

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Ανάλυση δοκών με λεπτότοιχες
«ανοιχτές» διατομές και στρεπτικούς
περιορισμούς στις στηρίξεις**



ΤΟΥΜΑΝΙΔΟΥ Π.ΘΕΜΙΣ

A.M. : 504046/801



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 7325/1
Ημερ. Εισ.: 10-07-2009
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2009
ΤΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Ανάλυση δοκών με λεπτότοιχες
«ανοιχτές» διατομές και στρεπτικούς
περιορισμούς στις στηρίξεις**



ΤΟΥΜΑΝΙΔΟΥ Π.ΘΕΜΙΣ

A.M. : 504046/801

© 2009 Τουμανίδου Θέμις

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής :

*Πρώτος Εξεταστής
(Επιβλέπων)*

Δρ. Αράβας Νικόλαος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Γιαννακόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Κερμανίδης Αλέξιος
Λέκτορας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας την πτυχιακή μου εργασία, θα ήθελα κατ' αρχάς να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Υπολογιστικής Μηχανικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και επιβλέποντα της παρούσας εργασίας κ. Αράβα Νικόλαο, για την υποστήριξη και την υπεύθυνη καθοδήγησή του τα τελευταία δύο χρόνια, την άριστη συνεργασία μας και κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξαρχής.

Η εργασία αυτή δε θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς την πολύτιμη βοήθεια του Υποψήφιου Διδάκτορα Σπύρου Λεωνίδα που διέθεσε χρόνο και ενδιαφέρον στην προσπάθειά μου και στα λάθη που προέκυπταν στη διαδρομή.

Ευχαριστώ πολύ τους καθηγητές του Τμήματος και ιδιαίτερα τους καθηγητές του Τομέα Μηχανικής, Υλικών και Κατεργασιών γιατί με έκαναν να αγαπήσω πραγματικά το επάγγελμα του Μηχανολόγου Μηχανικού και να εκτιμήσω το ρόλο του Μηχανικού σε όλους τους τομείς δραστηριότητάς του.

Τέλος, αλλά με ιδιαίτερη σημασία για εμένα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την παρουσία και τη στήριξή τους σε όλη αυτή την πορεία των πέντε χρόνων.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Αράβα Νικόλαο για το ενδιαφέρον και την ενθάρρυνσή του καθώς και στη συνεργάτιδα του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, Δρ. Ζερβάκη Αννα γιατί αποτελεί για εμένα πρότυπο συνδυασμού επιτυχημένης μητέρας και Μηχανικού.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε με σκοπό τη μελέτη και σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης των αναπτυσσόμενων τάσεων σε πακτωμένη δοκό λεπτότοιχης ανοιχτής διατομής τύπου «ανάποδου» Z που υφίσταται στρέψη εξαιτίας φόρτισης στο κάτω πέλμα.

Η ύπαρξη της πακτώσεως εμποδίζει τη δοκό από ελεύθερη στρέβλωση και επομένως διαψεύδει τη θεωρία καθαρής στρέψης κατά Saint Venant. Ο στρεπτικός περιορισμός που επιβάλλεται στη δοκό οδηγεί στην ανάπτυξη ορθών αξονικών τάσεων που λαμβάνουν σημαντικές τιμές στο μεγαλύτερο μέρος της δοκού. Η αναλυτική λύση που διέπει η θεωρία του Vlasov περιλαμβάνει την περίπτωση ελεύθερης στρέψης προσθέτοντας τη συνιστώσα της αντίδρασης στον περιορισμό στρέβλωσης.

Ως βασικό αποδεικτικό εργαλείο για τον αριθμητικό υπολογισμό της εντατικής κατάστασης στη δοκό χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μέσω της πλατφόρμας Abaqus. Δημιουργήθηκε τριδιάστατο αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της παρεμποδισμένης στρέψης δοκού ανάποδου Z και έγινε διακριτοποίηση ορθογωνικού και τετραγωνικού πλέγματος για τη μελέτη των αναπτυσσόμενων τάσεων.

Εν κατακλείδι, παρουσιάζονται και μελετώνται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, γίνεται σύγκριση της αριθμητικής λύσεως με την αναλυτική και σχολιάζεται η σύγκλιση ή μη ανάμεσα στις δύο λύσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΣΤΡΕΨΗ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ	14
2.1 - Ελεύθερη στρέψη (Στρέψη κατά Saint Venant)	14
2.2 - Στρέψη με στρεπτικούς περιορισμούς (Θεωρία Vlasov)	18
2.2.1 – Γενικά	18
2.2.2 – Υπολογισμός τάσεων	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	26
3.1 – Χαρακτηριστικά της διατομής	26
3.2 – Τρόπος μελέτης - αντιμετώπισης του προβλήματος	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (FEM) ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ	29
4.1 – Εισαγωγή	29
4.1.1 – Γενικά	29
4.1.2 – Βιβλιογραφική ανασκόπηση	29
4.2 – Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων τριών διαστάσεων (3D)	31
4.3 – Χαρακτηριστικά αποτελέσματα	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΜΕ ΛΥΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (FEM)	41
5.1 – Διατμητικές τάσεις σ_{xs}	41
5.1.1 – Διατομή πακτώσεως $x = 0$	41
5.1.2 – Διατομή μακριά από την πάκτωση $x = 0.375L$	55
5.2 – Ορθές αξονικές τάσεις σ_{xx}	68
5.2.1 – Διατομή πακτώσεως $x = 0$	68
5.2.2 – Διατομή μακριά από την πάκτωση $x = 0.375L$	81
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗ ΓΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΑΚΤΩΣΕΩΣ	94
6.1 – Θεωρητική ανάλυση	94
6.2 – Εφαρμογή της θεωρίας Ασυμπτωτικής Ανάλυσης σε δοκό λεπτό- ανοιχτής διατομής τύπου Z	101

6.2.1 – Άνω Πέλμα ($x = 0$)	102
6.2.2 – Κάτω Πέλμα ($x = 0$)	104
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	106
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	111

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<u>Σχήμα 1.1</u> :	Τυπικές ανοιχτές (α) και κλειστές (β) λεπτότοιχες διατομές.....	13
<u>Σχήμα 2.1</u> :	Κατανομή διατμητικής τάσης σε λεπτότοιχη ανοιχτή διατομή.....	15
<u>Σχήμα 2.2</u> :	Σχηματική παράσταση πόλου, τομεακής αρχής και τελικού σημείου της τομεακής επιφάνειας $\omega(s)$	17
<u>Σχήμα 2.3</u> :	Μεταβολή της αξονικής τάσης λόγω παρεμπόδισης στρέβλωσης κατά μήκος της δοκού	17
<u>Σχήμα 2.4</u> :	Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (s,n).....	20
<u>Σχήμα 2.5</u> :	Συνιστώσες συνολικής διατμητικής τάσης σ_{xs} της διατομής.....	22
<u>Σχήμα 3.1</u> :	Σχηματική παράσταση προβλήματος σε διατομή ανάποδου Z.....	26
<u>Σχήμα 3.2</u> :	Σχηματική παράσταση και διαστάσεις πελμάτων διατομής ανάποδου Z.....	27
<u>Σχήμα 3.3</u> :	Σχηματική παράσταση και διαστάσεις κορμού διατομής ανάποδου Z.....	27
<u>Σχήμα 3.4</u> :	Διατομή ελεύθερου άκρου που φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο.....	28
<u>Σχήμα 4.1</u> :	Τρισδιάστατο (3D) γραμμικό οκτακομβικό στοιχείο.....	32
<u>Σχήμα 4.2</u> :	Παράσταση μελετώμενης διατομής ανάποδου Z.....	32
<u>Σχήμα 4.3</u> :	Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων 3-D.....	33
<u>Σχήμα 4.4</u> :	Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων πελμάτων.....	33
<u>Σχήμα 4.5</u> :	Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων κορμού.....	34
<u>Σχήμα 4.6</u> :	Διακριτοποίηση πελμάτων στο επίπεδο yz στη διατομή πακτώσεως.....	35
<u>Σχήμα 4.7</u> :	Διακριτοποίηση κορμού στο επίπεδο yz στη διατομή πακτώσεως.....	35
<u>Σχήμα 4.8</u> :	Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων διατομής πακτώσεως..	36
<u>Σχήμα 4.9</u> :	Αρίθμηση κόμβων στη διεύθυνση του άξονα x.....	37
<u>Σχήμα 4.10</u> :	(α) Κατανομή ορθής τάσης σ_{11} σε κάθε τμήμα της δοκού , (β) Κατανομή ορθής τάσης σ_{11} στην παραμορφωμένη δοκό..	38
<u>Σχήμα 4.11</u> :	(α) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{12} σε κάθε τμήμα της δοκού , (β) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{12} στην παραμορφωμένη δοκό	39
<u>Σχήμα 4.12</u> :	(α) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{13} σε κάθε τμήμα της δοκού , (β) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{13} στην παραμορφωμένη δοκό	40

<u>Σχήμα 5.1</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος...	42
<u>Σχήμα 5.2</u> :	Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	43
<u>Σχήμα 5.3</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	44
<u>Σχήμα 5.4</u> :	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0$	45
<u>Σχήμα 5.5</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος..	46
<u>Σχήμα 5.6</u> :	Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	47
<u>Σχήμα 5.7</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	48
<u>Σχήμα 5.8</u> :	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0$	49
<u>Σχήμα 5.9</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού.....	50
<u>Σχήμα 5.10</u> :	Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό στη διατομή $x = 0$	51
<u>Σχήμα 5.11</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0$	52
<u>Σχήμα 5.12</u> :	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0$	53
<u>Σχήμα 5.13</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος...	55
<u>Σχήμα 5.14</u> :	Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	56
<u>Σχήμα 5.15</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	57
<u>Σχήμα 5.16</u> :	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0.375L$	58
<u>Σχήμα 5.17</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος....	59
<u>Σχήμα 5.18</u> :	Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	60
<u>Σχήμα 5.19</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	61
<u>Σχήμα 5.20</u> :	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0.375L$	62
<u>Σχήμα 5.21</u> :	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού.....	63
<u>Σχήμα 5.22</u> :	Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$	64
<u>Σχήμα 5.23</u> :	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$	65

<u>Σχήμα 5.24 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0.375L$	66
<u>Σχήμα 5.25 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος	68
<u>Σχήμα 5.26 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	69
<u>Σχήμα 5.27 :</u>	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	70
<u>Σχήμα 5.28 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0$	71
<u>Σχήμα 5.29 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος.....	72
<u>Σχήμα 5.30 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	73
<u>Σχήμα 5.31 :</u>	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$	74
<u>Σχήμα 5.32 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0$	75
<u>Σχήμα 5.33 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού.....	76
<u>Σχήμα 5.34 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό στη διατομή $x = 0$	77
<u>Σχήμα 5.35 :</u>	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0$	78
<u>Σχήμα 5.36 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0$	79
<u>Σχήμα 5.37 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος.....	81
<u>Σχήμα 5.38 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	82
<u>Σχήμα 5.39 :</u>	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	83
<u>Σχήμα 5.40 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0.375L$	84
<u>Σχήμα 5.41 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος.....	85
<u>Σχήμα 5.42 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$...	86
<u>Σχήμα 5.43 :</u>	Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$	87
<u>Σχήμα 5.44 :</u>	Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0.375L$	88
<u>Σχήμα 5.45 :</u>	Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού.....	89
<u>Σχήμα 5.46 :</u>	Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$	90

<u>Σχήμα 5.47 :</u> Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$	91
<u>Σχήμα 5.48 :</u> Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0.375L$	92
<u>Σχήμα 6.1 :</u> Σχηματική παράσταση πολικού $\Sigma\Sigma$ στη γωνία πακτώσεως.....	95
<u>Σχήμα 6.2 :</u> Μεταβολή μετατόπισης \tilde{u}_r με τη γωνία θ	98
<u>Σχήμα 6.3 :</u> Μεταβολή μετατόπισης \tilde{u}_θ με τη γωνία θ	98
<u>Σχήμα 6.4 :</u> Μεταβολή τάσης $\bar{\sigma}_{rr}$ με τη γωνία θ	99
<u>Σχήμα 6.5 :</u> Μεταβολή τάσης $\bar{\sigma}_{r\theta}$ με τη γωνία θ	99
<u>Σχήμα 6.6 :</u> Μεταβολή τάσης $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ με τη γωνία θ	99
<u>Σχήμα 6.7 :</u> Εφαρμογή ασυμπτωτικής ανάλυσης στα πέλματα της δοκού στο $x = 0$	101
<u>Σχήμα 6.8 :</u> Σχηματική παράσταση διατμητικών τάσεων σ_{12} στη γωνία της πακτώσεως στο Άνω Πέλημα.....	102
<u>Σχήμα 6.9 :</u> Ασυμπτωτική ανάλυση των λύσεων της σ_{12} στο Άνω Πέλημα στη διατομή $x = 0$	103
<u>Σχήμα 6.10 :</u> Σχηματική παράσταση διατμητικών τάσεων σ_{12} στη γωνία της πακτώσεως στο Κάτω Πέλημα.....	104
<u>Σχήμα 6.11 :</u> Ασυμπτωτική ανάλυση των λύσεων της σ_{12} στο Κάτω Πέλημα στη διατομή $x = 0$	105

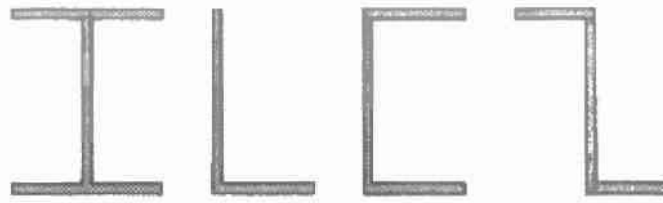
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Σε πολλές περιοχές των αεροναυπηγικών, μηχανολογικών ή δομικών κατασκευών, ο σχεδιασμός και οι τεχνολογικές απαιτήσεις οδηγούν στη χρήση των λεγόμενων δοκών *λεπτότοιχων διατομών*.

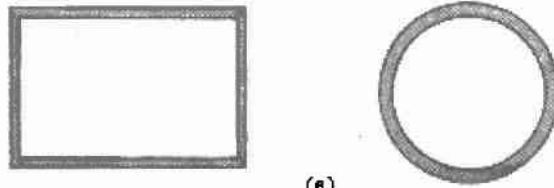
Πρόκειται για «λεπτούς» κυλίνδρους στους οποίους η εγκάρσια διατομή αποτελεί την ένωση επιμέρους τμημάτων, το πάχος των οποίων είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με τη διάμετρο της διατομής. Αναφερόμαστε, δηλαδή, σε διατομές που εμφανίζουν τη μία διάστασή τους (εκείνη του πάχους) πολύ μικρότερη σε σχέση με τις άλλες. Για παράδειγμα, λεπτότοιχοι σωλήνες χρησιμοποιούνται συχνά σε κατασκευές όπου οι δοκοί υπόκεινται σε υψηλές στρεπτικές ροπές ή σε μεγάλα κάθετα φορτία. Οι κοίλες διατομές στην πραγματικότητα είναι πιο αποτελεσματικές σε ό,τι αφορά την αντίσταση σε στρέψη και κάμψη γιατί, λόγω της πλεονεκτικότερης κατανομής τάσεων, εγγυώνται μεγάλη ακαμψία και υψηλή αντοχή με σχετικά μικρότερο βάρος. Έχουν μικρό εν γένει εμβαδό σε σύγκριση με τις ροπές αδράνειάς τους και επομένως μεγάλο συντελεστή χρησιμοποίησης υλικού. Μια πολύ σημαντική ιδιομορφία των διατομών αυτών αναφέρεται στο ότι τα φαινόμενα ελαστικής αστάθειας εμφανίζονται πολύ πιο οξυμένα στις λεπτότοιχες διατομές από ότι στις πλήρεις.

Οι λεπτότοιχες διατομές χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πρακτικές εφαρμογές και αποτελούν την τυπική μορφή των διατομών των μεταλλικών κατασκευών, για παράδειγμα σαν τεγίδες ή μηκίδες. Κατασκευάζονται από στραντζαριστή λαμαρίνα ή κυκλοφορούν στο εμπόριο τυποποιημένες με συμβολική ονομασία που περιγράφει το είδος της διατομής (π.χ. I , T , L , U , Z και άλλες) και διακρίνονται σε «ανοιχτές» και «κλειστές» διατομές.

Ανοιχτές είναι οι διατομές των οποίων η μέση γραμμή δεν είναι μια κλειστή καμπύλη. Οι λεπτότοιχες κλειστές διατομές (σωλήνες) μπορεί να περικλείουν ένα ή περισσότερα κενά («κυψέλες») και υπο-διακρίνονται σε «μονοκυψελικές» και «πολυκυψελικές» (Σχήμα 1.1)



(α)



(β)

Σχήμα 1.1: Τυπικές ανοιχτές (α) και κλειστές (β) λεπτότοιχες διατομές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΣΤΡΕΨΗ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

2.1 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΤΡΕΨΗ (ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΤΑ SAINT-VENANT)

Κατά τη στρέψη δοκού μη-κυκλικής διατομής, όλες οι διαμήκεις ίνες, εκτός του άξονα συστροφής, παθαίνουν διάφορες κατά μέγεθος διαμηκείς μετατοπίσεις. Τότε, οι διατομές δεν παραμένουν επίπεδες αλλά στρεβλώνουν. Όταν αυτή η στρέβλωση της διατομής μπορεί να αναπτυχθεί ανεμπόδιστα, πρόκειται για την περίπτωση της ελεύθερης στρέψης ή στρέψης κατά S.V.

Η θεωρία που διατύπωσε ο J.C.Saint Venant, λοιπόν, περί τα 1860 για την καθαρή στρέψη δοκών, ξεκινά με την υπόθεση ότι οι διατομές της δοκού είναι ελεύθερες να στραφούν και να στρεβλωθούν, δηλαδή να μετακινηθούν στην κατεύθυνση του άξονα της δοκού, κατά τον ίδιο τρόπο. Οι τυπικές στρεπτικές τάσεις αναπτύσσονται μόνο όταν η διατομή είναι ελεύθερη να στρεβλωθεί. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, οι μόνες τάσεις και παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στη δοκό είναι διατμητικές και συγκεκριμένα οι $(\sigma_{xy}, \sigma_{xz})$ και $(\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz})$ αντίστοιχα, που προκαλούν τη σχετική στροφή και στρέβλωση των διατομών της δοκού.

Στη μελέτη του προβλήματος στρέψης ράβδου τυχούσας διατομής, ο S.V. οδηγήθηκε από την αντίστοιχη λύση της κυκλικής διατομής. Στην περίπτωση αυτή, οι διατομές της ράβδου με κυκλική διατομή παραμένουν κατά την παραμόρφωση επίπεδες και στρέφονται σε στερεοί δίσκοι γύρω από το κέντρο της διατομής. Έτσι, οι μετατοπίσεις u_x, u_y, u_z της ράβδου δίνονται από τις σχέσεις :

$$u_x = 0 \quad , \quad u_y = -axz \quad , \quad u_z = -axy$$

Η κατάσταση μετατοπίσεων της ράβδου στην περίπτωση τυχούσας διατομής προκύπτει σαν επαλληλία : α) των μετατοπίσεων ράβδου κυκλικής διατομής και β) στρέβλωσης των διατομών, που είναι ίδια για όλες τις διατομές και δίνεται από τις σχέσεις :

$$u_x = a \phi(y, z), \quad u_y = -axz \quad , \quad u_z = -axy$$

όπου

u_x , η μετατόπιση των σημείων της διατομής στην κατεύθυνση του άξονα της δοκού

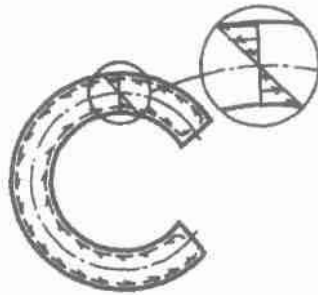
u_y , η μετατόπιση των σημείων της διατομής στην κατεύθυνση του άξονα y

u_z , η μετατόπιση των σημείων της διατομής στην κατεύθυνση του άξονα z

$a = \frac{I\theta(x)}{dx}$, η σταθερή συστροφή, δηλαδή η σταθερή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της δοκού και $\phi(y, z)$ η συνάρτηση στρεβλώσεως. Εφόσον οι μετατοπίσεις u_x είναι ανεξάρτητες του x , η στρέβλωση είναι ίδια σε όλες τις διατομές της δοκού. Αυτό συνεπάγεται ότι η ορθή συνιστώσα του τανυστή των παραμορφώσεων στην αξονική διεύθυνση μηδενίζεται, δηλαδή $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$. Έτσι, η κατάσταση των παραμορφώσεων δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 & \epsilon_{yz} &= 0 \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \epsilon_{xy} &= a \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \epsilon_{xz} &= a \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right)
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση της ράβδου λόγω στρέψης αποτελείται μόνο από καθαρή διάτμηση που ορίζεται από τις συνιστώσες σ_{xy} , σ_{xz} .



Σχήμα 2.1: Κατανομή διατμητικής τάσης σε λεπτότοιχη ανοιχτή διατομή

Στην περίπτωση της ανοιχτής λεπτότοιχης διατομής ελαστικής δοκού (Σχ.2.1), η συνολική διατμητική τάση στη διατομή είναι, σε πρώτη προσέγγιση, παράλληλη προς τη μέση γραμμή, μεταβάλλεται γραμμικά στην κατεύθυνση του πάχους, μηδενίζεται στη μέση γραμμή και παίρνει τη μέγιστη τιμή στο τοίχωμα, όπου

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot t}{J},$$

με T την εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή στρέψης, t το πάχος της διατομής και J τη στρεπτική σταθερά που ισούται με $J = \frac{1}{3} \int_{\bar{c}} t^3(s) ds$, ενώ η διατμητική ροή μηδενίζεται.

Η στροφή θ των διατομών γύρω από τον άξονα x της δοκού μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος της δοκού, ακολουθώντας τη σχέση

$$\theta(x) = \theta_0 + ax,$$

όπου θ_0 είναι η στροφή στη θέση $x = 0$. Κατά μήκος της μέσης γραμμής, όπου η διατμητική τάση σ_{xs} μηδενίζεται, η μετατόπιση $u_x(s)$, όπου s το μήκος τόξου κατά μήκος μιας καμπύλης L , δίνεται από τη σχέση

$$u_x(s) = u_0 - a\omega(s) \quad (1)$$

με $\omega(s)$ την «τομεακή επιφάνεια» που αντιστοιχεί στα σημεία της μέσης γραμμής ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης $\phi(s)$ προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\phi(s) = \phi_0 - \omega(s)$$

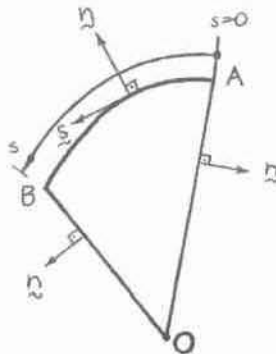
όπου u_0 , ϕ_0 είναι οι τιμές των u και ϕ στην «τομεακή αρχή» από όπου υπολογίζεται η τομεακή επιφάνεια $\omega(s)$.

Σύμφωνα με τον Vlasov, η τομεακή επιφάνεια $\omega(s)$ ορίζεται κατά μήκος της μέσης γραμμής της λεπτότοιχης ανοιχτής διατομής από τη σχέση

$$\omega(s) = \int_{s'=s_A}^s r_n(s') ds' = \int_A^B (y \cdot dz - z \cdot dy) = \int_A^B \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

όπου s είναι το μήκος τόξου στη μέση γραμμή της λεπτότοιχης διατομής, \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσεως των σημείων της μέσης γραμμής ως προς τον «πόλο» O (Σχ.2.2), $r_n(s)$ η απόσταση του πόλου από την εφαπτόμενη στη μέση γραμμή στη θέση s , το

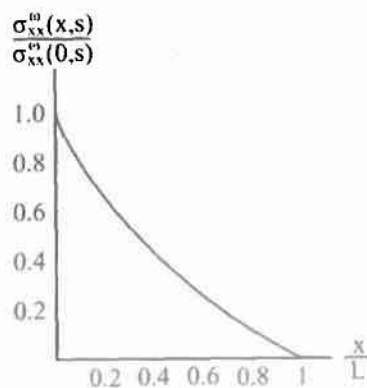
σημείο A η «τομεακή αρχή» στη θέση $s = s_A$, B το τελικό σημείο στη θέση s της μέσης γραμμής και \mathbf{e}_x το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του x-άξονα.



Σχήμα 2.2: Σχηματική παράσταση πόλου, τομεακής αρχής και τελικού σημείου της τομεακής επιφάνειας $\omega(s)$

Επίσης, επειδή $d\omega(s) = \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$, η τομεακή επιφάνεια ω αυξάνει όταν το διάνυσμα θέσεως \mathbf{r} κινείται αντιωρολογιακά και οι «διαστάσεις» της είναι $[m^2]$, δηλαδή διαστάσεις επιφάνειας ή μήκους στο τετράγωνο.

Όταν η στρέβλωση παρεμποδίζεται τοπικά, τότε αναπτύσσονται αξονικές τάσεις. Οι τάσεις αυτές μειώνονται καθώς απομακρυνόμαστε από το στρεπτικό περιορισμό αλλά παίρνουν μη αμελητέες τιμές στο μεγαλύτερο μέρος της δοκού. Σε περιπτώσεις συμπαγών ή κλειστών διατομών, οι τάσεις αυτές μπορούν συχνά να αμεληθούν. Στην περίπτωση όμως των ανοιχτών λεπτότοιχων διατομών που μελετάμε εμείς, οι αξονικές τάσεις που αναπτύσσονται σαν αντίδραση στο στρεπτικό περιορισμό παίρνουν μεγάλες τιμές. Επιπλέον, η ακαμψία τέτοιων διατομών αυξάνεται σημαντικά εξαιτίας της παρεμπόδισης της στρέβλωσής τους.



Σχήμα 2.3 : Μεταβολή της αξονικής τάσης λόγω παρεμπόδισης στρέβλωσης κατά μήκος της δοκού

Παρατηρώντας το Σχήμα 2.3 σημειώνουμε ενδεικτικά ότι στο μέσο της δοκού, δηλαδή ($x = 0.5 L$) η σ_{xx}^{ω} σε όλα τα σημεία της διατομής ισούται με το 32% της τιμής στα αντίστοιχα σημεία της διατομής σε στρεπτικό περιορισμό με μορφή πάκτωσης (στη θέση $x = 0$) ενώ στη θέση $x = 0.9 L$ η τιμή της αξονικής τάσης μειώνεται στο 5% της αντίστοιχης τιμής στην πάκτωση.

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αρχή του Saint Venant και η θεωρία στρέψης που διατύπωσε δεν ισχύει σε λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές που δεν μπορούν να στρεβλωθούν ανεμπόδιστα λόγω στρεπτικών περιορισμών.

Εύλογα, η θεωρία στρέψης του S.V. εξελίχθηκε από τον Vlasov και γενικεύτηκε για προβλήματα δοκών με περιορισμένη στρέβλωση.

2.2 ΣΤΡΕΨΗ ΜΕ ΣΤΡΕΠΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ (ΘΕΩΡΙΑ VLASOV)

2.2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η ελευθερία κινήσεων που διέπει η θεωρία στρέψης του Saint Venant δεν είναι εφικτή σε όλες τις διατομές όταν η στήριξη της δοκού είναι τέτοια που εμποδίζει τη στροφή ή/και τη στρέβλωση της διατομής στη στήριξη. Στην περίπτωση διατομής πακτώσεως, για παράδειγμα, η στροφή θ και η μετατόπιση u_x μηδενίζονται, ενώ παίρνουν μη-μηδενικές τιμές στις λοιπές διατομές της δοκού. Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.1, αν δεν υπήρχε η πάκτωση, τότε η επιβολή μιας στρεπτικής ροπής στη δοκό θα προκαλούσε μόνο διατμητικές τάσεις και στρέβλωση των διατομών κατά τον ίδιο τρόπο. Η ύπαρξη όμως της πακτώσεως εμποδίζει τη στρέβλωση της διατομής και αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη ορθών αξονικών τάσεων σ_{xx} σαν αντίδραση στον περιορισμό $u_x=0$, όπως παρουσιάστηκε στο Σχ.2.3. Επειδή η μόνη εξωτερική φόρτιση της δοκού είναι η ροπή στρέψεως, το σύστημα των αναπτυσσόμενων ορθών τάσεων σ_{xx} πρέπει να είναι στατικά ισοδύναμο με μηδενική αξονική δύναμη και μηδενική καμπτική ροπή, που εκφράζεται από τις συνθήκες

$$\int_A \sigma_{xx} dA = 0 \quad \text{και} \quad \int_A y \sigma_{xy} dA = \int_A z \sigma_{xz} dA = 0$$

Γενικεύοντας τη θεωρία ελεύθερης στρέψης κατά Saint Venant λοιπόν, περί τα 1940, ο V.Z.Vlasov ανέπτυξε μια θεωρία στρέψης στην οποία περιλάμβανε την περίπτωση δοκών με περιορισμούς στη στρέβλωση. Η θεωρία αυτή ονομάζεται διαφορετικά *θεωρία στρέβλωσης ή ανομοιόμορφη στρέψη*.

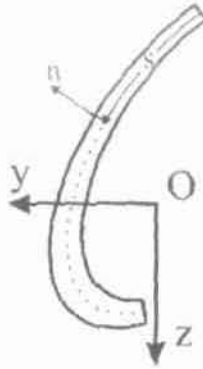
Στη θεωρία του Vlasov για την ανομοιόμορφη στρέψη, η εξωτερικά εφαρμοζόμενη ροπή T μεταβάλλεται κατά τον άξονα x και δεν είναι σταθερή σε κάθε διατομή, όπως στην ελεύθερη στρέψη, δηλαδή $T = T(x)$.

2.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ

Η κατανομή των τάσεων σύμφωνα με τη θεωρία του Vlasov αποτελείται από τις εξής συνιστώσες :

- Διατμητική τάση σύμφωνα με τη θεωρία ελεύθερης στρέψης κατά SV (σ_{xy}^{SV}), η οποία αναπτύσσεται στο ελεύθερο άκρο της δοκού όπου εφαρμόζεται η ροπή στρέψης T ,
- Διατμητική τάση λόγω του περιορισμού στρέβλωσης (σ_{xy}^{ω}), η οποία αν και είναι μικρού μεγέθους, εξισορροπεί το φορτίο της ροπής T ,
- Αξονικές τάσεις λόγω του περιορισμού στρέβλωσης (σ_{xx}^{ω}), οι μέγιστες τιμές των οποίων είναι έως και 40 % μεγαλύτερες από εκείνες λόγω κάμψης και
- Αξονικές τάσεις λόγω κάμψης (σ_{xx}^b)

Χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αξόνων $Ox\eta z$ στο οποίο ο x -άξονας διέρχεται από τα κέντρα των διατομών. Πάνω στο επίπεδο της λεπτότοιχης διατομής θεωρούμε επίσης ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (s,n) , όπως φαίνεται στο Σχ.2.4. Η συντεταγμένη s μετράται κατά μήκος της μέσης γραμμής της λεπτότοιχης διατομής και το n στην κάθετη κατεύθυνση προς το s έτσι ώστε τοπικά οι κατευθύνσεις x - n - s να ορίζουν ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα.



Σχήμα 2.4 : Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (s,n)

Επειδή το πάχος του τοιχώματος είναι μικρό ($t \ll L$), δεν υπάρχει αρκετός «χώρος» ώστε να αναπτυχθούν οι τάσεις σ_{nn} , σ_{ns} , σ_{nx} κι έτσι σε πρώτη προσέγγιση θεωρούμε παντού στη διατομή $\sigma_{nn} \cong \sigma_{ns} \cong \sigma_{nx} \cong 0$. Επομένως, οι μόνες μη-μηδενικές τάσεις είναι οι σ_{xx} , σ_{xs} και σ_{ss} . Επειδή όμως η ορθή συνιστώσα του τανυστή των τάσεων σ_{ss} είναι αμελητέα συγκρινόμενη με την αξονική συνιστώσα σ_{xx} , υποθέτουμε ότι $\sigma_{ss} \cong 0$. Με βάση τα παραπάνω, ακολουθεί ο υπολογισμός των συνιστωσών σ_{xx} και σ_{xs} για την περίπτωση στρέψης δοκού με λεπτότοιχη ανοιχτή διατομή με στρεπτικούς περιορισμούς στις στηρίξεις.

Η ορθή τάση σ_{xx} προσδιορίζεται με μια μεθοδολογία παρόμοια με εκείνη της «Τεχνικής Θεωρίας Κάμψεως» ξεκινώντας από την ορθή παραμόρφωση ε_{xx} , που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{ss}) \Leftrightarrow \sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} + \nu \cdot \sigma_{ss} \Leftrightarrow \sigma_{xx} \cong E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (2)$$

Η θεωρία του Vlasov για τον υπολογισμό τάσεων ξεκινά με την υπόθεση ότι η αξονική μετατόπιση της μέσης γραμμής δίνεται από τη σχέση (1) στην οποία όμως η συστρόφη α δεν είναι σταθερή και τελικά ισχύει $u_r(x,s) = u_0 - \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot \omega^*(s)$ (3), όπου $\omega^*(s)$ η τομεακή επιφάνεια με πόλο το κέντρο διατμήσεως της διατομής και κύρια τομεακή αρχή τη μέση γραμμή και $\theta(x)$ η συνάρτηση στρόφης της διατομής. Αξιοποιώντας τη σχέση (3), η ορθή παραμόρφωση ε_{xx} υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{xx}(x, s) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \cdot \omega^*(s) \text{ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2) τελικά}$$

προκύπτει για τη μέση γραμμή η σχέση

$$\sigma_{xx}^\omega(x, s) = -E \cdot \omega^*(s) \cdot \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \quad (4)$$

χρησιμοποιώντας τον εκθέτη ω για να δηλώσουμε ότι η τάση αυτή αναπτύχθηκε ως αντίδραση στους στρεπτικούς περιορισμούς.

Η διατμητική τάση σ_{xs} οφείλεται σε δύο διακριτούς μηχανισμούς παραμορφώσεως:

- Στην ελεύθερη στρέψη κατά S.V., κατά την οποία όλες οι διατομές στρεβλώνονται ομοιόμορφα. Η διατμητική τάση που οφείλεται σε αυτό το μηχανισμό και συμβολίζεται με σ_{xs}^{SV} , μηδενίζεται στη μέση γραμμή, μεταβάλλεται γραμμικά κατά το πάχος της λεπτότοιχης διατομής και είναι ανεξάρτητη της θέσεως s . Η διατμητική ροή που αντιστοιχεί στην σ_{xs}^{SV}

$$\text{μηδενίζεται, δηλαδή ισχύει η σχέση } \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xs}^{SV}(x, n) \cdot dn = 0$$

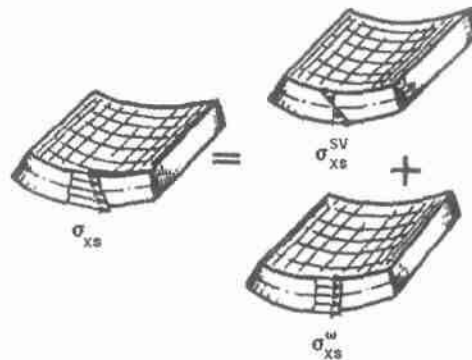
- Στη διατμητική παραμόρφωση που οφείλεται στη διατμητική ροή που απαιτείται ώστε να ισορροπούν οι ορθές αξονικές τάσεις σ_{xx}^ω που αναπτύσσονται λόγω των στρεπτικών προσδιορισμών. Οι διατμητικές τάσεις που οφείλονται σε αυτό το μηχανισμό και συμβολίζονται με σ_{xs}^ω , είναι ομοιόμορφες κατά το πάχος της λεπτότοιχης διατομής και αντιστοιχούν σε μια

$$\text{διατμητική ροή } q^\omega, \text{ δηλαδή } \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} \sigma_{xs}^\omega(x, s) \cdot dn = q^\omega(x, s) \cdot t(s)$$

Επομένως, η συνολική διατμητική τάση σ_{xs} προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$\sigma_{xs}(x, n, s) = \sigma_{xs}^{SV}(x, n) + \sigma_{xs}^{\omega}(x, s) = \sigma_{xs}^{SV}(x, n) + \frac{q^{\omega}(x, s)}{t} \quad (5)$$

και σχηματικά παριστάνεται ακολούθως :



Σχήμα 2.5: Συνιστώσες συνολικής διατμητικής τάσης σ_{xs} της διατομής

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις συνιστώσες της σ_{xs} χωριστά, ξεκινώντας από τη διατμητική τάση που οφείλεται στον πρώτο μηχανισμό, δηλαδή στην ελεύθερη στρέψη κατά Saint Venant.

Η συνολική ροπή στρέψεως $T(x)$ που εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της δοκού και αλλάζει σε κάθε διατομή στον x -άξονα, εξισορροπείται από τις δύο συνιστώσες που αντιστοιχούν στις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται. Πιο συγκεκριμένα,

$$T(x) = T^{SV}(x) + T^{\omega}(x) \quad (*)$$

Η συνιστώσα της ροπής στρέψεως $T^{SV}(x)$ που οφείλεται στην σ_{xs}^{SV} υπολογίζεται από τη σχέση $T^{SV}(x) = G \cdot J \cdot \frac{d\theta(x)}{dx}$, όπου J η στρεπτική σταθερά που παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Τελικά, από τη θεωρία στρέψης κατά Saint Venant ισχύει ότι

$$\sigma_{xs}^{SV}(x, n) = \frac{2 \cdot T^{SV}(x)}{J} n = 2 \cdot G \cdot n \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (6)$$

Η συνιστώσα της ροπής στρέψεως $T^\omega(x)$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$T^\omega(x) = -E \cdot J_\omega \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3}, \text{ όπου } J_\omega \text{ η τομεακή ροπή αδράνειας της διατομής που}$$

$$\text{δίνεται από τη σχέση } J_\omega = \int_A \omega^2(s) \cdot dA = \int_{s=0}^L \omega^2(s) \cdot dA \text{ με διαστάσεις } [m^6] \text{ και } L \text{ το}$$

συνολικό μήκος της μέσης γραμμής της λεπτότοιχης διατομής.

