



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΑΕΡΙΩΝ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

ΚΟΨΑΧΕΙΛΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού
2013



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 11868/1
Ημερ. Εισ.: 28-11-2013
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2013
ΚΟΨ

© 2013 Κοφαχειύλης Ιωάννης

Η έγκριση της παρούσας διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ.2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος εξεταστής

Βαλουγεώργης Δημήτριος

Καθηγητής

Αναλυτικών και Υπολογιστικών Μεθόδων Μεσοκλίμακας

σε Φαινόμενα Ροής και Μεταφοράς

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος εξεταστής

Παπαθανασίου Αθανάσιος

Αναπληρωτής Καθηγητής

Διεργασιών Διαμόρφωσης

και Ροϊκών Ιδιοτήτων Πολυμερών Σύνθετων Μέσων

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος εξεταστής

Νάρης Στέργιος

Ερευνητικό Προσωπικό

Εργαστηρίου Φυσικών και Χημικών Διεργασιών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον στην επιστημονική κοινότητα για τον κλάδο της δυναμικής αερίων σε χαμηλές πιέσεις. Για τον υπολογισμό των φαινομένων μεταφοράς μάζας, ορμής και θερμότητας σε ένα αραιοποιημένο ρευστό εφαρμόζονται οι αρχές της κινητικής θεωρίας των αερίων και η εξίσωση Boltzmann ή υπολογιστικές μέθοδοι όπως η μέθοδος Direct Simulation Monte Carlo (DSMC). Όμως η κινητική εξίσωση Boltzmann είναι δύσκολο να επιλυθεί και η μέθοδος DSMC απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό φορτίο. Για το λόγο αυτό ερευνητές μηχανικοί χρησιμοποιούν τις καταστατικές εξισώσεις της κλασικής μηχανικής συνοδευόμενες από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ολίσθησης της ταχύτητας και άλματος της θερμοκρασίας. Η πρακτική αυτή αφορά εφαρμογές όπου το ρευστό λειτουργίας έχει μικρό βαθμό αραιοποίησης, δηλαδή βρισκόμαστε κοντά στην τοπική θερμοδυναμική ισορροπία και η θεωρία του συνεχούς μέσου πάνω στην οποία στηρίζεται η κλασική μηχανική παραμένει έγκυρη. Ο αριθμός Knudsen (Kn) είναι ένας αδιάστατος αριθμός ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της μέσης ελεύθερης μοριακής διαδρομής προς ένα χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος. Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι η μελέτη πρότυπων ροών στην περιοχή ολίσθησης $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ επιλύοντας αναλυτικά τις εξισώσεις διατήρησης μάζας (συνέχειας) και ορμής (Navier-Stokes) συζευγμένες με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ολίσθησης πρώτης τάξης τύπου Maxwell. Σε κάθε εφαρμογή εξάγεται η κατανομή της ταχύτητας της ροής και γίνεται γραφική απεικόνιση της για διάφορες τιμές του αριθμού Kn . Υπολογίζονται βασικά μεγέθη ροής όπως η ροή μάζας στα προβλήματα ροών λόγω βαθμίδας πίεσης (π.χ. ροή Poiseuille) και η διατμητική τάση στα προβλήματα λόγω οριακών συνθηκών (π.χ. ροή Couette) και εκτιμάται η συνεισφορά του όρου ολίσθησης. Έπειτα θεωρώντας πραγματικά (ιξώδη) ρευστά λειτουργίας το Ήλιο (He) και το Ξέον (Xe) γίνεται διαστατοποίηση των αποτελεσμάτων.

ABSTRACT

During the last years research in gas at low pressure has attracted a lot of attention. To calculate the mass, momentum and heat transfer through a gas at an arbitrary rarefaction the Boltzmann equation must be solved or a computational method such as Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) method must be applied. Although, the BE is difficult to solve and the DSMC requires extensive computational effort. For this reason engineer researchers use kinetic equations of classical mechanics combined with velocity slip and temperature jump boundary conditions. This practise can be applied in applications with a moderate gas rarefaction, which means that we are close to the local thermodynamic equilibrium and the continuum theory is valid. The Knudsen number is a dimensionless number defined as the ratio of the molecular mean free path length to a representative physical length scale. The scope of this Thesis is the study of basic flows in the slip regime $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ solving analytically the equations of conservation of mass and momentum combined with first-order Maxwell boundary conditions. The velocity profile is obtained from each application and a graphical representation is given for different values of Knudsen number. The mass flow rate in pressure driven problems (such as Poiseuille flow) and the shear stress in boundary driven (such as Couette flow) are calculated and the influence of the slip term is estimated. Then dimensional results are given for real (viscous) fluids Helium (He) and Xenon (Xe).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία αναμφίβολα δεν αποτελεί έργο ζωής, αντικατοπτρίζει όμως μήνες δουλειάς και σηματοδοτεί το τέλος της παραμονής μου στο τμήμα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Βαλουγεώργη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του. Ως καθηγητής μου στο μάθημα των υπολογιστικών μεθόδων και της κινητικής θεωρίας και ως επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας μου έμαθε τι σημαίνει Εκπαίδευση, Έρευνα και Πανεπιστήμιο. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου κ. Παπαθανασίου και κ. Νάρη που δέχθηκαν να εξετάσουν την διπλωματική μου εργασία.

... στην αδερφή μου Μαρία
και στον αδερφό μου Γιάννη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	v
Abstract	vii
Περιεχόμενα	xii
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή – Βιβλιογραφική ανασκόπηση	1
1.1 Κλασική μηχανική.....	1
1.2 Η σημασία του αριθμού Knudsen	6
1.3 Μικροδιατάξεις και μικροσυστήματα	8
1.4 Η δομή της διπλωματικής εργασίας	9
Κεφάλαιο 2: Περιγραφή των οριακών συνθηκών ολίσθησης	11
2.1 Οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης.....	12
2.2 Οριακές συνθήκες ολίσθησης Maxwell	16
2.3 Οριακές συνθήκες ολίσθησης 1ης και 2ης τάξης.....	21
Κεφάλαιο 3: Ροές Poiseuille και Couette	25
3.1 Ροή ανάμεσα σε δύο ακίνητες πλάκες (plane Poiseuille).....	26
3.2 Ροή διαμέσου αγωγού κυκλικής διατομής (cylindrical Poiseuille).....	36
3.3 Ροή ανάμεσα σε δυο κινούμενες πλάκες (plane Couette)	45
3.4 Ροή διαμέσου κινούμενων αγωγών κυκλικής διατομής (cylindrical Couette).....	51
Κεφάλαιο 4: Ροές γύρω από στερεά σώματα	55
4.1 Ροή γύρω από περιστρεφόμενο μικροκύλινδρο	55
4.2 Ροή διερχόμενη από σταθερή μικροσφαίρα	63

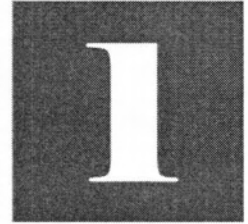
Κεφάλαιο 5: Ροές λόγω διαφοράς θερμοκρασίας	81
5.1 Θερμικός ερπυσμός	81
5.2 Photophoresis	89
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα	93
5.1 Κύρια συμπεράσματα.....	93
5.2 Μελλοντική εργασία	94
Αναφορές	95
Παράρτημα Α	97
Παράρτημα Β	99
Παράρτημα Γ	109

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1-1 Διαφορική εξίσωση συνέχειας	4
Πίνακας 1-2 Καρτεσιανές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes	4
Πίνακας 1-3 Κυλινδρικές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes.....	5
Πίνακας 1-4 Σφαιρικές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes.....	5
Πίνακας 2-1 Τιμές συντελεστή σ_p	20
Πίνακας 2-2 Τιμές συντελεστή σ_T	20
Πίνακας 2-3 Τιμές συντελεστών A_1 και A_2	21

ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

N-S	εξισώσεις Navier-Stokes
ρ	πυκνότητα
μ	δυναμικό ιξώδες
u	ταχύτητα
λ	μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή
Kn	αριθμός Knudsen
δ	παράμετρος αραιοποίησης
σ_p	συντελεστής ιξώδους ολίσθησης
σ_T	συντελεστής θερμικής ολίσθησης
T	θερμοκρασία
\dot{M}	παροχή μάζας
\dot{m}	παροχή μάζας ανοιγμένη ανά μονάδα πλάτους
Θ	ροπή στρέψης
α_n	συντελεστής ενέργειας
α_t	συντελεστής προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής
Θ.Ε	θερμικός ερπυσμός



ΕΙΣΑΓΩΓΗ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 Κλασική μηχανική

Η κλασική μηχανική, ο πατέρας της φυσικής και ίσως της επιστημονικής σκέψης, αναπτύχθηκε αρχικά το 1600 από διάσημους φιλόσοφους (η κωδική ονομασία για τους «φυσικούς») του 17ου αιώνα όπως ο Isaac Newton βασιζόμενη σε παρατηρήσεις και επιστημονικά δεδομένα αστρονόμων όπως ο Tycho Brache, ο Galileo Galilei, και ο Johannes Kepler. Παρόλο που αναπτύχθηκε 400 χρόνια πριν, οι αρχές της βρίσκουν εφαρμογή σε ένα πολύ μεγάλο φάσμα δραστηριοτήτων από την καθημερινή ζωή και την μακροκλιμακα (large-scale mechanics) μέχρι τη σύγχρονη νανοτεχνολογία και τη μοριακή δυναμική (molecular dynamics). Η κλασική μηχανική χωρίζεται σε δυο επιμέρους μεγάλους επιστημονικούς κλάδους, τη μηχανική συνεχούς μέσου (continuum mechanics) και τη μηχανική ασυνεχούς μέσου (ή αλλιώς υλικού σημείου). Ο διαχωρισμός αυτός έχει αφετηρία την αρχαία Ελλάδα[1]-[3] αφού ανάγεται στη φιλοσοφική αντίθεση μεταξύ Ατομιστών και Στωικών [4]. Στην εποχή μας η αντιπαράθεση για τις δύο θεωρίες διατηρείται αμείωτη.

Η μηχανική συνεχούς μέσου συγκροτήθηκε σαν θεωρία στις αρχές του 20^{ου} αιώνα από τον Trussdell [5] και διακρίνεται στους επιμέρους κλάδους της μηχανικής απαραμόρφωτων σωμάτων και στη μηχανική παραμορφώσιμων σωμάτων. Τον τελευταίο κλάδο διαμορφώνουν οι τομείς της μηχανικής στερεών (solid mechanics) και της μηχανική ρευστών (fluid mechanics) γνωστής και ως ρευστομηχανικής.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στη διάκριση μεταξύ της μηχανικής του υλικού σημείου με τις βασικές έννοιες της οποίας είμαστε εξοικειωμένοι, και της μηχανικής του συνεχούς. Για την πρώτη τόσο η κινηματική όσο και οι θεμελιώδεις αρχές της αφορούν σε ένα υλικό σημείο το οποίο, εξ' ορισμού, έχει μηδενικό όγκο και εφοδιάζεται με μια πεπερασμένη (μη μηδενική) μάζα. Κατόπιν είναι δυνατό να επεκταθούμε σε ένα σύστημα υλικών σημείων που

μπορεί να προσομοιάσει το στερεό σώμα. Όμως, σε ένα τέτοιο στερεό σώμα δεν είναι δυνατόν να οριστεί η έννοια της πυκνότητας της μάζας σε ένα σημείο γιατί στο πηλίκο μάζα προς όγκο ο παρονομαστής μηδενίζεται. Επομένως, ξεκινώντας από τις θεμελιώδεις έννοιες της μηχανικής του υλικού σημείου δε μπορεί να φτάσει κανείς στην έννοια της πυκνότητας μάζας σε ένα σημείο, η οποία όμως είναι απαραίτητη όταν διαπραγματευόμαστε προβλήματα με στερεά σώματα ή ρευστά. Δηλαδή σε όλα τα προβλήματα του μηχανικού. Αντίθετα, η μηχανική συνεχούς ξεκινά αξιωματικά από την υπόθεση της συνεχούς κατανομής της ύλης. Έτσι δεχόμαστε την ύπαρξη του συνεχούς σώματος επί του οποίου ορίζεται η πυκνότητα μάζας, καθώς και οποιοδήποτε άλλο μακροσκοπικό μέγεθος.

Όσον αφορά τη μελέτη προβλημάτων ρευστομηχανικής η υπόθεση συνεχούς μέσου γίνεται προκειμένου να αποφευχθεί η απροσδιοριστία των ιδιοτήτων του ρευστού [6]. Πιο αναλυτικά τα ρευστά αποτελούνται από μόρια τα οποία κινούνται συνεχώς σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις [7]. Λόγω της κίνησης αυτής, οι θέσεις και οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων μεταβάλλονται συνεχώς, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το πλήθος των μορίων που περιέχονται κάθε χρονική στιγμή σε έναν ορισμένο όγκο ρευστού. Για παράδειγμα αν το ρευστό θεωρηθεί ως μοριακό μέσο, η ταχύτητα του σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου δεν μπορεί να προσδιοριστεί, αφού είναι μηδέν σε όλες τις χρονικές στιγμές, εκτός από εκείνες, κατά τις οποίες ένα μόριο διέρχεται ακριβώς από το θεωρούμενο σημείο. Αυτή μάλιστα είναι η ταχύτητα αυτού του συγκεκριμένου μορίου και όχι η μέση ταχύτητα των μορίων γύρω από το σημείο αυτό. Έτσι προκειμένου να αποφύγουμε μια ανομοιογένεια και απροσδιοριστία στις ιδιότητες, υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ένα συνεχές μέσο.

Επιπλέον σε ένα πολύ μικρό κομμάτι της ύλης (π.χ. της τάξης των mm^3) υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός¹ μορίων που αποθαρρύνει οποιαδήποτε σκέψη να αναλυθεί η κίνηση με βάση τη ξεχωριστή συμπεριφορά των επιμέρους μορίων που συγκροτούν το σώμα. Από την άλλη πλευρά η υπόθεση του συνεχούς έρχεται σε ευθεία αντίθεση με την πραγματική δομή της ύλης, η οποία όπως είναι γνωστό είναι διακριτή δηλαδή αποτελείται από άτομα και μόρια.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι η υπόθεση της συνέχειας της ύλης, όπως και κάθε άλλη επιστημονική υπόθεση, αποτελεί μια εξιδανίκευση της πραγματικότητας η οποία, σε τελευταία ανάλυση, ελέγχεται από το πείραμα. Άλλωστε πρέπει να μάθουμε να διακρίνουμε τις έννοιες ή τα εννοιολογικά σχήματα, που εισάγονται συνήθως αξιωματικά, από τα φυσικά αντικείμενα ή τις διεργασίες που προσπαθούν (ατελώς) να περιγράψουν. Οποιοδήποτε θεωρητικό σχήμα και οποιαδήποτε επιστημονική θεωρία βρίσκονται κάπου μέσα στο μυαλό μας, δηλαδή ανήκουν στον κόσμο των ιδεών, ενώ τα φυσικά φαινόμενα βρίσκονται έξω από εμάς, στην αντικειμενική πραγματικότητα [8].

Η μηχανική των ρευστών αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους στην επιστήμη του μηχανολόγου μηχανικού. Το γεγονός και μόνο ότι η επιφάνεια της γης καλύπτεται κατά τα τρία τέταρτα από νερό και περιβάλλεται στο σύνολο της από αέρα καθιστά προφανή τη σημασία της

¹ Σε ένα mm^3 ενός μονοατομικού κρυσταλλικού υλικού υπάρχουν περίπου 10^{21} άτομα.

ρευστομηχανικής, η οποία διακρίνεται σε τρεις επιμέρους κλάδους τη στατική των ρευστών, την κινηματική των ρευστών και τη δυναμική των ρευστών. Η πρώτη επικεντρώνει το ενδιαφέρον της στη μελέτη της υδροστατικής πίεσης ηρεμούντων ρευστών, η δεύτερη ασχολείται με την περιγραφή της κίνησης των ρευστών και εξετάζει, κατά κύριο λόγο, μεγέθη που έχουν άμεση σχέση με αυτήν. Τέτοια μεγέθη είναι, π.χ., η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η παροχή του ρευστού. Τέλος, η δυναμική των ρευστών ή αλλιώς ρευστοδυναμική, η οποία αποτελεί και τον πιο σημαντικό τομέα της ρευστομηχανικής, ενδιαφέρεται κυρίως για τις μεταβολές ενέργειας και τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά τη ροή των ρευστών.

Η ρευστομηχανική θεμελιώνεται πάνω στις βασικές αρχές και τους νόμους της μηχανικής και, σε μικρότερο βαθμό, της θερμοδυναμικής. Συγκεκριμένα βασίζεται σε τρεις βασικές εξισώσεις (governing equations) [6]

(1) Νόμος διατήρησης της μάζας

(2) $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

(3) Νόμος διατήρησης της ενέργειας (πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής)

και είναι μια σχετικά νέα επιστήμη στην οποία χρησιμοποιούνται συχνά πολλές ημι-εμπειρικές και εμπειρικές σχέσεις.

Ένα σπουδαίο σύστημα εξισώσεων που χρησιμοποιείται ευρύτατα σχεδόν σε όλα τα προβλήματα ρευστομηχανικής είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes που αναπτύχθηκαν από τον γάλλο μηχανικό και φυσικό Claude-Louis Navier (1785-1836) και τον σπουδαίο ιρλανδό μαθηματικό και φυσικό George Gabriel Stokes (1819-1903) το 1822. Οι εξισώσεις στηρίζονται στον το δεύτερο νόμο του Newton σε συνδυασμό με τη διατμητική τάση του ρευστού (εξαιτίας του ιξώδους) και έναν όρο πίεσης και χρησιμοποιούνται συνήθως για την εύρεση της κατανομής της ταχύτητας της ροής και τον υπολογισμό της μαζικής παροχής ή της ροής θερμότητας σε μια διατομή ενός αγωγού.

Οι εξισώσεις N-S προκύπτουν είτε από την κινητική θεωρία είτε από διαφορικά ισοζύγια ορμής. Συνοδευόμενες από τη διαφορική εξίσωση συνέχειας και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες αποτελούν ένα κλειστό σύστημα προς επίλυση.

Η διαφορική εξίσωση συνέχειας αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου [6]. Η γενική μορφή της σε ανυσματικό συμβολισμό δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

Η διαφορική εξίσωση ορμής είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο κίνησης του Newton. Η γενική μορφή της σε ανυσματικό συμβολισμό δίνεται από τη σχέση

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \mathbf{T}$$

όπου \mathbf{T} ένας συμμετρικός τανυστής τάσης, \mathbf{f} η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων, \mathbf{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας και p η πίεση. Λαμβάνοντας υπόψη για την πρώτη εξίσωση ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο $\partial \rho / \partial t = 0$ και για τη δεύτερη ότι έχουμε σταθερό ιξώδες μ και ασυμπίεστη ροή $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, οι δυο εξισώσεις γίνονται

$$\nabla \mathbf{u} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Στον Πίνακα 1-1 περιγράφονται οι εξισώσεις συνέχειας σε ανεπτυγμένη μορφή στα συστήματα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των προβλημάτων της παρούσας εργασίας. Στους Πίνακες 1-2, 1-3 και 1-4 περιγράφονται οι καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συνιστώσες αντίστοιχα των εξισώσεων N-S. Περισσότερες πληροφορίες παρατίθενται για τον αναγνώστη στο Παράρτημα Β, όπου γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση των διαφορικών εξισώσεων συνέχειας και των εξισώσεων N-S στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

Πίνακας 1-1 Διαφορική εξίσωση συνέχειας	
Καρτεσιανές συντεταγμένες:	
	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (1.1)$
Κυλινδρικές συντεταγμένες:	
	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (1.2)$
Σφαιρικές συντεταγμένες:	
	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho u_\phi) = 0 \quad (1.3)$

Πίνακας 1-2 Καρτεσιανές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes	
x-Διεύθυνση:	
	$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.4)$
y-Διεύθυνση:	
	$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$
z-Διεύθυνση:	
	$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.6)$

Πίνακας 1-3 Κυλινδρικές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes

r-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \quad (1.7)$$

θ-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (1.8)$$

z-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \quad (1.9)$$

Πίνακας 1-4 Σφαιρικές συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes

r-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1.10)$$

θ-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$+ \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1.11)$$

φ-Διεύθυνση:

$$\rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho g_\phi$$

$$+ \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \quad (1.12)$$

Σχεδόν σε όλα τα πραγματικά προβλήματα οι εξισώσεις αυτές καταλήγουν σε ένα σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που είναι πολύ δύσκολο να επιλυθεί ακόμα και με αριθμητικές μεθόδους χρησιμοποιώντας σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα. Πολλές φορές όμως έπειτα από απλοποιήσεις και παραδοχές καταλήγουν σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης ή δεύτερης τάξης. Αυτές οι εξισώσεις είναι εύκολο να επιλυθούν με απλή διαφορική ανάλυση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζονται προβλήματα σε βασικές γεωμετρίες και αφού μοντελοποιηθούν μαθηματικά σύμφωνα με τις καταστατικές εξισώσεις επιλύονται αναλυτικά βήμα προς βήμα.

1.2 Η σημασία του αριθμού Knudsen

Η υπόθεση του συνεχούς μέσου οδηγεί στην παραδοχή ότι σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, οι ιδιότητες του ρευστού μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά τρόπο συνεχή. Για να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση αυτή πρέπει οι διαστάσεις του εξεταζόμενου προβλήματος να είναι τουλάχιστον μεγαλύτερες από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του ρευστού.

Για τα αέρια ως μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή λ ορίζεται η μέση απόσταση που διανύουν τα μόρια ανάμεσα σε δύο συγκρούσεις. Υποθέτοντας ότι τα μόρια συμπεριφέρονται σαν σκληρές σφαίρες [9] η μέση ελεύθερη διαδρομή ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2 \sqrt{\frac{4}{\pi}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \quad (1.13)$$

όπου n αριθμητική πυκνότητα (αριθμός μορίων ανά μονάδα όγκου) και d η μοριακή διάμετρος.

Σε συνήθεις συνθήκες το μέγεθος λ είναι πολύ μικρό (π.χ. για τον αέρα, η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή είναι περίπου $6,3 \times 10^{-5}$ mm). Στα προβλήματα ροής όπου η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή είναι αρκετά μεγάλη (αραιοποιημένο ρευστό) ή η χαρακτηριστική διάσταση του θεωρούμενου συστήματος είναι αρκετά μικρή (μικρο-ηλεκτρο-μηχανικά συστήματα, MEMS) το μοντέλο του συνεχούς μέσου δεν ισχύει. Τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας και οι καταστατικές εξισώσεις Newton και Fourier παύουν να ισχύουν. Για την επίλυση των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής χρησιμοποιούνται συνήθως οι αρχές της Κινητικής Θεωρίας και της Στατιστικής Μηχανικής.

Ο λόγος της μέσης ελεύθερης μοριακής διαδρομής λ προς ένα χαρακτηριστικό μήκος L της γεωμετρίας του προβλήματος ορίζει τον αδιάστατο αριθμό Knudsen (Kn).

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1.14)$$

Η ονομασία προήλθε από τον Δανό φυσικό Martin Knudsen (1871-1949). Ο αριθμός Kn φανερώνει το βαθμό αραιοποίησης (rarefaction) του ρευστού και είναι χαρακτηριστικός για κάθε πρόβλημα. Μια άλλη ποσότητα που συναντάται συχνά είναι η παράμετρος αραιοποίησης δ

$$\delta = \frac{PL}{\mu u_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \approx \frac{1}{Kn} \quad (1.15)$$

όπου P , μ , u_0 , L είναι η πίεση, η πιο πιθανή ταχύτητα, το δυναμικό ιξώδες και το χαρακτηριστικό μήκος του εκάστοτε προβλήματος. Όπως είναι φανερό η παράμετρος αραιοποίησης είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού Knudsen. Η παράμετρος δ χρησιμοποιείται μερικές φορές αντί του αριθμού Knudsen σε βαθμό ώστε οι περισσότερες αριθμητικές λύσεις στη βιβλιογραφία εκφράζονται με όρους αυτής της παραμέτρου [10]. Σε όλα τα προβλήματα που θα εξεταστούν στην παρούσα διπλωματική εργασία υποθέτουμε ότι η παράμετρος αραιοποίησης είναι μεγάλη, για παράδειγμα $\delta \ll 1$.

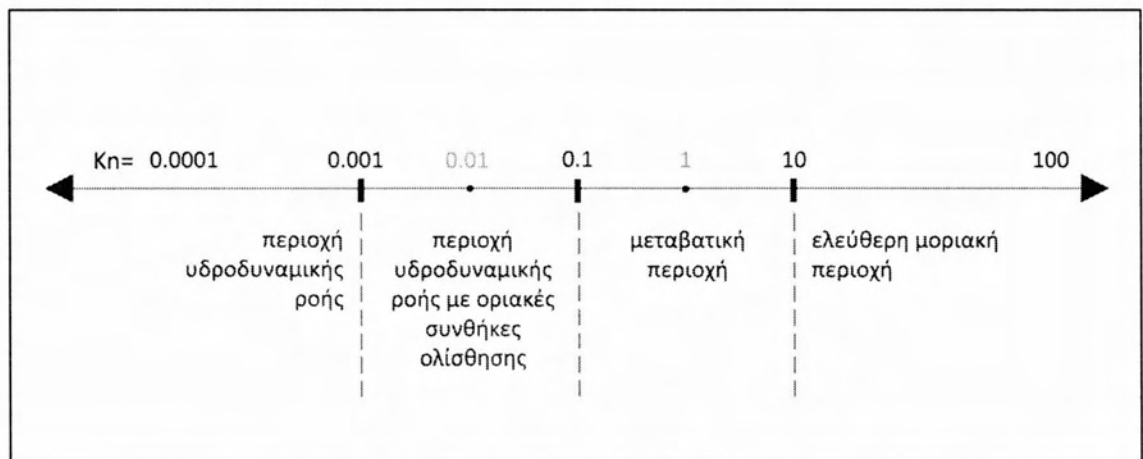
Ανάλογα με το μέγεθος αραιοποίησης εμφανίζονται διαφορετικά φαινόμενα στη ροή επιβάλλοντας ακολούθως διαφορετική προσέγγιση και μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος. Οι εργαστηριακές δοκιμές των και η λειτουργία στην πράξη καθιέρωσαν την κατηγοριοποίηση των ροών σε περιοχές όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Σε κάθε περιοχή υπάρχουν φυσικά φαινόμενα που υπερτερούν έναντι κάποιων άλλων χαρακτηρίζοντας έτσι τη ροή. Τα όρια των περιοχών μαρτυρούν την αλλαγή των φυσικών αυτών φαινομένων.

Αν $Kn < 0.01$ η ροή λέγεται ότι ανήκει στην υδροδυναμική περιοχή (continuum-flow regime).

Αν $0.01 < Kn < 0.1$ η ροή λέγεται ότι ανήκει στην περιοχή ολίσθησης (slip flow regime).

Αν $0.1 < Kn < 10$ η ροή λέγεται ότι ανήκει στη μεταβατική περιοχή (transition regime).

Αν $Kn > 10$ η ροή λέγεται ότι ανήκει στην ελεύθερη μοριακή περιοχή (free molecular regime).



Σχήμα 1.1: Οι περιοχές συναρτήσεως του αριθμού Kn.

Πιο αναλυτικά όταν ο αριθμός Knudsen βρίσκεται κοντά στο μηδέν μπορούμε να μιλάμε για άτριβη ροή. Οι εξισώσεις που περιγράφουν μια άτριβη ροή είναι οι εξισώσεις ιδανικού ρευστού. Καθώς ο αριθμός Kn αυξάνει η ροή γίνεται ιξώδης και μέχρι την τιμή 0.1 βρισκόμαστε εντός

θερμοδυναμικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι για $Kn < 0.1$ το ρευστό μπορεί να αντιμετωπιστεί ως συνεχές μέσο και να περιγραφεί από υδροδυναμικές εξισώσεις όπου οι άγνωστες ποσότητες είναι μακροσκοπικές μεταβλητές όπως το διάνυσμα της ταχύτητας, η πυκνότητα, η πίεση, η θερμοκρασία, κτλ. Η παρούσα διπλωματική αφορά ροές που εντάσσονται σε αυτήν την περιοχή. Συγκεκριμένα όπως φαίνεται στο σχήμα για $Kn < 0.001$ βρισκόμαστε στην λεγόμενη υδροδυναμική περιοχή όπου οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι καταστατικές εξισώσεις N-S συνοδευόμενες από τις οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης, ενώ για $0.001 < Kn < 0.1$ βρισκόμαστε στην υδροδυναμική περιοχή ροής με τη διαφορά ότι οι οριακές συνθήκες είναι συνθήκες ολίσθησης.

Όταν ο αριθμός Knudsen πάρει τιμές στο διάστημα $[0.1, 10]$ βρισκόμαστε στη λεγόμενη μεταβατική περιοχή, όπου λαμβάνεται υπόψη η ελεύθερη κίνηση των μορίων, οι συγκρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα αλλά και οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων. Στη μεταβατική περιοχή η προσομοίωση της ροής γίνεται με την Κινητική Θεωρία όπως αυτή περιγράφεται από την εξίσωση Boltzmann, έχοντας σαν βασικό άγνωστο την συνάρτηση κατανομής, ενώ οι μακροσκοπικές μεταβλητές που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον προκύπτουν από τις ροπές συνάρτησης κατανομής. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η εφαρμοσιμότητα των εξισώσεων N-S συνοδευόμενες από ειδικές οριακές συνθήκες ολίσθησης στην περιοχή αυτή παραμένει ανοικτό επιστημονικό πεδίο που εμπλουτίζεται συνεχώς με δημοσιεύσεις πανεπιστημιακών καθηγητών και ερευνητών. Συνοπτική παρουσίαση των ειδικών μορφών των οριακών αυτών συνθηκών γίνεται στο Κεφάλαιο 2.

Περαιτέρω αύξηση του αριθμού Knudsen πέρα από το όριο του 10 οδηγεί στην περιοχή της ελεύθερης μοριακής ροής όπου απαιτείται μικροσκοπική προσέγγιση και λαμβάνεται υπόψη η ελεύθερη κίνηση των μορίων. Ο επιστημονικός κλάδος που σχετίζεται με αυτή την περιοχή είναι η Μοριακή Δυναμική και βασίζεται στην Κινητική Θεωρία και στην εξίσωση Boltzmann χωρίς όμως τον όρο συγκρούσεων.

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στο γεγονός ότι οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην Κινητική Θεωρία ισχύουν σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen, ξεκινώντας από την ελεύθερη μοριακή περιοχή μέχρι το συνεχές υδροδυναμικό όριο. Όμως παρά το σημαντικό αυτό πλεονέκτημα η επίλυση της εξίσωσης Boltzmann είναι αρκετά δύσκολη σε σχέση με την επίλυση των εξισώσεων N-S και γι αυτό το λόγο χρησιμοποιείται συνήθως όταν οι δεύτερες οδηγούν σε λάθος αποτελέσματα ή όταν η παράμετρος αραιοποίησης είναι μικρή.

