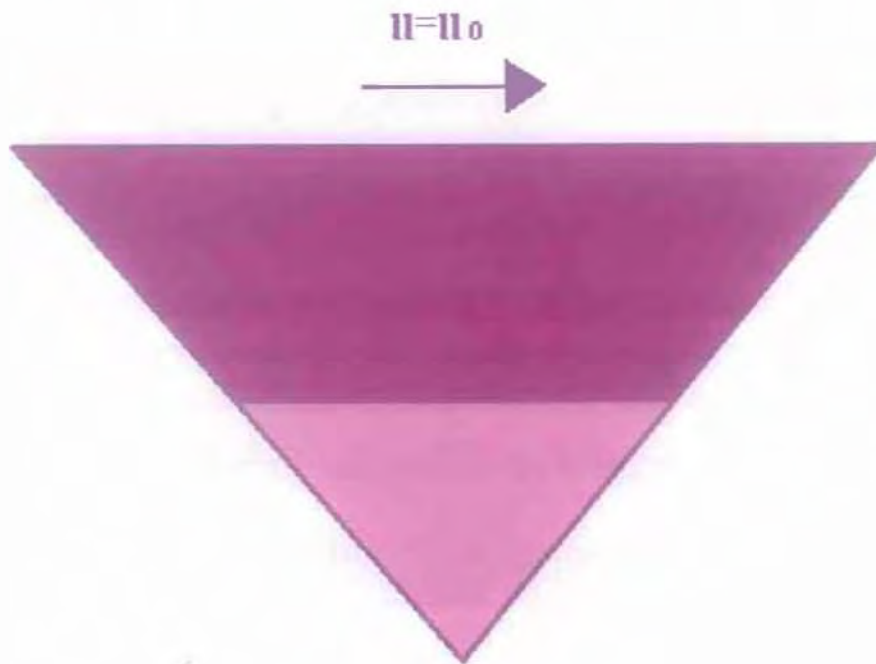


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ, ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΑΝΤΙΡΡΥΠΑΝΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία:
ΡΟΗ ΑΕΡΙΟΥ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΟΙΛΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ



Επιμέλεια:
ΚΟΥΤΑΝΤΟΥ ΕΙΡΗΝΗ

Επιβλέπων :
ΝΑΡΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
Απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2010



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 8921/1
Ημερ. Εισ.: 07-10-2010
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜ
2010
ΚΟΥ

© 2010 Ειρήνη Μιχ. Κουτάντου

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.
(Ν.5343/32 αρ.202 παρ.2)

Εγκρίθηκε από τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής :

Πρώτος εξεταστής: Δρ. **Βαλουεώρονς Δημήτρης**

Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Δεύτερος εξεταστής: Δρ. **Βλαχονιάνης Μιχαήλ**

Αν. Καθηγητής Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Τ.Ε.Ι. Λάρισας

Τρίτος εξεταστής
(επιβλέπων):

Δρ. **Νάοης Στέργιος**

Διδάσκων (Π.Δ. 407/80)
Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Πανεπιστημίου
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες :

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήθελα αρχικά να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Στέργιο Νάρη. Η βοήθεια και η στήριξη που μου προσέφερε υπήρξαν καταλυτικοί παράγοντες για την διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, η υπομονή που επέδειξε στην αντιμετώπιση των γνωστικών ελλείψεων μου είχε σαν αποτέλεσμα την ενασχόληση μου και την εμπάθυνση των γνώσεων μου στο συγκεκριμένο επιστημονικά πεδίο, γεγονός που αρχικά φαινόταν αρκετά δύσκολο.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τον κ. Δημήτριο Βαλουγεώργη και τον κ. Μιχαήλ Βλαχογιάννη για την ανταπόκριση και τη συμμετοχή τους.

Στη συνέχεια θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου και πιο συγκεκριμένα στους γονείς μου Μιχάλη και Σοφία για την αμέριστη βοήθεια και συμπαράστασή τους καθώς επίσης και για την υπομονή που επέδειξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου μακριά τους.

Τέλος, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους φίλους μου για την πολύτιμη βοήθεια τους και την υποστήριξη που μου προσέφεραν κατά την προετοιμασία της παρούσας εργασίας.

« η γνώση και η μόρφωση έχουνε σημασία μα η ανθρωπιά στον άνθρωπο την έχει την αξία »

Ροή αερίου σε μικροκοιλότητα τριγωνικής και τραπεζοειδούς διατομής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2010

Εργαστήριο Φυσικών και Χημικών Διεργασιών

Επιμέλεια : Κουτάντου Ειρήνη

Επιβλέπων Καθηγητής: Νάρος Στέργιος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη των ροών σε διατάξεις μικροκλίμακας αποτελεί μια επιστημονική περιοχή που έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια. Η συνήθης αντιμετώπιση βασίζεται στην επίλυση των εξισώσεων του συνεχούς μέσου με την κατάλληλη διαμόρφωση των οριακών συνθηκών ώστε να ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα ολίσθησης που παρατηρούνται στις διεπιφάνειες. Η προσέγγιση όμως αυτή, μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για μικρούς αριθμούς Knudsen. Για αέρια με μεγαλύτερο βαθμό αραιοποίησης είναι απαραίτητη η χρήση μεθοδολογιών μεσοκλίμακας που να βασίζονται στην κινητική θεωρία.

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο τη μελέτη της ροής αερίου σε τριγωνική και τραπεζοειδή μικροκοιλότητα. Η επίλυση της μικροροής γίνεται αναπτύσσοντας τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων (Discrete Velocity Method) για την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων σχετικά με τις μακροσκοπικές ιδιότητες του αερίου.

Σημαντική διαπίστωση, αποτελεί το γεγονός ότι οι μεσοσκοπικές μεθοδολογίες κινητικής φύσεως είναι ικανές να προσομοιώσουν αξιόπιστα ροές σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen, κάτι εξαιρετικά σημαντικό για προβλήματα όπου εμφανίζονται φαινόμενα σε διάφορες κλίμακες.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:	
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ	
1.1 Εισαγωγή	10
1.2 Μοντελοποίηση του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων και μεθοδολογίες επίλυσης ροών	12
1.3 Προσδιορισμός συντελεστών ολίσθησης	14
1.4 Εφαρμογές	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 :	
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ	
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Διατύπωση εξίσωσης Boltzmann	18
2.3 Ο όρος των συγκρούσεων και η κατανομή Maxwell	21
2.4 Μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων: Μοντέλο BGK	21
2.5 Γραμμικοποίηση κινητικών εξισώσεων	22
2.6 Αδιαστατοποίηση κινητικών εξισώσεων	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:	
ΡΟΗ ΑΕΡΙΟΥ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΟΙΛΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	
3.1 Εισαγωγή	27
3.2 Ροή σε κοιλότητα	27
3.3 Ροή σε τριγωνική κοιλότητα	28
3.4 Γεωμετρική διατύπωση προβλήματος	30
3.5 Μαθηματικό μοντέλο	31
3.6 Διαμόρφωση εξισώσεων με προβολή της τρίτης διάστασης	34
3.7 Οριακές Συνθήκες	36
3.8 Αντιμετώπιση των ασυνεχειών στις οριακές συνθήκες	39
3.9 Αριθμητικό σχήμα	42
3.10 Ροή σε τραπεζοειδή κοιλότητα	45
3.10.1 Γεωμετρική διατύπωση προβλήματος	45
3.10.2 Επίλυση μέσω τριγωνικής διατομής	46
3.10.3 Οριακές Συνθήκες	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	105
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	107

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατασκευή συσκευών σε διαστάσεις νανοκλίμακας ξεκίνησε από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 αν και αποτέλεσε όραμα και συγχρόνως πρόκληση για την επιστημονική κοινότητα εδώ και πολλά χρόνια. Η κατασκευή σπουδαίων τεχνολογικών επιτευγμάτων κατέστη δυνατή χάρη στη ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών και την ανάπτυξη νέων κατασκευαστικών τεχνικών, που σαν στόχο είχαν την ελάττωση του κόστους επιταχύνοντας έτσι την ανάπτυξη των εφαρμογών, σε συνδυασμό με τη μαζικοποίηση της παραγωγής.

Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών αποτελούν εξαρτήματα όπως επιταχυνσιόμετρα (χρησιμοποιούνται για την ενεργοποίηση αερόσακων στα οχήματα), ιατρικά εργαλεία (για επεμβάσεις σε επίπεδο κυττάρου) και μικροσκοπικοί αισθητήρες πίεσης.

Η μελέτη των ρευστοδυναμικών φαινομένων κρίνεται αναγκαία καθώς αρκετές από τις συσκευές αυτές είτε έρχονται σε επαφή με ρευστά κατά τη λειτουργία τους, είτε περιλαμβάνουν εξαρτήματα, όπως για παράδειγμα μικροαγωγούς ή μικροκοιλότητες τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα με ρευστά. Επίσης, πολλές φορές οι συσκευές έχουν ως στόχο αποτελέσματα που αφορούν αποκλειστικά ρευστοδυναμικά μεγέθη (αντλίες, ροόμετρα, συστήματα κυκλωμάτων ψύξης) γεγονός που καθιστά απαραίτητο τον προσδιορισμό των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στο ρευστό.

Η ανάπτυξη μεθόδων για τη μελέτη ρευστοδυναμικών φαινομένων και τη βέλτιστη προσομοίωσή τους σε επίπεδο μικροκλίμακας αποτελεί το γνωστικό αντικείμενο της μικρορευστοδυναμικής. Παράλληλα με τον τομέα αυτό εξελίσσονται η κατασκευαστική τεχνολογία και η τεχνολογία υλικών στη μικροκλίμακα. Τα τρία αυτά πεδία έρευνας θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι αποτελούν τις τρεις συνιστώσες της επιστημονικής περιοχής που ονομάζεται μικρομηχανική.

Μία πιο εξεζητημένη περιοχή έρευνας για την οποία το τελευταίο διάστημα έχει αρχίσει να αναπτύσσεται ενδιαφέρον είναι αυτή της νανοκλίμακας[1]. Μολονότι οι κατασκευαστικές δυνατότητες είναι ακόμα περιορισμένες, η θεμελίωση αρχών και η θεωρητική μελέτη είναι κάτι εφικτό και ταυτόχρονα ζητούμενο για την προοδευτική ανάπτυξή της.

Αρχικά, στις πρώτες διατάξεις με σχετικά μικρές διαστάσεις που δημιουργήθηκαν και θα μπορούσαν να καταταχθούν στην κατηγορία της μικρομηχανικής, η μελέτη των ρευστών γινόταν με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων συνέχειας. Προοδευτικά όμως, και καθώς οι δυνατότητες για δημιουργία όλο και μικρότερων διατάξεων γινόταν περισσότερες φάνηκε ότι η μελέτη των ροών που παρουσιαζόταν σε αυτές δεν μπορούσε να γίνει πλέον με τις

εξισώσεις συνέχειας, αλλά απαιτούνταν ορισμένες αλλαγές. Η πιο αποτελεσματική τροποποίηση που προτάθηκε, αφορούσε τις οριακές συνθήκες ώστε αυτές να μπορέσουν να συμπεριλάβουν φαινόμενα ολίσθησης τα οποία παρουσιάζονται στα τοιχώματα με αποτέλεσμα την εξαγωγή ικανοποιητικών αποτελεσμάτων, τα οποία μπορούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις ακόμα και της σημερινής εποχής. Όμως η εξέλιξη την έχει οδηγήσει στα όριά της και πλέον απαιτείται μία νέα προσέγγιση.

Η νέα αυτή προσέγγιση αναμένεται να προκύψει με τη βοήθεια της κινητικής θεωρίας και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στις νέες συσκευές που παρουσιάζονται, η υπόθεση του συνεχούς μέσου γίνεται επισφαλής, ενώ τα φαινόμενα που παρουσιάζονται είναι αντίστοιχα με αυτά που παρατηρούνται σε ροές σε συνθήκες κενού ή γενικότερα πολύ χαμηλής πυκνότητας.

Η βασική διαφορά της νέας προσέγγισης βρίσκεται στην εγκατάλειψη της μελέτης των μακροσκοπικών ιδιοτήτων όπως η πυκνότητα, η ταχύτητα και η θερμοκρασία και στην εστίαση στη συμπεριφορά των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται το ρευστό. Όπως είναι φυσικό δεν είναι δυνατόν να εξετάζεται το κάθε σωματίδιο χωριστά και για το λόγο αυτό, υιοθετείται μια στατιστική αντιμετώπισή τους. Οι μακροσκοπικές ιδιότητες προκύπτουν ως δευτερεύοντα μεγέθη και το βασικό στοιχείο το οποίο μελετάται είναι μια συνάρτηση κατανομής η οποία υπακούει στη γνωστή εξίσωση Boltzmann[2].

Το κυριότερο πλεονέκτημα που παρουσιάζει η νέα αυτή προσέγγιση είναι ότι η υπόθεση της συνέχειας είναι πλέον αδιάφορη και το πεδίο εφαρμογής εκτείνεται από τα συνεχή μέσα, μέχρι και τις ροές στις οποίες τα σωματίδια μπορούν να αντιμετωπιστούν ακόμα και διακριτά. Επιπλέον, η μαθηματική τεκμηρίωση είναι ισχυρή ενώ τροποποιήσεις για τη συμπερίληψη επιδράσεων όπως αυτή της βαρύτητας ή του μαγνητικού πεδίου για ροές ιονισμένων ρευστών, γίνονται με μαθηματική συνέπεια επιτρέποντας την ευκολότερη αντιμετώπιση προβλημάτων μαγνητοϋδροδυναμικής και άλλων.

Οι τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν, μπορούν να διαφοροποιηθούν ανάλογα με την αποτελεσματικότητα της κάθε μιας σε σχέση με την κλίμακα των φαινομένων που μελετώνται. Έτσι για παράδειγμα, σε πολύ αραιά ρευστά η μέθοδος Monte Carlo[3] είναι ίσως η πιο ενδεδειγμένη, ενώ για συνεχή μέσα η μέθοδος Lattice Boltzmann[4] αποτελεί την κυριότερη πρόταση. Για τις ενδιάμεσες περιοχές, οι οποίες μας θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στην παρούσα εργασία, το τοπίο δεν είναι τόσο ξεκάθαρο μιας και υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που αποδεικνύονται αποτελεσματικές. Ωστόσο αν η προσέγγιση που ακολουθείται είναι πλήρως αριθμητική, τότε η μέθοδος διακριτών ταχυτήτων (DVM)[5,6] αποκτά προβάδισμα.

Όμως όπως είναι φυσικά αναμενόμενο η εφαρμογή όλων αυτών των τεχνικών δεν είναι χωρίς προβλήματα εφόσον πολλές από αυτές

έχουν παρουσιαστεί πολύ πρόσφατα. Βασικό ανασταλτικό παράγοντα αποτελεί η μεγάλη απαίτηση που παρουσιάζεται για υπολογιστική ισχύ και υπολογιστικό χρόνο, κάτι που αρκετές φορές καθιστά απαγορευτική την εφαρμογή των προαναφερθέντων τεχνικών.

Ταυτόχρονα, υπάρχουν και μια σειρά άλλων εμποδίων που απαιτούν αντιμετώπιση, πολλά από τα οποία είναι κοινά σε όλες τις μεθόδους, ενώ άλλα αφορούν μόνο ορισμένες εξ αυτών. Όλα αυτά έχουν περιορίσει το πεδίο εφαρμογής των μεσοσκοπικών μεθοδολογιών αρκετά ώστε, με ελάχιστες εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται να αφορούν μονοδιάστατες ροές απλής γεωμετρίας και ενός συστατικού.

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι η μελέτη της ροής σε τριγωνική και τραπεζοειδή μικροκοιλότητα χρησιμοποιώντας μεσοσκοπικές μεθόδους καθώς επίσης και η εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων τα οποία θα οδηγήσουν σε ασφαλή συμπεράσματα.

Η εργασία αποτελείται από τέσσερις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα (Κεφάλαιο 1) δίνονται ορισμένα γενικά στοιχεία που αφορούν την περιγραφή της υπάρχουσας κατάστασης στη διεθνή βιβλιογραφία.

Η επόμενη ενότητα (Κεφάλαιο 2) περιλαμβάνει το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται η μεθοδολογία που μας απασχόλησε. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της κινητικής θεωρίας οι οποίες θεωρούνται απαραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

Στην Τρίτη ενότητα (Κεφάλαιο 3) περιέχεται αναλυτικά η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη της ροής σε τριγωνική κοιλότητα για όλο το εύρος του αριθμού Knudsen [7] και περιγράφεται με λεπτομέρεια η υπολογιστική διαδικασία της επίλυσης. Επίσης, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες πληροφορίες για τη ροή σε τραπεζοειδή κοιλότητα.

Στην τελευταία ενότητα (Κεφάλαιο 4) εμπεριέχεται λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και τα συμπεράσματα (Κεφάλαιο 5) που εξάγονται από την επεξεργασία τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ:

1.1 Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή, το θέμα της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη σε μικροκλίμακα αραιοποιημένης ροής αερίου σε τριγωνική και τραπεζοειδή κοιλότητα και επίλυση με την εφαρμογή της μεθόδου διακριτών ταχυτήτων (Discrete Velocity Method-DVM). Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης αυτής το οποίο αποτέλεσε η κινητική θεωρία καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο εξελίχθηκε στο πέρασμα των χρόνων με την ανάπτυξη της τεχνολογίας.

Η κινητική θεωρία, η οποία αποτελεί έναν από τους κλάδους της στατιστικής μηχανικής, επιτρέπει την περιγραφή των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των αερίων με τη θεώρηση της σύστασής τους σε μοριακό επίπεδο (μικροσκοπικές ιδιότητες).

Η ανάπτυξη της θεωρίας ξεκίνησε ουσιαστικά το 17^ο αιώνα (Hooke, Descartes) και εξελίχθηκε περαιτέρω τον 18^ο αιώνα (Bernoulli, Boyle). Το θεμέλιο λίθο, πάνω στον οποίο βασίστηκαν άλλοι εξίσου σημαντικοί επιστήμονες κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα, έθεσαν δύο μεγάλοι φυσικοί, ο Maxwell και ο Boltzmann.

Παρόλα αυτά, η θεωρία του Boltzmann εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη μελέτη προβλημάτων μικροσκοπικής κλίμακας τη δεκαετία του '50. Η μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια που απαιτεί η επίλυση της εξίσωσης Boltzmann και η απαίτηση ενός υπολογιστικού συστήματος με ικανοποιητική ισχύ αποτέλεσαν σημαντικά εμπόδια στην εφαρμογή της. Τα εμπόδια όμως αυτά ξεπεράστηκαν σε κάποιο βαθμό με τη ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας η οποία συνεχώς βελτιώνεται κάνοντας πιο εύκολη την ανάπτυξη μεθόδων όπως αυτή.

Η εφαρμογή της εξίσωσης Boltzmann σε προβλήματα μικρορευστοδυναμικής ροής σε αγωγούς γίνεται έπειτα από θεωρητικές προσεγγίσεις βασισμένες στην κινητική θεωρία. Οι προσεγγίσεις αυτές αφορούν τον προσδιορισμό των οριακών συνθηκών και τη μοντελοποίηση του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων. Για το λόγο αυτό οι καταστατικές εξισώσεις Newton και Fourier της κλασικής ρευστομηχανικής και μετάδοσης θερμότητας, με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, αδυνατούν να περιγράψουν τέτοιου είδους προβλήματα.

Ο προσδιορισμός των οριακών συνθηκών είναι ένα σημαντικό βήμα για την επίλυση καθώς αποτελεί κριτήριο για το πόσο ακριβείς είμαστε στην προσομοίωση του φαινομένου. Η πρώτη συνθήκη η οποία εφαρμόζεται μέχρι σήμερα οφείλεται στο Maxwell[2]. Σύμφωνα με τη συνθήκη αυτή (συνθήκη τύπου διάχυσης), η

κατανομή των εισερχόμενων προς ροή σωματιδίων ακολουθεί κατανομή Maxwell όπως αυτή ορίζεται από τις μακροσκοπικές ιδιότητες του στερεού τοιχώματος (τα σωματίδια δηλαδή καθώς προσπίπτουν χάνουν τη μνήμη τους και συνεχίζουν μόνο με βάση την πληροφορία του τοιχώματος-θεωρείται απορρόφηση των σωματιδίων από το τοίχωμα και εκ νέου εκπομπή τους).

Ωστόσο, η εφαρμογή της σε αραιά αέρια ή σε τοιχώματα μικρής τραχύτητας δε συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα, το γεγονός αυτό οδήγησε σε τροποποίηση της συνθήκης από το Maxwell[8] έτσι ώστε τα σωματίδια να μην εμφανίζουν ολική απώλεια μνήμης αλλά μερική.

Πιο συγκεκριμένα, ένα ορισμένο ποσοστό α των σωματιδίων δεν απορροφάται από το τοίχωμα αλλά ανακλάται πάνω σε αυτό. Ο συντελεστής α αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα του συνδυασμού ρευστού-τοιχώματος. Το πρόβλημα που ανέκυψε από τις αποκλίσεις στην τιμή του α για συγκεκριμένο συνδυασμό ρευστού-τοιχώματος αντιμετωπίστηκε με την ύπαρξη πλέον δύο συντελεστών για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών, εκ των οποίων ο ένας περιγράφει τη μετάδοση ορμής και ο δεύτερος τη μετάδοση θερμότητας[9] (συνθήκες Cercignani-Lampis). Επειδή όμως παρουσιάζουν μεγάλη πολυπλοκότητα δεν εφαρμόζονται ευρέως.

Μια διαφορετική προσέγγιση έχει γίνει για πολυατομικά αέρια εφαρμόζοντας μία γενικευμένη συνθήκη η οποία περικλείει τις συνθήκες Maxwell και Cercignani-Lampis. Η προσέγγιση όμως αυτή βασίζεται σε λανθασμένες παραδοχές, όπως για παράδειγμα ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο συντελεστών (ορμής και θερμότητας).

Η μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων στην εξίσωση Boltzmann είναι ένας εξίσου σημαντικός παράγοντας για την επίλυση καθώς επηρεάζει τη ρεαλιστική προσέγγιση του προβλήματος. Η αντικατάσταση του όρου στην ιδανική περίπτωση απεικονίζει όλους τους τύπους των συγκρούσεων των σωματιδίων και την πραγματική συμπεριφορά τους κατά τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Ο κάθε τύπος συγκρούσεων αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό σωματιδίων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους την ίδια χρονική στιγμή. Είναι βέβαια αυτονόητο ότι δεν περιλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί τύποι αφού ο αριθμός τους είναι ίσος με τον αριθμό των σωματιδίων του συστήματος. Καθώς επίσης, δεν έχουν όλοι την ίδια σημασία αλλά και συχνότητα.

Ανάλογα με την εφαρμογή που εξετάζεται, οι τύποι των συγκρούσεων αποκτούν διαφορετική σημασία. Πιο συγκεκριμένα στην αραιοποιημένη ροή, αρκεί να προσδιοριστούν οι συγκρούσεις στις οποίες αλληλεπιδρούν δύο σωματίδια εφόσον οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι σπάνιες. Καθώς προσεγγίζεται η υδροδυναμική περιοχή κρίνεται απαραίτητος ο υπολογισμός και των συγκρούσεων στις οποίες εμπλέκονται τρία σωματίδια.

Για τον προσδιορισμό του δυναμικού είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένες παραδοχές οι οποίες βασίζονται στην κινητική θεωρία. Σύμφωνα με μια πρώτη προσέγγιση, οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων θεωρούνται απολύτως ελαστικές και επικρατεί το μοντέλο των συμπαγών σφαιρών (σωματίδια χωρικά εντοπισμένα).

Μία ακόμη θεώρηση είναι αυτή των σωματιδίων Lenard-Jones. Το δυναμικό αλληλεπίδρασης ή δυναμικό Lenard-Jones είναι μία ποσότητα που καθορίζει την πορεία-τροχιά των σωματιδίων μετά τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Τέλος υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού του δυναμικού αλληλεπίδρασης μέσω πειραματικών δεδομένων (πραγματικό δυναμικό). Η μεθοδολογία αυτή, παρά το γεγονός ότι δεν είναι θεωρητικά αποδεδειγμένη χρησιμοποιείται αποτελεσματικά για την προσέγγιση των φαινομένων.

Έχοντας πλέον ως δεδομένα τον όρο των συγκρούσεων και το δυναμικό αλληλεπίδρασης μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της εξίσωσης Boltzmann. Πρόκειται όμως για μια εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία και υπερβολικά απαιτητική σε υπολογιστικό χρόνο. Ένα πρώτο κριτήριο για την επίλυση της εξίσωσης είναι η πυκνότητα των σωματιδίων, όταν αυτή είναι πολύ μικρή [10] και έπειτα από θεωρήσεις (αμελητέος αριθμός συγκρούσεων) τότε πολύ πιθανό να προκύψουν λύσεις.

Ένα δεύτερο κριτήριο αποτελεί ο αριθμός Knudsen (Kn), ανάλογα με την τιμή του οποίου κρίνεται η μεθοδολογία επίλυσης. Ως ελεύθερη μοριακή περιοχή (περιοχή ελεύθερης κίνησης των σωματιδίων) θεωρείται συνήθως για $Kn \geq 10^3$. Η προσομοίωση στην περιοχή αυτή γίνεται με την εξίσωση Boltzmann χωρίς τον όρο των συγκρούσεων. Ενώ για $Kn \leq 10^{-3}$ το ρευστό μπορεί να μελετηθεί ως συνεχές μέσο και να περιγραφεί από υδροδυναμικές εξισώσεις (Navier-Stokes).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επίλυση μέσω των εξισώσεων Navier-Stokes είναι πολύ πιο απλή, υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπως η μεταβατική περιοχή $10^{-3} \leq Kn \leq 10^3$ όπου μπορεί να αδυνατούν υπολογιστικά να οδηγήσουν σε αποτελέσματα χωρίς να παρέχουν αξιόπιστες λύσεις οπότε κρίνεται απαραίτητη η εφαρμογή της εξίσωσης Boltzmann λαμβάνοντας υπόψιν την ελεύθερη κίνηση των μορίων και τις συγκρούσεις μεταξύ τους και με τα τοιχώματα.

1.2 Μοντελοποίηση του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων και μεθοδολογίες επίλυσης οσών

Η μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων αποτέλεσε ένα μέσο εξοικονόμησης υπολογιστικής ισχύος για την επίλυση της εξίσωσης. Μερικά από τα πιο γνωστά μοντέλα που εφαρμόζονται για ροές ενός συστατικού είναι το Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) [11], το Shakhov

(S)[12] και το ελλειψοειδές μοντέλο (ES)[13].Ενώ για ροές μειγμάτων αερίων τα πιο γνωστά είναι τα μοντέλα Hamel[14] και McCormack[15].

Έχοντας επιλέξει το μοντέλο του όρου των συγκρούσεων και αφού καθοριστούν οι οριακές συνθήκες του προβλήματος αυτό που απομένει είναι η μεθοδολογία επίλυσης. Για την επίλυση της εξίσωσης Boltzmann υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις αναλυτικές (μέθοδος των ροπών[2,3] ,των βασικών λύσεων), ημι-αναλυτικές (μέθοδος των ολοκληρωτικών ροπών) και αριθμητικές (Monte Carlo[3], DVM[16], Lattice Boltzmann).

Στην παρούσα εργασία η μεθοδολογία που ακολουθείται για την αριθμητική επίλυση της κινητικής εξίσωσης είναι αυτή των διακριτών ταχυτήτων(DVM).Η μέθοδος βασίζεται στην επιλογή ορισμένων διευθύνσεων και τιμών της μικροσκοπικής ταχύτητας , για τις οποίες αν είναι γνωστή η λύση της εξίσωσης Boltzmann , είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι τιμές των μακροσκοπικών ιδιοτήτων. Η ακρίβεια της επίλυσης εξαρτάται από το πλήθος των διευθύνσεων και των ταχυτήτων, όσο μεγαλύτερο είναι αυτό τόσο πιο ακριβείς είμαστε στην προσέγγιση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων.

Οι μακροσκοπικές ιδιότητες αποτελούν ροπές της λύσης της εξίσωσης Boltzmann ως προς τη μικροσκοπική ταχύτητα και προκύπτουν από την ολοκλήρωσή της. Για το λόγο αυτό προκειμένου να έχουμε τη βέλτιστη δυνατή επιλογή ταχυτήτων, οι ταχύτητες επιλέγονται ώστε να είναι ρίζες κάποιου ορθογώνιου πολυωνύμου. Ουσιαστικά δηλαδή, απαιτείται μια σειρά από αριθμητικές ολοκληρώσεις το σφάλμα των οποίων ελαχιστοποιείται όταν αυτή γίνεται με την εφαρμογή κάποιας Γκαουσιανού τύπου μεθοδολογίας πράγμα που απαιτεί τη γνώση της ολοκληρώσιμης ποσότητας για τιμές της μεταβλητής ολοκλήρωσης ίση με τις ρίζες του πολυωνύμου που καθορίζει τη μεθοδολογία.

Το αριθμητικό σχήμα που προκύπτει είναι επαναληπτικό και στη γενική περίπτωση συγκλίνει. Όπως είναι φυσικό, η σύγκλιση αυτή είναι αργή ιδιαίτερα όταν ο αριθμός Knudsen της ροής είναι μικρός. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα θεωρούνται αξιόπιστα σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen και τυχόν σφάλματα που προκύπτουν είναι συνήθως αριθμητικής φύσης και πιο συγκεκριμένα σφάλματα στρογγυλοποίησης, κάτι που σημαίνει ότι παρουσιάζονται σε πιο έντονη μορφή όταν αυξάνει πολύ ο αριθμός των επαναλήψεων. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, έχουν προταθεί ορισμένες βελτιώσεις που όμως δεν έχουν γενική εφαρμογή και αφορούν μόνο ορισμένες απλές ροές.

1.3 Προσδιορισμός συντελεστών ολίσθησης

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα με μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον που έχει δώσει η επίλυση της εξίσωσης Boltzmann είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών ολίσθησης. Οι συντελεστές αυτοί αποτελούν κρίσιμες παραμέτρους για την εφαρμογή των εξισώσεων συνέχειας στην επίλυση ελαφρά αραιωμένων ροών και την αντιμετώπιση προβλημάτων σε μικροκλίμακα αδυνατώντας όμως να προσεγγίσουν ροές όπου $Kn \geq 0.1$.

Σε ροές ενός συστατικού απαντώνται οι παρακάτω συντελεστές:

-ιξώδους ολίσθησης σ_D (viscous slip coefficient): προκύπτει ως αδιάστατη έκφραση της ταχύτητας του ρευστού πάνω σε τοίχωμα όταν είναι καθορισμένη η ταχύτητα του μέσου.

-θερμικής ολίσθησης σ_T (thermal slip coefficient): αποτελεί την αντίστοιχη έκφραση όταν η κίνηση οφείλεται σε κλίση θερμοκρασίας.

-θερμοκρασιακού άλματος (temperature jump coefficient): εκφράζει την απόκλιση της θερμοκρασίας τοιχώματος από την αντίστοιχη του ρευστού πάνω σε αυτό, όταν αυτή προκαλείται από κλίση θερμοκρασίας κάθετη προς το τοίχωμα.

Στις ροές μειγμάτων εμφανίζεται ένας επιπλέον συντελεστής :

-συντελεστής ολίσθησης λόγω διάχυσης (diffusion slip coefficient): εκφράζει τη σχετική ταχύτητα του ρευστού πάνω στο τοίχωμα όταν αιτία της κίνησης είναι κλίση συγκέντρωσης παράλληλα ως προς το τοίχωμα.