Η διατμητική ροή q^ω που αναπτύσσεται ώστε να ισορροπηθούν οι αξονικές ορθές τάσεις σ_{xx}^ω (δεύτερος μηχανισμός) προσδιορίζεται από τη σχέση του Jourawsky, δηλαδή

$$q^\omega(x, s) = - \int_{A(x,s)} \frac{\partial \sigma_{xx}^\omega(x, s)}{\partial x} \cdot dA = - \int_{s'=0}^s \frac{\partial \sigma_{xx}^\omega(x, s')}{\partial x} \cdot t(s') \cdot ds' \quad (7)$$

Ο υπολογισμός της q^ω ξεκινά πάντα από ένα ακραίο σημείο της διατομής ($s = 0$) όπου $q^\omega = 0$ και είναι θετική στην κατεύθυνση αύξησης του μήκους τόξου s . Αντικαθιστώντας στη σχέση (7) την εξίσωση (4) για την ορθή τάση σ_{xx}^ω καταλήγουμε στο παρακάτω :

$$q^\omega(x, s) = E \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} \cdot \int_{s'=0}^s \omega^2(s') \cdot t(s') \cdot ds' \Leftrightarrow q^\omega(x, s) = E \cdot S_\omega(s) \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} \quad (8)$$

όπου $S_\omega(s)$ η τομεακή στατική ροπή που δίνεται από τη σχέση

$$S_\omega(s) = \int_{s=0}^s \omega^2(s') \cdot dA(s') \text{ και έχει διαστάσεις } [m^4].$$

Από τις σχέσεις (5) - (8) προκύπτει ότι η συνολική διατμητική τάση σ_{xs} συναρτήσει της γωνίας στροφής $\theta(x)$ υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\sigma_{xs}(x, s, n) = \sigma_{xs}^{SV}(x, n) + \sigma_{xs}^\omega(x, s) = \left(2 \cdot G \cdot J \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot n \right) + \left(\frac{E \cdot S_\omega(s)}{t(s)} \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} \right) \quad (9)$$

Τέλος, ο υπολογισμός της γωνίας στροφής $\theta(x)$ βασίζεται στην εξίσωση της συνολικής σταθερής στρεπτικής ροπής T^* που σε κάθε διατομή γράφεται στη θέση x ως άθροισμα :

$$T = T^{sv}(x) + T^{\omega}(x) = G \cdot J \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} - E \cdot J_{\omega} \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} \quad \text{στην οποία αν θέσουμε}$$

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot J}{E \cdot J_{\omega}}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{J}{J_{\omega}}} \quad \text{και ολοκληρώσουμε ως προς } x \text{ θα καταλήξουμε στη}$$

γενική λύση :

$$\theta(x) = c_1 + c_2 \cdot \cosh kx + c_3 \cdot \sinh kx + \frac{T}{G \cdot J} x \quad (10)$$

όπου (c_1, c_2, c_3) είναι αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Μια δοκός που διαθέτει πάκτωση στο ένα της άκρο περιορίζεται και στη στροφή και στη στρέβλωση, συνθήκες που εκφράζονται από τις σχέσεις :

$$\bullet \quad \theta(0) = 0 \quad (11)$$

$$\bullet \quad u_x = 0 \Rightarrow \underbrace{u_0}_0 - \frac{d\theta}{dx} \cdot \omega^*(s) = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

ενώ για το άλλο της άκρο που είναι ελεύθερο άκρο ισχύει ότι μηδενίζεται η αξονική τάση σ_{xx}^{ω} άρα :

$$\bullet \quad \left. \frac{d^2\theta}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (13)$$

Από τις σχέσεις (10) – (13) καταλήγουμε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων στην τελική εξίσωση υπολογισμού της γωνίας στροφής $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{T}{G \cdot J \cdot k} \cdot [kx - \sinh kx - (1 - \cosh kx) \cdot \tanh kL] \quad (14)$$

Η σχέση (4) που δίνει την εξίσωση υπολογισμού της ορθής αξονικής τάσης σ_{xx} μπορεί να μετασχηματιστεί στην εξίσωση (15) αντικαθιστώντας τη σχέση (14) που υπολογίστηκε για τη στροφή $\theta(x)$:

$$\sigma_{xx}^{\omega}(x,s) = -\frac{T}{k \cdot J_{\omega}} \cdot \omega^*(s) \cdot \frac{\sinh[k \cdot (L-x)]}{\cosh kL} \quad (15)$$

και με παρόμοιο τρόπο οι συνιστώσες της συνολικής σταθερής στρεπτικής ροπής T γίνονται :

$$T^{\omega}(x) = T \cdot \frac{\cosh[k \cdot (L-x)]}{\cosh kL} \quad \text{και} \quad T^{SV}(r) = T \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh[k \cdot (L-x)]}{\cosh kL} \right\} \quad (16)$$

ενώ η συνολική διατμητική σ_{xs} στη σχέση (9) μετασχηματίζεται σε :

$$\sigma_{xs}(x,s,n) = \sigma_{xs}^{SV}(x,n) + \sigma_{xs}^{\omega}(x,s) = \left(\underbrace{2 \cdot G \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot n}_{\frac{2 \cdot T^{SV}(x) \cdot n}{J}} \right) + \left(\underbrace{\frac{E \cdot S_{\omega}(s) \cdot d^3\theta(x)}{t(s) \cdot dx^3}}_{\frac{S_{\omega}(s)}{J_{\omega} \cdot t(s)} \cdot T^{\omega}(r)} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{xs}^{SV}(x,n) = \frac{2 \cdot T \cdot n}{J} \left\{ 1 - \frac{\cosh[k \cdot (L-x)]}{\cosh kL} \right\} \quad (17)$$

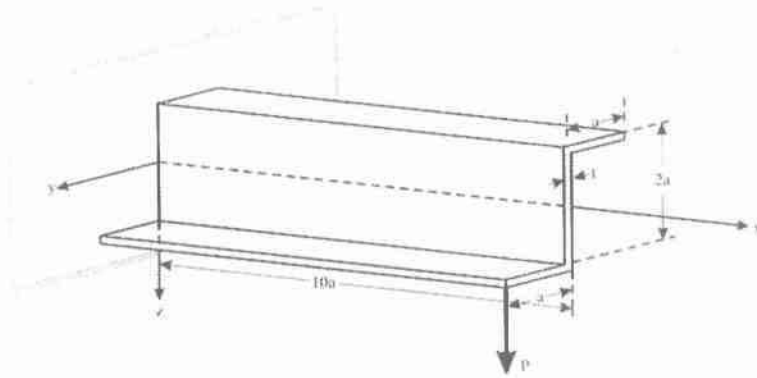
$$\Rightarrow \sigma_{xs}^{\omega}(x,s) = -\frac{T}{J_{\omega}} \cdot \frac{S_{\omega}(s)}{t(s)} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (L-x)]}{\cosh kL} \quad (18)$$

όπου $n = \pm \frac{t}{2}$ για τα τοιχώματα της διατομής και $n = 0$ για τη μέση γραμμή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη και σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης των αναπτυσσόμενων τάσεων σε πακτωμένη δοκό λεπτότοιχης ανοιχτής διατομής τύπου «ανάποδου» Z που υφίσταται στρέψη εξαιτίας φόρτισης στο κάτω πέλμα (Σχήμα 3.1)



Σχήμα 3.1: Σχηματική παράσταση προβλήματος σε διατομή ανάποδου Z

Η δοκός αποτελείται από δύο πέλματα και έναν κορμό τα οποία παραμετρικά, ακολουθώντας τη μέση γραμμή της διατομής, διαθέτουν τις εξής διαστάσεις (x,y,z):

- Πέλματα $L \times a \times t$
- Κορμός $L \times t \times h$

όπου $a = 0.2 \text{ m}$

$$t = \frac{a}{8} = 0.025 \text{ m}$$

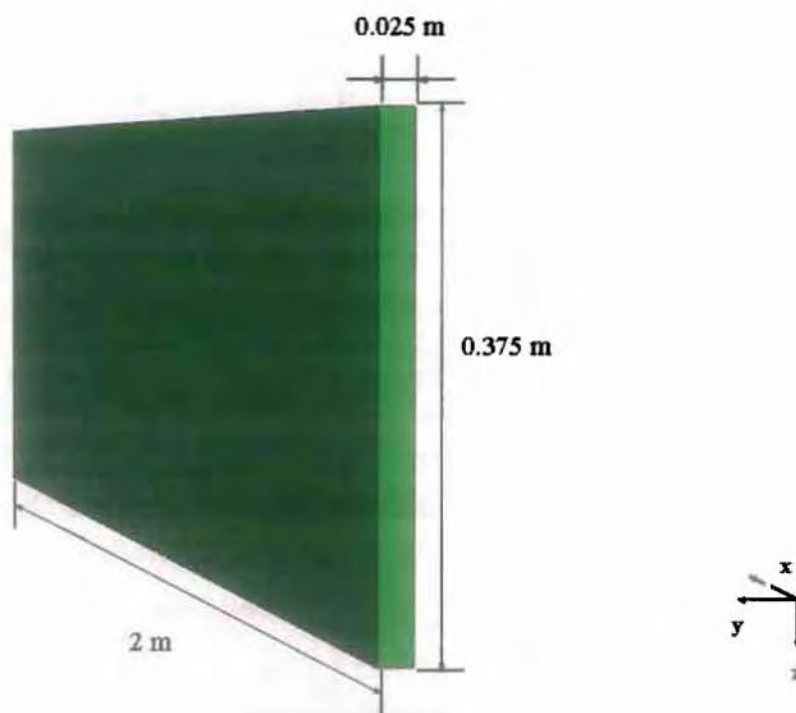
$$h = 2a = 0.4 \text{ m}$$

$$L = 10a = 2 \text{ m}$$

Οι πραγματικές διαστάσεις της εξωτερικής γραμμής της δοκού των δύο πελμάτων είναι $(2 \text{ m}) \times (0.2125 \text{ m}) \times (0.025 \text{ m})$ και του κορμού που τα συνδέει $(2 \text{ m}) \times (0.025 \text{ m}) \times (0.375 \text{ m})$, όπως φαίνεται στα Σχ. 3.2, 3.3 αντίστοιχα.

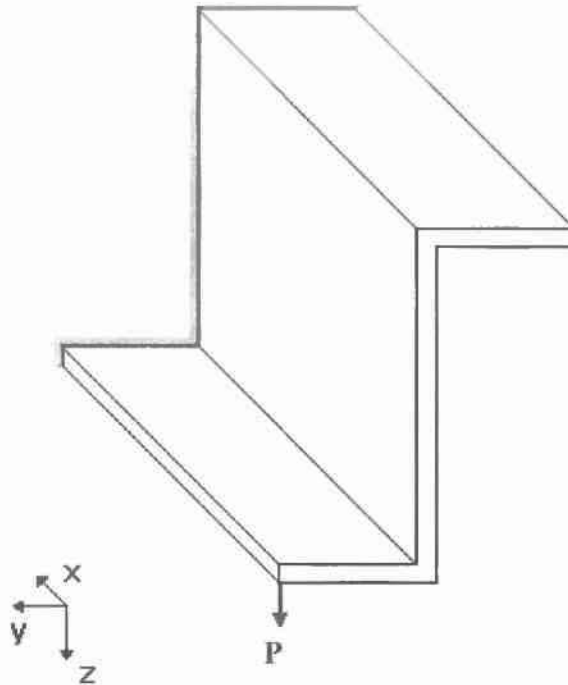


Σχήμα 3.2 : Σχηματική παράσταση και διαστάσεις πελμάτων διατομής ανάποδου Z



Σχήμα 3.3 : Σχηματική παράσταση και διαστάσεις κορμού διατομής ανάποδου Z

Η δοκός φορτίζεται στη διατομή του ελεύθερου άκρου και συγκεκριμένα στο κάτω πέλμα με συγκεντρωμένο φορτίο μεγέθους $P = 10 \text{ kN} = 0.01 \text{ MN}$ στην κατεύθυνση z όπως φαίνεται στα Σχ. 3.1 ,3.4 και εξ' αιτίας της φόρτισης αυτής υφίσταται στρέψη και κάμψη.



Σχήμα 3.4: Διατομή ελεύθερου άκρου που φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο

3.2 ΤΡΟΠΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ-ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μελετώντας την αναλυτική λύση για μια ημι-πακτωμένη δοκό λεπτότοιχης ανοιχτής διατομής ανάποδου Z από τη θεωρία στρέψης του Vlasov, θεωρήσαμε ενδιαφέρουσα τη σύγκριση αυτής με μια αριθμητική λύση για την ίδια δοκό.

Για να το επιτύχουμε αυτό, δημιουργήσαμε ένα αριθμητικό μοντέλο μιας τέτοιας δοκού με τις διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω με σκοπό να υπολογίσουμε τις κατανομές ορθών και διατμητικών τάσεων. Η προσέγγιση πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων και του υπολογιστικού πακέτου *Abaqus* και στο τέλος παρατηρήσαμε τη σύγκλιση των δύο λύσεων, αποτελέσματα της οποίας θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (FEM) ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

4.1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (*FEM*) (συχνά αναφέρεται και ως *ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων*) είναι μια αριθμητική τεχνική για να προσεγγίσουμε τη λύση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (PDE) καθώς και Εξισώσεων Ολοκληρωτικού Λογισμού. Η προσέγγιση της λύσης βασίζεται είτε στην εξ'ολοκλήρου απαλοιφή της διαφορικής εξίσωσης (πρόβλημα μόνιμης κατάστασης-steady state problem) είτε στην απλοποίηση της PDE σε ένα προσεγγιστικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODE) που στη συνέχεια ολοκληρώνονται χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους, όπως η μέθοδος Euler, η προσέγγιση Runge-Kutta και άλλες.

Στην επίλυση PDE, πρώτος στόχος είναι να δημιουργήσουμε μια εξίσωση που θα προσεγγίζει την μελετώμενη διαφορική εξίσωση αλλά ταυτοχρόνως θα είναι αριθμητικά ευσταθής, δηλαδή τυχόν λάθη στα εισερχόμενα στη σχέση δεδομένα και ενδιάμεσοι υπολογισμοί δε θα προκαλούν σοβαρές μεταβολές στα εξερχόμενα αποτελέσματα, δηλαδή στη λύση της εξίσωσης. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια καλή επιλογή για την επίλυση PDE σε σύνθετες κατασκευές, όπως αυτοκίνητα και δεξαμενές πετρελαίου, όταν οι συνθήκες του προβλήματος μεταβάλλονται, όπως στην περίπτωση συμπαγών διατομών με μεταβλητές συννοριακές συνθήκες, όταν η επιθυμητή ακρίβεια της λύσης μεταβάλλεται κατά μήκος της κατασκευής ή όταν η λύση δεν είναι ομαλή.

4.1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) αναπτύχθηκε από την ανάγκη επίλυσης σύνθετων ελαστικών και κατασκευαστικών προβλημάτων των αεροναυπηγών και των πολιτικών μηχανικών. Η ανάπτυξή της οφείλεται στη μελέτη και στο έργο των Alexander Hrennikoff (1941) και Richard Courant (1942). Αν και οι

προσεγγίσεις των δύο προαναφερθέντων πρωτοπόρων είναι σημαντικά διαφορετικές, διαθέτουν ένα κοινό και ουσιαστικό χαρακτηριστικό: διακριτοποίηση με τη βοήθεια πλέγματος (*mesh*) μιας συνεχούς κατασκευής σε ένα σύνολο διακριτών υποκατασκευών, που ονομάζονται *στοιχεία* (*elements*). Η μέθοδος που παρουσίασε ο A.Hrennikoff διακριτοποιεί την κατασκευή χρησιμοποιώντας «δικτυωτή» αναλογία (δηλαδή αναλογία ορθογώνιου πλέγματος) ενώ εκείνη του R.Courant διαιρεί την κατασκευή σε πεπερασμένες τριγωνικές περιοχές για την επίλυση 2^{ης} τάξης PDEs που εμφανίζονται στο πρόβλημα στρέψης κυλίνδρου. Η συνεισφορά του R.Courant ήταν εξελικτική, εμπλουτίζοντας τα ήδη σημαντικά αποτελέσματα για PDEs που είχαν αναπτύξει οι Rayleigh, Ritz και Galerkin.

Η σημαντική εξέλιξη των FEM ήρθε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950 με την ανάλυση σκελετών αεροσκαφών και κατασκευαστικών αναλύσεων από το Πανεπιστήμιο της Στουτγκάρδης και τη δουλειά του John Argyris καθώς και από το Πανεπιστήμιο του Berkley από τον Ray W.Clough περί τα 1960 για προβλήματα δομικών κατασκευών. Στα τέλη του 1950, η μεθοδολογία δημιουργίας του μητρώου ακαμψίας και του μητρώου των στοιχείων παρουσίαζε ουσιαστικά τη σημερινή μορφή ενώ λίγο αργότερα, το 1965, η NASA δημοσιοποίησε το ενδιαφέρον της για προτάσεις εξέλιξης του λογισμικού NASTRAN. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απέκτησε ακριβή μαθηματική μορφή το 1973 με την έκδοση από τους Gilbert Strang και Fix του συγγράμματος *An Analysis of The Finite Element Method* και έκτοτε έχει γενικευτεί σε μια κατηγορία εφαρμοσμένων μαθηματικών για αριθμητική μοντελοποίηση φυσικών συστημάτων, όπως προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού και ρευστοδυναμικής.

Για τις ανάγκες της παρούσας πτυχιακής διατριβής χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου Abaqus μοντελοποιώντας το πρόβλημα της παρεμποδισμένης στρέψης δοκού ανάποδου Z σε ένα 3D μοντέλο διακριτοποιημένο σε ορθογωνικό και τετραγωνικό πλέγμα.

4.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ (3D)

Η δοκός που εξετάζουμε, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3, είναι ανοιχτή και λεπτότοιχη τύπου ανάποδου Z, αποτελούμενη δηλαδή από δύο πέλματα και έναν κορμό που τα συνδέει. Η μια ακραία διατομή της υφίσταται στρεπτικό περιορισμό με τη μορφή της πάκτωσης ενώ το άλλο άκρο της είναι ελεύθερο να μετατοπιστεί και να περιστραφεί.

Στη διατομή του ελεύθερου άκρου εφαρμόζουμε στο κάτω πέλμα συγκεντρωμένο φορτίο P μεγέθους $P = 10 \text{ kN} = 0.01 \text{ MN}$ στην κατακόρυφη διεύθυνση του άξονα z . Το μοντέλο πάνω στο οποίο εφαρμόσαμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς θεωρήσαμε ότι αποτελείται από έναν τυπικό χάλυβα, θέτοντας ως μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$ και ως λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Χρήσιμο συμπέρασμα αποτελεί το γεγονός ότι από τον αριθμητικό υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων διαπιστώσαμε στην πορεία πως η επιλογή του υλικού δεν επηρέαζε την τελική κατανομή των τάσεων στη διατομή που μελετήσαμε.

Πρόκειται για ένα τριδιάστατο πρόβλημα ελαστικότητας, το αριθμητικό μοντέλο του οποίου πρέπει να πληροί τις κάτωθι εξισώσεις:

- Κινηματικές $\rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (1)

- Καταστατικές $\rightarrow \sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ (2)

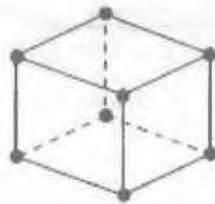
- Ισορροπίας $\rightarrow \sigma_{ij,j} + b_i = 0$ (3)

και τις συνοριακές συνθήκες: $u_i = \bar{u}_i$ στο S_i^u , $n_j \sigma_{ji} = \bar{t}_i$ στο S_i^t

όπου D_{ijkl} ελαστικές σταθερές που χαρακτηρίζουν ένα γραμμικό, ισότροπο και ελαστικό υλικό, b_i οι μαζικές δυνάμεις του σώματος και $i, j = 1, 2, 3$. Από τις σχέσεις (1) – (3) προκύπτει η εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k}) \right] = D_{ijkl} \cdot u_{k,l} \Leftrightarrow (D_{ijkl} \cdot u_{k,l})_{,j} + b_i = 0$$

Το μοντέλο που δημιουργήσαμε για να προσεγγίσουμε την επίλυση του προβλήματος μας είναι τριδιάστατο (3D) και η διακριτοποίηση που επιλέξαμε να πραγματοποιήσουμε γίνεται με εξαεδρικά γραμμικά, ορθογωνικά στοιχεία 8 κόμβων (“brick” elements, C3D8) όπως αυτό του Σχήματος 4.1.



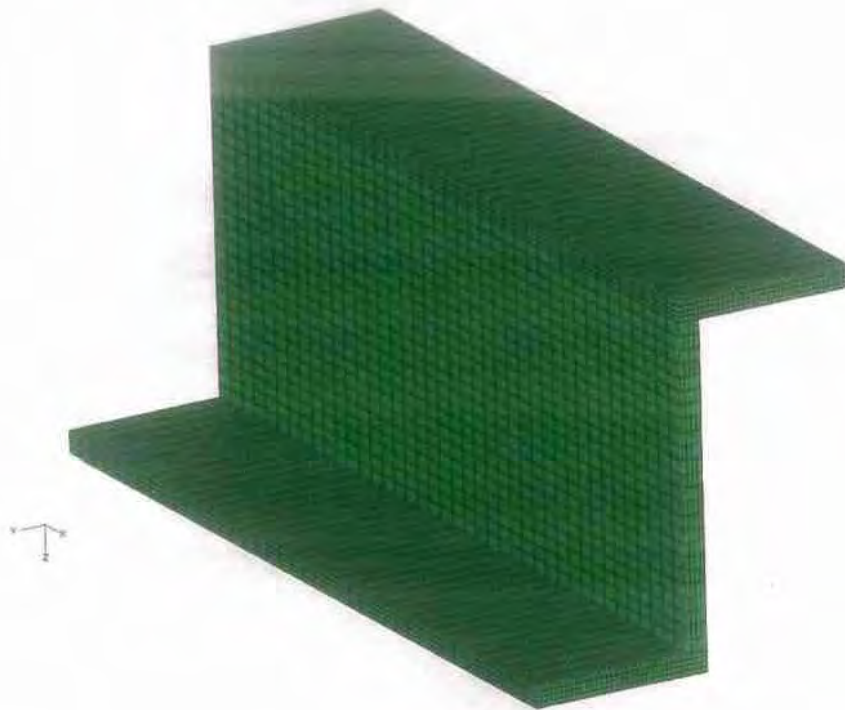
Linear element
(8-node brick, C3D8)

Σχήμα 4.1 : Τριδιάστατο (3D) γραμμικό οκτακομβικό στοιχείο

Η σχηματική παράσταση της περιοχής που μοντελοποιήθηκε φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Για το τριδιάστατο μοντέλο κατασκευάστηκε ο κάρναβος πεπερασμένων στοιχείων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, με τον άξονα x του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων x,y,z να είναι ο διαμήκης .

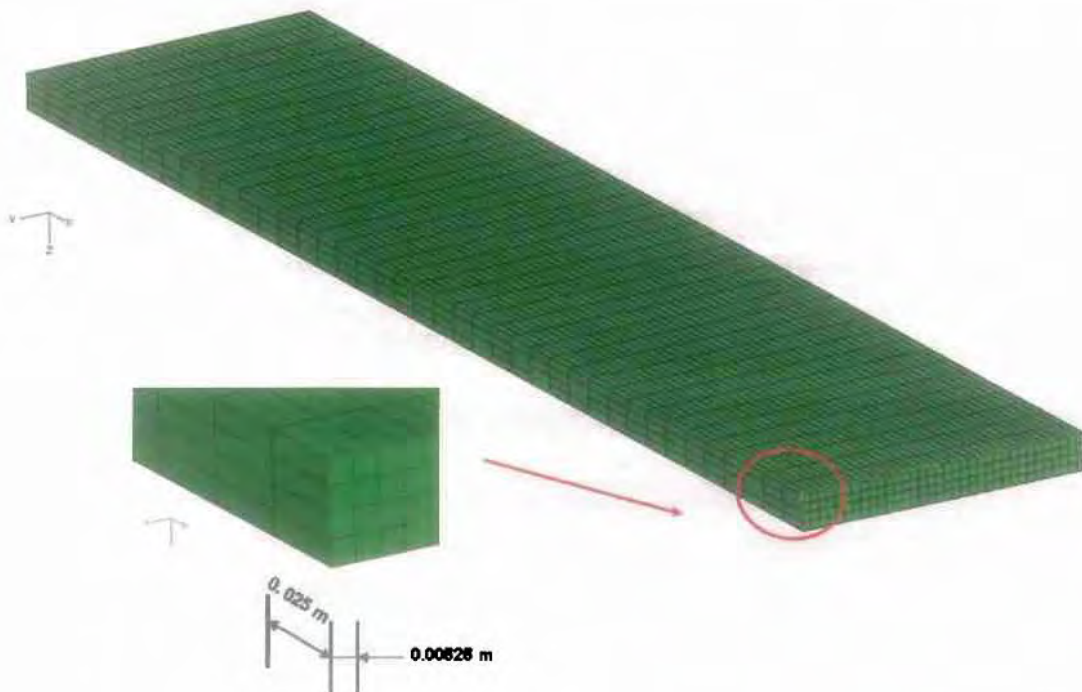


Σχήμα 4.2 : Παράσταση μελετώμενης διατομής ανάποδου Z

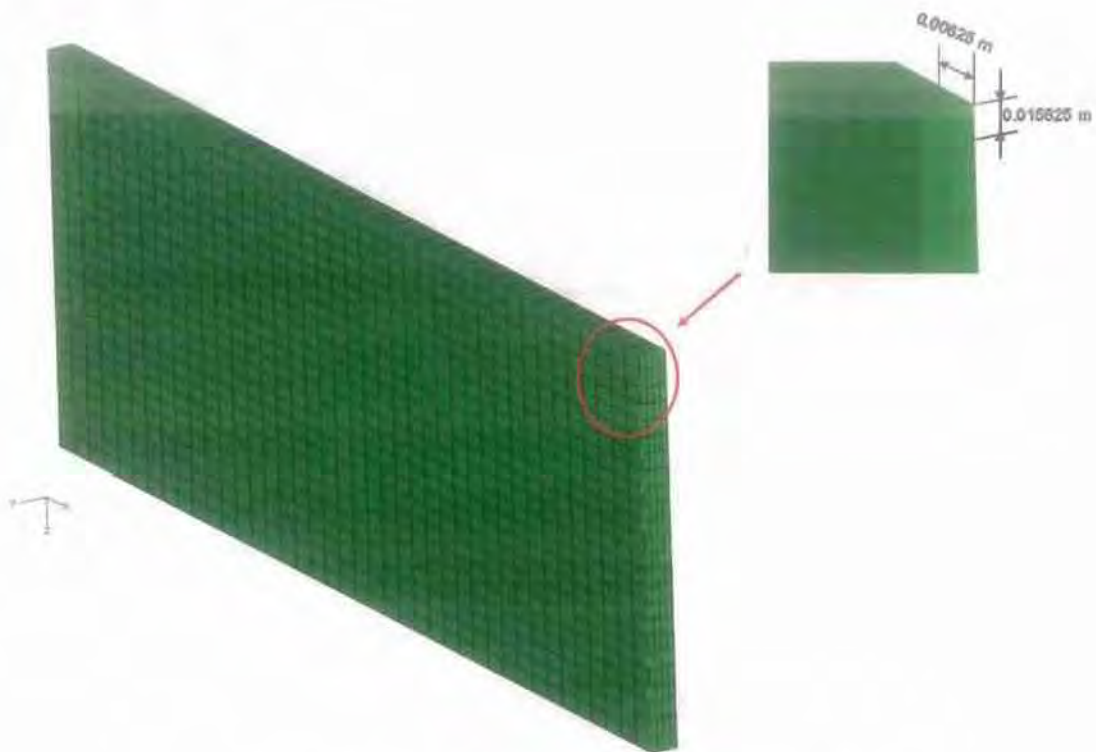


Σχήμα 4.3 : Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων 3-D

Η διακριτοποίηση που επιλέξαμε για τα πέλματα είναι διαφορετική από εκείνη του κορμού, όπως φαίνεται στα Σχ. 4.4 , 4.5 χρησιμοποιώντας πιο πυκνό πλέγμα στα πέλματα.



Σχήμα 4.4 : Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων πελμάτων

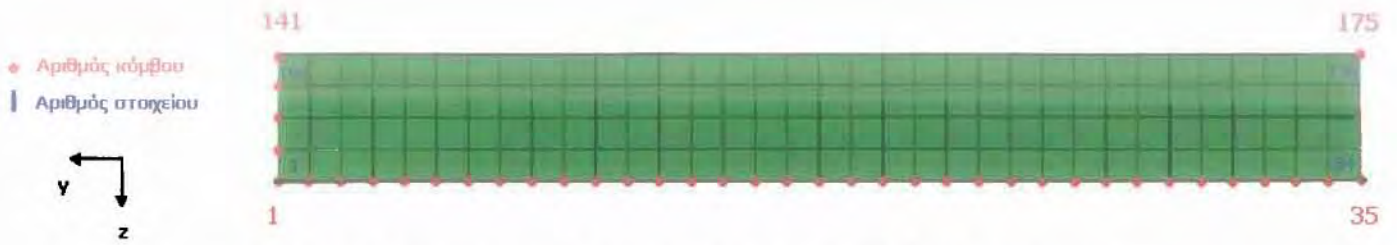


Σχήμα 4.5: Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων κορμού

Ο κάνναβος των πελμάτων αποτελείται από 8κομβικά ορθογωνικά στοιχεία διαστάσεων $(0.025\text{ m}) \times (0.00625\text{ m}) \times (0.00625\text{ m})$ ενώ ο αντίστοιχος κάνναβος του κορμού αποτελείται από ίδιου τύπου στοιχεία (C3D8) αλλά με διαστάσεις $(0.025\text{ m}) \times (0.00625\text{ m}) \times (0.015625\text{ m})$. Επιλέξαμε, δηλαδή, τα στοιχεία του κορμού να έχουν περίπου 2.5 φορές το ύψος των στοιχείων των πελμάτων γιατί μας ενδιαφέρει η κατανομή των τάσεων κυρίως κατά το πάχος (διεύθυνση y).

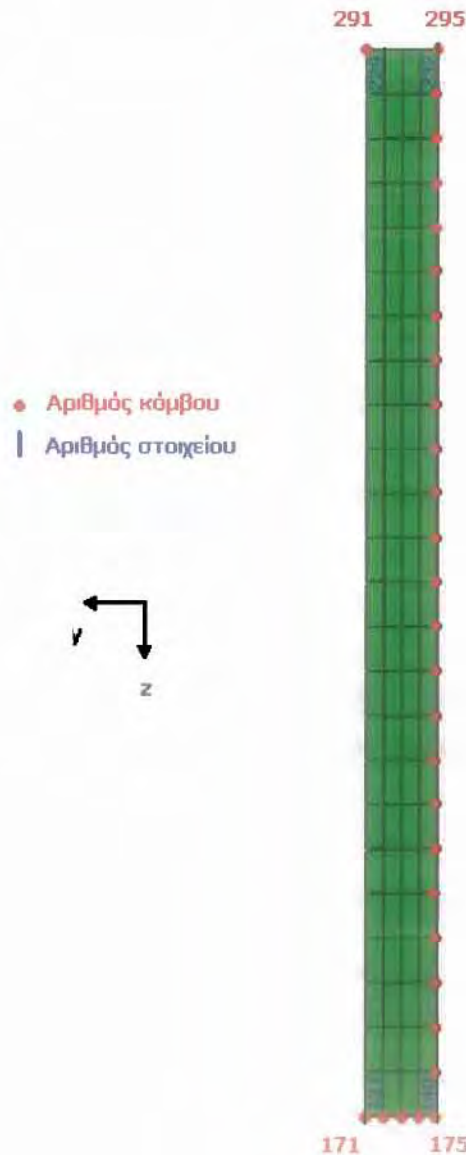
Ξεκινώντας τη διακριτοποίηση από το επίπεδο yz , στην κατεύθυνση του πάχους t ($= \frac{a}{8} = 0.025\text{ m}$) επιλέξαμε πλέγμα που αποτελείται από 4 στοιχεία και συνεπώς 5 κόμβους, ώστε το $n = \pm \frac{t}{2}$ να αντιστοιχεί στις εξωτερικές γραμμές του τμήματος (π.χ. κόμβοι 1, 5) και το $n = 0$ στη μέση γραμμή (π.χ. κόμβος 3).

Έτσι, για τα πέλματα που στο επίπεδο yz έχουν διαστάσεις $(0.2125\text{ m}) \times (0.025\text{ m})$ ο κάνναβος που προέκυψε αποτελείται από 34 στοιχεία και 35 κόμβους στη διεύθυνση y και από 4 στοιχεία και 5 κόμβους στην κατεύθυνση του πάχους (διεύθυνση z), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6.



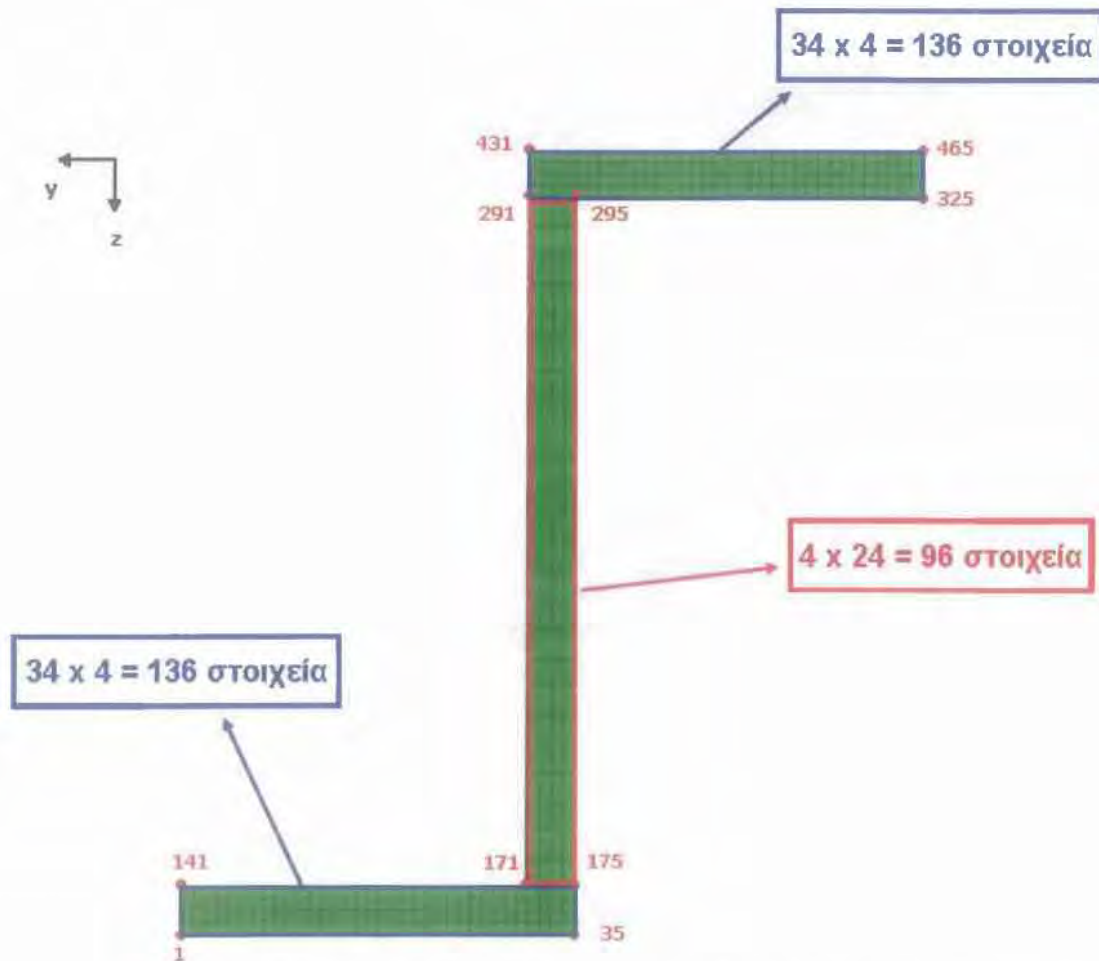
Σχήμα 4.6 : Διακριτοποίηση πελμάτων στο επίπεδο yz στη διατομή πακτώσεως

Ο κορμός που έχει διαστάσεις $(0.025 \text{ m}) \times (0.375 \text{ m})$ στο επίπεδο yz διακριτοποιήθηκε με πλέγμα που στη διεύθυνση y (διεύθυνση πάχους) αποτελείται από 4 στοιχεία και 5 κόμβους ενώ στη διεύθυνση z από 24 στοιχεία και συνεπώς 25 κόμβους (Σχήμα 4.7).



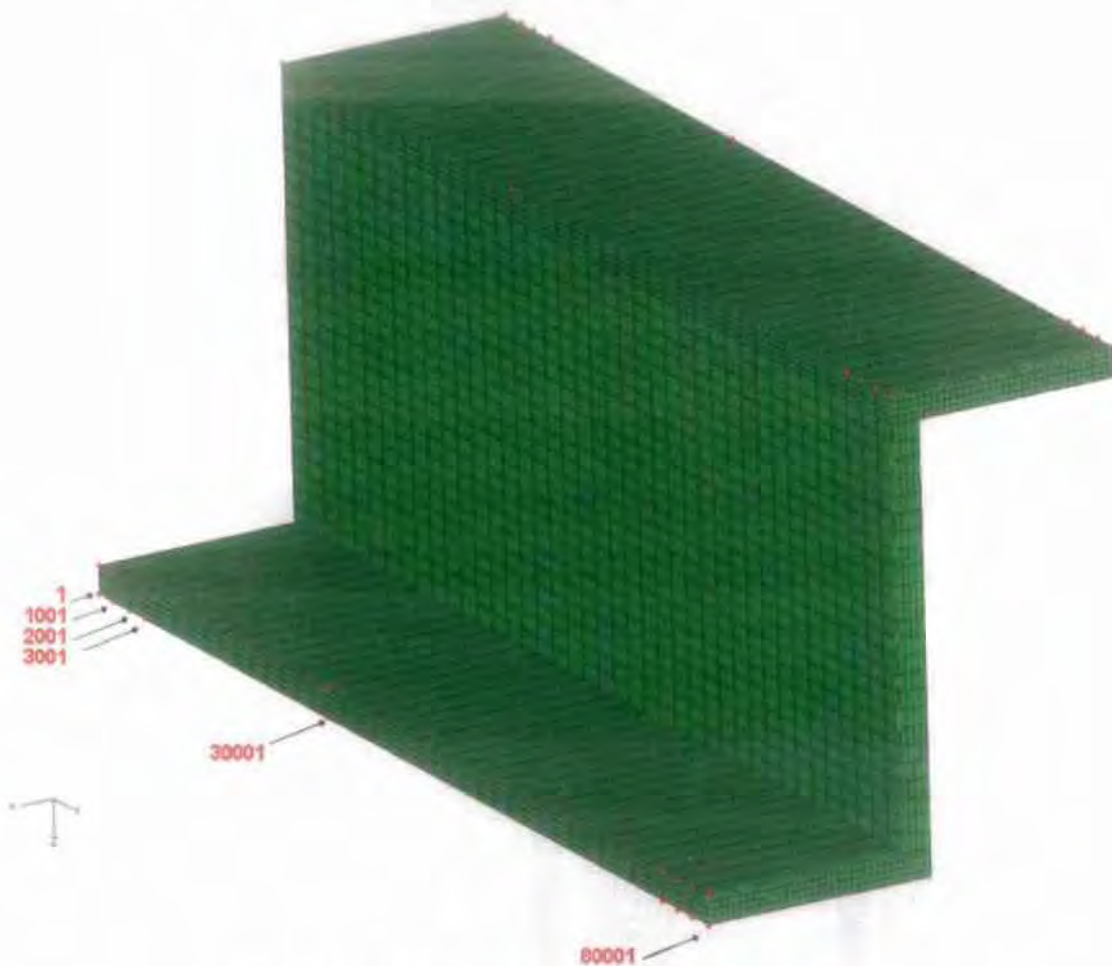
Σχήμα 4.7 : Διακριτοποίηση κορμού στο επίπεδο yz στη διατομή πακτώσεως

Κάθε διατομή όπως αυτή της πακτώσεως που παραστάθηκε στα Σχ. 4.6, 4.7 αποτελείται συνολικά από 368 στοιχεία και 465 κόμβους (Σχήμα 4.8).



Σχήμα 4.8 : Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων διατομής πακτώσεως

Σε ό,τι αφορά την τριδιάστατη διακριτοποίηση του μοντέλου, στην κατεύθυνση του άξονα x το μοντέλο έχει μήκος $L = 10 a = 2 m$. Στη διεύθυνση αυτή, επιλέξαμε να διαιρέσουμε το μοντέλο σε 80 διατομές σαν αυτή της πακτώσεως επιλέγοντας όμως η αρίθμηση των κόμβων να αυξάνεται κατά 1000 σε κάθε διατομή. Με άλλα λόγια, αν η διατομή της πακτώσεως αριθμεί κόμβους από τον 1 έως τον 465, η αμέσως επόμενη διατομή στην κατεύθυνση x θα αριθμεί κόμβους από τον 1001 έως τον 1465, η μεθεπόμενη από τον 2001 έως τον 2465 έως την τελευταία της οποίας οι κόμβοι θα ξεκινούν από τον 80001 και θα καταλήγουν στον 80465. (Σχήμα 4.9). Είναι φανερό ότι μια τέτοια διακριτοποίηση και αρίθμηση διευκολύνει πολύ την ανάγνωση των αποτελεσμάτων από την ανάλυση των τάσεων.

