



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ  
Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων

Διπλωματική εργασία

## **Προβλήματα Εκχώρησης Πόρων σε Ασύρματα WiMax Δίκτυα**

*Επιμελητής:*

Θεοδοσίου Παναγιώτης

*Επιβλέποντες Καθηγητές:*

Τασιούλας Λέανδρος

Τσουκάτος Κωνσταντίνος

Πέμπτη 5 Φεβρουαρίου 2009, Βόλος

## Contents

Πρόλογος	4
<b>I Ανασκόπηση Τεχνολογίας</b>	<b>5</b>
<b>1 Εισαγωγή στα Ευρυζωνικά Ασύρματα Δίκτυα</b>	<b>6</b>
1.1 Fixed-Mobile Broadband Wireless : Εφαρμογές και στόχοι της αγοράς . . . . .	7
1.2 Ιστορική αναδρομή σε IEEE 802.16 και WiMAX . . . . .	8
1.3 WiMAX Forum . . . . .	9
1.4 Εξέχοντα Χαρακτηριστικά της τεχνολογίας WiMAX . . . . .	11
<b>2 Τεχνολογία OFDM</b>	<b>14</b>
2.1 Διαμορφώσεις BPSK,QPSK και QAM . . . . .	15
2.2 Διαμόρφωση πολλαπλών φερόντων (multicarrier modulation) . . . . .	17
2.3 Περιληπτικά η λειτουργία του OFDM . . . . .	22
<b>3 Η τεχνολογία OFDMA</b>	<b>24</b>
3.1 Πλεονεκτήματα OFDMA . . . . .	24
3.2 Διαφορισμός πολλαπλών χρηστών (multiuser diversity) . . . . .	25
3.3 Προσαρμοστική διαμόρφωση (adaptive modulation) και κωδικοποίησή . . . . .	26
3.4 Πρωτόκολλα του OFDMA . . . . .	28
3.4.1 Υποκατηγοριοποίηση καναλιών (subchannelization) . . . . .	28
3.4.2 Μηνύματα αντιστοίχισης (mapping messages) . . . . .	28
3.4.3 Ranging (ρύθμιση) . . . . .	28
<b>4 Το Φυσικό επίπεδο του WiMAX</b>	<b>29</b>
4.1 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του OFDM . . . . .	29
4.2 Οι παράμετροι του OFDM στο WiMAX . . . . .	30
4.2.1 Fixed WiMAX OFDM-PHY . . . . .	31
4.2.2 Mobile WiMAX OFDMA-PHY . . . . .	31
4.3 Υποκατηγοριοποίηση των καναλιών (subchannelization) : OFDMA . . . . .	32
4.4 Προσαρμοσμένη διαμόρφωση και κωδικοποίηση στο WiMAX. . . . .	33
4.5 Ρυθμοί μετάδοσης φυσικού επιπέδου . . . . .	34
<b>5 Επίπεδο ζεύξης (MAC Layer)</b>	<b>34</b>
5.1 Μηχανισμοί πρόσβασης καναλιού . . . . .	36
5.2 Ποιότητα παρεχόμενων υπηρεσιών (QoS) . . . . .	37
5.3 Χαρακτηριστικά εξοικονόμησης ισχύος . . . . .	39
5.4 Υποστήριξη Κινητικότητας . . . . .	40
5.5 Θέματα Ασφάλειας Συστήματος . . . . .	42
5.6 Υπηρεσίες πολυεκπομπής (Multicast) και πανεκπομπής (Broadcast) . . . . .	43

<b>6</b>	<b>Εξελιγμένα χαρακτηριστικά για βελτίωση της απόδοσης</b>	<b>44</b>
6.1	Σύγχρονα συστήματα κεραιών . . . . .	44
6.2	Υβριδικό – ARQ (Hybrid -ARQ) . . . . .	45
<b>II</b>	<b>Προβλήματα Εκχώρησης Πόρων</b>	<b>47</b>
<b>7</b>	<b>Εισαγωγή σε προβλήματα ανάθεσης πόρων</b>	<b>48</b>
7.1	Μετασχηματισμοί προβλημάτων στη γενική μορφή . . . . .	48
7.2	Το πρόβλημα ανάθεσης που θα μελετηθεί . . . . .	50
7.3	Ο Αλγόριθμος των Kuhn και Munkres . . . . .	50
7.4	Εισαγωγικές Έννοιες - Ορισμοί . . . . .	51
7.5	Αναλυτική παρουσίαση των βημάτων του Αλγορίθμου . . . . .	54
7.6	Σχολιασμός και συζήτηση των κυριότερων σημείων . . . . .	56
7.7	Ο κώδικας του αλγορίθμου (α τρόπος) . . . . .	58
7.8	Εφαρμογή του αλγορίθμου . . . . .	59
7.9	Παρουσίαση του αλγορίθμου με χρήση πινάκων . . . . .	60
7.10	Ο κώδικας του αλγορίθμου (β τρόπος) . . . . .	64
7.11	Εφαρμογή του αλγορίθμου . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Προβλήματα ανάθεσης σε δυναμικό περιβάλλον</b>	<b>65</b>
8.1	Το πρόβλημα της ανάθεσης με μεταβολές στον πίνακα κόστους . . . . .	65
8.2	Dynamic Hungarian . . . . .	67
8.3	Σχολιασμός των βημάτων του αλγορίθμου . . . . .	68
8.4	Βελτιστοποιημένος Dynamic Hungarian . . . . .	69
8.5	Πειραματικές Μετρήσεις . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Βέλτιστη ανάθεση πόρων σε OFDM Uplink :</b>	
	<b>Primal-Dual προσέγγιση του προβλήματος</b>	<b>70</b>
9.1	Εισαγωγή . . . . .	71
9.2	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	72
9.3	Ο Primal-Dual αλγόριθμος . . . . .	75
9.4	Σχολιασμός αλγορίθμου . . . . .	77
9.5	Αποτελέσματα Προσομοίωσης . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>83</b>
<b>11</b>	<b>Παράρτημα Α</b>	<b>85</b>
<b>12</b>	<b>Παράρτημα Β</b>	<b>88</b>
<b>13</b>	<b>Παράρτημα Γ</b>	<b>92</b>

## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Τσουκάτο για την πολύτιμη συνδρομή του κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Οι γνώσεις, οι χρήσιμες συμβουλές και η υποστήριξη που μου προσέφερε τόσο κατά τη φοίτησή όσο και κατά την διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας, είναι πραγματικά ανεκτίμητες. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Λέανδρο Τασιούλα χωρίς την πολύτιμη συνδρομή του οποίου δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και στους δικούς μου ανθρώπους για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ όλη την διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών.

## Πρόλογος

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την μελέτη προβλημάτων εκχώρησης πόρων σε ασύρματα ευρυζωνικά WiMAX δίκτυα. Η επαναστατική αυτή τεχνολογία με τα καινοτόμα χαρακτηριστικά που εισήγαγε εμπλούτισε και παράλληλα διεύρυνε το πεδίο έρευνας γύρω από το ζήτημα αυτό. Σύγχρονα σχήματα διαμόρφωσης, όπως η ορθογώνια πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (OFDM) και μέθοδοι πρόσβασης, όπως η πολλαπλή πρόσβαση ορθογωνικής διαίρεσης συχνότητας (OFDMA), παρείχαν την δυνατότητα στους επιστήμονες να εκμεταλλευτούν περισσότερο αποδοτικά τους εκάστοτε διαθέσιμους πόρους της ασύρματης επικοινωνίας.

Η εργασία περιλαμβάνει δύο μέρη, στο πρώτο παρουσιάζονται περιληπτικά τα κυριότερα στοιχεία που θεμελιώνουν το πρότυπο WiMAX, με ιδιαίτερη έμφαση στο φυσικό επίπεδο και στο επίπεδο ζεύξης. Θέματα ποιότητας υπηρεσιών (QoS) και ασφάλειας των δικτύων επίσης αναλύονται στο μέρος αυτό. Ακόμη περιλαμβάνεται λεπτομερής παρουσίαση των σχημάτων OFDM και OFDMA.

Στο δεύτερο μέρος, επικεντρωνόμαστε στην ανάλυση προβλημάτων κατανομής συχνοτήτων-καναλιών στους κινητούς χρήστες ασύρματων WiMAX δικτύων. Την γενική παρουσίαση των προβλημάτων ανάθεσης ακολουθεί η περιγραφή του Hungarian αλγορίθμου και των κεντρικών θεωρημάτων στα οποία στηρίζεται. Λαμβάνοντας υπόψη την δυναμική φύση του προβλήματος, προτείνεται στη συνέχεια, μία βελτιστοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου (Dynamic Hungarian) ιδανική για περιβάλλοντα που ο πίνακας κόστους μεταβάλλεται συνεχώς. Αναγνωρίζοντας τις αδυναμίες των κεντρικοποιημένων αλγορίθμων παραθέτουμε τον κατανεμημένο primal-dual αλγόριθμο, οποίος βασίζεται σε ενημερώσεις τοπικών μεταβλητών και ανταλλαγές μηνυμάτων για να επιτύχει την αποδοτική διαμοίραση των υπο-φερόντων (subchannels) στους κινητούς συνδρομητές. Τέλος, προσομοιώνοντας την επίλυση δύο διαφορετικών σεναρίων προβλημάτων (Low - SNR και High-SNR) επαληθεύουμε την ορθότητα του primal-dual αλγορίθμου

**Part I**

# **Ανασκόπηση Τεχνολογίας**

## 1 Εισαγωγή στα Ευρυζωνικά Ασύρματα Δίκτυα

Τα ευρυζωνικά ασύρματα δίκτυα (Broadband Wireless) αναπτύσσονται στην συμβολή δύο αξιολογικών διαδρομών εξέλιξης, στην πρόσφατη βιομηχανία των τηλεπικοινωνιών. Οι ευρυζωνικές συνδέσεις από την μία και τα ασύρματα δίκτυα από την άλλη πλευρά απολαμβάνουν, καθένα στον κλάδο του, μεγάλης αποδοχής από την παγκόσμια αγορά. Η διείδυση των ασύρματων φορητών συσκευών και των εφαρμογών του διαδικτύου στην καθημερινή μας ζωή επιβεβαιώνει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο αυτό τον ισχυρισμό. Το νέο στοίχημα στο οποίο καλείται η σύγχρονη τεχνολογία να απαντήσει είναι το γεφύρωμα της ευχρηστίας που προσφέρει η ασύρματη δικτύωση με την συνυφασμένη των ευρυζωνικών συνδέσεων, πλούσια απόδοση.

Τι ακριβώς, όμως εννοούμε με τις λέξεις ευρυζωνικά ασύρματα δίκτυα; Ο όρος αυτός, αφορά την εισαγωγή της ευρυζωνικότητας, με ότι αυτή συνεπάγεται, σε ένα ασύρματο περιβάλλον προσφέροντας μοναδικά οφέλη και άφθονη ευχρηστία. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι ευρυζωνικών ασύρματων υπηρεσιών. Ο πρώτος, επιχειρεί να προσφέρει ένα σύνολο υπηρεσιών παρόμοιων της κλασσικής εδραιωμένης ευρυζωνικής σύνδεσης, με την χρησιμοποίηση των ραδιοσυχνότητων ως μέσο μετάδοσης. Ονομάζεται σταθερή ασύρματη ευρυζωνική σύνδεση (fixed wireless broadband) και μπορεί να θεωρηθεί η ανταγωνιστική εναλλακτική τεχνολογία της ψηφιακής συνδρομητικής γραμμής (Digital Subscriber Line DSL) ή του καλωδιακού μόντεμ (Cable Modem). Ο δεύτερος τύπος φέρει το όνομα κινητή (φορητή) ευρυζωνική σύνδεση (mobile broadband) και διαθέτει την επιπρόσθετη ιδιότητα της φορητότητας (συμπεριλαμβανομένης της νομαδικής μετακίνησης ή της κίνησης με ταχύτητες οχημάτων). Η τεχνολογία WiMAX (Worldwide interoperability for Microwave Access), που αποτελεί το αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας, είναι σχεδιασμένη με σκοπό να εξυπηρετεί συγχρόνως και σε ικανοποιητικό βαθμό, τους δύο αυτούς τομείς ασύρματων ευρυζωνικών συνδέσεων.

Η ιστορία του broadband wireless, όπως αυτή σχετίζεται με το σύστημα WiMAX, ανιχνεύεται στην διαρκή επιθυμία των επιστημόνων για την ανακάλυψη μιας ανταγωνιστικής τεχνολογίας που θα συμπληρώσει και θα διευρύνει τη υπάρχουσα ενσύρματη. Ωθούμενες από την εξέλιξη του τηλεπικοινωνιακού τομέα και την αλματώδη εξάπλωση του διαδικτύου αρκετές εταιρίες στράφηκαν στην εύρεση ασύρματης λύσης προκειμένου να προσπεράσουν τις δεσμεύσεις των παραδοσιακών παρόχων υπηρεσιών. Την τελευταία δεκαετία πληθώρα ασύρματων συστημάτων πρόσβασης έχουν αναπτυχθεί, περισσότερο από νέες εταιρίες, γοητευμένες από τις δυνατότητες της ασύρματης δικτύωσης. Τα καινούργια αυτά συστήματα που παρουσιάστηκαν, ποικίλλαν σε απόδοση, πρωτόκολλα, χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης και υποστηριζόμενες εφαρμογές. Η έλλειψη προτυποποίησης όμως, όπως συμβαίνει σε όλους τους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας οδήγησε σε μαρασμό ή έστω περιορισμένη επέκταση των ελπιδοφόρων αυτών συστημάτων. Ήταν λοιπόν επιτακτική η ανάγκη της δημιουργίας ενός ενιαίου συνόλου κανόνων για την περιγραφή και προτυποποίηση των ασύρματων ευρυζωνικών συστημάτων. Την πολυσύνθετη αυτή διαδικασία ανέλαβε να ολοκληρώσει το WiMAX γκρουπ.

Η ιστορία της εξέλιξης του WiMAX θα μπορούσε να συμπυκνωθεί σε τέσσερα στάδια που όμως δεν διαθέτουν ευκρινείς διαχωριστικές γραμμές ούτε ακολουθούν απόλυτη σειριακή ροή.

1. Ζωνοπερατά Ασύρματα Τοπικού Βρόγχου Συστήματα (Narrowband Wireless Local-Loop Systems) : Σε αγορές όπου η υποδομή του τοπικού βρόγχου (local-loop) υπήρξε εδραιωμένη, αναπτύχθηκαν τεχνολογίες για να υποστηρίξουν εκτός από φωνή και μεταδόσεις δεδομένων με μικρούς ρυθμούς. Χαρακτηριστικό ήταν το πρόγραμμα με την ονομασία “Project Angel” που ξεκίνησε η εταιρία AT & T μόλις από το 1997.
2. Πρώτη γενιά ευρυζωνικών συστημάτων (First Generation Broadband Systems) : Στα μέσα του 1998 με την χαλάρωση των όρων χρήσης της MMDS μπάντας συχνοτήτων αρκετές εταιρίες ανέπτυξαν νέες ασύρματες τεχνολογίες, με το εγγενές μειονέκτημα της απαιτούμενης οπτικής επαφής (Line Of Site LOS).
3. Δεύτερη γενιά ευρυζωνικών συστημάτων (Second Generation Broadband Systems) : Νέα συστήματα, που πέτυχαν αν επιλύσουν το περιοριστικό πρόβλημα της οπτικής επαφής με την χρησιμοποίηση νέων τεχνικών όπως πολυπλεξία ορθογωνικής διαίρεσης συχνότητας (OFDM), πολλαπλή πρόσβαση διαίρεσης κώδικα (CDMA) και επεξεργασία πολλαπλών κεραιών.
4. Ανάδειξη των στάνταρτ της τεχνολογίας(Emergence of Standards-Based technology) : Το 1998 ήταν χρονιά σταθμός για την εδραίωση του προτύπου WiMAX. Το ινστιτούτο IEEE έθεσε τις βάσεις για την δημιουργία του γκρουπ 802.16 με αρχικό προσανατολισμό την προτυποποίηση των ασύρματων μητροπολιτικών δικτύων (wireless MAN).

## 1.1 Fixed-Mobile Broadband Wireless : Εφαρμογές και στόχοι της αγοράς

Οι εφαρμογές σταθερής ασύρματης ευρυζωνικής σύνδεσης ομαδοποιούνται σε δύο κατηγορίες : σημείο προς σημείο (point to point) ή σημείο προς πολλαπλά σημεία (point to multipoint). Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει διασυνδεσιμότητα στα πλαίσια ενός κτιριακού συγκροτήματος, ενώ στο δεύτερο σύνολο εντάσσονται εφαρμογές για : α) μικρά γραφεία (small office /home office SOHO) και μικρομεσαίες επιχειρήσεις (small-to-medium -enterprise SME) β) προσομοίωση απαιτητικών υπηρεσιών τύπου T1 για επιχειρήσεις και γ) δομή- σκελετό για συστήματα πρόσβασης WiFi. Η εικόνα Figure 1 είναι χαρακτηριστική.

Μολονότι, οι αρχικές υλοποιήσεις του WiMAX είναι πολύ πιθανόν να αφορούν εφαρμογές σταθερής φύσης, το αληθινό εύρος των δυνατοτήτων του θα καταστεί πλήρως αντιληπτό όταν η χρήση του εξαπλωθεί σε νομαδικές ή κινητές ευρυζωνικές εφαρμογές. Η τεχνολογία WiMAX όπως αυτή πρεσβεύεται από το πρότυπο IEEE 802.16e-2005 θα χρησιμοποιηθεί αρχικά από σταθερούς παροχείς υπηρεσιών στη προσπάθειά τους να επεκταθούν σε νομαδική- φορητή χρήση των εφαρμογών τους. Ακόμη σε πολλές περιοχές ανά τον κόσμο όπου εταιρίες παροχής καλωδιακών υπηρεσιών δεν έχουν προλάβει να ενσωματώσουν ασύρματη τεχνολογία όπως PCs ή 3G είναι πολύ πιθανόν να στραφούν στο WiMAX για την υποστήριξη κινητικότητας στους συνδρομητές τους. Δεν είναι απίθανη όμως και η χρησιμοποίηση του προτύπου από εταιρίες κινητής τηλεφωνίας που έχουν ήδη αναπτύξει σημαντική υποδομή στον ασύρματο τομέα (3G) με σκοπό την συμπληρωματική, επικουρική ενίσχυση του υπάρχοντος δικτύου. Πέραν των υψηλών



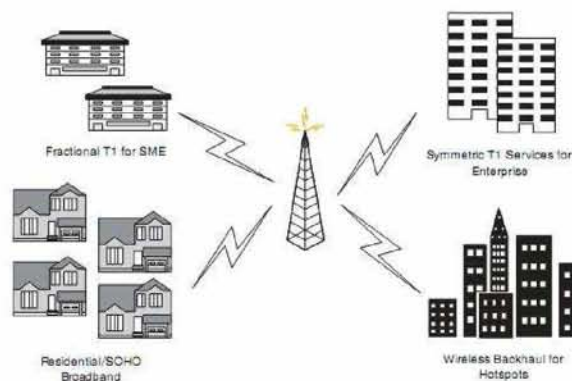


Figure 1: Εφαρμογές WiMAX τύπου point-to-multipoint

ρυθμών μετάδοσης, η ιδιότητά μικρής καθυστέρησης (low-latency) που προσφέρει επιτρέπει στο WiMAX να χρησιμοποιηθεί για υπηρεσίες φωνής μέσω του πρωτοκόλλου IP (VoIP). Τέλος, το υψηλό επίπεδο ποιότητας υπηρεσιών (QoS) του δίνει την δυνατότητα να υποστηρίξει πληθώρα πολυμεσικών εφαρμογών.

## 1.2 Ιστορική αναδρομή σε IEEE 802.16 και WiMAX

Όπως αναφέρθηκε, ο όμιλος IEEE 802.16 σχηματίστηκε το 1998 προκειμένου να αναπτύξει ένα πρότυπο διεπαφής για ασύρματες ευρυζωνικές συνδέσεις. Το γκρουπ αρχικά εστίασε την προσοχή του στην εξέλιξη ενός ασύρματου ευρυζωνικού δικτύου βασισμένο σε οπτική επαφή (LOS) για υποστήριξη σταθερών εφαρμογών τύπου point-to-multipoint. Η λειτουργία του ορίστηκε στις συχνότητες 10GHz-66GHz. Αποτέλεσμα αυτής της ερευνητικής διαδικασίας ήταν η δημιουργία ενός προτύπου -το αρχικό 802.16 πρότυπο, ολοκληρώθηκε τον Δεκέμβριο του 2001- που διέθετε φυσικό επίπεδο (PHY) μοναδικού φέροντος και χρησιμοποιούσε πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM) στο επίπεδο ζεύξης (MAC). Αρκετά από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ήταν δανεισμένα από αντίστοιχα δημοφιλή καλωδιακά πρότυπα (DOCSIS).

Το IEEE 802.16 γκρουπ μεταγενέστερα προέβη στην δημιουργία του 802.16a, μία επουσιώδη τροποποίηση του αρχικού προτύπου με σκοπό να συμπεριλάβει εφαρμογές που δεν απαιτούσαν οπτική επαφή (NLOS). Η μπάντα των συχνοτήτων ορίστηκε να είναι τα 2GHz-11GHz και εισήχθηκε για πρώτη φορά η χρησιμοποίηση πολυπλεξίας ορθογωνικής διαίρεσης συχνότητας (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) ως μέθοδο πολυπλεξίας φυσικού επιπέδου. Συμπεριλήφθηκαν ακόμη, προσθήκες για υποστήριξη της τεχνικής πολλαπλής πρόσβασης ορθογωνικής διαίρεσης συχνότητας (Orthogonal Frequency Division Multiple Access OFDMA) του επιπέδου ζεύξης. Αναθεωρημένες εκδόσεις του πρωτοκόλλου κατέληξαν στην δημιουργία ενός νέου προτύπου το 2004, που ονομάστηκε IEEE 802.16-2004 και αντικατέστησε όλες τις προηγούμενες εκδόσεις θέτοντας τις βάσεις της WiMAX τεχνολογίας. Οι αρχικές λύσεις αυτής της τεχνολογίας στόχευαν σε εφαρμογές σταθερού τύπου γιαυτό και επικράτησε η αναφορά σε αυτές με το όνομα fixed-WiMAX. Το Δεκέμβριο του 2005, ο όμιλος IEEE ολοκλήρωσε και ενέκρινε το IEEE 802.16e-2005 πρότυπο μία επιπλέον προσθήκη στο βασικό που προσέθετε την υποστήριξη

κινητών εφαρμογών εξηγώντας ταυτόχρονα το όνομα με το οποίο συναντάται συνήθως που δεν είναι άλλο από mobile-WiMAX.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των διάφορων 802.16 προτύπων παρουσιάζονται περιληπτικά στον παρακάτω πίνακα (Table 1). Ας σημειωθεί πως τα σπάντα αυτά ουσιαστικά προσφέρουν μια ανεξάντλητη ποικιλία σχεδιαστικών επιλογών, ικανών να καλύψουν μεγάλο αριθμό εφαρμογών και υλοποιήσεων. Στην πραγματικότητα, το IEEE 802.16 θα μπορούσε ορθότερα να χαρακτηριστεί ως μία μεγάλη συλλογή ξεχωριστών προτύπων.

### 1.3 WiMAX Forum

Το WiMAX Forum είναι μία μη κερδοσκοπική οργάνωση που δημιουργήθηκε από τους κατασκευαστές συστημάτων WiMAX (ολοκληρωμένων ή τμημάτων αυτών) καθώς και από παρόχους τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών με σκοπό να προάγει και να πιστοποιήσει τη συμβατότητα και τη διαλειτουργικότητα των προϊόντων που προσφέρουν ασύρματη ευρυζωνική πρόσβαση και λειτουργούν στη βάση που καθορίζουν τα πρότυπα IEEE 802.16 και ETSI HiperMAN για τα ασύρματα μητροπολιτικά δίκτυα (WirelessMAN). Με έτος έναρξης των λειτουργιών το 2003 και με ιδρυτικά μέλη τις Intel, Alvarion, ATT, Array Com, Nortel, Motorola, Samsung κ.α. σήμερα αριθμεί πάνω από 400 μέλη στη λίστα των οποίων περιλαμβάνονται τα κορυφαία ονόματα στο χώρο των κατασκευαστών-τηλεπικοινωνιών-παρόχων δικτύων όπως Nokia, Vodafone, BellSouth, Cisco Systems, Verizon, China Telecom και πολλοί άλλοι.

Στόχος του Forum είναι η επιτάχυνση της εισαγωγής στην αγορά των μητροπολιτικών ευρυζωνικών εφαρμογών για σταθερά, φορητά και κινητά συστήματα. Ο μόνος τρόπος που μπορεί να επιτευχθεί αυτό είναι με τη διεξαγωγή ελέγχων που γίνονται σε ανεξάρτητα εργαστήρια (το εργαστήριο Cetecom στην Ισπανία ήταν το πρώτο που πραγματοποίησε ελέγχους σε εξοπλισμό WiMAX ενώ πρόσφατα το εργαστήριο Telecommunications Technology Association (TTA) στην Κορέα λειτουργεί ως δεύτερο εργαστήριο πιστοποίησης) και την πιστοποίηση από το Forum ότι τα συστήματα αυτά λειτουργούν με βάση τα πρότυπα και ότι είναι εγγυημένη η διαλειτουργικότητα μεταξύ τους.

Το πλατύ φάσμα των προτύπων αν και θεωρητικά εντάσσεται στα πλεονεκτήματα του WiMAX, σε πρακτικές εφαρμογές αποτέλεσε την αιτία δημιουργίας προβλημάτων διαλειτουργικότητας. Την κατάσταση αυτή προσπάθησε να ομαλοποιήσει το WiMAX Forum μειώνοντας το σύνολο των διαθέσιμων επιλογών υλοποίησης. Όρισε γι' αυτό το σκοπό, έναν περιορισμένο αριθμό από προφίλ συστήματος (system profile) και προφίλ πιστοποίησης (certification profile). Το προφίλ συστήματος καθορίζει ένα υποσύνολο υποχρεωτικών και προαιρετικών χαρακτηριστικών (φυσικών και επιπέδου ζεύξης) των προτύπων IEEE 802.16-2004 και IEEE 802.16e-2005. Υπάρχουν δύο ειδών προφίλ συστήματος : το πρώτο είναι βασισμένο στο IEEE 802.16-2004 πρότυπο, με OFDM PHY με όνομα fixed system profile, ενώ το δεύτερο που βασίζεται στο IEEE 802.16e-2005 και OFDMA PHY ονομάζεται mobility system profile. Το προφίλ πιστοποίησης θα μπορούσαμε να το περιγράψουμε σαν ένα στιγμιότυπο του προφίλ συστήματος με μεταβλητές

Table 1: Βασικά χαρακτηριστικά του προτύπου IEEE 802.16

	802.16	802.16-2004	802.16e-2005
Status	Completed December 2001	Completed June 2004	Completed December 2005
Frequency band	10GHz-66Ghz	2GHz-11Ghz	2GHz-11Ghz for fixed 2GHz-6Ghz for mobile
Applixation	Fixed LOS	Fixed NLOS	Fixed and mobile NLOS
Mac arch	Point-to-multipoint mesh	Point-to-multipoint mesh	Point-to-multipoint mesh
Transmission scheme	Single carrier only	Single carrier,256 OFDM or 2.048 OFDM	Single carrier,256 OFDM, scalable OFDM with 128,512,1.024, or 2.048 subcarriers
Modulation	QPSK, 16 QAM 64 QAM	QPSK, 16 QAM 64 QAM	QPSK, 16 QAM 64 QAM
Cross data rate	32Mbps-134.4Mbps	1Mbps-75Mbps	1Mbps-75Mbps
Multiplexing	Burst TDM/TDMA	Burst TDM/TDMA/ OFDMA	Burst TDM/TDMA OFDMA
Duplexing	TDD and FDD	TDD and FDD	TDD and FDD
Channel bandwidths	20Mhz,25Mhz 28Mhz	1.75Mhz, 3.75Mhz, 7Mhz,14Mhz, 1.25Mhz,5Mhz 10Mhz,15Mhz, 8.75Mhz	1.75Mhz, 3.75Mhz, 7Mhz,14Mhz, 1.25Mhz,5Mhz 10Mhz,15Mhz, 8.75Mhz
Air-interface designation	Wireless MAN-SC	Wireless MAN-SC Wireless MAN-OFDM Wireless MAN-OFDMA Wireless Human	Wireless MAN-SC Wireless MAN-OFDM Wireless MAN-OFDMA Wireless Human
WiMAX implementation	None	256-OFDM as Fixed WiMAX	Scalable OFDMA as Mobile WiMAX

λειτουργίας όπως συχνότητα, εύρος ζώνης και τρόπο διπλεξίας πλήρως διευκρινισμένα. Μέχρι αυτήν την στιγμή έχουν εκδοθεί πέντε fixed certification profiles και δεκατέσσερα mobility certification profiles.

#### 1.4 Εξέχοντα Χαρακτηριστικά της τεχνολογίας WiMAX

Η τεχνολογία ασύρματων ευρυζωνικών δικτύων WiMAX προσφέρει πληθώρα ιδιαίτερων χαρακτηριστικών καθώς και αξιοσημείωτη προσαρμοστικότητα τόσο στο τομέα της υλοποίησης όσο και στο τομέα των παρεχόμενων υπηρεσιών. Μερικά από τα εξέχοντα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης τεχνολογίας που αξίζει να επισημανθούν είναι τα εξής :

**Το φυσικό επίπεδο βασίζεται σε OFDM :** Η ορθογωνική πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) θεμελιώνει το φυσικό επίπεδο (physical layer PHY) του πρωτοκόλλου WiMAX. Λόγοι που οδήγησαν στην επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος περιλαμβάνουν εκτός των άλλων, την αξιοσημείωτη απόδοση που επιτυγχάνει απέναντι στο φαινόμενο των πολλαπλών μονοπατιών (multipath). Η ενδιαφέρουσα αυτή συμπεριφορά, επιτρέπει την διάδοση του σήματος ακόμη και σε περιοχές δίχως απευθείας οπτική σύνδεση (Non Line Of Sight NLOS). Η μέθοδος OFDM θεωρείται ευρύτερα ως η προτιμότερη λύση άμβλυνσης του προβλήματος της πολυδιόδευσης (multipath), που αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα εμπόδια των ασύρματων επικοινωνιών. Εκτενέστερη αναφορά του σχήματος OFDM σε μεταγενέστερη ενότητα.

**Υψηλοί ρυθμοί μετάδοσης δεδομένων:** Η τεχνολογία WiMAX έχει την δυνατότητα να υποστηρίξει εξαιρετικούς ρυθμούς μετάδοσης. Συγκεκριμένα, ο μέγιστος ρυθμός σε φυσικό επίπεδο μπορεί να ανέρχεται στα 74Mbps για την περίπτωση που το πλάτος φάσματος λειτουργίας κυμαίνεται στα 20MHz (συνδυασμένο downlink/uplink). Σε εύρος φάσματος 10MHz χρησιμοποιώντας το σχήμα TDD (Time Division Duplexing) με αναλογία 3:1 ανάμεσα σε downlink και uplink, ο ρυθμός μετάδοσης στο φυσικό επίπεδο πλησιάζει τις τιμές των 25Mbps και 6.7Mbps αντιστοίχως. Οι μέγιστες επιδόσεις επιτυγχάνονται όταν χρησιμοποιείται 64 QAM διαμόρφωση με κώδικα διόρθωσης λαθών (error correction code) 5/6. Υπό καλές συνθήκες σήματος, με την χρησιμοποίηση πολλαπλών κεραιών και πολυπλεξία χώρου ακόμη υψηλότεροι ρυθμοί μετάδοσης είναι εφικτοί.

**Υποστήριξη κλιμακωτών ρυθμών μετάδοσης και εύρους ζώνης :** Η τεχνολογία WiMAX διαθέτει κλιμακωτή αρχιτεκτονική φυσικού επιπέδου που της επιτρέπει να προσαρμόζει το ρυθμό μετάδοσης ανάλογα με το διαθέσιμο εύρος συχνοτήτων του καναλιού. Αυτή η δυνατότητα κλιμάκωσης υποστηρίζεται από τον τρόπο λειτουργίας σε OFDMA, όπου το μέγεθος του FFT (fast fourier transform) μπορεί να ποικίλει ανάλογα με το εύρος ζώνης που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, ένα σύστημα WiMAX ενδέχεται να χρησιμοποιεί 128-, 512- ή 1048-bit FFT σε αντιστοιχία με το εύρος ζώνης των 1.25MHz, 5 MHz και 10MHz. Η δυνατότητα προσαρμογής εφαρμόζεται δυναμικά ώστε να εξυπηρετούνται χρήστες που περιπλανώνται σε διαφορετικά ασύρματα δίκτυα με ξεχωριστές αναθέσεις εύρους ζώνης για το καθένα.

**Προσαρμοστικότητα τόσο στην διαμόρφωση όσο και στην κωδικοποίηση** (Adaptive Modulation and Coding AMC): Το πρωτόκολλο WiMAX υποστηρίζει πλήθος διαφορετικών τρόπων διαμόρφωσης και κωδίκων διόρθωσης λαθών (FEC forward error correction coding). Επιτρέπει κατ' αυτό τον τρόπο μεταβολές του σχήματος ανά χρήστη ή ανά πλαίσιο, σύμφωνα με τις εκάστοτε συνθήκες του καναλιού. Ο μηχανισμός AMC εισάγει μια ριζοσπαστική και συνάμα αποτελεσματική μέθοδο μεγιστοποίησης του ρυθμού μετάδοσης σε χρονομεταβλητό κανάλι. Ο αλγόριθμος προσαρμογής ουσιαστικά επιλέγει για χρήση την υψηλότερη τιμή τόσο στο τρόπο διαμόρφωσης όσο και στο σχήμα κωδικοποίησης λαμβάνοντας υπόψη το σηματοθορυβικό λόγο και την παρεμβολή στο δέκτη. Προσφέρεται έτσι ο μεγαλύτερος επιτεύξιμος ρυθμός μετάδοσης ανά ζεύξη.

