



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

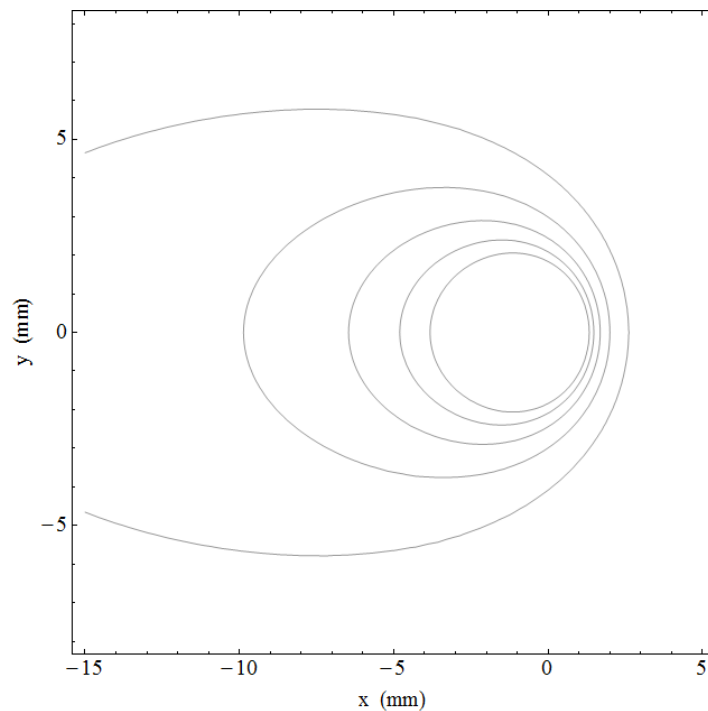
Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ**  
**ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΧΥΣΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΣΕ**  
**ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΚΡΑΜΑΤΑ**

υπό

**Μπαμπίλη Γεωργίου**

Επιβλέπων καθηγητής: **Δρ. Γρηγόρης Χαϊδεμενόπουλος**



Βόλος, 2012

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

**Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Γρηγόριος Ν. Χαϊδεμενόπουλος, Καθηγητής Φυσικής Μεταλλουργίας - Ανάπτυξης Κραμάτων & Σύγχρονων Κατεργασιών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Νικόλαος Αράβας, Καθηγητής Υπολογιστικής Μηχανικής των Κατασκευών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Κερμανίδης Αλέξης, Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής Μηχανικής Συμπεριφοράς Υλικών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

εικόνα εξώφυλλου: διάγραμμα ισοθερμικών καμπυλών συγκόλλησης ελάσματος  
μεγάλου πάχους (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)

© 2012 Γεώργιος Μπαμπίλης

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν  
υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

# ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΧΥΣΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΣΕ ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΚΡΑΜΑΤΑ

Μπαμπίλης Γεώργιος

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2012

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γρηγόριος Χαϊδεμενόπουλος, Καθηγητής Φυσικής  
Μεταλλουργίας - Ανάπτυξης Κραμάτων & Σύγχρονων Κατεργασιών

## Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο κύρια μέρη. Στο πρώτο έγινε η εξέταση των μοντέλων συγκόλλησης τόξου από το βιβλίο “Metallurgical Modelling of Welding” του Øystein Grong ως συνέχεια προηγούμενης εργασίας που εξέταζε τις συγκολλήσεις με ακίνητες θερμικές πηγές. Στη συνέχεια στο δεύτερο μέρος μελετήθηκαν διάφορες λύσεις διάχυσης από το βιβλίο “The Mathematics of Diffusion” του John Crank. Πραγματοποιήθηκε η μεταφορά των μοντέλων σε μορφή κώδικα με το λογισμικό Mathematica για κάθε περίπτωση συγκόλλησης και διάχυσης ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα της κάθε μεθόδου οπτικοποιήθηκαν σε μορφή διαγραμμάτων που παρήχθησαν, από διάφορα παραδείγματα, για την καλύτερη παρατήρηση και κατανόηση τους.

Στην αρχή του μέρους Α δίνονται συνοπτικά οι τέσσερις περιπτώσεις ακίνητων θερμικών πηγών που λύθηκαν σε προηγούμενη εργασία, δηλαδή: η έναυση τόξου στο βασικό μέταλλο (arc strikes), οι σημειακές συγκολλήσεις (spot welding), οι αλουμινοθερμικές συγκολλήσεις (thermit welding) και οι συγκολλήσεις τριβής (friction welding). Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά οι τρεις λύσεις Rosenthal για συγκολλήσεις σε ελάσματα μεγάλου πάχους, σε λεπτά ελάσματα απείρου πλάτους και ελάσματα πεπερασμένου πάχους. Εν τέλει εξετάστηκαν απλοποιημένες λύσεις ταχεία κινούμενων πηγών υψηλής ενέργειας για ελάσματα μεγάλου πάχους και λεπτά ελάσματα και λύσεις για τον προσδιορισμό αραίωσης, διείσδυσης ραφής και προθέρμανσης συγκόλλησης.

Στο μέρος Β αρχικά εξετάστηκαν και λύθηκαν μέσω Mathematica οι συνηθέστερες λύσεις της εξίσωσης διάχυσης και μετέπειτα γενικές περιπτώσεις λύσεων διάχυσης από το βιβλίο του Crank.

Τέλος έγινε παραμετρική μελέτη για τις λύσεις συγκολλήσεων ελασμάτων μεγάλου πάχους (i. thick plate solutions) και διάχυσης σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L (ενανθράκωση - απανθράκωση) (vii. plate).

## Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γρηγόριο Ν. Χαϊδεμενόπουλο για την βοήθεια και καθοδήγηση του, όλα αυτά τα χρόνια, και σε επίπεδο προπτυχιακού αλλά και μεταπτυχιακού για την ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Νικόλαο Αράβα και τον κ. Αλέξη Κερμανίδη όπως επίσης την κα. Άννα Ζερβάκη για το χρόνο που αφιέρωσαν στην ανάγνωση και εξέταση της. Πρέπει να ευχαριστήσω τους φίλους μου, Γεώργιο Καραφυλλιά και Αναστάσιο Μ. Χιδερίδη για τη βοήθεια και υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια όπως επίσης και την Ευαγγελία Κορίτσα για την όλη βοήθεια της. Θέλω να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά την Καλλιόπη Καλογιαννάκη για τη σημαντική στήριξη και βοήθεια της. Ευχαριστώ τα αδέρφια μου, Κωνσταντίνα, Παναγιώτη, Άννα και Ευδοκία Μπαμπίλη για την κατανόηση και αγάπη που μου δείχνουν όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος είμαι ευγνώμων στους γονείς μου π. Δημήτριο και Μαρία Μπαμπίλη για την αγάπη και ατελείωτη υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια σε όλους τους τομείς της ζωής μου. Η διπλωματική εργασία του μεταπτυχιακού αφιερώνεται στην οικογένεια μου, όπως πάντα.

Γεώργιος Μπαμπίλης

Βόλος 2012



## Περιεχόμενα

A.	ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ .....	8
1.	Εισαγωγή .....	8
1.1.	Αντικείμενο της εργασίας .....	8
1.2.	Εξίσωση μετάδοσης θερμότητας .....	9
1.3.	Θερμικές ιδιότητες μετάλλων και κραμάτων .....	9
2.	Ακίνητες Θερμικές Πηγές .....	11
	Γενικά.....	11
2.1.	Έναυση τόξου στο βασικό μέταλλο (arc strikes).....	13
2.2.	Σημειακές Συγκολλήσεις (spot welding) .....	13
2.3.	Αλουμινοθερμικές συγκολλήσεις (thermit welding) .....	14
2.4.	Συγκολλήσεις τριβής (friction welding).....	15
3.	Κινούμενες Θερμικές Πηγές.....	17
3.1.	Ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους (thick plate solutions) .....	19
3.2.	Λεπτό έλασμα απείρου πλάτους (thin plate solutions).....	32
3.3.	Έλασμα πεπερασμένου πάχους (medium plate solutions) .....	44
3.4.	Απλουστευμένη λύση για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ελάσματα μεγάλου πάχους (thick plate solutions).....	51
3.5.	Απλουστευμένη λύση για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα (thin plate solutions) .....	57
4.	Ειδικά χαρακτηριστικά συγκολλήσεων .....	63
4.1.	Αραίωση ραφής.....	63
4.2.	Προθέρμανση .....	65
B.	ΔΙΑΧΥΣΗ .....	70
1.	Εισαγωγή .....	70
2.	Μεθοδολογία Επίλυσης .....	74
2.1.	Συνηθέστερες Λύσεις της εξίσωσης διάχυσης.....	74
2.2.	Γενικές περιπτώσεις Λύσεων της εξίσωσης διάχυσης.....	83
Γ.	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ .....	97
1.	Επιδράσεις παραμέτρων στις συγκολλήσεις σε ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους	97
2.	Επιδράσεις παραμέτρων στη διάχυση σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L.....	109
3.	Γενικά συμπεράσματα .....	112

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	113
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α - Συγκολλήσεις .....	114
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Διάχυση.....	219

## A. ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ

### 1. Εισαγωγή

Ο προσδιορισμός της θερμοκρασιακής κατανομής σε μία συγκόλληση αποτελεί προϋπόθεση για τη μελέτη της μεταλλουργίας των συγκολλήσεων. Κατά τη διάρκεια των συγκολλήσεων οι μετασχηματισμοί φάσεων πραγματοποιούνται σε διάστημα δευτερολέπτων και σε πολύ μικρό όγκο μετάλλου εκεί όπου οι θερμικές καταστάσεις είναι πολύ διαφορετικές από αυτές που προηγούνται της παραγωγής, χύτευσης και έλασης των μετάλλων και των κραμάτων.

Από πρακτική άποψη η αναλυτική προσέγγιση στη λύση των προβλημάτων ροής θερμότητας στις συγκολλήσεις είναι προτιμότερη, καθώς αυτό κάνει εφικτή την άντληση σχετικά απλών εξισώσεων που παρέχουν τις απαραίτητες βάσεις για την κατανόηση του μοτίβου θερμοκρασίας – χρόνου. Ωστόσο, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των φαινομένων ροής θερμότητας, είναι απαραίτητο να ελεγχθεί η εγκυρότητα τέτοιων προβλέψεων μέσω αξιόπιστων δεδομένων που έχουν παραχθεί από αριθμητικούς υπολογισμούς. Παρόλο που τα αναλυτικά μοντέλα στερούνται, λόγω πολυάριθμων απλοποιημένων υποθέσεων, ποσοτικής ακρίβειας, παρέχουν όμως αρκετά ακριβή ποιοτική εικόνα του θερμικού - θερμοκρασιακού χάρτη των συγκολλήσεων.

#### 1.1. Αντικείμενο της εργασίας

Η παρούσα εργασία είναι η ολοκλήρωση της μελέτης και του προγραμματισμού της διπλωματικής που είχε ως αντικείμενο τις συγκολλήσεις με ακίνητες πηγές θερμότητας στο προπτυχιακό επίπεδο. Εδώ ολοκληρώνεται το κεφάλαιο με την επίλυση των αναλυτικών μοντέλων σε συγκολλήσεις με κινούμενες πηγές. Αφού αδιαστατοποιήθηκαν αρκετές ομάδες παραγόντων ώστε να απλοποιηθεί κατά πολύ ο μεγάλος αριθμός μεταβλητών κάθε λύση προγραμματίστηκε ξεχωριστά και οπτικοποιήθηκε με την δημιουργία διαγραμμάτων. Προέκυψε μία χρήσιμη πηγή πληροφοριών τα αποτελέσματα της οποίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν περισσότερο ως μια ενδεικτική εικόνα των φαινομένων που λαμβάνουν μέρος κατά τη διάρκεια των συγκολλήσεων τόξου, παρά ως λύσεις ποιοτικής ακρίβειας. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε αριθμητικές μεθόδους, το οποίο θα ξέφευγε από την παρούσα εργασία. Τα αναλυτικά μοντέλα επιλύθηκαν με το λογισμικό Mathematica. Με αυτή τη μορφή επιτυγχάνεται η μελέτη της κάθε μεθόδου συγκόλλησης σε βάθος και η κατάλληλη εξαγωγή συμπερασμάτων για την επίδραση διαφόρων παραμέτρων και συνθηκών στην κάθε περίπτωση. Όλα τα μοντέλα βασίστηκαν στο βιβλίο Metallurgical Modelling of Welding του Øystein Grong [1].

Τα μοντέλα που επιλύθηκαν είναι:

- I. Ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους (thick plate solutions)
- II. Λεπτό έλασμα άπειρου πλάτους (thin plate solutions)
- III. Έλασμα πεπερασμένου πάχους (medium thick plate solutions)



- IV. Απλουστευμένες λύσεις για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ελάσματα μεγάλου πάχους (thick solutions)
- V. Απλουστευμένες λύσεις για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα (thin solutions)
- VI. Αραίωση ραφής
- VII. Προθέρμανση

## 1.2. Εξίσωση μετάδοσης θερμότητας

Οι θερμικές απώλειες από τις ελεύθερες επιφάνειες από την ακτινοβολία και τη συναγωγή είναι συνήθως αμελητέες στις συγκολλήσεις οπότε η κατανομή θερμοκρασίας μπορεί γενικά να βρεθεί από τις θεμελιώδεις διαφορικές εξισώσεις αγωγής θερμότητας στα στερεά. Για μονοαξονική θερμική αγωγή η εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1-1)$$

όπου  $T$  η θερμοκρασία,  $t$  ο χρόνος,  $x$  η κατεύθυνση ροής θερμότητας και  $a$  η θερμοδιαχυτότητα. Η θερμοδιαχυτότητα συσχετίζεται με την θερμική αγωγιμότητα  $\lambda$  και τη θερμοχωρητικότητα  $\rho c$  μέσω της εξίσωσης:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (1-2)$$

Για διαξονική και τριαξονική θερμική αγωγή προκύπτει:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (1-3)$$

και

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[ a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (1-4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται από τις λύσεις των προβλημάτων θερμικής αγωγής αλλά για δεδομένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες θα υπάρχει μία και μοναδική λύση.

## 1.3. Θερμικές ιδιότητες μετάλλων και κραμάτων

Μία βασική προϋπόθεση για τη λήψη απλών αναλυτικών λύσεων από τις διαφορικές εξισώσεις θερμοροής είναι ότι οι θερμικές ιδιότητες του βασικού μετάλλου είναι ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Για τα περισσότερα μέταλλα και κράματα αυτό είναι μία μη ρεαλιστική υπόθεση αφού τα  $\lambda$ ,  $a$  και  $\rho c$  μπορεί να μεταβάλλονται σημαντικά με τη θερμοκρασία. Επιπλέον οι θερμικές ιδιότητες

εξαρτώνται από τη χημική σύσταση και τη θερμική ιστορία του βασικού μετάλλου γεγονός που περιπλέκει αρκετά την κατάσταση. Παραβλέποντας τέτοιες επιδράσεις στα μοντέλα θερμοροής, επιβάλλονται διάφοροι περιορισμοί στην εφαρμογή των αναλυτικών λύσεων.

Παρόλα αυτά, η εμπειρία δείχνει ότι αυτά τα προβλήματα ξεπερνιούνται με την επιλογή λογικών μέσων τιμών για τα  $\lambda$ ,  $\alpha$  και  $\rho c$  σε συγκεκριμένο θερμοκρασιακό πεδίο. Ο πίνακας A1 έχει συγκεντρωμένες όλες τις ιδιότητες μετάλλων και κραμάτων χρήσιμων στους υπολογισμούς και περαιτέρω στα προγράμματα που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία. Επίσης στον πίνακα 1 δεν περιέχεται διόρθωση για την λανθάνουσα θερμότητα τήξης των κύριων μετάλλων. Τέτοιες διορθώσεις μπορούν να επιτευχθούν μέσω της ρύθμισης του βαθμού απόδοσης της συγκόλλησης  $\eta$  μέχρι τη συσχέτιση των αποτελεσμάτων θεωρίας και πράξης (πειραματικά).

**Πίνακας A1** Φυσικές ιδιότητες ορισμένων μετάλλων και κραμάτων [1]

Υλικό	$\lambda$ (W mm <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\rho c$ (J mm <sup>-3</sup> °C <sup>-1</sup> )	$T_m$ (°C)	$H_m-H_0$ (J mm <sup>-3</sup> )	$\Delta H_m$ (J mm <sup>-3</sup> )
Carbon Steels	0,04	8	0,005	1520	7,5	2
Low Alloy Steels	0,025	5	0,005	1520	7,5	2
High Alloy Steels	0,02	4	0,005	1500	7,4	2
Titanium Alloys	0,03	10	0,003	1650	4,89	1,4
Aluminium (>99% Al)	0,23	85	0,0027	660	1,73	0,8
Al-Mg-Si Alloys	0,167	62	0,0027	652	1,71	0,8
Al-Mg Alloys	0,149	55	0,0027	650	1,7	0,8

† Δεν περιλαμβάνει τη λανθάνουσα θερμότητα τήξης ( $\Delta H_m$ ).

## 2. Ακίνητες Θερμικές Πηγές

### Γενικά

Η γενική ιδέα των μη κινούμενων θερμικών πηγών χρησιμοποιείται ευρέως στη θεωρία της θερμικής αγωγιμότητας. Οι λύσεις είναι βασισμένες στην υπόθεση ότι η θερμότητα απελευθερώνεται τη χρονική στιγμή  $t=0$  σε ένα άπειρο μέσο αρχικής θερμοκρασίας  $T_0$ , είτε διαμέσου ενός επιπέδου (μονοαξονική αγωγή), είτε διαμέσου μίας γραμμής (διαξονική αγωγή), είτε σε ένα σημείο (τριαξονική αγωγή). Το υλικό εξωτερικά της θερμικής πηγής θεωρείται ότι επεκτείνεται στο  $x = \pm \infty$  για μια επίπεδη πηγή σε μακριά ράβδο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1α, στο  $r = \infty$  για μια γραμμική πηγή σε πλατύ έλασμα (π.χ. λαμαρίνα) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1β ή στο  $R = \infty$  για μια σημειακή πηγή σε μια βαριά πλάκα (μεγάλου πάχους) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1γ. Αρχικές και συνοριακές συνθήκες συνοψίζονται ως εξής:

- $T - T_0 = \infty$  για  $t = 0$  και  $x = 0$  (εναλλακτικά  $r = 0$  και  $R = 0$ )
- $T - T_0 = 0$  για  $t = 0$  και  $x \neq 0$  (εναλλακτικά  $r > 0$  και  $R > 0$ )
- $T - T_0 = 0$  για  $0 < t < \infty$  και  $x = \pm \infty$  (εναλλακτικά  $r = \infty$  και  $R = \infty$ )

Οι παρακάτω εξισώσεις ικανοποιούν τις (1-1), (1-3) και (1-4) και τις παραπάνω αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

- i. Επίπεδη πηγή σε μακριά ράβδο (απείρου μήκους) (Σχήμα 2.1α):

$$T - T_0 = \frac{\frac{Q}{A}}{\rho c(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} e^{\left(\frac{-x^2}{4at}\right)} \quad (2-1)$$

όπου  $Q$  η καθαρή θερμική ισχύς εισόδου (ενέργεια) που απελευθερώνεται τη στιγμή  $t=0$  και  $A$  η διατομή ράβδου.

- ii. Γραμμική πηγή σε πλατύ έλασμα (απείρου πλάτους) (Σχήμα 2.1β):

$$T - T_0 = \frac{\frac{Q}{d}}{\rho c(4\pi at)} e^{\left(\frac{-r^2}{4at}\right)} \quad (2-2)$$

όπου  $d$  το πάχος του ελάσματος.

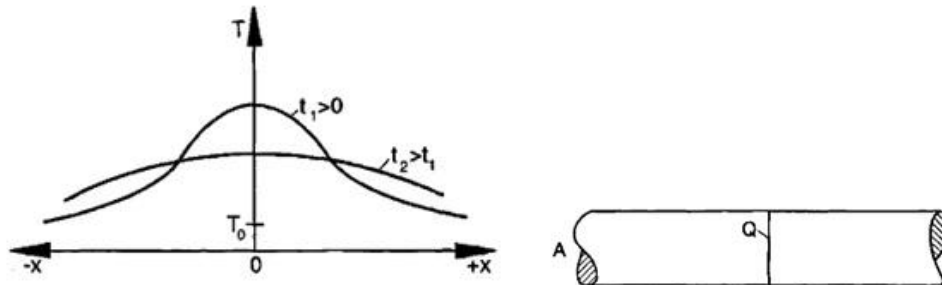
- iii. Σημειακή πηγή σε βαριά πλάκα (απείρου πάχους) (Σχήμα 2.1γ):

$$T - T_0 = \frac{Q}{\rho c(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} e^{\left(\frac{-R^2}{4at}\right)} \quad (2-3)$$

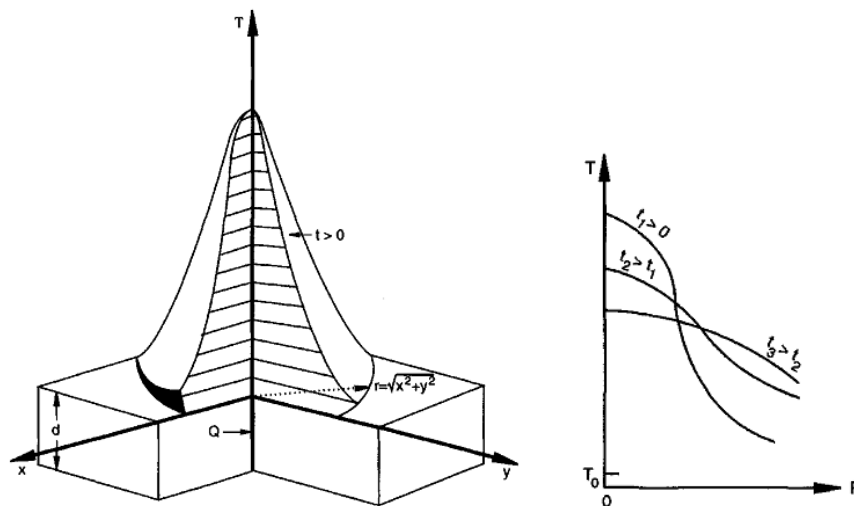
Οι εξισώσεις (2-1), (2-2) και (2-3) παρέχουν τις απαραίτητες βάσεις για μια περιεκτική θεωρητική μεταχείριση του φαινομένου της ροής θερμότητας στις συγκολλησεις. Οι λύσεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν κατευθείαν ή να

χρησιμοποιηθούν σε ολοκληρωτική ή διαφορική μορφή. Παρακάτω θα παρουσιάζονται οι διάφορες περιπτώσεις των ακίνητων θερμικών πηγών και των μοντέλων τους.

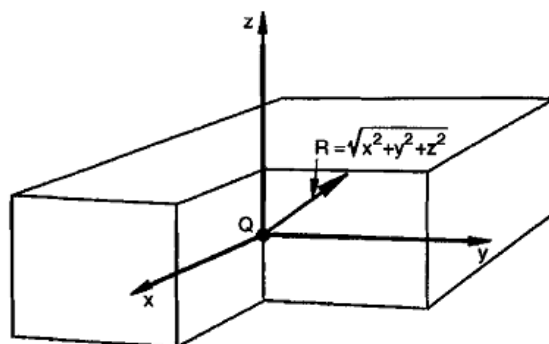
α)



β)



γ)



**Σχήμα 2.1** Σχηματική αναπαράσταση μοντέλων ακίνητων θερμικών πηγών, (α) Επίπεδη πηγή σε μακριά ράβδο, (β) Γραμμική πηγή σε πλατύ έλασμα, (γ) Σημειακή πηγή σε βαριά πλάκα [1]

Οι συγκολλήσεις με ακίνητες θερμικές πηγές είναι οι εξής:

- i. Έναυση τόξου στο βασικό μέταλλο (arc strikes)
- ii. Σημειακές συγκολλήσεις (spot welding)
- iii. Αλουμινοθερμικές συγκολλήσεις (thermit welding)
- iv. Συγκολλήσεις τριβής (friction welding)

Δηλαδή:

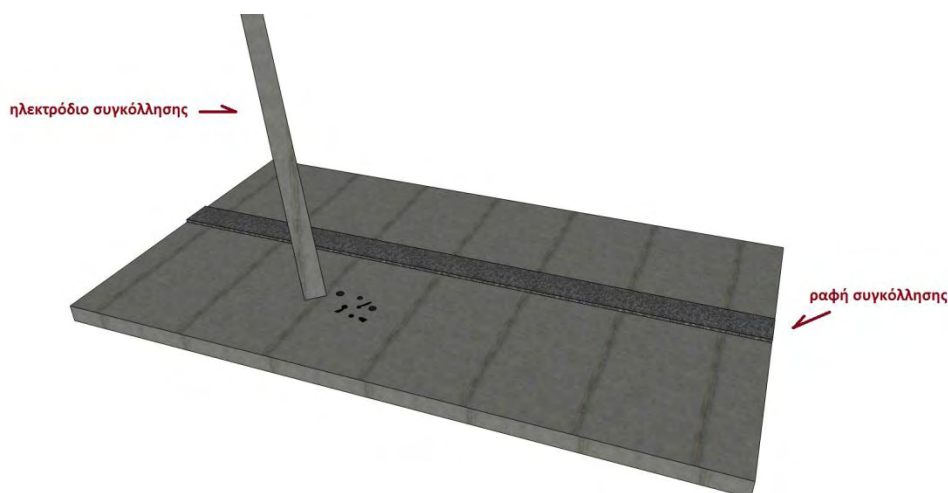
## 2.1. Έναυση τόξου στο βασικό μέταλλο (arc strikes)

Η έναυση τόξου στο βασικό μέταλλο (arc strike) είναι μία βλάβη στο βασικό μέταλλο που οφείλεται στην τυχαία επαφή του ηλεκτρικού τόξου εκτός της περιοχής συγκόλλησης [5]. Είναι μια ασυνέχεια που αποτελείται από οποιοδήποτε τοπικά επανα-τηγμένο μέταλλο που προκαλεί αλλαγή στο προφίλ της επιφάνειας της περιοχής του βασικού μετάλλου κατά τη διάρκεια έναρξης τόξου συγκόλλησης. Το μοντέλο της λύσης περιγράφεται από τη σχέση:

$$T - T_0 = \frac{2Q}{\rho c(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} e^{\left(\frac{-R^2}{4at}\right)} \quad (2-4)$$

και σε αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\theta}{n_1} = \frac{1}{(\tau_1)^{\frac{3}{2}}} e^{\left[\frac{-(\sigma_1)^2}{\tau_1}\right]} \quad (2-5)$$



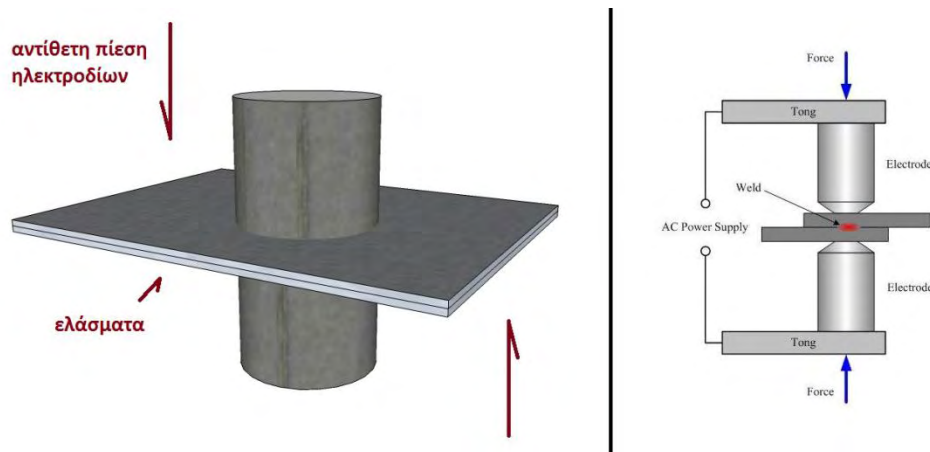
**Σχήμα 2.1.1** Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου έναυσης τόξου στο βασικό μέταλλο

## 2.2. Σημειακές Συγκολλήσεις (spot welding)

Οι σημειακές συγκολλήσεις (spot welding) είναι μία διαδικασία κατά την οποία επικαλυπτόμενα ελάσματα μετάλλου ενώνονται σε ένα ή περισσότερα σημεία μέσω της θερμότητας που παράγεται από την αντίσταση στη ροή του

ηλεκτρικού ρεύματος. Τα ελάσματα συγκρατούνται υπό μεγάλη πίεση ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόδια, μεταξύ των οποίων περνάει ένα σύντομο, δυνατό ηλεκτρικό ρεύμα χαμηλής τάσης πραγματοποιώντας συγκόλληση μέσω τοπικής τήξης των μετάλλων [1]. Το μοντέλο της λύσης περιγράφεται από τη σχέση (2-2). Ενώ σε αδιάστατη μορφή θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\theta}{n_2} = \frac{1}{\tau_2} e^{\left[ \frac{-(\sigma_2)^2}{\tau_2} \right]} \quad (2-6)$$



Σχήμα 2.2.1 Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου σημειακών συγκολλήσεων

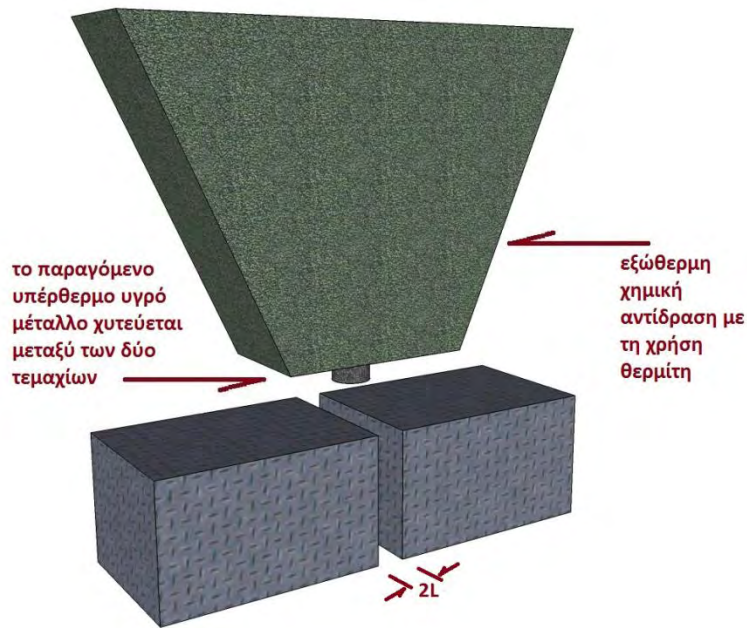
### 2.3. Αλουμινοθερμικές συγκολλήσεις (thermit welding)

Οι αλουμινοθερμικές συγκολλήσεις (thermit ή thermitite welding) είναι μία μέθοδος εξώθερμης συγκόλλησης η οποία χρησιμοποιεί θερμότητα για την τήξη μετάλλου, το οποίο χυτεύεται στη συνέχεια μεταξύ δυο τεμαχίων πραγματοποιώντας ένωση [6]. Είναι μία διαδικασία η οποία στην ουσία ενώνει μέταλλα θερμαίνοντας τα με υπέρθερμο υγρό μέταλλο παραγόμενο από μία χημική αντίδραση μεταξύ ενός μεταλλικού οξειδίου και αλουμινίου ή κάποιου άλλου αναγωγικού μέσου, με ή χωρίς την εφαρμογή πίεσης. Το υλικό πλήρωσης εξασφαλίζεται από το υγρό μέταλλο [1]-[7]. Το μοντέλο της λύσης περιγράφεται από τη σχέση:

$$T - T_0 = \frac{T_i - T_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x + L_i}{\sqrt{4at}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - L_i}{\sqrt{4at}} \right) \right] \quad (2-7)$$

και η αδιάστατη μορφή της:

$$\theta' = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\Omega + 1}{\tau_3} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\Omega - 1}{\tau_3} \right) \right] \quad (2-8)$$



Σχήμα 2.3.1 Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου αλουμινοθερμικών συγκολλήσεων

## 2.4. Συγκολλήσεις τριβής (friction welding)

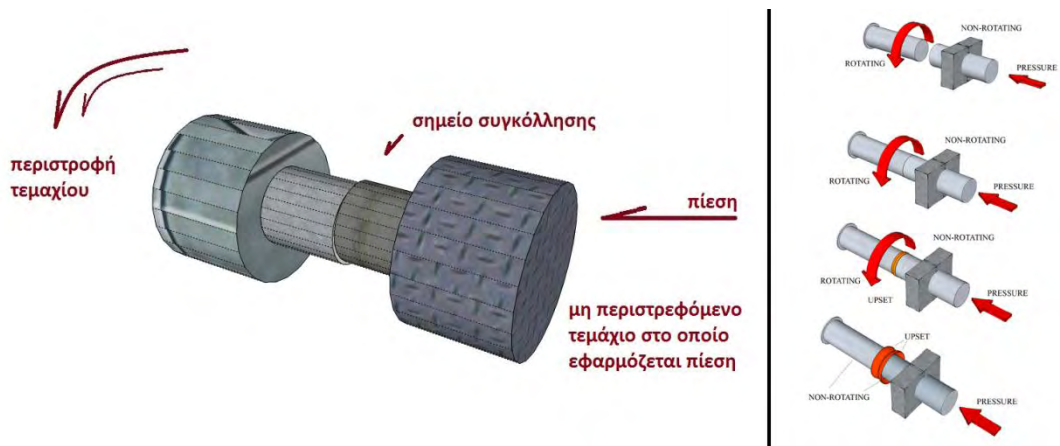
Η συγκόλληση τριβής είναι μία στερεάς - κατάστασης μέθοδος συγκόλλησης κατά την οποία η θερμότητα για την ένωση παράγεται από τη σχετική κίνηση μεταξύ των δύο επιφανειών που πρόκειται να ενωθούν. Η μέθοδος στηρίζεται στην απευθείας μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα για να πραγματοποιηθεί η ένωση, χωρίς την περαιτέρω εφαρμογή ενέργειας από οποιαδήποτε άλλου είδους πηγή. Κάτω από κανονικές συνθήκες δεν πραγματοποιείται τήξη στην διεπαφή. Κατά τη διάρκεια μίας τυπικής συγκόλλησης τριβής, ένα μη περιστρεφόμενο τεμάχιο συγκρατείται αντίθετα και σε επαφή με ένα περιστρεφόμενο κάτω από συνεχή ή σταδιακά αυξανόμενη πίεση μέχρι η διεπαφή τους να φτάσει τη θερμοκρασία συγκόλλησης. Το μοντέλο της λύσης περιγράφεται από τη σχέση:

$$T - T_0 = (T_h - T_0) \sqrt{t/t'_h} \left[ e^{\left(-\frac{x^2}{4at}\right)} - \left(\frac{\sqrt{\pi x}}{\sqrt{4at}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) \right] \quad (2-9)$$

ενώ σε αδιάστατη μορφή θα είναι:

$$\theta'' = \sqrt{\tau_4} \left[ e^{\left(-\frac{(\Omega t')^2}{\tau_4}\right)} - \left(\frac{\sqrt{\pi \Omega'}}{\sqrt{\tau_4}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\Omega'}{\sqrt{\tau_4}}\right) \right] \quad (2-10)$$

Για τις παραπάνω μεθόδους παρατίθενται στο παράρτημα, μαζί με τα υπόλοιπα των κινούμενων θερμικών πηγών, τα προγράμματα του Mathematica τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση τους.



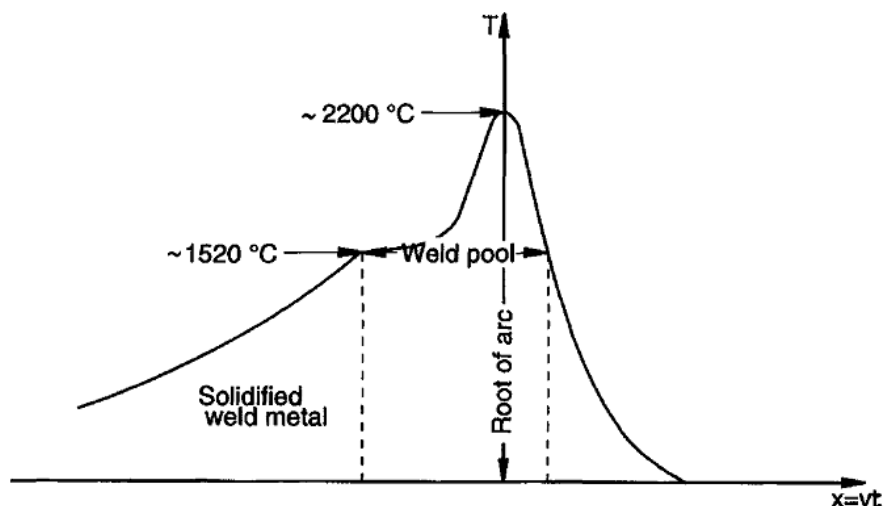
Σχήμα 2.4.1 Σχηματική αναπαράσταση μοντέλου συγκολλήσεων τριβής



### 3. Κινούμενες Θερμικές Πηγές

#### Γενικά

Οι συγκολλήσεις τήξεως (fusion welding) είναι κατεργασίες μέσω των οποίων επιτυγχάνεται μία συνεχής σύνδεση δύο μεταλλικών στοιχείων μέσω της τήξης τους από κάποια πηγή θερμότητας με τη χρήση ή χωρίς πρόσθετου συγκολλητικού υλικού (filler). Στις περισσότερες συγκολλήσεις τήξεως η πηγή θερμότητας δεν μένει ακίνητη. Παρακάτω θα θεωρείται ότι η πηγή κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία τροχιά και ότι η παροχή ρεύματος είναι σταθερή στο χρόνο. Εμπειρική γνώση δείχνει ότι τέτοιες συνθήκες προκαλούν τηγμένη περιοχή συγκεκριμένου και μη μεταβαλλόμενου πλάτους. Από τον ορισμό της ψευδοσταθερής κατάστασης θεωρείται ότι η θερμοκρασία δε διαφέρει με το χρόνο όσο η παρατήρηση γίνεται από σημείο που κινείται με την πηγή θερμότητας. Κάτω από τέτοιες συνθήκες τα θερμοκρασιακά πεδία μπορούν να περιγραφούν σαν «θερμοκρασιακοί λόφοι μετακινούμενοι προς τη διεύθυνση της συγκόλλησης. Η θερμοκρασία σε θέσεις κατά μήκος της γραμμής συγκόλλησης, κυμαίνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.



**Σχήμα 3.1** Σχηματική αναπαράσταση θερμοκρασιακής κατανομής σε διάφορες θέσεις πάνω στον άξονα της γραμμής συγκόλλησης [1]

Συγκεκριμένα, στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η σχηματική αναπαράσταση της θερμοκρασίας από το βασικό μέταλλο μπροστά από το τόξο συγκόλλησης μέχρι και το στερεοποιημένο μέταλλο που ακολουθεί την ουρά του κομήτη της συγκόλλησης. Αν θεωρηθεί ένα σταθερό σημείο στη γραμμή συγκόλλησης, θα υπάρξει ραγδαία άνοδος της θερμοκρασίας στην έναρξη της περιόδου συγκόλλησης με μέγιστο τους 2000-2200 °C στα σημεία ακριβώς κάτω από το τόξο. Μετά το πέρας του τόξου, η θερμοκρασία θα ξεκινήσει να πέφτει φτάνοντας εν τέλει αυτή του βασικού μετάλλου. Σε αντίθεση, ένας κινούμενος, με τη θερμική πηγή, παρατηρητής θα βλέπει τη ίδια θερμοκρασιακή κατανομή καθώς δε θα αλλάζει με το χρόνο σύμφωνα με τις προϋποθέσεις που τέθηκαν.

Η συγκόλληση τόξου αποτελεί μια συλλογική έννοια που εμπεριέχει μαζί με άλλες και τις παρακάτω διαδικασίες:

- Συγκολλήσεις με επενδυμένα ηλεκτρόδια SMAW (Shielding Metal Arc Welding)
- Συγκόλληση με μη αναλίσκόμενο ηλεκτρόδιο βολφραμίου TIG/GTAW (Gas Tungsten Arc Welding)
- Συγκόλληση με σύρμα και αδρανές αέριο MIG/GMAW (Gas Metal Arc Welding)
- Συγκόλληση με βυθισμένο τόξο SAW (Submerged Arc Welding)

Οι αναλυτικές λύσεις στις διαφορικές εξισώσεις ροής θερμότητας με συνθήκες που ισχύουν για συγκόλληση τόξου παρουσιάστηκαν πρώτη φορά από τον Rosenthal, αλλά η θεωρία επεκτάθηκε και επαναπροσδιορίστηκε και από άλλους.

### Συντελεστής απόδοσης τόξου

Στις συγκολλήσεις τόξου οι θερμικές απώλειες από συναγωγή και ακτινοβολία λαμβάνονται υπόψη από το συντελεστή απόδοσης:

$$\eta = \frac{q_0}{IV} \quad (3-1)$$

όπου  $q_0$  είναι η καθαρή ενέργεια που λαμβάνεται από τη συγκόλληση (J),  $I$  η ένταση του ρεύματος (A) και  $V$  η τάση του τόξου συγκόλλησης (V). Ένας συνοπτικός πίνακας με τα εύρη τιμών για τα διάφορα είδη συγκόλλησης φαίνονται στον πίνακα A2.

**Πίνακας A2** Συντελεστές απόδοσης διάφορων διαδικασιών συγκόλλησης [1]

Διαδικασία Συγκόλλησης	Συντελεστές Απόδοσης Τόξου $\eta$	
	Εύρος	Μέση τιμή
SA welding (steel)	0,91 - 0,99	0,95
SMA welding (steel)	0,66-0,85	0,8
GMA welding (CO2-steel)	0,75-0,93	0,85
GMA welding (Ar-steel)	0,66-0,70	0,7
GTA welding (Ar-steel)	0,25-0,75	0,4
GTA welding (He-Al)	0,55-0,80	0,6
GTA welding (Ar-Al)	0,22-0,46	0,4

### 3.1. Ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους (thick plate solutions)

#### 3.1.1. Μοντέλο

Το γενικό μοντέλο για ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους αποτελείται από ένα ισοτροπικό ημιάπειρο σώμα με αρχική θερμοκρασία  $T_0$  περιορισμένη προς μια διεύθυνση από ένα επίπεδο αδιαπέραστο από θερμότητα (αδιαβατικό τοίχωμα). Σε χρόνο  $t=0$  μια σημειακή πηγή συνεχούς ισχύος  $q_0$  ξεκινά στην επιφάνεια στο σημείο  $O$  κινούμενο στη θετική φορά του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $u$ .

Κατά τη διάρκεια ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος από  $t'$  μέχρι  $t'+dt'$  η ποσότητα της θερμότητας που απελευθερώνεται στην επιφάνεια είναι  $dQ=q_0 dt'$ . Σύμφωνα με τη σχέση (2-3) αυτό θα παράγει μια απειροελάχιστη ανύψωση της θερμοκρασίας στο  $P$  σε χρόνο  $t$ :

$$dT = \frac{2 q_0 dt'}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(R')^2}{4a(t-t')}\right] = \frac{-2 q_0 dt''}{\rho c (4\pi a t'')^{3/2}} \exp\left[-\frac{(R')^2}{4a t''}\right] \quad (3-2)$$

όπου  $t''=t-t'$  είναι ο διαθέσιμος χρόνος για μετάδοση θερμότητας στην απόσταση  $R' = \sqrt{(x_0 - ut')^2 + y_0^2 + z_0^2}$  έως το σημείο  $P$ .

Για την αναπαράσταση των ψευδο-μόνιμων συνθηκών, πρέπει να γίνεται αναφορά του σημείου  $P$  σε σχέση με την κινούμενη θερμική πηγή. Αυτό επιτυγχάνεται τροποποιώντας το σύστημα συντεταγμένων από  $O$  σε  $O'$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1, δηλαδή:

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad x = x_0 - ut$$

και

$$x_0 - ut'' = x + ut - ut'' = x + ut''$$

οπότε θα γίνει:

$$\begin{aligned} dT &= \frac{-2 q_0 dt''}{\rho c (4\pi a t'')^{3/2}} \exp\left[\frac{[(x + ut'')^2 + y^2 + z^2]}{4a(t-t')}\right] \\ &= \frac{-2 q_0 dt''}{\rho c (4\pi a t'')^{3/2}} \exp\left[-\frac{ux}{2a} - \frac{R^2}{4a t''} - \frac{u^2 t''}{4a}\right] \end{aligned} \quad (3-3)$$

Όπου  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Η συνολική αύξηση της θερμοκρασίας στο σημείο  $P$  λαμβάνεται αντικαθιστώντας:

$$s^2 = R^2/4a t'', \quad dt'' = -(R^2/4a s^3) du$$

και

$$m = u R/4a, \quad m^2/s^2 = u^2 t''/4a$$

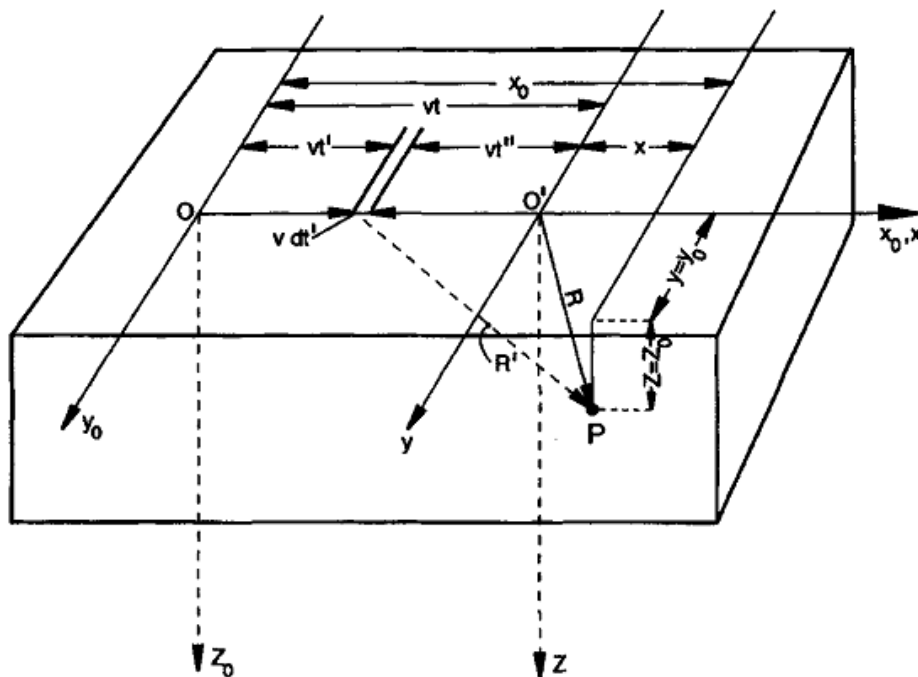
στην εξίσωση (3-3), ολοκληρώνοντας με όρια  $s^2 = (R^2/4at'')^2$  και  $s = \infty$  και ύστερα από πράξεις λαμβάνεται η γενική λύση για έλασμα μεγάλου πάχους

$$T - T_0 = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R}\right) \exp\left(-\frac{ux}{2a}\right) \left[ \exp\left(-\frac{ux}{2a}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp\left(-\frac{u^2-m^2}{u^2}\right) ds \right] \quad (3-4)$$

Αν το  $s$  είναι αρκετά μικρό (π.χ. αν η συγκόλληση πραγματοποιήθηκε για αρκετό χρόνο) τότε λαμβάνεται η κατανομή της θερμοκρασίας για ψευδο-μόνιμες συνθήκες:

$$T - T_0 = \frac{q_0}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R}\right) \exp\left[-\frac{u}{2a}(R+x)\right] \quad (3-5)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται και λύση Rosenthal για ελάσματα μεγάλου πάχους προς τιμή του Δρ. Rosenthal που κατέληξε πρώτος στη σχέση για τις σωστές οριακές συνθήκες. Με αφορμή την παραπάνω εξίσωση, αναπτύχθηκε και ένα ξεχωριστό πρόγραμμα για τη λύση Rosenthal που παράγει διαγράμματα με κατανομές θερμοκρασιών εκτός του παραμετρικού που αναλύεται παρακάτω.



**Σχήμα 3.1.1** Κινούμενη σημειακή πηγή σε ημιάπειρη πλάκα

Για να αναλυθεί το θερμικό πρόγραμμα αδιασταποικήθηκαν οι παράγοντες της παραπάνω λύσης του Rosenthal:

- Αδιάστατη θερμοκρασία

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_0} \quad (3-6)$$

- Αδιάστατο ακτινικό διάνυσμα

$$\sigma_3 = \frac{uR}{2a} \quad (3-7)$$

- Αδιάστατη χρονική παράμετρος

$$\tau = \frac{u^2 t}{2a} \quad (3-8)$$

- Αδιάστατη λειτουργική παράμετρος

$$n_3 = \frac{q_0 u}{4\pi a^2 \rho c (T_c - T_0)} = \frac{q_0 u}{4\pi a^2 (H_c - H_0)} \quad (3-9)$$

όπου  $q_0 = \eta \cdot I \cdot V$  η καθαρή ισχύς ηλεκτρικού τόξου ( $Q/t_i$ ) και  $H_c - H_0$  το θερμικό περιεχόμενο ανά μονάδα όγκου στη θερμοκρασία αναφοράς (διαφορά ενθαλπίας).

- Αδιάστατη ξ-συντεταγμένη

$$\xi = \frac{ux}{2a} \quad (3-10)$$

- Αδιάστατη ψ-συντεταγμένη

$$\psi = \frac{uy}{2a} \quad (3-11)$$

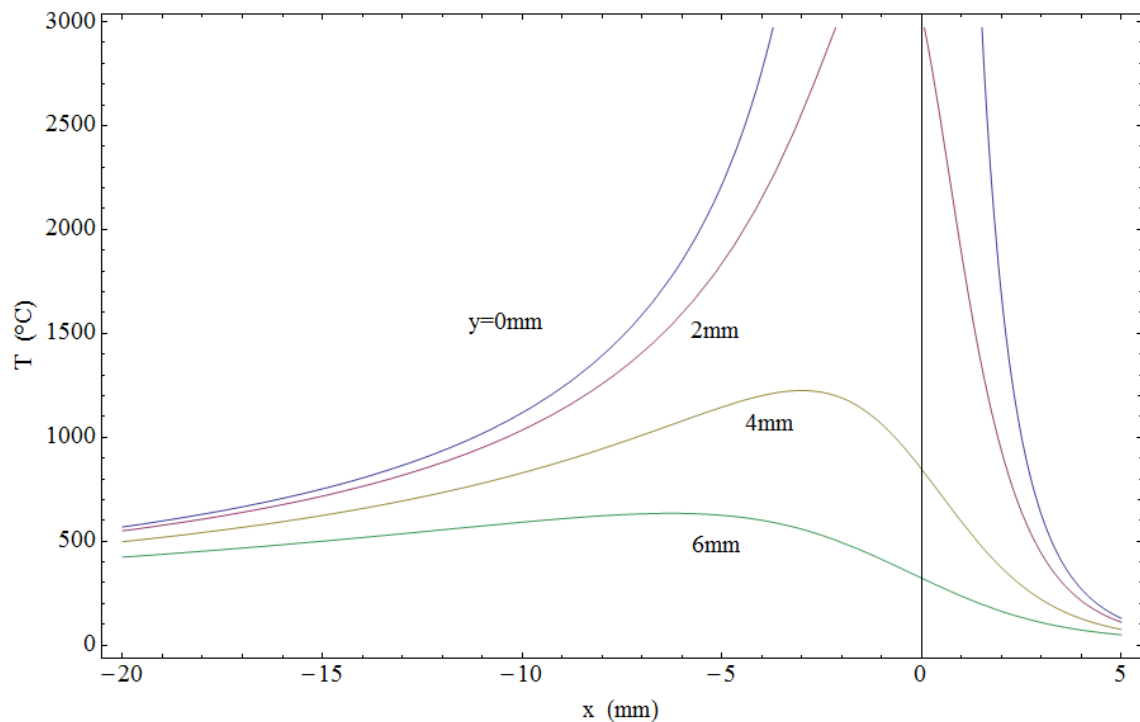
- Αδιάστατη ζ-συντεταγμένη

$$\zeta = \frac{uz}{2a} \quad (3-12)$$

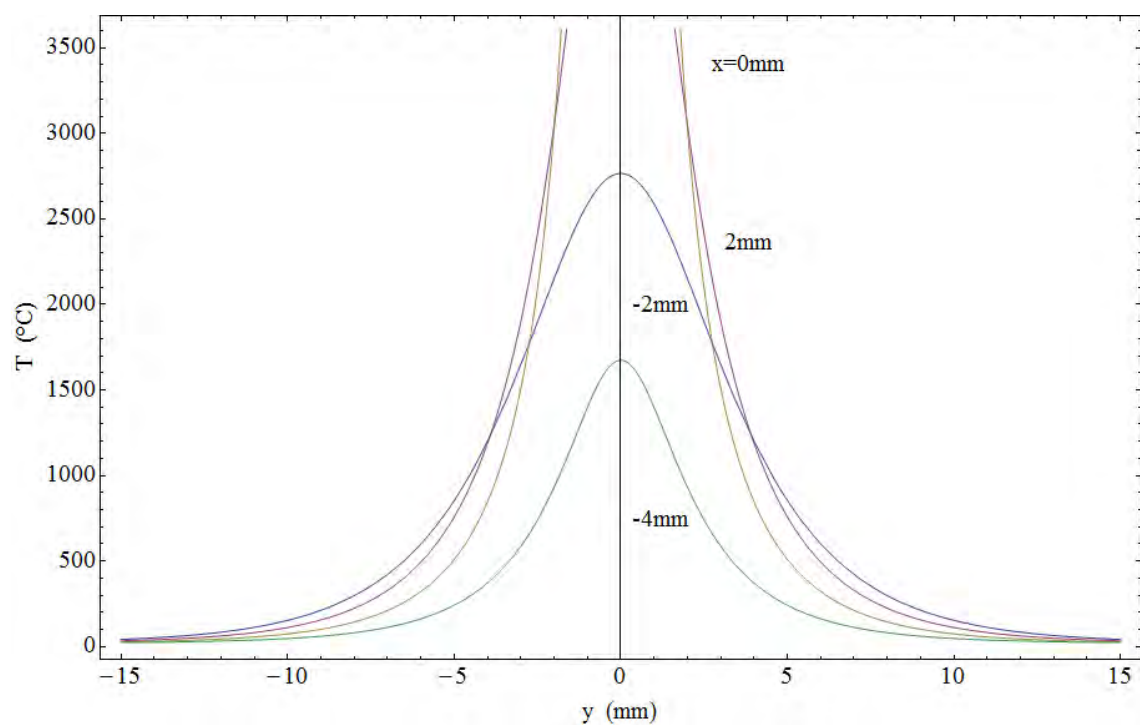
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραμέτρους στη σχέση (3-5) προκύπτει η αδιάστατη εξίσωση Rosenthal:

$$\frac{\theta}{n_3} = \frac{1}{\sigma_3} \exp(-\sigma_3 - \xi) \quad (3-13)$$

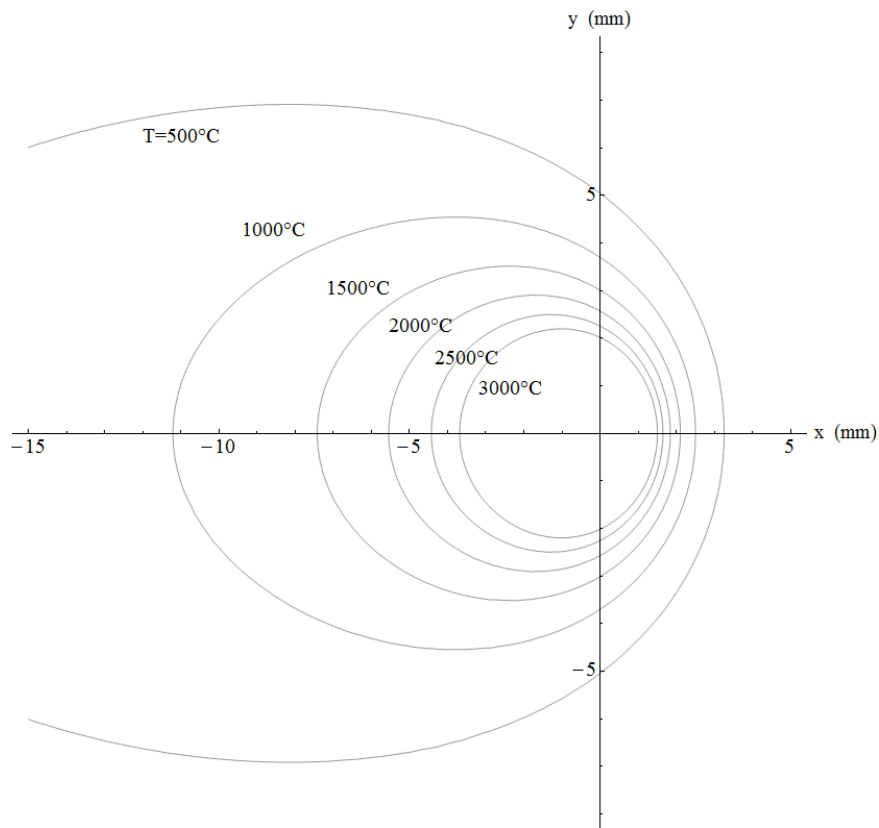
Εκτός από το πρόγραμμα που περιέχει τη λύση Rosenthal, αναπτύχθηκε στο Mathematica και ένα παραμετρικό, το οποίο περιέχει τις παραπάνω μεταβλητές. Υπολογίζει θερμοκρασιακούς χάρτες και παράγει πληροφορίες για τη λίμνη συγκόλλησης, τη θερμοεπηρεασμένη ζώνη (ΘΕΖ), χρόνους και ρυθμούς ψύξης. Η σχέση (3-13) έχει λυθεί μέσω Mathematica για διάφορες τιμές απόστασης και χρόνου. Τα αποτελέσματα της επίλυσης της παρουσιάζονται στα σχήματα 3.1.2, 3.1.3 και 3.1.4 (α) και (β) για χαμηλά κραματωμένο χάλυβα με συνθήκες συγκόλλησης  $I=150$  A,  $V=23$  V,  $u=3$  mm/s,  $H_c - H_0=7.5$  J/mm<sup>3</sup>,  $\alpha=5$  mm<sup>2</sup>/s,  $\lambda=0.025$  W/mm °C,  $\rho c=0.005$  J/mm<sup>3</sup> °C,  $T_c=1520$  °C,  $T_0=20$  °C και  $\eta=0.5$  για συγκόλληση με μη αναλισκόμενο ηλεκτρόδιο βολφραμίου (GTAW).



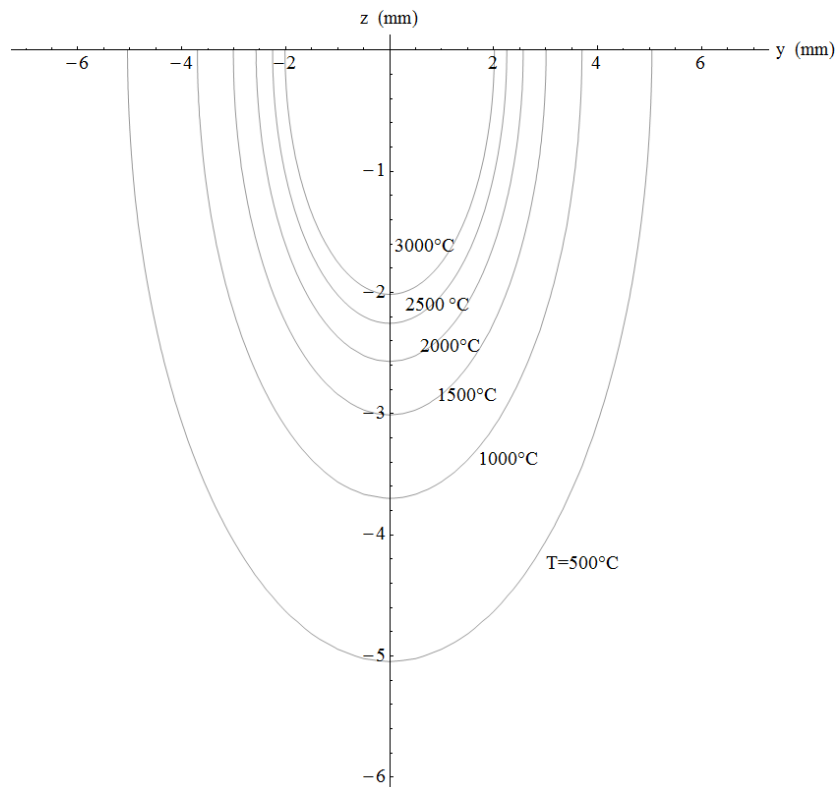
**Σχήμα 3.1.2** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) –  $x$  (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα μεγάλου πάχους (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)



**Σχήμα 3.1.3** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) –  $y$  (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα μεγάλου πάχους (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)



**Σχήμα 3.1.4 α** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων: ισόθερμες στο επίπεδο  $x - y$  [ $z=0$ ] (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα μεγάλου πάχους (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)



**Σχήμα 3.1.4 β** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων: ισόθερμες στο επίπεδο  $y - z$  [ $x=0$ ] (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα μεγάλου πάχους (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)

Τα παραπάνω διαγράμματα είναι χρήσιμα για συνολικές ενδείξεις για τις συνθήκες κατά τη διάρκεια συγκολλήσεων σε άπειρα ελάσματα μεγάλου πάχους αλλά δεν είναι κατάλληλα για ακριβείς υπολογισμούς. Συνεπώς για ποσοτική ανάλυση χρησιμοποιούνται και οι παρακάτω τύποι:

### Πλάτη ισοθερμικών ζωνών

Το μέγιστο πλάτος λίμνης συγκόλλησης μπορεί να προσδιοριστεί θέτοντας το παρακάτω και εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial \ln(\theta/n_3)}{\partial \sigma_3} = \frac{\partial \ln(\theta/n_3)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_3} = 0$$

από τον ορισμό της σχέσης του  $\sigma_3$  προκύπτει:

$$\sigma_3 = \frac{uR}{2a} = \frac{u\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2a}$$

και αντικαθιστώντας τις αδιάστατες μεταβλητές  $\xi$ ,  $\psi$ ,  $\zeta$ :

$$\sigma_3 = \frac{uR}{2a} = \frac{u\sqrt{\left(\frac{2a}{u}\right)^2(\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2)}}{2a} = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2}$$

οπότε με παραγωγή:

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} = \frac{\partial(\sqrt{\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2})}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma_3} = \frac{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2}}{2\xi} = \frac{\sigma_3}{\xi}$$

επομένως με μερική διαφόριση της αδιάστατη εξίσωση Rosenthal θα προκύπτει:

$$\frac{\partial(\ln\theta/n_3)}{\partial \sigma_3} = 0 \rightarrow -\frac{1}{\sigma_{3m}} - 1 - 1 \cdot \frac{\sigma_{3m}}{\xi_m} = 0$$

δηλαδή η σχέση:

$$\xi_m = \frac{-(\sigma_{3m})^2}{\sigma_{3m+1}} \quad (3-14)$$

που δίνει την οριζόντια απόσταση από την πηγή (σχήματα 3.1.5-3.1.6). Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην (3-13) προκύπτει η σχέση μέγιστων θερμοκρασιών



$$\frac{\theta_p}{n_3} = \frac{1}{\sigma_{3m}} \exp[-\sigma_{3m}/(\sigma_{3m} + 1)] \quad (3-15)$$

Η εξίσωση (3-15) χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς των πλατών των ισοθερμικών ζωνών  $\psi_m$  (isothermal zone widths) και των επιφανειών εγκάρσιας διατομής  $\Lambda_1$  (cross sectional areas) όπως φαίνονται στο σχήμα 3.1.5.

Πλάτος ισοθερμικής ζώνης (θέση 3-β στο σχήμα 3.1.7)

$$\psi_m = \zeta_m = \sqrt{(\sigma_{3m})^2 - (\xi_m)^2} = \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_{3m}+1} \sqrt{1 + 2\sigma_{3m}} \quad (3-16)$$

και πραγματικές διαστάσεις:  $y_m = \frac{2a\psi_m}{u}$

Επιφάνεια εγκάρσιας διατομής ραφής συγκόλλησης

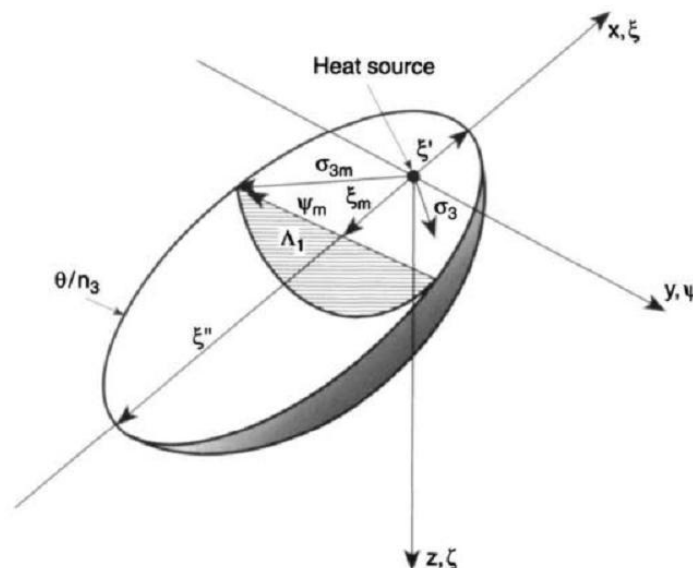
η επιφάνεια σε αδιάστατη μορφή

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{2} \psi_m^2 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_{3m}+1} \right)^2 (1 + 2\sigma_{3m}) \quad (3-17)$$

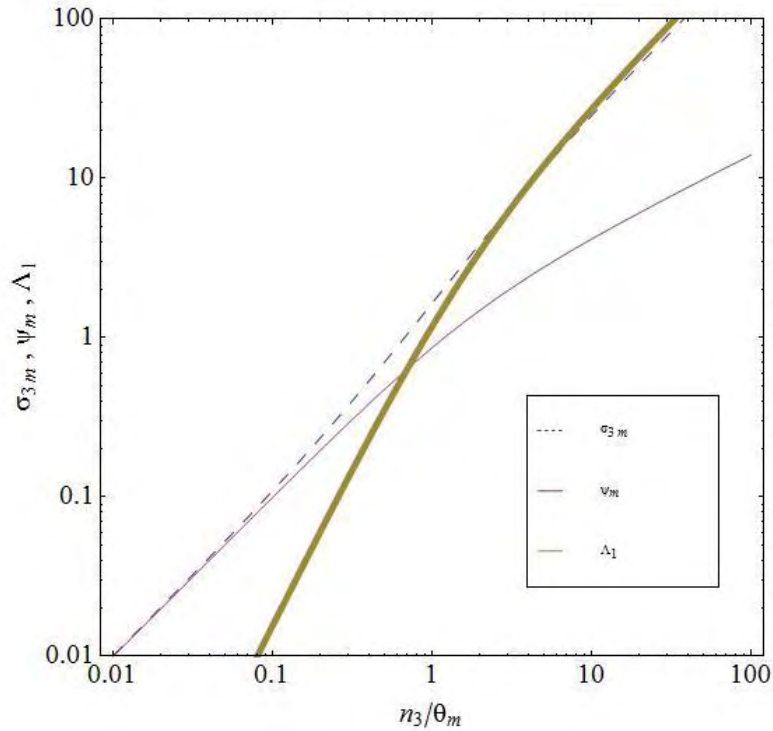
και σε πραγματικές διαστάσεις:

$$A(mm^2) = \frac{4a^2}{u^2} \Lambda_1 \quad (3-18)$$

Μια συνδυαστική γραφική αναπαράσταση δημιουργήθηκε για τις σχέσεις (3-15), (3-16) και (3-17) στο σχήμα 3.1.6.



**Σχήμα 3.1.5** Σχηματική αναπαράσταση της ζώνης τήξης για λύσεις Rosenthal για άπειρα ελάσματα μεγάλου πάχους



**Σχήμα 3.1.6** Διάγραμμα αδιάστατης απόστασης  $\sigma_{3m}$ , ημι-απόστασης  $\psi_m$  και επιφάνειας εγκάρσιας διατομής  $\Lambda_1$  σε σχέση την παράμετρο  $n_3/\theta_p$

### Μήκος λίμνης συγκόλλησης

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1.5 το συνολικό μήκος της λίμνης συγκόλλησης  $\xi_t$  δίνεται από τη σχέση:

$$\xi_t = \xi' - \xi'' \quad (3-19)$$

όπου  $\xi'$  (θέση 1-β στο σχήμα 3.1.7) είναι η απόσταση από την πηγή θερμότητας μέχρι το μπροστινό άκρο και  $\xi''$  η απόσταση μέχρι το πίσω άκρο της λίμνης (θέση 4-β στο σχήμα 3.1.7).

Οι συντεταγμένες  $\xi'$  και  $\xi''$  βρίσκονται θέτοντας  $\sigma_3 = \pm \xi$ , το οποίο δίνει:

για  $\sigma_3 = +\xi$

$$\xi' = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n_3/\theta}{\xi'}\right) \quad (3-20)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις (από σχέση 3-10):  $x' = \frac{2a\xi'}{u}$  (mm) και για  $\sigma_3 = -\xi$

$$\xi'' = -n_3/\theta \quad (3-21)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $x'' = \frac{2a\xi''}{u}$  (mm).

### Όγκος λίμνης συγκόλλησης

Εξαιτίας της υπόθεσης ότι η θερμική πηγή συμπεριλαμβάνει ημικυκλικές ισόθερμες στο επίπεδο ψ-ζ (γ-z) ο όγκος της λίμνης συγκόλλησης υπολογίζεται με ολοκλήρωση του συνολικού μήκους μεταξύ των σημείων ξ' και ξ'', το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τον αδιάστατο όγκο:

$$\Gamma = \frac{\pi}{12} [3(n_3/\theta)^2 - 3(\xi')^2 - 4(\xi'')^3] \quad (3-22)$$

και ο αδιάστατος όγκος συνδέεται με τον πραγματικό όγκο της λίμνης συγκόλλησης V (mm<sup>3</sup>) με την παρακάτω σχέση:

$$V = \frac{8a^3}{\nu^3} \Gamma \quad (3-23)$$

### Συνθήκες Ψύξης κοντά στη γραμμή συγκόλλησης

Ο χρόνος ψύξης μέσα σε ένα συγκεκριμένο θερμοκρασιακό διάστημα θ<sub>1</sub>-θ<sub>2</sub> υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\tau = n_3 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) \quad (3-24)$$

Για παράδειγμα για χαμηλά κραματωμένους χάλυβες το θερμοκρασιακό διάστημα T<sub>1</sub>=800°C με T<sub>2</sub>=500°C γίνεται δεκτό ως επαρκής δείκτης για τις θερμικές συνθήκες υπό τις οποίες γίνεται ο μετασχηματισμός ωστενίτη σε φερρίτη, οπότε η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\Delta\tau_{8/5} = n_3 \left( \frac{1}{\theta_{800}} - \frac{1}{\theta_{500}} \right) \quad (3-25)$$

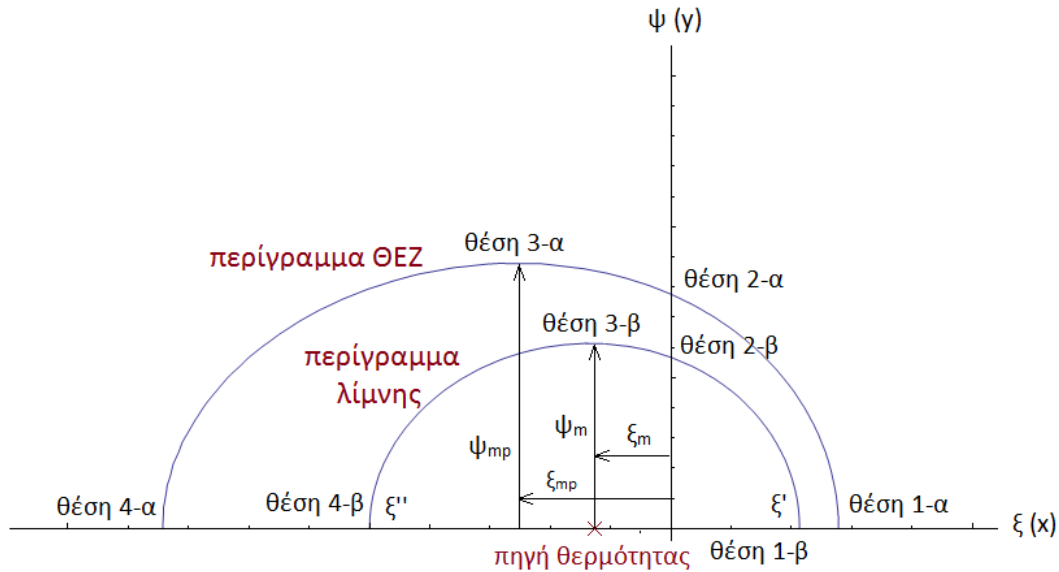
Ο ρυθμός εισαγωγής θερμότητας (ΡΕΘ) E (kJ.mm<sup>-1</sup>) υπολογίζεται από:

$$E = \frac{V I}{1000 u} \quad (3-26)$$

και ο ρυθμός ψύξης ως εξής:

$$C.R. (^\circ C s^{-1}) = \frac{q_0 u^3}{8\pi a^3 \rho c} (\theta/n_3)^2 = \frac{2\pi\lambda}{q_0/u} (T - T_o)^2 \quad (3-27)$$

όπου T η θερμοκρασία στην οποία ζητείται να βρεθεί ο ρυθμός ψύξης (πχ 650°C).



**Σχήμα 3.1.7** Περίγραμμα θερμοεπηρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) και λίμνης συγκόλλησης για  $\zeta=0$  για μοντέλο λύσεων μεγάλου ελασμάτων πάχους

#### Σημείο τομής με τον άξονα $\psi$ (y)

Στην περίπτωση αυτή  $\xi=\zeta=0$  και  $\sigma_3=\psi$ . Επομένως η (3-13) γίνεται:

$$\frac{\theta}{n_3} = \frac{1}{\psi} \exp(-\psi) \Rightarrow \psi_c = -\ln\left(\frac{\theta}{n_3} \psi_c\right) \quad (3-28)$$

επιλύοντας την παραπάνω σχέση προσδιορίζεται το σημείο τομής της ισοθερμικής ζώνης (θέση 2-β στο σχήμα 3.1.7) ή της θερμο-επηρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) (θέση 2-α στο σχήμα 3.1.7) με τον άξονα  $\psi$  ανάλογα με την τιμή που θα τεθεί στον όρο

$$\frac{\theta}{n_3} = \frac{4\pi a \rho c (T - T_0)}{q_0 u} \quad (3-29)$$

(για λίμνη συγκόλλησης  $T=T_c$  και για ΘΕΖ  $T=T_{ac3}$  στη περίπτωση που είναι χάλυβας ή  $T=T_{ar}$  στην περίπτωση που είναι αλουμίνιο)

#### Πλάτος πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης (ΘΕΖ)

Εισάγοντας την τιμή της  $\frac{\theta}{n_3}$  από τη σχέση (3-29) για  $T=T_{ac3}$  στην (3-15) προκύπτει το  $\sigma_{3mp}$  το οποίο με τη σειρά του εισάγεται στην (3-16) για να βρεθεί η μέγιστη απόσταση του ορίου της ΘΕΖ από την θερμική πηγή (θέση 3-α στο σχήμα 3.1.7):

$$\psi_{mp} = \frac{\sigma_{3mp}}{\sigma_{3mp} + 1} \sqrt{1 + 2\sigma_{3mp}}$$

και η απόσταση

$$\xi_{mp} = \frac{-(\sigma_{3mp})^2}{\sigma_{3mp} + 1}$$

Αφαιρώντας το πλάτος της ισοθερμικής ζώνης  $\psi_m$  από τη μέγιστη απόσταση της ΘΕΖ από την θερμική πηγή  $\psi_{mp}$  λαμβάνεται το πλάτος της μετασχηματισμένης ζώνης, δηλαδή:

$$\Delta\psi = \psi_{mp} - \psi_m \quad (3-30)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις (από σχέση 3-11):  $\Delta y = \Delta\psi \frac{2a}{u}$  (mm).

### 3.1.2. Παράδειγμα

Πραγματοποιείται συγκόλληση TIG/GTAW μεγάλου πάχους ελάσματος χαμηλά κραματωμένου χάλυβα υπό τις παρακάτω συνθήκες:

$$I=150A, V=23V, \theta=3mm s^{-1}, T_0=20^\circ C, \eta=0.5$$

Υπολογίζονται το συνολικό μήκος της λίμνης συγκόλλησης  $\xi_t$ , τα πλάτη της λίμνης και της ΘΕΖ, το πλάτος της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης ΘΕΖ, τα σημεία τομής των καμπυλών με τον άξονα  $\psi(y)$ , ο όγκος της λίμνης συγκόλλησης, η εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής, ο χρόνος ψύξης από τους  $800^\circ C$  στους  $500^\circ C$  και ο ρυθμός ψύξης στην έναρξη του μετασχηματισμού ωστενίτη-φερρίτη στους  $650^\circ C$ .

*Λύση*

Αν θεωρηθεί αμελητέα η λανθάνουσα θερμότητα τήξης, ο λόγος  $\theta/n_3$  στο σημείο τήξης θα είναι (για  $T=T_c$ ) στη σχέση (3-29):

$$\begin{aligned} \theta/n_3 &= \frac{4\pi\rho c(T_c - T_0)}{q_0 u} = \frac{4\pi\rho c(T_c - T_0)}{\eta I V u} = \frac{4 \pi 5 * 0,005(1520 - 20)}{1725 * 3} \\ &= 0,4553 \end{aligned}$$

και

$$n_3 = \frac{q_0 u}{4\pi\rho c(T_c - T_0)} = 2,1963$$

Τα σημεία  $\xi'$  και  $\xi''$  από τις σχέσεις (3-21), (3-22):

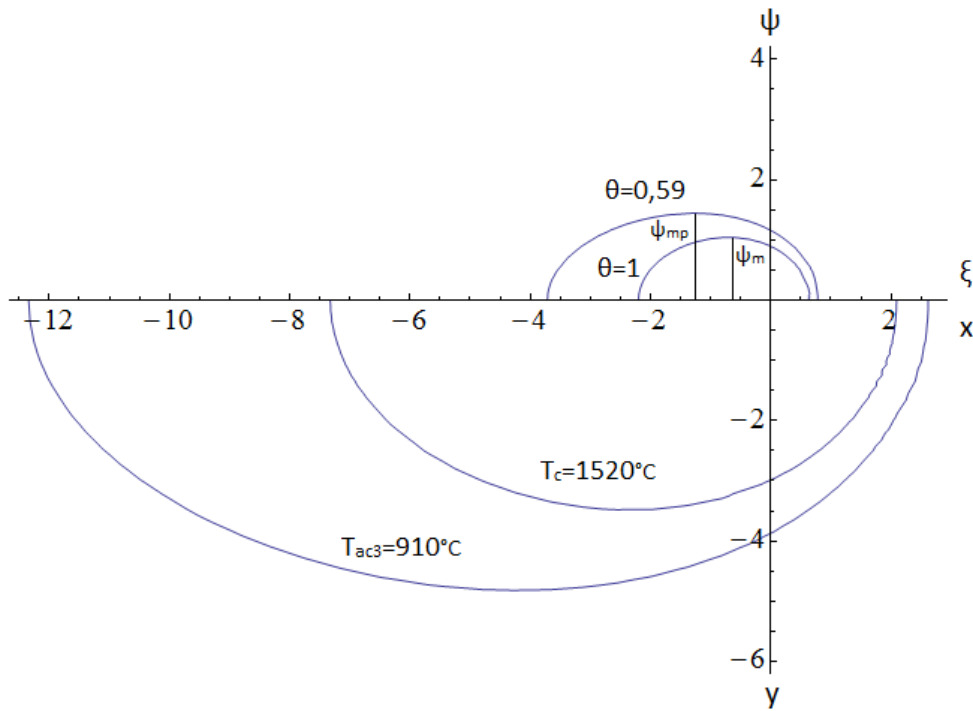
$$\xi' = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n_3/\theta}{\xi'}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1/0,4553}{\xi'}\right) \Rightarrow \xi' = 0,6269$$

και σε πραγματικές διαστάσεις  $x' = 2.08963 \text{ mm}$  και

$$\xi'' = -n_3/\theta = -\frac{1}{0,4553} \Rightarrow \xi'' = -2,1963$$

και σε πραγματικές διαστάσεις  $x'' = -2.08963 \text{ mm}$ .

Επομένως μέγιστο μήκος της λίμνης συγκόλλησης  $\xi_t = \xi' - \xi'' = 2,8232$ , δηλαδή  $x_t = 9,41 \text{ mm}$ . Μια απεικόνιση φαίνεται στο σχήμα 3.1.8.



**Σχήμα 3.1.8** Περίγραμμα θερμοεπηρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) και λίμνης συγκόλλησης όταν  $\zeta=0$  για το παράδειγμα στη συγκόλληση TIG/GTAW μεγάλου πάχους ελάσματος (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)

Το πλάτος της λίμνης συγκόλλησης βρίσκεται αν αντικατασταθεί ο λόγος  $\theta_p/n_3$  στη σχέση (3-15) (για  $T = T_c$ ) και βρεθεί το  $\sigma_{3m}$ . Δηλαδή  $\theta_p/n_3=0,4553$  και επομένως  $\sigma_{3m}=1,258$ . Αντικαθιστώντας αυτό στη σχέση (3-16):

$$\psi_m = \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_{3m} + 1} \sqrt{1 + 2\sigma_{3m}} = 1,0447$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $y_m = \frac{2a\psi_m}{u} = 3,4825 \text{ (mm)}$

και με την τιμή της  $\sigma_{3m}$  βρίσκεται και ότι:

$$\xi_m = \frac{-(\sigma_{3m})^2}{\sigma_{3m} + 1} = -0,70$$

δηλαδή  $x_m = -2,3366 \text{ (mm)}$ .

Αντίστοιχα το πλάτος της ΘΕΖ ανακτάται αν αντικατασταθεί ο λόγος  $\theta_p/n_3$  στη σχέση (3-15) (για  $T = T_{ac3}$  αυτή τη φορά) και βρεθεί το  $\sigma_{3mp}$ . Δηλαδή  $\theta_p/n_3=0,2701$  και επομένως  $\sigma_{3mp}=1,9183$ . Αντικαθιστώντας αυτό στη σχέση (3-16):

$$\psi_{mp} = \frac{\sigma_{3mp}}{\sigma_{3mp} + 1} \sqrt{1 + 2\sigma_{3mp}} = 1,44564$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $y_{mp} = \frac{2a\psi_{mp}}{u} = 4,8188 \text{ (mm)}$

και με την τιμή της  $\sigma_{3mp}$  βρίσκεται και ότι:

$$\xi_{mp} = \frac{-(\sigma_{3mp})^2}{\sigma_{3mp} + 1} = -1,26$$

δηλαδή  $x_{mp} = -4,2032 \text{ (mm)}$

Οπότε το πλάτος της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης θα είναι:

$$\Delta\psi = \psi_{mp} - \psi_m = 0,40$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $\Delta y = 1,336 \text{ (mm)}$ .

