



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΪΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μύρων Καμπιτάκης

Αθήνα, Φεβρουάριος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΪΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μύρων Καμπιτάκης

Συμβουλευτική επιτροπή : Γεώργιος Σταμούλης
Νικόλαος Ουζούνογλου
Ιωάννης Τίγκελης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 11η Φεβρουαρίου 2011.

.....
Γ.Σταμούλης
Καθηγητής Π.Θ.

.....
Ν.Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ι.Τίγκελης
Αν.Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

.....
Ι.Κουτσόπουλος
Επ.Καθηγητής Π.Θ.

.....
Δ.Κακλαμάνη
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Γ.Κυριακού
Αν.Καθηγητής Δ.Π.Θ.

.....
Ν.Ευμορφόπουλος
Λέκτορας Π.Θ.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2011

.....

Μύρων Ε. Καμπιτάκης

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Copyright © Μύρων Ε. Καμπιτάκης, 2011.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η ανάλυση και σχεδίαση μικροκυματικών μεταϋλικών μέσων διάδοσης. Τα μεταϋλικά (metamaterials) εμφανίζουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές των συντακτικών τους παραμέτρων ϵ και μ σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων, με αποτέλεσμα αρκετά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά, όπως η εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης, η αντιστροφή του φαινομένου Doppler και το γεγονός ότι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας, που χαρακτηρίζει την κατεύθυνση μετάδοσης της ισχύος, έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Η ηλεκτροδυναμική συμπεριφορά υλικών μέσων με αρνητικό δείκτη διάθλασης μελετήθηκε για πρώτη φορά από το Ρώσο επιστήμονα Veselago το 1968, ο οποίος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τέτοιου είδους υλικά δεν υπάρχουν στη φύση, αλλά είναι δυνατό να κατασκευαστούν τεχνητά. Το θέμα δεν έτυχε περαιτέρω διερεύνησης από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα στις επόμενες δεκαετίες, μέχρι και το 1999, όταν επανήλθε στο προσκήνιο από την ομάδα του Βρετανού επιστήμονα Pendry στο πανεπιστήμιο Imperial, ο οποίος πρότεινε μία μέθοδο για την εμφάνιση αρνητικής μαγνητικής διαπερατότητας μ από αγωγούς. Η δομή που προτάθηκε αποτελούνταν από μία συστοιχία διαχωρισμένων δακτυλίων (Split Ring Resonators) και εμφάνιζε αρνητικό μ γύρω από ένα στενό εύρος ζώνης συχνοτήτων. Ο συνδυασμός της δομής των διαχωρισμένων δακτυλίων με λεπτά μεταλλικά σύρματα παρείχε αρνητική μαγνητική διαπερατότητα μ και διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ αντίστοιχα, οδηγώντας στην ανάπτυξη ενός σύνθετου υλικού με αρνητικό δείκτη διάθλασης από μία ομάδα ερευνητών στο πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια (UCSD). Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα η ανάπτυξη μεταϋλικών μέσων να απασχολήσει ιδιαίτερα την επιστημονική κοινότητα την τελευταία δεκαετία.

Στην παρούσα διατριβή προτείνεται μία τελείως διαφορετική δομή ως υποψήφιο μεταϋλικό μέσο, η οποία καθιστά ευκολότερη τη φυσική του υλοποίηση και προσφέρεται για λειτουργία τόσο στις μικροκυματικές (GHz) όσο και σε υψηλότερες συχνότητες (THz). Η δομή που επιλέγεται για τη μοντελοποίηση του μεταϋλικού συνίσταται από ένα τρισδιάστατο κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες είναι μαγνητικά αδρανείς. Η συγκεκριμένη δομή εκμεταλλεύεται το φαινόμενο του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών που πραγματοποιείται σε συγκεκριμένες συχνότητες και έχει ως αποτέλεσμα τη μεγιστοποίηση του πλάτους του σκεδαζόμενου H/M πεδίου. Σημειώνεται επίσης ότι το μέσο στο σύνολό του εμφανίζει ισοτροπική συμπεριφορά, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό

με την περιοδικότητα της δομής, διευκολύνει την ανάλυση της ηλεκτρομαγνητικής του συμπεριφοράς. Αποδεικνύεται ότι η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα μ_{eff} και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά ϵ_{eff} της συνολικής δομής εξαρτώνται άμεσα από το συντονισμό των μεμονωμένων σφαιρών και οι τιμές τους εμφανίζουν απότομες αυξομειώσεις γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να προκύπτουν αρνητικές σε ορισμένο εύρος ζώνης. Την ιδιότητα αυτή εκμεταλλευόμαστε στη δημιουργία ενός μέσου με αρνητικό δείκτη διάθλασης (μεταϋλικό), του οποίου οι συντακτικές παράμετροι ϵ και μ λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές.

Το 1^ο κεφάλαιο της διατριβής ξεκινά με μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση παρουσιάζοντας τα σπουδαιότερα αποτελέσματα των επιστημονικών μελετών στο πεδίο έρευνας των metamaterials και τις σημαντικότερες πιθανές εφαρμογές των μεταϋλικών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη δυνατότητα ανάπτυξης ενός τέλει φακού (perfect lens), ο οποίος επιτυγχάνει εστίαση με διακριτική ικανότητα μεγαλύτερη από το φράγμα του μήκους κύματος, καθώς και στα κυκλωματικά ισοδύναμα των μεταϋλικών που επιτρέπουν την κατασκευή διατάξεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά λειτουργίας.

Στο 2ο κεφάλαιο μελετώνται διεξοδικά οι φασματικές ιδιότητες των μεταϋλικών μέσων διάδοσης, προκειμένου να καταλήξουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την ιδιαίτερη ηλεκτρομαγνητική τους συμπεριφορά. Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρείται μία πλάκα από μεταϋλικό. Η μέθοδος ανάλυσης βασίζεται στους μετασχηματισμούς Fourier και το H/M πεδίο εκφράζεται ως επαλληλία επιπέδων κυμάτων. Επίσης, η πλήρης περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου συνίσταται τόσο από το διακριτό (επιφανειακά κύματα) όσο και από το συνεχές (ακτινοβολούμενα κύματα) φάσμα ιδιοτιμών. Τα κύρια συμπεράσματα προκύπτουν από την καμπύλη διασποράς του μέσου, όπου απεικονίζεται η μεταβολή της σταθεράς διάδοσης καθώς και της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει της συχνότητας, στο εύρος συχνοτήτων όπου οι συντακτικές παράμετροι ϵ και μ προκύπτουν ταυτόχρονα αρνητικές. Συγκεκριμένα, διακρίνονται οι διάφορες κατηγορίες ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που είναι δυνατό να υποστηρίξει η πλάκα από μεταϋλικό σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά μέσα και προκύπτει το βασικό συμπέρασμα ότι η σταθερά διάδοσης για τα διαδιδόμενα και φθίνοντα επιφανειακά κύματα μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας, με αποτέλεσμα η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης να είναι αντιπαράλληλες, γεγονός που δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά με θετικά ϵ και μ .

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η προτεινόμενη δομή για τη μοντελοποίηση του μεταϋλικού μέσου, η οποία αποτελείται από ένα κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι

οποίες είναι μαγνητικά αδρανείς. Η συγκεκριμένη δομή καθιστά εύκολη τη φυσική υλοποίηση του υπό σχεδίαση μεταλλικού και προσφέρεται για λειτουργία στις μικροκυματικές συχνότητες. Η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθείται βασίζεται στη θεωρία του ενεργού μέσου (effective medium theory), σύμφωνα με την οποία ένα μέσο διάδοσης χαρακτηρίζεται ως ενεργό όταν ένα προσπίπτον Η/Μ κύμα δεν αντιλαμβάνεται τις ασυνέχειες του μέσου. Ο κύριος περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται είναι ότι το μήκος κύματος ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο (host medium) πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να συσχετίσουμε τις παραμέτρους σκέδασης από μία μεμονωμένη σφαίρα (σκέδαση Mie) με την ενεργό διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών.

Το κεφάλαιο ξεκινά με τη μελέτη του προβλήματος της σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα και του φαινομένου του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η θεωρία του ενεργού μέσου, η οποία βασίζεται στη θεώρηση των σφαιρών ως ισοδύναμων ηλεκτρικών και μαγνητικών διπόλων και οδηγεί σε αναλυτικές εκφράσεις για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά και ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών. Ο ηλεκτρομαγνητικός συντονισμός των σφαιρών είναι ιδιαίτερα έντονος όταν το υλικό των σφαιρών εμφανίζει υψηλή διηλεκτρική σταθερά, της τάξης του 100. Θεωρώντας τέτοια υλικά, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά προκύπτουν αρνητικές σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα. Ωστόσο, η εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης για το σύνολο της δομής προϋποθέτει η μαγνητική διαπερατότητα και η διηλεκτρική σταθερά του μέσου να λαμβάνουν στο ίδιο εύρος ζώνης αρνητικές τιμές, δηλαδή να συμπίπτουν οι συχνότητες μαγνητικού και ηλεκτρικού συντονισμού, γεγονός που δεν μπορεί να συμβεί αν όλες οι σφαίρες αποτελούνται από το ίδιο διηλεκτρικό υλικό και έχουν την ίδια ακτίνα. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται θεωρώντας ότι η δομή αποτελείται από δύο είδη σφαιρών διαφορετικής ακτίνας αλλά από το ίδιο υλικό. Δεδομένου ότι οι ηλεκτρικοί συντονισμοί μίας σφαίρας εμφανίζονται σε συχνότητες μεγαλύτερες από τους αντίστοιχους μαγνητικούς και οι συχνότητες συντονισμού είναι αντιστρόφως ανάλογες της ακτίνας της σφαίρας, οι διαστάσεις των σφαιρών της δομής επιλέγονται έτσι ώστε να συμπίπτουν η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών μικρής ακτίνας με τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών μεγαλύτερης ακτίνας. Ο δείκτης διάθλασης του

συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση $n_{\text{eff}} = \pm\sqrt{\mu_r^{\text{eff}} \epsilon_r^{\text{eff}}}$ και το πραγματικό μέρος του προκύπτει πράγματι αρνητικό γύρω από τη συχνότητα συντονισμού.

Στο τέλος του κεφαλαίου πραγματοποιείται προσομοίωση της διάταξης (full wave simulation) με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου HFSS (High Frequency Structure Simulator), τα αποτελέσματα της οποίας ποιοτικά επιβεβαιώνουν την αναλυτική προσέγγιση με τη θεωρία του ενεργού μέσου, με τη διαφορά ότι το εύρος ζώνης στο οποίο προκύπτει αρνητικός δείκτης διάθλασης είναι μικρότερο από αυτό που υπολογίζεται με αναλυτικές μεθόδους. Εντούτοις, η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθείται στο 3^ο κεφάλαιο είναι μία πρώτη τάξης προσέγγιση του προβλήματος που παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο είναι αρκετά μεγαλύτερο της διαμέτρου των σφαιρών και δεν αποτελεί την πλήρη λύση, αφού αγνοεί συνεισφορές από ανώτερης τάξης ρυθμούς καθώς και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η πλήρης λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης, σύμφωνα με την οποία το προσπίπτον πεδίο σε κάθε σφαίρα είναι το άθροισμα όλων των κυμάτων που σκεδάζονται από τις υπόλοιπες σφαίρες. Η θεωρία της πολλαπλής σκέδασης αποδίδει επακριβώς τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και εφαρμόζεται ανεξαρτήτως περιορισμών, σε αντίθεση με τη θεωρία του ενεργού μέσου. Το κεφάλαιο ξεκινά με τη μελέτη της σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα και της σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών, περιοδικά διατεταγμένων. Λόγω περιοδικότητας της διάταξης, το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα στη θέση R διαφέρει από το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα στην αρχή των συντεταγμένων μόνο κατά έναν παράγοντα φάσης (Θεώρημα Bloch) διευκολύνοντας την ανάλυση. Συμπεραίνουμε ότι το σκεδαζόμενο κύμα από ένα επίπεδο σφαιρών εκφράζεται συναρτήσει των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα, των σταθερών δομής Ω , οι οποίοι εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών του επιπέδου, καθώς και των συντελεστών ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου. Οι σταθερές δομής μελετώνται διεξοδικά καταλήγοντας σε αναλυτικούς τύπους και λεπτομέρειες για τον ιδιαίτερα πολύπλοκο υπολογισμό τους. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης από το επίπεδο σφαιρών εκφράζοντας το σκεδαζόμενο πεδίο ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων. Στη συνέχεια, γίνεται μελέτη της σκέδασης από περισσότερα επίπεδα σφαιρών, αφού το μεταϊλικό αποτελείται από την επαλληλία εναλλασσόμενων επιπέδων από σφαίρες, έτσι ώστε σε κάθε επίπεδο οι σφαίρες να έχουν την ίδια ακτίνα, αλλά στο αμέσως επόμενο επίπεδο η ακτίνα των σφαιρών να είναι διαφορετική. Αρχικά υπολογίζονται οι

πίνακες διέλευσης και ανάκλασης για δύο επίπεδα σφαιρών συνδυάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες για κάθε επίπεδο. Θεωρώντας ότι το μεταϋλικό αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλαμβανόμενων σύνθετων πλακιδίων, καθένα από τα οποία περιέχει δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας, προσδιορίζονται οι αντίστοιχοι πίνακες διέλευσης και ανάκλασης, διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλακιδίων σε κάθε στάδιο.

Τέλος, εξάγεται η σχέση διασποράς του μεταϋλικού μέσου, από την οποία συνάγονται βασικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες της σύνθετης δομής. Ειδικότερα, η σχέση διασποράς περιγράφει τη μεταβολή του κυματανύσματος διάδοσης k_z συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας και συνιστά ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίζονται αριθμητικά. Για δεδομένη συχνότητα από όλες τις ιδιοτιμές του k_z , καμία ή στην καλύτερη περίπτωση μερικές μόνο προκύπτουν πραγματικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις παριστάνουν διαδιδόμενα κύματα μέσα στο σύνθετο μεταϋλικό. Οι υπόλοιπες τιμές του k_z είναι μιγαδικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις αντιπροσωπεύουν φθίνοντα κύματα, το πλάτος των οποίων μειώνεται εκθετικά και σε αντίθεση με τα διαδιδόμενα κύματα δεν υφίστανται ως φυσικές οντότητες στον άπειρο κρύσταλλο. Οι περιοχές αυτές καλούνται φωτονικά χάσματα (photonic bandgaps).

Στο κεφάλαιο 5 συνοψίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που λαμβάνονται εφαρμόζοντας τη θεωρία πολλαπλής σκέδασης και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του κεφαλαίου 3. Από τη μελέτη της καμπύλης διασποράς προκύπτει ότι υπάρχει ένα εύρος ζώνης συχνοτήτων εντός του οποίου η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας είναι αντιπαράλληλες. Στην περιοχή αυτή ο δείκτης διάθλασης του μέσου προκύπτει αρνητικός, δηλαδή το μέσο συμπεριφέρεται ως μεταϋλικό. Ωστόσο, η ένταση του φαινομένου και το εύρος ζώνης είναι σημαντικά μικρότερα από ό,τι στην περίπτωση της αναλυτικής προσέγγισης. Εντούτοις, με μικρή τροποποίηση της διάταξης των σφαιρών εντός της δομικής μονάδας, έτσι ώστε να αυξηθεί η σύζευξη μεταξύ των σφαιρών, το εύρος ζώνης στο οποίο ο δείκτης διάθλασης προκύπτει αρνητικός αυξάνεται σημαντικά. Σημαντική αύξηση στο εύρος ζώνης του φαινομένου παρατηρείται επίσης και με αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου, γεγονός ιδιαίτερα επιθυμητό. Ιδιαίτερη επίδραση στο φαινόμενο έχουν και οι απώλειες του διηλεκτρικού των σφαιρών, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα το φαινόμενο να μετριάζεται σημαντικά ως προς την ένταση και να εξαφανίζεται για εφαιπτομένη απωλειών μεγαλύτερη από 10^{-3} . Σε γενικές γραμμές πάντως

η δομή εμφανίζει την επιθυμητή συμπεριφορά μεταύλικού γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των σφαιρών επιβεβαιώνοντας τους αρχικούς θεωρητικούς μας ισχυρισμούς.

Στη συνέχεια του 5^{ου} κεφαλαίου παρουσιάζεται μία πιθανή εφαρμογή του μεταύλικού, που αφορά τη χρήση του για τη βελτίωση της ικανότητας εστίασης ενός υβριδικού συστήματος ενδοκρανιακής απεικόνισης και θεραπείας σύμφωνα με τη μέθοδο της υπερθερμίας. Το συγκεκριμένο σύστημα έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο μικροκυμάτων και οπτικών ινών του ΕΜΠ και είναι ένα μη επεμβατικό σύστημα που χρησιμοποιείται με στόχο την επιλεκτική θέρμανση των περιοχών ενδιαφέροντος του εγκεφάλου (υπερθερμία), ενώ παράλληλα παρέχει τη δυνατότητα απεικόνισης της θερμοκρασίας της ακτινοβολούμενης περιοχής του εγκεφάλου σε πραγματικό χρόνο. Η περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του απεικονιστικού συστήματος είναι 1,5-3,5 GHz. Το σύστημα απεικόνισης βασίζεται στη μικροκυματική ραδιομετρία, μία τεχνική μέτρησης που εντοπίζει τη φυσική θερμική ακτινοβολία που εκπέμπεται από την ύλη, ενώ το σύστημα θεραπείας βασίζεται στη μέθοδο της υπερθερμίας, μίας θεραπευτικής τεχνικής του καρκίνου. Η ανάπτυξη του μεταύλικού που περιγράφηκε παραπάνω έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της εστίασης του συστήματος θεραπείας, όσον αφορά στο βάθος διείσδυσης της ακτινοβολίας, καθώς και στη χωρική διακριτική ικανότητα του συστήματος απεικόνισης. Μάλιστα, γίνεται προσπάθεια εύρεσης του κατάλληλου υλικού που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή των διηλεκτρικών σφαιρών με στόχο την πειραματική επιβεβαίωση των υπολογισμών μας.

Στο κεφάλαιο 6 εξετάζεται το ενδεχόμενο λειτουργίας της δομής στην περιοχή των THz, γεγονός που επιφέρει σημαντική μείωση στις διαστάσεις του μεταύλικού. Η δομή τροποποιείται και αποτελείται πλέον από ένα είδος σφαιρών, οι οποίες περιλαμβάνουν δύο στρώματα από διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά (coated spheres). Το υλικό του πυρήνα διαθέτει υψηλή διηλεκτρική σταθερά της τάξης του 100 οδηγώντας σε ισχυρό μαγνητικό συντονισμό, ενώ το υλικό του περιβλήματος εμφανίζει συμπεριφορά πλάσματος γύρω από τη συχνότητα λειτουργίας ($\epsilon < 0$) οδηγώντας σε ηλεκτρικό συντονισμό. Υποψήφια υλικά με την παραπάνω συμπεριφορά είναι κεραμικά υλικά (π.χ. LiTaO_3) για το υλικό του πυρήνα και ημιαγωγοί προσμίξεων με συμπεριφορά πλάσματος στην περιοχή των THz για το υλικό του περιβλήματος των σφαιρών. Τέλος, ανακεφαλαιώνονται τα κυριότερα συμπεράσματα της διατριβής.

Λέξεις-κλειδιά: μεταύλικά, συντονισμός σφαιρών, αρνητικός δείκτης διάθλασης, σχέση διασποράς, ενεργό μέσο, πολλαπλή σκέδαση, υπερθερμία, μικροκυματική ραδιομετρία.

Abstract

The main purpose of the dissertation is the analysis and design of microwave metamaterial propagation mediums. Metamaterials possess simultaneously negative values of their constitutive parameters ϵ, μ in a certain bandwidth, resulting in a variety of intriguing characteristics, such as the exhibition of negative index of refraction, the reversal of Doppler effect and the fact that phase velocity and group velocity, characterizing the direction of power transmission, are antiparallel. The electrodynamic behaviour of mediums with a negative index of refraction was firstly studied by the Russian physicist Veselago in 1968, who concluded that such materials cannot exist in nature, but it is possible to be artificially manufactured. The subject did not attract the attention of the international scientific community during the following decades, until 1999, when British scientist Pendry in Imperial College suggested a method to provide negative permeability μ from conductors. The suggested structure consisted of an array of split ring resonators and possessed negative values of permeability over a narrow bandwidth. The combination of the structure of split ring resonators with thin metallic wires provided negative permeability μ and permittivity ϵ respectively, resulting in the development of a composite material with negative index of refraction from a research team at the University of California (UCSD). As a result, the development of metamaterials triggered the interest of the scientific community during the last decade.

In the following dissertation a totally different structure is suggested as a candidate metamaterial medium, which facilitates its physical implementation and can be used for operation in microwave (GHz) and higher frequencies (THz) as well. The selected structure modeling the metamaterial consists of a cubic lattice of dielectric spheres, that are magnetically inactive. The specific structure exploits the phenomenon of electromagnetic resonance of spheres, that is present at discrete frequencies and results in the maximization of the amplitude of the scattered electromagnetic field. It is noted that the medium exhibits isotropic behaviour, a fact that in conjunction with the periodicity of the structure, facilitates the analysis of its electromagnetic behaviour. It is shown that the effective magnetic permeability μ_{eff} and effective permittivity ϵ_{eff} of the whole structure depend strongly on the resonance of the isolated spheres and their values exhibit steep variations around the resonant frequencies of the magnetic and electric waves respectively, becoming negative in a certain frequency range. This property is exploited in the development of a

medium with negative index of refraction (metamaterial), whose constitutive parameters ϵ, μ are simultaneously negative.

The first chapter begins with a short historical review presenting the most important results of the scientific studies at the area of research of metamaterials and the major applications of metamaterials. Special reference is made to the development of a perfect lens that achieves focusing with spatial resolution greater than the wavelength limit and to the equivalent circuits of metamaterials allowing the construction of devices with improved operation characteristics.

In the second chapter, the spectrum properties of metamaterial propagation mediums are thoroughly examined in order to reach some useful conclusions for their peculiar electromagnetic behaviour. In our analysis we assume a slab of metamaterial. The analysis method is based on Fourier transforms and the EM field is expressed as a superposition of plane waves. Furthermore, the full description of the electromagnetic field consists of the discrete (surface waves) and the continuous eigenvalue spectrum as well (radiating waves). The main results are obtained from the dispersion curve of the medium, representing the variation of the propagation constant and the attenuation constant as a function of frequency, at the range where ϵ, μ possess simultaneously negative values. In particular, the various kinds of electromagnetic waves that can be excited in the metamaterial slab are summarized in contrast with the ones excited in usual mediums and it is concluded that the propagation constant for ordinary and evanescent surface waves decreases with the increase of frequency. As a result, group velocity and phase velocity are antiparallel, a fact that is not observed in usual mediums with positive ϵ, μ .

In the third chapter the suggested metamaterial structure is presented, consisting of a cubic lattice of dielectric and non-magnetic spheres. The specific structure facilitates the physical implementation of the metamaterial and can be used for operation at microwave frequencies. The analysis method that is followed is based on the effective medium theory, according to which a medium is characterized as effective when an incident EM wave cannot detect the discontinuities of the medium. The main limitation that needs to be satisfied is that the wavelength in the host medium must be much larger than the size of the spheres. This fact allows us to correlate the scattering parameters from an isolated sphere (Mie scattering) with the effective permittivity and magnetic permeability of the aggregate of spheres.

The chapter begins with the study of scattering from an isolated sphere and the phenomenon of electromagnetic resonance of spheres. Then, the effective medium theory is

presented, which assumes that spheres behave as equivalent electric and magnetic dipoles and results in analytical expressions for the effective permittivity and magnetic permeability of the aggregate of spheres. The electromagnetic resonance of spheres becomes very intense when the material of spheres has very high dielectric constant, at the order of 100. Assuming such materials, the effective magnetic permeability and effective permittivity become negative in a bandwidth around the resonance frequencies of the magnetic and electric waves respectively. Nevertheless, in order to obtain negative index of refraction for the aggregate of the structure, magnetic permeability and dielectric permittivity should be simultaneously negative, so that frequencies of magnetic resonance and electric resonance coincide. The latter cannot happen if all spheres consist of the same material and have the same radius. The problem is faced assuming that the structure consists of two kinds of spheres with a different radius, but from the same material. Given that electric resonances of spheres appear at larger frequencies than the magnetic ones and resonance frequencies are inversely proportional to the radii of spheres, the dimensions of the spheres are selected in such a way that the frequency of the first magnetic resonance of the spheres with small radius coincides with the frequency of the first electric resonance of the spheres with larger radius. The index of refraction of the aggregate of spheres is calculated from the relation: $n_{\text{eff}} = \pm \sqrt{\mu_r^{\text{eff}} \epsilon_r^{\text{eff}}}$ and its real part becomes negative around the resonance frequency.

At the end of the chapter a full wave simulation of the structure is performed using commercial software package HFSS, the results of which qualitatively confirm the analytical approximation (effective medium theory), with the difference that the bandwidth where the index of refraction becomes negative is smaller than the one calculated by analytical methods. The analysis method that is followed at the third chapter is however a first order approximation that provides reliable results only when the wavelength in the host medium is much larger than the diameter of the spheres and does not characterize the full solution, as it neglects higher order contributions and interactions between spheres.

In chapter 4, the full solution is presented applying multiple scattering theory, according to which the incident EM wave in each sphere is the sum of all the waves scattered from the rest of the spheres. Multiple scattering theory takes into account the interactions between spheres and is applied without limitations, in contrast with effective medium theory. The chapter begins with the study of scattering from an isolated sphere and scattering from a plane of spheres, periodically ordered. Due to periodicity of the structure, the scattered

wave from the sphere at position R differs from the scattered wave from the sphere at the origin only by a phase factor (Bloch theorem) facilitating the analysis. We conclude that the scattered wave from a plane of spheres is expressed in terms of scattering matrices from an isolated sphere, structure constants Ω , describing the interactions between spheres and coefficients of the incident field. Structure constants are thoroughly studied resulting in analytical formulas and details for their complex calculation. Furthermore, reflection and transmission coefficients from a plane of spheres are determined, expressing the scattered field as a superposition of plane waves. Scattering from more planes of spheres is then studied, as the metamaterial consists of the succession of alternating planes of spheres in such a way that in each plane spheres have the same radius, but at the next plane sphere radius is different. Initially, transmission and reflection matrices for two planes of spheres are calculated combining the corresponding matrices for each plane. Assuming that the metamaterial consists of a finite number of recurrent complex slices, each of which includes two planes of spheres with different radius, the corresponding transmission and reflection matrices are determined, by doubling the number of slices in each stage.

Finally, the dispersion relation for the metamaterial medium is extracted, from which we reach to basic conclusions for the properties of the composite structure. Especially, the dispersion relation describes the variation of the propagation wavevector k_z as a function of the operating frequency and consists an eigenvalue-eigenvectors problem that are calculated using numerical methods. For a given frequency, from all the eigenvalues of k_z , none or a just a few are real and the corresponding eigensolutions describe propagating waves inside the complex metamaterial. The rest of the values are complex and the corresponding eigenvalues represent evanescent waves, the amplitude of which is exponentially decreased and in contrast with propagating waves, they do not exist as physical entities in the infinite crystal. These regions are called photonic bandgaps.

In chapter 5, numerical results are summarized applying multiple scattering theory and are compared to the results of chapter 3. Studying the dispersion curve, we observe that inside a specific bandwidth phase velocity and group velocity are antiparallel. In this region, index of refraction becomes negative, thus the medium behaves as a metamaterial. However, the intensity of the phenomenon and the bandwidth are a lot smaller than the case of the analytical approximation. Nevertheless, with a slight modification of the set-up of spheres inside the unit cell, in order to increase the coupling between spheres, the bandwidth where index of refraction becomes negative is increased significantly. An increase in negative refraction index (NRI) bandwidth is also observed with the increase of the dielectric

constant of the host medium, which is very desirable. It is also observed that the losses of the dielectric of spheres have a special impact on the phenomenon, as they result in the decrease of its intensity. The phenomenon disappears for loss tangent greater than 10^{-3} . Generally, the structure exhibits the desired metamaterial behaviour around the resonant frequencies of the spheres, confirming our initial theoretical assumptions.

In what follows in the 5th chapter, a possible application of the metamaterial is presented, regarding its use to optimize the focusing properties of a brain hybrid monitoring and treatment system with the method of hyperthermia. The specific system has been developed at the laboratory of microwaves and fiber optics of National Technical University of Athens and is a non invasive system that is used for the selective heating of regions of interest (hyperthermia), while it can monitor the temperature of the radiated brain region in real time. The operating frequency region of the monitoring system is 1.5-3.5 GHz. The monitoring system is based on microwave radiometry, a measurement technique detecting the natural thermal radiation emitted by matter, while the treatment system is based on hyperthermia, a cancer treatment technique. The development of the metamaterial described above, results in the enhancement of the focusing properties of the treatment system, in terms of penetration depth of the radiation and the spatial resolution of the monitoring system. In fact, efforts are made in order to find the appropriate material to be used for the construction of the dielectric spheres to experimentally confirm our calculations.

In chapter 6 the possibility of operation of the structure at the area of THz is examined, decreasing the dimensions of the metamaterial. The structure is modified consisting of one kind of spheres, which include two layers of different dielectric materials (coated spheres). The material of the core has a high dielectric constant, at the order of 100, resulting in a strong magnetic resonance, while the material of the coating behaves as a plasma around the operating frequency ($\epsilon < 0$) causing an electric resonance. Candidate materials with the above behaviour are ceramic materials (e.g. LiTaO₃) for the material of the core and doped semiconductors with a plasma behaviour in the range of THz for the material of the coating of the spheres. At the end of the dissertation, the main conclusions are summarized.

Keywords: metamaterials, spheres resonance, negative index of refraction, dispersion relation, effective medium, multiple scattering, hyperthermia, microwave radiometry.

Ευχαριστίες

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής είχα την ουσιαστική στήριξη του αγαπητού μου επιβλέποντα, καθηγητή. κ. Γεώργιου Σταμούλη, καθώς και του καθηγητή μου από την περίοδο των προπτυχιακών μου σπουδών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο κ.Νικόλαου Ουζούνογλου. Τους ευχαριστώ που μου εμπιστεύτηκαν αυτό το πρωτότυπο και ιδιαίτερα ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα. Η ηρεμία που ενέπνευσαν στον τρόπο δουλειάς μου και η οξυδερκής καθοδήγησή τους υπήρξαν ακρογωνιαίοι λίθοι της επιτυχίας του όλου εγχειρήματος. Θα ήταν επίσης παράλειψη να μην αναφερθώ στην πολύτιμη συνεισφορά του κ. Βασίλειου Γιαννόπαπα, επίκουρου καθηγητή του τμήματος Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Ειρήνη Καρανάσιου του ΕΜΠ για την άριστη συνεργασία μας καθ όλη τη διάρκεια της διατριβής. Ευχαριστώ θερμά επίσης τους καθηγητές που συμμετείχαν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή. Τέλος, ευχαριστώ ιδιαίτερα την οικογένειά μου γιατί υποστήριξε με κάθε τρόπο την προσπάθειά μου αυτή και είναι πάντα δίπλα μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΕΤΑΪΛΙΚΑ

1.1	Ιστορική αναδρομή.....	20
1.2	Περιγραφή του πρώτου μεταύλικού.....	21
1.3	Ιδιότητες και εφαρμογές των μεταύλικών.....	26
1.3.1	Αριστερόστροφα υλικά.....	26
1.3.2	Αντιστροφή του νόμου του Snell.....	28
1.3.3	Αντιστροφή του φαινομένου Doppler.....	30
1.3.4	Δημιουργία τέλει φακού.....	31
1.4	Κυκλωματικά ισοδύναμα των μεταύλικών-εφαρμογές.....	35
1.4.1	Ομογενής γραμμή μεταφοράς.....	36
1.4.2	Ισοδύναμο δίκτυο LC.....	39
1.4.3	Συχνότητες αποκοπής δικτύου LC.....	43
1.4.4	Φυσική υλοποίηση μονοδιάστατης γραμμής μεταφοράς.....	46
1.4.5	Εφαρμογές των μεταύλικών.....	47
1.5	Σκοπός και οργάνωση της διατριβής.....	52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΜΕΤΑΪΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

2.1	Διέγερση πλάκας από μεταύλικό.....	57
2.2	Υπολογισμός του πεδίου εντός της πλάκας από μεταύλικό.....	62
2.3	Μελέτη επιφανειακών κυμάτων.....	67
2.4	Μελέτη μιγαδικών ρυθμών διάδοσης.....	79
2.5	Υπολογισμός διακριτού φάσματος πεδίου.....	88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΦΥΣΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕΤΑΪΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

3.1	Σκέδαση από μεμονωμένη διηλεκτρική σφαίρα.....	95
3.2	Μελέτη συντονισμών διηλεκτρικής σφαίρας.....	101
3.3	Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός συνόλου σφαιρών.....	107
3.4	Ενεργός διηλεκτρική επιτρεπτότητα ενός συνόλου σφαιρών.....	116
3.5	Αρνητική ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός συνόλου σφαιρών.....	121
3.6	Αρνητική ενεργός διηλεκτρική σταθερά ενός συνόλου σφαιρών.....	125

3.7	Αρνητικός δείκτης διάθλασης ενός συνόλου σφαιρών.....	128
3.8	Ανάλυση της δομής με τη βοήθεια προσομοίωσης.....	130

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΠΛΗΡΗΣ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΜΕΤΑΪΛΙΚΟ

4.1	Ανάλυση προσπίπτοντος πεδίου.....	137
4.2	Σκέδαση από μεμονωμένη σφαίρα.....	145
4.3	Σκέδαση από ένα επίπεδο σφαιρών.....	149
4.4	Υπολογισμός των σταθερών δομής για την πολλαπλή σκέδαση από ένα επίπεδο σφαιρών.....	154
4.5	Προσδιορισμός των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης από ένα επίπεδο σφαιρών.....	159
4.6	Σκέδαση από περισσότερα επίπεδα – Δημιουργία μεταϋλικού.....	165
4.7	Σχέση διασποράς του σύνθετου μεταϋλικού.....	169

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΪΛΙΚΟΥ

5.1	Αποτελέσματα πλήρους λύσης.....	173
5.2	Επίδραση περιβάλλοντος μέσου και απωλειών.....	183
5.3	Προτεινόμενη εφαρμογή του μεταϋλικού.....	191

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1	Λειτουργία του μεταϋλικού στην περιοχή των THz.....	205
6.2	Σύνοψη συμπερασμάτων.....	217

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A.1	Συνολικό πεδίο εντός της πλάκας από μεταϋλικό.....	222
A.2	Υπολογισμός πρωτογενούς πεδίου.....	224
B.	Υπολογισμός των σταθερών δομής Ω	226
Γ.	Υπολογισμός συντελεστών σκέδασης από σφαίρα δύο στρωμάτων.....	230

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	234
--------------------------	------------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΕΤΑΪΛΙΚΑ

Ο όρος «μεταϊλικά» (metamaterials) υιοθετήθηκε προκειμένου να χαρακτηρίσει μία νέα κατηγορία υλικών, τα οποία εμφανίζουν αξιοσημείωτες ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες και κατασκευάζονται τεχνητά. Τα μεταϊλικά ορίζονται διεθνώς ως *τεχνητές ενεργά ομογενείς ηλεκτρομαγνητικές δομές με ασυνήθιστες ιδιότητες που δεν παρατηρούνται στη φύση*. Μία ενεργά ομογενής δομή είναι μία δομή στην οποία το μήκος κύματος της διαδιδόμενης ακτινοβολίας είναι αρκετές φορές μεγαλύτερο από το μέσο μέγεθος των δομικών στοιχείων που την αποτελούν. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι τα φαινόμενα διάθλασης επικρατούν έναντι των φαινομένων σκέδασης και περίθλασης κατά τη διάδοση ενός κύματος εντός του μεταϊλικού μέσου. Επιπλέον, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν αντιλαμβάνονται τις ασυνέχειες του μέσου διάδοσης και ανιχνεύουν μόνο τις μακροσκοπικές (ενεργές) ιδιότητες της δομής, η οποία είναι ηλεκτρομαγνητικά ομοιογενής κατά μήκος της κατεύθυνσης διάδοσης. Οι δύο βασικές μακροσκοπικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το μέσο είναι η διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ και η μαγνητική διαπερατότητα μ . Ως αριστερόστροφα υλικά (Left Handed Materials) ορίζονται ως τα υλικά στα οποία οι παραπάνω ποσότητες λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές ($\epsilon, \mu < 0$). Όπως θα εξηγηθεί και στη συνέχεια, στα εν λόγω υλικά η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας είναι αντιπαράλληλες, ενώ ο δείκτης διάθλασης προκύπτει αρνητικός, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά. Για το λόγο αυτό τα υλικά αυτά αναφέρονται επίσης στη βιβλιογραφία και ως Double Negative Materials (DNG) ή Negative Refractive Index (NRI) Materials, ως συνέπεια των χαρακτηριστικών τους ιδιοτήτων. Σημειώνεται ωστόσο ότι αν και ο όρος μεταϊλικά χρησιμοποιείται συνήθως για να χαρακτηρίσει τα αριστερόστροφα υλικά λόγω του πλήθους των εφαρμογών τους, γενικά περιλαμβάνει και άλλες δομές οι οποίες πληρούν τον ορισμό που δόθηκε αρχικά, δηλαδή είναι ενεργά ομογενείς και εμφανίζουν ασυνήθιστη ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά. Στην παρούσα διατριβή ως μεταϊλικά θα εννοούμε τα αριστερόστροφα υλικά.

1.1 Ιστορική αναδρομή

Η ιδέα για την πιθανή ύπαρξη των μεταϋλικών ανήκει στο Ρώσο επιστήμονα Veselago, ο οποίος το 1968 ο δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο ανέλυσε την ηλεκτροδυναμική συμπεριφορά των υλικών με ταυτόχρονα αρνητικές τιμές των συντακτικών παραμέτρων τους ϵ και μ , υποθέτοντας την πιθανή ύπαρξή τους [5]. Συγκεκριμένα, προέβλεψε τις μοναδικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητές τους, όπως η αντιστροφή του νόμου του Snell (εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης) και η αντιστροφή του φαινομένου Doppler. Έδειξε ότι τα διανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε ένα υλικό «αριστερού νόμου» δίνουν διάνυσμα Poynting του οποίου η κατεύθυνση καθορίζεται από τον κανόνα του αριστερού χεριού, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά. Απόρροια του γεγονότος αυτού είναι ότι προκειμένου να ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας, η ταχύτητα φάσης έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα ομάδας (διεύθυνση διάδοσης της ισχύος), με αποτέλεσμα την εμφάνιση κυμάτων που διαδίδονται προς τα πίσω (backward waves). Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι ενώ η ενέργεια διαδίδεται απομακρυνόμενη από την πηγή (εξασφαλίζοντας την αιτιότητα), η φάση διαδίδεται αντίθετα, με κατεύθυνση προς την πηγή. Το γεγονός αυτό προκαλεί την εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης. Ο Veselago μάλιστα εξέτασε το ενδεχόμενο ύπαρξης στη φύση υλικών με ταυτόχρονα αρνητικές τιμές των παραμέτρων ϵ και μ και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι είναι αδύνατη η ύπαρξη τέτοιων υλικών, εκτός και αν κατασκευαστούν με τεχνητό τρόπο. Ειδικότερα, ο Veselago θεώρησε το επίπεδο των ϵ και μ (4 τεταρτημόρια) και εξέτασε τι είδους υλικά είναι δυνατό να παρατηρηθούν σε κάθε τεταρτημόριο (Σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1: Κατηγοριοποίηση των υλικών με βάση τις τιμές των ϵ και μ .

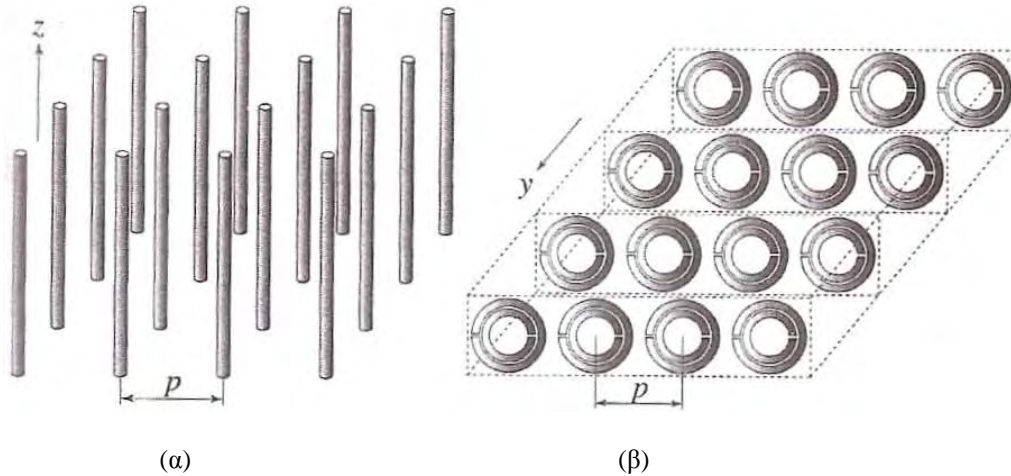
Για τα ισοτροπικά υλικά κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν υλικά με $\epsilon < 0$ και $\mu > 0$ (2^ο τεταρτημόριο), όπως το πλάσμα σε συγκεκριμένες περιοχές του φάσματος. Επίσης διάφορα μέταλλα εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά ($\epsilon < 0$) στην υπέρυθη περιοχή και σε περιοχές του οπτικού φάσματος. Υλικά του τέταρτου τεταρτημορίου ($\epsilon > 0$, $\mu < 0$) είναι διάφορα γυροτροπικά και φερρομαγνητικά υλικά σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων, όπου όμως οι ποσότητες ϵ και μ είναι ταυιστές, δηλαδή τα υλικά είναι ανισοτροπικά. Για τα υλικά του τρίτου τεταρτημορίου (ϵ , $\mu < 0$) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν είναι δυνατό να υπάρξουν στη φύση, εκτός και αν κατασκευαστούν με τεχνητό τρόπο, με αποτέλεσμα το αντικείμενο των μεταϋλικών να μην τύχει περαιτέρω διερεύνησης από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα στις επόμενες δεκαετίες.

Η πειραματική επιβεβαίωση των θεωρητικών συλλογισμών του Veselago ήρθε περίπου 3 δεκαετίες αργότερα από μία ομάδα επιστημόνων στο πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια, San Diego (UCSD) με επικεφαλής τον D.R.Smith [6]. Το υλικό που κατασκευάστηκε ήταν μία ενεργά ομογενής δομή που αποτελούνταν από μία συστοιχία χάλκινων διαχωρισμένων δακτυλίων (SRRs) και λεπτών χάλκινων συρμάτων, παρέχοντας αρνητική μαγνητική διαπερατότητα μ και διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ αντίστοιχα. Κατασκευάζοντας μία δομή σχήματος σφήνας με το συγκεκριμένο υλικό, αποδείχθηκε πειραματικά το φαινόμενο του αρνητικού δείκτη διάθλασης. Μία ομάδα επιστημόνων στο MIT επανέλαβε το πείραμα επιβεβαιώνοντας τα πορίσματα του πανεπιστημίου UCSD [7]. Στη συνέχεια, αρκετοί επιστήμονες ενθαρρύνθηκαν από τα πειραματικά αποτελέσματα και μελέτησαν περαιτέρω τα χαρακτηριστικά και τις εφαρμογές των υλικών αριστερού νόμου (LHMs) [8]-[10].

1.2 Περιγραφή του πρώτου μεταϋλικού

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάσουμε σύντομα την πρώτη διάταξη που κατασκευάστηκε για να λειτουργήσει ως μεταϋλικό, επειδή αποτέλεσε την απαρχή για μία σειρά από επιστημονικές μελέτες γύρω από το νέο αντικείμενο των μεταϋλικών. Σημειώνεται ότι είχε προετοιμαστεί κατάλληλα το έδαφος για την πειραματική επιβεβαίωση του αρνητικού δείκτη διάθλασης από το πανεπιστήμιο UCSD από τις πρωτοποριακές εργασίες του John Pendry στο πανεπιστήμιο Imperial του Λονδίνου. Ο Pendry εισήγαγε δύο νέες δομές για την επίτευξη αρνητικής διηλεκτρικής σταθεράς και αρνητικής μαγνητικής διαπερατότητας [11,12] για λειτουργία σε μικροκυματικές συχνότητες. Συγκεκριμένα, αρχικά απέδειξε ότι μία συστοιχία λεπτών μεταλλικών

συρμάτων (Thin Wires-TW) είναι δυνατό να εμφανίσει αρνητική διηλεκτρική σταθερά ϵ σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων. Η διάταξη είχε τη μορφή του Σχήματος 1.2 (α), όπου η διάσταση p του unit cell ήταν πολύ μικρότερη του μήκους κύματος λ , επομένως η δομή ήταν ενεργά ομογενής.



Σχήμα 1.2: (α) Συστοιχία λεπτών μεταλλικών συρμάτων (TWs) που παρείχε $\epsilon < 0$.
(β) Συστοιχία διαχωρισμένων δακτυλίων (SRRs) που παρείχε $\mu < 0$.

Αν το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είχε την κατεύθυνση του άξονα των συρμάτων ($\mathbf{E} \parallel z$), έτσι ώστε να επάγει ένα ρεύμα κατά μήκος τους και να παράγει ισοδύναμες ηλεκτρικές διπολικές ροπές, η συνολική δομή παρουσίαζε μία διηλεκτρική σταθερά τύπου πλάσματος, με διασπορά ως προς τη συχνότητα, σύμφωνα με τη σχέση [11]:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \zeta^2} + i \frac{\zeta \omega_{pe}^2}{\omega(\omega^2 + \zeta^2)} \quad (1.1)$$

όπου $\omega_{pe} = \sqrt{2\pi c^2 / [p^2 \ln(p/a)]}$ (c : ταχύτητα του φωτός, a : ακτίνα των συρμάτων) είναι η ηλεκτρική συχνότητα πλάσματος, η οποία μπορεί να ρυθμιστεί στην περιοχή των GHz και $\zeta = \epsilon_0(p\omega_{pe}/a)^2 / \pi\sigma$ (σ : αγωγιμότητα του μετάλλου) είναι ένας παράγοντας απόσβεσης λόγω των απωλειών του μετάλλου. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι

$$\text{Re}(\epsilon_r) < 0 \quad \text{για } \omega^2 < \omega_{pe}^2 - \zeta^2 \quad (1.2)$$

η οποία αν αγνοηθούν τυχόν απώλειες ($\zeta = 0$) απλοποιείται στην ακόλουθη συνθήκη

$$\epsilon_r < 0 \quad \text{για } \omega < \omega_{pe} \quad (1.3)$$

Το μήκος των συρμάτων της παραπάνω διάταξης θεωρείται ότι είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μήκος κύματος (θεωρητικά άπειρο).

Στη συνέχεια, θεωρώντας τη διάταξη του Σχήματος 1.2 (β), αποδείχθηκε ότι μία συστοιχία διαχωρισμένων δακτυλίων (Split Ring Resonators-SRRs) είναι δυνατό να εμφανίσει αρνητική μαγνητική διαπερατότητα σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων. Αν το διεγείρον μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δακτυλίων ($\mathbf{H} \perp y$), έτσι ώστε να επάγει ρεύματα συντονισμού στο βρόχο και να παράγει ισοδύναμες μαγνητικές διπολικές ροπές, τότε η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα της συνολικής δομής λαμβάνει τη μορφή

$$\mu_r(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2(\omega^2 - \omega_{0m}^2)}{(\omega^2 - \omega_{0m}^2)^2 + (\omega\zeta)^2} + i \frac{F\omega^2\zeta}{(\omega^2 - \omega_{0m}^2)^2 + (\omega\zeta)^2} \quad (1.4)$$

όπου $F = \pi(\alpha/p)^2$ (α : εσωτερική ακτίνα του μικρού δακτυλίου), $\omega_{0m} = c \sqrt{\frac{3p}{\pi \ln(2w\alpha^3/\delta)}}$ είναι η συχνότητα μαγνητικού συντονισμού, η οποία ρυθμίζεται στην περιοχή των GHz (w : πάχος των δακτυλίων, δ : διάκενο μεταξύ των δακτυλίων) και $\zeta = 2pR'/\alpha\mu_0$ ο συντελεστής απόσβεσης λόγω απωλειών του μετάλλου (R' : η αντίσταση ανά μονάδα μήκους του μετάλλου). Σημειώνεται ότι η δομή SRR παρουσιάζει μαγνητική απόκριση παρόλο που δεν περιλαμβάνει μαγνητικά αγωγίμα υλικά, εξαιτίας της παρουσίας μαγνητικών διπολικών ροπών που επάγονται στους δακτυλίους. Από την εξίσωση (1.4) προκύπτει ότι

$$\mu_r(\omega) < 0 \quad \text{για } \omega_{0m} < \omega < \frac{\omega_{0m}}{\sqrt{1-F}} = \omega_{pm} \quad (1.5)$$

όπου ω_{pm} η συχνότητα μαγνητικού πλάσματος. Η έκφραση για τη μαγνητική διαπερατότητα παρουσιάζει συμπεριφορά συντονισμού, σε αντίθεση με την αντίστοιχη έκφραση για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά.

Ο συνδυασμός των λεπτών μεταλλικών συρμάτων και της συστοιχίας των διαχωρισμένων δακτυλίων είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μίας σύνθετης τεχνητής διάταξης με ϵ , μ ταυτόχρονα αρνητικά σε ένα στενό εύρος ζώνης συχνοτήτων από τον D.R.Smith το 2001. Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για τα πειράματα αποτελούνταν από μία περιοδική συστοιχία δύο διαστάσεων, της οποίας η δομική μονάδα περιείχε τη διάταξη των διαχωρισμένων δακτυλίων και των λεπτών συρμάτων (Σχήμα 1.3). Από το τετραγωνικό πλέγμα της διάταξης κόπηκε ένα τμήμα πρισματικού σχήματος για τη διεξαγωγή του πειράματος.

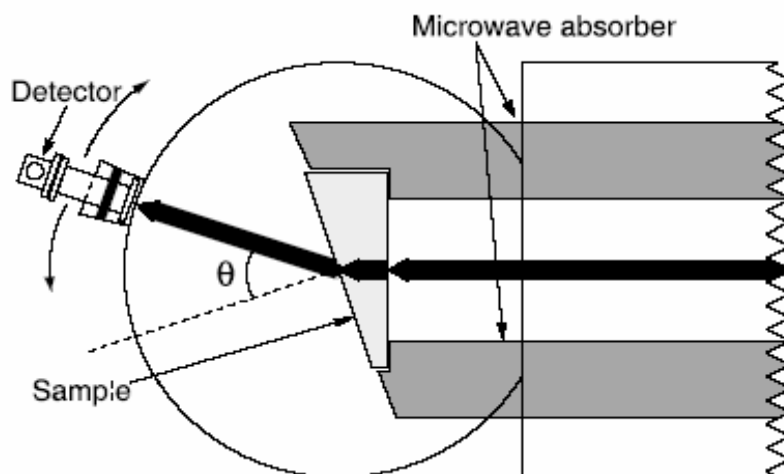


Σχήμα 1.3: Άποψη του πρώτου μεταυλικού που κατασκευάστηκε

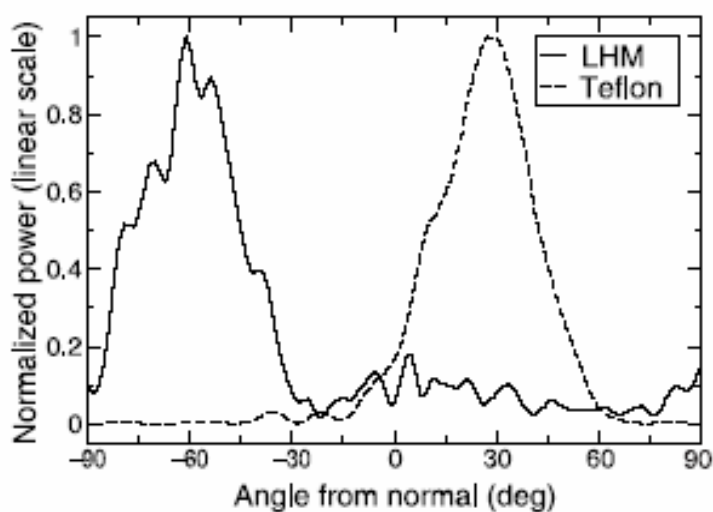
Για τον καθορισμό του δείκτη διάθλασης μετρήθηκε η γωνία εκτροπής μίας μικροκυματικής δέσμης καθώς αυτή διέρχεται μέσα από το πρισματικό δείγμα. Το δείγμα τοποθετήθηκε ανάμεσα σε δύο παράλληλες κυκλικές πλάκες αλουμινίου ακτίνας 15 cm των οποίων η απόσταση ήταν 1.2 cm. Ο ανιχνευτής της διάταξης ήταν ένας κυματοδηγός ρυθμισμένος στη ζώνη συχνοτήτων X (8–12 GHz), ο οποίος μπορούσε να περιστρέφεται σε βήματα των 1.5° προκειμένου να καταγράψει τη μεταδιδόμενη ισχύ σε διάφορες γωνίες (Σχήμα 1.4). Το πρίσμα φωτιζόταν από μία μικροκυματική δέσμη, της οποίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο παράλληλα στα σύρματα της δομικής μονάδας και εγκάρσιο στους διαχωρισμένους δακτυλίους (TM πόλωση).

Τα κύματα της δέσμης διαδίδονται μέσα στον κυματοδηγό, που αποτελείται από δύο παράλληλα φύλλα αλουμινίου, ενώ περιορίζονται από κατάλληλη απορροφητική διάταξη (microwave absorber). Μετά από τη διάδοσή της μέσα στο πρίσμα, η δέσμη συναντά τη διεπιφάνεια διάθλασης, οπότε διαθλάται σε γωνία θ που καθορίζεται από το νόμο του Snell. Προκειμένου να μετρηθεί η γωνία εξόδου της δέσμης, περιστρέφεται ο ανιχνευτής–μετρητής ισχύος με βήμα 1.5° και καταγράφεται το φάσμα της μεταδιδόμενης ισχύος σε όλη τη ζώνη X (8–12 GHz) σε κάθε βήμα με τη βοήθεια ενός αναλυτή φάσματος (network analyzer). Από τις τιμές της καταγραφόμενης ισχύος που αντιστοιχούν στις διάφορες γωνίες σάρωσης επιλέγεται για την εκάστοτε συχνότητα η μεγαλύτερη τιμή, η οποία αντιστοιχεί στη γωνία διάθλασης. Διεξήχθησαν πειράματα και με ένα δείγμα κατασκευασμένο από Teflon του ίδιου σχήματος για να συγκριθούν τα αποτελέσματα. Η διεύθυνση της επιφάνειας εξόδου του πρίσματος σχημάτιζε γωνία 18.4° με τη διεύθυνση της επιφάνειας πρόσπτωσης. Στη συχνότητα των 10.5 GHz προέκυψε αρνητική γωνία διάθλασης $\theta = -61^\circ$ για το πρίσμα από το σύνθετο μεταυλικό, ενώ η γωνία διάθλασης για

το πρίσμα από Teflon προέκυψε θετική και ίση με $\theta = 27^\circ$, όπως άλλωστε αναμενόταν. Τα παραπάνω αποτελέσματα για τη γωνία θ προκύπτουν από το διάγραμμα του Σχήματος 1.5, όπου απεικονίζεται η κανονικοποιημένη μετρούμενη ισχύς συναρτήσει της γωνίας διάθλασης.



Σχήμα 1.4: Πειραματική διάταξη



Σχήμα 1.5: Μετρούμενη ισχύς της διαθλώμενης δέσμης ως συνάρτηση της γωνίας διάθλασης.

Στο σχήμα 1.5 παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένα μέγιστο στη μεταδιδόμενη ισχύ για κάθε θεωρούμενο υλικό, που αντιστοιχεί στη γωνία διάθλασης. Ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος από Teflon προκύπτει από το νόμο του Snell ίσος με 1.4 ενώ ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης για το σύνθετο μεταϋλικό προκύπτει αρνητικός με τιμή -2.7. Σημειώνεται επίσης ότι η δομική μονάδα της περιοδικής διάταξης του σύνθετου υλικού είχε διάσταση $a = 5 \text{ mm}$, ενώ το κεντρικό (για $f = 10 \text{ GHz}$) μήκος κύματος της ζώνης X είναι 3 cm , δηλαδή $\lambda = 6a$, συνθήκη που δείχνει ότι η προσέγγιση του “ενεργού μέσου”

ήταν σχετικά ικανοποιητική. Επιπλέον, επειδή η μετρούμενη μεταδιδόμενη ισχύς της διαθλώμενης δέσμης παρουσίαζε μεταβολές ανάλογα με τη θέση του δείγματος, στα αποτελέσματα λήφθηκε υπόψη ο μέσος όρος των καταγραφόμενων τιμών ισχύος για 8 διαφορετικές θέσεις του δείγματος.

Η πειραματική επιβεβαίωση του αρνητικού δείκτη διάθλασης έδωσε ώθηση για την περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο των μεταϋλικών την τελευταία δεκαετία.

1.3 Ιδιότητες και εφαρμογές των μεταϋλικών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι βασικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες των μεταϋλικών που τα διαφοροποιούν σημαντικά σε σχέση με τα συμβατικά μέσα διάδοσης και θα αναφερθούν οι σπουδαιότερες εφαρμογές τους.

1.3.1 Αριστερόστροφα υλικά

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται γενικά για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε χώρο χωρίς πηγές και θεωρώντας χρονική εξάρτηση των πεδίων της μορφής $\exp(i\omega t)$, λαμβάνουμε

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (1.3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3.4)$$

όπου $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ και $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Για να εξετάσουμε τη θεμελιώδη απόκριση του μέσου διάδοσης θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα της μορφής

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{E}_0}{\zeta} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.3.6)$$

όπου $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ η κυματική αντίσταση και k η σταθερά διάδοσης του μέσου. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στις πρώτες δύο εξισώσεις του Maxwell και με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}$ και της σχέσης $\nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ λαμβάνουμε ότι

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (1.3.7)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.3.8)$$

Στην περίπτωση συνήθων υλικών με $\varepsilon, \mu > 0$ οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ότι το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} και το διάνυσμα διάδοσης \mathbf{k} ορίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα. Αντίθετα, στην περίπτωση που $\varepsilon, \mu < 0$ είναι προφανές ότι τα παραπάνω διανύσματα ορίζουν ένα αριστερόστροφο σύστημα, γι αυτό και τα υλικά αυτά ονομάζονται υλικά αριστερού νόμου (Left Handed Materials). Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα φάσης, που γενικά ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{u}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \quad (1.3.9)$$

στα υλικά αριστερού νόμου να προκύπτει αντίθετη της ταχύτητας φάσης σε ένα σύνηθες υλικό, αφού το διάνυσμα \mathbf{k} έχει αντίθετη φορά. Επιπλέον, η σταθερά διάδοσης k είναι αρνητική σε ένα μεταϋλικό, όπως και η ταχύτητα φάσης, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά. Συνεπώς, η φάση των κυμάτων διαδίδεται ανάποδα, με φορά προς την πηγή και σε αντίθετη κατεύθυνση από την ενέργεια, που αντιπροσωπεύεται από την ταχύτητα ομάδας και διαδίδεται πάντοτε απομακρυνόμενη από την πηγή. Τα μεταϋλικά επομένως υποστηρίζουν τη διάδοση κυμάτων προς τα πίσω (backward waves). Το γεγονός ότι η ταχύτητα φάσης είναι αρνητική ($u_p < 0$) δεν παραβιάζει την αρχή της αιτιότητας γιατί αφορά τη διάδοση μιας διαταραχής και όχι τη μεταφορά ενέργειας προς την πηγή.

Σημειώνεται επίσης ότι η πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ορίζεται γενικά από τη σχέση

$$w_{em} = \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 \quad (1.3.11)$$

από όπου προκύπτει ότι αν τα ε και μ είναι ταυτόχρονα αρνητικά, η πυκνότητα Η/Μ ενέργειας προκύπτει αρνητική, παραβιάζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αν αντίθετα οι συντακτικές παράμετροι του μέσου εμφανίζουν διασπορά με τη συχνότητα, η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή

$$w_{em} = \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} |\mathbf{H}|^2 \quad (1.3.12)$$

και προκειμένου η πυκνότητα ενέργειας να είναι θετική απαιτείται να ισχύουν οι συνθήκες $\frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} > 0$ και $\frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} > 0$. Συνεπώς, σε ένα μεταϋλικό μέσο οι παράμετροι ε και μ εμφανίζουν πάντοτε διασπορά ως προς τη συχνότητα, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά.

Επιπρόσθετα, η σταθερά διάδοσης του μέσου γράφεται στη μορφή

$$k = k_0 n = n \frac{\omega}{c} \quad (1.3.10)$$

όπου $n = \pm\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ ο δείκτης διάθλασης του μεταϋλικού. Επειδή σε ένα μέσο αριστερού νόμου η σταθερά διάδοσης είναι αρνητική ($k < 0$), από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι και ο δείκτης διάθλασης n του μεταϋλικού θα είναι αρνητικός, δηλαδή επιλέγουμε το πρόσημο “-“ στην τετραγωνική ρίζα. Για το λόγο αυτό τα μεταϋλικά συχνά αναφέρονται στη βιβλιογραφία και ως υλικά αρνητικού δείκτη διάθλασης (Negative Refractive Index-NRI materials).

1.3.2 Αντιστροφή του νόμου του Snell

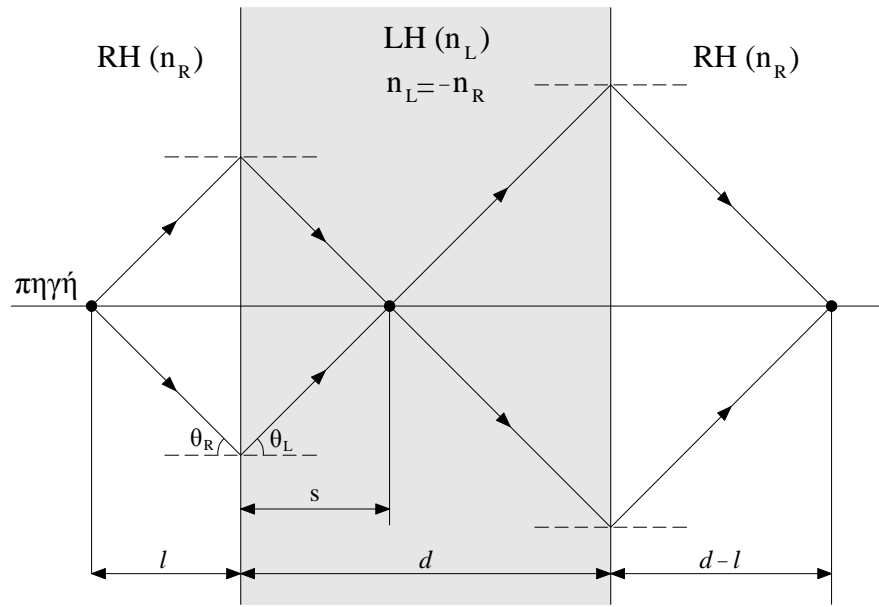
Απόρροια της παραπάνω ιδιότητας είναι η αντιστροφή του νόμου του Snell κατά την πρόσπτωση ενός κύματος σε μια διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ ενός συνήθους υλικού και ενός μεταϋλικού, που περιγράφεται από τη γνωστή σχέση

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.3.11)$$

όπου n_1, n_2 οι δείκτες διάθλασης του συνήθους υλικού και του μεταϋλικού αντίστοιχα και θ_1, θ_2 οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης. Επειδή $n_2 < 0$ προκύπτει ότι η γωνία διάθλασης θ_2 πρέπει να είναι επίσης αρνητική, δηλαδή η διάθλαση να πραγματοποιείται κατά την αντίθετη κατεύθυνση από ό,τι συνήθως. Εκμεταλλευόμενοι αυτή την ιδιότητα, είναι δυνατό να επιτευχθεί διπλή εστίαση μίας προσπίπτουσας δέσμης χρησιμοποιώντας μία πλάκα από μεταϋλικό, η οποία λειτουργεί ως ένα είδος φακού. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6, κατά την πρόσπτωση της δέσμης στη διαχωριστική επιφάνεια ενός συνήθους υλικού κι ενός μεταϋλικού (LH Material) πραγματοποιείται διάθλαση κατά την αντίθετη κατεύθυνση, με αποτέλεσμα δύο ακτίνες που εκπέμπονται συμμετρικά από την πηγή να εστιάζονται σε ένα σημείο, αφού διανύσουν απόσταση s εντός της πλάκας από μεταϋλικό. Συνεχίζοντας την πορεία τους μέσα στην πλάκα συναντούν τη δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια και διαθλώνται ξανά κατά την αντίθετη κατεύθυνση με αποτέλεσμα τη σύγκλισή τους για δεύτερη φορά εκτός της πλάκας.

Αν μάλιστα ο δείκτης διάθλασης του μεταϋλικού έχει τιμή αντίθετη από το δείκτη διάθλασης του συνήθους υλικού ($n_L = -n_R$), τότε δε συμβαίνει καθόλου ανάκλαση στις διαχωριστικές επιφάνειες των δύο μέσων και οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης

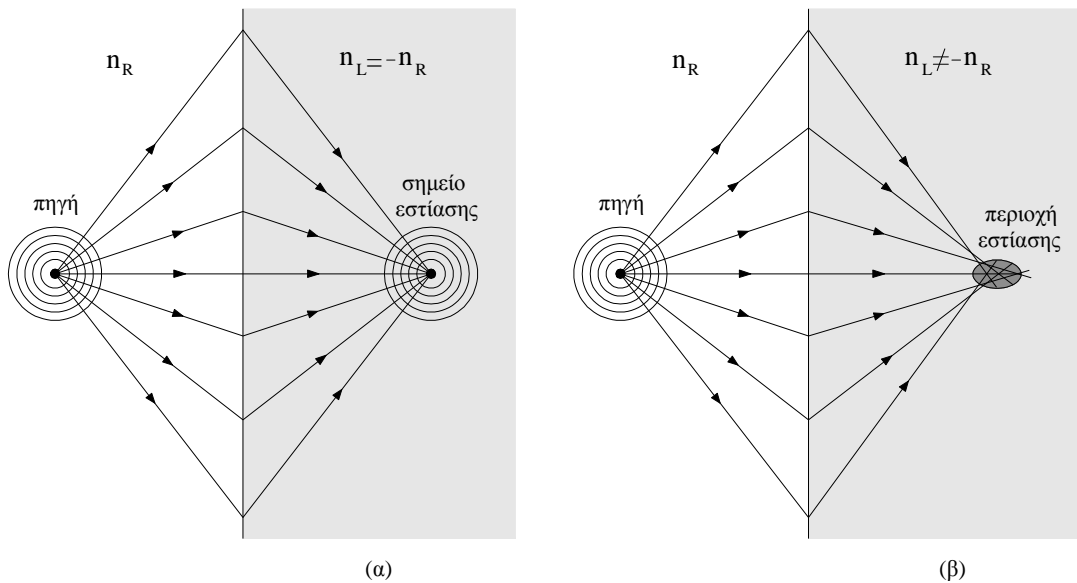
προκύπτουν ίσες, δηλαδή $\theta_R = \theta_L$. Σε αυτή την περίπτωση οι ακτίνες συγκλίνουν για πρώτη φορά εντός της πλάκας από μεταϋλικό σε απόσταση $s = l$ από την πρώτη διαχωριστική επιφάνεια και για δεύτερη φορά εκτός της πλάκας σε απόσταση $d - l$ από τη δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια. Η επίτευξη εστίασης με τη συγκεκριμένη γεωμετρία είναι προφανώς αδύνατη αν η πλάκα αποτελείται από ένα σύνηθες υλικό με $\epsilon, \mu > 0$.



Σχήμα 1.6: Διπλή εστίαση δέσμης με τη χρήση πλάκας από μεταϋλικό ($n_L = -n_R$).

Αντί για δύο συμμετρικά εκπεμπόμενες ακτίνες μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύνολο ακτίνων (κυμάτων) ή γενικότερα ένα κυλινδρικό ή σφαιρικό κύμα εκπεμπόμενο από μία σημειακή πηγή. Στην περίπτωση αυτή, όταν τα δύο μέσα έχουν την ίδια ηλεκτρομαγνητική πυκνότητα ($n_L = -n_R$), κάθε ζεύγος l συμμετρικών ακτίνων με γωνία πρόσπτωσης $\theta_{R,l}$ εστιάζεται στο ίδιο σημείο, αφού $\theta_{L,l} = \theta_{R,l}$ για κάθε l , ώστε οι εστιακές αποστάσεις να είναι ίδιες για κάθε ζεύγος ακτίνων ($s_l = s$), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.7 (α). Αν οι ηλεκτρομαγνητικές πυκνότητες των δύο μέσων διαφέρουν ($|n_L| \neq n_R$), τότε ακτίνες με διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης διαθλώνται σε διαφορετικά εστιακά σημεία με αποτέλεσμα οι εστιακές αποστάσεις s_l να προκύπτουν διαφορετικές. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται μία σφαιρική απόκλιση, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.7 (β) και το εστιακό σημείο εκφυλίζεται σε μία διάχυτη εστιακή κηλίδα (focal spot), της οποίας η επιφάνεια αυξάνεται με την αύξηση της διαφοράς ανάμεσα στους δείκτες διάθλασης των δύο μέσων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην έλλειψη προσαρμογής κατά την πρόσπτωση

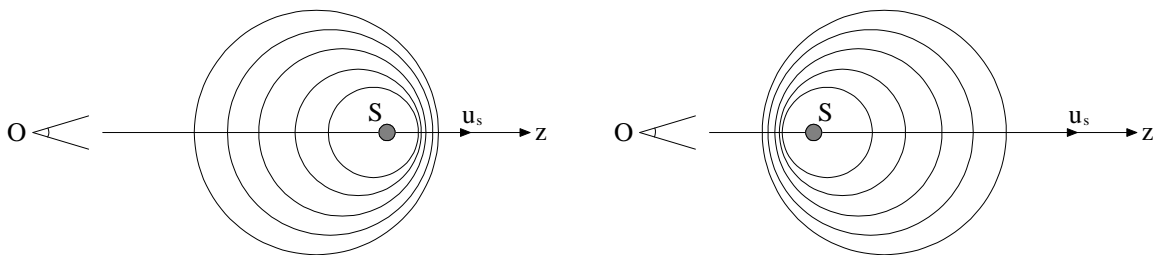
στις διαχωριστικές επιφάνειες και την παρουσία ανακλώμενων δεσμών, οι οποίες έχουν παραλειφθεί κατά τη σχεδίαση στο Σχήμα 1.7 (β).



Σχήμα 1.7: (α) Εστίαση σφαιρικής δέσμης σε ένα σημείο ($n_L = -n_R$)
 (β) Εστίαση σφαιρικής δέσμης σε μία κηλίδα ($|n_L| \neq n_R$)

1.3.3 Αντιστροφή του φαινομένου Doppler

Άλλη συνέπεια των ιδιοτήτων των μεταυλικών είναι η αντιστροφή του φαινομένου Doppler. Θεωρούμε μία πηγή S που κινείται κατά μήκος του άξονα z και ακτινοβολεί ομοιοκατευθυντικά ένα κύμα γωνιακής συχνότητας ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.8.



Σχήμα 1.8: Φαινόμενο Doppler (α) σε σύνηθες υλικό μέσο ($\Delta\omega > 0$) (β) σε μεταυλικό ($\Delta\omega < 0$).

Υποθέτουμε ότι η πηγή S κινείται προς τα θετικά του άξονα z με ταχύτητα $u_s = z / t$. Τότε η φάση που βλέπει ο παρατηρητής στο σημείο O είναι της μορφής

$$\varphi = \omega t - kz = \omega t - ku_s t = \omega \left(1 - \frac{k}{\omega} u_s\right) t = \omega \left(1 - \frac{u_s}{u_p}\right) t \quad (1.3.12)$$

αφού $u_p = \omega/k$. Ο συντελεστής του t είναι η συχνότητα Doppler, που ορίζεται ως η διαφορά της συχνότητας ω της ακίνητης πηγής και της ολίσθησης συχνότητας $\Delta\omega$ (Doppler shift)

$$\omega_D = \omega - \Delta\omega \quad (1.3.13)$$

όπου $\Delta\omega = \omega u_s/u_p$. Επειδή όπως αποδείχθηκε παραπάνω, στα υλικά αριστερού νόμου η ταχύτητα φάσης είναι αρνητική ($u_p < 0$), προκύπτει ότι και η ολίσθηση Doppler θα είναι αρνητική ($\Delta\omega < 0$), σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά μέσα. Συνεπώς, σε ένα μεταυλικό μέσο διάδοσης, όταν η πηγή κινείται απομακρυνόμενη από τον παρατηρητή, αυτός βλέπει συχνότητα μεγαλύτερη από τη συχνότητα ω του εκπεμπόμενου κύματος (Σχήμα 1.8 β). Αντίστοιχα, όταν η πηγή κινείται κατευθυνόμενη προς τον παρατηρητή σε ένα μεταυλικό, αυτός θα βλέπει συχνότητα μικρότερη από την εκπεμπόμενη. Επομένως, στα υλικά αριστερού νόμου επιτυγχάνεται αντιστροφή του φαινομένου Doppler.

1.3.4 Δημιουργία τέλει φακού

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί μία πιθανή εφαρμογή των μεταυλικών, που αναφέρεται στη δημιουργία ενός «υπερφακού», ο οποίος επιτυγχάνει εστίαση κάτω από το φράγμα του μήκους κύματος (subwavelength focusing) καταργώντας το όριο περίθλασης των συμβατικών φακών. Η ιδέα αυτή ανήκει στο βρετανό επιστήμονα John Pendry του πανεπιστημίου Imperial [13] και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα βασικά του επιχειρήματα.

Αρχικά, θεωρούμε ένα δίπολο απειροστού μήκους συχνότητας ω μπροστά από ένα φακό. Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται εκφράζεται με τη βοήθεια του χωρικού μετασχηματισμού Fourier στη μορφή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m, k_x, k_y} \mathbf{E}_m(k_x, k_y) \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (1.3.14)$$

όπου ο άξονας του φακού επιλέγεται να είναι ο άξονας του z . Τότε, η σταθερά διάδοσης κατά τον άξονα z δίνεται από τη σχέση

$$k_{zi} = \begin{cases} \sqrt{k_i^2 - (k_x^2 + k_y^2)}, & k_x^2 + k_y^2 < k_i^2 \\ -i\sqrt{(k_x^2 + k_y^2) - k_i^2}, & k_x^2 + k_y^2 > k_i^2 \end{cases} \quad (1.3.15)$$

όπου k_i ο κυματαριθμός του μέσου διάδοσης, $i = 1,2$ για τον αέρα και το φακό αντίστοιχα.

$$k_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{ii} \mu_{ii}} \quad (1.3.16)$$

Όλη η πληροφορία της εικόνας που πρόκειται να εστιαστεί από το φακό εμπεριέχεται στις φασματικές συνιστώσες k_x και k_y , οι οποίες για το λόγο αυτό ονομάζονται και χωρικές συχνότητες (spatial frequencies). Ειδικότερα, μικρές τιμές του k_p , όπου $k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, αντιπροσωπεύουν τα βασικά σχηματικά χαρακτηριστικά της εικόνας (bulk features), ενώ μεγάλες τιμές του k_p αντιστοιχούν στις λεπτομέρειες της εικόνας. Η πληροφορία της εικόνας μεταφέρεται στο φακό μέσω ενός διαδιδόμενου κύματος κατά μήκος του άξονα z , της μορφής $\exp(-ik_z z)$. Από τη σχέση (1.3.15) παρατηρούμε ότι αν $k_p < k_0$ ή ισοδύναμα $\lambda_p > \lambda_0$, η σταθερά διάδοσης k_z προκύπτει πραγματικός αριθμός επιτρέποντας τη διάδοση του κύματος στον αέρα και τη μετάδοση των χαρακτηριστικών της εικόνας στο φακό προς εστίαση. Αν αντίθετα $k_p > k_0$ ή $\lambda_p < \lambda_0$, η σταθερά διάδοσης k_z προκύπτει καθαρά φανταστικός αριθμός, με αποτέλεσμα τη διάδοση ενός φθίνοντος κύματος που εξασθενεί κατά μήκος του άξονα z και επηρεάζοντας τη μετάδοση των πληροφοριών της εικόνας. Συγκεκριμένα, μόνο τα βασικά της χαρακτηριστικά (χαμηλές συχνότητες) μεταδίδονται ικανοποιητικά, ενώ οι λεπτομέρειες, που αντιπροσωπεύονται από τα φθίνοντα κύματα, δεν είναι δυνατό να αποδοθούν. Επομένως, ένας συμβατικός φακός λειτουργεί ως βαθυπερατό φίλτρο στις χωρικές συχνότητες της εικόνας. Το όριο μετάδοσης των χωρικών συχνοτήτων δίνεται από τη σχέση $k_p = k_0$ και αντιστοιχεί στο όριο περίθλασης της κλασικής οπτικής. Συνεπώς, η διακριτική ικανότητα Δ ενός οπτικού συστήματος δεν μπορεί να προκύψει μεγαλύτερη από

$$\Delta \approx \lambda_{p,\min} = \frac{2\pi}{k_{p,\max}} = \frac{2\pi}{k_0} = \lambda_0 \quad (1.3.17)$$

Το παραπάνω όριο δεν μπορεί να ξεπεραστεί όσο τέλεια κατασκευασμένος να είναι ένας συμβατικός φακός. Τα υλικά αριστερού νόμου (μεταϋλικά), όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, καταρρίπτουν το παραπάνω φράγμα της διακριτικής ικανότητας επιτρέποντας την ενίσχυση των φθίνοντων κυμάτων. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία πλάκα από μεταϋλικό (LH slab) πάχους d με δείκτη διάθλασης $n = -1$ ($\epsilon_r = \mu_r = -1$) και υποθέτουμε ότι προσπίπτει πάνω της ένα φθίνον κύμα (evanescent wave) της μορφής

$$\mathbf{E}_{in} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (1.3.18)$$

όπου $k_z = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2}$, $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k_0$ (Σχήμα 1.9). Λόγω ανάκλασης στη διαχωριστική επιφάνεια $z = 0$, στην περιοχή (1) δημιουργείται ανακλώμενο κύμα της μορφής

$$\mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{x}} R E_0 \exp[-i(k_x x + k_y y - k_z z - \omega t)] \quad (1.3.19)$$

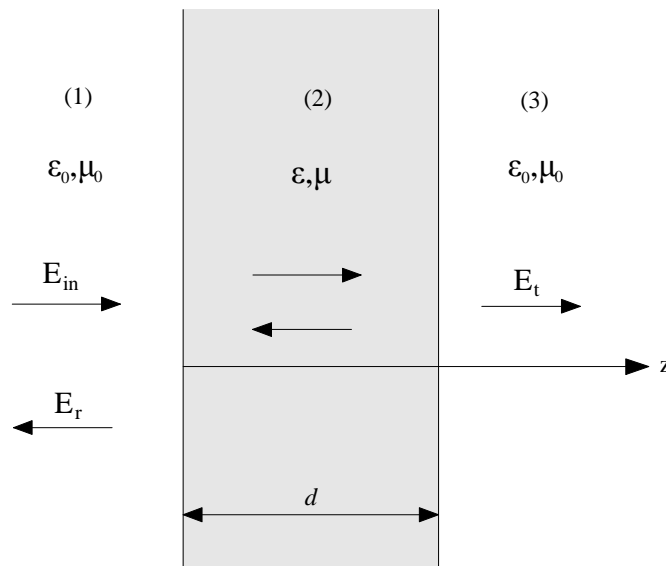
Άρα στην περιοχή (1) ($z < 0$) το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}^{(1)} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] [\exp(-ik_z z) + R \exp(ik_z z)] \quad (1.3.20)$$

Το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο προκύπτει

$$\mathbf{H}^{(1)} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta_0} \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] [\exp(-ik_z z) - R \exp(ik_z z)] \quad (1.3.21)$$

όπου R ο συντελεστής ανάκλασης και $\zeta_0 = \omega \mu_0 / k_z$ η κυματική αντίσταση ελευθέρου χώρου.



Σχήμα 1.9: Μετάδοση σε πλάκα από μεταλλικό με $\epsilon_r = \mu_r = -1$.

Στην περιοχή (2) ($0 < z < d$) έχουμε αντίστοιχα

$$\mathbf{E}^{(2)} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] [A \exp(-ik'_z z) + B \exp(ik'_z z)] \quad (1.3.22)$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta} \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] [A \exp(-ik'_z z) - B \exp(ik'_z z)] \quad (1.3.23)$$

όπου $\zeta = \omega \mu_0 \mu_r / k'_z$ η κυματική αντίσταση του μεταλλικού μέσου, ενώ η σταθερά διάδοσης των κυμάτων εντός της πλάκας είναι

$$k'_z = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2 \epsilon_r \mu_r} \quad (1.3.24)$$

ώστε να παριστάνει φθίνοντα κύματα. Στην περιοχή (3) ($z > d$) οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι

$$\mathbf{E}^{(3)} = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] T \exp[-ik_z(z-d)] \quad (1.3.25)$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta_0} \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] T \exp[-ik_z(z-d)] \quad (1.3.26)$$

όπου T ο συντελεστής μετάδοσης. Οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης R και T προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες του πεδίου στις διαχωριστικές επιφάνειες $z = 0$ και $z = d$, που απαιτούν τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του συνολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και είναι οι ακόλουθες.

$$1 + R = A + B \quad (1.3.27)$$

$$\frac{1}{\zeta_0}(1 - R) = \frac{1}{\zeta}(A - B) \quad (1.3.28)$$

$$A \exp(-ik'_z d) + B \exp(ik'_z d) = T \quad (1.3.29)$$

$$\frac{1}{\zeta} [A \exp(-ik'_z d) - B \exp(ik'_z d)] = \frac{1}{\zeta_0} T \quad (1.3.30)$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων προκύπτει ο συντελεστής μετάδοσης

$$T = \frac{4\zeta_0 \zeta \exp(-ik'_z d)}{(\zeta + \zeta_0)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2 \exp(-2ik'_z d)} \quad (1.3.31)$$

Στην περίπτωση που $\epsilon_r = \mu_r = -1$ για το θεωρούμενο μεταλλικό η σταθερά διάδοσης και η κυματική αντίσταση εντός της πλάκας προκύπτουν

$$k'_z = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} = k_z \quad (1.3.32)$$

$$\zeta = \omega \mu_0 \mu_r / k'_z = -\omega \mu_0 / k_z = -\zeta_0 \quad (1.3.33)$$

οπότε ο συντελεστής μετάδοσης λαμβάνει την παρακάτω απλοποιημένη μορφή

$$T = \exp(ik'_z d) = \exp(ik_z d) = \exp(\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} d) \quad (1.3.34)$$

όπου $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί αποδείχθηκε ότι η πλάκα από μεταλλικό προκαλεί την ενίσχυση κατά πλάτος των φθίνοντων κυμάτων. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται εστίαση κάτω από το όριο του

μήκους κύματος ($\lambda_p < \lambda_0$), καταρρίπτοντας το φράγμα περίθλασης της κλασικής οπτικής. Επιπλέον, η πλάκα-φακός είναι πλέον δυνατό να εστιάσει στις λεπτομέρειες της αρχικής εικόνας. Αν αντίθετα η πλάκα αποτελούνταν από ένα σύνηθες υλικό (π.χ. $\epsilon_r = \mu_r = 1$), τότε $k'_z = k_z$ και $\zeta = \zeta_0$, οπότε ο συντελεστής μετάδοσης θα προέκυπτε ίσος με $\exp\left(-\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} d\right)$ προκαλώντας την εκθετική εξασθένηση του κύματος εντός της πλάκας, όπως άλλωστε αναμενόταν.

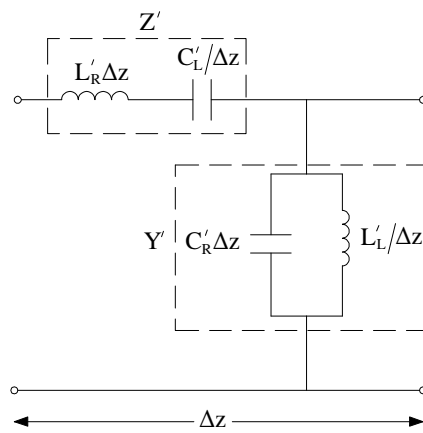
Η εστίαση κάτω από το μήκος κύματος με τη χρήση της πλάκας από μεταϊλικό έχει θεωρητικά άπειρη διακριτική ικανότητα, οδηγώντας στη δημιουργία ενός τέλει φακού. Στην πράξη, το φαινόμενο περιορίζεται από το γεγονός ότι απαιτείται οι συντακτικές παράμετροι της πλάκας ϵ_r και μ_r να έχουν ακριβώς την τιμή -1. Σε περίπτωση που η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, παρατηρούνται σφαιρική απόκλιση της δέσμης (spherical aberration) καθώς και απώλειες από την έλλειψη προσαρμογής, η οποία οδηγεί σε ανακλάσεις στις διεπιφάνειες των δύο μέσων διάδοσης. Η επίδραση αυτών των φαινομένων έχει μελετηθεί [14,15] και γίνεται εντονότερη όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά ανάμεσα στους δείκτες διάθλασης του αέρα και της πλάκας, μειώνοντας αισθητά τις ικανότητες εστίασης της πλάκας-φακού. Η εστίαση κάτω από το μήκος κύματος έχει επιτευχθεί πειραματικά στις δομές που εισήγαγαν ο Lagarkov [15] και ο Eleftheriades [16], όπως επίσης και η αναγέννηση των φθίνοντων κυμάτων από έναν “υπερφακό” [17].

1.4 Κυκλωματικά ισοδύναμα των μεταϊλικών-εφαρμογές

Η κατασκευή των μεταϊλικών από διατάξεις συντονισμού όπως οι διαχωρισμένοι δακτύλιοι (SRRs), όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2, παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι οι διατάξεις λειτουργούν σε στενό εύρος ζώνης, με αποτέλεσμα να είναι δαπανηρή η υλοποίησή τους σε μικροκυματικές συχνότητες. Λύση στο παραπάνω πρόβλημα αποτελεί η προσέγγιση σύμφωνα με τη θεωρία των ισοδύναμων γραμμών μεταφοράς (TL approach), η οποία οδηγεί σε διατάξεις με μικρότερες απώλειες και μεγαλύτερο εύρος ζώνης λειτουργίας [23-25].

1.4.1 Ομογενής γραμμή μεταφοράς

Το ομογενές μοντέλο γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες ενός συμβατικού υλικού (Right Handed Material) αποτελείται από μία εν σειρά αυτεπαγωγή L'_R με μία εγκάρσια χωρητικότητα C'_R ανά μονάδα μήκους (μονάδες H/m και F/m αντίστοιχα), όπου ο δείκτης R υποδηλώνει ότι πρόκειται για υλικό “δεξιού νόμου”. Το αντίστοιχο μοντέλο για υλικό “αριστερού νόμου” είναι το δυϊκό του προηγούμενου και περιλαμβάνει μία εν σειρά χωρητικότητα C'_L και μία εγκάρσια αυτεπαγωγή L'_L με μονάδες F·m και H·m αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατή η κατασκευή ενός καθαρά αριστερού νόμου υλικού επειδή εμφανίζονται παρασιτική εν σειρά αυτεπαγωγή L'_R και εγκάρσια χωρητικότητα C'_R λόγω ροής ρεύματος κατά μήκος του μετάλλου και διαφοράς δυναμικού αντίστοιχα. Το σύνθετο μεταυλικό που προκύπτει από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τύπων υλικών περιλαμβάνει επομένως μία αυτεπαγωγή L'_R σε σειρά με μία χωρητικότητα C'_L και μία εγκάρσια χωρητικότητα C'_R παράλληλα με μία αυτεπαγωγή L'_L , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.10 (Composite Right–Left Handed Metamaterial, CRLH)



Σχήμα 1.10: Δομική μονάδα μεταυλικού

Η σταθερά διάδοσης $\gamma = \alpha + i\beta$ της ισοδύναμης γραμμής μεταφοράς στο μοντέλο του σύνθετου μεταυλικού δίνεται από τη σχέση $\gamma = \sqrt{Z'Y'}$ όπου Z' και Y' είναι αντίστοιχα η ανά μονάδα μήκους σύνθετη αντίσταση και σύνθετη αγωγιμότητα. Στην περίπτωσή μας

$$\gamma = \pm i \sqrt{\omega^2 L'_R C'_R - \left(\frac{L'_R}{L'_L} + \frac{C'_R}{C'_L} \right) + \frac{1}{\omega^2 L'_L C'_L}} \quad (1.4.1)$$

Από την παραπάνω σχέση διασποράς φαίνεται ότι όταν το υπόρριζο είναι θετικό προκύπτει πραγματική τιμή για τη σταθερά διάδοσης β και έχουμε κυματοδότηση, ενώ όταν το

υπόρριζο είναι αρνητικό η σταθερά διάδοσης γίνεται καθαρά φανταστική και δε συμβαίνει κυματοδήγηση, αλλά παρατηρούνται φθίνοντα κύματα των οποίων το πλάτος εξασθενεί εκθετικά (evanescent waves). Για να είναι το υπόρριζο θετικό θα πρέπει

$$\omega^2 L'_R C'_R + \frac{1}{\omega^2 L'_L C'_L} - \left(\frac{L'_R}{L'_L} + \frac{C'_R}{C'_L} \right) > 0 \quad (1.4.2)$$

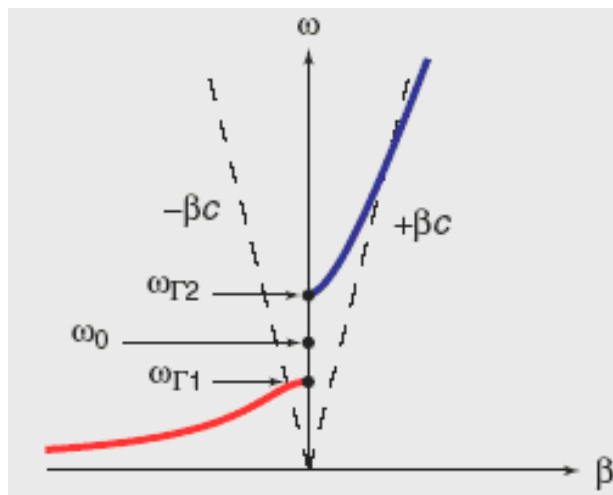
από όπου προκύπτει ότι

$$\omega > \max \left(\frac{1}{\sqrt{L'_R C'_L}}, \frac{1}{\sqrt{L'_L C'_R}} \right) = \omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega < \min \left(\frac{1}{\sqrt{L'_R C'_L}}, \frac{1}{\sqrt{L'_L C'_R}} \right) = \omega_1 \quad (1.4.3)$$

Η σταθερά διάδοσης των κυμάτων ορίζεται επομένως ως εξής

$$\beta(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\omega^2 L'_R C'_R + \frac{1}{\omega^2 L'_L C'_L} - \left(\frac{L'_R}{L'_L} + \frac{C'_R}{C'_L} \right)}, & \omega > \omega_2 \\ -\sqrt{\omega^2 L'_R C'_R + \frac{1}{\omega^2 L'_L C'_L} - \left(\frac{L'_R}{L'_L} + \frac{C'_R}{C'_L} \right)}, & \omega < \omega_1 \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Για συχνότητες στο εύρος $\omega_1 < \omega < \omega_2$ βρίσκεται η ζώνη αποκοπής της διάταξης και δεν παρατηρείται κυματοδήγηση. Η καμπύλη διασποράς ω - β για το σύνθετο μεταύλικό φαίνεται στο Σχήμα 1.11, όπου διακρίνουμε ότι στην περιοχή συχνοτήτων $\omega > \omega_2$ είναι $\beta(\omega) = \omega \sqrt{L'_R C'_R}$ και το σύνθετο υλικό συμπεριφέρεται ως ένα σύνηθες υλικό, αφού η ταχύτητα φάσης $u_p = \omega/\beta$ και η ταχύτητα ομάδας $u_g = d\omega/d\beta$ είναι θετικές, ενώ στην περιοχή συχνοτήτων $\omega < \omega_1$ διακρίνουμε συμπεριφορά υλικού αριστερού νόμου (Left handed), αφού $u_p < 0$ και $u_g > 0$, δηλαδή οι ταχύτητες φάσης και ομάδας είναι αντιπαράλληλες. Επίσης, παρουσιάζεται και μία ζώνη αποκοπής ($\omega_1 < \omega < \omega_2$).