**Αναμεταδόσεις επιπέδου ζεύξης (Link layer) :** Για συνδέσεις που απαιτούν αυξημένη αξιοπιστία, το WiMAX υποστηρίζει αυτόματες επανεκπομπές αιτήσεων (επιπέδου ζεύξης) μέσω του πρωτοκόλλου ARQ. Οι συνδέσεις που κάνουν χρήση αυτού του πρωτοκόλλου απαιτούν κάθε πακέτο να επιβεβαιώνεται από τον παραλήπτη, όσα πακέτα δεν λάβουν επιβεβαίωση θεωρούνται απολεσθέντα και επανεκπέμπονται. Υποστηρίζεται επίσης το σχήμα hybrid-ARQ που αποτελεί υβριδική συνένωση των τεχνολογιών FEC και ARQ με ιδιαίτερα εντυπωσιακές επιδόσεις.

**Υποστήριξη TDD και FDD:** Τα πρωτόκολλα IEE 802.16-2004 και IEE 802.16e-2005 υποστηρίζουν διπλεξία διαίρεσης χρόνου (Time Division Duplexing TDD) ή συχνότητας (Frequency Division Duplexing FDD) αλλά και half-duplex FDD προορισμένη για υλοποιήσεις χαμηλού κόστους. Η διπλεξία διαίρεσης χρόνου θεωρείται καταλληλότερη και επιλέγεται από την πλειονότητα των υλοποιήσεων λόγω των πλεονεκτημάτων που διαθέτει τα οποία είναι :

1. Ευελιξία στην επιλογή λόγων ρυθμών μετάδοσης downlink και uplink
2. Ικανότητα εκμετάλλευσης της αμοιβαιότητας μεταξύ των καναλιών(channel reciprocity)
3. Ικανότητα υλοποίησης σε non paired φάσμα.
4. Μικρή πολυπλοκότητα στο σχεδιασμό του δέκτη.

Όλα τα προφίλ που εισήχθησαν από την αρχή στο πρωτόκολλο WiMAX βασίζονται σε τεχνολογία TDD σε αντίθεση με τα δύο προφίλ που απαντώνται στα 3.5GHz.

**Πολλαπλή πρόσβαση ορθογωνίας διαίρεσης συχνότητας** (Orthogonal Frequency Division Multiple Access OFDMA): Η έκδοση του WiMAX που αναφέρεται σε κινητούς χρήστες χρησιμοποιεί την OFDMA ως τεχνική πολλαπλής πρόσβασης, σύμφωνα με την οποία σε διαφορετικούς χρήστες δύναται να ανατεθούν διαφορετικά υποσύνολα (subset) των OFDM τόνων. Όπως θα περιγραφεί σε επόμενη ενότητα, η τεχνική του OFDMA διευκολύνει την εκμετάλλευση της ποικιλομορφίας των συχνοτήτων και των πολλαπλών χρηστών (frequency and multiuser diversity) ώστε να βελτιωθεί δραστικά η συνολική χωρητικότητα του συστήματος.

**Ευέλικτη και δυναμική ανά χρήστη, ανάθεση πόρων :** Η ανάθεση πόρων τόσο για την περίπτωση του downlink όσο και για το uplink ελέγχεται από αλγόριθμο προγραμματισμού εγκατεστημένο στο σταθμό βάσης. Η χωρητικότητα διαμοιράζεται ανάμεσα σε πολλούς χρήστες με βάση τη ζήτηση, χρησιμοποιώντας ένα σχήμα burst TDD. Όταν χρησιμοποιείται OFDMA στο φυσικό επίπεδο πολυπλεξία πραγματοποιείται και στην διάσταση της συχνότητας, με την ανάθεση διαφορετικών υποσυνόλων των OFDM subcarriers σε διαφορετικούς χρήστες. Οι διαθέσιμοι πόροι μπορούν, επίσης, να ανατεθούν στο πεδίο του χώρου όταν γίνεται χρήση των ειδικών προηγμένων συστημάτων κεραιών (advanced antenna systems AAS). Το πρότυπο προσφέρει την δυνατότητα οι πόροι του διαθέσιμου εύρους ζώνης να ανατεθούν στο χρόνο, στην συχνότητα ή τελευταία στο πεδίο του χώρου. Διαθέτει ακόμη, έναν ευέλικτο μηχανισμό μετάδοσης της πληροφορία της ανάθεσης των πόρων ανά πλαίσιο.

**Υποστήριξη κεραιών προηγμένης τεχνολογίας :** Η λύση που προτείνει η τεχνολογία WiMAX περιλαμβάνει μια σειρά καινοτομιών στο φυσικό επίπεδο. Υποστηρίζεται η χρήση σύγχρονων τεχνικών πολλαπλών κεραιών οι οποίες περιγράφονται με τους όρους beamforming, κωδικοποίηση χρόνου-χώρου και χωρική πολυπλεξία. Τα σχήματα αυτά, είναι ικανά να βελτιώσουν σημαντικά την συνολική χωρητικότητα του συστήματος καθώς και την αποδοτικότητα του φάσματος εκμεταλλευόμενα τα προτερήματα που πηγάζουν από την χρησιμοποίηση πολλαπλών κεραιών στο χρήστη και/ή στο δέκτη.

**Ποιότητα παρεχόμενων υπηρεσιών (Quality of Service QoS):** Το επίπεδο ζεύξης (MAC layer) έχει συνδεδειστική σχεδίαση προκειμένου να υποστηρίξει αφθονία εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων πολυμεσικών υπηρεσιών και φωνής. Το σύστημα προσφέρει υποστήριξη για σταθερό ή μεταβλητό ρυθμό μετάδοσης, μετάδοση δεδομένων πραγματικού χρόνου (real-time), ροές κίνησης μη πραγματικού χρόνου (non-real-time) αλλά και κίνηση δεδομένων με εγγύηση βέλτιστης προσπάθειας (best-effort). Το επίπεδο ζεύξης στο WiMAX είναι προσεχτικά σχεδιασμένο ώστε να υποστηρίξει μεγάλο αριθμό χρηστών με πολλαπλές συνδέσεις ανά τερματικό, κάθε μία με τις δικές της ιδιαίτερες απαιτήσεις ποιότητας.

**Έμπιστο Σύστημα :** Το πρωτόκολλο WiMAX ικανοποιεί υψηλές απαιτήσεις και παρέχει βεβαιωμένη ποιότητα σε θέματα ασφάλειας που, κερδίζοντας τον χαρακτηρισμό του έμπιστου συστήματος. Ενσωματώνει χαρακτηριστικά ασφαλείας όπως ισχυρή κρυπτογραφία, με χρήση του κρυπτογραφικού αλγορίθμου AES (Advanced Encryption Standard), εύρωστη ιδιωτικότητα και έμπιστο σύστημα διαχείρισης κλειδιών. Προσφέρεται ακόμη, ευέλικτη αρχιτεκτονική αυθεντικοποίησης βασισμένη στο πρωτόκολλο EAR (Extensible Authentication Protocol) επιτρέποντας ποικιλία μέσων αυθεντικοποίησης προσώπων, συμπεριλαμβανομένων των ψηφιακών πιστοποιητικών, των συνδυασμών username/password αλλά και περισσότερο σύγχρονους τρόπους όπως η χρησιμοποίηση ψηφιακών καρτών (smart cards).

**Υποστήριξη κίνησης:** Το πρωτόκολλο 802.16e-2005 αποτελεί την “κινητή” εκδοχή του WiMAX συστήματος και περιλαμβάνει εκείνους τους μηχανισμούς που το καθιστούν ικανό να υπο-

στηρίζει ανεκτικές σε καθυστέρηση, πλήρως κινητές εφαρμογές όπως το διαδεδωμένο VoIP. Το πακέτο των παρεχόμενων κινητών υπηρεσιών περιέχει μηχανισμούς ελαχιστοποίησης κατανάλωσης ενέργειας, μία ιδιότητα ιδιαίτερα επιθυμητή στις φορητές συσκευές. Βελτιώσεις φυσικού επιπέδου όπως τακτικές εκτιμήσεις της ποιότητας του καναλιού και έλεγχος της ανάθεσης ισχύος (power control) καθορίζονται επίσης από το πρωτόκολλο προκειμένου να ενισχυθεί ακόμη περισσότερο η υποστήριξη των κινητών εφαρμογών.

**Αρχιτεκτονική βασισμένη στο πρωτόκολλο IP :** Το WiMAX Forum όρισε η αρχιτεκτονική επιπέδου δικτύου (Network Layer) να βασίζεται ολοκληρωτικά στην πλατφόρμα IP. Όλες οι υπηρεσίες θεμελιώνονται από την IP αρχιτεκτονική και βασίζονται σε πρωτόκολλα του IP για μετάδοση δεδομένων από άκρη σε άκρη, διαχείριση συνόδων, ασφάλεια και ποιότητα υπηρεσιών. Φυσικά, η επιλογή αυτή κρίθηκε σκόπιμη προκειμένου οι χρήστες να επωφεληθούν των προτερημάτων του πρωτοκόλλου IP, όπως η εύκολη διασύνδεση με άλλα δίκτυα και η πλούσια συλλογή των ολοένα αναπτυσσόμενων IP εφαρμογών.

## 2 Τεχνολογία OFDM

Η Πολυπλεξία Ορθογωνικής Διαίρεσης Συχνότητας (orthogonal frequency division multiplexing OFDM) είναι μία τεχνική διαμόρφωσης πολλαπλών φερόντων που κέρδισε προσφάτως ευρεία αποδοχή σε σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά συστήματα όπου οι υψηλοί ρυθμοί μετάδοσης και η εξαιρετική ποιότητα υπηρεσιών θεωρούνται δεδομένες. Μερικά από τα πιο γνωστά εμπορικά συστήματα που επέλεξαν αυτό το σχήμα διαμόρφωσης στον ασύρματο τομέα είναι :

- IEEE 802.11a, g, j, n (WiFi) Wireless LANs
- IEEE 802.15.3a Ultra Wideband (UWB) Wireless PAN
- IEEE 802.16d, e (WiMAX), WiBro, and HiperMAN Wireless MANs
- IEEE802.20 Mobile Broadband Wireless Access (MBWA)
- DVB (Digital Video Broadcast) terrestrial TV systems: DVB-T, DVB-H, T-DMB and ISDB-T
- DAB (Digital Audio Broadcast) systems: EUREKA 147, Digital Radio Mondiale, HD Radio, T-DMB and ISDB-TSB
- Flash-OFDM cellular systems
- 3GPP UMTS & 3GPP@ LTE (Long-Term Evolution), and 4G  
ενώ στον ενσύρματο :
- ADSL and VDSL broadband access via POTS copper wiring
- MoCA (Multi-media over Coax Alliance) home networking
- PLC (Power Line Communication)

## 2.1 Διαμορφώσεις BPSK, QPSK και QAM

Ο σκοπός ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι η μετάδοση σημάτων πληροφορίας (information-bearing signals) ή σημάτων βασικής ζώνης (baseband signals) μέσω ενός διαύλου επικοινωνίας που χωρίζει τον πομπό από τον δέκτη. Ο όρος βασική ζώνη (baseband) χρησιμοποιείται για να ορίσουμε την ζώνη των συχνοτήτων που παριστάνει το αρχικό σήμα όπως αυτό στέλνεται από την πηγή πληροφορίας. Στην περίπτωση του ασύρματου συστήματος WiMAX, το ρόλο του διαύλου κατέχει ο αέρας. Η αποτελεσματική χρήση του διαύλου επικοινωνίας απαιτεί την μετατόπιση της περιοχής των συχνοτήτων της βασικής ζώνης σε άλλες περιοχές συχνοτήτων κατάλληλες για μετάδοση και αντίστοιχη μετατόπιση στην αρχική περιοχή συχνοτήτων μετά τη λήψη του σήματος. μετατόπιση της περιοχής συχνοτήτων επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας διαμόρφωση (modulation), που ορίζεται σαν η διαδικασία με την οποία κάποιο χαρακτηριστικό ενός φέροντος μεταβάλλεται σύμφωνα με το σήμα διαμόρφωσης. Το σήμα βασικής ζώνης αναφέρεται σαν σήμα διαμόρφωσης (modulating wave) και το αποτέλεσμα της διαδικασίας διαμόρφωσης αναφέρεται σαν διαμορφωμένο σήμα (modulated wave). Στο άκρο λήψης του τηλεπικοινωνιακού συστήματος ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία γνωστή σαν αποδιαμόρφωση (demodulation) ανακτούμε το αρχικό σήμα βασικής ζώνης.

Για τα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας, υπάρχουν τρεις βασικές μέθοδοι διαμόρφωσης, οι ASK, FSK και PSK, από τις οποίες προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες. Στο WiMAX χρησιμοποιείται κατά πρώτον η PSK (Phase Shift Keying) και συγκεκριμένα η BPSK και η QPSK παραλλαγή της. Η γενική μορφή της PSK δίνεται από τον τύπο :

$$U_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \frac{2\pi}{M} m \cos 2\pi f_c t - \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \frac{2\pi}{M} m \sin 2\pi f_c t$$

με  $m$  διακριτές φάσεις, όπου το  $m$  ανήκει στο σύνολο  $\{0, 1, \dots, M-1\}$ .

1. Εάν  $M = 2$ , κάθε bit αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο και έχουμε BPSK (Binary PSK) και το σύμβολο  $m = 0$  βρίσκεται σε διαφορά φάσης  $\pi$  από το σύμβολο  $m = 1$ .
2. Εάν  $M = 4$ , δύο bit αντιστοιχούν ανά σύμβολο και προκύπτει QPSK (Quadrature PSK) διαμόρφωση. Τώρα τα σύμβολα τοποθετούνται στο διάγραμμα αστερισμού με διαφορά φάσης  $\frac{\pi}{2}$ .

Οι παραπάνω πληροφορίες αναπαριστώνται συγκεντρωμένα στα παρακάτω διαγράμματα (εικόνα Figure 2) που ονομάζονται “διαγράμματα αστερισμού”.

Ακόμη ένας τύπος διαμόρφωσης που συναντάται στο WiMAX είναι η QAM (Quadrature Amplitude Modulation). Η διαμόρφωση αυτή προέρχεται από το συνδυασμό της ASK και της PSK. Στην QAM μεταβάλλεται τόσο το πλάτος όσο και η φάση του φέροντος. Ανάλογα με τον αριθμό των διαφορετικών εμφανίσεων του φέροντος, χαρακτηρίζεται και η διαμόρφωση (M-QAM). Γενικά, λοιπόν για τη QAM ισχύουν:

$$U_{mn}(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_n)$$



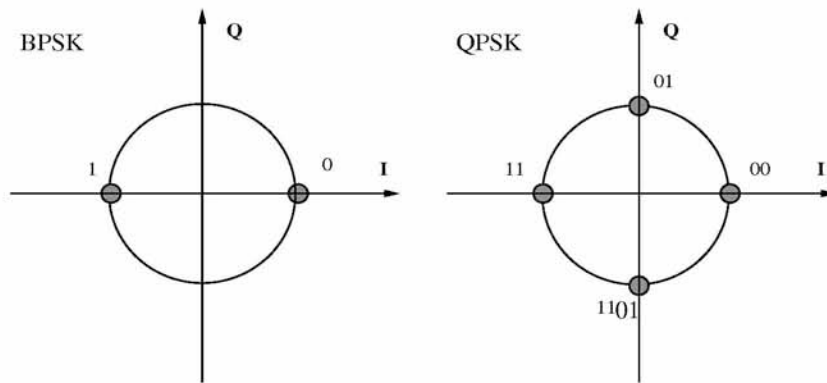


Figure 2: Διαγράμματα αστερισμού BPSK και QPSK

όπου  $m = 0, \dots, M_1 - 1$  και  $n = 0, \dots, M_2 - 1$  για  $M_1$  πλάτη και  $M_2$  φάσεις αντίστοιχα. Δηλαδή, συνολικά για  $M = M_1 + M_2$  διαφορετικά σύμβολα. Το  $M$  μπορεί να πάρει τιμές 16, 32, 64, κλπ. Στο WiMAX χρησιμοποιούμε την 16-QAM και την 64-QAM. Στην 16-QAM για παράδειγμα, υπάρχουν 16 διαφορετικές εμφανίσεις του φέροντος που διαφέρουν μεταξύ τους όσον αφορά στην φάση και στο πλάτος (4 ξεχωριστές φάσεις  $\times$  4 ξεχωριστά πλάτη = 16 εμφανίσεις). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με 4 bits πληροφορίας ( $16 = 2^4$ ). Οι εμφανίσεις του φέροντος καθώς και η κωδικοποίηση των bits φαίνονται στην παρακάτω εικόνα (Figure 3).

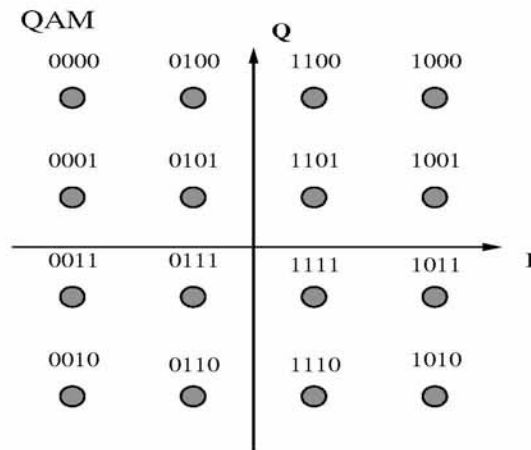


Figure 3: Διαγράμματα αστερισμού QAM

Ακριβώς, τα αντίστοιχα ισχύουν για την διαμόρφωση 64-QAM. Συγκεκριμένα, κωδικοποιούνται 6 bits ταυτόχρονα σε κάθε σύμβολο ( αφού υπάρχουν  $64 = 2^6$  εμφανίσεις του φέροντος).

## 2.2 Διαμόρφωση πολλαπλών φερόντων (multicarrier modulation)

Η κεντρική ιδέα της διαμόρφωσης πολλαπλών φερόντων είναι σχετικά απλή και πηγάζει από την από την επιθυμία υποστήριξης αξιοσημείωτων ρυθμών μετάδοσης δίχως την παρουσία διασυμβολικής παρεμβολής (intersymbol interference ISI). Με τον όρο διασυμβολική παρεμβολή περιγράφουμε το φαινόμενο κατά το οποίο η άφιξη ενός μεταδιδόμενου συμβόλου στον δέκτη πραγματοποιείται καθυστερημένα, κατά την επόμενη χρονική περίοδο συμβόλου. Σύνηθες γεγονός σε περιβάλλοντα πολύοδης διάδοσης (multipath), όπου η χρονική καθυστέρηση ανάμεσα στα διαφορετικά μονοπάτια είναι σημαντική συγκρινόμενη με το χρόνο μετάδοσης του συμβόλου. Το φαινόμενο επεξηγείται παραστατικά στην εικόνα (Figure 4).

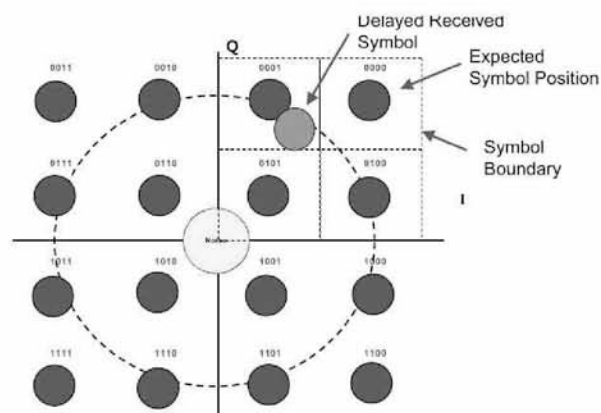


Figure 4: Διασυμβολική παρεμβολή και διάγραμμα αστερισμού

Προκειμένου το κανάλι να μην αντιμετωπίσει διασυμβολική παρεμβολή, ο χρόνος συμβόλου  $T_s$  πρέπει να είναι μεγαλύτερος (συντά αισθητά μεγαλύτερος) σε σύγκριση με την καθυστέρηση διάδοσης  $\tau$ . Καθυστέρηση διάδοσης τριφύεται το ποσό του χρόνου που παρέχεται ανάμεσα στην πρώτη και τελευταία (με μη αμελητέα τιμή) αφιχθέν μονοπάτι. Η δυική υπόσταση του χρόνου καθυστέρησης στο πεδίο συχνοτήτων απαντάται με τον όρο coherence bandwidth  $B_c$ . Τα ψηφιακά τηλεπικοινωνιακά συστήματα δεν αποδίδουν σε περιπτώσεις που τέτοιου είδους παρεμβολή παρουσιαστεί σε έντονο βαθμό, όταν δηλαδή οι τιμές του  $T_s$  πλησιάσουν ή ξεπεράσουν την καθυστέρηση διάδοσης  $\tau$ , αφού ο ρυθμός των λαθών bit γίνεται πολύ υψηλός κάνοντας την επικοινωνία αδύνατη. Επιθυμία μας όμως είναι η εξυπηρέτηση με ολοένα και μεγαλύτερους ρυθμούς μετάδοσης που μεταφράζονται σε ακόμη μικρότερους χρόνους συμβόλου δυσχεραίνοντας περισσότερο το πρόβλημα της παρεμβολής. Η διαμόρφωση πολλαπλών φερόντων ανταπεξέρχεται του προβλήματος, διαιρώντας την υψηλού ρυθμού ροή μεταδιδόμενων δεδομένων σε  $L$  μικρότερες ροές για κάθε μία από τις οποίες ισχύει  $T_s/L \gg \tau$ , συνεπώς η διασυμβολική παρεμβολή υπερνικάται. Αυτές οι ανεξάρτητες υπό-ροές (substreams) μπορούν στην συνέχεια να αποσταλούν σε  $L$  παράλληλα subchannels επιτυγχάνοντας τον επιθυμητό συνολικό ρυθμό μετάδοσης. Τυπικά τα κανάλια μετάδοσης είναι ορθογώνια μεταξύ τους φανερώνοντας και τη προέλευση της ονομασίας του σχήματος. Ο αριθμός των ξεχωριστών υπό-ροών επιλέγεται με

τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλιστεί πως το εύρος ζώνης του κάθε subchannel είναι μικρότερο από το coherence bandwidth του καναλιού επομένως τα subchannels δέχονται σχεδόν επίπεδη εξασθένηση (flat fading).

Στις εικόνες Figure 5 και Figure 6 περιγράφονται σχηματικά με φειδώ, ο πομπός και ο δέκτης πολλαπλών φερόντων. Αρχικά, το υψηλής μετάδοσης σήμα των  $R$  bps και το εύρος ζώνης  $B$  διασπώνται σε  $L$  παράλληλες ροές με μικρότερο ρυθμό  $R/L$  και εύρος μόνο  $B/L$  για την κάθε μία (εικόνα Figure 5). Έπειτα το σήμα εισέρχεται στο κανάλι με συνάρτηση μεταφοράς  $H(f)$ . Το λαμβανόμενο σήμα που προκύπτει παρουσιάζεται στην εικόνα Figure 7. Όσο ο αριθμός των υπο-φερόντων που χρησιμοποιούνται είναι ικανοποιητικά μεγάλος, ώστε να υποχρεώσει το εύρος του κάθε subcarrier να είναι αρκούτως μικρότερο της ποσότητας coherence bandwidth, δηλαδή  $B/L \ll B_c$ , εξασφαλίζεται ότι το υπο-φέρον δέχεται περίπου επίπεδη εξασθένηση. Τα αμοιβαία ορθογώνια σήματα μπορούν να διαχωριστούν με την διάταξη της εικόνας (Figure 6).

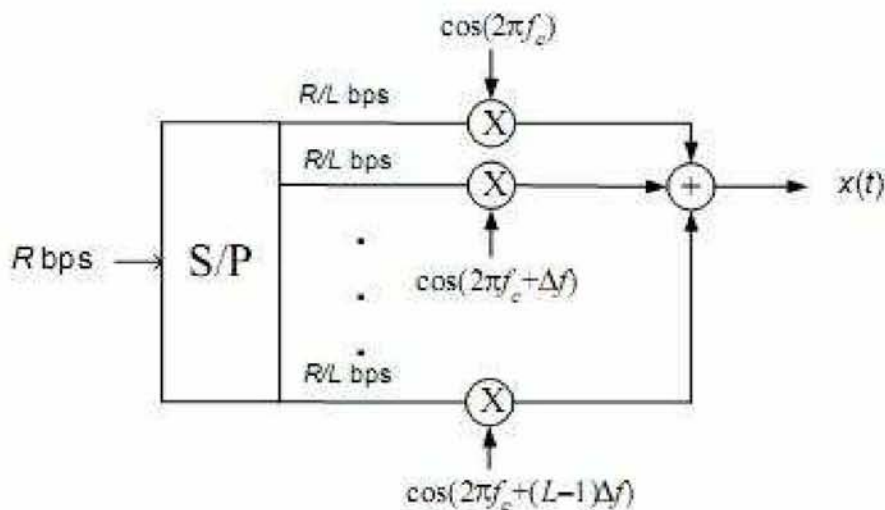


Figure 5: Πομπός

Η παραπάνω τεχνική εμπεριέχει μία ιδιαίτερως ενδιαφέρουσα ερμηνεία που αφορά τα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Αναφερόμενοι στο πεδίο του χρόνου, η διάρκεια του συμβόλου για κάθε υπο-φέρον μετά την διαίρεση που πραγματοποιήσαμε αυξήθηκε σε  $L = LT_s$ . Επιτρέποντας την αύξηση του  $L$  διασφαλίζουμε ότι η διάρκεια του συμβόλου υπερβαίνει την τιμή της καθυστέρησης διάδοσης,  $L \gg \tau$ , βασική προϋπόθεση για επικοινωνία χωρίς διασυμβολική παρεμβολή. Μεταφερόμενοι στο πεδίο της συχνότητας, τα subcarriers διαθέτουν εύρος ζώνης  $B/L \ll B_c$  με αποτέλεσμα την ζητούμενη επίπεδη εξασθένηση συχνότητας που αποτελεί το δεικό στο πεδίο της συχνότητας φαινόμενο της διασυμβολικής παρεμβολής.

Εξετάζοντας το θέμα μόνο από την θεωρητική πλευρά, για λόγους παρουσίασης, αποκρύφτηκαν ορισμένα μειονεκτήματα της μεθόδου που δυσκολεύουν την υλοποίησή της σε υλικό. Η υπόθεση για subcarriers ορθογώνια μεταξύ τους δεν κρίνεται απολύτως ρεαλιστική, αφού τέλειοι παλμοί είναι δύσκολο να σχηματιστούν και ταυτόχρονα να είναι χρονικά περιορισίμοι.

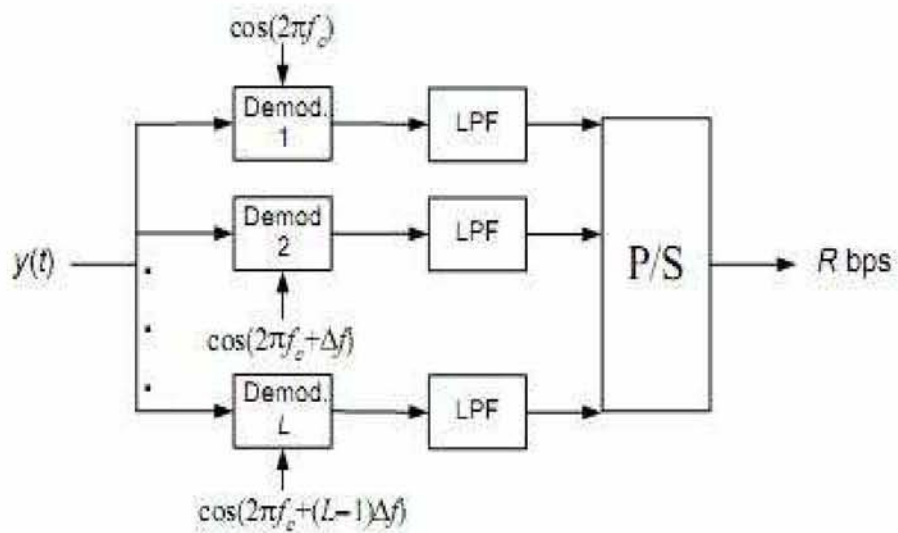


Figure 6: Δέκτης

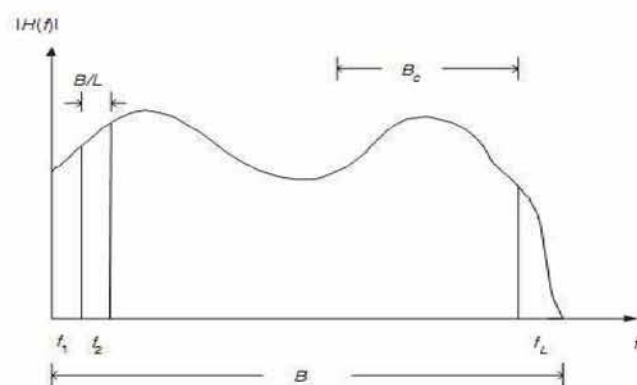


Figure 7: Περιγραφή της διαδικασίας στο πεδίο συχνότητας

Επιπλέον, μεγάλης ακρίβειας βαθυπερατά φίλτρα (low pass filters) απαιτούνται όπως φαίνεται στην έξοδο για να διατηρηθεί η ορθογωνιότητα των subcarriers καθώς και  $L$  αντίγραφα RF μονάδων για τα διάφορα μονοπάτια αποδιαμόρφωσης.

Όπως τονίσαμε βασική διαφορά της OFDM από την συνήθη FDM τεχνολογία είναι η απαίτηση της ορθογωνιότητας των subcarriers. Μαθηματικά η ιδιότητα αυτή εκφράζεται με την εξίσωση

$$\langle \Phi_i(t), \Phi_j(t) \rangle = \int \Phi_i(t) \Phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases}$$

επομένως δεν χρειάζεται να ορίσουμε ζώνη διαφύλαξης ανάμεσα στα υπο-φέροντα αφού η φασματική ακεραιότητα των σημάτων δεν κινδυνεύει. Πετυχαίνουμε έτσι οικονομία εύρους ζώνης το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σταλούν περισσότερα υποφέροντα. Η ορθογωνιότητα όμως διευκολύνει στο να ξεπεραστεί ο σκόπελος της ακριβής υλοποίησης των εξαρτημάτων του πομπού-δέκτη. Η χρησιμοποίηση του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform DFT) και πιο συγκεκριμένα μιας υψηλής αποδοτικότητας υλοποίησή του, του Ταχύ Μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform FFT) βοηθά στη επίτευξη αυτού του στόχου. Σύμφωνα λοιπόν, με τα θεωρήματα του Fourier ένας ορθογώνιος παλμός μετασχηματίζεται στη συνάρτηση  $\frac{\sin(x)}{x}$ , του πεδίο της συχνότητας με μορφή αυτή που φαίνεται στην εικόνα (Figure 8).

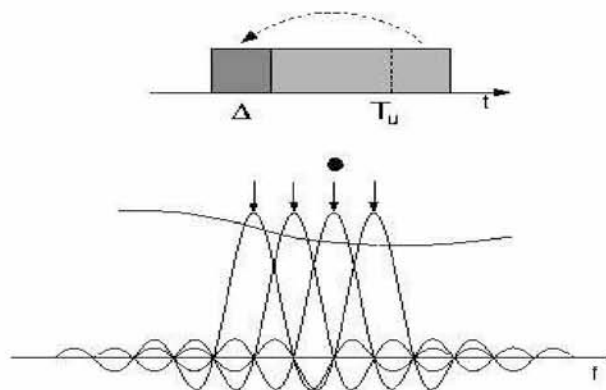


Figure 8: Η συνάρτηση  $\text{sinc}(x)/x$

όπως προείπαμε τα φάσματα των παλμών επικαλύπτονται χωρίς ωστόσο να δημιουργείται πρόβλημα, αφού λόγω ορθογωνιότητας τα υπο-φέροντα είναι εφικτό να διαχωριστούν. Με την χρησιμοποίηση του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier (Inverse Fast Fourier Transform IFFT) εμμέσως επιλέγουμε το διάστημα ανάμεσα στα subcarriers να είναι τέτοιο ώστε στη συχνότητα που υπολογίζουμε το λαμβανόμενο σήμα (στην εικόνα Figure 8 σημειωμένα με βέλη) όλα τα υπόλοιπα σήματα να είναι μηδέν. Όμως για να διατηρηθεί η ορθογωνιότητα πρέπει να συντρέχουν οι εξής προϋποθέσεις:

1. Τέλειος συγχρονισμός ανάμεσα σε πομπό και δέκτη

2. Υψηλής απόδοσης αναλογικός εξοπλισμός
3. Μηδενική διασυμβολική παρεμβολή

Η τρίτη προϋπόθεση αποτελεί παράδοξο μιας και ολόκληρη η διαδικασία ακολουθήθηκε για την αποφυγή αυτής. Υπάρχει μια σχετικά απλή λύση στο πρόβλημα αυτό, αντιγράφουμε το τελευταίο μέρος του OFDM συμβόλου στην αρχή δημιουργώντας έτσι μία ζώνη διαφύλαξης (guard interval). Στον δέκτη τη επανάληψη αυτού του διαστήματος αφαιρείται. Όσο το διάστημα διαφύλαξης είναι μεγαλύτερο από την καθυστέρηση  $\tau$ , κάθε OFDM σύμβολο μπορεί να παρεμβάλλεται μόνο με τον εαυτό του. Συμπερασματικά, μπορούμε να έχουμε διασυμβολική παρεμβολή μόνο μέσα στο ίδιο το σύμβολο OFDM και όχι ανάμεσα σε συνεχόμενα σύμβολα. Η επόμενη προσπάθεια επικεντρώνεται στην αφαίρεση της παρεμβολής μέσα από κάθε OFDM σύμβολο. Όπως γνωρίζουμε όταν μία ροή δεδομένων  $x[n]$  εισέρχεται μέσα από ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) κανάλι πεπερασμένης απόκρισης (Finite Impulse Response FIR)  $h[n]$  έχει έξοδο  $y[n]$  που δίνεται από τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου :

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Αν υποθέταμε ότι η έξοδος υπολογιζόταν από τον τύπο της κυκλικής συνέλιξης θα είχαμε :

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n],$$

όπου

$$x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]x[n-k]_L$$

και η κυκλική συνάρτηση  $x[n]_L = x[n \bmod L]$  είναι η περιοδική έκδοση της εισόδου  $x[n]$  με περίοδο  $L$ . Στη περίπτωση της κυκλικής συνέλιξης θα ήταν δυνατό με χρήση του DFT στην έξοδο  $y[n]$  να λάβουμε :

$$DFT\{y[n]\} = DFT\{x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n]\}$$

που στο πεδίο της συχνότητας μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό

$$Y[m] = X[m]H[m].$$

με

$$DFT\{x[n]\} = X[m] = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nm}{L}}$$

$$DFT\{X[m]\} = x[n] = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=0}^{L-1} X[m]e^{j\frac{2\pi nm}{L}}$$

Η φόρμουλα  $Y[m] = X[m]H[m]$  περιγράφει το κανάλι χωρίς διασυμβολική παρεμβολή στο πεδίο του χρόνου. Επομένως, γνώση της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας  $H[m]$  στο δέκτη μας εξασφαλίζει προσεγγιστική εκτίμηση του αρχικού συμβόλου με τον απλό υπολογισμό της πράξης :

$$\hat{X}[m] = \frac{Y[m]}{H[m]}$$

Φυσικά, η εκτίμηση  $\hat{X}[m]$  δεν θα είναι εν γένει ακριβής λόγω του προσθετικού θορύβου, της συγκαναλικής παρεμβολής (co-channel interference), λανθασμένης εκτίμησης καναλιού και άλλων ελαττωμάτων. Εντούτοις, η σοβαρότερη μορφή παρεμβολής αμβλύνηκε σε αξιοσημείωτο βαθμό. Ολόκληρη η διαδικασία όμως βασίστηκε στη θεωρία της κυκλικής συνέλιξης που όμως δεν είναι η περίπτωση μας. Εξάλλου τα περισσότερα συστήματα στην φύση είναι γραμμικά. Μπορούμε όμως να εκβιάσουμε την χρησιμοποίηση κυκλικής συνέλιξης προσθέτοντας ένα συγκεκριμένο πρόθεμα, το κυκλικό πρόθεμα (cyclic prefix) στο προς μετάδοση διάνυσμα. Έτσι το νέο διάνυσμα  $x[n]_L$  έχει την μορφή της εικόνας Figure 9. Αν και η λύση του κυκλικού προθέματος είναι εξαιρετικά κομψή, εισάγει κόστος τόσο στο εύρος ζώνης όσο και στη ισχύ αφού απαιτούνται πόροι για να μεταδοθούν τα πλεονάζοντα σύμβολα.