1.3 Μικροδιατάξεις και μικροσυστήματα

Η σπουδαιότητα της χρήσης των μικροκαναλιών- μικροαγωγών στη μελέτη της ροής αραιοποιημένων ρευστών (rarefied gases) γίνεται αντιληπτή αν λάβει κανείς υπόψη του ότι ο Knudsen ήδη από το 1909 διαπίστωσε τη σημασία του λόγου της μέσης ελεύθερης μοριακής διαδρομής λ προς ένα χαρακτηριστικό μήκος L στην προσπάθειά του να προσομοιώσει τα φαινόμενα που σχετίζονται με τα αραιοποιημένα αέρια χρησιμοποιώντας πειραματικές μικροδιατάξεις. Συγκεκριμένα

χρησιμοποίησε τριχοειδείς γυάλινους αγωγούς (glass capillaries) σε διαφορεικά μεγέθη, με τον μικρότερο να έχει διάμετρο 66 μm και τον μεγαλύτερο 282 μm [11]. Διεξήγαγε μια σειρά πειραμάτων σε χαμηλές πιέσεις και μελέτησε τα φαινόμενα ροής που αναπτύσσονται. Τα πειράματα αυτά έγιναν την πρώτη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα όπου και δημοσίευσε ένα άρθρο ορίζοντας τον αριθμό Knudsen [12]. Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι λόγω της ευαισθησίας στην κατασκευή που παρουσιάζουν αυτού του είδους οι μικροαγωγοί συχνά παρατηρούνται αδικαιολόγητες αποκλίσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων από τα θεωρητικά μοντέλα. Για το λόγο αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Επιπρόσθετα στη σύγχρονη εποχή η πρόοδος της τεχνολογίας και η ανάγκη ανάπτυξης εφαρμογών πολύ μικρών διαστάσεων στην βιοιατρική, χημεία [13] κ.α. γνωστών στη βιβλιογραφία ως μικρο-ηλεκτρο-μηχανολογικά (MEMS) και νανο-ηλεκτρο-μηχανολογικά (NEMS) συστήματα καθιστά αναγκαίο τόσο τον λεπτομερή προσδιορισμό των ρευστών σε αυτές τις διαστάσεις όσο και την πλήρη επίδραση τους στα εξαρτήματα με τα οποία έρχονται σε επαφή, μιας και οι συσκευές αυτές είτε βρίσκονται στο περιβάλλον λειτουργίας τους σε επαφή με το ρευστό, είτε περιλαμβάνουν εξαρτήματα όπως για παράδειγμα μικροαγωγούς τα οποία έρχονται σε άμεση επαφή με το ρευστό.

Σήμερα κατασκευάζονται μικροαγωγοί με διαμέτρους της τάξης μερικών μικρόμετρων από διάφορα μεταλλικά υλικά, όπως σίδηρο και ανοξείδωτο χάλυβα. Όταν αναφερόμαστε σε μεγέθη της τάξης του νανόμετρου μιλάμε ουσιαστικά για αυλακώσεις (μικροκανάλια) οι οποίες ως επί το πλείστον χαράσσονται σε πλάκες πυριτίου. Η πιο συνήθης μέθοδος κατασκευής των μικροκαναλιών αυτών είναι αυτή της χημικής εγχάραξης ή μέθοδος DRIE (Deep Reactive Ion Etching).

1.4 Η δομή της διπλωματικής εργασίας

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες ολίσθησης και μη-ολίσθησης που συνοδεύουν τις καταστατικές εξισώσεις N-S. Γίνεται μια παρουσίαση των μαθηματικών μοντέλων των οριακών συνθηκών από τη σχέση του Navier στις αρχές του 19^{ου} αιώνα μέχρι τα σύγχρονα μαθηματικά μοντέλα ολίσθησης δεύτερης τάξης. Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται κλασικά προβλήματα ρευστομηχανικής σε βασικές γεωμετρίες και επιλύοντας τα αναλυτικά εξάγεται η κατανομή της ταχύτητας της ροής. Στο Κεφάλαιο 4 μελετάται η επίδραση των συντελεστών αλληλεπίδρασης αερίου-τοιχώματος με εφαρμογή σε κυλινδρική ροή Couette. Τέλος στο Κεφάλαιο επισημαίνονται τα κύρια συμπεράσματα της εργασίας και προτίνεται περαιτέρω μελέτη.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

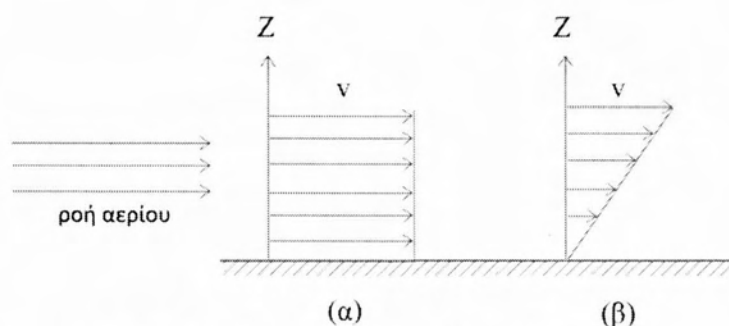
Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι εξισώσεις N-S στη γενική τους μορφή είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Συνεπώς για την επίλυση τους χρειάζονται δυο τουλάχιστον οριακές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες που θα επιλεγθούν για την επίλυση ενός προβλήματος ροής παίζουν καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος και επηρεάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Η μαθηματική μοντελοποίηση των οριακών συνθηκών δεν είναι εύκολη υπόθεση [14] και για περίπου 100 χρόνια από τις αρχές έως τα τέλη του 19^{ου} αιώνα η επιλογή της κατάλληλης οριακής συνθήκης στο σημείο επαφής του ρευστού με το στερεό τοίχωμα αποτέλεσε αντικείμενο διαμάχης στην επιστημονική κοινότητα με μεγάλες φυσιογνωμίες των μαθηματικών και της φυσικής να λαμβάνουν μέρος.

Οι οριακές συνθήκες σε ένα πρόβλημα αναφέρονται στα όρια του όγκου ελέγχου και διατυπώνουν κάποια φυσική αρχή για τα όρια αυτά, η οποία ισχύει για όλο το χρονικό διάστημα που εξετάζεται ο όγκος ελέγχου. Από φυσική άποψη, οι οριακές συνθήκες θεσπίζονται για μια μαθηματική επιφάνεια η οποία οριοθετεί την περιοχή του χώρου που μας ενδιαφέρει. Το συνηθέστερο όριο στην οριοθέτηση αυτή είναι μια ορατή φυσική διεπιφάνεια. Στην ανάλυση των προβλημάτων ροής ρευστών εμφανίζονται συνήθως τρία είδη φυσικών διεπιφανειών: στερεού-ρευστού, υγρού-υγρού και υγρού-αερίου. Στα προβλήματα που μελετώνται στην παρούσα εργασία συναντώνται μονάχα διεπιφάνειες στερεού-ρευστού όποτε το Κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στις οριακές συνθήκες που αφορούν αυτού του είδους διεπιφάνειες.

Στην παράγραφο 2.1 γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή των διαφορετικών επιστημονικών προσεγγίσεων και διατυπώνονται οι οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης οι οποίες αναφέρονται στην υδροδυναμική περιοχή. Έπειτα στις παραγράφους 2.2 και 2.3 γίνεται αναφορά στο μοντέλο οριακών συνθηκών ολίσθησης του Maxwell που πρώτος όρισε και έπειτα παρουσιάζονται τα μοντέλα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης άλλων ερευνητών αντίστοιχα.

2.1 Οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης

Στην υδροδυναμική περιοχή όπου ισχύει η υπόθεση συνεχούς μέσου οι οριακές συνθήκες σε μια διεπιφάνεια στερεού-ρευστού που συνοδεύουν τις καταστατικές εξισώσεις είναι οι οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης, οι οποίες αναφέρουν ότι τα πραγματικά ρευστά στα σημεία επαφής τους με στερεά σώματα αποκτούν την ταχύτητα του στερεού. Η συνθήκη μη ολίσθησης οφείλεται στην ιξώδη φύση των ρευστών και δεν έχει καμία σχέση με το είδος του υλικού ή τη φύση της επιφάνειας του στερεού. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση όπου οι τριβές δεν λαμβάνονται υπόψη το ρευστό ολισθαίνει στην επιφάνεια του στερεού με τη ίδια ταχύτητα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Ιδανικό (α) και ιξώδες (β) ρευστό.

Σήμερα είναι πλέον γνωστό, πέρα από κάθε αμφιβολία, ότι η υπόθεση αυτή ισχύει. Τη συνθήκη μη-ολίσθησης τη συναντά κανείς σε οποιοδήποτε βιβλίο Ρευστομηχανικής. Όμως για περίπου 150 χρόνια αποτέλεσε θέμα αντιπαράθεσης και διαμάχης μεγάλων φυσικών και μαθηματικών φυσιογνωμιών όπως ο Bernulli, ο Coulomb, ο Poisson, ο Stokes κ.λπ. (Εικόνα 2.1). Μια σύντομη και περιεκτική ιστορική αναδρομή του προβλήματος αυτού της ολίσθησης της ταχύτητας γίνεται στο βιβλίο του Goldstein (1957) [15].

Η διαμάχη αυτή ξεκινά από τον 18^ο αιώνα με πρωταγωνιστές τους Bernulli, Du Buat και Coulomb. Ο Daniel Bernulli αναγνώρισε ήδη από το 1738 ότι ένα ρευστό δεν μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα πάνω σε μία στερεή επιφάνεια. Η γνωστή εξίσωση που φέρει το όνομα του, εξίσωση Bernulli, η οποία συσχετίζει την πίεση και την ταχύτητα σε ένα ρευστό είναι έγκυρη μόνο για ιδανικά (μη ιξώδη) ρευστά. Βασιζόμενος στις αποκλίσεις μεταξύ των μετρήσεων σε πραγματικά ρευστά και των υπολογισμών σε ιδανικά ρευστά κατέληξε στο συμπέρασμα ότι μια τέλεια ολίσθηση δεν είναι δυνατή. Έφτασε έτσι μέχρι τη μέση της αλήθειας, αφού ο ισχυρισμός του δεν αποδεικνύει το αντίθετο, δηλαδή τη μη-ολίσθηση της ταχύτητας.

Βασιζόμενος σε παρατηρήσεις ροής νερού σε κανάλι ο Du Buat συμπέρανε το 1786 ότι το ρευστό κοντά στην επιφάνεια βρισκόταν σε ηρεμία όταν η ταχύτητα της ροής ήταν μικρή. Αυτό ήταν ένα γενναίο συμπέρασμα παρά την εξειδίκευση σε μικρές ταχύτητες ροής. Ο Coulomb ασχολήθηκε

επίσης με αυτό το πρόβλημα και τα πειράματα που διεξήγαγε ήταν σπουδαία και αποτελούσαν μια λογική επέκταση των πειραμάτων του στην ξηρή τριβή.

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω διαπιστώσεις στις οποίες κατέληξαν ο Bernoulli, ο Du Buat και ο Coulomb διατυπώθηκαν κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα πριν γίνουν γνωστές οι εξισώσεις N-S. Μπαίνοντας στον 19^ο αιώνα σημειώθηκαν τρεις σημαντικές παρατηρήσεις από διαφορετικούς ερευνητές σε διαφορετικές περιόδους.

Η πρώτη υπόθεση υποστήριζε ότι η ταχύτητα του ρευστού στην επιφάνεια του τοιχώματος είναι ίδια με την ταχύτητα του τοιχώματος και μεταβάλλεται συνεχώς μέσα στο ρευστό και δείχνει να προήλθε από τον Coulomb. Η δεύτερη υπόθεση εμφανίστηκε τη δεύτερη δεκαετία του 19^{ου} αιώνα από τον Girard ο οποίος διεξήγαγε πειράματα ροής σε σωλήνες. Υπέθεσε ότι ένα λεπτό στρώμα του ρευστού κοντά στο τοίχωμα παραμένει προσκολλημένο σ' αυτό ενώ το υπόλοιπο τμήμα της ρευστού ολισθαίνει πάνω στο σταθερό αυτό στρώμα. Η υπόθεση αυτή οδηγεί σε ασυνέχεια της ταχύτητας ροής. Σήμερα γνωρίζουμε ότι μια τέτοια ασυνέχεια δεν μπορεί να είναι αποδεκτή στα πραγματικά (ιξώδη) ρευστά γιατί οδηγεί σε άπειρη τάση.



Εικόνα 2.1: Φυσικοί και μαθηματικοί του 18ου και 19ου αιώνα.
α) Daniel Bernoulli (1700-1782), (β) Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), (γ) Pierre-Simon Girard (1765-1836), (δ) Siméon Denis Poisson (1781-1840), (ε) Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), (ζ) George Gabriel Stokes (1819-1903).

Η τρίτη υπόθεση διατυπώθηκε από τον ίδιο των Navier. Υποστήριξε ότι το τοίχωμα αντιστέκεται στην ολίσθηση ασκώντας μια δύναμη που είναι ανάλογη της ταχύτητας ολίσθησης. Και επειδή η διατμητική τάση πρέπει να είναι συνεχής από το στερεό τοίχωμα προς το ρευστό υπέθεσε για ροή μιας διεύθυνσης ότι

$$bu = m \frac{\partial u}{\partial n}$$

,όπου n είναι η διεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα, b μια σταθερά με m/b να είναι μια απόσταση. Η απόσταση αυτή είναι μηδέν για μη-ολίσθηση. Ο Navier εξήγησε τα πειραματικά αποτελέσματα του Girard για ροή διαμέσου σωλήνων χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο. Σημειώνεται ότι δεν τίθεται θέμα ασυνέχιας της ταχύτητα μέσα στο ρευστό με αυτό το μοντέλο. Είναι ενδιαφέρον ακόμη το γεγονός ότι ο Poisson έκανε παρόμοιες παρατηρήσεις με τον Navier αλλά υπέθεσε ότι αυτές συμβαίνουν έξω από το λεπτό σταθερό στρώμα.

Μια άλλη μεγάλη φυσιογνωμία της φυσικής επιστήμης ο Stokes ενώ αρχικά υποστήριξε την υπόθεση μη-ολίσθησης στη συνέχεια συνέκλινε αμφιταλαντευόμενος προς την υπόθεση του Navier επειδή οι υπολογισμοί του δεν συμφωνούσαν με τα πειρατικά του αποτελέσματα. Το 1846 στέλνει μια αναφορά στη Βρετανική Ένωση Επιστημών υποδεικνύοντας και τις τρεις υποθέσεις χωρίς όμως να επιλέξει κάποια ως σωστή. Τελικά καταλήγει στην πρώτη, αυτή της μη-ολίσθησης, βασιζόμενος σε δυο ισχυρισμούς

- (1) Εάν υπάρχει ολίσθηση στο τοίχωμα τότε η τριβή μεταξύ του στερεού και του ρευστού θα πρέπει να είναι διαφορετικής φύσης και απείρως μικρότερη από την τριβή μεταξύ δυο στρωμάτων του ρευστού.
- (2) Η συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ των υπολογισμών χρησιμοποιώντας το μοντέλο μη-ολίσθησης και των παρατηρήσεων είναι ικανοποιητική.

Η πρώτη παρατήρηση του Stokes ήταν σπουδαία. Ξέρουμε ότι η διατμητική τάση μέσα στο ρευστό οδηγεί στη παραμόρφωση του αλλά παρόλα αυτά η κατανομή της ταχύτητας είναι συνεπής ως προς τη συνέχεια βάση των παρατηρήσεων. Το ερώτημα που θέτει εδώ ο Stokes είναι κατά πόσο μπορεί να συμβαίνει κάτι αντίστοιχο στη διεπιφάνεια στερεού-ρευστού με την παρουσία τριβής μεταξύ στερεού και ρευστού. Ισχύει ότι για δεδομένη διατμητική τάση, μεγάλες παραμορφώσεις στο ρευστό συμβαίνουν όταν η ταχύτητα είναι μικρή. Εάν παρατηρηθεί ασυνέχεια στην ταχύτητα κοντά στη διεπιφάνεια αυτό σημαίνει ότι ο μηχανισμό τριβής μεταξύ του στερεού και του ρευστού είναι διαφορετικής φύσης και μάλιστα απείρως μικρότερος από αυτόν που συμβαίνει μεταξύ δυο στρωμάτων του ρευστού. Το επιχείρημα του Stokes ήταν πολύ πιστικό. Παρόλα αυτά τον καιρό εκείνο η συνθήκη μη-ολίσθησης έδειχνε να είναι αφύσικη και οι αντικρουόμενες απόψεις είχαν τους υποστηρικτές τους.

Τα χρόνια που ακολούθησαν έγιναν πολλά πειράματα από πολλούς ανεξάρτητους ερευνητές και πειραματιστές όπως οι Even Darcy (1858) και Helmholtz (1860). Αξιοσημείωτο είναι το συμπέρασμα από τον Couette το 1890 ότι ακόμα και η τυρβώδης ροή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη μη-ολίσθησης, παρά τη μεγάλη διαβάθμιση δίπλα στο τοίχωμα. Τέλος στη διαμάχη αυτή έβαλε ο Whetham το 1890 με τα πειράματα που διεξήγαγε, τα οποία επιβεβαίωσαν τη συνθήκη μη-ολίσθησης στη διεπιφάνεια του τοιχώματος.

Έτσι λοιπόν στην γενική περίπτωση, εάν ορίσουμε ως V την ταχύτητα του στερεού τοιχώματος και ως u την ταχύτητα του ρευστού στην επαπτομενική διεύθυνση και \mathbf{t} ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στη διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3, η συνθήκη μη-ολίσθησης γράφεται

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \Rightarrow u_t = V_t$$

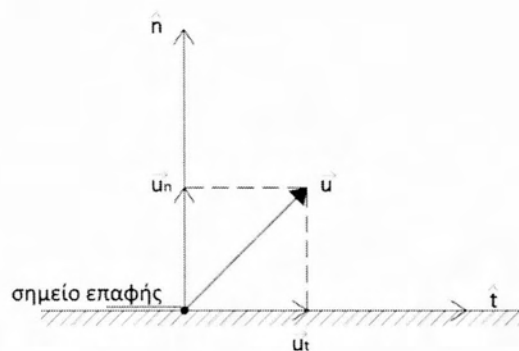
Η ισότητα της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας στο σημείο επαφής προέρχεται από καθαρά κινηματικούς περιορισμούς, όπου δεν λαμβάνει ροή μάζας διαμέσου του τοιχώματος. Έστω \mathbf{n} ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο τοίχωμα τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow u_n = V_n$$

Ως επακόλουθο των δύο παραπάνω σχέσεων, συμπεραίνει κανείς ότι σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας η ταχύτητα του ρευστού θα πρέπει να ισούται με την ταχύτητα του στερεού σώματος. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}$$

Η εμπειρία έχει δείξει ότι αυτού του είδους οι συνθήκες δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα σε εφαρμογές με χαμηλό Kn , κάτω του 10^{-3} .



Σχήμα 2.2: Σύστημα συντεταγμένων.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που αγνοηθούν οι ιξώδεις δυνάμεις ($\mu = 0$) οι όροι δεύτερης τάξης παραλείπονται και εξισώσεις N-S καταλήγουν στις εξισώσεις κίνησης του Euler. Πρόκειται για εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς το χώρο που διατηρούν τη μη γραμμικότητα τους. Διατυπώθηκαν από τον ελβετό μαθηματικό Euler (1707-1783) πριν οι Navier και Stokes δημοσιεύσουν τις εξισώσεις για πραγματικά (δηλαδή ιξώδη) ρευστά.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση της απλοποίησης αυτής είναι στο γεγονός ότι παραλείποντας τους ιξώδεις όρους η τάξη των εξισώσεων μειώνεται κατά μια. Αυτό σημαίνει ότι μειώνεται αυτομάτως και ο απαιτούμενος αριθμός συνοριακών συνθηκών. Πράγματι για τις εξισώσεις Euler χρειάζεται να καθορίσουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία μάλιστα θα πρέπει να ισούται με μηδέν. Η λύση καταλήγει σε μια ταχύτητα ολίσθησης στην επιφάνεια του τοιχώματος. Υπενθυμίζεται ότι για τις εξισώσεις N-S, οι οποίες είναι δεύτερης τάξης χρειάζεται εκτός της κατακόρυφης συνιστώσας να καθοριστεί και η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Για μια ενδιαφέρουσα συζήτηση των παραπάνω ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο των Arakeri και Shankar (2000) [16].

2.2 Οριακές συνθήκες ολίσθησης Maxwell

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι η υπόθεση συνεχούς μέσου ισχύει και αγνοούσαμε τη μοριακή δομή του ρευστού. Στην προηγούμενη ενότητα έγινε αναφορά στο γεγονός ότι ο Navier (1823) μέσα από μια μοριακή υπόθεση συμπέρανε ότι στο τοίχωμα συμβαίνει ολίσθηση και εμπλέκεται μια αναλογία απόστασης m/b . Λίγο αργότερα ο Maxwell ο οποίος πρωτοπόρησε στην κινητική θεωρία των αερίων, συμπέρανε ότι ο παράγοντας ολίσθησης του Navier m/b είναι ανάλογος με την μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή λ , και ίσως ανάλογος με 2λ .

Σημειώνεται ότι στη θεωρία συνεχούς μέσου είναι $\lambda = 0$. Όμως στα πραγματικά αέρια η παράμετρος λ δεν είναι μηδέν, αλλά είναι πολύ μικρή. Για τον αέρα σε κανονικές συνθήκες ατμοσφαιρικής πίεσης και θερμοκρασίας το λ ισούται με 0.0065 mm. Στα υγρά είναι λίγο μικρότερο. Η μη μηδενική αυτή τιμή του λ ήταν πιθανώς αυτή που δημιούργησε τη δυσκολία, την εννοιολογική και ταυτόχρονα πρακτική.

Ο Maxwell πρότεινε την ακόλουθη προσέγγιση για τον υπολογισμό της ολίσθησης της ταχύτητας [17]. Όρισε μια επιφάνεια ελέγχου S , η οποία ορίζεται σε απόσταση ίση με $\lambda/2$ πάνω από την επιφάνεια του τοιχώματος. Ένα ποσοστό των μορίων φτάνει στην επιφάνεια S από απόσταση ενός λ και τα υπόλοιπα μόρια φτάνουν στην επιφάνεια ανακλώμενα από την επιφάνεια του τοιχώματος.

Πιο συγκεκριμένα όρισε τον συντελεστή προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής (tangential momentum accommodation coefficient) a , ο οποίος εκφράζει το ποσοστό των μορίων τα οποία καθώς

συγκρούονται με το τοίχωμα ανακλούνται χάνοντας την εφαπτομενική τους ορμή και επανέρχονται στο ρευστό με μια τυχαία γωνία (διαχυτική ανάκλαση). Τα υπόλοιπα $(1-a)$ αναπηδούν διατηρώντας την εφαπτομενική τους ορμή και επομένως δεν ασκούν διατμητική τάση στο ρευστό (κατοπτρική ανάκλαση) [18]. Από τον ορισμό του a είναι φανερό ότι $0 \leq a \leq 1$

Ο Maxwell χρησιμοποίησε τη σειρά Taylor για να αναπτύξει την εφαπτομενική ταχύτητα αποκόπτοντας τους όρους δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης. Έδειξε ότι για μηδενική κλίση του διανύσματος της θερμοκρασίας στη διεύθυνση κάθετη στη ροή ($dT/dy=0$), η σχετική ταχύτητα του ρευστού και τοιχώματος στο σημείο επαφής τους είναι

$$u_g - u_w = \frac{2-a}{a} \lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left. \frac{dT}{dx} \right|_w$$

όπου u_g η ταχύτητα ροής, u_w η ταχύτητα του τοιχώματος, u η ταχύτητα ροής, λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή, y η διεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα, x η διεύθυνση της ροής, μ το ιξώδες, a ο συντελεστής προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής ($a=1$ και $a=0$ για πλήρως διαχυτική και κατοπτρική ανάκλαση αντίστοιχα), ρ η πυκνότητα και T η θερμοκρασία. Η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως διόρθωση πρώτης τάξης για ολίσθηση σε τοίχωμα (first order correction for wall slip) και συναντάται στη βιβλιογραφία ως συνθήκη ολίσθησης Maxwell πρώτης τάξης. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει ροή θερμότητας στη διεύθυνση της ροής ($dT/dx=0$), η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αδιαστατοποιηθεί από ένα χαρακτηριστικό μήκος και μια ταχύτητα και να δώσει [19]

$$u'_g - u'_w = \frac{2-a}{a} Kn \left. \frac{du'}{dy'} \right|_w$$

όπου ο συμβολισμός ($'$) δηλώνει τις αδιάστατες ποσότητες και Kn είναι ο αριθμός Knudsen. Είναι φανερό ότι το μέγεθος της ολίσθησης εξαρτάται από τον αριθμό Kn και το συντελεστή προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής a [20].

Σημειώνεται ότι από τη σειρά Taylor μπορούν εάν αποκοπούν οι όροι τρίτης και μεγαλύτερης τάξης να προκύψουν συνθήκες ολίσθησης δεύτερης τάξης. Το ανάπτυγμα της εφαπτομενικής ταχύτητας σειρά Taylor για μηδενική ροή θερμότητας είναι

$$u_g - u_w = \frac{2-a}{a} \left[\lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_w + \frac{\lambda^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_w + \frac{\lambda^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dy^3} \right|_w + \dots \right]$$

Αποκόπτοντας τους όρους τρίτης και μεγαλύτερης τάξης παίρνουμε

$$u_g - u_w = \frac{2-a}{a} \left[Kn \frac{du}{dy} \Big|_w + \frac{Kn^2}{2} \frac{d^2u}{dy^2} \Big|_w \right]$$

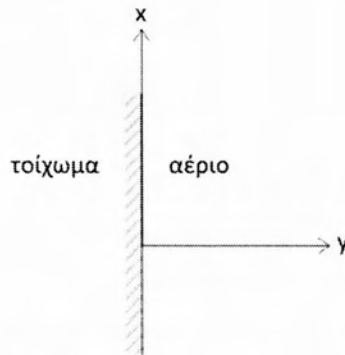
οι οποίες είναι γνωστές στην βιβλιογραφία ως οριακές συνθήκες ολίσθησης Maxwell δεύτερης τάξης (second-order Maxwell slip boundary conditions).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εφαρμοσιμότητα αυτών των συνθηκών ολίσθησης ανώτερης τάξης είναι αμφισβητήσιμη διότι οι εξισώσεις N-S που τις συνοδεύουν είναι ακριβείς μόνο στο $O(Kn)$.

Για το λόγο αυτό στα προβλήματα ροών που εξετάζονται στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί για την διεπιφάνεια ρευστού-στερεού η συνοριακή ολίσθηση Maxwell πρώτης τάξης. Έστω y ο άξονας κάθετος στη διεπιφάνεια και x ο άξονας παράλληλος στη διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Έστω ακόμη ότι η επιφάνεια είναι άπειρη και ότι η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από την τεταγμένη y , $u_x = u_x(y)$. Τότε η συνοριακή συνθήκη μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$u_x = \sigma_p \lambda \frac{du_x}{dy} \quad (2.1)$$

όπου λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή η οποία υπολογίζεται από τη σχέση (2.3) που δίνεται στο τέλος της υποενότητας και σ_p ο λεγόμενος συντελεστής ιξώδους ολίσθησης (viscous slip coefficient). Σημειώνεται ότι παρόλο που ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης (VSC) ορίστηκε για επίπεδες επιφάνειες δύναται να χρησιμοποιηθεί και για καμπύλες αν η ακτίνα καμπυλότητας είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μέσης ελεύθερης μοριακής διαδρομής λ .



Σχήμα 2.3: Σύστημα συντεταγμένων.

Ο αδιάστατος συντελεστής σ_p (VSC) συναντάται στην βιβλιογραφία με διάφορες τιμές. Αυτό συμβαίνει διότι διαφορετικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του. Πρώτος ο Maxwell όρισε τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης ως εξής

$$\sigma_p^{Maxwell} = \frac{2-a}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

όπου a ο συντελεστή προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής. Με χρήση πάλι της κινητική θεωρίας λύνοντας το γνωστό πρόβλημα του Kramer και $a=1$ (πλήρως διαχυτική ανάκλαση) από το κινητικό μοντέλο BGK [21] παίρνουμε $\sigma_p = 1.016$ [22] ενώ από το κινητικό μοντέλο S παίρνουμε $\sigma_p = 1.018$ [23], ενώ η εξάρτηση από τον συντελεστή a μπορεί να προκύψει από τη σχέση

$$\sigma_p(a) = \frac{2-a}{a} [\sigma_p(1) - 0.1211(1-a)]$$

Συνοριακές συνθήκες υπάρχουν και για το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού, της κίνησης του ρευστού δηλαδή λόγω διαφοράς θερμοκρασίας και μάλιστα με αφετηρία την περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας. Στο φαινόμενο αυτό, το οποίο μελετάται και επιλύεται στο Κεφάλαιο 3, βασίζεται και η λειτουργία της αντλίας Knudsen, η οποία δεν έχει κινητά μέρη και η άντληση του ρευστού οφείλεται σε θερμοκρασιακές διαφορές. Σημειώνεται ότι η ροή λόγω του θερμικού ερπυσμού μηδενίζεται καθώς ο αριθμός Knudsen τείνει στο μηδέν. Η συνθήκη ολίσθησης της θερμοκρασίας τύπου Maxwell στο τοίχωμα δίνεται με τη μορφή [24]

$$u_g - u_w = \frac{3}{4} \frac{\text{Pr}(\gamma-1)}{\gamma \rho R T_g} (-q_x)_w = \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T_g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w = \sigma_T^{Maxwell} \frac{\mu}{\rho T_g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w$$

όπου $\sigma_T^{Maxwell}$ ο συντελεστής θερμικής ολίσθησης (thermal slip coefficient, TSC) του Maxwell για τον οποίο όπως φαίνεται από την τελευταία σχέση ισχύει $\sigma_T^{Maxwell} = 0.75$. Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να γραφεί με βάση τις αδιάστατες ποσότητες που χρησιμοποιούνται στην κινητική θεωρία ως εξής

$$u'_g - u'_w = \frac{3}{2\pi} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{Kn^2 \text{Re}}{Ec} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} \right)_w$$

όπου $\text{Re} = \rho u D / \mu$ και $Ec = u^2 / c_p \Delta T$. Με D συμβολίζεται κάποια χαρακτηριστική διάσταση του προβλήματος, u είναι η ταχύτητα του ρευστού, ρ η πυκνότητα του, μ το δυναμικό ιξώδες, c_p η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, k η θερμική αγωγιμότητα και ΔT η διαφορά θερμοκρασίας.

Έστω ένα ρευστό το οποίο καταλαμβάνει έναν ημιάπειρο χώρο $y \geq 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Η μόνη διαφορά από την περίπτωση της ολίσθησης της ταχύτητας είναι ότι η θερμοκρασία εδώ δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από τη συντεταγμένη x , $T_w = T_w(x)$. Έτσι η συνθήκη ολίσθησης της θερμοκρασίας στο πρόβλημα του θερμικού ερπυσμού γράφεται στη μορφή [10]

$$u_x = \sigma_T \frac{\mu}{\rho T_w} \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

όπου ο συντελεστής θερμικής ολίσθησης (TSC) μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για καμπύλες επιφάνειες αν η ακτίνα καμπυλότητας είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μέσης ελεύθερης μοριακής διαδρομής λ . Σημειώνεται ότι ο συντελεστής αυτός είναι ανεξάρτητος του συντελεστή προσαρμογής a .

Στους Πίνακες 2-1 και 2-2 δίνονται συγκεντρωτικά οι τιμές των συντελεστών ιξώδους και θερμικής ολίσθησης σ_p και σ_T ανάλογα με τη μέθοδο επίλυσης.