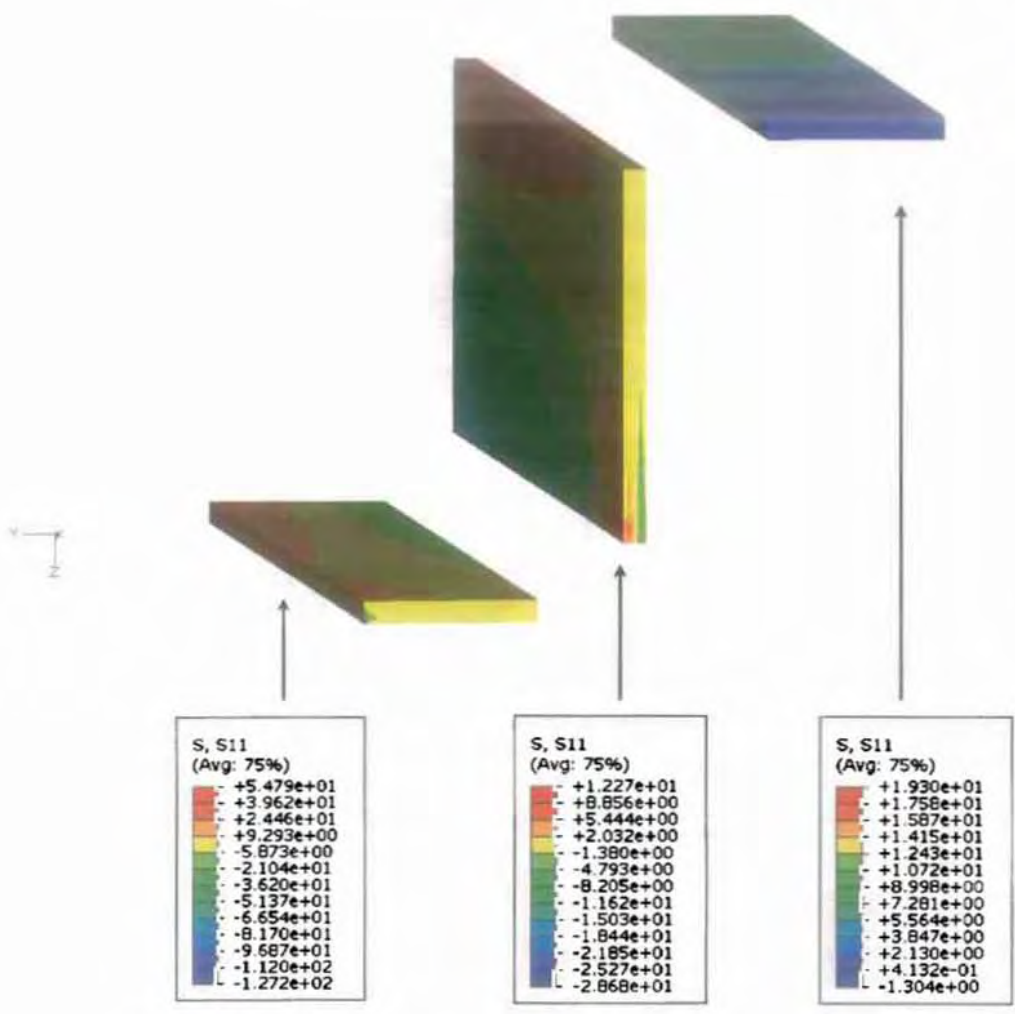


Σχήμα 4.9 : Αρίθμηση κόμβων στη διεύθυνση του άξονα x

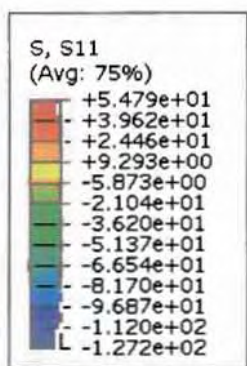
Συνολικά, ο κάρναβος αποτελείται από 29.440 στοιχεία και 37.665 κόμβους . Οι βαθμοί ελευθερίας είναι 112.995, δηλαδή ο κώδικας που γράψαμε καλείται να επιλύσει 112.995 εξισώσεις. Το μοναχικό φορτίο P εφαρμόστηκε στον κόμβο 80001 του κάτω πέλματος στη θετική κατεύθυνση του άξονα z με μέγεθος $P = 0.01 \text{ MN}$ και στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις τάσεις και τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο μοντέλο λόγω αυτής της φόρτισης.

4.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στα σχήματα που ακολουθούν εμφανίζεται η κατανομή της ορθής αξονικής τάσης σ_{11} και των διατμητικών τάσεων σ_{12} , σ_{13} σε κάθε τμήμα του προβόλου σαν να υπήρχε ομοιόμορφη παραμόρφωση, θέτοντας τον συντελεστή παραμόρφωσης ίσο με 1. Στη συνέχεια, απεικονίζεται η κατανομή των τάσεων, ορθών και διατμητικών, στην παραμορφωμένη δοκό.



(α)

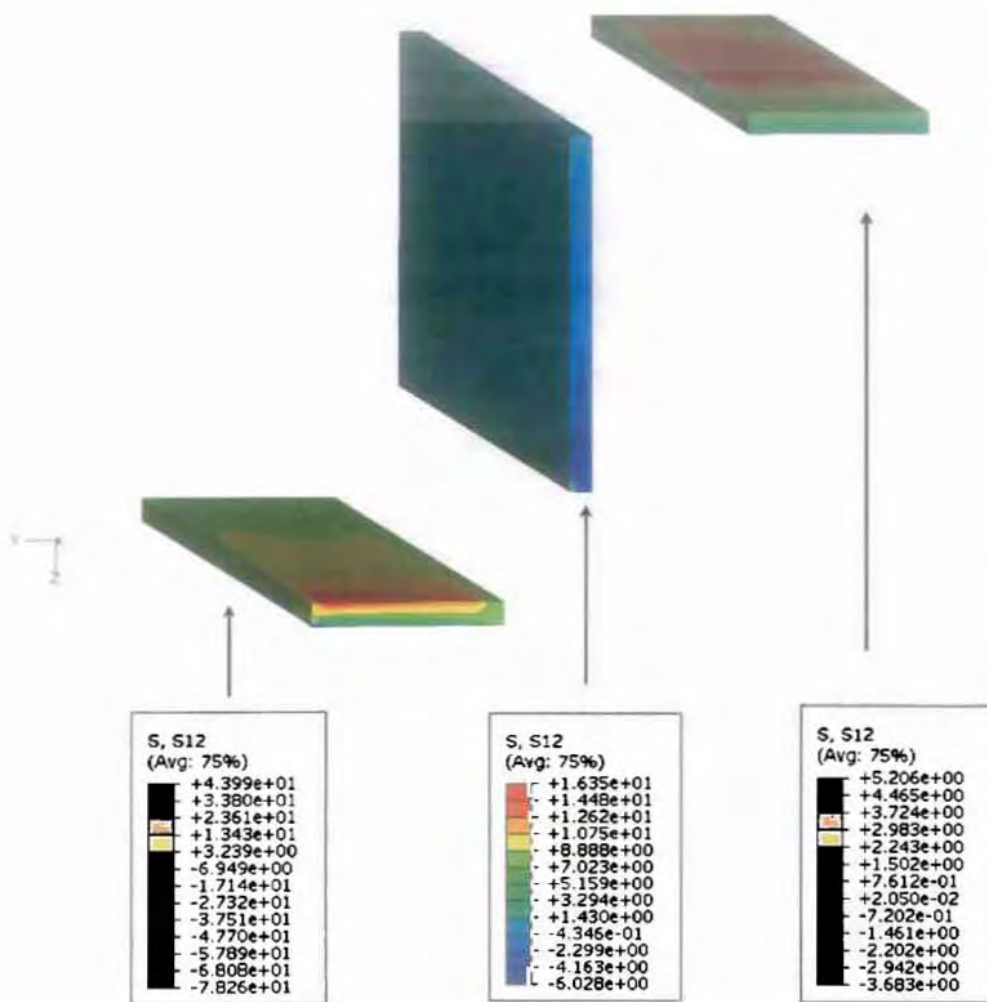


Max: +5.479e+01
 Elem: PART-1-1.28705
 Node: 79036

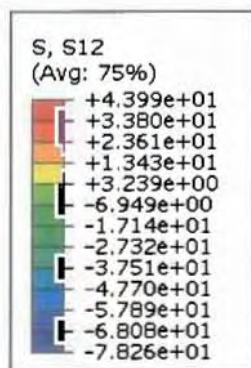
Min: -1.272e+02
 Elem: PART-1-1.29073
 Node: 80001

(β)

Σχήμα 4.10 : (α) Κατανομή ορθής τάσης σ_{11} σε κάθε τμήμα της δοκού ,
 (β) Κατανομή ορθής τάσης σ_{11} στην παραμορφωμένη δοκό



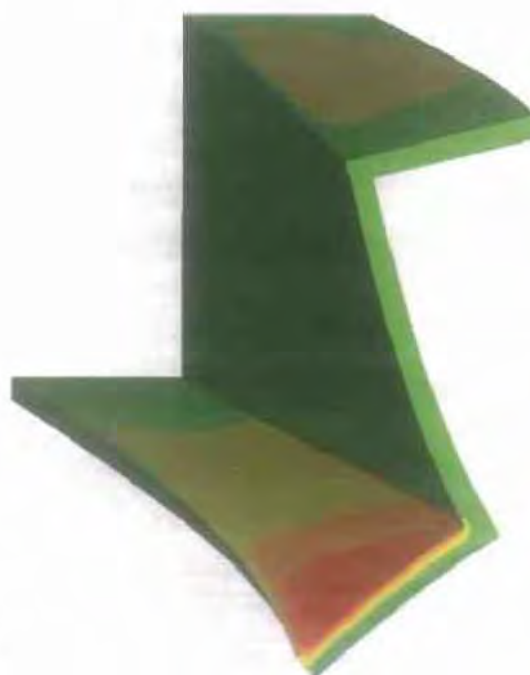
(α)



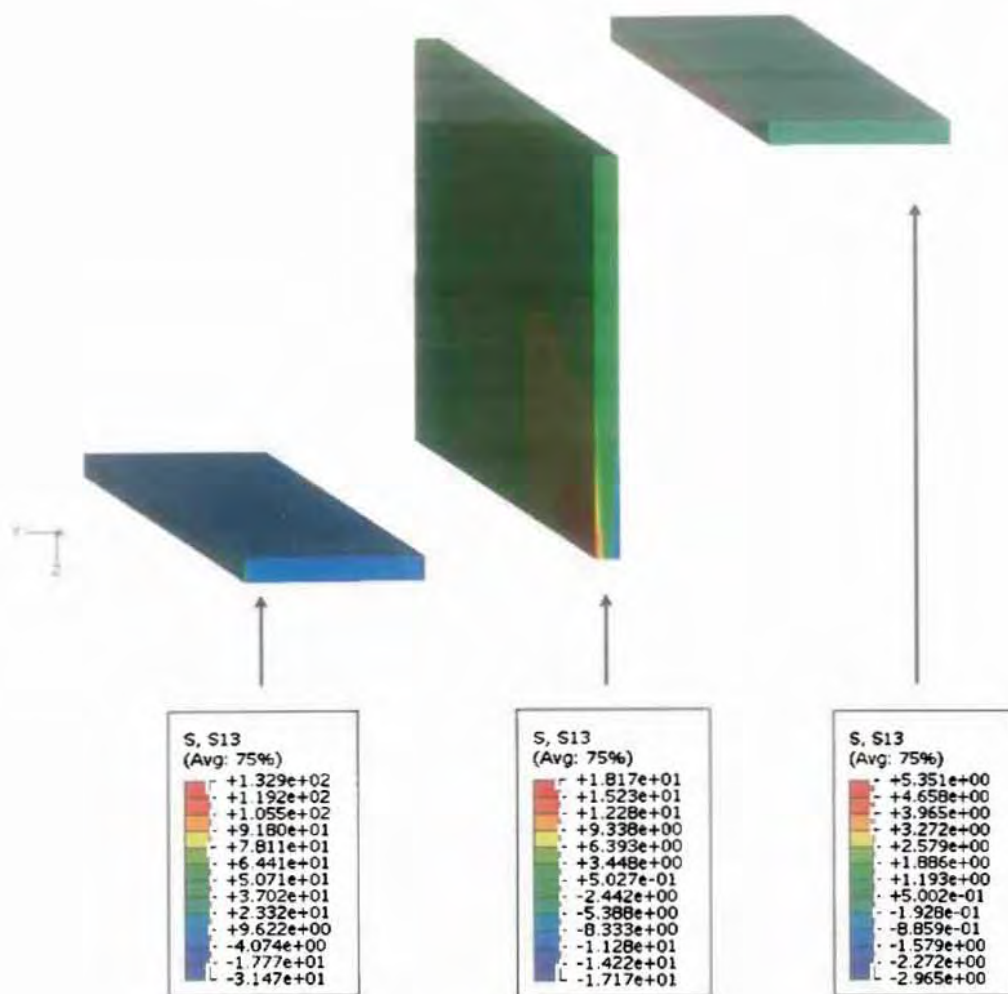
Max: +4.399e+01
Elem: PART-1-1.28810
Node: 79145

Min: -7.826e+01
Elem: PART-1-1.29073
Node: 80002

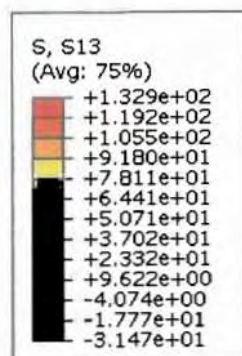
(β)



Σχήμα 4.11 : (α) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{12} σε κάθε τμήμα της δοκού ,
(β) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{12} στην παραμορφωμένη δοκό



(α)



Max: +1.329e+02
 Elem: PART-1-1.29703
 Node: 79001

Min: -3.147e+01
 Elem: PART-1-1.28705
 Node: 79001

(β)

Σημια 4.12 : (α) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{13} σε κάθε τμήμα της δοκού ,
 (β) Κατανομή διατμητικής τάσης σ_{13} στην παραμορφωμένη δοκού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΜΕ ΛΥΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (FEM)

Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η σύγκριση της αναλυτικής λύσεως της δοκού, που υφίσταται στρέψη, με την αριθμητική λύση, όπως αυτή προέκυψε από το 3D μοντέλο μέσω του *Abaqus*.

Εξετάσαμε την κατανομή των τάσεων κατά τμήματα της δοκού, δηλαδή σε άνω, κάτω πέλμα και στον κορμό, και σε δύο διατομές : τη διατομή της πακτώσεως ($x=0$)-κάνναβος από κόμβο 1 έως 465 - και μια διατομή μακριά από το στρεπτικό περιορισμό, έστω σε απόσταση $x=0.375L$ - κάνναβος από κόμβο 30001 έως 30465.

5.1 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ σ_x

5.1.1 ΔΙΑΤΟΜΗ ΠΑΚΤΩΣΕΩΣ $x = 0$

ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{12} στο άνω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

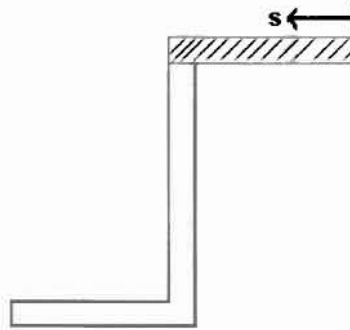
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^h + \sigma_{12}^u \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{12}^h = \left[-\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{2a}{3} - s \right) \cdot s \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\sigma_{12}^u = \left[\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{t}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot t \cdot a \cdot s \cdot \left(\frac{3a}{2} - s\right)\right) \right] = \frac{6}{5} \cdot \frac{P \cdot s}{t \cdot a^3} \cdot \left(\frac{3a}{2} - s\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \left[-\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{2a}{3} - s \right) \cdot s \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] + \left[\frac{6}{5} \cdot \frac{P \cdot s}{t \cdot a^3} \cdot \left(\frac{3a}{2} - s \right) \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.1).

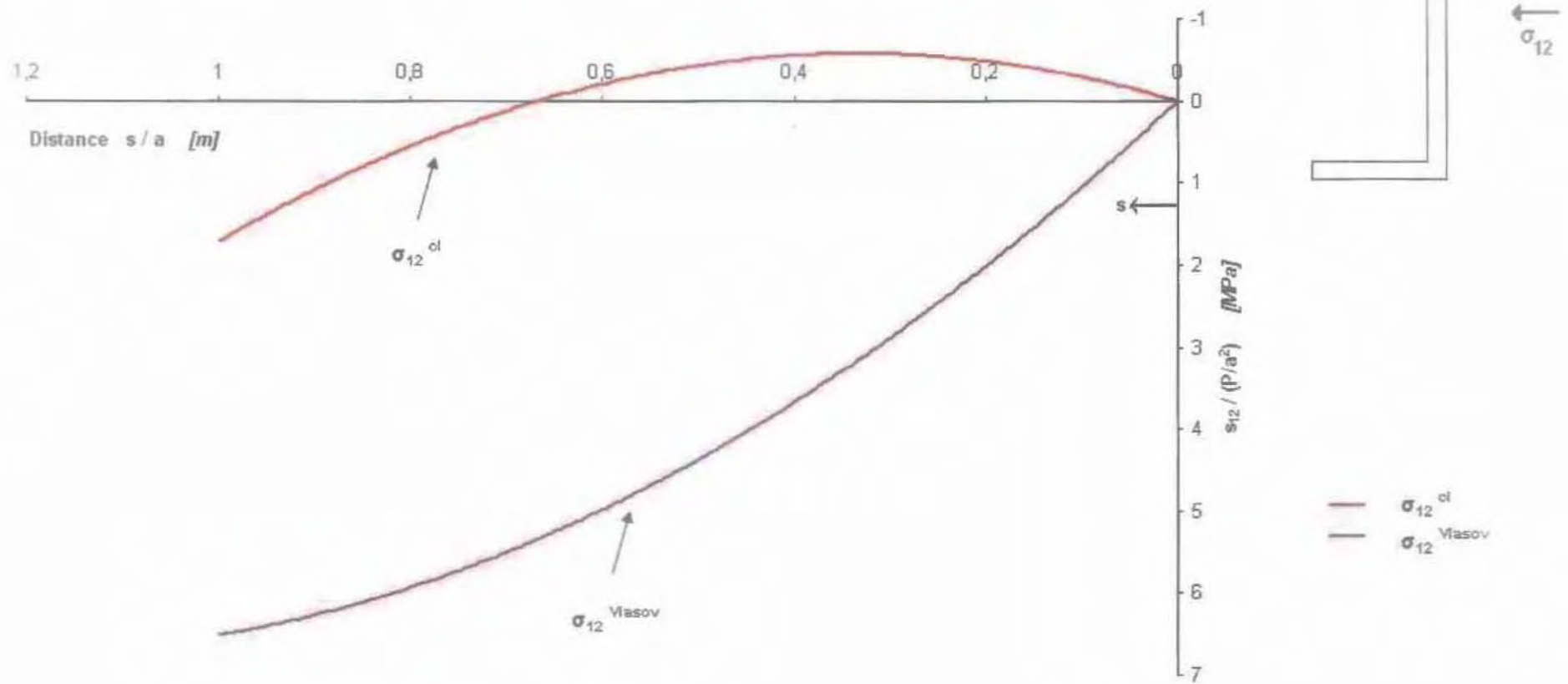


Σχήμα 5.1: Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{12} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1) (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του *Vlasov*, σχέση (2).

Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) και στο Σχήμα 5.4 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά *Saint Venant* ($\sigma_{12}^{el} = \sigma_{12}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά *Vlasov* (σ_{12}).

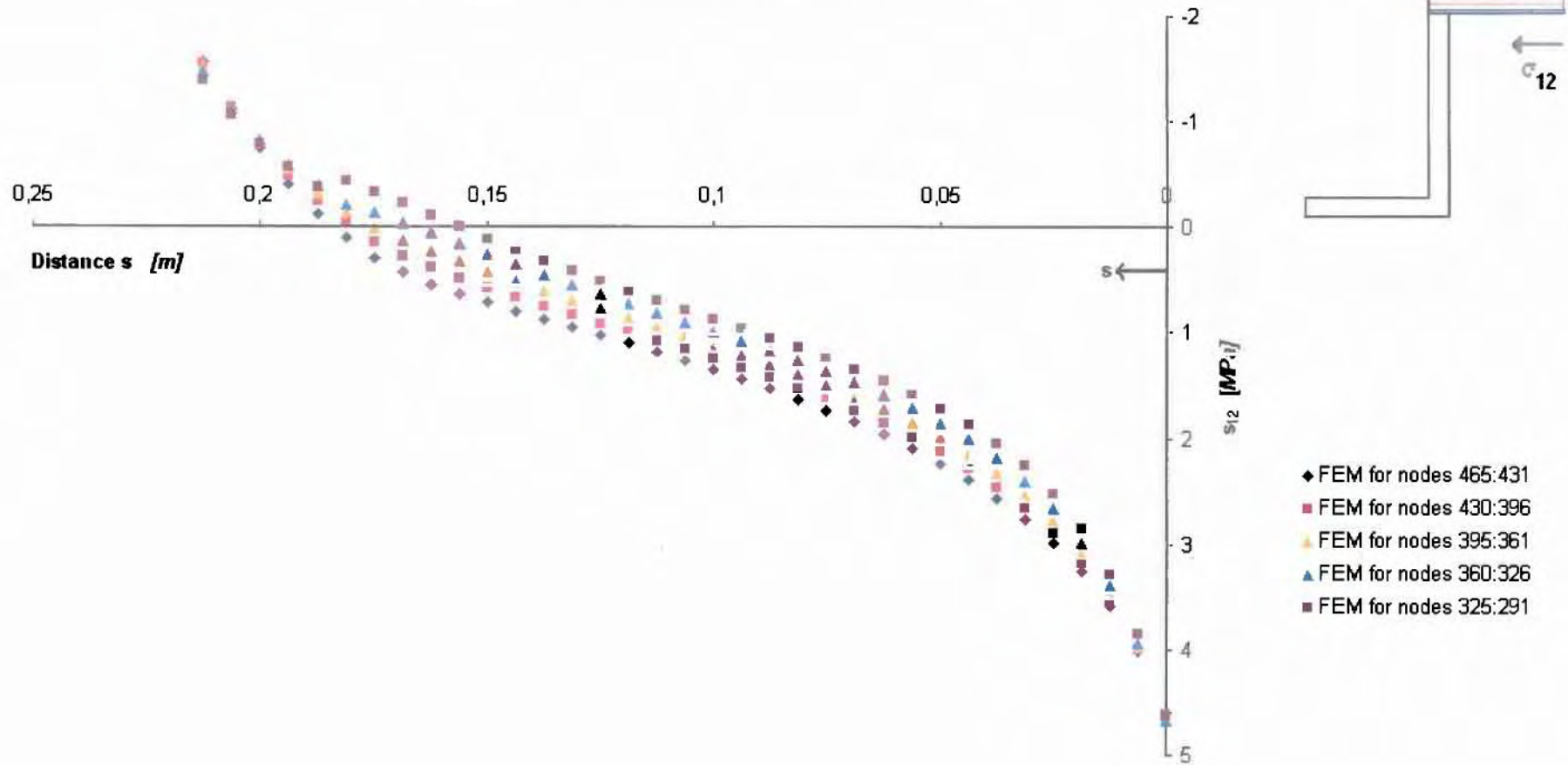
Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πελάμα
($x=0$)



43

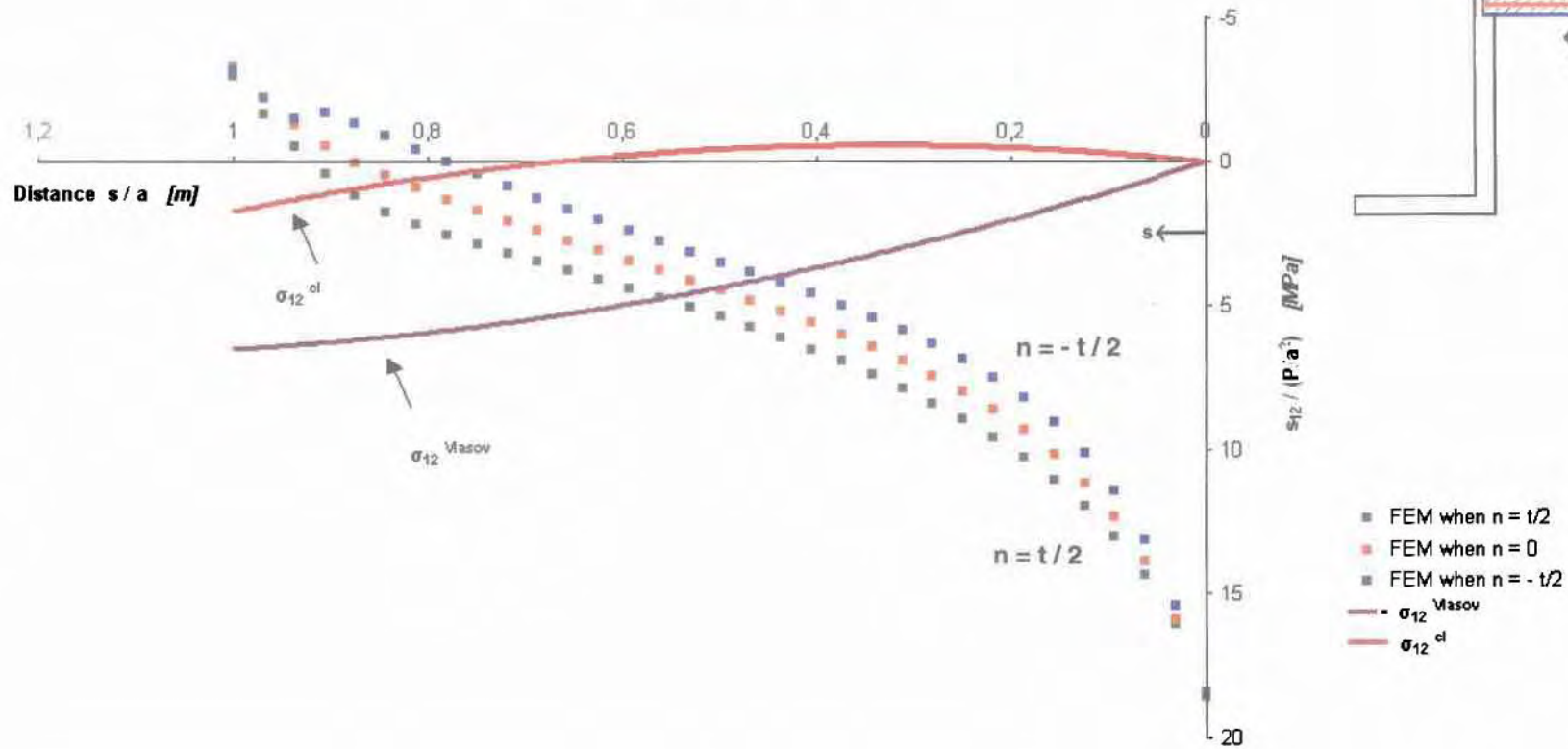
Σχήμα 5.2 : Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πέλαμα στη διατομή $x = 0$

Μεταβολή κατανομής σ_{12} κατά άξονα z



Σχήμα 5.3 : Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

σ_{12} Άνω Πέλαμα $x=0$
Μεταβολή κατά το πάχος (αξονας z)



$$\sigma_{12}^{Vlasov} = \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^w - \left(-\frac{9}{14} \left(\frac{2+a}{3} - s \right) \pi \cdot s + \frac{P}{a^2 t} \right) + \left(\frac{12}{5} - \frac{P}{t^2 a^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \pi t \pi a \pi \left(\frac{3+a}{2} - s \right) \right) \right)$$

Σχήμα 5.4: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλαμα και στη διατομή $x=0$

ΚΑΤΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{12} στο κάτω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

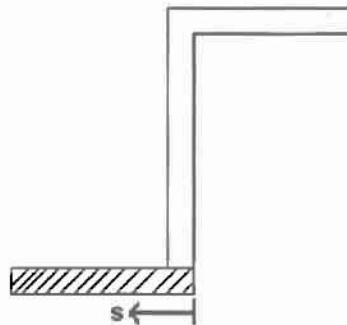
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{12}^b = \left[\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{a}{3} - s \right) \cdot (a - s) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{12}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{s}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot a \cdot (a - s) \cdot \left(\frac{a}{2} + s\right) \right) \right] = -\frac{6}{5} \cdot \frac{P \cdot (a - s)}{t \cdot a^3} \cdot \left(\frac{a}{2} + s\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \left[\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{a}{3} - s \right) \cdot (a - s) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] + \left[-\frac{6}{5} \cdot \frac{P \cdot (a - s)}{t \cdot a^3} \cdot \left(\frac{a}{2} + s\right) \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.5)

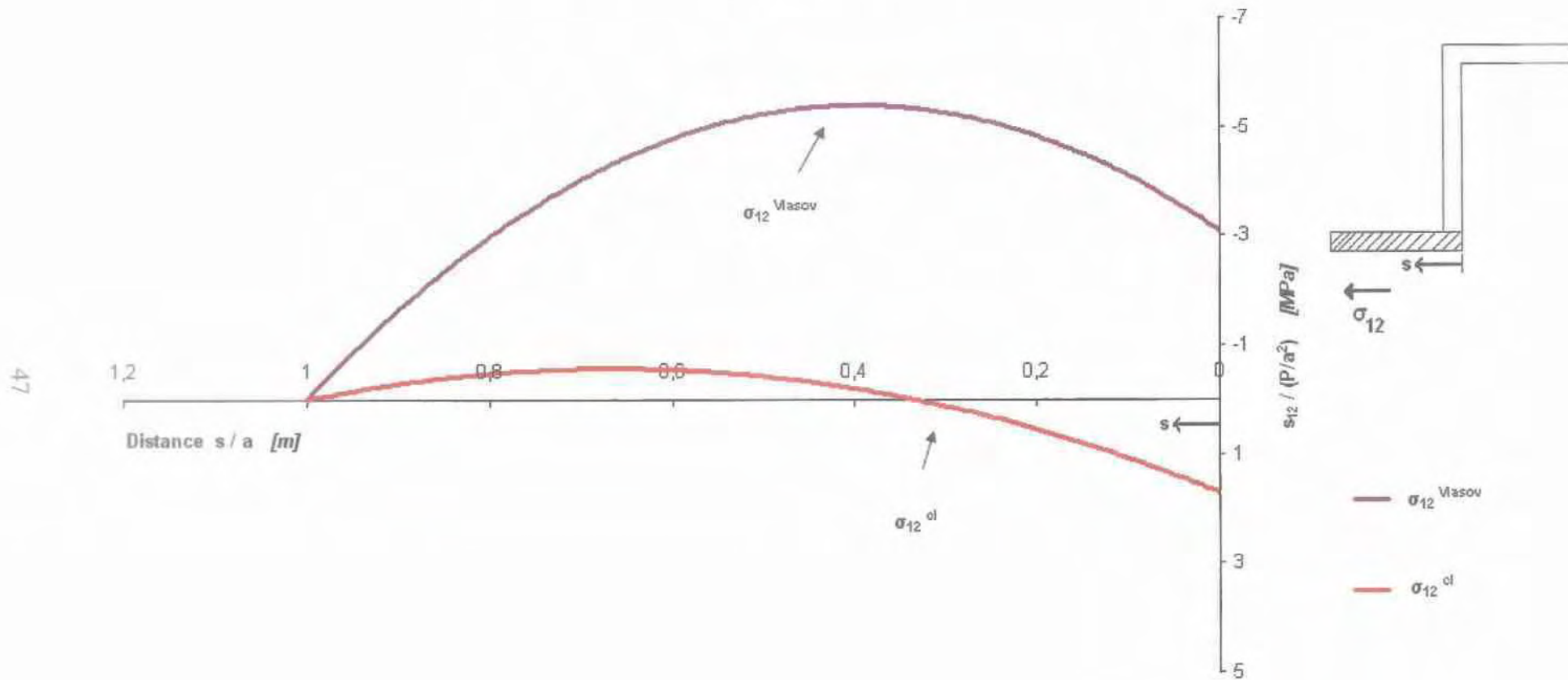


Σχήμα 5.5 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{12} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1) (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (2).

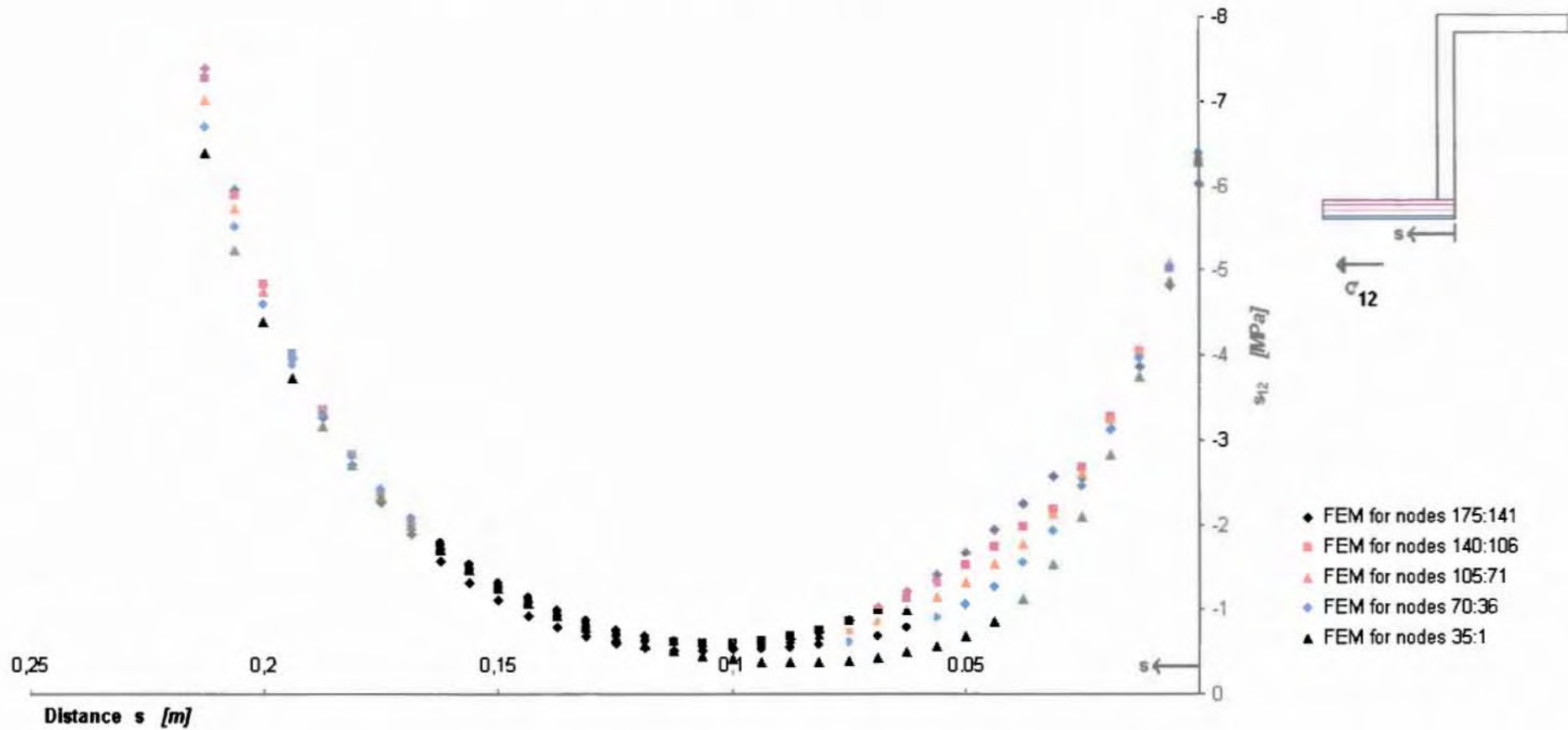
Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) και στο Σχήμα 5.8 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{12}^i = \sigma_{12}^l$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{12}).

Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλιμα
($x = 0$)

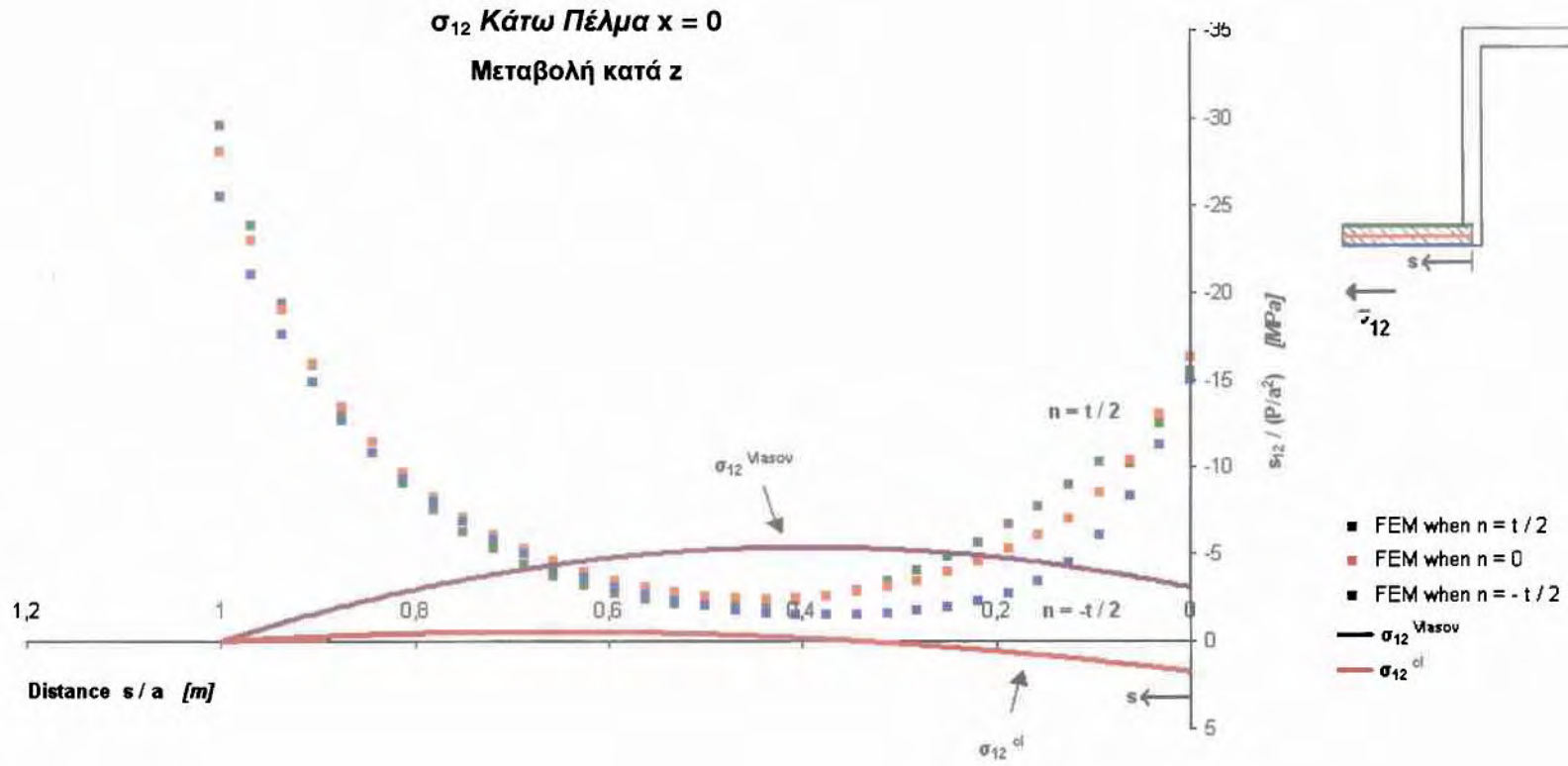


Σχήμα 5.6 : Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

Μεταβολή κατανομής σ_{12} κατά άξονα z



Σχήμα 5.7: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλαμα στη διατομή $x = 0$



$$\sigma_{12}^{Vlasov} = \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^v = \left[\frac{6}{15} \left(\frac{a}{3} - s \right) \cdot (a-s) \cdot \frac{P}{a^2 t} \right] + \left(-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 a^4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t + a \cdot (a-s) \cdot \left(\frac{a}{2} + s \right) \right) \right)$$

Σχήμα 5.8: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλαμα και στη διατομή $x = 0$

ΚΟΡΜΟΣ :

Η αναλυτική λύση της σ_{13} στον κορμό υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

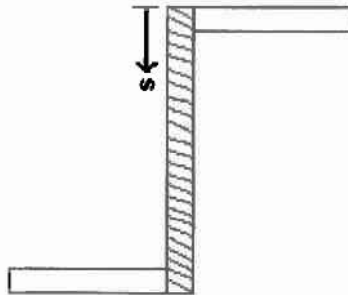
$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^h + \sigma_{13}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{13}^h = \left[\frac{3}{14} \cdot (a^2 + 4 \cdot a \cdot s - 2 \cdot s^2) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{13}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{x}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot t \cdot a^2 \cdot (a - s)\right) \right] = \frac{3}{5} \cdot \frac{P}{t \cdot a^4} \cdot (a - s)$$

$$\Rightarrow \sigma_{13} = \left[\frac{3}{14} \cdot (a^2 + 4 \cdot a \cdot s - 2 \cdot s^2) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] + \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{P}{t \cdot a^4} \cdot (a - s) \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.9).

