

ΒΟΛΟΣ  
2012



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΠΑΛΜΟΥ LASER  
ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ FEMTOSECOND & ΜΕΓΑΛΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ  
ΥΠΕΡΠΙΕΣΗΣ -  
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ**

υπό

**ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ Δ. ΠΟΤΕΑ**

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Π.Θ , 2010

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Euler

ΒΟΛΟΣ 2012



Copyright © 2012 Αναστάσιος Ποτέας

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής     Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης  
(Επιβλέπων)     Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής     Δρ. Παναγιώτης Τσιακάρας  
                                 Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής     Δρ. Αναστάσιος Σταμάτης  
                                 Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
                                 Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον Θεό που με αξίωσε να φτάσω στην απόκτηση του δεύτερου τίτλου σπουδών στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Στη συνέχεια, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της Μεταπτυχιακής Εργασίας μου, Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της μεταπτυχιακής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Παναγιώτη Τσιακάρα, Αναστάσιο Σταμάτη, για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ευχαριστώ τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Ρευστομηχανικής, Κωνσταντίνο Τσιγκλιφή, Κωνσταντίνο Ευθυμίου και Δημήτριο Δημόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά τους στον προγραμματισμό σε Fortran, Matlab καθώς και για την συνδρομή τους στο Παράλληλο Προγραμματισμό σε περιβάλλον LINUX. Ευχαριστώ τα αδέρφια μου Γεώργιο και Νικόλαο για την ηθική υποστήριξή τους. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Διονύσιο και Σταυρούλα Ποτέα για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτήν την Μεταπτυχιακή Εργασία στην Μητέρα μου και στον Πατέρα μου ιδιαιτέρως.

Αναστάσιος Δ. Ποτέας

# **ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΑΣ ΠΑΛΜΟΥ LASER ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ FEMTOSECOND & ΜΕΓΑΛΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΥΠΕΡΠΙΕΣΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ**

**ΠΟΤΕΑΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ**

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

ΒΟΛΟΣ 2012

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γίνεται μια προσπάθεια προσομοίωσης της δυναμικής συμπεριφοράς και του τρόπου κατάρρευσης ελεύθερης μικροφυσαλίδας παλμού Laser διάρκειας  $10^{-15}$  sec (femtosecond φυσαλίδες). Οι φυσαλίδες femtosecond υπόκεινται σε εκτεταμένη επιμήκυνση σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας, ενώ δεν παρατηρείται εκπομπή φωτός κατά την διάρκεια της κατάρρευσης. Πραγματοποιείται μια παραμετρική μελέτη για ένα συγκεκριμένο εύρος αρχικών επιμηκύνσεων σε συνδυασμό με μεγάλες αρχικές πιέσεις της τάξης των MPa και GPa. Περαιτέρω γίνεται μια προσπάθεια να αναπαραχθούν αποτελέσματα όσο είναι δυνατόν κοντά στα πειραματικά με σκοπό να γίνει μια εκτίμηση της αρχικής πίεσης που υπάρχει στην φυσαλίδα, και κατ' επέκταση της αρχικής μηχανικής ενέργειας, λόγω της εστιασμένης δράσης του παλμού Laser. Οι προσομοιώσεις αναπαράγουν την πειραματικά παρατηρούμενη δυναμική συμπεριφορά για αρχική εσωτερική υπερπίεση της μικροφυσαλίδας της τάξης των GPa.

## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
Κατάλογος Σχημάτων.....	7
Κατάλογος Πινάκων .....	9
Κεφάλαιο 1 <sup>ο</sup> Εισαγωγή.....	10
1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο .....	10
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση .....	12
1.3 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	14
Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> Ταλαντώσεις Ασθενούς Ιξώδους και Θραύση Επιμηκυμένων Φυσαλίδων σε Υπερπίεση ..	16
2.1 Μορφοποίηση του Προβλήματος .....	18
2.1.1 Αστρόβιλο Πεδίο Ροής .....	23
2.1.2 Επιδράσεις Χαμηλού Ιξώδους ( $Oh \ll 1$ ) .....	25
2.1.3 Μεταβολή Ενέργειας .....	29
2.1.4 Ευστάθεια Σχήματος Σφαιροσυμμετρικών Ταλαντώσεων .....	30
Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> Αριθμητική Επίλυση.....	32
3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων.....	32
3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων .....	34
3.3 Ολοκλήρωση στο Χρόνο.....	36
3.4 Αριθμητική Μεθοδολογία .....	40
3.5 Αξιοπιστία Αριθμητικού Σχήματος .....	42
Κεφάλαιο 4 <sup>ο</sup> Παραμετρική Μελέτη .....	45
4.1 Προσομοίωση.....	45
4.2 Πειραματικά Δεδομένα.....	46
4.3 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων .....	51
Κεφάλαιο 5 <sup>ο</sup> Συμπεράσματα & Προτάσεις Για Μελλοντική Έρευνα .....	67
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....	69
Βιβλιογραφία .....	72

## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1 : Αρχικό σχήμα της φυσαλίδας για συμμετρική και ασύμμετρη κατάσταση.....	19
Σχήμα 3.1 : Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης $S=0.17$ $P=15000$ .....	42
Σχήμα 3.2 : Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης για $S=0.17$ $P=15000$ -run1 .....	43
Σχήμα 3.3 : Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης για $S=0.17$ $P=15000$ -run2 .....	43
Σχήμα 4.1 : Πειραματική Διάταξη .....	46
Σχήμα 4.2 : Εξέλιξη για Συμμετρική Φυσαλίδα και Ενέργεια 38 $\mu\text{J}$ .....	47
Σχήμα 4.3 : Εξέλιξη για Συμμετρική Φυσαλίδα και Ενέργεια 100 $\mu\text{J}$ .....	48
Σχήμα 4.4 : Χρονική εξέλιξη όγκου φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 $\mu\text{J}$ .....	49
Σχήμα 4.5 : Χρονική εξέλιξη ταχυτήτων Πόλου και Ισημερινού Φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 $\mu\text{J}$ .....	49
Σχήμα 4.6 : Χρονική εξέλιξη διαμήκη και εγκάρσιου άξονα φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 $\mu\text{J}$ .....	49
Σχήμα 4.7 : Αρχικό σχήμα Φυσαλίδας για παλμ Ενέργειας 100 mJ .....	49
Σχήμα 4.8 : Χρονική εξέλιξη όγκου φυσαλίδας για 38 $\mu\text{J}$ .....	50
Σχήμα 4.9 : Χρονική εξέλιξη ταχυτήτων Πόλου και Ισημερινού Φυσαλίδας για 38 $\mu\text{J}$ .....	50
Σχήμα 4.10 : Χρονική εξέλιξη διαμήκη και εγκάρσιου άξονα φυσαλίδας για 100 $\mu\text{J}$ .....	50
Σχήμα 4.11 : Αρχικό σχήμα Φυσαλίδας Ενέργειας 38 $\mu\text{J}$ .....	50
Σχήμα 4.12 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.30$ και αρχική υπερπίεση $P=0.007$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	54
Σχήμα 4.13 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.30$ και αρχική υπερπίεση $P=0.014$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	55
Σχήμα 4.14 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.30$ και αρχική υπερπίεση $P=0.0238$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	56

Σχήμα 4.15 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.30$ και αρχική υπερπίεση $P=0.098$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	57
Σχήμα 4.16 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.25$ και αρχική υπερπίεση $P=0.014$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	58
Σχήμα 4.17 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.25$ και αρχική υπερπίεση $P=0.0252$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	59
Σχήμα 4.18 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.25$ και αρχική υπερπίεση $P=0.035$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	60
Σχήμα 4.19 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.20$ και αρχική υπερπίεση $P=0.0252$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	61
Σχήμα 4.20 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.20$ και αρχική υπερπίεση $P=0.049$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας.....	62
Σχήμα 4.21 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.20$ και αρχική υπερπίεση $P=0.21$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας .....	63
Σχήμα 4.22 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.17$ και αρχική υπερπίεση $P=0.14$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας .....	64
Σχήμα 4.23 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.17$ και αρχική υπερπίεση $P=0.21$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας .....	65
Σχήμα 4.24 : Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.17$ και αρχική υπερπίεση $P=0.42$ GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα (Dz,Dx), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας .....	66



## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1: Σχηματικό διάγραμμα που αναπτύσσεται στα πλαίσια της Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	15
Πίνακας 4.1: Πειραματικά Αποτελέσματα για δεδομένη αρχική ενέργεια παλμού--Μεγέθη στον μέγιστο όγκο της φυσαλίδας .....	48
Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.30$ .....	54
Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.25$ .....	58
Πίνακας 4.: Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.20$ .....	61
Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση $S=0.17$ .....	64

### 1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο

Οι ταλαντώσεις φυσαλίδας και η κατάρρευση της είναι ένα πεδίο έρευνας ενεργό από τις αρχές του εικοστού αιώνα όταν ο Lord Rayleigh [21] μελέτησε για πρώτη φορά την αυθόρμητη δημιουργία και την κατάρρευση φυσαλίδων, σε μία προσπάθεια να εξηγήσει την ζημιά που προκαλείται στις προπέλες πλοίων και υποβρυχίων που κινούνται με υψηλή ταχύτητα. Περιέγραψε την διαδικασία της σπηλαίωσης κατά την οποία δημιουργούνται φυσαλίδες σαν αποτέλεσμα των αλλαγών στο τοπικό πεδίο πίεσης. Οι φυσαλίδες που δημιουργούνται ακουστικά μπορούν να ταλαντώνονται αρκετά βίαια και στη συνέχεια να καταρρέουν και να καταστρέφουν την επιφάνεια της προπέλας μέσω του κύματος πίεσης που εκπέμπουν. Αυτός είναι ένας σφαιροσυμμετρικός μηχανισμός κατάρρευσης που περιγράφεται από τις γνωστές Rayleigh-Plesset εξισώσεις και σχετίζεται με την εκπομπή ήχου κατά τα τελευταία στάδια.

Η κατάρρευση ασύμμετρης φυσαλίδας εξετάστηκε αργότερα [22],[23] προκειμένου να εκτιμηθεί η καταστρεπτική επίδραση του σχηματισμού jet κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης κοντά σε ένα στερεό όριο. Αυτό διευκολύνθηκε καταφεύγοντας στην ολοκληρωτική συνοριακή αναπαράσταση που απαιτεί διακριτοποίηση της διεπιφάνειας φυσαλίδας-υγρού και των δύσκαμπτων ή ελεύθερων συνόρων που αλληλεπιδρούν με τη φυσαλίδα, και όχι με ολόκληρο το πεδίο της ροής. Αυτό είναι φυσικά δυνατό στην περιοχή της δυναμικής ροής που είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση των φυσαλίδων που καταρρέουν. Η καταστροφική επίδραση κρουστικού κύματος που δημιουργείται από την κατάρρευση της φυσαλίδας ή του jet που σχηματίζεται κατά την διάρκεια ασύμμετρης κατάρρευσης, έχουν παρατηρηθεί επαληθευθεί πειραματικά [24],[25] με φωτογραφία υψηλής ταχύτητας και είναι γνωστό ότι αμφότερα συνεισφέρουν σε πλαστική παραμόρφωση του υλικού. Πρόσφατες εξελίξεις σε υπολογιστικές και κινηματογραφικές τεχνικές παρατηρήσεις έχουν προσφέρει στην καταγραφή λεπτομερειών της κατάρρευσης και ειδικότερα στο σχηματισμό τοροειδών [26],[27] φυσαλίδων της επίδρασης jet σε ένα στερεό σύνορο.

Σήμερα, η ταλάντωση φυσαλίδας και η κατάρρευση είναι ο βασικός παράγοντας για μια σειρά εφαρμογών σε πολλούς τομείς της τεχνολογίας. Η σπηλαίωση αδράνειας που

δημιουργείται από γρήγορη ταλάντωση και κατάρρευση μίας ελεύθερης φυσαλίδας, μπορεί να συμβεί σε συσκευές όπως οι προπέλες και οι αντλίες και προκαλούν μεγάλο θόρυβο, βλάβη εξαρτημάτων, δονήσεις, και μείωση της απόδοσης. Αν και η σπηλαιώση είναι ανεπιθύμητο φαινόμενο σε πολλές περιπτώσεις αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, η υπερ-σπηλαιώση είναι σε ερευνητικό επίπεδο, σαν ένα μέσο να περιβάλλουν υποβρύχια οχήματα από ένα σύννεφο φυσαλίδων σπηλαιώσης, μειώνοντας έτσι ή εξαλείφοντας την επαφή με το νερό. Τέτοια οχήματα μπορούν να ταξιδεύουν σημαντικά ταχύτερα από τα συμβατικά υποβρύχια.

Η σπηλαιώση μπορεί να είναι επίσης χρήσιμη σε συσκευές καθαρισμού υπερήχων. Αυτές οι συσκευές προκαλούν σπηλαιώση χρησιμοποιώντας ηχητικά κύματα και χρησιμοποιούν την κατάρρευση των φυσαλίδων σπηλαιώσης για να καθαρίζουν επιφάνειες μέσω κρουστικών κυμάτων ή μέσω της επίδρασης των jet. Με την συγκεκριμένη χρήση, η ανάγκη για μερικά περιβαλλοντολογικά επιβλαβή χημικά μπορεί να μειωθεί σε πολλές βιομηχανικές και εμπορικές διαδικασίες που απαιτούν καθαρισμό επιφανειών. Στη βιομηχανία, η σπηλαιώση συχνά χρησιμοποιείται για να ομογενοποιήσει ή να αναμίξει και να σπάει αιωρούμενα σωματίδια σε κολλοειδής ενώσεις υγρού, όπως μίγματα χρωμάτων ή γάλα. Πολλές βιομηχανικές μηχανές ανάμιξης βασίζονται σε αυτή την αρχή του σχεδιασμού. Συσκευές καθαρισμού με σπηλαιώση έχουν σχεδιαστεί επίσης, στις οποίες οι ακραίες συνθήκες σπηλαιώσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την διάσπαση ρύπων και οργανικών μορίων. Η φασματική ανάλυση του φωτός που εκπέμπεται σε Sonochemical αντιδράσεις αποκαλύπτει την ύπαρξη χημικών ουσιών και ιονισμένου πλάσματος που παίζουν καθοριστικό ρόλο στον μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας κατά την αδιαβατική κατάρρευση μικροφυσαλίδων. Το φαινόμενο εκπομπής φωτός από φυσαλίδες σπηλαιώσης ονομάζεται sonoluminescence και έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία [31,35,36]. Τέλος, η σπηλαιώση παίζει επίσης σημαντικό ρόλο για την καταστροφή της πέτρας στα νεφρά σε λιθοτριψία με κρουστικά κύματα που αναπτύσσονται μέσω της κατάρρευσης μικροφυσαλίδων.

Σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές κεντρικό ρόλο παίζει η δυνατότητα εντοπισμού τοπικά και χρονικά σημαντικού ποσού μηχανικής ενέργειας μέσω της κατάρρευσης των ταλαντευόμενων μικροφυσαλίδων. Η κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς και ο επακόλουθος έλεγχος αυτής της διαδικασίας διευρύνουν σημαντικά το πεδίο εφαρμογών του φαινομένου της σπηλαιώσης.

## 1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Οι λεπτομέρειες της κατάρρευσης έχουν πρόσφατα ξεχωρίσει ως ένας βασικός παράγοντας στα φαινόμενα single bubble sono-luminescence [28] (SBSL) και single cavitation bubble luminescence [29] (SCBL) που εμφανίζονται σε πειράματα, όπου εκπέμπεται φώς κατά την διάρκεια των τελικών σταδίων της κατάρρευσης της φυσαλίδας που δημιουργείται μέσω ακουστικών διαταραχών ή ισχυρών παλμών laser. Το αρχικό σχήμα φυσαλίδων που διεγείρονται μέσω παλμών laser ελέγχεται ευκολότερα και κατά συνέπεια οι φυσαλίδες που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο χρησιμοποιούνται συχνά σαν ένα μέσο να διερευνηθεί η επίδραση της σφαιρικότητας κατά την κατάρρευση στο επίπεδο εκπομπής φωτός [30]. Έτσι, διαπιστώθηκε [30] συγκρίνοντας την κατάρρευση μιας ελεύθερης φυσαλίδας με μία φυσαλίδα κοντά στη περιοχή στερεού συνόρου μέσω μίας κάμερας υψηλής ταχύτητας, ότι η εκπομπή φωτός είναι ισχυρότερη στην πρώτη περίπτωση λόγω μεγαλύτερης σφαιρικότητας της κατάρρευσης. Στη πραγματικότητα, βρέθηκε ότι η εκπομπή κρουστικού κύματος δεν συνδέεται απαραίτητα με το φαινόμενο luminescence σε περιπτώσεις για τις οποίες η κατάρρευση δεν είναι βίαιη αρκετά, όπως για παράδειγμα η παρουσία κοντινού στερεού συνόρου. Ο παλμός κατά την διάρκεια αυτών των πειραμάτων ήταν τάξης μερικών nanoseconds και οι φυσαλίδες που δημιουργούνται έχουν μέγεθος τάξης 1 mm ενώ είναι λιγότερο ή περισσότερο σφαιρική. Πιο πρόσφατη εφαρμογή παλμών femtosecond,  $10^{-15}$  sec κατέστη δυνατή σε περιπτώσεις όπου οι φυσαλίδες που δημιουργούνται είναι πολύ μικρότερες σε μέγεθος, της τάξης μερικών μικρομέτρων ( $\mu\text{m}$ ), με έντονες ασυμμετρίες στην αρχική γεωμετρία, δηλαδή εμφανίζουν μία αρχική επιμήκυνση κατά μήκος των αξόνων συμμετρίας. Τέτοιες φυσαλίδες παρατηρήθηκαν να καταρρέουν ασύμμετρα σε διάλυμα νερού χωρίς καμία εκπομπή φωτός, ενώ οι φυσαλίδες που παράγονται από παλμούς laser nanosecond καταρρέουν με λιγότερο ή περισσότερο σφαιροσυμμετρικό τρόπο και η διαδικασία αυτή συνοδεύεται από έντονη εκπομπή φωτός. Το γεγονός ότι το φαινόμενο cavitation luminescence απαιτεί κατάρρευση [30] φυσαλίδας με μεγάλη σφαιρικότητα έχει σημασία στο μηχανισμό εκπομπής φωτός ο οποίος συνδέεται με την αδιαβατική θέρμανση της τελευταίας κατά την κατάρρευσή της.

Από την άλλη πλευρά είναι επίσης γνωστό ότι ο σχηματισμός jet λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια ακόμα και μίας ήπιας κατάρρευσης μη σφαιρικής φυσαλίδας τόσο από πειραματικές [30],[32] όσο και από αριθμητικές μελέτες [33],[34], χωρίς να συνδέεται με την εκπομπή φωτός.. Όμως η ελεγχόμενη δημιουργία jet έχει σημαντική εφαρμογή τόσο στην

μικροχειρουργική [37,38], με την δημιουργία οπών σε γειτονικά κύτταρα σαν αποτέλεσμα των ταλαντώσεων μικροφυσαλίδων, όσο και στην μικρορευστομηχανική γενικότερα [39]. Σημαντική έρευνα λαμβάνει χώρα τελευταία για τον έλεγχο της κατάρρευσης μικροφυσαλίδων μέσω της δημιουργίας ταχέων jet που κινούνται κατά μήκος του αρχικού άξονα του παλμού laser και συγκρούονται μεταξύ τους στο ισημερινό επίπεδο. Μέτρο της δράσης του σχηματιζόμενου Jet είναι η αρχικά προσδιδόμενη μηχανική ενέργεια μέσω του femtosecond παλμού laser [40]. Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η προσομοίωση οπτικών μετρήσεων μικροφυσαλίδων τέτοιου τύπου και η παραμετρική μελέτη της δυναμικής τους συμπεριφοράς ώστε να εκτιμηθεί η αρχική υπερπίεση η οποία για δεδομένη αρχική επιμήκυνση θα προκαλέσει δημιουργία jet και συνθήκες κατάρρευσης παρόμοιες με τις παρατηρούμενες. Έτσι θα μπορέσει να πιστοποιηθεί το ύψος της αρχικά προσδιδόμενης μηχανικής ενέργειας από το laser στην μικροφυσαλίδα, με βάση την ανακτώμενη δυναμική συμπεριφορά, και να αποτιμηθεί η αποτελεσματικότητα διαφορετικών τεχνικών εφαρμογής του παλμού laser.

### 1.3 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας

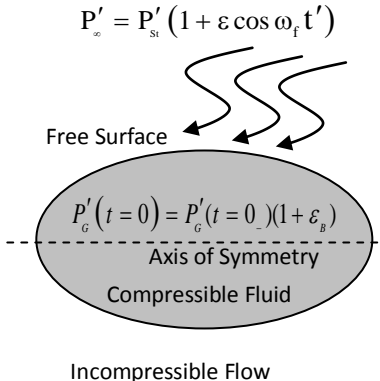
Το υπόλοιπο μέρος της μεταπτυχιακής εργασίας διακρίνεται σε 4 ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαια 2 έως 5, αντίστοιχα. Ειδικότερα:

Στο Κεφάλαιο 2, σαν μία πρώτη προσέγγιση της προσομοίωσης φυσαλίδων που εκτίθενται σε laser, παρουσιάζεται η διαδικασία θραύσης της φυσαλίδας που αρχικά επιμηκύνεται κατά μήκος του άξονα της και εξετάζεται η δυναμική του τρόπου κατάρρευσης. Ειδικότερα, στην υποενότητα 2.1 δίνονται οι κυρίαρχες εξισώσεις για το πρόβλημα των μη γραμμικών ταλαντώσεων της κατάρρευσης φυσαλίδων που έχουν επιμηκυνθεί λόγω επιδράσεων ασθενούς ιξώδους. Η κίνηση διακρίνεται σε ένα αστρόβιλο μέρος που περιγράφεται μέσω της ολοκληρωτικής συνοριακής αναπαράστασης, υποενότητα 2.1.1, και σε ένα μέρος με στροβιλότητα που περιγράφεται μέσω της προσέγγισης του οριακού στρώματος που είναι κατάλληλη σε φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από ασθενές ιξώδες, υποενότητα 2.1.2. Στην υποενότητα 2.1.3, η μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος επιτυγχάνεται συμπεριλαμβανομένης της επίδρασης της σκέδασης και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ακρίβειας των υπολογισμών. Τέλος, στην υποενότητα 2.1.4 παρουσιάζεται η ευστάθεια σχήματος των σφαιροσυμμετρικών ταλαντώσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η αριθμητική ανάλυση του προβλήματος, αναλύεται η μέθοδος των συνοριακών/πεπερασμένων στοιχείων η οποία χρησιμοποιείται στον κώδικα και παρατίθενται ενδεικτικές προσομοιώσεις που πιστοποιούν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η παραμετρική μελέτη. Αρχικά δίνονται τα πειραματικά δεδομένα για τις περιπτώσεις παλμού ενέργειας 100  $\mu\text{J}$  και 38  $\mu\text{J}$  και παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα. Κατόπιν γίνονται αριθμητικές προσομοιώσεις για μεταβαλλόμενη αρχική επιμήκυνση  $S$  και αρχική διαταραχή της εσωτερικής υπερπίεσης της μικροφυσαλίδας με στόχο την καταγραφή των κινηματικών χαρακτηριστικών της μικροφυσαλίδας, π.χ. μήκος ημιαξόνων, ταχύτητα στους πόλους και στον ισημερινό, μεταβολή όγκου κτλ, και την ταυτοποίηση του μηχανισμού κατάρρευσης. Τα παραπάνω στοιχεία αντιπαραβάλλονται με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα προκειμένου να εκτιμηθεί η αρχική υπερπίεση και να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα της δράσης του παλμού laser.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα για την καλύτερη προσομοίωση των πειραμάτων καθώς και πρακτικές ελέγχου της διαδικασίας κατάρρευσης των μικροφουσαλίδων.

ΣΧΗΜΑ	ΤΥΠΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ
	<p>Αξονοσυμμετρική Δυναμική Ροή</p> <p>Ασθενές Ιξώδες,</p> <p>Αναπαράσταση Lagrange της διεπιφάνειας</p> <p>Ελεύθερη Φυσαλίδα που υποβάλλεται σε ισοθερμικές &amp; Αδιαβατικές Ταλαντώσεις</p> <p>Απόκριση σε:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Αρχική επιμήκυνση και εσωτερική υπερπίεση</li> </ul>	<p>Πρόβλεψη των λεπτομερειών της κατάρρευσης της φυσαλίδας κάτω από εκτεταμένη επιμήκυνση και εσωτερική υπερπίεση</p>
		<p>Πρόβλεψη αρχικής μηχανικής ενέργειας μέσα στη φυσαλίδα λόγω εισαγωγής ενέργειας μέσω Laser femtosecond</p>

Πίνακας 1.1: Σχηματικό διάγραμμα που αναπτύσσεται στα πλαίσια της Μεταπτυχιακής Εργασίας

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> Ταλαντώσεις Ασθενούς Ιξώδους και Θραύση Επιμηκυμένων Φυσαλίδων σε Υπερπίεση

Εξετάζονται οι ταλαντώσεις μιας φυσαλίδας, που χαρακτηρίζονται από χαμηλό ιξώδες ως συνέπεια επιμήκυνσης που διαταράσσει το αρχικό σφαιρικό σχήμα στην ισορροπία καθώς και σημαντικής αρχικής υπερπίεσης. Το πεδίο ροής στο περιβάλλον υγρό χωρίζεται σε μία συνιστώσα με στροβιλότητα και σε μία αστρόβιλη. Η τελευταία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και μπορεί να παραχθεί μέσω μίας ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για να επιλυθεί το δυναμικό της ταχύτητας και της παραμόρφωσης του σχήματος των αξονοσυμμετρικών φυσαλίδων. Στους υπολογισμούς συμπεριλαμβάνονται επιδράσεις με χαμηλό ιξώδες κρατώντας ιξώδεις όρους πρώτης τάξης στις ορθές τάσεις της συνοριακής συνθήκης και διατηρώντας την ισορροπία στην εφαπτομενική τάση. Ένα εκτεταμένο σύνολο προσομοιώσεων εκτελείται μέχρι να υποστεί θραύση. Για μία σχετικά μικρή επιμήκυνση, η φυσαλίδα επιστρέφει στην αρχική σφαιρική της κατάσταση ανεξάρτητα από τον αδιάστατο αριθμό  $Oh = \frac{\mu}{(\rho R \sigma)^{1/2}}$ . Για μεγαλύτερες αρχικές

επιμηκύνσεις υπάρχει μια οριακή τιμή πάνω από την οποία η φυσαλίδα τελικά σπάει δημιουργώντας μια μεγαλύτερη φυσαλίδα σχήματος “donut” και μία άλλη μικρότερη φυσαλίδα καταλαμβάνοντας μια περιοχή κοντά στο κέντρο της αρχικής φυσαλίδας. Η τελευταία σχηματίζεται καθώς τα κυκλικά άκρα των jet του υγρού πλησιάζουν το ένα το άλλο από αντίθετες πλευρές κατά μήκος του άξονα συμμετρίας και συνενώνονται. Το μέγεθος της μικρότερης αυτής φυσαλίδας μειώνεται καθώς η αρχική επιμήκυνση ή ο αδιάστατος αριθμός  $Oh^{-1}$  αυξάνονται. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για ένα εύρος μεγάλων αρχικών παραμορφώσεων με μείωση της οριακής τιμής του αδιάστατου αριθμού  $Oh^{-1}$  καθώς η αρχική παραμόρφωση αυξάνεται [41]. Καθώς η ακτίνα ισορροπίας αυξάνεται η φυσαλίδα περιγράφεται από τον παραπάνω τρόπο κατάρρευσης. Παράλληλα εξετάζεται και η επίδραση της αρχικής υπερπίεσης της φυσαλίδας και φαίνεται ότι για μικρές αρχικές υπερπίεσεις, για το εύρος της αρχικής παραμόρφωσης που εξετάζεται, το όριο του αδιάστατου αριθμού  $Oh^{-1}$  μεταπηδά σε μεγαλύτερες τιμές καθώς την ίδια στιγμή αυξάνεται το μέγεθος της μικρότερης φυσαλίδας που δημιουργείται. Η παρούσα εργασία εξετάζει την δυναμική συμπεριφορά μικροφυσαλίδας σε συνθήκες σημαντικής αρχικής επιμήκυνσης και υπερπίεσης και δίνει



έμφαση στις συνθήκες κατάρρευσης σαν συνάρτηση των παραπάνω μεγεθών, με στόχο την εκτίμηση της αρχικής υπερπίεσης σε συγκεκριμένες πειραματικές μετρήσεις.

Οι λεπτομέρειες των μη γραμμικών ταλαντώσεων και η κατάρρευση των φυσαλίδων που επιμηκύνονται και υπόκεινται σε μεγάλη εσωτερική υπερπίεση μελετώνται επίσης με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων. Οι επιδράσεις χαμηλού ιξώδους από τη μεριά του υγρού υπολογίζονται με την ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης κατά πλάτος του οριακού στρώματος που σχηματίζεται στη διεπιφάνεια. Για σχετικά μεγάλες φυσαλίδες με αρχική ακτίνα  $R_0$  της τάξης των mm,  $P_{st}=P_{st}'/(2\sigma/R_0)\sim 300$  και  $Oh=\mu/(\sigma R_0\rho)^{1/2}\sim 200$ , και για ένα σχεδόν αρχικό σφαιρικό σχήμα  $S\sim 1$ , οι αστάθειες Rayleigh – Taylor υπερσχύουν και η φυσαλίδα σπάει ως αποτέλεσμα της αύξησης των μεγάλων κυματαριθμών (αριθμητικής αστάθειας) και της ανάπτυξης περιοχών με πολύ μικρή ακτίνα καμπυλότητας. Τα σύμβολα  $\sigma, \rho, \mu$  και  $P$  υποδηλώνουν την επιφανειακή τάση, πυκνότητα, ιξώδες και την αδιάστατη στατική πίεση του υγρού όπου  $S$  είναι ο λόγος μεταξύ του μήκους του μικρού ημιάξονα της φυσαλίδας που λαμβάνεται υπόψη σαν αξονομετρική έλλειψη, και της ισοδύναμης ακτίνας  $R_0$ .