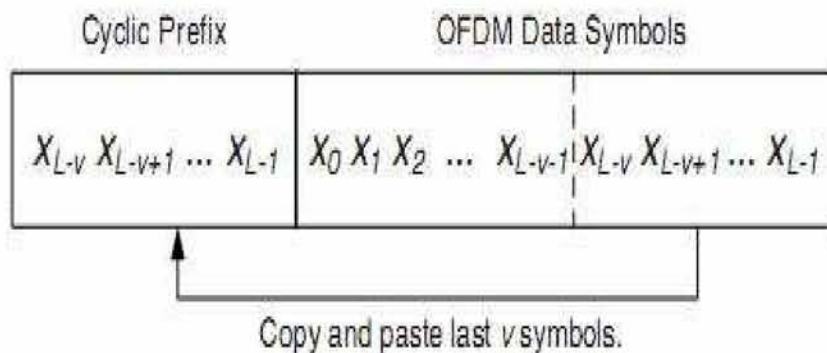


Figure 9: Το κυκλικό πρόθεμα

### 2.3 Περίληπτικά η λειτουργία του OFDM

Ακολουθεί σύντομη ανασκόπηση των κυριότερων βημάτων ενός OFDM συστήματος επικοινωνίας (εικόνα Figure 10). Στο OFDM η διαδικασία της κωδικοποίησης (encoding) και αποκωδικοποίησης (decoding) λαμβάνει χώρα στο πεδίο της συχνότητας, όπου τα  $x[n]$  και  $\hat{X}$  περιέχουν τα  $L$  μεταδιδόμενα, λαμβανόμενα και εκτιμώμενα σύμβολα δεδομένων αντίστοιχα.

1. Στο πρώτο βήμα διαιρείται το ευρυζωνικό σήμα συνολικού bandwidth  $B$  σε  $L$  ζωνοπερατά σήματα (subcarriers), μεγέθους  $B/L$ . Διατηρείται έτσι ο αθροιστικός ρυθμός συμβόλων, αλλά η διασυμβολική παρεμβολή εξαλείφεται, με την προϋπόθεση πάντα της εφαρμογής του κυκλικού προθέματος. Τα  $L$  υπο-φέροντα για ένα OFDM σύμβολο αναπαριστώνται με το διάνυσμα  $X$ , το οποίο περιέχει τα  $L$  τρέχοντα σύμβολα.

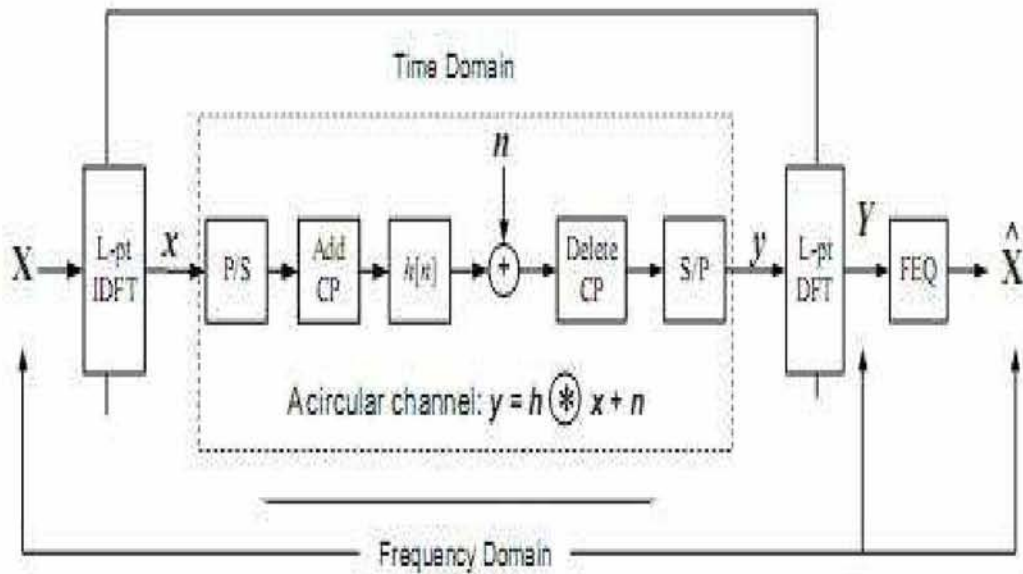


Figure 10: Λειτουργία OFDM

2. Επιδιωκόμενος στόχος είναι να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το εύρος ζώνης που μας προσφέρεται αποφεύγοντας την χρησιμοποίηση  $L$  ξεχωριστών ζωνοπερατών καναλιών. Η λειτουργία αυτή επιτυγχάνεται διαμορφώνοντας τα υπο-φέροντα με το μετασχηματισμό IFFT.
3. Για να ολοκληρωθεί η μετάδοση των δεδομένων με επιτυχία πρέπει ο μετασχηματισμός FFT να αποσυνθέσει το σήμα του καναλιού (που εισάγει διασυμβολική παρεμβολή) σε ορθογώνια υπο-φέροντα, καθιστώντας έτσι αναγκαία την προσάρτηση του κυκλικού προθέματος μήκους  $\nu$ . Έπειτα, τα  $L + \nu$  σύμβολα που προέκυψαν, αποστέλλονται με σειριακό τρόπο στο ευρυζωνικό κανάλι.
4. τον δέκτη, ακολουθείται η αντίστροφη διαδικασία. Το κυκλικό πρόθεμα αφαιρείται και τα υπόλοιπα  $L$  σύμβολα αποδιαμορφώνονται χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό FFT. Η διαδικασία αυτή καταλήγει σε  $L$  σύμβολα δεδομένων της μορφής  $Y_\ell = H_\ell X_\ell + N_\ell$  για το υπο-φέρον  $\ell$ .
5. Το σήμα στη συνέχεια διέρχεται από one-tap εξισορροποιητές συχνότητας ( Frequency Equalizer FEQ) που εκτελούν την πολύπλοκη πράξη της διαίρεσης με το κέρδος του καναλιού,  $X_\ell = \hat{X}_\ell + N_\ell/H_\ell$ .

Κατά την διάρκεια της παρουσίασης, για λόγους απλότητας, παραλείψαμε εσκεμμένα να αναφερθούμε σε ορισμένους σημαντικούς πρακτικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, δεν τονίσαμε την απαραίτητη προϋπόθεση του τέλειου συγχρονισμού ανάμεσα στον πομπό και τον δέκτη ή το γεγονός ότι ο δέκτης απαιτείται να γνωρίζει επακριβώς την συνάρτηση μεταφοράς του καναλιού  $H()$  για εκτελέσει την εξισορρόπηση.



### 3 Η τεχνολογία OFDMA

Το WiMAX εισάγει μία πρόκληση στα ασύρματα συστήματα επικοινωνίας : Πολλοί χρήστες κατανεμημένοι στην ίδια γεωγραφική περιοχή χρησιμοποιούν εφαρμογές που απαιτούν υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης και μικρή καθυστέρηση με το συνολικό εύρος ζώνης να είναι ιδιαίτερα περιορισμένο. Τεχνικές πολλαπλής πρόσβασης επιτρέπουν στους χρήστες να διαμοιράζονται το διαθέσιμο εύρος ζώνης καταμερίζοντας σε κάθε συνδρομητή ένα κλάσμα των πόρων του συστήματος. Συσσωρευμένη εμπειρία έχει δείξει δραματικές αποκλίσεις στην απόδοση, ανάμεσα σε διαφορετικές στρατηγικές πολλαπλής πρόσβασης. Το πλήθος και η διαφορετικότητα των εφαρμογών που στοχεύει να υποστηρίξει το πρότυπο WiMAX περιπλέκουν το πρόβλημα υπογραμμίζοντας την ανάγκη για ένα αποδοτικό σχήμα πολλαπλής πρόσβασης.

Πρέπει να τονίσουμε πως η τεχνολογία OFDM που έχουμε εξετάσει δεν αποτελεί σχήμα πολλαπλής πρόσβασης αλλά περισσότερο τεχνική διαμόρφωσης, δημιουργεί ανεξάρτητες ροές δεδομένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από πολλούς χρήστες. Αντίθετα στην πολλαπλή πρόσβαση ορθογώνιας διαίρεσης συχνότητας (OFDMA), που είναι και το θέμα της ενότητας αυτής, οι χρήστες μοιράζονται εκτός από υπό-φέροντα (subcarriers) και χρονοθυρίδες (time-slot).

Οι στρατηγικές πολλαπλής πρόσβασης έχουν ως σκοπό να παρέχουν ορθογώνια ή έστω χωρίς παρεμβολή κανάλια επικοινωνίας για κάθε ενεργή ζεύξη. Ο συνήθης τρόπος επίτευξης αυτού του στόχου ήταν η διαίρεση των διαθέσιμων διαστάσεων στο πλήθος των χρηστών. Για παράδειγμα, στη πολλαπλή πρόσβαση διαίρεσης συχνότητας (Frequency Division Multiplexing Access FDMA) ο κάθε χρήστης λαμβάνει μία μοναδική συχνότητα φέροντος στην οποία μπορεί να εκπέμψει, ενώ στην περίπτωση της πολλαπλής πρόσβασης διαίρεσης χρόνου (Time Division Multiplexing Access TDMA) στο χρήστη ανατίθεται ένα κλάσμα του χρόνου, μια χρονοθυρίδα, είτε με συστηματικό είτε με δυναμικό τρόπο. Η επίσης διαδομένη πολλαπλή πρόσβαση διαίρεσης κώδικα (Coding Division Multiplexing Access CDMA) αποτελεί συνδυασμό των δύο παραπάνω τεχνικών, με τους χρήστες να μοιράζονται τόσο τη συχνότητα όσο και το χρόνο με άλλους και να βασίζονται στην ορθογωνιότητα των κωδίκων για τον διαχωρισμό των σημάτων.

#### 3.1 Πλεονεκτήματα OFDMA

Ένα από τα βασικότερα προσόντα της τεχνολογίας OFDMA είναι ότι συνδυάζει με άριστο τρόπο τα πλεονεκτήματα των παραπάνω τεχνικών. Αποτελεί στην ουσία υβριδική μορφή των FDMA και TDMA : στους χρήστες ανατίθενται, με δυναμικό τρόπο, υπο-φέροντα (subcarriers) (FDMA) σε διαφορετικές χρονοσχισμές (time-slots) (TDMA). Η εικόνα Figure 11 είναι χαρακτηριστική. Αρχικά, τα πλεονεκτήματα του OFDMA συμπεριλαμβάνουν τα προτερήματα της τεχνολογίας στην οποία βασίζεται και δεν είναι άλλη από την OFDM. Επιπλέον, το OFDA χαρακτηρίζεται για την ευελιξία του και μπορεί γι' αυτό το λόγο να εξυπηρετήσει πολλούς χρήστες με μεγάλο εύρος εφαρμογών, ρυθμών μετάδοσης και απαιτήσεων ποιότητας (QoS).

Επειδή η πολλαπλή πρόσβαση εκτελείται στο ψηφιακό πεδίο πριν την εφαρμογή του IFFT, είναι δυνατή δυναμική και αποδοτική ανάθεση εύρους ζώνης. Ακόμη, στα θετικά του στοιχεία σε σχέση με το OFDM συγκαταλέγεται η προοπτική μείωσης της μεταδιδόμενη ισχύος καθώς

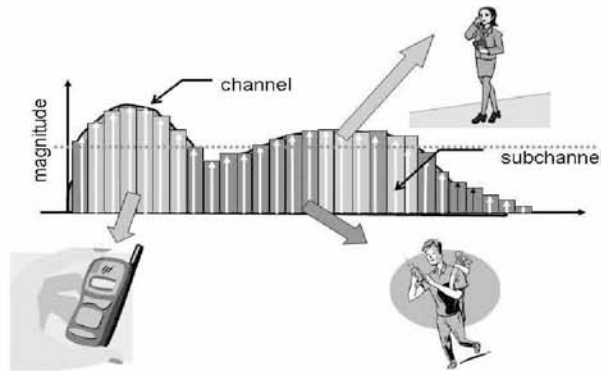


Figure 11: Στο OFDMA ο Σταθμός Βάσης αναθέτει σε κάθε χρήστη ένα κλάσμα των συνολικών subcarriers

και η άμβλυνση του προβλήματος peak-to-average ratio (PAPR).<sup>1</sup> Τέλος, η απαίτηση για μικρούς ρυθμούς μετάδοσης η δεδομένα που μεταδίδονται ανά ξεσπάσματα (burst data), διαχειρίζεται αποδοτικότερα με το OFDMA σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες τεχνικές πρόσβασης, μιας και η ροή δεδομένων μεταδίδεται σε μεγαλύτερη περίοδο χρόνου δαπανώντας μικρότερη ισχύ σε σχέση με τον ανταγωνισμό.

Οι δύο βασικές αρχές στις οποίες το OFDMA οφείλει την απόδοσή του είναι ο διαφορισμός πολλαπλών χρηστών (multiuser diversity) και προσαρμοστική διαμόρφωση (adaptive modulation). Ο πρώτος όρος περιγράφει το κέρδος από την επιλογή ενός χρήστη ή ενός υποσυνόλου χρηστών με πολύ καλές συνθήκες καναλιού ενώ ο τελευταίος αναφέρεται στην εκμετάλλευση των "καλών" καναλιών για την επίτευξη υψηλών ρυθμών δεδομένων.

### 3.2 Διαφορισμός πολλαπλών χρηστών (multiuser diversity)

Το βασικό κίνητρο για προσαρμοσμένη ανάθεση subcarrier σε συστήματα OFDMA είναι η εκμετάλλευση της ποικιλομορφίας των πολλαπλών χρηστών. Για την επεξήγηση του φαινομένου θα επικεντρωθούμε στην ανάθεση ενός μόνου subcarrier σε πολλαπλούς χρήστες.

Έστω σύστημα με  $K$  χρήστες, το subcarrier που εξετάζουμε δέχεται i.i.d. Rayleigh εξασθένιση, δηλαδή το κέρδος καναλιού για κάθε χρήστη είναι ανεξάρτητο από τους υπολοίπους και ορίζεται με το σύμβολο  $h_k$ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) του κέρδους καναλιού του χρήστη  $k$  δίνεται από τον τύπο :

$$p(h_k) = \begin{cases} 2h_k e^{-h_k^2}, & \text{εάν } h_k \geq 0 \\ 0, & \text{εάν } h_k < 0 \end{cases}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο σταθμός βάσης μεταδίδει μόνο στο χρήστη με το μεγαλύτερο κέρδος  $h_{\max} = \max h_1, h_2 \dots h_k$ , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως :

<sup>1</sup>Τα OFDM σήματα έχουν υψηλό peak-to-power-ratio. Ο λόγος είναι ότι το σήμα στο πεδίο του χρόνου αποτελεί άθροισμα πολλών ζωνοπερατών σημάτων. Αυτό άθροισμα άλλοτε είναι μεγάλο και άλλοτε μικρό, άρα η μέγιστη τιμή σήματος είναι πραγματικά μεγαλύτερη από την μέση. Αυτή η συμπεριφορά οδηγεί σε μείωση της αποδοτικότητας.

$$p(h_{\max}) = 2Kh_{\max}(1 - e^{-h_{\max}^2})^{k-1}e^{-h_{\max}^2}$$

Η εικόνα Figure 12 παρουσιάζει τις PDF συναρτήσεις  $h_{\max}$  για διαφορετικές τιμές του  $K$ . Όσο ο αριθμός των χρηστών αυξάνεται η συνάρτηση μετατοπίζεται στα δεξιά, που συμπερασματικά σημαίνει ότι η πιθανότητα απόκτησης καναλιού με μεγάλο κέρδος αυξάνεται. Η σημαντική αυτή αύξηση στο κέρδος του καναλιού μεταφράζεται τελικά στις προσδοκώμενες ιδιότητες της βελτιωμένης χωρητικότητας και του μειωμένου αριθμού λαθών (Bit Error Rate BER).

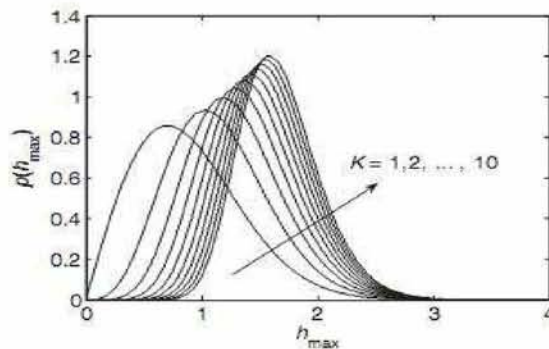


Figure 12: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $h_{\max}$

### 3.3 Προσαρμοστική διαμόρφωση (adaptive modulation) και κωδικοποίησή

Το σύστημα WiMAX χρησιμοποιεί την μέθοδο αυτή προκειμένου να επωφεληθεί των διακυμάνσεων που παρουσιάζει το κανάλι. Όπως είδαμε από την ανάλυση σε προηγούμενη ενότητα, για κάθε σχήμα διαμόρφωσης κάθε σύμβολο κωδικοποιείται από διαφορετικό αριθμό bits (1,2,4 και 6). Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των bits/symbol, τόσο υψηλότερος, είναι προφανώς, ο ρυθμός μετάδοσης (throughput), αλλά και η απόδοση φάσματος που πετυχαίνεται στο κανάλι. Οι διαμορφώσεις που πετυχαίνουν μεγάλη αναλογία συμβόλου ανά bit παρά το εμφανές πρόβλημα έναντι των υπολοίπων υστερούν σε περιπτώσεις όπου οι συνθήκες δεν είναι ιδανικές. Ο καθορισμός της εκάστοτε εμφάνισης δυσχεραίνει λόγω της πολύ μικρής απόστασης που την διαχωρίζει από τις γειτονικές της εμφανίσεις. Αυτή η πιθανότητα λανθασμένης λήψης, ενδέχεται να μειωθεί αν οι συνθήκες διάδοσης στο κανάλι προσεγγίσουν τις ιδανικές δηλαδή αν αυξηθεί ο σηματοθορυβικός λόγος (SNR) στο δέκτη. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η επιλογή του σχήματος διαμόρφωσης εξαρτάται από το σηματοθορυβικό λόγο του δέκτη. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα ονομάζεται Προσαρμοστική Διαμόρφωση (Adaptive Modulation). Δηλαδή, με αυξόντα σηματοθορυβικό λόγο χρησιμοποιούμε κατά σειρά τις διαμορφώσεις BPSK, QPSK, 16-QAM, 64-QAM. Στην εικόνα Figure 13 εμφανίζονται οι παραπάνω ισχυρισμοί.

Παρατηρούμε πως όσο απομακρυνόμαστε από το σταθμό βάσης, επομένως και οι συνθήκες του καναλιού αποκλίνουν από τις ιδανικές, χρησιμοποιούνται διαμορφώσεις με μικρότερο ρυθμό μετάδοσης (BPSK ή QPSK). Αντίθετα όταν οι συνδρομητές βρίσκονται σε κοντινή ακτίνα από

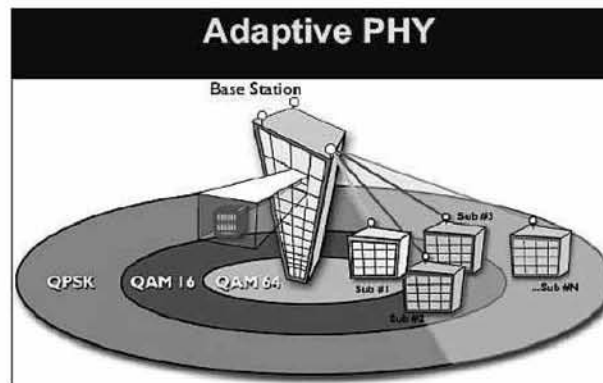


Figure 13: Προσαρμοστική Διαμόρφωση (γραφική απεικόνιση)

το σταθμό βάσης, διαμορφώσεις όπως 16-QAM ή 64-QAM που απαιτούν αυξημένες τιμές SNR μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Έτσι σε μεγαλύτερες αποστάσεις πετυχαίνουμε καλύτερη λήψη σήματος ενώ σε κοντινότερες αποστάσεις πετυχαίνουμε αύξηση της ρυθμοαπόδοσης.

Οι διαμορφώσεις περιλαμβάνουν επίσης και κωδικοποίηση για τον εντοπισμό και την διόρθωση των λαθών. Για παράδειγμα στον πίνακα Table 4 της ενότητας 4.5 συναντούμε τις διαμορφώσεις QPSK  $3/4$  και QPSK  $1/2$ . Τα κλάσματα υποδηλώνουν το ποσοστό των bits της ωφέλιμης πληροφορίας που υπάρχουν στο εκπεμπόμενο σήμα. Στην εικόνα Figure 14 φαίνεται ότι με την χρησιμοποίηση έξι μόνο προφίλ του WiMAX είναι δυνατή η επίτευξη πληθώρας φασματικών αποδόσεων. Όσο οι τιμές του  $SNR$  είναι υψηλές αυξάνεται και η ρυθμοαπόδοση (throughput) του συστήματος με την τάση να πλησιάζει το θεωρητικό όριο που θέτει η φόρμουλα του Shannon  $C = \log_2(1 + SNR)$ . Στην περίπτωση αυτή ο μικρότερος ρυθμός προσφέροταν με την χρησιμοποίηση QPSK και  $1/2$  turbo κώδικα ενώ η υψηλότερη αντιστοιχούσε σε διαμόρφωση 64 QAM και  $3/4$  turbo κώδικα.

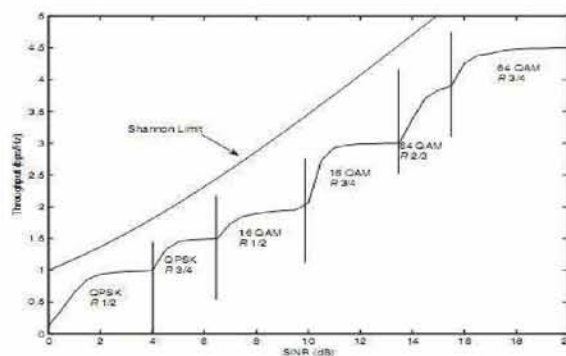


Figure 14: Throughput vs SINR (υποθέτοντας ότι έχει επιλεχτεί η καλύτερη δυνατή διαμόρφωση και κωδικοποίηση)

### 3.4 Πρωτόκολλα του OFDMA

Υπάρχουν αμέτρητοι τρόποι να επωφεληθούμε χρησιμοποιώντας τα δύο παραπάνω σχήματα που μας προσφέρει το OFDMA σύστημα. Φυσικά, οι αλγόριθμοι που μεταχειρίζονται τα στοιχεία αυτά δεν καθορίζονται από το WiMAX πρότυπο, άλλα παρέχεται απόλυτη ελευθερία στους ερευνητές να αναπτύξουν καινούργιες ή να εξελίξουν υπάρχουσες λύσεις. Εντούτοις, υπάρχουν χαρακτηριστικά στο WiMAX που έπρεπε να προτυποποιηθούν, σε αυτά συμπεριλαμβάνονται η υποκατηγοριοποίηση καναλιών (subchannelization), τα μηνύματα αντιστοίχισης (mapping messages) και η ρύθμιση (ranging)

#### 3.4.1 Υποκατηγοριοποίηση καναλιών (subchannelization)

Στους χρήστες του WiMAX ανατίθενται μπλοκ υπο-φερόντων (subchannels) παρά ξεχωριστά υπο-φέροντα, λόγοι που οδήγησαν σε αυτήν την επιλογή είναι η μείωση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων ανάθεσης πόρων άλλα και η απλοποίηση των μηνυμάτων αντιστοίχισης. Υποθέτοντας ότι στον χρήστη  $k$  έχει ανατεθεί το γκρουπ  $L_k$  των subcarriers, υπάρχουν δύο δυνατότητες: τα subcarriers να αποτελούν συνεχές κομμάτι σε ένα μικρό μέρος του εύρους ζώνης (adjacent subcarrier permutation) είτε να βρίσκονται κατανεμημένα σε ολόκληρο το εύρος ζώνης (distributed subcarrier permutation). Στα πλεονεκτήματα της πρώτης μεθόδου περιλαμβάνεται η ποικιλομορφία πολλαπλών χρηστών ενώ η κατανεμημένη μέθοδος ευνοεί την ευρωστία και το διαφορισμό της συχνότητας (frequency diversity).

#### 3.4.2 Μηνύματα αντιστοίχισης (mapping messages)

Ο σταθμός βάσης (BS) γνωστοποιεί την πληροφορία ανάθεσης των υπο-φερόντων στο κινητό σταθμό (MS) για downlink μετάδοση, με broadcast μηνύματα αντιστοίχισης (DL MAP messages). Ανάλογη, σημασιολογία έχουν τα μηνύματα UL MAP messages αλλά με προορισμό την μετάδοση τύπου uplink. Είναι απαραίτητο, όμως, ο MS να γνωρίζει τον τύπο του burst profile της εκάστοτε μετάδοσης. Το burst profile βασίζεται σε μετρήσεις του SNR και BLER και προσδιορίζει τα κατάλληλα σχήματα διαμόρφωσης και κωδικοποίησης.

#### 3.4.3 Ranging (ρύθμιση)

Η απόσταση του κινητού σταθμού (MS) από το σταθμό βάσης (BS) είναι συγκεκριμένη και αποτελεί κρίσιμη ποσότητα στο uplink για το συγχρονισμό των συμβόλων και την εξισορρόπηση των λαμβανόμενων επιπέδων ισχύος ανάμεσα στους διάφορους ενεργούς συνδρομητικούς σταθμούς. Συνολικά η διεργασία αυτή είναι γνωστή με το όνομα ρύθμιση (ranging). Συγχρονισμός στο downlink δεν απαιτείται μιας και η ζεύξη είναι ήδη συγχρονισμένη, όμως στο uplink οι χρήστες πρέπει να βρίσκονται σε αυστηρό συγχρονισμό ανάμεσα στα όρια του κυκλικού προθέματος φύλαξης. Διαφορετικά η ποιότητα της επικοινωνίας θα επιδεινωθεί με την παρουσία έντονης διασυμβολικής παρεμβολή και παρεμβολής ανάμεσα στα ίδια τα φέροντα. Στο WiMAX, υπάρχουν 4 είδη διαδικασιών ρύθμισης:

1. initial ranging (αρχική ρύθμιση)

2. periodic ranging (περιοδική ρύθμιση)
3. bandwidth request ( αίτηση εύρους ζώνης)
4. handover ranging ( ρύθμιση κατά τη μετάβαση σε νέο σταθμό βάσης).

## 4 Το Φυσικό επίπεδο του WiMAX

Το φυσικό επίπεδο του συστήματος WiMAX βασίζεται σε Πολυπλεξία Ορθογωνικής Διαίρεσης Συχνότητας (OFDM). Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος μετάδοσης πραγματοποιήθηκε προκειμένου να υποστηρίζονται βίντεο , πολυμεσικές επικοινωνίες και γενικότερα εφαρμογές που απαιτούν υψηλή ταχύτητα μετάδοσης. Εξάλλου το OFDM, εκτός από το WiMAX, χρησιμοποιείται ήδη με αξιοσημείωτη επιτυχία από δεκάδες άλλα εμπορικά ευρυζωνικά συστήματα συμπεριλαμβανομένων των DSL, Wi-Fi, Digital Video Broadcast-Handheld (DVB-H) και MediaFLO. Η τεχνολογία OFDM αποτελεί μια κομψή και αποδοτική λύση για υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης σε περιβάλλοντα χωρίς οπτική επαφή και με έντονη παρουσία του φαινομένου της πολυδιάθρυσης. Σε αυτήν την ενότητα, καλύπτονται τα βασικά σημεία του OFDM και παρουσιάζεται λεπτομερέστερα το φυσικό επίπεδο του WiMAX.

### 4.1 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του OFDM

Η τεχνολογία OFDM προσφέρει πλήθος προτερημάτων έναντι των υπολοίπων διαδεδομένων λύσεων μετάδοσης δεδομένων σε υψηλές ταχύτητες.

**Μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητα:** Το OFDM όπως γνωρίσαμε μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα με την χρησιμοποίηση των μετασχηματισμών FFT/inverse FFT. Οι υπολογιστικές απαιτήσεις αυξάνονται σχεδόν γραμμικά με το ρυθμό μετάδοσης ή το εύρος ζώνης, γεγονός ιδιαίτερα σημαντικό για χαμηλού κόστους/επιδόσεων υλοποιήσεις. Αποδεικνύεται ότι το υπολογιστικό κόστος φράσσεται από το όριο  $O(B \log BT_m)$  , όπου το σύμβολο  $B$  αναπαριστά το εύρος ζώνης και το  $T_m$  την καθυστέρηση διάδοσης. Το κόστος αυτό είναι αισθητά χαμηλότερο από ένα συμβατικό σύστημα με εξισορροποιητή που επιτυγχάνει πολυπλοκότητα της τάξης  $O(B^2 T_m)$ .

**Αρμονική υποβάθμιση της απόδοσης του συστήματος** σε περιπτώσεις υπέρμετρης καθυστέρησης: Η συνολική απόδοση ενός OFDM συστήματος υποβαθμίζεται ομαλά σε περιπτώσεις με καθυστέρηση μετάδοσης που υπερβαίνει τις ανοχές σχεδίασης. Καλύτερη κωδικοποίηση και προσεκτική επιλογή τρόπων διαμόρφωσης χρησιμοποιούνται ώστε να επιτευχθούν ανθεκτικότεροι ρυθμοί οπισθοχώρησης απέναντι στην αυξημένη καθυστέρηση μετάδοσης. Δηλαδή, το σχήμα OFDM περιλαμβάνει προσαρμοσμένη μορφοποίηση και κωδικοποίηση επιτρέποντας στο σύστημα να αξιοποιήσει με το καλύτερο τρόπο τις υπάρχουσες συνθήκες του καναλιού.

**Εκμετάλλευση της ποικιλομορφίας των συχνοτήτων:** Το OFDM διευκολύνει την κωδικοποίηση και την παρεμβολή ανάμεσα στα φέροντα (subcarriers) στο πεδίο των συχνοτήτων.

Παρέχει με τον τρόπο αυτό αντοχή απέναντι σε λάθη ξεσπάσματος (burst errors) που προκαλούνται όταν μεγάλα μέρη του φάσματος μετάδοσης υποβάλλονται σε σημαντικές εξασθενήσεις σήματος. Στην πραγματικότητα, το WiMAX ορίζει αντιμεταθέσεις των subcarriers επιτρέποντας στα συστήματα να εκμεταλλευτούν αυτό το φαινόμενο.

**Χρησιμοποιείται ως σύστημα πολλαπλής πρόσβασης:** Το OFDM δύναται να χρησιμοποιηθεί σαν σχήμα πολλαπλής πρόσβασης όπου διαφορετικοί τόνοι διαμερίζονται σε πολλαπλούς χρήστες. Το σχήμα αυτό είναι γνωστό με το όνομα OFDMA και συναντάται στην περίπτωση του mobile-WiMAX. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι σε σχετικά αργά χρονομεταβαλλόμενα κανάλια είναι εφικτή η βελτίωση της χωρητικότητας, με την επιλεκτική προσαρμογή των ρυθμών μετάδοσης ανά συνδρομητή σύμφωνα το σηματοθορυβικό λόγο που λαμβάνει στο συγκεκριμένο subcarrier.

**Ανθεκτικότητα στη ζωνοπερατή (narrowband) παρεμβολή :** Το OFDM παρουσιάζεται ιδιαιτέρως εύρωστο απέναντι στην ζωνοπερατή παρεμβολή μιας και αυτού του είδους η παρεμβολή επηρεάζει μονάχα ένα μέρος των subcarriers.