Σχήμα 1.11: Καμπύλη διασποράς σύνθετου υλικού

Σε περίπτωση που επιλεγούν κατάλληλα οι παράμετροι της γραμμής μεταφοράς, ώστε να ισχύει η σχέση συμμετρίας

$$L'_R C'_L = L'_L C'_R \quad (1.4.5)$$

τότε εξισορροπούνται οι συνεισφορές «αριστερού και δεξιού νόμου», με αποτέλεσμα η σχέση διασποράς να λαμβάνει την απλοποιημένη μορφή

$$\beta(\omega) = \omega \sqrt{L'_R C'_R} - \frac{1}{\omega \sqrt{L'_L C'_L}} = \beta_R + \beta_L \quad (1.4.6)$$

δηλαδή να διαχωρίζονται πλήρως οι συνεισφορές από τα υλικά δεξιού και αριστερού νόμου. Επιπλέον, εξαφανίζεται η ζώνη αποκοπής και η μετάβαση από την περιοχή αριστερού στην περιοχή δεξιού νόμου πραγματοποιείται στη συχνότητα μετάβασης ω_0 (όπου $\beta = 0$), η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{L'_R C'_R L'_L C'_L}} = \frac{1}{\sqrt{L'_R C'_L}} \quad (1.4.7)$$

Άλλο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του παραπάνω ισοδύναμου κυκλωματικού μοντέλου είναι ότι η χαρακτηριστική αντίσταση μίας ισοσταθμισμένης γραμμής μεταφοράς ($L'_R C'_L = L'_L C'_R$) δίνεται από τη σχέση

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = Z_L \sqrt{\frac{L'_R C'_L \omega^2 - 1}{L'_L C'_R \omega^2 - 1}} = Z_L = Z_R \quad (1.4.8)$$

όπου $Z_L = \sqrt{L'_L / C'_L}$ και $Z_R = \sqrt{L'_R / C'_R}$. Συνεπώς, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η χαρακτηριστική αντίσταση στη γενική μη ισοσταθμισμένη περίπτωση εμφανίζει διασπορά με τη συχνότητα, αλλά στην ισοσταθμισμένη γραμμή μεταφοράς προκύπτει ανεξάρτητη της συχνότητας, επιτρέποντας την προσαρμογή πάνω σε ένα πολύ μεγάλο εύρος ζώνης.

Τέλος, μπορούμε να συσχετίσουμε τις συντακτικές παραμέτρους ϵ και μ του σύνθετου μεταυλικού με τις παραμέτρους της ισοδύναμης γραμμής μεταφοράς, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις για τη μιγαδική σταθερά διάδοσης γ και τη χαρακτηριστική αντίσταση Z_0 .

$$\gamma = \sqrt{Z'Y'} = i\beta \Rightarrow Z'Y' = -\omega^2 \epsilon \mu \quad (1.4.9)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \Rightarrow \frac{\mu}{\epsilon} = \frac{Z'}{Y'} \quad (1.4.10)$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων προκύπτουν οι συντακτικές παράμετροι ϵ , μ συναρτήσει των παραμέτρων της γραμμής μεταφοράς

$$\mu(\omega) = L'_R - \frac{1}{\omega^2 C'_L} \quad (1.4.11)$$

$$\varepsilon(\omega) = C'_R - \frac{1}{\omega^2 L'_L} \quad (1.4.12)$$

Ο δείκτης διάθλασης του μέσου ορίζεται από τη σχέση

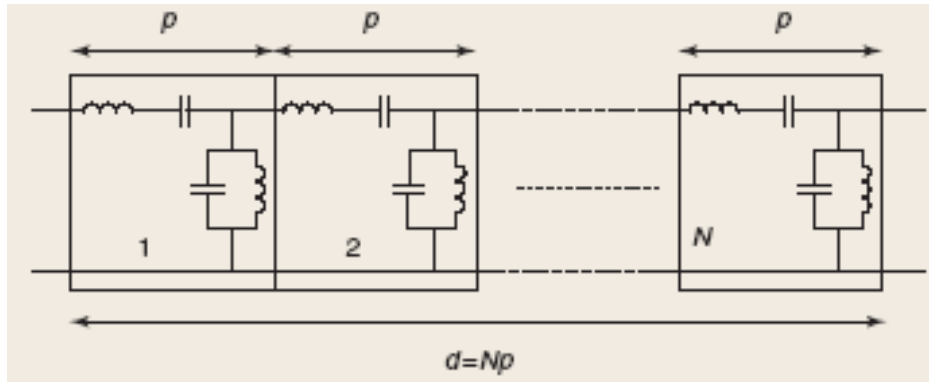
$$n = \frac{c}{u_p} = \frac{c\beta}{\omega} \quad (1.4.13)$$

και προκύπτει αρνητικός στην περιοχή «αριστερού νόμου», όπου $\beta < 0$.

1.4.2 Ισοδύναμο δίκτυο LC

Το μοντέλο της ομογενούς γραμμής μεταφοράς είναι ιδανικό και δε συναντάται στην πράξη. Ωστόσο, μία γραμμή μεταφοράς θεωρείται ενεργά ομογενής όταν υλοποιείται ως ένα δίκτυο LC, το οποίο συνίσταται από την περιοδική επανάληψη μίας βασικής στοιχειώδους δομικής μονάδας (unit cell). Στην περίπτωση μας η δομική μονάδα αποτελείται από την εν σειρά σύνδεση μίας αυτεπαγωγής L_R και μίας χωρητικότητας C_L , καθώς και από την παράλληλη σύνδεση μίας χωρητικότητας C_R και μίας αυτεπαγωγής L_L στον εγκάρσιο κλάδο (Σχήμα 1.10). Η αυτεπαγωγή L_L στον εγκάρσιο κλάδο και η χωρητικότητα C_L του εν σειρά κλάδου είναι ενδεικτικές της αριστερόστροφης συμπεριφοράς της διάταξης (Left Handedness).

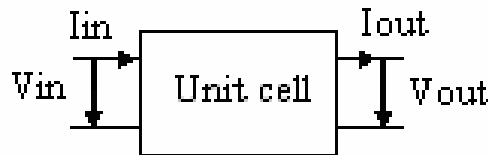
Σημειώνεται ότι το φυσικό μήκος της δομικής μονάδας p πρέπει να είναι αρκετά μικρό συγκρινόμενο με το μήκος κύματος του κύματος που διαδίδεται στο μεταυλικό. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι το μέσο είναι ενεργά ομογενές στο σύνολό του. Συνεπώς, ένα προσπίπτον Η/Μ κύμα δεν “αντιλαμβάνεται” τις ασυνέχειες του σύνθετου μέσου που αποτελείται από την επανάληψη N όμοιων δομικών μονάδων (δίκτυο LC). Αποφεύγονται με τον τρόπο αυτό ανεπιθύμητα φαινόμενα σκέδασης και περίθλασης στις ασυνέχειες της διάταξης κατά τη διάδοση ενός κύματος στο μέσο. Στην πράξη, η συνθήκη $p < \lambda_g / 4$ εξασφαλίζει τα παραπάνω, αν και θεωρητικά πρέπει $p \rightarrow 0$. Στην περίπτωση που $p \ll \lambda_g / 4$, το δίκτυο LC ισοδυναμεί με μία ομογενή ιδανική γραμμή μεταφοράς μήκους $d = Np$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12: Περιοδικό LC δίκτυο μήκους d ισοδύναμο με ομογενή γραμμή μεταφοράς για $p \rightarrow 0$.

Προκειμένου να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά του δικτύου LC χρησιμοποιούμε στοιχεία από τη θεωρία ανάλυσης δικτύων και συγκεκριμένα τη μέθοδο ανάλυσης μέσω του πίνακα μεταφοράς (Transmission Matrix Analysis). Η μήτρα μεταφοράς του LC δικτύου υπολογίζεται εύκολα από τη μήτρα μεταφοράς που αντιστοιχεί στη δομική μονάδα, η οποία θεωρείται ως ένα δίθυρο δίκτυο (Σχήμα 1.13) και συνδέει την τάση και το ρεύμα εισόδου V_{in} , I_{in} με την τάση και το ρεύμα εξόδου V_{out} , I_{out} σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{out} \\ I_{out} \end{bmatrix} \quad (1.4.14)$$



Σχήμα 1.13: Η δομική μονάδα του δικτύου LC ως δίθυρο δίκτυο.

Δεδομένου ότι η δομική μονάδα αποτελείται από μία εν σειρά σύνθετη αντίσταση Z και μία εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα Y (Σχήμα 1.10), ο πίνακας μεταφοράς προκύπτει

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ZY & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.15)$$

και λόγω των σχέσεων ορισμού των Z, Y λαμβάνουμε τελικά την ακόλουθη μορφή του πίνακα μεταφοράς για τη δομική μονάδα

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & i \frac{(\omega/\omega_{se})^2 - 1}{\omega C_L} \\ i \frac{(\omega/\omega_{sh})^2 - 1}{\omega L_L} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.16)$$

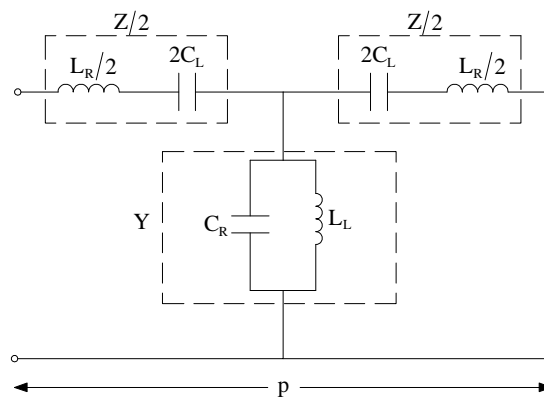
όπου οι παράμετροι $\omega_{se} = \frac{1}{\sqrt{L_R C_L}}$ και $\omega_{sh} = \frac{1}{\sqrt{L_L C_R}}$ ορίζονται για ευκολία στους συμβολισμούς και παριστάνουν αντίστοιχα τις συχνότητες συντονισμού του εν σειρά (series) και του εγκάρσιου (shunt) κλάδου της δομικής μονάδας του δικτύου LC, ενώ η αδιάστατη παράμετρος κ ορίζεται από τη σχέση

$$x = -ZY = \left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 + \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 - \kappa\omega_L^2 \quad (1.4.17)$$

με $\kappa = L_R C_L + L_L C_R$ (s/rad)². Στην ειδική περίπτωση που η γραμμή μεταφοράς είναι ισοσταθμισμένη (σχέση 1.4.5), προκύπτει ότι $\omega_{se} = \omega_{sh}$ και οι παραπάνω εκφράσεις απλοποιούνται στη μορφή

$$x = \left(\frac{\omega}{\omega_R} - \frac{\omega_L}{\omega}\right)^2, \quad \kappa = 2/(\omega_R \omega_L) \quad (1.4.18)$$

Η δομική μονάδα του Σχήματος 1.10 παρουσιάζει ωστόσο ασυμμετρία, προκαλώντας προβλήματα προσαρμογής σε τυχόν συνδέσεις με εξωτερικές θύρες, επειδή οι αντιστάσεις εισόδου και εξόδου σε μία ασύμμετρη υλοποίηση του δικτύου LC προκύπτουν διαφορετικές ($Z_{in} \neq Z_{out}$), σε αντίθεση με μία συμμετρική υλοποίηση όπου $Z_{in} = Z_{out}$. Επομένως, ένα ασύμμετρο δίκτυο LC θα απαιτούσε διαφορετικές σύνθετες τερματικές αντιστάσεις (port impedances) για προσαρμογή, γεγονός που το καθιστά μη πρακτικό. Για το λόγο αυτό επιλέγεται μία συμμετρική δομική μονάδα, όπως για παράδειγμα το δίκτυο T του Σχήματος 1.14.



Σχήμα 1.14: Συμμετρική δομική μονάδα του δικτύου LC.

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας μεταφοράς της δομικής μονάδας διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{\text{sym}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) \\ Y & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{2} & i \frac{(\omega/\omega_{se})^2 - 1}{\omega C_L} \left(1 - \frac{x}{4} \right) \\ i \frac{(\omega/\omega_{sh})^2 - 1}{\omega L_L} & 1 - \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4.19)$$

Ο υπολογισμός του πίνακα μεταφοράς T_N του συνολικού δικτύου LC που αποτελείται από N στοιχειώδεις δομικές μονάδες γίνεται πολλαπλασιάζοντας τις μήτρες μεταφοράς κάθε δομικής μονάδας, αφού αυτές συνδέονται αλυσιδωτά. Επειδή οι δομικές μονάδες είναι πανομοιότυπες μεταξύ τους έχουμε

$$T_N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \quad (1.4.20)$$

Σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του δικτύου LC προκύπτουν μέσω του πίνακα σκέδασης S_N , ο οποίος συνδέεται με τον πίνακα T_N με την ακόλουθη σχέση

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}_N = \frac{1}{A_N + \frac{B_N}{Z_0} + C_N Z_0 + D_N} \cdot \begin{bmatrix} A_N + \frac{B_N}{Z_0} - C_N Z_0 - D_N & 2(A_N D_N - B_N C_N) \\ 2 & -A_N + \frac{B_N}{Z_0} - C_N Z_0 + D_N \end{bmatrix} \quad (1.4.21)$$

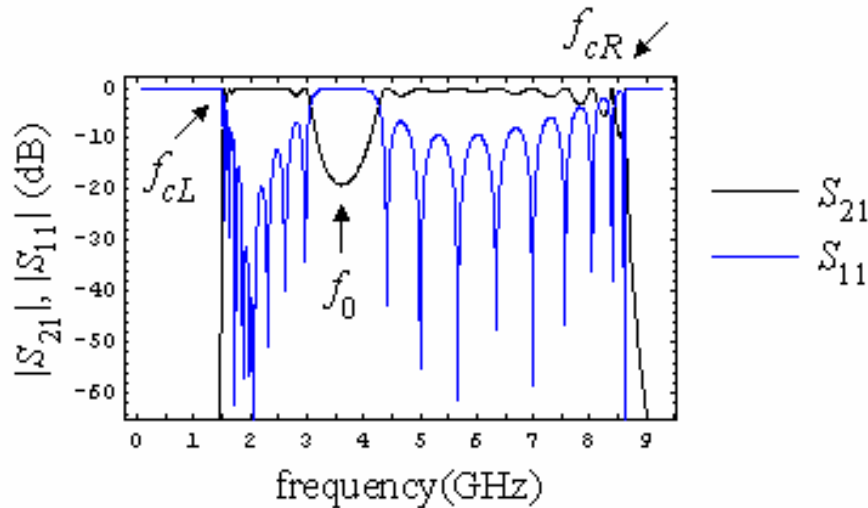
όπου Z_0 η σύνθετη αντίσταση τερματισμού των δύο θυρών, η οποία είναι συνήθως πραγματική και της τάξης των 50 ή των 75 Ω. Ιδιαίτερη σημασία έχει ο προσδιορισμός του συντελεστή $S_{21,N}$ που παριστάνει το συντελεστή μετάδοσης ενός κύματος που διαδίδεται σε ένα μικροκυματικό δίθυρο. Ο συντελεστής $S_{21,N}$ είναι μιγαδικός αριθμός και η μεταβολή του μέτρου του ως συνάρτηση της συχνότητας μας παρέχει χρήσιμες πληροφορίες σε συνδυασμό και με τη μεταβολή του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης $S_{11,N}$.

Θεωρώντας για παράδειγμα τις ακόλουθες αριθμητικές τιμές για τις παραμέτρους του δικτύου LC [18]: $N = 10$, $L_R = 2$ nH, $L_L = 2.5$ nH, $C_R = 1$ pF, $C_L = 0.75$ pF και $Z_0 = 50$ Ω, ο συντελεστής μετάδοσης $S_{21,N}$ προσδιορίζεται από τη σχέση

$$S_{21,N} = \frac{2}{A_N + B_N/Z_0 + C_N Z_0 + D_N} \quad (1.4.22)$$

όπου A_N , B_N , C_N , D_N είναι τα στοιχεία του συνολικού πίνακα μεταφοράς $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{10}$ και οι

παραμέτροι A , B , C , D από την εξίσωση (1.4.19). Μετά από αριθμητική επεξεργασία λαμβάνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση του μέτρου του $S_{21,N}$ και του $S_{11,N}$ σε dB συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας σε GHz (Σχήμα 1.15).



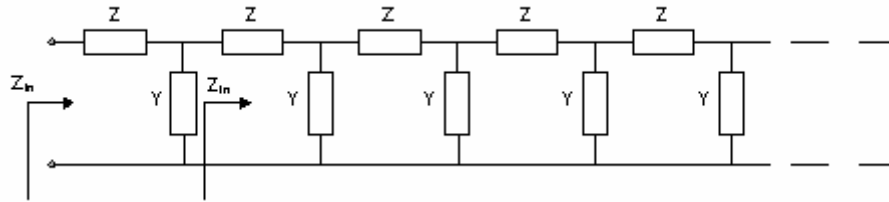
Σχήμα 1.15: Μεταβολή του μέτρου των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης συναρτήσει της συχνότητας.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μετάδοσης S_{21} μεγιστοποιείται κατά μέτρο (λίγο μικρότερο από 0 dB) σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στη ζώνη διέλευσης, αλλά λαμβάνει πολύ μικρές τιμές για συχνότητες εκτός της παραπάνω περιοχής (ζώνη αποκοπής), ενώ ο συντελεστής ανάκλασης παρουσιάζει ακριβώς τις αντίθετες μεταβολές. Στο παράδειγμά μας η γραμμή δεν είναι ισοσταθμισμένη ($L_R C_L \neq L_L C_R$), με αποτέλεσμα την ύπαρξη της ζώνης αποκοπής. Στην περίπτωση ισοσταθμισμένης γραμμής $\omega_{se} = \omega_{sh} = \omega_0$ και το δίκτυο LC συμπεριφέρεται ως ένα ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης $\omega_{cL} < \omega < \omega_{cR}$. Οι συχνότητες ω_{cL} και ω_{cR} συμβολίζουν αντίστοιχα τη συχνότητα αποκοπής του υπερπερατού φίλτρου λόγω της συνεισφοράς του αριστερόστροφου τμήματος της δομικής μονάδας και τη συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου λόγω της συνεισφοράς του δεξιόστροφου τμήματος της δομικής μονάδας και μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά προκειμένου να καθοριστεί το διαθέσιμο δυνατό εύρος ζώνης του δικτύου LC και κατ' επέκταση του μεταλλικού που μοντελοποιείται κατά αυτό τον τρόπο.

1.4.3 Συχνότητες αποκοπής του δικτύου LC

Ο προσδιορισμός των συχνοτήτων αποκοπής του δικτύου LC γίνεται χρησιμοποιώντας την έκφραση της αντίστασης εισόδου του, η οποία υπολογίζεται αν θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι το δίκτυο LC έχει άπειρο μήκος (Σχήμα 1.16). Τότε η αντίσταση εισόδου είναι η ίδια σε κάθε κόμβο του δικτύου, οπότε δίνεται από τη σχέση

$$Z_{in} = Z + \left(\frac{1}{Y} \parallel Z_{in} \right) = Z + \frac{Z_{in}/Y}{1/Y + Z_{in}} \quad (1.4.23)$$



Σχήμα 1.16: Αντίσταση εισόδου περιοδικού κλιμακωτού δικτύου απείρου μήκους

Η παραπάνω σχέση επιλύεται ως προς Z_{in} και προκύπτει η έκφραση

$$Z_{in} = \frac{Z \pm \sqrt{Z^2 + 4(Z/Y)}}{2} = \frac{Z}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{ZY}} \right] = R_{in} + jX_{in} \quad (1.4.24)$$

Το πραγματικό μέρος της αντίστασης εισόδου πρέπει να είναι μη μηδενικό ($R_{in} \neq 0$) προκειμένου να υποστηρίζεται η διάδοση κατά μήκος του δικτύου LC, δεδομένου ότι η αντίσταση τερματισμού των θυρών του δικτύου είναι πραγματική (π.χ. $Z_0 = 50 \Omega$). Πράγματι, αν υποθέσουμε $Z_{in} = jX_{in}$, το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης στο σημείο

σύνδεσης μίας θύρας προκύπτει $|\rho| = \frac{|jX_{in} - Z_0|}{|jX_{in} + Z_0|} = \frac{\sqrt{X_{in}^2 + Z_0^2}}{\sqrt{X_{in}^2 + Z_0^2}} = 1$ (μέγιστο) αποτρέποντας

τη διάδοση.

Στην ιδανική περίπτωση που το δίκτυο LC δεν εμφανίζει απώλειες η σύνθετη αντίσταση Z της εξίσωσης (1.4.24) είναι καθαρά φανταστικός αριθμός, με αποτέλεσμα η συνθήκη $R_{in} \neq 0$ να ικανοποιείται μόνο όταν το υπόρριζο της παράστασης $1 + \frac{4}{ZY}$ είναι αρνητικό. Η αντίστοιχη ζώνη συχνοτήτων είναι ζώνη διέλευσης του φίλτρου, ενώ η ζώνη όπου το υπόρριζο είναι θετικό αποτελεί τη ζώνη αποκοπής. Οι μηδενισμοί του υπορριζου προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$$ZY = -4 \Leftrightarrow \omega^4 - \omega_R^2 (4 + \kappa \omega_L^2) \omega^2 + (\omega_R \omega_L)^2 = 0 \quad (1.4.25)$$

από την οποία τελικά λαμβάνουμε

$$\omega_{cL} = \omega_0 \sqrt{\frac{[\kappa + (2/\omega_L)^2] \omega_0^2 - \sqrt{[\kappa + (2/\omega_L)^2]^2 \omega_0^4 - 4}}{2}} \quad (1.4.26)$$

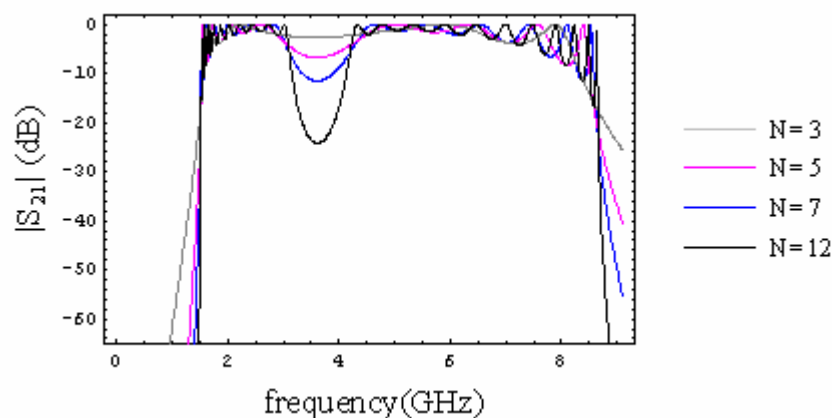
$$\omega_{cR} = \omega_0 \sqrt{\frac{[\kappa + (2/\omega_L)^2] \omega_0^2 + \sqrt{[\kappa + (2/\omega_L)^2]^2 \omega_0^4 - 4}}{2}} \quad (1.4.27)$$

όπου $\omega_0^2 = \omega_R \omega_L$ και $\kappa = L_R C_L + L_L C_R$. Στην περίπτωση της ισοσταθμισμένης γραμμής, οι εκφράσεις των συχνοτήτων αποκοπής ω_{CL} , ω_{CR} απλοποιούνται σημαντικά

$$\omega_{CL}^{bal} = \omega_R \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{\omega_L}{\omega_R}} \right| \quad (1.4.28)$$

$$\omega_{CR}^{bal} = \omega_R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_L}{\omega_R}} \right) \quad (1.4.29)$$

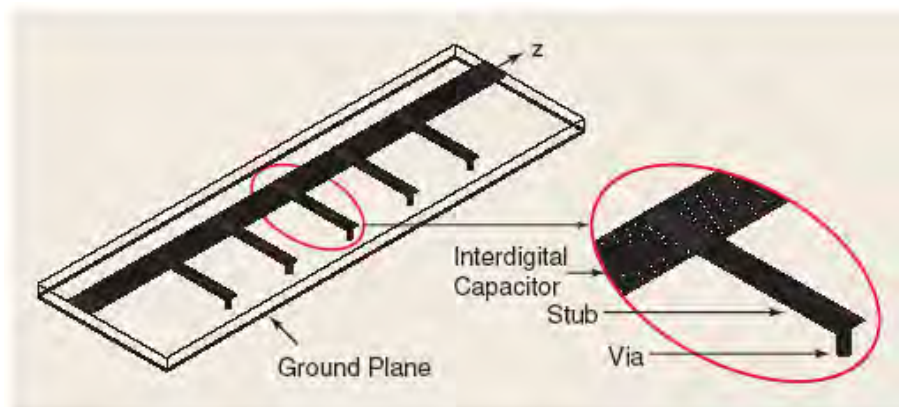
Συνεπώς, το διαθέσιμο εύρος ζώνης μετάδοσης ενός κύματος μέσα στο δίκτυο LC, που αναπαριστά την κυκλωματική μοντελοποίηση του μεταϋλικού, καθορίζεται κατά προσέγγιση από τις σχέσεις (1.4.26-1.4.29), οι οποίες όμως ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το δίκτυο LC έχει άπειρο μήκος, γεγονός που δε συμβαίνει στην πράξη. Ωστόσο, όταν το πλήθος των στοιχειωδών δομικών μονάδων του δικτύου είναι αρκετά μεγάλο ($N \sim 10$), οι παραπάνω σχέσεις δίνουν ιδιαίτερα ακριβή αποτελέσματα. Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.17, με την αύξηση του πλήθους των unit cells η ζώνη διέλευσης καθίσταται ολοένα και περισσότερο ευδιάκριτη, αφού αντιστοιχεί στην κατακόρυφη άνοδο του μέτρου του S_{21} , ενώ και η ενδιάμεση ζώνη αποκοπής λόγω έλλειψης ισοστάθμισης του δικτύου LC τονίζεται ιδιαίτερα (πτώση περίπου 25 dB για $N = 12$). Οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων έχουν επιλεγεί όπως στο Σχήμα 1.15. Οι συχνότητες αποκοπής f_{CL} και f_{CR} του απείρου δικτύου LC από τις σχέσεις (1.4.26, 1.4.27) προκύπτουν αντίστοιχα ίσες με 1.51 και 8.68 GHz, ενώ από το Σχήμα 1.17 για $N = 12$ προκύπτουν οι τιμές $f_{CL} = 1.52$ GHz και $f_{CR} = 8.64$ GHz, οι οποίες απέχουν ελάχιστα από τις προηγούμενες. Συνεπώς, για N της τάξης του 10 και πάνω η προσέγγιση του δικτύου απείρου μήκους δίνει ιδιαίτερα ακριβή αποτελέσματα.



Σχήμα 1.17: Μεταβολή του πλάτους του συντελεστή μετάδοσης S_{21} για διαφορετικό πλήθος των unit cells

1.4.4 Φυσική υλοποίηση μονοδιάστατης γραμμής μεταφοράς

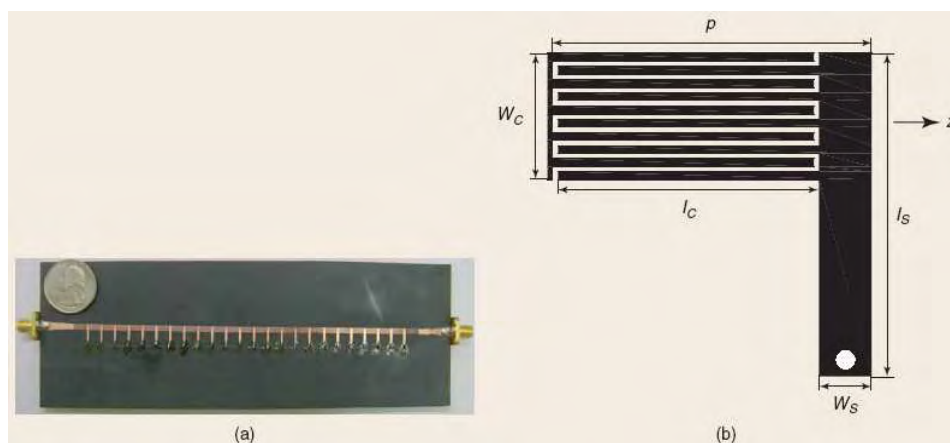
Το δίκτυο LC που παρουσιάστηκε προηγουμένως χρειάζεται να υλοποιηθεί με φυσικά στοιχεία που να αντιστοιχούν στις απαιτούμενες χωρητικότητες C_R , C_L και αυτεπαγωγές L_R , L_L . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η τεχνική των καταναμημένων στοιχείων (distributed components) που κατασκευάζονται με τη βοήθεια μικροταινίας, ή ταινιογραμμής. Ένα παράδειγμα κατασκευής μονοδιάστατης γραμμής μεταφοράς φαίνεται στο Σχήμα 1.18. Η διάταξη υλοποιείται πάνω σε μικροταινία και αναπτύσσονται χωρητικότητες λόγω των διακένων μεταξύ των μεταλλικών τμημάτων μαιανδρικού σχήματος (interdigital capacitors) και αυτεπαγωγές εξαιτίας της ροής ρεύματος κατά μήκος των στελεχών (stub inductors), τα οποία συνδέονται στο επίπεδο γείωσης. Η δομική μονάδα της διάταξης είναι ισοδύναμη με τη δομική μονάδα του δικτύου LC, δηλαδή περιλαμβάνει εν σειρά αυτεπαγωγή L_R και χωρητικότητα C_L και παράλληλα συνδεδεμένα στον εγκάρσιο κλάδο χωρητικότητα C_R και αυτεπαγωγή L_L .



Σχήμα 1.18: Μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς

Η αυτεπαγωγή L_R προκαλείται από τη μαγνητική ροή που παράγεται από τη ροή ρεύματος στα μεταλλικά μαιανδρικά οριζόντια τμήματα, ενώ η χωρητικότητα C_L από τη διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται στα διάκενα μεταξύ των μεταλλικών τμημάτων. Αντίστοιχα, ο εγκάρσιος κλάδος περιλαμβάνει αυτεπαγωγή L_L λόγω ροής ρεύματος και κατ' επέκταση μαγνητικής ροής κατά μήκος του εγκάρσιου στελέχους (stub) και χωρητικότητα C_R μεταξύ του ίχνους του στελέχους και του επιπέδου γείωσης. Μία ισοσταθμισμένη μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς αποτελούμενη από 24 δομικές μονάδες (unit cells) φαίνεται στο Σχήμα 1.19 (α). Οι γεωμετρικές παράμετροι της δομικής μονάδας έχουν τις εξής τιμές: $p = 6.1$ mm, $l_c = 5$ mm, $w_c = 2.4$ mm, $l_s = 8$ mm, $w_s = 1$ mm, ενώ σε κάθε unit cell υπάρχουν 5 ζεύγη μαιανδρικών μεταλλικών τμημάτων με πλάτος 0.15 mm το καθένα και μεταξύ τους

διάκενα 0.1 mm (Σχήμα 1.19 β). Οι αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν για τις παραμέτρους L,C είναι: $L_L = 3.38$ nH, $C_L = 0.68$ pF, $L_R = 2.45$ nH και $C_R = 0.5$ pF [19].



Σχήμα 1.19: (α) Μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς από 24 unit cells (β) Παράμετροι δομικής μονάδας.

1.4.5 Εφαρμογές των μεταυλικών

Η γραμμή μεταφοράς από το σύνθετο μεταυλικό που περιγράφηκε παραπάνω έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αρκετών νέων μικροκυματικών εφαρμογών και συσκευών. Οι εφαρμογές αυτές χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με το είδος των κυμάτων ή την ιδιότητα των μεταυλικών που εκμεταλλευόμαστε. Στη συνέχεια αναφέρουμε ενδεικτικά δύο τέτοιες εφαρμογές.

Κατευθυντικός συζεύκτης “οπισθοδρομικού” κύματος

Οι συνήθεις κατευθυντικοί συζεύκτες λειτουργούν σε αρκετά μεγάλο εύρος ζώνης, αλλά εμφανίζουν σχετικά χαμηλά ποσοστά σύζευξης της τάξης των -10 dB ή και λιγότερο. Αντίθετα, ένας κατευθυντικός συζεύκτης αποτελούμενος από μία γραμμή μεταφοράς από σύνθετο μεταυλικό (CRLH line) και μία συμβατική μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς (CμS line) επιτυγχάνει οποιοδήποτε ποσοστό σύζευξης σε μεγάλο εύρος ζώνης λειτουργίας. Στο Σχήμα 1.20 φαίνεται ο συζεύκτης νέου τύπου, ο οποίος αποτελείται από 9 δομικές μονάδες πανομοιότυπες με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν για την υλοποίηση της μικροταινιακής γραμμής μεταφοράς του σχήματος 1.19 (α) [20]. Το μήκος του συζεύκτη είναι $d = 62$ mm και το διάκενο μεταξύ των γραμμών σύζευξης $s = 0.3$ mm. Λειτουργώντας το συζεύκτη στην περιοχή “αριστερού νόμου” (LH region) επιτυγχάνεται οπίσθια σύζευξη. Όταν δηλαδή εφαρμοστεί ένα σήμα εισόδου στη θύρα 1, η ισχύς διαδίδεται προς τη θύρα 2 (διάνυσμα Poynting S), αλλά η φάση διαδίδεται προς τη θύρα 1

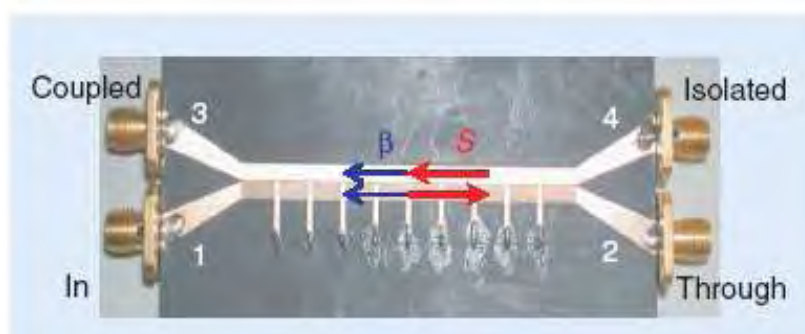
(σταθερά διάδοσης β), υποδηλώνοντας ότι η ταχύτητα φάσης είναι αντιπαράλληλη με την ταχύτητα ομάδας. Επειδή η σύζευξη με τη συμβατική μικροταινιακή γραμμή πραγματοποιείται μέσω των αποσβεννόμενων κυμάτων (evanescent waves) στην εγκάρσια διεύθυνση, η ισχύς σύζευξης θα οδεύει προς τη θύρα 3. Το σημαντικό στοιχείο της νέας διάταξης είναι ότι το απαιτούμενο μήκος του συζεύκτη για μέγιστη σύζευξη που δίνεται γενικά από τη σχέση

$$d_{\max} = \frac{\pi}{|\beta_c - \beta_\pi|} \quad (1.4.30)$$

όπου β_c και β_π οι σταθερές διάδοσης των ρυθμών c και π αντίστοιχα, προκύπτει μικρότερο γιατί $\beta_c = \beta_{\text{CRLH}} < 0$ στην περιοχή λειτουργίας ‘‘αριστερού νόμου’’ ($\beta_\pi = \beta_{\text{C}\mu\text{S}}$). Τότε

προκύπτει $d_{\max} = \frac{\pi}{|\beta_{\text{CRLH}}| + \beta_{\text{C}\mu\text{S}}}$ που είναι σαφώς μικρότερο από ό,τι στην περίπτωση του

συμβατικού συζεύκτη. Ο παραπάνω συζεύκτης επιτυγχάνει ποσοστό σύζευξης -0.7 dB στο εύρος $2.2 - 3.8$ GHz, σε αντίθεση με τον αντίστοιχο συμβατικό που παρέχει ποσοστό σύζευξης -10 dB. Μάλιστα, μεταβάλλοντας τον αριθμό των δομικών μονάδων που συγκροτούν τη διάταξη ή το διάκενο μεταξύ των γραμμών, μπορεί να επιτευχθεί οποιοδήποτε ποσοστό σύζευξης.

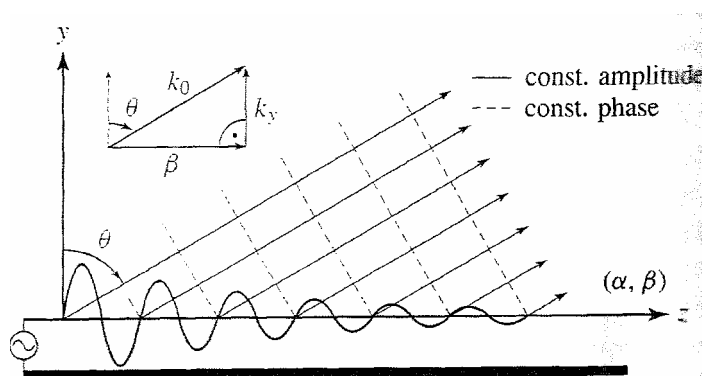


Σχήμα 1.20: Κατευθυντικός συζεύκτης

Κεραία διαρρέοντος κύματος

Η ισοσταθμισμένη μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς του Σχήματος 1.19 (α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή μίας κεραίας διαρρέοντος κύματος (Leaky wave antenna). Προτού παρουσιάσουμε τη διάταξη της κεραίας από μεταλλικό, περιγράφουμε τη γενική αρχή λειτουργίας των συμβατικών κεραίων διαρρέοντος κύματος. Μία τέτοια κεραία απεικονίζεται στο Σχήμα 1.21, όπου φαίνεται ότι στο χώρο πάνω από τον κυματοδηγό το διαδιδόμενο κύμα έχει τη μορφή

$$\psi(x, z) = \psi_0 \exp(-\gamma z) = \psi_0 \exp(-i\beta z) \exp(-\alpha z) \exp(-ik_y y) \quad (1.4.31)$$



Σχήμα 1.21: Γενική μορφή κεραίας διαρρέοντος κύματος.

όπου $\gamma = \alpha + i\beta$ η μιγαδική σταθερά διάδοσης κατά μήκος του κυματοδηγού και k_y η σταθερά διάδοσης κατά την εγκάρσια διεύθυνση που δίνεται από τη σχέση

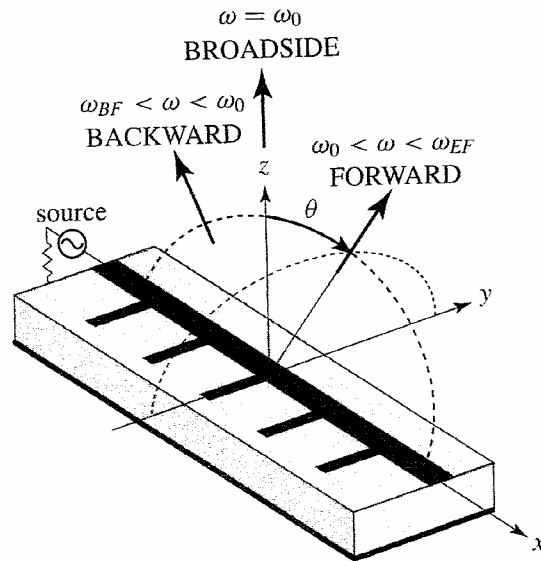
$$k_y = (k_0^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (1.4.32)$$

Σε περίπτωση δηλαδή που η ταχύτητα φάσης του κύματος είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ($\beta < c$, slow wave) ή ισοδύναμα $\beta > k_0$, τότε $k_y = i \text{Im}(k_y)$, με $\text{Im}(k_y) < 0$ και παρατηρείται εκθετική εξασθένιση του κύματος κατά την εγκάρσια διεύθυνση y . Αντίθετα, αν $u_p > c$ (fast wave) ή $\beta < k_0$, τότε k_y πραγματικός προκαλώντας τη διάδοση του κύματος κατά την εγκάρσια διεύθυνση, δηλαδή έχουμε την εμφάνιση διαρρέουσας ακτινοβολίας. Η περιοχή της καμπύλης διασποράς όπου $\beta < k_0$ αποτελεί επομένως την περιοχή ακτινοβολίας. Η γωνία του κύριου λοβού της ακτινοβολουμένης δέσμης προσδιορίζεται από τη σχέση (Σχήμα 1.21)

$$\sin \theta_{MB} = \beta / k_0 \quad (1.4.33)$$

Όταν επομένως η σταθερά διάδοσης είναι συνάρτηση της συχνότητας, η γωνία κύριου λοβού μεταβάλλεται επίσης με τη μεταβολή της συχνότητας, φαινόμενο που καλείται σάρωση συχνότητας (frequency scanning).

Η νέου τύπου κεραία διαρρέοντος κύματος προκύπτει από τη μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς που μοντελοποιεί το μεταυλικό, όπως φαίνεται ενδεικτικά στο Σχήμα 1.22 [21-22].

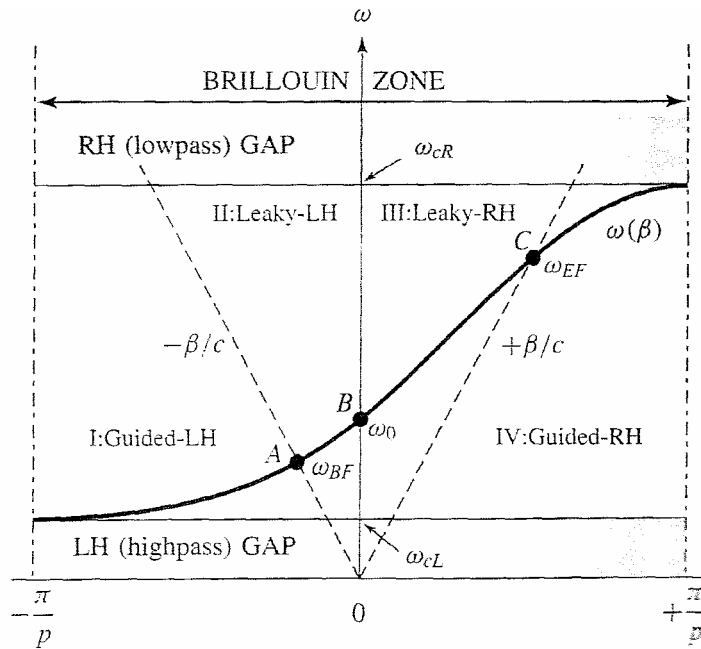


Σχήμα 1.22: Κεραία διαρρέοντος κύματος από μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς.

Η καμπύλη διασποράς της παραπάνω διάταξης έχει τη μορφή

$$\beta(\omega) = \frac{1}{p} \left(\omega \sqrt{L_R C_R} - \frac{1}{\omega \sqrt{L_L C_L}} \right) \quad (1.4.34)$$

όπου p η περίοδος επανάληψης της στοιχειώδους δομικής μονάδας. Το διάγραμμα που αντιστοιχεί στην παραπάνω καμπύλη φαίνεται στο Σχήμα 1.23, όπου διακρίνουμε την ύπαρξη τεσσάρων περιοχών: την περιοχή διάδοσης αριστερού νόμου (I), την περιοχή διαρρέουσας ακτινοβολίας αριστερού νόμου (II), την περιοχή διαρρέουσας ακτινοβολίας δεξιού νόμου (III) και την περιοχή διάδοσης δεξιού νόμου (IV). Στη συχνότητα ω_{BF} επιτυγχάνεται ακτινοβολία από το οπίσθιο άκρο της κεραίας ($\theta = -90^\circ$), που αντιστοιχεί σε σταθερά διάδοσης $\beta = -k_0$ (σημείο A). Η κεραία ακτινοβολεί μετωπικά ($\theta = 0^\circ$) στη συχνότητα ω_0 όπου $\beta = 0$ (σημείο B), ενώ ακτινοβολία από το εμπρόσθιο άκρο της κεραίας συμβαίνει για στη συχνότητα ω_{EF} όπου $\beta = k_0$ (σημείο C).



Σχήμα 1.23: Καμπύλη διασποράς της μικροταινιακής διάταξης.

Συνοπώς, η νέου τύπου κεραία παρέχει τη δυνατότητα συνεχούς σάρωσης από το πίσω μέχρι το εμπρόσθιο άκρο (backfire to endfire frequency scanning) ανάλογα με τη συχνότητα λειτουργίας. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώθηκε πειραματικά [22] και αποτελεί ένα πολύ ιδιαίτερο χαρακτηριστικό που δεν μπορεί να υποστηριχθεί από μία συμβατική κεραία, η οποία εκτελεί σάρωση μόνο για θετικές γωνίες, αφού η σταθερά διάδοσης β προκύπτει θετική. Επιπλέον, η νέου τύπου κεραία διαρρέοντος κύματος είναι σε θέση να ακτινοβολεί μετωπικά ($\theta = 0^\circ$) για $\omega = \omega_0$, σε αντίθεση με τις συμβατικές κεραίες, όπου η ταχύτητα ομάδας μηδενίζεται για $\beta = 0$, μην επιτρέποντας τη διάδοση κυμάτων.

Άλλο βασικό πλεονέκτημα της νέου τύπου κεραίας είναι το γεγονός ότι λειτουργεί στο βασικό της ρυθμό λόγω της μορφής της καμπύλης διασποράς $\omega - \beta$ (Σχήμα 1.23), όπου φαίνεται ότι $|\beta| < k_0$ για συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων. Η δυνατότητα αυτή δεν υποστηρίζεται από μία συμβατική κεραία διαρρέοντος κύματος, η οποία όταν λειτουργεί στο βασικό της ρυθμό έχει σταθερά διάδοσης β μεγαλύτερη από τη σταθερά διάδοσης ελευθέρου χώρου ($\beta > k_0$), με αποτέλεσμα να διεγείρονται μόνο διαδιδόμενα κύματα (guided waves) και όχι κύματα ακτινοβολίας, τα οποία εμφανίζονται σε ρυθμούς ανώτερης τάξης. Επομένως, η συμβατική κεραία απαιτεί μία πιο σύνθετη και λιγότερο αποδοτική διάταξη τροφοδότησης.

Σημειώνουμε τέλος ότι προκειμένου η κεραία να ακτινοβολεί αποδοτικά, η μικροταινιακή γραμμή μεταφοράς τερματίζεται με κατάλληλο φορτίο (προσαρμογή) προς αποφυγή ανακλάσεων που θα δημιουργούσαν δευτερεύοντες ανεπιθύμητους πλευρικούς λοβούς.

1.5 Σκοπός και οργάνωση της διατριβής

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η ανάλυση και σχεδίαση μικροκυματικών μεταυλικών μέσων διάδοσης. Σε αντίθεση μάλιστα με τις διατάξεις που περιγράφηκαν παραπάνω, οι οποίες προκύπτουν ως ισοδύναμες κυκλωματικές αναπαραστάσεις των μεταυλικών μέσω του μοντέλου των γραμμών μεταφοράς ή αποτελούνται από πολύπλοκα δομικά στοιχεία (π.χ. SRRs), προτείνεται μία τελείως διαφορετική δομή ως υποψήφιο μεταυλικό μέσο, η οποία καθιστά ευκολότερη τη φυσική του υλοποίηση και προσφέρεται για λειτουργία τόσο στις μικροκυματικές (GHz) όσο και σε υψηλότερες συχνότητες (THz). Η δομή που επιλέγεται για τη μοντελοποίηση του μεταυλικού συνίσταται από ένα τρισδιάστατο κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες είναι μαγνητικά αδρανείς. Σημειώνεται επίσης ότι το μέσο στο σύνολό του εμφανίζει ισοτροπική συμπεριφορά, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την περιοδικότητα της δομής, διευκολύνει την ανάλυση της ηλεκτρομαγνητικής του συμπεριφοράς. Η συγκεκριμένη δομή εκμεταλλεύεται το φαινόμενο του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών που πραγματοποιείται σε συγκεκριμένες συχνότητες και έχει ως αποτέλεσμα τη μεγιστοποίηση του πλάτους του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αποδεικνύεται ότι η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα μ_{eff} και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά ϵ_{eff} της συνολικής δομής εξαρτώνται άμεσα από το συντονισμό των μεμονωμένων σφαιρών και οι τιμές τους εμφανίζουν απότομες αυξομειώσεις γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να προκύπτουν αρνητικές σε ορισμένο εύρος ζώνης. Την ιδιότητα αυτή εκμεταλλευόμαστε στη δημιουργία ενός μέσου με αρνητικό δείκτη διάθλασης (μεταυλικό), του οποίου οι συντακτικές παράμετροι ϵ και μ λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές. Η διάρθρωση των κεφαλαίων της διατριβής έχει ως εξής.

Το 1^ο κεφάλαιο της διατριβής ξεκινά με μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση παρουσιάζοντας τα σπουδαιότερα αποτελέσματα των επιστημονικών μελετών στο πεδίο έρευνας των μεταυλικών μέσων και τις σημαντικότερες πιθανές εφαρμογές τους. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη δυνατότητα ανάπτυξης ενός τέλει φακού (perfect lens), ο οποίος επιτυγχάνει εστίαση με διακριτική ικανότητα μεγαλύτερη από το φράγμα του μήκους κύματος, καθώς και στα κυκλωματικά ισοδύναμα των μεταυλικών που επιτρέπουν την κατασκευή διατάξεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά λειτουργίας (κεραίες, κατευθυντικοί συζεύκτες, κ.α).

Στο 2ο κεφάλαιο μελετώνται διεξοδικά οι φασματικές ιδιότητες των μεταϋλικών μέσων διάδοσης, προκειμένου να καταλήξουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την ηλεκτρομαγνητική τους συμπεριφορά, η οποία διαφοροποιείται σημαντικά σε σχέση με τα συμβατικά μέσα διάδοσης. Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρείται μία πλάκα από υλικό που να προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός metamaterial, δηλαδή σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού να λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές. Η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθείται βασίζεται στους μετασχηματισμούς Fourier και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εκφράζεται ως επαλληλία επιπέδων κυμάτων, ενώ η πλήρης περιγραφή του πεδίου συνίσταται τόσο από το διακριτό (επιφανειακά κύματα) όσο και από το συνεχές (ακτινοβολούμενα κύματα) φάσμα ιδιοτιμών. Τα κύρια συμπεράσματα προκύπτουν από την καμπύλη διασποράς του μέσου, όπου απεικονίζεται η μεταβολή της σταθεράς διάδοσης και της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει της συχνότητας, στο εύρος συχνοτήτων όπου οι συντακτικές παράμετροι του μέσου ϵ και μ προκύπτουν ταυτόχρονα αρνητικές. Συγκεκριμένα, διακρίνονται οι διάφορες κατηγορίες ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που είναι δυνατό να υποστηρίξει η πλάκα από μεταϋλικό σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά μέσα και προκύπτει το βασικό συμπέρασμα ότι η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης είναι αντιπαράλληλες, γεγονός που δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά με θετικά ϵ και μ .

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η προτεινόμενη δομή για τη μοντελοποίηση του μεταϋλικού μέσου, που αποτελείται από ένα κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες είναι μαγνητικά αδρανείς. Το κεφάλαιο ξεκινά με τη μελέτη του προβλήματος της σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα και του φαινομένου του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η θεωρία του ενεργού μέσου, η οποία βασίζεται στη θεώρηση των σφαιρών ως ισοδύναμων ηλεκτρικών και μαγνητικών διπόλων και οδηγεί σε αναλυτικές εκφράσεις για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά και ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών. Ο ηλεκτρομαγνητικός συντονισμός των σφαιρών είναι ιδιαίτερα έντονος όταν το υλικό των σφαιρών εμφανίζει ιδιαίτερα υψηλή διηλεκτρική σταθερά, της τάξης του 100. Θεωρώντας τέτοια υλικά, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά προκύπτουν αρνητικές σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα. Επειδή ωστόσο η εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης για το σύνολο της δομής προϋποθέτει η μαγνητική διαπερατότητα και η διηλεκτρική σταθερά του μέσου να λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές, η

προτεινόμενη δομή αποτελείται από δύο είδη σφαιρών διαφορετικής ακτίνας αλλά από το ίδιο υλικό. Δεδομένου μάλιστα ότι οι ηλεκτρικοί συντονισμοί μίας σφαίρας εμφανίζονται σε συχνότητες μεγαλύτερες από τους αντίστοιχους μαγνητικούς και οι συχνότητες συντονισμού είναι αντιστρόφως ανάλογες της ακτίνας της σφαίρας, οι διαστάσεις των σφαιρών της δομής επιλέγονται έτσι ώστε να συμπίπτουν η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών μικρής ακτίνας με τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών μεγαλύτερης ακτίνας. Ο δείκτης διάθλασης του συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση $n_{\text{eff}} = \pm \sqrt{\mu_r^{\text{eff}} \epsilon_r^{\text{eff}}}$ και το πραγματικό μέρος του προκύπτει πράγματι αρνητικό γύρω από τη συχνότητα συντονισμού. Στο τέλος του κεφαλαίου πραγματοποιείται προσομοίωση της διάταξης (full wave simulation) με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου HFSS (High Frequency Structure Simulator), τα αποτελέσματα της οποίας ποιοτικά επιβεβαιώνουν την αναλυτική προσέγγιση με τη θεωρία του ενεργού μέσου, με τη διαφορά ότι το εύρος ζώνης στο οποίο προκύπτει αρνητικός δείκτης διάθλασης είναι μικρότερο από αυτό που υπολογίζεται με αναλυτικές μεθόδους. Εντούτοις, η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθείται στο 3^ο κεφάλαιο είναι μία πρώτης τάξης προσέγγιση του προβλήματος που παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο είναι αρκετά μεγαλύτερο της διαμέτρου των σφαιρών και δεν αποτελεί την πλήρη λύση, αφού δε λαμβάνει υπόψη συνεισφορές από ανώτερης τάξης ρυθμούς ούτε και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η πλήρης λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης, η οποία αποδίδει επακριβώς τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και εφαρμόζεται ανεξαρτήτως περιορισμών, σε αντίθεση με την προσεγγιστική θεωρία του ενεργού μέσου. Το κεφάλαιο ξεκινά με τη μελέτη της σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα και της σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών, περιοδικά διατεταγμένων. Συμπεραίνουμε ότι το σκεδαζόμενο κύμα από ένα επίπεδο σφαιρών εκφράζεται συναρτήσεως των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα, των σταθερών δομής Ω , οι οποίοι εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών του επιπέδου, καθώς και των συντελεστών ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου. Οι σταθερές δομής περιγράφουν ουσιαστικά το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης και μελετώνται διεξοδικά καταλήγοντας σε αναλυτικούς τύπους για τον ιδιαίτερα πολύπλοκο υπολογισμό τους. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης από το επίπεδο σφαιρών εκφράζοντας το σκεδαζόμενο πεδίο ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων. Στη συνέχεια, γίνεται μελέτη της σκέδασης από περισσότερα επίπεδα σφαιρών, αφού το

μεταυλικό αποτελείται από την επαλληλία εναλλασσόμενων επιπέδων από σφαίρες, έτσι ώστε σε κάθε επίπεδο οι σφαίρες να έχουν την ίδια ακτίνα, αλλά στο αμέσως επόμενο επίπεδο η ακτίνα των σφαιρών να είναι διαφορετική. Τέλος, εξάγεται η σχέση διασποράς του μεταυλικού μέσου, από την οποία συνάγονται βασικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες της σύνθετης δομής. Η σχέση διασποράς περιγράφει τη μεταβολή της σταθεράς διάδοσης k_z συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας και συνιστά ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίζονται αριθμητικά. Για δεδομένη συχνότητα, από όλες τις ιδιοτιμές του k_z , καμία ή στην καλύτερη περίπτωση μερικές μόνο προκύπτουν πραγματικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις παριστάνουν διαδιδόμενα κύματα στο σύνθετο μεταυλικό. Οι υπόλοιπες τιμές του k_z είναι μιγαδικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις αντιπροσωπεύουν φθίνοντα κύματα, το πλάτος των οποίων μειώνεται εκθετικά. Οι περιοχές αυτές καλούνται φωτονικά χάσματα (photonic bandgaps).

Στο κεφάλαιο 5 συνοψίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που λαμβάνονται εφαρμόζοντας τη θεωρία πολλαπλής σκέδασης και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του κεφαλαίου 3. Από τη μελέτη της καμπύλης διασποράς προκύπτει ότι υπάρχει ένα εύρος ζώνης συχνοτήτων εντός του οποίου η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας είναι αντιπαράλληλες και ο δείκτης διάθλασης του μέσου προκύπτει αρνητικός. Ωστόσο, η ένταση του φαινομένου και το εύρος ζώνης είναι σημαντικά μικρότερα από ό,τι στην περίπτωση της αναλυτικής προσέγγισης. Εντούτοις, με μικρή τροποποίηση της διάταξης των σφαιρών εντός της δομικής μονάδας, έτσι ώστε να αυξηθεί η σύζευξη μεταξύ των σφαιρών, το εύρος ζώνης στο οποίο ο δείκτης διάθλασης προκύπτει αρνητικός αυξάνεται σημαντικά. Σημαντική αύξηση στο εύρος ζώνης του φαινομένου παρατηρείται επίσης και με αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου, γεγονός ιδιαίτερα επιθυμητό. Παρατηρείται ακόμη ότι ιδιαίτερη επίδραση στο φαινόμενο έχουν οι απώλειες του διηλεκτρικού των σφαιρών, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα το φαινόμενο να μετριάζεται σημαντικά ως προς την ένταση και να εξαφανίζεται για τιμές της εφαιπόμενης απωλειών μεγαλύτερες από 10^{-3} . Σε γενικές γραμμές πάντως η δομή εμφανίζει την επιθυμητή συμπεριφορά μεταυλικού γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των σφαιρών επιβεβαιώνοντας τους αρχικούς θεωρητικούς μας ισχυρισμούς.

Στη συνέχεια του 5^{ου} κεφαλαίου παρουσιάζεται μία πιθανή εφαρμογή του μεταυλικού, η οποία αναφέρεται στη χρήση του με σκοπό τη βελτίωση της ικανότητας εστίασης ενός υβριδικού συστήματος ενδοκρανιακής απεικόνισης και θεραπείας σύμφωνα με τη μέθοδο της υπερθερμίας. Πρόκειται για ένα μη επεμβατικό σύστημα που έχει αναπτυχθεί στο

εργαστήριο μικροκυμάτων και οπτικών ινών του ΕΜΠ και χρησιμοποιείται με στόχο την επιλεκτική θέρμανση των περιοχών ενδιαφέροντος του εγκεφάλου (υπερθερμία), ενώ παράλληλα παρέχει τη δυνατότητα απεικόνισης της θερμοκρασίας της ακτινοβολούμενης περιοχής του εγκεφάλου σε πραγματικό χρόνο. Η περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του απεικονιστικού συστήματος είναι 1.5-3.5 GHz. Η ανάπτυξη του μεταϋλικού που περιγράφηκε παραπάνω θα έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της εστίασης του συστήματος θεραπείας, όσον αφορά στο βάθος διείσδυσης της ακτινοβολίας, καθώς και στη διακριτική ικανότητα του συστήματος απεικόνισης.

Στο κεφάλαιο 6 εξετάζεται το ενδεχόμενο λειτουργίας της δομής στην περιοχή των THz και των οπτικών συχνοτήτων, γεγονός που επιφέρει σημαντική μείωση στις διαστάσεις του μεταϋλικού. Συγκεκριμένα, η δομή του μεταϋλικού τροποποιείται και αποτελείται πλέον από ένα είδος σφαιρών, οι οποίες όμως περιλαμβάνουν δύο στρώματα από διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά (coated spheres). Το υλικό του πυρήνα διαθέτει υψηλή διηλεκτρική σταθερά της τάξης του 100 οδηγώντας σε ισχυρό μαγνητικό συντονισμό, ενώ το υλικό του περιβλήματος εμφανίζει συμπεριφορά πλάσματος γύρω από τη συχνότητα λειτουργίας ($\epsilon < 0$) οδηγώντας σε ηλεκτρικό συντονισμό. Υποψήφια υλικά με την παραπάνω συμπεριφορά είναι φερροηλεκτρικά υλικά (π.χ. LiTaO_3) για το υλικό του πυρήνα και ημιαγωγοί προσμίξεων με συμπεριφορά πλάσματος στην περιοχή των THz για το υλικό του περιβλήματος των σφαιρών. Τέλος, ανακεφαλαιώνονται τα κυριότερα συμπεράσματα της διατριβής, ενώ γίνεται προσπάθεια εύρεσης του κατάλληλου υλικού που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή των διηλεκτρικών σφαιρών με στόχο την πειραματική επιβεβαίωση των υπολογισμών μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΜΕΤΑΪΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

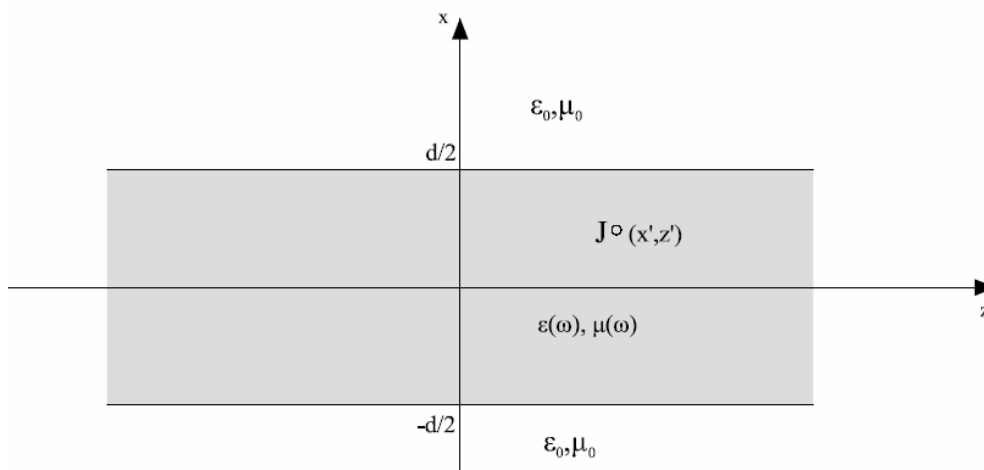
Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων των μεταλλικών μέσων διάδοσης προκειμένου να καταλήξουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά τους, η οποία διαφοροποιείται σημαντικά σε σχέση με τα συμβατικά μέσα διάδοσης. Ουσιαστικά δηλαδή εξετάζουμε τι είδους κύματα είναι δυνατό να υποστηρίξει ένα μεταλλικό μέσο, τα οποία δε διεγείρονται στα συνήθη υλικά.

2.1 Διέγερση πλάκας από μεταλλικό

Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρούμε μία πλάκα από υλικό που να προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός μεταλλικού, δηλαδή σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού να λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές. Η πλάκα έχει πάχος d , εκτείνεται απεριόριστα κατά τους άξονες y και z και οι συντακτικές της παράμετροι ϵ , μ εμφανίζουν διασπορά ως προς τη συχνότητα. Για τη διέγερση της πλάκας θεωρούμε μία άπειρη γραμμική πηγή ρεύματος με απειροστά μικρό εμβαδό διατομής, αλλά με πεπερασμένη πυκνότητα ρεύματος που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{J} = \mathbf{y} \cdot \delta(x - x') \delta(z - z') \quad (2.1.1)$$

και η οποία εφαρμόζεται στο σημείο (x', z') εντός της πλάκας (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Διέγερση πλάκας από μεταλλικό από γραμμική πηγή ρεύματος.

Μία τέτοια πηγή στην πράξη εμφανίζεται στην περίπτωση των ημιαγωγικών Laser ή των διόδων εκπομπής φωτός (LED). Ο χώρος πάνω και κάτω από την πλάκα υποτίθεται ομοιόμορφος με χαρακτηριστικά ϵ_0 και μ_0 . Υποθέτουμε επίσης ότι η χρονική εξάρτηση όλων των πεδιακών ποσοτήτων είναι της μορφής $\exp(i\omega t)$ και παραλείπεται στην ανάλυση που ακολουθεί. Η μέθοδος ανάλυσης που υιοθετούμε βασίζεται στους μετασχηματισμούς Fourier και έχει εισαχθεί στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία από τον Sommerfeld για την ανάλυση της ακτινοβολίας ενός διπόλου πάνω από επίπεδη γη με πεπερασμένη αγωγιμότητα. Σύμφωνα με αυτή, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εκφράζεται ως ένα ολοκληρωτικό άθροισμα επιπέδων κυμάτων (Sommerfeld integral). Η έκφραση αυτή είναι κατάλληλη γιατί το συνολικό πεδίο δεν είναι ένα επίπεδο κύμα και επομένως χρειάζεται να αναλυθεί σε επιμέρους επίπεδα κύματα. Η μέθοδος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

i) Εκφράζουμε με κατάλληλο ανάπτυγμα Fourier το πεδίο που θα προκαλούσε η πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} αν βρισκόταν στον ελεύθερο χώρο με χαρακτηριστικά $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$. και ονομάζουμε το πεδίο αυτό πρωτογενές.

ii) Λόγω της ύπαρξης των διαχωριστικών επιφανειών για $x = \pm d/2$ εμφανίζονται ανακλώμενα κύματα μέσα στην πλάκα, καθώς και διαθλώμενα κύματα έξω από την πλάκα. Το πεδίο που συγκροτείται από αυτού του είδους τα κύματα ονομάζεται δευτερογενές, ενώ τα κύματα εκφράζονται ως ολοκληρώματα Fourier. Με κατάλληλη εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες $x = \pm d/2$ προσδιορίζονται οι τιμές των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης, συνεπώς καθορίζονται πλήρως τα πεδία.

Συνεπώς, το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προκύπτει από το άθροισμα του πρωτογενούς και δευτερογενούς πεδίου, καθένα από τα οποία υπολογίζεται ανεξάρτητα. Σημειώνεται ότι η συγκεκριμένη μέθοδος ανάλυσης επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση διέγερσης από τυχαία κατανεμημένες ρευματικές πηγές.

Περιγραφή πρωτογενούς πεδίου

Υποθέτουμε έναν άπειρο χώρο με χαρακτηριστικά παντού $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ και θεωρούμε τη ρευματική διέγερση στη θέση (x', z') . Ο χώρος διαιρείται ουσιαστικά σε δύο ημίαιρα επίπεδα $x > x'$ και $x < x'$. Επειδή η ρευματική διέγερση είναι παράλληλη στον άξονα y έχουμε μόνο μία συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου την E_y . Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο είναι της μορφής TE (Transverse Electric), αφού δεν υπάρχει συνιστώσα του πεδίου κατά

τη διεύθυνση της διάδοσης ($E_z = 0$). Το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται ως επαλληλία επιπέδων κυμάτων για τις περιοχές $x > x'$ και $x < x'$

$$E_{y1}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k_z, x) \exp[-ik_z(z-z')] dk_z, \quad x > x' \quad (2.1.2)$$

$$E_{y2}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k_z, x) \exp[-ik_z(z-z')] dk_z, \quad x < x' \quad (2.1.3)$$

όπου $A_1(k_z, x)$, $A_2(k_z, x)$ συναρτήσεις προς προσδιορισμό και k_z η σταθερά διάδοσης κατά τον άξονα z . Επιπλέον, επειδή τόσο η αρχική διέγερση όσο και η γεωμετρία της διάταξης εμφανίζουν ανεξαρτησία από τη μεταβλητή y , οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι επίσης ανεξάρτητες από τη μεταβλητή y , δηλαδή στις εξισώσεις του Maxwell θεωρούμε $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$ για όλες τις πεδιακές συνιστώσες Ψ . Επειδή

όμως οι συνιστώσες των πεδίων πρέπει να ικανοποιούν την κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y(x, z) = 0 \quad \text{για } (x, z) \neq (x', z') \quad (2.1.4)$$

όπου $k = k_0 n$ και $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ (n ο δείκτης διάθλασης της πλάκας). Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση τις εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου από τις σχέσεις (2.1.2) και (2.1.3) λαμβάνουμε τη σχέση

$$\frac{d^2 A_{1,2}(k_z, x)}{dx^2} - g_1^2(k_z) A_{1,2}(k_z, x) = 0 \quad (2.1.5)$$

όπου ορίζουμε την εγκάρσια σταθερά διάδοσης εντός της πλάκας: $g_1(k_z) = (k_z^2 - k_0^2 n^2)^{1/2}$.

Από τη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης λαμβάνουμε

$$A_1(k_z, x) = T \exp[-g_1(x-x')], \quad x > x' \quad (2.1.6)$$

$$A_2(k_z, x) = R \exp[g_1(x-x')], \quad x < x' \quad (2.1.7)$$

Σημειώνεται ότι στις παραπάνω εκφράσεις πρέπει $\text{Re}[g_1(k_z)] > 0$, ώστε να μηδενίζεται το πεδίο σε άπειρη απόσταση από την πηγή, δηλαδή $E_y(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ (συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld-Muller). Οι T, R είναι άγνωστες σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $x = x'$:

$$E_{y1}(x', z) = E_{y2}(x', z) \Leftrightarrow T = R \quad (2.1.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{H}_1(x', z) - \mathbf{H}_2(x', z)] = \mathbf{J} \Leftrightarrow H_{z1}(x', z) - H_{z2}(x', z) = -\delta(z-z') \quad (2.1.9)$$

όπου $H_z = \frac{i}{\omega \mu(\omega)} \frac{\partial E_y}{\partial x}$. Επιπλέον, λόγω της παρακάτω σχέσης ορισμού της συνάρτησης δ

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ik_z(z-z')] dk_z \quad (2.1.10)$$

προκύπτει τελικά ότι

$$T = R = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi g_1(k_z)} \quad (2.1.11)$$

Επομένως, το πρωτογενές πεδίο γράφεται τελικά στην ακόλουθη μορφή

$$E_{y0} = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_z(z-z')] \frac{\exp[-g_1|x-x'|]}{g_1(k_z)} dk_z \quad (2.1.12)$$

Περιγραφή δευτερογενούς πεδίου

Λόγω μεταβολής του δείκτη διάθλασης στα επίπεδα $x = \pm d/2$ εμφανίζονται δευτερογενή πεδία. Οι εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε περιοχή του χώρου σε μορφή ολοκληρωμάτων επαλληλίας είναι

$$E_{y1} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_1 \exp[-g_0(x-d/2)] \exp[-ik_z(z-z')] dk_z, \quad x > d/2 \quad (2.1.13)$$

$$E_{y2} = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1 \cosh(g_1 x) + A_2 \sinh(g_1 x)] \exp[-ik_z(z-z')] dk_z, \quad |x| < d/2 \quad (2.1.14)$$

$$E_{y3} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_2 \exp[g_0(x+d/2)] \exp[-ik_z(z-z')] dk_z, \quad x < -d/2 \quad (2.1.15)$$

όπου ορίζεται η σταθερά εγκάρσιας διάδοσης ελευθέρου χώρου $g_0(k_z) = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2}$ με $\text{Re}[g_0(k_z)] > 0$, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας για $x \rightarrow \pm\infty$. Οι άγνωστοι συντελεστές A_1, A_2, B_1, B_2 προσδιορίζονται από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις επιφάνειες $x = \pm d/2$ για το συνολικό πεδίο, που αποτελείται από την υπέρθεση του πρωτογενούς και δευτερογενούς πεδίου. Οι οριακές συνθήκες είναι

$$[E_{y0} + E_{y2}]_{x=d/2} = [E_{y1}]_{x=d/2} \quad (2.1.16)$$

$$\frac{i}{\omega\mu(\omega)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_{y0} + E_{y2}) \right]_{x=d/2} = \frac{i}{\omega\mu_0} \left[\frac{\partial E_{y1}}{\partial x} \right]_{x=d/2} \quad (2.1.17)$$

$$[E_{y0} + E_{y2}]_{x=-d/2} = [E_{y3}]_{x=-d/2} \quad (2.1.18)$$

$$\frac{i}{\omega\mu(\omega)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_{y0} + E_{y2}) \right]_{x=-d/2} = \frac{i}{\omega\mu_0} \left[\frac{\partial E_{y3}}{\partial x} \right]_{x=-d/2} \quad (2.1.19)$$

από τις οποίες προκύπτουν αντίστοιχα οι παρακάτω σχέσεις για τους άγνωστους συντελεστές A_1, A_2, B_1, B_2 .

$$B_1 = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi g_1(k_z)} \exp(-g_1 d/2) \exp(g_1 x') + A_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} + A_2 \sinh \frac{g_1 d}{2} \quad (2.1.20)$$

$$B_2 = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi g_1(k_z)} \exp(-g_1 d/2) \exp(-g_1 x') + A_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} - A_2 \sinh \frac{g_1 d}{2} \quad (2.1.21)$$

$$B_1 = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi g_0(k_z)} \exp(-g_1 d/2) \exp(g_1 x') - \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \left(A_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} + A_2 \cosh \frac{g_1 d}{2} \right) \quad (2.1.22)$$

$$B_2 = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi g_0(k_z)} \exp(-g_1 d/2) \exp(-g_1 x') - \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \left(A_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} - A_2 \cosh \frac{g_1 d}{2} \right) \quad (2.1.23)$$

Από τις σχέσεις (2.1.20) και (2.1.22) προκύπτει

$$\begin{aligned} & A_1 \left[\cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] + A_2 \left[\sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] = \\ & = -\frac{i\omega}{4\pi} \exp(-g_1 d/2) \exp(g_1 x') \left(\frac{\mu_0}{g_0} - \frac{\mu(\omega)}{g_1} \right) \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Ομοίως από τις (2.1.21) και (2.1.23) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & A_1 \left[\cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] - A_2 \left[\sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + \frac{g_1 \mu_0}{g_0 \mu(\omega)} \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] = \\ & = -\frac{i\omega}{4\pi} \exp(-g_1 d/2) \exp(-g_1 x') \left(\frac{\mu_0}{g_0} - \frac{\mu(\omega)}{g_1} \right) \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Από τη λύση του συστήματος των δύο παραπάνω σχέσεων προσδιορίζονται οι συντελεστές A_1 και A_2

$$A_1 = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \exp(-g_1 d/2) \left(\mu_0 - \frac{g_0}{g_1} \mu(\omega) \right) \frac{\cosh(g_1 x')}{g_0 \mu(\omega) \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right)} \quad (2.1.26)$$

$$A_2 = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \exp(-g_1 d/2) \left(\mu_0 - \frac{g_0}{g_1} \mu(\omega) \right) \frac{\sinh(g_1 x')}{g_0 \mu(\omega) \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right)} \quad (2.1.27)$$

όπου πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες $\text{Re}[g_1(\lambda)] > 0$ και $\text{Re}[g_0(\lambda)] > 0$. Συνεπώς, η έκφραση του δευτερογενούς ηλεκτρικού πεδίου εντός της πλάκας είναι της μορφής

$$E_{y2} = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1 \cosh(g_1 x) + A_2 \sinh(g_1 x)] \exp[-ik_z(z-z')] dk_z \quad (2.1.28)$$

όπου οι συντελεστές A_1 και A_2 ορίστηκαν παραπάνω. Παρατηρούμε ότι διεγείρονται τόσο άρτιοι όσο και περιττοί ρυθμοί TE, γεγονός αναμενόμενο αφού η θέση της πηγής εντός της πλάκας (x', z') είναι τυχαία δίχως να προκύπτει από αυτήν κάποια είδους συμμετρία.

2.2 Υπολογισμός του πεδίου εντός της πλάκας από μεταυλικό

Το συνολικό πεδίο εντός της πλάκας αποτελείται από το άθροισμα του πρωτογενούς και του δευτερογενούς πεδίου, τα οποία είναι εκφρασμένα ως ολοκληρώματα επαλληλίας. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η μετατροπή των πολύπλοκων εκφράσεων των πεδίων σε μία μορφή που προσφέρεται για υπολογισμό. Το πρωτογενές πεδίο θα δείξουμε ότι είναι δυνατό να εκφραστεί σε κλειστή μορφή καθιστώντας εύκολο τον υπολογισμό του. Αντίθετα, για τον προσδιορισμό του δευτερογενούς πεδίου πρέπει να χρησιμοποιηθεί η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης (2.1.28) χρειάζεται να οριστεί κατάλληλος κλειστός δρόμος ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο k_z . Σημειώνεται επίσης ότι η ολοκληρωτέα παράσταση περιέχει τις σταθερές εγκάρσιας διάδοσης $g_0(k_z) = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2}$ και $g_1(k_z) = (k_z^2 - k_0^2 n^2)^{1/2}$, οι οποίες γενικά δεν είναι μονότιμες συναρτήσεις. Για το σκοπό αυτό πρέπει να οριστούν κατάλληλες βροχοτομές που να ορίζουν μονοσήμαντα το πρόσημο των παραπάνω συναρτήσεων. Το ολοκλήρωμα κατά μήκος του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης, σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, θα αποτελείται τότε από τη συνεισφορά των πόλων που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό της καμπύλης ολοκλήρωσης καθώς και από το ολοκλήρωμα κατά μήκος των βροχοτομών. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις εξισώσεις των βροχοτομών στο μιγαδικό επίπεδο k_z .

Η τετραγωνική ρίζα $g_0(k_z) = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2}$ γράφεται γενικά στη μορφή

$$g_0(k_z) = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2} = \begin{cases} |k_z - k_0|^{1/2} |k_z + k_0|^{1/2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} \\ |k_z - k_0|^{1/2} |k_z + k_0|^{1/2} e^{i[(\theta_1 + \theta_2)/2 + \pi]} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

όπου $k_z - k_0 = |k_z - k_0|e^{i\theta_1}$, $k_z + k_0 = |k_z + k_0|e^{i\theta_2}$. Για την εξαγωγή της εξίσωσης της βροχοτομής θεωρούμε ότι το διηλεκτρικό του χώρου εκτός της πλάκας εμφανίζει μικρές απώλειες, επομένως η διηλεκτρική σταθερά του δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.2.2)$$

Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε την έκφραση της σταθεράς διάδοσης ελευθέρου χώρου στη μορφή:

$$k_0 = k'_0 - ik''_0 \quad (2.2.3)$$

όπου $k'_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} > 0$ και $k''_0 > 0$. Η σταθερά διαμήκους διάδοσης θεωρείται επίσης μιγαδικός αριθμός, οπότε

$$g_0^2 = k_z^2 - k_0^2 = \text{Re}^2(k_z) - \text{Im}^2(k_z) - k_0'^2 + k_0''^2 + 2i[\text{Re}(k_z)\text{Im}(k_z) + k'_0 k''_0] \quad (2.2.4)$$

Όμως ισχύει ότι

$$g_0^2 = \text{Re}^2(g_0) - \text{Im}^2(g_0) + 2i\text{Re}(g_0)\text{Im}(g_0) \quad (2.2.5)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (2.2.4) και (2.2.5) λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \text{Re}^2(g_0) - \text{Im}^2(g_0) = \text{Re}^2(k_z) - \text{Im}^2(k_z) - k_0'^2 + k_0''^2 & (2.2.6) \\ \text{Im}(g_0)\text{Re}(g_0) = \text{Re}(k_z)\text{Im}(k_z) + k'_0 k''_0 & (2.2.7) \end{cases}$$

Επειδή όμως η έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή πάνω από την πλάκα περιέχει τον παράγοντα της μορφής $e^{-g_0(x-d/2)}$, πρέπει $\text{Re}(g_0) > 0$ και $\text{Im}(g_0) > 0$, ώστε για $x \rightarrow +\infty$ να προκύπτουν κύματα που μηδενίζονται σε πλάτος (συνθήκη ακτινοβολίας), καθώς επίσης να απομακρύνονται από την πηγή προς το άπειρο. Αν αντίθετα $\text{Re}(g_0) < 0$ παραβιάζεται η συνθήκη ακτινοβολίας. Συνεπώς, η βροχοτομή ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου k_z για τα οποία $\text{Re}(g_0) = 0$. Η σχέση (2.2.7) λόγω της συνθήκης $\text{Re}(g_0) = 0$ καταλήγει στη σχέση

$$\text{Re}(k_z)\text{Im}(k_z) = -k'_0 k''_0 \quad (2.2.8)$$

που είναι και η ζητούμενη εξίσωση της βροχοτομής που ορίζεται για τον παράγοντα g_0 και παριστάνει υπερβολή, η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο. Επιπλέον, η σχέση (2.2.6) λόγω της συνθήκης $\text{Re}(g_0) = 0$ και σε συνδυασμό με τη (2.2.8) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{Im}^2(g_0) = \frac{k_0'^2 k_0''^2}{\text{Re}^2(k_z)} - \text{Re}^2(k_z) + k_0'^2 - k_0''^2 = \left[k_0'^2 - \text{Re}^2(k_z) \right] \left[1 + \frac{k_0''^2}{\text{Re}^2(k_z)} \right] \quad (2.2.9)$$

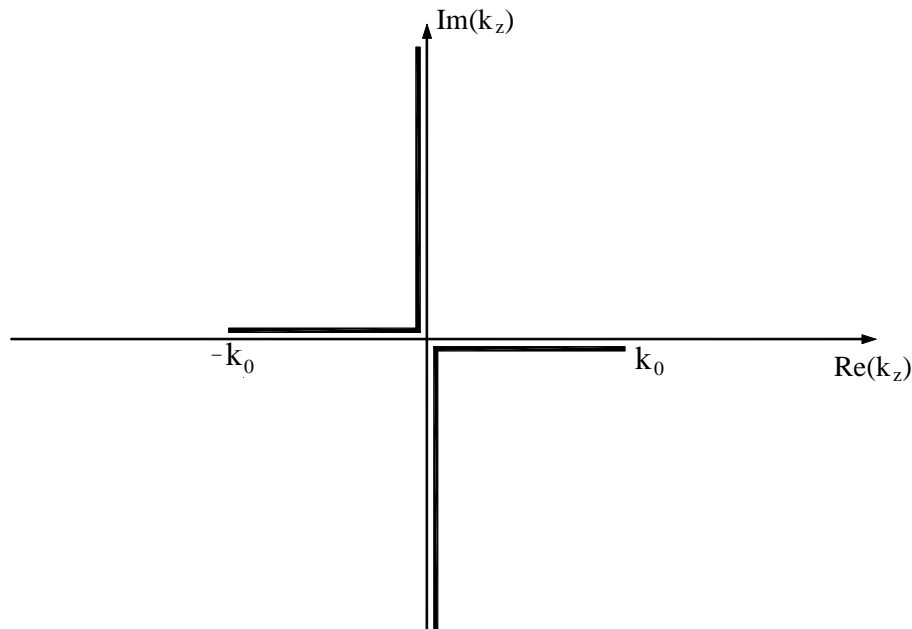
Επειδή όμως πρέπει σε κάθε περίπτωση $\text{Im}^2(g_0) \geq 0$ προκύπτει τελικά η συνθήκη:

$$k_0'^2 \geq \text{Re}^2(k_z) \Leftrightarrow -k_0' \leq \text{Re}(k_z) \leq k_0' \quad (2.2.10)$$

η οποία έχει ως αποτέλεσμα η ζητούμενη εξίσωση της βροχοτομής στο μιγαδικό επίπεδο k_z να είναι η υπερβολή που παριστάνεται από τη σχέση (2.2.8) υπό τον περιορισμό της (2.2.10), δηλαδή ένα ορισμένο τμήμα της παραπάνω υπερβολής. Μάλιστα, επειδή στην ανωτέρω ανάλυση θεωρήσαμε ότι το διηλεκτρικό του χώρου εκτός της πλάκας έχει μικρές απώλειες, για τη σωστή εξαγωγή της εξίσωσης της βροχοτομής, πρέπει στη συνέχεια να θεωρήσουμε σχεδόν τέλει διηλεκτρικό ($\sigma \rightarrow 0$), αφού η σταθερά διάδοσης k_0 αναφέρεται στον κενό χώρο. Τότε έπεται ότι $k_0'' \rightarrow 0$ και η εξίσωση της βροχοτομής προκύπτει

$$\text{Re}(k_z) \text{Im}(k_z) = 0 \quad (2.2.11)$$

που σημαίνει ουσιαστικά ότι τα τμήματα των υπερβολών της βροχοτομής τείνουν να γίνουν εφαπτομενικά στους άξονες των συντεταγμένων. Οι βροχοτομές σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.2 στην εκφυλισμένη μορφή τους, δηλαδή ως τμήματα υπερβολών που ξεκινούν από τα κλαδικά σημεία $\pm k_0$ (branch points) και τείνουν να γίνουν εφαπτομενικά των αξόνων.



Σχήμα 2.2: Ορισμός βροχοτομών

Με παρόμοια διαδικασία είναι δυνατό να οριστούν βροχοτομές και για την παράσταση $g_1(k_z) = (k_z^2 - k_0^2 n^2)^{1/2}$. Ωστόσο, αν θεωρήσουμε την έκφραση του συνολικού πεδίου εντός της πλάκας, αποδεικνύεται ότι προκύπτει άρτια συνάρτηση του g_1 , όπως παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα. Συνεπώς, η παράσταση είναι ανεξάρτητη του προσήμου του g_1 και δε χρειάζεται να οριστεί βροχοτομή που να την ορίζει μονοσήμαντα.

Μετά τον ορισμό των βροχοτομών προσδιορίζεται η μορφή του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο k_z . Ο δρόμος ολοκλήρωσης πρέπει να βρίσκεται εξολοκλήρου στο κατάλληλο επίπεδο Riemann (proper Riemann sheet), ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας για $x \rightarrow \pm\infty$. Επειδή στους χώρους εκτός της πλάκας τα πεδία εξαρτώνται από το x σύμφωνα με τους όρους της μορφής $e^{-g_0(x-d/2)}$ και $e^{g_0(x+d/2)}$ (πάνω και κάτω από την πλάκα αντίστοιχα), οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι $\text{Re}(g_0) > 0$ και $\text{Im}(g_0) > 0$, ώστε για $x \rightarrow +\infty$ να έχουμε κύματα που μηδενίζονται σε πλάτος, ενώ διαδίδονται από την πηγή προς το άπειρο. Άρα, το κατάλληλο επίπεδο Riemann ορίζεται από τη συνθήκη $\text{Re}(g_0) \cdot \text{Im}(g_0) > 0$. Από τη σχέση (2.2.7) στο όριο $k_0'' \rightarrow 0$ προκύπτει ότι

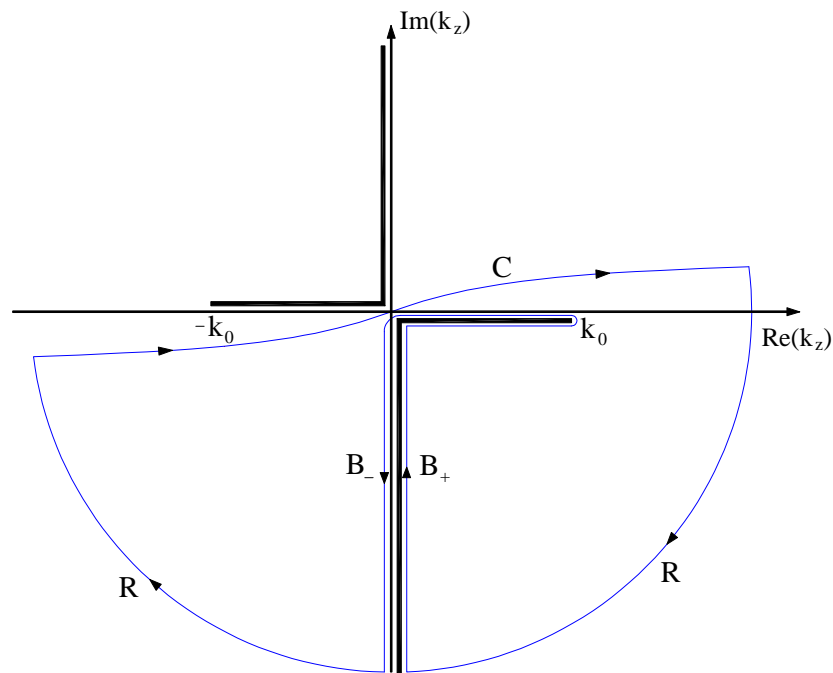
$$\text{Re}(g_0)\text{Im}(g_0) = \text{Re}(k_z)\text{Im}(k_z) \quad (2.2.12)$$

Επομένως, το κατάλληλο επίπεδο Riemann ορίζεται από τη σχέση $\text{Re}(k_z)\text{Im}(k_z) > 0$, με αποτέλεσμα ο δρόμος ολοκλήρωσης να πρέπει να βρίσκεται εξολοκλήρου στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο του επιπέδου k_z . Επιπλέον, ο δρόμος ολοκλήρωσης σχεδιάζεται έτσι ώστε να μην τέμνει σε κανένα σημείο την καμπύλη της βροχοτομής, αλλά να περιελίσσεται γύρω από αυτή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3, όπου ο δρόμος ολοκλήρωσης αντιστοιχεί στην καμπύλη C.

Για να υπολογίσουμε όμως το ολοκλήρωμα στην έκφραση του δευτερογενούς ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην πλάκα πρέπει να κλείσουμε την καμπύλη C με ένα ημικύκλιο R πολύ μεγάλης ακτίνας, θεωρητικά άπειρης. Όταν όμως η ακτίνα του ημικυκλίου τείνει στο άπειρο, είναι δυνατό με κατάλληλη επιλογή του k_z η συμβολή στην ολοκλήρωση από το ημικύκλιο R να μηδενίζεται λόγω μηδενισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Ειδικότερα, επειδή επί του ημικυκλίου είναι $k_z = \text{Re}^{i\theta}$, ο εκθετικός παράγοντας διάδοσης του πεδίου γράφεται ως εξής

$$e^{-ik_z(z-z')} = e^{-iR\cos\theta(z-z')} e^{R\sin\theta(z-z')} \quad (2.2.13)$$

Στην περίπτωση που $z > z'$ πρέπει $\sin \theta < 0$, ώστε να μηδενίζεται ο εκθετικός παράγοντας καθώς $R \rightarrow +\infty$. Συνεπώς, το ημικύκλιο πρέπει να βρίσκεται στο 3^ο και 4^ο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου k_z . Αντίστοιχα, σε περίπτωση που $z < z'$ πρέπει $\sin \theta > 0$ και το ημικύκλιο πρέπει να βρίσκεται στο 1^ο και 2^ο τεταρτημόριο. Έχοντας υπόψη ότι ο κλειστός δρόμος ολοκλήρωσης δεν μπορεί να τέμνει πουθενά τις βροχοτομές, περιελίσσεται γύρω από αυτές, όπως φαίνεται από τα τμήματα B_+ και B_- . Τελικά, ο δρόμος ολοκλήρωσης για την περίπτωση που $z > z'$ είναι όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3 [2].



