάλωσης ισχύος με μεθόδους  
κυρτού προγραμματισμού»**

---



**Επιβλέπων:**

**Ευμορφόπουλος Νέστορας, Επίκουρος Καθηγητής ΠΘ**

**Μέλη επιτροπής:**

**Σταμούλης Γεώργιος, Καθηγητής ΠΘ**

**Τσομπανοπούλου Παναγιώτα, Επίκουρη Καθηγήτρια ΠΘ**

*Βόλος, Ιούνιος 2014*

**UNIVERSITY OF THESSALY  
FACULTY OF ENGINEERING**



---

**DEPARTMENT OF ELECTRICAL & COMPUTER ENGINEERING**

**Master Thesis  
Erina Georgia Azizaj**

**Gate sizing optimization under specifications of delay and power  
consumption via convex programming**

---

**Supervisor: Nestoras Eumorfopoulos, Assistant Professor**

**Committee Members: Georgios Stamoulis, Professor  
Panagiota Tsompanopoulou, Assistant Professor**

*Volos, June 2014*



## *Ευχαριστίες*

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον βασικό επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής αυτής διατριβής κ. Νέστορα Ευμορφόπουλο που μου έδωσε την ευκαιρία να πραγματοποιήσω αυτή την μελέτη. Η υποστήριξή του, η αμέριστη συμπαράστασή του, η υπομονή του, αλλά και οι διαρκείς και εύστοχες υποδείξεις του βοήθησαν στην ολοκλήρωση αυτής της μελέτης.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δύο επιβλέποντες καθηγητές κ. Γεώργιο Σταμούλη και την κα. Τσομπανοπούλου Παναγιώτα για τις συμβουλές, τη καθοδήγηση και την συμπαράστασή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

## Abstract

The delay caused by the gates, which depends largely on their size, and power consumption of an integrated circuit are key factors determining the efficiency of a circuit. In this thesis we focus on the gate sizing optimization of integrated circuits in terms of delay in accordance with the Elmore delay model and power consumption. The problem is formulated as a Geometric Program (GP) which is then converted into a convex programming problem that aims to find a solution via iterative algorithm convergence of an interior - point algorithm of two stages. In each iteration, during the first stage a Geometric Program will be resolved to optimize the size of the gates on the basis of scalability variables that will be defined, while in the second stage the concept of power consumption is introduced, where the dynamic power consumption constraints make the problem non-convex. We will use the values of the scaling variables from the first step to optimize the power consumption of the integrated circuit.

The Sequential Convex Programming algorithm (SCP) consists of solving a sequence of convex and separable problems, where a Lagrange function is used for guaranteeing convergence to an optimal solution. In this way, convex programming guarantees optimal solution to the optimization of gate sizing of integrated circuits, while the SCP algorithm provides greater accuracy to these optimal values, since it allows us to consider the limitations introduced by the dynamic power consumption of the circuit.



**Πίνακας περιεχομένων**

Πίνακας Τύπων .....	9
Περίληψη .....	11
1. Εισαγωγή.....	15
1.1 Μεγέθη των στοιχείων των ψηφιακών κυκλωμάτων .....	15
1.2 Βελτιστοποίηση του μεγέθους των στοιχείων των ψηφιακών κυκλωμάτων με Γεωμετρικό Προγραμματισμό.....	16
1.3 Περίγραμμα μελέτης .....	18
2. Κλιμάκωση του μεγέθους των πυλών.....	22
2.1 Βασική κλιμάκωση του μεγέθους των πυλών με απλά μοντέλα.....	22
2.1.1 Τοπολογία κυκλώματος.....	22
2.1.2 Μεταβλητές κλιμάκωσης.....	23
2.1.3 Μοντέλο RC καθυστέρησης πύλης .....	24
2.1.4 Καθυστέρηση μονοπατιού και καθυστέρηση κυκλώματος.....	26
2.1.5 Μέγεθος κυκλώματος και ισχύς κατανάλωσης .....	27
2.1.6 Βασική μορφή του προβλήματος κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών .....	28
2.1.7 Δυναμικός προγραμματισμός σχηματισμού του Γεωμετρικού Προβλήματος.....	29
2.2 Βελτιωμένα μοντέλα GP προβλημάτων.....	31
2.2.1 Γενικευμένα Posynomial Μοντέλα .....	31
2.2.2 Παρασιτική Χωρητικότητα .....	32
2.2.3 Ξεχωρίζοντας τα δεδομένα εισόδου των πυλών και τις καταστάσεις μετάβασης...33	
2.3 Εύρωστος σχεδιασμός κυκλώματος βάσει ακραίων καταστάσεων .....	35
2.4 Βελτιστοποίηση των πολυεπίπεδων συνδυαστικών λογικών μπλοκ .....	37
3. Σχεδίαση πυλών .....	41
3.1 Βελτιστοποίηση του RC-tree .....	41

3.2 Καθυστέρηση Elmore .....	42
3.3 Απώλειες ενέργειας .....	44
3.4 Βελτιστοποίηση με την καθυστέρηση Elmore .....	44
3.5 Σύνθεση του προβλήματος βελτιστοποίησης μέσω Δυναμικού Προγραμματισμού .....	45
4. Συμπεράσματα & μελλοντικές επεκτάσεις .....	47
Παράρτημα Α.....	49
Βιβλιογραφία .....	54



## Πίνακας Τύπων

(1)	Υπολογισμός καθυστέρησης κυκλώματος D	Σελίδα 27
(2)	Έκφραση ολικής δυναμικής ισχύος κυκλώματος	Σελίδα 28
(3)	Έκφραση μέσης στατικής ισχύος κυκλώματος	Σελίδα 28
(4)	Βασική μορφή προβλήματος GP κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών βάσει ορίων κατανάλωσης ισχύος και μέγιστης επιφάνειας κυκλώματος	Σελίδα 29
(5)	Εσωτερική καθυστέρηση πύλης i	Σελίδα 30
(6)	Καθυστέρηση κυκλώματος σε μορφή GGP υπό περιορισμούς του χρόνου καθυστέρησης κάθε πύλης, την ολική καθυστέρηση του κυκλώματος, των μεταβλητών κλιμάκωσης $x_i$ , του άνω ορίου κατανάλωσης ισχύος και μέγιστης επιφάνειας κυκλώματος	Σελίδα 31
(7)	GP μορφή απλού μοντέλου βελτιστοποίησης της επιφάνειας του κυκλώματος υπό περιορισμούς καθυστέρησης του κυκλώματος και κατανάλωσης ισχύος	Σελίδα 36
(8)	Καθυστέρηση κυκλώματος στο μοντέλο βελτιστοποίησης βάσει των ακραίων καταστάσεων	Σελίδα 37
(9)	Έκφραση άνω ορίου άφιξης των σημάτων στην έξοδο των πυλών	Σελίδα 37
(10)	Ελαχιστοποίηση επιφάνειας κυκλώματος υπό περιορισμούς κατανάλωσης ισχύος και καθυστέρησης κυκλώματος	Σελίδα 38
(11)	Προσέγγιση Lagrange για την ελαχιστοποίηση της επιφάνειας και της κατανάλωσης ισχύος σε σχέση με την καθυστέρηση κυκλώματος	Σελίδα 39
(12)	Έκφραση μέγιστης καθυστέρησης κυκλώματος κατά Elmore	Σελίδα 43
(13)	Έκφραση καθυστέρησης κυκλώματος υπό περιορισμούς επιφάνειας του κυκλώματος	Σελίδα 43
(14)	Μορφή GP του προβλήματος ελαχιστοποίησης της καθυστέρησης του κυκλώματος βάσει των απωλειών ενέργειας	Σελίδα 45
(15)	Μορφή GP του προβλήματος ελαχιστοποίησης της καθυστέρησης του κυκλώματος βάσει των περιορισμών της χωρητικότητας, της κατανάλωσης ισχύος και της επιφάνειας του κυκλώματος	Σελίδα 45



## Περίληψη

Η καθυστέρηση των πυλών, το οποίο εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το μέγεθος τους, και η κατανάλωση ισχύος ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος είναι βασικοί παράγοντες προσδιορισμού της αποδοτικότητας ενός κυκλώματος. Η παρούσα διατριβή ασχολείται με τη βελτιστοποίηση του μεγέθους πυλών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων υπό όρους καθυστέρησης σύμφωνα με το μοντέλο καθυστέρησης του Elmore και της κατανάλωσης ισχύος. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα (GP) το οποίο στη συνέχεια μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού το οποίο έχει ως στόχο την επίλυση μέσω επαναληπτικού αλγορίθμου σύγκλισης interior - point δύο σταδίων. Σε κάθε επανάληψη, στο πρώτο στάδιο θα επιλύεται ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα για την βελτιστοποίηση του μεγέθους των πυλών με βάσει τις μεταβλητές κλιμάκωσης που θα ορίσουμε, ενώ κατά το δεύτερο στάδιο εισάγουμε την έννοια της κατανάλωσης ισχύος όπου η δυναμική ισχύς καθιστά το πρόβλημα μη κυρτό. Εκεί θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των μεταβλητών κλιμάκωσης από το πρώτο στάδιο για βελτιστοποίηση της κατανάλωσης ισχύος του ολοκληρωμένου κυκλώματος.

Ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα (Geometric Program – GP) είναι ένας μαθηματικός τύπος προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο χαρακτηρίζεται από μια αντικειμενική συνάρτηση και από τις συναρτήσεις περιορισμού οι οποίες έχουν συγκεκριμένη μορφή. Συνεχώς αναπτύσσονται νέοι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων τέτοιας μορφής και είναι εξαιρετικά αποδοτικές ακόμα και για GP - προβλήματα μεγάλης κλίμακας, όπως η βελτιστοποίηση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Έτσι, η βασική προσέγγιση στη μοντελοποίηση GP προβλημάτων είναι η έκφρασή τους σε μορφή γεωμετρικού προγράμματος.

Όπως γνωρίζουμε, τα γεωμετρικά προβλήματα μπορούν εύκολα να επιλυθούν με μεθόδους κυρτού προγραμματισμού, όμως η έννοια της δυναμικής ισχύος καθιστά το πρόβλημα

μη κυρτό. Αυτό λύνεται με την χρήση ακολουθιακού κυρτού προγραμματισμού (sequential convex programming - SCP) . Ο αλγόριθμος SCP λύνει σε κάθε επαναληπτικό βήμα ένα ξεχωριστό σαφώς διαχωρισμένο πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού και χρησιμοποιεί μια συνάρτηση Lagrange η οποία εγγυάται τη σύγκλιση σε μια βέλτιστη λύση. Οι μέθοδοι SCP χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγάλου μεγέθους που περιγράφονται από πυκνά Χεσσιανούς πίνακες των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο κυρτός προγραμματισμός μας εγγυάται βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος, ενώ ο αλγόριθμος SCP προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στις βέλτιστες αυτές τιμές του μεγέθους των πυλών, αφού μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη του περιορισμούς που εισάγει η κατανάλωση δυναμικής ισχύος του κυκλώματος.

Η παρούσα μελέτη οργανώνεται ως εξής: Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα μεγέθη των στοιχείων των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Αναφέρουμε πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το Γεωμετρικό Προγραμματισμό στην βελτιστοποίηση αυτών των μεγεθών και αναφέρουμε αναλυτικά την δομή της παρούσας μελέτης.

Το δεύτερο κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες. Στη 1η ενότητα γίνεται μια αναλυτική αναφορά στην τοπολογία ενός κυκλώματος και ορίζονται οι μεταβλητές κλιμάκωσης για απλά μοντέλα βελτιστοποίησης. Έπειτα, αναλύουμε το μοντέλο RC καθυστέρησης πύλης και επεκτείνουμε στις έννοιες της καθυστέρησης ενός μονοπατιού και εν τέλει του ολοκληρωμένου κυκλώματος. Στη συνέχεια, αναλύουμε την συσχέτιση του μεγέθους του κυκλώματος με την κατανάλωση ισχύος και ορίζουμε τη μορφή του προβλήματος βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών με μεταβλητές κλιμάκωσης σε μορφή Γεωμετρικού Προγράμματος. Στην δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου 2 παρουσιάζουμε πιο περίπλοκα μοντέλα βελτιστοποίησης Γεωμετρικών Προγραμμάτων, μιλώντας για τα Γενικευμένα Γεωμετρικά Προγράμματα, συμπεριλαμβάνοντας την έννοια της παρασιτικής χωρητικότητας στον υπολογισμό της καθυστέρησης μονοπατιού και λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβατικές καταστάσεις ανόδου και πτώσης των σημάτων στις πύλες του κυκλώματος. Στην τρίτη και τέταρτη ενότητα του κεφαλαίου αναλύονται δύο αρκετά πιο περίπλοκα μοντέλα βελτιστοποίησης των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με μεταβλητές κλιμάκωσης βάσει ορισμένου συνόλου ακραίων καταστάσεων και ολοκληρωμένων συνδυαστικών λογικών μπλοκ του κυκλώματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε την σχεδίαση των πυλών ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος βάσει του μοντέλου RC – tree, υπολογίζουμε την μέγιστη καθυστέρηση μονοπατιού και κυκλώματος με βάση τον τύπο του Elmore και αυτό εκφράζεται ως Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Στη συνέχεια εισάγουμε περιορισμούς στην κατανάλωση ισχύος του ολοκληρωμένου κυκλώματος.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα συμπεράσματα της μελέτης. Ακολουθεί το Παράρτημα Α όπου δίνονται οι ορισμοί για τις Monomial Posynomial συναρτήσεις και ο ορισμός ενός Γεωμετρικού Προγράμματος.



## 1. Εισαγωγή

### 1.1 Μεγέθη των στοιχείων των ψηφιακών κυκλωμάτων

Η πολυπλοκότητα των ψηφιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων παρουσιάζει εκθετική αύξηση από το 1960 έως και σήμερα, με τον αριθμό των στοιχείων που τα αποτελούν να διπλασιάζονται κάθε δεκαοκτώ μήνες. Τα περισσότερα σύγχρονα ολοκληρωμένα κυκλώματα περιέχουν πάνω από εκατό εκατομμύρια στοιχεία και αγωγούς διασύνδεσης, με αποτέλεσμα η σχεδίαση τέτοιων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων να βασίζεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην αυτόματη ηλεκτρονική σχεδίαση και στην σχεδίαση μέσω εργαλείων CAD.