Για αρχικές πεπερασμένες επιμηκύνσεις,  $0.5 < S < 1$ , η φυσαλίδα καταρρέει είτε μέσω δύο jets που διαδίδονται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας και τελικά συνενώνονται στο επίπεδο του ισημερινού, ή με τη μορφή μίας καταβόθρας που πλησιάζει το κέντρο της φυσαλίδας κατά μήκος του ισημερινού επιπέδου [42]. Αυτή η ανάλυση ισχύει για το παραπάνω εύρος των αρχικών επιμηκύνσεων και μεγάλης εσωτερικής υπερπίεσης  $\epsilon_B \geq 1$ , ανεξάρτητα από τον αδιάστατο αριθμό  $Oh$ . Αυτό κυρίως οφείλεται στη φάση ανάπτυξης του δεύτερου τρόπου ταλάντωσης Legendre κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων της φυσαλίδας, όπου αποκτά θετικές επιταχύνσεις για να γίνει η κατάρρευση. Για μικρότερες φυσαλίδες με αρχική ακτίνα της τάξης  $\mu m$ ,  $P_{st} \sim 4$  και  $Oh \sim 20$ , και μικρές αρχικές επιμηκύνσεις,  $0.75 < S < 1$ , το ιξώδες εξουδετερώνει την ταλάντωση των τοιχωμάτων (mode 2) και ακολούθως την κίνηση του jet δίνοντας έτσι μία κρίσιμη τιμή του  $Oh^{-1}$  κάτω από την οποία τελικά επιστέφει στο αρχικό σφαιρικό σχήμα ισορροπίας, ενώ πάνω από αυτό η φυσαλίδα καταρρέει μέσω της επίδρασης των jet ή της καταβόθρας. Για μέτριες επιμηκύνσεις,  $0.5 < S < 0.75$ , και μεγάλες υπερπίεσεις,  $\epsilon_B \geq 0.2$ , επικρατεί η διάδοση jet και οι επιδράσεις αυτών κατά μήκος του άξονα συμμετρίας ανεξάρτητα του  $Oh$ . Για πολύ μεγάλες επιμηκύνσεις,  $S < 0.5$ , και πάνω από ένα

ορισμένο όριο του αδιάστατου αριθμού  $Oh^{-1}$  τα jet που διαδίδονται από αντίθετες πλευρές συνθλίβουν τα πλευρικά τοιχώματα της φυσαλίδας δημιουργώντας ένα τοροειδές σχήμα.

Στην παρούσα μελέτη φυσαλίδων femtosecond, αρχικής ακτίνας της τάξης μερικών  $\mu m$ , και για μεγάλη αρχική υπερπίεση, από τις προσομοιώσεις που διεξήχθησαν προκύπτει ότι ο τρόπος κατάρρευσης, δηλαδή μέσω της διάδοσης jet κατά μήκος του άξονα συμμετρίας ή μέσω κατάρρευσης των τοιχωμάτων στο ύψος του ισημερινού, σχετίζεται με την αρχική ενέργεια και το μέγεθος της μικροφυσαλίδας όταν επιτυγχάνει τον μέγιστο όγκο. Έτσι ανακτώνται οι δύο τρόποι κατάρρευσης που προβλέπονται στην εργασία [42] για μικρές αρχικές επιμηκύνσεις αναλόγως της αρχικής ενέργειας του παλμού, γεγονός που φαίνεται να συμφωνεί με τις διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις στην [40].

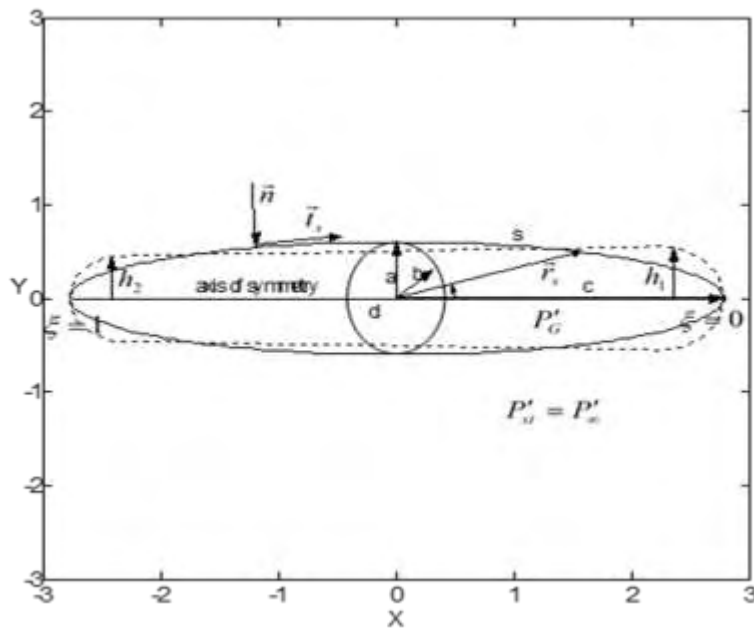
## 2.1 Μορφοποίηση του Προβλήματος

Θέλουμε να μελετήσουμε τις μη γραμμικές ταλαντώσεις της φυσαλίδας που αρχικά επιμηκύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας από το αρχικό σφαιρικό της σχήμα ακτίνας  $R$  σε στατική ισορροπία. Η εσωτερική πίεση, μπορεί ταυτόχρονα να αυξάνεται και το μέγεθος της διαταραχής, , στην παρούσα μελέτη θα παραμένει μεγάλο:

$$P'_G(t=0) = P'_G(t=0_-)(1 + \varepsilon_B) \quad (2.1)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι μέσα στη μελέτη τα τονούμενα γράμματα αναφέρονται σε ποσότητες με διαστάσεις. Απουσία οποιασδήποτε διαταραχής στην κυρίως μάζα του περιβάλλοντος ρευστού,  $\varepsilon=0$ , η πίεση μακριά από την φυσαλίδα αποκτά την στατική τιμή  $P'_{st}$ . Στην ισορροπία το υγρό που περιβάλλει την φυσαλίδα είναι ακίνητο και η πίεση μέσα στη φυσαλίδα συνδέεται με την εξωτερική μέσω της εξίσωσης Young-Laplace

$$P'_G(t=0_-) - P'_{st} = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.1: Αρχικό σχήμα της φυσαλίδας για συμμετρική (—) και ασύμμετρη (---) κατάσταση

Το σχήμα της φυσαλίδας θεωρείται ότι είναι αξονοσυμμετρικό σε όλες τις χρονικές στιγμές ενώ το σχήμα τη χρονική στιγμή  $t=0$  χαρακτηρίζεται από διαμήκη συμμετρία σε σχέση με το επίπεδο του ισημερινού, στις περισσότερες περιπτώσεις που εξετάζονται. Στη πραγματικότητα, υποθέτουμε ότι το σχήμα που υπόκειται σε διαταραχή είναι αυτό ενός ελλειψοειδούς

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} + \frac{x'^2}{c^2} = 1 \quad (2.3)$$

με δύο ίσους ημιάξονες,  $a=b$ , στο επίπεδο του ισημερινού,  $y'z'$ , και ο τρίτος,  $c$ , κατά μήκος του άξονα συμμετρίας,  $x'$ , που χαρακτηρίζει την έκταση της αρχικής επιμήκυνσης. Για ένα δεδομένο αρχικό όγκο,  $V_0$ , της φυσαλίδας με διαταραχή μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω των σχέσεων για τον όγκο της σφαίρας και της έλλειψης, την ισοδύναμη ακτίνα  $R$  και το λόγο  $c/R$  σαν συνάρτηση του  $S=a/R$ , η οποία είναι μια παράμετρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο ελέγχου της αρχικής επιμήκυνσης,

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 c \rightarrow R = \left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{1/3}, \quad \frac{c}{R} = \frac{1}{(a/R)^2} = \frac{1}{S^2}. \quad (2.4)$$

Μετά την εισαγωγή των σφαιρικών συντεταγμένων,

$$y' = r' \sin \theta \cos \phi, \quad z' = r' \sin \theta \sin \phi, \quad x' = r' \cos \theta \quad (2.5)$$

στην εξίσωση (2.3), παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση που περιγράφει το αρχικό σχήμα της φυσαλίδας,

$$r = f(\theta, t = 0) = \frac{S}{\sqrt{S^6 \cdot \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}, \quad (2.6)$$

όπου η αζιμουθιακή γωνία  $\phi$  είναι μηδέν για απλότητα λόγω της αξονοσυμμετρίας, και  $r = r' / R$ . Όταν έχουμε  $S=1$  ανακτούμε πάλι το σφαιρικό σχήμα ενώ καθώς το  $S$  μειώνεται, η επιβαλλόμενη επιμήκυνση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας γίνεται ισχυρότερη. Ωστόσο, το μοντέλο που παρουσιάζεται εδώ χρησιμοποιείται και για ασύμμετρα σχήματα, όσον αφορά τον  $x'$  άξονα. Τέτοια σχήματα λαμβάνονται κατασκευάζοντας ένα αξονοσυμμετρικό σχήμα αποτελούμενο από δύο ημισφαίρια σε επαφή σε κάθε έναν από τους πόλους και στο μεσαίο τμήμα του σχήματος συνδέονται με έναν κώνο με μεταβλητή ακτίνα. Για ένα δεδομένο όγκο, με σταθερή ακτίνα  $R$ , και ολική αρχική επιμήκυνση,  $\ell = 2c/R$ , χρησιμοποιούμε τον λόγο μεταξύ της ακτίνας των δύο ημισφαιρίων,  $k=h_1/h_2$ , ως μια παράμετρο ελέγχου του βαθμού συμμετρίας. Έτσι μπορεί εύκολα να δείχθει ότι ο λόγος,  $s$ , μεταξύ της ακτίνας,  $h_2$ , και της ακτίνας  $R$ , σχετίζεται με το  $\ell$  και το  $k$  μέσω της έκφρασης

$$\ell = \frac{4 - 2 \cdot s^3 \cdot (k^3 + 1) + s^3 \cdot (k + 1) \cdot (k^2 + k + 1)}{s^2 \cdot (k^2 + k + 1)} \quad (2.7)$$

το οποίο μονοσήμαντα καθορίζει το σχήμα. Έχοντας καθορίσει την αρχική γεωμετρία της φυσαλίδας η εσωτερική υπερπίεση μπορεί να υπολογιστεί με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η ενέργεια του παλμού, πιθανώς από πειραματικές έρευνες.

Η δυναμική μιας φυσαλίδας που υποβάλλεται στο είδος της διαταραχής που παρουσιάστηκε παραπάνω συνήθως περιγράφεται με την δυναμική θεωρία. Εάν, εντούτοις, πρέπει κανείς να μοντελοποιήσει περιπτώσεις με μέγεθος φυσαλίδας της τάξης των  $\mu\text{m}$ , το ιξώδες γίνεται ο κύριος μηχανισμός σκέδασης και πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν. Για ταλαντώσεις φυσαλίδας μέσα στο νερό με ακτίνα ισορροπίας σε εύρος μεταξύ 10 και 1000  $\mu\text{m}$  ο αντίστροφος αδιάστατος αριθμός "Ohnesorge" ποικίλει περίπου, μεταξύ 30 και 1000.

Σε αυτό το εύρος του  $Oh^{-1}$  η θεωρία που λαμβάνει υπόψιν τις επιδράσεις χαμηλού ιξώδους είναι εφαρμόσιμη, με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αποκόλληση ευρείας κλίμακας που λαμβάνει χώρα στο υγρό οριακό στρώμα που περιβάλλει την επιφάνεια της φυσαλίδας.

Η ισοδύναμη ακτίνα  $R$  ορίζεται ως το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος δίνοντας έτσι,  $r = r'/R$ ,  $f = f'/R$ , την αδιάστατη απόσταση που προέρχεται από το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και την αδιάστατη θέση της διεπιφάνειας αντίστοιχα. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει χαρακτηριστική ταχύτητα, η επιφανειακή τάση χρησιμοποιείται για να καταστήσει την ταχύτητα, την πίεση και το χρόνο αδιάστατες ποσότητες  $\vec{V} = \vec{V}'/(\sigma/R/\rho)^{1/2}$ ,  $p = p'/(2\sigma/R)$ ,  $t = t'/(R^3/\sigma)^{1/2}$ . Θεωρώντας ασυμπίεστη ροή οι αδιάστατες εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του περιβάλλοντος ρευστού και της παραμόρφωσης της φυσαλίδας, έχουν ως εξής:

Εξίσωση της συνέχειας που εκφράζει το διαφορικό ισοζύγιο μάζας,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0; \quad (2.8)$$

Εξισώσεις Navier-Stokes που εκφράζουν το διαφορικό ισοζύγιο της ορμής

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -2\vec{\nabla} P + Oh \nabla^2 \vec{V}, \quad (2.9)$$

όπου η επίδραση της βαρύτητας αγνοείται λόγω του μικρού μεγέθους της φυσαλίδας. Η κινηματική κατάσταση ωθεί τα σημεία της επιφάνειας να κινούνται με την ταχύτητα του ρευστού.

$$\vec{r} = \vec{r}_s : \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \vec{V}, \quad (2.10)$$

όπου  $\vec{r}_s$  δηλώνει τη θέση του διανύσματος ενός υλικού σημείου στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Λόγω ισορροπίας δυνάμεων στη διεπιφάνεια έχουμε ,

$$\vec{r} = \vec{r}_s : -P_G \vec{n} - (-2P_I + Oh \underline{\underline{\tau}}) \cdot \vec{n} = 2H\vec{n} = (-\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n})\vec{n}, \quad (2.11)$$

όπου  $\vec{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε σχέση με το ρευστό που περιβάλλει τη φυσαλίδα ,  $\vec{\nabla}_s$ ,  $H$ , , δείχνουν την κλίση της επιφάνειας και τη μέση καμπυλότητα στη διεπιφάνεια της

φυσαλίδας, αντίστοιχα,  $\underline{I}, \underline{\tau} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ , και ο μοναδιαίος πίνακας και ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων, αντίστοιχα.

Οι ομαλές συνθήκες του ρευστού στο ευρύτερο πεδίο :

$$\bar{r} \rightarrow \infty: \quad \vec{V} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow P_\infty = P_{St}. \quad (2.12 \text{ a,b})$$

Λόγω της αμελητέας πυκνότητας και του κινηματικού ιξώδους του αερίου μέσα στη φυσαλίδα θεωρούμε την πίεση μέσα στη φυσαλίδα ομοιόμορφη και αγνοούμε το αποκλίνον κομμάτι του τανυστή των τάσεων στη πλευρά του αερίου μέσα στη φυσαλίδα. Επιπλέον, λόγω του πολύ μικρού χρονικού διαστήματος για το οποίο τα φαινόμενα που ερευνώνται στη παρούσα μελέτη εξελίσσονται, μπορούμε να αγνοήσουμε την μεταφορά θερμότητας από και προς το περιβάλλον ρευστό, σε μία πρώτη προσέγγιση, και να θεωρήσουμε αδιαβατικές ταλαντώσεις. Κατά συνέπεια, η μεταβολή της πίεσης μέσα στη φυσαλίδα με τον χρόνο δίνεται από την σχέση:

$$P_G(t=0) \left( \frac{4}{3} \pi \right)^\gamma = P_G(t) V_G^\gamma(t), \quad (2.13)$$

όπου  $\gamma$  είναι η πολυτροπική σταθερά,  $1 \leq \gamma \leq 1.4$  και  $V_G$  ο αδιάστατος στιγμιαίος όγκος της φυσαλίδας. Για μία αδιαβατική διεργασία έχουμε  $\gamma=1.4$ .

Για να κατανοήσουμε την επίδραση του ιξώδους για σχετικά μεγάλο  $Oh^{-1}$  πρέπει να αναλύσουμε το πεδίο της ταχύτητας και της πίεσης σε ένα αστρόβιλο και ένα στροβιλό μέρος ,

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{U} \quad (2.14)$$

$$P = p_{ir} + p \quad (2.15)$$

Όπου

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi, \quad \vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.16 \text{ a,b})$$

με  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Η ανάλυση αυτής της μορφής είναι δυνατή για ένα πεδίο ροής χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας [1]. Όταν η ροή χαρακτηρίζεται από αξονική συμμετρία το διανυσματικό δυναμικό είναι της μορφής :

$$\vec{A} = A(r, \theta) \vec{e}_\phi \quad (2.17)$$

όπου  $\vec{e}_\phi$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην αζιμουθιακή κατεύθυνση. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η μορφοποίηση της βαθμωτής ποσότητας,  $\Phi$ , και του διανυσματικού δυναμικού,  $A$ .

### 2.1.1 Αστρόβιλο Πεδίο Ροής

Εισάγοντας την εξίσωση (2.15) στην εξίσωση συνέχειας και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.16 a,b) παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \rightarrow \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.18)$$

Έτσι επαληθεύεται ότι το δυναμικό της βαθμωτής ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Σε μία προσπάθεια να πάρουμε πιο σύνθετα σχήματα φυσαλίδων για τα οποία η περιγραφή Euler θα ήταν πιο πολυσήμαντη, εφαρμόζουμε μορφοποίηση κατά Lagrange για την περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων που λαμβάνουν χώρα στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας. Καθώς τα αστρόβιλα πεδία της ταχύτητας και της πίεσης πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση Bernoulli, η τελευταία μπορεί να συνδυαστεί με την ισορροπία δυνάμεων απουσία ιξώδους σκέδασης,

$$2P_G - 2p_{ir} = 2H \quad (2.19)$$

Λαμβάνοντας τη δυναμική κατάσταση που περιγράφει την εξέλιξη του δυναμικού της ταχύτητας την επιφάνεια της φυσαλίδας έχουμε,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \frac{\Phi_\xi^2}{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2} \right] + 2P_{st} - 2P_G - 2H \quad (2.20)$$

Στην παραπάνω εξίσωση

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + |\vec{u}|^2, \quad (2.21)$$

όπου  $\xi$  είναι μια συντεταγμένη Lagrange όπου προσδιορίζει τα σωματίδια στη διεπιφάνεια και σχετίζεται με το μήκος τόξου,  $s$ , της διεπιφάνειας με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = (r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad (2.22)$$

όπου  $\xi$  ως δείκτης υποδηλώνει μερική διαφοροποίηση. Θα πρέπει να τονιστεί ότι στα πλαίσια της μορφοποίησης Lagrange, τα βαθμωτά και τα διανυσματικά δυναμικά της ταχύτητας,  $\Phi$  και  $A$ , καθώς και οι συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  των σωματιδίων Lagrange πάνω στη διεπιφάνεια θα είναι συναρτήσεις του  $\xi$ . Η μέση καμπυλότητα  $H$  δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$-2H = \frac{1}{r^2 \theta_\xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin \theta (2r^2 \theta_\xi^2 + r_\xi^2)}{(r^2 \theta_\xi^2 + r_\xi^2)^{1/2}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{r r_\xi \sin \theta}{(r^2 \theta_\xi^2 + r_\xi^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Λόγω της αξονοσυμμετρίας οι παράγωγοι ως προς  $\xi$  πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial n} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 0, \quad \text{at } \xi = 0,1 \quad (2.24)$$

που αντιστοιχούν στους δύο πόλους του συστήματος συντεταγμένων.

Σύμφωνα με τους Pelekasis&Tsamopoulos [2], αναδιατυπώνεται η εξίσωση Laplace σε μία ολοκληρωτική μορφή συμπεριλαμβάνοντας ποσότητες που εξελίσσονται στην διεπιφάνεια, και εισάγουμε την ολοκληρωτική συνοριακή αναπαράσταση της εξίσωσης Laplace:

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{r}, \hat{\theta}, t) + \int_0^1 [\Phi(r, \theta, t) - \Phi(\hat{r}, \hat{\theta}, t)] \frac{\partial G}{\partial n}(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2} d\xi = \\ \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, \theta, t) G(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)^{1/2} d\xi \end{aligned} \quad (2.25)$$

όπου οι συντεταγμένες με "καπελάκι",  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ , εξαρτώνται από το διάνυσμα θέσης  $\hat{\xi}$  και δεν υπόκεινται σε ολοκλήρωση. Η παραπάνω εξίσωση σχετίζει το δυναμικό της βαθμωτής ταχύτητας με την κάθετη παράγωγο στη διεπιφάνεια και μπορεί να αναπαραχθεί εφαρμόζοντας την τρίτη ταυτότητα του Green στην εξίσωση Laplace και αφήνοντας το διάνυσμα θέσης, όπου το δυναμικό υπολογίζεται, να πλησιάσει την διεπιφάνεια.  $G$  και  $\partial G / \partial n$  (πυρήνες) αποτελούν βασική λύση της εξίσωσης Laplace και των κάθετων παραγώγων αντίστοιχα. Η τελευταία έχει μια ιδιομορφία  $1/r$ , όπου το  $r$  δείχνει την απόσταση μεταξύ των



σημείων πηγής (source points) και των σημείων του πεδίου (field points) στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας. Η διαφορά μεταξύ των τιμών του δυναμικού στα σημεία του πεδίου και των σημείων πηγής εισάγονται στην εξίσωση (2.25) με σκοπό να ξεπεραστεί η ιδιομορφία [2]. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι τα ολοκληρώματα της εξίσωσης (2.25) είναι ολοκληρώματα κατά μήκος της στιγμιαίας καμπύλης που δημιουργείται εξαιτίας της αξονοσυμμετρικής διεπιφάνειας μεταξύ της φυσαλίδας και του περιβάλλοντος υγρού. Αυτό έχει ευεργετική επίδραση στην αποτελεσματικότητα των υπολογισμών.

### 2.1.2 Επιδράσεις Χαμηλού Ιξώδους ( $Oh \ll 1$ )

Όταν ο αδιάστατος αριθμός  $Oh$  είναι μικρός, το στροβιλό μέρος του πεδίου της ταχύτητας σχηματίζει ένα οριακό στρώμα κοντά στην επιφάνεια της φυσαλίδας, όπου η σκέδαση και η αδράνεια ισορροπούν, έτσι ώστε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη με μηδενικό ρυθμό διάτμησης. Για να το πετύχουμε αυτό, εισάγουμε ένα νέο ορθογωνικό σύστημα συντεταγμένων βασισμένο στο μήκος τόξου  $s$  και στην αζιμουθιακή γωνία  $\phi$ , όπως αυτά ορίζονται στη στιγμιαία θέση στην διεπιφάνεια και στην απόσταση,  $\eta$ , κατά μήκος της κάθετης διεύθυνσης σε ένα οποιοδήποτε σημείο στη διεπιφάνεια. Σε αυτό το τριπλό ορθογωνικό σύστημα συντεταγμένων αποτελούμενο από μία ομάδα επιφανειών με βάση το σχήμα της διεπιφάνειας γνωρίζουμε [4] ότι οι όροι πρώτης τάξης της κάθετης διεύθυνσης είναι  $h_n=1$  ενώ στις άλλες δύο κατευθύνσεις είναι  $h_t = 1 + O(n)$ ,  $h_\phi = r \sin \theta + O(n)$ , για ένα αξονοσυμμετρικό σχήμα. Κατά συνέπεια, εντός του οριακού στρώματος, όπου το  $\zeta$  είναι μικρό, οι όροι πρώτης τάξης είναι παντού ίδιοι με αυτούς που υπολογίζονται στη διεπιφάνεια. Για τον ίδιο λόγο, τα δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι εφαπτόμενα στην οικογένεια των επιφανειών παράλληλα στη διεπιφάνεια, και των οποίων η κατεύθυνση μεταβάλλεται κατά μήκος της καθέτου στη διεπιφάνεια, εντός του οριακού στρώματος θα είναι, περίπου, ταυτόσημα με εκείνα που ορίζονται στη διεπιφάνεια. Έτσι, ο τελεστής Laplace ορίζεται στο οριακό στρώμα ως εξής:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_s + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} + O(n) \approx \vec{t} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} \quad (\text{II.26})$$

όπου  $\vec{\nabla}_s$  είναι ο τελεστής επιφανείας που ορίζεται στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας,  $\vec{t}$  μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της παραγόμενης καμπύλης της αξονοσυμμετρικής διεπιφάνειας και  $r, \theta$ , είναι οι συντεταγμένες που καθορίζουν το στιγμιαίο

σχήμα της διεπιφάνειας. Η προσεγγιστική έκφραση για τον τελεστή Laplace έχει μεγαλύτερη ακρίβεια όταν εφαρμόζεται στη διεπιφάνεια.

Σύμφωνα με τους Lundgren & Mansour[5] εισάγουμε την ανάλυση του πεδίου της ταχύτητας σε επιμέρους όρους στην εφαπτομενική ισορροπία δυνάμεων για να εξάγουμε την παρακάτω σχέση:

$$\vec{t} \cdot \left[ \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right] \cdot \vec{n} = \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{t} = 0. \quad (2.27)$$

Λόγω της αστροβιλότητας της  $\vec{u}$  παίρνουμε:

$$\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{t} = -2\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}. \quad (2.28)$$

Με την εισαγωγή του τελεστή Laplace όπως ορίζεται στη εξίσωση (2.26) και με την κατάλληλη διαφοροποίηση των μοναδιαίων διανυσμάτων εξάγεται η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial U_t}{\partial n} + \frac{\partial U_n}{\partial s} + U_t L = -2 \left( \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_t L \right) = -2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} L \right), \quad (2.29)$$

όπου  $L$  είναι μία από τις θεμελιώδεις ποσότητες δευτέρου είδους [4] και  $t, n$ , ως δείκτες του  $U$  ή του  $u$  δηλώνουν την αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας. Και τα δύο πεδία ταχυτήτων ικανοποιούν τη συνέχεια η οποία, όταν γράφεται για το στροβιλό πεδίο ροής, παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial s} (U_t r \sin \theta) - U_n \left( L + \frac{N}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0 \quad (2.30)$$

όπου  $N$  είναι μία άλλη θεμελιώδης ποσότητα δευτέρου είδους. Όταν το  $n$  είναι μικρό μέσα στο οριακό στρώμα που σχηματίζεται από το στροβιλό πεδίο ταχύτητας, από την εξίσωση (2.30) συμπεραίνεται ότι  $U_t \gg U_n$ . Ως εκ τούτου, θέτοντας το  $n$  να είναι τάξης  $\delta$  μέσα στο οριακό στρώμα και θεωρώντας ότι η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (2.29) είναι μία τάξη μιας ποσότητας, η κάθετη παράγωγος της εφαπτομενικής συνιστώσας του στροβιλού πεδίου ταχύτητας γίνεται ο κυρίαρχος όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (2.29)

$$\frac{\partial U_t}{\partial n} = -2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} L \right), \quad U_t = O(\delta). \quad (2.31)$$

Τότε, από την συνέχεια εξάγουμε ότι  $U_n = O(\delta^2)$ .

Ο στόχος αυτής της προσέγγισης είναι να εξηγήσει την επίδραση του ιξώδους με την χρήση των ποσοτήτων που υπολογίζονται στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε την εξίσωση (2.14) στις εξισώσεις κίνησης και παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{DU_t}{Dt} - \vec{U} \cdot \frac{D\vec{t}}{Dt} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t} = -\frac{\partial p}{\partial s} + Oh \frac{\partial^2 U_t}{\partial n^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{DU_n}{Dt} - \vec{U} \cdot \frac{D\vec{n}}{Dt} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial p}{\partial n} + Oh \frac{\partial^2 U_n}{\partial n^2} \quad (2.33)$$

για τις εφαπτομενικές και κάθετες διευθύνσεις, αντίστοιχα, μετά την εξάλειψη του αστροβίλου μέρους των εξισώσεων και της εφαπτομενικής συνιστώσας του ιξώδους σκέδασης. Λαμβάνοντας υπόψιν το μικρό πάχος του οριακού στρώματος που περιβάλλει τη διεπιφάνεια, η τάξη της ποσότητας των διαφορετικών συνιστωσών της ταχύτητας και των παραγώγων που αγνοούνται κατά μήκος της εφαπτομενικής διεύθυνσης λαμβάνοντας να είναι πολύ μικρότερη από αυτή στην κάθετη διεύθυνση, παίρνουμε μία εκτίμηση του μεγέθους του οριακού στρώματος,  $\delta \sim Oh^{1/2}$ , και του στροβιλού μέρους της πίεσης,  $p \sim \delta^2$ , και οι εξισώσεις (2.32) και (2.33) γίνονται :

$$\frac{DU_t}{Dt} + U_t \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t} = Oh \frac{\partial^2 U_t}{\partial n^2} + O(\delta^2) \quad (2.34)$$

$$U_t \vec{t} \cdot \frac{D\vec{n}}{Dt} - U_t \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial n} + O(\delta^2). \quad (2.35)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.16b) οι συνιστώσες του  $\vec{U}$  μπορούν να διατυπωθούν με βάση το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$ ,

$$U_t = -\frac{\partial A}{\partial n}, \quad U_n = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial s} (r \sin \theta A), \quad (2.36)$$

καθιστώντας το A μια ποσότητα τάξης  $O(\delta^2)$ . Στην συνέχεια, αντικαθιστούμε τις παραπάνω εκφράσεις στις εξισώσεις κίνησης, (2.34) και (2.35), και ολοκληρώνουμε σε όλο το οριακό στρώμα, όπου το στροβιλό μέρος των πεδίων ταχύτητας και πίεσης εξαφανίζεται, για να πάρουμε τη διακύμανση του διανυσματικού δυναμικού με το χρόνο όπως και της πίεσης στην επιφάνεια της φυσαλίδας:

$$\frac{DA}{Dt} = A(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} - \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t}) - Oh \frac{\partial U_t}{\partial n} \quad (2.37)$$

$$p = A(\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}) \quad (2.38)$$

Τέλος, εισάγεται η αστρόβιλη κάθετη ισορροπία δυνάμεων στην εξίσωση (2.11) για να πάρουμε τη σωστή έκφραση της εξέλιξης του βαθμωτού δυναμικού της ταχύτητας συμπεριλαμβάνοντας μικρές επιδράσεις του ιξώδους:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{u^2}{2} + 2P_\infty - 2P_G + 2p - 2H - 2Oh(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}). \quad (2.39)$$

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτής της υποενότητας, η προσέγγιση αυτή εισήχθη πρώτη φορά από τους Lundgren & Mansour [5] και έχει χρησιμοποιηθεί από τότε από άλλους ερευνητές, κυρίως από τους Boulton-Stone & Blake [6].