**Κατάλληλο για συνεκτική αποδιαμόρφωση (coherent demodulation) :** Είναι συγκριτικά εύκολη η διαδικασία εκτίμησης στα OFDM συστήματα γεγονός που τα καθιστά κατάλληλα για συνεκτικής αποδιαμόρφωσης σχήματα, που είναι περισσότερο αποδοτικά από την άποψη της ισχύος.

Παρά τα πλεονεκτήματα, οι τεχνική του OFDM αντιμετωπίζει και αρκετές προκλήσεις. Σπουδαιότερο είναι το πρόβλημα που σχετίζεται με τα σήματα OFDM τα οποία εμφανίζεται να έχουν μεγάλο λόγο υψηλότερης-μέσης τιμής (peak-to-average) προκαλώντας μη γραμμική συμπεριφορά και ψαλιδισμό της παραμόρφωσης (clipping distortion). Η προηγούμενη κατάσταση απαιτείται να ληφθεί σοβαρά υπόψη γιατί είναι δυνατό να οδηγήσει σε αντιπαραγωγική ανάθεση ισχύος. Μειονέκτημα αποτελεί ότι το OFDM είναι επιδεκτικό σε θόρυβο φάσης και διασπορά συχνότητας, σημαντικά ψεγάδια που πρέπει να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά κατά τη φάση σχεδιασμού του συστήματος. Τελευταία, όλα τα προηγούμενα ζητήματα καθιστούν τον ακριβή συγχρονισμό της συχνότητας κριτικής σημασίας για την διατήρηση της ομαλής λειτουργίας.

## 4.2 Οι παράμετροι του OFDM στο WiMAX

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η “σταθερή” (fixed) και η “κινητή” (mobile) εκδοχή του WiMAX πρωτοκόλλου έχουν κάποιες μικροδιαφορές όσο αναφορά την υλοποίηση του OFDM φυσικού επιπέδου. Το fixed WiMAX, βασισμένο στο πρότυπο IEEE 802.16-2004, χρησιμοποιεί μετασχηματισμό FFT μεγέθους 256 bits για το OFDM στο φυσικό επίπεδο. Αντίθετα, το mobile WiMAX, το οποίο όπως αναφέραμε βασίζεται στο πρότυπο IEEE 802.16e-2005, κάνει χρήση του κλιμακωτού OFDMA. Στην περίπτωση αυτή το μέγεθος του μετασχηματισμού FFT ποικίλει και κυμαίνεται σε τιμές από 128 έως και 2048 bits. Αξίζει να σημειωθεί πως το κλιμακωτό OFDMA αν και αναφέρεται συνήθως ως mobile WiMAX μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί σε σταθερές, νομαδικές αλλά και κινητές εφαρμογές. Στον πίνακα Table 2 απαριθμούνται

παράμετροι σχετιζόμενες με το OFDM τόσο για το OFDM-PHY όσο και για την περίπτωση του OFDMA-PHY, δίνονται ακόμη, ενδεικτικές τιμές για ένα περιορισμένο σύνολο από προφίλ.

#### 4.2.1 Fixed WiMAX OFDM-PHY

Σε αυτήν την εκδοχή του πρωτοκόλλου το μέγεθος του μετασχηματισμού FFT που εφαρμόζεται είναι σταθερό στα 256 bits, εκ των οποίων τα οποία 192 χρησιμοποιούνται για την μεταφορά των δεδομένων, τα 8 ως πιλοτικά φέροντα (pilot subcarriers) για λειτουργίες όπως εκτίμηση καναλιού και συγχρονισμό ενώ όλα τα υπόλοιπα κατέχουν τον ρόλο της προστασίας του εύρους των υπο-φερόντων (guard band subcarriers). Όπως τονίστηκε το μέγεθος του FFT παραμένει σταθερό επομένως η διάταξη των φερόντων στο χώρο μεταβάλλεται ανάλογα με το εύρος ζώνης. Όταν είναι διαθέσιμο μεγάλο εύρος φάσματος, η απόσταση ανάμεσα στα subcarrier αυξάνεται με άμεσο αντίκτυπο στο μέγεθος του χρόνου συμβόλου που μειώνεται αναλόγως. Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται ο παράγοντας της καθυστέρησης διάδοσης, ο οποίος για να υπερνικηθεί απαιτείται από τον ενδιάμεσο χρόνο ή αλλιώς χρόνο φύλαξης (guard time) να λάβει αισθητά μεγαλύτερο ποσοστό. Στο πίνακα Table 2 παρατηρούμε πως το WiMAX σύστημα προβλέπει ευρύα συλλογή από επιτρεπόμενους ενδιάμεσους χρόνους γεγονός που προσφέρει την ευχέρεια στους σχεδιαστές του εκάστοτε συστήματος να προχωρήσουν στους καταλληλότερους συμβιβασμούς ανάμεσα στην φασματική απόδοση και την ευρωστία της καθυστέρησης διάδοσης. Προκειμένου να επιτύχουμε μέγιστη αντοχή στην καθυστέρηση διάδοσης ενδείκνυται η χρησιμοποίηση guard time σε ποσοστό 25%, ικανό να επιδέχεται καθυστέρηση διάδοσης μεγέθους 16μs για λειτουργία στα 3.5MHz ή 8μs για λειτουργία σε κανάλι των 7MHz. Όταν το φαινόμενο των πολλαπλών μονοπατιών παρουσιάζεται σε ήπια μορφή, ο ενδιάμεσος χρόνος δύναται να ελαττωθεί στο ελάχιστο ποσοστό του 3%.

#### 4.2.2 Mobile WiMAX OFDMA-PHY

Σημειώσαμε προηγουμένως, πως στο mobile WiMAX το μέγεθος του μετασχηματισμού FFT προσαρμόζεται σύμφωνα με τις συνθήκες με τις τιμές του να κυμαίνονται ανάμεσα σε 128 και 2048bits. Σε αντίθεση με το fixed WiMAX, εάν το διαθέσιμο εύρος φάσματος αυξηθεί, το μέγεθος του FFT αυξάνεται αντιστοίχως κατά τρόπο ώστε απόσταση ανάμεσα στα φέροντα να διατηρείται σταθερή και ίση με 10.94kHz. Έτσι η διάρκεια του OFDM συμβόλου, που αποτελεί και την βασική μονάδα ανάθεσης, παραμένει αμετάβλητη, διευκολύνοντας το σχεδιασμό υψηλότερων επιπέδων. Ιδιότητα εξαιρετικά επιθυμητή, αφού συντηρεί το κόστος σε χαμηλά επίπεδα. Η τιμή του διαστήματος των 10.94kHz αποτελεί την χρυσή τομή αφού επιλέχτηκε έτσι ώστε να ισορροπεί ανάμεσα σε ικανοποιητικές επιδόσεις στην καθυστέρηση διάδοσης και την καθυστέρηση Doppler τόσο για fixed όσο και για mobile περιβάλλοντα. Με την συγκεκριμένη ενδιάμεση απόσταση είναι δυνατόν να υποστηριχτούν καθυστερήσεις μετάδοσης που αγγίζουν τα 20μs καθώς και ταχύτητες οχήματος των 125kmph όταν το κανάλι λειτουργεί στα 3.5GHz. Το σταθερό διάστημα υποδηλώνει πως μετασχηματισμοί FFT με τιμές 128 512 1024 και 2048 μεταχειρίζονται, όταν το αντίστοιχο εύρος καναλιού είναι 1.25MHz, 5MHz, 10MHz και 20MHz.



Table 2: Οι παράμετροι του OFDM που χρησιμοποιούνται στο WiMAX

Παράμετροι	Fixed WiMAX		Mobile WiMAX		
Μέγεθος FFT	256	128	512	1024	2048
αριθμός χρησιμοποιούμενων subcarriers	192	72	360	720	1440
Αριθμός πιλοτικών (pilot) subcarriers	8	12	60	120	240
Αριθμός null/guardband subcarriers	56	44	92	184	368
Κυκλικό πρόθεμα ή guard time(Tg/Tb)	1/32,1/16,1/8,1/4				
ρυθμός oversampling (Fs/BW)	Εξαρτάται από το εύρος ζώνης : 7/6 για 256 OFDM, 8/7 για πολλαπλάσια του 1.75MHz, 28/25 για πολ/σια των 1.25MHz,1.5MHz,2MHz,2.75MHz				
Εύρος καναλιού (MHz)	3.5	1.25	5	10	20
Διάστημα ανάμεσα σε subcarrier(κHZ)	15.625		10.94		
Χρόνος συμβόλου (symbol time)(μs)	64		91.4		
Guard time θεωρώντας 12.5%(μs)	8		11.4		
OFDM χρόνος συμβόλου (μs)	72		102.9		
Αριθμός των OFDMσυμβόλων σε πλαίσιο 5ms	69		48.0		

Πρέπει να παρατηρηθεί πως το mobile WiMAX ενδέχεται να περιλαμβάνει και επιπρόσθετα προφίλ φάσματος. Για παράδειγμα, ένα προφίλ συμβατό με το σύστημα WiBro απαιτεί εύρος ζώνης 8.75MHz σε συνδυασμό με 1024bit FFT, μεταβάλλοντας όμως το ενδιάμεσο διάστημα και ακυρώνοντας τα οφέλη της κλιμακούμενης τεχνολογίας.

### 4.3 Υποκατηγοριοποίηση των καναλιών (subchannelization) : OFDMA

Τα διαθέσιμα υπο-φέροντα μπορούν να διαμεριστούν σε διαφορετικά σύνολα που ονομάζονται subchannels. Το fixed WiMAX βασισμένο σε OFDM-PHY προσφέρει περιορισμένη μορφή υποκατηγοριοποίησης και μόνο για την περίπτωση του uplink. Το πρότυπο ορίζει 16 subchannels όπου 1,2,4,8 ή όλα τα σύνολα μπορούν να ανατεθούν στο σταθμό του συνδρομητή (Subscriber Station SS). Η μέθοδος αυτή επιτρέπει στον χρήστη να μεταδίδει χρησιμοποιώντας ένα κλάσμα (με μικρότερη τιμή το 1/6) του συνολικού εύρους ζώνης, όπως ορίζει η απόφαση ανάθεσης του σταθμού βάσης (Base Station BS). Παρέχονται δηλαδή, σημαντικές βελτιώσεις ανά σύνδεση που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε για διεύρυνση της απόδοσης ή για μεγιστοποίηση της διάρκειας ζωής της μπαταρίας του σταθμού του συνδρομητή. Αρκεί να σημειώσουμε πως ο παράγοντας 1/16 παρέχει αύξηση στην απόδοση κατά 12db.

Εντούτοις, το mobile WiMAX που θεμελιώνεται από OFDMA-PHY προσφέρει υποκατηγοριοποίηση σε αμφότερα uplink και downlink. Σε αυτή την περίπτωση, μικρότερη μονάδα ανάθεσης συχνότητας από τον σταθμό βάσης ορίζεται το subchannel. Επομένως, διαφορετικά subchannels μπορούν να κατανεμηθούν σε διαφορετικούς χρήστες υλοποιώντας το μηχανισμό της πολλαπλής πρόσβασης. Αυτό το είδος πρόσβασης είναι γνωστό με το όνομα Πολλαπλή

Πρόσβαση Ορθογωνικής Διαιρέσης Συχνότητας (Orthogonal Frequency Division Multiplexing Access OFDMA) και δίνει το όνομά του στο φυσικό επίπεδο του συστήματος WiMAX.

Τα subchannels μπορούν να απαρτίζονται είτε από συνεχόμενα-γειτονικά φέροντα είτε από φέροντα ψευδοτυχαία κατανεμημένα σε όλο το διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων. Η τελευταία μέθοδος σχηματισμού των subchannels παρέχει μεγαλύτερη ποικιλομορφία συχνότητας και θεωρείται ιδιαίτερος χρήσιμη σε κινητές εφαρμογές. Το WiMAX πρωτόκολλο ορίζει διαφορετικά σχήματα υποκατηγοριοποίησης που στηρίζονται σε κατανεμημένα subcarriers τόσο για το uplink όσο και για το downlink. Ένα από αυτά γνωστό με τον αγγλικό όρο partial usage of subcarriers PUSC (μερική χρήση υπο-φερόντων) είναι υποχρεωτικό σε όλες τις κινητές υλοποιήσεις του WiMAX. Τα αρχικά προφίλ θέτουν 15 και 17 subchannels για το uplink και το downlink αντίστοιχα για λειτουργία με PUSC σε εύρος ζώνης των 5Mhz. Ο αριθμός των καναλιών αυξάνεται σε 30 (uplink) και 35 (downlink) στην περίπτωση που το σύστημα λειτουργεί στα 10Mhz.

Στο WiMAX το σχήμα υποκατηγοριοποίησης που απαρτίζεται από γειτονικά φέροντα ονομάζεται adaptive modulation and coding AMC (προσαρμοσμένη διαμόρφωση και κωδικοποίηση). Αν και το πλεονέκτημα της ποικιλομορφίας των συχνοτήτων δεν υφίσταται στην περίπτωση αυτή, η τεχνική AMC παρέχει την δυνατότητα στους σχεδιαστές του συστήματος να εκμεταλλευτούν την ποικιλία πολλαπλών χρηστών, αναθέτοντας subchannels σε χρήστες βασιζόμενοι στην απόδοση συχνότητας. Ο τρόπος αυτός μπορεί να προσδώσει ουσιώδη οφέλη στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος, εάν ο σύστημα πασχίζει να αναθέσει σε κάθε χρήστη το subchannel που μεγιστοποιεί το λαμβανόμενο SINR. Εν γένει, τα συνεχή υπο-φέροντα πιστεύεται ότι αποτελούν την καταλληλότερη λύση για σταθερές και χαμηλής κινητικότητας εφαρμογές.

#### 4.4 Προσαρμοσμένη διαμόρφωση και κωδικοποίηση στο WiMAX.

Το WiMAX υποστηρίζει πληθώρα τρόπων διαμόρφωσης και κωδικοποίησης επιτρέποντας μεταβολές του σχήματος σύμφωνα με τις εκάστοτε συνθήκες του καναλιού. Χρησιμοποιώντας το δείκτη ανάδρασης του καναλιού, το κινητό είναι σε θέση να παρέχει στον σταθμό βάσης πληροφορίες σχετιζόμενες με την ποιότητα του downlink. Στην περίπτωση του uplink ο σταθμός βάσης εκτιμά την ποιότητα του καναλιού βασιζόμενος στην λαμβανόμενη ποιότητα του σήματος. Ο χρονοπρογραμματιστής (scheduler) του σταθμού βάσης λαμβάνοντας υπόψη την ποιότητα του καναλιού κάθε χρήστη (uplink και downlink) αναθέτει εκείνο το σχήμα διαμόρφωσης και κωδικοποίησης που μεγιστοποιεί το ρυθμό μετάδοσης για το διαθέσιμο σηματοδορυβικό λόγο. Η προσαρμοσμένη διαμόρφωση και κωδικοποίηση επηρεάζει θετικά την αύξηση της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος αποφασίζοντας την βέλτιστη λύση συμβιβασμού ανάμεσα στο ρυθμό μετάδοσης και την ανθεκτικότητα του συστήματος σε πραγματικό χρόνο (real-time).

Στον πίνακα Table 3 παρουσιάζονται τα σχήματα διαμόρφωσης και κωδικοποίησης που υποστηρίζονται από το πρωτόκολλο WiMAX. Στο downlink οι διαμορφώσεις σήματος QPSK, 16 QAM και 64 QAM ορίζονται υποχρεωτικές για το fixed και mobile WiMAX. Το σχήμα 64 QAM είναι προαιρετικό για την περίπτωση του uplink. Η κωδικοποίηση FEC χρησιμοποιώντας συνελκτικούς κώδικες θεωρείται επίσης υποχρεωτική. Στο downlink του OFDM-PHY οι συνελκτικοί κώδικες συνδυάζονται με ένα εξωτερικό κώδικα τύπου Reed-Solomon. Το πρότυπο

Table 3: Μορφοποίηση και κωδικοποίηση στο WiMAX

	Downlink	Uplink
Modulation	BPSK.QPSK,16 QAM; BPSK optional for OFDMA-PHY	BPSK.QPSK,16 QAM; 64 QAM optional
Coding	Mandatory: convolutional codes at rate 1/2, 1/3, 3/4, 5/6 Optional: convolutional turbo codes at rate 1/2, 2/3, 3/4, 5/6; repetition codes at rate 1/2, 1/3, 1/6, LDPC,RS-Codes for at rate 1/2, 1/3 OFDM-PHY	Mandatory: convolutional codes at rate 1/2, 2/3,3/4, 5/6 Optional: convolutional turbo codes at rate 1/2,2/3, 3/4, 5/6; repetition codes 1/6, LDPC

υποστηρίζει ακόμη turbo κώδικες ή κώδικες τύπου low-density parity check (LDPC). Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι οι συνολικοί συνδυασμοί μορφοποίησης και κωδικοποίησης που ορίζονται στα προφίλ του WiMAX ανέρχονται στους 52.

#### 4.5 Ρυθμοί μετάδοσης φυσικού επιπέδου

Λόγο της ευέλικτης διαστρωμάτωσης του φυσικού επιπέδου στο σύστημα WiMAX, η απόδοση σε ρυθμούς μετάδοσης ποικίλει, εξαρτώμενη σημαντικά από τις επιμέρους παραμέτρους λειτουργίας. Στις παραμέτρους που παρουσιάζουν έντονη επίδραση στην αποδοτικότητα περιλαμβάνονται το διαθέσιμο εύρος φάσματος, η διαμόρφωση και το σχήμα κωδικοποίησης. Ελάχιστος σημασίας παράμετροι όπως ο αριθμός των subchannels, ο χρόνος OFDM guard time, και ο ρυθμός oversampling επίσης συμβάλουν στην διαφοροποίηση του συνολικού ρυθμού μετάδοσης. Στον πίνακα Table 4 εκτίθενται ρυθμοί μετάδοσης φυσικού επιπέδου για ένα μέρος πιθανών συνδυασμών.

## 5 Επίπεδο ζεύξης (MAC Layer)

Πρωταρχική επιδίωξη στο σχεδιασμό του επιπέδου ζεύξης του συστήματος WiMAX είναι η δημιουργία ενός μέσου αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα υψηλότερα στρώματα μεταφοράς και στο φυσικό επίπεδο που ακολουθεί. Το MAC επίπεδο συγκεντρώνει πακέτα από το μεγαλύτερο επίπεδο της στοίβας πρωτοκόλλων -αποκαλούμενα MAC service data units (MSDUs)- και τα οργανώνει σε MAC protocol data units (MPDUs) προκειμένου να μεταδοθούν στο φυσικό μέσο που στην περίπτωση των ασύρματων δικτύων δεν είναι άλλο από τον αέρα. Όταν συμβαίνει λήψη πακέτων η διαδικασία που ακολουθείται είναι η αντίστροφη. Τα πρότυπα IEEE 802.16-2004 και IEEE 802.16e-2005 όσο αναφορά το MAC επίπεδο περιλαμβάνουν ένα υπόστρωμα σύγκλισης (convergence sublayer) ικανό να αλληλεπιδρά με ένα πολυπληθές σύνολο πρωτοκόλλων υψηλού

Table 4: Ρυθμοί μετάδοσης φυσικού επιπέδου

Channel b/w	3.5MHz		1.25MHz		5MHz		10MHz		8.75MHz	
PHY mode	256 OFDM		128 OFDMA		512 OFDMA		1024 OFDM		1024 OFDM	
Oversampling	8/7		28/25		28/25		28/25		28/25	
Modulation and Code Rate	PHY-Layer Data Rate (kbps)									
	DL	UL	DL	UL	DL	UL	DL	UL	DL	UL
BPSK, 1/2	946	326	Not applicable							
QPSK, 1/2	1,882	653	504	154	2,250	653	5,040	1,344	4,464	1,120
QPSK, 3/4	2,822	979	756	230	3,78	979	7,560	2,016	6,696	1,680
16 QAM, 1/2	3,763	1,306	1,008	307	5,040	1,306	10,080	2,688	8,928	2,240
16 QAM, 3/4	5,645	1,958	1,512	461	7,560	1,958	15,120	4,032	13,392	3,360
64 QAM, 1/2	5,645	1,958	1,512	461	7,560	1,958	15,120	4,032	13,392	3,360
64 QAM, 2/3	7,526	2,611	2,016	614	10,080	2,611	20,160	5,376	17,856	4,480
64 QAM, 3/4	8,467	2,938	2,268	961	11,340	2,938	22,680	6,048	20,088	5,040
64 QAM, 5/6	9,408	3,264	2,520	768	12,600	3,264	25,200	6,720	22,320	5,600

επιπέδου όπως ATM , TDM Voice, Ethernet, IP και οποιοδήποτε άλλο άγνωστο μελλοντικό πρωτόκολλο. Δεδομένης της επικράτησης των πρωτοκόλλων IP και Ethernet στην παγκόσμια βιομηχανία της πληροφορικής το WiMAX Forum θεώρησε αρκετό να υποστηρίξει μόνο αυτά τα δύο πρωτόκολλα την τρέχουσα στιγμή. Επιπλέον, της αντιστοίχισης από και σε υψηλότερα επίπεδα το υπόστρωμα σύγκλισης είναι επιφορτισμένο με το έργο της καταστολής των MSDU κεφαλίδων (headings) με σκοπό την μείωση του φόρτου των μεγαλύτερων επιπέδων για κάθε πακέτο.

Το WiMAX επίπεδο ζεύξης έχει σχεδιαστεί λεπτομερειακά ώστε να υποστηρίζει ιδιαίτερα υψηλούς ρυθμούς επιδίοντας ποιότητα υπηρεσιών (QoS) εφάμιλλη των συστημάτων ATM και DOCSIS. Χρησιμοποιείται μεταβλητού μεγέθους MPDU προσφέροντας ευελιξία και κατ' επέκταση αποδοτικότερες μεταδόσεις. Για παράδειγμα, πολλαπλά MPDU ίδιου ή διαφορετικού μήκους συναθροίζονται και προωθούνται σε ένα μόνο ξέσπασμα (burst) αποσκοπώντας στην ελάττωση του φόρτου του φυσικού επιπέδου. Παρόμοια, πολλαπλά MPDU με προέλευση την ίδια υπηρεσία υψηλότερου επιπέδου συνδέονται αλυσιδωτά σε ένα μοναδικό MPDU μειώνοντας έτσι σημαντικά το φόρτο του ίδιου (MAC) επιπέδου. Αντιστρόφως μεγάλα MPDU ενδέχεται να κατακερματίζονται σε μικρότερα και να αποστέλλονται σε ξεχωριστά πλαίσια (frames).

Στην εικόνα Figure 15 περιέχονται παραδείγματα διαφορετικών MAC PDU (packet data unit) πλαισίων. Κάθε πλαίσιο διαθέτει ως πρόθεμα μια γενική κεφαλίδα του επιπέδου ζεύξης (generic MAC header GMH) που περιλαμβάνει το αναγνωριστικό της σύνδεσης (connection identifier CID), το μήκος ολόκληρου του πλαισίου και bits που προετοιμάζουν τη παρουσία των CRC, των υποκεφαλίδων (subheader) και για την περίπτωση που τα ωφέλιμα δεδομένα (payload) είναι κρυπτογραφημένα το κλειδί της κρυπτογράφησης. Τα δεδομένα του επιπέδου

MAC είναι δύο κατηγοριών : είτε μηνύματα μεταφοράς ή μηνύματα διαχείρισης. Δηλαδή πέραν των μηνυμάτων μεταφοράς είναι δυνατό τα ωφέλιμα δεδομένα να περιέχουν αιτήσεις για πρόσθετο εύρος ζώνης ή αιτήσεις επανεκπομπών. Το είδος των μηνυμάτων αναγνωρίζεται από την υποκεφαλίδα που προηγείται. Παραδείγματα subheader αποτελούν οι υποκεφαλίδες πακεταρίσματος/κατακερματισμού (packing/fragmentation subheaders). Επιπλέον, στο επίπεδο αυτό υποστηρίζεται το πρωτόκολλο ARQ σύμφωνα με το ποίο πραγματοποιούνται αιτήσεις επανεκπομπών κατακερματισμένων και μη MSDU μονάδων. Το μέγιστο μέγεθος πλαισίου περιορίζεται στα 2047bytes και αναπαρίσταται με 11 bits στη κεφαλίδα GMH.

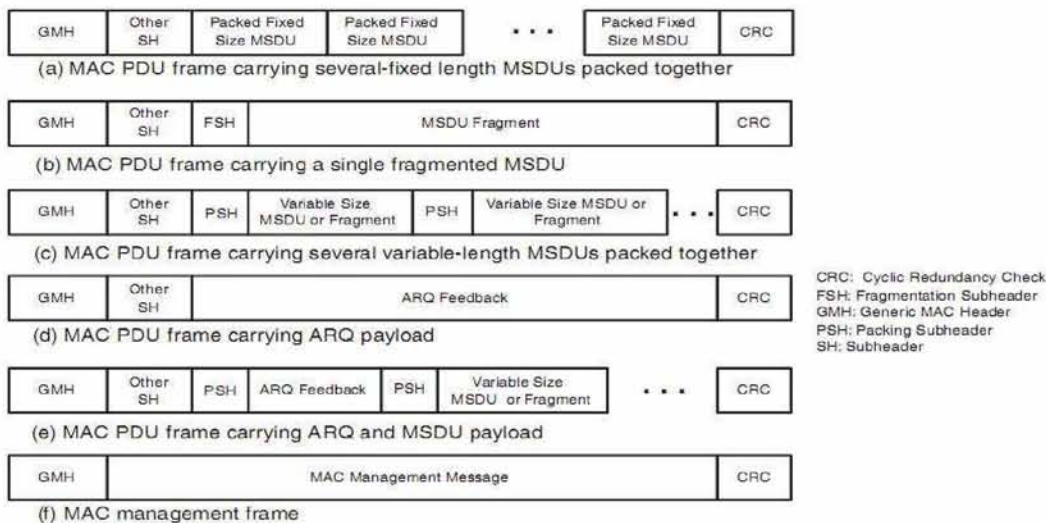


Figure 15: Παραδείγματα διαφορετικών MAC PDU πλαισίων

## 5.1 Μηχανισμοί πρόσβασης καναλιού

Στο WiMAX το MAC επίπεδο του σταθμού βάσης (Base station BS) είναι επιφορτισμένο με το έργο της ανάθεσης εύρους ζώνης για όλους τους κινητούς χρήστες του δικτύου. Η μοναδική φορά που ο κινητός σταθμός (Mobile Station MS) έχει μερικό έλεγχο σχετικά με την ανάθεση του bandwidth είναι στην περίπτωση που διαθέτει πολλαπλές συνόδους ή συνδέσεις με τον σταθμό βάσης. Εν προκειμένω, ο SB αναθέτει εύρος φάσματος στο MS αθροιστικά και η διαμέρισή του ανάμεσα στις διαφορετικές συνδέσεις αποτελεί πλέον ευθύνη του συνδρομητή. Εξαιρώντας το μοναδικό αυτό γεγονός, όλες οι υπόλοιπες αποφάσεις κατανομής πόρων βαραίνουν τον ΣΒ. Για το downlink ο ΣΒ αναθέτει το bandwidth υπολογίζοντας την εισερχόμενη κίνηση δίχως την παρέμβαση του ΚΣ, αντίθετα στο uplink η ανάθεση εξαρτάται από τις αιτήσεις του χρήστη.

Το πρότυπο WiMAX υποστηρίζει διάφορους μηχανισμούς με τους οποίους ο σταθμός του συνδρομητή μπορεί να αιτεί και να λαβαίνει bandwidth για το uplink. Ανάλογα με την συγκεκριμένη ποιότητα υπηρεσίας και των παραμέτρων κίνησης που σχετίζονται με αυτήν, ένας ή συνδυασμός περισσότερων μηχανισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον χρήστη. Ο BS αναθέτει αποκλειστικούς ή μεριζόμενους πόρους περιοδικά σε κάθε MS, μέσω του οποίου μπορεί να

αιτήσει bandwidth. Η διαδικασία αυτή είναι συνηθισμένη σε πολλά πληροφοριακά συστήματα και συναντάται με τον αγγλικό όρο polling. Η τεχνική του polling μπορεί να υλοποιηθεί είτε ατομικά (unicast) είτε σε γκρουπ (multicast), η επιλογή multicast προτιμάται όταν δεν υπάρχει διαθέσιμο εύρος ώστε να “ερωτηθούν” όλοι οι χρήστες ατομικά. Στην περίπτωση του multicast polling διατίθεται μία μοναδική μοιραζόμενη θυρίδα (slot) που επιχειρεί να χρησιμοποιήσει κάθε MS. Το WiMAX καθορίζει μηχανισμό ανταγωνισμού και επίλυσης διαφορών για το περιστατικό σύγκρουσης των MS στην προσπάθεια διεκδίκησης της θυρίδας. Εάν σε ένα MS έχει ήδη ανατεθεί πόρος για αποστολή κίνησης ο σταθμός δεν επερωτάται. Αντίθετα επιτρέπεται να ζητήσει επιπρόσθετο φάσμα με a) μετάδοση μίας αίτησης bandwidth MPDU b) αποστολή αίτησης bandwidth χρησιμοποιώντας το κανάλι ρύθμισης (ranging) και c) ενσωματώνοντας την αίτηση σε γενικά MAC επιπέδου πακέτα.

## 5.2 Ποιότητα παρεχόμενων υπηρεσιών (QoS)

Το μέλημα για υποστήριξη ποιότητας υπηρεσιών αποτέλεσε θεμελιώδες κομμάτι σχεδιασμού του επιπέδου ζεύξης. Το WiMAX δανείζεται τις βασικές σχεδιαστικές ιδέες σχετικά με το QoS από το πρότυπο καλωδιακού μόντεμ DOCSIS. Ισχυρός QoS έλεγχος επιτυγχάνεται με την χρησιμοποίηση συνδεδειστροφούς MAC αρχιτεκτονικής, όπου όλες οι συνδέσεις, downlink και uplink ρυθμίζονται αποκλειστικά από τον σταθμό βάσης. Πριν την έναρξη οποιασδήποτε μετάδοσης δεδομένων, εγκαθίσταται ένα μονοκατευθυντικό λογικό link με το όνομα connection (σύνδεση) ανάμεσα στα στρώματα ζεύξης του σταθμού βάσης και του κινητού χρήστη. Κάθε σύνδεση χαρακτηρίζεται από μοναδικό αναγνωριστικό (connection identifier CID) που λειτουργεί σαν προσωρινή διεύθυνση για την μετάδοση των δεδομένων από τη συγκεκριμένη ζεύξη. Συμπληρωματικά των συνδέσεων μεταφοράς δεδομένων το πρωτόκολλο WiMAX ορίζει τρεις διαφορετικές συνδέσεις διαχείρισης -τη βασική (basic), την πρωτεύουσα (primary) και τη δευτερεύουσα (secondary) σύνδεση- που χρησιμοποιούνται σε συναρτήσεις ρύθμισης καναλιού (ranging).

Το WiMAX εισάγει τη καινοτομία της ροής υπηρεσίας ή όπως πιο κομψά αποτυπώνεται στην αγγλική γλώσσα service flow. Service flow είναι μια μονοκατευθυντική ροή πακέτων με συγκεκριμένες QoS παραμέτρους που περιλαμβάνουν την προτεραιότητα κίνησης, τη διατήρηση του μέγιστου ρυθμού μετάδοσης, τον μέγιστο ρυθμό ξεσπάσματος (burst rate), τον ελάχιστο ανεκτικό ρυθμό, το είδος χρονοπρογραμματισμού, τον ARQ τύπο, τη μέγιστη καθυστέρηση, την ανοχή της μεταβλητότητας καθυστέρησης (jitter), τους κανόνες μετάδοσης των μονάδων PDU κ.α. Κάθε ροή χαρακτηρίζεται από το μοναδικό αναγνωριστικό της (service flow identifier SFID). Οι ροές υπηρεσίας μπορεί να προβλεφθούν διαμέσου εξελεγμένου συστήματος διαχείρισης δικτύου ή να δημιουργηθούν δυναμικά με καλά ορισμένους μηχανισμούς σηματοδότησης στο βασικό πρότυπο. Ο BS είναι επιφορτισμένος με την έκδοση των SFID και την αντιστοίχισή τους σε μοναδικά CID.

Για να υποστηριχθεί πληθώρα εφαρμογών, το WiMAX καθορίζει πέντε κλάσεις υπηρεσιών (πίνακας Table 5) :

- Κλάση Υπηρεσιών Απαραράκλητης Παραχώρησης (Unsolicited Grant Services, UGS)

Παρέχει υπηρεσίες με σταθερό ρυθμό μετάδοσης των bits (Constant Bit Rate, CBR), οι οποίες απαιτούν σταθερό χρονοπρογραμματισμό (scheduling) και εγγύηση ρυθμαπόδοσης (throughput), καθυστέρησης απόκρισης (latency) και μεταβλητότητας καθυστέρησης (jitter). Χρησιμοποιείται για real-time υπηρεσίες και αντιστοιχία των γραμμών T1 και E1. Παράδειγμα εφαρμογής που ανήκει σε αυτή την κλάση υπηρεσιών είναι το VoIP χωρίς καταστολή σιωπής.

- Κλάση Υπηρεσιών Πραγματικού Χρόνου (real-time Polling Services, rtPS)

Προσφέρει μεταβλητό bit rate, αλλά με εγγυημένο ελάχιστο ρυθμό και μια εγγυημένη καθυστέρηση (latency). Παρέχει υπηρεσίες πραγματικού χρόνου (real time services) όπως βιντεο-διάσκεψη (video conferencing). Το μήκος πακέτου των δεδομένων μπορεί να είναι μεταβλητό. Ο σταθμός βάσης εκτελεί περιόδευση, ρωτώντας το συνδρομητή σε σταθερά διαστήματα πόσο εύρος ζώνης χρειάζεται αυτή τη φορά. Ένα άλλο παράδειγμα είναι υπηρεσίες επιχειρηματικής πρόσβασης. Είναι αρκετά συνηθισμένο οι πάροχοι σταθερών ασύρματων δικτύων (WISPs) να εγγυώνται ρυθμούς μετάδοσης δεδομένων επιπέδου γραμμής E1/T1 σύμφωνα με τα Service Level Agreements (SLAs). Ωστόσο, επιτρέπουν στους πελάτες να χρησιμοποιούν μεγαλύτερη χωρητικότητα εφόσον αυτή είναι διαθέσιμη στο δίκτυο. Αυτό θεωρείται μια επιτυχημένη στρατηγική των WISPs έναντι των ανταγωνιστικών παρόχων ενσύρματων δικτύων.