Σε αυτή την διατριβή θα εστιάσουμε στην επιλογή κατάλληλου μεγέθους των πυλών που τα αποτελούν. Αυτά τα μεγέθη μπορεί να ανταποκρίνονται είτε σε πραγματικές διαστάσεις όπως το φάρδος του καναλιού ενός τρανζίστορ, είτε σε πιο αφηρημένες παραμέτρους. Επίσης, θα αναφερθούμε και σε άλλες παραμέτρους της σχεδίασης που αφορούν την τάση κατωφλίου και την ισχύ κατανάλωσης των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Η ορθή επιλογή αυτών των παραμέτρων σχεδίασης καθορίζει την επίτευξη των τριών κυριότερων στόχων: σχεδίαση κατά το βέλτιστο μέγεθος του ολοκληρωμένου κυκλώματος, σχεδίαση με την μικρότερη ολική ισχύ που θα καταναλώσει το ολοκληρωμένο κύκλωμα κατά την λειτουργία του και τέλος την μεγαλύτερη ταχύτητα στην οποία θα λειτουργεί.

Ως δεδομένο λαμβάνεται συγκεκριμένο κύκλωμα με γνωστή συμπεριφορά. Η τοπολογία του κυκλώματος αποτελείται από μια διασύνδεση πυλών, οι οποίες είναι πολύ μικρά κυκλώματα που είτε εκτελούν βασικές λογικές συναρτήσεις Boolean όπως αντιστροφή (NOT), σύζευξη (AND) ή διάζευξη (OR), είτε αποτελούν στοιχεία αποθήκευσης όπως ένας καταχωρητής. Η τοπολογία ενός κυκλώματος προκύπτει από τον σχεδιαστή της ή από ένα βήμα λογικής σύνθεσης, κατά το οποίο η τοπολογία του κυκλώματος παράγεται αυτόματα από μια υψηλού επιπέδου περιγραφή της συμπεριφοράς του κυκλώματος. Οι λογικές πύλες, τα στοιχεία αποθήκευσης και οι αγωγοί

διασύνδεσης που χρειάζονται είναι καθορισμένοι. Αυτό που μένει είναι να επιλεγεί το κατάλληλο μέγεθος για κάθε πύλη του κυκλώματος.

Η τοπολογία του ολοκληρωμένου κυκλώματος μπορεί να διασπαστεί σε συνδυαστικά λογικά μπλοκ, τα οποία είναι υποκυκλώματα που αποτελούνται από λογικές πύλες και βρίσκονται μεταξύ των καταχωρητών. Κάθε τέτοιο συνδυαστικό λογικό μπλοκ εκτελεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση Boolean. Για παράδειγμα, ένας 32-bits αθροιστής έχει 64 Boolean εισόδους που αποτελούνται από την Boolean αναπαράσταση των δύο 32-bit αριθμών που θα αθροιστούν και 32-bit Boolean εξόδους, το οποίο θα είναι το Boolean αποτέλεσμα του αθροίσματος (αγνοώντας την υπερχειλίση).

Θα εστιάσουμε στο πρόβλημα την εύρεσης του βέλτιστου μεγέθους των πυλών για ένα συνδυαστικό λογικό μπλοκ, καθώς μια τέτοια μέθοδος μπορεί εύκολα να επεκταθεί και να εφαρμοστεί σε ένα σύνολο από μπλοκ, για παράδειγμα να εφαρμοστεί σε ένα μεγαλύτερο σειριακό λογικό κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει και καταχωρητές. Στην απλούστερη περίπτωση αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί σχεδιάζοντας ξεχωριστά κάθε συνδυαστικό λογικό μπλοκ (για παράδειγμα, ελαχιστοποίηση ισχύος ή μεγέθους κυκλώματος, σε σχέση με κάποιους χρονικούς περιορισμούς).

## 1.2 Βελτιστοποίηση του μεγέθους των στοιχείων των ψηφιακών κυκλωμάτων με Γεωμετρικό Προγραμματισμό

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μεγεθών πυλών μοντελοποιείται ως ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα (GP), μια ειδική μαθηματική έκφραση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα (Geometric Program – GP) είναι ένας μαθηματικός τύπος προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο χαρακτηρίζεται από μια αντικειμενική συνάρτηση και από συναρτήσεις περιορισμού συγκεκριμένης μορφής. Συνεχώς αναπτύσσονται νέοι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων τέτοιας μορφής και είναι εξαιρετικά αποδοτικές ακόμα και για GP - προβλήματα μεγάλης κλίμακας, όπως η βελτιστοποίηση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Έτσι, η βασική προσέγγιση στη μοντελοποίηση GP προβλημάτων είναι η έκφραση των προβλημάτων βελτιστοποίησης σε μορφή γεωμετρικού προγράμματος.

Η βελτιστοποίηση του μεγέθους των πυλών των ψηφιακών κυκλωμάτων ως Γεωμετρικό Πρόγραμμα δεν είναι κάτι καινούριο, αντιθέτως χρησιμοποιείται από το 1980. Το 1985 οι



Fishburn και Dunlop πρότειναν μια μέθοδο βελτιστοποίησης των μεγεθών των τρανζίστορ και των αγωγών διασύνδεσης, βασισμένη στην καθυστέρηση Elmore, το οποίο όπως προέκυψε αργότερα, είναι ένα Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Έκτοτε, πολλά σχεδιαστικά προβλήματα ψηφιακών κυκλωμάτων έχουν εκφραστεί ως Γεωμετρικά Προγράμματα.

Αρχικά ασχολούμαστε με την μοντελοποίηση του προβλήματος της βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων ως Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Η μοντελοποίηση ενός προβλήματος ως Γεωμετρικό, προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα. Το πρώτο πλεονέκτημα είναι υπολογιστικό: νέες μέθοδοι μπορούν να επιλύουν μεγάλου μεγέθους Γεωμετρικά Προγράμματα με ακρίβεια, και αποτελεσματικότητα. Αν γνωρίζουμε ότι ένα πρόβλημα είναι Γεωμετρικό, συμπεραίνουμε αμέσως ότι με μια συγκεκριμένη λογαριθμική έκφραση των παραμέτρων και των περιορισμών του, το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα βελτιστοποίησης κυρτού προγραμματισμού, το οποίο μας επιτρέπει να βρεθεί μια πιο αποτελεσματική μέθοδος επίλυσης. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ακόμα ότι οποιαδήποτε τοπική λύση που θα βρεθεί για το πρόβλημα, είναι και καθολική. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοστεί οποιαδήποτε μέθοδος που θα δώσει μια τοπική λύση στο Γεωμετρικό Πρόγραμμα και μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι η μέθοδος αυτή λύνει καθολικά το πρόβλημα. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της έκφρασης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ως Γεωμετρικό Πρόγραμμα είναι εννοιολογικό: θεωρούμε ότι ο Γεωμετρικός Προγραμματισμός λειτουργεί ως μια ενιαία πρότυπη μέθοδος επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγέθους κυκλωμάτων, κατά τον ίδιο τρόπο που λειτουργεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός για προβλήματα κατανομής πόρων.

Η παραδοσιακή προσέγγιση επίλυσης Γεωμετρικών Προγραμμάτων που προκύπτουν από προβλήματα βελτιστοποίησης του μεγέθους των ψηφιακών κυκλωμάτων περιλαμβάνει τη χρήση μεθόδων που αναπτύσσονται για το συγκεκριμένο πρόβλημα και δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε άλλες περιπτώσεις, με αποτέλεσμα να μην εκμεταλλεύονται την δομή του Γεωμετρικού Προβλήματος. Τυπικά αυτές οι μέθοδοι αναλύουν τον χρονοισμό του κυκλώματος, εντοπίζουν ένα κρίσιμο μονοπάτι και βελτιστοποιούν επαναληπτικά τα μεγέθη κάποιων πυλών ή άλλων στοιχείων αυτού του μονοπατιού, έως ότου το κύκλωμα να μην επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση. Αυτή η προσέγγιση αναπτύχθηκε αρκετά την δεκαετία του 1980, όταν οι μέθοδοι γενικού σκοπού για την επίλυση Γεωμετρικών Προβλημάτων ήταν αργές και περιορίζονταν για προβλήματα μικρού μεγέθους, ενώ πολλά άλλα προβλήματα δεν είχαν αναγνωριστεί ακόμα ως Γεωμετρικά. Αν και αυτή η παραδοσιακή προσέγγιση είναι ικανή να δώσει λύση και σε μεγαλύτερου μεγέθους προβλήματα βελτιστοποίησης μεγέθους πυλών ολοκληρωμένων

κυκλωμάτων, μπορεί να χειρίζεται μόνο απλές διατυπώσεις προβλημάτων. Επιπλέον, θα πρέπει να αναπτυχθεί μια νέα μέθοδος επίλυσης για κάθε νέα διατύπωση ενός προβλήματος.

Στα μέσα του 1990 αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι σύγκλισης εσωτερικού σημείου για την επίλυση Γεωμετρικών Προγραμμάτων οι οποίοι μπορούν να δώσουν λύση σε γεωμετρικά προβλήματα μεγάλης τάξης μεγέθους και παρουσιάζουν εξαιρετική απόδοση και αξιοπιστία. Αυτό μας έδωσε την δυνατότητα της έκφρασης προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγέθους στοιχείων μεγάλων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (VLSI) ως Γεωμετρικά Προβλήματα μεγάλης κλίμακας και την άμεση επίλυση αυτών με μεθόδους σύγκλισης εσωτερικού σημείου. Αυτή η προσέγγιση χειρίζεται με ευκολία σύνθετα προβλήματα με μεγάλο αριθμό παραμέτρων και σύνθετων στόχων.

Όπως όλες οι μέθοδοι, η προσέγγιση προβλημάτων ως Γεωμετρικών έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Ένα πλεονέκτημα αποτελεί το γεγονός ότι πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών βελτιστοποίησης αντιπροσωπεύονται εύκολα και μπορούν να προστεθούν εξίσου εύκολα νέοι περιορισμοί στην διατύπωση του προβλήματος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η μέθοδος χειρίζεται σύνθετα προβλήματα, όπως η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση μεγέθους πυλών, τάσης κατωφλίου και κατανάλωση ισχύος. Επιπλέον, αυτή η μέθοδος δεν χρειάζεται μια αρχική σχεδίαση ή οποιαδήποτε αρχικοποίηση αλγοριθμικών παραμέτρων, ενώ πάντα βρίσκει καθολική λύση.

Ως μειονέκτημα μπορούμε να αναφέρουμε το γεγονός ότι η μέθοδος έκφρασης ενός προβλήματος ως Γεωμετρικό Πρόβλημα δεν εξηγεί γιατί ένα σύνολο προδιαγραφών δεν μπορεί να επιτευχθεί, ούτε προτείνει στον σχεδιαστή αλλαγές στην τοπολογία του κυκλώματος για καλύτερη απόδοση. Επίσης, ενώ η επίλυση Γεωμετρικών Προβλημάτων είναι γρήγορη, μέθοδοι που επιλέγουν τα μεγέθη των στοιχείων ενός κυκλώματος με απλούς κανόνες και ελάχιστες επαναλήψεις παραμένουν πιο γρήγορες.

### 1.3 Περίγραμμα μελέτης

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε την μελέτη ενός πολύ απλού κυκλώματος: μια απλή δομή πυλών με την καθυστέρηση του κυκλώματος μοντελοποιημένη ως ένα απλό μοντέλο αντίστασης-χωρητικότητας (RC – model). Στη συνέχεια, θα προσθέσουμε διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας και ακρίβειας, όπως την στατική και δυναμική ισχύ. Τελικά, θα βελτιστοποιήσουμε το μέγεθος του κυκλώματος σε σχέση με τις χωρητικότητες που οδηγούν τις χωρητικότητες των εσωτερικών στοιχείων. Στόχος μας είναι η έκφραση του προβλήματος σε μορφή Γεωμετρικού Προγράμματος ή Γενικευμένου Γεωμετρικού Προβλήματος. Γνωρίζουμε ότι τα γεωμετρικά προβλήματα μπορούν εύκολα να επιλυθούν με μεθόδους κυρτού προγραμματισμού, όμως η έννοια της δυναμικής ισχύος καθιστά το πρόβλημα μη κυρτό. Αυτό λύνεται με την χρήση ακολουθιακού κυρτού προγραμματισμού (sequential convex programming - SCP) . Ο αλγόριθμος SCP λύνει σε κάθε επαναληπτικό βήμα ένα ξεχωριστό σαφώς διαχωρισμένο πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού και χρησιμοποιεί μια συνάρτηση Lagrange η οποία εγγυάται τη σύγκλιση σε μια βέλτιστη λύση. Οι μέθοδοι SCP χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγάλου μεγέθους που περιγράφονται από πυκνά Χεσσιανούς πίνακες των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο κυρτός προγραμματισμός μας εγγυάται βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος, ενώ ο αλγόριθμος SCP προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στις βέλτιστες αυτές τιμές του μεγέθους των πυλών, αφού μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη του περιορισμούς που εισάγει η κατανάλωση δυναμικής ισχύος του κυκλώματος.

Θεωρούμε ότι τα σχεδιαστικά προβλήματα κυμαίνονται από απλά τα οποία περιλαμβάνουν συμβιβασμούς μεταξύ του χώρου που καταλαμβάνει το κύκλωμα, της ταχύτητας λειτουργίας και της κατανάλωσης ισχύος του κυκλώματος έως από πιο περίπλοκες και ενδιαφέρον διατυπώσεις αυτών.

Αναλυτικά σε κάθε κεφάλαιο αναλύονται τα εξής θέματα: στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα μεγέθη των στοιχείων των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Αναφέρουμε πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το Γεωμετρικό Προγραμματισμό στην βελτιστοποίηση αυτών των μεγεθών και αναφέρουμε αναλυτικά την δομή της παρούσας μελέτης.