Σχήμα 2.3: Δρόμος ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο k_z .

Σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy το ολοκλήρωμα κατά μήκος μίας κλειστής καμπύλης μίας αναλυτικής συνάρτησης με εξαίρεση n ανώμαλα σημεία δίνεται από το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων των n ανωμάτων σημείων, όταν η καμπύλη διαγράφεται κατά τη θετική – ανθρωρολογιακή φορά. Στην περιπτώσή μας είναι

$$E_{y2} = \int_C f(k_z) dk_z = -2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}[f(k_z), k_z = k_{zm}] - \int_{B_+} f(k_z) dk_z - \int_{B_-} f(k_z) dk_z - \int_R f(k_z) dk_z \quad (2.2.14)$$

όπου $f(k_z)$ η προς ολοκλήρωση συνάρτηση, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$f(k_z) = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \exp[-ik_z(z-z')] \exp(-g_1 d/2) \left[\mu_0 - \frac{g_0}{g_1} \mu(\omega) \right] \left[\frac{\cosh(g_1 x') \cosh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right)} + \frac{\sinh(g_1 x') \sinh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right)} \right] \quad (2.2.15)$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα κατά μήκος του δρόμου C προκύπτει από τη συνεισφορά των ολοκληρωτικών υπολοίπων της ολοκληρωτέας συνάρτησης καθώς και από τα ολοκληρώματα γύρω από τις βροχοτομές. Το ολοκλήρωμα κατά μήκος του ημικυκλίου ισούται με μηδέν λόγω μηδενισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης όταν η ακτίνα του τείνει στο άπειρο. Σημειώνεται ότι η παρουσία του αρνητικού προσήμου στη σχέση (2.2.14) δικαιολογείται από το γεγονός ότι η φορά διαγραφής του δρόμου C είναι αρνητική (ωρολογιακή).

Τέλος, το πρωτογενές πεδίο εκφράζεται σε συνεπτυγμένη μορφή που καθιστά εύκολους τους υπολογισμούς ως εξής

$$E_{y0} = -\frac{\omega\mu(\omega)}{4} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (2.2.16)$$

όπου $H_0^{(2)}$ η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και $R = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}$ η απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης από την πηγή. Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε με μία διαδικασία που περιγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα.

2.3 Μελέτη επιφανειακών κυμάτων

Σκοπός της ενότητας είναι ο προσδιορισμός των πόλων της ολοκληρωτέας συνάρτησης (σχέση 2.2.15) προκειμένου να εξεταστεί τι είδους κύματα είναι δυνατό να υποστηρίξει μία πλάκα από μεταλλικό. Οι πόλοι της συνάρτησης ολοκλήρωσης ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$g_0 \mu(\omega) \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) = 0 \quad (2.3.1)$$

$$g_0 \mu(\omega) \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) = 0 \quad (2.3.2)$$

που χαρακτηρίζουν αντιστοίχως τα άρτια και περιττά κύματα, αφού αποτελούν τους παρονομαστές των κλασματικών όρων που εμπεριέχουν την άρτια ($\cosh(g_1x)$) και περιττή εξάρτηση από το x ($\sinh(g_1x)$).

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις δυνατές λύσεις ως προς k_z των παραπάνω εξισώσεων εξετάζοντας το ενδεχόμενο ύπαρξης και μιγαδικών λύσεων εκτός από πραγματικές λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα διαδιδόμενα κύματα εντός της πλάκας (propagating waves) [3]. Οι λύσεις αυτές βέβαια εξαρτώνται κατά κύριο λόγο από το μοντέλο που θα υιοθετηθεί για την περιγραφή της εξάρτησης της μαγνητικής διαπερατότητας από τη συχνότητα, δηλαδή από τη σχέση διασποράς $\mu(\omega)$. Επικεντρώνουμε μάλιστα την προσοχή μας σε εκείνη τη ζώνη συχνοτήτων για την οποία οι χαρακτηριστικές παράμετροι του μέσου διάδοσης λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές (Double Negative Material), με αποτέλεσμα ο δείκτης διάθλασης του μέσου να προκύπτει αρνητικός ($n < 0$). Στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρείται το μοντέλο των Pendry et Al [11, 12] σύμφωνα με το οποίο οι συντακτικές παράμετροι του μέσου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\mu_r(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (2.3.3)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega^2} \quad (2.3.4)$$

όπου $F = 0.56$, $f_0 = 4$ GHz και $f_{ep} = 10$ GHz. Η περιοχή στην οποία ο δείκτης διάθλασης προκύπτει αρνητικός είναι τότε η ζώνη συχνοτήτων 4 – 6.03 GHz.

Σε περίπτωση που αναζητούμε πραγματικές λύσεις των παραπάνω εξισώσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στους πραγματικούς πόλους της ολοκληρωτέας συνάρτησης, οι σταθερές εγκάρσιας διάδοσης $g_0(k_z)$ και $g_1(k_z)$ λαμβάνουν διαφορετική μορφή ανάλογα με την περιοχή τιμών στην οποία βρίσκεται η σταθερά διαμήκους διάδοσης των κυμάτων k_z . Διακρίνουμε επομένως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Αν $k_z \in \mathbb{R}$ με $k_0 < k_z < k$ (όπου k_0, k οι κυματαριθμοί στους χώρους εκτός και εντός της πλάκας αντίστοιχα) τότε $g_0(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k_0^2}$ και $g_1(k_z) = \pm i\sqrt{k^2 - k_z^2}$. Σημειώνεται ότι οι αντίστοιχες αρνητικές τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z δε λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση επειδή δεν περικλείονται στο εσωτερικό του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης που ορίστηκε στο Σχήμα 2.3, συνεπώς δε χρειάζεται να υπολογιστούν τα

αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Το πρόσημο της παράστασης $g_1(k_z)$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα, αφού όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, δεν επηρεάζει το συνολικό πεδίο εντός της πλάκας. Στη συνέχεια επιλέγεται τυχαία το θετικό πρόσημο και η σχέση (2.3.1) διαμορφώνεται ως εξής

$$\sqrt{k_z^2 - k_0^2} \mu_r(\omega) \cos\left(\frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2}\right) - \sqrt{k^2 - k_z^2} \sin\left(\frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2}\right) = 0 \quad (2.3.5)$$

Αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε $u = \frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2}$ (όπου u αδιάστατη παράμετρος), τότε

$$\sqrt{k_z^2 - k_0^2} = \left(k^2 - k_0^2 - \frac{4u^2}{d^2}\right)^{1/2} = \frac{[k_0^2 d^2 (\epsilon_r \mu_r - 1) - 4u^2]^{1/2}}{d} \quad \text{και η σχέση (2.3.5) γίνεται}$$

$$\left[k_0^2 \frac{d^2}{4} (\epsilon_r \mu_r - 1) - u^2\right]^{1/2} \mu_r(\omega) = u \tan u \quad (2.3.6)$$

Για να ικανοποιείται η ανωτέρω εξίσωση με $u \in R$ πρέπει $\epsilon_r \mu_r > 1$, διαφορετικά το 1^ο μέλος προκύπτει φανταστικός αριθμός, ενώ το 2^ο πραγματικός, πράγμα αδύνατο. Άρα, η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$u \tan u = \mu_r(\omega) \sqrt{\alpha^2 - u^2} \quad (2.3.7)$$

όπου ορίζεται η αδιάστατη παράμετρος $\alpha = k_0 \frac{d}{2} \sqrt{\epsilon_r \mu_r - 1}$. Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στην εξίσωση προσδιορισμού των πόλων για τα TE περιττά κύματα (σχέση 2.3.2), η οποία μετασχηματίζεται στη σχέση

$$u \cot u = -\mu_r(\omega) \sqrt{\alpha^2 - u^2} \quad (2.3.8)$$

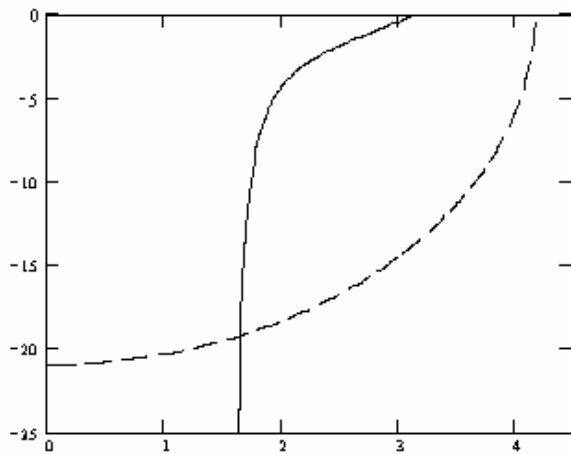
Οι πραγματικές ρίζες των παραπάνω εξισώσεων προσδιορίζονται για διάφορες συχνότητες στις οποίες $\mu_r(\omega) < 0$. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε την καμπύλη διασποράς για τα συνήθη διαδιδόμενα επιφανειακά κύματα (ordinary real surface waves). Οι αντίστοιχοι πόλοι βρίσκονται πάντα στο κατάλληλο επίπεδο Riemann. Σημειώνεται ωστόσο ότι για συγκεκριμένες συχνότητες δεν υπάρχει καμία πραγματική λύση για το u . Η απουσία πραγματικών λύσεων συμβαίνει επίσης για τις συχνότητες εκείνες για τις οποίες $\epsilon_r \mu_r < 1$.

Η συνθήκη απουσίας πραγματικών λύσεων δίνει ότι

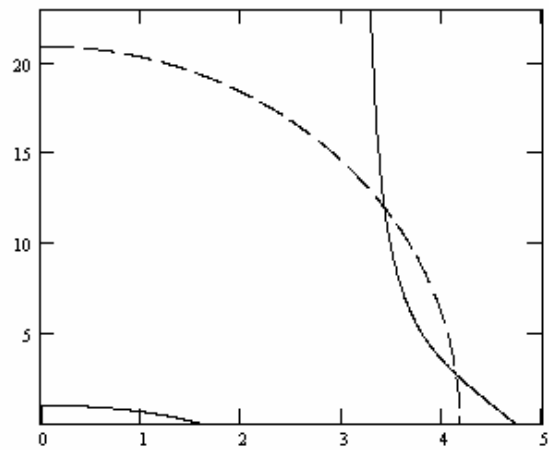
$$\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) < 1 \Leftrightarrow f > 5,2 \text{ GHz} \quad (2.3.9)$$

Στο συγκεκριμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων είναι δυνατή η ύπαρξη μόνο μιγαδικών ριζών, όπως θα παρουσιαστεί και στην επόμενη ενότητα.

Όσον αφορά στη διαδικασία εύρεσης των ριζών, εξαιτίας της ιδιαίτερης συμπεριφοράς των συναρτήσεων $u \tan u$ και $u \cot u$, διευκολύνεται σημαντικά από τη γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων στα δύο μέλη των εξισώσεων (2.3.7) και (2.3.8). Στα σχήματα 2.4 και 2.5 απεικονίζονται ενδεικτικά οι γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων στην περίπτωση που η συχνότητα λειτουργίας ισούται με 4,2 GHz και το πάχος της πλάκας $d = 20$ mm. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις $u \tan u$ και $u \cot u$ παριστάνονται με συνεχή γραμμή, ενώ οι συναρτήσεις $\mu_r(\omega)\sqrt{\alpha^2 - u^2}$ και $-\mu_r(\omega)\sqrt{\alpha^2 - u^2}$ με διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 2.4: Γραφικός προσδιορισμός ριζών για τα TE συνήθη άρτια κύματα, $f = 4.2$ GHz.



Σχήμα 2.5: Γραφικός προσδιορισμός ριζών για τα TE συνήθη περιττά κύματα, $f = 4.2$ GHz.

Η εξίσωση (2.3.7) έχει μία μόνο ρίζα, αφού υπάρχει ένα μόνο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων (Σχήμα 2.4). Για τον ακριβή προσδιορισμό της ρίζας αυτής ορίζεται ως διάστημα αναζήτησης το $[1.6, 2]$ και προκύπτει $u = 1.657$. Η τιμή 1,6 επιλέγεται ως κάτω όριο του διαστήματος αναζήτησης επειδή η συνάρτηση $u \tan u$ απειρίζεται για $u = 0,5\pi = 1,57$ ενώ εμφανίζει και ασυνέχεια αφού $\lim_{u \rightarrow \pi/2^-} u \tan u = +\infty$ και

$\lim_{u \rightarrow \pi/2^+} u \tan u = -\infty$. Συνεπώς, η διαδικασία προσδιορισμού της λύσης θα οδηγούνταν σε σφάλμα αν η τιμή $\pi/2$ περιλαμβανόταν στο διάστημα αναζήτησης. Η λύση αυτή χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τον προσδιορισμό της τιμής της σταθεράς διάδοσης k_z , σύμφωνα με τη σχέση

$$k_z = \pm \sqrt{k_0^2 \epsilon_r \mu_r - \frac{4u^2}{d^2}} \quad (2.3.10)$$

Προκύπτει $k_z = \pm 392,46 \text{ m}^{-1}$ ή εναλλακτικά σε κανονικοποιημένη αδιάστατη μορφή $k_z / k_0 = \pm 4,46$.

Με παρόμοια διαδικασία, από το Σχήμα 2.5 διακρίνουμε την ύπαρξη δύο λύσεων (δύο σημεία τομής) της εξίσωσης (2.3.8), οι οποίες προκύπτουν $u_1 = 3.420$ και $u_2 = 4.133$. Για τον προσδιορισμό της πρώτης ρίζας επιλέγουμε το κάτω όριο του διαστήματος αναζήτησης με τιμή μεγαλύτερη του π , όπου εμφανίζεται ασυνέχεια και απειρισμός της συνάρτησης $u \cot u$, ενώ για τη δεύτερη ρίζα επιλέγουμε ως κάτω όριο του διαστήματος αναζήτησης οποιαδήποτε τιμή μεγαλύτερη της πρώτης λύσης, δηλαδή της τιμής 3.42 και ως άνω όριο μια τιμή μικρότερη του α , δηλαδή του 4.168. Οι τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z προκύπτουν πάλι σύμφωνα με τη σχέση (2.3.10) σε αδιάστατη μορφή $k_z/k_0 = \pm 2,887$ και $k_z/k_0 = \pm 1,174$.

Γενικά, το διάστημα αναζήτησης των ριζών των εξισώσεων (2.3.7) και (2.3.8) είναι πάντοτε ένα υποσύνολο του διαστήματος $[0, \alpha]$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση $\sqrt{\alpha^2 - u^2}$ και προσδιορίζεται αποκλείοντας εκείνες τις τιμές του u , για τις οποίες οι συναρτήσεις $u \tan u$ και $u \cot u$ απειρίζονται ή παρουσιάζουν ασυνέχεια. Οι τιμές του u που υπολογίζονται χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον καθορισμό των αντίστοιχων τιμών της σταθεράς διαμήκους διάδοσης των κυμάτων k_z μέσω της σχέσης (2.3.10). Οι αρνητικές τιμές του k_z δεν περικλείονται εντός της κλειστής καμπύλης ολοκλήρωσης του Σχήματος 3 (σε περίπτωση που $z > z'$) και αγνοούνται στην ανάλυση. Θεωρώντας ότι το πάχος της πλάκας είναι $d = 20$ mm, τα αριθμητικά αποτελέσματα της ανάλυσης μας συνοψίζονται στους πίνακες 2.1 και 2.2 και αντιστοιχούν στα άρτια και περιττά TE επιφανειακά κύματα. Σημειώνεται ότι στους πίνακες αυτούς απεικονίζονται οι κανονικοποιημένες τιμές της σταθεράς διάδοσης κατά τη διεύθυνση του άξονα z , k_z/k_0 για ένα διακριτό αριθμό συχνοτήτων εντός του εύρους 4-6,03 GHz, στο οποίο ο δείκτης διάθλασης της πλάκας προκύπτει αρνητικός.

Πίνακας 2.1: Κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης για τα συνήθη TE άρτια κύματα

f (GHz)	4.1	4.15	4.2	4.25	4.3	4.35		4.4	
k_z/k_0	7.0	5.44	4.46	3.75	3.17	2.64	1.04	1.79	1.51

Πίνακας 2.2: Κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης για τα συνήθη TE περιττά κύματα

f (GHz)	4.1	4.15	4.2		4.22		4.73	4.8	4.82
k_z/k_0	6.22	4.35	2.89	1.17	2.02	1.67	1.0	1.12	1.25

Στον πίνακα 2.1 παρατηρούμε την απουσία πραγματικών ριζών για συχνοτήτες μεγαλύτερες από 4.4 GHz, αφού οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δεν παρουσιάζουν

σημεία τομής. Το γεγονός αυτό εξηγείται εξαιτίας της μορφής των καμπυλών του Σχήματος 2.4: καθώς αυξάνει η συχνότητα λειτουργίας μειώνεται η τιμή της σταθεράς α , έτσι ώστε μετά από κάποια συχνότητα να ισχύει $\alpha < \alpha^*$, όπου $\alpha^* \in (\pi/2, \pi)$ η τιμή εκείνη του α για την οποία οι δύο γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $u \tan u$ και $\mu_r(\omega)\sqrt{\alpha^2 - u^2}$ εφάπτονται μεταξύ τους. Επομένως, για τιμές του α μικρότερες από α^* δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Ομοίως, από τον πίνακα 2.2 προκύπτει ότι για συχνότητες μεγαλύτερες από 4.22 GHz δεν εντοπίζονται πραγματικές ρίζες μέχρι τη συχνότητα των 4.75 GHz, όπου εμφανίζονται ξανά πραγματικοί πόλοι στο στενό εύρος ζώνης 4.75-4.82 GHz. Το γεγονός αυτό εξηγείται μαθηματικά από την ίδια τη μορφή της εξίσωσης (2.3.8). Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων που απεικονίζουν τα δύο μέλη της εξίσωσης (Σχήμα 2.5) προκύπτει το συμπέρασμα ότι καθώς αυξάνει η συχνότητα, λόγω μείωσης της τιμής της παραμέτρου α , η καμπύλη που περιγράφεται από το 2^ο μέλος της εξίσωσης δεν εμφανίζει σημεία τομής με τη συνάρτηση $u \cot(u)$ για $u > \pi$. Καθώς όμως μειώνεται περαιτέρω η τιμή της παραμέτρου α , προκύπτουν σημεία τομής με τη συνάρτηση $u \cot u$ για $0 < u < \pi/2$ τα οποία αντιστοιχούν στις πραγματικές λύσεις για $4.75 < f < 4.82$. Η φυσική σημασία των λύσεων αυτών είναι ότι αντιπροσωπεύουν έναν TE ρυθμό ανώτερης τάξης για τα περιττά κύματα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σε ορισμένες συχνότητες και στους δύο πίνακες εντοπίζονται περισσότερες από μία πραγματικές λύσεις. Ωστόσο, οι ρίζες αυτές δεν αντιπροσωπεύουν ένα ρυθμό ανώτερης τάξης, σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά.

2^η περίπτωση: Αν $k_z > k > k_0$ τότε οι σταθερές εγκάρσιας διάδοσης ορίζονται ως εξής:

$g_0(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k_0^2}$ και $g_1(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k^2}$. Η εξίσωση προσδιορισμού των πραγματικών πόλων για τα TE άρτια κύματα (σχέση 2.3.1) λαμβάνει τη μορφή

$$\sqrt{k_z^2 - k_0^2} \mu(\omega) \cosh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2} d}{2} + \sqrt{k_z^2 - k^2} \mu_0 \sinh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2} d}{2} = 0 \quad (2.3.11)$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$u \tanh u = -\mu_r(\omega) \frac{d}{2} \sqrt{k_z^2 - k_0^2} \quad (2.3.12)$$

όπου $u = \frac{d}{2} \sqrt{k_z^2 - k^2}$. Τότε η σταθερά εγκάρσιας διάδοσης $g_0(k_z)$ γράφεται στη μορφή

$$\sqrt{k_z^2 - k_0^2} = \frac{\sqrt{k_0^2 d^2 (\epsilon_r \mu_r - 1) + 4u^2}}{d} \quad (2.3.13)$$

και με αντικατάσταση στη σχέση (2.3.11) προκύπτει η εξίσωση

$$u \tanh u = -\mu_r(\omega) \sqrt{\frac{k_0^2 d^2}{4} (\epsilon_r \mu_r - 1) + u^2} \quad (2.3.14)$$

Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στην εξίσωση προσδιορισμού των πόλων για τα TE περιττά κύματα (σχέση 2.3.2), η οποία μετασχηματίζεται στη σχέση

$$u \coth u = -\mu_r(\omega) \sqrt{\frac{k_0^2 d^2}{4} (\epsilon_r \mu_r - 1) + u^2} \quad (2.3.15)$$

Παρατηρούμε ότι είναι δυνατό να ισχύει τόσο η σχέση $\epsilon_r \mu_r > 1$ όσο και η σχέση $\epsilon_r \mu_r < 1$ προκειμένου το υπόριζο στο 2^ο μέλος των εξισώσεων να είναι θετικό, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση όπου έπρεπε $\epsilon_r \mu_r > 1$ για να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες. Επιπλέον, επειδή επικεντρωνόμαστε στην περιοχή συχνοτήτων για την οποία $\mu(\omega) < 0$, το 2^ο μέλος των σχέσεων (2.3.14) και (2.3.15) προκύπτει θετικό, όπως και το 1^ο μέλος που είναι πάντα θετικό. Συνεπώς, υπάρχουν πραγματικές λύσεις των παραπάνω εξισώσεων, σε αντίθεση με την περίπτωση ενός συνήθους ιστροπικού υλικού με $\mu > 0$, γιατί τότε το 2^ο μέλος θα ήταν αρνητικό. Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα υλικά με $\mu < 0$, όπως τα μεταυλικά, είναι δυνατό να υποστηρίξουν αποσβεννύμενα κύματα με σταθερά διάδοσης $k_z > k$ (evanescent real proper waves), σε αντίθεση με τα συνήθη υλικά με $\mu > 0$. Μάλιστα, οι εξισώσεις προσδιορισμού των πόλων (σχέσεις 2.3.14 και 2.3.15) τροποποιούνται κατάλληλα ανάλογα με το αν $\epsilon_r \mu_r > 1$.

$$u \tanh u = \begin{cases} -\mu_r(\omega) \sqrt{a^2 + u^2}, & \epsilon_r \mu_r > 1 \\ -\mu_r(\omega) \sqrt{u^2 - b^2}, & \epsilon_r \mu_r < 1 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

$$u \coth u = \begin{cases} -\mu_r(\omega) \sqrt{a^2 + u^2}, & \epsilon_r \mu_r > 1 \\ -\mu_r(\omega) \sqrt{u^2 - b^2}, & \epsilon_r \mu_r < 1 \end{cases} \quad (2.3.17)$$

όπου $a = \frac{k_0 d}{2} \sqrt{\epsilon_r \mu_r - 1}$ και $b = \frac{k_0 d}{2} \sqrt{1 - \epsilon_r \mu_r}$. Όταν $\epsilon_r \mu_r < 1$ επιπλέον ισχύει ότι $k_z < k_0$

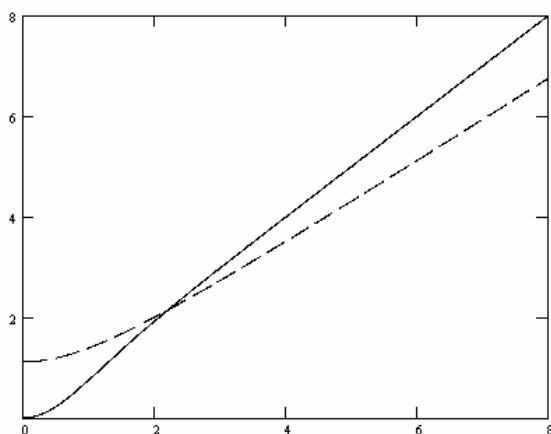
με αποτέλεσμα η σταθερά διαμήκους διάδοσης να ανήκει στην περιοχή τιμών $k_z > k_0 > k$.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε τη συχνότητα των 4.8 GHz προκειμένου να παρουσιάσουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των διεγερόμενων επιφανειακών κυμάτων. Για $f = 4.8$ GHz είναι $\epsilon_r \mu_r > 1$ και οι εξισώσεις προσδιορισμού

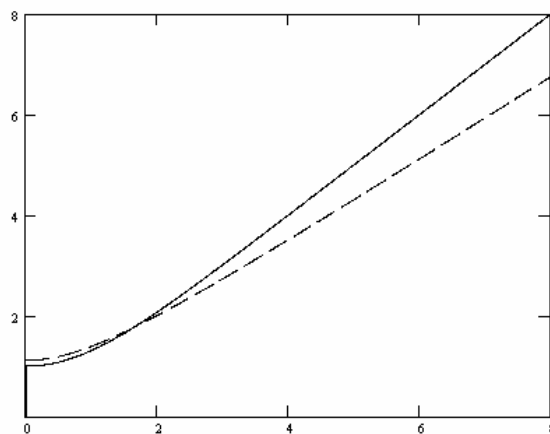
των πραγματικών πόλων μετά από αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών των παραμέτρων ε_r , μ_r και k_0 λαμβάνουν τη μορφή

$$u \tanh u = 0.8327\sqrt{1.342^2 + u^2} \quad (2.3.18)$$

$$u \coth u = 0.8327\sqrt{1.342^2 + u^2} \quad (2.3.19)$$



Σχήμα 2.6: Γραφικός προσδιορισμός ριζών για τα TE φθίνοντα άρτια κύματα, $f = 4.8$ GHz.



Σχήμα 2.7: Γραφικός προσδιορισμός ριζών για τα TE φθίνοντα περιττά κύματα, $f = 4.8$ GHz.

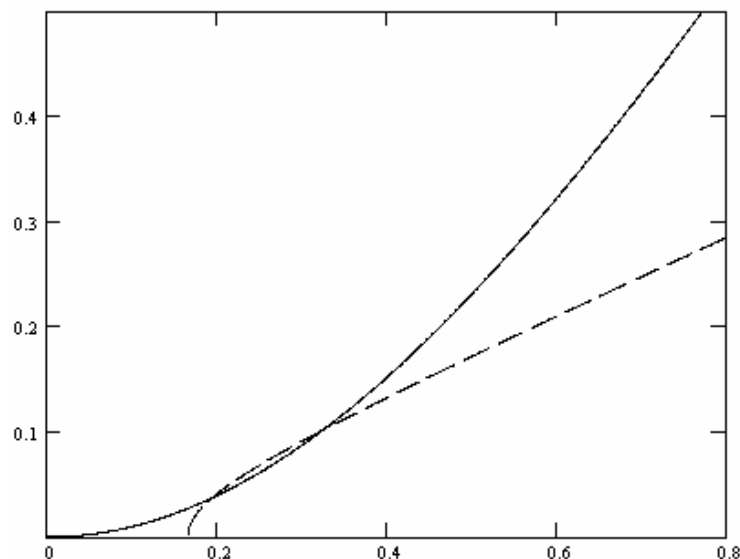
Οι συναρτήσεις $u \tanh u$ και $u \coth u$ παριστάνονται με συνεχή γραμμή, ενώ η συνάρτηση $-\mu_r(\omega)\sqrt{a^2 + u^2}$ με διακεκομμένη γραμμή. Διακρίνουμε την ύπαρξη μίας μόνο λύσης τόσο για τα άρτια όσο και για τα περιττά TE κύματα (ένα σημείο τομής). Συγκεκριμένα για τα άρτια φθίνοντα κύματα προκύπτει η ρίζα $u = 2.198$, ενώ για τα περιττά φθίνοντα κύματα η ρίζα $u = 1.618$, με αντίστοιχες τιμές για την κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης $k_z/k_0 = \pm 2.75$ και $k_z/k_0 = \pm 2.32$.

Η διαδικασία αναζήτησης πραγματικών λύσεων διεξάγεται σε όλο το εύρος συχνοτήτων όπου $\mu(\omega) < 0$ και $\varepsilon(\omega) < 0$, δηλαδή για $4 < f < 6.03$ GHz. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για την κανονικοποιημένη σταθερά διαμήκους διάδοσης για τα άρτια και περιττά αποσβεννύμενα κύματα παρουσιάζονται στον πίνακα 2.3. Παρατηρούμε ότι για συχνότητες μικρότερες των 4,75 GHz δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες, καθώς επίσης ότι για τα περιττά κύματα οι πραγματικές ρίζες εμφανίζονται μόνο στο στενό εύρος ζώνης 4,75-4,82 GHz. Αυτό εξηγείται αν λάβουμε υπόψη τη μορφή των γραφικών παραστάσεων που παριστάνουν τα δύο μέλη των εξισώσεων (2.3.18) και (2.3.19), σύμφωνα με τα Σχήματα 2.6 και 2.7.

f (GHz)	k_z/k_0	
	Άρτια	Περιττά
4,75	4,05	3,98
4,80	2,75	2,32
4,82	2,58	1,86
4,85	2,26	
4,90	1,97	
4,95	1,76	
5,00	1,58	
5,05	1,44	
5,10	1,31	
5,15	1,19	
5,20	1,06	
5,21	1	
	1,03	

Πίνακας 2.3

Καθώς αυξάνει η συχνότητα, μειώνονται οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων a και $\mu_r(\omega)$, με αποτέλεσμα η καμπύλη $-\mu_r(\omega)\sqrt{a^2 + u^2}$ να μετατοπίζεται προς τα κάτω μέχρι να εμφανιστούν σημεία τομής με την καμπύλη $u \tanh u$ (άρτια κύματα) ή $u \coth u$ (περιττά κύματα). Το γεγονός αυτό παρατηρείται για συχνότητες μεγαλύτερες από 4,75 GHz και μέχρι τη συχνότητα των 5,2 GHz. Για συχνότητες μεγαλύτερες των 5,2 GHz ισχύει ότι $\epsilon_r \mu_r < 1$ και η καμπύλη $-\mu_r(\omega)\sqrt{u^2 - b^2}$ τέμνει την καμπύλη $u \tanh u$ μόνο στην περίπτωση που $f = 5.21$ GHz, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Γραφικός προσδιορισμός ριζών για $f = 5.21$ GHz.

Η καμπύλη $u \tanh u$ παριστάνεται με συνεχή γραμμή, ενώ η καμπύλη $-\mu_r(\omega)\sqrt{u^2 - b^2}$ με διακεκομμένη. Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται δύο σημεία τομής των καμπυλών που

αντιστοιχούν σε δύο λύσεις για τη σταθερά διάδοσης. Ειδικότερα, ο ακριβής υπολογισμός των ριζών δίνει $u_1 = 0.195$ και $u_2 = 0.324$ με αντίστοιχες τιμές για την κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης $k_z/k_0 = \pm 1$ και $k_z/k_0 = \pm 1,03$. Για τον προσδιορισμό της πρώτης ρίζας το κάτω όριο του διαστήματος αναζήτησης επιλέγεται ελαφρώς μεγαλύτερο από την τιμή $b = 0,1654$ για την οποία η συνάρτηση $-\mu_r(\omega)\sqrt{u^2 - b^2}$ μηδενίζεται, ενώ για τη δεύτερη ρίζα το κάτω όριο του διαστήματος αναζήτησης επιλέγεται ελαφρά μεγαλύτερο από την τιμή της πρώτης ρίζας, δηλαδή 0.195. Ωστόσο, με την αύξηση της συχνότητας επέρχεται αύξηση της τιμής της παραμέτρου b , με αποτέλεσμα η καμπύλη $-\mu_r(\omega)\sqrt{u^2 - b^2}$ να μετατοπίζεται προς τα δεξιά, έτσι ώστε να μην προκύπτει πλέον κανένα σημείο τομής με την καμπύλη $u \tanh u$. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται για πρώτη φορά στη συχνότητα των 5,22 GHz και εξακολουθεί να υφίσταται όσο αυξάνει η συχνότητα, αφού η καμπύλη $-\mu_r(\omega)\sqrt{u^2 - b^2}$ μετατοπίζεται ολοένα και περισσότερο προς τα δεξιά. Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά έναν πίνακα (πίνακας 2.4) που περιέχει τις τιμές των παραμέτρων μ_r , ϵ_r , k_0 και α καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα από 4.75 ως 5.21 GHz. Μάλιστα, κατά τον υπολογισμό της παραμέτρου α λαμβάνεται υπόψη ότι για $f > 5.2$ GHz ισχύει η τροποποιημένη έκφραση $b = \frac{k_0 d}{2} \sqrt{1 - \epsilon_r \mu_r}$, επειδή $\epsilon_r \mu_r < 1$.

f (GHz)	μ_r	ϵ_r	k_0 (1/m)	α
4,75	-0,92533	-3,43213	99,48377	1,467467
4,80	-0,83273	-3,34028	100,531	1,341831
4,85	-0,75109	-3,25125	101,5782	1,219781
4,90	-0,6786	-3,16493	102,6254	1,099447
4,95	-0,61381	-3,08122	103,6726	0,978745
5,00	-0,55556	-3	104,7198	0,855033
5,05	-0,50291	-2,92118	105,767	0,724401
5,10	-0,4551	-2,84468	106,8142	0,579781
5,15	-0,41151	-2,77038	107,8613	0,403633
5,20	-0,37159	-2,69822	108,9085	0,056008
5,21	-0,36401	-2,68404	109,118	0,165393

Πίνακας 2.4

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η ανάλυση των αποσβεννόμενων TE κυμάτων, αλλά αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος αυτός χρησιμοποιείται επειδή τα κύματα στο εσωτερικό της πλάκας είναι δυνατό να εξασθενούν κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Αυτό οφείλεται στη μορφή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην πλάκα, η οποία για $k_z > k$ δίνεται από τη σχέση

$$E_{y2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z e^{-ik_z(z-z')} \left[A_1 \cosh\left(\sqrt{k_z^2 - k^2} \cdot x\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{k_z^2 - k^2} \cdot x\right) \right] \quad (2.3.20)$$

Αν για παράδειγμα οι συντελεστές A_1 και A_2 είναι θετικοί, τότε ο όρος μέσα στην αγκύλη είναι αύξουσα συνάρτηση του x , με αποτέλεσμα το πεδίο να αυξάνεται εντός της πλάκας στη διαδρομή $-d/2 \leq x \leq d/2$. Ομοίως, αν $A_1, A_2 < 0$ το πεδίο ελαττώνεται εντός της πλάκας για $-d/2 \leq x \leq d/2$. Τέλος, αν οι συντελεστές A_1 και A_2 είναι ετερόσημοι τότε το πεδίο μπορεί να είναι είτε γνησίως μονότονο είτε να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο της πλάκας. Πάντως, σε καμία περίπτωση δεν ταλαντώνεται κατά την εγκάρσια διεύθυνση, όπως συμβαίνει με τα συνήθη πραγματικά επιφανειακά κύματα (ordinary real surface waves), όπου $k_0 < k_z < k$.

3^η περίπτωση: Αν $k_z < k_0$ τότε η σταθερά εγκάρσιας διάδοσης ελευθέρου χώρου λαμβάνει τη μορφή $g_0 = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2} = i\sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ εξασφαλίζοντας ότι $\text{Im}(g_0) > 0$, όπως απαιτείται για να προκύπτουν κύματα απομακρυνόμενα από την πηγή προς το άπειρο. Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

i) Αν $k > k_0$, δηλαδή αν ισοδύναμα $\epsilon_r \mu_r > 1$, τότε $g_1(k_z) = (k_z^2 - k^2)^{1/2} = i\sqrt{k^2 - k_z^2}$, όπου το θετικό πρόσημο επιλέγεται αυθαίρετα, αφού το πρόσημο του g_1 δεν επηρεάζει το συνολικό πεδίο εντός της πλάκας. Οι εξισώσεις προσδιορισμού των πόλων (2.3.1) και (2.3.2) διαμορφώνονται ως εξής

$$i\sqrt{k_0^2 - k_z^2} \mu_r(\omega) \cos \frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2} = \sqrt{k^2 - k_z^2} \sin \frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2} \quad (2.3.21)$$

$$i\sqrt{k^2 - k_z^2} \mu_r(\omega) \cos \frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} \mu_r(\omega) \sin \frac{\sqrt{k^2 - k_z^2} d}{2} \quad (2.3.22)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αδύνατες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αφού το πρώτο μέλος τους είναι καθαρά φανταστικός αριθμός ενώ το δεύτερο μέλος πραγματικός αριθμός. Συνεπώς, δεν υπάρχουν πραγματικοί πόλοι για $k_z < k_0 < k$.

ii) Αν $k < k_0$ ($\epsilon_r \mu_r < 1$) τότε η σταθερά εγκάρσιας διάδοσης γράφεται στη μορφή

$$g_1(k_z) = (k_z^2 - k^2)^{1/2} = \begin{cases} i\sqrt{k^2 - k_z^2}, & k > k_z \\ \sqrt{k_z^2 - k^2}, & k < k_z \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Για $k > k_z$ έχουμε ξανά την περίπτωση (i), οπότε δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες, ενώ για $k < k_z$ οι εξισώσεις (2.3.1) και (2.3.2) γίνονται αντίστοιχα

$$i\mu_r(\omega)\sqrt{k_0^2 - k_z^2} \cosh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2}d}{2} = -\sqrt{k_z^2 - k^2} \sinh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2}d}{2} \quad (2.3.24)$$

$$i\sqrt{k_0^2 - k_z^2} \mu_r(\omega) \sinh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2}d}{2} = -\sqrt{k_z^2 - k^2} \cosh \frac{\sqrt{k_z^2 - k^2}d}{2} \quad (2.3.25)$$

Είναι φανερό ότι και στις δύο περιπτώσεις οι εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες, αφού έχουμε ισότητα φανταστικού με πραγματικό αριθμό, πράγμα βεβαίως αδύνατο. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για $\lambda < k_0$ δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες.

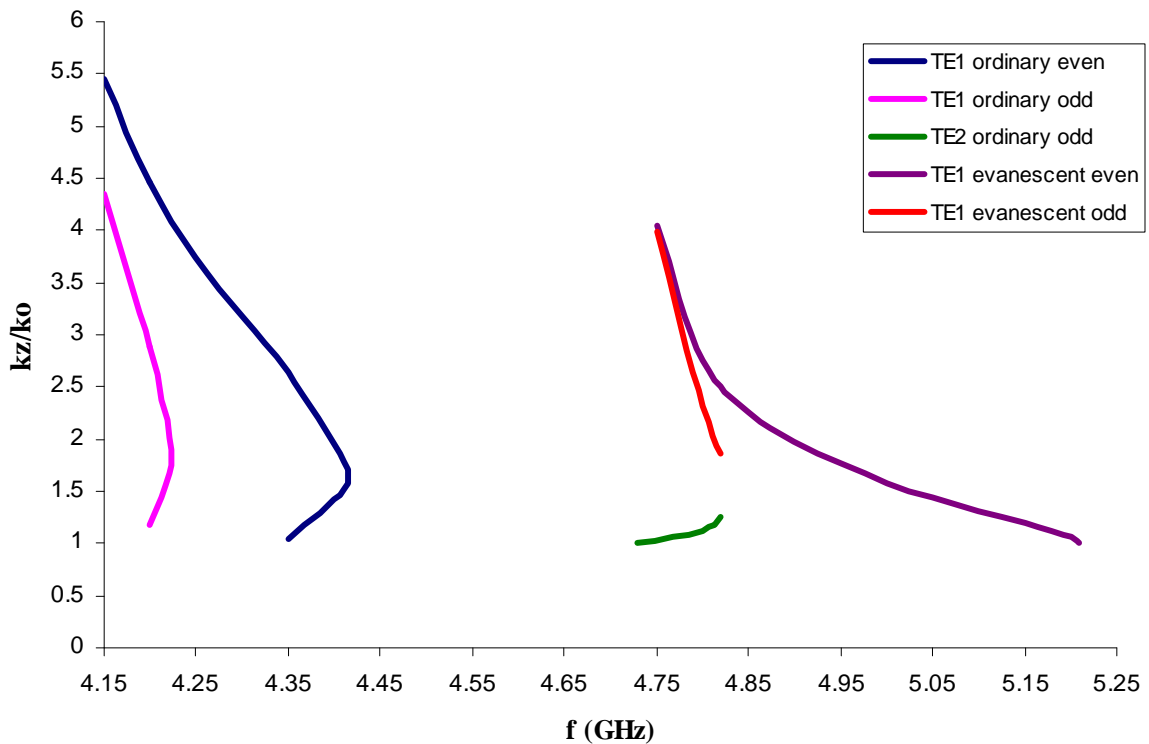
Στο σημείο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε την καμπύλη διασποράς των TE κυμάτων (άρτιων και περιττών), όπου θα διακρίνεται η μεταβολή της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης k_z/k_0 συναρτήσει της συχνότητας για τα συνήθη διαδιδόμενα (ordinary guided waves) και φθίνοντα (evanescent waves) κύματα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9 γίνεται διάκριση μεταξύ άρτιων και περιττών κυμάτων, ανάλογα με το αν οι λύσεις για τη σταθερά διάδοσης k_z είναι ρίζες της εξίσωσης (2.3.1) ή (2.3.2) αντίστοιχα. Τα συνήθη κύματα εμφανίζουν φανταστική σταθερά διάδοσης κατά την εγκάρσια διεύθυνση $g_1(k_z) = i\sqrt{k^2 - k_z^2}$ και παρουσιάζουν ταλαντωτική συμπεριφορά εντός της πλάκας, αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου χαρακτηρίζεται από μία σχέση της μορφής $C_1 \cos(g_1 x) + C_2 \sin(g_1 x)$. Αντίθετα, τα αποσβεννόμενα κύματα έχουν πραγματική σταθερά διάδοσης $g_1(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k^2}$ και μέσα στην πλάκα εμφανίζουν είτε γνησίως μονότονη συμπεριφορά είτε ένα τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο της πλάκας.

Βασικό χαρακτηριστικό των καμπυλών των διαφόρων κυμάτων είναι ότι η σταθερά διάδοσης k_z μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας, γεγονός που δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά με $\epsilon, \mu > 0$, στα οποία η σταθερά διάδοσης αυξάνεται μονότονα με την αύξηση της συχνότητας για κάθε ρυθμό. Εξαιτίας αυτής της ασυνήθιστης συμπεριφοράς, η ταχύτητα ομάδας που ορίζεται γενικά από τη σχέση $u_g = \frac{d\omega}{dk_z}$ και είναι αντιστρόφως

ανάλογη της κλίσης της κάθε καμπύλης στα διάφορα σημεία της, λαμβάνει αρνητικές τιμές, ενώ η ταχύτητα φάσης $u_p = \frac{\omega}{k_z}$ προκύπτει θετική, αν θεωρήσουμε μόνο τις θετικές

πραγματικές τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z που περικλείονται στο εσωτερικό του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης (π.χ. αν $z > z'$). Αν εναλλακτικά θεωρήσουμε τη

συνεισφορά των πόλων με αρνητικές πραγματικές τιμές του k_z (π.χ. αν $z < z'$), τότε προκύπτει $u_g > 0$ ενώ $u_p < 0$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μέσα στην πλάκα από μεταλλικό η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης είναι αντιπαράλληλες, με αποτέλεσμα η ενέργεια των κυμάτων να διαδίδεται στην αντίθετη κατεύθυνση από τη φάση τους.



Σχήμα 2.9: Καμπύλη διασποράς TE διεγερμένων επιφανειακών κυμάτων σε πλάκα από μεταλλικό.

2.4 Μελέτη μιγαδικών ρυθμών διάδοσης

Στην ανάλυση που πραγματοποιήθηκε μέχρι στιγμής αγνοήσαμε την ύπαρξη μιγαδικών πόλων της ολοκληρωτέας συνάρτησης (σχέση 2.2.15). Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το ενδεχόμενο ύπαρξης μιγαδικών πόλων καθώς και το αν αυτοί βρίσκονται στο κατάλληλο επίπεδο Riemann, ώστε να συνυπολογιστεί η συνεισφορά τους στην ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο k_z [3]. Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση θεωρώντας μιγαδική τη σταθερά διάδοσης των κυμάτων κατά μήκος του άξονα z , δηλαδή στη μορφή $k_z = \beta_z - i\alpha_z$ όπου β_z η σταθερά φάσης και α_z η σταθερά απόσβεσης. Οι σταθερές εγκάρσιας διάδοσης $g_0(k_z)$ και $g_1(k_z)$ προκύπτουν τότε μιγαδικοί αριθμοί. Οι εξισώσεις

προσδιορισμού των πόλων για τα TE άρτια και περιττά κύματα λαμβάνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$g_0 \mu_r(\omega) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{g_0 d}{2} = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{g_1 d}{2} \tanh \frac{g_1 d}{2} \quad (2.4.1)$$

$$g_0 \mu_r(\omega) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{g_0 d}{2} = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{g_1 d}{2} \coth \frac{g_1 d}{2} \quad (2.4.2)$$

Θέτουμε $w = \frac{g_0 d}{2} = u + iv$ και $z = \frac{g_1 d}{2} = x + iy$ οπότε η εξίσωση (2.4.1) γίνεται

$$w = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} z \cdot \tanh z = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} (x + iy) \frac{e^x (\cos y + i \sin y) - e^{-x} (\cos y - i \sin y)}{e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y)}$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$w = -\frac{x + iy}{\mu_r(\omega)} \frac{\cos y \sinh x + i \sin y \cosh x}{\cos y \cosh x + i \sin y \sinh x} =$$

$$= -\frac{x + iy}{\mu_r(\omega)} \frac{\sinh x \cosh x (\sin^2 y + \cos^2 y) + i \sin y \cos y (\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\cos^2 y \cosh^2 x + \sin^2 y \sinh^2 x}$$

Τελικά προκύπτουν οι εκφράσεις

$$u = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{x \sinh x \cosh x - y \sin y \cos y}{\cos^2 y \cosh^2 x + \sin^2 y \sinh^2 x} \quad (2.4.3)$$

$$v = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{y \sinh x \cosh x + x \sin y \cos y}{\cos^2 y \cosh^2 x + \sin^2 y \sinh^2 x} \quad (2.4.4)$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας πρέπει να ισχύει η συνθήκη $\text{Re}(g_0) > 0$, δηλαδή $u > 0$. Επειδή για τις συχνότητες λειτουργίας που εξετάζουμε είναι $\mu_r(\omega) < 0$, λόγω και της σχέσης (2.4.3) στην οποία ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, αρκεί ισοδύναμα να ισχύει ότι

$$x \sinh x \cosh x - y \sin y \cos y > 0 \quad (2.4.5)$$

Τότε οι μιγαδικοί πόλοι θα βρίσκονται στο κατάλληλο επίπεδο Riemann και συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνεισφορά τους στο ολοκλήρωμα επαλληλίας της έκφρασης του δευτερογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Προφανώς, η παραπάνω ανισότητα δεν αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών x, y άρα δε βρίσκονται όλοι οι μιγαδικοί πόλοι στο κατάλληλο επίπεδο Riemann. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται και για την εξίσωση (2.4.2) για τα περιττά TE κύματα, η οποία καταλήγει στις παρακάτω εκφράσεις

$$u = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{x \sinh x \cosh x + y \sin y \cos y}{\cos^2 y \cosh^2 x + \sin^2 y \sinh^2 x} \quad (2.4.6)$$

$$v = -\frac{1}{\mu_r(\omega)} \frac{y \sinh x \cosh x - x \sin y \cos y}{\cos^2 y \cosh^2 x + \sin^2 y \sinh^2 x} \quad (2.4.7)$$

και η αντίστοιχη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι

$$x \sinh x \cosh x + y \sin y \cos y > 0 \quad (2.4.8)$$

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις μιγαδικές ρίζες των εξισώσεων (2.4.1) και (2.4.2). Οι λύσεις αυτές ουσιαστικά προέρχονται από τις αντίστοιχες πραγματικές και αναζητώνται στις συχνότητες εκείνες για τις οποίες έχουμε διαπιστώσει στην ανάλυση που προηγήθηκε την απουσία πραγματικών ριζών. Για τα άρτια κύματα το γεγονός αυτό παρατηρείται για συχνότητες μεγαλύτερες από 4,41 GHz και για τα περιττά κύματα για συχνότητες μεγαλύτερες από 4,22 GHz. Για την εύρεση των μιγαδικών πόλων χρησιμοποιείται το λογισμικό πακέτο Mathematica 4.0. Ειδικότερα, γίνεται χρήση της συνάρτησης FindRoot η οποία υπολογίζει για την εκάστοτε μη γραμμική εξίσωση της μορφής $f[u] = 0$ την πλησιέστερη μιγαδική ρίζα στην αρχική μιγαδική τιμή (x_0, y_0) που εισάγεται ως παράμετρος. Στην ανάλυση που ακολουθεί μας αρκεί η εύρεση μίας μιγαδικής λύσης για κάθε συχνότητα λειτουργίας και μάλιστα εκείνης της λύσης που αντιστοιχεί στη μικρότερη αριθμητικά τιμή της ανηγμένης σταθεράς διάδοσης β_z / k_0 . Για το σκοπό αυτό στην πρώτη κλήση της συνάρτησης FindRoot, που αντιστοιχεί στη μικρότερη συχνότητα για την οποία εμφανίζονται μιγαδικές ρίζες, το πραγματικό μέρος του σημείου εκκίνησης (x_0, y_0) επιλέγεται πλησιέστερα στην τιμή της πραγματικής ρίζας που υπολογίστηκε στην αμέσως μικρότερη συχνότητα. Για να γίνει το παραπάνω σκεπτικό αντιληπτό θεωρούμε για παράδειγμα την εξίσωση (2.3.1), η οποία στην περίπτωση των συνήθων διαδιδόμενων κυμάτων (ordinary guided waves) γράφεται στη μορφή

$$u \tan u = \mu_r(\omega) \sqrt{\alpha^2 - u^2} \quad (2.4.9)$$

Η μεγαλύτερη συχνότητα για την οποία η εξίσωση αυτή εμφανίζει πραγματικές ρίζες είναι $f = 4.41$ GHz. Μάλιστα, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $u_1 = 2.223$, $u_2 = 2.372$. Προκειμένου τώρα να αναζητήσουμε τυχόν μιγαδικές ρίζες για $f = 4.42$ GHz, το αρχικό σημείο (2.3, 1) είναι μία κατάλληλη επιλογή, αφού το πραγματικό του μέρος βρίσκεται μεταξύ των u_1, u_2 . Η συνάρτηση επιστρέφει τη ρίζα $u = 2.287 - i0.176$, ενώ η αντίστοιχη τιμή της σταθεράς διάδοσης k_z υπολογίζεται από τη σχέση

$$k_z = \pm \sqrt{k_0^2 \epsilon_r \mu_r - \frac{4u^2}{d^2}} \quad (2.4.10)$$

Η τιμή της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης προκύπτει $k_z/k_0 = \pm(1.62 - i0.29)$. Το φανταστικό μέρος του k_z πρέπει να είναι αρνητικό σε περίπτωση που $z > z'$ ή θετικό όταν $z < z'$ προκειμένου να περικλείεται ο εκάστοτε μιγαδικός πόλος στο εσωτερικό του δρόμου ολοκλήρωσης.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι οι εξισώσεις (2.4.1) και (2.4.2) έχουν γενικά μιγαδικές ρίζες, οι οποίες εμφανίζουν συμμετρία και ως προς τους δύο άξονες, επομένως σχηματίζουν τετράδες στο μιγαδικό επίπεδο k_z . Έτσι, αν $u_1 = x + iy$ είναι μία λύση, τότε επίσης λύσεις θα είναι και οι $u_2 = -x + iy$, $u_3 = -x - iy$ και $u_4 = x - iy$. Οι λύσεις u_1 και u_3 αφήνουν αμετάβλητη την έκφραση του k_z^2 , ενώ οι u_2 , u_4 δίνουν το συζυγή μιγαδικό του k_z^2 . Από κάθε τιμή της έκφρασης k_z^2 προκύπτουν 2 τιμές για τη σταθερά διάδοσης k_z , άρα συνολικά λαμβάνουμε 4 τιμές για το k_z , όπως και στην περίπτωση του u . Ωστόσο, μόνο 2 από τις 4 αυτές περικλείονται στο εσωτερικό της καμπύλης ολοκλήρωσης. Συνεπώς, υπάρχει πάντοτε ένα ζεύγος μιγαδικών πόλων με αρνητικό φανταστικό μέρος βρισκόμενοι εντός του δρόμου ολοκλήρωσης του σχήματος 3 (για $z > z'$), οι οποίοι είναι επίσης συμμετρικοί ως προς τον y άξονα.

Το επόμενο αριθμητικό παράδειγμα που θα παρουσιαστεί αναφέρεται στη συχνότητα λειτουργίας των 4,45 GHz. Επιλέγουμε το ίδιο αρχικό σημείο (x_0, y_0) με προηγουμένως και ελέγχουμε αν η νέα λύση απέχει αρκετά από την προηγούμενη (για $f = 4,42$ GHz). Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλουμε λίγο το αρχικό σημείο και δοκιμάζουμε ξανά. Στο παράδειγμά μας λαμβάνουμε την τιμή $u = 2.256 + i0.378$, η οποία δεν απέχει ιδιαίτερα από την προηγούμενη $u = 2.287 - i0.176$. Η κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης προκύπτει τότε $k_z/k_0 = \pm 1.57 - i0.63$, όπου το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό γιατί υποθέτουμε ότι $z > z'$. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τις τιμές k_z/k_0 για καθεμιά από τις υπόλοιπες συχνότητες εντός του εύρους στο οποίο ο δείκτης διάθλασης της πλάκας είναι αρνητικός (DNG range).

Εντούτοις, για κάθε τιμή του u που υπολογίζεται πρέπει πάντοτε να εξετάζουμε αν ο εκάστοτε μιγαδικός πόλος βρίσκεται στο κατάλληλο επίπεδο Riemann χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συνθήκες για τα άρτια και περιττά κύματα (σχέσεις 2.4.6 και 2.4.8). Μάλιστα, καθεμιά από τις παραπάνω συνθήκες είναι άρτια ως προς τις μεταβλητές x και y , με αποτέλεσμα να αρκεί να γίνει ο έλεγχος για τις τιμές x και y που προκύπτουν και όχι για καθεμιά από τις 4 συμμετρικές λύσεις για το u .

Επιστρέφοντας στο αριθμητικό παράδειγμα για $f = 4.42$ GHz (άρτια κύματα) το κριτήριο $\text{Re}(g_0) > 0$ (σχέση 2.4.6) για $x = 2.287$ και $y = -0.1763$ ικανοποιείται αφού

$$x \sinh x \cosh x - y \sin y \cos y = 55.44 > 0$$

Ομοίως, στο παράδειγμα για $f = 4.45$ GHz είναι $x = 2.256$ και $y = 0.3783$ οπότε η συνθήκη (2.4.8) ισχύει επίσης διότι $x \sinh x \cosh x - y \sin y \cos y = 51.24 > 0$. Επομένως, οι συγκεκριμένοι μιγαδικοί πόλοι ανήκουν στο κατάλληλο επίπεδο Riemann.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι μιγαδικές ρίζες πρώτης τάξης για τα περιττά TE κύματα. Η εξίσωση (2.3.2) στην περίπτωση των συνήθων διαδιδόμενων κυμάτων γράφεται στη μορφή

$$u \cot u = -\mu_r(\omega) \sqrt{a^2 - u^2} \quad (2.4.11)$$

Οι λύσεις αναζητώνται στη μορφή $u = x + iy$ για συχνότητες μεγαλύτερες από 4.22 GHz. Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες τις $u_1 = 3.62$ και $u_2 = 3.755$. Για τον προσδιορισμό των μιγαδικών ριζών για $f = 4.23$ GHz, ως αρχικό σημείο επιλέγεται ένα σημείο με τετμημένη ανάμεσα στις τιμές 3.62 και 3.755. Ένα τέτοιο σημείο είναι το (3.7, 1) και η προκύπτουσα μιγαδική ρίζα $u = 3.65 - i0.21$, με αντίστοιχη τιμή για την ανηγμένη σταθερά διάδοσης $k_z/k_0 = \pm 1.76 - i0.56$. Επιπλέον, η συνθήκη (2.4.8) με $x = 3.65$ και $y = -0.21$ ικανοποιείται, αφού $x \sinh x \cosh x + y \sin y \cos y = 1350.81 > 0$.

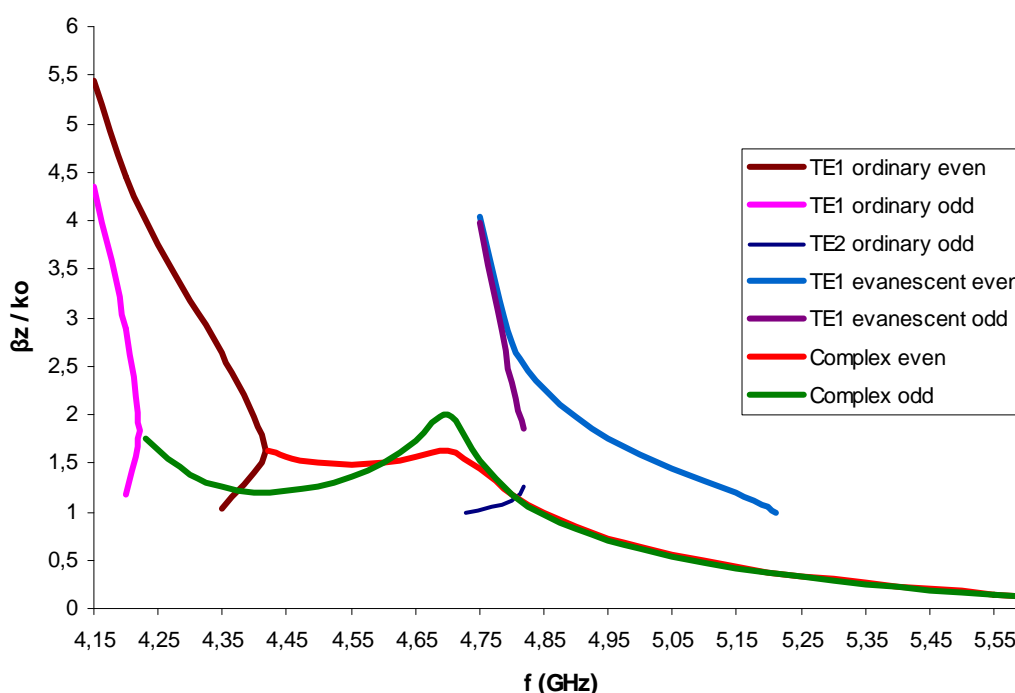
Συνεχίζοντας με τη συχνότητα των 4.3 GHz και το ίδιο αρχικό σημείο (3.7, 1) λαμβάνουμε $u = 3.47 + i0.51$, $k_z/k_0 = \pm 1.38 - i1.58$ ενώ η συνθήκη (2.4.8) δίνει ($x = 3.47$, $y = 0.51$) $x \sinh x \cosh x + y \sin y \cos y = 896 > 0$ (ισχύει). Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία σε μεγαλύτερες συχνότητες εντός του εύρους 4 – 6.03 GHz με βήμα 0.05 GHz για τα άρτια και τα περιττά μιγαδικά κύματα συνοψίζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα, που παρατίθενται ενδεικτικά στον πίνακα 2.5. Μάλιστα, όλοι οι μιγαδικοί πόλοι που περιλαμβάνονται στον πίνακα προκύπτει ότι ανήκουν στο κατάλληλο επίπεδο Riemann (proper complex waves), αφού ικανοποιούν τα αντίστοιχα κριτήρια για τα άρτια και τα περιττά κύματα. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν η κανονικοποιημένη σταθερά φάσης β_z/k_0 και η σταθερά απόσβεσης α_z/k_0 ως συναρτήσεις της συχνότητας οδηγώντας σε αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τις ιδιότητες των κυμάτων που διεγείρονται μέσα στην πλάκα από μεταλλικό.

Πίνακας 2.5: Σταθερές διάδοσης και απόσβεσης μιγαδικών κυμάτων

Complex even waves			Complex odd waves		
f	β_z / k_0	α_z / k_0	f	β_z / k_0	α_z / k_0
4,42	1,63	0,29	4,23	1,76	0,56
4,45	1,57	0,63	4,3	1,38	1,58
4,5	1,51	0,95	4,35	1,26	1,96
4,55	1,49	1,19	4,4	1,2	2,24
4,6	1,51	1,41	4,45	1,21	2,45
4,65	1,57	1,65	4,5	1,26	2,62
4,7	1,63	2	4,55	1,36	2,78
4,75	1,45	2,4	4,6	1,5	2,94
4,8	1,18	2,57	4,65	1,73	3,16
4,85	0,98	2,64	4,7	2	3,74
4,9	0,84	2,68	4,75	1,52	4,3
4,95	0,72	2,7	4,8	1,17	4,35
5	0,63	2,71	4,85	0,96	4,35
5,05	0,55	2,714	4,9	0,82	4,35
5,1	0,49	2,716	4,95	0,7	4,33
5,15	0,43	2,713	5	0,61	4,31
5,2	0,38	2,71	5,05	0,53	4,29
5,25	0,34	2,7	5,1	0,47	4,26
5,3	0,3	2,69	5,15	0,42	4,24
5,35	0,26	2,68	5,2	0,37	4,21
5,4	0,23	2,67	5,25	0,33	4,18
5,45	0,2	2,66	5,3	0,29	4,15
5,5	0,177	2,65	5,35	0,25	4,12
5,55	0,15	2,63	5,4	0,22	4,09
5,6	0,13	2,62	5,45	0,19	4,06
5,65	0,11	2,61	5,5	0,17	4,04
5,7	0,093	2,59	5,55	0,15	4,01
			5,6	0,13	3,98
			5,65	0,11	3,95
			5,7	0,09	3,92

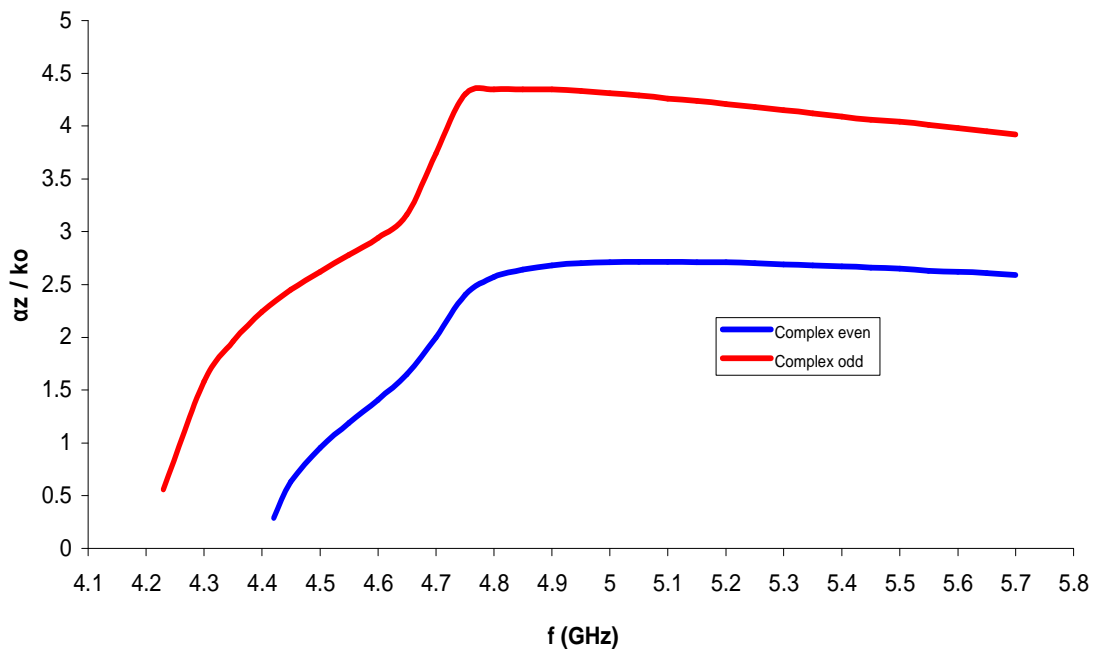
Στο σχήμα 2.10 απεικονίζεται η μεταβολή της σταθεράς φάσης β_z/k_0 συναρτήσει της συχνότητας για όλα τα είδη των κυμάτων (επιφανειακά και μιγαδικά) που είναι δυνατό να διεγερθούν εντός της πλάκας, καταλήγοντας στην καμπύλη διασποράς του μεταλλικού. Συνοψίζοντας, διακρίνουμε τις εξής βασικές κατηγορίες κυμάτων που αναπτύσσονται:

- i) Διαδιδόμενα άρτια και περιττά TE κύματα (Ordinary even & odd waves)
- ii) Αποσβεννύμενα (φθίνοντα) TE άρτια και περιττά κύματα (Evanescent even & odd waves)
- iii) Κύματα με μιγαδική σταθερά διάδοσης (Complex even & odd waves)



Σχήμα 2.10: Συνολική καμπύλη διασποράς

Επιπλέον, στο Σχήμα 2.11 απεικονίζεται η μεταβολή της κανονικοποιημένης σταθεράς απόσβεσης α_z/k_0 συναρτήσει της συχνότητας για τα κύματα με μιγαδική σταθερά διάδοσης.



Σχήμα 2.11: Μεταβολή της σταθεράς απόσβεσης των μιγαδικών κυμάτων συναρτήσει της συχνότητας

Από τις παραπάνω καμπύλες προκύπτουν τα ακόλουθα χρήσιμα συμπεράσματα

- Το κύριο χαρακτηριστικό των καμπυλών για τα συνήθη διαδιδόμενα (ordinary guided) και φθίνοντα (evanescent) κύματα είναι το γεγονός ότι η σταθερά φάσης β_z μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας, φαινόμενο το οποίο δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά μέσα με $\epsilon, \mu > 0$ όπου η σταθερά φάσης αυξάνει μονότονα με την αύξηση της συχνότητας για κάθε ρυθμό. Εξαιτίας αυτής της ασυνήθιστης ηλεκτρομαγνητικής συμπεριφοράς, η ταχύτητα ομάδας που ορίζεται ως $u_g = d\omega/dk_z$ και είναι αντιστρόφως ανάλογη της κλίσης κάθε καμπύλης, λαμβάνει αρνητικές τιμές, ενώ η ταχύτητα φάσης $u_p = \omega/k_z$ είναι θετική. Τα παραπάνω ισχύουν θεωρώντας μόνο τις θετικές πραγματικές τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z που περιλαμβάνονται στο εσωτερικό του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης (π.χ. σε περίπτωση που $z > z'$). Αν εναλλακτικά θεωρήσουμε τη συνεισφορά των πόλων με αρνητικές πραγματικές τιμές του k_z (π.χ. αν $z < z'$), τότε προκύπτει $u_g > 0$ ενώ $u_p < 0$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εντός της πλάκας από μεταυλικό η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης προκύπτουν πάντοτε αντιπαράλληλες, με αποτέλεσμα η ενέργεια των κυμάτων να διαδίδεται στην αντίθετη κατεύθυνση από τη φάση τους. Για το λόγο αυτό τα κύματα που

διαδίδονται εντός των μεταλλικών καλούνται και «οπισθοδρομικά» (backward waves). Επιπρόσθετα, σημειώνουμε ότι για κάθε είδος κυμάτων υπάρχει μία συχνότητα στην οποία η κλίση των καμπυλών $dk_z/d\omega$ απειρίζεται, επομένως η ταχύτητα ομάδας τείνει στο μηδέν, καταπιέζοντας τη διάδοση επιφανειακών κυμάτων. Πέρα από αυτή τη συχνότητα είναι δυνατή η διάδοση αποκλειστικά και μόνο κυμάτων με μιγαδική σταθερά διάδοσης, που συχνά ονομάζονται διαρρέοντα κύματα (leaky waves). Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι σε ορισμένες συχνότητες (π.χ. $f = 4.4$ GHz) προκύπτουν δύο διακριτές τιμές της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης που αντιστοιχούν στον ίδιο TE ρυθμό, σε αντίθεση με την περίπτωση των συνήθων υλικών μέσων, στα οποία η παραπάνω συμπεριφορά παρατηρείται σε διαφορετικούς ρυθμούς διάδοσης.

- Η «οπισθοδρομική» φύση των κυμάτων παρατηρείται επίσης στην περίπτωση των κυμάτων με μιγαδική σταθερά διάδοσης με κάποιες εξαιρέσεις (π.χ. στο εύρος $4.45 < f < 4.7$ GHz), όπου η σταθερά διάδοσης αυξάνεται με την αύξηση της συχνότητας. Ωστόσο, αυτή δεν είναι ιδιότητα των επιφανειακών κυμάτων, για τα οποία η σταθερά διάδοσης πρέπει να είναι πραγματική. Επιπλέον, λόγω της «οπισθοδρομικής» φύσης της πλειονότητας των μιγαδικών κυμάτων, η σταθερά φάσης β_z μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας, με αποτέλεσμα η γωνία θ της ακτινοβολούμενης δέσμης των διαρρέοντων κυμάτων (leaky waves) να μειώνεται. Η τελευταία ορίζεται από τη σχέση $\tan \theta = \beta_z / g_0$, όπου g_0 η εγκάρσια σταθερά διάδοσης στο χώρο εκτός της πλάκας. Επομένως, η ακτινοβολούμενη δέσμη κατευθύνεται κατά μέτωπο με την αύξηση της συχνότητας (broadside radiation).
- Τα κύματα με μιγαδική σταθερά διάδοσης αρχίζουν να εμφανίζονται μετά από τις ονομαζόμενες συχνότητες “διαχωρισμού” (splitting–point frequencies) όπου η ταχύτητα ομάδας μηδενίζεται και κάτω από τις οποίες η σταθερά διάδοσης είναι πραγματική. Μάλιστα, οι συχνότητες διαχωρισμού εμφανίζονται σε συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής του εκάστοτε πραγματικού ρυθμού, για την οποία προφανώς ισχύει ότι $\beta_z / k_0 = 1$, αφού όπως προέκυψε από την ανάλυση της ενότητας 2.3 για $\beta_z < k_0$ δεν είναι δυνατό να υπάρξουν πραγματικοί ρυθμοί. Αντίθετα, η σταθερά διάδοσης β_z για τους μιγαδικούς ρυθμούς μπορεί να προκύψει μεγαλύτερη από τη σταθερά διάδοσης ελευθέρου χώρου k_0 , αλλά πρωτίστως είναι $\beta_z < k_0$. Διακρίνουμε επίσης περιοχές συχνοτήτων όπου παρατηρείται καταπίεση κάθε είδους επιφανειακών κυμάτων (surface–waves suppression). Στις ζώνες αυτές,

στην περίπτωση μας στο εύρος 4.42-4.73 GHz, καθώς και για συχνότητες μεγαλύτερες από 5.21 GHz, απουσιάζουν τα κύματα με πραγματική σταθερά διάδοσης και παρατηρούνται μόνο κύματα με μιγαδική σταθερά διάδοσης (complex proper waves). Στις συγκεκριμένες ζώνες συχνοτήτων μάλιστα, η κανονικοποιημένη σταθερά απόσβεσης α_z/k_0 παρουσιάζει ιδιαίτερη άνοδο και λαμβάνει ιδιαίτερα υψηλές τιμές για συχνότητες μεγαλύτερες από 5.21 GHz τόσο για τα άρτια όσο και για τα περιττά TE κύματα (Σχήμα 2.11). Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια να μην αναμένεται σημαντική συνεισφορά των κυμάτων αυτών στο ακτινοβολούμενο πεδίο. Επιπλέον, οι εν λόγω μιγαδικοί ρυθμοί δεν αναμένεται να προκαλέσουν ακτινοβολία με υψηλή κατευθυντικότητα. Σε χαμηλότερες συχνότητες λειτουργίας όμως (π.χ. $f = 4.43$ GHz) η ακτινοβολούμενη δέσμη θα είναι περισσότερο κατευθυντική, αφού η σταθερά απόσβεσης των TE άρτιων κυμάτων είναι πολύ μικρότερη από ό,τι σε μεγαλύτερες συχνότητες. Ουσιαστικά, με την αύξηση της συχνότητας (π.χ. στο εύρος 4.43-4.6 GHz) η συνεισφορά των TE άρτιων κυμάτων στο ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των περιττών κυμάτων, τα οποία εμφανίζουν αρκετά υψηλότερη σταθερά απόσβεσης, όπως προκύπτει από το Σχήμα 2.11.

2.5 Υπολογισμός διακριτού φάσματος πεδίου

Στην ενότητα αυτή θα υπολογιστεί το διακριτό φάσμα ιδιοτιμών του ηλεκτρικού πεδίου (discrete spectrum), που παριστάνει το σύνολο των επιφανειακών κυμάτων (surface waves) που διεγείρονται εντός της πλάκας από μεταλλικό, με σκοπό τη μελέτη της μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου στην εγκάρσια διεύθυνση (άξονας x). Όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.2, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην πλάκα αποτελείται από το άθροισμα του πρωτογενούς και δευτερογενούς πεδίου: $E_y = E_{y0} + E_{y2}$, όπου το δευτερογενές πεδίο αποτελείται από τη συνεισφορά των πόλων (πραγματικών και μιγαδικών) που περικλείονται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης ολοκλήρωσης καθώς και από τη συνεισφορά των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των βροχοτομών σύμφωνα με τη σχέση

$$E_{y2} = \int_C f(k_z) dk_z = -2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}[f(k_z), k_z = k_{zm}] + \int_{B_+} f(k_z) dk_z + \int_{B_-} f(k_z) dk_z \quad (2.5.1)$$

όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(k_z)$ ορίζεται από τη σχέση

$$f(k_z) = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \exp[-ik_z(z-z')] \exp(-g_1 d/2) \left[\mu_0 - \frac{g_0}{g_1} \mu(\omega) \right] \left[\frac{\cosh(g_1 x') \cosh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right)} + \frac{\sinh(g_1 x') \sinh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \sinh\left(\frac{g_1 d}{2}\right) + g_1 \mu_0 \cosh\left(\frac{g_1 d}{2}\right)} \right] \quad (2.5.2)$$

Ο πρώτος όρος της σχέσης (2.5.1), που αποδίδεται από τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, αποτελεί το διακριτό φάσμα ιδιοτιμών, αφού έχει τη μορφή πεπερασμένου αθροίσματος όρων. Ο δεύτερος όρος αντίθετα παριστάνει τα ακτινοβολούμενα κύματα (radiated waves) και αποτελεί το συνεχές φάσμα ιδιοτιμών. Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στον υπολογισμό του διακριτού φάσματος.

Για το σκοπό αυτό η συνάρτηση $f(k_z)$ γράφεται στη μορφή $f(k_z) = P(k_z)/Q(k_z)$, όπου

$$P(k_z) = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} e^{-ik_z(z-z')-g_1 d/2} \left(1 - \frac{g_0}{g_1} \mu_r(\omega) \right) \left[\left(g_0 \mu_r(\omega) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} \right) \cosh(g_1 x') \cosh(g_1 x) + \left(g_0 \mu_r(\omega) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} \right) \sinh(g_1 x') \sinh(g_1 x) \right] \quad (2.5.3)$$

$$Q(k_z) = \left(g_0 \mu_r(\omega) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} \right) \left(g_0 \mu_r(\omega) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} \right) \quad (2.5.4)$$

Τότε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης $f(k_z)$ προκύπτουν από τη σχέση

$$\text{Res}[f(k_z), k_z = k_{zm}] = \frac{P(k_{zm})}{Q'(k_{zm})} \quad (2.5.5)$$

όπου k_{zm} οι πόλοι της συνάρτησης ολοκλήρωσης που περικλείονται εντός του κλειστού δρόμου ολοκλήρωσης και $Q'(k_{zm})$ η παράγωγος του παρονομαστή για $k_z = k_{zm}$.

Δεδομένου ότι $g_0(k_z) = (k_z^2 - k_0^2)^{1/2}$ και $g_1(k_z) = (k_z^2 - k^2)^{1/2}$ προκύπτει ότι

$$Q'(k_z) = \left[\left(g'_0 \mu_r + g_1 g'_1 \frac{d}{2} \right) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g'_1 \left(1 + \mu_r g_0 \frac{d}{2} \right) \cosh \frac{g_1 d}{2} \right] \cdot \left(g_0 \mu_r(\omega) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \sinh \frac{g_1 d}{2} \right) + \left[\left(g'_0 \mu_r + g_1 g'_1 \frac{d}{2} \right) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g'_1 \left(1 + \mu_r g_0 \frac{d}{2} \right) \sinh \frac{g_1 d}{2} \right] \cdot \left(g_0 \mu_r(\omega) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \cosh \frac{g_1 d}{2} \right) \quad (2.5.6)$$

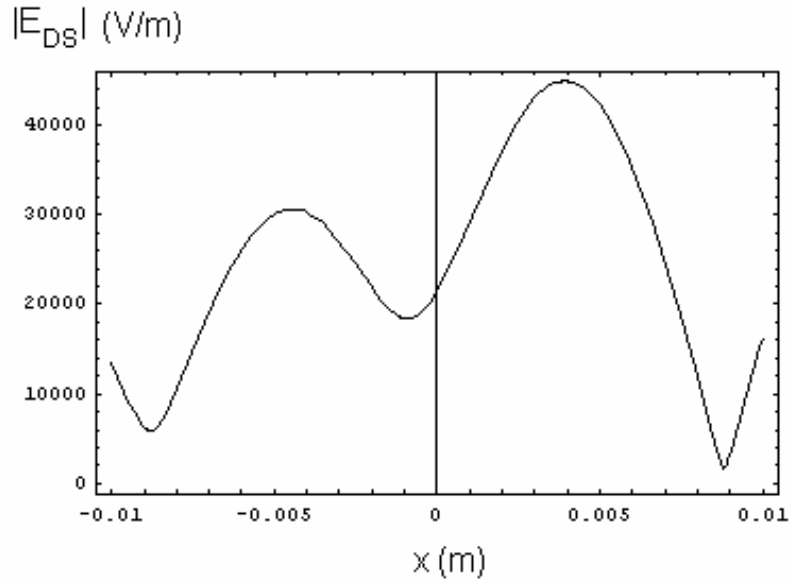
όπου $g'_0(k_z) = \frac{k_z}{g_0(k_z)}$ και $g'_1(k_z) = \frac{k_z}{g_1(k_z)}$. Τελικά λαμβάνουμε την έκφραση

$$Q'(k_z) = k_z \left(1 + \mu_r^2 + \mu_r g_0 d\right) \sinh(g_1 d) + k_z \left[\frac{g_1}{g_0} \left(\mu_r + \frac{g_0 d}{2} \right) + \mu_r \frac{g_0}{g_1} \left(1 + \frac{\mu_r g_0 d}{2} \right) \right] \cosh(g_1 d) \quad (2.5.7)$$

Επομένως, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης $f(k_z)$ σε μία δεδομένη συχνότητα μπορούν να υπολογιστούν άμεσα, αφού όλοι οι πόλοι της έχουν προσδιοριστεί, σύμφωνα με τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες. Για παράδειγμα, στη συχνότητα των 4.2 GHz διεγείρονται μονάχα συνήθη διαδιδόμενα κύματα (ordinary guided waves) και οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης προκύπτουν $k_{zm}/k_0 = 4.46$ για τα άρτια TE κύματα και $k_{zm}/k_0 = \{2.89, 1.17\}$ για τα περιττά κύματα (δύο λύσεις). Οι σταθερές εγκάρσιας διάδοσης για καθεμιά από τις παραπάνω τιμές του k_z δίνονται από τις σχέσεις $g_1(k_{zm}) = i\sqrt{k^2 - k_{zm}^2}$ και $g_0(k_{zm}) = \sqrt{k_{zm}^2 - k_0^2}$. Για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου που προκύπτει από τις συνεισφορές των ολοκληρωτικών υπολοίπων (διακριτό φάσμα) ισχύει η σχέση

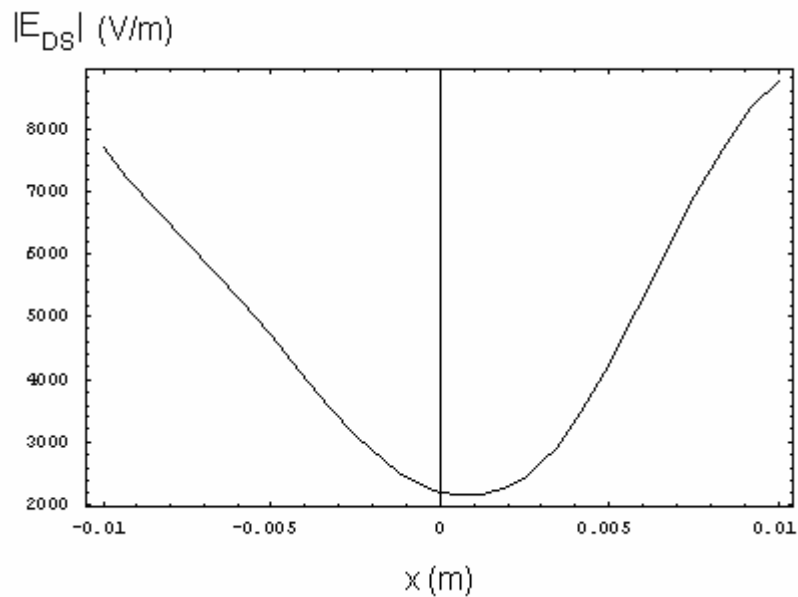
$$E_{DS}(x, z) = -2\pi i \sum_{m=1}^n \frac{P(k_{zm})}{Q'(k_{zm})} \quad (2.5.8)$$

όπου ο δείκτης DS υποδηλώνει το διακριτό φάσμα (Discrete Spectrum). Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου στην εγκάρσια διεύθυνση, η μεταβλητή z πρέπει να καθοριστεί, καθώς επίσης και η θέση της πηγής ρεύματος (x', z') εντός της πλάκας. Θεωρώντας ότι $z = 1.4$ m και $(x', z') = (0.002, 1)$ υπολογίζεται το ηλεκτρικό πεδίο εντός της πλάκας, το πλάτος του οποίου απεικονίζεται στο Σχήμα 2.12 συναρτήσει της μεταβλητής x , που βρίσκεται στο διάστημα $[-d/2, d/2]$ (όπου d το πάχος της πλάκας). Σημειώνεται ότι $z > z'$, οπότε ο κλειστός δρόμος ολοκλήρωσης είναι όπως στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.12: Συνεισφορά ολοκληρωτικών υπολοίπων στο ηλεκτρικό πεδίο εντός της πλάκας για $f = 4.2$ GHz. Θέση πηγής: $(0.002, 1)$, $z = 1.4$ m, $d = 20$ mm.

Για συχνότητα λειτουργίας $f = 4.9$ GHz διεγείρονται άρτια φθίνοντα κύματα με σταθερά διάδοσης $k_z/k_0 = 1.97$, καθώς και κύματα με μιγαδική σταθερά διάδοσης $k_z/k_0 = \pm 0.84 - i2.68$ (complex even) και $k_z/k_0 = \pm 0.82 - i4.35$ (complex odd). Για την ίδια θέση της πηγής με προηγουμένως και για $z = 1.005$ m η μεταβολή του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης x μέσα στην πλάκα παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13: Συνεισφορά ολοκληρωτικών υπολοίπων στο ηλεκτρικό πεδίο εντός της πλάκας για $f = 4.9$ GHz. Θέση πηγής: $(0.002, 1)$, $z = 1.005$ m, $d = 20$ mm.

Από τα σχήματα 2.12 και 2.13 παρατηρούμε ότι για $f = 4.2$ GHz, εξαιτίας της παρουσίας διαδιδόμενων συνήθων κυμάτων, το ηλεκτρικό πεδίο εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά εντός της πλάκας, ως αποτέλεσμα της μορφής της εξάρτησής του από το x : $C_1 \cos(\sqrt{k^2 - k_z^2} x) + C_2 \sin(\sqrt{k^2 - k_z^2} x)$, αφού $k_z < k$ και $g_1(k_z) = i\sqrt{k^2 - k_z^2}$. Αντίθετα, για $f = 4.9$ GHz, λόγω της παρουσίας αποσβεννόμενων και διαρρεόντων κυμάτων, το ηλεκτρικό πεδίο διαφοροποιείται. Σημειώνεται επίσης ότι στο Σχήμα 2.13 η τιμή του z επιλέγεται ελαφρώς μεγαλύτερη από την τιμή του z' ($z = 1.005$ m), αφού για μεγαλύτερες τιμές του z η συνεισφορά των μιγαδικών κυμάτων εξαφανίζεται λόγω της γρήγορης εξασθένισης του ηλεκτρικού πεδίου με την απόσταση z , η οποία είναι της μορφής: $\exp[\text{Im}(k_z)(z - z')]$, με $\text{Im}(k_z) < 0$ και $z > z'$.

Η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθήθηκε στην παρούσα ενότητα επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση της διέγερσης από τυχαία κατανομημένες ρευματικές πηγές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Φυσική υλοποίηση και προσεγγιστική θεωρία ανάλυσης μεταλλικών μέσων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκαν διεξοδικά οι φασματικές ιδιότητες των μεταλλικών υποστρωμάτων και καταλήξαμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά τους, η οποία διαφοροποιείται σημαντικά σε σχέση με τα συμβατικά μέσα διάδοσης. Ωστόσο, για τις ανάγκες της ανάλυσης δεν παρουσιάστηκε κάποιο ρεαλιστικό μοντέλο κατασκευής του μεταλλικού, αλλά θεωρήθηκε μία πλάκα από υλικό που να προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός μεταλλικού, δηλαδή σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού να λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές, οδηγώντας έτσι στην εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης.

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η εισαγωγή μίας δομής που να καθιστά εύκολη τη φυσική υλοποίηση του υπό σχεδίαση μεταλλικού. Η δομή που επιλέγεται για τη μοντελοποίηση του μεταλλικού στην παρούσα διατριβή αποτελείται από ένα τρισδιάστατο κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες είναι μαγνητικά αδρανείς. Η επιλογή της συγκεκριμένης δομής πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψη δύο βασικά κριτήρια:

- Η κατασκευή του σύνθετου υλικού με αρνητικό δείκτη διάθλασης είναι αρκετά απλή σε σχέση με την ιδιαίτερα πολύπλοκη δομή των πρώτων υποψήφιων μεταλλικών που προτάθηκε στο τέλος της προηγούμενης δεκαετίας από τους Pendry et. Al. Η δομή εκείνη αποτελούνταν από συστοιχίες λεπτών μεταλλικών συρμάτων που παρείχαν αρνητική διηλεκτρική επιτρεπτότητα [11] και διαχωρισμένων δακτυλίων (split ring resonators) για την επίτευξη αρνητικής μαγνητικής διαπερατότητας σε ένα εύρος ζώνης γύρω από τη συχνότητα συντονισμού [12].
- Παρέχει τη δυνατότητα ηλεκτρομαγνητικού **συντονισμού** των σφαιρών σε συγκεκριμένες συχνότητες, με αποτέλεσμα τη μεγιστοποίηση του πλάτους του σκεδαζόμενου H/M πεδίου. Όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια του κεφαλαίου, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα μ_{eff} και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά ϵ_{eff} της συνολικής δομής εξαρτώνται άμεσα από το συντονισμό των μεμονωμένων σφαιρών

και οι τιμές τους εμφανίζουν απότομες αυξομειώσεις γύρω από τις συχνότητες μαγνητικού και ηλεκτρικού συντονισμού αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να προκύπτουν **αρνητικές** σε ορισμένο εύρος συχνοτήτων. Την ιδιότητα αυτή εκμεταλλευόμαστε στη δημιουργία ενός μέσου με αρνητικό δείκτη διάθλασης (μεταϋλικό), του οποίου οι συντακτικές παράμετροι ϵ και μ λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές.

Σημειώνεται τέλος ότι το μέσο στο σύνολό του θα εμφανίζει ισοτροπική συμπεριφορά, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την περιοδικότητα της δομής, διευκολύνει την ανάλυση της ηλεκτρομαγνητικής του συμπεριφοράς.

Η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθείται στο παρόν κεφάλαιο βασίζεται στη θεωρία του *ενεργού μέσου* (effective medium theory), σύμφωνα με την οποία ένα μέσο διάδοσης χαρακτηρίζεται ως ενεργό όταν ένα προσπίπτον H/M κύμα δεν “αντιλαμβάνεται” τις ασυνέχειες του μέσου. Ο κύριος περιορισμός που πρέπει ωστόσο να ικανοποιείται προκειμένου η προτεινόμενη δομή του μεταϋλικού να συμπεριφέρεται ως ένα ενεργό μέσο είναι ότι το μήκος κύματος ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο (host medium) πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να συσχετίσουμε τις παραμέτρους σκέδασης από μία μεμονωμένη σφαίρα (σκέδαση Mie) με την ενεργό διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών [26]. Επομένως, οι μακροσκοπικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης περιγράφονται από τις ιδιότητες των “δομικών στοιχείων” που το αποτελούν. Εντούτοις, η συγκεκριμένη μέθοδος ανάλυσης είναι μία πρώτης τάξης προσέγγιση του προβλήματος που, όπως θα φανεί και στα επόμενα κεφάλαια, παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο είναι αρκετά μεγαλύτερο της διαμέτρου των σφαιρών και δεν αποτελεί την πλήρη λύση, αφού δε λαμβάνει υπόψη συνεισφορές από ανώτερης τάξης ρυθμούς ούτε και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών.

Το κεφάλαιο ξεκινά με τη μελέτη του προβλήματος της σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα και του φαινομένου του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η θεωρία του ενεργού μέσου, σύμφωνα με την οποία προσδιορίζονται οι μακροσκοπικές ιδιότητες του υποψήφιου μεταϋλικού μέσου (ϵ_{eff} και μ_{eff}) συναρτήσεων των παραμέτρων σκέδασης από μία μεμονωμένη σφαίρα. Αποδεικνύεται ότι με κατάλληλη επιλογή των διαστάσεων και του υλικού των σφαιρών, σε ένα εύρος ζώνης γύρω από τις συχνότητες μαγνητικού και ηλεκτρικού συντονισμού, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά του συνόλου της δομής προκύπτουν αντίστοιχα

ταυτόχρονα αρνητικές, επιβεβαιώνοντας τους αρχικούς μας ισχυρισμούς για τη δυνατότητα επίτευξης αρνητικού δείκτη διάθλασης. Στο τέλος του κεφαλαίου πραγματοποιείται προσομοίωση της διάταξης (full wave simulation) με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου HFSS (High Frequency Structure Simulator), τα αποτελέσματα της οποίας ποιοτικά επιβεβαιώνουν την αναλυτική προσέγγιση με τη θεωρία του ενεργού μέσου.

3.1 Σκέδαση από μεμονωμένη διηλεκτρική σφαίρα

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι ο προσδιορισμός του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου από μία μεμονωμένη σφαίρα, καθώς και του αναπτυσσόμενου H/M πεδίου εντός της σφαίρας. Η σφαίρα έχει ακτίνα a , αποτελείται από διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_s και θεωρείται μαγνητικά αδρανής, ενώ το περιβάλλον μέσο είναι ομογενές με ιδιότητες ϵ_h, μ_h .