- Κλάση Υπηρεσιών Μη Πραγματικού Χρόνου (non-real-time Polling Services, nrtPS)

Παρέχει εγγύηση μόνο για τη ρυθμαπόδοση (throughput) και γι αυτό χρησιμοποιείται για υπηρεσίες μη πραγματικού χρόνου, με μεταβλητό μήκος δεδομένων όπως για παράδειγμα το e-mail. Ο σταθμός βάσης “ρωτάει” το συνδρομητή ανά τακτά χρονικά διαστήματα για το απαιτούμενο εύρος ζώνης. Ο σταθμός βάσης εκτελεί περιόδευση, ρωτώντας το συνδρομητή πόσο εύρος ζώνης χρειάζεται αυτή τη φορά, όχι όμως σε αυστηρά προδιαγεγραμμένα χρονικά διαστήματα. Αν ένας σταθμός βάσης δεν αποκριθεί στην περιόδευση  $k$  φορές στη σειρά, ο σταθμός βάσης τον προσθέτει σε μια ομάδα πολυδιανομής και σταματά να τον ρωτά «προσωπικά». Αντίθετα, όταν η περιόδευση φτάσει στην ομάδα πολυδιανομής μπορεί να αποκριθεί οποιοσδήποτε από τους σταθμούς, ανταγωνιζόμενος για εξυπηρέτηση. Με αυτόν τον τρόπο οι σταθμοί που έχουν λίγη κίνηση δεν σπαταλούν πολύτιμες περιόδους.

- Κλάση Υπηρεσιών Βέλτιστης Προσπάθειας (Best Effort Services, BE) Αυτή η υπηρεσία σχεδιάστηκε με γνώμονα ροές δεδομένων χωρίς ελάχιστο εγγυημένο επίπεδο υπηρεσίας όπως υπηρεσίες μη πραγματικού χρόνου π.χ web surfing. Όλοι οι συνδρομητές που χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη κλάση υπηρεσίας ανταγωνίζονται για το διαθέσιμο εύρος ζώνης.

- Κλάση Υπηρεσιών Εμπλουτισμένου Πραγματικού Χρόνου (Enhanced real-time Polling Service, ErtPS) Ορίζεται στο 802.16e, και θα χρησιμοποιηθεί για τις υπηρεσίες VoIP με

Table 5: Κλάσεις υπηρεσιών που προσφέρονται στο WiMAX

Service Flow Designation	Defining QoS Parameters	Application Examples
Unsolicited grant services (UGS)	Maximum sustained rate Maximum latency tolerance Jitter tolerance	voice over IP (VoIP) without silence suppression
Real-time Polling service (rtPS)	Minimum reserved rate Maximum sustained rate Maximum latency tolerance Traffic priority	streaming audio and video, MPEG (Motion Picture Experts Group) encoded
Non-real-time Polling Service (nrtPS)	Minimum reserved rate Maximum sustained rate Traffic priority	File Transfer Protocol
Best-efford service (BE)	Maximum sustained rate Traffic priority	Web browsing,data transfer
Extended real-time Polling service (ErtPS)	Minimum reserved rate Maximum sustained rate Maximum latency tolerance Jitter tolerance Traffic priority	VoIP with silence suppression

μεταβλητά μεγέθη πακέτων σε αντιδιαστολή με την υπηρεσία VoIP με σταθερού μεγέθους πακέτα. Αυτού του είδους υπηρεσία VoIP θα χρησιμοποιείται στην περίπτωση όπου έχουμε καταστολή σιωπής (ή διαφορετικά ανίχνευση δραστηριότητας). Παράδειγμα: εφαρμογές όπως το Skype.

### 5.3 Χαρακτηριστικά εξοικονόμησης ισχύος

Η κατανάλωση ενέργειας αποτελεί μείζον ζήτημα για το σύνολο των σύγχρονων ενεργοβόρων πολύπλοκων φορητών συσκευών. Η σπουδαιότητα του ζητήματος αναγνωρίστηκε εγκαίρως από τους σχεδιαστές του πρωτοκόλλου Mobile-WiMAX ενσωματώνοντας χαρακτηριστικά εξοικονόμησης ισχύος που επεκτείνουν την διάρκεια λειτουργίας εξαλείφοντας την ανάγκη συχνής επαναφόρτισης. Η οικονομία στην ισχύ επιτυγχάνεται απενεργοποιώντας μέρη του κινητού σταθμού (MS) με ελεγχόμενο τρόπο όταν ο σταθμός δεν μεταδίδει ή λαμβάνει δεδομένα. Ορίζονται μέθοδοι σηματοδότησης που ειδοποιούν το MS να μεταβεί σε βύθο (sleep) ή αδρανή (idle) τρόπο λειτουργίας. Με τον όρο sleep mode αναφερόμαστε στην κατάσταση λειτουργίας κατά την οποία ο σταθμός του χρήστη απενεργοποιεί συνολικά το σύστημά του και τίθεται μη διαθέσιμος για προκαθορισμένες περιόδους. Οι περίοδοι “απουσίας” είναι διαπραγματεύσιμοι με το σταθμό βάσης. Στο WiMAX αναφέρονται τρεις διαφορετικές κλάσεις εξοικονόμησης ισχύος



που βασίζονται στον τρόπο εκτέλεσης της λειτουργίας sleep mode. Στην πρώτη κλάση ο χρόνος παραμονής στη κατάσταση sleep αυξάνεται εκθετικά ανάμεσα σε μία ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Συνήθως χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις βέλτιστης προσπάθειας (best-effort) και κυκλοφορίας μη πραγματικού χρόνου (Non-real-time). Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει αμετάβλητο πλαίσιο για την λειτουργία sleep (sleep window) και συναντάται σε υπηρεσίες τύπου UGS. Η τελευταία κλάση ορίζει την ύπαρξη ενός μοναδικού πλαισίου sleep χωρίς επανάληψη και τυπικά χρησιμοποιείται για μηνύματα πολυεκπομπής (multicast) ή για κίνηση σχετική με την διαχείριση του συστήματος όταν δηλαδή ο MS γνωρίζει επακριβώς την χρονική στιγμή άφιξης της αναμενόμενης κίνησης. Τα αποτελέσματα αυτής της τεχνικής προσδίδουν διπλό όφελος αφού ελαχιστοποιούν την κατανάλωση της ισχύος της φορητής συσκευής αλλά παράλληλα αποτρέπουν την κατασπατάληση πόρων του συστήματος από την πλευρά του σταθμού βάσης.

Η επιλογή της κατάστασης λειτουργίας idle mode προσφέρει ακόμα μεγαλύτερα οφέλη, όμως ορίζεται προαιρετική από το WiMAX πρωτόκολλο. Επιτρέπει στον κινητό σταθμό να απενεργοποιηθεί ολοκληρωτικά χωρίς να θεωρείται καταχωρημένος σε κάποιο συγκεκριμένο σταθμό βάσης και παρά ταύτα να λαμβάνει downlink μηνύματα πανεκπομπής (broadcast). Όταν ένα μήνυμα κυκλοφορίας download αφιχθεί σε κινητό σταθμό που βρίσκεται σε αδρανή κατάσταση, ο σταθμός καλείται να επανέλθει σε κανονική λειτουργία από ένα σύνολο σταθμών βάσεων που σχηματίζουν ένα paging group. Ο MS εγγράφεται σε κάποιο paging group από τον σταθμό βάσης ακριβώς πριν την μετάβαση σε idle mode, περιοδικά επανέρχεται για να ενημερώσει το σύνολο (paging group) στο οποίο ανήκει. Η μέθοδος αυτή είναι περισσότερο αποδοτική απαιτώντας μηδενική συμμετοχή του κινητού σταθμού στην όλη διαδικασία, όμως εξυπηρετεί συγχρόνως και τον σταθμό βάσης ελαχιστοποιώντας την ανάγκη καταγραφής της κίνησης handover των μη ενεργών κινητών σταθμών, ενέργεια που στην περίπτωση βύθου είναι αναγκαία.

## 5.4 Υποστήριξη Κινητικότητας

Το Mobile WiMAX πρωτόκολλο προέβλεψε τέσσερα ξεχωριστά σενάρια σχετικά με το είδος της κίνησης των συνδρομητικών σταθμών.

1. Νομαδική (nomadic) : Ο χρήστης διαθέτει ελευθερία μετακίνησης του συνδρομητικού σταθμού σε διαφορετικό σημείο σύνδεσης.
2. Φορητή(portable) :Νομαδική πρόσβαση παρέχεται σε φορητή συσκευή όπως κάρτα PC με την προσδοκία του βέλτιστου handover.
3. Απλή κινητικότητα (simple mobility):Ο συνδρομητής μπορεί να κινείται με ταχύτητες που αγγίζουν τα 60kmph με σύντομης διάρκειας διακοπές (μικρότερες του δευτερολέπτου) κατά την διαδικασία του handoff
4. Πλήρη κινητικότητα (full mobility): Υποστηρίζονται ταχύτητες των 120kmph με handoff

(διαπομπές)<sup>2</sup> δίχως διακοπές (καθυστέρηση μικρότερη των 50ms και απώλεια πακέτων λιγότερη του 1%).

Θεωρείται πιθανή η αρχική εγκατάσταση των WiMAX δικτύων μόνο για σταθερές και νομαδικές εφαρμογές ενώ η μετέπειτα εξέλιξή τους μπορεί να συμπεριλάβει τις φορητές και πλήρως κινητές περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Το πρότυπο IEEE 802.16e-2005 ορίζει, εκτός των άλλων, ένα ειδικό πλαίσιο εργασίας με σκοπό να υποστηρίξει την διαχείριση της κινητικότητας. Προσδιορίζονται μηχανισμοί σηματοδότησης για συστηματική παρατήρηση των κινήσεων των συνδρομητικών σταθμών, στην διάρκεια της μετακίνησής τους ανάμεσα σε γειτονικούς σταθμούς βάσης. Λαμβάνεται πρόβλεψη ακόμη και για τις περιπτώσεις που ο χρήστης δεν είναι ενεργός αλλά σε κατάσταση “αδράνειας” (idle). Το WiMAX Forum ενσωμάτωσε το συγκεκριμένο πλαίσιο εργασίας για να διευρύνει τη διαχείριση της κινητικότητας σε αρχιτεκτονικές δικτύου από άκρη σε άκρη (end-to-end network). Υποστηρίζεται επίσης, κινητικότητα και σε επίπεδο δικτύου (IP-layer).

Τρεις είναι οι κύριες μέθοδοι handoff που διατυπώνονται στο πρότυπο IEEE 802.16e-2005, η πρώτη υποχρεωτική και οι υπόλοιπες δύο με προαιρετικό χαρακτήρα. Στην υποχρεωτική μέθοδο, με την αγγλική ονομασία hard handover (HHO), περιγράφεται με σαφήνεια η διαδικασία της απότομης μεταβίβασης της σύνδεσης ανάμεσα σε σταθμούς βάσης που συνορεύουν. Η απόφαση για handoff μπορεί να ληφθεί από το σταθμό βάσης (SB), τον κινητό συνδρομητή (MS) ή από μια τρίτη εξωτερική ενότητα βασισμένη στα αποτελέσματα των μετρήσεων που απέστειλε ο MS. Σε περιοδικά διαστήματα ο MS εξετάζει τις ραδιοσυχνότητες πραγματοποιώντας μετρήσεις ποιότητας καναλιού για γειτονικούς σταθμούς. Η ανίχνευση εκτελείται σε διαστήματα (scanning intervals) ρητώς καθορισμένα από τον σταθμό βάσης. Κατά τη διάρκειά τους, ο MS κατ' επιλογή μπορεί να προχωρήσει στην διαδικασία της αρχικής ρύθμισης (initial ranging, βλέπε ενότητα blah.blah) και το συσχετισμό του με έναν ή περισσότερους κοντινούς σταθμούς βάσης. Έχοντας λάβει την τελική απόφαση για μεταφορά της σύνδεσης σε νέο BS, εκκινείται η φάση του συγχρονισμού της μετάδοσης τύπου downlink ανάμεσα σε MS και επιθυμητού BS. Ακολουθεί η διαδικασία ρύθμισης, εάν δεν είχε πραγματοποιηθεί προγενέστερα, και στην συνέχεια τερματίζεται η σύνδεση με τον προηγούμενο BS. Τυχόν εναπομείναντα MPDU μηνύματα στο BS διατηρούνται μέχρι την λήξη του χρονομετρητή

Οι μέθοδοι fast base station switching (FBSS) και macro diversity handover (MDHO) μπορούν να υποστηριχθούν προαιρετικά, από τις εμπορικές υλοποιήσεις του πρωτοκόλλου mobile-WiMAX. Το κοινό χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι ότι επιτρέπουν σε κινητούς σταθμούς να διατηρούν έγκυρες συνδέσεις με περισσότερους από έναν σταθμούς βάσης ταυτόχρονα. Στην περίπτωση FBSS, ο MS συντηρεί μια λίστα των σχετιζόμενων BS που καλείται ενεργό σύνολο (active set). Ο MS διαρκώς επιβλέπει αυτό το σύνολο, εκτελεί την διαδικασία της ρύθμισης (ranging) και διατηρεί έγκυρη σύνδεση, δίνοντας ξεχωριστό αναγνωριστικό ID, για κάθε μία από αυτές. Εντούτοις, επικοινωνία υφίσταται μονάχα με έναν BS, που ονομάζεται anchor BS.

<sup>2</sup>Ο όρος handoff αναφέρεται στην διαδικασία της μεταφοράς μιας κλήσης ή μιας συνεδρίας δεδομένων ανάμεσα σε γειτονικά κελιά ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος, συναντάται προφανώς σε περιπτώσεις κινητών χρηστών

Όταν συμβαίνει αλλαγή σταθμού βάσης, η σύνδεση μεταφέρεται στον επιλεγμένο BS χωρίς να απαιτείται ειδική σηματοδότηση handoff.

Παρόμοια λειτουργία έχει και η δεύτερη από τις προαιρετικές μεθόδους handoff, με την διαφορά ότι ο MS κατά την διάρκεια του uplink και του downlink επικοινωνεί συγχρόνως με όλους τους σταθμούς βάσης του ενεργού συνόλου, που εδώ καλείται diversity set. Οι εναλλακτικές αυτές μέθοδοι αποδίδουν εμφανώς περισσότερο από την βασική (HHO), όμως προσθέτουν επιπλέον απαιτήσεις στο σταθμό βάσης. Είναι αναγκαίο οι BS που ανήκουν στο active ή diversity σύνολο να παραμένουν συγχρονισμένοι, να χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα φέροντος και να μοιράζονται τις ίδιες πληροφορίες δικτύου που σχετίζονται με την εισαγωγή νέων χρηστών.

## 5.5 Θέματα Ασφάλειας Συστήματος

Κατά το σχεδιασμό του συστήματος WiMAX, έχει καταβληθεί ιδιαίτερη προσοχή στο θέμα της ασφάλειας με εμφανή διαφορά στον τομέα αυτό, από λοιπές ανταγωνιστικές ασύρματες επικοινωνίες (WiFi). Το πρότυπο ενσωματώνει σύγχρονες τεχνικές που στόχο έχουν να διασφαλίσουν την ιδιωτικότητα των δεδομένων και να αποτρέψουν την μη εξουσιοδοτημένη πρόσβαση, με επιπρόσθετες βελτιστοποιήσεις πρωτοκόλλων για κινητούς χρήστες. Κάθε ενέργεια με περιεχόμενο που σχετίζεται με την ασφάλεια ελέγχεται από ξεχωριστό υπόστρωμα (sublayer) τοποθετημένο δομικά μέσα στο επίπεδο ζεύξης. Τα κυριότερα σημεία της ασφάλειας του WiMAX απαριθμούνται παρακάτω :

1. Υποστήριξη ιδιωτικότητας : Τα δεδομένα κρυπτογραφούνται με αλγορίθμους αποδεδειγμένα ισχυρούς, διασφαλίζοντας την ιδιωτικότητα των χρηστών. Για την επίτευξη αυτού του στόχου χρησιμοποιούνται σχήματα όπως AES (Advanced Encryption Standard) και 3DES (Triple Data Encryption Standard). Οι περισσότερες υλοποιήσεις είναι πολύ πιθανόν να περιλαμβάνουν τον AES αλγόριθμο, μιας και αποτελεί το νέο πρότυπο στην κρυπτογράφηση και εμφανίζεται ευκολότερος στην εφαρμογή. Κατά την φάση της αυθεντικοποίησης δημιουργούνται κλειδιά με συνήθη μεγέθη 128 ή 256 bit τα οποία και ανανεώνονται περιοδικά για λόγους προστασίας.
2. Αυθεντικοποίηση συσκευής/χρήστη : Προσφέρονται ευέλικτοι τρόποι αυθεντικοποίησης των συνδρομητικών σταθμών. Το πλαίσιο αυθεντικοποίησης βασίζεται στο Internet Engineering Task Force (IETF) EAP, που περιλαμβάνει ποικιλία τρόπων πιστοποίησης όπως username/password, ψηφιακά πιστοποιητικά<sup>3</sup> και έξυπνες κάρτες. Οι τερματικές συσκευές WiMAX ενσωματώνουν ψηφιακά πιστοποιητικά τύπου X.509 που περιέχουν πληροφορίες όπως το δημόσιο κλειδί και MAC διεύθυνση. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιούνται τα πιστοποιητικά για την αναγνώριση των συσκευών και οι υπόλοιπες μέθοδοι που αναφέρθηκαν ως επιπλέον τρόποι αυθεντικοποίησης χρηστών.
3. Ευέλικτα πρωτόκολλα διαχείρισης κλειδιών : Τα σχήματα Privacy και Key Management Protocol Version 2 (PKMv2) έχουν επιλεχτεί για την ασφαλή μεταφορά περιεχομένου που

<sup>3</sup>Τα ψηφιακά πιστοποιητικά είναι ηλεκτρονικά έγγραφα που χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση ενός προσώπου / εξυπηρετητή /οργανισμού και την συσχέτισή του με ένα δημόσιο κλειδί

σχετίζεται με τα ίδια τα κλειδιά ανάμεσα στα συμβαλλόμενα μέρη της επικοινωνίας. Η ανανέωση τόσο της αυθεντικοποίησης όσο και των κλειδιών, τηρείται αυστηρά σε περιοδικά διαστήματα. Το PKM είναι ένα πρωτόκολλο τύπου πελάτη-εξυπηρετητή, με τον BS να αποτελεί τον εξυπηρετητή και τον MS να αναλαμβάνει το ρόλο του πελάτη. Χρησιμοποιούνται X.509 ψηφιακά πιστοποιητικά και τον κρυπτογραφικό αλγόριθμο δημοσίου κλειδιού RSA (Rivest-Shamer-Adleman) για να εισάγουν στοιχεία ασφάλειας στις ανταλλαγές κλειδιών ανάμεσα σε BS και MS.

4. Προστασία μηνυμάτων ελέγχου: Η ακεραιότητα των μηνυμάτων ελέγχου που μεταδίδονται σε ένα τόσο επισφαλές μέσο όπως ο αέρας προστατεύεται με τη χρήση συναρτήσεων σύνοψης <sup>4</sup> όπως η HMAC (που βασίζεται στον MD5) και η CMAC (που βασίζεται στον AES).
5. Γρήγορη μετάβαση σε νέο BS (handover) : Για να επιταχυνθεί η διαδικασία του handoff όσον αφορά τον τομέα της ασφάλειας, το WiMAX επιτρέπει στο MS να χρησιμοποιεί προ-αυθεντικοποίηση με ένα συγκεκριμένο σταθμό βάσης -στόχο, ώστε να διευκολύνει την είσοδό του σε αυτόν. Το σχήμα της τριμερούς χειραψίας βελτιώνει αισθητά την ταχύτητα των ενεργειών ενώ παράλληλα προστατεύει από επιθέσεις ενδιάμεσου (man-in-the-middle).

## 5.6 Υπηρεσίες πολυεκπομπής (Multicast) και πανεκπομπής (Broadcast)

Το επίπεδο ζεύξης mobile WiMAX υποστηρίζει υπηρεσίες πολυεκπομπής και πανεκπομπής (MBS). Οι συναρτήσεις και τα ιδιαίτερα γνωρίσματα που συμπεριλαμβάνονται στο πρότυπο είναι :

- Ειδικοί μηχανισμοί σηματοδοσίας του MS για να αιτήσει και να εγκαθιδρύσει τέτοιες υπηρεσίες.
- Πρόσβαση του σταθμού του συνδρομητή σε υπηρεσίες MBS για έναν ή περισσότερους σταθμούς βάσης, ανάλογα με τις δυνατότητες και επιθυμία του.
- Οι υπηρεσίες αυτές σχετίζονται με QoS χαρακτηριστικά και κρυπτογραφούνται με κλειδί καθορισμένο γενικά για ολόκληρη τη κίνηση.
- Ξεχωριστή ζώνη του MAC επιπέδου με ειδική πληροφορία για μηνύματα τύπου MBS.
- Μέθοδοι για παράδοση μηνυμάτων MBS σε σταθμούς χρηστών με κατάσταση λειτουργίας σε “αδράνεια” (idle mode).

---

<sup>4</sup>Μια συνάρτηση σύνοψης δέχεται ως είσοδο ένα μεταβλητού μεγέθους μήνυμα και παράγει ως έξοδο μια σύνοψη (hash ή digest) σταθερού μήκους. Η έξοδος αυτή αποτελεί εχέγγυο της ακεραιότητας του αρχικού μηνύματος.

## 6 Εξελιγμένα χαρακτηριστικά για βελτίωση της απόδοσης

Το WiMAX εμπεριέχει καινοτόμα χαρακτηριστικά που ενισχύουν την συνολική απόδοση του συστήματος. Τα κυριότερα από αυτά περιλαμβάνουν σύγχρονες τεχνικές πολλαπλών κεραιών, υβριδική τεχνολογία ARQ και προχωρημένη επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων (frequency reuse).

### 6.1 Σύγχρονα συστήματα κεραιών

Το πρότυπο WiMAX παρέχει εκτεταμένη υποστήριξη όσο αναφορά την υλοποίηση λύσεων πολλαπλών κεραιών. Αξιοσημείωτα κέρδη στην συνολική φασματική αλλά και χωρητική απόδοση του συστήματος μπορούν να κατορθωθούν αναπτύσσοντας την προαιρετική τεχνολογία με την ονομασία advanced antenna systems (AAS). Η οποία υποστηρίζει τεχνολογίες όπως διαφορισμός μετάδοσης (transmit diversity), μορφοποίηση λοβών ακτινοβολίας (beamforming) και πολυπλεξία χώρου (spatial multiplexing).

Διαφορισμός μετάδοσης (transmit diversity) : Πλήθος σχημάτων κωδικοποίησης σε μπλοκ στο χώρο – χρόνο (space-time block code STBC) δημιουργούν πλούσιο σύνολο επιλογών για την downlink μετάδοση. Η επίτευξη της ζητούμενης ποικιλομορφίας απαιτεί την ύπαρξη δύο ή περισσότερων κεραιών στον πομπό και μίας ή περισσότερων κεραιών στο δέκτη. Στην περίπτωση κεραιών 2 το σχήμα STBC χρησιμοποιεί κώδικες τύπου Alamouti<sup>5</sup> που είναι ορθογώνιοι και υπόκεινται σε ανίχνευση μέγιστης πιθανότητας. Η υλοποίηση των Alamouti STBC δεν θεωρείται αυξημένης πολυπλοκότητας, ενώ το διαφορικό κέρδος (diversity gain) που προσφέρει είναι όμοιο με αυτό κεραιών τύπου 1 σε συνδυασμό με μέγιστο λόγο, παρά το αντίτιμο των 3dB λόγω των περισσιων μεταδόσεων. Το πλεονέκτημα του διαφορισμού μετάδοσης έγγυται στο γεγονός ότι η πολυπλοκότητα υλοποίησης μετατοπίζεται στην πλευρά του σταθμού βάσης, διατηρώντας το κόστος απόκτησης των φορητών σταθμών εξαιρετικά χαμηλό. Υποστηρίζονται ακόμη, κώδικες STBC για περιπτώσεις τριών και τεσσάρων κεραιών.

Μορφοποίηση λοβών ακτινοβολίας (beamforming) : Πολλαπλές κεραιές, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν, για την μετάδοση του ίδιου σήματος. Το κατάλληλα βεβαρημένο σήμα, για κάθε στοιχείο του συστήματος των κεραιών, επιδρά στην εστίαση του λοβού μετάδοσης προς την κατεύθυνση του κινητού και τη αποφυγή των παρεμβολών, βελτιώνοντας δραστικά το σηματοδοτικό λόγο  $SINR$ . Η τεχνική αυτή είναι ικανή να προσφέρει ουσιαστικά' οφέλη στην ακτίνα κάλυψης, την χωρητικότητα και την αξιοπιστία του δικτύου. Η μετάδοση με beamforming απαιτεί τέλεια γνώση του καναλιού από την πλευρά του εκπομπού, που στην περίπτωση TDD είναι εύκολα διαθέσιμη λόγω αμοιβαιότητας του καναλιού, ενώ για το FDD ο βρόγχος ανάδρασης που θα γνωστοποιεί τα χαρακτηριστικά του καναλιού αποτελεί βασική προϋπόθεση για την απροβλημάτιστη λειτουργία του. Υποστηρίζεται η τεχνολογία beamforming για μεταδόσεις downlink αλλά και uplink. Να σημειωθεί ότι στην δεύτερη περίπτωση λαμβάνει το χαρακτήρα του beamforming λήψεως.

<sup>5</sup>Ο κώδικας αυτός ανακαλύφθηκε από τον Alamouti το 1998, και αποτελεί τον απλούστερο από τους STBC κώδικες. Είναι ορθογώνιος και τύπου rate-1, παρά την απλότητά του είναι ο μοναδικός που πετυχαίνει (diversity gain) διαφορικό κέρδος χωρίς να θυσιάζει μέρος του ρυθμού μετάδοσης.

Πολυπλεξία χώρου (spatial multiplexing) : Πολλαπλές ανεξάρτητες ροές δεδομένων μεταδίδονται με την χρήση ξεχωριστών, πολλαπλών κεραιών. Εάν ο δέκτης διαθέτει ανάλογο σύστημα οι ροές μπορούν να διαχωριστούν με την χρήση χωρικής-χρονικής επεξεργασίας (space-time processing). Οι πολλαπλές κεραιές, εδώ χρησιμεύουν στην βελτίωση του ρυθμού μετάδοσης και της συνολικής χωρητικότητας. Θεωρώντας περιβάλλον με έντονο το φαινόμενο της πολυδιόδευσης (multipath), η χωρητικότητα δύναται να αυξηθεί γραμμικά με το πλήθος των κεραιών, εάν χρησιμοποιηθεί χωρική πολυπλεξία. Το σύστημα 2 MIMO διπλασιάζει την μέγιστη ικανότητα ρυθμοαπόδοσης (throughput) του WiMAX. Ακόμη και στην περίπτωση που ο δέκτης έχει μοναδική κεραιά, παραμένει εφικτή η τεχνική της χωρικής πολυπλεξίας με την κωδικοποίηση πολλαπλών χρηστών στην μετάδοση του uplink. Η ονομασία αυτής της μεθόδου είναι collaborative spacial multiplexing. Μοναδικό μειονέκτημα αποτελεί ο απαραίτητος όρος της ύπαρξης πολύ καλών συνθηκών καναλιού ( $SINR$ ).

## 6.2 Υβριδικό – ARQ (Hybrid -ARQ)

Η υβριδική τεχνολογία ARQ είναι βασισμένη στο σύστημα ARQ, υλοποιείται σε φυσικό επίπεδο και συνδυάζεται με κωδικοποίηση διόρθωσης λαθών (FEC) παρέχοντας έτσι βελτιωμένη απόδοση ζεύξης, με αντάλλαγμα την αυξημένη πολυπλοκότητα εφαρμογής. Στην απλούστερη της μορφή, μπλοκ δεδομένων μαζί με κώδικα τύπου CRC κωδικοποιούνται χρησιμοποιώντας το σχήμα FEC πριν την μετάδοση τους στο μέσο. Επανεκπομπές επιτρέπονται κατόπιν ρητής αίτησης του δέκτη λόγω αδυναμίας αποκωδικοποίησης του λαμβανόμενου μπλοκ. Όταν ληφθεί μπλοκ που έχει απανεκπεμφθεί συνδυάζεται με την προηγούμενη ανίχνευση και οδηγείται ως είσοδο στον FEC αποκωδικοποιητή, οι δύο εκδοχές του ίδιου μπλοκ δηλαδή συνταιριάζονται μεγιστοποιώντας την πιθανότητα ορθής αποκωδικοποίησης. Συχνά, σε αυτό το είδος H-ARQ δίνεται το όνομα type I chase combining.

Το πρότυπο WiMAX υποστηρίζει ARQ τύπου stop and wait N- καναλιών και πληθώρα FEC κωδίκων. Πολλαπλά παράλληλα κανάλια κάνοντας χρήση του H-ARQ βελτιώνουν το ρυθμό μετάδοσης (throughput), μιας και καθ' όλη την διάρκεια αναμονής επιβεβαίωσης λήψης μηνύματος από διεργασία H-ARQ το κανάλι είναι εκμεταλλεύσιμο από άλλη διεργασία προς αποστολή περισσότερων δεδομένων. Μηχανισμοί σηματοδοσίας του WiMAX επιτρέπουν ασύγχρονη λειτουργία της τεχνολογίας H-ARQ. Χρησιμοποιείται αποκλειστικό κανάλι για την μετάδοση των σημάτων ACK/NACK στο uplink. Συνάγεται έτσι το πλεονέκτημα μεταβλητής καθυστέρησης επανεκπομπών προσδίδοντας μεγαλύτερη ευελιξία στον χρονοπρογραμματιστή (scheduler).

Η αξιοπιστία μετάδοσης αποτέλεσε σημαντικό μέρος κατά τον σχεδιασμό του WiMAX προτύπου γιαυτό και επέλεξαν να ενσωματώσουν, με προαιρετικό χαρακτήρα, την τεχνική H-ARQ type II ή αλλιώς incremental redundancy, διευρύνοντας τις παροχές και τις δυνατότητες των κατασκευαστών.

Βελτιωμένη επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων (frequency reuse) : Η εγκαθίδρυση συστημάτων WiMAX θεμελιωμένων με καθολικό πλάνο επαναχρησιμοποίησης συχνοτήτων είναι εφικτή. Εντούτοις, ενδέχεται η παρεμβολή κατά μήκος των ακμών του κελιού ή των τομέων να προκαλέ-

σει διακοπές στην εύρυθμη λειτουργία του συστήματος. Η λύση που ακολουθήθηκε στο WiMAX εστιάζεται στο συντονισμό της ανάθεσης υπο-φερόντων σε χρήστες που τοποθετούνται χωρικά κοντά σε ακμές κελιών. Η θεώρηση αυτή επιτρέπει δυναμική ανάθεση συχνοτήτων ανάμεσα στους τομείς ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες φόρτου και παρεμβολών και έρχεται σε πλήρη αντιδιαστολή με την συνήθη σταθερή ανάθεση συχνοτήτων (fixed frequency planning). Χρήστες που λαμβάνουν εξαιρετικής ποιότητας συνθήκες έχουν στην διάθεσή τους ολόκληρο το εύρος ζώνης και λειτουργούν με λόγο επαναχρησιμοποίησης συχνότητας 1. Αντίθετα σε σημεία που οι τιμές  $SNR$  απέχουν πολύ από τις ιδανικές στους χρήστες ανατίθενται μη επικαλυπτόμενα subchannels με λόγο επαναχρησιμοποίησης 2, 3 ή 4 ανάλογα με το συνολικό αριθμό των μη επικαλυπτόμενων subchannel συνόλων που επιτρέπεται να διαμοιραστούν ανάμεσα σε αυτούς τους χρήστες. Οδηγούμαστε έτσι σε αποδοτική επαναχρησιμοποίηση που λαμβάνει κλασματικές τιμές μεγαλύτερες της μονάδας. Η ποικιλία κατηγοριοποίησης των υπο-φερόντων στο WiMAX επιτρέπει να επιτευχθεί ο στόχος αυτός με ευέλικτο τρόπο. Φυσικά, το μειονέκτημα της λύσης είναι πως οι χρήστες που βρίσκονται πολύ κοντά στα όρια των κελιών δεν μπορούν να επωφεληθούν του συνόλου του εύρους ζώνης και γίνονται αποδέκτες μικρότερων ρυθμών μετάδοσης.

**Part II**

## **Προβλήματα Εκχώρησης Πόρων**



## 7 Εισαγωγή σε προβλήματα ανάθεσης πόρων

Ας θεωρήσουμε ένα πλήρες διμερές γράφημα  $G(X, Y)$ , με βάρη  $c_{ij}$  να έχουν ανατεθεί σε κάθε ακμή. Το γράφημα αυτό θα μπορούσε να αποτελεί την μοντελοποίηση μιας σειράς προβλημάτων ανάθεσης πόρων όπως για παράδειγμα, τη τοποθέτηση ενός συνόλου εργατών σε μιά σειρά από διαφορετικές εργασίες ή ακόμη την αντιστοίχιση καναλιών-συχνοτήτων στους χρήστες ενός ασύρματου δικτύου, που αποτελεί και την περίπτωση της συζήτησής μας. Ο πίνακας  $C$  ανάλογα με την φύση του προβλήματος μπορεί να παριστά κόστος ή ωφελιμότητα, γεγονός που καθορίζει την επιλογή της αντικειμενικής συνάρτησης ως συνάρτηση ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης αντίστοιχα.