BGK	1.016
S	1.018
Εξίσωση Boltzmann	0.9874
Maxwell	0.8862

BGK	1.149
S	1.175
Εξίσωση Boltzmann	1.018
Maxwell	0.75

Σημειώνεται ότι προκειμένου να χρησιμοποιηθούν σωστά οι συντελεστές ιξώδους και θερμικής ολίσθησης, η έννοια της μέσης ελεύθερης διαδρομής πρέπει να αποσαφηνιστεί πλήρως. Στην βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει πληθώρα ορισμών της ποσότητας αυτής, όπως για παράδειγμα από το διατμητικό ιξώδες (shear viscosity) από την θερμική αγωγιμότητα (heat conductivity) κ.α. Μιας και οι τιμές των συντελεστών ολίσθησης και άλματος εξαρτώνται από τον ορισμό της μέσης ελεύθερης διαδρομής, θα πρέπει το μέγεθος αυτό να οριστεί με ένα μοναδικό τρόπο και με όρους μετρούμενων ποσοτήτων. Ο πιο πιστικός ορισμός δίνεται από το συντελεστή ιξώδους ως εξής

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi} \mu u_m}{2p} \approx \frac{\mu u_m}{p} \quad (2.3)$$

όπου $u_m = (2R_{gas}T)^{1/2}$ η πιο πιθανή μοριακή ταχύτητα στη θερμοκρασία T με $R_{gas} = \bar{R}/m$, p η τοπική πίεση, μ το ιξώδες και k_B η σταθερά Boltzmann.

2.3 Οριακές συνθήκες ολίσθησης 1ης και 2ης τάξης

Εάν ο αριθμός Kn αυξηθεί λίγο ώστε να βρεθούμε στη μεταβατική περιοχή ροής (transition regime), το μοντέλο πρώτης-τάξης ροής με ολίσθηση (first-order slip-flow model) παύει να ισχύει. Αυτό διαπιστώνεται από το γεγονός ότι οι διαφορές μεταξύ των προβλέψεων που δίνει το μοντέλο και των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι σημαντικές [25]. Ένα ερώτημα που τίθεται συχνά και απασχολεί τα τελευταία χρόνια την επιστημονική κοινότητα είναι κατά πόσο μπορεί να επεκταθεί η εφαρμοσιμότητα των N-S εξισώσεων πέρα του ορίου ($Kn=0.1$) της υδροδυναμικής περιοχής χρησιμοποιώντας οριακές συνθήκες ολίσθησης δεύτερης τάξης [26].

Ερευνητές στον κλάδο της δυναμικής αραιοποιημένων ρευστών (rarefied gas dynamics) έχουν αναπτύξει διάφορα μοντέλα οριακών συνθηκών δεύτερης τάξης τα οποία περιλαμβάνουν δυο συντελεστές A_1 και A_2 . Ο πρώτος συντελεστής είναι ο συντελεστής προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής και ο δεύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής ενέργειας και σχετίζεται με την κάθετη στο τοίχωμα συνιστώσα της ταχύτητας του συγκρουόμενου μορίου.

Ο Sreekanth πρότεινε τη ακόλουθη γενική φόρμα του μοντέλου δεύτερης τάξης [18]

$$u_g - u_w = -A_1 \lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_w - A_2 \lambda^2 \left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_w \quad (2.4)$$

όπου u_g η ταχύτητα του ρευστού, u_w η ταχύτητα του τοιχώματος, u η ταχύτητα ροής, A_1 και A_2 οι δυο προαναφερθέντες συντελεστές και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή. Δυστυχώς παράλληλη τη γενικότητα που προσφέρει αυτή η φόρμα, δεν υπάρχει ομοφωνία μεταξύ των ερευνητών στους θεωρητικούς υπολογισμούς και τα πειραματικά αποτελέσματα των δυο συντελεστών τα οποία δίνονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 2-3 [18].

Πίνακας 2-3 Τιμές συντελεστών A_1 και A_2			
Πηγή	A_1	A_2	Μέθοδος
Maxwell (τέλη 19 ^{ου} αιώνα)	1	0	Θεωρητική (Βλέπε [17])
Schamberg (1947)	1	5π/12	Θεωρητική (Βλέπε [27])
Chapman and Cowling (1952)	~1	~0.5	Θεωρητική (Βλέπε [28])
Albertoni κ.α. (1963)	1.1466	0	Θεωρητική (Σωλήνας)
Deissler (1964)	1	1.6875	Θεωρητική (Βλέπε [29])
Cercignani (1964)	1.1466	0.9756	Θεωρητική (Βλέπε [29])
Sreekanth (1969)	1.1466	0.14	Πειραματική (Σωλήνας)
Hsia and Domoto (1983)	1	0.5	Βλέπε [27]
Mitsuya (1993)	1	2/9	Βλέπε [28]
Pan (1999)	1.125	0	Προσομοιώσεις (DSMC)

Είναι φανερό από τον παραπάνω πίνακα ότι υπάρχουν έντονες αποκλίσεις κυρίως όσον αφορά το συντελεστή προσαρμογής ενέργειας A_2 έχοντας ως επακόλουθο την αδυναμία επέκτασης του μοντέλου ολίσθησης στη μεταβατική περιοχή [30].

Παρακάτω αναφέρονται χαρακτηριστικά οι φόρμες κάποιων μοντέλων πρώτης και δεύτερης τάξης με τη σειρά που δημοσιεύτηκαν τα τελευταία πενήντα περίπου χρόνια. Τροποποιώντας λίγο το μοντέλο του Maxwell ο Lam Khin δημοσίευσε τη σχέση

$$u_g - u_w = \frac{2-a}{a} \left[\frac{Kn}{1-bKn} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_w \right]$$

όπου b είναι μια εμπειρική παράμετρος η τιμή της οποίας καθορίζεται από τη μέθοδο προσομοίωσης DSMC για διάφορους αριθμούς Knudsen. [18]

Το μοντέλο του Lam εκμεταλλεύτηκαν αργότερα οι Beskok και Karniadakis, δυο τουρκικής καταγωγής ερευνητές στον κλάδο της δυναμικής αραιοποιημένων ρευστών. Οι Beskok και Karniadakis [31] ανέπτυξαν ένα απλό, φυσικού χαρακτήρα (physics-based) μοντέλο για ροές σε κανάλια, σωλήνες και αγωγούς σε μικροκλίμακες για μεγάλο εύρος του αριθμού Kn σε χαμηλούς αριθμούς Mach. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ενοποιημένη σχέση, αν και είναι πιο γενική από τις οριακές συνθήκες δεύτερης τάξης, δεν επιτρέπει εύκολα την διατύπωση αναλυτικών ή ημι-αναλυτικών μοντέλων, καθώς κάποιες παράμετροι χρήζουν διόρθωση (calibration) η οποία εξαρτάται από τα πειράματα ή την αριθμητική προσομοίωση της εξίσωσης Boltzmann [30]. Σήμερα η εγκυρότητα του μοντέλου Beskok-Karniadakis είναι ευρέως αμφισβητήσιμη.

Αυτή η έλλειψη ευρωστίας του μοντέλου Beskok-Karniadakis οδήγησε τον Stéphane Colin και τους συνεργάτες του στην δημοσίευση [30] ενός μοντέλου οριακών συνθηκών δεύτερης τάξης το οποίο αφορά ροή αραιοποιημένου ρευστού σε μικροαγωγό ορθογωνικής διατομής. Εφαρμόζοντας τις παρακάτω σχέσεις αδιαστατοποίησης κατέληξαν στη μορφή

$$x' = x/b, \quad y' = y/h, \quad u' = u/u_0, \quad u_0 = \frac{-h^2}{\mu} \frac{dP}{dz}$$

$$u'_{y'=1} = -\frac{2-a}{a} 2Kn \frac{\partial u'}{\partial y'} \Big|_{y'=1} - \frac{9}{4} Kn^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \Big|_{y'=1} - 1 \right)$$

$$u'_{x'=1} = -\frac{2-a}{a} 2aKn \frac{\partial u'}{\partial x'} \Big|_{x'=1} - \frac{9}{4} Kn^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \Big|_{x'=1} - 1 \right)$$

όπου $a = h/b$ είναι η αναλογία των διαστάσεων της διατομής

Το μοντέλο του Colin βασίστηκε σε ένα προηγούμενο μοντέλο του Deissler για ορθογωνικούς μικροαγωγούς που έχει την ακόλουθη μορφή

$$x = \pm b, \quad y = \pm h$$

$$u_{y=h} = -\frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{9}{16} \lambda^2 \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{y=h} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{y=h} \right)$$

$$u_{x=b} = -\frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} - \frac{9}{16} \lambda^2 \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=b} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{x=b} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{x=b} \right)$$

Το πλεονέκτημα των οριακών συνθηκών ολίσθησης του Deissler συγκριτικά με άλλα μοντέλα δεύτερης τάξης είναι η φυσική προσέγγιση του Deissler, σύμφωνα με την οποία η διατμητική τάση ικανοποιεί τον ορισμό του νευτωνικού ρευστού, ο οποίος χρησιμοποιείται στις εξισώσεις N-S.

Ακόμη ένα μοντέλο δημοσίευσαν οι Xan και Fan αντικαθιστώντας την παράμετρο Kn με την $\tanh(Kn)$, απορρίπτοντας τους όρους δεύτερης τάξης στην οριακή συνθήκη Maxwell δεύτερης τάξης για να υπολογίσουν την ολίσθηση της ταχύτητας [18]

$$u_g - u_w = \frac{2-a}{a} \left[\tan Kn \frac{du}{dy} \Big|_w + \frac{\tan^2 Kn}{2} \frac{d^2 u}{dy^2} \Big|_w \right]$$



ΡΟΕΣ POISEUILLE ΚΑΙ COUETTE

Οι ροές Poiseuille και Couette είναι οι δύο πολύ βασικές ροές στη Ρευστομηχανική καθώς οι εξισώσεις που τις περιγράφουν προέρχονται από τις καταστατικές εξισώσεις κάνοντας απλές παραδοχές και η αναλυτική επίλυση τους επιτυγχάνεται με απλό ολοκληρωτικό λογισμό. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν επίσης αναφορές για συνδυασμένη ροή Poiseuille και Couette με εφαρμογές σε αντλίες (friction pumps). Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες για τη συνδυασμένη ροή στις αναφορές [32,33].

Η ροή Couette είναι μια στρωτή πλήρως ανεπτυγμένη ροή ενός ιξώδους ρευστού που συμβαίνει συνήθως διαμέσου δυο απείρων παράλληλων πλακών ή μεταξύ δυο απείρων ομόκεντρων κυκλικών αγωγών λόγω της σχετικής τους κίνησης. Η ροή συμβαίνει κατά κύριο λόγο εξαιτίας των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στο ρευστό από τα κινητά όρια του συστήματος ελέγχου ενώ επιπλέον μπορεί να οφείλεται στο διάνυσμα της πίεσης στη διεύθυνση της ροής, όταν αυτό εφαρμόζεται. Η ροή πήρε αυτή την ονομασία από τον γάλλο φυσικό Maurice Marie Alfred Couette (1858-1943) Καθηγητή Φυσικής στο Γαλλικό πανεπιστήμιο της Ανζέρ στα τέλη του 19^{ου} αιώνα.

Σε αντίθεση με τη ροή Couette η ροή Poiseuille οφείλεται αποκλειστικά στο διάνυσμα της πίεσης μιας και τα όρια στο σύστημα ελέγχου που καθορίζεται είναι ακίνητα. Η ροή Poiseuille ονομάστηκε από τον γάλλο φυσικό JeanL. M. Poiseuille (1799-1869) μιας και αυτός ήταν ο πρώτος που τη μελέτησε πειραματικά το 1838.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η μόνιμη, στρωτή (laminar), πλήρως ανεπτυγμένη (full developed), ροή νευτωνικού ασυμπίεστου αραιοποιημένου ρευστού σε τέσσερα βασικά προβλήματα εφαρμόζοντας συνοριακές συνθήκες ολίσθησης τύπου Maxwell. Οι οριακές συνθήκες αυτές όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2 είναι της μορφής

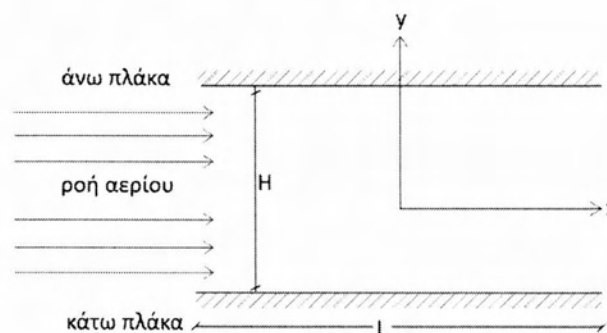
$$u_x = \sigma_p \lambda \frac{du_x}{dy}$$

όπου x η διεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα, $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης (viscous slip coefficient) και προκύπτει από την κινητική θεωρία [22] και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή.

Όλα τα προβλήματα παρουσιάζονται διεξοδικά στις παρακάτω παραγράφους και διατυπώνονται μαθηματικά με χρήση των διαφορικών εξισώσεων συνέχειας και ορμής (εξισώσεις Navier-Stokes) συζευγμένες με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ολίσθησης πρώτης τάξης τύπου Maxwell. Σε κάθε εφαρμογή εξάγεται η κατανομή της ταχύτητας της ροής και απεικονίζεται γραφικά για διάφορες τιμές του αριθμού Knudsen. Υπολογίζονται βασικά μεγέθη ροής όπως η ροή μάζας στα προβλήματα λόγω βαθμίδας πίεσης (π.χ. ροή Poiseuille) και η διατμητική τάση στα προβλήματα λόγω οριακών συνθηκών (π.χ. ροή Couette) και εκτιμάται η συνεισφορά του όρου ολίσθησης. Έπειτα θεωρώντας πραγματικά (ιξώδη) ρευστά λειτουργίας το Ήλιο (He) και το Ξέον (Xe) γίνεται διαστατοποίηση των αποτελεσμάτων.

3.1 Ροή ανάμεσα σε δύο ακίνητες πλάκες (plane Poiseuille)

Το ρευστό ρέει διαμέσου δυο ακίνητων παράλληλων πλακών απείρου μήκους που απέχουν μεταξύ τους απόσταση H και βρίσκονται στις θέσεις $y = \pm H/2$, λόγω βαθμίδας πίεσης dp/dx στη διεύθυνση x , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Η ροή θεωρείται μόνιμη, ασυμπίεστη, ισόθερμη και πλήρως ανεπτυγμένη στην x -διεύθυνση κατά μήκος των πλακών. Η υπόθεση της πλήρως ανεπτυγμένης ροής συνεπάγεται ότι η πίεση (ή η πυκνότητα) μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος της ροής, ενώ παραμένει σταθερή στη διεύθυνση y , δηλαδή $p = p(x)$.



Σχήμα 3.1: Ροή διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (plane Poiseuille).

Στη συγκεκριμένη ροή με βάση τις παραπάνω υποθέσεις οι συνιστώσες της μακροσκοπικής ταχύτητας στις διευθύνσεις y και z είναι μηδενικές και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή

στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$. Επίσης, αυτή η μη μηδενική συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση y και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Η πλήρως ανεπτυγμένη ροή ανάμεσα σε πλάκες περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής στη x κατεύθυνση θεωρώντας ότι $u_y = u_z = 0$, $u = u(y)$, $\partial u_x / \partial x = 0$ και $p = p(x)$. Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.1) και (1.4) από τους Πίνακες 1-1 και 1-2 του Κεφαλαίου 1 και αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή Poiseuille ανάμεσα σε πλάκες είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1.1)$$

και

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{dp}{dx} \quad (3.1.2)$$

Σημειώνεται ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η διαφορά πίεσης θεωρείται αρνητική, οπότε στην εξίσωση (3.1.2) συμπληρώθηκε ένα (-) στον όρο πίεσης. Για λόγους συντομίας στους συμβολισμούς δεν χρησιμοποιούμε τον δείκτη και γράφουμε $u_x(y) = u(y)$. Η πρώτη εξίσωση οδηγεί στο συμπέρασμα $u = u(y)$ που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στη διατύπωση της δεύτερης εξίσωσης. Η δεύτερη είναι περισσότερο χρήσιμη αφού εάν ολοκληρωθεί δύο φορές ως προς y θα προκύψει η γενική λύση της άγνωστης ταχύτητας u .

Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν την εξίσωση (3.1.2) είναι οι οριακές συνθήκες μη ολίσθησης. Όμως στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας εισάγουμε τις οριακές συνθήκες ολίσθησης ώστε να μελετήσουμε τη ροή και για συνθήκες εκτός τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας. Συγκεκριμένα οι οριακές συνθήκες για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι

$$u\left(\pm \frac{H}{2}\right) = \pm \sigma_p \lambda \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\pm H/2} \quad (3.1.3)$$

όπου $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης και προκύπτει από την κινητική θεωρία [22] και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u_h + u_s \quad (3.1.4)$$

όπου u_h είναι η λεγόμενη υδροδυναμική λύση, δηλαδή η λύση της εξίσωσης (3.1.2) με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης και u_s η λεγόμενη λύση ολίσθησης, δηλαδή η διόρθωση που εισάγεται στην

υδροδυναμική λύση λόγω της ολίσθησης στα τοιχώματα. Τονίζεται ότι για μικρές τιμές του αριθμού Kn η λύση ολίσθησης είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους μικρότερη από την υδροδυναμική λύση.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.1.4) στην εξίσωση (3.1.2) και στην οριακή συνθήκη (3.1.3) διατυπώνονται τα εξής δύο προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\mu \frac{d^2 u_h}{dy^2} = -\frac{dp}{dx} \quad (3.1.5)$$

$$u_h\left(\pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (3.1.6)$$

Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς y παίρνουμε

$$\frac{du_h}{dy} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} y + c_1 \right)$$

Λόγω συμμετρίας $\left. \frac{du_h}{dy} \right|_{y=0} = 0$ και επομένως $c_1 = 0$

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά ως προς y είναι

$$u_h(y) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + c_2 \right)$$

Κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών έχουμε

$$u_h\left(\frac{H}{2}\right) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \frac{H^2}{8} + c_2 \right) \Rightarrow c_2 = \frac{dp}{dx} \frac{H^2}{8}$$

$$u\left(-\frac{H}{2}\right) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \frac{H^2}{8} + c_2 \right) \Rightarrow c_2 = \frac{dp}{dx} \frac{H^2}{8}$$

Επομένως η αναλυτική λύση του υδροδυναμικού προβλήματος είναι

$$u_h(y) = \frac{H^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \quad (3.1.7)$$

Πρόβλημα 2:

$$\frac{d^2 u_s}{dy^2} = 0 \quad (3.1.8)$$

$$u_s \left(\mp \frac{H}{2} \right) = \pm \sigma_p \lambda \left. \frac{du_s}{dy} \right|_{y=\mp \frac{a}{2}} \approx \mp \sigma_p \lambda \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y \quad (3.1.9)$$

Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς y παίρνουμε $\frac{du_s}{dy} = c_1$

Λόγω συμμετρίας $\left. \frac{du_s}{dy} \right|_{y=0} = 0$ και επομένως $c_1 = 0$

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά ως προς y είναι $u_s = c_2$

$$u_s \left(-\frac{H}{2} \right) = c_2 = -\sigma_p \lambda \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(-\frac{H}{2} \right)$$

$$u_s \left(+\frac{H}{2} \right) = c_2 = \sigma_p \lambda \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(+\frac{H}{2} \right)$$

Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος ολίσθησης είναι

$$u_s = \sigma_p \lambda \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{H}{2} \quad (3.1.10)$$

Με βάση την αρχή της επαλληλίας η ολική λύση είναι

$$u = \frac{H^2}{2\mu} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p \frac{\lambda}{H} \right) \frac{dp}{dx} \quad (3.1.11)$$

Οι δύο πρώτοι όροι εντός της παρένθεσης αντιστοιχούν στη γνωστή λύση με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, ενώ ο τρίτος όρος είναι η διόρθωση λόγω ολίσθησης. Σημειώνεται ότι η ποσότητα λ/H είναι ο γνωστός αδιάστατος αριθμός Knudsen και χαρακτηρίζει τον βαθμό αραιοποίησης της ροής. Βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός Knudsen μικραίνει η συμβολή του όρου ολίσθησης στο συνολικό αποτέλεσμα μειώνεται και τελικά μηδενίζεται καθώς ο αριθμός Knudsen τείνει στο μηδέν.

Είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε τα αποτελέσματα εισάγοντας την αδιάστατη απόσταση ταχύτητα.

$$y' = y / H \quad \text{και} \quad u' = \frac{\mu u}{H^2 \frac{dp}{dx}}$$

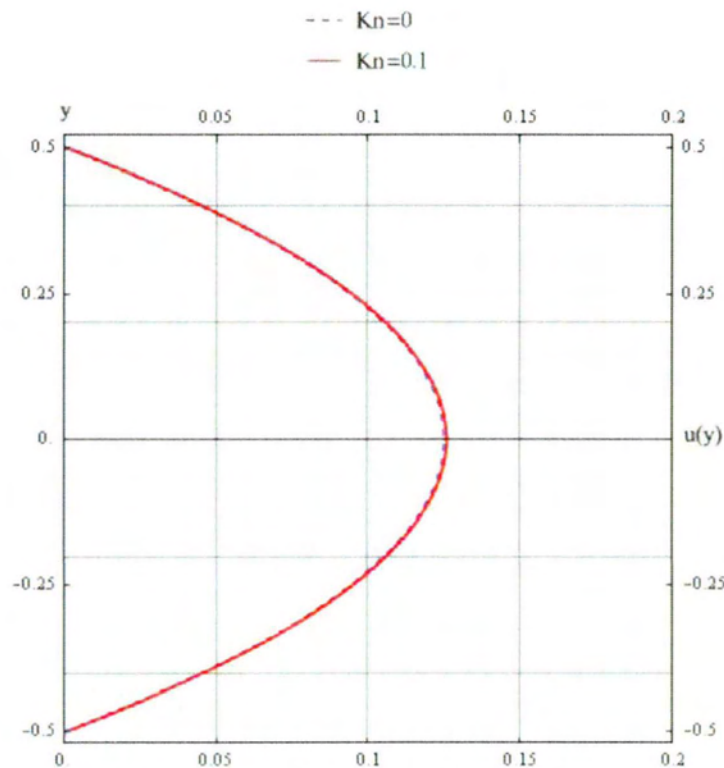
όπου το y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$. Τότε τα παραπάνω αποτελέσματα γράφονται σε αδιάστατη μορφή ως εξής

$$u'_H(y') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - y'^2 \right) \quad (3.1.12)$$

$$u'_S(y') = \frac{1}{2} \sigma_p \frac{\lambda}{H} = \frac{1}{2} \sigma_p Kn \quad (3.1.13)$$

$$u'(y') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - y'^2 + \sigma_p Kn \right) \quad (3.1.14)$$

Στο Σχήμα 3.2 που ακολουθεί δίνεται η κατανομή της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) με $\sigma_p = 1.018$ (από το κινητικό μοντέλο S).

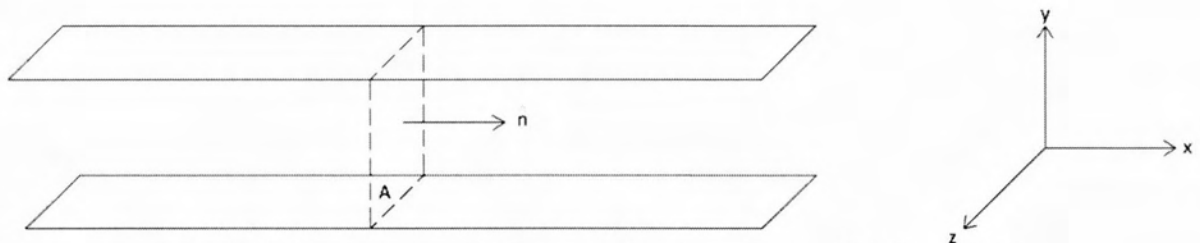


Σχήμα 3.2: Κατανομή αδιάστατης ταχύτητας ροής διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (plane Poiseuille).

Μια ποσότητα που συνήθως χρειάζεται να υπολογιστεί είναι η μαζική παροχή. Η μαζική παροχή \dot{M} είναι η ποσότητα μάζας του ρευστού που διέρχεται από μια επιφάνεια A στη μονάδα του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα η \dot{M} είναι η ταχύτητα του ρευστού ολοκληρωμένη σε μια επιφάνεια A .

$$\dot{M} = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

όπου $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u_x, 0, 0) = (u(y), 0, 0)$. Έστω $A = H \times B$ η επιφάνεια της τυχαίας διατομής όπου θα υπολογιστεί η μαζική παροχή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, με H την απόσταση μεταξύ των πλακών όπως έχει οριστεί και B την απόσταση κάθετη στην επιφάνεια του χαρτιού.



Σχήμα 3.3: Επιφάνεια τυχαίας διατομής διαμέσου δυο παράλληλων πλακών.

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\dot{M} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy dz = B \int_{-H/2}^{H/2} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy$$

Επειδή όμως οι πλάκες έχουν θεωρηθεί απείρου μήκους $H \ll B$, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της μαζικής παροχής ανά μονάδας μήκους της z -διεύθυνσης $\dot{m} = \dot{M} / B$ και για $B = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \int_{-H/2}^{H/2} \rho u(y) dy = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \frac{H^2}{2\mu} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p \frac{\lambda}{H} \right) \frac{dp}{dx} dy \\ &= \rho \frac{H^2}{2\mu} \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p \frac{\lambda}{H} \right) dy \frac{dp}{dx} = \rho \frac{H^2}{2\mu} \left[\frac{1}{4} y - \frac{y^3}{3H^2} + \sigma_p \frac{\lambda}{H} y \right]_{-H/2}^{H/2} \frac{dp}{dx} \\ &= \rho \frac{H^2}{2\mu} \left[\left(\frac{H}{8} - \frac{H}{24} + \sigma_p \frac{\lambda}{2} \right) - \left(-\frac{H}{8} + \frac{H}{24} - \sigma_p \frac{\lambda}{2} \right) \right] \frac{dp}{dx} = \rho \frac{H^2}{2\mu} \left(\frac{H}{6} + \sigma_p \lambda \right) \frac{dp}{dx} \\ &= \frac{\rho H^2}{12\mu} \left(1 + 6\sigma_p \frac{\lambda}{H} \right) \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

Εισάγοντας τον αριθμό Knudsen $Kn = \lambda / H$ η παροχή μάζας στη z -διεύθυνση γίνεται

$$\dot{m} = \frac{\rho H^3}{12\mu} (1 + 6\sigma_p Kn) \frac{dp}{dx} \quad (3.1.15)$$

Είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε την μαζική παροχή εισάγοντας τα αδιάστατα μεγέθη

$$y' = \frac{y}{H}, \quad z' = \frac{z}{B}, \quad \rho = \frac{2P_0}{u_0^2}, \quad u' = \frac{\mu u}{H^2} \frac{dp}{dx}$$

Η παροχή μάζας υπολογίζεται ως γνωστόν από τη σχέση

$$\dot{M} = \iint_A \rho u dA = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} \rho u dy dz$$

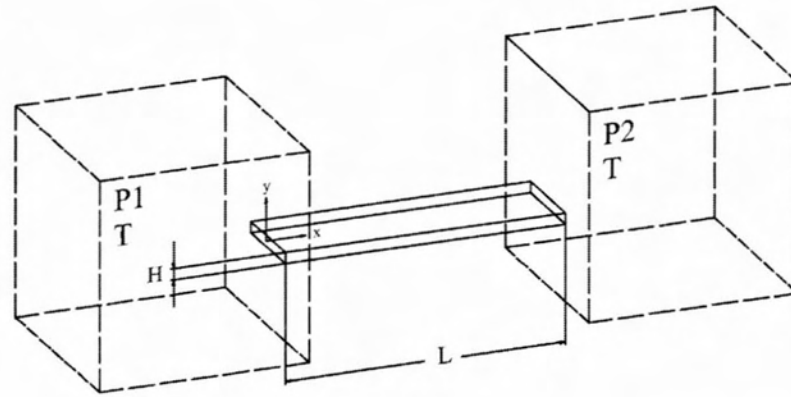
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αδιαστατοποίησης και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2P_0}{u_0^2} \frac{u'H^2}{\mu} \frac{dp}{dx} H dy B dz = \frac{BP_0 H^3}{u_0^2 \mu} \frac{dp}{dx} 2 \int_{-1/2}^{1/2} u' dy' \\ \Rightarrow \dot{M} &= \frac{B^2 P_0 H^3}{u_0^2 \mu} \frac{dp}{dx} G_{Pl} \end{aligned}$$

Ο όρος G_{Pl} είναι η αδιάστατη παροχή μάζας και για ροή διαμέσου πλακών απείρου μήκους ισούται με

$$G_{Pl} = 2 \int_{-1/2}^{1/2} u' dy' = \frac{1}{6Kn} + \sigma_p$$

Το πρόβλημα ροής ανάμεσα σε δύο επίπεδες πλάκες απείρου μήκους μπορεί να προσομοιωθεί με έναν αγωγό ορθογωνικής διατομής όπου το ύψος του θα είναι κατά πολύ μικρότερο του πλάτους του. Έστω ένας αγωγός μήκους L , πλάτους B και ύψους H , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει $H \ll B$. Επιπρόσθετα επειδή η ροή θεωρείται πλήρως ανεπτυγμένη θα πρέπει το μήκος L να είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του ύψους, δηλαδή $H \ll L$. Ορίζεται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x παράλληλο στη ροή και αρχή των αξόνων το κέντρο της διατομής.



Σχήμα 3.4: Πραγματική διάταξη ροής διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (plane Poiseuille).

Έστω $L=1m$ και $H=1cm$ οι διαστάσεις του αγωγού, η $P_1=1atm$ πίεση στο δοχείο 1 και $P_2=100Pa$ η πίεση στο δοχείο 2. Ως ρευστό λειτουργίας επιλέγεται πρώτα το Ήλιο (He) και έπειτα το Ξένον (Xe). Σε ατμοσφαιρική πίεση και σε θερμοκρασία $T=300K$ το ιξώδες του He είναι $\mu_{He}=19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot sec$, και η πυκνότητα $\rho_{He}=0.1786gr/dm^3$. Αντίστοιχα για το Xe στις ίδιες συνθήκες είναι $\mu_{Xe}=23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot sec$ και $\rho_{Xe}=5.851gr/dm^3$ [35].

Η βαθμίδα πίεσης στον αγωγό υπολογίζεται ως εξής

$$-\frac{dp}{dx} \approx -\frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{101325 - 100}{1} = -101225 Pa/m$$

Η κατανομή της ταχύτητας του He σε τυχαία θέση x του αγωγού και μακριά από την είσοδο για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ (ολική λύση) υπολογίζεται από τη σχέση (3.1.11) ως εξής

$$u_{He} = \frac{H^2}{2\mu_{He}} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p Kn \right) \frac{dp}{dx} = \frac{(10^{-2}m)^2}{2(19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{(10^{-2}m)^2} + (1.018) \cdot 0 \right) (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{He} = 254078.8152(0.25 - 10000y^2)$$

$$u_{He} = \frac{H^2}{2\mu_{He}} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p Kn \right) \frac{dp}{dx} = \frac{(10^{-2}m)^2}{2(19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{(10^{-2}m)^2} + (1.018) \cdot (0.1) \right) (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{He} = 254078.8152(0.3518 - 10000y^2)$$

Η κατανομή της ταχύτητας του Xe σε τυχαία θέση x του αγωγού και μακριά από την είσοδο για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ (ολική λύση) υπολογίζεται από τη σχέση (3.1.11) ως εξής

$$u_{Xe} = \frac{H^2}{2\mu_{Xe}} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p Kn \right) \frac{dp}{dx} = \frac{(10^{-2} m)^2}{2(23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{(10^{-2} m)^2} + (1.018) \cdot 0 \right) (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{Xe} = 217407.6460(0.25 - 10000y^2)$$

$$u_{Xe} = \frac{H^2}{2\mu_{Xe}} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} + \sigma_p Kn \right) \frac{dp}{dx} = \frac{(10^{-2} m)^2}{2(23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{(10^{-2} m)^2} + (1.018) \cdot (0.1) \right) (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{Xe} = 217407.6460(0.3518 - 10000y^2)$$

Στα Σχήματα 3.5 και 3.6 παρουσιάζεται γραφικά η κατανομή των ταχυτήτων για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) για το He και για το Xe αντίστοιχα.