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το προσπίπτον επίπεδο κύμα διαδίδεται κατά την κατεύθυνση $+z$ και είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση x , επομένως γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{-ik_0 z} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{H}_i = \frac{E_0}{\zeta_h} e^{-ik_0 z} \cdot \mathbf{y} \quad (3.1.1)$$

όπου $\zeta_h = \sqrt{\mu_h / \epsilon_h}$ και $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_h \mu_h}$ είναι αντίστοιχα η κυματική αντίσταση και η σταθερά διάδοσης στο περιβάλλον μέσο (host medium). Στην παραπάνω σχέση, όπως και σε όλες τις εκφράσεις των HM πεδίων του παρόντος κεφαλαίου της διατριβής, θεωρήθηκε χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(i\omega t)$, η οποία παραλείπεται στα επόμενα. Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι $z = r \cos \theta$. Η συνάρτηση $\psi(r, \theta) = e^{-ik_0 r \cos \theta}$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $(\nabla^2 + k_0^2)\psi(r, \theta) = 0$, επομένως επιδέχεται ανάπτυγμα σε σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις υπό τη μορφή:

$$\exp(-ik_0 r \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta) \quad (3.1.2)$$

Στην παραπάνω έκφραση λήφθηκε υπόψη ότι πρόκειται για κύμα πεπερασμένο στη θέση $r = 0$, καθώς και για $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, συνεπώς αποκλείεται η χρήση των συναρτήσεων $y_n(kr)$ και $Q_n(\cos \theta)$, οι οποίες απειρίζονται στα συγκεκριμένα σημεία, ενώ σημειώνεται και η

ανεξαρτησία από τη γωνία φ ($m = 0$). Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.1.2) με $\sin\theta \cdot P_N(\cos\theta)$ και ολοκληρώνοντας ως προς θ από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \pi$, προκύπτει

$$\int_0^\pi \exp(-ik_0 r \cos\theta) P_N(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(kr) \int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_N(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.1.3)$$

Η σχέση (3.1.3) με τη βοήθεια της σχέσης ορθογωνιότητας των πολωνύμων Legendre

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_N(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2\delta_{nN}}{2n+1} \quad (3.1.4)$$

και της σχέσης ορισμού των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel [27]

$$j_N(k_0 r) = \frac{1}{2(-i)^N} \int_0^\pi \exp(-ik_0 r \cos\theta) P_N(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (3.1.5)$$

καταλήγει στον προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών c_N

$$c_N = (-i)^N (2N+1) \quad (3.1.6)$$

οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (3.1.2) προκύπτει τελικά το ανάπτυγμα

$$\exp(-ik_0 r \cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n j_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) \quad (3.1.7)$$

Το επίπεδο προσπίπτον κύμα μπορεί να αναλυθεί σε σφαιρικές συνιστώσες καθιστώντας ευκολότερη την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στη συνέχεια. Με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\mathbf{r} = \sin\theta \cos\varphi \cdot \mathbf{x} + \sin\theta \sin\varphi \cdot \mathbf{y} + \cos\theta \cdot \mathbf{z} \quad (3.1.8)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \cos\theta \cos\varphi \cdot \mathbf{x} + \cos\theta \sin\varphi \cdot \mathbf{y} - \sin\theta \cdot \mathbf{z} \quad (3.1.9)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = -\sin\varphi \cdot \mathbf{x} + \cos\varphi \cdot \mathbf{y} \quad (3.1.10)$$

οι σφαιρικές συνιστώσες προκύπτουν

$$E_r^i = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{r} = E_0 \exp(-ik_0 r \cos\theta) \sin\theta \cos\varphi \quad (3.1.11)$$

$$E_\theta^i = \mathbf{E}^i \cdot \boldsymbol{\theta} = E_0 e^{-ik_0 r \cos\theta} \cos\theta \cos\varphi \quad (3.1.12)$$

$$E_\varphi^i = \mathbf{E}^i \cdot \boldsymbol{\varphi} = -E_0 e^{-ik_0 r \cos\theta} \sin\varphi \quad (3.1.13)$$

$$H_r^i = \mathbf{H}^i \cdot \mathbf{r} = \frac{E_0}{\zeta_h} e^{-ik_0 r \cos\theta} \sin\theta \sin\varphi \quad (3.1.14)$$

$$H_\theta^i = \mathbf{H}^i \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{E_0}{\zeta_h} e^{-ik_0 r \cos\theta} \cos\theta \sin\varphi \quad (3.1.15)$$

$$H_\varphi^i = \mathbf{H}^i \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{E_0}{\zeta_h} e^{-ik_0 r \cos\theta} \cos\varphi \quad (3.1.16)$$

Το επίπεδο κύμα προκύπτει ότι έχει μη μηδενικές αμφότερες τις ακτινικές συνιστώσες E_r^i και H_r^i , συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση κυμάτων TM^r και TE^r , τα οποία αναπαριστούνται με τα βαθμωτά δυναμικά του Hertz π_r^i και π_{mr}^i , μέσω των παρακάτω σχέσεων [27, 28]

$$E_r = \frac{\partial^2(r\pi_r)}{\partial r^2} + k^2(r\pi_r) \quad (3.1.17) \quad H_r = \frac{\partial^2(r\pi_{mr})}{\partial r^2} + k^2(r\pi_{mr}) \quad (3.1.18)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\pi_r)}{\partial r \partial \theta} - i\omega\mu \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \pi_{mr}}{\partial \varphi} \quad (3.1.19) \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\pi_{mr})}{\partial r \partial \theta} + i\omega\varepsilon \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \pi_r}{\partial \varphi} \quad (3.1.20)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial^2(r\pi_r)}{\partial r \partial \varphi} + i\omega\mu \frac{\partial \pi_{mr}}{\partial \theta} \quad (3.1.21) \quad H_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial^2(r\pi_{mr})}{\partial r \partial \varphi} - i\omega\varepsilon \frac{\partial \pi_r}{\partial \theta} \quad (3.1.22)$$

όπου $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$. Επειδή όμως οι συναρτήσεις π_r^i και π_{mr}^i ικανοποιούν τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz, επιδέχονται αναπτύγματα της μορφής

$$\pi_r^i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) [C_{mn}^{TM} \cos(m\varphi) + D_{mn}^{TM} \sin(m\varphi)] \quad (3.1.23)$$

$$\pi_{mr}^i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) [C_{mn}^{TE} \cos(m\varphi) + D_{mn}^{TE} \sin(m\varphi)] \quad (3.1.24)$$

όπου $C_{mn}^{TM}, D_{mn}^{TM}, C_{mn}^{TE}, D_{mn}^{TE}$ είναι συντελεστές ανάπτυξης που υπολογίζονται στη συνέχεια.

Μάλιστα, στα παραπάνω αναπτύγματα δεν περιλαμβάνονται οι συναρτήσεις $y_n(kr)$ και $Q_n^m(\cos\theta)$, οι οποίες απειρίζονται για $r = 0$ και $\theta = 0, \theta = \pi$ επειδή το επίπεδο κύμα (άρα και τα δυναμικά του) έχει πεπερασμένη τιμή σε κάθε σημείο του χώρου. Η ακτινική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου γράφεται στη μορφή $E_r^i = \frac{E_0}{ik_0 r} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} e^{-ik_0 r \cos\theta}$ και με

τη βοήθεια της (3.1.7)

$$E_r^i = -\frac{E_0}{k_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^{n-1} j_n(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \quad (3.1.25)$$

$$\text{αφού } \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = P_n^1(\cos\theta)$$

Λόγω όμως της σχέσης που συνδέει το E_r^i με το π_r^i λαμβάνουμε

$$E_r^i = \frac{\partial^2(r\pi_r^i)}{\partial r^2} + k_0^2(r\pi_r^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(n+1)}{r} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) [C_{mn}^{TM} \cos(m\varphi) + D_{mn}^{TE} \sin(m\varphi)] \quad (3.1.26)$$

Στο τελευταίο βήμα καταλήξαμε λόγω της σχέσης ορισμού της σφαιρικής συνάρτησης Bessel, σύμφωνα με την οποία [29]

$$r^2 \frac{d^2 j_n(k_0 r)}{dr^2} + 2r \frac{dj_n(k_0 r)}{dr} + [(k_0 r)^2 - n(n+1)] j_n(k_0 r) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 \right) [r j_n(k_0 r)] = r \frac{d^2 j_n(k_0 r)}{dr^2} + 2 \frac{dj_n(k_0 r)}{dr} + k_0^2 r j_n(k_0 r) = \frac{n(n+1)}{r} j_n(k_0 r) \quad (3.1.27)$$

Οι συντελεστές ανάπτυξης προσδιορίζονται με εξίσωση των δύο εκφράσεων για την ακτινική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.1.25) και (3.1.26) προκύπτει ότι

$$D_{mn}^{\text{TM}} = 0, \quad n(n+1)C_{1n}^{\text{TM}} = -\frac{E_0}{k_0} (-i)^{n-1} (2n+1) \quad \text{και} \quad C_{mn}^{\text{TM}} (m \neq 1) = 0$$

Τότε, οι εκφράσεις για τα βαθμωτά δυναμικά του Hertz λαμβάνουν τη μορφή

$$r\pi_r^i = -\frac{E_0}{k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{j}_n(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \quad (3.1.28)$$

$$r\pi_{mr}^i = -\frac{E_0}{\zeta_h k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{j}_n(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \quad (3.1.29)$$

όπου ορίζουμε $\hat{j}_n(k_0 r) = k_0 r j_n(k_0 r)$ (Ricatti-Bessel function).

Οι παραπάνω εκφράσεις για το προσπίπτον πεδίο χρησιμεύουν για την περιγραφή του σκεδαζόμενου και μεταδιδόμενου πεδίου στις περιοχές εκτός ($r > a$) και εντός της σφαίρας ($r < a$) αντίστοιχα. Εντελώς ανάλογα έχουμε τα αναπτύγματα

$$r\pi_r^{\text{sc}} = -\frac{E_0}{k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \quad (3.1.30)$$

$$r\pi_{mr}^{\text{sc}} = -\frac{E_0}{\zeta_h k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \quad (3.1.31)$$

$$r\pi_r^{\text{tr}} = -\frac{E_0}{k_s^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{j}_n(k_s r) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \quad (3.1.32)$$

$$r\pi_{mr}^{\text{tr}} = -\frac{E_0}{\zeta_s k_s^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \hat{j}_n(k_s r) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \quad (3.1.33)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι δείκτες sc και tr συμβολίζουν το σκεδαζόμενο (scattered) και το μεταδιδόμενο (transmitted) πεδίο αντίστοιχα, ενώ οι A_n, B_n, C_n, D_n είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης που θα προσδιοριστούν μέσω των συνθηκών συνεχείας του συνολικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας $r = a$. Σημειώνεται ότι στις σχέσεις που

δίνουν το πεδίο εκτός της σφαίρας η ακτινική εξάρτηση εκφράζεται μέσω των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel β' είδους, οι οποίες παρουσιάζουν την κατάλληλη ασυμπτωτική συμπεριφορά για ένα εξερχόμενο σφαιρικό κύμα, αφού όταν $r \rightarrow \infty$:

$$h_n^{(2)}(k_0 r) \approx -i^{n-1} \frac{\exp(-ik_0 r)}{k_0 r}. \text{ Αν είχε επιλεγεί χρονική εξάρτηση των πεδίων της μορφής}$$

$\exp(-i\omega t)$ θα επιλέγονταν συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους. Αντίθετα, το πεδίο εντός της σφαίρας εκφράζεται μέσω των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel επειδή πρέπει να παριστάνει εισερχόμενο κύμα. Επιπλέον, η σταθερά διάδοσης και η κυματική αντίσταση στο εσωτερικό της σφαίρας είναι $k_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \epsilon_0 \mu_0}$, $\zeta_s = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_s \epsilon_0}$ αντίστοιχα.

Επειδή η εύρεση των συντελεστών ανάπτυξης με εφαρμογή των συνθηκών συνεχείας του ολικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, καταφεύγουμε σε μια ισοδύναμη και ιδιαίτερα απλή διατύπωση των οριακών συνθηκών με χρήση των βαθμωτών δυναμικών ως εξής.

Η συνέχεια των εγκάρσιων συνιστωσών E_θ, E_ϕ του ολικού πεδίου εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της παραγώγου $\frac{\partial(r\pi_r)}{\partial r}$ και της ποσότητας $\mu \pi_{mr}$. Ομοίως, η συνέχεια των H_θ, H_ϕ εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της παραγώγου $\frac{\partial(r\pi_{mr})}{\partial r}$ και της ποσότητας $\epsilon \pi_r$. Συνεπώς:

- $\frac{\partial}{\partial r} [r\pi_r^i + r\pi_r^{sc}]_{r=\alpha} = \frac{\partial}{\partial r} [r\pi_r^{tr}]_{r=\alpha}$ από την οποία λόγω των σχέσεων (3.1.28), (3.1.30)

και (3.1.32) προκύπτει

$$\frac{1}{k_0} [\hat{J}'_n(k_0 \alpha) + A_n \hat{h}'_n^{(2)}(k_0 \alpha)] = \frac{1}{k_s} C_n \hat{J}'_n(k_s \alpha) \quad (3.1.34)$$

- $\mu_0 [\pi_{mr}^i + \pi_{mr}^{sc}]_{r=\alpha} = \mu_0 \pi_{mr}^{tr}(\alpha)$ από την οποία λόγω των σχέσεων (3.1.29), (3.1.31)

και (3.1.33) λαμβάνουμε

$$\frac{1}{\zeta_h k_0^2} [\hat{J}'_n(k_0 \alpha) + B_n \hat{h}'_n^{(2)}(k_0 \alpha)] = \frac{1}{\zeta_s k_s^2} D_n \hat{J}'_n(k_s \alpha) \quad (3.1.35)$$

- $\frac{\partial}{\partial r} [r\pi_{mr}^i + r\pi_{mr}^{sc}]_{r=\alpha} = \frac{\partial}{\partial r} [r\pi_{mr}^{tr}]_{r=\alpha} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\zeta_h k_0} [\hat{J}'_n(k_0 \alpha) + B_n \hat{h}'_n^{(2)}(k_0 \alpha)] = \frac{1}{\zeta_s k_s} D_n \hat{J}'_n(k_s \alpha) \quad (3.1.36)$$

- $\epsilon_0 [\pi_r^i + \pi_r^{sc}]_{r=\alpha} = \epsilon_s \pi_r^{tr}(\alpha) \Rightarrow \hat{J}'_n(k_0 \alpha) + A_n \hat{h}'_n^{(2)}(k_0 \alpha) = C_n \hat{J}'_n(k_s \alpha) \quad (3.1.37)$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3.1.34), (3.1.37) προσδιορίζεται ο συντελεστής A_n

$$A_n = \frac{k_0 \hat{j}_n(k_0 \alpha) \hat{j}'_n(k_s \alpha) - k_s \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{j}'_n(k_0 \alpha)}{k_s \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - k_0 \hat{j}'_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)} \quad (3.1.38)$$

Με αντικατάσταση της (3.1.38) στην (3.1.37) προκύπτει

$$C_n = k_s \frac{\hat{j}_n(k_0 \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - \hat{j}'_n(k_0 \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)}{k_s \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - k_0 \hat{j}'_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)} \quad (3.1.39)$$

Ομοίως, από το σύστημα των (3.1.35) και (3.1.36) προκύπτουν οι συντελεστές B_n και D_n .

$$B_n = \frac{k_0 \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{j}'_n(k_0 \alpha) - k_s \hat{j}_n(k_0 \alpha) \hat{j}'_n(k_s \alpha)}{k_s \hat{j}'_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - k_0 \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)} \quad (3.1.40)$$

$$D_n = k_s \frac{\hat{j}'_n(k_0 \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - \hat{j}_n(k_0 \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)}{k_s \hat{j}'_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha) - k_0 \hat{j}_n(k_s \alpha) \hat{h}_n^{(2)}(k_0 \alpha)} \quad (3.1.41)$$

Οι συντελεστές A_n, B_n, C_n, D_n καθορίζουν πλήρως τις συνιστώσες των πεδίων εντός και εκτός της σφαίρας και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για τη μελέτη του φαινομένου των ηλεκτρικών και μαγνητικών συντονισμών της σφαίρας. Μάλιστα, οι συντελεστές A_n, C_n περιγράφουν τα ηλεκτρικά (TM) κύματα, ενώ οι συντελεστές B_n, D_n τα μαγνητικά (TE) κύματα. Ο ακριβής προσδιορισμός των συχνοτήτων συντονισμού είναι ιδιαίτερα σημαντικός γιατί η συμπεριφορά του μεταυλικού (εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης) παρουσιάζεται σε ένα εύρος ζώνης γύρω από αυτές τις συχνότητες.

3.2 Μελέτη συντονισμών διηλεκτρικής σφαίρας

Το φαινόμενο του συντονισμού μίας διηλεκτρικής σφαίρας, όπως θα φανεί στην παρούσα ενότητα, εμφανίζεται σε συγκεκριμένες συχνότητες ως ισχυρή συμβολή από ένα ορισμένο κύμα, ηλεκτρικό ή μαγνητικό, ενώ συγχρόνως η συμβολή από τα υπόλοιπα κύματα είναι ασήμαντη. Η μελέτη των συντονισμών της σφαίρας θα πραγματοποιηθεί χωριστά για τα ηλεκτρικά (TM) και τα μαγνητικά (TE) κύματα.

– Ηλεκτρικοί συντονισμοί

Για τον προσδιορισμό των ηλεκτρικών συντονισμών, πρέπει να εξετάσουμε τη μορφή του συντελεστή σκέδασης A_n , που ορίζεται από τη σχέση (3.1.38). Ο συντελεστής A_n μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{h}_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x)$ και ορίζοντας για ευκολία στους υπολογισμούς τις αδιάστατες παραμέτρους $x_1 = k_0 a$, $x_2 = k_s a$.

$$A_n = -\frac{x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{j}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}_n(x_1) \hat{j}'_n(x_2)}{x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{j}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}_n(x_1) \hat{j}'_n(x_2) - i[x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{y}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}'_n(x_2) \hat{y}_n(x_1)]} \quad (3.2.1)$$

Ορίζουμε τη φάση α_n ως εξής [1]

$$\tan \alpha_n = \frac{x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{j}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}_n(x_1) \hat{j}'_n(x_2)}{x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{y}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}'_n(x_2) \hat{y}_n(x_1)} \quad (3.2.2)$$

οπότε προκύπτει η παρακάτω απλοποιημένη έκφραση για το συντελεστή A_n

$$A_n = -\frac{1}{1 - i \cot \alpha_n} \quad (3.2.3)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$A_n = -\frac{1}{2} (1 - e^{-2i\alpha_n}) \quad (3.2.4)$$

Θεωρώντας ότι το μήκος κύματος ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο (host medium) είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών ($\lambda_n \gg a$) προκύπτει ότι $x_1 \ll 1$, με αποτέλεσμα να είναι δυνατός ο προσεγγιστικός υπολογισμός του συντελεστή σκέδασης A_n των ηλεκτρικών κυμάτων, με τη βοήθεια των παρακάτω προσεγγιστικών σχέσεων για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann [29].

$$\hat{j}_n(x_1) \cong \frac{x_1^{n+1}}{(2n+1)!!} \quad (3.2.5)$$

$$\hat{j}'_n(x_1) = [x_1 j_n(x_1)]' = j_n(x_1) + x_1 j'_n(x_1) \cong \frac{x_1^n}{(2n+1)!!} + \frac{nx_1^n}{(2n+1)!!} = \frac{(n+1)x_1^n}{(2n+1)!!} \quad (3.2.6)$$

$$\hat{y}_n(x_1) \cong -\frac{(2n-1)!!}{x_1^n} \quad (3.2.7)$$

$$\hat{y}'_n(x_1) = y_n(x_1) + x_1 y'_n(x_1) \cong -\frac{(2n-1)!!}{x_1^{n+1}} + \frac{(n+1)(2n-1)!!}{x_1^{n+1}} = \frac{n(2n-1)!!}{x_1^{n+1}} \quad (3.2.8)$$

όπου ορίζουμε

$$\hat{z}_n(x) \triangleq x z_n(x), \quad z_n(x) = \{j_n(x), y_n(x), h_n^{(2)}(x)\} \text{ και}$$

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot n, & n: \text{περιττός} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot n, & n: \text{άρτιος} \end{cases}$$

Τότε η σχέση (3.2.2) για τη φάση των ηλεκτρικών κυμάτων γίνεται

$$\tan \alpha_n \cong \frac{x_1^{2n+1} [x_2 \hat{j}_n(x_2)(n+1) - x_1^2 \hat{j}'_n(x_2)]}{(2n+1)!!(2n-1)!! [nx_2 \hat{j}_n(x_2) + x_1^2 \hat{j}'_n(x_2)]} \quad (3.2.9)$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι για $x_1 \ll 1$ η εφαπτομένη της φάσης είναι της τάξης x_1^{2n+1} και τείνει στο μηδέν καθώς το $x_1 \rightarrow 0$, εκτός και αν μηδενιστεί ο παρονομαστής, οπότε στην περίπτωση αυτή, ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το x_1 , θα έχουμε απειρισμό της $\tan \alpha_n$ με αποτέλεσμα η φάση α_n να λαμβάνει τις τιμές $\pm \pi/2$, μεγιστοποιώντας την τιμή του μέτρου του συντελεστή σκέδασης A_n . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός** της διηλεκτρικής σφαίρας και πραγματοποιείται σε ορισμένες συχνότητες, τις οποίες και θα προσδιορίσουμε. Πράγματι, είναι

$$|A_n| = \frac{1}{2} |e^{-2i\alpha_n} - 1| = \frac{1}{2} |\cos(2\alpha_n) - 1 - i \sin(2\alpha_n)| = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\cos(2\alpha_n)} = |\sin \alpha_n| \quad (3.2.10)$$

το οποίο μεγιστοποιείται για $\alpha_n = \pm \pi/2$. Σε περίπτωση όμως που δεν έχουμε μηδενισμό του παρονομαστή της σχέσης (3.2.9), η φάση α_n τείνει στο μηδέν, αφού $x_1 \rightarrow 0$, οπότε και ο συντελεστής σκέδασης A_n τείνει στο μηδέν, καθιστώντας ασήμαντη τη συμβολή από τα υπόλοιπα κύματα.

Ο ακριβής προσδιορισμός των συχνοτήτων ηλεκτρικού συντονισμού της διηλεκτρικής σφαίρας προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης μηδενισμού του παρονομαστή της $\tan \alpha_n$

$$nx_2 \hat{j}_n(x_2) + x_1^2 \hat{j}'_n(x_2) = 0 \quad (3.2.11)$$

Σε πρώτη προσέγγιση, αφού $x_1^2 \ll 1$, οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης θα είναι κοντά στις ρίζες της εξίσωσης $j_n(x_2) = 0$, που συμβολίζονται με x_{ln}^e , οπότε οι συχνότητες συντονισμού θα δίνονται από τη σχέση

$$\omega_{ln}^e = \frac{x_{ln}^e}{\sqrt{\epsilon_s \epsilon_0 \mu_0} a} = \omega_{ln}^e(0) \quad (3.2.12)$$

όπου a η ακτίνα της σφαίρας και $l = 1, 2, 3, \dots$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ενδεικτικά ορισμένες ρίζες x_{ln}^e της εξίσωσης $j_n(x) = 0$.

x	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
l = 1	4,4931	5,7635	6,9879	8,1826	9,3558
l = 2	7,7253	9,0950	10,4171	11,7049	12,9665
l = 3	10,9041	12,3229	13,6980	15,0397	16,3547
l = 4	14,0662	15,5146	16,9236	18,3013	19,6532
l = 5	17,2208	18,6890	20,1218	21,5254	22,9046
l = 6	20,3713	21,8539	23,3043	24,7276	26,1278

Πίνακας 3.1: Ρίζες της εξίσωσης $j_n(x) = 0$ για τα ηλεκτρικά κύματα

Σε δεύτερη προσέγγιση, η συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού δίνεται από τη σχέση [1]

$$\omega_{ln}^e = \omega_{ln}^e(0)(1 + \delta) \quad (3.2.13)$$

όπου $\delta \ll 1$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.2.11) όπου $x_2 = x_{ln}^e(1 + \delta)$ υπολογίζεται η τιμή του δ . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα παρακάτω αναπτύγματα Taylor, λαμβάνοντας υπόψη ότι $j_n(x_{ln}^e) = 0$.

$$j_n(x_{ln}^e(1 + \delta)) = j_n(x_{ln}^e) + j'_n(x_{ln}^e) \cdot \delta x_{ln}^e + O(\delta^2) \cong j'_n(x_{ln}^e) \cdot \delta x_{ln}^e \quad (3.2.14)$$

$$\hat{j}'_n(x_{ln}^e(1 + \delta)) \cong \hat{j}'_n(x_{ln}^e) + \delta x_{ln}^e \cdot \hat{j}''_n(x_{ln}^e) \quad (3.2.15)$$

Λόγω όμως της παρακάτω αναδρομικής σχέσης των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel [29]

$$(n+1)j_n(x) + x j'_n(x) = x j_{n-1}(x) \quad (3.2.16)$$

και αφού $j_n(x_{ln}^e) = 0$ προκύπτει ότι

$$j'_n(x_{ln}^e) = j_{n-1}(x_{ln}^e) \quad (3.2.17)$$

Επιπλέον, εξ ορισμού είναι $\hat{j}'_n(x) = (x j_n(x))' = j_n(x) + x j'_n(x)$, η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση (3.2.17) δίνει ότι

$$\hat{j}'_n(x_{ln}^e) = x_{ln}^e j_{n-1}(x_{ln}^e) \quad (3.2.18)$$

Ομοίως έχουμε $\hat{j}_n''(x) \hat{=} (j_n(x) + x j_n'(x))' = 2j_n'(x) + x j_n''(x)$ οπότε

$$\hat{j}_n''(x_m^e) = 2j_{n-1}(x_m^e) + x_m^e j_n''(x_m^e) \quad (3.2.19)$$

Για τον υπολογισμό της $j_n''(x_m^e)$ παραγωγίζουμε την (3.2.16) και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (n+2)j_n'(x_m^e) + x_m^e j_n''(x_m^e) &= j_{n-1}(x_m^e) + x_m^e j_{n-1}'(x_m^e) \\ \stackrel{(3.2.17)}{\Rightarrow} x_m^e j_n''(x_m^e) &= x_m^e j_{n-1}'(x_m^e) - (n+1)j_{n-1}(x_m^e) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Με τη βοήθεια επιπλέον της παρακάτω αναδρομικής σχέσης [29]

$$\frac{n-1}{x} j_{n-1}(x) - j_{n-1}'(x) = j_n(x) \Rightarrow x_m^e j_{n-1}'(x_m^e) = (n-1)j_{n-1}(x_m^e) \quad (3.2.21)$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.19)-(3.2.21) προκύπτει τελικά ότι

$$\hat{j}_n''(x_m^e) = 0 \quad (3.2.22)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.17), (3.2.18) και (3.2.22) στα αναπτύγματα Taylor των (3.2.14) και (3.2.15) λαμβάνουμε

$$j_n(x_m^e(1+\delta)) \cong j_{n-1}(x_m^e) \cdot \delta x_m^e \quad (3.2.23)$$

$$\hat{j}_n'(x_m^e(1+\delta)) \cong x_m^e j_{n-1}(x_m^e) \quad (3.2.24)$$

με αποτέλεσμα η εξίσωση προσδιορισμού των συχνοτήτων ηλεκτρικού συντονισμού να διαμορφώνεται ως εξής

$$x_1^2 x_m^e j_{n-1}(x_m^e) + n \delta x_m^e [x_m^e(1+\delta)]^2 j_{n-1}(x_m^e) = 0 \quad (3.2.25)$$

Από την παραπάνω σχέση, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\delta^2 \ll 1$, προκύπτει τελικά η τιμή του δ

$$\delta = -\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_m^e} \right)^2 = -\frac{1}{n} \frac{k_0^2}{k_s^2} = -\frac{1}{n \epsilon_s} \quad (3.2.26)$$

Συνεπώς, η συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού (TM κύματα) σε δεύτερη προσέγγιση δίνεται από τη σχέση [1]

$$\omega_m^e = \omega_m^e(0) \left(1 - \frac{1}{n \epsilon_s} \right) \quad (3.2.27)$$

όπου η $\omega_m^e(0)$ υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.12).

- Μαγνητικοί συντονισμοί

Με εντελώς παρόμοια διαδικασία ο προσδιορισμός των συχνοτήτων μαγνητικού συντονισμού της σφαίρας προκύπτει από τη μελέτη της έκφρασης για το συντελεστή σκέδασης B_n . Σύμφωνα με τη σχέση (3.1.40), ο συντελεστής B_n γράφεται στη μορφή

$$B_n = -\frac{1}{1 - i \cot \beta_n} = -\frac{1}{2} (1 - e^{-2i\beta_n}) \quad (3.2.28)$$

όπου η φάση β_n ορίζεται από τη σχέση

$$\tan \beta_n = \frac{x_1 \hat{j}_n(x_2) \hat{j}'_n(x_1) - x_2 \hat{j}_n(x_1) \hat{j}'_n(x_2)}{x_1 \hat{j}_n(x_2) \hat{y}'_n(x_1) - x_2 \hat{j}'_n(x_2) \hat{y}_n(x_1)} \quad (3.2.29)$$

Για $x_1 \ll 1$ έχουμε ότι

$$\tan \beta_n \cong \frac{x_1^{2n+1} \hat{j}_n(x_2) (n+1) - x_2 \hat{j}'_n(x_2)}{(2n+1)!!(2n-1)!! \quad n \hat{j}_n(x_2) + x_2 \hat{j}'_n(x_2)} \quad (3.2.30)$$

Σε περίπτωση μηδενισμού του παρονομαστή, ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το x_1 , θα έχουμε απειρισμό της $\tan \beta_n$, με αποτέλεσμα η φάση β_n να λαμβάνει τις τιμές $\pm \pi/2$, μεγιστοποιώντας την τιμή του μέτρου του συντελεστή σκέδασης B_n (συντονισμός για τα TE – μαγνητικά κύματα). Σε περίπτωση όμως που δεν έχουμε μηδενισμό του παρονομαστή της σχέσης (3.2.30), η φάση β_n τείνει στο μηδέν, αφού $x_1 \rightarrow 0$, οπότε και ο συντελεστής σκέδασης B_n τείνει στο μηδέν, καθιστώντας ασήμαντη τη συμβολή από τα υπόλοιπα κύματα.

Οι συχνότητες μαγνητικών συντονισμών προκύπτουν από το μηδενισμό του παρονομαστή της σχέσης (3.2.30) ως ρίζες της εξίσωσης

$$n \hat{j}_n(x_2) + x_2 \hat{j}'_n(x_2) = 0 \quad (3.2.31)$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(n+1) j_n(x_2) + x_2 j'_n(x_2) = 0 \quad (3.2.32)$$

Με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης (3.2.16) η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής

$$x_2 j_{n-1}(x_2) = 0 \quad (3.2.33)$$

Επομένως, οι συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών (TE) κυμάτων προκύπτουν τελικά από τη λύση της εξίσωσης $j_{n-1}(x_2) = 0$ και υπολογίζονται από τη σχέση

$$\omega_{l,n}^m = \frac{x_{l,n-1}^m}{\sqrt{\epsilon_s \epsilon_0 \mu_0} a} \quad (3.2.34)$$

όπου a η ακτίνα της σφαίρας και $l = 1, 2, 3, \dots$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ενδεικτικά ορισμένες ρίζες $x_{l,n-1}^m$ της εξίσωσης $j_{n-1}(x) = 0$.

x	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
l = 1	3,1416	4,4931	5,7635	6,9879	8,1826
l = 2	6,2832	7,7253	9,0950	10,4171	11,7049
l = 3	9,4248	10,9041	12,3229	13,6980	15,0397
l = 4	12,5664	14,0662	15,5146	16,9236	18,3013
l = 5	15,7080	17,2208	18,6890	20,1218	21,5254
l = 6	18,8496	20,3713	21,8539	23,3043	24,7276

Πίνακας 3.2: Ρίζες της εξίσωσης $j_{n-1}(x) = 0$ για τα μαγνητικά κύματα

Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες συντονισμού ηλεκτρικών και μαγνητικών κυμάτων συνδέονται με τη σχέση

$$\omega_l^e \lesssim \omega_{l+1}^m \quad (3.2.35)$$

όπου με το σύμβολο \lesssim εννοούμε ότι οι συχνότητες βρίσκονται στην πραγματικότητα πολύ κοντά η μία στην άλλη. Όπως προκύπτει από τους πίνακες 1 και 2, η σειρά των διαφόρων συντονισμών είναι

$$\omega_{11}^m < \omega_{11}^e \lesssim \omega_{12}^m < \omega_{12}^e \lesssim \omega_{13}^m < \omega_{21}^m < \omega_{13}^e \lesssim \omega_{14}^m < \omega_{21}^e \lesssim \omega_{22}^m < \omega_{14}^e \lesssim \omega_{14}^m \quad (3.2.36)$$

Συνεπώς, η χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού εμφανίζεται στο μαγνητικό ρυθμό με $(l,n) = (1,1)$ (TE₁₁₁), ενώ η αμέσως μεγαλύτερη αντιστοιχεί στον ηλεκτρικό ρυθμό TM₁₁₁. Υπάρχει μάλιστα σαφής διαχωρισμός μεταξύ των δύο συχνοτήτων, σε αντίθεση με τους ανώτερης τάξης TE και TM ρυθμούς, των οποίων οι συχνότητες συντονισμού βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.35). Γενικά παρατηρούμε ότι μόνο οι μαγνητικοί ρυθμοί ω_l^m είναι απομακρυσμένοι από ηλεκτρικούς συντονισμούς.

Για $n \neq 1$, η απόσταση στο πεδίο συχνότητας των γειτονικών ηλεκτρικών και μαγνητικών ρυθμών είναι [1]

$$\omega_{l_{n+1}}^m - \omega_{l_n}^e = \omega_{l_{n+1}}^m - \omega_{l_n}^e(0) + \frac{\omega_{l_n}^e(0)}{n\epsilon_s}$$

Επειδή όμως $\omega_{l_n}^e(0) = \omega_{l_{n+1}}^m$ προκύπτει ότι

$$\frac{\omega_{l_{n+1}}^m - \omega_{l_n}^e}{\omega_{l_{n+1}}^m} = \frac{1}{n\epsilon_s} \quad (3.2.37)$$

Τα αποτελέσματα της μελέτης του φαινομένου των συντονισμών μίας μεμονωμένης διηλεκτρικής σφαίρας, όπως θα φανεί στην επόμενη ενότητα, χρησιμεύουν στον προσδιορισμό της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας και της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς ενός συνόλου διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες συνθέτουν το υπό σχεδίαση μεταυλικό μέσο.

3.3 Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός συνόλου σφαιρών

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων του προτεινόμενου μεταλλικού μέσου, το οποίο αποτελείται από ένα κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών. Οι παράμετροι σκέδασης από μία μεμονωμένη σφαίρα (σκέδαση Mie), που προσδιορίστηκαν στην ενότητα 3.1, είναι δυνατό να συσχετιστούν με την ενεργό διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών, σύμφωνα με τη θεωρία του ενεργού μέσου (effective medium theory). Ένα μέσο διάδοσης χαρακτηρίζεται ως ενεργό όταν ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεν “αντιλαμβάνεται” τις ασυνέχειες του μέσου και οι μακροσκοπικές του ιδιότητες περιγράφονται από τις ιδιότητες των “δομικών στοιχείων” που το αποτελούν. Προκειμένου ωστόσο η υπό μελέτη δομή του μεταλλικού να συμπεριφέρεται ως ένα ενεργό μέσο, ο κύριος περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται είναι ο εξής: το μήκος κύματος ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο (host medium) πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών και τη σταθερά του πλέγματος, έτσι ώστε το προσπίπτον Η/Μ κύμα να μην αντιλαμβάνεται τις ασυνέχειες της συνολικής δομής.

Η μελέτη της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας μ_r^{eff} του κυβικού πλέγματος διηλεκτρικών σφαιρών θα επικεντρωθεί γύρω από τις συχνότητες μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών, αφού σε ένα εύρος ζώνης γύρω από αυτές τις συχνότητες αναμένονται απότομες αυξομειώσεις στο πλάτος των συντελεστών σκέδασης μαγνητικών κυμάτων B_n , όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.2. Η θεωρία του ενεργού μέσου συνδέει τους εν λόγω συντελεστές σκέδασης με την ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών, με αποτέλεσμα το φαινόμενο των μαγνητικών συντονισμών να επιδρά άμεσα στις τιμές του μεγέθους μ_r^{eff} . Δεδομένου ότι ισχύει η υπόθεση του ενεργού μέσου, η κυριότερη συνεισφορά στο σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο πηγάζει από τον πρώτο μαγνητικό συντονισμό (ρυθμός TE_{111}), γεγονός που μας επιτρέπει ισοδύναμα να θεωρήσουμε μόνο τον πρώτο όρο (με $n = 1$) στο ανάπτυγμα της έκφρασης του σκεδαζόμενου μαγνητικού πεδίου, απλοποιώντας τους υπολογισμούς. Γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού οι σφαίρες συμπεριφέρονται ουσιαστικά ως μαγνητικά δίπολα. Ομοίως, για τον προσδιορισμό της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r^{eff} του συστήματος των σφαιρών, αρκεί να θεωρήσουμε μόνο τον πρώτο όρο του ανάπτυγματος της έκφρασης του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου, ενώ στην περίπτωση αυτή οι σφαίρες ισοδυναμούν με ηλεκτρικά δίπολα.

Το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο προκύπτει από την υπέρθεση TE και TM ρυθμών συναρτήσεων των βαθμωτών δυναμικών του Hertz σύμφωνα με τις σχέσεις (3.1.18), (3.1.20) και (3.1.22). Οι συνιστώσες του γράφονται στη μορφή αναπτυγμάτων

$$H_r^{sc} = -H_0 \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} B_n P_n^1(\cos\theta) [\hat{h}_n^{(2)'}(k_0 r) + \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r)] \right\} \quad (3.3.1)$$

$$H_\theta^{sc} = \frac{H_0 \sin \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ -B_n \hat{h}_n^{(2)'}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{iA_n}{\sin\theta} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \right\} \quad (3.3.2)$$

$$H_\varphi^{sc} = \frac{H_0 \cos \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ iA_n \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} - \frac{B_n}{\sin\theta} \hat{h}_n^{(2)'}(k_0 r) P_n^1(\cos\theta) \right\} \quad (3.3.3)$$

Δεδομένου όμως ότι κινούμαστε γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού, η οποία μάλιστα απέχει αρκετά από την αμέσως επόμενη συχνότητα του ηλεκτρικού συντονισμού (σχέση 3.2.36), οι συντελεστές A_n είναι ουσιαστικά αμελητέοι και μπορούν να αγνοηθούν, ενώ παράλληλα η υπόθεση του ενεργού μέσου διάδοσης μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μόνο τον κατώτερο μαγνητικό ρυθμό με $n = 1$ στα παραπάνω αναπτύγματα, που απλοποιούνται ως εξής

$$H_r^{sc} = -\frac{3}{2} B_1 H_0 \sin \varphi P_1^1(\cos\theta) [\hat{h}_1^{(2)'}(k_0 r) + \hat{h}_1^{(2)}(k_0 r)] \quad (3.3.4)$$

$$H_\theta^{sc} = -\frac{3}{2} B_1 H_0 \sin \varphi \frac{\hat{h}_1^{(2)'}(k_0 r)}{k_0 r} \frac{dP_1^1(\cos\theta)}{d\theta} \quad (3.3.5)$$

$$H_\varphi^{sc} = -\frac{3}{2} B_1 H_0 \cos \varphi \frac{\hat{h}_1^{(2)'}(k_0 r)}{k_0 r \sin\theta} P_1^1(\cos\theta) \quad (3.3.6)$$

Από τον ορισμό όμως των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre και της σφαιρικής συνάρτησης Hankel δευτέρου είδους έχουμε [28,29]

$$P_1^1(\cos\theta) = \frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta \quad (3.3.7)$$

$$h_1^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{x} \left(-1 + \frac{i}{x} \right) \quad (3.3.8) \quad h_1^{(2)'}(x) = -\frac{e^{-ix}}{x^2} \left[-2 + i \left(\frac{2}{x} - x \right) \right] \quad (3.3.9)$$

$$\hat{h}_1^{(2)}(x) \triangleq \frac{d}{dx} [x h_1^{(2)}(x)] = h_1^{(2)}(x) + x h_1^{(2)'}(x) = \frac{e^{-ix}}{x} \left[1 - i \left(\frac{1}{x} - x \right) \right] \quad (3.3.10)$$

$$\hat{h}_1^{(2)'}(x) = e^{-ix} \left[1 - \frac{2}{x^2} + \frac{i}{x} \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) \right] \quad (3.3.11)$$

Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{H}_r^{\text{sc}} = 3i \mathbf{B}_1 \mathbf{H}_0 \sin \varphi \sin \theta \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0^3 r^2} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \quad (3.3.12)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{\text{sc}} = -\frac{3i \mathbf{B}_1 \mathbf{H}_0}{2 k_0^3} \sin \varphi \cos \theta \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 - k_0^2 r^2 + ik_0 r) \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{H}_\varphi^{\text{sc}} = -\frac{3i \mathbf{B}_1 \mathbf{H}_0}{2 k_0^3} \cos \varphi \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 - k_0^2 r^2 + ik_0 r) \quad (3.3.14)$$

Επειδή γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού οι σφαίρες ισοδυναμούν με μαγνητικά δίπολα, η παραπάνω έκφραση πρέπει να ταυτίζεται με την αντίστοιχη σχέση που δίνει το μαγνητικό πεδίο ακτινοβολίας ενός μαγνητικού διπόλου. Η μαγνητική διπολική ροπή συνδέεται με το συντελεστή μαγνητικής πολωσιμότητας α_m σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}_i(z=0) \quad (3.3.15)$$

Μάλιστα, επειδή το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής $\mathbf{H}_i = H_0 e^{-ik_0 z} \hat{\mathbf{y}}$, η μαγνητική διπολική ροπή προκύπτει

$$\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad m_0 = \alpha_m H_0 \quad (3.3.16)$$

Για τον προσδιορισμό του μαγνητικού πεδίου ακτινοβολίας ενός μαγνητικού διπόλου τοποθετημένου στην αρχή των αξόνων και προσανατολισμένου κατά τον άξονα y , το μαγνητικό δίπολο υποκαθίσταται από ισοδύναμο ρεύμα \mathbf{I} κατά μήκος ενός κυκλικού βρόχου πολύ μικρής ακτίνας a , που βρίσκεται στο επίπεδο xz . Τότε

$$m_0 = \mathbf{I} \cdot \pi a^2, \quad a \rightarrow 0 \quad (3.3.17)$$

Το μαγνητικό πεδίο του διπόλου προσδιορίζεται μέσω του διανυσματικού δυναμικού σύμφωνα με τη γνωστή σχέση

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3.18)$$

Το διανυσματικό δυναμικό που δημιουργεί το μαγνητικό δίπολο στην αρχή των αξόνων στο τυχαίο σημείο του χώρου με συντεταγμένες (r, θ, φ) δίνεται από τη σχέση [30]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{I} a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{e^{-ik_0 R}}{R} (-\hat{\mathbf{z}} \sin \theta' + \hat{\mathbf{x}} \cos \theta') \quad (3.3.19)$$

όπου $R = \sqrt{(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2}$ η απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης (x, y, z) από το σημείο του κυκλικού βρόχου $(x', 0, z')$ που βρίσκεται επί του επιπέδου xz .

Σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι: $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Εξάλλου, στο επίπεδο xz είναι $r' = \alpha$ και $\varphi' = 0$, άρα $x' = \alpha \sin \theta'$, $z' = \alpha \cos \theta'$. Τότε

$$R = \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2\alpha r(\sin \theta \cos \varphi \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta')} \quad (3.3.20)$$

και επειδή $r \gg \alpha$ λαμβάνουμε ότι

$$R \cong r \left[1 - \frac{2\alpha}{r} (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \right]^{1/2} \cong r - \alpha (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \quad (3.3.21)$$

Επιπλέον, ο κυκλικός βρόχος είναι ηλεκτρικά μικρός, δηλαδή ισχύει ότι $k_0 \alpha \ll 1$, οπότε έχουμε διαδοχικά [30]

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} &\cong \frac{e^{-ik_0 r} [1 + ik_0 \alpha (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta')]}{r} \left[1 - \frac{2\alpha}{r} (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \right]^{-1/2} \\ &\cong \frac{e^{-ik_0 r}}{r} [1 + ik_0 \alpha (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta')] \left[1 + \frac{\alpha}{r} (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \right] \\ &\cong \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left[1 + \alpha \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) (\cos \varphi \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta') \right] \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3.3.19) λαμβάνουμε το διανυσματικό δυναμικό

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \alpha^2}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}} \cos \varphi \sin \theta) \quad (3.3.23)$$

όπου έγινε χρήση των βασικών σχέσεων

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta' d\theta' = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta' d\theta' = \pi \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} \cos \theta' d\theta' = \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' = \int_0^{2\pi} \sin \theta' \cos \theta' d\theta' = 0 \quad (3.3.24)$$

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού προκύπτουν

$$\begin{aligned} A_r &= \cos \varphi \sin \theta \cdot A_x + \cos \theta \cdot A_z = \\ &= \frac{\mu_0 I \alpha^2}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \frac{\mu_0 I \alpha^2}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned} A_\theta &= \cos \varphi \cos \theta \cdot A_x - \sin \theta \cdot A_z = \\ &= \frac{\mu_0 I \alpha^2}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) (\cos \varphi \cos^2 \theta + \cos \varphi \sin^2 \theta) = \frac{\mu_0 I \alpha^2 \cos \varphi}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$A_\varphi = -\sin \varphi \cdot A_x = -\frac{\mu_0 I \alpha^2 \sin \varphi \cos \theta}{4} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \quad (3.3.27)$$

Επομένως οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του διπόλου προκύπτουν εύκολα με εφαρμογή της σχέσης (3.3.18)

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = \frac{m_0 \sin \varphi \sin \theta}{2\pi r^2} e^{-ik_0 r} \left(ik_0 + \frac{1}{r} \right) \quad (3.3.28)$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = -\frac{m_0 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi r^3} e^{-ik_0 r} (1 + ik_0 r - k_0^2 r^2) \quad (3.3.29)$$

$$\mathbf{H}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = -\frac{m_0 \cos \varphi}{4\pi r^3} e^{-ik_0 r} (1 - k_0^2 r^2 + ik_0 r) \quad (3.3.30)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις πρέπει να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες που περιγράφουν το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο (σχέσεις 3.3.12-3.3.14). Με εξίσωση των αντίστοιχων συνιστωσών λαμβάνουμε

$$-\frac{3i}{2} \frac{B_1 H_0}{k_0^3} \sin \varphi \cos \theta \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 - k_0^2 r^2 + ik_0 r) = -\frac{m_0 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 - k_0^2 r^2 + ik_0 r) \quad (3.3.31)$$

όπου $m_0 = \alpha_m H_0$ η μαγνητική διπολική ροπή. Συνεπώς, ο συντελεστής μαγνητικής πολωσιμότητας του διπόλου συνδέεται με το συντελεστή σκέδασης B_1 των μαγνητικών κυμάτων σύμφωνα με τη σχέση

$$\alpha_m = \frac{6\pi i}{k_0^3} B_1 \quad (3.3.32)$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να συσχετίσουμε την ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του κυβικού πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών με το συντελεστή μαγνητικής πολωσιμότητας της μεμονωμένης σφαίρας ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Η μαγνήτιση του συνολικού μέσου (πλέγμα σφαιρών) δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_0 \quad (3.3.34)$$

όπου χ_m η μαγνητική επιδεκτικότητα του μέσου και \mathbf{H}_0 το μέσο μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο. Σημειώνεται ότι το μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο χαρακτηρίζει συνολικά το μέσο διάδοσης και διαφέρει από το μαγνητικό πεδίο που επιδρά σε κάθε μεμονωμένη σφαίρα. Το τελευταίο συνίσταται από το μέσο μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_0 , καθώς και από το τοπικής κλίμακας μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_{loc} (local field) που δημιουργείται από τη μαγνήτιση των γειτονικών σφαιρών, οι οποίες συμπεριφέρονται ως μαγνητικά δίπολα. Το τοπικό μαγνητικό πεδίο με τη σειρά του μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο όρων [27]

$$\mathbf{H}_{loc} = \mathbf{H}_{near} - \mathbf{H}_M \quad (3.3.35)$$

όπου το \mathbf{H}_{near} παριστάνει την πραγματική συνεισφορά των γειτονικών σφαιρών-διπόλων και το \mathbf{H}_M προκαλείται από τη μαγνήτιση του συνολικού μέσου, που θεωρείται ομοιόμορφη. Ουσιαστικά δηλαδή το τοπικό πεδίο που εφαρμόζεται σε μία μεμονωμένη σφαίρα είναι απαλλαγμένο από τη μακροσκοπική συνεισφορά των γειτονικών της μαγνητικών διπόλων.

Για τον προσδιορισμό του πεδίου \mathbf{H}_M θεωρούμε μια νοητή σφαίρα ακτίνας R που περικλείει στο εσωτερικό της όλες τις σφαίρες-δίπολα του εξεταζόμενου μέσου. Η σφαίρα αυτή θεωρείται ότι αποτελεί το όριο ανάμεσα στο μακροσκοπικό και μικροσκοπικό περιβάλλον του μέσου και έχει όγκο τέτοιο, που η μαγνήτιση στο εσωτερικό της να μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά σταθερή. Αν επομένως υποθέσουμε ότι η σφαίρα είναι ομοιόμορφα μαγνητισμένη με $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$, τότε στην επιφάνειά της επάγεται “μαγνητικό” φορτίο με πυκνότητα $\sigma_M = \mu_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M} = \mu_0 M_0 \cos\theta$. Ο προσδιορισμός του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H}_M γίνεται μέσω της έννοιας του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace σε κάθε σημείο του χώρου (αφού $\rho_M = 0$), δηλαδή

$$\nabla^2 \varphi_M = 0 \quad (3.3.36)$$

Τότε το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό γράφεται στη μορφή

$$\varphi_M(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), & r < R \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), & r \geq R \end{cases} \quad (3.3.37)$$

$$(3.3.38)$$

Επιπλέον πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της σφαίρας, μέσω των οποίων προσδιορίζονται οι άγνωστοι συντελεστές A_n και B_n .

$$\varphi_M(r = R^+) = \varphi_M(r = R^-) \quad (3.3.39)$$

$$\frac{\partial \varphi_M}{\partial r}(r = R^+) - \frac{\partial \varphi_M}{\partial r}(r = R^-) = -\frac{\sigma_M}{\mu_0} \quad (3.3.40)$$

Από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών προκύπτουν οι σχέσεις

$$A_n \alpha^n = B_n \alpha^{-(n+1)} \quad (3.3.41)$$

$$-n A_n \alpha^{n-1} P_n(\cos\theta) - B_n (n+1) \alpha^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) = -M_0 \cos\theta \quad (3.3.42)$$

Από τον ορισμό όμως των πολυωνύμων Legendre προκύπτει ότι $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, επομένως για τους συντελεστές A_n, B_n λαμβάνουμε τελικά

$$A_1 = \frac{M_0}{3} \quad (3.3.43)$$

$$B_1 = \frac{M_0}{3} R^3 \quad (3.3.44)$$

ενώ $A_n = B_n = 0, n \neq 1$. Συνεπώς, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό είναι της μορφής

$$\varphi_M(r, \theta) = \begin{cases} \frac{M_0}{3} r \cos \theta, & r < R \\ \frac{M_0 R^3}{3r^2} \cos \theta, & r \geq R \end{cases} \quad (3.3.45)$$

$$\quad (3.3.46)$$

Συνεπώς, το μαγνητικό πεδίο εντός της σφαίρας ακτίνας R προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}_M = -\nabla \varphi_M \quad (3.3.47)$$

από την οποία προκύπτει

$$\mathbf{H}_M = -\frac{M_0}{3} \cos \theta \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{M_0}{3} \sin \theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.3.48)$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι

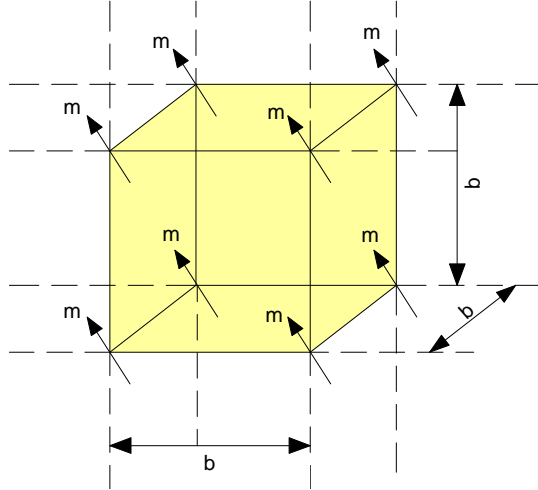
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_M &= (\sin \theta \cos \varphi H_r + \cos \theta \cos \varphi H_\theta) \cdot \hat{\mathbf{x}} + (\sin \theta \sin \varphi H_r + \sin \theta \cos \varphi H_\theta) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ &+ (H_r \cos \theta - H_\theta \sin \theta) \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{M_0}{3} \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

Επομένως, το μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται στο εσωτερικό των σφαιρών-διπόλων λόγω της ομοιόμορφης μαγνήτισης του μέσου διάδοσης είναι

$$\mathbf{H}_M = -\frac{\mathbf{M}}{3} \quad (3.3.50)$$

Το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_{near} που εφαρμόζεται σε μία μεμονωμένη σφαίρα λόγω των γειτονικών σφαιρών προκύπτει από την υπέρθεση των πεδίων όλων των μαγνητικών διπόλων. Οι σφαίρες-δίπολα βρίσκονται διατεταγμένες σε ένα κυβικό πλέγμα και εμφανίζουν την ίδια μαγνητική διπολική ροπή \mathbf{m} (Σχήμα 3.1). Οι θέσεις των διπόλων δίνονται από τις συντεταγμένες \mathbf{r}_{ijk} ($i\mathbf{b}, j\mathbf{b}, k\mathbf{b}$), όπου b η σταθερά του πλέγματος, ενώ οι δείκτες i, j, k λαμβάνουν εξίσου θετικές και αρνητικές τιμές. Θεωρώντας ότι η μεμονωμένη σφαίρα βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, για το κοντινό μαγνητικό πεδίο ισχύει η έκφραση [27]

$$\mathbf{H}_{\text{near}} = \sum_{i,j,k} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{ijk}) \mathbf{r}_{ijk} - r_{ijk}^2 \mathbf{m}}{4\pi r_{ijk}^5} \quad (3.3.51)$$



Σχήμα 3.1: Μαγνητικά δίπολα σε απλό κυβικό πλέγμα

Η x -συνιστώσα του πεδίου για παράδειγμα γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{H}_x^{\text{near}} = \sum_{i,j,k} \frac{3(i^2 \mathbf{m}_x + i j \mathbf{m}_y + i k \mathbf{m}_z) - (i^2 + j^2 + k^2) \mathbf{m}_x}{4\pi b^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (3.3.52)$$

Λόγω κυβικής συμμετρίας της διάταξης των γειτονικών διπόλων, οι δείκτες i, j, k λαμβάνουν εξίσου θετικές και αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα οι όροι του αθροίσματος που περιέχουν τις ποσότητες $i j \mathbf{m}_y$ και $i k \mathbf{m}_z$ να μηδενίζονται. Επίσης λόγω συμμετρίας

$$\sum_{i,j,k} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (3.3.53)$$

επομένως από τη σχέση (3.3.52) προκύπτει ότι $\mathbf{H}_x^{\text{near}} = 0$. Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι $\mathbf{H}_y^{\text{near}} = \mathbf{H}_z^{\text{near}} = 0$, ώστε τελικά το “κοντινό” μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}_{\text{near}} = 0$ για ένα κυβικό πλέγμα διπόλων.

Συνεπώς, το τοπικής κλίμακας μαγνητικό πεδίο που ορίστηκε στην (3.3.35) είναι

$$\mathbf{H}_{\text{loc}} = \frac{\mathbf{M}}{3} \quad (3.3.54)$$

οπότε το συνολικό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται σε κάθε μεμονωμένη σφαίρα είναι ίσο με $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{loc}}$. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μαγνήτιση του συνολικού μέσου διάδοσης, που αποτελείται από N μαγνητικά δίπολα ανά μονάδα όγκου, να δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{M} = N \alpha_m (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{loc}}) \quad (3.3.55)$$

όπου α_m ο συντελεστής μαγνητικής πολωσιμότητας της μεμονωμένης σφαίρας. Στην περίπτωση μας η πυκνότητα των μαγνητικών διπόλων είναι $N = 1/b^3$, όπου b η σταθερά του κυβικού πλέγματος. Με αντικατάσταση της σχέσης (3.3.54) στην (3.3.55) προκύπτει

$$\mathbf{M} \left(1 - \frac{N\alpha_m}{3} \right) = N\alpha_m \mathbf{H}_0 \quad (3.3.56)$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την (3.3.34) καταλήγει στον προσδιορισμό της μαγνητικής επιδεκτικότητας του μέσου διάδοσης

$$\chi_m = \frac{3N\alpha_m}{3 - N\alpha_m} \quad (3.3.57)$$

Εξάλλου, από τη σχέση ορισμού της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας έχουμε ότι

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (3.3.58)$$

από όπου με αντικατάσταση από την (3.3.57) προσδιορίζεται ο συντελεστής μαγνητικής πολωσιμότητας συναρτήσει της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας του μέσου

$$\alpha_m = \frac{3}{N} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \quad (3.3.59)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με τη σχέση (3.3.32), η οποία δίνει το συντελεστή μαγνητικής πολωσιμότητας συναρτήσει του συντελεστή σκέδασης των μαγνητικών (TE) κυμάτων, καταλήγουμε στη σχέση που συνδέει την ενεργό σχετική μαγνητική διαπερατότητα του κυβικού πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών με το συντελεστή σκέδασης B_1 από μία μεμονωμένη σφαίρα.

$$\mu_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N B_1}{k_0^3 - 2\pi i N B_1} \quad (3.3.60)$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε με βάση τη θεωρία του ενεργού μέσου, που συσχετίζει τις μακροσκοπικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης (όπως η μ_r^{eff}) με τις ιδιότητες σκέδασης (B_1) των δομικών μονάδων που αποτελούν το σύνθετο μέσο.

3.4 Ενεργός διηλεκτρική επιτρεπτότητα ενός συνόλου σφαιρών

Με διαδικασία ανάλογη εκείνης που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτει η σχέση που συνδέει την (ενεργό) σχετική διηλεκτρική σταθερά του συνόλου των σφαιρών με το συντελεστή σκέδασης A_1 των ηλεκτρικών κυμάτων από μία μεμονωμένη σφαίρα. Όπως και στην ανάλυση που προηγήθηκε, η κυριότερη συνεισφορά στο σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο πηγάζει από τον πρώτο ηλεκτρικό συντονισμό (ρυθμός TM_{111}), γεγονός που μας επιτρέπει ισοδύναμα να θεωρήσουμε μόνο τον πρώτο όρο (με $n = 1$) στο ανάπτυγμα της έκφρασης του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Γύρω από τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού οι σφαίρες συμπεριφέρονται ουσιαστικά ως ηλεκτρικά δίπολα. Οι συνιστώσες του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου για τον πρώτο ηλεκτρικό συντονισμό ($n = 1$) δίνονται από τις σχέσεις

$$E_r^{sc} = -\frac{3}{2} E_0 A_1 P_1^1(\cos\theta) \cos\varphi [\hat{h}_1''(k_0 r) + \hat{h}_1(k_0 r)] = 3i E_0 A_1 \sin\theta \cos\varphi \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0^3 r^3} (1 + ik_0 r) \quad (3.4.1)$$

$$E_\theta^{sc} = -\frac{3A_1}{2} \frac{E_0 \cos\varphi}{k_0 r} \hat{h}_1^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_1^1(\cos\theta)}{d\theta} = -\frac{3iA_1}{2} \frac{E_0 \cos\varphi}{k_0^3 r^3} \cos\theta e^{-ik_0 r} (ik_0 r + 1 - k_0^2 r^2) \quad (3.4.2)$$

$$E_\varphi^{sc} = \frac{3A_1 E_0 \sin\varphi}{2k_0 r \sin\theta} \hat{h}_1^{(2)}(k_0 r) P_1^1(\cos\theta) = \frac{3i}{2} E_0 A_1 \sin\varphi \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0^3 r^3} (ik_0 r + 1 - k_0^2 r^2) \quad (3.4.3)$$

όπου έγινε χρήση των (3.3.7-3.3.11). Οι σχέσεις (3.4.1-3.4.3) πρέπει να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου ακτινοβολίας ενός ισοδύναμου ηλεκτρικού διπόλου, το οποίο είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και προσανατολισμένο κατά τον άξονα x (αφού το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι προσανατολισμένο κατά τον ίδιο άξονα). Το ισοδύναμο ηλεκτρικό δίπολο έχει διπολική ροπή που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha_e \mathbf{E}_0 \quad (3.4.4)$$

όπου α_e ο συντελεστής ηλεκτρικής πολωσιμότητας. Το ρεύμα του διπόλου, που προκαλείται λόγω αρμονικής ταλάντωσης των ηλεκτρικών φορτίων που το αποτελούν, δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{I} = \frac{i\omega \mathbf{p}}{L} \quad (3.4.5)$$

όπου L το μήκος του διπόλου. Το διανυσματικό δυναμικό που παράγεται από το ηλεκτρικό δίπολο, με βάση και τις σχέσεις (3.4.4) και (3.4.5) γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{I} L}{4\pi r} e^{-ik_0 r} \cdot \mathbf{x} = \frac{ik^2 E_0}{4\pi\omega r} \alpha_e e^{-ik_0 r} \cdot \mathbf{x} \quad (3.4.6)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό προκύπτει από τη συνθήκη Lorentz [30]

$$\Phi = \frac{i\omega}{k_0^2} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{i\omega}{k_0^2} \frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{E_0 \alpha_e}{4\pi} \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) = \frac{E_0 \alpha_e}{4\pi r^2} \sin\theta \cos\varphi (1 + ik_0 r) e^{-ik_0 r} \quad (3.4.7)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου προσδιορίζεται επομένως από τη σχέση

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - i\omega\mathbf{A} \quad (3.4.8)$$

οπότε οι συνιστώσες του στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων προκύπτουν τελικά

$$E_r = \frac{E_0}{2\pi} \sin\theta \cos\varphi \alpha_e \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 + ik_0 r) \quad (3.4.9)$$

$$E_\theta = -\frac{E_0}{4\pi} \cos\theta \cos\varphi \alpha_e \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 + ik_0 r - k_0^2 r^2) \quad (3.4.10)$$

$$E_\varphi = \frac{E_0}{4\pi} \sin\varphi \alpha_e \frac{e^{-ik_0 r}}{r^3} (1 + ik_0 r - k_0^2 r^2) \quad (3.4.11)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις πρέπει να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες που περιγράφουν το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο (σχέσεις 3.4.1-3.4.3). Με εξίσωση των αντίστοιχων συνιστωσών λαμβάνουμε ότι ο συντελεστής ηλεκτρικής πολωσιμότητας του διπόλου συνδέεται με το συντελεστή σκέδασης A_1 των ηλεκτρικών (TM) κυμάτων σύμφωνα με τη σχέση

$$\alpha_e = \frac{6\pi i A_1}{k_0^3} \quad (3.4.12)$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να συσχετίσουμε την ενεργό διηλεκτρική σταθερά του κυβικού πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών με το συντελεστή ηλεκτρικής πολωσιμότητας της μεμονωμένης σφαίρας ακολουθούμε διαδικασία ανάλογη με της προηγούμενης ενότητας.

Η πόλωση του συνολικού μέσου δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0 \quad (3.4.13)$$

όπου χ_e η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του μέσου και \mathbf{E}_0 το μέσο μακροσκοπικό ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται σε κάθε μεμονωμένη σφαίρα συνίσταται από το μέσο μακροσκοπικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_0 , καθώς και από το τοπικής κλίμακας ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_{loc} που δημιουργείται από την πόλωση των γειτονικών σφαιρών, οι οποίες συμπεριφέρονται ως ηλεκτρικά δίπολα. Το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο γράφεται ως διαφορά δύο όρων

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{near} - \mathbf{E}_P \quad (3.4.14)$$

όπου το \mathbf{E}_{near} παριστάνει την πραγματική συνεισφορά των γειτονικών σφαιρών-διπόλων και το \mathbf{E}_p προκαλείται από την ομοιόμορφη πόλωση του συνολικού μέσου. Ουσιαστικά δηλαδή το τοπικό πεδίο που εφαρμόζεται σε μία μεμονωμένη σφαίρα είναι απαλλαγμένο από τη μακροσκοπική συνεισφορά των γειτονικών της ηλεκτρικών διπόλων.

Για τον προσδιορισμό του πεδίου \mathbf{E}_p θεωρούμε μια νοητή σφαίρα ακτίνας R που περικλείει στο εσωτερικό της όλες τις σφαίρες-δίπολα του εξεταζόμενου μέσου και αποτελεί το όριο ανάμεσα στο μακροσκοπικό και μικροσκοπικό περιβάλλον του μέσου. Αν υποθέσουμε ότι η σφαίρα είναι ομοιόμορφα πολωμένη με $\mathbf{P} = P_0 \cdot \hat{\mathbf{z}}$, τότε στην επιφάνειά της επάγεται ηλεκτρικό φορτίο με πυκνότητα $\sigma_p = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P} = P_0 \cos\theta$. Ο προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}_p γίνεται μέσω της έννοιας του ηλεκτρικού δυναμικού Φ , το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace σε κάθε σημείο του χώρου (αφού $\rho = 0$), δηλαδή

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.4.15)$$

με τις παρακάτω οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της σφαίρας

$$\Phi(r = R^+) = \Phi(r = R^-) \quad (3.4.16)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R^+} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R^-} = -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (3.4.17)$$

Επομένως, επειδή $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ το δυναμικό επιδέχεται λύση της μορφής

$$\Phi = \begin{cases} A_1 r \cos\theta, & r < R \\ \frac{B_1}{r^2} \cos\theta, & r \geq R \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Με εφαρμογή των οριακών συνθηκών (3.4.16) και (3.4.17) προκύπτουν οι συντελεστές

$$A_1 = \frac{P_0}{3\epsilon_0}, B_1 = \frac{\alpha^3 P_0}{3\epsilon_0} \quad (3.4.19)$$

οπότε για $r < R$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}_p = -\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \cos\theta \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{P_0}{3\epsilon_0} \sin\theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.4.20)$$

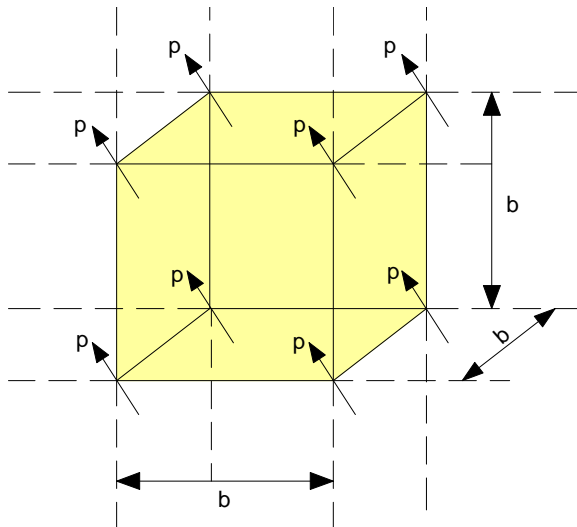
ή αν εκφραστεί ισοδύναμα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\mathbf{E}_p = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.4.21)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_{near} που εφαρμόζεται σε μία μεμονωμένη σφαίρα λόγω των γειτονικών σφαιρών προκύπτει από την υπέρθεση των πεδίων όλων των ηλεκτρικών

διπόλων, τα οποία βρίσκονται διατεταγμένα σε ένα κυβικό πλέγμα και εμφανίζουν την ίδια ηλεκτρική διπολική ροπή \mathbf{p} (Σχήμα 3.2). Οι θέσεις των διπόλων δίνονται από τις συντεταγμένες \mathbf{r}_{ijk} (ib, jb, kb), όπου b η σταθερά του πλέγματος, ενώ οι δείκτες i, j, k λαμβάνουν εξίσου θετικές και αρνητικές τιμές. Θεωρώντας ότι η μεμονωμένη σφαίρα βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, για το κοντινό ηλεκτρικό πεδίο ισχύει

$$\mathbf{E}_{\text{near}} = \sum_{i,j,k} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{ijk})\mathbf{r}_{ijk} - r_{ijk}^2 \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r_{ijk}^5} \quad (3.4.22)$$



Σχήμα 3.2: Ηλεκτρικά δίπολα σε απλό κυβικό πλέγμα

Η x-συνιστώσα του πεδίου για παράδειγμα γράφεται στη μορφή

$$E_x^{\text{near}} = \sum_{i,j,k} \frac{3(i^2 p_x + ij p_y + ik p_z) - (i^2 + j^2 + k^2) p_x}{4\pi\epsilon_0 b^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (3.4.23)$$

Λόγω κυβικής συμμετρίας της διάταξης των γειτονικών διπόλων, οι δείκτες i, j, k λαμβάνουν εξίσου θετικές και αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα οι όροι του αθροίσματος που περιέχουν τις ποσότητες $ij p_y$ και $ik p_z$ να μηδενίζονται. Επίσης λόγω συμμετρίας

$$\sum_{i,j,k} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{i,j,k} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (3.4.24)$$

επομένως από τη σχέση (3.4.23) έπεται ότι $E_x^{\text{near}} = 0$, ενώ με ανάλογη διαδικασία προκύπτει ότι $E_y^{\text{near}} = E_z^{\text{near}} = 0$, ώστε τελικά $\mathbf{E}_{\text{near}} = 0$.

Συνεπώς, το τοπικής κλίμακας ηλεκτρικό πεδίο που ορίστηκε στην (3.4.14) είναι

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.4.25)$$

όπότε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται σε κάθε μεμονωμένη σφαίρα είναι ίσο με $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{loc}$. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η πόλωση του συνολικού μέσου διάδοσης, που αποτελείται από N ηλεκτρικά δίπολα ανά μονάδα όγκου, να προκύπτει

$$\mathbf{P} = N\epsilon_0\alpha_e(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{loc}) \quad (3.4.26)$$

όπου α_e ο συντελεστής ηλεκτρικής πολωσιμότητας της μεμονωμένης σφαίρας και $N=1/b^3$ η πυκνότητα των ηλεκτρικών διπόλων, όπου b η σταθερά του κυβικού πλέγματος. Με αντικατάσταση της σχέσης (3.4.25) στην (3.4.26) προκύπτει

$$\mathbf{P}\left(1 - \frac{N\alpha_e}{3}\right) = N\epsilon_0\alpha_e\mathbf{E}_0 \quad (3.4.27)$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την (3.4.13) καταλήγει στον προσδιορισμό της ηλεκτρικής επιδεκτικότητας του μέσου διάδοσης

$$\chi_e = \frac{3N\alpha_e}{3 - N\alpha_e} \quad (3.4.28)$$

Εξάλλου, από τη σχέση ορισμού της σχετικής διηλεκτρικής επιτρεπτότητας έχουμε ότι

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (3.4.29)$$

και με αντικατάσταση από την (3.4.28) προσδιορίζεται ο συντελεστής ηλεκτρικής πολωσιμότητας συναρτήσει της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς του συνολικού μέσου

$$\alpha_e = \frac{3}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (3.4.30)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με τη σχέση (3.4.12), καταλήγουμε στη σχέση που συνδέει την (ενεργό) σχετική διηλεκτρική σταθερά του κυβικού πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών με το συντελεστή σκέδασης A_1 από μία μεμονωμένη σφαίρα.

$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N A_1}{k_0^3 - 2\pi i N A_1} \quad (3.4.31)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως σχέση Clausius-Mossotti [27] και ισχύει γενικά κυρίως για αραιές ουσίες όπως τα αέρια, ενώ για τα υγρά και τα στερεά ισχύει προσεγγιστικά, ιδιαίτερα στην περίπτωση υψηλής διηλεκτρικής σταθεράς. Στην περίπτωση μας θα δείξουμε ότι παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα αν ισχύει η υπόθεση του ενεργού μέσου, δηλαδή αν το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών.

3.5 Αρνητική ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός συνόλου σφαιρών

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι για συχνότητες λειτουργίας γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού είναι δυνατό η ενεργός σχετική μαγνητική διαπερατότητα του πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών να λάβει αρνητικές τιμές, ως αποτέλεσμα του ισχυρού συντονισμού των μαγνητικών κυμάτων. Επειδή όμως ο μαγνητικός συντονισμός κατώτερης τάξης (απόκριση μαγνητικού διπόλου) είναι γενικά ασθενής, ευνοείται ιδιαίτερα από την παρουσία υλικού αρκετά υψηλής διηλεκτρικής σταθεράς, συνθήκη η οποία εξασφαλίζει και την ισχύ της υπόθεσης του ενεργού μέσου, που απαιτεί το μήκος κύματος ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο να είναι αρκετά μεγαλύτερο της διαμέτρου των σφαιρών ($\lambda_h \gg a$, long-wavelength limit). Σε μεγαλύτερες συχνότητες λειτουργίας η προσεγγιστική έκφραση προσδιορισμού της μ_r^{eff} δε δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Πράγματι, από τον ορισμό της χαμηλότερης συχνότητας συντονισμού (σχέση 3.2.34) έχουμε

$$\omega_{11}^m = \frac{\pi c}{a \sqrt{\epsilon_h \epsilon_s}} \quad (3.5.1)$$

όπου $c = \sqrt{1/\mu_0 \epsilon_0}$, ϵ_s και ϵ_h η διηλεκτρική σταθερά του υλικού των σφαιρών και του περιβάλλοντος μέσου αντίστοιχα, ενώ a η ακτίνα των σφαιρών, οπότε το αντίστοιχο μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο (host medium) σε σχέση με τη διάμετρο κάθε σφαίρας προκύπτει

$$\frac{\lambda_h^{\text{res}}}{2a} = \sqrt{\epsilon_s} \quad (3.5.2)$$

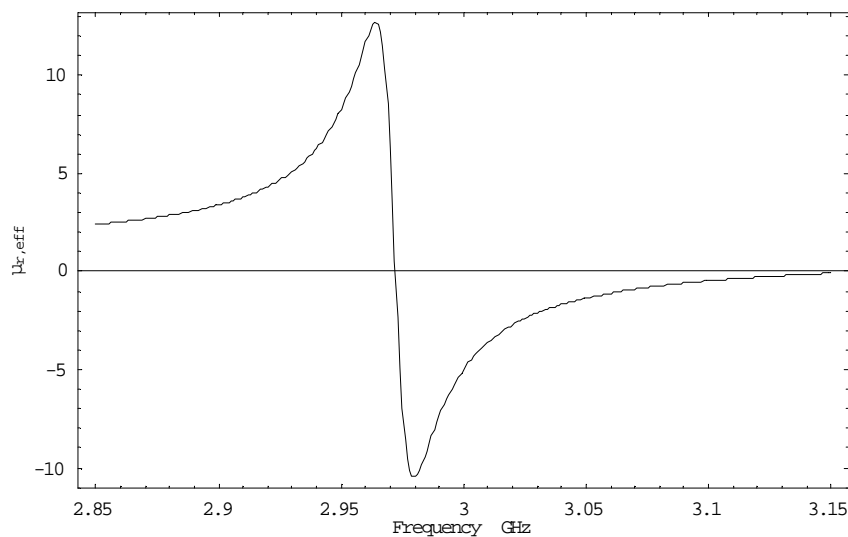
Υποθέτοντας ότι για να ισχύει η υπόθεση του ενεργού μέσου χρειάζεται για παράδειγμα $\lambda_h^{\text{res}} / 2a > 10$, η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς των σφαιρών πρέπει να είναι $\epsilon_s > 100$. Οι απαιτούμενες ιδιαίτερα υψηλές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς παρέχονται από φερροηλεκτρικά υλικά στις μικροκυματικές συχνότητες ή από ειδικούς κρυστάλλους (polaritonic materials) στις υπέρυθρες συχνότητες. Στην παρούσα διατριβή η μελέτη εστιάζεται στις μικροκυματικές συχνότητες λειτουργίας, λόγω του πλήθους των εφαρμογών που λαμβάνουν χώρα στην περιοχή των GHz.

Θεωρώντας για παράδειγμα ότι η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού επιλέγεται ίση με 3 GHz, η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου έχει την τιμή 1 και το υλικό των σφαιρών έχει διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_s = 100$, η ακτίνα των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση (3.5.1) και προκύπτει $a = 5$ mm. Η ενεργός μαγνητική

διαπερατότητα του συνολικού μέσου προσδιορίζεται με εφαρμογή της σχέσης (3.3.60) της ενότητας 3.3, που υπενθυμίζεται ότι έχει τη μορφή

$$\mu_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N B_1}{k_0^3 - 2\pi i N B_1} \quad (3.5.3)$$

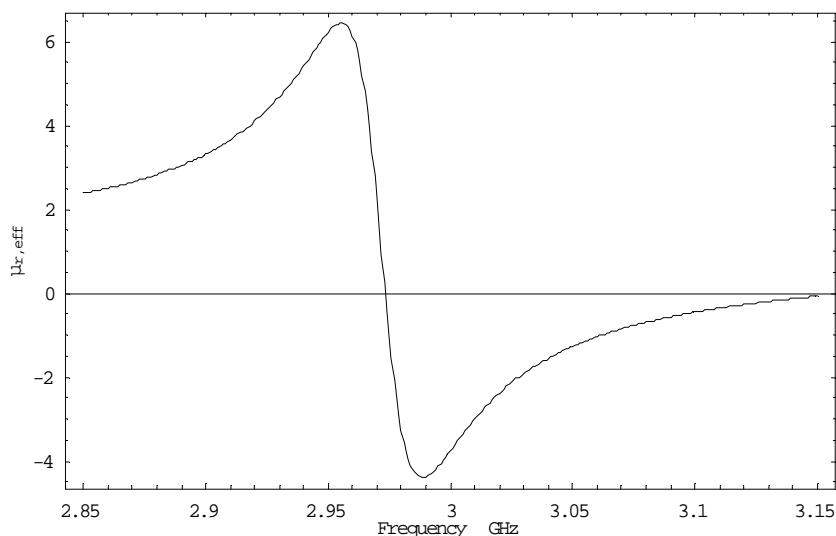
όπου $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_h \epsilon_0 \mu_0}$, B_1 ο συντελεστής σκέδασης των μαγνητικών κυμάτων και η παράμετρος N παριστάνει τη συγκέντρωση των σφαιρών-διπόλων και εξαρτάται από τη σταθερά του κυβικού πλέγματος των σφαιρών b μέσω της σχέσης $N = 1/b^3$. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε $b = 15$ mm. Σημειώνεται ότι η παραπάνω σχέση εμφανίζει διασπορά ως προς τη συχνότητα, ακόμα και στην περίπτωση που η διηλεκτρική σταθερά ϵ_s του υλικού των σφαιρών έχει σταθερή τιμή. Επιπλέον, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα προκύπτει μιγαδικός αριθμός ακόμα και στην περίπτωση που τόσο το περιβάλλον μέσο όσο και το υλικό των σφαιρών δεν εμφανίζουν απώλειες. Με βάση τα παραπάνω αριθμητικά δεδομένα καταλήγουμε στον προσδιορισμό της μαγνητικής διαπερατότητας του συνολικού μέσου σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα που παριστάνει τη μεταβολή του πραγματικού μέρους της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας συναρτήσει της συχνότητας (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3: Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα $\mu_{r,\text{eff}}$ (πραγμ. μέρος) ενός κυβικού πλέγματος σφαιρών ως συνάρτηση της συχνότητας υποθέτοντας τέλεια διηλεκτρικά..

Παρατηρούμε ότι πράγματι το πραγματικό μέρος της μ_r^{eff} λαμβάνει αρνητικές τιμές γύρω από τη συχνότητα μαγνητικού συντονισμού των 3 GHz, στο εύρος 2.975-3.15 GHz. Μάλιστα, εξαιτίας του γεγονότος ότι αγνοήθηκαν οι απώλειες των διηλεκτρικών του

υλικού των σφαιρών και του περιβάλλοντος μέσου, προκύπτουν αρκετά μεγάλες αρνητικές τιμές (μέχρι και -10) καθιστώντας ιδιαίτερα έντονο το φαινόμενο του συντονισμού. Λαμβάνοντας υπόψη τις τυχόν απώλειες των διηλεκτρικών, το φαινόμενο μετριάζεται ως προς την ένταση. Θεωρώντας για παράδειγμα εφαπτομένη απωλειών για τα δύο διηλεκτρικά ίση με 0.003, δηλαδή $\epsilon_s = 100 - i 0.3$ και $\epsilon_h = 1 - i 0.003$, προκύπτει



Σχήμα 3.4: Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα $\mu_{r,eff}$ (πραγμ. μέρος) ενός κυβικού πλέγματος σφαιρών με απώλειες των διηλεκτρικών.

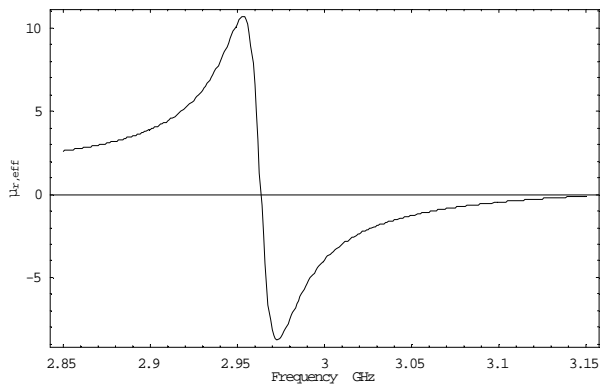
Παρατηρούμε ότι το φαινόμενο έχει μετριαστεί ως προς την ένταση δίχως ιδιαίτερη μεταβολή στο εύρος ζώνης, το οποίο κυμαίνεται περίπου στα 170 MHz. Αυξάνοντας τις απώλειες των διηλεκτρικών το φαινόμενο ολοένα και εξασθενεί μέχρι να εξαφανιστεί, ενώ για εφαπτομένη απωλειών μεγαλύτερη από 0,025 δεν παρατηρείται ζώνη συχνοτήτων εντός της οποίας το πραγματικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας να λαμβάνει αρνητικές τιμές.

Η παράμετρος που έχει ωστόσο τη μεγαλύτερη επίδραση στο φαινόμενο είναι η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών, η οποία πρέπει να διατηρείται ιδιαίτερα υψηλή. Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά τα αριθμητικά αποτελέσματα για την ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του μέσου για $\epsilon_s = 400$ και $\epsilon_s = 80$ (Σχήμα 3.5) θεωρώντας εφαπτομένη απωλειών των διηλεκτρικών ίση με 0.003. Διατηρώντας σταθερή τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών και ίση με 3 GHz, η ακτίνα των σφαιρών a μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση (3.5.1), οπότε $a = 2.5$ mm στην περίπτωση που $\epsilon_s = 400$ και $a = 5.6$ mm για $\epsilon_s = 80$. Η σταθερά του πλέγματος b μεταβάλλεται ανάλογα, έτσι ώστε το πηλίκο του όγκου που καταλαμβάνει κάθε σφαίρα

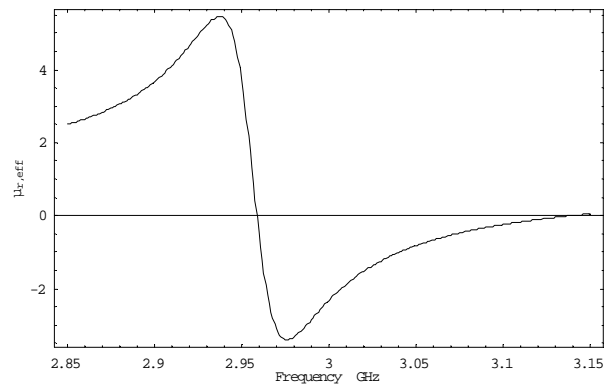
προς τον όγκο της στοιχειώδους κυψελίδας να παραμένει σταθερό (volume filling fraction). Στην περίπτωση μας είναι δηλαδή

$$v_f = \frac{4\pi a^3}{3b^3} \quad (3.5.4)$$

Θεωρώντας ότι $v_f = 0,15$ (όπως στο Σχήμα 3.4) η σταθερά του πλέγματος για $\epsilon_s = 400$ και $\epsilon_s = 80$ προκύπτει αντίστοιχα $b = 7.5$ mm και $b = 17$ mm. Προφανώς, όσο πλησιέστερα τοποθετούνται οι σφαίρες μεταξύ τους τόσο εντονότερο αναμένεται να είναι το φαινόμενο.

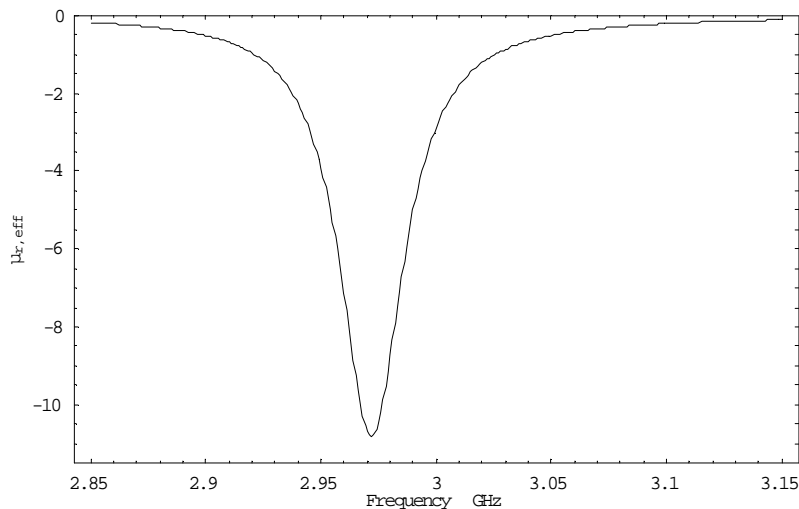


Σχήμα 3.5(α): $\epsilon_s = 400$, $\alpha = 2.5$ mm, $b = 7.5$ mm



Σχήμα 3.5(β): $\epsilon_s = 80$, $\alpha = 5.6$ mm, $b = 17$ mm

Από τα παραπάνω διαγράμματα διαπιστώνουμε πράγματι ότι για $\epsilon_s = 400$, το πραγματικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας λαμβάνει πολύ χαμηλές τιμές ($\mu_{\min}^{\text{eff}} = -8,5$) ενώ για $\epsilon_s = 80$ είναι $\mu_{\min}^{\text{eff}} = -3,5$. Το φανταστικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας είναι ενδεικτικό των απωλειών του συνολικού μέσου και η μεταβολή του γύρω από τη συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού απεικονίζεται παρακάτω για τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων του Σχήματος 3.4.



Σχήμα 3.6: Φανταστικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας $\epsilon_s = 100 - i0.3$, $\epsilon_h = 1 - i0.003$, $\alpha = 5$ mm, $b = 15$ mm.

Παρατηρούμε ότι το φανταστικό μέρος λαμβάνει παντού αρνητικές τιμές, ιδιότητα που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά όλων των παθητικών μέσων διάδοσης. Λίγο πριν τη συχνότητα μαγνητικού συντονισμού παρουσιάζει ελάχιστο ($f = 2.97$ GHz), γεγονός ενδεικτικό των απωλειών του μέσου, αλλά για συχνότητες λίγο μεγαλύτερες το φανταστικό μέρος ελαττώνεται σημαντικά μετριάζοντας τις απώλειες.

3.6 Αρνητική ενεργός διηλεκτρική σταθερά ενός συνόλου σφαιρών

Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη ενότητα, η ενεργός διηλεκτρική σταθερά του συνόλου των σφαιρών είναι δυνατό να λάβει αρνητικές τιμές σε ένα εύρος ζώνης γύρω από τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών. Οι συχνότητες συντονισμού των ηλεκτρικών κυμάτων, όπως προέκυψε και από την ανάλυση της ενότητας 3.2, προσδιορίζονται από τη σχέση

$$x_2 \hat{J}_n(x_2) \hat{Y}'_n(x_1) - x_1 \hat{J}'_n(x_2) \hat{Y}_n(x_1) = 0 \quad (3.6.1)$$

όπου $x_1 = k_0 a$, $x_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_h}} x_1$. Για $x_1 \ll 1$ η χαμηλότερη συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη σχέση (3.2.27)

$$\omega_{11}^e = \frac{x_{11}^e c}{\sqrt{\epsilon_s \epsilon_h} a} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \quad (3.6.2)$$

όπου x_{11}^e η πρώτη λύση της εξίσωσης $J_1(x) = 0$, επομένως $x_{11}^e = 4.4931$. Θεωρώντας τις ακόλουθες αριθμητικές παραμέτρους: $\epsilon_s = 100 - i 0.3$, $\epsilon_h = 1 - i 0.003$, $a = 5$ mm και $b = 11$ mm, η ενεργός διηλεκτρική σταθερά του συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση (3.4.31) που επαναλαμβάνεται εδώ

$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N A_1}{k_0^3 - 2\pi i N A_1} \quad (3.6.3)$$

όπου A_1 ο συντελεστής σκέδασης των ηλεκτρικών κυμάτων και $N = 1/b^3$. Η συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού προκύπτει $f_{11}^e = 4.25$ GHz με βάση την προσεγγιστική σχέση (3.6.2). Ο ακριβής υπολογισμός της μέσω της σχέσης (3.6.1) γίνεται λαμβάνοντας υπόψη ότι για $n=1$ ισχύουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann [28]

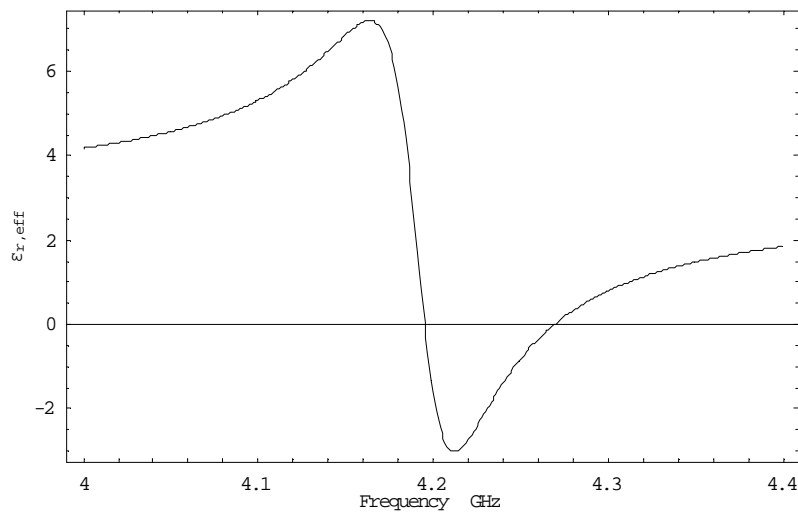
$$\hat{j}_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \quad (3.6.4)$$

$$\hat{j}'_1(x) = \frac{\cos x}{x} + \sin x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (3.6.5)$$

$$\hat{y}_1(x) = -\frac{\cos x}{x} - \sin x \quad (3.6.6)$$

$$\hat{y}'_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (3.6.7)$$

οπότε από της λύση της εξίσωσης (3.6.1) προκύπτει ότι $x_1 = 0.444$, από όπου υπολογίζεται η ακριβής τιμή της συχνότητας ηλεκτρικού συντονισμού $f_{11}^e = 4.24$ GHz. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μεταβολή του πραγματικού μέρους της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς του πλέγματος των σφαιρών γύρω από τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού με βάση τη σχέση (3.6.3).



