

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

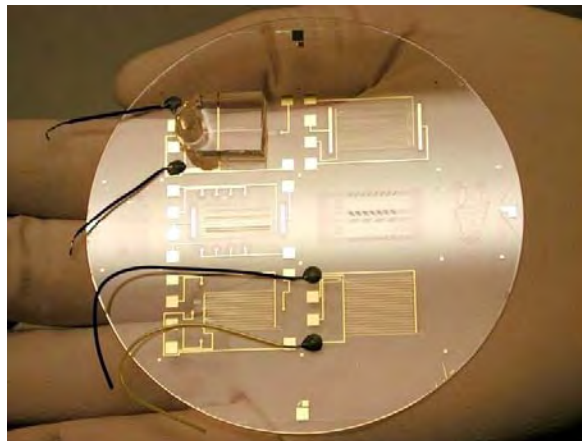
Εργαστήριο Φυσικών και Χημικών Διεργασιών

Διπλωματική Εργασία

**ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΩΝ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΑΝΑΛΙΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ  
ΛΟΓΩ ΒΑΘΜΙΑΣ ΠΙΕΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ**

Υπό

**ΡΗΤΟΥ Δ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ**



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

**ΒΟΛΟΣ 2009**

© 2009 Ρήτος Δ. Κωνσταντίνος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν.5343/32 αρ.202 παρ.2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής      Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης  
(Επιβλέπων)            Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
   Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής    Δρ. Τάσος Σταματέλλος  
   Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
   Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής      Δρ. Αθανάσιος Παπαθανασίου  
   Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
   Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

**Αφιερώνεται στην ανιψιά μου Έλενα.**

## Ευχαριστίες

Με αφορμή την παρούσα διπλωματική εργασία, θα ήθελα να εκφράσω τον σεβασμό μου και τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτριο Βαλουγεώργη. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθώς και η σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας είναι δύο θεμελιώδεις παράγοντες που συντέλεσαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Ο τρόπος σκέψης που μου ενέπνευσε, ο οποίος συνίσταται στην κριτική αντιμετώπιση των επιστημονικών θεμάτων, αποτελεί ένα εξαιρετο εφόδιο, το οποίο βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις πτυχές της καθημερινής μας ζωής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Επιτροπής για την μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους μεταπτυχιακούς και προπτυχιακούς φοιτητές του Εργαστηρίου Φυσικών και Χημικών Διεργασιών και ιδιαίτερα στους Στέλιο Βαρούτη, Σεραφείμ Μισδανίτη και Σαράντη Πανταζή για την πολύτιμη βοήθεια τους στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ακαδημαϊκής κοινότητας του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών για τις πληροφορίες και τη γνώση που μου προσέφεραν σε ακαδημαϊκά και όχι μόνο θέματα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Δημήτρη και Άννα Ρήτου, και την αδερφή μου, Αναστασία Ρήτου, για την συμπαράσταση τόσο υλικά όσο και ψυχολογικά σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και για την αμέριστη αγάπη τους στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της προσωπικότητάς μου.

Ρήτος Κωνσταντίνος

**ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΩΝ ΣΕ ΜΙΚΡΟΚΑΝΑΛΙΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΛΟΓΩ  
ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΠΙΕΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ**

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΡΗΤΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2009

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης, Καθηγητής Αναλυτικών και  
Υπολογιστικών Μεθόδων Μεσοκλίμακας σε Φαινόμενα Ροής και Μεταφοράς

**Περίληψη**

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η ροή αερίων σε μικροαγωγούς διαφόρων διατομών λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας. Αρχικά γίνεται μία εισαγωγή στην οποία παρουσιάζονται τεχνολογικές εφαρμογές όπου μπορούν να εμφανιστούν τέτοιου είδους ροές. Αναφέρεται ο βασικός λόγος για τον οποίο επιλέχτηκε η συγκεκριμένη μελέτη. Παρουσιάζεται η περιοχή ροής και η θεωρία στην οποία στηρίχτηκε η επίλυση αυτών των ροών. Παράλληλα αναφέρονται οι λόγοι για τους οποίους επιλέχτηκαν συγκεκριμένες διατομές και περιγράφεται συνοπτικά το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού. Τέλος γίνεται μία παρουσίαση των υπόλοιπων κεφαλαίων της διπλωματικής εργασίας.

Στη συνέχεια δίδεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση στην οποία παρουσιάζονται τα βιβλία και τα άρθρα τα οποία μελετήθηκαν και στα οποία μπορεί να ανατρέξει ο αναγνώστης για μεγαλύτερη εμβάθυνση στο θέμα. Στις αναφορές αυτές περιλαμβάνονται συγγράμματα σχετικά με την κινητική θεωρία των αερίων και άρθρα που

επικεντρώνονται στην θεωρητική, υπολογιστική ή πειραματική μελέτη συγκεκριμένων ροών.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται θεωρητική περιγραφή του φαινομένου του θερμικού ερπυσμού. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία πειραματική διάταξη μέσω της οποίας μπορεί να γίνει πειραματική επιβεβαίωση του φαινομένου.

Έπεται το κυρίως μέρος της διπλωματικής εργασίας με την μαθηματική διατύπωση των ροών και την παρουσίαση αδιάστατων αποτελεσμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά δίδεται η γεωμετρία και οι παράμετροι της ροής. Ακολουθεί λεπτομερής παρουσίαση των διατομών που επιλέχτηκαν για μελέτη. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα κινητικά μοντέλα και οι μαθηματικές εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των αδιάστατων παροχών. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση των κινητικών εξισώσεων παρατίθενται σε πίνακες και διαγράμματα στη συνέχεια του κεφαλαίου. Το τέλος του κεφαλαίου αφιερώνεται στην περιγραφή του αριθμού Pouseuille και στις τιμές που λαμβάνει στις υπό μελέτη περιπτώσεις.

Ακολουθεί ο υπολογισμός της παροχής μάζας και της κατανομής της πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Τα αποτελέσματα αφορούν ροές λόγω βαθμίδας πίεσης, αλλά και ροές λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας. Τα δύο είδη ροών μελετήθηκαν με διαφορετικό κινητικό μοντέλο, ενώ σε κάθε περίπτωση σχολιάζονται τυχόν αποκλίσεις, σφάλματα ή μη αναμενόμενα αποτελέσματα που παρατηρούνται.

Τελευταίο μελετάται το φαινόμενο διαφορικής θερμομοριακής πίεσης. Παρατίθενται οι εξισώσεις που το περιγράφουν και στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα για την σταθερά του φαινομένου.

Τέλος γίνεται μία σύνοψη όλων των παραπάνω, καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα διπλωματική εργασία και επιπλέον προτείνονται θέματα που μπορούν να μελετηθούν ως συνέχεια της εργασίας αυτής.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. Εισαγωγή.....</b>	<b>10</b>
<b>2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....</b>	<b>15</b>
<b>3. Περιγραφή ροής θερμικού ερπυσμού.....</b>	<b>19</b>
3.1 Θεωρητική εξήγηση φαινομένου.....	19
3.2 Πειραματική επιβεβαίωση φαινομένου.....	21
<b>4. Μαθηματική διατύπωση ροών και αδιάστατα αποτελέσματα.....</b>	<b>25</b>
4.1 Γεωμετρία και Παράμετροι Ροής.....	25
4.2 Διατομές μικροαγωγών.....	28
4.3 Κινητικό μοντέλο BGK.....	31
4.4 Κινητικό μοντέλο Shakhov.....	33
4.5 Αδιάστατες παροχές.....	35
4.6 Αριθμός Pouseuille.....	49
<b>5. Κατανομή πίεσης κατά μήκος των αγωγών.....</b>	<b>52</b>
5.1 Ροές λόγω βαθμίδας πίεσης.....	52
5.1.1 Παροχή μάζας.....	52
5.1.2 Κατανομή πίεσης.....	55
5.2 Ροές λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας και πίεσης.....	63
<b>6. Διαφορική θερμομοριακή πίεση.....</b>	<b>71</b>
6.1 Διατύπωση προβλήματος.....	71
6.2 Αποτελέσματα.....	73
<b>7. Συμπεράσματα.....</b>	<b>76</b>
<b>Αναφορές.....</b>	<b>78</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιστημονική περιοχή της αεροδυναμικής σε αραιοποιημένες συνθήκες, γνωστή στην διεθνή βιβλιογραφία σαν *rarefied gas dynamics* [1], έχει πολύ σημαντικές τεχνολογικές εφαρμογές. Παραδοσιακά, σε αυτές περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων η τεχνολογία κενού, τα πορώδη υλικά, η τεχνολογία αεροζόλ, η τεχνολογία επικαλύψεων επιφανειών, η αεροδυναμική μεγάλου υψομέτρου, ενώ πιο πρόσφατα σημαντικές εφαρμογές παρατηρούνται στα ραγδαία εξελισσόμενα πεδία της νανοτεχνολογίας και των μικροηλεκτρομηχανολογικών συστημάτων γνωστά σαν MEMS [2]. Οι εφαρμογές σε χαμηλοδιάστατα συστήματα (MEMS) ασχολούνται με το σχεδιασμό και την κατασκευή συσκευών-μινιατούρες σε μικρογραφία. Για την ανάπτυξη και ομαλή λειτουργία των συσκευών αυτών απαιτείται ο λεπτομερής και πλήρης θερμορευστοδυναμικός τους σχεδιασμός.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρωνόμαστε σε φαινόμενα ροής και μεταφοράς σε διατάξεις MEMS και ειδικότερα στην πλήρως ανεπτυγμένη ροή αερίων σε μικροαγωγούς διαφόρων διατομών που αποτελούν βασικό τμήμα-εξάρτημα αυτών των συσκευών. Η κλασσική ρευστομηχανική και μετάδοση θερμότητας η οποία βασίζεται στις καταστατικές εξισώσεις Newton και Fourier, με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης, δεν δύναται να εφαρμοστεί στις ειδικές συνθήκες που επικρατούν σε μικροδιατάξεις. Αντίθετα, απαιτούνται εναλλακτικές θεωρητικές προσεγγίσεις, εκ των οποίων η πλέον σημαντική με στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο είναι η κινητική θεωρεία, όπως αυτή περιγράφεται από την εξίσωση Boltzmann και τα κινητικά μοντέλα [3, 4].

Βασική παράμετρος στην αεριοδυναμική σε αραιοποιημένες συνθήκες, μαζί με τους αριθμούς Reynolds και Mach είναι ο αριθμός Knudsen ( $Kn$ ). Ο αριθμός αυτός ορίζεται ως ο λόγος του μήκους της μέσης μοριακής ελεύθερης διαδρομής, δηλαδή της μέσης απόστασης που διανύει ένα μόριο πριν συγκρουσθεί με ένα άλλο μόριο, ως προς ένα χαρακτηριστικό μακροσκοπικό μήκος του προβλήματος. Στην περίπτωση των εσωτερικών ροών, όπως αυτές που εξετάζονται στη παρούσα διπλωματική εργασία, ως χαρακτηριστικό μακροσκοπικό μήκος έχει επιλεγεί η υδραυλική διάμετρος του μικροαγωγού. Το μέγεθος του αριθμού Knudsen καθορίζει την περιοχή ροής και επομένως και την μεθοδολογία προσέγγισης. Συγκεκριμένα, για  $Kn \leq 0.1$  το ρευστό μπορεί να μελετηθεί ως συνεχές μέσο και να περιγραφεί από υδροδυναμικές εξισώσεις όπου οι άγνωστες ποσότητες είναι μακροσκοπικές μεταβλητές όπως η πυκνότητα, το διάνυσμα της ταχύτητας, η πίεση, η θερμοκρασία, κ.τ.λ. Για  $0.1 < Kn < 10$ , στη λεγόμενη μεταβατική περιοχή, απαιτείται μικροσκοπική προσέγγιση όπου λαμβάνεται υπ' όψη η ελεύθερη κίνηση των μορίων όπως και οι συγκρούσεις μεταξύ τους και με τα τοιχώματα. Στη μεταβατική περιοχή η προσομοίωση της ροής γίνεται με την κινητική θεωρία όπως αυτή περιγράφεται από την εξίσωση Boltzmann, έχοντας σαν βασικό άγνωστο την συνάρτηση κατανομής, ενώ οι μακροσκοπικές μεταβλητές που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον προκύπτουν από τις ροπές της συνάρτησης κατανομής. Τέλος, για  $Kn > 10$ , οι συγκρούσεις μεταξύ μορίων είναι πολύ λιγότερες σε σχέση με τις συγκρούσεις μεταξύ μορίων και τοιχωμάτων και για το λόγο αυτό οι συγκρούσεις μεταξύ μορίων μπορούν να αγνοηθούν. Αυτή η περιοχή της ροής είναι γνωστή σαν ελεύθερη μοριακή περιοχή και βασίζεται και πάλι στην κινητική θεωρία και στην εξίσωση Boltzmann αλλά αυτή την φορά χωρίς τον όρο των συγκρούσεων. Σημειώνεται ότι προσεγγίσεις που βασίζονται στην κινητική θεωρία ισχύουν σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen, από την ελεύθερη

μοριακή περιοχή μέχρι και το συνεχές, υδροδυναμικό όριο. Βεβαίως, η επίλυση του προβλήματος με βάση την εξίσωση Boltzmann είναι αρκετά έως πολύ πιο δύσκολη από ότι με τις εξισώσεις Navier-Stokes και για το λόγο αυτό εφαρμόζεται συνήθως μόνο όταν οι εξισώσεις Navier-Stokes καταρρέουν και οδηγούν σε λάθος αποτελέσματα.

Έχοντας ως βάση την κινητική θεωρία, την τελευταία δεκαετία έχουν αναπτυχθεί και εφαρμοστεί πολλές αριθμητικές μέθοδοι για ροές αερίων μέσα σε αγωγούς σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες οι διατάξεις των συσκευών MEMS αποτελούνται από εξαρτήματα που συνδέονται με μικροαγωγούς. Επομένως, επειδή οι μικροαγωγοί, αποτελούν κύριο στοιχείο κάθε τέτοιας διάταξης, η ροή αερίων εντός των μικροαγωγών απασχολεί εδώ και αρκετά χρόνια την επιστημονική κοινότητα. Εκτεταμένη θεωρητική και πειραματική δουλειά έχει γίνει για τις περιπτώσεις των κυκλικών και ορθογωνίων διατομών [5, 6]. Όμως, η μεγάλη ποικιλία διατομών που χρησιμοποιείται στις εφαρμογές απαιτεί τη μελέτη ροών και σε αγωγούς άλλων διατομών. Η μέθοδος της χημικής εγχάραξης είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική κατασκευής μικροαγωγών σε πλακίδια πυριτίου. Οι διατομές που μπορούν να επιτευχθούν με την συγκεκριμένη κατασκευαστική τεχνική είναι περιορισμένες. Οι μικροαγωγοί που παράγονται με χημική εγχάραξη απευθείας πάνω σε πλακίδια πυριτίου έχουν διατομές που εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες όπως η κρυσταλλογραφική δομή του εκάστοτε πυριτίου. Για παράδειγμα, οι μικροαγωγοί που χαράζονται με τη χρήση διαλύματος KOH σε πυρίτιο  $\langle 110 \rangle$  έχουν ορθογώνια διατομή, ενώ σε πυρίτιο  $\langle 100 \rangle$  έχουν τραπεζοειδή διατομή με γωνία βάσης  $54,74^\circ$  που εμφανίζεται λόγω της κρυσταλλογραφικής μορφολογίας του  $\langle 100 \rangle$  πυριτίου [7].

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζονται, έχοντας σαν βάση την κινητική θεωρία, πλήρως ανεπτυγμένες ροές αερίων σε μικροαγωγούς με τις παραπάνω ορθογώνιες και τραπεζοειδείς διατομές, όπως και σε ισοσκελή τριγωνική διατομή με γωνία βάσης  $54,74^\circ$ . Επίσης, για λόγους πληρότητας αλλά και εξοικείωσης με το αντικείμενο περιλαμβάνονται και ροές σε κυλινδρικούς αγωγούς. Σε όλες τις περιπτώσεις διατομών η ροή μπορεί να οφείλεται σε διαφορά πίεσης ή σε διαφορά θερμοκρασίας στη διεύθυνση της ροής. Τα αποτελέσματα καλύπτουν όλο το εύρος του αριθμού Knudsen.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στη ροή που οφείλεται σε διαφορά θερμοκρασίας. Σημειώνεται ότι η ροή αυτή γνωστή σαν ροή θερμικού ερπυσμού (*thermal creep flow*) δεν οφείλεται σε βαρυτικές δυνάμεις όπως η ροή φυσικής συναγωγής. Ο μηχανισμός αυτής της ροής εξαρτάται αποκλειστικά από το γεγονός ότι το αέριο βρίσκεται εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας και για το λόγο αυτό εμφανίζεται μόνο σε αραιωποιημένες ατμόσφαιρες, ενώ παύει να υφίσταται καθώς πλησιάζουμε το υδροδυναμικό όριο. Στη συνέχεια της εργασίας παρουσιάζεται λεπτομερής περιγραφή της ροής θερμικού ερπυσμού, όπως επίσης και του σχετικού προκύπτοντος σε ειδικές περιπτώσεις φαινομένου της διαφορικής θερμομοριακής πίεσης (*Thermomolecular Pressure Difference*) [8].

Κλείνοντας το εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάζεται η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση και αναφέρονται τα συγγράμματα και τα άρθρα τα οποία μελετήθηκαν με σκοπό την δημιουργία του απαραίτητου θεωρητικού υποβάθρου καθώς επίσης και τη σύγκριση – επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Αναλυτική περιγραφή του φαινομένου του θερμικού ερπυσμού από θεωρητική και πειραματική σκοπιά παρουσιάζεται στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Στη συνέχεια τα Κεφάλαια 4, 5 και 6, όπου περιλαμβάνονται η μαθηματική διατύπωση των

ροών που έχουν εξετασθεί με τα αντίστοιχα αποτελέσματα, τμήμα των οποίων παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, και είναι τα πλέον σημαντικά της διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι διατάξεις ροής, τα κινητικά μοντέλα και τα αποτελέσματα σε αδιάστατη μορφή. Το 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, περιλαμβάνει την μεθοδολογία υπολογισμού της παροχής μάζας και της κατανομής πίεσης κατά μήκος των αγωγών σε ροές που οφείλονται σε διαφορά πίεσης και θερμοκρασίας, ενώ στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο εξετάζεται το φαινόμενο της διαφορικής θερμομοριακής πίεσης και υπολογίζεται η σταθερά που το χαρακτηρίζει σε σχέση με άλλες παραμέτρους της ροής. Τέλος, στο 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση, παρουσιάζονται συνοπτικά τα κύρια συμπεράσματα και προτείνονται πιθανές μελλοντικές δράσεις σαν της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η κινητική θεωρία αποτελεί κλάδο της στατιστικής μηχανικής και ασχολείται με συστήματα εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας. Αναπτύχθηκε στο δεύτερο ήμισυ του 19<sup>ου</sup> αιώνα από δύο πολύ μεγάλους φυσικούς, τους Maxwell και Boltzmann τις αρχικές θεωρήσεις των οποίων επέκτειναν και ολοκλήρωσαν στη διάρκεια 20<sup>ου</sup> αιώνα άλλοι εξίσου σημαντικοί μαθηματικοί-φυσικοί όπως οι Lorentz, Hilbert, Chapman, Green, Uhlenbeck και άλλοι [3]. Η κινητική θεωρία των μονοατομικών αερίων (ήλιο, νέον, κ.τ.λ.) όπως αυτή περιγράφεται από την συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί την εξίσωση Boltzmann και τις συναφείς έννοιες (ενδομοριακό δυναμικό, διαφορική ενεργός διατομή, θεώρημα H, ανάπτυγμα Chapman-Enskog) αποτελεί μία θεωρία με στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο που έχει επαληθευθεί πειραματικά. Στη περίπτωση των πολυατομικών αερίων η έρευνα συνεχίζεται σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο. Τα τελευταία είκοσι χρόνια το ενδιαφέρον γύρω από την κινητική θεωρία έχει αναζωπυρωθεί αφενός με αιτία διάφορες έντονα αναπτυσσόμενες τεχνολογικές περιοχές με αιχμή του δόρατος την νανοτεχνολογία και αφετέρου λόγω της ραγδαίας ισχυροποίησης των υπολογιστικών συστημάτων (hardware και software) με αποτέλεσμα προβλήματα που εθεωρούντο ως μη επιλύσιμα υπολογιστικά πριν μερικά χρόνια σήμερα να επιλύονται με λογικό υπολογιστικό κόστος.

Στο πλαίσιο αυτό μία πλήρης ανασκόπηση της ροής αερίων λόγω διαφοράς πίεσης και θερμοκρασίας ανάμεσα σε πλάκες και διαμέσου κυκλικού αγωγού σε όλο το εύρος του αριθμού Knudsen δίδεται από τους Sharipov και Seleznev στο άρθρο [8]. Στο

συγκεκριμένο άρθρο παρουσιάζονται η εξίσωση Boltzmann, οι κινητικές εξισώσεις-μοντέλα που απλοποιούν τον όρο των μοριακών συγκρούσεων, οι εμπλεκόμενες οριακές συνθήκες, διάφορες τεχνικές επίλυσης των ολοκληρωδιαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν μαθηματικά το πρόβλημα καθώς και εκτενής αναφορά στα σχετικά αποτελέσματα. Επίσης, συμπεριλαμβάνονται όλα τα αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα και γίνονται συγκρίσεις με αντίστοιχα αριθμητικά. Επιπλέον, στο ίδιο άρθρο [8] αναφέρονται τα δύο κινητικά μοντέλα, συγκεκριμένα το μοντέλο Bhatnagar-Gross-Krook, γνωστό ως BGK και το μοντέλο Shakhov, γνωστό ως μοντέλο S, τα οποία εφαρμόζονται και επιλύονται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Τέλος, στο άρθρο [8] περιγράφεται επίσης και το φαινόμενο διαφορικής θερμομοριακής πίεσης. Τονίζεται ότι όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται μόνο για την περίπτωση αγωγών κυλινδρικής διατομής.

Έχοντας σαν βάση την ροή σε κυλινδρικό αγωγό, πολλοί ερευνητές όπως οι Loyalka, Sone, Aoki, Sharipov και άλλοι επέλυσαν αντίστοιχες ροές σε ορθογώνιους αγωγούς [5, 6, 9]. Σημειώνεται ότι η προσομοίωση της ροής σε ορθογώνιους αγωγούς απαιτεί μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ και για το λόγο αυτό αναπτύσσονται και εφαρμόζονται εξειδικευμένες αριθμητικές τεχνικές επίλυσης των κινητικών εξισώσεων [10, 11]. Πρόσφατα παρουσιάζονται εργασίες σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες όπως ροές σε ελλειπτικούς, τριγωνικούς και τραπεζοειδείς αγωγούς [12, 13, 14].