Πριν συνοψίσουμε τις εξισώσεις τις οποίες λύνουμε για να περιγράψουμε την δυναμική συμπεριφορά της φυσαλίδας, θα πρέπει να τονιστεί ότι χρησιμοποιούμε μεταβλητές οι οποίες αξιολογούνται στην επιφάνεια και μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας τις εξισώσεις στην διεπιφάνεια που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Για παράδειγμα, η εφαπτομενική συνιστώσα του μέρους με στροβιλότητα του πεδίου ταχύτητας δίνεται μέσω της κάθετης παραγώγου του διανυσματικού δυναμικού και η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας μια διαφορική εξίσωση που ορίζεται αποκλειστικά πάνω στη διεπιφάνεια. Κατά συνέπεια, δεδομένου ότι η θέση μιας ελεύθερης επιφάνειας καθορίζεται καθαρά από την κάθετη της ταχύτητα, με την εφαπτομενική της συνιστώσα να χρησιμεύει μόνο ως προς τη σχετική θέση των σωματιδίων Lagrange πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, η κίνηση των σωματιδίων χαρακτηρίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{d\vec{r}_s}{dt} = \vec{u} + U_n \vec{n}. \quad (2.40)$$

Κατά συνέπεια, αντί των υλικών σημείων αναφερόμαστε σε σημεία τα οποία κινούνται σύμφωνα με την παραπάνω έκφραση χωρίς απώλεια στην ακρίβεια όσον αφορά το σχήμα της φυσαλίδας. Με την χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων, μέσω των οποίων περιγράφονται οι θέσεις των σωματιδίων, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(u_n + U_n)r\theta_s + u_t r_s}{\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{u_t r\theta_s - (u_n + U_n)r_s}{r\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}} \quad (2.41)$$

όπου ο δείκτης  $s$  δείχνει τη μερική διαφοροποίηση σε σχέση με το μήκος τόξου  $s$  της παραγόμενης καμπύλης της αξονοσυμμετρικής διεπιφάνειας και  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} + U_n \vec{n}) \cdot \vec{\nabla}$ .

Κατά τον ίδιο τρόπο και με σκοπό να κινούνται τα σωματίδια με έναν σταθερό τρόπο, οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη του βαθμωτού και του διανυσματικού δυναμικού γράφονται ως εξής:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{u^2}{2} + u_n U_n + 2P_\infty - 2P_G + 2A(\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}) - 2H - 2Oh(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}) \quad (2.42)$$

$$\frac{dA}{dt} = A(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} - \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t}) - Oh \frac{\partial U_t}{\partial n}. \quad (2.43)$$

Στην τελευταία εξίσωση, ο πρόσθετος όρος αγνοείται από την δεξιά πλευρά ως όρος μεγαλύτερης τάξης,  $O(\delta^3)$ . Συνολικά, οι εξισώσεις (2.41a,b), (2.42), (2.43), μαζί με την ολοκληρωτική εξίσωση (2.25), την εξίσωση (2.13) που ορίζει την μεταβολή της πίεσης μέσα στη φυσαλίδα, τις οριακές συνθήκες λόγω αξονοσυμμετρίας, την εξίσωση (2.24) με την πρόσθετη συνθήκη απαλοιφής του διανυσματικού δυναμικού στους πόλους  $A(0,t)=A(\pi,t)=0$ , και τις αρχικές συνθήκες (2.1), (2.6), και (2.7) δίνουν την πλήρη διατύπωση και μορφοποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς της φυσαλίδας. Όλες οι μεταβλητές που συμπεριλαμβάνονται, υπολογίζονται στη διεπιφάνεια, η οποία, από τη μεριά της αξονοσυμμετρίας καθιστά το πρόβλημα μονοδιάστατο. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις μεταβλητές του συστήματος συντεταγμένων που τοποθετείται στο σύνορο, δίνονται στο παράρτημα.

### 2.1.3 Μεταβολή Ενέργειας

Ξεκινώντας από την ταυτότητα:

$$\iiint_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla^2 \Phi dV = 0, \quad (2.44)$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{\nabla} \Phi)^2] dV = 0 \quad (2.45)$$

Αν εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό θεώρημα Reynolds στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_V [(\vec{\nabla} \Phi)^2] dV = \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \frac{1}{2} \iint_A (\vec{\nabla} \Phi)^2 (u_n + U_n) dA \quad (2.46)$$

Τελικά, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην αριστερή πλευρά του ολοκληρώματος και η εισαγωγή της δυναμικής εξίσωση της διεπιφάνειας (2.42) εξάγουν το ενεργειακό ισοζύγιο για τη δυναμική της φυσαλίδας σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{1}{2} \iint_A u^2 U_n dA + \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial n} (2H + 2P_G - 2P_{St}) dA = \\ \iint_A 2p \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{2}{Re} \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{\partial u_n}{\partial n} dA. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα στην αριστερή πλευρά υποδηλώνουν μεταβολές στην συνολική ενέργεια του συστήματος συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση του πεδίου ροής με στροβιλότητα. Το πρώτο ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά αντιπροσωπεύει την απώλεια ενέργειας λόγω του στροβιλώδους μέρους της πίεσης ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει την κλασσική σκέδαση λόγω της στροβιλότητας κοντά στην επιφάνεια μηδενικής διάτμησης.

Στο όριο καθώς ο αδιάστατος αριθμός  $Re=Oh^{-1}$  τείνει στο άπειρο, το ισοζύγιο ενέργειας για ιδανικές [2] ταλαντώσεις της φυσαλίδας ανακτάται

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \iint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \iint_A dA + V \left( P_G + \frac{2P_{St}}{\gamma - 1} \right) \right] = 0 \quad (2.48)$$

## 2.1.4 Ευστάθεια Σχήματος Σφαιροσυμμετρικών Ταλαντώσεων

Ως μέσο για να αναλύσει κανείς και να διασταυρώσει τα αριθμητικά αποτελέσματα για σχετικά μικρές αρχικές επιμηκύνσεις χρησιμοποιείται η εξίσωση που περιγράφει τις αστάθειες [18] του σχήματος για μία φυσαλίδα που ταλαντώνεται:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n + \left[ 3 \frac{\dot{R}}{R} + 2 \frac{Oh}{R^2} (n+2)(2n+1) \right] \dot{a}_n + \\ + (n-1) \left[ -\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{(n+1)(n+2)}{R^2} + 2 \frac{Oh \dot{R}}{R^3} (n+2) \right] a_n = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

όπου  $n$  δηλώνει τον Legendre mode που είναι υπό διερεύνηση και  $R(t)$  είναι η χρονική διακύμανση της αδιάστατης ακτίνας της φυσαλίδας, η οποία προβλέπεται από την εξίσωση Rayleigh-Plesset (RP) για μία αρχική διαταραχή της μορφής στην εξίσωση (2.1) :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = 2P_L - 2P_{St} = \left( 2P_G - 4Oh \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2}{R} \right) - 2P_{St} = 2(P_{St} + 1)(1 + \varepsilon_B)R^{-3\gamma} - 4Oh \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2}{R} - 2P_{St} \quad (2.50)$$

Το υγρό αντιμετωπίζεται σαν ασυμπίεστο ρευστό και ο αέρας μέσα στη φυσαλίδα ως ιδανικό αέριο με πολυτροπική σταθερά  $\gamma$ . Η παραπάνω προσέγγιση είναι κατάλληλη εφόσον η αρχική επιμήκυνση δεν είναι πολύ μεγάλη και η διάρκεια του φαινομένου που ερευνάται είναι πολύ μικρή και κατά συνέπεια το πάχος του οριακού στρώματος μπορεί να προσεγγισθεί ως  $\delta' \sim \sqrt{\nu t'}$ . Η εξίσωση (2.49) έχει ισχύ εφόσον  $\delta' \ll R_0$  ή ισοδύναμα,  $t \ll Oh^{-1}$ . Η τελευταία σχέση ισχύει στην παρούσα μελέτη, όμως η υπόθεση της μικρής αρχικής επιμήκυνσης ισχύει μόνο για το τελικό κομμάτι της κατάρρευσης αφότου η φυσαλίδα επιτύχει τον μέγιστο όγκο. . Μάλιστα οι προβλέψεις της ανάλυσης ευστάθειας με βάση τις (2.49) και (2.50) χρησιμοποιούνται για την ερμηνεία των δύο διαφορετικών τρόπων κατάρρευσης που παρατηρούνται στα πειράματα.

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> Αριθμητική Επίλυση

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης που παρουσιάστηκε στο τέλος της υποενότητας (2.1.2) επιτυγχάνεται με τρόπο παρόμοιο με εκείνο των Pelekasis & Tsamopoulos [2] για τη περίπτωση των δύο φυσαλίδων που αλληλεπιδρούν. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιήθηκε στο Eulerian πλαίσιο αναφοράς, με σκοπό να δημιουργήσει μια σύνδεση μεταξύ του βαθμωτού δυναμικού και της κάθετης παραγώγου στη διεπιφάνεια, ενώ η μέθοδος Lagrange υιοθετήθηκε για την περιγραφή της κίνησης των σημείων της επιφάνειας προκειμένου να αποτυπωθεί η εξέλιξη στο χρόνο των βαθμωτών και διανυσματικών δυναμικών. Για το λόγο αυτό, απαιτείται η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς το χρόνο και μόνο μία χωρική διάσταση, ως αποτέλεσμα της αξονοσυμμετρίας και της ολοκληρωτικής μορφοποίησης του ορίου. Για το σκοπό αυτό, η αζιμουθιακή εξάρτηση έχει ενσωματωθεί από την Εξ. (2.25), αφήνοντας έτσι μία ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους για την κάθετη παράγωγο του βαθμωτού δυναμικού, δεδομένου του δυναμικού, που ορίζεται κατά μήκος της καμπύλης που δημιουργείται στην επιφάνεια της φυσαλίδας. Από τις πρώτες μελέτες στη μοντελοποίηση της σπηλαιώσης φυσαλίδων [19] δίπλα σε μία σταθερή ή ελεύθερη επιφάνεια, η μέθοδος συνοριακών στοιχείων έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί για τις ταλαντώσεις φυσαλίδων, κατάρρευσης ή θραύσης [7],[8].

Για άρθρα σχετικά με την συνοριακή ολοκληρωτική μέθοδο για προβλήματα δυναμική ροής και συγκριτικές μελέτες για την αποτελεσματικότητα διαφόρων ολοκληρωτικών μορφοποιήσεων του ορίου, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις αναφορές [9],[10].

### 3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων/Galerkin χρησιμοποιείται για την μετατροπή των κινηματικών και δυναμικών οριακών συνθηκών από μερικές διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις αρχικών τιμών. Προς το σκοπό αυτό, οι αντίστοιχες άγνωστες μεταβλητές  $(r, \theta, \Phi, A)$  αντιπροσωπεύονται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα αγνώστων συντελεστών και πολλαπλασιάζονται από ένα σύνολο προκαθορισμένων συναρτήσεων βάσης και οι οποίες είναι μη μηδενικές πάνω από μερικά στοιχεία του χωρίου. Η ασθενής μορφή προκύπτει κατά τον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων (2.41 a,b),(2.42),(2.43) από κάθε συνάρτηση βάσης και



ολοκληρώνεται σε όλο το σύνολο. Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες εφαρμόζεται επίσης όποτε είναι δυνατόν με σκοπό να απαλειφθεί η δεύτερη παράγωγος, που εμφανίζεται στον όρο της καμπυλότητας στην επιφάνεια. Τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης Gauss χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων πάνω από κάθε στοιχείο. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι τα αριθμητικά σφάλματα προέρχονται από την παρεμβολή των άγνωστων συναρτήσεων και όχι από την αριθμητική ολοκλήρωση. [11].

Σαν συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιήθηκαν οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε τέσσερα στοιχεία και οι οποίες σε κάθε στοιχείο ικανοποιούν τη συνέχεια όχι μόνο οι ίδιες, αλλά και η πρώτη και δεύτερη παράγωγός τους [12]. Εφόσον για τις συναρτήσεις βάσεις ισχύει ότι  $B_i(\xi = \xi_j) \neq \delta_{ij}$ , οι συντελεστές των αγνώστων  $a_i, b_i, c_i, d_i$  της αναπαράστασης B-splines

$$\begin{aligned} r(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} a_i(t) B_i(\xi), \\ \theta(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} b_i(t) B_i(\xi), \\ \Phi(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} c_i(t) B_i(\xi), \\ A(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} d_i(t) B_i(\xi), \end{aligned} \tag{3.1}$$

είναι διαφορετικές από τις τιμές των αγνώστων συναρτήσεων στους κόμβους. Κατά συνέπεια, αυτός ο τρόπος αναπαράστασης απαιτεί ένα πρόσθετο πολλαπλασιασμό πινάκων προκειμένου να πάρουμε τις τιμές στους κόμβους των συναρτήσεων. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε φανταστικούς κόμβους εκτός των χωρίου, δηλαδή,  $a_0, a_{N+1}, b_0, b_{N+1}, c_0, c_{N+1}, d_0, d_{N+1}$  εκφράζονται σε όρους συντελεστών των εσωτερικών κόμβων χρησιμοποιώντας οριακές συνθήκες. Τέλος, επειδή οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines καλύπτουν τέσσερα στοιχεία θα δημιουργηθεί πίνακας ζώνης με εύρος ζώνης επτά, ο οποίος απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς για την αντιστροφή του σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange (εύρος ζώνης 5). Το μειονέκτημα αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της ακρίβειας, σε σχέση με του δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange, η οποία είναι στην περίπτωση των πρώτων  $O(h^4)$  για την παρεμβολή της άγνωστης συνάρτησης και  $O(h^3)$  για την παρεμβολή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης, όπου  $h$  το μήκος του στοιχείου.

## 3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.25) διακριτοποιείται με τον ίδιο τρόπο με αυτόν των διαφορικών εξισώσεων που αναλύθηκε προηγουμένως και η αντίστοιχη άγνωστη είναι :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} g_i(t) \cdot B_i(\xi) \quad (3.2)$$

Αφήνοντας το διάνυσμα θέσης να προσεγγίσει καθένα από τα σημεία των κόμβων και ολοκληρώνοντας όλα τα σημεία που σχετίζονται με το σημείο πηγής  $\xi$ , παίρνουμε ως αποτέλεσμα  $N$  εξισώσεις. Οι αξονοσυμμετρικοί πυρήνες  $G$  και δίνονται σε σφαιρικές συντεταγμένες :

$$G = \frac{K(m)}{\pi \sqrt{a+b}} \quad (3.3)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} = n_r \frac{\partial G}{\partial r} + n_\theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{r(\xi)} = \frac{1}{2r\pi\sqrt{a+b}} \left[ \frac{r^2(\hat{\xi}) - r^2(\xi)}{a-b} E(m) - K(m) \right] n_r + \\ \frac{r(\hat{\xi})}{\pi\sqrt{a+b}} \left[ \frac{4 \cos[\theta(\xi)] \sin[\theta(\hat{\xi})]}{a+b} \frac{dK}{dm} - \frac{\sin[\theta(\xi) + \theta(\hat{\xi})]}{a-b} E(m) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

Όπου

$$\begin{aligned} a &= r^2(\xi) + r^2(\hat{\xi}) - 2r(\xi)r(\hat{\xi})\cos[\theta(\xi)]\cos[\theta(\hat{\xi})] \\ b &= 2r(\xi)r(\hat{\xi})\sin[\theta(\xi)]\sin[\theta(\hat{\xi})] \\ m &= \frac{2b}{a+b} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$K(m)$  και  $E(m)$  είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα. Αυτά τα ολοκληρώματα προσεγγίζονται με σφάλμα μικρότερο από  $2 \times 10^{-8}$  από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}
K(m) &= \sum_{i=0}^4 A_i m_i^i + \ln \left( \frac{1}{m_l} \right) \sum_{i=1}^4 C_i m_i^i \\
E(m) &= 1 + \sum_{i=1}^4 D_i m_i^i + \ln \left( \frac{1}{m_l} \right) \sum_{i=1}^4 E_i m_i^i
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Όπου  $m_l = 1 - m$  και  $A_i, C_i, D_i, E_i$  είναι δεδομένες σταθερές [13]. Όταν το διάνυσμα θέσης  $\hat{\xi}$  του πεδίου συμπίπτει με ένα από τα σημεία πηγής  $\xi$ , ο πυρήνας  $G$  παρουσιάζει μία λογαριθμική ιδιομορφία της μορφής  $\ln \left( \frac{1}{a-b} \right) = \ln \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2} \right)$ , ενώ ο πυρήνας  $\partial G / \partial n$  παρουσιάζει μία ισχυρότερη ιδιομορφία της μορφής  $|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^{-1}$ . Ο τελευταίος όρος ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας μία λογαριθμική ολοκλήρωση δώδεκα σημείων [11]. Ο τελευταίος όρος γίνεται ομαλός με την διαδικασία που αναλύθηκε στην προηγούμενη υποενότητα. Οι υπόλοιποι ομαλοί όροι ολοκληρώνονται εφαρμόζοντας κανονική ολοκλήρωση Gauss με διάφορους αριθμούς σημείων Gauss όπως προτείνεται [14]. Για επιπρόσθετες λεπτομέρειες, μπορεί κάποιος να ανατρέξει στους Pelekasis et al [3].

Παρά το γεγονός, ότι έχουν αναπτυχθεί αξιόπιστες μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes, η μέθοδος συνοριακών στοιχείων είναι ακόμα ευρέως εφαρμόσιμη λόγω της υπεροχής στην λεπτομερέστερη περιγραφή σοβαρών παραμορφωμένων διεπιφανειών, με μεγάλη ακρίβεια και ελάχιστη υπολογιστική προσπάθεια. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων στην περίπτωση ασθενούς ιξώδους, όπως αυτή που εφαρμόζεται εδώ, επεκτείνει την ισχύ της δυναμικής θεωρίας στο βαθμό που τα μεγάλα πάχη μετατόπισης του οριακού στρώματος δεν υφίστανται. Αυτή θα είναι η περίπτωση, για παράδειγμα, σε καταστάσεις με διαχωρισμό μαζικής ροής όπου η δομή παίζει κεντρικό ρόλο στη δυναμική και σε αυτή την περίπτωση η χρήση των Navier-Stokes εξισώσεων είναι απαραίτητη. Στην παρούσα μελέτη η εμφάνιση jet του ρευστού που κινείται κατά μήκος της διεύθυνσης της επιμήκυνσης μπορεί να συνεπάγεται τέτοια φαινόμενα, αλλά καταλαμβάνουν πολύ λεπτές περιοχές και εξελίσσεται πολύ απότομα για οποιαδήποτε σημαντική επίδραση του πάχους μετατόπισης για να αλλάξει την δυναμική συμπεριφορά που προκύπτει από την αριθμητική λύση.

### 3.3 Ολοκλήρωση στο Χρόνο

Το ρητό σχήμα τέταρτης τάξης Runge-Kutta ολοκλήρωσης του χρόνου εφαρμόζεται λόγω των καλύτερων χαρακτηριστικών ευστάθειας [3]. Στην πραγματικότητα, παρατηρήθηκε ότι, για μικρές αρχικές παραμορφώσεις, διπλασιάζοντας τον αριθμό των στοιχείων κατά μήκος της διεπιφάνειας, απαιτείται, ένα χρονικό βήμα περίπου τέσσερις φορές μικρότερο για αριθμητική ευστάθεια. Η επίλυση των αγνώστων του προβλήματος γίνεται διαδοχικά. Όταν η πλήρης κατάσταση της φουσαλίδας είναι γνωστή, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή τα σημεία της επιφάνειας κινούνται με τον τρόπο που περιγράφουν οι εξισώσεις (2.14 a,b) και λαμβάνονται οι νέες συντεταγμένες τους. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι νέες τιμές των δύο δυναμικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική συνοριακή εξίσωση (2.25), παίρνουμε την κάθετη παράγωγο του βαθμωτού δυναμικού. Τελικά ο όγκος της φουσαλίδας υπολογίζεται, η εσωτερική πίεση μεταβάλλεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι είτε να υποστεί θραύση είτε να επιστρέψει στο αρχικό σχήμα ισορροπίας. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η δυναμική της κατάρρευσης ή της θραύσης. Όπως εξηγείται και παρακάτω, ο επανακαθορισμός του πλέγματος γίνεται καθώς ο χρόνος περνάει με σκοπό να αποφύγουμε τη συγκέντρωση σημείων σε συγκεκριμένες περιοχές της διεπιφάνειας αφήνοντας έτσι το υπόλοιπο τμήμα της διεπιφάνειας χωρίς σημεία. Κατά συνέπεια, το χρονικό βήμα προσαρμόζεται έτσι ώστε να υπάρχει αριθμητική ευστάθεια.

Λόγω της αρχικής επιμήκυνσης και της επακόλουθης παραμόρφωσης της επιφάνειας, τα σημεία κατανέμονται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στο μήκος του στοιχείου ενώ εξασφαλίζουν ακριβή διακριτοποίηση σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτό επιτυγχάνεται με τοποθέτηση των σημείων κατά μήκος της διεπιφάνειας έτσι ώστε το παρακάτω ολοκλήρωμα [15] να ελαχιστοποιείται:

$$\int_0^1 (1 + d|-2H|)(r_\xi^2 + r^2\theta_\xi^2) d\xi \quad (3.7)$$

όπου  $d$  είναι η παράμετρος ελέγχου της συγκέντρωσης των πλεγματικών σημείων σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτή η παράμετρος κυμαίνεται από  $10^{-2}$  έως  $10^{-3}$  καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει από 80 έως 160. Η μείωση του  $d$  ισοδυναμεί με μείωση της επίδρασης της καμπυλότητας καθώς επανακαθορίζεται το πλέγμα. Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας το χρονικό βήμα θα πρέπει να αναπροσαρμόζεται προκειμένου να διατηρείται η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος και να επιλύει σωστά τα τριχοειδή κύματα (φυσικές αστάθειες

Rayleigh-Taylor) που προκύπτουν σαν αποτέλεσμα της δυναμικής παραμόρφωσης της φυσαλίδας.

Αρχικά, η δυναμική χαρακτηρίζεται από περιοχές με υψηλή καμπυλότητα γύρω από τους δύο πόλους όπου η αδιάστατη ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρότερη. Το ισοζύγιο της δυναμικής πίεσης με τις επιφανειακές τάσεις μας δίνουν την κατάλληλη χρονική κλίμακα σ' αυτή την περιοχή όπου ισχύει:

$$\tau = \left( \frac{\rho R_0^3}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

όπου  $R_0$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας στα δύο άκρα της φυσαλίδας που έχουν επιμηκυνθεί. Κατά συνέπεια, προκειμένου να αποτυπώσουμε τη δυναμική στα πρώιμα στάδια της κίνησης καθώς η παράμετρος  $S$  μειώνεται, εφόσον η ελάχιστη απόσταση του στοιχείου  $\Delta s_{\min}$  μειώνεται με τον επανακαθορισμό του πλέγματος, η χρονική κλίμακα θα πρέπει επίσης να μειωθεί κατά τα  $3/2$  του νόμου,  $\Delta t \sim (\Delta s_{\min})^{3/2}$ . Αυτός ο νόμος προκύπτει [17] και στα πλαίσια της δυναμικής των σταγόνων λόγω επιφανειακής τάσης. Στην παρούσα μελέτη λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της επιμήκυνσης. Στην πράξη, προκειμένου να διατηρηθούν οι απαιτήσεις ευστάθειας της ολοκλήρωσης Runge-Kutta του χρόνου, να ακολουθεί τον τετραγωνικό νόμο  $\Delta t \sim \Delta s_{\min}^2$ , και να λαμβάνει υπόψη τη μείωση της ακτίνας καμπυλότητας καθώς η παράμετρος  $S$  μειώνεται στις προσημειώσεις που θα παρουσιάζονται, στο εξής το χρονικό βήμα ορίζεται σε  $\Delta t = \Delta s_{\min}^2 S$ . Αυτή η σχέση είναι η πιο κατάλληλη στο ξεκίνημα της κίνησης της φυσαλίδας. Μόλις αρχίζει η προσομοίωση για δεδομένη τιμή του  $S$  το χρονικό βήμα προσαρμόζεται σύμφωνα με τον παρακάτω νόμο:

$$\frac{\Delta t^{\text{new}}}{\Delta t^{\text{old}}} = \left( \frac{\Delta s_{\min}^{\text{new}}}{\Delta s_{\min}^{\text{old}}} \right)^a \frac{H_{\min}^{\text{new}}}{H_{\min}^{\text{old}}} \quad (3.9)$$

όπου  $H_{\min}$  είναι η ελάχιστη μέση ακτίνα καμπυλότητας στην επιφάνεια της φυσαλίδας και  $\alpha$  μία ρυθμιστική παράμετρος που αρχικός ισούται με τη μονάδα. Καθώς ο χρόνος εξελίσσεται, το χρονικό βήμα θα πρέπει να μειωθεί περεταίρω λόγω της εμφάνισης δύο Jets υψηλής ταχύτητας όπου πλησιάζει το ένα το άλλο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, ως εκ τούτου η παράμετρος  $\alpha$  πρέπει να αυξηθεί αναλόγως. Οι περιοχές κατάρρευσης με πολύ μικρή ακτίνα καμπυλότητας εμφανίζονται με τη μορφή αναδιπλούμενης φυσαλίδας που τελικά αγγίζει το

επίπεδο του ισημερινού. Ακριβής ανάλυση τέτοιων περιοχών απαιτεί περεταίρω αναδιαμόρφωση του πλέγματος και προσαρμογή του χρονικού βήματος, η οποία επιτυγχάνεται με περεταίρω αύξηση του  $\alpha$  και η οποία πρέπει να είναι περίπου 3 ή 4. Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή της προσομοίωσης το χρονικό βήμα ήταν της τάξης  $10^{-5}$  ενώ κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης πρέπει να μειωθεί στο  $10^{-8}$ .

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι, για τους υπολογισμούς με πεπερασμένο αδιάστατο αριθμό  $Oh^{-1}$  χρησιμοποιούνται σημεία αναφοράς κατά την εξέλιξη του σχήματος της επιφάνειας αντί σωματιδίων Lagrange. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα της αδυναμίας μας να υπολογίσουμε την εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου της ταχύτητας με στροβιλότητα αποκλειστικά βασισμένοι στα μεγέθη που ορίζονται στο σύνορο. Ωστόσο, αυτό δεν περιορίζει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μας εφόσον το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί πάντοτε να υπολογίζεται από την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας των σωματιδίων πάνω στην επιφάνεια. Η εφαπτομενική συνιστώσα λειτουργεί σαν μία συνάρτηση που συνδέει τα σημεία μεταξύ της προηγούμενης και της τρέχουσας θέσης στην διεπιφάνεια. Αυτό είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα που έχει γνωστοποιηθεί από προηγούμενους ερευνητές [16] με σκοπό να βελτιστοποιηθεί η κατανομή των σημείων του πλέγματος στην επιφάνεια και να αποφευχθεί η παραμόρφωση του πλέγματος. Στην παρούσα μελέτη το δυναμικό μέρος της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας των σωματιδίων της επιφάνειας δίνει πληροφορία για την νέα θέση της διεπιφάνειας μαζί με την κάθετη συνιστώσα του δυναμικού και στροβιλώδους μέρους χωρίς κανένα πρόβλημα στην αριθμητική ακρίβεια.

Ο αριθμητικός υπολογισμός της αζιμουθιακής συνιστώσας του διανυσματικού δυναμικού περιλαμβάνει παρεμβολή δεύτερης τάξης παραγώγων του βαθμωτού δυναμικού κατά τρόπο όπου δεν γίνεται μείωση της τάξης μέσω ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Ως εκ τούτου, καθώς προχωράει η προσομοίωση, μικρά κύματα αστάθειας τείνουν να εμφανίζονται των οποίων το μήκος κύματος είναι τάξης της ελάχιστης απόστασης του στοιχείου. Τέτοια μικρά κύματα αστάθειας συχνά εμφανίζονται σε υπολογισμούς [5],[3] με μεγάλο αδιάστατο αριθμό  $Oh^{-1}$  και δεν μπορεί να εξαλειφθεί με πύκνωση του πλέγματος μόνο. Η τυπική διαδικασία για να παρακαμφτεί αυτό το πρόβλημα είναι να εφαρμοστεί φιλτράρισμα των μεγάλων κυματαριθμών (αριθμητική αστάθεια) με έλεγχο της ενέργειας του συστήματος έτσι ώστε να σκεδάζεται καταλλήλως. Στους υπολογισμούς όπου δεν υπάρχει ιξώδες δεν

εμφανίζονται τέτοιες αστάθειες επομένως το φιλτράρισμα αποφεύγεται. Παρόλα αυτά, σε όλες τις προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στη συνέχεια όπου το  $Oh^{-1}$  θεωρείται μεγάλο αλλά πεπερασμένο, μετά από έναν ορισμένο αριθμό χρονικών βημάτων το διανυσματικό δυναμικό φιλτράρεται εισάγοντας την παράγωγο τέταρτης τάξης ως προς  $\xi$ :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^4 A}{\partial \xi^4}. \quad (3.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση διακριτοποιείται με δεύτερης τάξης ακρίβεια πλήρως ρητού σχήματος

$$A'_j = A_j + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta \xi^4} (A'_{j+2} - 4A'_{j+1} + 6A'_j - 4A'_{j-1} + A'_{j-2}), \quad (3.11)$$

όπου βελτιώνονται τα χαρακτηριστικά ευστάθειας. Ο λόγος θεωρείται μία μεγάλη τιμή, τυπικά μεταξύ 100 και 1000, για λόγους ευστάθειας. Όπως θα φανεί στις αριθμητικές δοκιμές που παρουσιάζονται, η παρούσα μεθοδολογία επιτρέπει την ακριβή και αποτελεσματική αξιολόγηση του μέρους της ροής με στροβιλότητα, η οποία είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση επιδράσεων με χαμηλό ιξώδες.