Οι παραπάνω συντελεστές προσδιορίζονται μέσω της επίλυσης ροών σε ημίσφαιρα χωρία για την αποφυγή τυχόν επιδράσεων από άλλα τοιχώματα. Έπειτα από επίλυση της εξίσωσης Boltzmann για μοντέλο συμπαγών σφαιρών και οριακές συνθήκες διάχυσης έχει προκύψει $\sigma_D = 0.985$. Με μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων οι τιμές αποκτούν ένα μικρό εύρος διακύμανσης ($0.9624 \leq \sigma_D \leq 1.0185$).

Όταν οι οριακές συνθήκες είναι τύπου διάχυσης-ανάκλασης η επίδραση του συντελεστή ανάκλασης μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης [17]:

$$\sigma_p(a) = \frac{2 - \tilde{a}}{a} [\sigma_p(1) - 0.1211(1 - a)] \quad (1.1)$$

Σχετικά με το συντελεστή θερμικής ολίσθησης εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές οι τιμές που προκύπτουν κυμαίνονται μεταξύ $1.149 \leq \sigma_T \leq 0.988$ με πιο αποδεκτή τιμή την $\sigma_T = 1.01$.

Τέλος, για τον υπολογισμό του συντελεστή θερμοκρασιακού άλματος υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία που περιλαμβάνει λύσεις βασισμένες στην εξίσωση Boltzmann και σε μοντελοποιημένες εξισώσεις καθώς και οριακές συνθήκες των δύο τύπων του Maxwell και των Cercignani-Lampis.

Γενικά σε ότι αφορά τον προσδιορισμό των συντελεστών στις ροές ενός συστατικού η βιβλιογραφία[18] που παρουσιάζεται θεωρείται πλήρης. Παρόλα αυτά όμως, οι τιμές των συντελεστών που χρησιμοποιούνται προκύπτουν από υπολογισμούς που είχε κάνει ο ίδιος ο Maxwell και όπως είναι φυσικό θεωρούνται πλέον ξεπερασμένοι.

Περνώντας στις ροές μειγμάτων, η προσπάθεια που έχει καταβληθεί είναι περιορισμένη. Ελάχιστες εργασίες έχουν εμφανιστεί σχετικά με τον ακριβή υπολογισμό ροών, ενώ η αντίστοιχη προσπάθεια για τον υπολογισμό των συντελεστών ολίσθησης αν και πιο έντονη δεν είναι αρκετά ικανοποιητική.

Φυσικά, η εστίαση στους συντελεστές ολίσθησης μπορεί να γίνει κατανοητή από την άμεση σχέση που έχουν με την εφαρμογή των εξισώσεων συνέχειας στη μικρο-ρευστοδυναμική. Η προσέγγιση όμως αυτή, όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχει περιορισμένες δυνατότητες ως προς το εύρος του αριθμού Knudsen που καλύπτει και η επίλυση των κινητικών εξισώσεων θεωρείται ιδανική. Οι περισσότεροι από τους υπάρχοντες συντελεστές έχουν προκύψει με την εφαρμογή απλών κινητικών μοντέλων που ήταν διαθέσιμα παλιότερα[19] και δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ακριβείς και με ικανοποιητική φυσική συνοχή.

1.4 Εφαρμογές

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές αναφορές σχετικά με την εφαρμογή της εξίσωσης Boltzmann (κυρίως σε γραμμικοποιημένη μορφή) για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων.

Μέχρι τώρα έχουν επιλυθεί αρκετές περιπτώσεις ροών. Ξεκινώντας από τις ροές που οφείλονται σε διαφορά πίεσης, η πιο απλή εφαρμογή είναι αυτή της ροής μεταξύ δύο παράλληλων πλακών μεγάλου μήκους, με περισσότερες αναφορές στη ροή ενός συστατικού. Εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες διάχυσης και το μοντέλο BGK για τον όρο των συγκρούσεων εξάγονται ασφαλή αποτελέσματα[20] τα οποία συνήθως αφορούν την παροχή μάζας και θερμότητας. Αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν ληφθεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο S[21] καθώς επίσης και με απ ευθείας επίλυση της εξίσωσης Boltzmann (μοντέλο συμπαγών σφαιρών για τα σωματίδια)[22]. Με επιτυχία έχουν εφαρμοστεί και οι οριακές συνθήκες διάχυσης-ανάκλασης σε συνδυασμό τόσο με το BGK[20] όσο και με την εξίσωση Boltzmann. Λιγότερες είναι οι αναφορές στην εφαρμογή οριακών συνθηκών Cercignani-Lampis[23].

Επίσης έχει μελετηθεί η κίνηση ρευστού εντός κυλινδρικού αγωγού μεγάλου μήκους (υπό την επίδραση διαφοράς πίεσης). Πιο συνηθισμένη είναι η εφαρμογή οριακών συνθηκών διάχυσης σε

συνδυασμό με διάφορες προτάσεις επίλυσης της εξίσωσης όπως για παράδειγμα με απ ευθείας αριθμητική επίλυση ή με τη χρήση ολοκληρωτικών εξισώσεων και μοντελοποιώντας τον όρο των συγκρούσεων με το S[25]. Ικανοποιητικά αποτελέσματα λαμβάνονται από την επίλυση με BGK[26] και οριακές συνθήκες διάχυσης ανάκλασης καθώς επίσης και με τη χρήση του μοντέλου S[27].

Μία άλλη κατηγορία ροών είναι αυτές που προκαλούνται από διαφορά θερμοκρασίας. Και σ αυτήν την περίπτωση έχει μελετηθεί η ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών (ροή Poiseuille – ροή θερμικού ερπυσμού – thermal creep flow). Η μελέτη έχει γίνει εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες διάχυσης[22] και σε άλλες περιπτώσεις συνθήκες διάχυσης-ανάκλασης[20]. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη συγκεκριμένη εφαρμογή το BGK αδυνατεί να προσομοιώσει ροές τέτοιου τύπου σε αντίθεση με το μοντέλο S το οποίο παρέχει αποτελέσματα με μικρότερες αποκλίσεις[28]. Η ροή αυτή έχει μελετηθεί και εντός κυλινδρικού αγωγού, όπου και σ αυτή την περίπτωση το μοντέλο S υπερτερεί σημαντικά, σε ότι αφορά την ασφαλή εξαγωγή αποτελεσμάτων, έναντι του BGK[26,29].

Οι Sharipov και Seleznev έχουν μελετήσει παρόμοιες εφαρμογές όπως την αραιοποιημένη ροή αερίου σε κυκλική διατομή υπό τη διαφορά βαθμίδας πίεσης ή θερμοκρασίας[30]. Επίσης, ο Aoki έχει ασχοληθεί με ροές σε αγωγούς διαφόρων σχημάτων[31] ενώ η εφαρμογή της μεθόδου DVM έχει επεκταθεί για ροές σε ορθογωνικά[16] και ελλειψοειδή[32] κανάλια.

Πολλές αναφορές υπάρχουν επίσης σχετικά με ορισμένες μονοδιάστατες ροές οι οποίες θεωρούνται απλές εφαρμογές. Παραδείγματα τέτοιων ροών αποτελεί η ροή Couette μεταξύ παράλληλων πλακών ή και μεταξύ ομόκεντρων κυλίνδρων[33,34], ροές γύρω από σώματα[35] καθώς επίσης και φαινόμενα όπως η εξάτμιση και η συμπύκνωση[36].

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στις εφαρμογές που σαν στόχο έχουν την αντιμετώπιση ροών στη μικροκλίμακα και τη νανοκλίμακα βασιζόμενη πάντα στη μεσοσκοπική προσέγγιση των φαινομένων, έχουν μελετηθεί εκτενώς ροές μέσα σε αγωγούς οι οποίες αποτελούν τις απλούστερες διατάξεις που μπορούν να εξεταστούν[37].

Επίσης, έχουν παρουσιαστεί εργασίες με αντικείμενο τη ροή Couette[38], η ροή μέσα σε ορθογωνική κοιλότητα της οποίας η μία πλευρά κινείται (cavity flow)[39,43] καθώς και η αντίστοιχη ροή όπου η κινούμενη πλάκα απέχει κάποια απόσταση την κοιλότητα (grooved channel flow) και άλλες.

Είναι φανερό ότι υπάρχει ένα όλο και αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή της μικροκλίμακας για τη συγκεκριμένη μεθοδολογία γεγονός που αποδίδεται τόσο στις νέες δυνατότητες εφαρμογών που παρουσιάζονται αλλά και στη συσσωρευμένη εμπειρία για την αντιμετώπιση των εξισώσεων Navier-Stokes.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Η κινητική θεωρία αποτελεί κλάδο της στατιστικής μηχανικής με αντικείμενο τη μελέτη αερίων που βρίσκονται εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας. Στο πέρασμα των χρόνων αρκετοί επιστήμονες ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου. Ωστόσο η κινητική θεωρία έγινε αποδεκτή μετά το 1850.

Το θεμέλιο λίθο, πάνω στον οποίο βασίστηκε η περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας, έθεσαν οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και αργότερα ο Δημόκριτος και οι μαθητές του. Χάρη σ αυτούς, έγιναν οι πρώτες προσεγγίσεις των φυσικών συστημάτων ως σύνολα διακριτών σωματιδίων.

Στη συνέχεια, ο Δανός μαθηματικός Daniel Bernoulli (1700-1782) ανέπτυξε τη θεωρία ότι τα μόρια ενός αερίου βρίσκονται σε διαρκή κίνηση και ότι η πίεση ενός αερίου οφείλεται στις συγκρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα του δοχείου όπου περιέχεται.

Η υπόθεση του Bernoulli έμεινε στην αφάνεια για πολλά χρόνια μέχρι να ασχοληθεί με την κινητική θεωρία ο Σκοτσέζος μαθηματικός James Clerk Maxwell (1831-1879). Ο Maxwell απέδειξε ότι τα μόρια ενός ιδανικού αερίου κινούνται και το μέτρο της ταχύτητας τους σε κάθε διεύθυνση στο χώρο ακολουθεί κατανομή Gauss.

Τέλος, ο Αυστριακός φυσικός Ludwig Boltzmann (1844-1906) έχοντας σαν θεωρητικό υπόβαθρο την κατανομή Maxwell περιέγραψε την κίνηση των μορίων με μία μερική διαφορική εξίσωση στην οποία η μόνη μεταβλητή είναι μία συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων των μορίων. Η εξίσωση Boltzmann είναι από τις σημαντικότερες εξισώσεις της στατιστικής μηχανικής σε καταστάσεις συστημάτων εκτός ισορροπίας.



Daniel Bernoulli



James Clerk Maxwell



Ludwig Boltzmann

2.2 Διατύπωση εξίσωσης Boltzmann

Θεωρώντας ένα σύστημα αποτελούμενο από N σωματίδια και υποθέτοντας στη συνέχεια ότι ισχύουν οι νόμοι της κλασικής μηχανικής, τότε η κίνηση του κάθε σωματιδίου καθορίζεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ,δηλαδή από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\dot{r}_i &= \xi_i \\ \dot{\xi}_i &= X_i \\ \dot{X}_i &= X_i\end{aligned}\quad (2.1)$$

Όπου:

- r_i : το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου i
- ξ_i : το αντίστοιχο διάνυσμα της ταχύτητας
- X_i : το ανηγμένο ως προς τη μάζα του σωματιδίου i διάνυσμα της συνισταμένης των δυνάμεων στο σημείο r_i

Προκειμένου να περιγραφεί πλήρως το σύστημα πρέπει να προσδιοριστούν οι τιμές $6N+1$ μεταβλητών, (τρεις συνιστώσες θέσης και τρεις συνιστώσες ταχύτητας για κάθε σωματίδιο και του χρόνου), επιλύοντας το σύστημα (2.1) και με καθορισμένες τις αρχικές συνθήκες. Η επίλυση του συστήματος όμως είναι αδύνατη καθώς το N είναι της τάξης του αριθμού Avogadro ($6.022 \cdot 10^{23}$) ενώ για τις αρχικές συνθήκες είναι απαραίτητη η γνώση της θέσης και του διανύσματος της ταχύτητας για κάθε ένα από τα N σωματίδια σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή.

Η ακριβής λύση του συστήματος όμως δεν είναι το ζητούμενο. Αυτό που ενδιαφέρει ουσιαστικά είναι κάποιες μέσες τιμές οι οποίες συνδέονται με τα μακροσκοπικά μεγέθη. Αυτό αποτέλεσε τη βάση της ανάπτυξης της στατιστικής μηχανικής σύμφωνα με την οποία δεν ενδιαφέρει η πληροφορία για κάθε σωματίδιο χωριστά, αλλά μόνο τα στοιχεία που είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό των μακροσκοπικών μεγεθών.

Συνεπώς, στην περίπτωση των συστημάτων αερίων προέκυψε ότι αυτό που είναι απαραίτητο είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας να υπάρχει ορισμένος αριθμός σωματιδίων στην περιοχή $[x_i, x_i+dx)$ με ταχύτητα $[\xi_i, \xi_i+d\xi)$ τη χρονική στιγμή t για όλο το πεδίο ορισμού. Η πληροφορία αυτή μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας συνάρτησης κατανομής f και αποδεικνύεται ότι η εξίσωση στην οποία υπακούει η συνάρτηση f είναι η **εξίσωση Boltzmann**:

$$\frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial r} + X_\xi \frac{\partial f(r, \xi, t)}{\partial \xi} = Q(f, f^*) \quad (2.2)$$

Όπου :

$Q(f, f^*)$: αποτελεί τον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων, δηλαδή της αλληλεπίδρασης του κάθε σωματιδίου με το υπόλοιπο σύστημα.

Παρατηρώντας την εξίσωση (2.2) είναι φανερό ότι το αριστερό μέλος αποτελεί την ολική παράγωγο της f περιλαμβάνοντας και τον όρο της επιτάχυνσης. Πιο συγκεκριμένα, αποτελεί τη μεταβολή της ποσότητας f κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής καμπύλης που ορίζεται από την ταχύτητα ξ και το πεδίο δυνάμεων X .

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το νόημα της εξίσωσης Boltzmann είναι: Η μεταβολή της συνάρτησης κατανομής κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής καμπύλης είναι ίση με το ολοκλήρωμα του όρου των σωματιδιακών συγκρούσεων πάνω στην καμπύλη αυτή.

Σκοπός της κινητικής θεωρίας είναι η επίλυση της εξίσωσης (2.2) για τον προσδιορισμό της κατανομής f . Έπειτα γνωρίζοντας την f γίνεται ο υπολογισμός των μακροσκοπικών μεγεθών:

$$\text{Αριθμητική πυκνότητα} \quad n(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\xi \quad (2.3)$$

$$\text{Μακροσκοπική ταχύτητα} \quad u(r, t) = \frac{1}{n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f d\xi \quad (2.4)$$

$$\text{Πίεση} \quad P(r, t) = \frac{m}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d\xi \quad (2.5)$$

$$\text{Μητρώο τάσεων} \quad P_{i,j}(r, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} \Xi_i \Xi_j f d\xi \quad (2.6)$$

$$\text{Θερμοκρασία} \quad T(r, t) = \frac{m}{3 k_B n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d\xi \quad (2.7)$$

$$\text{Θερμορροή} \quad q(r, t) = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 \Xi f d\xi \quad (2.8)$$

$$\text{Εσωτερική ενέργεια} \quad \varepsilon(r, t) = \frac{1}{2 n(r, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 f d\xi \quad (2.9)$$

Όπου:

Ξ : είναι η σχετική ταχύτητα και ορίζεται ως: $\Xi = \xi - u$
 k_B : η σταθερά του Boltzmann ($k_B = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)
 m : η μοριακή μάζα του αερίου

Από τις εξισώσεις (2.5) και (2.7) προκύπτει η καταστατική εξίσωση:

$$P(r, t) = n(r, t)k_B T(r, t) \quad (2.10)$$

Η καταστατική εξίσωση στη μορφή (2.10) ισχύει και σε καταστάσεις εκτός ισορροπίας επειδή η πίεση ορίζεται από την εξίσωση (2.5) ως ο μέσος όρος των τριών τιμών στις τρεις διευθύνσεις.

Επίσης, ο ορισμός της θερμοκρασίας στην εξίσωση (2.7) προκύπτει έμμεσα από τον ορισμό της εσωτερικής ενέργειας και από τη σχέση:

$$\varepsilon(r, t) = \frac{3}{2} \frac{k_B}{m} T(r, t) \quad (2.11)$$

Τέλος η ολική ροή ενέργειας είναι εξ ορισμού

$$q_{tot}(r, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \xi f d\xi \quad (2.12)$$

Η ροή ενέργειας σε κάθε διεύθυνση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$q_{tot} = u, \left(\frac{1}{2} n u^2 + n \varepsilon \right) + u_j P_{ij} + \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi^2 \Xi f d\xi \quad (2.13)$$

Όπου :

- ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη μακροσκοπική μεταφορά ενέργειας λόγω συναγωγής
- ο δεύτερος όρος οφείλεται στο έργο που παράγουν οι τάσεις
- ο τρίτος όρος ονομάζεται θερμοροή στις μακροσκοπικές εξισώσεις και αντιστοιχεί στον όρο μεταφοράς θερμότητας (γενικά, δεν είναι απολύτως ακριβής αυτή η διατύπωση καθώς υπάρχουν περιπτώσεις όπου σε ισοθερμοκρασιακά πεδία έχει μη μηδενικές τιμές).

2.3 Ο όρος των συγκρούσεων και η κατανομή Maxwell

Η εξίσωση Boltzmann (2.2), δεν παρουσιάζει κάτι αξιοσημείωτο στο πρώτο μέλος της που να δυσχεραίνει την επίλυσή της. Αντιθέτως, ο όρος των σωματιδιακών συγκρούσεων στο δεύτερο μέλος είναι άγνωστος ενώ ο προσδιορισμός του είναι απαραίτητος για την επίλυση της εξίσωσης. Αυτό είναι εφικτό κάνοντας κάποιες παραδοχές τόσο για τον τύπο των συγκρούσεων όσο και για τον τύπο των σωματιδίων. Στην περίπτωση που ο όρος αυτός θεωρηθεί ίσος με το μηδέν οι παραδοχές δε χρειάζονται. Εάν θεωρηθεί επίσης ότι δεν υπάρχει πεδίο εξωτερικών δυνάμεων μία δυνατή λύση της εξίσωσης είναι

$$f_{loc}^{(eq)}(r, \xi, t) = n(r, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(r, t)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(\xi - u(r, t))^2}{2k_B T(r, t)}} \quad (2.14)$$

Η οποία είναι γνωστή ως κατανομή Maxwell. Από μαθηματική σκοπιά αποτελεί μία κανονική κατανομή ως προς ξ με μέση τιμή την μακροσκοπική ταχύτητα u και τυπική απόκλιση ε . Η κατανομή Maxwell αποτελεί επίσης το όριο προς το οποίο τείνει να συγκλίνει το σύστημα, γεγονός που την καθιστά ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο.

2.4 Μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων: Μοντέλο BGK

Οι εξισώσεις που προκύπτουν από την αντικατάσταση του όρου των συγκρούσεων από μια απλοποιημένη έκφραση ονομάζονται κινητικές εξισώσεις. Η αντικατάσταση αυτή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα καθένα από τα οποία πρέπει να ικανοποιεί το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα. Η ισχύς του αξιώματος εξασφαλίζεται αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί την εξίσωση Boltzmann στην αρχική της μορφή.

Τα πιο διαδεδομένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για ροές ενός συστατικού είναι το BGK που είναι το πρώτο που παρουσιάστηκε καθώς επίσης και το S που αποτελεί μια επέκταση του BGK προκειμένου να αντιμετωπιστούν μη ισοθερμοκρασιακές ροές. Για ροές μειγμάτων το απλούστερο μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι του Hamel ενώ του McCormack είναι αρκετά πιο αποτελεσματικό.

Το μοντέλο το οποίο χρησιμοποιήσαμε για την προσομοίωση του όρου των συγκρούσεων είναι το BGK. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην υπόθεση ότι ο όρος των συγκρούσεων είναι ανάλογος προς τη διαφορά της συνάρτησης κατανομής από την κατανομή Maxwell που

προσδιορίζεται από τις τοπικές μακροσκοπικές ιδιότητες σε κάθε σημείο και ονομάζεται τοπική κατανομή ισορροπίας.

$$Q(f, f^*) = -\nu(f - f_{loc}^{(eq)}) = -\nu \left(f - n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(\vec{c}-\vec{u})^2}{2k_B T}} \right) \quad (2.15)$$

Η ποσότητα $1/\nu$ ονομάζεται χρόνος χαλάρωσης και είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του μέσου η οποία συνδέεται με το ιξώδες.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του BGK είναι ότι αποτελεί ένα αρκετά απλό μοντέλο δίνοντας σε πολλές περιπτώσεις ικανοποιητικά αποτελέσματα και αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιεί το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα. Το βασικότερο μειονέκτημα είναι ότι δεν επιτρέπει τον ανεξάρτητο προσδιορισμό του ιξώδους και της θερμικής διαχυτότητας ενώ ο αριθμός Prandtl είναι πάντα ίσος με τη μονάδα.

Αντίστοιχη προσέγγιση ακολουθεί και το μοντέλο S με τη διαφορά ότι ο όρος των συγκρούσεων είναι ανάλογος της διαφοράς της κατανομής ισορροπίας από μία τροποποιημένη κατανομή ισορροπίας που λαμβάνει υπ' όψιν και τη θερμοροή q . Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο μοντέλο δεν μπορεί να γίνει ανεξάρτητος προσδιορισμός του ιξώδους και της θερμικής διαχυτότητας και ο αριθμός Prandtl είναι πλέον ίσος με $2/3$ (ίσος με τη θεωρητική τιμή για μονοατομικά αέρια). Επίσης, δεν μπορεί να αποδειχτεί η ισχύς του θερμοδυναμικού αξιώματος και γενικά παρουσιάζεται πιο αυξημένη πολυπλοκότητα.

Στις ροές μειγμάτων, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Hamel, ο όρος των συγκρούσεων για κάθε συστατικό είναι παρόμοιος με αυτόν του BGK αλλά πλέον περιλαμβάνεται και η επίδραση του έτερου συστατικού.

2.5 Γοαμμικοποίηση κινητικών εξισώσεων

Σε αρκετές περιπτώσεις ροών που αντιμετωπίζονται στην πραγματικότητα, οι αποκλίσεις της ταχύτητας, της πυκνότητας και της θερμοκρασίας μπορούν να θεωρηθούν σχετικά μικρές κι αυτό εξ αιτίας των ήπιων φαινομένων που παρατηρούνται. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση κατανομής μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως προς μία κατανομή Maxwell που προσδιορίζεται από κάποιες ποσότητες αναφοράς και ονομάζεται απόλυτη κατανομή ισορροπίας. Σαν ποσότητες αναφοράς επιλέγονται συνήθως τιμές κοντά στη μέση θερμοκρασία και τη μέση πυκνότητα της ροής ενώ ως ταχύτητα αναφοράς επιλέγεται η μηδενική.

Επομένως, η απόλυτη κατανομή ισορροπίας είναι

$$f_{gl}^{(eq)} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\xi^2}{2k_B T_0}} \quad (2.16)$$

Η γραμμικοποίηση της τοπικής κατανομής ισορροπίας ως προς την απόλυτη κατανομή ισορροπίας γίνεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor. Αναπτύσσοντας ως προς την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και την ταχύτητα Mach και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης προκύπτει

$$f_{loc}^{(eq)} = f_{gl}^{(eq)} \left[1 + \rho + \frac{m}{k_B T_0} \xi u + \tau \left(\frac{m\xi^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (2.17)$$

Όπου οι ποσότητες ρ και τ ορίζονται ως

$$\rho = \frac{n - n_0}{n_0} \quad (2.18)$$

$$\tau = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (2.19)$$

Οι ποσότητες αυτές αποτελούν τις αποκλίσεις της αριθμητικής πυκνότητας και της θερμοκρασίας. Σημειώνεται ότι η απόκλιση της αριθμητικής πυκνότητας είναι ίδια με αυτή της πυκνότητας και με αυτή την ονομασία θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια.

Τέλος, ορίζεται η ποσότητα h ούτως ώστε να ισχύει:

$$f = f_{gl}^{(eq)} (1 + h) \quad (2.20)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.15), (2.17) και (2.20) εξάγεται η **νοσημικοποιημένη εξίσωση Boltzmann** με μοντέλο συγκρούσεων το BGK.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \xi \frac{\partial h}{\partial r} = \nu \left[\rho + \frac{m}{k_B T_0} \xi u + \tau \left(\frac{m\xi^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) - h \right] \quad (2.21)$$

Η προσέγγιση αυτή απλοποιεί σχετικά τη διαδικασία επίλυσης από μαθηματική σκοπιά. Ταυτόχρονα, επιτρέπει την εφαρμογή τεχνικών που βελτιώνουν τόσο την ακρίβεια όσο και την ταχύτητα της αριθμητικής προσέγγισης.

2.6 Αδιαστατοποίηση κινητικών εξισώσεων

Τόσο στην περιοχή των αραιών αερίων όσο και στη ρευστοδυναμική συνήθως δεν έχει ιδιαίτερο νόημα να εξετάζεται η διαστατή εξίσωση εκτός κι αν μελετάται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Στη γενική περίπτωση τα διαστατά μεγέθη μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν χαρακτηριστικά αδιάστατα μεγέθη. Στην περίπτωση των γραμμικών προβλημάτων, κάτι τέτοιο είναι αρκετά απλό και σύνηθες. Απαιτείται βέβαια αρχικά ο προσδιορισμός ορισμένων χαρακτηριστικών μεγεθών.

Ορίζεται λοιπόν το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος L ενώ η χαρακτηριστική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_r = \sqrt{2k_B T_0 / m} \quad (2.22)$$

Επίσης απαραίτητος είναι και ο προσδιορισμός της πίεσης αναφοράς μέσω της σχέσης (2.10)

$$P_0 = n_0 k_B T_0 \quad (2.23)$$

Τα μεγέθη με διαστάσεις μήκους αδιαστατοποιούνται με το χαρακτηριστικό μήκος L ενώ τα αντίστοιχα με διαστάσεις ταχύτητας με την ταχύτητα u_r . Για την πυκνότητα και τη θερμοκρασία ισχύουν οι σχέσεις (2.18) και (2.19) ενώ οι τάσεις αδιαστατοποιούνται με την πίεση αναφοράς (2.23). Τέλος για τη θερμοροή ισχύει

$$\hat{q} = \frac{q}{u_r P_0} = q \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} \frac{1}{n_0 k_B T_0} \quad (2.24)$$

Η εξίσωση (2.21) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{L\sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} v_c \left[\rho + 2c\dot{u} + \tau \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) - h \right] \quad (2.25)$$

Όπου :

c : η αδιάστατη μικροσκοπική ταχύτητα
 x : το αδιάστατο διάνυσμα θέσης

Η ποσότητα v συνδέεται με τα μακροσκοπικά μεγέθη μέσω της σχέσης

$$v_0 = \frac{P_0}{\mu(T_0)} \quad (2.26)$$

Όπου :

μ : το ιξώδες στη θερμοκρασία T_0

Αν λάβουμε υπόψη ότι η μέση ελεύθερη διαδρομή των σωματιδίων μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων λ είναι

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mu}{P_0} \left(\frac{2k_B T_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

Τότε ο όρος που πολλαπλασιάζει το δεξί μέλος στην εξίσωση (2.25) είναι

$$\frac{L \sqrt{m}}{\sqrt{2k_B T_0}} v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{L}{\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \quad (2.28)$$

Η κύρια παράμετρος που χαρακτηρίζει τις αραιοποιημένες ροές αερίων είναι ο αδιάστατος αριθμός Knudsen. Ορίζεται ως ο λόγος της μέσης ελεύθερης διαδρομής των σωματιδίων προς τη χαρακτηριστική διάσταση της ροής. Στο συνεχές όριο μηδενίζεται ενώ για ροές χωρίς συγκρούσεις τείνει στο άπειρο. Ο Knudsen εκφράζει σε μεγάλο βαθμό το πόσο σημαντικά είναι τα φαινόμενα που προκαλεί η αραιοποίηση ενός αερίου και είναι η παράμετρος ως προς την οποία παραμετροποιούνται συνήθως τα αποτελέσματα .

Συνδέεται με τους αδιάστατους αριθμούς Reynolds (Re) και Mach (Ma) μέσω της σχέσης

$$Kn = \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{2} \frac{Ma}{Re} \quad (2.29)$$

Αν πραγματοποιήσουμε την παρακάτω αντιστοίχιση στην εξίσωση Boltzmann

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \quad (2.30)$$

Τότε η αδιάστατη εξίσωση Boltzmann έχει τη μορφή

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \delta \left[\rho + 2cu + \tau \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) - h \right] \quad (2.31)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΡΟΗ ΑΕΡΙΟΥ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΟΙΛΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Πέρα από τις ροές που οφείλονται σε διαφορά βαθμίδας πίεσης και διαφορά βαθμίδας θερμοκρασίας, εξαιρετικό φυσικό αλλά και τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ροές οι οποίες προκαλούνται από μεταφορά ορμής λόγω διάτμησης, οι λεγόμενες διατμητικές ροές. Οι ροές αυτές αποτελούν αντικείμενο μελέτης για μεγάλο χρονικό διάστημα καθώς τις συναντάμε συχνά σε συσκευές.

Ένα κλασικό παράδειγμα αποτελεί η ροή Couette , η οποία περιγράφει τη ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών των οποίων η σχετική κίνηση προκαλεί την κίνηση του ρευστού. Μία ακόμη αντιπροσωπευτική περίπτωση διατμητικής ροής αποτελεί η ροή σε κοιλότητα (Cavity flow). Ο ορισμός αυτός περιγράφει τη ροή που δπιουονείται μέσα σε κοιλότητα (ορθωνωνική, τριωνωνική, τραπεζοειδή) σε δύο ή σε τρεις διαστάσεις, όταν η υία εκ των οποίων πλακών που σχηματίζουν την κοιλότητα κινείται κάθετα προς τις επαπτόμενες σε αυτή πλάκες.

Κατά καιρούς έχουν εφαρμοστεί διάφορες μέθοδοι μελέτης των διατμητικών ροών. Κυρίως χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις συνέχειας (Navier-Stokes) και κάποιες μέθοδοι ψευδοσυμπιεστότητας. Σημαντικό μειονέκτημα στη χρήση αυτών των μεθοδολογιών αποτελεί το γεγονός ότι όλες αναφέρονται σε συνεχή μέσα και είναι αδύνατη η εφαρμογή τους στη μικροκλίμακα.

3.2 Ροή σε κοιλότητα

Η ροή σε κοιλότητα είναι ίσως μια από τις τυπικότερες ροές στην περιοχή της κλασσικής υδροδυναμικής και έχει αντιμετωπιστεί με επιτυχία εδώ και αρκετά χρόνια. Αποτελεί ένα πρότυπο πρόβλημα και χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πιστοποίηση κωδίκων και μεθοδολογιών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αρχικά η επίλυση είχε γίνει μόνο για συνεχές μέσο, ενώ στη μεταβατική περιοχή υπάρχουν ελάχιστες μελέτες. Οι μελέτες αυτές έχουν σαν αντικείμενο την εφαρμογή των εξισώσεων συνεχούς μέσου, καθώς επίσης και τη χρήση της μεθοδολογίας Lattice Boltzmann επιβάλλοντας ταυτόχρονα οριακές συνθήκες ολίσθησης (δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ροές με αριθμό

Knudsen μεγαλύτερο του 0.01). Τέλος, έγινε εφαρμογή της προσομοίωσης Monte-Carlo, η οποία όμως δεν είναι εφαρμόσιμη σε ροές με αριθμό Knudsen μικρότερο του 10.