Το δεύτερο κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες. Στη 1η ενότητα γίνεται μια αναλυτική αναφορά στην τοπολογία ενός κυκλώματος και ορίζονται οι μεταβλητές κλιμάκωσης για απλά μοντέλα βελτιστοποίησης. Έπειτα, αναλύουμε το μοντέλο RC καθυστέρησης πύλης και επεκτείνουμε στις έννοιες της καθυστέρησης ενός μονοπατιού και εν τέλει του

ολοκληρωμένου κυκλώματος. Στη συνέχεια, αναλύουμε την συσχέτιση του μεγέθους του κυκλώματος με την κατανάλωση ισχύος και ορίζουμε τη μορφή του προβλήματος βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών με μεταβλητές κλιμάκωσης σε μορφή Γεωμετρικού Προγράμματος. Στην δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου 2 παρουσιάζουμε πιο περίπλοκα μοντέλα βελτιστοποίησης Γεωμετρικών Προγραμμάτων, μιλώντας για τα Γενικευμένα Γεωμετρικά Προγράμματα, συμπεριλαμβάνοντας την έννοια της παρασιτικής χωρητικότητας στον υπολογισμό της καθυστέρησης μονοπατιού και λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβατικές καταστάσεις ανόδου και πτώσης των σημάτων στις πύλες του κυκλώματος. Στην τρίτη και τέταρτη ενότητα του κεφαλαίου αναλύονται δύο αρκετά πιο περίπλοκα μοντέλα βελτιστοποίησης των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με μεταβλητές κλιμάκωσης βάσει ορισμένου συνόλου ακραίων καταστάσεων και ολοκληρωμένων συνδυαστικών λογικών μπλοκ του κυκλώματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε την σχεδίαση των πυλών ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος βάσει του μοντέλου RC – tree, υπολογίζουμε την μέγιστη καθυστέρηση μονοπατιού και κυκλώματος με βάση τον τύπο του Elmore και αυτό εκφράζεται ως Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Στη συνέχεια εισάγουμε περιορισμούς στην κατανάλωση ισχύος του ολοκληρωμένου κυκλώματος.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα συμπεράσματα της μελέτης. Ακολουθεί το Παράρτημα Α όπου δίνονται οι ορισμοί για τις Monomial Posynomial συναρτήσεις και ο ορισμός ενός Γεωμετρικού Προγράμματος.



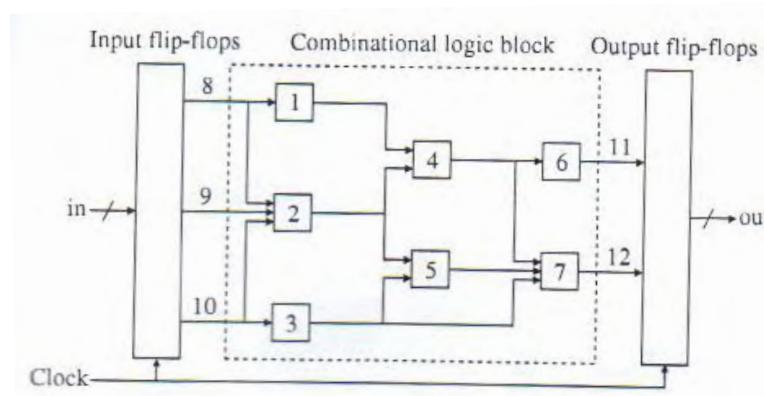
## 2. Κλιμάκωση του μεγέθους των πυλών

### 2.1 Βασική κλιμάκωση του μεγέθους των πυλών με απλά μοντέλα

#### 2.1.1 Τοπολογία κυκλώματος

Έστω συνδυαστικό λογικό κύκλωμα το οποίο αποτελείται από ένα σετ λογικών πυλών μεταξύ καταχωρητών, συνδεδεμένες με αγωγούς διασύνδεσης. Οι έξοδοι του καταχωρητή που οδηγεί το συνδυαστικό κύκλωμα ονομάζονται βασικοί εισόδοι και οι εισόδοι του καταχωρητή που παίρνουν τιμή από το συνδυαστικό κύκλωμα ονομάζονται βασικοί έξοδοι. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι οι πύλες έχουν μια έξοδο η οποία οδηγεί μια ή περισσότερες πύλες και πιθανώς να αποτελεί μια βασική έξοδο. Αντίστοιχα, κάθε είσοδος πύλης είναι συνδεδεμένη στην έξοδο κάποιας άλλης πύλης ή αποτελεί βασική είσοδο του συνδυαστικού κυκλώματος. Επίσης, θεωρούμε ότι το συνδυαστικό κύκλωμα είναι χωρίς κλειστούς βρόχους ή άκυκλο. Η τοπολογία του κυκλώματος εκφράζεται σχηματικά με κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα όπου κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει μια πύλη ή μια βασική είσοδο και κάθε τόξο αντιπροσωπεύει έναν αγωγό διασύνδεσης. Οι πύλες συμβολίζονται με αριθμούς 1, 2, ..., n και οι βασικοί εισόδοι και έξοδοι συμβολίζονται αρχίζοντας από το n + 1. Το σύνολο των βασικών εισόδων συμβολίζεται με PI (primary inputs). Οι εισόδοι μιας πύλης ή μιας βασικής εξόδου i συμβολίζεται με FI(i) και στο γράφημα φαίνεται ως το σύνολο των προγόνων του κόμβου i, για παράδειγμα το σύνολο των πυλών ή των βασικών εισόδων που οδηγούν την πύλη i. Αντίστοιχα, η έξοδος μιας πύλης ή μιας βασικής εισόδου i συμβολίζεται με FO(i) και στο γράφημα φαίνεται ως το σύνολο των απογόνων του κόμβου i, για παράδειγμα το σύνολο των πυλών ή των βασικών εξόδων που οδηγεί η πύλη i. Διευκρινίζεται ότι στην περίπτωση που το i είναι βασική είσοδος, τότε το FI(i) = 0, ενώ όταν το i είναι βασική έξοδος, τότε το FO(i) = 0. Επίσης, όταν το i είναι βασική έξοδος η FI(i) έχει την μορφή {j}, όπου j είναι η πύλη η οποία οδηγεί την βασική έξοδο i. Οι πύλες εξόδου θεωρούνται εκείνες που δεν οδηγούν άλλες πύλες.

Στην *Εικόνα 1*, δείχνουμε ένα μικρό παράδειγμα με επτά πύλες (συμβολίζονται με τους αριθμούς 1,...,7), τρεις βασικές εισόδους (8,9,10) και δύο βασικές εξόδους (11,12).



Εικόνα 1

Ενδεικτικά έχουμε:

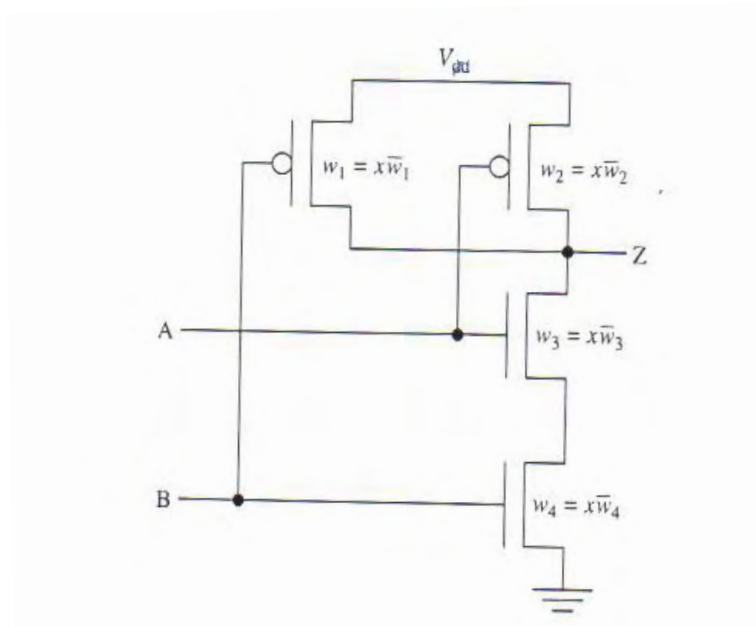
$$\begin{aligned} \text{FI}(2) &= \{8,9,10\}, & \text{FO}(2) &= \{4,5\}, \\ \text{FI}(6) &= \{4\}, & \text{FO}(6) &= \{11\}. \end{aligned}$$

Κάθε πύλη του συνδυαστικού αυτού κυκλώματος εκτελεί μια λογική συνάρτηση Boolean. Το συνδυαστικό κύκλωμα συνολικά, εκτελεί επίσης μια συνάρτηση Boolean των τριών βασικών εισόδων της σε δύο βασικές εξόδους. Σημειώνεται ότι στα σύγχρονα ολοκληρωμένα κυκλώματα, τα συνδυαστικά μπλοκ είναι πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους, με χιλιάδες πύλες και πολύ περισσότερες βασικές εισόδους και εξόδους.

### 2.1.2 Μεταβλητές κλιμάκωσης

Χαρακτηρίζουμε την κάθε πύλη από μια μεταβλητή κλιμάκωσης  $x_i \geq 1$  η οποία κλιμακώνει τα πλάτη των στοιχείων που αποτελούν την πύλη. Η τιμή της  $x_i = 1$  αντιστοιχεί στα μικρότερα πλάτη όλων των εσωτερικών στοιχείων της πύλης, ενώ όταν ο  $x_i = 5$  (για παράδειγμα) αυτό σημαίνει ότι τα πλάτη των εσωτερικών στοιχείων της πύλης είναι κατά πέντε φορές μεγαλύτερα από το ελάχιστο πλάτη που έχουν όταν  $x_i = 1$ . Όπως φαίνεται στην *Εικόνα 2* με την πύλη NAND, Το ελάχιστο μέγεθος της NAND ( $x = 1$ ) έχει πλάτη  $w_1, \dots, w_4$ . Με την μεταβλητή κλιμάκωσης  $x$ , τα πλάτη των στοιχείων αυτών παίρνουν τιμές  $xw_1, \dots, xw_4$ . Οι μεταβλητές κλιμάκωσης αποτελούν τις μεταβλητές του προβλήματος σχεδίασης επηρεάζουν το ολικό

μέγεθος του κυκλώματος, την ισχύ που θα καταναλώσει το κύκλωμα και την καθυστέρηση του κυκλώματος.



Εικόνα 2

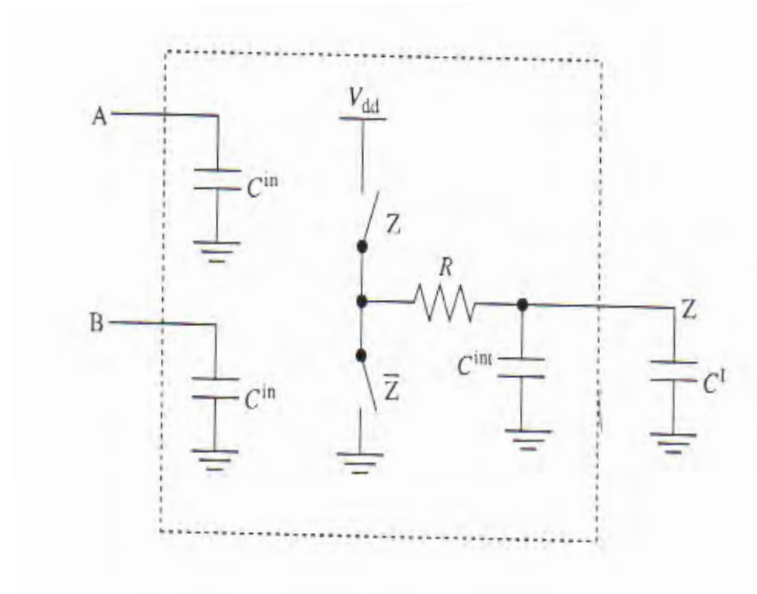
Όπως θα δούμε αργότερα, η μεταβλητή κλιμάκωσης των πυλών δεν χρειάζεται να έχει την κυριολεκτική έννοια της κλιμάκωσης όλων των στοιχείων της πύλης. Γενικά αποτελεί μια παράμετρο που περιγράφει το μέγεθος μιας πύλης ή την ικανότητά της να οδηγεί μια χωρητικότητα. Επίσης, επισημαίνουμε ότι οι μεταβλητές κλιμάκωσης  $x_i$  συνήθως περιορίζονται από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών και δεν επιτρέπεται να λαμβάνουν συνεχείς τιμές.

### 2.1.3 Μοντέλο RC καθυστέρησης πύλης

Κάθε πύλη ενός συνδυαστικού κυκλώματος προσθέτει μια καθυστέρηση στο κύκλωμα. Η καθυστέρηση είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε τα σήματα εξόδου να λάβουν τις νέες τιμές τους, αφού οι είσοδοι λάβουν νέες τιμές. Στην Εικόνα 3 φαίνεται το απλό μοντέλο RC αντίστασης – χωρητικότητας μιας CMOS πύλης. Όταν η λογική έξοδος της πύλης έχει την τιμή 1, ο άνω διακόπτης είναι κλειστός και ο κάτω διακόπτης είναι ανοιχτός, έτσι η έξοδος Z συνδέεται στην τάση τροφοδοσίας  $V_{dd}$ , η οποία αντιπροσωπεύει την λογική τιμή 1. Όταν η



λογική έξοδος της πύλης έχει την τιμή 0, ο άνω διακόπτης είναι ανοιχτός και ο κάτω διακόπτης κλειστός, με αποτέλεσμα η έξοδος Z να συνδέεται με την γείωση, η οποία αντιπροσωπεύει το λογικό 0.