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης (Assignment Problem) συνίσταται στην επιλογή του βέλτιστου ταιριάσματος (matching) για το γράφημα  $G$ . Εφόσον, το  $G$  αποτελεί πλήρες γράφημα γνωρίζουμε από την θεωρία πως ένα τέτοιο βέλτιστο ταιρίασμα πάντα υπάρχει, χωρίς να είναι απαραίτητα και μοναδικό. Εκφράζοντας το παραπάνω γραμμικό (LP) πρόβλημα με τη μορφή μαθηματικών εξισώσεων έχουμε :

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad (1 \leq j \leq m)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

Θεωρήσαμε  $c_{ij} \geq 0$ . Εάν ισχύει  $m = n$ , το πρόβλημα κατατάσσεται στην ευρύτερη οικογένεια προβλημάτων μεταφοράς και έχει πάντα λύση. Ο simplex αλγόριθμος παράγει μόνο ακέραιες λύσεις επομένως, τα  $x_{ij}$  μπορούν να λάβουν μόνο τις τιμές 0 ή 1. Η λύση  $x_{i,j} = 1$  σημαίνει πως το άτομο  $i$  επιφορτίστηκε με την αποπεράτωση της εργασίας  $j$ . Το πρόβλημα είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε σε κάθε εργαζόμενο να ανατεθεί ορισμένη δραστηριότητα. Οι συντελεστές ποσοτικοποιούν την καταλληλότητα του ατόμου να ανταπεξέρθει σε μια συγκεκριμένη εργασία, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζει την συνολική απόδοση του συστήματος.

### 7.1 Μετασχηματισμοί προβλημάτων στη γενική μορφή

Ποικίλα προβλήματα ανάθεσης πόρων μπορούν εύκολα να μετασχηματιστούν στην γενική μορφή γραμμικών προβλημάτων που περιγράψαμε παραπάνω.

1. Εάν ισχύει  $n \neq m$  το πρόβλημα χαρακτηρίζεται μη-ισορροπημένο (unbalanced). Ο μετασχηματισμός πραγματοποιείται εισάγοντας ψευδείς μεταβλητές (false variables), τόσες ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα δηλαδή  $n = m$ . Τα κόστη που ανατίθενται στις μεταβλητές αυτές είναι αριθμοί με πολύ μεγάλη τιμή. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο hungarian αλγόριθμος δεν ενδείκνυται για την επίλυση μη-ισορροπημένων προβλημάτων, αφού τα αποτελέσματα που θα προκύψουν ενδέχεται να μην είναι ορθά.
2. Εάν το πρόβλημα LP' αναφέρεται σε συνάρτηση μεγιστοποίησης δηλαδή εκφράζεται από τον τύπο:

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

η μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση ελαχιστοποίησης είναι εφικτή. Πρέπει να ληφθεί υπόψη, η διατήρηση του θετικού προσήμου των συντελεστών ωφελιμότητας  $c_{ij}$  του πίνακα. Ορίζουμε λοιπόν,

$$M = \max c_{ij} \forall i, j$$

και θεωρούμε το γραμμικό πρόβλημα LP'', με νέο αντικειμενικό μέρος

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M - c_{ij}) x_{ij}$$

Οι σχέσεις των περιορισμών του προβλήματος παραμένουν ως έχουν. Οι αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών προβλημάτων που θα μελετήσουμε προϋποθέτουν θετικές τιμές για τα βάρη  $c_{ij}$ , επομένως η μετατροπή του αρχικού προβλήματος LP' σε συνάρτηση ελαχιστοποίησης με μορφή

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -c_{ij} x_{ij}$$

δεν είναι αποδεκτή. Εντούτοις αποδεικνύεται (θεώρημα 4) ότι οι δύο αυτές όψεις είναι ισοδύναμες. Όλα τα παραπάνω ισχύουν, στη περίπτωση προβλημάτων πεπερασμένου κόστους. Αν το πρόβλημα δεν συγκαταλέγεται στην κατηγορία του πεπερασμένου κόστους ακολουθείται διαφορετική προσέγγιση και κάθε στοιχείο γραμμής (στήλης) αφαιρείται από το μέγιστο στοιχείο της αντιστοιχίας γραμμής (στήλης).

3. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα της ανάθεσης περιέχει κάποιο σημείο δυσκολίας ή αλλιώς κάποιον ανασχετικό παράγοντα (bottleneck), είναι δηλαδή ανέφικτο να ανατεθούν συγκεκριμένες εργασίες σε ορισμένα άτομα. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε αυτή την περίπτωση, θέτουμε μια σταθερά  $c_{ij} = K$  και επιδιώκουμε να μην χρησιμοποιήσουμε ποτέ την σταθερά αυτή στην ροή του hungarian αλγορίθμου.

## 7.2 Το πρόβλημα ανάθεσης που θα μελετηθεί

Το ζήτημα που θα μας απασχολήσει στην εργασία αυτή, όπως προαναφέρθηκε, περιλαμβάνει την αντιστοίχιση καναλιών ή συχνοτήτων στους κινητούς χρήστες ενός ασύρματου WiMax δικτύου. Έστω ότι, το σύνολο  $X$  αντιπροσωπεύει τους χρήστες, το  $Y$  αναφέρεται στα διαθέσιμα κανάλια ενώ το βάρος των ακμών  $c_{ij}$  είναι δυνατόν να αντικατοπτρίζει είτε το σηματοθορυβικό λόγο ( $SNR$ ) των χρηστών είτε το ρυθμό μετάδοσης δεδομένων για κάθε ανάθεση καναλιού. Συγκρατάλεγεται στην οικογένεια των προβλημάτων μεταφοράς λόγω των πρόσθετων περιορισμών που εισάγει. Ολοκληρωμένο το πρόβλημα θα έχει την μορφή :

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad (1 \leq j \leq n)$$

και

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{στον χρήστη } i \text{ ανατίθεται το κανάλι } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Οι περιορισμοί προέκυψαν από την φυσική ερμηνεία του προβλήματος. Σε κάθε χρήστη μπορεί να ανατεθεί ένα κανάλι και κάθε κανάλι μπορεί να ανατεθεί το πολύ σε ένα χρήστη αντίστοιχα. Επομένως, οι λύσεις που αναμένουμε να λάβουμε για τα  $x_{ij}$  είναι ακέραιες τιμές. Οποιαδήποτε άρση αυτών των περιορισμών θα τονίζεται ρητά και θα αιτιολογείται με σαφήνεια στις παρακάτω ενότητες.

Πλήθος αλγορίθμων έχουν προταθεί για τον εντοπισμό της λύσης του προβλήματος που περιγράψαμε. Εκθετικής πολυπλοκότητας αλγόριθμοι τύπου brute force που εξετάζουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις ( $n!$ ) δεν συνίστανται όταν οι πίνακες είναι ευμεγέθεις ή όταν οι περιορισμοί περιλαμβάνουν αυστηρά χρονικά όρια. Ο hungarian αλγόριθμος, ο οποίος περατώνει την κανανομή των πόρων σε χρόνο πολυωνυμικό, κρίνεται ιδιαίτερα ελκυστικός. Εκτενής λόγος γι' αυτόν, θα γίνει στις ακόλουθες ενότητες.

## 7.3 Ο Αλγόριθμος των Kuhn και Munkres

Ο Hungarian είναι ένας αλγόριθμος σχεδιασμένος να επιλύει αποδοτικά προβλήματα ταιριάσματος, ή γενικεύοντας, (γραμμικά) προβλήματα ανάθεσης. Το όνομα δόθηκε από τον H.W.Kuhn ως ένδειξη αναγνώρισης των εργασιών δύο σπουδαίων Ούγγρων μαθηματικών των J.Egervary(1931) και D.Konig(1936). Χαρακτηριστικά ήταν τα γραφόμενα του εφευρέτη στην προσπάθειά του να αιτιολογήσει το όνομα του αλγορίθμου:

... One interesting aspect of the algorithm is the fact that it is latent in the work of D. König and E. Egervary that predates the birth of linear programming by more than 15 years (hence the name, the "Hungarian Method") ...

H.W. Kuhn, The Hungarian Method for the Assignment Problem, Naval Research Logistics Quarterly, 2, 83-97, 1955.

Η αρχική έκδοση του αλγορίθμου παρουσιάστηκε από τον Harold Kuhn το 1955 με τίτλο "The Hungarian Method for the assignment problem", *Naval Research Logistic Quarterly* και βελτιώθηκε από τον James Mukres το 1957 με την εργασία του *Algorithms for the Assignment and Transportation Problems*, *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*. Η καινοτομία που εισήγαγε ο Kuhn ήταν ο συνδιασμός δύο διαφορετικών μερών της απόδειξης του Egervary. Η μέθοδος αυτή επιλύει προβλήματα αναθέσεων σε πολυωνυμικό χρόνο και πιο συγκεκριμένα σε χρόνο  $O(n^3)$ .

## 7.4 Εισαγωγικές Έννοιες - Ορισμοί

Ένα γράφημα χαρακτηρίζεται *διμελές (bipartite)* εάν το σύνολο των κορυφών του  $V$ , διαμερίζεται σε δύο διαζευγμένα υποσύνολα  $X$  και  $Y$ , τέτοια ώστε κάθε ακμή του γραφήματος να ενώνει κορυφή του πρώτου με κορυφή του δεύτερου υποσυνόλου. Χρησιμοποιώντας μια πιο αυστηρή μαθηματική διατύπωση ορίζουμε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ως *διμελές* εάν υπάρχει  $V = X \cup Y$  διαμέριση τέτοια ώστε  $X \cap Y = \emptyset$  και  $E \subseteq X \times Y$ .

*Ταίριασμα (matching)* σε διμελές γράφημα  $G = (X, Y, E)$  ορίζεται ένα σύνολο ακμών με διαζευγμένα άκρα ή αλλιώς ένα υποσύνολο  $M \subseteq E$  τέτοιο ώστε  $\forall v \in V$  το πολύ μία ακμή του  $M$  είναι προσκείμενη στην κορυφή  $v$ . Ένα ταίριασμα  $M$  καλείται *μέγιστο* εάν δεν υπάρχει άλλο ταίριασμα  $M'$  που να το περιέχει, πρέπει δηλαδή να ικανοποιεί την σχέση  $|M'| \leq |M|$ .

Εάν σε κάθε ακμή  $(i, j)$  διμελούς γραφήματος αντιστοιχίσουμε ένα βάρος ή μια τιμή  $w(i, j)$  προκύπτει ένα *διμελές γράφημα με βάρη (weighted biparted graph)*. Το *βάρος του ταίριασματος (weight of matching)* είναι το άθροισμα των επιμέρους βαρών των ακμών που ανήκουν στο ταίριασμα  $M$ ,

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e).$$

Το πρόβλημα λοιπόν που προκύπτει είναι το εξής: Δεδομένου ενός διμελούς γραφήματος με βάρη αναζητούμε εκείνο το ταίριασμα που συνκεντρώνει το μέγιστο βάρος. Ας σημειωθεί πως χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε πάντα να προσθέτουμε ακμές βάρους 0 προκειμένου να θεωρούμε *πλήρη βεβαρωμένο γράφο (complete weighted graph)*.

Έστω  $M$  ταίριασμα του γραφήματος  $G$ . Η κορυφή  $v$  είναι *αντιστοιχημένη (matched)* εάν ανήκει σε μία ακμή του ταίριασματος  $M$ , διαφορετικά καλείται *ελεύθερη κορυφή ή μη αντιστοιχημένη (free or unmatched)*. Για παράδειγμα, στην εικόνα Figure 16 οι κορυφές  $Y_2, Y_3, Y_4, Y_6$  και  $X_2, X_4, X_5, X_6$  είναι αντιστοιχημένες (ταιριασμένες) ενώ όλες οι υπόλοιπες χαρακτηρίζονται ελεύθερες. Ένα μονοπάτι ονομάζεται *εναλλασσόμενο (alternating path)* εάν οι ακμές του

εναλλάσσονται ανάμεσα στα σύνολα  $M$  και  $E - M$ . Στην εικόνα Figure 16 το μονοπάτι  $Y_1, X_2, Y_2, X_4, Y_4, X_5, Y_3, X_3$  είναι εναλλασσόμενο.

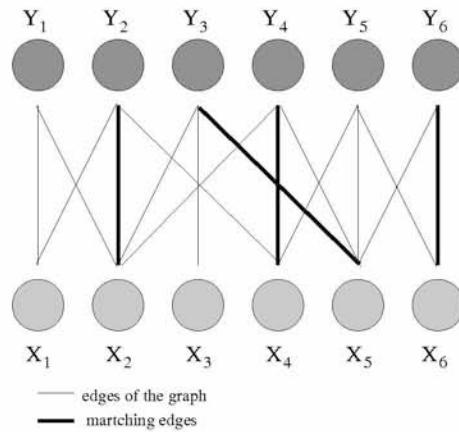


Figure 16: Ταίριασμα σε γράφο

Το εναλλασσόμενο μονοπάτι που ξεκινά και τελειώνει σε ελεύθερες-μη αντιστοιχημένες κορυφές καλείται *επαυξητικό (augmenting path)*. Στην εικόνα Figure 17 το μονοπάτι  $Y_5, X_5, Y_3, X_3$  είναι επαυξητικό. Τα επαυξητικά μονοπάτια παρουσιάζουν μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα η οποία και χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε επαυξητικό μονοπάτι οι ακμές του συνόλου  $E - M$  είναι κατά μία περισσότερες από τις ακμές του συνόλου του ταιριάσματος  $M$ . Εάν αντικαταστήσουμε τις  $M$  ακμές με αυτές του συνόλου  $E - M$  τότε πετυχαίνουμε να αυξήσουμε κατά μία μονάδα το μέγεθος του ταιριάσματος. *Εναλλασσόμενο δέντρο (alternating tree)* ονομάζεται το δέντρο με ρίζα μία ελεύθερη-μη αντιστοιχημένη κορυφή, του οποίου κάθε μονοπάτι είναι εναλλασσόμενο. Στην παρακάτω εικόνα Figure 17, διακρίνουμε το εναλλασσόμενο δέντρο με ρίζα την κορυφή  $Y_5$ .

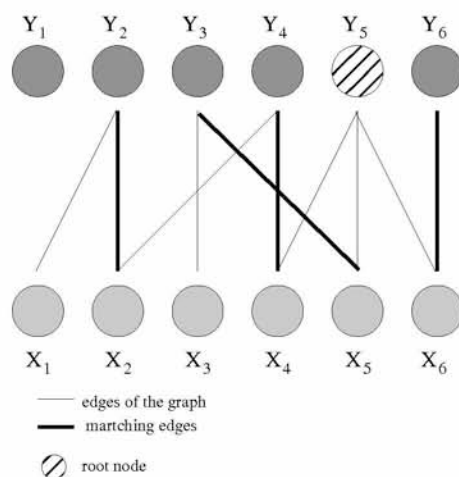


Figure 17: Εναλλασσόμενο δέντρο

Σημαντικό είναι το θεώρημα του Berge's που συσχετίζει το μέγιστο ταιρίασμα με την ύπαρξη

επαυξητικών μονοπατιών

**Θεώρημα 1 (Berge's)** Ένα ταίριασμα  $M$  σε ένα γράφο  $G$  είναι μέγιστο αν και μόνο αν στο γράφημα  $G$  δεν υπάρχουν  $M$ -επαυξητικά μονοπάτια.

Σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος μπορούμε να τοποθετήσουμε ετικέτες (*labeling*) με βάση μια συνάρτηση  $\ell : V \rightarrow R$ . Εφικτές ετικέτες είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει :

$$\ell(x) + \ell(y) \geq w(x, y), \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Γράφος ισόδυναμίας (*equality graph*), δεδομένης συνάρτησης  $\ell$  ονομάζεται ο γράφος  $G = (V, E_\ell)$  που ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα :

$$E_\ell = (x, y) : \ell(x) + \ell(y) = w(x, y).$$

Ας θεωρήσουμε πάλι το πρόβλημα της ανάθεσης σε πλήρη διμελή γράφο  $G$  με βάρη. Το ζητούμενο είναι η εύρεση ταιριάσματος με μέγιστο βάρος (*max-weight matching*) στο  $G$ . Τέλειο ταίριασμα (*perfect matching*)  $M$  είναι αυτό για το οποίο κάθε κορυφή είναι προσκείμενη σε κάποια ακμή στο  $M$ .

**Θεώρημα 2** Ένα ταίριασμα μεγίστου βάρους είναι πάντοτε τέλειο.

**Θεώρημα 3 (Kuhn-Munkres)** Έστω ότι  $\ell$  είναι μία συνάρτηση που παράγει εφικτές ετικέτες για τις κορυφές του γράφου και  $M$  είναι ένα τέλειο ταίριασμα των ακμών που ανήκουν στο  $E_\ell$ , τότε το  $M$  αποτελεί ταίριασμα μεγίστου βάρους.

**Απόδειξη :**

Θεωρούμε την ακμή  $e \in E$  με  $e = (e_x, e_y)$ . Έστω  $M'$  ένα οποιοδήποτε δυνατό ταίριασμα στο γράφο  $G$  (όχι απαραίτητα στο σύνολο ακμών  $E_\ell$ ). Αφού κάθε κορυφή  $v \in V$  καλύπτεται ακριβώς μία φορά στο  $M$  έχουμε :

$$w(M') = \sum_{e \in M'} w(e) \leq \sum_{e \in M'} (\ell(e_x) + \ell(e_y)) = \sum_{v \in V} \ell(v)$$

Επομένως το άθροισμα  $\sum_{v \in V} \ell(v)$  αποτελεί άνω όριο στο κόστος οποιουδήποτε ταιριάσματος. Τώρα έστω ότι το  $M$  είναι ένα δυνατό ταίριασμα στο σύνολο των ακμών  $E_\ell$ . Τότε ισχύει  $w(M) = \sum_{e \in M} w(e) = \sum_{v \in V} \ell(v)$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως  $w(M') \leq w(M)$  και το ταίριασμα  $M$  είναι βέλτιστο.  $\square$

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα των Kuhn-Munkres πετυχαίνει να μετατρέψει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, αυτό της εύρεσης ταιριάσματος μεγίστου βάρους σε συνδιαστικό πρόβλημα αναζήτησης τέλειου ταιριάσματος. Η τεχνική αυτή, συναντάται συχνά στη συνδιαστική βελτιστοποίηση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σημείο της απόδειξης στο οποίο αναφέρεται

ότι για οποιοδήποτε ταίριασμα και οποιοσδήποτε εφικτές επικέτες που αποδίδονται μέσω της συναρτησης  $\ell$  έχουμε :

$$w(M) \leq \sum_{u \in V} \ell(v).$$

Η ιδιότητα αυτή έχει σημαντικό αντίκτυπο στα θεωρήματα μέγιστης ροής (max-flow) και ελάχιστης τομής (min-cut).

### 7.5 Αναλυτική παρουσίαση των βημάτων του Αλγορίθμου

Πρίν την ολοκληρωμένη παρουσίαση των βημάτων του αλγορίθμου, θα προηγηθεί ενδελεχής ανάπτυξη των επιμέρους μερών. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου συνοψίζεται στις παρακάτω γραμμές :

Αρχικά, τοποθετούμε εφικτές επικέτες στις κορυφές του γράφου μέσω μιας συνάρτησης ετικετοποίησης  $\ell$ . Κατόπιν, αναζητούμε ένα οποιοδήποτε ταίριασμα  $M$  στο σύνολο ακμών  $E_\ell$  του γράφου ισοδυναμίας. Όσο το ταίριασμα δεν είναι τέλει επαναλαμβάνουμε τα ακόλουθα :

- Βρίσκουμε ένα επαυξητικό μονοπάτι που να περιέχει το  $M$  στο σύνολο  $E_\ell$  (η ενέργεια αυτή αυξάνει το μέγεθος του ταίριασματος κατά μία μονάδα)
- Εάν δεν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι, βελτιώνουμε τις επικέτες των κορυφών από  $\ell$  σε  $\ell'$  έτσι ώστε  $E_\ell \subset E_{\ell'}$ . Επιστροφή στο προηγούμενο βήμα.

Παρατηρούμε, πως σε κάθε βήμα του βρόγχου δύναται να συμβεί είτε αύξηση του μεγέθους του ταίριασματος  $M$  είτε του συνόλου των ακμών  $E_\ell$ , υπάρχει δηλαδή πρόοδος σε κάθε βήμα του αλγορίθμου γεγονός που μας ωθεί στο συμπέρασμα πως η διαδικασία αυτή κάποια στιγμή οδηγείται σε τερματισμό. Επιπλέον, όταν η διαδικασία τερματιστεί, το  $M$  θα αποτελεί τέλει ταίριασμα στο σύνολο  $E_\ell$  για τις εφικτές επικέτες  $\ell$ . Επομένως, εφαρμόζοντας το θεωρήμα των Kuhn-Munkres, που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, συμπεραίνουμε πως το  $M$  αποτελεί ταίριασμα μεγίστου βάρους. Ένα ζήτημα το οποίο δεν έχει διασαφηνισθεί μέχρι το σημείο αυτό και αποτελεί κομβικό σημείο για την λειτουργία του αλγορίθμου, είναι ο τρόπος ετικετοποίησης των κορυφών του γραφήματος.

Η περίπτωση της απόδοσης εφικτών ετικετών στην έναρξη του αλγορίθμου αντιμετωπίζεται πράττοντας τα παρακάτω :

$$\forall y \in Y, \ell(y) = 0,$$

$$\forall x \in X, \ell(x) = \max_{y \in Y} \{w(x, y)\}$$

Φυσικά, με αυτήν την προσέγγιση ικανοποιείται ο κανόνας που ορίζει τις εφικτές ετικέτες αφού :

$$\forall x \in X, y \in Y, w(x, y) \leq \ell(x) + \ell(y).$$

Πρίν διευκρινήσουμε τον τρόπο βελτίωσης (ενημέρωσης) των ετικετών, που ορίζεται στο σώμα του αλγορίθμου είναι αναγκαίο να παραθέσουμε κάποιους πρόσθετους ορισμούς:

Έστω  $\ell$  οι εφικτές ετικέτες σε ένα γράφο  $G$ . Ορίζουμε γειτονιά (neighbour) της κορυφής  $u \in V$  και του συνόλου  $S \subseteq V$  γενικότερα :

$$N_\ell(u) = \{v : (u, v) \in E_\ell\}, \quad N_\ell(S) = \cup_{u \in S} N_\ell(u)$$

**Λήμμα 1** Έστω  $S \subseteq X$  και  $T = N_\ell(S) \neq Y$  θέτουμε

$$a_\ell = \min_{x \in X, y \notin T} \{\ell(x) + \ell(y) - w(x, y)\}$$

$$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) - a_\ell, & \text{εάν } v \in S \\ \ell(v) + a_\ell, & \text{εάν } v \in T \\ \ell(v), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Οι  $\ell'$  ετικέτες είναι εφικτές και επιπλέον ισχύουν τα παρακάτω :

- Εάν  $(x, y) \in E_\ell$  για  $x \in S, y \in T$  τότε  $(x, y) \in E_{\ell'}$ .
- Εάν  $(x, y) \in E_\ell$  για  $x \notin S, y \notin T$  τότε  $(x, y) \in E_{\ell'}$ .
- Υπάρχει κάποια ακμή  $(x, y) \in E_{\ell'}$  για  $x \in S, y \notin T$ .

Συνοψίζοντας, με την παραπάνω διαδικασία πετυχαίνουμε να προσθέσουμε ακόμη μία ακμή στο σύνολο ακμών  $E_\ell$  αυξάνοντας έτσι ακόμη περισσότερο το μέγεθος του εναλλασόμενου δέντρου. Η ακμή που επιλέγεται κάθε φορά να προστεθεί, είναι αυτή με την μικροτερη διαφορά (slack). Η αναπροσαρμογή των ετικετών γίνεται ώστε το νέο  $E'_\ell$  να περιέχει την καινούργια ακμή. Η μέθοδος αυτή, εγγυάται μια πολύ βασική για την πρόοδο του αλγορίθμου ιδιότητα, το τρέχον ταίριασμα  $M$  διατηρείται ως έχει και στο νέο γράφο ισοδυναμίας  $G'_\ell$ .

### Ο Hungarian αλγόριθμος ( Υλοποίηση με γράφους )

1. Δημιουργούνται αρχικές ετικέτες  $\ell$  για τις κορυφές του γράφου και αναζητάται ένα αρχικό ταίριασμα  $M$  για το σύνολο ακμών  $E_\ell$ .
2. Εάν το ταίριασμα  $M$  είναι τέλει, ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά, επιλέγεται μια ελεύθερη-μη αντιστοιχημένη κορυφή  $u \in X$  και δημιουργούνται τα σύνολα  $S = \{u\}, T = \emptyset$ .



3. Εάν ισχύει  $N_\ell(S) = T$ , ανανεώνονται (βελτιώνονται) οι ετικέτες των κορυφών, προκειμένου να προκύψει  $N_\ell(S) \neq T$ . Η αλλαγή των ετικετών γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες :

$$a_\ell = \min_{x \in X, y \notin T} \{ \ell(x) + \ell(y) - w(x, y) \}$$

$$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) - a_\ell, & \text{εάν } v \in S \\ \ell(v) + a_\ell, & \text{εάν } v \in T \\ \ell(v), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

4. Εάν ισχύει  $N_\ell(S) \neq T$ , επιλέγεται μια κορυφή  $y \in N_\ell(S) - T$

- Αν  $y$  ελεύθερη, το  $u-y$  αποτελεί ένα επαυξητικό μονοπάτι το ταιριασμα  $M$  αυξάνεται . Επιστροφή στο βήμα 2.
- Αν  $y$  αντιστοιχημένη-ταιριασμένη κορυφή, έστω με την  $z$ , επεκτείνεται το εναλλασσόμενο δέντρο :  $S = S \cup \{z\}, T = T \cup \{y\}$ . Επιστροφή στο βήμα 3.

## 7.6 Σχολιασμός και συζήτηση των κυριότερων σημείων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια ορισμένα βασικά σημεία του αλγορίθμου και θα επεξηγηθούν οι όποιες επιλογές ακολουθήθηκαν κατά την υλοποίηση. Η συνολική λειτουργία του αλγορίθμου έχει ως εξής:

Αρχικά τοποθετούνται εφικτές ετικέτες στις κορυφές του γραφήματος, στηριζόμενοι σε αυτές κατασκευάζουμε το γράφο ισοδυναμίας  $G_\ell$ . Αγνοώντας πλέον τα βάρη των ακμών, προσπαθούμε να εντοπίσουμε το μέγιστο ταίριασμα στον παραπάνω γράφο (στο εισαγωγικό βήμα της διαδικασίας, όπου ζητάται να εντοπιστεί ένα αρχικό ταίριασμα  $M$ , ακολουθείται η τετριμμένη περίπτωση και ο αλγόριθμος εκκινείται με δεδομένο το μηδενικό ταίριασμα,  $M = \emptyset$ ). Αν το ταίριασμα είναι βέλτιστο (τέλειο) ο αλγόριθμος τερματίζεται και η λύση του προβλήματος έχει ευρεθεί. Σε διαφορετική περίπτωση προσθέτουμε ακμές στο γράφο ισοδυναμίας σταδιακά, ανανεώνοντας τις ετικέτες των κορυφών του αρχικού γραφου. Οι καινούργιες ακμές προστίθενται με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλίζεται πως οι ακμές του τρέχοντος ταιριάσματος συμπεριλαμβάνονται στο νέο υπογράφο ισοδυναμίας. Στην συνέχεια είτε αυξάνεται το μέγεθος του ταιριάσματος με την ανακάλυψη επαυξημένου μονοπατιού είτε μεγαλώνει το εναλλασσόμενο δέντρο. Στην πρώτη περίπτωση η φάση τερματίζεται και ξεκινά η επόμενη (με το ταίριασμα να είναι μεγαλύτερο κατά μια μονάδα). Στη δεύτερη περίπτωση το δέντρο επεκτείνεται με την προσάρτηση νέων κορυφών, μια ενέργεια που μπορεί να επαναληφθεί το πολύ  $n$  φορές.

Τα σύνολα  $S$  και  $T$  περιλαμβάνουν τις κορυφές των συνόλων  $X$  και  $Y$ , που ανήκουν στο hungarian δέντρο. Η ανανέωση των ετικετών των κορυφών του γράφου πραγματοποιείται μειώνοντας ομοίμορφα κατά μία ποσότητα  $\lambda$  (βλέπε εικόνα blah.blah) τις ετικέτες των κορυφών του συνόλου  $S$  και αυξάνοντας παράλληλα τις ετικέτες του  $T$ . Με αυτόν τον τρόπο εγγυάται η

διατήρηση των  $S$  και  $T$  κορυφών στο νέο υπογράφο ισοδυναμίας. Η διαδικασία της μείωσης των τιμών του  $S$  επιτέπει σε ακμές με ακρα τα σύνολα  $S$  και  $Y - T$  να εισέλθουν μελλοντικά στον υπογράφο  $G_\ell$ . Η αύξηση του  $\lambda$  οδηγεί ντετερμινιστικά στο ζητούμενο σημείο. Αυτή είναι και η στιγμή όπου ο αλγόριθμος μεταβαίνει στην φάση της ενημέρωσης του εναλλασσόμενου δέντρου. Εάν ο καινούργιος κόμβος του  $G_\ell$ , που ανήκει στο σύνολο  $Y - T$ , είναι ήδη ταιριασμένος με κάποια κορυφή του  $S$  τότε και οι δύο αυτοι κόμβοι μετακινούνται στα σύνολα  $S$  και  $T$  αντίστοιχα, με αποτέλεσμα την αύξηση του δέντρου. Εάν ο κομβος είναι ελεύθερος-μη αντιστοιχημένος έχει ανακαλυφθεί επαυξητικό μονοπάτι, επομένως με αντιστροφή των ακμών βελτιώνουμε το μέγεθος του ταιριάσματος κατα μία μονάδα και ολοκληρώνεται μία απο τις  $n$  συνολικές φάσεις του αλγορίθμου (όπου  $n$  ο αριθμός των κορυφών  $X$  ή  $Y$ ).

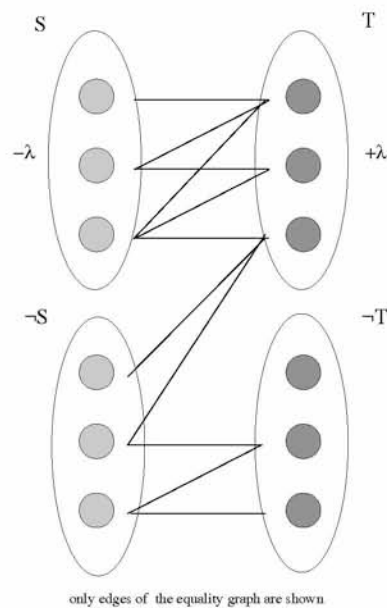


Figure 18: Σύνολα  $S$  και  $T$

Σε κάθε επανάληψη, το εναλλασσόμενο δέντρο μεγαλώνει το πολύ  $n$  φορές. Ο προσδιορισμός της ακμής που θα εισέλθει στον γράφο ισοδυναμίας απαιτεί χρόνο  $O(n^2)$ , προκύπτει προφανώς, από εξαντλητική διερεύνηση όλων των ακμών. Συμπερασματικά, η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου φράσσεται από το όριο  $O(n^4)$ . Για να επιτύχει ο hungarian αλγόριθμος την πολυπλοκότητα  $O(n^3)$  που αναφέρθηκε αρχικώς, απαιτούνται ορισμένες βελτιστοποιήσεις οι οποίες και απαντώνται στην υλοποίηση που έχει επισυναφθεί (Παράρτημα Α). Συγκεκριμένα, ορίζουμε ως έλλειμμα ακμής (slack) την ποσότητα:

$$slack(x, y) = l(x) + l(y) - w(x, y)$$

ο υπολογισμός του  $a_\ell$  δίνεται από τον τύπο :

$$a_\ell \text{ ή } \lambda = \min_{x \in S, y \in Y-T} slack(x, y)$$

αιτιολογώντας απόλυτα την διάρκεια  $O(n^2)$  σε χρόνο. Εναλλακτικά, η ίδια λειτουργία μπορεί να επιτευχθεί ακολουθώντας τα εξής βήματα :

Διατηρούμε πληροφορία για κάθε κορυφή του συνόλου  $Y - T$  σχετικά με την ακμή στην οποία παρουσιάζει το μικρότερο έλλειμα δηλαδή,

$$slack[y_j] = \min_{x_i \in S} slack(x_i, y_j)$$

Ο υπολογισμός του  $slack[y_j]$  πραγματοποιείται σε χρόνο  $O(n)$  στο ξεκίνημα μιας επανάληψης. Όσο ο αλγόριθμος εξελίσσεται οι ενημερώσεις των  $slack$  μεταβλητών κοστίζουν χρόνο  $O(n)$  μιας και όλες μεταβάλλονται κατά την ίδια ποσότητα. Με την τεχνική όμως αυτή, η μετακίνηση κόμβων από το σύνολο  $S$  στο  $\bar{S}$  απαιτεί επαναυπολογισμό των  $slack$  τιμών μια διαδικασία που δαπανά χρόνο  $O(n)$ . Σε κάθε φάση μπορούμε να έχουμε το πολύ  $n$  μετατοπίσεις κόμβων και κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε κόστος  $O(n^2)$  ανα επανάληψη. Όπως έχει τονιστεί παραπάνω, ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται σε  $n$  φάσεις με τη συνολική διάρκεια να φράσσεται από το όριο  $O(n^3)$ .