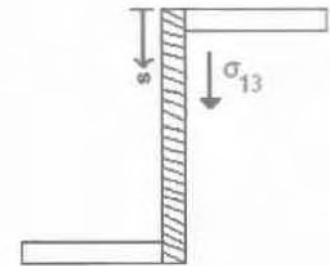
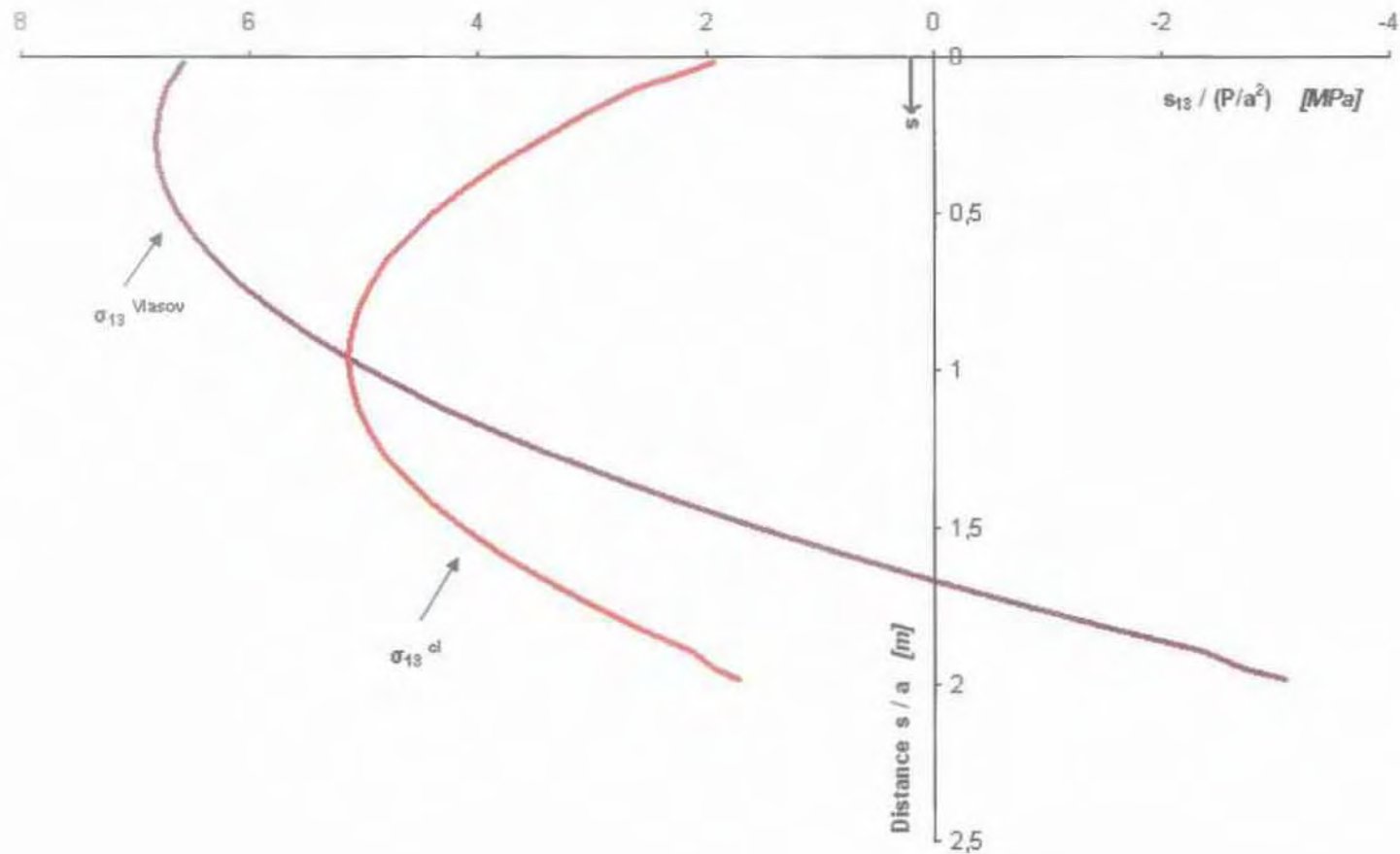


Σχήμα 5.9 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού

Στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{13} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1) (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του *Vlasov*, σχέση (2).

Στο Σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας y) ενώ στο Σχήμα 5.12 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ που συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά *Saint Venant* ($\sigma_{13}^s = \sigma_{13}^h$) και με την αναλυτική λύση κατά *Vlasov* (σ_{13}).

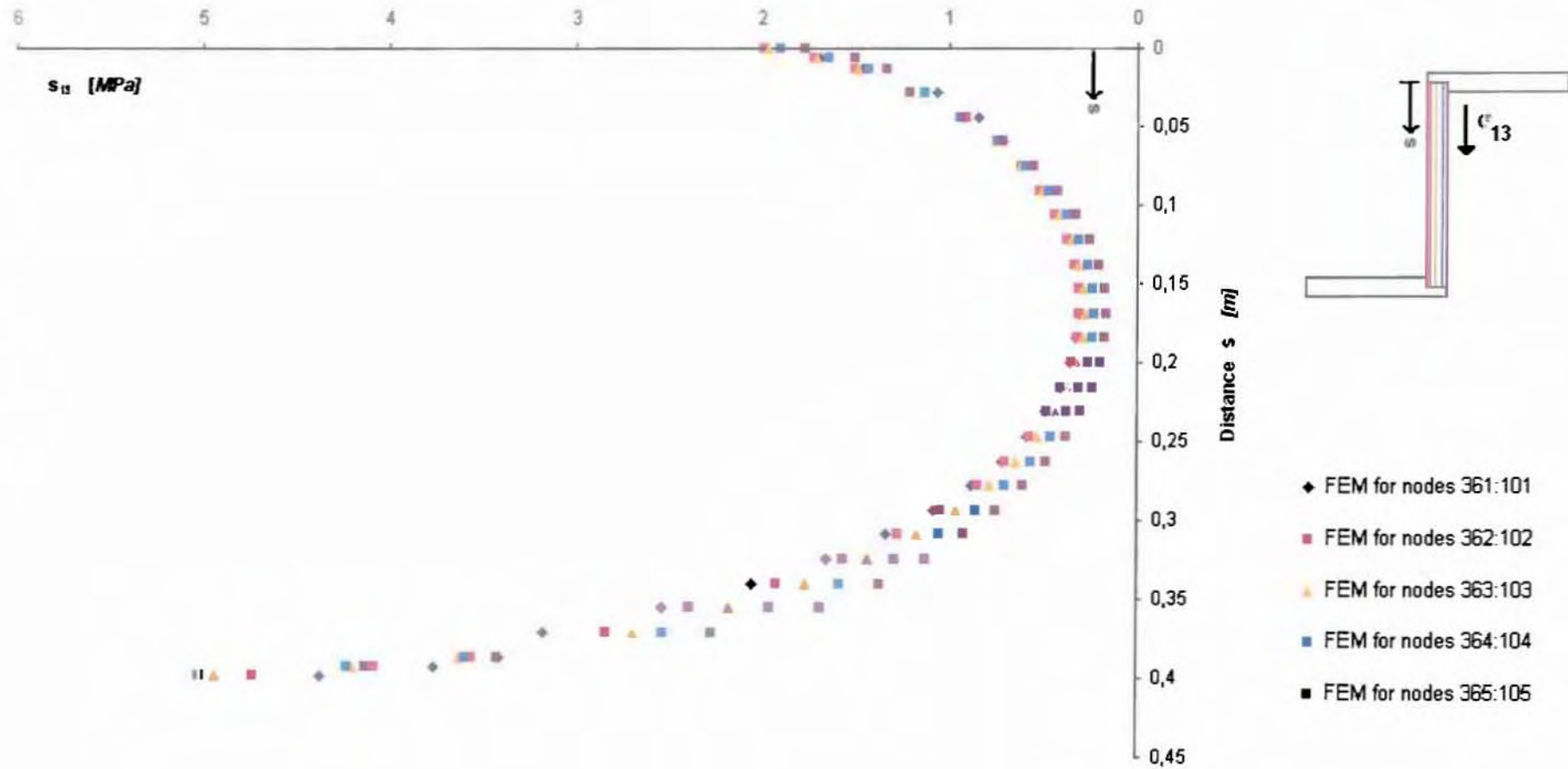
Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό
($x = 0$)



— σ_{13}^{Vlasov}
— σ_{13}^{ex}

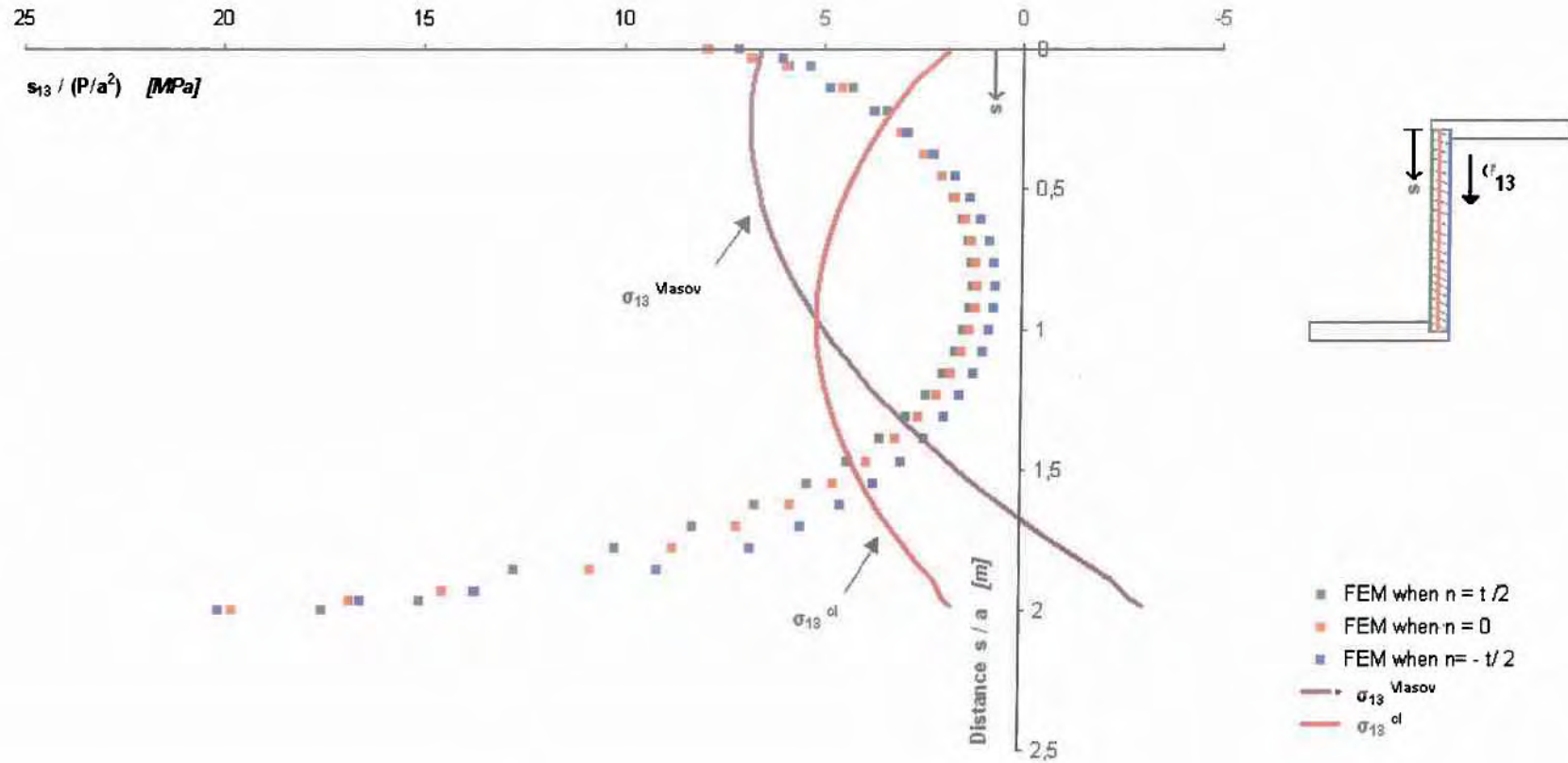
Σχήμα 5.10: Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό στη διατομή $x = 0$

Μεταβολή κατανομής σ_{13} κατά το πάχος (άξονας y)



Σημία 5.11: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0$

σ_{13} Κορμός $x = 0$
Μεταβολή κατά y

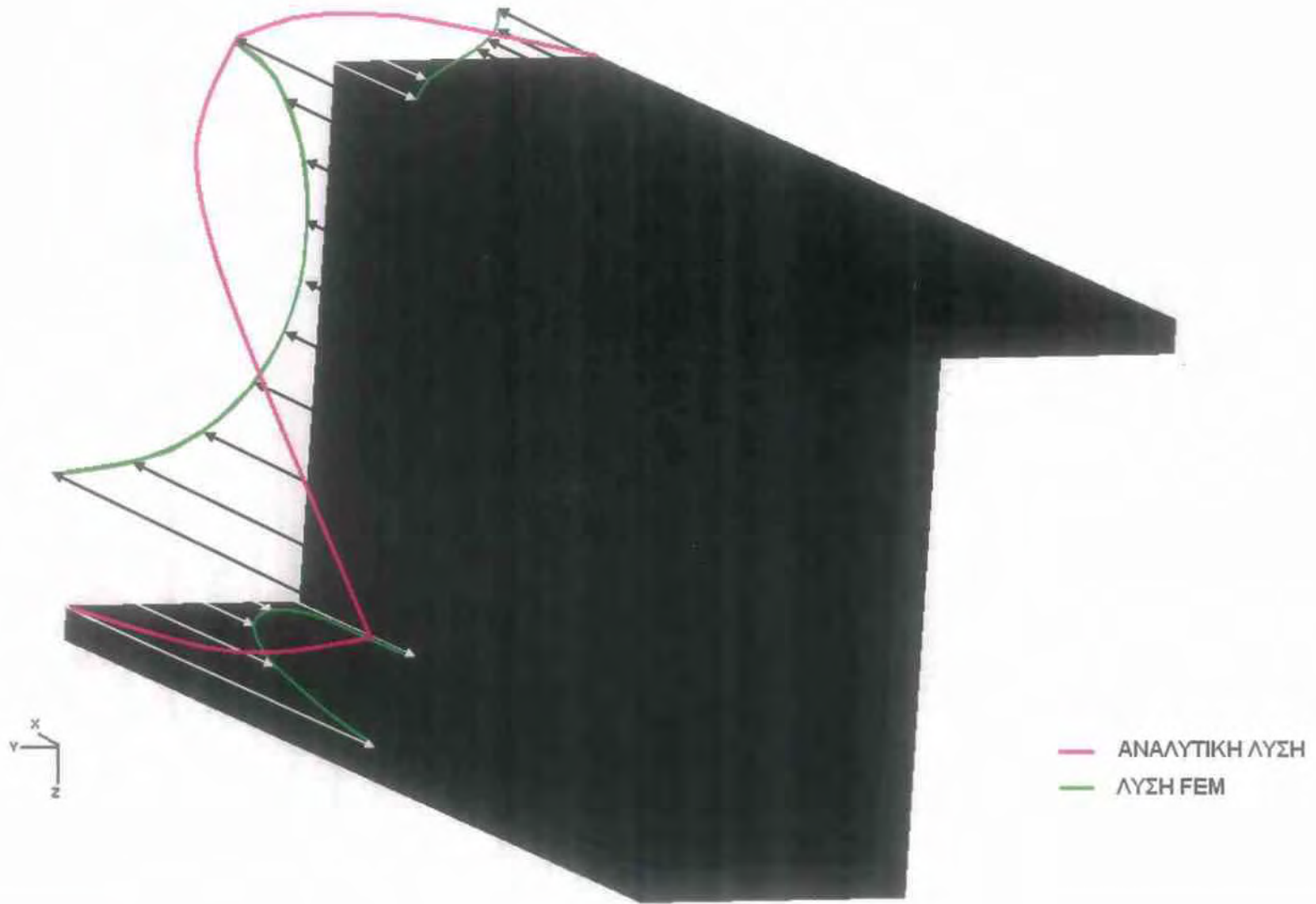


53

$$\sigma_{13}^{Masov} = \sigma_{13}^b + \sigma_{13}^v = \left(\frac{3}{14} (a^2 + 4as + 2s^2) \cdot \frac{P}{t \cdot a^3} \right) + \left(-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \left(-\frac{a^2 + t}{4} \cdot (a - s) \right) \right)$$

Σημία 5.12: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0$

Προοπτική παρουσίαση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης κατανομής των
διατμητικών τάσεων σ_{xs} στη διατομή της πακτώσεως
($x = 0$)



5.1.2 ΔΙΑΤΟΜΗ ΜΑΚΡΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΑΚΤΩΣΗ $x = 0.375L$

ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{12} στο άνω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

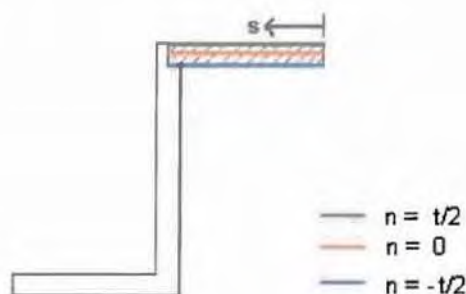
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^h + \sigma_{12}^w + \sigma_{12}^{SV} \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{12}^h = \left[-\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{2a}{3} - s \right) \cdot s \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{12}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot t \cdot a \cdot s \cdot \left(\frac{3a}{2} - s\right) \right) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{12}^{SV} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n \cdot P}{t^3} \cdot \left[\frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \right] \quad (3)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.13).

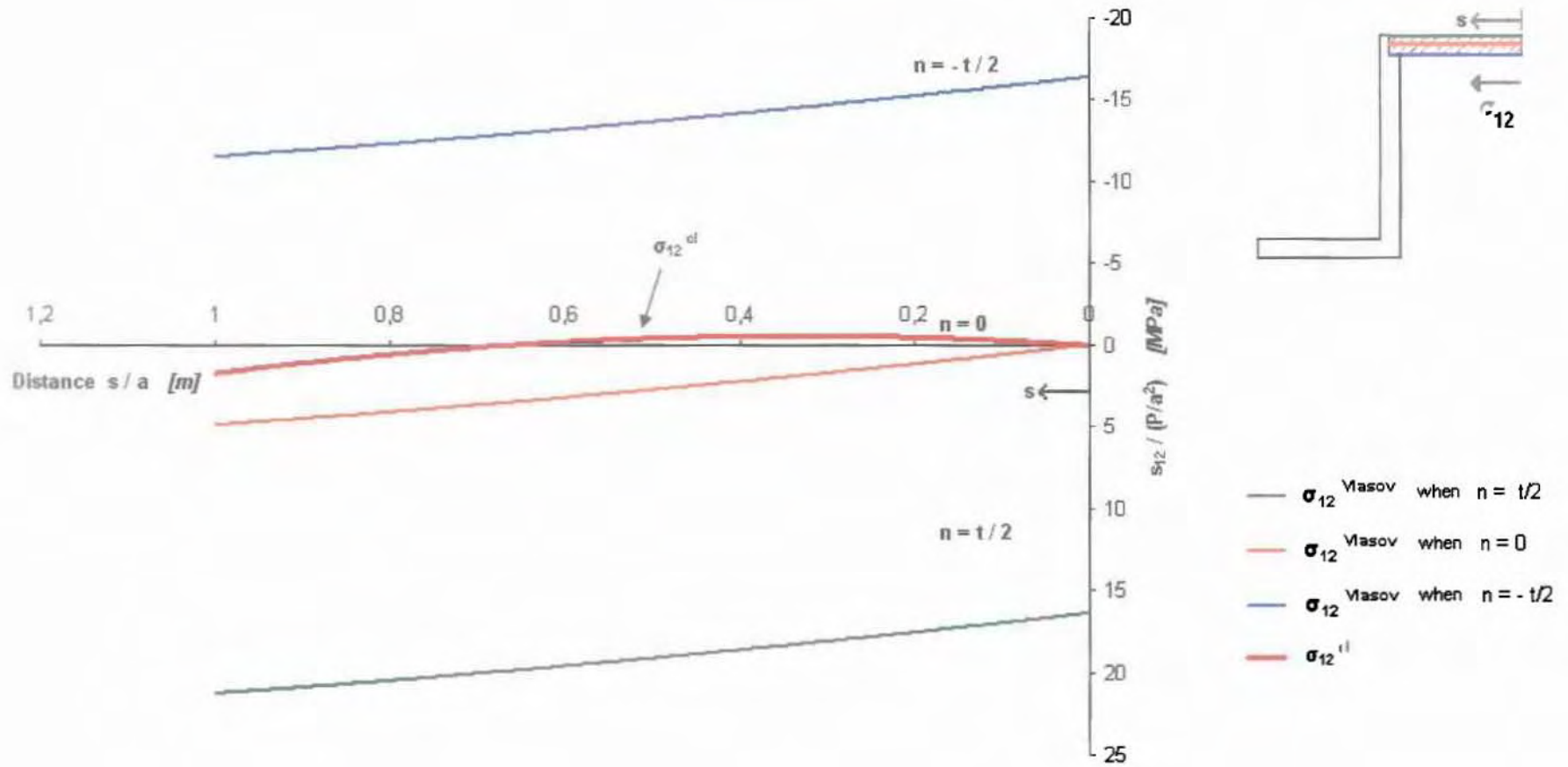


Σχήμα 5.13 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.14 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{12} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1) (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (1+2+3).

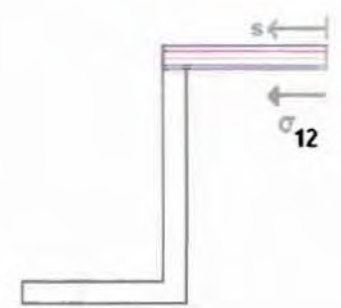
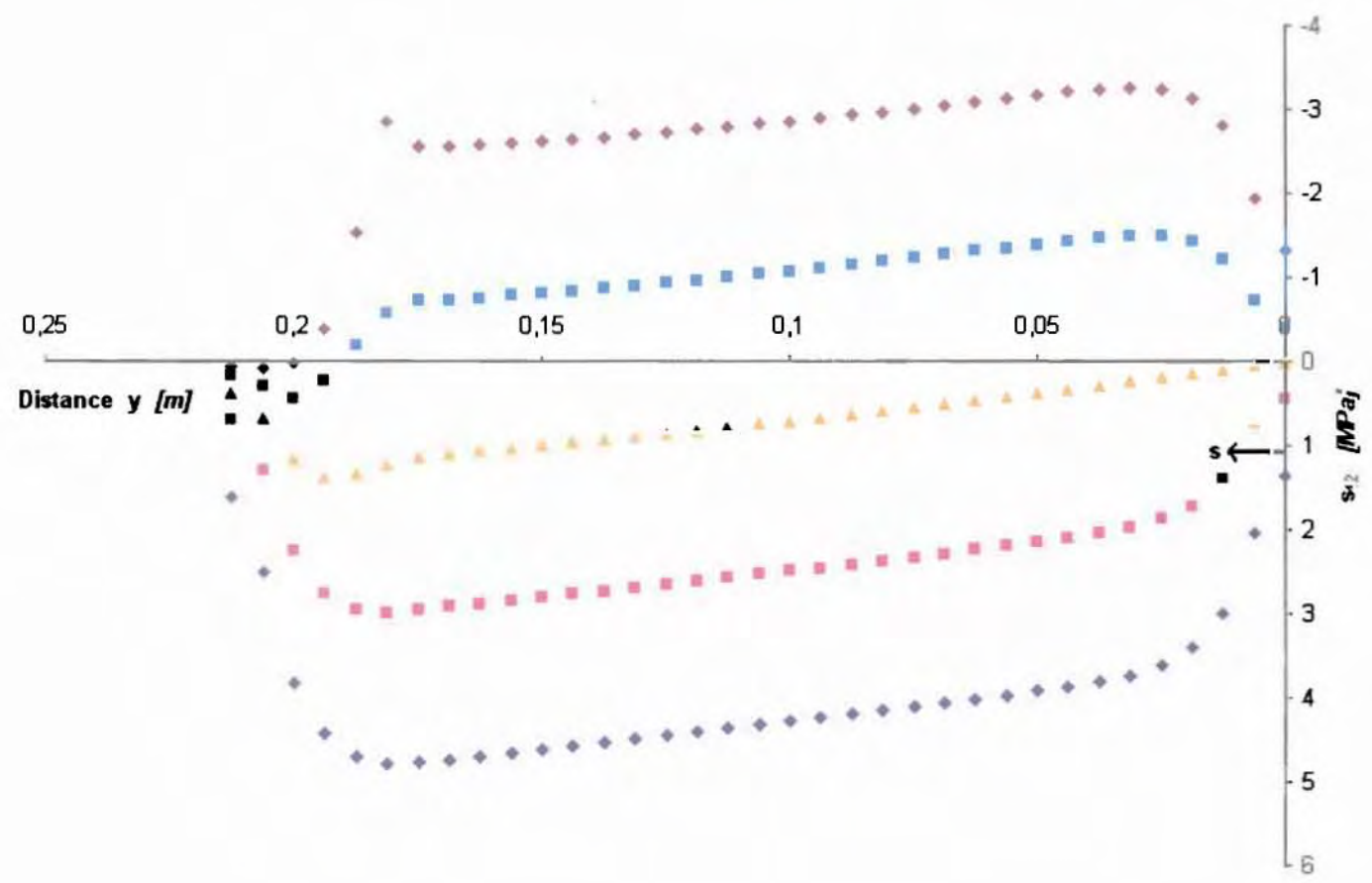
Στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.16 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{12}^c = \sigma_{12}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{12}).

Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πέλαμα
($x = 0.375L$)



Σχήμα 5.14: Αναλυτική λύση σ_{12} στο Άνω Πέλαμα στη διατομή $x = 0.375L$

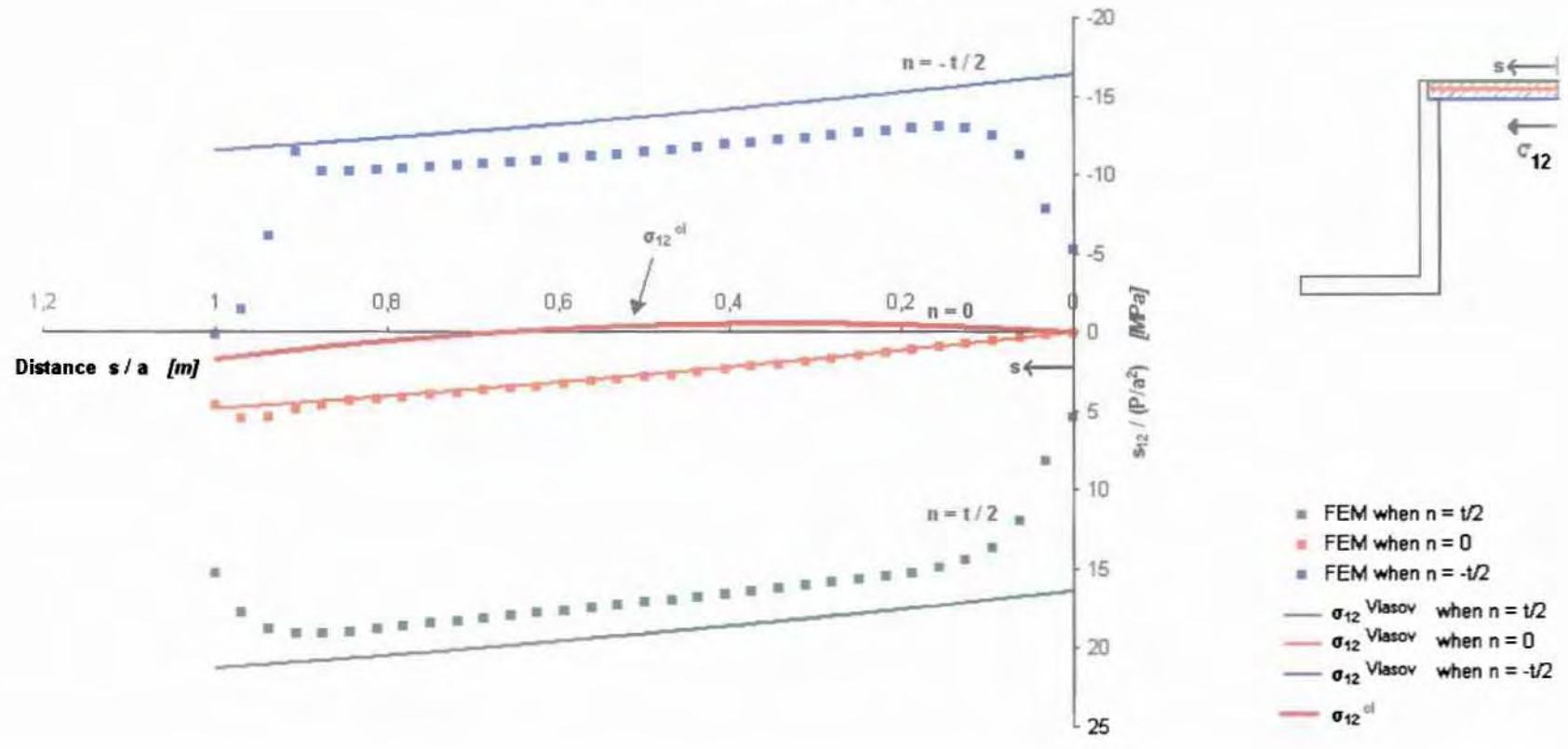
Μεταβολή κατανομής σ_{12} κατά το πάχος (άξονας z)



- ◆ FEM for nodes 30465:30431
- FEM for nodes 30430:30396
- ▲ FEM for nodes 30395:30361
- FEM for nodes 30360:30326
- ◆ FEM for nodes 30325:30291

Σχήμα 5.15: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$

σ_{12} Άνω Πέλαμα $\chi = 0.375L$
Μεταβολή κατά το πάχος (αξονας z)



$$\sigma_{12, \text{Vlasov}} = \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^m + \sigma_{12}^{\text{IV}} = \left(-\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{2a}{3} - s \right) \cdot \frac{P}{a^3 + t^3} \right) + \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^3 + a^3} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{s}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{1}{a}\right]} - \left(-\frac{1}{2} \cdot t \cdot a \cdot \left(\frac{3a}{2} - s \right) \cdot s \right) \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{s+P}{t^3} + \left(1 - \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{s}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{1}{a}\right]} \right) \right)$$

Σχήμα 5.16: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Άνω Πέλαμα και στη διατομή $\chi = 0.375L$

ΚΑΤΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{12} στο κάτω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

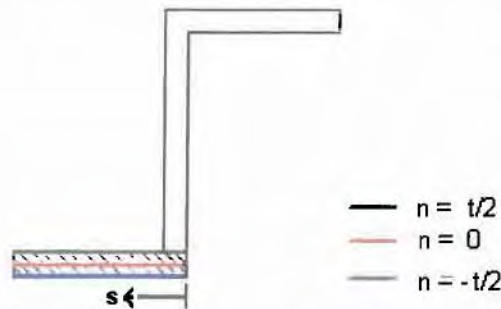
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^b + \sigma_{12}^w + \sigma_{12}^{sv} \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{12}^b = \left[\frac{9}{14} \cdot \left(\frac{a}{3} - s \right) \cdot (a - s) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{12}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot a \cdot (a - s) \cdot \left(\frac{a}{2} + s\right) \right) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{12}^{sv} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n \cdot P}{t^3} \cdot \left\{ 1 - \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \right\} \quad (3)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.17).



Σχήμα 5.17 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος

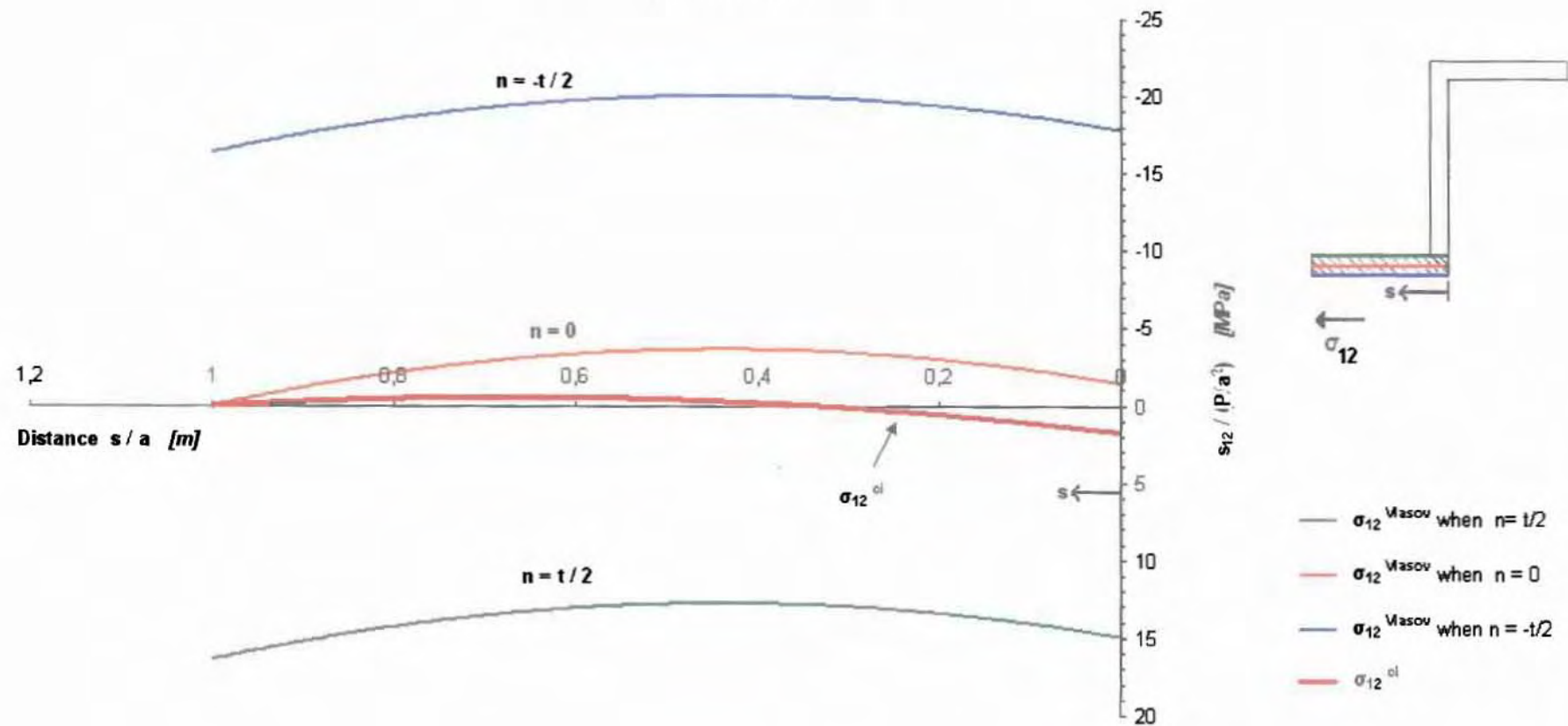
Στο Σχήμα 5.18 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{12} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1) (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (1+2+3).

Στο Σχήμα 5.19 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.20 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$

συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{12}^d = \sigma_{12}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{12}).