Εικόνα 3

Κάθε πύλη χαρακτηρίζεται από μια χωρητικότητα  $C^{in}$ , η οποία φορτώνει την πύλη που την οδηγεί (βασική είσοδος της πύλης). Επίσης, κάθε πύλη χαρακτηρίζεται από την εσωτερική χωρητικότητα  $C^{int}$ , η οποία εμφανίζεται ως φορτίο της πύλης. Αυτές οι χωρητικότητες εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις της μεταβλητής κλιμάκωσης,

$$C_i^{in} = x \bar{C}_i^{in} \quad C_i^{int} = x \bar{C}_i^{int}$$

όπου τα  $\bar{C}_i^{in}$  και  $\bar{C}_i^{int}$  είναι οι χωρητικότητες εισόδου και εσωτερική χωρητικότητα της πύλης  $i$  με μεταβλητή κλιμάκωσης  $x = 1$ .

Αν το  $i$  συμβολίζει μια βασική έξοδο, τότε η χωρητικότητα εισόδου θα είναι  $C_i^{in}$ . Η χωρητικότητα φορτίου  $C_i^L$  μιας πύλης ή μιας βασική εισόδου είναι το άθροισμα των χωρητικοτήτων εισόδου των πυλών και βασικών εξόδων που αυτή οδηγεί:

$$C_i^L = \sum_{j \in FO(i)} C_j^{in}$$

Η χωρητικότητα φορτίου είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x$ , με θετικούς συντελεστές, επομένως σχηματίζουν μια Posynomial συνάρτηση.

Κάθε πύλη παρουσιάζει αντίσταση  $R_i$ , η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη με τους μεταβλητές κλιμάκωσης:

$$R_i = \bar{R}_i / x_i,$$

όπου  $\bar{R}_i$ , η αντίσταση μιας πύλης  $i$  όταν η μεταβλητή κλιμάκωσης  $x = 1$ . Επομένως η συνάρτηση αντίστασης  $R_i$  είναι μια Monomial συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x$ .

Άρα, μια πύλη  $i$  έχει ως παραμέτρους τα μεγέθη  $\bar{C}_i^{\text{in}}$  και  $\bar{C}_i^{\text{int}}$  και  $\bar{R}_i$ . Αυτές οι παράμετροι εξαρτώνται από την κατασκευή του κυκλώματος, την τάση τροφοδοσίας κ.α.

Χρησιμοποιώντας αυτό το απλό μοντέλο RC μιας πύλης και του φορτίου της, είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την καθυστέρηση πύλης  $D_i$  ως εξής:

$$D_i = 0.69 R_i (C_i^{\text{int}} + C_i^L),$$

η οποία εκφράζει το χρόνο που απαιτείται ώστε η τάση εξόδου ενός κυκλώματος RC να φτάσει τη μέση τιμή της λογικής τάσης (μεταξύ 0 και  $V_{\text{dd}}$ ). Όπως είδαμε παραπάνω, οι παράμετροι  $R_i$ ,  $C_i^{\text{int}}$ ,  $C_i^L$  είναι Posynomial συναρτήσεις των μεταβλητών κλιμάκωσης, επομένως και η καθυστέρηση κάθε πύλης είναι μια τέτοια συνάρτηση.

#### 2.1.4 Καθυστέρηση μονοπατιού και καθυστέρηση κυκλώματος

Ως μονοπάτι ενός κυκλώματος ορίζεται ένα σύνολο πυλών όπου η έξοδος της μιας πύλης συνδέεται με την είσοδο της επόμενης κ.ο.κ. Η καθυστέρηση του μονοπατιού προκύπτει από το άθροισμα της καθυστέρησης των πυλών του, άρα είναι μια Posynomial συνάρτηση. Η καθυστέρηση κυκλώματος  $D$ , η οποία αναφέρεται και ως καθυστέρηση κρίσιμου μονοπατιού, είναι η μέγιστη καθυστέρηση μεταξύ όλων των μονοπατιών του κυκλώματος. Ως καθυστέρηση νοείται ο ενδιάμεσος χρόνος έως ότου λάβουν έγκυρες τιμές οι έξοδοι του κυκλώματος, ξεκινώντας από την χρονική στιγμή που ενεργοποιούνται οι είσοδοι του κυκλώματος. Η καθυστέρηση του κρίσιμου μονοπατιού είναι η μέγιστη καθυστέρηση του κυκλώματος, αποτελείται από το μέγιστο άθροισμα Posynomial συναρτήσεων και άρα είναι μια Γενικευμένη Posynomial Συνάρτηση.

Πιο συγκεκριμένα, για το παράδειγμα του κυκλώματος στην *Εικόνα 1* το οποίο αποτελείται από 7 μονοπάτια, μπορούμε να υπολογίσουμε την καθυστέρηση του κυκλώματος  $D$  ως εξής:

$$D = \max \{D_1 + D_4 + D_6, D_1 + D_4 + D_7, D_2 + D_4 + D_6, D_2 + D_4 + D_7, D_2 + D_5 + D_7, D_3 + D_5 + D_6, D_3 + D_7\} \quad (1)$$

Δηλαδή ως η μέγιστη καθυστέρηση απ' όλα τα δυνατά μονοπάτια του κυκλώματος.

### 2.1.5 Μέγεθος κυκλώματος και ισχύς κατανάλωσης

Στο απλοποιημένο μοντέλο κυκλώματος RC που είδαμε παραπάνω, το μέγεθος της κάθε πύλης  $i$  είναι ανάλογη των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x_i$ , επομένως το συνολικό μέγεθος του κυκλώματος θα είναι της μορφής:

$$A = \sum_{i=1}^n x_i \bar{A}_i$$

όπου  $\bar{A}_i$ , ο το μέγεθος της πύλης  $i$  όταν  $x = 1$ . Το συνολικό μέγεθος του κυκλώματος είναι μια ορισμένη συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης με θετικούς ορισμένους συντελεστές, επομένως θα μπορούσαμε να την χαρακτηρίσουμε ως μια Posynomial συνάρτηση.

Μια μεταβολή της τιμής της εξόδου μιας πύλης  $i$  σχετίζεται με την απώλεια ενέργειας λόγω της φόρτισης ή αποφόρτισης της χωρητικότητας φορτίου ή της εσωτερικής χωρητικότητας της πύλης, το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$(C_i^{\text{int}} + C_i^L) V_{\text{dd}} / 2,$$

όπου  $V_{\text{dd}}$  η τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος. Παρομοίως, μια μεταβολή της τιμής της εισόδου συνδέεται με απώλεια ενέργειας ίση με:

$$C_i^L V_{\text{dd}}^2 / 2.$$

Η ολική δυναμική ισχύς που διαχέεται στο κύκλωμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$P_{\text{dyn}} = \sum_{i \in PI} f_i C_i^L V_{\text{dd}}^2 + \sum_{i=1}^n f_i (C_i^{\text{int}} + C_i^L) V_{\text{dd}}^2, \quad (2)$$

όπου με  $f_i$  συμβολίζεται η συχνότητα ενεργοποίησης μιας βασικής εισόδου  $i$  ή της εξόδου μιας πύλης  $i$ . Συνήθως δίνεται συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας του ρολογιού  $f_{clk}$ ,  $f_i = \alpha_i f_{clk}$ , όπου  $\alpha_i$  συντελεστές ενεργοποίησης πύλης οι τιμές των οποίων συνήθως εκτιμώνται κατά την συμπεριφοριστική προσομοίωση του κυκλώματος. Για σταθερές τιμές των  $f_i$  και των τιμών της τάσης τροφοδοσίας, η δυναμική ισχύς είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης πυλών, με θετικούς σταθερούς συντελεστές. Άρα, είναι μια Posynomial συνάρτηση.

Η στατική ισχύς μιας πύλης είναι η ισχύς που καταναλώνεται από το κύκλωμα ακόμη και όταν οι τιμές στις εισόδους του παραμένουν σταθερές. Είναι ανάλογη των μεταβλητών κλιμάκωσης και εξαρτάται από την κατάσταση εισόδου της πύλης. Η μέση στατική ισχύς του κυκλώματος έχει την μορφή:

$$P_{stat} = \sum_{i=1}^n \bar{\Gamma}_i^{leak} X_i V_{dd}, \quad (3)$$

όπου  $\bar{\Gamma}_i^{leak}$  το ρεύμα διαρροής της πύλης  $i$  με μοναδιαίες μεταβλητές κλιμάκωσης. Η στατική ισχύς είναι γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης με θετικούς συντελεστές, επομένως μια Posynomial συνάρτηση.

Η ολική ισχύς είναι το άθροισμα της δυναμικής και της στατικής ισχύος. Είναι μια Posynomial συνάρτηση εφόσον είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης.

$$P = P_{dyn} + P_{stat}$$

Μέχρι στιγμής, υποθέτουμε ότι η τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος και η συχνότητα ρολογιού είναι σταθερές. Αν όμως οι τιμές αυτές ποικίλουν, τα δύο επιμέρους στοιχεία της ολικής ισχύος συμπεριφέρονται διαφορετικά.

### 2.1.6 Βασική μορφή του προβλήματος κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών

Η βασική μορφή του προβλήματος κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών ενός κυκλώματος μπορεί πλέον να αποδοθεί με την εξής μορφή προβλήματος βελτιστοποίησης: να

βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των μεταβλητών κλιμάκωσης έτσι ώστε να προκαλείται η ελάχιστη καθυστέρηση, λαμβάνοντας υπόψη τα όρια του ολικού μεγέθους και ολικής ισχύος.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } D \\ & \text{subject to } P \leq P^{\max}, A \leq A^{\max} \\ & 1 \leq x_i, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

όπου  $P^{\max}$  και  $A^{\max}$  τα όρια της ολικής ισχύος και ολικού μεγέθους κυκλώματος και οι μεταβλητές βελτιστοποίησης είναι οι μεταβλητές κλιμάκωσης  $x_1, \dots, x_n$ . Όπως περιγράφηκε παραπάνω, η μέγιστη καθυστέρηση  $D$  είναι γενικευμένη Posynomial συνάρτηση, ενώ οι συναρτήσεις  $P$  και  $A$  είναι Posynomial, το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ένα Γενικευμένο Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Η λύση αυτού του προβλήματος μπορεί να βρεθεί με μεγάλη ακρίβεια με τεχνικές κυρτού προγραμματισμού και να αποδώσει τις βέλτιστες τιμές μεγέθους των πυλών, δεδομένης μέγιστης κατανάλωσης ισχύος και μέγιστου μεγέθους κυκλώματος.

Υπάρχουν κι άλλοι περιορισμοί συμβατοί με το Γεωμετρικό Πρόγραμμα που περιγράψαμε παραπάνω, τους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε, όπως μια μέγιστη τιμή για τις μεταβλητές κλιμάκωσης  $x_i \leq x_i^{\max}$ , ή να προσθέσουμε μια μέγιστη τιμή για της χωρητικότητα φορτίου για κάθε βασική είσοδο.

### 2.1.7 Δυναμικός προγραμματισμός σχηματισμού του Γεωμετρικού Προβλήματος

Η καθυστέρηση  $D$  είναι το μεγαλύτερο σεν από ένα σύνολο από Posynomial συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα των καθυστερήσεων όλων των μονοπατιών ενός κυκλώματος. Ακόμα και κυκλώματα μικρού μεγέθους μπορεί να έχουν πολύ μεγάλο αριθμό μονοπατιών. Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι πρακτικό να σχηματίζουμε εκφράσεις της καθυστέρησης  $D$  καταγράφοντας όλα τα μονοπάτια. Αυτό το πρόβλημα επιλύεται με εφαρμογή απλής αναδρομής. Ορίζουμε την μέγιστη καθυστέρηση όλων των μονοπατιών ως το μέγεθος  $T_i$  η οποία ξεκινάει από μια βασική είσοδο και καταλήγει σε κάποια πύλη  $i$ . Επομένως, το μέγεθος  $T_i$  εκφράζει τον μέγιστο χρόνο που χρειάζεται η πύλη  $i$  ώστε να μεταβεί σε νέα κατάσταση, αν τα σήματα εισόδου μεταβαίνουν σε χρόνο  $t = 0$ . Το  $T_i$  εκφράζεται από την αναδρομική σχέση:

$$T_i = \max T_j + D_i, \quad (5)$$

όπου το  $j$  ανήκει στο σύνολο  $FI(i)$  και αρχική συνθήκη  $T_i = 0$  όπου  $i$  βασική είσοδος του κυκλώματος. Εύκολα προκύπτει ότι η ολική καθυστέρηση  $D$  του κυκλώματος δίνεται από την μέγιστη τιμή όλων των μεγεθών  $T_i$ , η οποία ισούται με την μέγιστη τιμή μεταξύ όλων των  $T_i$  των πυλών εξόδου του κυκλώματος, αφού το  $T_i$  εκφράζει την καθυστέρηση του μονοπατιού μέχρι τις εισόδους της πύλης  $i$  αθροιζόμενη με την εσωτερική καθυστέρηση που προκαλεί η ίδια η πύλη  $i$ :

$$D = \max T_i = \max \{T_i \mid i \text{ πύλη εισόδου}\}, i = 1, \dots, n.$$

Η αναδρομικά σχέση (5) δείχνει ότι το  $T_i$  είναι μια γενικευμένη Posynomial συνάρτηση των μεταβλητών κλιμάκωσης, καθώς οι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις είναι κλειστές ως προς την πρόσθεση και ως προς το μέγιστο. Για το παράδειγμα του Σχήματος 1, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} T_1 &= D_1 \quad i = 1, 2, 3, \\ T_4 &= \max \{T_1, T_2\} + D_4, \\ T_5 &= \max \{T_2, T_3\} + D_5, \\ T_6 &= T_4 + D_6, \\ T_7 &= \max \{T_3, T_4, T_5\} + D_7, \\ D &= \max \{T_6, T_7\}. \end{aligned}$$

Για ένα τόσο μικρό κύκλωμα, η αναδρομή δεν προσφέρει σημαντικό πλεονέκτημα, όμως σε κυκλώματα πολύ μεγάλου μεγέθους βελτιστοποίηση είναι υπολογίσιμη.