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι υπήρξε ένα κενό στη μελέτη κρίσιμων τεχνολογικά ροών. Το κενό αυτό καλύφθηκε από εφαρμογές βασιζόμενες στην κινητική θεωρία, οι οποίες δύναται να επιλύσουν τέτοια προβλήματα ροών για όλο το εύρος του αριθμού Knudsen.

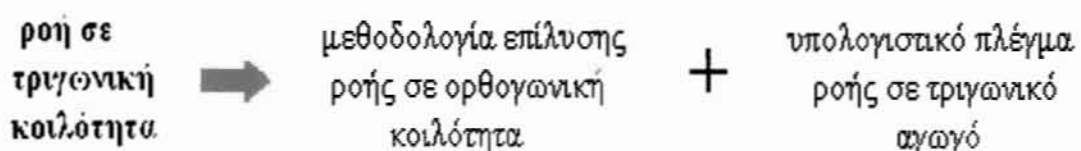
Μέχρι τώρα η μόνη περίπτωση ροής σε κοιλότητα που έχει επιλυθεί με τέτοιου είδους εφαρμογές είναι αυτή της ορθογωνικής διατομής[7,43]. Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, και αφού αναπτύχθηκε η μεθοδολογία επίλυσης αυτού του είδους ροής, έγινε δυνατή η αντιμετώπιση ροών σε διαφορετικού σχήματος κοιλότητες όπως τριγωνική (παράγραφος 3.3), τραπεζοειδής (παράγραφος 3.10) και άλλες.

Για τη χρήση των νέων αυτών μεθοδολογιών απαιτούνται κάποιες διαφοροποιήσεις. Αρχικά, από άποψη φυσικής, επειδή η επίλυση γίνεται στο δισδιάστατο χώρο, οι διανυσματικές μακροσκοπικές ιδιότητες έχουν δύο συνιστώσες μη μηδενικές. Επίσης, επειδή παρατηρούνται σημαντικά φαινόμενα συμπίεστικότητας, οι αποκλίσεις της πυκνότητας δεν μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές.

Υπολογιστικά, δεν είναι εφικτή η προβολή του προβλήματος στο χώρο της ορμής ή στους χώρους της ορμής και της θερμορροής, μπορεί όμως να γίνει προβολή της τρίτης συνιστώσας της μικροσκοπικής ταχύτητας. Αξιοσημείωτη επίσης είναι η ύπαρξη σημείων ασυνέχειας τα οποία δυσχεραίνουν την επίλυση και αντιμετωπίζεται με εφαρμογή ειδικής προσέγγισης [7] (ο τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων αυτών παρουσιάζεται αναλυτικότερα παρακάτω- Παράγραφος 3.8).

3.3 Ροή σε τοιωνική κοιλότητα

Η επίλυση της ροής σε τριγωνική κοιλότητα γίνεται συνδυάζοντας δύο επιμέρους προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για ροή σε ορθογωνική κοιλότητα[39,43] χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πλέγμα του προβλήματος ροής σε τριγωνικό αγωγό[40].



Ροή σε ορθογωνική κοιλότητα:

Η τεχνική η οποία αναπτύχθηκε για την επίλυση της ροής σε ορθογωνική κοιλότητα είναι αυτή της μεθόδου των διακριτών ταχυτήτων (DVM) χρησιμοποιώντας ως μοντέλο συγκρούσεων το BGK και εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες τύπου διάχυσης (Maxwell)[39].

Έπειτα, αφού επιλυθεί η αδιάστατη κινητική εξίσωση Boltzmann (θεωρώντας δισδιάστατο πρόβλημα) εξάγονται αποτελέσματα για διάφορα μακροσκοπικά μεγέθη (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία...) ενώ το αριθμητικό σχήμα που προκύπτει φαίνεται αρκετά αποτελεσματικό και ακριβές δίνοντας αποτελέσματα για όλο το φάσμα του αριθμού Knudsen .

Ροή σε τριγωνικό ανωνό:

Τα προβλήματα ροών σε αγωγούς έχουν προκαλέσει έντονα το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας εξ αιτίας της θεωρητικής αλλά και πρακτικής σημασίας των εφαρμογών αυτών σε πολλά επιστημονικά πεδία.

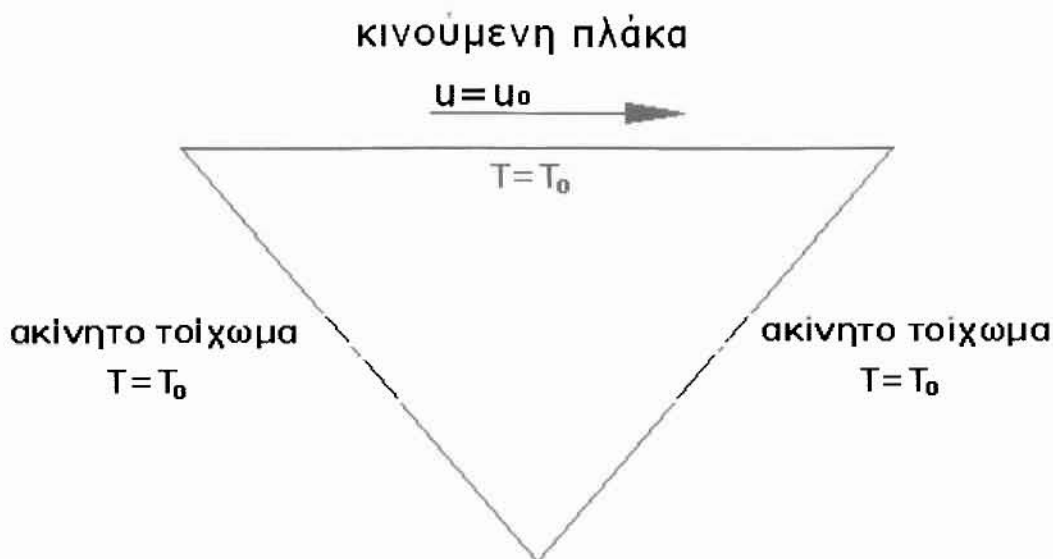
Για την επίλυση της ροής σε τριγωνικό αγωγό χρησιμοποιείται και πάλι η μέθοδος των διακριτών ταχυτήτων (DVM) και μοντέλο συγκρούσεων το BGK εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες τύπου Maxwell. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε είναι βασισμένη στην κινητική θεωρία και οι λύσεις που προκύπτουν καλύπτουν όλο το εύρος του αριθμού Knudsen και όλες τις περιοχές (από την ελεύθερη μοριακή περιοχή έως το υδροδυναμικό όριο).

Το αριθμητικό σχήμα της επίλυσης αποτελεί ένα τριγωνικό δίκτυο στο οποίο διακριτοποιούνται κατάλληλα οι κινητικές εξισώσεις τόσο στο φυσικό όσο και στο μοριακό χώρο των ταχυτήτων.

Ροή σε τριγωνική κοιλότητα:

Αντιμετωπίζοντας την περίπτωση της ροής σε τριγωνική κοιλότητα ως επαλληλία των δύο προβλημάτων που αναπτύχθηκαν παραπάνω, η επίλυση γίνεται χρησιμοποιώντας και πάλι το μοντέλο BGK , τη μέθοδο DVM και οριακές συνθήκες Maxwell ενώ η διακριτοποίηση λαμβάνει χώρα σε τριγωνικό πλέγμα κατάλληλα προσαρμοσμένο στα δεδομένα του προβλήματος. Τέλος σημειώνεται ότι η όλη προσέγγιση αφορά μικρές τιμές του αριθμού Reynolds και Mach λόγω της γραμμικοποίησης που εφαρμόζεται στην εξίσωση Boltzmann.

3.4 Γεωμετρική διατύπωση προβλήματος



Σχήμα 3.1

Η υπό μελέτη ροή διαμορφώνεται εντός μιας κοιλότητας τριγωνικής διατομής. Τα τοιχώματα των δύο πλευρών του τριγώνου παραμένουν ακίνητα ενώ την τρίτη πλευρά αποτελεί κινούμενη πλάκα (Σχήμα 3.1). Η πλάκα κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $u = u_0$. Η κίνηση της πλάκας αποτελεί την αιτία της ροής (διατμητική ροή). Όλα τα τοιχώματα θεωρούνται ισοθερμοκρασιακά με θερμοκρασία ίση με τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Η τρίτη διάσταση της κοιλότητας z θεωρείται ότι έχει άπειρο μήκος με αποτέλεσμα η ροή να αντιμετωπίζεται ως δισδιάστατη.

Στη συνέχεια, ορίζεται η υδραυλική διάμετρος D_h η οποία αποτελεί το χαρακτηριστικό μέγεθος του προβλήματος.

$$D_h = \frac{4 A}{\Gamma} \quad (3.1)$$

Όπου:

A: το εμβαδόν της διατομής (εμβαδόν τριγώνου)

Γ : η περίμετρος του τριγώνου

Τέλος, παρουσιάζονται οι αδιάστατες μεταβλητές του προβλήματος, οι οποίες είναι:

$$x = \frac{x'}{D_h}, \quad y = \frac{y'}{D_h}, \quad z = \frac{z'}{D_h}, \quad A = \frac{A'}{D_h^2}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma'}{D_h} \quad (3.2)$$

3.5 Μαθηματικό μοντέλο

Η εξίσωση Boltzmann για μόνιμη ροή και με μοντέλο συγκρούσεων το BGK έχει τη μορφή

$$\xi \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{P}{\mu} (f^{eq} - f) \quad (3.3)$$

Όπου:

$f=f(r,\xi)$ συνάρτηση κατανομής

r : άνυσμα θέσης

$\xi=(\xi_x,\xi_y,\xi_z)$ μικροσκοπική ταχύτητα

P : τοπική πίεση

μ : ιξώδες του ρευστού στην τοπική θερμοκρασία T

Επίσης f^{eq} είναι η τοπική κατανομή ισορροπίας Maxwell που δίνεται από τη σχέση (2.14)

Οι τοπικές μακροσκοπικές ποσότητες προκύπτουν από τις σχέσεις (2.3)-(2.9).

Σημειώνεται επίσης ότι ισχύει η καταστατική εξίσωση των αερίων προσδιορισμένη όμως βάσει των τοπικών μακροσκοπικών ιδιοτήτων δηλαδή

$$P = nkT$$

Η κατάσταση ισορροπίας διαταράσσεται από την κίνηση της πλάκας η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα $U_0 \ll v_0$, όπου $v_0 = \sqrt{2RT_0}$, είναι η χαρακτηριστική μοριακή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι το ρευστό δεν βρίσκεται μεν σε κατάσταση ισορροπίας, αλλά αρκετά κοντά σε αυτή και επομένως η ροή μπορεί να περιγραφεί από τη γραμμικοποιημένη έκφανση της εξίσωσης (3.3).

Σε αυτή, ως άγνωστη συνάρτηση κατανομής ορίζεται η $h=h(r,\xi)$ που συνδέεται με την αρχική μέσω της σχέσης

$$f = f_{gl}^{(eq)} \left(1 + \dot{h} \frac{U_0}{v_0} \right) \quad (3.4)$$

Όπου η ποσότητα $f_{gl}^{(eq)}$ δίνεται από τη σχέση (2.16) και αποτελεί την απόλυτη κατανομή ισορροπίας οριζόμενη από μία μοριακή συγκέντρωση αναφοράς n_0 και μια θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Αν τώρα αναπτυχθεί η τοπική κατανομή ισορροπίας $f_{loc}^{(eq)}$ ως προς την απόλυτη, χρησιμοποιώντας όρους μέχρι πρώτης τάξεως προκύπτει

$$f_{loc}^{(eq)} = f_{gl}^{(eq)} \left[1 + \rho \frac{U_0}{v_0} + \frac{\xi V}{RT_0} + \tau \frac{U_0}{v_0} \left(\frac{\xi^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (3.5)$$

Οι αδιάστατες μακροσκοπικές ποσότητες ορίζονται πλέον ως

$$\rho = \frac{n - n_0}{n_0} \frac{v_0}{U_0}, \quad \tau = \frac{T - T_0}{T_0} \frac{v_0}{U_0} \quad (3.6)$$

Στη συνέχεια αν αντικατασταθούν οι εξισώσεις (3.4) και (3.5) στην εξίσωση (3.3) λαμβάνεται η **νοαμμικοποιημένη εξίσωση Boltzmann με μοντέλο συνκοούσεων το BGK**

$$\xi \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{P_0}{\mu_0} \left[\rho + \frac{\xi V}{RT_0} \frac{v_0}{U_0} + \tau \left(\frac{\xi^2}{2RT_0} - \frac{3}{2} \right) - h \right] \quad (3.7)$$

Θεωρώντας ότι οι θερμοκρασιακές διαφορές είναι πολύ μικρές η εξίσωση (3.7) παίρνει τη μορφή

$$\xi \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{P_0}{\mu_0} \left[\rho + \frac{\xi V}{RT_0} \frac{v_0}{U_0} - h \right] \quad (3.8)$$

Όπου P_0 και μ_0 αντιστοιχούν στην πίεση ισορροπίας και το ιξώδες του ρευστού σε θερμοκρασία T_0 αντίστοιχα.

Τέλος ορίζοντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$s = \frac{r}{L} \quad , \quad c = \frac{\xi}{\sqrt{2RT_0}} \quad , \quad u = \frac{V}{U_0} \quad (3.9)$$

όπου $s=(x,y,z)$, $c=(c_x,c_y,c_z)$ και $u=(u_x,u_y,u_z)$

εξάγεται η αδιάστατη κινητική εξίσωση

$$c \frac{\partial h}{\partial s} + \delta h = \delta [\rho + 2cu] \quad (3.10)$$

με την παράμετρο αραιοποίησης δ να δίνεται από τη σχέση

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} = \frac{P_0 L}{\mu_0 \sqrt{2RT_0}} \quad (3.11)$$

Οι αδιάστατες αποκλίσεις της πυκνότητας ,της ταχύτητας και της θερμοκρασίας από τα αντίστοιχα μεγέθη σε κατάσταση ισορροπίας, δίνονται ως ροές της h από τις σχέσεις

$$\rho = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} h e^{-c^2} dc \quad (3.12)$$

$$u = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} c h e^{-c^2} dc$$

Επιπλέον το αδιάστατο μητρώο των τάσεων είναι

$$\Pi_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{2P_0} \frac{v_0}{U_0} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} c_i c_j h e^{-c^2} dc \quad (3.13)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} i &= x, y, z \\ j &= x, y, z \\ i &\neq j \end{aligned}$$

3.6 Διαμόρφωση εξισώσεων με προβολή της τρίτης διάστασης

Η ροή που εξετάζεται στη συγκεκριμένη εργασία αποτελεί περίπτωση δισδιάστατης ροής. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας το βάθος της κοιλότητας άπειρο τα οριακά φαινόμενα στην τρίτη διάσταση παραβλέπονται. Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής h και οι μακροσκοπικές μεταβλητές ποσότητες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της διάστασης z και ισχύει $h(s,c)=h(x,y,c_x,c_y,c_z)$, ενώ οι μακροσκοπικές ποσότητες είναι συναρτήσεις μόνο των x και y .

Παράλληλα, η συνιστώσα της μικροσκοπικής ταχύτητας στην τρίτη διάσταση μπορεί να απαλειφθεί εφαρμόζοντας την τεχνική των προβολών. Καθώς οι αποκλίσεις της πυκνότητας δεν είναι μικρές στην υπό εξέταση περίπτωση, η προβολή δεν μπορεί να γίνει στο χώρο της ορμής.

Εξίσωση μεταφοράς :

προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της κινητικής εξίσωσης (3.10)

με την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-c_z^2}$ και ολοκλήρωση της προκύπτουσας εξίσωσης ως προς c_z .

$$c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \delta \varphi = \delta [\rho + 2c_x u_x + 2c_y u_y] \quad (3.14)$$

Ενώ πλέον η άγνωστη συνάρτηση κατανομής φ συνδέεται με την h μέσω της σχέσης

$$\varphi(x, y, c_x, c_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, c_x, c_y, c_z) e^{-c_z^2} dc_z \quad (3.15)$$

Η εξίσωση (3.15) είναι αυτή που επιλύεται σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ορισμού των μακροσκοπικών ποσοτήτων

Οι μακροσκοπικές ποσότητες προσδιορίζονται πλέον βάσει των νέων συναρτήσεων κατανομής ως

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \quad (3.16)$$

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi c_x e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \quad (3.17)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi c_y e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \quad (3.18)$$

$$\Pi_{xy}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi c_x c_y e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \quad (3.19)$$

Η απαλοιφή μιας ή και περισσοτέρων συνιστωσών της μικροσκοπικής ταχύτητας είναι αρκετά σημαντική όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος και τον απαιτούμενο χρόνο. Όμως, σε προβλήματα που παρουσιάζουν μεταβολές και στις τρεις διαστάσεις, όπως η ροή σε κοιλότητα με πεπερασμένη την τρίτη διάσταση, κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό και αναγκαστικά επιλύεται η κινητική εξίσωση (3.10).

Μία αλλαγή που μπορεί να γίνει, είναι η μεταφορά του πεδίου των μικροσκοπικών ταχυτήτων στο πολικό σύστημα συντεταγμένων (ή στο σφαιρικό αν επρόκειτο για το πλήρες πρόβλημα), ενώ οι χωρικές συντεταγμένες παραμένουν σε καρτεσιανό σύστημα. Κάτι τέτοιο έχει αποδειχθεί ότι συμβάλει σημαντικά στη βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

Έτσι ορίζοντας τις νέες μεταβλητές $0 \leq \mu \leq \infty$ και $0 < \theta < 2\pi$

$$\mu = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \arctan(c_y / c_x) \quad (3.20)$$

Η εξίσωση μεταφοράς (3.15) επαναδιατυπώνεται ως

$$\mu \left[\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \delta \varphi = \delta \left[\rho + 2\mu (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \right] \quad (3.21)$$

Ενώ οι μακροσκοπικές ποσότητες δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi \mu e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (3.22)$$

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi \mu^2 e^{-\mu^2} \cos \theta d\mu d\theta \quad (3.23)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi \mu^2 e^{-\mu^2} \sin \theta d\mu d\theta \quad (3.24)$$

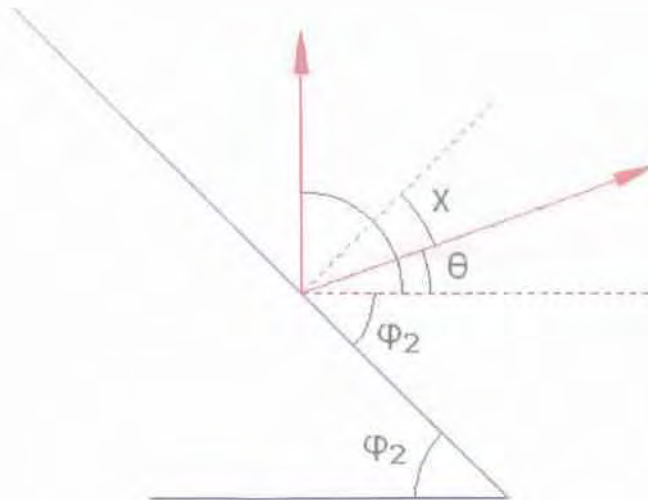
$$\Pi_{xy}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi \mu^3 e^{-\mu^2} \sin \theta \cos \theta d\mu d\theta \quad (3.25)$$

Οι συζευγμένη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.21) αποτελεί την κύρια εξίσωση που επιλύεται στην περίπτωση της δισδιάστατης ροής σε κοιλότητα. Αφού υπολογιστεί η άγνωστη συνάρτηση φ , οι μακροσκοπικές ποσότητες προκύπτουν μέσω των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.22)-(3.25).

3.7 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες στα τοιχώματα θεωρήθηκε ότι είναι τύπου Maxwell (διάχυσης). Προκειμένου να ικανοποιείται η συνθήκη μη διείσδυσης πρέπει η κάθετη ταχύτητα στην επιφάνεια του τοιχώματος να είναι μηδέν. Για να συμβεί αυτό, όσον αφορά τα σταθερά τοιχώματα είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός της γωνίας χ που σχηματίζεται μεταξύ της κάθετης στο τοίχωμα διεύθυνσης και της ταχύτητας των προσπιπτόντων σωματιδίων.

Δεξι τοίχωμα:



Σχήμα 3.2

Η γωνία x (Σχήμα 3.2) δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{\pi}{2} - \theta - \varphi_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) - \theta \quad (3.26)$$

Η τιμή της πυκνότητας για την οποία το ολοκλήρωμα της ταχύτητας στην κάθετη προς το τοίχωμα διεύθυνση μηδενίζεται ορίζεται ως παράμετρος για την ικανοποίηση της συνθήκης μη διείσδυσης ρ_w .

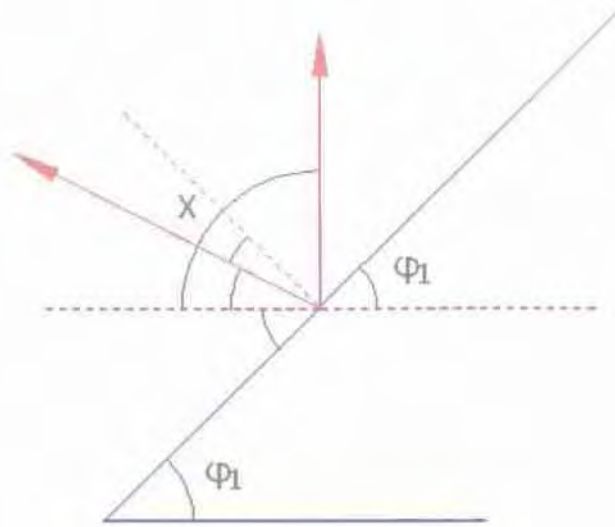
Πρέπει λοιπόν να ισχύει:

$$\rho_w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int hc_{\perp} e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (3.28)$$

Όπου η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο τοίχωμα δίνεται από τη σχέση:

$$c_{\perp} = c \cos(x) \quad (3.29)$$

Αριστερό τοίχωμα:



Σχήμα 3.3

Η γωνία x (Σχήμα 3.3) δίνεται από τη σχέση:

$$x = \theta - \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \quad (3.30)$$

Για την ικανοποίηση της συνθήκης μη διείσδυσης πρέπει να ισχύει και σ αυτήν την περίπτωση:

$$\rho_w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int hc_{\perp} e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (3.28)$$

Κινούμενη πλάκα:

Η πλάκα κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $u=u_0$ ενώ βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία $T=T_0$ (θερμοκρασία αναφοράς) με τα τοιχώματα (ισοθερμοκρασιακό πρόβλημα). Σημειώνεται επίσης ότι και στην πλάκα έχουμε οριακές συνθήκες Maxwell (ικανοποιείται η συνθήκη μη διείσδυσης).

3.8 Αντιμετώπιση των ασυνεχειών στις οριακές συνθήκες

Η διάδοση των ασυνεχειών εντός της ροής και οι δυσκολίες που προκαλεί η επίδραση τους τόσο στη συνάρτηση κατανομής όσο και στις μακροσκοπικές ιδιότητες απασχόλησε αρκετά την επιστημονική κοινότητα. Οι ασυνέχειες αποτελούν την αιτία εμφάνισης κυματισμών και ταλαντωτικών φαινομένων χωρίς φυσική ερμηνεία. Η συμπεριφορά αυτή είναι καθαρά αριθμητικής φύσης και προκαλείται από την προσέγγιση των πεπερασμένων διαφορών κατά μήκος των ασυνεχειών και αποτελεί σύνηθες φαινόμενο στην περιοχή μελέτης νετρονίων γνωστό και ως ray effect (φαινόμενα ρυτιδώσεων). Αυξάνοντας την ανάλυση στο χώρο των μικροσκοπικών ταχυτήτων παρατηρείται μείωση του πλάτους των κυματισμών αλλά αύξηση της συχνότητάς τους.

Οι ασυνέχειες που παρουσιάζονται στην περίπτωση ροής σε κοιλότητα είναι δύο μορφών. Η πρώτη αφορά φυσικές ασυνέχειες που προκαλούνται στους γωνιακούς κόμβους όπου η ταχύτητα καθορίζεται τόσο από την ταχύτητα του στατικού τοιχώματος όσο και από αυτή του κινούμενου τοιχώματος. Ισχύει γενικά ότι οι οριακοί κόμβοι στην κινούμενη πλάκα εκπέμπουν τα σωματίδια με κατανομές πολύ διαφορετικές από ότι οι αντίστοιχοι κόμβοι των στατικών τοιχωμάτων. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι η δημιουργία έντονων ασυνεχειών στη συνάρτηση κατανομής σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους. Οι ασυνέχειες αυτές σκεδάζονται ανάλογα με την απόσταση του σημείου από την πηγή της ασυνέχειας. Η σκέδαση όμως αυτή εκτός από την αναλογικότητα που όπως αναφέρθηκε παρουσιάζει ως προς την απόσταση από την πηγή της ασυνέχειας, είναι ανάλογη και με τον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων. Συνεπώς, παρουσιάζονται αρκετά προβλήματα κοντά στους γωνιακούς κόμβους της κινούμενης πλάκας καθώς επίσης και για μικρές τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης δ . Επισημαίνεται εδώ τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με τη συνάρτηση κατανομής ϕ . Το δεύτερο είδος ασυνεχειών αποτελούν οι τεχνητές ασυνέχειες που προκαλούνται από τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η πυκνότητα στους γωνιακούς κόμβους. Στα συγκεκριμένα σημεία η πυκνότητα οφείλει να υπακούει στη συνθήκη μη διείσδυσης τόσο στη x διεύθυνση όσο και στην y , συνεπώς πρέπει να λάβει δύο διαφορετικές τιμές. Οι ασυνέχειες αυτές όμως δε δημιουργούν σημαντικά προβλήματα και αντιμετωπίζονται εύκολα προσδιορίζοντας την πυκνότητα στους γωνιακούς κόμβους με προεκβολή των τιμών των γειτονικών κόμβων. Τεχνική την οποία χρησιμοποιήσαμε μελετώντας τη ροή σε τριγωνική κοιλότητα.

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που προκαλούν οι ασυνέχειες υπάρχει μια αρκετά αποτελεσματική προσέγγιση που μπορεί να γίνει προκειμένου να καταλήξουμε σε αξιόπιστα και ασφαλή αποτελέσματα[7]. Η προσέγγιση αυτή έχει σαν στόχο τη

διάσπαση του προβλήματος σε δύο υποπροβλήματα σε καθένα από τα οποία είτε δεν αντιμετωπίζονται προβλήματα ασυνέχειας, είτε δεν είναι απαραίτητη η εφαρμογή της αριθμητικής λύσης. Αντίστοιχη μεθοδολογία έχει παρουσιαστεί για την αντιμετώπιση προβλημάτων στην περιοχή της μονοδιάστατης εξίσωσης μεταφοράς μίας ταχύτητας σε ημιάπειρα χωρία

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα της διάσπασης του αρχικού προβλήματος και ο τρόπος επίλυσης κάθε επιμέρους υποπροβλήματος.

Αρχικά, η εξίσωση μεταφοράς στο πολικό σύστημα συντεταγμένων (3.21) γράφεται στη μορφή

$$D \varphi + \delta \varphi = \delta I \quad (3.31)$$

Όπου:

$$D = \mu \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right] = -\mu \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.32)$$

αντιπροσωπεύει το διαφορικό τελεστή που εφαρμόζεται στην ποσότητα φ

s : χαρακτηριστική διεύθυνση

$$I = \rho + 2\mu (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \quad (3.33)$$

Στη συνέχεια η ποσότητα φ χωρίζεται σε δύο κομμάτια:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (3.34)$$

Η εξίσωση (3.34) αντικαθίσταται στην εξίσωση (3.31) και εφαρμόζονται οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες (3.28) ώστε να προκύψουν τα δύο υποπροβλήματα.

- ΠΡΩΤΟ ΥΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ :

Το πρώτο υποπρόβλημα αφορά την ποσότητα φ_1 και περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$D \varphi_1 + \delta \varphi_1 = 0 \quad (3.35)$$

με $\varphi^+ = 0$ στα δύο ακίνητα τοιχώματα και $\varphi_1^+ = 2\mu \cos \theta$ στο κινούμενο τοίχωμα.

Το πρόβλημα αυτό λύνεται αναλυτικά ολοκληρώνοντας κατά μήκος της χαρακτηριστικής και η προκύπτουσα λύση είναι

$$\varphi_1(x, y, \mu, \theta) = \varphi_1^+ e^{-\frac{\delta s_0}{\mu}} \quad (3.36)$$

Όπου

- s_0 : η απόσταση κατά μήκος της χαρακτηριστικής μεταξύ του σημείου (x, y) και του αντίστοιχου οριακού σημείου
- φ_1^+ : η τιμή στο σημείο όπου η χαρακτηριστική τέμνει το τοίχωμα.

- ΔΕΥΤΕΡΟ ΥΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ :

Το δεύτερο υποπρόβλημα αφορά την ποσότητα φ_2 και περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$D\varphi_2 + \delta\varphi_2 = \delta I \quad (3.37)$$

με $\varphi_2^+ = \rho_w$ στα τρία τοιχώματα και ρ_w την πυκνότητα στο αντίστοιχο σημείο του τοιχώματος που δίνεται από την εξίσωση (3.28).

Όπως γίνεται αντιληπτό, το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά είναι αυτό που αφορά τη μεταβλητή φ_2 στο οποίο πλέον οι οριακές συνθήκες δεν περιλαμβάνουν τις ασυνέχειες που οφείλονται στην κίνηση της πλάκας.

Σε κάθε επανάληψη απαιτείται πλέον η επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς που αφορούν τη φ_2 . Στις τιμές που προκύπτουν για τη φ_2 προστίθεται στη συνέχεια η αντίστοιχη τιμή που έχει προκύψει από την αναλυτική λύση για τη φ_1 και πλέον μπορούν να υπολογιστούν όλες οι μακροσκοπικές ποσότητες. Προφανώς, η φ_1 επιλύεται μόνο μία φορά και χρησιμοποιείται καθ' όλη την επαναληπτική διαδικασία.

Έχοντας επιλύσει τα δύο υποπροβλήματα προκύπτει για την πυκνότητα στα τοιχώματα:

$$\rho_w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \varphi_1 c_{\perp} e^{-\mu^2} d\mu d\theta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \varphi_2 c_{\perp} e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (3.38)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία κατά την επίλυση, εξαλείφονται όλες οι ανεπιθύμητες επιδράσεις των ασυνεχειών στα αποτελέσματα.

3.9 Αριθμητικό σχήμα

Η διακριτοποίηση των κινητικών εξισώσεων στο χώρο των μικροσκοπικών ταχυτήτων βασίζεται στη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων για τις εξισώσεις μόνιμης ροής. Στην περίπτωση της εξεταζόμενης ροής σε τριγωνική κοιλότητα η διακριτοποίηση πραγματοποιείται σε τριγωνικό πλέγμα.