Μία άλλη σημαντική πτυχή της αριθμητικής μεθοδολογίας που εφαρμόζεται έχει να κάνει με τη χρήση της συμμετρίας σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο με σκοπό να μειωθούν οι απαιτήσεις αποθήκευσης των αποτελεσμάτων και του χρόνου επεξεργασίας για δεδομένο επίπεδο ακρίβειας. Καθώς το σχήμα της φυσαλίδας αναμένεται να παραμείνει συμμετρικό κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, το χωρίο της διακριτοποίησης μπορεί να μειωθεί στο μισό έτσι ώστε να περιλαμβάνει μόνο ένα από τα δύο ημισφαίρια, για παράδειγμα το βορρά. Κατά συνέπεια, και από τη μεριά της αξονοσυμμετρίας, μόνο το ήμισυ της καμπύλης που δημιουργείται και συνδέει το βόρειο με το νότιο πόλο χρειάζεται να διακριτοποιηθεί και το μέγεθος του πίνακα που πρέπει να δημιουργηθεί και να αντιστραφεί για τον υπολογισμό της κάθετης παραγώγου του βαθμωτού δυναμικού, γίνεται τέσσερις φορές μικρότερο το οποίο αποτελεί μία σημαντική μείωση του υπολογιστικού φορτίου. Για το σκοπό αυτό, οι ίδιες οριακές συνθήκες συμμετρίας που είχαν αρχικά επιβληθεί στο νότιο πόλο, εξίσωση (2.24), εφαρμόζονται και στον ισημερινό όπου η συντεταγμένη  $\xi'$  θεωρείται μονάδα στη νέα μορφοποίηση. Επιπλέον, η ολοκληρωτική εξίσωση (2.25) αναδιατάσσεται με σκοπό να συμπεριλάβει τη συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, ο πυρήνας  $G$  (single layer kernel) είναι συμμετρικός όταν το σχήμα της διεπιφάνειας είναι συμμετρικό σε σχέση με τον ισημερινό και συνεπώς το ολοκλήρωμα που περιέχει τον πυρήνα  $G$  στην εξίσωση (2.25) γίνεται:

$$\int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, \theta, t) G(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_{\xi}^2 + r^2 \theta_{\xi}^2)^{1/2} d\xi =$$

$$2 \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, \theta, t) G(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_{\xi'}^2 + r^2 \theta_{\xi'}^2)^{1/2} d\xi' \quad (3.12)$$

όπου  $r, \theta, \hat{r}, \hat{\theta}$ , ορίζονται κατά μήκος της γραμμής που συνδέει το βόρειο πόλο με τον ισημερινό. Ο διπλός πυρήνας από την άλλη πλευρά δεν είναι συμμετρικό και ως εκ τούτου το ολοκλήρωμα που συμπεριλαμβάνει την παράγωγο γίνεται:

$$\int_0^1 \left[ \Phi(r, \theta, t) - \Phi(\hat{r}, \hat{\theta}, t) \right] \frac{\partial G}{\partial n}(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_{\xi}^2 + r^2 \theta_{\xi}^2)^{1/2} d\xi =$$

$$\int_0^1 \left[ \Phi(r, \theta, t) - \Phi(\hat{r}, \hat{\theta}, t) \right] \frac{\partial G}{\partial n}(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \theta) r \sin \theta (r_{\xi'}^2 + r^2 \theta_{\xi'}^2)^{1/2} d\xi' -$$

$$\int_0^1 \left[ \Phi(r, \omega, t) - \Phi(\hat{r}, \hat{\theta}, t) \right] \frac{\partial G}{\partial n}(\hat{r}, \hat{\theta}, r, \omega + \pi/2) r \sin \omega (r_{\xi''}^2 + r^2 \omega_{\xi''}^2)^{1/2} d\xi', \quad (3.13)$$

όπου

$$\omega = \theta - \pi/2 \leq \pi/2, \quad \Phi(r, \omega, t) = \Phi(r, \omega + \pi/2, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, \omega, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, \omega + \pi/2, t). \quad (3.14)$$

Καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει την κατασκευή του πίνακα, ο οποίος είναι γεμάτος όπως είναι συνήθως η περίπτωση με τη ολοκληρωτική συνοριακή μεθοδολογία, γίνεται το πιο χρονοβόρο κομμάτι των υπολογισμών καταλαμβάνοντας περισσότερο από το 80% του χρόνου επεξεργασίας [2], [3]. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τον υπολογιστικό χρόνο καταφεύγουμε σε παράλληλες στρατηγικές. Ειδικότερα ο πίνακας του συστήματος κατασκευάζεται με παραλληλισμό σε τέσσερις διαφορετικούς επεξεργαστές που απασχολούνται στην κατασκευή διαφορετικών γραμμών του πίνακα. Ο αλγόριθμος εκτελείται σε cluster σε περιβάλλον Linux με 4 Xeon επεξεργαστές γεγονός που συνεπάγεται σημαντική εξοικονόμηση του υπολογιστικού χρόνου επεξεργασίας.

### 3.4 Αριθμητική Μεθοδολογία

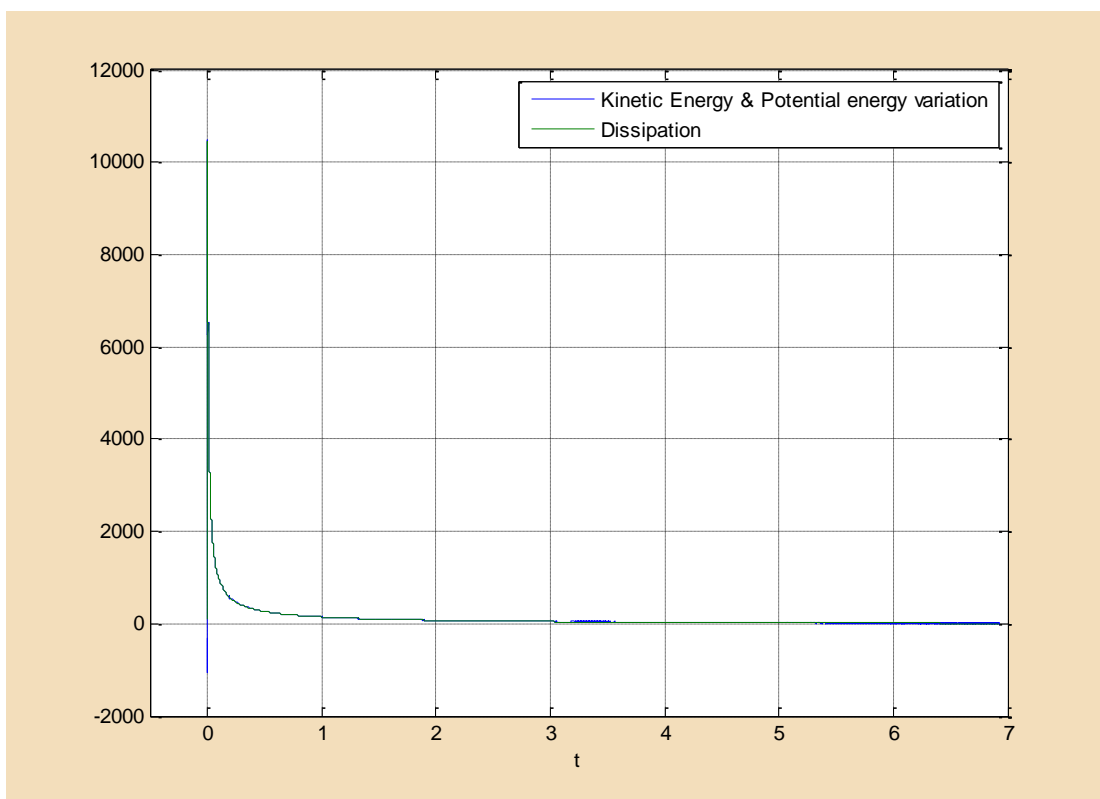
Η αριθμητική μεθοδολογία που εφαρμόζεται για να περιγράψουμε με λεπτομέρεια την δυναμική της φουσαλίδας αναλύθηκε με λεπτομέρεια στις προηγούμενες υποενότητες. Οι κινηματικές και δυναμικές συνθήκες, εξισώσεις (3.2) και (3.3), μαζί με την εξίσωση που



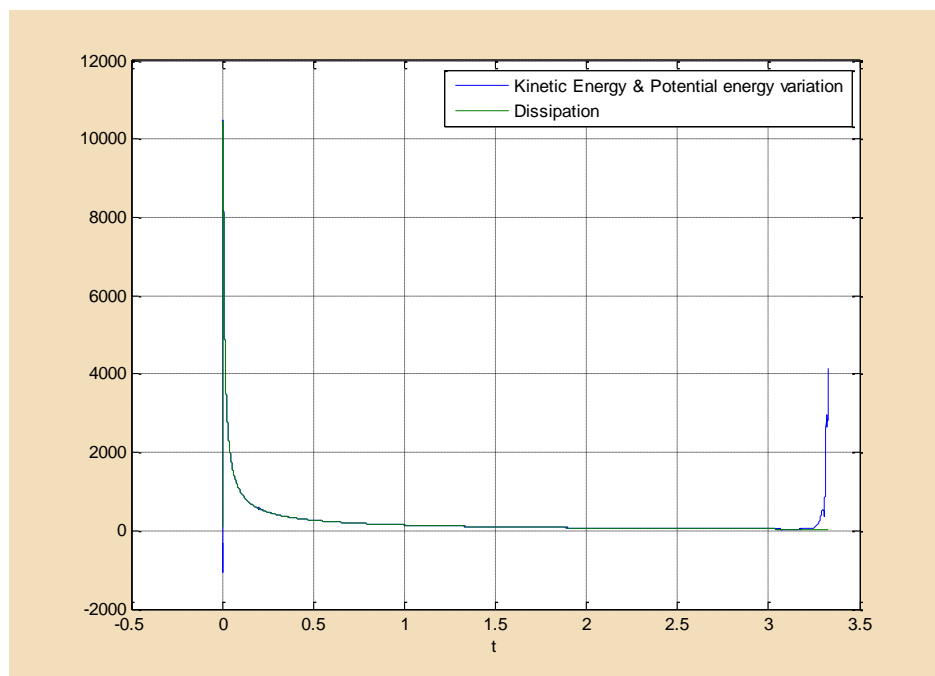
περιγράφει την εξέλιξη του διανυσματικού δυναμικού, (3.5), διακριτοποιούνται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και ολοκληρώνεται στο χρόνο με την μέθοδο Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης ακρίβεια. Σε κάθε χρονικό βήμα στη λύση του διανυσματικού δυναμικού εφαρμόζεται φιλτράρισμα με στόχο να εξαλειφθεί η αριθμητική αστάθεια. Η κάθετη συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού της ταχύτητας υπολογίζεται εφαρμόζοντας την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων στην ολοκληρωτική εξίσωση (3.4). Για να συμπεριληφθούν οι μεγάλες αρχικές επιμηκύνσεις και υπερπιέσεις της φυσαλίδας, καθώς και οι μεγάλες παραμορφώσεις που προκύπτουν και οι ταχύτητες των jet χρησιμοποιείται η συμμετρία, όταν η γεωμετρία της φυσαλίδας το επιτρέπει, μαζί με την παράλληλη κατασκευή του πίνακα που προκύπτει ως μέρος της ολοκληρωτικής συνοριακής μεθοδολογίας. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούνται 100 έως 200 στοιχεία κατά το ήμισυ της καμπύλης της διεπιφάνειας που δημιουργείται,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , για μέτριες αρχικές επιμηκύνσεις,  $S \geq 0.7$ , ενώ 300 έως 600 στοιχεία χρησιμοποιούνται στο ίδιο τμήμα του διαστήματος  $\theta$ , όταν η αρχική επιμήκυνση γίνεται πολύ μεγάλη,  $S \leq 0.6$ . Τελικά, τα σημεία αναδιανέμονται σε κάθε χρονικό βήμα προκειμένου να ξανά επιλυθούν σωστά περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Στη συνέχεια, προκειμένου να αποφευχθεί η ασταθής εξέλιξη των σημείων, το χρονικό βήμα προσαρμόζεται σύμφωνα με το κανόνα  $\Delta t \sim \Delta s_{\min}^{5/2}$  για περιπτώσεις με μεγάλες ταλαντώσεις και σχεδόν σφαιροσυμμετρική κατάρρευση της φυσαλίδας. Η τελευταία κλίμακα τίθεται στο πλαίσιο της εξίσωσης Rayleigh-Plesset όταν υπολογίζεται η ταχύτητα της σφαιρικής φυσαλίδας κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης,  $\dot{R} \sim R^{-3/2}$ , όπου καθώς το  $R$  γίνεται μικρό τότε έχουμε . Η τελευταία κλίμακα αντικατοπτρίζει την κυρίαρχη ισορροπία μεταξύ της αδράνειας και της πτώσης πίεσης μεταξύ του πεδίου και του εσωτερικού της φυσαλίδας. Όταν η αρχική επιμήκυνση είναι αντίστοιχα μεγάλη και η φυσαλίδα καταρρέει ασύμμετρα ο κανόνας  $\Delta t \sim \Delta s_{\min}^{3/2}$  εφαρμόζεται όπως προτείνεται από νόμο της “παγκοσμιότητας” που διέπει τις περισσότερες φάσεις κατάρρευσης τέτοιων φυσαλίδων [41], όπως ήδη συζητήθηκε στην ενότητα 3.

### 3. 5 Αξιοπιστία Αριθμητικού Σχήματος

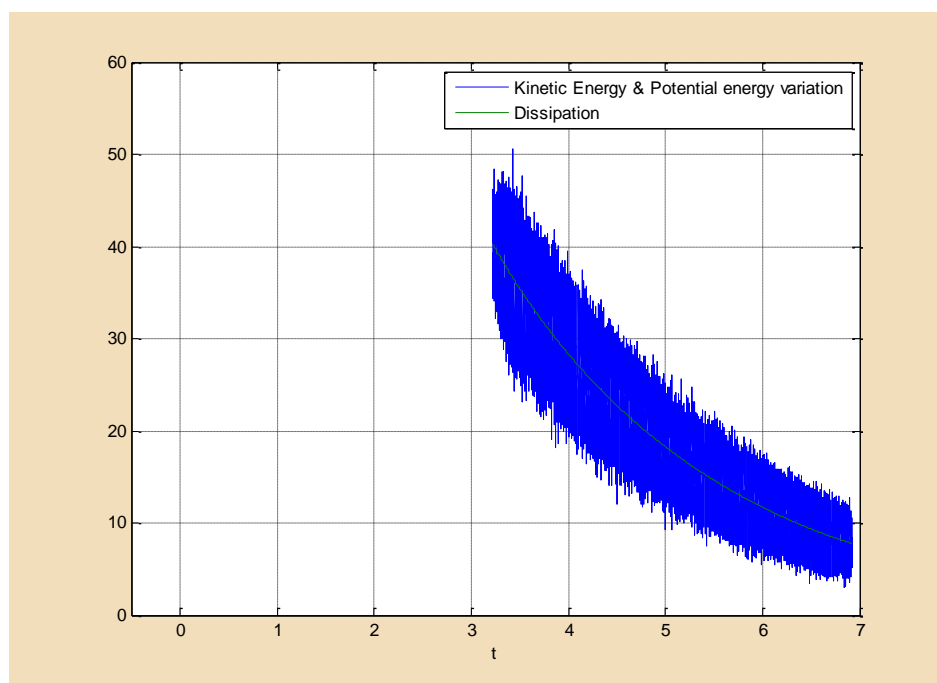
Η μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος που παρατηρείται στο σχήμα 3.1, λειτουργεί σαν ένα πρόσθετο μέσο ελέγχου της ισχύος στο τρόπο που αντιμετωπίζονται τα φαινόμενα ασθενούς ιξώδους. Η χρονική παράγωγος της κινητικής και δυναμικής ενέργειας της φυσαλίδας υπολογίζεται αριθμητικά και συγκρίνεται με την σκέδαση όπως παρουσιάζεται στην εξίσωση [2.47]. Έτσι εξετάζεται το κατά πόσον ικανοποιείται η [2.47] για ένα χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο η κινητική ενέργεια δεν αλλάζει σημαντικά. Πέραν αυτού του χρονικού πλαισίου ο αριθμητικός υπολογισμός της μεταβολής της ολικής κινητικής ενέργειας γίνεται λιγότερο ακριβής και η αποτύπωση της εξίσωσης [2.47] πιο δύσκολη. Από αυτό το στάδιο και μετά πρέπει να κάνουμε αναδιάταξη του πλέγματος για να καθίσταται η αριθμητική λύση αξιόπιστη.



Σχήμα 3.1 Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης  
 $S=0.17$   $P=15000$



Σχήμα 3.2 Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης για  $S=0.17$   $P=15000$ -run1



Σχήμα 3.3 Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας και της σκέδασης για  $S=0.17$   $P=15000$ -run2

Τα παραπάνω σχήματα αποτυπώνουν την χρονική εξέλιξη της ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας (kinetic & potential variation) καθώς και της σκέδασης (dissipation). Σύμφωνα με την εξίσωση [2.47] θα πρέπει οι δύο γραφικές παραστάσεις να είναι τέτοιες έτσι ώστε η διαφορά τους να είναι πάρα πολύ μικρή. Το σχήμα 3.1 δίνει την συνολική αποτύπωση την μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σύνολο του χρόνου προσομοίωσης χρησιμοποιώντας διαφορετική διακριτοποίηση μετά την χρονική στιγμή 3.33. Το σχήμα 3.2 δίνει τα παραπάνω για την ίδια περίπτωση, αρχικής επιμήκυνσης  $S=0.17$  και αδιάστατης υπερπίεσης  $P=15000$ , για 300 συνοριακά στοιχεία στην διεπιφάνεια και χρονικό βήμα  $\Delta T=10^{-4}$ . Η συγκεκριμένη προσομοίωση σταμάτησε σε αδιάστατο χρόνο σχεδόν 3.33 όπου και παρατηρείται ότι υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις. Τέτοιου είδους συμπεριφορά συστηματικά αποτέλεσε ένδειξη ότι ο κώδικας έχει μειωμένη αξιοπιστία σε όλες προσομοιώσεις που διεξήχθησαν. Για να διορθωθεί αυτό το πρόβλημα στο συγκεκριμένο παράδειγμα έγινε πύκνωση πλέγματος με χρήση 400 στοιχείων στην διεπιφάνεια και αδιάστατου χρονικού βήματος  $\Delta T=10^{-5}$ .

Στο σχήμα 3.3 αποτυπώνονται πάλι οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις με τις τιμές τις ολικής κινητικής και δυναμικής ενέργειας να παρουσιάζουν μία μικρή μειούμενη ταλάντωση σε σχέση με την σκέδαση που μειώνεται παραβολικά.

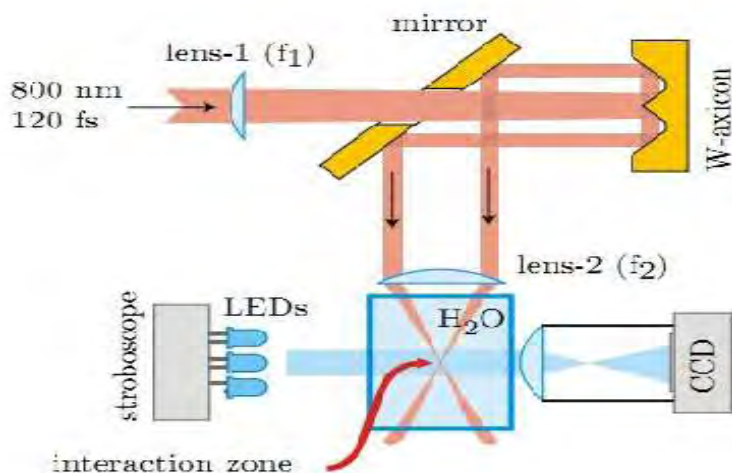
Οι παραπάνω δύο βέλτιστες επιλογές για την συγκεκριμένη αριθμητική δοκιμή χρησιμοποιήθηκαν στην προσομοίωση που αποτυπώνεται στο σχήμα 3.1. Με την αναδιάταξη του πλέγματος κατά την χρονική στιγμή 3.33 η προσομοίωση συνέχισε για μεγάλο χρονικό διάστημα. Η αναδιάταξη αυτή είχε ως αποτέλεσμα ο κώδικας να ξεπεράσει το σημείο αυτό και να συνεχιστεί κανονικά. Διαπιστώνεται λοιπόν ότι το παραπάνω γράφημα διατήρησης της συνολικής ενέργειας αποτελεί μία καλή ένδειξη αξιοπιστίας της αριθμητικής λύσης και έγινε εκτενής χρήση του κατά την διάρκεια της παρούσας μελέτης.

### 4.1 Προσομοίωση

Εκτός από την παραμετρική μελέτη η οποία αποσκοπεί στην περιγραφή της δυναμικής της φυσαλίδας που επιμηκύνεται, που είναι τόσο γενική όσο είναι δυνατόν, γίνεται μία προσπάθεια στην προσομοίωση συγκεκριμένων πειραματικών παρατηρήσεων. Αυτό εμπεριέχει αβεβαιότητα που σχετίζεται με την ακριβή κατανομή της ολικής ενέργειας που μεταδίδεται στο ρευστό από παλμό laser, με διάφορες μορφές ενέργειας. Ειδικότερα, το μεγαλύτερο μέρος της αρχικής ενέργειας του παλμού laser καταναλώνεται στο σχηματισμό πλάσματος τοπικά, το οποίο στη συνέχεια δημιουργεί αέριο και ατμό που γεμίζουν τη φυσαλίδα. Η ενέργεια επίσης σκεδάζεται με τη μορφή θερμικής και ακουστικής ενέργειας του ρευστού, και μόνο ένα μικρό μέρος, περίπου 10%, μετατρέπεται σε μηχανική ενέργεια της φυσαλίδας η οποία μπορεί στη συνέχεια να ποσοτικοποιηθεί με την μορφή εσωτερικής υπερπίεσης όταν η φυσαλίδα αρχίζει να φουσκώνει τη χρονική στιγμή  $t=0$ . Μετά τη στιγμή εκκίνησης της φυσαλίδας και μέσα σε πολύ μικρή χρονική περίοδο, μέρος του υγρού ατμού ψύχεται και εκ νέου συμπυκνώνεται. Υποτίθεται ότι η διαδικασία ολοκληρώνεται μέσα στο χρονικό διάστημα  $0 < t < t_1$ , μερικά  $\mu s$  για φυσαλίδες nanosecond και μερικές εκατοντάδες nanosecond για femtosecond φυσαλίδες [31] απαιτούνται για να αποτυπωθεί η πρώτη εικόνα που απεικονίζει το σχήμα της φυσαλίδας. Από το σημείο αυτό και μετά, η φυσαλίδα αναπτύσσεται και καταρρέει με περίπου ισοθερμικό τρόπο, εκτός από τις πολύ τελευταίες στιγμές της κατάρρευσης κατά την οποία αναπτύσσονται μεγάλες πιέσεις και θερμοκρασίες λόγω αδιαβατικής συμπίεσης. Στην παραπάνω πειραματική μελέτη, λόγω της αναμενόμενης πολύ υψηλής τιμής της αρχικής υπερπίεσης ενδέχεται ο χρόνος αυτός να είναι της τάξης των femtosecond. Λόγω αυτής της αβεβαιότητας στις προσομοιώσεις που έγιναν δεν υπάρχει πρόνοια για την συμπύκνωση του πλάσματος και την επακόλουθη πτώση της εσωτερικής πίεσης και αφήνεται για επόμενο στάδιο της έρευνας.

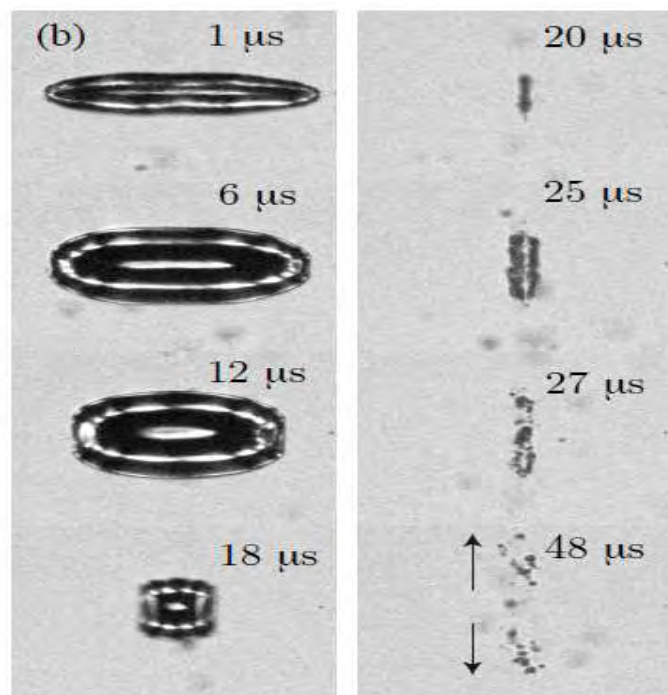
## 4.2 Πειραματικά Δεδομένα

Κατά την πειραματική διαδικασία [40] έγινε μία έρευνα της δυναμικής συμπεριφοράς της φυσαλίδας που προσβάλλεται από υψηλής έντασης, παλμού Laser διάρκειας femtosecond ( $10^{-15}$  sec) εστιασμένο σε νερό. Σε χαμηλές ποσότητες ενέργειας και/ή μικρή γωνία εστίασης, παρατηρείται η γνωστή δυναμική συμπεριφορά, δηλαδή σχηματισμός μίας επιμηκυμένης φυσαλίδας η οποία στη συνέχεια συστέλλεται και καταρρέει. Εντούτοις, σε υψηλές γωνίες εστίασης ( $> 10$ - $30$  μοίρες) και για σχετικά υψηλή ποσότητα ενέργειας ( $\geq 10$   $\mu$ J), που είναι 1 με 2 τάξεις μεγέθους σε σχέση με προηγούμενες μελέτες, παρατηρείται μία νέα περιοχή σπηλαίωσης (cavitation regime) που χαρακτηρίζεται από μία αξιοσημείωτη δυναμική συμπεριφορά της φυσαλίδας. Η επιμηκυμένη φυσαλίδα πρώτα αναπτύσσεται απότομα κατά μήκος του μικρού άξονα δηλαδή κατά μήκος της εγκάρσιας διεύθυνσης στο παλμό διάδοσης και στη συνέχεια πάλι απότομα συρρικνώνεται κατά μήκος του μεγάλου άξονα. Τα τοιχώματα της φυσαλίδας συγκρούονται και σπάζουν σε χωριστές ομάδες (clusters) φυσαλίδων μεγέθους υπό-μικρών. Αυτές οι ομάδες κινούνται με μεγάλη ταχύτητα μακριά από την περιοχή αλληλεπίδρασης, της τάξης του 1cm. Το δακτυλιοειδές σχήμα εστίασης του παλμού Laser femtosecond έχει την δυνατότητα να ελέγχει το σχηματισμό jet της φυσαλίδας και δίνει ένα νέο εύρος της δυναμικής συμπεριφοράς της φυσαλίδας στα υγρά. Η πειραματικής διάταξη φαίνεται στο σχήμα [4.1]. Η εισαγόμενη ακτινοβολία συχνότητας 1kHz, παλμού 120fs κατευθύνεται μέσω μίας οπής σε συσκευή W-axicon όπου τη μετασχηματίζει σε δακτύλιο. Ο πρώτος φακός (lens-1) ελέγχει το πάχος αυτού του δακτυλίου και στη συνέχεια ο δακτύλιος κατευθύνεται από το πρώτο κάτοπτρο στον δεύτερο φακό (lens-2) ο οποίος εστιάζει τον δακτύλιο σε μία κυψελίδα με νερό.

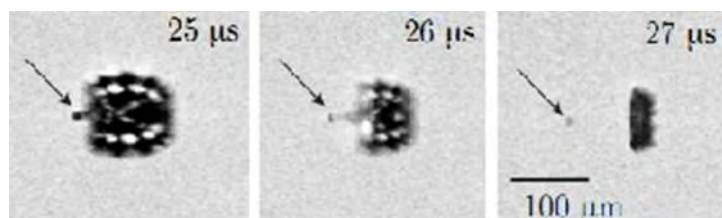


Σχήμα 4.1 Πειραματική Διάταξη

Με σκοπό να ερευνηθεί πλήρως η δυναμική της φυσαλίδας λαμβάνονται εικόνες από CCD κάμερα χρησιμοποιώντας στροβοσκόπιο LED ως πηγή φωτός, το οποίο συγχρονίζεται με το laser με ακρίβεια 1 $\mu$ s. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων για ενέργεια παλμού 38 $\mu$ J και γωνία  $\theta=26^\circ$  δείχνονται στο σχήμα 4.2 όπου αποτυπώνεται η εξέλιξη της φυσαλίδας για συμμετρικό αρχικό σχήμα. Παρατηρείται επίσης μία διόγκωση κατά μήκος της x-κατεύθυνσης. Ωστόσο, καθώς τα πλευρικά τοιχώματα αρχίζουν να καταρρέουν κατά μήκος της z-κατεύθυνσης δεν σχηματίζεται πια jet και τα τοιχώματα παραμένουν παράλληλα ενώ κινούνται με ταχύτητα περίπου 40m/s. Όταν τα δύο τοιχώματα συναντώνται, κάνουν μία αναπήδηση(25 $\mu$ s) και στη συνέχεια σπάζουν σε ομάδες φυσαλίδων της τάξης  $\mu$ m και ωθούνται κατά μήκος της εγκάρσιας κατεύθυνσης (48 $\mu$ s). Αντίθετα στο σχήμα 4.3 φαίνονται οι λεπτομέρειες του σχηματισμού jet για ποσότητα ενέργειας 100 $\mu$ J. Το jet φαίνεται καθαρά να διαπερνά τα αντίθετα τοιχώματα και επιμηκύνεται μέσα στο περιβάλλον υγρό. Στο τελευταίο σχήμα στα 27 $\mu$ s δείχνει ένα κατάλοιπο του jet να είναι πλήρως αποσπασμένο από την υπόλοιπη φυσαλίδα.



Σχήμα 4.2 Εξέλιξη για Συμμετρική Φυσαλίδα και Ενέργεια 38  $\mu$ J



Σχήμα 4.3 Λεπτομέρειες της εξέλιξης του jet την στιγμή της σύγκρουσης των αντίθετων τοιχωμάτων της φυσαλίδας για 100μJ.