Τα σημεία τομής των καμπυλών με τον άξονα  $\psi(y)$ , βρίσκονται αν επιλυθεί η σχέση (3-28) για το λόγο  $\theta/n_3=0,4553$  για  $T = T_c$  και  $\theta/n_3=0,2701$  για  $T = T_{ac3}$ :

$$\psi_{c1} = 0.8962 \text{ (} y_{c1} = 2.9876 \text{ mm) για τη λίμνη συγκόλλησης (} T = T_c \text{)}$$

και

$$\psi_{c2} = 1.1602 \text{ (} y_{c2} = 3.8673 \text{ mm) για τη ΘΕΖ (} T = T_{ac3} \text{)}$$

Ο όγκος της λίμνης συγκόλλησης από σχέσεις (3-22) και (3-23):

$$\Gamma = \frac{\pi}{12} \left[ 3 \left( \frac{1}{0,4553} \right)^2 - 3(0,6269)^2 - 4(0,6269)^3 \right] = 3,222$$

και ο πραγματικό όγκος:

$$V = \frac{8a^3}{v^3} \Gamma = \frac{8(5)^3}{3^3} 3,222 = 119,33 \text{ (mm}^3 \text{)}$$

Η εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής από σχέσεις (3-17) και (3-18):

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{2} \psi_m^2 = \frac{\pi}{2} (1,0447)^2 = 1,7146$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:

$$A = \frac{4a^2}{u^2} A_1 = \frac{4(5)^2}{3^2} 1,7146 = 19,051 \text{ (mm}^2\text{)}$$

Ο χρόνος ψύξης από τους 800°C στους 500°C υπολογίζεται από τη σχέση (3-24), δηλαδή (3-25):

$$\Delta\tau_{8/5} = n_3 \left( \frac{1}{\theta_{800}} - \frac{1}{\theta_{500}} \right) = 2,1963 \left( \frac{1}{0,52} - \frac{1}{0,32} \right) = 2,64$$

$$\text{όπου } \theta_{800} = \frac{T-T_0}{T_c-T_0} = \frac{800-20}{1520-20} = 0,52 \text{ και } \theta_{500} = \frac{T-T_0}{T_c-T_0} = \frac{500-20}{1520-20} = 0,32$$

$$\text{και ο πραγματικός χρόνος: } \Delta t_{8/5} = \frac{2 a \Delta\tau}{u} = 2,933 \text{ sec}$$

Ο ρυθμός ψύξης στην έναρξη του μετασχηματισμού ωστενίτη-φερρίτη στους 650°C υπολογίζεται από τη σχέση (3-27):

$$C.R. = \frac{2\pi\lambda}{q_o/u} (T - T_o)^2 = \frac{2\pi * 0,025}{(0,5 * 150 * 23)/3} (650 - 20)^2 = 108,42 \text{ (}^\circ\text{C s}^{-1}\text{)}$$

## 3.2. Λεπτό έλασμα απείρου πλάτους (thin plate solutions)

### 3.2.1. Μοντέλο

Το γενικό μοντέλο για λεπτό έλασμα απείρου πλάτους αποτελείται από μια γραμμική πηγή πάνω σε ένα πλατύ έλασμα πάχους  $d$  και αρχικής θερμοκρασίας  $T_o$ . Σε χρόνο  $t=0$  η πηγή συνεχούς ισχύος  $q_o$  ξεκινά να κινείται στη θετική φορά του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $u$ . Σύμφωνα με τη σχέση (2-2) η στοιχειώδης πηγή  $dQ=q_o dt'$  που απελευθερώνεται στη θέση  $ut'$  θα προκαλέσει μια μικρή αύξηση της θερμοκρασίας  $dT$  στο σημείο P σε χρόνο  $t$ :

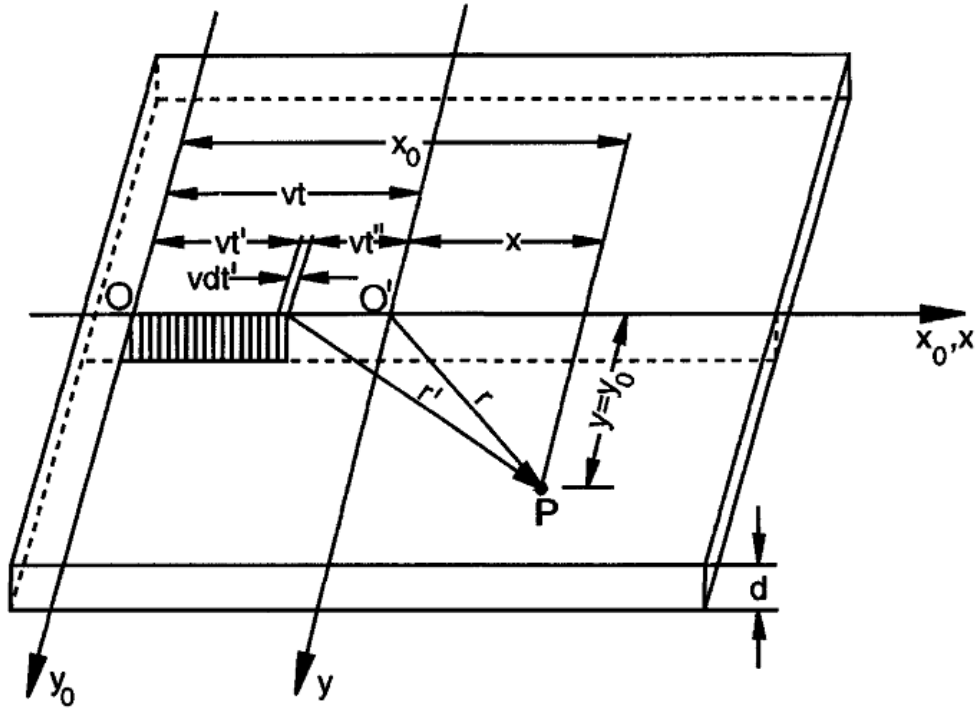
$$dT = \frac{q_o dt'}{\rho c [4\pi a(t-t')]} \exp \left[ -\frac{(r')^2}{4a(t-t')} \right] = \frac{-q_o dt''}{\rho c (4\pi a t'')} \exp \left[ -\frac{(r')^2}{4a t''} \right] \quad (3-31)$$

όπου  $t'' = t - t'$  είναι ο διαθέσιμος χρόνος για μετάδοση θερμότητας στην απόσταση  $r' = \sqrt{(x_o - ut')^2 + y_o^2}$  έως το σημείο P.

Αν αναφέρεται το σημείο P σε αυτό της θερμικής πηγής σε χρόνο  $t$ , θα αναμένεται μια λύση ανεξάρτητη του χρόνου σε ψευδο-μόνιμες συνθήκες. Αυτό επιτυγχάνεται τροποποιώντας το σύστημα συντεταγμένων από O σε O' όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.1, δηλαδή:

$$y = y_o, \quad x = x_o - ut, \quad x_o - ut' = x + vt - ut' = x + ut''$$





Σχήμα 3.2.1 Κινούμενη σημειακή πηγή σε ημίπειρη πλάκα

οπότε θα γίνει:

$$dT = \frac{-q_0 dt''}{\rho c (4\pi a t'')} \exp\left[-\frac{[(x+ut'')^2 + y^2]}{4at''}\right] = \frac{-q_0 dt''}{\rho c (4\pi a t'')} \exp\left[-\frac{ux}{2a} - \frac{r^2}{4at''} - \frac{u^2 t''}{4a}\right] \quad (3-32)$$

όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Θέτοντας όρους όπως οι παρακάτω:

$$\sigma_5^2 = ur^2/4a^2, \quad s = u^2 t''/4a, \quad dt''$$

από τα οποία λαμβάνονται

$$t'' = \frac{4a}{u^2} w, \quad dt'' = \frac{4a}{u^2} dw, \quad \frac{r}{4at''} = \frac{(\sigma_5)^2}{4w}$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3-32), λαμβάνεται ύστερα από πράξεις η γενική λύση για λεπτό έλασμα μεγάλου πλάτους

$$T - T_o = \frac{q_0/d}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{ux}{2a}\right) * \left[K_o\left(\frac{ur}{2a}\right) - \frac{1}{2} \int_w^\infty \exp\left[-\frac{(\sigma_5)^2}{4w} - w\right] \frac{dw}{w}\right] \quad (3-33)$$

όπου  $K_o$  συμβολίζει την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και μηδενικής τάξης.

Αν το  $s$  είναι αρκετά μεγάλο (π.χ. αν η συγκόλληση πραγματοποιήθηκε για αρκετό χρόνο) τότε λαμβάνεται η κατανομή της θερμοκρασίας για ψευδο-μόνιμες συνθήκες:

$$T - T_o = \frac{q_0/d}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) K_o\left(\frac{vr}{2a}\right) \quad (3-34)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται και λύση Rosenthal για λεπτά ελάσματα μεγάλου πλάτους. Στη βιβλιοθήκη των αναλυτικών λύσεων δε, αναπτύχθηκε και ένα επιπλέον ξεχωριστό πρόγραμμα για τη λύση Rosenthal που παράγει διαγράμματα με κατανομές θερμοκρασιών εκτός του παραμετρικού που αναλύεται παρακάτω.

Για να αναλυθεί το θερμικό πρόγραμμα αδιασταποιήθηκαν, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο πρόγραμμα, οι παράγοντες της παραπάνω λύσης του Rosenthal. Χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (3-6) για την αδιάστατη θερμοκρασία, η (3-8) για την αδιάστατη χρονική παράμετρο, και οι (3-10), (3-11) και (3-12) ως αδιάστατες συντεταγμένες. Επιπλέον δημιουργήθηκαν:

- Αδιάστατο ακτινικό διάνυσμα

$$\sigma_5 = \frac{uR}{2a} \quad (3-35)$$

- Αδιάστατη λειτουργική παράμετρος

$$n_3 = \frac{q_0}{2\pi ad(T_c - T_0)} = \frac{q_0}{2\pi ad(H_c - H_0)} \quad (3-36)$$

όπου  $q_0 = \eta \cdot I \cdot V$  η καθαρή ισχύς ηλεκτρικού τόξου ( $Q/t_i$ ) και  $H_c - H_0$  το θερμικό περιεχόμενο ανά μονάδα όγκου στη θερμοκρασία αναφοράς (διαφορά ενθαλπίας).

- Αδιάστατο πάχος ελάσματος

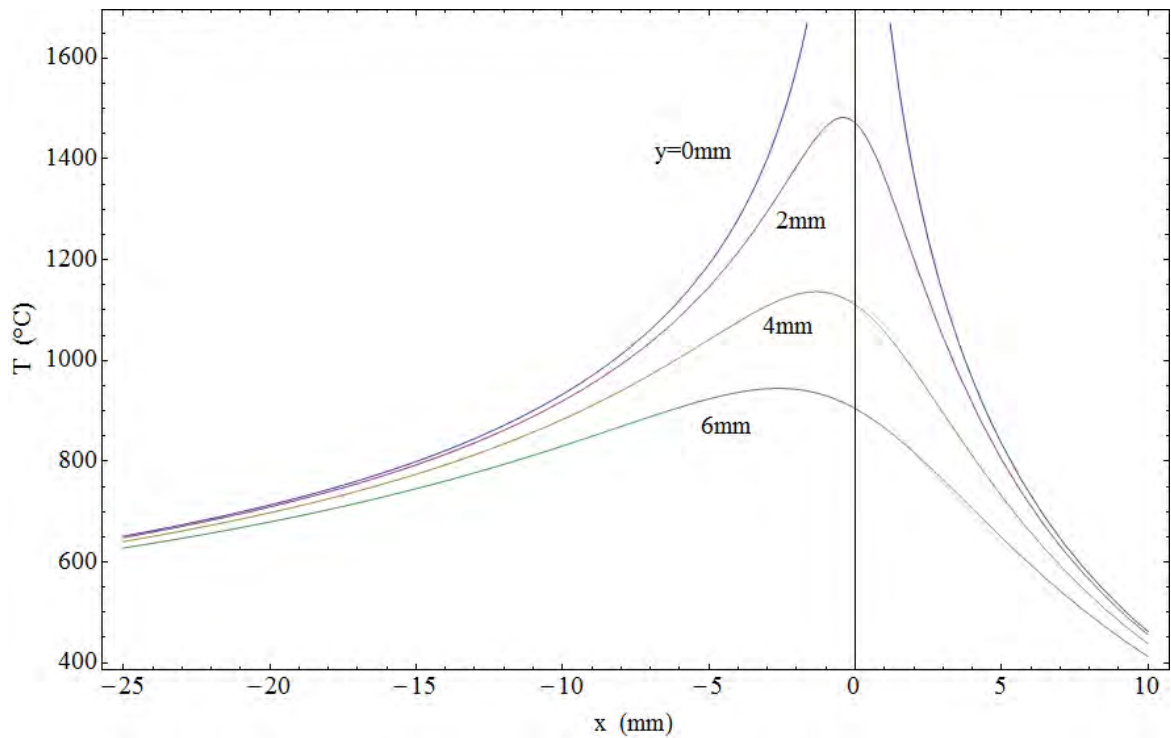
$$\delta = \frac{ud}{2a} \quad (3-37)$$

το οποίο είναι ένα μέτρο της σχετικής ταχύτητας του τόξου και της ροής της θερμότητας στο υλικό.

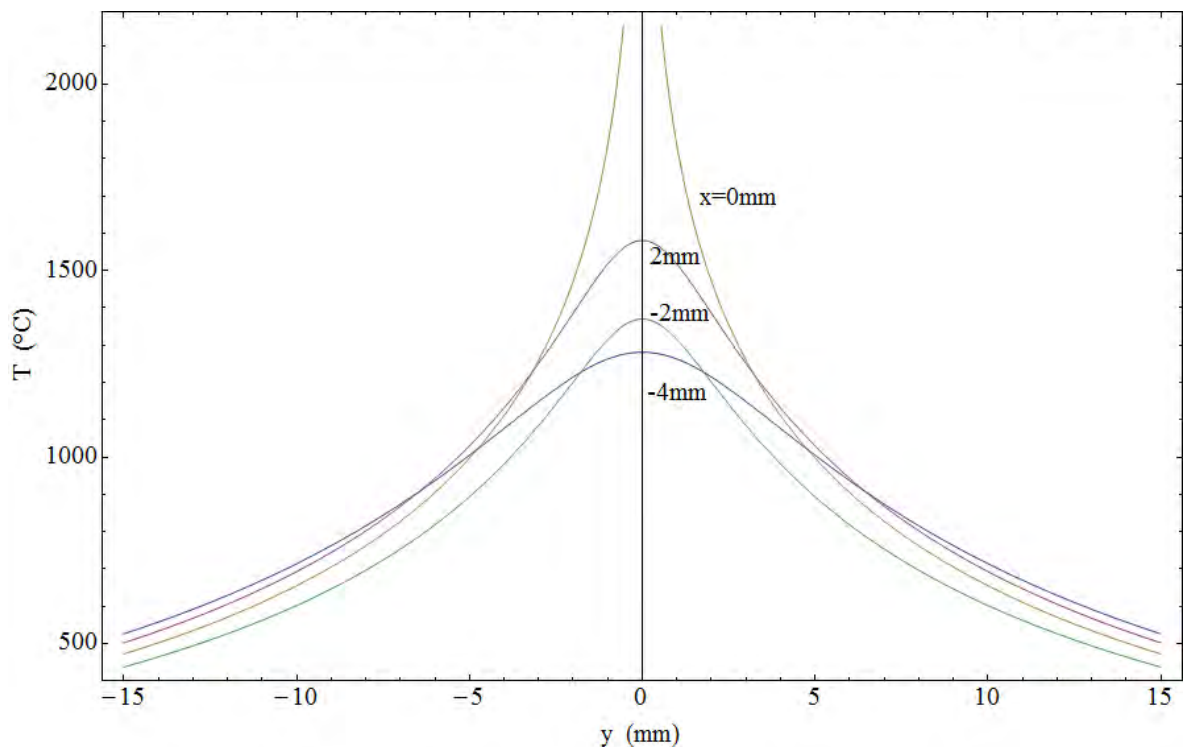
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω παραμέτρους στη σχέση (3-34) προκύπτει η αδιάστατη εξίσωση Rosenthal:

$$\frac{\theta\delta}{n_3} = \exp(-\xi) K_o(\sigma_5) \quad (3-38)$$

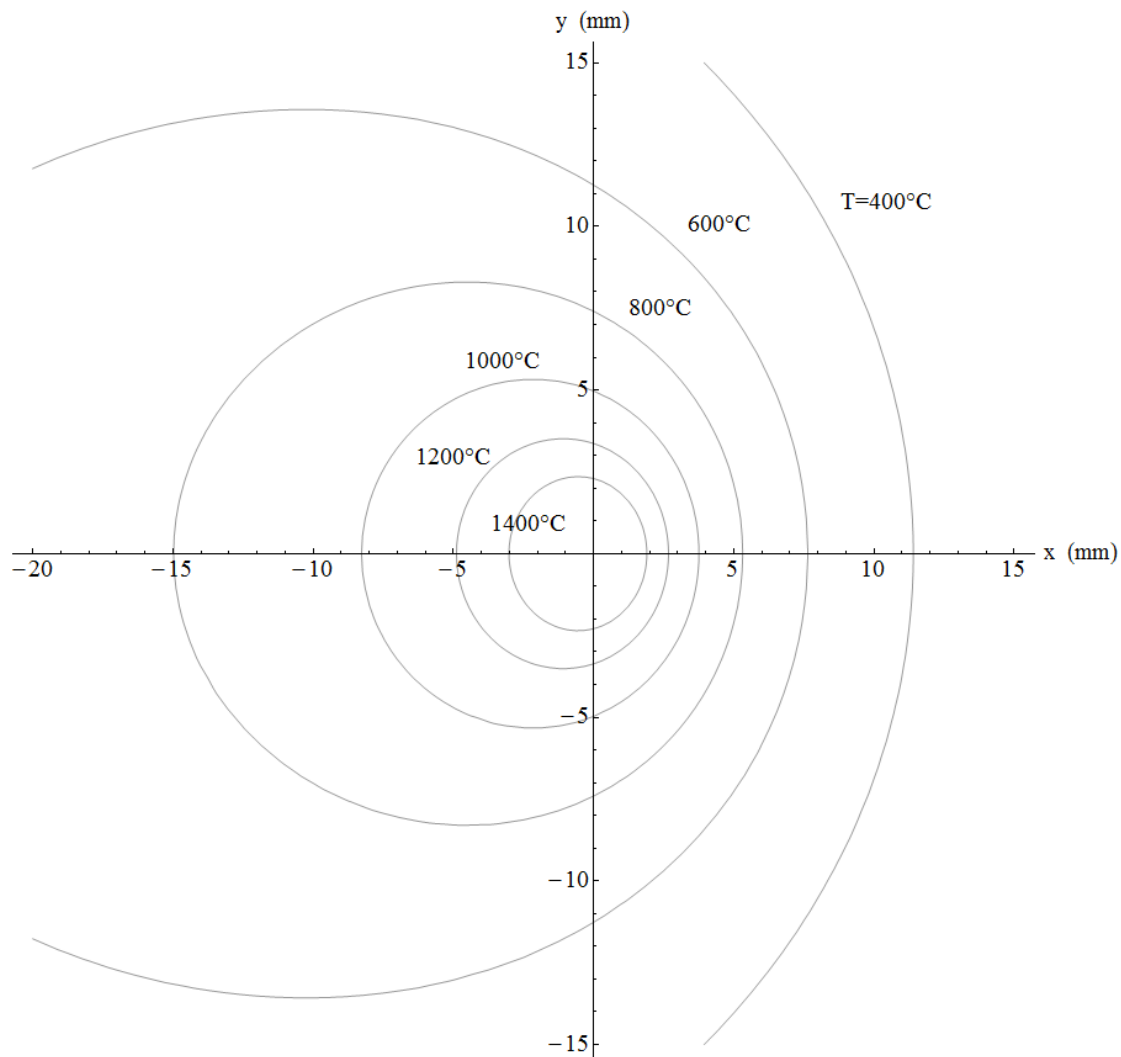
Ακριβώς όπως και στην προηγούμενη λύση αναπτύχθηκε στο Mathematica και ένα παραμετρικό πρόγραμμα, το οποίο περιέχει τις παραπάνω μεταβλητές. Υπολογίζει θερμοκρασιακούς χάρτες και παράγει πληροφορίες για τη λίμνη συγκόλλησης, τη θερμοεπηρασμένη ζώνη (ΘΕΖ), χρόνους και ρυθμούς ψύξης. Η σχέση (3-38) έχει λυθεί μέσω Mathematica για διάφορες τιμές απόστασης και χρόνου. Τα αποτελέσματα της επίλυσης της παρουσιάζονται στα σχήματα 3.2.2, 3.2.3 και 3.2.4. για κράμα αλουμινίου Al-Mg με συνθήκες συγκόλλησης  $I=110$  A,  $V=15$  V,  $H_c - H_0=1.7$  J/mm<sup>3</sup>,  $u=4$  mm/s, πάχος ελάσματος  $d=2$ mm,  $\alpha=55.19$  mm<sup>2</sup>/s,  $\lambda=0.149$  W/mm °C,  $\rho c=0.0027$  J/mm<sup>3</sup> °C,  $T_c=650$  °C,  $T_0=20$  °C και  $\eta=0.6$  για συγκόλληση με μη αναλυσκόμενο ηλεκτρόδιο βολφραμίου (GTAW). Όπως φαίνεται το σχήμα των ισόθερμων καμπυλών δεν επηρεάζεται από την ταχύτητα συγκόλλησης.



**Σχήμα 3.2.2** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  (°C) –  $x$  (mm) συγκολλήσεων σε λεπτά ελάσματα (κράμα Al-Mg)



**Σχήμα 3.2.3** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  (°C) –  $y$  (mm) συγκολλήσεων σε λεπτά ελάσματα (κράμα Al-Mg)



**Σχήμα 3.2.4** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων: ισόθερμες στο επίπεδο  $x - y$  (mm) συγκολλήσεων σε λεπτά ελάσματα (κράμα Al-Mg)

### Πλάτη ισοθερμικών ζωνών

Το μέγιστο πλάτος της λίμνης συγκόλλησης μπορεί να προσδιοριστεί θέτοντας το παρακάτω και εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial \ln(\theta\delta/n_3)}{\partial \xi} = \frac{\partial \ln(\theta\delta/n_3)}{\partial \sigma_5} \cdot \frac{\partial \sigma_5}{\partial \xi} = -\exp(-\xi_m) \left[ K_0(\sigma_{5m}) + \frac{\xi_m}{\sigma_{5m}} K_1(\sigma_{5m}) \right] = 0$$

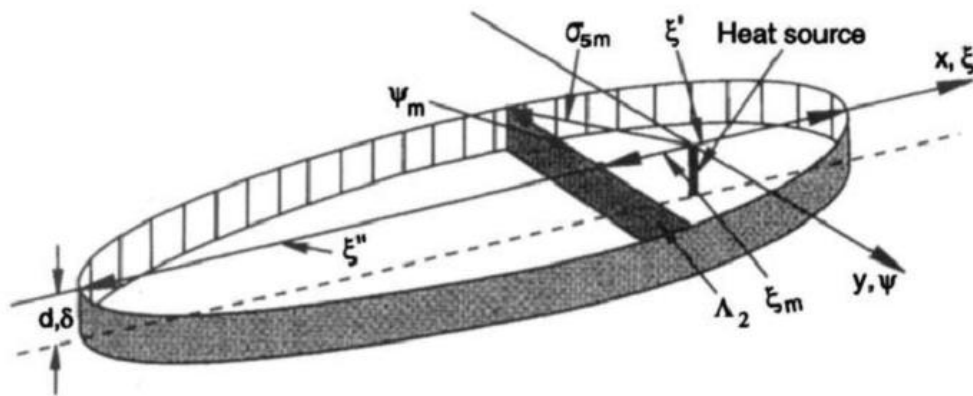
από το παραπάνω προκύπτει:

$$\xi_m = -\sigma_{5m} \frac{K_0(\sigma_{5m})}{K_1(\sigma_{5m})} \quad (3-39)$$

όπου  $K_1$  συμβολίζει την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους και πρώτης τάξης. Η παραπάνω σχέση δίνει την οριζόντια απόσταση από την πηγή (σχήμα 3.2.5 και 3.2.7). Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην (3-38) προκύπτει η σχέση μέγιστων θερμοκρασιών

$$\frac{\theta_p \delta}{n_3} = \exp[\sigma_{5m} K_o(\sigma_{5m}) / K_1(\sigma_{5m})] K_o(\sigma_{5m}) \quad (3-40)$$

Η εξίσωση (3-40) χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς των πλατών των ισοθερμικών ζωνών  $\psi_m$  (isothermal zone widths) και των επιφανειών εγκάρσιας διατομής  $\Lambda_2$  (cross sectional areas) όπως φαίνονται στο σχήμα 3.2.5.



**Σχήμα 3.2.5** Σχηματική αναπαράσταση της ζώνης τήξης για λύσεις Rosenthal για λεπτά ελάσματα μεγάλου πλάτους

Πλάτος ισοθερμικής ζώνης (θέση 3-β στο σχήμα 3.2.7)

$$\psi_m = \sqrt{(\sigma_{5m})^2 - \xi_m^2} = \sigma_{5m} \sqrt{1 - [K_o(\sigma_{5m})]^2 / [K_1(\sigma_{5m})]^2} \quad (3-41)$$

και πραγματικές διαστάσεις:  $y_m = \frac{2 a \psi_m}{u}$

Επιφάνεια εγκάρσιας διατομής ραφής συγκόλλησης

η επιφάνεια σε αδιάστατη μορφή

$$\Lambda_2 = 2 \psi_m \delta = 2 \sigma_{5m} \delta \sqrt{1 - [K_o(\sigma_{5m})]^2 / [K_1(\sigma_{5m})]^2} \quad (3-42)$$

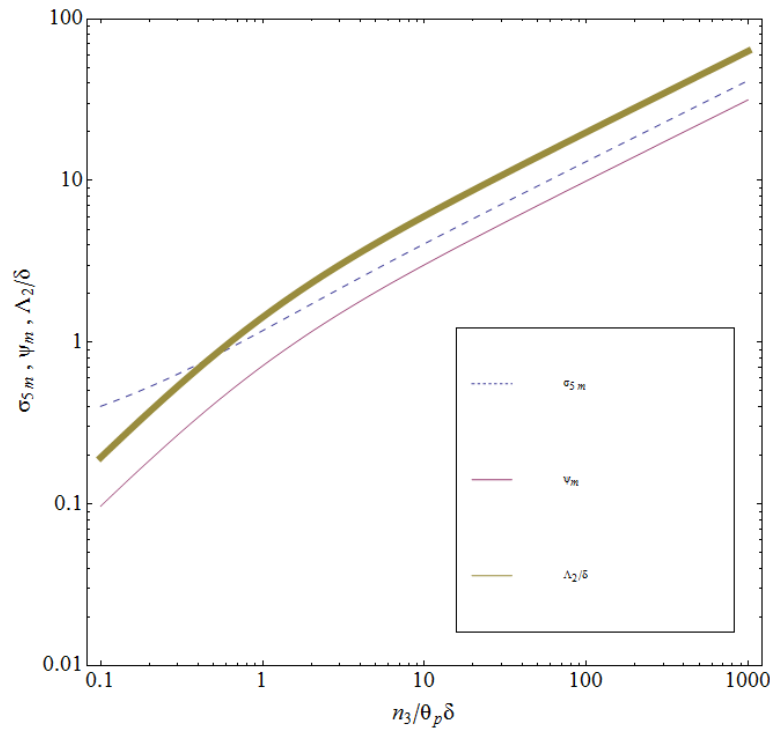
και σε πραγματικές διαστάσεις:  $A(mm^2) = \frac{4a^2}{u^2} \Lambda_2$

ενώ η επιφάνεια της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης ΘΕΖ θα είναι:

$$\Delta \Lambda_2 = 2 (\psi_{mp} - \psi_m) \delta \quad (3-43)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $\Delta A (mm^2) = \frac{4a^2}{u^2} \Delta \Lambda_2$

Μια συνδυαστική γραφική αναπαράσταση δημιουργήθηκε για τις σχέσεις (3-40), (3-41) και (3-42) στο σχήμα 3.2.6.



**Σχήμα 3.2.6** Διάγραμμα αδιάστατης απόστασης  $\sigma_{5m}$ , ημι-απόστασης  $\psi_m$  και επιφάνειας εγκάρσιας διατομής  $\Lambda_2$  σε σχέση την παράμετρο  $n_3/\theta_p\delta$

### Μήκος λίμνης συγκόλλησης

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2.5 το συνολικό μήκος της λίμνης  $\xi_t$  δίνεται από τη σχέση:  $\xi_t = \xi' - \xi''$  όπου  $\xi'$  (θέση 1-β στο σχήμα 3.2.7) είναι η απόσταση από την πηγή θερμότητας μέχρι το μπροστινό άκρο και  $\xi''$  η απόσταση μέχρι το πίσω άκρο της λίμνης συγκόλλησης (θέση 4-β στο σχήμα 3.2.7).

Οι συντεταγμένες  $\xi'$  και  $\xi''$  βρίσκονται θέτοντας  $\sigma_5 = \pm \xi$ , το οποίο δίνει:

για  $\sigma_5 = +\xi$

$$\xi' = \ln\left(\frac{n_3 K_o(\xi')}{\theta \delta}\right), \quad \xi' > 0 \quad (3-44)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις (από σχέση 3-10):  $x' = \frac{2a}{u} \xi'$  (mm) και για  $\sigma_3 = -\xi$

$$\xi'' = \ln\left(\frac{n_3 K_o(-\xi'')}{\theta \delta}\right), \quad \xi'' < 0 \quad (3-45)$$

από την παραπάνω, λόγω αρνητικού αριθμού προκύπτει μιγαδικός. Κρατείται μόνο το πραγματικό μέρος. Σε πραγματικές διαστάσεις:  $x'' = \frac{2a\xi''}{u}$  (mm).

### Συνθήκες Ψύξης κοντά στη γραμμή συγκόλλησης

Ο χρόνος ψύξης μέσα σε ένα συγκεκριμένο θερμοκρασιακό διάστημα  $\theta_1$ - $\theta_2$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2} (n_3/\delta)^2 \left[ \frac{1}{(\theta_2)^2} - \frac{1}{(\theta_1)^2} \right] \quad (3-46)$$

Οπότε για ψύξη στο θερμοκρασιακό διάστημα  $T_1=800^\circ\text{C}$  με  $T_2=500^\circ\text{C}$  η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\Delta\tau_{8/5} = \frac{\pi}{2} (n_3/\delta)^2 \left[ \frac{1}{(\theta_{500})^2} - \frac{1}{(\theta_{800})^2} \right] \quad (3-47)$$

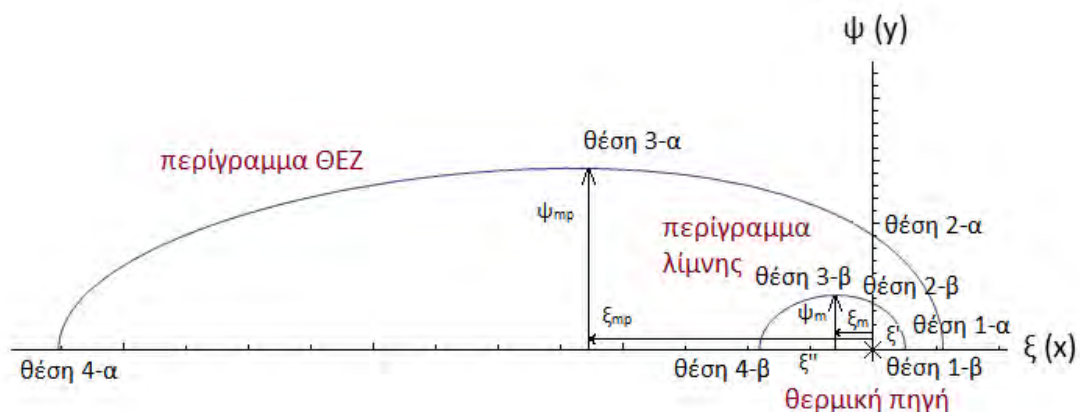
ενώ ο πραγματικός χρόνος ψύξης είναι:

$$\Delta t_{8/5} = \left[ \frac{1}{4\pi\lambda\rho c} \right] \left[ \frac{1}{(500-T_0)^2} - \frac{1}{(800-T_0)^2} \right] \left[ \frac{q_0}{u d} \right]^2 \quad (3-48)$$

και ο ρυθμός ψύξης υπολογίζεται ως εξής:

$$C.R. (\text{°C s}^{-1}) = \frac{q_0 u^2}{4\pi^2 a^2 \rho c d} (\theta\delta/n_3)^3 = \frac{2\pi\lambda\rho c}{(q_0/ud)^2} (T - T_0)^3 \quad (3-49)$$

όπου  $T$  η θερμοκρασία στην οποία ζητείται να βρεθεί ο ρυθμός ψύξης.



**Σχήμα 3.2.7** Περίγραμμα θερμοεπιρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) και λίμνης συγκόλλησης για  $\zeta=0$  για μοντέλο λύσεων μεγάλου ελασμάτων πάχους

### Σημείο τομής με τον άξονα $\psi$ ( $\gamma$ )

Στην περίπτωση αυτή  $\xi=0$  και  $\sigma_3=\psi$ . Επομένως η (3-38) γίνεται:

$$\frac{\theta\delta}{n_3} = K_o(\psi) \quad (3-50)$$

επιλύοντας την παραπάνω σχέση προσδιορίζεται το σημείο τομής της ισοθερμικής ζώνης (θέση 2-β στο σχήμα 3.2.7) ή της θερμοεπιηρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) (θέση 2-α στο σχήμα 3.2.7) με τον άξονα  $\psi$  ανάλογα με την τιμή που θα τεθεί στον όρο

$$\frac{\theta\delta}{n_3} = \frac{2\pi ad(T_c - T_0)}{q_0} \quad (3-51)$$

(για λίμνη συγκόλλησης  $T=T_c$  και για ΘΕΖ  $T=T_{ar}$  για ΘΕΖ  $T=T_{ac3}$  στην περίπτωση που είναι χάλυβας ή  $T=T_{ar}$  στην περίπτωση που είναι αλουμίνιο)

### Πλάτος πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης (ΘΕΖ)

Εισάγοντας την τιμή της  $\frac{\theta\delta}{n_3}$  από τη σχέση (3-51) για  $T=T_{ar}$  στην (3-40) προκύπτει το  $\sigma_{5mp}$  το οποίο με τη σειρά του εισάγεται στην (3-41) για να βρεθεί η μέγιστη απόσταση του ορίου της ΘΕΖ από την θερμική πηγή (θέση 3-α στο σχήμα 3.2.7):

$$\psi_{mp} = \sigma_{5m} \sqrt{1 - [K_o(\sigma_{5mp})]^2 / [K_1(\sigma_{5mp})]^2}$$

και η απόσταση

$$\xi_{mp} = -\sigma_{5mp} \frac{K_o(\sigma_{5mp})}{K_1(\sigma_{5mp})}$$

Αφαιρώντας το πλάτος της ισοθερμικής ζώνης  $\psi_m$  από τη μέγιστη απόσταση της ΘΕΖ από την θερμική πηγή  $\psi_{mp}$  λαμβάνεται το πλάτος της μετασχηματισμένης ζώνης, δηλαδή:

$$\Delta\psi = \psi_{mp} - \psi_m \quad (3-52)$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $\Delta y = \Delta\psi \frac{2a}{u}$  (mm).

### 3.2.2. Παράδειγμα

Πραγματοποιείται συγκόλληση συμβολής TIG/GTAW σε λεπτό έλασμα πάχους 2mm σε αλουμίνιο ψυχρής έλασης (κράμα Al-Mg) υπό τις παρακάτω συνθήκες:

$$I=110A, V=15V, u=4mm s^{-1}, T_0=20^\circ C, \eta=0.6$$



Υπολογίζονται το συνολικό μήκος της λίμνης συγκόλλησης  $\xi_t$ , τα πλάτη της λίμνης και της ΘΕΖ, το πλάτος της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης ΘΕΖ, τα σημεία τομής των καμπυλών με τον άξονα  $\psi(\gamma)$ , η εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής και ο ρυθμός ψύξης στους 275°C. Η θερμοκρασία ανακρυστάλλωσης  $A_r$  του βασικού υλικού είναι  $T_{Ar}=275^\circ\text{C}$ . Η θερμοκρασία τήξης του αλουμινίου είναι  $T_c=650^\circ\text{C}$ .

*Λύση*

Αν θεωρηθεί αμελητέα η λανθάνουσα θερμότητα τήξης, ο λόγος  $\theta\delta/n_3$  στο σημείο τήξης θα είναι (για  $T=T_c$ ) στη σχέση (3-30):

$$\begin{aligned} \frac{\theta\delta}{n_3} &= \frac{2\pi a d (T_c - T_0)}{q_0} = \frac{2\pi \rho c a d (T_c - T_0)}{\eta I V} = \\ &= \frac{2\pi \cdot 0,0027 \cdot 55,18 \cdot 2(650 - 20)}{990} = 1,1915 \end{aligned}$$

και

$$n_3 = \frac{q_0}{2\pi a d \rho c (T_c - T_0)} = 0,8392$$

Το αδιάστατο πάχος του ελάσματος από τη σχέση είναι:  $\delta = \frac{ud}{2a} = 0,07248$

Τα σημεία  $\xi'$  και  $\xi''$  από τις σχέσεις (3-21), (3-22):

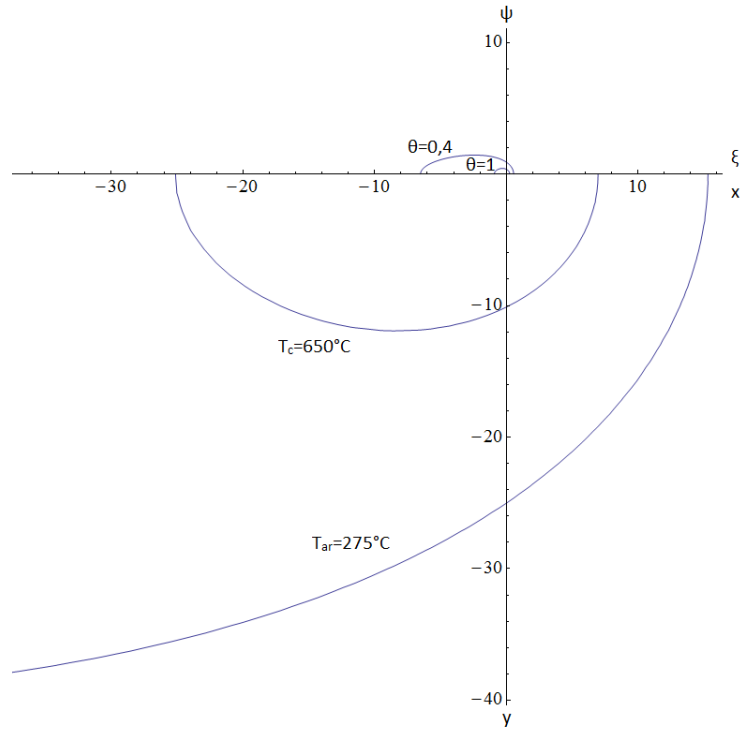
$$\xi' = \ln\left(\frac{n_3 K_o(\xi')}{\theta\delta}\right) \Rightarrow \xi' = 0,2522$$

και σε πραγματικές διαστάσεις  $x' = 6,9588 \text{ mm}$  και

$$\xi'' = \ln\left(\frac{n_3 K_o(-\xi'')}{\theta\delta}\right) \Rightarrow \xi'' = -0,9100$$

και σε πραγματικές διαστάσεις  $x'' = -25,1108 \text{ mm}$ .

Επομένως μέγιστο μήκος της λίμνης συγκόλλησης  $\xi_t = \xi' - \xi'' = 1,1622$ , δηλαδή  $x_t = 32,0696 \text{ mm}$ . Μια απεικόνιση φαίνεται στο σχήμα 3.2.8.



**Σχήμα 3.2.8** Περίγραμμα θερμοεπηρεασμένης ζώνης (ΘΕΖ) και λίμνης συγκόλλησης όταν  $\zeta=0$  για το παράδειγμα στη συγκόλληση συμβολής TIG/GTAW λεπτού ελάσματος μεγάλου πλάτους (κράμα Al-Mg)

Το πλάτος της λίμνης συγκόλλησης βρίσκεται αν αντικατασταθεί ο λόγος  $\theta_p\delta/n_3$  στη σχέση (3-40) (για  $T = T_c$ ) και βρεθεί το  $\sigma_{5m}$ . Δηλαδή  $\theta_p\delta/n_3=0,4553$  και επομένως  $\sigma_{5m}=0,5252$ . Αντικαθιστώντας αυτό στη σχέση (3-41):

$$\psi_m = \sigma_{5m} \sqrt{1 - [K_o(\sigma_{5m})]^2 / [K_1(\sigma_{5m})]^2} = 0,432$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $y_m = \frac{2a\psi_m}{u} = 11,923 \text{ (mm)}$

και με την τιμή της  $\sigma_{5m}$  βρίσκεται και ότι:

$$\xi_m = -\sigma_{5m} \frac{K_o(\sigma_{5m})}{K_1(\sigma_{5m})} = -0,2987$$

δηλαδή  $x_m = -8,2409 \text{ (mm)}$ .

Αντίστοιχα το πλάτος της ΘΕΖ ανακτάται αν αντικατασταθεί ο λόγος  $\theta\delta/n_3$  στη σχέση (3-40) (για  $T = T_{ar}$  αυτή τη φορά) και βρεθεί το  $\sigma_{5mp}$ . Δηλαδή  $\theta\delta/n_3=0,4823$  και επομένως  $\sigma_{5mp}=2,8106$ . Αντικαθιστώντας αυτό στη σχέση (3-41):

$$\psi_{mp} = \sigma_{5mp} \sqrt{1 - [K_o(\sigma_{5mp})]^2 / [K_1(\sigma_{5mp})]^2} = 1,4448$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $y_{mp} = \frac{2 a \psi_{mp}}{u} = 39,8664 \text{ (mm)}$   
 και με την τιμή της  $\sigma_{5mp}$  βρίσκεται και ότι:

$$\xi_{mp} = -\sigma_{5m} \frac{K_o(\sigma_{5m})}{K_1(\sigma_{5m})} = -2,4109$$

δηλαδή  $x_{mp} = -66,5218 \text{ (mm)}$

Οπότε το πλάτος της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης θα είναι:

$$\Delta\psi = \psi_{mp} - \psi_m = 1,01273$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $\Delta y = 27,9439 \text{ (mm)}$ .

Τα σημεία τομής των καμπυλών με τον άξονα  $\psi(y)$ , βρίσκονται αν επιλυθεί η σχέση (3-50) για το λόγο  $\theta\delta/n_3=1,1915$  για  $T = T_c$  και  $\theta\delta/n_3=0,4823$  για  $T = T_{ar}$ :

$$\psi_{c1} = 0,3665 \text{ (} y_{c1} = 10,1137 \text{ mm)} \text{ για τη λίμνη συγκόλλησης (} T = T_c \text{)}$$

και

$$\psi_{c2} = 0,8692 \text{ (} y_{c2} = 23,9862 \text{ mm)} \text{ για τη } \theta EZ \text{ (} T = T_{ar} \text{)}$$

Η εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής από σχέσεις (3-42) και (3-43):

$$\Lambda_2 = 2 \psi_m \delta = 2 * 0,432 * 0,07248 = 0,06262$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $A = \frac{4a^2}{u^2} \Lambda_2 = \frac{4(5)^2}{3^2} 0,06262 = 47,69 \text{ (mm}^2\text{)}$

ενώ η επιφάνεια της πλήρους μετασχηματισμένης ζώνης  $\theta EZ$  θα είναι:

$$\Delta\Lambda_2 = 2 \Delta\psi \delta = 2 (\psi_{mp} - \psi_m) \delta = 2 * 1,01273 * 0,07248 = 0,1468$$

και σε πραγματικές διαστάσεις:  $\Delta A = \frac{4a^2}{u^2} \Delta\Lambda_2 = \text{(mm}^2\text{)}$

Ο ρυθμός ψύξης στους  $275^\circ\text{C}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3-48):

$$C.R. = \frac{2\pi\lambda\rho c}{(q_o/ud)^2} (T - T_o)^3 = \frac{2\pi * 0,149 * 0,0027}{(990/4 * 2)^2} (275 - 20)^3 = 2,737 \text{ (} ^\circ\text{Cs}^{-1}\text{)}$$

### 3.3. Έλασμα πεπερασμένου πάχους (medium plate solutions)

#### 3.3.1. Μοντέλο

Σε μια πραγματική συγκόλληση οι παραδοχές για τρισδιάστατη ή δισδιάστατη θερμική ροή που είναι έμφυτες με τις εξισώσεις Rosenthal δεν πληρούνται πάντα λόγω των μεταβλητών θερμοκρασιακών διαφορών κλίσεων στη διεύθυνση του πάχους  $z$  του ελάσματος.

Το γενικό μοντέλο του ελάσματος πεπερασμένου πάχους θεωρεί μια σημειακή θερμική πηγή κινούμενη με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος ενός μεγάλου πλάτους ελάσματος πεπερασμένου πάχους  $d$ . Με την εξαίρεση ορισμένων περιπτώσεων (πχ υδρόψυξη στην πίσω πλευρά του ελάσματος), είναι λογική προσέγγιση να υποθεθεί ότι η επιφάνεια του ελάσματος είναι αδιαπέραστη από θερμότητα (αδιαβατικό σύστημα). Με αυτό τον τρόπο, προκειμένου να διατηρηθεί η καθαρή ροή θερμότητας διαμέσου και των δύο ορίων μηδενική, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη κατοπτρικές αντανakλάσεις της πηγής σε σχέση με τα επίπεδα  $z=0$  και  $z=d$ . Αυτό μπορεί να γίνει με τη “μέθοδο των εικόνων” όπως φαίνεται στο σχήμα 3.13. Συμπεριλαμβανοντας όλες τις συνεισφορές από τις φανταστικές πηγές:  $2q_{-2}, 2q_{-1}, 2q_1, 2q_2$  κτλ που βρίσκονται συμμετρικά σε αποστάσεις  $\pm id$  κάτω και πάνω από την επιφάνεια του ελάσματος, η κατανομή της θερμοκρασίας για ψευδομόνιμες συνθήκες δίνεται από την παρακάτω σχέση (ο αριθμός φανταστικών πηγών θερμότητας απαραίτητων για να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια εξαρτάται από τις επιλεγμένες τιμές των  $R_0$  και  $ud/2a$ ):

$$T - T_o = \frac{q_o}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) x \left[ \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (1/R_i) \exp\left(-\frac{v}{2a} R_i\right) \right] \quad (3-53)$$

όπου  $R_i = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2id)^2}$ .

Στην ουσία η σχέση (3-53) είναι η γενική Rosenthal εξίσωση για ελάσματα μεγάλου πάχους [σχέση (3-5)] αθροισμένη για όλες τις φανταστικές πηγές. Η παραπάνω σχέση έχει λυθεί μέσω Mathematica και τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 3.14.

Αντικαθιστώντας τις αδιάστατες παραμέτρους που τέθηκαν στις προηγούμενες λύσεις όπως (3-6), (3-8), (3-9) και η ομάδα (3-10) μέχρι (3-12) στη σχέση (3-53) προκύπτει η αδιάστατη σχέση Rosenthal:

$$\frac{\theta}{n_3} = \exp(-\xi) \left[ \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left( \frac{1}{\sigma_i} \right) \exp(-\sigma_i) \right] \quad (3-54)$$

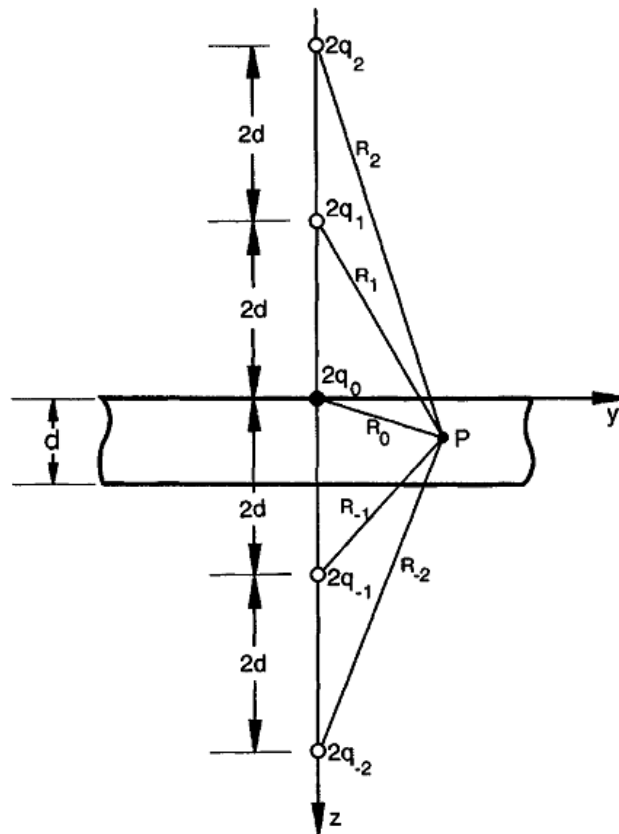
όπου

$$\sigma_i = \frac{v}{2a} R_i = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 + (\zeta - 2i\delta)^2} \quad (3-55)$$

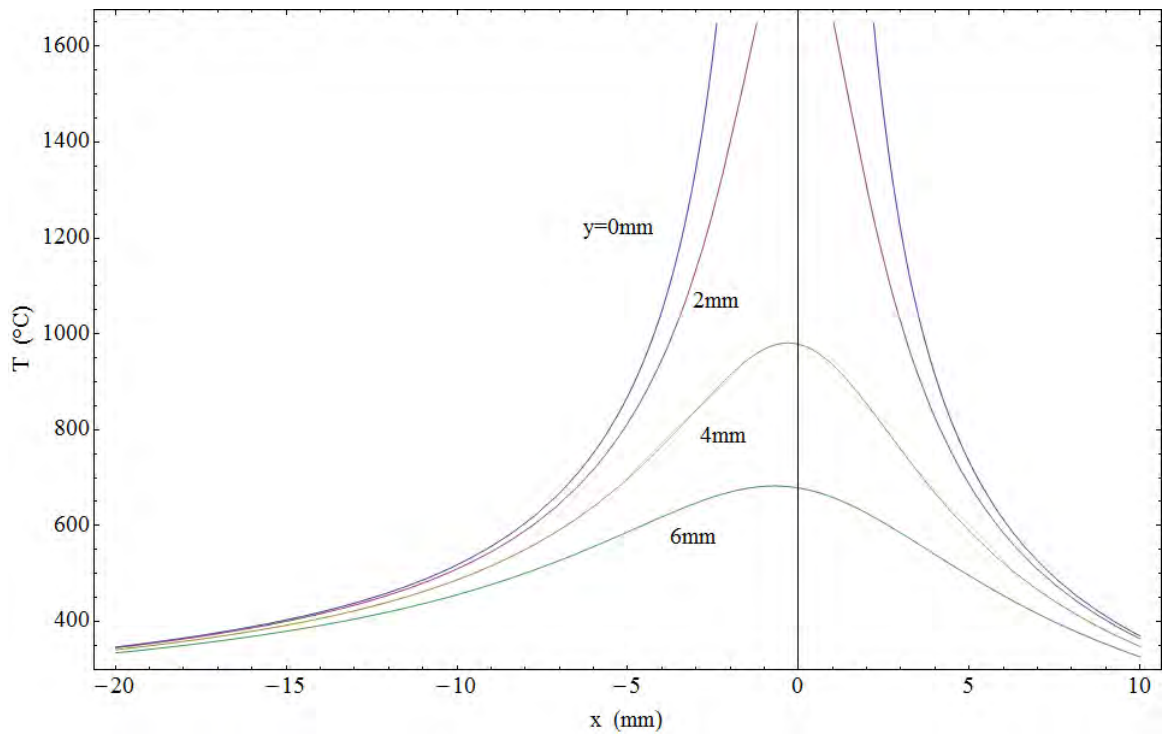
Η σχέση (3-54) λύθηκε μέσω Mathematica για διάφορες τιμές παραμέτρων και τα αποτελέσματα της επίλυσης της παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3.2, 3.3.3 και 3.3.4 (α) και (β) για κράμα αλουμινίου με συνθήκες συγκόλλησης  $I=260$  A,  $V=25$  V,  $H_c-H_0=1.3$  J/mm<sup>3</sup>,  $u=3$  mm/s, πάχος ελάσματος  $d=20$ mm, αριθμός φανταστικών

πηγών  $\rho=4$ ,  $\alpha=85.19 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\lambda= 0.230 \text{ W/mm } ^\circ\text{C}$ ,  $\rho c=0.0027 \text{ J/mm}^3 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $T_c=660 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $T_0=20 \text{ } ^\circ\text{C}$  και  $\eta=0.8$  για συγκόλληση GMAW.

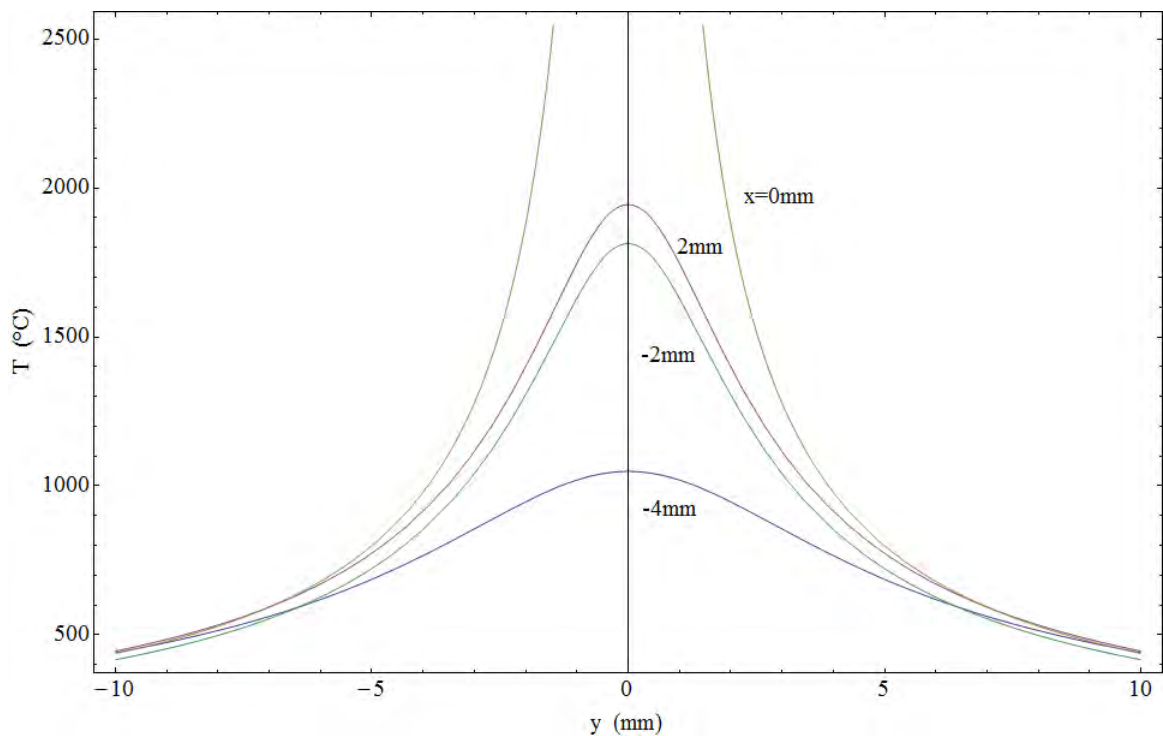
Από τη σχέση (3-53) συνεπάγεται ότι οι θερμικές συνθήκες θα είναι παρόμοιες με αυτές ενός ελάσματος μεγάλου πάχους κοντά στο κέντρο της συγκόλλησης. Επιπλέον ο Rosenthal απέδειξε με επέκταση της σειρά Fourier ότι η σχέση (3-53) συγκλίνει στη γενική λύση για λεπτά ελάσματα μεγάλου πλάτους [σχέση (3-34)] για σημεία που βρίσκονται αρκετά μακριά από την πηγή. Ωστόσο σε ενδιάμεσες αποστάσεις από την πηγή θερμότητας η κατανομή θερμοκρασίας λόγω ψευδομόνιμων συνθηκών θα αποκλίνει σημαντικά από εκείνη που παρατηρήθηκε σε συγκολλήσεις ελασμάτων μεγάλου πάχους ή λεπτών ελασμάτων λόγω των μεταβλητών θερμοκρασιακών κλίσεων στην κατά το πάχος διεύθυνση του ελάσματος. Μέσα σε αυτή τη μεταβατική ζώνη το θερμικό πρόγραμμα ορίζεται από τις λύσεις ελασμάτων πεπερασμένου πάχους της σχέσης (3-53).



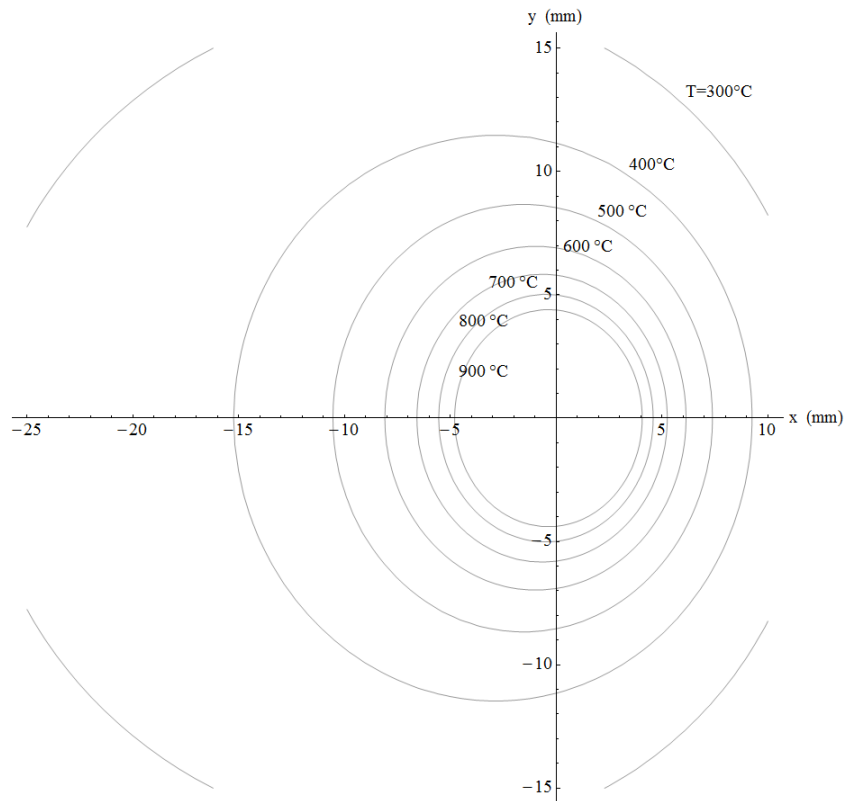
**Σχήμα 3.3.1** Πραγματικές και φανταστικές σημειακές πηγές σε έλασμα πεπερασμένου πάχους



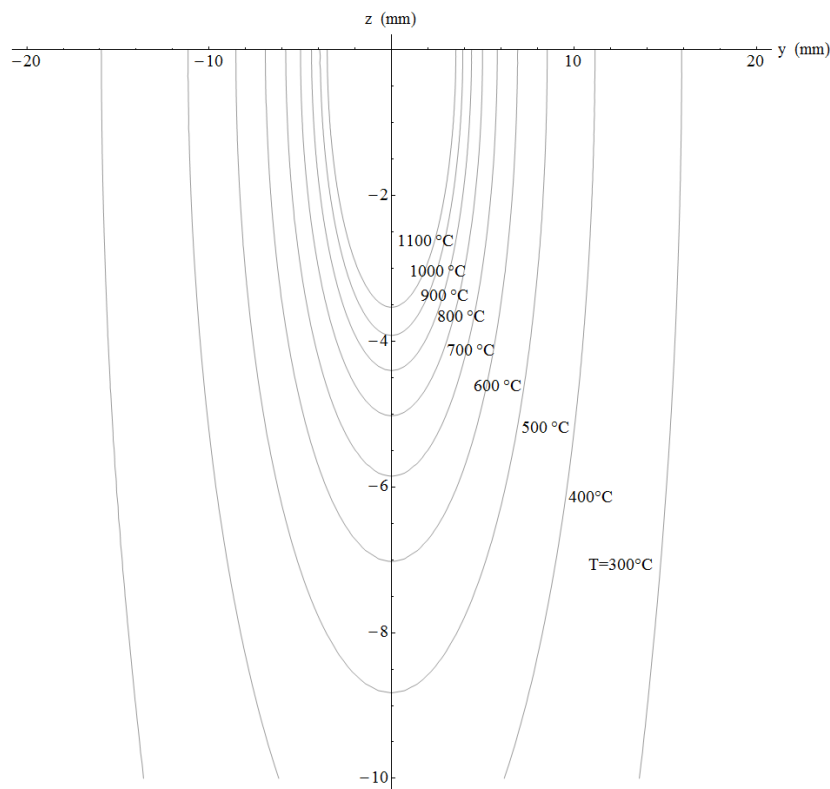
**Σχήμα 3.3.2** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  (°C) –  $x$  (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα πεπερασμένου πάχους (αλουμίνιο)



**Σχήμα 3.3.3** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων  $T$  (°C) –  $y$  (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα πεπερασμένου πάχους (αλουμίνιο)



**Σχήμα 3.3.4 α** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων: ισόθερμες στο επίπεδο  $x - y$  (mm) συγκολλήσεων σε έλασμα πεπερασμένου πάχους (αλουμίνιο)

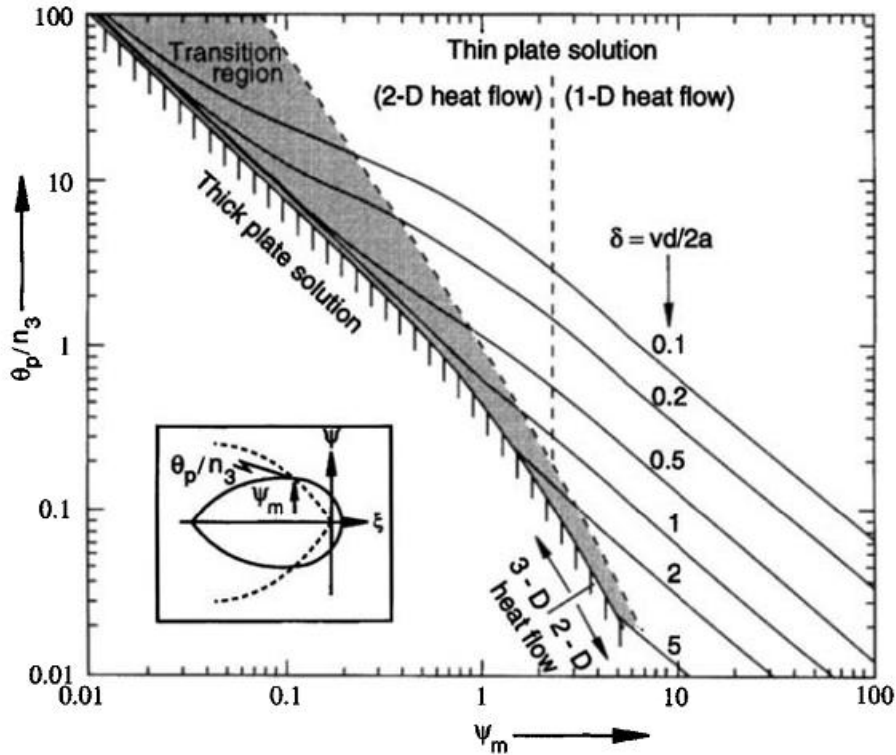


**Σχήμα 3.3.4 β** Διάγραμμα θερμοκρασιακών κατανομών πραγματικών διαστάσεων: ισόθερμες στο επίπεδο  $y - z$  (mm) σε έλασμα πεπερασμένου πάχους (αλουμίνιο)

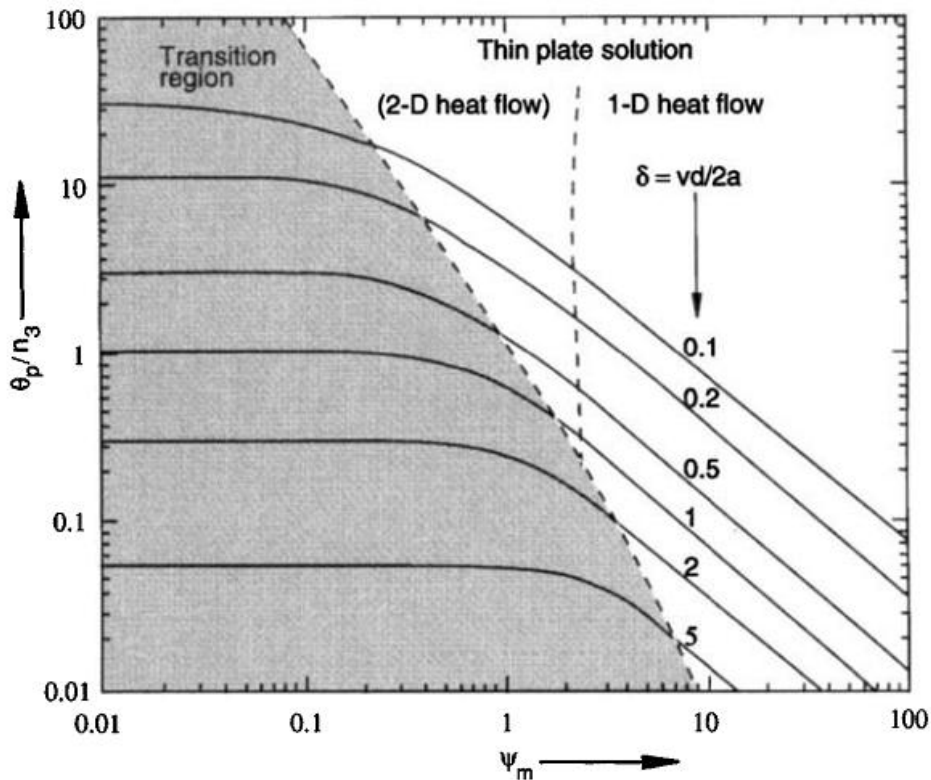
Παρατηρώντας τα διαγράμματα στο σχήμα 3.3.5 προκύπτουν τα συμπεράσματα:

1. Κοντά στην πηγή θερμότητας, το θερμικό πρόγραμμα θα είναι όμοιο με αυτό σε ένα παχύ έλασμα (σχήμα 3.3.5 (α)), το οποίο σημαίνει ότι η κατανομή της θερμοκρασίας καθορίζεται από την σχέση (3-13). Για μεγάλες τιμές του αδιάστατου πάχους του ελάσματος, ο τρόπος ροής της θερμότητας μπορεί να γίνει ουσιαστικά δισδιάστατος. Αυτό αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση μιας γρήγορα κινούμενης υψηλής πηγής ενέργειας σε ένα έλασμα μεγάλου πάχους όπως θα αναλυθεί παρακάτω [σχέση (3-59)].
2. Με αυξανόμενη απόσταση από την πηγή θερμότητας, μπορεί να συμβεί μια μετάβαση από τρισδιάστατη σε δισδιάστατη ροή θερμότητας, ανάλογα με το αδιάστατο πάχος του ελάσματος και τις λειτουργικές συνθήκες που εφαρμόζονται. Εξετάζοντας την άνω επιφάνεια του ελάσματος (σχήμα 3.3.5 (α)), η επέκταση της περιοχής μετάβασης (transition region), φαίνεται να μειώνεται με τις αυξανόμενες τιμές του  $\delta$  καθώς προσεγγίζονται οι συνθήκες για την συγκόλληση του ελάσματος μεγάλου πάχους. Η αντίθετη τάση παρατηρείται για την επιφάνεια του κάτω ελάσματος (σχήμα 3.3.5 (β)), καθώς ένα μικρό αδιάστατο πάχος ελάσματος οδηγεί γενικά σε πιο γρήγορη εξίσωση των κλίσεων της θερμοκρασίας στη διεύθυνση  $z(z)$ . Όταν οι καμπύλες στο σχήμα 3.3.5 (β) γίνουν παράλληλες με τον άξονα  $x$ , η θερμοκρασία στο κάτω μέρος του ελάσματος φτάνει τη μέγιστη τιμή της. Πρέπει να σημειωθεί ότι μέσα στην περιοχή μετάβασης, αξιόπιστες προβλέψεις της ψευδο-μόνιμης κατανομής της θερμοκρασίας μπορούν να γίνουν από την επίλυση του ελάσματος πεπερασμένου πάχους [σχέση (3-5)].
3. Για σημεία που εντοπίζονται αρκετά μακριά από την πηγή θερμότητας, οι κλίσεις της θερμοκρασίας στην διεύθυνση του πάχους του ελάσματος γίνονται αμελητέες. Αυτό υπονοεί ότι η κατανομή θερμοκρασίας στην ανώτερη και την κατώτερη επιφάνεια του ελάσματος είναι όμοιες, και μπορούν να υπολογιστούν από τη λύση του λεπτού ελάσματος [σχέση (3-38)].





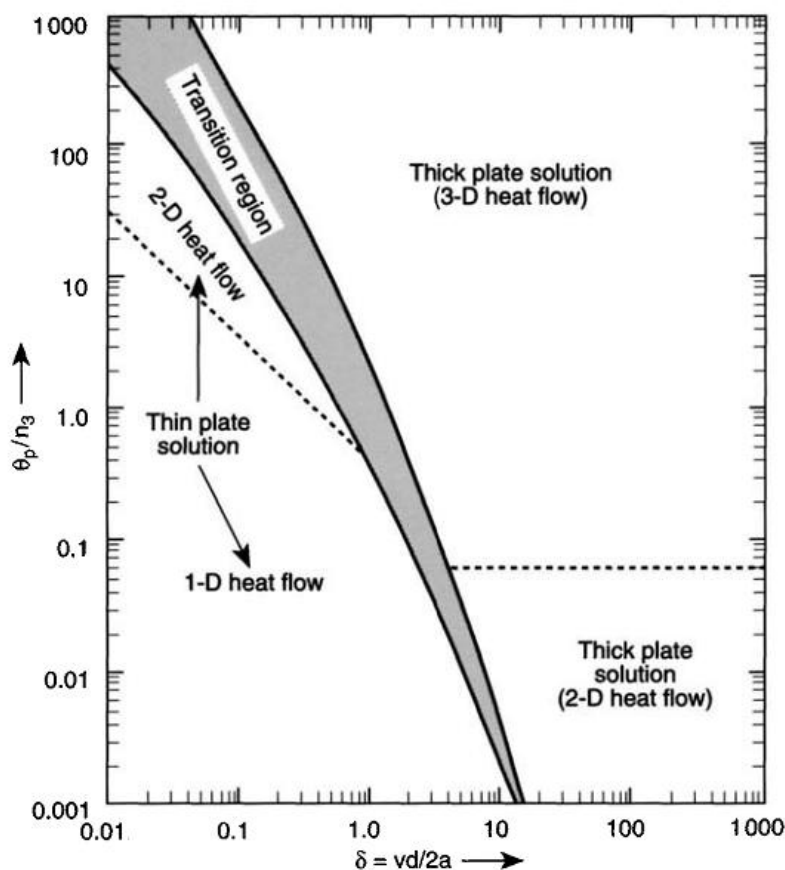
Σχήμα 3.3.5 α Κατανομή μέγιστων θερμοκρασιών στην εγκάρσια διεύθυνση ( $\psi=\psi_m$ ) στην επάνω επιφάνεια του ελάσματος ( $z=0$ )



Σχήμα 3.3.5 β Κατανομή μέγιστων θερμοκρασιών στην εγκάρσια διεύθυνση ( $\psi=\psi_m$ ) στην κάτω επιφάνεια του ελάσματος ( $z=\delta$ )

## Ισόθερμες καμπύλες

Φαίνεται από το σχήμα 3.3.6 ότι ένα μεγάλο πάχος ελάσματος θα ευνοεί γενικά την τρισδιάστατη ροή θερμότητας. Με μειούμενες τιμές του  $\theta_p/n_3$ , προσεγγίζονται οι συνθήκες για μια ταχεία κινούμενη πηγή υψηλής ενέργειας πριν συμβεί η μετάβαση στην λύση από έλασμα μεγάλου πάχους σε λεπτό έλασμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις οι ισόθερμες γραμμές στο κάτω μέρος του ελάσματος θα επιμηκυνθούν έντονα στην διεύθυνση  $x$  της συγκόλλησης και θα μετατοπίζονται σε θέσεις πολύ πίσω από την πηγή θερμότητας. Η αντίθετη τάση παρατηρείται σε μικρές τιμές του  $\delta=ud/2\alpha$ , καθώς μια ταχεία εξίσωση των κλίσεων της θερμοκρασίας στην διεύθυνση του πάχους του ελάσματος θα οδηγήσει σε ελλειπτικές ισόθερμες γραμμές και στις δύο επιφάνειες του ελάσματος, που βρίσκονται σε περίπου ίση απόσταση από την πηγή της θερμότητας. Σε κάθε περίπτωση η θερμοκρασία στην οποία οι ισόθερμες γραμμές της διατομής προσεγγίζουν ένα ημικύκλιο ή γίνονται παράλληλες με τον άξονα  $z(z)$  μπορεί να βρεθεί από το σχήμα 3.3.6 βλέποντας την τομή μεταξύ της γραμμής του αδιάστατου πάχους του ελάσματος και των αντίστοιχων συνόρων του πεδίου.



**Σχήμα 3.3.6** Χάρτης μηχανισμού θερμικής ροής που δείχνει τα σύνορα του πεδίου στην εγκάρσια διεύθυνση ( $\psi=\psi_m$ ) του ελάσματος προς  $\theta_p/n_3$  και  $\delta=ud/2\alpha$

### 3.4. Απλουστευμένη λύση για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ελάσματα μεγάλου πάχους (thick plate solutions)

#### 3.4.1. Μοντέλο

Οι ισόθερμες καμπύλες του σχήματος 3.1.4 (α) πίσω από την πηγή θερμότητας γίνονται ολοένα και πιο επιμήκεις καθώς η ισχύς του τόξου  $q_0$  και η ταχύτητα συγκόλλησης αυξάνεται. Στην οριακή περίπτωση που  $q_0 \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow \infty$  και ο όρος  $q_0/u$  παραμένει πεπερασμένο, οι ισόθερμες θα εκφυλιστούν σε επιφάνειες που είναι παράλληλες στη διεύθυνση της συγκόλλησης  $x$  όπως στο σχήμα 3.4.1 (α). Η μετάδοση της θερμότητας θα πραγματοποιείται αποκλειστικά στην κανονική διεύθυνση του άξονα  $x$ .

Σε σύντομο χρονικό διάστημα  $dt$ , η ποσότητα θερμότητας που απελευθερώνεται ανά μονάδα απόστασης της συγκόλλησης θα είναι ίση με:

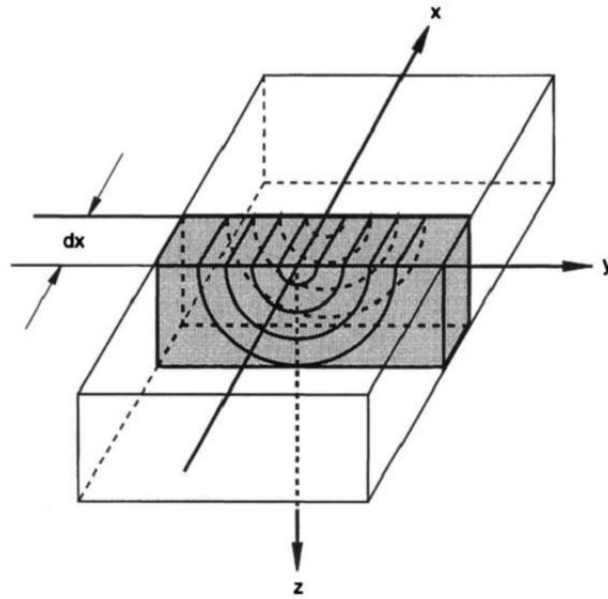
$$\frac{dQ}{dx} = \frac{q_0 dt}{v dt} = \frac{q_0}{v} \quad (3-56)$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτή η ποσότητα της θερμότητας θα απομείνει σε μια λεπτή λωρίδα πάχους  $dx$  λόγω της έλλειψης διαφοράς θερμοκρασίας στην κατεύθυνση της συγκόλλησης. Δεδομένου ότι η συμμετρία απαιτεί οι ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $y-z$  να είναι ημικύκλια, η κατάσταση είναι πανομοιότυπη με το θερμοκρασιακό πεδίο γύρω από μια στιγμιαία γραμμική πηγή σε ένα λεπτό έλασμα, υπό την προϋπόθεση ότι το κενό πάνω από την πλάκα αντικατασταθεί από στερεό υλικό και η ένταση της πηγής διπλασιασθεί όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.1 (β). Η λύση δίνεται αν στη σχέση (2-2) αντικατασταθεί το  $Q/d$  με  $2q_0/u$ :

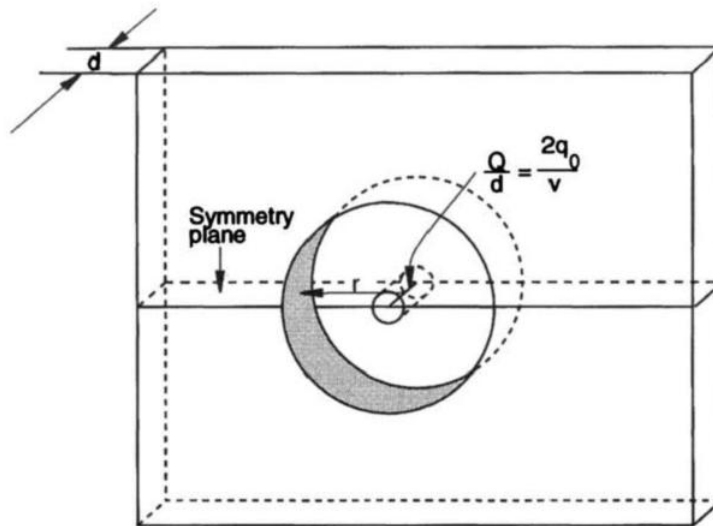
$$T - T_o = \frac{2q_0/v}{\rho c(4\pi at)} \exp [-(r^*)^2/4at] = \frac{q_0/v}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{t}\right) \exp [-(r^*)^2/4at] \quad (3-57)$$

όπου  $r^*$  είναι το δισδιάστατο ακτινικό διάνυσμα στο επίπεδο  $y-z$ .

(α)



(β)



**Σχήμα 3.4.1** Απλουστευμένη λύση για ταχεία-κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα (α) Σχεδιάγραμμα μοντέλου, (β) Αναλογία μεταξύ ταχεία-κινούμενης πηγής υψηλής ενέργειας και στιγμιαίας γραμμικής πηγής

Η παραπάνω εξίσωση (3-57) αντιπροσωπεύει τις απλουστευμένες λύσεις για ταχεία-κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα και ισχύει σε περιορισμένο εύρος της γενικότερης εξίσωσης Rosenthal για τρισδιάστατη ροή θερμότητας [σχέση(3.5)].

Χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες παραμέτρους από σχέσεις (3-6), (3-8), (3-9) και εισάγοντας το παρακάτω στη σχέση (3-57):

- Αδιάστατο ακτινικό διάνυσμα

$$\sigma_4 = \frac{ur^*}{2a} \quad (3-58)$$

οπότε η (3-57) θα γίνει:

$$\frac{\theta}{n_3} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \exp\left[-\frac{(\sigma_4)^2}{2\tau}\right] \quad (3-59)$$

Μια γραφική αναπαράσταση της παραπάνω σχέσης φαίνεται στα σχήματα 3.4.2 (α), (β) και (γ) για χαμηλά κραματωμένο χάλυβα με συνθήκες συγκόλλησης  $I=400$  A,  $V=25$  V,  $u=5$  mm/s,  $H_c-H_0=7.5$  J/mm<sup>3</sup>,  $\alpha=5$  mm<sup>2</sup>/s,  $\lambda=0.025$  W/mm °C,  $\rho c=0.005$  J/mm<sup>3</sup> °C,  $T_c=1520$  °C,  $T_0=20$  °C και  $\eta=0.95$  για συγκόλληση SAW.

Διαφορίζοντας τη σχέση (3-57) προκύπτει:

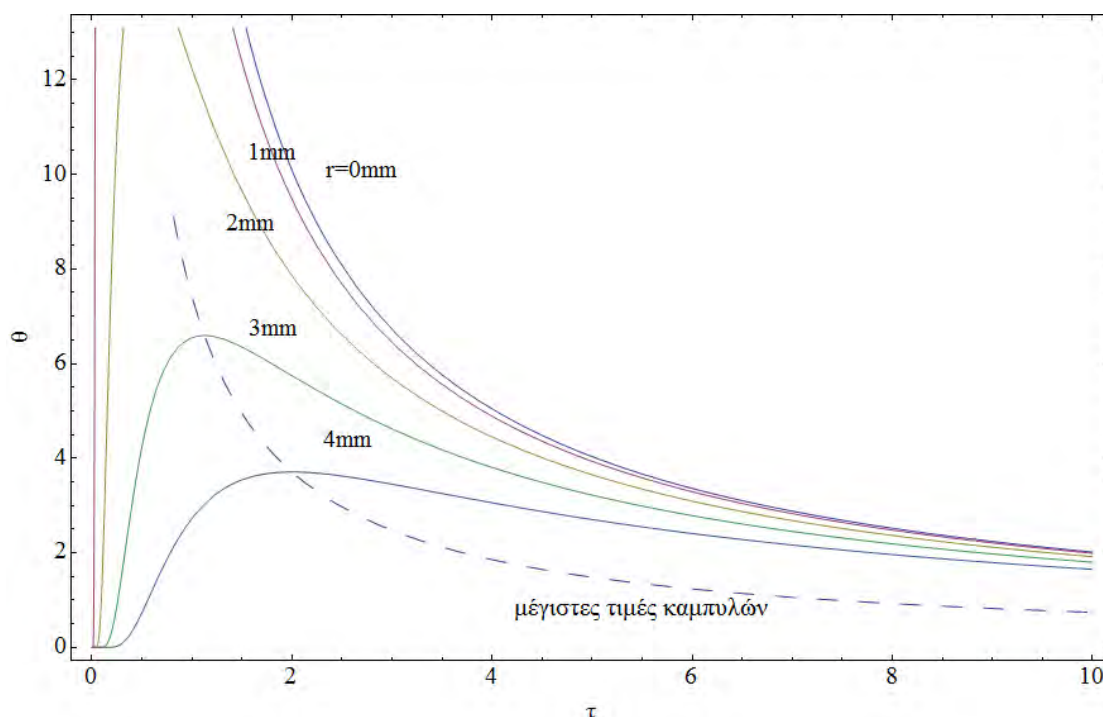
$$\frac{\partial \ln(\theta/n_3)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} + \frac{(\sigma_{4m})^2}{2(\tau_m)^2} = 0$$

το οποίο έχει ως αποτέλεσμα:

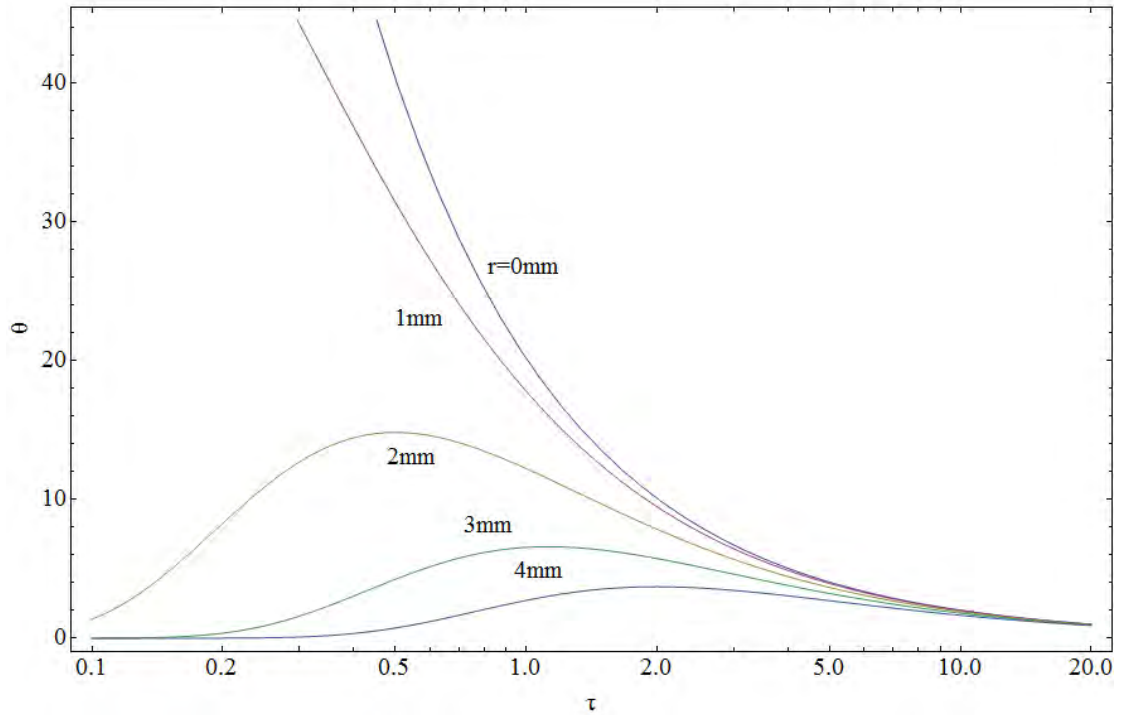
$$(\sigma_{4m})^2 = 2\tau_m \quad (3-60)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (3-59):

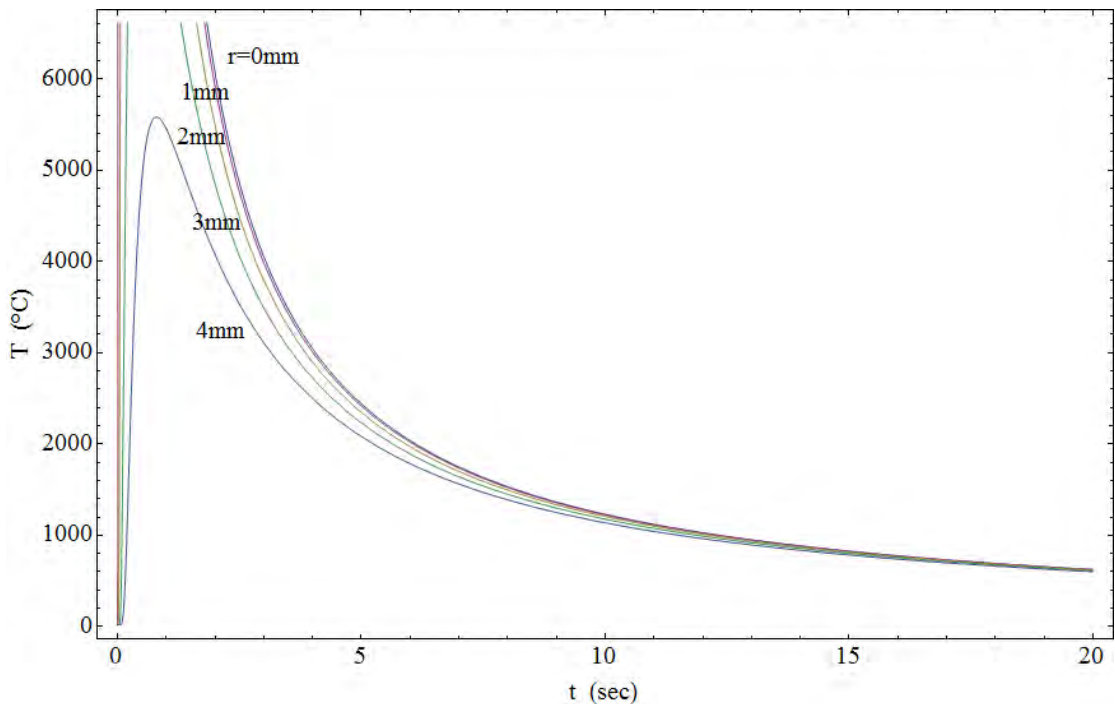
$$\frac{\theta_p}{n_3} = \frac{1}{e\tau_m} = \frac{2}{e(\sigma_{4m})^2} \quad (3-61)$$



**Σχήμα 3.4.2 α** Διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)



**Σχήμα 3.4.2 β** Λογαριθμικό διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας)

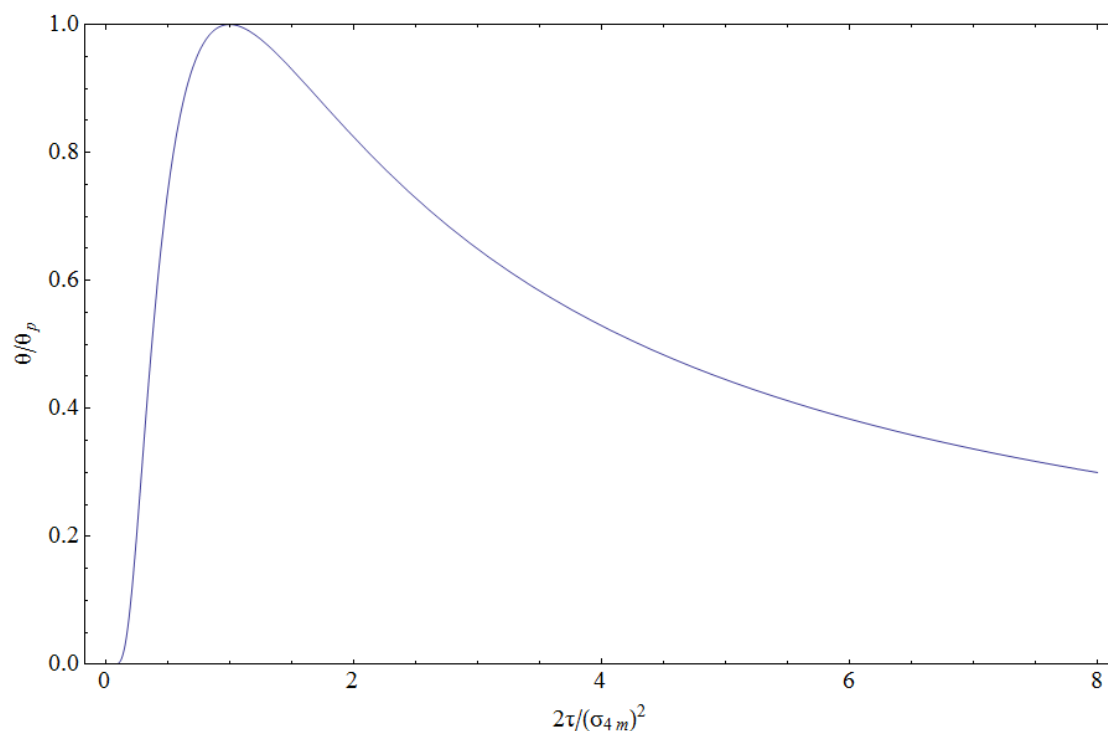


**Σχήμα 3.4.2 γ** Πραγματικό διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα (χαμηλά κραματωμένος χάλυβας) [παρουσιάζει πολύ υψηλές τιμές θερμοκρασιών γιατί έχει υποτεθεί μεγάλη ένταση ρεύματος (400A)]

Όταν η αδιάστατη παράμετρος  $\sigma_{4m}$  προσεγγίσει το  $\psi_m$ , τότε ο λόγος  $\theta_p/n_3$  γίνεται επαρκώς μικρός. Κάτω από τα τέτοιες συνθήκες η ισόθερμες καμπύλες επιμηκύνονται έντονα στην κατεύθυνση του άξονα  $x$ .