Η παραπάνω έκφραση της καθυστέρησης, μας επιτρέπει τον επαναπροσδιορισμό του προβλήματος (4) σε μια μορφή Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγράμματος:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \bar{T} \\ &\text{subject to } \bar{T}_j \leq \bar{T}, \text{ όπου } j \text{ πύλη εξόδου} \\ &\bar{T}_j + D_j \leq \bar{T}_i, \text{ όπου } j \text{ ανήκει στο σύνολο } FI(i) \quad (6) \\ &P \leq P_{\max}, A \leq A_{\max}, \\ &1 \leq x_i, i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

με παραμέτρους βελτιστοποίησης τις μεταβλητές κλιμάκωσης μεγέθους πυλών  $x_i$ , το  $\bar{T}_i$  αναφέρεται σε εσωτερικές πύλες του κυκλώματος και το μέγεθος  $\bar{T}$  άνω όριο στην ολική καθυστέρηση κυκλώματος.

Ακολουθώντας την παραπάνω μεθοδολογία, ένα τυπικό κύκλωμα το οποίο αποτελείται από 1000 πύλες μπορεί να βελτιστοποιηθεί σε μερικά δευτερόλεπτα σε έναν απλό υπολογιστικό μηχάνημα (desktop pc). Παρόλο που εισάγονται  $n + 1$  νέες μεταβλητές, οι περιορισμοί στη σχέση (6) είναι αραιοί, με αποτέλεσμα ένας Solver Γεωμετρικών Προβλημάτων να είναι πολύ αποδοτικός.

## 2.2 Βελτιωμένα μοντέλα GP προβλημάτων

Το απλό μοντέλο κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος μπορεί εύκολα να αντικατασταθεί από ακριβέστερα μοντέλα όσον αφορά την καθυστέρηση και την κατανάλωση ισχύος του ολοκληρωμένου κυκλώματος, τα οποία όμως παραμένουν συμβατά με το Γεωμετρικό Πρόβλημα.

### 2.2.1 Γενικευμένα Posynomial Μοντέλα

Οι απλές γραμμικές συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για το μέγεθος και την κατανάλωση ισχύος για μια πύλη μπορούν να αντικατασταθούν με οποιαδήποτε Γενικευμένη Posynomial συνάρτηση των συντελεστών κλιμάκωσης. Η ίδια παρατήρηση ισχύει για την αντίσταση εισόδου και για την εσωτερική χωρητικότητα μια πύλης.

Η καθυστέρηση μιας πύλης δεν χρειάζεται να προκύπτει από το γινόμενο της χωρητικότητας που οδηγεί μια πύλη και της αντίστασης εισόδου. Θα μπορούσε να είναι μια αύξουσα γενικευμένη Posynomial συνάρτηση αυτών των δύο παραμέτρων. Ακόμα πιο γενικά, θα μπορούσαμε να απαλλαγούμε από την έννοια της αντίστασης εισόδου και να μοντελοποιήσουμε την καθυστέρηση πυλών απευθείας ως μια γενικευμένη Posynomial συνάρτηση της χωρητικότητας που οδηγεί την πύλη και της μεταβλητής κλιμάκωσης  $x$ .

### 2.2.2 Αφηρημένες μεταβλητές και μεταβλητές πολλαπλής κλιμάκωσης

Αν εκφράσουμε το μέγεθος, την κατανάλωση ισχύος, την χωρητικότητα εισόδου και την αντίσταση εξόδου μιας πύλης ως γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις της μεταβλητής κλιμάκωσης  $x$ , τότε η μεταβλητή αυτή μπορεί να ερμηνευτεί ως μια αφηρημένη μεταβλητή η οποία περιγράφει το μέγεθος μιας πύλης και δεν χρειάζεται να λαμβάνει την αυστηρή έννοια για κάθε στοιχείο της πύλης ξεχωριστά.

Ακόμη πιο γενικευμένα, μια πύλη μπορεί να παραμετροποιηθεί από παραπάνω από μια μεταβλητές κλιμάκωσης. Σε αυτή την περίπτωση, η μεταβλητή κλιμάκωσης  $x$  θα είναι ένα διάλυμα παραμέτρων. Επίσης, σε αυτή την περίπτωση, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μορφή του μεγέθους, της κατανάλωσης ισχύος, της χωρητικότητας εισόδου και της αντίστασης εξόδου της πύλης να εκφράζεται από γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις.

Σε μια πιο ακραία περίπτωση, θα μπορούσαμε να μεταβάλλουμε ξεχωριστά τα πλάτη των στοιχείων της πύλης, έτσι ώστε αυτοί οι παράμετροι να εκφράζουν τα πλάτη των στοιχείων αυτών. Αυτή είναι ουσιαστικά η μέθοδος custom design που θα μελετήσουμε σε επόμενη παράγραφο.

### 2.2.2 Παρασιτική Χωρητικότητα

Αν η παρασιτική χωρητικότητα ενός πλέγματος είναι γνωστή, τότε αυτή μπορεί να προστεθεί στην χωρητικότητα φορτίου της πύλης που οδηγεί το πλέγμα. Η προσθήκη αυτού του όρου διατηρεί το  $D_i$  ως Posynomial συνάρτηση, επομένως το πρόβλημα κλιμάκωσης του μεγέθους των πυλών του ολοκληρωμένου κυκλώματος παραμένει ένα GP πρόβλημα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκτιμώμενες τιμές για τις παρασιτικές χωρητικότητες, με την προϋπόθεση ότι είναι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x$ . Το



πρόβλημα είναι ότι θα λάβουμε ακριβείς τιμές για των παρασιτικών χωρητικότητων μόνο μετά από λεπτομερή διάταξη των στοιχείων του κυκλώματος, το οποίο προκύπτει μετά από την κλιμάκωση των πυλών. Κατά την επαναβλετιστοποίηση των μεταβλητών κλιμάκωσης των πυλών, πιθανώς να χρειαστεί εκ νέου σχεδιασμός της διάταξης των στοιχείων του κυκλώματος, γεγονός το οποίο θα επηρεάσει τις παρασιτικές χωρητικότητες.

Η γενικευμένη προσέγγιση είναι η επαναληπτική εξέταση μεταξύ βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών, της βέλτιστης διάταξης των στοιχείων του κυκλώματος, προσδιορισμός των παρασιτικών χωρητικότητων, έως ότου προκύψει σύγκλιση σε συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών κλιμάκωσης. Σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης, γίνεται χρήση των τιμών των παρασιτικών χωρητικότητων από την τελευταία επανάληψη.

Μια μέθοδος η οποία ενισχύει την πιθανότητα σύγκλισης είναι η προσθήκη μιας συνθήκης περιορισμού μεταξύ των επαναληπτικών βημάτων της βελτιστοποίησης, η οποία περιορίζει την απόκλιση μεταξύ της προηγούμενης σχεδίασης και της νέας. Έτσι, οι επόμενες τιμές των μεταβλητών κλιμάκωσης των πυλών να μην διαφέρουν πολύ από τις προηγούμενες τιμές τους με αποτέλεσμα η διάταξη, η δρομολόγηση και επομένως οι παρασιτικές χωρητικότητες να διαφέρουν ελάχιστα από την τελευταία επανάληψη.

Προσθέτοντας μια συνθήκη περιορισμού της μορφής:

$$\lambda \sum_{i=1}^n \max \{ x_i / x_i^{\text{prev}}, x_i^{\text{prev}} / x_i \},$$

όπου  $\lambda > 0$  μια παράμετρος και  $x_i^{\text{prev}}$  η τιμή της μεταβλητής κλιμάκωσης κατά το προηγούμενο επαναληπτικό βήμα, λαμβάνουμε μια νέα διάταξη όπου οι περισσότερες μεταβλητές κλιμάκωσης θα έχουν ακριβώς την ίδια τιμή με το προηγούμενο βήμα. Αυτή η μέθοδος στο GP είναι ανάλογη της προσθήκης του αθροίσματος περιορισμού απόλυτων τιμών στην βελτιστοποίηση με κυρτό προγραμματισμό.

### 2.2.3 Ξεχωρίζοντας τα δεδομένα εισόδου των πυλών και τις καταστάσεις μετάβασης

Μέχρι στιγμής, η καθυστέρηση που εισάγει στο κύκλωμα μια πύλη είναι ανεξάρτητη από τις τιμές εισόδου της πύλης για μια δεδομένη στιγμή ή την συγκεκριμένη κατάσταση

μετάβασης. Μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια κατά την βελτιστοποίηση του κυκλώματος ξεχωρίζοντας την καθυστέρηση της κάθε πύλης ανάλογα με την κατάσταση μετάβασης που βρίσκεται η πύλη.

Μια συνηθισμένη προσέγγιση είναι η αντικατάσταση της καθυστέρησης  $D_i$  μιας πύλης  $i$  με τέσσερις διαφορετικές τιμές καθυστέρησης για κάθε είσοδο  $j$  της πύλης  $i$ :

$$D_{ji}^{rr}, D_{ji}^{rf}, D_{ji}^{fr}, D_{ji}^{ff}$$

όπου η πρώτη υποδηλώνει την μέγιστη δυνατή καθυστέρηση από μια μεταβατική κατάσταση ανόδου στην είσοδο  $j$  σε μια μεταβατική κατάσταση ανόδου στην έξοδο της πύλης. Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι υπόλοιπες τρεις τιμές της καθυστέρησης της πύλης  $i$ . Ανάλογα την λογική συνάρτηση που υλοποιεί η κάθε πύλη, κάποιες από τις τέσσερις αυτές καταστάσεις μπορεί να μην χρησιμοποιηθεί ποτέ. Σε αυτή την περίπτωση η καθυστέρηση για την συγκεκριμένη κατάσταση δεν ορίζεται. Για παράδειγμα, μια πύλη NAND πάντα αντιστρέφει το αποτέλεσμα στην έξοδο της, επομένως μια μεταβατική κατάσταση πτώσης στην έξοδο θα συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου οι είσοδοι βρίσκονται σε μεταβατική κατάσταση ανόδου. Άρα, έχουμε μόνο δύο περιπτώσεις καθυστέρησης της πύλης,  $D_{ji}^{rf}, D_{ji}^{fr}$  για κάθε είσοδο  $j$ .

Έστω  $T_i^r (T_i^f)$  το άνω όριο του χρόνου μετάβασης σε μια κατάσταση ανόδου (κατάσταση πτώσης) της πύλης  $i$ , υποθέτοντας ότι κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  λαμβάνουν χώρα οι μεταβάσεις βασικών εισόδων του κυκλώματος. Μπορούμε να αναπαράγουμε αναδρομικά τις τιμές των  $T_i^r$  και  $T_i^f$ :

$$T_i^r = \max_{j \in FI(i)} \max \{ T_j^r + D_{ji}^{rr}, T_j^f + D_{ji}^{fr} \}$$

$$T_i^f = \max_{j \in FI(i)} \max \{ T_j^r + D_{ji}^{rf}, T_j^f + D_{ji}^{ff} \}$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε ή να αφαιρέσουμε οποιαδήποτε μετάβαση η οποία δεν είναι λογικά έγκυρη, όπως παραδείγματος χάρη μια πύλη η οποία στην έξοδο πάντα αντιστρέφεται. Σε αυτή την περίπτωση, οι αναδρομικές σχέσεις που περιγράφονται παραπάνω απλοποιούνται ως εξής:

$$T_i^r = \max_{j \in FI(i)} \{ T_j^f + D_{ji}^{fr} \}$$

$$T_i^f = \max_{j \in FI(i)} \{ T_j^r + D_{ji}^{rf} \}$$

Η ολική καθυστέρηση κυκλώματος μπορεί να υπολογιστεί από τις μέγιστες τιμές μεταξύ όλων των χρόνων μετάβασης ανόδου ή πτώσης των σημάτων για όλες τις πύλες:

$$D = \max \{ \max \{ T_i^f, T_i^r \} \mid i \text{ πύλη εξόδου} \}$$

Το πρόβλημα της καθυστέρησης του κυκλώματος σε αυτή τη μορφή μπορεί και πάλι να εκφραστεί ως ένα Γενικευμένο Γεωμετρικό Πρόβλημα (GGP), δεδομένου ότι οι καθυστερήσεις των πυλών είναι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις.

Με τον διαχωρισμό των μεταβατικών καταστάσεων ανόδου και πτώσης των σημάτων, υπολογίζοντας ξεχωριστά την καθυστέρηση από τις εισόδους κάθε πύλης έως την έξοδό της, πλέον είναι εφικτό να ορίσουμε διαφορετικές τιμές χωρητικότητας εισόδου για κάθε είσοδο της πύλης και να υπολογίσουμε διαφορετική απώλεια ενέργειας για κάθε μετάβαση.

## 2.3 Εύρωστος σχεδιασμός κυκλώματος βάσει ακραίων καταστάσεων

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν πιο ακριβή μοντέλα καθυστέρησης, κατανάλωσης ισχύος του κυκλώματος εισάγοντας κι άλλους περιορισμούς οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν ως Γεωμετρικά Προβλήματα. Στη συνέχεια θα δείξουμε πως η έκφραση του προβλήματος της βελτιστοποίησης του μεγέθους των πυλών ενός κυκλώματος σε Γεωμετρικό Πρόβλημα μας επιτρέπει να λαμβάνουμε υπόψη και τις μεταβολές των παραμέτρων κατά την διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Τα γενικευμένα Posynomial μοντέλα της καθυστέρησης των πυλών, της κατανάλωσης ισχύος και του χρόνου μετάβασης των σημάτων σε καταστάσεις ανόδου ή πτώσης κάθε πύλης βασίζονται έμμεσα σε ένα σύνολο διαδικαστικών παραμέτρων όπως η τάση κατωφλίου, το πάχος του οξειδίου, κλπ και περιβαλλοντικών παραμέτρων, όπως η θερμοκρασία και η τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος. Στην περίπτωση του σχεδιασμού του κυκλώματος βάσει των ακραίων καταστάσεων, ορίζεται ένα ορισμένο σύνολο ακραίων καταστάσεων, καθένα από τα οποία αποτελείται από συγκεκριμένο συνδυασμό των διαδικαστικών και περιβαλλοντικών παραμέτρων. Για κάθε τέτοια περίπτωση, αναπτύσσεται ένα γενικευμένο Posynomial μοντέλο για την καθυστέρηση πυλών, για την κατανάλωση ισχύος, κλπ.