Οι ροές που οφείλονται σε διαφορά πίεσης, εξετάζονται συχνότερα σε σχέση με τις αντίστοιχες ροές που οφείλονται σε διαφορά θερμοκρασίας επειδή έχουν εντονότερο τεχνολογικό ενδιαφέρον και είναι απλούστερες. Η ροή θερμικού ερπυσμού προϋποθέτει την επίλυση του μοντέλου S που βεβαίως είναι πολύπλοκότερο από το μοντέλο BGK που κρίνεται κατάλληλο μόνο για ροές τύπου Poiseuille, επειδή δεν μπορεί να αποδώσει τους



σωστούς συντελεστές ιξώδους και θερμικής αγωγής ταυτόχρονα. Για το λόγο αυτό οι εργασίες που σχετίζονται με ροές θερμικού ερπυσμού είναι περιορισμένες. Επίσης στις εργασίες [15, 16] παρουσιάζεται το φαινόμενο της διαφορικής θερμομοριακής πίεσης και δίδονται αποτελέσματα για την χαρακτηριστική σταθερά του φαινομένου για ροές σε ορθογώνιους και ελλειπτικούς αγωγούς.

Ένας από τους πλέον γνωστούς καθηγητές-ερευνητές που ασχολούνται, εδώ και δεκαετίες με ροές και φαινόμενα μεταφοράς εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας είναι ο Yoshio Sone που στο τελευταίο του βιβλίο περιγράφει με λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά ροών σε αραιοποιημένες συνθήκες που οφείλονται σε βαθμίδες θερμοκρασίας. Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζεται ο φυσικός μηχανισμός δημιουργίας της ροής θερμικού ερπυσμού και μια πειραματική διάταξη με την οποία γίνεται ποιοτικά εμφανές το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού [17].

Τα τελευταία δέκα χρόνια έχει γίνει σημαντική πειραματική ερευνητική δουλειά για ροές αερίων σε μικροαγωγούς, όπως οι εργασίες των Morini [7] και Colin [18]. Όμως σημειώνεται ότι όλες οι δημοσιεύσεις αφορούν πειραματικές διατάξεις με ορθογώνιους αγωγούς, όπου η ροή οφείλεται μόνο σε διαφορά πίεσης. Επομένως, το πεδίο για ερευνητική πειραματική δουλειά σε ροές εντός τριγωνικών και τραπεζοειδών αγωγών που είναι ιδιαίτερα σημαντικοί σε μικροδιατάξεις όπως και σε ροές θερμικού ερπυσμού παραμένει ανοικτό. Στο άρθρο [7] παρουσιάζεται μία πειραματική διάταξη με σκοπό την μέτρηση του συντελεστή τριβής των μικροκαναλιών και τα αποτελέσματα που προέκυψαν για διάφορες διατομές. Στο άρθρο [18] παρουσιάζεται μία διάταξη με στόχο την μέτρηση της παροχής μάζας σε μικροκανάλια ορθογώνιας διατομής.

Ολοκληρώνοντας τη σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση θεωρούμε χρήσιμο να αναφέρουμε τις δημοσιεύσεις της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Φυσικών και

Χημικών Διεργασιών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας αφού μεγάλο τμήμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας βασίζεται σε αυτές [13, 14, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Με βάση τα παραπάνω και την υπάρχουσα υποδομή του Εργαστηρίου Φυσικών και Χημικών Διεργασιών σε λογισμικό και υπολογιστές, στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής θα ολοκληρωθεί και θα παρουσιασθεί σε συνέδριο η εργασία [25].

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΡΟΗΣ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΕΡΠΥΣΜΟΥ

#### 3.1 Θεωρητική εξήγηση φαινομένου

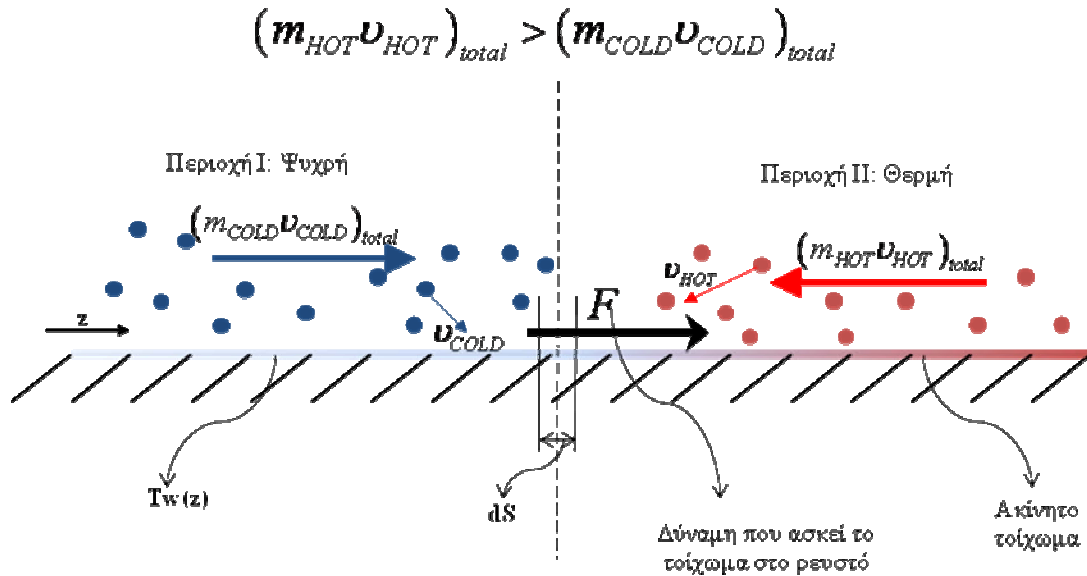
Η ροή ενός αερίου εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας λόγω διαφοράς θερμοκρασίας στη διεύθυνση της ροής είναι γνωστή ως ροή θερμικού ερπυσμού. Το φαινόμενο αυτό δεν ανακαλύφτηκε πρόσφατα, αλλά παρατηρήθηκε πρώτα από τον Knudsen. Γύρω στο 1910 [17]. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος θερμικού ερπυσμού περιγράφεται από κινητικές εξισώσεις που θα διατυπωθούν σε επόμενα κεφάλαια της διπλωματικής, ενώ στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται ο φυσικός μηχανισμός της συγκεκριμένης ροής [17].

Θεωρούμε ένα αέριο σε ηρεμία πάνω από ένα ακίνητο επίπεδο τοίχωμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Το τοίχωμα βρίσκεται στο επίπεδο  $y=0$ , ενώ το αέριο καταλαμβάνει την περιοχή  $y>0$ . Η θερμοκρασία του τοιχώματος και του αερίου είναι γνωστή και περιγράφεται από μία θερμοκρασιακή κατανομή της μορφής  $T=T(z)$  με  $dT/dz>0$ . Δηλαδή η θερμοκρασία είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $z$  και αυξάνεται μονότονα καθώς αυξάνεται το  $z$ . Έστω ένα οποιοδήποτε σημείο  $S$  κατά μήκος του τοιχώματος και μια μικρή περιοχή  $dS$  γύρω από το σημείο  $S$ . Η περιοχή που καταλαμβάνει το αέριο χωρίζεται από την νοητή γραμμή  $z=z_s$  σε δύο περιοχές την I και II για  $z<z_s$  και  $z>z_s$  αντίστοιχα, όπου η μέση θερμοκρασία της περιοχής I είναι μικρότερη από την αντίστοιχη θερμοκρασία της περιοχής II, δηλαδή  $T_I < T_{II}$ . Αντίστοιχα αφού η ταχύτητα των μορίων είναι ανάλογη κάποιας δύναμης της θερμοκρασίας, εύκολα

προκύπτει ότι η μέση μοριακή ταχύτητα των μορίων της περιοχής I είναι μικρότερη από αυτή της περιοχής II, δηλαδή  $v_I < v_{II}$ .

Μόρια προερχόμενα και από τις δύο περιοχές, την ψυχρή και τη θερμή, συγκρούονται με το στοιχειώδες τμήμα του τοιχώματος  $dS$ . Μάλιστα όσο περισσότερο αραιή είναι η ατμόσφαιρα τόσο μεγαλύτερες είναι οι ελεύθερες τροχιές των μορίων πριν συγκρουσθούν με το τοίχωμα. Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στην επιφάνεια  $dS$  προερχόμενα από τις περιοχές I και II είναι περίπου ίσος ( $m_I \approx m_{II}$ ), είναι προφανές ότι η μέση ορμή των μορίων της περιοχής I που μεταφέρεται στο τοίχωμα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ορμή των μορίων της περιοχής II, δηλαδή  $m_I v_I < m_{II} v_{II}$ . Όσο αυξάνει ο αριθμός Knudsen τόσο μεγαλύτερο είναι και το μέτρο της διαφοράς ορμής  $|m_I v_I - m_{II} v_{II}|$ , αφού τα μόρια που προσκρούουν στην επιφάνεια  $dS$  προέρχονται από απομακρυσμένες περιοχές και για το λόγο αυτό στατιστικά έχουν μεγάλες διαφορές στην θερμοκρασία και στην μοριακή τους ταχύτητα. Αντίθετα, σε μικρούς αριθμούς Knudsen, λόγω των πολλαπλών συγκρούσεων μεταξύ γειτονικών μορίων τα μόρια που προσκρούουν στην επιφάνεια  $dS$  βρίσκονται πολύ κοντά στην επιφάνεια  $dS$  και έχουν περίπου τις ίδιες θερμοκρασίες με αποτέλεσμα να ελαττώνεται και τέλος στο υδροδυναμικό όριο να μηδενίζεται η διαφορά ορμής. Επομένως, συνολικά ασκείται από το αέριο στο τοίχωμα μία δύναμη που μάλιστα αυξάνει με την αύξηση του αριθμού Knudsen. Η συνιστώσα της δύναμης αυτής που είναι παράλληλη με το τοίχωμα έχει φορά από την περιοχή II προς την περιοχή I. Επειδή όμως το τοίχωμα είναι ακίνητο λόγω δράσης και αντίδρασης το τοίχωμα ασκεί στο αέριο μία δύναμη ίση και αντίθετη, της οποίας η συνιστώσα που είναι παράλληλη με το τοίχωμα έχει φορά από την περιοχή I προς την περιοχή II, δηλαδή από την ψυχρή προς τη θερμή

περιοχή. Η δύναμη αυτή αποτελεί την κινητήρια δύναμη για την δημιουργία της ροής θερμικού ερπυσμού που έχει φορά από τις χαμηλές προς τις υψηλές θερμοκρασίες.



Σχήμα1: Σχηματική αναπαράσταση της ροής θερμικού ερπυσμού.

### 3.2 Πειραματική επιβεβαίωση φαινομένου

Η ροή θερμικού ερπυσμού έχει παρατηρηθεί και επιβεβαιωθεί πειραματικά. Μία τέτοια πειραματική διάταξη [17] που χαρακτηρίζεται για την απλότητά της παρουσιάζεται και σχολιάζεται στη παρούσα παράγραφο.

Η πειραματική διάταξη, όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 2, αποτελείται από ένα διαφανές υάλινο περίβλημα, ώστε να υπάρχει οπτική επαφή με τα τεκταινόμενα εντός του περιβλήματος και μία βάση στην οποία στηρίζεται το περίβλημα και ο υπόλοιπος εξοπλισμός της διάταξης. Όπως φαίνεται και στο σχήμα εντός του περιβλήματος τοποθετείται κατακόρυφα ένα ορθογώνιο υάλινο πλακίδιο που στηρίζεται σε κατάλληλο στήριγμα. Το πλακίδιο μπορεί να θερμανθεί με τη βοήθεια ηλεκτρικής αντίστασης

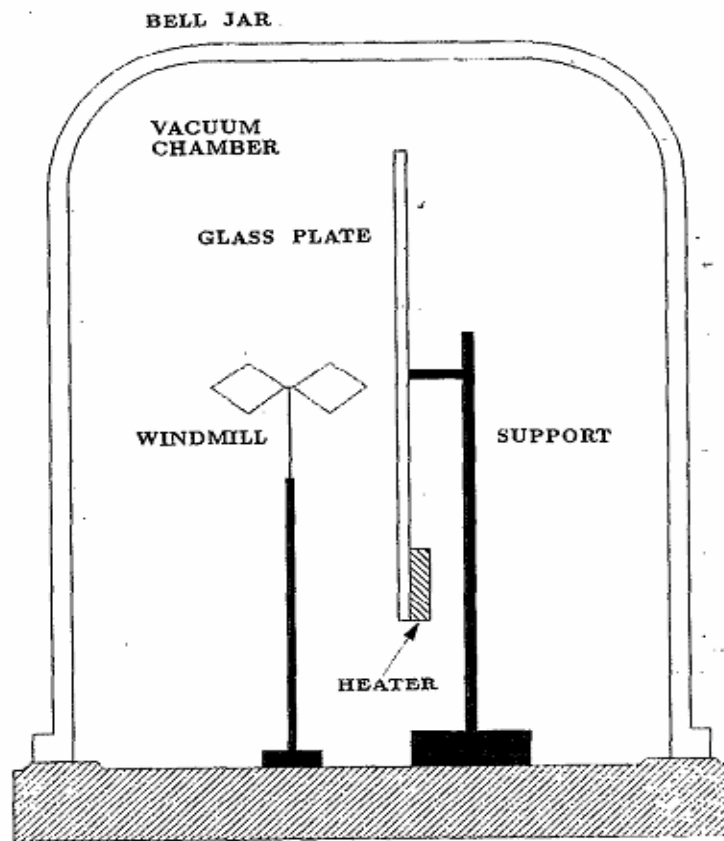
νικελίου – χρωμίου που βρίσκεται στο κάτω τμήμα του πλακιδίου. Με τον τρόπο αυτό η θέρμανση του κατακόρυφου πλακιδίου είναι ανομοιόμορφη έχοντας τις υψηλές θερμοκρασίες κοντά στην ηλεκτρική αντίσταση στο κάτω τμήμα του και τις χαμηλότερες θερμοκρασίες στο πάνω άκρο του πλακιδίου. Επιπλέον, εντός του περιβλήματος μπροστά στο γυάλινο πλακίδιο και σε μικρή απόσταση από αυτό τοποθετείται πτερωτή με σκοπό την ανίχνευση κάθετων ρευμάτων αέρα. Τέλος, η πίεση στο εσωτερικό του περιβλήματος μπορεί να μεταβάλλεται, με την βοήθεια αντλίας κενού, από την ατμοσφαιρική πίεση ( $10^5$  Pascal) μέχρι και μερικά Pascal. Όταν το γυάλινο πλακίδιο θερμαίνεται η θερμοκρασία στο άνω και κάτω άκρα είναι  $34^\circ\text{C}$  και  $140^\circ\text{C}$  αντίστοιχα.

Με τη συσκευή αυτή εξετάζονται ανοδικά και καθοδικά ρεύματα αέρα παράλληλα με το γυάλινο πλακίδιο που οφείλονται στην διαφορετική θερμοκρασία του πλακιδίου σε σχέση με τον αέρα που βρίσκεται εντός του περιβλήματος και στην θερμοκρασιακή κατανομή του ίδιου του πλακιδίου. Η ύπαρξη τέτοιων ρευμάτων γίνεται εμφανής με την περιστροφή της πτερωτής. Τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων έχουν ως εξής:

1. Όταν το πλακίδιο δεν θερμαίνεται η πτερωτή παραμένει ακίνητος για όλο το εύρος πίεσης στο οποίο διεξάγεται το πείραμα.
2. Όταν το πλακίδιο θερμαίνεται και το αέριο έχει ατμοσφαιρική πίεση η πτερωτή γυρίζει με περίπου 110 στροφές ανά λεπτό, κάτι το οποίο αποδεικνύει ότι δημιουργείται ροή κατά μήκος του γυάλινου πλακιδίου. Από την συσχέτιση μεταξύ της γωνίας των πτερυγίων της πτερωτής και από την φορά περιστροφής γίνεται αντιληπτό ότι η ροή έχει ανοδική διεύθυνση και επομένως οφείλεται σε φυσική συναγωγή.

3. Με τη βοήθεια της αντλίας κενού μειώνεται σταδιακά η πίεση εντός του περιβλήματος. Παρατηρείται ότι παράλληλα με την πίεση μειώνεται σταδιακά η ταχύτητα περιστροφής της πτερωτής που τελικά μηδενίζεται και η πτερωτή ακινητοποιείται όταν η πίεση είναι περίπου 1400 Pa. Καθώς η πίεση μειώνεται περαιτέρω περίπου στα 40 Pa, η πτερωτή αρχίζει να περιστρέφεται και πάλι, όμως αυτή τη φορά προς την αντίθετη κατεύθυνση καταδεικνύοντας την ύπαρξη καθοδικού ρεύματος. Το καθοδικό ρεύμα ισχυροποιείται καθώς μειώνεται περαιτέρω η πίεση όπως φαίνεται και από την αύξηση των στροφών της πτερωτής. Η ταχύτητα περιστροφής φτάνει την μέγιστη τιμή της περίπου 140 στροφές ανά λεπτό όταν η πίεση είναι γύρω στα 3 Pa που αποτελεί και το όριο χαμηλής πίεσης που δύναται να αναπαραχθεί από την συγκεκριμένη αντλία κενού.

Είναι λοιπόν προφανές ότι καθώς η πίεση μειώνεται αρχικά η ροή θερμικού ερπυσμού είναι το ίδιο ισχυρή με τη ροή φυσικής συναγωγής, ενώ στη συνέχεια με την περαιτέρω μείωση της πίεσης η ροή θερμικού ερπυσμού ισχυροποιείται, ενώ αντίθετα η ροή φυσικής συναγωγής αδυνατίζει και τελικά βέβαια σε πολύ χαμηλές πιέσεις μηδενίζεται. Το πείραμα που παρουσιάστηκε αν και έχει ποιοτικά και όχι λεπτομερή ποσοτικά χαρακτηριστικά, δείχνει ξεκάθαρα τη ροή πάνω σε ένα θερμαινόμενο υάλινο πλακίδιο λόγω θερμικού ερπυσμού, από τη χαμηλή προς την υψηλή θερμοκρασία. Παράλληλα τονίζει την έντονη διαφορά μεταξύ της ροής λόγω θερμικού ερπυσμού σε συνθήκες χαμηλής πίεσης και της ροής λόγω φυσικής συναγωγής σε συνθήκες ατμοσφαιρικής πίεσης.



Σχήμα 2: Πειραματική διάταξη επίδειξης της ροής θερμικού ερπυσμού.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΡΟΩΝ ΚΑΙ ΑΔΙΑΣΤΑΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

#### 4.1 Γεωμετρία και παράμετροι ροής

Θεωρούμε ότι έχουμε ροή ενός αερίου διαμέσου ενός αγωγού μεγάλου μήκους  $L$  και υδραυλικής διαμέτρου  $D_h$ , ο οποίος συνδέει δύο δεξαμενές που βρίσκονται σε πιέσεις  $P_1, P_2$  και θερμοκρασίες  $T_1, T_2$ , με  $P_1 \leq P_2$  και  $T_1 \leq T_2$  [14]. Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 3. Ο όγκος των δοχείων 1 και 2 είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του μικροαγωγού και επομένως οι πιέσεις και οι θερμοκρασίες των δοχείων παραμένουν σταθερές. Η επιφάνεια και η περίμετρος της διατομής συμβολίζονται με  $\tilde{A}$  και  $\tilde{F}$  αντίστοιχα, ενώ υδραυλική διάμετρος ορίζεται ως

$$D_h = \frac{4\tilde{A}}{\tilde{F}} \quad (1)$$

Θεωρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται  $D_h \ll L$ . Επομένως η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη και οι επιδράσεις εισόδου και εξόδου από τον αγωγό μπορούν να αγνοηθούν. Παράλληλα, σε κάθε διατομή, που ορίζεται στο επίπεδο  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , η πίεση και η θερμοκρασία είναι σταθερές και μεταβάλλονται μόνο κατά μήκος της ροής στην κατεύθυνση  $\tilde{z}$ , δηλαδή  $P = P(\tilde{z}) \in [P_1, P_2]$  και  $T = T(\tilde{z}) \in [T_1, T_2]$ . Η θερμοκρασιακή κατανομή θεωρείται γνωστή, ενώ η κατανομή πίεσης είναι άγνωστη και αποτελεί τμήμα της λύσης του προβλήματος. Ωθούσα δύναμη που προκαλεί τη ροή είναι η επιβαλλόμενη αδιάστατη διαφορά πίεσης και θερμοκρασίας

$$X_p = \frac{D_h}{P} \frac{dP}{d\tilde{z}} \quad (2)$$

και

$$X_T = \frac{D_h}{T} \frac{dT}{dz} \quad (3)$$

αντίστοιχα. Η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της μακροσκοπικής ταχύτητας είναι αυτή στη διεύθυνση της ροής, δηλαδή στη  $\tilde{z}$  κατεύθυνση και δηλώνεται ως  $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , όπου  $\tilde{x}$  και  $\tilde{y}$  οι παράπλευρες συντεταγμένες κάθετα στη ροή. Η ροή λόγω βαθμίδας πίεσης είναι αντίστοιχη με τη ροή Poiseuille, ενώ η ροή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας είναι η ροή θερμικού ερπυσμού.

Η πλέον βασική παράμετρος της ροής είναι ο αριθμός Knudsen που ορίζεται ως

$$Kn = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mu v}{D_h P}, \quad (4)$$

όπου  $\mu$  είναι το ιξώδες του αερίου στη θερμοκρασία  $T$  και  $v = \sqrt{2RT}$  η πιθανότερη μοριακή ταχύτητα, με  $R = k/m$  να υποδηλώνει την σταθερά του αερίου ( $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann και  $m$  το μοριακό βάρος). Για πρακτικούς λόγους που συσχετίζονται με την πληρέστερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν, αντί του αριθμού Knudsen επιλέγουμε την χρήση της επονομαζόμενης παραμέτρου αραιοποίησης (*rarefaction parameter*), που ορίζεται ως

$$\delta = \frac{D_h P}{\mu v} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \quad (5)$$

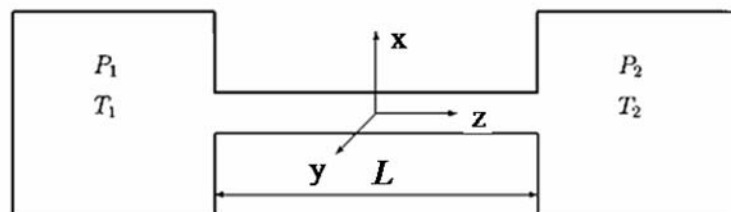
Η υδραυλική διάμετρος  $D_h$  και η μοριακή ταχύτητα  $v$  θεωρούνται ως το χαρακτηριστικό μήκος και η χαρακτηριστική ταχύτητα αντίστοιχα και χρησιμοποιούνται στην αδιαστατοποίηση των μεγεθών. Εισάγονται οι αδιάστατες χωρικές μεταβλητές  $x = \tilde{x}/D_h$ ,  $y = \tilde{y}/D_h$  και  $z = \tilde{z}/D_h$ , η αδιάστατη επιφάνεια διατομής  $A = \tilde{A}/D_h^2$  και η αδιάστατη περίμετρος διατομής  $\Gamma = \tilde{\Gamma}/D_h$ .