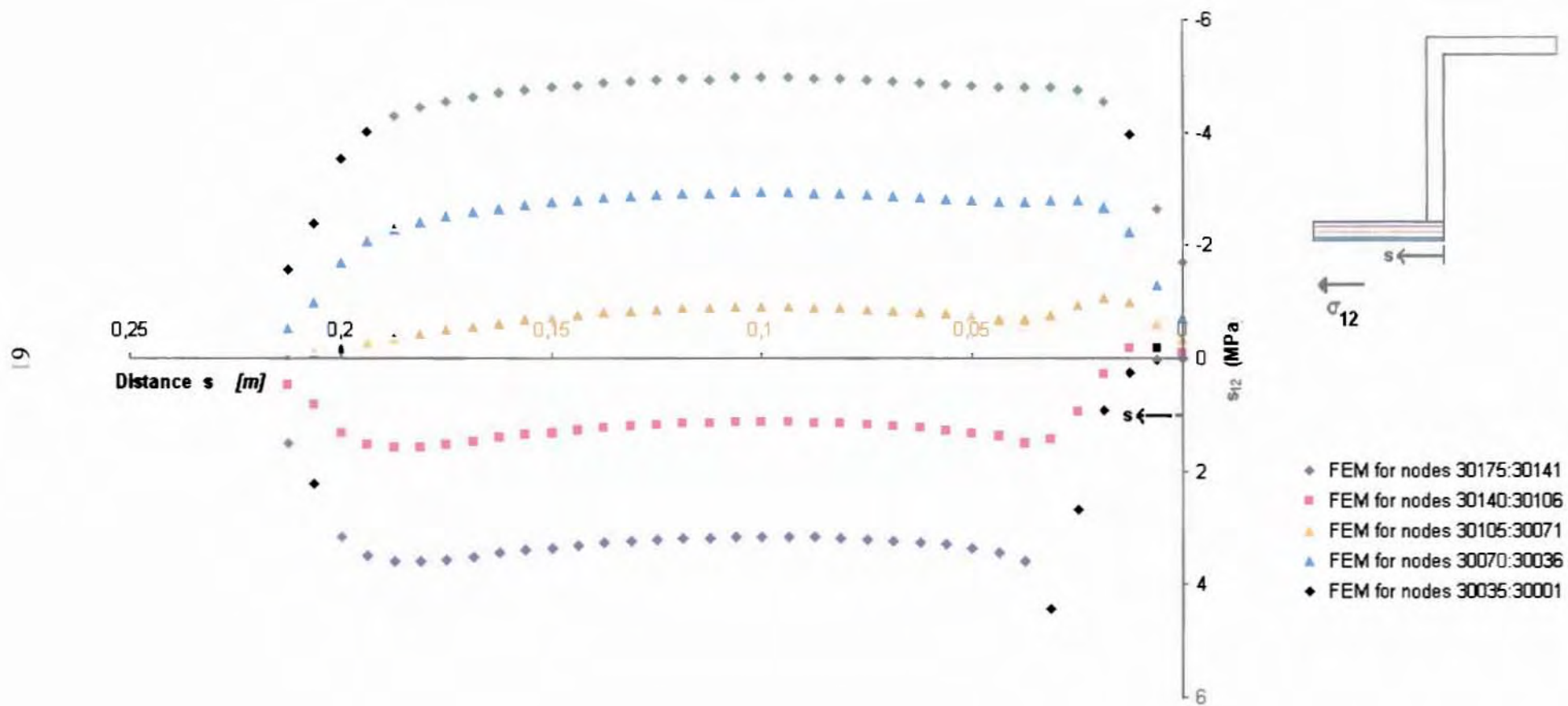
Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλμα
($x = 0.375 L$)

09



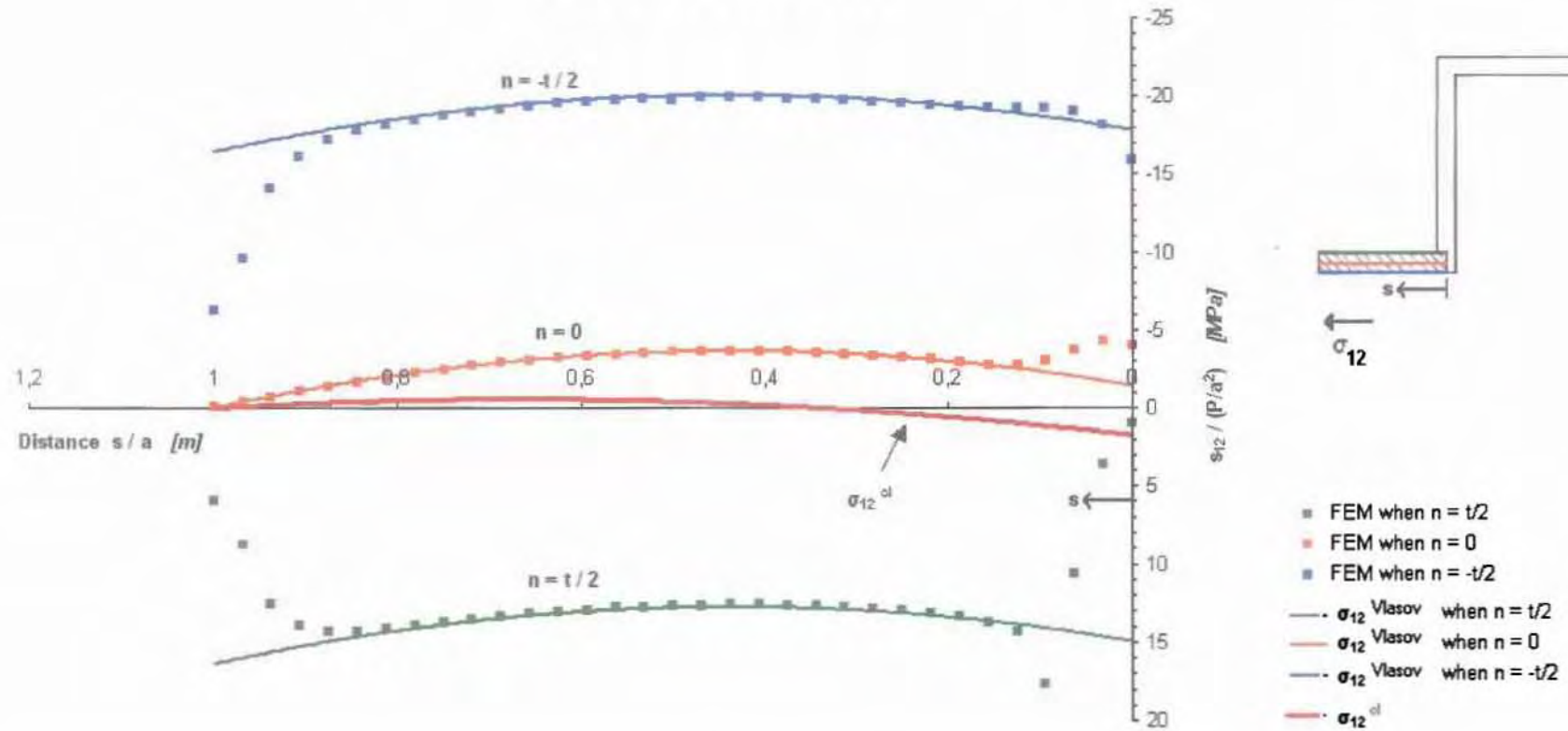
Σχήμα 5.18: Αναλυτική λύση σ_{12} στο Κάτω Πέλμα στη διατομή $x = 0.375L$

Μεταβολή κατανομής σ_{12} κατά το πάχος (άξονας z)



Σχήμα 5.19: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$

σ_{12} Κάτω Πέλαμα $\chi = 0.375 L$
 Μεταβολή κατά το πάχος (αξονας z)



$$\sigma_{12}^{Vlasov} = \sigma_{12}^{cl} + \sigma_{12}^{n=t/2} + \sigma_{12}^{n=0} + \sigma_{12}^{n=-t/2} = \left(\frac{3}{14} \cdot \left(\frac{a}{2} - s \right) \cdot \left(\frac{a}{2} - s \right) \cdot \frac{P}{a^2 + t} \right) + \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 + a^2} + \frac{\text{Cosh}\left[10 + 1.1094 \cdot \frac{t}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 + 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{t}{2} + t + a \cdot \left(\frac{a}{2} - s \right) + (a - s) \right) \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{a - P}{t^2} + \left(1 - \frac{\text{Cosh}\left[10 + 1.1094 \cdot \frac{t}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 + 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \right) \right)$$

Σχήμα 5.20 : Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{12} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλαμα και στη διατομή $\chi = 0.375L$

ΚΟΡΜΟΣ :

Η αναλυτική λύση της σ_{13} στον κορμό υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

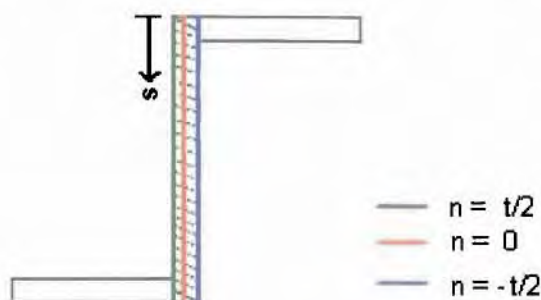
$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^b + \sigma_{13}^w + \sigma_{13}^{SV} \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{13}^b = \left[\frac{3}{14} \cdot (a^2 + 4 \cdot a \cdot s - 2 \cdot s^2) \cdot \frac{P}{a^3 \cdot t} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{13}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 \cdot a^4} \cdot \frac{\text{Cosh}[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot (1 - \frac{0.75}{10 \cdot a})]}{\text{Cosh}[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}]} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot t \cdot a^2 \cdot (a - s) \right) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{13}^{SV} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n \cdot P}{t^3} \cdot \left[1 - \frac{\text{Cosh}[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a} \cdot (1 - \frac{0.75}{10 \cdot a})]}{\text{Cosh}[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}]} \right] \quad (3)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.21).

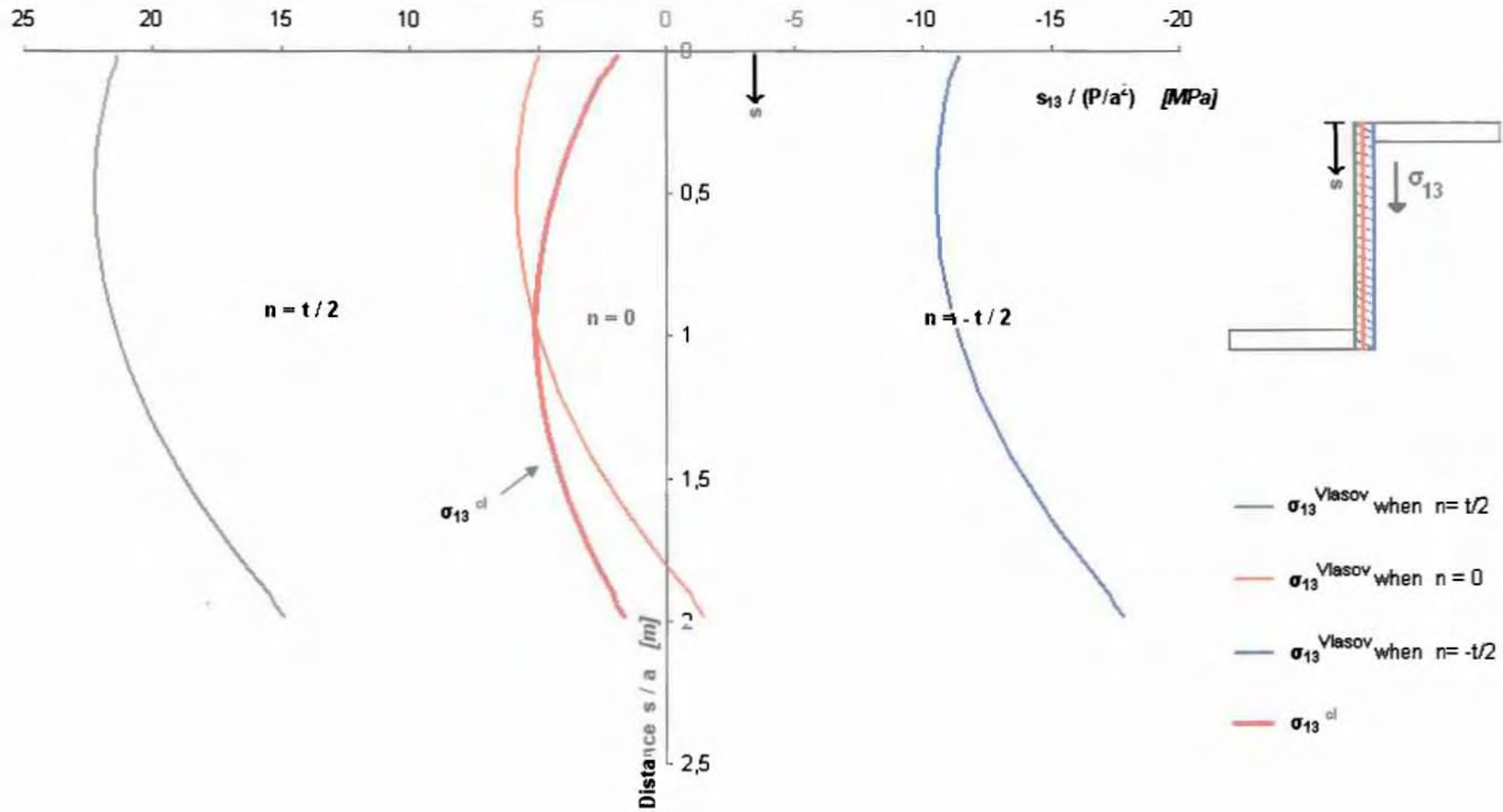


Σχήμα 5.21 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού

Στο Σχήμα 5.22 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{13} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (1+2+3).

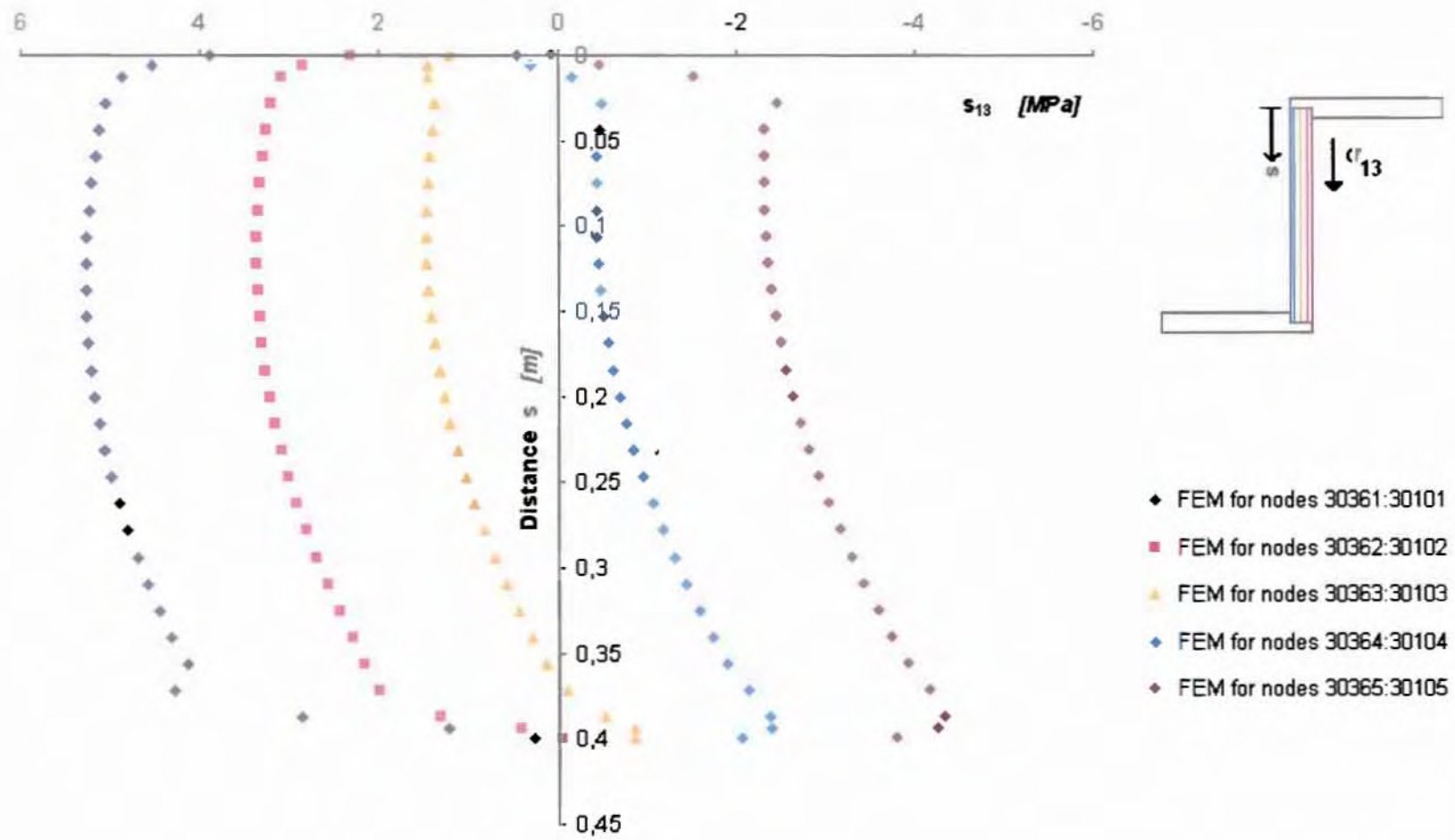
Στο Σχήμα 5.23 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας y) ενώ στο Σχήμα 5.24 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{13}^{cl} = \sigma_{13}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{13}).

Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό
($x = 0.375L$)



Σχήμα 5.22: Αναλυτική λύση σ_{13} στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$

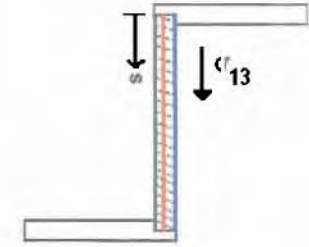
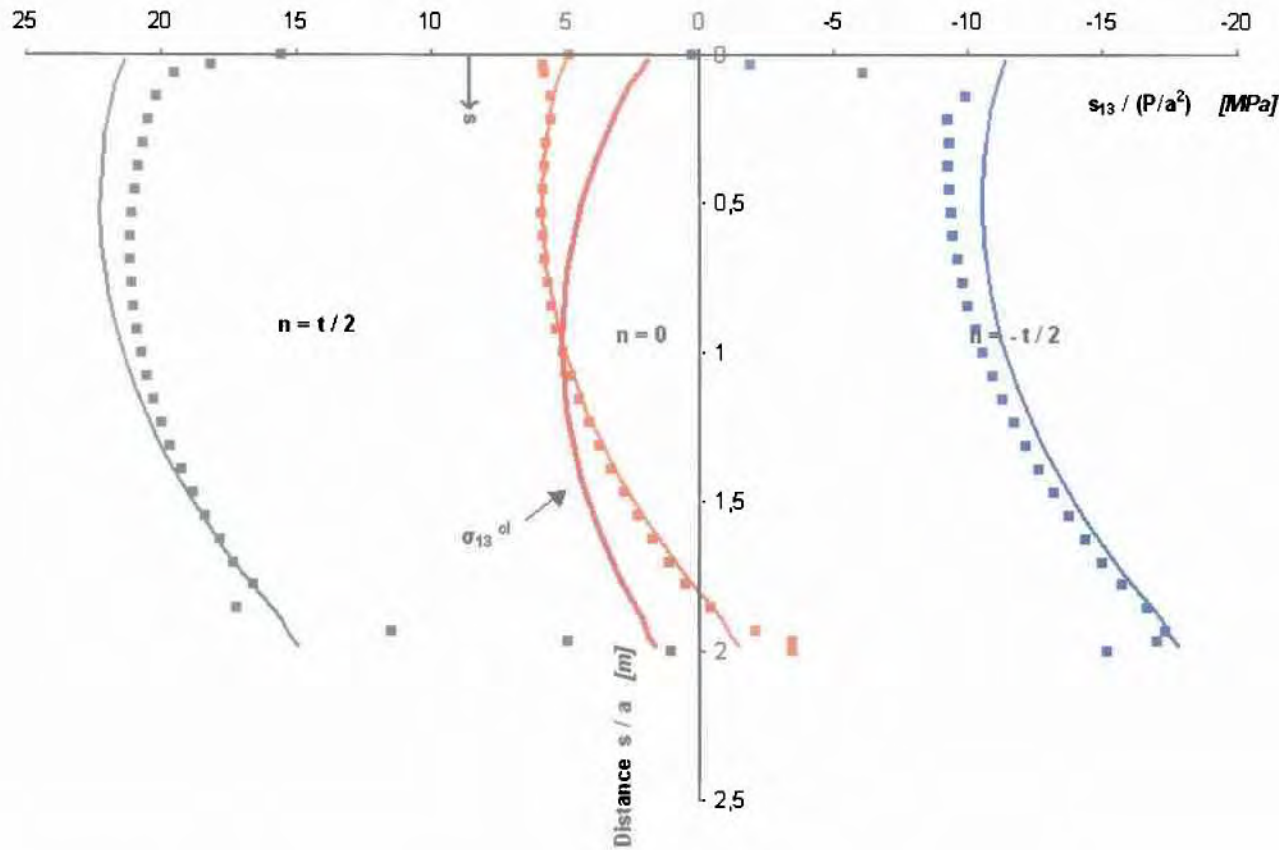
Μεταβολή κατανομής σ_{13} κατά το πάχος (άξονας y)



59

Σχήμα 5.23: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$

σ_{13} Κορμός $x = 0.375L$
Μεταβολή κατά y

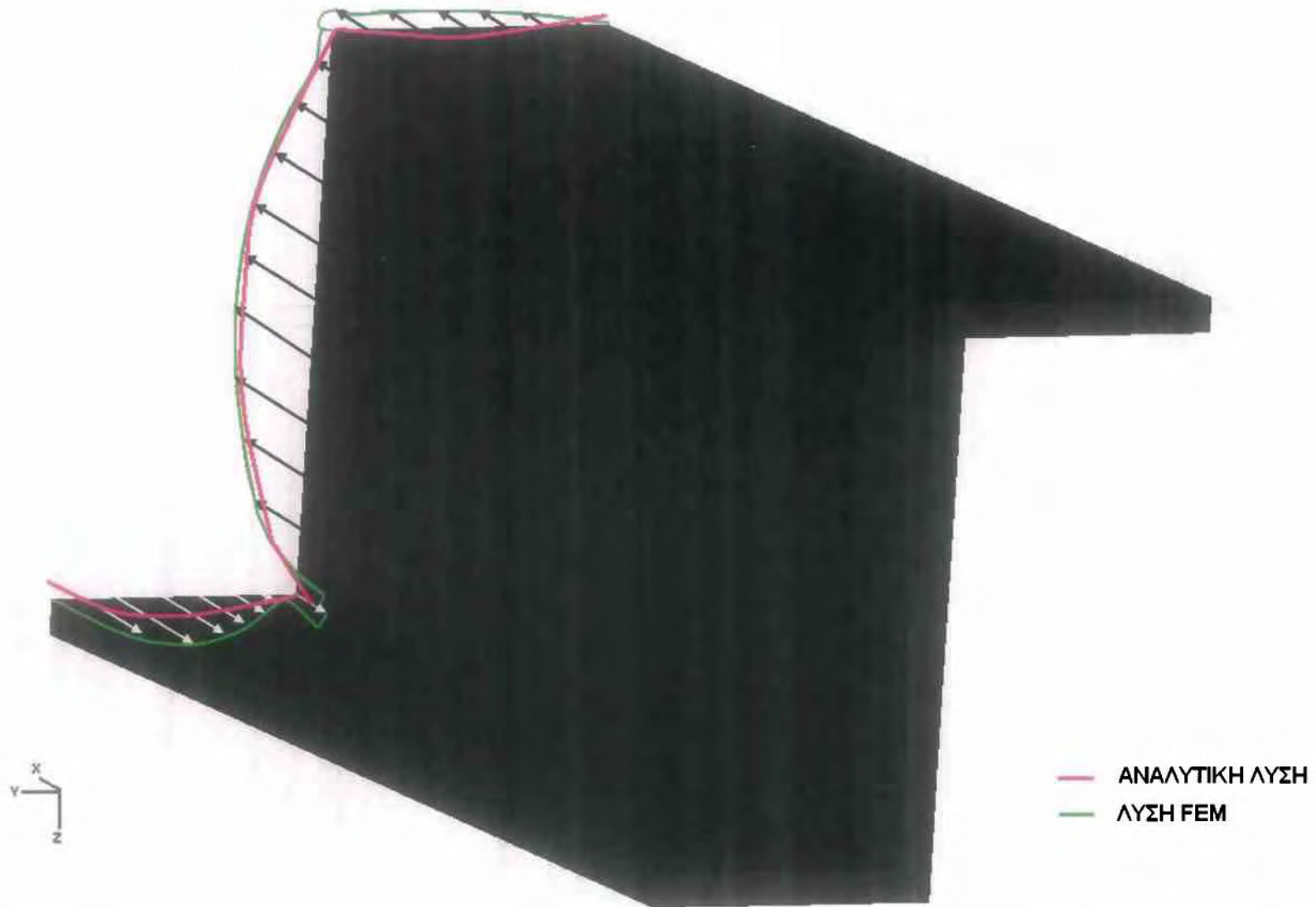


- FEM when $n = t/2$
- FEM when $n = 0$
- FEM when $n = -t/2$
- σ_{13} Vlasov when $n = t/2$
- σ_{13} Vlasov when $n = 0$
- σ_{13} Vlasov when $n = -t/2$
- σ_{13}^{cl}

$$\sigma_{13}^{Vlasov} = \sigma_{13}^{cl} + \sigma_{12}^{cl} + \sigma_{12}^{Vlasov} = \left(\frac{3}{14} \cdot (a^2 + 4 \cdot a \cdot s + 2 \cdot s^2) \cdot \frac{P}{a^2 + t^2} \right) + \left(\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{t^2 + a^2} \cdot \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{s}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot t \cdot a^2 \cdot (a - s)\right) \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{P \cdot P}{t^3} \cdot \left(1 - \frac{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{s}{a} + 0.625\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot 1.1094 \cdot \frac{t}{a}\right]} \right) \right)$$

Σχήμα 5.24: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{13} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0.375L$

Προοπτική παρουσίαση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης κατανομής των
διατμητικών τάσεων σ_{xs} σε διατομή μακριά από την πακτώση
($x = 0.375L$)



5.2 ΟΡΘΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ σ_{ix}

5.2.1 ΔΙΑΤΟΜΗ ΠΑΚΤΩΣΕΩΣ $x = 0$

ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στο άνω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

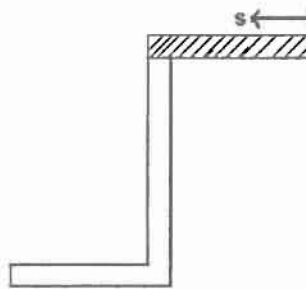
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^t + \sigma_{11}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^t = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [3 \cdot (s - a) - 2 \cdot (-a)] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(-a \cdot \left(\frac{3a}{4} - s\right)\right) \right] = \frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(\frac{3a}{4} - s\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [3 \cdot (s - a) - 2 \cdot (-a)] \right\} + \left\{ \frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(\frac{3a}{4} - s\right) \right\} \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.25).

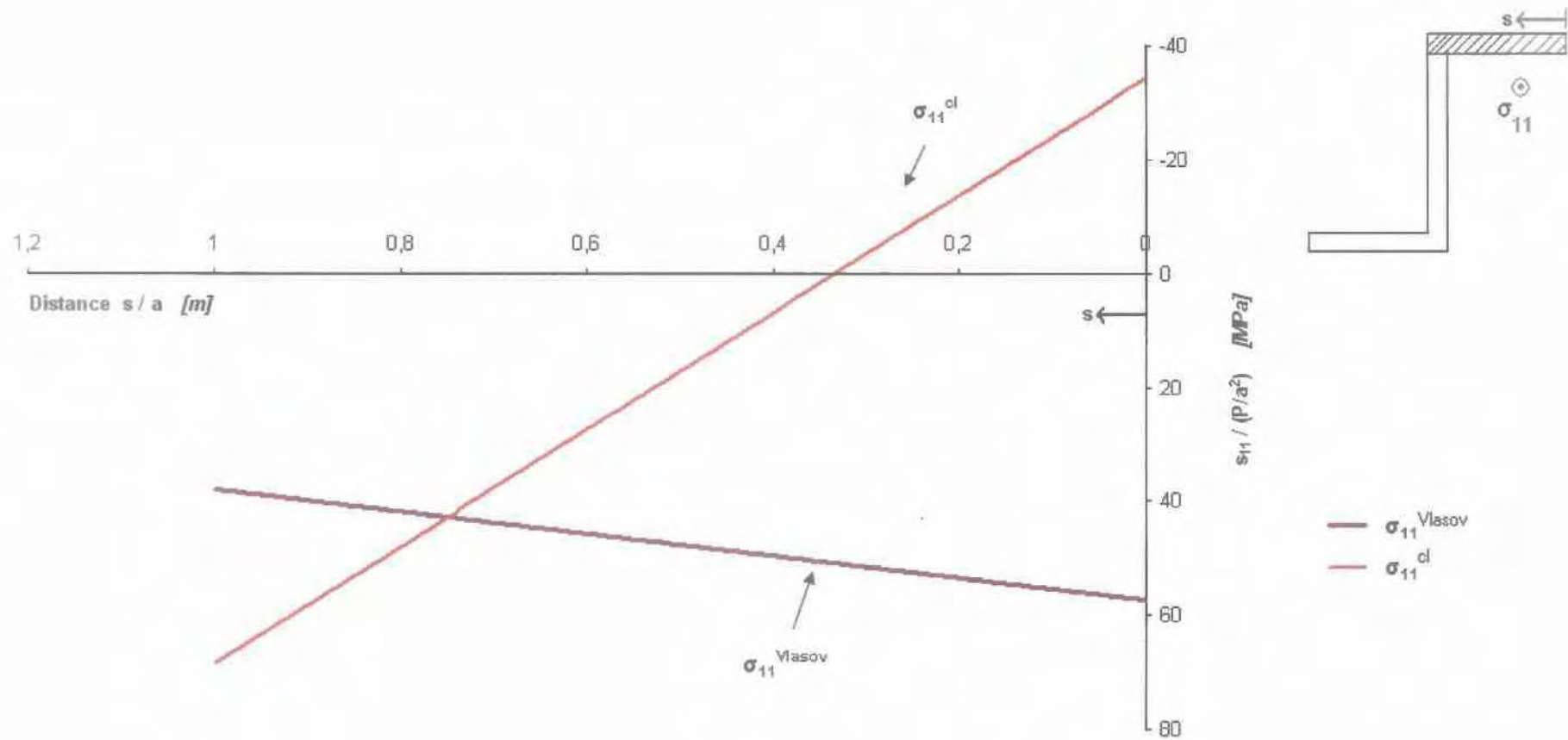


Σχήμα 5.25 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.26 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του *Vlasov*, σχέση (2).

Στο Σχήμα 5.27 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.28 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά *Saint Venant* ($\sigma_{11}^i = \sigma_{11}^h$) και με την αναλυτική λύση κατά *Vlasov* (σ_{11}).

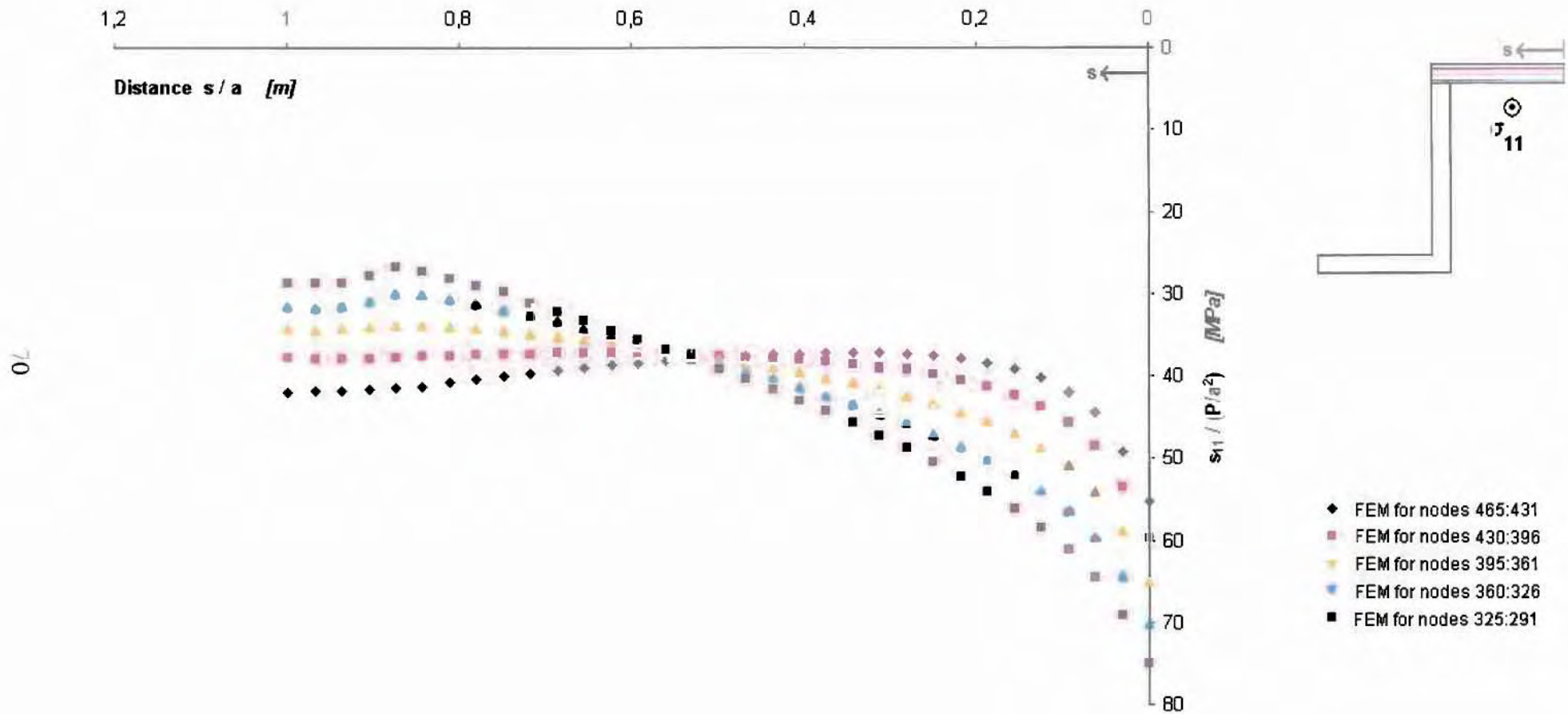
Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλιμα
($x = 0$)



69

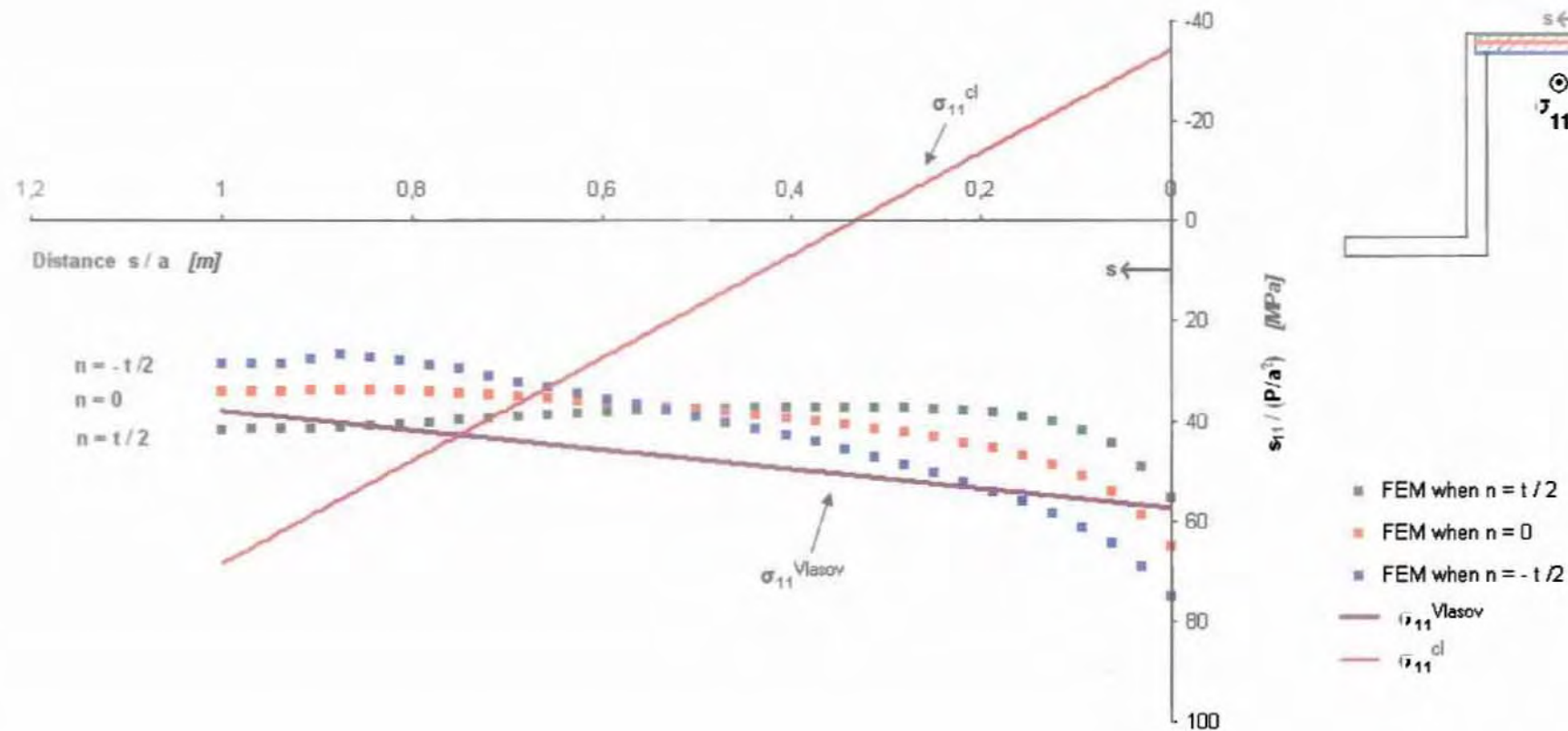
Σχήμα 5.26 : Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας z)



Σχήμα 5.27: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

σ_{11} Άνω Πέλιμα $x = 0$
Μεταβολή κατά πάχος (αξονας z)



$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^w = \left(\frac{3}{7} \pi \frac{PL}{a^3 + t} \pi (3 \pi (s-a) - 2 \pi (-a)) \right) + \left(-\frac{12}{5} \pi \frac{P}{c + t^2 + a^2} \pi \tanh \left[10 \pi c \pi \frac{t}{a} \right] \pi (-a) \pi \left(\frac{3a}{4} - s \right) \right)$$

Σχήμα 5.28: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα και στη διατομή $x = 0$

ΚΑΤΩ ΠΕΛΑΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στο κάτω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

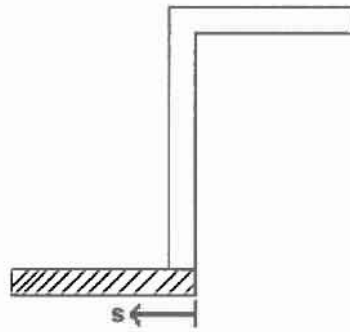
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^b = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot a) \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^w = \left\{ -\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left[a \cdot \left(\frac{a}{4} - s \right) \right] \right\} = -\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(\frac{a}{4} - s \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot a) \right\} + \left\{ -\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(\frac{a}{4} - s \right) \right\} \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.29).



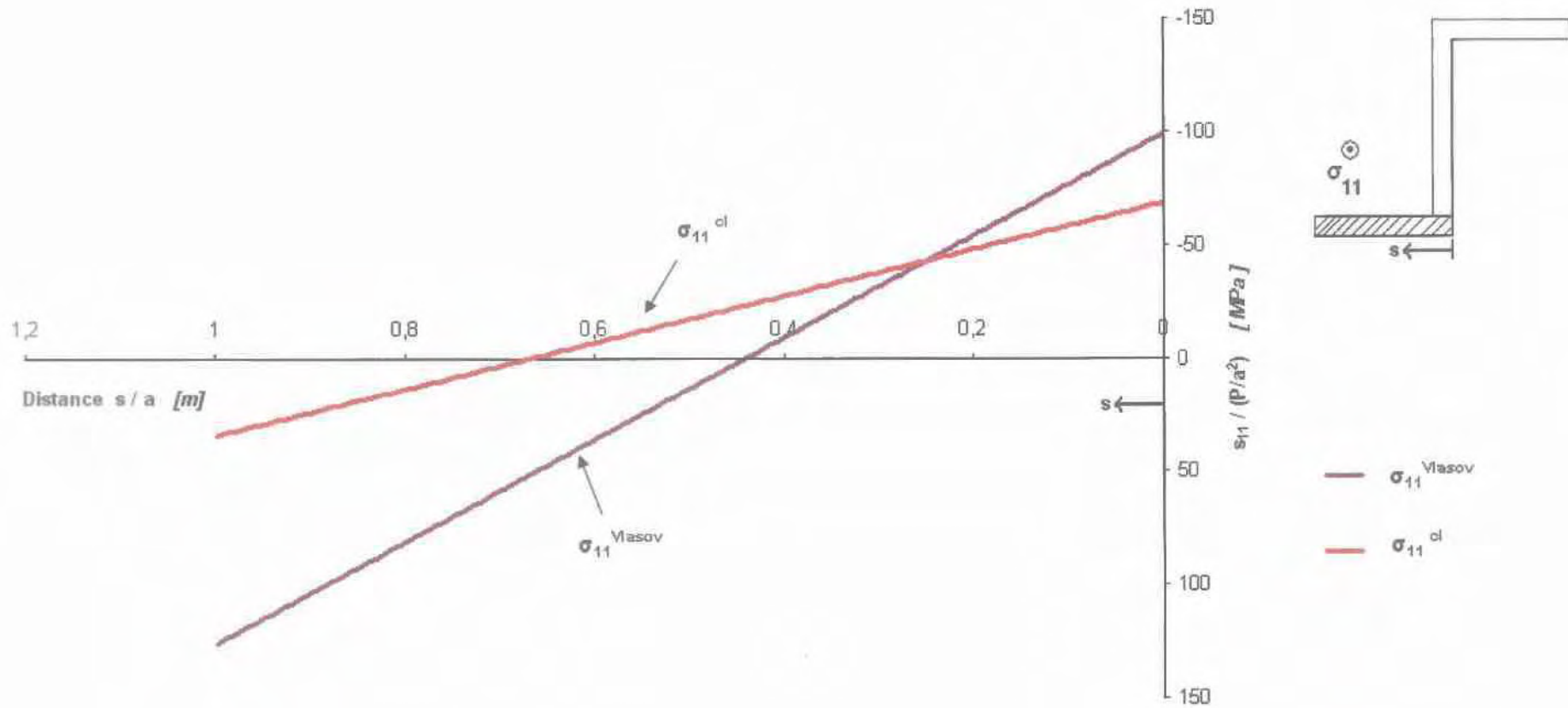
Σχήμα 5.29 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.30 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (2).