Στην πιο απλή έκδοση του εύρωστου σχεδιασμού κυκλωμάτων βάσει ακραίων καταστάσεων, αναπαράγουμε τους περιορισμούς για κάθε ακραία κατάσταση χρησιμοποιώντας ελαφρώς διαφορετικά μοντέλα για κάθε μία κατάσταση. Για παράδειγμα, οι περιορισμοί για την καθυστέρηση και την κατανάλωση ισχύος ενός κυκλώματος είναι της μορφής:

$$D(x) \leq D^{\max}, \quad P(x) \leq P^{\max}.$$

Έστω ότι υπάρχουν  $K$  ακραίες καταστάσεις, τότε έχουμε  $K$  διαφορετικά μοντέλα καθυστέρησης και κατανάλωσης ισχύος, δηλαδή:

$$D^1(x), \dots, D^K(x), \quad P^1(x), \dots, P^K(x).$$

όπου  $D^k(x)$  και  $P^k(x)$  είναι η καθυστέρηση και η ολική κατανάλωση ισχύος του κυκλώματος για την ακραία κατάσταση  $K$  και εκφράζονται ως συναρτήσεις των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x$  των πυλών του κυκλώματος. Μπορούμε λοιπόν, να σχηματίσουμε το Γεωμετρικό Πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } A \\ & \text{subject to } D^1(x) \leq D^{\max}, \dots, D^k(x) \leq D^{\max}, \\ & P^1(x) \leq P^{\max}, \dots, P^k(x) \leq P^{\max}, \\ & 1 \leq x_i, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Η βέλτιστη λύση αυτού του προβλήματος θα παράγει μια σχεδίαση η οποία θα ικανοποιεί τους περιορισμούς στην καθυστέρηση και στην κατανάλωση ισχύος για όλες τις ακραίες καταστάσεις και θα καταλαμβάνει τον ελάχιστο δυνατό χώρο.

Αυτή η μέθοδος είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου η επίδραση των μεταβολών των παραμέτρων στην απόδοση του κυκλώματος δεν είναι ξεκάθαρη, για παράδειγμα όταν η μεταβολή μιας παραμέτρου αυξάνει την διαρροή ρεύματος, αλλά μειώνει την δυναμική ισχύ, επομένως η συνολική επιρροή της μεταβολής της παραμέτρου στην ολική κατανάλωση ισχύος στο κύκλωμα, δεν είναι ξεκάθαρη. Η βελτιστοποίηση κυκλωμάτων βάσει ακραίων καταστάσεων δείχνει μεγάλη ανοχή στις μεταβολές των διαδικαστικών και περιβαλλοντικών παραμέτρων στις ακραίες καταστάσεις, όμως για σύνολα ακραίων καταστάσεων τα οποία δεν συμπεριλαμβάνονται στο ορισμένο σύνολο ακραίων καταστάσεων του κυκλώματος, δεν υπάρχει καμία εγγύηση. Στην πραγματικότητα, οι μεταβολές των παραμέτρων δεν αναμένεται να είναι οι ίδιες με κάποια ακραία κατάσταση. Η μέθοδος είναι κατά κύριο λόγο μια ευριστική μέθοδος βελτιστοποίησης βασισμένη στις  $K$  ακραίες καταστάσεις και αναμένεται να λειτουργήσει ανάλογα σε άλλες πραγματικές καταστάσεις με παρόμοιες μεταβολές των τιμών των παραμέτρων.

Υπάρχουν κάποια λεπτά σημεία στο σχηματισμό του προβλήματος βελτιστοποίησης του κυκλώματος με τη μέθοδο του εύρωστου προγραμματισμού με χρήση ακραίων καταστάσεων, όταν η κατάσταση χειρότερης περίπτωσης συμπεριλαμβάνεται στο ορισμένο σύνολο των ακραίων καταστάσεων για παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθεί μια προσέγγιση δυναμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό της καθυστέρησης του κυκλώματος. Η βασική προσέγγιση είναι να σχηματιστούν  $K$  διαφορετικοί χρόνοι άφιξης του σήματος στην έξοδο της κάθε πύλης του κυκλώματος, έστω:

$$T_i^{(k)}, i = 1, \dots, K$$

και να παράγονται ξεχωριστά οι καθυστερήσεις για κάθε ακραία κατάσταση ως εξής:

$$T_i^{(k)} \geq \max_{j \in FI(i)} \{D_i^k + T_j^{(k)}\}. \quad (8)$$

Σε αυτή την περίπτωση το  $T_i^{(k)}$  εκφράζει ένα άνω όριο στο χρόνο άφιξης των σημάτων στην έξοδο της πύλης  $i$ , στην ακραία περίπτωση  $k$ .

Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι να υπάρχει μόνο ένα σύνολο από όρια χρόνου άφιξης των σημάτων στην έξοδο των πυλών:

$$T_i \geq \max_{j \in \text{FI}(i)} \{D_i^k + T_j\}, k = 1, \dots, K \quad (9)$$

Σε αυτή την μορφή, το μέγεθος  $T_i$  μπορεί να ερμηνευτεί ως το άνω όριο στο χρόνο άφιξης των σημάτων στην έξοδο, το οποίο θα είναι έγκυρο ακόμη και στην περίπτωση όπου κάθε πύλη μπορεί να συσχετίζεται με μια διαφορετική ακραία κατάσταση.

Η σχέση (8) θεωρείται κατάλληλη για μοντελοποίηση περιπτώσεων όπου υπάρχουν μεταβολές στην εξωτερική τάση τροφοδοσίας, ενώ η σχέση (9) θεωρείται κατάλληλη για μοντελοποίηση περιπτώσεων όπου εμφανίζονται εσωτερικές μεταβολές στην παροχή ρεύματος στο κύκλωμα, όπου τότε κάθε πύλη μπορεί να έχει διαφορετική τάση τροφοδοσίας. Τα προβλήματα εύρωστου σχεδιασμού που περιγράφονται από τη σχέση (7) είναι τυπικά πολύ μεγάλα, αλλά και πολύ αραιά, με αποτέλεσμα να μπορούν να επιλύονται αποδοτικά παρά το τεράστιο πλήθος περιορισμών. Συγκεκριμένα, ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται σχετικά με το  $K$  (το σύνολο των ακραίων καταστάσεων). Ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται από τη δομή του προβλήματος αλλά τυπικά αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με το  $K$ .

## 2.4 Βελτιστοποίηση των πολυεπίπεδων συνδυαστικών λογικών μπλοκ

Σε αυτή την ενότητα αναφερόμαστε στο μεγαλύτερο πρόβλημα της βελτιστοποίησης πολυεπίπεδων συνδυαστικών λογικών μπλοκ. Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι οι καταχωρητές από flip-flop μεταξύ των μπλοκ είναι σταθεροί, παρουσιάζουν σταθερά χωρητικά φορτία στις εισόδους τους και οδηγούν μια σταθερή δύναμη στις εξόδους τους. Επομένως, η απόδοση του κάθε μπλοκ είναι τοπικά καθορισμένη με αποτέλεσμα η επιφάνεια, η καθυστέρηση και η κατανάλωση ισχύος να είναι ανεξάρτητα από τις μεταβλητές κλιμάκωσης των πυλών των υπόλοιπων μπλοκ. Πράγματι, οι καταχωρητές θέτουν τα ηλεκτρικά και χρονικά όρια μεταξύ των μπλοκ που χωρίζουν.

Συμβολίζουμε με  $D_i$  την καθυστέρηση για το μπλοκ  $i$ , με  $A_i$  την επιφάνεια που καταλαμβάνει το μπλοκ  $i$ , με  $P_i$  την ισχύ και με  $x_i$  το διάνυσμα των μεταβλητών κλιμάκωσης των πυλών του μπλοκ. Έστω  $A = A_1 + \dots + A_K$  η ολική επιφάνεια που καταλαμβάνουν τα  $K$  μπλοκ

και  $P = P_1 + \dots + P_K$  η ολική ισχύς. Οι συναρτήσεις  $A$  και  $P$  είναι διαχωρισμένες ανά μπλοκ, άρα είναι συναρτήσεις των διανυσμάτων των μεταβλητών κλιμάκωσης  $x_i$ .

Η μέγιστη καθυστέρηση του κάθε μπλοκ παραμένει σταθερή αν η συχνότητα λειτουργίας του ρολογιού είναι σταθερή. Οι μέγιστες τιμές καθυστέρησης του κάθε μπλοκ μπορεί να διαφέρουν, όμως για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι ισούνται με το 80% της περιόδου λειτουργίας του ρολογιού  $0.8/f_{clk}$ . Τότε, ο στόχος θα είναι η βελτιστοποίηση της επιφάνειας:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } A = A_1 + \dots + A_K \\ &\text{subject to } D_i \leq 0.8/f_{clk}, i = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

όπου μεταβλητές είναι οι μεταβλητές κλιμάκωσης σε κάθε ένα από τα  $K$  μπλοκ. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί ελαχιστοποιώντας ξεχωριστά την επιφάνεια του κάθε μπλοκ το οποίο υπόκειται στις χρονικές απαιτήσεις του, αφού οι περιορισμοί είναι οριοθετημένοι ανά μπλοκ. Η ίδια προσέγγιση λειτουργεί για κάθε άλλο διαχωρισμένο στόχο, π.χ. κατανάλωση ισχύος.

Αν περιορίζεται η επιφάνεια και η κατανάλωση ισχύος ενός κυκλώματος, τότε μιλάμε για βελτιστοποίηση σύζευξης μεταξύ των μπλοκ. Αν για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το πρόβλημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } A = A_1 + \dots + A_K \\ &\text{subject to } D_i \leq 0.8/f_{clk}, i = 1, \dots, K, \\ &P = P_1 + \dots + P_K \leq P^{\max}. \end{aligned} \quad (10)$$

Το πρόβλημα παραμένει σε μορφή Γενικευμένου Γεωμετρικού Προβλήματος (GGP) και μπορεί να επιλυθεί άμεσα, ως ένα πολύ μεγάλο GGP πρόβλημα, ή επαναληπτικά, με χρήση κάποιας μεθόδου η οποία σχεδιάζει  $K$  ξεχωριστά μπλοκ σε κάθε επανάληψη.

Μια τέτοια μέθοδος είναι η προσέγγιση Lagrange, στην οποία οι συζευγμένοι περιορισμοί της κατανάλωσης ισχύος είναι δυικοί. Έτσι, σχηματίζεται το πρόβλημα με τη μορφή:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } A + \lambda P \\ &\text{subject to } D_i \leq 0.8/f_{clk}, i = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (11)$$

όπου  $\lambda$  είναι μια θετική δυική μεταβλητή, ο πολλαπλασιαστής Lagrange, η οποία συσχετίζεται με το όριο της ολικής κατανάλωσης ισχύος. Το πρόβλημα σε αυτή τη μορφή είναι επίσης, διαχωρισμένο ανεξάρτητα ανά μπλοκ, με αποτέλεσμα να μπορεί να επιλυθεί για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , βελτιστοποιώντας κάθε μπλοκ ξεχωριστά. Η επανάληψη αποτελείται από την προσαρμογή του  $\lambda$  έτσι ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός της κατανάλωσης ισχύος, ή

ισοδύναμα, να μεγιστοποιηθεί η βέλτιστη τιμή του δικού του (11). Το GGP πρόβλημα επομένως είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού και μπορεί να μετασχηματιστεί λογαριθμικά χωρίς να παρουσιάσει κενά στο δικό του πρόβλημα.



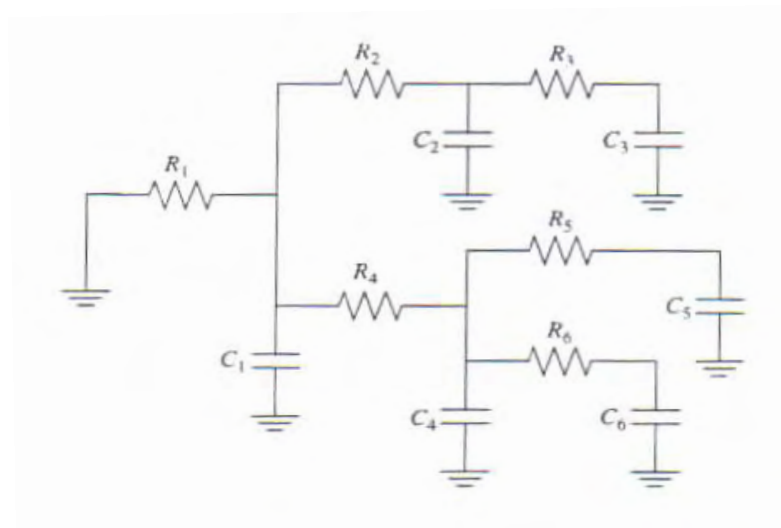


### 3. Σχεδίαση πυλών

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την σχεδίαση των πυλών όπου επιλέγουμε τα πλάτη των στοιχείων της πύλης, δεδομένων προδιαγραφών και στόχων για την λειτουργία της. Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο βελτιστοποίησης του μοντέλου RC. Στη συνέχεια αναλύεται το μοντέλο καθυστέρησης του Elmore, οι απώλειες ενέργειας της πύλης και η βελτιστοποίηση της καθυστέρησης Elmore. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο δυναμικού προγραμματισμού για τον σχηματισμό του προβλήματος ελαχιστοποίησης της καθυστέρησης Elmore.

#### 3.1 Βελτιστοποίηση του RC-tree

Ξεκινάμε με την βελτιστοποίηση ενός RC –tree, το οποίο αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό του μήκους των αγωγών διασύνδεσης, του μεγέθους των πυλών και της σχεδίασης κυκλωμάτων. Έστω το RC –tree που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 4):



Εικόνα 4

Το RC –tree αποτελείται από ένα δέντρο αντιστάσεων η ρίζα του οποίου είναι γειωμένη, όπου σε κάθε κόμβο εμφανίζεται μια χωρητικότητα με το ένα άκρο συνδεδεμένο σε γείωση. Ονομάζουμε τον κάθε κόμβο  $1, \dots, N$  όπου κάθε κόμβος  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) χαρακτηρίζεται από μια χωρητικότητα  $C_i$  και μια αντίσταση  $R_i$  η οποία συνδέει τον κόμβο  $i$  με τον γονικό του κόμβο. Όπως παρουσιάζεται παρακάτω, ένα RC –tree μπορεί να μοντελοποιεί μια διασύνδεση δικτύου ή ως μοντέλο προσομοίωσης της εσωτερικής δυναμικής μιας πύλης το οποίο υπολογίζει τις μη μηδενικές αντιστάσεις των αγωγών διασύνδεσης και τις παρασιτικές χωρητικότητες.