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι με την υπόθεση  $D_h \ll L$  οι αδιάστατες μεταβολές της πίεσης και της θερμοκρασίας που δίδονται από τις εξισώσεις (2) και (3) αντίστοιχα είναι πάντα μικρότερες της μονάδος, δηλαδή

$$X_P = \frac{D_h}{P} \frac{dP}{dz} \simeq \frac{D_h}{L} \frac{\Delta P}{P} \ll 1 \quad (6)$$

$$X_T = \frac{D_h}{T} \frac{dT}{dz} \simeq \frac{D_h}{L} \frac{\Delta T}{T} \ll 1 \quad (7)$$

ανεξάρτητα από την τάξη της διαφοράς θερμοκρασίας  $\Delta T = T_1 - T_2$  και πίεσης  $\Delta P = P_2 - P_1$  μεταξύ των δύο δεξαμενών. Αυτή η σημείωση εξηγείται εύκολα παρατηρώντας ότι ακόμα και σε μεγάλες διαφορές θερμοκρασίας ή πίεσης, οι λόγοι  $\Delta T/T$  ή  $\Delta P/P$  είναι το πολύ της τάξης του ένα, ενώ ο λόγος  $D_h/L \ll 1$ . Για αυτό οι ποσότητες  $X_P$  και  $X_T$  θεωρούνται πάντα ως πολύ μικρές παράμετροι και χρησιμοποιούνται στην γραμμικοποίηση των κινητικών εξισώσεων που μοντελοποιούν τη ροή ακόμα και σε μεγάλες διαφορές θερμοκρασίας ή πίεσης.



Σχήμα 3: Διάταξη ροής λόγω διαφοράς πίεσης ή/και θερμοκρασίας.

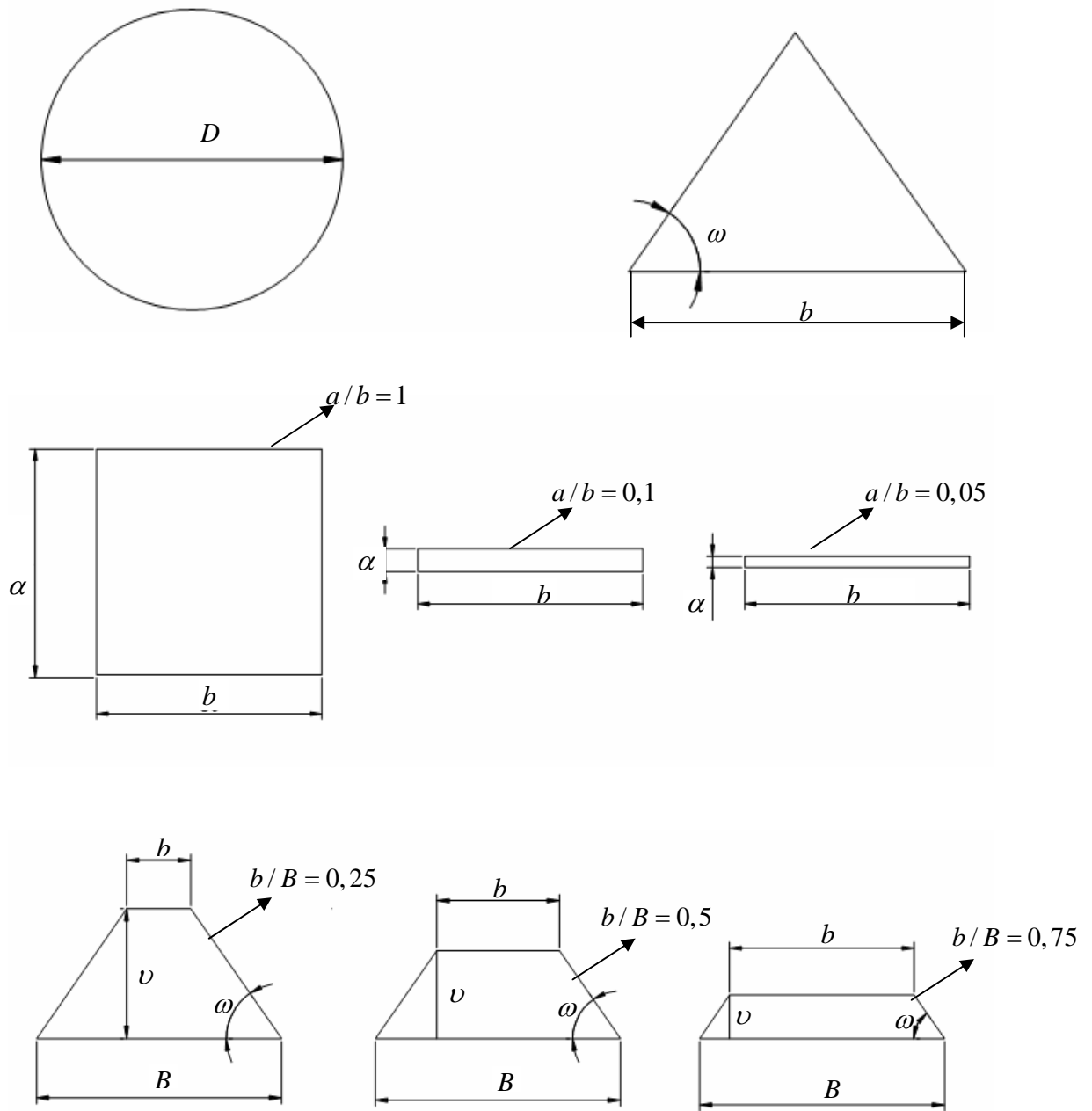
## 4.2 Διατομές μικροαγωγών

Οι διατομές που εξετάζονται απεικονίζονται στο Σχήμα 4 και περιλαμβάνουν α) κυκλική διατομή, β) ορθογώνια διατομή με λόγο πλευρών 1, 0,1 και 0,05, γ) ισοσκελή τριγωνική διατομή με γωνία βάσης  $\hat{\omega} = 54,74^\circ$  και δ) ισοσκελή τραπεζοειδή διατομή με γωνία βάσης  $\hat{\omega} = 54,74^\circ$  και μικρή προς μεγάλη βάση 0,25, 0,50 και 0,75. Η επιλογή των τριγωνικών και τραπεζοειδών διατομών δεν έγινε τυχαία, αλλά βασίστηκε στους κατασκευαστικούς περιορισμούς της χημικής εγχάραξης των μικροαγωγών σε πλακέτες πυριτίου.

Οι εκφράσεις που δίδουν την υδραυλική διάμετρο, το εμβαδόν και την περίμετρο των διατομών που έχουν μελετηθεί δίδονται στον Πίνακα 1. Επίσης, στον ίδιο πίνακα δίδονται και οι αντίστοιχες αδιάστατες ποσότητες. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στα αδιάστατα μεγέθη που πρέπει να προσδιορίζονται ώστε να προκύψουν τα αδιάστατα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη παράγραφο 4.5. Σημειώνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις, ανεξάρτητα διατομής, η λύση του προβλήματος εξαρτάται από την παράμετρο αραιοποίησης  $\delta$ . Στη περίπτωση της ροής σε κυλινδρικό αγωγό δεν απαιτείται άλλο μέγεθος. Αντίθετα για ροές σε ορθογώνιους και ισοσκελείς τριγωνικούς αγωγούς θα πρέπει να προσδιορίζονται, επιπλέον της παραμέτρου αραιοποίησης  $\delta$ , ο λόγος των πλευρών  $a/b$  και η γωνία βάσης  $\hat{\omega}$  αντίστοιχα. Τέλος, σε ροές εντός αγωγών με ισοσκελείς τραπεζοειδείς διατομές θα πρέπει να προσδιορίζονται, η παράμετρος αραιοποίησης  $\delta$ , η γωνία βάσης  $\hat{\omega}$  και ο λόγος της μικρής προς την μεγάλη βάση  $b/B$  ή εναλλακτικά ο λόγος του ύψους προς μια βάση. Στις τραπεζοειδείς διατομές η μικρή και μεγάλη βάση, το ύψος, και η γωνία βάσης συνδέονται με τη σχέση 
$$\nu = \frac{(B-b)}{2} \tan \omega.$$

Πίνακας 1. Διαστατά και αδιάστατα γεωμετρικά μεγέθη των διατομών.

Διατομή	Υδραυλική διάμετρος $D_h$	Επιφάνεια $\tilde{A}$	Αδιάστατη επιφάνεια $A = \tilde{A} / D_h^2$	Περίμετρος $\tilde{\Gamma}$	Αδιάστατη περίμετρος $\Gamma = \tilde{\Gamma} / D_h$
Κυκλική	$D$	$\pi D^2 / 4$	$\pi / 4$	$\pi D$	$\pi$
Ορθογώνια	$2 \frac{b \times a}{b+a}$	$b \times a$	$\frac{1}{4} \frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2$	$2(b+a)$	$\frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2$
Ισοσκελής τριγωνική	$\frac{b \tan \omega}{1 + \frac{1}{\cos \omega}}$	$\frac{1}{4} b^2 \tan \omega$	$\frac{\left(1 + \frac{1}{\cos \omega}\right)^2}{4 \tan \omega}$	$b \left(1 + \frac{1}{\cos \omega}\right)$	$\frac{\left(1 + \frac{1}{\cos \omega}\right)^2}{\tan \omega}$
Ισοσκελής τραπεζοειδής	$\frac{2(B+b)\nu}{B+b + \frac{2\nu}{\sin \omega}}$	$\frac{B+b}{2} \nu$	$\frac{1}{8} \frac{\left(1 + \frac{b}{B} + \frac{\nu}{B} \frac{2}{\sin \omega}\right)^2}{\left(1 + \frac{b}{B}\right) \frac{\nu}{B}}$	$B+b + \frac{2\nu}{\sin \omega}$	$\frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{b}{B} + \frac{\nu}{B} \frac{2}{\sin \omega}\right)^2}{\left(1 + \frac{b}{B}\right) \frac{\nu}{B}}$



Σχήμα 4: Εξεταζόμενες διατομές υπό κλίμακα

### 4.3 Κινητικό μοντέλο BGK

Η προσομοίωση ροών εντός μικροαγωγών τυχαίας διατομής βασίζεται στην επίλυση της εξίσωσης Boltzmann με κατάλληλες οριακές συνθήκες. Δυστυχώς, η επίλυση της εξίσωσης αυτής είναι ιδιαίτερα δύσκολη και συνήθως αντικαθίσταται με κινητικά μοντέλα που απλοποιούν τον όρο των συγκρούσεων. Όπως προαναφέρθηκε στην περίπτωση που μελετάται ροή αερίου που οφείλεται σε βαθμίδα πίεσης το μοντέλο Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) θεωρείται το πλέον κατάλληλο [8].

Καθώς το πρόβλημα επιλύεται με βάση την κινητική θεωρία η κύρια άγνωστη εξαρτημένη μεταβλητή είναι η συνάρτηση κατανομής η οποία ικανοποιεί το κινητικό μοντέλο BGK που για τις ροές που εξετάζονται γράφεται στη γραμμικοποιημένη μορφή [6]

$$c_x \frac{\partial h}{\partial x} + c_y \frac{\partial h}{\partial y} + \delta h = 2\delta c_z u - c_z \quad (8)$$

όπου  $h = h(x, y, c_x, c_y, c_z)$  είναι η άγνωστη γραμμικοποιημένη συνάρτηση κατανομής και

$$u(x, y) = \frac{\tilde{u}}{\nu_0 X_p} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_z h e^{-c^2} dc_x dc_y dc_z \quad (9)$$

είναι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της μακροσκοπικής ταχύτητας και είναι στη διεύθυνση της ροής.

Στο σημείο αυτό εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η ροή είναι δισδιάστατη, είναι βολικό να απαλείψουμε τη συνιστώσα  $c_z$  του διανύσματος της μοριακής ταχύτητας  $\mathbf{c}$ , ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία της προβολής. Ορίζουμε την απλοποιημένη συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(x, y, c_x, c_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_z h(x, y, c_x, c_y, c_z) e^{-c_z^2} dc_z \quad (10)$$

και στη συνέχεια η Εξ. (8) πολλαπλασιάζεται με  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} c_z e^{-c_z^2}$  και η εξίσωση που προκύπτει ως αποτέλεσμα ολοκληρώνεται στην περιοχή  $-\infty < c_z < \infty$  για να μας δώσει την απλοποιημένη, αδιάστατη και γραμμικοποιημένη εξίσωση BGK

$$c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \delta \Phi = \delta u - \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Η μακροσκοπική ταχύτητα δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y. \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι στην αδιάστατη Εξ. (11) η άγνωστη συνάρτηση κατανομής  $\Phi(x, y, c_x, c_y)$  δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή  $c_z$ . Η μείωση του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά μία, μειώνει σημαντικά την υπολογιστική προσπάθεια που απαιτείται στην εφαρμογή του υπολογιστικού σχήματος των διακριτών ταχυτήτων.

Η αλληλεπίδραση αερίου – τοιχώματος μοντελοποιείται με την συνοριακή συνθήκη διαχυτικής – κατοπτρικής ανάκλασης του Maxwell. Έτσι σαν συνοριακή συνθήκη έχουμε

$$\Phi^+ = (1 - \alpha) \Phi^- \quad (13)$$

όπου  $\Phi^+$  και  $\Phi^-$  είναι κατανομές που αντιπροσωπεύουν τα σωματίδια που φεύγουν και έρχονται στο τοίχωμα αντίστοιχα. Η παράμετρος  $a \in [0, 1]$  γνωστή ως συντελεστής προσαρμογής της κάθετης ορμής δείχνει το ποσοστό των σωματιδίων που αντανακλάται διαχυτικά από το τοίχωμα. Δηλαδή όταν  $a = 1$  τότε όλα τα μόρια ανακλώνται διαχυτικά σύμφωνα με την κατανομή Maxwell. Όταν  $a < 1$  σημαίνει ότι το ποσοστό  $a$  των μορίων ανακλάται διαχυτικά ενώ το ποσοστό  $1 - a$  ανακλάται κατοπτρικά. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο συντελεστής προσαρμογής θεωρείται ίσος με τη μονάδα ( $a = 1$ ).



Το ολοκληρωδιαφορικό σύστημα των Εξ. (11) και (12) με την συνοριακή συνθήκη (13), επιλύονται αριθμητικά. Το αριθμητικό σχήμα που εφαρμόζεται για την επίλυση έχει περιγραφεί με λεπτομέρεια για διάφορες διατομές σε παλιότερα άρθρα [13, 19]. Σε κάθε περίπτωση, η κινητική εξίσωση διακριτοποιείται στο χώρο των μοριακών ταχυτήτων με τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων και στο φυσικό χώρο με τυπικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Έπειτα, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις λύνονται με ένα επαναληπτικό σχήμα.

#### 4.4 Κινητικό μοντέλο SHAKHOV

Το μοντέλο Shakhon παρέχει τον σωστό αριθμό Prandtl και είναι καταλληλότερο για τον υπολογισμό ροών που οφείλονται σε βαθμίδα θερμοκρασίας ή σε βαθμίδα πίεσης και θερμοκρασίας ταυτόχρονα. Σε αντιστοιχία με το μοντέλο BGK της παραγράφου 4.3, για πλήρως ανεπτυγμένες ροές όπως αυτές που εξετάζονται στη παρούσα διπλωματική εργασία η εξίσωση του μοντέλου S έχει τη γραμμικοποιημένη μορφή [15]

$$c_x \frac{\partial h}{\partial x} + c_y \frac{\partial h}{\partial y} + \delta h(x, y, \mathbf{c}) = \delta \left[ 2c_z u + \frac{4}{15} c_z q \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] - c_z \left[ X_P + \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) X_T \right] \quad (14)$$

όπου

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_z e^{-c^2} h(x, y, \mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad (15)$$

και

$$q(x, y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_z \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) e^{-c^2} h(x, y, \mathbf{c}) d\mathbf{c}. \quad (16)$$

οι μακροσκοπικές ποσότητες της ταχύτητας και της θερμοροής. Παρατηρούμε ότι στο δεξιό τμήμα της κινητικής εξίσωσης συμπεριλαμβάνονται οι όροι με τις βαθμίδες πίεσης και θερμοκρασίας. Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό το γενικό πρόβλημα διασπάται και γράφουμε

$$h = h_p X_p + h_T X_T \quad (17)$$

όπου  $h_p$  και  $h_T$  είναι οι κατανομές που προκύπτουν από την επίλυση των προβλημάτων Poiseuille και θερμικού ερπυσμού. Αντίστοιχα η ταχύτητα και η θερμοροή γράφονται στη μορφή

$$u = u_p X_p + u_T X_T, \quad (18)$$

και

$$q = q_p X_p + q_T X_T. \quad (19)$$

αντίστοιχα.

Ορίζουμε τις απλοποιημένες συναρτήσεις κατανομής

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_z e^{-c_z^2} h dc_z \\ \Psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_z \left( c_z^2 - \frac{3}{2} \right) e^{-c_z^2} h dc_z. \end{aligned} \quad (20)$$

με απώτερο στόχο την απαλοιφή της συνιστώσας  $z$  της μοριακής ταχύτητας ώστε να επιλυθεί ευκολότερα από υπολογιστικής πλευράς το πρόβλημα.

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τη διαδικασία της προβολής στο πρόβλημα ροής λόγω βαθμίδας πίεσης. Θέτουμε  $X_p \neq 0$  και  $X_T = 0$  Πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (14) μία

φορά με  $\frac{c_z}{\sqrt{\pi}} e^{-c_z^2}$  και μία δεύτερη με  $\frac{c_z}{\sqrt{\pi}} \left( c_z^2 - \frac{3}{2} \right) e^{-c_z^2}$  προκύπτουν οι παρακάτω δύο

εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \delta \Phi(x, y, c_x, c_y) &= \delta \left[ u + \frac{2}{15} q (c_x^2 + c_y^2 - 1) \right] - \frac{1}{2} \\
c_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \delta \Psi(x, y, c_x, c_y) &= \delta \frac{1}{5} q (c_x^2 + c_y^2) - \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{21}$$

Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος δύο ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων λόγω της ύπαρξης ροπών μεγαλύτερης τάξης, όπως αυτή της θερμοροής. Τέλος η ταχύτητα και η θερμοροή δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(c_x, c_y) e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \tag{22}$$

$$q = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(c_x, c_y) e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (c_x^2 + c_y^2 - 1) \Psi(c_x, c_y) e^{-c_x^2 - c_y^2} dc_x dc_y \right] \tag{23}$$

Η αλληλεπίδραση αερίου – τοιχώματος μοντελοποιείται με την συνοριακή συνθήκη διαχυτικής – κατοπτρικής ανάκλασης του Maxwell

$$\begin{aligned}
\Phi^+ &= (1 - \alpha) \Phi^- \\
\Psi^+ &= (1 - \alpha) \Psi^-
\end{aligned} \tag{24}$$

Για την επίλυση αυτού του μοντέλου που περιγράφεται από τις εξισώσεις (21-24) εφαρμόζεται το ίδιο υπολογιστικό σχήμα όπως και στην Εξ. (11). Στη συνέχεια οι διακριτοποιημένες εξισώσεις επιλύονται με επαναληπτικό σχήμα [10, 13, 14].

Σημειώνεται ότι η διαδικασία της προβολής πρέπει να επαναληφθεί θέτοντας αυτή τη φορά  $X_p = 0$  και  $X_T \neq 0$ , ώστε να προκύψουν οι εξισώσεις προβολής για το πρόβλημα θερμικού ερπυσμού. Όμως, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο αυτό δεν είναι απαραίτητο επειδή η παροχή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας μπορεί να υπολογισθεί επιλύοντας μόνο το πρόβλημα λόγω βαθμίδας πίεσης και εφαρμόζοντας τις συνθήκες Onsager – Casimir.

#### 4.5 Αδιάστατες παροχές

Η λύση της κινητικής εξίσωσης εξαρτάται από τρεις αδιάστατες παραμέτρους, δηλαδή, την παράμετρο αεριοποίησης  $\delta$ , την επιφάνεια της διατομής  $A$  και τον συντελεστή  $a$ . Στη παρούσα διπλωματική εργασία, όπως προαναφέραμε, θέτουμε  $a = 1$ . Επομένως εξετάζεται η εξάρτηση των αποτελεσμάτων σε σχέση μόνο με τις άλλες δύο παραμέτρους. Βασίζόμενοι στην κινητική λύση, η οποία είναι έγκυρη για όλο το εύρος του αριθμού Knudsen, από την ελεύθερη μοριακή περιοχή, διάμεσο της μεταβατικής περιοχή και της περιοχής ολίσθησης, μέχρι και το υδροδυναμικό όριο, αφού υπολογισθούν οι συναρτήσεις κατανομής μπορούν να εκτιμηθούν όλες οι μακροσκοπικές ταχύτητες και στη συνέχεια οι αδιάστατες παροχές.

Συγκεκριμένα υπολογίζονται α) η αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας πίεσης και β) η αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας. Αυτές οι ποσότητες είναι γνωστές στη βιβλιογραφία σαν α) συντελεστής Poiseuille  $G_p$  και β) συντελεστής θερμικού ερπυσμού  $G_T$  (*thermal creep coefficient*) και προκύπτουν ολοκληρώνοντας τις αντίστοιχες κατανομές ταχύτητας σύμφωνα με τις σχέσεις

$$G_p = \frac{2}{A} \iint u_p(x, y) dx dy, \quad G_T = \frac{2}{A} \iint u_T(x, y) dx dy. \quad (25)$$

Κάνοντας χρήση της συσχέτισης Onsager είναι γνωστό ότι [8]

$$\iint u_T(x, y) dx dy = \iint q_p(x, y) dx dy, \quad (26)$$

και επομένως ο συντελεστής  $G_T$  δίδεται και από το ολοκλήρωμα

$$G_T = \frac{2}{A} \iint q_p(x, y) dx dy. \quad (27)$$

Με βάση τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι οι συντελεστές  $G_p$  και  $G_T$  προκύπτουν μόνο από την επίλυση του προβλήματος βαθμίδας πίεσης. Πολλές φορές επιλύεται και το πρόβλημα βαθμίδας θερμοκρασίας για επιβεβαίωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Τέλος, ορίζεται η αδιάστατη ποσότητα

$$G = -X_p G_p + X_T G_T \quad (28)$$

Τονίζεται ότι οι  $G_p$  και  $G_T$  δεν εξαρτώνται από τους λόγους  $X_p$  και  $X_T$ , αλλά μόνο από την παράμετρο αραιοποίησης  $\delta$  και την διατομή  $A$ .