Στο Σχήμα 5.31 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.32 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{11}^c = \sigma_{11}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{11}).

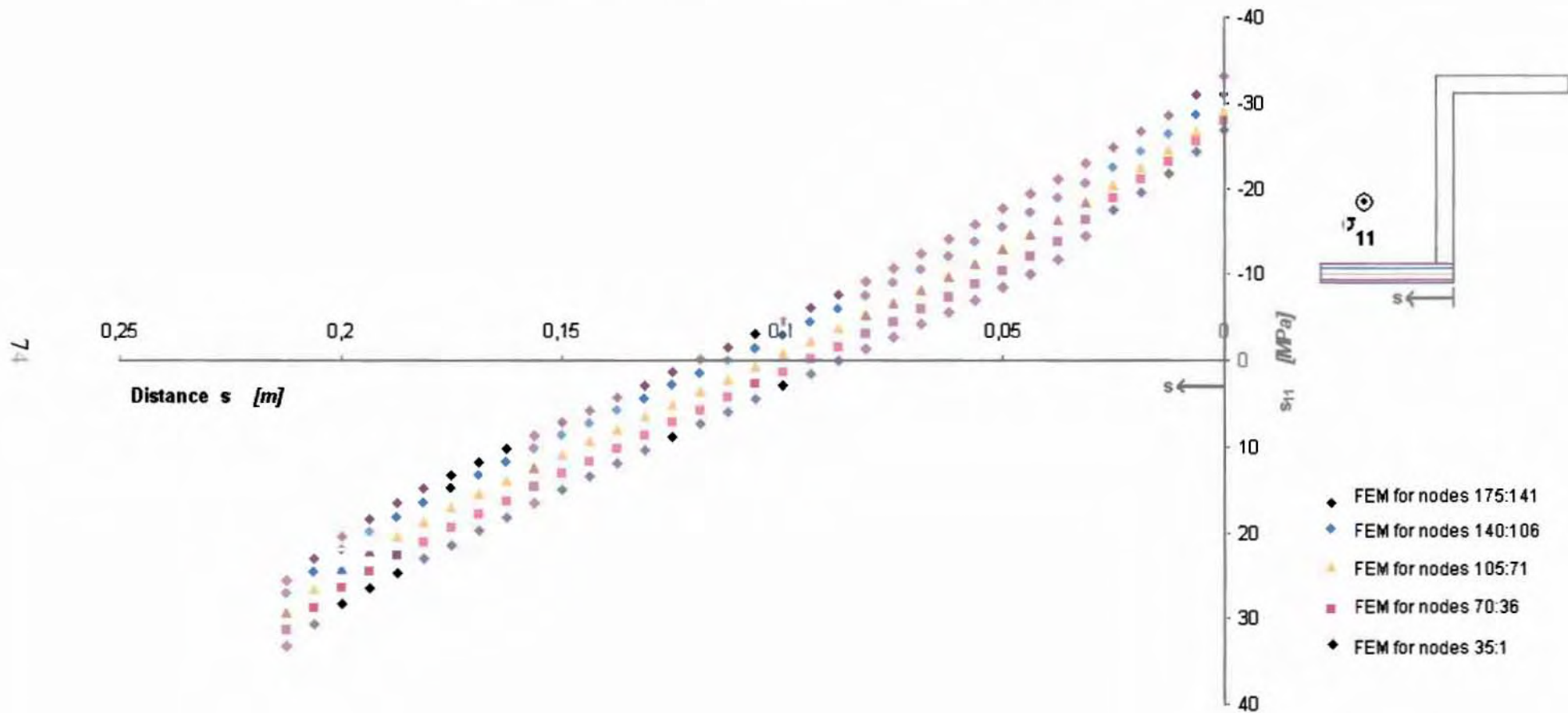
Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κάτω Πέλιμα
($x = 0$)

73



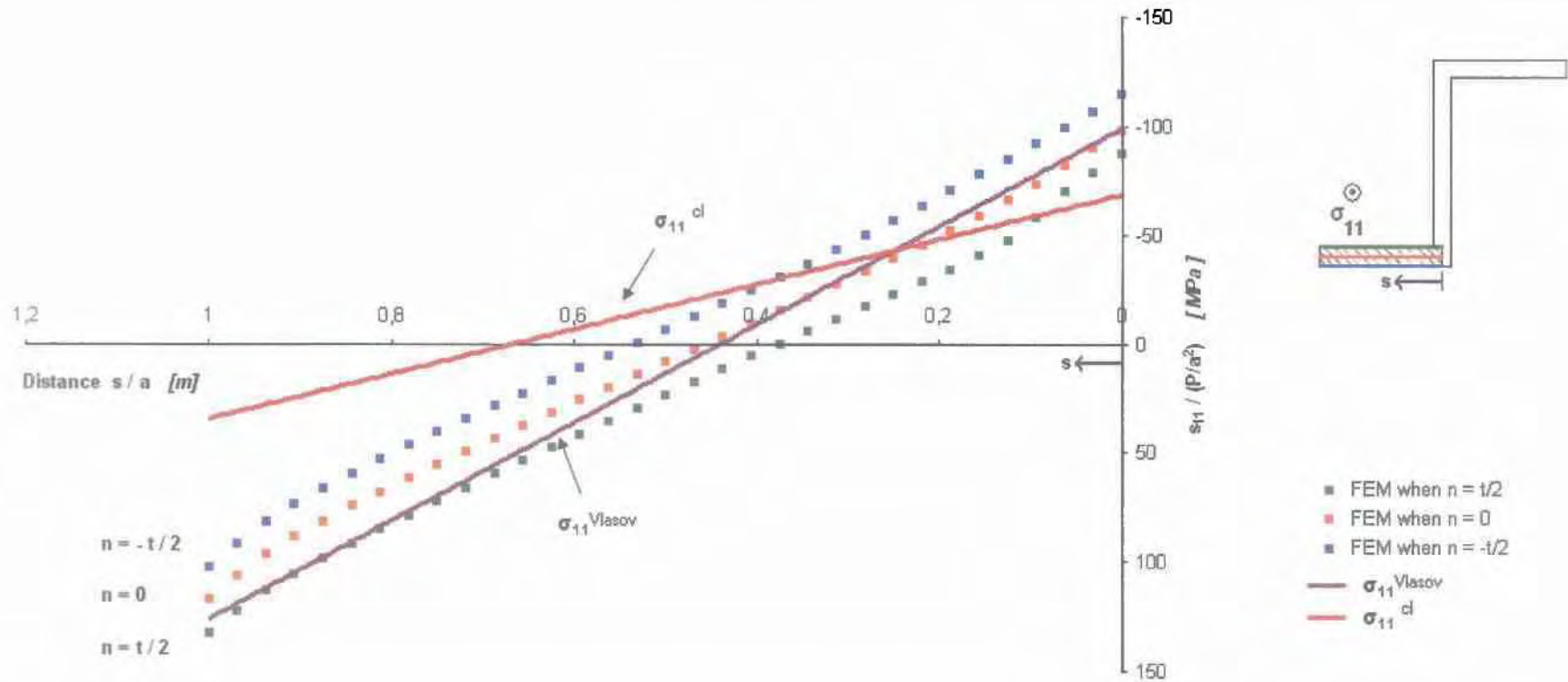
Σχήμα 5.30: Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας z)



Σχήμα 5.31: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

σ_{11} Κάτω Πέλαμα $\chi = 0$
Μεταβολη κατα παχος (αξονας z)



$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^- = \left(\frac{3}{7} * \frac{PL}{a^2 + t} * (3 * s - 2 * a) \right) + \left(-\frac{12}{5} * \frac{P}{c * t^2 + a^2} * \tanh\left[10 * c * \frac{t}{a}\right] * \left(a * \frac{t}{4} - s\right) \right)$$

Σημια 5.32: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλαμα και στη διατομή $\chi = 0$

ΚΟΡΜΟΣ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στον κορμό υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

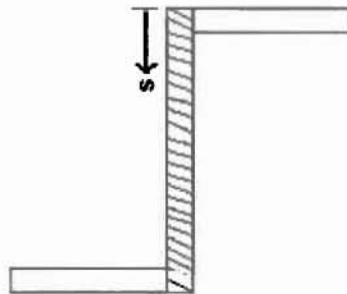
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^v \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^b = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [(-2) \cdot (s - a)] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^v = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \cdot \left(\frac{a^2}{4}\right) \right] = -\frac{3}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [(-2) \cdot (s - a)] \right\} + \left[-\frac{3}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2} \cdot \text{Tanh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right] \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.33).

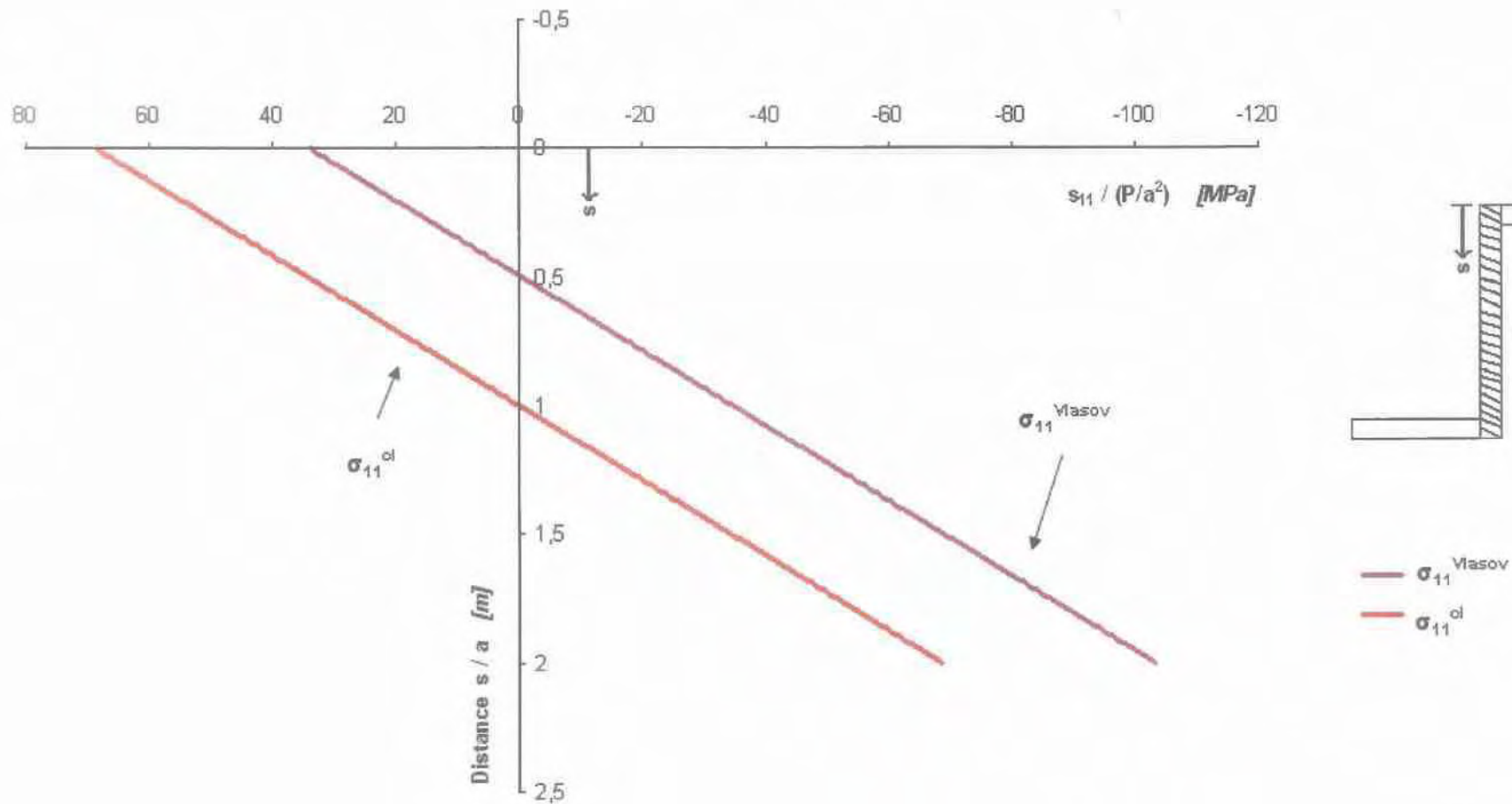


Σχήμα 5.33 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού

Στο Σχήμα 5.34 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (2).

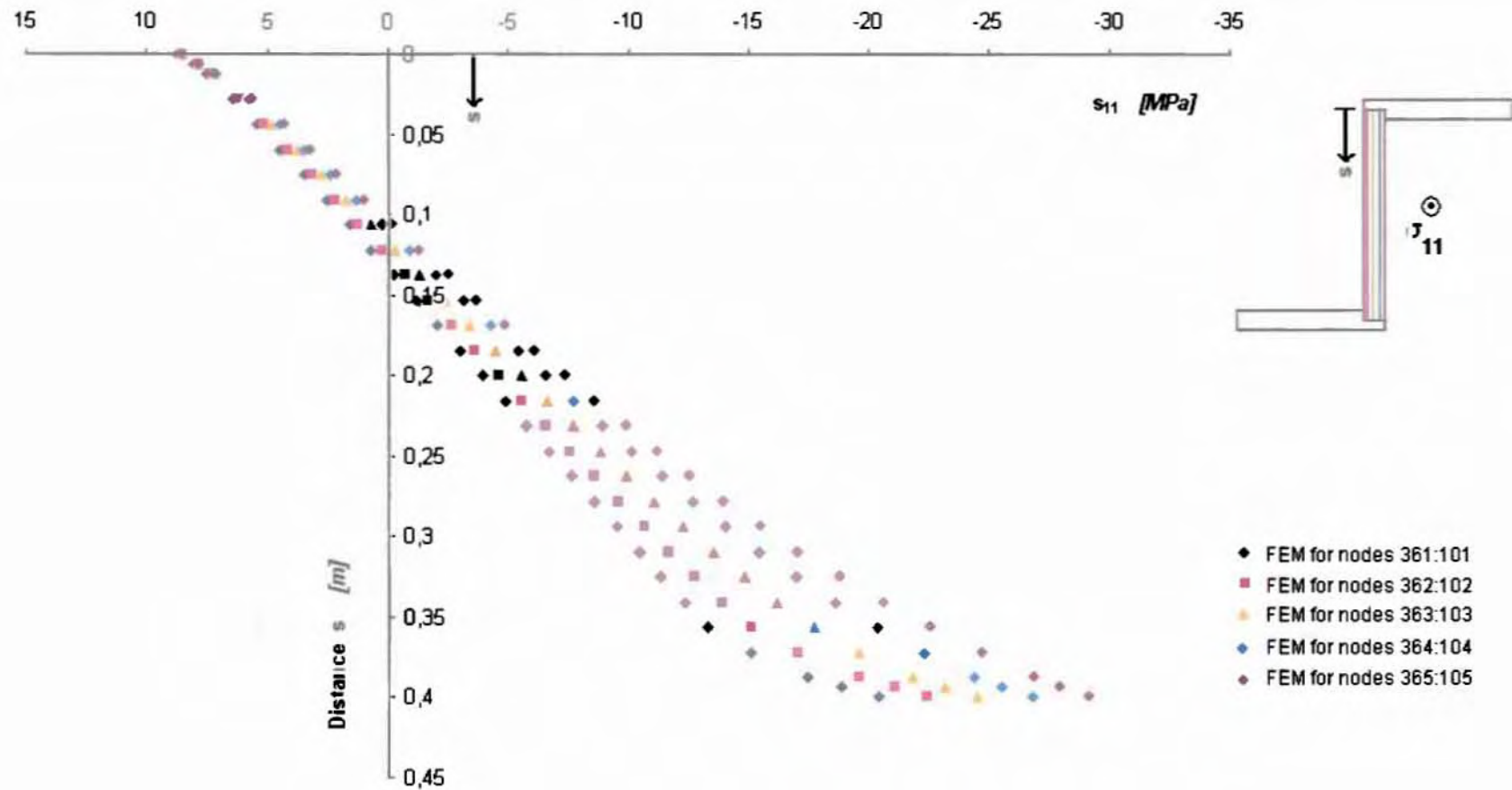
Στο Σχήμα 5.35 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας y) ενώ στο Σχήμα 5.36 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{11}^{cl} = \sigma_{11}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{11}).

Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό
($x = 0$)



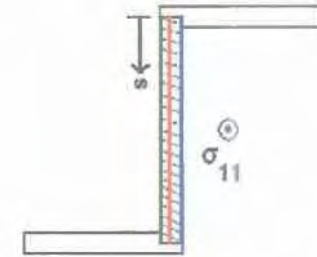
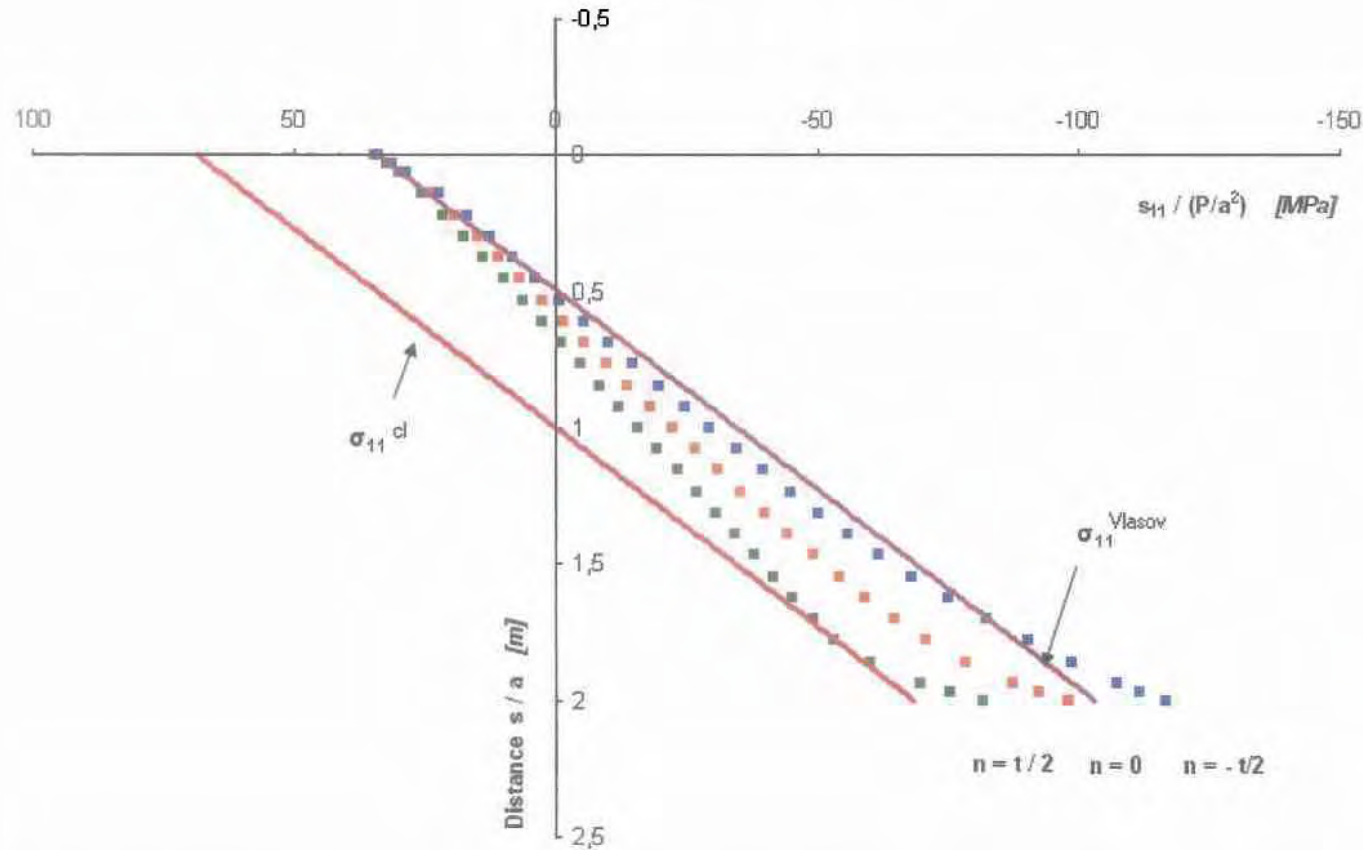
Σχήμα 5.34: Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό στη διατομή $x = 0$.

Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας y)



Σχήμα 5.35: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0$

σ_{11} Κορμός $x = 0$
Μεταβολη κατά y



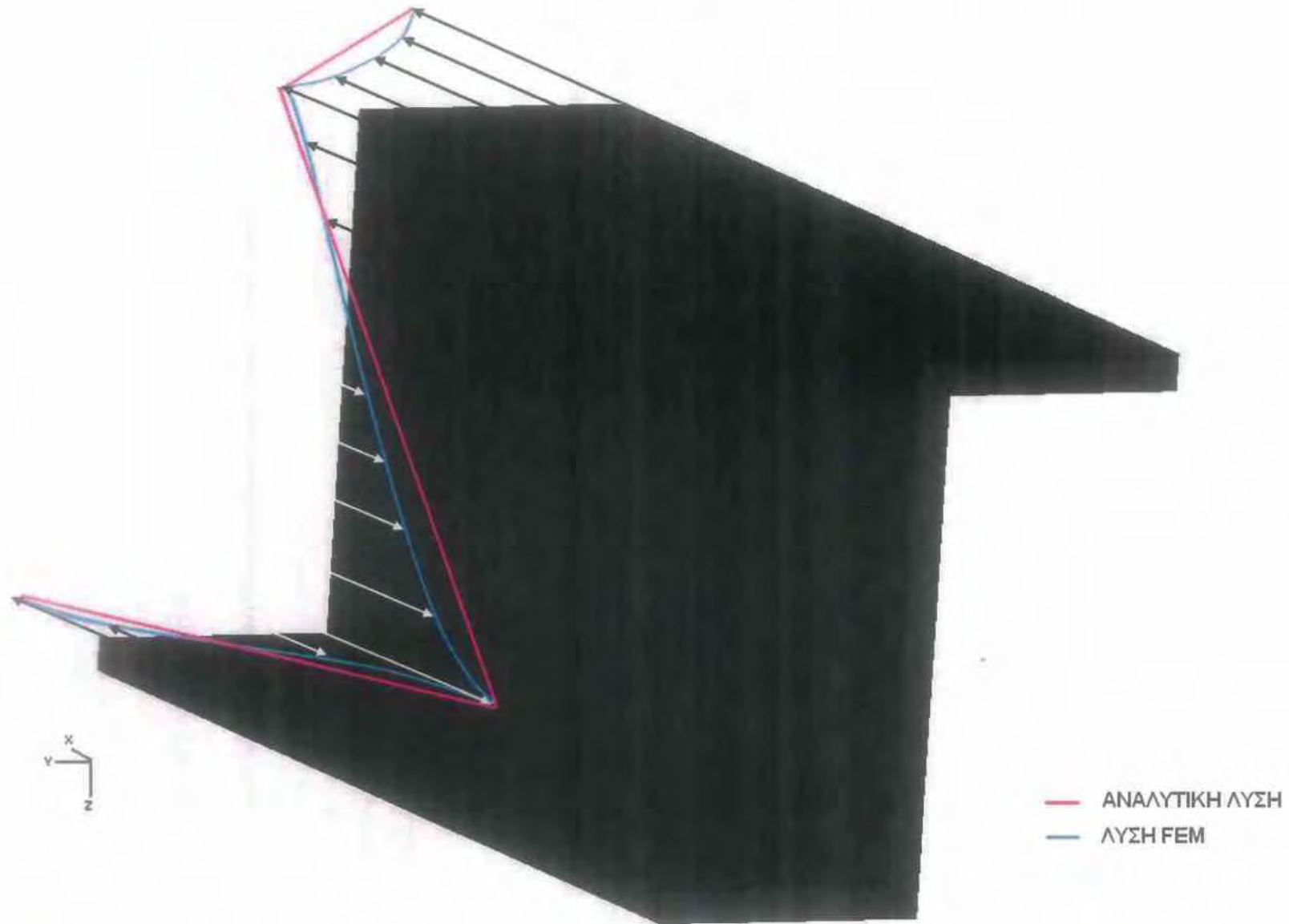
- FEM when $n = t/2$
- FEM when $n = 0$
- FEM when $n = -t/2$
- σ_{11}^{Vlasov}
- σ_{11}^{cl}

$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^- = \left(\frac{3}{7} * \frac{PL}{a^3 * t} * (-2) * (s - a) \right) + \left[-\frac{12}{5} * \frac{P}{c * t^2 * a^2} * \frac{\text{Sinh}\left[10 * c * \frac{s}{a} * \left(1 - \frac{0.75}{10 * 0.2}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 * c * \frac{s}{a}\right]} * \left(\frac{a^2}{4}\right) \right]$$

Σχήμα 5.36: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0$

Προοπτική παρουσίαση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης κατανομής των
ορθών αξονικών τάσεων σ_{xx} στη διατομή της πακτώσεως

($x = 0$)



5.2.2 ΔΙΑΤΟΜΗ ΜΑΚΡΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΑΚΤΩΣΗ $x = 0.375L$

ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στο άνω πέλμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

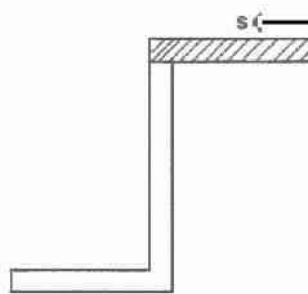
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^b = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [3 \cdot (s - a) - 2 \cdot (-a)] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-a \cdot \left(\frac{3a}{4} - s\right)\right) \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot [3 \cdot (s - a) - 2 \cdot (-a)] \right\} + \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(-a \cdot \left(\frac{3a}{4} - s\right)\right) \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.37).

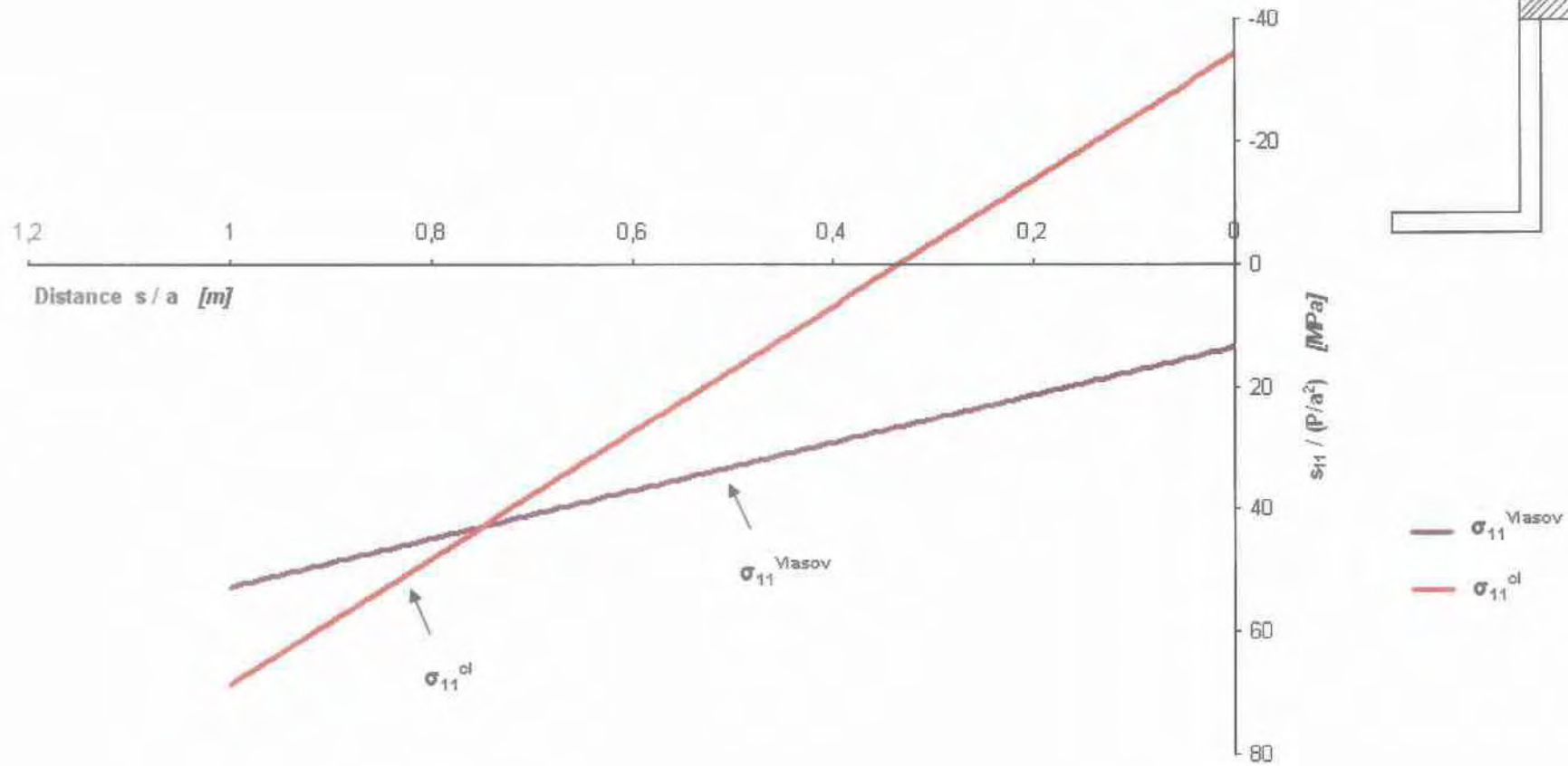


Σχήμα 5.37: Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Άνω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.38 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του *Vlasov*, σχέση (2).

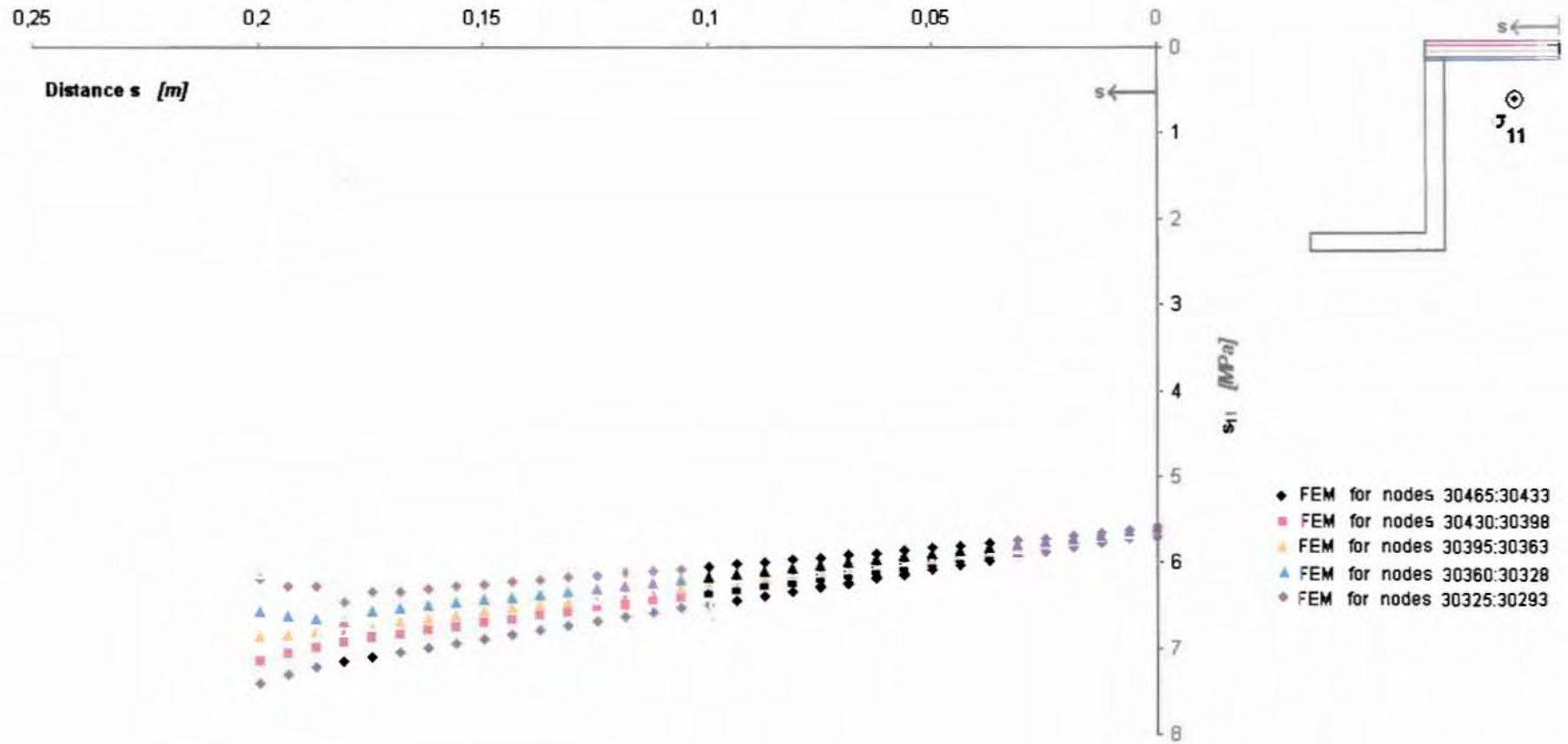
Στο Σχήμα 5.39 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.40 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά *Saint Venant* ($\sigma_{11}^a = \sigma_{11}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά *Vlasov* (σ_{11}).

Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλμα
($x = 0.375L$)



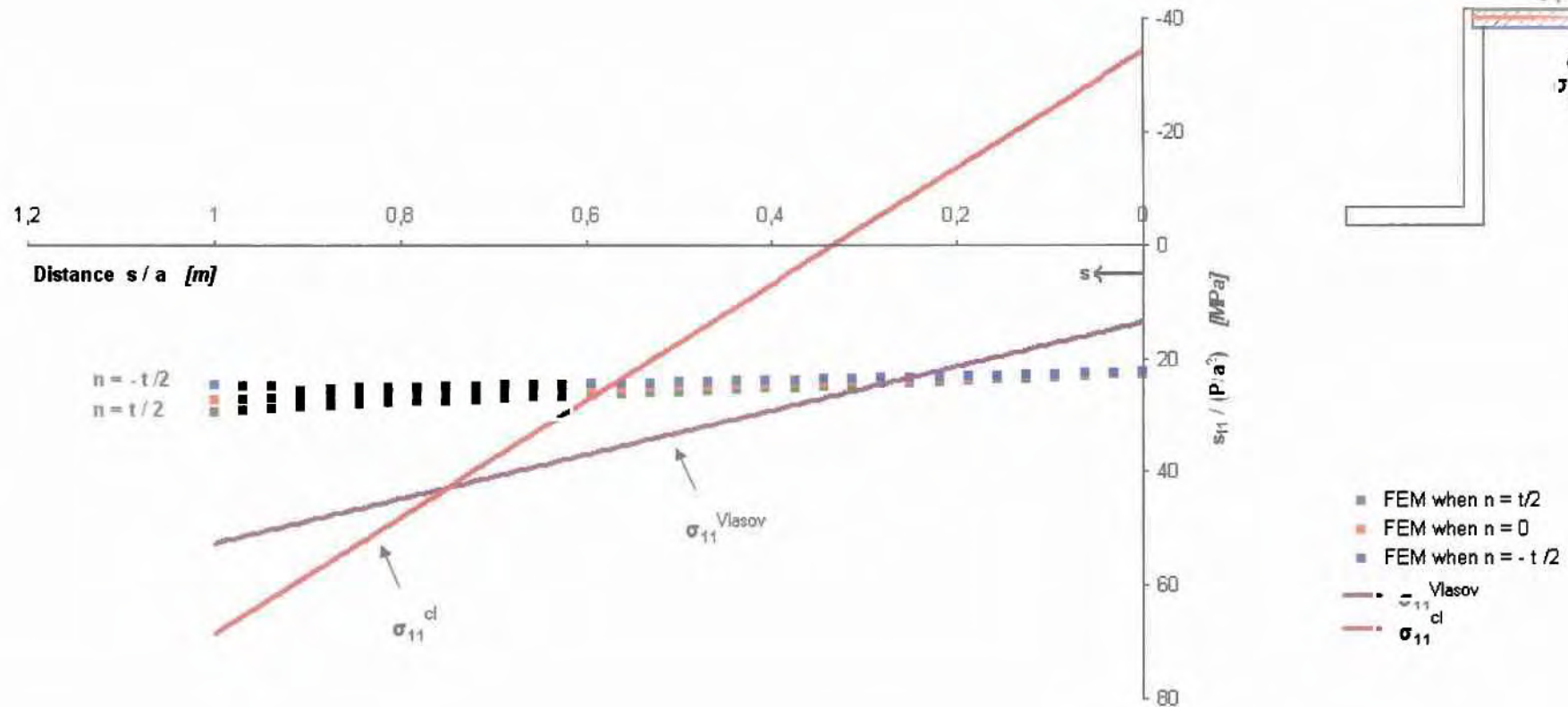
Σχήμα 5.38 : Αναλυτική λύση σ_{11} στο Άνω Πέλμα στη διατομή $x = 0.375L$

Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας z)



Σχήμα 5.39 : Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0.375L$

σ_{11} Άνω Πελάμα $x = 0.375L$
Μεταβολή κατά το πάχος (άξονας z)



$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^v = \left(\frac{3}{7} * \frac{PL}{a^3 * t} * (3 * (s - a) - 2 * (-a)) \right) + \left(-\frac{12}{5} * \frac{P}{c * t^2 + a^2} * \frac{\cosh[10 * c * \frac{t}{a}] * \cosh[10 * c * \frac{s}{a}] * \left(1 - \frac{0.75 \sqrt{3}}{10 * 0.2} \right)}{\cosh[10 * c * \frac{t}{a}]} * (-a) * \left(\frac{3a}{4} - s \right) \right)$$

Σχήμα 5.40 : Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Άνω Πέλαμα και στη διατομή $x = 0.375L$

ΚΑΤΩ ΠΕΛΑΜΑ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στο κάτω πέλαμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

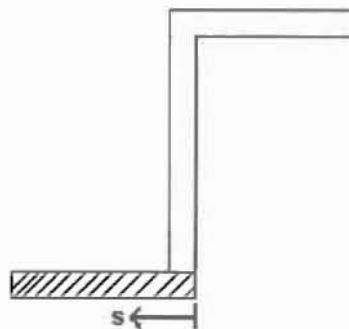
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^h + \sigma_{11}^v \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^h = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot a) \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^v = \left\{ \frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{a}{4} - s \right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^3 \cdot t} \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot a) \right\} + \left\{ \frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{a}{4} - s \right) \right\} \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.41).