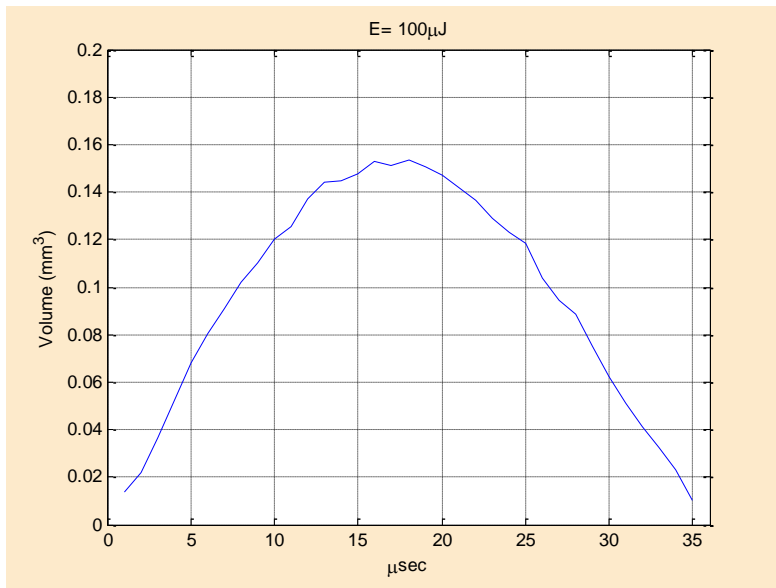
Στα σχήματα 4.6(a) και (b) φαίνεται η εξέλιξη των διαστάσεων των δύο κυρίως αξόνων της φυσαλίδας ( $D_x, D_z$ ) και οι ταχύτητες του πόλου και του ισημερινού ( $V_x, V_z$ ) σε σχέση με το χρόνο για συμμετρικές αρχικές συνθήκες. Στο 4.6 (b) οι θετικές ταχύτητες υποδεικνύουν διεύρυνση και οι αρνητικές ταχύτητες συστολή της φυσαλίδας. Η διεύρυνση της φυσαλίδας που συμβαίνει κυρίως στην εγκάρσια-διεύθυνση καθορίζεται κυρίως από την αρχική υπερπίεση και όχι από την γεωμετρία του σχήματος της φυσαλίδας. Τα σχήματα 4.4 και 4.7 δείχνουν την μεταβολή του όγκου της φυσαλίδας σε σχέση με το χρόνο (υποθέτοντας αζιμουθιακή γεωμετρία) τόσο για 100μJ όσο και για 38μJ. Οι τιμές του  $D_z$  άξονα δεν έχουν μεγάλες αποκλίσεις αλλά φαίνεται μία μεγαλύτερη διεύρυνση κατά την x-κατεύθυνση όπου προκύπτει και μεγαλύτερος όγκος για την περίπτωση των 100μJ. Σύμφωνα με τον πίνακα για ποσότητα ενέργειας 100μJ προκύπτει μέγιστος όγκος  $0.1536 \text{ mm}^3$  ο οποίος επιτυγχάνεται στα 18μs ενώ για ποσότητα ενέργειας 38 μJ προκύπτει μέγιστος όγκος  $0.031 \text{ mm}^3$  σε χρόνο 11μs. Κατά συνέπεια, προκύπτει ότι ο μέγιστος όγκος, και κατά πάσα πιθανότητα η αρχική υπερπίεση, σχετίζεται απ' ευθείας με την ενέργεια που εναποτίθεται στο μέσο με ιονισμό από τον εισαγόμενο παλμό laser. Μεγαλύτερη ενέργεια παλμού Laser έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο μέγιστο όγκο ο οποίος επιτυγχάνεται σε μεγαλύτερο χρόνο.

Πίνακας 4.1 Πειραματικά Αποτελέσματα για δεδομένη αρχική ενέργεια παλμού--Μεγέθη στον μέγιστο όγκο της φυσαλίδας

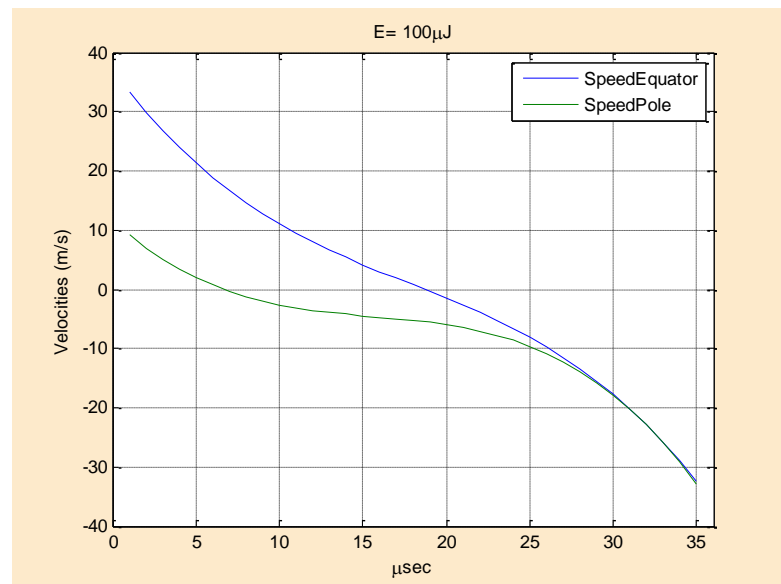
Energy (μJ)	Time (μsec)	short axis (mm)- $D_x$	long axis (mm)- $D_z$	volume ( $\text{mm}^3$ )	V short (m/s)	v long (m/s)
100	18	0.333	0.441	0.153630318	0.7704	-5.2624
38	11	0.177	0.318	0.0312985	1.6	-10.1872



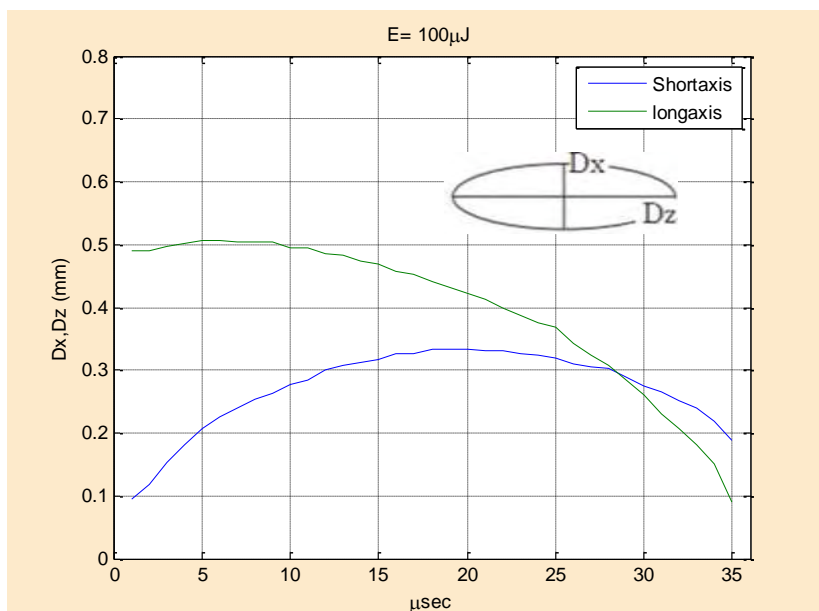
Παρακάτω δίνονται τα σχήματα χρονικής εξέλιξης όγκου, ταχύτητας και x-z αξόνων για ποσότητα ενέργειας 100 mJ και 38 mJ.



Σχήμα 4.4 Χρονική εξέλιξη όγκου φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 μJ



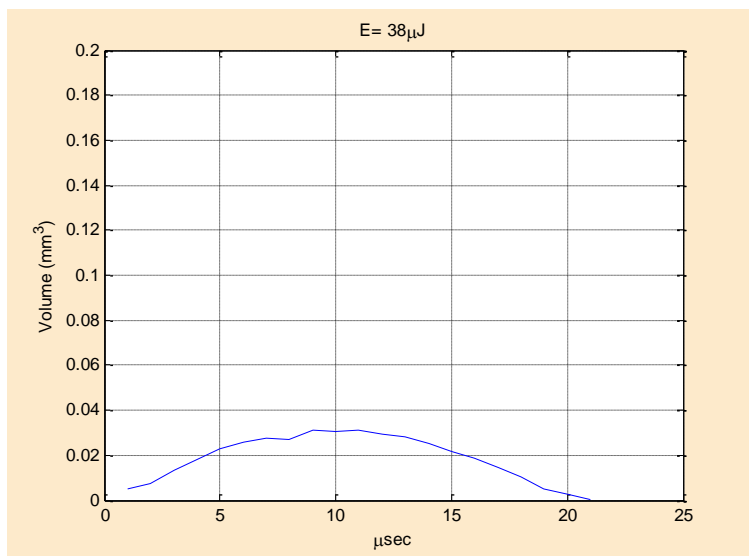
Σχήμα 4.5 Χρονική εξέλιξη ταχυτήτων Πόλου και Ισημερινού Φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 μJ



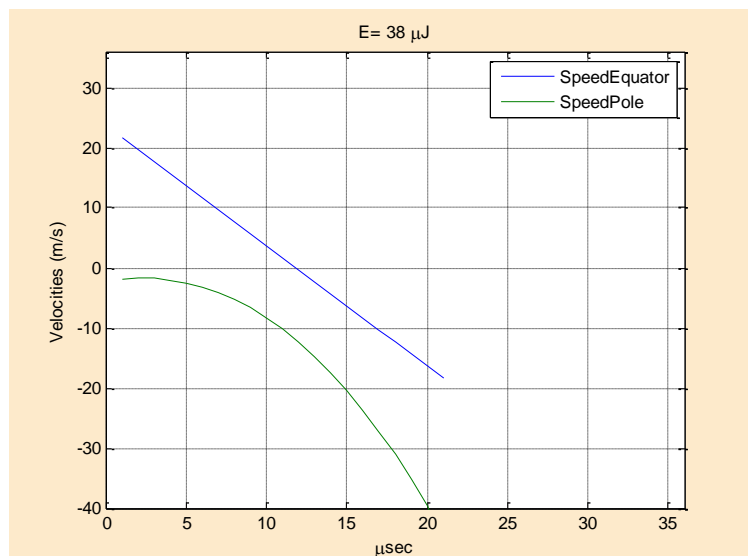
Σχήμα 4.6 Χρονική εξέλιξη διαμέτρου και εγκάρσιου άξονα φυσαλίδας για παλμό ενέργειας 100 μJ



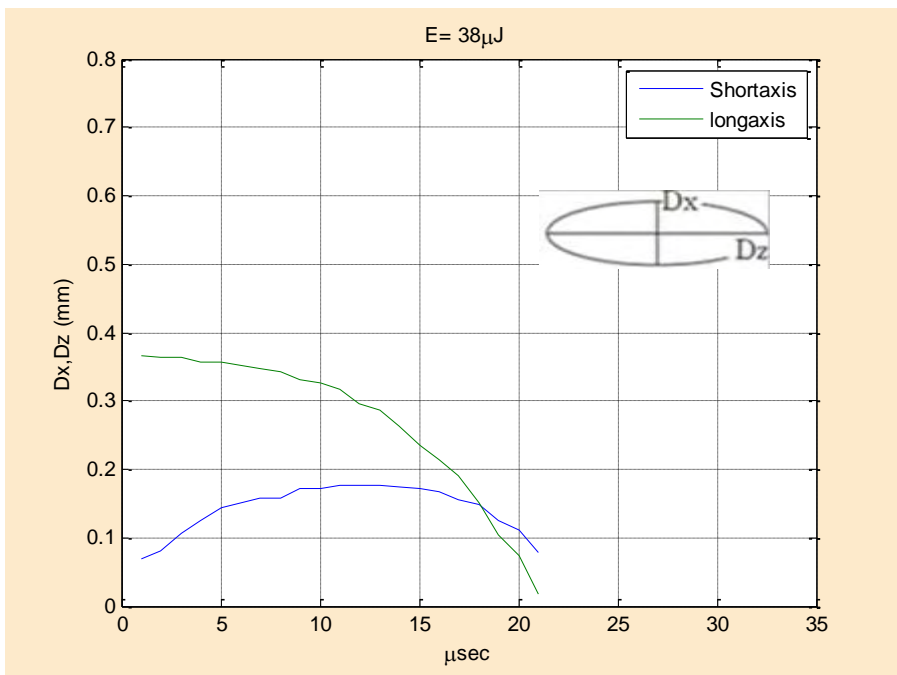
Σχήμα 4.7 Αρχικό σχήμα Φυσαλίδας για παλμό Ενέργειας 100 μJ



Σχήμα 4.8 Χρονική εξέλιξη όγκου φυσαλίδας για 38 μJ



Σχήμα 4.9 Χρονική εξέλιξη ταχυτήτων Πόλου και Ισημερινού Φυσαλίδας για 38 μJ



Σχήμα 4.10 Χρονική εξέλιξη διαμήκη και εγκάρσιου άξονα φυσαλίδας για 100 μJ



Σχήμα 4.11 Αρχικό σχήμα Φυσαλίδας Ενέργειας 38 μJ

### 4.3 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Παρακάτω παρατίθενται αποτελέσματα προσομοιώσεων της δυναμικής συμπεριφοράς μικροφυσαλίδας που διαστέλλεται και καταρρέει. Με βάση τα διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα η μικροφυσαλίδα λαμβάνεται να έχει ισοδύναμη ακτίνα  $R_0=10 \mu\text{m}$  ενώ η επιμήκυνση κατά την διεύθυνση των πόλων σε σχέση με αυτήν κατά την διεύθυνση του ισημερινού μεταβάλλεται μέσω της παραμέτρου  $S=a/R_0$  από 0.3 σε 0.17, όπου  $a$  το μήκος του μικρού ημιάξονα της έλλειψης; θεωρούμε ότι η μικροφυσαλίδα έχει ελλειψοειδές σχήμα. Ενδεικτικά σε  $S=0.2$  αντιστοιχεί λόγος μικρού προς μεγάλο ημιάξονα  $a/b=0.01$ . Επί πλέον για σταθερό  $S$  μεταβάλλουμε την εσωτερική υπερπίεση έτσι ώστε να ξεπεράσει κατά πολύ την αντίσταση,  $2\sigma/\mathfrak{R}$ , στην περιοχή γύρω από τους πόλους όπου υπάρχει πολύ μικρή ακτίνα μέσης καμπυλότητας,  $\mathfrak{R}$ , και να διευκολύνει την διαστολή της μικροφυσαλίδας. Ο αριθμός  $Re=Oh^{-1}$  που συνδέεται με μικροφυσαλίδα τέτοιου μεγέθους σε νερό λαμβάνει την τιμή,

$$Re = \sqrt{\frac{R_0 \sigma \rho}{\mu^2}} = Oh^{-1} \approx 26.4 \text{ ενώ η αδιάστατη στατική πίεση στην κυρίως μάζα του}$$

περιβάλλοντος ρευστού (νερού εν προκειμένω) είναι  $P_{St} = \frac{P'_{St}}{2\sigma/R_0} \approx 7.1$ . Η αδιάστατη

υπερπίεση λαμβάνει υψηλές τιμές που κυμαίνονται μεταξύ 500-30000. Ας σημειωθεί επίσης ότι για το ελλειψοειδές σχήμα που μελετάται η ακτίνα καμπυλότητας κοντά στους πόλους της μικροφυσαλίδας μεταβάλλεται με την  $S^4$  καθώς μεγαλώνει η αρχική επιμήκυνση και  $S \rightarrow 0$ . Έτσι η υπερπίεση πρέπει να ξεπεράσει σημαντικά την τιμή

$$P'_{Over} > \frac{2\sigma}{\mathfrak{R}} = \frac{2\sigma}{S^4 R_0} \rightarrow P_{Over} = \frac{P'_{Over}}{2\sigma/R_0} > S^{-4} \xrightarrow{S=0.2} P_{Over} \approx 650 \text{ ή } P'_{Over} \approx 10\text{MPa}$$

Και συνεπώς οδηγούμαστε σε υπερπίεσεις της τάξης των GPa, σε πρώτη εκτίμηση, για να έχουμε την απόκριση που καταγράφεται πειραματικά.

Σε αυτό το εύρος παραμέτρων διεξήχθησαν προσομοιώσεις της ανάπτυξης και κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας σε συνθήκες αρχικής επιμήκυνσης και υπερπίεσης. Η συμπεριφορά της μικροφυσαλίδας ακολουθεί την πειραματική συμπεριφορά όπως αυτή καταγράφεται στα παραπάνω σχήματα. Η μικροφυσαλίδα διαστέλλεται με μεγάλη ταχύτητα αναλόγως της αρχικής υπερπίεσης μέχρι να φτάσει στον μέγιστο όγκο οπότε και αρχίζει να

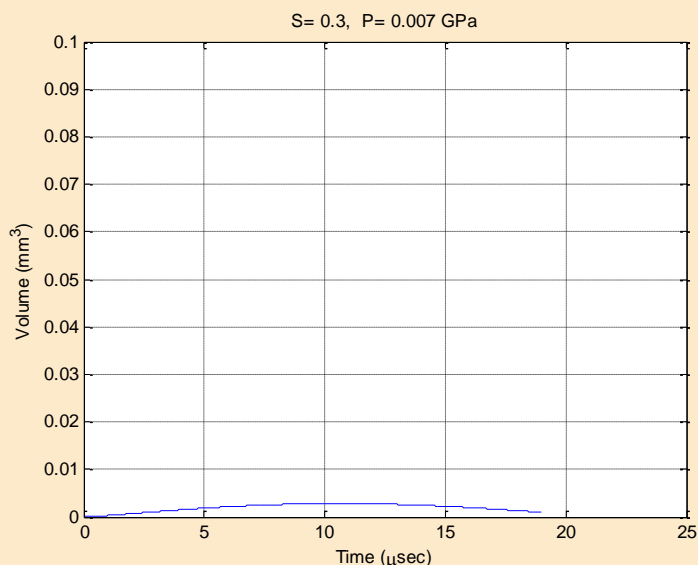
καταρρέει κυρίως λόγω των εσοχών που δημιουργούνται στους δύο πόλους. Από τις μέχρι τώρα προσομοιώσεις διαφαίνεται η δημιουργία jet χωρίς να έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία κατάρρευσης κατά την διεύθυνση του κύριου ή του δευτερεύοντα άξονα της έλλειψης. Όμως οι ταχύτητες που αναπτύσσονται καθώς και οι όγκοι που επιτυγχάνονται είναι ίδιας τάξης μεγέθους με αυτές των πειραμάτων με την διαφορά ότι δεν έχει επιτευχθεί πλήρης συμφωνία ως προς τον χρόνο που θα επιτευχθεί ο μέγιστος όγκος. Εδώ ενδεχομένως παίζει ρόλο το γεγονός ότι δεν προσομοιώνεται η διαδικασία συμπύκνωσης του πλάσματος και η πτώση πίεσης στην οποία οδηγεί. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το φαινόμενο αναμένεται να οδηγηθούμε σε αρχικές υπερπίεσεις στην περιοχή των GPa για την επίτευξη του μέγιστου όγκου όπως στην μελέτη [43] όπου εξετάσθηκε η συμπεριφορά μικροφυσαλίδων femtosecond αλλά σε σαφώς μικρότερες υπερπίεσεις. Η πλέον συναφής προσομοίωση της παρούσας μελέτης με τα πειράματα είναι αυτή για  $S=0.2$  και υπερπίεση 0.21 GPa,  $P=15000$ , για την οποία προκύπτει μέγιστος όγκος  $0.1331\text{mm}^3$  σε  $30.67\mu\text{s}$ , πειραματικός  $0.15\text{mm}^3$  σε  $18\mu\text{s}$  για  $100\mu\text{J}$ . Επιλέγοντας μεγαλύτερη αρχική υπερπίεση έτσι ώστε, μετά από την επιβολή πτώσης πίεσης λόγω συμπύκνωσης σε ενδιαμέση χρονική στιγμή (π.χ.  $t=100\text{ns}$ ) να ανακτηθεί ο μέγιστος όγκος κατά την χρονική στιγμή που προβλέπουν τα πειράματα. Συνεπώς η αρχικά προσδιδόμενη μηχανική ενέργεια στην μικροφυσαλίδα εκτιμάται, στο πλαίσιο των προσομοιώσεων της παρούσας μελέτης, ότι είναι της τάξης του GPa.

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που αναδεικνύεται από τις προσομοιώσεις αφορά το σχήμα της διεπιφάνειας κατά την φάση που αποκτά τον μέγιστο όγκο. Οι προσομοιώσεις δείχνουν ότι για κάθε τιμή του  $S$  και καθώς αυξάνεται η εσωτερική υπερπίεση, το σχήμα της μικροφυσαλίδας γίνεται όλο και περισσότερο σφαιρικό όταν αυτή αποκτά τον μέγιστο όγκο, π.χ. σχήμα 4.15.d. Μάλιστα από την στιγμή αυτή και κατά την διάρκεια της κατάρρευσης μπορεί να θεωρηθεί ότι η φυσαλίδα ξεκινά από μία μικρή αρχική παραμόρφωση και αποσταθεροποιείται κατά την διάρκεια της συμπίεσής της όπως προβλέπεται από την μελέτη [42]. Πιο συγκεκριμένα μέσω της ανάλυσης ευστάθειας, εξ. [2.49], προκύπτει η ιδιομορφή Legendre  $P_2$  ως κυρίαρχη και καθορίζουσα τον μηχανισμό κατάρρευσης. Με άλλα λόγια η εμφάνιση του jet στις προσομοιώσεις αλλά και στις πειραματικές παρατηρήσεις προκύπτει ως αποτέλεσμα της ασταθούς ανάπτυξης του  $P_2$ . Για πολύ μεγάλες τιμές της υπερπίεσης η μικροφυσαλίδα λαμβάνει περίπου σφαιρικό σχήμα με πολύ μεγάλη ακτίνα και μικρή απόκλιση κατά την διεύθυνση του μεγάλου άξονα. Κάτι τέτοιο συνάγεται και από τα πειραματικά δεδομένα όπως φαίνεται και από την εξίσωση των ταχυτήτων στους πόλους και στον

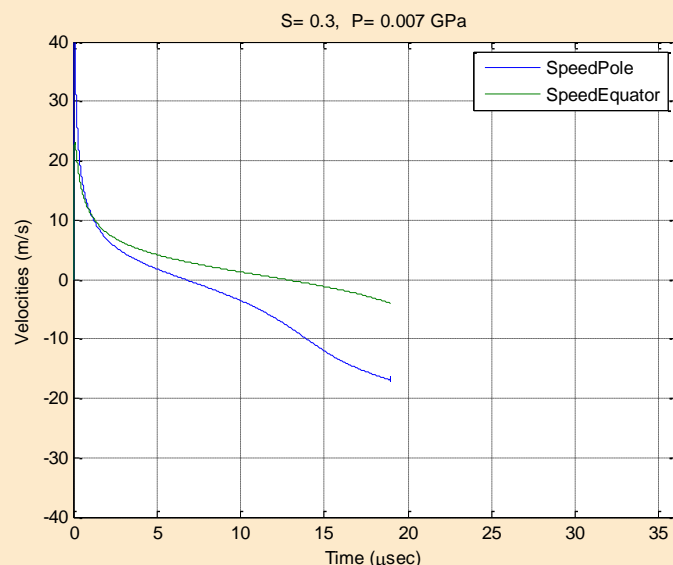
ισημερινό καθώς και του μήκους των δύο ημιαξόνων στην φάση αυτή της κατάρρευσης για παλμό laser 100 μJ (σχήματα 4.5 και 4.6). Ακολουθώντας μπορούμε να ορίσουμε έναν αριθμό Oh με βάση την τιμή της ακτίνας κατά την φάση αυτή, ο οποίος είναι αρκετά μικρότερος από τον αρχικό με αποτέλεσμα την γρήγορη αποσταθεροποίηση της διεπιφάνειας με την μορφή των κατ' αντιρροή μετακινούμενων jet που συναντώνται στο ισημερινό επίπεδο κατά την στιγμή της κατάρρευσης. Για μικρότερες τιμές της αρχικής υπερπίεσης το μέγεθος της φυσαλίδας όταν αυτή αποκτά τον μέγιστο όγκο είναι μικρότερο με μεγαλύτερη απόκλιση από την σφαιρικότητα. Σαν αποτέλεσμα η ανάπτυξη του  $P_2$  συμβαίνει αργότερα μέσω του afterbounce instability, όπως προβλέπεται και στην [42], κατά την φάση που τα τοιχώματα πλησιάζουν κατά την διεύθυνση του μικρού άξονα κατά μήκος του ισημερινού επιπέδου. Έτσι αποφεύγεται η δημιουργία jet όπως παρατηρείται στα πειράματα που αναφέρονται στην [40].

Πίνακας 4.2 Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.30$

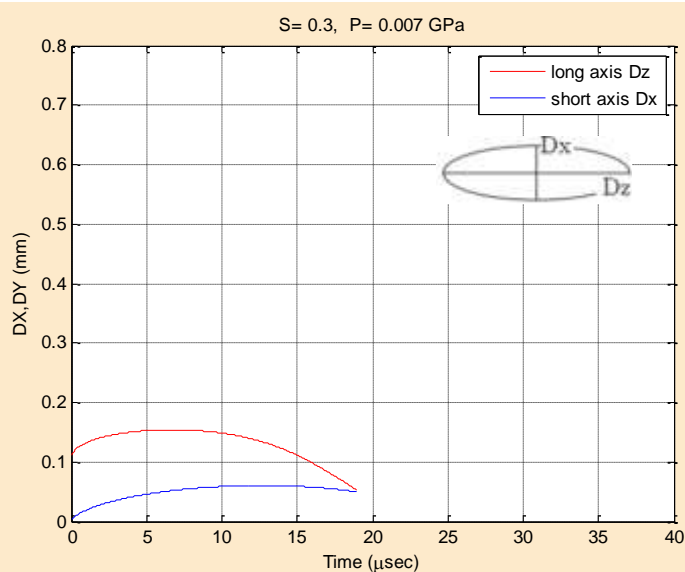
$S=0.30$	P (GPa)	max Volume ( $\text{mm}^3$ )	Time ( $\mu\text{sec}$ ) at max volume	v long (m/s) at max volume	v short (m/s) at max volume
1-500	0.007	0.0028	10.633285	-4.3146	0.9852
2-100	0.014	0.0064	14.188395	-3.6384	1.1471
3-1700	0.0238	0.012	17.571216	-3.1552	1.2192
4-7000	0.098	0.0607	30.304391	-1.9737	0.9988



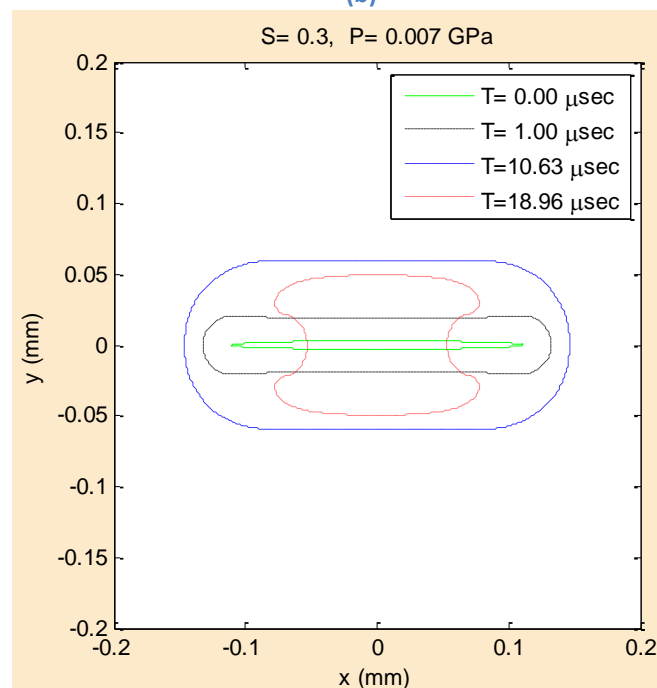
(α)



(b)



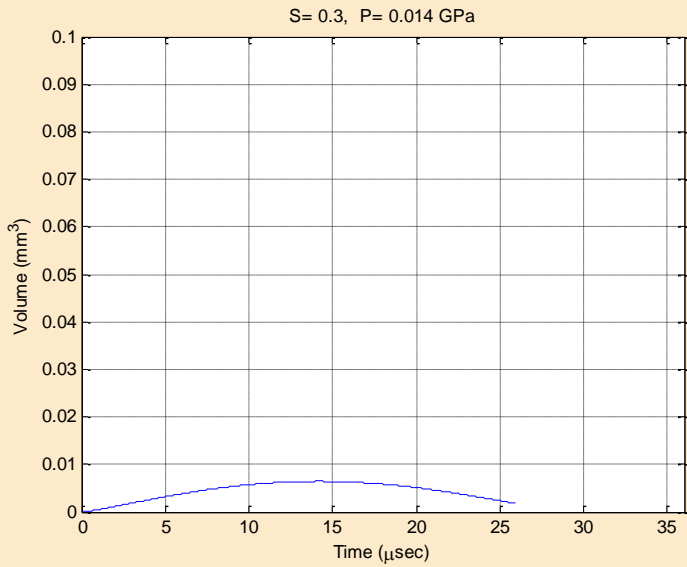
(c)



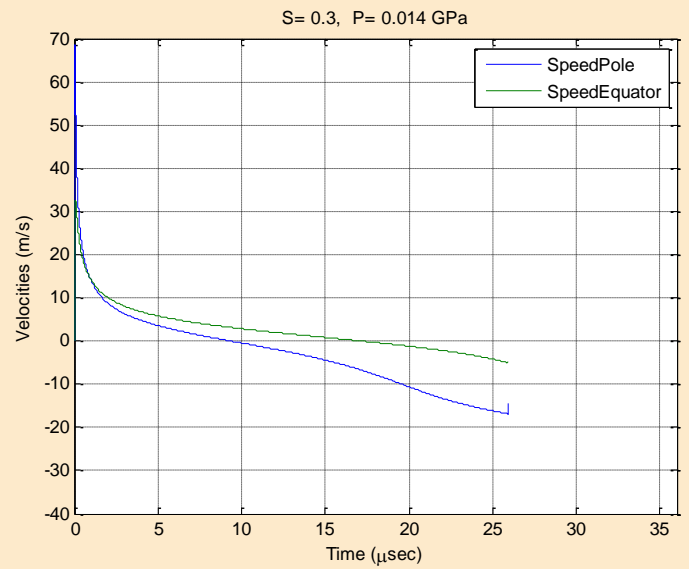
(d)

Σχήμα 4.12: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.30$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.007$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