Στα Σχήματα 5 και 6 παρουσιάζονται οι αδιάστατες παροχές  $G_p$  και  $G_T$  αντίστοιχα σε όλο το εύρος του  $\delta$  για αγωγούς με κυκλική, ορθογώνια, τριγωνική και τραπεζοειδή διατομή. Στην κυκλική διατομή η επίλυση βασίζεται στο κινητικό μοντέλο BGK, ενώ σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις η επίλυση βασίζεται στο κινητικό μοντέλο Shakhov. Στο Σχήμα 5 παρατηρούμε ότι η καμπύλη παροχής  $G_p$  – παραμέτρου αραιοποίησης παρουσιάζει ένα ελάχιστο γύρω από την περιοχή  $\delta \approx 1$ , δηλαδή στο κέντρο της μεταβατικής περιοχής ροής. Επίσης παρατηρούμε ότι η αδιάστατη παροχή είναι περίπου σταθερή στην ελεύθερη μοριακή περιοχή (μικρές τιμές του  $\delta$ ), ενώ στην περιοχή ολίσθησης και στην υδροδυναμική περιοχή είναι ανάλογη του  $\delta$ .

Στο Σχήμα 6 παρατηρούμε ότι ο συντελεστής  $G_T$  μειώνεται μονότονα καθώς αυξάνεται η παράμετρος αραιοποίησης  $\delta$ . Η μέγιστη τιμή της παροχής λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας λαμβάνεται στο ελεύθερο μοριακό όριο, δηλαδή στο  $\delta = 0$ , ενώ μηδενίζεται στο υδροδυναμικό όριο ( $\delta \rightarrow \infty$ ), όπου πλέον η ροή βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Στο Σχήμα 6, δεν παρουσιάζονται αποτελέσματα για κυκλική διατομή για το λόγο ότι δεν είναι άμεσα διαθέσιμα αλλά βεβαίως μπορούν εύκολα να ανακτηθούν.

Οι αριθμητικές παράμετροι που σχετίζονται με την διακριτοποίηση των εξισώσεων και με βάση των οποίων έχουν προκύψει τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εμφανίζονται συγκεντρωμένα στον Πίνακα 2. Οι αριθμητικές παράμετροι περιλαμβάνουν τον αριθμό χωρικών κόμβων, τα μέτρα και τις πολικές γωνίες των μοριακών ταχυτήτων και το κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας.

Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 5 και 6, δίδονται σε πινακοποιημένη μορφή στους Πίνακες 3, 4 και 5. Τα αποτελέσματά αυτά είναι απαραίτητα στη συνέχεια (βλέπε Κεφ 5, 6 και 7) στον υπολογισμό της παροχής μάζας, στον υπολογισμό της κατανομής πίεσης και στον υπολογισμό της διαφορικής θερμομοριακής πίεσης. Στον Πίνακα 3, που αφορά ροή σε κυλινδρικούς αγωγούς, παρουσιάζονται αποτελέσματα από την επίλυση του μοντέλου BGK αλλά και του S-model. Για την μελέτη της κυκλικής διατομής χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του μοντέλου BGK, ενώ παράλληλα τα αποτελέσματα από την επίλυση του μοντέλου Shakon δίνονται για συγκριτικούς λόγους. Επίσης, επειδή στον κώδικα που χρησιμοποιείται για την επίλυση ροής σε κυλινδρικό αγωγό με το μοντέλο S η αδιαστατοποίηση έχει γίνει με βάση την ακτίνα και όχι την υδραυλική διάμετρο του αγωγού τα αποτελέσματα αναδιατάσσονται σύμφωνα με την έκφραση

$$G_D = \frac{1}{2} G_R \left( \frac{\delta_D}{2} \right) \quad (29)$$

ώστε να είναι συμβατά μεταξύ τους. Τέλος, τα αποτελέσματα των Πινάκων 5 και 6 που αναφέρονται σε ορθογώνιους, τριγωνικούς και τραπεζοειδείς αγωγούς προκύπτουν με το κινητικό μοντέλο Shakon.

Πίνακας 2. Παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογιστικούς κώδικες.

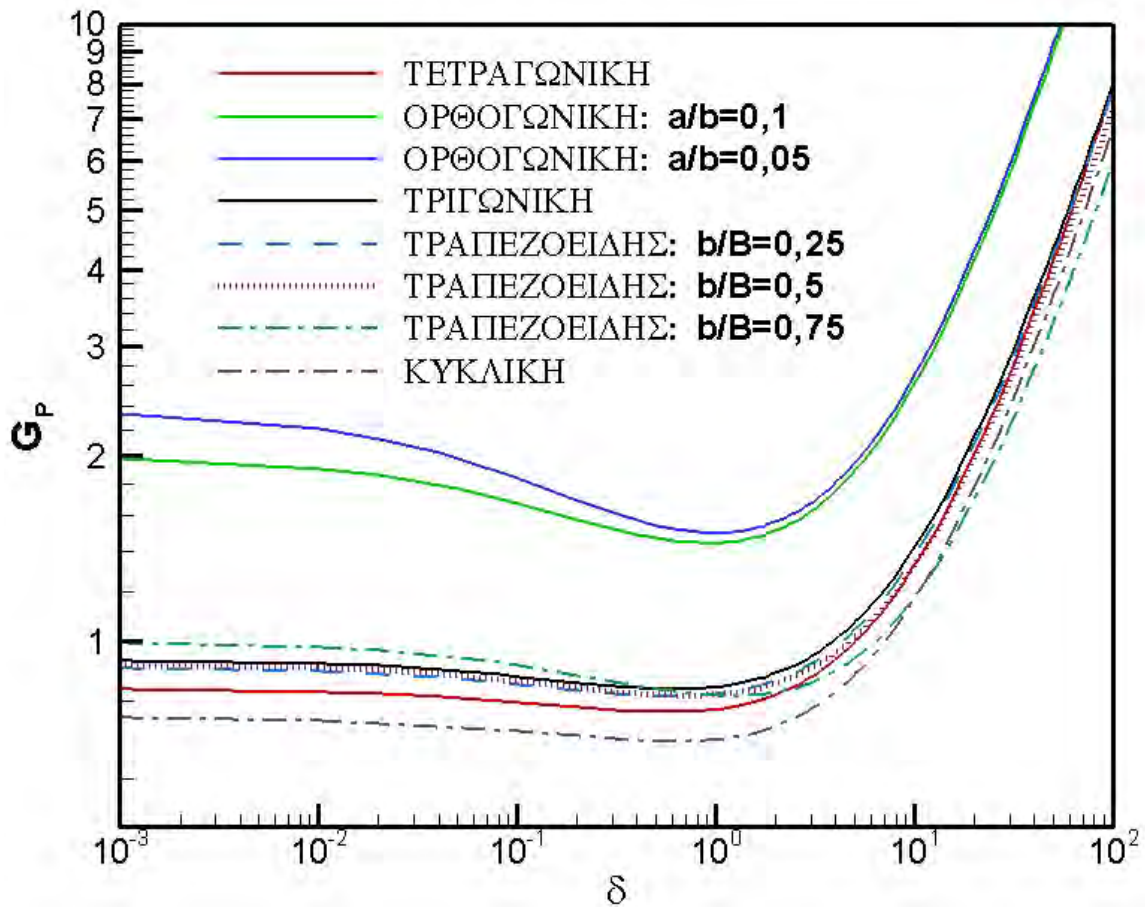
Διατομή	N	DV	Nt	Κριτήριο Σύνκλισης	Int. type
Κυκλική (S - model)	801	128	101	$10^{-7}$	Hermite
Κυκλική (BGK)	201	64	100	$10^{-7}$	Legendre
Ορθογώνια	151	32	60	$10^{-6}$	Hermite
Τριγωνική ( $\delta = 0 - 0.9$ )	401	16	300	$10^{-6}$	Chebyshev
Τριγωνική ( $\delta = 1 - 1.2$ )	401	16	72	$10^{-6}$	Chebyshev
Τριγωνική ( $\delta = 1.3 - 100$ )	1001	16	72	$10^{-6}$	Chebyshev
Τραπεζοειδής	1001	16	72	$10^{-6}$	Chebyshev

**N:** Αριθμός κόμβων κατά μήκος της ακτίνας για την κυκλική διατομή και κατά μήκος κάθε πλευράς για τις υπόλοιπες διατομές.

**DV:** Αριθμός μέτρων μοριακών ταχυτήτων ( $c_p = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$ ).

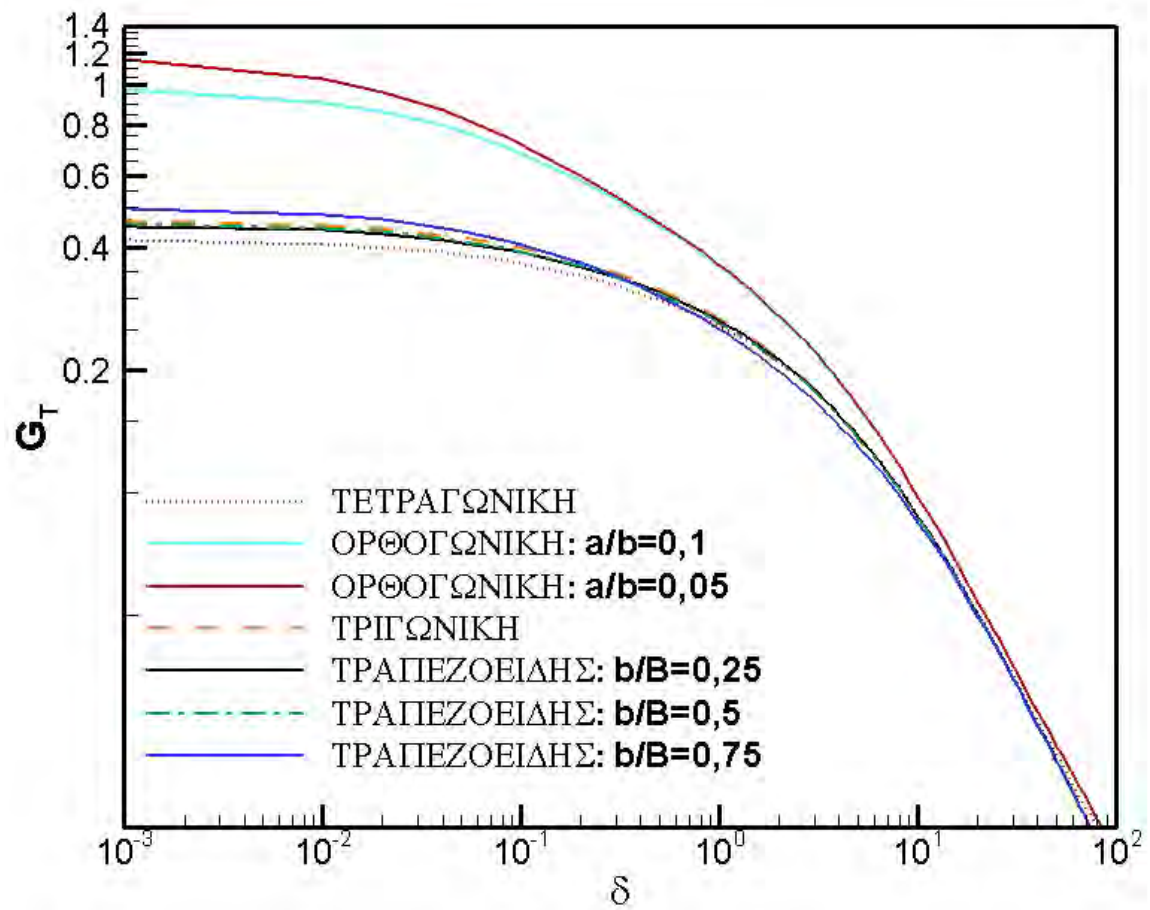
**Nt:** Αριθμός πολικών γωνιών μοριακών ταχυτήτων ( $\theta = \cos^{-1} \frac{c_x}{c_p}$ ).

**Int. type:** Πολυώνυμο που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό των μοριακών ταχυτήτων και στην αριθμητική ολοκλήρωση.



Σχήμα 5: Αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας πίεσης σε όλο το εύρος του  $\delta$  για διάφορες διατομές.





Σχήμα 6: Αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας σε όλο το εύρος του  $\delta$  για διάφορες διατομές.

Πίνακας 3. Αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας πίεσης σε όλο το εύρος του  $\delta$  για κυκλική διατομή.

	$G_{P(BGK)}$	$G_{P(S)}$	$\delta$	$G_{P(BGK)}$	$G_{P(S)}$	$\delta$	$G_{P(BGK)}$	$G_{P(S)}$	$\delta$	$G_{P(BGK)}$	$G_{P(S)}$
0,00E+00	0,752	0,752	1,8	0,721		8	1,06	1,07	52	3,77	3,77
1,00E-06	0,752		1,9	0,725		9	1,11		54	3,89	
1,00E-05	0,752		2	0,729	0,738	10	1,17	1,18	56	4,02	
1,00E-04	0,752		2,2	0,738		11	1,23		58	4,14	
1,00E-03	0,751	0,751	2,4	0,747		13	1,35	1,36	60	4,27	
1,00E-02	0,744	0,744	2,6	0,757		15	1,48		65	4,58	
0,1	0,715		2,8	0,767		18	1,66		70	4,89	
0,2	0,702	0,705	3	0,777		20	1,78	1,79	80	5,51	
0,3	0,695		3,2	0,787		22	1,91		85	5,83	
0,4	0,691	0,695	3,4	0,797		24	2,03		90	6,14	
0,5	0,689		3,6	0,808		26	2,15		95	6,45	
0,6	0,688		3,8	0,818		28	2,28		100	6,76	
0,7	0,688		4	0,829	0,839	30	2,40		150	9,88	
0,8	0,689		4,2	0,840		32	2,52		200	13,0	
0,9	0,691		4,4	0,850		34	2,65		250	16,1	
1	0,693	0,700	4,6	0,861		36	2,77		300	19,2	
1,1	0,696		4,8	0,872		38	2,90		350	22,4	
1,2	0,699		5	0,884	0,894	40	3,02	3,02	400	25,5	
1,3	0,702		5,5	0,912		42	3,15		450	28,6	
1,4	0,705		6	0,940	0,950	44	3,27		500	31,7	
1,5	0,709		6,5	0,969		46	3,39		1000	62,6	
1,6	0,713		7	0,997		48	3,52	3,52			

Πίνακας 4. Αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας σε όλο το εύρος του  $\delta$  για ορθογώνιες διατομές.

$\delta$	$G_P$			$G_T$		
	$a/b = 1$	$a/b =$	$a/b =$	$a/b = 1$	$a/b =$	$a/b =$
0	8,38E-01	1,99E+00	2,37E+00	4,19E-01	9,94E-01	1,18E+00
0,00001	8,38E-01	1,99E+00	2,37E+00	8,32E-01	9,94E-01	1,18E+00
0,0001	8,38E-01	1,99E+00	2,37E+00	8,38E-01	9,92E-01	1,18E+00
0,001	8,37E-01	1,97E+00	2,34E+00	4,17E-01	9,79E-01	1,16E+00
0,01	8,28E-01	1,90E+00	2,21E+00	4,08E-01	9,10E-01	1,04E+00
0,02	8,22E-01	1,86E+00	2,13E+00	4,00E-01	8,62E-01	9,63E-01
0,04	8,12E-01	1,79E+00	2,02E+00	3,88E-01	7,96E-01	8,66E-01
0,05	8,09E-01	1,76E+00	1,98E+00	3,84E-01	7,70E-01	8,30E-01
0,08	8,00E-01	1,70E+00	1,88E+00	3,72E-01	7,12E-01	7,53E-01
0,1	7,95E-01	1,67E+00	1,84E+00	3,65E-01	6,82E-01	7,15E-01
0,2	7,81E-01	1,58E+00	1,69E+00	3,40E-01	5,82E-01	5,98E-01
0,3	7,73E-01	1,52E+00	1,62E+00	3,22E-01	5,24E-01	5,33E-01
0,4	7,69E-01	1,49E+00	1,57E+00	3,08E-01	4,82E-01	4,90E-01
0,5	7,68E-01	1,47E+00	1,54E+00	2,96E-01	4,51E-01	4,57E-01
0,6	7,68E-01	1,46E+00	1,52E+00	2,86E-01	4,26E-01	4,31E-01
0,7	7,69E-01	1,45E+00	1,51E+00	2,77E-01	4,05E-01	4,10E-01
0,8	7,70E-01	1,44E+00	1,50E+00	2,70E-01	3,87E-01	3,91E-01
0,9	7,73E-01	1,44E+00	1,50E+00	2,62E-01	3,71E-01	3,75E-01
1	7,76E-01	1,44E+00	1,50E+00	2,56E-01	3,57E-01	3,61E-01
1,1	7,79E-01	1,44E+00	1,50E+00	2,50E-01	3,45E-01	3,49E-01
1,2	7,83E-01	1,45E+00	1,50E+00	2,44E-01	3,34E-01	3,37E-01
1,3	7,87E-01	1,45E+00	1,51E+00	2,39E-01	3,23E-01	3,27E-01
1,4	7,91E-01	1,46E+00	1,51E+00	2,34E-01	3,14E-01	3,17E-01
1,5	7,95E-01	1,47E+00	1,52E+00	2,29E-01	3,05E-01	3,08E-01
1,6	7,80E-01	1,47E+00	1,53E+00	2,24E-01	2,97E-01	3,00E-01
1,7	8,05E-01	1,48E+00	1,53E+00	2,20E-01	2,89E-01	2,92E-01
1,8	8,10E-01	1,49E+00	1,54E+00	2,16E-01	2,82E-01	2,85E-01
1,9	8,15E-01	1,50E+00	1,55E+00	2,12E-01	2,75E-01	2,78E-01

$\delta$	$G_P$			$G_T$		
	$a/b = 1$	$a/b =$	$a/b =$	$a/b = 1$	$a/b =$	$a/b = 0,05$
2	8,20E-01	1,51E+00	1,56E+00	2,08E-01	2,69E-01	2,71E-01
2,2	8,30E-01	1,53E+00	1,58E+00	2,01E-01	2,57E-01	2,59E-01
2,4	8,41E-01	1,55E+00	1,60E+00	1,94E-01	2,46E-01	2,48E-01
2,6	8,52E-01	1,58E+00	1,63E+00	1,89E-01	2,37E-01	2,39E-01
2,8	8,64E-01	1,60E+00	1,65E+00	1,83E-01	2,28E-01	2,30E-01
3	8,75E-01	1,62E+00	1,68E+00	1,78E-01	2,19E-01	2,21E-01
3,2	8,87E-01	1,65E+00	1,70E+00	1,73E-01	2,12E-01	2,14E-01
3,4	8,99E-01	1,67E+00	1,73E+00	1,68E-01	2,05E-01	2,06E-01
3,6	9,11E-01	1,70E+00	1,75E+00	1,63E-01	1,98E-01	2,00E-01
3,8	9,23E-01	1,73E+00	1,78E+00	1,59E-01	1,92E-01	1,93E-01
4	9,35E-01	1,75E+00	1,81E+00	1,55E-01	1,86E-01	1,87E-01
4,2	9,48E-01	1,78E+00	1,83E+00	1,51E-01	1,81E-01	1,82E-01
4,4	9,60E-01	1,81E+00	1,86E+00	1,48E-01	1,75E-01	1,78E-01
4,6	9,73E-01	1,83E+00	1,89E+00	1,44E-01	1,71E-01	1,72E-01
4,8	9,85E-01	1,86E+00	1,92E+00	1,41E-01	1,66E-01	1,67E-01
5	9,98E-01	1,89E+00	1,95E+00	1,38E-01	1,62E-01	1,63E-01
5,5	1,03E+00	1,96E+00	2,02E+00	1,30E-01	1,52E-01	1,53E-01
6	1,06E+00	2,03E+00	2,09E+00	1,24E-01	1,43E-01	1,44E-01
6,5	1,09E+00	2,10E+00	2,17E+00	1,18E-01	1,35E-01	1,36E-01
7	1,13E+00	2,17E+00	2,24E+00	1,12E-01	1,28E-01	1,29E-01
8	1,19E+00	2,32E+00	2,39E+00	1,03E-01	1,16E-01	1,16E-01
9	1,26E+00	2,47E+00	2,55E+00	9,48E-02	1,06E-01	1,06E-01
10	1,33E+00	2,62E+00	2,70E+00	8,79E-02	9,72E-02	9,77E-02
11	1,39E+00	2,77E+00	2,86E+00	8,19E-02	9,00E-02	9,04E-02
13	1,53E+00	3,08E+00	3,17E+00	7,20E-02	7,83E-02	7,87E-02
15	1,67E+00	3,38E+00	3,49E+00	6,42E-02	6,93E-02	6,96E-02
18	1,88E+00	3,85E+00	3,97E+00	5,53E-02	5,91E-02	5,94E-02
20	2,01E+00	4,16E+00	4,29E+00	5,06E-02	5,39E-02	5,41E-02
22	2,15E+00	4,47E+00	4,62E+00	4,66E-02	4,95E-02	4,96E-02
24	2,29E+00	4,58E+00	4,94E+00	4,33E-02	4,58E-02	4,59E-02
26	2,43E+00	5,10E+00	5,27E+00	4,03E-02	4,26E-02	4,27E-02

$\delta$	$G_P$			$G_T$		
	$a/b = 1$	$a/b = 0,1$	$a/b =$	$a/b = 1$	$a/b = 0,1$	$a/b = 0,05$
28	2,58E+00	5,42E+00	5,60E+00	3,78E-02	3,99E-02	4,00E-02
30	2,72E+00	5,74E+00	5,93E+00	3,56E-02	3,74E-02	3,76E-02
32	2,86E+00	6,06E+00	6,26E+00	3,36E-02	3,53E-02	3,54E-02
34	3,00E+00	6,38E+00	6,59E+00	3,18E-02	3,34E-02	3,35E-02
36	3,14E+00	6,71E+00	6,93E+00	3,02E-02	3,18E-02	3,19E-02
38	3,29E+00	7,03E+00	7,27E+00	2,88E-02	3,03E-02	3,04E-02
40	3,43E+00	7,36E+00	7,60E+00	2,75E-02	2,89E-02	2,90E-02
42	3,57E+00	7,69E+00	7,94E+00	2,63E-02	2,77E-02	2,78E-02
44	3,72E+00	8,02E+00	8,29E+00	2,53E-02	2,66E-02	2,66E-02
46	3,86E+00	8,35E+00	8,63E+00	2,43E-02	2,55E-02	2,56E-02
48	4,01E+00	8,69E+00	8,98E+00	2,34E-02	2,46E-02	2,47E-02
50	4,15E+00	9,02E+00	9,32E+00	2,25E-02	2,37E-02	2,38E-02
52	4,30E+00	9,36E+00	9,67E+00	2,17E-02	2,30E-02	2,30E-02
54	4,45E+00	9,70E+00	1,00E+01	2,10E-02	2,22E-02	2,23E-02
56	4,60E+00	1,00E+01	1,04E+01	2,04E-02	2,15E-02	2,16E-02
58	4,74E+00	1,04E+01	1,07E+01	1,97E-02	2,09E-02	2,10E-02
60	4,89E+00	1,07E+01	1,11E+01	1,91E-02	2,03E-02	2,04E-02
65	5,26E+00	1,16E+01	1,20E+01	1,78E-02	1,90E-02	1,90E-02
70	5,64E+00	1,24E+01	1,28E+01	1,67E-02	1,78E-02	1,78E-02
80	6,40E+00	1,40E+01	1,44E+01	1,49E-02	1,58E-02	1,58E-02
85	6,79E+00	1,47E+01	1,51E+01	1,41E-02	1,49E-02	1,49E-02
90	7,17E+00	1,53E+01	1,58E+01	1,35E-02	1,41E-02	1,41E-02
95	7,54E+00	1,59E+01	1,64E+01	1,28E-02	1,34E-02	1,33E-02
100	7,91E+00	1,64E+01	1,69E+01	1,23E-02	1,26E-02	1,26E-02

Πίνακας 5. Αδιάστατη παροχή λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας σε όλο το εύρος του  $\delta$  για τριγωνική και τραπεζοειδείς διατομές.