Η εξίσωση που επιλύεται είναι η γραμμικοποιημένη εξίσωση Boltzmann για μοντελοποίηση του όρου των συγκρούσεων με BGK.

$$\mu \frac{d\varphi}{ds} + \delta\varphi = \delta u \quad (3.39)$$

χρησιμοποιώντας για την ταχύτητα τη σχέση

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mu \varphi e^{-\mu^2} d\mu d\theta \quad (3.40)$$

Ο διανυσματικός χώρος αποτελείται από το χώρο των μοριακών ταχυτήτων (μ, θ) και από το φυσικό χώρο (x, y)

Στο χώρο των μοριακών ταχυτήτων η διακριτοποίηση γίνεται επιλέγοντας το κατάλληλο σύνολο διακριτών ταχυτήτων (μ_m, θ_n) το οποίο ορίζεται ως εξής: $0 \leq \mu_m < \infty, m=1, 2, \dots, M$
 $0 \leq \theta_n \leq 2\pi, n=1, 2, \dots, N$

Το σύνολο των ταχυτήτων που προκύπτει αποτελείται από $M \times N$ διακριτές ταχύτητες. Διακριτοποιώντας στο χώρο των ταχυτήτων η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\mu_m \frac{d\varphi_{m,n}}{ds} + \delta\varphi_{m,n}(x, y) = \delta u(x, y) \quad (3.41)$$

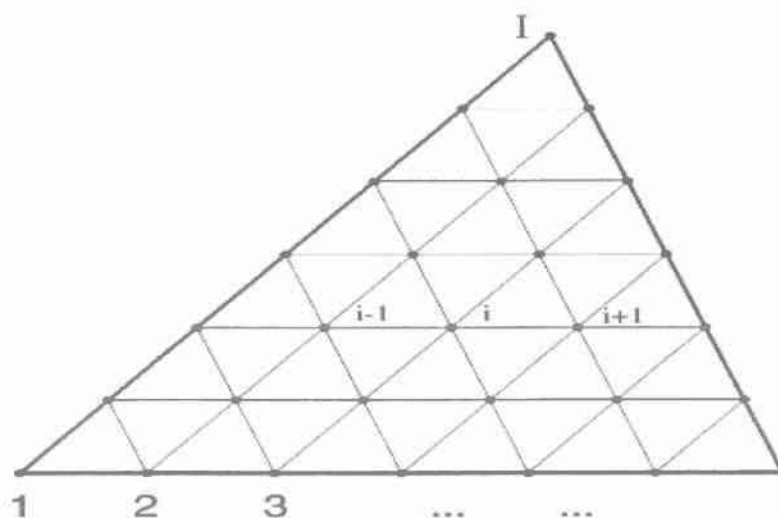
Ενώ η εξίσωση για τις ταχύτητες γίνεται

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_m \sum_n w_m w_n \varphi_{m,n} \quad (3.42)$$

Όπου:

για τη μεταβλητή μ χρησιμοποιείται ολοκλήρωση Gauss
για τη μεταβλητή θ εφαρμόζεται ο κανόνας του τραπέζιου
 w_m, w_n : συντελεστές βαρύτητας

Στο φυσικό χώρο ακολουθείται μια διαφοροποιημένη μεθοδολογία διακριτοποίησης, με στόχο να συμβαδίζει το σχήμα επίλυσης με τη φύση των εξισώσεων αλλά και να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια. Η διακριτοποίηση γίνεται διαιρώντας το πεδίο της ροής σε ίσα τριγωνικά μέρη. Το πλέγμα κατασκευάζεται σχεδιάζοντας στην τριγωνική περιοχή τρεις ομάδες παράλληλων γραμμών. Οι γραμμές είναι ισαπέχουσες και κάθε ομάδα απ αυτές είναι παράλληλη σε μία πλευρά του τριγώνου. Στο Σχήμα 3.4 απεικονίζεται το πλέγμα διακριτοποίησης αποτελούμενο από i κόμβους όπου $i=1,2,\dots,I$.

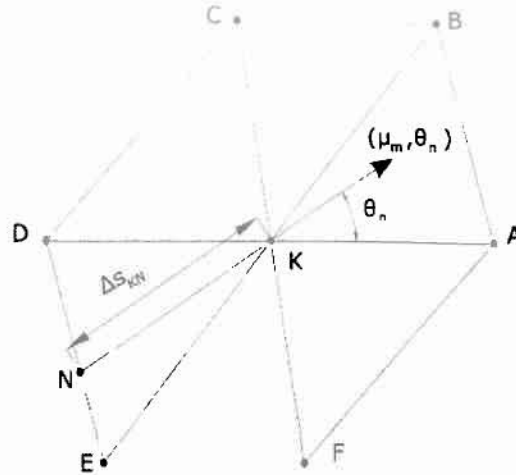


Σχήμα 3.4

Η διακριτοποίηση σύμφωνα με τη διαδικασία που αναφέρθηκε παρέχει μεγάλη ακρίβεια στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος καθώς τα σύνορα του πλέγματος ταυτίζονται με τοιχώματα της τριγωνικής διατομής της κοιλότητας.

Σε κάθε κόμβο i του πλέγματος γίνεται διακριτοποίηση του συστήματος των εξισώσεων (3.39) καταλήγοντας έτσι σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

Η πρώτη παράγωγος ως προς s στην εξίσωση (3.39) προσεγγίζεται μέσω ενός σχήματος κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης. Για την κατασκευή του σχήματος εφαρμόζεται μια μεθοδολογία σύμφωνα με την οποία ο κόμβος i μετονομάζεται σε K και οι 6 γειτονικοί κόμβοι γύρω απ αυτόν συμβολίζονται με τα γράμματα A, B, C, D, E, F (Σχήμα 3.5). Το εξάγωνο που σχηματίζεται από τους γειτονικούς κόμβους μπορεί να θεωρηθεί το υπολογιστικό κελί του εσωτερικού κόμβου K . Παρόμοια εξάγωνα σχηματίζονται για κάθε εσωτερικό κόμβο του τριγωνικού πλέγματος.



Σχήμα 3.5

Προκειμένου να εξαγάγουμε την παράγωγο $\mu_m \frac{d\varphi_{m,n}}{ds}$ στον κόμβο K για την ομάδα των διακριτών ταχυτήτων που τέμνουν την πλευρά AB έχουμε

$$\mu_m \left. \frac{d\varphi_{m,n}}{ds} \right|_K = \mu_m \frac{\bar{\psi}_{K m,n} - \bar{\psi}_{N m,n}}{\Delta s_{KN}} \quad (3.46)$$

Όπου το σημείο N και η απόσταση Δs_{KN} απεικονίζονται στο Σχήμα 3.5.

Οι τιμές στο σημείο N υπολογίζονται από τις αντίστοιχες τιμές στα δύο γειτονικά σημεία του πλέγματος D και E μέσω γραμμικής παρεμβολής.

Η διαδικασία αυτή επεκτείνεται για όλες τις τιμές των πολικών γωνιών θ_n που τέμνουν τις υπόλοιπες 5 πλευρές του εξαγώνου και επαναλαμβάνεται για όλα τα εξάγωνα που προκύπτουν για κάθε κόμβο ξεχωριστά. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν $M \times N$ εξισώσεις για κάθε έναν από τους I κόμβους του πλέγματος.

Το πρόβλημα λοιπόν, επιλύεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας μεταξύ της κινητικής εξίσωσης για τη φ και της ολοκληρωτικής έκφρασης για την ταχύτητα u . Οι επαναλήψεις ξεκινούν υποθέτοντας κάποιες αρχικές τιμές για τη u . Σε κάθε επανάληψη το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που εξάγεται από την κινητική εξίσωση επιλύεται μέσω ενός βηματικού σχήματος.

Για κάθε διακριτή ταχύτητα (μ_m, θ_n) η συνάρτηση κατανομής $\varphi_{m,n,i}$ υπολογίζεται ακριβώς μέσω του πλέγματος στο φυσικό χώρο. Η διαδικασία ξεκινάει πάντα από τους συνοριακούς κόμβους και η διεύθυνση που ακολουθεί εξαρτάται από την πολική γωνία θ_n . Σημειώνεται ότι δε χρειάζεται να γίνει αντιστροφή πινάκων.

Στη συνέχεια, με βάση την τιμή της $\Phi_{m,n,i}$ υπολογίζεται η μακροσκοπική ταχύτητα u_i με αριθμητική ολοκλήρωση. Οι νέες τιμές της u_i αντικαθίστανται στην κινητική εξίσωση οπότε ξεκινάει η επαναληπτική διαδικασία η οποία τερματίζεται όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης.

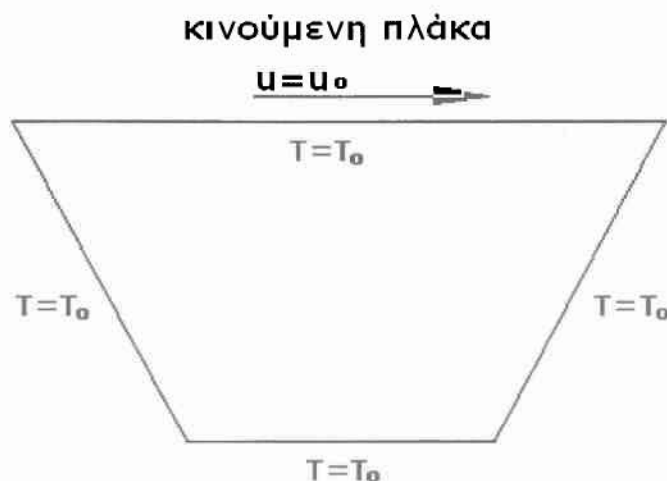
Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή και εξασφαλίζοντας ένα αρκετά πυκνό τριγωνικό πλέγμα σε συνδυασμό με έναν επαρκή αριθμό διακριτών ταχυτήτων μπορούμε να καταλήξουμε σε αποτελέσματα ανεξάρτητα του πλέγματος με συγκριτικά μικρή υπολογιστική προσπάθεια.

3.10 Ροή σε τραπεζοειδή κοιλότητα

Η αντιμετώπιση του προβλήματος της ροής σε τραπεζοειδή κοιλότητα προκύπτει με μεθοδολογία αντίστοιχη της επίλυσης της ροής σε τριγωνική κοιλότητα. Λόγω της γεωμετρικής "ομοιότητας" των δύο προβλημάτων, έχοντας επιλύσει το πρόβλημα της τριγωνικής κοιλότητας είναι αρκετά εύκολη η μετάβαση στο πρόβλημα της τραπεζοειδούς[41].

Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων (DVM), χρησιμοποιώντας το μοντέλο BGK στον όρο των σωματιδιακών συγκρούσεων και εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες τύπου Maxwell (διάχυσης).

3.10.1 Γεωμετρική διατύπωση προβλήματος



Σχήμα 3.6

Η υπό μελέτη ροή διαμορφώνεται εντός μιας κοιλότητας τραπεζοειδούς διατομής. Τα τοιχώματα των τριών πλευρών του τραπέζιου παραμένουν ακίνητα ενώ την τέταρτη πλευρά αποτελεί κινούμενη πλάκα (Σχήμα 3.6). Η πλάκα κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $u=u_0$. Η κίνηση της πλάκας αποτελεί την αιτία της ροής (διατμητική ροή). Όλα τα τοιχώματα θεωρούνται ισοθερμοκρασιακά με θερμοκρασία ίση με τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Η τρίτη διάσταση της κοιλότητας z θεωρείται ότι έχει άπειρο μήκος με αποτέλεσμα η ροή να αντιμετωπίζεται ως δισδιάστατη.

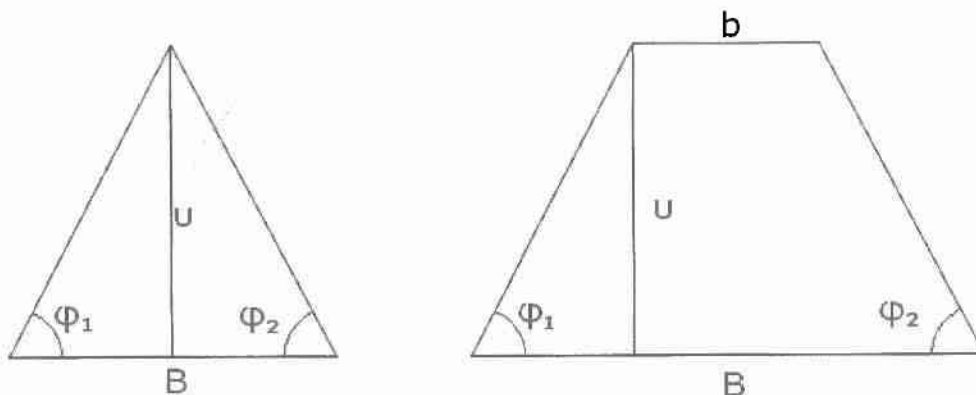
Το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος αποτελεί η υδραυλική διάμετρος όπως έχει ήδη οριστεί στην εξίσωση (3.1).

$$D_h = \frac{4A}{\Gamma} \quad (3.1)$$

Επίσης οι αδιάστατες μεταβλητές ορίζονται από τις εξισώσεις (3.2).

$$x = \frac{x'}{D_h}, \quad y = \frac{y'}{D_h}, \quad z = \frac{z'}{D_h}, \quad A = \frac{A'}{D_h^2}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma'}{D_h} \quad (3.2)$$

3.10.2 Επίλυση μέσω τριγωνικής διατομής



Σχήμα 3.7

Όπου:

- B : το μήκος της μεγάλης βάσης του τραπέζιου
- b : το μήκος της μικρής βάσης του τραπέζιου
- u : το ύψος του τραπέζιου και του τριγώνου

Κατά την επίλυση της ροής σε τριγωνική κοιλότητα ο λόγος $B/b=0$. Θέτοντας το λόγο $B/b \neq 0$ μεταβαίνουμε στην επίλυση της τραπεζοειδούς διατομής. Η διαδικασία αυτή μας προσφέρει αρκετή ευελιξία κατά την επίλυση καθώς για τις διάφορες τιμές του λόγου B/b υπάρχει η δυνατότητα εξαγωγής αποτελεσμάτων για κάθε επιθυμητή διάσταση του τραπεζίου.

Οι παράμετροι που επηρεάζουν την επίλυση του προβλήματος είναι οι γωνίες φ_1 και φ_2 και ο λόγος B/b .

Οι ρητές εκφράσεις των αδιάστατων συντεταγμένων που προσδιορίζουν το πεδίο ορισμού του προβλήματος είναι:

$$B = \frac{1/(D_h \tan(\varphi_1)) + 1/(D_h \tan(\varphi_2))}{2(1 - (B/b))} \quad (3.47)$$

$$\nu = B \frac{1 - (B/b)}{1/(D_h \tan(\varphi_1)) + 1/(D_h \tan(\varphi_2))} \quad (3.48)$$

3.10.3 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες για το δεξί και το αριστερό τοίχωμα καθώς και για την κινούμενη πλάκα έχουν ήδη αναφερθεί [Παράγραφος 3.7 (εξισώσεις 3.26-3.30)].

Για την ακίνητη βάση του τραπεζίου σημειώνεται ότι βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία $T=T_0$ (θερμοκρασία αναφοράς) με τα τοιχώματα (ισοθερμοκρασιακό πρόβλημα) και επικρατούν οριακές συνθήκες Maxwell (ικανοποιείται η συνθήκη μη διείσδυσης).

Όπως είναι αναμενόμενο και στην περίπτωση του τραπεζίου παρουσιάζονται ασυνέχειες στις οριακές συνθήκες οι οποίες αντιμετωπίζονται με διάσπαση του προβλήματος σε δύο υποπροβλήματα, διαδικασία που έχει περιγραφεί ήδη (Παράγραφος 3.8).

Επίσης όμοια με την τριγωνική κοιλότητα είναι το μαθηματικό μοντέλο (Παράγραφος 3.5), η διαμόρφωση των εξισώσεων με προβολή της τρίτης διάστασης (Παράγραφος 3.6) και το αριθμητικό σχήμα (Παράγραφος 3.9).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 **ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν έπειτα από προσομοιώσεις για μεγάλο εύρος της παραμέτρου αραιοποίησης (δ) και διάφορες τιμές της γωνίας φ . Σημειώνεται ότι στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, εξετάστηκε η περίπτωση ισοσκελούς τριγώνου.

Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα αφορούν τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης $\delta = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 0.5, 1, 1.5, 2, 4, 5, 10, 20$ ενώ οι γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κινούμενης πλάκας και των ακίνητων τοιχωμάτων και φ έλαβε τις τιμές $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ και 75° .

Το κριτήριο σύγκλισης ορίστηκε 10^{-6} και αφορά το αθροιστικό απόλυτο σφάλμα των μακροσκοπικών ποσοτήτων στο κάθε σημείο.

Η διακριτοποίηση που έλαβε χώρα είχε σαν στόχο την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι σε ρευστά μεγάλης αραιοποίησης απαιτείται πυκνότερο πλέγμα στο χώρο των ταχυτήτων ενώ το χωρικό πλέγμα μπορεί να είναι λιγότερο πυκνό και σε περιπτώσεις μικρής αραιοποίησης ισχύει το αντίστροφο, οι προσομοιώσεις για $\delta \leq 1$ έγιναν σε πλέγμα 151 κόμβων και με αριθμό διακριτών γωνιών 240 ενώ για $\delta \geq 1.5$ το πλέγμα αποτελούνταν από 301 κόμβους και 120 διακριτές γωνίες.

Η διακριτοποίηση στο χώρο των γωνιών όσον αφορά την αναλυτική επίλυση του πρώτου υποπροβλήματος επιλέχθηκε ένα αρκετά πυκνό πλέγμα 4800 γωνιών μιας και η επίδραση που προκύπτει στο χρόνο επίλυσης είναι μικρή εφόσον η επίλυση αυτή γίνεται μια φορά και δεν συμμετέχει στην επαναληπτική διαδικασία.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται ότι για μικρές τιμές της γωνίας βάσης, τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα και χωρίς ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις. Η αποκλίσεις της πυκνότητας φαίνεται ότι υπάρχουν μεν αλλά είναι σχετικά μικρές. Ειδικότερα φαίνεται ότι για μέτριες τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης έχουμε μια ενίσχυση ενώ για τιμές προς το συνεχές μέσο αλλά και την ελεύθερη μοριακή κίνηση οι αποκλίσεις είναι ελαφρά μικρότερες. Εμφανίζεται δηλαδή κάτι σαν το ελάχιστο Knudsen που παρατηρείται σε ροές εντός αγωγών μόνο που αφορά την απόκλιση της πυκνότητας.

Αντίστοιχη, όσον αφορά την μεταβολή της απόκλισης της πυκνότητας, εμφανίζεται η συμπεριφορά και σε μεγαλύτερες τιμές της γωνίας βάσης με ελαφρά πιο έντονα τα φαινόμενα όσο μεγαλώνει η γωνία.

Οι ροϊκές γραμμές εμφανίζουν για μικρές γωνίες πολύ μικρές διαφοροποιήσεις. Ιδιαίτερα το κέντρο της δημιουργούμενης δίνης είναι ουσιαστικά ακίνητο (Σχ. 4.26). Το γεγονός αυτό οφείλεται στα

πολύ μικρά περιθώρια μεταβολών λόγω του περιορισμένου χώρου και της ουσιαστικά οριζόντιας μεταβολής της απόκλισης της πυκνότητας γεγονός που περιορίζει τις κατακόρυφες μεταβολές.

Σε μεγαλύτερες γωνίες βάσης εμφανίζονται μετατοπίσεις του κέντρου της κεντρικής δίνης και μάλιστα όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία βάσης τόσο πιο έντονες είναι οι μετακινήσεις.

Ήδη για γωνία βάσης 60° σε μεγάλες τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης, εμφανίζεται μια δευτερεύουσα δίνη στη βάση της κοιλότητας (Σχ. 4.14) Το φαινόμενο αυτό είναι πολύ πιο έντονο για γωνία 75° όπου η δευτερεύουσα δίνη εμφανίζεται σε μικρότερες τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης (Σχ. 4.21 και Σχ. 4.22) της τάξης του 1.5 με 2 έχουμε την έναρξη της δημιουργίας δευτερεύουσας δίνης. Σε μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης, υπάρχει η δημιουργία μιας τρίτης δίνης πολύ μικρότερης φυσικά έντασης (Σχ. 4.25). Η ένταση γενικά των δινών έχει χοντρικά μια απόκλιση 2-3 τάξεων μεγέθους. Το γεγονός αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά και στο Σχ. 4.30 όπου παρουσιάζεται η κατανομή της ταχύτητας στο επίπεδο συμμετρίας στην περιοχή της δευτερεύουσας δίνης για $\Phi=75^\circ$ και μεγάλα δ . Όπως φαίνεται και στην κλίμακα οι ταχύτητες είναι της τάξης του 10^{-3} .

Σημειώνεται ότι τα συμπεράσματα αυτά βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με τα αντίστοιχα που έχουν παρουσιαστεί για την ορθογωνική κοιλότητα[7] όπου και εκεί παρατηρήθηκαν οι μηχανισμοί δημιουργίας δευτερευουσών δινών με αντίστοιχες τάξεις μεγέθους.

Όσον αφορά το μέτρο της ταχύτητας στην περιοχή της πλάκας από τα σχήματα 4.26 ως 4.29 καθώς και τον πίνακα 4.1 διαπιστώνεται αρχικά ότι όσο προσεγγίζεται το υδροδυναμικό όριο τόσο μεγαλύτερες είναι οι ταχύτητες που αναπτύσσονται και επομένως τόσο μικρότερη είναι η ολίσθηση στην πλάκα, γεγονός απολύτως αναμενόμενο. Επίσης φαίνεται ότι για μεγαλύτερες γωνίες η ταχύτητα στο τοίχωμα είναι σημαντικά μεγαλύτερη για μικρά δ ενώ για μεγάλα δ συγκλίνουν. Η απόκλιση που υπάρχει σε μικρά δ εξηγείται μερικώς από τον ορισμό του δ με βάση την υδραυλική διάμετρο αλλά κυρίως από την "αντίσταση" που δέχεται η ροή σε μικρές γωνίες λόγω της γειτνίασης της πλάκας με το κάτω τοίχωμα.

Κλείνοντας την αναφορά στα αποτελέσματα που αφορούν την τριγωνική κοιλότητα, ένα σημαντικό μέγεθος για το οποίο εξήχθησαν αποτελέσματα είναι ο συντελεστής σπισθέλκουσας (C_d) πάνω στην κινούμενη πλάκα. Ο C_d υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την ανοιγμένη διατμητική τάση η οποία δίνεται από την εξίσωση (3.25). Ένας πρώτος έλεγχος στα αποτελέσματα του πίνακα 4.2 δείχνει ότι με την προσέγγιση του υδροδυναμικού ορίου, ο συντελεστής σπισθέλκουσας βαίνει μειούμενος προσεγγίζοντας μια σταθερή τιμή η οποία αντιστοιχεί στην υπολογιζόμενη με βάση το νόμο του Newton.

Η συμπεριφορά αυτή βρίσκεται σε αντιστοιχία με ότι έχει παρατηρηθεί στη ροή Couette τόσο για απλό αέριο όσο και για

μείγμα καθώς επίσης και στη ροή εντός ορθογωνικής κοιλότητας[43]. Συγκρίνοντας τις διάφορες περιπτώσεις μεταξύ τους, φαίνεται ότι η κύρια παράμετρος που επηρεάζει την τιμή του C_d είναι η παράμετρος αραιοποίησης, ενώ η γωνία βάσης παίζει πολύ μικρότερο ρόλο. Η επίδραση της γωνίας έγκειται στη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας αυξανόμενης της γωνίας. Τέλος, η απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των οριακών περιπτώσεων ($\Phi = 30^\circ$ και $\Phi = 75^\circ$) ενώ για $\delta = 10^{-3}$ είναι της τάξης του 10% για $\delta = 20$ είναι της τάξης του 1% γεγονός που καταδεικνύει της προοδευτική σύγκλιση προς τις τιμές του υδροδυναμικού ορίου όσο μεγαλώνει το δ .

Περνώντας στην ροή σε τραπέζιο σημειώνεται ότι λόγω της εισαγωγής της παραμέτρου του λόγου της μεγάλης προς την μικρή πλευρά, οι συνδυασμοί των παραμέτρων αυξάνονται σημαντικά και για τον λόγο αυτό στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται ορισμένα ενδεικτικά αποτελέσματα. Είναι προφανές ότι οποιοσδήποτε συνδυασμός παραμέτρων μπορεί να επιλυθεί με βάση τον κώδικα που έχει αναπτυχθεί.

Τα αποτελέσματα που επιλέχθηκε να παρουσιαστούν, αφορούν σαν βασική διαμόρφωση, γωνίες βάσης ίσες με 60° και ο λόγος μεγάλης προς μικρής πλευρά ίσος με 0.5. Με βάση αυτή τη διαμόρφωση, έγιναν προσομοιώσεις για $\Phi = 60^\circ$ και $B/b = 0.25$ και 0.75 προκειμένου να εξετασθεί η επίδραση του λόγου των πλευρών στην διαμορφούμενη ροή ενώ έγιναν και προσομοιώσεις με $\Phi = 75^\circ$ και $B/b = 0.5$ ώστε να ελεγχθεί η επίδραση της γωνίας βάσης.

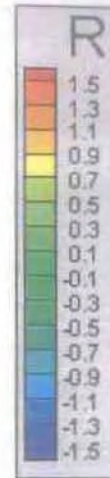
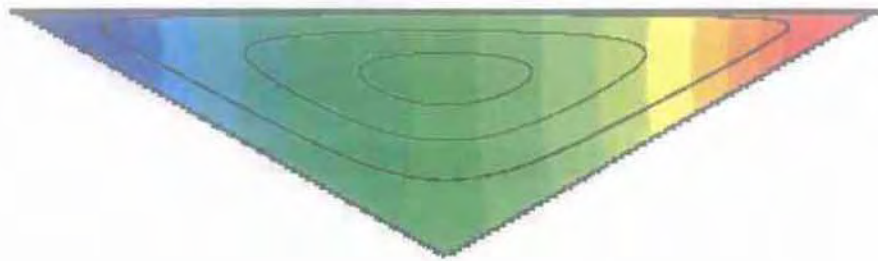
Με βάση τα εξαχθέντα αποτελέσματα προκύπτει ότι οι μεταβολές της πυκνότητας σε σχέση με την παράμετρο αραιοποίησης δ ακολουθεί τον κανόνα που παρατηρήθηκε και στην τριγωνική κοιλότητα, δηλαδή για αραιά και πυκνά ρευστά οι διακυμάνσεις είναι μικρότερες σε σχέση με αυτές που παρατηρούνται για μεσαίες τιμές του δ (0.5, 1,2).

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που παρουσιάζεται αφορά την περίπτωση όπου ο λόγος B/b είναι 0.75 και για μικρές τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης δ όπου αντί μιας σχηματίζονται δύο δίνες με όμοια φορά (Σχ.4.42). Αντίστοιχες διαμορφώσεις έχουν παρατηρηθεί και στην περίπτωση της ροής σε κανάλι όπου το ένα τοίχωμα έχει ορθογωνικές κοιλότητες (grooved channel) [42]. Οι σχηματισμοί αυτοί προοδευτικά εκφυλίζονται καθώς μεγαλώνει το δ και τελικά ενώνονται και σχηματίζεται μια ενιαία δίνη.

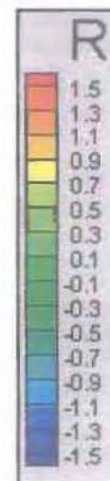
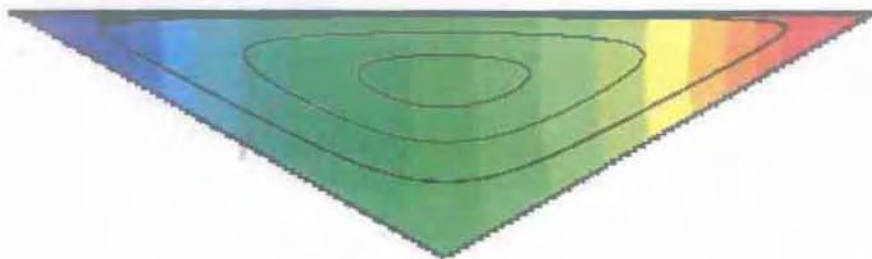
Η δημιουργία δευτερεύουσας δίνης στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι ένα άλλο ζητούμενο το οποίο όμως δεν παρατηρήθηκε στις προσομοιώσεις που υλοποιήθηκαν. Αυτό οφείλεται προφανώς στο ότι δεν επιτεύχθηκε το κρίσιμο βάθος κοιλότητας που απαιτείται, όπως αναφέρθηκε στην περίπτωση της τριγωνικής κοιλότητας, ώστε να καταστεί δυνατή η δημιουργία της.

Κλείνοντας, στον πίνακα 4.3 δίνονται οι τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας. Φαίνεται ότι η παρουσία των κάθετων πλευρών δρα καταλυτικά απομακρύνοντας τις δύο οριζόντιες πλάκες και καθιστώντας την επίδραση των παραμέτρων στην διαμόρφωση του συντελεστή πολύ μικρή. Παρόλα αυτά φαίνεται ότι όσο μεγαλώνει το δ , προσεγγίζεται και σε αυτή τη περίπτωση η υδροδυναμική λύση με βάση το νόμο του Newton. Πάντως, οι μικρές διαφορές που παρατηρούνται στην περίπτωση των 75° , οφείλονται κατά βάση στο γεγονός της μεγαλύτερης απόστασης καθ' ύψος που απαιτείται ώστε να φτάσει η μικρή πλευρά να αποτελεί το καθορισμένο ποσοστό του μήκους της μεγάλης πλευράς.

$$\delta = 10^{-3}$$

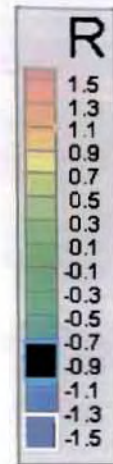


$$\delta = 10^{-2}$$

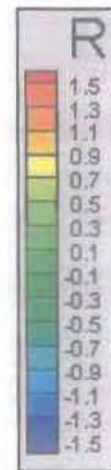
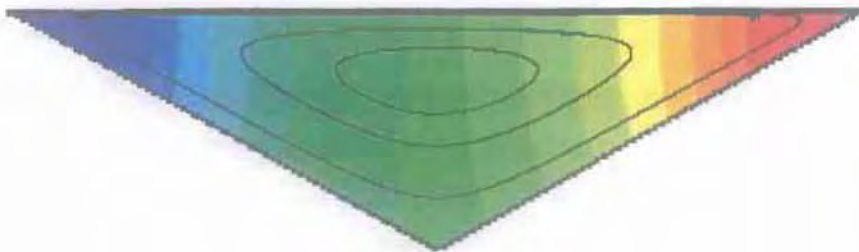


Σχίμα 4.1: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi = 30^\circ$ και $\delta = 10^{-3}$ και 10^{-2} .

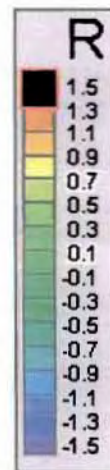
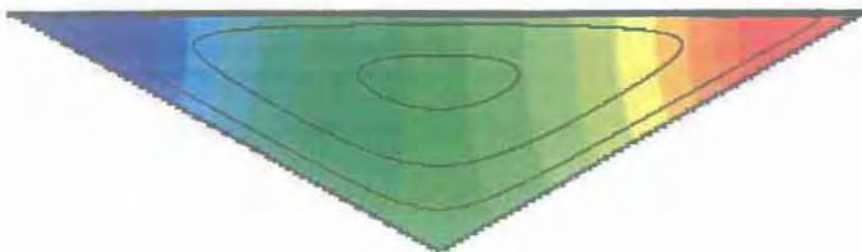
$\delta=10^{-1}$



$\delta=0.5$

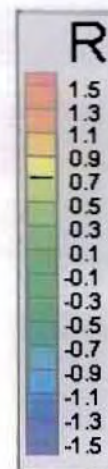
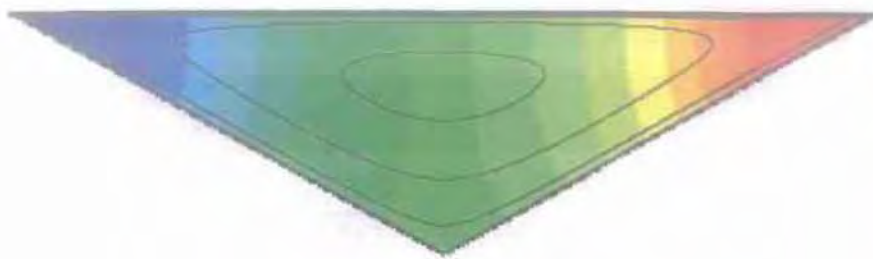


$\delta=1$

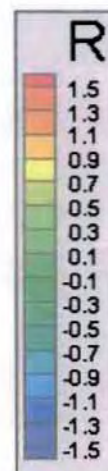
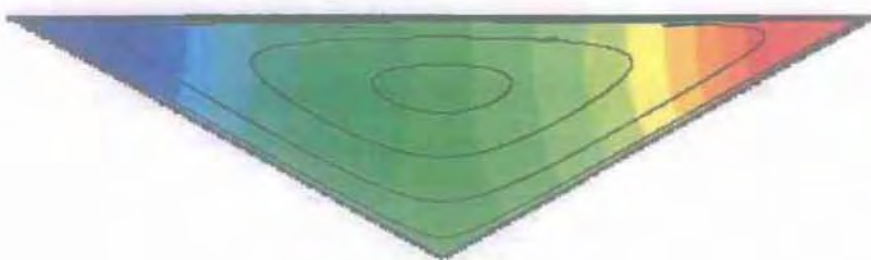


Σχήμα 4.2: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=30^\circ$ και $\delta=10^{-1}$, 0.5 και 1.