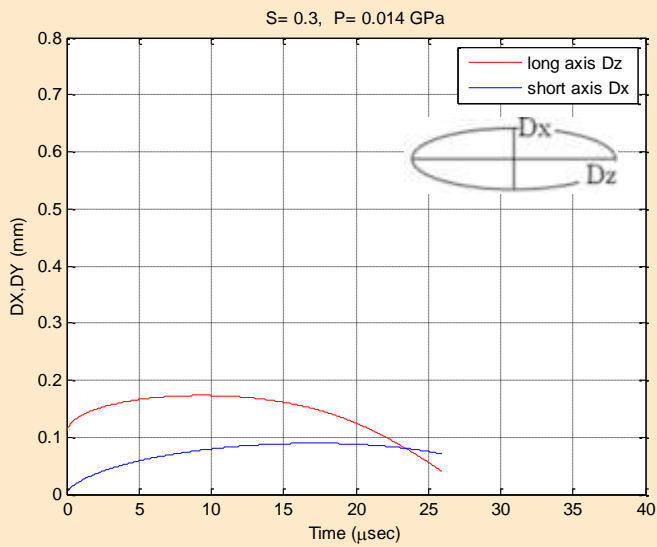
➤ **S=0.30 P=1000**



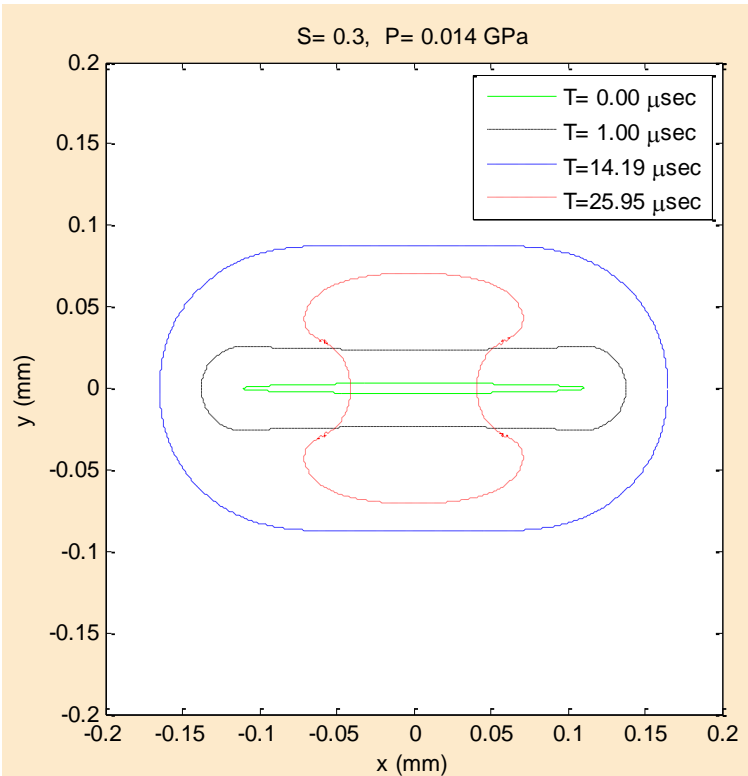
(a)



(b)



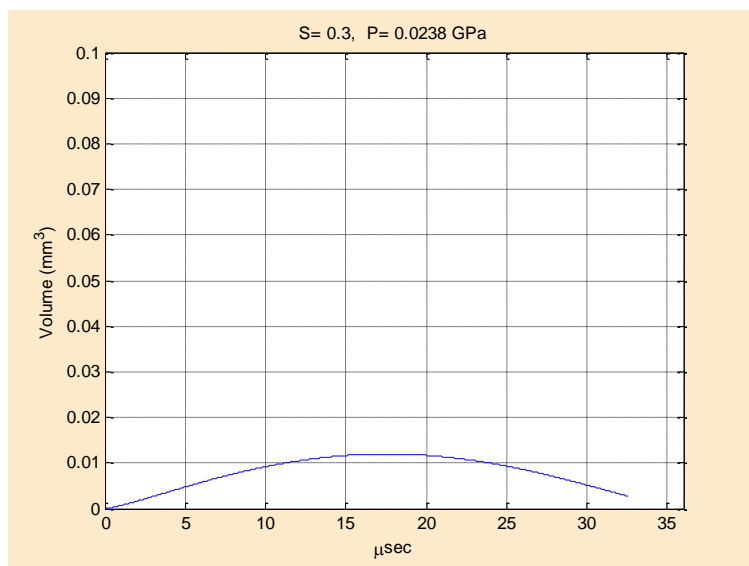
(c)



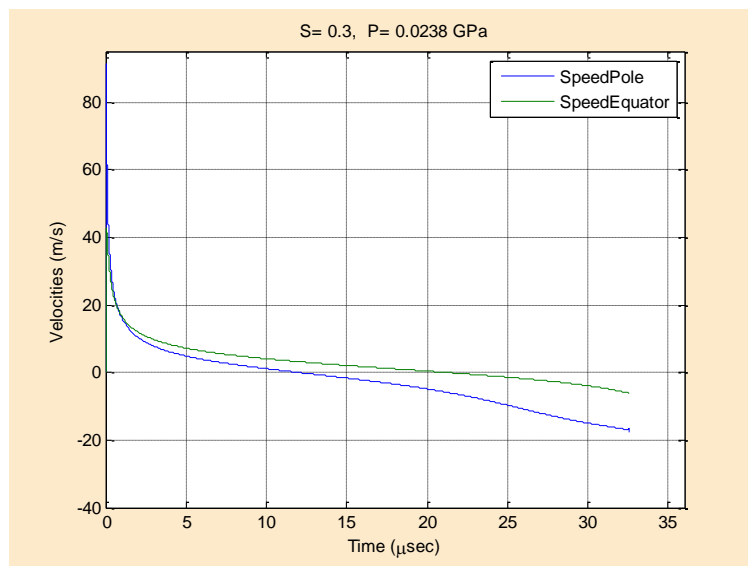
(d)

Σχήμα 4.13: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.30$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.014$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχυτήτων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

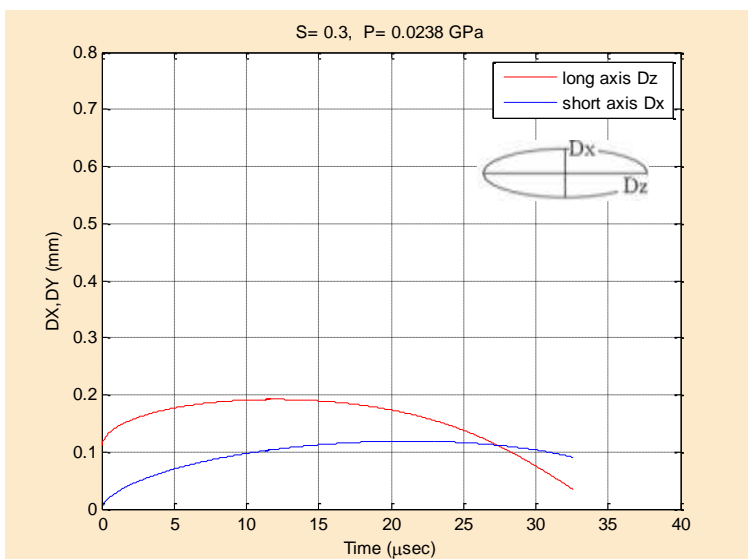
➤ **S=0.30 P=1700**



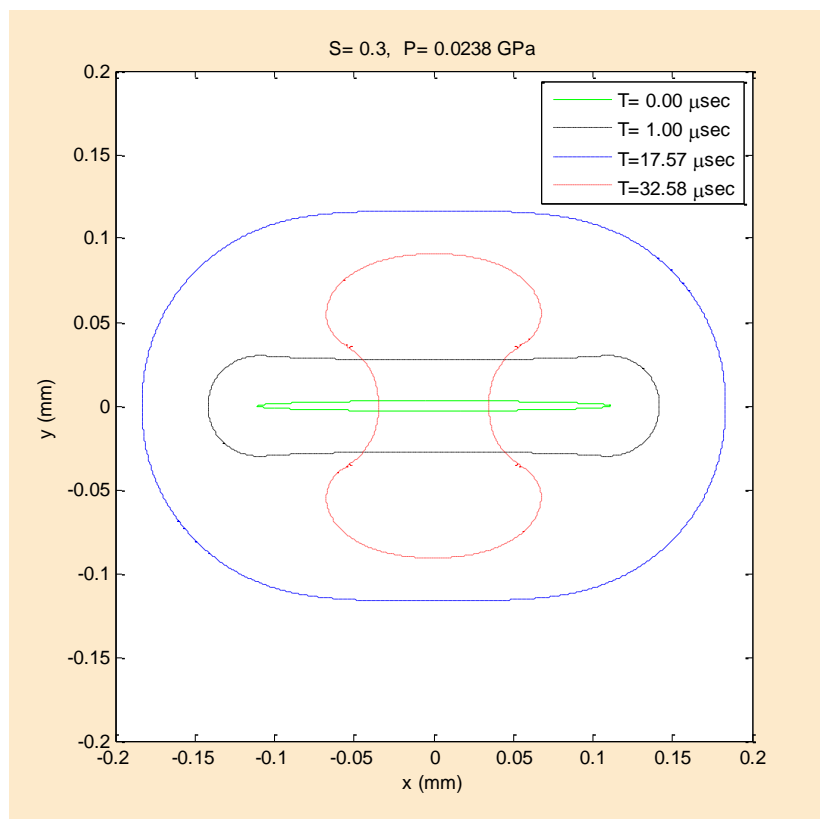
(a)



(b)



(c)

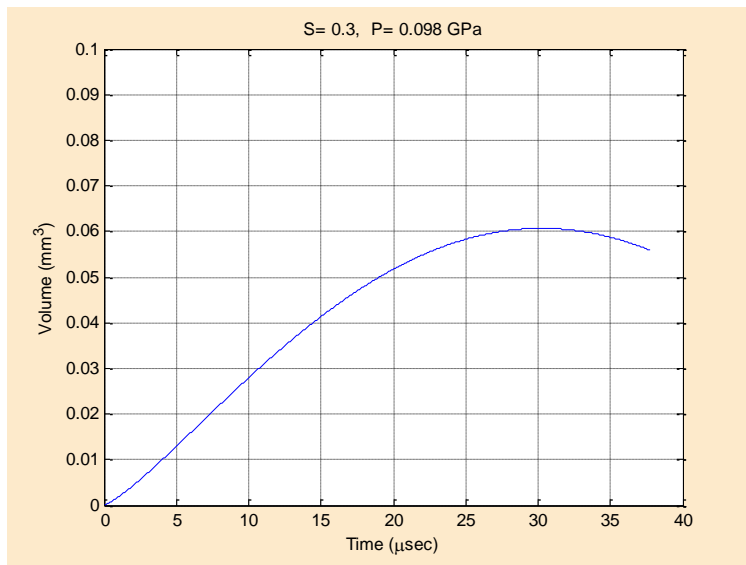


(d)

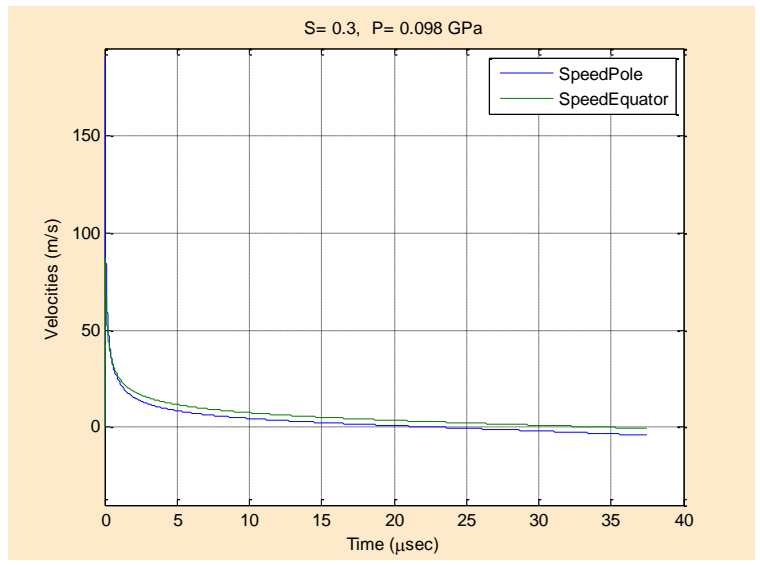
Σχήμα 4.14: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.30$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.0238$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχυτήτων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας



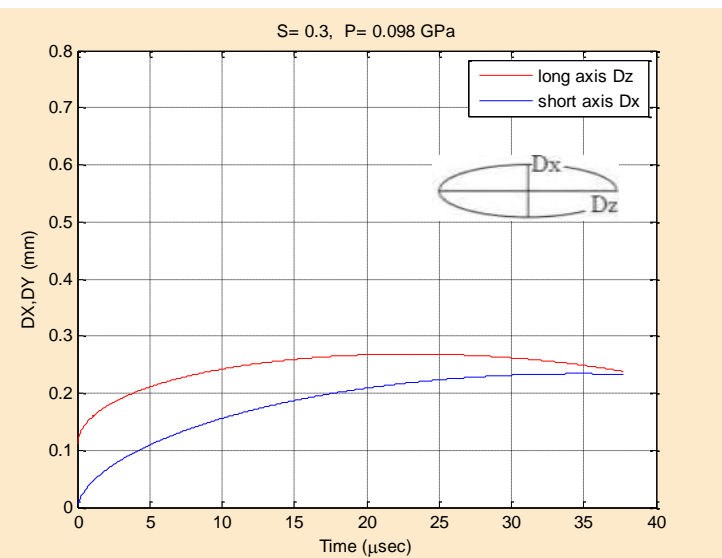
➤ **S=0.30 P=7000**



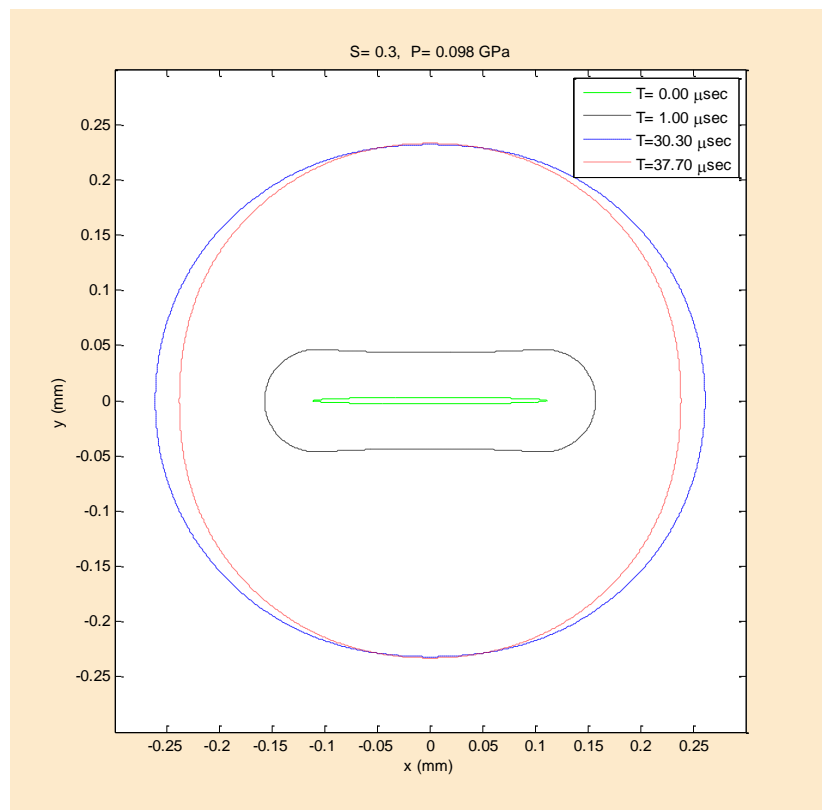
(a)



(b)



(c)



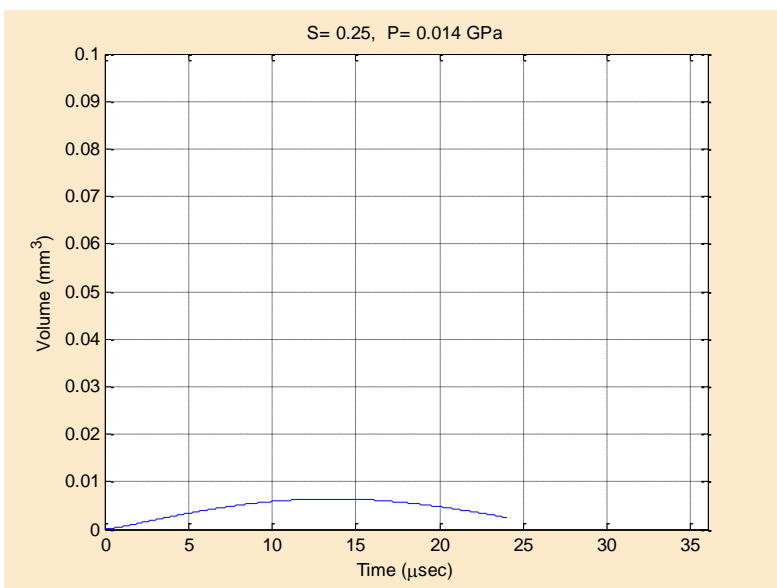
(d)

Σχήμα 4.15: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.30$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.098$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

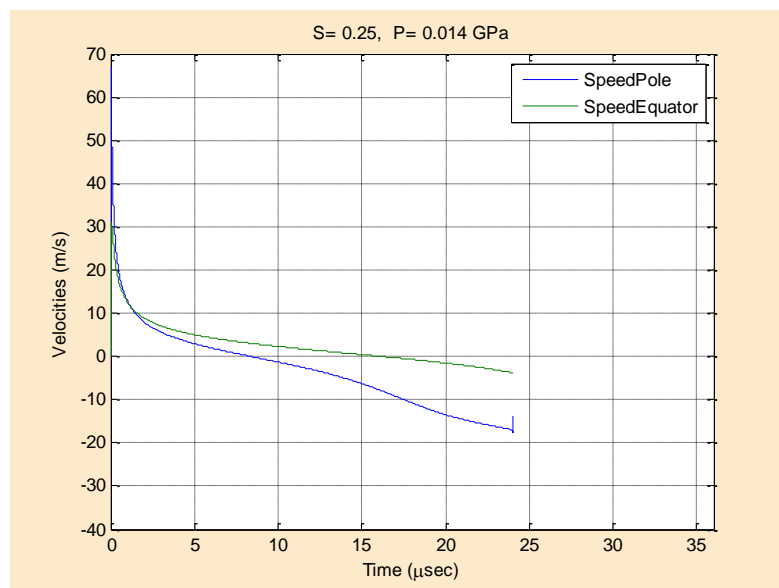
Πίνακας 4.3 Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.25$

$S=0.25$	P (Gpa)	max Volume ( $\text{mm}^3$ )	Time ( $\mu\text{sec}$ ) at max volume	v long (m/s) at max volume	v short (m/s) at max volume	Pressure (kPa) at max volume
1-1000	0.014	0.0064	13.608	-4.579	0.9364	9.16342
2-1800	0.0252	0.0127	17.406	-4.0073	1.0857	8.28632
3-3500	0.035	0.0186	19.534	-3.6915	1.1544	7.86884

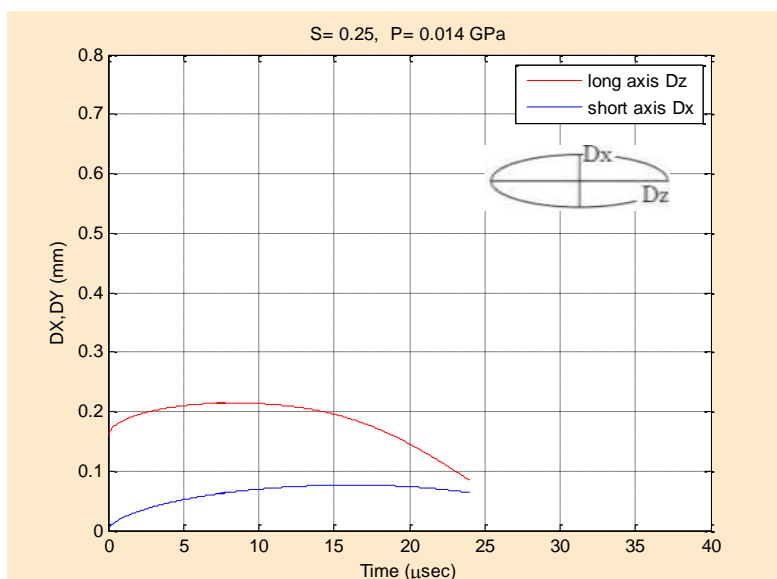
➤  $S=0.25$   $P=1000$



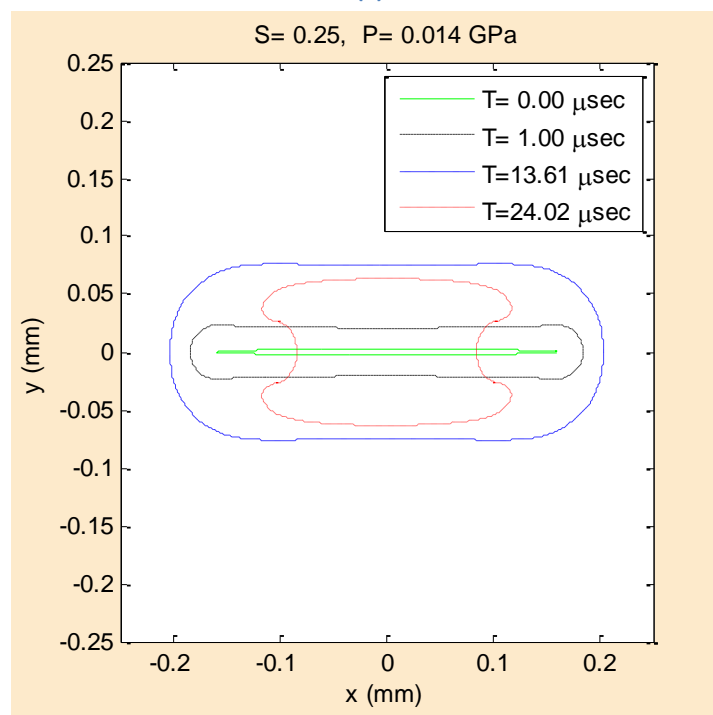
(a)



(b)



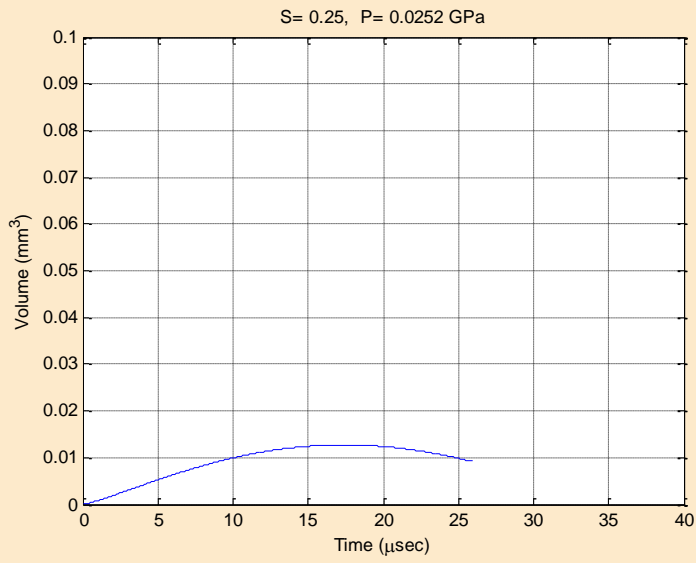
(c)



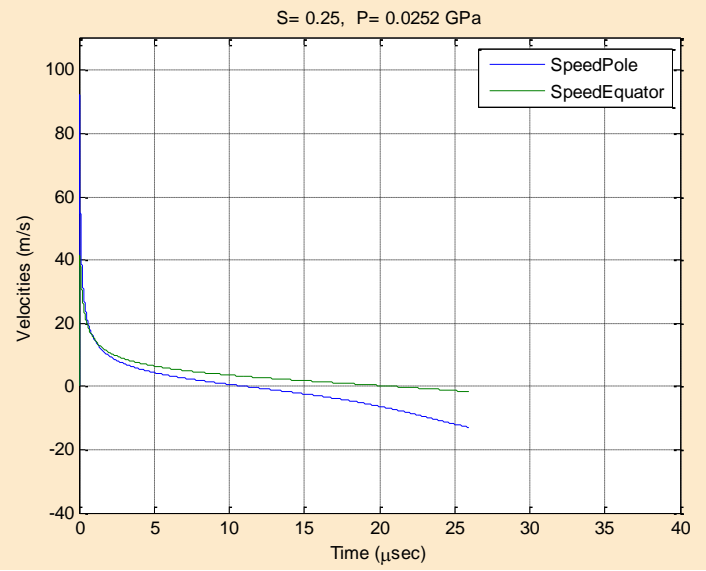
(d)

Σχήμα 4.16: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.25$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.014$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

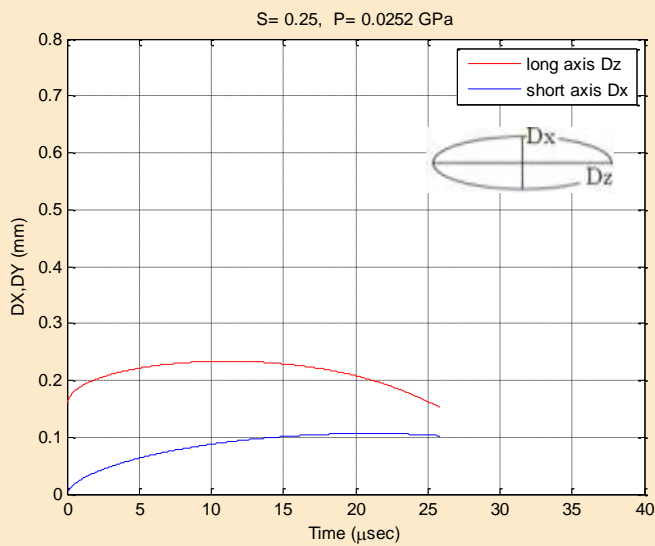
➤ **S=0.25 P=1800**



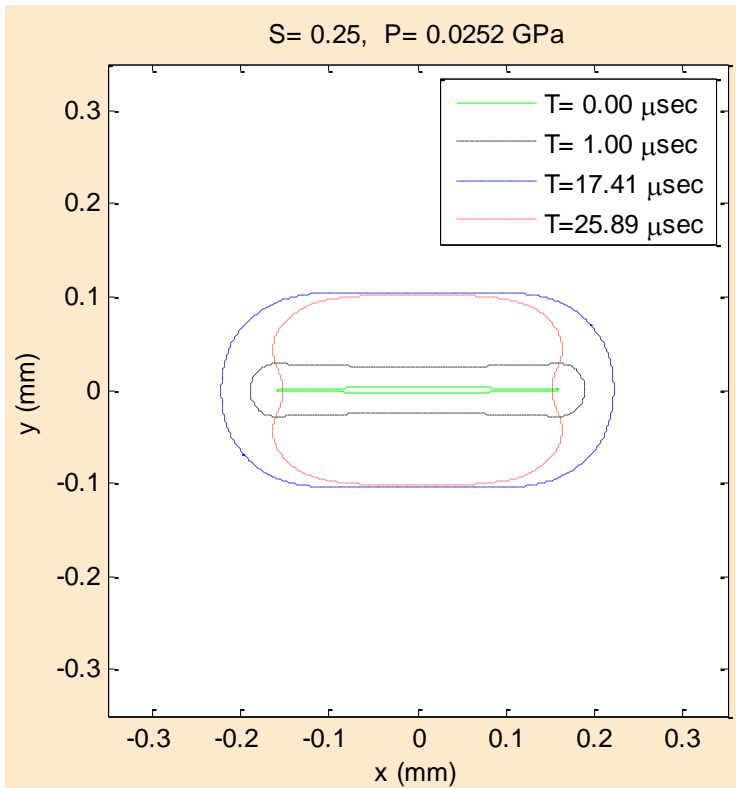
(a)



(b)



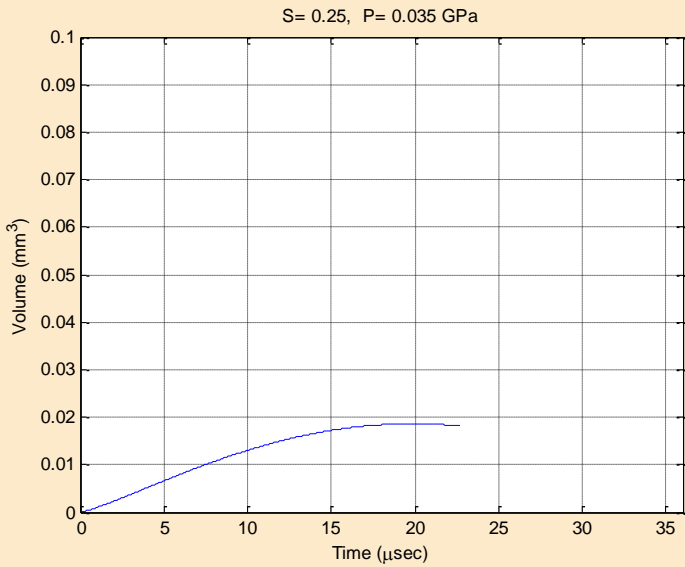
(c)



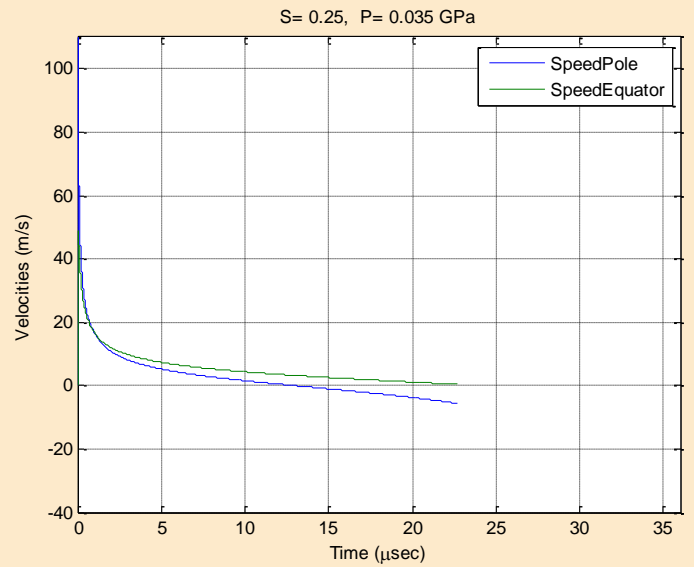
(d)