## 7.7 Ο κώδικας του αλγορίθμου (α τρόπος)

Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το εργαλείο MATLAB, ο κώδικας μαζί με σχόλια παρατίθεται συγκεντρωμένα στο Παράρτημα Α στο τέλος της εργασίας. Η υλοποίηση του αλγορίθμου περιλαμβάνει τέσσερις συναρτήσεις. Η κεντρική συνάρτηση (main function) είναι η `hungarian()` η οποία καλεί την αναδρομική συνάρτηση `augment()`. Μετά την επιστροφή της τελευταίας κλήσης της `augment()`, υπολογίζεται το συνολικό κόστος της βέλτιστης λύσης και ο αλγόριθμος τερματίζεται. Η `augment()` χρησιμοποιεί ακόμη δύο συναρτήσεις την `updateLabels()` με την προφανή λειτουργία της ανανέωσης-ενημέρωσης των ετικετών του γράφου (περιγράφεται αναλυτικά στο τρίτο βήμα του αλγορίθμου) και την `addNodesToTree()`. Η τελευταία προσθέτει έναν νέο κόμβο στο εναλλασσόμενο δέντρο επεκτείνοντας με ακόμη μια κορυφή το  $S$  σύνολο και ενημερώνοντας ταυτόχρονα τις μεταβλητές  $slack(y)$  και  $slackx(y)$  όπως ορίζει η βελτιστοποιημένη έκδοση του αλγορίθμου. Η συνάρτηση `augment()` στην αρχή ελέγχει το μέγεθος του ταιριάσματος και ανάλογα συνεχίζει ή διακόπτει την αναδρομική κλήση της ίδιας επιστρέφοντας το μέγιστο ταιρίασμα στην καλούσα συνάρτηση `hungarian()`. Στο κυρίως σώμα της περιέχει έναν κεντρικό βρόγχο `while(true)`, ο βρόγχος αυτός εξυπηρετεί τη δημιουργία και την επέκταση του εναλλασσόμενου δέντρου με την μέθοδο της αναζήτησης σε πλάτος ΑσΠ (Breadth first Search BFS). Ο πίνακας `q[]` και ο τρόπος διαπέρασής του μέσω των μεταβλητών `rd` και `wr` προσομοιώνουν την συμπεριφορά μιας FiFo ουράς και μας βοηθούν να επιτύχουμε την διερεύνηση των μονοπατιών κατά πλάτος. Όταν το δέντρο δεν μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω, όπως ορίζει ο αλγόριθμος, μεταβαίνουμε στην φάση της ενημέρωσης των ετικετών. Στην συνέχεια επανεκκινείται η διαδικασία ανάπτυξης του `hungarian` δέντρου. Εάν κατά την διενέργεια αυτού του κύκλου εντοπιστεί επαυξητικό μονοπάτι, ο έλεγχος εγκαταλείπει το `while` βρόγχο και πραγματοποιείται υπολογισμός του νέου ταιριάσματος. Αναλυτικότερα αυξάνεται το ταιρίασμα κατά μία μονάδα και σημειώνονται οι ακμές που απαρτίζουν το καινούργιο ταιρίασμα χρησιμοποιώντας

μια σειρά αναθέσεων σε προσωρινές μεταβλητές. Καθοριστικό ρόλο έχει ο πίνακας `preTree[]` που αποθηκεύει την σειρά προσπέλασης των κορυφών  $x$ . Τέλος, η `augment()` καλεί αναδρομικά τον εαυτό της. Η ονομασία των υπολοίπων μεταβλητών κάνει εμφανή την σημασία και το ρόλο τους στην ροή του αλγορίθμου, ενώ καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε τα δομικά μέρη του κώδικα να είναι ευδιάκριτα και να ακολουθούν όσο το δυνατό πιστότερα τα βήματα του αλγορίθμου, όπως αυτά έχουν περιγράψει στην ενότητα 7.5

## 7.8 Εφαρμογή του αλγορίθμου

Ο καλύτερος και ίσως περισσότερο παραστατικός τρόπος παρουσίασης ενός αλγορίθμου είναι με την χρήση στιγμιοτύπων εκέλεσης για τα διάφορα βήματά του. Παρακάτω (εικόνα Figure 19) απεικονίζονται τα στάδια από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, με πίνακα ανάθεσης :

$$\text{allocationmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ο αλγόριθμος που εξετάσαμε, με την τρέχουσα υλοποίηση, αναφέρεται σε προβλήματα μεγιστοποίησης, επομένως χρησιμοποιώντας τον δεύτερο μετασχηματισμό της ενότητας 7.1 και λαμβάνοντας υπόψη ότι η τιμή του μέγιστου στοιχείου του πίνακα είναι ( $M = 8$ ) τον μετασχηματίζουμε σε :

$$\text{newallocationmatrix} = M - \text{allocationmatrix}(i, j) \quad \forall i, j = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 7.9 Παρουσίαση του αλγορίθμου με χρήση πινάκων

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται ο hungarian αλγόριθμος υπό το πρίσμα των πινάκων και των στοιχειωδών πράξεων που εφαρμόζονται σε αυτούς. Η επιλογή της παρουσίασης της έκδοσης του αλγορίθμου με γράφους και πράξεις συνόλων, στην αρχή της εργασίας, κρίθηκε σκόπιμη διότι η χρησιμοποίηση των πινάκων δυσκολεύει την εύληπτη αντιστοίχιση στις βασικές ιδέες - έννοιες του αλγορίθμου. Η οπτική σύνδεση των γράφων με τα βασικά στοιχεία των προβλημάτων ανάθεσης συνηγορούν σε αυτή την επιλογή. Εντούτοις, η μεταχείριση διδιάστατων πινάκων διευκολύνει αρκετά την εκτέλεση των πράξεων με το χέρι και αποτελούσε έναν από τους λόγους που προτιμήθηκε την περίοδο της δημοσίευσής του αλγορίθμου (1957).

### Ο Hungarian αλγόριθμος ( Υλοποίηση με πίνακες )

Έστω allocationmatrix ο  $n \times n$  πίνακας ανάθεσης. Στην γενική περίπτωση που οι διαστάσεις του πίνακα είναι  $n \times m$  τον περιστρέφουμε ώστε να υπάρχουν τόσες στήλες όσες και γραμμές και ορίζουμε  $k = \min(n, m)$

1. Εντοπίζεται το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής του πίνακα και η τιμή του αφαιρείται από όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής.  
Σάρωση των στοιχείων του πίνακα για εύρεση μηδενικών ( $Z$ ). Εάν ανακαλυφθεί μηδενικό στοιχείο ελέγχεται αν στην αντίστοιχη γραμμή/στήλη υπάρχει άλλο μηδενικό που έχει ήδη σημειωθεί. Αν αυτό δεν συμβαίνει σημειώνεται το συγκεκριμένο με έναν αστερίσκο (starred  $Z$ ). Οι ενέργειες επαναλαμβάνονται για όλο τον πίνακα.
2. Σημειώνουμε ως καλυμμένη, κάθε στήλη που περιέχει μηδενικό με αστερίσκο. Εάν το σύνολο των καλυμμένων στηλών ισούται με τον αριθμό  $k$  ο αλγόριθμος τερματίζεται. Ακολουθεί υπολογισμός της ανάθεσης και του συνολικού κόστους. Διαφορετικά, εκτελείται μετάβαση στο βήμα 3.
3. Εύρεση μηδενικού στοιχείου το οποίο δεν ανήκει σε γραμμές-στήλες που έχουν καλυφθεί. Το μηδενικό σημειώνεται ως πρωτεύον (primed zero). Εάν στην γραμμή που περιέχεται το πρωτεύον μηδενικό δεν υπάρχει άλλο μηδενικό σημειωμένο με αστερίσκο μεταβαίνουμε στο βήμα 4. Σε αντίθετη περίπτωση σημειώνεται η συγκεκριμένη γραμμή ως καλυμμένη και διαγράφουμε την αντίστοιχη εισαγωγή από την λίστα των καλυμμένων στηλών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ευρεθούν όλα τα πρωτεύοντα μηδενικά. Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψην μόνο τα στοιχεία που δεν ανήκουν σε καλυμμένες γραμμές-στήλες του πίνακα αποθηκεύεται η μικρότερη τιμή και συνεχίζουμε με το πέμπτο βήμα.
4. Στο βήμα αυτό κατασκευάζεται μια σειρά από μηδενικά που εναλλάσσονται ανάμεσα σε πρωτεύοντα και σε μηδενικά σημειωμένα με αστερίσκους. Η δημιουργία της σειράς πραγματοποιείται εκτελώντας τις ακόλουθες ενέργειες : Έστω με  $Z_0$  αναπαρίσταται το πρωτεύον μηδενικό που εντοπίστηκε στο προηγούμενο βήμα και με  $Z_1$  το μηδενικό με

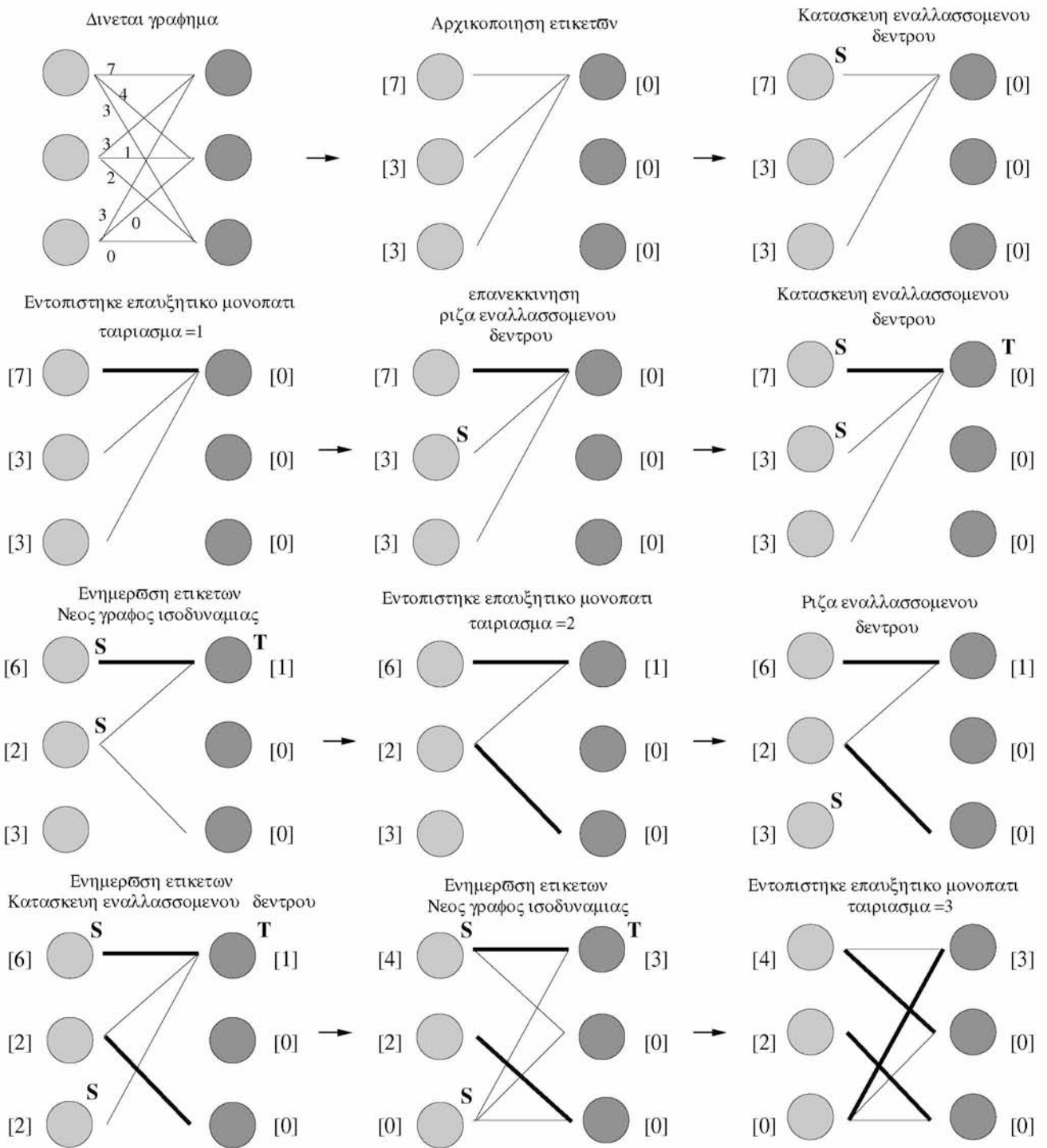


Figure 19: Εφαρμογή του hungarian σε γράφο

αστερίσκο στην αντίστοιχη στήλη (εάν υπάρχει). Με το σύμβολο  $Z_2$  υποδηλώνουμε το πρωτεύον μηδενικό στη γραμμή του  $Z_1$  (πάντα θα υπάρχει τέτοιο μηδενικό). Η κατασκευή συνεχίζεται μέχρι να ευρεθεί ένα πρωτεύον μηδενικό στο οποίο την στήλη δεν αντιστοιχεί μηδενικό με αστερίσκο. Έπειτα σημειώνουμε με αστερίσκο όλα τα πρωτεύοντα μηδενικά και αφαιρούμε το σημάδι από τα μηδενικά με αστερίσκο που συμμετείχαν στην σειρά. Διαγράφουμε τα σημειωμένα πρωτεύοντα μηδενικά καθώς και όλες τις γραμμές που έχουν σηματοδοτηθεί καλυμμένες. Επιστροφή στο βήμα 2.

5. Η ελάχιστη τιμή του βήματος 3 προστίθεται σε κάθε στοιχείο των καλυμμένων γραμμών και αφαιρείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε στήλες που δεν έχουν καλυφθεί. Επιστροφή στο βήμα 2 χωρίς καμία άλλη μετατροπή.

**Τερματισμός :** Τα σημεία του πίνακα που έχουν σημειωθεί με αστερίσκο υποδεικνύουν την λύση του προβλήματος της ανάθεσης. Χρησιμοποιώντας τις θέσεις αυτές και σε συνδυασμό με τον αρχικό πίνακα υπολογίζεται εύκολα το συνολικό κόστος της λύσης.

Όλα τα βήματα απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή κατά την εκτέλεση. Κουβικό σημείο αποτελεί το βήμα 3 όπου και διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις : Εάν υπάρχει μηδενικό που δεν ανήκει σε καλυμμένες γραμμές-στήλες (πρωτεύον) και αν στην ίδια γραμμή δεν περιέχεται μηδενικό με αστερίσκο η ροή μεταφέρεται στο βήμα 4. Αν όμως υπάρχει σημειωμένο με αστερίσκο μηδενικό ακολουθεί η διαδικασία που περιγράφεται και παραμένουμε στο βήμα αυτό. Στην περίπτωση που τα πρωτεύοντα μηδενικά εκλείψουν ή δεν εντοπίστηκαν από την αρχή, πραγματοποιείται μετάβαση στο βήμα 5.

Εξετάζοντας τα επιμέρους σημεία του αλγορίθμου αντιλαμβανόμαστε πως τα βήματα 1 και 5 εγείρουν ερωτήματα ως προς την ορθότητα των λύσεων που εντοπίζει ο αλγόριθμος. Στα βήματα αυτά εκτελούνται μετασχηματισμοί του αρχικού πίνακα που ενδεχομένως να επηρεάζουν την λύση του συστήματος. Το θεώρημα και η απόδειξη που ακολουθεί διασαφηνίζει το ζήτημα αυτό.

**Θεώρημα 4** Η βέλτιστη λύση του προβλήματος της ανάθεσης δεν μεταβάλλεται παρά τις αλλαγές (προσθέσεις- αφαιρέσεις) που υφίσταται ο πίνακας κατά την διάρκεια εκτέλεσης των βημάτων 1 και 5.

**Απόδειξη :** Για το πρώτο βήμα, ισχύει πως η βέλτιστη λύση  $x^*$  δεν αλλοιώνεται με την αφαίρεση μιας σταθεράς από κάθε γραμμή ή στήλη. Για να επαληθεύσουμε αυτήν την υπόθεση πράττουμε τα εξής : έστω  $c$  σταθερά που αφαιρείται από την πρώτη γραμμή του πίνακα κόστους, το πρόβλημα ξαναγράφεται

$$\min \sum_j^n (c_{1j} - c)x_{1j} + \sum_{i \geq 2, j}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad (1 \leq j \leq m)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

για την αντικειμενική συνάρτηση ισχύουν

$$\min \sum_j^n (c_{1j} - c)x_{1j} + \sum_{i \geq 2, j}^n c_{ij}x_{ij} = \sum_{ij} c_{ij}x_{ij} - \sum_j cx_{1j} = \sum_{ij} c_{ij}x_{ij} - c$$

Επομένως, η βέλτιστη λύση του ανασχημάτισμένου προβλήματος είναι ακριβώς ίδια με την λύση του αρχικού. Ομοίως, η παρατήρηση επεκτείνεται για τις υπόλοιπες γραμμές/στήλες.

Για το πέμπτο βήμα υποθέσαμε ότι μία σταθερά  $c$  (η μικροτερη τιμή από τις μή καλυμμένες γραμμές-στήλες) προστίθεται στα στοιχεία που ανήκουν στην διασταύρωση καλυμμένων γραμμών και στηλών και αφαιρείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε μη καλυμμένες περιοχές. Η πρόταση αυτή ισοδυναμεί με την πρόσθεση της σταθεράς  $c$  σε κάθε καλυμμένη γραμμή και την αφαίρεσή της από κάθε μή καλυμμένη στήλη. Για να αποδείξουμε ότι αυτές οι διαδοχικές πράξεις δεν επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα αρκεί να δείξουμε ότι καταλλήλουν σε περιπτώσεις προσθαφαίρεσης σταθερών από γραμμές/στήλες πίνακα, όπως αυτές που εξετάσαμε παραπάνω. Έστω πίνακας  $2 \times 2$  με καλυμμένες την πρώτη στήλη και την δεύτερη γραμμή. Οι πράξεις που πρέπει να εφαρμοστούν απεικονίζονται συγκεντωτικά :

	καλυμμένη	μή καλυμμένη ( $-c$ )
καλυμμένη ( $+c$ )	$+c$	$+c - c = 0$
μή καλυμμένη	$0$	$-c$

Άρα και αυτό το βήμα εμπίπτει στην κατηγορία που περιγράφηκε στο πρώτο μέρος της απόδειξης.  $\square$

Παρατηρώντας αυτήν την εκδοχή του hungarian αλγορίθμου μπορούμε να αντιληφθούμε άμεσες αντιστοιχίες με την προηγούμενη. Το βήμα 3 συγκεκριμένα, αποτελεί το ανάλογο της δημιουργίας του εναλλασσόμενου δέντρου. Ο τρόπος ανακάλυψης του επαυξητικού μονοπατιού και η αύξηση του μεγέθους του ταιριάσματος αποδίδεται με διαφορετικό τρόπο στο βήμα 4. Επίσης η ενημέρωση των ετικετών που συναντήσαμε στην αρχική έκδοση υλοποιείται από το πέμπτο βήμα του αλγορίθμου. Όλα τα μηδενικά που εμφανίζονται στον πίνακα αντιστοιχούν στις ακμές του γράφου ισοδυναμίας ενώ ο αριθμός των μηδενικών με αστερίσκο παριστά το μέγεθος του ταιριάσματος.



### 7.10 Ο κώδικας του αλγορίθμου (β τρόπος)

Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το εργαλείο MATLAB. Ο κώδικας μαζί με σχολιασμό του αλγορίθμου επισυνάπτεται στο στο τέλος της εργασίας (Παράρτημα Β). Καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε η υλοποίηση να συμβαδίζει με την περιγραφή του αλγορίθμου, σε προηγούμενη ενότητα. Βασική συνάρτηση είναι η `resource allocation()` που δέχεται ως παράμετρο τον πίνακα ανάθεσης ή αλλιώς πίνακα κόστους και επιστρέφει το διάνυσμα της βέλτιστης ανάθεσης καθώς και το συνολικό κόστος που αντιστοιχεί σε αυτό. Προϋποθέση του αλγορίθμου αποτελεί ο πίνακας να μην περιέχει αρνητικές τιμές. Το γεγονός αυτό λήφθηκε υπόψη κατά την υλοποίηση. Στην αρχή της εκτέλεσης πραγματοποιείται σχετικός έλεγχος και εκτυπώνεται μήνυμα λάθους για την περίπτωση εμφάνισης αρνητικού στοιχείου. Οι διαφορετικές διαστάσεις του πίνακα εισόδου  $n \leq m$  ή  $n > m$  απαιτούν και διαφορετική αντιμετώπιση κατά τα δύο πρώτα βήματα της εκτέλεσης. Στην συνέχεια, εξετάζεται αν το πλήθος των στηλών που έχουν καλυφθεί συμπίπτει με την ελάχιστη διάσταση του πίνακα. Αν η απάντηση είναι καταφατική ο αλγόριθμος τερματίζεται διαφορετικά οδηγούμαστε στη συνάρτηση `step3()` που αποτελεί το βασικότερο σημείο ροής του αλγορίθμου. Για κάθε μη καλυφθείσα στήλη - γραμμή προσπαθούμε να εντοπίσουμε στον πίνακα που προέκυψε μετά το πρώτο βήμα κάποιο στοιχείο με 0. Το σημείο αυτό σημαδεύεται με 1 στον πίνακα `primeMatrix`. Ερευνούμε αν στην γραμμή του στοιχείου αυτού υπάρχει άλλος σημειωμένος άσσος στον `starMatrix`. Αν δεν βρεθεί τέτοιο σημείο η ροή του προγράμματος μεταβαίνει στη `step4()`. Σε αντιθετη περίπτωση (δηλαδή εαν βρέθηκε τέτοιο σημείο) σημειώνεται στις αντίστοιχες καλυφθείσες γραμμές - στήλες. Τέλος εκτελείται πάντα η συνάρτηση `step5()`.

Η `step4()` υλοποιεί το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου. Κατασκευάζεται μια σειρά από εναλλασσόμενα `prime` και `star` μηδενικά. Πιο συγκεκριμένα έστω  $z_0$  το `prime` μηδενικό που βρήκαμε από το προηγούμενο βήμα, συνάρτηση `step3()`, βρίσκουμε το `star` μηδενικό  $z_1$  στη στήλη του  $z_0$  (αν υπάρχει) και έπειτα το `prime` μηδενικό  $z_2$  στην γραμμή του  $z_1$  (πάντα θα υπάρχει). Τερματίζουμε την διαδικασία όταν βρούμε ένα `prime` μηδενικό που δεν ακολουθείται από `star` στην στήλη του. Ακολούθως διαγράφουμε κάθε `star` μηδενικό, σημειώνουμε με `star` σύμβολο κάθε `prime` μηδενικό και τέλος σβήνουμε τον πίνακα `prime` και όλες τις γραμμές που είχαμε καλύψει. Με την συνάρτηση `step5()` εντοπίζουμε το ελάχιστο από όλα τα στοιχεία του `allocationMatrix` που δεν έχουν καλυφθεί και α) το προσθέτουμε σε κάθε καλυμμένη γραμμή β) το αφαιρούμε από κάθε μη καλυμμένη στήλη. Τελευταία παρουσιάζεται η συνάρτηση `step2()` η οποία πραγματοποιεί τον έλεγχο τερματισμού του αλγορίθμου και υπολογίζει το διάνυσμα της ανάθεσης διαφορετικά, επιστρέφει την εκτέλεση στο βήμα 3.

### 7.11 Εφαρμογή του αλγορίθμου

Προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου και να αποσαφηνιστούν σημεία που προκαλούν σύγχυση, δίνονται παρακάτω αναλυτικά τα διάφορα στάδια της εκτέλεσης. Επιλέξαμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο πίνακα της ενότητας 7.11 ώστε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα. Αξίζει να σημειωθεί πως η μορφή του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε παραπάνω αναφέρεται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης επομένως ο πίνακας

που επιλέχτηκε είναι ο :

$$\text{allocationmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία  $x_{12}$ ,  $x_{23}$  και  $x_{31}$  αποτελούν λύσεις του προβλήματος και συμπίπτουν με τα αποτελέσματα προηγούμενης ενότητας. Το συνολικό κόστος είναι το άθροισμα των τιμών του πίνακα allocationmatrix που υποδεικνύεται από τα  $x$ . Επομένως, το κόστος ισούται με  $4+6+5 = 15$ .

## 8 Προβλήματα ανάθεσης σε δυναμικό περιβάλλον

Το πρόβλημα της ανάθεσης, γνωστό και ως πρόβλημα εύρεσης μεγίστου ταιριάσματος σε βεβαρημένο διμέλη γράφο αποτελεί την μοντελοποίηση αμέτρητων ζητημάτων και απασχολεί ένα ανεξάντλητο εύρος επιστημονικών πεδίων. Ωστόσο σε πολλούς τομείς, ο χαρακτήρας των προβλημάτων είναι δυναμικός, ενισχύοντας την ήδη αυξημένη πολυπλοκότητα του. Σε αρκετές περιπτώσεις που το περιβάλλον είναι ευμετάβλητο, οι ίδιες οι συνθήκες του προβλήματος ενδέχεται να έχουν αλλάξει κατά την διάρκεια ή ακόμη και πριν τον υπολογισμό της λύσης. Τα βάρη των ακμών είναι δυνατόν να μεταβληθούν και νέοι κόμβοι μπορεί να προστεθούν ή να διαγραφούν από το υπάρχον γράφημα. Το ασύρματο δίκτυο ενός κελιού του WiMAX αποτελεί άριστο παράδειγμα ρευστού περιβάλλοντος. Νέοι χρήστες μπορούν να εισέλθουν οποιαδήποτε στιγμή στην ακτίνα του σταθμού βάσης, ενώ άλλοι μέσω της διαδικασίας handoff ίσως χρειαστεί να μεταβούν σε γειτονικά κελιά. Ακόμη, η κίνηση των χρηστών συμβάλει στην διαφοροποίηση της ποιότητας των καναλιών (subchannels) που λαμβάνουν κάθε χρονική στιγμή.

Οι συχνές αλλαγές των μεταβλητών του προβλήματος και η προσπάθεια επίλυσής του από την αρχή, χρησιμοποιώντας τον Hungarian αλγόριθμο, οδηγεί σε σημαντικό υπολογιστικό φόρτο ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που ο πίνακας κόστους είναι εξαιρετικά μεγάλος. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η δυναμική έκδοση του Hungarian αλγορίθμου η οποία, δοσμένης μιας αρχικής λύσης του προβλήματος βελτιστοποίησης “επισκευάζει” την τρέχουσα, προσαρμόζοντάς την στις αλλαγές των βαρών του γραφήματος. Ο νέος αυτός αλγόριθμος είναι αποδεδειγμένα ορθός και βέλτιστος, με πολυπλοκότητα που φράσσεται από το όριο  $O(kn^2)$ , το  $k$  είναι μέτρο του αριθμού των μεταβολών στον πίνακα κόστους. Πειραματικά δεδομένα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος αυτός επιλύει το τροποποιημένο πρόβλημα τάξεις μεγέθους πιο αποδοτικά από την εκτέλεση εξ’ αρχής του πρωτότυπου αλγορίθμου.

### 8.1 Το πρόβλημα της ανάθεσης με μεταβολές στον πίνακα κόστους

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε πάλι με το πρόβλημα της ανάθεσης πόρων, με την διαφορά ότι στα δεδομένα μας συμπεριλαμβάνεται η προηγούμενη λύση για ένα  $n \times n$  πρόβλημα και οι γραμμές /στήλες με τα κόστη που έχουν μεταβληθεί, ή αλλιώς οι αλλαγές στα βάρη των ακμών. Στόχος είναι η προσαρμογή της υπάρχουσας λύσης στα νέα δεδομένα. Εστιάζοντας μόνο στις

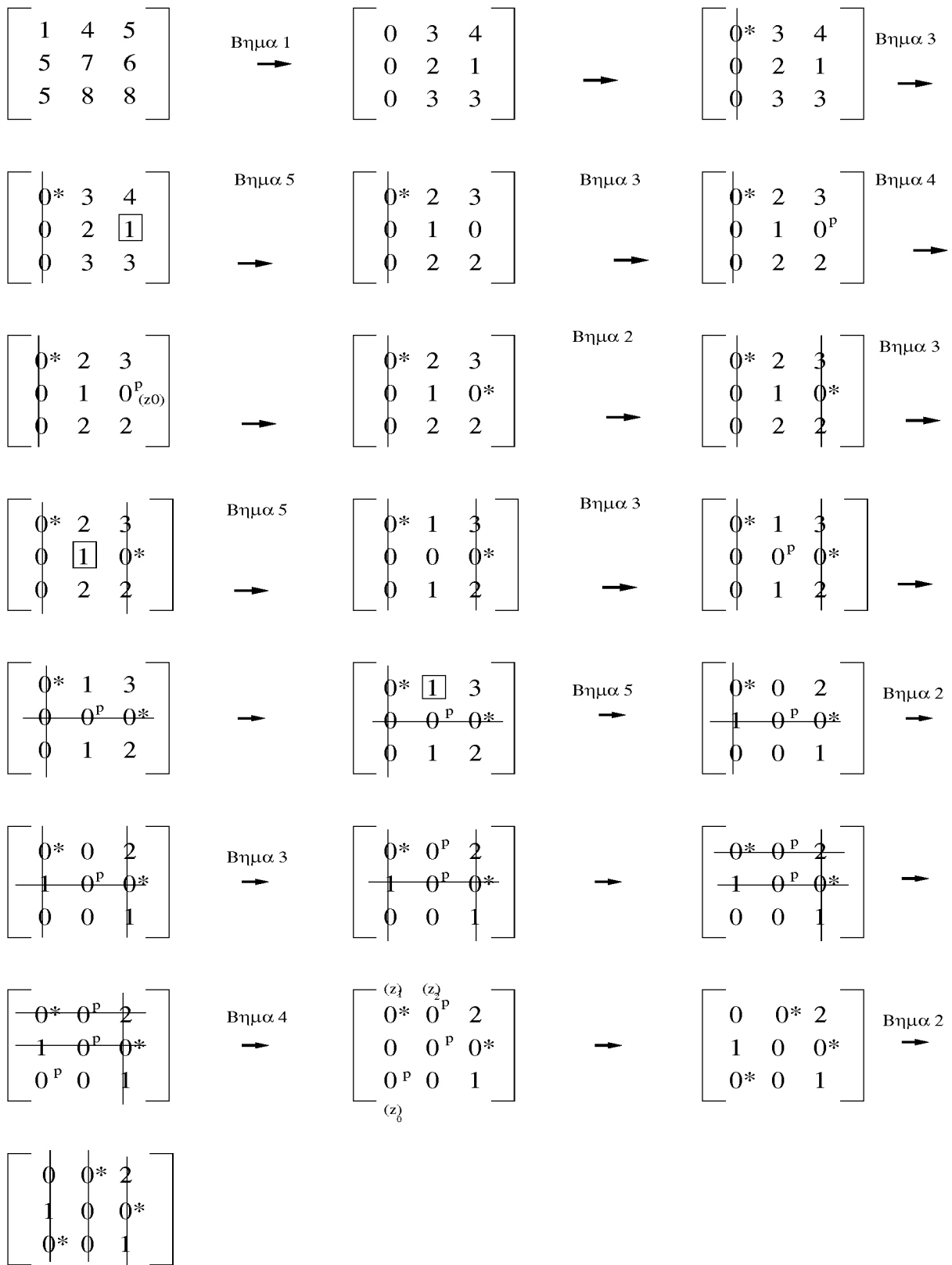


Figure 20: Εφαρμογή του hungarian αλγορίθμου σε πίνακες

αλλαγές των βαρών δεν αποφεύγουμε να επιλύσουμε τα προβλήματα που αφορούν πρόσθεση ή αφαίρεση κόμβων, τουναντίον γενικεύουμε την λύση αφού η αύξηση του κόστους μιας σειράς του πίνακα στο άπειρο ή η μείωση σε ελάχιστη πεπερασμένη τιμή αποτελούν ειδικές περιπτώσεις αφαίρεσης ή εισαγωγής κορυφών στο γράφημα.

## 8.2 Dynamic Hungarian

Πρίν, προχωρήσουμε στην παρουσίαση του αλγορίθμου πρέπει να τονίσουμε ότι όλες οι αλλαγές αφορούν την περίπτωση του Hungarian για συναρτήσεις ελαχιστοποίησης. Στην προηγούμενη όμως ενότητα, ο Hungarian αναφέρονταν σε υπολογισμό βέλτιστης ανάθεσης για αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης. Το σώμα του αλγορίθμου παραμένει ίδιο με μικρές τροποποιήσεις σε δύο μόνο σημεία:

1. Κατά την φάση της αρχικοποίησης τώρα εφαρμόζουμε την σχέση

$$\forall y \in Y, \ell(y) = 0,$$

$$\forall x \in X, \ell(x) = \min_{y \in Y} \{w(x, y)\}$$

2. Η ενημέρωση των ετικετών τώρα πραγματοποιείται με την συνάρτηση

$$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) + a_e, & \text{εάν } v \in S \\ \ell(v) - a_e, & \text{εάν } v \in T \\ \ell(v), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η δυναμική εκδοχή του Hungarian αλγορίθμου που προτείνεται σκιαγραφείται παρακάτω :

### Dynamic Hungarian

Είσοδος :

- Πρόβλημα ανάθεσης αποτελούμενο από διμελή γράφο  $G = (X, Y, E)$  και έναν  $n \times n$  πίνακα  $C$  με τιμές τα βάρη των ακμών
- Βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος που περιλαμβάνει το τέλειο ταίριασμα  $M$  και τις τελικές τιμές όλων των δυαδικών μεταβλητών (ετικετών)  $\ell(x_i)$  και  $\ell(y_j)$
- Μία γραμμή  $c_i$  ή στήλη  $c_j$  με τις νέες τιμές.

Έξοδος : Ένα νέο τέλειο ταίριασμα που αναπαριστά την βέλτιστη λύση του καινούργιου προβλήματος.

1. Πραγματοποιείται αρχικοποίηση :

- Εάν η  $i'$  γραμμή του πίνακα έχει μεταβληθεί:
  - a) Αφαιρείται η ακμή  $(x_{i'}, matchedTo(x_{i'}))$  από το ταίριασμα  $M$
  - b) Θέτουμε  $\ell(x_{i'}) = \min_j (c_{i'j} - \ell(y_j))$
- Αλλιώς, εάν η  $j'$  στήλη του πίνακα έχει μεταβληθεί:
  - a) Αφαιρείται η ακμή  $(matchedTo(y_{j'}), y_{j'})$  από το ταίριασμα  $M$
  - b) Θέτουμε  $\ell(y_{j'}) = \min_i (c_{ij'} - \ell(x_i))$

2. Εκτελείται μία επανάληψη του κλασσικού Hungarian αλγορίθμου με τα νέα αυτά δεδομένα

3. Έξοδος του νέου ταιριάσματος  $M'$ .