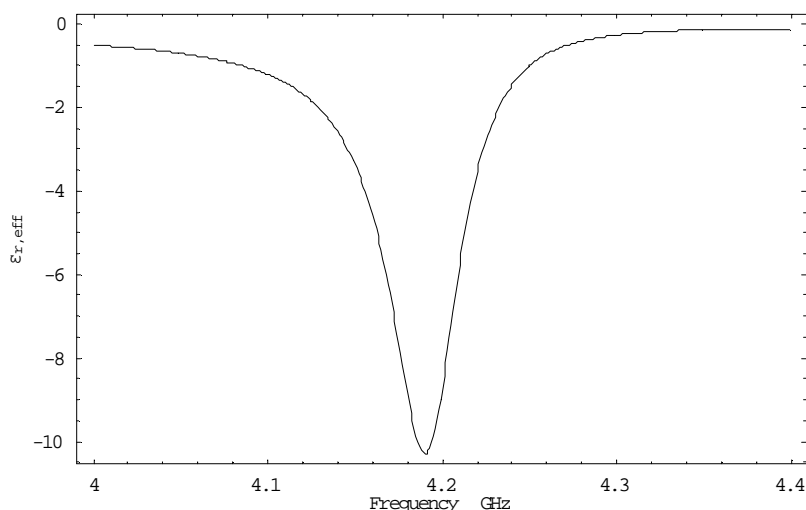
Σχήμα 3.7: Ενεργός διηλεκτρική σταθερά κυβικού πλέγματος σφαιρών.

$$\epsilon_s = 100 - i0.3, \quad \epsilon_h = 1 - i0.003, \quad a = 5 \text{ mm}, \quad b = 11 \text{ mm}.$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μία ζώνη συχνοτήτων από 4.19-4.27 GHz εντός της οποίας το πραγματικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς προκύπτει πράγματι αρνητικό, ως συνέπεια του ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών. Η ένταση του φαινομένου παρουσιάζεται μειωμένη σε σχέση με το αντίστοιχο φαινόμενο του συντονισμού των μαγνητικών κυμάτων στο Σχήμα 3.4, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων. Επίσης, το εύρος ζώνης αρνητικής ϵ_r^{eff} προκύπτει περίπου 80 MHz, σε αντίθεση με την περίπτωση του Σχήματος 3.4, που είναι της τάξεως των 170 MHz. Ο ηλεκτρικός συντονισμός των σφαιρών επομένως είναι λιγότερο έντονος σε σχέση με το μαγνητικό. Επίσης, η σταθερά του πλέγματος b επιλέχθηκε μικρότερη από ό,τι στην περίπτωση των μαγνητικών συντονισμών για να αυξηθεί η σύζευξη μεταξύ των σφαιρών καθιστώντας εντονότερο το

φαινόμενο. Σημειώνεται ότι η σταθερά του πλέγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου των σφαιρών, ώστε αυτές να μην επικαλύπτονται ($b \geq 2a$).

Η μεταβολή του φανταστικού μέρους της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς του πλέγματος των σφαιρών γύρω από τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού απεικονίζεται παρακάτω (Σχήμα 3.8).



Σχήμα 3.8: Φανταστικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς του κυβικού πλέγματος σφαιρών: $\epsilon_s = 100 - i0.3$, $\epsilon_h = 1 - i0.003$, $a = 5$ mm, $b = 11$ mm.

Το φανταστικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς προκύπτει παντού αρνητικό, αφού το μέσο είναι παθητικό στο σύνολό του. Αξίζει όμως να παρατηρήσουμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο για $f = 4.19$ GHz, λίγο πριν τη συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού. Επομένως, στην περιοχή αυτή το μέσο εμφανίζει σημαντικές απώλειες, με αποτέλεσμα στην πράξη να προτιμάται η λειτουργία της διάταξης σε συχνότητες λίγο μεγαλύτερες αλλά εντός του εύρους ζώνης 4.19-4.27 GHz, όπου το πραγματικό μέρος της ϵ_r^{eff} προκύπτει αρνητικό (Σχήμα 3.7).

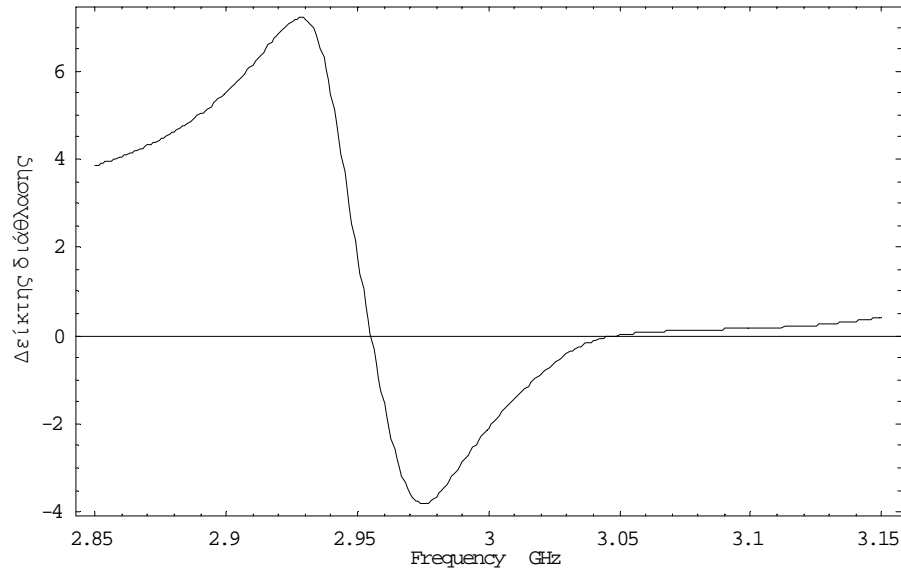
3.7 Αρνητικός δείκτης διάθλασης ενός συνόλου σφαιρών

Στις προηγούμενες ενότητες καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η επίτευξη αρνητικής ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας καθώς και αρνητικής ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα, για το κυβικό πλέγμα των σφαιρών που συνθέτουν το προτεινόμενο μεταάλικο μέσο. Ωστόσο, η εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης για το σύνολο της δομής προϋποθέτει η μαγνητική διαπερατότητα και η διηλεκτρική σταθερά του μέσου να λαμβάνουν ταυτόχρονα στο ίδιο εύρος ζώνης αρνητικές τιμές, δηλαδή να συμπίπτουν οι συχνότητες μαγνητικού και ηλεκτρικού συντονισμού. Το γεγονός αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί αν όλες οι σφαίρες αποτελούνται από το ίδιο διηλεκτρικό υλικό και έχουν την ίδια ακτίνα. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται θεωρώντας ότι η δομή αποτελείται από δύο είδη σφαιρών διαφορετικής ακτίνας αλλά από το ίδιο υλικό. Δεδομένου ότι οι ηλεκτρικοί συντονισμοί μίας σφαίρας εμφανίζονται σε συχνότητες μεγαλύτερες από τους αντίστοιχους μαγνητικούς και οι συχνότητες συντονισμού είναι αντιστρόφως ανάλογες της ακτίνας της σφαίρας, οι διαστάσεις των σφαιρών της δομής επιλέγονται έτσι ώστε να συμπίπτουν η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών μικρής ακτίνας με τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών μεγαλύτερης ακτίνας [4].

Ο δείκτης διάθλασης του συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση $n_{\text{eff}} = \pm \sqrt{\mu_r^{\text{eff}} \epsilon_r^{\text{eff}}}$. Σημειώνουμε ότι επειδή κατά τον υπολογισμό του δείκτη διάθλασης χρειάζεται ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού, η οποία δεν είναι μονότιμη συνάρτηση, σε κάθε περίπτωση επιλέγεται εκείνη η τιμή του δείκτη διάθλασης που εξασφαλίζει ότι το φανταστικό μέρος του είναι πάντοτε αρνητικό (δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει παντού χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$), αφού είναι ενδεικτικό των εμφανιζόμενων απωλειών και γενικά της απόσβεσης κατά το συντονισμό.

Υποθέτοντας ότι η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού και ηλεκτρικού συντονισμού είναι ίση με 3 GHz και τα υλικά των σφαιρών και του περιβάλλοντος μέσου έχουν διηλεκτρικές σταθερές $\epsilon_s = 100 - i 0.3$, $\epsilon_h = 1 - i 0.003$ αντίστοιχα, οι ακτίνες των σφαιρών προκύπτουν με εφαρμογή των σχέσεων (3.5.1) και (3.6.2): $a_1 = 5$ mm και $a_2 = 7.07$ mm. Η σταθερά πλέγματος b επιλέγεται ώστε οι σφαίρες να βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους, αλλά να μην υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των σφαιρών, δηλαδή $b \geq 2a_2$. Μία τιμή που να

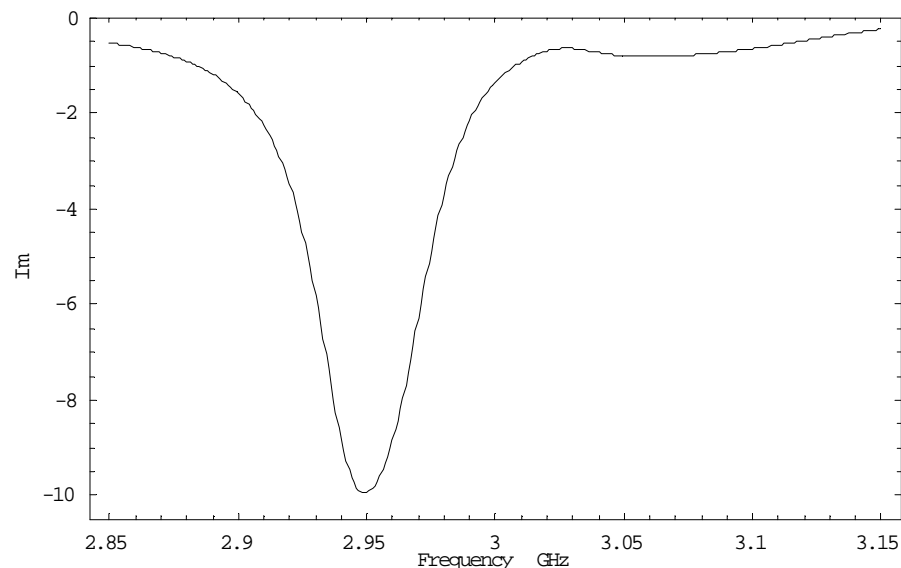
εξασφαλίζει τα παραπάνω είναι $b = 15$ mm. Η μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης της δομής γύρω από τη συχνότητα των 3 GHz απεικονίζεται παρακάτω.



Σχήμα 3.9: Ενεργός δείκτης διάθλασης του κυβικού πλέγματος σφαιρών.

$$a_1 = 5 \text{ mm}, a_2 = 7.07 \text{ mm}, b = 15 \text{ mm}, \epsilon_s = 100 - i0.3, \epsilon_h = 1 - i0.003.$$

Παρατηρούμε ότι στο εύρος ζώνης 2.95-3.05 GHz το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης προκύπτει αρνητικό, επομένως η δομή στο σύνολό της θα συμπεριφέρεται ως μεταυλικό. Μάλιστα, το φαινόμενο είναι αρκετά έντονο, αφού ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές μέχρι και -4. Η μεταβολή του φανταστικού μέρους του δείκτη διάθλασης παρουσιάζεται ακολούθως.



Σχήμα 3.10: Φανταστικό μέρος ενεργού δείκτη διάθλασης του πλέγματος σφαιρών.

$$a_1 = 5 \text{ mm}, a_2 = 7.07 \text{ mm}, b = 15 \text{ mm}, \epsilon_s = 100 - i0.3, \epsilon_h = 1 - i0.003.$$

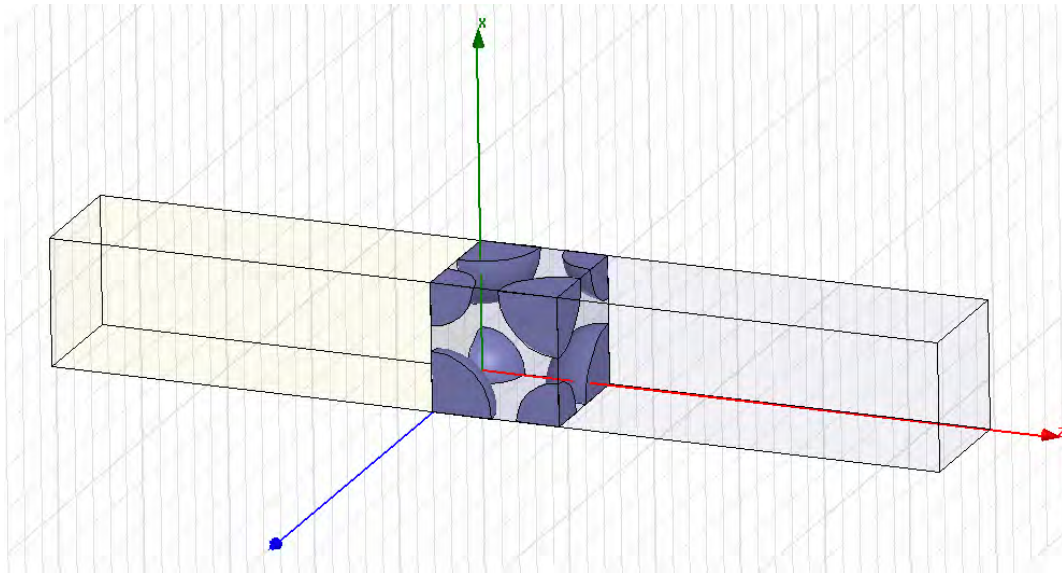
Όπως και στις περιπτώσεις των μ_r^{eff} και $\varepsilon_r^{\text{eff}}$, το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό (passive medium) και εμφανίζει ελάχιστο για $f = 2.95$ GHz, λίγο πριν από τη συχνότητα των 3 GHz. Συνεπώς, προτιμάται η λειτουργία σε συχνότητες μεγαλύτερες από 2.95 GHz, αλλά εντός του εύρους 2.96-3.05 GHz, όπου $\text{Re}(n_{\text{eff}}) < 0$.

3.8 Ανάλυση της δομής με τη βοήθεια προσομοίωσης

Η διαδικασία που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες παρέχει μια ικανοποιητική εικόνα της ηλεκτρομαγνητικής συμπεριφοράς του μεταλλικού, σε περίπτωση που το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο διάδοσης είναι αρκετά μεγαλύτερο από τις διαστάσεις των σφαιρών και της στοιχειώδους κυψελίδας (θεωρία του ενεργού μέσου). Συνεπώς, είναι απαραίτητη μία ακριβέστερη προσέγγιση του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και συνυπολογίζοντας υψηλότερης τάξης συνεισφορές στις διάφορες πεδιακές εκφράσεις. Η πλήρης λύση του προβλήματος προσδιορίζεται σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης, η οποία θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο της διατριβής. Στην ενότητα αυτή θα πραγματοποιηθεί μία αριθμητική προσομοίωση του προτεινόμενου μεταλλικού (full wave simulation) με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου HFSS (High Frequency Structure Simulator) προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής ανάλυσης που ακολουθήθηκε στο παρόν κεφάλαιο [4].

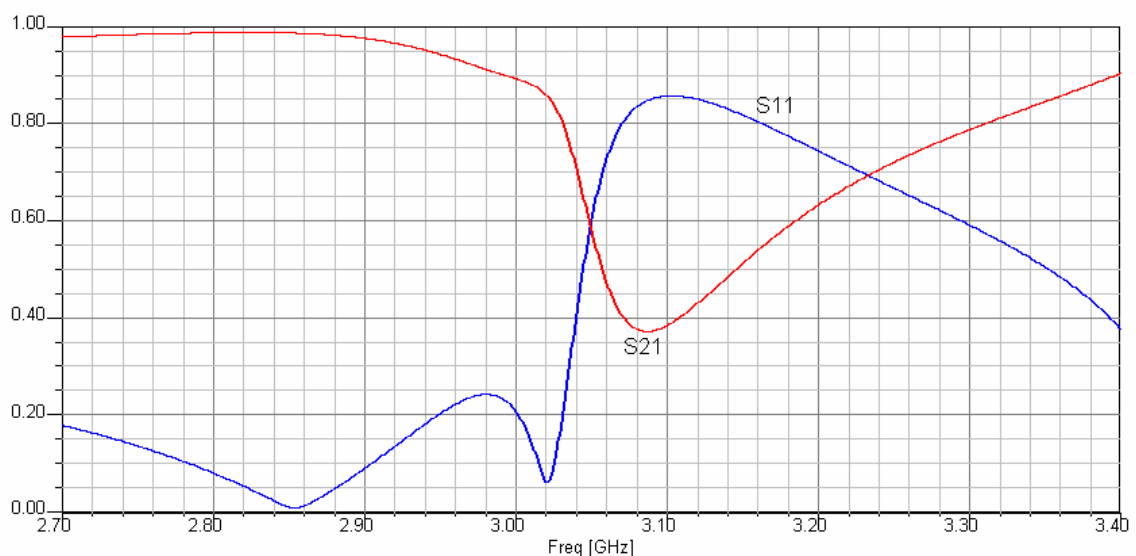
Η περιοδικότητα της διάταξης μας επιτρέπει να θεωρήσουμε στην προσομοίωση μόνο μία δομική μονάδα (unit cell) αντί για έναν πεπερασμένο αριθμό από unit cells. Η στοιχειώδης κυψελίδα διαθέτει κυβική συμμετρία με σταθερά πλέγματος $b = 15$ mm και στις κορυφές της είναι τοποθετημένες εναλλάξ οι διηλεκτρικές σφαίρες με ακτίνες 5.0 και 7.05 mm. Τα υλικά των σφαιρών και του περιβάλλοντος μέσου έχουν διηλεκτρικές σταθερές $\varepsilon_s = 100 - i 0.3$ και $\varepsilon_h = 1 - i 0.003$ αντίστοιχα. Σκοπός της προσομοίωσης είναι η εξαγωγή των παραμέτρων σκέδασης του μεταλλικού (S-parameters) και στη συνέχεια ο υπολογισμός των ενεργών ηλεκτρομαγνητικών παραμέτρων της δομής. Για το λόγο αυτό η δομική μονάδα πρέπει να θεωρηθεί ισοδύναμα ως ένα δίθυρο στοιχείο. Εκατέρωθεν της δομικής μονάδας και κατά μήκος του άξονα διάδοσης z , τοποθετούνται κυματοδηγοί μήκους 45 mm ($3b$), στα άκρα των οποίων ορίζονται οι θύρες (wave ports) εισόδου και εξόδου του δίθυρου στοιχείου. Στη συνέχεια, εφαρμόζονται οι απαραίτητες περιοδικές οριακές συνθήκες για το ηλεκτρικό και μαγνητικό στις επιφάνειες της δομικής μονάδας

που είναι κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης. Παρακάτω παραθέτουμε ένα ενδεικτικό σχήμα της στοιχειώδους κυψελίδας που χρησιμοποιείται κατά την προσομοίωση [4].



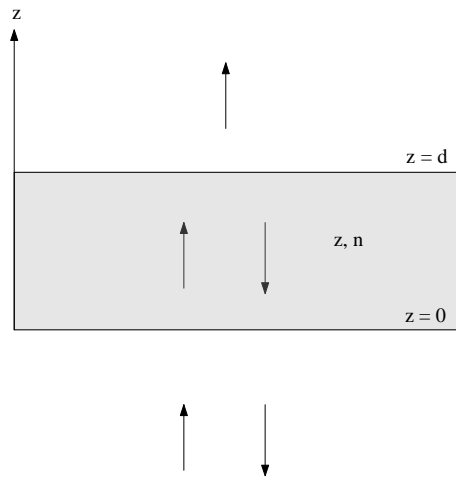
Σχήμα 3.11: Στοιχειώδης δομική μονάδα για την εξαγωγή των παραμέτρων σκέδασης του μεταλλικού.

Η προσομοίωση πραγματοποιείται γύρω από τη συχνότητα συντονισμού των 3 GHz και τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις παραμέτρους σκέδασης (S-parameters) παρουσιάζονται στο εύρος ζώνης 2.7-3.4 GHz, ενώ κατά τη σάρωση συχνοτήτων χρησιμοποιούνται βήματα του 1 MHz προκειμένου να απεικονισθούν ικανοποιητικά οι απότομες μεταβολές του πλάτους κατά το συντονισμό. Στο σχήμα που ακολουθεί παριστάνεται η μεταβολή του πλάτους των συντελεστών ανάκλασης (S_{11}) και μετάδοσης (S_{21}) συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας, αφού λόγω συμμετρίας είναι $S_{22} = S_{11}$ και $S_{12} = S_{21}$.



Σχήμα 3.12: Μεταβολή των συντελεστών ανάκλασης S_{11} και μετάδοσης S_{21} συναρτήσει της συχνότητας

Οι ενεργές ηλεκτρομαγνητικές παράμετροι της δομής μπορούν να προκύψουν από τις S-παραμέτρους που υπολογίζονται μέσω του HFSS [31, 32]. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι το υπό μελέτη μεταλλικό αναπαρίσταται ισοδύναμα ως μία ομογενής πλάκα, που χαρακτηρίζεται από μία ενιαία κυματική αντίσταση z και έναν ενεργό δείκτη διάθλασης n , ποσότητες οι οποίες θα προσδιοριστούν συναρτήσει των παραμέτρων σκέδασης S_{11} και S_{21} . Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβής όταν το μήκος κύματος στο μέσο διάδοσης είναι αρκετά μεγαλύτερο από τις διαστάσεις των δομικών στοιχείων που το συνθέτουν. Θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα που προσπίπτει κάθετα (για $z < 0$) στην ομογενή πλάκα πάχους d , έστω στο επίπεδο $z = 0$ (Σχήμα 3.13). Το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο κατά τον άξονα x .



Σχήμα 3.13: Αναπαράσταση του μεταλλικού ως ισοδύναμη ομογενή πλάκα.

Οι συνιστώσες του H/M πεδίου σε κάθε περιοχή του χώρου γράφονται στη μορφή

Περιοχή 1 ($z < 0$)

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_0[\exp(-ik_0z) + R \exp(ik_0z)] \quad (3.8.1)$$

$$\mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta_0} [\exp(-ik_0z) - R \exp(ik_0z)] \quad (3.8.2)$$

Περιοχή 2 ($0 < z < d$)

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_0[A \exp(-ik_1z) + B \exp(ik_1z)] \quad (3.8.3)$$

$$\mathbf{H}_2 = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta_1} [A \exp(-ik_1z) - B \exp(ik_1z)] \quad (3.8.4)$$

Περιοχή 3 ($z > d$)

$$\mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{x}}E_0 T \exp[-ik_0(z-d)] \quad (3.8.5)$$

$$\mathbf{H}_3 = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\zeta_0} T \exp[-ik_0(z-d)] \quad (3.8.6)$$

όπου $k_0, k_1, \zeta_0, \zeta_1$ οι σταθερές διάδοσης των κυμάτων και οι κυματικές αντιστάσεις στο περιβάλλον μέσο και εντός της πλάκας αντίστοιχα, ενώ οι σταθερές R και T συμβολίζουν τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης της πλάκας. Με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες $z = 0$ και $z = d$ προκύπτουν οι εξισώσεις

$$1 + R = A + B \quad (3.8.7)$$

$$\frac{1}{\zeta_0}(1 - R) = \frac{1}{\zeta_1}(A - B) \quad (3.8.8)$$

$$A \exp(-ik_1 d) + B \exp(ik_1 d) = T \quad (3.8.9)$$

$$\frac{1}{\zeta_1}[A \exp(-ik_1 d) - B \exp(ik_1 d)] = \frac{1}{\zeta_0} T \quad (3.8.10)$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος προσδιορίζονται οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης R και T συναρτήσει της αντίστασης z και του δείκτη διάθλασης n της πλάκας, λαμβάνοντας υπόψη ότι $k_1 = k_0 n$ και $z = \zeta_1 / \zeta_0$

$$R = \frac{p [1 - \exp(-2ik_0 nd)]}{1 - p^2 \exp(-2ik_0 nd)} \quad (3.8.11)$$

$$T = \frac{(1 - p^2) \exp(-ik_0 nd)}{1 - p^2 \exp(-2ik_0 nd)} \quad (3.8.12)$$

όπου $p = \frac{z-1}{z+1}$. Οι συντελεστές αυτοί ταυτίζονται αντίστοιχα με τις παραμέτρους

σκέδασης S_{11} και S_{21} της δομής που υπολογίζονται μέσω της προσομοίωσης που περιγράφηκε παραπάνω. Επομένως, με αντιστροφή των σχέσεων (3.8.11) και (3.8.12) είναι δυνατό να προκύψουν οι ενεργές παράμετροι z και n που χαρακτηρίζουν την πλάκα.

Πράγματι, από τη σχέση (3.8.12) είναι

$$p^2 = \frac{S_{21} - \exp(-ik_0 nd)}{\exp(-ik_0 nd)[S_{21} \exp(-ik_0 nd) - 1]} \quad (3.8.13)$$

οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (3.8.11) προκύπτει τελικά

$$S_{21}\exp(-2ik_0nd) + (S_{11}^2 - S_{21}^2 - 1)\exp(-ik_0nd) + S_{21} = 0 \quad (3.8.14)$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, το άθροισμα των οποίων είναι

$$\exp(ik_0nd) + \exp(-ik_0nd) = \frac{S_{21}^2 - S_{11}^2 + 1}{S_{21}} \quad (3.8.15)$$

Δεδομένου ότι $\exp(ik_0nd) + \exp(-ik_0nd) = 2\cos(k_0nd)$, μέσω της παραπάνω σχέσης είναι δυνατό να προσδιορισθεί ο (ενεργός) δείκτης διάθλασης της πλάκας

$$n = \frac{1}{k_0d} \cos^{-1} \left(\frac{S_{21}^2 - S_{11}^2 + 1}{2S_{21}} \right) \quad (3.8.16)$$

Με παρόμοια διαδικασία από την (3.8.11) είναι

$$\exp(-2ik_0nd) = \frac{S_{11} - p}{p(S_{11}p - 1)} \quad (3.8.17)$$

και με αντικατάσταση στη (3.8.12) λαμβάνουμε την εξίσωση

$$S_{11}p^2 + (S_{21}^2 - S_{11}^2 - 1)p + S_{11} = 0 \quad (3.8.18)$$

Δεδομένου ότι $p = \frac{z-1}{z+1}$ προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση για τη σύνθετη αντίσταση z

$$(S_{21}^2 + S_{11}^2 - 1)z^2 + (S_{11} + 1)^2 - S_{21}^2 = 0 \quad (3.8.19)$$

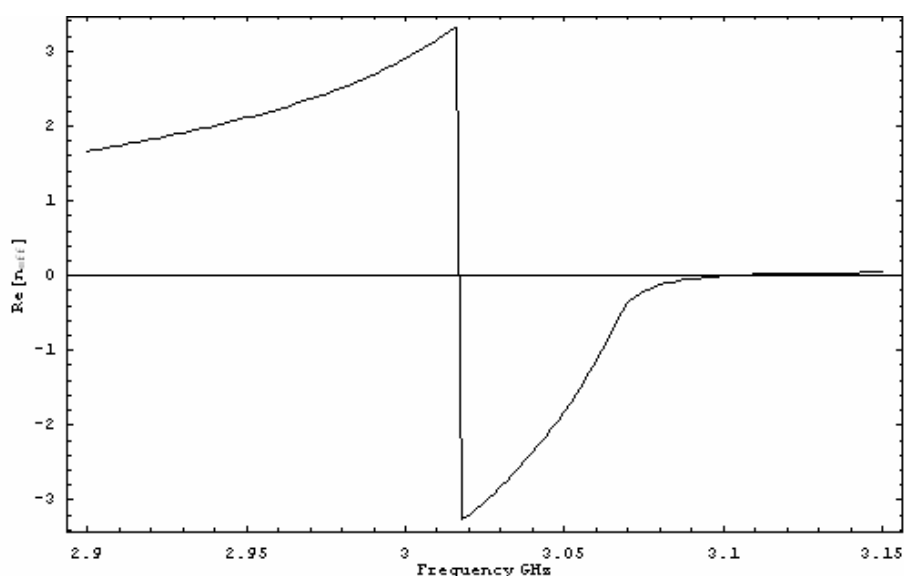
από την οποία καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$z = \pm \sqrt{\frac{S_{21}^2 - (S_{11} + 1)^2}{S_{21}^2 + S_{11}^2 - 1}} \quad (3.8.20)$$

Οι σχέσεις (3.8.16) και (3.8.20) περιγράφουν την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά της πλάκας, αλλά είναι σύνθετες εκφράσεις με πολλαπλούς κλάδους, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση κατά τον υπολογισμό τους. Το πρόβλημα αυτό λύνεται λαμβάνοντας υπόψη τη φυσική σημασία των λύσεων, η οποία απαιτεί να πληρούνται οι συνθήκες $\text{Re}(z) > 0$ και $\text{Im}(n) < 0$, οι οποίες ισχύουν για κάθε παθητικό μέσο διάδοσης με δεδομένη τη χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(i\omega t)$ όλων των πεδιακών ποσοτήτων. Με βάση τις παραμέτρους z και n μπορούν να προσδιοριστούν επίσης η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα μ_{eff} και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά ϵ_{eff} της πλάκας μέσω των σχέσεων $\mu_{\text{eff}} = nz$ και $\epsilon_{\text{eff}} = n/z$. Η μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης γύρω

από τη συχνότητα συντονισμού των 3 GHz, όπως υπολογίζεται από τη σχέση (3.8.16) για $d = 15$ mm, παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.

Παρατηρούμε ότι στο εύρος ζώνης 3.01-3.08 GHz το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης προκύπτει πράγματι αρνητικό, επιβεβαιώνοντας τους θεωρητικούς μας ισχυρισμούς. Ωστόσο, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Σχημάτων 3.9 και 3.14, το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης εμφανίζεται στενότερο και ελαφρώς μετατοπισμένο στην περίπτωση της προσομοίωσης σε σχέση με αυτό που υπολογίζεται από την αναλυτική προσεγγιστική μέθοδο (2.95-3.05 GHz). Επίσης, η ένταση του φαινομένου είναι ελαφρώς μειωμένη, αφού στο Σχήμα 3.9 ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές έως και -4.



Σχήμα 3.14: Δείκτης διάθλασης του μέσου όπως υπολογίζεται από τα δεδομένα της προσομοίωσης.

Σε γενικές γραμμές όμως, εκτός από αυτές τις μικρές ποσοτικές διαφοροποιήσεις, ο δείκτης διάθλασης του μέσου διάδοσης παρουσιάζει την επιθυμητή συμπεριφορά λαμβάνοντας αρνητικές τιμές γύρω από τη συχνότητα συντονισμού και οι αποκλίσεις της προσομοίωσης από την αναλυτική προσέγγιση είναι μικρές. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο στη συχνότητα συντονισμού των 3 GHz είναι $\lambda_h = 100$ mm, επομένως αρκετά μεγαλύτερο από τις διαμέτρους των σφαιρών που αποτελούν το μεταϋλικό ($2a_1 = 10$ mm, $2a_2 = 14.1$ mm), όπως απαιτεί η θεωρία του ενεργού μέσου (effective medium theory).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πλήρης λύση του προβλήματος πολλαπλής σκέδασης από το σύνθετο μεταϋλικό

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήθηκε η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά της σύνθετης δομής του πλέγματος διηλεκτρικών σφαιρών ακολουθώντας αναλυτικές προσεγγιστικές μεθόδους, καθώς και με τη βοήθεια προσομοίωσης, τα αποτελέσματα της οποίας επιβεβαίωσαν τους αρχικούς μας ισχυρισμούς. Η αναλυτική προσέγγιση βασίστηκε στη θεώρηση των σφαιρών ως ισοδύναμων ηλεκτρικών και μαγνητικών διπόλων καταλήγοντας σε αναλυτικές εκφράσεις για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά και ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών. Οι παραπάνω ποσότητες προέκυψαν αρνητικές ταυτόχρονα στο ίδιο εύρος ζώνης συχνοτήτων οδηγώντας στην εμφάνιση αρνητικού δείκτη διάθλασης, δηλαδή του ζητούμενου μεταϋλικού. Στη συνέχεια ακολούθησε αριθμητική προσομοίωση της διάταξης μέσω του λογισμικού πακέτου HFSS (High Frequency Structures Simulator) λαμβάνοντας υπόψη τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και συνυπολογίζοντας υψηλότερης τάξης συνεισφορές. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης επιβεβαίωσαν ποιοτικά τους αρχικούς μας ισχυρισμούς με τη διαφορά ότι το εύρος ζώνης στο οποίο προέκυψε αρνητικός δείκτης διάθλασης ήταν μικρότερο από αυτό που υπολογίστηκε με αναλυτικές μεθόδους. Ωστόσο, η ανάλυση της υπό εξέταση δομής με προσεγγιστικές αναλυτικές μεθόδους αγνοεί τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα σε περίπτωση που το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο περιβάλλον μέσο είναι αρκετά μεγαλύτερο της σταθεράς του πλέγματος των σφαιρών. Για το λόγο αυτό τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας χρειάζεται να επιβεβαιωθούν από τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης, σύμφωνα με την οποία σε κάθε σφαίρα το προσπίπτον πεδίο είναι το άθροισμα όλων των κυμάτων που σκεδάζονται από τις υπόλοιπες σφαίρες. Η θεωρία της πολλαπλής σκέδασης αποδίδει επακριβώς τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και παρουσιάζεται αναλυτικά στην παρούσα ενότητα.

4.1 Ανάλυση προσπίπτοντος πεδίου

Θεωρούμε ότι το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο στο σύνθετο υπό μελέτη μεταλλικό, που αποτελείται από ένα κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, έχει τη γενική μορφή ενός επιπέδου κύματος που διαδίδεται σε ένα ομογενές μέσο με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r(\omega)$ και μαγνητική διαπερατότητα $\mu_r(\omega)$, επομένως δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.1.1)$$

όπου $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}} \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)}$ το κυματόνισμα διάδοσης και $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{p}} E_0$ το διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου. Στην παραπάνω σχέση, όπως και σε όλες τις εκφράσεις των ΗΜ πεδίων του παρόντος κεφαλαίου της διατριβής, θεωρήθηκε χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-i\omega t)$, η οποία παραλείπεται στα επόμενα.

Το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται ως ανάπτυγμα σε σφαιρικές συντεταγμένες προκειμένου να διευκολύνει τους υπολογισμούς στην ανάλυση που ακολουθεί. Η ανάπτυξη σε σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις γίνεται ως εξής. Το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί την κυματική εξίσωση Helmholtz, όπως και το νόμο του Gauss σε χώρο χωρίς πηγές, επομένως ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}(r) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = 0 \quad (4.1.3)$$

Αν θεωρήσουμε τη βαθμωτή ποσότητα $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, τότε με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{E} + 2\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{E} \quad (4.1.4)$$

προκύπτει ότι

$$(\nabla^2 + k^2) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} + k^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.5)$$

Συνεπώς, η βαθμωτή ποσότητα $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ ικανοποιεί επίσης την εξίσωση Helmholtz και είναι δυνατό να γραφεί στη συνήθη μορφή

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.6)$$

όπου $j_l(kr)$ η σφαιρική συνάρτηση Bessel και $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ η συνήθης σφαιρική αρμονική.

Στην παραπάνω έκφραση επιλέχθηκε ακτινική εξάρτηση της μορφής $j_l(kr)$ γιατί το προσπίπτον κύμα θεωρείται κατευθυνόμενο προς την αρχή των αξόνων, επομένως έχει πεπερασμένη τιμή για $r = 0$. Εντελώς ανάλογα, για την ποσότητα $\mathbf{r} \cdot \mathbf{cB}$:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{cB} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.7)$$

Ορίζουμε τώρα ένα μαγνητικό πολυπολικό πεδίο για το οποίο ισχύουν ταυτόχρονα οι συνθήκες [27]:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{cB}_{lm}^M = \frac{l(l+1)}{k} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.8)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^M = 0 \quad (4.1.9)$$

όπου η παρουσία του παράγοντα $l(l+1)/k$ θα γίνει εμφανής στη συνέχεια. Το ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση (4.1.9) είναι κάθετο στην ακτινική κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{r} και για το λόγο αυτό το μαγνητικό πολυπολικό πεδίο ονομάζεται και εγκάρσιο ηλεκτρικό (transverse electric, TE) πολυπολικό πεδίο.

Από την εφαρμογή του νόμου του Faraday προκύπτει ότι $\nabla \times \mathbf{E}^M = i\omega \mathbf{B}^M$ οπότε

$$k\mathbf{r} \cdot \mathbf{cB}_{lm}^M = -\frac{ikc}{\omega} \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^M) = -i\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^M) = -i(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{E}^M = \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}^M \quad (4.1.10)$$

όπου \mathbf{L} ο γνωστός από την κβαντομηχανική τελεστής της στροφορμής, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1.11)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.1.8) και (4.1.10) προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο για τα TE κύματα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}_{lm}^M = l(l+1) j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.12)$$

Σημειώνουμε ότι ο τελεστής \mathbf{L} επιδρά μόνο στις γωνιακές μεταβλητές (θ, φ) , επομένως η ακτινική εξάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι της μορφής $j_l(kr)$. Επιπλέον, από την εξίσωση προσδιορισμού των σφαιρικών αρμονικών [29]

$$\mathbf{L}^2 \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.13)$$

από όπου σε συνδυασμό με την (4.1.12) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ηλεκτρικό πεδίο για τα TE κύματα θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{lm}^M = j_l(kr) \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.14)$$

Το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί στο παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{H}_{lm}^M = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^M = -\frac{i}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^M \quad (4.1.15)$$

Οι εξισώσεις (4.1.14) και (4.1.15) προσδιορίζουν πλήρως το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο για τα εγκάρσια ηλεκτρικά (TE) κύματα.

Αντίστοιχα με τα TE κύματα ορίζουμε το εγκάρσιο μαγνητικό πολυπολικό πεδίο (Transverse Magnetic, TM) σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^E = -\frac{l(l+1)}{k} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.16)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm}^E = 0 \quad (4.1.17)$$

Σε αυτή την περίπτωση το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στην ακτινική κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{r} . Ακολουθώντας εντελώς ανάλογη διαδικασία με την περίπτωση των TE κυμάτων καταλήγουμε στις σχέσεις προσδιορισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για τα εγκάρσια ηλεκτρικά (TM) κύματα.

$$c\mathbf{B}_{lm}^E = j_l(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.18)$$

$$\mathbf{E}_{lm}^E = \frac{i}{k} \nabla \times c\mathbf{B}_{lm}^E \quad (4.1.19)$$

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε χώρο χωρίς πηγές προκύπτει ως υπέρθεση εγκάρσιων ηλεκτρικών (TE) και εγκάρσιων μαγνητικών (TM) κυμάτων. Στην πολυπολική ανάπτυξη του HM πεδίου παρατηρούμε ότι εμπλέκεται η διανυσματική σφαιρική αρμονική $\mathbf{L}Y_{lm}$ (εξισώσεις 4.1.14, 4.1.18), επομένως για διευκόλυνση στους υπολογισμούς που πρόκειται να ακολουθήσουν ορίζουμε την παρακάτω κανονικοποιημένη μορφή των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών [27]:

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.1.20)$$

όπου με Y_{lm} συμβολίζεται η συνήθης σφαιρική αρμονική. Συνδυάζοντας τους δύο τύπους κυμάτων (TE και TM) το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο γράφεται τελικά στη μορφή:

$$\mathbf{E}(r) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{i}{k} a_{lm}^{0E} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + a_{lm}^{0H} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.1.21)$$

Το αντίστοιχο προσπίπτον μαγνητικό πεδίο εκφράζεται ανάλογα:

$$\mathbf{H}(r) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(a_{lm}^{0E} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) - \frac{i}{k} a_{lm}^{0H} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.1.22)$$

όπου $\Omega = (\theta, \varphi)$ οι γωνιακές μεταβλητές του διανύσματος θέσης \mathbf{r} στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Οι συντελεστές πολυπολικής ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου a_{lm}^{0E} και a_{lm}^{0H} που περιγράφουν τα εγκάρσια μαγνητικά (Transverse Magnetic, TM) και τα

εγκάρσια ηλεκτρικά (Transverse Electric, TE) κύματα αντίστοιχα προκύπτουν από τη μορφή του προσπίπτοντος πεδίου και τις συνθήκες ορθογωνιότητας στις οποίες υπακούουν οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις X_{lm} ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις [27]:

$$\int \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.1.23)$$

$$\int [\nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega = 0 \quad (4.1.24)$$

όπου $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ η στοιχειώδης στερεά γωνία με $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, ενώ με το σύμβολο * υποδηλώνεται ο συζυγής μιγαδικός. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.1.21) με $\mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega)$, ολοκληρώνοντας σε όλη τη στερεά γωνία και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1.23) και (4.1.24), λαμβάνουμε την παρακάτω σχέση, μέσω της οποίας προσδιορίζεται ο συντελεστής a_{lm}^{OH} :

$$j_l(kr) a_{l'm'}^{OH} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.1.25)$$

όπου για το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο ισχύει: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (4.1.25) θεωρούμε την ανάπτυξη της ποσότητας $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ σε σφαιρικά κύματα σύμφωνα με τη σχέση [33]:

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega_k) \quad (4.1.26)$$

όπου $\Omega_k = (\theta_k, \varphi_k)$ οι γωνιακές μεταβλητές που αντιστοιχούν στο μοναδιαίο διάνυσμα διάδοσης $\hat{\mathbf{k}}$. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να εκφραστεί η διανυσματική σφαιρική αρμονική $\mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega)$ συναρτήσει των συνήθων σφαιρικών αρμονικών $Y_{l'm'}(\Omega)$ προκειμένου να γίνει χρήση της γνωστής ταυτότητας που χαρακτηρίζει τις σφαιρικές αρμονικές:

$$\int Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.1.27)$$

Για το σκοπό αυτό επαναλαμβάνουμε τη σχέση ορισμού των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών:

$$\sqrt{l(l+1)} \mathbf{X}_{lm} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} i \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \quad (4.1.28)$$

όπου οι συνήθειες σφαιρικές αρμονικές με τη σειρά τους ορίζονται από τη σχέση:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (4.1.29)$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\sqrt{l(l+1)}\mathbf{X}_{lm} = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{m}{\sin\theta}Y_{lm}(\Omega) - \hat{\boldsymbol{\phi}}i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta}e^{im\varphi} \quad (4.1.30)$$

Ο υπολογισμός της παραγώγου $\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta}$ γίνεται με χρήση των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων που ικανοποιούν οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre [29]

$$\sin\theta\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} = \sin\theta P_l^{m+1}(\cos\theta) + m\cos\theta P_l^m(\cos\theta) \quad (4.1.31)$$

$$2m\cos\theta P_l^m(\cos\theta) = -\sin\theta [P_l^{m+1}(\cos\theta) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(\cos\theta)] \quad (4.1.32)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\frac{\partial P_l^m(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2}[P_l^{m+1}(\cos\theta) - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(\cos\theta)] \quad (4.1.33)$$

Με αντικατάσταση της (4.1.33) στην (4.1.30) και τη χρήση της σχέσης ορισμού των Y_{lm} (4.1.29) λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$\sqrt{l(l+1)}\mathbf{X}_{lm} = \hat{\boldsymbol{\phi}}i\left[e^{i\varphi}\alpha_l^{-m}Y_{l,m-1}(\Omega) - e^{-i\varphi}\alpha_l^m Y_{l,m+1}(\Omega)\right] - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{m}{\sin\theta}Y_{lm}(\Omega) \quad (4.1.34)$$

όπου για ευκολία στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν ορίζονται οι συντελεστές α_l^m σύμφωνα με τη σχέση:

$$\alpha_l^m = \frac{1}{2}[(l-m)(l+m+1)]^{1/2} \quad (4.1.35)$$

Η σχέση (4.1.34) μπορεί να εκφραστεί και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με χρήση των γνωστών σχέσεων για τα μοναδιαία διανύσματα:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\varphi\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\sin\varphi\cos\theta - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta \quad (4.1.36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}}\sin\varphi + \hat{\mathbf{y}}\cos\varphi \quad (4.1.37)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.1.34) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sqrt{l(l+1)}\mathbf{X}_{lm} = & \hat{\mathbf{x}}\left[\alpha_l^m Y_{l,m+1}(\Omega) + \alpha_l^{-m} Y_{l,m-1}(\Omega)\right] - \hat{\mathbf{y}}i\left[\alpha_l^m Y_{l,m+1}(\Omega) - \alpha_l^{-m} Y_{l,m-1}(\Omega)\right] \\ & + \hat{\mathbf{z}}mY_{l,m}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

όπου έγινε χρήση της παρακάτω αναδρομικής σχέσης στην οποία υπακούουν οι σφαιρικές αρμονικές:

$$\frac{m\cos\theta}{\sin\theta}Y_{lm}(\Omega) = -\left(e^{i\varphi}\alpha_l^{-m}Y_{l,m-1}(\Omega) + e^{-i\varphi}\alpha_l^m Y_{l,m+1}(\Omega)\right) \quad (4.1.39)$$

Οι σχέσεις (4.1.34) και (4.1.38) είναι ισοδύναμες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με την περίπτωση. Ο προσδιορισμός των συντελεστών πολυπολικής ανάπτυξης

a_{lm}^{OH} για τα εγκάρσια ηλεκτρικά (TE) κύματα γίνεται μέσω της σχέσεως (4.1.25), στην οποία αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (4.1.26), (4.1.38) και εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών (σχέση 4.1.27) λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& j_{l'}(kr) a_{l'm'}^{OH} = \\
& = \frac{4\pi i^{l'} j_{l'}(kr)}{\sqrt{l'(l'+1)}} \left\{ E_{0x} \left[\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'm'+1}^*(\Omega_k) + \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'm'-1}^*(\Omega_k) \right] + i E_{0y} \left[\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'm'+1}^*(\Omega_k) - \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'm'-1}^*(\Omega_k) \right] \right. \\
& + E_{0z} m' Y_{l'm'}^*(\Omega_k) \left. \right\} = \frac{4\pi i^{l'} j_{l'}(kr) (-1)^{m'+1}}{\sqrt{l'(l'+1)}} \left[E_{0x} \left(\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'-(m'+1)}(\Omega_k) + \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'-(m'-1)}(\Omega_k) \right) \right. \\
& + i E_{0y} \left(\alpha_{l'}^{m'} Y_{l'-(m'+1)}(\Omega_k) - \alpha_{l'}^{-m'} Y_{l'-(m'-1)}(\Omega_k) \right) - E_{0z} m' Y_{l'-m'}(\Omega_k) \left. \right] \quad (4.1.40)
\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της γνωστής ιδιότητας των σφαιρικών αρμονικών

$$Y_{lm}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l-m}(\Omega) \quad (4.1.41)$$

Συνεπώς, οι συντελεστές πολυπολικής ανάπτυξης a_{lm}^{OH} του προσπίπτοντος H/M πεδίου δίνονται τελικά από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
a_{lm}^{OH} & = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[E_{0x} \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) \right. \\
& + i E_{0y} \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) - E_{0z} m Y_{l-m}(\Omega_k) \left. \right] \quad (4.1.42)
\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{x}}E_{0x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y} + \hat{\mathbf{z}}E_{0z}$ το διάνυσμα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου και $\Omega_k = (\theta_k, \varphi_k)$ οι γωνιακές μεταβλητές του διανύσματος διάδοσης. Η παρπάνω σχέση εκφράζεται σε πιο συνεπτυγμένη μορφή, η οποία διευκολύνει τους υπολογισμούς [34]:

$$a_{lm}^{OH} = \mathbf{A}_{lm}^{OH} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (4.1.43)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{lm}^{OH} & = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) \hat{\mathbf{x}} + \right. \\
& + i \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) \hat{\mathbf{y}} - m Y_{l-m}(\Omega_k) \hat{\mathbf{z}} \left. \right] \quad (4.1.44)
\end{aligned}$$

Οι συντελεστές \mathbf{A}_{lm}^{OH} μπορούν να εκφραστούν και στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{lm}^{OH} & = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\left(\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_k) + m \sin\theta Y_l^{-m}(\Omega_k) \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \right. \\
& + i \left(\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_k) \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \left. \right] \quad (4.1.45)
\end{aligned}$$

Με ακριβώς παρόμοια διαδικασία προκύπτουν οι συντελεστές πολυπολικής ανάπτυξης a_{lm}^{OE} που προσδιορίζουν τα εγκάρσια μαγνητικά (TM κύματα) σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} j_{l'}(kr) a_{l'm'}^{OE} = \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.1.46)$$

Το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu_r} \nabla \times [\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})] = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega\mu_0\mu_r} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.1.47)$$

όπου για την εξαγωγή της τελευταίας έγινε χρήση της γνωστής διανυσματικής ταυτότητας

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = \nabla f \times \mathbf{G} + f \cdot \nabla \times \mathbf{G} \quad (4.1.48)$$

Με αντικατάσταση της (4.1.47) στην (4.1.46) προκύπτει η σχέση

$$j_{l'}(kr) a_{l'm'}^{OE} = \frac{1}{k} \int (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\Omega \quad (4.1.49)$$

η οποία είναι της ίδιας μορφής με τη σχέση προσδιορισμού (4.1.25) των συντελεστών a_{lm}^{OH} αν το \mathbf{E}_0 αντικατασταθεί με $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$. Επομένως, οι συντελεστές πολυπολικής ανάπτυξης για τα εγκάρσια μαγνητικά κύματα δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$a_{lm}^{OE} = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{k\sqrt{l(l+1)}} \left[\left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)_x \right. \\ \left. + i \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)_y - m Y_{l-m}(\Omega_k) (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)_z \right] \quad (4.1.50)$$

Η έκφραση αυτή γράφεται και σε συνεπτυγμένη μορφή:

$$a_{lm}^{OE} = \mathbf{A}_{lm}^{OE} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (4.1.51)$$

όπου για τον προσδιορισμό των συντελεστών \mathbf{A}_{lm}^{OE} λαμβάνεται υπόψη η μορφή των συνιστωσών του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) \hat{\mathbf{x}} - (k_x E_{0z} - k_z E_{0x}) \hat{\mathbf{y}} + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \hat{\mathbf{z}} \quad (4.1.52)$$

Με αντικατάσταση της (4.1.52) στην (4.1.50) προκύπτει τελικά ότι

$$\mathbf{A}_{lm}^{OE} = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{k\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \left[ik_z \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) + mk_y Y_{l-m}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\mathbf{x}} \right. \\ \left. - \left[k_z \left(\alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right) + mk_x Y_{l-m}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\mathbf{y}} \right. \\ \left. + \left[(k_y - ik_x) \alpha_l^m Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + (k_y + ik_x) \alpha_l^{-m} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} \right\} \quad (4.1.53)$$

ή εναλλακτικά στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{A}_{lm}^{0E} = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ i \left[\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \right. \\ \left. - \left[\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) + m \sin\theta Y_{l-m}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \quad (4.1.54)$$

Ο προσδιορισμός των συντελεστών a_{lm}^{0H} και a_{lm}^{0E} από τις σχέσεις (4.1.43) και (4.1.51) γίνεται άμεσα συναρτήσει του διανύσματος διάδοσης \mathbf{k} και του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}_0 και συνεπώς πλεονεκτεί των σχέσεων (4.1.42) και (4.1.50), οι οποίες είναι δύσχρηστες στους υπολογισμούς.

Στο σημείο αυτό έχουμε προσδιορίσει πλήρως το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως ανάπτυγμα σφαιρικών κυμάτων (υπέρθεση TE και TM ρυθμών). Οι εκφράσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για τον προσδιορισμό των σκεδαζόμενων κυμάτων από το πλέγμα των διηλεκτρικών σφαιρών που αποτελούν το υπό εξέταση μεταλλικό, σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης.

4.2 Σκέδαση από μεμονωμένη σφαίρα

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της σκέδασης από το σύνθετο μεταϋλικό, το οποίο θα είναι ένα τρισδιάστατο πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, θα εξετάσουμε το θεμελιώδες πρόβλημα της σκέδασης της ακτινοβολίας από μία μεμονωμένη σφαίρα. Θεωρούμε ότι η σφαίρα έχει ακτίνα a , το κέντρο της βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων και αποτελείται από υλικό με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_s(\omega)$ και μαγνητική διαπερατότητα μ_s , ενώ το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι επίπεδο κύμα της μορφής $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r})$. Λόγω σκέδασης της ακτινοβολίας από την επιφάνεια της σφαίρας, το πεδίο εκτός της σφαίρας αποτελείται από το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται ως ανάπτωμα σφαιρικών κυμάτων σύμφωνα με τη σχέση (4.1.21). Παρόμοια μορφή θα έχουν τόσο το σκεδαζόμενο όσο και το μεταδιδόμενο ηλεκτρικό πεδίο εντός της σφαίρας. Ειδικότερα, το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{i}{k} \mathbf{a}_{lm}^{+E} \nabla \times \mathbf{h}_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + \mathbf{a}_{lm}^{+H} \mathbf{h}_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{H}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\mathbf{a}_{lm}^{+E} \mathbf{h}_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) - \frac{i}{k} \mathbf{a}_{lm}^{+H} \nabla \times \mathbf{h}_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.2.2)$$

Τα παραπάνω αναπτύγματα είναι της ίδιας μορφής με τα αναπτύγματα για το προσπίπτον πεδίο με τη διαφορά ότι οι συναρτήσεις Bessel που εκφράζουν την ακτινική εξάρτηση του πεδίου αντικαθίστανται από συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους. Οι τελευταίες επιλέγονται επειδή παρουσιάζουν την κατάλληλη ασυμπτωτική συμπεριφορά για ένα εξερχόμενο σφαιρικό κύμα, αφού όταν $r \rightarrow \infty$: $\mathbf{h}_l^{(1)}(kr) \approx (-i)^l \frac{\exp(ikr)}{ikr}$ και αντιστοιχούν σε χρονική εξάρτηση των πεδίων της μορφής $\exp(-i\omega t)$. Αν είχε επιλεγεί χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(i\omega t)$ θα επιλέγονταν συναρτήσεις Hankel δευτέρου είδους. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εντός της διηλεκτρικής σφαίρας (μεταδιδόμενο) έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E}_{\text{tr}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{i}{k_s} \mathbf{b}_{lm}^E \nabla \times \mathbf{j}_l(k_s r) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + \mathbf{b}_{lm}^H \mathbf{j}_l(k_s r) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tr}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_s \epsilon_0}{\mu_s \mu_0}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{i}{k_s} \mathbf{b}_{lm}^E \nabla \times \mathbf{j}_l(k_s r) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + \mathbf{b}_{lm}^H \mathbf{j}_l(k_s r) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right) \quad (4.2.4)$$

όπου $k_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s \epsilon_0 \mu_0}$ η σταθερά διάδοσης εντός της σφαίρας.

Οι συντελεστές ανάπτυξης των πεδίων $\mathbf{a}_{lm}^{+E}, \mathbf{a}_{lm}^{+H}, \mathbf{b}_{lm}^E, \mathbf{b}_{lm}^H$ προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της σφαίρας, οι οποίες επιβάλλουν τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του συνολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Επομένως για $r = a$ οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{E}_{in} + \mathbf{E}_{sc}) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{tr} \quad (4.2.5)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{H}_{in} + \mathbf{H}_{sc}) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{tr} \quad (4.2.6)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις δίνει ότι:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{a}_{lm}^{0E} \hat{\mathbf{r}} \times [\nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] + \mathbf{a}_{lm}^{0H} j_l(kr) \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\}_{r=a} + \\ & + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{a}_{lm}^{+E} \hat{\mathbf{r}} \times [\nabla \times h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] + \mathbf{a}_{lm}^{+H} h_l^{(1)}(kr) \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\}_{r=a} = \\ & = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k_s} \mathbf{b}_{lm}^E \hat{\mathbf{r}} \times [\nabla \times j_l(k_s r) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] + \mathbf{b}_{lm}^H j_l(k_s r) \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\}_{r=a} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της σχέσης (4.2.7) με $\mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε ως προς τη στερεά γωνία Ω , λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω σχέσεις ορθογωνιότητας τις οποίες ικανοποιούν οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές [35]:

$$\int [\nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega)] d\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(kr)] \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.2.8)$$

$$\int \mathbf{X}_{l'm'}^*(\Omega) \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] d\Omega = 0 \quad (4.2.9)$$

όπου $f_l(kr)$ είναι γραμμικός συνδυασμός σφαιρικών συναρτήσεων Bessel $j_l(kr)$ και Hankel $h_l^{(1)}(kr)$. Προκύπτει τελικά η εξίσωση:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_{lm}^E \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)]_{r=a} - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{a}_{lm}^{+E} \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(kr)]_{r=a} = \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{a}_{lm}^{0E} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)]_{r=a} \quad (4.2.10)$$

Με παρόμοια διαδικασία προκύπτει ότι:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_s}{\mu_s}} \frac{1}{k_s} \mathbf{b}_{lm}^H \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s r)]_{r=a} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{k} \mathbf{a}_{lm}^{+H} \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(kr)]_{r=a} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{k} \mathbf{a}_{lm}^{0H} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)]_{r=a}$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\mu \mathbf{b}_{lm}^H \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s r)]_{r=a} - \mu_s \mathbf{a}_{lm}^{+H} \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(kr)]_{r=a} = \mu_s \mathbf{a}_{lm}^{0H} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)]_{r=a} \quad (4.2.11)$$

Ωστόσο, για τον προσδιορισμό των συντελεστών πολυπολικής ανάπτυξης $\mathbf{a}_{lm}^{+E}, \mathbf{a}_{lm}^{+H}, \mathbf{b}_{lm}^E, \mathbf{b}_{lm}^H$ χρειάζονται δύο επιπλέον εξισώσεις εκτός από τις (4.2.10) και (4.2.11). Για το σκοπό

αυτό τα αναπτύγματα του ηλεκτρικού πεδίου των εξισώσεων (4.1.21), (4.2.1-4.2.4) γράφονται στην ισοδύναμη γενική μορφή:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ -\frac{1}{kr} a_{lm}^E \sqrt{l(l+1)} f_l(kr) \mathbf{Y}_{lm}(\Omega) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{i}{kr} a_{lm}^E \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(kr)] \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + a_{lm}^H f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\} \quad (4.2.12)$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας [27]:

$$\nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) = \frac{i}{r} \sqrt{l(l+1)} f_l(kr) \mathbf{Y}_{lm}(\Omega) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(kr)] \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \quad (4.2.13)$$

Στη σχέση (4.2.12) είναι $f_l(kr) = j_l(kr)$ για το προσπίπτον και το μεταδιδόμενο ηλεκτρικό πεδίο, ενώ $f_l(kr) = h_l^{(1)}(kr)$ για το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Επίσης, $k = k_s$ για το ηλεκτρικό πεδίο εντός της σφαίρας (μεταδιδόμενο). Επειδή οι οριακές συνθήκες αφορούν στη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του Η/Μ πεδίου, οι οποίες είναι κάθετες στο ακτινικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$, το εφαπτομενικό Η/Μ πεδίο είναι της μορφής:

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{kr} a_{lm}^E \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(kr)] \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] + a_{lm}^H f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\} \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ a_{lm}^E f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) - \frac{i}{kr} a_{lm}^H \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(kr)] \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] \right\} \quad (4.2.15)$$

όπου $\epsilon = \epsilon_s$, $\mu = \mu_s$ στη σχέση (4.2.15) για το μαγνητικό πεδίο εντός της σφαίρας, ενώ με το δείκτη tan υποδηλώνεται ότι πρόκειται για τις εφαπτομενικές συνιστώσες των Η/Μ πεδίων (tangential components). Επομένως, η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών στην επιφάνεια της σφαίρας οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις:

$$a_{lm}^{0H} j_l(k\alpha) + a_{lm}^{+H} h_l^{(1)}(k\alpha) = b_{lm}^H j_l(k_s \alpha) \quad (4.2.16)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[a_{lm}^{0E} j_l(k\alpha) + a_{lm}^{+E} h_l^{(1)}(k\alpha) \right] = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\mu_s}} b_{lm}^E j_l(k_s \alpha) \quad (4.2.17)$$

Για την εξαγωγή των δύο παραπάνω σχέσεων έγινε χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας (4.2.9) και (4.1.23) των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών. Συνεπώς, οι άγνωστοι συντελεστές πολυπολικής ανάπτυξης a_{lm}^{+E} , a_{lm}^{+H} , b_{lm}^E , b_{lm}^H προσδιορίζονται πλήρως από το σύστημα των εξισώσεων (4.2.10), (4.2.11), (4.2.16) και (4.2.17). Ειδικότερα, οι συντελεστές ανάπτυξης a_{lm}^{+E} και b_{lm}^E των εγκάρσιων μαγνητικών ρυθμών (TM), οι οποίοι προσδιορίζουν το σκεδαζόμενο και μεταδιδόμενο Η/Μ πεδίο αντίστοιχα, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.2.10) και (4.2.17). Ομοίως, οι συντελεστές a_{lm}^{+H}

και b_{lm}^E που προσδιορίζουν τα εγκάρσια ηλεκτρικά κύματα (TE) προσδιορίζονται από τις εξισώσεις (4.2.11) και (4.2.16). Παρατηρούμε ότι υπάρχει αποσύζευξη των εξισώσεων προσδιορισμού των TE και TM κυμάτων. Οι συντελεστές b_{lm}^E και b_{lm}^E που καθορίζουν το Η/Μ πεδίο εντός της σφαίρας δε θα μας απασχολήσουν στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν στην παρούσα ενότητα. Οι συντελεστές a_{lm}^{+E} και a_{lm}^{+H} δίνονται τελικά από τις σχέσεις:

$$a_{lm}^{+E} = T_l^E \cdot a_{lm}^{OE} \quad (4.2.18)$$

$$a_{lm}^{+H} = T_l^H \cdot a_{lm}^{OH} \quad (4.2.19)$$

όπου οι πίνακες σκέδασης T_l^E και T_l^H ορίζονται από τις σχέσεις:

$$T_l^E = \frac{\varepsilon_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k \alpha)]_{r=\alpha} - \varepsilon j_l(k \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha}}{\varepsilon h_l^{(1)}(k \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha} - \varepsilon_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(k \alpha)]_{r=\alpha}} \quad (4.2.20)$$

$$T_l^H = \frac{\mu_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k \alpha)]_{r=\alpha} - \mu j_l(k \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha}}{\mu h_l^{(1)}(k \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha} - \mu_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(k \alpha)]_{r=\alpha}} \quad (4.2.21)$$

και οι συντελεστές ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου a_{lm}^{OE} και a_{lm}^{OH} υπολογίζονται σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα (σχέσεις 4.1.46 και 4.1.55).

Υπό την προϋπόθεση ότι το γινόμενο ka δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από τη μονάδα, ένας πεπερασμένος αριθμός μερικών κυμάτων, που αντιστοιχούν σε $l \leq l_{\max}$ στα αναπτύγματα της μορφής (4.2.12), είναι αρκετός για την περιγραφή του σκεδαζόμενου πεδίου. Στην πράξη επομένως θεωρούμε ότι $a_{lm}^{+E} = 0$ και $a_{lm}^{+H} = 0$ για $l > l_{\max}$, όπου η τιμή του l_{\max} καθορίζεται από την ανάγκη σύγκλισης του άπειρου αθροίσματος του αναπτύγματος σφαιρικών κυμάτων για το σκεδαζόμενο πεδίο (σχέση 4.2.1).

Οι πίνακες σκέδασης για την απλή περίπτωση της μεμονωμένης σφαίρας θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της παρούσας ενότητας για τους υπολογισμούς των σκεδαζόμενων πεδίων από το πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, που συνθέτουν το υπό μελέτη μεταλλικό.

4.3 Σκέδαση από ένα επίπεδο σφαιρών

Πριν μελετήσουμε τη σκέδαση από το πλέγμα των διηλεκτρικών σφαιρών που αποτελούν το μεταλλικό, θα εξετάσουμε το φαινόμενο της σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών και στη συνέχεια θα επεκταθούμε στη μελέτη της σκέδασης από περισσότερα επίπεδα. Θεωρούμε αρχικά ένα επίπεδο από μη επικαλυπτόμενες σφαίρες στη θέση $z = 0$, οι οποίες είναι περιοδικά διατεταγμένες και τα κέντρα τους καταλαμβάνουν τις θέσεις ενός διδιάστατου τετραγωνικού πλέγματος Bravais, που ορίζεται από το γενικό διάνυσμα θέσης:

$$\mathbf{R}_n = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 \quad (4.3.1)$$

όπου $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ και $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ τα θεμελιώδη διανύσματα στο επίπεδο xy , τα οποία στην περίπτωσή μας είναι: $\mathbf{a}_1 = p\hat{x}$, $\mathbf{a}_2 = p\hat{y}$, ενώ με p συμβολίζεται η σταθερά του πλέγματος. Οι σφαίρες έχουν όλες την ίδια ακτίνα a και την ίδια διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_s(\omega)$ και βρίσκονται ενσωματωμένες σε ένα περιβάλλον μέσο με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon(\omega)$.

Για την ανάλυση περιοδικών διατάξεων, όπως η υπό μελέτη διάταξη των σφαιρών, διευκολύνει η εισαγωγή της έννοιας του αντιστρόφου πλέγματος. Το αντίστροφο πλέγμα (reciprocal lattice) ορίζεται ως το σύνολο όλων των κυματανυσμάτων \mathbf{k} από τα οποία προκύπτουν επίπεδα κύματα με την περιοδικότητα ενός δεδομένου πλέγματος Bravais. Η παραπάνω απαίτηση εκφράζεται μαθηματικά με τη σχέση [36, 37]:

$$e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{R}_n)} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.3.2)$$

η οποία πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των διανυσμάτων \mathbf{r} και \mathbf{R}_n .

Συνεπώς, το αντίστροφο πλέγμα ορίζεται ως το σύνολο των κυματανυσμάτων που ικανοποιούν τη σχέση

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_n} = 1 \quad (4.3.3)$$

για όλα τα διανύσματα θέσης \mathbf{R}_n ενός συγκεκριμένου πλέγματος Bravais (ευθύ πλέγμα).

Αν τώρα θεωρήσουμε τα θεμελιώδη διανύσματα του αντιστρόφου πλέγματος $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ τότε αυτά ορίζονται από τη σχέση:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad (4.3.4)$$

όπου δ_{ij} το γνωστό "δέλτα" του Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Τότε, το τυχαίο κυμαάνυσμα \mathbf{k} μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων \mathbf{b}_i :

$$\mathbf{k} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 \quad (4.3.6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.1) και (4.3.6) είναι προφανές ότι επαληθεύεται η σχέση ορισμού του αντιστρόφου πλέγματος (σχέση 4.3.3). Από τη σχέση (4.3.4), τα θεμελιώδη διανύσματα για το αντίστροφο τετραγωνικό πλέγμα προκύπτουν:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{p} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{p} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.3.7)$$

Θεωρούμε ότι στο παραπάνω επίπεδο σφαιρών προσπίπτει επίπεδο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση (4.1.1), με $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_z)$, όπου $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$ η συνιστώσα του κυματανύσματος παράλληλη στο επίπεδο των σφαιρών και k_z η συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο σφαιρών. Τότε $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n) = \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n)$.

Λόγω της διδιάστατης περιοδικότητας του επιπέδου των σφαιρών, το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα γράφεται στην ακόλουθη μορφή [38, 39]:

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{b}_{lm}^{+E} \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) + \mathbf{b}_{lm}^{+H} \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) \right\} \quad (4.3.8)$$

$$\mathbf{H}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \mathbf{b}_{lm}^{+E} \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) - \frac{i}{k} \mathbf{b}_{lm}^{+H} \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) \right\} \quad (4.3.9)$$

όπου $\mathbf{r}_n = \mathbf{r} - \mathbf{R}_n$ και $\Omega_n = (\theta_n, \varphi_n)$ οι γωνιακές μεταβλητές του διανύσματος \mathbf{r}_n , το οποίο έχει την αρχή του στο κέντρο της σφαίρας που βρίσκεται στη θέση \mathbf{R}_n του πλέγματος. Η παραπάνω σχέση εκφράζει το γεγονός ότι το σκεδαζόμενο κύμα είναι το άθροισμα των εξερχόμενων σφαιρικών κυμάτων με αρχή τα κέντρα των σφαιρών του επιπέδου, σύμφωνα με το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης. Επιπλέον, λόγω της περιοδικής διάταξης των σφαιρών, το κύμα το οποίο σκεδαζείται από τη σφαίρα που βρίσκεται στη θέση \mathbf{R}_n διαφέρει από το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα στην αρχή των συντεταγμένων ($\mathbf{R}_n = 0$)

μόνο κατά έναν παράγοντα φάσης $\exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}})$, όπως προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος Bloch που ισχύει για τις περιοδικές διατάξεις.

Οι συντελεστές b_{lm}^{+E}, b_{lm}^{+H} καθορίζουν το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα που βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, δηλαδή στη θέση όπου $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = 0$, επομένως ο προσδιορισμός τους γίνεται εύκολα από το ολικό προσπίπτον κύμα στη σφαίρα αυτή. Ωστόσο, το ολικό προσπίπτον κύμα στη σφαίρα στην αρχή των συντεταγμένων αποτελείται από το αρχικό προσπίπτον επίπεδο κύμα, καθώς και από τα κύματα που σκεδάζονται από όλες τις υπόλοιπες σφαίρες του επιπέδου πλην της σφαίρας στην αρχή. Τα εξερχόμενα κύματα από όλες τις υπόλοιπες σφαίρες θα τα συμβολίσουμε με $\mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}), \mathbf{H}'_{sc}(\mathbf{r})$ και προκύπτουν από τη σχέση (4.3.8) παραλείποντας τον αντίστοιχο όρο για $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = 0$. Εντούτοις, η μορφή της εξίσωσης (4.3.8) δε διευκολύνει την εφαρμογή των οριακών συνθηκών για τον προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών ανάπτυξης b_{lm}^{+E}, b_{lm}^{+H} . Για το σκοπό αυτό, τα εξερχόμενα κύματα από τις υπόλοιπες σφαίρες γράφονται ως ανάπτυγμα εισερχόμενων σφαιρικών κυμάτων στην αρχή των συντεταγμένων, δηλαδή στην ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} b_{lm}^{\prime E} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + b_{lm}^{\prime H} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\} \quad (4.3.10)$$

Η παραπάνω μορφή είναι αντίστοιχη της σχέσης (4.1.21) για το αρχικό προσπίπτον κύμα. Οι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης $b_{lm}^{\prime E}$ και $b_{lm}^{\prime H}$ είναι δυνατό να εκφραστούν συναρτήσει των συντελεστών b_{lm}^{+E}, b_{lm}^{+H} , οι οποίοι καθορίζουν το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα που βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά σύνολα συντελεστών έχει την ακόλουθη μορφή [39]

$$b_{lm}^{\prime E} = \sum_{l'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} \left(\Omega_{lm;l'm'}^{EE} b_{l'm'}^{+E} + \Omega_{lm;l'm'}^{EH} b_{l'm'}^{+H} \right) \quad (4.3.11)$$

όπου οι πίνακες $\mathbf{\Omega}$ ονομάζονται σταθερές δομής και εξαρτώνται από τη γεωμετρία του επιπέδου των σφαιρών, τη διηλεκτρική συνάρτηση του περιβάλλοντος μέσου $\epsilon(\omega)$, το κυματόνισμα \mathbf{k}_{\parallel} και τη συχνότητα του προσπίπτοντος H/M κύματος, αλλά είναι ανεξάρτητοι από τις ιδιότητες σκέδασης της μεμονωμένης σφαίρας. Αναλυτικοί τύποι για τους πίνακες $\mathbf{\Omega}$ και λεπτομέρειες για τον υπολογισμό τους περιέχονται στην επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

Η σχέση (4.3.11) μπορεί να γραφεί σε μία πιο συμπαγή μορφή, διευκολύνοντας τους υπολογισμούς. Στην πράξη, ένας πεπερασμένος αριθμός μερικών κυμάτων, που

αντιστοιχούν σε $l \leq l_{\max}$ στα αναπτύγματα της μορφής (4.3.10), είναι αρκετός για την περιγραφή του HM πεδίου. Με δεδομένο μάλιστα ότι $-l \leq m \leq l$, σε κάθε τιμή του l αντιστοιχούν $2l + 1$ τιμές του m , οι οποίες διατάσσονται σύμφωνα με το συνήθη τρόπο: (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2) κλπ. Επομένως, ο συνολικός αριθμός τιμών των (l, m) που θα συνεισφέρουν στη διαμόρφωση του HM πεδίου προκύπτει από το άθροισμα $\sum_{i=1}^{l_{\max}} (2i + 1) = l_{\max} (l_{\max} + 2)$.

Η σχέση (4.3.11) συνεπώς γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}'_E \\ \mathbf{b}'_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^{EE} & \Omega^{EH} \\ \Omega^{HE} & \Omega^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}^+_E \\ \mathbf{b}^+_H \end{pmatrix} \quad (4.3.12)$$

όπου οι $\mathbf{b}'_E, \mathbf{b}'_H, \mathbf{b}^+_E, \mathbf{b}^+_H$ είναι πίνακες-στήλες με $l_{\max} (l_{\max} + 2)$ στοιχεία και οι $\Omega^{EE}, \Omega^{EH}, \Omega^{HE}, \Omega^{HH}$ τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $l_{\max} (l_{\max} + 2) \times l_{\max} (l_{\max} + 2)$.

Οι πίνακες στήλες $\mathbf{b}^+_E, \mathbf{b}^+_H$ περιγράφουν το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα στην αρχή των συντεταγμένων και, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, προσδιορίζονται από το ολικό προσπίπτον κύμα στη συγκεκριμένη σφαίρα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^+_E \\ \mathbf{b}^+_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0_E + \mathbf{b}'_E \\ \mathbf{a}^0_H + \mathbf{b}'_H \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

όπου $\mathbf{0}$ ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων $l_{\max} (l_{\max} + 2) \times l_{\max} (l_{\max} + 2)$, $\mathbf{a}^0_E, \mathbf{a}^0_H$ είναι πίνακες στήλες με $l_{\max} (l_{\max} + 2)$ στοιχεία που περιγράφουν το αρχικό προσπίπτον H/M πεδίο (σχέσεις 4.1.45 και 4.1.54), ενώ οι $\mathbf{T}^E, \mathbf{T}^H$ είναι διαγώνιοι πίνακες διαστάσεων $l_{\max} (l_{\max} + 2) \times l_{\max} (l_{\max} + 2)$, τα στοιχεία των οποίων ορίζονται ως εξής:

$$T^E_{lm;l'm'} = T^E_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.3.14)$$

$$T^H_{lm;l'm'} = T^H_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.3.15)$$

όπου T^E_l, T^H_l τα στοιχεία των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα, που προσδιορίζονται από τις σχέσεις (4.2.20) και (4.2.21) της ενότητας 4.2. Η σχέση (4.3.13) προέκυψε κατ αναλογία με τις σχέσεις (4.2.18) και (4.2.19) που ισχύουν στην απλή περίπτωση της μεμονωμένης σφαίρας. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.3.12) και (4.3.13) προκύπτουν τελικά οι συντελεστές b^{+E}_{lm}, b^{+H}_{lm} που περιγράφουν το σκεδαζόμενο κύμα από τη σφαίρα στην αρχή των συντεταγμένων, λαμβάνοντας υπόψη το σύνθετο πρόβλημα της σκέδασης από το επίπεδο σφαιρών. Ειδικότερα, η σχέση (4.3.13) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
(4.3.12) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_E^0 \\ \mathbf{a}_H^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^{EE} & \Omega^{EH} \\ \Omega^{HE} & \Omega^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E \Omega^{EE} & \mathbf{T}^E \Omega^{EH} \\ \mathbf{T}^H \Omega^{HE} & \mathbf{T}^H \Omega^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_E^0 \\ \mathbf{a}_H^0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}^E \Omega^{EE} & -\mathbf{T}^E \Omega^{EH} \\ -\mathbf{T}^H \Omega^{HE} & \mathbf{I} - \mathbf{T}^H \Omega^{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_E^0 \\ \mathbf{a}_H^0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση προσδιορισμού:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_E^+ \\ \mathbf{b}_H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}^E \Omega^{EE} & -\mathbf{T}^E \Omega^{EH} \\ -\mathbf{T}^H \Omega^{HE} & \mathbf{I} - \mathbf{T}^H \Omega^{HH} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E \mathbf{a}_E^0 \\ \mathbf{T}^H \mathbf{a}_H^0 \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $l_{\max}(l_{\max} + 2) \times l_{\max}(l_{\max} + 2)$. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι το σκεδαζόμενο κύμα από ένα επίπεδο σφαιρών εκφράζεται συναρτήσει των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα, των σταθερών δομής Ω , οι οποίοι εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών του επιπέδου, καθώς και των συντελεστών ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου. Η πολυπλοκότητα στον υπολογισμό των συντελεστών $\mathbf{b}_{lm}^{+E}, \mathbf{b}_{lm}^{+H}$ οφείλεται επομένως στη μορφή των πινάκων Ω , αναλυτικοί τύποι για και λεπτομέρειες για τον υπολογισμό των οποίων, περιλαμβάνονται στην επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

4.4 Υπολογισμός των σταθερών δομής για την πολλαπλή σκέδαση από ένα επίπεδο σφαιρών

Στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε αναλυτικά τις σταθερές δομής, που περιγράφουν το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών. Όπως περιγράφηκε αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα, το σκεδαζόμενο κύμα από όλες τις σφαίρες του επιπέδου πλην της σφαίρας στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, είναι δυνατό να εκφραστεί ισοδύναμα ως ανάπτυγμα εισερχόμενων κυμάτων, διευκολύνοντας τη μαθηματική ανάλυση του φαινομένου της πολλαπλής σκέδασης. Το ηλεκτρικό πεδίο που περιγράφει το εν λόγω κύμα είναι επομένως δυνατό να αναπαρασταθεί με δύο ισοδύναμες εκφράσεις [38]:

$$\mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{b}'_{lm}{}^E \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) + \mathbf{b}'_{lm}{}^H j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \right\} \quad (4.4.1)$$

$$\mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{b}'_{lm}{}^E \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) + \mathbf{b}'_{lm}{}^H \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) \right\} \quad (4.4.2)$$

Οι πίνακες Ω είναι οι κατάλληλοι πίνακες μετατροπής που συνδέουν τους συντελεστές ανάπτυξης $\mathbf{b}'_E, \mathbf{b}'_H$ του H/M πεδίου, όταν αυτό εκφράζεται ως ανάπτυγμα εισερχόμενων κυμάτων, με τους συντελεστές ανάπτυξης $\mathbf{b}_E^+, \mathbf{b}_H^+$ του σκεδαζόμενου κύματος από τη σφαίρα που βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\mathbf{b}'_{lm}{}^E = \sum_{l'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} \left(\Omega_{lm;l'm'}^{EE} \mathbf{b}'_{l'm'}{}^E + \Omega_{lm;l'm'}^{EH} \mathbf{b}'_{l'm'}{}^H \right) \quad (4.4.3)$$

$$\mathbf{b}'_{lm}{}^H = \sum_{l'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} \left(\Omega_{lm;l'm'}^{HE} \mathbf{b}'_{l'm'}{}^E + \Omega_{lm;l'm'}^{HH} \mathbf{b}'_{l'm'}{}^H \right) \quad (4.4.4)$$

Οι αναλυτικοί τύποι για τους πίνακες Ω προκύπτουν ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά, από τη σχέση (4.4.1) είναι δυνατός ο προσδιορισμός των συντελεστών $\mathbf{b}'_E, \mathbf{b}'_H$ ως εξής. Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τη σχέση με το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές \mathbf{X}_{lm} είναι εγκάρσιες, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{i}{k} \mathbf{b}'_{lm}{}^E \mathbf{r} \cdot \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \quad (4.4.5)$$

Η παραπάνω έκφραση απλουστεύεται αν λάβουμε υπόψη τη γνωστή από την κβαντομηχανική σχέση ορισμού του τελεστή της στροφορμής: $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \cdot \nabla \times$. Με αντικατάσταση στη σχέση (4.4.5) προκύπτει

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = -\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{b'_{lm}{}^E}{k} \mathbf{L} \cdot [j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\Omega)] = -\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{b'_{lm}{}^E}{k} j_l(kr) \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{lm}(\Omega) \quad (4.4.6)$$

αφού ο τελεστής \mathbf{L} επιδρά μόνο στις γωνιακές μεταβλητές (θ, ϕ) . Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη σχέση ορισμού των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών [27]

$$\sqrt{l(l+1)} \mathbf{X}_{lm}(\Omega) = \mathbf{L} Y_{lm}(\Omega) \quad (4.4.7)$$

λαμβάνουμε ότι

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) = -\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{b'_{lm}{}^E j_l(kr)}{k \sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L}^2 Y_{lm}(\Omega) = -\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} b'_{lm}{}^E j_l(kr) Y_{lm}(\Omega) \quad (4.4.8)$$

όπου έγινε χρήση της σχέσεως ορισμού των συνήθων σφαιρικών αρμονικών

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm}(\Omega) = l(l+1) Y_{lm}(\Omega) \quad (4.4.9)$$

Από τη σχέση (4.4.8) μπορούν να προκύψουν άμεσα οι συντελεστές ανάπτυξης $b'_{lm}{}^E$, πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της σχέσης με $Y_{lm}^*(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας σε όλη τη στερεά γωνία Ω , εκμεταλλευόμενοι τη συνθήκη ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών

$$\int Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.4.10)$$

Οι συντελεστές $b'_{lm}{}^E$ υπολογίζονται συνεπώς από τη σχέση:

$$b'_E(l, m) = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)} j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}'_{sc}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.11)$$

Με ακριβώς παρόμοια διαδικασία προκύπτουν και οι συντελεστές $b'_{lm}{}^H$:

$$b'_H(l, m) = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \frac{k}{\sqrt{l(l+1)} j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}'_{sc}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.12)$$

Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο ωστόσο δίνεται και από τη σχέση (4.4.2), δηλαδή εκφράζεται και ως επαλληλία εξερχόμενων κυμάτων με αρχή τα κέντρα των σφαιρών του επιπέδου. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη σχέση (4.4.11) προκύπτουν οι συντελεστές $b'_{lm}{}^E$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$b'_E(l, m) = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}j_l(kr)} \cdot \left\{ \sum_{l'=1}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} \left\{ \frac{i}{k} b_{l'm'}^{+E} \int \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + b_{l'm'}^{+H} \int \mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \right\} \right\} \quad (4.4.13)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με τη σχέση (4.4.3) προσδιορίζονται τα στοιχεία των πινάκων Ω από τις εκφράσεις:

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = -\frac{i}{\sqrt{l(l+1)}j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.14)$$

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EH} = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.15)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.3.9) για το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο στη σχέση (4.4.12), με ακριβώς ανάλογη διαδικασία, προκύπτουν οι εκφράσεις:

$$\Omega_{lm;l'm'}^{HE} = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.16)$$

$$\Omega_{lm;l'm'}^{HH} = -\frac{i}{\sqrt{l(l+1)}j_l(kr)} \int \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \quad (4.4.17)$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία των πινάκων Ω υπακούουν στις εξής σχέσεις συμμετρίας:

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = \Omega_{lm;l'm'}^{HH} \text{ και } \Omega_{lm;l'm'}^{EH} = -\Omega_{lm;l'm'}^{HE} \quad (4.4.18)$$

γεγονός που μειώνει τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Είναι επομένως αρκετό να υπολογίσουμε τα στοιχεία $\Omega_{lm;l'm'}^{EE}$ και $\Omega_{lm;l'm'}^{EH}$ από τις σχέσεις (4.4.14) και (4.4.15).

Ωστόσο, προτού προχωρήσουμε σε υπολογισμούς, το πλεγματικό άθροισμα της μορφής

$$\sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n)$$

που εμφανίζεται στις παραπάνω σχέσεις, χρειάζεται να μετατραπεί σε άθροισμα εισερχόμενων κυμάτων στην αρχή των συντεταγμένων ($\mathbf{R}_n = 0$).

Το τελευταίο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της παρακάτω ταυτότητας [40]

$$\sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) Y_{l'm'}(\Omega_n) = \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} Z_{l'm''}^{l''m''} j_{l''}(kr) Y_{l''m''}(\Omega) \quad (4.4.19)$$

όπου ορίζουμε

$$\mathbf{Z}_{l'm'}^{l''m''} = \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) G_{l'm';l''m''}(-\mathbf{R}_n) \quad (4.4.20)$$

$$G_{l'm';l''m''}(-\mathbf{R}_n) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} 4\pi (-1)^{(l'-l-l'')/2} (-1)^{m+m''} B_{l'm'}(lm; l''m'') h_l^{(1)}(kR_n) Y_{l-m}(\Omega_{-\mathbf{R}_n}) \quad (4.4.21)$$

$$B_{l'm'}(lm; l''m'') = \int Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) Y_{l''-m''}(\Omega) d\Omega \quad (4.4.22)$$

Παρατηρούμε ότι απαιτείται ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα \mathbf{Z} , ο οποίος ορίζεται από τη σχέση (4.4.20). Ο πίνακας \mathbf{Z} είναι γνωστός από τη θεωρία περίθλασης ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας (Low Energy Electron Diffraction-LEED) και κώδικες υπολογισμού του υπάρχουν διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία εδώ και αρκετά χρόνια [41], γεγονός που επιτρέπει τον άμεσο αριθμητικό υπολογισμό του. Λόγω της σχέσεως ορισμού των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών

$$\sqrt{l(l+1)} \mathbf{X}_{lm} = (\alpha_{lm} Y_{l,m+1} + \beta_{lm} Y_{l,m-1}) \hat{\mathbf{x}} - i(\alpha_{lm} Y_{l,m+1} - \beta_{lm} Y_{l,m-1}) \hat{\mathbf{y}} + m Y_{lm} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.4.23)$$

$$\text{όπου } \alpha_{lm} = \frac{1}{2} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \quad \text{και} \quad \beta_{lm} = \frac{1}{2} \sqrt{(l+m)(l-m+1)}, \quad \eta \quad \text{σχέση} \quad (4.4.19)$$

διαμορφώνεται ανάλογα αν οι συναρτήσεις Y_{lm} αντικατασταθούν από τις \mathbf{X}_{lm} , οπότε προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}} \left\{ \hat{\mathbf{x}} \cdot \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} (\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} + \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) j_{l''}(kr) Y_{l'm''}(\Omega) \right. \\ & \left. - i\hat{\mathbf{y}} \cdot \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} (\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} - \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) j_{l''}(kr) Y_{l'm''}(\Omega) + \hat{\mathbf{z}} m' Z_{l'm'}^{l''m''} j_{l''}(kr) Y_{l'm''}(\Omega) \right\} \quad (4.4.24) \end{aligned}$$

Ο προσδιορισμός των στοιχείων των πινάκων $\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EE}}$ και $\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}}$ από τις σχέσεις (4.4.14) και (4.4.15) πραγματοποιείται μετά από εκτενείς υπολογισμούς, οι οποίοι παρατίθενται στο Παράρτημα Β, καταλήγοντας στις ακόλουθες εκφράσεις

$$\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EE}} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(2\alpha_{l'm'} \beta_{l,m+1} Z_{l'm'+1}^{l,m+1} + 2\alpha_{l,m-1} \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l,m-1} + m'm Z_{l'm'}^{l,m} \right) \quad (4.4.25)$$

$$\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}} = \frac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(-2\alpha_{l'm'} \gamma_l^{-m} Z_{l'm'+1}^{l-1,m+1} + 2\beta_{l'm'} \gamma_l^m Z_{l'm'-1}^{l-1,m-1} - m' \zeta_l^m Z_{l'm'}^{l-1,m} \right) \quad (4.4.26)$$

$$\text{όπου } \zeta_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}, \quad \gamma_l^m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}.$$

Παρατηρούμε ότι ο προσδιορισμός των στοιχείων του πίνακα Ω ανάγεται τελικά στον υπολογισμό του πίνακα Z , για τον οποίο υπάρχουν διαθέσιμοι κώδικες υπολογισμού στη βιβλιογραφία εδώ και αρκετά χρόνια, επιτρέποντας τον άμεσο αριθμητικό υπολογισμό του. Μάλιστα, ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα Z διευκολύνεται εφαρμόζοντας την παρακάτω ιδιότητα [41]

$$Z_{lm;l'm'} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{εκτός και αν } l+m \text{ άρτιος και } l'+m' \text{ άρτιος} \\ \text{ή } l+m \text{ περιττός και } l'+m' \text{ περιττός} \end{array} \quad (4.4.27)$$

Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται για τα στοιχεία του πίνακα Ω ότι

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{εκτός και αν } l+m \text{ άρτιος και } l'+m' \text{ άρτιος} \\ \text{ή } l+m \text{ περιττός και } l'+m' \text{ περιττός} \end{array} \quad (4.4.28)$$

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EH} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{εκτός και αν } l+m \text{ άρτιος και } l'+m' \text{ περιττός} \\ \text{ή } l+m \text{ περιττός και } l'+m' \text{ άρτιος} \end{array}$$

Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, τα στοιχεία των πινάκων Ω υπακούουν στις εξής σχέσεις συμμετρίας:

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = \Omega_{lm;l'm'}^{HH} \quad \text{και} \quad \Omega_{lm;l'm'}^{EH} = -\Omega_{lm;l'm'}^{HE}$$

γεγονός που μειώνει περαιτέρω τους υπολογισμούς και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μόνο τα στοιχεία $\Omega_{lm;l'm'}^{EE}$ και $\Omega_{lm;l'm'}^{EH}$.

4.5 Προσδιορισμός των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης από ένα επίπεδο σφαιρών

Στην ενότητα 4.3 περιγράφηκε αναλυτικά η διαδικασία προσδιορισμού των συντελεστών ανάπτυξης του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από ένα επίπεδο διηλεκτρικών σφαιρών (σχέση 4.3.16), καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το σκεδαζόμενο κύμα εξαρτάται από τις ιδιότητες σκέδασης της μεμονωμένης σφαίρας, τις σταθερές δομής της διάταξης (πίνακες Ω), που περιγράφουν ουσιαστικά το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης, καθώς και από τους συντελεστές ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου. Επίσης, αναλυτικοί τύποι για τους πίνακες Ω και λεπτομέρειες για τον υπολογισμό τους παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.4 του παρόντος κεφαλαίου.