Συνδυάζοντας τις (3-59) και (3-61) προκύπτει η παρακάτω σχέση από την οποία μπορεί να παρθεί το διάγραμμα του σχήματος 3.4.3:

$$\frac{\theta}{\theta_p} = \frac{e(\sigma_{4m})^2}{2\tau} \exp\left[-\frac{(\sigma_{4m})^2}{2\tau}\right] \quad (3-62)$$



**Σχήμα 3.4.3** Διάγραμμα θερμοκρασιών-χρόνου απλουστευμένης λύση για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρη πλάκα

Η σχέση (3-62) παρέχει μια βάση για υπολογισμό χρόνου κατακράτησης για συγκεκριμένα θερμοκρασιακά διαστήματα κάτω από διάφορες συνθήκες συγκόλλησης.

### 3.4.2. Παράδειγμα

Πραγματοποιείται συγκόλληση βυθισμένου τόξου (SAW) σε έλασμα μεγάλου πάχους χαμηλά κραματωμένου χάλυβα υπό τις παρακάτω συνθήκες:

$$I = 400A, U = 25V, v = 5mms^{-1}, T_o = 20^{\circ}C$$

Υπολογίζεται ο χρόνος κατακράτησης μέσα στα όρια της ωστενιτικής περιοχής ( $T \geq 910^{\circ}C$ ) για σημεία που βρίσκονται 1mm έξω από την περιοχή τήξης.

Λύση

Πρώτα υπολογίζεται η λειτουργική παράμετρος:

$$n_3 = \frac{q_0 u}{4\pi a^2 (H_c - H_0)} = \frac{400 * 25 * 0,95 * 5}{4\pi * (5)^2 * 7.5} = 20,1596$$

Η διαδιάστατη ροή θερμότητας δικαιολογείται για  $\theta_p \leq 1$ , δηλαδή εντός των ορίων της ζώνης τήξης, άρα:

$$\sigma_{4m} = \left(\frac{2n_3}{e\theta_p}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 * 20,1596}{e}\right)^{1/2} = 3,8513$$

οπότε η αδιάστατη ακτίνα θα είναι:

$$r_m^* = \frac{2a}{v} \sigma_{4m} = \frac{2 * 5}{5} 3,8513 \text{ mm} = 7,7026 \text{ mm}$$

Η μέγιστη θερμοκρασία λοιπόν σε απόσταση 1mm από τη ζώνη τήξης θα είναι:

$$\theta_p = \frac{2n_3}{e} \left(\frac{2a}{v(r_m^* + 1)}\right)^2 = \frac{2 * 20,1596}{e} \left(\frac{2 * 5}{5 * (8,7026)}\right)^2 = 0,7834$$

η πραγματική θερμοκρασία:  $T_p = T_0 + \theta_p (T_c - T_0) = 1195,08^\circ\text{C}$

Εισάγοντας το λόγο  $\frac{\theta_{ac3}}{\theta_p} = \frac{0.593}{0.7833} = 0,7573$  στην (3-62) προκύπτουν δύο τιμές  $\tau$  για τις οποίες τέμνεται η καμπύλη της σχέσης:

$$\tau_1 = 3,82 \quad \text{και} \quad \tau_2 = 17,36$$

και

$$w = \frac{2 * \tau_1}{(\sigma_{4m})^2} - \frac{2 * \tau_2}{(\sigma_{4m})^2} = 2,341 - 0,515 = 1,8263$$

άρα ο χρόνος θα είναι:

$$\Delta\tau_r = w \frac{n_3}{e\theta_p} = \frac{20,1596}{e * 0,78} = 17,884$$

και σε πραγματικό χρόνο:

$$\Delta t_r = \frac{2a}{v^2} \Delta\tau_r = \frac{2 * 5}{(5)^2} 17,884 \text{ sec} = 17,15 \text{ sec}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί αλλιώς να υπολογισθεί διαβάζοντας τις τιμές από το διάγραμμα του σχήματος 3.4.3.



### 3.5. Απλουστευμένη λύση για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα (thin plate solutions)

#### 3.5.1. Μοντέλο

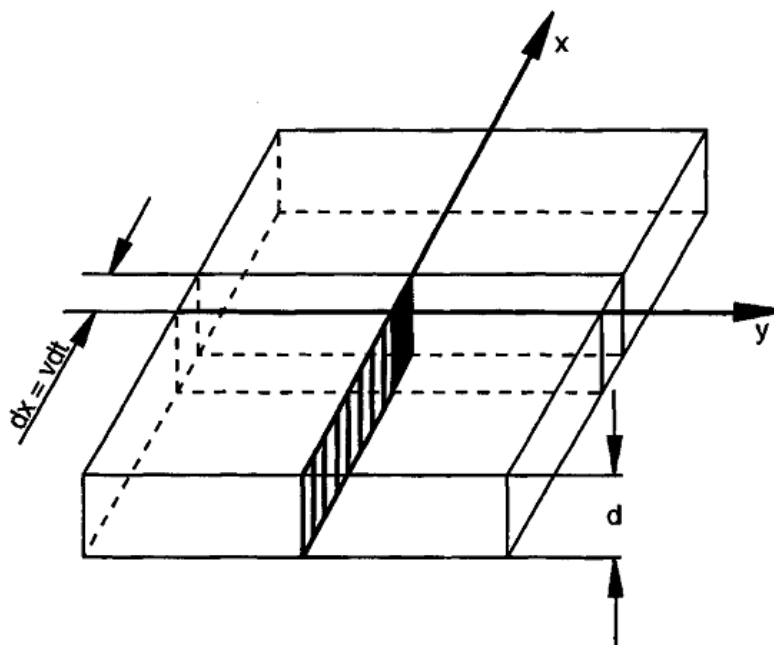
Οι ισόθερμες καμπύλες του σχήματος (3.2.4) πίσω από την πηγή θερμότητας γίνονται ολοένα και πιο επιμήκεις καθώς ο λόγος  $\theta\delta/n_3$  μειώνεται. Στην οριακή περίπτωση οι ισόθερμες θα εκφυλιστούν σε επιφάνειες που είναι παράλληλες στη διεύθυνση της συγκόλλησης  $x$  όπως στο σχήμα 3.5.1.

Σε σύντομο χρονικό διάστημα  $dt$ , η ποσότητα θερμότητας που απελευθερώνεται ανά μονάδα απόστασης της συγκόλλησης θα είναι ίση με:

$$\frac{dQ}{dA} = \frac{q_o dt}{d dx} = \frac{q_o}{vd} \quad (3-63)$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτή η ποσότητα της θερμότητας θα απομείνει σε μια ράβδο σταθερής επιφανειακής διατομής λόγω της έλλειψης διαφοράς θερμοκρασίας στην κατεύθυνση της συγκόλλησης. Υπό τέτοιες συνθήκες η ροή θερμότητας γίνεται μονοδιάστατη και η κατανομή θερμοκρασίας δίνεται από την εξίσωση (2-1):

$$T - T_0 = \frac{q_o/vd}{\rho c(4\pi at)^{1/2}} \exp(-y^2/4at) \quad (3-64)$$



**Σχήμα 3.5.1** Σχεδιάγραμμα μοντέλου απλουστευμένη λύση για ταχεία-κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημίαιπρη πλάκα

Η παραπάνω εξίσωση (3-64) αντιπροσωπεύει τις απλουστευμένες λύσεις για ταχεία-κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα και ισχύει σε

περιορισμένο εύρος της γενικότερης εξίσωσης Rosenthal για δισδιάστατη ροή θερμότητας [σχέση(3-34)].

Χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες αδιάστατες παραμέτρους που υπολογίστηκαν και σε προηγούμενες λύσεις όπως οι σχέσεις (3-6), (3-8), (3-9) και εισάγοντας τις στη σχέση (3-64) προκύπτει η αδιάστατη εξίσωση:

$$\frac{\theta\delta}{n_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \exp(-\psi^2/2\tau) \quad (3-65)$$

Μια γραφική αναπαράσταση της παραπάνω σχέσης φαίνεται στα σχήματα 3.5.2 (α), (β) και (γ) για ωστενιτικό ανοξείδωτο χάλυβα με συνθήκες συγκόλλησης  $I=80$  A,  $V=25$  V,  $u=5$  mm/s,  $H_c-H_0=7.4$  J/mm<sup>3</sup>, πάχος ελάσματος  $d=2$ mm,  $\alpha=4$  mm<sup>2</sup>/s,  $\lambda= 0.020$  W/mm °C,  $\rho c=0.005$  J/mm<sup>3</sup> °C,  $T_c=1500$  °C,  $T_0=20$  °C και  $\eta=0.8$  για συγκόλληση SMAW.

Οι μέγιστες τιμές υπολογίζονται καθορίζοντας  $\frac{\partial \ln(\theta\delta/n_3)}{\partial \tau} = 0$ :

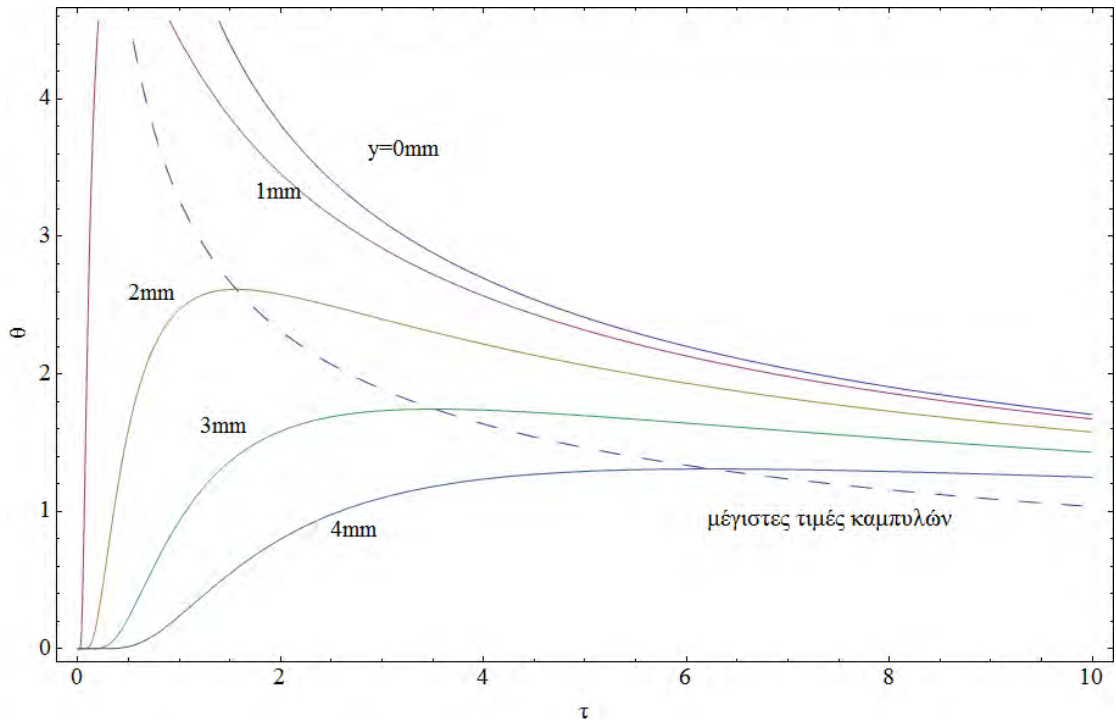
$$\frac{\partial \ln(\theta\delta/n_3)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\tau_m} + \frac{(\psi_m)^2}{2(\tau_m)^2} = 0$$

το οποίο δίνει

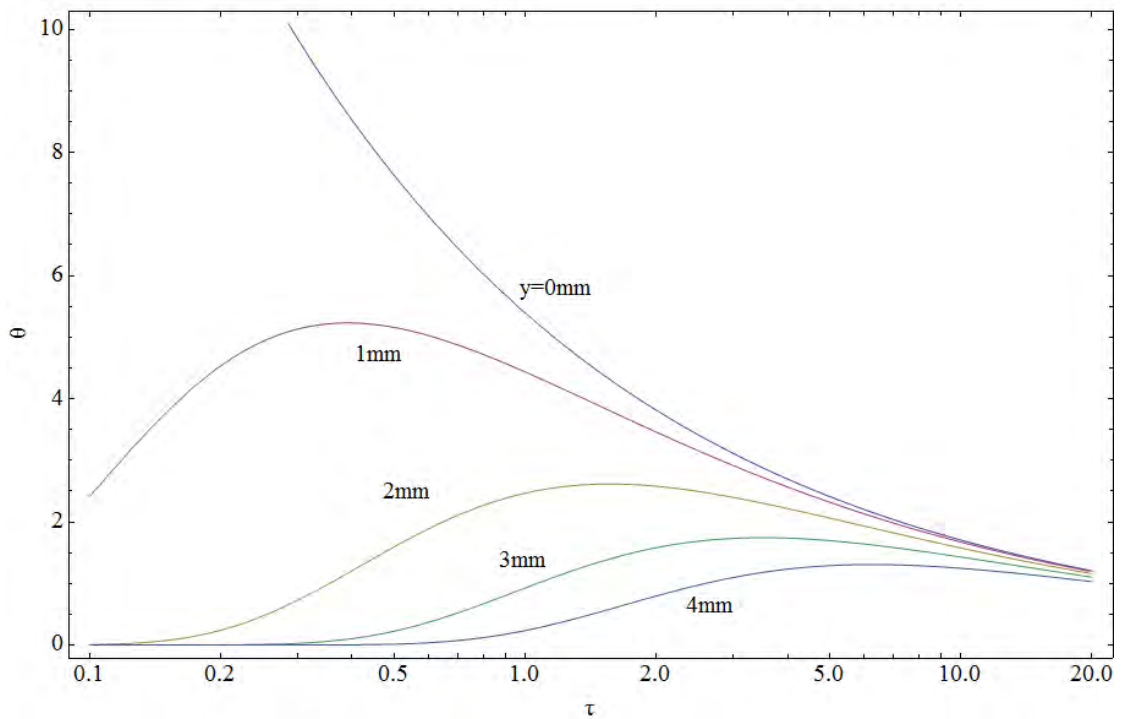
$$(\psi_m)^2 = \tau_m \quad (3-66)$$

και

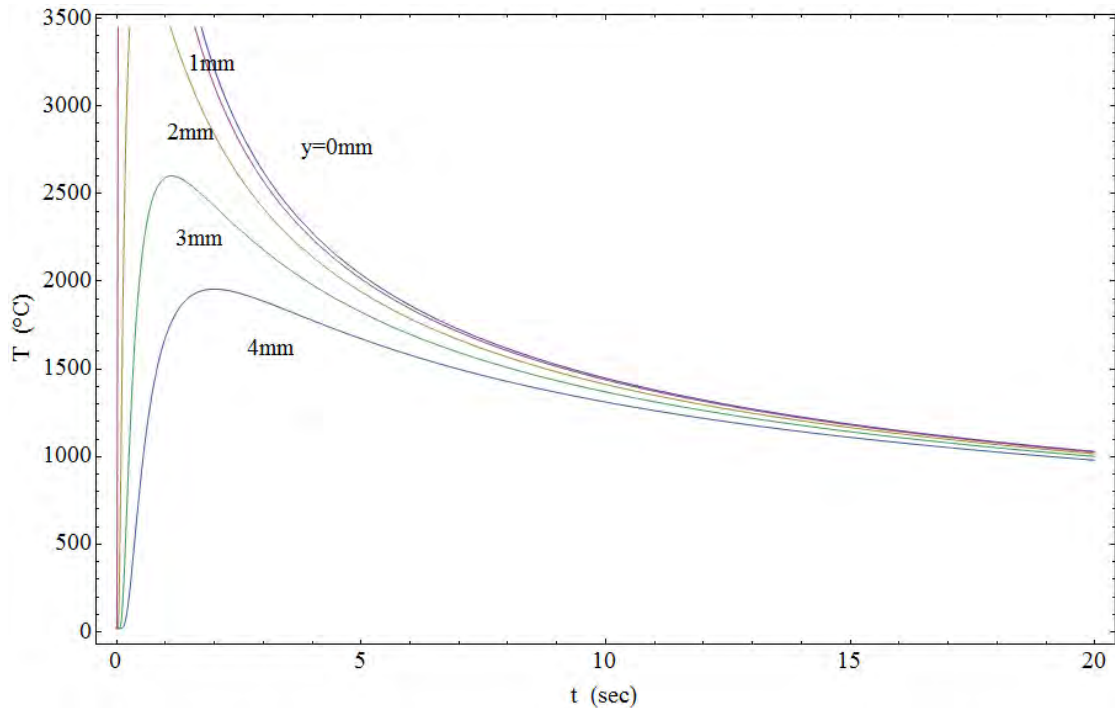
$$\frac{\theta_p\delta}{n_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2e\tau_m}} = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{1}{\psi_m} \quad (3-67)$$



**Σχήμα 3.5.2 α** Διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρο έλασμα (ωστενιτικός ανοξείδωτος χάλυβας)



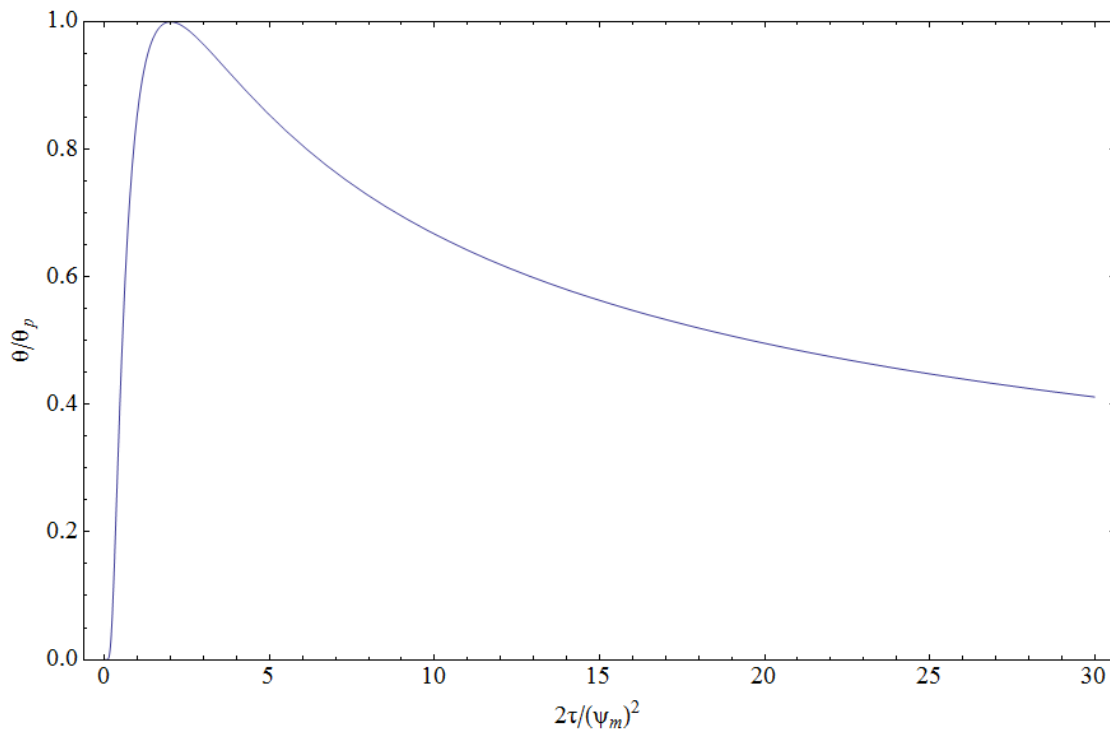
**Σχήμα 3.5.2 β** Λογαριθμικό διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρο έλασμα (ωστενιτικός ανοξείδωτος χάλυβας)



**Σχήμα 3.5.2 γ** Πραγματικό διάγραμμα θερμοκρασιών απλουστευμένης λύσης για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ημιάπειρο έλασμα (ωστενιτικός ανοξείδωτος χάλυβας)

Όπως και με τις λύσεις για ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας για ελάσματα μεγάλου πάχους, συνδυάζοντας τις (3-65) και (3-67) προκύπτει η παρακάτω σχέση από την οποία μπορεί να παρθεί το διάγραμμα του σχήματος 3.5.3:

$$\frac{\theta}{\theta_p} = \sqrt{\frac{e}{\tau}} \psi_m \exp \left[ -\frac{(\psi_m)^2}{2\tau} \right] \quad (3-68)$$



**Σχήμα 3.5.3** Διάγραμμα θερμοκρασιών-χρόνου απλουστευμένης λύσης για ταχεία-κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα

### 3.5.2. Παράδειγμα

Πραγματοποιείται συγκόλληση συμβολής (butt welding) σε λεπτό έλασμα πάχους  $d=2\text{mm}$  από ωστενιτικό ανοξείδωτο χάλυβα με επενδυμένα ηλεκτρόδια (SMAW) υπό τις παρακάτω συνθήκες:

$$I = 80\text{A}, U = 25\text{V}, v = 5\text{mms}^{-1}, T_o = 20^\circ\text{C}$$

Υπολογίζεται ο χρόνος κατακράτησης μέσα στο κρίσιμο εύρος για καθίζηση χρωμιούχου καρβιδίου (από  $650^\circ\text{C}$  μέχρι  $850^\circ\text{C}$ ) για σημεία που βρίσκονται πάνω στην ισόθερμη καμπύλη στους  $850^\circ\text{C}$ .

*Λύση*

Πρώτα υπολογίζεται η λειτουργική παράμετρος:

$$n_3 = \frac{q_0}{2\pi ad(H_c - H_0)} = \frac{80 * 25 * 0.8}{2\pi * 4 * 7,4 * 2} = 4,3$$

Η μονοδιάστατη ροή θερμότητας δικαιολογείται για  $\theta_p \leq 1$ , δηλαδή εντός των ορίων της ζώνης τήξης. Μέσα στο θερμικό κύκλο βρίσκεται από  $650^\circ\text{C}$  ( $\theta=0,4256$ ) μέχρι τους  $850^\circ\text{C}$  ( $\theta=0,561$ ) και πάλι στους  $650^\circ\text{C}$  ( $\theta=0,4256$ ). Δηλαδή τέμνει την καμπύλη δύο φορές.

Εισάγοντας το λόγο  $\frac{\theta}{\theta_p} = \frac{\theta_{650}}{\theta_{850}} = \frac{0,4256}{0,561} = 0,7590$  στην (3-68) προκύπτουν δύο τιμές  $\tau$  για τις οποίες τέμνεται η καμπύλη της σχέσης:

$$\tau_1 = 13,924 \quad \text{και} \quad \tau_2 = 120,726$$

και

$$w = \frac{2 * \tau_1}{(\psi_m)^2} - \frac{2 * \tau_2}{(\psi_m)^2} = 7,102 - 0,819 = 6,283$$

άρα ο χρόνος θα είναι:

$$\Delta\tau_r = w \frac{(\psi_m)^2}{2} = 6,283 * \frac{\pi}{4e} \left( \frac{4,30}{0,56} \right)^2 = 106,8$$

και σε πραγματικό χρόνο:

$$\Delta t_r = \frac{2a}{v^2} \Delta\tau_r = \frac{2 * 4}{(5)^2} 106,8 \text{ sec} = 34,18 \text{ sec}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί αλλιώς να υπολογισθεί διαβάζοντας τις τιμές από το διάγραμμα του σχήματος 3.5.3.

## 4. Ειδικά χαρακτηριστικά συγκολλήσεων

### 4.1. Αραιώση ραφής

Στις συγκολλήσεις τήξεως το φαινόμενο της ροής ρευστών θα έχει σημαντική επιρροή στο σχηματισμό της λίμνης συγκόλλησης. Μια σειρά από έρευνες τείνουν στην αριθμητική μοντελοποίηση της λίμνης συγκόλλησης, βασισμένες σε πεπερασμένες διαφορές και πεπερασμένα στοιχεία. Παρόλο που έχουν σημαντικά αποτελέσματα για τους μηχανισμούς ανάπτυξης της λίμνης συγκόλλησης, οι λύσεις είναι αρκετά πολύπλοκες για να επιφέρουν μια γενική ένδειξη του προτύπου ροής θερμότητας και ρευστού στη συγκεκριμένη περιοχή. Η παρακάτω μελέτη περιορίζεται σε παράγοντες που επηρεάζουν την ονομαστική σύνθεση μιας μονής ραφής συγκόλλησης. Αυτή η σύνθεση μπορεί να ληφθεί από την ανάλυση της ποσότητας του εναποτιθέμενου μετάλλου D και του τηγμένου μέρους του βασικού μετάλλου B, από το οποίο μπορεί να υπολογισθεί ο λόγος αραιώσης.

Παρακάτω δίνονται τα βήματα που χρησιμοποιούνται για στην πρόβλεψη αυτών των λόγων, όπως επίσης και η διεύθυνση του μετάλλου στη ραφή.

#### 4.1.1 Ποσότητες πρόσθετου και βασικού μετάλλου

Η θεωρία θερμικής αγωγιμότητας δεν επιτρέπει την ύπαρξη εναποτιθέμενου μετάλλου. Ο ρυθμός της εναπόθεσης,  $dM_w/dt$  είναι περίπου ανάλογος της έντασης ρεύματος της συγκόλλησης  $I$ , και ονομάζεται συντελεστής εναπόθεσης:

$$k'(g A^{-1} s^{-1}) = \frac{dM_w/dt}{I} \quad (4-1)$$

Η επιφάνεια εναποτιθέμενου μετάλλου δίνεται από τη σχέση:

$$D(mm^2) = \frac{1}{u\rho} \frac{dM_w}{dt} = \frac{k'}{u\rho} I \quad (4-2)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα και  $u$  η ταχύτητα συγκόλλησης. Προτεινόμενες τιμές του λόγου  $k'/\rho$  για διάφορα είδη συγκολλήσεων δίνονται στον πίνακα A3. Στην πράξη ο όρος  $k'/\rho$  θα διαφέρει ανάλογα με την πυκνότητα του ρεύματος και το είδος του ηλεκτροδίου λόγω της θερμικής αντίστασης του. Γι' αυτό το λόγο τα νούμερα στον παρακάτω πίνακα είναι εκτιμώμενες μέσες τιμές και χρησιμοποιούνται με προσοχή.

**Πίνακας A3** Μέσες τιμές εναπόθεσης όγκου σε συγκολλήσεις τόξου [1]

Welding Process	$k'/\rho$ ( $mm^3 A^{-1} s^{-1}$ )
SMAW welding (steel)	0,3-0,5
GMAW welding (steel)	0,6-0,7
GMAW welding (Aluminium)	~0,9
SAW welding (steel)	~0,7

Οι λύσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: αυτές που συμπεριφέρονται ως ταχύτατα κινούμενες πηγές θερμότητας και αυτές που συμπεριφέρονται σαν ελάσματα μεγάλου πάχους.

#### Εξισώσεις για συμπεριφορά ταχύτατα κινούμενης πηγής θερμότητας

Για ακτινική παράμετρο από σχέση (3-61):

$$\sigma_{4m} = \left(\frac{2}{e} n_3\right)^{1/2} \quad (4-3)$$

το οποίο αντικαθίσταται στην παρακάτω για το βασικό μέταλλο:

$$B = \frac{\pi}{2} (r_m^*)^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2\alpha\sigma_{4m}}{u}\right)^2 \quad (4-4)$$

οπότε η σχέση (4-2) με  $k'/\rho$  από τον πίνακα A3 θα δώσει το εναποτιθέμενο μέταλλο D για το λόγο αραιώσης:

$$\text{Mix1} = \frac{B}{(B+D)} \quad (4-5)$$

και

$$\text{Mix2} = \frac{D}{(B+D)} \quad (4-6)$$

#### Εξισώσεις για συμπεριφορά ελάσματος μεγάλου πάχους

Για λειτουργική παράμετρο από σχέση (3-9):

$$n_3 = \frac{q_0 u}{4\pi a \rho c (T_c - T_0)}$$

εισάγοντας, από λύσεις ελάσματος μεγάλου πάχους, την τιμή  $\frac{\theta_p}{n_3} = \frac{4\pi a \rho c (T - T_0)}{q_0 u}$  (για  $T = T_{ac3}$ ) επιλύεται η παρακάτω σχέση (3-15):

$$\frac{\theta_p}{n_3} = \frac{1}{\sigma_{3m}} \exp[-\sigma_{3m}/(\sigma_{3m} + 1)]$$

ώστε να βρεθεί ο όρος  $\sigma_{3m}$  και να εισαχθεί στη σχέση (3-16) για να αποκτηθεί το  $\psi_m$ :

$$\psi_m = \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_{3m} + 1} \sqrt{1 + 2\sigma_{3m}}$$

το οποίο θα δώσει το  $\Lambda_1$  από σχέση (3-17):



$$A_1 = \frac{\pi}{2} \psi_m^2$$

και εν τέλει το βασικό μέταλλο:

$$B = \frac{4a^2}{v^2} A_1 \quad (4-7)$$

και το εναποτιθέμενο μέταλλο από σχέση (4-2) όπως και προηγουμένως με  $k'/\rho$  από τον πίνακα A3 για το λόγο αραίωσης από σχέσεις (4-5) και (4-6).

#### 4.1.2 Διείσδυση μετάλλου στη ραφή

Είναι γενικά γνωστό από εμπειρία ότι στις συγκολλήσεις τόξου το σχήμα της περιοχής τήξης θα αποκλίνει από το ημικύκλιο λόγω ύπαρξης πεδίων που οφείλονται στην υψηλής ταχύτητας ροή ρευστού στη λίμνη συγκόλλησης. Για συνδυασμούς λειτουργικών παραμέτρων μέσα σε φυσιολογικά εύρη συγκόλλησης τόξου, μπορεί να υπολογιστεί η διείσδυση μετάλλου στη ραφή  $h$  από την εμπειρική εξίσωση του Jackson [1]:

$$h(mm) = C(I^4/uV^2)^{1/3} \quad (4-8)$$

όπου  $C$  συντελεστής διείσδυσης. Ο πίνακας A4 περιέχει συνοπτικά κάποια αποτελέσματα του Jackson για κάποια είδη συγκολλήσεων.

**Πίνακας A4** Τιμές συντελεστή διείσδυσης μετάλλου στη ραφή στις συγκολλήσεις τόξου [1]

Welding Process	C	Σχόλια
SAW welding (steel)	~0,024	Διάφορα είδη ροών ( $h=3-15\text{mm}$ )
SMAW welding (steel) E6015	~0,024	Ευρύ φάσμα I, V και u ( $h=0,7-5\text{mm}$ )
GMAW welding (CO <sub>2</sub> -steel)	~0,050	Ηλεκτρόδιο θετικό ( $h=6,5-8\text{mm}$ )

Οι SMAW συγκολλήσεις είναι για ηλεκτρόδιο τύπου E6015, ενώ η GMA/Ar+O<sub>2</sub>, GMA/Ar και GMA/He δε συμπεριλήφθηκαν γιατί παρουσιάζουν μεγάλη εξάρτηση από την πολικότητα και την σύνθεση του αερίου προστασίας οπότε δε μπορούν να δώσουν αξιόπιστες προβλέψεις.

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις δημιουργήθηκαν προγράμματα στο Mathematica που υπολογίζουν την αραίωση και τη διείσδυση μετάλλου.

## 4.2. Προθέρμανση

Μέχρι τώρα, η περιβαλλοντική θερμοκρασία  $T_0$  θεωρήθηκε ότι μένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της λειτουργίας συγκόλλησης. Η χρήση μιας σταθερής τιμής  $T_0$  είναι μια λογική προσέγγιση αν το τεμάχιο επεξεργασίας έχει υποστεί ολόκληρο προθέρμανση. Ωστόσο, οι διαστάσεις της συγκόλλησης επιτρέπουν προθέρμανση μιας στενής ζώνης κοντά στην περιοχή συγκόλλησης.

Αυτό θα έχει μια σημαντική επιρροή στη πρόβλεψη της ψύξης της συγκόλλησης, ειδικά σε χαμηλά θερμοκρασιακά συστήματα όπου τα κλασσικά μοντέλα καταρρέουν όταν  $T$  προσεγγίζει  $T_0$ .

#### 4.2.1 Μοντέλο

Μια εξιδανίκευση του μοντέλου προθέρμανσης φαίνεται στο σχήμα 4.2.1. Εδώ θεωρείται ότι η θερμοκρασία πάνω στη γραμμή συγκόλλησης είναι ίση με το άθροισμα των συνεισφορών του τόξου και του πεδίου προθέρμανσης. Η προηγούμενη συνεισφορά δίνεται από τη σχέση (3-5) για  $R' = -x = ut$  δεδομένου ότι το πάχος του ελάσματος είναι αρκετά μεγάλο ώστε να διατηρηθεί τρισδιάστατη θερμική ροή. Παρόμοια το θερμοκρασιακό πεδίο λόγω προθέρμανσης μπορεί να υπολογιστεί όπως και σε μονοαξονική θερμική αγωγιμότητα από εκτεταμένες πηγές όπως στη αλουμινοθερμική συγκόλληση. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3-5) και (2-7) προκύπτει η σχέση:

$$T - T_0 = \frac{q_0/v}{2\pi\lambda t} + (T_0^* - T_0)\text{erf}[L^*/\sqrt{4at}] \quad (4-9)$$

όπου  $T_0^*$  είναι η θερμοκρασία προθέρμανσης και  $L^*$  είναι το μισό πλάτος της ζώνης που έχει προθερμανθεί. Για να αναλυθεί η εξίσωση (4-9) αδιαστατοποιήθηκαν οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι:

- Αδιάστατη θερμοκρασία

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_0^* - T_0} \quad (4-10)$$

- Αδιάστατη χρονική σταθερά

$$t_0(s) = \frac{q_0/v}{2\pi\lambda(T_0^* - T_0)} \quad (4-11)$$

- Αδιάστατη χρονική παράμετρος

$$\tau_6 = \frac{t}{t_0} \quad (4-12)$$

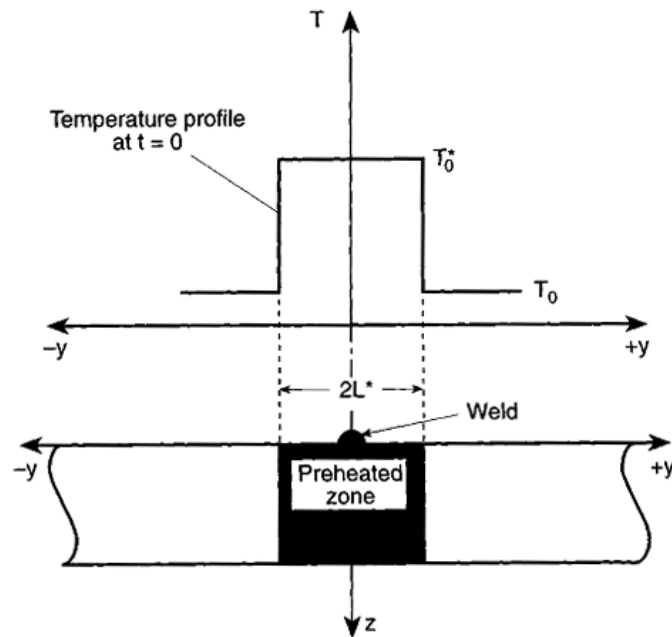
- Αδιάστατο μισό πλάτος προθερμασμένης ζώνης

$$\Omega'' = \frac{L^*}{\sqrt{4at_0}} \quad (4-13)$$

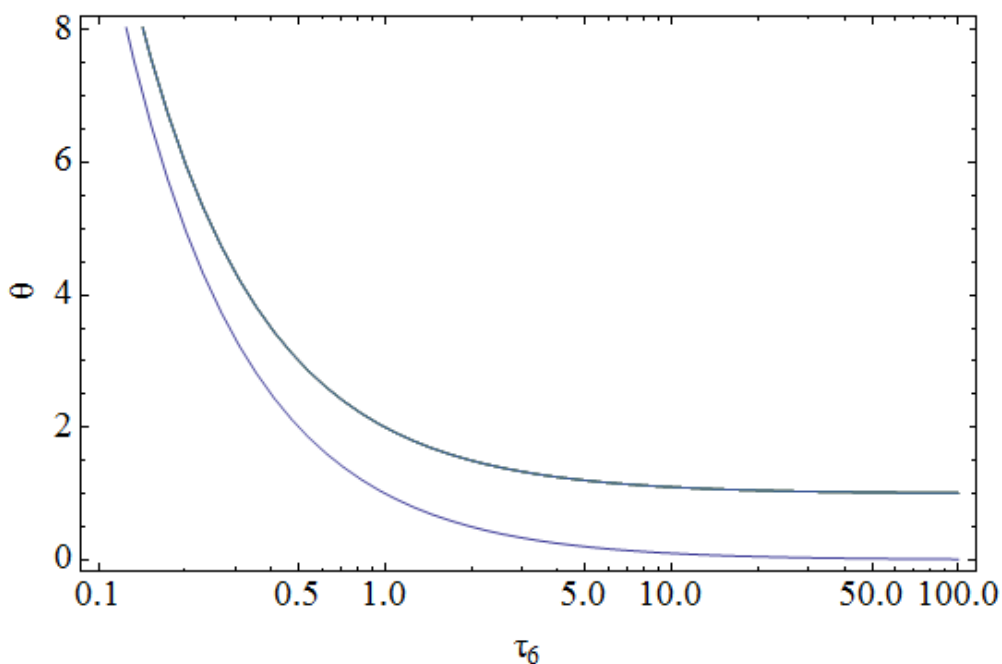
Εισάγοντας τις παραπάνω παραμέτρους στην (4-9) προκύπτει:

$$\theta^* = \frac{1}{\tau_6} + \text{erf}[\Omega''/(\tau_6)^{1/2}] \quad (4-14)$$

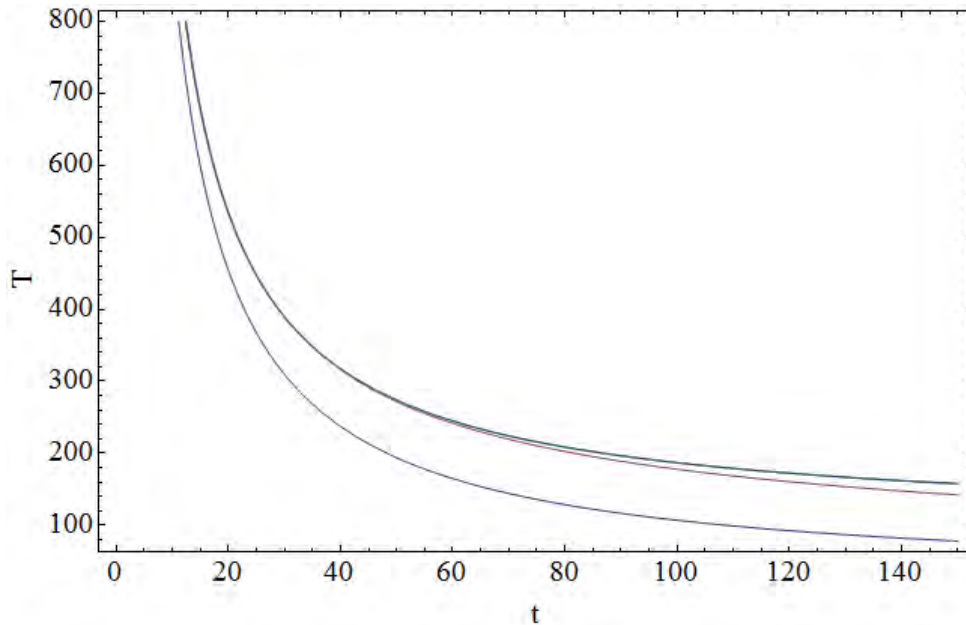
Η παραπάνω σχέση λύθηκε μέσω Mathematica για διάφορες τιμές παραμέτρων και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται γραφικά στο σχήμα 4.2.2. Είναι εμφανές από τη γραφική αναπαράσταση ότι οι προβλεπόμενες θερμοκρασιακές κατανομές βρίσκονται μεταξύ των ορίων  $\Omega'' \rightarrow 0$  (χωρίς προθέρμανση) και  $\Omega'' \rightarrow \infty$  (με προθέρμανση). Η παράμετρος ελέγχου είναι το αδιάστατο μισό πλάτος της προθερμασμένης ζώνης  $\Omega''$ , το οποίο εξαρτάται απ' το πραγματικό πλάτος  $L^*$ , τις θερμικές ιδιότητες  $\alpha, \lambda$  του βασικού μετάλλου και την καθαρή ισχύ εισαγωγής  $q_0/u$ .



Σχήμα 4.2.1 Σχέδιο μοντέλου προθέρμανσης



Σχήμα 4.2.2 Γραφική αναπαράσταση (αδιάστατη) θερμοκρασίας - χρόνου (ψύξη) της εξίσωσης (4-14) [κάτω καμπύλη  $\Omega'' \rightarrow 0$  (χωρίς προθέρμανση) ενώ πάνω  $\Omega'' \rightarrow \infty$  (με προθέρμανση)]



**Σχήμα 4.2.3** Γραφική αναπαράσταση (πραγματική) θερμοκρασίας - χρόνου (ψύξη) της εξίσωσης (4-14) [κάτω καμπύλη  $L^* \rightarrow 0$  (χωρίς προθέρμανση) ενώ πάνω  $L^* \rightarrow \infty$  (με προθέρμανση)]

#### 4.2.2. Παράδειγμα

Πραγματοποιείται συγκόλληση μονής ραφής με καλυμμένα ηλεκτρόδια (SMAW) σε έλασμα μεγάλου πάχους χαμηλά κραματωμένου χάλυβα υπό τις παρακάτω συνθήκες:

$$I=155A, V=22V, u=2\text{mm s}^{-1}, T_0^*=100^\circ\text{C}, T_0=20^\circ\text{C}, L^*=200\text{mm}, \eta=0.8$$

Υπολογίζεται ο χρόνος ψύξης από τους 800°C στους 500°C και ο χρόνος ψύξης  $t_{100}$  μετρημένος από το πέρας του τόξου μέχρι τη στιγμή που η κεντρική γραμμή συγκόλλησης θα αγγίξει τους 100°C.

*Λύση*

Πρώτα υπολογίζεται η χρονική σταθερά από τη σχέση (4-11):

$$t_o = \frac{155 * 22 * 0.8}{2 * 2\pi * 0.025 * (100 - 20)} \text{ s} = 108.54 \text{ sec}$$

και έπειτα η παράμετρος από σχέση (4-13):

$$\Omega'' = \frac{200}{\sqrt{4 * 5 * 108.5}} = 4.292$$

*Χρόνος Ψύξης  $\Delta\tau_{8/5}$*

Οι αδιάστατες θερμοκρασίες για 800°C και 500°C αντίστοιχα θα είναι:

$$\theta_{800}^* = \frac{800 - 20}{100 - 20} = 9.75$$

$$\theta_{500}^* = \frac{500 - 20}{100 - 20} = 6.0$$

επιλύοντας τη σχέση (4-14) για  $\theta_{800}^*$  και  $\theta_{500}^*$  προκύπτουν οι αδιάστατοι χρόνοι  $\tau_6$  για 800°C και 500°C αντίστοιχα, οπότε προκύπτει η διαφορά:

$$\Delta\tau_6 = \tau_{6(800)} - \tau_{6(500)} = 0.2 - 0.114 = 0.0857$$

από το οποίο βρίσκεται ο πραγματικός χρόνος:

$$\Delta t_{8/5} = \Delta\tau_6 * t_o = 0.0857 * 108.54 \text{ sec} = 9,337 \text{ sec}$$

*Χρόνος Ψύξης  $t_{100}$*

Όταν  $T=T_o^* = 100^\circ\text{C}$ , τότε η αδιάστατη θερμοκρασία  $\theta^* = 1$ . Επομένως αν εισαχθεί  $\theta^* = 1$  στην (4-14) τότε προκύπτει ο χρόνος για τον οποίο την αγγίζει για το συγκεκριμένο  $\Omega'' = 4.292$ ,  $\tau_6^* \approx 1$ , οπότε ο πραγματικός χρόνος θα είναι:

$$t_{100} = \tau_6 * t_o = 12.19 * 108.5 = 1322,85 \text{ sec}$$

Για τις ίδιες συνθήκες συγκόλλησης και αρχική θερμοκρασία  $T_o=20^\circ\text{C}$ , οι λύσεις ελασμάτων μεγάλου πάχους (thick plate solutions) δίνουν χρόνο  $\Delta t_{8/5} = 6,9 \text{ sec}$ . που δείχνει ότι μέτρια προθέρμανση δεν έχει μεγάλο ρόλο επιρροής στο χρόνο ψύξης  $\Delta t_{8/5}$  [1].

## B. ΔΙΑΧΥΣΗ

### 1. Εισαγωγή

Το δεύτερο μέρος της μεταπτυχιακής εργασίας αποτελείται από μια εισαγωγή στον ορισμό της διάχυσης και ακολουθείται από τις συνηθέστερες λύσεις και από τις γενικές λύσεις της εξίσωσης διαχύσεως του νόμου του Fick που βρίσκονται στο βιβλίο του John Crank [1]. Όλα τα μοντέλα επιλύθηκαν με το λογισμικό Mathematica. Τα προγράμματα που επιλύουν τις συνηθέστερες λύσεις περιέχουν και εξισώσεις προσδιορισμού χρόνου διάχυσης και απόσταση διάχυσης μέσα στο υλικό. Όλα τα προγράμματα παρατίθενται στο Παράρτημα Β.

#### Μηχανισμοί Μεταφοράς

Υπάρχουν δύο κύριοι μηχανισμοί μεταφοράς μάζας μίας ουσίας/συστατικού μέσα σε ένα ρευστό, ο πρώτος βασίζεται στην τυχαία (ή φαινομενικά τυχαία) διεργασία ανάμειξης μέσα στο ρευστό και ο δεύτερος βασίζεται στην κίνηση του ίδιου του ρευστού. Πιο αναλυτικά, ο πρώτος μηχανισμός διάχυση - περιγράφει τη κίνηση μιας ουσίας από ένα σημείο του φέροντος ρευστού όπου η συγκέντρωση της είναι σχετικά υψηλή, προς ένα άλλο σημείο όπου η συγκέντρωση της είναι χαμηλότερη εξαιτίας της τυχαίας κίνησης των μορίων της ουσίας (μοριακή διάχυση), της τυχαίας κίνησης του φέροντος ρευστού (τυρβώδης διάχυση) ή το συνδυασμό των παραπάνω. Ο δεύτερος μηχανισμός μεταφοράς της μάζας μίας ουσίας/συστατικού, αλλά και ενέργειας και ορμής, είναι μέσω της μακροσκοπικής κίνησης των ρευστών. Σε αυτή την περίπτωση η μάζα της ουσίας μεταφέρεται παθητικά από το ίδιο το φέρον ρευστό. Η κίνηση ολόκληρης της μάζας του φέροντος ρευστού μπορεί να προκληθεί από ανομοιομορφίες στη συγκέντρωση ή τη θερμοκρασία. Ως παράδειγμα στην ατμόσφαιρα, η κίνηση αερίων μαζών συνοδεύεται από μεταφορά θερμότερου ή ψυχρότερου, καθώς και περισσότερου ή λιγότερου υγρού αέρα. Δηλαδή συνοδεύεται από μεταφορά ενέργειας και μάζας. Ο μηχανισμός αυτός αποτελεί τη συναγωγή μάζας ή τη συναγωγική μεταφορά μάζας. Η διάχυση και η συναγωγή μάζας αποτελούν τις δύο κυριότερες μορφές μεταφοράς μάζας [3].

#### Διάχυση

Η διάχυση είναι ένας από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς, που ελέγχουν την κινητική μιας μεταλλουργικής διεργασίας ή ενός μετασχηματισμού φάσεων. Ορίζεται ως η μετακίνηση ατόμων σε αποστάσεις τουλάχιστον ίσες με την παράμετρο του κρυσταλλικού πλέγματος. Χαρακτηρίζεται από την τυχαία φύση της και από το γεγονός ότι η μεταφορά συμβαίνει από περιοχές υψηλών συγκεντρώσεων σε περιοχές χαμηλότερων συγκεντρώσεων και αντίστροφα με απώτερο σκοπό την επίτευξη μιας ομοιόμορφης συγκέντρωσης και τη μείωση της ελεύθερης ενέργειας. Παραδείγματα διεργασιών που πραγματοποιούνται με διάχυση είναι η ομογενοποίηση ενός χυτού κράματος, η ενανθράκωση ενός χάλυβα ή ανάπτυξη μιας νέας φάσης.

Η διάχυση συστατικών προκαλεί μείωση της ελεύθερης ενέργειας και πραγματοποιείται από υψηλά προς χαμηλά χημικά δυναμικά. Η κινούσα δύναμη για διάχυση λοιπόν είναι προτιμότερο να εκφραστεί σαν κλίση χημικού δυναμικού  $dm/dx$  ενός συστατικού. Η διάχυση σταματάει όταν εξισωθούν τα χημικά δυναμικά των συστατικών στα στερεά διαλύματα και επέλθει θερμοδυναμική ισορροπία. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η διάχυση από περιοχές με υψηλή σε περιοχές με χαμηλή συγκέντρωση με σκοπό την απαλοιφή των διαφορών συγκεντρώσεως. Επομένως επειδή είναι ευκολότερο να μετρηθούν διαφορές στη συγκέντρωση από ότι διαφορές χημικού δυναμικού, συνηθίζεται να συσχετίζεται η διάχυση με την κλίση συγκεντρώσεως  $dc/dx$  [2].

### Μηχανισμοί Διάχυσης

Οι μηχανισμοί της διάχυσης έχουν άμεση εξάρτηση από το είδος του στερεού διαλύματος και την κίνηση των ατόμων μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα του. Χωρίζονται σε παρεμβολής και αντικατάστασης. Τα άτομα παρεμβολής, ως γνωστόν καταλαμβάνουν τις κενές θέσεις παρεμβολής, που για τα BCC και FCC είναι οι οκταεδρικές. Συνήθως αυτά τα στερεά διαλύματα είναι αραιά και δεν καταλαμβάνονται όλες οι θέσεις παρεμβολής. Επομένως κάποιο άτομο παρεμβολής περιβάλλεται πάντα από άλλες κενές θέσεις παρεμβολής και μπορεί να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε κενή θέση, έχοντας την απαιτούμενη θερμική ενέργεια για να διέλθει ανάμεσα από 2 άτομα πλέγματος. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται διάχυση παρεμβολής (interstitial diffusion). Αυτό είναι και το αντικείμενο της εργασίας. Ένα παράδειγμα είναι η διάχυση του άνθρακα στους χάλυβες όπου και καταλαμβάνει θέσεις παρεμβολής στο κρυσταλλικό πλέγμα του σιδήρου.

Η άλλη περίπτωση είναι η διάχυση αντικαταστάσεως (substitutional diffusion) ή αλλιώς αυτοδιάχυση (self-diffusion) σε διαλύματα αντικαταστάσεως όπως η διάχυση χαλκού (Cu) στο νικέλιο (Ni). Σε αυτή την περίπτωση η μετακίνηση ατόμων γίνεται με την προϋπόθεση να υπάρχει διπλανή κενή πλεγματική θέση, δηλαδή οπή. Επομένως με το που αποκτηθεί αρκετή ενέργεια ταλαντώσεως από το άτομο τότε μπορεί να εκτελέσει ένα επιτυχές άλμα μετακινούμενο στη διπλανή οπή. Αυτή η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με τη μετακίνηση της οπής στη θέση που κατέχεται από το άτομο. Για το λόγο αυτό ο μηχανισμός αυτός λέγεται αλλιώς και διάχυση οπών (vacancy diffusion). Οι δύο προϋποθέσεις για να ενεργοποιηθεί ο παραπάνω μηχανισμός είναι αφενός να υπάρχουν κενές πλεγματικές θέσεις, οπές, και αφετέρου τα άτομα να αποκτήσουν ικανή θερμική ενέργεια ώστε η ταλάντωση τους γύρω από την πλεγματική θέση να καταλήξει σε επιτυχές άλμα προς την οπή. Η θερμοκρασία είναι ο κύριος και πιο ισχυρός παράγοντας από τον οποίο εξαρτώνται οι παραπάνω προϋποθέσεις. Για το λόγο αυτό υπάρχει έντονη θερμοκρασιακή εξάρτηση διαχύσεως.

Όταν τα παραπάνω είδη διάχυσης, δηλαδή παρεμβολής και αντικατάστασης, συμβαίνουν με μετακίνηση ατόμων στο κρυσταλλικό πλέγμα τότε αυτό ονομάζεται διάχυση όγκου (volume ή bulk diffusion). Κάποιες φορές η διάχυση επιτυγχάνεται με την υποβοήθηση σφαλμάτων της δομής. Η συνηθέστερη τέτοιου τύπου διάχυση είναι η συνοριακή διάχυση (boundary diffusion), όπου τα άτομα μετακινούνται δια μέσου των συνόρων των κόκκων, και η διάχυση είναι πιο γρήγορη. Μια ακόμη

τέτοιου τύπου διάχυση που οφείλεται σε σφάλμα δομής είναι η γραμμοαταξιακή διάχυση (dislocation pipe ή core diffusion). Η συγκεκριμένη πραγματοποιείται μέσω της σχηματιζόμενης σήραγγας (ή αυλού) του πυρήνα της αταξίας, στο χώρο ακριβώς κάτω από το επιπλέον επίπεδο της αταξίας. Μεγαλύτερη ταχύτητα από τη διάχυση όγκου έχουν και η συνοριακή και η γραμμοαταξιακή διάχυση, διότι τα σύνορα των κόκκων και οι αταξίες αποτελούν δρόμους γρήγορης διαχύσεως (high-diffusivity paths) [2].

### Συγκέντρωση

Το σημαντικότερο μέγεθος στη μεταφορά μάζας σε περιβαλλοντικές διεργασίες είναι η συγκέντρωση. Μαθηματικά, η συγκέντρωση  $C_i$  μιας ουσίας  $i$  μέσα σε ένα μίγμα, εκφράζει το λόγο της μάζας  $m_i$  της ουσίας  $i$ , ως προς τον ολικό όγκο  $V$  του μίγματος, ως

$$C_i = \frac{m_i}{V} \quad (1)$$

Οι μονάδες της συγκέντρωσης έχουν διαστάσεις ( $M/L^3$ ), και συνήθως εκφράζονται ως  $kg/m^3$  (ή  $gr/cm^3$ ) ή  $mol/m^3$ . Στην ειδική περίπτωση μονοδιάστατων ή δισδιάστατων προβλημάτων, η συγκέντρωση μπορεί επίσης να εκφραστεί ως η μάζα ανά μονάδα μήκους ( $M/L$ ) ή ανά μονάδα επιφανείας ( $M/L^2$ ) αντίστοιχα [3].

### 1<sup>ος</sup> νόμος του Fick

Ο πρώτος νόμος του Fick συσχετίζει τη ροή των ατόμων παρεμβολής με την κλίση (gradient) συγκεντρώσεως  $\partial c/\partial x$  και είναι:

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2)$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι υπάρχει μια σταθερή ροή μάζας στην κατεύθυνση όπου μικραίνει η συγκέντρωση. Το  $J$  είναι η ροή μάζας ( $kg/m^2s$  ή άτομα/ $m^2s$ ). Η ανάλογη σχέση ισχύει στη μετάδοση θερμότητας με αγωγή, όπου η θερμοροή  $q$  είναι ανάλογη με την κλίση (gradient) της θερμοκρασίας  $\partial T/\partial x$  (νόμος Fourier).

Ο συντελεστής αναλογίας  $D$  ονομάζεται συντελεστής διαχύσεως ( $m^2/s$ ) και ισούται με

$$D = \frac{1}{6} \Gamma a^2 \quad (3)$$

όπου  $\Gamma$  αντιπροσωπεύει τη συχνότητα των αλμάτων (άλματα στη μονάδα του χρόνου προς τις κενές θέσεις παρεμβολής) και  $a$  η απόσταση μεταξύ δύο επιπέδων του κρυσταλλικού πλέγματος. Ο συντελεστής διάχυσης  $D$  ενώ θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητος των ατόμων που διαχέονται στο κράμα (πχ άνθρακας) στην πραγματικότητα είναι εξαρτημένος. Αυτό γιατί, παραδείγματος χάρη η διάχυση του άνθρακα σε στερεά διαλύματα με μεγαλύτερη περιεκτικότητα σε άνθρακα είναι πιο



γρήγορη, επειδή ο άνθρακας σε θέσεις παρεμβολής παραμορφώνει το πλέγμα “μεγαλώνοντας” το. Με αυτό τον τρόπο τα άλατα των ατόμων του άνθρακα πραγματοποιούνται με μεγαλύτερη ευκολία. Με  $\Gamma$  τη συχνότητα των αλμάτων τότε σε χρόνο  $t$  το καθαρό διάστημα διαχύσεως είναι  $r = a\sqrt{\Gamma t}$  το οποίο βάσει της (3) γίνεται:

$$r = 2.4\sqrt{D t} \quad (4)$$

Όπου  $\sqrt{D t}$  αντιπροσωπεύει το καθαρό διάστημα διαχύσεως (net diffusion distance) [2]-[3]-[4].

### 2<sup>ος</sup> νόμος του Fick

Υποθέτοντας ότι ο συντελεστής διάχυσης δε μεταβάλλεται με τη συγκέντρωση των ατόμων άνθρακα, ο δεύτερος νόμος του Fick είναι:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (5)$$

Το πρόσημο του  $\partial T/\partial x$  εξαρτάται από το πρόσημο του όρου  $\partial^2 c/\partial x^2$ . Όταν  $\partial^2 c/\partial x^2 > 0$  τότε η συγκέντρωση των ατόμων της διαχεόμενης ουσίας (πχ άνθρακας) αυξάνεται με το χρόνο ενώ όταν  $\partial^2 c/\partial x^2 < 0$  τότε η συγκέντρωση μειώνεται με το χρόνο στο συγκεκριμένο σημείο. Ο δεύτερος νόμος του Fick αποτελεί και την εξίσωση διαχύσεως, η επίλυση της οποίας επιτρέπει τον προσδιορισμό του προφίλ συγκεντρώσεως  $c(x,t)$  ενός συστατικού. Αυτό είναι και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας [2]-[3]-[4].

### Θερμοκρασιακή Επίδραση

Κατά τη διάρκεια άλματος ενός ατόμου διαχεόμενης ουσίας (παραδείγματος χάρη άνθρακα στο χάλυβα) εμφανίζονται τα εξής στάδια: α) αρχική θέση ισορροπίας του άνθρακα με ένα ελάχιστο ελεύθερης ενέργειας, β) διέλευση ανάμεσα σε 2 άτομα του κρυσταλλικού πλέγματος σε μια διπλανή θέση παρεμβολής, η οποία αντιστοιχεί σε υψηλότερη ενέργεια λόγω της παραμόρφωσης του δεσμού των ατόμων του πλέγματος. Η πιθανότητα το άτομο να αποκτήσει την επιπλέον απαιτούμενη ενέργεια  $\Delta G_D^*$  για να υπερπηδήσει το δεσμό δίνεται από τον παράγοντα Boltzmann,  $\exp(-\Delta G_D^*/RT)$ . Εάν η συχνότητα ταλάντωσης των ατόμων παρεμβολής είναι  $\nu$  τότε η συχνότητα αλμάτων είναι:

$$\Gamma = \nu z \exp(-\Delta G_D^*/RT) \quad (6)$$

Όπου  $z$  ο αριθμός συνδιατάξεως των θέσεων παρεμβολής. Σε συνδυασμό της παραπάνω με την (3) προκύπτει:

$$D = \left(\frac{1}{6}\alpha^2 z \nu \exp\left(\frac{\Delta S_D^*}{RT}\right)\right) \exp\left(-\frac{\Delta H_D^*}{RT}\right) \quad (7)$$

Θέτοντας  $D_0 = \frac{1}{6} \alpha^2 z v \exp \frac{\Delta S_D^*}{RT}$  (cm<sup>2</sup>/s), τον θερμοκρασιακά ανεξάρτητο όρο προκύπτει:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{\Delta H_D^*}{RT}\right) \quad (8)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τη θερμοκρασιακή εξάρτηση του συντελεστή διάχυσης D των ατόμων παρεμβολής και είναι μια σχέση τύπου Arrhenius. Το  $\Delta H_D^*$  είναι η ενθαλπία ή ενέργεια ενεργοποίησης για διάχυση παρεμβολής (KJ/mol). Διάφορες τιμές των  $D_0$  και  $\Delta H_D^*$  για άνθρακα (C) και άζωτο (N) στον α και γ-Fe δίνονται στον παρακάτω πίνακα B1 [2].

**Πίνακας B1:** Τιμές του συντελεστή διάχυσης και ενέργεια ενεργοποίησης για άνθρακα (C) και άζωτο (N) στον α και γ-Fe [2]

Στοιχείο	Πλέγμα	$D_0$ (cm <sup>2</sup> /s)	$\Delta H_D^*$ (KJ/mol)
C	α-Fe	$6.2 \times 10^{-3}$	80
C	γ-Fe	0.15	135
N	γ-Fe	$3.0 \times 10^{-3}$	76

## 2. Μεθοδολογία Επίλυσης

Λύση στην εξίσωση διαχύσεως του 2<sup>ου</sup> νόμου του Fick (5) αναζητείται για διάφορες αρχικές και συνοριακές συνθήκες στα περισσότερα προβλήματα διάχυσης. Οι λύσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η μία κατηγορία αφορά λύσεις που εφαρμόζονται σε μικρούς χρόνους διαχύσεως ή σε ημίαιπια μέσα, όπου οι διαστάσεις είναι πολύ μεγαλύτερες από το καθαρό διάστημα διαχύσεως. Οι λύσεις αυτές εμφανίζονται με σειρές συναρτήσεων λάθους (error functions). Η άλλη κατηγορία λύσεων αποτελείται κυρίως από τριγωνομετρικές σειρές.

Χρησιμοποιούνται τρεις τρόποι επίλυσης των εξισώσεων διάχυσης: α) η μέθοδος της υπέρθεσης (superposition), β) η μέθοδος του διαχωρισμού των μεταβλητών και γ) ο μετασχηματισμός Laplace που είναι ο πιο ισχυρός από τους τρεις και χρησιμοποιείται κυρίως σε πολύπλοκα προβλήματα.

Παρακάτω έγινε ο προγραμματισμός στη γλώσσα Mathematica των προφίλ αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης διάχυσης για διάφορες περιπτώσεις και γεωμετρίες.

### 2.1. Συνηθέστερες Λύσεις της εξίσωσης διάχυσης

Παρακάτω παρουσιάζονται οι συνηθέστερες λύσεις της εξίσωσης διάχυσης για τις πιο διαδεδομένες περιπτώσεις. Τα προγράμματα των λύσεων περιέχουν και εξισώσεις προσδιορισμού χρόνου διάχυσης και απόσταση διάχυσης μέσα στο υλικό.

- i. “Λεπτή Επίστρωση” – Thin Film Solution (λεπτό φιλμ διαχεόμενης ουσίας μεταξύ άπειρων πλακών)

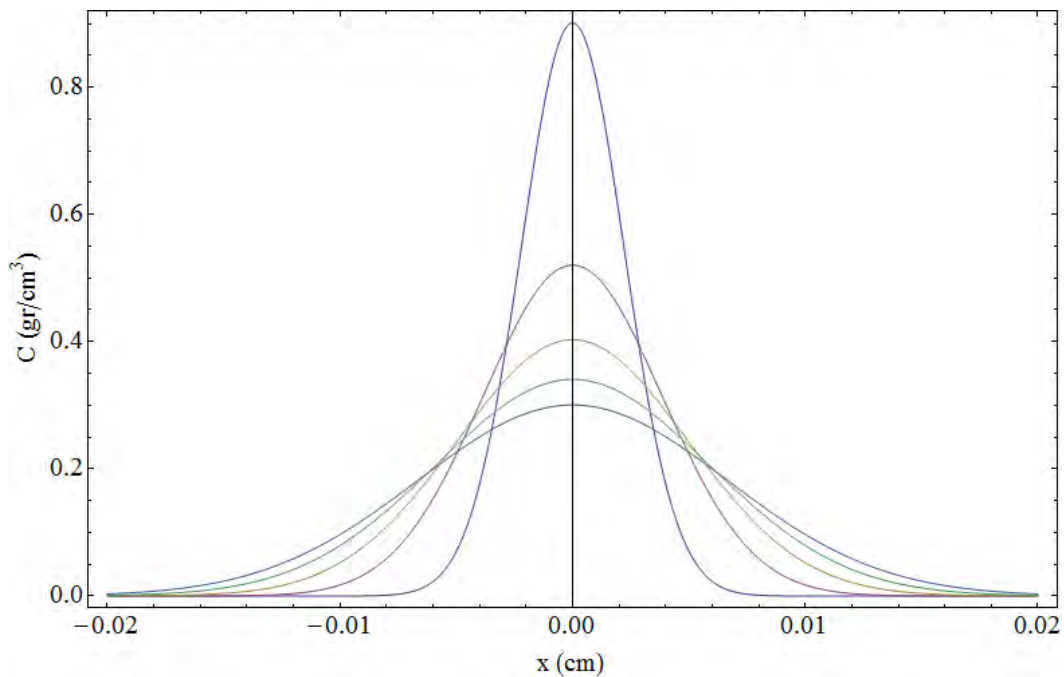
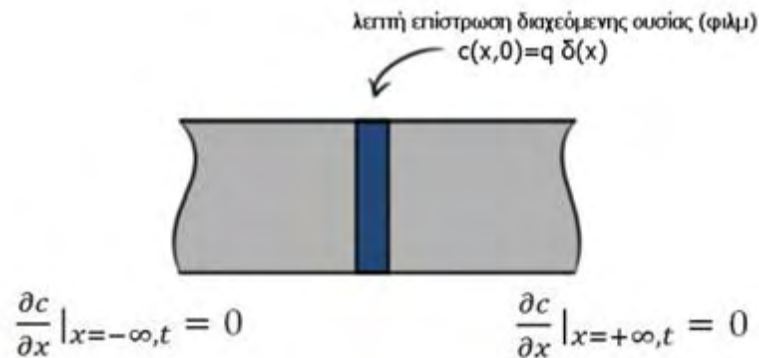
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = q \delta(x)$

[όπου  $\delta(x)$  η συνάρτηση Δέλτα Dirac (ίση με μηδέν παντού, εκτός όταν  $x=0$  που είναι άπειρη, αλλά η ολοκλήρωση της από  $-\infty$  έως  $+\infty$  είναι ίση με 1) και  $q=M/(Adx)$  η συγκέντρωση ουσίας ανά μονάδα επιφάνειας (άτομα/ $m^2$  ή  $gr/cm^2$ )]

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$

Λύση:

$$c(x, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$



**Σχήμα 2.1.1:**  $q=0.005$  ( $gr/cm^2$ ), χρόνος  $t=1, 10$  sec με βήμα 2 sec (ψηλότερη καμπύλη 1 sec)

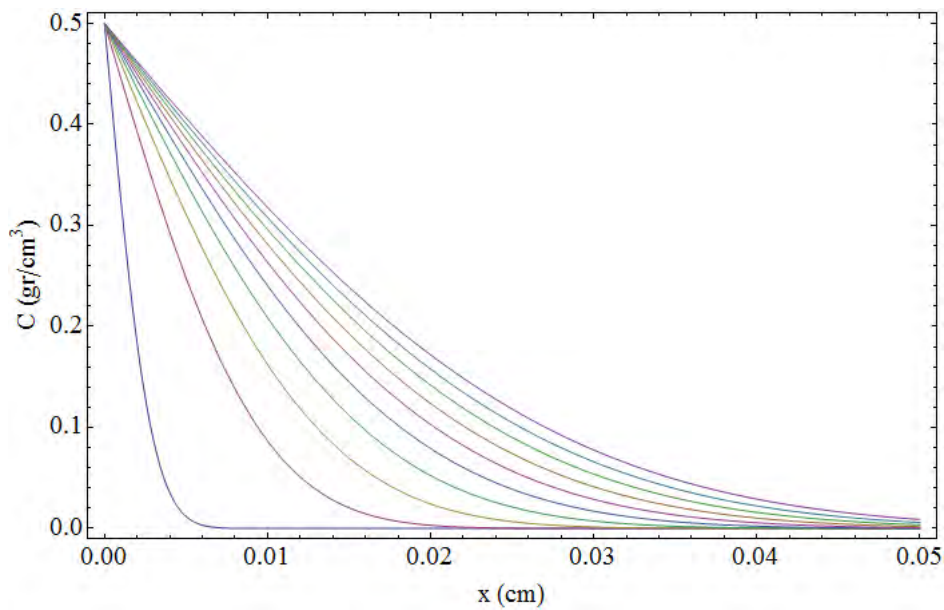
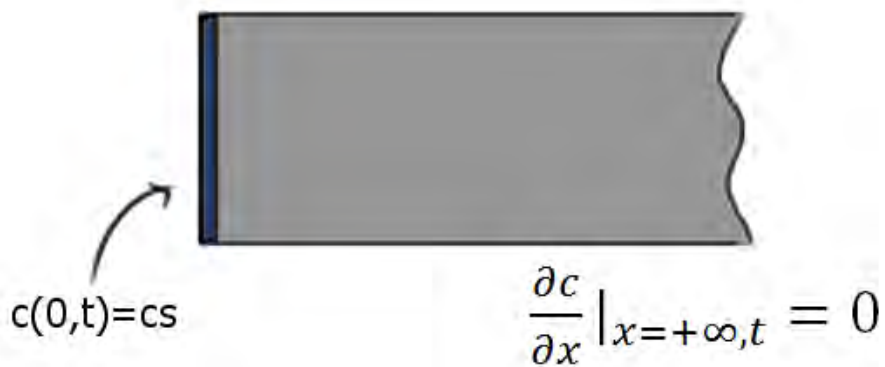
ii. Ενανθράκωση σε ημιάπειρη πλάκα με σταθερή επιφανειακή συγκέντρωση

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = 0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = c_s$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty,t} = 0$

Λύση:

$$c(x,t) = c_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$



**Σχήμα 2.1.2:**  $c(0,t) = 0.5$  ( $\text{gr/cm}^3$ ), χρόνος  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

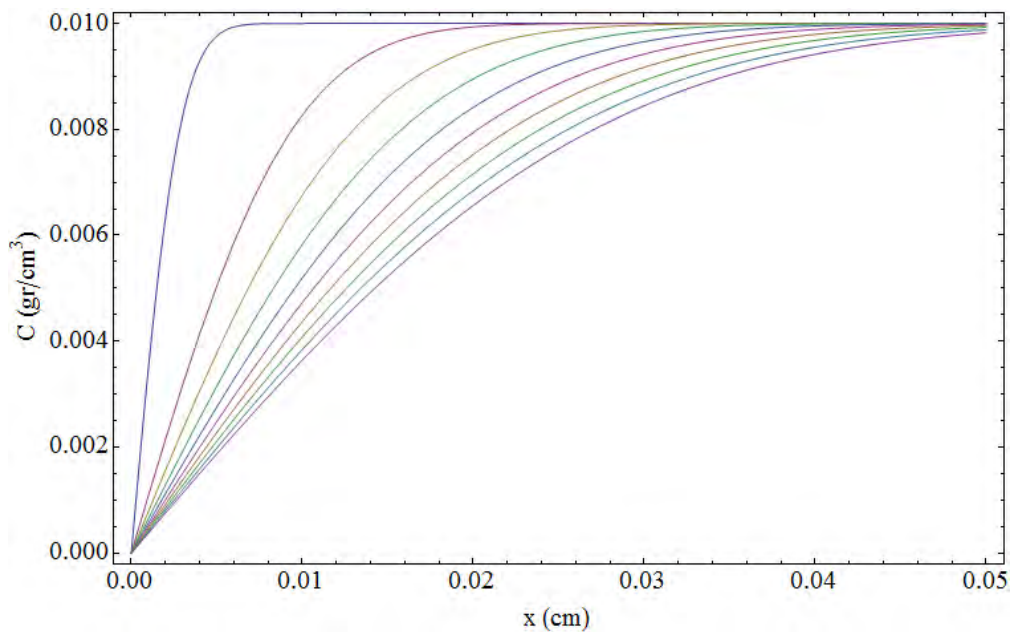
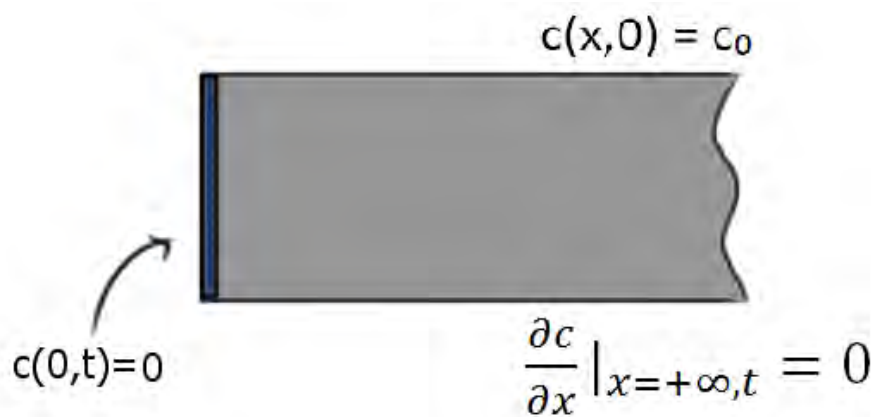
iii. Απανθράκωση από ημιάπειρη πλάκα

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty,t} = 0$

Λύση:

$$c(x,t) = c_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$



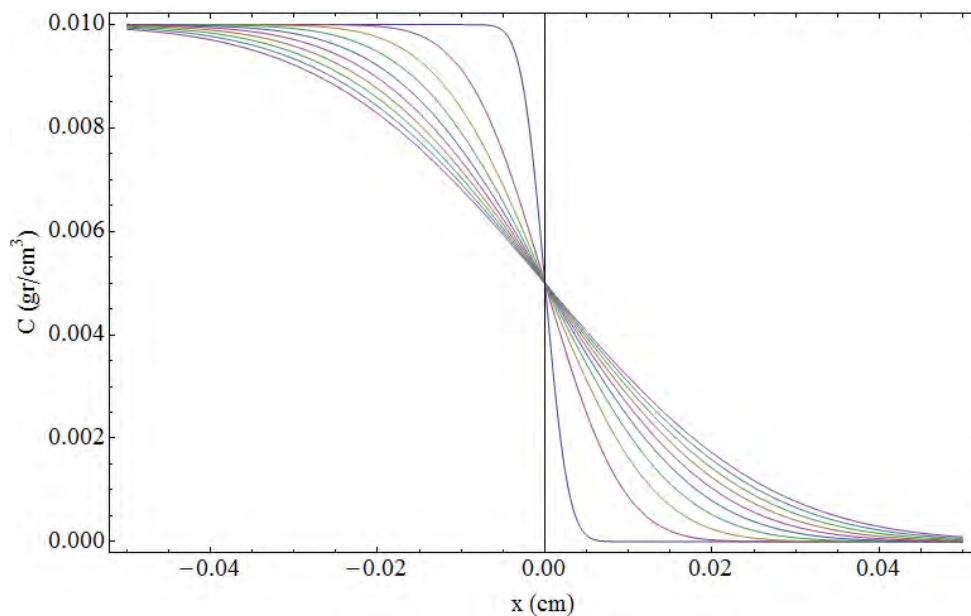
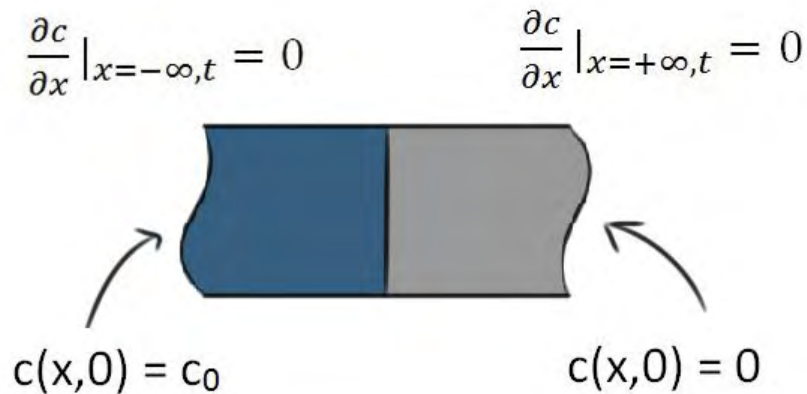
**Σχήμα 2.1.3:**  $c(x,0) = 0.01$  (gr/cm<sup>3</sup>), χρόνος  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (ψηλότερη καμπύλη 1 sec)

iv. Ζεύγος Διάχυσης σε άπειρη πλάκα (α)

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = \begin{cases} c_0, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$

Λύση:  $c(x, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$



**Σχήμα 2.1.4:**  $c(x,0) = 0.01 \text{ (gr/cm}^3\text{)}$  για  $x < 0$ , χρόνος  $t=1, 100 \text{ sec}$  με βήμα  $10 \text{ sec}$  (ακραίες καμπύλες  $1 \text{ sec}$ )

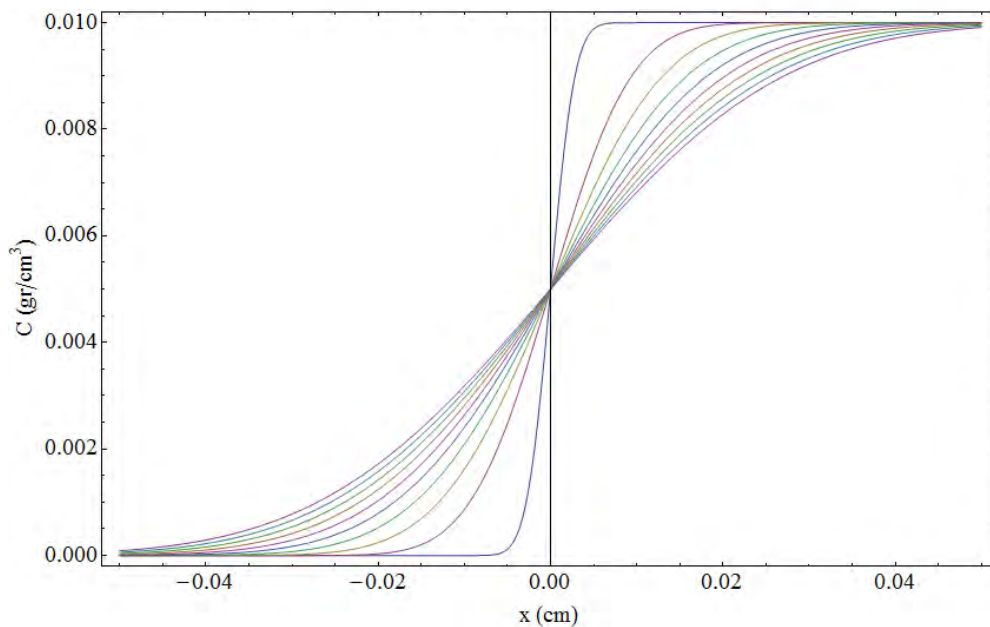
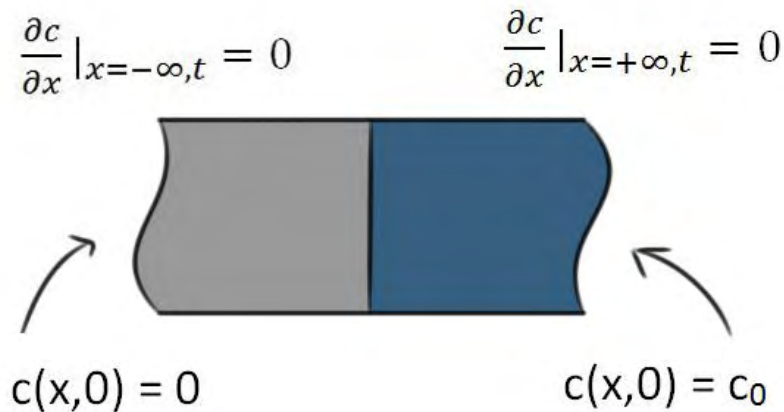
ν. Ζεύγος Διάχυσης σε άπειρη πλάκα (β)

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c_0, & x \geq 0 \end{cases}$

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$

Λύση:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$



**Σχήμα 2.1.5:**  $c(x,0) = 0.01 \text{ (gr/cm}^3\text{)}$  για  $x \geq 0$ , χρόνος  $t=1, 100 \text{ sec}$  με βήμα  $10 \text{ sec}$  (ακραίες καμπύλες  $1 \text{ sec}$ )



vi. Ζεύγος Διάχυσης σε άπειρη πλάκα ( $\gamma$ ) [υπέρθυση λύσεων ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ )]

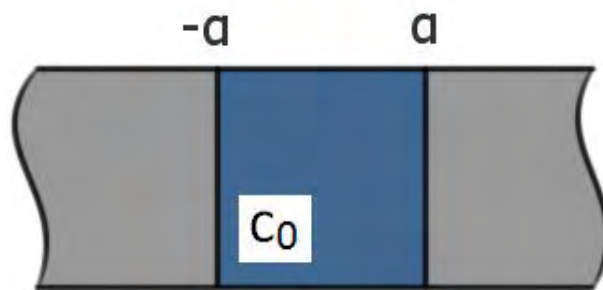
$$\text{Αρχική Συνθήκη: } c(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -a \text{ και } x > a \\ c_0, & -a \leq x \leq a \end{cases}$$

(Όπου  $a$  είναι τα όρια της επιφάνειας που είναι η συγκεντρωμένη ουσία.)

$$\text{Οριακές Συνθήκες: } \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0 \text{ και } \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$$

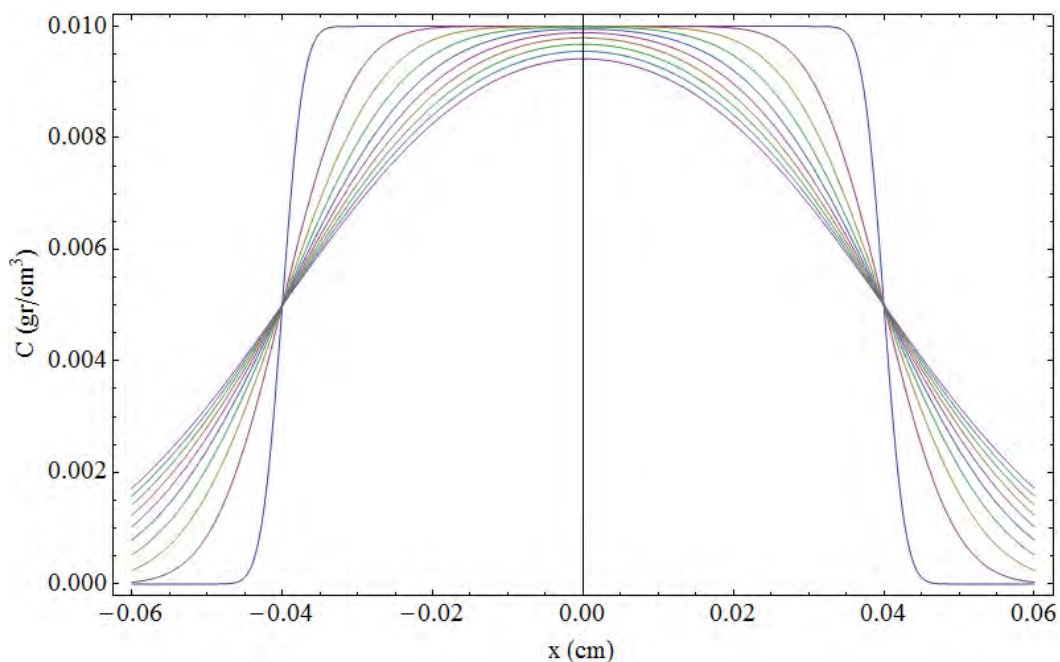
Λύση:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{a+x}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{a-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$



$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$$



**Σχήμα 2.1.6:**  $c(x,0) = 0.01 \text{ (gr/cm}^3\text{)}$  για  $-\alpha < x < \alpha$ , όπου  $\alpha = 0.04 \text{ cm}$  και χρόνος  $t = 1, 100 \text{ sec}$  με βήμα  $10 \text{ sec}$  (ψηλότερη καμπύλη  $1 \text{ sec}$ )



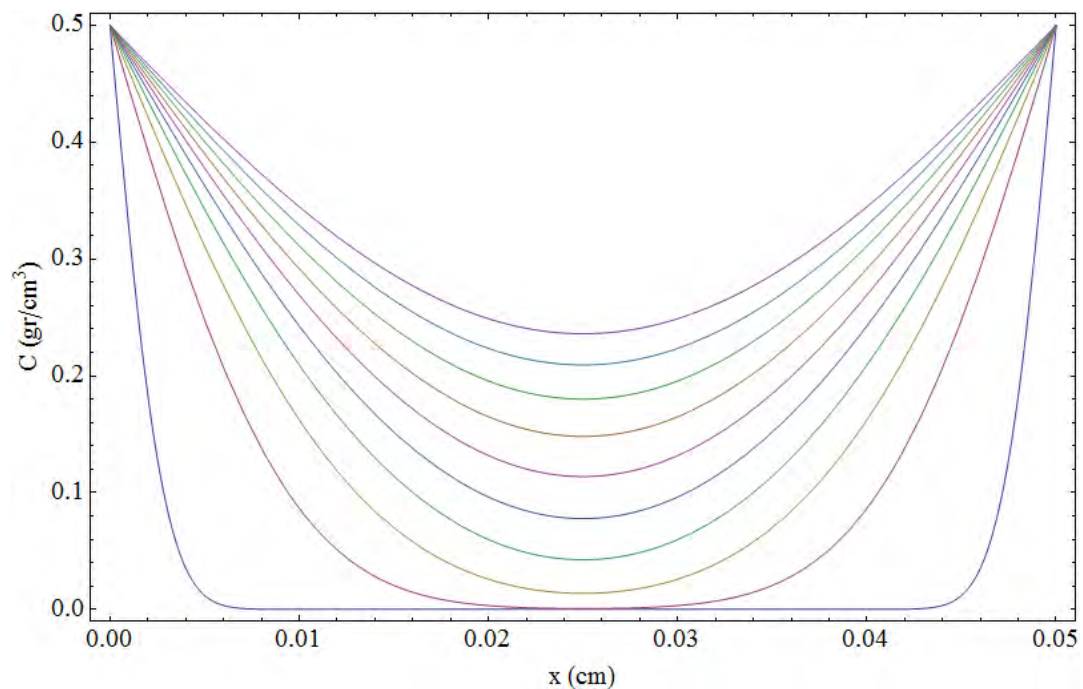
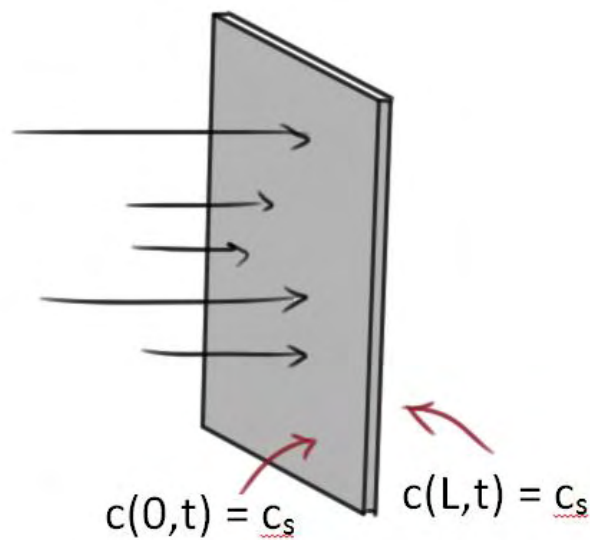
vii. Διάχυση σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L (ενανθράκωση - απανθράκωση)

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = c_s$  και  $c(L,t) = c_s$

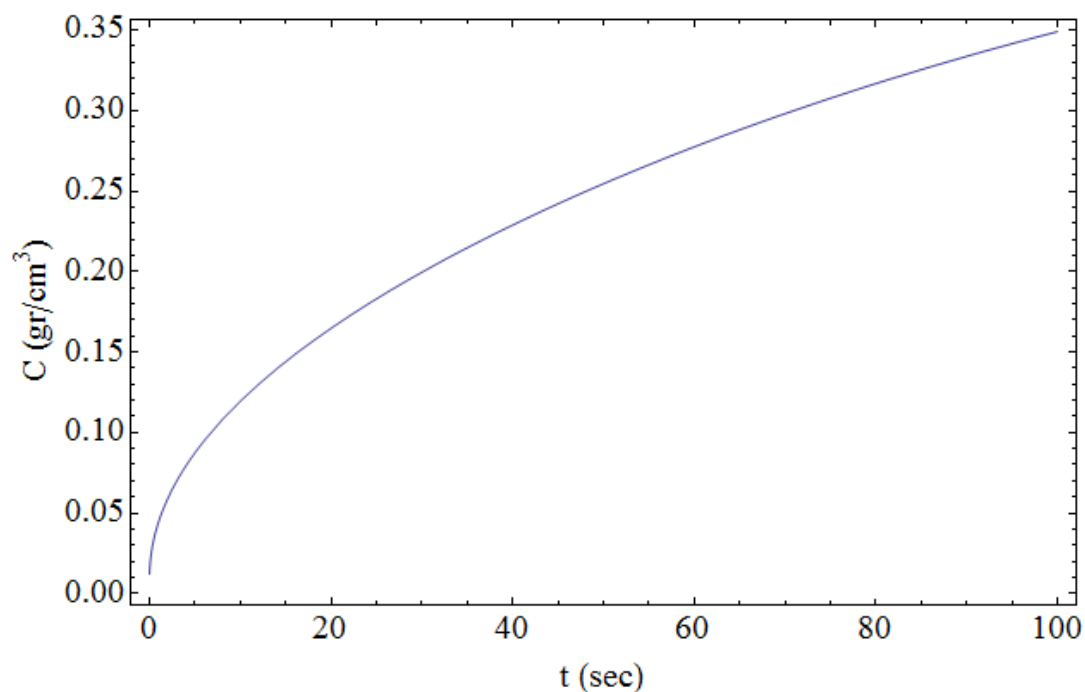
Λύση:

$$c(x,t) = c_s + [c_0 - c_s] \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\exp\left(\frac{-(2n+1)^2 \pi^2 D t}{L^2}\right)}{(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \right]$$



**Σχήμα 2.1.7 α:**  $c(x,0) = 0$ ,  $c(0,t) = 0.5$  και  $c(L,t) = 0.5$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ),  $L=0.05$  cm και χρόνος  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

Στην περίπτωση που ισχύει  $c_0=0$  ή  $c_0 \ll c_s$  τότε το υλικό υφίσταται ενανθράκωση, ενώ στην περίπτωση που ισχύει  $c_s=0$  ή  $c_s \ll c_0$  τότε δημιουργείται απανθράκωση. Επομένως η παραπάνω λύση είναι περίπτωση ενανθράκωσης. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται και η μέση συγκέντρωση στο υλικό κατά τη διάρκεια της διάχυσης.