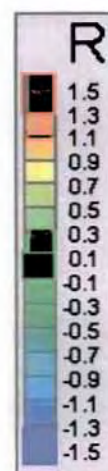
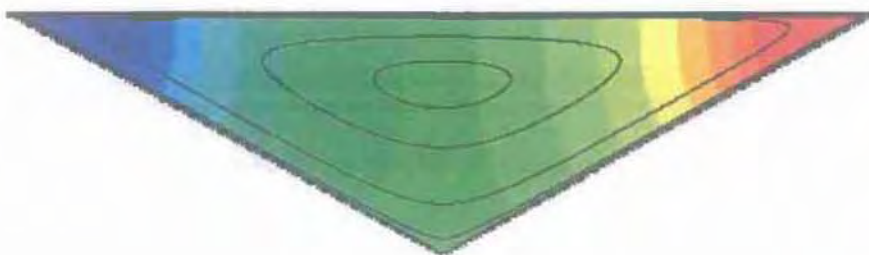
$\delta=1.5$



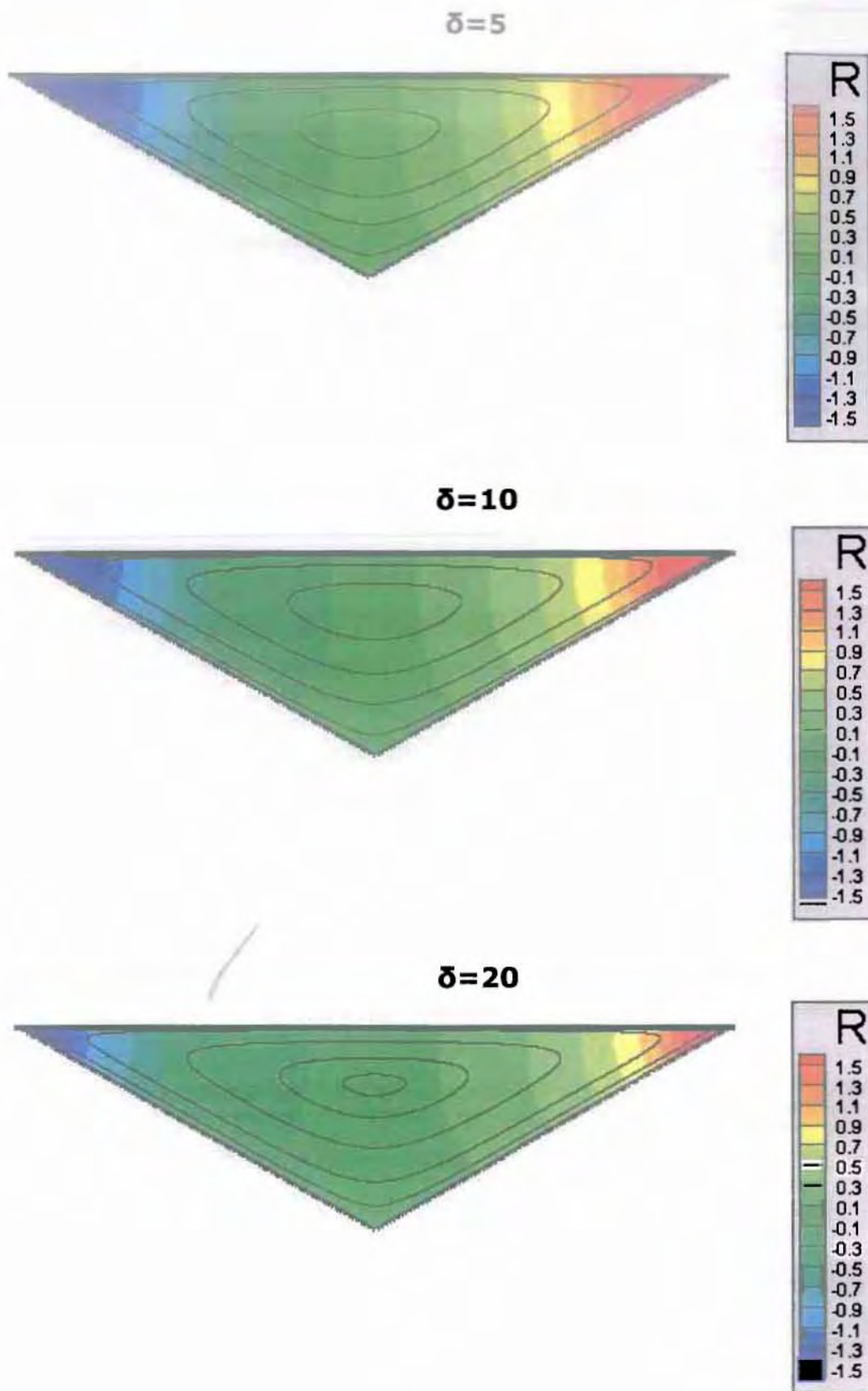
$\delta=2$



$\delta=4$

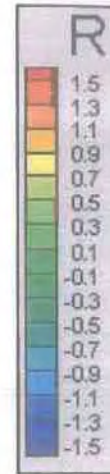
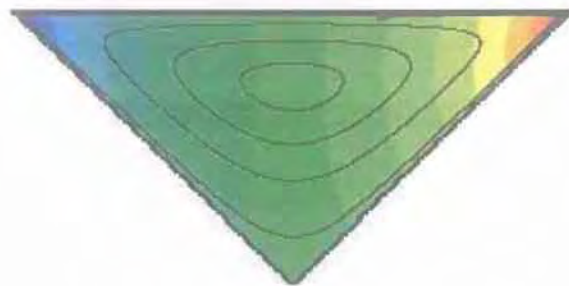


Σχήμα 4.3: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=30^\circ$ και $\delta=1.5, 2$ και 4 .

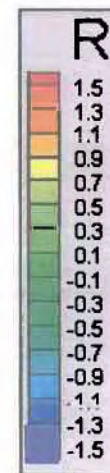
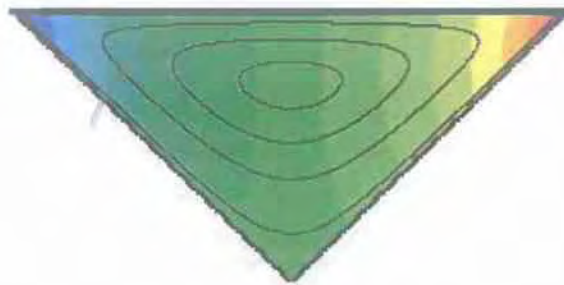


Σχήμα 4.4: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=30^\circ$ και $\delta=5, 10$ και 20 .

$$\delta = 10^{-3}$$

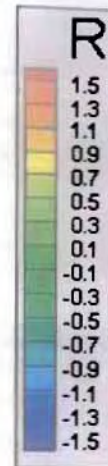


$$\delta = 10^{-2}$$

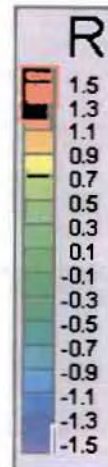


Σχήμα 4.5: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi = 45^\circ$ και $\delta = 10^{-3}$ και 10^{-2} .

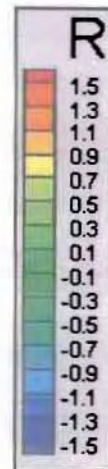
$\delta=10^{-1}$



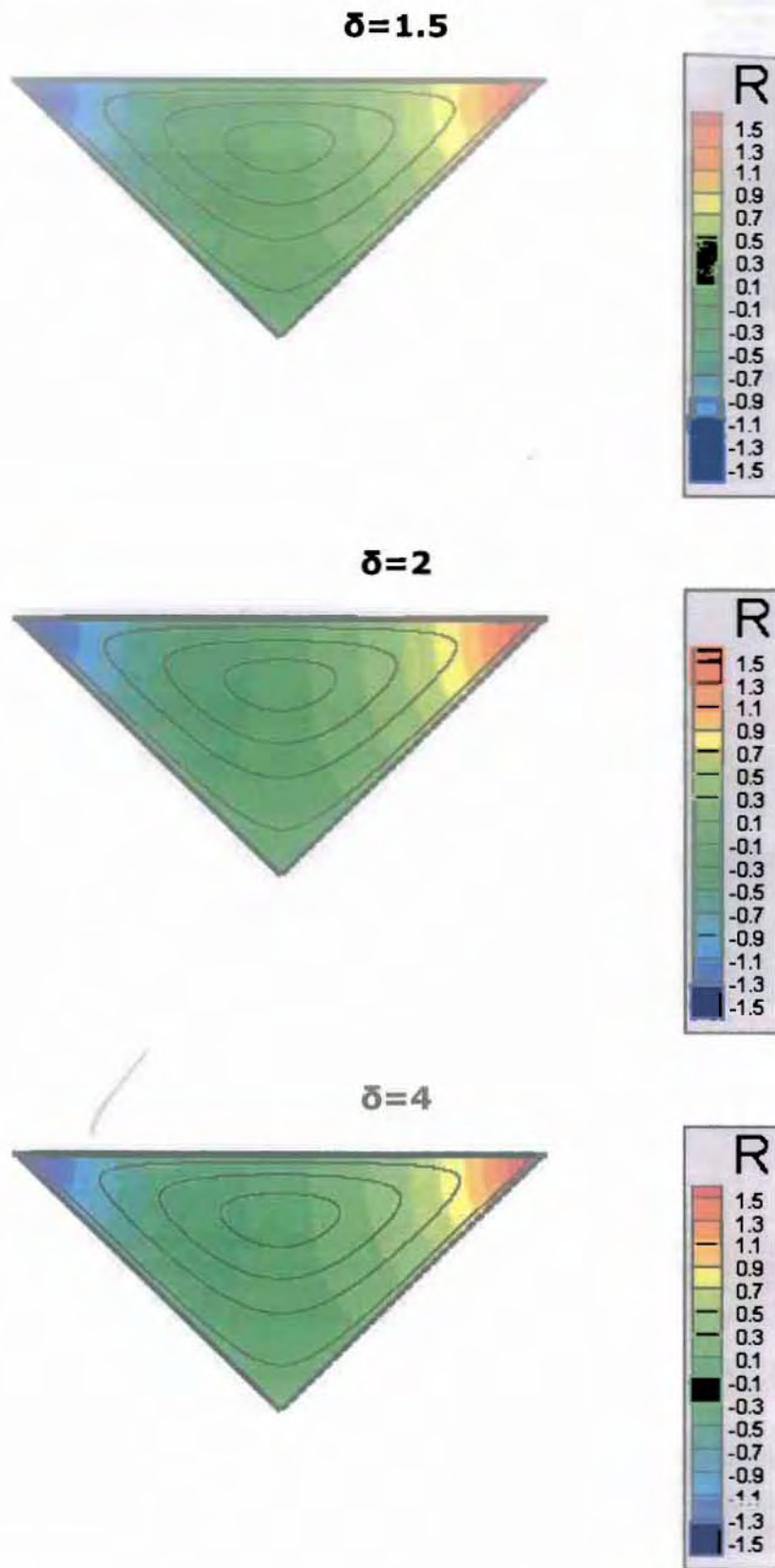
$\delta=0.5$



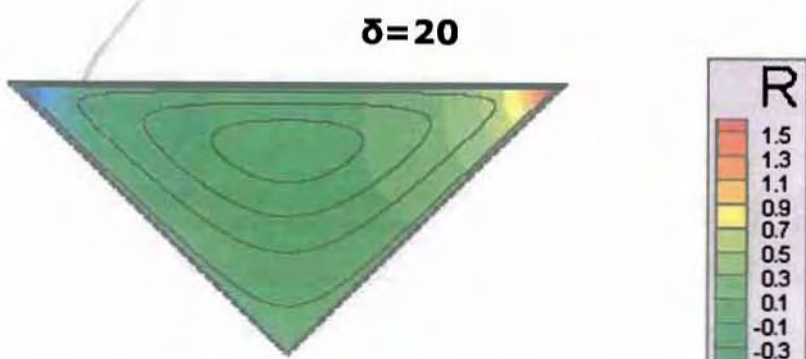
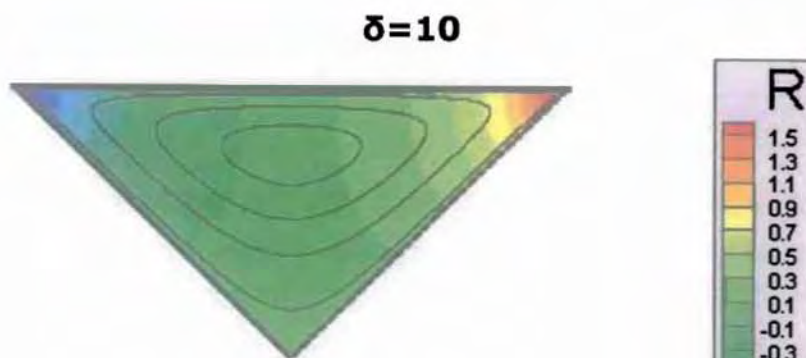
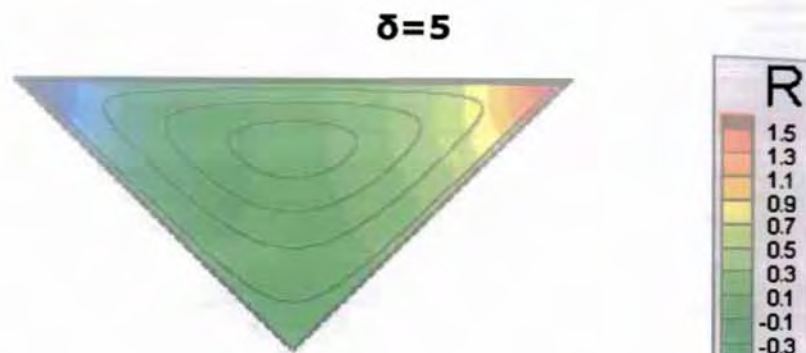
$\delta=1$



Σχήμα 4.6: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=45^\circ$ και $\delta=10^{-1}$, 0.5 και 1.

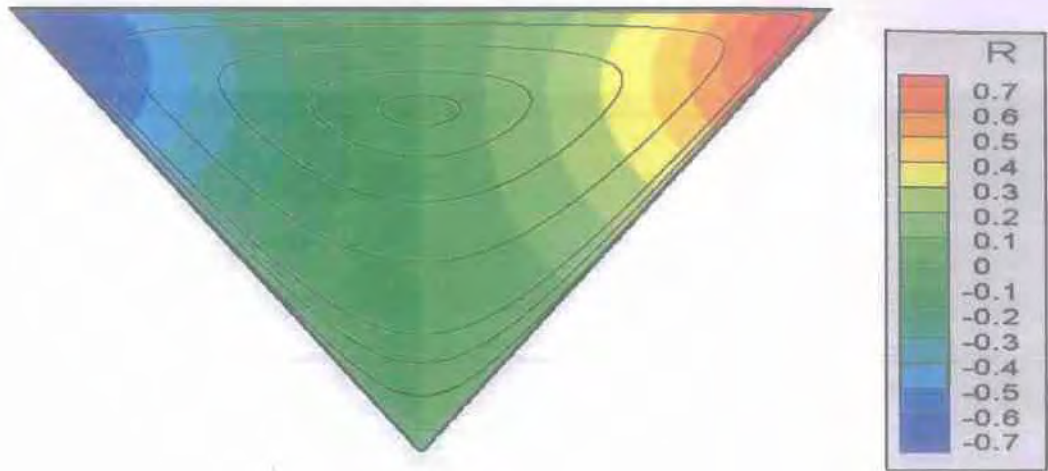


Σχήμα 4.7: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=45^\circ$ και $\delta=1.5, 2$ και 4 .

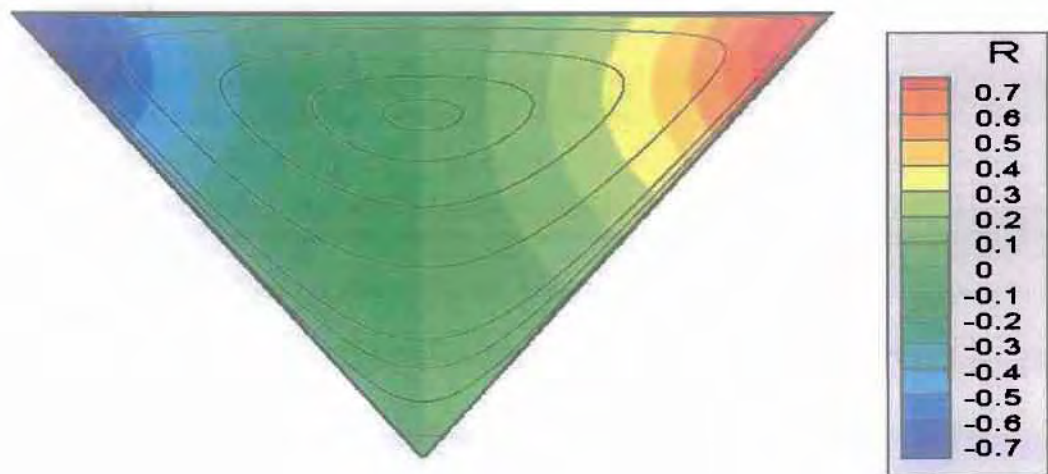


Σχήμα 4.8: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=45^\circ$ και $\delta=5, 10$ και 20 .

$$\delta=10^{-3}$$

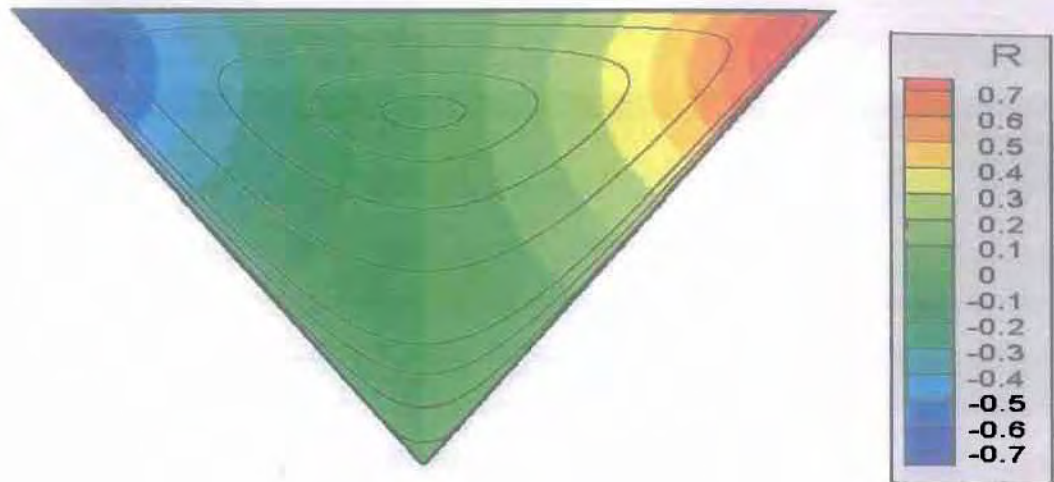


$$\delta=10^{-2}$$

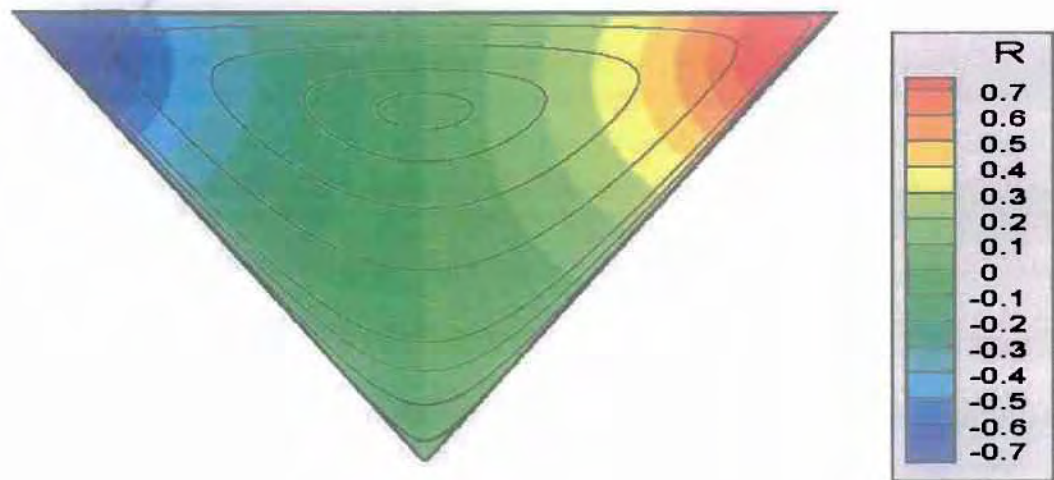


Σχήμα 4.9: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=10^{-3}$ και 10^{-2} .

$$\delta = 10^{-1}$$

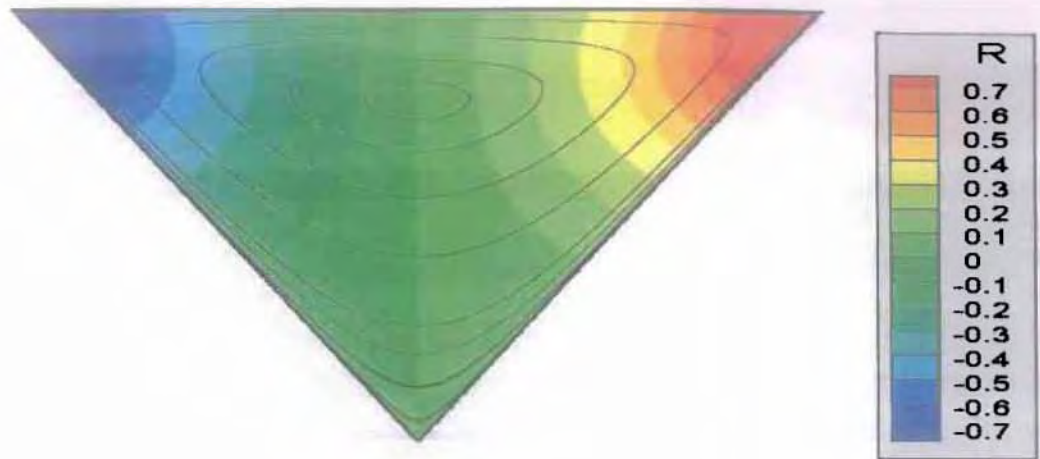


$$\delta = 0.5$$

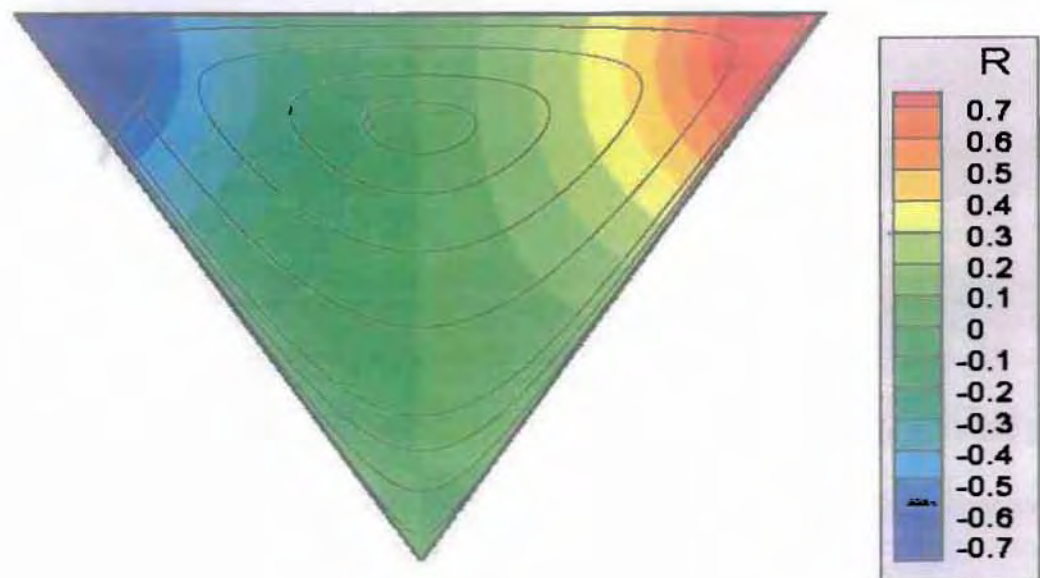


Σχήμα 4.10: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=10^{-1}$ και 0.5.

$\delta=1$

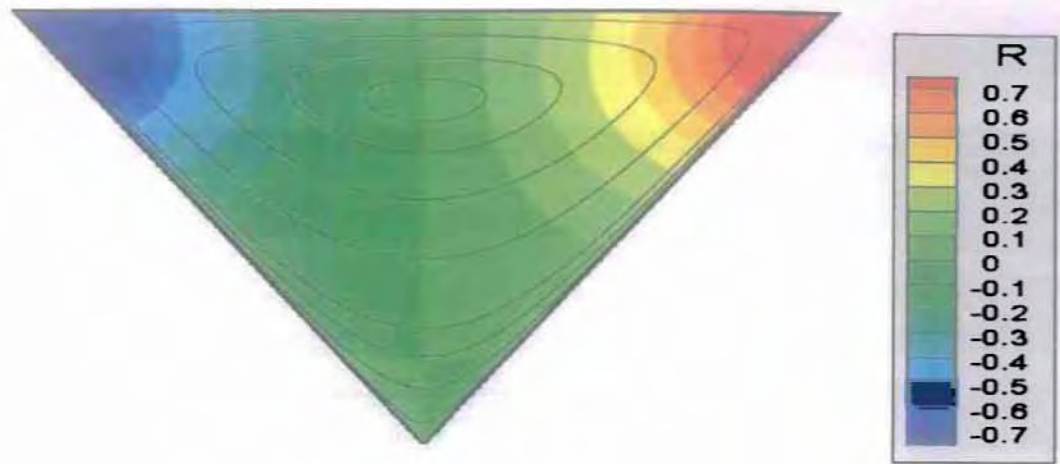


$\delta=1.5$

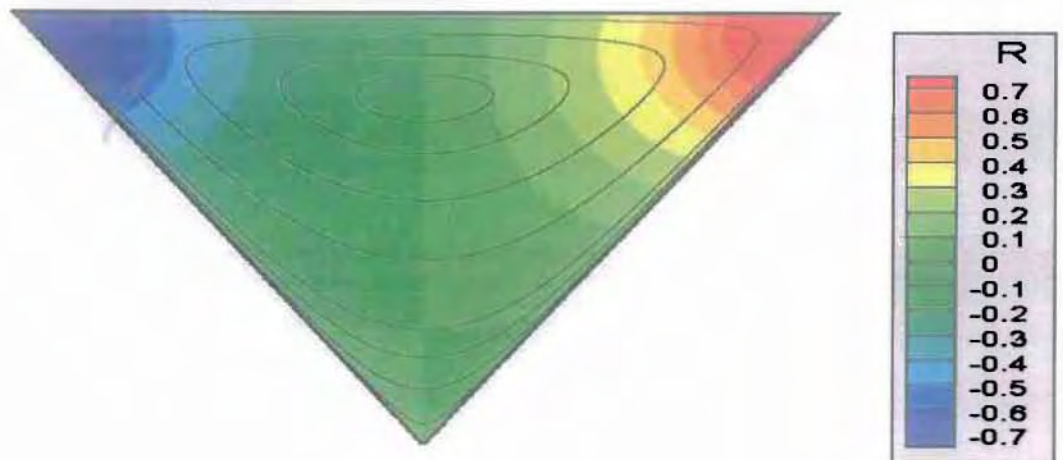


Σχήμα 4.11: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=1$ και 1.5.

$\delta=2$

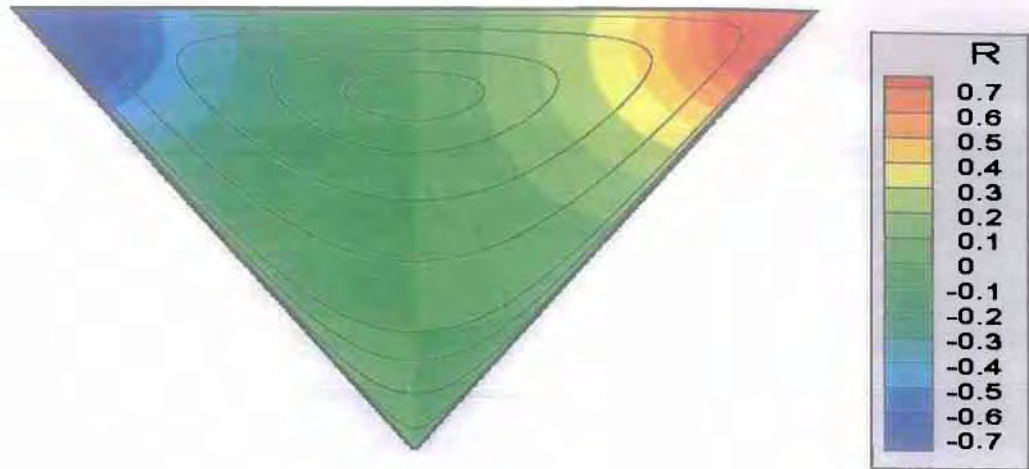


$\delta=4$

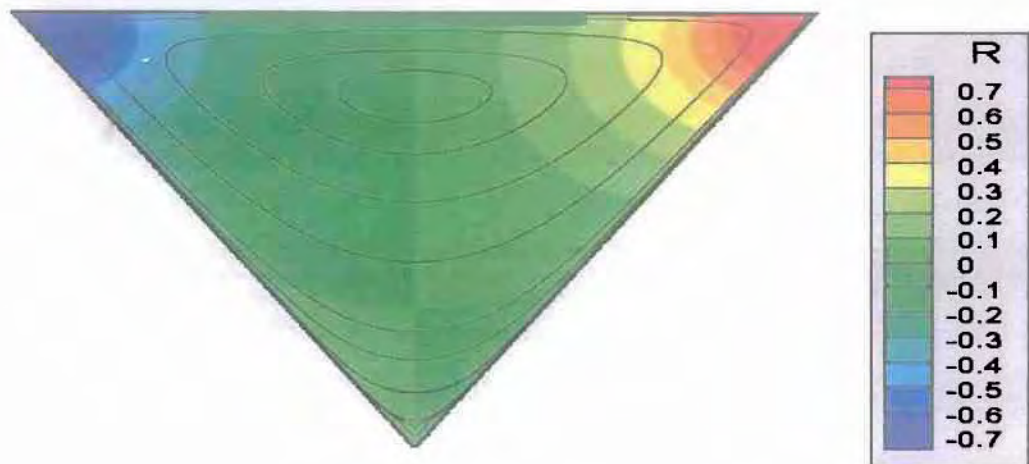


Σχήμα 4.12: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=2$ και 4.