Εντούτοις, για να γίνει καλύτερα αντιληπτό το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης από το επίπεδο σφαιρών, χρειάζεται να προσδιοριστούν οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης, οι οποίοι γενικά μπορούν να μετρηθούν και πειραματικά. Για το σκοπό αυτό είναι αναγκαία η περιγραφή των H/M πεδίων ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων. Ξεκινώντας από το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο, που είναι ένα επίπεδο κύμα της μορφής

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.5.1)$$

μπορούμε πάντοτε να γράψουμε τη συνιστώσα του κυματανύσματος που είναι παράλληλη προς το επίπεδο xy (επίπεδο των σφαιρών) ως εξής

$$\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}' \quad (4.5.2)$$

όπου το κυματόνυσμα \mathbf{k}_{\parallel} βρίσκεται εντός της ζώνης Brillouin [36] και \mathbf{g}' είναι κάποιο κατάλληλο διάνυσμα του αντιστρόφου πλέγματος, που αντιστοιχεί στο διδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα Bravais των σφαιρών. Το κυματόνυσμα του προσπίπτοντος πεδίου, με δεδομένο μέτρο k και δεδομένο \mathbf{q}_{\parallel} , γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^{\pm} = \left(\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}', \pm \left[k^2 - (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}')^2 \right]^{1/2} \right) \quad (4.5.3)$$

όπου το πρόσημο \pm καθορίζει το πρόσημο της συνιστώσας z του κυματανύσματος. Το θετικό (αρνητικό) πρόσημο επιλέγεται για πρόσπτωση του κύματος από τα αριστερά (δεξιά) του επιπέδου των σφαιρών. Σημειώνουμε ότι σε περίπτωση που $k^2 < (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{g}')^2$ προκύπτει ένα φθίνον κύμα, διαφορετικά έχουμε ένα διαδιδόμενο επίπεδο κύμα. Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = E_{0\theta} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_{0\phi} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (4.5.4)$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι κάθετα στο διάνυσμα $\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^{\pm}$. Με τον τρόπο αυτό το ηλεκτρικό πεδίο αναπτύσσεται σε εγκάρσια επίπεδα κύματα πόλωσης p και s , δηλαδή πολωμένα κατά μήκος των $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ αντίστοιχα.

Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο από το επίπεδο των σφαιρών είναι εκφρασμένο ως ανάπτυγμα σφαιρικών κυμάτων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{i}{k} \mathbf{b}_{lm}^{+E} \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) + \mathbf{b}_{lm}^{+H} \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) \right\} \quad (4.5.5)$$

Προκειμένου να εκφραστεί ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων, γίνεται χρήση της παρακάτω ταυτότητας [40]

$$\sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) Y_{lm}(\Omega_n) = \sum_{\mathbf{g}} \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0 K_{gz}^+} Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.6)$$

όπου $\{\mathbf{g}\}$ το σύνολο των διανυσμάτων του αντιστρόφου πλέγματος και A_0 το εμβαδόν της θεμελιώδους κυψελίδας του τετραγωνικού πλέγματος Bravais των σφαιρών. Το θετικό (αρνητικό) πρόσημο στο κυματόνισμα $\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}$ επιλέγεται για $z > 0$ ($z < 0$). Σημειώνουμε επίσης ότι η συνιστώσα K_{gz} μπορεί να είναι είτε πραγματική είτε φανταστική. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.5.6) σε συνδυασμό με τη σχέση ορισμού των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών (4.4.23)

$$\begin{aligned} \sqrt{l(l+1)} \mathbf{X}_{lm}(\Omega) &= [\alpha_{lm} Y_{l,m+1}(\Omega) + \beta_{lm} Y_{l,m-1}(\Omega)] \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad - i [\alpha_{lm} Y_{l,m+1}(\Omega) - \beta_{lm} Y_{l,m-1}(\Omega)] \hat{\mathbf{y}} + m Y_{lm}(\Omega) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

λαμβάνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) = \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{A}_{lm}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.7)$$

όπου ορίζουμε

$$\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0 K_{gz}^+} \mathbf{X}_{lm}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \quad (4.5.8)$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι [38]

$$\nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{R}_n) h_l^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{lm}(\Omega_n) = \sum_{\mathbf{g}} i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm} \times \mathbf{A}_{lm}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.9)$$

οπότε με αντικατάσταση των σχέσεων (4.5.8) και (4.5.9) στη σχέση (4.5.5), προκύπτει το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) \mathbf{b}_{lm}^{+\text{E}} + \mathbf{A}_{lm}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) \mathbf{b}_{lm}^{+\text{H}} \right] \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.10)$$

$$\text{όπου } \mathbf{A}_{lm}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0K_{\text{gz}}^+} \mathbf{X}_{lm}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}), \quad \mathbf{A}_{lm}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) = -\frac{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}{k} \times \mathbf{A}_{lm}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) \quad (4.5.11)$$

Οι συνιστώσες των συντελεστών $\mathbf{A}_{lm}^{\text{P}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm})$, $\text{P} = \text{E}, \text{H}$ μπορούν να εκφραστούν στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με αντικατάσταση της αντίστοιχης έκφρασης για τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές (ενότητα 4.1), καταλήγοντας στις εξής σχέσεις:

$$\mathbf{A}_{lm}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0K_{\text{gz}}^+ \sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) - \alpha_l^m e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \right] \right. \\ \left. - \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) + \alpha_l^m \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) - m \sin\theta Y_l^m(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \right] \right\} \quad (4.5.12)$$

$$\mathbf{A}_{lm}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0K_{\text{gz}}^+ \sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) - \alpha_l^m e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \right] \right. \\ \left. + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) + \alpha_l^m \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) - m \sin\theta Y_l^m(\Omega_{\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}}) \right] \right\} \quad (4.5.13)$$

όπου με θ, φ υποδηλώνουμε τις γωνιακές μεταβλητές του κυματανύσματος $\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^{\pm}$.

Παρατηρούμε ότι το σκεδαζόμενο πεδίο αποτελείται γενικά από διαφορετικές περιθλώμενες δέσμες, οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικά διανύσματα του αντιστρόφου πλέγματος \mathbf{g} . Εντούτοις, μόνο οι δέσμες για τις οποίες η συνιστώσα K_{gz} είναι πραγματικός αριθμός συνιστούν διαδιδόμενες λύσεις, αφού σε αντίθετη περίπτωση πρόκειται για φθίνοντα κύματα. Σημειώνουμε επίσης ότι οι συντελεστές $\mathbf{b}_{lm}^{+\text{E}}$ και $\mathbf{b}_{lm}^{+\text{H}}$ εξαρτώνται από το προσπίπτον επίπεδο κύμα, όπως προέκυψε από την ανάλυση της ενότητας 4.3, με βάση την παρακάτω σχέση προσδιορισμού

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{\text{E}}^+ \\ \mathbf{b}_{\text{H}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}^{\text{E}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{EE}} & -\mathbf{T}^{\text{E}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{EH}} \\ -\mathbf{T}^{\text{H}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{HE}} & \mathbf{I} - \mathbf{T}^{\text{H}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{HH}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{\text{E}} \mathbf{a}_{\text{E}}^0 \\ \mathbf{T}^{\text{H}} \mathbf{a}_{\text{H}}^0 \end{pmatrix} \quad (4.5.14)$$

όπου $\mathbf{a}_{\text{E}}^0, \mathbf{a}_{\text{H}}^0$ οι συντελεστές ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου, οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν άμεσα συναρτήσει των συνιστωσών του \mathbf{E}_{in} :

$$\mathbf{a}_{lm}^{\text{OP}} = \mathbf{A}_{lm}^{\text{OP}} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \text{P} = \text{E}, \text{H} \quad (4.5.15)$$

όπου $\mathbf{E}_0 = E_{0\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_{0\varphi} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$ και

$$\mathbf{A}_{lm}^{0E}(\mathbf{K}_{g'}) = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) \right] \right. \\ \left. - \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) + m \sin\theta Y_l^{-m}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) \right] \right\} \quad (4.5.16)$$

$$\mathbf{A}_{lm}^{0H}(\mathbf{K}_{g'}) = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) \right] \right. \\ \left. + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) + m \sin\theta Y_l^{-m}(\Omega_{\mathbf{K}_{g'}}) \right] \right\} \quad (4.5.17)$$

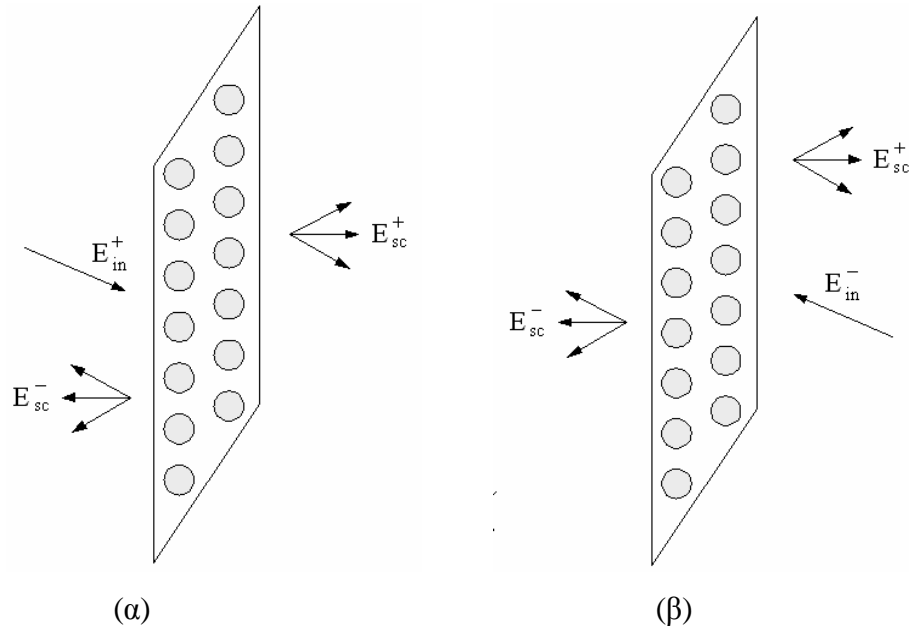
με το διάνυσμα \mathbf{g}' του αντιστρόφου πλέγματος να αντιστοιχεί στο προσπίπτον πεδίο, ενώ με θ, φ συμβολίζονται οι γωνιακές μεταβλητές του διανύσματος $\mathbf{K}_{g'}$. Οι συντελεστές ανάπτυξης του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου από το επίπεδο των σφαιρών είναι επομένως δυνατό να γραφούν συναρτήσει του προσπίπτοντος πεδίου

$$\mathbf{b}_{lm}^{+P} = \mathbf{B}_{lm}^{+P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad P = E, H \quad (4.5.18)$$

όπου οι συντελεστές \mathbf{B}_{lm}^{+P} προκύπτουν από τη σχέση (4.5.12) αν οι $\mathbf{a}_E^0, \mathbf{a}_H^0$ στο δεξί μέλος αντικατασταθούν από τους $\mathbf{A}^{0E}, \mathbf{A}^{0H}$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{+E} \\ \mathbf{B}^{+H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}^E \Omega^{EE} & -\mathbf{T}^E \Omega^{EH} \\ -\mathbf{T}^H \Omega^{HE} & \mathbf{I} - \mathbf{T}^H \Omega^{HH} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E \mathbf{A}^{0E} \\ \mathbf{T}^H \mathbf{A}^{0H} \end{pmatrix} \quad (4.5.19)$$

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης όταν ένα επίπεδο κύμα προσπέσει στο επίπεδο των σφαιρών από τα αριστερά (Σχήμα 4.1α).



Σχήμα 4.1: Σκέδαση επιπέδου H/M κύματος από ένα επίπεδο σφαιρών στη θέση $z=0$.

(α) Πρόσπτωση από τα αριστερά (β) Πρόσπτωση από τα δεξιά

Τότε το ανακλώμενο κύμα θα είναι το σκεδαζόμενο με κατεύθυνση διάδοσης προς τα αριστερά, δηλαδή στην περιοχή όπου $z < 0$. Από τη σχέση (4.5.10) προκύπτει ότι

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^-(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{b}_{lm}^{+E} + \mathbf{A}_{lm}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{b}_{lm}^{+H} \right] \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.20)$$

Λόγω της σχέσης (4.5.16) είναι

$$\mathbf{b}_{lm}^{+P} = \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+P}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+P}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \mathbf{E}_{0\varphi}, \quad P = E, H \quad (4.5.21)$$

Σημειώνεται ότι οι συνιστώσες των συντελεστών $\mathbf{B}_{lm}^{+P}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+)$ προκύπτουν από τις σχέσεις (4.5.19) και (4.5.17) και εξαρτώνται άμεσα από το προσπίπτον επίπεδο κύμα μέσω του κυματανύσματος $\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+$, όπου το θετικό πρόσημο εμφανίζεται λόγω της πρόσπτωσης του κύματος από τα αριστερά. Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.5.18) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sc}}^-(\mathbf{r}) &= \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;\theta}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \left(\mathbf{B}_{lm;\theta}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_{lm;\theta}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \left(\mathbf{B}_{lm;\theta}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \right] \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \\ &+ \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;\varphi}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \left(\mathbf{B}_{lm;\theta}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_{lm;\varphi}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \left(\mathbf{B}_{lm;\theta}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \right] \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_{\text{sc}}^-(\mathbf{r}) &= \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \left[\mathbf{A}_{lm;\theta}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) + \mathbf{A}_{lm;\theta}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\theta} \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathbf{A}_{lm;\theta}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) + \mathbf{A}_{lm;\theta}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right\} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \\ &+ \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \left[\mathbf{A}_{lm;\varphi}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) + \mathbf{A}_{lm;\varphi}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\theta} \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathbf{A}_{lm;\varphi}^E(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+E}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) + \mathbf{A}_{lm;\varphi}^H(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+H}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}'}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right\} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \quad (4.5.22) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση το ανακλώμενο κύμα αποτελείται από πλήθος περιθλώμενων δεσμών και εκφράζεται ως ανάπτυγμα εγκάρσιων επιπέδων κυμάτων (πολωμένων κατά $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\boldsymbol{\phi}}$). Η κάθε συνιστώσα του ανακλώμενου κύματος είναι με τη σειρά της άθροισμα δύο όρων, καθένας από τους οποίους είναι ανάλογος της αντίστοιχης συνιστώσας του αρχικού προσπίπτοντος κύματος. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τα στοιχεία του πίνακα ανάκλασης από το επίπεδο των σφαιρών και να γράψουμε την έκφραση για το ανακλώμενο κύμα σε πιο συνεπτυγμένη μορφή ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sc}}^-(\mathbf{r}) = & \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \left(\mathbf{M}_{\mathbf{g}\theta;\mathbf{g}\theta}^{-+} \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{M}_{\mathbf{g}\theta;\mathbf{g}\varphi}^{-+} \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \\ & + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \left(\mathbf{M}_{\mathbf{g}\varphi;\mathbf{g}\theta}^{-+} \cdot \mathbf{E}_{0\theta} + \mathbf{M}_{\mathbf{g}\varphi;\mathbf{g}\varphi}^{-+} \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right) \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

όπου με $\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{\pm}$ συμβολίζεται ο συντελεστής ανάκλασης κατά την i διεύθυνση λόγω πρόσπτωσης του κύματος κατά την i' διεύθυνση. Συνεπώς, οι συντελεστές ανάκλασης για πρόσπτωση από τα αριστερά του επιπέδου των σφαιρών δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{-+} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;i}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;i}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^-) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \quad (4.5.24)$$

όπου $(i, i') = \{(\theta, \theta), (\theta, \varphi), (\varphi, \theta), (\varphi, \varphi)\}$

Το μεταδιδόμενο κύμα αποτελείται από το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο κύμα με κατεύθυνση διάδοσης από τα αριστερά προς τα δεξιά, επομένως γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tr}}^+(\mathbf{r}) = & \mathbf{E}_{\text{in}}^+ + \mathbf{E}_{\text{sc}}^+ = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \left[\mathbf{A}_{lm;\theta}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;\theta}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\theta} \right. \\ & + \left. \left[\mathbf{A}_{lm;\theta}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;\theta}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right\} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{E}_{0\theta} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{r}) \\ & + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \sum_{\mathbf{g}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \left[\mathbf{A}_{lm;\varphi}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;\varphi}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\theta}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\theta} \right. \\ & + \left. \left[\mathbf{A}_{lm;\varphi}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;\varphi}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;\varphi}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \cdot \mathbf{E}_{0\varphi} \right\} \exp(i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

Συνεπώς, οι συντελεστές μετάδοσης για πρόσπτωση από τα αριστερά του επιπέδου των σφαιρών δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{++} = \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \delta_{ii'} + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;i}^{\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+\text{E}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) + \mathbf{A}_{lm;i}^{\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+\text{H}}(\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+) \right] \quad (4.5.26)$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται τα στοιχεία των πινάκων ανάκλασης $\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{\pm}$ και μετάδοσης $\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{\pm}$ για ένα επίπεδο κύμα που προσπίπτει στο επίπεδο των σφαιρών από τα δεξιά (Σχήμα 4.1(β)). Αποδεικνύεται μάλιστα ότι οι πίνακες ανάκλασης και μετάδοσης υπακούουν στις παρακάτω σχέσεις συμμετρίας [34]:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{--} = \mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{++}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{-+} = \mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{+-} \quad (i, i') = (\theta, \theta), (\varphi, \varphi) \quad (4.5.27)$$

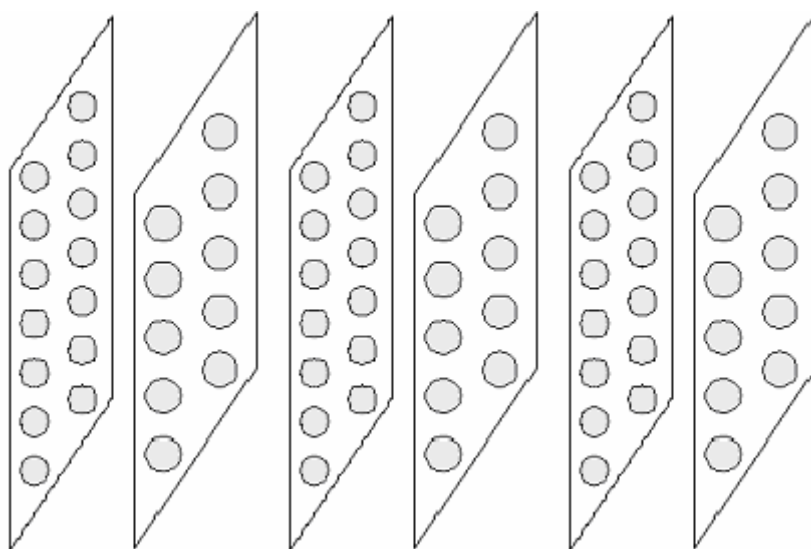
$$\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{--} = -\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{++}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{-+} = -\mathbf{M}_{\mathbf{g}i;\mathbf{g}i'}^{+-} \quad (i, i') = (\theta, \varphi), (\varphi, \theta) \quad (4.5.28)$$

Από τις (4.5.24) και (4.5.26) παρατηρούμε ότι τελικά οι πίνακες ανάκλασης και μετάδοσης από ένα επίπεδο περιοδικά διατεταγμένων σφαιρών εξαρτώνται από τους συντελεστές ανάπτυξης του σκεδαζόμενου πεδίου $\mathbf{B}_{lm}^{+\text{P}}$, που υπολογίζονται από τη σχέση (4.5.19), καθώς και από τους συντελεστές $\mathbf{A}_{lm}^{\text{P}}$ ($\text{P} = \text{E}, \text{H}$), με τη βοήθεια των οποίων το πεδίο

εκφράζεται ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων και οι οποίοι υπολογίζονται άμεσα από τις σχέσεις (4.5.12) και (4.5.13).

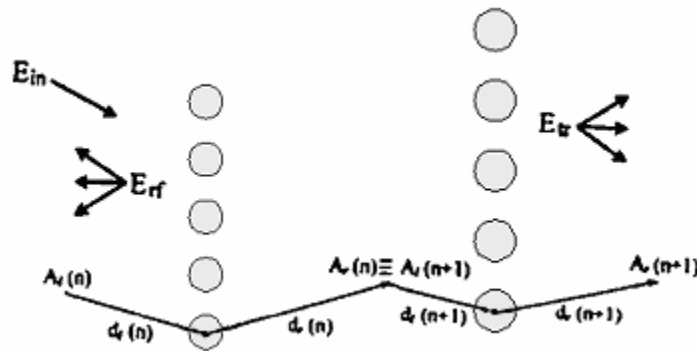
4.6 Σκέδαση από περισσότερα επίπεδα – Δημιουργία μεταϋλικού

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήθηκε το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης από ένα επίπεδο περιοδικά διατεταγμένων σφαιρών. Ωστόσο, για τη δημιουργία μεταϋλικού απαιτείται η περιοδική επανάληψη μίας δομικής μονάδας, η οποία με τη σειρά της θα αποτελείται από δύο είδη σφαιρών διαφορετικής ακτίνας, αλλά από το ίδιο υλικό, το οποίο πρέπει να έχει πολύ υψηλή διηλεκτρική σταθερά για τη δημιουργία έντονου ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού. Όπως περιγράφηκε και στο κεφάλαιο 3 της παρούσας διατριβής, επιλέγοντας κατάλληλα τις ακτίνες των δύο σφαιρών, έτσι ώστε να συμπίπτουν η συχνότητα μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών μικρής ακτίνας με τη συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών μεγάλης ακτίνας, επιτυγχάνονται ταυτόχρονα στο ίδιο εύρος συχνοτήτων αρνητική μαγνητική διαπερατότητα και αρνητική διηλεκτρική σταθερά για το σύνολο της δομής, συνεπώς οδηγούμαστε στη δημιουργία μίας δομής με αρνητικό δείκτη διάθλασης (δημιουργία μεταϋλικού). Ο σχεδιασμός της δομής του μεταϋλικού συνίσταται επομένως στην επαλληλία εναλλασσόμενων επιπέδων από σφαίρες, έτσι ώστε σε κάθε επίπεδο οι σφαίρες να έχουν την ίδια ακτίνα, αλλά στο αμέσως επόμενο επίπεδο η ακτίνα των σφαιρών να είναι διαφορετική (Σχήμα 4.2). Η δομική μονάδα του metamaterial αποτελείται δηλαδή από δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας.



Σχήμα 4.2: Ενδεικτική απεικόνιση του μεταϋλικού που προκύπτει ως επαλληλία επιπέδων σφαιρών.

Στην προηγούμενη ενότητα προσδιορίστηκαν αναλυτικά οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης από ένα επίπεδο σφαιρών. Στην παρούσα ενότητα ο προσδιορισμός των παραπάνω συντελεστών θα αναφέρεται σε ένα ζεύγος επιπέδων σφαιρών, που αποτελεί τη δομική μονάδα του μεταλλικού. Ο υπολογισμός των πινάκων ανάκλασης και μετάδοσης για το σύνθετο πλακίδιο που αποτελείται από το ζεύγος επιπέδων σφαιρών διευκολύνεται αν τα επίπεδα κύματα αριστερά ενός δεδομένου επιπέδου σφαιρών εκφραστούν σε σχέση με μια αρχή συντεταγμένων A_l στα αριστερά του επιπέδου, σε θέση $-d_l$ από το κέντρο του επιπέδου αυτού και τα κύματα δεξιά του επιπέδου σε σχέση με μια αρχή συντεταγμένων A_r στα δεξιά του επιπέδου, σε θέση d_r από το κέντρο του επιπέδου. Η επιλογή των διανυσμάτων $\mathbf{d}_l(n)$ και $\mathbf{d}_r(n)$ για το n -οστό στοιχείο γενικά είναι αυθαίρετη, αλλά θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι αρχές των συντεταγμένων $A_r(n)$ και $A_l(n+1)$ μεταξύ των διαδοχικών στοιχείων n και $n+1$ να συμπίπτουν, όπως απεικονίζεται σε τομή στο Σχήμα 4.3.



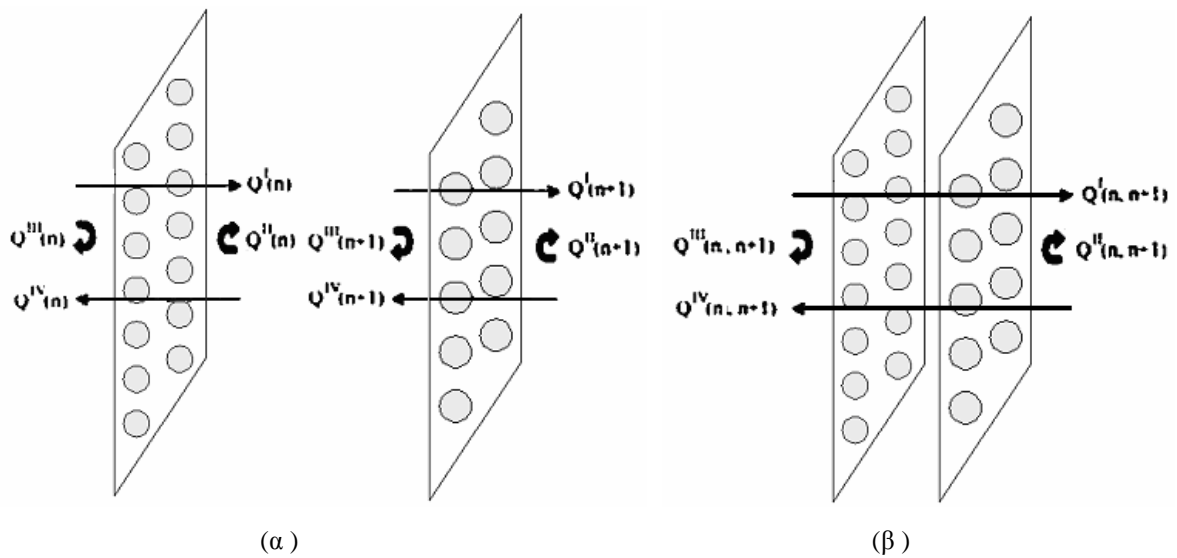
Σχήμα 4.3: Σκέδαση από ένα ζεύγος επιπέδων σφαιρών

Τα στοιχεία των πινάκων ανάκλασης και μετάδοσης για ένα επίπεδο σφαιρών, που προσδιορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, τροποποιούνται σύμφωνα με τις παραπάνω συμβάσεις για τις αρχές των συντεταγμένων ως εξής [39]

$$\begin{aligned}
 Q_{g_i;g'_i}^I &= M_{g_i;g'_i}^{++} \exp[i(\mathbf{K}_g^+ \cdot \mathbf{d}_r + \mathbf{K}_{g'}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \\
 Q_{g_i;g'_i}^{II} &= M_{g_i;g'_i}^{+-} \exp[i(\mathbf{K}_g^+ \cdot \mathbf{d}_r - \mathbf{K}_{g'}^- \cdot \mathbf{d}_r)] \\
 Q_{g_i;g'_i}^{III} &= M_{g_i;g'_i}^{-+} \exp[-i(\mathbf{K}_g^- \cdot \mathbf{d}_l - \mathbf{K}_{g'}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \\
 Q_{g_i;g'_i}^{IV} &= M_{g_i;g'_i}^{--} \exp[-i(\mathbf{K}_g^- \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{g'}^- \cdot \mathbf{d}_r)]
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Οι πίνακες διέλευσης και ανάκλασης για δύο επίπεδα σφαιρών λαμβάνονται συνδυάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες για κάθε επίπεδο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4. Οι

ακριβείς εκφράσεις για τους πίνακες $\mathbf{Q}(n, n+1)$ ενός ζεύγους στοιχείων προκύπτουν εφαρμόζοντας την αρχή της πολλαπλής σκέδασης. Για παράδειγμα, ο πίνακας διέλευσης $\mathbf{Q}^I(n, n+1)$ προκύπτει με παρατήρηση του Σχήματος 4.4 (α), θεωρώντας ένα κύμα που προσπίπτει από τα αριστερά στο n -οστό στοιχείο και τελικά μεταδίδεται στο $n+1$ στοιχείο. Η μετάδοση αυτή μπορεί να γίνει είτε απευθείας, χωρίς ενδιάμεσες ανακλάσεις, είτε μετά από μία ανάκλαση στο χώρο μεταξύ των δύο επιπέδων, είτε μετά από 2 ή και περισσότερες ενδιάμεσες ανακλάσεις. Υπάρχει δηλαδή και το ενδεχόμενο να μεσολαβούν άπειρες ανακλάσεις μεταξύ των επιπέδων.



Σχήμα 4.4: Οι πίνακες σκέδασης δύο διαδοχικών στοιχείων προκύπτουν από τους αντίστοιχους πίνακες κάθε στοιχείου .

Τα παραπάνω εκφράζονται μαθηματικά ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^I(n, n+1) &= \mathbf{Q}^I(n+1)\mathbf{Q}^I(n) + \mathbf{Q}^I(n+1)\mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)\mathbf{Q}^I(n) \\ &+ \mathbf{Q}^I(n+1)[\mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)]^2\mathbf{Q}^I(n) + \mathbf{Q}^I(n+1)[\mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)]^3\mathbf{Q}^I(n) + \dots = \\ &= \mathbf{Q}^I(n+1) \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1) + [\mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)]^2 + [\mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)]^3 + \dots \right\} \mathbf{Q}^I(n) \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}^I(n, n+1) = \mathbf{Q}^I(n+1)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{II}(n)\mathbf{Q}^{III}(n+1)]^{-1}\mathbf{Q}^I(n) \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Ομοίως, προκύπτει ο πίνακας διέλευσης $\mathbf{Q}^{IV}(n, n+1)$ που αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα δεξιά

$$\mathbf{Q}^{IV}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{IV}(n)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{III}(n+1)\mathbf{Q}^{II}(n)]^{-1}\mathbf{Q}^{IV}(n+1) \quad (4.6.3)$$

Με ανάλογη διαδικασία προκύπτουν οι πίνακες ανάκλασης $\mathbf{Q}^{II}(n, n+1)$ και $\mathbf{Q}^{III}(n, n+1)$, οι οποίοι αναφέρονται σε πρόσπτωση από τα δεξιά και τα αριστερά αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\text{II}}(n, n+1) &= \mathbf{Q}^{\text{II}}(n+1) + \mathbf{Q}^{\text{I}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)\mathbf{Q}^{\text{IV}}(n+1) + \mathbf{Q}^{\text{I}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)\mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)\mathbf{Q}^{\text{IV}}(n+1) \\
&+ \mathbf{Q}^{\text{I}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)[\mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)]^2\mathbf{Q}^{\text{IV}}(n+1) + \dots = \\
&= \mathbf{Q}^{\text{II}}(n+1) + \mathbf{Q}^{\text{I}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)\left\{ \mathbf{I} + \mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n) + [\mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)]^2 + \dots \right\} \mathbf{Q}^{\text{IV}}(n+1)
\end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην απευθείας ανάκλαση, ο δεύτερος όρος σε μία ενδιάμεση ανάκλαση, ο τρίτος όρος σε 2 ενδιάμεσες ανακλάσεις μεταξύ των επιπέδων κλπ. Τελικά λαμβάνουμε την έκφραση

$$\mathbf{Q}^{\text{II}}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{\text{II}}(n+1) + \mathbf{Q}^{\text{I}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)\mathbf{Q}^{\text{II}}(n)]^{-1}\mathbf{Q}^{\text{IV}}(n+1) \quad (4.6.4)$$

Αντίστοιχα, ο πίνακας ανάκλασης για πρόσπτωση από τα αριστερά προκύπτει

$$\mathbf{Q}^{\text{III}}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{\text{III}}(n) + \mathbf{Q}^{\text{IV}}(n)\mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{\text{II}}(n)\mathbf{Q}^{\text{III}}(n+1)]^{-1}\mathbf{Q}^{\text{I}}(n) \quad (4.6.5)$$

Όλοι οι παραπάνω πίνακες προϋποθέτουν ότι τα επίπεδα σφαιρών έχουν την ίδια περιοδικότητα. Σημειώνουμε επίσης ότι τα κύματα αριστερά (δεξιά) του ζεύγους των στοιχείων αναπτύσσονται σε επίπεδα κύματα σύμφωνα με μια αρχή σε θέση $-d_l(n) [+d_l(n+1)]$ από το κέντρο του n -οστού [($n+1$)-οστού] στοιχείου (Σχήμα 4.3).

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω είναι δυνατό να εφαρμοστεί για τον προσδιορισμό των πινάκων διέλευσης και ανάκλασης μίας σύνθετης δομής, η οποία θα αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλαμβανόμενων σύνθετων πλακιδίων και θα εμφανίζει στο σύνολό της συμπεριφορά μεταϋλικού. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η πλάκα αποτελείται από 2^N πλακίδια, καθένα από τα οποία περιέχει δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας, είναι δυνατό να προσδιορίσουμε τους αντίστοιχους πίνακες σκέδασης \mathbf{Q} εφαρμόζοντας μία μέθοδο διπλασιασμού του αριθμού των πλακιδίων. Αρχικά υπολογίζουμε τα στοιχεία των πινάκων σκέδασης δύο διαδοχικών όμοιων σύνθετων πλακιδίων ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας ως μονάδα τους πίνακες \mathbf{Q} του ζεύγους των πλακιδίων, βρίσκουμε ομοίως τους πίνακες σκέδασης για τέσσερα διαδοχικά όμοια πλακίδια. Με τον τρόπο αυτό, διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλακιδίων σε κάθε στάδιο, υπολογίζουμε τελικά τους πίνακες σκέδασης για τα 2^N πλακίδια που σχηματίζουν την πλάκα-μεταϋλικό.

4.7 Σχέση διασποράς του σύνθετου μεταϋλικού

Ένα σύνθετο πλακίδιο αποτελούμενο από δύο επίπεδα σφαιρών είναι επίσης δυνατό να αποτελέσει τη μονάδα με βάση την οποία μπορεί να κατασκευαστεί μία άπειρη περιοδική δομή κατά μήκος του άξονα z . Ο άπειρος αυτός κρύσταλλος χρησιμεύει στη μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής συμπεριφοράς της σύνθετης δομής στο σύνολό της. Ειδικότερα, προκύπτει η σχέση διασποράς του μεταϋλικού, που περιγράφει τη μεταβολή του κυματανύσματος διάδοσης συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας. Από την καμπύλη διασποράς συνάγονται βασικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες της σύνθετης δομής.

Θεωρούμε τον άπειρο κρύσταλλο ως επαλληλία συνθέτων πλακιδίων παράλληλα στο επίπεδο xy . Οι σφαίρες των δύο επιπέδων του μοναδιαίου πλακιδίου καταλαμβάνουν τις θέσεις ενός διδιάστατου τετραγωνικού πλέγματος που ορίζεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{R}_n = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 \quad (4.7.1)$$

όπου $\mathbf{a}_1 = a\hat{x}$, $\mathbf{a}_2 = a\hat{y}$ και a η σταθερά του πλέγματος. Αν $\mathbf{a}_3 = d\hat{z}$ είναι το διάνυσμα μετάθεσης που μας μεταφέρει από ένα σημείο στο n -οστό πλακίδιο σε ένα ισοδύναμο σημείο στο $(n+1)$ -οστό πλακίδιο, τότε τα $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ συγκροτούν ένα σύνολο θεμελιωδών διανυσμάτων για τον τρισδιάστατο κρύσταλλο, όπου d η απόσταση διαδοχικών πλεγματοειδών επιπέδων. Στην περίπτωσή μας είναι $d = 2a$, αφού κάθε πλακίδιο περιέχει δύο επίπεδα σφαιρών. Το αντίστοιχο αντίστροφο πλέγμα ορίζεται από το σύνολο των διανυσμάτων $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, όπου [37]

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \hat{x}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \hat{y} \quad \text{και} \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \quad (4.7.2)$$

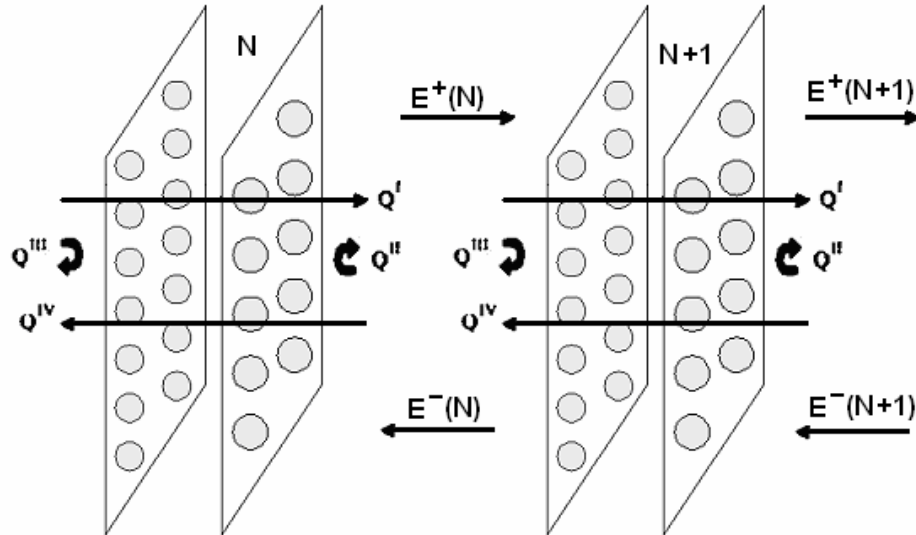
Το διάνυσμα διάδοσης γράφεται στη μορφή $\mathbf{k} = (k_{\parallel}, k_z)$ όπου το διάνυσμα $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$ εκτείνεται σε όλη την επιφανειακή ζώνη Brillouin και $-|\mathbf{b}_3|/2 < k_z \leq |\mathbf{b}_3|/2$. Από τη σχέση (4.7.2) προκύπτει ότι $\mathbf{b}_3 = (2\pi/d) \hat{z}$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$-1 < \frac{k_z d}{\pi} \leq 1 \quad (4.7.3)$$

Η χρήση του κανονικοποιημένου και αδιάστατου μεγέθους $k_z d/\pi$ διευκολύνει επομένως τους υπολογισμούς. Αν θεωρήσουμε μία περιοχή μεταξύ του N -οστού και του $(N+1)$ -οστού μοναδιαίου πλακιδίου, το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{g}}^+(N) \exp[i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^+ \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{A}_N)] + \mathbf{E}_{\mathbf{g}}^-(N) \exp[i\mathbf{K}_{\mathbf{g}}^- \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{A}_N)] \right\} \quad (4.7.4)$$

όπου \mathbf{A}_N η κατάλληλη αρχή των συντεταγμένων. Το πεδίο δηλαδή αποτελείται από ένα πλήθος περιθλώμενων δεσμών που περιέχουν ένα προσπίπτον καθώς και ένα ανακλώμενο κύμα, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ του N-οστού και του (N+1)-οστού πλακιδίου.

Με παρατήρηση του Σχήματος 4.5 προκύπτει ότι

$$\mathbf{E}^-(N) = \mathbf{Q}^{IV}\mathbf{E}^-(N+1) + \mathbf{Q}^{III}\mathbf{E}^+(N) \quad (4.7.5)$$

$$\mathbf{E}^+(N+1) = \mathbf{Q}^I\mathbf{E}^+(N) + \mathbf{Q}^{II}\mathbf{E}^-(N+1) \quad (4.7.6)$$

όπου οι πίνακες σκέδασης \mathbf{Q} είναι οι ίδιοι για κάθε πλακίδιο, αφού τα πλακίδια είναι όμοια μεταξύ τους. Λόγω της περιοδικότητας της διάταξης, το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα γενικευμένο κύμα Bloch, το οποίο εξ ορισμού έχει την ιδιότητα

$$\mathbf{E}^\pm(N+1) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{E}^\pm(N) \quad (4.7.7)$$

όπου $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\parallel, k_z)$ και η συνιστώσα του κυματανύσματος $k_z(\omega, \mathbf{k}_\parallel)$ είναι, για δεδομένο \mathbf{k}_\parallel , συνάρτηση του ω . Η εξάρτηση αυτή του k_z από τη συχνότητα καλείται *σχέση διασποράς* του σύνθετου μεταλλικού ή αλλιώς μιγαδική δομή των ζωνών του απείρου κρυστάλλου και αντιστοιχεί στις μαθηματικές λύσεις των εξισώσεων του Maxwell, οι οποίες είναι γενικευμένα κύματα Bloch. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.7.5), (4.7.6) και (4.7.7) λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{E}^+(N) = \mathbf{Q}^I\mathbf{E}^+(N) + \mathbf{Q}^{II}\mathbf{E}^-(N+1) \quad (4.7.8)$$

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3)[\mathbf{Q}^{III}\mathbf{E}^+(N) + \mathbf{Q}^{IV}\mathbf{E}^-(N+1)] = \mathbf{E}^-(N+1) \quad (4.7.9)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{\text{III}} & \mathbf{Q}^{\text{IV}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{I}} & \mathbf{Q}^{\text{II}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} \quad (4.7.10)$$

Η ορίζουσα του πίνακα στο αριστερό μέλος της (4.7.10) είναι ίση με \mathbf{Q}^{IV} , επομένως ο αντίστροφος του πίνακα προκύπτει

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{\text{III}} & \mathbf{Q}^{\text{IV}} \end{pmatrix}^{-1} = [\mathbf{Q}^{\text{IV}}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{IV}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^{\text{III}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -[\mathbf{Q}^{\text{IV}}]^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{\text{III}} & [\mathbf{Q}^{\text{IV}}]^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.7.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.7.10) με τον παραπάνω πίνακα και έχοντας υπόψη ότι $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3 = k_z d$, όπου d η απόσταση διαδοχικών πλεγματικών επιπέδων, λαμβάνουμε

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{I}} & \mathbf{Q}^{\text{II}} \\ -[\mathbf{Q}^{\text{IV}}]^{-1} \mathbf{Q}^{\text{III}} \mathbf{Q}^{\text{I}} & [\mathbf{Q}^{\text{IV}}]^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{\text{III}} \mathbf{Q}^{\text{II}}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} = \exp(ik_z d) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} \quad (4.7.12)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει τη σχέση διασποράς του σύνθετου μεταλλικού. Συνιστά μάλιστα ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων, αφού για δεδομένα \mathbf{k}_{\parallel} και ω , από τις ιδιοτιμές του πίνακα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.7.12) προκύπτουν τιμές για τη σταθερά διάδοσης k_z . Σημειώνεται ότι οι πίνακες \mathbf{E}^{\pm} στη σχέση (4.7.12) είναι πίνακες-στήλες με στοιχεία: $\mathbf{E}_{g_1\theta}^{\pm}, \mathbf{E}_{g_1\varphi}^{\pm}, \mathbf{E}_{g_2\theta}^{\pm}, \mathbf{E}_{g_2\varphi}^{\pm}, \dots$. Στην πράξη κρατάμε g_{\max} διανύσματα \mathbf{g} του αντιστρόφου πλέγματος (αυτά με το μικρότερο μέτρο), οπότε τα \mathbf{E}^{\pm} είναι πίνακες-στήλες με $2g_{\max}$ στοιχεία, ενώ ο πίνακας \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος διαστάσεων $2g_{\max} \times 2g_{\max}$. Οι πίνακες σκέδασης \mathbf{Q} είναι τετραγωνικοί διαστάσεων $2g_{\max} \times 2g_{\max}$ και περιγράφουν τη σκέδαση από το σύνθετο πλακίδιο, που αποτελείται από δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας. Ο πίνακας στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.7.12) είναι επομένως διαστάσεων $4g_{\max} \times 4g_{\max}$ και από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του προκύπτουν για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας ω , $4g_{\max}$ τιμές για τη σταθερά διάδοσης k_z . Οι τιμές αυτές του k_z , αν ειπωθούν ως συναρτήσεις του ω , ορίζουν $4g_{\max}$ γραμμές στο μιγαδικό χώρο του k_z και αν ληφθούν όλες μαζί συνιστούν τη μιγαδική δομή των ζωνών του απείρου κρυστάλλου. Μία γραμμή στο χώρο του k_z μπορεί να είναι πραγματική, με την έννοια ότι το k_z προκύπτει πραγματικός αριθμός, σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων, καθώς και μιγαδική (k_z μιγαδικό) για συχνότητες εκτός των

περιοχών αυτών. Παραδείγματα τέτοιων γραμμών θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής.

Για δεδομένο ω , από τις $4g_{\max}$ συνολικά τιμές του k_z , καμία ή στην καλύτερη περίπτωση μερικές μόνο προκύπτουν πραγματικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις της εξίσωσης (4.7.12) παριστάνουν διαδιδόμενα κύματα μέσα στο σύνθετο μεταϊλικό. Οι υπόλοιπες τιμές του k_z είναι μιγαδικές και οι αντίστοιχες ιδιολύσεις αντιπροσωπεύουν φθίνοντα κύματα, το πλάτος των οποίων μειώνεται εκθετικά και σε αντίθεση με τα διαδιδόμενα κύματα δεν υφίστανται ως φυσικές οντότητες στον άπειρο κρύσταλλο. Αποτελούν όμως τμήμα των φυσικών λύσεων σε μία πλάκα πεπερασμένου μεγέθους. Μία περιοχή συχνοτήτων στην οποία δεν προκύπτουν διαδιδόμενες λύσεις για δεδομένο \mathbf{k}_{\parallel} συνιστά ένα χάσμα συχνοτήτων (frequency band gap). Αν μάλιστα σε μία περιοχή συχνοτήτων δεν υπάρχουν διαδιδόμενες λύσεις ανεξαρτήτως της τιμής του \mathbf{k}_{\parallel} , τότε αυτή η περιοχή συνιστά ένα απόλυτο χάσμα συχνοτήτων.

Σημειώνεται ότι επειδή οι ιδιοτιμές του πίνακα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.7.12) έχουν τη μορφή $\exp(ik_z d)$, τιμές του k_z που διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/d$ αντιστοιχούν στην ίδια ιδιολύση, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με την περιοδικότητα της δομής των ζωνών. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας της διάταξης των σφαιρών στα επίπεδα του κρυστάλλου, οι ιδιολύσεις εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη: $k_z(\omega)$ και $-k_z(\omega)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμητικά αποτελέσματα ανάλυσης - εφαρμογή του μεταλλικού

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα της πλήρους ανάλυσης της δομής του μεταλλικού που πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης και παρουσιάστηκε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί την πλήρη λύση του προβλήματος και τα αποτελέσματά της θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα που προέκυψαν από την προσεγγιστική ανάλυση σύμφωνα με τη θεωρία του ενεργού μέσου, που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3 της διατριβής.

5.1 Αποτελέσματα πλήρους λύσης

Ο προσδιορισμός της σχέσης διασποράς του σύνθετου μεταλλικού γίνεται με βάση τη σχέση (4.7.12) που επαναλαμβάνεται εδώ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^I & \mathbf{Q}^{II} \\ -[\mathbf{Q}^{IV}]^{-1}\mathbf{Q}^{III}\mathbf{Q}^I & [\mathbf{Q}^{IV}]^{-1}[\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{III}\mathbf{Q}^{II}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} = \exp(ik_z d) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+(N) \\ \mathbf{E}^-(N+1) \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

Οι τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z υπολογίζονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης για κάθε τιμή της συχνότητας λειτουργίας. Ο υπολογισμός αυτός είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος γιατί προϋποθέτει τον προσδιορισμό των πινάκων \mathbf{Q} που περιγράφουν τη σκέδαση από ένα σύνθετο πλακίδιο αποτελούμενο από δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό των πινάκων \mathbf{Q} ακολουθούνται με τη σειρά τα εξής στάδια.

1) Προσδιορισμός των συντελεστών ανάπτυξης του προσπίπτοντος H/M πεδίου \mathbf{A}_{lm}^{OH} και \mathbf{A}_{lm}^{OE} από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{lm}^{OH} = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} & \left[\left(\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_k) + m \sin\theta Y_l^{-m}(\Omega_k) \right) \cdot \hat{\theta} \right. \\ & \left. + i \left(\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_l^{-m-1}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_l^{-m+1}(\Omega_k) \right) \right] \cdot \hat{\phi} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{lm}^{OE} = \frac{4\pi i^l (-1)^{m+1}}{\sqrt{l(l+1)}} & \left\{ i \left[\alpha_l^m e^{i\varphi} Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) - \alpha_l^{-m} e^{-i\varphi} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\theta} \right. \\ & \left. - \left[\alpha_l^m \cos\theta e^{i\varphi} Y_{l-(m+1)}(\Omega_k) + \alpha_l^{-m} \cos\theta e^{-i\varphi} Y_{l-(m-1)}(\Omega_k) + m \sin\theta Y_{l-m}(\Omega_k) \right] \cdot \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

όπου $\alpha_l^m = \frac{1}{2}[(l-m)(l+m+1)]^{1/2}$.

2) Προσδιορισμός των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα για τα TE και TM κύματα σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\mathbf{T}_l^H = \frac{j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_0 \alpha)]_{r=\alpha} - j_l(k_0 \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha}}{h_l^{(1)}(k_0 \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha} - j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rh_l^{(1)}(k_0 \alpha)]_{r=\alpha}} \quad (5.1.4)$$

$$\mathbf{T}_l^E = \frac{\epsilon_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_0 \alpha)]_{r=\alpha} - \epsilon_h j_l(k_0 \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha}}{\epsilon_h h_l^{(1)}(k_0 \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rj_l(k_s \alpha)]_{r=\alpha} - \epsilon_s j_l(k_s \alpha) \frac{\partial}{\partial r} [rh_l^{(1)}(k_0 \alpha)]_{r=\alpha}} \quad (5.1.5)$$

όπου ϵ_h , ϵ_s οι διηλεκτρικές σταθερές του περιβάλλοντος μέσου και του υλικού των σφαιρών και k_0 , k_s οι αντίστοιχοι κυματαριθμοί.

3) Υπολογισμός των σταθερών δομής (πίνακες Ω), που περιγράφουν το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών, από τις σχέσεις

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(2\alpha_{l'm'} \beta_{lm+1} Z_{l'm'+1}^{lm+1} + 2\alpha_{lm-1} \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{lm-1} + m' m Z_{l'm'}^{lm} \right) \quad (5.1.6)$$

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EH} = \frac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(-2\alpha_{l'm'} \gamma_l^{-m} Z_{l'm'+1}^{l-1,m+1} + 2\beta_{l'm'} \gamma_l^m Z_{l'm'-1}^{l-1,m-1} - m' \zeta_l^m Z_{l'm'}^{l-1,m} \right) \quad (5.1.7)$$

όπου ορίζουμε $\alpha_{lm} = \frac{1}{2} \sqrt{(l-m)(l+m+1)}$, $\beta_{lm} = \alpha_{l-m}$, $\gamma_l^m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}$ και

$\zeta_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}$. Επιπλέον, τα στοιχεία των πινάκων Ω υπακούουν στις σχέσεις

συμμετρίας $\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = \Omega_{lm;l'm'}^{HH}$ και $\Omega_{lm;l'm'}^{EH} = -\Omega_{lm;l'm'}^{HE}$. Ο πίνακας Z είναι γνωστός από τη θεωρία περίθλασης ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας (Low Energy Electron Diffraction-LEED) και κώδικες υπολογισμού του υπάρχουν διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία εδώ και αρκετά χρόνια, γεγονός που επιτρέπει τον άμεσο αριθμητικό υπολογισμό του.

4) Προσδιορισμός των συντελεστών ανάπτυξης του σκεδαζόμενου πεδίου από ένα επίπεδο σφαιρών από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{+E} \\ \mathbf{B}^{+H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}^E \Omega^{EE} & -\mathbf{T}^E \Omega^{EH} \\ -\mathbf{T}^H \Omega^{HE} & \mathbf{I} - \mathbf{T}^H \Omega^{HH} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^E \mathbf{A}^{0E} \\ \mathbf{T}^H \mathbf{A}^{0H} \end{pmatrix} \quad (5.1.8)$$

5) Υπολογισμός των συντελεστών A_{lm}^E , A_{lm}^H με τη βοήθεια των οποίων το σκεδαζόμενο πεδίο εκφράζεται ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων.

$$\mathbf{A}_{lm}^E(\mathbf{K}_g^\pm) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0K_{gz}^+\sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) - \alpha_l^m e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) \right] \right. \\ \left. - \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) + \alpha_l^m \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) - m \sin\theta Y_l^m(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) \right] \right\} \quad (5.1.9)$$

$$\mathbf{A}_{lm}^H(\mathbf{K}_g^\pm) = \frac{2\pi(-i)^l}{kA_0K_{gz}^+\sqrt{l(l+1)}} \left\{ i\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) - \alpha_l^m e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) \right] \right. \\ \left. + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\alpha_l^{-m} \cos\theta e^{i\varphi} Y_l^{m-1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) + \alpha_l^m \cos\theta e^{-i\varphi} Y_l^{m+1}(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) - m \sin\theta Y_l^m(\Omega_{\mathbf{K}_g^\pm}) \right] \right\} \quad (5.1.10)$$

6) Προσδιορισμός των πινάκων ανάκλασης και μετάδοσης από ένα επίπεδο σφαιρών

$$\mathbf{M}_{gi;g'i'}^{--} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;i}^E(\mathbf{K}_g^-) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+E}(\mathbf{K}_{g'}^+) + \mathbf{A}_{lm;i}^H(\mathbf{K}_g^-) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+H}(\mathbf{K}_{g'}^+) \right] \quad (5.1.11)$$

$$\mathbf{M}_{gi;g'i'}^{++} = \delta_{gg'} \delta_{ii'} + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\mathbf{A}_{lm;i}^E(\mathbf{K}_g^+) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+E}(\mathbf{K}_{g'}^+) + \mathbf{A}_{lm;i}^H(\mathbf{K}_g^+) \mathbf{B}_{lm;i'}^{+H}(\mathbf{K}_{g'}^+) \right] \quad (5.1.12)$$

όπου οι συντελεστές ανάπτυξης \mathbf{A}_{lm}^E , \mathbf{A}_{lm}^H , \mathbf{B}_{lm}^{+E} , \mathbf{B}_{lm}^{+H} προσδιορίστηκαν προηγουμένως. Οι πίνακες ανάκλασης και μετάδοσης υπακούουν επίσης στις παρακάτω σχέσεις συμμετρίας

$$\mathbf{M}_{gi;g'i'}^{--} = \mathbf{M}_{g'i';gi}^{++}, \quad \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{+-} = \mathbf{M}_{g'i';gi}^{+-}, \quad (i, i') = (\theta, \theta), (\varphi, \varphi)$$

$$\mathbf{M}_{gi;g'i'}^{--} = -\mathbf{M}_{g'i';gi}^{++}, \quad \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{+-} = -\mathbf{M}_{g'i';gi}^{+-}, \quad (i, i') = (\theta, \varphi), (\varphi, \theta)$$

7) Υπολογισμός των τροποποιημένων πινάκων σκέδασης \mathbf{Q} από τις σχέσεις

$$\mathbf{Q}_{gi;g'i'}^I = \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{++} \exp[i(\mathbf{K}_g^+ \cdot \mathbf{d}_r + \mathbf{K}_{g'}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \quad (5.1.13)$$

$$\mathbf{Q}_{gi;g'i'}^{II} = \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{+-} \exp[i(\mathbf{K}_g^+ \cdot \mathbf{d}_r - \mathbf{K}_{g'}^- \cdot \mathbf{d}_r)] \quad (5.1.14)$$

$$\mathbf{Q}_{gi;g'i'}^{III} = \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{-+} \exp[-i(\mathbf{K}_g^- \cdot \mathbf{d}_l - \mathbf{K}_{g'}^+ \cdot \mathbf{d}_l)] \quad (5.1.15)$$

$$\mathbf{Q}_{gi;g'i'}^{IV} = \mathbf{M}_{gi;g'i'}^{--} \exp[-i(\mathbf{K}_g^- \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{K}_{g'}^- \cdot \mathbf{d}_r)] \quad (5.1.16)$$

8) Τέλος, πραγματοποιείται ο υπολογισμός των πινάκων σκέδασης από δύο επίπεδα σφαιρών, αφού η δομική μονάδα του μεταϋλικού αποτελείται από δύο επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας. Ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται εφαρμόζοντας την αρχή της πολλαπλής σκέδασης και καταλήγει στις εκφράσεις

$$\mathbf{Q}^I(n, n+1) = \mathbf{Q}^I(n+1) [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{II}(n) \mathbf{Q}^{III}(n+1)]^{-1} \mathbf{Q}^I(n) \quad (5.1.17)$$

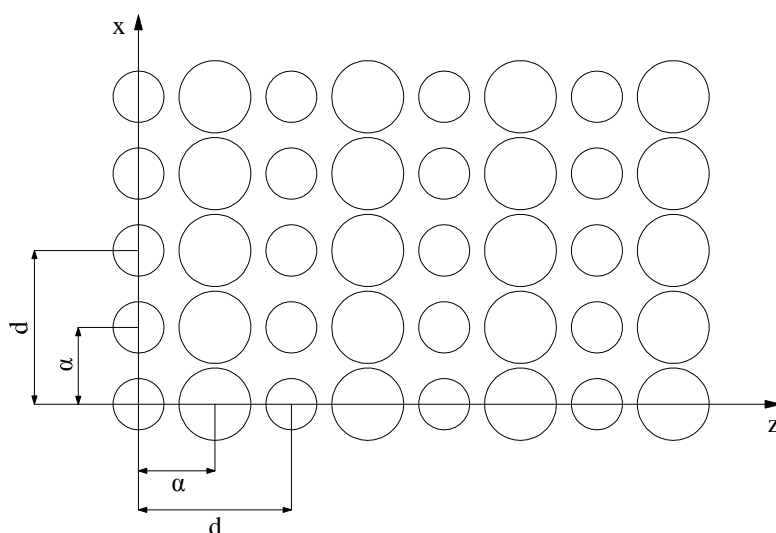
$$\mathbf{Q}^{II}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{II}(n+1) + \mathbf{Q}^I(n+1) \mathbf{Q}^{II}(n) [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{III}(n+1) \mathbf{Q}^{II}(n)]^{-1} \mathbf{Q}^{IV}(n+1) \quad (5.1.18)$$

$$\mathbf{Q}^{III}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{III}(n) + \mathbf{Q}^{IV}(n) \mathbf{Q}^{III}(n+1) [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{II}(n) \mathbf{Q}^{III}(n+1)]^{-1} \mathbf{Q}^I(n) \quad (5.1.19)$$

$$\mathbf{Q}^{IV}(n, n+1) = \mathbf{Q}^{IV}(n) [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{III}(n+1) \mathbf{Q}^{II}(n)]^{-1} \mathbf{Q}^{IV}(n+1) \quad (5.1.20)$$

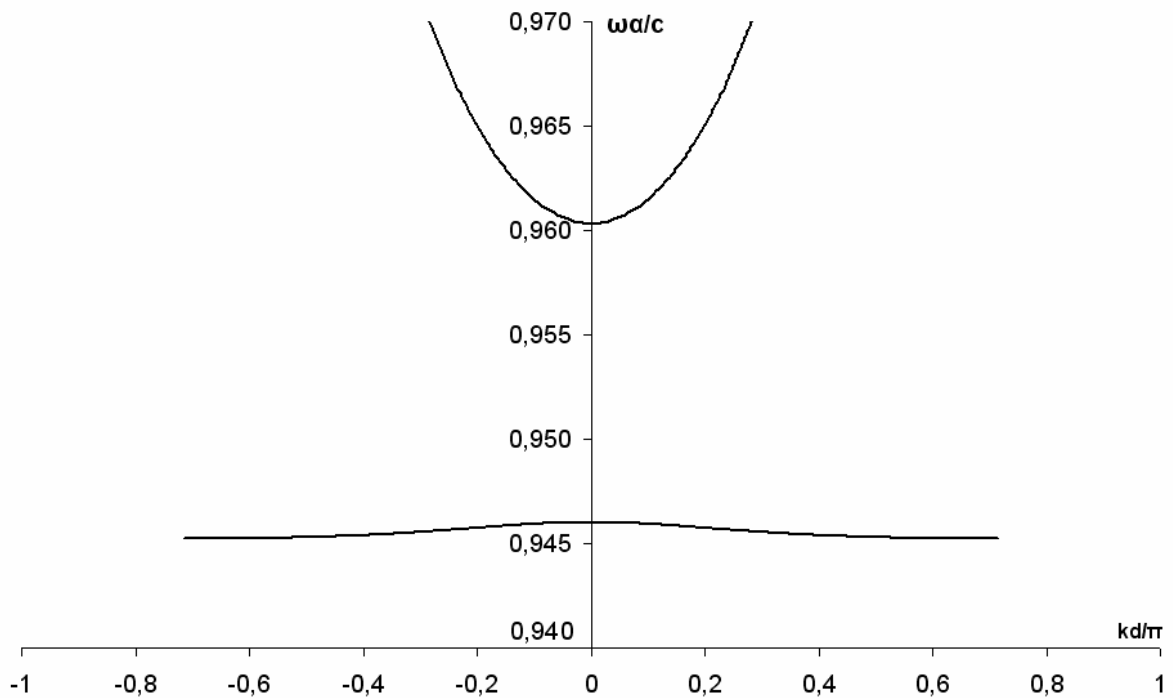
Οι πίνακες αυτοί χρησιμοποιούνται στη σχέση διασποράς (5.1.1) για τον προσδιορισμό των τιμών της σταθεράς διάδοσης k_z . Ο αριθμητικός υπολογισμός των παραπάνω ποσοτήτων γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλου κώδικα που έχει αναπτυχθεί για τη μελέτη του φαινομένου πολλαπλής σκέδασης σε φωτονικούς κρυστάλλους [34]. Ανάγοντας τον κώδικα αυτό στην περίπτωση μας (σκέδαση από επίπεδα σφαιρών) προκύπτει η καμπύλη διασποράς του σύνθετου μεταλλικού, που περιγράφει τη μεταβολή της σταθεράς διάδοσης k_z συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω . Μάλιστα, στην καμπύλη διασποράς απεικονίζονται οι αδιάστατοι παράμετροι $\omega a/c$ και $k_z d/\pi$, όπου d η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πλεγμάτων επιπέδων, a η σταθερά του πλέγματος και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Προκειμένου να διαπιστώσουμε αν η δομή μας συμπεριφέρεται ως μεταλλικό, επικεντρώνουμε την προσοχή μας γύρω από τις συχνότητες ηλεκτρικού και μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών.

Για συχνότητα συντονισμού ίση με 3 GHz, αν οι διηλεκτρικές σταθερές του υλικού των σφαιρών και του περιβάλλοντος μέσου επιλεγούν ίσες με $\epsilon_s = 100$ και $\epsilon_h = 1$ αντίστοιχα, τότε οι ακτίνες των σφαιρών προκύπτουν $r_1 = 5$ mm και $r_2 = 7.05$ mm. Η σχηματική απεικόνιση της δομής του μεταλλικού διακρίνεται σε κάτοψη στο Σχήμα 5.1 και αποτελείται από εναλλασσόμενα επίπεδα σφαιρών διαφορετικής ακτίνας διατεταγμένων σε κυβικό πλέγμα. Είναι φανερό ότι το μεταλλικό δημιουργείται από την περιοδική επανάληψη κατά τον άξονα z μιας δομικής μονάδας που περιλαμβάνει δύο επίπεδα σφαιρών. Η περίοδος επανάληψης είναι ίση με $d = 2a$.



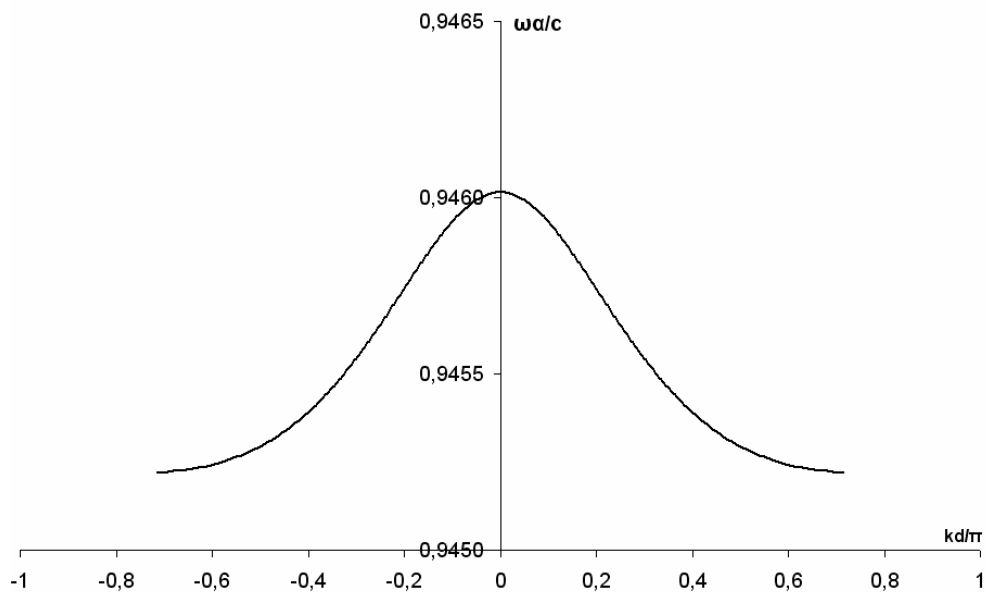
Σχήμα 5.1: Διάταξη σφαιρών μεταλλικού

Η καμπύλη διασποράς που προκύπτει γύρω από τη συχνότητα συντονισμού των 3 GHz για την παραπάνω διάταξη και τις αριθμητικές παραμέτρους παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Καμπύλη διασποράς μεταλλικού

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μία στενή ζώνη συχνοτήτων στο εύρος $0.9452 - 0.9460$, εντός της οποίας η σταθερά διάδοσης k_z μειώνεται κατ' απόλυτη τιμή με την αύξηση της συχνότητας, φαινόμενο το οποίο δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά μέσα με $\epsilon, \mu > 0$ όπου η σταθερά φάσης αυξάνει μονότονα με την αύξηση της συχνότητας. Η ζώνη αυτή διακρίνεται με λεπτομέρεια στο Σχήμα 5.3.



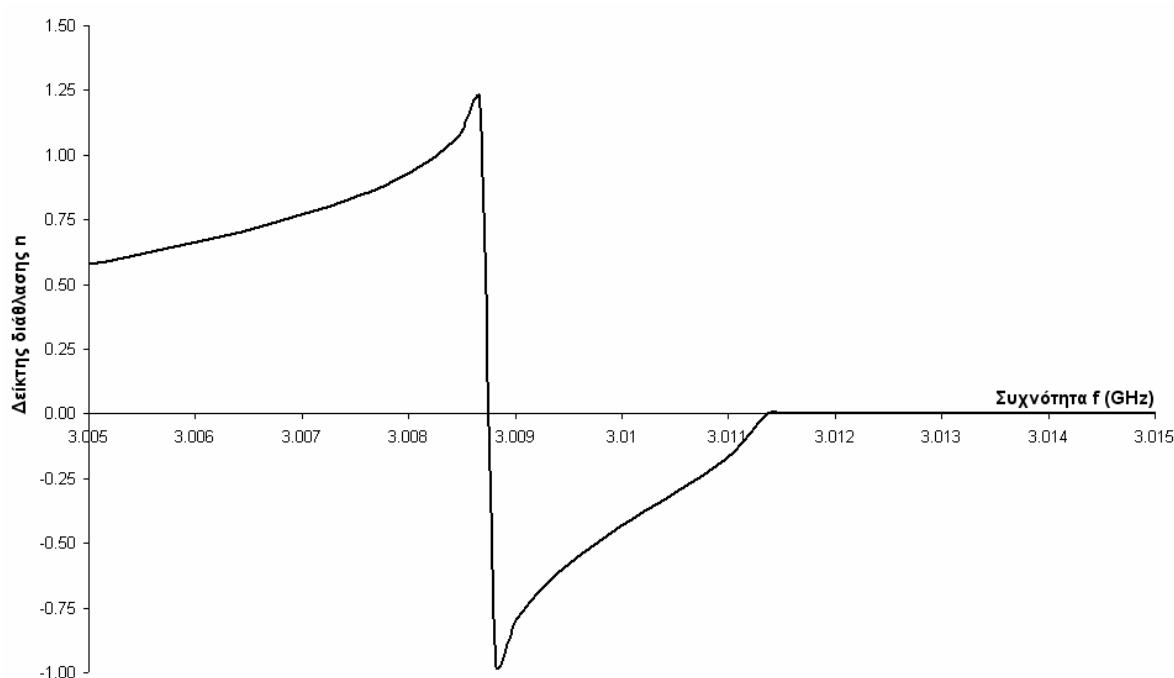
Σχήμα 5.3: Ζώνη αρνητικού δείκτη διάθλασης

Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα ομάδας, που ορίζεται ως $u_g = d\omega/dk_z$ και είναι αντιστρόφως ανάλογη της κλίσης της καμπύλης διασποράς, να λαμβάνει αρνητικές τιμές, ενώ η ταχύτητα φάσης $u_p = \omega/k_z$ είναι θετική. Τα παραπάνω ισχύουν θεωρώντας μόνο τις θετικές πραγματικές τιμές της σταθεράς διάδοσης k_z . Αν εναλλακτικά θεωρήσουμε τις αρνητικές πραγματικές τιμές του k_z , τότε προκύπτει $u_g > 0$ ενώ $u_p < 0$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στο συγκεκριμένο εύρος ζώνης η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης είναι αντιπαράλληλες, με αποτέλεσμα ο δείκτης διάθλασης του μέσου να προκύπτει αρνητικός, ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα μεταϋλικά, όπως αναλύθηκε και στο κεφάλαιο 2 της παρούσας διατριβής. Επιπλέον, η ενέργεια των κυμάτων διαδίδεται στην αντίθετη κατεύθυνση από τη φάση τους, προσδίδοντας το χαρακτήρα «οπισθοδρομικών» κυμάτων (backward waves).

Ειδικότερα, ο δείκτης διάθλασης στη συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων υπολογίζεται από τη σχέση

$$n = -\frac{c}{\omega} |k_z| \quad (5.1.21)$$

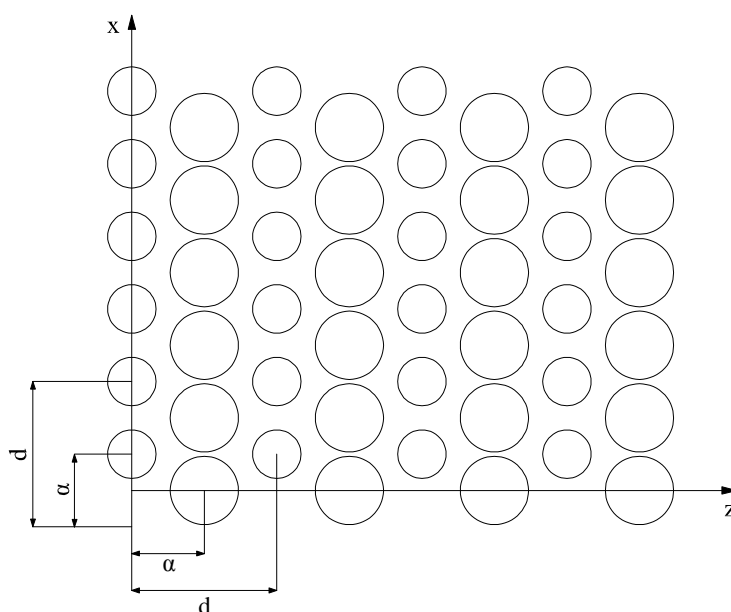
Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται ενδεικτικά η μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης της σύνθετης δομής γύρω από τη συχνότητα συντονισμού. Προκύπτει τελικά ότι στο στενό εύρος ζώνης 3,0087 – 3,0113 GHz ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές, όπως άλλωστε αναμενόταν.



Σχήμα 5.4: Μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης συναρτήσει της συχνότητας.

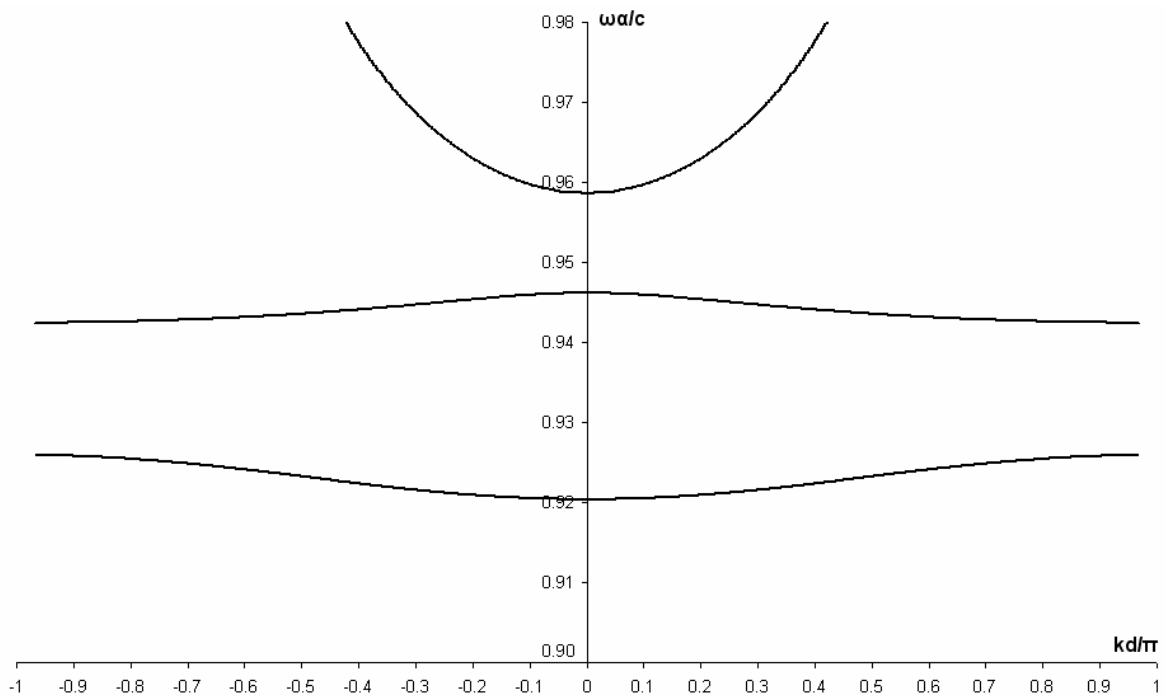
Επιστρέφοντας στην καμπύλη διασποράς του Σχήματος 5.2, παρατηρούμε ότι για (κανονικοποιημένες) συχνότητες μεγαλύτερες από 0.960, η μεταβολή της σταθεράς διάδοσης συναρτήσει της συχνότητας έχει τη συνήθη συμπεριφορά, δηλαδή η $k_z(\omega)$ είναι αύξουσα συνάρτηση της συχνότητας. Στο εύρος 0.946-0.960 απουσιάζουν εξ ολοκλήρου οι πραγματικές τιμές για τη σταθερά διάδοσης και η περιοχή αυτή αποτελεί ένα χάσμα συχνοτήτων (frequency band-gap), όπου είναι δυνατή η διάδοση μόνο φθίνοντων κυμάτων που αποσβένονται εκθετικά με την απόσταση (evanescent waves). Σημειώνεται επίσης ότι οι τιμές της σταθεράς διάδοσης εμφανίζονται κατά ζεύγη $k_z(\omega)$ και $-k_z(\omega)$ λόγω συμμετρίας της διάταξης των σφαιρών στα επίπεδα του κρυστάλλου.

Η διάταξη των σφαιρών του Σχήματος 5.1 παρουσιάζει ωστόσο το μειονέκτημα ότι το εύρος ζώνης επίτευξης αρνητικού δείκτη διάθλασης είναι αρκετά στενό, της τάξης των 2.6 MHz. Προκειμένου να αυξηθεί το εύρος ζώνης του φαινομένου, το οποίο χρειάζεται να γίνει εντονότερο, η αρχική διάταξη των σφαιρών τροποποιείται αυξάνοντας τη σύζευξη μεταξύ των σφαιρών. Η νέα διάταξη των σφαιρών απεικονίζεται στο Σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5: Τροποποιημένη διάταξη σφαιρών με στόχο την αύξηση της σύζευξης.

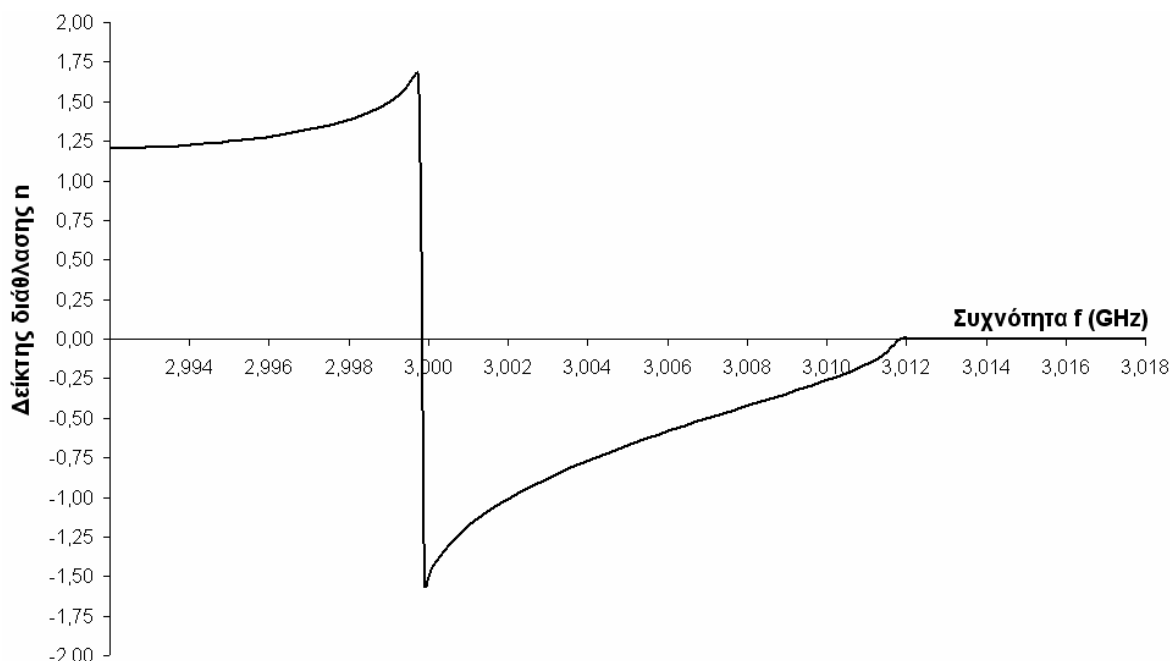
Ουσιαστικά, το επίπεδο σφαιρών μεγάλης ακτίνας μετατοπίζεται ως προς το επίπεδο των σφαιρών μικρότερης ακτίνας. Η μετατόπιση αυτή γίνεται συμμετρικά κατά τους άξονες x και y (ο άξονας y είναι κάθετος στη σελίδα) κατά απόσταση ίση με $a/2$, όπου a η σταθερά του πλέγματος. Η καμπύλη διασποράς που προκύπτει για τη νέα διάταξη παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: Καμπύλη διασποράς μεταϊλικού

Παρατηρούμε αρχικά την ύπαρξη μίας ζώνης συχνοτήτων στην περιοχή 0.920-0.926, εντός της οποίας η σταθερά διάδοσης k_z αυξάνεται με την αύξηση της συχνότητας. Η ζώνη αυτή εμφανίζεται και στα συνήθη υλικά μέσα και αντιστοιχεί σε διαδιδόμενα κύματα εντός της σύνθετης δομής. Στο εύρος ζώνης 0.942-0.946 η σταθερά διάδοσης μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας και ο δείκτης διάθλασης του μέσου προκύπτει αρνητικός, επομένως η δομή στο σύνολό της συμπεριφέρεται ως μεταϊλικό. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.7 διακρίνεται η μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης του μέσου συναρτήσει της συχνότητας. Είναι φανερό ότι το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης (3,000 – 3,012 GHz) αυξήθηκε σημαντικά σε σχέση με το αντίστοιχο του Σχήματος 5.4 για τις ίδιες αριθμητικές παραμέτρους, γεγονός που δικαιολογείται λόγω της μεγαλύτερης αλληλεπίδρασης μεταξύ των σφαιρών στη διάταξη του Σχήματος 5.5. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης αυξήθηκε από 2,6 MHz σε 12 MHz. Επίσης, από την καμπύλη του Σχήματος 5.7 παρατηρούμε ότι ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές μέχρι και -1.5, δηλαδή το φαινόμενο καθίσταται αρκετά εντονότερο σε σχέση με την περίπτωση της αρχικής διάταξης των σφαιρών. Τέλος, η ζώνη 0.958-0.980 της καμπύλης διασποράς του Σχήματος 5.6 χαρακτηρίζεται από τη συνήθη συμπεριφορά των υλικών μέσων και αντιπροσωπεύει ένα ρυθμό ανώτερης τάξης. Στις περιοχές συχνοτήτων 0.926-0.942 και 0.946-0.958 απουσιάζουν οι πραγματικές

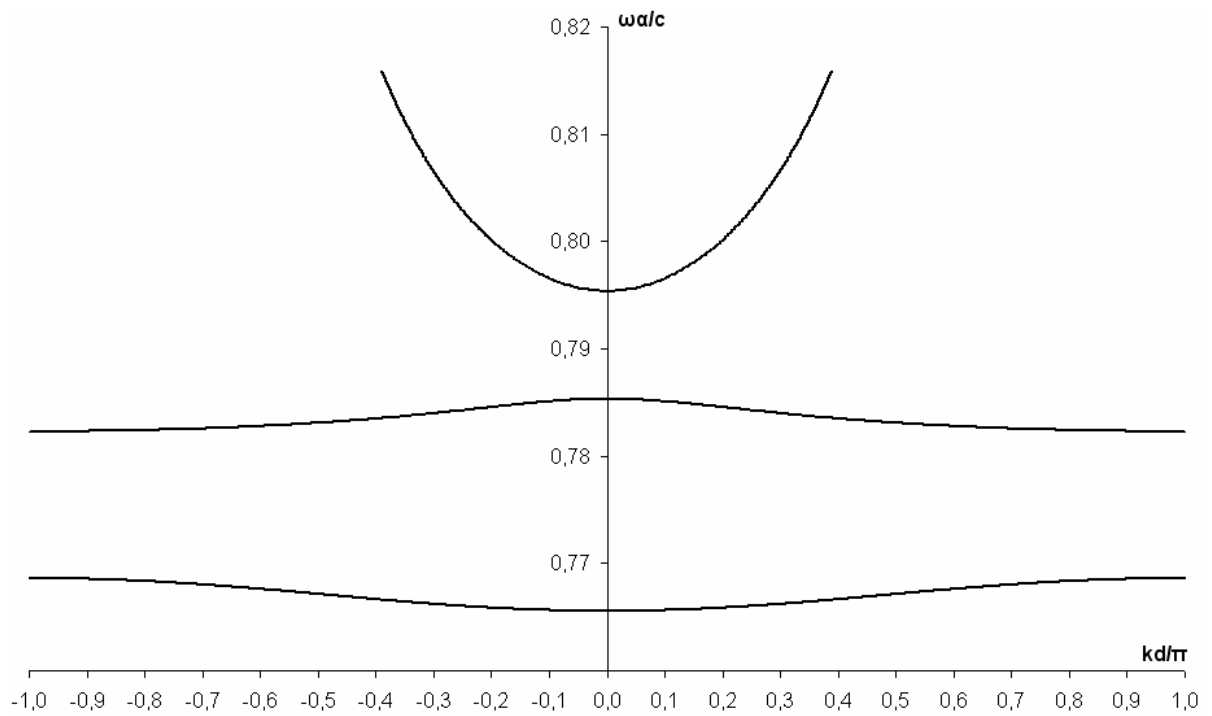
λύσεις και είναι δυνατή η ύπαρξη κυμάτων με μιγαδική σταθερά διάδοσης, δηλαδή οι περιοχές αυτές αποτελούν φωτονικά χάσματα (photonic band gaps).



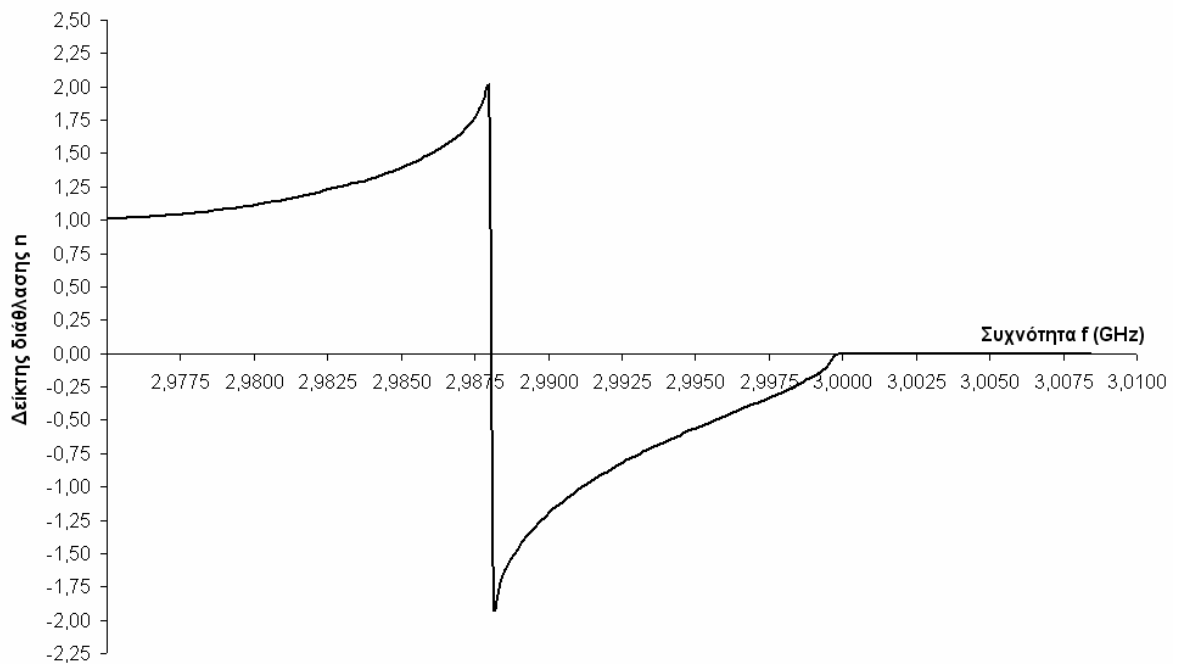
Σχήμα 5.7: Μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης συναρτήσει της συχνότητας.

Η ένταση του φαινομένου μπορεί να αυξηθεί με την αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών ϵ_s . Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι $\epsilon_s = 150$, τότε για συχνότητα συντονισμού ίση με 3 GHz, οι ακτίνες των σφαιρών προκύπτουν $r_1 = 4,1$ mm και $r_2 = 5,8$ mm, ενώ η σταθερά πλέγματος επιλέγεται ίση με $a = 12,5$ mm. Η καμπύλη διασποράς που προκύπτει έχει τη μορφή του Σχήματος 5.8.

Η καμπύλη έχει παρόμοια μορφή με την αντίστοιχη του Σχήματος 5.6 (για $\epsilon_s = 100$). Εντοπίζουμε την κανονικοποιημένη ζώνη συχνοτήτων 0,782–0,785 εντός της οποίας η δομή μας συμπεριφέρεται ως μεταύλικό. Το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης της συνολικής δομής προκύπτει αρνητικό στην παραπάνω ζώνη, όπως διακρίνουμε και στο Σχήμα 5.9. Το εύρος ζώνης στο οποίο ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές είναι κατά προσέγγιση η περιοχή 2,988–3,000 GHz (12 MHz) και προκύπτει ίδιο με το αντίστοιχο που λαμβάνεται για $\epsilon_s = 100$. Αντίθετα, το φαινόμενο παρουσιάζεται εντονότερο με την αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών, αφού ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει πλέον αρνητικές τιμές μέχρι και -2. Σημειώνεται επίσης ότι η αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών επιφέρει μείωση των διαστάσεων των σφαιρών και κατ'επέκταση του μεταύλικού, αν η συχνότητα συντονισμού παραμένει σταθερή.



Σχήμα 5.8: Καμπύλη διασποράς μεταύλικού για $\epsilon_s = 150$, $r_1 = 4.1$ mm, $r_2 = 5.8$ mm.



Σχήμα 5.9: Δείκτης διάθλασης της δομής για $\epsilon_s = 150$, $r_1 = 4.1$ mm, $r_2 = 5.8$ mm.

5.2 Επίδραση περιβάλλοντος μέσου και απωλειών

Στην ανάλυση που προηγήθηκε υποθέσαμε ότι η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου είναι ίση με τη μονάδα και επιπλέον ότι το υλικό των σφαιρών δεν εμφανίζει απώλειες, δηλαδή είναι τέλειο διηλεκτρικό. Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η επίδραση που έχουν στην ένταση και το εύρος ζώνης του φαινομένου οι απώλειες του διηλεκτρικού και η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου ϵ_h και κυρίως αν η συνολική δομή εξακολουθεί να συμπεριφέρεται ως μεταυλικό γύρω από τη συχνότητα συντονισμού, καθώς οι παραπάνω παράμετροι μεταβάλλονται.

Για τη μελέτη της επίδρασης της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_h λαμβάνουμε αρχικά υπόψη ότι οι εξισώσεις προσδιορισμού των συχνοτήτων συντονισμού των σφαιρών για τα μαγνητικά και ηλεκτρικά κύματα είναι αντίστοιχα

$$x_1 \hat{j}_n(x_2) \hat{y}'_n(x_1) - x_2 \hat{j}'_n(x_2) \hat{y}_n(x_1) = 0 \quad (5.2.1)$$

$$x_2 \hat{j}_n(x_2) \hat{y}'_n(x_1) - x_1 \hat{j}'_n(x_2) \hat{y}_n(x_1) = 0 \quad (5.2.2)$$

όπου ορίζονται οι αδιάστατες παράμετροι: $x_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_h} a = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_h} a$ και $x_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_s} a$, a η ακτίνα της σφαίρας. Επειδή ενδιαφερόμαστε για τον πρώτο ηλεκτρικό και μαγνητικό συντονισμό στις παραπάνω εξισώσεις θέτουμε $n = 1$, με αποτέλεσμα οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann να ορίζονται από τις σχέσεις [29]

$$\hat{j}_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \quad (5.2.3) \quad \hat{j}'_1(x) = \frac{\cos x}{x} + \sin x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (5.2.4)$$

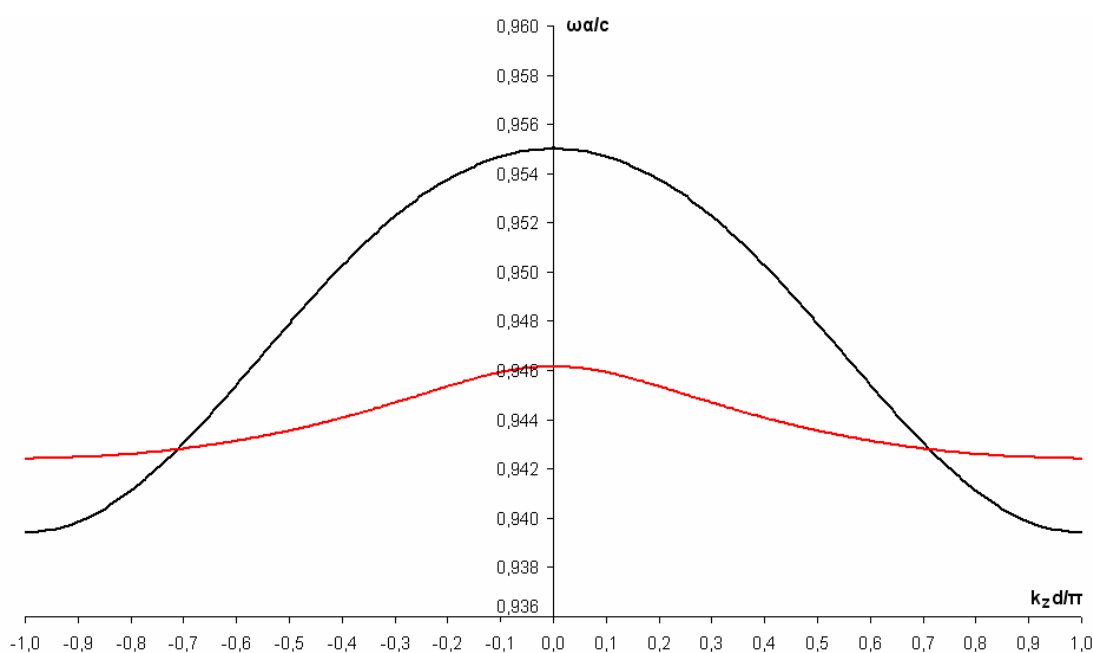
$$\hat{y}_1(x) = -\frac{\cos x}{x} - \sin x \quad (5.2.5) \quad \hat{y}'_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (5.2.6)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις σχέσεις (5.2.1) και (5.2.2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x_2 = \sqrt{\epsilon_s / \epsilon_h} x_1$ είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός των συχνοτήτων ηλεκτρικού και μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών του μεταυλικού.