**Σχήμα 2.1.7 β:** Μέση συγκέντρωση στο υλικό κατά τη διάρκεια της διάχυσης. Η μορφή της πάντα εξαρτάται από το αν γίνεται ενανθράκωση ή απανθράκωση.

## 2.2. Γενικές περιπτώσεις λύσεων της εξίσωσης διάχυσης

Οι παρακάτω λύσεις έχουν υπολογισθεί μέσω σχέσεων διαχύσεως που υπάρχουν στο βιβλίο του John Crank [1]. Όλα τα προγράμματα παρατίθενται μαζί με του προηγούμενου κεφαλαίου στο παράρτημα Β. Ο αριθμός της σχέσης που υπάρχει σε κάθε μία από τις λύσεις αναφέρεται στην πραγματική σχέση της πηγής.

### 1. Σημειακή πηγή σε άπειρη επίπεδη επιφάνεια [λύση 3.4]

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = q$

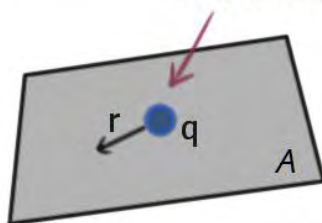
[όπου  $q$  η συγκέντρωση ουσίας ανά μονάδα επιφάνειας (άτομα/m<sup>2</sup> ή gr/cm<sup>2</sup>)]

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$

Λύση:

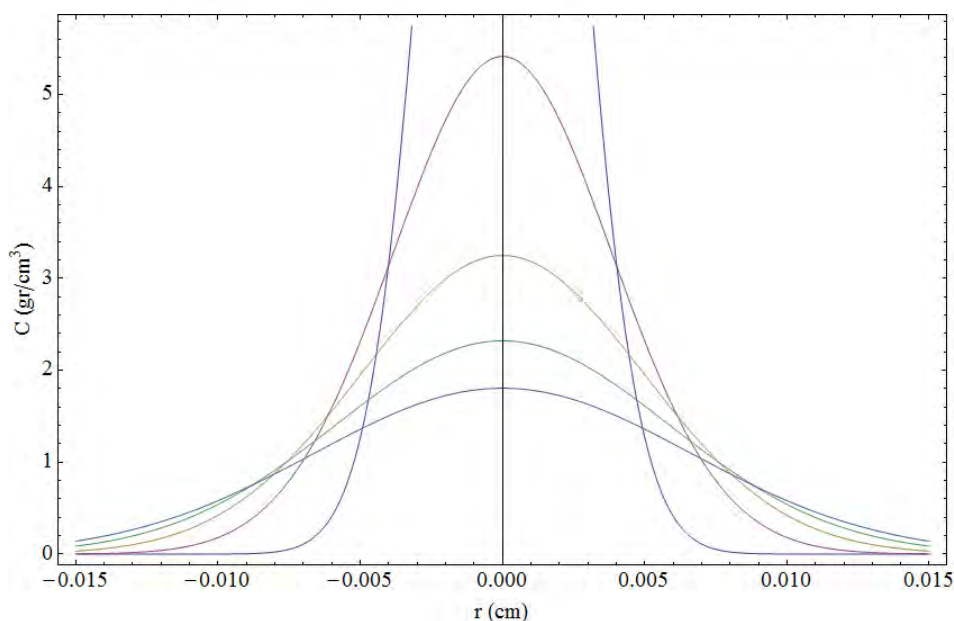
$$c(r, t) = \frac{q}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$$

σημειακή πηγή σε  
άπειρη επιφάνεια



$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty, t} = 0$$



**Σχήμα 2.2.1:**  $q=0.0005$  (λιγότερη συγκέντρωση από ότι στη λύση (i) γιατί είναι σημειακή πηγή), χρόνος  $t=1, 10$  sec με βήμα 2 sec (ψηλότερη καμπύλη 1 sec)

2. Σημειακή πηγή σε άπειρο όγκο [λύση 3.5]

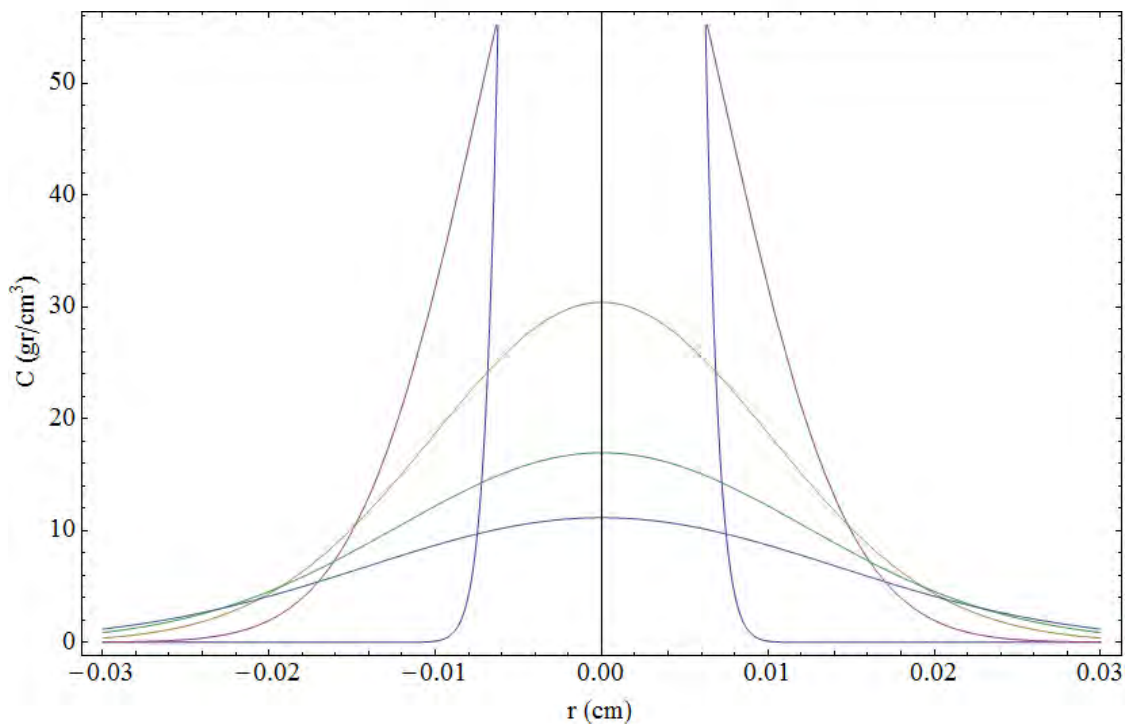
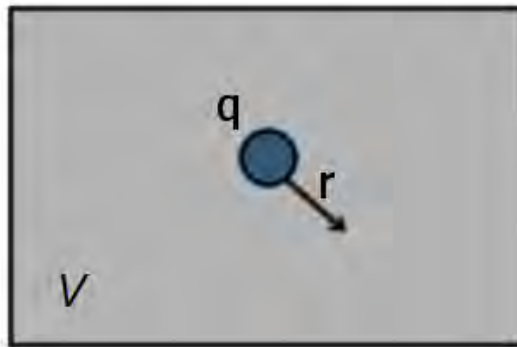
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = q$

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=-\infty,t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=+\infty,t} = 0$

Λύση:

$$c(r, t) = \frac{q}{8\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(\frac{-r^2}{4Dt}\right)$$

σημειακή πηγή σε άπειρο όγκο



**Σχήμα 2.2.2:**  $q=0.0005$  (λιγότερη συγκέντρωση από ότι στη λύση (i) γιατί είναι σημειακή πηγή), χρόνος  $t=1, 10$  sec με βήμα 2 sec (ψηλότερη καμπύλη 1 sec)

3. Σφαιρική πηγή σε εκτενή όγκο [λύση 3.8]

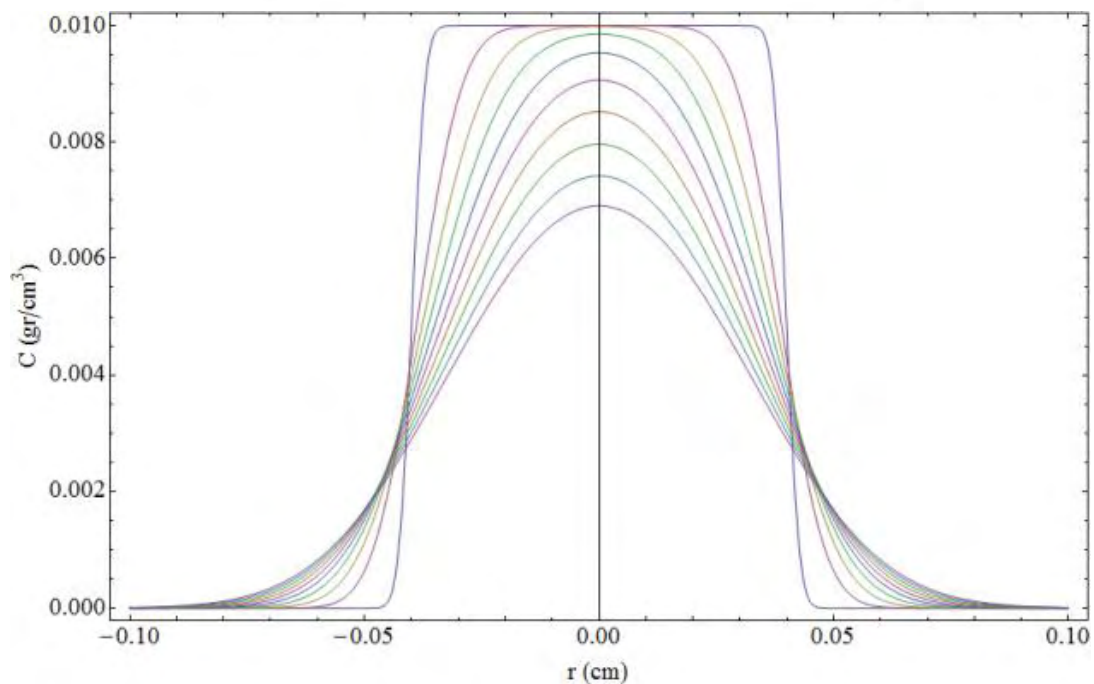
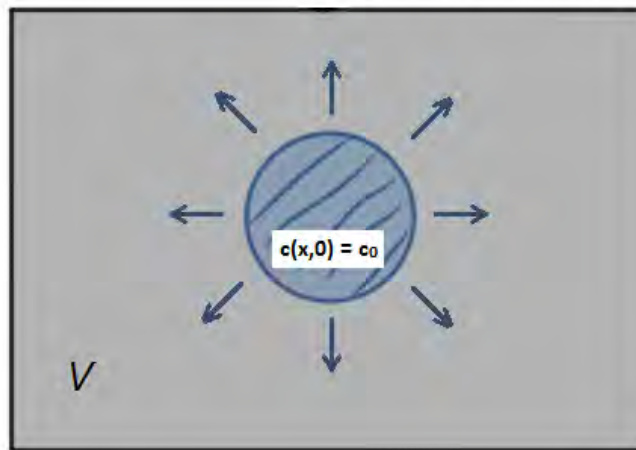
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty,t} = 0$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty,t} = 0$

Λύση:

$$c(r,t) = \frac{c_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{a-r}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{a+r}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] - \frac{c_0}{r} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \left[ \exp \left( \frac{-(a-r)^2}{4Dt} \right) - \exp \left( \frac{-(a+r)^2}{4Dt} \right) \right]$$

Σφαιρική πηγή σε εκτενή όγκο



**Σχήμα 2.2.3:**  $c(x,0) = 0.01$  (gr/cm<sup>3</sup>),  $a=0.04$  cm (ακτίνα σφαίρας) και χρόνος  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (ψηλότερη καμπύλη 1 sec)

4. Ημίπειρη πλάκα με σταθερή επιφανειακή συγκέντρωση (γενική λύση) [σχέση 3.13]

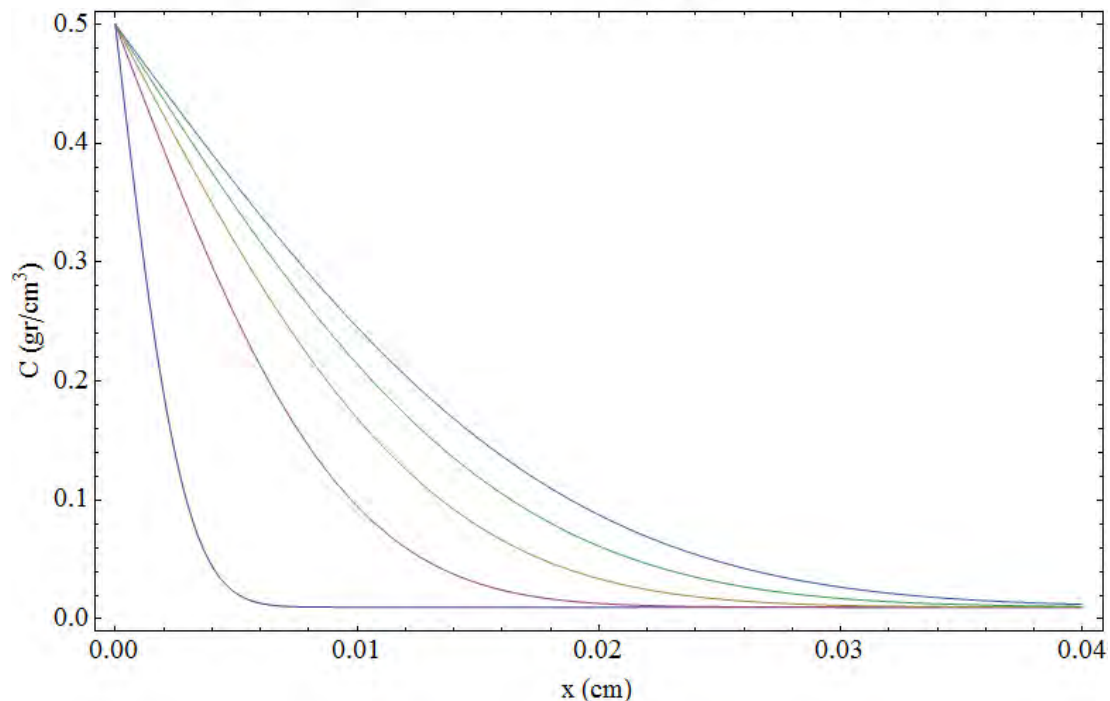
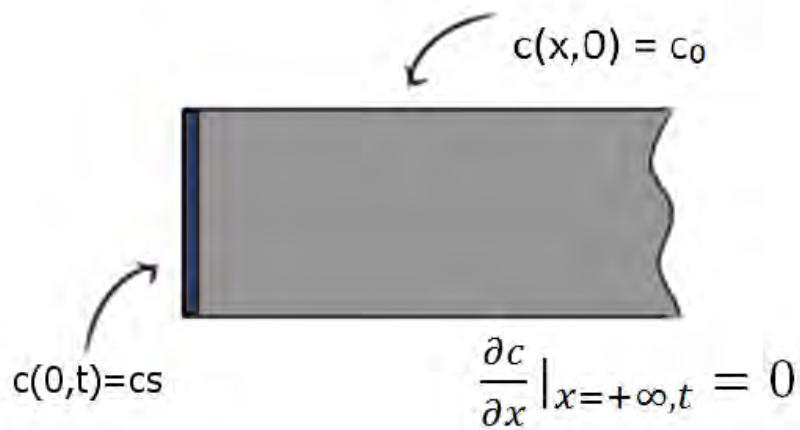
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = c_s$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty,t} = 0$

Ανάλογα με το ποια συγκέντρωση θα είναι μεγαλύτερη θα προκύπτει και διαφορετικό προφίλ – αντίστοιχα με τις λύσεις (ii) και (iii). Αν  $c_s > c_0$  τότε προκύπτει η (ii) αλλιώς αν  $c_s < c_0$  τότε η (iii).

Λύση:

$$c(x,t) = c_s + (c_0 - c_s) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$



**Σχήμα 2.2.4:**  $c(x,0) = 0.01$ ,  $c(0,t) = 0.5$  (gr/cm<sup>3</sup>) και χρόνος  $t=1, 50$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

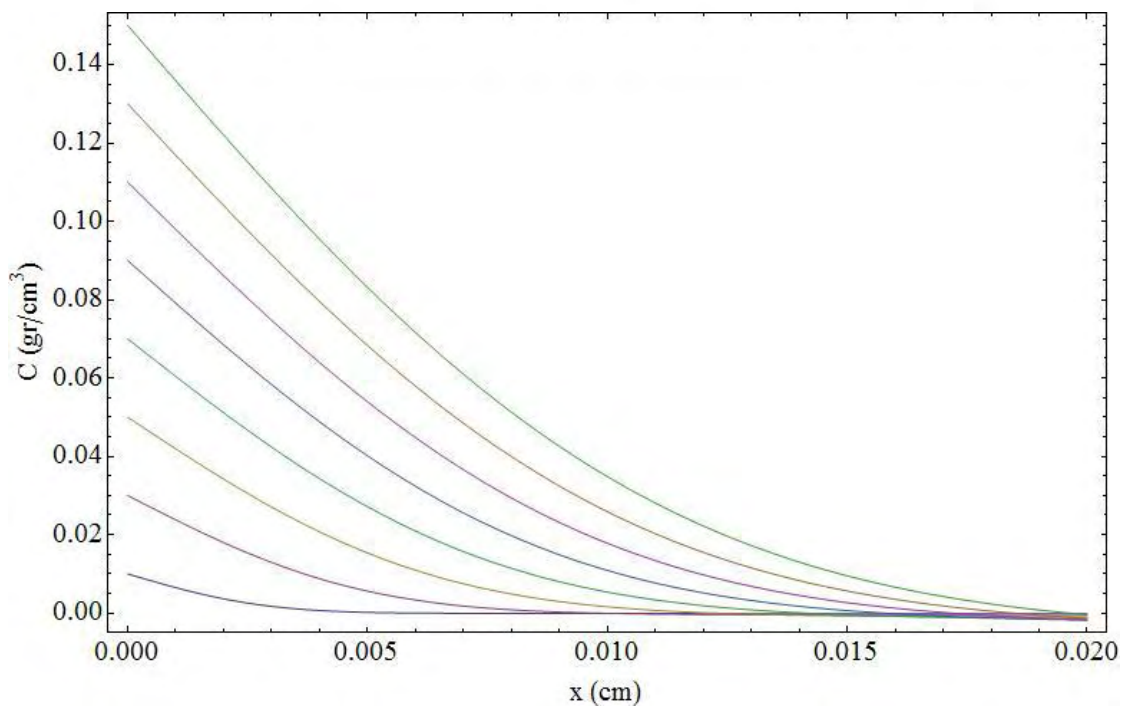
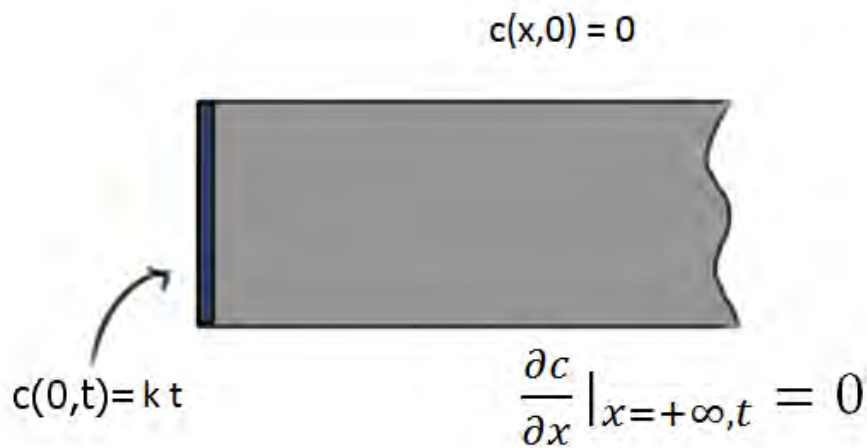
5. Ημίπειρη πλάκα με επιφανειακή συγκέντρωση μεταβαλλόμενη με το χρόνο [σχέση 3.16]

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = 0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = k t$  στο σημείο  $x$  και  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=+\infty,t} = 0$

Λύση:

$$c(x,t) = 4 k t \left[ \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - 2x \left( \frac{1}{\pi^2} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \right]$$



**Σχήμα 2.2.5:**  $c(x,0) = 0$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ),  $c(0,t) = kt$  όπου  $k=0.01$  και χρόνος  $t=1, 15$  sec με βήμα 2 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)



6. Αέρια Ενανθράκωση (Ροή ως οριακή συνθήκη) [σχέση 3.35]

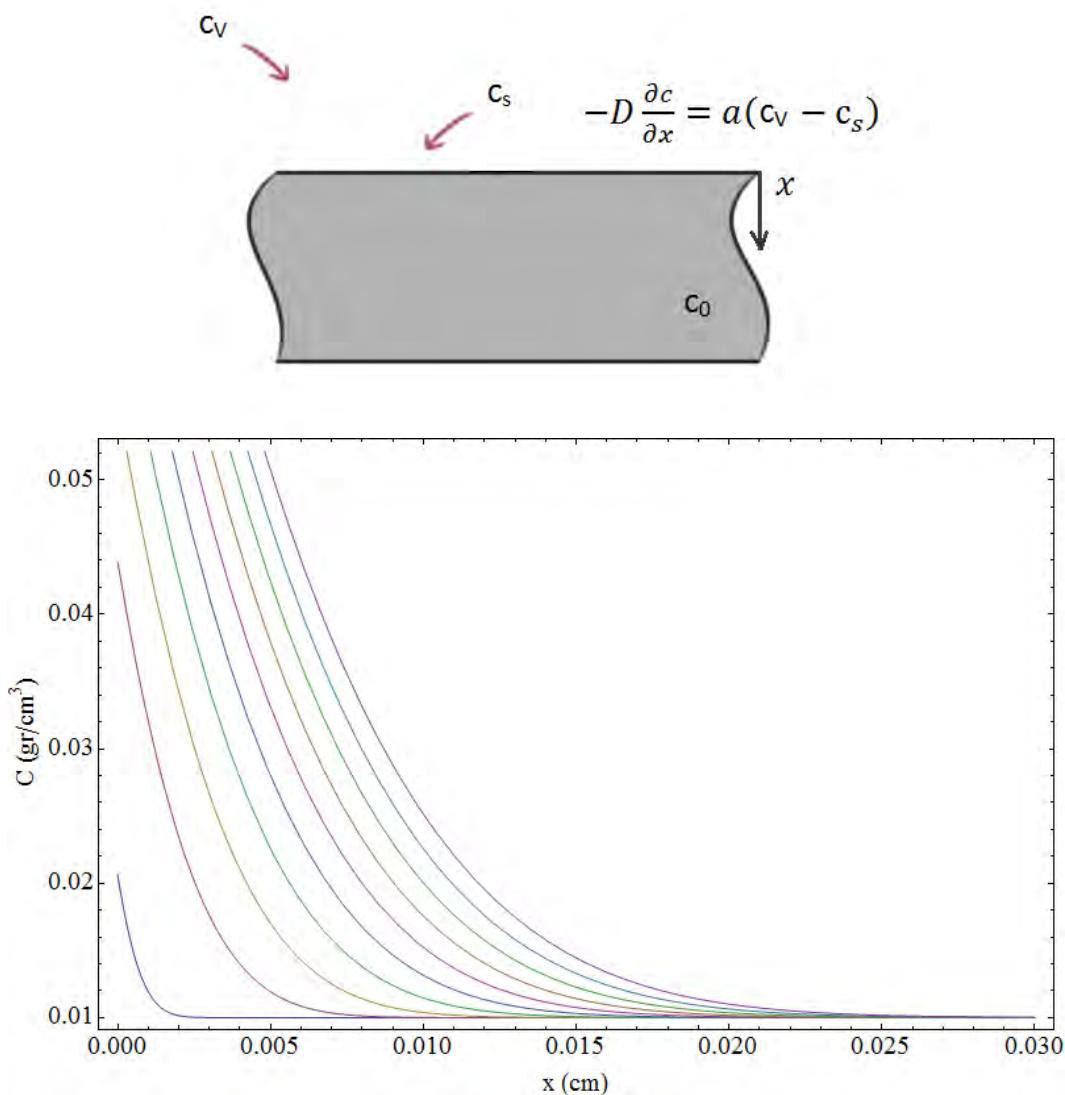
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$

Οριακές Συνθήκες:  $-D \frac{\partial c}{\partial x} = a(c_v - c_s)$ ,  $x = 0$

Λύση:

$$c(x, t) = c_0 + (c_v - c_0) \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \exp(hx + h^2 Dt) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \right]$$

όπου  $c_0$  η αρχική συγκέντρωση στο μέσο,  $c_v$  η συγκέντρωση στην ατμόσφαιρα και  $c_s$  η επιφανειακή συγκέντρωση, και  $h = a/D$  ( $\text{cm}^{-1}$ ) είναι μία σταθερά αναλογικότητας (mass transfer ratio) και  $a$  ( $\text{cm}/\text{sec}$ ) ο συντελεστής μεταφοράς μάζας με συναγωγή (mass transfer coefficient).



**Σχήμα 2.2.6:**  $c(x,0) = 0.01$ ,  $c_v = 0.5$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ) και χρόνος  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)



7. Ζεύγος Διάχυσης με διαφορετικούς συντελεστές D σε άπειρη πλάκα [σχέσεις 3.45-3.46]

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c_0, & x \geq 0 \end{cases}$

Οριακές Συνθήκες:  $\frac{c_2}{c_1} = k, x = 0$  και  $D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, x = 0$

Λύσεις:

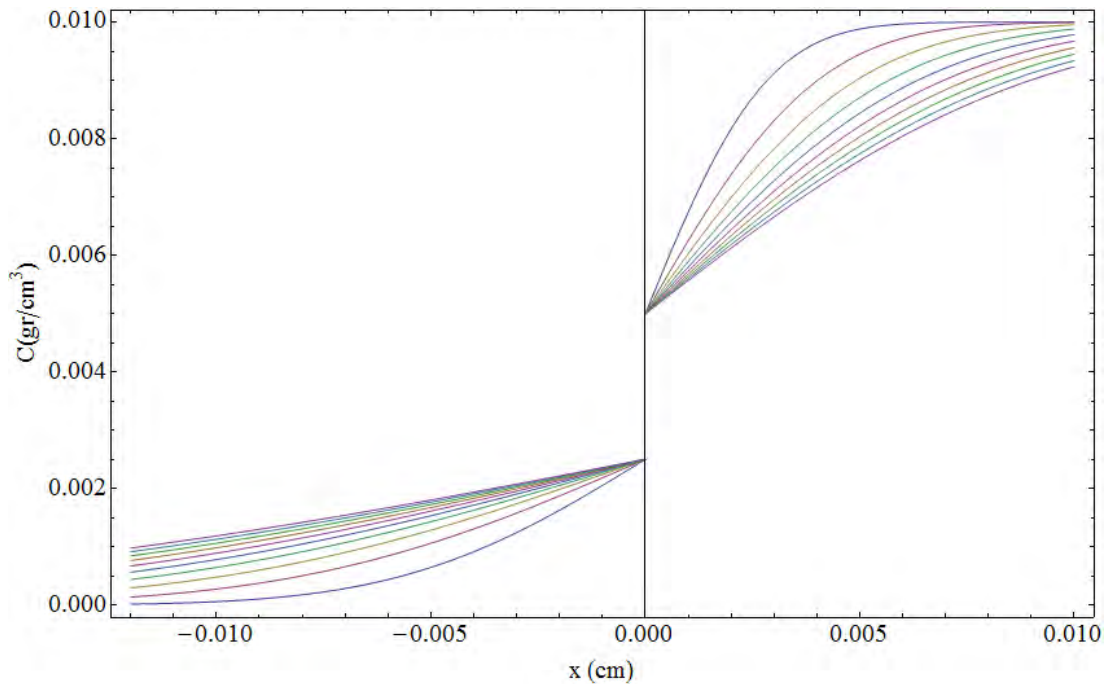
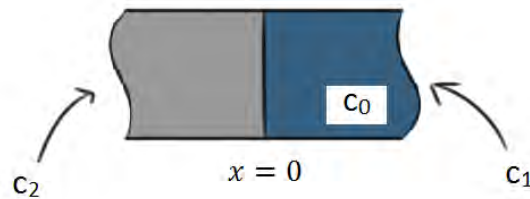
$$c_1(x, t) = \frac{c_0}{1+k\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + k \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}\right) \right]$$

και

$$c_2(x, t) = \frac{c_0 k}{1+k\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{D_1 t}}\right) \right]$$

(όπου  $D_1, c_1$  για  $x > 0$  και  $D_2, c_2$  για  $x < 0$ ,  $k=1/2$ )

Infinite composite medium



**Σχήμα 2.2.7:**  $c(x,0) = c_0$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ),  $x > 0$   $k=1/2$  και χρόνος  $t=1,10$  sec με βήμα 1 sec (ακραίες καμπύλες 1 sec - χαμηλότερη και ψηλότερη καμπύλη στην αριστερή και στην δεξιά πλευρά αντίστοιχα)

8. Ζεύγος Διάχυσης με διαφορετικούς συντελεστές  $D$  σε ημίπειρη πλάκα [σχέσεις 3.54-3.55]

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = 0$

Οριακές Συνθήκες:  $c(-L,t) = c_s$  και  $c_1 = c_2$ ,  $x = 0$  και  $D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}$ ,  $x = 0$

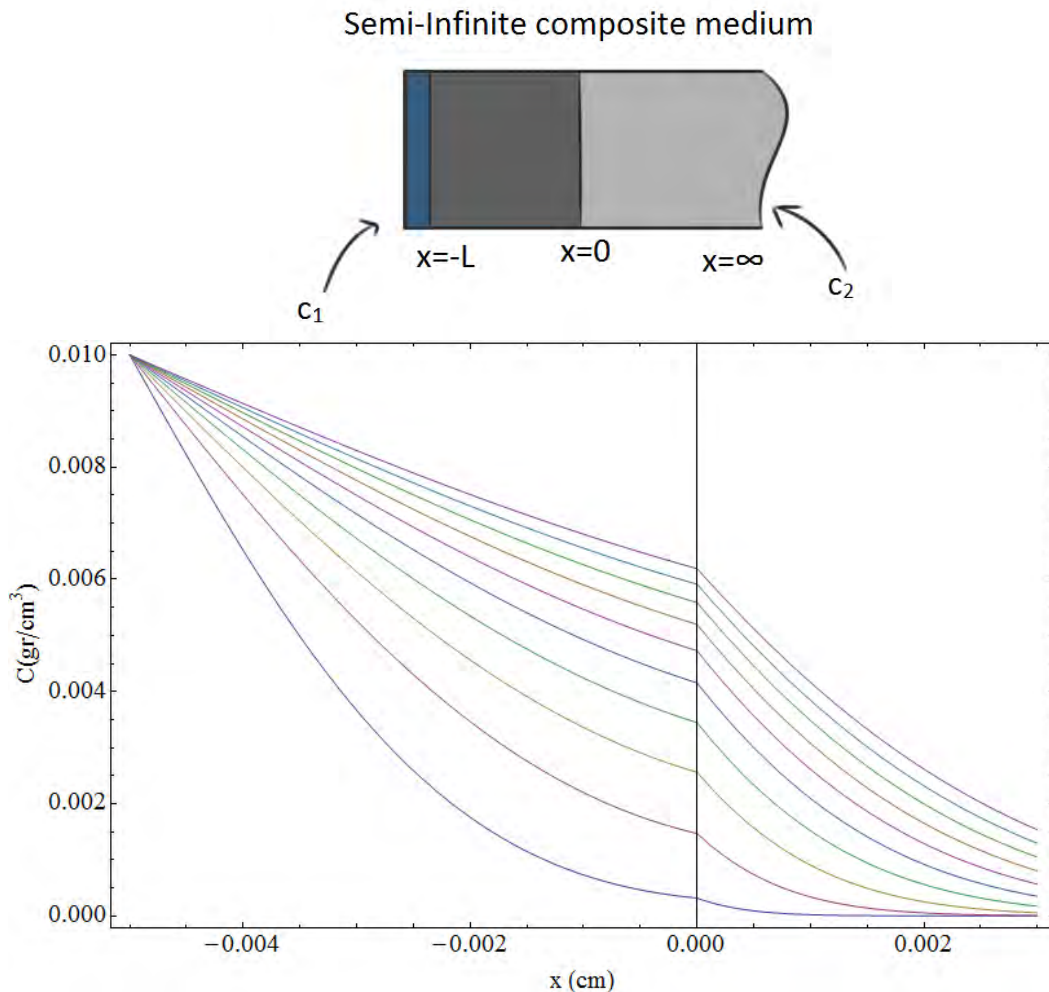
Λύσεις:

$$c_1(x,t) = c_s \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{(2n+1)L+x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \alpha \operatorname{erfc} \left( \frac{(2n+1)L-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

και

$$c_2(x,t) = \frac{2k c_s}{1+k} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{(2n+1)L+kx}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

(όπου  $D_1$ ,  $c_1$  για  $-L < x < 0$  και  $D_2$ ,  $c_2$  για  $x > 0$ , και όπου  $L$  όριο υλικού πεπερασμένης πλευράς)



**Σχήμα 2.2.8:**  $c(x,0) = 0$ ,  $c(-L,t) = 0.01$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ) και χρόνος  $t=1,10$  sec με βήμα 1 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

9. Διάχυση σε πεπερασμένη πλάκα (Ροή ως οριακή συνθήκη) [σχέση 4.55]

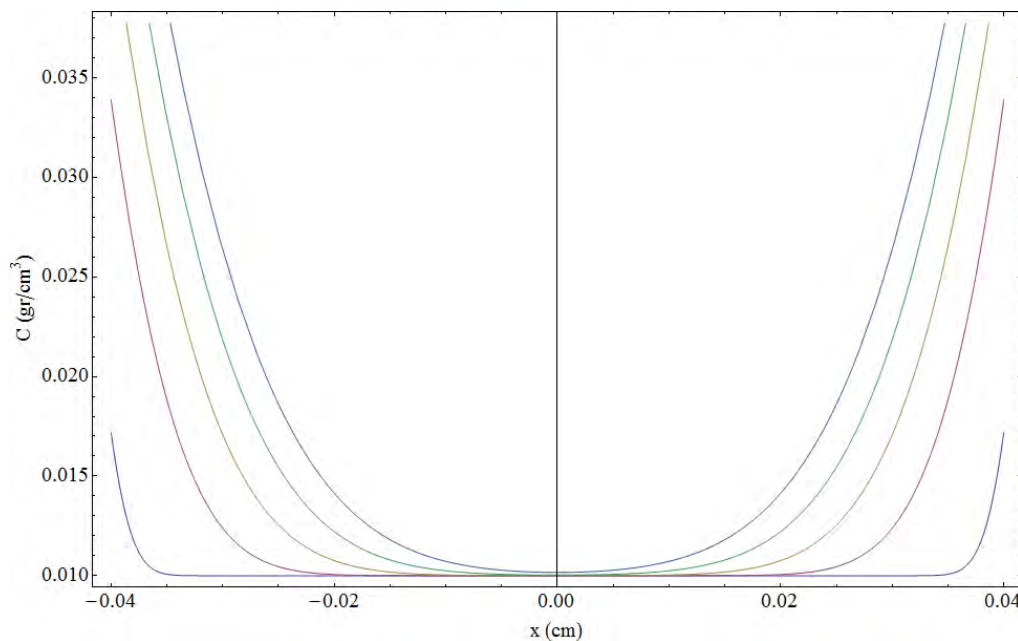
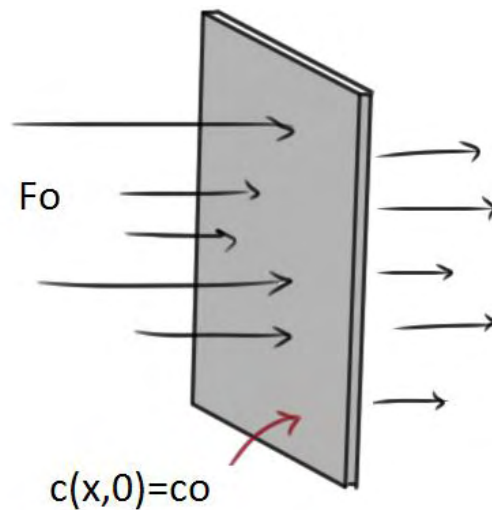
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$ ,  $-L < x < L$

Οριακές Συνθήκες:  $D \frac{\partial c}{\partial x} = F_0$  στα  $x = L$  και  $x = -L$

Λύση:

$$c_1(x,t) = c_0 + \frac{F_0 L}{D} \left[ \frac{Dt}{L^2} + \frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{D t n^2 \pi^2}{L^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right]$$

(όπου  $D_1$ ,  $c_1$  για  $-L < x < 0$  και  $D_2$ ,  $c_2$  για  $x > 0$ , και όπου  $L$  όριο υλικού πεπερασμένης πλευράς)



**Σχήμα 2.2.9:**  $c(x,0) = c_0$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ),  $-L < x < L$ ,  $F_0 = 10^{-5} \text{ gr}/\text{m}^2\text{s}$  και χρόνος  $t=1, 50 \text{ sec}$  με βήμα  $10 \text{ sec}$  (χαμηλότερη καμπύλη  $1 \text{ sec}$ )

10. Διάχυση σε πεπερασμένη πλάκα με μη ομοιόμορφη αρχική συγκέντρωση [σχέση 4.16]

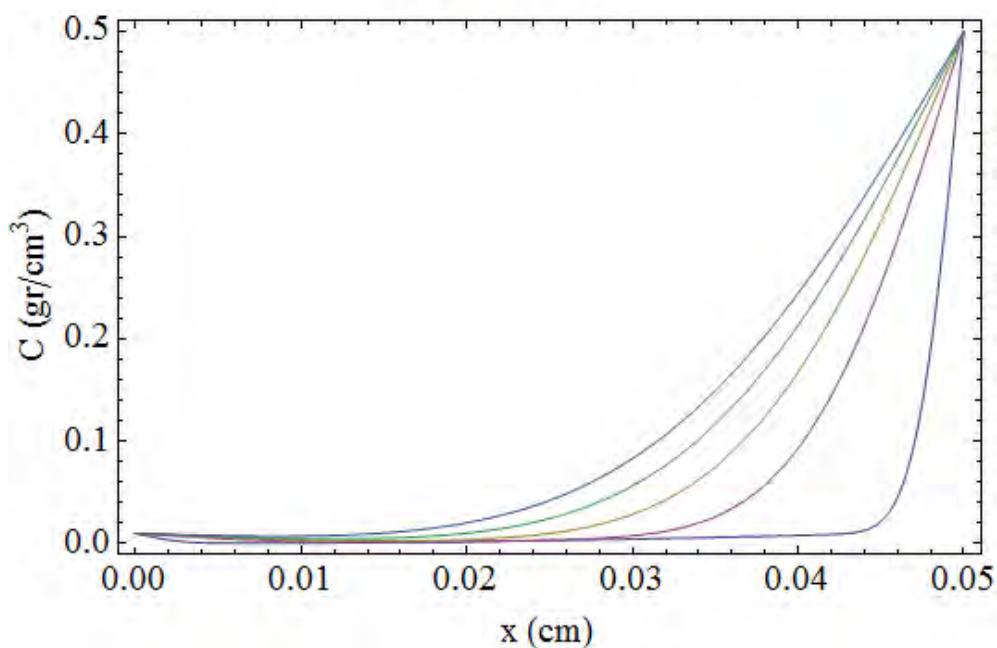
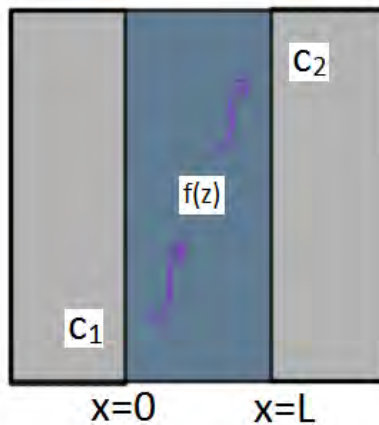
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = f(z)$ ,  $0 < x < L$

Οριακές Συνθήκες:  $c(0,t) = c_1$ ,  $c(L,t) = c_2$

(εδώ η αρχική συγκέντρωση παρουσιάζεται ως συνάρτηση και μπορεί να είναι οτιδήποτε)

Λύση:

$$c_1(x,t) = c_1 + (c_2 - c_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(c_2 \cos(n\pi) - c_1)}{n} \exp\left(-\frac{D t n^2 \pi^2}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{D t n^2 \pi^2}{L^2}\right) \int_0^L f(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz \right]$$



**Σχήμα 2.2.10:**  $c(x,0) = f(z) = 5z^2$ ,  $c(0,t) = 0.01$ ,  $c(L,t) = 0.5$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ) και  $L = 0.05$  cm για χρόνο  $t = 1, 50$  sec με βήμα 10 sec

11. Σφαιρικό Δοχείο (με συγκεντρώσεις  $c_1=c_2$ ) [σχέση 6.48]

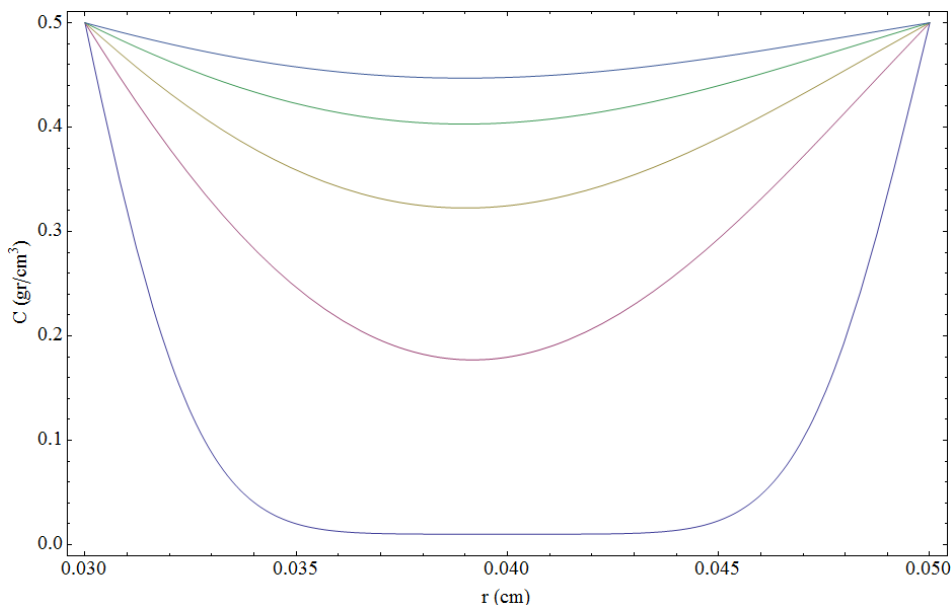
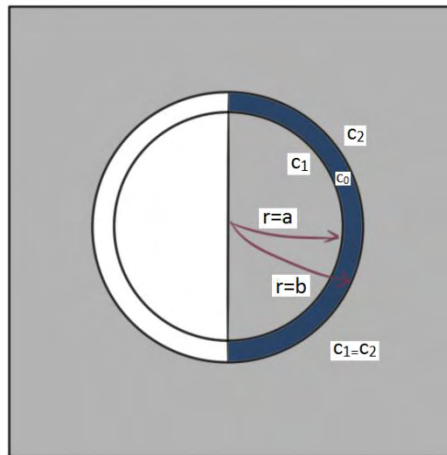
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$ ,  $a < x < b$

Οριακές Συνθήκες:  $c(a,t) = c_1$ ,  $c(b,t) = c_2$  και  $c_1 = c_2$

Λύση:

$$c(x, t) = c_0 + (c_1 - c_0) \left[ 1 + \frac{2}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b \cos(n\pi) - a}{n} \sin\left(\frac{n\pi(r-a)}{b-a}\right) \exp\left(-\frac{D t n^2 \pi^2}{(b-a)^2}\right) \right] \right]$$

(όπου  $r=a$  και  $r=b$  η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα της σφαίρας αντίστοιχα,  $c_0$  η συγκέντρωση στο ενδιάμεσο των δύο ακτινών  $a < x < b$ )



**Σχήμα 2.2.11:**  $c(x,0)=0.01$ ,  $c_1=c_2=0.5$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ),  $r=a=0.03\text{cm}$  ενώ  $r=b=0.05\text{cm}$  και χρόνος  $t=1$ , 50 sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

12. Σφαιρικό Δοχείο (με συγκεντρώσεις  $c_1 \neq c_2$ ) [σχέση 6.50]

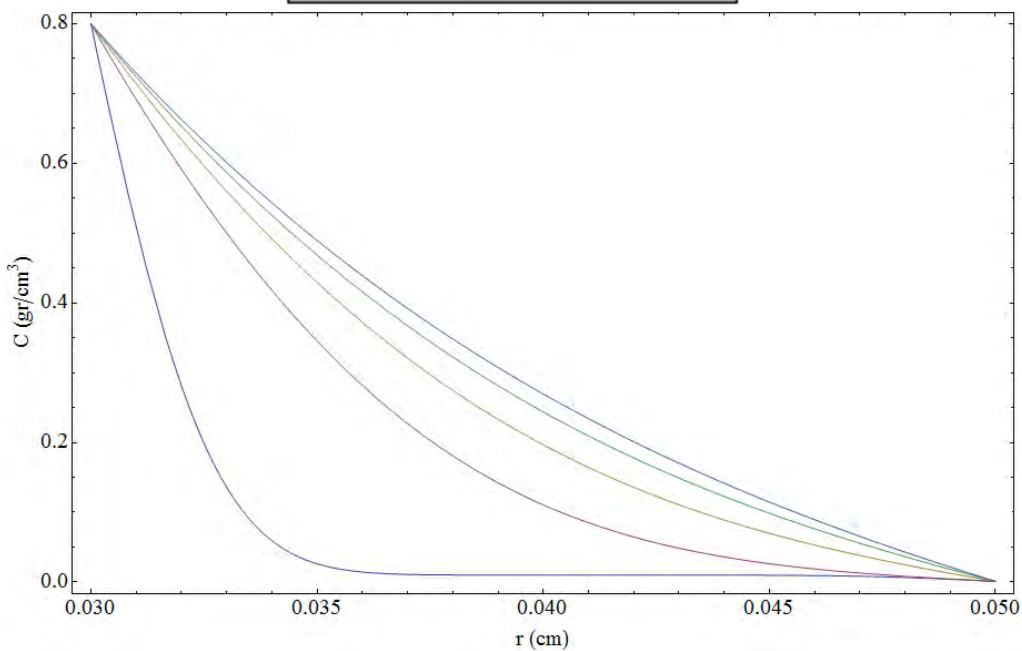
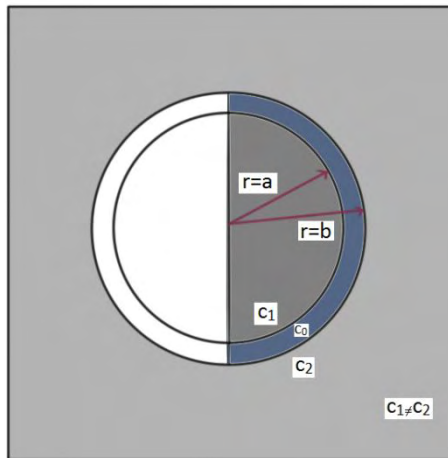
Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$  ,  $a < x < b$

Οριακές Συνθήκες:  $c(a,t) = c_1$  ,  $c(b,t) = c_2$  και  $c_1 \neq c_2$

Λύση:

$$c(x,t) = \frac{ac_1}{r} + \frac{(bc_2 - ac_1)(r-a)}{r(b-a)} + \frac{2}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b(c_2 - c_0) \cos(n\pi) - a(c_1 - c_0)}{n} \sin\left(\frac{n\pi(r-a)}{b-a}\right) \exp\left(-\frac{D t n^2 \pi^2}{(b-a)^2}\right) \right]$$

(όπου  $r=a$  και  $r=b$  η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα της σφαίρας αντίστοιχα,  $c_0$  η αρχική συγκέντρωση στο ενδιάμεσο των δύο ακτινών  $a < x < b$ )



**Σχήμα 2.2.12:**  $c(x,0) = 0.01$ ,  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.001$  (gr/cm<sup>3</sup>),  $r = a = 0.03$  cm ενώ  $r = b = 0.05$  cm και χρόνος  $t = 1, 50$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec)

13. Κυλινδρικό δοχείο (με συγκεντρώσεις  $c_1 \neq c_2$ ) [σχέση 5.62]

Αρχική Συνθήκη:  $c(x,0) = c_0$ ,  $a < x < b$

Οριακές Συνθήκες:  $c(a,t) = c_1$ ,  $c(b,t) = c_2$  και  $c_1 \neq c_2$

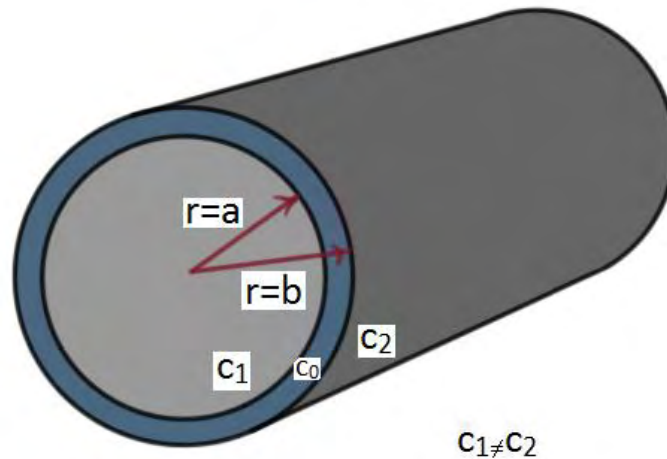
Λύση:

$$c(x,t) = \frac{C_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + C_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_0(a\alpha_n)U_0(r\alpha_n)\exp(-D\alpha_n^2 t)}{J_0(a\alpha_n) + J_0(b\alpha_n)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{[C_2 J_0(a\alpha_n) - C_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n) U_0(r\alpha_n) \exp(-D\alpha_n^2 t)}{J_0^2(a\alpha_n) + J_0^2(b\alpha_n)} \right] \right]$$

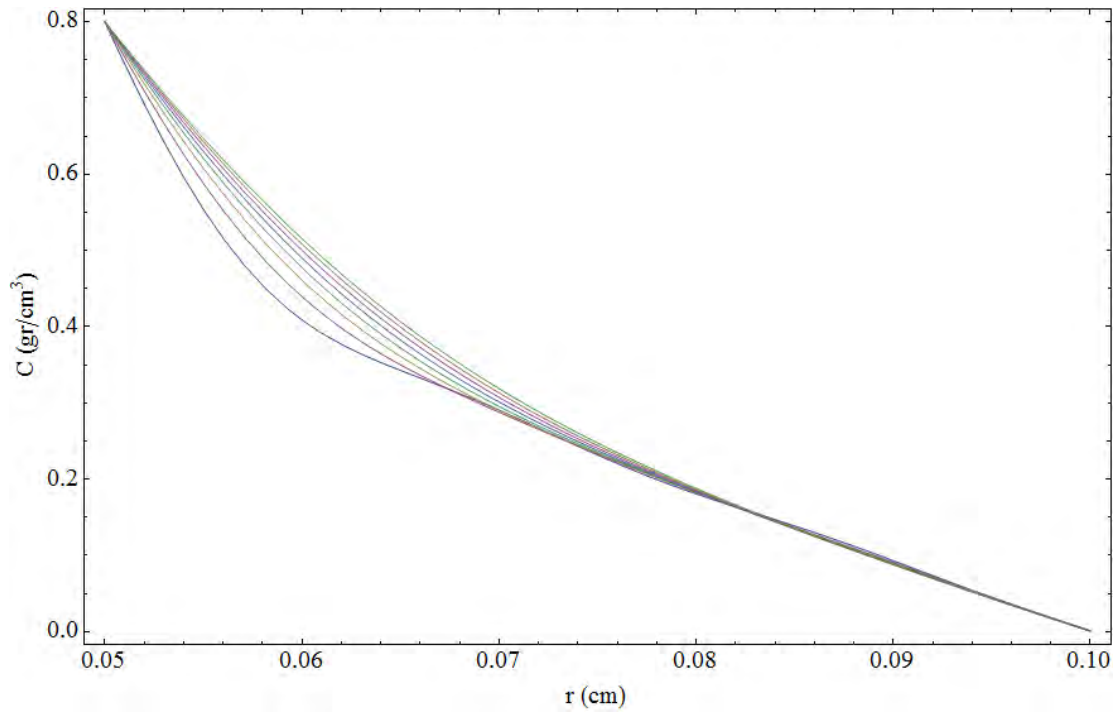
όπου  $U_0(r\alpha_n) = J_0(r\alpha_n)Y_0(b\alpha_n) - J_0(b\alpha_n)Y_0(r\alpha_n)$

και  $\alpha_n$ s αποτελούν λύσεις της  $U_0(a\alpha_n) = 0$ . Τα  $J_0$  και  $Y_0$  είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα και μηδενικής τάξης.

(όπου  $r=a$  και  $r=b$  η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του κυλίνδρου αντίστοιχα,  $c_0$  η αρχική συγκέντρωση στο ενδιάμεσο των δύο ακτινών  $a < x < b$ )



Σχήμα 2.2.13α: Μοντέλο κυλινδρικού δοχείου



**Σχήμα 2.2.13β:**  $c(x,0) = 0.01$ ,  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.001$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ), με λόγο  $\frac{b}{a} = 2$ , δηλαδή  $r = a = b/2 = 0.05$  cm ενώ  $r = b = 0.1$  cm και χρόνος  $t = 5, 40$  sec με βήμα 5 sec (χαμηλότερη καμπύλη 5 sec)



## Γ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε μελέτη των επιδράσεων των διαφόρων παραμέτρων σε δύο λύσεις. Αρχικά στο μοντέλο συγκολλήσεων σε ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους και έπειτα στο μοντέλο διάχυσης σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L (ενανθράκωση - απανθράκωση).

### 1. Επιδράσεις παραμέτρων στις συγκολλήσεις σε ημιάπειρο έλασμα μεγάλου πάχους

#### 1.1 Αλλαγή υλικού

Με το πρόγραμμα του πρώτου μοντέλου συγκολλήσεων εξετάστηκε η συμπεριφορά των τριών υλικών του παρακάτω πίνακα:

**Πίνακας Γ1** Φυσικές ιδιότητες των υλικών

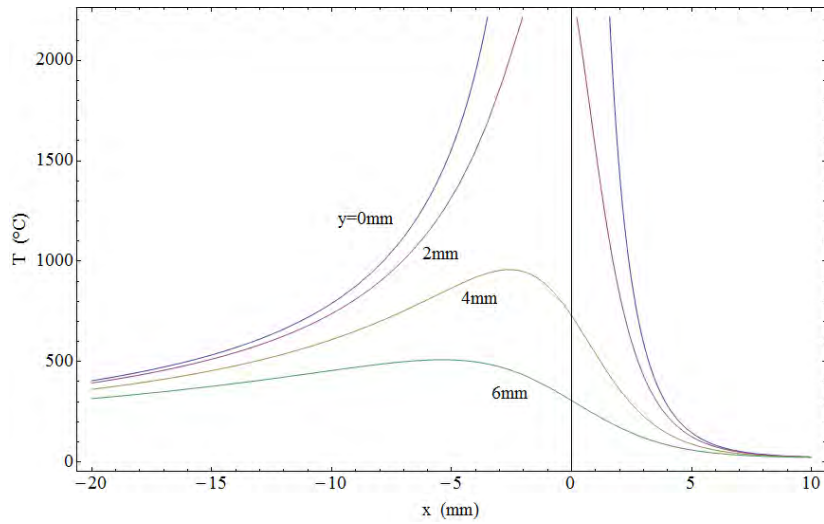
Υλικό	$\alpha$	$\lambda$	$\rho c$	$T_m$	$H_m-H_0$
Χάλυβας st37 (carbon steel)	8	0,04	0,005	1520	7,5
Ανοξείδωτος χάλυβας (stainless steel)	4	0,02	0,005	1500	7,4
Κράμα αλουμινίου (AlMgSi)	62	0,167	0,0027	652	1,71

[όπου  $\alpha$  ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ ) θερμοδιαχυτότητα,  $\lambda$  ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) θερμική αγωγιμότητα,  $\rho c$  ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) θερμοχωρητικότητα,  $T_m$  ( $^\circ\text{C}$ ) θερμοκρασία τήξης και  $H_m-H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) διαφορά ενθαλπίας]

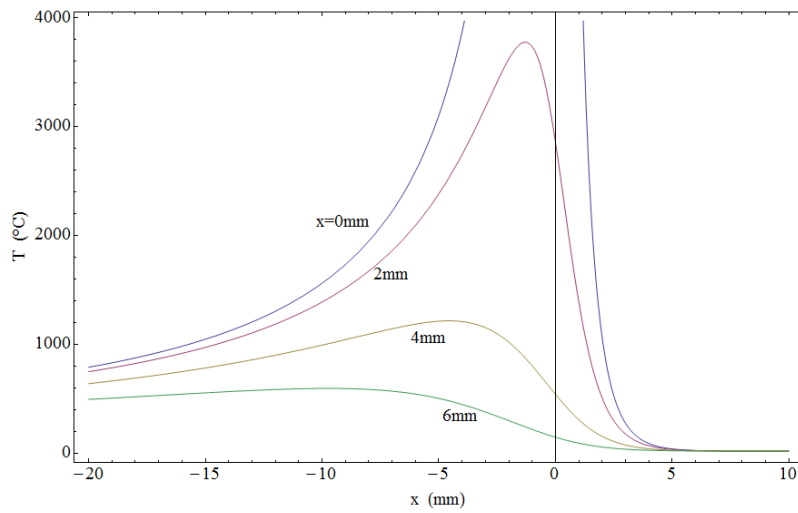
υπό τις παρακάτω συνθήκες

**Πίνακας Γ2** Συνθήκες συγκόλλησης των τριών υλικών

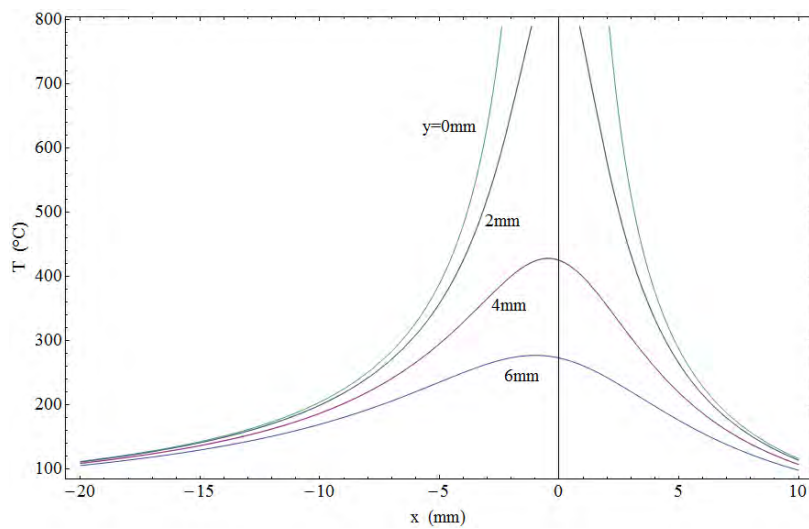
μέθοδος	$\eta$	I (A)	V (V)	u (m/s)
SMAW	0,8	110	22	4



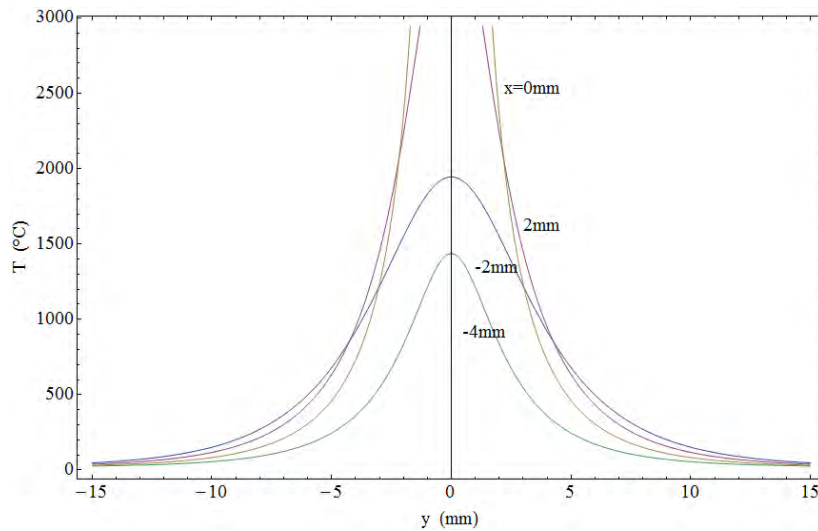
**Σχήμα 1.1.1:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-x για χάλυβα st37



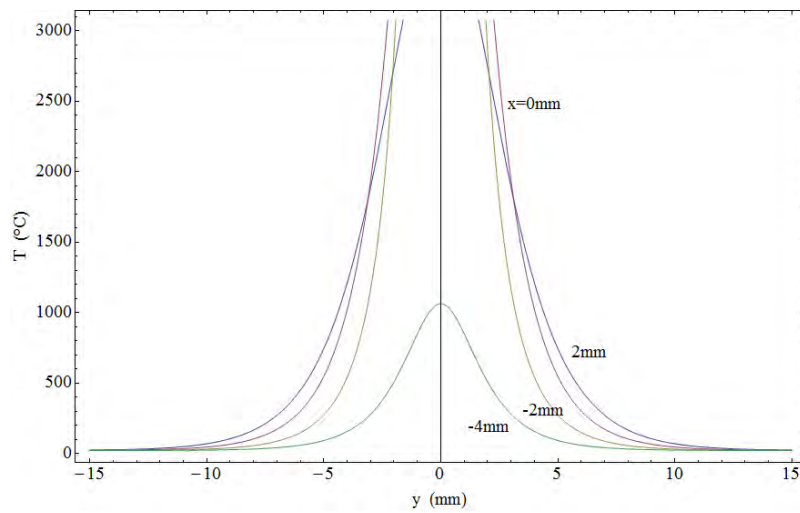
**Σχήμα 1.1.2:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-x για ανοξείδωτο χάλυβα



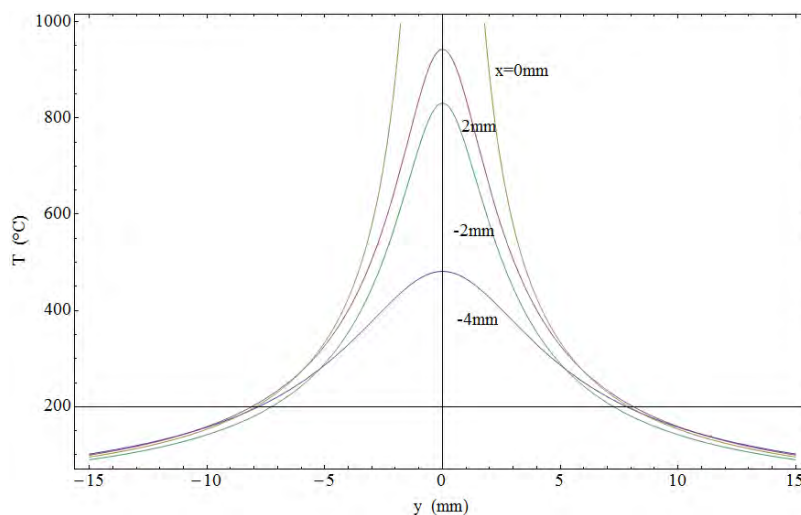
**Σχήμα 1.1.3:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-x για κράμα αλουμινίου AlMgSi



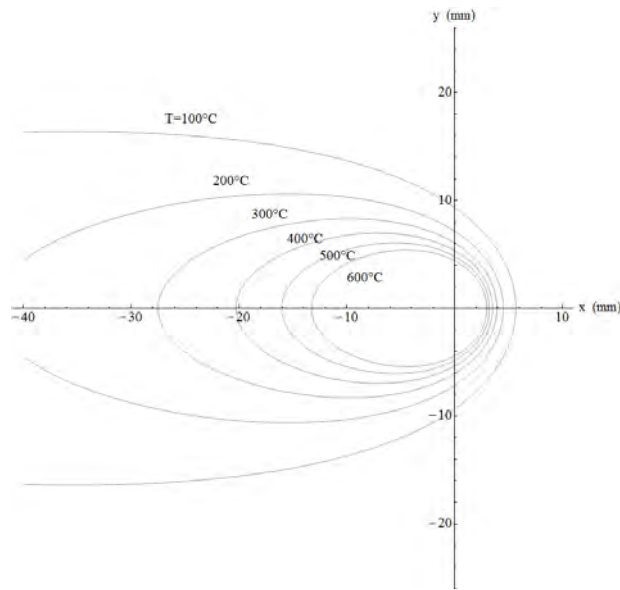
**Σχήμα 1.1.4:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-y για χάλυβα st37



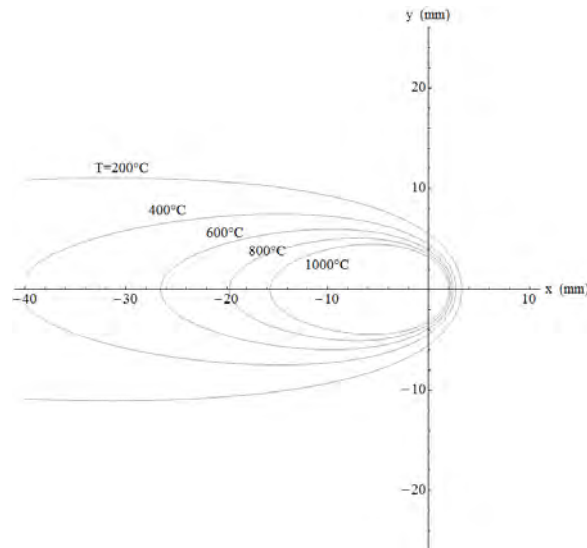
**Σχήμα 1.1.5:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-y για ανοξείδωτο χάλυβα



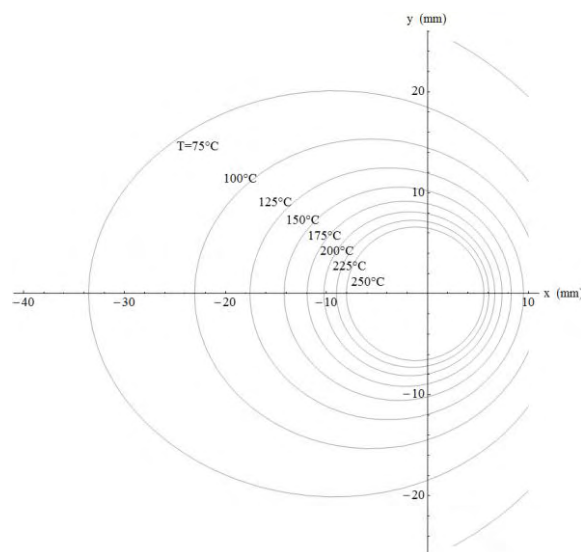
**Σχήμα 1.1.6:** Θερμοκρασιακή κατανομή T-y για κράμα αλουμινίου AlMgSi



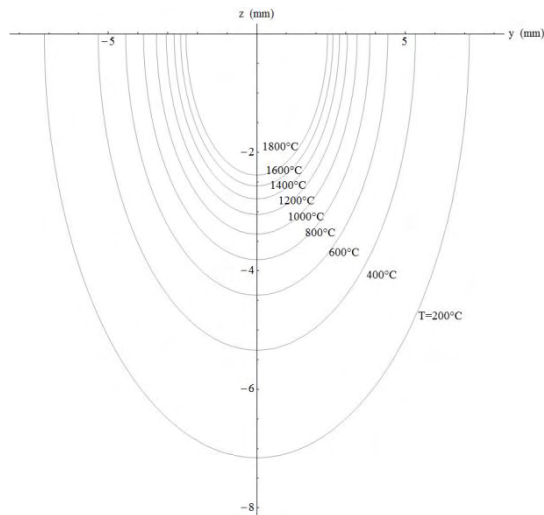
**Σχήμα 1.1.7:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $x$ - $y$  ( $z=0$ ) για χάλυβα st37



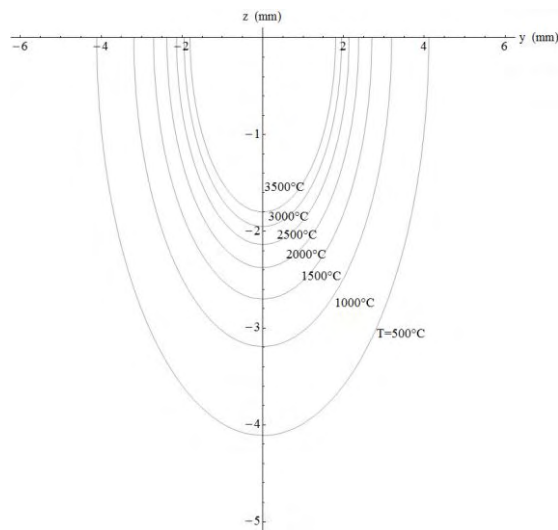
**Σχήμα 1.1.8:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $x$ - $y$  ( $z=0$ ) για ανοξείδωτο χάλυβα



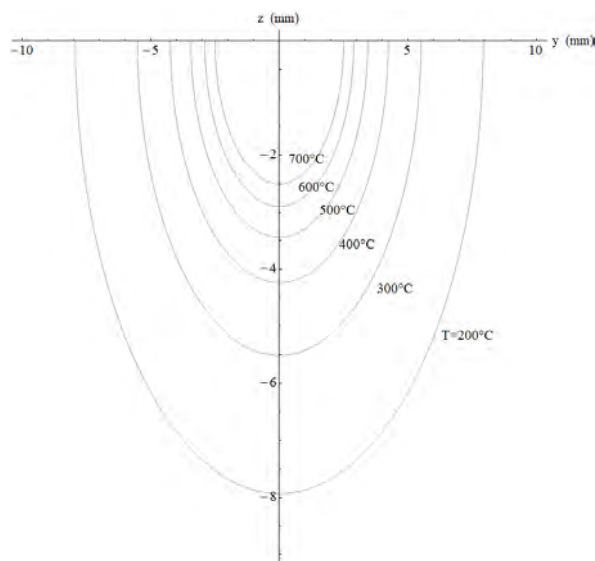
**Σχήμα 1.1.9:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $x$ - $y$  ( $z=0$ ) για κράμα αλουμινίου AlMgSi



**Σχήμα 1.1.10:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $\gamma$ - $z$  ( $x=0$ ) για χάλυβα st37



**Σχήμα 1.1.11:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $\gamma$ - $z$  ( $x=0$ ) για ανοξείδωτο χάλυβα



**Σχήμα 1.1.12:** Ισόθερμες καμπύλες στο επίπεδο  $\gamma$ - $z$  ( $x=0$ ) για κράμα αλουμινίου AlMgSi

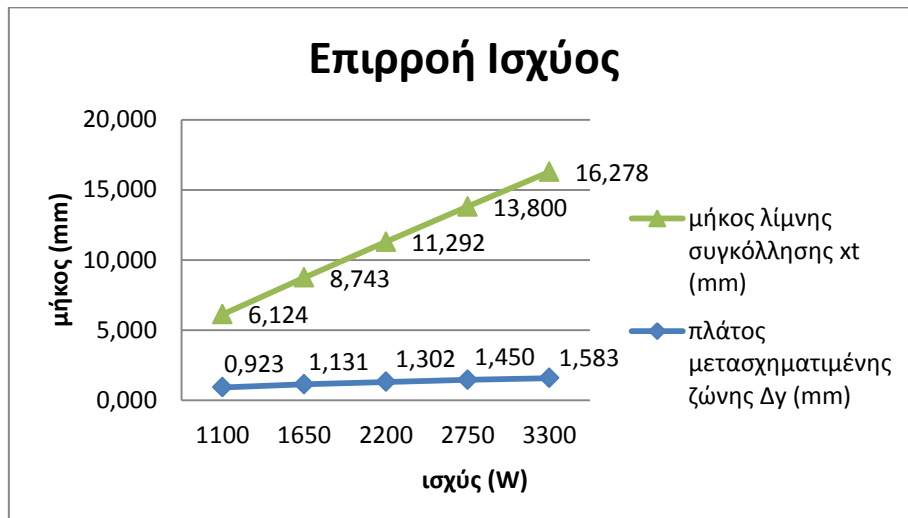
## 1.2 Αλλαγή συνθηκών για συγκεκριμένο υλικό

Σε χαμηλά κραματωμένο χάλυβα κρατήθηκαν σταθερές οι λειτουργικές συνθήκες και διαφοροποιώντας έναν παράγοντα κάθε φορά, εξετάστηκε η επίδραση που έχει σε κάθε ένα από τα αποτελέσματα του προγράμματος. Συγκεκριμένα στο μήκος της λίμνης συγκόλλησης, στο πλάτος της μετασχηματισμένης ζώνης, στην εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής, στον όγκο της λίμνης συγκόλλησης, στο χρόνο ψύξης στο θερμικό κύκλο  $T=800-500^{\circ}\text{C}$  και στο ρυθμό ψύξης του υλικού. Οι συνθήκες φαίνονται στον πίνακα Γ3. Σε κάθε περίπτωση κρατούνται όλες οι συνθήκες σταθερές εκτός από μία.