$\delta=5$

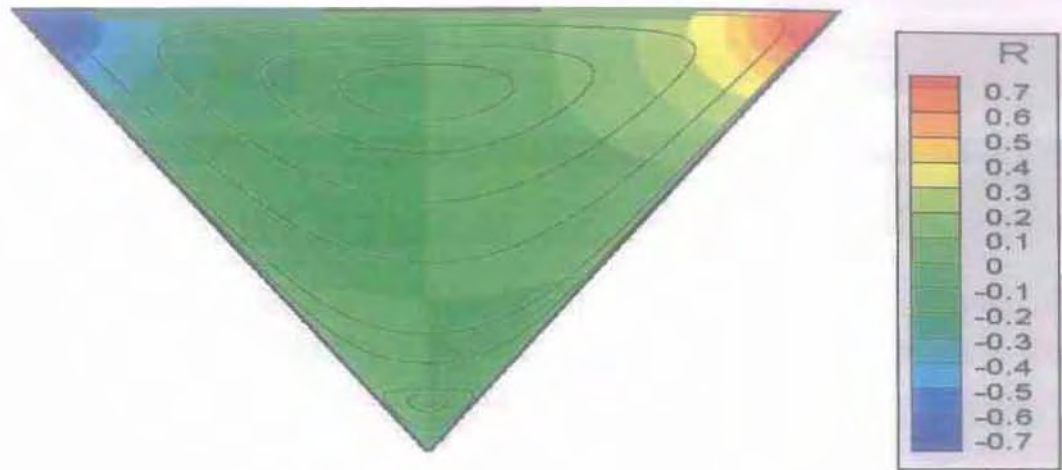


$\delta=10$



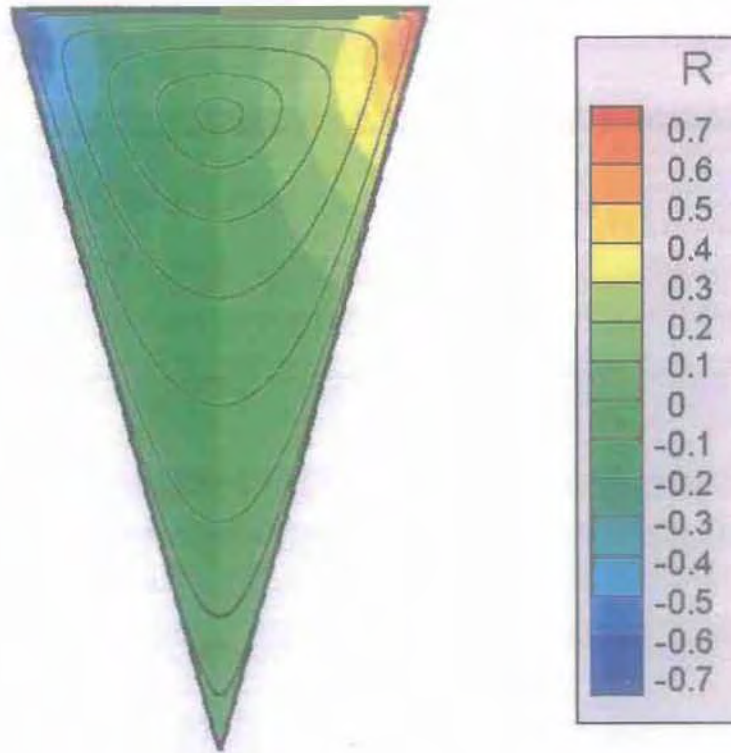
Σχήμα 4.13: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=5$ και 10.

$$\delta = 20$$



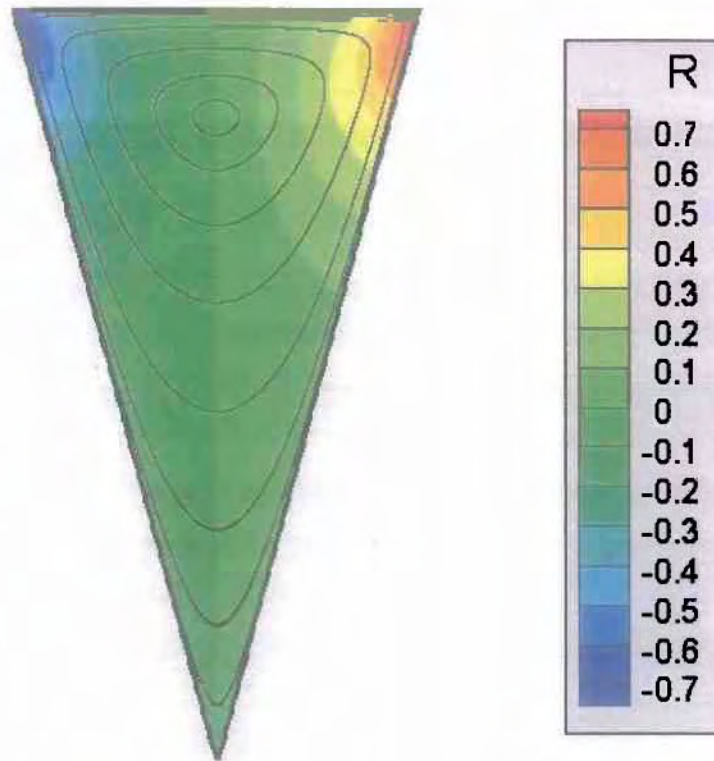
Σχήμα 4.14: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$ και $\delta=20$.

$$\delta = 10^{-3}$$



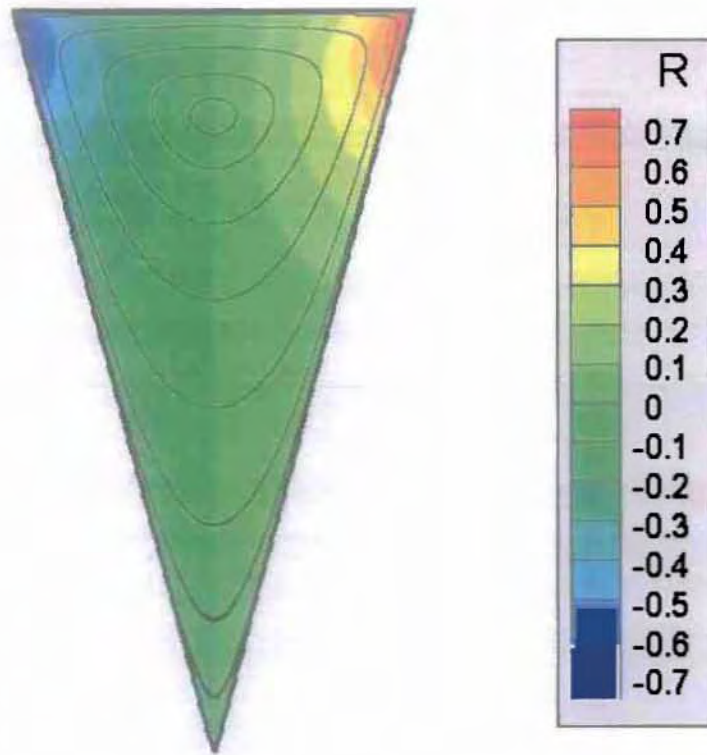
Σχήμα 4.15: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=10^{-3}$.

$$\delta = 10^{-2}$$



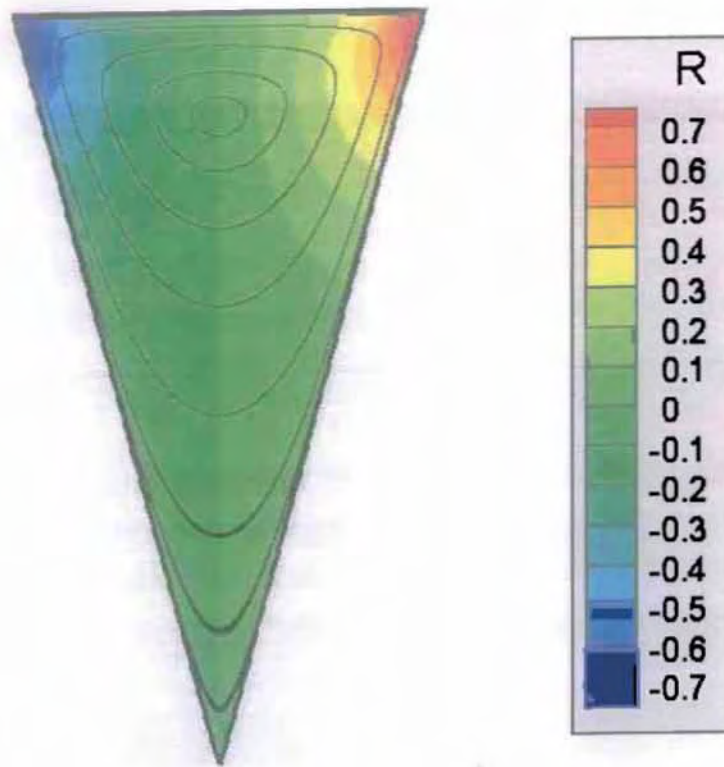
Σχήμα 4.16: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=10^{-2}$.

$$\delta = 10^{-1}$$



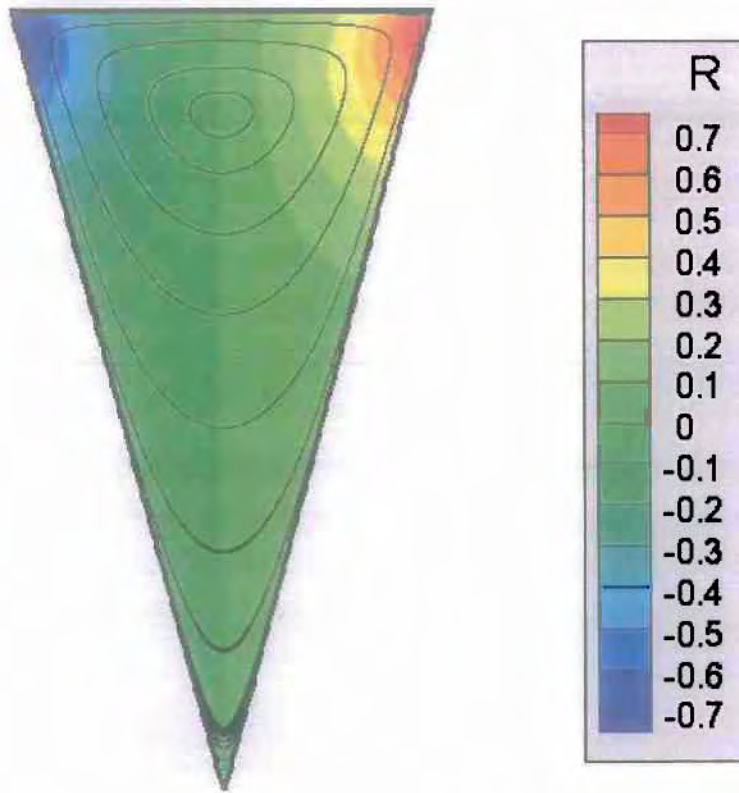
Σχήμα 4.17: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=10^{-1}$.

$\delta=0.5$



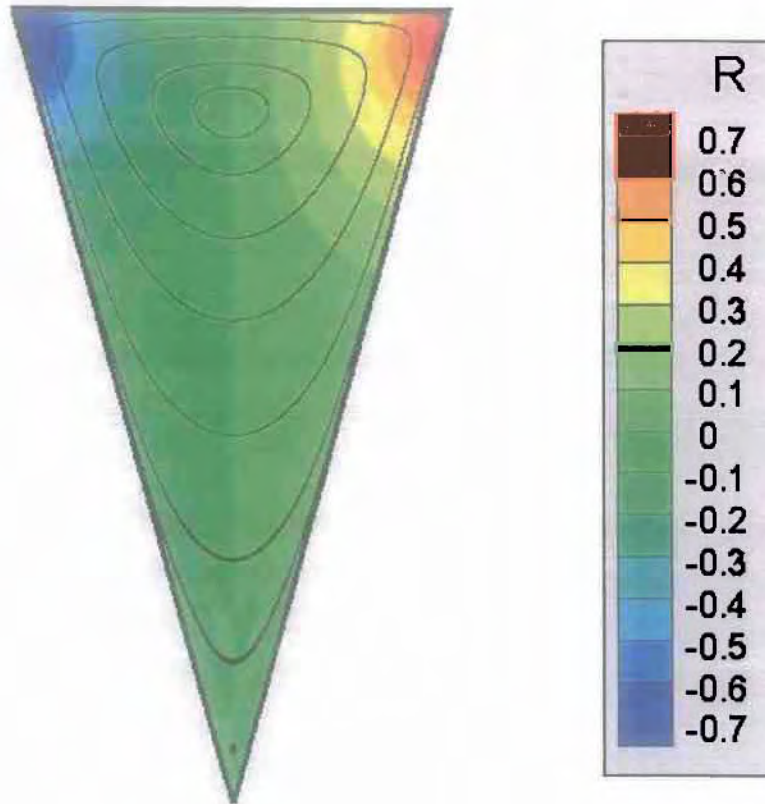
Σχήμα 4.18: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=0.5$.

$\delta=1$



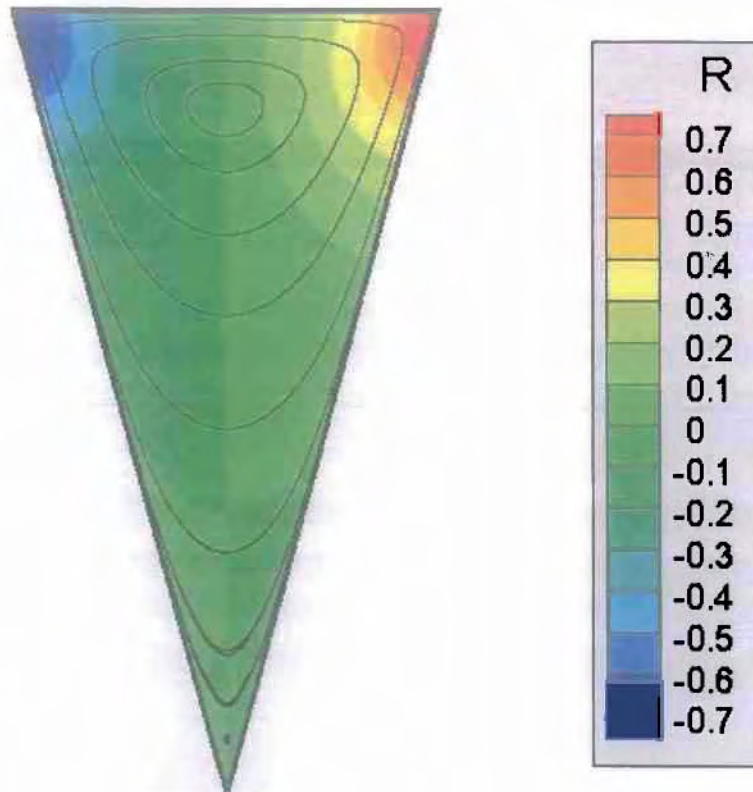
Σχήμα 4.19: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=1$.

$\delta=1.5$



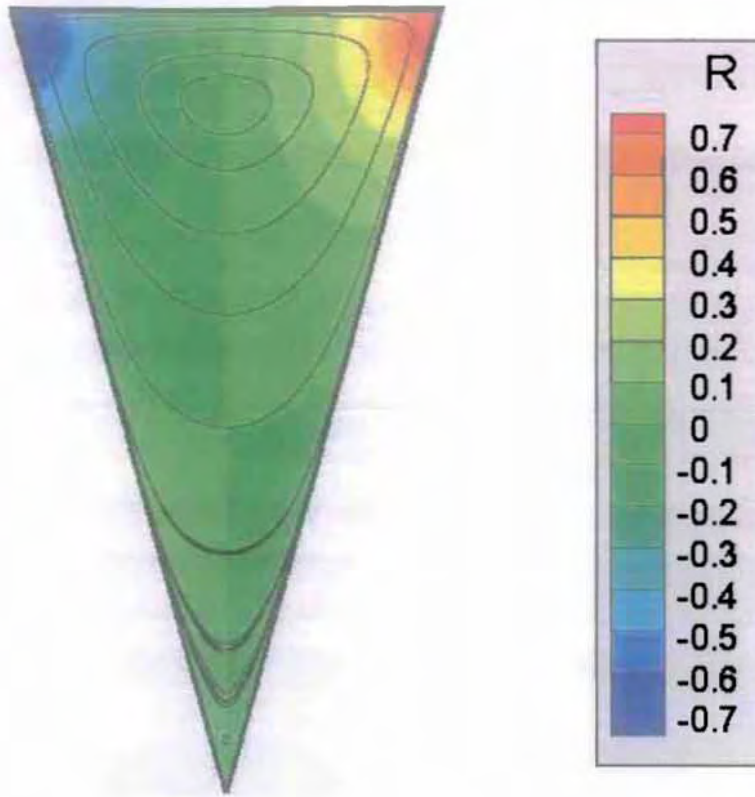
Σχήμα 4.20: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=1.5$.

$\delta=2$



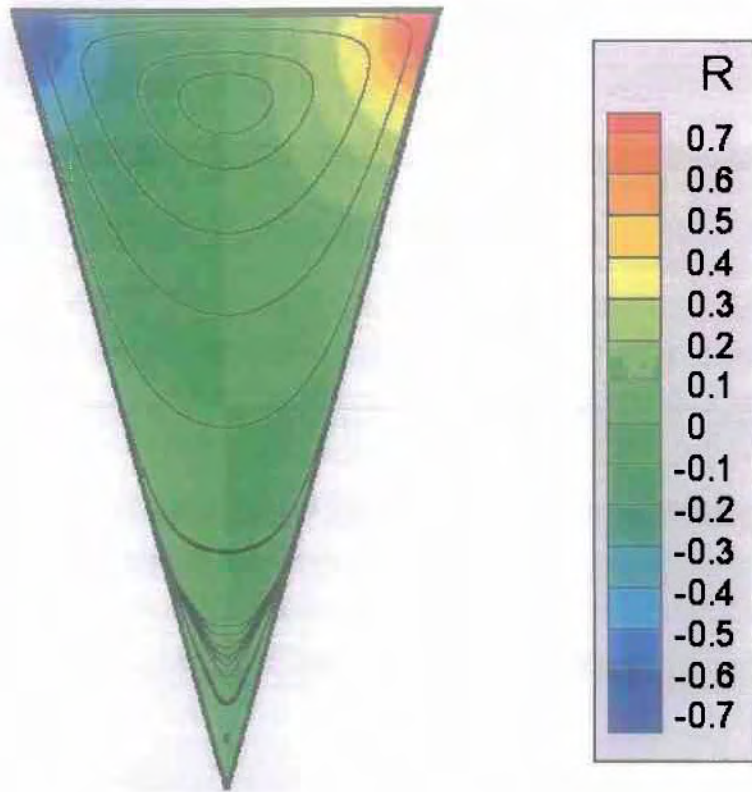
Σχήμα 4.21: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=2$.

$\delta=4$



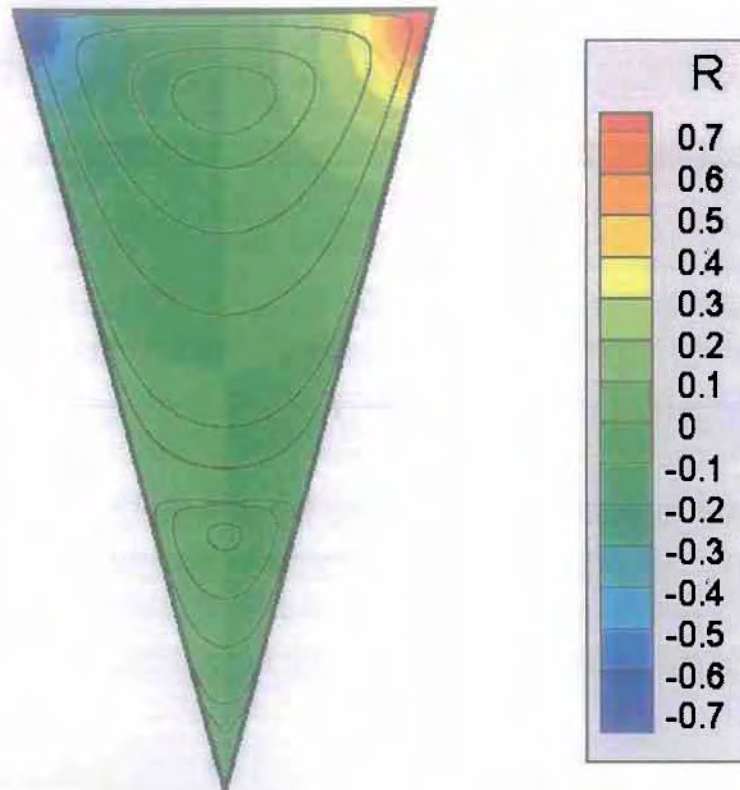
Σχήμα 4.22: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=4$.

$\delta=5$



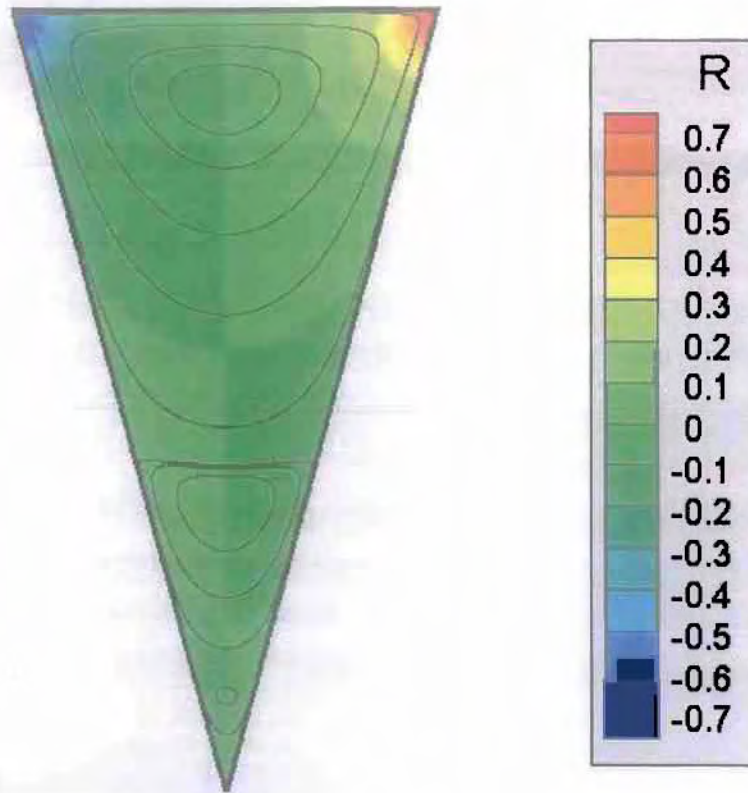
Σχήμα 4.23: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=5$.

$\delta=10$



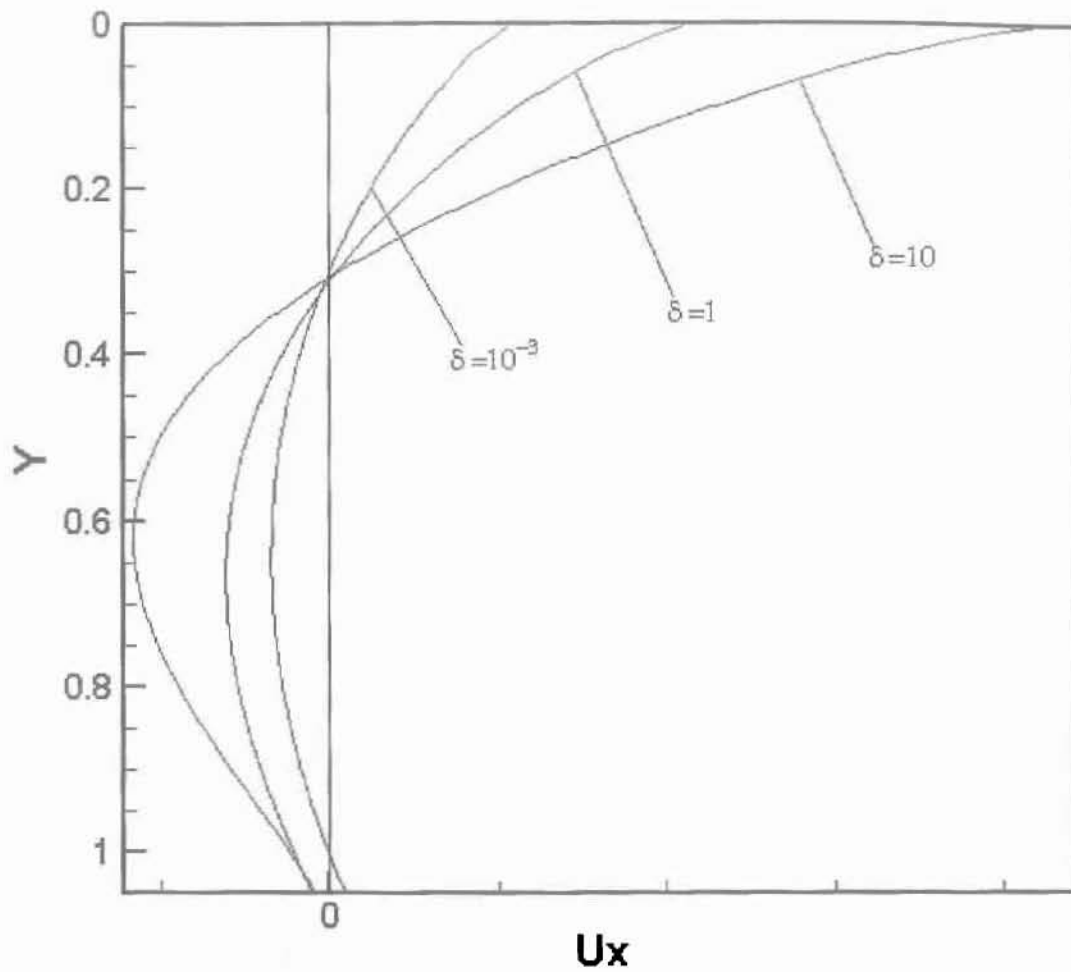
Σχήμα 4.24: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=10$.

$\delta=20$



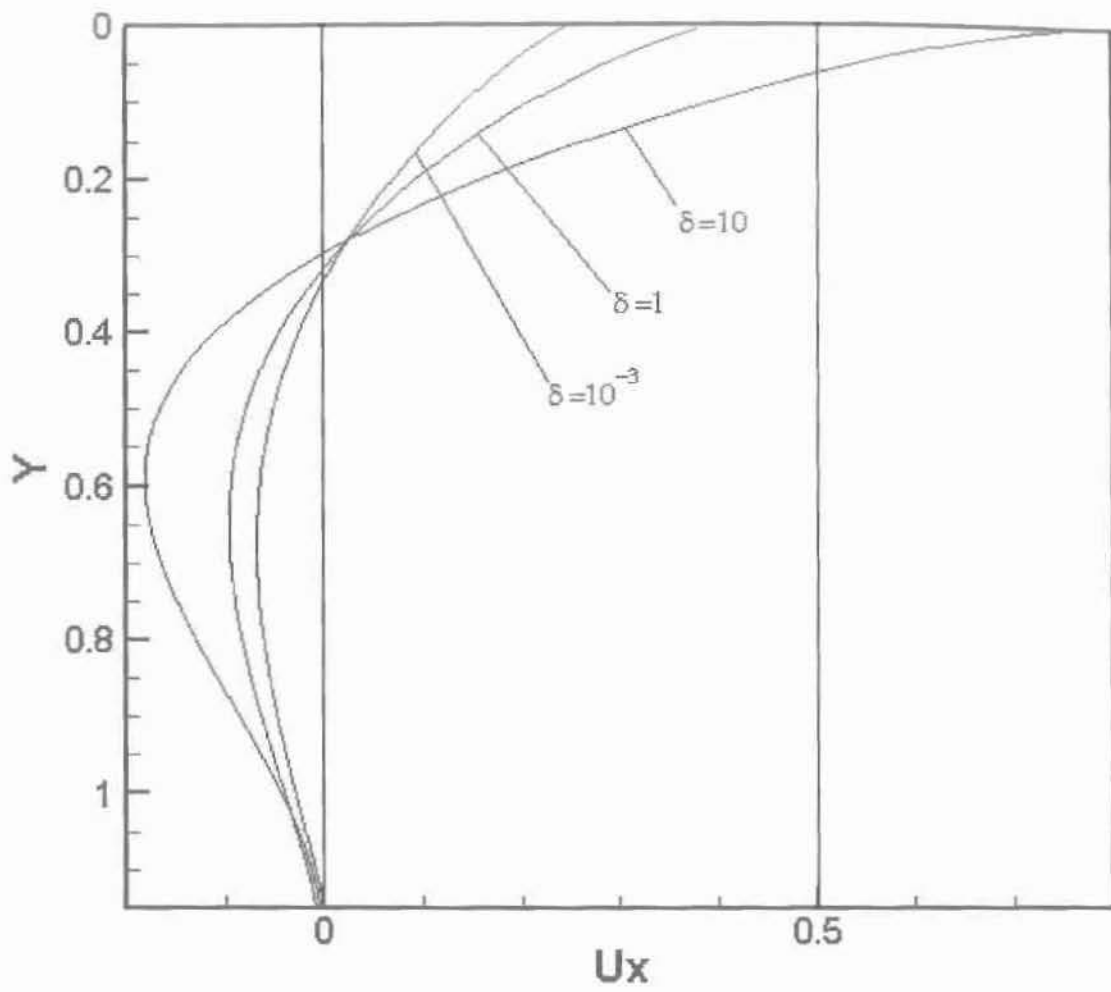
Σχήμα 4.25: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$ και $\delta=20$.

$\omega=30^\circ$



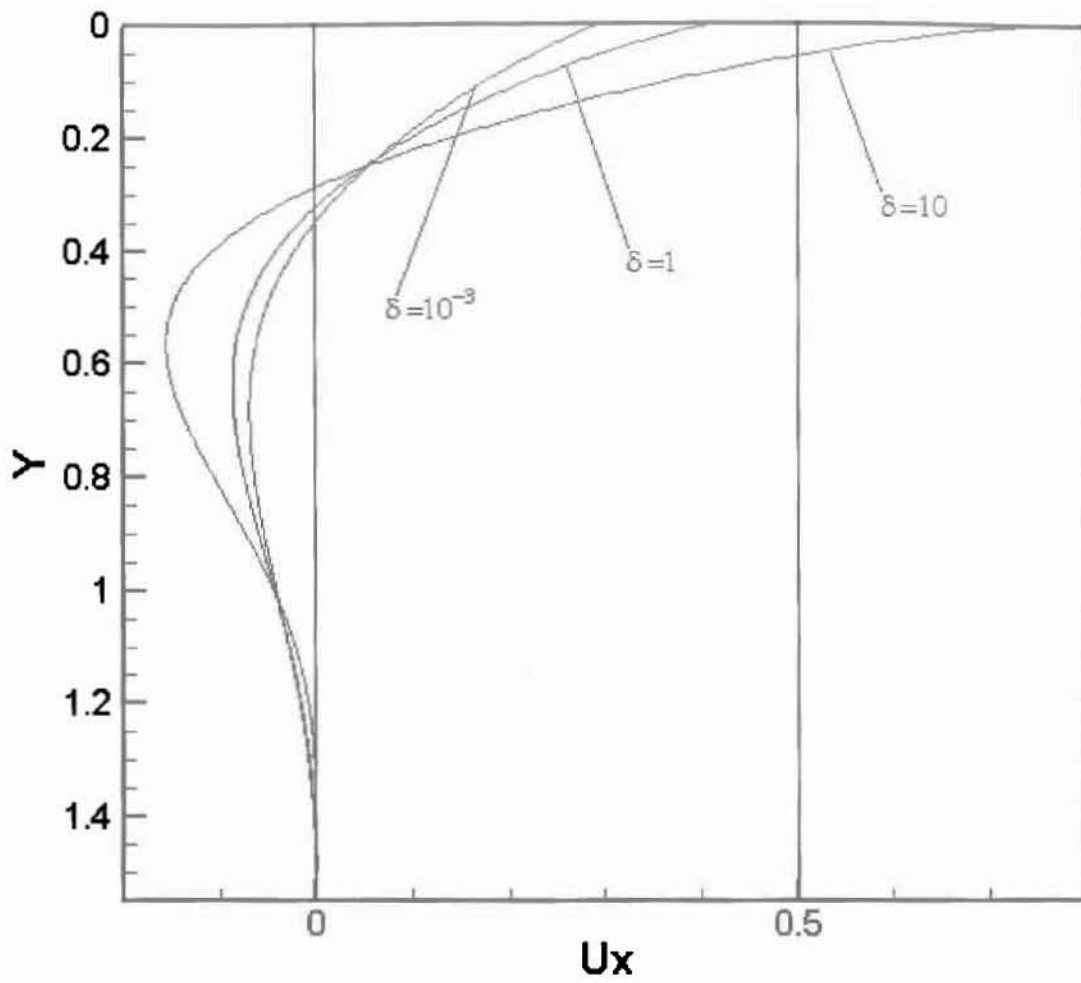
Σχήμα 4.26: Κατανομή ταχυτήτων στο επίπεδη συμμετρίας για γωνία $\Phi=30^\circ$ και $\delta=10^{-3}$, 1 και 10.