Η μαζική παροχή ανά μοναδιαίο μήκος της z -διεύθυνσης για το Ήλιο υπολογίζεται από τη σχέση (3.1.15) και για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ δίνει αντίστοιχα

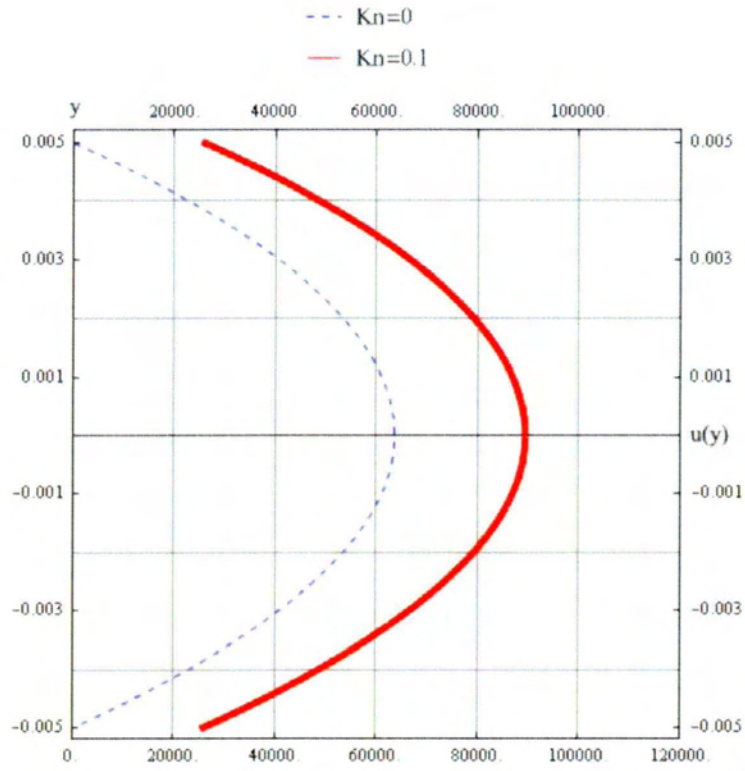
$$\dot{m}_{He} = \frac{\rho_{He} H^3}{12\mu_{He}} \frac{dp}{dx} = \frac{(0.1786 kg/m^3) \cdot (10^{-2} m)^3}{12 \cdot (19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225 Pa) = 75.63 kg / s$$

$$\dot{m}_{He} = \frac{\rho_{He} H^3}{12\mu_{He}} (1 + 6\sigma_p Kn) \frac{dp}{dx} = \frac{(0.1786 kg/m^3) \cdot (10^{-2} m)^3}{12 \cdot (19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (1 + 6(1.018)(0.1)) (101225 Pa) = 121.82 kg / s$$

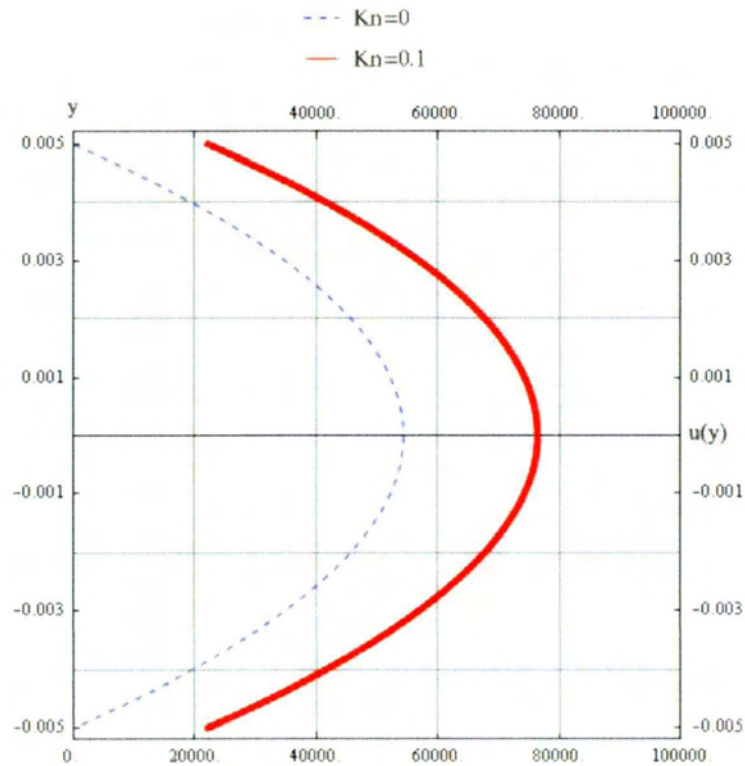
Η μαζική παροχή ανά μοναδιαίο μήκος της z -διεύθυνσης για το Ξένον υπολογίζεται από τη σχέση (3.1.15) και για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ δίνει αντίστοιχα

$$\dot{m}_{Xe} = \frac{\rho_{Xe} H^3}{12\mu_{Xe}} \frac{dp}{dx} = \frac{(5.851 kg/m^3) \cdot (10^{-2})^3}{12 \cdot (23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225) = 2120.09 kg / s$$

$$\dot{m}_{Xe} = \frac{\rho_{Xe} H^3}{12\mu_{Xe}} (1 + 6\sigma_p Kn) \frac{dp}{dx} = \frac{(5.851 kg/m^3) \cdot (10^{-2})^3}{12 \cdot (23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (1 + 6(1.018)(0.1)) (101225 Pa) = 3415.04 kg / s$$



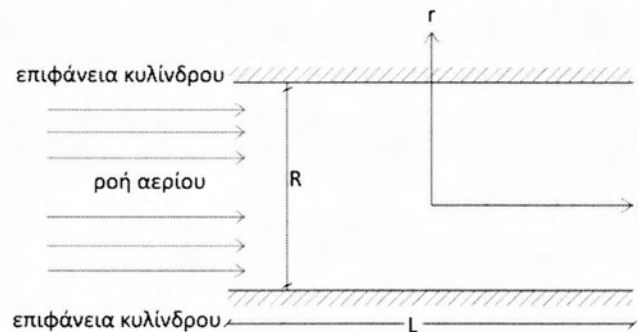
Σχήμα 3.5: Κατανομή ταχύτητας ροής διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (plane Poiseuille) με ρευστό λειτουργίας το He.



Σχήμα 3.6: Κατανομή ταχύτητας ροής διαμέσου δυο παράλληλων πλακών (plane Poiseuille) με ρευστό λειτουργίας το Xe.

3.2 Ροή διαμέσου αγωγού κυκλικής διατομής (cylindrical Poiseuille)

Το ρευστό ρέει διαμέσου αγωγού κυκλικής διατομής απείρου μήκους ακτίνας R , λόγω βαθμίδας πίεσης dp/dx στη διεύθυνση z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Η ροή όπως και προηγουμένως θεωρείται μόνιμη, ασυμπύεστη, ισόθερμη και πλήρως ανεπτυγμένη στην z -διεύθυνση. Η υπόθεση της πλήρως ανεπτυγμένης ροής συνεπάγεται ότι η πίεση (ή η πυκνότητα) μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος της ροής, ενώ παραμένει σταθερή στη διεύθυνση r , δηλαδή $p = p(z)$.



Σχήμα 3.7: Ροή διαμέσου κυλινδρικού αγωγού (cylindrical Poiseuille).

Στη συγκεκριμένη ροή με βάση τις παραπάνω υποθέσεις οι συνιστώσες της μακροσκοπικής ταχύτητας στις διευθύνσεις θ και r είναι μηδενικές και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή $\mathbf{u} = (0, 0, u_z)$ όπου $u_z = u_z(r, \theta, z)$. Επίσης, λόγω συμμετρίας ισχύει ότι $\partial u_z / \partial \theta = 0$ συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση y και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Η πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής στη z -διεύθυνση θεωρώντας ότι $u_y = u_z = 0$ και $p = p(x)$. Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.2) και (1.9) του Κεφαλαίου 1 και αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή Poiseuille σε κυλινδρικό αγωγό είναι

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.2.1)$$

και

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.2.2)$$

Σημειώνεται ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η διαφορά πίεσης θεωρείται αρνητική, οπότε στην εξίσωση (3.2.2) συμπληρώθηκε ένα (-) στον όρο πίεσης. Για λόγους συντομίας στους συμβολισμούς δεν χρησιμοποιούμε τον δείκτη και γράφουμε $u_z = u$. Η πρώτη εξίσωση σε συνδυασμό

με την $\partial u_z / \partial \theta = 0$, οδηγεί στο συμπέρασμα $u = u(r)$ δηλαδή ότι η συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση r και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις. Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει ήδη χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση της δεύτερης εξίσωσης από την οποία θα προκύψει έπειτα από δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις ως προς r η κατανομή της άγνωστης ταχύτητας u .

Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν την εξίσωση (3.2.2) όταν βρισκόμαστε εκτός τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας είναι οι οριακές συνθήκες ολίσθησης

$$u(R) = -\sigma_p \lambda \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} \quad (3.2.3)$$

όπου $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή.

Όπως και προηγουμένως είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u_h + u_s \quad (3.2.4)$$

,όπου u_h είναι η υδροδυναμική λύση και u_s η λύση ολίσθησης, δηλαδή η διόρθωση που εισάγεται στην υδροδυναμική λύση λόγω της ολίσθησης στα τοιχώματα.

Αντικαθιστώντας τη εξίσωση (3.2.4) στην εξίσωση (3.2.2) και στην οριακή συνθήκη (3.2.3) διατυπώνονται τα εξής δύο προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_h}{dr} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (3.2.5)$$

$$u_h(R) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\left. \frac{du_h}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.2.7)$$

Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς r παίρνουμε

$$r \frac{du_h}{dr} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{2} + c_1$$

Κάνοντας χρήση της δεύτερης οριακής συνθήκης

$$\left. \frac{du_h}{dr} \right|_{r=0} = 0 \text{ και επομένως } c_1 = 0$$

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά ως προς r είναι

$$u_h(r) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4} + c_2$$

Κάνοντας χρήση της πρώτης οριακής συνθήκης και $r = R$

$$u_h(R) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4}$$

Επομένως η αναλυτική λύση του υδροδυναμικού προβλήματος είναι

$$u_h(y) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (3.2.8)$$

Πρόβλημα 2:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_s}{dr} \right) = 0 \quad (3.2.9)$$

$$u_s(R) = -\sigma_p \lambda \left. \frac{du_h}{dr} \right|_{r=R} \approx \sigma_p \lambda \frac{dp}{dz} \frac{R}{2\mu} \quad (3.2.10)$$

$$\left. \frac{du_s}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.2.11)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς r η (3.2.8) γίνεται

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_s}{dr} \right) dr = 0 \Rightarrow r \frac{du_s}{dr} = c_3$$

Κάνοντας χρήση της δεύτερης οριακής συνθήκης και για $r = 0$ παίρνουμε $c_3 = 0$. Όποτε η εξίσωση απλοποιείται στην

$$\frac{du_s}{dr} = 0$$

Ολοκληρώνοντας ως προς r για δεύτερη φορά παίρνουμε

$$u_s = c_4$$

Κάνοντας χρήση της δεύτερης οριακής συνθήκης και για $r = R$ παίρνουμε

$$u_s(R) = c_4 \Rightarrow c_4 = \sigma_p \lambda \frac{dp}{dz} \frac{R}{2\mu}$$

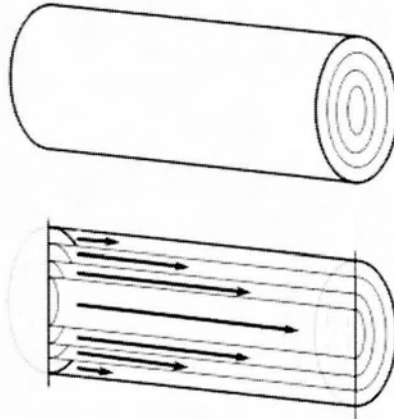
Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος ολίσθησης είναι

$$u_s(r) = \sigma_p \lambda \frac{dp}{dz} \frac{R}{2\mu} \quad (3.2.12)$$

Με βάση την αρχή της επαλληλίας η ολική λύση είναι

$$u = \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R} \right) \frac{dp}{dz} \quad (3.2.13)$$

Οι δύο πρώτοι όροι εντός της παρένθεσης αντιστοιχούν στη γνωστή λύση με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, ενώ ο τρίτος όρος είναι η διόρθωση λόγω ολίσθησης. Σημειώνεται ότι η ποσότητα λ/R είναι ο γνωστός αδιάστατος αριθμός Knudsen και χαρακτηρίζει τον βαθμό αραιοποίησης της ροής. Βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός Knudsen μικραίνει η συμβολή του όρου ολίσθησης στο συνολικό αποτέλεσμα μειώνεται και τελικά μηδενίζεται καθώς ο αριθμός Knudsen τείνει στο μηδέν. Μια σχηματική αναπαράσταση της κατανομής της ταχύτητας δίνεται στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8 Ποιοτική μεταβολή της ταχύτητας διαμέσου ενός κυλινδρικού αγωγού.

Είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε τα αποτελέσματα εισάγοντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$r' = \frac{r}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad u' = \frac{u}{u_0 X_p}$$

όπου $X_p = \frac{R}{p_0} \frac{dp}{dz'} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dz}$ και $u_0 = \sqrt{2 R l}$ η πιο πιθανή μοριακή ταχύτητα, και το r παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Τότε τα παραπάνω αποτελέσματα γράφονται σε αδιάστατη μορφή ως εξής

$$u'_H(r') = \frac{1}{4} \frac{p_0 R}{u_0 \mu} (1 - r'^2) = \frac{1}{4} \delta (1 - r'^2) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn} (1 - r'^2) \approx \frac{1}{4Kn} (1 - r'^2) \quad (3.2.14)$$

$$u'_S(r') = \sigma_p \quad (3.2.15)$$

$$u'(r') = \frac{\delta}{4} (1 - r'^2 + \sigma_p) \quad (3.2.16)$$

Η μαζική παροχή \dot{M} που διέρχεται από την επιφάνεια A μιας τυχαίας διατομής στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση

$$\dot{M} = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx dy$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα για να υπολογιστεί η παροχή μάζας στον κυλινδρικό αγωγό σε μια τυχαία κυκλική διατομή του χρησιμοποιείται πολικό σύστημα συντεταγμένων. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών χρησιμοποιώντας τους γνωστούς μετασχηματισμούς $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ εφαρμόζουμε τη σχέση

$$\iint_{(r)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D)} g(r, \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$\text{όπου } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta r \cos \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta = r$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω η ροή μάζας υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \rho u_z(r) r dr d\theta = 2\pi \rho \int_{r=0}^{r=R} u_z(r) r dr \\ &= 2\pi \rho \int_{r=0}^{r=R} \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R} \right) \frac{dp}{dz} r dr \\ &= \frac{\pi \rho R^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2} + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R} r \right) dr \\ &= \frac{\pi \rho R^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} + \sigma_p \frac{\lambda}{R} r^2 \right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{\pi \rho R^2}{\mu} \frac{dp}{dz} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} + \sigma_p \lambda R \right] = \frac{\pi \rho R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz} \left[1 + 4\sigma_p \frac{\lambda}{R} \right] \end{aligned}$$

Επομένως η παροχή μάζας \dot{M} κατά μήκος ενός κυλινδρικού αγωγού στη z -διεύθυνση δίνεται

$$\dot{M} = \frac{\pi \rho R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz} \left[1 + 4\sigma_p Kn \right] \quad (3.2.17)$$

Σημειώνεται ότι δεύτερος όρος οφείλεται στη διόρθωση ολίσθησης. Συμπερασματικά λοιπόν το φαινόμενο ολίσθησης αυξάνει τη μαζική παροχή διαμέσου δυο παράλληλων ακίνητων πλακών και κατά μήκος ενός κυλινδρικού αγωγού.

Προκειμένου να γίνει καλύτερα αντιληπτή η συμβολή του όρου ολίσθησης είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε την μαζική παροχή εισάγοντας τα αδιάστατα μεγέθη

$$r' = \frac{r}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad \rho = \frac{2P_0}{u_0^2}, \quad u' = \frac{u}{u_0 X_p}$$

,όπου $X_p = \frac{R}{p_0} \frac{dp}{dz'} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dz}$ και $u_0 = \sqrt{2Rt}$ η πιο πιθανή ταχύτητα.

Η παροχή μάζας υπολογίζεται ως γνωστόν από τη σχέση

$$\dot{M} = \iint_A \rho u dA = \int_0^R \rho u 2\pi r dr$$

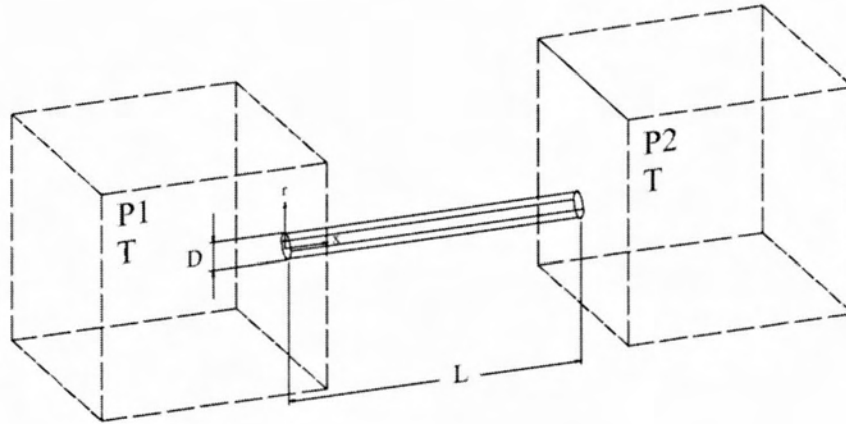
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αδιαστατοποίησης και αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_0^1 \left(\frac{2P_0}{u_0^2} \right) (u' u_0 X_p) 2\pi (r'R) d(r'R) = \frac{R^2 P_0}{u_0} X_p 4 \int_0^1 u' r' dr' \\ \Rightarrow \dot{M} &= \frac{R^2 P_0}{u_0} X_p G_{Tube} \end{aligned}$$

Ο όρος G_{Tube} είναι η αδιάστατη μαζική παροχή και για ροή διαμέσου κυλινδρικού αγωγού ισούται με

$$\begin{aligned} G_{pl} &= 4 \int_0^1 u' r' dr' = 4 \int_0^1 \left[\frac{1}{4Kn} (1 - r'^2 + \sigma_p Kn) r' dr' \right] = \frac{1}{Kn} \int_0^1 (1 - r'^2 + \sigma_p Kn) r' dr' \\ \Rightarrow G_{pl} &= \frac{1}{Kn} \int_0^1 (r' - r'^3 + \sigma_p Kn r') dr' = \frac{1}{Kn} \left[\frac{r'^2}{2} - \frac{r'^4}{4} + \sigma_p Kn \frac{r'^2}{2} \right]_0^1 \\ \Rightarrow G_{pl} &= \frac{1}{4Kn} + \sigma_p \end{aligned}$$

Το πρόβλημα ροής διαμέσου ενός μικροαγωγού κυκλικής διατομής απείρου μήκους μπορεί να προσομοιωθεί με έναν αγωγό κυκλική διατομής, η ακτίνα του οποίου θα είναι πολύ μικρότερη του μήκους του. Έστω ένας αγωγός μήκους L , και ακτίνας R , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύει $R \ll L$. Ορίζεται κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x παράλληλο στη ροή και αρχή των αξόνων το κέντρο της διατομής.



Σχήμα 3.9: Πραγματική διάταξη ροής διαμέσου κυλινδρικού αγωγού (cylindrical Poiseuille).

Έστω $L=1m$ και $D=1cm$ οι διαστάσεις του αγωγού, $P_1=1atm$ πίεση στο δοχείο 1 και $P_2=100Pa$ η πίεση στο δοχείο 2. Ως ρευστό λειτουργίας επιλέγεται πρώτα το Ήλιο (He) και έπειτα το Ξέον (Xe). Σε ατμοσφαιρική πίεση και σε θερμοκρασία $T=300K$ το ιξώδες του He είναι $\mu_{He}=19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot sec$, και η πυκνότητα $\rho_{He}=0.1786gr/dm^3$. Αντίστοιχα για το Xe στις ίδιες συνθήκες είναι $\mu_{Xe}=23.28 \cdot 10^{-6} Pa \cdot sec$ και $\rho_{Xe}=5.851gr/dm^3$ [35]. Περισσότερες πληροφορίες για τα δύο αυτά ευγενή αέρια ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο Παράρτημα Γ.

Η βαθμίδα πίεσης στον αγωγό υπολογίζεται ως εξής

$$-\frac{dp}{dx} \approx -\frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{101325 - 100}{1} Pa/m = -101225 Pa/m$$

Η κατανομή της ταχύτητας του He σε τυχαία θέση x του αγωγού και μακριά από την είσοδο, για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ (ολική λύση) υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.13) ως εξής

$$u_{He} = \frac{R^2}{4\mu_{He}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p Kn\right) \frac{dp}{dz} = \frac{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2}{4(19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)} \left[1 - \frac{r^2}{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2} + 2(1.018)(0)\right] (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{He} = 31759.851(1 - 40000y^2)$$

$$u_{He} = \frac{R^2}{4\mu_{He}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p Kn\right) \frac{dp}{dz} = \frac{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2}{4(19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)} \left[1 - \frac{r^2}{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2} + 2(1.018)(0.1)\right] (101225 Pa/m)$$

$$31759.851(1.2036 - 40000y^2)$$

Η κατανομή της ταχύτητας του Xe σε τυχαία θέση x του αγωγού και μακριά από την είσοδο για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ (ολική λύση) υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.13) ως εξής

$$u_{Xe} = \frac{R^2}{4\mu_{He}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p Kn\right) \frac{dp}{dz} = \frac{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2}{4(23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left[1 - \frac{r^2}{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2} + 2(1.018)(0)\right] (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{Xe} = 27176(1 - 40000y^2)$$

$$u_{Xe} = \frac{R^2}{4\mu_{He}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 2\sigma_p Kn\right) \frac{dp}{dz} = \frac{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2}{4(23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} \left[1 - \frac{r^2}{(0.5 \cdot 10^{-2} m)^2} + 2(1.018)(0.1)\right] (101225 Pa/m)$$

$$\Rightarrow u_{Xe} = 27176(1.2036 - 40000y^2)$$

Στα Σχήματα 3.9 και 3.10 παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κατανομής της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) για το He και για το Xe αντίστοιχα.

Η μαζική παροχή για το Ήλιο υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.17), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ δίνει αντίστοιχα

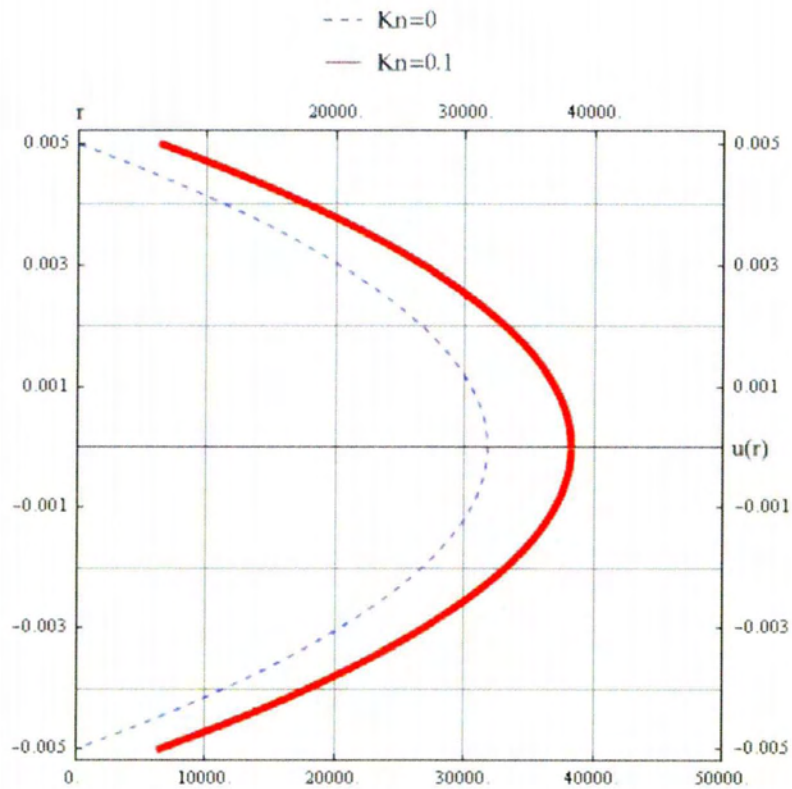
$$\dot{M}_{He} = \frac{\pi\rho_{He}R^4}{8\mu_{He}} \frac{dp}{dz} [1 + 4\sigma_p Kn] = \frac{3.14(0.1786 kg/m^3) \cdot (0.5 \cdot 10^{-2} m)^4}{8 \cdot (19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225 Pa) [1 + 4 \cdot 1.018 \cdot 0] = 0.2226 kg/s$$

$$\dot{M}_{He} = \frac{\pi\rho_{He}R^4}{8\mu_{He}} \frac{dp}{dz} [1 + 4\sigma_p Kn] = \frac{3.14(0.1786 kg/m^3) \cdot (0.5 \cdot 10^{-2} m)^4}{8 \cdot (19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225 Pa) [1 + 4 \cdot 1.018 \cdot 0.1] = 0.3133 kg/s$$

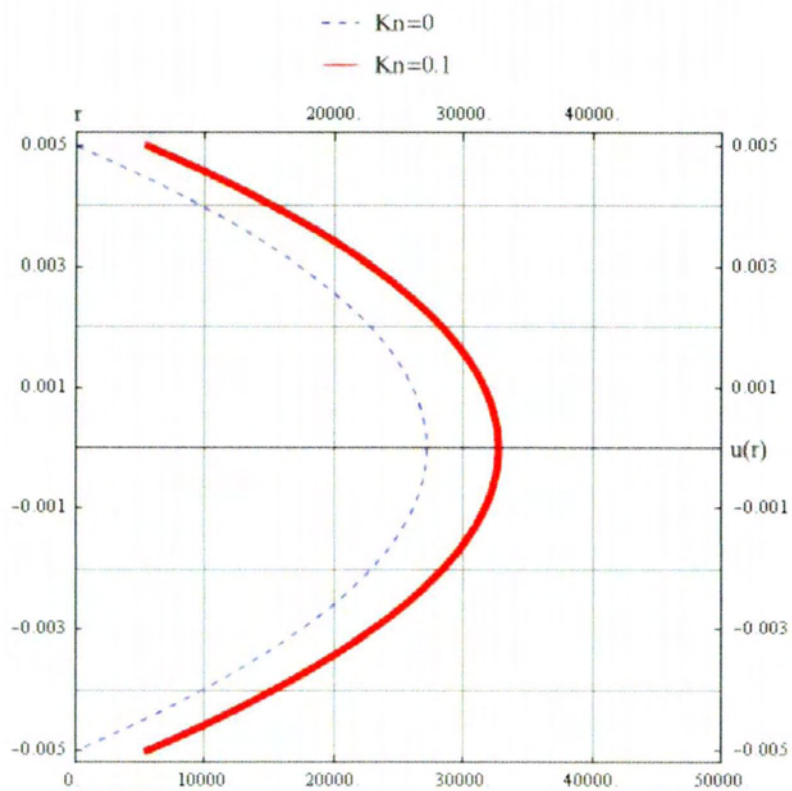
Η μαζική παροχή για το Ξέnon υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.17), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και στη συνέχεια για $Kn=0.1$ (ολική λύση) δίνει αντίστοιχα

$$\dot{M}_{Xe} = \frac{\pi\rho_{Xe}R^4}{8\mu_{Xe}} \frac{dp}{dz} [1 + 4\sigma_p Kn] = \frac{3.14(5.851 kg/m^3) \cdot (0.5 \cdot 10^{-2} m)^4}{8 \cdot (23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225 Pa) [1 + 4 \cdot 1.018 \cdot 0] = 6.2410 kg/s$$

$$\dot{M}_{Xe} = \frac{\pi\rho_{Xe}R^4}{8\mu_{Xe}} \frac{dp}{dz} [1 + 4\sigma_p Kn] = \frac{3.14(5.851 kg/m^3) \cdot (0.5 \cdot 10^{-2} m)^4}{8 \cdot (23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot s)} (101225 Pa) [1 + 4 \cdot 1.018 \cdot 0.1] = 8.7823 kg/s$$



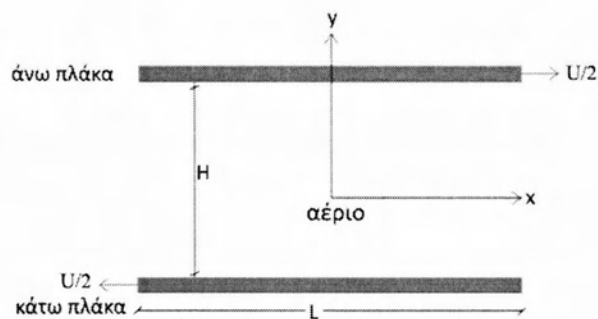
Σχήμα 3.10: Κατανομή ταχύτητας ροής διαμέσου κυλινδρικού αγωγού (cylindrical Poiseuille) με ρευστό λειτουργίας το He.



Σχήμα 3.11: Κατανομή ταχύτητας ροής διαμέσου κυλινδρικού αγωγού (cylindrical Poiseuille) με ρευστό λειτουργίας το Xe.

3.3 Ροή ανάμεσα σε δυο κινούμενες πλάκες (plane Couette)

Έστω δυο παράλληλες πλάκες απείρου μήκους που απέχουν μεταξύ τους απόσταση H και βρίσκονται στις θέσεις $y = \pm H/2$. Η πάνω πλάκα κινείται στην x -διεύθυνση με ταχύτητα $U/2$, ενώ η κάτω πλάκα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα έτσι ώστε η σχετική ταχύτητα των πλακών να είναι ίση με U , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12. Η κίνηση αυτή δημιουργεί ένα πεδίο ροής διαμέσου των δυο παράλληλων πλακών. Η ροή θεωρείται μόνιμη, ασυμπίεστη, ισόθερμη και πλήρως ανεπτυγμένη στην x -διεύθυνση κατά μήκος των πλακών. Σημειώνεται ότι στο εξεταζόμενο πρόβλημα δεν λαμβάνεται υπόψη διαφορά πίεσης.



Σχήμα 3.12: Ροή διαμέσου δύο παράλληλων κινούμενων πλακών (plane Couette).

Στη συγκεκριμένη ροή με βάση τις παραπάνω υποθέσεις οι συνιστώσες της μακροσκοπικής ταχύτητας στις διευθύνσεις y και z είναι μηδενικές και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$. Επίσης, αυτή η μη μηδενική συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση y και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Η πλήρως ανεπτυγμένη ροή ανάμεσα σε πλάκες περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής στη x κατεύθυνση θεωρώντας ότι $u_y = u_z = 0$, $u = u(y)$, $\partial u_x / \partial x = 0$ και $p = \text{σταθερό}$. Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.1) και (1.4) των Πινάκων 1-1 και 1-2 του Κεφαλαίου 1 και αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή Couette ανάμεσα σε πλάκες είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3.1)$$

και

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (3.3.2)$$

Για λόγους συντομίας στους συμβολισμούς δεν χρησιμοποιούμε τον δείκτη και γράφουμε $u_x(y) = u(y)$. Η πρώτη εξίσωση οδηγεί στο συμπέρασμα $u = u(y)$ που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στη διατύπωση της δεύτερης εξίσωσης. Η δεύτερη είναι περισσότερο χρήσιμη αφού εάν ολοκληρωθεί δύο φορές ως προς y θα προκύψει η γενική λύση της άγνωστης ταχύτητας u .

Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν την εξίσωση (3.3.2) όταν βρισκόμαστε εκτός τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας είναι οι οριακές συνθήκες ολίσθησης

$$u\left(\pm \frac{H}{2}\right) = \pm \left(\frac{U}{2} - \sigma_p \lambda \frac{du_y}{dx} \right) \quad (3.3.3)$$

όπου σ_p είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή. Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία διατυπώνουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u_h + u_s \quad (3.3.4)$$

,όπου u_h είναι η υδροδυναμική λύση και u_s η λύση ολίσθησης.

Αντικαθιστώντας τη εξίσωση (3.3.4) στην εξίσωση (3.3.2) και στην οριακή συνθήκη (3.3.3) διατυπώνονται τα εξής δύο προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\frac{d^2 u_h}{dy^2} = 0 \quad (3.3.5)$$

$$u\left(\pm \frac{H}{2}\right) = \pm \frac{U}{2} \quad (3.3.6)$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές ως προς y παίρνουμε

$$u_h = c_1 y + c_2$$

Κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών έχουμε

$$u_h\left(\frac{H}{2}\right) = c_1 \frac{H}{2} + c_2 \Rightarrow \frac{U}{2} = c_1 \frac{H}{2} + c_2$$

$$u_h\left(-\frac{H}{2}\right) = -c_1 \frac{H}{2} + c_2 \Rightarrow -\frac{U}{2} = -c_1 \frac{H}{2} + c_2$$

Οπότε $c_1 = \frac{U}{H}$ και $c_2 = 0$

Επομένως η αναλυτική λύση του υδροδυναμικού προβλήματος είναι

$$u_h(y) = \frac{U}{H} y \quad (3.3.7)$$

Πρόβλημα 2:

$$\frac{d^2 u_s}{dy^2} = 0 \quad (3.3.8)$$

$$u_s\left(\pm \frac{H}{2}\right) = \mp \sigma_p \lambda \left. \frac{du_h}{dy} \right|_{y=\pm \frac{a}{2}} = \mp \sigma_p \lambda c_1 = \mp \sigma_p \lambda \frac{U}{H} \quad (3.3.9)$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές ως προς y παίρνουμε

$$u_s(y) = c_3 y + c_4$$

Από τις οριακές συνθήκες ολίσθησης και για $y = \pm H/2$

$$u_s\left(\frac{H}{2}\right) = c_3 \frac{H}{2} + c_4 \Rightarrow -\sigma_p \lambda \frac{U}{H} = c_3 \frac{H}{2} + c_4$$

$$u_s\left(-\frac{H}{2}\right) = -c_3 \frac{H}{2} + c_4 \Rightarrow \sigma_p \lambda \frac{U}{H} = -c_3 \frac{H}{2} + c_4$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτουν

$$c_4 = 0 \quad \text{και} \quad c_3 = -2\sigma_p \lambda \frac{U}{H^2}$$

Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος ολίσθησης είναι:

$$u_s(y) = -2\sigma_p \lambda \frac{U}{H^2} y \quad (3.3.10)$$

Όμως λόγω της αρχής της επαλληλίας η συνολική λύση είναι

$$u = u_h + u_s \Rightarrow u = \frac{U}{H} y - 2\sigma_p \lambda \frac{U}{H^2} y \Rightarrow u = \frac{U}{H} y \left(1 - 2\sigma_p \frac{\lambda}{H}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$ και δεδομένου ότι ο αριθμός $Kn = \lambda/H$

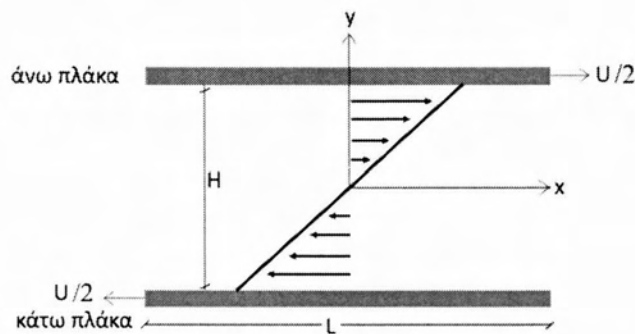
είναι μικρός εφόσον βρισκόμαστε στην υδροδυναμική περιοχή, αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$1 - 2\sigma_p \frac{\lambda}{H} = 1 - 2\sigma_p \frac{\lambda}{H} + \left(2\sigma_p \frac{\lambda}{H}\right)^2 - \dots = \frac{1}{1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{H}}$$

Άρα η αναλυτική λύση του συνολικού προβλήματος γίνεται

$$u(y) = U \frac{y}{H} \left(1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{H} \right)^{-1} \quad (3.3.11)$$

Σημειώνεται ότι ο λόγος λ / H ορίζει τον αριθμό Knudsen. Βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός Knudsen μικραίνει η συμβολή του όρου ολίσθησης στο συνολικό αποτέλεσμα μειώνεται και τελικά μηδενίζεται καθώς ο αριθμός Knudsen τείνει στο μηδέν. Μια σχηματική αναπαράσταση της κατανομής της ταχύτητας της ροής Couette δίνεται στο Σχήμα 3.13 .



Σχήμα 3.13: Ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας ροής διαμέσου δυο παράλληλων κινούμενων πλακών (plane Couette).

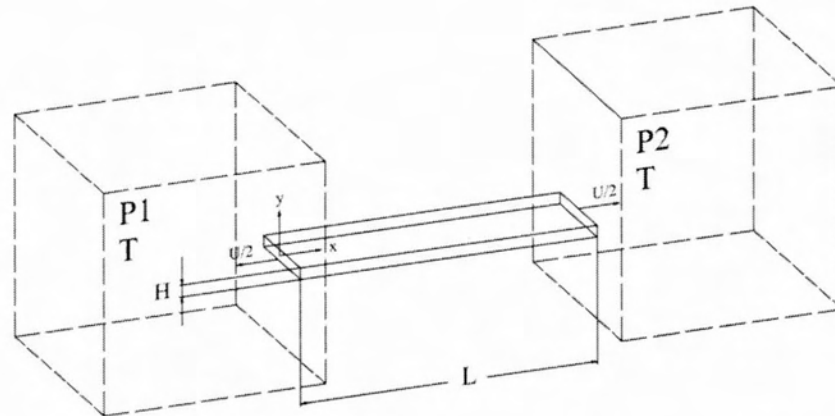
Η ροπή στρέψης υπολογίζεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής

$$P_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy} = -\mu \frac{U}{H} \left(1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{H} \right) = -\mu \frac{U}{H} (1 + 2\sigma_p Kn) \quad (3.3.12)$$

Σημειώνεται ότι ο δεύτερος όρος στην παραπάνω σχέση είναι η διόρθωση ολίσθησης. Είναι φανερό ότι η τιμή της ροπής στρέψης είναι μειώνεται όταν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ολίσθησης της ταχύτητας.

Το πρόβλημα ροής Couette ανάμεσα σε δύο επίπεδες πλάκες απείρου μήκους μπορεί να προσομοιωθεί ως εξής . Έστω δυο πλάκες μήκους L , πλάτους B και ύψους H , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14 Θεωρούμε ότι $H \ll B$ και $H \ll L$ και ότι οι δυο πλάκες κινούνται αντίθετα με σχετική ταχύτητα U . Έστω $L=1m$ το μήκος των πλακών, $H=1cm$ η μεταξύ τους απόσταση και $U=10^{-3} m/s$ η σχετική τους κίνηση.

Ως ρευστό λειτουργίας επιλέγεται πρώτα το Ήλιο (He) και έπειτα το Ξέον (Xe). Σε ατμοσφαιρική πίεση και σε θερμοκρασία $T=300K$ το ιξώδες του He είναι $\mu_{He} = 19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{sec}$ του Xe στις ίδιες συνθήκες είναι $\mu_{Xe} = 23.28 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{sec}$ [35]. Περισσότερες πληροφορίες για τα δύο αυτά ευγενή αέρια ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο Παράρτημα Γ.



Σχήμα 3.14: Πραγματική διάταξη ροής διαμέσου δυο παράλληλων κινούμενων πλακών (plane Couette).

Η κατανομή της ταχύτητας του He και του Xe είναι ισοδύναμα καθώς η συνάρτηση της ταχύτητας είναι ανεξάρτητη από της ιδιότητες του ρευστού λειτουργίας. Οπότε σε τυχαία θέση x του αγωγού και μακριά από την είσοδο η κατανομή της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και έπειτα για $Kn=0.1$ (ολική λύση) υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.11) ως εξής

$$u = u_{He} = u_{Xe} = U \frac{y}{H} (1 + 2\sigma_p Kn)^{-1} = 10^{-3} \text{ m/s} \frac{y}{10^{-2} \text{ m}} (1 + (1.018)(0))^{-1} = 0.1y$$

$$u = u_{He} = u_{Xe} = U \frac{y}{H} (1 + 2\sigma_p Kn)^{-1} = 10^{-3} \text{ m/s} \frac{y}{10^{-2} \text{ m}} (1 + (1.018)(0.1))^{-1} = 0.0907y$$

Στο Σχήμα 3.15 στο τέλος της υποενότητας δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κατανομής της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) όπως υπολογίστηκαν παραπάνω.

Η διατμητική τάση για το He υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.12) και για $Kn=0$, $Kn=0.1$ δίνει

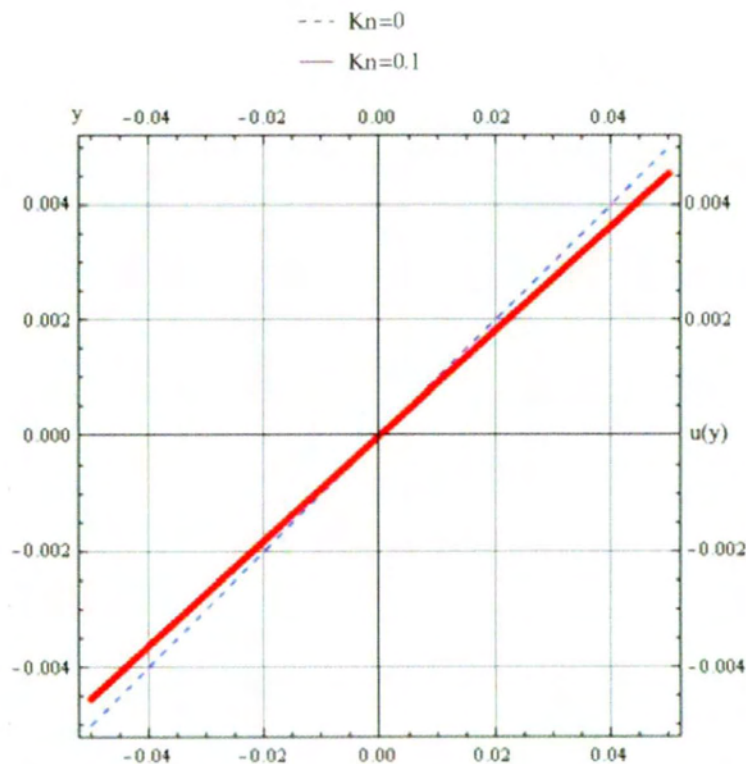
$$P_{yx(He)} = -\mu_{He} \frac{U}{H} (1 + 2\sigma_p Kn) = -\left(19.92 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}\right) \frac{(10^{-3} \text{ m/s})}{(10^{-2} \text{ m})} (1 + 2(1.018)(0)) = -1.992 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

$$P_{yx(He)} = -\mu_{He} \frac{U}{H} (1 + 2\sigma_p Kn) = -\left(19.92 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}\right) \frac{(10^{-3} \text{ m/s})}{(10^{-2} \text{ m})} (1 + 2(1.018)(0.1)) = -2.39757 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

Η διατμητική τάση για το Xe υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.12) και για $Kn=0$, $Kn=0.1$ δίνει

$$P_{yx(Xe)} = -\mu_{Xe} \frac{U}{H} (1 + 2\sigma_p Kn) = -\left(23.28 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}\right) \frac{(10^{-3} \text{ m/s})}{(10^{-2} \text{ m})} (1 + 2(1.018)(0)) = -2.328 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

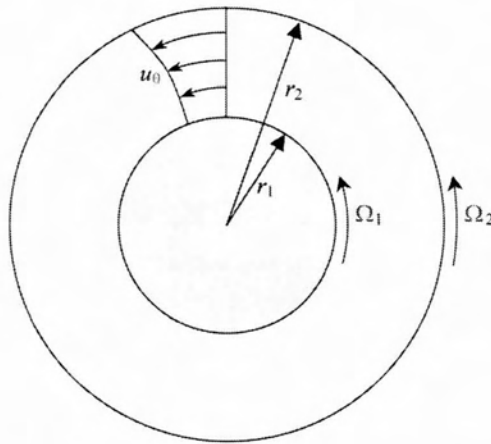
$$P_{yx(Xe)} = -\mu_{Xe} \frac{U}{H} (1 + 2\sigma_p Kn) = -\left(23.28 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}\right) \frac{(10^{-3} \text{ m/s})}{(10^{-2} \text{ m})} (1 + 2(1.018)(0.1)) = -2.80198 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$



Σχήμα 3.15: Κατανομή ταχύτητας ροής διαμέσου δυο παράλληλων κινούμενων πλακών (plane Couette).

3.4 Ροή διαμέσου κινούμενων αγωγών κυκλικής διατομής (cylindrical Couette)

Έστω δυο ομοαξονικοί κυλινδρικοί αγωγοί με ακτίνες $r_1 < r_2$ όπου ανάμεσα τους βρίσκεται ένα αέριο. Ο εσωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω_1 και ο εξωτερικός περιστρέφεται ομόρροπα με γωνιακή ταχύτητα Ω_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16. Η κίνηση αυτή δημιουργεί ένα πεδίο ροής διαμέσου των δυο αγωγών. Υποθέτουμε ότι η επιφανειακή ταχύτητα του εσωτερικού κυλίνδρου, για παράδειγμα η ποσότητα $\Omega_1 r_1$ είναι μικρή σχέση με την πιο πιθανή μοριακή ταχύτητα u_0 . Ως χαρακτηριστικό μήκος για τον υπολογισμό του αριθμού Knudsen λαμβάνεται η ακτίνα του εσωτερικού κυλίνδρου r_1 .



Σχήμα 3.16: Ροή Couette διαμέσου δύο κυλινδρικών αγωγών.

Για δισδιάστατη αξονοσυμμετρική ροή συνεπάγεται ότι $\partial u_\theta / \partial \theta = 0$ και $u_z = 0$. Η εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση (1.2) του Πίνακα 1-1. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω δίνει $\partial u_r / \partial r = 0$. Επειδή οι ταχύτητες στα τοιχώματα έχουν μόνο εφαπτομενική συνιστώσα u_θ ισχύει για το τοίχωμα ότι $u_r = 0$. Σε συνδυασμό με την $\partial u_r / \partial r = 0$ παίρνουμε ότι $u_r = 0$ για κάθε $r_1 < r < r_2$. Οπότε η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή στη διεύθυνση θ , δηλαδή $\mathbf{u} = (0, u_\theta, 0)$ όπου $u_\theta = u_\theta(r)$. Οι εξισώσεις N-S στις διευθύνσεις r και θ αντίστοιχα με βάση τα παραπάνω δίνουν

$$p(r) \frac{u^2(r)}{r} = \frac{dp(r)}{dr} \quad (3.4.1)$$

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) = 0 \quad (3.4.2)$$

όπου για απλούστευση αντικαταστήθηκε $u = u_\theta$.

Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν τις εξισώσεις N-S έχουν ως εξής

$$\begin{aligned} u(r_1) &= \left(\Omega_1 r_1 - \sigma_p \lambda \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_1} \right) \\ u(r_2) &= \left(\Omega_2 r_2 - \sigma_p \lambda \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_2} \right) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

όπου $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2 και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή. Ο πρώτος όρος αφορά τις οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης και ο δεύτερος αυτές τις ολίσθησης.

Όπως και προηγουμένως είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u_h + u_s \quad (3.4.4)$$

όπου u_h είναι η υδροδυναμική λύση και u_s η λύση ολίσθησης, δηλαδή η διόρθωση που εισάγεται στην υδροδυναμική λύση λόγω της ολίσθησης στα τοιχώματα.

Αντικαθιστώντας τη εξίσωση (3.4.4) στην εξίσωση (3.4.2) και στις οριακές συνθήκες (3.4.3) διατυπώνονται τα εξής δύο προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\frac{d^2 u_h(r)}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u_h}{r} \right) = 0 \quad (3.4.5)$$

$$u_h(r_1) = (\Omega_1 r_1) \quad (3.4.6)$$

$$u_h(r_2) = (\Omega_2 r_2) \quad (3.4.7)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.4.5) δύο φορές ως προς r παίρνουμε

$$u_h(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}$$

Κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών (4.6) και (4.7) προκύπτουν

$$c_1 = \Omega_1 + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \text{ και } c_2 = -\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (\Omega_2 - \Omega_1)$$

Επομένως η αναλυτική λύση του υδροδυναμικού προβλήματος είναι

$$u_h(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[(\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2) r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\Omega_2 - \Omega_1) \right] \quad (3.4.8)$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ο εξωτερικός κυλινδρικός αγωγός παραμένει ακίνητος, δηλαδή $\Omega_2 = 0$ έχουμε

$$u(r) = \frac{\Omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{1}{r_1} + \sigma_p \lambda \right) \left(-r_1 r + \frac{r_1 r_2^2}{r} \right)$$

Πρόβλημα 2:

$$\frac{d^2 u_s(r)}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u_s}{r} \right) = 0 \quad (3.4.9)$$

$$u_s(r_1) = -\sigma_p \lambda \left. \frac{du_h}{dr} \right|_{r=r_1} \approx -\sigma_p \lambda \Omega_1 \quad (3.4.10)$$

$$u_s(r_2) = -\sigma_p \lambda \left. \frac{du_h}{dr} \right|_{r=r_2} \approx -\sigma_p \lambda \Omega_2 \quad (3.4.11)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.4.9) δύο φορές ως προς r παίρνουμε

$$u_h(r) = d_1 r + \frac{d_2}{r}$$

Κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών (4.10) και (4.11) έχουμε αντίστοιχα

$$u_s(r_1) = d_1 r_1 + \frac{d_2}{r_1} \Rightarrow -\sigma_p \lambda \Omega_1 = d_1 r_1 + \frac{d_2}{r_1} \Rightarrow -\sigma_p \lambda \Omega_1 r_1 = d_1 r_1^2 + d_2$$

$$u_s(r_2) = d_1 r_2 + \frac{d_2}{r_2} \Rightarrow -\sigma_p \lambda \Omega_2 = d_1 r_2 + \frac{d_2}{r_2} \Rightarrow -\sigma_p \lambda \Omega_2 r_2 = d_1 r_2^2 + d_2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω προκύπτουν

$$d_1 = \frac{\sigma_p \lambda}{r_1^2 - r_2^2} (\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) \text{ και } d_2 = -\sigma_p \lambda \left[\Omega_1 r_1 + \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} (\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) \right]$$

Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος ολίσθησης είναι

$$u_s(r) = -\frac{\sigma_p \lambda}{r_1^2 - r_2^2} \left[(\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) r - (\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) \frac{r_1^2}{r} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{r} (\Omega_1 r_1) \right] \quad (3.4.12)$$

Με βάση την αρχή της επαλληλίας η ολική λύση είναι

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[(\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2) r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\Omega_2 - \Omega_1) \right] + \frac{\sigma_p \lambda}{r_2^2 - r_1^2} \left[(\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right) - \frac{r_1^2 - r_2^2}{r} (\Omega_1 r_1) \right] \quad (3.4.13)$$

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αδιαστοποιήσουμε τα αποτελέσματα ως εξής

$$u' = \frac{u}{\Omega_1 r_1}, \quad r' = \frac{r}{r_1}$$

Οπότε η συνάρτηση της ταχύτητας γίνεται

$$u' = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{\Omega_1 r_1} \left[(\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2) r' r_1 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r'} (\Omega_2 - \Omega_1) \right] + \sigma_p Kn \frac{1}{\Omega_1} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[(\Omega_2 r_2 - \Omega_1 r_1) \left(r_1 r' - \frac{r_1^2}{r'} \right) - \frac{r_1^2 - r_2^2}{r'} \Omega_1 \right]$$

όπου ως χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος θεωρήθηκε η ακτίνα του εσωτερικού κυλίνδρου r_1 .

Η διατμητική τάση υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{r\phi} = -\mu \frac{d^2 u_\phi}{dr^2}$$

Στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου και από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (εξίσωση Navier-Stokes) παίρνουμε

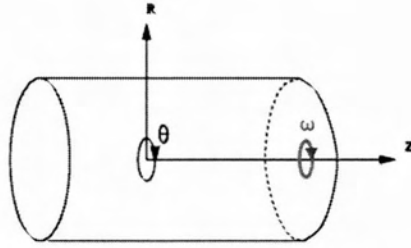
$$P_{r\phi} = -\mu \left(\frac{du}{dr} \Big|_{r=r_1} - \frac{u}{r} \Big|_{r=r_1} \right) = \frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} r_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1) + \frac{\sigma_p \lambda}{r_2^2 - r_1^2} \left(2\Omega_2 r_2 - \Omega_1 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \right)$$

ΡΟΕΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΕΡΑ ΣΩΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό μελετώνται δυο προβλήματα ροών γύρω από στερεά σώματα. Τα προβλήματα ροών αυτού του είδους συναντώνται στη βιβλιογραφία ως εξωτερικές ροές (external flows). Η πρώτη εφαρμογή αφορά τη ροή γύρω από έναν περιστρεφόμενο μικροκύλινδρο και η δεύτερη τη ροή που διέρχεται από μια σταθερή μικροσφαίρα. Και τα δύο προβλήματα παρουσιάζονται διεξοδικά παρακάτω και διατυπώνονται μαθηματικά με χρήση των διαφορικών εξισώσεων συνέχειας και ορμής (εξισώσεις Navier-Stokes) συζευγμένες με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ολίσθησης πρώτης τάξης τύπου Maxwell. Σε κάθε εφαρμογή εξάγεται η κατανομή της ταχύτητας της ροής και απεικονίζεται γραφικά για διάφορες τιμές του αριθμού Knudsen. Υπολογίζονται βασικά μεγέθη ροής όπως η διατμητική τάση, η ροπή στρέψης και η οπισθέλκουσα δύναμη. Έπειτα θεωρώντας πραγματικά (ιξώδη) ρευστά λειτουργίας το Ήλιο (He) και το Ξέον (Xe) γίνεται διαστατοποίηση των αποτελεσμάτων.

4.1 Ροή γύρω από περιστρεφόμενο μικροκύλινδρο

Έστω κύλινδρος μεγάλου μήκους και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του με γωνιακή ταχύτητα ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Το αέριο που βρίσκεται γύρω από τον κύλινδρο εξαναγκάζεται σε περιστροφή με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω . Σε πολικές συντεταγμένες το διάνυσμα θέσης είναι $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ και το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$. Στη συγκεκριμένη ροή η ακτινική και η αξονική συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδενικές και μόνο η πολική συνιστώσα είναι μη μηδενική. Επίσης, η πολική συνιστώσα δεν μεταβάλλεται στην πολική και αξονική κατεύθυνση και εξαρτάται μόνο από την ακτινική κατεύθυνση, δηλαδή $u_\theta = u_\theta(r)$.



Σχήμα 4.1: Ροή γύρω από περιστρεφόμενο μικροκύλινδρο.

Η εξίσωση συνέχειας για ένα ασυμπίεστο ιξώδες ρευστό σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση (1.2) του Πίνακα 1-1 του Κεφαλαίου 1. Αφού $u_r = u_z = 0$, η εξίσωση συνέχειας ανάγεται στη μορφή $\partial u_\theta / \partial \theta = 0$ που προφανώς ισχύει αφού η πολική συνιστώσα εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Η εξίσωση ορμής στη πολική κατεύθυνση θ για ένα ασυμπίεστο ιξώδες ρευστό σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση (1.8) του Πίνακα 1-3 του Κεφαλαίου 1. Θεωρώντας ότι η ροή είναι μόνιμη, $u_r = u_z = 0$ και $u_\theta = u_\theta(r)$ απλοποιείται στη μορφή

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

Σημειώνεται ότι η πίεση δεν εξαρτάται από την γωνία θ και επομένως παίρνουμε την τελική εξίσωση

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

που είναι γνωστή ως εξίσωση Stokes. Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν την εξίσωση (4.1.1) περιλαμβάνουν την οριακή συνθήκη μη ολίσθησης στη θέση $r=R$ όπου $u_\theta(R) = \omega R$ και καθώς το $r \rightarrow \infty$, όπου $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0$. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας η δεύτερη οριακή συνθήκη παραμένει ως έχει ενώ η πρώτη στο τοίχωμα τροποποιείται σε οριακή συνθήκη ολίσθησης και γράφεται στη μορφή

$$u_\theta(R) = \omega R - \sigma_p \lambda \left(\frac{du_\theta}{dr} \Big|_{r=R} - \frac{u_\theta(R)}{R} \right) \quad (4.1.2)$$

όπου $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή.

Στο σημείο αυτό για λόγους ευκολίας στους συμβολισμούς επιλέγουμε να μην χρησιμοποιούμε στο εξής τον δείκτη θ στη ταχύτητα και θα γράφουμε $u = u(r)$ (αντί για $u_\theta = u_\theta(r)$). Επίσης, επιλέγουμε να διατυπώσουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u_H + u_S \quad (4.1.3)$$

όπου u_H είναι υδροδυναμική λύση και u_S λύση ολίσθησης.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.1.3) στην εξίσωση (4.1.1) και στην οριακή συνθήκη (4.1.2) διατυπώνονται τα εξής δύο προβλήματα:

Πρόβλημα 1:

$$\frac{d^2 u_H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_H}{dr} - \frac{u_H}{r^2} = 0 \quad (4.1.4)$$

$$u_H(R) = \omega R \quad (4.1.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_H = 0 \quad (4.1.6)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς r την (4.1.4) προκύπτει

$$\frac{du_H}{dr} + \frac{1}{r} u_H = c_1$$

Η παραπάνω διαφορική έχει γενική λύση

$$u_H(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Για να πάρει η ταχύτητα την μηδενική τιμή καθώς απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδή όταν το r γίνει πολύ μεγάλο θα πρέπει η σταθερά $A = 0$.

Οπότε η γενική λύση μειώνεται στην

$$u_H(r) = \frac{B}{r}$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη οριακή συνθήκη και για $r = R$

$$u_H(R) = \frac{B}{R} \Rightarrow \omega R = \frac{B}{R} \Rightarrow B = \omega R^2$$

Επομένως η αναλυτική λύση του υδροδυναμικού προβλήματος είναι

$$u_h(r) = \frac{\omega R^2}{r} \quad (4.1.7)$$

Πρόβλημα 2:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_s}{r^2} = 0 \quad (4.1.8)$$

$$u_s(R) = \sigma_p \lambda \left(\frac{du_\theta}{dr} \Big|_{r=R} - \frac{u_\theta(R)}{R} \right) = \sigma_p \lambda \left(-\frac{\omega R^2}{r^2} \Big|_{r=R} - \frac{\omega R^2}{RR} \right) = -2\omega \sigma_p \lambda \quad (4.1.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_s = 0 \quad (4.1.10)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς r την (4.1.8) προκύπτει

$$\frac{du_s}{dr} + \frac{1}{r}u_s = c_2$$

Η λύση της παραπάνω στη γενική μορφή της είναι

$$u_s(r) = Cr + \frac{D}{r}$$

Όμοια με το υδροδυναμικό πρόβλημα για να πάρει η ταχύτητα την μηδενική τιμή θα πρέπει $C = 0$ και η λύση απλοποιείται στην ως εξής

$$u_s(r) = \frac{D}{r}$$

Κάνοντας χρήση της πρώτης οριακής συνθήκης και για $r = R$

$$u_s(R) = \frac{D}{R} \Rightarrow -2\omega\sigma_p\lambda = \frac{D}{R} \Rightarrow D = -2\omega\sigma_p\lambda R$$

Οπότε η αναλυτική λύση του προβλήματος ολίσθησης είναι

$$u_s(r) = -\frac{2\omega\sigma_p\lambda R}{r} \quad (4.1.11)$$

Με βάση την αρχής της επαλληλίας η συνολική αναλυτική λύση είναι

$$u = u_h(r) + u_s(r) = \frac{\omega R^2}{r} - \frac{2\omega\sigma_p\lambda R}{r} = \frac{\omega R^2}{r} \left(1 - 2\sigma_p \frac{\lambda}{R}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$ και δεδομένου ότι ο αριθμός $Kn = \lambda / R \ll 1$

είναι μικρός εφόσον βρισκόμαστε στην υδροδυναμική περιοχή, αποδεικνύεται εύκολα ότι

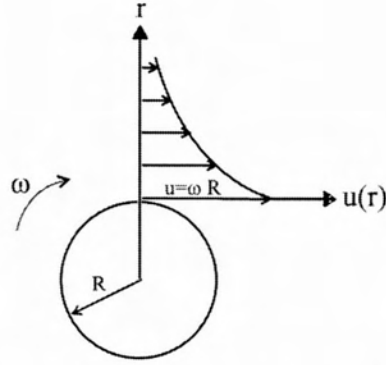
$$1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R} = 1 - 2\sigma_p \frac{\lambda}{R} - (2\sigma_p \frac{\lambda}{R})^2 + \dots = \frac{1}{1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R}}$$

Άρα η κατανομή της ταχύτητας στο πρόβλημα του περιστρεφόμενου κυλίνδρου γράφεται

$$u = \frac{\omega R^2}{r} \left(1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R}\right)^{-1} \quad (4.1.12)$$

Ο πρώτος όρος εντός της παρένθεσης αντιστοιχεί στη γνωστή λύση με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η διόρθωση λόγω ολίσθησης. Σημειώνεται ότι η ποσότητα λ / R είναι ο γνωστός αδιάστατος αριθμός Knudsen και χαρακτηρίζει τον βαθμό αραιοποίησης της ροής. Βλέπουμε ότι καθώς ο αριθμός Knudsen μικραίνει η συμβολή του όρου ολίσθησης στο συνολικό αποτέλεσμα μειώνεται και τελικά μηδενίζεται καθώς ο αριθμός Knudsen τείνει στο μηδέν.

Ένα ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας δίνεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας ροής γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο.

Είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε τα αποτελέσματα εισάγοντας την αδιάστατη απόσταση ταχύτητα

$$r' = \frac{r}{R} \quad \text{και} \quad u' = \frac{u}{\omega R}$$

Τότε το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται στην αδιάστατη μορφή ως εξής

$$u'_\theta(r) = \frac{u_\theta(r)}{\omega R^2} = \frac{R}{r} [1 + 2\sigma_p Kn]^{-1} = \frac{1}{r'} [1 + 2\sigma_p Kn]^{-1}$$

Σημειώνεται ότι το αδιάστατο αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της γωνιακής ταχύτητας. Στο Σχήμα 4.3 δίνεται η αδιάστατη κατανομή της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) με $\sigma_p = 1.018$ (από το κινητικό μοντέλο S).