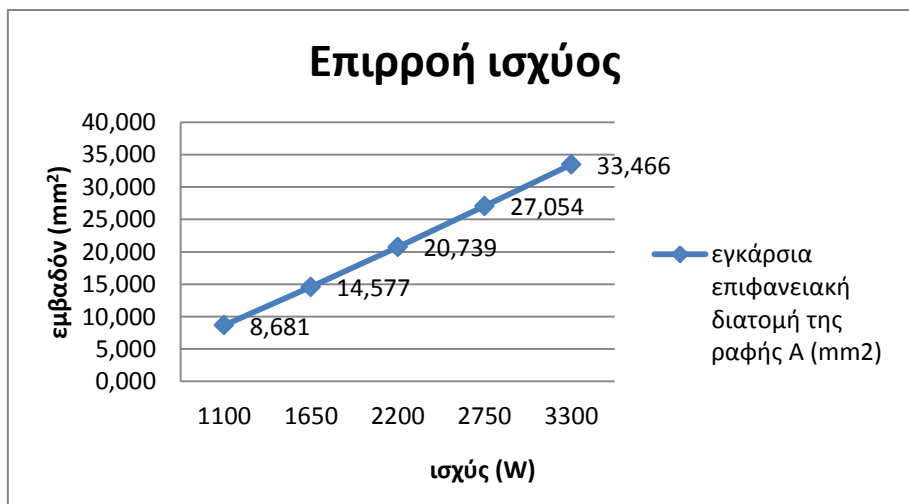
**Πίνακας Γ3** Συνθήκες για συγκόλληση GTAW σε χαμηλά κραματωμένο χάλυβα

$\eta$	I (A)	V (V)	u (m/s)	$T_0$ ( $^{\circ}\text{C}$ )
0,5	110	22	4	20

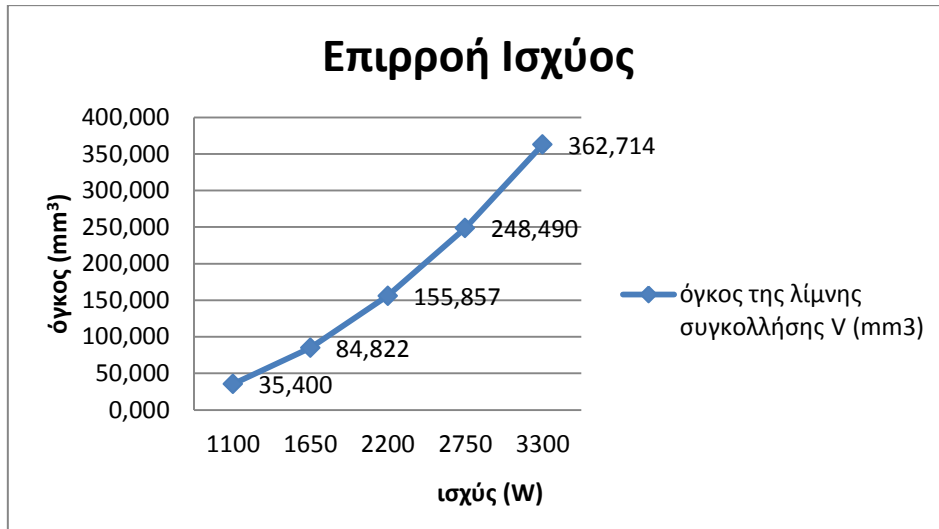
a. αύξηση ισχύος (συγκεκριμένα λόγω της αλλαγής της έντασης ρεύματος)



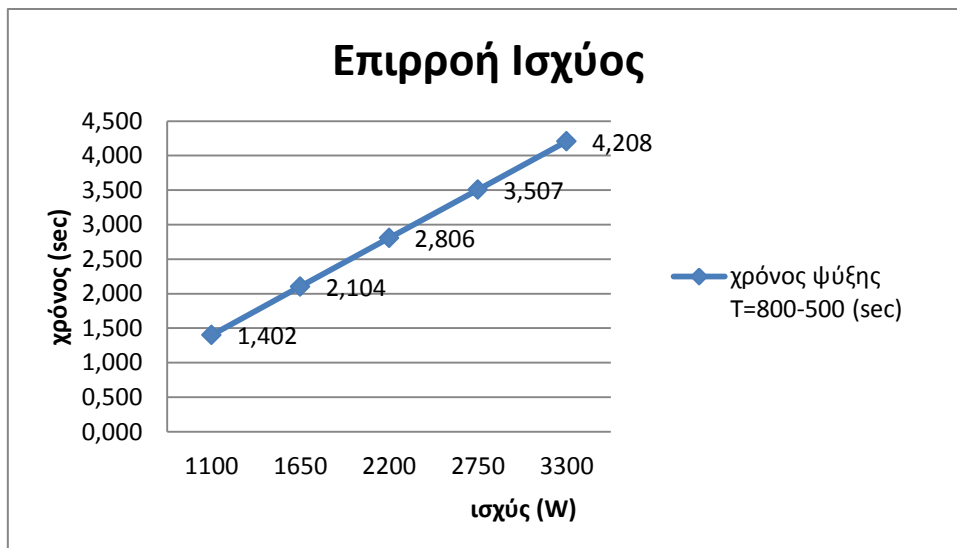
**Σχήμα 1.2.1:** Σχέση ισχύος – μήκους λίμνης συγκόλλησης και πλάτος μετασχηματισμένης ζώνης



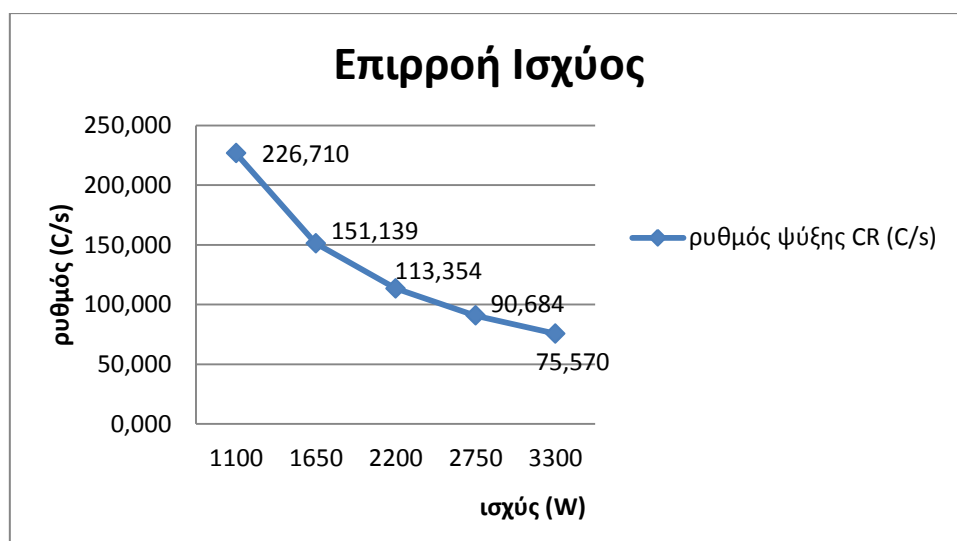
**Σχήμα 1.2.2:** Σχέση ισχύος – εγκάρσιας επιφανειακής διατομής της ραφής



**Σχήμα 1.2.3:** Σχέση ισχύος – όγκου λίμνης συγκόλλησης

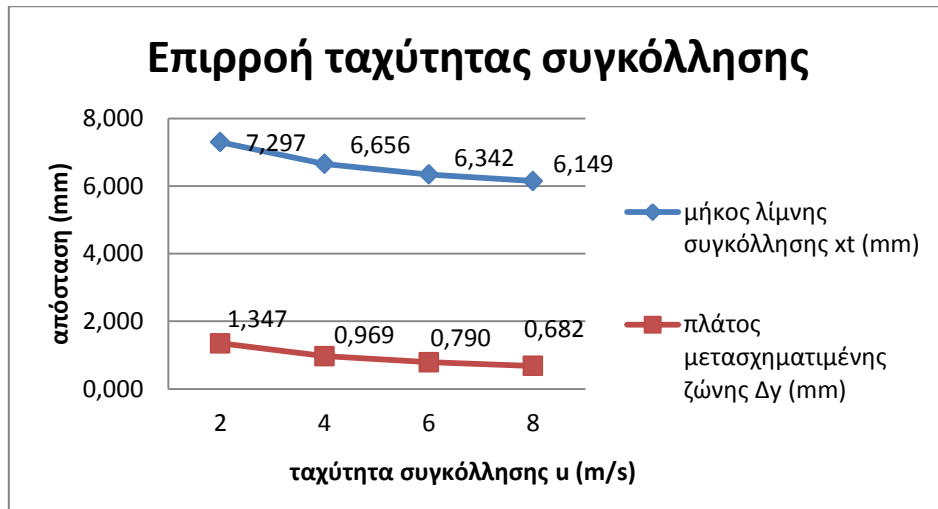


**Σχήμα 1.2.4:** Σχέση ισχύος – χρόνου ψύξης θερμικού κύκλου T=800-500 °C

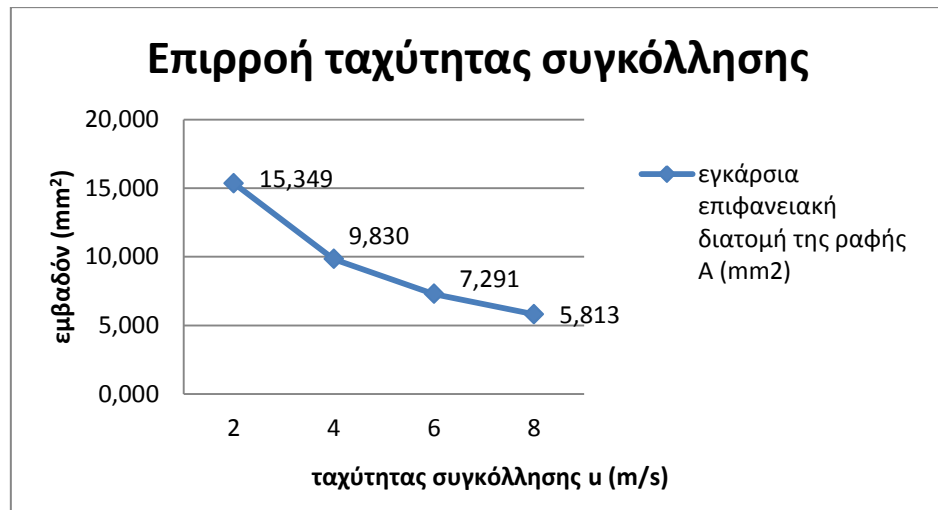


**Σχήμα 1.2.5:** Σχέση ισχύος – ρυθμού ψύξης

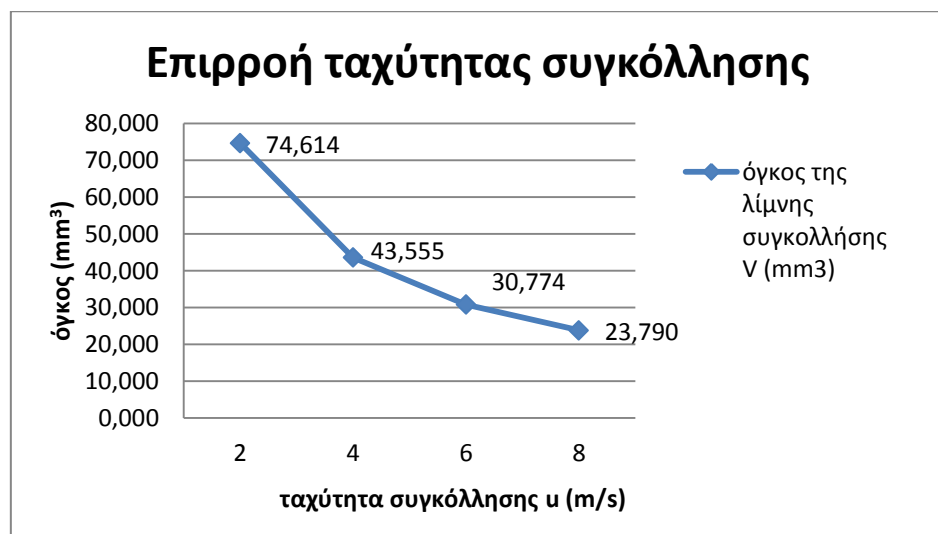
b. αύξηση ταχύτητας συγκόλλησης



**Σχήμα 1.2.6** Σχέση ταχύτητας τόξου – μήκους λίμνης συγκόλλησης και πλάτος μετασχηματισμένης ζώνης

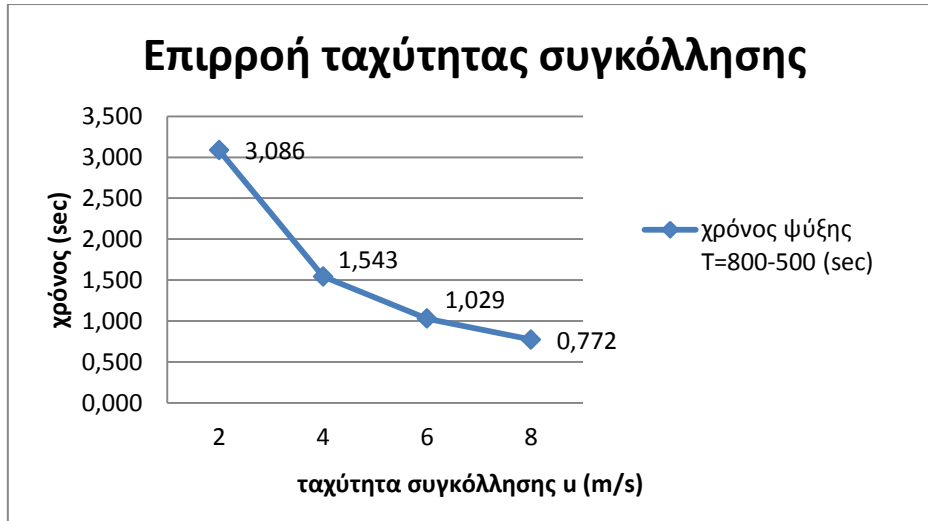


**Σχήμα 1.2.7** Σχέση ταχύτητας τόξου – εγκάρσιας επιφανειακής διατομής της ραφής

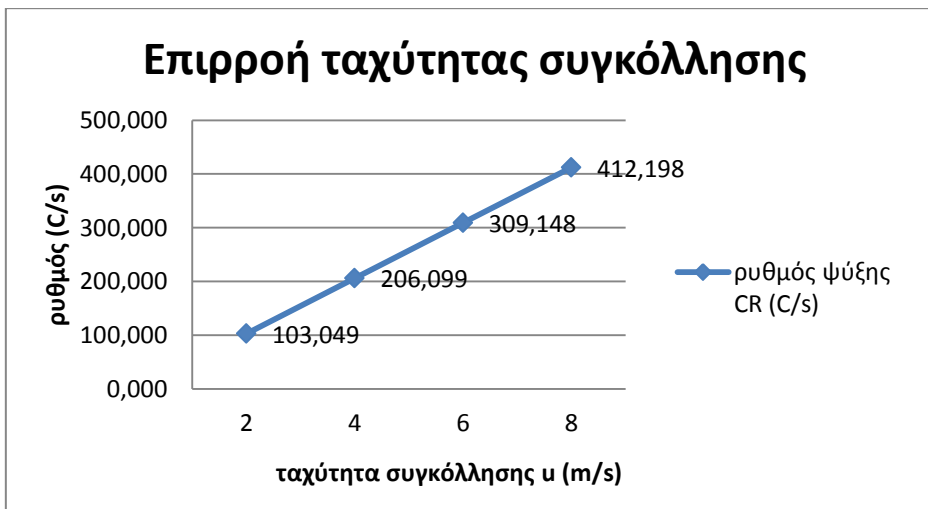


**Σχήμα 1.2.8** Σχέση ταχύτητας τόξου – όγκου λίμνης συγκόλλησης



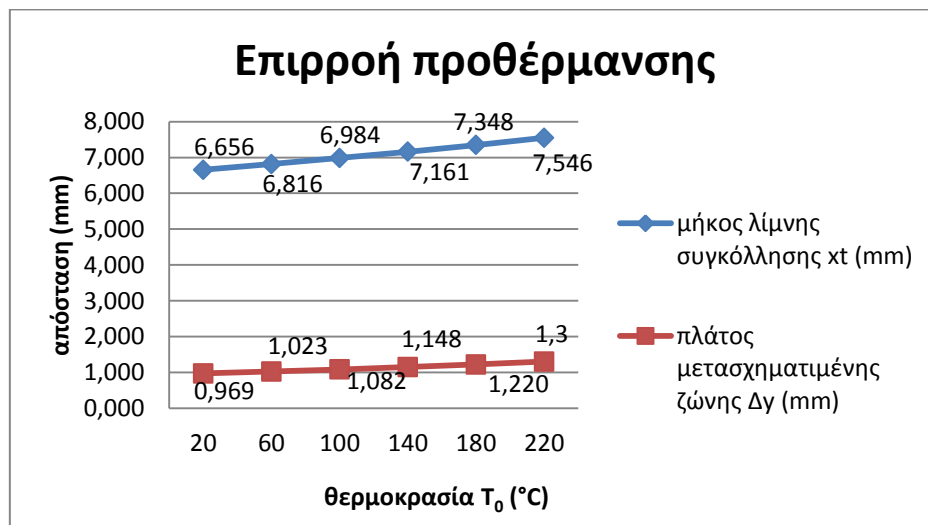


Σχήμα 1.2.9 Σχέση ταχύτητας τόξου – χρόνου ψύξης θερμικού κύκλου  $T=800-500$  °C

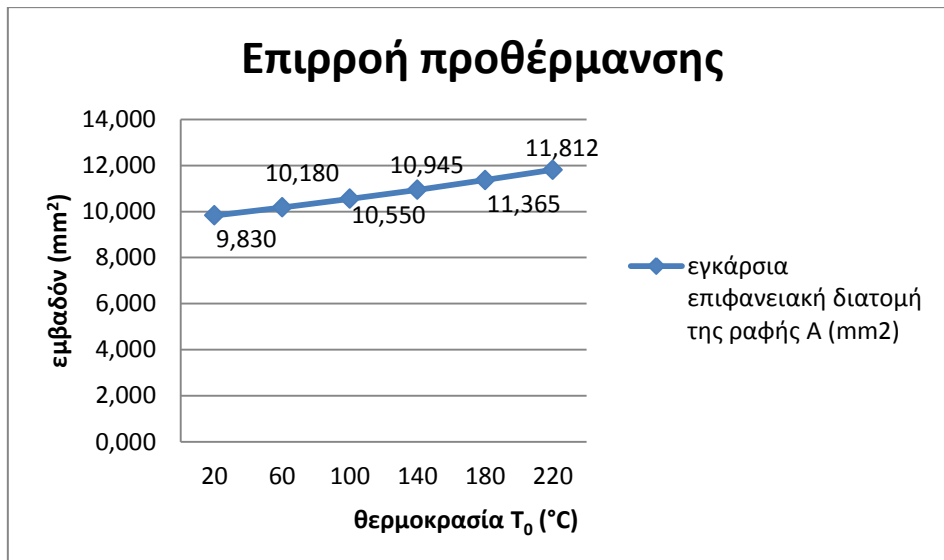


Σχήμα 1.2.10 Σχέση ταχύτητας τόξου – ρυθμού ψύξης

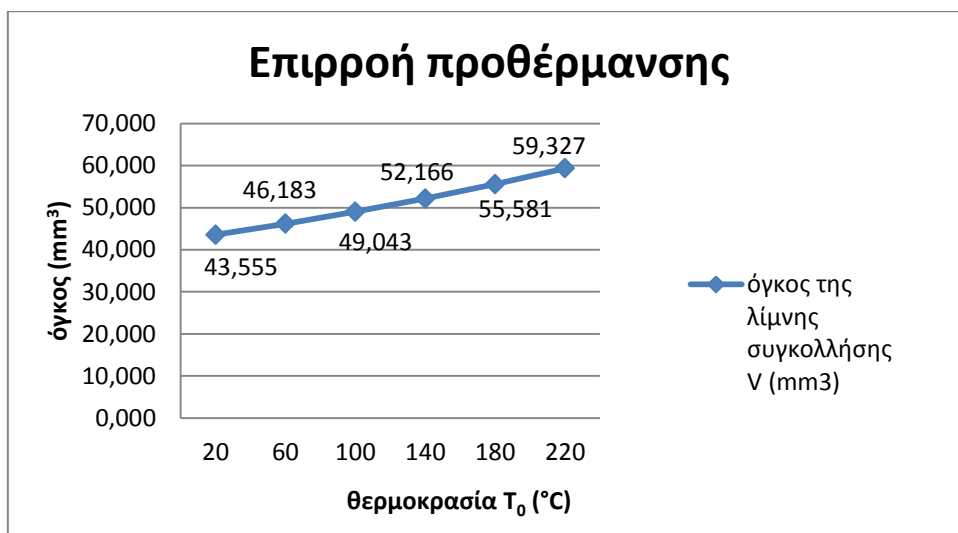
c. Αύξηση θερμοκρασίας ανά 40 βαθμούς (προθέρμανση)



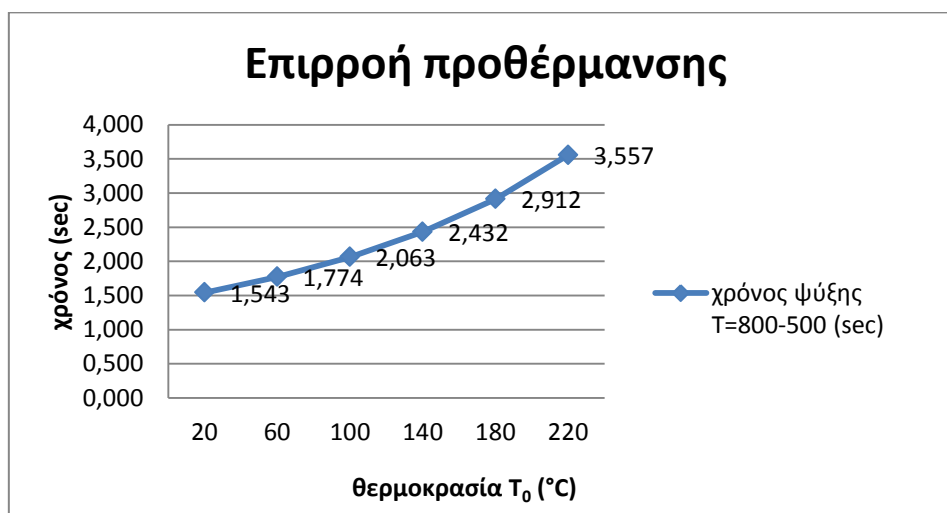
Σχήμα 1.2.11 Σχέση προθέρμανσης – μήκους λίμνης συγκόλλησης και πλάτος μετασηματισμένης ζώνης



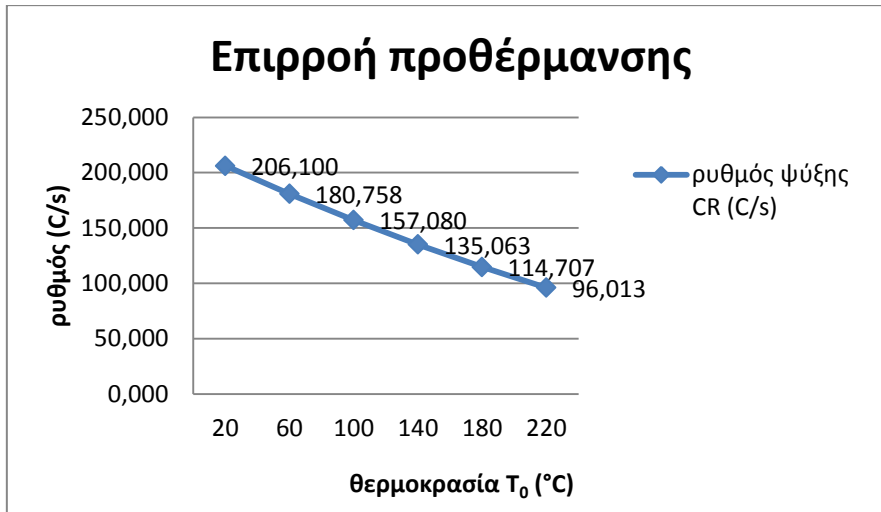
Σχήμα 1.2.12 Σχέση προθέρμανσης – εγκάρσιας επιφανειακής διατομής της ραφής



Σχήμα 1.2.13 Σχέση προθέρμανσης – όγκου λίμνης συγκόλλησης

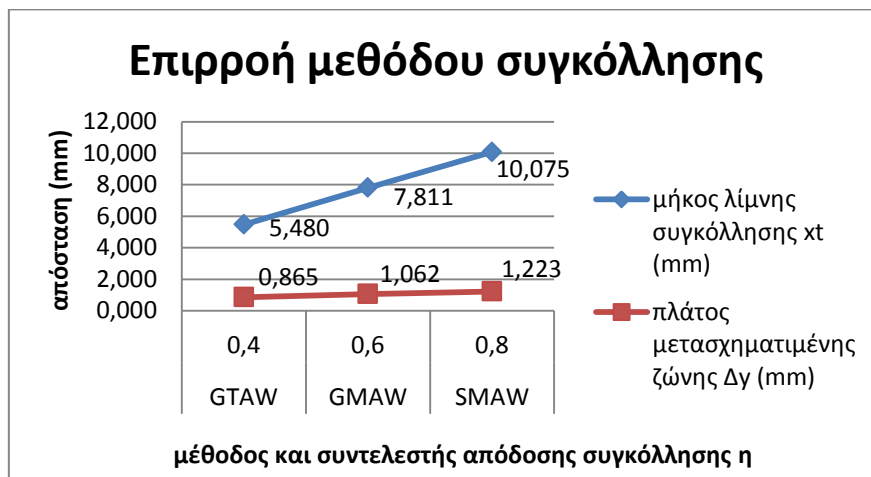


Σχήμα 1.2.14 Σχέση προθέρμανσης – χρόνου ψύξης θερμικού κύκλου T=800-500 °C

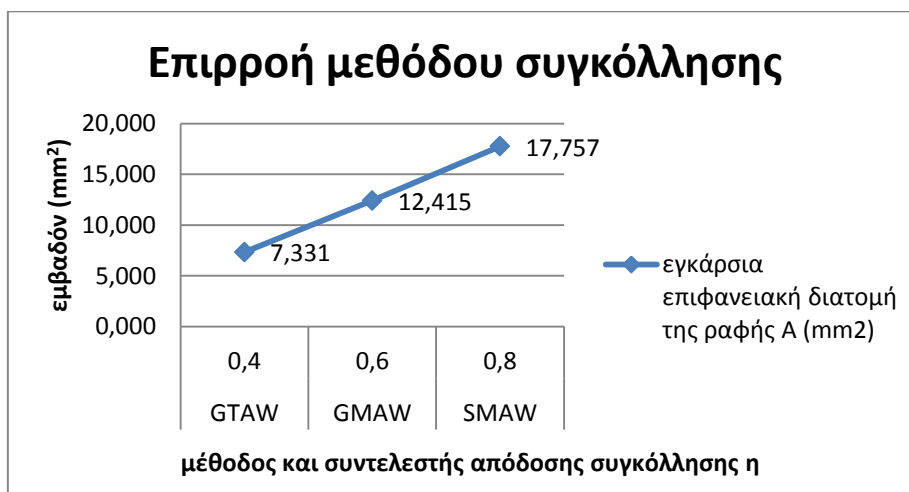


Σχήμα 1.2.15 Σχέση προθέρμανσης – ρυθμού ψύξης

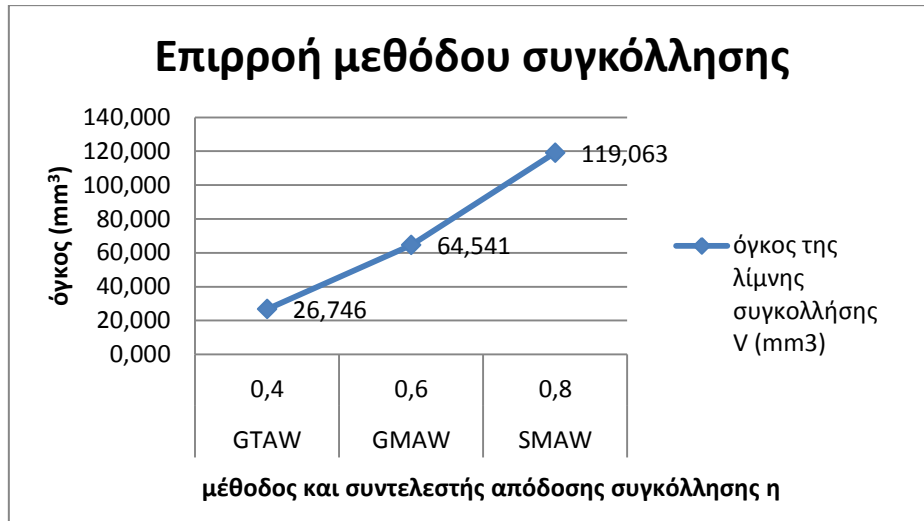
d. αλλαγή μεθόδου συγκόλλησης



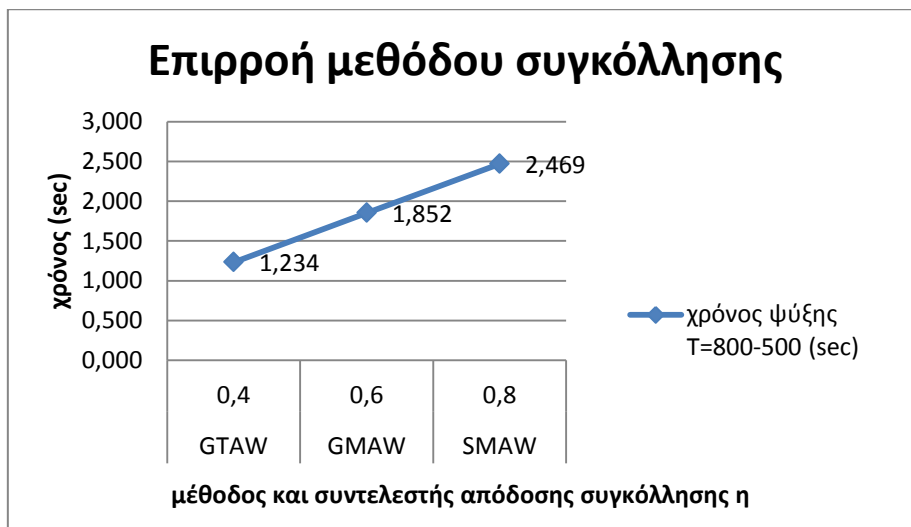
Σχήμα 1.2.16 Σχέση μεθόδου συγκόλλησης – μήκους λίμνης συγκόλλησης και πλάτος μετασχηματισμένης ζώνης



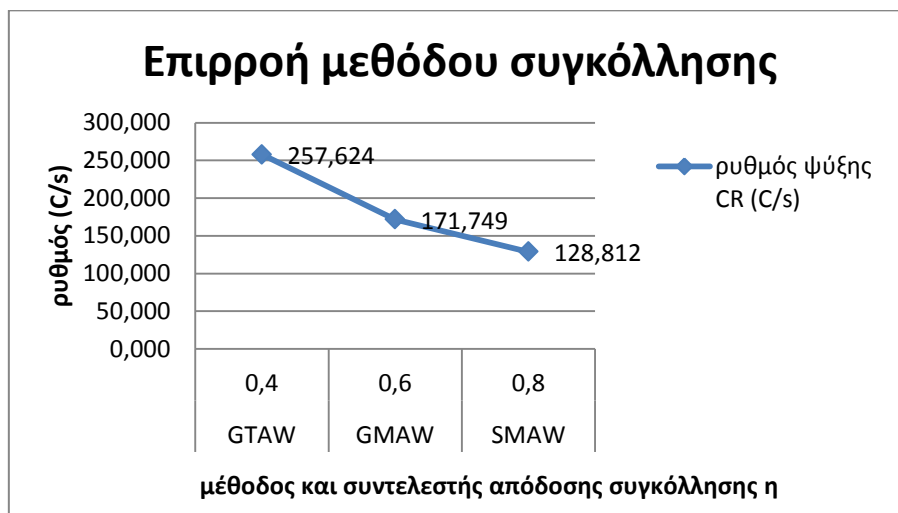
Σχήμα 1.2.17 Σχέση μεθόδου συγκόλλησης – εγκάρσιας επιφανειακής διατομής της ραφής



**Σχήμα 1.2.18** Σχέση μεθόδου συγκόλλησης – όγκου λίμνης συγκόλλησης



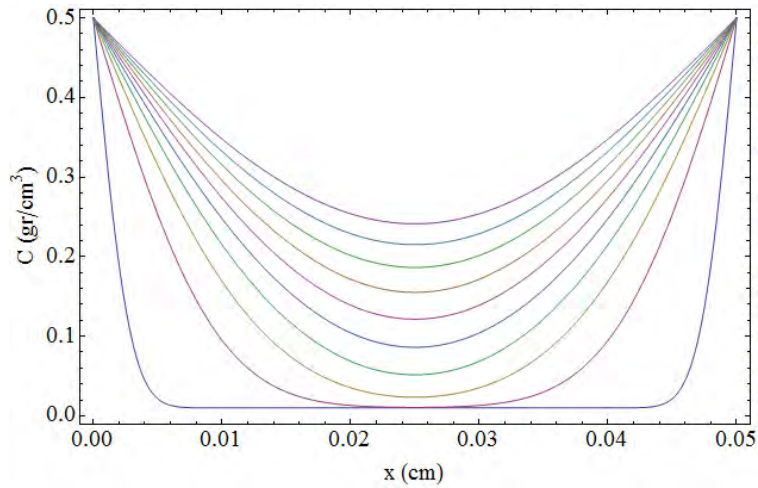
**Σχήμα 1.2.19** Σχέση μεθόδου συγκόλλησης – χρόνου ψύξης θερμικού κύκλου T=800-500 °C



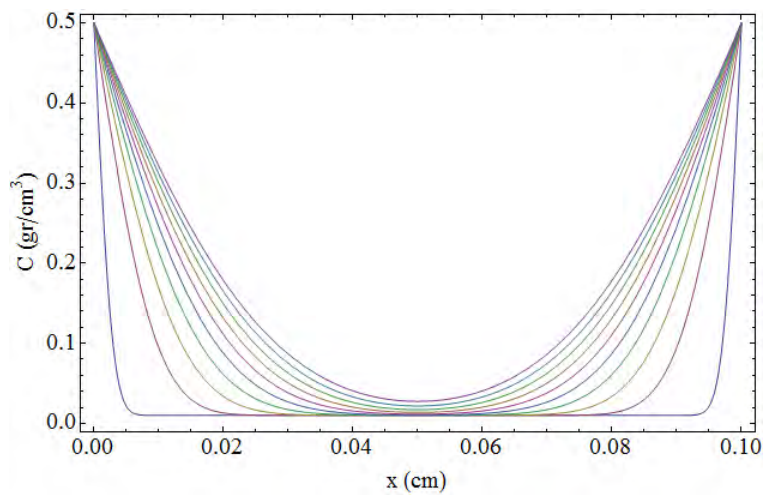
**Σχήμα 1.2.20** Σχέση μεθόδου συγκόλλησης – ρυθμού ψύξης

## 2. Επίδρασεις παραμέτρων στη διάχυση σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L

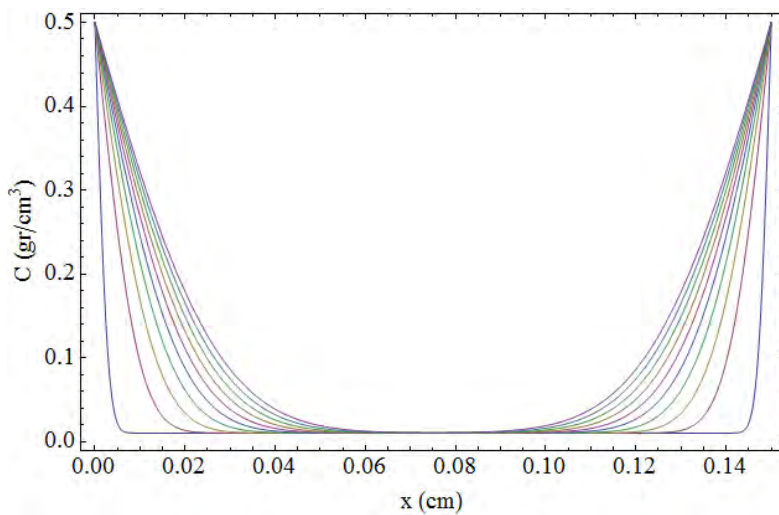
### 2.1 Αλλαγή πάχους πλάκας



Σχήμα 2.1.1 για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0,01$ ,  $c_s=0,5$  ( $\text{gr/cm}^3$ )

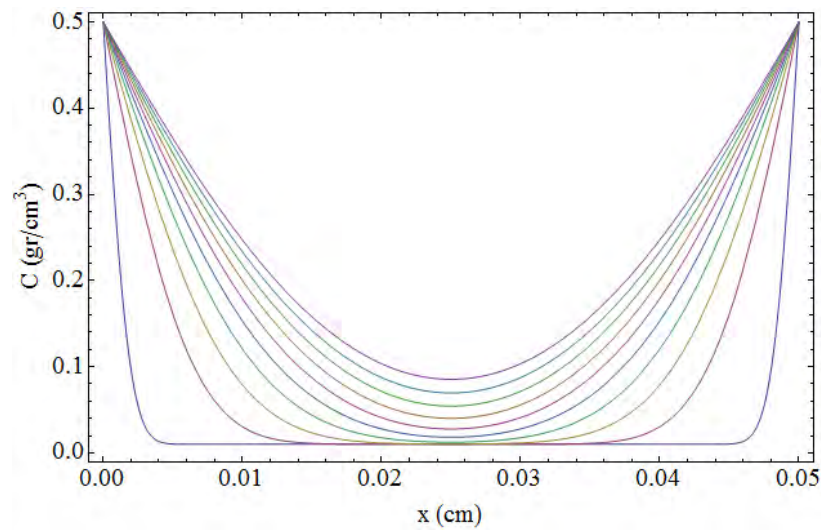


Σχήμα 2.1.2 για συνθήκες  $L=0,1$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0,01$ ,  $c_s=0,5$  ( $\text{gr/cm}^3$ )

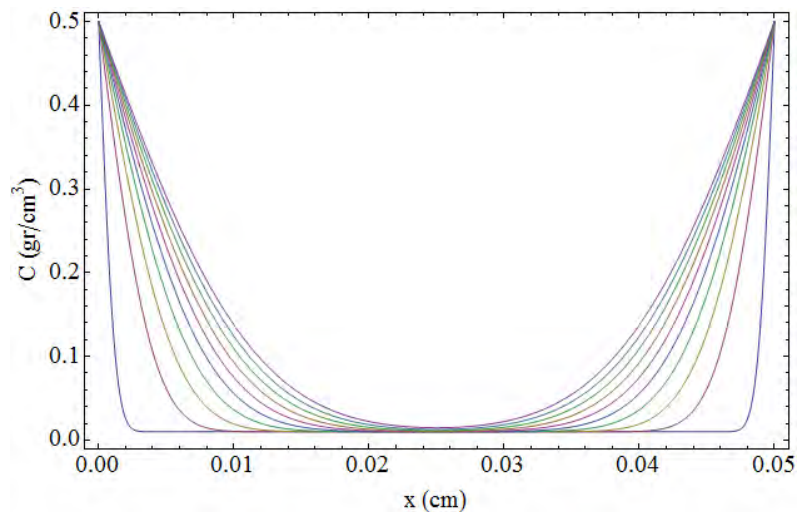


Σχήμα 2.1.3 για συνθήκες  $L=0,15$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0,01$ ,  $c_s=0,5$  ( $\text{gr/cm}^3$ )

## 2.2 Αλλαγή θερμοκρασίας

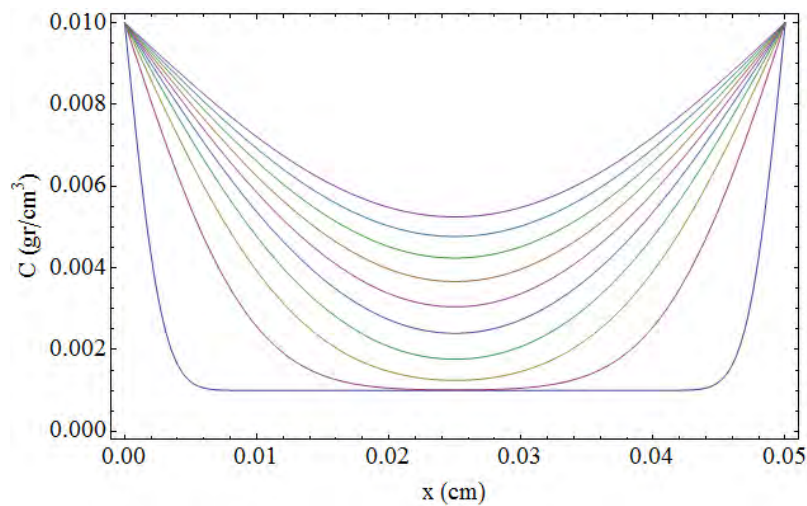


**Σχήμα 2.1.4** για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1373,15$  K,  $c_0=0,01$ ,  $c_s=0,5$  (gr/cm<sup>3</sup>)

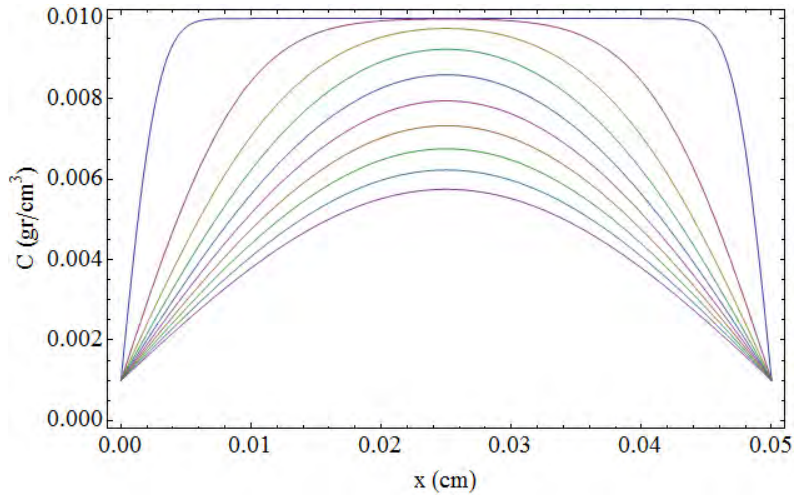


**Σχήμα 2.1.5** για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1273,15$  K,  $c_0=0,01$ ,  $c_s=0,5$  (gr/cm<sup>3</sup>)

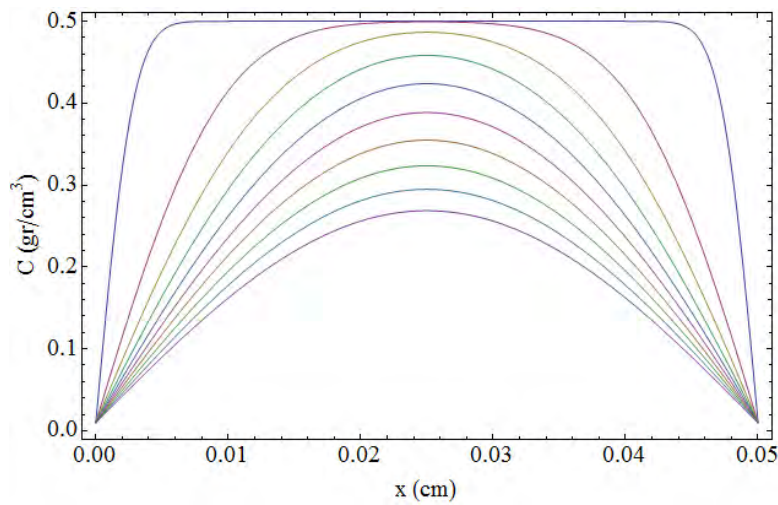
## 2.3 Αλλαγή συγκεντρώσεων



**Σχήμα 2.1.6** για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0,001 < c_s=0,01$  (gr/cm<sup>3</sup>)



**Σχήμα 2.1.7** για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0.01 > c_s=0.001$  ( $gr/cm^3$ )



**Σχήμα 2.1.8** για συνθήκες  $L=0,05$  cm,  $T=1473,15$  K,  $c_0=0.5 > c_s=0.01$  ( $gr/cm^3$ )

Οι πρώτες έξι περιπτώσεις είναι παραδείγματα ενανθράκωσης ενώ οι τελευταίες δύο παραδείγματα απανθράκωσης. Ο χρόνος ήταν  $t=1, 100$  sec με βήμα 10 sec (χαμηλότερη καμπύλη 1 sec για τις περιπτώσεις ενανθράκωσης και αντίστοιχα ψηλότερη για τις περιπτώσεις απανθράκωσης).



### 3. Γενικά συμπεράσματα

Με τη βιβλιοθήκη λύσεων που παράχθηκε ολοκληρώθηκε το κεφάλαιο των συγκολλήσεων (πλέον και με κινούμενες πηγές θερμότητας) και καλύφθηκαν γενικά περιπτώσεις διάχυσης σε κράματα. Δημιουργήθηκε με αυτόν τον τρόπο ένα χρήσιμο εργαλείο για προσεγγιστική εκτίμηση των επιδράσεων των συνθηκών στις συγκολλήσεις και στη διάχυση παρεμβολής σε κράματα και παρουσιάστηκε μια γενική εικόνα για τον τρόπο που διαμορφώνονται οι θερμικές κατανομές τους. Αναπτύχθηκε επίσης μια σελίδα όπου παρουσιάζονται συνοπτικά τα προγράμματα για τις λύσεις των συγκολλήσεων και μια αντίστοιχα όπου παρατίθενται οι λύσεις για διάχυση.

Με την παραμετρική μελέτη των λύσεων για συγκολλήσεις σε ημιάπειρα ελάσματα μεγάλου πάχους (thick plate solutions) και για διάχυση σε πλάκα πεπερασμένου πάχους L (ενανθράκωση - απανθράκωση) προέκυψαν διάφορα σετ διαγραμμάτων από τα οποία εξάγονται τα παρακάτω γενικά αποτελέσματα.

Είναι προφανές ότι στις συγκολλήσεις η αλλαγή υλικού (και συγκεκριμένα η διαφορετική θερμοδιαχυτότητα) προκαλεί και διαφορετικές θερμικές κατανομές στο έλασμα. Όσο μεγαλύτερη θερμοδιαχυτότητα, δηλαδή όσο πιο γρήγορα διαχέεται η θερμότητα διαμέσου του υλικού, τόσο πιο ομοιόμορφες είναι οι ισόθερμες κατανομές (κράμα αλουμινίου σχήμα 1.1.9). Σε σχετικά μικρή θερμοδιαχυτότητα όπως στο χάλυβα st37 και πιο έντονα στον ανοξείδωτο χάλυβα οι ισόθερμες συγκεντρώνονται μπροστά και κοντά στο τόξο σχηματίζοντας έντονη ουρά κομήτη (σχήματα 1.1.7 και 1.1.8).

Στη μελέτη συγκόλλησης του χαμηλά κραματωμένου χάλυβα παρατηρείται ότι αυξάνοντας την ισχύ αυτό επιφέρει ανοδική τάση στο μήκος της λίμνης συγκόλλησης, στο πλάτος της μετασχηματισμένης ζώνης, στην εγκάρσια επιφανειακή διατομή της ραφής, στον όγκο της λίμνης συγκόλλησης και στο χρόνο ψύξης αλλά καθοδική πορεία στο ρυθμό ψύξης όπως θα ήταν αναμενόμενο (σχήματα 1.2.1-1.2.5). Αντίθετα η αύξηση της ταχύτητας συγκόλλησης προκαλεί μείωση σε όλα και αύξηση του ρυθμού ψύξης (σχήματα 1.2.6-1.2.10). Αντίστοιχα η αύξηση της αρχικής θερμοκρασίας (προθέρμανση) προκαλεί αυξητική τάση σε όλα τα πεδία προκαλώντας ταυτόχρονη μείωση μόνο στο ρυθμό ψύξης (σχήματα 1.2.11-1.2.15). Το ίδιο ακριβώς παρατηρείται όταν αλλάζει η μέθοδος συγκόλλησης (δηλαδή ο συντελεστής απόδοσης τόξου της συγκόλλησης), όπου ενώ όλα ακολουθούν αυξητική πορεία, μόνο ο ρυθμός ψύξης μειώνεται (σχήματα 1.2.16-1.2.20).. Γενικά είναι εμφανές ότι όποτε μειώνεται ο ρυθμός ψύξης λογικό είναι να αυξάνεται ο χρόνος ψύξης.

Στη διάχυση η αλλαγή του πάχους της πλάκας προκαλεί πιο αργή διάχυση της ουσίας από τη μια άκρη μέχρι την άλλη για τον ίδιο χρόνο, θερμοκρασία και συγκεντρώσεις (σχήματα 2.1.1-2.1.3). Αντίστοιχα η μείωση της θερμοκρασίας προκαλεί πιο αργή διάχυση μέσα στο υλικό για τον ίδιο χρόνο, πάχος πλάκας και συγκεντρώσεις (σχήματα 2.1.4 και 2.1.5). Τέλος η αλλαγή της συγκέντρωσης προκαλεί ενανθράκωση αν η αρχική συγκέντρωση είναι μικρότερη από την επιφανειακή, ενώ απανθράκωση στην αντίθετη περίπτωση -πάντα για ίδιο χρόνο, πάχος πλάκας και θερμοκρασία- (σχήματα 2.1.6-2.1.8).



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Μέρος Α (ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ)

- [1] ØYSTEIN GRONG, Metallurgical Modelling of Welding (SECOND EDITION), Norwegian University of Science and Technology, Department of Metallurgy, N-7034 Trondheim, Norway, 1997
- [2] ASM Metals Handbook Volume 06, Welding Brazing and Soldering, ASM International, United States of America, 1993
- [3] Γρηγόρης Ν. Χαϊδεμενόπουλος – Σημειώσεις μαθήματος «Εισαγωγή στις ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΕΙΣ», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας, Βόλος, 2008
- [4] Γρηγόρης Ν. Χαϊδεμενόπουλος – «Φυσική Μεταλλουργία – Θεμελιώδεις Αρχές», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας, Βόλος, 2000
- [5] [http://www.hera.org.nz/Category?Action=View&Category\\_id=513](http://www.hera.org.nz/Category?Action=View&Category_id=513)
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/Thermite\\_welding](http://en.wikipedia.org/wiki/Thermite_welding)
- [7] <http://www.weldprocedures.com/thermite.html>

### Μέρος Β (ΔΙΑΧΥΣΗ)

- [1] J. Crank – “The Mathematics of Diffusion”, Oxford Science Publications, second edition, 1975
- [2] Γρηγόρης Ν. Χαϊδεμενόπουλος – “Φυσική Μεταλλουργία”, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2007
- [3] Μάρκος Ι. Ασσαέλ & Κωνσταντίνος Ε. Κακοσίμος - “Μεταφορά Μάζας σε Περιβαλλοντικές Διεργασίες”
- [4] Ε. Κ. Παλούρα - “Διάχυση και οξείδωση”, 2008

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α - Συγκολλήσεις

Παρακάτω παρατίθενται οι κώδικες των λύσεων των αναλυτικών μοντέλων ακίνητων θερμικών πηγών και κινούμενων αντίστοιχα (συγκολλήσεις τόξου) αναπτυγμένες στο λογισμικό Mathematica:

### Ακίνητες Πηγές Θερμότητας

- a. Local Fusion in Arc Strikes (Έναυση Τόξου στο Βασικό Μέταλλο)
- b. Spot Welding (Σημειακές Συγκολλήσεις)
- c. Thermit Welding (Αλουμινοθερμικές Συγκολλήσεις)
- d. Friction Welding (Συγκολλήσεις Τριβής)

### Μοντέλα πραγματικών τιμών

1. Rosenthal thick plate solutions - Συγκολλήσεις ελασμάτων μεγάλου πάχους
2. Rosenthal thin plate solutions - Συγκολλήσεις λεπτών ελασμάτων
3. Rosenthal medium plate solutions - Συγκολλήσεις ελασμάτων πεπερασμένου πάχους

### Μοντέλα παραμετρικών λύσεων

- i. thick plate solutions (Συγκολλήσεις ελασμάτων μεγάλου πάχους)
- ii. thin plate solutions (Συγκολλήσεις λεπτών ελασμάτων )
- iii. medium plate solutions (Συγκολλήσεις ελασμάτων πεπερασμένου πάχους)
- iv. simplified solutions for fast moving high power source - thick plate (ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε ελάσματα μεγάλου πάχους)
- v. simplified solutions for fast moving high power source - thin plate (ταχεία κινούμενες πηγές υψηλής ενέργειας σε λεπτά ελάσματα)
- vi. assessment of bead morphology - fast moving power source behavior (Αραίωση-Διείσδυση)
- vii. assessment of bead morphology - thick plate behavior (Αραίωση-Διείσδυση)
- viii. preheating (Προθέρμανση)

Σε κάθε πρόγραμμα έχει χρησιμοποιηθεί ενδεικτικά ένα υλικό το οποίο μπορεί να εναλλαχθεί με κάποιο άλλο ανάλογα με τις ανάγκες των υπολογισμών, αφού εισαχθούν πρώτα στον κώδικα οι ιδιότητες του και οι συνθήκες λειτουργίας της συγκόλλησης.

Η γενική δομή του κώδικα έχει ως εξής: i) την εισαγωγή κάθε προγράμματος όπου παρουσιάζονται τα δεδομένα που απαιτούνται (input) και τα αποτελέσματα τα οποία επιστρέφει (output) το κάθε πρόγραμμα, ii) τα δεδομένα εισόδου και συνθήκες λειτουργίας της συγκόλλησης και iii) τέλος τα αποτελέσματα των λύσεων με κατακλείδα συνήθως τα διαγράμματα κατανομών (αδιάστατων και πραγματικών θερμοκρασιών – χρόνων).

# Instant Welding

## a) Local Fusion In Arc Strikes

[low alloy steel]

### i. Intro:

This program produces results for the model of arc strikes.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### **Input Data**

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Ar-Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Arc ignition time (sec)
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

#### **Output Data**

- a) a: thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- b) q: net arc power (J)
- c) Q: net heat input (J)
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]
- e)  $n_1$ : dimensionless operating parameter
- f)  $\Delta\tau$ : dimensionless cooling time  $\Delta\tau$
- g)  $\Delta\sigma_{1_m}$  and  $\Delta R_{1_m}$ : total width of fully transformed region [ $\theta_m=1$  when  $T=T_c$ ] (dimensionless and real)
- h) R: real distance values that appear in the diagram

#### **Diagrams**

- a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$
- b) dimensionless temperature-time pattern Logarithmic diagram with peak temperatures  $\theta_p$
- c) real temperature-time diagram  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) - t (sec)

### ii. Input Data:

**Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_c = 1520$$

$$1520$$

**Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_0 = 20$$

$$20$$

**$A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_{ac3} = 890$$

890

**$A_T$ -Temperature of aluminium (°C)**

$T_{at} = 275$

275

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]**

$H_1 = 7.5$

7.5

**Amperage (A)**

$I = 80$

80

**Voltage (V)**

$V = 35$

35

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$\lambda = 0.025$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$\rho c = 0.005$

0.005

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)**

$T_x = 800$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)**

$T_y = 500$

500

**Arc ignition time (sec)**

$t_i = 0.1$

0.1

**Efficiency Factor for welding process [table 2]**

$$\eta = 0.75$$

$$0.75$$

**iii. Returning Data**

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

$$5.$$

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

$$2100.$$

c) net heat input (J)

$$Q = q * t_i$$

$$210.$$

d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.52$$

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.32$$

$$\theta_{ar} = N \left[ \frac{(T_{ar} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.17$$

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.58$$

e) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_1 = \frac{q}{4 * (H_1) * (\pi * a)^{\frac{3}{2}} * t_i^{\frac{1}{2}}}$$

$$3.55564$$

—dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n1 = \frac{2 * Q}{\rho c * (T_c - T_0) * (4 * \pi * a * t_i)^{\frac{3}{2}}}$$

3.55564

f) dimensionless cooling time  $\Delta\tau$

$$\Delta\tau_1 = \left(\frac{n1}{\theta_y}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{n1}{\theta_x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

1.37687

—real cooling time  $\Delta t_{x/y}$  (sec)

$$\Delta t_{x/y} = t_i * \Delta\tau_1$$

0.137687

g) total width of fully transformed region ( $\theta_m=1$  when  $T=T_c$ )

$$\theta_m = N\left[\frac{(T_c - T_0)}{(T_c - T_0)}\right]$$

1.

$$\Delta\sigma_{1m} = \frac{1}{(2 * \epsilon / 3)^{\frac{1}{2}}} \left( \left(\frac{n1}{\theta_{ac3}}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{n1}{\theta_m}\right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

0.225746

—real width of fully transformed region (mm)

$$\Delta R_{1m} = \Delta\sigma_{1m} * \sqrt{4 * a * t_i}$$

0.319254

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Parametric Rosenthal equation [1-13]

$$\theta\theta[\tau_, \sigma_] := \frac{1}{(\tau)^{\frac{3}{2}}} * \epsilon^{\left(\frac{-(\sigma)^2}{\tau}\right)} * n1;$$

Calculating dimensionless temperature map for local fusion in arc strikes

```
g = \theta\theta[\tau, \sigma];
```

```
s = Table[g, {\sigma, 0, 2, 0.25}];
```

a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$

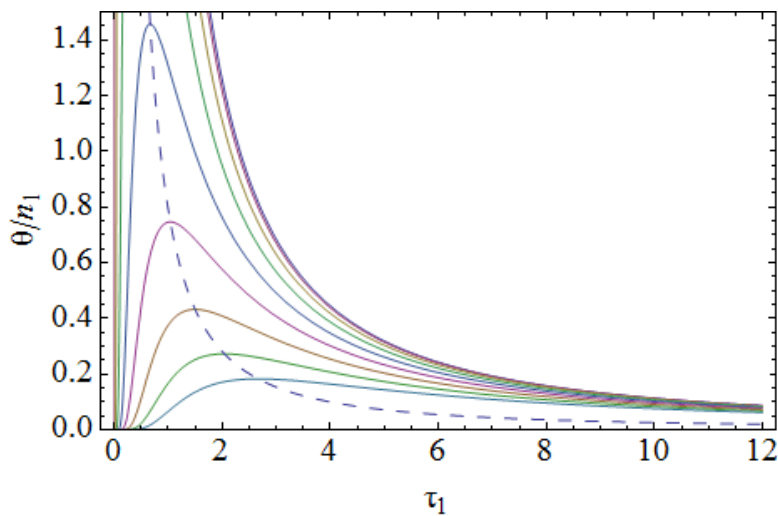
calculating temperature-time diagram

```
h1 = Plot[Evaluate[s, {τ, 0, 12}], PlotRange → {0, 1.5}, Frame → True, FrameLabel → {"τ1", "θ/n1"}];
```

calculating peak temperatures diagram  $\theta_p$

```
h2 = Plot[ $\frac{1}{(\tau * e)^{\frac{3}{2}}} * n1$ , {τ, 0, 12}, PlotRange → {0, 1.5},  
PlotStyle → {Dashing[{0.02}]}];
```

```
Show[h1, h2]
```

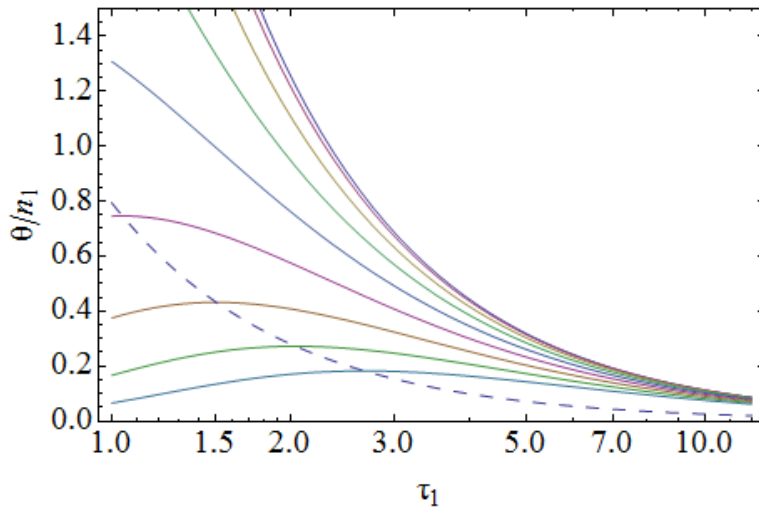


b) dimensionless temperature-time pattern Logarithmic diagram with peak temperatures  $\theta_p$

```
h3 = LogLinearPlot[Evaluate[s, {τ, 1, 12}], PlotRange → {0, 1.5}, Frame → True, FrameLabel → {"τ1", "θ/n1"}];
```

```
h4 = LogLinearPlot[ $\frac{1}{(\tau * e)^{\frac{3}{2}}} * n1$ , {τ, 1, 12}, PlotRange → {0, 1.5},  
PlotStyle → {Dashing[{0.02}]}];
```

```
Show[h3, h4]
```



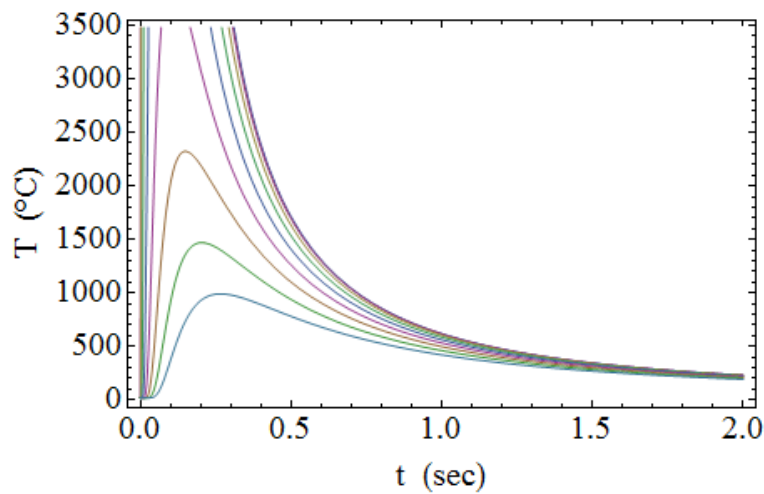
c) real temperature-time diagram  $T(^{\circ}\text{C}) - t(\text{sec})$

$$\tau = \frac{t}{t_i}$$

10.  $\tau$

$$T_d = T_0 + s \cdot n1 \cdot (T_c - T_0);$$

`hd = Plot[Evaluate[Td, {t, 0, 2}], Frame -> True, FrameLabel -> {"t (sec)", "T (^{\circ}C)"}]`



h) real distance values (R) that appear in the diagram:

$$RR[\sigma] := \sqrt{\sigma^2 * 4 * a * t_i}$$

`ss = RR[ $\sigma$ ]`

$$1.41421 \sqrt{\sigma^2}$$

`R = Table[ss, { $\sigma$ , 0, 2, 0.25}]`

`{0., 0.353553, 0.707107, 1.06066,  
1.41421, 1.76777, 2.12132, 2.47487, 2.82843}`



# Spot Welding

[low alloy steel]

## i. Intro:

This program produces results for the model of spot welding.

By inserting the following parameters (**red input**) it returns (**purple output**):

### **Input Data**

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Ms-Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Thickness of joint [total sum of plates] (mm)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Arc ignition time (sec)
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

### **Output Data**

- a) a: thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- b) q: net arc power (J)
- c) Q: net heat input (J)
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling and Ms temperatures respectively]
- e)  $n_2$ : dimensionless operating parameter
- f)  $\Delta t$ : dimensionless cooling time
- g) CR: cooling rate for centre line of welding ( $\sigma_2=0$ ) at Ms temperature ( $T_s$ )
- h)  $\sigma_{2m}$ : dimensionless radius vector at isothermal zone edge
- i)  $T_p$ : peak temperature
- j) r: real distance values that appear in the diagram

### **Diagrams**

- a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$
- b) dimensionless temperature-time pattern Logarithmic diagram with peak temperatures  $\theta_p$
- c) real temperature-time diagram  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $t$  (sec)
- CR (cooling rate)
- $T_p$  (peak temperature)
- diagrams of temperature-time pattern (logarithmic, with or without considering n parameter)

## ii. Input Data:

**Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_c = 1520$$

1520

**Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_0 = 20$$

20

**Ms Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_s = 475$$

475

**Thickness of joint [total sum of plates] (mm)**

$$d_t = 4$$

4

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]**

$$H_1 = 7.5$$

7.5

**Amperage (A)**

$$I = 8000$$

8000

**Voltage (V)**

$$V = 1.6$$

1.6

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

$$T_x = 800$$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

$$T_y = 500$$

500

**Arc ignition time (sec)**

$$t_h = 0.3$$

0.3

Efficiency Factor for welding process [table 2]

$$\eta = 0.5$$

$$0.5$$

**iii. Returning Data**

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

$$5.$$

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

$$6400.$$

c) net heat input (J)

$$Q = q * t_h$$

$$1920.$$

d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling and Ms temperatures respectively]

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.52$$

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.32$$

$$\theta_s = N \left[ \frac{(T_s - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.303333$$

e) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_2 = \frac{q}{H_1 * 4 * \pi * a}$$

$$3.39531$$

—dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_2 = \frac{Q}{\rho c * (T_c - T_0) * 4 * \pi * a * t_h}$$

$$3.39531$$

f) cooling time  $\Delta\tau_2$  for centre line of welding ( $\sigma_2=0$ )

$$\Delta\tau_2 = \left( \frac{n_2}{\theta_y} - \frac{n_2}{\theta_x} \right)$$

4.0809

--real cooling time  $\Delta t_{x/y}$  (sec)

$$\Delta t_{x/y} = t_h * \Delta\tau_2$$

1.22427

g) cooling rate for centre line of welding ( $\sigma_2=0$ ) at Ms temperature ( $T_s$ ):

$$\theta = \frac{1}{\tau_2} * e^{\left( \frac{-(\sigma_2)^2}{\tau_2} \right)} * n_2;$$

--position on the welding (our case is the centre line):

$$\sigma_2 = 0;$$

--by differentiation of equation  $\theta$  with respect to time  $\tau_2$ :

$$\theta_1 = D[\theta, \tau_2]$$

$$-\frac{3.39531}{\tau_2^2}$$

--and when  $\sigma_2=0$ :

$$\tau_2 = \frac{n_2}{\theta_s}$$

11.1933

--cooling rate for the specific temperature  $T_s$  ( $C_s^{-1}$ ):

$$CR = \frac{(T_c - T_\theta)}{t_h} * (-\theta_1)$$

135.498

h) obtain  $\sigma_{2m}$  dimensionless radius vector at isothermal zone edge

$$\sigma_{2m} = \text{FindRoot} \left[ \frac{n_2}{e * \sigma m^2} - \theta_s = 0, \{\sigma m, 1\} \right]$$

{ $\sigma m \rightarrow 2.02923$ }

i) peak temperature  $T_p$  ( $^{\circ}C$ ):

$$\theta_p = \frac{n_2}{e * \sigma m} /. \sigma_{2m}$$

0.615534

$$T_p = T_0 + \theta_p * (T_c - T_0)$$

943.301

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Parametric Rosenthal equation [1-18]

$$\theta\theta[\tau\_ , \sigma\_ ] := \frac{1}{\tau} * e^{\left(\frac{-(\sigma)^2}{\tau}\right)} * n2;$$

Calculating dimensionless temperature map for local fusion in arc strikes

```
g = \theta\theta[\tau, \sigma];
```

```
s = Table[g, {\sigma, 0, 2, 0.25}];
```

a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$

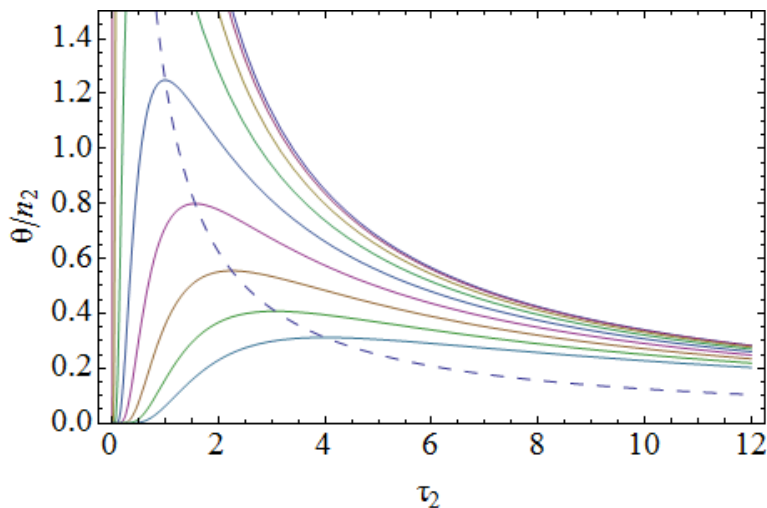
calculating temperatures

```
h1 = Plot[Evaluate[s, {\tau, 0, 12}], PlotRange -> {0, 1.5}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {"\tau_2", "\theta/n_2"}];
```

calculating peak temperature  $\theta_p$

```
h2 = Plot[\frac{1}{\tau * e} * n2, {\tau, 0, 12}, PlotRange -> {0, 1.5},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.02}]}];
```

```
Show[h1, h2]
```

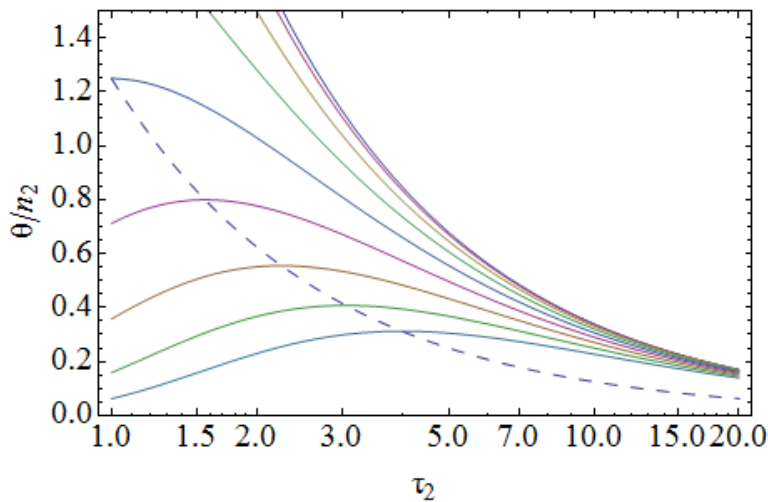


b) dimensionless temperature-time pattern Logarithmic diagram with peak temperatures  $\theta_p$

```
h3 = LogLinearPlot[Evaluate[s, {τ, 1, 20}], PlotRange → {0, 1.5},
  Frame → True, FrameLabel → {"τ2", "θ/n2"}];
```

```
h4 = LogLinearPlot[ $\frac{1}{\tau * e} * n2$ , {τ, 1, 20}, PlotRange → {0, 1.5},
  PlotStyle → {Dashing[{0.02}]}];
```

```
Show[h3, h4]
```



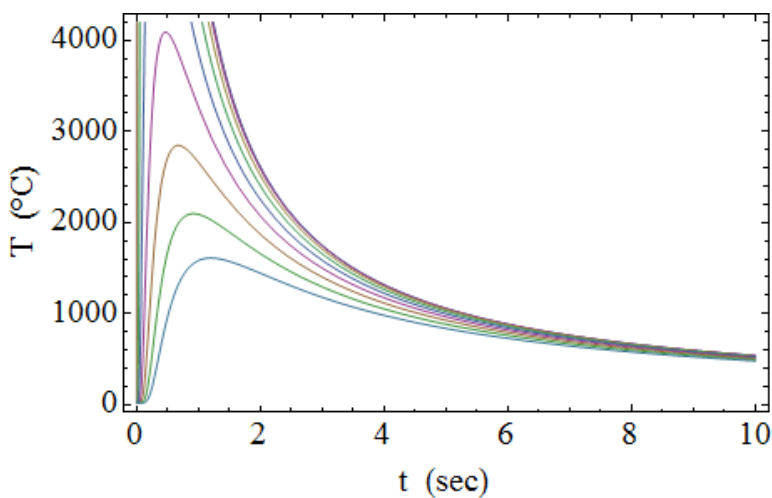
c) real temperature-time diagram T (°C) - t (sec)

$$\tau = \frac{t}{t_h}$$

```
3.33333 t
```

$$Td2 = T_0 + s * n2 * (T_c - T_0);$$

```
hd = Plot[Evaluate[Td2, {t, 0, 10}], Frame → True,
  FrameLabel → {"t (sec)", "T (°C)"}]
```



j) real distance values (r) that appear in the diagram :

$$rr[\sigma_] := \sqrt{\sigma^2 * 4 * a * t_h}$$

```
ss = rr[σ]
```

$$2.44949 \sqrt{\sigma \sigma^2}$$

`rw = Table[ss, {σσ, 0, 2, 0.25}]`

`{0., 0.612372, 1.22474, 1.83712,  
2.44949, 3.06186, 3.67423, 4.28661, 4.89898}`

## Thermit Welding

[low alloy steel]

### i. Intro:

This program produces results for the model of thermit welding.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- $A_{c3}$ -Temperature of steel (°C)
- Ar-Temperature of aluminium (°C)
- Total width of groove D [ $D = 2^* L_1$ ] (mm)
- Thermal Conductivity ( $W \text{ mm}^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor "ρc" ( $J \text{ mm}^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

#### Output Data

- a) a: thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- d) θ: dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]
- c) τ: dimensionless time τ
- d)  $\tau_{3x}$ : dimensionless time of initial cooling temperature  $T_x$
- e)  $\tau_{3y}$ : dimensionless time of final cooling temperature  $T_y$
- f) cooling time  $\Delta t_{8/5}$  (sec)
- g) coordinates of the isotherm are obtained  $\tau_m, \Omega_m$
- h) Δx: total width of fully transformed region (mm)

#### Diagrams

- a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$
- b) real temperature-time diagram T (°C) - t (sec)

### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) (°C)

$$T_c = 2200$$

2200

Initial Temperature (°C)

$$T_0 = 20$$

20

$A_{c3}$ -Temperature of steel (°C)

$$T_{ac3} = 890$$

890

**$A_T$ -Temperature of aluminium (°C)**

$$T_{Ar} = 275$$

275

**Total width of groove D [ $D = 2 * L_1$ ] (mm)**

$$L_1 = 6$$

6

**Thermal Conductivity ( $W_{mm^{-1} \circ C^{-1}}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J_{mm^{-3} \circ C^{-1}}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)**

$$T_x = 800$$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)**

$$T_y = 500$$

500

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.75$$

0.75

### **iii. Returning Data**

**a) thermal diffusivity ( $mm^2 s^{-1}$ )**

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

**b) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{C_3}$  temperatures respectively]**

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.357798



$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.220183

$$\theta_{ax} = N \left[ \frac{(T_{ax} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.116972

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.399083

c) dimensionless time

$$\tau_3 = \frac{\sqrt{4 * a * t}}{L_1}$$

0.745356  $\sqrt{t}$

d) dimensionless time of initial cooling temperature  $T_x$

$$\tau_{3x} = \frac{1}{\text{InverseErf}[\theta_x]}$$

3.04379

e) dimensionless time of final cooling temperature  $T_y$

$$\tau_{3y} = \frac{1}{\text{InverseErf}[\theta_y]}$$

5.05875

f) cooling time  $\Delta t_{8/5}$  (sec)

$$\Delta t_{8/5} = \frac{L_1^2}{4 * a} (\tau_{3y}^2 - \tau_{3x}^2)$$

29.3872

g) according to the  $A_{c3}$ -temperature locus ( $\theta_{ac3}$ ) the coordinates of the isotherm are obtained  $\tau_m, \Omega_{m2}$ :

—the fusion boundary is defined when  $x=L_1$  and therefore  $\Omega_m = \frac{x}{L_1} = 1$

$$\Omega_m = 1$$

1

$$f = \frac{1}{2} * \left( \text{Erf} \left[ \frac{\Omega_{m2} + 1}{\tau_m} \right] - \text{Erf} \left[ \frac{\Omega_{m2} - 1}{\tau_m} \right] \right) - \theta_{ac3};$$

$$g = (\Omega_{m2} - 1) * \text{Exp} \left[ -\frac{(\Omega_{m2} - 1)^2}{(\tau_m)^2} \right] - (\Omega_{m2} + 1) * \text{Exp} \left[ -\frac{(\Omega_{m2} + 1)^2}{(\tau_m)^2} \right];$$

```
s = FindRoot[{f == 0, g == 0}, {τm, 1}, {Ωm2, 1}]
```

```
{τm → 1.45727, Ωm2 → 1.2223}
```

h) total width of fully transformed region Δx (mm)

```
Δx = L1 * (Ωm2 - Ωm);
```

```
Δx = Δx / . s
```

```
1.33378
```

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

calculating temperature-time diagram

```
Ω[x_] := x / L1;
```

```
g = Ω[x];
```

```
h = N[Table[g, {x, 0, 2 L1, 1}]]
```

```
{0., 0.166667, 0.333333, 0.5, 0.666667, 0.833333,
 1., 1.16667, 1.33333, 1.5, 1.66667, 1.83333, 2.}
```

Parametric equation

$$\theta = \frac{1}{2} * \left( \operatorname{Erf} \left[ \frac{h+1}{\tau_3} \right] - \operatorname{Erf} \left[ \frac{h-1}{\tau_3} \right] \right);$$

```
j1 = Plot[Evaluate[θ, {τ3, 0, 10}], PlotRange → {0, 1}, Frame → True,
  FrameLabel → {"τ3", "θ"}];
```

calculating peak temperatures diagram θ<sub>p</sub>

```
a = Table[Ωm, {Ωm, 1, 20, 0.1}];
```

---τ<sub>3m</sub> when Ω<sub>m</sub> is given:

$$\tau_{3m} = \sqrt{\frac{(a-1)^2 - (a+1)^2}{\operatorname{Log} \left[ \frac{(a-1)}{(a+1)} \right]}};$$

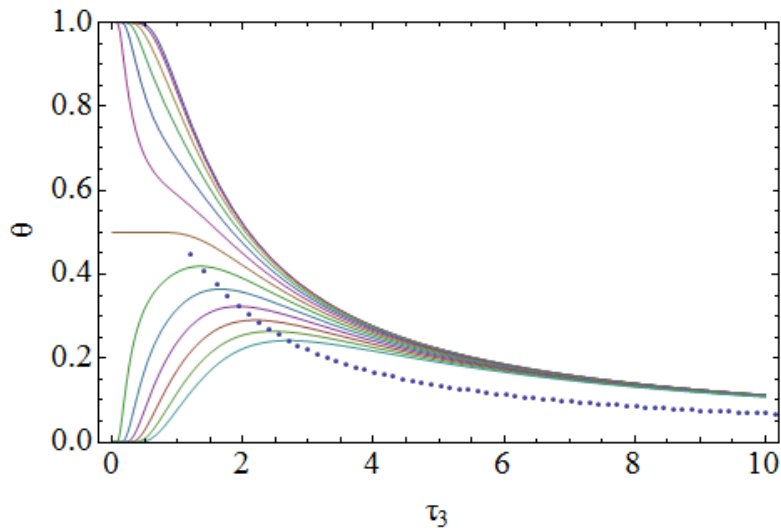
$$\theta_2 = \frac{1}{2} * \left( \operatorname{Erf} \left[ \frac{a+1}{\tau_{3m}} \right] - \operatorname{Erf} \left[ \frac{a-1}{\tau_{3m}} \right] \right);$$

```
b = Transpose[{τ3m, θ2}];
```

```
c1 = ListPlot[b];
```

a) dimensionless temperature-time diagram with peak temperatures  $\theta_p$

Show[j1, c1]

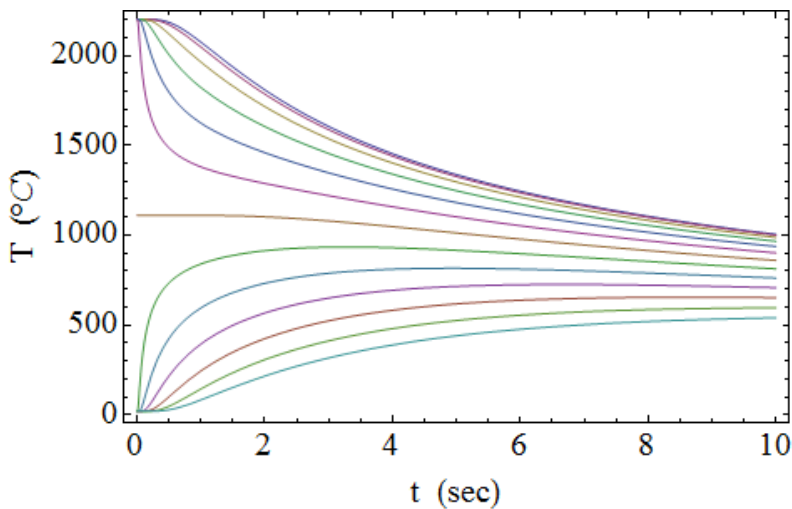


c) real temperature-time diagram T (°C) - t (sec)

$$\theta r = \frac{1}{2} * \left( \text{Erf} \left[ \frac{h+1}{\tau_3} \right] - \text{Erf} \left[ \frac{h-1}{\tau_3} \right] \right);$$

$$Td3 = T_0 + \theta r * (T_c - T_0);$$

hd = Plot[Evaluate[Td3, {t, 0, 10}], Frame -> True, FrameLabel -> {"t (sec)", "T (°C)"}]



## Friction Welding

[Al-Cu-2Mg alloy]

### i. Intro:

This program produces results for the model of friction welding.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

Liquidus Temperature (reference point) (°C)

Initial Temperature (°C)

Rods Diameter (mm)

Contact time (sec)

Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

### Output Data

a)  $a$ : thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )

b)  $\theta_x$ : dimensionless temperature

c)  $\tau_4$ : dimensionless time

d) obtain dimensionless distance  $\Omega_m$  and peak temperatures  $T_p$  ( $^\circ\text{C}$ )

e) dimensionless x-coordinate

### Diagrams

a) dimensionless temperature-time diagram [heating and cooling period]

b) real temperature-time diagram  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ) -  $t$  (sec) [heating and cooling period]

### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) ( $^\circ\text{C}$ )

$$T_c = 506$$

506

Initial Temperature ( $^\circ\text{C}$ )

$$T_0 = 20$$

20

Rods Diameter (mm)

$$D_1 = 26$$

26

Contact time (sec)

$$t_i = 13$$

13

Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

$$\lambda = 0.189$$

0.189

Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

$$\rho c = 0.0027$$

0.0027

### iii. Returning Data

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

70.

b) dimensionless temperature

$$\theta_x = N\left[\frac{(T - T_0)}{(T_c - T_0)}\right]$$

0.00205761 (-20. + T)

c) dimensionless time

$$\tau_4 = \frac{t}{t_i}$$

$\frac{t}{13}$

d) obtain dimensionless distance  $\Omega_m$  and peak temperatures  $T_p$  (°C)

—set time:

$$\tau_{4m} = 1$$

1

—distance from welding (mm):

$$x1 = \text{Table}[v, \{v, 0, 36, 6\}];$$

—dimensionless distance  $\Omega_m$ :

$$w1 = N\left[\frac{x1}{\sqrt{4 * a * t_i}}\right]$$

{0., 0.099449, 0.198898, 0.298347, 0.397796, 0.497245, 0.596694}

—peak dimensionless temperatures  $\theta_p$ :

$$\theta_1 = \sqrt{\tau_{4m}} * \left( \text{Exp}\left[-\frac{w1^2}{\tau_{4m}}\right] - \left(\frac{\sqrt{\pi} * w1}{\sqrt{\tau_{4m}}}\right) * \text{Erfc}\left[\frac{w1}{\sqrt{\tau_{4m}}}\right] \right);$$

—peak temperatures  $T_p$  (°C):

$$T_p = \theta_1 * (T_c - T_0) + T_0;$$

e) dimensionless x-coordinate

$$\Omega[x_] := \frac{x}{\sqrt{4 * a * t_i}}$$

$$g = \Omega[x];$$

$$h = N[\text{Table}[g, \{x, 0, 36, 6\}]]$$

{0., 0.099449, 0.198898, 0.298347, 0.397796, 0.497245, 0.596694}

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

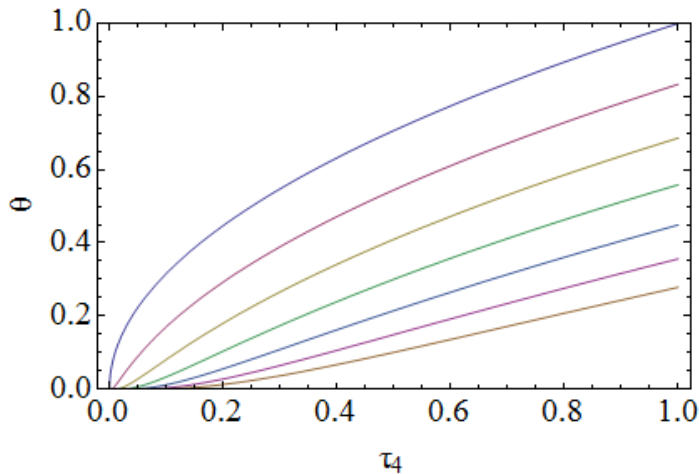
Parametric equation [1-36]

$$\theta = \sqrt{\tau_4} * \left( \text{Exp}\left[-\frac{h^2}{\tau_4}\right] - \left(\frac{\sqrt{\pi} * h}{\sqrt{\tau_4}}\right) * \text{Erfc}\left[\frac{h}{\sqrt{\tau_4}}\right] \right);$$

Calculating dimensionless temperature map for friction welding

calculating temperature-time pattern diagram (heating period)

```
j1 = Plot[Evaluate[θ, {τ4, 0, 1}], PlotRange -> {0, 1}, Frame -> True,
FrameLabel -> {"τ4", "θ"}]
```

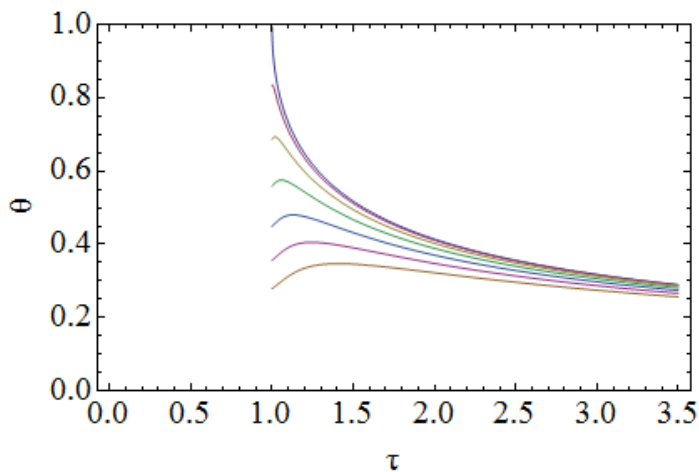


calculating temperature-time pattern diagram (cooling period)

$$\theta_2 = \sqrt{\tau_4 - 1} * \left( \text{Exp}\left[-\frac{h^2}{\tau_4 - 1}\right] - \left(\frac{\sqrt{\pi} * h}{\sqrt{\tau_4 - 1}}\right) * \text{Erfc}\left[\frac{h}{\sqrt{\tau_4 - 1}}\right] \right);$$

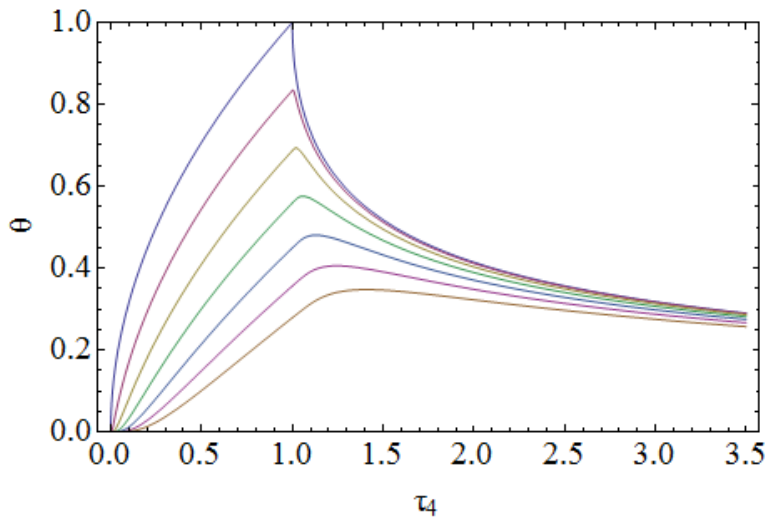
```
θα = θ - θ2;
```

```
j4 = Plot[Evaluate[θα, {τ, 0, 3.5}], PlotRange -> {0, 1}, Frame -> True,
FrameLabel -> {"τ", "θα"}]
```



a) dimensionless temperature-time diagram [heating and cooling period]

```
Show[j1, j4, PlotRange -> {0, 1}]
```



b) real temperature-time diagram T (°C) - t (sec) [heating and cooling period]

$$\tau_4 = \frac{tg}{ti}$$

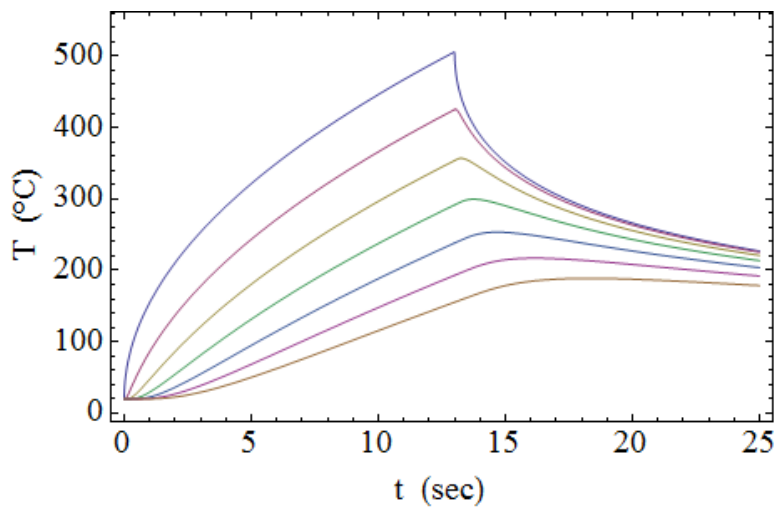
$$Td41 = T_0 + \theta * (T_c - T_0);$$

```
hd1 = Plot[Evaluate[Td41, {tg, 0, 13}], Frame -> True, FrameLabel -> {"t (sec)", "T (°C)"}];
```

$$Td42 = T_0 + 6\alpha * (T_c - T_0);$$

```
hd2 = Plot[Evaluate[Td42, {tg, 0, 25}], Frame -> True, FrameLabel -> {"t (sec)", "T (°C)"}];
```

```
Show[hd1, hd2, PlotRange -> {0, 550}]
```



## Arc Welding

# 1) Rosenthal - thick plate solutions (real dimensions)

[low alloy steel]

## Intro:

This program produces diagrams for the model of arc welding in thick plates.  
By inserting the following parameters (**red input**) it returns (**purple output**):

### **Input Data**

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source (mm)
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

### **Output Data**

- a: thermal diffusivity
- q: net arc power

### **Diagrams**

real diagrams by Rosenthal equation [1-45]:

T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - x (mm) diagram

T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - y (mm) diagram

isothermal contour diagram x - y (mm)

isothermal contour diagram x - z (mm)

contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ac3}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

### **Input Data:**

**Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$T_c = 1520$

1520

**Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$T_0 = 20$

20

**$A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$T_{Ac3} = 910$

910

**$A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$T_{Ar} = 275$

275

**Position distance from source (mm)**



$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ;$$

**Amperage (A)**

$$I = 110$$

110

**Voltage (V)**

$$V = 22$$

22

**Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )**

$$u = 4$$

4

**Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.80$$

0.8

**thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )**

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

**net arc power (J)**

$$q = \eta * I * V$$

1936.