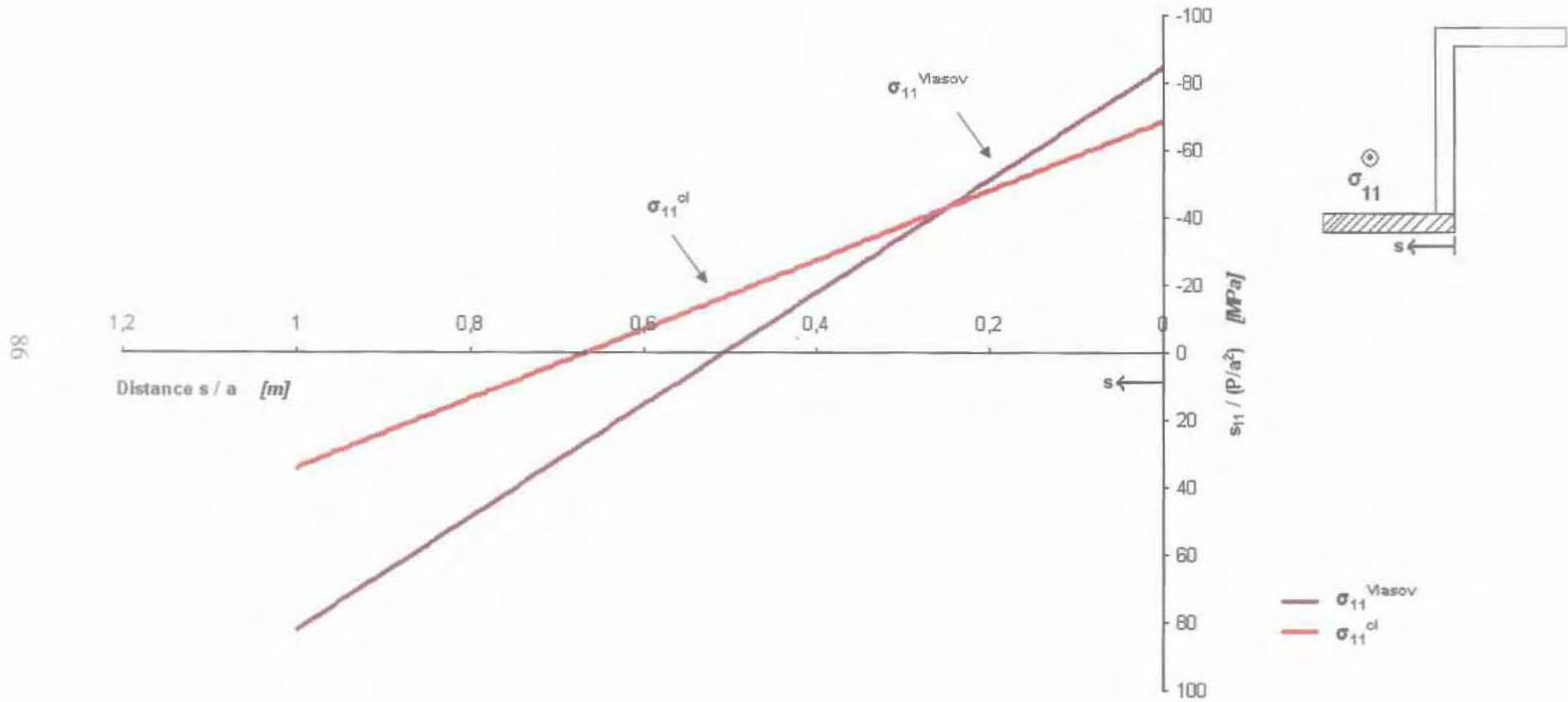


Σχήμα 5.41 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κάτω Πέλματος

Στο Σχήμα 5.42 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του Vlasov, σχέση (2).

Στο Σχήμα 5.43 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας z) ενώ στο Σχήμα 5.44 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά Saint Venant ($\sigma_{11}^{cl} = \sigma_{11}^h$) και με την αναλυτική λύση κατά Vlasov (σ_{11}).

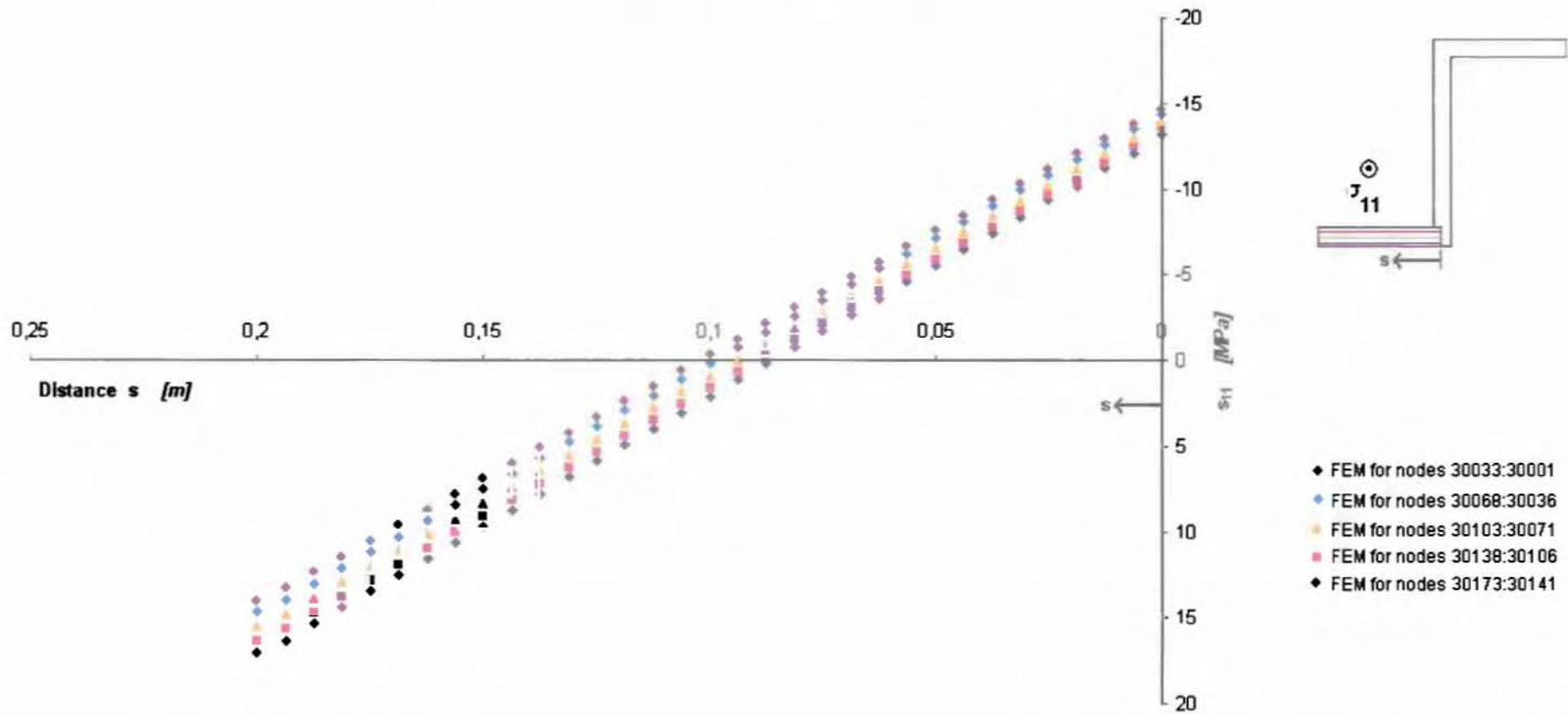
Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κατω Πελάμα
($x = 0.375L$)



Σχήμα 5.42: Αναλυτική λύση σ_{11} στο Κάτω Πέλαμα στη διατομή $x = 0.375L$

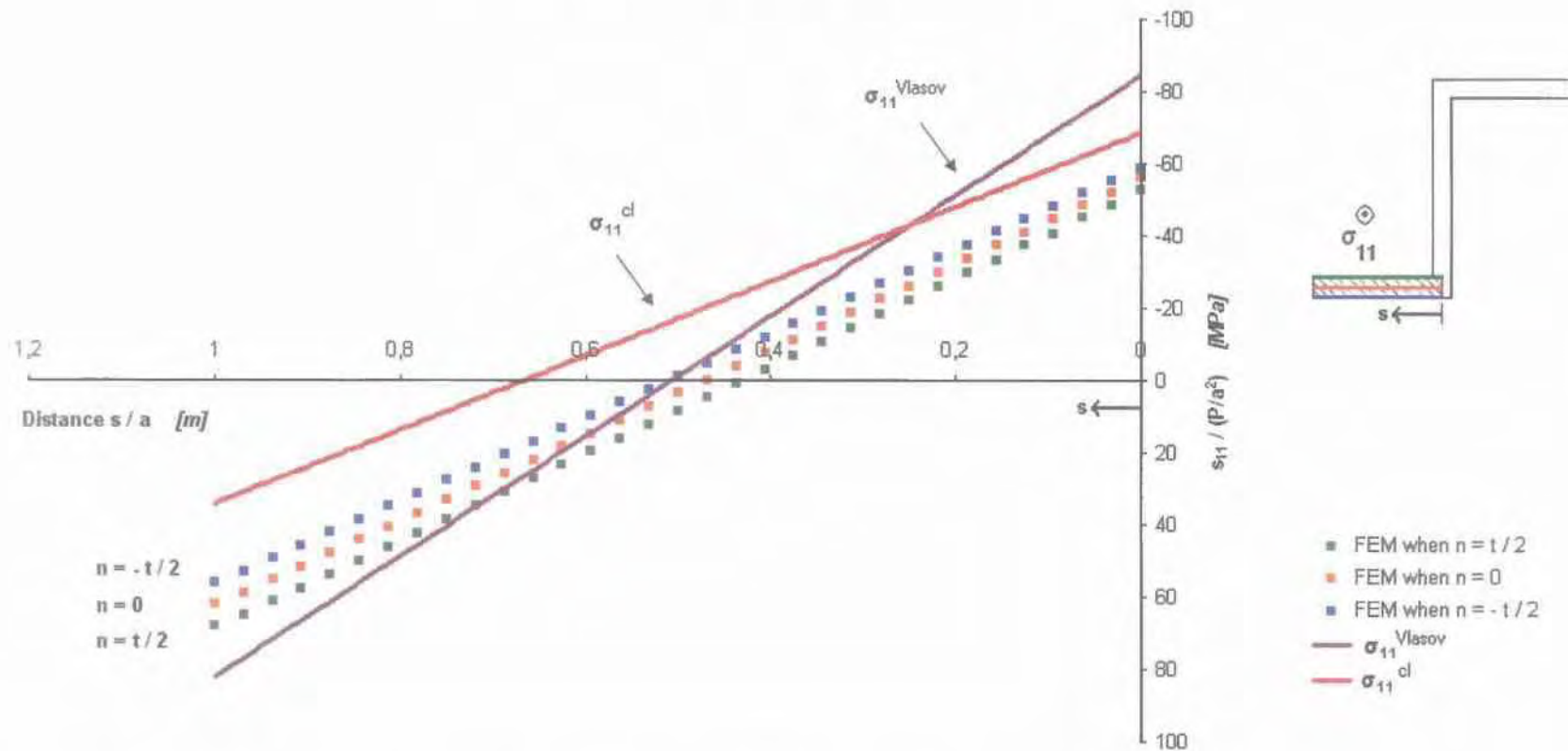
Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας z)

87



Σχήμα 5.43: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλαμα στη διατομή $x = 0.375L$.

σ_{11} Κάτω Πέλμα $x = 0.375L$
 Μεταβολή κατά πάχος (άξονας z)



$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^w = \left(\frac{3}{7} \times \frac{PL}{a^3 \times t} \times (3 \times s - 2 \times a) \right) + \left(-\frac{12}{5} \times \frac{P}{c \times t^2 \times a^2} - \frac{\text{Sinh}\left[10 \times c \times \frac{t}{a} \times \left(1 - \frac{0.75 \times 11}{10 \times 0.2}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \times c \times \frac{t}{a}\right]} \times a \times \left(\frac{a}{4} - s\right) \right)$$

Σημία 5.44: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στο Κάτω Πέλμα και στη διατομή $x = 0.375L$.

ΚΟΡΜΟΣ :

Η αναλυτική λύση της σ_{11} στον κορμό υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

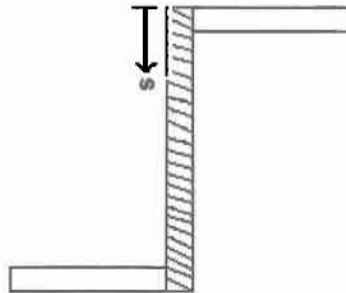
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^w \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_{11}^b = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^2 \cdot t} \cdot [(-2) \cdot (s - a)] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{11}^w = \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{a^2}{4}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \left\{ \frac{3}{7} \cdot \frac{P \cdot L}{a^2 \cdot t} \cdot [(-2) \cdot (s - a)] \right\} + \left[-\frac{12}{5} \cdot \frac{P}{c \cdot t^2 \cdot a^2} \cdot \frac{\text{Sinh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(1 - \frac{0.75}{10 \cdot a}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 \cdot c \cdot \frac{t}{a}\right]} \cdot \left(\frac{a^2}{4}\right) \right] \quad (2)$$

όπου s το μήκος τόξου που μετράει κατά μήκος της λεπτότοιχης διατομής ξεκινώντας από το ακραίο σημείο της διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (5.45).

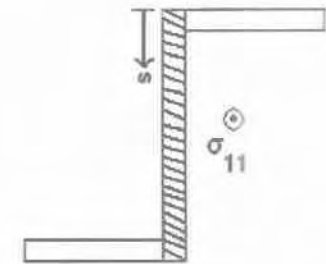
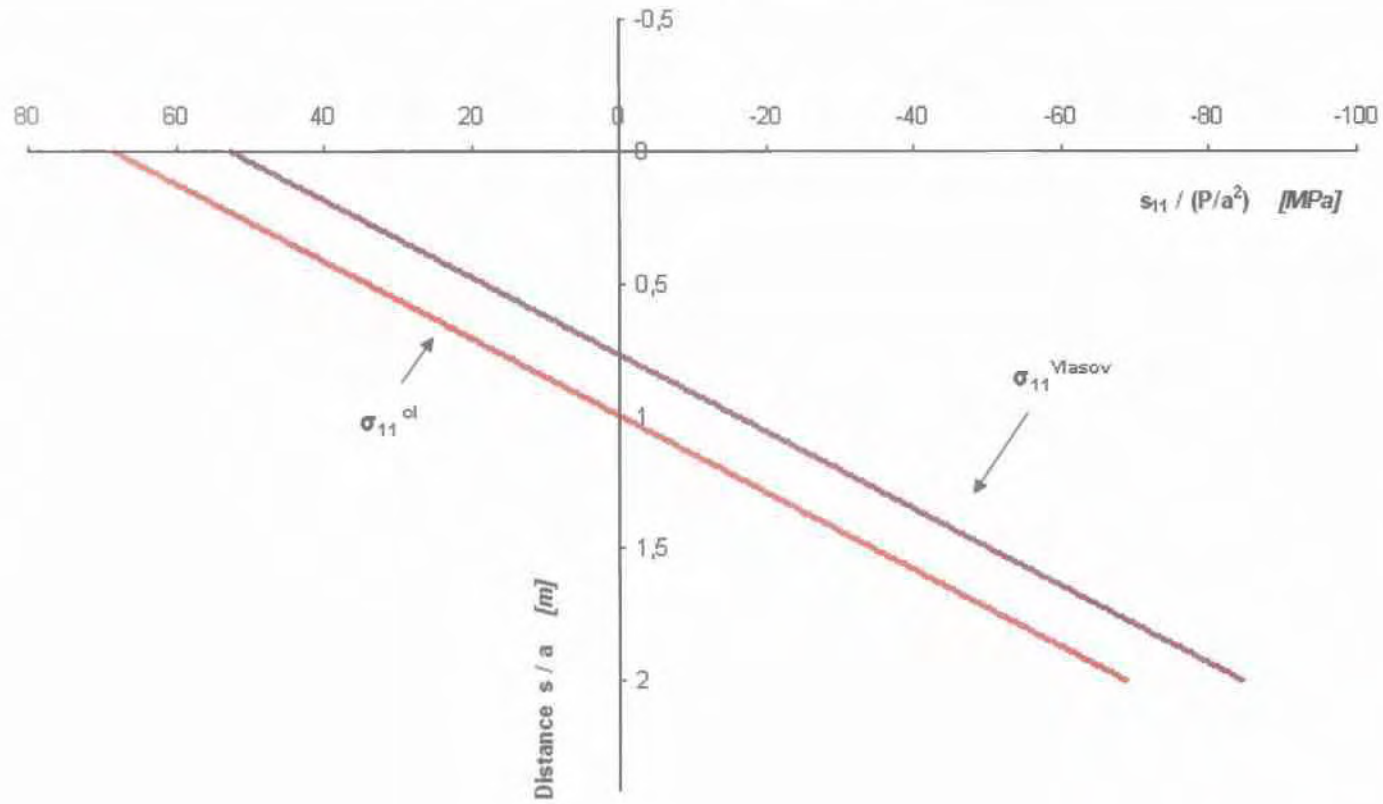


Σχήμα 5.45 : Μέτρηση μήκους τόξου s κατά μήκος του Κορμού

Στο Σχήμα 5.46 παρουσιάζεται η αναλυτική λύση της σ_{11} όπως υπολογίστηκε από τη σχέση (1), (στρέψη κατά SV) και από τη θεωρία του *Vlasov*, σχέση (2).

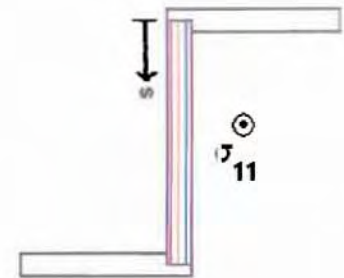
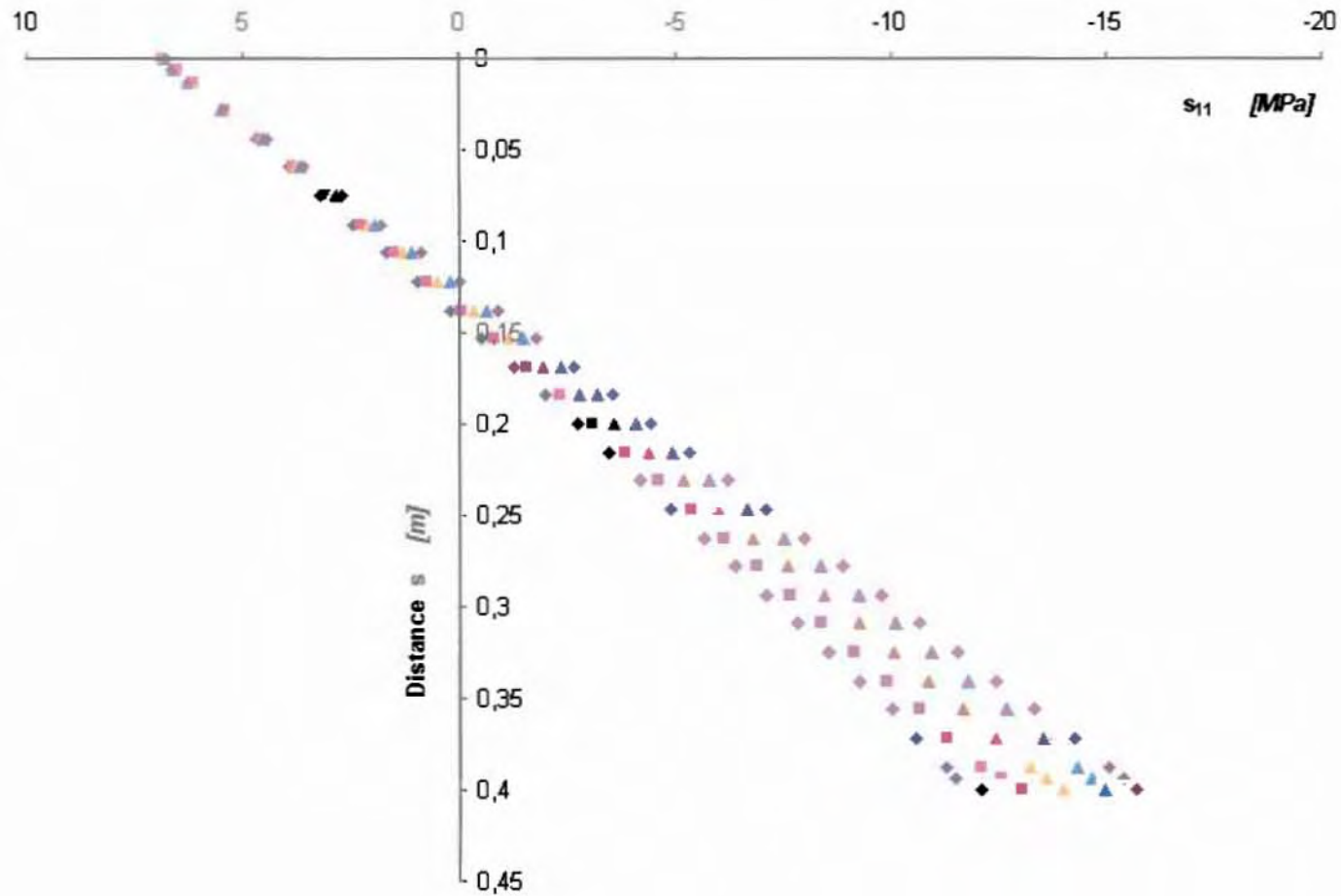
Στο Σχήμα 5.47 παρουσιάζεται η μεταβολή της αριθμητικής λύσης κατά το πάχος (άξονας y) ενώ στο Σχήμα 5.48 η αριθμητική λύση των FEM για $n = -\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}$ συγκρίνεται με την αναλυτική λύση κατά *Saint Venant* ($\sigma_{11}^b = \sigma_{11}^b$) και με την αναλυτική λύση κατά *Vlasov* (σ_{11}).

Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό
($x = 0.375L$)



Σχήμα 5.46: Αναλυτική λύση σ_{11} στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$

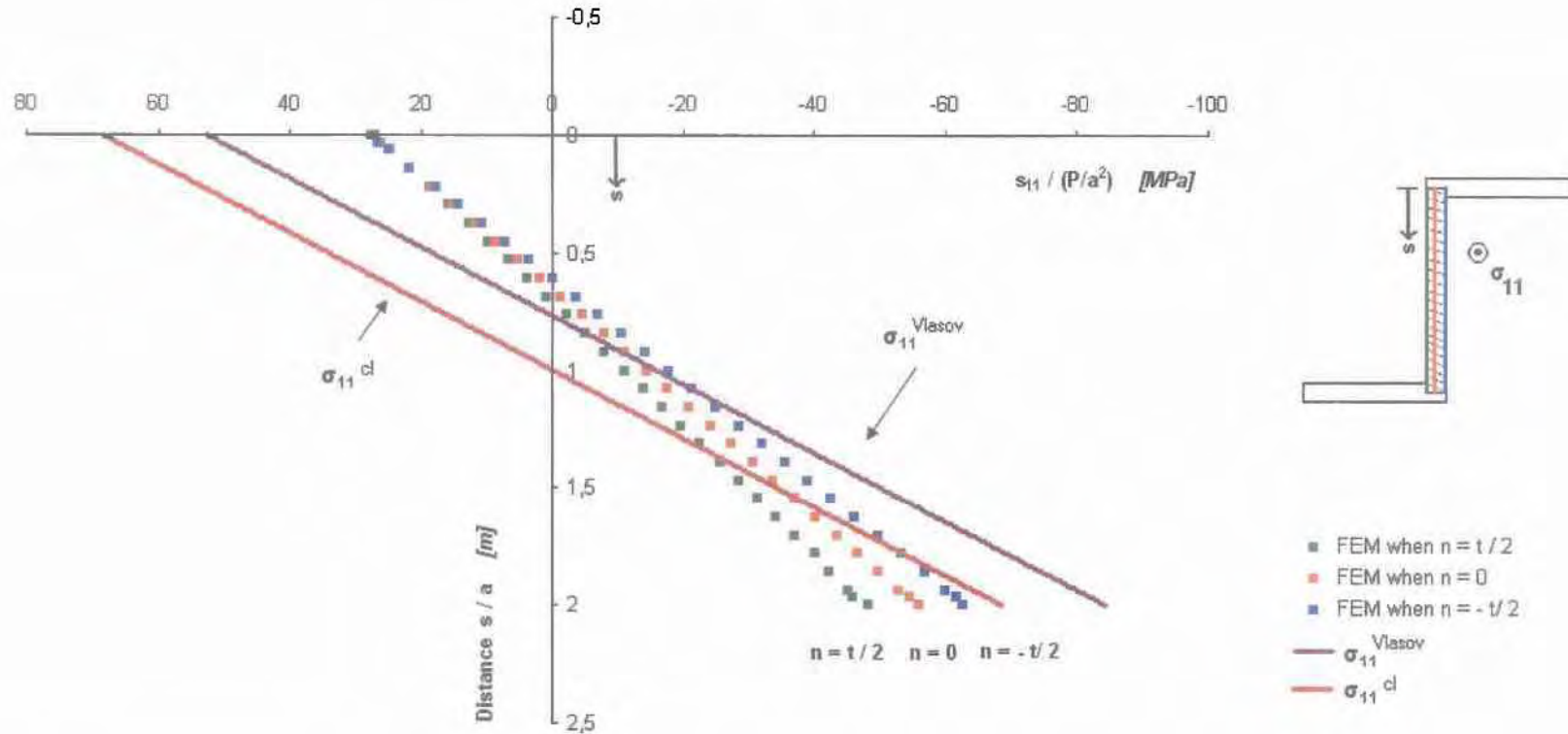
Μεταβολή κατανομής σ_{11} κατά το πάχος (άξονας y)



- ◆ FEM for nodes 30361:30101
- FEM for nodes 30362:30102
- ▲ FEM for nodes 30363:30103
- ▲ FEM for nodes 30364:30104
- ◆ FEM for nodes 30365:30105

Σχήμα 5.47: Μεταβολή αριθμητικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό στη διατομή $x = 0.375L$

σ_{11} Κορμός $x = 0.375L$
Μεταβολή κατά πάχος (άξονας z)



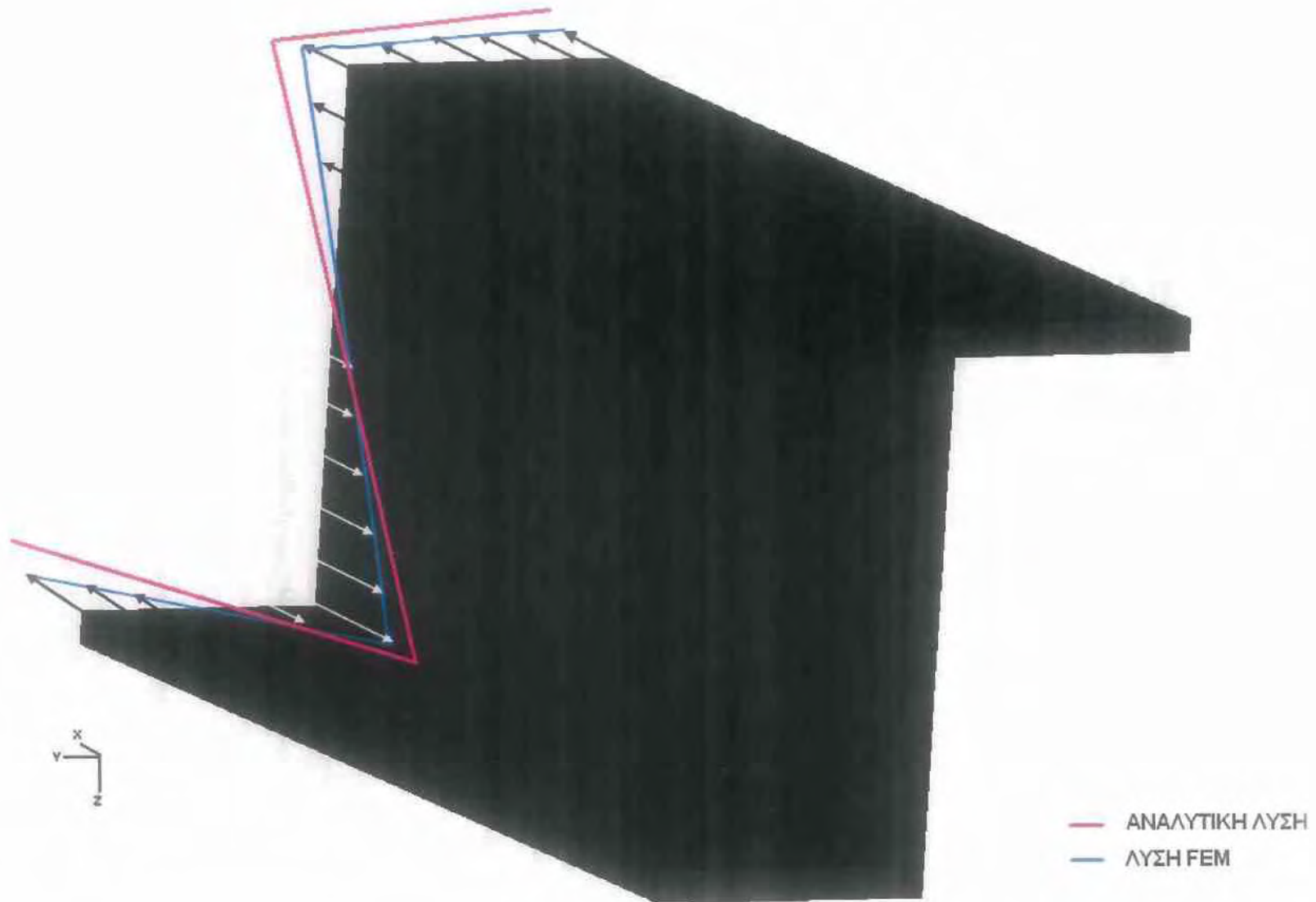
92

$$\sigma_{11}^{Vlasov} = \sigma_{11}^b + \sigma_{11}^v = \left(\frac{5}{7} + \frac{PL}{a^3 + t} + (-2) + (s - a) \right) + \left[-\frac{12}{5} + \frac{P}{c + t^2 + a^2} + \frac{\text{Sinh}\left[10 + c + \frac{t}{a} + \left(1 - \frac{0.75}{10 + 0.2}\right)\right]}{\text{Cosh}\left[10 + c + \frac{t}{a}\right]} + \left(\frac{a^2}{4}\right) \right]$$

Σχήμα 5.48: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σ_{11} κατά το πάχος στον Κορμό και στη διατομή $x = 0.375L$

Προοπτική παρουσίαση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης κατανομής των
ορθών αξονικών τάσεων σ_{xx} σε διατομή μακριά από την πακτώση

($x = 0.375L$)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗ ΓΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΑΚΤΩΣΕΩΣ

6.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το πρόβλημα της επίπεδης ελαστικότητας ως προς ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων περιγράφεται από τις εξισώσεις ($\sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$, $\varepsilon_{zr} = \varepsilon_{z\theta} = 0$)

$$\blacksquare \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\blacksquare \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\blacksquare \sigma_{rr} = \frac{G}{\kappa - 1} \cdot [(\kappa + 1) \cdot \varepsilon_{rr} + (3 - \kappa) \cdot \varepsilon_{\theta\theta}],$$

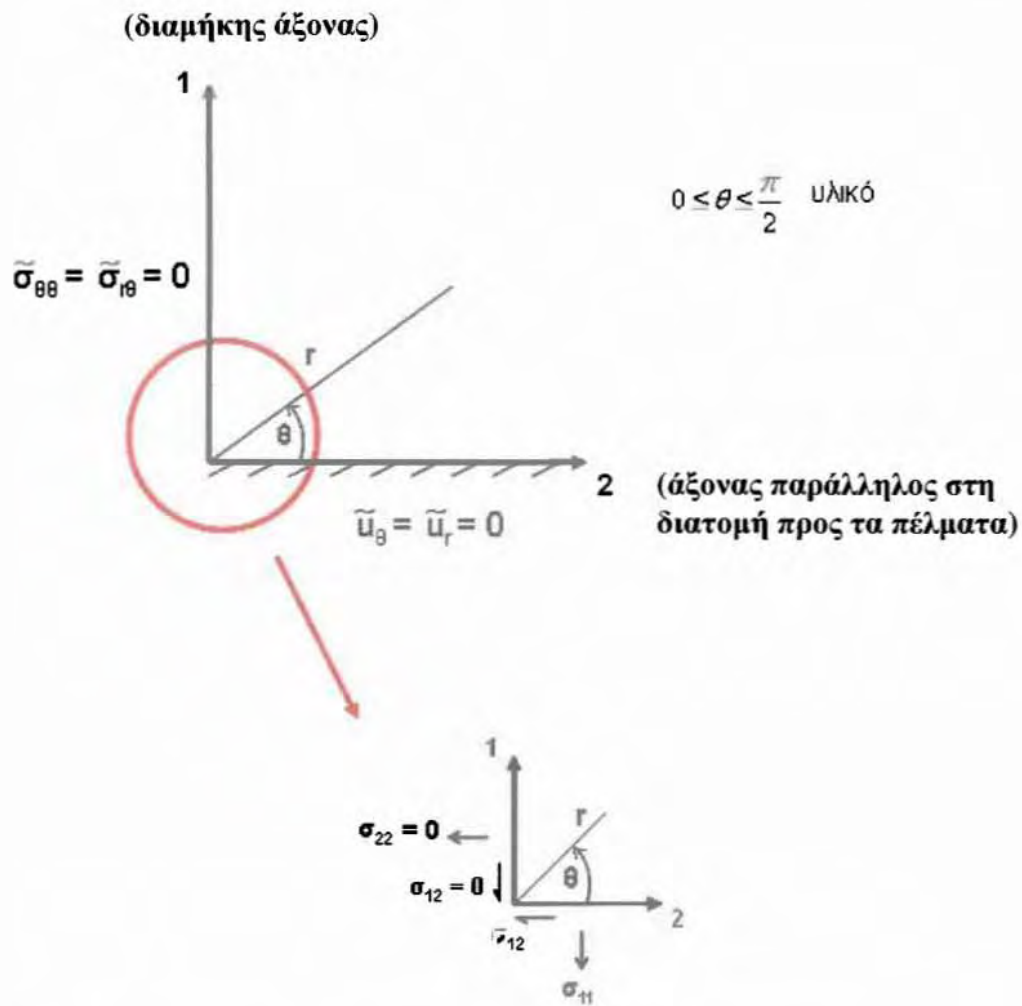
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{G}{\kappa - 1} \cdot [(\kappa + 1) \cdot \varepsilon_{\theta\theta} + (3 - \kappa) \cdot \varepsilon_{rr}], \quad (3)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{r\theta}$$

όπου u είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων, σ ο τανυστής των τάσεων, ε ο τανυστής των παραμορφώσεων, G το ελαστικό μέτρο διατμήσεως, ν ο λόγος Poisson και

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{στην επίπεδη παραμόρφωση } (\varepsilon_{zz} = 0) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{στην επίπεδη ένταση } (\sigma_{zz} = 0) \end{cases}$$

Θεωρούμε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ) με κέντρο τη γωνία πακτώσεως και την ελεύθερη επιφάνεια να βρίσκεται σε θέση $\theta = \pi/2$ σε σχέση με την πακτωμένη επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Σχηματική παράσταση πολικού ΣΣ στη γωνία πακτώσεως

Υπολογίζουμε μια ασυμπτωτική λύση του επίπεδου προβλήματος καθώς το $r \rightarrow 0$ με τη μορφή

$$\underline{u}(r, \theta) = r^s \cdot \underline{\tilde{u}}(\nu, \theta) \quad \text{και} \quad \underline{\sigma}(r, \theta) = G \cdot r^{s-1} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\nu, \theta) \quad (4)$$

Από τις εξισώσεις (1),(2),(3) καταλήγουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\frac{d\underline{x}(\theta)}{d\theta} = \underline{A}(\kappa, s) \cdot \underline{x}(\theta) \quad \text{όπου} \quad \underline{x}^T = [\tilde{u}_r \quad \tilde{u}_{\theta} \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta} \quad \tilde{\sigma}_{r\theta}] \quad (5)$$

και A ένας πίνακας διαστάσεων 4×4 σταθερών συντελεστών.

Για το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης ($\varepsilon_{zz} = 0$) ισχύει ότι $\kappa = 3 - 4\nu$ και με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου Mathematica[®] υπολογίζουμε τις άγνωστες ποσότητες s , \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 , $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{22}$, $\tilde{\sigma}_{12}$ για το Γραμμικό Σύστημα ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές της εξίσωσης (5) μέσω αριθμητικού μοντέλου.

Ο πίνακας A προκύπτει :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1-s & 0 & 1 \\ -1 + \frac{s \cdot \nu}{-1+\nu} & 0 & 1 + \frac{1}{2 \cdot (-1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-s \\ \frac{2s^2}{-1+\nu} & 0 & 1 + \frac{s \cdot \nu}{-1+\nu} & 0 \end{bmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές :

$$\{-i(1+s), i(1+s), -i \text{Abs}[-1+s], i \text{Abs}[-1+s]\}$$

και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα εξής:

$$\left\{ \frac{i}{2s}, \frac{1}{2s}, -i, 1 \right\}, \left\{ -\frac{i}{2s}, \frac{1}{2s}, i, 1 \right\}, \left\{ \frac{i(-3+s+4\nu)}{2s \text{Abs}[-1+s]}, \frac{3+s-4\nu}{2(-1+s)s}, -\frac{i(1+s)}{\text{Abs}[-1+s]}, 1 \right\},$$

$$\left\{ -\frac{i(-3+s+4\nu)}{2s \text{Abs}[-1+s]}, \frac{3+s-4\nu}{2(-1+s)s}, \frac{i(1+s)}{\text{Abs}[-1+s]}, 1 \right\}$$

Η γενική λύση κατά συνιστώσες έχει την παρακάτω μορφή :

$$\tilde{u}_r(\nu, \theta) = -c_2 \text{Cos}[(1+s)\theta] + c_1 \text{Sin}[(1+s)\theta] - (-3+s+4\nu)(c_4 \text{Cos}[(-1+s)\theta] + c_3 \text{Sin}[0-s\theta])$$

$$\tilde{u}_\theta(\nu, \theta) = c_1 \text{Cos}[(1+s)\theta] + (3+s-4\nu)(c_3 \text{Cos}[(-1+s)\theta] + c_4 \text{Sin}[(-1+s)\theta]) + c_2 \text{Sin}[(1+s)\theta]$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\nu, \theta) = 2s(c_2 \text{Cos}[(1+s)\theta] - c_1 \text{Sin}[(1+s)\theta] + (1+s)(c_4 \text{Cos}[(-1+s)\theta] + c_3 \text{Sin}[\theta-s\theta]))$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(\nu, \theta) = 2s(c_1 \text{Cos}[(1+s)\theta] + (-1+s)(c_3 \text{Cos}[(-1+s)\theta] + c_4 \text{Sin}[(-1+s)\theta]) + c_2 \text{Sin}[(1+s)\theta])$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\nu, \theta) = 2s(-c_2 \text{Cos}[(1+s)\theta] + c_1 \text{Sin}[(1+s)\theta] - (-3+s)(c_4 \text{Cos}[(-1+s)\theta] + c_3 \text{Sin}[\theta-s\theta]))$$

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 αλγεβρικές σταθερές που λαμβάνουν τιμή μέσω των ΣΣ.