Η διατμητική τάση υπολογίζεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής

$$P_{r\theta} = -\mu \left(\left. \frac{du_\theta}{dr} \right|_{r=R} - \frac{u_\theta}{r} \Big|_{r=R} \right) = -\mu \left(-\frac{\omega R^2}{R^2} (1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R})^{-1} - \frac{\omega R^2}{R^2} (1 + 2\sigma_p \frac{\lambda}{R})^{-1} \right) \quad (4.1.13)$$

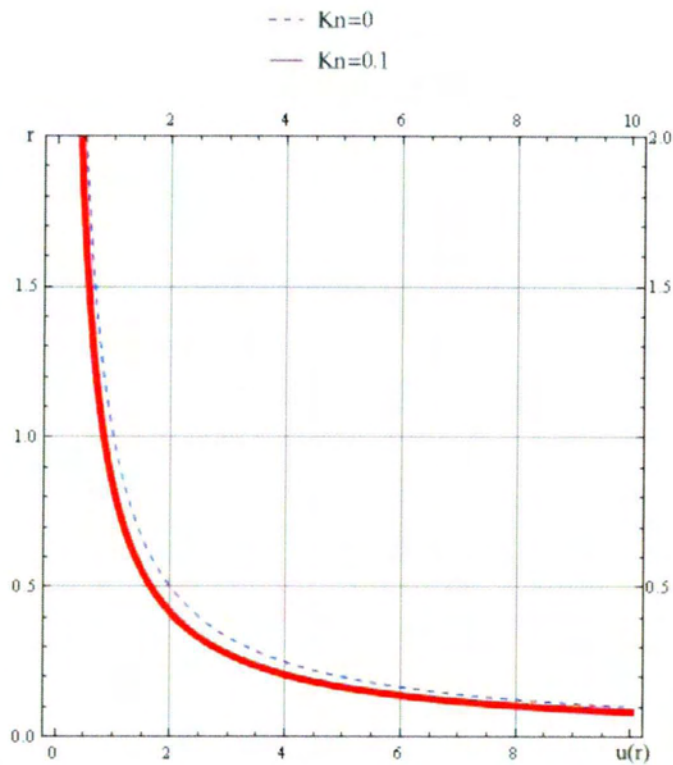
$$\Rightarrow P_{r\theta} = 2\mu\omega(1 + 2\sigma_p Kn)^{-1}$$

Η ροπή στρέψης υπολογίζεται ως εξής

$$\Theta = 2\pi R^2 L P_{r\theta} = 4\pi R^2 L \mu \omega (1 + 2\sigma_p Kn)^{-1} \quad (4.1.14)$$

όπου L είναι το μήκος του κυλίνδρου το οποίο σύμφωνα με τις παραδοχές που έχουν γίνει θα πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο της ακτίνας R , π.χ. $L \gg R$.

Είναι φανερό ότι ο όρος ολίσθησης αυξάνει την τιμή του παρονομαστή. Επομένως οι τιμές της διατμητικής τάσης και της ροπής στρέψης μειώνονται όταν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ολίσθησης της ταχύτητας.



Σχήμα 4.3: Κατανομή αδιάστατης ταχύτητας ροής γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο.

Θεωρώντας ως ρευστό λειτουργίας ένα από τα ευγενή αέρια He και Xe, και με γνωστές τις γεωμετρικές παραμέτρους του προβλήματος υπολογίζονται αριθμητικά η συνάρτηση της ταχύτητας, η διατμητική τάση και η ροπή στρέψης. Έστω ακτίνα $R = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ και μήκος κυλίνδρου $L = 1 \text{ m}$.

Η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού δηλαδή $u = \omega \cdot R$ θα πρέπει να είναι κατά πολύ μικρότερη της πιο πιθανής μοριακής ταχύτητας $u_0 = \sqrt{2R_{gas}T}$.

Η σταθερά κάθε αερίου (individual gas constant) R_{gas} υπολογίζεται από τη σχέση

$$R_{gas} = \frac{\bar{R}}{m}$$

όπου \bar{R} είναι η καθολική σταθερά των αερίων (universal gas constant) και m η μοριακή μάζα (molar mass). Για τα δύο αέρια έχουμε αντίστοιχα

$$R_{He} = \frac{\bar{R}}{m_{He}} = \frac{8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{4.0026 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2077 \text{ J} / \text{kg} \cdot \text{K}$$

$$R_{Xe} = \frac{\bar{R}}{m_{Xe}} = \frac{8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{131.29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 63.32 \text{ J} / \text{kg} \cdot \text{K}$$

Οπότε οι πιο πιθανές ταχύτητες των μορίων του He και του Xe είναι αντίστοιχα

$$u_{0(He)} = (2R_{He}T)^{1/2} = \left[(2 \cdot 2077 J \cdot kgr^{-1} \cdot K^{-1})(300K) \right]^{1/2} = 1116.33 m/s$$

$$u_{0(Xe)} = (2R_{Xe}T)^{1/2} = \left[(2 \cdot 63.32 J \cdot kgr^{-1} \cdot K^{-1})(300K) \right]^{1/2} = 194.91 m/s$$

Άρα οι πιο πιθανές γωνιακές ταχύτητες για τα δύο αέρια θα είναι

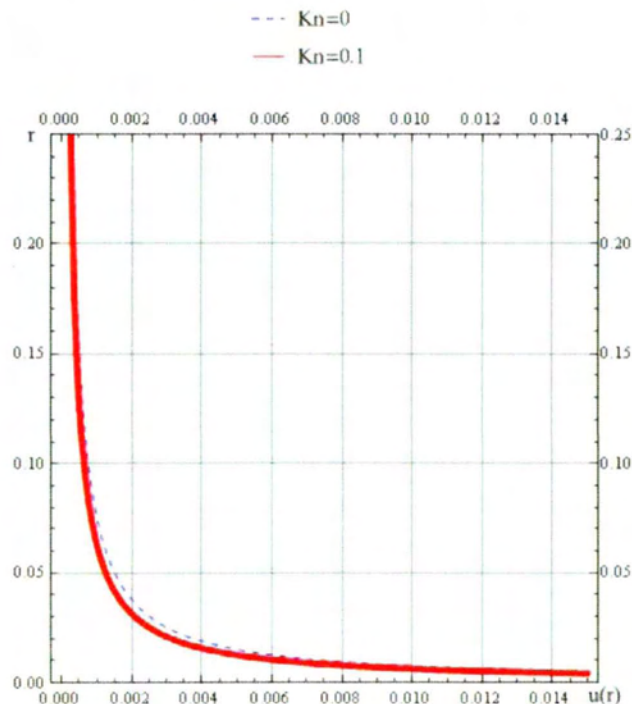
$$\omega_{0(He)} = u_0 R = (1116.33 m/s)(0.005m) = 55.81 rad/s$$

$$\omega_{0(Xe)} = u_0 R = (194.91.33 m/s)(0.005m) = 0.97 rad/s$$

Έστω $\omega = 0.015 rad/sec$ η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ο μικροκύλινδρος. Τότε η αδιάστατη κατανομή της ταχύτητας και για τα δύο ρευστά υπολογίζεται από τη σχέση (4.1.12) και παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 4.4. Για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) έχουμε

$$u = u_{He} = u_{Xe} = \frac{\omega R^2}{r} (1 + 2\sigma_p Kn)^{-1} = \frac{(0.015 rad/sec)(0.5 \cdot 10^{-2} m)}{r} (1 + 2 \cdot 1.018 \cdot 0)^{-1} = \frac{0.000075}{y}$$

$$u = u_{He} = u_{Xe} = \frac{\omega R^2}{r} (1 + 2\sigma_p Kn)^{-1} = \frac{(0.015 rad/sec)(0.5 \cdot 10^{-2} m)}{r} (1 + 2 \cdot 1.018 \cdot 0.1)^{-1} = \frac{0.00006231}{y}$$



Σχήμα 4.4: Κατανομή ταχύτητας ροής γύρω από περιστρεφόμενο μικροκύλινδρο, ανεξαρτήτως ρευστού λειτουργίας.

Η διατμητική τάση για το He υπολογίζεται από τη σχέση (4.1.13), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$P_{r\theta(He)} = 2\mu_{He}\omega(1+2\sigma_p Kn)^{-1} = 2(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/sec})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0)^{-1} = 5.97 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

$$P_{r\theta(He)} = 2\mu_{He}\omega(1+2\sigma_p Kn)^{-1} = 2(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/sec})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0.1)^{-1} = 4.96 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

Η διατμητική τάση για το Xe υπολογίζεται από τη σχέση (4.1.13), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$P_{r\theta(Xe)} = 2\mu_{Xe}\omega(1+2\sigma_p Kn)^{-1} = 2(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/sec})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0)^{-1} = 6.98 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

$$P_{r\theta(Xe)} = 2\mu_{Xe}\omega(1+2\sigma_p Kn)^{-1} = 2(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/sec})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0.1)^{-1} = 5.80 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

Η ροπή στρέψης για το He υπολογίζεται από τη σχέση (4.1.14), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \Theta_{He} &= 4\pi R^2 L \mu \omega (1+2\sigma_p Kn)^{-1} \\ &= 4(3.14)(0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (1\text{m})(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/s})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0)^{-1} = 1.876 \cdot 10^{-8} \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{He} &= 4\pi R^2 L \mu \omega (1+2\sigma_p Kn)^{-1} \\ &= 4(3.14)(0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (1\text{m})(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/s})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0.1)^{-1} = 1.559 \cdot 10^{-8} \text{ Nm} \end{aligned}$$

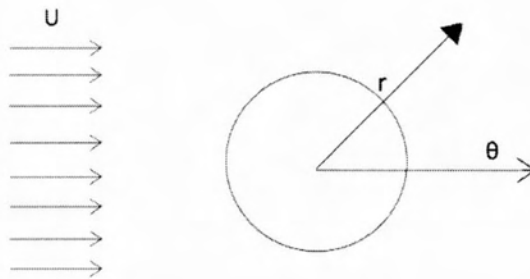
Η ροπή στρέψης για το Xe υπολογίζεται από τη σχέση (4.1.14), για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \Theta_{Xe} &= 4\pi R^2 L \mu \omega (1+2\sigma_p Kn)^{-1} \\ &= 4(3.14)(0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (1\text{m})(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/s})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0)^{-1} = 2.19 \cdot 10^{-8} \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{Xe} &= 4\pi R^2 L \mu \omega (1+2\sigma_p Kn)^{-1} \\ &= 4(3.14)(0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (1\text{m})(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(0.015 \text{ rad/s})(1+2 \cdot 1.018 \cdot 0.1)^{-1} = 1.82 \cdot 10^{-8} \text{ Nm} \end{aligned}$$

4.2 Ροή διερχόμενη από σταθερή μικροσφαίρα

Έστω μια σφαίρα ακτίνας R η οποία είναι σταθερά τοποθετημένη. Ορίζεται σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το κέντρο της σφαίρας. Κάθε σημείο του ρευστού που βρίσκεται εξωτερικά της σφαίρας περιγράφεται από της σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) , όπου r η ακτινική απόσταση, θ η πολική γωνία και φ η αζιμουθιακή γωνία. Η ροή αερίου φτάνει στη σφαίρα με οριζόντια μόνο συνιστώσα ταχύτητας και με διεύθυνση $\theta=0$ (z -διεύθυνση) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Η ταχύτητα της ροής θεωρείται σταθερή και ίση με U . Στην επιφάνεια της σφαίρας ασκείται δύναμη αντίστασης ή οπισθέλκουσα (drag force) D ανάλογη της ταχύτητας της ροής.



Σχήμα 4.5: Ροή διερχόμενη από σταθερή μικροσφαίρα.

Αγνοώντας τις αδρανειακές και τις εξωτερικές δυνάμεις και με $u_\varphi=0$ και $\partial/\partial\varphi=0$ λόγω αξονικής συμμετρίας από τις εξισώσεις συνέχειας και N-S για ασυμπίεστη ροή $\rho=\text{σταθ}$ η εξίσωση συνέχειας για σφαιρικές συντεταγμένες (1.3) του Πίνακα 1-1 και οι εξισώσεις ορμής (1.10) και (1.11) του Πίνακα 1-4 του Κεφαλαίου 1 γίνονται αντίστοιχα

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} \right) \quad (4.2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.2.3)$$

όπου $u_r = u_r(r, \theta)$ και $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$ η ακτινική και η πολική συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα. Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν τις παραπάνω εξισώσεις περιλαμβάνουν την οριακή συνθήκη μη ολίσθησης στη θέση $r=R$ όπου $u_\theta(R) = u_r(R) = 0$. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας οι δυο τελευταίες οριακές συνθήκες παραμένουν ως έχουν ενώ η πρώτη στο τοίχωμα τροποποιείται σε οριακή συνθήκη ολίσθησης και γράφεται στη μορφή

$$u_\theta(R) = \sigma_p \lambda \left(\frac{du_\theta}{dr} \Big|_{r=R} - \frac{u_\theta(R)}{R} \right) \quad (4.2.4)$$

όπου $\sigma_p = 1.016$ είναι ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης και λ η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή.

Επιλέγουμε να διατυπώσουμε τη ζητούμενη λύση στη μορφή

$$u = u^{(h)} + u^{(s)} \quad (4.2.5)$$

όπου $u^{(h)}$ είναι υδροδυναμική λύση και $u^{(s)}$ λύση ολίσθησης.

Ομοίως για τον υπολογισμό της πίεσης και της οπισθέλκουσας δύναμης ισχύει

$$p = p^{(h)} + p^{(s)} \quad (4.2.6)$$

$$D = D^{(h)} + D^{(s)} \quad (4.2.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.25) στις (4.2.1)-(4.2.3) διατυπώνονται τα δύο εξής προβλήματα.

Πρόβλημα 1

$$\frac{\partial u_r^{(h)}}{\partial r} + \frac{2u_r^{(h)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta^{(h)} \cot \theta}{r} = 0 \quad (4.2.8)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r^{(h)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(h)}}{\partial r} - \frac{2u_r^{(h)}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^{(h)}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r^{(h)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial \theta} - \frac{2\partial u_\theta^{(h)} \cot \theta}{r^2} \right) \quad (4.2.9)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(h)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(h)}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^{(h)}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(h)}}{\partial \theta} \right) \quad (4.2.10)$$

$$u_\theta^{(h)}(R) = 0 \quad (4.2.11)$$

$$u_r^{(h)}(R) = 0 \quad (4.2.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r^{(h)} = U \cos \theta \quad (4.2.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta^{(h)} = -U \sin \theta \quad (4.2.14)$$

Στο εξής για απλούστευση των συμβολισμών χρησιμοποιούμε $u^{(h)} = u$. Δεδομένου ότι ισχύει η εξίσωση Stokes $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, υπάρχει οπωσδήποτε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}(x, t)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.2.15)$$

Για ασυμπίεστη ροή και όταν υπάρχουν δυο ανεξάρτητες μεταβλητές το πεδίο αυτό μπορεί γραφεί με όρους μιας βαθμωτής συνάρτησης της ροϊκής συνάρτησης. Για τρισδιάστατες αξονοσυμμετρικές ροές, η ροϊκή συνάρτηση, συναντάται στη βιβλιογραφία ως ροϊκή συνάρτηση Stokes και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A} = \frac{\Psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi$$

όπου το \mathbf{A} πρέπει να είναι στη διεύθυνση φ , αφού $\mathbf{u} = u_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.2.15) παίρνουμε για την ταχύτητα

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (4.2.16)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.2.17)$$

Στο άπειρο η ταχύτητα U στη διεύθυνση z μπορεί να αναλυθεί σε ακτινική και πολική συνιστώσα

$$u_r(r \rightarrow \infty, \theta) = U \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (4.2.18)$$

$$u_\theta(r \rightarrow \infty, \theta) = -U \sin \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική σχέση $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ και τη σχέση $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ παίρνουμε

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

όπου $\boldsymbol{\omega}$ είναι η στροβιλότητα. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση προκύπτει και από τη διαφορική εξίσωση ορμής σε διανυσματική μορφή και

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (4.2.20)$$

Όμως όπως αναφέρθηκε προηγουμένως ότι $\mathbf{u} = \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right)$ και δεδομένου ότι για τη στροβιλότητα ισχύει $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right)$$

Αντικαθιστώντας στη (4.2.20) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \nabla \left[\nabla \times \left(\nabla \times \frac{\psi \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) \right] = 0$$

Έτσι η εξίσωση ορμής γίνεται βαθμωτή εξίσωση για το ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \psi = 0 \quad (4.2.21)$$

Οι οριακές συνθήκες για τη ροϊκή συνάρτηση γίνονται

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (4.2.22)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{r=R} = 0 \quad (4.2.23)$$

$$\psi(r \rightarrow \infty, \theta) = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (4.2.24)$$

όπου οι δύο πρώτες προέκυψαν από τις σχέσεις (4.2.16) και (4.2.17) κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών (4.2.11) και (4.2.12) ενώ η τελευταία προέκυψε έπειτα από ολοκλήρωση ως προς r της σχέσης (4.2.19). Αυτή η τελευταία συνοριακή συνθήκη μας προδιαθέτει να αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.2.17) παίρνουμε

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] f = 0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler, οπότε η λύση της θα είναι της μορφής $f(r) = ar^n$.

Αντικαθιστώντας τη γενική μορφή στην παραπάνω παίρνουμε

$$\begin{aligned} a[n(n-1)-2][n(n-3)-2] &= 0 \\ a(n+1)(n-1)(n-2)(n-4) &= 0 \end{aligned}$$

Ο βαθμός του πολωνύμου είναι τέσσερα και οι ρίζες του είναι $n = -1, 1, 2, 4$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι της μορφής

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

Επομένως η ροϊκή συνάρτηση Stokes γράφεται

$$\psi(r, \theta) = \sin^2 \theta \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right)$$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης (4.2.24) παίρνουμε $D = 0$ και $C = \frac{U}{2}$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης (4.2.22) και (4.2.23) έχουμε αντίστοιχα

$$\frac{U}{2} + \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} = 0$$

$$U - \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} = 0$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτουν $A = \frac{U}{4} R^3$ και $B = -\frac{3}{4} UR$. Έτσι η ροϊκή συνάρτηση γίνεται

$$\psi(r, \theta) = \frac{U}{2} \left[r^2 + \frac{R^3}{2r} - \frac{3Rr}{2} \right] \sin^2 \theta$$

Με γνωστή πλέον τη ροϊκή συνάρτηση από τις σχέσεις (4.2.16) και (4.2.17) προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας ως λύση του υδροδυναμικού προβλήματος

$$u_r^{(h)} = U \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right)$$

$$u_\theta^{(h)} = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right)$$

Η οπισθέλκουσα δύναμη υπολογίζεται ως άθροισμα δυο συνιστωσών που προέρχονται από δυο διαφορετικές τάσεις. Συγκεκριμένα ολοκληρώνοντας σε όλη την επιφάνεια της σφαίρας η δύναμη που ασκείται από τη ροή στη σφαίρα υπολογίζεται ως εξής

$$D^{(h)} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\tau_{r\theta} \Big|_{r=R} \sin \theta + (p - p_0) \Big|_{r=R} \cos \theta \right) R^2 \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow D^{(h)} = -2\pi R^2 \int_0^\pi \left(\tau_{r\theta} \Big|_{r=R} \sin \theta + (p - p_0) \Big|_{r=R} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta$$

όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την τάση λόγω τριβής (viscous stress) και ο δεύτερος την τάση λόγω πίεσης (pressure stress).

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες την ταχύτητας στην εξίσωση ορμής στην r -διεύθυνση (4.2.9)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu UR}{r^3} \cos \theta$$

Ολοκληρώνοντας ως προς r παίρνουμε

$$p^{(h)} = \mu U \cos \theta \left(\frac{-3R}{2r^2} \right) + p_0$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = -\frac{U \mu \sin \theta}{r} \left(1 - \frac{3R}{4r} + \frac{5R^3}{4r^3} \right)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση της οπισθέλκουσας έχουμε

$$D^{(h)} = 4\pi\mu UR + 2\pi\mu UR = 6\pi\mu UR$$

που είναι ο γνωστός νόμος του Stokes (Stokes drag law).

Πρόβλημα 2

$$\frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial r} + \frac{2u_r^{(s)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta^{(s)} \cot \theta}{r} = 0 \quad (4.2.25)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u_r^{(s)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial r} - \frac{2u_r^{(s)}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^{(s)}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(s)}}{\partial \theta} - \frac{2\partial u_\theta^{(s)} \cot \theta}{r^2} \quad (4.2.26)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u_\theta^{(s)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(s)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(s)}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^{(s)}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial \theta} \quad (4.2.27)$$

$$u_\theta^{(s)}(R) = \sigma_p \lambda \left(\frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{u_\theta^{(h)}(R)}{R} \right) \approx \sigma_p \lambda \frac{\partial u_\theta^{(h)}}{\partial r} \Big|_{r=R} \approx -\sigma_p \lambda U \sin \theta \frac{3}{2R} \quad (4.2.28)$$

$$u_r^{(s)}(R) = 0 \quad (4.2.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r^{(s)} = U \cos \theta \quad (4.2.30)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta^{(s)} = -U \sin \theta \quad (4.2.31)$$

Στο εξής για απλούστευση των συμβολισμών χρησιμοποιούμε $u^{(s)} = u$. Δεδομένου ότι ισχύει η εξίσωση Stokes $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, υπάρχει οπωσδήποτε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}(x, t)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.2.32)$$

Για ασυμπίεστη ροή και όταν υπάρχουν δυο ανεξάρτητες μεταβλητές το πεδίο αυτό μπορεί γραφεί με όρους μιας βαθμωτής συνάρτησης της ροϊκής συνάρτησης. Για τρισδιάστατες αξονοσυμμετρικές ροές, η ροϊκή συνάρτηση, συναντάται στη βιβλιογραφία ως ροϊκή συνάρτηση Stokes και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A} = \frac{\Psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi$$

όπου το A πρέπει να είναι στη διεύθυνση φ , αφού $\mathbf{u} = u_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.2.15) παίρνουμε για την ταχύτητα

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (4.2.33)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.2.34)$$

Στο άπειρο η ταχύτητα U στη διεύθυνση z μπορεί να αναλυθεί σε ακτινική και πολική συνιστώσα

$$u_r(r \rightarrow \infty, \theta) = U \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (4.2.35)$$

$$u_\theta(r \rightarrow \infty, \theta) = -U \sin \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.2.36)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική σχέση $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ και τη σχέση $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ παίρνουμε

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

όπου $\boldsymbol{\omega}$ είναι η στροβιλότητα. Από τη διαφορική εξίσωση ορμής σε διανυσματική μορφή και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (4.2.37)$$

Όμως όπως αναφέρθηκε προηγουμένως ότι $\mathbf{u} = \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right)$ και δεδομένου ότι για τη στροβιλότητα ισχύει $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω στη (4.2.18) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \nabla \left[\nabla \times \left(\nabla \times \frac{\psi \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) \right] = 0$$

Έτσι η εξίσωση ορμής γίνεται βαθμωτή εξίσωση για το ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi = 0 \quad (4.2.38)$$

Από τις σχέσεις (4.2.31) και (4.2.32) λύνοντας ως προς ψ έχουμε

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta u_r^{(s)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \sin \theta u_\theta^{(s)}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ως προς r προκύπτει

$$\psi(r, \theta) = -\frac{r^2}{2} \sin \theta u_\theta^{(s)}$$

Κάνοντας χρήση των οριακών συνθηκών (4.2.28) και (4.2.29) για $r = R$ και της οριακής συνθήκης (4.2.31) και για $r \rightarrow \infty$ οι οριακές συνθήκες της ροϊκής συνάρτησης γίνονται

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{r=R} = 0 \quad (4.2.39)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=R} = \sigma_p \lambda U \sin^2 \theta \frac{3R^2}{2} \quad (4.2.40)$$

$$\psi(r \rightarrow \infty, \theta) = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (4.2.41)$$

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη μας προδιαθέτει να αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.2.32) παίρνουμε

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right]^2 f = 0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler, οπότε η λύση της θα είναι της μορφής $f(r) = ar^n$.

Αντικαθιστώντας τη γενική αυτή μορφή στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} a[n(n-1)-2][[(n-2)(n-3)-2]] &= 0 \\ a(n+1)(n-1)(n-2)(n-4) &= 0 \end{aligned}$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι τέσσερα και οι ρίζες του είναι $n = -1, 1, 2, 4$. Επομένως η συνάρτηση f θα είναι της μορφής

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

Ενώ για τη ροϊκή συνάρτηση Stokes θα ισχύει

$$\psi(r, \theta) = \sin^2 \theta \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right)$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας θα είναι από τις σχέσεις (4.2.33) και (4.2.34)

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2 \cos \theta \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \right)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sin \theta \left(-\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + 2C + 4Dr^2 \right)$$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης (4.2.30) και για $r \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r^{(s)} = U \cos \theta \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} 2 \cos \theta \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \right) = U \cos \theta$$

Οπότε θα πρέπει $C = D = 0$ και οι συνιστώσες της ταχύτητας τώρα γίνονται

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2 \cos \theta \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} \right)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sin \theta \left(-\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} \right)$$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης (4.2.29) και για $r = R$ παίρνουμε

$$u_r(R) = 0 \Rightarrow 2 \cos \theta \left(\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} = 0$$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης (4.2.28) και για $r = R$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_\theta(R) &= -\sigma_p \lambda U \sin \theta \frac{3}{2R} \Rightarrow -\sin \theta \left(-\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} \right) = -\sigma_p \lambda U \sin \theta \frac{3}{2R} \\ &\Rightarrow -\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} = \sigma_p \lambda \frac{3U}{2R} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτουν οι σταθερές

$$B = \sigma_p \lambda \frac{3U}{4} \text{ και } A = -R^2 B = -\sigma_p \lambda \frac{3U}{4} R^2$$

Αντικαθιστώντας στις συνιστώσες τις ταχύτητες παίρνουμε τη λύση του προβλήματος ολίσθησης

$$u_r^{(s)} = 2 \cos \theta \left(\frac{-\sigma_p \lambda \frac{3U}{4} R^2}{r^3} + \frac{\sigma_p \lambda \frac{3U}{4}}{r} \right) = U \cos \theta \frac{3}{2} \frac{\sigma_p}{\delta} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

$$u_\theta^{(s)} = -\sin \theta \left(\frac{-\sigma_p \lambda \frac{3U}{4} R^2}{r^3} + \frac{\sigma_p \lambda \frac{3U}{4}}{r} \right) = -U \sin \theta \frac{3}{4} \frac{\sigma_p}{\delta} \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{r^3} \right)$$

Η οπισθέλκουσα δύναμη υπολογίζεται ως άθροισμα δυο συνιστωσών που προέρχονται από δυο διαφορετικές τάσεις. Συγκεκριμένα ολοκληρώνοντας σε όλη την επιφάνεια της σφαίρας η δύναμη που ασκείται από τη ροή στη σφαίρα υπολογίζεται ως εξής

$$D^{(s)} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta + p_{rr}|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta$$

$$= -2\pi R^2 \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta + p_{rr}|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta$$

όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την τάση λόγω τριβής (viscous stress) και ο δεύτερος την τάση λόγω πίεσης (pressure stress).

Αντικαθιστώντας τη συνολική λύση του προβλήματος στην εξίσωση ορμής στην r -διεύθυνση (4.2.9) και ολοκληρώνοντας ως προς r παίρνουμε

$$p^{(s)}|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{R^2} \sigma_p \lambda \cos \theta$$

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$p_{rr}^{(s)} = p^{(s)} - 2\mu \frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{9}{2} \frac{\mu U}{R^2} \sigma_p \lambda \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta}^{(s)} = -\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(s)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(s)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(s)}}{r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{9}{2} \frac{\mu U}{R^2} \sigma_p \lambda \sin \theta$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση της οπισθέλκουσας παίρνουμε

$$D^{(s)} = -6\pi\mu U \sigma_p \lambda$$

Άρα η αναλυτική λύση του συνολικού προβλήματος γίνεται

$$u_r = u_r^{(h)} + u_r^{(s)} = U \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta + \sigma_p Kn \frac{3U}{2} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta \quad (4.2.42)$$

$$u_\theta = u_\theta^{(h)} + u_\theta^{(s)} = -U \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin\theta - \sigma_p Kn \frac{3U}{4} \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin\theta \quad (4.2.43)$$

Προκειμένου να κατανοήσουμε τη συμβολή του όρου ολίσθησης στη συνάρτηση της ταχύτητας είναι απαραίτητο να αδιαστατοποιήσουμε τα αποτελέσματα και να απεικονίσουμε με γράφημα τα αποτελέσματα. Εισάγοντας τις αδιάστατες ποσότητες

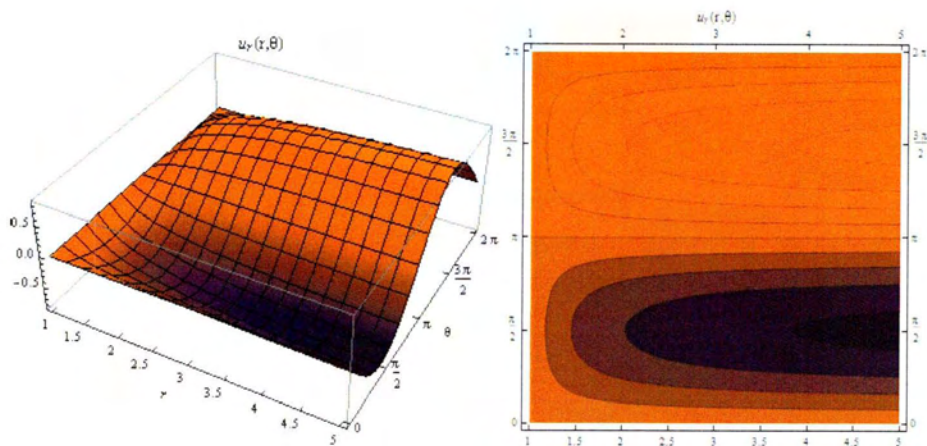
$$r' = \frac{r}{R}, \quad u' = \frac{u}{U}$$

όπου το r παίρνει τιμές στο διάστημα $[1, \infty)$ τα παραπάνω αποτελέσματα γράφονται σε αδιάστατη μορφή ως εξής

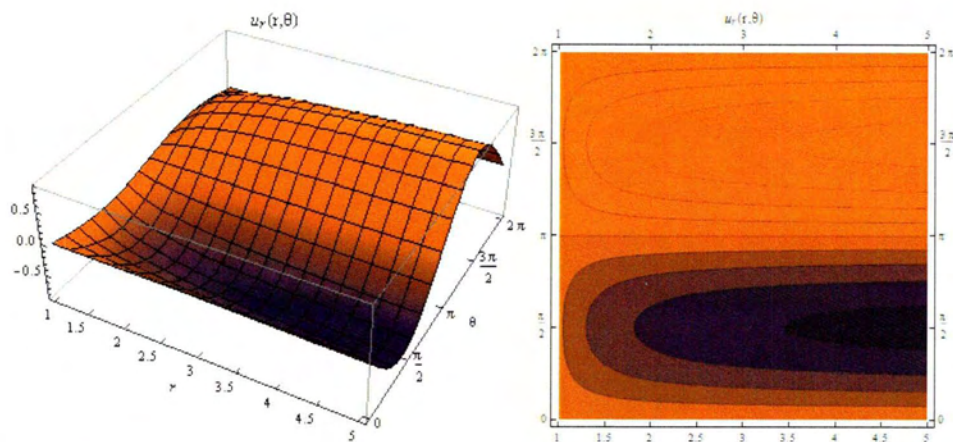
$$u'_r = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{r'} + \frac{1}{2} \frac{1}{r'^3} \right) \cos\theta + \sigma_p Kn \frac{3}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos\theta$$

$$u'_\theta = - \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{r'} - \frac{1}{4} \frac{1}{r'^3} \right) \sin\theta - \sigma_p Kn \frac{3}{4} \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^3} \right) \sin\theta$$

Στα Σχήματα 4.6 – 4.9 παρακάτω δίνεται η κατανομή των αδιάστατων συνιστωσών της ταχύτητας για $Kn = 0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn = 0.1$ (ολική λύση).