### 3.2 Καθυστέρηση Elmore

Έστω  $v_i(t)$  η τάση στον κόμβο  $i$ . Υποθέτουμε ότι όλοι οι πυκνωτές τροφοδοτούνται κατά τη χρονική στιγμή μηδέν από τάση  $v_i(0) = 1$ . Τότε, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε τάση μειώνεται μονοτονικά στο μηδέν όσο ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Η καθυστέρηση Elmore στον κόμβο  $i$  ορίζεται ως η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη τάσης, όταν οι τάσεις αρχικοποιούνται ως  $v_i(0) = 1$ :

$$D_i = \int_0^{\infty} v_i(t) dt.$$

Η καθυστέρηση Elmore  $D_i$  είναι ένα λογικό μέτρο του χρόνου που χρειάζεται η τάση στον κόμβο  $i$  να μηδενιστεί, ξεκινώντας από την αρχική τιμή του, 1.

Η καθυστέρηση Elmore ενός κόμβου μπορεί να ερμηνευτεί ως μέτρο καθυστέρησης σε μια κατάσταση μετάβασης ανόδου. Αν υποθέσουμε ότι η ρίζα του RC – tree τροφοδοτείται από τάση η οποία λαμβάνει τιμή από 0 σε 1 κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ενώ οι τάσεις σε κάθε κόμβο αρχικοποιούνται όλες σε μηδέν. Τότε, κάθε τάση  $v_i(t)$  αυξάνεται μονοτονικά στο 1, όσο ο χρόνος τείνει στο άπειρο, έτσι:

$$D_i = \int_0^{\infty} (1 - v_i(t)) dt.$$

το οποίο σημαίνει ότι η καθυστέρηση Elmore είναι η επιφάνεια μεταξύ της ασυμπτωτικής 1 και της καμπύλης απόκρισης της τάσης στον κόμβο  $i$ . Ορίζουμε ως καθυστέρηση Elmore  $D$  όλου του RC – tree τη μέγιστη καθυστέρηση Elmore που εμφανίζεται σε οποιοδήποτε κόμβο του δέντρου. (όπως θα δούμε παρακάτω, η μέγιστη καθυστέρηση εμφανίζεται πάντα στα φύλλα του δέντρου).

Η αναλυτική έκφραση της καθυστέρησης Elmore  $D_i$  του κόμβου  $i$ , προκύπτει ως εξής: έστω  $C_i^{\text{tot}}$  η ολική χωρητικότητα που εμφανίζεται από τον κόμβο  $i$  στα φύλλα (συμπεριλαμβανομένου της  $C_i$ ) και  $d_i = R_i C_i^{\text{tot}}$ . Η καθυστέρηση Elmore μπορεί να εκφραστεί ως

$$D_i = \sum_{j \in \text{Path}(i)} d_j \quad (12)$$

όπου το άθροισμα αφορά το μοναδικό μονοπάτι από τον κόμβο  $i$  στη ρίζα. Αυτό σημαίνει ότι το  $d_i$  μπορεί να ερμηνευτεί ως τοπική καθυστέρηση Elmore διαμέσου της αντίστασης  $R_i$  και η ολική καθυστέρηση Elmore είναι το άθροισμα αυτών των τοπικών καθυστερήσεων κατά μήκος του μονοπατιού προς τη ρίζα του δένδρου. Κατά την εξίσωση 12, όταν όλες οι τάσεις αρχικοποιούνται στο ένα, η  $C_i^{\text{tot}}$  εκφράζει το ολικό φορτίο αποθηκευμένο στους πυκνωτές από τον κόμβο  $i$  έως τα φύλλα του δένδρου. Αυτό το φορτίο διαρρέει τις αντιστάσεις  $R_i$  με αποτέλεσμα, το γινόμενο  $R_i C_i^{\text{tot}}$  να είναι το ολοκλήρωμα της τάσης που θα εμφανίζεται διαμέσου των  $R_i$  καθώς το RC – tree αποφορτίζεται. Το άθροισμα στην εξίσωση 12 προκύπτει επειδή η τάση στον κόμβο  $i$  είναι το άθροισμα των τάσεων των αντιστάσεων στο μονοπάτι από τη ρίζα στον κόμβο  $i$ .

Για παράδειγμα, η καθυστέρηση Elmore στον κόμβο 3 στο RC – tree μοντέλο που εμφανίζεται στην *Εικόνα 4* δίνεται από το άθροισμα:

$$D_3 = R_1 C_1^{\text{tot}} + R_2 C_2^{\text{tot}} + R_3 C_3^{\text{tot}} = R_1 (C_1 + \dots + C_6) + R_2 (C_2 + C_3) + R_3 C_3.$$

Εδώ η καθυστέρηση Elmore είναι  $D = \max\{D_3, D_5, D_6\}$ .

Παρόμοια ανάλυση μπορεί να διενεργηθεί για την περίπτωση όπου οι αρχικές τιμές των τάσεων δεν ισούνται με 1 (ή 0 όταν η ρίζα του δένδρου οδηγείται από πηγή τάσης 1 Volt). Το ολικό φορτίο αποθηκευμένο στους πυκνωτές μεταξύ ενός κόμβου  $j$  και των φύλλων του δένδρου είναι

$$Q_j^{\text{tot}} = \sum_k \text{από κόμβο } j \text{ προς τα φύλλα } C_k v_k(0).$$

το οποίο ισούται με το  $C_j^{\text{tot}}$  όταν οι αρχικές τιμές των τάσεων ισούνται με 1. Το φορτίο  $Q_j^{\text{tot}}$  διαρρέει την αντίσταση  $R_j$  με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα της τάσης στην  $R_j$  να ισούται με γινόμενο  $R_j Q_j^{\text{tot}}$ . Επομένως,

$$\int_0^\infty v_i(t) dt = \sum_{j \in \text{Path}(i)} R_j Q_j^{\text{tot}} \quad (13)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τάσεις λαμβάνουν πάντα μη αρνητικές τιμές, όταν οι αρχικές τιμές των τάσεων είναι μη αρνητικές. Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα δίνει ένα λογικό μέτρο της καθυστέρησης. Ο τύπος 13 είναι παρόμοιος με τον τύπο υπολογισμού της καθυστέρησης Elmore, με τη μόνη διαφορά οι αρχικές τιμές των τάσεων κλιμακώνουν τις χωρητικότητες. Αυτή η τροποποιημένη έκδοση του υπολογισμού της καθυστέρησης Elmore, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση όπου οι τάσεις δεν αρχικοποιούνται όλες στην τιμή 1.

### 3.3 Απώλειες ενέργειας

Η απώλεια ενέργειας είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα που συνδέεται με το μοντέλο RC – tree. Κατά την αποφόρτιση ενός δένδρου RC – tree με γειωμένη ρίζα, η ολική ενέργεια οι οποία χάνεται στις αντιστάσεις ισούται με την ολική αρχική ενέργεια οι οποία αποθηκεύεται στους πυκνωτές:

$$E = \sum_{i=1}^N C_i v_i(0)^2 / 2,$$

η οποία στην περίπτωση όπου οι αρχικές τιμές των τάσεων ισούνται με 1, απλοποιείται στην έκφραση  $(C_1 + \dots + C_N) / 2$ . Στην περίπτωση που ο κόμβος-ρίζα του RC – tree οδηγείται από τάση τροφοδοσίας ίση με 1 Volt, η ολική απώλεια ενέργειας είναι:

$$E = \sum_{i=1}^N C_i (v_i(0) - 1)^2 / 2,$$

η οποία επίσης απλοποιείται στην έκφραση  $(C_1 + \dots + C_N) / 2$  στην περίπτωση όπου οι αρχικές τιμές των τάσεων ισούνται με 0.

### 3.4 Βελτιστοποίηση με την καθυστέρηση Elmore

Ας υποθέσουμε ότι οι αντιστάσεις και οι χωρητικότητες σε ένα μοντέλο RC – tree είναι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις κάποιων παραμέτρων βελτιστοποίησης  $x$ . Η καθυστέρηση Elmore σε οποιοδήποτε κόμβο είναι το άθροισμα των γινόμενων των αντιστάσεων με τις χωρητικότητες, επομένως θα είναι μια γενικευμένη Posynomial συνάρτηση. Η ολική μέγιστη καθυστέρηση Elmore θα ισούται με την μέγιστη καθυστέρηση που εμφανίζεται στα φύλλα του RC – tree με αποτέλεσμα να είναι επίσης μια γενικευμένη Posynomial συνάρτηση αυτών των παραμέτρων. Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν στην περίπτωση όπου οι αρχικές τιμές των τάσεων δεν είναι όλες ίσες με 1 (αλλά παραμένουν μη αρνητικές): η τροποποιημένη καθυστέρηση Elmore σε οποιονδήποτε κόμβο και η ολική μέγιστη τροποποιημένη καθυστέρηση Elmore είναι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις. Επίσης, παρατηρούμε ότι η απώλεια ενέργειας είναι γενικευμένη Posynomial συνάρτηση. Μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την ολική μέγιστη καθυστέρηση Elmore υπό τους περιορισμούς μέγιστης απώλειας ενέργειας και υπό άλλους περιορισμούς οι οποίοι είναι σε μορφή γενικευμένων Posynomial συναρτήσεων, μέσω γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού (GGP):

$$\begin{aligned} & \text{minimize } D \\ & \text{subject to } E \leq E^{\max}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

### 3.5 Σύνθεση του προβλήματος της βελτιστοποίησης μέσω Δυναμικού Προγραμματισμού

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της καθυστέρησης Elmore (σχέση 14) μπορεί να μετασχηματιστεί σε αραιή μορφή με χρήση αναδρομικής συνάρτησης. Η χωρητικότητα από τον κόμβο  $i$  του μοντέλου RC – tree προς τα φύλλα του δένδρου ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$C_i^{\text{tot}} = C_i + \sum_{j \in \text{Child}(i)} C_j^{\text{tot}},$$

όπου με  $\text{Child}(i)$  συμβολίζουμε τα παιδιά του κόμβου  $i$ . Οι καθυστερήσεις Elmore ανά κόμβο μπορούν να υπολογιστούν από την αναδρομική σχέση:

$$D_i = D_{\text{Par}(i)} + R_i C_i^{\text{tot}},$$

όπου με  $\text{Par}(i)$  συμβολίζουμε τον κόμβο γονιό του κόμβου  $i$ . Από αυτές τις δύο ανισότητες προκύπτει το αντίστοιχο Γεωμετρικό Πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } s \\ & \text{subject to } s \geq D_i, \text{ όπου } i \text{ πύλη εξόδου,} \\ & C_i^{\text{tot}} \geq \sum_{j \in \text{Child}(i)} C_j^{\text{tot}} + C_i, i = 1, \dots, n, \\ & D_i \geq D_{\text{Par}(k)} + R_i C_i^{\text{tot}}, i = 1, \dots, n, \\ & E \leq E^{\text{max}}, \\ & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Αυτό το πρόβλημα είναι σε αραιή μορφή και μπορεί να επιλυθεί αρκετά αποτελεσματικά. Χρησιμοποιώντας αυτό τον τύπο, μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε ένα μοντέλο RC – tree με παραπάνω από δεκάδες χιλιάδες κόμβους.



## 4. Συμπεράσματα & μελλοντικές επεκτάσεις

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάσαμε αρκετές κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγέθους των στοιχείων των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων τα οποία μπορούν να εκφραστούν σε μορφή Γεωμετρικών Προγραμμάτων ή Γενικευμένων Γεωμετρικών Προγραμμάτων. Αυτά τα προβλήματα κυμαίνονται από απλά, όπου στόχος είναι η βελτιστοποίηση του μεγέθους των πυλών με μεταβλητές κλιμάκωσης έτσι ώστε να βρεθεί μια χρυσή τομή μεταξύ της επιφάνειας που καταλαμβάνει το κύκλωμα, της κατανάλωσης ισχύος του κυκλώματος και της ολικής μέγιστης καθυστέρησης, σε πιο σύνθετα προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν σχεδιασμό κυκλωμάτων βάσει ενός ορισμένου συνόλου ακραίων καταστάσεων ή πολυεπίπεδων συνδυαστικών λογικών μπλοκ, κλπ.

Το γεγονός ότι ένα γνωστό πρόβλημα σχεδιασμού μπορεί να εκφραστεί ως Γενικευμένο Γεωμετρικό Πρόγραμμα (GGP) προσφέρει αρκετές δυνατότητες. Η πιο προφανή χρήση είναι η επίλυση του σχεδιαστικού προβλήματος με μεθόδους σύγκλισης εσωτερικού σημείου με κυρτό προγραμματισμό. Με οποιαδήποτε μέθοδο όμως κι αν επιλυθεί, η έκφραση του προβλήματος ως GGP δείχνει ότι οποιαδήποτε τοπική βέλτιστη λύση είναι και ολική. Όταν ένα σχεδιαστικό πρόβλημα συμπεριλαμβάνει διακριτούς περιορισμούς, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει είναι ένα διακριτό Γεωμετρικό Πρόγραμμα. Προβλήματα τέτοιας μορφής δεν επιλύονται εύκολα, όμως τα παραδείγματα μας δείχνουν ότι η χρήση σχετικά απλών ευριστικών μεθόδων, οι οποίες βασίζονται στην επίλυση ενός ή περισσότερων συνεχόμενων GP προβλημάτων, στην πράξη έχουν αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση, το Γεωμετρικό Πρόγραμμα προσφέρει ένα κατώτατο όριο με το οποίο μπορεί να κριθεί οποιαδήποτε ευριστική μέθοδος.