## Diagrams

**Program parameters for Diagrams**

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

### Rosenthal solution [1-45]

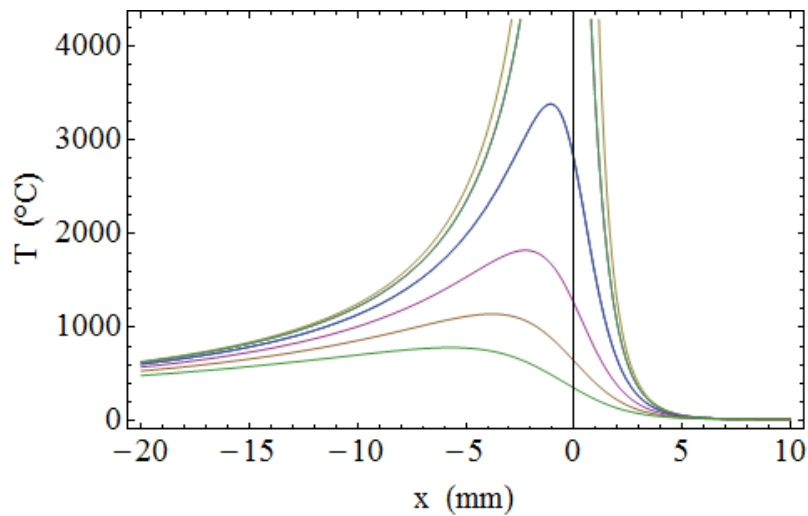
$$T[x_, y_] := T_0 + \frac{1}{R} * \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{-\frac{y}{2 * a}} (R-x);$$

```
fg = T[x, y];
```

```
z = 0;
```

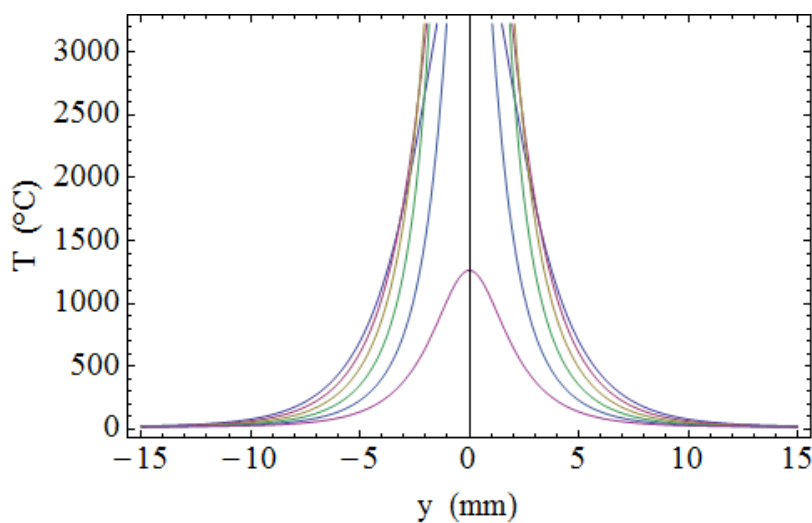
### T (°C) - x (mm) diagram

```
hc1 = Plot[Evaluate[Table[fg, {y, -2, 5}], {x, -20, 10}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (mm)", "T (°C)"}]
```



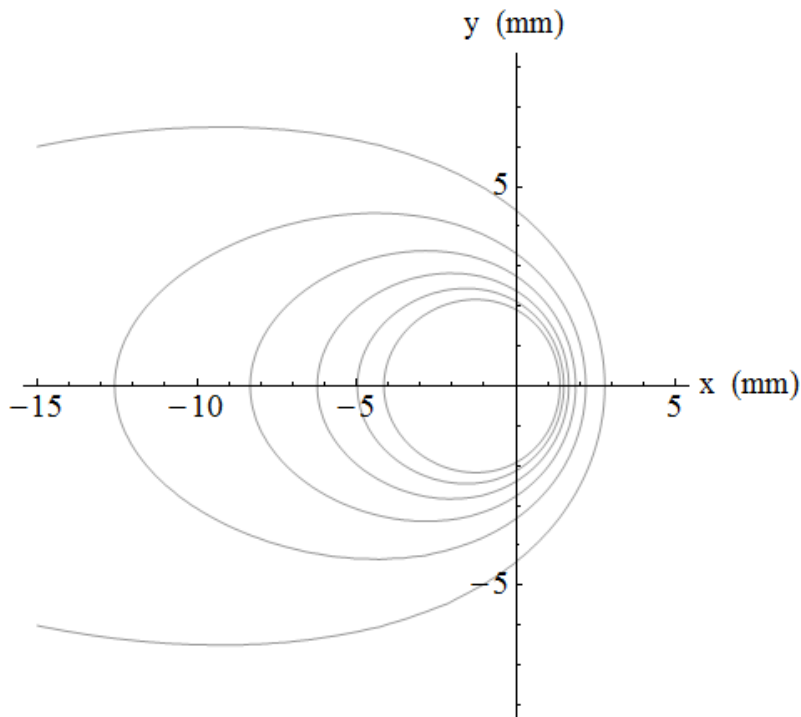
### T (°C) - y (mm) diagram

```
hc2 = Plot[Evaluate[Table[fg, {x, -3, 2}], {y, -15, 15}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"y (mm)", "T (°C)"}]
```



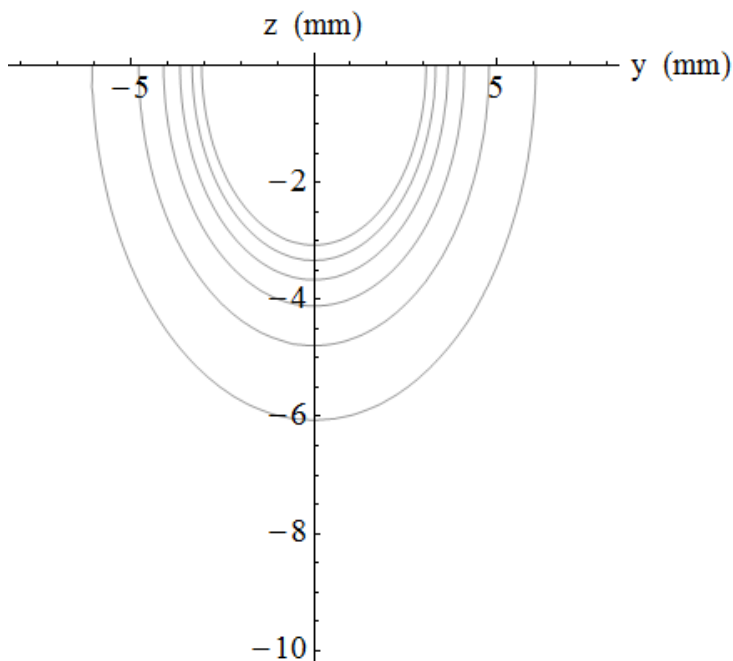
### isothermal contour diagram x - y (mm)

```
hc3 = ContourPlot[fg, {x, -15, 5}, {y, -8, 8}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}]
```



isothermal contour diagram x - z (mm)

```
hc4 = ContourPlot[fg /. x → 0, {y, -8, 8}, {z, 0, -10}, ContourShading → False, Axes → True, Frame → False, AxesLabel →
```

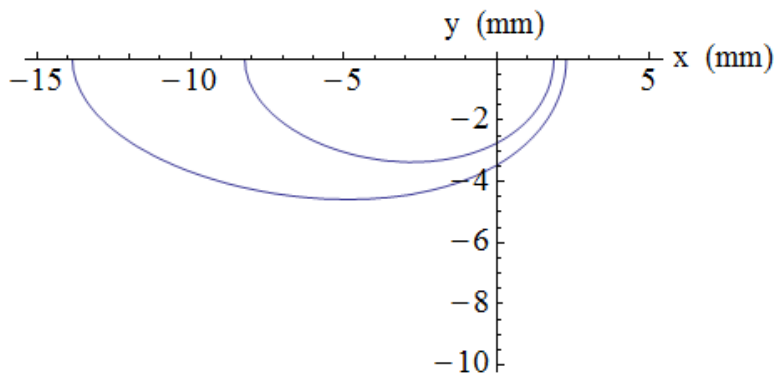


contour diagrams x - y (mm) for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ac3}$  (°C) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

```
hc5 = ContourPlot[fg == Tc, {x, -15, 5}, {y, -10, 0}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"x (mm)", "y (mm)"},
  AspectRatio → 1/2];
```

```
hc6 = ContourPlot[fg == TAc3, {x, -15, 5}, {y, -10, 0}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"x (mm)", "y (mm)"},
  AspectRatio → 1/2];
```

```
Show[hc5, hc6]
```



## 2) Rosenthal - thin plate solutions (real dimensions)

[Al-Mg alloy]

### i. Intro:

This program produces diagrams for the model of arc welding in thin plates.  
By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source (mm)
- Sheet thickness (mm)
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

#### Output Data

- a: thermal diffusivity
- q: net arc power

#### Diagrams

- real diagrams by Rosenthal equation [1-45]:
- T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - x (mm) diagram
- T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - y (mm) diagram
- isothermal contour diagram x - y (mm),
- contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ar}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_c = 650$$

650

Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_0 = 20$$

20

$A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_{ac3} = 910$$

910

**$A_T$ -Temperature of aluminium (°C)**

$$T_{ax} = 275$$

275

**Position distance from source (mm)**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

**Sheet thickness (mm)**

$$d = 2$$

2

**Amperage (A)**

$$I = 110$$

110

**Voltage (V)**

$$V = 15$$

15

**Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )**

$$u = 4$$

4

**Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.149$$

0.149

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.0027$$

0.0027

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.6$$

0.6

thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

55.1852

net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

990.

## Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

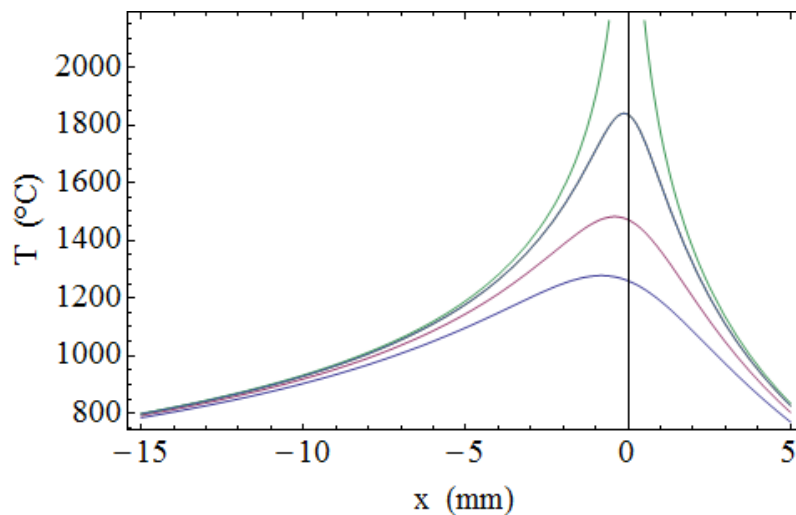
Rosenthal solution [1-81]

$$T[x_, y_] = T_0 + \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{\left(-\frac{u+x}{2 * a}\right)} * \text{BesselK}\left[0, \frac{u * r}{2 * a}\right];$$

$fg = T[x, y];$

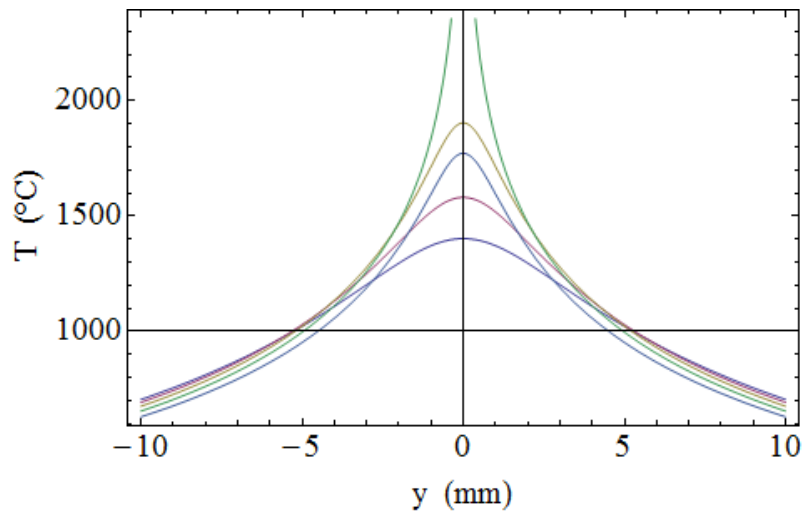
T (°C) - x (mm) diagram

```
hc1 = Plot[Evaluate[Table[fg, {y, -3, 1}], {x, -15, 5}], Frame -> True,  
FrameLabel -> {"x (mm)", "T (°C)"}]
```



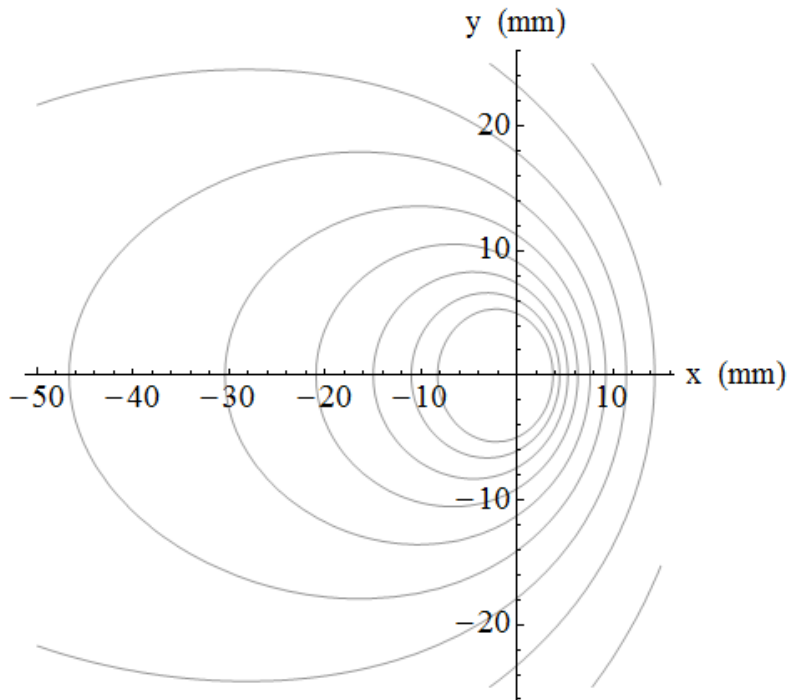
T (°C) - y (mm) diagram

```
hc2 = Plot[Evaluate[Table[fg, {x, -3, 1}], {y, -10, 10}], Frame -> True,  
FrameLabel -> {"y (mm)", "T (°C)"}]
```



isothermal contour diagram x - y (mm)

```
hc3 = ContourPlot[fg, {x, -50, 15}, {y, -25, 25}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x
```

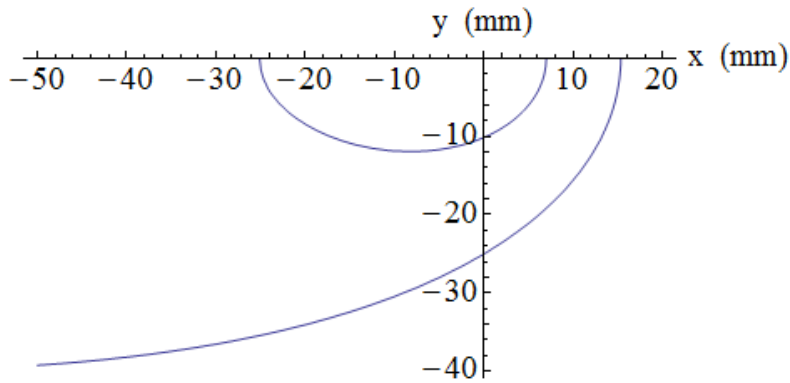


contour diagrams x - y (mm) for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  (°C) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

```
hc5 = ContourPlot[fg == T_c, {x, -50, 20}, {y, -40, 0}, ContourShading -> False,
  Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"},
  AspectRatio -> 1/2];
```

```
hc6 = ContourPlot[fg == T_Ax, {x, -50, 20}, {y, -40, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> 1/2];
```

```
Show[hc5, hc6]
```



### 3) Rosenthal - medium plate solutions (real dimensions)

[aluminium (> 99% Al)]

#### i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in thick plates.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source (mm)
- Plate thickness (mm)
- Number of real and imaginary point sources
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

#### Output Data

- a)  $a$ : thermal diffusivity
- b)  $q$ : net arc power

#### Diagrams

real diagrams by Rosenthal equation [1-104]:

$T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $x$  (mm) diagram

$T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $y$  (mm) diagram

isothermal contour diagram  $x - y$  (mm)

isothermal contour diagram  $x - z$  (mm)

contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ar}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

#### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_c = 660$$

660

Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_0 = 20$$

20



**$A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_{ac3} = 910$$

910

**$A_T$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_{at} = 275$$

275

**Position distance from source (mm)**

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2 * n * d)^2} ;$$

**Plate thickness (mm)**

$$d = 20$$

20

**Number of real and imaginary point sources**

$$p = 4$$

4

**Amperage (A)**

$$I = 260$$

260

**Voltage (V)**

$$V = 25$$

25

**Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )**

$$u = 3$$

3

**Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.230$$

0.23

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.0027$$

0.0027

**Efficiency Factor for welding process** [table 1.3]

$\eta = 0.80$

0.8

**thermal diffusivity** ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$a = \lambda / \rho c$

85.1852

**net arc power** (J)

$q = \eta * I * V$

5200.

## Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

**Rosenthal solution** [1-104]

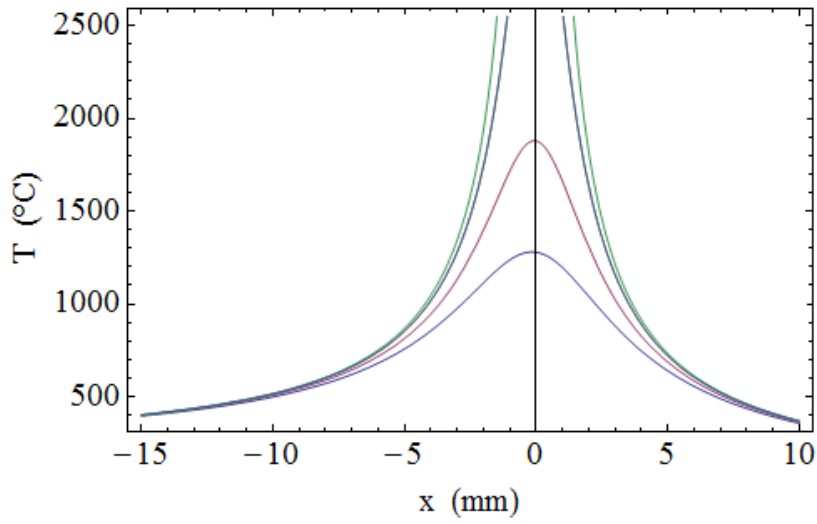
$$T[x_, y_] := T_0 + \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{\left(\frac{-u * x}{2 * a}\right)} * \sum_{n=-p}^{+p} \frac{e^{\left(\frac{-u * R}{2 * a}\right)}}{R}$$

```
fg = T[x, y];
```

```
z = 0;
```

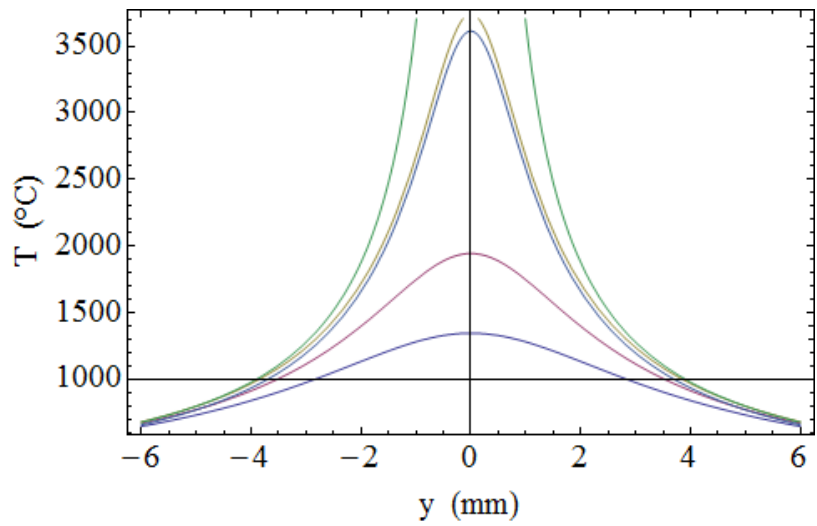
**T (°C) - x (mm) diagram**

```
hc1 = Plot[Evaluate[Table[fg, {y, -3, 1}], {x, -15, 10}], Frame -> True,  
FrameLabel -> {"x (mm)", "T (°C)"}]
```



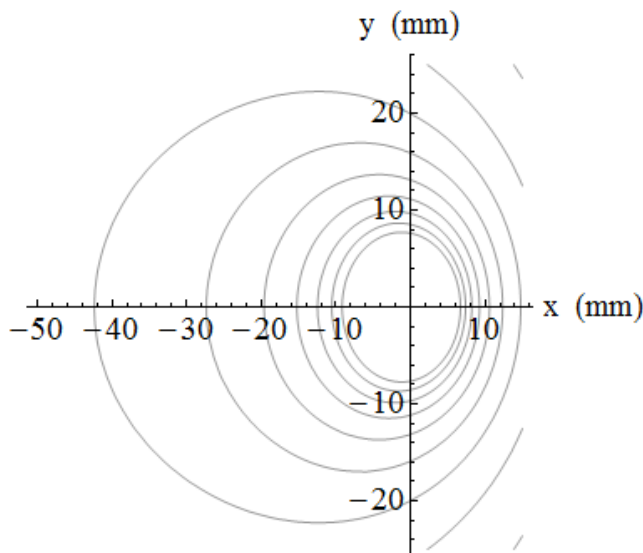
T (°C) - y (mm) diagram

```
hc2 = Plot[Evaluate[Table[fg, {x, -3, 1}], {y, -6, 6}], Frame → True,
  FrameLabel → {"y (mm)", "T (°C)"}]
```



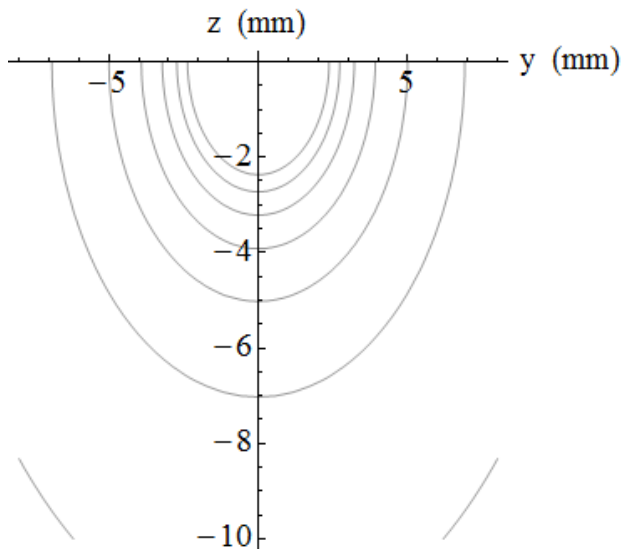
isothermal contour diagram x - y (mm)

```
hc3 = ContourPlot[fg, {x, -50, 15}, {y, -25, 25}, ContourShading → False, Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"x
```



isothermal contour diagram x - z (mm)

```
hc4 = ContourPlot[fg /. x -> 0, {y, -8, 8}, {z, 0, -10}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel ->
```

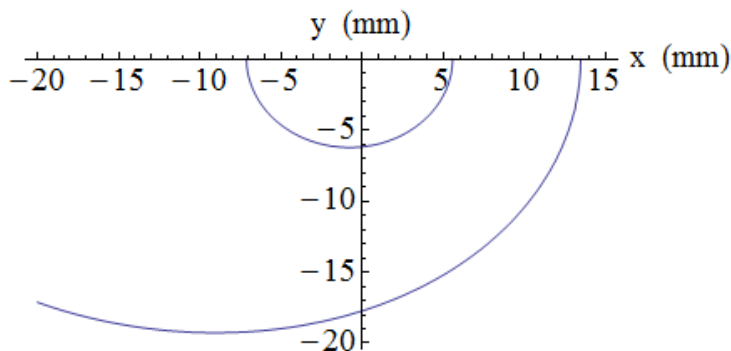


contour diagrams x - y (mm) for  $T=T_c$  and  $T=T_{ax}$  (°C) (fusion boundary and  $A_1$  isotherm)

```
hc5 = ContourPlot[fg == Tc, {x, -20, 15}, {y, -20, 0}, ContourShading -> False,  
  Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"},  
  AspectRatio -> 1/2];
```

```
hc6 = ContourPlot[fg == T_ax, {x, -20, 15}, {y, -20, 0}, ContourShading -> False,  
  Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"},  
  AspectRatio -> 1/2];
```

```
Show[hc5, hc6]
```



## i) thick plate solutions

[low alloy steel]

### i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in thick plates.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

-Liquidus Temperature (reference point) (°C)

-Initial Temperature (°C)

- $A_{c3}$ -Temperature of steel (°C)

-Ar-Temperature of aluminium (°C)

- Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source (mm)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

### Output Data

- a)  $a$ : thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- b)  $q$ : net arc power (J)
- c)  $E_1$ : gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures
- e)  $\sigma_3$ : dimensionless radius vector
- f)  $\tau$ : dimensionless time
- g)  $n_3$ : dimensionless operating parameter
- h)  $\theta/n_3$  ratio [when  $T=T_c$ ]
- i)  $\theta/n_3$  ratio [when  $T=T_{acc3}$ ]
- j) end-points  $\xi'$  and  $\xi''$  [and in real dimensions  $x_1$  and  $x_2$ ] [Positions 1-b and 4-b in image 2]
- k) total length of an isothermal enclosure  $\xi_t$  [and in real dimension  $x_t$  (mm)]
- l)  $\sigma_{3m}$ : dimensionless radius vector at isothermal zone edge
- m) isothermal zone widths:  $\psi_m$  and  $\xi_m$  [and in real dimensions  $y_m$  and  $x_m$  (mm)] [image 1]
- n)  $\sigma_{3mp}$ : dimensionless radius vector at HAZ zone edge
- o) Peak  $\psi_{mp}$  and  $\xi_{mp}$  of HAZ [when  $T_p=T_{acc3}$ ] [dimensionless] [image 2]
- p) width of fully transformed HAZ  $\Delta\psi$  and  $\Delta y$  [dimensionless and real dimension respectively] [when  $T_p=T_{acc3}$ ]
- q) intersection point of the isothermal enclosure with  $\psi$  (y)-axis [when  $\xi=\zeta=0$  and  $\sigma=\psi$ ] (mm) [Position 2-b in image 2]
- r) intersection point of HAZ isothermal with  $\psi$  (y)-axis [when  $\xi=\zeta=0$  and  $\sigma=\psi$ ] (mm) [Position 2-a in image 2]
- s) weld bead cross sectional area:  $\Lambda_1$  and  $A$  ( $\text{mm}^2$ ) [dimensionless and real dimension respectively] [image 1]
- t) weld pool volume:  $\Gamma$  and  $\text{Vol}$  ( $\text{mm}^3$ ) [dimensionless and real dimension respectively]
- u) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x-T_y$ ) [dimensionless and real time respectively] [by temperature]
- v) CR Cooling Rate for a specific temperature  $T_{cool}$  ( $\text{C s}^{-1}$ )
- w) real dimensions coordinates  $x, y, z$
- x) dimensionless coordinates  $\xi, \psi, \zeta$

### Diagrams

Dimensionless temperature maps for point sources on thick plates with parametric equation:

- a)  $\xi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis
- b)  $\psi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis
- c) isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane ( $\zeta=0$ )
- d) isothermal contours in the  $\psi$ - $\zeta$  plane ( $\xi=0$ )
- e)  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{acc3}$  (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

Real temperature maps for point sources on heavy slabs with parametric equation:

- f)  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $x$  (mm) diagram
- g)  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $y$  (mm) diagram
- h) real dimension isothermal contours in the  $x$  -  $y$  plane ( $\zeta=0$ )
- i) real dimension isothermal contours in the  $y$  -  $z$  plane ( $\xi=0$ )
- j) real dimension  $x$  -  $y$  (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{acc3}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)
- k) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension  $x$  -  $y$  (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{acc3}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)
- l) dimensionless distance  $\sigma_{3m}$ , half width  $\psi_m$  and cross sectional area  $\Lambda_1$  to  $n_3 / \theta_m$  diagram

### ii. Input Data:

**Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )**

$$T_c = 1520$$

$$1520$$

**Initial Temperature (°C)**

$$T_0 = 20$$

20

**A<sub>c3</sub>-Temperature of steel (°C)**

$$T_{ac3} = 910$$

910

**A<sub>r</sub>-Temperature of aluminium (°C)**

$$T_{ar} = 275$$

275

**Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate (°C)**

$$T_{cool} = 650$$

650

**Position distance from source (mm)**

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ;$$

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  (J mm<sup>-3</sup>) [table 1]**

$$H_1 = 7.5$$

7.5

**Amperage (A)**

$$I = 110$$

110

**Voltage (V)**

$$V = 22$$

22

**Welding Speed (mm s<sup>-1</sup>)**

$$u = 4$$

4

**Thermal Conductivity (W mm<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )

$\rho c = 0.005$

0.005

Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )

$T_x = 800$

800

Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )

$T_y = 500$

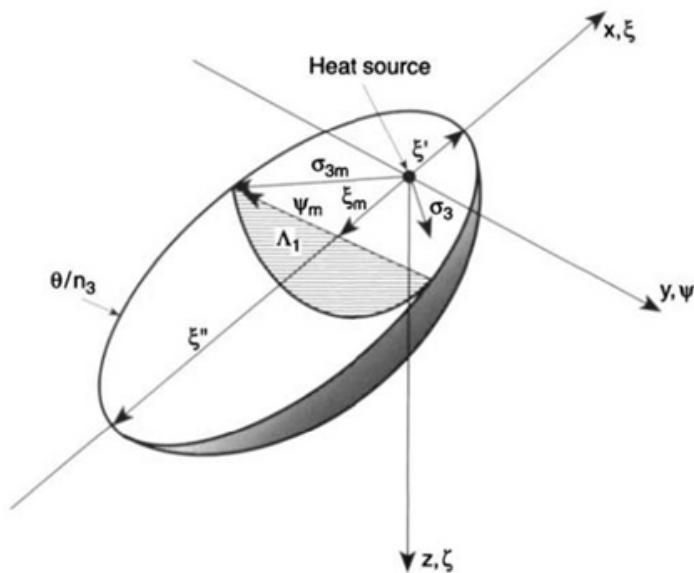
500

Efficiency Factor for welding process [table 2]

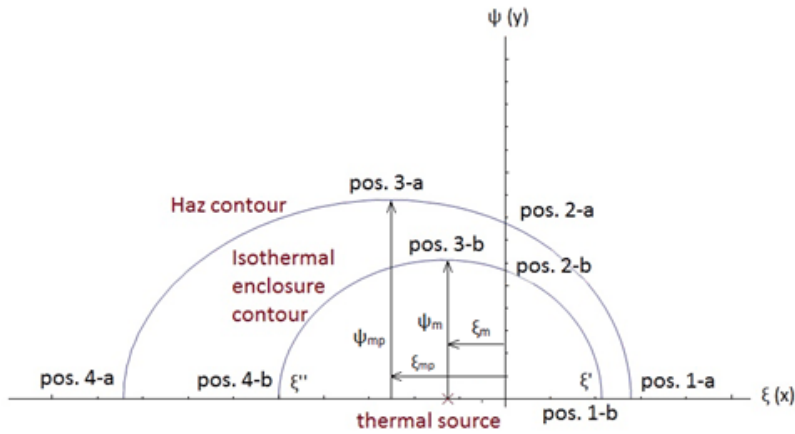
$\eta = 0.8$

0.8

Isothermal Enclosure model of thick plate solutions [image 1]



Sketch Contour of Isothermal Enclosure and HAZ [image 2]



### iii. Returning Data

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

1936.

c) gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )

$$E_1 = N \left[ \frac{I * V}{1000 * u} \right]$$

0.605

d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.52

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.32

$$\theta_{ar} = N \left[ \frac{(T_{ar} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.17

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.593333



e) dimensionless radius vector  $\sigma_3$

$$\sigma_3 = \frac{u \cdot R}{2 \cdot a}$$

$$0.4 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

f) dimensionless time  $\tau$

$$\tau = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

$$1.6 \tau$$

g) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q \cdot u}{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (H_1)}$$

$$3.28666$$

---dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q \cdot u}{\rho C \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (T_c - T_0)}$$

$$3.28666$$

h)  $\theta/n_3$  ratio when  $T=T_c$

$$\theta n = \frac{\rho C \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (T_c - T_0)}{q \cdot u}$$

$$0.304261$$

i)  $\theta/n_3$  ratio when  $T=T_{ac3}$

$$\theta n_2 = \frac{\rho C \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (T_{ac3} - T_0)}{q \cdot u}$$

$$0.180528$$

j) end-points  $\xi'$  and  $\xi''$  (distances from heat source to the front and the rear of the isothermal enclosure, respectively) [Positions 1-b and 4-b in image 2]

---front end-point  $\xi'$  ( $x_1$ ) [Position 1-b in image 2]

$$\xi_{11} = \text{FindRoot}\left[\xi_1 - \frac{1}{2} \text{Log}\left[\frac{1}{\theta n \cdot \xi_1}\right] == 0, \{\xi_1, 0.5\}\right]$$

$$\{\xi_1 \rightarrow 0.743278\}$$

---and real dimension  $x_1$  (mm)

$$x_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \xi_1}{u};$$

$$x_1 = x_1 / . \xi_{11}$$

1.85819

---back end-point  $\xi''$  ( $x_2$ ) [Position 4-b in image 2]

$$\xi_2 = -\frac{1}{\theta n}$$

-3.28666

---and real dimension  $x_2$  (mm)

$$x_2 = \frac{2 * a * \xi_2}{u}$$

-8.21664

k) total length of an isothermal enclosure  $\xi_c$

$$\xi_c = \xi_1 - \xi_2;$$

$$\xi_c = \xi_c / . \xi_{11}$$

4.02993

---and real dimension total length  $x_c$  (mm)

$$x_c = x_1 - x_2$$

10.0748

l) obtain  $\sigma_{3m}$  dimensionless radius vector at isothermal zone edge

$$\sigma_{3m} = \text{FindRoot}\left[\frac{1}{\sigma m} * \text{Exp}\left[\frac{-\sigma m}{\sigma m + 1}\right] - \theta n = 0, \{\sigma m, 0.5\}\right]$$

{ $\sigma m \rightarrow 1.74134$ }

m) isothermal zone widths:  $\psi_m$  and  $\xi_m$  [image 1]

--- $\psi_m$  (dimensionless) [Position 3-b in image 2]

$$\psi_m = \frac{\sigma m}{(\sigma m + 1)} * \sqrt{1 + 2 * \sigma m};$$

$$\psi_m = \psi_m / . \sigma_{3m}$$

1.3449

---and real dimension  $y_m$  (mm)

$$y_m = \frac{2 * a * \psi_m}{u}$$

3.36225

--- $\xi_m$  (dimensionless) [image 2]

$$\xi_m = \frac{-(\sigma_m)^2}{\sigma_m + 1};$$

$$\xi_m = \xi_m / . \sigma_{3m}$$

-1.10613

---and real dimension  $x_m$  (mm)

$$x_m = \frac{2 * a * \xi_m}{u}$$

-2.76531

n) obtain  $\sigma_{3mp}$  dimensionless radius vector at HAZ zone edge

$$\sigma_{3mp} = \text{FindRoot}\left[\frac{1}{\sigma_{mp}} * \text{Exp}\left[\frac{-\sigma_{mp}}{\sigma_{mp} + 1}\right] - \theta n_2 = 0, \{\sigma_{mp}, 0.5\}\right]$$

{ $\sigma_{mp} \rightarrow 2.67506$ }

o) Peak  $\psi_{mp}$  and  $\xi_{mp}$  of HAZ [when  $T_p = T_{ac3}$ ] (dimensionless) [image 2]

--- $\psi_{mp}$  (dimensionless) [image 2]

$$\psi_{mp} = \frac{\sigma_{mp}}{(\sigma_{mp} + 1)} * \sqrt{1 + 2 * \sigma_{mp}};$$

$$\psi_{mp} = \psi_{mp} / . \sigma_{3mp}$$

1.83426

---real dimension  $y_{mp}$  (mm)

$$y_{mp} = \frac{2 * a * \psi_{mp}}{u}$$

4.58565

--- $\xi_{mp}$  (dimensionless) [image 2]

$$\xi_{mp} = \frac{-(\sigma_{mp})^2}{\sigma_{mp} + 1};$$

$$\xi_{mp} = \xi_{mp} / . \sigma_{3mp}$$

-1.94717

---real dimension  $x_{mp}$  (mm)

$$x_{mp} = \frac{2 * a * \xi_{mp}}{u}$$

-4.86792

p) Width of fully transformed HAZ [when  $T_p = T_{ac3}$ ] [image 2]

---dimensionless  $\Delta\psi$ :

$$\Delta\psi = \psi_{mp} - \psi_m$$

$$0.489359$$

—and real dimension  $\Delta y$  (mm)

$$\Delta y = \Delta\psi \star \frac{2 \star a}{u}$$

$$1.2234$$

q) Intersection point of the isothermal enclosure with  $\psi$  (y)-axis (when  $\xi=\zeta=0$  and  $\sigma=\psi$ ) [Position 2-b in image 2]

$$\psi\psi1 = \text{FindRoot}[\psi c + \text{Log}[\theta n \star \psi c] == 0, \{\psi c, 0.5\}]$$

$$\{\psi c \rightarrow 1.09715\}$$

$$Y_{c1} = \frac{2 \star a \star \psi c}{u};$$

---and real dimension (mm)

$$Y_{c1} = Y_{c1} / \psi\psi1$$

$$2.74288$$

r) Intersection point of HAZ isothermal with  $\psi$  (y)-axis (when  $\xi=\zeta=0$  and  $\sigma=\psi$ ) [Position 2-a in image 2]

$$\psi\psi2 = \text{FindRoot}[\psi c2 + \text{Log}[\theta n2 \star \psi c2] == 0, \{\psi c2, 0.5\}]$$

$$\{\psi c2 \rightarrow 1.38568\}$$

$$Y_{c2} = \frac{2 \star a \star \psi c2}{u};$$

-and real dimension (mm)

$$Y_{c2} = Y_{c2} / \psi\psi2$$

$$3.4642$$

s) weld bead cross sectional area:  $\Lambda_1$  and A

—dimensionless cross section:  $\Lambda_1$  [image 1]

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{2} \star \psi_m^2;$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1 / \sigma^3 m$$

$$2.84118$$

—real dimension cross section: A ( $\text{mm}^2$ )

$$A = \frac{4 \star a^2}{u^2} \star \Lambda_1$$

$$17.7574$$

f) weld pool volume:  $\Gamma$  and Vol

—dimensionless volume:  $\Gamma$

$$\Gamma = \frac{\pi}{12} \left( 3 * \left( \frac{1}{\theta n} \right)^2 - 3 * (\xi 1)^2 - 4 * (\xi 1)^3 \right);$$

$$\Gamma = \Gamma / . \xi 11$$

7.62004

—real volume of the enclosure: Vol (mm<sup>3</sup>)

$$\text{Vol} = \frac{8 * a^3}{u^3} * \Gamma$$

119.063

u) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x$ - $T_y$ )

—dimensionless cooling time

$$\Delta \tau = n3 * \left( \frac{1}{\theta_y} - \frac{1}{\theta_x} \right)$$

3.95031

—and real cooling time  $\Delta t_{xy}$  (sec)

$$\Delta t = \frac{2 * a * \Delta \tau}{u^2}$$

2.46894

v) Cooling Rate for a specific temperature  $T_{cool}$  (C s<sup>-1</sup>):

$$\text{CR} = \left( \frac{2 * \pi * \lambda}{\frac{a}{u}} \right) * (T_{cool} - T_0)^2$$

128.812

iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Rosenthal solution [1-45]

$$T[x_, y_] := T_0 + \frac{1}{R} * \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{-\frac{u}{2 * a} (R+x)} ;$$

Parametric Rosenthal equation [1-54]

$$\theta[\xi_, \sigma_3] = \frac{1}{\sigma_3} * \text{Exp}[-\sigma_3 - \xi] + n_3 ;$$

Calculating dimensionless temperature map for point sources on thick plates

w) real dimensions x-coordinate, y-coordinate, z-coordinate

$$x = \frac{2 * a * \xi}{u} ;$$

$$y = \frac{2 * a * \psi}{u} ;$$

$$z = \frac{2 * a * \zeta}{u} ;$$

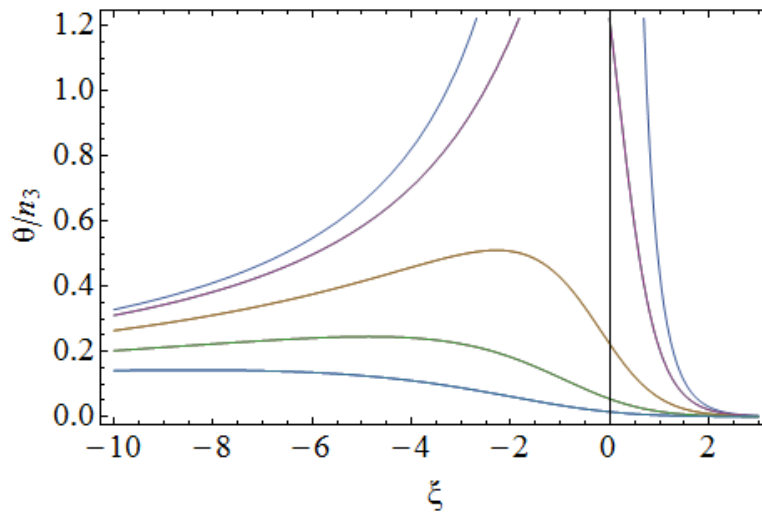
$$g = \theta[\xi, \sigma_3] ;$$

$$s = \text{Table}[g, \{\psi, -4, 4\}] ;$$

$$\zeta = 0 ;$$

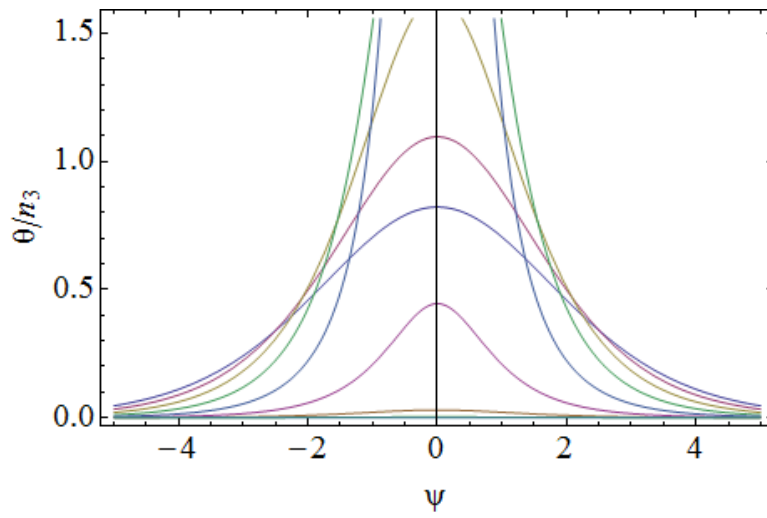
a) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis ( $\xi$ -0)

```
h1 = Plot[Evaluate[s, {\xi, -10, 3}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"\xi", "\theta/n3"}]
```



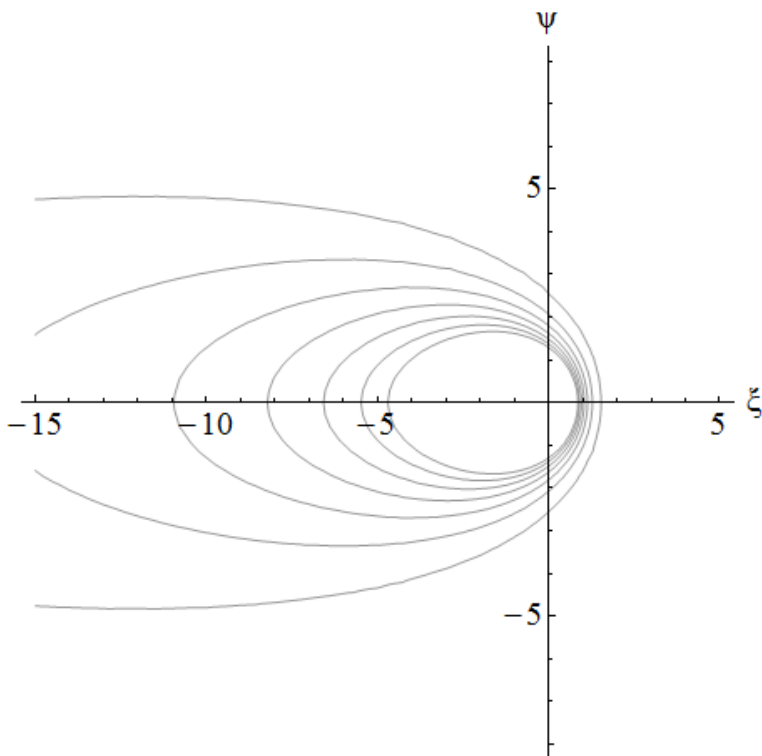
b) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis ( $\psi$ -0)

```
h2 = Plot[Evaluate[Table[g, {\xi, -4, 4}], {\psi, -5, 5}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"\psi", "\theta/n3"}]
```



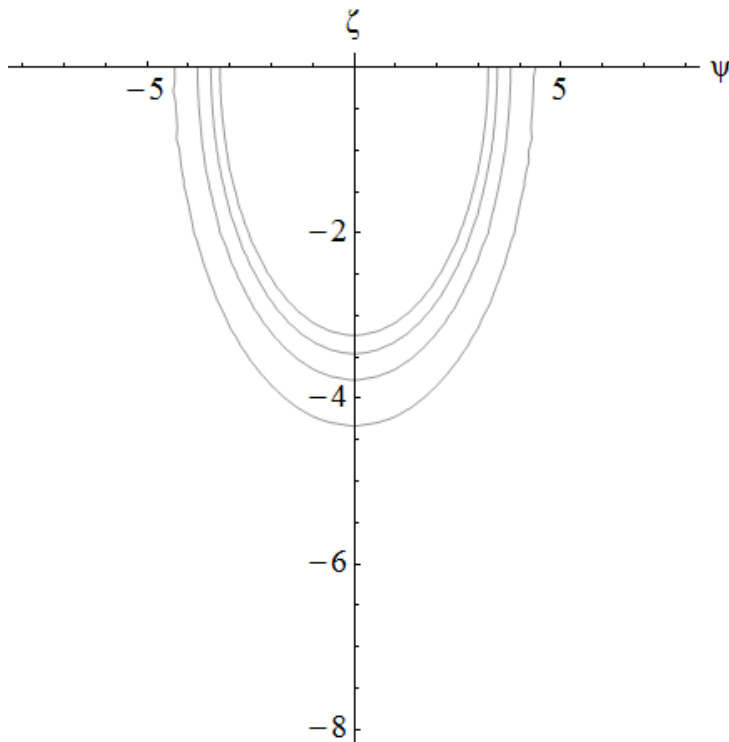
c) dimensionless contour diagram: isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane

```
h3 = ContourPlot[g, {xi, -15, 5}, {psi, -8, 8}, ContourShading -> False,
  Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"xi", "psi"}]
```



d) dimensionless temperature diagram: isothermal contours in the  $\psi$ - $\zeta$  plane ( $x=0$ )

```
h4 = ContourPlot[g /. xi -> 0, {psi, -8, 8}, {zeta, 0, -8}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"psi", "zeta"}]
```

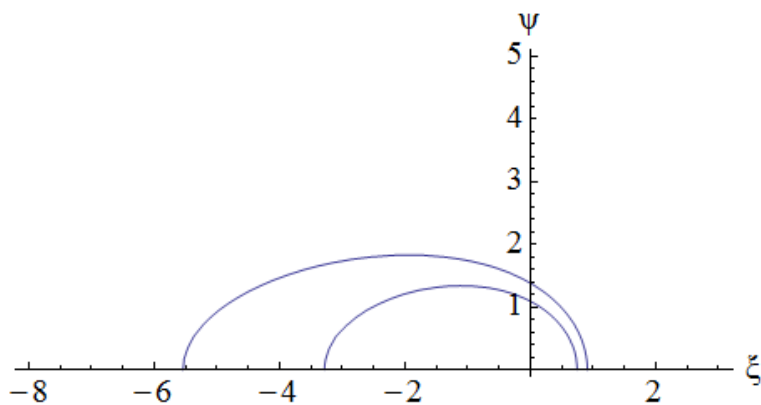


e) dimensionless  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{ac3}$  (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

```
he1 = ContourPlot[g = 1, {{ξ, -8, 3}, {ψ, 0, 5}}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"ξ", "ψ"},
  AspectRatio → Automatic];
```

```
he2 = ContourPlot[g =  $\theta_{ac3}$ , {{ξ, -8, 3}, {ψ, 0, 5}}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"ξ", "ψ"},
  AspectRatio → Automatic];
```

```
m1 = Show[he1, he2]
```



Calculating real temperatures map from parametric equation

$$Rr = \sqrt{xr^2 + yr^2 + zr^2};$$

$$\sigma r3 = \frac{u * Rr}{2 * a};$$

x) dimensionless  $\xi$ -coordinate,  $\psi$ -coordinate,  $\zeta$ -coordinate

$$\xi r = \frac{u * xr}{2 * a};$$



$$\psi r = \frac{u * y r}{2 * a};$$

$$\zeta r = \frac{u * z r}{2 * a};$$

$$\theta r[\xi r_, \sigma r3_] = \frac{1}{\sigma r3} * \text{Exp}[-\sigma r3 - \xi r] * n3;$$

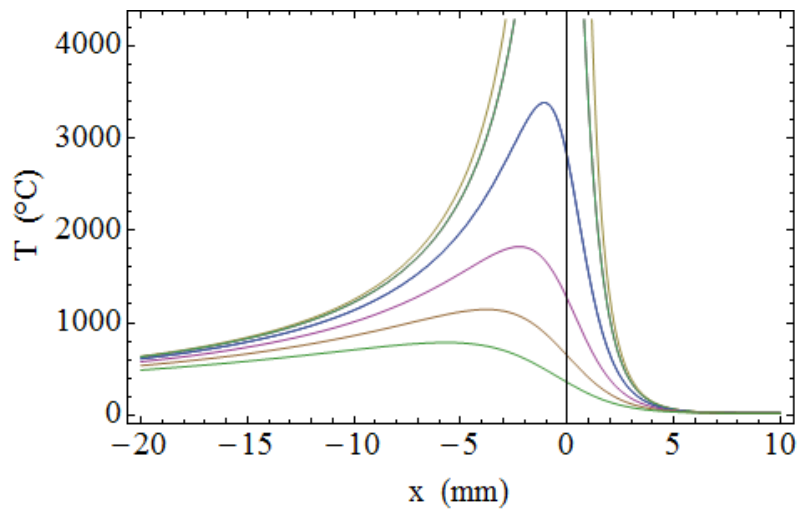
$$g r = T_0 + \theta r[\xi r, \sigma r3] * (T_c - T_0);$$

$$s r = \text{Table}[g r, \{y r, -2, 5\}];$$

$$z r = 0;$$

f) real temperatures diagram T (°C) - x (mm):

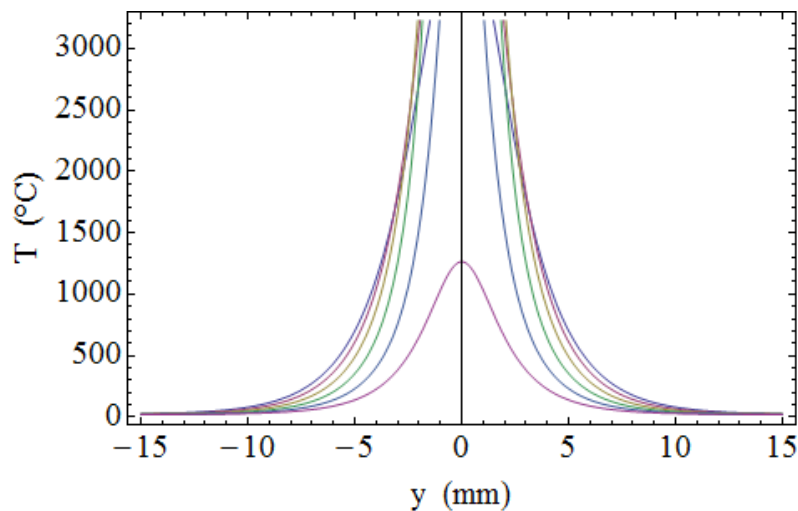
```
hr1 = Plot[Evaluate[sr, {xr, -20, 10}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (mm)", "T (°C)"}]
```



g) real temperatures diagram T (°C) - y (mm):

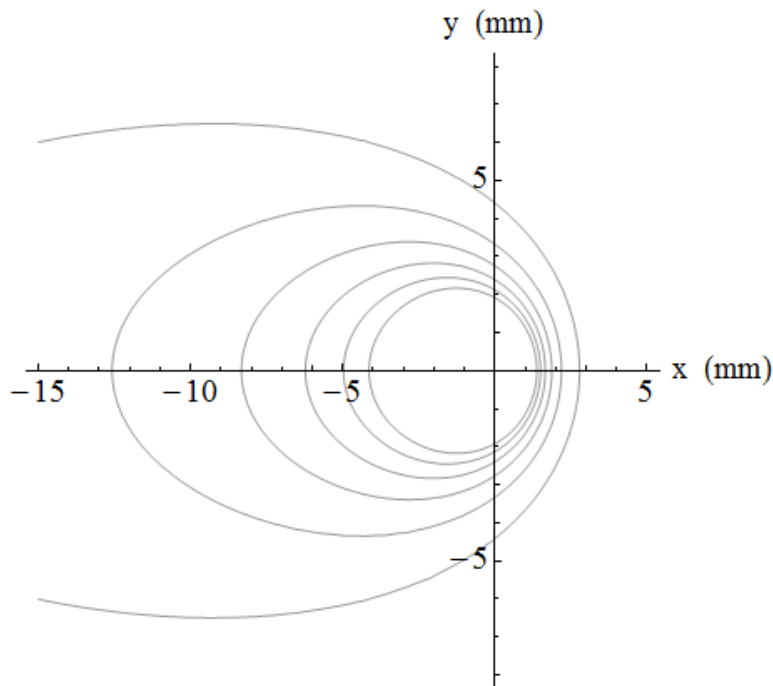
```
sd = Table[gr, {xr, -3, 2}];
```

```
hr2 = Plot[Evaluate[sd, {yr, -15, 15}], Frame -> True, FrameLabel -> {"y (mm)", "T (°C)"}]
```



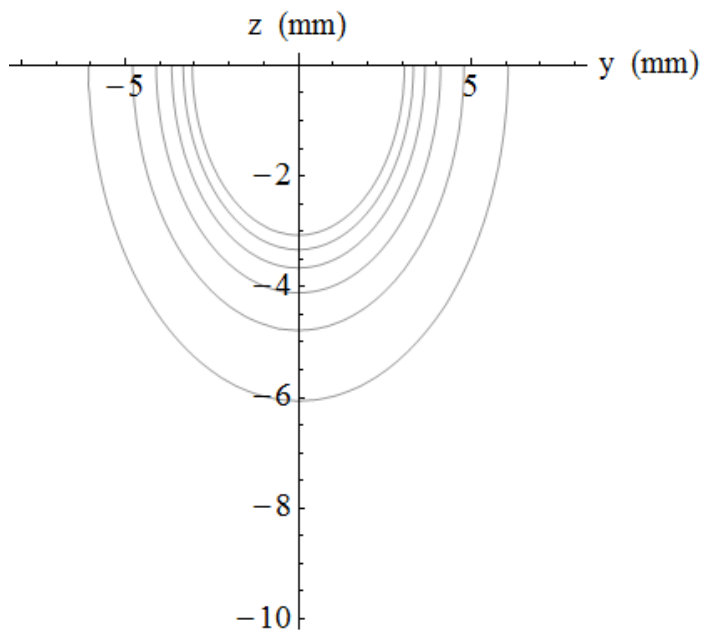
h) real dimensions contour diagram: isothermal contours in the x - y plane (mm)

```
hc3 = ContourPlot[gr, {xr, -15, 5}, {yr, -8, 8}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x
```



i) real dimensions contour diagram: isothermal contours in the y - z plane (mm)

```
hc4 = ContourPlot[gr /. xr -> 0, {yr, -8, 8}, {zr, 0, -10}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel
```

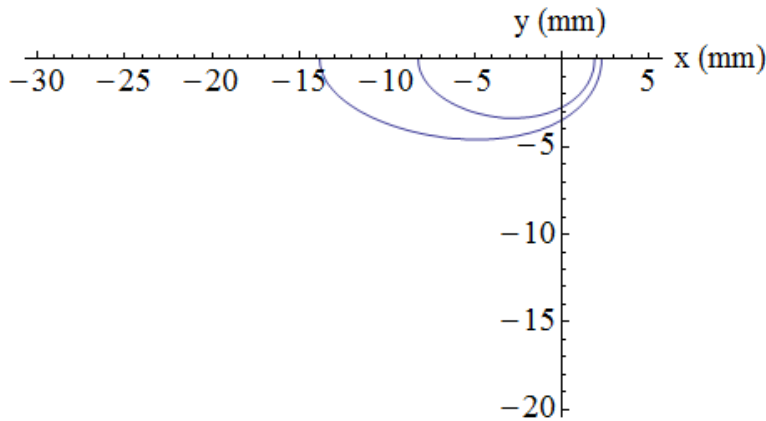


j) real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{ac3}$  (°C) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

```
hc11 = ContourPlot[gr = Tc, {xr, -30, 5}, {yr, -20, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> Automatic];
```

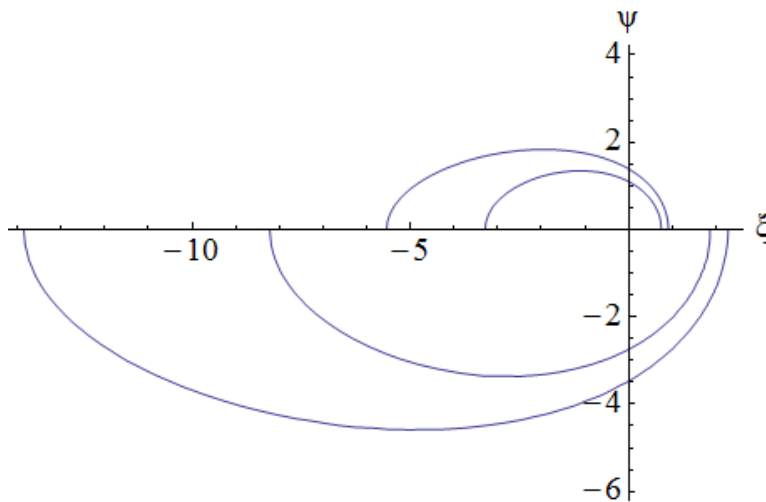
```
hc22 = ContourPlot[gr = T_{ac3}, {xr, -30, 5}, {yr, -20, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> Automatic];
```

m2 = Show[he11, he22]



k) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ac3}$  ( $^{\circ}C$ ) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

Show[m1, m2, PlotRange -> {4, -6}, AspectRatio -> Automatic]

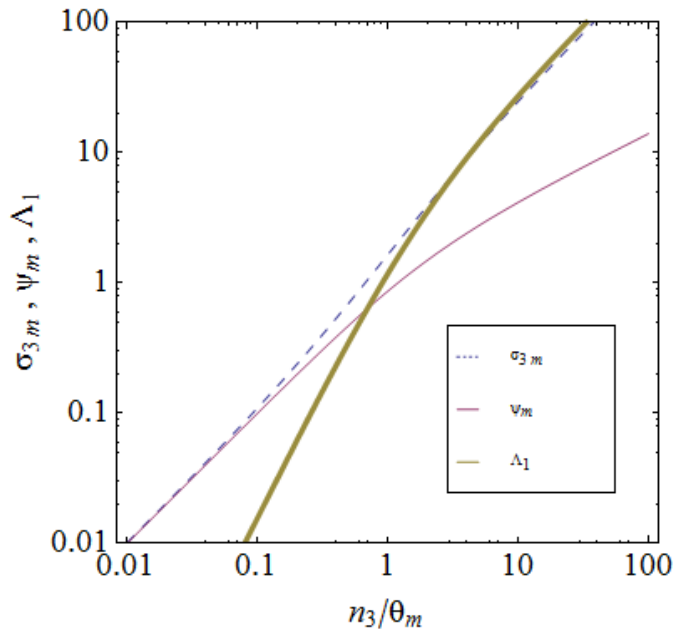


l) dimensionless distance  $\sigma_3$ , half width  $\psi_m$  and cross sectional area  $\Lambda_1$  vs  $n_3 / \theta_m$  diagram

<< PlotLegends`

h5 = LogLogPlot[ $\left\{ \frac{\sigma_0}{\text{Exp}\left[\frac{-\sigma_0}{\sigma_0+1}\right]} = 0, \frac{\sigma_0}{\sigma_0+1} \cdot \sqrt{1+2 \cdot \sigma_0} = 0, \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0+1}\right)^2 \cdot (1+2 \cdot \sigma_0) = 0 \right\}$ , { $\sigma_0$ , 0.01, 100}, PlotRange -> {0.0

PlotLegend -> {" $\sigma_3$ ", " $\psi_m$ ", " $\Lambda_1$ "}, LegendSize -> {0.5, 0.5}, LegendPosition -> {0.5, -0.7}, FrameLabel -> {" $n_3/\theta_m$ ", " $\sigma_3$ "}



## ii) thin plate solutions

[Al-Mg alloy]

### i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in thin plates. By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- Ac<sub>3</sub>-Temperature of steel (°C)
- Ar-Temperature of aluminium (°C)
- Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate (°C)
- Position distance from source (mm)
- Sheet thickness (mm)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  (J mm<sup>-3</sup>) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed (mm s<sup>-1</sup>)
- Thermal Conductivity (W mm<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)
- Volume Heat Capacity factor "ρc" (J mm<sup>-3</sup> °C<sup>-1</sup>)
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

#### Output Data

- a) a: thermal diffusivity (mm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>)
- b) q: net arc power (J)
- c) E<sub>1</sub>: gross heat input per unit length of the weld (kJ m<sup>-1</sup>)
- d) δ: dimensionless plate thickness
- e) θ: dimensionless temperatures
- f) σ<sub>5</sub>: dimensionless radius vector
- g) τ: dimensionless time
- h) n<sub>3</sub>: dimensionless operating parameter
- i) θδ/n<sub>3</sub> ratio [when T=T<sub>c</sub>]
- j) θδ/n<sub>3</sub> ratio [when T=T<sub>ax</sub>]
- k) end-points ξ' and ξ'' [and in real dimensions x<sub>1</sub> and x<sub>2</sub>] [Positions 1-b and 4-b in image 2]
- l) total length of an isothermal enclosure ξ<sub>t</sub> [and in real dimension x<sub>t</sub> (mm)]
- m) σ<sub>5m</sub>: dimensionless radius vector at isothermal zone edge
- n) isothermal zone widths: Ψ<sub>m</sub> and ξ<sub>m</sub> [and in real dimensions y<sub>m</sub> and x<sub>m</sub> (mm)] [image 1]

- o)  $\sigma_{5\text{ mp}}$ : dimensionless radius vector at HAZ zone edge
- p) Peak  $\psi_{\text{mp}}$  and  $\xi_{\text{mp}}$  of HAZ [when  $T_p = T_{Ax}$ ] [dimensionless] [image 2]
- q) width of fully transformed HAZ  $\Delta\psi$  and  $\Delta y$  [dimensionless and real dimension respectively] [when  $T_p = T_{Ax}$ ]
- r) intersection of the isothermal enclosure with  $\psi$  ( $y$ )-axis [when  $\xi = \zeta = 0$  and  $\sigma = \psi$ ] (mm) [Position 2-b in image 2]
- s) intersection point of HAZ isothermal with  $\psi$  ( $y$ )-axis [when  $\xi = \zeta = 0$  and  $\sigma = \psi$ ] (mm) [Position 2-a in image 2]
- t) weld bead cross sectional area:  $\Lambda_2$  and  $A$  ( $\text{mm}^2$ ) [dimensionless and real dimension respectively] [image 1]
- u) cross sectional area of fully recrystallised HAZ:  $\Delta\Lambda_2$  and  $\Delta A$  ( $\text{mm}^2$ ) [dimensionless and real dimension respectively]
- v) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x - T_y$ ) [dimensionless and real time respectively] [by temperature]
- w) CR Cooling Rate for a specific temperature  $T_{\text{cool}}$  ( $\text{C s}^{-1}$ )
- x) real dimensions coordinates  $x, y, z$
- y) dimensionless coordinates  $\xi, \psi, \zeta$

### Diagrams

Dimensionless temperature maps for point sources in thin plates with parametric equation:

- a)  $\xi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis
- b)  $\psi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis
- c) isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane
- d)  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{Ax}$  (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

Real temperature maps for point sources on heavy slabs with parametric equation:

- e)  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $x$  (mm) diagram
- f)  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) -  $y$  (mm) diagram
- g) real dimension isothermal contours in the  $x$  -  $y$  plane
- h) real dimension  $x$  -  $y$  (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)
- i) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension  $x$  -  $y$  (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)
- j) dimensionless distance  $\sigma_{5\text{ m}}$ , half width  $\psi_m$  and cross sectional area  $\Lambda_1$  to  $n_3 / \theta_m$  diagram

### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_c = 650$$

$$650$$

Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_0 = 20$$

$$20$$

$A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_{Ac3} = 910$$

$$910$$

$A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_{Ar} = 275$$

$$275$$

Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate ( $^{\circ}\text{C}$ )

$$T_{\text{cool}} = 275$$

$$275$$

**Position distance from source (mm)**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

**Sheet thickness (mm)**

$$d = 2$$

2

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]**

$$H_1 = 1.7$$

1.7

**Amperage (A)**

$$I = 110$$

110

**Voltage (V)**

$$V = 15$$

15

**Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )**

$$u = 4$$

4

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.149$$

0.149

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.0027$$

0.0027

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

$$T_x = 800$$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

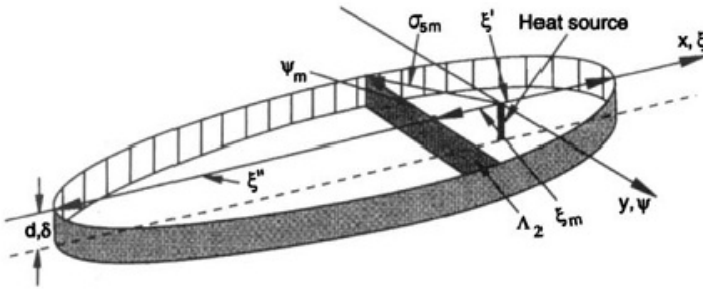
$$T_y = 500$$

**Efficiency Factor for welding process** [table 2]

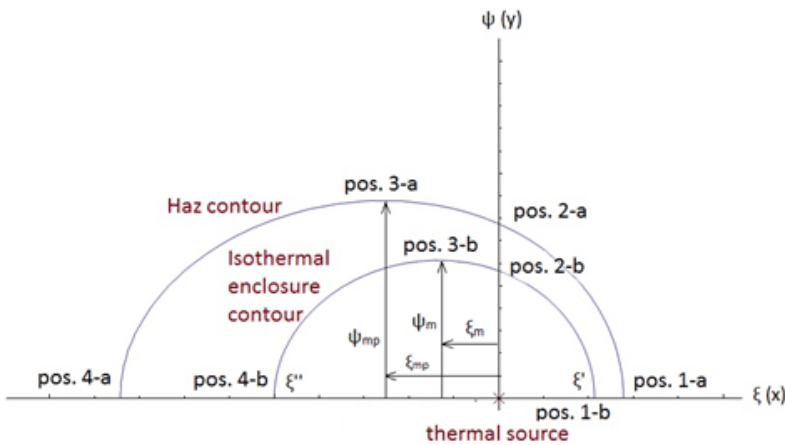
$$\eta = 0.6$$

$$0.6$$

**Isothermal Enclosure model of thin plate solutions** [image 1]



**Sketch Contour of Isothermal Enclosure and HAZ** [image 2]



**iii. Returning Data**

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

$$55.1852$$

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

$$990.$$

c) gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )

$$E_1 = \eta \left[ \frac{I * V}{1000 * u} \right]$$

$$0.4125$$

d) dimensionless plate thickness

$$\delta = \frac{u \cdot d}{2 \cdot a}$$

0.0724832

e) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

1.2381

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.761905

$$\theta_{Ar} = N \left[ \frac{(T_{Ar} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.404762

$$\theta_{Ac3} = N \left[ \frac{(T_{Ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

1.4127

f) dimensionless radius vector  $\sigma_5$  [position]

$$\sigma_5 = \frac{u \cdot r}{2 \cdot a}$$

0.0362416  $\sqrt{x^2 + y^2}$

g) dimensionless time  $\tau$

$$\tau = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

0.144966 t

h) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (H_1)}$$

0.839758

—dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q}{\rho c \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (T_c - T_0)}$$

0.839264

i)  $\theta\delta/n_3$  ratio when  $T=T_c$



$$\theta\delta = \frac{\rho c \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (T_c - T_0)}{q}$$

1.19152

j)  $\theta\delta/n_3$  ratio when  $T=T_{avr}$

$$\theta\delta_2 = \frac{\rho c \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (T_{avr} - T_0)}{q}$$

0.482282

k) end-points  $\xi'$  and  $\xi''$  (distances from heat source to the front and the rear of the isothermal enclosure, respectively) [Positions 1-b and 4-b in image 2]

--front end-point  $\xi'$  ( $x_1$ ) [Position 1-b in image 2]

$$\xi_{11} = \text{FindRoot}\left[\xi_1 - \text{Log}\left[\frac{\text{BesselK}[0, \xi_1]}{\theta\delta}\right] == 0, \{\xi_1, 0.5\}\right]$$

{ $\xi_1 \rightarrow 0.252198$ }

--and real dimension  $x_1$  (mm)

$$x_1 = \frac{2 \cdot a \cdot \xi_1}{u};$$

$$x_1 = x_1 /. \xi_{11}$$

6.9588

--back end-point  $\xi''$  ( $x_2$ ) [Position 4-b in image 2]

$$\xi_{2t} = \text{FindRoot}\left[\xi_{2k} - \text{Log}\left[\frac{\text{BesselK}[0, -\xi_{2k}]}{\theta\delta}\right] == 0, \{\xi_{2k}, 0.5\}\right]$$

{ $\xi_{2k} \rightarrow -0.910057 + 3.59335 \times 10^{-23} i$ }

$$\xi_{22} = \xi_{2k} /. \xi_{2t};$$

$$\xi_2 = \text{Re}[\xi_{22}]$$

-0.910057

--and real dimension  $x_2$  (mm)

$$x_2 = \frac{2 \cdot a \cdot \xi_2}{u}$$

-25.1108

l) total length of an isothermal enclosure  $\xi_t$

$$\xi_{t2} = \xi_1 - \xi_2;$$

$$\xi_{t2} = \xi_{t2} /. \xi_{11}$$

1.16226

--and real dimension total length  $x_c$  (mm)

$$x_c = x_1 - x_2$$

$$32.0696$$

m) obtain  $\sigma_{5m}$  dimensionless radius vector at isothermal zone edge

$$\sigma_{5m} = \text{FindRoot}\left[\text{Exp}\left[\frac{\sigma_m * \text{BesselK}[0, \sigma_m]}{\text{BesselK}[1, \sigma_m]}\right] * \text{BesselK}[0, \sigma_m] - 0.5 = 0, \{\sigma_m, 0.5\}\right]$$

$$\{\sigma_m \rightarrow 0.525264\}$$

n) isothermal zone widths:  $\psi_m$  and  $\xi_m$  [image 1] [image 1]

-- $\psi_m$  (dimensionless) [Position 3-b in image 2]

$$\psi_m = \sigma_m * \sqrt{1 - \frac{(\text{BesselK}[0, \sigma_m])^2}{(\text{BesselK}[1, \sigma_m])^2}};$$

$$\Psi_m = \psi_m / . \sigma_{5m}$$

$$0.43209$$

--and real dimension  $y_m$  (mm)

$$y_m = \frac{2 * a * \psi_m}{u}$$

$$11.9225$$

-- $\xi_m$  (dimensionless) [image 2]

$$\xi_m = -\sigma_m * \frac{\text{BesselK}[0, \sigma_m]}{\text{BesselK}[1, \sigma_m]}$$

$$-\frac{\sigma_m \text{BesselK}[0, \sigma_m]}{\text{BesselK}[1, \sigma_m]}$$

$$\xi_m = \xi_m / . \sigma_{5m}$$

$$-0.298665$$

--and real dimension  $x_m$  (mm)

$$x_m = \frac{2 * a * \xi_m}{u}$$

$$-8.24093$$

o) obtain  $\sigma_{5mp}$  dimensionless radius vector at HAZ zone edge

$$\sigma_{5mp} = \text{FindRoot}\left[\text{Exp}\left[\frac{\sigma_{mp} * \text{BesselK}[0, \sigma_{mp}]}{\text{BesselK}[1, \sigma_{mp}]} * \text{BesselK}[0, \sigma_{mp}] - 0.5 = 0, \{\sigma_{mp}, 0.5\}\right]$$

$$\{\sigma_{mp}, 0.5\}$$

$$\{\sigma_{mp} \rightarrow 2.81065\}$$

p) Peak  $\psi_{mp}$  and  $\xi_{mp}$  of HAZ [when  $T_p = T_{act}$ ] (dimensionless) [image 2]

-- $\psi_{mp}$  (dimensionless) [image 2]

$$\psi_{mp} = \sigma_{mp} * \sqrt{1 - \frac{(\text{BesselK}[0, \sigma_{mp}])^2}{(\text{BesselK}[1, \sigma_{mp}])^2}};$$

$$\Psi_{mp} = \psi_{mp} / . \sigma_{5mp}$$

1.44482

--real dimension  $y_{mp}$  (mm)

$$y_{mp} = \frac{2 * a * \Psi_{mp}}{u}$$

39.8664

-- $\xi_{mp}$  (dimensionless) [image 2]

$$\xi_{mp} = -\sigma_{mp} * \frac{\text{BesselK}[0, \sigma_{mp}]}{\text{BesselK}[1, \sigma_{mp}]}$$

$$- \frac{\sigma_{mp} \text{BesselK}[0, \sigma_{mp}]}{\text{BesselK}[1, \sigma_{mp}]}$$

$$\xi_{mp} = \xi_{mp} / . \sigma_{5mp}$$

-2.41086

--real dimension  $x_m$  (mm)

$$x_{mp} = \frac{2 * a * \xi_{mp}}{u}$$

-66.5218

q) Width of fully transformed HAZ [when  $T_p = T_{act}$ ] [image 2]

--dimensionless  $\Delta\psi$ :

$$\Delta\psi = \Psi_{mp} - \Psi_m$$

1.01273

--and real dimension  $\Delta y$  (mm)

$$\Delta y = \Delta\psi * \frac{2 * a}{u}$$

27.9439

r) Intersection point with  $\psi$  (y)-axis (when  $\xi=0$  and  $\sigma=\psi$ ) (mm) [Position 2-b in image 2]

$$\psi\psi1 = \text{FindRoot}[\text{BesselK}[0, \psi c] - \theta\delta == 0, \{\psi c, 0.5\}]$$

{ $\psi c \rightarrow 0.366537$ }

$$Y_{c1} = \frac{2 * a * \psi c}{u};$$

—and real dimension (mm)

$$Y_{c1} = Y_{c1} / . \psi \psi 1$$

10.1137

s) Intersection point of Haz isothermal with  $\psi$  (y)-axis (when  $\xi=\zeta=0$  and  $\sigma=\psi$ ) [Position 2-a in image 2]

$$\psi \psi 2 = \text{FindRoot}[\psi c 2 + \text{Log}[0.52 * \psi c 2] == 0, \{\psi c 2, 0.5\}]$$

{ $\psi c 2 \rightarrow 0.869297$ }

$$Y_{c2} = \frac{2 * a * \psi c 2}{u};$$

—and real dimension (mm)

$$Y_{c2} = Y_{c2} / . \psi \psi 2$$

23.9862

t) weld bead cross sectional area:  $\Lambda_2$  and A

—dimensionless cross section:  $\Lambda_2$  [image 1]

$$\Lambda_2 = 2 * \psi_m * \delta$$

0.0626385

—real dimension cross section: A ( $\text{mm}^2$ )

$$A = \frac{4 * a^2}{u^2} * \Lambda_2$$

47.6899

u) cross sectional area of fully recrystallised HAZ:  $\Delta \Lambda_2$  and  $\Delta A$

—dimensionless cross section:  $\Delta \Lambda_2$

$$\Delta \Lambda_2 = 2 * \Delta \psi * \delta$$

0.146812

—real dimension cross section:  $\Delta A$  ( $\text{mm}^2$ )

$$\Delta A = \frac{4 * a^2}{u^2} * \Delta \Lambda_2$$

111.776

v) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x - T_y$ )

—dimensionless time

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2} \left( \frac{n3}{\delta} \right)^2 * \left( \frac{1}{(\theta_y)^2} - \frac{1}{(\theta_x)^2} \right)$$

225.394

--and real time  $\Delta t$  (sec)

$$\Delta t = \left( \frac{1}{4 * \pi * \lambda * \rho C} \right) * \left( \frac{1}{(T_y - T_0)^2} - \frac{1}{(T_x - T_0)^2} \right) * \left( \frac{q}{u * d} \right)^2$$

8.16866

w) Cooling Rate for a specific temperature  $T_{cool}$  ( $^{\circ}C s^{-1}$ ):

$$CR = \left( \frac{2 * \pi * \lambda * \rho C}{\left( \frac{q}{u * d} \right)^2} \right) * (T_{cool} - T_0)^3$$

2.73691

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Rosenthal solution [1-81]

$$T[x_, y_] = T_0 + \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{-\frac{u * x}{2 * a}} * BesselK\left[0, \frac{u * r}{2 * a}\right];$$

Parametric Rosenthal equation [1-83]

$$\theta[\xi_, \sigma5_] = Exp[-\xi] * BesselK[0, \sigma5] * n3;$$

Calculating dimensionless temperature map for point sources on thin plates

x) real dimensions x-coordinate, y-coordinate, z-coordinate

$$x = \frac{2 * a * \xi}{u};$$

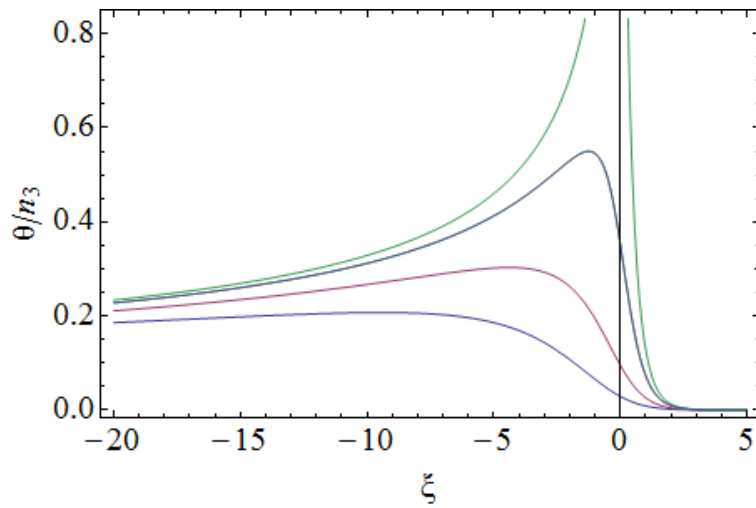
$$y = \frac{2 * a * \psi}{u};$$

$$g = \theta[\xi, \sigma5];$$

$$s = Table[g, {\psi, -3, 1}];$$

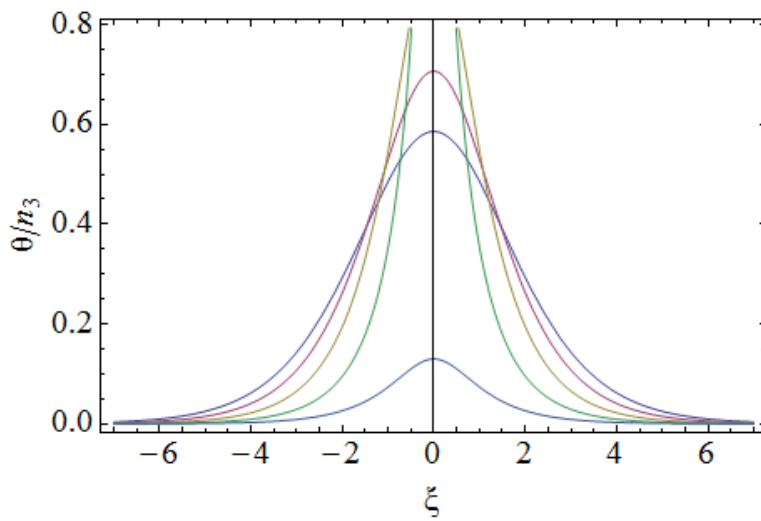
a) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis ( $\xi$ - $\theta$ )

```
h1 = Plot[Evaluate[s, {ξ, -20, 5}], Frame → True,
FrameLabel → {"ξ", "θ/n3"}]
```



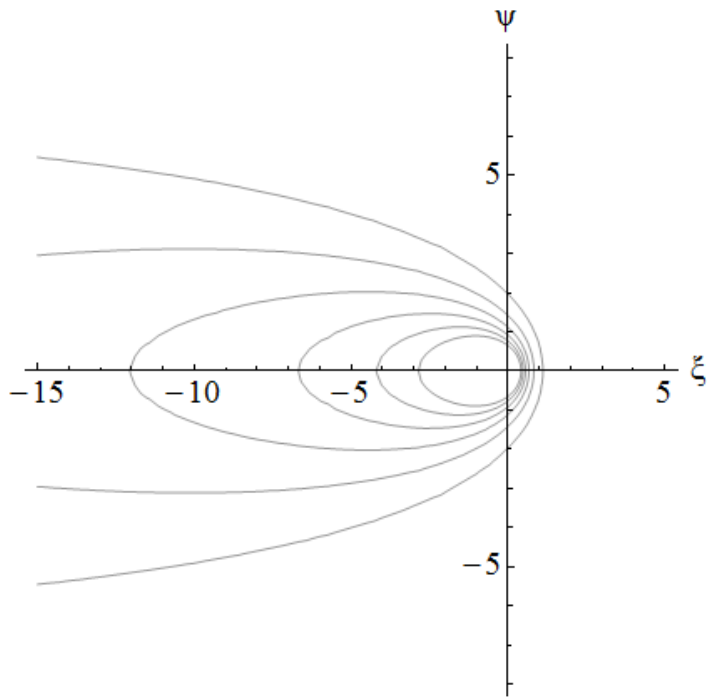
b) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis ( $\psi$ - $\theta$ )

```
h2 = Plot[Evaluate[Table[g, {ξ, -3, 1}], {ψ, -7, 7}], Frame → True,
FrameLabel → {"ξ", "θ/n3"}]
```



c) dimensionless contour diagram: isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane

```
h3 = ContourPlot[g, {ξ, -15, 5}, {ψ, -8, 8}, ContourShading → False, Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"ξ", "ψ"}]
```

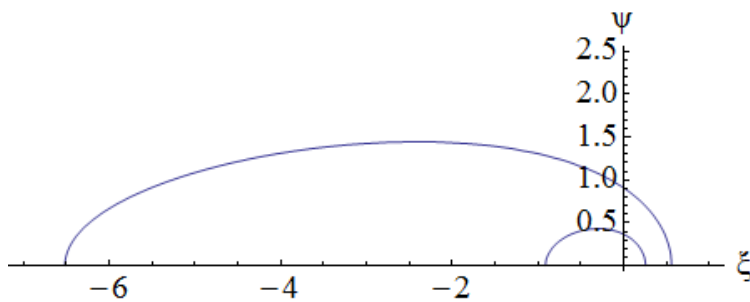


d) dimensionless  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{ar}$  (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

```
he1 = ContourPlot[g == 1, {ξ, -7, 1}, {ψ, 0, 2.5}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"ξ", "ψ"},
  AspectRatio → Automatic];
```

```
he2 = ContourPlot[g == θar, {ξ, -7, 1}, {ψ, 0, 2.5}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"ξ", "ψ"},
  AspectRatio → Automatic];
```

```
m1 = Show[he1, he2]
```



Calculating real temperatures map from parametric equation

$$rr = \sqrt{xr^2 + yr^2};$$

$$\sigma r5 = \frac{u * rr}{2 * a};$$

y) dimensionless  $\xi$ -coordinate,  $\psi$ -coordinate,  $\zeta$ -coordinate

$$\xi r = \frac{u * xr}{2 * a};$$

$$\psi r = \frac{u * yr}{2 * a};$$

```
θr[ξr_, σr5_] = Exp[-ξr] * BesselK[0, σr5] * n3;
```

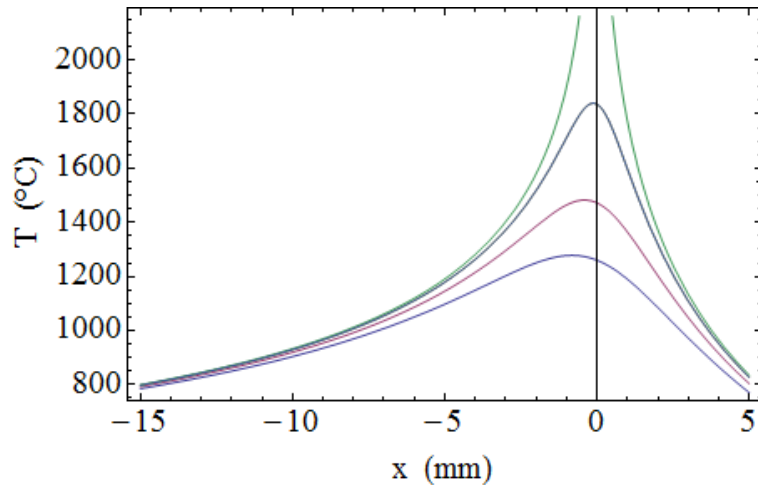
```
gr = T0 + θr[ξr, σr5] * (Tc - T0);
```

```
sr = Table[gr, {yr, -3, 1}];
```

```
zr = 0;
```

e) real temperatures diagram T (°C) - x (mm):

```
hr1 = Plot[Evaluate[sr, {xr, -15, 5}], Frame → True,
  FrameLabel → {"x (mm)", "T (°C)"}]
```



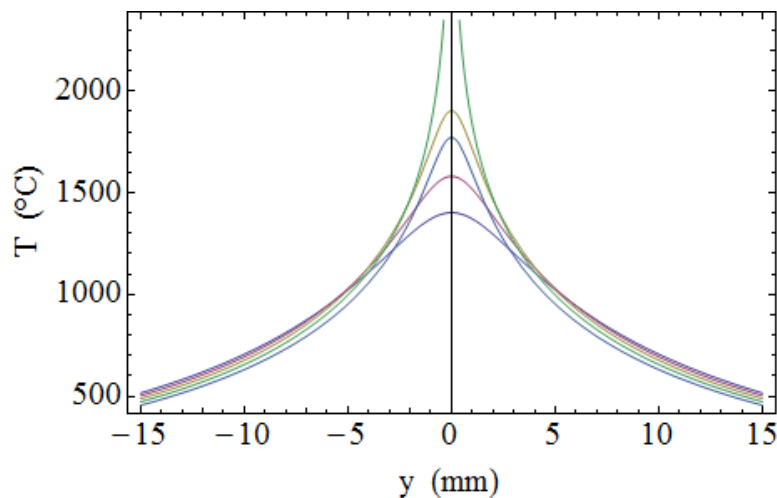
f) real temperatures diagram T (°C) - y (mm):

```
sd = Table[gr, {xr, -3, 1}];
```

In[96]:=

```
hr2 = Plot[Evaluate[sd, {yr, -15, 15}], Frame → True, FrameLabel → {"y (mm)", "T (°C)"}]
```

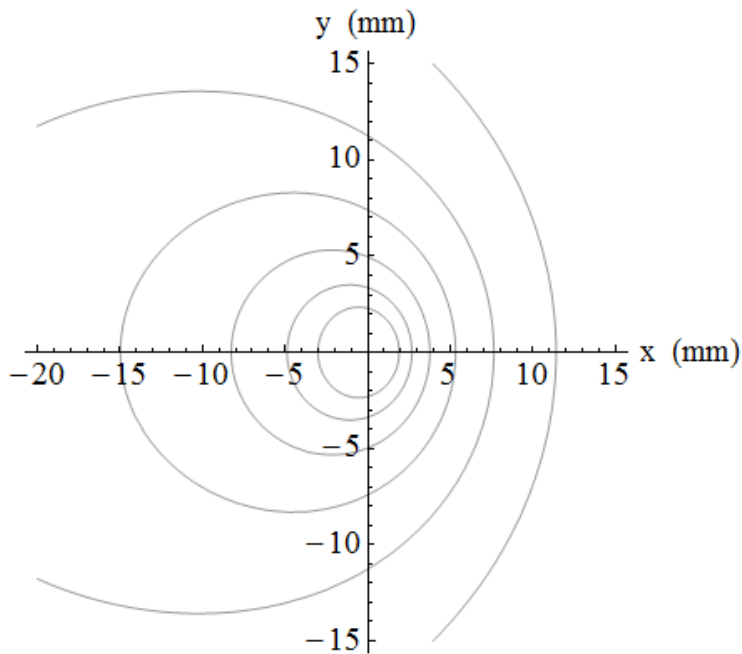
Out[96]=



g) real dimensions contour diagram: isothermal contours in the x - y plane (mm)

```
hc3 = ContourPlot[gr, {xr, -20, 15}, {yr, -15, 15}, ContourShading → False, Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {"
```





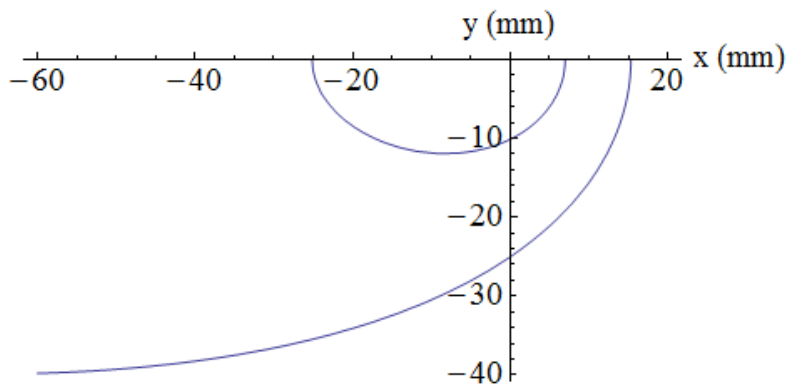
h) real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

```
grr = T0 + theta[r, or5] * (Tc - T0);

he11 = ContourPlot[grr == Tc, {xr, -60, 20}, {yr, -40, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> 1/2];

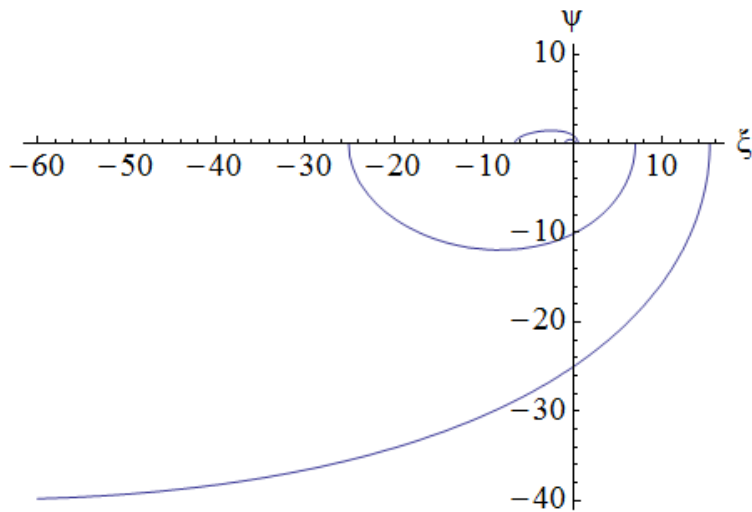
he22 = ContourPlot[grr == TAx, {xr, -60, 20}, {yr, -40, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> 1/2];

m2 = Show[he11, he22]
```



i) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

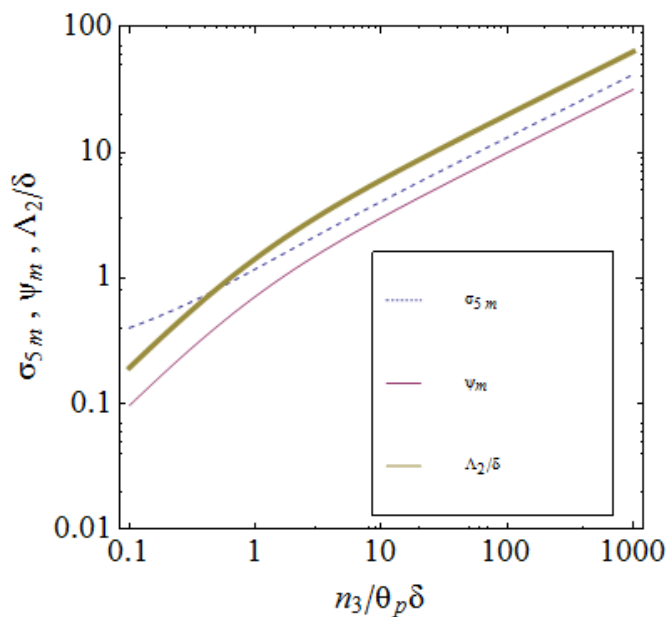
```
Show[m1, m2, PlotRange -> {-40, 10}, AspectRatio -> Automatic]
```



j) dimensionless distance  $\sigma_{5m}$ , half width  $\psi_m$  and cross sectional area  $\Lambda_2$  vs  $n_3 / \theta_p \delta$  diagram

<< PlotLegends`

```
h5 = LogLogPlot[{{
  1
  Exp[ $\frac{\sigma_m \cdot \text{BesselK}[0, \sigma_m]}{\text{BesselK}[1, \sigma_m]}$ ] * BesselK[0,  $\sigma_m$ ] = 0,  $\sigma_m \cdot \sqrt{1 - \frac{(\text{BesselK}[0, \sigma_m])^2}{(\text{BesselK}[1, \sigma_m])^2}}$  = 0,  $2 * \sigma_m \cdot \sqrt{1 - \frac{(\text{BesselK}[0, \sigma_m])^2}{(\text{BesselK}[1, \sigma_m])^2}}$ 
}, {
  AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Dashing[{0.01}], {}, {Thickness[0.01]}}, PlotLegend -> {" $\sigma_{5m}$ ", " $\psi_m$ ", " $\Lambda_2/\delta$ "}
}
```



### iii) medium plate solutions

[aluminium (> 99% Al)]

#### i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in medium thickness plates. By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- Ac<sub>3</sub>-Temperature of steel (°C)

- Ar-Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source (mm)
- Plate thickness (mm)
- Number of imaginary point sources
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

### Output Data

- a) a: thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- b) q: net arc power (J)
- c)  $E_1$ : gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures
- e)  $\delta$ : dimensionless plate thickness
- f)  $\sigma_n$ : dimensionless radius vector
- g)  $\tau$ : dimensionless time
- h)  $n_3$ : dimensionless operating parameter
- i)  $\theta/n_3$  ratio [when  $T=T_c$ ]
- j) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x-T_y$ ) [by temperature]
- k) CR Cooling Rate for a specific temperature  $T_{cool}$  ( $\text{C s}^{-1}$ )
- l) real dimensions coordinates x, y, z
- m) dimensionless coordinates  $\xi, \psi, \zeta$

### Diagrams

Dimensionless temperature maps for point sources on medium thickness plates with parametric equation:

- a)  $\xi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis
- b)  $\psi$ - $\theta$  diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis
- c) isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane ( $\zeta=0$ )
- d) isothermal contours in the  $\psi$ - $\zeta$  plane ( $\xi=0$ )
- e) half - isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane - top view ( $\zeta=0$ )
- f) half - isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane - bottom view ( $\zeta=\delta$ )
- g) isothermal contours in the  $\zeta$ - $\xi$  plane ( $\psi=0$ )
- h)  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{ax}$  (fusion boundary and Ar isotherm)

Real temperature maps for point sources on heavy slabs with parametric equation:

- i) T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - x (mm) diagram
- j) T ( $^{\circ}\text{C}$ ) - y (mm) diagram
- k) real dimension isothermal contours in the x - y plane
- l) real dimension isothermal contours in the y - z plane
- m) real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)
- n) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

### ii. Input Data:

**Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )**

In[1]:=

$T_c = 660$

Out[1]=

660

**Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )**

In[2]:=

$T_0 = 20$

Out[2]=

20

### **Ac<sub>3</sub>-Temperature of steel (°C)**

In[3]:=

**T<sub>ac3</sub> = 910**

Out[3]=

910

### **A<sub>T</sub>-Temperature of aluminium (°C)**

In[4]:=

**T<sub>at</sub> = 275**

Out[4]=

275

### **Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate (°C)**

In[5]:=

**T<sub>cool</sub> = 650**

Out[5]=

650

### **Position distance from source (mm)**

In[6]:=

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2 * n * d)^2} ;$$

### **Plate thickness (mm)**

In[7]:=

**d = 20**

Out[7]=

20

### **Number of imaginary point sources**

In[8]:=

**p = 4**

Out[8]=

4

### **Enthalpy difference of melting point H<sub>c</sub> - H<sub>0</sub> (J mm<sup>-3</sup>) [table 1]**

In[9]:=

**H<sub>1</sub> = 1.73**

Out[9]=

1.73

### **Amperage (A)**

In[10]:=

**I = 260**

Out[10]=

260

### **Voltage (V)**

In[11]:=

**V = 25**

Out[11]=

25

### **Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )**

In[12]:=

**u = 3**

Out[12]=

3

### **Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

In[13]:=

**$\lambda = 0.230$**

Out[13]=

0.23

### **Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

In[14]:=

**$\rho c = 0.0027$**

Out[14]=

0.0027

### **Initial cooling temperature for calculating $\Delta t_{x/y}$ ( $^\circ\text{C}$ )**

In[15]:=

**$T_x = 800$**

Out[15]=

800

### **Final cooling temperature for calculating $\Delta t_{x/y}$ ( $^\circ\text{C}$ )**

In[16]:=

**$T_y = 500$**

Out[16]=

500

### **Efficiency Factor for welding process [table 2]**

In[17]:=

**$\eta = 0.80$**

Out[17]=

0.8

### iii. Returning Data

#### a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

In[18]:=

$$a = \lambda / \rho c$$

Out[18]=

85.1852

#### b) net arc power (J)

In[19]:=

$$q = \eta * I * V$$

Out[19]=

5200.