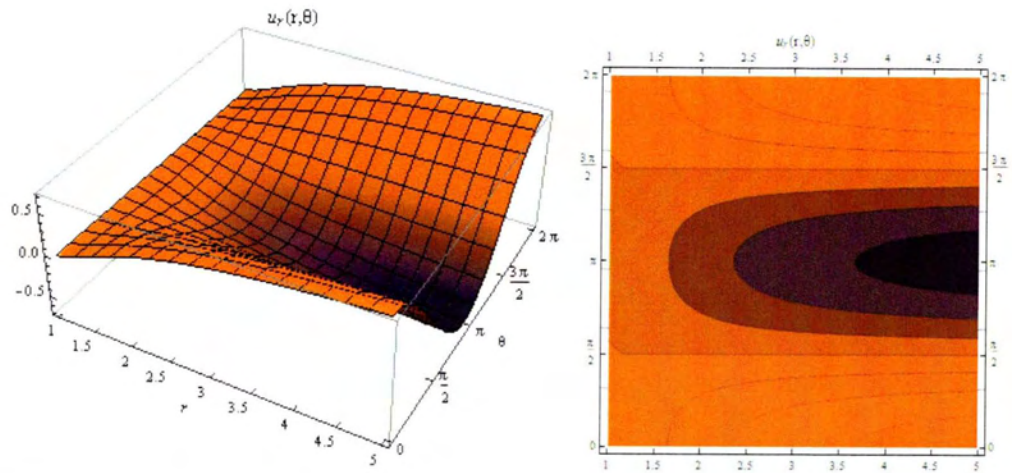


Σχήμα 4.6: Κατανομή της αδιάστατης συνιστώσας $u_{\theta}(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [1, 10]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0$

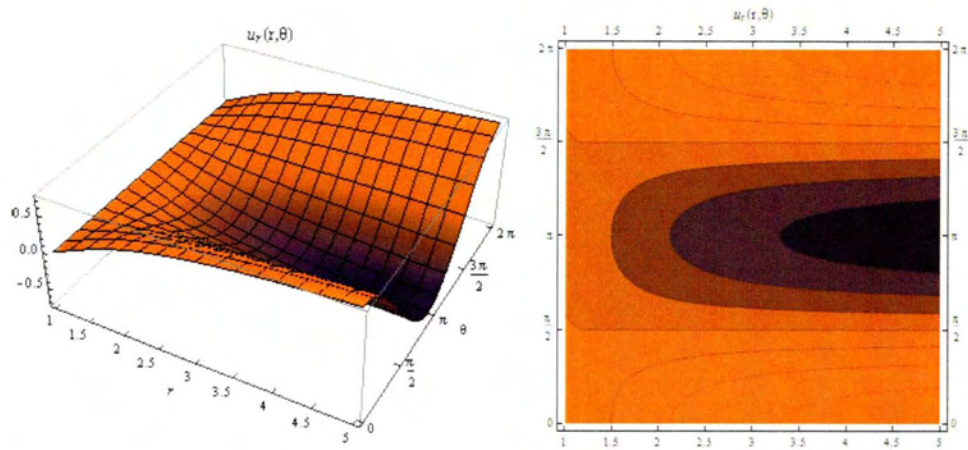


Σχήμα 4.7: Κατανομή της αδιάστατης συνιστώσας $u_{\theta}(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [1, 10]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0.1$

Είναι φανερό από τα παραπάνω σχήματα ότι ο όρος ολίσθησης αυξάνει το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας u_{θ} . Επίσης καθώς αυξάνει ο αριθμός Kn τα φαινόμενα ολίσθησης γίνονται πιο έντονα, συνεπώς αυξάνει και το μέτρο της u_{θ} .



Σχήμα 4.8: Κατανομή της αδιάστατης συνιστώσας $u_r(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [1, 10]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0$.



Σχήμα 4.9: Κατανομή της αδιάστατης συνιστώσας $u_r(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [1, 10]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0.1$

Όπως και προηγουμένως, είναι φανερό από τα παραπάνω σχήματα ότι ο όρος ολίσθησης αυξάνει το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας u_r . Επίσης καθώς αυξάνει ο αριθμός Kn τα φαινόμενα ολίσθησης γίνονται πιο έντονα, συνεπώς αυξάνει και το μέτρο της u_r .

Η δύναμη οπισθέλκουσας D του συνολικού προβλήματος είναι

$$D = D^{(h)} + D^{(s)} = 6\pi\mu UR - 6\pi\mu U\sigma_p\lambda = 6\pi\mu UR(1 - \sigma_p Kn) \quad (4.2.44)$$

Σημειώνεται ότι ο όρος ολίσθησης προκαλεί μείση στην οπισθέλκουσα δύναμη ανάλογη του αριθμού Kn .

Θεωρώντας ως ρευστό λειτουργίας ένα από τα ευγενή αέρια He και Xe, και με γνωστές τις γεωμετρικές παραμέτρους του προβλήματος υπολογίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας συναρτήσει της γωνίας θ και της ακτίνας r . Έστω $R = 0.5 \cdot 10^{-2} m$ η ακτίνα της σφαίρας. Η ταχύτητα ροής U θα πρέπει να είναι κατά πολύ μικρότερη της πιο πιθανής μοριακής ταχύτητας $u_0 = \sqrt{2R_{gas}T}$. Οι πιο πιθανές μοριακές ταχύτητες υπολογίστηκαν στην γυποενότητα 3.2.1 ίσες με

$$u_{0,He} = (2R_{He}T)^{1/2} = 1116.33 m/s$$

$$u_{0,Xe} = (2R_{Xe}T)^{1/2} = 194.91 m/s$$

Θεωρούμε ταχύτητα ροής $U = 1 m/s$. Τότε η κατανομή της συνιστώσας $u_r(r, \theta)$ της ταχύτητας και για τα δύο ρευστά υπολογίζεται από τη σχέση (4.2.42). Για $Kn = 0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn = 0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} u_r = u_{He} = u_{Xe} &= U \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1R^3}{2r^3} \right) \cos\theta + \sigma_p Kn \frac{3U}{2} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta \\ &= (1 m/s) \left(1 - \frac{3(0.005m)}{2r} + \frac{1(0.005m)^3}{2r^3} \right) \cos\theta + (1.018)(0) \frac{3(1m/s)}{2} \left(\frac{(0.005m)}{r} - \frac{(0.005m)^3}{r^3} \right) \cos\theta \\ &= \left(1 + \frac{6.25 \times 10^{-8}}{r^3} - \frac{0.0075}{r} \right) \cos[\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r = u_{He} = u_{Xe} &= U \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1R^3}{2r^3} \right) \cos\theta + \sigma_p Kn \frac{3U}{2} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta \\ &= (1 m/s) \left(1 - \frac{3(0.005m)}{2r} + \frac{1(0.005m)^3}{2r^3} \right) \cos\theta + (1.018)(0) \frac{3(1m/s)}{2} \left(\frac{(0.005m)}{r} - \frac{(0.005m)^3}{r^3} \right) \cos\theta \\ &= \left(1 + \frac{6.25 \times 10^{-8}}{r^3} - \frac{0.0075}{r} \right) \cos[\theta] + 0.1527 \left(-\frac{1.25 \times 10^{-7}}{r^3} + \frac{0.005}{r} \right) \cos[\theta] \end{aligned}$$

Τότε η κατανομή της συνιστώσας $u_\theta(r, \theta)$ της ταχύτητας και για τα δύο ρευστά υπολογίζεται από τη σχέση (4.2.43). Για $Kn = 0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn = 0.1$ (ολική λύση) έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
u_{\theta} = u_{He} = u_{Xe} &= -U \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1R^3}{4r^3} \right) \sin \theta - \sigma_p Kn \frac{3U}{4} \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \\
&= (-1 \text{ m/s}) \left(1 - \frac{3(0.005 \text{ m})}{4r} - \frac{1(0.005 \text{ m})^3}{4r^3} \right) \sin \theta - (1.018)(0.1) \frac{3(1 \text{ m/s})}{4} \left(\frac{0.005 \text{ m}}{r} - \frac{(0.005 \text{ m})^3}{r^3} \right) \sin \theta \\
&= \left(-1 + \frac{3.125 \times 10^{-8}}{r^3} + \frac{0.00375}{r} \right) \text{Sin}[\theta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta} = u_{He} = u_{Xe} &= -U \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1R^3}{4r^3} \right) \sin \theta - \sigma_p Kn \frac{3U}{4} \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \\
&= (-1 \text{ m/s}) \left(1 - \frac{3(0.005 \text{ m})}{4r} - \frac{1(0.005 \text{ m})^3}{4r^3} \right) \sin \theta - (1.018)(0) \frac{3(1 \text{ m/s})}{4} \left(\frac{0.005 \text{ m}}{r} - \frac{(0.005 \text{ m})^3}{r^3} \right) \sin \theta \\
&= \left(-1 + \frac{3.125 \times 10^{-8}}{r^3} + \frac{0.00375}{r} \right) \text{Sin}[\theta] - 0.07635 \left(\frac{1.25 \times 10^{-7}}{r^3} + \frac{0.005}{r} \right) \text{Sin}[\theta]
\end{aligned}$$

Η δύναμη οπισθέλκουσας D για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και για $Kn=0.1$ (ολική λύση) πρώτα για το He και έπειτα για το Ξέον υπολογίζεται από τη σχέση (4.2.44) ως εξής

$$D_{He} = 6\pi\mu_{He}UR(1 - \sigma_p Kn) = 6(3.14)(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(1 \text{ m/s})(0.005 \text{ m})(1 - (1.018)(0)) = 1.87 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

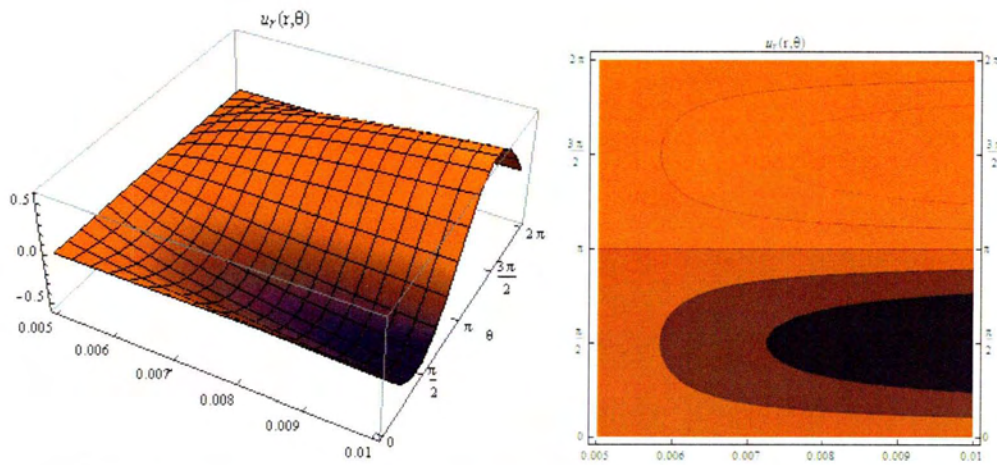
$$D_{He} = 6\pi\mu_{He}UR(1 - \sigma_p Kn) = 6(3.14)(19.92 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(1 \text{ m/s})(0.005 \text{ m})(1 - (1.018)(0.1)) = 1.68 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

$$D_{Xe} = 6\pi\mu_{Xe}UR(1 - \sigma_p Kn) = 6(3.14)(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(1 \text{ m/s})(0.005 \text{ m})(1 - (1.018)(0)) = 2.19 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

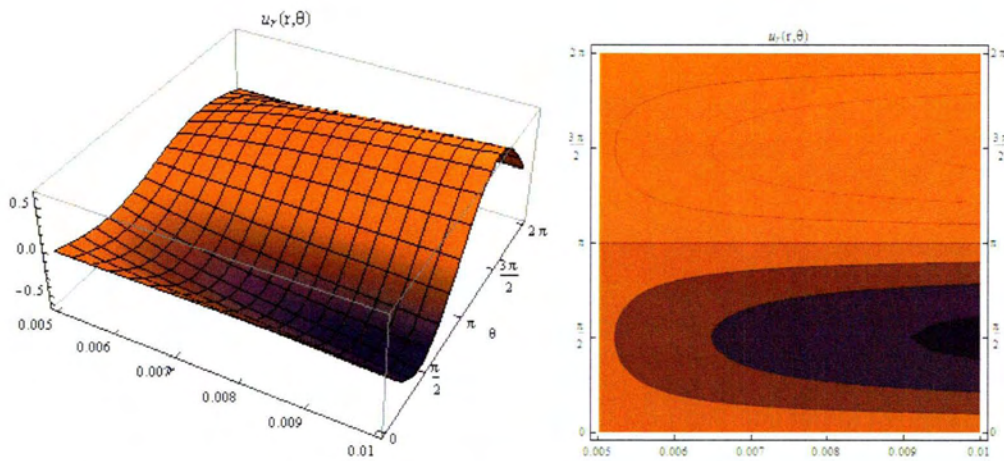
$$D_{Xe} = 6\pi\mu_{Xe}UR(1 - \sigma_p Kn) = 6(3.14)(23.28 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s})(1 \text{ m/s})(0.005 \text{ m})(1 - (1.018)(0.1)) = 1.96 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο ο όρος ολίσθησης προκαλεί μείωση στην οπισθέλκουσα δύναμη ανάλογη του αριθμού Kn.

Στα Σχήματα 4.10 - 4.13 παρακάτω δίνεται η κατανομή των συνιστωσών της ταχύτητας για $Kn=0$ (υδροδυναμική λύση) και $Kn=0.1$ (ολική λύση) για ένα πραγματικό ρευστό λειτουργίας (π.χ. He).

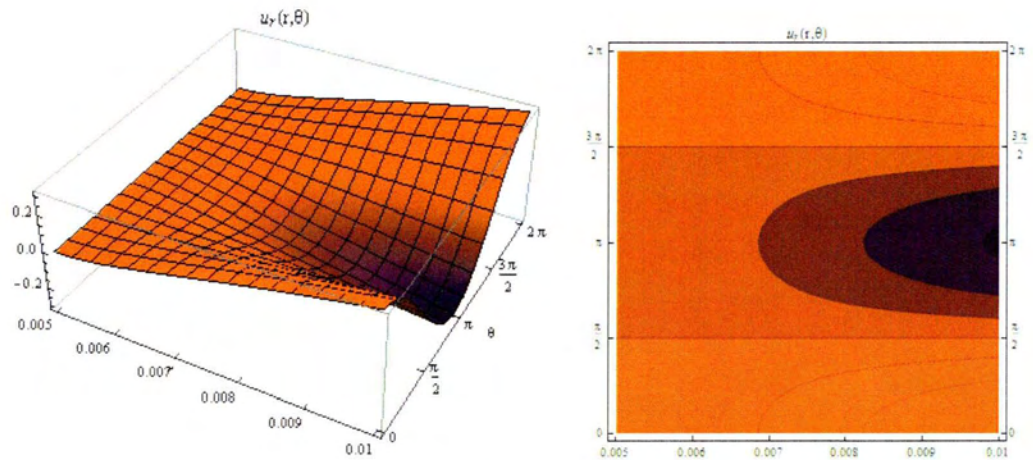


Σχήμα 4.10: Κατανομή της συνιστώσας $u_\theta(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [0.005, 0.01]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0$

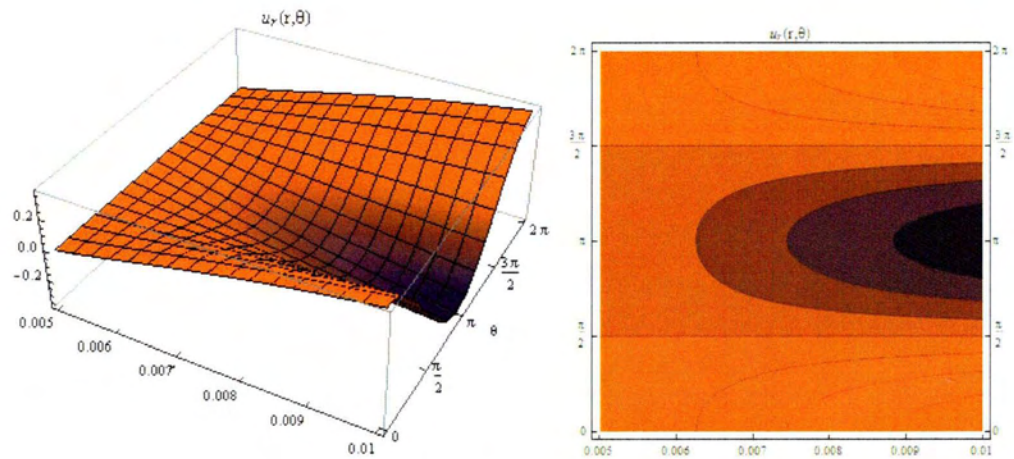


Σχήμα 4.11: Κατανομή της συνιστώσας $u_\theta(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [0.005, 0.01]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0.1$

Όπως ήταν αναμενόμενο τα παραπάνω σχήματα δείχνουν ότι ο όρος ολίσθησης αυξάνει το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας u_θ . Επίσης καθώς αυξάνει ο αριθμός Kn τα φαινόμενα ολίσθησης γίνονται πιο έντονα, συνεπώς αυξάνει και το μέτρο της u_θ .



Σχήμα 4.12: Κατανομή της συνιστώσας $u_r(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [0.005, 0.01]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0$.



Σχήμα 4.13: Κατανομή της συνιστώσας $u_r(r, \theta)$ της ταχύτητας ροής διερχόμενης από σταθερή μικροσφαίρα με $r = [0.005, 0.01]$ και $\theta = [0, 2\pi]$ για $Kn = 0.1$

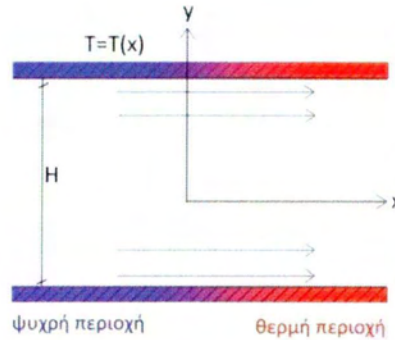
Όπως ήταν αναμενόμενο τα παραπάνω σχήματα δείχνουν ότι ο όρος ολίσθησης αυξάνει το μέτρο της συνιστώσας της ταχύτητας u_r . Επίσης καθώς αυξάνει ο αριθμός Kn τα φαινόμενα ολίσθησης γίνονται πιο έντονα, συνεπώς αυξάνει και το μέτρο της u_r .

ΡΟΕΣ ΛΟΓΩ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό εξετάζονται ροές που οφείλονται σε διαφορές θερμοκρασίας Συγκεκριμένα στην παράγραφο 5.1 μελετάται το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού (thermal creep) αρχικά για ρευστό που βρίσκεται ανάμεσα σε δυο παράλληλες πλάκες απείρου μήκους και έπειτα για ρευστό εντός ενός κυλινδρικού αγωγού. Πιο συγκεκριμένα στην επιφάνεια του τοιχώματος το οποίο διατηρεί μια θερμοκρασιακή κατανομή το ρευστό αρχίζει να κινείται από την ψυχρότερη περιοχή της πλάκας προς την θερμότερη. Η ονομασία προέρχεται από τον ερπυσμό (creeping) του ρευστού. Αν θεωρηθεί ότι δεν υφίσταται διαφορά πίεσης το φαινόμενο θερμικού ερπυσμού είναι αυτό που διαταράσσει την τοπική θερμοδυναμική ισορροπία [10]. Στην παράγραφο 5.2 του Κεφαλαίου εξετάζεται το φαινόμενο Photophoresis που δημιουργείται λόγω θερμοκρασιακής διαφοράς στα δύο ημισφαίρια ενός σφαιριδίου.

5.1 Θερμικός ερπυσμός

Έστω ένα αραιοποιημένο ασυμπίεστο και σταθερής πίεσης ρευστό που βρίσκεται μεταξύ δυο ακίνητων παράλληλων πλακών απείρου μήκους που απέχουν μεταξύ τους απόσταση H και βρίσκονται στις θέσεις $y = \pm H/2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Η πλάκες δεν έχουν σταθερή θερμοκρασία, είναι δηλαδή $T = T(x)$ με την θερμοκρασία να αυξάνεται προς τη διεύθυνση x . Λόγω αυτής της θερμοκρασιακής κλίσης δημιουργείται ένα δυναμικό ορμής το οποίο αναγκάζει το τμήμα του ρευστού που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα να κινηθεί στη διεύθυνση x από την ψυχρότερη στην θερμότερη περιοχή.



Σχήμα 5.1: Ροή λόγω Θ.Ε. διαμέσου δυο παράλληλων πλακών.

Στη συγκεκριμένη ροή με βάση τις παραπάνω υποθέσεις οι συνιστώσες της μακροσκοπικής ταχύτητας στις διευθύνσεις y και z είναι μηδενικές και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$. Επίσης, αυτή η μη μηδενική συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση y και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Η ροή ανάμεσα σε πλάκες περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής στη x κατεύθυνση θεωρώντας ότι $u_y = u_z = 0$, $u = u(y)$, $\partial u_x / \partial x = 0$. Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.1) και (1.4) των Πινάκων 1-1 και 1-2 του Κεφαλαίου 1 και αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις και τις διαφορές πίεσης καταλήγουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1.1)$$

και

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (5.1.2)$$

Για λόγους συντομίας στους συμβολισμούς δεν χρησιμοποιούμε τον δείκτη και γράφουμε $u_x(y) = u(y)$. Η πρώτη εξίσωση οδηγεί στο συμπέρασμα $u = u(y)$ που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στη διατύπωση της δεύτερης εξίσωσης.

Οι οριακές συνθήκες ολίσθησης όπως αναφέρθηκε προηγουμένως θα είναι

$$u\left(\pm \frac{H}{2}\right) = \sigma_T \frac{\mu}{\rho T_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.3)$$

όπου $\sigma_T = 1.149$ είναι ο συντελεστής ολίσθησης θερμοκρασίας ορίζεται στο Κεφάλαιο 2 και διάφορες τιμές του μπορούν να βρεθούν στον Πίνακα 2-2. Οπότε το πρόβλημα κλείνει ως εξής

Πρόβλημα :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (5.1.4)$$

$$u(\pm \frac{H}{2}) = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.5)$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές ως προς y παίρνουμε

$$u = c_1 y + c_2$$

Κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης έχουμε

$$u(\frac{H}{2}) = c_1 \frac{H}{2} + c_2 \Rightarrow \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} = c_1 \frac{H}{2} + c_2$$

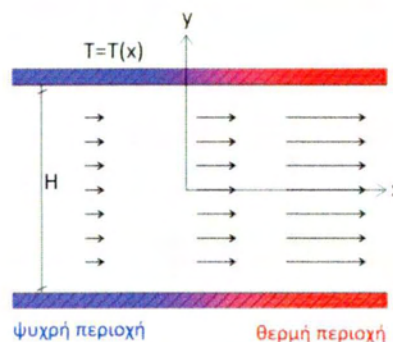
$$u(-\frac{H}{2}) = -c_1 \frac{H}{2} + c_2 \Rightarrow \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} = -c_1 \frac{H}{2} + c_2$$

Οπότε $c_1 = 0$ και $c_2 = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx}$

Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος του θερμικού ερπυσμού για ροή διαμέσου δύο ακίνητων πλακών απείρου μήκους είναι

$$u = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.6)$$

Παρατηρείται ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή για δεδομένη απόσταση x και μάλιστα είναι ίση με την ταχύτητα του ρευστού κοντά στο τοίχωμα. Μια ποιοτική μεταβολή της ταχύτητας δίνεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Ποιοτική μεταβολή της ταχύτητας λόγω $\Theta.E.$ διαμέσου δύο παράλληλων πλακών

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αδιαστατοποιήσουμε την ταχύτητα εισάγοντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$x' = \frac{x}{L}, \quad \rho = \frac{2P_0}{u_0^2}, \quad u' = \frac{u}{u_0}$$

όπου $u_0 = \sqrt{2Rt}$ η πιο πιθανή μοριακή ταχύτητα, και το x' παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Τότε η ταχύτητα γράφεται σε αδιάστατη μορφή ως εξής

$$u' = \frac{1}{2} \sigma_T Kn \frac{dT}{dx'}$$

Παρατηρείται ότι όταν βρισκόμαστε κοντά στη θερμοδυναμική ισορροπία, για ρευστά δηλαδή που βαθμός αραιοποίησης τους είναι μικρός ($Kn \approx 0$) δεν υφίσταται θερμικός ερπυσμός και ταχύτητα ροής στη διεύθυνση x .

Η μαζική παροχή \dot{M} του ρευστού που διέρχεται από μια επιφάνεια A δίνεται από τη σχέση

$$\dot{M} = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-H/2}^{H/2} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy dz = L \int_{-H/2}^{H/2} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy$$

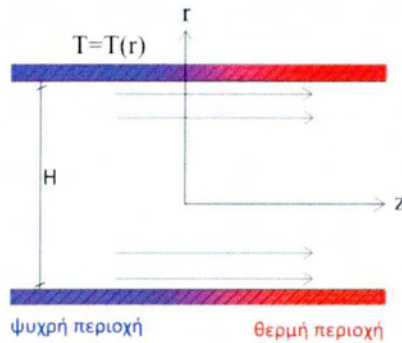
όπου L η απόσταση κάθετη στην επιφάνεια του χαρτιού. Επειδή όμως οι πλάκες έχουν θεωρηθεί απείρου μήκους $H \ll L$, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της μαζικής παροχής ανά μονάδα μήκους της z -διεύθυνσης $\dot{m} = \dot{M} / L$ και για $L = 1$ παίρνουμε

$$\dot{m} = \int_{-H/2}^{H/2} \rho u_x(y) dy = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} dy$$

Και επομένως η παροχή μάζας λόγω του θερμικού ερπυσμού διαμέσου δυο ακίνητων πλακών απείρου μήκους δίνεται από τη σχέση

$$\dot{m} = \sigma_T \frac{H \mu}{\Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.7)$$

Το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού όταν συμβαίνει σε αγωγό κυκλικής διατομής είναι επίσης εύκολο να επιλυθεί. Αν θεωρήσουμε ένα αραιοποιημένο ασυμπίεστο και σταθερής πίεσης ρευστό το οποίο βρίσκεται εντός ενός αγωγού κυκλικής διατομής απείρου μήκους ακτίνας R , το ρευστό ρέει στη διεύθυνση r λόγω μικρής θερμοκρασιακής κλίσης $\partial T / \partial r$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Ροή λόγω Θ.Ε. διαμέσου κυλινδρικού αγωγού.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις θ και r είναι μηδενικές και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι αυτή στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή $\mathbf{u} = (0, 0, u_z)$ όπου $u_z = u_z(r, \theta, z)$. Επίσης, λόγω συμμετρίας ισχύει ότι $\partial u_z / \partial \theta = 0$ συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση y και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Η ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής στη z -διεύθυνση θεωρώντας ότι $u_y = u_z = 0$ και $p = \text{σταθερή}$. Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1.2) και (1.9) των Πινάκων 1-1 και 1-4 του Κεφαλαίου 1 και αγνοώντας τις βαρυτικές δυνάμεις παίρνουμε

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (5.1.8)$$

και

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.1.9)$$

Για λόγους συντομίας στους συμβολισμούς δεν χρησιμοποιούμε τον δείκτη και γράφουμε $u_z = u$. Η πρώτη εξίσωση σε συνδυασμό με την $\partial u_z / \partial \theta = 0$, οδηγεί στο συμπέρασμα $u = u(r)$ δηλαδή ότι η συνιστώσα μεταβάλλεται μόνο στη διεύθυνση r και παραμένει σταθερή στις άλλες δύο διευθύνσεις.