Σχετικά με τα μοντέλα που περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στοχεύσαμε κατά κύριο λόγο στην συμβατότητα των μοντέλων αυτών με προβλήματα της μορφής Γεωμετρικών Προγραμμάτων και όχι στην ακρίβειά τους με πραγματικά ολοκληρωμένα κυκλώματα. Σε επίπεδο πύλης ή στοιχείου πύλης, υπάρχουν δύο ακραίες προσεγγίσεις στην μοντελοποίηση τους ως GP. Στην πρώτη προσέγγιση γίνεται πιο λεπτομερής ανάλυση και ουσιαστικά βασιζόμαστε σε εξισώσεις. Στην δεύτερη προσέγγιση γίνεται προσπάθεια να ταιριάζουν οι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις σε δεδομένα τα οποία έχουν μετρηθεί και έχουν προσομοιωθεί. Η κάθε προσέγγιση έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Μια μέθοδος η οποία βασίζεται σε εξισώσεις, για παράδειγμα, μπορεί να χειρίζεται πολλές περισσότερες παραμέτρους ενώ μια μέθοδος που ακολουθεί την δεύτερη προσέγγιση προσφέρει πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια.

Λαμβάνοντας υπόψη τις προσεγγίσεις που γίνονται κατά την μοντελοποίηση προβλημάτων σε μορφή Γεωμετρικών Προγραμμάτων, το σφάλμα και τις παραμέτρους που

αγνοούνται, θα πρέπει να υπενθυμίζεται ότι η τελική σχεδίαση που προκύπτει από το GP σχεδιασμό αποτελεί μονάχα μια προσέγγιση του πραγματικού προβλήματος σχεδίασης του ολοκληρωμένου κυκλώματος. Η πρακτική του αξία έγκειται στο να αποκτήσουμε προσεγγιστικά μια καλή λύση. Σε επόμενο στάδιο βελτίωσης της σχεδίασης, θα μπορούσαμε ξεκινώντας από το αποτέλεσμα της επίλυσης του GP προβλήματος, να εφαρμόσουμε απλές τοπικές μεθόδους βελτίωσης, οι οποίες βασίζονται σε πιο ακριβή μοντέλα τα οποία δεν είναι συμβατά με τα Γεωμετρικά Προβλήματα.

Οι μέθοδοι SCP μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με πάνω από  $10^6$  μεταβλητές. Τα προβλήματα εκφράζονται σε μια ακολουθία ξεχωριστών προβλημάτων κυρτού προγραμματισμού, τα οποία στη συνέχεια επιλύονται και παράγουν μια βέλτιστη λύση.



## Παράρτημα Α

### Ορισμοί Monomial και Posynomial Συναρτήσεων

Έστω  $x_1, \dots, x_n$  πραγματικές θετικές μεταβλητές και  $x = (x_1, \dots, x_n)$  το διάνυσμα με στοιχεία τα  $x_i$ . Μια συνάρτηση πραγματικής τιμής  $f$  με μεταβλητές  $x$ , της μορφής

$$f(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n},$$

όπου  $c > 0$  και  $a_i$  ανήκει στο  $\mathbb{R}$ , ονομάζεται monomial συνάρτηση. Κάθε θετική σταθερά είναι monomial, όπως και κάθε μεταβλητή. Οι συναρτήσεις αυτής της μορφής διέπονται από τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Το άθροισμα μιας ή περισσότερων συναρτήσεων monomial αποτελούν μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}},$$

όπου  $c > 0$ , καλείται συνάρτηση Posynomial (positive polynomial). Κάθε Monomial συνάρτηση είναι και Posynomial. Οι συναρτήσεις αυτής της μορφής διέπονται από τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της θετικής κλιμάκωσης.

### Ορισμός GGP προγράμματος

Ένα Γενικευμένο Γεωμετρικό Πρόγραμμα (Generalized Geometric Program - GGP) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && g_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

Όπου τα  $f_i$  είναι γενικευμένες Posynomial συναρτήσεις, τα  $g_i$  είναι Monomial συναρτήσεις και τα  $x_i$  είναι οι μεταβλητές βελτιστοποίησης.

Εφόσον, κάθε Posynomial συνάρτηση είναι και γενικευμένη Posynomial, κάθε GP πρόβλημα είναι και GGP.

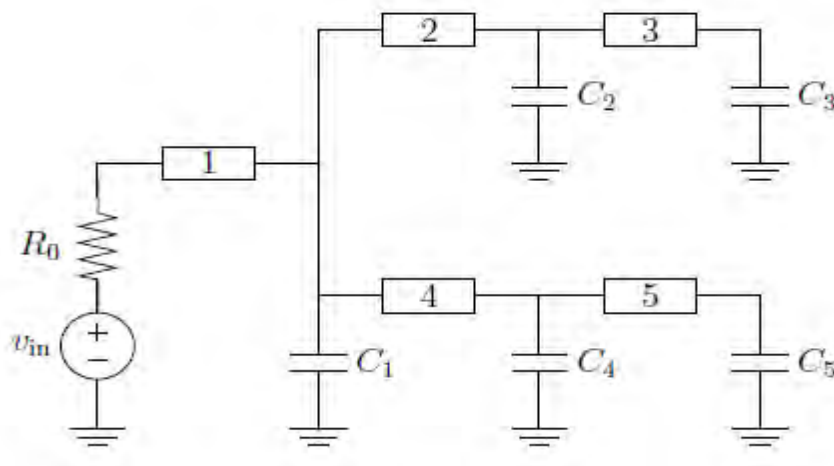
### Μοντέλο καθυστέρησης αγωγών διασύνδεσης

Ένα πολύ σημαντικό μέγεθος το οποίο επηρεάζει την καθυστέρηση των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων είναι τα μεγέθη των αγωγών διασύνδεσης. Παρακάτω παρουσιάζεται η καθυστέρηση του κυκλώματος  $D_k$  σε σχέση με τα μεγέθη των αγωγών διασύνδεσης του κυκλώματος.

Έστω  $D_k$  η καθυστέρηση που προκαλείται από τους αγωγούς διασύνδεσης σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα με  $n$  τμήματα αγωγών με πλάτη  $w_1, \dots, w_n$ . Το δίκτυο διασύνδεσης σχηματίζει ένα δένδρο, η ρίζα του οποίου οδηγείται από το σήμα εισόδου του κυκλώματος το οποίο μοντελοποιείται ως πηγή τάσης και μια σειρά από αντιστάσεις, όπως φαίνεται στην εικόνα 3. Χρησιμοποιείται το απλό  $\pi$  μοντέλο για κάθε αγωγό διασύνδεσης, όπως φαίνεται στην εικόνα 4. Η αντίσταση αγωγού και οι χωρητικότητες δίνονται από τον τύπο:

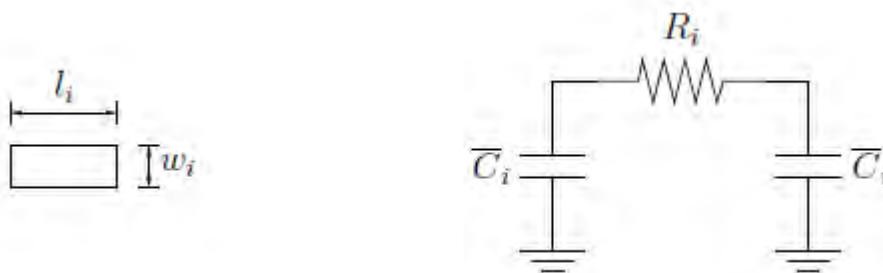
$$R_i = \alpha_i \frac{l_i}{w_i}, \quad \bar{C}_i = \beta_i l_i w_i + \gamma_i l_i,$$

όπου τα  $l_i$  και  $w_i$  είναι το μήκος και το πλάτος του αγωγού. ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του αγωγού διασύνδεσης).



**Εικόνα 1:** Δίκτυο διασύνδεσης μοναδικής εισόδου που οδηγεί ένα δένδρο 5 αγωγών διασύνδεσης και χωρητικότητες  $C_1, \dots, C_5$

Οι αντιστάσεις και οι χωρητικότητες των αγωγών διασύνδεσης είναι Posynomial συναρτήσεις των πλατών  $w_i$  τα οποία αποτελούν μεταβλητές βελτιστοποίησης για το πρόβλημα που μελετάται.

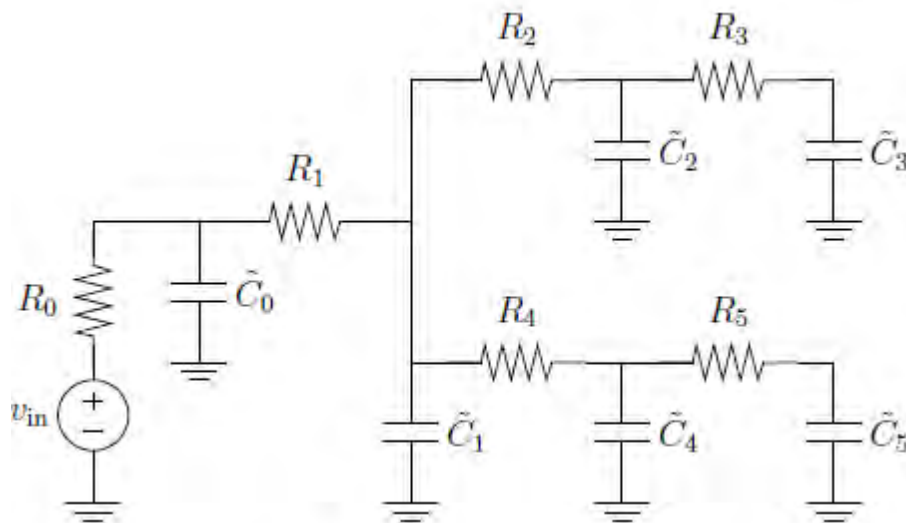


**Εικόνα 2:** Τμήμα αγωγού διασύνδεσης με μήκος  $l_i$  και πλάτος  $w_i$  και το αντίστοιχο  $\pi$  μοντέλο

Χρησιμοποιώντας το  $\pi$  μοντέλο σε κάθε τμήμα αγωγού διασύνδεσης, το δίκτυο διασύνδεσης μετατρέπεται σε ένα δένδρο RC (εικόνα 3) όπου

$$\begin{aligned}\tilde{C}_0 &= \bar{C}_1, \\ \tilde{C}_1 &= C_1 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_4, \\ \tilde{C}_2 &= C_2 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3, \\ \tilde{C}_4 &= C_4 + \bar{C}_4 + \bar{C}_5, \\ \tilde{C}_5 &= C_5 + \bar{C}_5.\end{aligned}$$

Σε κάθε αντίσταση προκαλείται καθυστέρηση μεταβολής της τιμής όταν η πηγή τάσης αλλάζει τιμή. Για να μετρηθεί αυτή η καθυστέρηση, χρησιμοποιείται το μοντέλο καθυστέρησης Elmore.



**Εικόνα 3:** RC μοντέλο του δικτύου διασύνδεσης που παρουσιάζεται στην εικόνα 1

Για ένα δένδρο RC, το μοντέλο καθυστέρησης Elmore δίνεται από τον τύπο

$$D_k = \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i \left( \sum R\text{'s upstream from capacitors } k \text{ and } i \right).$$

Η συνάρτηση καθυστέρησης  $D_k$  που προκύπτει είναι Posynomial συνάρτηση των μεταβλητών πλατών αγωγών διασύνδεσης  $w_i$ .

Τέλος, εισάγονται περιορισμοί κάτω και άνω ορίου στις τιμές των πλατών  $w_i$

$$w_i^{\min} \leq w_i \leq w_i^{\max},$$

## Βιβλιογραφία

- [1] **Convex Optimization** - Stephen Boyd of Department of Electrical Engineering Stanford University and Lieven Vandenberghe of Electrical Engineering Department University of California – Cambridge University Press 2006
- [2] **Digital Circuit Optimization via Geometric Programming** – Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Dinesh D.Patil, Mark A. Horowitz of Department of Electrical Engineering, Stanford University – Informs Operation Research 2005
- [3] **A Tutorial on Geometric Programming** - Stephen P. Boyd and Seung-Jean Kim of Department of Electrical Engineering, Stanford University, Lieven Vandenberghe of Department of Electrical Engineering, University of California and Arash Hassibi of Clear Shape Technologies, Inc., Sunnyvale – 2005
- [4] **A Sequential Quadratic Programming Approach to Concurrent Gate and Wire Sizing** – Noel Menezes Member IEEE, Ross Baldick, Member IEEE and Lawrence T Pileggi Senior Member IEEE – 1997 IEEE
- [5] **Fast and Exact Simultaneous Gate and Wire Sizing by Lagrangian Relaxation** – Chung-Ping Chen, Chris C. N. Chu and D. F. Wong, Member IEEE – 1999 IEEE
- [6] **gglab: v. 1.00 - A Matlab Toolbox for Geometric Programming** – Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Kwangmoo Koh and Almir Mutpcic of Department of Electrical Engineering Stanford University – 2006
- [7] **gposy - A Matlab Solver for Geometric Programming** – Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Kwangmoo Koh and Almir Mutpcic of Department of Electrical Engineering Stanford University – 2006
- [8] **gpcvx - A Matlab Solver for Geometric Programs in Convex Form** – Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Kwangmoo Koh and Almir Mutpcic of Department of Electrical Engineering Stanford University – 2006

[9] **CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 1.0 beta** - M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye. - Available at [www.stanford.edu/~boyd/cvx/](http://www.stanford.edu/~boyd/cvx/) - April 2006.

[10] **Crosstalk-driven interconnect optimization by simultaneous gate and wire sizing** – I. Jang, Y. Chang and J. Jou, Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems– 2000 IEEE

[11] **Convex Optimization** – J. Webster, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering – 1999 John Wiley & Sons, Inc.

[12] **Exact Solution to the Transistor Sizing Problem** – Sachin Sapatnekar of Department of Electrical Engineering and Computer Engineering at Iowa State University, Vasant B. Rao, Pravin M. Vaidya and Sung-Mo Kang – 1993 IEEE

[13] **Integration** – J. Cong – 1996 The VLSI Journal