#### c) gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )

In[20]:=

$$E_1 = N \left[ \frac{I * V}{1000 * u} \right]$$

Out[20]=

2.16667

#### d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and $A_{c3}$ temperatures respectively]

In[21]:=

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

Out[21]=

1.21875

In[22]:=

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

Out[22]=

0.75

In[23]:=

$$\theta_{ar} = N \left[ \frac{(T_{ar} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

Out[23]=

0.398438

In[24]:=

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

Out[24]=

1.39063

### e) dimensionless plate thickness

In[25] :=

$$\delta = \frac{u \cdot d}{2 \cdot a}$$

Out[25] =

0.352174

### f) dimensionless radius vector

In[26] :=

$$\theta n = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 + (\zeta - 2 \cdot \delta \cdot n)^2}$$

Out[26] =

$$\sqrt{(-0.704348 n + \zeta)^2 + \xi^2 + \psi^2}$$

### g) dimensionless time

In[27] :=

$$\tau = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

Out[27] =

0.0528261 t

### h) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

In[28] :=

$$n_3 = \frac{q \cdot u}{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (H_1)}$$

Out[28] =

0.0988873

### —dimensionless operating parameter (by temperature)

In[29] :=

$$n_3 = \frac{q \cdot u}{\rho c \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (T_c - T_0)}$$

Out[29] =

0.0990017

### i) $\theta/n_3$ ratio (when $T=T_c$ )

In[30] :=

$$\theta n = \frac{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (H_1)}{q \cdot u}$$

Out[30] =

10.1125

### j) Cooling time within a specific temperature interval ( $T_x-T_y$ )

### —dimensionless cooling time

In[31] :=

$$\Delta\tau = n3 * \left( \frac{1}{\theta_y} - \frac{1}{\theta_x} \right)$$

Out[31]=

0.0507701

—and real cooling time  $\Delta t$  (sec)

In[32]:=

$$\Delta t = \frac{2 * a * \Delta\tau}{u^2}$$

Out[32]=

0.961081

k) Cooling Rate for a specific temperature  $T_{cool}$  ( $C s^{-1}$ )

In[33]:=

$$CR = \left( \frac{2 * \pi * \lambda}{\frac{q}{u}} \right) * (T_{cool} - T_0)^2$$

Out[33]=

330.908

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

In[34]:=

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

In[35]:=

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

In[36]:=

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

In[37]:=

```
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

#### Rosenthal solution [1-104]

In[38]:=

$$T[x_, y_] := T_0 + \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * e^{\left(\frac{-u * x}{2 * a}\right)} * \text{Sum}\left[\left(\frac{1}{R_n}\right) * e^{\left(\frac{-u * R_n}{2 * a}\right)}, \{n, -p, p\}\right];$$

#### Parametric Rosenthal equation [1-105]

In[39]:=

$$\theta[\xi_, \sigma n_] := \text{Exp}[-\xi] * \text{Sum}\left[\left(\frac{1}{\sigma n}\right) * \text{Exp}[-\sigma n], \{n, -p, p\}\right] * n3;$$

Calculating dimensionless temperature map for point sources on medium thickness plates

t) real dimensions x-coordinate, y-coordinate, z-coordinate

In[40]:=

```
g = \theta[\xi, \sigma n];
```



In[41]:=

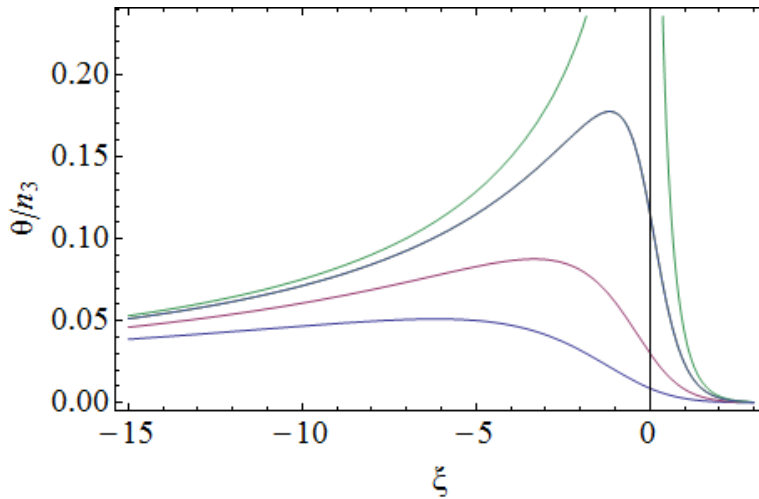
```
s = Table[g, {ψ, -3, 1}];
```

a) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\psi$ -axis ( $\zeta=0$ )

In[42]:=

```
h1 = Plot[Evaluate[s /. ζ → 0, {ξ, -15, 3}], Frame → True, FrameLabel → {"ξ", "θ/n3"}]
```

Out[42]=

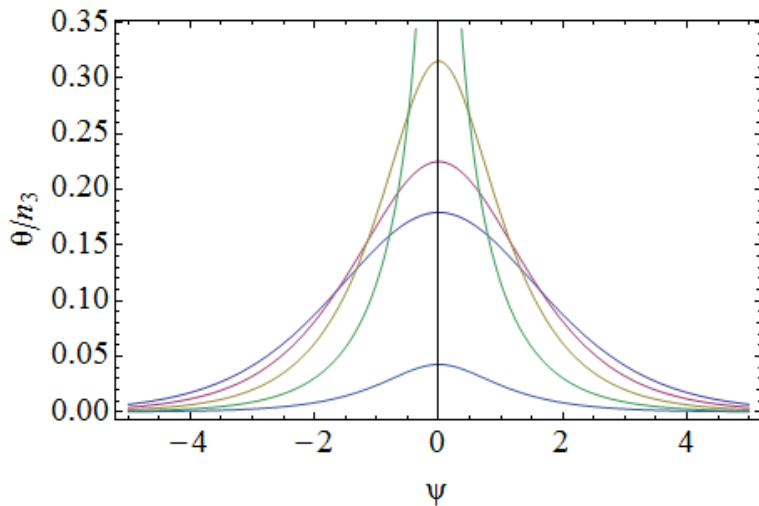


b) dimensionless temperature diagram: vertical sections parallel to  $\xi$ -axis ( $\psi=0$ )

In[43]:=

```
h2 = Plot[Evaluate[Table[g /. ζ → 0, {ξ, -3, 1}], {ψ, -5, 5}],  
Frame → True, FrameLabel → {"ψ", "θ/n3"}]
```

Out[43]=

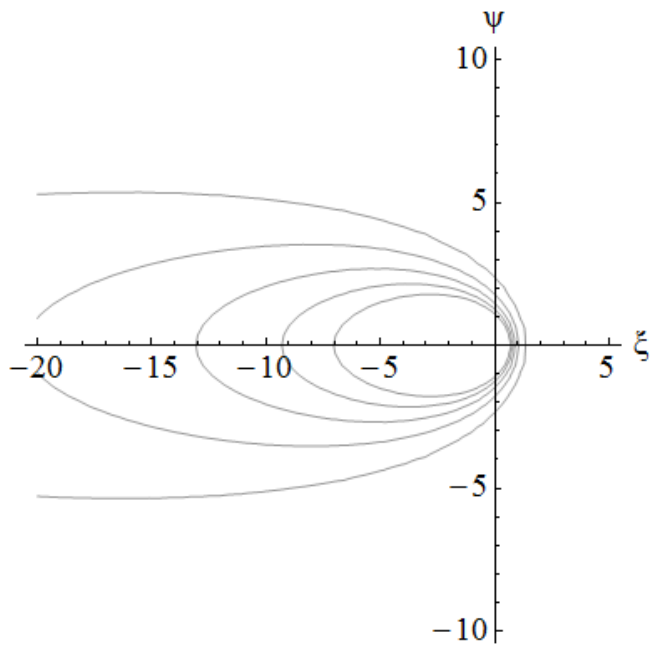


c) dimensionless contour diagram: isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane ( $\zeta=0$ )

In[44]:=

```
h3 = ContourPlot[g /. ζ → 0, {ξ, -20, 5}, {ψ, -10, 10}, ContourShading → False, Axes → True, Frame → False, AxesLabel →
```

Out[44]=

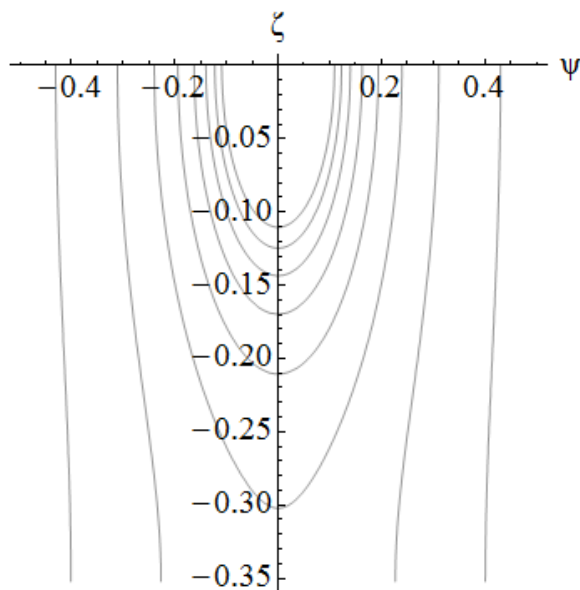


d) dimensionless contour diagram: isothermal contours in the  $\psi$ - $\zeta$  plane ( $\xi=0$ )

In[45]:=

```
h4 = ContourPlot[g /.  $\xi \rightarrow 0$ , { $\psi$ , -0.5, 0.5}, { $\zeta$ , 0, -6}, ContourShading  $\rightarrow$  False, Axes  $\rightarrow$  True, Frame  $\rightarrow$  False, AxesLabel
```

Out[45]=

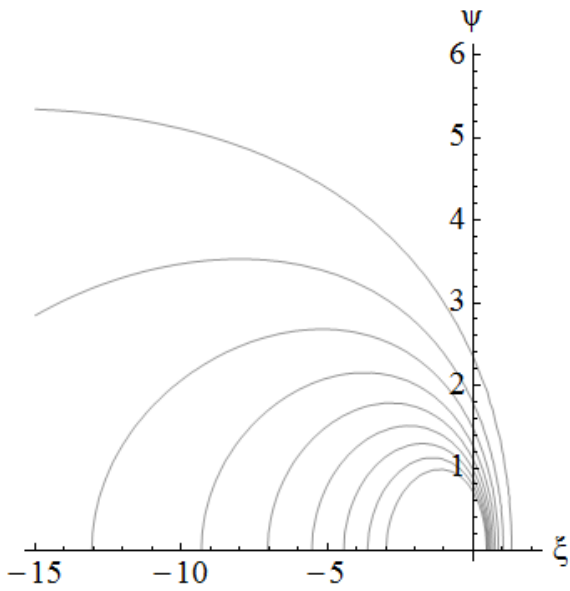


e) dimensionless contour diagrams: isothermal contours in the  $\zeta$ - $\psi$  plane - top view ( $\xi=0$ )

In[46]:=

```
h5 = ContourPlot[g /.  $\zeta \rightarrow 0$ , { $\xi$ , -15, 2}, { $\psi$ , 0, 6}, ContourShading  $\rightarrow$  False, Axes  $\rightarrow$  True, Frame  $\rightarrow$  False, AxesLabel  $\rightarrow$  {"
```

Out[46]=

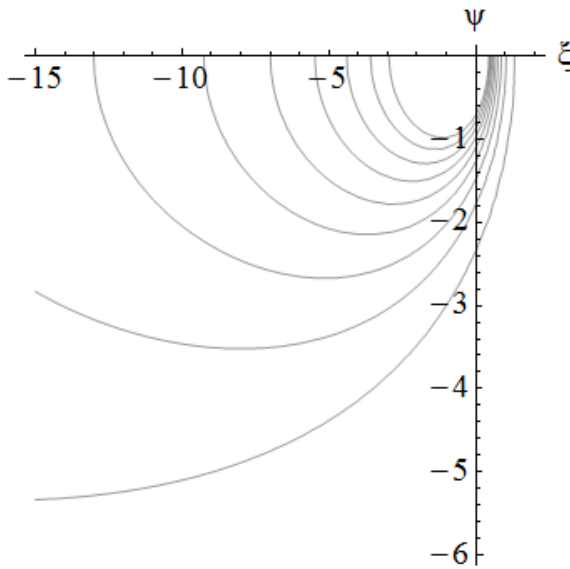


f) dimensionless contour diagrams: isothermal contours in the  $\xi$ - $\psi$  plane - bottom view ( $\zeta=\delta$ )

In[47]:=

```
h6 = ContourPlot[g /.  $\zeta \rightarrow \delta$ , { $\xi$ , -15, 2}, { $\psi$ , -6, 0}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {
```

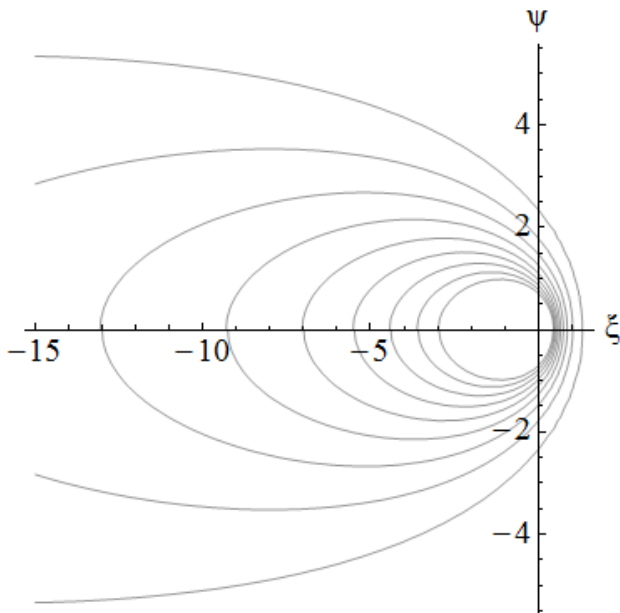
Out[47]=



In[48]:=

```
Show[h5, h6, PlotRange -> All]
```

Out[48]=

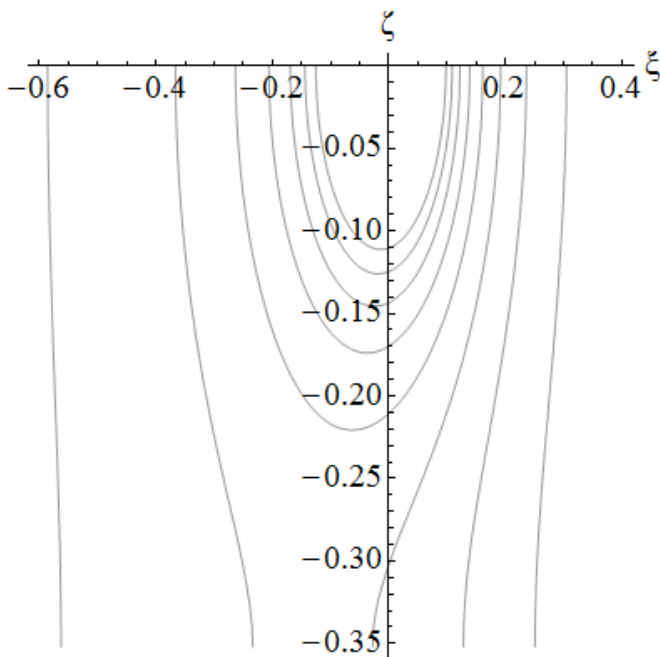


**g) dimensionless contour diagrams: isothermal contours in the  $\zeta$ - $\xi$  plane ( $\psi=0$ )**

In[49]:=

```
h7 = ContourPlot[g /.  $\psi \rightarrow 0$ , { $\xi$ , -0.6, 0.4}, { $\zeta$ , -6, 0},
  ContourShading  $\rightarrow$  False, Axes  $\rightarrow$  True, Frame  $\rightarrow$  False,
  AxesLabel  $\rightarrow$  {" $\xi$ ", " $\zeta$ "}]
```

Out[49]=



**h) dimensionless  $\xi$ - $\psi$  contour diagrams for  $\theta=1$  and  $\theta=\theta_{cr}$  (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)**

In[50]:=

```
 $\zeta = 0;$ 
```

In[51]:=

```
he1 = ContourPlot[g = 1, { $\xi$ , -2, 0.5}, { $\psi$ , 0, 1}, ContourShading  $\rightarrow$  False,
  Axes  $\rightarrow$  True, Frame  $\rightarrow$  False, AxesLabel  $\rightarrow$  {" $\xi$ ", " $\psi$ "},
  AspectRatio  $\rightarrow$  Automatic];
```

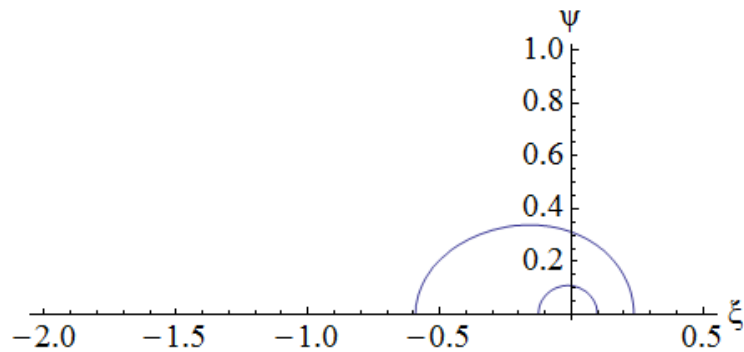
In[52]:=

```
he2 = ContourPlot[g =  $\theta_{sr}$ , {{ $\xi$ , -2, 0.5}}, {{ $\psi$ , 0, 1}}, ContourShading → False,
  Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {" $\xi$ ", " $\psi$ "},
  AspectRatio → Automatic];
```

In[53]:=

```
m1 = Show[he1, he2]
```

Out[53]=



### Calculating real temperatures map from parametric equation

In[54]:=

```
Clear[ $\zeta$ ]
```

#### u) dimensionless $\xi$ -coordinate, $\psi$ -coordinate, $\zeta$ -coordinate

In[55]:=

$$\xi = \frac{u \cdot x}{2 \cdot a};$$

In[56]:=

$$\psi = \frac{u \cdot y}{2 \cdot a};$$

In[57]:=

$$\zeta = \frac{u \cdot z}{2 \cdot a};$$

In[58]:=

$$gr = T_0 + \theta[\xi, \psi] \cdot (T_c - T_0);$$

In[59]:=

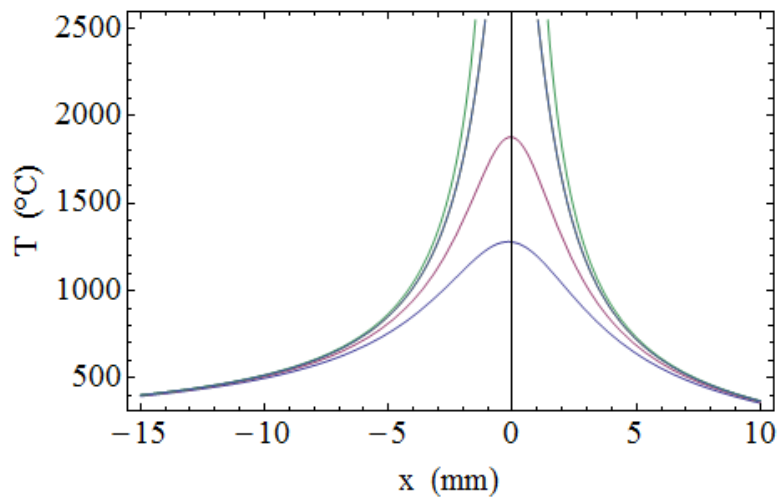
```
sr = Table[gr, {y, -3, 1}];
```

#### i) real temperatures diagram T (°C) - x (mm):

In[60]:=

```
hr1 = Plot[Evaluate[sr /. z → 0, {x, -15, 10}], Frame → True,
  FrameLabel → {"x (mm)", "T (°C)"}]
```

Out[60]=



**j) real temperatures diagram T (°C) - y (mm):**

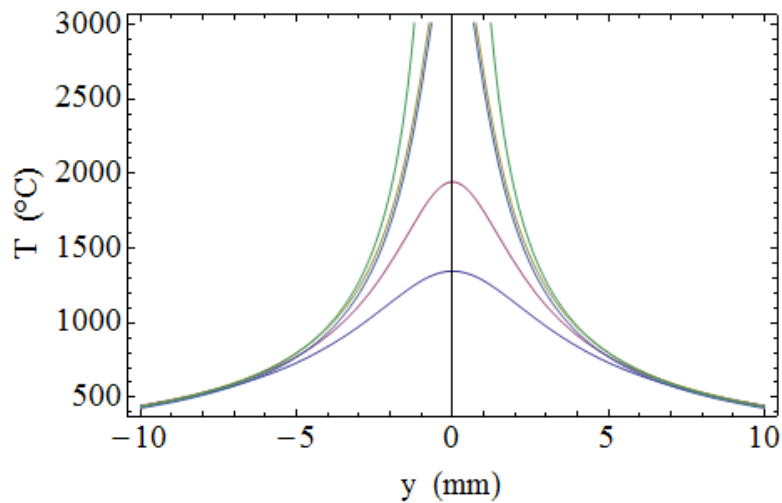
*In[61]:=*

```
sd = Table[gr, {x, -3, 1}];
```

*In[62]:=*

```
hr2 = Plot[Evaluate[sd /. z -> 0, {y, -10, 10}], Frame -> True, FrameLabel -> {"y (mm)", "T (°C)"}]
```

*Out[62]=*

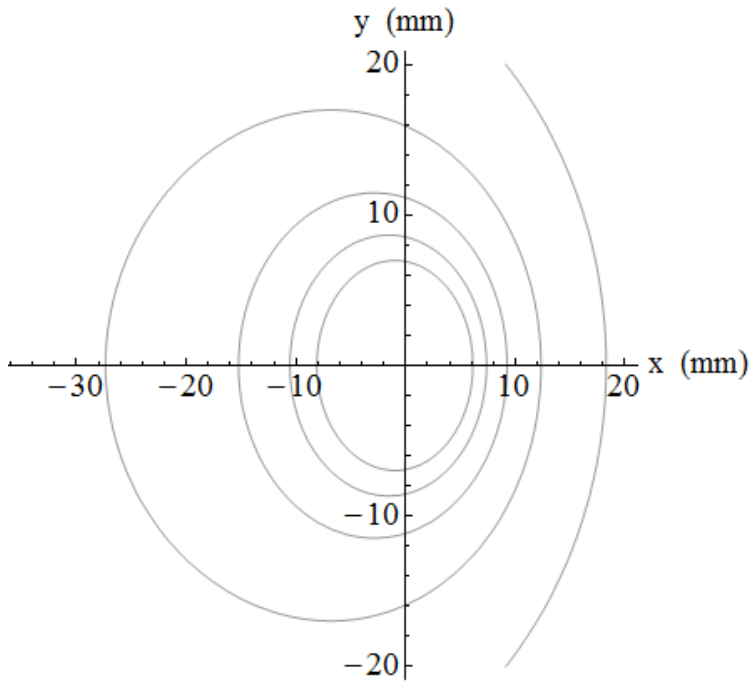


**k) real dimensions contour diagram: isothermal contours in the x - y plane (mm)**

*In[63]:=*

```
hc3 = ContourPlot[gr /. z -> 0, {x, -35, 20}, {y, -20, 20}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}]
```

*Out[63]=*

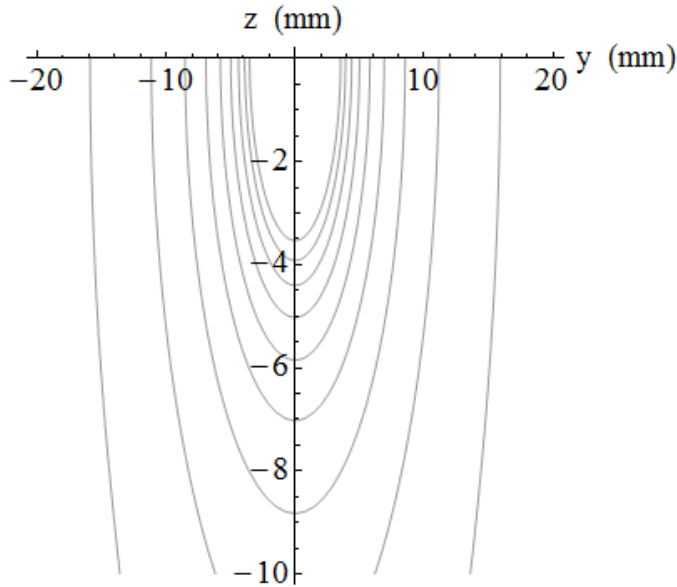


l) real dimensions contour diagram: isothermal contours in the y - z plane (mm)

In[64]:=

```
hc4 = ContourPlot[gr /. x -> 0, {y, -20, 20}, {z, 0, -10}, ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False, AxesLabel
```

Out[64]=



m) real dimension x - y (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $\Gamma=T_{Ax}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_r$  isotherm)

In[65]:=

```
z = 0;
```

In[66]:=

```
hc11 = ContourPlot[gr = T_c, {x, -40, 20}, {y, -30, 0},
  ContourShading -> False, Axes -> True, Frame -> False,
  AxesLabel -> {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio -> Automatic];
```

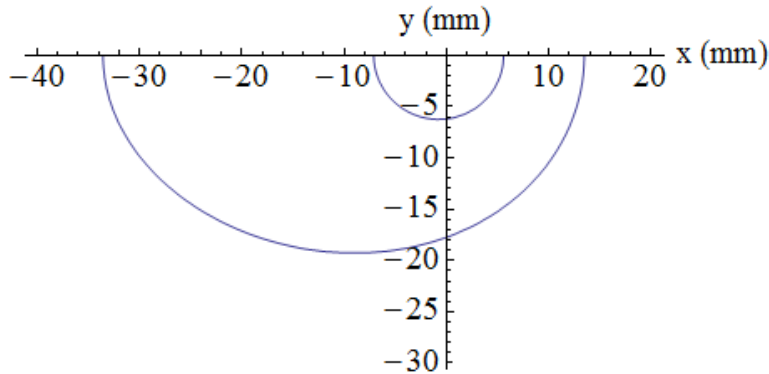
In[67]:=

```
he22 = ContourPlot[gr = Tac, {x, -40, 20}, {y, -30, 0},
  ContourShading → False, Axes → True, Frame → False,
  AxesLabel → {"x (mm)", "y (mm)"}, AspectRatio → Automatic];
```

In[68]:=

```
m2 = Show[he11, he22]
```

Out[68]=

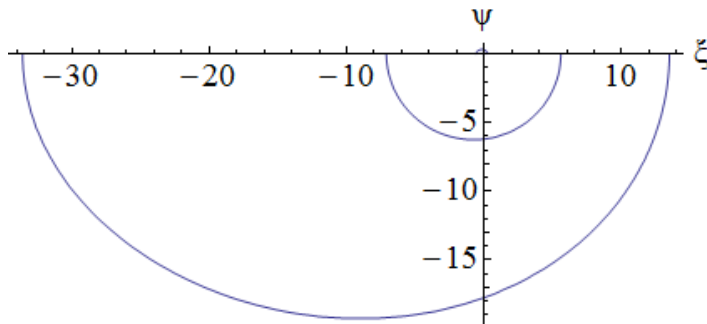


n) combined dimensionless ( $\xi$ - $\psi$ ) and real dimension  $x$ - $y$  (mm) contour diagrams for  $T=T_c$  and  $T=T_{Ac3}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) (fusion boundary and  $A_{c3}$  isotherm)

In[69]:=

```
Show[m1, m2, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]
```

Out[69]=



#### iv) Simplified solution for a fast-moving high power source on a semi-infinite slab (thick plate solution) [low alloy steel]

##### i. Intro:

This program produces results for the model of a fast-moving high power source on a semi infinite slab (thick plate solution). By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

##### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_{c3}$ -Temperature of steel ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $A_r$ -Temperature of aluminium ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Specific Temperature for Calculation of Cooling Rate ( $^{\circ}\text{C}$ )
- Position distance from source: two-dimensional radius vector in  $y$ - $z$  plane (mm)
- Distance outside the fusion boundary (mm)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^{\circ}\text{C}$ )



- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

### Output Data

- a) a: thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )
- b) q: net arc power (J)
- c)  $E_1$ : gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures
- e)  $\sigma$ : dimensionless radius vector
- f)  $\tau$ : dimensionless time
- g)  $n_3$ : dimensionless operating parameter
- h)  $\sigma_{4m}$ : dimensionless radius vector at isothermal zone edge
- i) r: radius vector in the y-z plane
- j)  $\theta_{\text{pout}}$ : peak temperature at xx distance outside the fusion boundary
- k) Dimensionless cooling time  $\Delta \tau_x$  for a thermal cycle from  $\theta_{\text{ac3}}$  to  $\theta_{\text{pout}}$  and  $\theta_{\text{ac3}}$  again
- l) Cooling time  $\Delta t_x$  (real) [sec]

### Diagrams

Dimensionless temperature maps for point sources on thick plates with fast-moving high power source with parametric equation:

- a) calculated dimensionless temperature maps+peak for high power sources on thick plate (unrelated to  $n_3$ ) -- with logarithmic diagram
- b) general graphical representation of the weld thermal programme by combining the dimensionless rosenthal equation and peak temperatures equation  $\frac{\theta}{\theta_p}$

### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) (°C)

$$T_c = 1520$$

$$1520$$

Initial Temperature (°C)

$$T_0 = 20$$

$$20$$

$A_{c3}$ -Temperature of steel

$$T_{\text{ac3}} = 910$$

$$910$$

$A_r$ -Temperature of aluminium (°C)

$$T_{\text{ar}} = 275$$

$$275$$

Position distance from source: two-dimensional radius vector in y-z plane (mm)

$$r1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Distance outside the fusion boundary (mm)

$$xx = 1$$

$$1$$

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]**

$$H_1 = 7.5$$

7.5

**Amperage (A)**

$$I = 400$$

400

**Voltage (V)**

$$V = 25$$

25

**Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )**

$$u = 5$$

5

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

$$T_x = 800$$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ C$ )**

$$T_y = 500$$

500

**Efficiency Factor for welding process [table 2]**

$$\eta = 0.95$$

0.95

**iii. Returning Data**

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

9500.

c) gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ m}^{-1}$ )

$$E_1 = N \left[ \frac{I * V}{1000 * u} \right]$$

2.

d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling, Ar and  $A_{c3}$  temperatures respectively]

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.52

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.32

$$\theta_{ar} = N \left[ \frac{(T_{ar} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.17

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.593333

e) dimensionless radius vector

$$\sigma = \frac{u * r_1}{2 * a}$$

0.5 r1

f) dimensionless time

$$\tau_1 = \frac{u^2 * t}{2 * a}$$

2.5 t

g) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q * u}{4 * \pi * a^2 * (H_1)}$$

20.1596

--dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q \cdot u}{\rho c \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (T_c - T_0)}$$

20.1596

h) dimensionless radius vector at isothermal zone edge - by differentiating the dimensionless rosenthal solution and noting that the 2-D flow is justified when  $\theta_p \leq 1$  we obtain  $\sigma_{4m}$ :

$$\sigma_{4m} = \left( \frac{2 \cdot n_3}{e \cdot 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.85131

i) which gives the 2-D radius vector in the y-z plane: r

$$r = \frac{2 \cdot a}{u} \cdot \sigma_{4m}$$

7.70263

j) dimensionless peak temperature at xx distance outside the fusion boundary is  $\theta_{pout}$ :

$$\theta_{pout} = \frac{2 \cdot n_3}{e} \cdot \left( \frac{2 \cdot a}{u \cdot (r + xx)} \right)^2$$

0.783388

--real peak temperature at xx distance outside the fusion boundary:  $T_p$

$$T_p = T_0 + \theta_{pout} \cdot (T_c - T_0)$$

1195.08

k) Cooling time  $\Delta\tau_c$  for a thermal cycle from  $\theta_{ac3}$  to  $\theta_{pout}$  and  $\theta_{ac3}$  again:

$$\frac{\theta_{ac3}}{\theta_{pout}} :$$

$$\theta_{\theta p} = \frac{\theta_{ac3}}{\theta_{pout}}$$

0.757394

--Finding where ordinate  $\frac{\theta_{ac3}}{\theta_{pout}}$  intersects with the curveline of  $\frac{\theta}{\theta_p}$  equation:

$$\theta_1 = \text{NSolve}\left[e \cdot \frac{(\sigma_{4m})^2}{2 \cdot \tau \tau} \cdot \text{Exp}\left[-\frac{(\sigma_{4m})^2}{2 \cdot \tau \tau}\right] - \theta_{\theta p} == 0, \tau \tau\right]$$

InverseFunction::ifun :

Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>

Solve::ifun :

Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

{{ττ → 3.82057}, {ττ → 17.3654}}

$$\sigma_{t1} = \frac{2 * \tau\tau}{(\sigma_{4m})^2};$$

σt1 = σt1 /. θ1[[1]]

0.515157

$$\sigma_{t2} = \frac{2 * \tau\tau}{(\sigma_{4m})^2};$$

σt2 = σt2 /. θ1[[2]]

2.34151

—Finding inbetween distance:

$$w = \sigma_{t2} - \sigma_{t1}$$

1.82636

—Cooling time  $\Delta\tau_{\tau}$  (dimensionless):

$$\Delta\tau_{\tau} = \frac{n_3}{e * \theta\theta p} * w$$

17.8835

l) Cooling time  $\Delta t_{\tau}$  (sec):

$$\Delta t_{\tau} = \frac{2 * a}{u^2} * \Delta\tau_{\tau}$$

7.15339

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

```
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle → {FontSize → 20}];
```

Rosenthal solutions [1-73]

$$T1[x_, y_] := T_0 + \frac{q}{2 * \pi * \lambda} * \left(\frac{1}{t}\right) * e^{\left(\frac{-(x)^2}{4 * a * t}\right)}$$

$$T2[x_, y_] := T_0 + \frac{2 * \frac{q}{u}}{\rho * c * (4 * \pi * a * t)} * e^{\left(\frac{-(x)^2}{4 * a * t}\right)}$$

Parametric Rosenthal equation [1-74]

$$\theta[\tau_, \sigma_] := \left(\frac{1}{\tau}\right) * e^{\left(\frac{-(\sigma)^2}{2 * \tau}\right)} * n3;$$

$$g = \theta[\tau, \sigma];$$

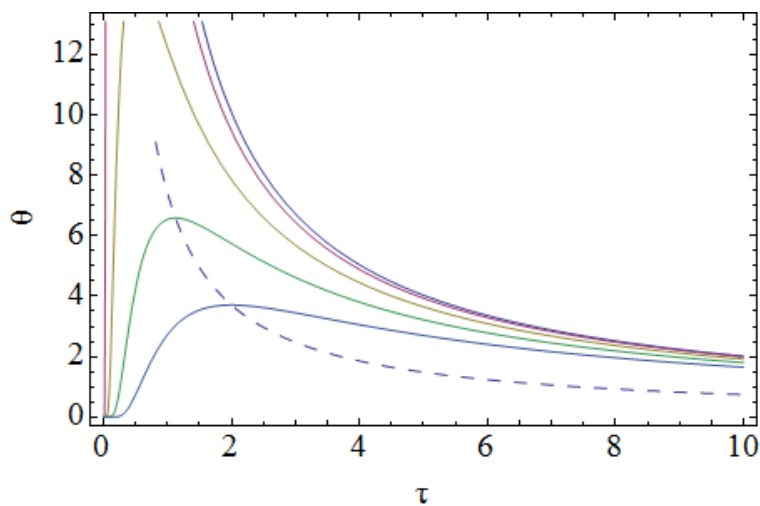
$$s = \text{Table}[g, \{\tau1, 0, 4\}];$$

a) calculated dimensionless temperature maps+peak for high power sources on thick plates

$$h1 = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{\tau, 0, 10\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\tau, \theta\}];$$

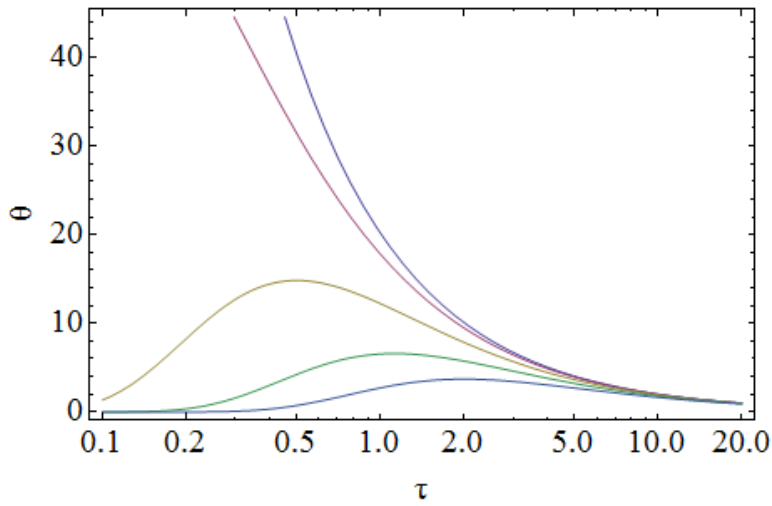
$$h2 = \text{Plot}\left[\frac{1}{e * \tau} * n3, \{\tau, 0, 10\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Dashing}[\{0.02\}]\}, \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\tau, \theta\}\right];$$

Show[h1, h2]



—logarithmic diagram

$$h3 = \text{LogLinearPlot}[\text{Evaluate}[s, \{\tau, 0.1, 20\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\tau, \theta\}]$$



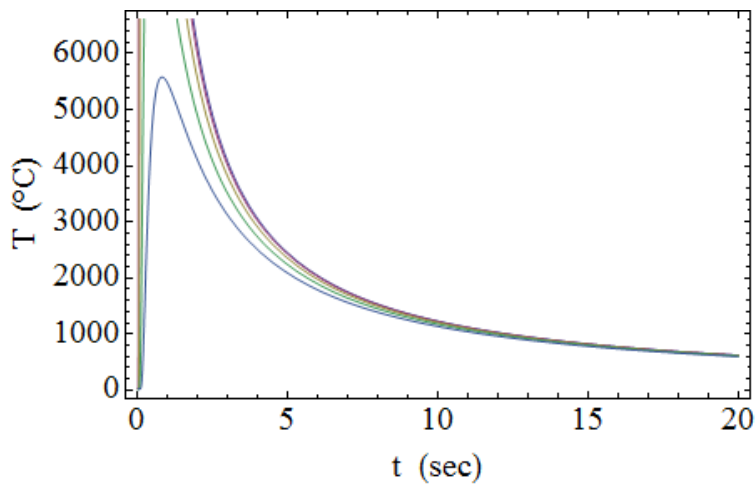
—real temperature map for high power sources on thick plates

$$\tau = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

$$2.5 \tau$$

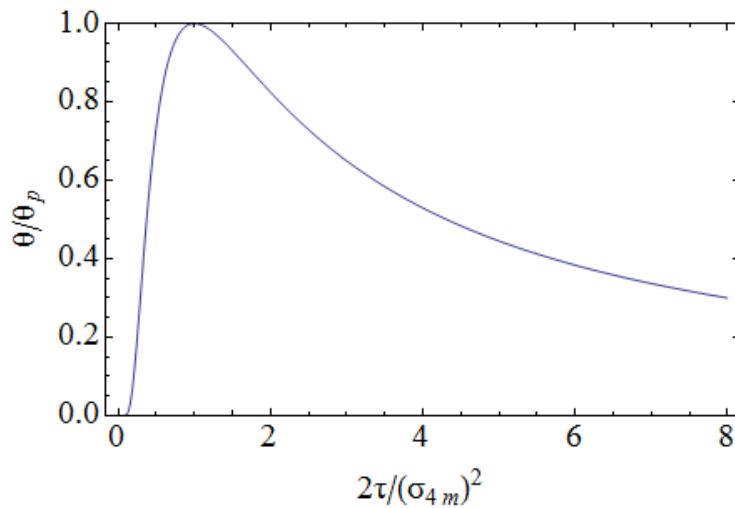
$$T_d = T_0 + s \cdot (T_c - T_0);$$

hd = Plot[Evaluate[Td, {t, 0, 20}], Frame → True, FrameLabel → {"t (sec)", "T (°C)"}]



b) general graphical representation of the weld thermal programme by combining the dimensionless rosenthal equation and peak temperatures equation  $\frac{\theta}{\theta_p}$ :

t1 = Plot[ $e \cdot \frac{1}{\sigma \tau^4} \cdot \text{Exp}\left[-\frac{1}{\sigma \tau^4}\right]$ , {στ<sup>4</sup>, 0, 8}, PlotRange → {0, 1},  
Frame → True, FrameLabel → {"2τ/(σ<sub>4m</sub>)<sup>2</sup>", "θ/θ<sub>p</sub>"}]



**v) Simplified solution for a fast-moving high power source in a thin sheet (thin plate solution)**  
**[high alloy steel]**

**i. Intro:**

This program produces results for the model of a fast-moving high power source in thin sheets (thin plates solution). By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

**Input Data**

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- $A_{c3}$ -Temperature of steel (°C)
- $A_r$ -Temperature of aluminium (°C)
- Sheet thickness (mm)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  (°C)
- Efficiency Factor for welding process [table 2]

**Output Data**

- a) a: thermal diffusivity ( $mm^2\ s^{-1}$ )
- b) q: net arc power (J)
- c)  $E_1$ : gross heat input per unit length of the weld ( $kJ\ mm^{-1}$ )
- d)  $\theta$ : dimensionless temperatures
- e)  $\delta$ : dimensionless plate thickness
- f)  $\tau$ : dimensionless time
- g)  $n_3$ : dimensionless operating parameter
- h) dimensionless  $\psi$ -coordinate
- i)  $\tau_m$  and  $\psi_m$ : intersection points
- j) Dimensionless cooling time  $\Delta \tau_c$  for a thermal cycle from  $\theta_y$  to  $\theta_x$  and  $\theta_y$  again
- k) Cooling time  $\Delta t_c$  (real) [sec]

**Diagrams**

Dimensionless temperature maps for point sources in thin plates with fast-moving high power source with parametric equation:  
 a) dimensionless temperature maps+peak for high power sources on thick plate (unrelated to  $n_3$ )-- with logarithmic diagram  
 b) general graphical representation of the weld thermal programme by combining the dimensionless rosenthal equation and peak temperatures equation  $\frac{\theta}{\theta_p}$ :

**ii. Input Data:**



**Liquidus Temperature (reference point) (°C)**

$$T_c = 1500$$

1500

**Initial Temperature (°C)**

$$T_0 = 20$$

20

**$A_{c3}$ -Temperature of steel**

$$T_{Ac3} = 910$$

910

**$A_T$ -Temperature of aluminium (°C)**

$$T_{At} = 275$$

275

**Sheet thickness (mm)**

$$d = 2$$

2

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1]**

$$H_1 = 7.4$$

7.4

**Amperage (A)**

$$I = 80$$

80

**Voltage (V)**

$$V = 25$$

25

**Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )**

$$u = 5$$

5

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.020$$

$$0.02$$

Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )

$$\rho c = 0.005$$

$$0.005$$

Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )

$$T_x = 850$$

$$850$$

Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )

$$T_y = 650$$

$$650$$

Efficiency Factor for welding process [table 2]

$$\eta = 0.8$$

$$0.8$$

### iii. Returning Data

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

$$4.$$

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

$$1600.$$

c) gross heat input per unit length of the weld ( $\text{kJ mm}^{-1}$ )

$$E_1 = \eta \left[ \frac{I * V}{1000 * u} \right]$$

$$0.4$$

d) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling,  $A_r$  and  $A_{c3}$  temperatures respectively]

$$\theta_x = \eta \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

$$0.560811$$

$$\theta_y = N \left[ \frac{(T_y - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.425676

$$\theta_{ax} = N \left[ \frac{(T_{ax} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.172297

$$\theta_{ac3} = N \left[ \frac{(T_{ac3} - T_0)}{(T_c - T_0)} \right]$$

0.601351

e) dimensionless plate thickness

$$\delta = \frac{u \cdot d}{2 \cdot a}$$

1.25

f) dimensionless time

$$\tau_1 = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

3.125 t

g) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (H_1)}$$

4.30148

—dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q}{\rho c \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot d \cdot (T_c - T_0)}$$

4.30148

h) dimensionless  $\psi$ -coordinate

$$\psi = \frac{u \cdot y}{2 \cdot a}$$

0.625 y

i) by differentiating the dimensionless rosenthal solution and noting that the 1-D flow is justified when  $\theta_p \leq 1$  and  $\theta_p = \theta_p$  we obtain intersection points:  $\tau_m$  and  $\psi_m$

$$\tau_m = \frac{\pi}{2 \cdot \epsilon} \left( \frac{n_3}{\theta_x} \right)^2$$

33.9961

$$\psi_m = (\tau_m)^{\frac{1}{2}}$$

5.83062

j) Finding cooling time  $\Delta\tau_c$  for a thermal cycle from  $\theta_y$  to  $\theta_x$  and  $\theta_y$  again:

$$\theta\theta_p = \frac{\theta_y}{\theta_x}$$

0.759036

—Finding where ordinate for  $\frac{\theta_y}{\theta_x}$  intersects with the curviline of  $\frac{\theta}{\theta_p}$  equation:

$$\theta_1 = \text{NSolve}\left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\tau\tau}} * \psi_m * \text{Exp}\left[-\frac{(\psi_m)^2}{2 * \tau\tau}\right] - \theta\theta_p == 0, \tau\tau\right]$$

InverseFunction::ifun :

Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>

Solve::ifun :

Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

{{ $\tau\tau \rightarrow 13.9$ }, { $\tau\tau \rightarrow 121.153$ }}

$$\sigma\tau_1 = \frac{2 * \tau\tau}{(\psi_m)^2};$$

$$\sigma\tau_1 = \sigma\tau_1 /. \theta_1[[1]]$$

0.817737

$$\sigma\tau_2 = \frac{2 * \tau\tau}{(\psi_m)^2};$$

$$\sigma\tau_2 = \sigma\tau_2 /. \theta_1[[2]]$$

7.12745

—Finding in between distance:

$$w = \sigma\tau_2 - \sigma\tau_1$$

6.30971

—Cooling time  $\Delta\tau_c$  (dimensionless):

$$\Delta\tau_c = \frac{(\psi_m)^2}{2} * w$$

107.253

k) Cooling time  $\Delta t_c$  (real) (sec):

$$\Delta t_c = \frac{2 * a}{u^2} * \Delta\tau_c$$

34.3209

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];  
  
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];  
  
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];  
  
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Rosenthal solutions [1-73]

$$T[y_] := T_0 + \frac{\frac{q}{a*d}}{\rho c \sqrt{4 \pi a t}} * e^{\left(\frac{-(y)^2}{4 a t}\right)}$$

Parametric Rosenthal equation [1-74]

$$\theta_5[\tau, \psi] := \sqrt{\frac{\pi}{2 * \tau}} * e^{\left(\frac{-(\psi)^2}{2 * \tau}\right)} * n3;$$

$g = \theta_5[\tau, \psi];$

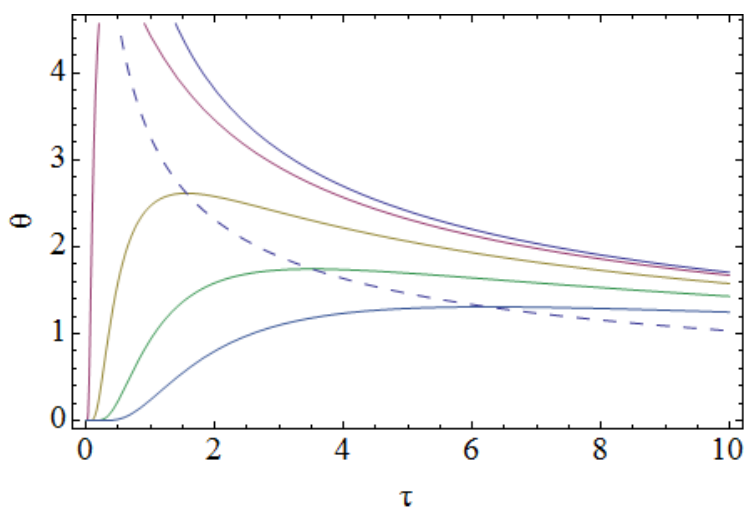
$s = \text{Table}[g, \{y, 0, 4\}];$

a) dimensionless temperature maps+peak for high power sources on thin plates

```
h1 = Plot[Evaluate[s, {\tau, 0, 10}], Frame -> True, FrameLabel -> {"\tau", "\theta"}];
```

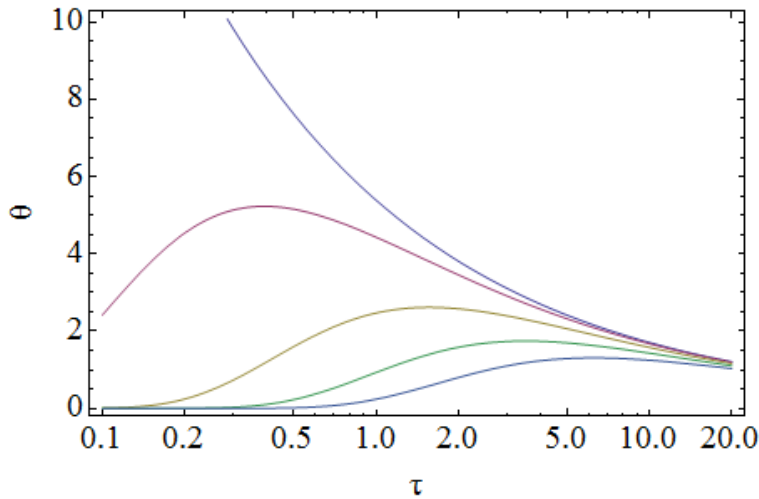
```
h2 = Plot[\sqrt{\frac{\pi}{2 * e * \tau}} * n3, {\tau, 0, 10}, PlotStyle -> {Dashing[{0.02}]}, Frame -> True, FrameLabel -> {"\tau", "\theta"}];
```

```
Show[h1, h2]
```



—logarithmic diagram

```
h3 = LogLinearPlot[Evaluate[s, {τ, 0.1, 20}], Frame → True, FrameLabel → {"τ", "θ"}]
```



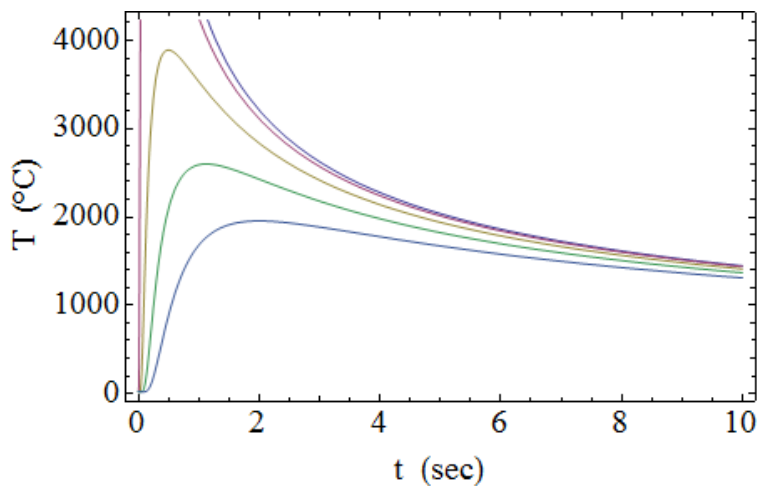
—real temperature map for high power sources on thin plates

$$\tau = \frac{u^2 \cdot t}{2 \cdot a}$$

$$3.125 \tau$$

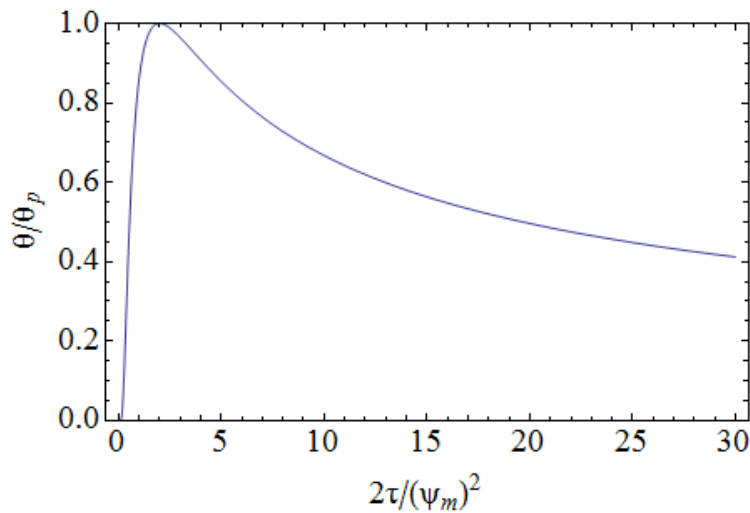
$$T_d = T_0 + s \cdot (T_c - T_0);$$

```
hd = Plot[Evaluate[Td, {t, 0, 10}], Frame → True, FrameLabel → {"t (sec)", "T (°C)"}]
```



b) general graphical representation of the weld thermal programme by combining the dimensionless rosenthal equation and peak temperatures equation  $\frac{\theta}{\theta_p}$ :

```
t1 = Plot[ $\sqrt{\frac{2 \cdot \epsilon}{\psi \psi}} \cdot \text{Exp}\left[-\frac{1}{\psi \psi}\right]$ , {ψψ, 0, 30}, PlotRange → {0, 1},  
Frame → True, FrameLabel → {"2τ/(ψm)2", "θ/θp"}]
```



## vi) assessment of bead morphology

### a) fast moving power source conditions

[low alloy steel]

#### i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in thick plates. By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1.1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Average Rates of Volume Deposition in arc welding [k/p] ( $A^{-1}s^{-1}$ ) [table 1.7]
- Bead penetration coefficient of welding process [table 1.8]
- Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor "ρc" ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

#### -Output Data

- a) a: thermal diffusivity
- b) q: net arc power
- c) dimensionless operating parameter

#### Fast moving power source conditions

- d)  $\sigma_{4m}$ : dimensionless radius vector
- e) Bm: area of base material ( $mm^2$ )
- f) Dm: area of deposited metal ( $mm^2$ )
- g) Mix1: mixing ratio B/(B+D)
- h) Mix2: mixing ratio D/(B+D)
- i) h: bead penetration (mm)

#### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) (°C)

$$T_c = 1520$$

$$1520$$

Initial Temperature (°C)

$$T_0 = 20$$

20

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1.1]**

$$H_1 = 9.5$$

9.5

**Amperage (A)**

$$I = 600$$

600

**Voltage (V)**

$$V = 30$$

30

**Average Rates of Volume Deposition in arc welding [k/p] ( $A^{-1}\ s^{-1}$ ) [table 1.7]**

$$k = 0.7$$

0.7

**Bead penetration coefficient of welding process [table 1.8]**

$$C_x = 0.024$$

0.024

**Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )**

$$u = 5$$

5

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.95$$

0.95



### iii. Returning Data

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

17100.

c) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q * u}{4 * \pi * a^2 * (H_1)}$$

28.6479

---dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q * u}{\rho c * 4 * \pi * a^2 * (T_c - T_0)}$$

2.19634

### Fast moving power source conditions

d) dimensionless radius vector  $\sigma_{4m}$

$$\sigma_{4m} = \sqrt{\frac{2 n_3}{\epsilon}}$$

4.59107

e) area of base material ( $\text{mm}^2$ )

$$B_m = \frac{\left(\frac{2 * a * \sigma_{4m}}{u}\right)^2 * \pi}{2}$$

132.437

f) area of deposited metal  $D_m$  ( $\text{mm}^2$ )

$$D_m = \frac{k * I}{u}$$

84.

g) mixing ratio B/(B+D)

$$\text{Mix1} = \frac{B_m}{B_m + D_m}$$

0.611896

h) mixing ratio D/(B+D)

$$\text{Mix2} = \frac{D_m}{B_m + D_m}$$

0.388104

i) bead penetration (mm)

$$h = Cx \left( \frac{I^4}{u \star V^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

7.35657

## vi) assessment of bead morphology

### b) thick plate conditions

[low alloy steel]

i. Intro:

This program produces results and diagrams for the model of arc welding in thick plates. By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

#### Input Data

- Liquidus Temperature (reference point) (°C)
- Initial Temperature (°C)
- Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  (J mm<sup>-3</sup>) [table 1.1]
- Amperage (A)
- Voltage (V)
- Average Rates of Volume Deposition in arc welding [k/p] (A<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>) [table 1.7]
- Bead penetration coefficient of welding process [table 1.8]
- Welding Speed (mm s<sup>-1</sup>)
- Thermal Conductivity (W mm<sup>-1</sup>°C<sup>-1</sup>)
- Volume Heat Capacity factor "ρc" (J mm<sup>-3</sup>°C<sup>-1</sup>)
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

#### -Output Data

- a) a: thermal diffusivity
- b) q: net arc power
- c) dimensionless operating parameter

#### Rosenthal thick plate conditions

- d)  $\theta/n_3$  ratio when  $T=T_c$
- e)  $\sigma_{3m}$ : dimensionless radius vector at isothermal zone edge (by setting  $\theta_p/n_3 = \theta/n_3$ )
- f)  $\psi_m$ : isothermal zone width
- g)  $\Lambda_1$ : dimensionless weld bead cross sectional area
- h)  $B_m$ : Base material (mm<sup>2</sup>)
- i)  $D_m$ : area of deposited metal (mm<sup>2</sup>)
- j) Mix1: mixing ratio B/(B+D)
- k) Mix2: mixing ratio D/(B+D)
- l) h: bead penetration (mm)

#### ii. Input Data:

Liquidus Temperature (reference point) (°C)

$T_c = 1520$

1520

**Initial Temperature (°C)**

$$T_0 = 20$$

20

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $J\ mm^{-3}$ ) [table 1.1]**

$$H_1 = 9.5$$

9.5

**Amperage (A)**

$$I = 180$$

180

**Voltage (V)**

$$V = 22$$

22

**Average Rates of Volume Deposition in arc welding [k/p] ( $A^{-1}\ s^{-1}$ ) [table 1.7]**

$$k = 0.4$$

0.4

**Bead penetration coefficient of welding process [table 1.8]**

$$Cx = 0.024$$

0.024

**Welding Speed ( $mm\ s^{-1}$ )**

$$u = 2$$

2

**Thermal Conductivity ( $W\ mm^{-1}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor "pc" ( $J\ mm^{-3}\ ^\circ C^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.8$$

$$0.8$$

### iii. Returning Data

a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ )

$$a = \lambda / \rho c$$

$$5.$$

b) net arc power (J)

$$q = \eta * I * V$$

$$3168.$$

c) dimensionless operating parameter (by enthalpy)

$$n_3 = \frac{q * u}{4 * \pi * a^2 * (H_1)}$$

$$2.12296$$

---dimensionless operating parameter (by temperature)

$$n_3 = \frac{q * u}{\rho c * 4 * \pi * a^2 * (T_c - T_0)}$$

$$2.68908$$

### Rosenthal thick plate conditions

d)  $\theta/n_3$  ratio when  $T=T_c$

$$\theta n = \frac{4 * \pi * a^2 * (H_1)}{q * u}$$

$$0.471041$$

e) dimensionless radius vector at isothermal zone edge (by setting  $\theta_p/n_3 = \theta/n_3$ )

$$\sigma_3 m = \text{FindRoot} \left[ \frac{1}{\sigma m} * \text{Exp} \left[ \frac{-\sigma m}{\sigma m + 1} \right] = \theta n, \{\sigma m, 1\} \right]$$

$$\{\sigma m \rightarrow 1.22432\}$$

f) isothermal zone width  $\psi_m$

$$\psi_m = \frac{\sigma m}{(\sigma m + 1)} * \sqrt{1 + 2 * \sigma m} ;$$

$$\psi_m = \psi_m / . \sigma_3 m$$

$$1.02217$$

g) dimensionless weld bead cross sectional area:  $\Lambda_1$

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{2} * \psi_m^2;$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1 / . \sigma 3m$$

1.64121

h) area of base material ( $\text{mm}^2$ )

$$B_m = \frac{4 * a^2}{u^2} * \Lambda_1$$

41.0302

i) area of deposited metal D ( $\text{mm}^2$ )

$$D_m = \frac{k * I}{u}$$

36.

j) mixing ratio B/(B+D)

$$\text{Mix1} = \frac{B_m}{B_m + D_m}$$

0.532651

k) mixing ratio D/(B+D)

$$\text{Mix2} = \frac{D_m}{B_m + D_m}$$

0.467349

l) bead penetration (mm)

$$h = Cx \left( \frac{I^4}{u * v^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

2.46575

## v) preheating

[low alloy steel]

i. Intro:

This program produces results and diagrams for local preheating in arc welding.

By inserting the following parameters (red input) it returns (purple output):

### Input Data

-Preheating Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )

-Initial Temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )

-Half Width of Preheated Zone (m)

-Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1.1]

-Amperage (A)

-Voltage (V)

- Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )
- Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )
- Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )
- Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )
- Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )
- Efficiency Factor for welding process [table 1.3]

**-Output Data**

- a)  $a$ : thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )
- b)  $q$ : net arc power (J)
- c)  $\theta$ : dimensionless temperatures
- d)  $t_0$ : time constant
- e)  $\tau_6$ : dimensionless time
- f)  $\Omega_L$ : dimensionless half width of preheated zone
- g,h)  $\tau_{x3}, \tau_{y3}$ : dimensionless time of initial and final cooling temperatures respectively - interval ( $T_x - T_y$ )
- i)  $\Delta\tau_6$ : interval cooling time (dimensionless)
- j)  $\Delta t_{6/s}$ : interval cooling time (real)
- k)  $\tau_{pr}$ : dimensionless time for preheating temperature ( $T - T_{pr} \Rightarrow \theta_{pr}=1$ )
- l)  $t_{pr}$ : real cooling time for preheating temperature ( $T - T_{pr} \Rightarrow \theta_{pr}=1$ )

**-Diagrams**

- a) Parametric dimensionless temperature map for local preheating
- b) Real temperature map for local preheating (T-s)

**ii. Input Data:**

**Preheating Temperature ( $^\circ\text{C}$ )**

$$T_{pr} = 100$$

$$100$$

**Initial Temperature ( $^\circ\text{C}$ )**

$$T_0 = 20$$

$$20$$

**Half Width of Preheated Zone (m)**

$$L = 200$$

$$200$$

**Enthalpy difference of melting point  $H_c - H_0$  ( $\text{J mm}^{-3}$ ) [table 1.1]**

$$H_1 = 7.5$$

$$7.5$$

**Amperage (A)**

$$I = 155$$

$$155$$

**Voltage (V)**

$$V = 22$$

**Welding Speed ( $\text{mm s}^{-1}$ )**

$$u = 2$$

2

**Thermal Conductivity ( $\text{W mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\lambda = 0.025$$

0.025

**Volume Heat Capacity factor " $\rho c$ " ( $\text{J mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )**

$$\rho c = 0.005$$

0.005

**Initial cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )**

$$T_x = 800$$

800

**Final cooling temperature for calculating  $\Delta t_{x/y}$  ( $^\circ\text{C}$ )**

$$T_y = 500$$

500

**Efficiency Factor for welding process [table 1.3]**

$$\eta = 0.80$$

0.8

**iii. Returning Data****a) thermal diffusivity ( $\text{mm}^2 \text{ s}^{-1}$ )**

$$a = \lambda / \rho c$$

5.

**b) net arc power (J)**

$$q = \eta * I * V$$

2728.

**c) dimensionless temperatures [Initial cooling, Final cooling temperatures respectively]**

$$\theta_x = N \left[ \frac{(T_x - T_0)}{(T_{pc} - T_0)} \right]$$

9.75

$$\theta_Y = N \left[ \frac{(T_Y - T_0)}{(T_{pr} - T_0)} \right]$$

6.

d) time constant

$$t_0 = \frac{\frac{q}{u}}{2 * \pi * \lambda * (T_{pr} - T_0)}$$

108.544

e) dimensionless time

$$\tau_6 = \frac{t}{t_0}$$

0.00921288  $\tau$

f) dimensionless half width of preheated zone

$$Q_L = \frac{L}{\sqrt{4 * a * t_0}}$$

4.29252

g) dimensionless time of initial cooling temperature ( $T_x$ )

$$\tau_{x3} = \text{FindRoot} \left[ \theta_x == \frac{1}{\tau_x} + \text{Erf} \left[ \frac{Q_L}{(\tau_x)^{\frac{1}{2}}} \right], \{\tau_x, 1\} \right]$$

{ $\tau_x \rightarrow 0.114286$ }

$$\tau_x = \tau_x / . \tau_{x3};$$

h) dimensionless time of final cooling temperature ( $T_y$ )

$$\tau_{y3} = \text{FindRoot} \left[ \theta_y == \frac{1}{\tau_y} + \text{Erf} \left[ \frac{Q_L}{(\tau_y)^{\frac{1}{2}}} \right], \{\tau_y, 1\} \right]$$

{ $\tau_y \rightarrow 0.2$ }

$$\tau_y = \tau_y / . \tau_{y3};$$

i) cooling time  $\Delta\tau_6$  (dimensionless)

$$\Delta\tau_6 = \tau_y - \tau_x$$

0.0857143

j) cooling time  $\Delta t_{8/5}$  (real) (sec)

$$\Delta t_{8/5} = \Delta\tau_6 * t_0$$

9.30374



k) dimensionless time for preheating temperature (when  $T=T_{pr} \Rightarrow \theta_{pr}=1$ )

$$\tau_{pr} = \text{FindRoot}\left[1 == \frac{1}{\tau_p} + \text{Erf}\left[\frac{\Omega_i}{(\tau_p)^{\frac{1}{2}}}\right], \{\tau_p, 1\}\right]$$

$$\{\tau_p \rightarrow 12.1873\}$$

$$\tau_{pr} = \tau_p / . \tau_{pr};$$

l) real cooling time  $t_{pr}$  (sec)

$$t_{pr} = \tau_{pr} * t_0$$

$$1322.85$$

#### iv) Diagrams

Program parameters for Diagrams

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLinearPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[ContourPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
SetOptions[LogLogPlot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

Rosenthal solution [1-122]

$$T[t_, Li_] := T_0 + \frac{g}{2 * \pi * \lambda * t} + (T_{pr} - T_0) * \text{Erf}\left[\frac{Li}{\sqrt{4 * a * t}}\right];$$

Parametric Rosenthal equation [1-127]

$$\Omega = \frac{Li}{\sqrt{4 * a * t_0}};$$

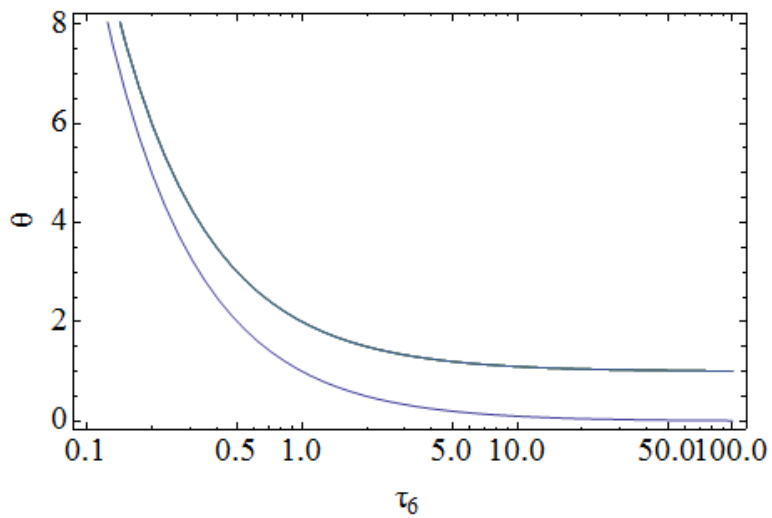
$$\theta[\tau_i, \Omega_i] = \frac{1}{\tau_i} + \text{Erf}\left[\frac{\Omega_i}{\tau_i^{\frac{1}{2}}}\right];$$

$$g = \theta[\tau_i, \Omega_i];$$

$$s = \text{Table}[g, \{\Omega_i, 0, 200, 50\}];$$

a) parametric dimensionless temperature map for preheating:

```
h1 = LogLinearPlot[Evaluate[s, {\tau_i, 0.1, 100}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"\tau_\epsilon", "\theta"}]
```

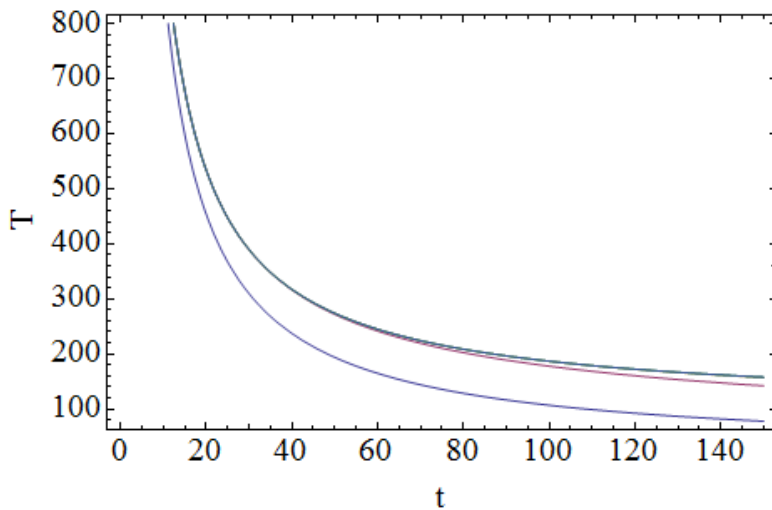


b) real temperature map for preheating (T-s):

```
g1 = T[t, Li];
```

```
s1 = Table[g1, {Li, 0, 200, 50}];
```

```
h2 = Plot[Evaluate[s1, {t, 0, 150}], Frame -> True, FrameLabel -> {"t", "T"}]
```



Created with Wolfram *Mathematica* 7.0

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Διάχυση

Παρακάτω παρατίθενται οι κώδικες των λύσεων με την εξής δομή:

### a) Common Diffusion Solutions

- i. Thin Film Diffusion Profiles for an instantaneous plane source (Infinite)
- ii. Plane source on a semi-infinite medium surface ( $C_s$ )
- iii. Plane source on a semi-infinite medium surface ( $C_0$ )
- iv. Plane source on an infinite medium surface
- v. Plane source on an infinite medium surface (reverse)
- vi. Plane source on an infinite medium surface (specific length)
- vii. Plate

### b) General Solutions by Crank

1. Point source on an infinite plane surface [3.4]
2. Point source in an infinite volume [3.5]
3. Spherical source in an infinite volume [3.8]
4. Plane source on a semi-infinite medium surface  $C_0$ - $C_s$  [3.13]
5. Plane source on a semi-infinite medium surface (surface concentration varies with time) [3.16]
6. Surface Evaporation [3.35]
7. The Infinite Composite Medium [3.45-3.46]
8. The Semi-Infinite Composite Medium [3.54-3.55]
9. Constant flux  $F_0$  [4.55]
10. The Non Steady State Plain Sheet Diffusion [4.16]
11. Hollow sphere ( $c_1 = c_2$ ) [6.48]
12. Hollow sphere ( $c_1 \neq c_2$ ) [6.50]
13. Hollow cylinder ( $c_1 \neq c_2$ ) [5.62]

Table of Diffusion Coefficients for C and N in  $\alpha$  - Fe and  $\gamma$  - Fe

Ετοιχείο	Πλέγμα	$D_0$ ( $\text{cm}^2/\text{s}$ )	$\Delta H_D^*$ (KJ/mol)
C	$\alpha$ - Fe	$6.2 \times 10^{-3}$	80
C	$\gamma$ - Fe	0.15	135
N	$\gamma$ - Fe	$3.0 \times 10^{-3}$	76

## a) Common Diffusion Solutions

### i) Thin Film Diffusion Profiles for an instantaneous plane source (Infinite).

Initial Condition:  $c(x,0) = q \cdot \delta(x)$

Boundary Conditions:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty,t} = 0, \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty,t} = 0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Deposited substance Concentration per unit area ( $\text{gr}/\text{cm}^2$ )

$$q = 0.005;$$

Parameters  $D_0$  ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ )

$$D_x = D_0 \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H_D^*}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

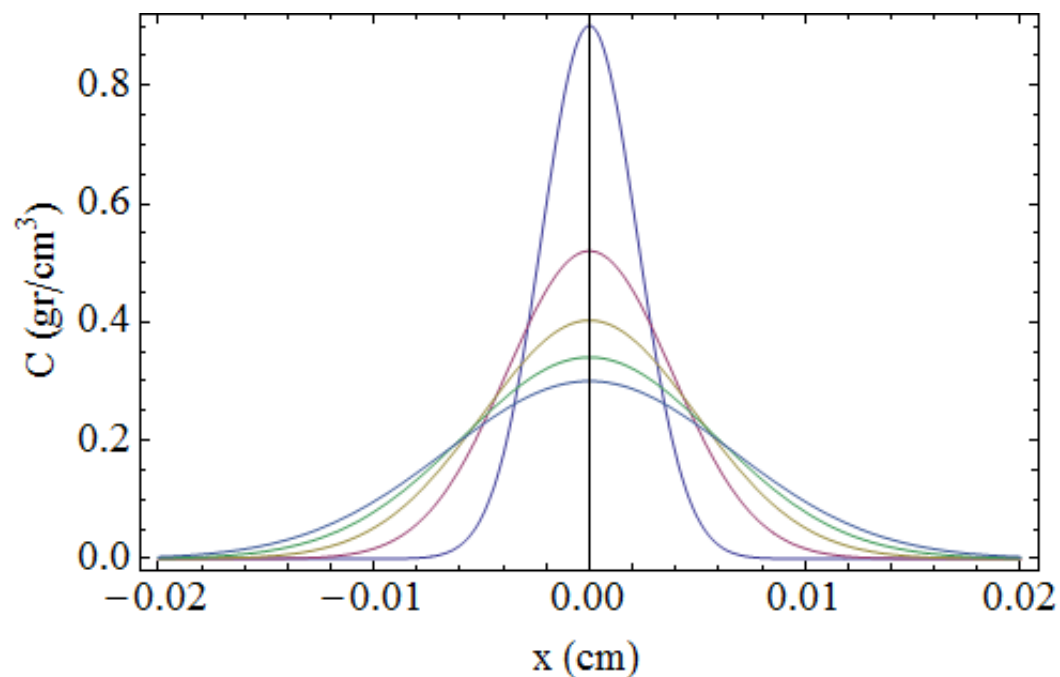
$$CM[x_, t_] = \frac{q}{2 (\pi * D_x * t)^{\frac{1}{2}}} \text{Exp}\left[\frac{-x^2}{4 * D_x * t}\right];$$

```
g = CM[x, t];
```

```
s = Table[g, {t, 1, 10, 2}];
```

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
h = Plot[Evaluate[s, {x, -0.02, 0.02}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (cm)", "C (gr/cm3)"}]
```



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

specific distance (cm)

```
x1 = 0.01
```

```
0.01
```

specific concentration ( $\text{gr/cm}^2$ )

```
cx1 = 0.1
```

```
0.1
```

Solution (sec)

$$ts = \text{Solve}\left[\frac{q}{2 (\pi * D_x * t1)^{\frac{1}{2}}} \text{Exp}\left[\frac{-x1^2}{4 * D_x * t1}\right] == cx1, t1\right]$$

{t1 → 9.52254}, {t1 → 56.638}}

t1r = ts[[2]]

{t1 → 56.638}

(hours)

$$tr = \frac{t1rr}{3600}$$

$$\frac{t1rr}{3600}$$

Obtaining diffusion distance for specific time and concentration

specific time (sec)

t2 = 56.638

56.638

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

cx1 = 0.1

0.1

Solution (cm)

$$xs = \text{Solve}\left[\frac{q}{2 (\pi * D_x * t2)^{\frac{1}{2}}} \text{Exp}\left[\frac{-x2^2}{4 * D_x * t2}\right] == cx1, x2\right]$$

{x2 → -0.009999999}, {x2 → 0.009999999}}

(mm)

xr = (10 \* x2) /. xs

{-0.09999999, 0.09999999}

## ii) Plane source on a semi-infinite medium surface.

Initial Condition:  $c(x,0) = 0$

Boundary Conditions:  $c(0,t)=C_s$ ,  $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=\infty,t}=0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Surface Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$C_s = 0.5;$$

Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135\,000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D^*}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

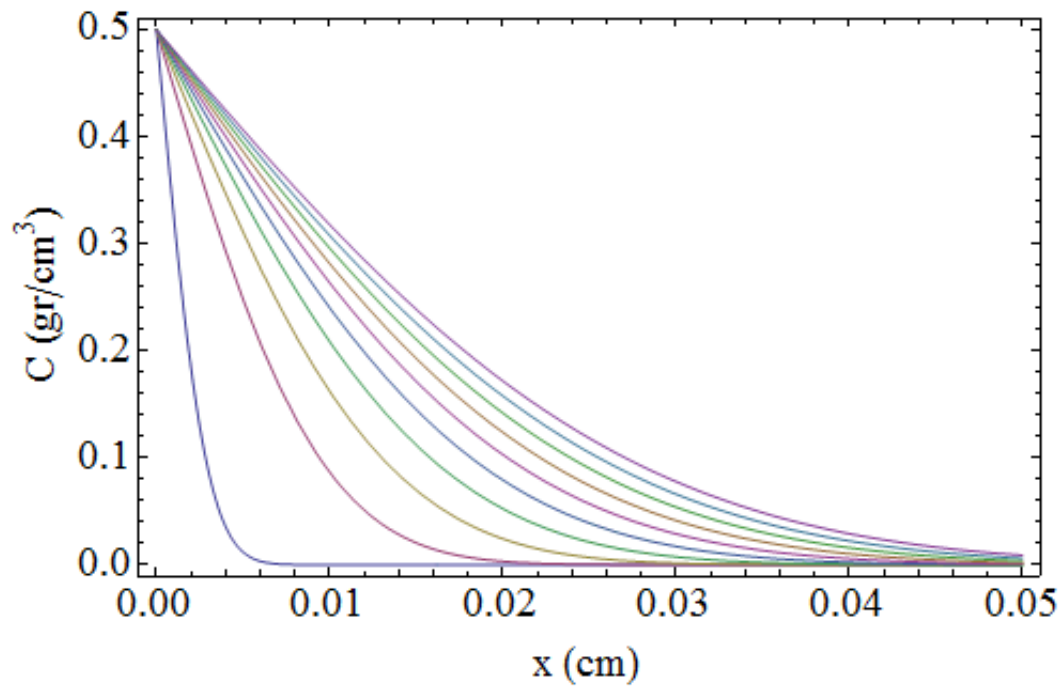
$$CC[x_, t_] = C_s \left( \text{Erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{D_x \cdot t}}\right] \right);$$

$$g = CC[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, 0, 0.05\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x \text{ (cm)", "C (gr/cm}^3 \text{)" } ]]$$



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

specific distance (cm)

$$x1 = 0.02$$

$$0.02$$

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$cx1 = 0.1$$

$$0.1$$

Solution (sec)

$$ts = \text{Solve} \left[ Cs \left( \text{Erfc} \left[ \frac{x1}{2 \sqrt{D_x * t1}} \right] \right) == cx1, t1 \right]$$

$$\{ \{ t1 \rightarrow 49.7097 \} \}$$

(hours)

$$tr = \left( \frac{t1}{3600} \right) /. ts$$

$$\{ 0.0138082 \}$$



## Obtaining diffusion distance for specific time and concentration

specific time (sec)

$$t_2 = 49.7$$

$$49.7$$

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$c_{x_2} = 0.1$$

$$0.1$$

Solution (cm)

$$x_s = \text{Solve}\left[C_s \left(\text{Erfc}\left[\frac{x_2}{2\sqrt{D_x \star t_2}}\right]\right) == c_{x_2}, x_2\right]$$

$$\{\{x_2 \rightarrow 0.0199981\}\}$$

(mm)

$$x_r = (10 \star x_2) /. x_s$$

$$\{0.199981\}$$

iii) Plane source on a semi-infinite medium surface.