$\Phi = 45^\circ$

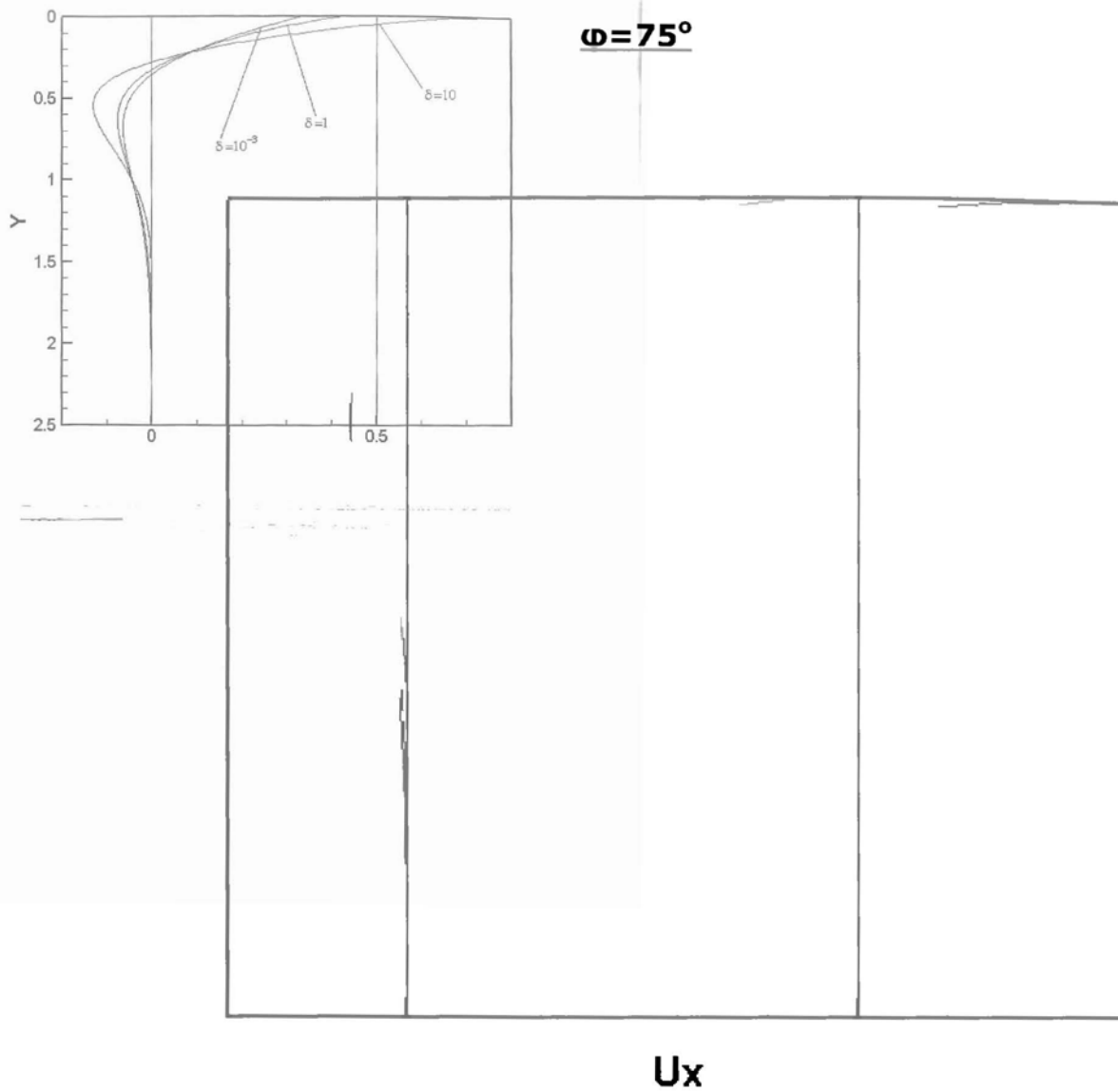


Σχήμα 4.27: Κατανομή ταχυτήτων στο επίπεδη συμμετρίας για γωνία $\Phi = 45^\circ$ και $\delta = 10^{-3}$, 1 και 10.

$$\omega = 60^\circ$$

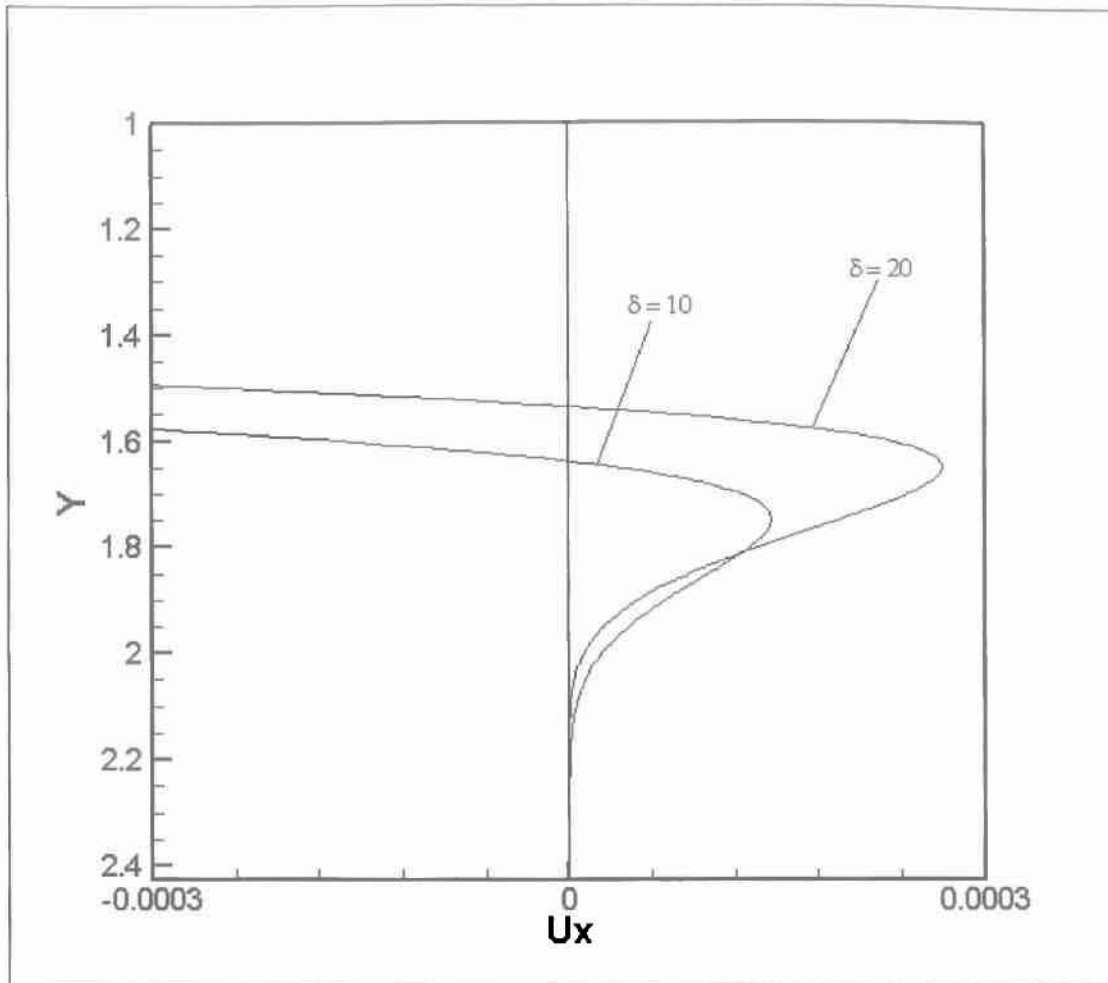


Σχήμα 4.28: Κατανομή ταχυτήτων στο επίπεδη συμμετρίας για γωνία $\Phi = 60^\circ$ και $\delta = 10^{-3}$, 1 και 10.



Σχήμα 4.29: Κατανομή ταχυτήτων στο επίπεδο συμμετρίας για γωνία $\Phi = 75^\circ$ και $\delta = 10^{-3}$, 1 και 10.

$$\omega = 75^\circ$$



Σχήμα 4.30: Κατανομή ταχυτήτων στο επίπεδη συμμετρίας για γωνία $\Phi = 75^\circ$ και $\delta = 10$ και 20 στην περιοχή της δευτερεύουσας δίνης.

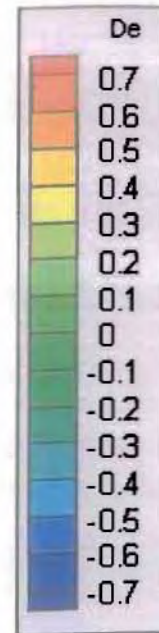
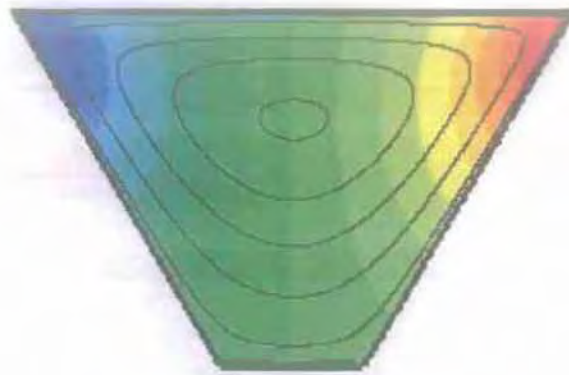
4.1 Πίνακας ταχύτητας στο κέντρο της κινούμενης πλάκας:

δ	$\varphi = 30$	$\varphi = 45$	$\varphi = 60$	$\varphi = 75$
10^{-3}	0.1924	0.2463	0.2939	0.3386
10^{-2}	0.1949	0.2481	0.2952	0.3396
10^{-1}	0.2187	0.2654	0.3082	0.3495
0,5	0.3062	0.3118	0.3596	0.3898
1	0.3870	0.3978	0.4133	0.4334
1,5	0.4225	0.4526	0.4586	0.4700
2	0.5008	0.4962	0.4968	0.5027
4	0.6245	0.6144	0.6058	0.6006
5	0.6637	0.6535	0.6435	0.6358
10	0.7723	0.7641	0.7538	0.7421
20	0.8511	0.8430	0.8390	0.8208

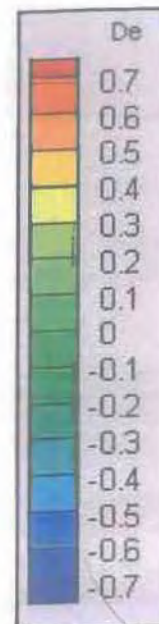
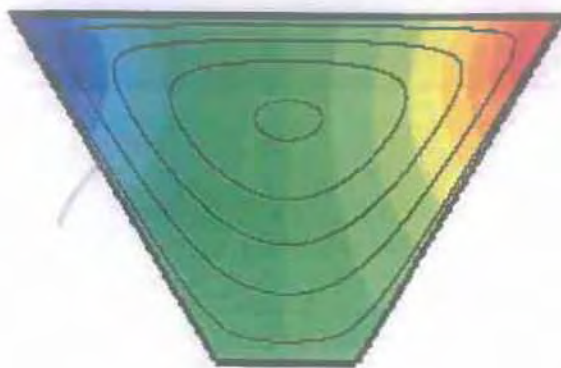
4.2 Πίνακας οπισθέλκουσας:

δ	$\varphi = 30$	$\varphi = 45$	$\varphi = 60$	$\varphi = 75$
10^{-3}	0.8045	0.7843	0.7524	0.7127
10^{-2}	0.8039	0.7836	0.7518	0.7122
10^{-1}	0.7973	0.7764	0.7453	0.7065
0,5	0.7683	0.7470	0.7186	0.6830
1	0.7350	0.7149	0.6894	0.6570
1,5	0.7027	0.6863	0.6644	0.6366
2	0.6757	0.6608	0.6413	0.6160
4	0.5908	0.5710	0.5668	0.5489
5	0.5582	0.5485	0.5374	0.5220
10	0.4483	0.4414	0.4354	0.4277
20	0.3381	0.3381	0.3360	0.3347

$\delta=10^{-3}$

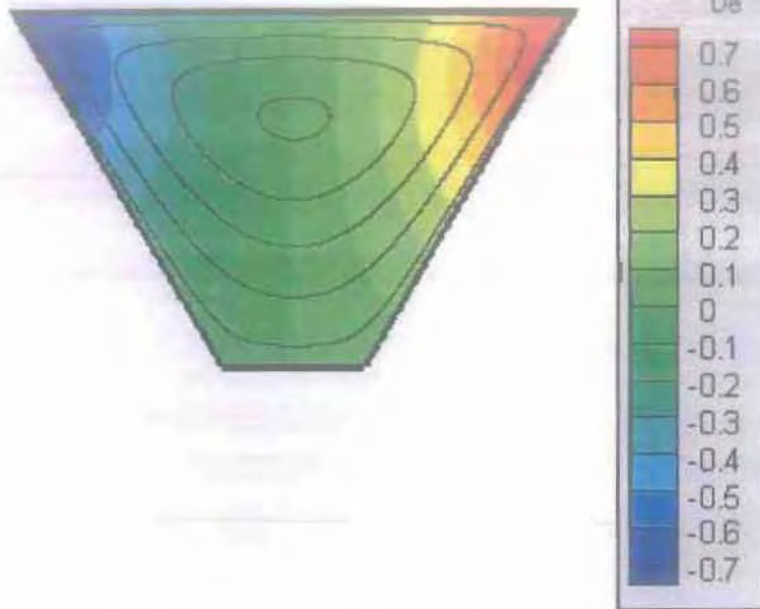


$\delta=10^{-2}$

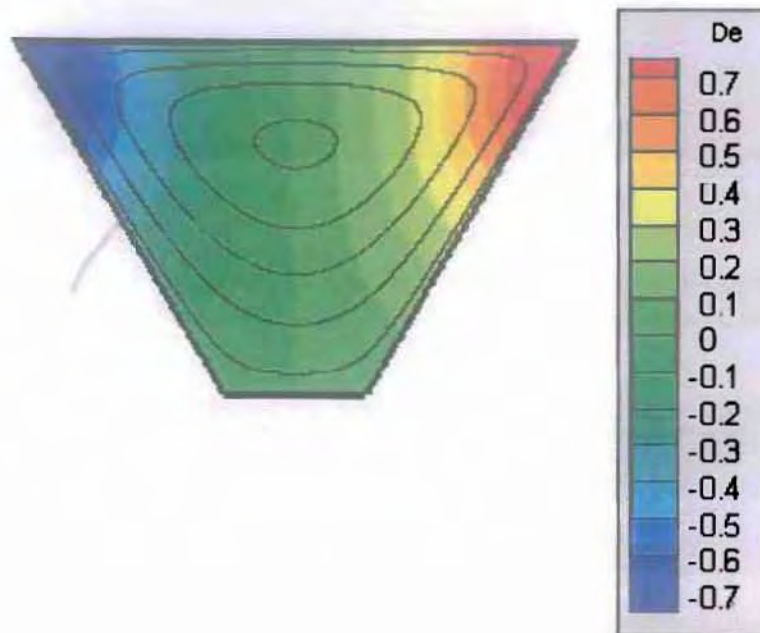


Σχήμα 4.31: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.25$ και $\delta=10^{-3}$ και 10^{-2} .

$\delta=10^{-1}$

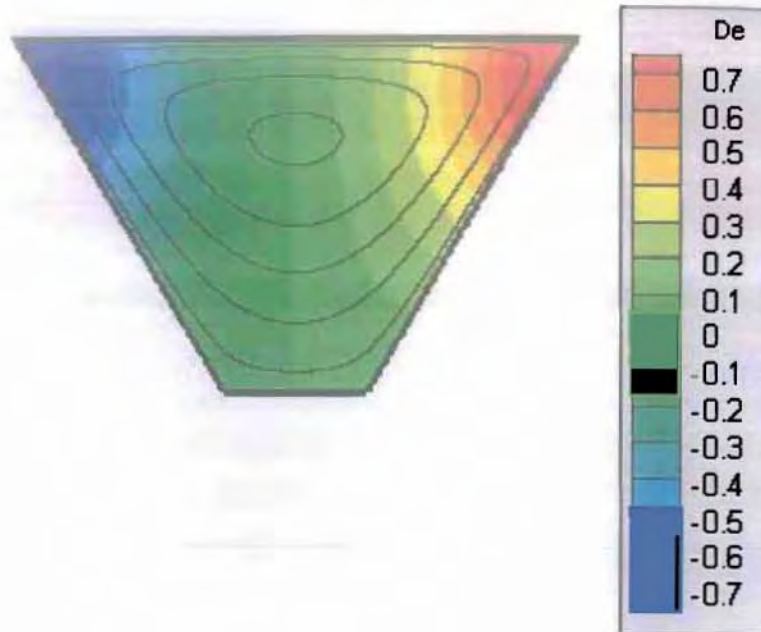


$\delta=0.5$

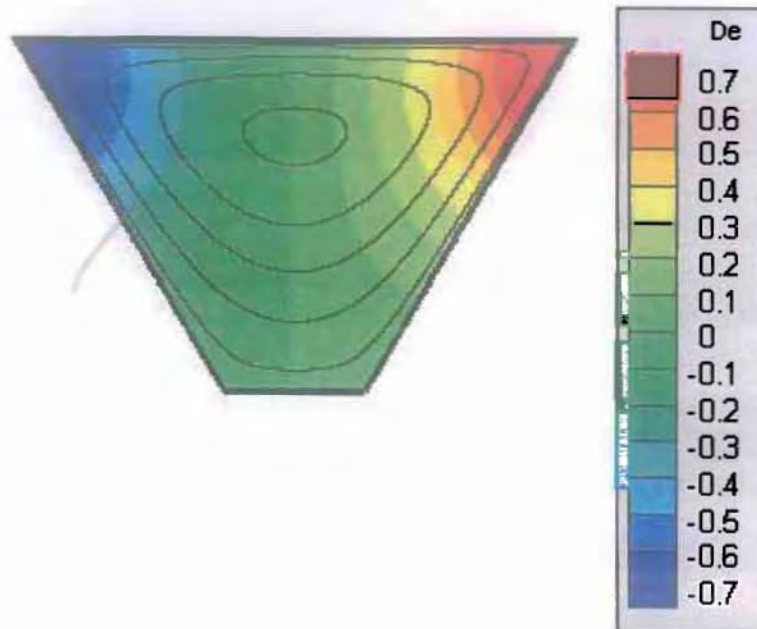


Σχήμα 4.32: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.25$ και $\delta=10^{-1}$ και 0.5.

$\delta=1$

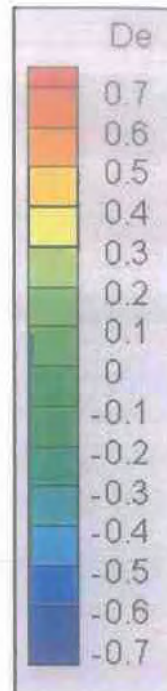
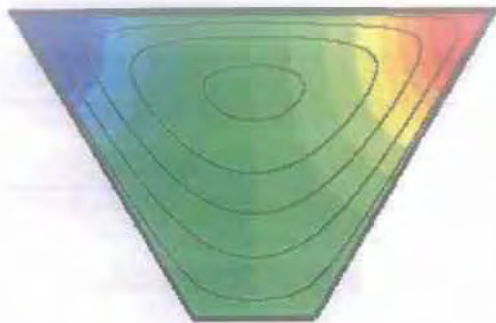


$\delta=2$

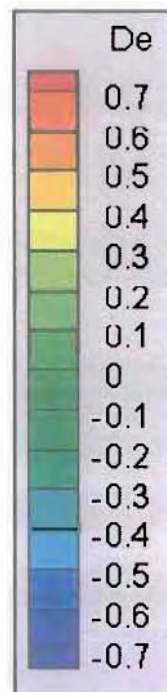
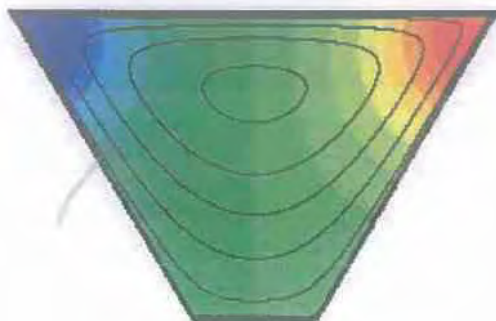


Σχήμα 4.33: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.25$ και $\delta=1$ και 2.

$\delta=4$

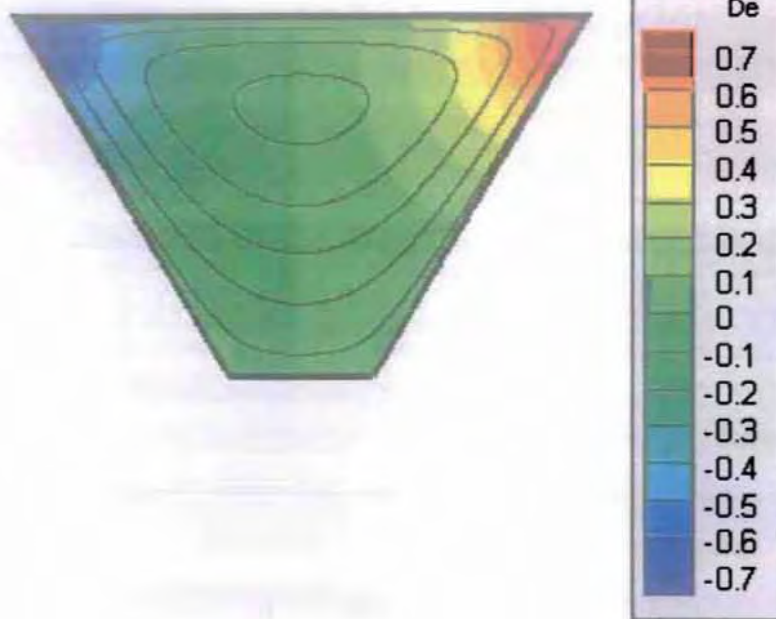


$\delta=5$

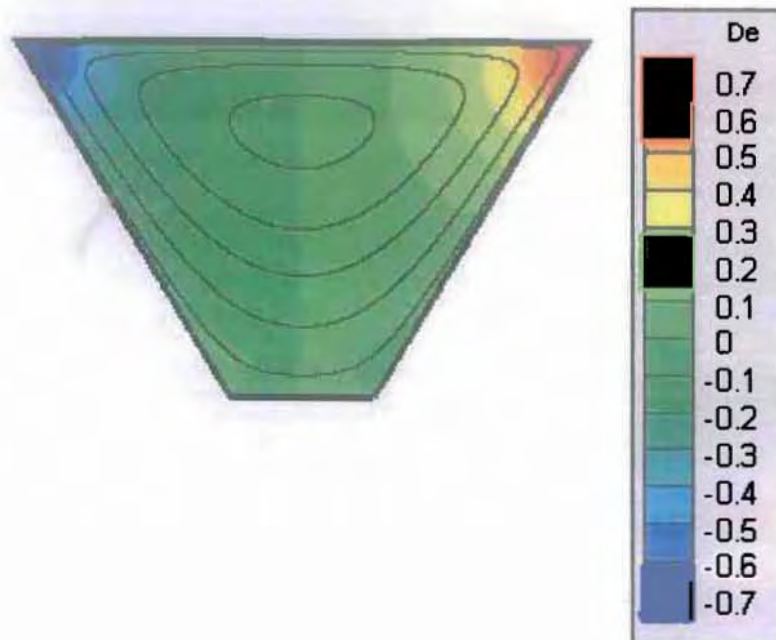


Σχήμα 4.34: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.25$ και $\delta=4$ και 5.

$\delta=10$

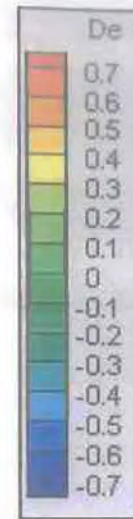
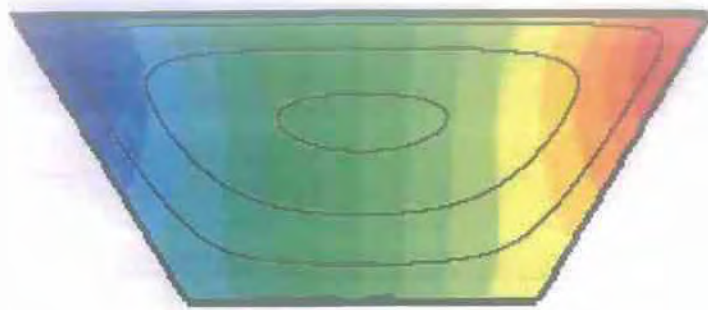


$\delta=20$

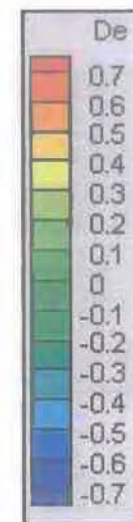
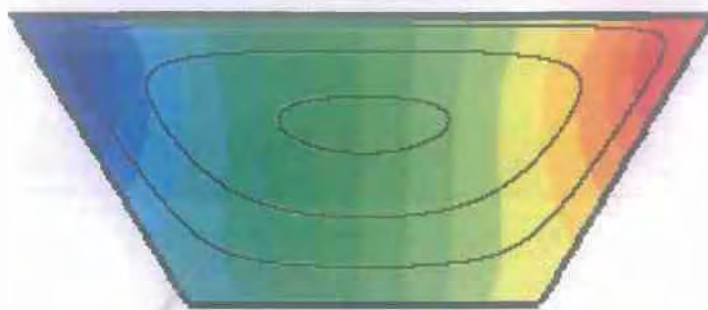


Σχήμα 4.35: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.25$ και $\delta=10$ και 20 .

$\delta=10^{-3}$

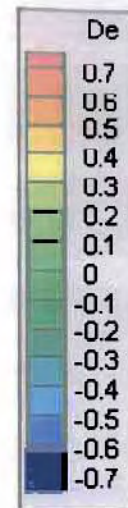
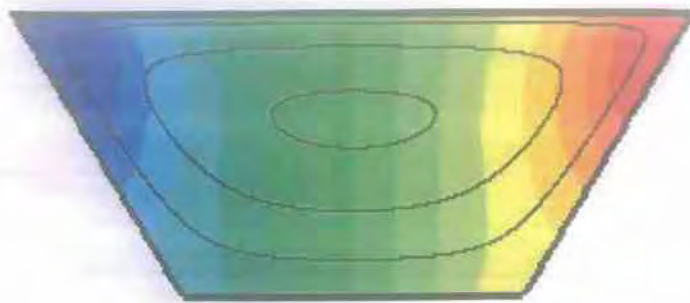


$\delta=10^{-2}$

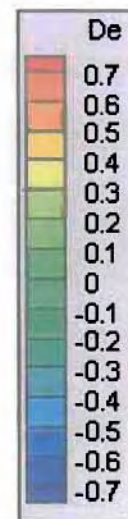
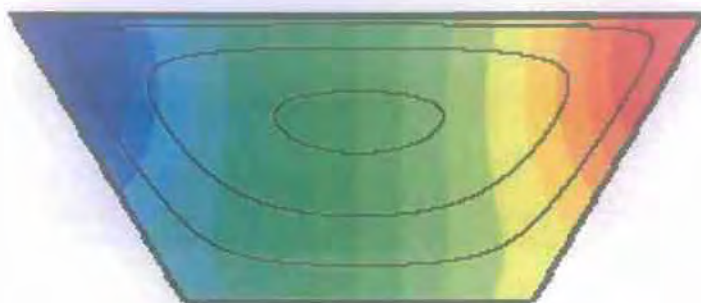


Σχήμα 4.36: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10^{-3}$ και 10^{-2} .

$\delta=10^{-1}$

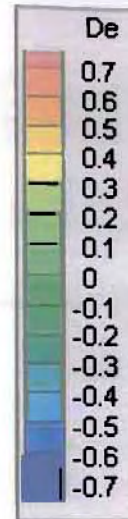
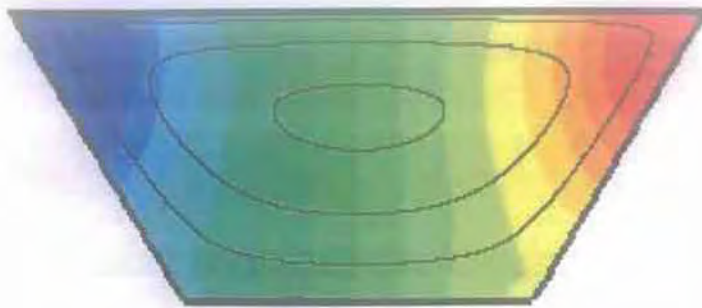


$\delta=0.5$

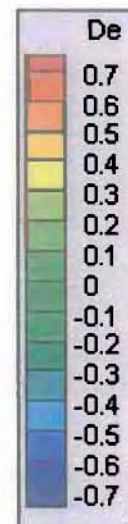
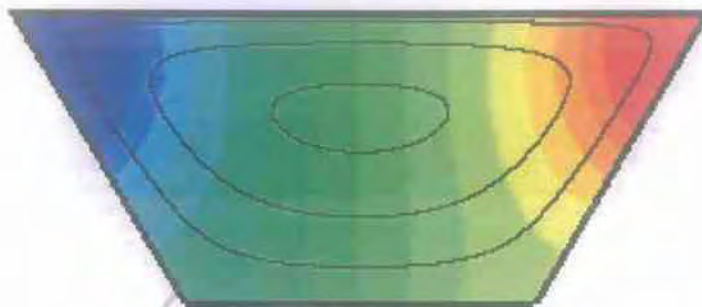


Σχήμα 4.37: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10^{-1}$ και 0.5 .