Θεωρώντας ότι $\epsilon_s = 100$ και $\epsilon_h = 5$ από τη λύση της εξίσωσης (5.2.1) προκύπτει ότι $x_1 = 0.67989$, οπότε η ακτίνα των σφαιρών προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\alpha = \frac{cx_1}{2\pi f \sqrt{\epsilon_h}} \quad (5.2.7)$$

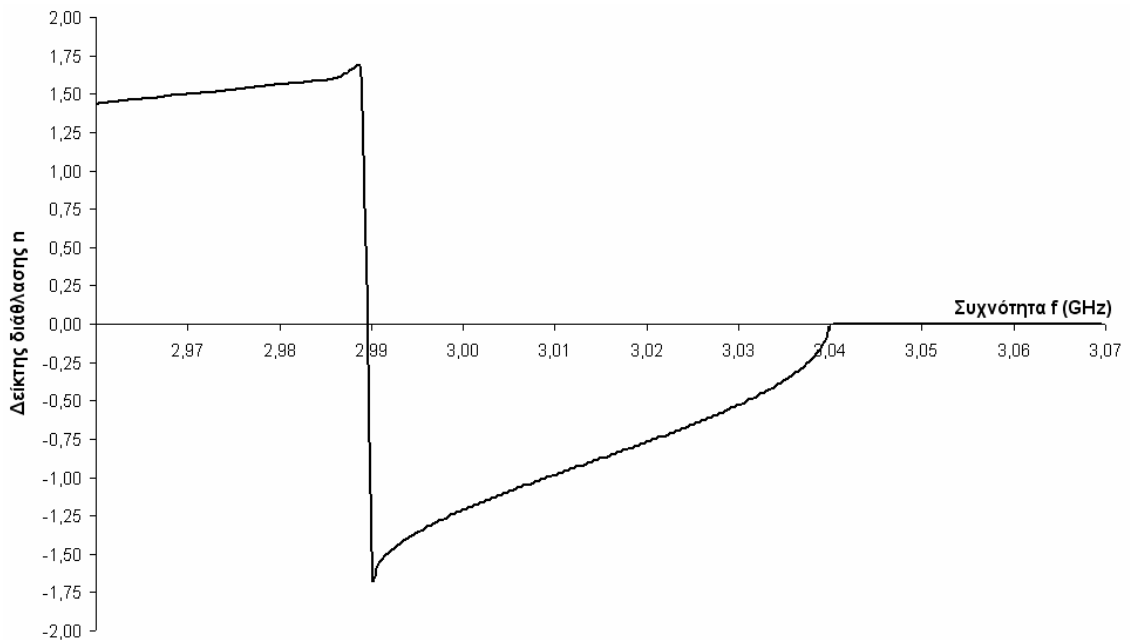
Αν επιλέξουμε και πάλι ως συχνότητα λειτουργίας $f = 3\text{GHz}$, τότε $\alpha_1 = 4.84\text{ mm}$. Με ακριβώς παρόμοια διαδικασία η λύση της εξίσωσης (5.2.2) προκύπτει $x_1 = 0.93144$ από όπου για $f = 3\text{GHz}$ λαμβάνουμε $\alpha_2 = 6.63\text{ mm}$. Οι αντίστοιχες τιμές για τις διαστάσεις των σφαιρών στην περίπτωση όπου $\epsilon_h = 1$ ήταν $\alpha_1 = 4.95\text{ mm}$ και $\alpha_2 = 7.07\text{ mm}$. Η καμπύλη διασποράς που προκύπτει γύρω από τη συχνότητα συντονισμού απεικονίζεται στο Σχήμα 5.10, όπου παρουσιάζεται μόνο η ζώνη συχνοτήτων εντός της οποίας η συνολική δομή συμπεριφέρεται ως μεταϋλικό. Με κόκκινο χρώμα παριστάνεται η αντίστοιχη ζώνη στην περίπτωση που η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου ισούται με τη μονάδα. Παρατηρούμε ότι το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης αυξάνεται δραστικά με την αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου, γεγονός ιδιαίτερα επιθυμητό. Μάλιστα, η αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς σε τιμή διάφορη της μονάδας καθιστά δυνατή την κατασκευή του μεταϋλικού, αφού οι σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν στο περιβάλλον διηλεκτρικό μέσο, γεγονός αδύνατο όταν το περιβάλλον μέσο είναι ο αέρας με $\epsilon_h = 1$.



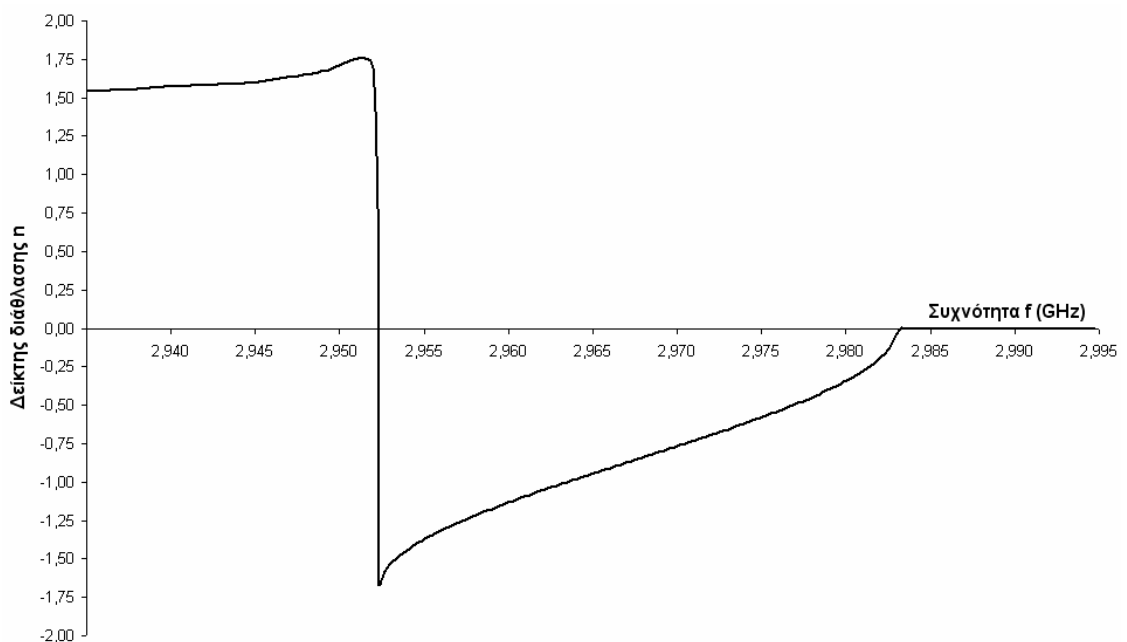
Σχήμα 5.10: Καμπύλη διασποράς μεταϋλικού για $\epsilon_h = 5$.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η μεταβολή του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης γύρω από τη συχνότητα συντονισμού των 3 GHz. Παρατηρούμε ότι το εύρος ζώνης όπου ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές είναι η περιοχή συχνοτήτων 2.99-3.04 GHz δηλαδή περίπου ίσο με 50 MHz, περίπου 4 φορές μεγαλύτερο σε σχέση με την περίπτωση που $\epsilon_h = 1$ (12 MHz). Εναλλακτικά, εκφρασμένο ως ποσοστό της κεντρικής συχνότητας των 3 GHz, το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης

αυξάνεται από 0,4% για $\epsilon_h = 1$ σε 1,7% για $\epsilon_h = 5$. Η ένταση του φαινομένου δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη μεταβολή, αφού η ελάχιστη τιμή του δείκτη διάθλασης είναι -1,65. Αυξάνοντας επιπλέον την τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου ($\epsilon_h = 10$) ο δείκτης διάθλασης της συνολικής δομής προκύπτει αρνητικός στο εύρος ζώνης συχνοτήτων 2.952-2.983 GHz (31 MHz), δηλαδή το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης μειώνεται σε σχέση με την περίπτωση που $\epsilon_h = 5$, αλλά και πάλι είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για $\epsilon_h = 1$.



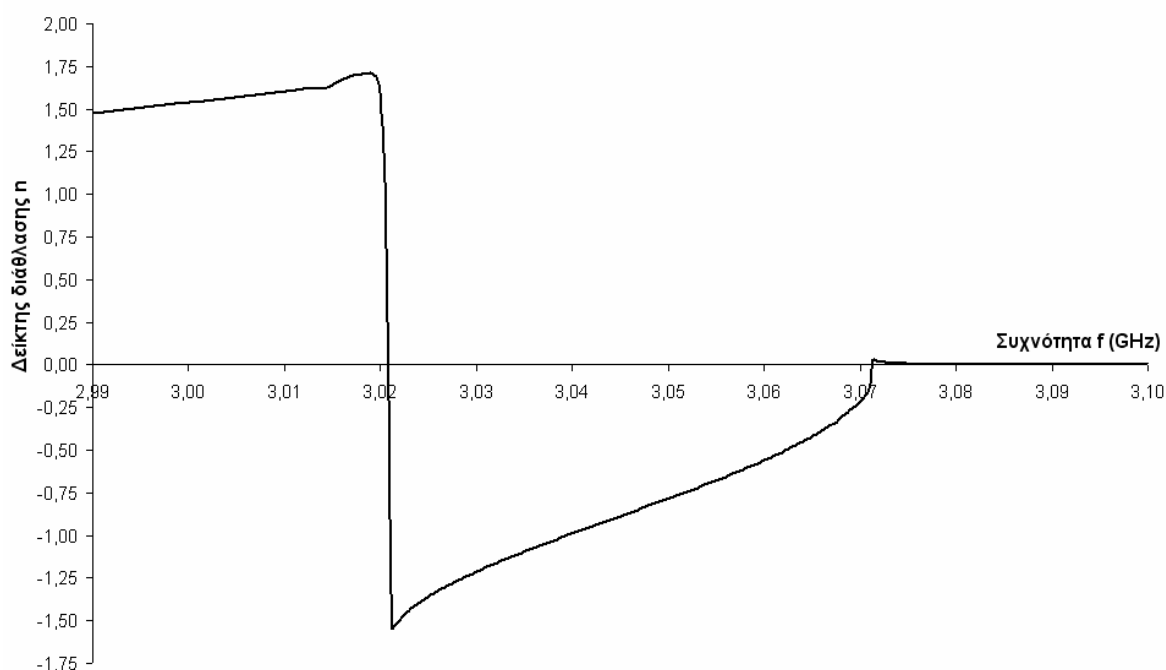
Σχήμα 5.11: Δείκτης διάθλασης της δομής για $\epsilon_h = 5$.



Σχήμα 5.12: Δείκτης διάθλασης της δομής για $\epsilon_h = 10$.

Η επίδραση των απωλειών του διηλεκτρικού των σφαιρών που αποτελούν το μεταϋλικό έχει αγνοηθεί στη μέχρι τώρα ανάλυση, αλλά θα πρέπει να εκτιμηθεί γιατί στην πράξη όλα τα διηλεκτρικά υλικά εμφανίζουν απώλειες. Το κύριο ερώτημα που χρειάζεται να απαντηθεί είναι αν η συνολική δομή εξακολουθεί να συμπεριφέρεται ως μεταϋλικό γύρω από τη συχνότητα συντονισμού, καθώς αυξάνονται οι θεωρούμενες απώλειες.

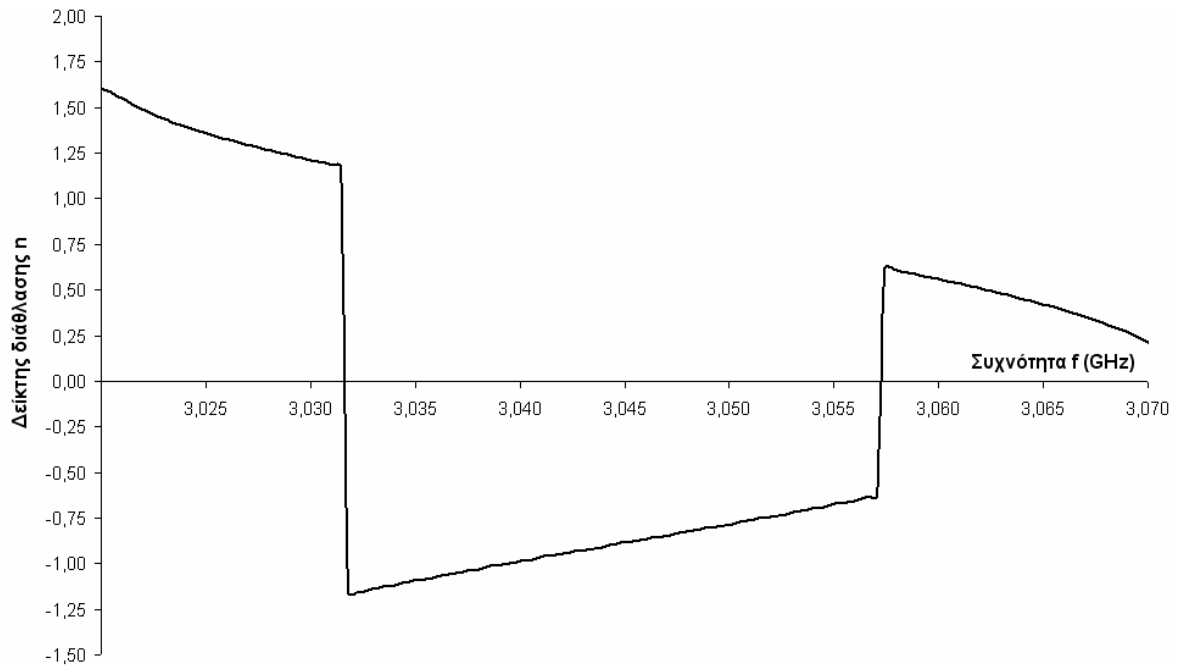
Αρχικά θεωρούμε μία μικρή τιμή απωλειών που αντιστοιχεί σε εφαπτομένη απωλειών της τάξης του 10^{-4} για διηλεκτρική σταθερά του υλικού των σφαιρών $\epsilon_s = 100$ και σταθερά του περιβάλλοντος μέσου $\epsilon_h = 5$. Για $\epsilon_s = 100 - i0.01$ λαμβάνουμε την ακόλουθη καμπύλη μεταβολής του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης γύρω από τη συχνότητα συντονισμού. Το εύρος ζώνης όπου ο δείκτης διάθλασης προκύπτει αρνητικός (Σχήμα 5.13) είναι η περιοχή συχνοτήτων 3.02-3.07 GHz (50 MHz), όσο δηλαδή και στην περίπτωση που οι απώλειες του διηλεκτρικού έχουν αγνοηθεί. Επομένως, η εισαγωγή μικρής τιμής απωλειών δεν επηρεάζει ουσιαστικά το φαινόμενο.



Σχήμα 5.13: Δείκτης διάθλασης για $\epsilon_s = 100 - i0,01$ και $\epsilon_h = 5$.

Θεωρώντας στη συνέχεια εφαπτομένη απωλειών ίση με $5 \cdot 10^{-4}$ η αντίστοιχη μορφή της καμπύλης του πραγματικού μέρους του δείκτη διάθλασης γύρω από τη συχνότητα συντονισμού απεικονίζεται στο Σχήμα 5.14. Ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει αρνητικές τιμές στο εύρος 3.032-3.057 GHz (25 MHz), το οποίο είναι σαφώς μειωμένο σχέση με το αντίστοιχο για εφαπτομένη απωλειών ίση με 10^{-4} . Επιπλέον, το φαινόμενο έχει μετριαστεί

σημαντικά ως προς την ένταση, γεγονός ενδεικτικό της αύξησης των απωλειών του διηλεκτρικού.



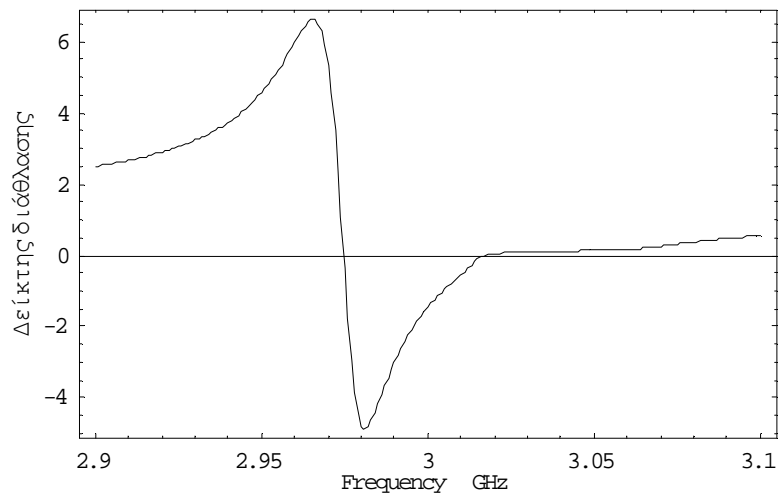
Σχήμα 5.14: Δείκτης διάθλασης για $\epsilon_s = 100 - i0,05$ και $\epsilon_h = 5$.

Για μεγαλύτερες τιμές της εφαπτομένης απωλειών το φαινόμενο σταδιακά εξαλείφεται ως προς την ένταση και το εύρος ζώνης. Ουσιαστικά, οι ιδιολύσεις που υπολογίζονται για τη σταθερά διάδοσης k_z παύουν να είναι πραγματικές και είναι εξ ολοκλήρου μιγαδικές, περιγράφοντας φθίνοντα κύματα εντός της δομής. Συγκεκριμένα, για $\tan \delta \geq 0.06$ δεν προκύπτουν πραγματικές ιδιολύσεις για τη σταθερά διάδοσης. Επομένως, οι απώλειες του διηλεκτρικού των σφαιρών είναι μία ιδιαίτερα κρίσιμη παράμετρος που έχει καταλυτική επίδραση στο φαινόμενο, αφού όταν υπερβούν μία ορισμένη τιμή η δομή παύει να συμπεριφέρεται ως μεταυλικό.

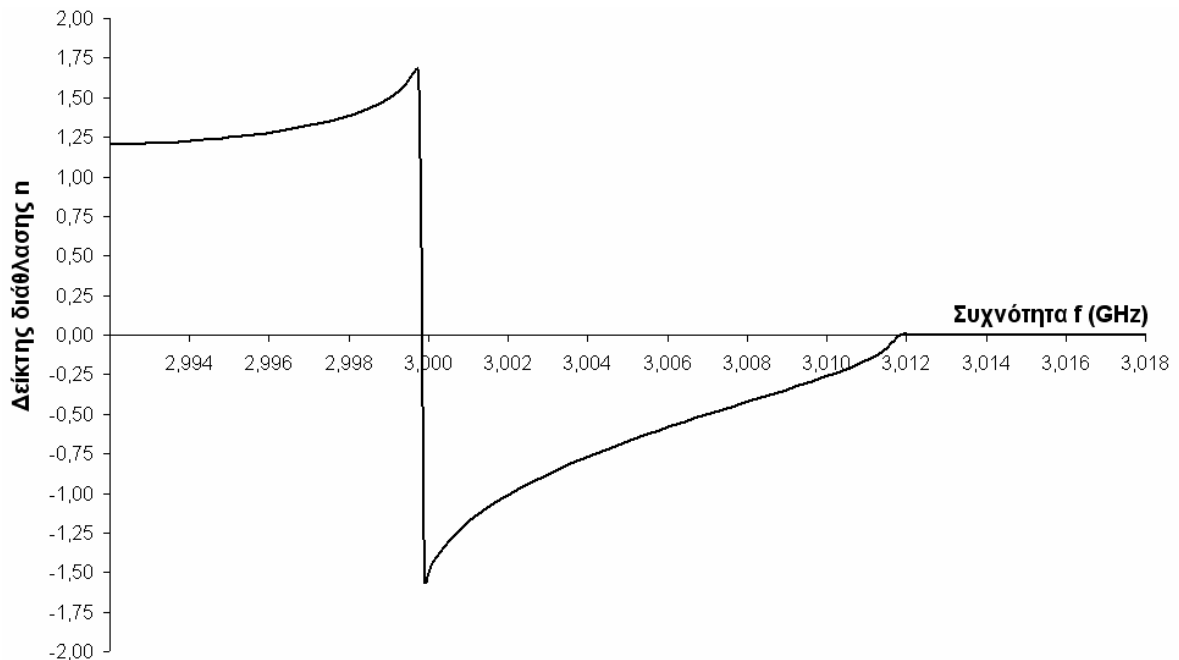
Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματα της πλήρους λύσης του προβλήματος με τα αντίστοιχα που λαμβάνονται από την προσεγγιστική αναλυτική θεωρία του ενεργού μέσου που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3, προκειμένου να διαπιστωθεί η εγκυρότητα της προσεγγιστικής ανάλυσης.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε αρχικά την περίπτωση που η διηλεκτρική σταθερά του υλικού των σφαιρών είναι $\epsilon_s = 100 - i0.01$ και του περιβάλλοντος μέσου $\epsilon_h = 1$. Η μεταβολή του δείκτη διάθλασης της δομής συναρτήσει της συχνότητας, όπως υπολογίζεται από τη θεωρία του ενεργού μέσου, φαίνεται στο Σχήμα 5.15, ενώ η αντίστοιχη καμπύλη που λαμβάνεται σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης (πλήρης λύση)

απεικονίζεται στο Σχήμα 5.16. Από τη σύγκριση των δύο καμπυλών παρατηρούμε ότι το εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης στο Σχήμα 5.15 είναι ίσο με 40 MHz (2.975-3.015 GHz), αρκετά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο των 12 MHz στο Σχήμα 5.16 (3.000-3.012 GHz). Επιπλέον, το φαινόμενο παρουσιάζεται εντονότερο στην προσεγγιστική λύση, αφού ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει ιδιαίτερα μεγάλες αρνητικές τιμές (έως και -4.5), σε αντίθεση με την πλήρη λύση όπου η ελάχιστη τιμή του δείκτη διάθλασης είναι -1.5. Συνεπώς, η προσεγγιστική μέθοδος ανάλυσης φαίνεται να υπερεκτιμά το φαινόμενο όσον αφορά στην ένταση και το εύρος ζώνης.

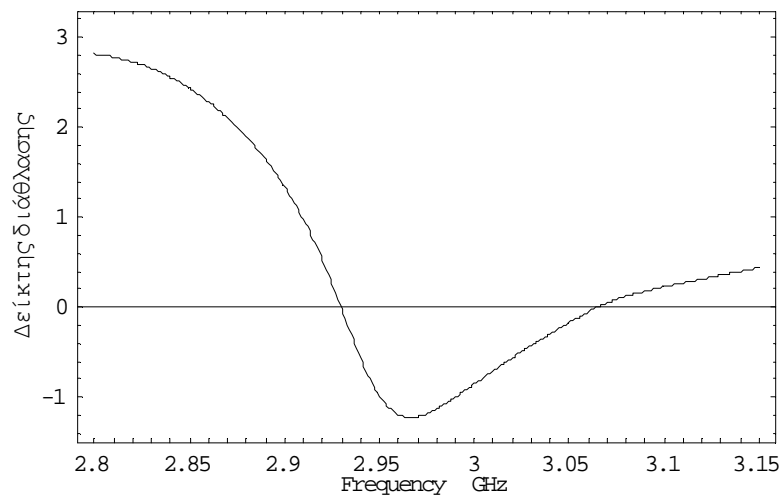


Σχήμα 5.15: Δείκτης διάθλασης σύμφωνα με τη θεωρία του ενεργού μέσου.

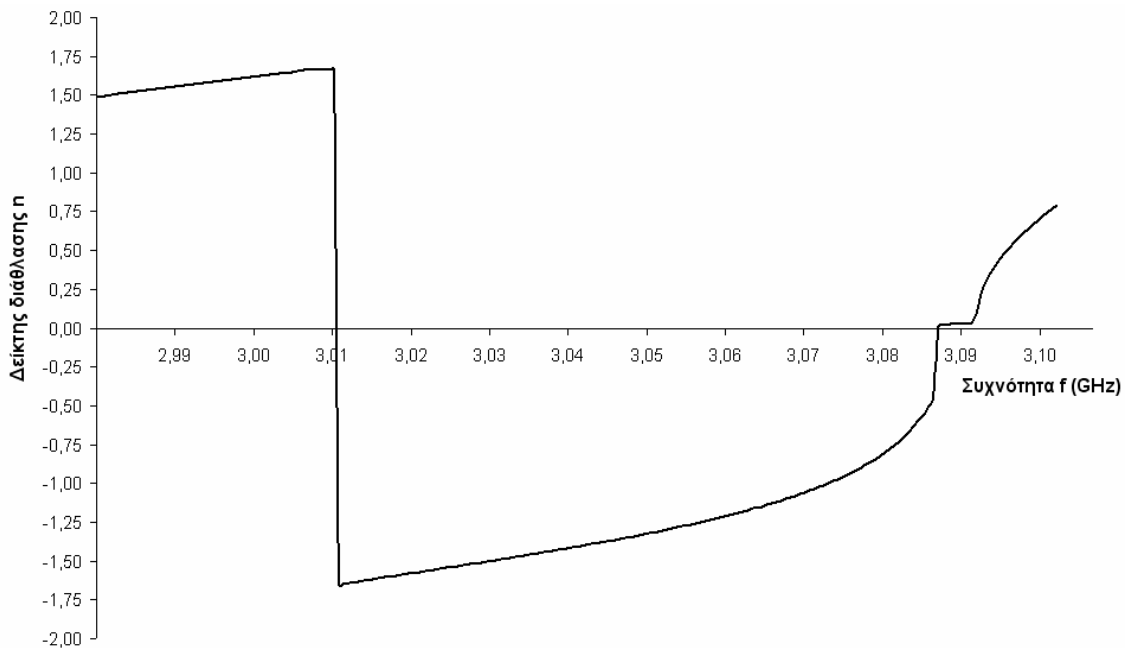


Σχήμα 5.16: Δείκτης διάθλασης σύμφωνα με τη θεωρία πολλαπλής σκέδασης.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση αύξησης της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου διατηρώντας σταθερή την τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών. Για $\epsilon_h = 3$ και $\epsilon_s = 100 - i0.01$ απεικονίζεται η μεταβολή του δείκτη διάθλασης συναρτήσει της συχνότητας με βάση την προσεγγιστική αναλυτική μέθοδο (Σχήμα 5.17) και την πλήρη λύση (Σχήμα 5.18). Είναι εμφανής η σημαντική αύξηση στο εύρος ζώνης αρνητικού δείκτη διάθλασης, το οποίο στο Σχήμα 5.17 προκύπτει ίσο με 130 MHz (2.93-3.06 GHz) και στο Σχήμα 5.18 περίπου ίσο με 78 MHz (3.01-3.088 MHz). Η προσεγγιστική μέθοδος ωστόσο φαίνεται να προσεγγίζει ικανοποιητικά την ένταση του φαινομένου, αφού η ελάχιστη αρνητική τιμή που λαμβάνει ο δείκτης διάθλασης στο Σχήμα 5.17 είναι -1.4, ενώ η αντίστοιχη τιμή στο Σχήμα 5.18 προκύπτει -1.67.



Σχήμα 5.17: Δείκτης διάθλασης σύμφωνα με την προσεγγιστική μέθοδο για $\epsilon_h = 3$.



Σχήμα 5.18: Δείκτης διάθλασης με βάση την πλήρη λύση για $\epsilon_h = 3$.

Σε γενικές γραμμές όμως η περαιτέρω αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου οδηγεί την προσεγγιστική μέθοδο σε λανθασμένα συμπεράσματα, αφού το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\lambda_h = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_h} f} \quad (5.2.8)$$

με αποτέλεσμα να μην προκύπτει αρκετές φορές μεγαλύτερο από τις διαστάσεις των σφαιρών και τη σταθερά του πλέγματος, όπως απαιτεί η θεωρία του ενεργού μέσου. Για παράδειγμα, αν $\epsilon_h = 3$ τότε $\lambda_h = 57.7$ mm, ενώ η σταθερά του πλέγματος $b = 15$ mm. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του ϵ_h είναι προφανές ότι δε θα ισχύει η συνθήκη $\lambda_h \gg b$, επομένως αξιόπιστα αποτελέσματα λαμβάνονται μόνο από την πλήρη λύση του προβλήματος.

Σημειώνεται ότι το υλικό των σφαιρών πρέπει να διαθέτει ιδιαίτερα υψηλή τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_s , της τάξεως του 100, καθώς και χαμηλές απώλειες, με εφαπτομένη απωλειών της τάξης του 10^{-4} , προκειμένου το σύνολο της δομής να συμπεριφέρεται ως μεταυλικό σε ένα συγκεκριμένο εύρος ζώνης. Ένα υποψήφιο διηλεκτρικό που να παρουσιάζει τη συγκεκριμένη συμπεριφορά στις μικροκυματικές συχνότητες λειτουργίας είναι το διοξείδιο του τιτανίου (TiO_2), το οποίο εμφανίζει διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = 96$ και εφαπτομένη απωλειών ίση με 0.0005 για συχνότητα λειτουργίας 3 GHz [53]. Άλλα υποψήφια υλικά είναι διάφορα κεραμικά υλικά που κατασκευάζονται τεχνητά και ανήκουν στην κατηγορία των perovskites. Πρόκειται για διάφορα οξειδία του τιτανίου της γενικής μορφής $(A_{1/2}^{+1} \cdot B_{1/2}^{+3})\text{TiO}_3$ όπου A^{+1} ένα ιόν της κατηγορίας των αλκαλικών μετάλλων (K, Na, Li) και B^{+3} ένα ιόν της οικογένειας των λανθανιδών [54]. Τα οξειδία αυτής της μορφής εμφανίζουν πολύ υψηλές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς. Σημειώνεται ότι αν $A = \text{Na}^{+1}$ και $B = \text{La}^{+3}$ προκύπτει $\epsilon_r = 122$ στη συχνότητα λειτουργίας των 3 GHz, ενώ όταν $A = \text{Na}^{+1}$ και $B = \text{Pr}^{+3}$ προκύπτει υλικό με $\epsilon_r = 109$, τιμές κατάλληλες για να προκαλέσουν ισχυρό ηλεκτρομαγνητικό συντονισμό στο σύνολο της δομής των σφαιρών και την εμφάνιση της επιθυμητής συμπεριφοράς του μεταυλικού.

Συνοψίζοντας, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής μεθόδου με τα αντίστοιχα της πλήρους λύσης διαπιστώνουμε ότι συμφωνούν ποιοτικά, αφού εκτός από κάποιες ποσοτικές διαφοροποιήσεις, ο δείκτης διάθλασης του μέσου διάδοσης παρουσιάζει την επιθυμητή συμπεριφορά λαμβάνοντας αρνητικές τιμές γύρω από τη συχνότητα

συντονισμού. Επιπλέον, για μικρές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου, έτσι ώστε να ισχύει ότι $\lambda_h \gg b$, η προσεγγιστική μέθοδος παρέχει αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα.

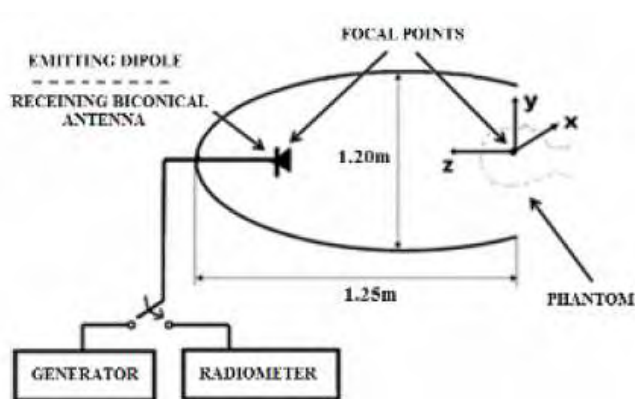
5.3 Προτεινόμενη εφαρμογή του μεταϋλικού

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται μία πιθανή εφαρμογή της δομής του μεταϋλικού που παρουσιάστηκε και μελετήθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια της διατριβής. Συγκεκριμένα, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων λειτουργίας το προτεινόμενο μεταϋλικό εμφανίζει αρνητικό δείκτη διάθλασης, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της ικανότητας εστίασης ενός υβριδικού συστήματος ενδοκρανιακής απεικόνισης και θεραπείας.

Πρόκειται για ένα μη επεμβατικό σύστημα το οποίο έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια στο εργαστήριο μικροκυμάτων και οπτικών ινών του ΕΜΠ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για διαγνωστικούς όσο και για θεραπευτικούς σκοπούς [42-44]. Η μέθοδος θεραπείας που παρέχει το σύστημα είναι η υπερθερμία, μία γνωστή τεχνική θεραπείας του καρκίνου, στην οποία η θερμοκρασία των ιστών που βρίσκονται εντός του όγκου αυξάνεται στην περιοχή 42-45° C, ενώ οι γειτονικοί υγιείς ιστοί διατηρούνται σε χαμηλότερη θερμοκρασία. Η συγκεκριμένη μέθοδος έχει εφαρμοστεί σε συνδυασμό με τις κλασικές θεραπείες του καρκίνου (ακτινοβολήση, χημειοθεραπεία) με ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ορισμένες περιπτώσεις. Ωστόσο, μονάχα η επεμβατική υπερθερμία έχει μέχρι στιγμής εφαρμοστεί με επιτυχία, παρουσιάζοντας αρκετά μειονεκτήματα εις βάρος του ασθενούς (οίδημα, αιμορραγία, μόλυνση). Για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο σύστημα εφαρμόζει μία μη επεμβατική τεχνική υλοποίησης της υπερθερμίας. Επιπλέον, για να είναι αποτελεσματική η μέθοδος της υπερθερμίας χρειάζεται να συνοδεύεται από μία αποτελεσματική μέθοδο μέτρησης της θερμοκρασίας των ιστών, απεικονίζοντας τη θερμική δόση που κατευθύνεται στους καρκινικούς ιστούς, καθώς επίσης και τη θερμοκρασία των γειτονικών υγιών ιστών. Για το σκοπό αυτό το σύστημα χρησιμοποιεί τη μέθοδο της μικροκυματικής ραδιομετρίας, η οποία παρέχει μετρήσεις της κατανομής της θερμοκρασίας των ιστών. Οι θερμοκρασιακές διακυμάνσεις στο εσωτερικό του εγκεφάλου μπορούν επίσης να μας παρέχουν πληροφορίες για τις διαφορετικές περιοχές του εγκεφάλου που δραστηριοποιούνται κάθε φορά. Μάλιστα, επειδή η εγκεφαλική δραστηριότητα προκαλεί αλλαγές στην τοπική ροή αίματος στον εγκέφαλο (regional cerebral blood flow), η οποία

με τη σειρά της επηρεάζει τις τιμές της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των διαφόρων περιοχών, η μικροκυματική ραδιομετρία μπορεί να παρέχει πληροφορίες εμμέσως και για τη μεταβολή της αγωγιμότητας των εγκεφαλικών ιστών.

Η διάταξη του συστήματος αποτελείται από μία ελλειψοειδή αγωγίμη κοιλότητα, που δρα ως μορφοποιητής της δέσμης (beamformer), ευαίσθητους ραδιομετρικούς δέκτες που λειτουργούν σε χαμηλές μικροκυματικές συχνότητες (1-4 GHz) και γεννήτρια μάγνητρον που χρησιμοποιείται για ακτινοβολία. Οι ιδιότητες του συστήματος είναι συνάρτηση της συχνότητας λειτουργίας και των γεωμετρικών ιδιοτήτων της ελλειψοειδούς κοιλότητας. Το κύριο επομένως τμήμα του συστήματος είναι η αγωγίμη ελλειψοειδής κοιλότητα, η οποία παρέχει την απαραίτητη εστίαση της ακτινοβολίας στην περιοχή ενδιαφέροντος. Η κατασκευή εκμεταλλεύεται τη γεωμετρική ιδιότητα της έλλειψης, σύμφωνα με την οποία κάθε ακτίνα που εκπέμπεται από τη μία εστία συγκλίνει στην άλλη με το ίδιο συνολικό μήκος διαδρομής. Οι διαστάσεις της κοιλότητας είναι τέτοιες που να επιτρέπουν την είσοδο ενός ενήλικα μέχρι τη μέση του κορμού και τη σάρωση του ανθρώπινου εγκεφάλου. Ικανοποιείται επίσης η προϋπόθεση τα μήκη των αξόνων της έλλειψης να μην είναι συγκρίσιμα με το μήκος κύματος των συχνοτήτων λειτουργίας, οι οποίες κυμαίνονται στο εύρος 1-4 GHz. Με βάση τα παραπάνω, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος 1,25 m και ο μικρός 1,20 m. Το λειτουργικό διάγραμμα και μία ενδεικτική φωτογραφία του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 5.19.



Σχήμα 5.19: Λειτουργικό διάγραμμα και άποψη του συστήματος.

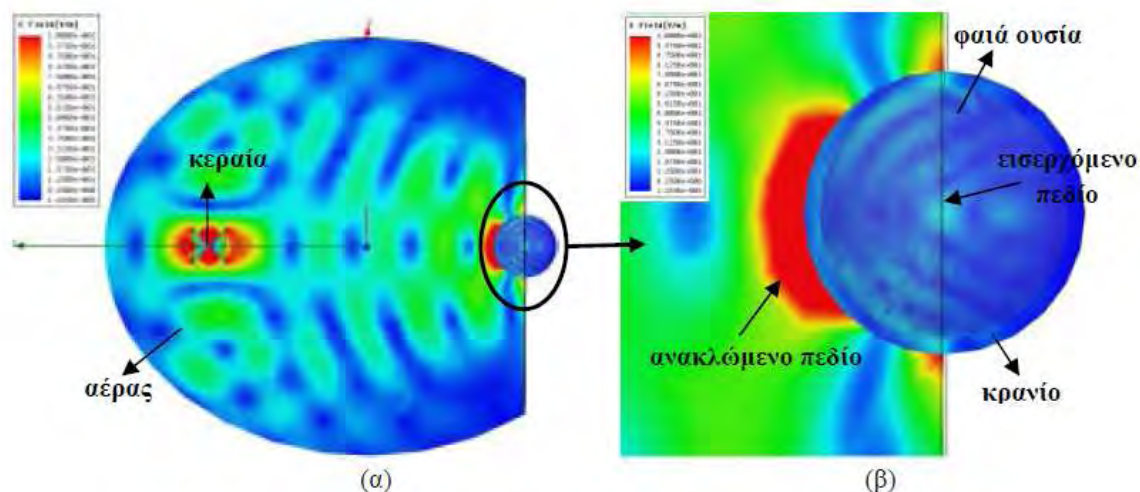
Το σύστημα υποστηρίζει δύο τρόπους λειτουργίας ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται για μετρήσεις της θερμοκρασίας (μικροκυματική ραδιομετρία) ή για ακτινοβολία των ιστών της περιοχής ενδιαφέροντος (υπερθερμία). Στην πρώτη περίπτωση το κεφάλι του ασθενούς τοποθετείται στη μία εστία της ελλειψοειδούς κοιλότητας, ενώ στην άλλη εστία βρίσκεται

μία δικωνική κεραία λήψης, η οποία συνδέεται με ένα ραδιόμετρο. Με τον τρόπο αυτό η θερμικά εκπεμπόμενη ακτινοβολία από το κεφάλι συγκεντρώνεται στην κεραία λήψης και στη συνέχεια οδηγείται στο ραδιόμετρο επιτρέποντας την ανίχνευσή της. Αντίστοιχα, όταν πραγματοποιείται υπερθερμία, η κεραία λήψης αντικαθίσταται από μία κεραία εκπομπής και το ραδιόμετρο από μία μικροκυματική γεννήτρια (magnetron). Σε αυτή την περίπτωση, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία εστιάζεται επιλεκτικά σε μία συγκεκριμένη περιοχή ενδιαφέροντος στο κεφάλι του ασθενούς.

Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί εκτεταμένες έρευνες που απέδειξαν ότι με το συγκεκριμένο σύστημα μπορεί να επιτευχθεί εστίαση της ακτινοβολίας σε συγκεκριμένες περιοχές ενδιαφέροντος του εγκεφάλου με διάφορες τιμές όσον αφορά στο μέγεθος της εστίας και το βάθος ανίχνευσης, ανάλογα με τις συχνότητες λειτουργίας [45, 46]. Εντούτοις, τα αποτελέσματα αποκάλυψαν κάποια μειονεκτήματα σχετικά με την επίδοση του συστήματος. Ειδικότερα, η έλλειψη καλής προσαρμογής στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς ανάμεσα στην τιμή του δείκτη διάθλασης του αέρα και των εγκεφαλικών ιστών είχε ως αποτέλεσμα τη διαφυγή μεγάλης ποσότητας ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας λόγω ανακλάσεων, μειώνοντας σημαντικά το βάθος ανίχνευσης της ακτινοβολίας και επηρεάζοντας δυσμενώς την ικανότητα εστίασης του συστήματος. Επιπλέον, το σύστημα παρουσίαζε μειωμένη χωρική ευαισθησία (spatial sensitivity) σε σχετικές κινήσεις του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού γύρω από το σημείο εστίασης. Η χρήση μεταλλικών μπορεί να επιλύσει τα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιώντας ως στρώμα προσαρμογής στη διεπιφάνεια αέρα-μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού, με αποτέλεσμα τη σημαντική αύξηση της εστίασης όσον αφορά στο βάθος ανίχνευσης και τη χωρική διακριτική ικανότητα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα διαφόρων προσομοιώσεων που αποδεικνύουν τα παραπάνω.

Σημειώνεται ότι στις προσομοιώσεις που ακολουθούν το ανθρώπινο κεφάλι μοντελοποιείται από μία σφαίρα δύο στρωμάτων αναπαριστώντας δύο είδη ιστών: το εξωτερικό στρώμα ακτίνας 9 cm θεωρείται ότι αναπαριστά το κρανίο, ενώ το εσωτερικό στρώμα ακτίνας 8 cm τη φαιά ουσία του εγκεφάλου. Η διηλεκτρική σταθερά και η ηλεκτρική αγωγιμότητα των δύο στρωμάτων εξαρτώνται από τη συχνότητα λειτουργίας του συστήματος [47]. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για συχνότητα ίση με 1.1 GHz οι τιμές των παραμέτρων αυτών για το κρανίο είναι $\epsilon_r = 16.3$ και $\sigma = 0.28$ S/m, ενώ για τη φαιά ουσία $\epsilon_r = 45.1$ και $\sigma = 0.84$ S/m. Στο Σχήμα 5.20 φαίνεται η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου εντός της ελλειψοειδούς κοιλότητας και εντός του μοντέλου του ανθρώπινου

κεφαλιού, που είναι τοποθετημένο με το κέντρο του στην εστία της κοιλότητας, χωρίς την παρουσία στρώματος προσαρμογής (matching layer) και για συχνότητα λειτουργίας 1.1 GHz.

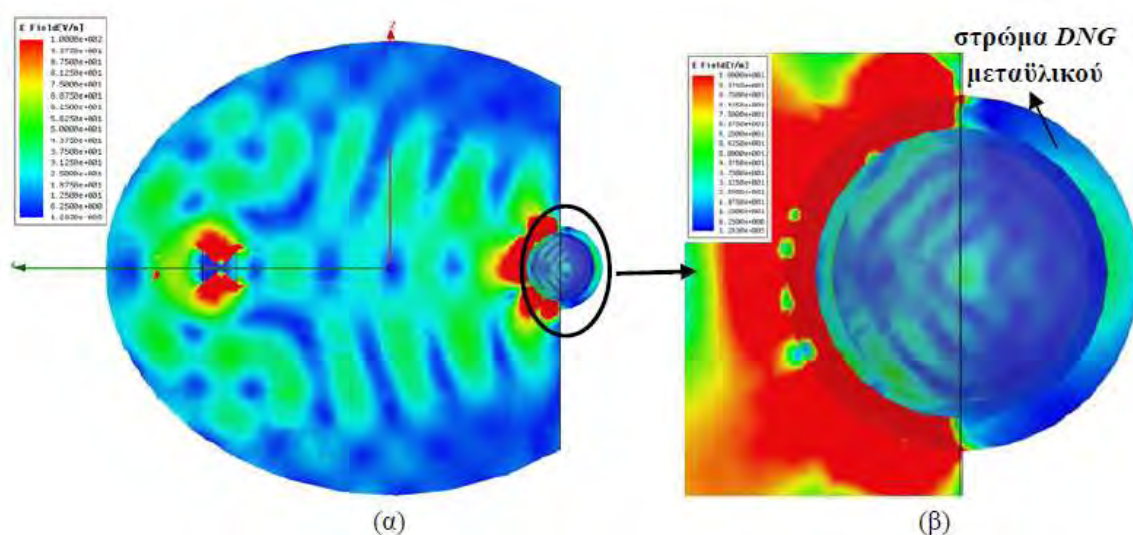


Σχήμα 5.20: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (α) στην ελλειψοειδή κοιλότητα και (β) στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.1$ GHz χωρίς στρώμα προσαρμογής.

Είναι εμφανές ότι ενώ ένα μέρος του πεδίου εισέρχεται στο μοντέλο του κεφαλιού και συγκεντρώνεται στο κέντρο του, που συμπίπτει με τη γεωμετρική εστία της έλλειψης, το μεγαλύτερο μέρος του ανακλάται στη διεπαφή αέρα-μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.20 (β) με κόκκινο χρώμα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη διαφορά ανάμεσα στην τιμή του δείκτη διάθλασης για τον αέρα και τους εγκεφαλικούς ιστούς. Εφόσον η τιμή της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας για τον αέρα και τους εγκεφαλικούς ιστούς είναι η ίδια και ίση με τη μονάδα, η διαφορά στο δείκτη διάθλασης οφείλεται στη διαφορά των τιμών της διηλεκτρικής σταθεράς.

Αρχικά εξετάζεται η δυνατότητα βελτίωσης της προσαρμογής στη διεπαφή αέρα-μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού με τη χρήση στρωμάτων από μεταλλικό. Θεωρούμε ότι το μεταλλικό τοποθετείται γύρω από το μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού και είναι ένα σφαιρικό στρώμα με δείκτη διάθλασης $n = -1$. Η τιμή αυτή επιλέγεται για να επιτευχθεί προσαρμογή με τον αέρα, έτσι ώστε ο συντελεστής ανάκλασης για κάθετη πρόσπτωση της ακτινοβολίας στη διαχωριστική επιφάνεια να είναι ίσος με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που διαδίδεται στον αέρα και προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-μεταλλικού εισέρχεται ολόκληρη στο μεταλλικό. Επίσης, θεωρείται ότι το μεταλλικό εμφανίζει πολύ χαμηλές απώλειες, με εφαπτομένη απωλειών της τάξεως του 10^{-4} . Με δεδομένες τις παραπάνω παραμέτρους του θεωρούμενου

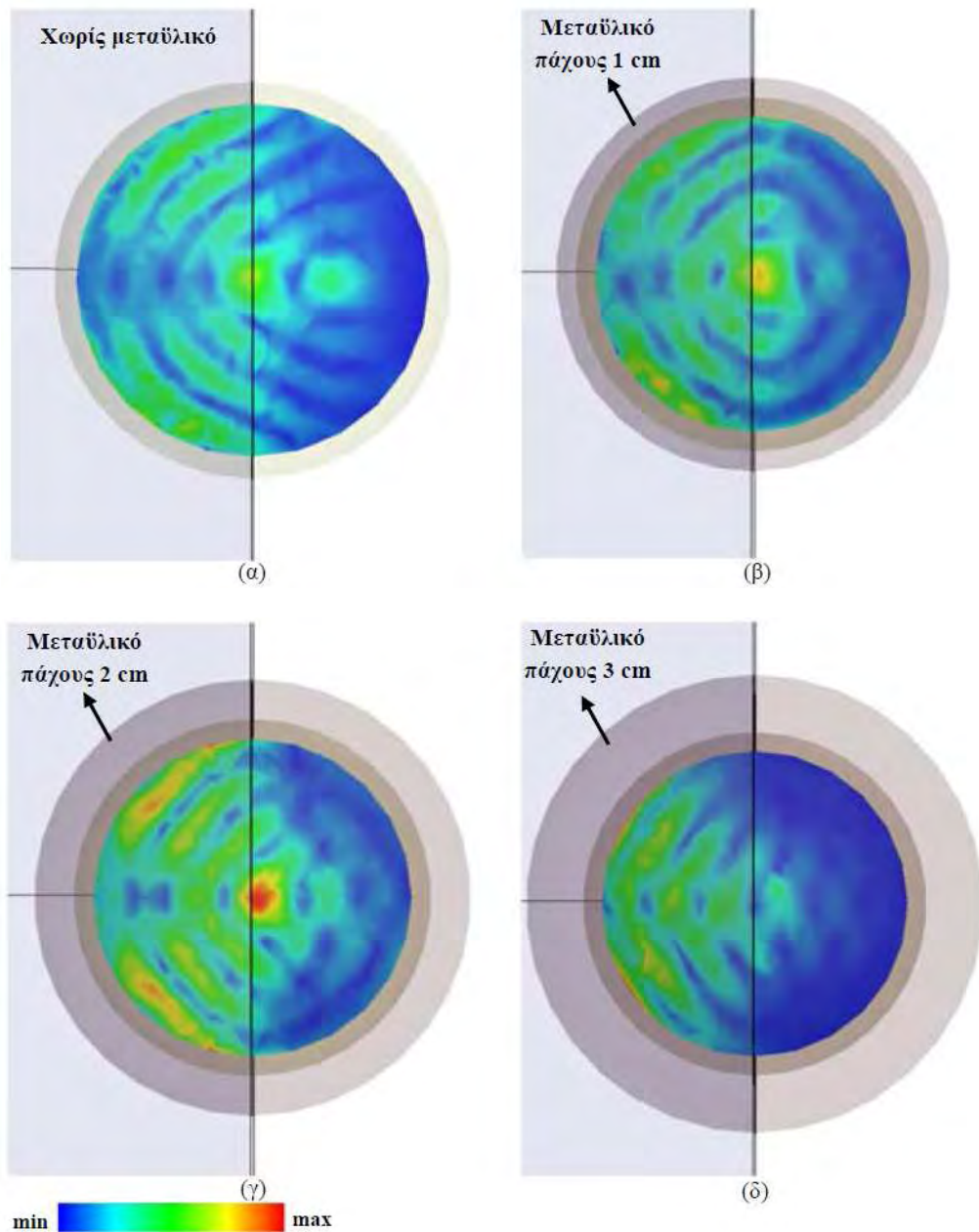
μεταλλικού, το μέγεθος εκείνο που μπορεί να επηρεάσει την επίδρασή του στη διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι το πάχος του. Για την επιλογή του βέλτιστου πάχους του στρώματος προσαρμογής πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις για τρεις διαφορετικές τιμές: 1, 2 και 3 cm. Στο Σχήμα 5.21 διακρίνεται η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στην ελλειψοειδή κοιλότητα και το μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού με την παρουσία του στρώματος προσαρμογής πάχους 1 cm [48, 49].



Σχήμα 5.21: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (α) στην ελλειψοειδή κοιλότητα και (β) στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.1$ GHz με χρήση στρώματος προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 1 cm.

Παρατηρούμε ότι επιτυγχάνεται σημαντική μείωση του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου επιβεβαιώνοντας την υπόθεση πως η παρουσία του γύρω από το μοντέλο θα βελτιώσει τη συνθήκη προσαρμογής στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού. Στο Σχήμα 5.22 παρουσιάζεται η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού για τις τρεις περιπτώσεις των στρωμάτων προσαρμογής με τα διαφορετικά πάχη και συγκρίνονται με την περίπτωση που δε χρησιμοποιήθηκε στρώμα προσαρμογής. Η κλίμακα για την ένταση του πεδίου είναι η ίδια για όλες τις εικόνες. Η προσθήκη στρώματος προσαρμογής πάχους 1 cm είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση της μέγιστης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου κατά 37%, ενώ το στρώμα πάχους 2 cm προκάλεσε ακόμα μεγαλύτερη αύξηση, της τάξης του 66%. Τέλος, η προσθήκη στρώματος προσαρμογής με πάχος 3 cm είχε ως αποτέλεσμα την εξασθένιση του πεδίου που εισέρχεται στο μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού, με αποτέλεσμα αυτό να συγκεντρώνεται σε μικρότερο βάθος και όχι στο κέντρο του, εξαιτίας της απορρόφησης σημαντικού μέρους της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Μεγαλύτερα πάχη του στρώματος προσαρμογής θα επιφέρουν ακόμα μεγαλύτερη απορρόφηση. Συνεπώς, το

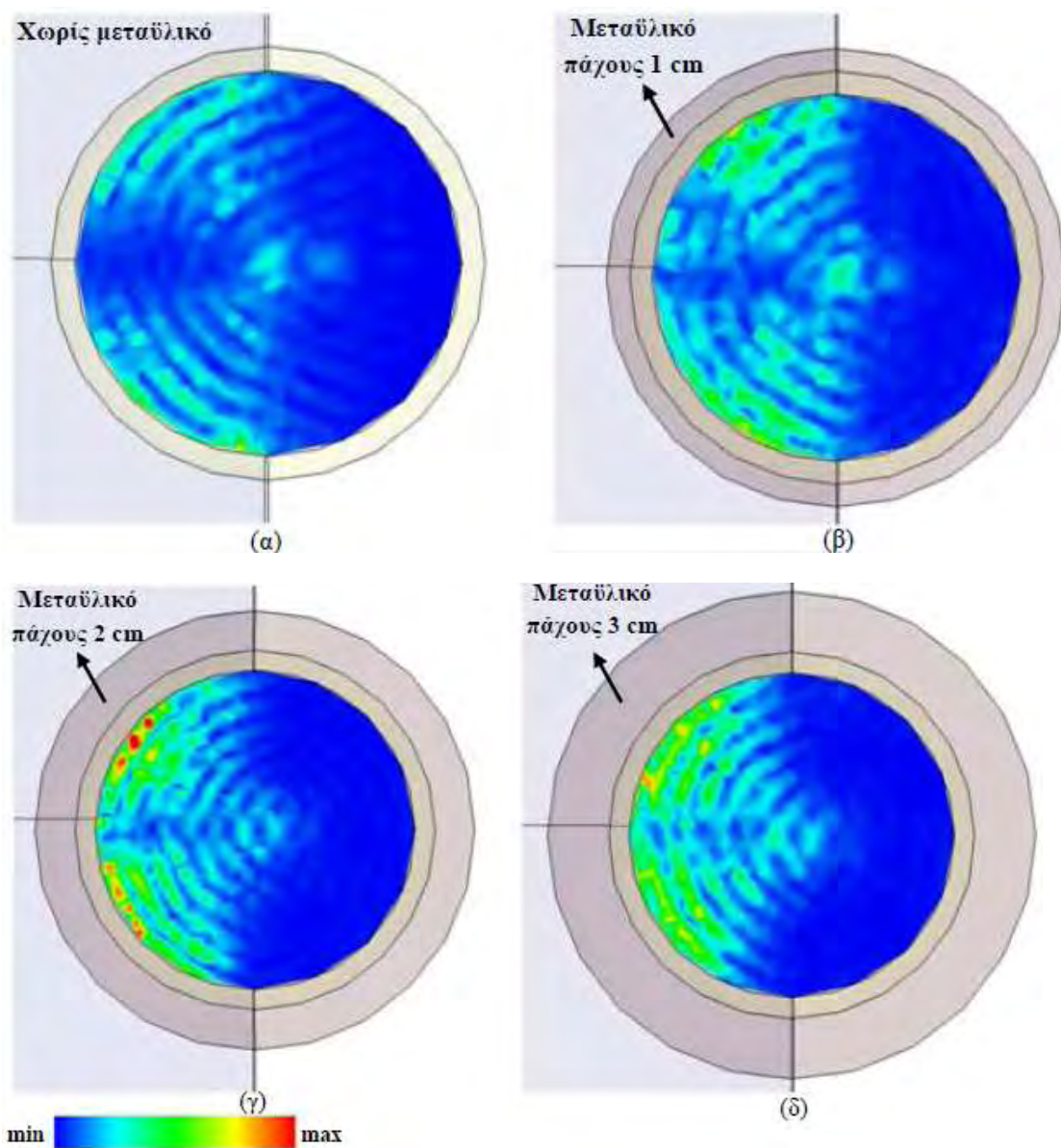
βέλτιστο πάχος για την κατασκευή του στρώματος προσαρμογής από μεταλλικό είναι 2 cm.



Σχήμα 5.22: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.1$ GHz (α) χωρίς στρώμα προσαρμογής, (β) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 1 cm, (γ) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 2 cm και (δ) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 3 cm.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για μεγαλύτερες συχνότητες λειτουργίας του συστήματος. Για παράδειγμα, για συχνότητα λειτουργίας $f = 1.8$ GHz η κατανομή του

ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού και για τις τρεις περιπτώσεις διαφορετικού πάχους του στρώματος προσαρμογής, καθώς και για την περίπτωση απουσίας στρώματος προσαρμογής, φαίνεται στο Σχήμα 5.23. Όπως συνέβη και για τη συχνότητα των 1.1 GHz, το στρώμα πάχους 2 cm είναι αυτό που εμφάνισε τη βέλτιστη απόδοση, αυξάνοντας τη μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού κατά 90%. Το στρώμα πάχους 1 cm επίσης ενίσχυσε τη διείσδυση του πεδίου στο μοντέλο προκαλώντας αύξηση της μέγιστης τιμής του κατά 26%, ενώ το στρώμα πάχους 3 cm προκάλεσε αύξηση της μέγιστης τιμής του πεδίου στο μοντέλο κατά 46%.



Σχήμα 5.23: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.8$ GHz (α) χωρίς στρώμα προσαρμογής, (β) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 1 cm, (γ) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 2 cm και (δ) με στρώμα προσαρμογής από μεταλλικό πάχους 3 cm.

Επειδή για $f = 1.8 \text{ GHz}$ το ηλεκτρικό πεδίο συγκεντρώνεται στα εξωτερικά τοιχώματα του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού, λόγω του γεγονότος ότι το βάθος διείσδυσης της ακτινοβολίας είναι μικρότερο από ό,τι σε μικρότερες συχνότητες, η ενίσχυση του πεδίου που παρατηρήθηκε στο εσωτερικό του μοντέλου με τη χρήση των στρωμάτων προσαρμογής είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του βάθους ανίχνευσης του συστήματος.

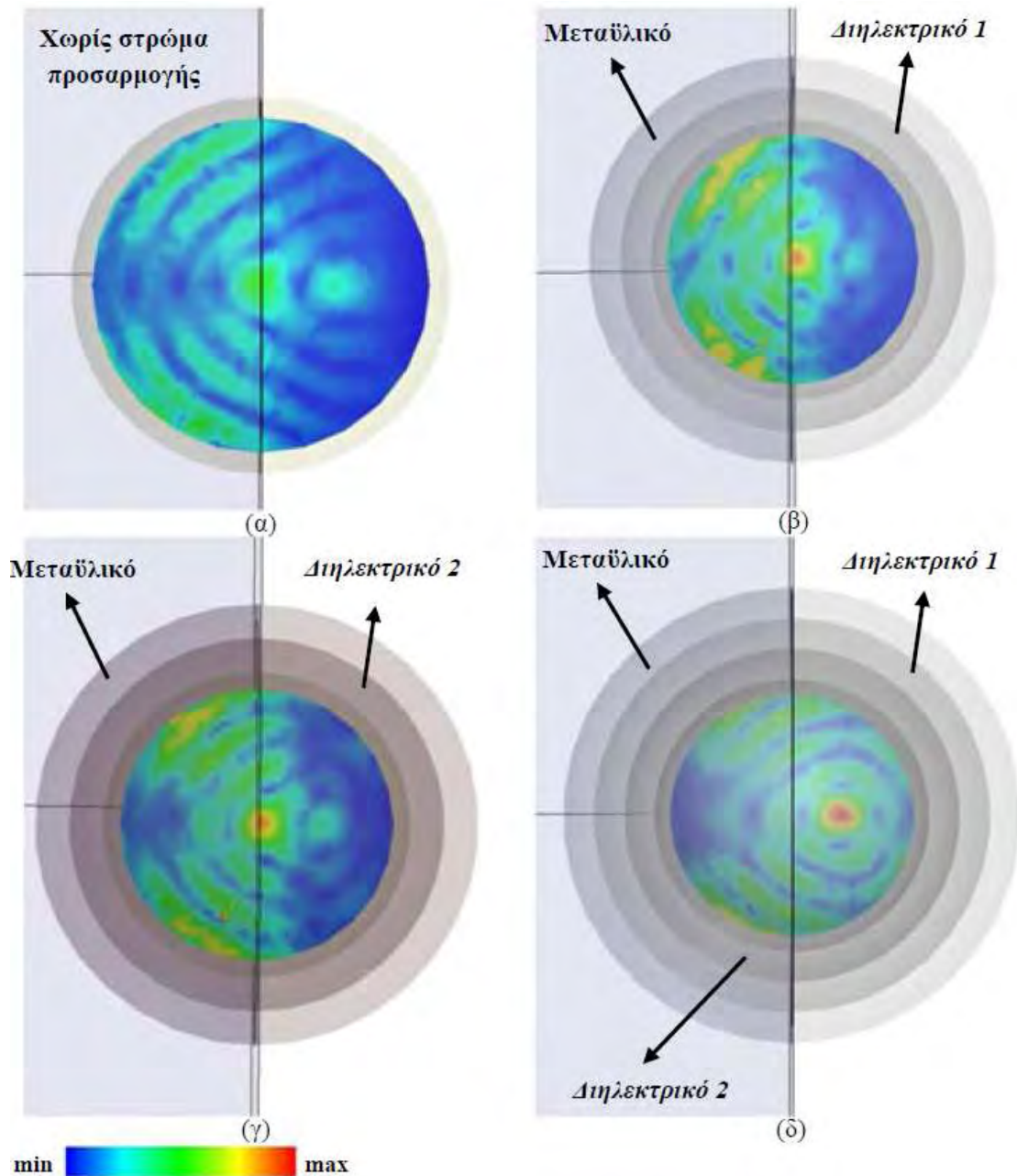
Η συνθήκη προσαρμογής στη διεπαφή αέρα-μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο με τη συνδυασμένη χρήση στρωμάτων προσαρμογής από μεταϋλικό και κοινά διηλεκτρικά [48]. Οι τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς των υλικών αυτών επιλέγονται ανάμεσα στις αντίστοιχες τιμές για τον αέρα ($\epsilon_r = 1$) και το μέσο εγκεφαλικό ιστό ($\epsilon_r = 40$) για τις συχνότητες ενδιαφέροντος, αλλά λαμβάνοντας υπόψη και την εμπορική διαθεσιμότητα τέτοιων υλικών. Με τον τρόπο αυτό, η μετάβαση μεταξύ των δύο τιμών θα πραγματοποιείται σε περισσότερα από ένα στάδια, οδηγώντας στην ομαλότερη διάδοση του κύματος.

Στις προσομοιώσεις χρησιμοποιήθηκαν δύο και τρία στρώματα προσαρμογής με τους παρακάτω συνδυασμούς υλικών:

- Εξωτερικό στρώμα από μεταϋλικό πάχους 2 cm και εσωτερικό στρώμα από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 6$ πάχους 1.5 cm.
- Εξωτερικό στρώμα από μεταϋλικό πάχους 2 cm και εσωτερικό στρώμα από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 12$ πάχους 1.5 cm.
- Εξωτερικό στρώμα από μεταϋλικό πάχους 2 cm, ενδιάμεσο στρώμα από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 6$ πάχους 1.5 cm και εσωτερικό στρώμα από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 12$ πάχους 1.5 cm.

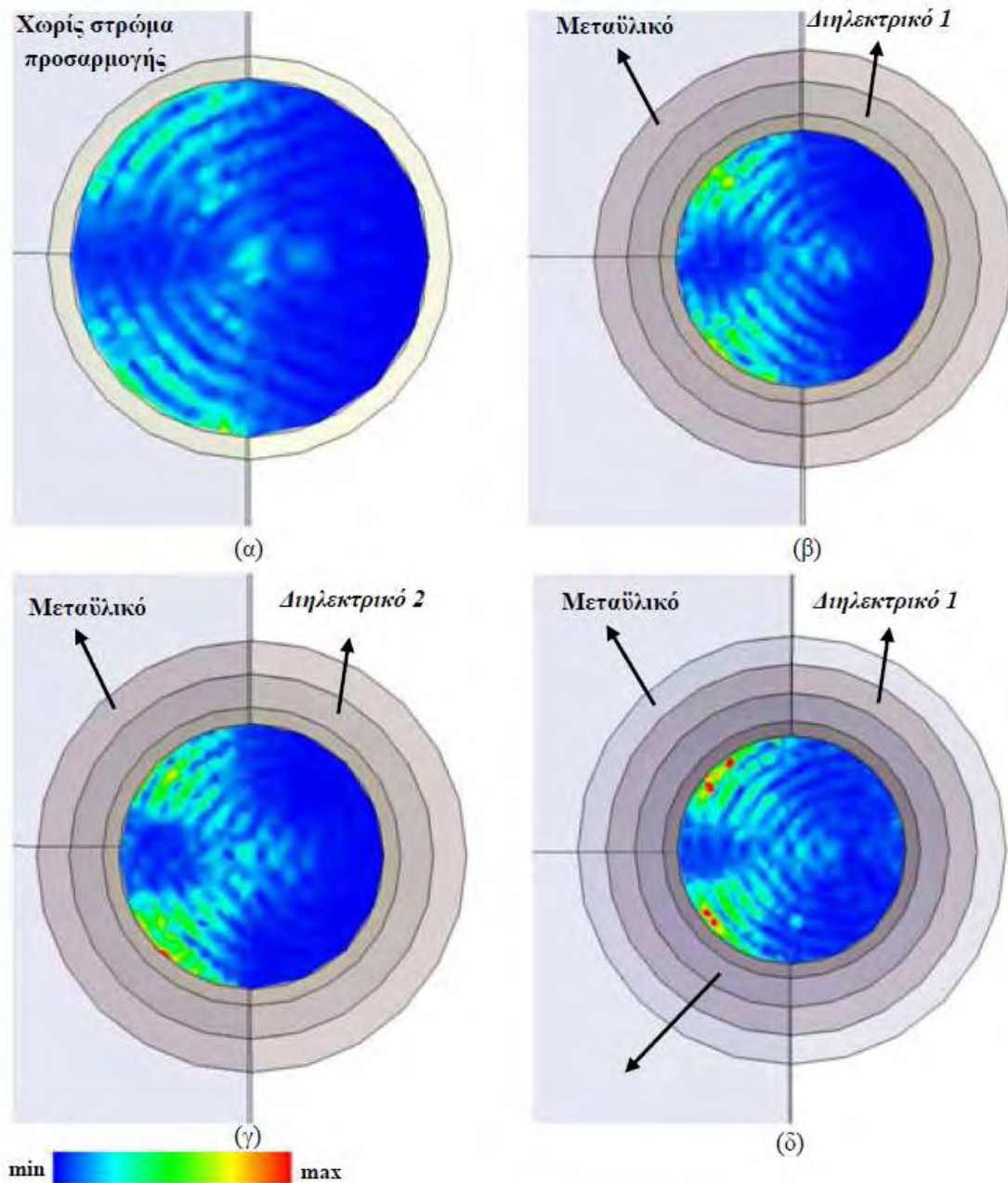
Το μεταϋλικό είχε και πάλι δείκτη διάθλασης ίσο με -1. Για καθένα από τους παραπάνω συνδυασμούς στρωμάτων και στη συχνότητα των 1.1 GHz, η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.24 και συγκρίνεται με την περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται κανένα στρώμα προσαρμογής. Για τους δύο πρώτους συνδυασμούς παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση του πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου. Συγκεκριμένα, η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου αυξήθηκε κατά 74% σε σχέση με αυτήν που καταγράφηκε χωρίς την παρουσία στρώματος προσαρμογής και για τους δύο συνδυασμούς. Για τον τρίτο συνδυασμό στρωμάτων προσαρμογής, η αύξηση της μέγιστης τιμής του πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου έφτασε το 81%, αλλά παρατηρήθηκε απόκλιση της περιοχής εστίασης από το κέντρο του,

που συμπίπτει με τη γεωμετρική εστία της ελλειψοειδούς κοιλότητας. Συνεπώς, ο βέλτιστος συνδυασμός για τη μείωση της ανακλώμενης ακτινοβολίας στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού είναι η συνδυασμένη χρήση ενός στρώματος προσαρμογής από μεταλλικό και ενός στρώματος προσαρμογής από διηλεκτρικό υλικό με $\epsilon_r = 6$ ή 12 .



Σχήμα 5.24: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.1\text{GHz}$ για διάφορους συνδυασμούς στρωμάτων προσαρμογής.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για τη συχνότητα λειτουργίας των 1.8 GHz λαμβάνουμε τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.25.



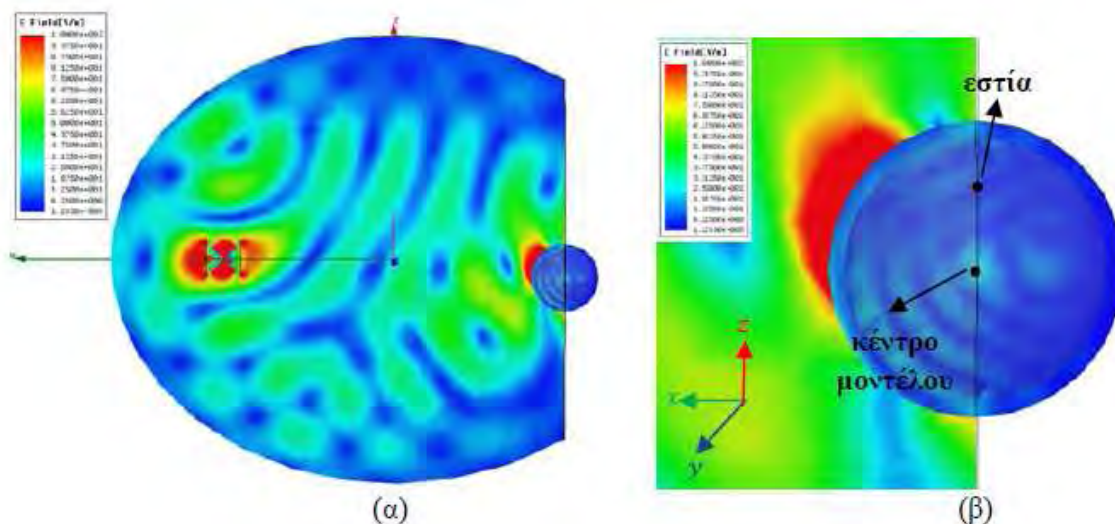
Σχήμα 5.25 Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για $f = 1.8$ GHz για διάφορους συνδυασμούς στρωμάτων προσαρμογής.

Για τους δύο πρώτους συνδυασμούς στρωμάτων, η αύξηση της μέγιστης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού έφτασε το 87% σε σχέση με την απλή περίπτωση χωρίς τη χρήση στρώματος προσαρμογής. Για τον τρίτο συνδυασμό η μέγιστη τιμή της έντασης του πεδίου προκύπτει διπλάσια από αυτή που παρατηρήθηκε χωρίς τη χρήση στρώματος προσαρμογής, δηλαδή σημειώθηκε αύξηση της τάξης του 100%. Στην περίπτωση αυτή η χρήση τριών στρωμάτων προσαρμογής δεν

επηρέασε την περιοχή εστίασης του πεδίου στο μοντέλο, όπως παρατηρήθηκε στη συχνότητα των 1.1 GHz. Επομένως, σε αυτή τη συχνότητα ο βέλτιστος συνδυασμός για τη μείωση της ανακλώμενης ακτινοβολίας στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού και την αύξηση του βάθους ανίχνευσης του συστήματος είναι η συνδυασμένη χρήση ενός στρώματος προσαρμογής από μεταϋλικό και δύο στρωμάτων προσαρμογής από διηλεκτρικά υλικά.

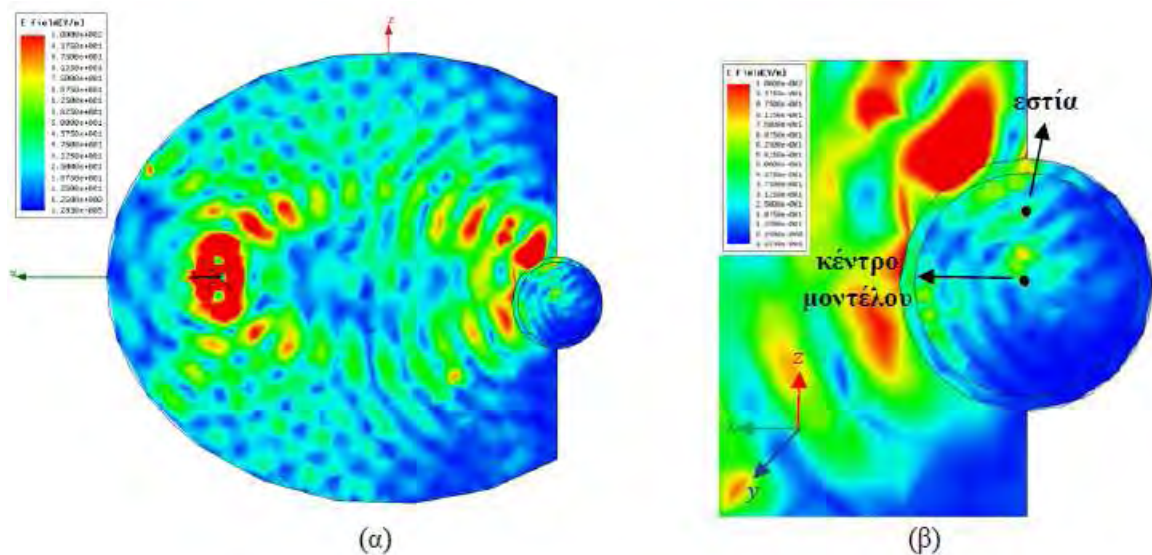
Για τη βελτίωση της χωρικής διακριτικής ικανότητας του συστήματος είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και πάλι το στρώμα προσαρμογής από μεταϋλικό σε συνδυασμό με την πλήρωση του χώρου της ελλειψοειδούς κοιλότητας με διηλεκτρικό υλικό χαμηλών απωλειών. Επιπλέον, ο αρχικός όγκος του ελλειψοειδούς μειώνεται κατά 25% σε μια προσπάθεια για την ανάπτυξη ενός μικρότερου φορητού συστήματος, διατηρώντας τις ιδιότητες εστίασης του αρχικού ελλειψοειδούς. Με την παρουσία του διηλεκτρικού υλικού στο εσωτερικό της κοιλότητας, το μήκος κύματος διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στις συχνότητες ενδιαφέροντος είναι μικρότερο από αυτό που έχουν οι ίδιες συχνότητες όταν διαδίδονται στον αέρα, με αποτέλεσμα το ηλεκτρομαγνητικό κύμα να «βλέπει» μεγαλύτερο όγκο από ό,τι όταν το ελλειψοειδές είναι κενό, οδηγώντας σε καλύτερη ανίχνευση των σχετικών κινήσεων του μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού γύρω από την εστία του ελλειψοειδούς.

Στο Σχήμα 5.26 απεικονίζεται η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου εντός της απλής ελλειψοειδούς κοιλότητας και του μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού, με το τελευταίο να είναι μετακινημένο από τη γεωμετρική εστία κατά -50mm στον άξονα z, χωρίς τη χρήση στρωμάτων προσαρμογής και για τη συχνότητα λειτουργίας των 1.1 GHz. Διαπιστώνεται ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο κέντρο του μοντέλου και όχι στην περιοχή που είναι τοποθετημένη στην εστία. Συγκεκριμένα στο σύστημα συντεταγμένων του συστήματος, η εστία της ελλειψοειδούς κοιλότητας βρίσκεται στο σημείο (-450, 0, 0) mm, το κέντρο του κεφαλιού είναι τοποθετημένο στο σημείο (-450, 0, -50) mm, ενώ το κέντρο της περιοχής στην οποία εστιάζεται η ακτινοβολία βρίσκεται στο σημείο (-450, 0, -48) mm, επιβεβαιώνοντας την κακή χωρική διακριτική ικανότητα του συστήματος.



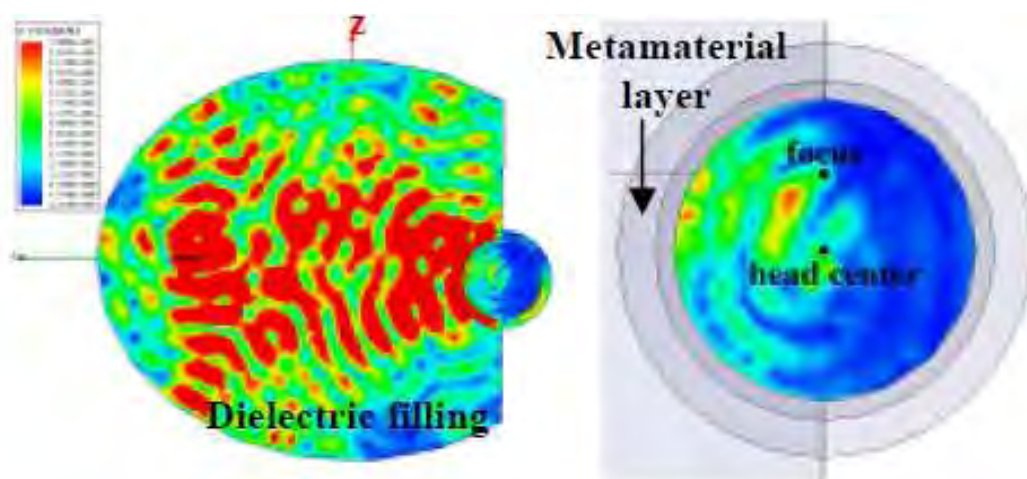
Σχήμα 5.26: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (α) στην απλή ελλειψοειδή κοιλότητα και (β) στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για μετακίνησή του από τη γεωμετρική εστία κατά -50 mm στον άξονα z , για συχνότητα $f = 1.1$ GHz.

Αν η ελλειψοειδής κοιλότητα γεμίσει με διηλεκτρικό σταθεράς $\epsilon_r = 6$ με παράλληλη μείωση του όγκου της, η κατανομή του πεδίου εντός της κοιλότητας και του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.27. Στο νέο σύστημα συντεταγμένων του συστήματος (καθώς έχει μειωθεί ο όγκος της ελλειψοειδούς κοιλότητας), η εστία βρίσκεται στο σημείο $(-337.5, 0, 0)$ mm και το κέντρο του μοντέλου είναι τοποθετημένο στο σημείο $(-337.5, 0, -50)$. Το ηλεκτρικό πεδίο εστιάζεται στην περιοχή με κέντρο το σημείο $(-337.5, 0, -25)$ mm, δηλαδή στο μέσο της απόστασης μεταξύ γεωμετρικής εστίας και κέντρου του μοντέλου του ανθρώπινου κεφαλιού. Συγκρίνοντας με την περίπτωση της κενής ελλειψοειδούς κοιλότητας, η απόσταση του κέντρου της περιοχής εστίασης από τη γεωμετρική εστία είναι μειωμένη περίπου κατά 50%. Επομένως, η πλήρωση του ελλειψοειδούς με διηλεκτρικό υλικό οδηγεί σε σημαντική ολίσθηση της περιοχής εστίασης του πεδίου προς την επιθυμητή περιοχή, που είναι τοποθετημένη στη γεωμετρική εστία του ελλειψοειδούς. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του μοντέλου είναι πολύ ισχυρότερο για το ελλειψοειδές μειωμένου όγκου, επιβεβαιώνοντας τη βελτίωση στη συνθήκη προσαρμογής στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού.



Σχήμα 5.27: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (α) στην ελλειψοειδή κοιλότητα με μειωμένο όγκο και υλικό πλήρωσης και (β) στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για μετακίνησή του από τη γεωμετρική εστία κατά -50 mm στον άξονα z , για συχνότητα $f = 1.1$ GHz.

Η βελτίωση της χωρικής διακριτικής ικανότητας του συστήματος είναι ακόμα μεγαλύτερη αν γύρω από το μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού χρησιμοποιηθεί στρώμα προσαρμογής από μεταυλικό με δείκτη διάθλασης $n = -1$ και πάχους 2 cm. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.28, παρατηρείται μεγαλύτερη μετατόπιση της περιοχής εστίασης προς τη γεωμετρική εστία σε σχέση με την περίπτωση του Σχήματος 5.27, που απουσιάζει το στρώμα προσαρμογής από μεταυλικό.



Σχήμα 5.28: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (α) στην ελλειψοειδή κοιλότητα με μειωμένο όγκο και υλικό πλήρωσης και (β) στο μοντέλο ανθρώπινου κεφαλιού για μετακίνησή του από τη γεωμετρική εστία κατά -50 mm στον άξονα z , μετά την τοποθέτηση στρώματος προσαρμογής από μεταυλικό για $f = 1.1$ GHz.

Ειδικότερα, η απόσταση του κέντρου της περιοχής εστίασης από τη γεωμετρική εστία παρουσία του στρώματος προσαρμογής είναι 12 mm, ενώ στην περίπτωση του Σχήματος 5.27 η αντίστοιχη απόσταση είναι 25 mm, παρατηρείται δηλαδή μείωση της απόστασης περίπου κατά 50%, ενώ σε σχέση με την περίπτωση της κενής ελλειψοειδούς κοιλότητας (Σχήμα 5.26) η μείωση της απόστασης είναι της τάξεως του 75%. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην περαιτέρω μείωση της ανακλώμενης ενέργειας στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού.

Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνδυασμένη χρήση στρώματος προσαρμογής από μεταϋλικό και διηλεκτρικού υλικού για την πλήρωση της ελλειψοειδούς κοιλότητας προκαλεί τη μεγαλύτερη βελτίωση στην απόκριση του συστήματος στις σχετικές κινήσεις του κεφαλιού γύρω από το γεωμετρικό σημείο εστίασης.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας, αναφέρουμε ότι η χρήση των μεταϋλικών ως στρώματα προσαρμογής που μπορούν να τοποθετηθούν γύρω από το μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού επιφέρει μεγάλη βελτίωση στην ικανότητα εστίασης του συστήματος απεικόνισης και θεραπείας, όσον αφορά στο βάθος διείσδυσης της ακτινοβολίας και στη χωρική διακριτική ικανότητα του συστήματος, δηλαδή την ικανότητα εστίασης σε σχετικές κινήσεις του κεφαλιού γύρω από το σημείο εστίασης. Μάλιστα, η βελτίωση είναι ακόμα μεγαλύτερη όταν τα μεταϋλικά συνδυαστούν με διηλεκτρικά υλικά, που χρησιμεύουν είτε ως στρώματα προσαρμογής για τη μείωση της ανακλώμενης ενέργειας στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού είτε ως υλικά πλήρωσης της ελλειψοειδούς κοιλότητας για την αύξηση της χωρικής διακριτικής ικανότητας του συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 Λειτουργία του μεταϋλικού στην περιοχή των THz

Στα κεφάλαια που προηγήθηκαν μελετήθηκε η λειτουργία του μεταϋλικού, αποτελούμενου από ένα κυβικό πλέγμα σφαιρών, στις μικροκυματικές συχνότητες. Μάλιστα, η εφαρμογή που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5 απαιτεί η συχνότητα λειτουργίας του μεταϋλικού να βρίσκεται στο εύρος 1-3.5 GHz. Στην παρούσα ενότητα θα εξεταστεί το ενδεχόμενο λειτουργίας του μεταϋλικού σε υψηλότερη περιοχή του φάσματος και συγκεκριμένα στην περιοχή των THz και των υπέρυθρων συχνοτήτων. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί επιφέρει σημαντική μείωση στις διαστάσεις της συνολικής δομής του μεταϋλικού και επεκτείνει τη χρήση του μεταϋλικού σε εφαρμογές που λαμβάνουν χώρα σε υψηλότερες συχνότητες.

Η μοντελοποίηση του μεταϋλικού ως κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών διατηρείται. Το υλικό κατασκευής των σφαιρών, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3, επιλέγεται και πάλι έτσι ώστε να εμφανίζει υψηλή διηλεκτρική σταθερά (της τάξης του 100) και χαμηλές απώλειες στην περιοχή των THz. Οι απαιτούμενες ιδιαίτερα υψηλές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς παρέχονται από ειδικούς κρυστάλλους (polaritonic materials) στις υπέρυθρες συχνότητες. Η σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα των παραπάνω υλικών δίνεται από τη σχέση [50]

$$\epsilon_s = \epsilon(\infty) \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right) \quad (6.1.1)$$

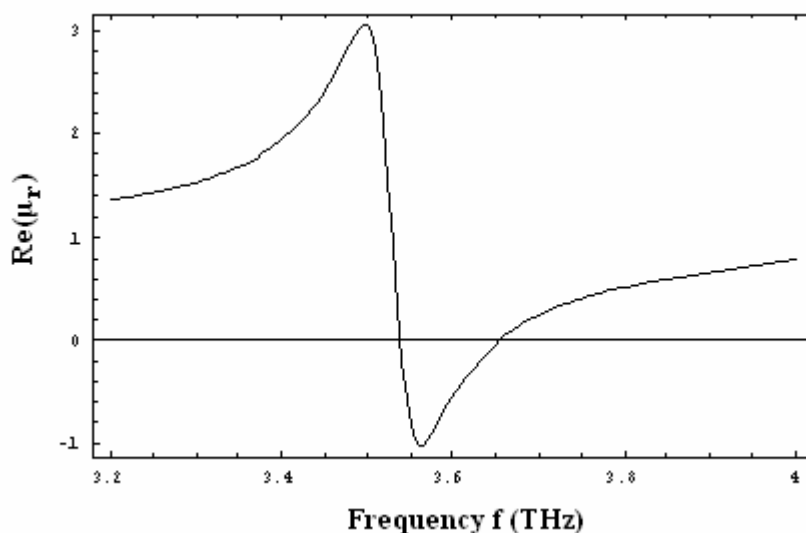
όπου $\epsilon(\infty)$ η οριακή τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς στις υψηλές συχνότητες, ω_T η εγκάρσια οπτική φωνονική συχνότητα, ω_L η διαμήκης οπτική φωνονική συχνότητα και γ ο συντελεστής απόσβεσης. Οι παράμετροι αυτές συνδέονται σύμφωνα με τη σχέση Lyddane-Sachs-Teller relation

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon(\infty)} \quad (6.1.2)$$

όπου $\epsilon(0)$ η στατική διηλεκτρική σταθερά. Τυπικό παράδειγμα τέτοιου υλικού αποτελεί ο κρύσταλλος LiTaO_3 , για τον οποίο οι σχετικές παράμετροι έχουν τις εξής τιμές [51]: $\epsilon(0) = 41.4$, $\epsilon(\infty) = 13.4$, $\omega_T/2\pi = 4.25$ THz, $\omega_L/2\pi = 7.46$ THz και $\gamma/2\pi = 0.1$ THz. Το

συγκεκριμένο υλικό κατασκευής των σφαιρών επιλέγεται επειδή εμφανίζει υψηλή τιμή στατικής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon(0)$, με αποτέλεσμα να αναμένεται ισχυρός συντονισμός της μαγνητικής διπολικής ροπής των σφαιρών και επομένως να είναι ευκολότερη η επίτευξη αρνητικής ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας για το σύνολο της δομής.

Στη συνέχεια του αριθμητικού παραδείγματος, θεωρώντας ότι η ακτίνα των σφαιρών είναι $a = 4 \mu\text{m}$, η σταθερά πλέγματος $b = 10 \mu\text{m}$ και η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου $\epsilon_h = 1$, η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού προκύπτει ίση με 3.53 THz, σύμφωνα με τη σχέση του (3.5.1) του κεφαλαίου 3, ενώ η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.60). Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζεται ενδεικτικά η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα (πραγματικό μέρος) για το παραπάνω πλέγμα σφαιρών ως συνάρτηση της συχνότητας. Παρατηρούμε ότι σε ένα στενό εύρος συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα συντονισμού (3.53-3.65 THz) η μ_r λαμβάνει πράγματι αρνητικές τιμές, ωστόσο η ένταση του φαινομένου παρουσιάζεται μειωμένη σε σχέση με την αντίστοιχη περίπτωση στις μικροκυματικές συχνότητες, λόγω διαφοράς στο διηλεκτρικό υλικό των σφαιρών και στις απώλειες που αυτό εμφανίζει. Τέλος, το μήκος κύματος ελευθέρου χώρου στη συχνότητα μαγνητικού συντονισμού προκύπτει 10.6 φορές μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σφαιρών, επιβεβαιώνοντας την ισχύ της θεωρίας του ενεργού μέσου ($\lambda_h \gg a$).



Σχήμα 6.1: Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός πλέγματος σφαιρών από LiTaO_3 .