Οι οριακές συνθήκες ολίσθησης που χρησιμοποιούνται είναι οι ίδιες με τη ροή ανάμεσα σε δύο πλάκες

$$u(R) = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.10)$$

όπου $\sigma_T = 1.149$ είναι ο συντελεστής ολίσθησης θερμοκρασίας όπως αυτός ορίζεται στο Κεφάλαιο 2. Οπότε το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής

Πρόβλημα :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (5.1.11)$$

$$u(R) = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.12)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (5.1.13)$$

Ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς r παίρνουμε

$$r \frac{du}{dr} = c_1$$

Κάνοντας χρήση της δεύτερης οριακής συνθήκης

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0 \text{ και επομένως } c_1 = 0$$

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά ως προς r είναι

$$u(r) = c_2$$

Κάνοντας χρήση της πρώτης οριακής συνθήκης

$$u(R) = c_2 \Rightarrow c_2 = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx}$$

Επομένως η αναλυτική λύση του προβλήματος του θερμικού ερπυσμού για ροή διαμέσου ενός κυλινδρικού αγωγού είναι

$$u(r) = \sigma_T \frac{\mu}{\rho \Gamma_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.14)$$

Παρατηρείται ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή για δεδομένη θέση z και μάλιστα είναι ίση με την ταχύτητα του ρευστού κοντά στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

Η μαζική παροχή \dot{M} που διέρχεται από την επιφάνεια A μιας τυχαίας διατομής στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση

$$\dot{M} = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx dy$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών χρησιμοποιώντας τους γνωστούς μετασχηματισμούς $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ εφαρμόζουμε τη σχέση

$$\iint_{(r)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D)} g(r, \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$\text{όπου } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta r \cos \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta = r$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω η ροή μάζας υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \iint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \rho u_z(r) r dr d\theta = 2\pi \rho \int_{r=0}^{r=R} u_z(r) r dr \\ &= 2\pi \rho \int_{r=0}^{r=R} \sigma_T \frac{\mu}{\rho T_w} \frac{dT}{dx} r dr = 2\pi \sigma_T \frac{\mu}{T_w} \frac{dT}{dx} \int_{r=0}^{r=R} r dr = \sigma_T \frac{\pi R^2 \mu}{T_w} \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

Και επομένως η παροχή μάζας λόγω του θερμικού ερπυσμού διαμέσου ενός κυλινδρικού αγωγού δίνεται από τη σχέση

$$\dot{M} = \sigma_T \frac{\pi R^2 \mu}{T_w} \frac{dT}{dx} \quad (5.1.15)$$

Τα αποτελέσματα του φαινομένου του θερμικού ερπυσμού γίνονται καλύτερα αντιληπτά με τη χρήση ενός αριθμητικού διαστατού παραδείγματος. Εξετάζεται η περίπτωση των παράλληλων πλακών. Ίδια μεθοδολογία μπορεί να ακολουθήσει ο ενδιαφερόμενος για την περίπτωση του κυλινδρικού αγωγού. Όπως και προηγουμένως ως ρευστά λειτουργίας θεωρούνται το He και το Xe. Έστω $L = 1m$ το μήκος των πλακών και $H = 1cm$ η μεταξύ τους απόσταση. Ως θερμοκρασία εισόδου και εξόδου αντίστοιχα θεωρούνται οι τιμές $T_1 = 280K$ και $T_2 = 320K$. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της ταχύτητας στη θέση $x_0 = 0$. Η θερμοκρασία σε αυτή τη θέση θεωρείται $T_0 \approx 300K$

Υποθέτοντας γραμμική κλίση της θερμοκρασίας υπολογίζουμε

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{320 - 280}{1} \frac{K}{m} = 40K/m$$

Η κατανομή ταχύτητας για το He και το Xe αντίστοιχα στη θέση x_0 υπολογίζεται από τη σχέση (5.1.6) ως εξής

$$u_{He} = \sigma_T \frac{\mu}{\rho_{He} T_0} \frac{dT}{dx} = (1.149) \frac{(19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)}{(0.1786 kg/m^3)(300K)} (40K/m) = 1.70 \cdot 10^{-5} m/s$$

$$u_{Xe} = \sigma_T \frac{\mu}{\rho_{Xe} T_0} \frac{dT}{dx} = (1.149) \frac{(23.28 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)}{(5.851 kg/m^3)(300K)} (40K/m) = 6.09 \cdot 10^{-7} m/s$$

Η παροχή μάζας λόγω θερμικού ερπυσμού διαμέσου δυο ακίνητων πλακών απείρου μήκους για το He και το Xe αντίστοιχα στη θέση x_0 υπολογίζεται από τη σχέση (5.1.7)

$$\dot{m}_{He} = \sigma_T \frac{H\mu_{He}}{T_0} \frac{dT}{dx} = (1.149) \frac{(0.01m)(19.92 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)}{(300K)} (40K/m) = 3.05 \cdot 10^{-8} kg/s$$

$$\dot{m}_{Xe} = \sigma_T \frac{H\mu_{Xe}}{T_0} \frac{dT}{dx} = (1.149) \frac{(0.01m)(23.28 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s)}{(300K)} (40K/m) = 3.56 \cdot 10^{-8} kg/s$$

Σημειώνεται ότι στο παραπάνω διαστατό παράδειγμα ο αριθμός Knudsen είναι κοντά στο μηδέν, αφού οι μέσες ελεύθερες διαδρομές των μορίων για τα δύο αέρια σε κανονικές συνθήκες είναι της τάξης των nm. Συγκεκριμένα η μέση ελεύθερη μοριακή διαδρομή σε ατμοσφαιρική πίεση για τα δυο αέρια υπολογίζεται ως εξής

$$\lambda_{He} = \frac{\mu_{He} (2R_{He}T)^{1/2}}{p} = \frac{(19.92 \times 10^{-6} Pa \cdot sec) [(2 \cdot 2077 J \cdot kgr^{-1} \cdot K^{-1})(300K)]^{1/2}}{(10^5 Pa)} = 2.22 \cdot 10^{-7} = 222nm$$

$$\lambda_{Xe} = \frac{\mu_{Xe} (2R_{Xe}T)^{1/2}}{p} = \frac{(23.28 \times 10^{-6} Pa \cdot sec) [(2 \cdot 63.32 J \cdot kgr^{-1} \cdot K^{-1})(300K)]^{1/2}}{(10^5 Pa)} = 4.53 \cdot 10^{-8} = 45.3nm$$

Άρα από τον ορισμό του αριθμού Knudsen

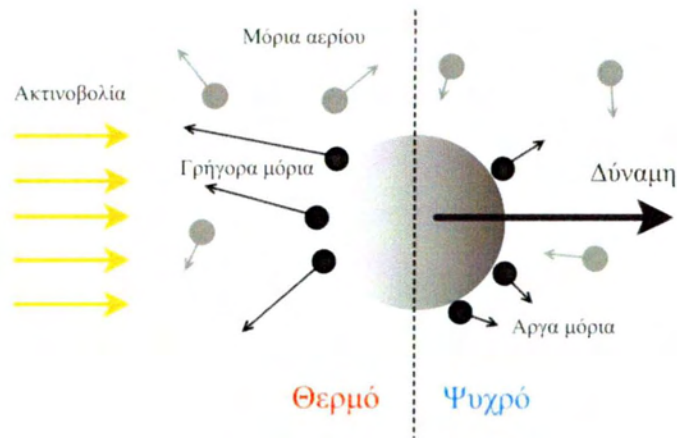
$$Kn = \frac{\lambda_{He}}{L} = 222 \cdot 10^{-9}$$

$$Kn = \frac{\lambda_{Xe}}{L} = 45 \cdot 10^{-9}$$

Από τη σχέση (5.1.6) γίνεται αντιληπτό ότι καθώς ο αριθμός Kn αυξάνει αυξάνουν και τα φαινόμενα ολίσθησης επομένως και η ταχύτητα ροής του ρευστού στη διεύθυνση- x . Για μικρές τιμές Kn ή για λιγότερο αραιοποιημένα ρευστά όπως φαίνεται από τα παραπάνω αποτελέσματα η ταχύτητα ροής και η παροχή μάζας είναι αμελητέες.

5.2 Photophoresis

Έστω ένα μικρό σωματίδιο με ανομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας στην επιφάνεια του, το οποίο βυθίζεται σε ένα αέριο. Τότε κοντά στη διεπιφάνεια σωματιδίου και ρευστού θα εμφανιστεί το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού. Σαν αποτέλεσμα στο σωματίδιο ασκείται μια δύναμη ανάλογη του συντελεστή θερμικής ολίσθησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Συνήθως μια τέτοια ανομοιόμορφη κατανομή της θερμοκρασίας συμβαίνει όταν η μια πλευρά του σωματιδίου είναι εκτεθειμένη σε κάποια φωτεινή ακτινοβολία ενώ η άλλη υποσκιάζεται. Αυτός είναι και ο λόγος που το φαινόμενο ονομάζεται photophoresis.



Σχήμα 5.5: Το φαινόμενο Photophoresis.

Έστω ένα σφαιρικό σωματίδιο με την ακόλουθη θερμοκρασιακή κατανομή στην επιφάνεια του

$$T(\theta) = T_0 + \Delta T \cos \theta$$

Για την επίλυση του προβλήματος επιλέγεται σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με $\theta = 0$ την διεύθυνση της ροής. Αγνοώντας τις αδρανειακές και τις εξωτερικές δυνάμεις και με $u_\varphi = 0$ και $\partial/\partial\varphi = 0$ λόγω συμμετρίας από τις εξισώσεις συνέχειας και N-S για ασυμπίεστη ροή $\rho = \text{σταθ}$ η εξίσωση συνέχειας για σφαιρικές συντεταγμένες (1.3) του Πίνακα 1-1 και οι εξισώσεις ορμής (1.10) και (1.11) του Πίνακα 1-4 του Κεφαλαίου 1 γίνονται αντίστοιχα

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (5.2.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} \right) \quad (5.2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (5.2.3)$$

όπου $u_r = u_r(r, \theta)$ και $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$ η ακτινική και η πολική συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα. Οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν τις παραπάνω εξισώσεις είναι οι οριακές συνθήκες ολίσθησης και για $r = R$ δίνουν

$$u_r(R) = 0 \quad (5.2.4)$$

$$u_\theta(R) = \sigma_T \frac{\mu}{R\rho T} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \sin \theta \quad (5.2.5)$$

όπου $\sigma_T = 1.125$ είναι ο συντελεστής θερμικής ολίσθησης (TSC) όπως αυτός ορίζεται στο Κεφάλαιο 2, μ το ιξώδες του ρευστού, R η ακτίνα του σφαιρικού σωματιδίου και ρ η πυκνότητα του. Σημειώνεται ότι καθώς το $r \rightarrow \infty$ η ταχύτητα εξαφανίζεται και το πρόβλημα πλησιάζει σε θερμοδυναμική ισορροπία, δηλαδή

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta = 0 \quad (5.2.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r = 0 \quad (5.2.7)$$

Εφαρμόζεται η μέθοδος των χωριζομένων μεταβλητών, οπότε αναζητούμε λύσεις τις μορφής [36]

$$u_r(r, \theta) = f(r) \cos \theta$$

$$u_\theta(r, \theta) = -g(r) \sin \theta$$

$$p(r, \theta) = \mu h(r) \cos \theta$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω συναρτήσεις στις εξισώσεις (5.2.1)-(5.2.3) παίρνουμε

$$g = \frac{1}{2} r f' + f \quad (5.2.8)$$

$$h = \frac{1}{2} r^2 f''' + 3r f'' + 2f' \quad (5.2.9)$$

$$r^3 f^{(iv)} + 8r^2 f''' + 8r f'' - 8f' = 0 \quad (5.2.10)$$

Η εξίσωση (5.2.5) είναι τύπου Euler και έχει γενική λύση

$$f(r) = r^n$$

όπου το n θα πρέπει να υπολογιστεί. Αντικαθιστώντας την γενική λύση στην εξίσωση (5.2.5) προκύπτει ένα πολυώνυμο τέταρτης τάξης ως προς n

$$n(n-1)(n-2)(n-3)r^{n-1} + 8n(n-1)(n-2)r^{n-1} + 8n(n-1)r^{n-1} - 8nr^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) + 8n(n-1)(n-2) + 8n(n-1) - 8n = 0$$

$$\Rightarrow n^4 + 2n^3 - 5n^2 - 6n = 0$$

$$\Rightarrow n(n+3)(n+1)(n-2) = 0$$

Όποτε ρίζες του πολυωνύμου είναι $n = 0, -3, -1, 2$ και η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση f στην εξίσωση (5.2.8) η συνάρτηση g γίνεται

$$\begin{aligned} g &= \frac{r}{2} \left(-\frac{3A}{r^4} - \frac{B}{r^2} + 2Dr \right) + \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \Rightarrow g = -\frac{3A}{2r^3} - \frac{B}{2r} + 2Dr^2 + \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \\ \Rightarrow g &= \left(\frac{-3A}{2} + A \right) \frac{1}{r^3} + \left(-\frac{B}{2} + B \right) \frac{1}{r} + (2D + D)r^2 \Rightarrow g = -\frac{A}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{r} + 3Dr^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις f και g στις συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) &= - \left(-\frac{A}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{r} + 3Dr^2 \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες (5.2.6) και (5.2.7) καθώς το $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r = 0 \Rightarrow \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \right) \cos \theta = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta = 0 \Rightarrow - \left(-\frac{A}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{r} + 3Dr^2 \right) \sin \theta = 0$$

Θα πρέπει $C = D = 0$. Οπότε οι συνιστώσες της ταχύτητας μειώνονται ως εξής

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} \right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) &= - \left(-\frac{A}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών (5.2.4) και (5.2.5) παίρνουμε

$$u_r(R) = 0 \Rightarrow \left(\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} \right) \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} = 0$$

$$\begin{aligned} u_\theta(R) &= -\sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \sin \theta \\ \Rightarrow - \left(-\frac{A}{2} \frac{1}{R^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{R} \right) \sin \theta &= -\sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \sin \theta \\ \Rightarrow -\frac{A}{2} \frac{1}{R^3} + \frac{B}{2} \frac{1}{R} &= \sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \\ \Rightarrow -\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} &= \sigma_T \frac{2\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω παίρνουμε

$$B = \sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T}, \quad A = -\sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} R^2$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας για ροή λόγω του φαινομένου photophoresis δίνονται από τις σχέσεις

$$u_r(r, \theta) = \sigma_T \frac{\mu}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{1}{r} - \frac{R^2}{r^3} \right) \cos \theta \quad (5.2.11)$$

$$u_\theta(r, \theta) = -\sigma_T \frac{\mu}{2R\rho} \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{1}{r} + \frac{R^2}{r^3} \right) \sin \theta \quad (5.2.12)$$

Η οπισθέλκουσα δύναμη υπολογίζεται ως εξής

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta - p_{rr}|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow D = 2\pi R^2 \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta - p_{rr}|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta$$

όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την τάση λόγω τριβής (viscous stress) και ο δεύτερος την τάση λόγω πίεσης (pressure stress). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.2.11) (5.2.12) στην εξίσωση ορμής (5.2.3) και ολοκληρώνοντας ως προς θ παίρνουμε

$$p = \sigma_T \frac{\mu^2}{R\rho} \frac{\Delta T}{T} \cos \theta$$

Η τάση λόγω πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$p_{rr} = p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = -3\sigma_T \frac{\mu^2}{R^2\rho} \frac{\Delta T}{T} \cos \theta$$

Η τάση λόγω τριβής υπολογίζεται ως εξής

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R} = -3\sigma_T \frac{\mu^2}{R^2\rho} \frac{\Delta T}{T} \sin \theta$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση της οπισθέλκουσας παίρνουμε

$$D = -4\pi\sigma_T \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\Delta T}{T} \quad (5.2.13)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι εάν η δεξιά πλευρά της σφαίρας είναι θερμότερη από την αριστερή πλευρά, η σφαίρα θα κινηθεί προς τα αριστερά.

5.1 Κύρια συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιλύθηκαν αναλυτικά κλασικά προβλήματα ρευστομηχανικής στην υδροδυναμική περιοχή και στην περιοχή ολίσθησης. Στην υδροδυναμική περιοχή χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις N-S συνοδευόμενες με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, ενώ στην περιοχή ολίσθησης χρησιμοποιήθηκαν οριακές συνθήκες ολίσθησης της ταχύτητας και της θερμοκρασίας τύπου Maxwell πρώτης τάξης.

Η τιμή του συντελεστής ιξώδους ολίσθησης που εμφανίζεται στις συνθήκες ολίσθησης της ταχύτητας αντλήθηκε από την κινητική θεωρία (μοντέλο S) ίση με $\sigma_p = 1.018$, ενώ η τιμή του συντελεστή θερμικής ολίσθησης που εμφανίζεται στις συνθήκες ολίσθησης της θερμοκρασίας επίσης από την κινητική θεωρία επιλέχθηκε στην τιμή $\sigma_T = 1.175$.

Σε κάθε πρόβλημα δόθηκαν αριθμητικά διαστατά παραδείγματα ροών με ρευστά λειτουργίας το Ήλιο (He) και το Ξέον (Xe) στις δυο περιοχές. Συγκεκριμένα στην υδροδυναμική περιοχή θεωρήθηκε ότι $Kn = 0$ ενώ στην περιοχή ολίσθησης ότι $Kn = 0.1$. Έπειτα υπολογίστηκαν αριθμητικά βασικά μεγέθη ροής όπως η ταχύτητα ροής, η μαζική παροχή, η διατμητική τάση και η οπισθέλκουσα δύναμη.

Παρατηρήθηκε ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός Knudsen η επίδραση των φαινομένων ολίσθησης αυξάνει σημαντικά. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για ροές αραιοποιημένων ρευστών ή για εφαρμογές σε μικρές γεωμετρίες (της τάξης των μικρών) η επίδραση των φαινομένων ολίσθησης δεν μπορεί να αγνοηθεί και πρέπει να ληφθεί οπωσδήποτε υπόψη στον παραμετρικό σχεδιασμό του προβλήματος.

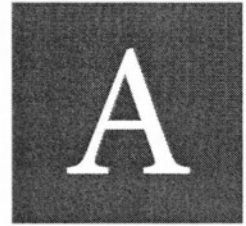
5.2 Μελλοντική εργασία

Οι εξισώσεις N-S πέρα του πλεονεκτήματος της γρηγορότερης σύγκλισης έναντι των εξισώσεων τις κινητικής θεωρίας, παρέχουν μια καλύτερη αντίληψη των φυσικών παραμέτρων και μεγεθών του προβλήματος συμβάλλοντας με αυτόν τον τρόπο σε μια καλύτερη συνολική εποπτεία του προβλήματος σε σχέση με τις μεθόδους προσομοίωσης. Αυτός είναι και ο λόγος ερευνητές μηχανικοί προσπαθούν να επεκτείνουν το εύρος της εφαρμοστικότητας των εξισώσεων N-S πέρα του ορίου της περιοχής ολίσθησης, δηλαδή για πιο αραιοποιημένα ρευστά, χρησιμοποιώντας μοντέλα οριακών συνθηκών δεύτερης τάξης.

Επέκταση της παρούσας εργασίας θα μπορούσε να είναι η αναλυτική επίλυση των προβλημάτων ροής με οριακές συνθήκες ολίσθησης 2^{ης} τάξης. Επίσης θα μπορούσε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων των λύσεων με συνθήκες ολίσθησης 1^{ης} και 2^{ης} τάξης με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από τη λύση των εξισώσεων της κινητικής θεωρίας. Επίσης θα μπορούσε να γίνει σύγκριση μεταξύ των χρόνων σύγκλισης μεταξύ των δυο μεθόδων σε βασικά ή και πιο σύνθετα προβλήματα ροών.

- [1] Dugas, Rene, "A History of Classical Mechanics", New York, NY: Dover Publications, 1988, pg 19.
- [2] Rana, N.C., and Joag, P.S. "Classical Mechanics", West Petal Nagar, New Delhi, 1991, pg 6.
- [3] Renn, J., Damerow, P., and McLaughlin, P. "Aristotle, Archimedes, Euclid, and the Origin of Mechanics: The Perspective of Historical Epistemology", Berlin: Max Planck Institute for the History of Science, 2010, pg 1-2.
- [4] R. L. Bisplinghoff, J. W. Mar and T. H. H. Pian, "Statics of Deformable Solids", Dover, 1965.
- [5] R. Soutas-Little .History of continuum mechanics.InJ. MerodioandG. Saccomandi ,editors, ContinuumMechanics, EOLSS-UNESCO Encyclopedia, chapter 2. Paris: UNSECO, 2009. Available online at <http://www.eolss.net>.
- [6] Αγγέλου Θ. Παπαιωάννου, Μηχανική των Ρευστών, Β' Έκδοση Τόμος 1, 2002.
- [7] Atkins,P., and Trapp, A., Physical Chemistry, 5th ed., Freeman, San Francisco, 1994.
- [8] Βασίλιος Καπλακίδης, σημειώσεις Μηχανικής Συνεχούς Μέσου, πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών, 2006].
- [9] M.Gad-elHak, TheMEMSHandbook, CRCPress,Florida,USA,2002.
- [10] F. Sharipov, Data on the velocity slip and temperature jump on a gas-solid interface", J. Phys. Chem. Ref. Data. **40**(2),023101-28 (2011)
- [11] W. Steckelmacher. Knudsen flow 75 years on: the current state of the art for flow rarefied gases in tubes. Rep. Prog. Phys., (49:1083-1107), 1986.
- [12] Errol B. Arkilic, "Measurement of the mass flow and tangential momentum accomodation coefficient in silicon micromachined channels", PHD thesis , Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1997.
- [13] E. Verpoorte, N. F. De Rooij, "Microfluidics meets MEMS", Proceedings of the IEEE, Volume 91, Issue 6, (2003).
- [14] P. Sandeep,M. D. Deshpande, " The no-slip boundary condition in fluid mechanics", Journal: Resonance, vol. 9, no. 4, pp. 50-60, 2004, DOI: [10.1007/BF02834856](https://doi.org/10.1007/BF02834856).
- [15] S. Goldstein ed. (1957) Modern developments in Fluid Dynamics, vol. II, Oxford Atthe Clarendon Press.
- [16] J.H. Arakeri & P.N. Shankar (2000) Ludwig Prandtl and Boundary Layers in Fluid Flow. Resonance, **5**, December 2000, pp 48 – 63] .
- [17] E.H. Kennard, Kinetic theory of gases with an introduction to statistical mechanics, Allied Pacific, Bombay (1962).
- [18] N. Dongari, A. Agrawal, "Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 50, No. 17-18. (August 2007), pp. 3411-3421, doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.01.048.
- [19] Errol Arkilic. Gaseous flow in micron-sized channels. Master's thesis, Massachusetts Institute of Tech- nology, Cambridge, MA, January 1994.

- [20] Errol Arkilic, Measurement of the mass flow and tangential momentum accommodation coefficient in silicon micro-machined channels. Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [21] D. Valougeorgis, G. Breyiannis, S. Varoutis, " Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter", *European Journal of Mechanics / B Fluids*, Volume 27, issue 5 (September - October, 2008), p. 609-622. ISSN: 0997-7546 DOI: 10.1016/j.euromechflu.2007.10.002 .
- [22] L.B. Barichello, M. Camargo, P. Rodrigues, C.E. Siewert, Unified solution to classical flow problems based on the BGK model, *Z. Angew. Math. Mech.* 52 (2001) 517–534.
- [23] Σαράντης Πανταζής, Υπολογιστική μελέτη φαινομένων ροής με οριακές συνθήκες ολίσθησης, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2007.
- [24] Gad-el-Hak M., 2002 *The MEMS Handbook*, CRC Press LLC.
- [25] S. Colin, P. Lalonde and R. Caen. Validation of a second-order slip flow model in rectangular microchannels. *Heat Transfer Engineering*. 25(3)23-30.(2004).
- [26] Aubert C., Colin S, "High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microducts", *Microscale Thermophysical Engineering - MICROSCALE HERMOPHYS ENG* , vol. 5, no. 1, pp. 41-54, (2001)doi: 10.1080/108939501300005367.
- [27] G.E. Karniadakis, A. Beskok, *Microflows – Fundamentals and simulations*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [28] S. Colin, Rarefaction and compressibility effects on steady and transient gas flows in microchannels, *Microfluid. Nanofluid.* 1 (2005)268–279.
- [29] A.K. Srekanth, Slip flow through long circular tubes, in: L. Trilling, H.Y. Wachman (Eds.), *Proceedings of the sixth international symposium on Rarefied Gas Dynamics*, Academic Press, 1969, pp. 667–680.
- [30] Carlo Cercignani and Silvia Lorenzani, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, Milano 20133, Italy, *Phys. Fluids* 22, 062004 (2010).
- [31] A. Beskok and G.E. Karniadakis, "A model for flows in channels, pipes and ducts at micro- and nano-scales," *J. Microscale Thermophysical Engineering*, vol. 3, pp. 43-77, 1999. doi:10.1080/108939599199864.
- [32] A.S. Dvinsky, A.S. Popel, "Motion of a rigid cylinder between parallel plates in stokes flow: Part 2: Poiseuille and Couette flow" Original Research Article "*Computers & Fluids*, Volume 15, Issue 4, 1987, Pages405-41"
- [33] Saptarshi Basu, Souma Chowdhury, Suman Chakraborty, "Influences of pressure gradients on freezing Poiseuille – Couette flows", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 50, Issues 21–22, October 2007, Pages 4493-4498.
- [34] Wistein, Eric W. "SphericalCoordinates" from Mathworld Wolfram web resource.
- [35] "Noble Gas", *Encyclopaedia Britannica*, (2008)
- [36] Ching Shen , "Rarefied Gas Dynamics: Fundamentals, Simulations and Micro Flows" , Springer Berlin Heidelberg, (2005) ISBN: 978-3-540-23926-0 DOI 10.1007/b138784, (σελ 225)



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παρακάτω απαριθμούνται μερικές διανυσματικές σχέσεις που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη της μηχανικής των ρευστών. Ο αναγνώστης θα βρει περισσότερο υλικό σε οποιοδήποτε βιβλίο μαθηματικών που πραγματεύεται το πεδίο της διανυσματικής ανάλυσης.

A.1 Διανυσματικές ιδιότητες

Στις παρακάτω σχέσεις, φ είναι οποιοδήποτε βαθμωτό μέγεθος και \mathbf{a} , \mathbf{b} και \mathbf{c} οποιοδήποτε διάνυσμα.

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \times \mathbf{a} + \varphi (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

A.2 Διανυσματικοί τελεστές

A.2.1 Υλική παράγωγος

Υλική παράγωγος (material derivative) ή Λαγκρασιανή παράγωγος (Lagrangian derivative) μιας βαθμωτής συνάρτησης Θ

$$\text{σε καρτεσιανές συντεταγμένες: } \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\Theta$$

$$\text{σε κυλινδρικές συντεταγμένες: } \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + u_z \frac{\partial\Theta}{\partial z}$$

$$\text{σε σφαιρικές συντεταγμένες: } \frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial\Theta}{\partial\phi}$$

A.2.2. Λαπλασιανός τελεστής

Λαπλασιανός τελεστής (Laplacian operator) $\nabla \cdot \nabla$, ∇^2 ή Δ μιας διανυσματικής συνάρτησης f

$$\text{σε καρτεσιανές συντεταγμένες: } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{σε κυλινδρικές συντεταγμένες: } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{σε σφαιρικές συντεταγμένες: } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

,όπου ϕ η αζιμουθιακή και θ η πολική γωνία

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι η λεπτομερής παρουσίαση των εξισώσεων Navier-Stokes στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Παρόλο που οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως ανάπτυγμα τις γενικής τους διανυσματικής μορφής, η ανάγνωση της ανεπτυγμένης εξίσωσης δυσχεραίνει όταν αντικατασταθεί ο τανυστής τάσης T .

B.1 Γενική διανυσματική μορφή

Στη γενική τους διανυσματική μορφή οι εξισώσεις διατηρούν τη συνεκτικότητα τους, περιλαμβάνοντας την υλική παράγωγο D/Dt , την απόκλιση του διανύσματος της ταχύτητας $\nabla \cdot \mathbf{u}$ και τον λαπλασιανό τελεστή ∇^2 . Οι ανεπτυγμένες μορφές των παραπάνω τελεστών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα A.

B.1.1 Διαφορική εξίσωση συνέχειας

Η διαφορική εξίσωση συνέχειας αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου. [παπαιωαννου σελ 380] Η γενική μορφή της σε ανυσματικό συμβολισμό δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

B.1.2 Διαφορική εξίσωση ορμής

Η διαφορική εξίσωση ορμής είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο κίνησης του Newton. Η γενική μορφή της σε ανυσματικό συμβολισμό δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right] \\ &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \mathbf{T}'\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

,όπου \mathbf{T} ένας συμμετρικός τανυστής τάσης. Οι όροι του τανυστή σε ανεπτυγμένη μορφή για τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων αναφέρονται παρακάτω.

B.1.3 Διαφορική εξίσωση ορμής, σταθερό ιξώδες

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right] \\ &= \mathbf{f} - \nabla p - \mu \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{u})] + (\kappa + 2\mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}] \\ &= \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\kappa + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

B.1.4 Διαφορική εξίσωση ορμής, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Τανυστής τάσης

Η εντατική κατάσταση περιγράφεται με ένα συμμετρικό τανυστή \mathbf{T} , οι όροι του οποίου μπορούν να ανεπτυχθούν σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

B.2.1.Καρτεσιανό

Οι όροι του διανύσματος της ταχύτητας (u_x, u_y, u_z) σε συνδιασμό με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z)

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

B.2.2. Κυλινδρικό

Οι όροι του διανύσματος της ταχύτητας (u_r, u_θ, u_z) σε συνδιασμό με το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, z)

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{zr} &= \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\
 \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

B.2.3. Σφαιρικό

Οι όροι του διανύσματος της ταχύτητας $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ σε συνδιασμό με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
 \tau_{\theta\varphi} &= \tau_{\varphi\theta} = \mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \\
 \tau_{\varphi r} &= \tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.3 Καρτεσιανές εξισώσεις Navier-Stokes, γενική ανεπτυγμένη μορφή

B.3.1 Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.8})$$

B.3.2 x-Ορμή

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + k \nabla \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

B.3.3 y-Ορμή

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + k \nabla \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{B.10})$$

B.3.4 z-Ορμή

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + k \nabla \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{B.11})$$

B.4 Καρτεσιανές εξισώσεις Navier-Stokes, σταθερό ιξώδες

B.4.1 x-Ορμή, σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + (\mu + \kappa) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.12})$$

B.4.2 y-Ορμή, σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y + (\mu + \kappa) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.13})$$

B.4.3 z-Ορμή, σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + (\mu + \kappa) \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.14})$$

B.5 Καρτεσιανές εξισώσεις Navier-Stokes, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

B.5.1 x-Ορμή, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla u_x^2 \quad (\text{B.15})$$

B.5.2 y-Ορμή, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla u_y^2 \quad (\text{B.16})$$

B.5.3 z-Ορμή, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla u_z^2 \quad (\text{B.17})$$

B.6 Κυλινδρικές εξισώσεις Navier-Stokes, γενική ανεπτυγμένη μορφή

B.6.1 Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0 \quad (\text{B.18})$$

B.6.1 z-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_z}{Dt} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.6.1 θ-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \\ &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] + \frac{2\mu}{r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.6.1 r-Ορμή

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) \\
 &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \quad (\text{B.21}) \\
 &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{2\mu}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]
 \end{aligned}$$

B.7 Κυλινδρικές εξισώσεις Navier-Stokes, σταθερό ιξώδες

B.7.1 x-Ορμή

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{Du_z}{Dt} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.22}) \\
 &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + (\kappa + \mu) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

B.7.2. y-Ορμή

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \quad (\text{B.23}) \\
 &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + (\kappa + \mu) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

B.7.3. z-Ορμή

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) \quad (\text{B.24}) \\
 &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + (\kappa + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

B.8 Κυλινδρικές εξισώσεις Navier-Stokes, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

B.8.1 r-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \\ &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] = f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

B.8.2 θ-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) \\ &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

B.8.3 z-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_z}{Dt} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

B.9 Σφαιρικές εξισώσεις Navier-Stokes, γενική ανεπτυγμένη μορφή

B.9.1 Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) = 0 \quad (\text{B.28})$$

B.9.2 r-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} \right) &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right] \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[4 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{4u_r}{r} - \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

B.9.3 θ-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[\frac{2 \cot \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2u_\theta \cot^2 \theta}{r} + 3r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

B.9.4 φ-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_\varphi}{Dt} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} \right) &= f_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) + \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[\frac{3}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + 3r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) + \frac{2 \cot \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{2 \cot \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

B.10 Σφαιρικές εξισώσεις Navier-Stokes, σταθερό ιξώδες

B.10.1 r-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} \right) &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ &+ (\kappa + \mu) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

B.10.2 θ-Ορμή

$$\rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = f_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + (\kappa + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{B.33})$$

B.10.3 φ-Ορμή

$$\rho \left(\frac{Du_\phi}{Dt} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) = f_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) + (\kappa + \mu) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{B.34})$$

B.11 Σφαιρικές εξισώσεις Navier-Stokes, ασυμπίεστη ροή και σταθερό ιξώδες

B.11.1 r-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) & \quad (\text{B.35}) \\ &= f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

B.11.2 θ-Ορμή

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) & \\ &= f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

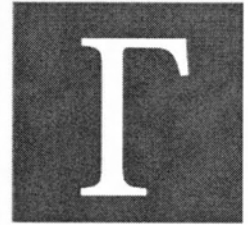
B.11.3 φ-Ορμή

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{Du_\varphi}{Dt} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} \right) &= f_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\nabla^2 u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \\
 \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} \right) & \quad (B.37) \\
 = f_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\varphi \sin \theta) \right) \right) & \\
 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} &
 \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι η r-συνιστώσα των εξισώσεων Navier-Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να απλοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση συνέχειας [1],[2]

[1] R.B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, 2th edition. Wiley 2002

[2] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, Dynamics of Polymeric Fluids: Volume 1 Fluid Mechanics, Wiley: NY, 1987



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ He, Xe

Το He και το Xe ανήκουν στα ευγενή αέρια (γνωστά και ως αδρανή ή σπάνια αέρια). Γενικά, είναι μια ομάδα χημικών στοιχείων, με πολύ παρόμοιες ιδιότητες: Υπό συνηθισμένες συνθήκες ($T = 25^{\circ}C$, $P = 1atm$) είναι άοσμα και άχρωμα μονατομικά αέρια, με πολύ μικρή χημική δραστηριότητα.

Παρακάτω δίνεται ο πίνακας δυναμικού ιξώδους του Ήλιου και του Ξένο σε $\mu Pa \cdot sec$ για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας σε κλίμακα K .

Πίνακας Γ-1 Δυναμικό ιξώδες σε ατμοσφαιρική πίεση για το Ήλιο (He) και το Ξένο (Xe)				
Θερμοκρασία	Ιξώδες			
	He		Xe	
T	μ	$\pm \Delta \mu$	μ	$\pm \Delta \mu$
(K)	(μPa sec)		(μPa sec)	
20	3,47	0,1		
30	4,41	0,08		
40	5,29	0,07		
50	6,12	0,05		
60	6,90	0,05		
100	9,66	0,04		
110	10,28	0,04		
120	10,88	0,03		
200	15,17	0,02	15,85	0,05
220	16,16	0,02	17,31	0,04
240	17,12	0,02	18,79	0,04
300	19,92	0,01	23,28	0,03
400	24,34	0,02	30,68	0,05
500	28,46	0,03	37,64	0,09



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000118297