$\delta$	$G_P$				$G_T$			
	Ισοσκελής τριγωνική	Τραπεζοειδής			Ισοσκελής τριγωνική	Τραπεζοειδής		
		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75		b/B=0,25	b/B=0,5	
0	9,33E-01	9,04E-01	9,18E-01	9,98E-01	4,66E-01	4,52E-01	4,59E-01	4,99E-01
0,00001	9,33E-01	9,04E-01	9,18E-01	9,98E-01	4,66E-01	4,52E-01	4,59E-01	4,99E-01
0,0001	9,33E-01	9,04E-01	9,17E-01	9,98E-01	4,66E-01	4,52E-01	4,58E-01	4,99E-01
0,001	9,32E-01	9,03E-01	9,16E-01	9,96E-01	4,65E-01	4,51E-01	4,57E-01	4,97E-01
0,01	9,22E-01	8,94E-01	9,06E-01	9,81E-01	4,54E-01	4,41E-01	4,46E-01	4,81E-01
0,02	9,13E-01	8,86E-01	8,98E-01	9,68E-01	4,44E-01	4,31E-01	4,36E-01	4,67E-01
0,04	9,00E-01	8,73E-01	8,84E-01	9,49E-01	4,29E-01	4,17E-01	4,21E-01	4,46E-01
0,05	8,95E-01	8,69E-01	8,79E-01	9,41E-01	4,22E-01	4,11E-01	4,14E-01	4,38E-01
0,08	8,83E-01	8,57E-01	8,67E-01	9,23E-01	4,07E-01	3,96E-01	3,99E-01	4,17E-01
0,1	8,77E-01	8,52E-01	8,60E-01	9,13E-01	3,98E-01	3,88E-01	3,90E-01	4,06E-01
0,2	8,58E-01	8,33E-01	8,40E-01	8,80E-01	3,67E-01	3,58E-01	3,59E-01	3,67E-01
0,3	8,47E-01	8,24E-01	8,29E-01	8,60E-01	3,45E-01	3,38E-01	3,38E-01	3,40E-01
0,4	8,42E-01	8,19E-01	8,22E-01	8,47E-01	3,29E-01	3,22E-01	3,21E-01	3,20E-01
0,5	8,39E-01	8,16E-01	8,18E-01	8,37E-01	3,15E-01	3,09E-01	3,07E-01	3,03E-01
0,6	8,38E-01	8,15E-01	8,16E-01	8,30E-01	3,03E-01	2,97E-01	2,95E-01	2,90E-01
0,7	8,38E-01	8,15E-01	8,15E-01	8,25E-01	2,92E-01	2,87E-01	2,85E-01	2,78E-01
0,8	8,39E-01	8,17E-01	8,16E-01	8,21E-01	2,83E-01	2,78E-01	2,76E-01	2,68E-01
0,9	8,41E-01	8,19E-01	8,17E-01	8,18E-01	2,74E-01	2,70E-01	2,68E-01	2,59E-01
1	8,43E-01	8,21E-01	8,19E-01	8,17E-01	2,67E-01	2,63E-01	2,60E-01	2,51E-01
1,1	8,46E-01	8,24E-01	8,21E-01	8,16E-01	2,60E-01	2,56E-01	2,53E-01	2,44E-01
1,2	8,50E-01	8,28E-01	8,24E-01	8,15E-01	2,53E-01	2,50E-01	2,47E-01	2,37E-01
1,3	8,53E-01	8,31E-01	8,27E-01	8,16E-01	2,47E-01	2,44E-01	2,41E-01	2,31E-01
1,4	8,59E-01	8,35E-01	8,30E-01	8,16E-01	2,42E-01	2,38E-01	2,36E-01	2,25E-01
1,5	8,63E-01	8,40E-01	8,33E-01	8,17E-01	2,36E-01	2,33E-01	2,30E-01	2,20E-01
1,6	8,68E-01	8,44E-01	8,37E-01	8,19E-01	2,31E-01	2,28E-01	2,25E-01	2,15E-01

$\delta$	$G_P$				$G_T$			
	Ισοσκελής τριγωνική	Τραπεζοειδής			Ισοσκελής $\zeta$ τοιγωνική	Τραπεζοειδής		
		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75		b/B=0,25	b/B=0,5	
1,7	8,72E-01	8,49E-01	8,41E-01	8,20E-01	2,26E-01	2,24E-01	2,21E-01	2,10E-01
1,8	8,77E-01	8,54E-01	8,45E-01	8,22E-01	2,22E-01	2,19E-01	2,16E-01	2,06E-01
1,9	8,82E-01	8,59E-01	8,50E-01	8,24E-01	2,17E-01	2,15E-01	2,12E-01	2,02E-01
2	8,88E-01	8,64E-01	8,54E-01	8,27E-01	2,13E-01	2,11E-01	2,08E-01	1,98E-01
2,2	8,98E-01	8,74E-01	8,64E-01	8,32E-01	2,05E-01	2,04E-01	2,01E-01	1,91E-01
2,4	9,10E-01	8,85E-01	8,73E-01	8,37E-01	1,98E-01	1,97E-01	1,94E-01	1,84E-01
2,6	9,21E-01	8,96E-01	8,83E-01	8,44E-01	1,91E-01	1,90E-01	1,87E-01	1,78E-01
2,8	9,33E-01	9,08E-01	8,94E-01	8,50E-01	1,85E-01	1,84E-01	1,81E-01	1,73E-01
3	9,45E-01	9,20E-01	9,04E-01	8,57E-01	1,80E-01	1,79E-01	1,76E-01	1,67E-01
3,2	9,57E-01	9,32E-01	9,15E-01	8,65E-01	1,74E-01	1,73E-01	1,71E-01	1,63E-01
3,4	9,70E-01	9,44E-01	9,26E-01	8,72E-01	1,69E-01	1,68E-01	1,66E-01	1,58E-01
3,6	9,82E-01	9,56E-01	9,37E-01	8,80E-01	1,64E-01	1,64E-01	1,61E-01	1,55E-01
3,8	9,95E-01	9,68E-01	9,49E-01	8,88E-01	1,60E-01	1,59E-01	1,57E-01	1,50E-01
4	1,01E+00	9,81E-01	9,60E-01	8,96E-01	1,56E-01	1,55E-01	1,53E-01	1,46E-01
4,2	1,02E+00	9,94E-01	9,71E-01	9,05E-01	1,52E-01	1,51E-01	1,49E-01	1,43E-01
4,4	1,03E+00	1,01E+00	9,83E-01	9,13E-01	1,48E-01	1,48E-01	1,46E-01	1,39E-01
4,6	1,05E+00	1,02E+00	9,94E-01	9,22E-01	1,44E-01	1,44E-01	1,42E-01	1,36E-01
4,8	1,06E+00	1,03E+00	1,01E+00	9,31E-01	1,41E-01	1,41E-01	1,39E-01	1,33E-01
5	1,07E+00	1,05E+00	1,02E+00	9,39E-01	1,38E-01	1,37E-01	1,36E-01	1,30E-01
5,5	1,11E+00	1,08E+00	1,05E+00	9,62E-01	1,30E-01	1,30E-01	1,28E-01	1,23E-01
6	1,14E+00	1,11E+00	1,08E+00	9,85E-01	1,23E-01	1,23E-01	1,22E-01	1,17E-01
6,5	1,17E+00	1,14E+00	1,11E+00	1,01E+00	1,17E-01	1,17E-01	1,16E-01	1,12E-01
7	1,21E+00	1,18E+00	1,14E+00	1,03E+00	1,12E-01	1,12E-01	1,11E-01	1,07E-01
8	1,28E+00	1,25E+00	1,20E+00	1,08E+00	1,02E-01	1,02E-01	1,01E-01	9,84E-02
9	1,35E+00	1,31E+00	1,27E+00	1,13E+00	9,39E-02	9,42E-02	9,34E-02	9,10E-02
10	1,42E+00	1,38E+00	1,33E+00	1,18E+00	8,70E-02	8,73E-02	8,67E-02	8,46E-02
11	1,49E+00	1,45E+00	1,39E+00	1,23E+00	8,10E-02	8,13E-02	8,08E-02	7,91E-02
13	1,63E+00	1,59E+00	1,52E+00	1,33E+00	7,12E-02	7,15E-02	7,11E-02	6,99E-02
15	1,78E+00	1,73E+00	1,66E+00	1,44E+00	6,35E-02	6,37E-02	6,35E-02	6,26E-02

$\delta$	$G_P$				$G_T$			
	Ισοσκελής	Τραπεζοειδής			Ισοσκελή	Τραπεζοειδής		
		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75		b/B=0,25	b/B=0,5	
18	2,00E+00	1,95E+00	1,85E+00	1,60E+00	5,47E-02	5,48E-02	5,47E-02	5,40E-02
20	2,14E+00	2,09E+00	1,98E+00	1,70E+00	5,00E-02	5,01E-02	5,00E-02	4,95E-02
22	2,29E+00	2,23E+00	2,12E+00	1,81E+00	4,61E-02	4,62E-02	4,61E-02	4,57E-02
24	2,44E+00	2,37E+00	2,25E+00	1,91E+00	4,27E-02	4,28E-02	4,27E-02	4,24E-02
26	2,58E+00	2,52E+00	2,38E+00	2,02E+00	3,98E-02	3,99E-02	3,98E-02	3,95E-02
28	2,73E+00	2,66E+00	2,52E+00	2,13E+00	3,72E-02	3,73E-02	3,73E-02	3,70E-02
30	2,88E+00	2,80E+00	2,65E+00	2,23E+00	3,50E-02	3,51E-02	3,50E-02	3,48E-02
32	3,02E+00	2,95E+00	2,78E+00	2,34E+00	3,30E-02	3,31E-02	3,31E-02	3,29E-02
34	3,17E+00	3,09E+00	2,92E+00	2,45E+00	3,13E-02	3,13E-02	3,13E-02	3,11E-02
36	3,32E+00	3,24E+00	3,05E+00	2,56E+00	2,97E-02	2,97E-02	2,97E-02	2,95E-02
38	3,47E+00	3,38E+00	3,18E+00	2,66E+00	2,82E-02	2,83E-02	2,82E-02	2,81E-02
40	3,61E+00	3,52E+00	3,32E+00	2,77E+00	2,69E-02	2,70E-02	2,69E-02	2,68E-02
42	3,76E+00	3,67E+00	3,45E+00	2,88E+00	2,57E-02	2,58E-02	2,57E-02	2,56E-02
44	3,91E+00	3,81E+00	3,58E+00	2,98E+00	2,46E-02	2,47E-02	2,46E-02	2,45E-02
46	4,05E+00	3,95E+00	3,72E+00	3,09E+00	2,36E-02	2,37E-02	2,36E-02	2,35E-02
48	4,20E+00	4,10E+00	3,85E+00	3,20E+00	2,27E-02	2,27E-02	2,27E-02	2,26E-02
50	4,35E+00	4,24E+00	3,98E+00	3,31E+00	2,18E-02	2,19E-02	2,19E-02	2,17E-02
52	4,50E+00	4,38E+00	4,12E+00	3,41E+00	2,10E-02	2,11E-02	2,11E-02	2,10E-02
54	4,64E+00	4,53E+00	4,25E+00	3,52E+00	2,03E-02	2,03E-02	2,03E-02	2,02E-02
56	4,79E+00	4,67E+00	4,38E+00	3,63E+00	1,96E-02	1,97E-02	1,96E-02	1,95E-02
58	4,92E+00	4,81E+00	4,52E+00	3,73E+00	1,90E-02	1,90E-02	1,90E-02	1,89E-02
60	5,08E+00	4,96E+00	4,65E+00	3,84E+00	1,84E-02	1,84E-02	1,84E-02	1,83E-02
65	5,45E+00	5,31E+00	4,98E+00	4,11E+00	1,70E-02	1,70E-02	1,70E-02	1,69E-02
70	5,82E+00	5,67E+00	5,32E+00	4,37E+00	1,58E-02	1,59E-02	1,59E-02	1,58E-01
80	6,55E+00	6,39E+00	5,98E+00	4,91E+00	1,39E-02	1,39E-02	1,39E-02	1,38E-02
85	6,91E+00	6,74E+00	6,31E+00	5,17E+00	1,31E-02	1,31E-02	1,31E-02	1,31E-02
90	7,28E+00	7,10E+00	6,64E+00	5,44E+00	1,24E-02	1,24E-02	1,24E-02	1,23E-02
95	7,64E+00	7,45E+00	6,97E+00	5,70E+00	1,18E-02	1,18E-02	1,18E-02	1,17E-02
100	8,00E+00	7,81E+00	7,30E+00	5,97E+00	1,12E-02	1,12E-02	1,12E-02	1,11E-02



#### 4.6 Αριθμός Pouseuille

Ο αριθμός Pouseuille [21, 22, 23] στη βιβλιογραφία ορίζεται συνήθως ως

$$Po = f \times Re \quad (30)$$

όπου

$$f = \frac{8\bar{\tau}_w'}{\rho_0 \bar{u}'^2} \quad (31)$$

είναι ο συντελεστής τριβής Darcy και  $Re$  είναι ο αριθμός Reynolds της ροής που δίνεται από την εξίσωση

$$Re = \frac{\rho_0 \bar{u}' D_h}{\mu_0}. \quad (32)$$

Στην Εξ. (31) το  $\bar{\tau}_w'$  είναι η μέση διατμητική τάση του τοιχώματος, η οποία υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τη διατμητική τάση του τοιχώματος  $\tau_w'$  πάνω στη περίμετρο  $\tilde{\Gamma}$ . Αντικαθιστώντας τις Εξ. (31) και (32) στην (30) προκύπτει

$$Po = \frac{8\bar{\tau}_w' D_h}{\mu_0 \bar{u}'} \quad (33)$$

Εφόσον οι ροές που μελετώνται στην παρούσα διπλωματική εργασία θεωρούνται πλήρως ανεπτυγμένες και δεν υπάρχει μεταβολή στη ροή ορμής στην κατεύθυνση  $\tilde{z}$ , προκύπτει από το αντίστοιχο ισοζύγιο σε ένα στοιχειώδη όγκο  $dV = \tilde{A}d\tilde{z}$  ότι

$$\bar{\tau}_w' = \frac{\tilde{A}}{\tilde{\Gamma}} \frac{dP}{d\tilde{z}}. \quad (34)$$

Αδιαστατοποιώντας την Εξ. (34) και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $A/\Gamma = 1/4$  βρίσκουμε

$$\bar{\tau}_w' = \frac{\bar{\tau}_w'}{2P_0 X_p} = \frac{A}{2\Gamma} = \frac{1}{8}. \quad (35)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πάντα έγκυρο ανεξάρτητα από τη διατομή του μικροαγωγού.

Στη συνέχεια, η Εξ. (33) αδιαστατοποιείται ως

$$Po = \frac{8\bar{\tau}_w D_h}{\mu_0 \bar{u}'} = \frac{8\bar{\tau}_w 2P_0 X_P D_h}{\mu_0 \bar{u} \nu_0 X_P} = \frac{16\bar{\tau}_w \delta}{\bar{u}} \quad (36)$$

όπου

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}'}{\nu_0 X_P} = \frac{1}{A} \int_A u(x, y) dA \quad (37)$$

είναι η αδιάστατη μέση ταχύτητα. Τελικά, εισάγουμε την Εξ. (35) στην (36) και προκύπτει μία απλή σχέση για τον αριθμό Pouseuille σε σχέση με κινητικές ποσότητες:

$$Po = \frac{2\delta}{\bar{u}}. \quad (38)$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για κάθε διατομή και για κάθε βαθμό αραιοποίησης.

Στον Πίνακα 6 δίνεται ο αριθμός Pouseuille για κάθε διατομή που εξετάζεται σε όλο το εύρος της παραμέτρου αραιοποίησης. Οι τιμές του αριθμού Pouseuille της κυκλικής διατομής έχουν παρθεί από το [21], ενώ όλες οι υπόλοιπες έχουν υπολογισθεί στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας. Παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα διατομής τα αποτελέσματα του πίνακα χωρίζονται σε τρεις ομάδες με βάση την παράμετρο αραιοποίησης. Στην πρώτη περιοχή για  $10^{-3} \leq \delta \leq 10^{-1}$  (ελεύθερη μοριακή περιοχή) ο αριθμός Pouseuille αυξάνεται αναλογικά με την παράμετρο  $\delta$ . Στη δεύτερη περιοχή για  $10^{-1} \leq \delta \leq 10$  (μεταβατική περιοχή) ο αριθμός Pouseuille εξακολουθεί να αυξάνεται αλλά με μικρότερο ρυθμό. Τέλος για  $\delta \geq 10$  (περιοχή ολίσθησης και υδροδυναμική περιοχή) ο αριθμός Pouseuille αυξάνεται πάρα πολύ αργά και τείνει ασυμπτωτικά στις τιμές που αντιστοιχούν στο υδροδυναμικό όριο.

Πίνακας 6. Αριθμός Pouseuille σε όλο το εύρος της παραμέτρου αραιοποίησης και διάφορες διατομές.

$\delta$	$Po$							
	Κυκλική	Ορθογώνια			Τριγωνική	Τραπεζοειδής		
		a/b=1	a/b=0,1	a/b=0,05		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75
0,001	5,33E-03	4,78E-03	2,03E-03	1,71E-03	4,29E-03	4,43E-03	4,37E-03	4,01E-03
0,01	5,38E-02	4,83E-02	2,10E-02	1,81E-02	4,34E-02	4,47E-02	4,41E-02	4,08E-02
0,1	5,60E-01	5,03E-01	2,39E-01	2,18E-01	4,56E-01	4,70E-01	4,65E-01	4,38E-01
0,3	1,73E+00	1,55E+00	7,88E-01	7,43E-01	1,42E+00	1,46E+00	1,45E+00	1,40E+00
0,5	2,90E+00	2,61E+00	1,36E+00	1,30E+00	2,38E+00	2,45E+00	2,44E+00	2,39E+00
1	5,77E+00	5,16E+00	2,77E+00	2,67E+00	4,74E+00	4,87E+00	4,89E+00	4,90E+00
1,5	8,46E+00	7,54E+00	4,09E+00	3,95E+00	6,95E+00	7,15E+00	7,20E+00	7,34E+00
2	1,10E+01	9,76E+00	5,30E+00	5,13E+00	9,01E+00	9,26E+00	9,36E+00	9,68E+00
3	1,54E+01	1,37E+01	7,39E+00	7,16E+00	1,27E+01	1,30E+01	1,33E+01	1,40E+01
4	1,93E+01	1,71E+01	9,13E+00	8,85E+00	1,59E+01	1,63E+01	1,67E+01	1,79E+01
5	2,26E+01	2,00E+01	1,06E+01	1,03E+01	1,86E+01	1,91E+01	1,96E+01	2,13E+01
6	2,55E+01	2,26E+01	1,18E+01	1,15E+01	2,10E+01	2,16E+01	2,22E+01	2,44E+01
8	3,03E+01	2,68E+01	1,38E+01	1,34E+01	2,50E+01	2,57E+01	2,66E+01	2,96E+01
9	3,23E+01	2,86E+01	1,46E+01	1,41E+01	2,67E+01	2,74E+01	2,84E+01	3,18E+01
10	3,40E+01	3,01E+01	1,53E+01	1,48E+01	2,82E+01	2,89E+01	3,01E+01	3,39E+01
20	4,49E+01	3,97E+01	1,92E+01	1,86E+01	3,73E+01	3,83E+01	4,03E+01	4,70E+01
30	5,00E+01	4,42E+01	2,09E+01	2,02E+01	4,17E+01	4,28E+01	4,53E+01	5,37E+01
40	5,30E+01	4,66E+01	2,17E+01	2,10E+01	4,43E+01	4,54E+01	4,82E+01	5,78E+01
50	5,49E+01	4,81E+01	2,22E+01	2,14E+01	4,60E+01	4,72E+01	5,02E+01	6,05E+01
100	5,91E+01	5,05E+01	2,44E+01	2,37E+01	5,00E+01	5,12E+01	5,48E+01	6,71E+01

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΟΧΗΣ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

#### 5.1 Ροή λόγω βαθμίδας πίεσης

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες υπολογισμού παροχής μάζας και κατανομής πίεσης για ροές που οφείλονται σε διαφορά πίεσης [14].

##### 5.1.1 Παροχή μάζας

Το πλέον βασικό μέγεθος που ενδιαφέρει σε εσωτερικές ροές είναι η παροχή μάζας [8], η οποία προκύπτει ολοκληρώνοντας την κατανομή της ταχύτητας σε μία διατομή του αγωγού:

$$\dot{M} = \int_A \rho(\tilde{z}) u_p(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{A} \quad (39)$$

Το ολοκλήρωμα της Εξ. (39) αδιαστατοποιείται κάνοντας χρήση των αδιάστατων μεγεθών, όπως αυτά έχουν οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, σε συνδυασμό με την Εξ.

(2) και την καταστατική εξίσωση των αερίων ( $\rho(\tilde{z}) = 2P(\tilde{z})/\nu^2$ ):

$$\dot{M} = \rho \nu_0 X_p D_h^3 \int_A u_p dA = \frac{2P}{\nu_0} X_p D_h^3 \int_A u_p dA \Rightarrow \frac{\dot{M}}{\tilde{A}} = \frac{2P}{\nu_0} X_p \frac{D_h^3}{\tilde{A}} \int_A u_p dA \quad (40)$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\dot{M} = G_p \frac{\tilde{A} D_h}{\nu_0} \frac{dP}{d\tilde{z}} = G_p \frac{\tilde{A}}{\nu_0} \frac{dP}{dz} \quad (41)$$

όπου το  $G_p$  δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$G_p = \frac{2}{A} \iint u_p(x, y) dx dy \quad (42)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $G_p$  είναι ο αδιάστατος συντελεστής Poiseuille που έχει υπολογισθεί στην Παράγραφο 4.5 για όλες τις διατομές που εξετάζονται.