Δεδομένου ότι ο ηλεκτρικός συντονισμός των σφαιρών προκύπτει λιγότερο ισχυρός από τον αντίστοιχο μαγνητικό για την ίδια τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_s του υλικού των σφαιρών, το φαινόμενο επίτευξης αρνητικής ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς για το

σύνολο των σφαιρών θα είναι πιο εξασθενημένο. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού πρέπει είτε να επιλεγεί υλικό με ακόμα υψηλότερες τιμές διηλεκτρικής σταθεράς είτε να βρεθεί ένας εναλλακτικός μηχανισμός για να προκληθεί ηλεκτρικός συντονισμός και κατ'επέκταση αρνητική ενεργός διηλεκτρική σταθερά. Ηλεκτρικός συντονισμός προκαλείται και από αρνητικές τιμές της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών, δηλαδή όταν εμφανίζεται συμπεριφορά πλάσματος. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από την ανάπτυξη σε σειρά Taylor του συντελεστή σκέδασης ηλεκτρικών κυμάτων A_1 που ορίζεται από τη σχέση

$$A_1 = -\frac{1}{2}[1 - \exp(-2i\alpha_1)], \text{ όπου } \tan \alpha_1 = \frac{n \hat{j}_1(nx) \hat{j}'_1(x) - \hat{j}_1(x) \hat{j}'_1(nx)}{n \hat{j}_1(nx) \hat{y}'_1(x) - \hat{y}_1(x) \hat{j}'_1(nx)} \quad (6.1.3)$$

όπου $n = \sqrt{\varepsilon_s}$ ο δείκτης διάθλασης του υλικού των σφαιρών, αφού το περιβάλλον μέσο έχει διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_h = 1$. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές εκφράσεις για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann προκύπτει

$$\tan \alpha_1 = \frac{2}{3} x^3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} + O(x^5) \cong \frac{2}{3} x^3 \frac{\varepsilon_s - 1}{\varepsilon_s + 2} \quad (6.1.4)$$

αφού $x^5 \ll 1$. Ηλεκτρικός συντονισμός παρατηρείται όταν μηδενισθεί ο παρονομαστής της παραπάνω έκφρασης, δηλαδή όταν $\varepsilon_s = -2$. Είναι επομένως φανερό ότι μία μεμονωμένη σφαίρα παρουσιάζει ηλεκτρικό συντονισμό όταν το υλικό της διαθέτει αρνητική διηλεκτρική σταθερά. Η ενεργός διηλεκτρική σταθερά του συνόλου των σφαιρών προκύπτει με τη σειρά της από τη σχέση (3.4.31) που γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\varepsilon_{r,\text{eff}} = \frac{x^3 + 4\pi i N a^3 A_1}{x^3 - 2\pi i N a^3 A_1} \quad (6.1.5)$$

όπου $x = k_0 a$, a η ακτίνα των σφαιρών, $N = 1/b^3$ η συγκέντρωση των σφαιρών και b η σταθερά του πλέγματος. Ο συντελεστής σκέδασης A_1 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$A_1 = -\frac{1}{1 - i \cot \alpha_1} \quad (6.1.6)$$

οπότε αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (6.1.5) το πραγματικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς προκύπτει

$$\text{Re}[\varepsilon_r^{\text{eff}}] = \frac{4x^6 + (6v_f + 2x^3 \cot \alpha_1)(-3v_f + 2x^3 \cot \alpha_1)}{4x^6 + (-3v_f + 2x^3 \cot \alpha_1)^2} \cong \frac{6v_f + 2x^3 \cot \alpha_1}{-3v_f + 2x^3 \cot \alpha_1} \quad (6.1.7)$$

αφού $x^6 \rightarrow 0$, όπου με v_f συμβολίζεται το ποσοστό του χώρου που καταλαμβάνει η κάθε σφαίρα (volume filling fraction) σύμφωνα με τη σχέση

$$v_f = \frac{4\pi}{3} N a^3 \quad (6.1.8)$$

Συνεπώς, παρατηρείται συντονισμός της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς όταν ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος μηδενισθεί, δηλαδή όταν

$$3v_f = 2x^3 \cot \alpha_1 \stackrel{(6.1.4)}{\Leftrightarrow} \epsilon_r^{\text{res}} = \frac{v_f + 2}{v_f - 1} \quad (6.1.9)$$

όπου έγινε χρήση της (6.1.4). Η τιμή αυτή της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού των σφαιρών είναι πάντα αρνητική, αφού $0 < v_f < 1$. Τα υλικά που εμφανίζουν τη συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι μέταλλα και ημιαγωγοί, που ακολουθούν το μοντέλο διασποράς του Drude, σύμφωνα με το οποίο η διηλεκτρική τους σταθερά περιγράφεται από τη σχέση [51]

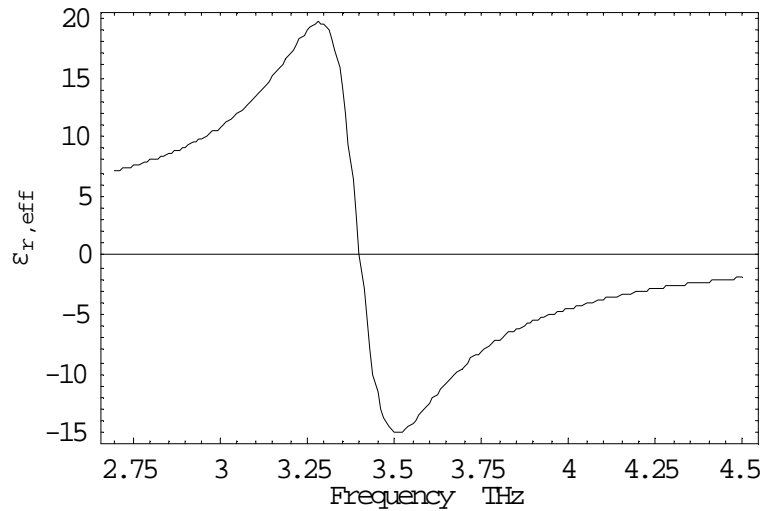
$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma} \quad (6.1.10)$$

όπου ω_p η συχνότητα πλάσματος και γ ο συντελεστής απόσβεσης. Για συχνότητες λειτουργίας μικρότερες της ω_p είναι $\epsilon_r < 0$. Μάλιστα, επειδή τα μέταλλα έχουν συχνότητες πλάσματος στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος, δεν είναι κατάλληλα στην περίπτωση μας, σε αντίθεση με τους ημιαγωγούς που μπορούν να εμφανίσουν συχνότητες πλάσματος στην περιοχή των THz με κατάλληλη νόθευση. Η συχνότητα πλάσματος του υλικού προσεγγίζεται εξισώνοντας τις εκφράσεις (6.1.9) και (6.1.10) για τη διηλεκτρική σταθερά του υλικού και αγνοώντας τις απώλειες ($\gamma = 0$), καταλήγοντας στη σχέση

$$\omega_p = \omega_{e,\text{res}} \sqrt{\frac{3}{1 - v_f}} \quad (6.1.11)$$

όπου $\omega_{e,\text{res}}$ η επιθυμητή συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού. Θεωρώντας για παράδειγμα ότι η συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού συμπίπτει με αυτήν του αντίστοιχου μαγνητικού ($f = 3.53$ THz) και ότι η ακτίνα των σφαιρών είναι $a = 4.7$ μm (οπότε $v_f = 0.435$) προκύπτει ότι $\omega_p/2\pi = 8.13$ THz.

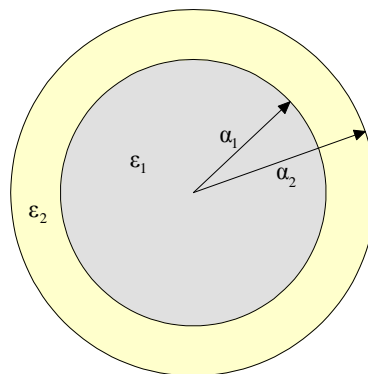
Αν μάλιστα θεωρήσουμε και απώλειες στο διηλεκτρικό των σφαιρών, ώστε $\gamma = \omega_p/100$ στη σχέση (6.1.10), υπολογίζουμε την ενεργό διηλεκτρική σταθερά του πλέγματος σφαιρών με εφαρμογή της (6.1.5) και λαμβάνουμε την εικόνα του Σχήματος 6.2.



Σχήμα 6.2: Ενεργός διηλεκτρική σταθερά πλέγματος σφαιρών από υλικό με συμπεριφορά πλάσματος.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται αρνητικές τιμές της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς σε αρκετά μεγάλο εύρος ζώνης (ουσιαστικά για συχνότητες μικρότερες της συχνότητας πλάσματος), ενώ ο συντονισμός είναι πολύ ισχυρότερος από τον αντίστοιχο για την ενεργό μαγνητική διαπερατότητα στο σχήμα 6.1.

Συνεπώς, υλικά όπως ο κρύσταλλος LiTaO_3 έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση αρνητικής μαγνητικής διαπερατότητας για το σύνολο της δομής των σφαιρών, ενώ ημιαγωγοί προσμίξεων προκαλούν αρνητικές τιμές για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά. Συνδυάζοντας τα δύο αυτά υλικά είναι δυνατή η επίτευξη ταυτόχρονα αρνητικών τιμών για τις παραμέτρους ϵ_{eff} και μ_{eff} , δηλαδή ενός μέσου με αρνητικό δείκτη διάθλασης. Για την περαιτέρω μείωση του όγκου του σχεδιαζόμενου μεταύλικού, εξετάζεται η περίπτωση σφαιρών αποτελούμενων από δύο στρώματα διηλεκτρικών (coated spheres), όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Γεωμετρία σφαίρας δύο στρωμάτων

Συγκεκριμένα, το υλικό του πυρήνα (core) επιλέγεται ώστε να μας παρέχει $\mu_{\text{eff}} < 0$, ενώ το υλικό του περιβλήματος (coating) προκαλεί $\epsilon_{\text{eff}} < 0$. Οι συντελεστές σκέδασης που υπολογίστηκαν για την περίπτωση της απλής σφαίρας δεν ισχύουν πλέον και χρειάζεται να τροποποιηθούν. Οι νέοι συντελεστές σκέδασης προσδιορίζονται γράφοντας τη γενική μορφή των συνιστωσών του H/M πεδίου σε κάθε επιμέρους περιοχή και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες (βλέπε Παράρτημα Γ). Τελικά προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις [

$$\alpha_n^r = \frac{[\hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] A_n^r - \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) + n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y)}{[n_2 \hat{y}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) - \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] A_n^r - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{j}'_n(n_2 y)} \quad (6.1.12)$$

$$b_n^r = \frac{[\hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] B_n^r - \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) + n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y)}{[n_2 \hat{y}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) - \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}_n(n_2 y)] B_n^r - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{j}_n(n_2 y)} \quad (6.1.13)$$

όπου

$$A_n^r = \frac{n_1 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x)}{n_1 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x)} \quad (6.1.14)$$

$$B_n^r = \frac{n_1 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x)}{n_1 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x)} \quad (6.1.15)$$

$x = k_0 a_1$, $y = k_0 a_2$ και n_1 , n_2 οι δείκτες διάθλασης των υλικών του πυρήνα και του περιβλήματος αντίστοιχα. Συνεπώς, οι συντελεστές σκέδασης α_n^r, b_n^r γράφονται σε μορφή αντίστοιχη με την περίπτωση της απλής σφαίρας (κεφάλαιο 3) ως εξής

$$\alpha_n^r = -\frac{1}{1 - i \cot a_n}, \quad b_n^r = -\frac{1}{1 - i \cot \beta_n} \quad (6.1.16)$$

όπου οι φάσεις a_n και β_n ορίζονται από τις σχέσεις

$$\cot a_n = \frac{[n_2 \hat{y}_n(n_2 y) \hat{y}'_n(y) - \hat{y}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] A_n^r - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{y}'_n(y) + \hat{y}_n(y) \hat{j}'_n(n_2 y)}{[-\hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) + n_2 \hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] A_n^r + \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y)} \quad (6.1.17)$$

$$\cot \beta_n = \frac{[n_2 \hat{y}'_n(n_2 y) \hat{y}_n(y) - \hat{y}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] B_n^r - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{y}_n(y) + \hat{y}'_n(y) \hat{j}_n(n_2 y)}{[-\hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) + n_2 \hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] B_n^r + \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y)} \quad (6.1.18)$$

Μελέτη μαγνητικού συντονισμού της σύνθετης σφαίρας

Στη συνέχεια εξετάζεται η συνθήκη μαγνητικού συντονισμού της σφαίρας δύο στρωμάτων, θεωρώντας ότι το υλικό του πυρήνα εμφανίζει υψηλή τιμή διηλεκτρικής σταθεράς και κατά πολύ μεγαλύτερη της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβλήματος, δηλαδή $|\varepsilon_2 / \varepsilon_1| \rightarrow 0$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι $x \ll 1$, $y \ll 1$ ενώ λόγω της μικρής τιμής του $|n_2|$ είναι και $n_2 x \ll 1$, $n_2 y \ll 1$. Από το μηδενισμό του αριθμητή της (6.1.18) προσδιορίζεται η συνθήκη μαγνητικού συντονισμού

$$\frac{n_2 \hat{y}_1(y)}{\hat{y}'_1(y)} = \frac{\hat{j}_1(n_2 y) - B_1^r \hat{y}_1(n_2 y)}{\hat{j}'_1(n_2 y) - B_1^r \hat{y}'_1(n_2 y)} \quad (6.1.19)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann με τις προσεγγιστικές τους εκφράσεις για μικρά ορίσματα λαμβάνουμε

$$B_1^r = \frac{3}{2} n_2^3 y^3 \quad (6.1.20)$$

όπου ο συντελεστής B_1^r προσεγγίζεται από τη σχέση

$$B_1^r \cong -\frac{n_2^3 x^3}{3} \frac{n_1 x \hat{j}'_1(n_1 x) - 2 \hat{j}_1(n_1 x)}{\hat{j}_1(n_1 x) + n_1 x \hat{j}'_1(n_1 x)} \quad (6.1.21)$$

Προκύπτει τελικά η σχέση

$$(9 + 2\tau) n_1 x \hat{j}'_1(n_1 x) = (4\tau - 9) \hat{j}_1(n_1 x) \quad (6.1.22)$$

όπου $\tau = (x/y)^3 = (\alpha_1/\alpha_2)^3$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορισμού των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel για $n = 1$ η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\sin(n_1 x)}{n_1 x} - \cos(n_1 x) = \frac{9 + 2\tau}{6\tau} n_1 x \sin(n_1 x) \quad (6.1.23)$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται αριθμητικά και η μικρότερη ρίζα που αντιστοιχεί στη βασική συχνότητα συντονισμού δίνεται από τη σχέση

$$n_1 x = 3.018 \Leftrightarrow \omega_m^{\text{res}} = \frac{3.018c}{\sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1} \quad (6.1.24)$$

Η τιμή αυτή της συχνότητας μαγνητικού συντονισμού είναι λίγο μικρότερη από την αντίστοιχη της περίπτωσης της απλής σφαίρας ($n_1 x = \pi$). Αντικαθιστώντας την έκφραση (6.1.1) για τη διηλεκτρική σταθερά του υλικού του πυρήνα (LiTaO_3) με $\gamma = 0$ στην εξίσωση (6.1.24) λαμβάνουμε μία προσέγγιση της συχνότητας μαγνητικού συντονισμού: $f_m^{\text{res}} = 3.54$ THz, τιμή η οποία διαφέρει ελάχιστα από αυτή που υπολογίστηκε για την απλή

σφαίρα. Άρα, επιλέγοντας κατάλληλα το υλικό του πυρήνα μπορούμε να πετύχουμε $\mu_r^{\text{eff}} < 0$, όπως και στην περίπτωση της απλής σφαίρας, δίχως το περίβλημα να επιδρά ουσιαστικά στα αποτελέσματα.

Μελέτη ηλεκτρικού συντονισμού της σύνθετης σφαίρας

Η συνθήκη ηλεκτρικού συντονισμού της σφαίρας δύο στρωμάτων προκύπτει από το μηδενισμό του αριθμητή της εξίσωσης (6.1.17)

$$\frac{n_2 \hat{y}'_1(y)}{\hat{y}_1(y)} = \frac{A_1^r \hat{y}'_1(n_2 y) - \hat{j}'_1(n_2 y)}{A_1^r \hat{y}_1(n_2 y) - \hat{j}_1(n_2 y)} \quad (6.1.25)$$

Κάνοντας χρήση των προσεγγιστικών εκφράσεων για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann λαμβάνουμε

$$3A_1^r(1 - n_2^2) = n_2^3 y^3 (2 + n_2^2) \quad (6.1.26)$$

Ο συντελεστής A_1^r γράφεται στη μορφή

$$A_1^r \cong \frac{2n_2^3 x^3 (n_1^2 - n_2^2)}{3(n_1^2 + 2n_2^2)} \quad (6.1.27)$$

από όπου με αντικατάσταση στη σχέση (6.1.26) προκύπτει

$$2\tau(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)(2 + \varepsilon_2) \quad (6.1.28)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\varepsilon_1 / \varepsilon_2| \gg 1$ η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής

$$\varepsilon_2^{\text{res}} = 2 \frac{\tau - 1}{2\tau + 1} \quad (6.1.29)$$

Η εξίσωση (6.1.29) προσδιορίζει την τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού του περιβλήματος που οδηγεί τη μεμονωμένη σφαίρα των δύο στρωμάτων σε ηλεκτρικό συντονισμό και επειδή $\tau < 1$, η τιμή αυτή προκύπτει πάντοτε αρνητική. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι το υλικό του περιβλήματος (coating) εμφανίζει διασπορά σύμφωνα με το μοντέλο του Drude της σχέσης (6.1.10).

Για τον προσδιορισμό της απαιτούμενης διηλεκτρικής σταθεράς του περιβλήματος που οδηγεί το σύνολο της δομής των σύνθετων σφαιρών σε ηλεκτρικό συντονισμό, αντικαθιστούμε την προσεγγιστική έκφραση του συντελεστή σκέδασης a_1^r στην εξίσωση υπολογισμού της $\varepsilon_{r,\text{eff}}$ (6.1.5). Ο συντελεστής a_1^r προκύπτει από τη σχέση (6.1.16) όπου

$$\cot a_1 \cong \frac{3}{2y^3} \frac{\varepsilon_2(1 + 2\tau) + 2(1 - \tau)}{\varepsilon_2(2\tau + 1) - (1 - \tau)} \quad (6.1.30)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.1.5) λαμβάνουμε

$$\varepsilon_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3(1-i\cot a_1) - 4\pi iN}{k_0^3(1-i\cot a_1) + 2\pi iN} \cong \frac{2y^3S - i(2Ry^3 + 6Sv_f)}{2y^3S + i(3Sv_f - 2Ry^3)} \quad (6.1.31)$$

όπου θέτουμε $S = 2y^3[\varepsilon_2(2\tau + 1) - (1 - \tau)]$, $R = 3[\varepsilon_2(1 + 2\tau) + 2(1 - \tau)]$ και $v_f = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a_2}{b} \right)^3$.

Το πραγματικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς τότε γράφεται

$$\text{Re}\{\varepsilon_r^{\text{eff}}\} = \frac{4y^6S^2 - (2Ry^3 + 6Sv_f)(3Sv_f - 2Ry^3)}{4y^6S^2 + (3Sv_f - 2Ry^3)^2} \cong \frac{2Ry^3 + 6Sv_f}{2Ry^3 - 3Sv_f} \quad (6.1.32)$$

αφού $y^6S^2 \sim y^{12} \rightarrow 0$. Συντονισμός παρατηρείται όταν $2Ry^3 - 3Sv_f = 0$ από όπου προκύπτει τελικά

$$\varepsilon_2^{\text{res}} = \frac{v_f + 2}{v_f - 1} \frac{1 - \tau}{1 + 2\tau} \quad (6.1.33)$$

Αυτή είναι η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού του περιβλήματος που μπορεί να οδηγήσει την ενεργό διηλεκτρική σταθερά του συνόλου των σύνθετων σφαιρών σε ηλεκτρικό συντονισμό. Εξισώνοντας μάλιστα τις εκφράσεις για το $\varepsilon_2^{\text{res}}$ από τις σχέσεις (6.1.33) και (6.1.10) αγνοώντας τυχόν απώλειες ($\gamma = 0$) προκύπτει η προσεγγιστική έκφραση για τη συχνότητα πλάσματος του υλικού του περιβλήματος.

$$\omega_p = \omega_{e,\text{res}} \sqrt{\frac{3(1 - \tau v_f)}{(1 - v_f)(1 + 2\tau)}} \quad (6.1.34)$$

όπου $\omega_{e,\text{res}}$ η επιθυμητή συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού. Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση για $\tau \rightarrow 0$ ταυτίζεται με την αντίστοιχη σχέση (6.1.11) για την περίπτωση των απλών σφαιρών.

Αριθμητικά αποτελέσματα

Ο πλήρης υπολογισμός της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας και της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς του συνόλου της δομής των σφαιρών δύο στρωμάτων συμπεριλαμβάνει τις θεωρούμενες απώλειες των δύο διηλεκτρικών: $\gamma_1/2\pi = 0.1$ THz και $\gamma_2 = \omega_p/100$ για τα υλικά του πυρήνα και του περιβλήματος αντίστοιχα, ενώ πραγματοποιείται αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συντελεστών σκέδασης b_1^r και a_1^r (σχέσεις 6.1.13 και 6.1.12 για $n = 1$) στις παρακάτω εξισώσεις

$$\mu_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N b_1^r}{k_0^3 - 2\pi i N b_1^r} \quad (6.1.35)$$

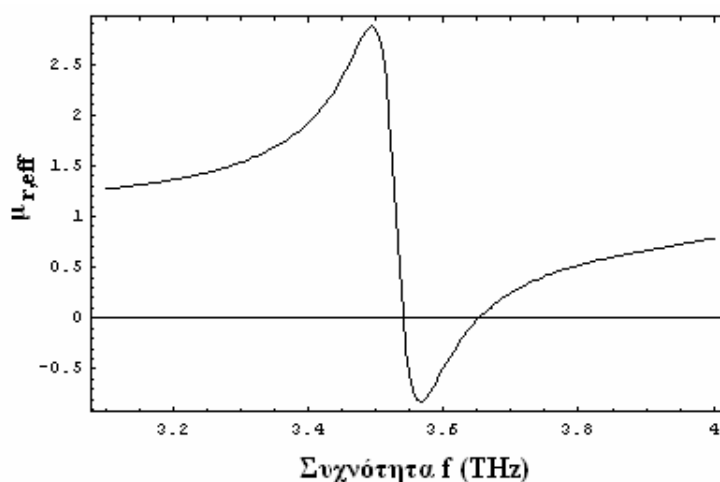
$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{k_0^3 + 4\pi i N \alpha_1^r}{k_0^3 - 2\pi i N \alpha_1^r} \quad (6.1.36)$$

όπου $N = 1/b^3$ η συγκέντρωση των σφαιρών και b η σταθερά του πλέγματος.

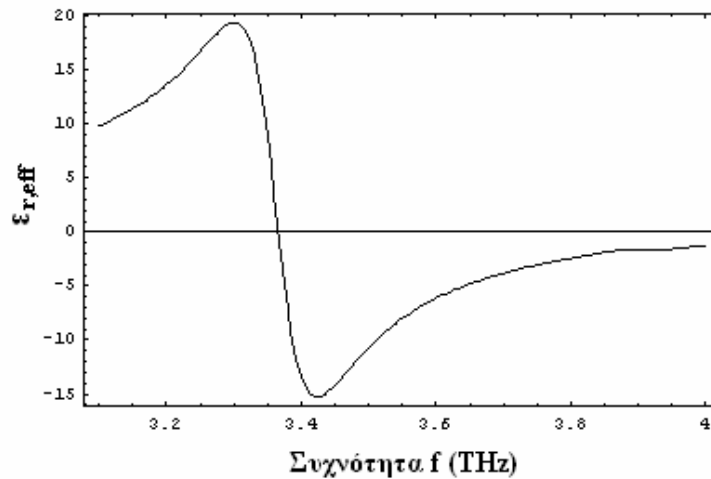
Η συχνότητα μαγνητικού συντονισμού του πυρήνα προκύπτει από τη σχέση (6.1.24) ίση με 3.54 THz και η συχνότητα ηλεκτρικού συντονισμού του περιβλήματος επιλέγεται ίση με 3.5 THz, καθορίζοντας την τιμή της συχνότητας πλάσματος του υλικού του περιβλήματος από τη σχέση (6.1.34) ίση με 4.62 THz (είναι $\nu_f = 0.435$ και $\tau = 0.616$). Τα διηλεκτρικά υλικά του πυρήνα (κρύσταλλος LiTaO_3) και του περιβλήματος (ημιαγωγός κατάλληλης νόθευσης) υπενθυμίζεται ότι ακολουθούν αντιστοίχως τα εξής μοντέλα διασποράς [50]

$$\epsilon_1(\omega) = \epsilon(\infty) \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_1} \right), \quad \epsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma_2} \quad (6.1.37)$$

όπου: $\epsilon(\infty) = 13.4$, $f_T = 4.25$ THz, $f_L = 7.46$ THz, $f_P = 4.62$ THz, $\gamma_1/2\pi = 0.1$ THz, $\gamma_2 = \omega_p/100$, ενώ οι ακτίνες του πυρήνα και του περιβλήματος και η σταθερά του πλέγματος είναι αντίστοιχα $a_1 = 4$ μm , $a_2 = 4.7$ μm και $b = 10$ μm . Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις του πραγματικού μέρους της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας (Σχήμα 6.4) και ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς (Σχήμα 6.5) στο εύρος 3-4 THz.

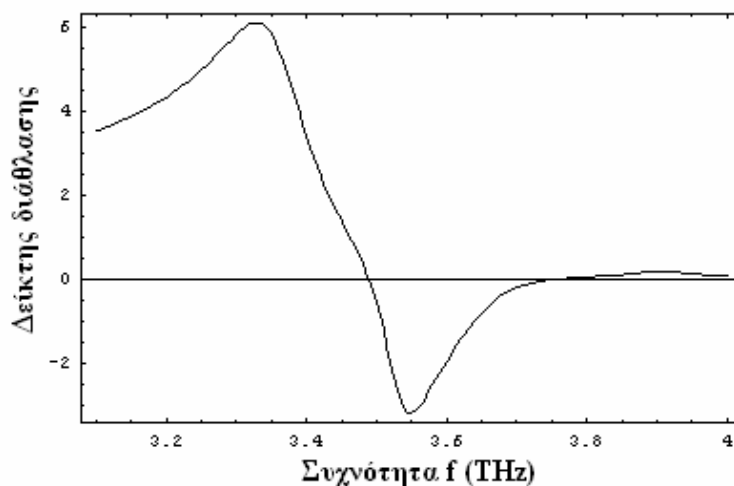


Σχήμα 6.4: Ενεργός μαγνητική διαπερατότητα ενός συνόλου σφαιρών δύο στρωμάτων.



Σχήμα 6.5: Ενεργός διηλεκτρική σταθερά ενός συνόλου σφαιρών δύο στρωμάτων.

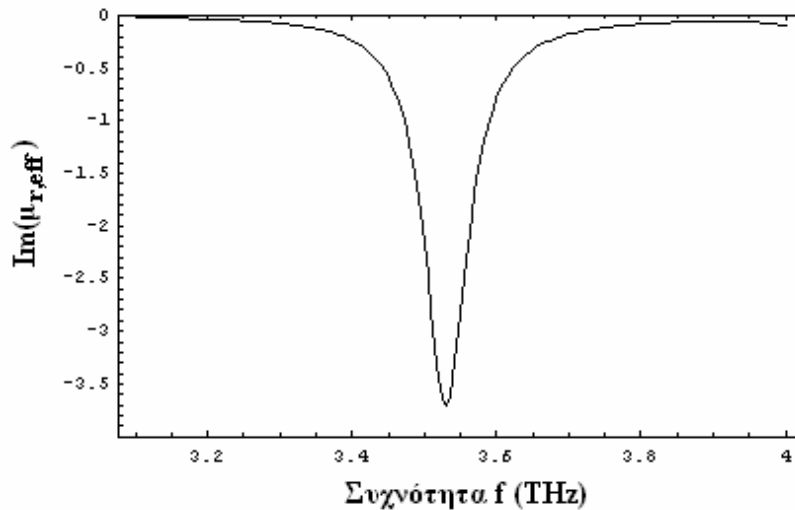
Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας εμφανίζει αρνητικές τιμές για ένα ιδιαίτερα στενό εύρος συχνοτήτων, σε αντίθεση με την ενεργό διηλεκτρική σταθερά που παραμένει αρνητική για μεγάλο εύρος συχνοτήτων, ενώ παρατηρούνται και σημαντικές αυξομειώσεις στο πλάτος της, καθιστώντας εμφανώς εντονότερο τον ηλεκτρικό συντονισμό. Ο δείκτης διάθλασης του συνόλου των σφαιρών υπολογίζεται από τη σχέση $n_{\text{eff}} = \pm \sqrt{\mu_{r,\text{eff}} \epsilon_{r,\text{eff}}}$ και η μεταβολή του πραγματικού του μέρους συναρτήσει της συχνότητας απεικονίζεται στο Σχήμα 6.6, όπου διακρίνεται πράγματι μία ζώνη συχνοτήτων (3.5-3.75 THz) εντός της οποίας $\text{Re}(n_{\text{eff}}) < 0$.



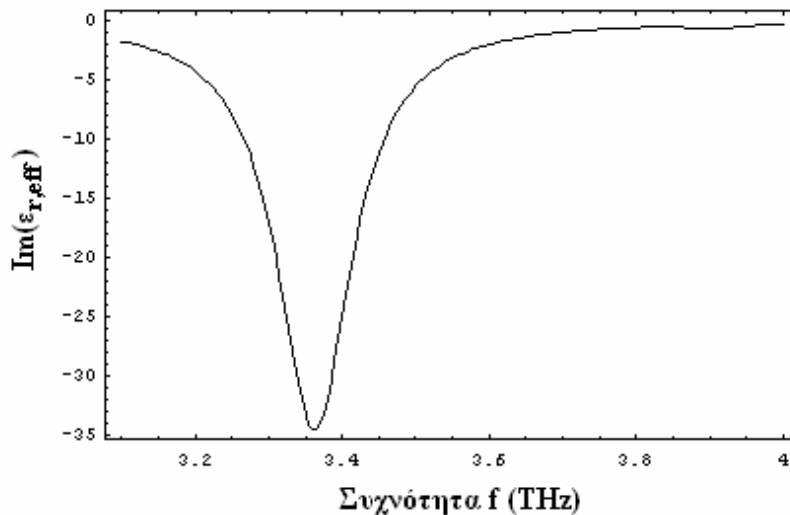
Σχήμα 6.6: Ενεργός δείκτης διάθλασης ενός συνόλου σφαιρών δύο στρωμάτων.

Συνεπώς, είναι πράγματι εφικτή η δημιουργία ενός μέσου με αρνητικό δείκτη διάθλασης σε συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων, δηλαδή οδηγούμαστε στην κατασκευή ενός μεταλλικού στην περιοχή των THz. Σημειώνεται ότι επειδή κατά τον υπολογισμό του

δείκτη διάθλασης χρειάζεται ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού, σε κάθε περίπτωση επιλέγεται εκείνη η τιμή του δείκτη διάθλασης που εξασφαλίζει ότι το φανταστικό μέρος του είναι πάντοτε αρνητικό (έχοντας υποθέσει παντού χρονική εξάρτηση των πεδίων της μορφής $e^{i\omega t}$), αφού είναι ενδεικτικό των εμφανιζόμενων απωλειών. Το φανταστικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας (Σχήμα 6.7) και ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς (Σχήμα 6.8) είναι επίσης πάντα αρνητικό, υποδηλώνοντας ότι το μέσο είναι παθητικό στο σύνολό του.



Σχήμα 6.7: Φανταστικό μέρος της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας.



Σχήμα 6.8: Φανταστικό μέρος της ενεργού διηλεκτρικής σταθεράς.

6.2 Σύνοψη συμπερασμάτων

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτέλεσε η ανάλυση και σχεδίαση μικροκυματικών μεταυλικών μέσων διάδοσης, τα οποία ουσιαστικά είναι ενεργά ομογενείς δομές με ασυνήθιστη ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά. Στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα σπουδαιότερα αποτελέσματα των επιστημονικών ερευνών στο αντικείμενο μελέτης των μεταυλικών μέσων και οι βασικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες των μεταυλικών, που τα διαφοροποιούν σημαντικά σε σχέση με τα συμβατικά μέσα διάδοσης, όπως η “αριστερόστροφη” φύση τους, η αντιστροφή του νόμου του Snell και του φαινομένου Doppler. Παρουσιάστηκαν επίσης οι σημαντικότερες πιθανές εφαρμογές των μεταυλικών και δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη δυνατότητα ανάπτυξης ενός τέλει φακού, ο οποίος επιτυγχάνει εστίαση με διακριτική ικανότητα μεγαλύτερη από το φράγμα του μήκους κύματος, καθώς και στα κυκλωματικά ισοδύναμα των μεταυλικών με γραμμές μεταφοράς, που επιτρέπουν την κατασκευή διατάξεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά λειτουργίας, όπως κατευθυντικοί συζεύκτες και κεραίες διαρρέοντος κύματος.

Στο 2ο κεφάλαιο μελετήθηκαν οι φασματικές ιδιότητες των μεταυλικών μέσων διάδοσης, προκειμένου να καταλήξουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την ιδιαίτερη ηλεκτρομαγνητική τους συμπεριφορά. Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρήθηκε μία πλάκα από μεταυλικό και εξετάστηκε τι είδους κύματα είναι δυνατό να υποστηρίξει χρησιμοποιώντας τη γενική μέθοδο ανάλυσης του πεδίου σε επαλληλία επιπέδων κυμάτων. Τα κύρια συμπεράσματα προέκυψαν από την καμπύλη διασποράς του μέσου, όπου απεικονίστηκε η μεταβολή της σταθεράς διάδοσης και της σταθεράς απόσβεσης συναρτήσει της συχνότητας, στο εύρος συχνοτήτων όπου οι συντακτικές παράμετροι του μέσου ϵ και μ ήταν ταυτόχρονα αρνητικές. Διακρίθηκαν οι διάφορες κατηγορίες διεγερόμενων κυμάτων εντός της πλάκας και προέκυψε το βασικό συμπέρασμα ότι η ταχύτητα ομάδας και η ταχύτητα φάσης είναι αντιπαράλληλες, γεγονός που δεν παρατηρείται στα συνήθη υλικά με θετικά ϵ και μ .

Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η προτεινόμενη δομή για τη μοντελοποίηση του μεταυλικού μέσου, που αποτελούνταν από ένα κυβικό πλέγμα διηλεκτρικών σφαιρών, οι οποίες ήταν μαγνητικά αδρανείς, καθιστώντας ευκολότερη τη φυσική υλοποίηση του μεταυλικού σε σχέση με τις πολύπλοκες κυκλωματικές διατάξεις. Η συγκεκριμένη δομή εκμεταλλεύεται το φαινόμενο του ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού των σφαιρών που πραγματοποιείται σε συγκεκριμένες συχνότητες και έχει ως αποτέλεσμα τη μεγιστοποίηση

του πλάτους του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Εφαρμόζοντας τη θεωρία του ενεργού μέσου, η οποία βασίζεται στη θεώρηση των σφαιρών ως ισοδύναμων ηλεκτρικών και μαγνητικών διπόλων, οδηγηθήκαμε σε αναλυτικές εκφράσεις για την ενεργό διηλεκτρική σταθερά και ενεργό μαγνητική διαπερατότητα του συνόλου των σφαιρών συναρτήσει των συντελεστών σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα. Ο ηλεκτρομαγνητικός συντονισμός των σφαιρών ήταν ιδιαίτερα έντονος όταν το υλικό των σφαιρών εμφάνιζε ιδιαίτερα υψηλή διηλεκτρική σταθερά, της τάξης του 100. Θεωρώντας τέτοια υλικά, η ενεργός μαγνητική διαπερατότητα και η ενεργός διηλεκτρική σταθερά προέκυψαν αρνητικές σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των μαγνητικών και ηλεκτρικών κυμάτων αντίστοιχα. Μάλιστα, η προτεινόμενη δομή αποτελούνταν από δύο είδη σφαιρών διαφορετικής ακτίνας, αλλά από το ίδιο υλικό προκειμένου η μαγνητική διαπερατότητα και η διηλεκτρική σταθερά του μέσου να λαμβάνουν ταυτόχρονα αρνητικές τιμές, δηλαδή ο δείκτης διάθλασης να προκύπτει αρνητικός. Οι διαστάσεις των σφαιρών της δομής επιλέχθηκαν ώστε να συμπίπτουν η συχνότητα του πρώτου μαγνητικού συντονισμού των σφαιρών μικρής ακτίνας με τη συχνότητα του πρώτου ηλεκτρικού συντονισμού των σφαιρών μεγαλύτερης ακτίνας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι το πραγματικό μέρος του δείκτη διάθλασης του συνόλου των σφαιρών προέκυψε πράγματι αρνητικό γύρω από τη συχνότητα συντονισμού. Στο τέλος του κεφαλαίου πραγματοποιήθηκε προσομοίωση της διάταξης (full wave simulation) με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου HFSS, τα αποτελέσματα της οποίας επιβεβαίωσαν ποιοτικά την αναλυτική προσέγγιση με τη θεωρία του ενεργού μέσου, με τη διαφορά ότι το εύρος ζώνης στο οποίο προέκυψε αρνητικός δείκτης διάθλασης ήταν μικρότερο από αυτό που υπολογίστηκε με αναλυτικές μεθόδους. Η μέθοδος ανάλυσης που ακολουθήθηκε ωστόσο (θεωρία ενεργού μέσου) ήταν μία πρώτης τάξης προσέγγιση του προβλήματος που παρείχε αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν το μήκος κύματος στο περιβάλλον μέσο ήταν αρκετά μεγαλύτερο της διαμέτρου των σφαιρών δίχως να συνυπολογίζει συνεισφορές από ανώτερης τάξης ρυθμούς και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η πλήρης λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη θεωρία της πολλαπλής σκέδασης, η οποία αποδίδει επακριβώς τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών και εφαρμόζεται ανεξαρτήτως περιορισμών. Ξεκινώντας από τη μελέτη της σκέδασης από ένα επίπεδο σφαιρών, περιοδικά διατεταγμένων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το σκεδαζόμενο κύμα από ένα επίπεδο σφαιρών εκφράζεται συναρτήσει

των πινάκων σκέδασης από μεμονωμένη σφαίρα, των σταθερών δομής Ω , οι οποίοι εκφράζουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σφαιρών του επιπέδου, καθώς και των συντελεστών ανάπτυξης του προσπίπτοντος πεδίου. Οι σταθερές δομής μελετήθηκαν διεξοδικά καταλήγοντας σε αναλυτικούς τύπους για τον ιδιαίτερα πολύπλοκο υπολογισμό τους. Επιπλέον, προσδιορίστηκαν οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης από το επίπεδο σφαιρών εκφράζοντας το σκεδαζόμενο πεδίο ως υπέρθεση επιπέδων κυμάτων. Στη συνέχεια, μελετήθηκε η σκέδαση από περισσότερα επίπεδα σφαιρών, αφού το μεταυλικό αποτελούνταν από την επαλληλία εναλλασσόμενων επιπέδων από σφαίρες διαφορετικής ακτίνας. Τέλος, καταλήξαμε στην εξαγωγή της σχέσης διασποράς του μεταυλικού μέσου, από την οποία προέκυψαν βασικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες της σύνθετης δομής. Η σχέση διασποράς, που περιγράφει τη μεταβολή της σταθεράς διάδοσης k_z συναρτήσει της συχνότητας λειτουργίας, αποτέλεσε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίστηκαν αριθμητικά και εντοπίστηκαν περιοχές στις οποίες επιτρεπόταν η διάδοση καθώς και άλλες όπου η σταθερά διάδοσης προέκυπτε μιγαδική, αποτρέποντας τη διάδοση (φωτονικά χάσματα).

Στο κεφάλαιο 5 συνοψίστηκαν τα αριθμητικά αποτελέσματα εφαρμόζοντας τη θεωρία πολλαπλής σκέδασης και συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα του κεφαλαίου 3. Από τη μελέτη της καμπύλης διασποράς συμπεράναμε ότι υπάρχει ένα εύρος ζώνης συχνοτήτων εντός του οποίου η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας είναι αντιπαράλληλες και ο δείκτης διάθλασης του μέσου προκύπτει αρνητικός. Ωστόσο, η ένταση του φαινομένου και το εύρος ζώνης ήταν σημαντικά μικρότερα από ό,τι στην περίπτωση της αναλυτικής προσέγγισης. Εντούτοις, με μικρή τροποποίηση της διάταξης των σφαιρών εντός της δομικής μονάδας, έτσι ώστε να αυξηθεί η σύζευξη μεταξύ των σφαιρών, το εύρος ζώνης στο οποίο ο δείκτης διάθλασης προέκυπτε αρνητικός αυξήθηκε σημαντικά. Σημαντική αύξηση στο εύρος ζώνης του φαινομένου παρατηρήθηκε επίσης και με την αύξηση της διηλεκτρικής σταθεράς του περιβάλλοντος μέσου, γεγονός ιδιαίτερα επιθυμητό. Παρατηρήθηκε επίσης ότι ιδιαίτερη επίδραση στο φαινόμενο είχαν οι απώλειες του διηλεκτρικού των σφαιρών, οι οποίες είχαν ως αποτέλεσμα το φαινόμενο να μετριάζεται σημαντικά ως προς την ένταση και να εξαφανίζεται για τιμές της εφαιπτομένης απωλειών μεγαλύτερες από 10^{-3} . Σε γενικές γραμμές πάντως η δομή εμφάνιζε την επιθυμητή συμπεριφορά μεταυλικού γύρω από τις συχνότητες συντονισμού των σφαιρών επιβεβαιώνοντας τους αρχικούς θεωρητικούς μας ισχυρισμούς.

Για το υλικό των σφαιρών συμπεράναμε ότι έπρεπε να διαθέτει ιδιαίτερα υψηλή τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς, καθώς και χαμηλές απώλειες, προκειμένου το σύνολο της δομής να συμπεριφέρεται ως μεταυλικό. Ένα υποψήφιο διηλεκτρικό στις μικροκυματικές συχνότητες λειτουργίας είναι το διοξείδιο του τιτανίου (TiO_2), ενώ άλλα υποψήφια υλικά είναι διάφορα οξειδία του τιτανίου της γενικής μορφής $(\text{A}_{1/2}^{+1} \cdot \text{B}_{1/2}^{+3})\text{TiO}_3$ όπου A^{+1} ένα ιόν της κατηγορίας των αλκαλικών μετάλλων (K, Na, Li) και B^{+3} ένα ιόν της οικογένειας των λανθανιδών (perovskites).

Στη συνέχεια του 5^{ου} κεφαλαίου παρουσιάστηκε μία πιθανή εφαρμογή του μεταυλικού, η οποία αναφερόταν στη χρήση του με σκοπό τη βελτίωση της ικανότητας εστίασης ενός υβριδικού συστήματος ενδοκρανιακής απεικόνισης και θεραπείας σύμφωνα με τη μέθοδο της υπερθερμίας. Πρόκειται για ένα μη επεμβατικό σύστημα που αναπτύχθηκε στο εργαστήριο μικροκυμάτων και οπτικών ινών του ΕΜΠ με στόχο την επιλεκτική θέρμανση των περιοχών ενδιαφέροντος του εγκεφάλου (υπερθερμία) και τη δυνατότητα απεικόνισης της θερμοκρασίας της ακτινοβολούμενης περιοχής του εγκεφάλου σε πραγματικό χρόνο. Η περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του απεικονιστικού συστήματος ήταν 1.5-3.5 GHz. Η ανάπτυξη του μεταυλικού που περιγράφηκε παραπάνω είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της εστίασης του συστήματος θεραπείας, όσον αφορά στο βάθος διείσδυσης της ακτινοβολίας, καθώς και στη χωρική διακριτική ικανότητα του συστήματος απεικόνισης. Ειδικότερα, η χρήση ενός στρώματος προσαρμογής από μεταυλικό γύρω από το μοντέλο του ανθρώπινου κεφαλιού επέφερε σημαντική μείωση της ανακλώμενης ακτινοβολίας στη διεπαφή αέρα-μοντέλου ανθρώπινου κεφαλιού με αποτέλεσμα τη μεγάλη αύξηση του βάθους ανίχνευσης του συστήματος. Η χωρική διακριτική ικανότητα του συστήματος, δηλαδή η ικανότητα εστίασης σε σχετικές κινήσεις του κεφαλιού γύρω από το σημείο εστίασης, βελτιώθηκε σημαντικά όταν το στρώμα προσαρμογής από μεταυλικό συνδυάστηκε με διηλεκτρικά υλικά, που χρησίμευσαν ως υλικά πλήρωσης της ελλειψοειδούς κοιλότητας.

Στο κεφάλαιο 6 εξετάστηκε το ενδεχόμενο λειτουργίας της δομής στην περιοχή των THz, γεγονός που επέφερε σημαντική μείωση στις διαστάσεις του μεταυλικού. Συγκεκριμένα, η δομή του μεταυλικού τροποποιήθηκε αποτελούμενη πλέον από ένα μόνο είδος σφαιρών, οι οποίες περιείχαν δύο στρώματα από διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά (coated spheres). Το υλικό του πυρήνα διέθετε υψηλή διηλεκτρική σταθερά της τάξης του 100 οδηγώντας σε ισχυρό μαγνητικό συντονισμό, ενώ το υλικό του περιβλήματος εμφάνιζε συμπεριφορά πλάσματος γύρω από τη συχνότητα λειτουργίας ($\epsilon < 0$) οδηγώντας σε ηλεκτρικό

συντονισμό. Υποψήφια υλικά με την παραπάνω συμπεριφορά ήταν φερροηλεκτρικά υλικά (π.χ. LiTaO_3) για το υλικό του πυρήνα και ημιαγωγοί προσμίξεων με συμπεριφορά πλάσματος στην περιοχή των THz για το υλικό του περιβλήματος των σφαιρών.

Συνεπώς, το μοντέλο του πλέγματος των διηλεκτρικών σφαιρών είναι δυνατό να εμφανίσει συμπεριφορά μεταλλικού τόσο στις μικροκυματικές όσο και στις υπέρυθρες συχνότητες. Το επόμενο στάδιο έρευνας είναι η κατασκευή του μεταλλικού που θα επιτρέψει την πειραματική επιβεβαίωση των θεωρητικών ισχυρισμών μας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A.1 Συνολικό πεδίο εντός της πλάκας από μεταϊλικό

Το συνολικό πεδίο εντός της πλάκας είναι το άθροισμα του πρωτογενούς πεδίου E_{y0} και του δευτερογενούς πεδίου E_{y2} και σύμφωνα με τις σχέσεις (2.1.12) και (2.1.28) εκφράζεται ως εξής

$$E_{y,\text{total}} = E_{y0} + E_{y2} = -\frac{i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z e^{-ik_z(z-z')} \left\{ \frac{e^{-g_1|x-x'|}}{g_1(k_z)} + e^{-g_1d/2} \frac{\mu_0 g_1 - \mu(\omega) g_0}{g_1(k_z)} \right. \\ \left. \left[\frac{\cosh(g_1 x') \cosh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \cosh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \mu_0 \sinh \frac{g_1 d}{2}} + \frac{\sinh(g_1 x') \sinh(g_1 x)}{g_0 \mu(\omega) \sinh \frac{g_1 d}{2} + g_1 \mu_0 \cosh \frac{g_1 d}{2}} \right] \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ο παρονομαστής της ανωτέρω παράστασης είναι

$$g_1 \left[g_0 \mu(\omega) \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \left[g_0 \mu(\omega) \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

και είναι άρτιος ως προς g_1 , επειδή η συνάρτηση $\cosh(g_1 d/2)$ είναι άρτια και η συνάρτηση $\sinh(g_1 d/2)$ περιττή ως προς το όρισμά της. Ειδικότερα, ο πρώτος όρος στην αγκύλη είναι άρτιος ως προς g_1 και ο δεύτερος όρος στην αγκύλη περιττός ως προς g_1 , άρα το γινόμενο και των τριών όρων θα είναι άρτια συνάρτηση του g_1 . Εξετάζουμε ακολούθως τον αριθμητή της παράστασης ως προς την αρτιότητα. Ο αριθμητής γράφεται στη μορφή

$$e^{-g_1|x-x'|} \left[g_0 \mu(\omega) \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \left[g_0 \mu(\omega) \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \\ + e^{-g_1 d/2} [\mu_0 g_1 - \mu(\omega) g_0] \left\{ \left[g_0 \mu(\omega) \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \cosh(g_1 x') \cosh(g_1 x) \right. \\ \left. + \left[g_0 \mu(\omega) \cosh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) + g_1 \mu_0 \sinh \left(\frac{g_1 d}{2} \right) \right] \sinh(g_1 x') \sinh(g_1 x) \right\} = \\ = \frac{e^{-g_1|x-x'|}}{4} \left[(g_0 \mu(\omega) + g_1 \mu_0) e^{g_1 d/2} + (g_0 \mu(\omega) - g_1 \mu_0) e^{-g_1 d/2} \right] \cdot \\ \cdot \left[(g_0 \mu(\omega) + g_1 \mu_0) e^{g_1 d/2} - (g_0 \mu(\omega) - g_1 \mu_0) e^{-g_1 d/2} \right] + \\ + \frac{e^{-g_1 d/2}}{8} [\mu_0 g_1 - g_0 \mu(\omega)] \left[(g_1 \mu_0 + g_0 \mu(\omega)) e^{g_1 d/2} + (g_1 \mu_0 - g_0 \mu(\omega)) e^{-g_1 d/2} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[e^{g_1(x+x')} + e^{-g_1(x+x')} + e^{g_1(x-x')} + e^{-g_1(x-x')} \right] + \\
& + \frac{e^{-g_1 d/2}}{8} [\mu_0 g_1 - g_0 \mu(\omega)] \left[(g_1 \mu_0 + g_0 \mu(\omega)) e^{g_1 d/2} + (g_0 \mu(\omega) - g_1 \mu_0) e^{-g_1 d/2} \right] \cdot \\
& \cdot \left[e^{g_1(x+x')} + e^{-g_1(x+x')} - e^{g_1(x-x')} - e^{-g_1(x-x')} \right] \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Έστω ότι $x > x'$. Τότε η ανωτέρω παράσταση του αριθμητή γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} e^{-g_1(x-x'-d)} [g_1 \mu_0 + g_0 \mu(\omega)]^2 - \frac{1}{4} [g_0 \mu(\omega) - g_1 \mu_0]^2 e^{-g_1(x-x'+d)} + \\
& \frac{1}{4} \left[g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega) + (g_1 \mu_0 - g_0 \mu(\omega))^2 e^{-g_1 d} \right] \{ \cosh [g_1(x+x')] + \cosh [g_1(x-x')] \} \\
& + \frac{1}{4} (g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega)) \{ \cosh [g_1(x+x')] - \cosh [g_1(x-x')] \} \\
& - \frac{1}{4} (g_1 \mu_0 - g_0 \mu(\omega))^2 e^{-g_1 d} \{ \cosh [g_1(x+x')] - \cosh [g_1(x-x')] \} = \\
& = \frac{1}{2} (g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega)) \cosh [g_1(x+x')] + \frac{1}{2} (g_1 \mu_0 - g_0 \mu(\omega))^2 e^{-g_1 d} \cosh [g_1(x-x')] \\
& + \frac{1}{2} e^{-g_1(x-x')} \left[(g_1^2 \mu_0^2 + g_0^2 \mu^2(\omega)) \sinh (g_1 d) + 2 g_1 g_0 \mu_0 \mu(\omega) \cosh (g_1 d) \right] = \\
& = \frac{1}{2} (g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega)) \cosh [g_1(x+x')] + \frac{1}{4} (g_1^2 \mu_0^2 + g_0^2 \mu^2(\omega) - 2 g_1 g_0 \mu_0 \mu(\omega)) e^{-g_1 d} \cdot \\
& \cdot \left[e^{g_1(x-x')} + e^{-g_1(x-x')} \right] + \frac{1}{4} (g_1^2 \mu_0^2 + g_0^2 \mu^2(\omega)) e^{-g_1(x-x')} (e^{g_1 d} - e^{-g_1 d}) \\
& + \frac{g_1 g_0}{2} \mu_0 \mu(\omega) e^{-g_1(x-x')} (e^{g_1 d} + e^{-g_1 d}) = \\
& = \frac{1}{2} [g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega)] \cosh [g_1(x+x')] + \frac{1}{2} g_1 g_0 \mu_0 \mu(\omega) \left[e^{-g_1(x-x'-d)} + e^{-g_1(x-x'+d)} - e^{-g_1(x-x'+d)} - e^{g_1(x-x'-d)} \right] \\
& + \frac{1}{4} (g_1^2 \mu_0^2 + g_0^2 \mu^2(\omega)) \left[e^{-g_1(x-x'+d)} - e^{-g_1(x-x'+d)} + e^{g_1(x-x'-d)} + e^{-g_1(x-x'-d)} \right] = \\
& = \frac{1}{2} (g_1^2 \mu_0^2 - g_0^2 \mu^2(\omega)) \cosh [g_1(x+x')] + \frac{1}{2} (g_1^2 \mu_0^2 + g_0^2 \mu^2(\omega)) \cosh [g_1(x-x'-d)] - \\
& - \frac{1}{2} g_1 g_0 \mu_0 \mu(\omega) 2 \sinh [g_1(x-x'-d)] \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για $x > x'$ ο αριθμητής είναι τελικά άθροισμα τριών όρων, οι οποίοι είναι όλοι άρτιοι ως προς g_1 . Με ακριβώς παρόμοια διαδικασία αποδεικνύεται ότι και για $x < x'$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Συνεπώς, ο αριθμητής είναι επίσης άρτιος ως προς g_1 ,

άρα η έκφραση που δίνει το συνολικό πεδίο μέσα στην πλάκα είναι άρτια ως προς g_1 και επομένως δε χρειάζεται να οριστεί βροχοτομή για το πρόσημο του g_1 , παρά μόνο για το πρόσημο του g_0 .

A.2 Υπολογισμός πρωτογενούς πεδίου

Το πρωτογενές πεδίο είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{E}_0 = i\omega\mu\mathbf{J} \quad (\text{A.5})$$

Επειδή όμως $\mathbf{J} = \hat{y} \delta(x - x')\delta(z - z')$ η εξίσωση Helmholtz γράφεται

$$(\nabla^2 + k_0^2)E_{y0} = i\omega\mu \delta(x - x')\delta(z - z') \quad (\text{A.6})$$

Άρα, η παράσταση $\psi = \frac{iE_{y0}}{\omega\mu}$ είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος στο οποίο έχουμε γραμμική πηγή ρεύματος με μοναδιαίο πλάτος κατά μήκος μιας άπειρης ευθείας παράλληλης με τον άξονα y στη θέση (x', z') . Η συνάρτηση Green θα παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία ως προς την ευθεία στην οποία βρίσκεται η πηγή ρεύματος, επομένως θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση $R = |\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|$ όπου \mathbf{r}'_T το διάνυσμα θέσης της πηγής. Αντικαθιστώντας την έκφραση του τελεστή ∇^2 σε κυλινδρικές συντεταγμένες στη σχέση (A.6) έχουμε

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi}{dR} \right) + k_0^2 \psi = -\delta(R) \quad (\text{A.7})$$

Σε όλα τα σημεία εκτός του $R = 0$ η συνάρτηση ψ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} + k_0^2 \psi = 0 \quad (\text{A.8})$$

Θέτοντας όπου $x = k_0 R$ η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + x \frac{d\psi}{dx} + x^2 \psi = 0 \quad (\text{A.9})$$

δηλαδή λαμβάνουμε την εξίσωση Bessel σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Συνεπώς, η συνάρτηση Green προκύπτει $\psi = AH_0^{(2)}(k_0 R)$ ώστε να αντιπροσωπεύει κύματα που απομακρύνονται από την πηγή για $k_0 R \gg 1$. Η συνάρτηση Hankel 2^{00} είδους έχει πράγματι αυτή την ιδιότητα, αφού για $k_0 R \gg 1$ λαμβάνει την ασυμπτωτική έκφραση

$$H_0^{(2)}(k_0 R) \approx \sqrt{\frac{2i}{\pi k_0 R}} e^{-ik_0 R} \quad (\text{A.10})$$

η οποία παριστάνει κύματα που διαδίδονται από την πηγή προς το άπειρο και επιπλέον μηδενίζονται στο άπειρο (συνθήκη ακτινοβολίας). Για τον προσδιορισμό της σταθεράς A θεωρούμε το όριο της εξίσωσης Helmholtz όταν k_0 τείνει στο 0. Η εξίσωση Helmholtz μεταπίπτει στην εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\delta(\mathbf{R}) \quad (\text{A.11})$$

Η λύση της εξίσωσης Poisson παριστάνει αριθμητικά το ηλεκτροστατικό δυναμικό που προκαλείται από γραμμικό φορτίο $\lambda = 1 \text{ C/m}$ που βρίσκεται σε άπειρη ευθεία παράλληλη στον άξονα y , με διάνυσμα θέσης \mathbf{r}'_T . Άρα, είναι

$$\psi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{R_{av}}{R} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_{av}}{R} \quad (\text{A.12})$$

όπου R_{av} η ακτίνα της κυλινδρικής επιφάνειας αναφοράς των δυναμικών. Τότε θα πρέπει οι δύο λύσεις για τη συνάρτηση ψ να ταυτίζονται στο όριο $k_0 \rightarrow 0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_{av}}{R} = A \lim_{k_0 \rightarrow 0} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (\text{A.13})$$

Επειδή όμως $\lim_{k_0 \rightarrow 0} H_0^{(2)}(k_0 R) = 1 - \frac{2i}{\pi} \ln(k_0 R)$ προκύπτει η σχέση

$$\frac{1}{2\pi} \ln R_{av} - \frac{1}{2\pi} \ln R = A - \frac{2i}{\pi} A \ln k_0 - \frac{2i}{\pi} A \ln R \quad (\text{A.14})$$

από όπου εξισώνοντας στα δύο μέλη τους συντελεστές του $\ln R$ λαμβάνουμε τελικά

$$A = -\frac{i}{4} \quad (\text{A.15})$$

Συνεπώς, το πρωτογενές πεδίο γράφεται στη συνεπτυγμένη μορφή

$$\mathbf{E}_{y0} = -i\omega\mu\psi = -\frac{\omega\mu}{4} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (\text{A.16})$$

όπου $R = |\mathbf{r}'_T - \mathbf{r}_T| = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}$

B. Υπολογισμός των σταθερών δομής Ω

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων $\Omega_{lm;l'm'}^{EE}$ του πίνακα Ω , σύμφωνα με τη σχέση (4.4.14), απαιτείται ο υπολογισμός της ποσότητας

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) \quad (\text{B.1})$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση ορισμού του τελεστή της στροφορμής: $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \cdot \nabla \times$ και την ταυτότητα (4.4.24) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) &= i\mathbf{L} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) \\ &= \frac{i}{\sqrt{l'(l'+1)}} \mathbf{L} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{x}} \cdot \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} (\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} + \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) j_{l''}(kr) Y_{l''m''}(\Omega) \right. \\ &\quad \left. - i\hat{\mathbf{y}} \cdot \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} (\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} - \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) j_{l''}(kr) Y_{l''m''}(\Omega) + \hat{\mathbf{z}} m' Z_{l'm'}^{l''m''} j_{l''}(kr) Y_{l''m''}(\Omega) \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Επειδή ο τελεστής \mathbf{L} επιδρά μόνο στις γωνιακές μεταβλητές (θ, φ) και κατ' αναλογία με τη σχέση ορισμού των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών $\mathbf{X}_{lm}(\Omega)$ (σχέσεις 4.4.7, 4.4.23) λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) &= \\ &= \frac{i}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} j_{l''}(kr) \left[(\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} + \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) (\alpha_{l''m''} Y_{l''m''+1} + \beta_{l''m''} Y_{l''m''-1}) \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} - \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''}) (\alpha_{l''m''} Y_{l''m''+1} - \beta_{l''m''} Y_{l''m''-1}) + m' m'' Z_{l'm'}^{l''m''} Y_{l''m''} \right] = \quad (\text{B.3}) \\ &= \frac{i}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} (2\alpha_{l'm'} \beta_{l''m''} Z_{l'm'+1}^{l''m''} Y_{l''m''-1} + 2\alpha_{l'm'} \beta_{l''m''} Z_{l'm'-1}^{l''m''} Y_{l''m''+1} + m' m'' Z_{l'm'}^{l''m''} Y_{l''m''}) j_{l''}(kr) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $Y_{lm}^*(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας σε όλη τη στερεά γωνία, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών (σχέση 4.4.10), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{r} \cdot \nabla \times \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega &= \frac{i}{\sqrt{l'(l'+1)}} \cdot \\
\sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} \left(2\alpha_{l'm'} \beta_{l''}^{m''} Z_{l'm'+1}^{l''m''} \delta_{l''m''} \delta_{mm''-1} + 2\alpha_{l'm'} \beta_{l''}^{m''} Z_{l'm'-1}^{l''m''} \delta_{l''m''} \delta_{mm''+1} + m'm'' Z_{l'm'}^{l''m''} \delta_{l''m''} \delta_{mm''} \right) j_{l''}(kr) \\
&= \frac{i \cdot j_l(kr)}{\sqrt{l'(l'+1)}} \left(2\alpha_{l'm'} \beta_{l_{m+1}} Z_{l'm'+1}^{lm+1} + 2\alpha_{l_{m-1}} \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{lm-1} + m'm Z_{l'm'}^{lm} \right) \quad (B.4)
\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στη σχέση (4.4.14), προσδιορίζονται τελικά τα στοιχεία $\Omega_{lm;l'm'}^{EE}$ του πίνακα Ω .

$$\Omega_{lm;l'm'}^{EE} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(2\alpha_{l'm'} \beta_{l_{m+1}} Z_{l'm'+1}^{lm+1} + 2\alpha_{l_{m-1}} \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{lm-1} + m'm Z_{l'm'}^{lm} \right) \quad (B.5)$$

Εφαρμόζοντας ανάλογη διαδικασία είναι δυνατό να προσδιοριστούν τα στοιχεία $\Omega_{lm;l'm'}^{EH}$ του πίνακα Ω , σύμφωνα με τη σχέση (4.4.15). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4.24) για το πλεγματοεικό άθροισμα $\sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n)$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} r j_{l''}(kr) Y_{l''m''}(\Omega) \left[\sin \theta \cos \varphi \left(\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} + \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''} \right) \right. \\
&\quad \left. - i \sin \theta \sin \varphi \left(\alpha_{l'm'} Z_{l'm'+1}^{l''m''} - \beta_{l'm'} Z_{l'm'-1}^{l''m''} \right) + m' \cos \theta Z_{l'm'}^{l''m''} \right] \quad (B.6)
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ωστόσο παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι η εξάρτηση από τις γωνιακές μεταβλητές (θ, φ) δεν εμπεριέχεται μονάχα στις συναρτήσεις των σφαιρικών αρμονικών $Y_{l''m''}(\Omega)$, γεγονός που δυσχεραίνει την εφαρμογή της σχέσης (4.4.15) για τον υπολογισμό των στοιχείων $\Omega_{lm;l'm'}^{EE}$. Μπορεί όμως να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες, με τις οποίες η σχέση (B.2) εκφράζεται συναρτήσει των συνήθων σφαιρικών αρμονικών [35]

$$\cos \theta Y_l^m(\Omega) = \zeta_l^m Y_{l-1}^m(\Omega) + \zeta_{l+1}^m Y_{l+1}^m(\Omega) \quad (B.7)$$

$$\sin \varphi \sin \theta Y_l^m(\Omega) = -i \left[\gamma_l^m Y_{l-1}^{m-1}(\Omega) + \gamma_l^{-m} Y_{l-1}^{m+1}(\Omega) - \gamma_{l+1}^{-m+1} Y_{l+1, m-1}(\Omega) - \gamma_{l+1}^{m+1} Y_{l+1}^{m+1}(\Omega) \right] \quad (B.8)$$

$$\cos \varphi \sin \theta Y_l^m(\Omega) = -\gamma_l^m Y_{l-1, m-1}(\Omega) + \gamma_l^{-m} Y_{l-1}^{m+1}(\Omega) + \gamma_{l+1}^{-m+1} Y_{l+1}^{m-1}(\Omega) - \gamma_{l+1}^{m+1} Y_{l+1}^{m+1}(\Omega) \quad (B.9)$$

όπου ορίζουμε

$$\zeta_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}, \quad \gamma_l^m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}} \quad (\text{B.10})$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, η σχέση (B.6) λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} r_{j_{l''}}(kr) \left\{ 2\alpha_{l'}^{m'} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l''m''} \left[\gamma_{l''+1}^{-m''+1} \mathbf{Y}_{l''+1}^{m''-1}(\Omega) - \gamma_{l''}^{m''} \mathbf{Y}_{l''-1}^{m''-1}(\Omega) \right] \right. \\ & \left. + 2\beta_{l'}^{m'} \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l''m''} \left[\gamma_{l''}^{-m''} \mathbf{Y}_{l''-1}^{m''+1}(\Omega) - \gamma_{l''+1}^{m''+1} \mathbf{Y}_{l''+1}^{m''+1}(\Omega) \right] + m' \mathbf{Z}_{l'm'}^{l''m''} \left[\zeta_{l''}^{m''} \mathbf{Y}_{l''-1}^{m''}(\Omega) + \zeta_{l''+1}^{m''} \mathbf{Y}_{l''+1}^{m''}(\Omega) \right] \right\} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Η παραπάνω μορφή είναι κατάλληλη για τον πολ/σμό των δύο μελών της σχέσης με $\mathbf{Y}_{lm}^*(\Omega)$ και τη χρήση της συνθήκης ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών:

$$\int \mathbf{Y}_{l'm'}(\Omega) \mathbf{Y}_{lm}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{l'l'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.12})$$

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (B.11) με $\mathbf{Y}_{lm}^*(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας σε όλη τη στερεά γωνία, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{r} \cdot \sum_{\mathbf{R}_n \neq 0} \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{R}_n) h_{l'}^{(1)}(kr_n) \mathbf{X}_{l'm'}(\Omega_n) \mathbf{Y}_{lm}^*(\Omega) d\Omega = \\ & = \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}} \sum_{l''=1}^{+\infty} \sum_{m''=-l''}^{+l''} r_{j_{l''}}(kr) \left\{ 2\alpha_{l'}^{m'} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l''m''} \left(\gamma_{l''+1}^{-m''+1} \delta_{l''+1} \delta_{mm''-1} - \gamma_{l''}^{m''} \delta_{l''-1} \delta_{mm''-1} \right) \right. \\ & \left. + 2\beta_{l'}^{m'} \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l''m''} \left(\gamma_{l''}^{-m''} \delta_{l''-1} \delta_{mm''+1} - \gamma_{l''+1}^{m''+1} \delta_{l''+1} \delta_{mm''+1} \right) + m' \mathbf{Z}_{l'm'}^{l''m''} \left(\zeta_{l''}^{m''} \delta_{l''-1} \delta_{mm''} + \zeta_{l''+1}^{m''} \delta_{l''+1} \delta_{mm''} \right) \right\} \\ & = \frac{r}{\sqrt{l'(l'+1)}} \left[\left(-2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_{l+1}^{m+1} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l+1,m+1} + 2\beta_{l'}^{m'} \gamma_{l+1}^{-m+1} \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l+1,m-1} + m' \zeta_{l+1}^m \mathbf{Z}_{l'm'}^{l+1,m} \right) j_{l+1}(kr) \right. \\ & \left. + \left(2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_l^{-m} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l-1,m+1} - 2\beta_{l'}^{m'} \gamma_l^m \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l-1,m-1} + m' \zeta_l^m \mathbf{Z}_{l'm'}^{l-1,m} \right) j_{l-1}(kr) \right] \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προσδιορίζονται άμεσα τα στοιχεία $\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}}$ του πίνακα Ω , σύμφωνα με τη σχέση (4.4.15):

$$\begin{aligned} \Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}} & = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left[\frac{r_{j_{l-1}}(kr)}{j_l(kr)} \left(2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_l^{-m} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l-1,m+1} - 2\beta_{l'}^{m'} \gamma_l^m \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l-1,m-1} + m' \zeta_l^m \mathbf{Z}_{l'm'}^{l-1,m} \right) \right. \\ & \left. + \frac{r_{j_{l+1}}(kr)}{j_l(kr)} \left(-2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_{l+1}^{m+1} \mathbf{Z}_{l'm'+1}^{l+1,m+1} + 2\beta_{l'}^{m'} \gamma_{l+1}^{-m+1} \mathbf{Z}_{l'm'-1}^{l+1,m-1} + m' \zeta_{l+1}^m \mathbf{Z}_{l'm'}^{l+1,m} \right) \right] \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση ωστόσο, είναι ανεξάρτητη του r εξ' ορισμού, επομένως οι υπολογισμοί απλοποιούνται αν θεωρήσουμε οριακά ότι $r \rightarrow 0$. Λαμβάνοντας υπόψη τις κατάλληλες ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel έχουμε ότι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} j_l(kr) = \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)} \quad (\text{B.15})$$

Τότε προκύπτει εύκολα ότι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r j_{l+1}(kr)}{j_l(kr)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{kr^2}{2l+3} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r j_{l-1}(kr)}{j_l(kr)} = \frac{2l+1}{k} \quad (\text{B.16})$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στη σχέση προσδιορισμού των $\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}}$ προκύπτει τελικά ότι:

$$\Omega_{lm;l'm'}^{\text{EH}} = \frac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)l'(l'+1)}} \left(-2\alpha_{l'}^{m'} \gamma_l^{-m} Z_{l'm'+1}^{l-1,m+1} + 2\beta_{l'}^{m'} \gamma_l^m Z_{l'm'-1}^{l-1,m-1} - m' \zeta_l^m Z_{l'm'}^{l-1,m} \right) \quad (\text{B.17})$$

Γ. Υπολογισμός συντελεστών σκέδασης από σφαίρα δύο στρωμάτων

Οι νέοι συντελεστές σκέδασης υπολογίζονται γράφοντας τη γενική μορφή των συνιστωσών του Η/Μ πεδίου σε κάθε επιμέρους περιοχή και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες. Ειδικότερα, οι συνιστώσες του πεδίου σε κάθε περιοχή του χώρου είναι της μορφής

$r > \alpha_2$ (εκτός της σφαίρας):

$$E_{\theta}^r = \frac{E_0 \cos \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\alpha_n^r \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i b_n^r}{\sin \theta} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.1)$$

$$E_{\varphi}^r = \frac{E_0 \sin \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\frac{\alpha_n^r}{\sin \theta} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) - i b_n^r \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.2)$$

$$H_{\theta}^r = \frac{E_0 \sin \varphi}{\zeta_0 k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-b_n^r \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \alpha_n^r \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.3)$$

$$H_{\varphi}^r = \frac{E_0 \cos \varphi}{\zeta_0 k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\frac{b_n^r}{\sin \theta} \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) - i \alpha_n^r \hat{h}_n^{(2)}(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.4)$$

$r < \alpha_1$ (εντός του πυρήνα των σφαιρών):

$$E_{\theta}^t = \frac{E_0 \cos \varphi}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\alpha_n^t \hat{j}_n'(k_1 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i}{\sin \theta} b_n^t \hat{j}_n(k_1 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.5)$$

$$E_{\varphi}^t = \frac{E_0 \sin \varphi}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\frac{\alpha_n^t}{\sin \theta} \hat{j}_n'(k_1 r) P_n^1(\cos \theta) - i b_n^t \hat{j}_n(k_1 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.6)$$

$$H_{\theta}^t = \frac{E_0 \sin \varphi}{\zeta_1 k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-b_n^t \hat{j}_n'(k_1 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \alpha_n^t \hat{j}_n(k_1 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.7)$$

$$H_{\varphi}^t = \frac{E_0 \cos \varphi}{\zeta_1 k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\frac{b_n^t}{\sin \theta} \hat{j}_n'(k_1 r) P_n^1(\cos \theta) + i \alpha_n^t \hat{j}_n(k_1 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.8)$$

$\alpha_1 < r < \alpha_2$ (εντός του περιβλήματος των σφαιρών):

$$E_{\theta}^m = \frac{E_0 \cos \varphi}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ -[\alpha_n^m \hat{j}_n'(k_2 r) + \bar{\alpha}_n^m \hat{y}_n'(k_2 r)] \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} [b_n^m \hat{j}_n(k_2 r) + \bar{b}_n^m \hat{y}_n(k_2 r)] \right\} \quad (\Gamma.9)$$

$$E_{\phi}^m = \frac{E_0 \sin \varphi}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ [\alpha_n^m \hat{j}'_n(k_2 r) + \bar{\alpha}_n^m \hat{y}'_n(k_2 r)] \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} - \frac{i dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} [b_n^m \hat{j}_n(k_2 r) + \bar{b}_n^m \hat{y}_n(k_2 r)] \right\} \quad (\Gamma.10)$$

$$H_{\theta}^m = \frac{E_0 \sin \varphi}{\zeta_2 k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ -[b_n^m \hat{j}'_n(k_2 r) + \bar{b}_n^m \hat{y}'_n(k_2 r)] \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} [\alpha_n^m \hat{j}_n(k_2 r) + \bar{\alpha}_n^m \hat{y}_n(k_2 r)] \right\} \quad (\Gamma.11)$$

$$H_{\phi}^m = \frac{E_0 \cos \varphi}{\zeta_2 k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ -[b_n^m \hat{j}'_n(k_2 r) + \bar{b}_n^m \hat{y}'_n(k_2 r)] \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{i dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} [\alpha_n^m \hat{j}_n(k_2 r) + \bar{\alpha}_n^m \hat{y}_n(k_2 r)] \right\} \quad (\Gamma.12)$$

όπου ζ_1 , ζ_2 οι κυματικές αντιστάσεις και k_1 , k_2 οι κυματαριθμοί του πυρήνα και του περιβλήματος αντίστοιχα. Η διαφορά με την περίπτωση της απλής σφαίρας είναι ότι στην ενδιάμεση περιοχή του περιβλήματος ($\alpha_1 < r < \alpha_2$) οι συνιστώσες του H/M πεδίου εμφανίζουν ως εξάρτηση από τη μεταβλητή r ένα γραμμικό συνδυασμό των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και Neumann. Οι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης $\alpha_n^r, \alpha_n^t, \alpha_n^m, \bar{\alpha}_n^m$ (TM ρυθμοί) και $b_n^r, b_n^t, b_n^m, \bar{b}_n^m$ (TE ρυθμοί) υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες $r = \alpha_1$ και $r = \alpha_2$. Οι συνθήκες αυτές είναι

$$r = \alpha_1 : E_{\theta, \varphi}^t = E_{\theta, \varphi}^m, \quad H_{\theta, \varphi}^t = H_{\theta, \varphi}^m \quad (\Gamma.13)$$

$$r = \alpha_2 : E_{\theta, \varphi}^{\text{inc}} + E_{\theta, \varphi}^r = E_{\theta, \varphi}^m, \quad H_{\theta, \varphi}^{\text{inc}} + H_{\theta, \varphi}^r = H_{\theta, \varphi}^m \quad (\Gamma.14)$$

όπου με το δείκτη inc συμβολίζεται το προσπίπτον πεδίο, ενώ με τους δείκτες t και r το μεταδιδόμενο και ανακλώμενο πεδίο αντίστοιχα. Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των συντελεστών σκέδασης α_1^r, b_1^r για την περίπτωση της σφαίρας δύο διηλεκτρικών στρωμάτων για $n = 1$ και να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις τους στις εξισώσεις προσδιορισμού της ενεργού μαγνητικής διαπερατότητας και διηλεκτρικής σταθεράς αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται η μορφή του προσπίπτοντος H/M πεδίου.

$$E_{\theta}^{\text{inc}} = \frac{E_0 \cos \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\hat{j}'_n(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \hat{j}_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.15)$$

$$E_{\phi}^{\text{inc}} = \frac{E_0 \sin \varphi}{k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \hat{j}'_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) - i \hat{j}_n(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.16)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{\text{inc}} = \frac{E_0 \sin \varphi}{\zeta_0 k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\hat{j}'_n(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{i}{\sin \theta} \hat{j}_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (\Gamma.17)$$

$$\mathbf{H}_\varphi^{\text{inc}} = \frac{E_0 \cos \varphi}{\zeta_0 k_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[-\frac{1}{\sin \theta} \hat{j}'_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) + i \hat{j}_n(k_0 r) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (\Gamma.18)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες

$$r = \alpha_1 : \frac{k_2}{k_1} \alpha_n^t \hat{j}'_n(k_1 \alpha_1) - \alpha_n^m \hat{j}'_n(k_2 \alpha_1) - \bar{\alpha}_n^m \hat{y}'_n(k_2 \alpha_1) = 0 \quad (\Gamma.19)$$

$$\frac{k_2}{k_1} b_n^t \hat{j}_n(k_1 \alpha_1) - b_n^m \hat{j}_n(k_2 \alpha_1) - \bar{b}_n^m \hat{y}_n(k_2 \alpha_1) = 0 \quad (\Gamma.20)$$

$$b_n^t \hat{j}'_n(k_1 \alpha_1) - b_n^m \hat{j}'_n(k_2 \alpha_1) - \bar{b}_n^m \hat{y}'_n(k_2 \alpha_1) = 0 \quad (\Gamma.21)$$

$$\alpha_n^t \hat{j}_n(k_1 \alpha_1) - \alpha_n^m \hat{j}_n(k_2 \alpha_1) - \bar{\alpha}_n^m \hat{y}_n(k_2 \alpha_1) = 0 \quad (\Gamma.22)$$

$$r = \alpha_2 : \frac{k_2}{k_0} \alpha_n^r \hat{h}'_n(k_0 \alpha_2) - \alpha_n^m \hat{j}'_n(k_2 \alpha_2) - \bar{\alpha}_n^m \hat{y}'_n(k_2 \alpha_2) = -\frac{k_2}{k_0} \hat{j}'_n(k_0 \alpha_2) \quad (\Gamma.23)$$

$$\frac{k_2}{k_0} b_n^r \hat{h}_n(k_0 \alpha_2) - b_n^m \hat{j}_n(k_2 \alpha_2) - \bar{b}_n^m \hat{y}_n(k_2 \alpha_2) = -\frac{k_2}{k_0} \hat{j}_n(k_0 \alpha_2) \quad (\Gamma.24)$$

$$b_n^r \hat{h}'_n(k_0 \alpha_2) - b_n^m \hat{j}'_n(k_2 \alpha_2) - \bar{b}_n^m \hat{y}'_n(k_2 \alpha_2) = -\hat{j}'_n(k_0 \alpha_2) \quad (\Gamma.25)$$

$$\alpha_n^r \hat{h}_n(k_0 \alpha_2) - \alpha_n^m \hat{j}_n(k_2 \alpha_2) - \bar{\alpha}_n^m \hat{y}_n(k_2 \alpha_2) = -\hat{j}_n(k_0 \alpha_2) \quad (\Gamma.26)$$

Οι εξισώσεις (Γ.19), (Γ.22), (Γ.23) και (Γ.26) διαμορφώνουν ένα σύστημα 4x4 για τους συντελεστές α_n^r , α_n^t , α_n^m , $\bar{\alpha}_n^m$ (TM ρυθμοί), ενώ οι εξισώσεις (Γ.20), (Γ.21), (Γ.24), (Γ.25) ένα σύστημα 4x4 για τους συντελεστές b_n^r , b_n^t , b_n^m , \bar{b}_n^m (TE ρυθμοί). Αν επιπλέον για ευκολία στους συμβολισμούς θέσουμε $k_1 = k_0 n_1$, $k_2 = k_0 n_2$ και $x = k_0 \alpha_1$, $y = k_0 \alpha_2$ οι ορίζουσες των δύο συστημάτων προκύπτουν αντίστοιχα

$$\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}'_n(n_2 y) + n_2 \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}_n(n_2 y) \\ -\left[-\hat{j}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) \\ \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) \end{bmatrix} \quad (\Gamma.27)$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}_n(n_2 y) + n_2 \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}'_n(n_2 y) \\ -\left[-\hat{j}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) \\ \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) \end{bmatrix} \quad (\Gamma.28)$$

Τότε οι ορίζουσες που αντιστοιχούν στους συντελεστές α_n^r , b_n^r λαμβάνουν τη μορφή

$$D_1 = \left[\hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) \right] \left[\hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) \right] \\ - \left[\hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) \right] \left[\hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) \right] \quad (\Gamma.29)$$

$$D_2 = \left[\hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) \right] \left[\hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) \right] \\ - \left[\hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) \right] \left[\hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) - \frac{n_2}{n_1} \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) \right] \quad (\Gamma.30)$$

Επομένως, οι συντελεστές σκέδασης α_n^r, b_n^r ορίζονται από τις σχέσεις

$\alpha_n^r = \frac{D_1}{\det A}, b_n^r = \frac{D_2}{\det B}$ και γράφονται σε πιο συνεπτυγμένη μορφή ως εξής

$$\alpha_n^r = \frac{[\hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] A_n^r - \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) + n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y)}{[n_2 \hat{y}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) - \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] A_n^r - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{j}'_n(n_2 y)} \quad (\Gamma.31)$$

$$b_n^r = \frac{[\hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) - n_2 \hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] B_n^r - \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) + n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y)}{[n_2 \hat{y}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) - \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{y}_n(n_2 y)] B_n^r - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{h}_n^{(2)}(y) + \hat{h}_n^{(2)}(y) \hat{j}_n(n_2 y)} \quad (\Gamma.32)$$

όπου θέτουμε

$$A_n^r = \frac{n_1 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x)}{n_1 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x)} \quad (\Gamma.33)$$

$$B_n^r = \frac{n_1 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{j}_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{j}'_n(n_2 x)}{n_1 \hat{j}'_n(n_1 x) \hat{y}_n(n_2 x) - n_2 \hat{j}_n(n_1 x) \hat{y}'_n(n_2 x)} \quad (\Gamma.34)$$

Συνεπώς, οι συντελεστές σκέδασης α_n^r, b_n^r μπορούν να γραφούν αντίστοιχα στη μορφή

$\alpha_n^r = -\frac{1}{1 - i \cot a_n}$ και $b_n^r = -\frac{1}{1 - i \cot \beta_n}$ όπου οι φάσεις a_n και β_n ορίζονται από τις σχέσεις

$$\cot a_n = \frac{[n_2 \hat{y}_n(n_2 y) \hat{y}'_n(y) - \hat{y}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] A_n^r - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{y}'_n(y) + \hat{y}_n(y) \hat{j}'_n(n_2 y)}{[-\hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y) + n_2 \hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] A_n^r + \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y) - n_2 \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y)} \quad (\Gamma.35)$$

$$\cot \beta_n = \frac{[n_2 \hat{y}'_n(n_2 y) \hat{y}_n(y) - \hat{y}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y)] B_n^r - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{y}_n(y) + \hat{y}'_n(y) \hat{j}_n(n_2 y)}{[-\hat{j}'_n(y) \hat{y}_n(n_2 y) + n_2 \hat{j}_n(y) \hat{y}'_n(n_2 y)] B_n^r + \hat{j}_n(n_2 y) \hat{j}'_n(y) - n_2 \hat{j}'_n(n_2 y) \hat{j}_n(y)} \quad (\Gamma.36)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ν.Ουζούνογλου, “Ηλεκτρομαγνητική σκέδαση από ανομοιογένειες σε διηλεκτρικούς κυματοδηγούς”, Διατριβή Υψηλεσίας, 1981.
- [2] Ν.Ουζούνογλου, “Τηλεπικοινωνίες οπτικών ινών”, Εκδόσεις Συμμεών.
- [3] Μ.Ε. Kampitakis and Ν.Κ. Uzunoglu, “Analysis of guided and leaky waves excited by an infinite line source in metamaterial substrates”, *IET Microwaves, Antennas & Propagation, Special Issue on Metamaterials*, vol. 1, No.1, Feb. 2007, pp.129-136.
- [4] Myron Kampitakis, I.Karanasiou and Ν. Uzunoglu “Development of metamaterials to optimize the focusing properties of a brain hybrid monitoring and treatment system”, *EMC Europe Workshop, Materials in EMC Applications*, June 2009.
- [5] V.Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ”, *Sov. Phys.*, vol. 10, Feb. 1968, pp. 509 – 514.
- [6] R.Shelby, D.Smith, S.Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction”, *Science*, vol. 292, pp. 77-79, April 2001.
- [7] A.Houck, J.Brock and I.Chuang, “Experimental observations of a left-handed material that obeys Snell’s Law”, *Phys. Rev. Lett.*, vol.90, April 2003.
- [8] C.Simovski, P.Belov, H.Sailing, “Backward wave region and negative material parameters of a structure formed by lattices of wires and split-ring resonators”, *IEEE Trans. Antennas & Prop.*, vol 51, pp. 2582-2591, 2003.
- [9] E.Ozbay, K.Aydin, E.Cubukcu and M.Bayindir, “Transmission and reflection properties of composite double negative metamaterials in free space”, *IEEE Trans. Antennas & Prop.*, vol. 51, pp. 2592-2595, 2003.
- [10] R.Ziolkowski and A.Kipple, “Application of double negative materials to increase the power radiated by electrically small antennas”, *IEEE Trans. Antennas & Prop.*, vol. 51, pp. 2626-2640, 2003.
- [11] J.Pendry, A.Holden, W.Stewart and I.Youngs, “Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 4773-4776, June 1996.
- [12] J.Pendry, A.Holden, D.Robbins and W.Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena”, *IEEE Trans. MTT*, vol. 47, pp. 2075-2084, 1999.
- [13] J.Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens”, *Phys. Rev. Lett.*, vol.85, pp. 3966-3969, Oct. 2000.

- [14] D.Smith, D.Schurig, M. Rosenbluth and S.Schultz, "Limitations on subdiffraction imaging with a negative refractive index slab", *App. Phys. Lett.*, vol. 82, pp. 1506-1508, March 2003.
- [15] A.Lagarkov and V.Kissel, "Near-perfect imaging in a focusing system based on a left-handed material plate", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, pp. 077401:1-4, Feb. 2004.
- [16] A.Grbic and G.Eleftheriades, "Overcoming the diffraction limit with a planar left-handed transmission-line lens", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, pp.117403:1-4, March 2004.
- [17] N.Fang, Z.Liu, T.Yen and X.Zhang, "Regenerating evanescent waves from a silver superlens", *Optics Express*, vol. 11, pp. 682-687, March 2004.
- [18] C.Caloz and T.Itoh, "Transmission Line Theory and Microwave Applications", Wiley- IEEE Press, Dec. 2005.
- [19] A.Lai, C.Caloz and T.Itoh, "Transmission line based metamaterials and their microwave applications", *Microwave Mag.*, vol.5, pp. 34-50, Sept. 2004.
- [20] C.Caloz, A.Sanada and T.Itoh, "A novel composite right/left-handed coupled-line directional coupler with arbitrary coupling level and broad bandwidth", *IEEE Trans. MTT*, vol. 52, pp. 980-992, March 2004.
- [21] C.Caloz and T.Itoh, "Novel microwave devices and structures based on the transmission line approach of metamaterials", *IEEE-MTT International Symposium*, vol. 1, pp. 195-198, June 2003.
- [22] L.Liu, C.Caloz and T.Itoh, "Dominant mode (DM) leaky-wave antenna with backfire to endfire scanning capability", *Electron. Lett.*, vol. 38, pp. 1414-1416, Nov. 2002.
- [23] A.Iyer and G.Eleftheriades, "Negative refractive index metamaterials supporting 2D waves", *IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, Seattle, pp. 1067-1070, June 2002.
- [24] C.Caloz, H.Okabe, T.Iwai and T.Itoh, "Transmission line approach of left-handed (LH) materials", *USNC/URSI National Radio Science Meeting*, San Antonio, TX, vol 1, p. 39, June 2002.
- [25] C.Caloz, A.Sanada and T.Itoh, "Microwave applications of transmission-line based negative refractive index structures", *Proc. of Asia-Pacific Microwave Conf.*, Seoul, Korea, vol. 3, pp. 1708-1713, Nov. 2003.
- [26] V.Yannopapas and A.Moroz, "Negative refractive index metamaterials from inherently non-magnetic materials for deep infrared to terahertz frequency ranges", *Journal of Phys. Cond. Matter*, vol. 17, pp. 3717-3734, June 2005.
- [27] J.Jackson, "Classical Electrodynamics", 3rd edition.
- [28] Ι.Τσαλαμέγκας, Ι.Ρουμελιώτης, "Ειδικά θέματα ηλεκτρομαγνητισμού".

- [29] M.Abramowitz and I.Stegun, “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables”.
- [30] Π.Κωπτής, Χ.Καυάλης, “Κεραίες-ασύρματες ζεύξεις”, εκδόσεις Τζιόλα.
- [31] X.Chen, T.Grzegorzcyk, B.Wu, J.Pacheco and J.Kong, “Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials”, *Phys. Rev. E*, vol. 70, 016608, 2004.
- [32] D.Smith, S.Schultz, P.Markos and C.Soukoulis, “Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients”, *Phys. Rev. B*, vol. 65, 195104:1-5, April 2002.
- [33] M.Kafesaki and E.Economou, “Multiple-scattering theory for three-dimensional periodic acoustic composites”, *Phys. Rev. B*, vol. 60, no. 17, Nov. 1999.
- [34] N.Stefanou, V.Yannopoulos and A.Modinos, “Heterostructures of photonic crystals: frequency bands and transmission coefficients”, *Comp. Phys. Commun.*, vol. 113, pp. 49-77, 1998.
- [35] Β.Γιαννόπουλος, “Οπτικές ιδιότητες σύνθετων ανομοιογενών υλικών-Φωτονικοί κρύσταλλοι”, Διδακτορική διατριβή.
- [36] C.Kittel, “Introduction to solid state physics”, 7th edition, J.Wiley & Sons.
- [37] N.Ashcroft, N.Mermin, “Solid state physics”.
- [38] A.Modinos, “Scattering of electromagnetic waves by a plane of spheres-formalism”, *Physica 141A*, pp. 575-588, 1987.
- [39] N.Stefanou, V.Yannopoulos and A.Modinos, “MULTEM 2: A new version of the program for transmission and band-structure calculations of photonic crystals”, *Comp. Phys. Commun.*, vol. 132, pp. 189-196, 2000.
- [40] A.Modinos, “Field, Thermionic and Secondary Electron Emission Spectroscopy”, Plenum, New York, 1984.
- [41] J.Pendry, “Low Energy Electron Diffraction”, Academic Press, London, 1974.
- [42] I.Karanasiou, N.Uzunoglu and C.Papageorgiou, “Towards functional non-invasive imaging of excitable tissues inside the human body using focused microwave radiometry”, *IEEE Trans. MTT*, vol. 52, no. 8, pp. 1898-1908, Aug. 2004.
- [43] I.Karanasiou, K.Karathanasis, A.Garetsos and N.Uzunoglu, “Development and laboratory testing of a non invasive intracranial focused hyperthermia system”, *IEEE Trans. MTT*, vol. 56, no. 9, pp. 2160-2171, Sept. 2008.
- [44] Ε.Καρανάσιου, “Ανάπτυξη συστήματος μη επεμβατικής απεικόνισης του ανθρώπινου εγκεφάλου με μικροκυματική ραδιομετρία”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, Δεκ. 2003.

- [45] I.Karanasiou and N.Uzunoglu, “Single-frequency and multiband microwave radiometry for feasible brain conductivity variation imaging during reactions to external stimuli”, *Nuclear instruments and methods in physics research*, vol A 569, pp. 581-586, 2006.
- [46] K.Karathanasis, I.Gouzouasis, I.Karanasiou, G.Stratakos and N.Uzunoglu, “Passive focused monitoring and non-invasive irradiation of head tissue phantoms at microwave frequencies”, *8th IEEE International Conference on Bioinformatics and Bioengineering*, Athens, Oct. 2008.
- [47] S.Gabriel, R.Lau and C.Gabriel, “The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz”, *Phys. Med. Biol.*, vol. 41, pp. 2251-2269, 1996.
- [48] K.Karathanasis, I.Gouzouasis, I.Karanasiou and N.Uzunoglu, “The use of left handed materials for the optimization of the focusing attributes of a biomedical hybrid system”, *EMC Europe Workshop, Materials in EMC Applications*, June 2009.
- [49] Κ.Καραθανάσης, “Ανάπτυξη παθητικών συστημάτων μελέτης ενδοκρανιακών θερμοκρασιακών μεταβολών και εγκεφαλικών διεργασιών”, Διδακτορική διατριβή, Ιούλιος 2010.
- [50] V.Yannopapas, “Artificial magnetism and negative refractive index in three-dimensional metamaterials of spherical particles at near-infrared and visible frequencies”, *Applied Physics A*, vol. 87, no. 2, pp. 259-264, Nov. 2006.
- [51] V.Yannopapas, “Negative refraction in random photonic alloys of polaritonic and plasmonic microspheres”, *Phys. Rev. B*, vol. 75, 035112, Jan. 2007.
- [52] M.Wheeler, J.Aitchison and M.Mojahedi, “Coated nonmagnetic spheres with a negative index of refraction at infrared frequencies”, *Phys. Rev. B*, vol. 73, 045105, Jan. 2006.
- [53] J.Free, M.Moffat and G.Walker, “Dielectric properties of titania ceramics at microwave frequencies”, *Brit. Jour. Appl. Phys.*, vol. 14, no. 5, pp. 289-291, May 1963.
- [54] H.Takahashi, Y.Baba, K.Ezaki, Y.Okamoto, K.Shibata, K.Kuroki and S.Nakano, “Dielectric characteristics of $(A_{1/2}^{+1} \cdot A_{1/2}^{+3})TiO_3$ ceramics at microwave frequencies”, *Japan. Jour. Of Appl. Phys.*, vol. 30, no. 9B, pp. 2339-2342, Sep. 1991.