Initial Condition:  $c(x,0) = c_0$

Boundary Conditions:  $c(0,t)=0, \frac{\partial c}{\partial x}|_{x=\infty,t}=0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Input Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Initial Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$C_0 = 0.01;$$

### Parameters $D_0$ ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) and $\Delta H_D^*$ (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ )

$$D_x = D_0 \star \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D^*}{R \star T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

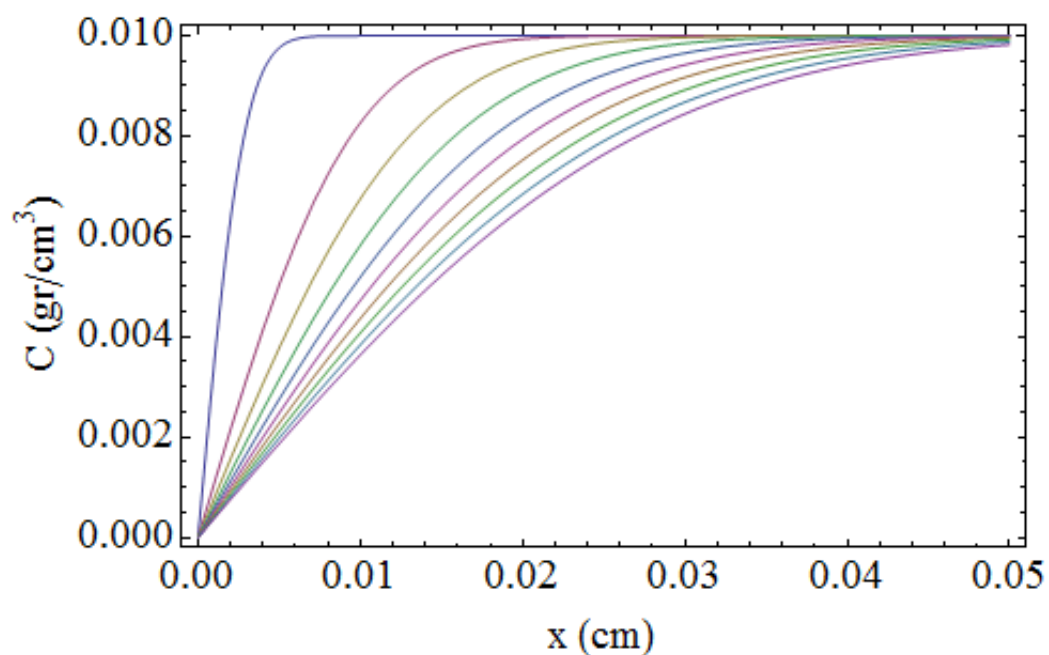
$$CC[x_, t_] = C0 \left( \text{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{D_x \star t}}\right] \right);$$

$$g = CC[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, 0, 0.05\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{"x \text{ (cm)}", "C \text{ (gr/cm}^3)\"}];$$



### Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

**specific distance (cm)**

$$x1 = 0.02$$

$$0.02$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx1 = 0.005$$

$$0.005$$

**Solution (sec)**

$$ts = \text{Solve}\left[C0 \left( \text{Erf}\left[ \frac{x1}{2\sqrt{D_x * t1}} \right] \right) == cx1, t1\right]$$

$$\{\{t1 \rightarrow 179.458\}\}$$

**(hours)**

$$tr = \left( \frac{t1}{3600} \right) /. ts$$

$$\{0.0498494\}$$

**Obtaining diffusion distance for specific time and concentration**

**specific time (sec)**

$$t2 = 179.458$$

$$179.458$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx2 = 0.005$$

$$0.005$$

**Solution (cm)**

$$xs = \text{Solve}\left[C0 \left( \text{Erf}\left[ \frac{x2}{2\sqrt{D_x * t2}} \right] \right) == cx2, x2\right]$$

$$\{x_2 \rightarrow 0.02\}$$

(mm)

$$x_r = (10 * x_2) / .xs$$

$$\{0.2\}$$

iv) Plane source on an infinite medium surface.

$$\text{Initial Condition: } c(x,0) = \begin{cases} c_0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Boundary Conditions: } \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty, t} = 0$$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Initial Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$C_0 = 0.01;$$

Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 * \text{Exp} \left[ -\frac{\Delta H_D^*}{R * T} \right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

$$CC[x_, t_] = \frac{C_0}{2} \left( \text{Erfc} \left[ \frac{x}{2 \sqrt{D_x * t}} \right] \right);$$

```

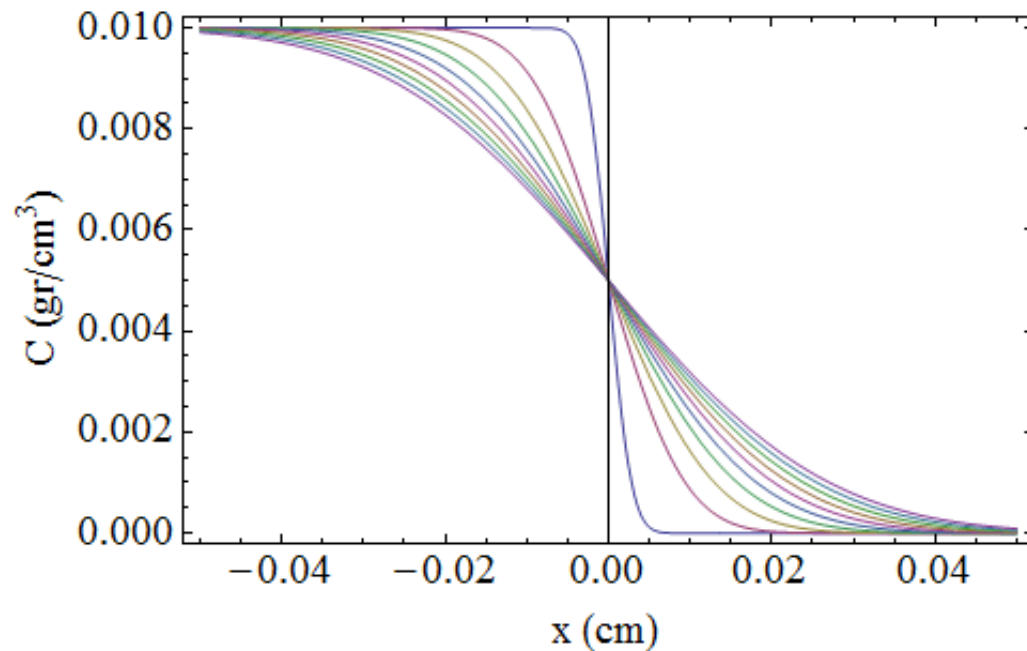
g = CC[x, t];

s = Table[g, {t, 1, 100, 10}];

SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];

h = Plot[Evaluate[s, {x, -0.05, 0.05}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (cm)", "C (gr/cm3)"}]

```



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

**specific distance (cm)**

x1 = 0.02

0.02

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

cx1 = 0.0015

0.0015

**Solution (sec)**

ts = Solve[ $\frac{C0}{2} \left( \text{Erfc} \left[ \frac{x1}{2 \sqrt{D_x * t1}} \right] \right) == cx1, t1]$

{{t1 -> 76.0029}}

(hours)

$$tr = \left( \frac{t1}{3600} \right) /. ts$$

{0.02111119}

Obtaining diffusion distance for specific time and concentration

specific time (sec)

$$t2 = 76$$

76

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$cx2 = 0.0015$$

0.0015

Solution (cm)

$$xs = \text{Solve} \left[ \frac{C0}{2} \left( \text{Erfc} \left[ \frac{x2}{2 \sqrt{Dx * t2}} \right] \right) == cx2, x2 \right]$$

{{x2 → 0.0199996}}

(mm)

$$xr = (10 * x2) /. xs$$

{0.199996}

v) Plane source on an infinite medium surface (reverse).

$$\text{Initial Condition: } c(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Boundary Conditions: } \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty, t} = 0$$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

### Input Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

### Initial Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$C_0 = 0.01;$$

### Parameters D<sub>0</sub> (cm<sup>2</sup>/sec) and ΔH<sub>D</sub>\* (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

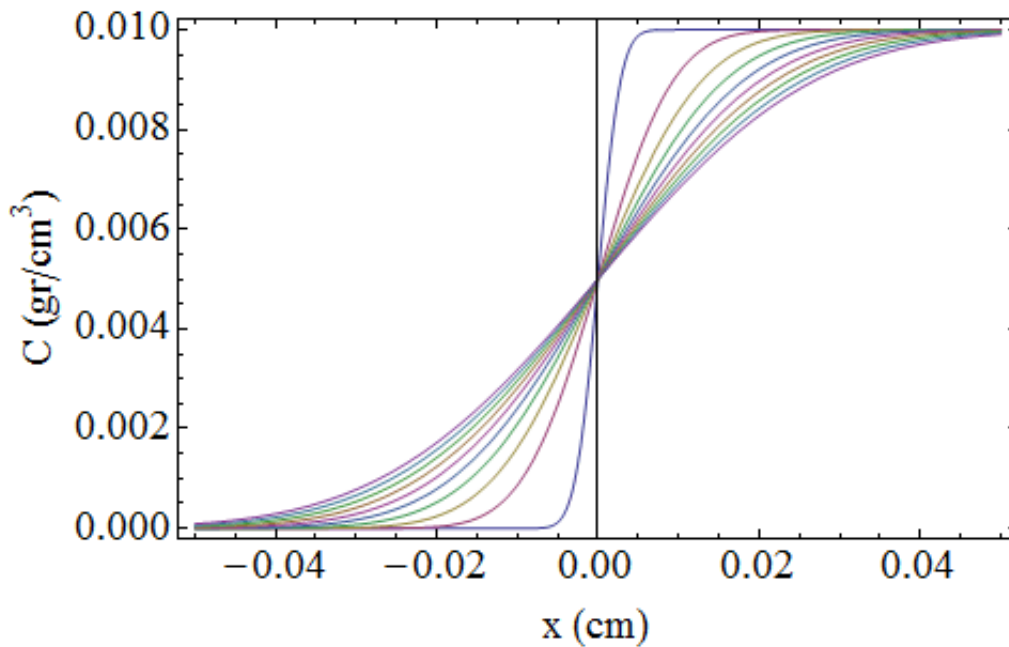
$$CC[x_, t_] = \frac{C_0}{2} \left( 1 + \text{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{D_x \cdot t}}\right] \right);$$

$$g = CC[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, -0.05, 0.05\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x \text{ (cm)", "C (gr/cm}^3 \text{)" } ]]$$



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

specific distance (cm)

$$x1 = 0.01$$

$$0.01$$

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$cx1 = 0.008$$

$$0.008$$

Solution (sec)

$$ts = \text{Solve}\left[\frac{C0}{2} \left(1 + \text{Erf}\left[\frac{x1}{2\sqrt{D_x * t1}}\right]\right) == cx1, t1\right]$$

$$\{\{t1 \rightarrow 28.8151\}\}$$

(hours)

$$tr = \left(\frac{t1}{3600}\right) /. ts$$

$$\{0.00800418\}$$

Obtaining diffusion distance for specific time and concentration



**specific time (sec)**

$$t2 = 28.8$$

$$28.8$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx2 = 0.008$$

$$0.008$$

**Solution (cm)**

$$xs = \text{Solve}\left[\frac{C0}{2} \left(1 + \text{Erf}\left[\frac{x2}{2\sqrt{D_x * t2}}\right]\right) == cx2, x2\right]$$

$$\{\{x2 \rightarrow 0.00999739\}\}$$

**(mm)**

$$xr = (10 * x2) /. xs$$

$$\{0.0999739\}$$

**Obtaining diffusion time for specific distance and concentration**

**specific distance (cm)**

$$x1 = 0.01$$

$$0.01$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx1 = 0.008$$

$$0.008$$

**Solution (sec)**

$$ts = \text{Solve}\left[\frac{C0}{2} \left(1 + \text{Erf}\left[\frac{x1}{2\sqrt{D_x * t1}}\right]\right) == cx1, t1\right]$$

{t1 → 28.8151}

(hours)

$$tr = \left( \frac{t1}{3600} \right) /. ts$$

{0.00800418}

Obtaining diffusion distance for specific time and concentration

specific time (sec)

$$t2 = 28.8$$

28.8

specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$cx2 = 0.008$$

0.008

Solution (cm)

$$xs = \text{Solve} \left[ \frac{C0}{2} \left( 1 + \text{Erf} \left[ \frac{x2}{2 \sqrt{Dx * t2}} \right] \right) == cx2, x2 \right]$$

{x2 → 0.00999739}

(mm)

$$xr = (10 * x2) /. xs$$

{0.0999739}

vi) Plane source on an infinite medium surface (specific length).

$$\text{Initial Condition: } c(x,0) = \begin{cases} 0 & x < -a \text{ and } x > a \\ c_0 & -a \leq x \leq a \end{cases}$$

$$\text{Boundary Conditions: } \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty, t} = 0$$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

### Boundaries (cm)

$$a = 0.04;$$

### Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

### Initial Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)

$$C_0 = 0.08;$$

### Parameters $D_0$ (cm<sup>2</sup>/sec) and $\Delta H_D$ \* (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R * T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

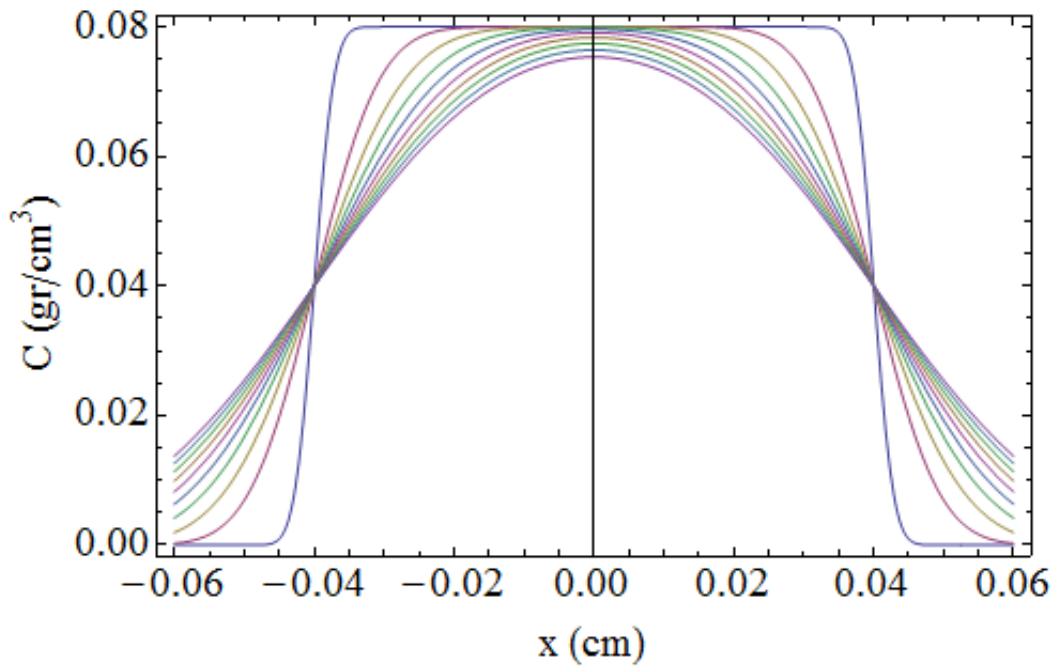
$$CC[x_, t_] = \frac{C_0}{2} \left( \text{Erf}\left[\frac{a+x}{2\sqrt{D_x * t}}\right] + \text{Erf}\left[\frac{a-x}{2\sqrt{D_x * t}}\right] \right);$$

$$g = CC[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, -0.06, 0.06\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x \text{ (cm)", "C (gr/cm}^3 \text{)" } ]]$$



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

**specific distance (cm)**

$$x1 = 0.02$$

$$0.02$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx1 = 0.07$$

$$0.07$$

**Solution (sec)**

$$ts = \text{FindRoot}\left[\frac{C0}{2} \left( \text{Erf}\left[\frac{a + x1}{2\sqrt{D_x * t1}}\right] + \text{Erf}\left[\frac{a - x1}{2\sqrt{D_x * t1}}\right] \right) == cx1, \{t1, 1\}\right]$$

$$\{t1 \rightarrow 61.5523\}$$

**(hours)**

$$tr = \left(\frac{t1}{3600}\right) /. ts$$

$$0.0170979$$

Obtaining diffusion distance for specific time and concentration

**specific time (sec)**

$$t_2 = 61.5523$$

$$61.5523$$

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$$cx_2 = 0.07$$

$$0.07$$

**Solution (cm)**

$$xs = \text{FindRoot} \left[ \frac{C_0}{2} \left( \text{Erf} \left[ \frac{a + x_2}{2 \sqrt{D_x * t_2}} \right] + \text{Erf} \left[ \frac{a - x_2}{2 \sqrt{D_x * t_2}} \right] \right) == cx_2, \{x_2, 0.1\} \right]$$

$$\{x_2 \rightarrow 0.02\}$$

**(mm)**

$$xr = (10 * x_2) /. xs$$

$$0.2$$

**vii) Plate.**

**Initial Condition:  $c(x,0) = C_0$**

**Boundary Conditions:  $c(0,t) = C_s$ ,  $c(L,t) = C_s$**

**if  $C_0 < C_s$  then carbonation occurs, if  $C_0 > C_s$  then decarbonation occurs**

**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Plate Thickness (cm)**

$$L = 0.05;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Initial Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$C_0 = 0.01;$

**Surface Concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

$C_s = 0.5;$

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)**

$D_0 = 0.15;$

$\Delta H_D^* = 135\,000;$

**Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)**

$$D_x = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D^*}{R * T}\right]$$

$2.44972 \times 10^{-6}$

**Solution**

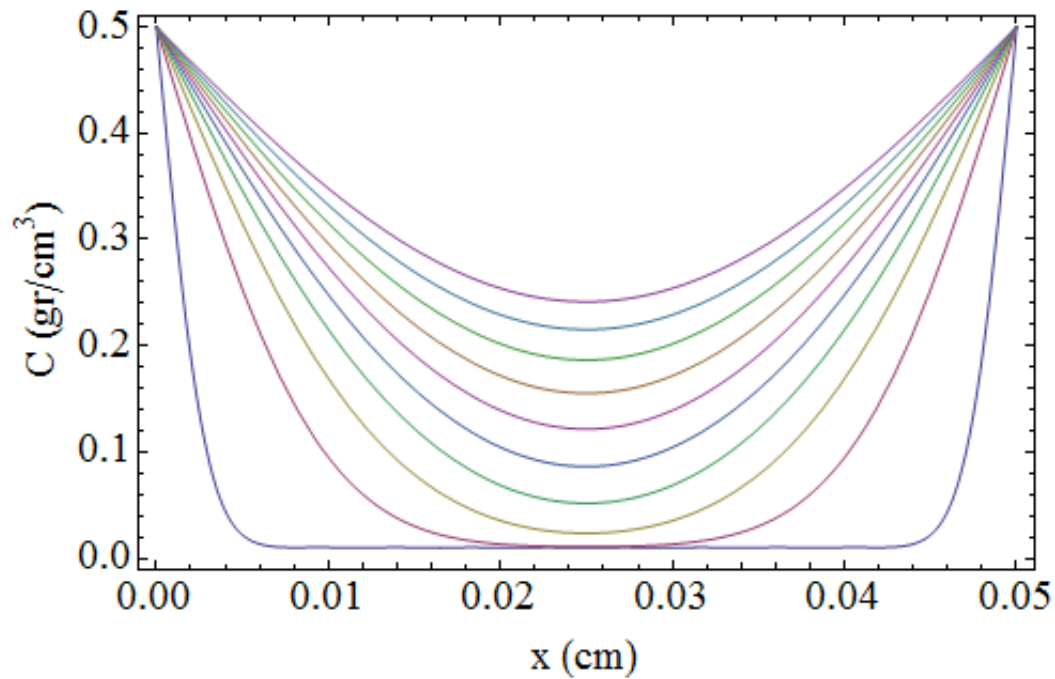
$$CC[x_, t_] = Cs + (C_0 - Cs) \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{10} \left( \frac{\text{Exp}\left[-\frac{(2n+1)^2 * \pi^2 * D_x * t}{L^2}\right]}{2n+1} * \text{Sin}\left[\frac{(2n+1) * \pi * x}{L}\right] \right);$$

$g = CC[x, t];$

$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$

$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$

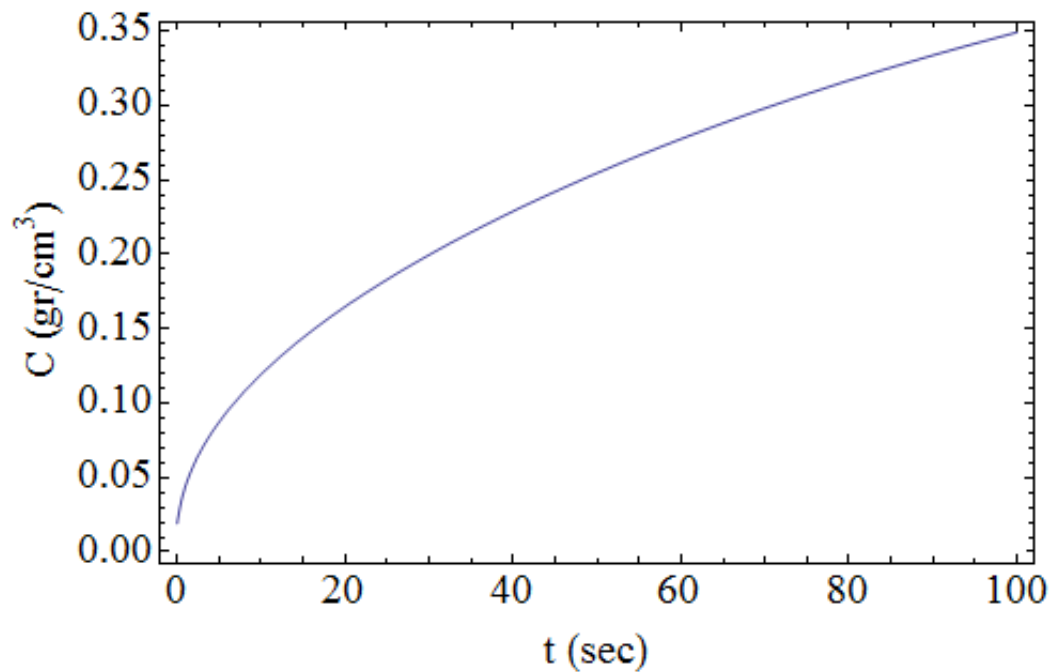
$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, 0, L\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True},$   
 $\text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x \text{ (cm)}", "C \text{ (gr/cm}^3 \text{)}" \}]$



Mean Concentration in time

$$j = \frac{1}{L} \int_0^L g \, dx;$$

```
h2 = Plot[j, {t, 0, 100}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {"t (sec)", "C (gr/cm³)"}]
```



Obtaining diffusion time for specific distance and concentration

**specific distance (cm)**

**x1 = 0.025**

0.025

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

cx1 = 0.1

0.1

**Solution (sec)**

ts =

$$\text{FindRoot}\left[C_s + (C_0 - C_s) \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{10} \left( \frac{\text{Exp}\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D_x t_1}{L^2}\right]}{2n+1} \star \text{Sin}\left[\frac{(2n+1) \pi x_1}{L}\right] \right) == \right. \\ \left. cx_1, \{t_1, 1\}\right]$$

{t1 → 44.8878}

**(hours)**

$$tr = \left(\frac{t_1}{3600}\right) /. ts$$

0.0124688

**Obtaining diffusion distance for specific time and concentration**

**specific time (sec)**

t2 = 44.8878

44.8878

**specific concentration (gr/cm<sup>2</sup>)**

cx2 = 0.1

0.1

**Solution (cm)**



xs =

$$\text{FindRoot}\left[C_s + (C_0 - C_s) \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{10} \left( \frac{\text{Exp}\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D_x t}{L^2}\right]}{2n+1} * \text{Sin}\left[\frac{(2n+1) * \pi * x_2}{L}\right] \right) == \right. \\ \left. c_{x_2}, \{x_2, 0.01\}\right]$$

{x2 → 0.0249914}

(mm)

$$x_r = (10 * x_2) /. xs$$

0.249914

## b) General Solutions by Crank

### 1) Point Source on an infinite plane surface.

Initial Condition:  $c(x,0) = q$

Boundary Conditions:  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty, t} = 0, \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty, t} = 0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Concentration per unit area ( $\text{gr}/\text{cm}^2$ )

$$q = 0.0005;$$

Parameters  $D_0$  ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ )

$$D_x = D_0 \star \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \star T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

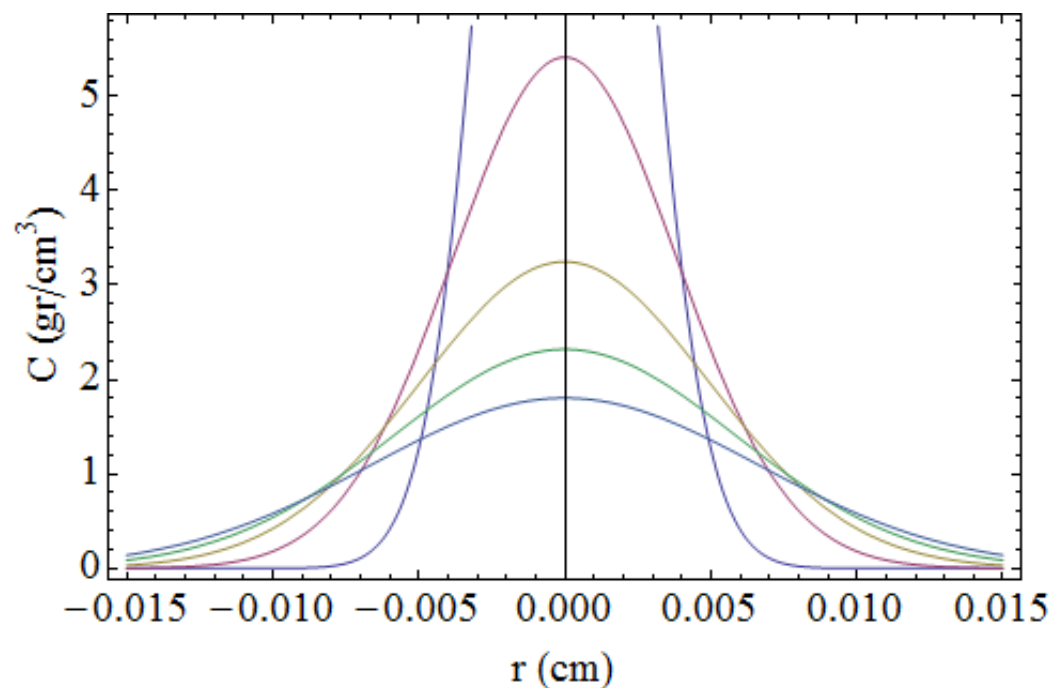
$$CM[r_, Dt_] = \frac{q}{4 \star \pi \star D_x \star t} \text{Exp}\left[\frac{-r^2}{4 \star D_x \star t}\right];$$

$$g = CM[r, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 10, 2\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{r, -0.015, 0.015\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{"r \text{ (cm)}", "C \text{ (gr/cm}^3)\"}]$$



## 2. Point Source in an infinite volume.

Initial Condition:  $c(x,0) = q$

Boundary Conditions:  $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=-\infty,t} = 0, \frac{\partial c}{\partial x}|_{x=\infty,t} = 0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

### Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

### Concentration per unit area (gr/cm<sup>2</sup>)

$$q = 0.0005;$$

### Parameters D<sub>0</sub> (cm<sup>2</sup>/sec) and ΔH<sub>D</sub>\* (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R * T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

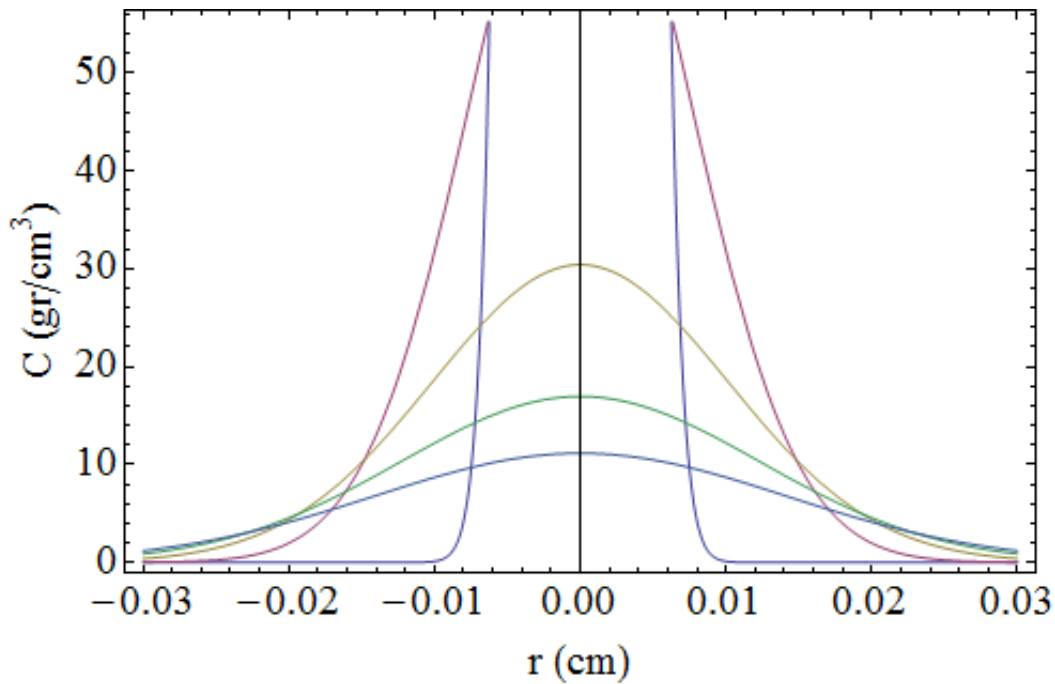
$$CM[r_, t_] = \frac{q}{8 (\pi * D_x * t)^{\frac{3}{2}}} \text{Exp}\left[\frac{-r^2}{4 * D_x * t}\right];$$

$$g = CM[r, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 10, 2\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{r, -0.03, 0.03\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{"r \text{ (cm)", "C (gr/cm}^3)\}"]]$$



### 3. Spherical Source in a large volume.

**Initial Condition:**  $c(x,0) = c_0$

**Boundary Conditions:**  $\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=-\infty,t} = 0, \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\infty,t} = 0$

**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Initial Concentration per unit volume (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_0 = 0.01;$$

**Sphere Radius (cm)**

$$a = 0.04;$$

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)**

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

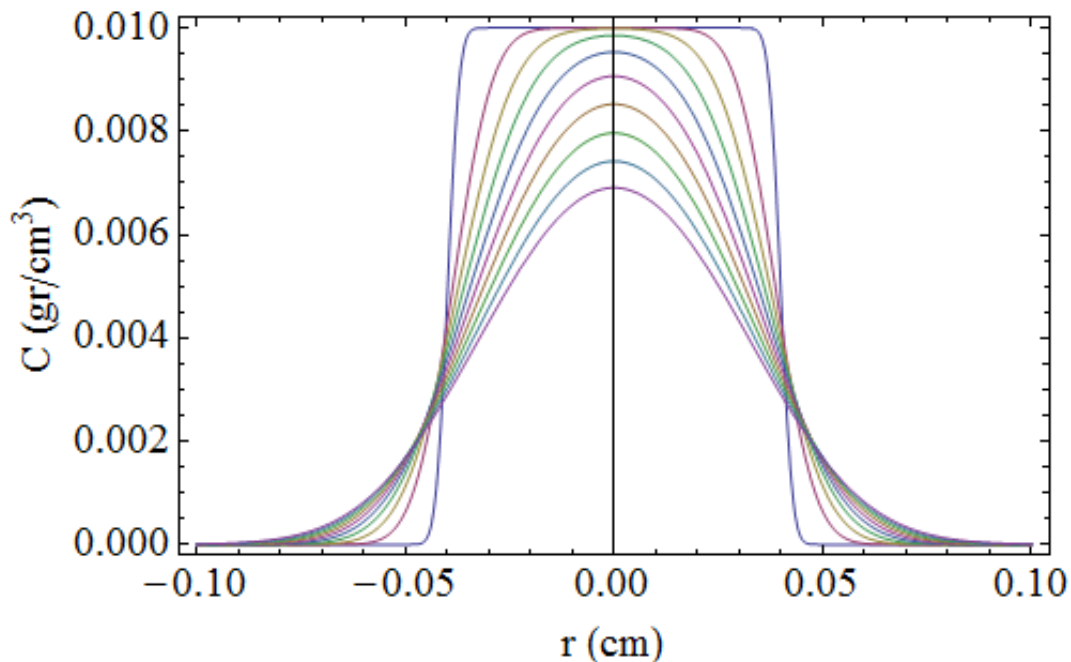
$$CC[r_, t_] = \frac{1}{2} C_0 \left( \text{Erf}\left[\frac{a-r}{2\sqrt{D_x \cdot t}}\right] + \text{Erf}\left[\frac{a+r}{2\sqrt{D_x \cdot t}}\right] \right) - \frac{C_0}{r} \sqrt{\frac{D_x \cdot t}{\pi}} \left( \text{Exp}\left[\frac{-(a-r)^2}{4 \cdot D_x \cdot t}\right] - \text{Exp}\left[\frac{-(a+r)^2}{4 \cdot D_x \cdot t}\right] \right);$$

$$g = CC[r, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 100, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{r, -0.10, 0.10\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{"r \text{ (cm)}", "C \text{ (gr/cm}^3)\"}];$$



### 4. Plane source on a semi-infinite medium surface.

**Initial Condition:**  $c(x,0) = C_0$

**Boundary Conditions:**  $c(0,t) = C_s$ ,  $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=\infty,t} = 0$

### Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

### Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

### Initial Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)

$$C_0 = 0.01;$$

### Surface Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)

$$C_s = 0.5;$$

### Parameters $D_0$ (cm<sup>2</sup>/sec) and $\Delta H_D^*$ (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R * T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

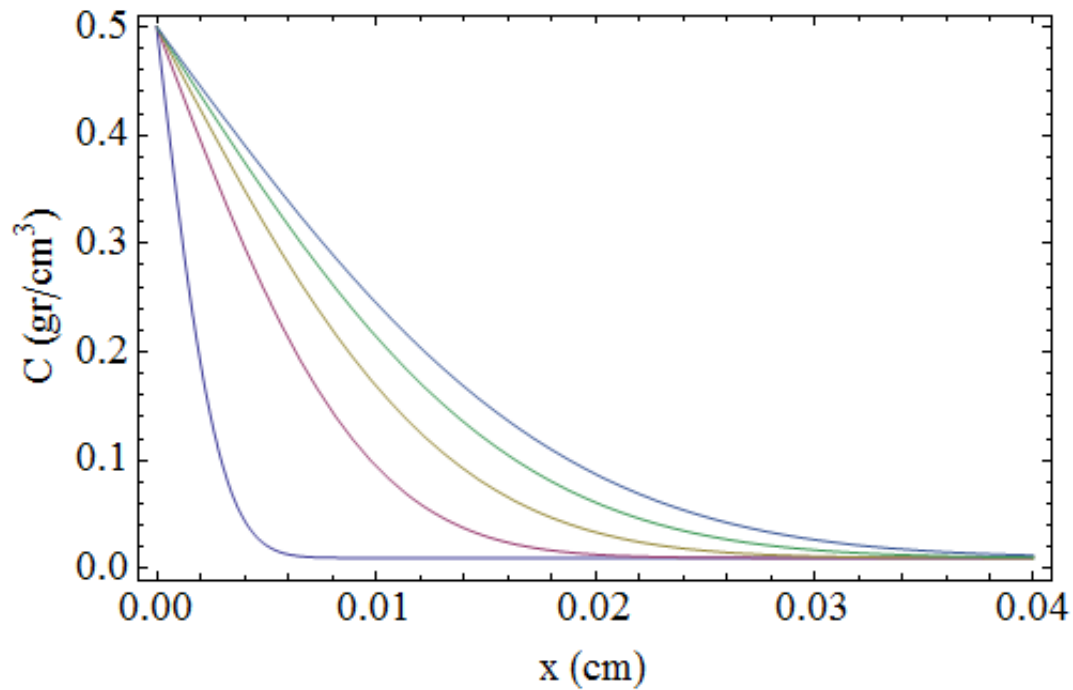
$$CC[x_, t_] = C_s + (C_0 - C_s) \left( \text{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{D_x * t}}\right] \right);$$

$$g = CC[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 50, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, 0, 0.04\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x (cm)", "C (gr/cm^3)" \}]$$



5. Plane source on a semi-infinite medium surface (surface concentration varies with time).

Initial Condition:  $c(x,0) = 0$

Boundary Conditions:  $c(0,t) = k * t$ ,  $\frac{\partial c}{\partial x} |_{x=\infty,t} = 0$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Initial Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)

$$C_0 = 0;$$

Surface Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)

$$C_s = k * t;$$

Constant

$$k = 0.01;$$

Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

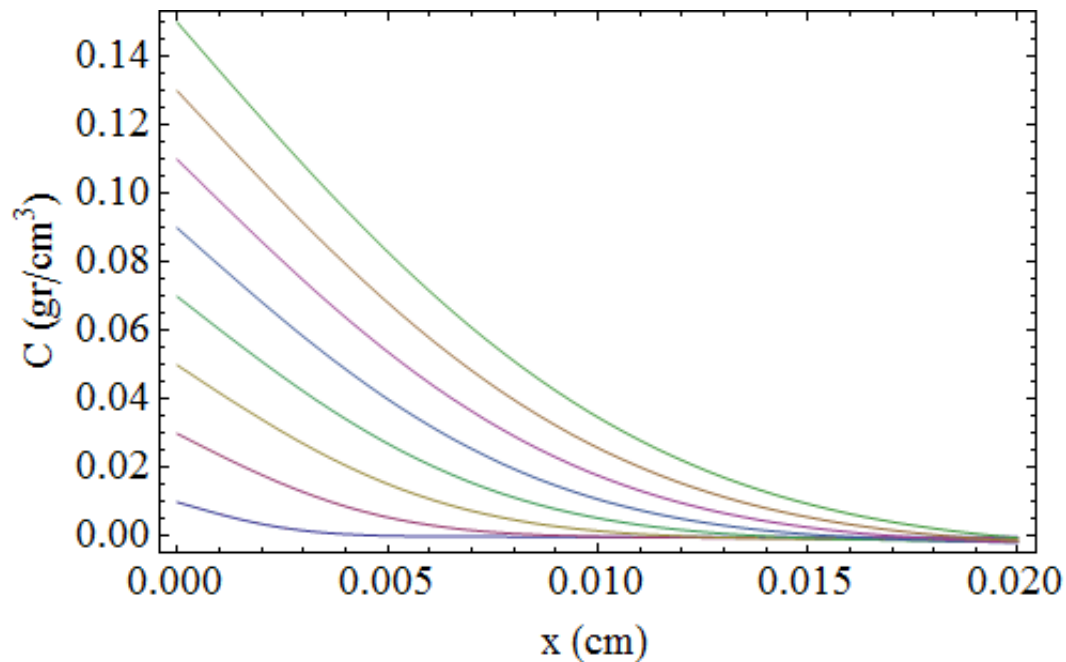
$$CC[x_, t_] = 4 * C_s \left( \frac{1}{4} * \left( \text{Erfc}\left[\frac{x}{2 \sqrt{D_x * t}}\right] - 2 * x \left( \frac{1}{\pi^2} e^{-x^2} - x * \text{Erfc}\left[\frac{x}{2 \sqrt{D_x * t}}\right] \right) \right) \right);$$

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
g = CC[x, t];
```

```
s = Table[g, {t, 1, 15, 2}];
```

```
h = Plot[Evaluate[s, {x, 0, 0.020}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (cm)", "C (gr/cm3)"}]
```



## 6. Surface Evaporation

**Initial Condition:**  $c(x,0) = c_0$

**Boundary Conditions:**  $c(0,t) = c_s$ ,  $-D \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha(c_v - c_s)$ ,  $x = 0$



**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1273.15;$$

**Initial Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$C_0 = 0.01;$$

**Vapour Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$C_v = 0.5;$$

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)**

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

**Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)**

$$D_x = D_0 * \text{Exp} \left[ - \frac{\Delta H_D}{R * T} \right]$$

$$4.33639 \times 10^{-7}$$

**mass transfer coefficient (cm/sec)**

$$a = 1.29 * 10^{-5}$$

$$0.0000129$$

**constant of proportionality (cm<sup>-1</sup>)**

$$h = a / D_x$$

$$29.7483$$

**Solution**

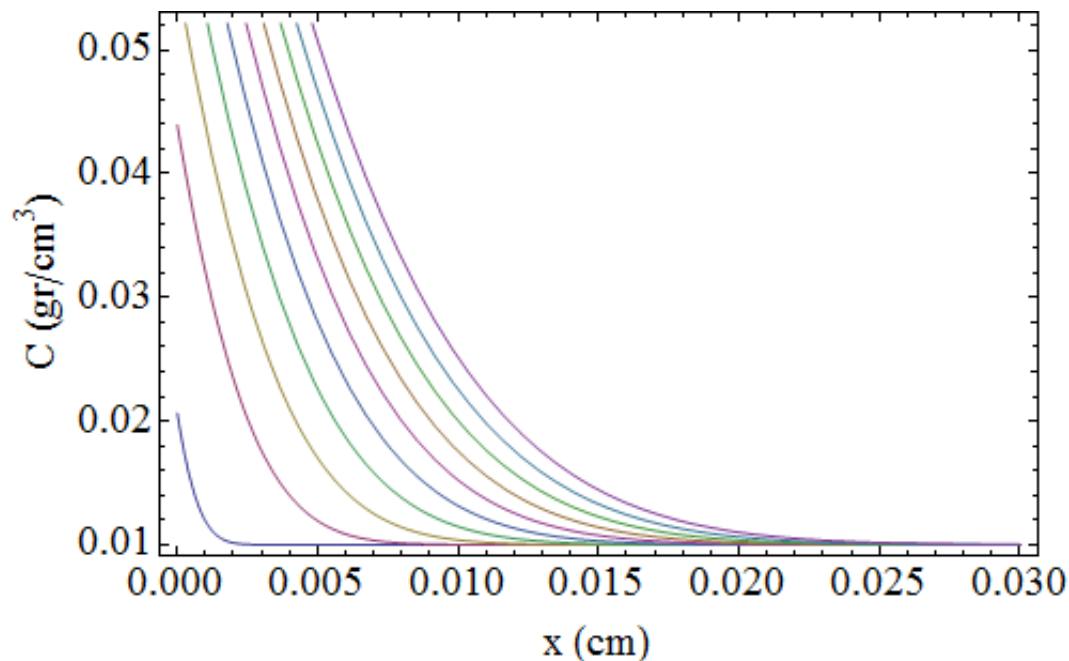
$$CC[x_, t_] = C_0 + (C_v - C_0) * \left( \operatorname{Erfc} \left[ \frac{x}{2 \sqrt{D_x * t}} \right] - \operatorname{Exp}[h * x + h^2 * D_x * t] * \operatorname{Erfc} \left[ \frac{x}{2 \sqrt{D_x * t}} + h * \sqrt{D_x * t} \right] \right);$$

g = CC[x, t];

s = Table[g, {t, 1, 100, 10}];

SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];

j = Plot[Evaluate[s, {x, 0, 0.03}], Frame -> True, FrameLabel -> {"x (cm)", "C (gr/cm<sup>3</sup>)"}]



## 7. The Infinite Composite Medium.

Initial Condition:  $c(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_0 & x > 0 \end{cases}$

Boundary Conditions:  $c_2/c_1 = k, x=0$  and  $D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, x=0$

$D_1, c_1$  for  $x > 0$  and  $D_2, c_2$  for  $x < 0$

**Gas Constant (J/mol K)**

R = 8.314;

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

### Initial Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)

$$C_0 = 0.01;$$

### Ratio of the uniform concentration

$$k = 1/2;$$

### Parameters $D_0$ (cm<sup>2</sup>/sec) and $\Delta H_D^*$ (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_1 = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

$$D_2 = 4 \cdot D_1;$$

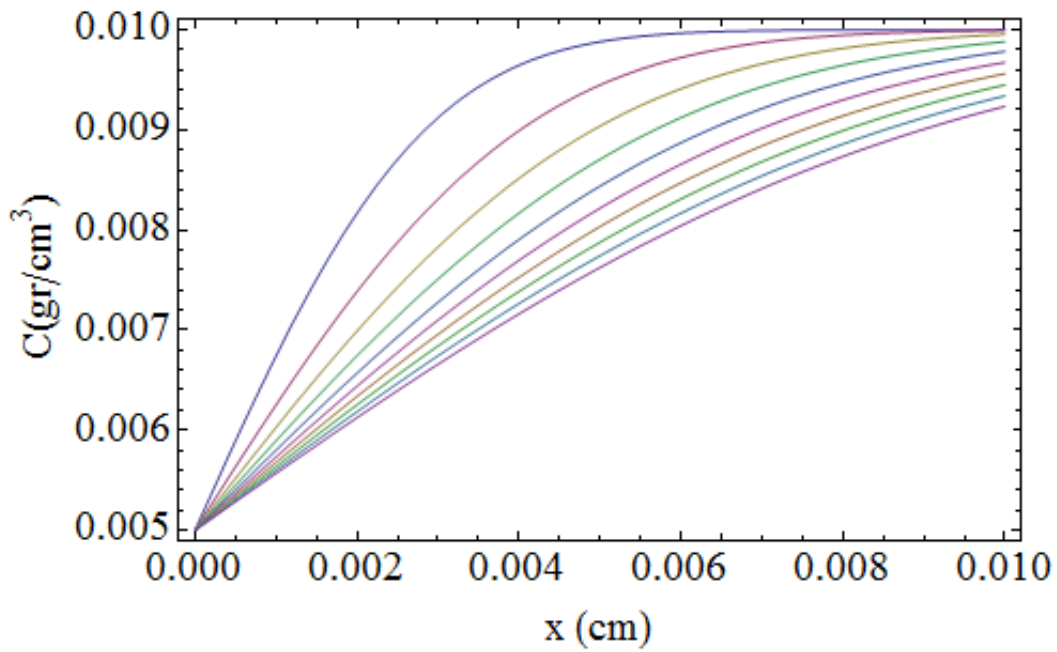
### Solutions

$$CC1 = \frac{C_0}{1 + k \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + k \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Erf}\left[\frac{x}{2 \sqrt{D_1 \cdot t}}\right]\right);$$

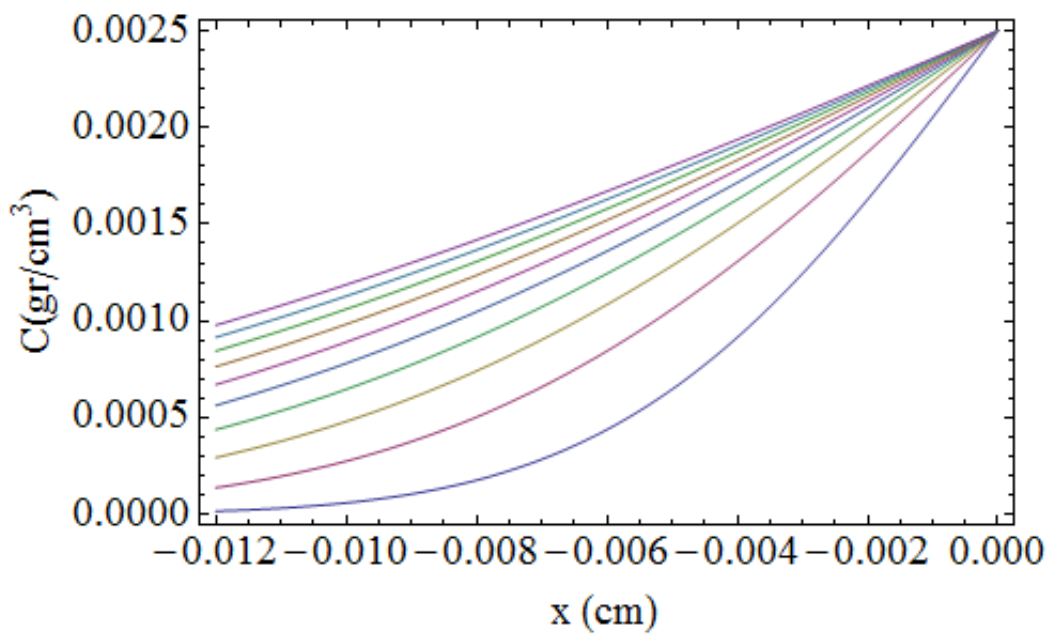
$$CC2 = \frac{C_0 \cdot k}{1 + k \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\text{Erfc}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{2 \sqrt{D_2 \cdot t}}\right]\right);$$

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

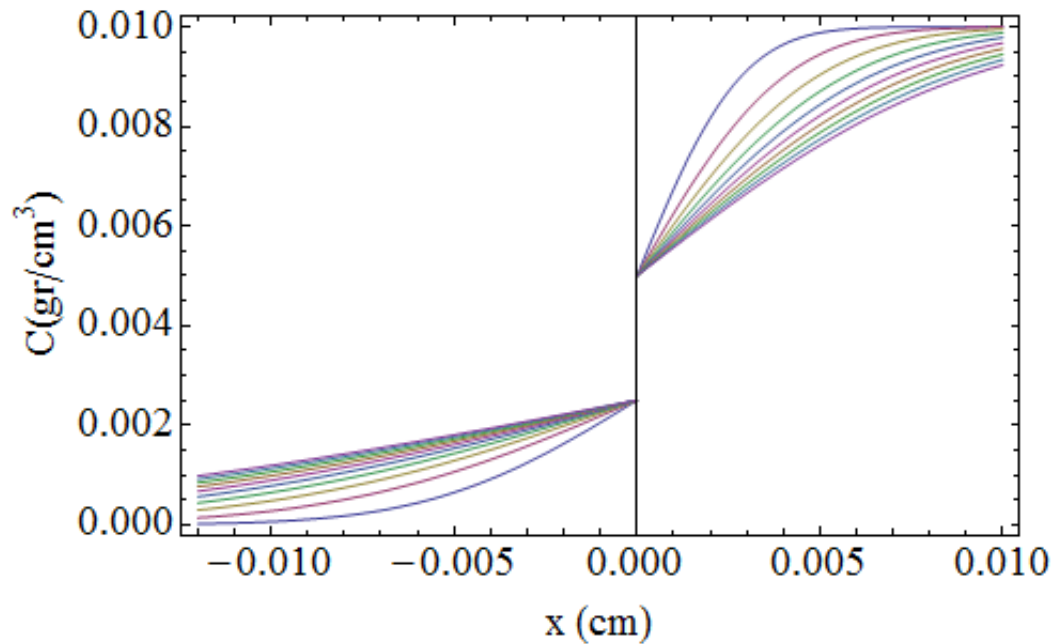
```
h1 = Plot[Evaluate[Table[CC1, {t, 1, 10}], {x, 0, 0.01}], Frame -> True,  
FrameLabel -> {"x (cm)", "C(gr/cm3)"}]
```



```
h2 = Plot[Evaluate[Table[CC2, {t, 1, 10}], {x, -0.012, 0}], Frame → True,
  FrameLabel → {"x (cm)", "C(gr/cm³)"}]
```



```
Show[h2, h1, PlotRange → {0, 0.010}]
```



### 8. The Semi-Infinite Composite Medium ( $-L < x < \infty$ ).

Initial Condition:  $c(x,0) = 0$

Boundary Conditions:  $c(-L,t) = c_s$ , and  $c_1 = c_2$ ,  $x=0$  and  $D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}$ ,  $x=0$

$D_1, c_1$  for  $-L < x < 0$  and  $D_2, c_2$  for  $x > 0$

**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Surface Concentration (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_s = 0.01;$$

**Semi-Infinite Region (cm)**

$$L = 0.005;$$

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)**

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_1 = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R * T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

$$D_2 = \frac{1}{4} * D_1;$$

### Ratio of the uniform concentration

$$k = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

### Parameter a

$$a = \frac{1 - k}{1 + k};$$

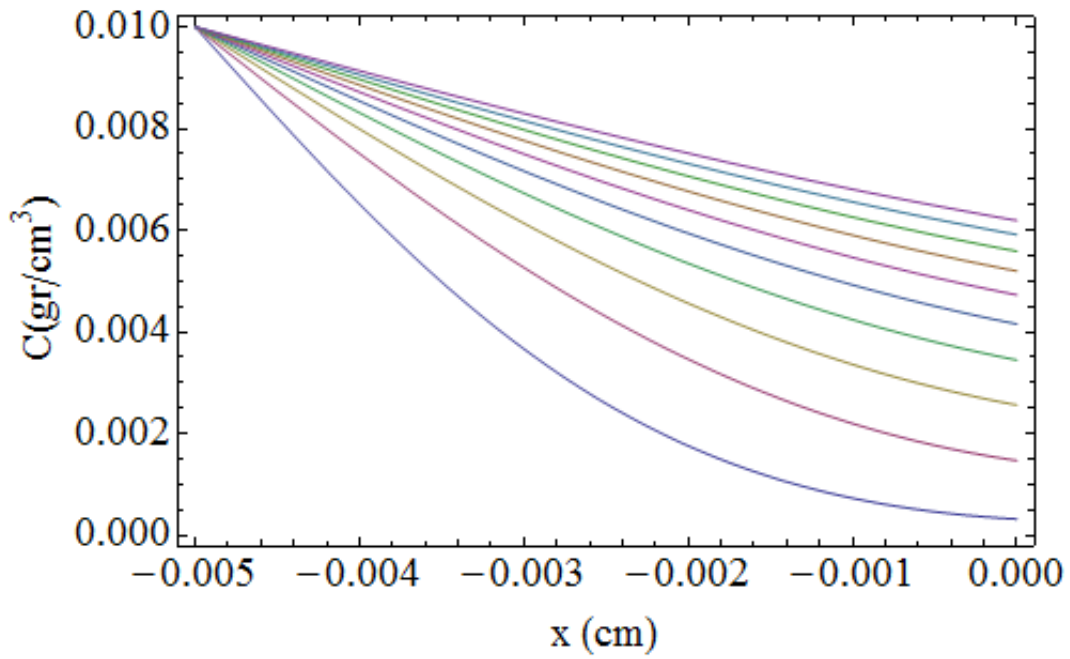
### Solutions

$$CC1 = C_s \sum_{n=0}^{50} a^n \left( \text{Erfc}\left[\frac{(2n+1)L+x}{2\sqrt{D_1 * t}}\right] - a * \text{Erfc}\left[\frac{(2n+1)L-x}{2\sqrt{D_1 * t}}\right] \right);$$

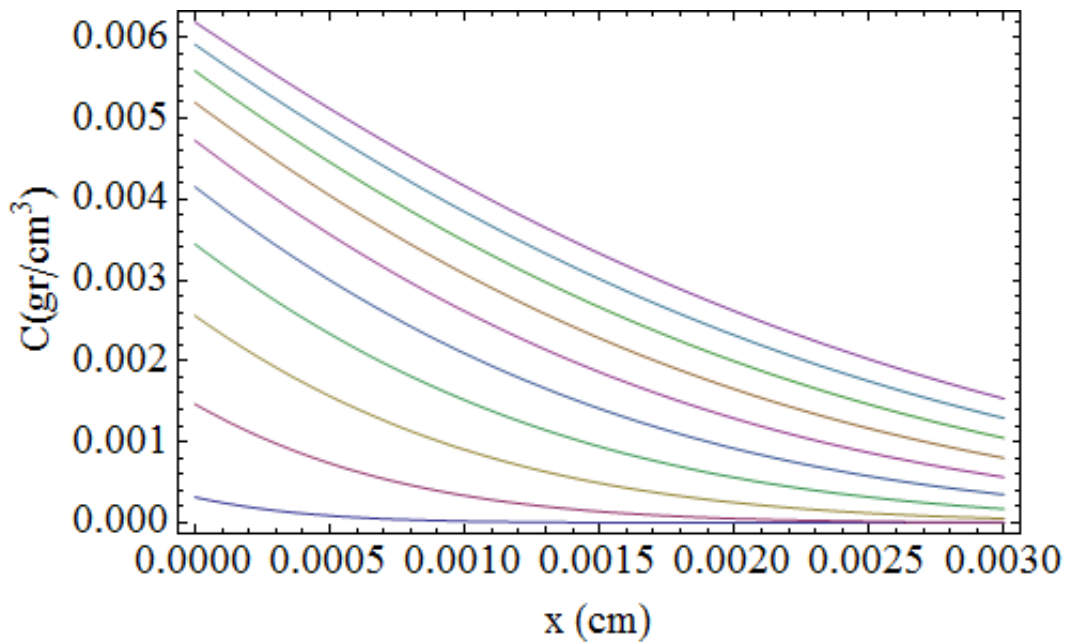
$$CC2 = \frac{2 * k * C_s}{k + 1} \sum_{n=0}^{50} a^n \left( \text{Erfc}\left[\frac{(2n+1)L+k * x}{2\sqrt{D_1 * t}}\right] \right);$$

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

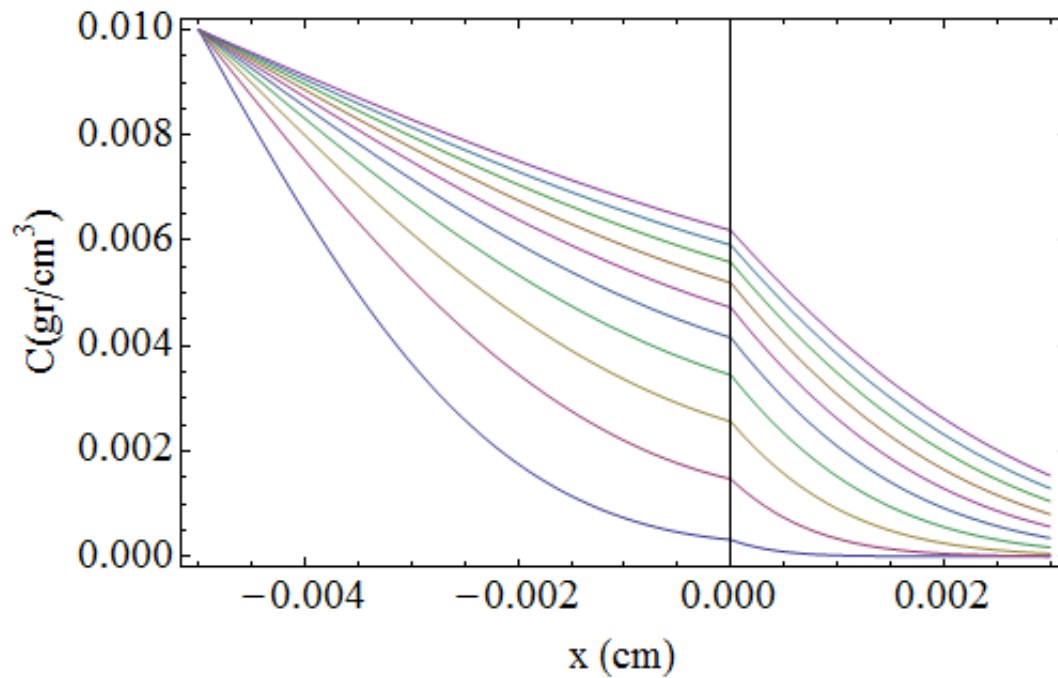
```
hc1 = Plot[Evaluate[Table[CC1, {t, 1, 10}], {x, -L, 0}], Frame -> True,  
FrameLabel -> {"x (cm)", "C(gr/cm3)"}]
```



```
hc2 = Plot[Evaluate[Table[CC2, {t, 1, 10}], {x, 0, 0.003}], Frame → True,
  FrameLabel → {"x (cm)", "C(gr/cm³)"}]
```



```
Show[hc1, hc2, PlotRange → {0, 0.01}]
```



### 9. Constant flux $F_0$ through surfaces

Initial Condition:  $c(x,0) = c_0$ ,  $-L < x < L$

Boundary Conditions:  $D \frac{\partial C}{\partial x} = F_0$ ,  $x=L$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Initial Concentration ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ )

$$C_0 = 0.01;$$

Semi-Infinite Region (cm)

$$L = 0.04;$$

Constant Flux ( $\text{gr}/\text{cm}^2 \text{ s}$ )

$$F_0 = 10^{-5};$$

Input  $D_0$  ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)



$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

### Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

### Solution

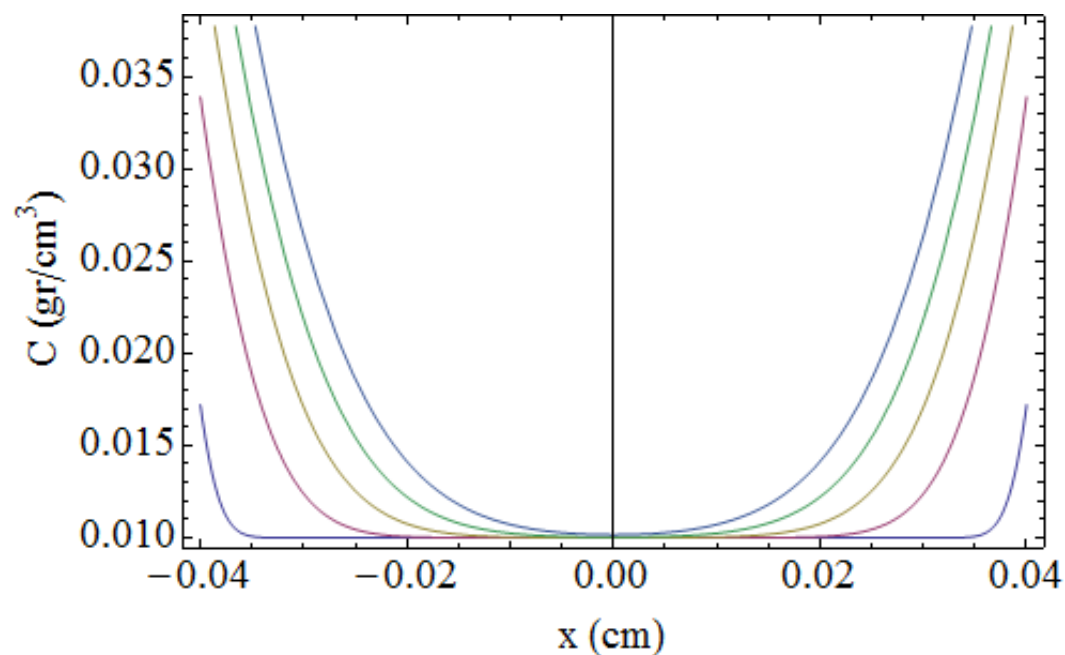
$$\begin{aligned} \text{CC}[x, t] = & \\ & C_0 + \\ & \frac{F_0 \cdot L}{D_x} \\ & \left( \frac{D_x \cdot t}{L^2} + \frac{3 \cdot x^2 - L^2}{6 \cdot L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{50} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \text{Exp}\left[\frac{-D_x \cdot t \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}\right] \cdot \text{Cos}\left[\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right] \right) \right); \end{aligned}$$

$$g = \text{CC}[x, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 50, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$\begin{aligned} h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{x, -L, L\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{ "x \text{ (cm)}", "C \text{ (gr/cm}^3) " \}] \end{aligned}$$



## 10. The Non Steady State Plain Sheet Diffusion.

Initial Condition:  $c(x,0) = f(z)$ ,  $0 < x < L$

Boundary Conditions:  $c(0,t) = c_1$ ,  $c(L,t) = c_2$

Gas Constant (J/mol K)

$$R = 8.314;$$

Temperature (K)

$$T = 1473.15;$$

Length (cm)

$$l = 0.05;$$

Formulae

$$f[z] = 5x^2;$$

Surface Concentration  $x=0$  (gr/cm<sup>3</sup>)

$$c_1 = 0.01;$$

Surface Concentration  $x=L$  (gr/cm<sup>3</sup>)

$$c_2 = 0.5;$$

Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)

$$D_x = D_0 \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H_D}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

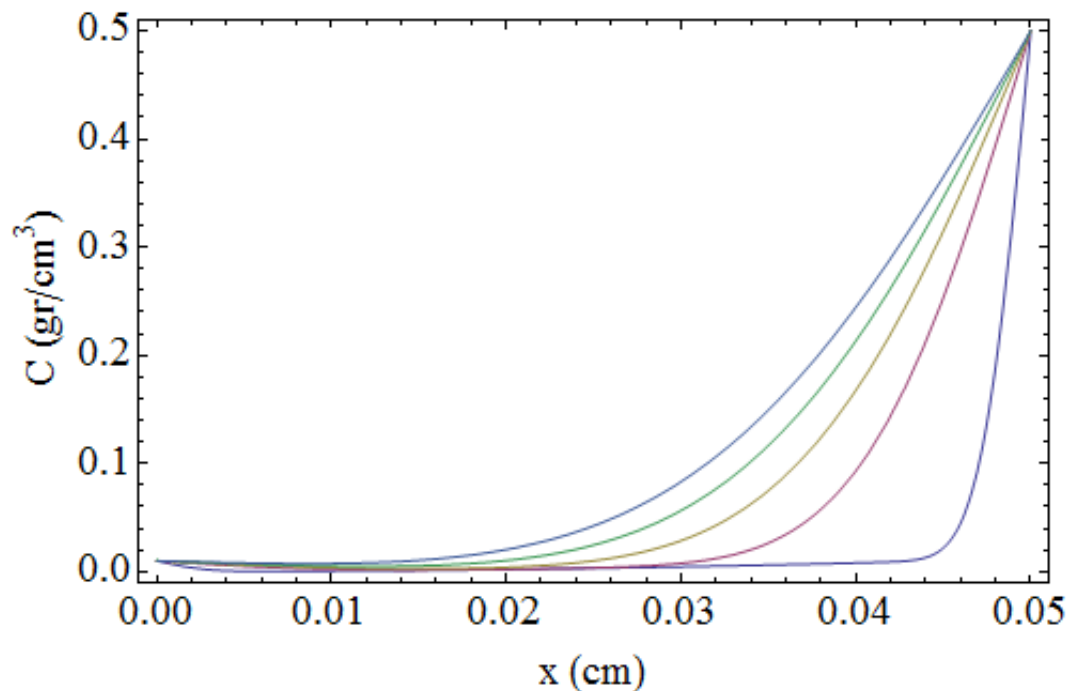
$$\begin{aligned}
 CC[x_, t_] = & \\
 & C_1 + (C_2 - C_1) \frac{x}{l} + \\
 & \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{50} \left( \frac{(C_2 * \text{Cos}[n * \pi] - C_1)}{n} * \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * x}{l}\right] * \text{Exp}\left[\frac{-D_x * n^2 * \pi^2 * t}{l^2}\right] \right) + \\
 & \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{50} \left( \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * x}{l}\right] * \text{Exp}\left[\frac{-D_x * n^2 * \pi^2 * t}{l^2}\right] \right) \int_0^1 f[z] * \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * z}{l}\right] dz;
 \end{aligned}$$

```
g = CC[x, t];
```

```
s = Table[g, {t, 1, 50, 10}];
```

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
h = Plot[Evaluate[s, {x, 0, l}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"x (cm)", "C (gr/cm³)"}]
```



### 11. Hollow Sphere (a).

**Initial Condition:**  $c(x,0) = c_0$ ,  $a \leq r \leq b$

**Boundary Conditions:**  $c(a,t) = c_1$ ,  $c(b,t) = c_2$  and  $c_1 = c_2$

**Gas Constant (J/mol K)**

```
R = 8.314;
```

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Initial Concentration (between internal & external radius) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$C_0 = 0.01;$$

**Internal Radius Concentration (boundary) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$C_1 = 0.5;$$

**Internal & External Radius of Hollow Sphere (cm)**

$$a = 0.03;$$

$$b = 0.05;$$

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D$  \* (kJ/mol K)**

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135000;$$

**Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)**

$$D_x = D_0 * \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D}{R * T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

**Solution**

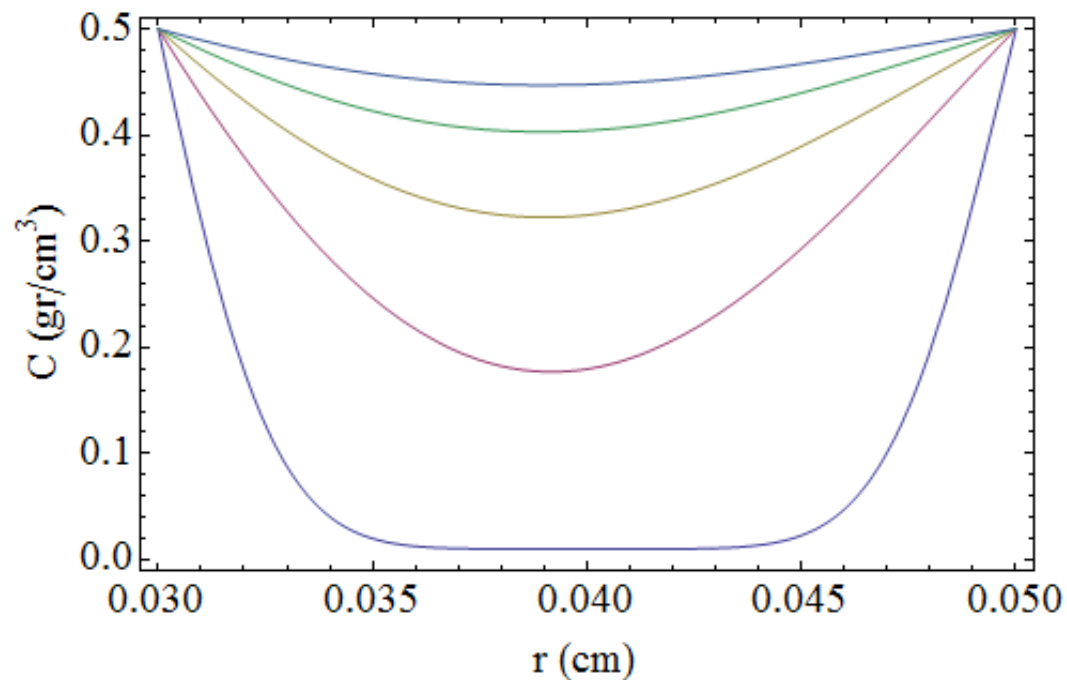
$$\begin{aligned} CC[r_, t_] = & \\ & C_0 + \\ & (C_1 - C_0) \\ & \left( 1 + \frac{2}{\pi * r} \sum_{n=1}^{50} \left( \frac{b * \text{Cos}[n * \pi] - a}{n} * \text{Sin}\left[\frac{n * \pi * (r - a)}{b - a}\right] * \text{Exp}\left[\frac{-D_x * n^2 * \pi^2 * t}{(b - a)^2}\right] \right) \right); \end{aligned}$$

$$g = CC[r, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 50, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

```
h = Plot[Evaluate[s, {r, a, b}], Frame → True,
  FrameLabel → {"r (cm)", "C (gr/cm3)"}]
```



## 12. Hollow Sphere (b).

**Initial Condition:**  $c(x,0) = c_0$ ,  $a \leq r \leq b$

**Boundary Conditions:**  $c(a,t) = c_1$ ,  $c(b,t) = c_2$  and  $c_1 \neq c_2$

**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Initial Concentration (between internal & external radius) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_0 = 0.01;$$

**Internal and External Radius Concentration (boundaries) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_1 = 0.8;$$

$$c_2 = 0.001;$$

**Internal & External Radius of Hollow Sphere (cm)**

$$a = 0.03;$$

$$b = 0.05;$$

Parameters  $D_0$  ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) and  $\Delta H_D^*$  (kJ/mol K)

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D^* = 135\,000;$$

Arrhenius equation for Diffusion Coefficient ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ )

$$D_x = D_0 \cdot \text{Exp}\left[-\frac{\Delta H_D^*}{R \cdot T}\right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

Solution

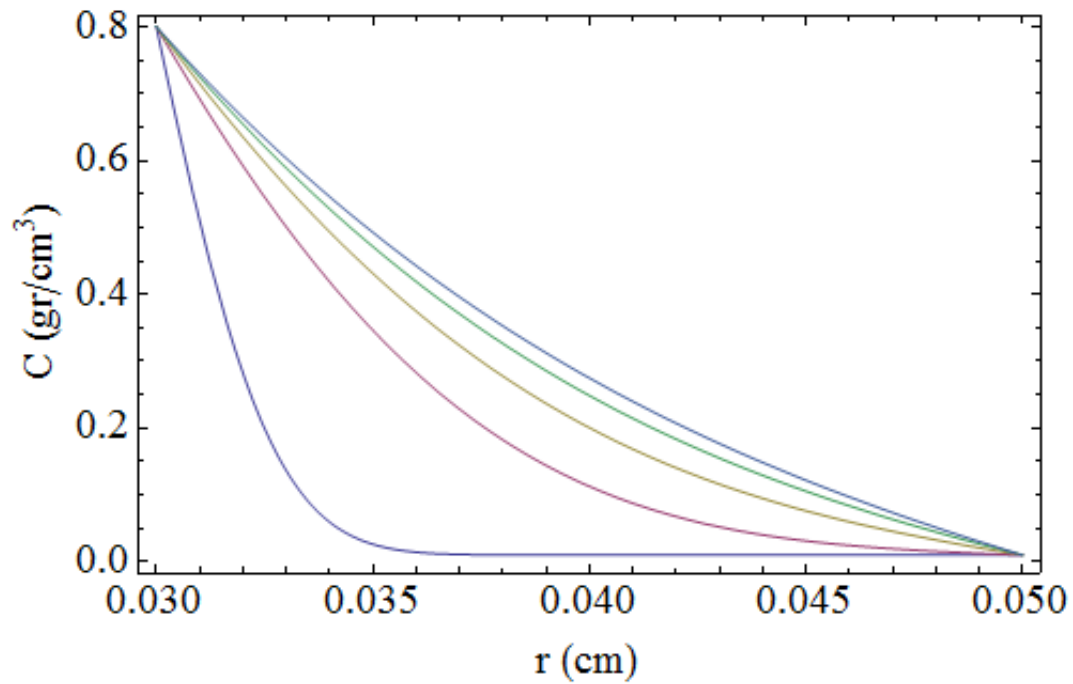
$$\begin{aligned} CC[r_, t_] = & \frac{a \cdot C_1}{r} + \frac{(b \cdot C_2 - a \cdot C_1) (r - a)}{r (b - a)} + \\ & \frac{2}{\pi \cdot r} \\ & \sum_{n=1}^{50} \left( \frac{b \cdot (C_2 - C_0) \text{Cos}[n \cdot \pi] - a (C_1 - C_0)}{n} \cdot \text{Sin}\left[\frac{n \cdot \pi \cdot (r - a)}{b - a}\right] \cdot \right. \\ & \left. \text{Exp}\left[\frac{-D_x \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{(b - a)^2}\right] \right); \end{aligned}$$

$$g = CC[r, t];$$

$$s = \text{Table}[g, \{t, 1, 50, 10\}];$$

$$\text{SetOptions}[\text{Plot}, \text{BaseStyle} \rightarrow \{\text{FontSize} \rightarrow 20\}];$$

$$h = \text{Plot}[\text{Evaluate}[s, \{r, a, b\}], \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \\ \text{FrameLabel} \rightarrow \{"r \text{ (cm)", "C (gr/cm}^3)\}"]$$



### 13. Hollow Cylinder.

Initial Condition:  $c(x,0) = c_0$ ,  $a \leq r \leq b$

Boundary Conditions:  $c(a,t) = c_1$ ,  $c(b,t) = c_2$  and  $c_1 \neq c_2$

**Gas Constant (J/mol K)**

$$R = 8.314;$$

**Temperature (K)**

$$T = 1473.15;$$

**Initial Concentration (between internal & external radius) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_0 = 0.01;$$

**Internal and External Radius Concentration (boundaries) (gr/cm<sup>3</sup>)**

$$c_1 = 0.8;$$

$$c_2 = 0.001;$$

**External & Internal Radius of Hollow Cylinder (cm)**

$$b = 0.1;$$

$$a = \frac{b}{2}$$

0.05

**Roots  $\alpha_n$  of U for ratio b/a=2**

$$\alpha_1 = \frac{3.1230}{a}$$

62.46

$$\alpha_2 = \frac{6.2734}{a}$$

125.468

$$\alpha_3 = \frac{9.4182}{a}$$

188.364

$$\alpha_4 = \frac{12.5614}{a}$$

251.228

$$\alpha_5 = \frac{15.7040}{a}$$

314.08

**Parameters  $D_0$  (cm<sup>2</sup>/sec) and  $\Delta H_D$  \* (kJ/mol K)**

$$D_0 = 0.15;$$

$$\Delta H_D = 135\,000;$$

**Arrhenius equation for Diffusion Coefficient (cm<sup>2</sup>/sec)**

$$D_x = D_0 * \text{Exp} \left[ -\frac{\Delta H_D}{R * T} \right]$$

$$2.44972 \times 10^{-6}$$

**Solution**



```
U = BesselJ[0, r *  $\alpha_n$ ] * BesselY[0, b *  $\alpha_n$ ] - BesselJ[0, b *  $\alpha_n$ ] * BesselY[0, r *  $\alpha_n$ ];
```

$$CC[r_, t_] = \frac{C_1 \operatorname{Log}\left[\frac{b}{r}\right] + C_2 \operatorname{Log}\left[\frac{r}{a}\right]}{\operatorname{Log}\left[\frac{b}{a}\right]} +$$

$$\pi * C_0 \sum_{n=1}^5 \left( \frac{\operatorname{BesselJ}[0, a * \alpha_n] * U * \operatorname{Exp}[-D_x * \alpha_n^2 * t]}{\operatorname{BesselJ}[0, a * \alpha_n] + \operatorname{BesselJ}[0, b * \alpha_n]} \right) -$$

$\pi$

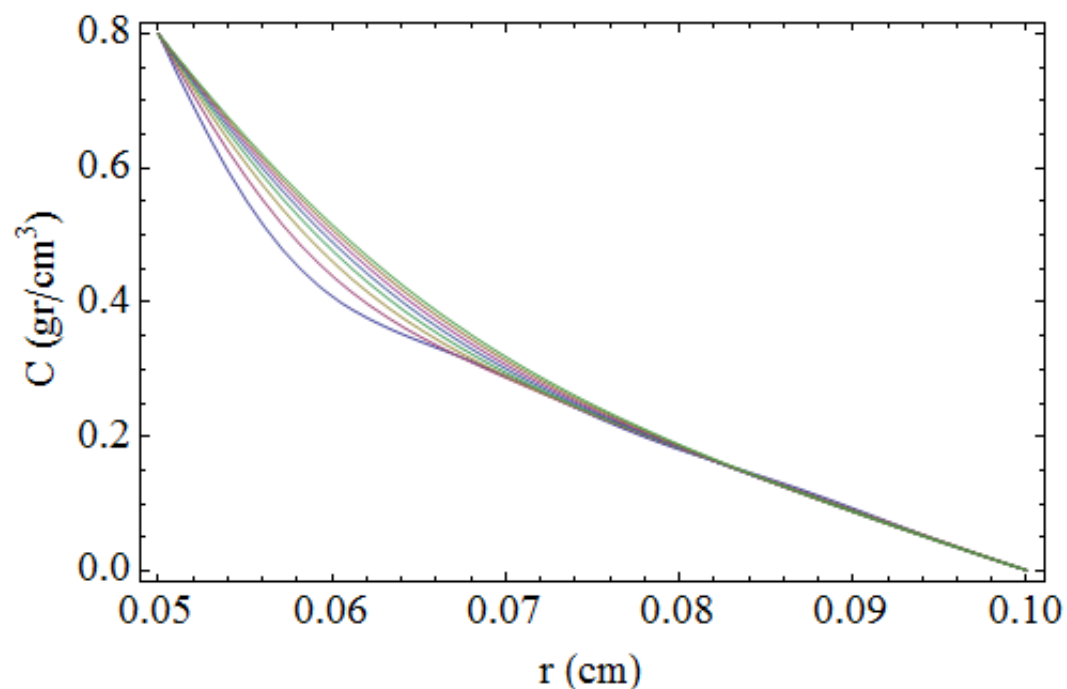
$$\sum_{n=1}^5 \left( \frac{(C_2 \operatorname{BesselJ}[0, a * \alpha_n] - C_1 \operatorname{BesselJ}[0, b * \alpha_n]) * \operatorname{BesselJ}[0, a * \alpha_n] * U}{(\operatorname{BesselJ}[0, a * \alpha_n])^2 + (\operatorname{BesselJ}[0, b * \alpha_n])^2} * \operatorname{Exp}[-D_x * \alpha_n^2 * t] \right);$$

```
g = CC[r, t];
```

```
s = Table[g, {t, 5, 40, 5}];
```

```
SetOptions[Plot, BaseStyle -> {FontSize -> 20}];
```

```
h = Plot[Evaluate[s, {r, a, b}], Frame -> True,
  FrameLabel -> {"r (cm)", "C (gr/cm3)"}]
```



 Created with Wolfram *Mathematica* 7.0