Σχήμα 4.17: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.25$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.0252$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχυτήτων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

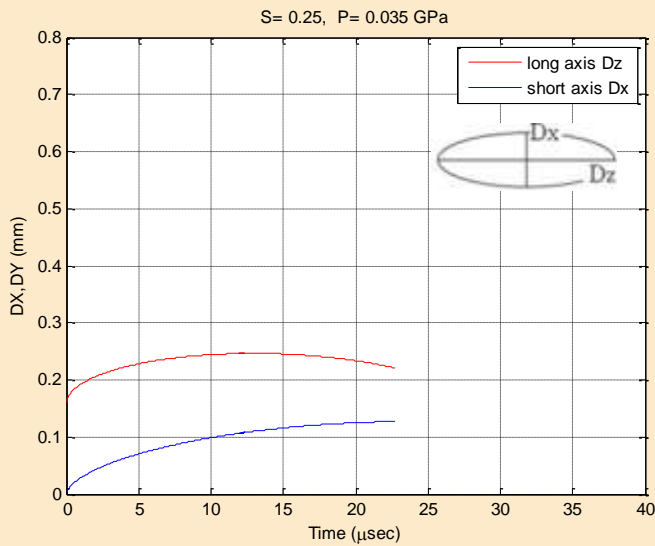
➤ **S=0.25 P=2500**



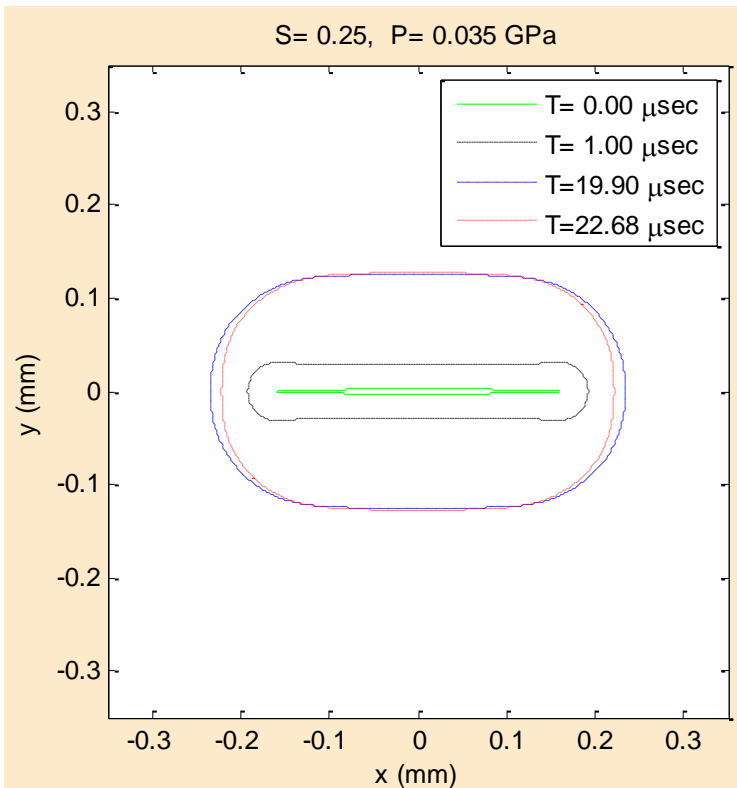
(a)



(b)



(c)



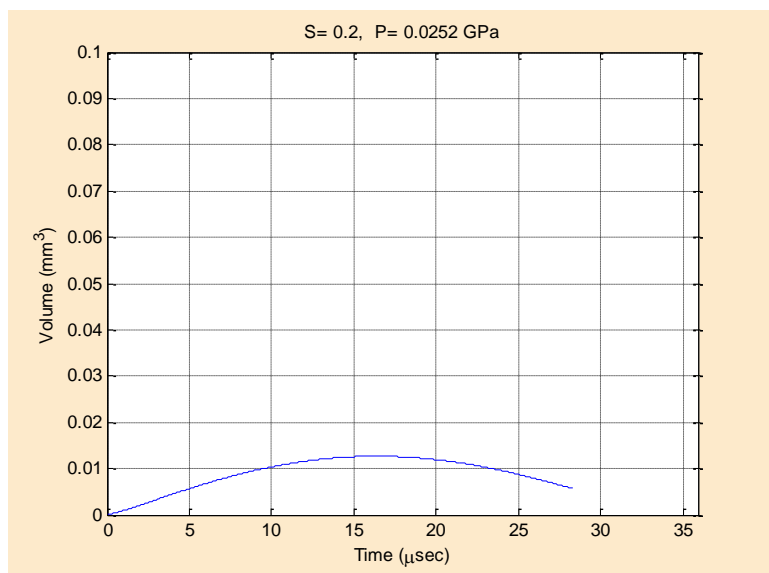
(d)

Σχήμα 4.18: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.25$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.035$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

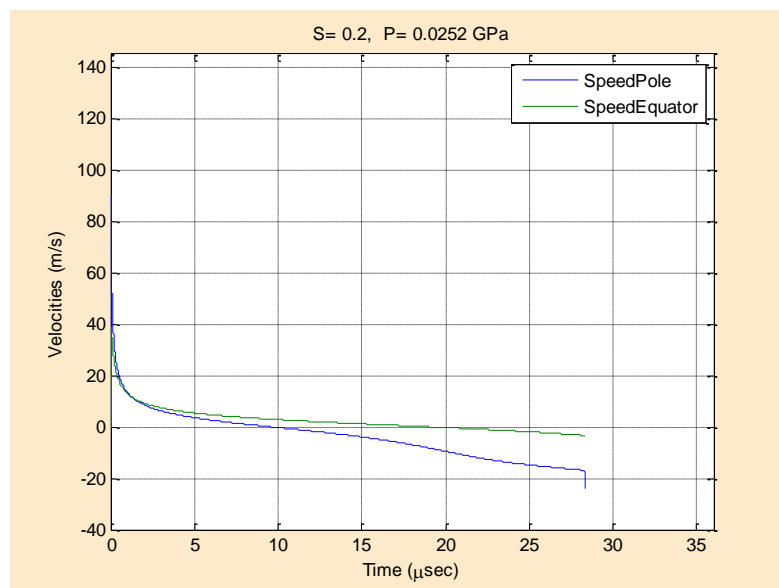
Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.20$

<b>S=0.20</b>	<b>P (Gpa)</b>	<b>max Volume (mm<sup>3</sup>)</b>	<b>Time (μsec) at max volume</b>	<b>v long (m/s) at max volume</b>	<b>v short (m/s) at max volume</b>	<b>Pressure (kPa) at max volume</b>
<b>1-1800</b>	<b>0.0252</b>	<b>0.0127</b>	<b>16.3946</b>	<b>-5.1649</b>	<b>0.7998</b>	<b>8.33168</b>
<b>2-3500</b>	<b>0.049</b>	<b>0.0273</b>	<b>21.3465</b>	<b>-4.519</b>	<b>0.9748</b>	<b>7.52752</b>
<b>3-15000</b>	<b>0.21</b>	<b>0.141</b>	<b>37.7</b>	<b>-1.532</b>	<b>1.4351</b>	<b>6.23756</b>

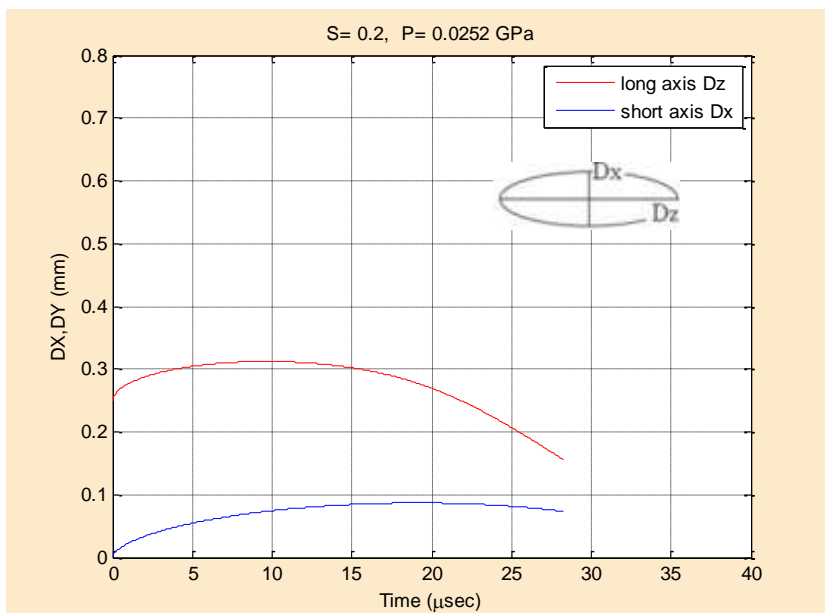
➤ **S=0.20 P=1800**



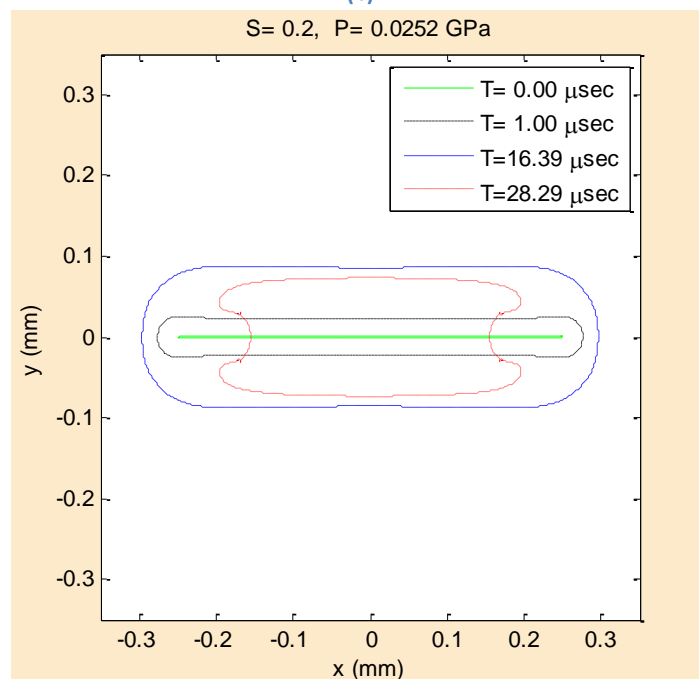
(a)



(b)



(c)

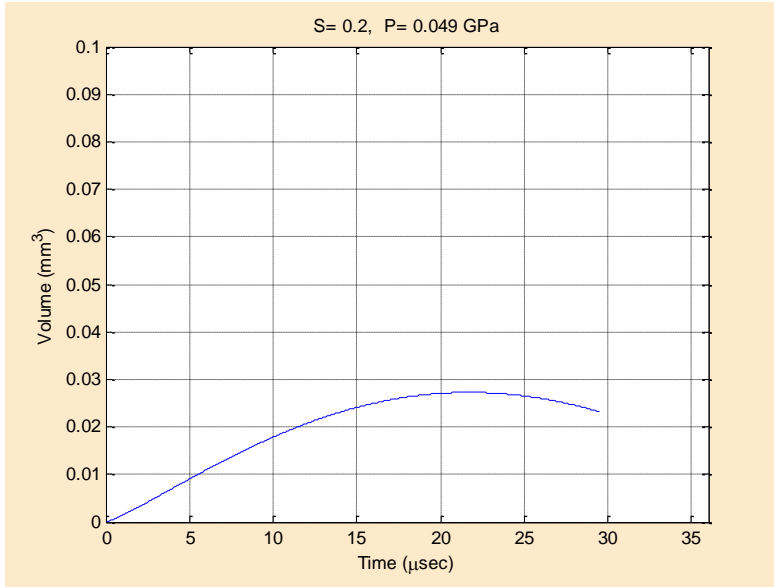


(d)

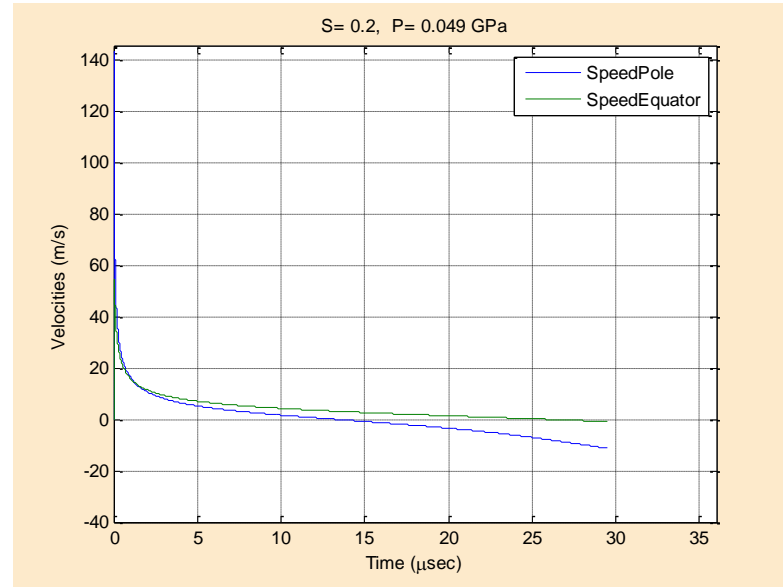
Σχήμα 4.19: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.20$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.0252$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (β) ταχυτήτων πόλου και ισημερινού, (γ) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (δ) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

Εργαστήριο P & Σ / Α. ΠΟΤΕΑΣ: Μεταπτυχιακή Εργασία

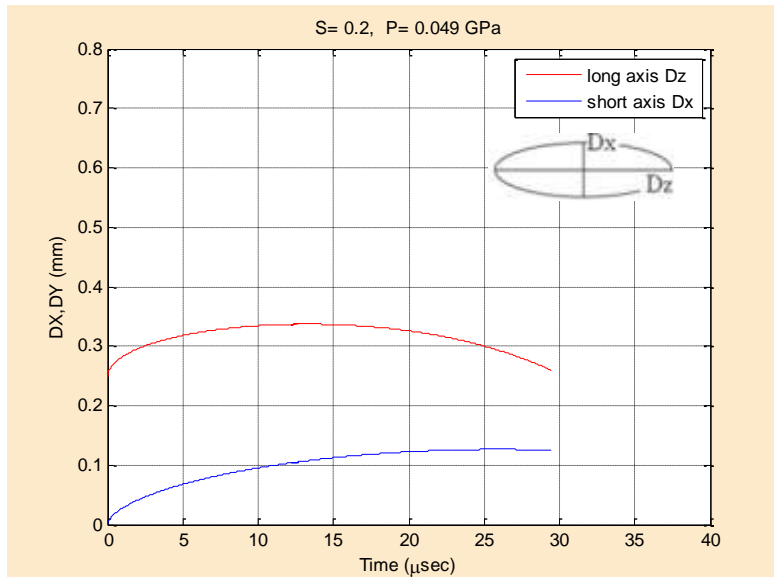
➤ **S=0.20 P=3500**



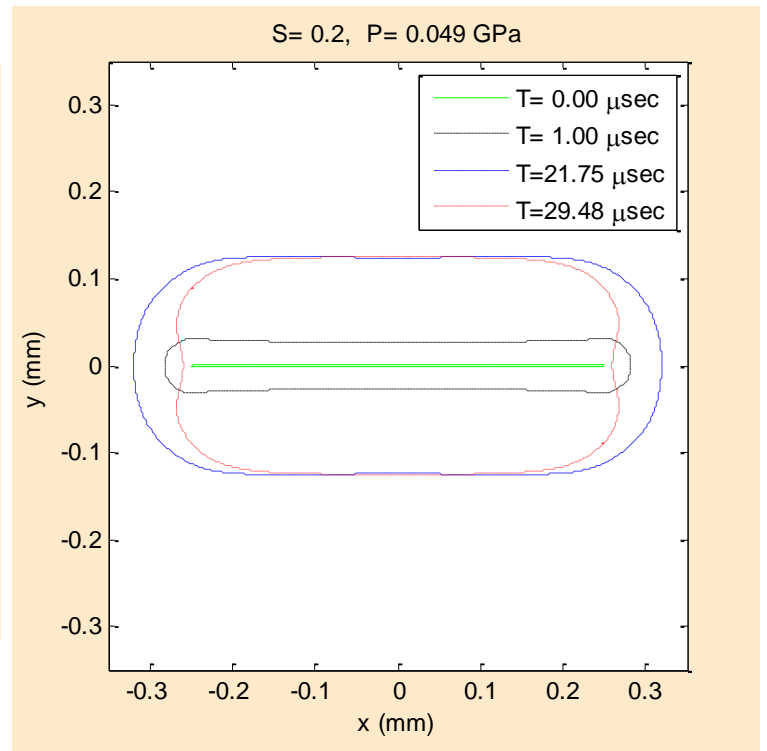
(a)



(b)



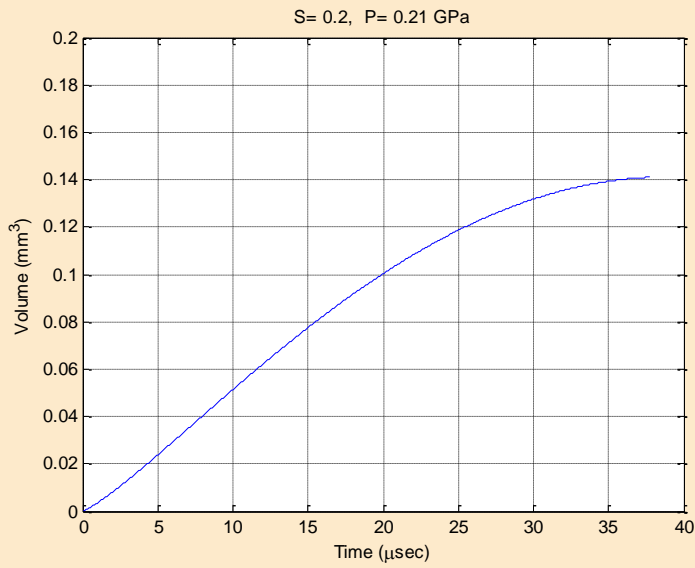
(c)



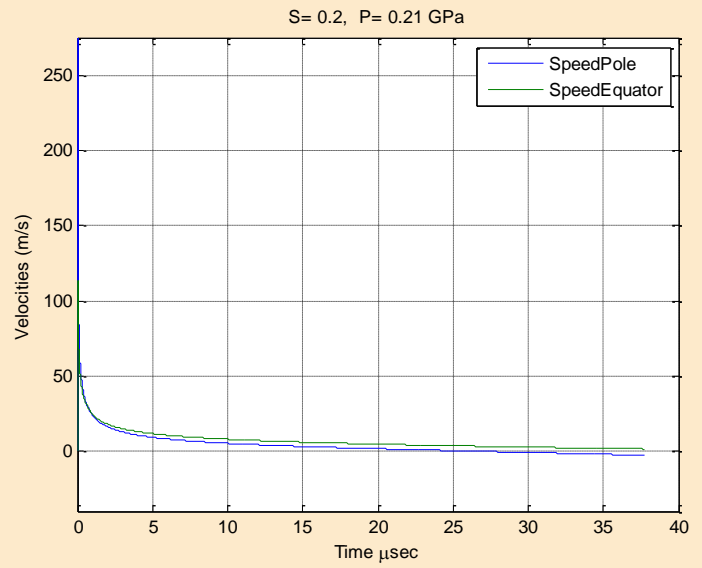
(d)

Σχήμα 4.20: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.20$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.049$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

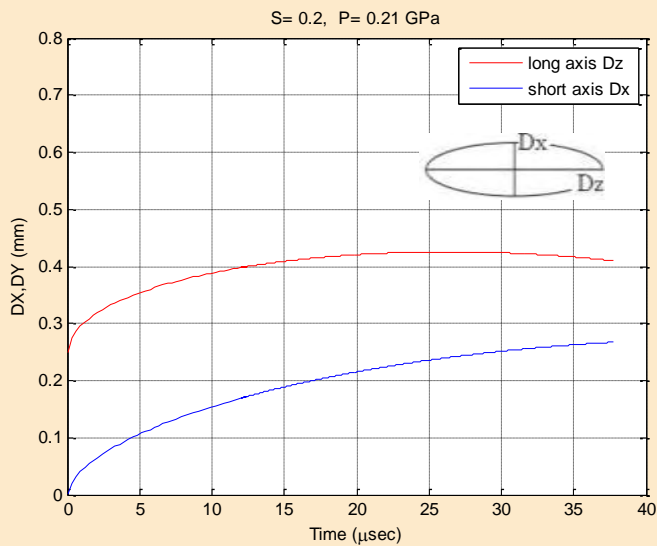
➤ **S=0.20 P=15000**



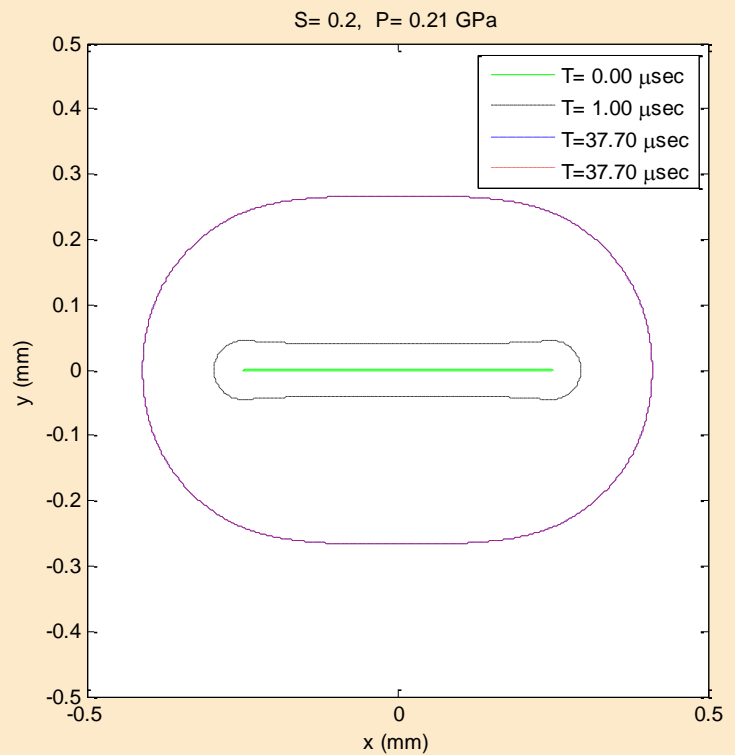
(a)



(b)



(c)



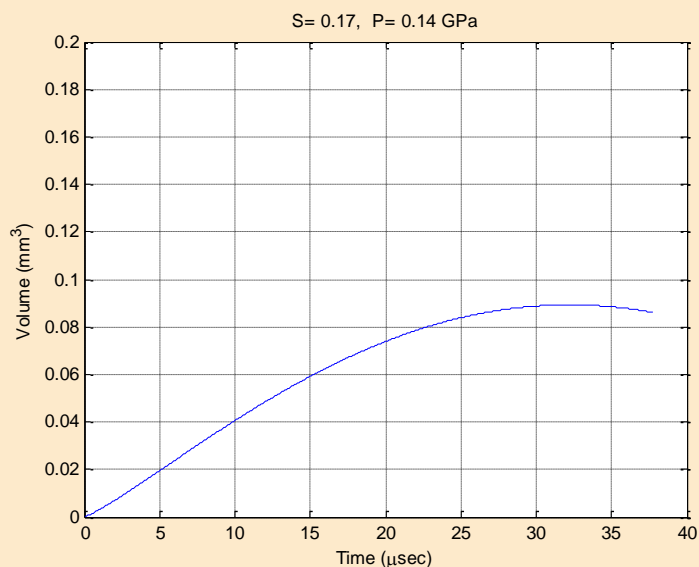
(d)

Σχήμα 4.21: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.20$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.21$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

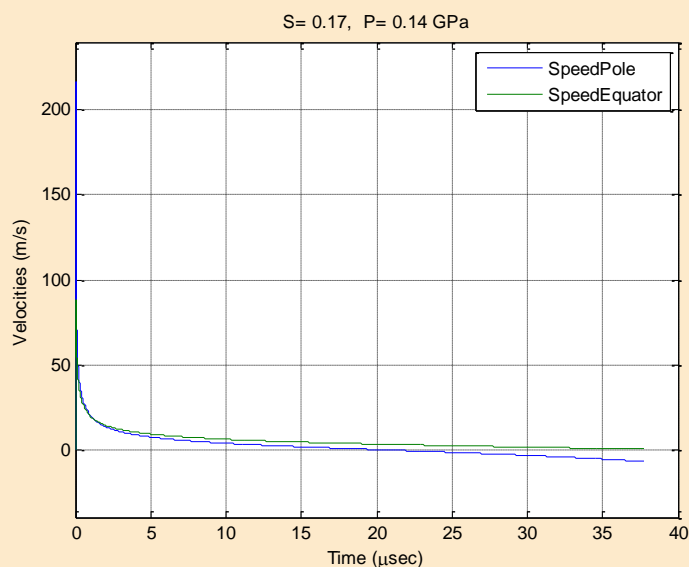
Πίνακας 4.5 Αποτελέσματα προσομοίωσης για εύρος αρχικής υπερπίεσης και για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.17$

$S=0.17$	P (Gpa)	max Volume (mm <sup>3</sup> )	Τιμς (μsec) at max volume	v long (m/s) at max volume	v short (m/s) at max volume	Pressure (kPa) at max volume
1-10000	0.14	0.0893	32.242	-4.3582	1.0308	6.5674
2-15000	0.21	0.1406	37.7	-3.8604	1.1658	6.25618
3-30000	0.42	0.2802	37.399	-0.8065	2.7721	6.2783

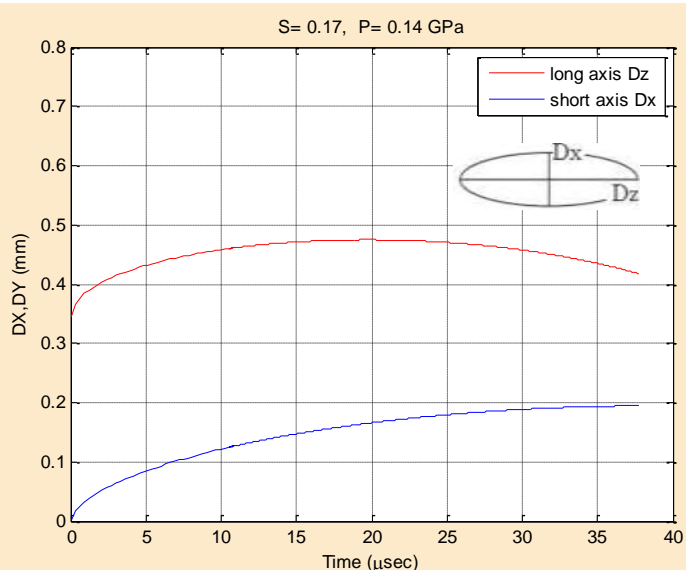
➤  $S=0.17$   $P=10000$



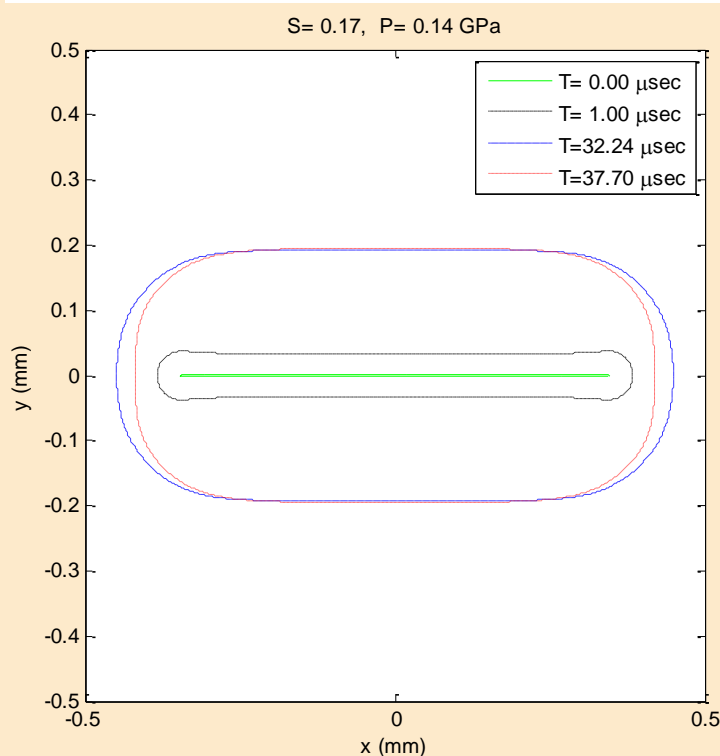
(a)



(b)



(c)

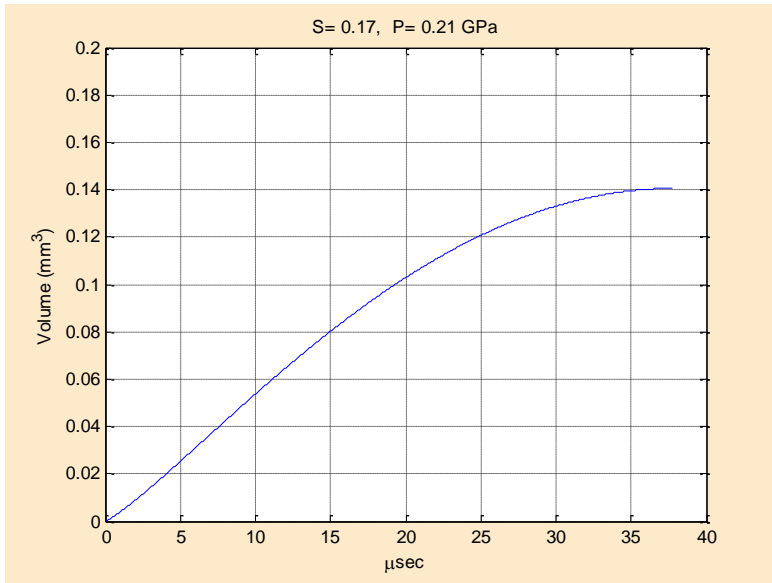


(d)