Στη συνέχεια ορίζουμε την παροχή μάζας και με τον εναλλακτικό τύπο

$$\dot{M} = G_* \frac{A D_h}{\nu_0} \frac{\Delta P}{L} \quad (43)$$

όπου  $\Delta P = P_1 - P_2$  με  $P_1$  και  $P_2$  να αντιστοιχούν στις πιέσεις εισόδου και εξόδου,  $L$  είναι το μήκος του αγωγού και  $G_*$  είναι μία άγνωστη ποσότητα που θα προκύψει στη συνέχεια έτσι ώστε η έκφραση (43) να είναι ορθή. Αφού η αριστερή πλευρά των Εξ. (41) και (43) είναι ίσες εξισώνουμε την δεξιά πλευρά των δύο εκφράσεων για την παροχή μάζας και γράφουμε

$$G_p \frac{A D_h}{\nu_0} \frac{dP}{d\tilde{z}} = G_* \frac{A D_h}{\nu_0} \frac{\Delta P}{L} \Rightarrow G_p \frac{dP}{d\tilde{z}} = G_* \frac{\Delta P}{L} \Rightarrow G_p \frac{dP}{\Delta P} = G_* \frac{d\tilde{z}}{L} \quad (44)$$

Με βάση τον ορισμό της παραμέτρου αραιοποίησης και λαμβάνοντας υπόψη ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή κατά μήκος της ροής λόγω διαφοράς πίεσης εύκολα προκύπτει ότι  $\frac{dP}{\Delta P} = \frac{d\delta}{\Delta\delta}$ . Επομένως ξαναγράφουμε την Εξ. (44) ως

$$G_p \frac{d\delta}{\Delta\delta} = G_* \frac{d\tilde{z}}{L} \quad (45)$$

Ολοκληρώνουμε κατά μήκος του αγωγού

$$\frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} G_p d\delta = G_* \frac{\int_0^L d\tilde{z}}{L} \quad (46)$$

και βρίσκουμε

$$G_* = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} G_p d\delta \quad (47)$$

Όταν η πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού είναι μικρή τότε η Εξ.(47) απλοποιείται θεωρώντας ότι η μεταβολή του  $\delta$  και επομένως του  $G_p$  είναι επίσης μικρή. Προσεγγιστικά θεωρούμε ότι

$$G_* = G_p(\delta_0) \quad (48)$$

όπου  $\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ .

Όμως όταν η πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού είναι μεγάλη τότε πρέπει να εφαρμόζεται η σχέση (47).

Στην συνέχεια περιγράφεται η διαδικασία υπολογισμού της παροχής μάζας  $\dot{M}$  σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Η διατομή  $\tilde{A}$ , η περίμετρος  $\tilde{\Gamma}$  και το μήκος  $L$  του αγωγού είναι καθορισμένα και γνωστά. Βασιζόμενοι σε αυτά τα χαρακτηριστικά υπολογίζεται η υδραυλική διάμετρος  $D_h$  και στη συνέχεια οι αδιάστατες ποσότητες  $A$  και  $\Gamma$ . Επιπροσθέτως, γνωστές είναι και οι πιέσεις εισόδου και εξόδου  $P_1$  και  $P_2$  αντίστοιχα, καθώς και η θερμοκρασία αναφοράς  $T_0$ . Τέλος, ο τύπος του αερίου και επομένως η μοριακή του ταχύτητα  $v_0$  είναι γνωστά. Εφαρμόζουμε την παραπάνω μεθοδολογία σε έναν αγωγό με μήκος  $L = 1.28\text{m}$  και διάμετρο  $D = D_h = 0.01596\text{m}$  σε θερμοκρασία αναφοράς  $T_0 = 290.68\text{K}$  και θεωρώντας ότι το αέριο είναι άζωτο, οπότε το ιξώδες του είναι  $\mu_0 = 1.736\text{kg/m-s}$  και η σταθερά  $R = 296.92\text{kJ/kg-K}$ . Επομένως από την Εξ. (43) μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή μάζας, εφόσον βέβαια είναι γνωστή η ποσότητα  $G_*$ . Όπως είπαμε για τον υπολογισμό της παραμέτρου ροής  $G_*$  χρησιμοποιούνται οι δύο

εξισώσεις, (47) και (48) ανάλογα με την διαφορά πίεσης. Ποσοτικά αποτελέσματα για την παροχή μάζας έχοντας δεδομένες διαφορές πίεσης δίδονται στον Πίνακα 7 με βάση την Εξ. (47). Στον ίδιο Πίνακα παρουσιάζεται και η σχετική ποσοστιαία διαφορά ανά περίπτωση μεταξύ των αποτελεσμάτων που μας παρέχουν οι Εξ. (47) και (48).

Παρατηρούμε στον Πίνακα 7 ότι η παροχή μάζας λαμβάνει γενικά πολύ μικρές τιμές, κάτι που είναι αναμενόμενο λόγω των συνθηκών και της γεωμετρίας. Ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει το μέγεθος της παροχής είναι η διαφορά πίεσης στα άκρα του αγωγού, όπου οι μεγαλύτερες διαφορές δίνουν και μεγαλύτερες παροχές. Επιπλέον παρατηρούμε ότι ο ρυθμός αύξησης της παροχής δεν είναι ανάλογος της αύξησης της διαφοράς πίεσης, αλλά από ένα σημείο και μετά η παροχή αυξάνεται ελάχιστα παρά την μεγάλη βαθμίδα πίεσης στον αγωγό. Αυτή η συμπεριφορά γίνεται πιο εμφανής όσο το περιβάλλον γίνεται πιο αραιό. Τέλος παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από τον υπολογισμό της παροχής ανεξάρτητα από τον τρόπο υπολογισμού της παραμέτρου  $G_*$  διαφέρουν ελάχιστα, και σε κάθε περίπτωση η σχετική διαφορά είναι μικρότερη του 2% . Αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι η Εξ. (48), αν και σχετικά απλή, είναι πολύ ικανοποιητική για τον υπολογισμό της παροχής μάζας και δεν κρίνεται απαραίτητη η χρήση της πιο απαιτητικής και περίπλοκης Εξ. (47).

### 5.1.2 Κατανομή πίεσης

Μετά τον υπολογισμό της παροχής μάζας  $\dot{M}$  , είναι εφικτό να υπολογιστεί η και η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού κάνοντας χρήση της Εξ. (41) που τώρα γράφεται στη μορφή

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\dot{M}v_0}{G_p(\delta)\tilde{A}D_h} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = \frac{\dot{M}v_0}{G_p(\delta)\tilde{A}} \quad (49)$$

Για τον ευκολότερο υπολογισμό και προγραμματισμό της κατανομής πίεσης εισάγεται η

νέα αδιάστατη μεταβλητή  $z' = \frac{z}{L/D_h}$ , όπου  $0 \leq z' \leq 1$ . Η Εξ.(49) γράφεται στη μορφή

$$\frac{dP}{dz'} = \frac{\dot{M}v_0L}{G_p(\delta)\tilde{A}D_h} \quad (50)$$

και επιλύεται σαν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπου η Εξ. (50) είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, με αρχική συνθήκη  $P(0) = P_1$ . Το πρόβλημα επιλύεται αριθμητικά εφαρμόζοντας ένα σχήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση χωρίζεται η απόσταση  $0 \leq z' \leq 1$  σε  $N$  διαστήματα μήκους  $\Delta z'$  και εφαρμόζεται ένα σχήμα Euler πρώτης τάξης. Η έκφραση πεπερασμένων διαφορών είναι

$$P(z'_i) = P(z'_{i-1}) + \frac{\dot{M}v_0L}{\tilde{A}D_h} \frac{\Delta z'}{G_p(\delta_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (51)$$

η οποία παράγει την κατανομή πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Εφόσον όλη η διαδικασία έχει γίνει σωστά και η διακριτοποίηση είναι αρκετά πυκνή, στην θέση  $z = 1$  η πίεση  $P(1) = P_2$  ανακτάται.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται ο λόγος της πίεσης στην έξοδο του αγωγού, όπως αυτός υπολογίστηκε από την Εξ. (51), προς την πίεση που θα έπρεπε να βρει κανείς στο ίδιο σημείο με βάση την παροχή μάζας και την πίεση στην είσοδο του αγωγού. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι για μεγάλες βαθμίδες πίεσης στον αγωγό τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε εφαρμόζοντας το αριθμητικό σχήμα της Εξ. (51)



εμφανίζουν απρόσμενα μεγάλη απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή. Η απόκλιση αυτή γίνεται πιο έντονη όσο το περιβάλλον της ροής πυκνώνει.

Η αιτία του σφάλματος οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού της παροχής μάζας που έγινε με βάση την Εξ. (48). Από το Σχήμα 5 αδιάστατης παροχής – παραμέτρου αραιοποίησης φαίνεται ότι ειδικά για τιμές του  $\delta$  όπου η κλίση της καμπύλης των αποτελεσμάτων αλλάζει είναι ορθότερη η χρήση της Εξ. (47) για τον υπολογισμό της παραμέτρου ροής  $G_*$  και στη συνέχεια της παροχής μάζας. Σε αυτές τις περιπτώσεις παύει να ισχύει ότι όταν η πτώση πίεσης είναι μικρή μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. (48).

Στο Σχήμα 8 δίνεται το ίδιο διάγραμμα με αυτό του Σχήματος 7, αλλά με τη βασική διαφορά ότι η παροχή μάζας που χρησιμοποιείται στην Εξ. (51) είχε προκύψει από την Εξ. (47). Οι δύο πιέσεις στην έξοδο αυτή τη φορά δεν διαφέρουν περισσότερο από 10%, στην δυσμενέστερη περίπτωση, ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις οι αποκλίσεις είναι της τάξης του 1%. Αντίθετα στο Σχήμα 7 οι αντίστοιχες διαφορές ανάμεσα στις δύο πιέσεις, υπολογισμένη και αναμενόμενη/πραγματική, φτάνει και ξεπερνάει το 1000%.

Από τα παραπάνω συμπεραίνει κανείς την ευαισθησία του αλγορίθμου σε μικρές μεταβολές της παροχής μάζας καθώς και στις δύο περιπτώσεις η παροχή μάζας για την ίδια πτώση πίεσης έχει πολύ μικρή διαφορά (βλέπε Πίνακα 7), που επηρεάζει όμως πάρα πολύ τον υπολογισμό της κατανομής της πίεσης. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι στις περιπτώσεις που χρειάζεται να υπολογιστεί η κατανομή πίεσης κατά μήκος του αγωγού η παροχή μάζας που χρησιμοποιείται πρέπει να έχει υπολογιστεί με μεγάλη ακρίβεια, και άρα στον υπολογισμό της πρέπει να έχει γίνει χρήση της Εξ. (47) και όχι της Εξ. (48). Η τελευταία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όσον αφορά την παροχή

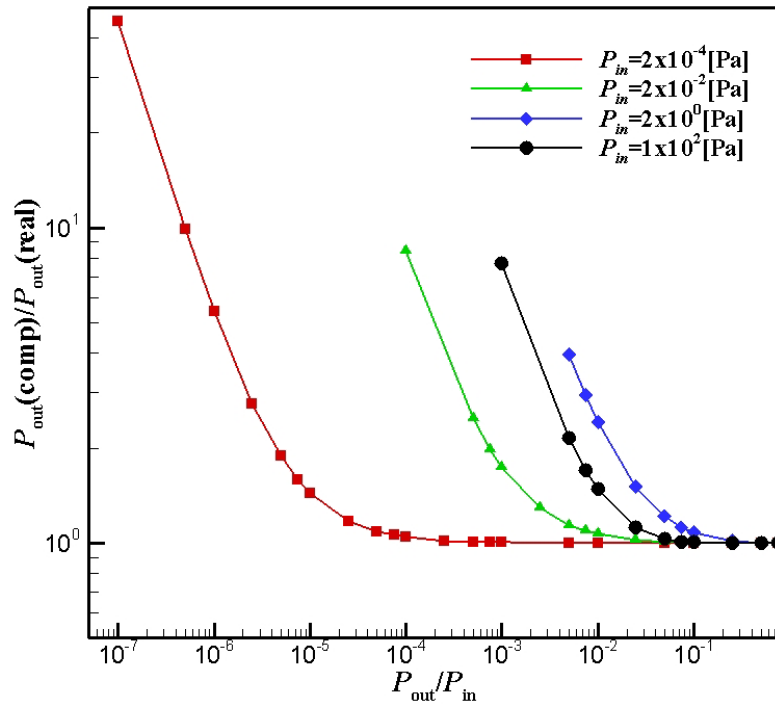
μάζας, όμως στον υπολογισμό της κατανομής πίεσης θεωρείται απαγορευτική καθώς εισαγάγει ένα πολύ μεγάλο σφάλμα.

Στο Σχήμα 9 παρουσιάζονται σε μορφή γραφήματος η παροχή μάζας και η μέση πίεση στον αγωγό. Ειδικότερα, η μία από τις δύο καμπύλες που δίνονται σε κάθε διάγραμμα μας δείχνει πως μεταβάλλεται η παροχή μάζας σε σχέση με τη διαφορά πίεσης που έχουμε ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο, ενώ η δεύτερη μας δείχνει την μεταβολή της μέσης πίεσης στον αγωγό σε σχέση πάλι με τη διαφορά πίεσης που έχουμε ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο. Οι δύο περιπτώσεις αυτές είναι ενδεικτικές και αποτελούν τις ακραίες περιπτώσεις που μελετήθηκαν, μία κοντά στην ελεύθερη μοριακή περιοχή με πίεση εισόδου  $P_{in} = 2 \times 10^{-4} Pa$  και μία κοντά στο υδροδυναμικό όριο με πίεση εισόδου  $P_{in} = 100 Pa$ . Στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι η παροχή μάζας αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση της διαφοράς πίεσης, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μετά από ένα σημείο η παροχή σταθεροποιείται παρά την αύξηση της διαφοράς πίεσης.

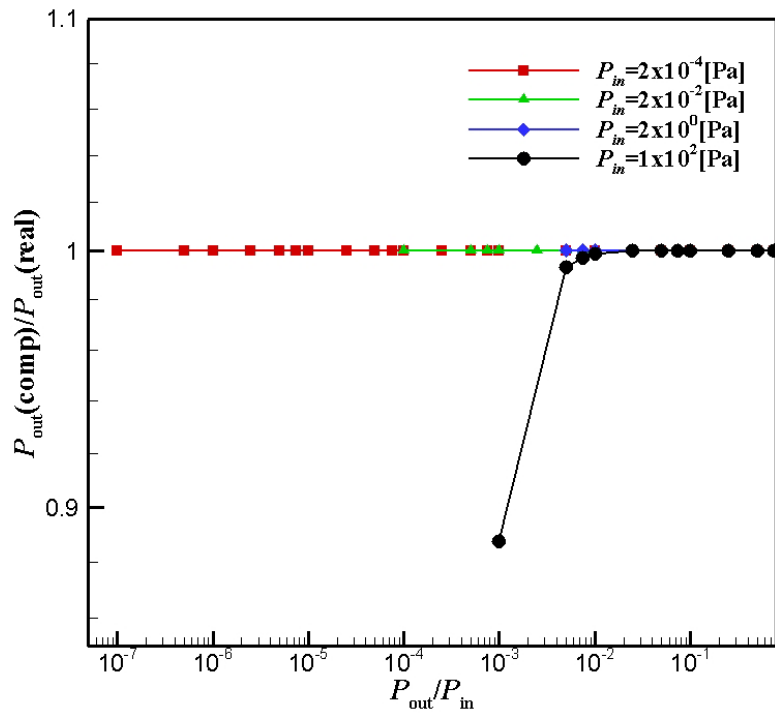
Στο Σχήμα 10 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τον υπολογισμό της κατανομής πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Στο υδροδυναμικό όριο εμφανίζεται η συνήθης συμπεριφορά καμπύλωσης της κατανομής, ενώ αντίθετα σε πιο αραιοποιημένες ατμόσφαιρες η κατανομή πίεσης είναι γραμμική. Το μήκος του αγωγού, το αέριο και η μέση θερμοκρασία δεν επιλέχτηκαν τυχαία αλλά με βάση την ύπαρξη πειραματικής διάταξης [14] με την οποία μπορούσαν να συγκριθούν τα αποτελέσματα. Σε κάθε διάγραμμα δίνεται η μέση πίεση, η διαφορά πίεσης εισόδου – εξόδου, η παράμετρος αραιοποίησης και η παροχή μάζας.

Πίνακας 7. Παροχή μάζας και ποσοστιαία απόκλιση ανάμεσα στους δύο τρόπους υπολογισμού της (Εξς. (47) και (48)).

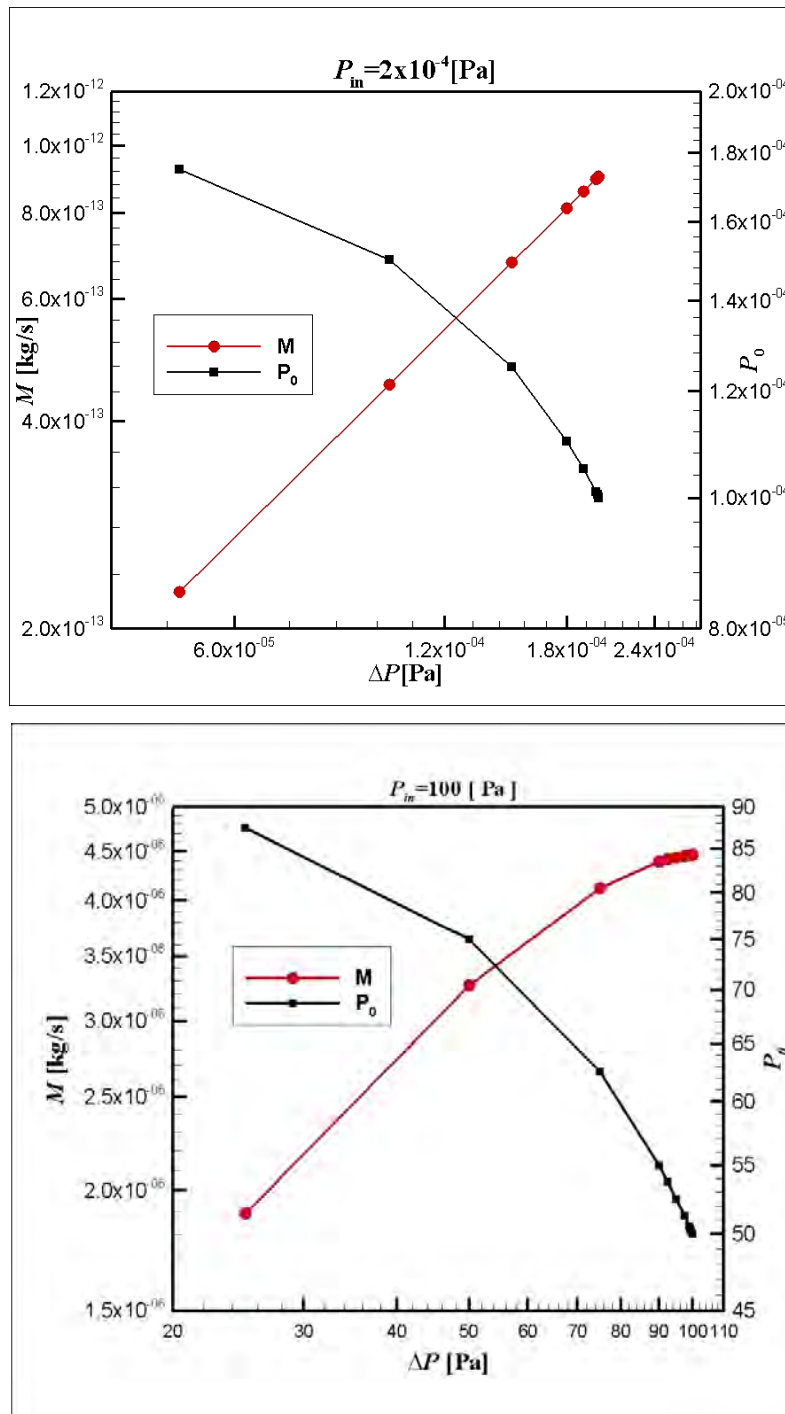
P <sub>out</sub> /P <sub>in</sub>	P <sub>in</sub> =2x10 <sup>-4</sup>		P <sub>out</sub> /P <sub>in</sub>	P <sub>in</sub> =2x10 <sup>0</sup>	
	$\dot{M}$ (kg / s)	Σφάλμα		$\dot{M}$ (kg / s)	Σφάλμα
1,0E-07	9,029E-13	4,43E-04	5,0E-03	8,961E-09	1,44E+00
5,0E-07	9,029E-13	4,43E-04	7,5E-03	8,939E-09	1,41E+00
1,0E-06	9,029E-13	4,43E-04	1,0E-02	8,917E-09	1,38E+00
2,5E-06	9,029E-13	4,43E-04	2,5E-02	8,786E-09	1,23E+00
5,0E-06	9,029E-13	4,43E-04	5,0E-02	8,574E-09	1,05E+00
7,5E-06	9,029E-13	4,43E-04	7,5E-02	8,365E-09	9,01E-01
1,0E-05	9,029E-13	4,43E-04	1,0E-01	8,158E-09	7,80E-01
2,5E-05	9,029E-13	4,43E-04	2,5E-01	6,914E-09	3,57E-01
5,0E-05	9,028E-13	4,43E-04	5,0E-01	4,765E-09	9,63E-02
7,5E-05	9,028E-13	4,43E-04	7,5E-01	2,468E-09	1,62E-02
1,0E-04	9,028E-13	4,43E-04			
2,5E-04	9,027E-13	4,42E-04			
5,0E-04	9,024E-13	4,41E-04			
7,5E-04	9,022E-13	4,41E-04			
1,0E-03	9,020E-13	4,40E-04			
5,0E-03	8,984E-13	4,26E-04			
1,0E-02	8,939E-13	4,08E-04			
5,0E-02	8,577E-13	2,82E-04			
1,0E-01	8,126E-13	1,53E-04			
2,5E-01	6,771E-13	3,28E-10			
5,0E-01	4,514E-13	2,11E-09			
7,5E-01	2,257E-13	4,43E-12			
	P <sub>in</sub> =2x10 <sup>-2</sup>			P <sub>in</sub> =1x10 <sup>2</sup>	
1,0E-04	8,889E-11	7,55E-02	1,0E-03	4,462E-06	6,33E-02
5,0E-04	8,885E-11	7,52E-02	5,0E-03	4,461E-06	5,62E-02
7,5E-04	8,883E-11	7,51E-02	7,5E-03	4,460E-06	5,29E-02
1,0E-03	8,881E-11	7,49E-02	1,0E-02	4,459E-06	5,00E-02
2,5E-03	8,867E-11	7,39E-02	2,5E-02	4,451E-06	3,74E-02
5,0E-03	8,845E-11	7,23E-02	5,0E-02	4,435E-06	2,49E-02
7,5E-03	8,822E-11	7,07E-02	7,5E-02	4,414E-06	1,73E-02
1,0E-02	8,800E-11	1,38E-01	1,0E-01	4,388E-06	1,22E-02
2,5E-02	8,664E-11	6,06E-02	2,5E-01	4,123E-06	8,17E-04
5,0E-02	8,439E-11	4,77E-02	5,0E-01	3,267E-06	-6,73E-04
7,5E-02	8,214E-11	3,61E-02	7,5E-01	1,893E-06	-7,00E-04
1,0E-01	7,989E-11	2,58E-02			
2,5E-01	6,647E-11	1,44E-11			
5,0E-01	4,421E-11	6,72E-13			
7,5E-01	2,205E-11	3,13E-10			