$\delta=1$

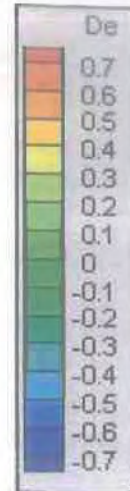
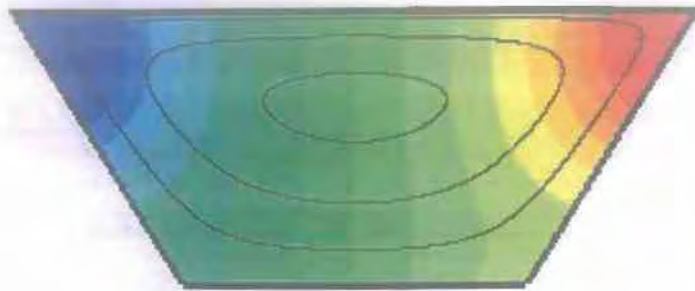


$\delta=2$

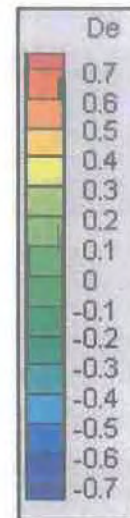
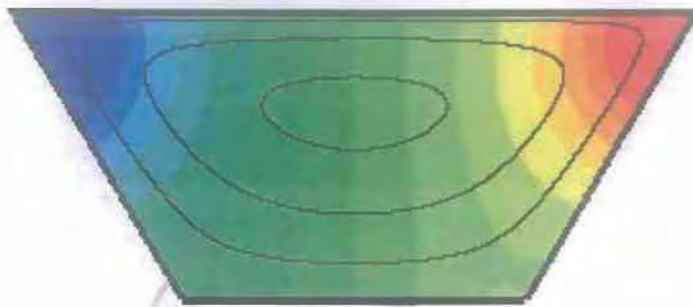


Σχήμα 4.38: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=1$ και 2.

$\delta=4$

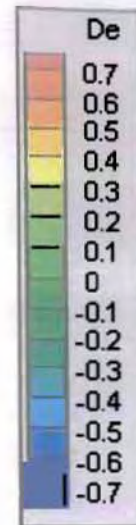
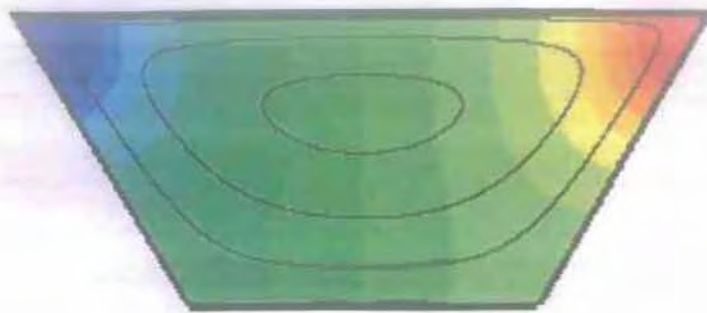


$\delta=5$

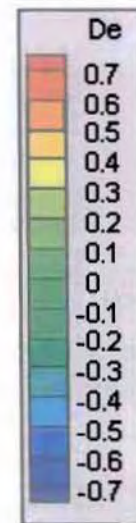
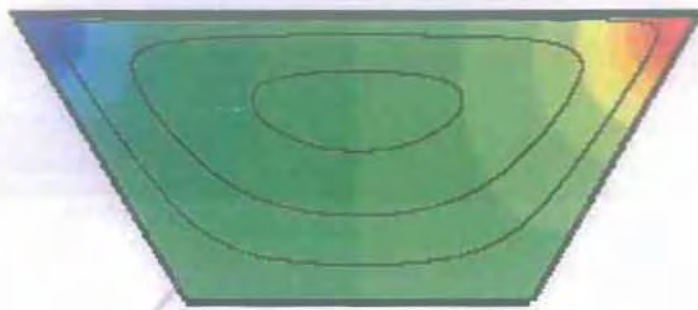


Σχήμα 4.39: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=4$ και 5.

$\delta=10$

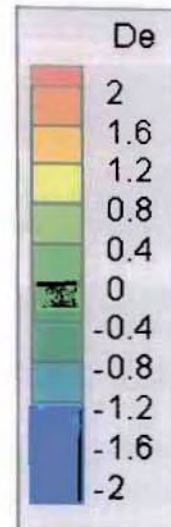


$\delta=20$

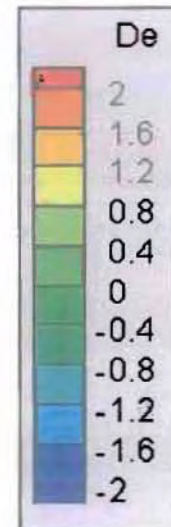


Σχήμα 4.40: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10$ και 20.

$\delta=10^{-3}$

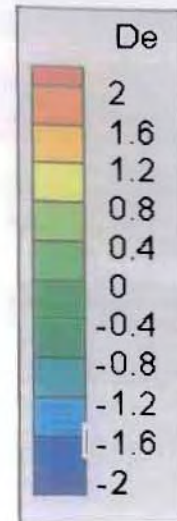


$\delta=10^{-2}$

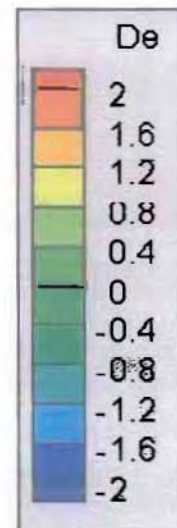


Σχήμα 4.41: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.75$ και $\delta=10^{-3}$ και 10^{-2} .

$\delta=10^{-1}$

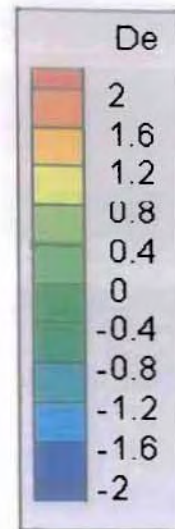


$\delta=0.5$

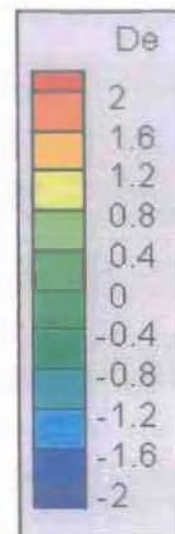


Σχήμα 4.42: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.75$ και $\delta=10^{-1}$ και 0.5.

$\delta=1$

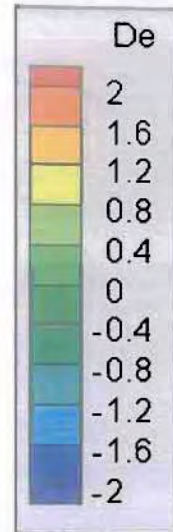


$\delta=2$

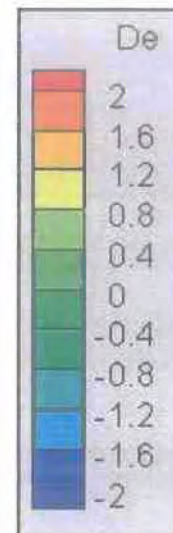


Σχήμα 4.43: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.75$ και $\delta=1$ και 2.

$\delta=4$

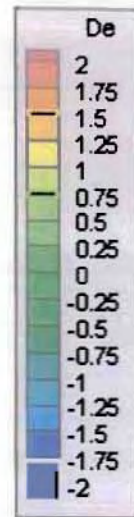


$\delta=5$

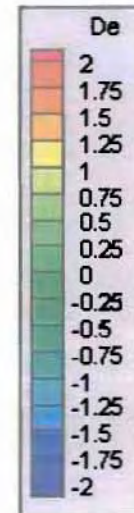


Σχήμα 4.44: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.75$ και $\delta=4$ και 5.

$\delta=10$

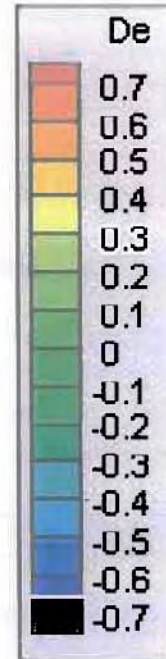
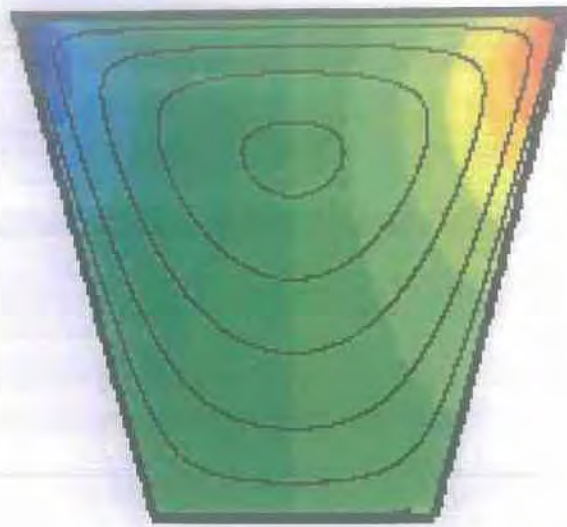


$\delta=20$

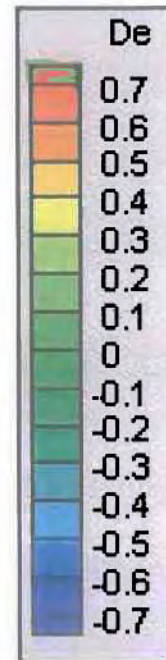
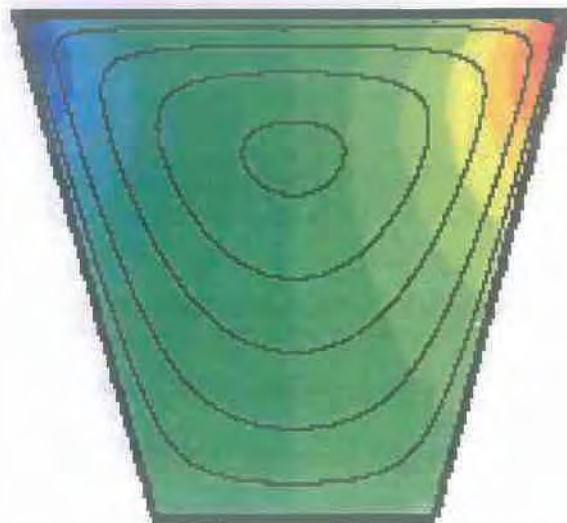


Σχήμα 4.45: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=60^\circ$, $B/b=0.75$ και $\delta=10$ και 20.

$\delta=10^{-3}$

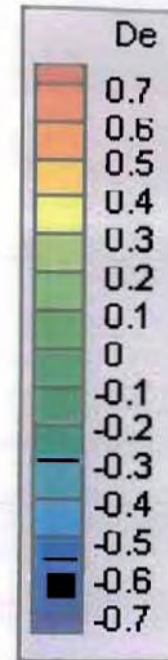
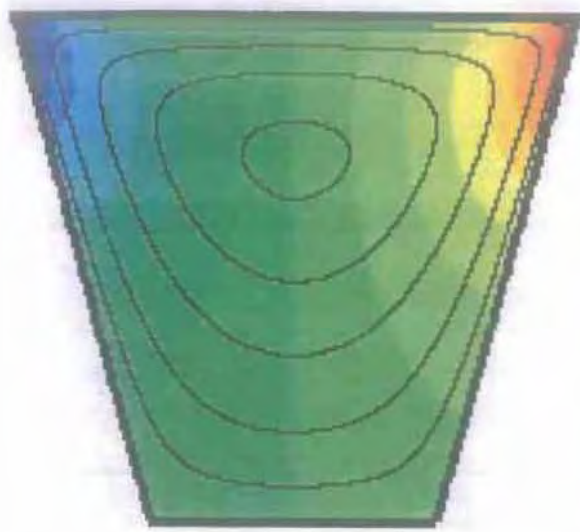


$\delta=10^{-2}$

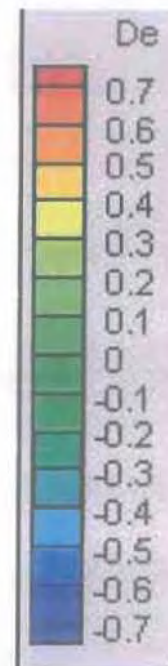
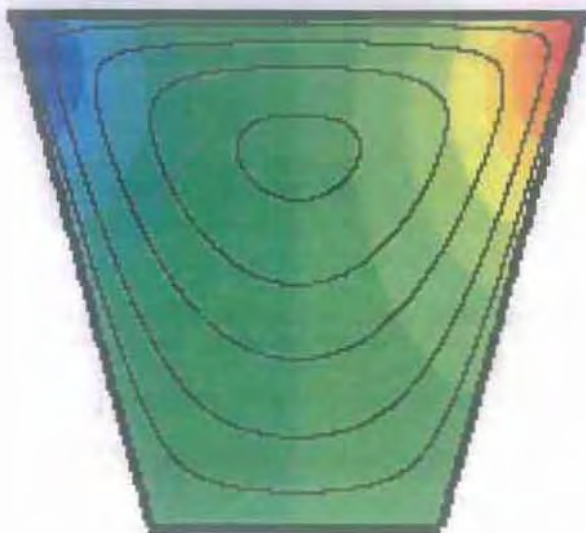


Σχήμα 4.46: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10^{-3}$ και 10^{-2} .

$\delta=10^{-1}$

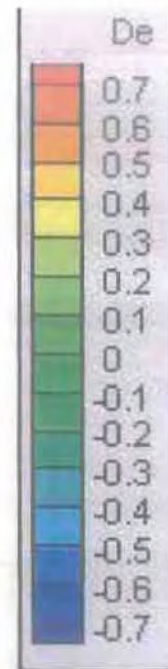
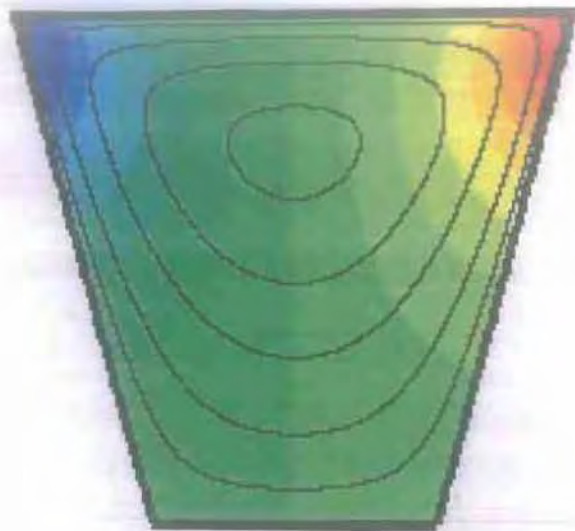


$\delta=0.5$

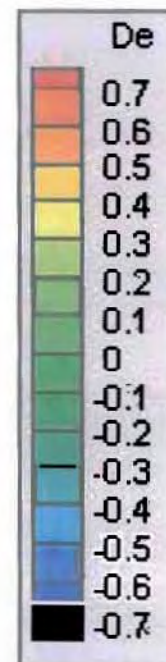
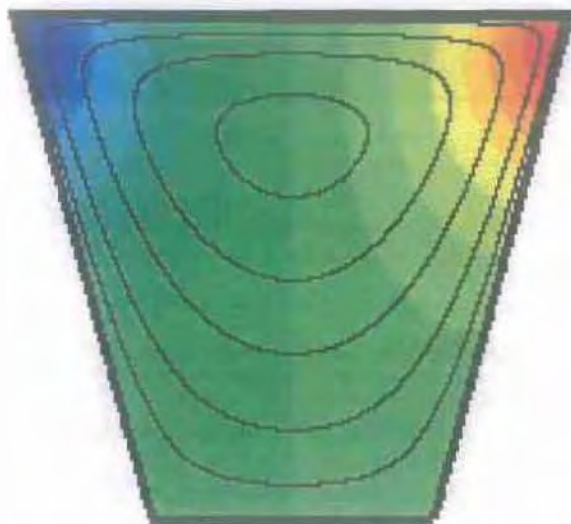


Σχήμα 4.47: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10^{-1}$ και 0.5 .

$\delta=1$

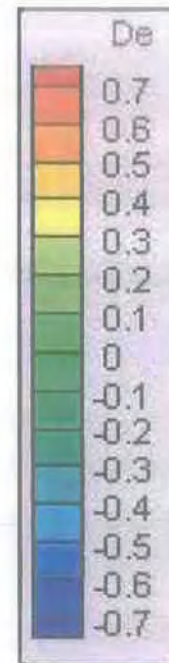
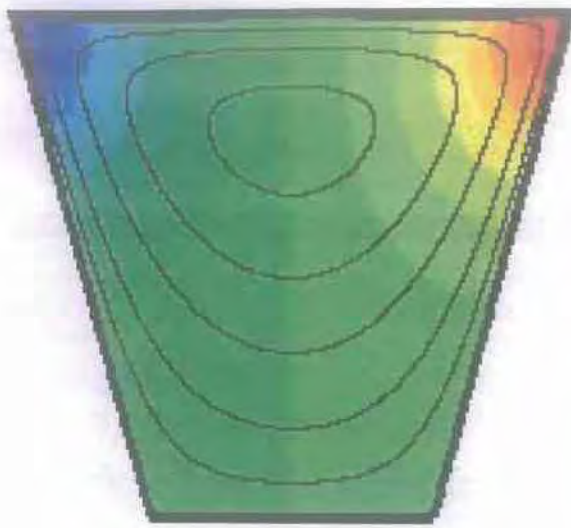


$\delta=2$

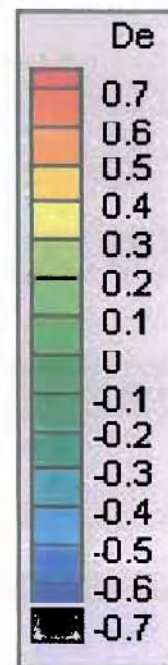
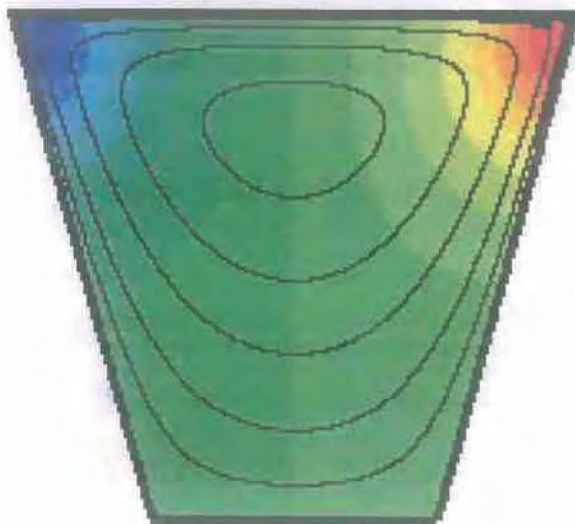


Σχήμα 4.48: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=1$ και 2.

$\delta=4$

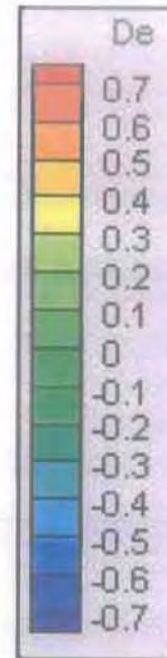
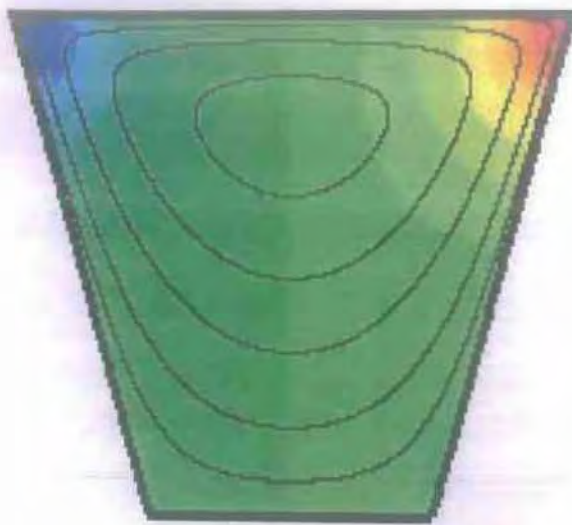


$\delta=5$

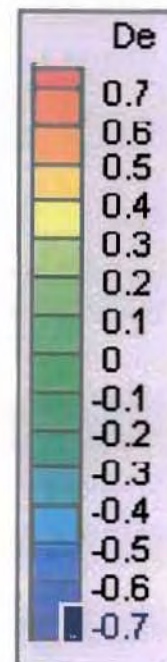
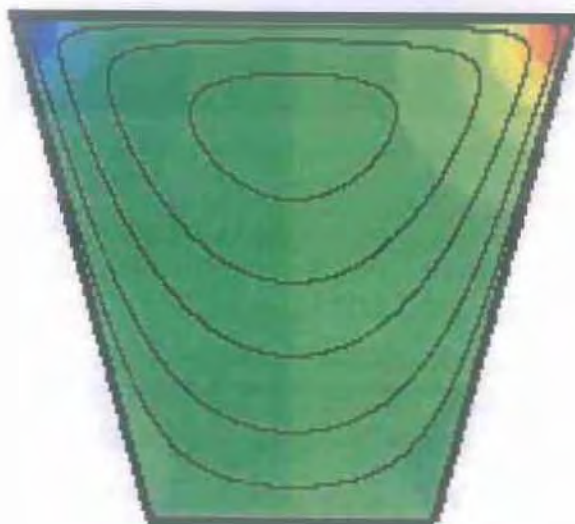


Σχήμα 4.49: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=4$ και 5.

$\delta=10$



$\delta=20$



Σχήμα 4.50: Ροϊκές γραμμές και κατανομή απόκλισης πυκνότητας για $\Phi=75^\circ$, $B/b=0.50$ και $\delta=10$ και 10 .

4.3 Πίνακας οπισθέλκουσας:

δ	B/b=0.25 $\varphi=60$	0.50 60	0.75 60	0.50 75
10^{-3}	0.7527	0.7596	0.7796	0.7142
10^{-2}	0.7521	0.7589	0.7789	0.7137
10^{-1}	0.7457	0.7519	0.7717	0.7082
0.5	0.7196	0.7232	0.7401	0.6856
1	0.6909	0.6916	0.7041	0.6606
2	0.6438	0.6402	0.6455	0.6211
4	0.5702	0.5614	0.5571	0.5559
5	0.5409	0.5307	0.5235	0.5297
10	0.4393	0.4262	0.4131	0.4364
20	0.3389	0.3270	0.3155	0.3425

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η επίλυση ροής σε μικροκοιλότητα τριγωνικής και τραπεζοειδούς διατομής. Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε ήταν η επίλυση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης Boltzmann με τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων και οριακές συνθήκες διάχυσης.

Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν, βασίστηκαν σε υπάρχοντες οι οποίοι επέλυαν τις ροές της ορθογωνικής κοιλότητας και της ροής σε τριγωνικό αγωγό λόγω κλίσης πίεσης. Χρησιμοποιήθηκε τριγωνικό πλέγμα στο χώρο το οποίο παρουσιάζει το πλεονέκτημα της απόλυτης σύμπτωσης του υπολογιστικού πλέγματος με τα πραγματικά όρια της κοιλότητας.

Στην επίλυση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της διάσπασης του προβλήματος σε δύο υποπροβλήματα η οποία διαθέτει το πλεονέκτημα της αποφυγής των αρνητικών συνεπειών που προκαλούν οι ασυνέχειες που παρουσιάζονται μεταξύ της κινούμενης πλάκας και των σταθερών τοιχωμάτων.

Τα αποτελέσματα τα οποία εξήχθησαν αφορούσαν την περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου για διάφορες γωνίες βάσης και του ισοσκελούς τραπεζίου με διάφορους συνδυασμούς γωνίας βάσης και λόγου πλευρών.

Με βάση τα αποτελέσματα, φαίνεται ότι παρουσιάζονται κατ'αντιστοιχία με την ροή σε ορθογωνικό αγωγό ιδιαίτερες ροϊκές διαμορφώσεις αρκετά ενδιαφέρουσες. Πιο συγκεκριμένα, στον τριγωνικό αγωγό φαίνεται ότι αυξανόμενου του δ υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της γωνίας βάσης πάνω από την οποία ξεκινά η δημιουργία μιας δευτερεύουσας δίνης, ενώ για μεγάλες τιμές της γωνίας βάσης και μεγάλα δ δημιουργείται και μια τρίτη δίνη.

Στην περίπτωση της τραπεζοειδούς κοιλότητας, ίσως η πιο ενδιαφέρουσα διαμόρφωση της ροής παρατηρείται σε μεγάλους λόγους των δύο πλευρών, όπου για μικρές τιμές του δ φαίνεται να δημιουργούνται δύο παράλληλες δίνες. Η διαμόρφωση αυτή έρχεται σε συμφωνία με προηγούμενα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας με παρόμοιες γεωμετρικές διαμορφώσεις.

Συμπερασματικά, με την παρούσα εργασία επιτυγχάνεται ο συνδυασμός ήδη ανεπτυγμένων εργαλείων για την επίλυση ροών σε πρακτικά χρήσιμες γεωμετρικές διαμορφώσεις. Είναι γεγονός ότι με την υπάρχουσα τεχνολογία και τα χρησιμοποιούμενα υλικά, η κατασκευή ορθογωνικών καναλιών είναι πολύ δύσκολη και αρκετές φορές αδύνατη, τουλάχιστον με τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα υλικά λόγω φυσικών ιδιοτήτων όπως η γωνία των δεσμών των μορίων και άλλες. Επομένως, η επίλυση ροών όπου το σχήμα του καναλιού μπορεί να λάβει διάφορες πρακτικά χρήσιμες μορφές

μπορεί να αποβεί σημαντική βοήθεια στην κατασκευή νέων εξαρτημάτων στη μικροκλίμακα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- [1] B Bhushan, editor. Springer Handbook of Nanotechnology. Springer, 2004.
- [2] C Cercignani. Theory and Application of the Boltzmann Equation. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1975.
- [3] G A Bird. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [4] S Chen and G D Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annu. Rev. Fluid Mech, 30:329-364, 1998.
- [5] J Broadwell. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. J. Fluid Mech., 19:401-414, 1964.
- [6] H Cabannes. Couette flow for a gas with a discrete velocity distribution. J Fluid Mech., 76:273-287, 1976.
- [7] S Naris, D Valougeorgis. Rarefaction effects in the driven cavity flow over the whole range of Knudsen number. Phys. Fluids, 2005.
- [8] J C Maxwell. On stress in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Phil Trans. R. Soc. Lond., 1879.
- [9] C Cercignani and M Lampis. Kinetic model for gas-surface interaction. Transp. Theory and Stat. Phys., 1:101-114, 1971.
- [10] S Naris, D Valougeorgis, F Sharipov and D Kalempa. Discrete velocity modelling of gaseous mixture flows in MEMS. Superlattices and Microstructures, 35:629-643, 2004.
- [11] P L Bhatnagar, E P Gross and M A Krook. A model for collision processes in gases. Phys. Rev., 94:511-525, 1954.
- [12] E M Shakhov. Method of Investigation of Rarefied Gas Flows. Nauka, Moscow, 1974. [in Russian].
- [13] C Cercignani. Mathematical Methods in Kinetic Theory. Plenum, New York, 1969.
- [14] B B Hamel. Kinetic model for binary gas mixture. Phys. Fluids, 8(3):418-425, 1965.
- [15] F J McCormack. Construction of linearized kinetic models for gaseous mixture and molecular gases. Phys. Fluids, 16:2095-2105, 1973.
- [16] D Valougeorgis and S Naris. Acceleration schemes of the discrete velocity method: Gaseous flows in rectangular microchannels. SIAM J Sci. Comp., 25:534-552,2003.

- [17] S K Loyalka. Momentum and temperature-slip coefficients with arbitrary accommodation at the surface. J Chem. Phys., 48:5432-5436, 1968.
- [18] C E Siewert. Viscous-slip, thermal-slip and temperature-jump coefficients as defined by the linearized Boltzmann equation and the Cercignani-Lampis boundary condition. Phys. Fluids, 15(6):1696-1701, 2003.
- [19] H Lang and S K Loyalka. Diffusion slip velocity-theory and Experiment. Z. Naturforsch Part A-Astrophysik, Physik und Physikalische Chemie, A27:1307-1319, 1972.
- [20] S K Loyalka, N Petrellis and T S Storvik. Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates. Z. Angew. Math. Phys (ZAMP), 30:514-521, 1979. BGK diffuse-specular
- [21] C E Siewert and D Valougeorgis. An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equation for flow in a cylindrical tube. J. Quant. Spectr. Rad. Tran., 72:351-550, 2002.
- [22] T Ohwada, Y Sone and K Aoki. Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates on the basis of the Boltzmann equation for hard sphere molecules. Phys. Fluids A, 1(12):2042-2049, 1989.
- [23] F Sharipov. Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. II. Slip and jump coefficients. Eur. J. Mech. B/ Fluids, 22:133-143, 2003. -
- [24] C Cercignani and F Sernagioto. Cylindrical Poiseuille flow of a rarefied gas. Phys. Fluids, 9(1):40-44, 1966.
- [25] F Sharipov. Rarefied gas flow through a long tube at any temperature difference. J. Vac. Sci. Technol. A, 14(4):2627-2635, 1996. }
- [26] B T Porodnov, A N Kulev and F T Tukhvetov. Thermal transpiration in a circular capillary with a small temperature difference. J. Fluid Mech., 88(4):609-622, 1978. BGK Temp diff
- [27] S K Loyalka and J H Ferziger. Model dependence of the slip coefficient. Phys. Fluids, 10(8):1833-1839, 1967. ↓
- 82 [28] D Valougeorgis. An analytical solution of the s-model kinetic equation. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 54:112-124, 2003. }
- [29] D Valougeorgis and J R Thomas. Exact numerical results for Poiseuille and thermal creep flow in a cylindrical tube. Phys. Fluids, 29(2):423-429, 1986. BGK Temp diff

- [30] F. Sharipov, V. Seleznev. Data on internal rarefied gas flows. *J. Phys. Chem. Ref. Data* 27(3)(1998)657-706.
- [31] K. Aoki. Numerical analysis of rarefied gas flows by finite-difference method, in: E.P. Muntz, D.P. Weaver, D.H. Campbell (Eds.), *Rarefied Gas Dynamics*, vol.118, AIAA, Washington, DC, 1989, p.297.
- [32] I. Graur, F Sharipov. Gas flow through an elliptical tube over the Whole range of gas rarefaction. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 10.1016/j.euromechflu.2007.07.003. 568
- [33] F M Sharipov and Kremer G M. Non-isothermal Couette flow of a rarefied gas between two cylinders. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(1):121-130, 1999. 568 569 570
- [34] L M de Socio, N Ianiro and L Marino. Effects of the centrifugal forces On a gas between rotating cylinders. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 14(2):269-275, 2000.
- [35] S K Stefanov, I D Boyd and C P Cai. Monte Carlo analysis of macroscopic fluctuations in a rarefied hypersonic flow around a cylinder. *Phys. Fluids*, 12(5):1226-1239, 2000.
- [36] L M G Cumin, F M Sharipov and G M Kremer. Rarefied gas flow between two cylinders caused by the evaporation and condensation on their surfaces. *Phys. Fluids*, 10(12):3203-3208, 1998.
- [37] A Beskok and G E Karniadakis. Simulation of heat and momentum transfer in complex micro-geometries. *J. Thermophys. Heat Tr.* 8(4):647-655, 1994.
- [38] A Beskok, G E Karniadakis and W Trimmer. Rarefaction and compressibility effects in gas microflows. *Trans. ASME*, 118(3):448-456, 1996.
- [39] S Naris and D Valougeorgis. The driven cavity flow over the whole range of the Knudsen number. *Phys. Fluids*, 17(9):907-106, 2005.
- [40] S Naris and D Valougeorgis. Rarefied gas flow in a triangular duct Based on a boundary fitted lattice. *European Journal of Mechanics B/Fluids* 27(2008) 810-822.
- [41] Lajos Szalmas , Dimitris Valougeorgis. Rarefied gas flow of binary mixtures through long channels with triangular and trapezoidal cross sections. *Microfluid Nanofluid* (2010) 9:471-487.
- [42] S Naris and D Valougeorgis. Boundary-driven nonequilibrium gas flow in a grooved channel via kinetic theory. *Phys. Fluids*, 19,067103 (2007).
- [43] Στέργιος Νάρης. Ροές αερίων σε μικροδιατάξεις με βελτιωμένες μεθόδους διακριτών ταχυτήτων (Διδακτορική Διατριβή), 2005.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000104072