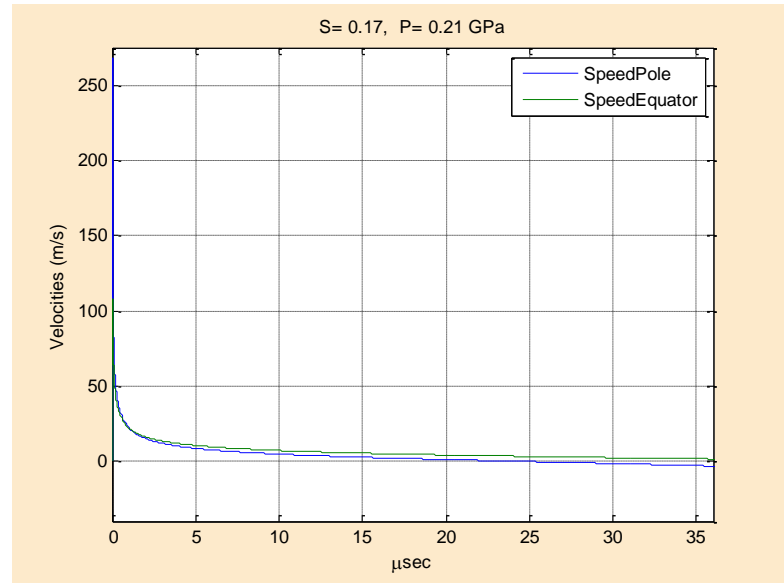
Σχήμα 4.22: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.17$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.14$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχυτήτων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας



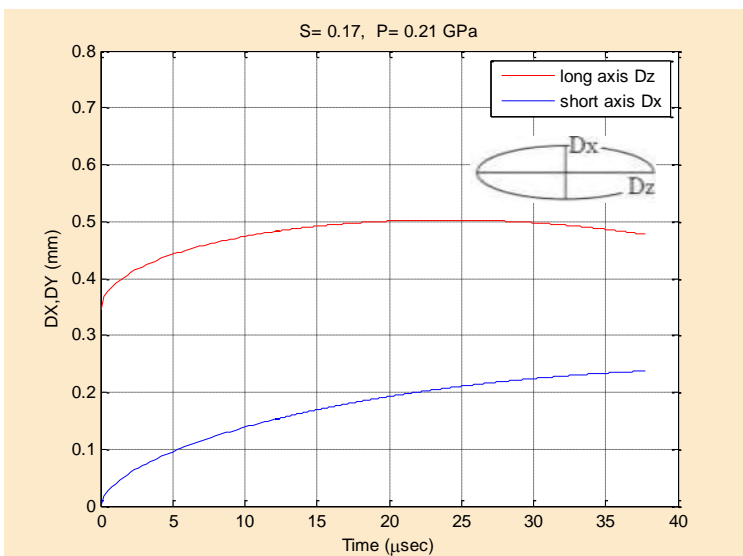
➤ **S=0.17 P=15000**



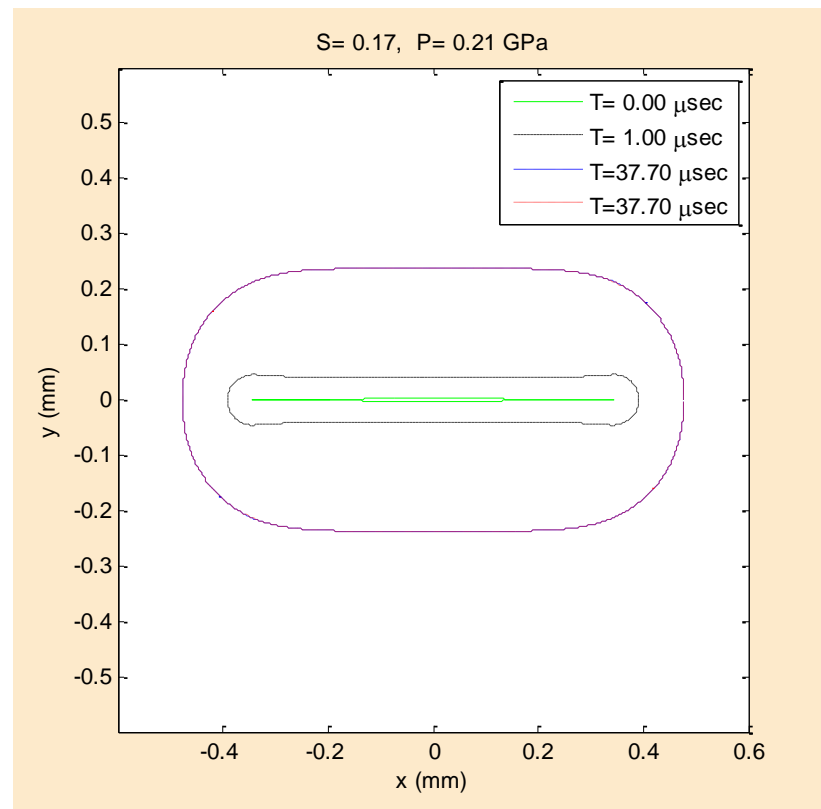
(a)



(b)



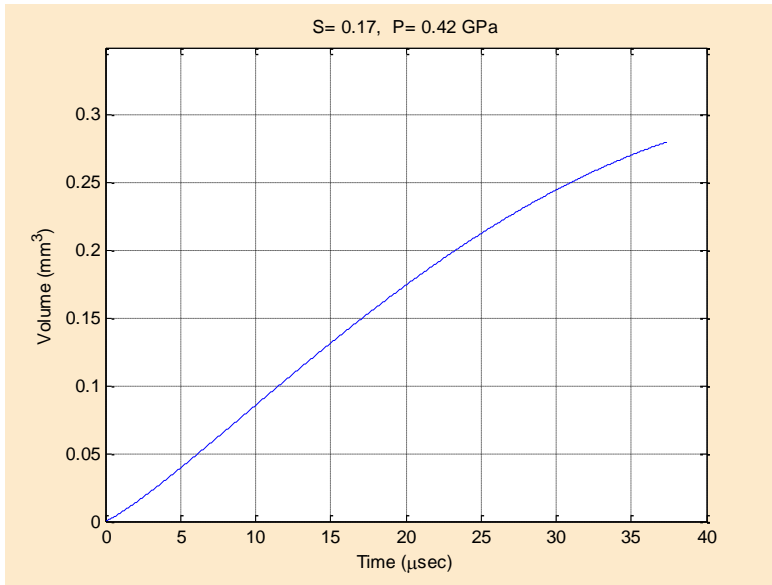
(c)



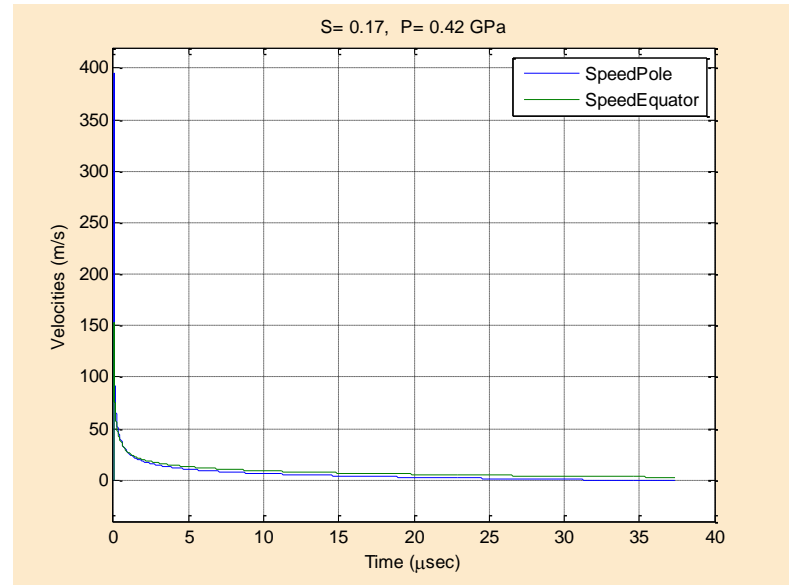
(d)

Σχήμα 4.23: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.17$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.21$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

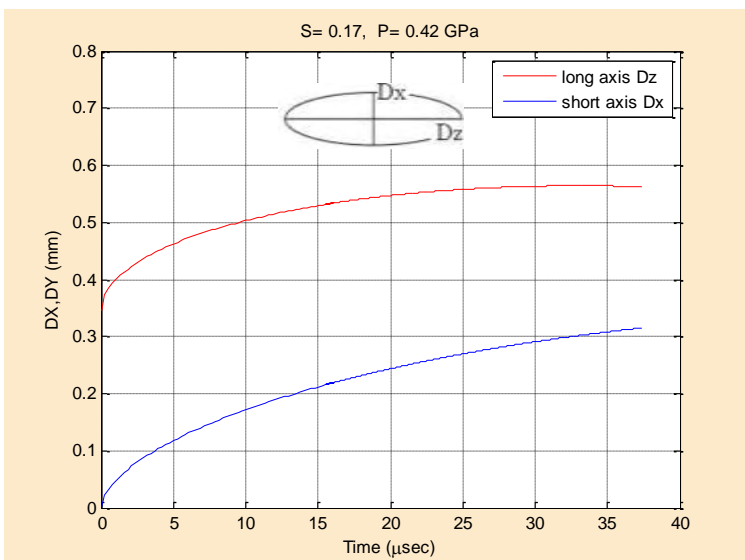
➤ **S=0.17 P=30000**



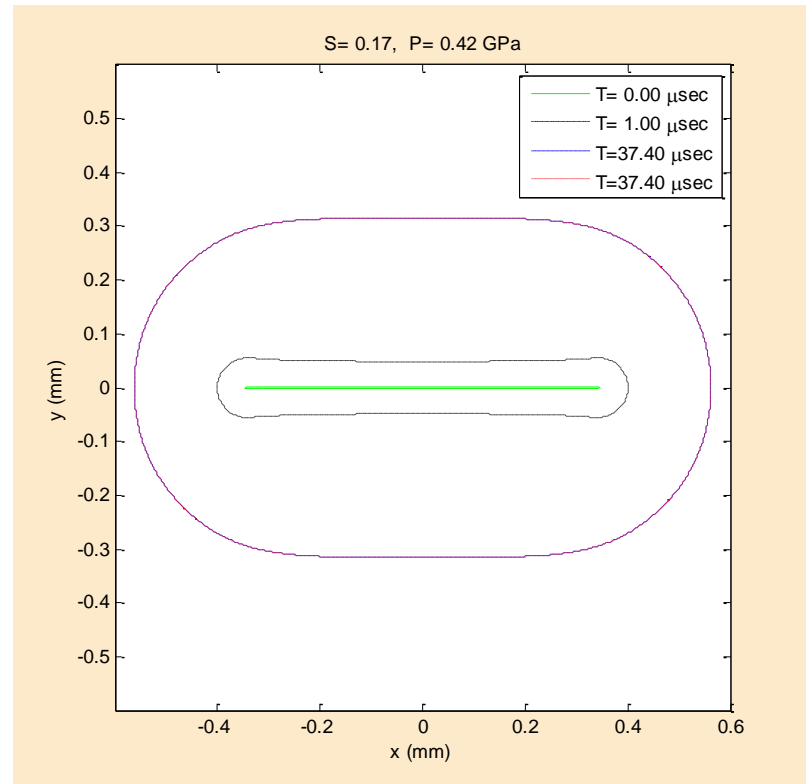
(a)



(b)



(a)



(d)

Σχήμα 4.24: Χρονική εξέλιξη για δεδομένη αρχική επιμήκυνση  $S=0.17$  και αρχική υπερπίεση  $P=0.42$  GPa (α) Όγκου φυσαλίδας, (b) ταχύτητων πόλου και ισημερινού, (c) μεγάλου και μικρού άξονα ( $D_z, D_x$ ), (d) μεταβολής σχήματος της φυσαλίδας

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> Συμπεράσματα & Προτάσεις Για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έγινε μία προσπάθεια προσομοίωσης οπτικών μετρήσεων με στόχο να μελετηθεί η δυναμική συμπεριφορά και ο τρόπος κατάρρευσης ελεύθερης φυσαλίδας παλμού Laser διάρκειας  $10^{-15}$ sec (femtosecond φυσαλίδες). Τα αποτελέσματα εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά με τις διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις. Οι προσομοιώσεις αναπαράγουν την πειραματικά παρατηρούμενη δυναμική συμπεριφορά για αρχική εσωτερική υπερπίεση της μικροφυσαλίδας της τάξης των GPa .

- Αύξηση της αρχικής υπερπίεσης οδηγεί σε μεγαλύτερο μέγιστο όγκο και σε μεγαλύτερο χρόνο (μsec). Αυτό παρατηρήθηκε για εύρος αρχικής επιμήκυνσης για  $S=0.30$  έως  $S=0.17$  όπου έρχεται και πολύ κοντά στην αρχική πειραματική μέτρηση. Στα πειραματικά φαίνεται ότι μεγαλύτερη ενέργεια παλμού οδηγεί σε μεγαλύτερους όγκους και έτσι εξάγεται το συμπέρασμα ότι οφείλεται και σε μεγαλύτερες αρχικές υπερπιέσεις.
- Εκτιμάται ότι για ενέργεια παλμού 100μJ η αρχική υπερπίεση είναι κοντά στα 0.21 GPa, έρχοντας έτσι σε συμφωνία ως προς την τάξη μεγέθους. Αυτό μεταφράζεται σε αρχική μηχανική ενέργεια για την οποία συμπεραίνεται ότι είναι πολύ μεγάλη.
- Διαπιστώνεται ότι σημαντική αύξηση της αρχικής εσωτερικής υπερπίεσης η φυσαλίδα στον μέγιστο όγκο τείνει να πλησιάσει σφαιρικό σχήμα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση αρχικής επιμήκυνσης  $S=0.30$  και αρχικής υπερπίεσης  $P=0.098$ GPa.
- Στην παρούσα μελέτη φυσαλίδων femtosecond, αρχικής ακτίνας της τάξης μερικών μm, και για μεγάλη αρχική υπερπίεση, από τις προσομοιώσεις που διεξήχθησαν προκύπτει ότι ο τρόπος κατάρρευσης, δηλαδή μέσω της διάδοσης jet κατά μήκος του άξονα συμμετρίας ή μέσω κατάρρευσης των τοιχωμάτων στο ύψος του ισημερινού, σχετίζεται με την αρχική ενέργεια και το μέγεθος της μικροφυσαλίδας όταν επιτυγχάνει τον μέγιστο όγκο. Διαφαίνονται λοιπόν οι δύο τρόποι κατάρρευσης αναλόγως της αρχικής ενέργειας παλμού.

- Οι ταχύτητες που αναπτύσσονται κατά την διάρκεια της προσομοίωσης κυμαίνονται στο ίδιο εύρος τιμών, εκτός από τις πολύ αρχικές τιμές όπου δεν υπάρχουν πειραματικές μετρήσεις καθόσον τα πειράματα καταγράφουν τιμές από 1 μsec και μετά. Το κοινό στοιχείο είναι όπως άλλωστε δείχνουν και τα διαγράμματα ταχυτήτων ότι η ταχύτητα που αναπτύσσεται στον ισημερινό είναι μεγαλύτερη από αυτήν στους πόλους. Επίσης κοντά στον μέγιστο όγκο οι ταχύτητες μειώνονται αρκετά και περισσότερο αυτή του ισημερινού όπου τείνει να μηδενιστεί.
- Οι πιέσεις που αναπτύσσονται στον μέγιστο όγκο τείνουν σε μία σταθερή τιμή ίδιας τάξης μεγέθους όπως αποδεικνύεται και από μαθηματικές προσεγγίσεις.
- Οι μετατοπίσεις των ημι-αξόνων καταγράφουν την ίδια συμπεριφορά με τα πειραματικά με μεγαλύτερη απόλυτη μετατόπιση στον μικρό ημι-άξονα.

Μελλοντικά στην προσομοίωση θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν η διαδικασία συμπίκνωσης του πλάσματος και η πτώση πίεσης στην οποία οδηγεί. Για να καταστεί αυτό δυνατόν θα χρειαστεί να υπάρξει εκτίμηση της εσωτερικής πίεσης όταν η μικροφουσαλίδα επιτυγχάνει τον μέγιστο όγκο χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα σχετικά με τον μέγιστο όγκο καθώς και με την ακτινική επιτάχυνση ( χρήση εξίσωσης 2.50). Με τον τρόπο αυτό θα εκτιμηθεί η εσωτερική πίεση κατά την στιγμή της συμπίκνωσης ( $t \approx 100$  ns), για γνωστό όγκο κάνοντας χρήση του καταστατικού νόμου των τελείων αερίων. Έτσι αναμένεται να οδηγηθούμε και πάλι σε αρχικές υπερπιέσεις στην περιοχή των GPa για την επίτευξη του μέγιστου όγκου αλλά σε μικρότερους χρόνους από αυτούς της παρούσας παραμετρικής μελέτης και ακόμα πιο κοντά στις πειραματικές παρατηρήσεις.

Επίσης θα πρέπει να συνεχιστούν οι προσομοιώσεις στο χρόνο μέχρι ώστε να αποτυπωθούν τα τελευταία στάδια της κατάρρευσης και να φανεί έτσι ο τρόπος με τον οποίο καταρρέουν ανάλογα με την αρχική υπερπίεση και κατά συνέπεια να συγκριθεί με τον αντίστοιχο τρόπο κατάρρευσης στα πειράματα ανάλογα με την προσδιδόμενη ενέργεια παλμού laser.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Οι θεμελιώδεις ποσότητες πρώτης τάξης πάνω στη διεπιφάνεια,  $E, F, G$  ορίζονται από τις παραγώγους του διανύσματος θέσης, , κατά μήκος της επιφάνειας,

$$E = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial s}, \quad \vec{t} = E^{1/2} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial s}, \quad G = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \phi}, \quad \vec{e}_\phi = G^{1/2} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \phi}, \quad F = \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial \phi}. \quad (A1)$$

Για ένα ζεύγος ορθογώνιων επιφανειακών μεταβλητών  $F=0$  και οι μετρήσεις κατά μήκος της κατεύθυνσης που σχετίζονται με κάθε μία από αυτές ορίζονται ως,

$$h_t^2 = E, \quad h_\phi^2 = G \quad (A2)$$

Στην περίπτωση αξονοσυμμετρικού σχήματος που εξετάζεται  $h_t = 1, h_\phi = r \sin \theta$ . Οι θεμελιώδεις ποσότητες δευτέρου είδους,  $L, M, N$  ορίζονται ως εξής [4]:

$$L = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial s^2}, \quad N = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial \phi^2}, \quad M = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial s \partial \phi}, \quad (A3)$$

Είναι πολύ σημαντικές ιδιότητες της επιφάνειας και είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των παραγώγων των μοναδιαίων διανυσμάτων . Στην πραγματικότητα, για αξονοσυμμετρική επιφάνεια έχουμε  $M=0$  και

$$\frac{\partial \vec{t}}{\partial s} = L \vec{n}, \quad \frac{\partial \vec{t}}{\partial \phi} = M \vec{n} + \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial s} \vec{e}_\phi = \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial s} \vec{e}_\phi, \quad \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} = 0, \quad (A4)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial s} = \frac{M}{r \sin \theta} \vec{n} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = \frac{N}{r \sin \theta} \vec{n} - \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial s} \vec{t}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial n} = 0, \quad (A5)$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = -L \vec{t} - M \vec{e}_\phi = -L \vec{t}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial \phi} = -M \vec{t} - \frac{N}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi = -\frac{N}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial n} = 0. \quad (A6)$$

Με βάση τις συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  των σωματιδίων της επιφάνειας μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$L = r\theta_s r_{ss} - r^2\theta_s^3 - 2r_s^2\theta_s - r\theta_s\theta_{ss}, \quad N = r \sin \theta (r_s \cos \theta - r\theta_s \sin \theta) \quad (A7)$$

Όπου ο δείκτης  $s$  δείχνει τη μερική διαφοροποίηση.

Σε αυτό το πλαίσιο, αναπαράγεται η έκφραση για το ρυθμό διάτμησης με το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων:

$$\vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t}) + \frac{1}{2}(\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \vec{t}) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} \vec{t} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial}{\partial s} (u_t \vec{t} + u_n \vec{n}) \cdot \vec{n} = \left( \frac{\partial u_t}{\partial s} \vec{t} + u_t \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \vec{n} + u_n \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right) \cdot \vec{n} = \\ &= \left( \frac{\partial u_t}{\partial s} \vec{t} + Lu_t \vec{n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \vec{n} - Lu_n \vec{t} \right) \cdot \vec{n} = Lu_t + \frac{\partial u_n}{\partial s} \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{t} &= \frac{\partial}{\partial n} (u_t \vec{t} + u_n \vec{n}) \cdot \vec{t} = \left( \frac{\partial u_t}{\partial n} \vec{t} + u_t \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial n} \vec{n} + u_n \frac{\partial \vec{n}}{\partial n} \right) \cdot \vec{t} = \\ &= \left( \frac{\partial u_t}{\partial n} \vec{t} + \frac{\partial u_n}{\partial n} \vec{n} \right) \cdot \vec{t} = \frac{\partial u_t}{\partial n}. \end{aligned} \quad (A10)$$

Αλλά, από την αστροβιλότητα μπορούμε να δείξουμε ότι η τελική έκφραση (A8) και (A9) είναι ίσες. Ως αποτέλεσμα αυτού, εφόσον αυτές οι εκφράσεις λαμβάνουν ακριβώς την ίδια μορφή για το πεδίο της ταχύτητας με στροβιλότητα, η κυρίαρχη συνεισφορά στο ρυθμό διάτμησης από το μέρος του πεδίου της ταχύτητας με στροβιλότητα λαμβάνεται από την κάθετη παράγωγο της εφαπτομενικής της συνιστώσας,  $\frac{\partial U_t}{\partial n}$ , και η κατάσταση εξάλειψης της διάτμησης στην διεπιφάνεια περιγράφεται,

$$\frac{\partial U_t}{\partial n} = -2 \frac{\partial u_t}{\partial n} = -2 \left( Lu_t + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) = -2 \left( L \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial n} \right). \quad (A11)$$

Με αυτόν τον τρόπο εξάγονται όλες οι σχέσεις που σχετίζονται με τις εξισώσεις του οριακού στρώματος που ισχύουν στην περιοχή της φυσαλίδας και που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Σχέσεις όπως η (A11) είναι πολύ χρήσιμες για τους αριθμητικούς

υπολογισμούς διότι μας επιτρέπουν να παρακάμψουμε τις ορθές παραγώγους όπως  $\frac{\partial u_t}{\partial n}$  και η οποία δεν μπορεί να υπολογιστεί μόνο με βάση τις επιφανειακές μεταβλητές. Η μόνη ορθή παράγωγος που υπολογίζεται απευθείας είναι αυτή του βαθμωτού δυναμικού  $\Phi$  μέσω των συνοριακών στοιχείων (2.25). Το ίδιο ζήτημα μπορεί να τεθεί για την κανονική παράγωγο

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (A12)$$

που εμφανίζεται στην κάθετη ισορροπία δυνάμεων, (2.42), και στο ενεργειακό ισοζύγιο, (2.48).

Εντούτοις, η εκτίμηση της συνέχειας, με τρόπο παρόμοιο με αυτό που παρουσιάστηκε για την κατάσταση μηδενικής διατμητικής τάσης στην διεπιφάνεια είναι,

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = u_n \left( L + \frac{N}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial s} (u_t r \sin \theta), \quad (A13)$$

Η παραπάνω έκφραση είναι πιο εύκολο να εκτιμηθεί, βασισμένη στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (2.42) και (2.44) που εμπεριέχουν μεταβλητές ως συνάρτηση του μήκους-τόξου  $s$  κατά μήκος της καμπυλότητας που δημιουργείται στην επιφάνεια της φουσαλίδας.

## Βιβλιογραφία

1. G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967
2. N. A. Pelekasis & J. A. Tsamopoulos, "Bjerknes forces between two bubbles. Part 1: Response to a step change in pressure," *J. Fluid Mech.* **254**, 467-499 (1993).
3. N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos & G. D. Manolis, "A hybrid finite- boundary element method for inviscid flows with free surface," *J. Comp. Phys.* **101**(2), 231-251 (1992).
4. C. A. Weatherburn, *Differential geometry of three dimensions Vol. I & II*, Cambridge University Press, 1927.
5. T. S. Lundgren & N. N. Mansour, "Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects," *J. Fluid Mech.* **194**, 479-510 (1988).
6. J. M. Boulton-Stone & J. R. Blake, "Gas bubbles bursting at a free surface," *J. Fluid Mech.* **254**, 437-466 (1993).
7. Oguz H.N. & Prosperetti A. 1990 'Bubble Entrainment by the Impact of Drops on Liquid Surfaces', *J. Fluid Mechanics* **219**, 143-179.
8. J. K. Choi and G. L. Chahine, "Noise due to extreme bubble deformation near inception of tip vortex cavitation," *Phys. Fluids* **16**, 2411 (2004).
9. E. Canot and J.-L. Achard, "An overview of boundary integral formulations for potential flows in fluid-fluid systems," *Arch. Mech.* **43**, 453 (1991)
10. J. M. Boulton-Stone, "A comparison of boundary integral methods for studying the motion of a two-dimensional bubble in an infinite fluid," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **102**, 213 (1993).



11. A. H. Stroud and D. Secrest, Gaussian Quadrature Formulas (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966).
12. C. de Boor, A Practical Guide to Splines (Springer-Verlag, New York, 1978).
13. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1972).
14. J. C. Lachat and J. O. Watson, Int. J. Numer. Methods Eng. **10**, 991 (1976).
15. J. F. Thompson, Z. U. Warsi & W. C. Mastin, *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North Holland, 1985.
16. M. Loewenberg & E. J. Hinch, "Numerical simulation of a concentrated suspension in shear flow." J. Fluid Mech. **321**, 395-419 (1996).
17. D. Leppinen & J. R. Lister, "Capillary pinch-off in inviscid liquids," **15**, 568-578 (2003).
18. S. Hilgenfeldt, D. Lohse & H. P. Brenner, "Phase diagrams for sonoluminescing bubbles," Physics Fluids **8**(11), 2608-2626 (1996); **9** 2462(E), (1996).
19. J. R. Blake and D. C. Gibson, "Cavitation bubbles near boundaries," Annu. Rev. Fluid Mech. **19**, 99(1987).
20. K. Tsiglifis, "Numerical Simulation of Bubble Dynamics in Response to Acoustic Disturbances" PhD Thesis submitted to the university of Thessaly (2007)
21. C. E. Brennen, Cavitation and Bubble Dynamics, Oxford U. Press, New York (1995).

22. L. Guerri, G. Lucca & A. Prosperetti, "A numerical method for the dynamics of non-spherical cavitation bubbles", In D.H. LeCroisette (ed.) proceedings of the 2nd International Colloquium on Drops and Bubbles. Pasadena (CA): Jet Propulsion Laboratory (Publ. 82-7), 175-181 (1982).
23. J. R. Blake, B.B. Taib & G. Doherty, "Transient cavities near boundaries. Part 1. Rigid boundary", J. Fluid Mech. 170, 479-497 (1986).
24. Y. Tomita & A. Shima, "Mechanisms of impulsive pressure generation and damage pit formation by bubble collapse", J. Fluid Mech. 169, 535-564 (1986).
25. A. Philipp, & W. Lauterborn, "Cavitation erosion by single laser-produced bubbles," J. Fluid Mech. 361, 75-116 (1998).
26. A. Pearson, J.R. Blake & S.R. Otto, "Jets in bubbles", Journal of Engineering Mechanics 48, 391-412 (2004).
27. O. Lindau & W. Lauterborn, "Cinematographic observation of the collapse and rebound of a laser-produced cavitation bubble near a wall", J. Fluid Mech. 479, 327-348 (2003).
28. F. D. Gaitan, L. A. Crum, C. C. Church & R. A. Roy, "Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble," J. Acoust. Soc. Am. **91**, 3166-3183 (1992).
29. W. Lauterborn (ed.) *Cavitation and inhomogeneities in underwater acoustics*. Berlin: Springer (1980)..
30. C. D. Ohl, O. Lindau & W. Lauterborn, "Luminescence from spherically and aspherically collapsing laser bubbles," Phys. Rev. Lett. **80**(2), 393-396 (1998).

31. C. D. Ohl, T. Kurz, R. Geisler, O. Lindau & W. Lauterborn, "Bubble dynamics, shock waves and sonoluminescence," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **357**, 269-294 (1999).
32. T. B. Benjamin & A. T. Ellis, "The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries." *Phil. Trans. R. Soc. A*. **260**, 221- (1966).
33. J.R. Blake, M.C. Hooton, P.B. Robinson, & R.P Tong, 'Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact,' *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. **355**, 537-550 (1997).
34. J. P. Best "The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities", *J. Fluid Mech.* **251**, 79-107 (1993).
35. 1. A. Prosperetti, "A new mechanism for sonoluminescence", *J. Acoust. Soc. Am.* 101(4), 2003-2007 (1997).
36. S. Hilgenfeldt, D. Lohse, and H. P. Brenner, "Phase diagrams for sonoluminescing bubbles," *Phys. Fluids* **8**, 2608 \_1996\_; erratum, *ibid.* **9**, 2462 1996.
37. Prentice, P., Cuschieri, A., Dholakia, K., Prausnitz, M.,and Campbell, P., Membrane disruption by optically controlled microbubble cavitation, *Nature Phys.* 1, 107 – 110 (2005).
38. Ohl, C-D., et al., Sonoporation from Jetting Cavitation Bubbles, *Biophysic. J.*, 91 42854295 (2006).
39. Marmottant, P., Hilgenfeldt, S., A bubble-driven microfluidic transport element for bioengineering, *Proc.Nat. Academ. Sci.*, 101, 9523-9527 (2004).
40. D. Faccio, G. Tamosauskas E. Rubino, J. Darginavicius, D G. Papazoglou, S. Tzortzakis, A. Couairon, and A. Dubietis Cavitation dynamics and directional microbubble ejection induced by intense femtosecond laser pulses in liquids *PHYSICAL REVIEW E* 86, 036304 (2012).

41. K. Tsiglifis & N. Pelekasis, "Non-linear oscillation and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects", *Physics of Fluids*, 17(10), 1-18 (2005).
42. K. Tsiglifis & N. Pelekasis, "Non-Linear Oscillations and Collapse of Elongated Bubbles Subject to Weak Viscous Effects: Effect of Internal Overpressure" *Phys. Fluids*, [19] 072106 (2007).
43. K. Tsiglifis & N. Pelekasis, "Numerical simulations of the collapse of laser and acoustically generated bubbles", *Ultrason. Sonochem.* 14(4), 456-469, 2007.