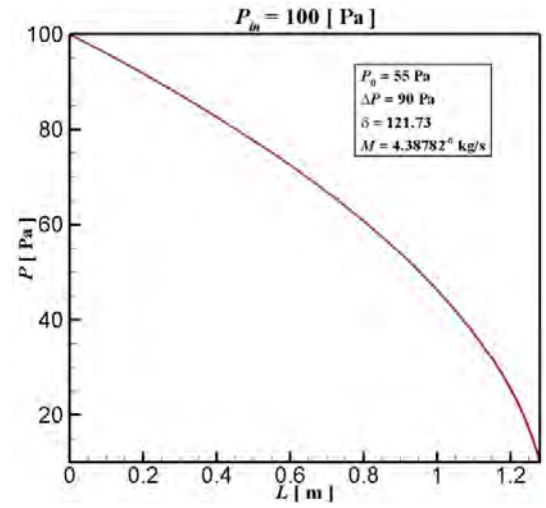
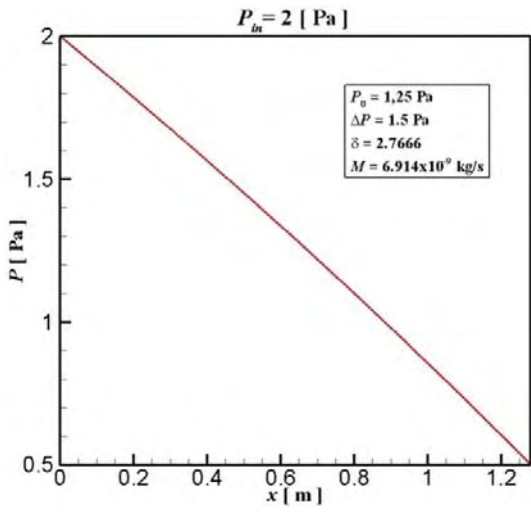
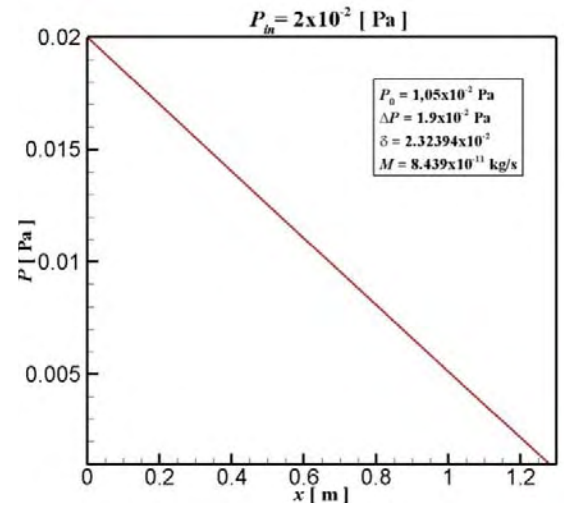
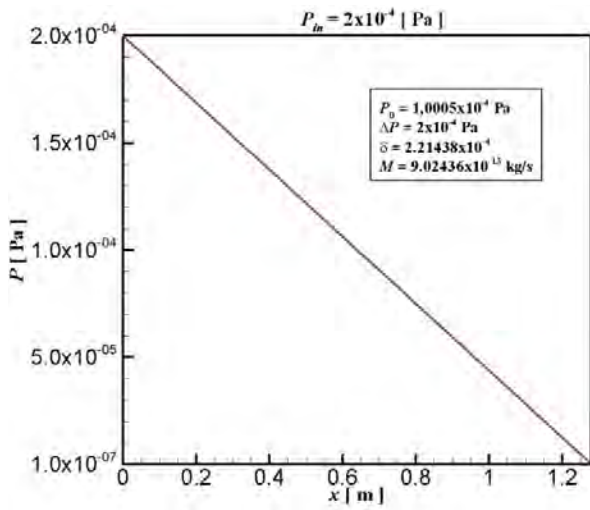
Σχήμα 7: Υπολογισμένη προς πραγματική πίεση εξόδου, για διάφορους λόγους πιέσεων εξόδου – εισόδου με τη χρήση ολοκλήρωσης για την εύρεση της αδιάστατης παροχής.



Σχήμα 8: Υπολογισμένη προς πραγματική πίεση εξόδου, για διάφορους λόγους πιέσεων εξόδου – εισόδου με τη χρήση μέσης τιμής για την εύρεση της αδιάστατης παροχής.



Σχήμα 9: Παροχή μάζας και μέση πίεση κατά μήκος του αγωγού σε αγωγό κυλινδρικής διατομής για συγκεκριμένη πίεση εισόδου και διάφορες πιέσεις εξόδου.



Σχήμα 10. Κατανομή πίεσης κατά μήκος κυλινδρικού αγωγού για συγκεκριμένη πίεση εισόδου και εξόδου.

## 5.2 Ροή λόγω βαθμίδας πίεσης και θερμοκρασίας

Η διαδικασία υπολογισμού παροχής μάζας και κατανομής πίεσης σε ροές που οφείλονται σε διαφορές πίεσης και θερμοκρασίας είναι αρκετά επίπονη. Υπενθυμίζεται ότι η όλη μεθοδολογία ισχύει για μικρές και μεγάλες διαφορές πίεσης και θερμοκρασίας εφόσον ισχύει ότι  $L \gg D_h$ . Η παροχή μάζας υπολογίζεται και πάλι ολοκληρώνοντας την κατανομή ταχύτητας σε μία διατομή κατά μήκος του αγωγού σύμφωνα με τη σχέση

$$\dot{M} = \int_A \rho(\tilde{z}) u(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{A} \quad (52)$$

όπου τώρα η ταχύτητα  $u = X_p u_p + X_T u_T$ . Αδιαστατοποιώντας την έκφραση για την παροχή μάζας προκύπτει ότι

$$\dot{M} = G \frac{\tilde{A} P}{\nu} \quad (53)$$

όπου  $P = P(z)$  είναι η πίεση σε κάποια θέση κατά μήκος του αγωγού, ενώ

$$G = -X_p G_p + X_T G_T \quad (54)$$

είναι η αδιάστατη παροχή σε σχέση με τους συντελεστές Poiseuille και θερμικού ερπυσμού.

Όταν οι διαφορές πίεσης και θερμοκρασίας είναι μικρές τότε

$$X_p \approx \frac{D_h (P_2 - P_1)}{L P_{av}}, \quad X_T \approx \frac{D_h (T_2 - T_1)}{L T_{av}} \quad (55)$$

όπου

$$P_{av} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2), \quad T_{av} = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) \quad (56)$$

Επομένως, στη περίπτωση αυτή με βάση τις πιέσεις και θερμοκρασίες εισόδου και εξόδου εκτιμώνται οι αντίστοιχες μέσες τιμές και βαθμίδες πίεσης και θερμοκρασίας. Στη συνέχεια βρίσκεται η μέση τιμή του  $\delta$  για την οποία υπολογίζονται οι συντελεστές

$G_p$  και  $G_T$ . Τα αποτελέσματα αυτά αντικαθίστανται στην Εξ. (54) και υπολογίζεται η ποσότητα  $G$ . Τέλος από την Εξ. (52), γνωρίζοντας το  $G$  και θεωρώντας ότι  $P = P_{av}$ , βρίσκεται η παροχή μάζας. Υπενθυμίζεται ότι τιμές για τους συντελεστές  $G_p$  και  $G_T$  δίδονται στους Πίνακες 4 και 5.

Όταν οι διαφορές πίεσης και θερμοκρασίας είναι μεγάλες τότε η μεθοδολογία γίνεται περισσότερο πολύπλοκη. Τώρα η παράμετρος  $\delta$  μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού όχι μόνο λόγω μεταβολής στην πίεση αλλά επίσης και στην θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, θεωρώντας το μοντέλο των σκληρών σφαιρών για τις ενδομοριακές συγκρούσεις ισχύει ότι

$$\delta(P, T) = \delta_1 \frac{P(z)}{P_1} \frac{T_1}{T(z)}. \quad (57)$$

Για την παροχή μάζας εμπλέκουμε την εναλλακτική σχέση

$$\dot{M} = G_* \frac{\tilde{A} D_h P_1}{\nu_1 L} \quad (58)$$

Εξισώνοντας την δεξιά πλευρά των Εξ. (53) και (58) και με τη χρήση της Εξ. (57) προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$G_* \frac{P_1}{P} \sqrt{\frac{T}{T_1}} \frac{D_h}{L} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} G_p + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} G_T. \quad (59)$$

Στην Εξ. (59) η κατανομή πίεσης είναι άγνωστη και θα υπολογισθεί, ενώ η κατανομή θερμοκρασίας είναι γνωστή. Η παράμετρος ροής  $G_*$  αποτελεί τμήμα της λύσης. Όμως τώρα, δεν μπορεί να προκύψει απευθείας όπως συνέβη στην παράγραφο 5.1 αλλά απαιτείται μία επαναληπτική μέθοδος που βασίζεται στην γνωστή πίεση εξόδου και αναλύεται παρακάτω. Εφόσον υπολογιστεί η παράμετρος ροής  $G_*$  στην συνέχεια κάνοντας χρήση της Εξ. (58) είναι εύκολος ο υπολογισμός της παροχής μάζας για κάθε



συγκεκριμένη ομάδα δεδομένων. Για το λόγο αυτό σε συγκεκριμένα παραδείγματα που επιλύονται στη συνέχεια δίδονται τιμές της παραμέτρου  $G_*$  και όχι οι παροχές μάζας.

Εφόσον η θερμική αγωγιμότητα του τοιχώματος του αγωγού είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτήν του αερίου, και επιπλέον, η χαρακτηριστική διάσταση της διατομής είναι συνήθως μικρή συγκρινόμενη με το μήκος του αγωγού, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος του αγωγού καθορίζεται από την κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος των τοιχωμάτων. Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι η κατανομή της θερμοκρασίας είναι γραμμική, προσέγγιση αρκετά ακριβής όταν η θερμική αγωγιμότητα του τοιχώματος δεν εξαρτάται από την θερμοκρασία. Η Εξ. (59) ξαναγράφεται στη μορφή.

$$\frac{1}{P_1} \frac{dP}{dz} = \frac{P(z)}{P_1} \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \frac{G_T(\delta)}{G_p(\delta)} - \frac{G_*}{G_p(\delta)} \frac{D_h}{L} \sqrt{\frac{T}{T_1}} \quad (60)$$

και επιλύεται αριθμητικά Στην είσοδο ( $z = 0$ ) και στην έξοδο ( $z = L / D_h$ ) του αγωγού η πίεση είναι ίση με  $P_1$  και  $P_2$  αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στην Εξ. (60) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση.

$$P(z_{i+1}) = P(z_i) + \frac{P(z_i)}{T(z_i)} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \frac{G_T(\delta_i)}{G_p(\delta_i)} - G_* \sqrt{\frac{T(z_i)}{G_p(\delta_i)}} \Delta z \quad (61)$$

Αυτή η εξίσωση επιλύεται αριθμητικά, κάνοντας μία αρχική εκτίμηση της παραμέτρου ροής  $G_*$ . Η αριθμητική ολοκλήρωση ξεκινά από την είσοδο και προχωράει βήμα-βήμα, χρησιμοποιώντας σε κάθε βήμα τη τιμή του  $\delta$  και των αντίστοιχων συντελεστών  $G_p(\delta)$  και  $G_T(\delta)$  που έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στο τέλος του αγωγού ελέγχεται αν η πίεση που έχει υπολογιστεί για τον τελευταίο κόμβο είναι ίση με την πίεση εξόδου. Στην περίπτωση όπου η απόλυτη διαφορά των δύο

πίεσεων ξεπερνάει το κριτήριο σφάλματος που έχουμε θέσει, η αριθμητική ολοκλήρωση επαναλαμβάνεται εισάγοντας αυτή την φορά μία νέα διορθωμένη τιμή της παραμέτρου ροής  $G_*$ . Η διόρθωση αυτή είναι ίση με το μισό της διαφοράς της υπολογισμένης πίεσης στην έξοδο σε σχέση με την επιθυμητή. Το επαναληπτικό μας σχήμα συγκλίνει πάντα με την προϋπόθεση η αρχική μας εκτίμηση για την παράμετρο ροής να έχει το σωστό πρόσημο.

Η παράμετρος ροής  $G_*$  για ένα λόγο θερμοκρασιών  $T_2/T_1=3.8$  και δύο λόγους πίεσεων  $P_2/P_1=1$  και  $P_2/P_1=10$  δίνεται στους Πίνακες 8 και 9. Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι ο θερμοκρασιακός λόγος  $T_2/T_1=3.8$  ανταποκρίνεται σε μία τυπική περίπτωση όπου στο ένα δοχείο διατηρείται άζωτο σε υγρή μορφή, ενώ στο δεύτερο το άζωτο διατηρείται σε θερμοκρασία δωματίου. Όταν  $P_2/P_1=1$  το αέριο ρέει μόνο λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας από το κρύο προς το ζεστό δοχείο (η παράμετρος ροής  $G_*$  και κατά συνέπεια και παροχή μάζας  $\dot{M}$  είναι θετικές). Όπως αναμένεται, η ποσότητα  $G_*$  μειώνεται καθώς μεγαλώνει η παράμετρος αραιοποίησης  $\delta_1$ . Για  $P_2/P_1=10$  οι τιμές της παραμέτρου  $G_*$  είναι αρκετά διαφορετικές. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία συνδυασμένη ροή και εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς πίεσης, η ροή λόγω βαθμίδας πίεσης κυριαρχεί σε σχέση με αυτή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας. Έτσι η παράμετρος  $G_*$  και κατά συνέπεια και η  $\dot{M}$  έχουν αρνητικές τιμές, κάτι που δείχνει ξεκάθαρα ότι το αέριο ρέει από το ζεστό δοχείο, όπου η πίεση είναι υψηλότερη, προς το κρύο, όπου η πίεση είναι χαμηλότερη. Όπως αναμένεται, σε αυτήν την περίπτωση η  $G_*$  αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η  $\delta_1$ . Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι ο υπολογισμός της παραμέτρου

ροής, και κατ' επέκταση της παροχής μάζας, γίνεται ταυτόχρονα με τον υπολογισμό της κατανομής πίεσης κατά μήκος του αγωγού, σε αντίθεση με τις ισόθερμες ροές.

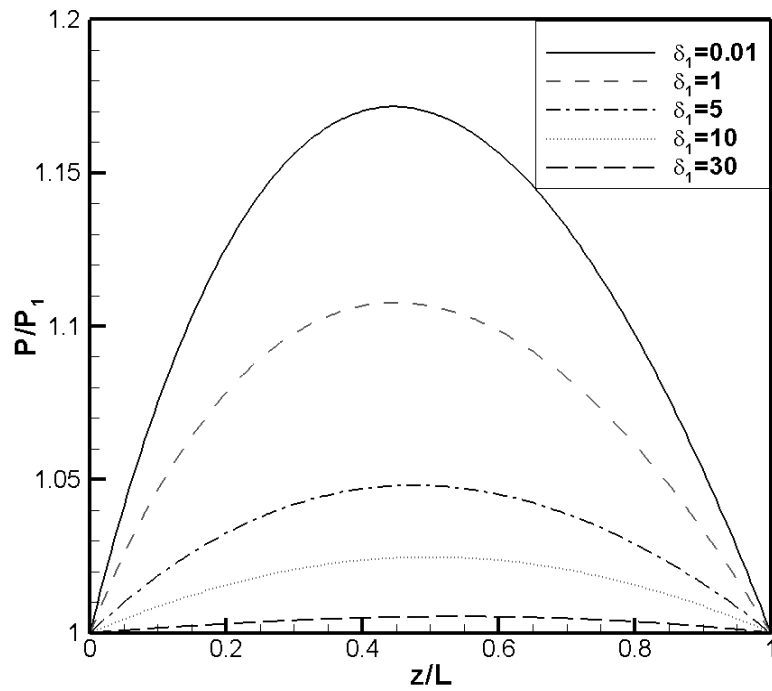
Στη συνέχεια στα Σχήματα 11, 12, 13 και 14 παρουσιάζονται οι κατανομές πίεσης και για τους δύο τύπους ροών και για διάφορες τιμές του  $\delta_1$ . Είναι αρκετά ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι στην πρώτη περίπτωση, όπου  $P_1 = P_2$ , παρατηρείται μία αύξηση της πίεσης στο εσωτερικό του αγωγού, η οποία γίνεται μεγαλύτερη καθώς η ατμόσφαιρα γίνεται πιο αραιή. Συγκεκριμένα, για  $\delta_1 = 30$  η αύξηση της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, ενώ για  $\delta_1 = 0.01$  μπορεί να φτάσει και το 17% σε σχέση με την πίεση στα δοχεία. Επιπλέον σε κάθε διάγραμμα παρατηρείται η αλλαγή στην καμπυλότητα της κατανομής πίεσης που οφείλεται στην εμφάνιση του φαινομένου θερμικού ερπυσμού.

Πίνακας 8. Παράμετρος ροής  $G_*$  για  $P_2 / P_1 = 1$  και  $T_2 / T_1 = 3.8$ .

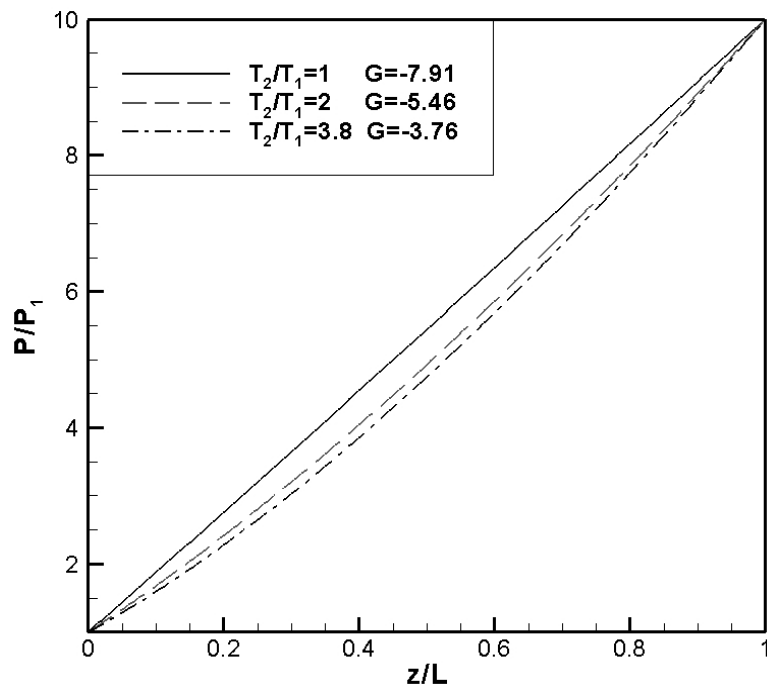
					$G_*$		
		Ορθογώνια		Τριγωνική	Τραπεζοειδής		
$\delta_1$	a/b=1	a/b=0,1	a/b=0,05		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75
0,01	4,03E-01	9,19E-01	1,07E+00	4,49E-01	4,36E-01	4,42E-01	4,78E-01
0,1	3,70E-01	7,32E-01	7,88E-01	4,07E-01	3,95E-01	3,99E-01	4,20E-01
0,5	3,11E-01	5,12E-01	5,25E-01	3,34E-01	3,27E-01	3,27E-01	3,30E-01
1	2,74E-01	4,12E-01	4,19E-01	2,90E-01	2,85E-01	2,83E-01	2,80E-01
5	1,65E-01	2,07E-01	2,09E-01	1,68E-01	1,67E-01	1,65E-01	1,58E-01
10	1,16E-01	1,37E-01	1,38E-01	1,16E-01	1,16E-01	1,15E-01	1,11E-01
30	5,44E-02	5,92E-02	5,94E-02	5,39E-02	5,40E-02	5,38E-02	5,30E-02
50	3,56E-02	3,79E-02	3,80E-02	3,52E-02	3,53E-02	3,52E-02	3,49E-02

Πίνακας 9. Παράμετρος ροής  $G_*$  για  $P_2 / P_1 = 10$  και  $T_2 / T_1 = 3.8$ .