Θέτουμε τις συνοριακές συνθήκες (ΣΣ) όπως προκύπτουν από το Σχήμα 6.1 ,δηλαδή :

ο στο $\theta=0 \rightarrow u_r = u_\theta = 0$

ο στο $\theta=\pi/2 \rightarrow \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0$

δημιουργώντας έτσι τον πίνακα B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3-s-4\nu \\ 1 & 0 & 3+s-4\nu & 0 \\ -2 \cdot s \cdot \text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right] & -2 \cdot s \cdot \text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right] & 2 \cdot s \cdot \left(\text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right] + s \cdot \text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right]\right) & 2 \cdot s \cdot \left(\text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right] + s \cdot \text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right]\right) \\ -2 \cdot s \cdot \text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right] & 2 \cdot s \cdot \text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right] & 2 \cdot s \cdot \left(-\text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right] + s \cdot \text{Sin}\left[\frac{\pi s}{2}\right]\right) & 2 \cdot s \cdot \left(\text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right] - s \cdot \text{Cos}\left[\frac{\pi s}{2}\right]\right) \end{bmatrix}$$

Από την ορίζουσα του πίνακα B και για διάφορες τιμές του ν υπολογίζουμε αρχικά το συντελεστή s :

Για $\nu = 0$: $s = 1$

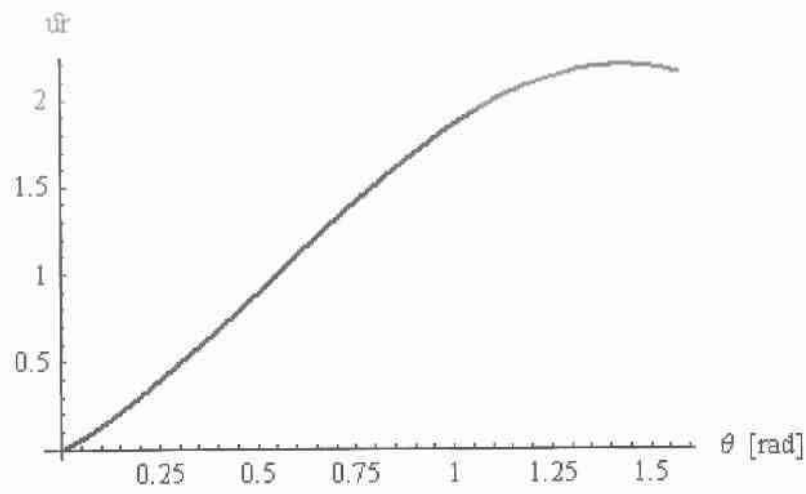
Για $\nu = 0.3$: $s = 0.711173$ ← Μας ενδιαφέρουν οι χαλύβδινοι δοκοί

Για $\nu = 0.5$: $s = 0.594612$

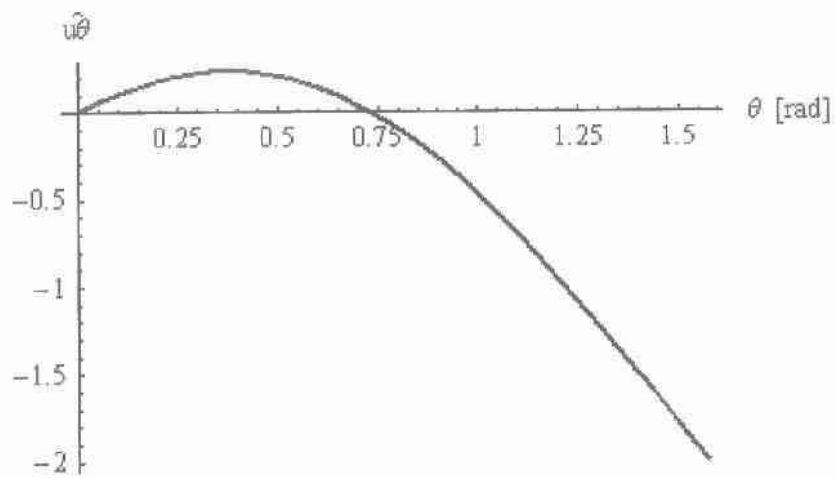
και στη συνέχεια τις αλγεβρικές σταθερές c_1, c_2, c_3 συναρτήσει της c_4 :

$c_1 \rightarrow 0. + 0.759067 c_4, \quad c_2 \rightarrow 0. + 1.08883 c_4, \quad c_3 \rightarrow 0. - 0.302276 c_4 \quad (6)$

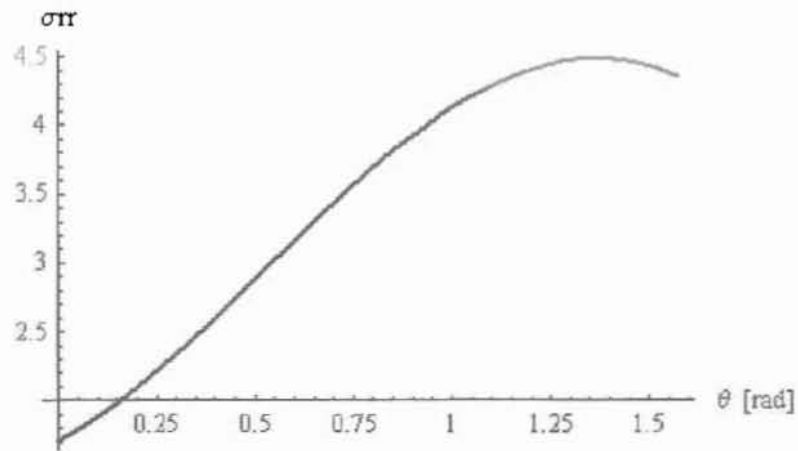
Τελικά, αντικαθιστώντας την τιμή του ν για χαλύβδινες δοκούς καθώς και τα αποτελέσματα των σχέσεων (6) στη γενική λύση, οι συνιστώσες του διανύσματος x παίρνουν διαφορετικές τιμές ανάλογα με τη θέση θ , γι' αυτό και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα σε μορφή διαγραμμάτων ($\theta - x_i$) (Σχήματα 6.2 , 6.3 , 6.4 , 6.5 , 6.6).



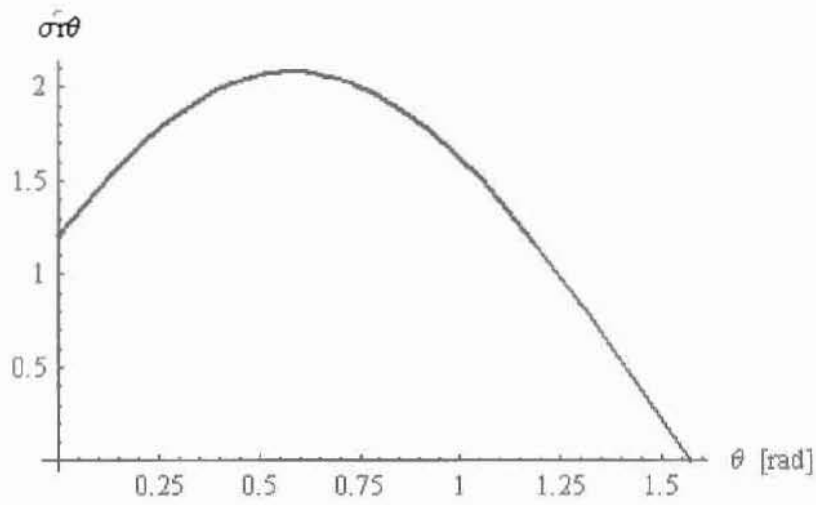
Σχήμα 6.2: Μεταβολή μετατόπισης \tilde{u}_r με τη γωνία θ



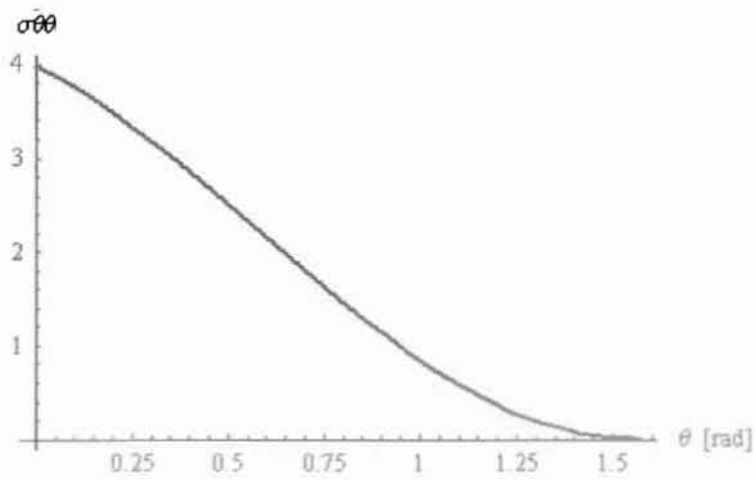
Σχήμα 6.3: Μεταβολή μετατόπισης \tilde{u}_θ με τη γωνία θ



Σχήμα 6.4: Μεταβολή τάσης $\tilde{\sigma}_{rr}$ με τη γωνία θ



Σχήμα 6.5: Μεταβολή τάσης $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ με τη γωνία θ



Σχήμα 6.6: Μεταβολή τάσης $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ με τη γωνία θ

Οι συνιστώσες του διανύσματος των μετατοπίσεων $u(r,\theta)$ και του τανυστή των τάσεων $\sigma(r,\theta)$ παίρνουν τις παρακάτω τιμές για τις δύο θέσεις θ των επιπέδων 2-3 και 1-3, αντίστοιχα, σύμφωνα με το αριθμητικό μοντέλο που θεωρήσαμε.

$$\left. \begin{aligned} \circ \text{ Στο } \theta=0 : \quad \sigma_{r\theta} &= \frac{1.11994 \cdot c_4 \cdot G}{r^{0.241651}} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{4.66676 \cdot c_4 \cdot G}{r^{0.241651}} \quad , \quad u_r = u_\theta = 0 \\ \circ \text{ Στο } \theta=\pi/2 : \quad u_r &= 2.14579 \cdot c_4 \cdot r^{0.711173} \quad , \quad u_\theta = -1.98794 \cdot c_4 \cdot r^{0.711173} \quad , \\ &\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

όπου c_4 αλγεβρική σταθερά.

Μελετώντας ειδικότερα τη συνιστώσα $\sigma_{r\theta}$, η κατανομή της που, όπως αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου, δίνεται από τη σχέση: $\sigma_{r\theta}(r,\theta) = G \cdot r^{-0.241651} \cdot \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta)$ (7), μηδενίζεται στη θέση $\theta = \pi/2$ και παίρνει μια πραγματική μη μηδενική τιμή στη θέση $\theta=0$ (σχέση (6)).

Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται αν παρατηρήσουμε το Σχ. 6.5.

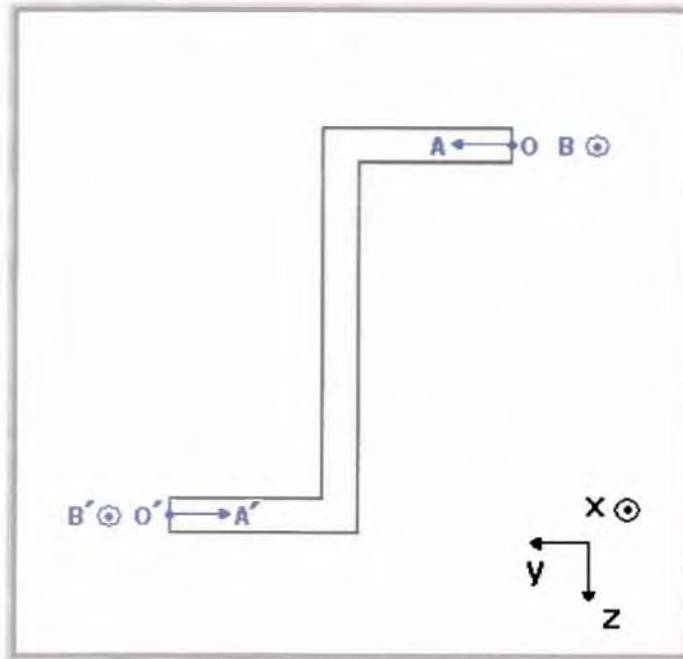
Η μεταβολή του όρου $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ εξαρτάται μόνο από τη θέση θ και για $\theta=0$ παίρνει την τιμή $\tilde{\sigma}_{r\theta}(0)=1.11994$ (έχοντας θέσει $c_4=1$) οπότε μέσω της (7) προκύπτει

$$\sigma_{r\theta}(0) = \frac{1.11994 \cdot c_4 \cdot G}{r^{0.241651}} \quad \text{ενώ για } \theta = \pi/2 = 1.57 \quad \text{“πέφτει” στο } 0 \quad \text{και επόμενα}$$

$$\sigma_{r\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad .$$

6.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΔΟΚΟ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΗΣ ΑΝΟΙΧΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΤΥΠΟΥ Z

Στη δοκό που μελετήσαμε και συγκεκριμένα στη διατομή της πακτώσεως, παρατηρούμε πως στα πέλματα του ανάποδου Z επαληθεύεται η θεωρία της ασυμπτωτικής ανάλυσης που περιγράφηκε στην παράγραφο 6.1 .



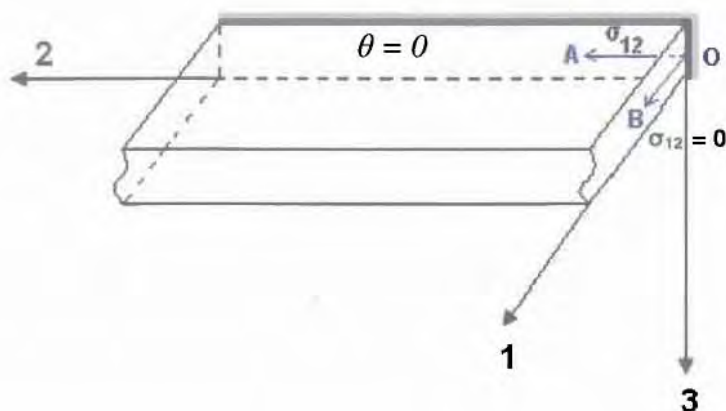
Σχήμα 6.7: Εφαρμογή ασυμπτωτικής ανάλυσης στα πέλματα της δοκού στο $x = 0$

Η γωνία της πακτώσεως που επαληθεύει τη θεωρία είναι το σημείο τομής των επιπέδων $y-z$ και $x-z$ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και αφορά τη δεξιά γωνία του Άνω Πέλματος (άξονες OA, OB) και την αριστερή του Κάτω Πέλματος (άξονες $O'A', O'B'$).

Ακολουθεί η μελέτη κάθε πέλματος χωριστά και η εφαρμογή της ασυμπτωτικής ανάλυσης ως μέσο ερμηνείας των κατανομών των σ_{12} τάσεων όπως προβλέπονται από τα πεπερασμένα στοιχεία (αριθμητική λύση).

Σημειώνουμε ότι το καρτεσιανό $\Sigma\Sigma$ x, y, z ταυτίζεται με το $\Sigma\Sigma$ $1, 2, 3$ που χρησιμοποιείται στα ακόλουθα σχήματα.

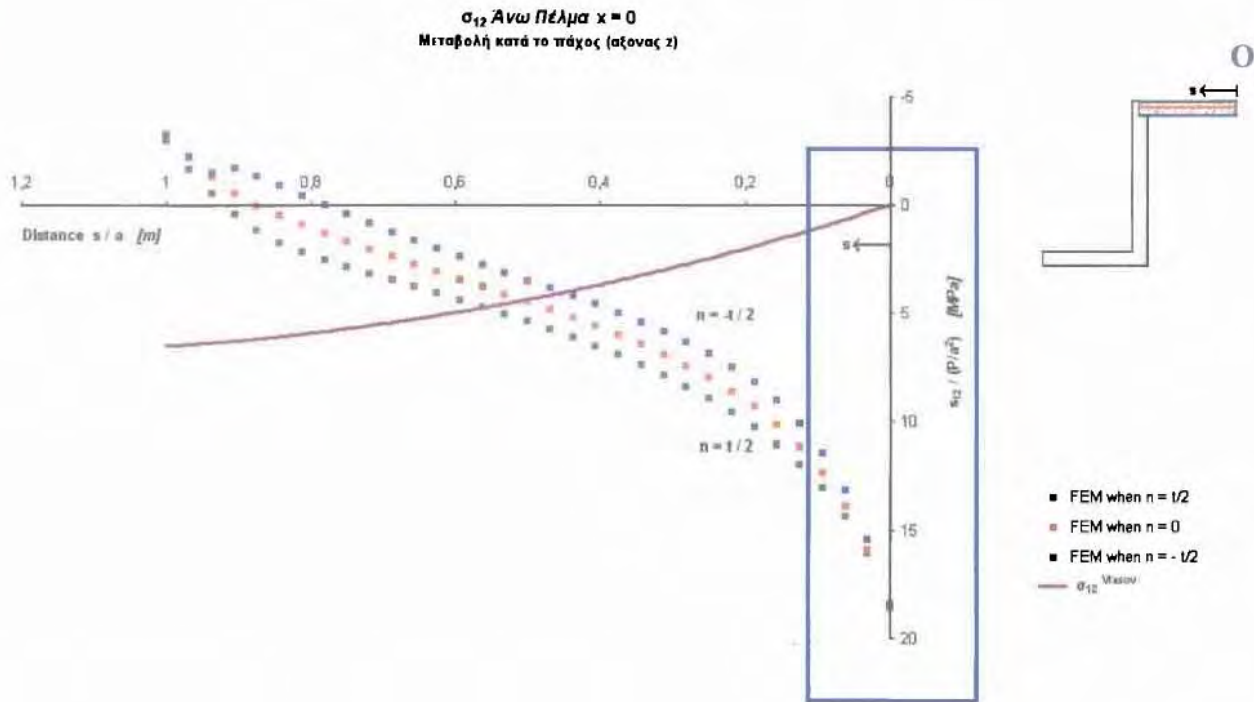
6.2.1 ΑΝΩ ΠΕΛΜΑ ($x = 0$)



Σχήμα 6.8: Σχηματική παράσταση διατμητικών τάσεων σ_{12} στη γωνία της πακτώσεως στο Ανω Πέλμα

Παρατηρώντας το Σχ.6.8, βλέπουμε ότι η παράπλευρη επιφάνεια του Ανω πέλματος (επίπεδο 1-3) είναι αφόρτιστη, δηλαδή $\sigma_{12}^{On} = 0$ ενώ στο επίπεδο 2-3 η τιμή της διατμητικής τάσης σ_{12} είναι μη μηδενική, δηλαδή $\sigma_{12}^{OA} \neq 0$. Αυτή η κατανομή των τάσεων προβλέπεται από την ασυμπτωτική ανάλυση στη γωνία των δύο επιπέδων και παρουσιάζεται στο παρακάτω Διάγραμμα τάσεων σ_{12} στο οποίο συγκρίνονται αναλυτική και αριθμητική λύση (Σχήμα 6.9).

Υπενθυμίζουμε ότι, αντιπαραβάλλοντας τα Σχ. 6.1, 6.8 το διάνυσμα OB του Σχ.6.8 βρίσκεται στη κατεύθυνση του άξονα 1 του Σχ.6.1 και το διάνυσμα OA στην κατεύθυνση του άξονα 2, αντίστοιχα, ενώ η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 (επίπεδο 2-3) έως $\pi/2$ (επίπεδο 1-3).



Σχήμα 6.9 : Ασυμπτωτική ανάλυση των λύσεων της σ_{12} στο Άνω Πέλιμα στη διατομή $x = 0$

Στη σημειωμένη περιοχή του διαγράμματος, παρατηρούμε ότι η αναλυτική λύση στη γωνία **O** “πέφτει” στο 0 ενώ η αριθμητική λύση φεύγει στο άπειρο ($+\infty$). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι τα πεπερασμένα στοιχεία λύνουν το ίδιο σύστημα εξισώσεων **(1-3)** που χρησιμοποιήσαμε στην ασυμπτωτική ανάλυση και η τελική κατανομή της σ_{12} δίνεται από τη σχέση :

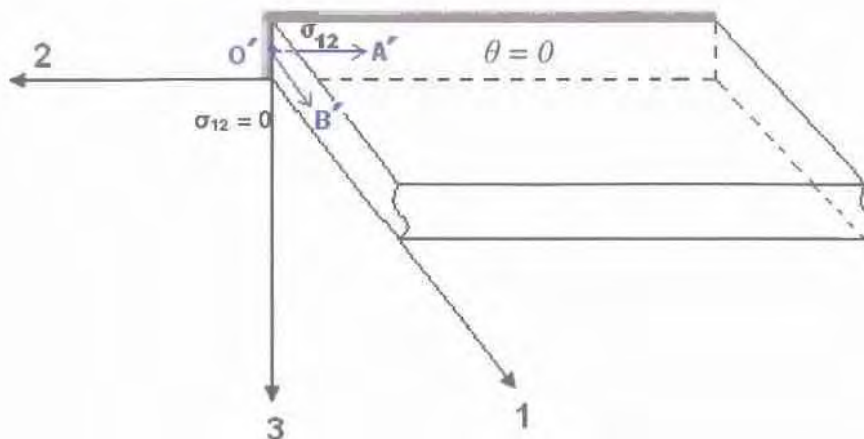
$$\sigma_{12}(r, \theta) = G \cdot r^{s-1} \cdot \tilde{\sigma}_{12}(\theta) , \quad \text{όπου } s = 0.711173$$

άρα $s-1 < 0$ και $r^{s-1} = r^{-0.288827} = \frac{1}{r^{0.288827}} \rightarrow \infty$ συνεπώς

όταν $r \rightarrow 0$ τότε $\sigma_{12} \rightarrow \infty$

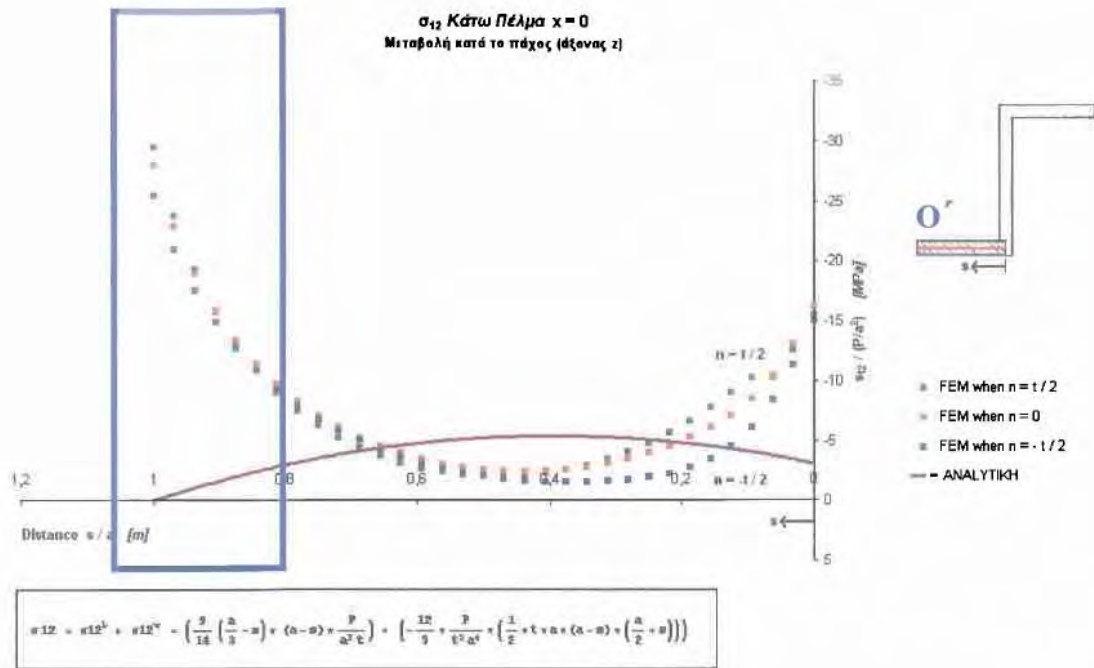
6.2.2 ΚΑΤΩ ΠΕΛΜΑ ($x = 0$)

Παρόμοια εικόνα παρατηρούμε στο Κάτω πέλμα της διατομής της πακτώσεως για το σημείο O' , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.10.



Σχήμα 6.10: Σχηματική παράσταση διατμητικών τάσεων σ_{12} στη γωνία της πακτώσεως στο Κάτω Πέλμα

Παρατηρώντας το Σχ.6.10, η παράπλευρη επιφάνεια του Κάτω πέλματος(επίπεδο 1-3) είναι αφόρτιστη, δηλαδή $\sigma_{12}^{O'B'} = 0$ ενώ στο επίπεδο 2-3 η τιμή της διατμητικής τάσης σ_{12} είναι μη μηδενική, δηλαδή $\sigma_{12}^{O'A'} \neq 0$ Αυτή η κατανομή των τάσεων προβλέπεται από την ασυμπτωτική ανάλυση στη γωνία των δύο επιπέδων και παρουσιάζεται στο παρακάτω Διάγραμμα τάσεων σ_{12} στο οποίο συγκρίνονται αναλυτική και αριθμητική λύση (Σχήμα 6.11).



Σχήμα 6.11 : Ασυμπτωτική ανάλυση των λύσεων της σ_{12} στο Κάτω Πέλαμα στη διατομή $x = 0$

Όπως και στο Άνω Πέλαμα, στη σημειωμένη περιοχή του διαγράμματος, παρατηρούμε ότι η αναλυτική λύση στη γωνία O' “πέφτει” στο 0 ενώ η αριθμητική λύση φεύγει στο άπειρο ($-\infty$). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι τα πεπερασμένα στοιχεία λύνουν το ίδιο σύστημα εξισώσεων (1-3) που χρησιμοποιήσαμε στην ασυμπτωτική ανάλυση και η τελική κατανομή της σ_{12} , που προβλέπει “άπειρες” τάσεις, δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_{12}(r, \theta) = G \cdot r^{s-1} \cdot \tilde{\sigma}_{12}(\theta) \quad , \quad \text{όπου } s = 0.711173$$

άρα $s-1 < 0$ και $r^{s-1} = r^{-0.288827} = \frac{1}{r^{0.288827}} \rightarrow \infty$ συνεπώς

όταν $r \rightarrow 0$ τότε $\sigma_{12} \rightarrow \infty$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το βασικότερο συμπέρασμα που προέκυψε από την εργασία είναι ότι με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων μπορούμε να προσεγγίσουμε σε ικανοποιητικό βαθμό την αναλυτική λύση πακτωμένων δοκών με λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές μέσω ενός αριθμητικού μοντέλου.

Η παρουσία πάκτωσης εμποδίζει τη στρέβλωση με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθών αξονικών τάσεων οι οποίες μεγιστοποιούνται στη διατομή της πακτώσεως ($x=0$) και παίρνουν μη αμελητέες τιμές στο μεγαλύτερο μέρος της δοκού. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχ.2.3 φάνηκε ότι στο μέσο περίπου της δοκού η σ_{xx}^w σε όλα τα σημεία της διατομής ισούται με το 30% περίπου της τιμής στα αντίστοιχα σημεία της διατομής της πακτώσεως ($x = 0$) ενώ αρκετά μακριά από τη θέση αυτή και κοντά στο ελεύθερο άκρο ($x = 0.9L$) η σ_{xx}^w παίρνει πολύ μικρές τιμές (περίπου 5% σε σχέση με εκείνες στο $x = 0$) αλλά όχι μηδενικές.

Αντιλαμβανόμαστε ότι η συμβολή της ορθής τάσεως σ_{xx}^w (που αναπτύσσεται λόγω στρεπτικού περιορισμού) στη συνολική ορθή τάση είναι τόσο σημαντική στην περίπτωση λεπτότοιχων ανοιχτών διατομών που δεν μπορεί να αμεληθεί. Στα διαγράμματα σύγκρισης αναλυτικής και αριθμητικής λύσης του Κεφαλαίου 5, παρουσιάσαμε την κλασική λύση κατά SV, δηλαδή τη σ_{xx}^b και με διαφορετική καμπύλη την αναλυτική λύση κατά Vlasov που εμπεριέχει και τη συμβολή της συνιστώσας σ_{xx}^w ώστε να φανεί η μετατόπιση και η συμβολή της. Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής της σ_{xx}^w στον κορμό και της μικρής τιμής που λαμβάνει, οι μέγιστες τιμές της συνιστώσας εμφανίζονται στα πέλματα.

Στη διατομή της πακτώσεως, στο Κάτω πέλμα στη θέση $s = 0.2$ εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της ορθής τάσης σ_{xx}^v που ισούται με $\left| \sigma_{xx}^w \right|_{\max} = 91.6 \frac{P}{a^2}$ σε σύγκριση με τη μέγιστη τιμή της ορθής τάσης σ_{xx}^b που εμφανίζεται στο Άνω πέλμα στη θέση $s=0.2$ και ισούται μόλις με $\left| \sigma_{xx}^b \right|_{\max} = 68.56 \frac{P}{a^2}$. Πρόκειται για ουσιαστική διαφορά που υπολογίζεται στο 33.6% υπέρ της συνιστώσας-αντίδραση στο στρεπτικό περιορισμό.

Σε μια διατομή μακριά από την πάκτωση, έστω σε απόσταση $x = 0.375L$, παρατηρήσαμε στα Σχήματα 5.38 , 5.42 , 5.46 ότι οι τιμές της σ_{xx}^{ω} είχαν μειωθεί αλλά ήταν ακόμα σημαντικές στην συνολική σ_{xx} . Εκεί, η μέγιστη τιμή της σ_{xx}^{ω} εμφανίζεται στη θέση $s=0.2$ και των δύο πελμάτων και ισούται με $|\sigma_{xx}^{\omega}|_{\max} = 47.84 \frac{P}{a^2}$ ενώ η μέγιστη τιμή της σ_{xx}^b παραμένει ίση με $|\sigma_{xx}^b}|_{\max} = 68.56 \frac{P}{a^2}$ και εμφανίζεται στην ίδια θέση όπως και στη διατομή της πακτώσεως. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι η μέγιστη τιμή της σ_{xx}^{ω} μειώθηκε κατά 47.8%, όπως δηλαδή αναμενότανε από την ανάλυση του Σχ.2.3.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν χρησιμοποιήσει κανείς την κλασική λύση κατά Saint Venant που αγνοεί τους περιορισμούς της πακτώσεως (δηλαδή $\sigma_{xx}^{\omega} = \sigma_{xx}^{\omega} = 0$), η μέγιστη τιμή της σ_{xx} θα ήτανε $|\sigma_{xx}|_{\max} = 68.56 \frac{P}{a^2}$ ενώ λαμβάνοντας υπ' όψιν την αδυναμία στρέβλωσης, σύμφωνα με τη θεωρία του Vlasov, η μέγιστη τιμή της σ_{xx} είναι $|\sigma_{xx}|_{\max} = 125.92 \frac{P}{a^2}$, δηλαδή 45.5% μεγαλύτερη!

Παρατηρώντας τη μεταβολή της αριθμητικής λύσης σ_{xx} κατά το πάχος της διατομής της πακτώσεως, βλέπουμε στα Σχ. 5.27, 5.31 και 5.35 ότι παρουσιάζουνε μεγαλύτερο φάσμα τιμών από εκείνο στη διατομή στη θέση $x=0.375L$ που παριστάνεται στα Σχ. 5.39 , 5.43 και 5.47. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η ποσοστιαία μεταβολή των ακραίων τιμών στις θέσεις $x=0$ και $x=0.375L$.

	$x = 0$	$x = 0.375L$
Άνω Πέλημα	26 %	2 %
Κάτω Πέλημα	24 %	8 %
Κορμός	30 %	23 %

Ο λόγος που υπάρχει αυτή η διαφορά στο φάσμα τιμών είναι ότι η συνιστώσα της καθαρής στρέψης κατά SV, σ_{xx}^b , είναι ανεξάρτητη της θέσης x και η κατανομή της είναι η ίδια σε κάθε διατομή της δοκού. Επομένως, καθοριστικός παράγοντας είναι η συνιστώσα σ_{xx}^{ω} που, όπως είδαμε παραπάνω, μειώνεται περίπου στο μισό της τιμής της. Κατά συνέπεια, η κατανομή των τιμών της σ_{xx} κατά το πάχος παρουσιάζει

μικρότερο φάσμα με διαφορά ποσοστιαίας τάξης μεγέθους στα πέλματα. Στον κορμό, η επί % μεταβολή των τιμών δε διαφέρει σημαντικά γιατί η κατανομή της σ_{xx}^{ω} είναι γραμμική κατά το πάχος και η τιμή που λαμβάνει δε διαφέρει σημαντικά στις δύο διατομές, σε σύγκριση με τις διαφορές που εμφανίζονται στα πέλματα.

Η σύγκλιση αριθμητικής και αναλυτικής κατανομής των ορθών αξονικών τάσεων, όπως παρουσιάστηκε προοπτικά στο Κεφάλαιο 5, είναι πολύ καλή, ειδικά στη διατομή της πακτώσεως στον Κορμό και στο Κάτω Πέλημα.

Σε ό,τι αφορά τις διατμητικές τάσεις, η σύγκλιση της αναλυτικής λύσης και των πεπερασμένων στοιχείων στη διατομή $x=0.375L$ είναι πάρα πολύ καλή και στα τρία τμήματα, όπως φαίνεται στα *Σχήματα 5.16*, *5.20* και *5.24*.

Στη διατομή της πακτώσεως, η σύγκλιση στα πέλματα δεν είναι καλή, γεγονός που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 6 με τη θεωρία της ασυμπτωτικής ανάλυσης. Παρατηρώντας τα *Σχήματα 6.9*, *6.11*, βλέπουμε ότι ενώ η αναλυτική λύση της σ_{12} στη θέση $s=0$ του Άνω Πέλματος παίρνει μηδενική τιμή, τα πεπερασμένα στοιχεία προβλέπουν “άπειρες” τάσεις. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι τα πεπερασμένα στοιχεία λύνουν το ίδιο σύστημα εξισώσεων με εκείνο που ακολουθεί η θεωρία ασυμπτωτικής ανάλυσης κι έτσι όταν $r \rightarrow 0$ η σ_{12} είναι αντιστρόφως ανάλογη του όρου αυτού και επομένως τείνει στο άπειρο. Η ίδια κατάσταση παρατηρείται και στη θέση $s=0.2$ του Κάτω Πέλματος όπου και πάλι η αναλυτική λύση “πέφτει” στο μηδέν ενώ η αριθμητική “φεύγει” στο άπειρο.

Στη διατομή $x=0.375L$, η αριθμητική λύση στο Άνω Πέλημα που παρουσιάστηκε στο *Σχήμα 5.15* παρουσιάζει ενδιαφέρον στις τιμές που λαμβάνει στα άκρα του πέλματος. Για όλες τις τιμές του n (από $-t/2$ έως $t/2$), παρατηρούμε ότι για μήκος περίπου ίσο με το πάχος t , δηλαδή 4-5 κόμβους, υπάρχει μια απότομη μείωση στην αρχή του πέλματος και μια απότομη αύξηση στο άλλο άκρο του πέλματος των τιμών που λαμβάνει η διατμητική τάση. Στο διάστημα ανάμεσα σ’ αυτές τις δύο περιοχές, εμφανίζεται ένα πλατώ που ακολουθεί μια ελαφρώς αυξανούσα ευθεία και καταλήγει στο μηδέν, από το οποίο είχε ξεκινήσει. Η διατμητική ροή, λοιπόν, που παρατηρούμε εξηγείται από τη θεωρία στρέψης ανοιχτών διατομών που αναφέρει ότι οι τροχιές των διατμητικών τάσεων συμπίπτουν με τις ισοσταθμικές της τασικής συνάρτησης κατά

Prandtl $\Psi(y,z)$ και είναι αναγκαστικά “κλειστές καμπύλες”. Για το λόγο αυτό, οι ισοσταθμικές είναι πυκνές κοντά στις επιμήκεις πλευρές της διατομής (παράλληλες στον άξονα z) και παρουσιάζουν κλειστή μορφή και συνεχή διατμητική ροή.

Παρόμοια εικόνα παρουσιάζεται στο Κάτω Πέλημα της διατομής $x=0.375L$ αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 5.19 που εξηγείται από την ίδια θεωρία “κλειστών καμπυλών”.

Η κυρίαρχη διατμητική τάση στη διατομή $x = 0.375L$ είναι λόγω στρέψεως $|\sigma_{xs}^{SV}|_{max} = 16.4 P/\alpha^2$, η οποία είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις διατμητικές τάσεις λόγω κάμψεως ($|\sigma_{xs}^b|_{max} = 1.714 P/\alpha^2$) ή λόγω πάκτωσης ($|\sigma_{xs}^\omega|_{max} = 3.16 P/\alpha^2$). Αυτό οφείλεται στο ότι η τέμνουσα δύναμη δε διέρχεται από το κέντρο διατμήσεως της διατομής. Στις λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές ακόμη και μια μικρή απόκλιση του σημείου εφαρμογής της τέμνουσας από το κέντρο διατμήσεως προκαλεί σημαντικές στρεπτικές τάσεις.

Η μέγιστη τιμή της σ_{xs} εμφανίζεται στη διατομή $x = 0.375L$ στον Κορμό στη θέση $s=0.11$, όπως παρουσιάστηκε στο Σχήμα 5.24, και ισούται με $|\sigma_{xs}|_{max} = 22.26 P/\alpha^2$ ενώ αν χρησιμοποιούσαμε την κλασσική λύση κατά SV που αγνοεί τους περιορισμούς της πακτώσεως, η μέγιστη τιμή της σ_{xs} θα ήτανε $|\sigma_{xs}|_{max} = 30.56 P/\alpha^2$ στη διατομή $x = L = 10a$ (ελεύθερο άκρο), όπου μεγιστοποιείται η συνιστώσα σ_{xs}^{SV} ($|\sigma_{xs}^{SV}|_{max} = 25.42 P/\alpha^2$).

Συμπερασματικά, η “αρχή του Saint Venant” ισχύει σε περιπτώσεις κλειστών διατομών και οι επιπλέον τάσεις που αναπτύσσονται λόγω πακτώσεων περιορίζονται μόνο σε μια μικρή περιοχή κοντά στην πάκτωση. Ωστόσο, η εν λόγω “αρχή” μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα αν χρησιμοποιηθεί σε λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές στις οποίες οι τάσεις σ_{xx}^ω είναι οι σημαντικότερες όλων και εμφανίζονται σε όλο το μήκος της δοκού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Αράβας , Ν. , “Μηχανική των Υλικών – Ανάλυση Ελαστικών δοκών”, Τόμος ΙΙ, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Θεσσαλίας, 2008
- Γδούτος , Ε. , “Αντοχή των Υλικών ”, Εκδοτικός Οίκος Αδερφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1993
- Καραμάνος , Σ.Α. , “Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων – Βασική Θεωρία και Εφαρμογές στην Επιστήμη του Μηχανικού, Σημειώσεις Μαθήματος”, Βόλος, 2007
- Παπαδρακάκης, Μ., “Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001
- Τσαμασφύρος , Γ.Ι. , “Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων”, 2 τόμοι, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991
- Schweda, E. , “Αντοχή των Υλικών - μετάφραση”, Εκδόσεις Γκιούρδας, Αθήνα, 1978

Ξενόγλωσση

- Abaqus Keywords Manual, Version 6.2 , Hibbitt, Karlsson & Sorensen
- Abaqus /Explicit User’s Manual , vol. **I,II**, Version 6.3, Hibbitt, Karlsson & Sorensen
- Boresi, A.P., Schmidt, R.J. and Sidebottom, O.M., “Advanced Mechanics of Materials”, 5th edition, John Wiley & Sons, 1993
- Timoshenko, S. , “Strength of Materials, Advanced Theory and Problems”, Part II, 3rd edition, Robert E. Krieger Publishing Company, 1976

Περιοδικά

- Freddi, L., Paroni , R. and Morassi, A., “Thin-walled beams: the case of the rectangular cross-section”, Journal of Elasticity, vol. **76**, No. 1, pp. 45-66, 2004

Ιστότοποι

- <http://www.ndt-ed.org/EducationResources/CommunityCollege/Materials/Mechanical/FractureToughness.htm> , “Fracture Toughness”
- http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, “Finite Element Method”

- <http://www2.ing.unipi.it/~o24401/eumas07/Chap5.pdf>, “The De Saint Venant’s Theory of Beams”, rev.1.0 31/12/2007
- http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/CT5141_chap7.pdf, “Vlasov Torsion Theory”, Hoogenboom, P.C.J. , October 2006



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091863