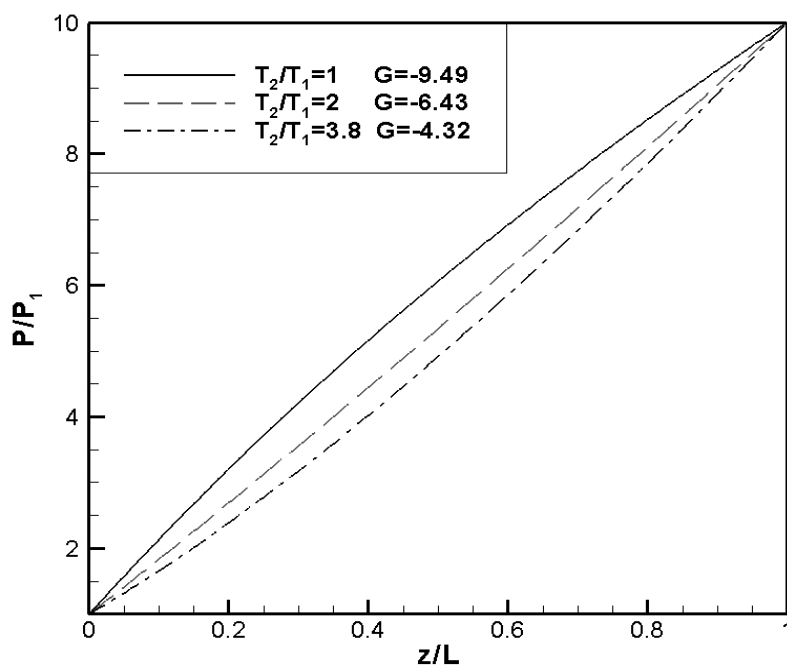
					$G_*$		
		Ορθογώνια		Τριγωνική	Τραπεζοειδής		
$\delta_1$	a/b=1	a/b=0,1	a/b=0,05		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75
0,01	-3,44E+00	-7,93E+00	-9,21E+00	-3,83E+00	-3,71E+00	-3,76E+00	-4,07E+00
0,1	-3,41E+00	-7,28E+00	-7,94E+00	-3,77E+00	-3,66E+00	-3,70E+00	-3,91E+00
0,5	-3,68E+00	-7,27E+00	-7,59E+00	-4,04E+00	-3,92E+00	-3,92E+00	-3,94E+00
1	-4,11E+00	-8,00E+00	-8,30E+00	-4,50E+00	-4,36E+00	-4,32E+00	-4,19E+00
5	-7,72E+00	-1,56E+01	-1,61E+01	-8,29E+00	-8,06E+00	-7,73E+00	-6,81E+00
10	-1,22E+01	-2,53E+01	-2,64E+01	-1,30E+01	-1,27E+01	-1,20E+01	-1,02E+01
30	-3,09E+01	-6,76E+01	-6,99E+01	-3,18E+01	-3,10E+01	-2,91E+01	-2,39E+01



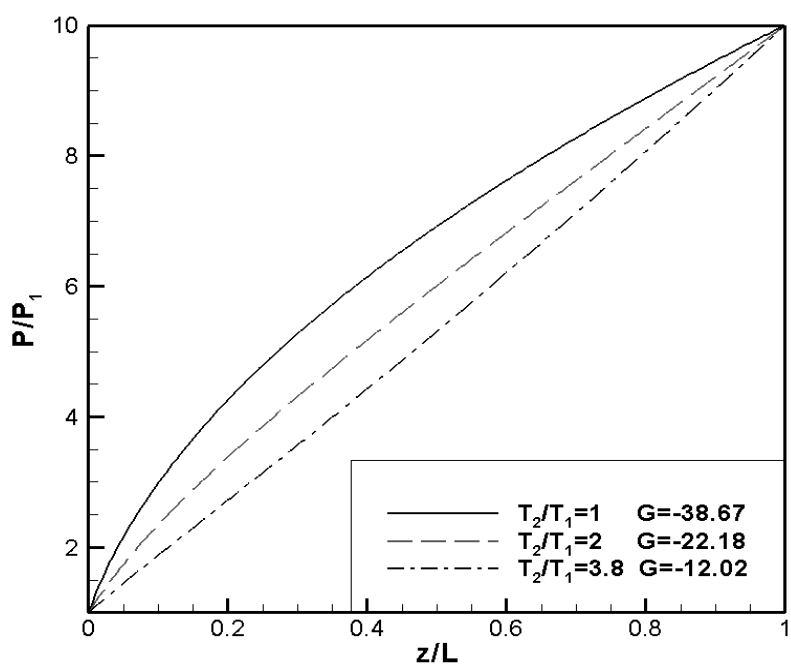
Σχήμα 11: Κατανομή πίεσης κατά μήκος τραπεζοειδούς αγωγού για διάφορα  $\delta_1$ , με  $b/B = 0.25$  και  $P_2/P_1 = 1$ .



Σχήμα 12: Κατανομή πίεσης κατά μήκος αγωγού για διάφορους θερμοκρασιακούς λόγους με  $P_2/P_1 = 10$  και  $\delta_1 = 0,01$  (όπου  $G = G_*$ ).



Σχήμα 13: Κατανομή πίεσης κατά μήκος αγωγού, για διάφορους θερμοκρασιακούς λόγους με  $P_2 / P_1 = 10$  και  $\delta_1 = 1$  (όπου  $G = G_s$ ).



Σχήμα 14: Κατανομή πίεσης κατά μήκος αγωγού για διάφορους θερμοκρασιακούς λόγους με  $P_2 / P_1 = 10$  και  $\delta_1 = 10$  (όπου  $G = G_s$ ).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΘΕΡΜΟΜΟΡΙΑΚΗ ΠΙΕΣΗ

#### 6.1 Διατύπωση του προβλήματος

Η περίπτωση που η ροή λόγω βαθμίδας πίεσης είναι ίση με την αντίθετη ροή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας και η συνολική παροχή μεταξύ των δύο δοχείων είναι ίση με το μηδέν εξετάζεται χωριστά επειδή έχει ιδιαίτερο τεχνολογικό ενδιαφέρον. Αυτή η κατάσταση ροής είναι γνωστή σαν φαινόμενο διαφορικής θερμομοριακής πίεσης (*Thermomolecular Pressure Difference – TPD*) [8,24].

Ορίζοντας στην Εξ. (60) το  $G_* = 0$  βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} G_P = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} G_T \quad (62)$$

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση ώστε να προκύψει μία σχέση μεταξύ των πιέσεων και των θερμοκρασιών στην είσοδο και στην έξοδο του αγωγού.

Οπότε από την Εξ. (62) έχουμε

$$\frac{G_P}{G_T} = \frac{P}{dP} \frac{dT}{T} \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \int_{P_1}^{P_2} \frac{G_P}{G_T} dP dT = \frac{\ln T_2 - \ln T_1}{\ln P_2 - \ln P_1} \quad (63)$$

Θεωρούμε ότι

$$\gamma = 1 / \left( \int_{T_1}^{T_2} \int_{P_1}^{P_2} \frac{G_P}{G_T} dP dT \right) \quad (64)$$

Οπότε από τις Εξ. (63) και (64) προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \quad (65)$$

όπου η σταθερά  $\gamma$  του φαινομένου TPD εξαρτάται μόνο από την αραιοποίηση του αερίου, την γεωμετρία του αγωγού, τον τύπο του αερίου, καθώς επίσης και από την αλληλεπίδραση αερίου – τοιχώματος. Η τελευταία παράμετρος δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στην παρούσα διπλωματική εργασία καθώς έχουμε υποθέσει πλήρως διαχυτική ανάκλαση στο τοίχωμα. Καταληκτικός στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας διαδικασίας για την εκτίμηση της σταθεράς  $\gamma$  εφόσον είναι γνωστά τα απαραίτητα δεδομένα της ροής

Στην συνέχεια εισάγουμε την αδιάστατη πίεση και θερμοκρασία

$$p = P / P_1 \quad \text{και} \quad \tau = T / T_1 \quad (66)$$

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, η παράμετρος αραιοποίησης για κάθε διατομή, μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με την παράμετρο αραιοποίησης στην είσοδο του αγωγού που αποτελεί σημείο αναφοράς ως

$$\delta(p, \tau) = \delta_1 \frac{p}{\tau} \quad (67)$$

Τότε η διαφορική εξίσωση (62) γράφεται στην μορφή

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p}{\tau} \frac{G_T (\delta_1 p / \tau)}{G_p (\delta_1 p / \tau)} \quad (68)$$

Η Εξ.(68) είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση όπου τα  $p$  και  $\tau$  είναι η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή αντίστοιχα, δηλαδή  $p = p(\tau)$ , με αρχική συνθήκη  $p = 1$  στο  $\tau = 1$ . Ολοκληρώνοντας την (68) κατά το μήκος  $1 \leq \tau \leq T_2 / T_1$ , βρίσκουμε τον άγνωστο



λόγο πίεσης στην έξοδο  $\frac{P_2}{P_1}$ . Οι ποσότητες  $G_p$  και  $G_T$  κατά μήκος της διαδρομής ολοκλήρωσης υπολογίζονται από την κινητική λύση χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες υποθέσεις του  $\delta$ . Τέλος, η σταθερά  $\gamma$  υπολογίζεται από την Εξ. (65) ως

$$\gamma = \frac{\ln(P_2/P_1)}{\ln(T_2/T_1)}. \quad (69)$$

## 6.2 Αποτελέσματα

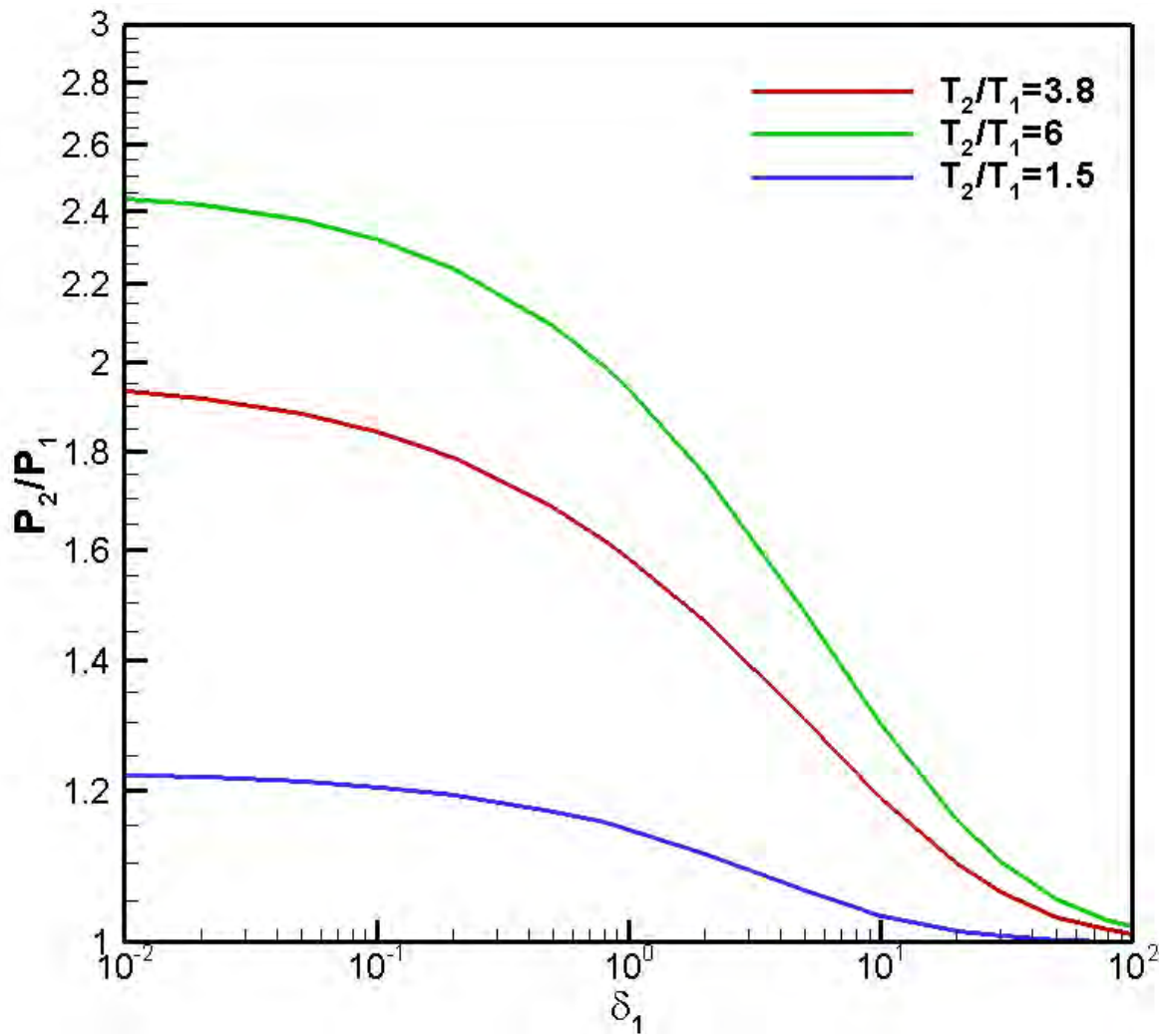
Η παραπάνω διαδικασία έχει εφαρμοστεί σε όλες τις διατομές που μελετήθηκαν και για ένα μεγάλο εύρος τιμών του  $\delta$ . Στον Πίνακα 10 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την σταθερά  $\gamma$ . Σε αυτά φαίνεται ξεκάθαρα ότι η σταθερά  $\gamma$  εξαρτάται κυρίως από την παράμετρο αραιοποίησης στην είσοδο του αγωγού. Καθώς η  $\delta_1$  αυξάνεται, η σταθερά  $\gamma$  μειώνεται. Αυτό αιτιολογείται εύκολα, καθώς η ατμόσφαιρα γίνεται όλο και πιο πυκνή, η ροή εξαιτίας του θερμικού ερπυσμού μειώνεται και κατά συνέπεια απαιτούνται μεγαλύτερες θερμοκρασιακές διαφορές μεταξύ των δοχείων ώστε να διατηρηθεί η κατάσταση μηδενικής ροής. Αντίθετα, σε υψηλά αραιοποιημένες ατμόσφαιρες το φαινόμενο της ροής λόγω θερμικού ερπυσμού είναι σημαντικό και χρειάζονται υψηλότερες τιμές του λόγου πίεσης ώστε να εξισορροπηθεί αυτή η ροή. Τέλος η σταθερά  $\gamma$  εξαρτάται και από τη γεωμετρία της διατομής του αγωγού, η επιρροή της οποίας γίνεται πιο έντονη κοντά στο υδροδυναμικό όριο.

Στο Σχήμα 15 παρουσιάζεται ο απαραίτητος λόγος πίεσης, ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού, ώστε σε συνδυασμό με την αντίστοιχη θερμοκρασιακή διαφορά να εμφανιστεί το φαινόμενο της διαφορικής θερμομοριακής πίεσης. Όπως είναι

αναμενόμενο απαιτείται μεγαλύτερη διαφορά πίεσης όσο το περιβάλλον της ροής γίνεται πιο αραιό, και άρα τα φαινόμενα του θερμικού ερπυσμού πιο έντονα. Αντίστοιχο ρόλο έχει και ο λόγος της θερμοκρασίας, καθώς όσο μεγαλύτερος είναι τόσο μεγαλύτερη βαθμίδα πίεσης απαιτείται. Τέλος, όλες οι τιμές συγκλίνουν στην μονάδα κοντά στο υδροδυναμικό όριο καθώς το φαινόμενο του θερμικού ερπυσμού παύει να υφίσταται και άρα απαιτούνται πολύ μικρές διαφορές πίεσης για την αντιστάθμιση της ροής.

Πίνακας 10. Σταθερά  $\gamma$  του φαινομένου TPD για  $T_2 / T_1 = 3.8$  και  $P_1 = 1$ .

$\gamma$							
$\delta_1$	Ορθογώνια			Τριγωνική	Τραπεζοειδής		
	a/b=1	a/b=0,1	a/b=0,05		b/B=0,25	b/B=0,5	b/B=0,75
0,01	4,95E-01	4,84E-01	4,78E-01	4,96E-01	4,96E-01	4,96E-01	4,94E-01
0,02	4,91E-01	4,73E-01	4,63E-01	4,91E-01	4,91E-01	4,91E-01	4,88E-01
0,05	4,81E-01	4,51E-01	4,36E-01	4,79E-01	4,80E-01	4,79E-01	4,74E-01
0,1	4,68E-01	4,26E-01	4,09E-01	4,65E-01	4,66E-01	4,65E-01	4,57E-01
0,2	4,50E-01	3,95E-01	3,78E-01	4,44E-01	4,46E-01	4,44E-01	4,35E-01
0,5	4,11E-01	3,40E-01	3,27E-01	4,02E-01	4,04E-01	4,02E-01	3,90E-01
0,8	3,82E-01	3,07E-01	2,97E-01	3,72E-01	3,75E-01	3,72E-01	3,60E-01
1	3,66E-01	2,90E-01	2,81E-01	3,55E-01	3,58E-01	3,56E-01	3,44E-01
2	3,07E-01	2,31E-01	2,25E-01	2,94E-01	2,98E-01	2,96E-01	2,88E-01
5	2,07E-01	1,44E-01	1,41E-01	1,95E-01	1,99E-01	1,99E-01	1,99E-01
10	1,29E-01	8,25E-02	8,07E-02	1,20E-01	1,23E-01	1,25E-01	1,30E-01
20	6,59E-02	3,84E-02	3,75E-02	6,12E-02	6,29E-02	6,47E-02	7,03E-02
30	4,02E-02	2,23E-02	2,17E-02	3,73E-02	3,84E-02	3,99E-02	4,45E-02
50	1,95E-02	1,02E-02	9,89E-03	1,81E-02	1,87E-02	1,96E-02	2,26E-02
80	9,23E-03	4,66E-03	4,48E-03	8,57E-03	8,81E-03	9,31E-03	1,10E-02
100	6,33E-03	3,15E-03	3,04E-03	5,87E-03	6,03E-03	6,40E-03	7,60E-03



Σχήμα 15. Αναγκαίος λόγος πίεσης ώστε να διατηρηθεί καθεστώς μηδενικής ροής για τρεις διαφορετικούς λόγους θερμοκρασίας σε όλο το εύρος του συντελεστή αραιοποίησης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην διπλωματική εργασία εξετάζονται ροές λόγω βαθμίδας πίεσης ή/και θερμοκρασίας σε μικροαγωγούς κυκλικής, ορθογώνιας, τριγωνικής και τραπεζοειδούς διατομής. Η ισόθερμη ροή στον κυκλικό αγωγό μοντελοποιήθηκε με το γραμμικοποιημένο κινητικό μοντέλο BGK, ενώ οι υπόλοιπες μη – ισόθερμες ροές με το γραμμικοποιημένο κινητικό μοντέλο Shakhov. Εφαρμόζονται οριακές συνθήκες Maxwell διαχυτικής ανάκλασης. Οι ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις των παραπάνω μοντέλων επιλύονται αριθμητικά με τη χρήση της μεθόδου των διακριτών ταχυτήτων. Παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τις αδιάστατες παροχές σε όλο το εύρος της παραμέτρου αραιοποίησης. Επίσης, διατυπώνεται η διαδικασία υπολογισμού παροχής μάζας και κατανομής πίεσης κατά μήκος του αγωγού. Αναδεικνύεται ένα ευαίσθητο σημείο της όλης διαδικασίας που απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή ώστε να μην εισέρχονται σφάλματα στις εκτιμήσεις της πίεσης και προτείνεται συγκεκριμένη μεθοδολογία που οδηγεί πάντα σε σωστά αποτελέσματα. Γίνεται συστηματική εργασία σε ροές λόγω θερμικού ερπυσμού και του προβλήματος θερμομοριακής διαφορικής πίεσης. Αποτελέσματα που αφορούν τριγωνικούς και τραπεζοειδείς μικροαγωγούς παρουσιάζονται για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία.

Σαν συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα μπορούσαν να μελετηθούν αντίστοιχες ροές σε πειραματικές διατάξεις και να γίνει σύγκριση και έλεγχος των αποτελεσμάτων. Επίσης τα αριθμητικά αποτελέσματα και οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι που δημιουργήθηκαν θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμοι στο σχεδιασμό και στη

βελτιστοποίηση μικροσυσκευών. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και σε κανάλια άλλων διατομών, με μόνους περιορισμούς ότι το μήκος του καναλιού θα είναι αρκετά μεγάλο και ότι θα είναι διαθέσιμη η αντίστοιχη κινητική λύση. Τέλος θα μπορούσε να γίνει μελέτη που να συμπεριλαμβάνει άλλους τύπους αλληλεπίδρασης τοιχώματος – αερίου, όπως συνδυασμός διαχυτικής και κατοπτρικής ανάκλασης στο τοίχωμα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Ching Shen, *Rarefied Gas Dynamics – Fundamentals, Simulations and Micro Flows*, Springer, ISBN 3-540-23936-X, 2005.
2. S. Kandlikar, S. Garimella, D. Li, S. Colin and M. R. King, *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*, Elsevier, ISBN 0-0804-4527-6, 2006.
3. J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical Theory of transport processes*, North Holland, 1972.
4. C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer Verlag, ISBN 0-387-96637-4, 1988.
5. K. Aoki, Numerical analysis of rarefied gas flows by finite-difference method, In *Rarefied Gas Dynamics*, edited by E. P. Muntz, D. P. Weaver and D. H. Campbell, AIAA, Washington, DC, 1989, Vol. 118, p.297.
6. F. Sharipov, rarefied gas flow through a long rectangular channel, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, 17 (5), 3062-3066, 1999.
7. G. L. Morini, M. Spiga and P. Tartarini, The rarefaction effect on the friction factor of gas flow in microchannels, *Superlattices and Microstructures* 35, 587–599, 2004.
8. F. Sharipov and V. Seleznev, “Data on Internal Rarefied Gas Flows”, *Journal of Physical Chemistry Reference Data*, 27, (3), 657-706, 1998.
9. S. K. Loyalka, T. Storvick and H. Park, Poiseuille flow and thermal creep flow in long rectangular channel in the molecular and transition flow regimes, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, 13 , 1188-xxxx, 1976.
10. D. Valougeorgis and S. Naris, Acceleration schemes of the discrete velocity method: Gaseous flows in rectangular microchannels, *SIAM - Journal of Scientific Computing*, 25, (2), 534-552, 2003.
11. J. Lihnaropoulos, S. Naris and D. Valougeorgis, Formulation and stability analysis of rapidly convergent iteration schemes for the 2D linearized BGK equation”, *Transport Theory and Statistical Physics*, 36 (4-6), 513-528, 2007.
12. I. Graur and F. Sharipov, Gas flow through an elliptical tube over the whole range of gas rarefaction, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27, 335-345, 2008.
13. S. Naris and D. Valougeorgis, Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 27, 810–822, 2008.
14. S. Varoutis, S. Naris, V. Hauer, C. Day and D. Valougeorgis, Computational and experimental study of gas flows through long channels of various cross sections in the whole range of the Knudsen number, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, 27 (1), 89 – 100, 2009.
15. F. Sharipov, Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels, *Journal of Micromechanics Microengineering*, 9, 394–401, 1999.
16. I. Graur and F. Sharipov, Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe of elliptic cross section, *Microfluidics and nanofluidics*, 6, (2), 267-275, 2009.
17. Y. Sone, Flows induced by temperature fields in a rarefied gas and their ghost effect on the behavior of a gas in the continuum limit, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32, 779-811, 2000.

18. S. Colin, P. Lalonde and R. Caen, Validation of a Second-Order Slip Flow Model in Rectangular Microchannels, *Heat Transfer Engineering*, 25, (3), 23-30, 2004.
19. S. Naris, D. Valougeorgis, D. Kalempa and F. Sharipov, Flow of gaseous mixtures through rectangular microchannels driven by pressure, temperature and concentration gradients, *Physics of Fluids*, 17, (10), 100607.1-100607.12, 2005.
20. S. Naris, D. Valougeorgis, F. Sharipov, D. Kalempa, "Discrete velocity modelling of gaseous mixture flows in MEMS", *Superlattices and Microstructures*, 35, 629–643, 2004.
21. D. Valougeorgis, "The friction factor of a rarefied gas flow in a circular tube", *Physics of Fluids*, 19 (9), 091701.1-091701.4, 2007.
22. G. Breyiannis, S. Varoutis and D. Valougeorgis, Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27, 609-622, 2008.
23. S. Varoutis, J. Lihnaropoulos, D. Mathioulakis, A. Tserepi and D. Valougeorgis, Estimation of the Poiseuille number and of the exact hydraulic diameter in rarefied gas flows through channels of various cross sections, 1<sup>st</sup> European Conference on Microfluidics (mFlu'08), Bologna, Italy, 2008.
24. Στέργιος Νάρης, "Ροές αερίων σε μικροδιατάξεις με βελτιωμένες μεθόδους διακριτών ταχυτήτων", Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2005 .
25. K. Ritos, J. Lihnaropoulos, S. Naris and D. Valougeorgis, Study of the thermomolecular pressure difference phenomenon in thermal creep flows through microchannels of triangular and trapezoidal cross sections, 2<sup>nd</sup> Micro and Nano Conference, West London, UK, 2009.