### 8.3 Σχολιασμός των βημάτων του αλγορίθμου

Στην φάση της αρχικοποίησης, αφαιρείται από το ταίριασμα η ακμή που περιέχει την κορυφή με τα διαφοροποιημένα κόστη, μειώνοντας το μέγεθος κατά μια μονάδα. Εάν έχει μεταβληθεί η γραμμή  $i'$ , επηρεάζεται η κορυφή  $x_{i'}$ , ειδικά αν μεταβλήθηκε η στήλη  $j'$  επηρεάζεται αντίστοιχα, η κορυφή  $y_{j'}$ . Έπειτα, υπολογίζεται μια νέα εφικτή τιμή για τις δυαδικές τιμές (ετικέτες)  $\ell(x_{i'})$  ή  $\ell(y_{j'})$  με βάση τις εξισώσεις :

$$\ell(x_{i'}) = \min_j (c_{i'j} - \ell(y_j))$$

$$\ell(y_{j'}) = \min_i (c_{ij'} - \ell(x_i))$$

Εκτελείται μία μόνο επανάληψη του αρχικού Hungarian αλγορίθμου ώστε να αυξηθεί το μέγεθος του ταιριάσματος σε  $n$ , ολοκληρώνοντας έτσι την εκτέλεση. Επειδή, μετά την ενημέρωση των τιμών στην αρχικοποίηση ( $O(n)$ ), μονάχα μια φάση του αλγορίθμου εκτελείται η πολυπλοκότητά του Dynamic Hungarian φράσσεται από το όριο  $O(n^2)$ .

Ο τροποποιημένος αλγόριθμος μπορεί εύκολα να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει περιπτώσεις όπου περισσότερες από μία γραμμές η στήλες του πίνακα κόστους μεταβάλλονται. Εάν  $k$  γραμμές/στήλες έχουν μεταβληθεί, οι κορυφές που επηρεάζονται είναι  $k$  και πρέπει να αρχικοποιηθούν με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Είμαστε δηλαδή, αναγκασμένοι να οπισθοχωρήσουμε τον Hungarian αλγόριθμο  $k$  βήματα (μέγεθος ταιριάσματος  $n - k$ ) και να εκκινήσουμε από το σημείο αυτό την εκτέλεσή του, με αποτέλεσμα υπολογιστική πολυπλοκότητα  $O(kn^2)$ .

**Θεώρημα 5** Η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα του dynamic Hungarian είναι  $O(kn^2)$ , όπου  $k$  είναι ο αριθμός των αλλαγών στον πίνακα κόστους (γραμμές, στήλες, ή στοιχεία) από την τελευταία λύση.

**Απόδειξη :** Η φάση αρχικοποίησης του dynamic αλγορίθμου υπολογίζει τις τιμές το πολύ  $k$  δυαδικών μεταβλητών (ετικετών). Κάθε υπολογισμός στοιχίζει  $O(n)$ , οδηγώντας σε συνολική

πολυπλοκότητα  $O(kn)$  για ολόκληρη την φάση της αρχικοποίησης. Έπειτα εκτελούνται  $k$  επαναλήψεις του Hungarian αλγορίθμου με κάθε μία να απαιτεί χρόνο  $O(n^2)$ . Καταλήγουμε δηλαδή στην πολυπλοκότητα που επισημαίνει το θεώρημα.  $\square$

Τέλος, εάν ένα μοναδικό στοιχείο  $c_{ij}$  του πίνακα αντί ολόκληρης γραμμής/στήλης αλλάξει, μπορούν να εφαρμοστούν περαιτέρω βελτιστοποιήσεις αυξάνοντας ακόμη περισσότερο την απόδοση του αλγορίθμου. Αν και οι βελτιστοποιήσεις δεν επιδρούν στην ασυμπτωματική πολυπλοκότητα του dynamic Hungarian, βοηθούν όμως στην επιτάχυνση του υπολογισμού της λύσης σε πραγματικά περιβάλλοντα λόγω των περικοπών στο χρόνο υπολογισμού.

## 8.4 Βελτιστοποιημένος Dynamic Hungarian

Η βελτιστοποιημένη εκδοχή του dynamic Hungarian παρουσιάζεται παρακάτω :

### Optimized Dynamic Hungarian

Είσοδος :

- Πρόβλημα ανάθεσης αποτελούμενο από διμελή γράφο  $G = (X, Y, E)$  και έναν  $n \times n$  πίνακα  $C$  με τιμές τα βάρη των ακμών
- Βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος που περιλαμβάνει το τέλει ταίριασμα  $M$  και τις τελικές τιμές όλων των δυαδικών μεταβλητών (ετικετών)  $\ell(x_i)$  και  $\ell(y_j)$
- $k$  αλλαγές στον πίνακα κόστους (γραμμή  $c_{i'}$ , στήλη  $c_{j'}$ , ή στοιχείο  $c_{i'j'}$ )

Έξοδος : Ένα νέο τέλει ταίριασμα που αναπαριστά την βέλτιστη λύση του καινούργιου προβλήματος.

1. Πραγματοποιείται αρχικοποίηση : Για κάθε μία από τις  $k$  αλλαγές έχουμε

- Εάν ένα στοιχείο μόνο  $c_{i'j'}$  του πίνακα έχει μεταβληθεί από  $c_{old}$  σε  $c_{new}$ :
  - Εάν ισχύει  $c_{new} > c_{old}$  και η κορυφή  $x_{i'}$  είναι ταιριασμένη με την κορυφή  $y_{j'}$ , αφαιρούμε την ακμή  $(x_{i'}, y_{j'})$  από το τρέχον ταίριασμα
  - Αλλιώς, εάν  $c_{new} < c_{old}$  και  $\ell(x_{i'}) + \ell(y_{j'}) > c_{new}$

$$- \text{Θέτεται } \ell(x_{i'}) = \min_j (c_{i'j} - \ell(y_j))$$

- Εάν η κορυφή  $x_{i'}$  δεν είναι ταιριασμένη με την κορυφή  $y_{j'}$ , αφαιρούμε την ακμή  $(x_{i'}, matchedTo(x_{i'}))$  από το τρέχον ταίριασμα

[Σημείωση: Μπορούμε στοχαστικά να αποφασίσουμε να τροποποιήσουμε την ετικέτα  $\ell(y_{j'})$ , οι ενέργειες που ακολουθούνται είναι παρόμοιες]

- Αλλιώς, εάν η  $i'$  γραμμή του πίνακα έχει μεταβληθεί:
    - a) Αφαιρείται η ακμή  $(x_{i'}, matchedTo(x_{i'}))$  από το ταίριασμα  $M$
    - b) Θέτουμε  $\ell(x_{i'}) = \min_j (c_{ij} - \ell(y_j))$
  - Αλλιώς, εάν η  $j'$  στήλη του πίνακα έχει μεταβληθεί:
    - a) Αφαιρείται η ακμή  $(matchedTo(y_{j'}), y_{j'})$  από το ταίριασμα  $M$
    - b) Θέτουμε  $\ell(y_{j'}) = \min_i (c_{ij'} - \ell(x_i))$
2. Έστω  $k'$  ο αριθμός των ακμών που αφαιρέθηκαν από το ταίριασμα στην φάση αρχικοποίησης του αλγορίθμου (με  $k' \leq k$ ) Εκτελούνται  $k'$  επαναλήψεις του κλασσικού Hungarian αλγορίθμου με τα νέα αυτά δεδομένα
  3. Έξοδος του νέου ταιριάσματος  $M'$ .

## 8.5 Πειραματικές Μετρήσεις

Έχοντας καλύψει το θεωρητικό κομμάτι του dynamic αλγορίθμου, απομένει η επαλήθευση των ισχυρισμών μέσω πειραματικών μετρήσεων. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στην εικόνα Figure 21 και μας δίνουν μια αίσθηση του όρου της πολυπλοκότητας, εξηγώντας πως αυτός μεταφράζεται χρονικά κατά την επίλυση προβλημάτων με μεταβλητούς πίνακες, επιβεβαιώνοντας παράλληλα την αξία του αλγορίθμου σε δυναμικά περιβάλλοντα. Στην εικόνα συγκρίνεται το ποσό του χρόνου που απαιτείται για “τροποποίηση” της τρέχουσας λύσης (dynamic Hungarian) και η διαφορά του από το χρόνο κατασκευής καινούργιας από την αρχή (basic Hungarian), για προβλήματα διαφόρων μεγεθών. Οι τιμές αναφέρονται σε μέσους όρους εκτέλεσης περισσότερων από 20 πειραμάτων με τα τυχαία κόστη να κυμαίνονται στο διάστημα  $[1,100]$ . Μετρήθηκε το κόστος ανακατασκευής της λύσης για περιπτώσεις που οι αλλαγές περιορίζονταν σε μία μόνο στήλη  $k = 1$  αλλά και για αλλαγές που εκτείνονταν σε πολύ περισσότερες στήλες και ειδικότερα  $k = 10$ . Στο (a) γράφημα η κλίμακα είναι γραμμική τονίζοντας τα χρονικά οφέλη που αποκομίζουμε από την εφαρμογή του αλγορίθμου, ενώ στο γράφημα (b) επιλέξαμε την λογαριθμική κλίμακα με σκοπό να δώσουμε έμφαση στις διαφορές κόστους επαναυπολογισμού της λύσης για  $k = 1$  και  $k = 10$ .

## 9 Βέλτιστη ανάθεση πόρων σε OFDM Uplink :

### Primal-Dual προσέγγιση του προβλήματος

Είναι κοινός τόπος, πως η Ορθογώνια Πολυπλεξία Διαίρεσης Συχνότητας OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) αποτελεί το σπουδαιότερο συστατικό των ανερχόμενων ασυρματων ευρυζωνικών δικτύων. Παρά το γεγονός αυτό, η ανάθεση πόρων σε σύστημα που χρησιμοποιεί OFDM τεχνολογία είναι εξαιρετικά περίπλοκη, ιδιαίτερα στην περίπτωση του uplink. Λόγοι που συντελούν στην πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι η ετερογένεια της ποιότητας των καναλιών που λαμβάνει κάθε χρήστης, οι διαφορετικοί ατομικοί περιορισμοί πόρων (π.χ ισχύς χρήστη) καθώς επίσης και οι ξεχωριστές απαιτήσεις κάθε εφαρμογής (π.χ συνεχής

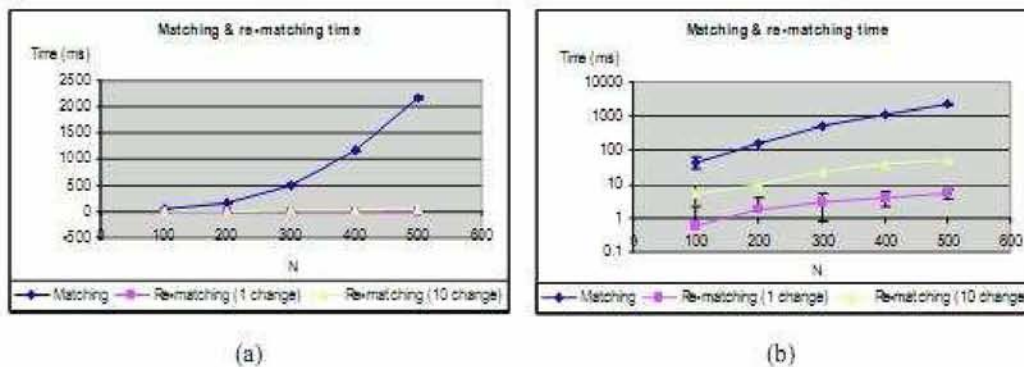


Figure 21: Πειραματικές μετρήσεις

Πηγή: The dynamic Hungarian algorithm, Carnegie Mellon University

ρυθμός μετάδοσης). Στην συνέχεια της ενότητας, το πρόβλημα της ανάθεσης μοντελοποιείται σε ζήτημα κυρτής βελτιστοποίησης με μοναδική αντικειμενική συνάρτηση και πολλαπλές λύσεις. Ακολουθεί λεπτομερής παρουσίαση κατανεμημένου primal-dual αλγορίθμου για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.

## 9.1 Εισαγωγή

Η Ορθογώνια Πολυπλεξία Διαίρεσης Συχνότητας (OFDM) διαφαίνεται ως η υποσχόμενη τεχνολογία για τα μελλοντικά ευρυζωνικά ασύρματα δίκτυα. Στα πλεονεκτήματα της συγκαταλέγονται η ευρωστία σε σχέση με την διασυμβολική παρεμβολή (intersymbol interference) καθώς και την εξασθένηση σήματος που οφείλεται στη υπέρβαση πολλαπλών μονοπατιών (multipath fading). Όπως έχουμε ήδη παρουσιάσει, αποτελεί την βασική τεχνολογία για πληθώρα ασύρματων συστημάτων. Στη παράγραφο αυτή εξετάζεται το uplink πρόβλημα της ανάθεσης πόρων σε OFDM ασύρματα δίκτυα. Κίνητρο στο ζήτημα αυτό αποτέλεσε το WiMAX 802.11e πρωτόκολλο. Σε κάθε χρονθυρίδα (slot) ο Σταθμός Βάσης (Base Station) αναλαμβάνει να αποφασίσει για μία σειρά ερωτημάτων σχετικά με το σύνολο των χρηστών που θα μεταδώσουν την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, την βέλτιστη ανάθεση καναλιών στους χρήστες καθώς και την απαιτούμενη ισχύ για κάθε κανάλι-χρήστη ξεχωριστά. Η χρησιμοποίηση της OFDM τεχνολογίας σε δίκτυα πρόσβασης με δυναμική ανάθεση πόρων, έχει μόλις πρόσφατα συγκεντρώσει αξιοσημείωτη προσοχή. Οι περισσότερες έρευνες υιοθετούν ένα κεντροκοποιημένο μοντέλο όπου ο Σταθμός Βάσης αφού συγκεντώσει τα απαραίτητα δεδομένα όπως μήκη ουρών, καθυστερήσεις πακέτων, διαθέσιμη ισχύ εκτελεί τον αλγόριθμο και υπολογίζει τις βέλτιστες τιμές οι οποίες πρέπει να σταλούν μέσα σε στενά χρονικά όρια στους κινητούς χρήστες.

Από την παραπάνω περιγραφή γίνεται κατανοητό το σύνολο των μειονεκτημάτων που προκύπτουν και τα οποία μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο κατηγορίες.

1. Οι χρήστες είναι αναγκασμένοι να αποκαλύπτουν ατομικές πληροφορίες στο Σταθμό Βάσης, τακτική καθόλου επιθυμητή από την πλευρά των χρηστών, αφού αντιβαίνει σε κανόνες που σχετίζονται με την ασφάλεια.



2. Απαιτείται ο Σταθμός Βάσης να διαθέτει αυξημένη υπολογιστή ικανότητα ώστε να εκτελεί πολύπλοκες βελτιστοποιήσεις σε αυστηρά σύντομο χρονικό διάστημα.

Οι λόγοι αυτοί υπογραμμίζουν την ανάγκη σχεδίασης κατανεμημένου αλγορίθμου. Στην ενότητα αυτή θα γίνει η παρουσίαση ενός κανανέμημένου primal-dual αλγορίθμου ο οποίος χαρακτηρίζεται για την ικανότητα κλιμάκωσής του ως προς το μέγεθος δικτύου. Στα πλεονεκτήματά του περιλαμβάνεται η αποδοτικότητά του αφού απαιτεί απλές σε υπολογιστική ισχύ ενημερώσεις μεταβλητών των δύο συμμετεχόντων κινητών χρηστών και σταθμού βάσης.

## 9.2 Περιγραφή του προβλήματος

Το σενάριο του προβλήματος περιλαμβάνει ένα μοναδικό κελί στο οποίο χρησιμοποιείται η τεχνολογία OFDM. Ένα σύνολο κινητών χρηστών  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$  μεταδίδει στον ίδιο Σταθμό Βάσης. Κάθε χρήστης  $i \in \mathcal{M}$  διαθέτει περιορισμένη ισχύ μετάδοσης  $P_i$  και ουρά προτεραιότητας μεγέθους  $w_i$ . Το συνολικό εύρος συχνοτήτων διαιρείται σε υποσύνολα καναλιών (subchannels) που σχηματίζουν το υπερόσολο  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ . Ο χρήστης  $i$  έχει την δυνατότητα να μεταδίδει σε περισσότερα του ενός υπο-κανάλια (subchannels), με ισχύ  $p_{ij}$  για το κανάλι  $j$ . Ένα κανάλι  $j$  ανατίθεται στο χρήστη  $i$  σε ποσοστό  $x_{ij}$  και η συνολική ανάθεση σε όλους τους χρηστες προφανώς, δεν πρέπει να υπερβαίνει την μονάδα ( $\sum_i x_{ij} = 1$ ). Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί ότι σκοπίμως "χαλαρώνουμε" τον αρχικό περιορισμό που είχαμε θέσει γενικά για προβλήματα ανάθεσης, όπου θεωρούσαμε ότι κάθε συχνότητα μπορεί να ανατεθεί σε ένα και μόνο χρήστη. Η παράκαμψη του περιορισμού δεν ακυρώνει την ορθότητα του προβλήματος και τόσο η λύση όσο και η ερμηνεία της θα επεξηγηθούν στην συνέχεια. Επιδιωκόμενος στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των (βεβαρημένων) ρυθμών μετάδοσης των χρηστών στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου πεδίου ρυθμών. Οι ρυθμοί μετάδοσης δεν είναι σταθεροί αλλά μεταβάλλονται στο πέρασμα του χρόνου. Ορίζουμε την ποσότητα  $e_{ij}$  ως το λαμβανόμενο σηματοθορυβικό λόγο  $SNR$  (signal-to-noise ratio) ανά μονάδα ισχύος του χρήστη  $i$  για το κανάλι  $j$  και με  $e_t$  το διάνυσμα που αναπαριστά, την μεταβλητή κατά την διάρκεια του χρόνου  $t$ , ποιότητα των καναλιών. Έστω  $\mathcal{R}(e_t)$  το εφικτό πεδίο ρυθμών μετάδοσης τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathfrak{R}_+^M : r_i = \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} \log \left( 1 + \frac{p_{ij} e_{ij}}{x_{ij}} \right), \forall i \in \mathcal{M} \right\}$$

όπου το ζεύγος τιμών  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathcal{X}$  επιλέγεται βάση των εξισώσεων :

$$\sum_i x_{ij} \leq 1, \forall j \in \mathcal{N}$$

$$\sum_j p_{ij} \leq P_i, \forall i \in \mathcal{M}$$

και το σύνολο

$$\mathcal{X} := \{(x, p) \geq 0 : 0 \leq x_{ij} \leq 1, \forall i, j\}.$$

Συγκεντρωντικά και για λόγους ευχρηστίας οι συμβολισμοί που χρησιμοποιήθηκαν στην περιγραφή του προβλήματος παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύμβολο	Φυσική ερμηνεία
$N$	συνολικός αριθμός των καναλιών (subchannels)
$\mathcal{N}$	σύνολο όλων των καναλιών
$M$	συνολικός αριθμός των χρηστών
$\mathcal{M}$	σύνολο όλων των χρηστών
$w_i$	το (δυναμικό) βάρος του χρήστη $i$
$e_{ij}$	κανονικοποιημένο $SNR$ του χρήστη $i$ για το κανάλι $j$
$p_{ij}$	η ισχύς που ανατίθεται στο χρήστη $i$ για το κανάλι $j$
$x_{ij}$	το κλασματικό ποσοστό του καναλιού $j$ που ανατίθεται στο κανάλι $i$
$P_i$	η μέγιστη ισχύς μετάδοσης του χρήστη $i$

Σε πρακτικές εφαρμογές OFDM η μεταβλητή  $x_{ij}$  επιτρέπεται να λάβει μόνο ακέραιες τιμές και πιο συγκεκριμένα  $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$ , υπόθεση που εναρμονίζεται πλήρως με τους φυσικούς περιορισμούς των προβλημάτων ανάθεσης. Δυστυχώς η εισαγωγή αυτού του περιορισμού οδηγεί σε προβλήματα πολύ μεγάλης δυσκολίας για την επίλυση των οποίων απαιτούνται ευρεστικές μέθοδοι. Στην ενότητα, αυτή όπως γίνεται αντιληπτό από τις παραπάνω εξισώσεις, ο περιορισμός αυτός αγνοείται και η αντίστοιχη λύση περιλαμβάνει κλασματικές τιμές της μεταβλητής  $x_{ij}$ . Το εμπόδιο αυτό δύναται να ξεπεραστεί με διάφορες τεχνικές στην πράξη. Για παράδειγμα, εάν η ανάθεση πόρων πραγματοποιείται ανά μπλόκ OFDM συμβόλων οι κλασματικές τιμές θα μπορούσαν να υλοποιηθούν μοιράζοντας χρονικά (time-sharing) τα σύμβολα σε ένα μπλόκ. Με παρόμοιο τρόπο αν ο αριθμός των καναλιών είναι σημαντικά μεγάλος ώστε το  $SNR$  των καναλιών να μην μεταβάλλεται δραματικά σε γειτονικά κανάλια, οι κλασματικές τιμές θα μπορούσαν να υλοποιηθούν με διαμέριση συχνοτήτων (frequency-sharing).

Το πρόβλημα ανάθεσης ανάγεται, τελικώς, σε πρόβλημα μεγιστοποίησης ρυθμών με βάρη. Σε κάθε χρήστη  $i$  ανατίθεται μια συνάρτηση ωφελιμότητας  $U_i(W_{i,t}, Q_{i,t})$  η οποία εξαρτάται από το μέσο ρυθμό μετάδοσης (throughput)  $W_{i,t}$  μέχρι την χρονική στιγμή  $t$  και από το μήκος της ουράς  $Q_{i,t}$  την στιγμή  $t$ . Επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες μεταβλητές, προκειμένου να ποσοτικοποιηθούν οι ιδιότητες της δικαιοσύνης και της ευστάθειας των ουρών. Σε κάθε περίοδο προγραμματισμού, αντικειμενικό στόχο αποτελεί η επιλογή εκείνου του διανύσματος ρυθμών  $\mathbf{r}_t \in \mathcal{R}(\mathbf{e}_t)$  που μεγιστοποιεί το (δυναμικά) βεβαρημένο άθροισμα των ρυθμών όλων των χρηστών. Τα βάρη καθορίζονται από το gradient του αθροίσματος των ωφελιμοτήτων των χρηστών την χρονική στιγμή  $t$ . Πιο συγκεκριμένα, είναι επιθυμητή η μεγιστοποίηση της προβολής του διανύσματος  $\mathbf{r}_t$  πάνω στο gradient :

$$\nabla_{\mathbf{w}}U(\mathbf{W}_t, \mathbf{Q}_t) - \nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{W}_t, \mathbf{Q}_t)$$

με

$$U(\mathbf{W}_t, \mathbf{Q}_t) = \sum_{i=1}^k U_i(W_{i,t}, Q_{i,t})$$

γίνεται η επιπλέον υπόθεση για κάθε χρήστη  $i$ ,

$$U_i(W_{i,t}, Q_{i,t}) = u_i(W_{i,t}) - \frac{d_i}{p}(Q_{i,t})^p,$$

όπου η  $u_i(W_{i,t})$  είναι αύξουσα κοίλη (concave) συνάρτηση, ενώ η ποσότητα  $d_i \geq 0$  αποτελεί μέτρο της ποιότητας εξυπηρέτησης (Quality Of Service, QoS) σχετιζόμενο με το μήκος της ουράς του χρήστη  $i$ . Η τιμή  $p > 1$  είναι παράμετρος που αφορά την δικαιοσύνη και συνδέεται επίσης με το μέγεθος της ουράς. Επομένως, η απόφαση που πρέπει να ληφθεί προσδιορίζεται απο την λύση :

$$\begin{aligned} & \max_{r_t \in \mathcal{R}(e_t)} (\nabla_{\mathbf{w}}U(\mathbf{W}_t, \mathbf{Q}_t)^T - \nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{W}_t, \mathbf{Q}_t)^T) r_t \\ & = \max_{r_t \in \mathcal{R}(e_t)} \sum_i \left( \frac{\partial u_i(W_{i,t})}{\partial W_{i,t}} + d_i(Q_{i,t})^{p-1} \right) r_{i,t} \end{aligned} \quad (1)$$

Η συνάρτηση (1) αποτελεί τη γενική μορφή μιας σειράς παραλλαγών που εκφράζουν διαφορετικές πολιτικές αντιμετώπισης του προβλήματος της βετιλιστοποίησης. Κατάλληλη επιλογή τιμών στις παραμέτρους οδηγεί σε διαφορετική προσσέγγιση του ζητήματος. Εάν θέσουμε  $d_i = 0$  για όλα τα  $i \in M$  η πολιτική που προκύπτει δίνει προτεραιότητα στην μεγιστοποίηση των αποδοχών της συνάρτησης ωφελιμότητας, ενώ συγκεκριμένες επιλογές του  $d_i$  για "συνήθεις" συναρτήσεις  $u_i()$  έχει αποδειχθεί ότι παράγουν λύσεις μεγιστοποίησης λαμβάνοντας υπόψη την ευστάθεια του συστήματος. Για παράδειγμα, μία ολόκληρη κλάση συναρτήσεων με αυτήν την συμπεριφορά είναι η :

$$u_i(W_{i,t}) = \begin{cases} \frac{c_i}{\alpha}(W_{i,t}), & \alpha \leq 1, \alpha \neq 0 \\ c_i \log(W_{i,t}), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (2)$$

το  $\alpha \leq 1$  είναι παράγοντας δικαιοσύνης και το  $c_i \geq 0$  βάρος τύπου QoS. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση (2) στο τύπο (1) εξάγουμε την φόρμουλα

$$\sum_i (c_i(W_{i,t})^{\alpha-1} + d_i(Q_{i,t})^{p-1})r_{i,t}$$

θεωρώντας μηδενικά μήκη ουρών  $d_i$  και ισοβαρείς ρυθμούς μετάδοσης  $c_i$ , θέτοντας  $\alpha = 1$  οδηγούμαστε σε πολιτική μεγιστοποίησης των ρυθμών μετάδοσης. Όταν  $\alpha = 0$  έχουμε την περίπτωση αναλογικής δικαιοσύνης (proportional fairness).

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφηκε διατυπώνεται ως :

$$\max_{r_t \in \mathcal{R}(e_t)} \sum_i w_{i,t} r_{i,t}$$

όπου το  $w_{i,t} \geq 0$  είναι μια μεταβλητή εξαρτώμενη από το χρόνο και αναπαριστά το βάρος που ανατίθεται στον χρήστη  $i$  την χρονική στιγμή  $t$ . Για λόγους απλότητας αγνοούμε τον δείκτη του χρόνου.

### 9.3 Ο Primal-Dual αλγόριθμος

Αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα, συμπεριλαμβάνοντας τις μεταβλητές  $x$  και  $p$  αντί του διανύσματος ρυθμών  $r$

$$\max_{(x,p) \in \mathcal{X}} \sum_{i \in \mathcal{M}} w_i \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} \log \left( 1 + \frac{p_{ij} e_{ij}}{x_{ij}} \right) \quad (3)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_i x_{ij} \leq 1, \forall j \in \mathcal{N} \quad (4)$$

$$\sum_j p_{ij} \leq P_i, \forall i \in \mathcal{M} \quad (5)$$

και

$$\mathcal{X} := \{(x, p) \geq 0 : 0 \leq x_{ij} \leq 1, \forall i, j\}. \quad (6)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι συνεχής και κοίλη (concave) σε όλο το πεδίο ορισμού  $\mathcal{X}$ , επομένως δεν υπάρχει ζήτημα αντιστοίχισης ανάμεσα σε αυτό και το δυαδικό(dual) του. Το μοναδικό μειονέκτημα της συνάρτησης εντοπίζεται στην παράγωγο η οποία δεν ορίζεται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού χρησιμοποιώντας, όμως, τη τεχνική της χαλάρωσης πετυχαίνουμε να παρακαμφουμε το πρόβλημα αυτό:

$$\max_{(x,p) \in \mathcal{X}} \sum_{i \in \mathcal{M}} w_i \sum_{j \in \mathcal{N}} (x_{ij} + \epsilon_{ij}) \log \left( 1 + \frac{p_{ij} e_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij}} \right) \quad (7)$$

όπου οι περιορισμοί  $\epsilon_{ij}$  δέχονται μικρές θετικές τιμές για όλα τα  $i$  και  $j$ . Οι υπόλοιποι περιορισμοί παραμένουν ως έχουν. Χάρη στην συνέχεια που παρουσιάζει η αντικειμενική συνάρτηση η βέλτιστη λύση του προβλήματος (5) μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά σε αυτήν του αρχικού προβλήματος (1), εάν επιλέξουμε τη ποσότητα  $\epsilon = [\epsilon_{ij}, \forall i, j]$  να λαμβάνει ιδιαίτερα μικρές τιμές.

Μετά την απαραίτητη τροποποίηση και δεδομένης της ύπαρξης της παραγώγου μπορούμε να προχωρήσουμε στην παρουσίαση του primal-dual αλγορίθμου. Αρχικά ορίζουμε την Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος (7) :

$$L(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) := \sum_{ij} w_i(x_{ij} + \epsilon_{ij}) \log \left( 1 + \frac{p_{ij}\epsilon_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij}} \right) + \sum_i \lambda_i \left( P_i - \sum_j p_{ij} \right) + \sum_j u_j \left( 1 - \sum_i x_{ij} \right). \quad (8)$$

Το αυστηρό θεώρημα της δυαδικότητας (strong duality theorem), υπαγορεύει πως οι βέλτιστες λύσεις τόσο του αρχικού (primal) όσο και του δυαδικού (dual) προβλήματος πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες KKT για όλα τα  $i$  και  $j$ .

$$u_j \geq 0, \quad \sum_i x_{ij} \leq 1, \quad u_j \left( \sum_i x_{ij} - 1 = 0 \right),$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} \leq P_{ij}, \quad \lambda_j \left( \sum_i p_{ij} - P_{ij} = 0 \right),$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad p_{ij} \geq 0,$$

$$x_{ij} \left( w_i \log \left( 1 + \frac{p_{ij}\epsilon_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij}} \right) - \frac{w_i p_{ij} \epsilon_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij} + p_{ij} \epsilon_{ij}} - u_j \right) \leq 0$$

$$p_{ij} \left( \frac{w_i \epsilon_{ij} (x_{ij} + \epsilon_{ij})}{x_{ij} + \epsilon_{ij} + p_{ij} \epsilon_{ij}} - \lambda_i \right) \leq 0.$$

Παρατηρώντας τις δύο τελευταίες ανισότητες αντιλαμβανόμαστε πως μετατρέπονται σε ιδοδυναμίες για την περίπτωση  $x_{ij} > 0$  και  $p_{ij} > 0$ , αντίστοιχα. Τα σημεία που ικανοποιούν τις παραπάνω KKT συνθήκες είναι ακριβώς τα saddle points της Langrangian συνάρτησης (8). Αφού το αρχικό πρόβλημα έχει τουλάχιστον μία λύση, η ύπαρξη των saddle σημείων είναι εξασφαλισμένη.

Ορίζουμε :

$$(\alpha)_b^+ = \begin{cases} \alpha, & b > 0, \\ \max(\alpha, 0), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για ευκολία χρήσης θέτουμε

$$f_{ij}(x_{ij}, p_{ij}) = w_i \log \left( 1 + \frac{p_{ij}\epsilon_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij}} \right) - \frac{w_i p_{ij} \epsilon_{ij}}{x_{ij} + \epsilon_{ij} + p_{ij} \epsilon_{ij}}$$

και

$$g_{ij}(x_{ij}, p_{ij}) = \frac{w_i \epsilon_{ij} (x_{ij} + \epsilon_{ij})}{x_{ij} + \epsilon_{ij} + p_{ij} \epsilon_{ij}}$$

Η αναζήτηση των saddle σημείων πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο primal-dual αλγόριθμο :  $\forall i, j$ ,

$$\dot{x}_{ij} = k_{ij}^x (f_{ij}(x_{ij}, p_{ij}) - u_j)_{x_{ij}}^+$$

$$\dot{p}_{ij} = k_{ij}^p (g_{ij}(x_{ij}, p_{ij}) - \lambda_i)_{p_{ij}}^+$$

$$\dot{u}_j = k_j^u \left( \sum_i x_{ij} - 1 \right)_{u_j}^+$$

$$\dot{\lambda}_i = k_i^\lambda \left( \sum_j p_{ij} - P_i \right)_{\lambda_i}^+$$

όπου οι σταθερές  $k_{ij}^x, k_{ij}^p, k_j^u, k_i^\lambda$  ελέγχουν το ρυθμό σύγκλισης του αλγορίθμου. Επιβεβαιώνεται ότι η ισορροπία (equalibria) του άνωθεν συστήματος είναι τα ζητούμενα saddle σημεία.

#### 9.4 Σχολιασμός αλγορίθμου

Έχοντας αποδώσει τις βασικές εξισώσεις του αλγορίθμου, αξίζει να συζητήσουμε την ερμηνεία τους και την κεντρική ιδέα πάνω στην οποία είναι θεμελιωμένες. Ανατρέχοντας στην εξίσωση (8) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ουρές  $u$  και  $\ell$  ουσιαστικά υπολογίζουν τους πολλαπλασιαστές Lagrange του προβλήματος βελτιστοποίησης που εξετάζουμε. Συνδέονται άμεσα με τους δύο περιορισμούς (4) και (5) του αρχικού προβλήματος και μεταφράζονται ως "ποινές τιμωρίας" για κάθε υπέρβαση του περιορισμού. Η ενημέρωση των τιμών τους ακολουθεί τον πασίγνωστο κανόνα της προσφοράς και της ζήτησης. Εάν η ζήτηση που εκφράζεται μέσω των αθροισμάτων  $\sum_i x_{ij}$  και  $\sum_j p_{ij}$  ξεπεράσει τα όρια της προσφοράς, 1 και  $P_i$  αντίστοιχα, η τιμή αυξάνεται, ενώ εάν η ζήτηση υπολείπεται της προσφοράς η τιμή μειώνεται. Οι κινητοί χρήστες έχοντας στην διάθεσή τους τις τιμές των ουρών, έπειτα μπορούν να ενημερώσουν τις τοπικές μεταβλητές τους  $x_{ij}$  και  $p_{ij}$ . Τα δύο βήματα, η ενημέρωση των τοπικών τιμών και της ζήτησης επαναλαμβάνονται, ώσπου να επιτευχθεί σύγκλιση σε εκείνη την τιμή ισορροπίας (equalibrium) για τη οποία η ζήτηση ισούται με την προσφορά. Εξέχοντα ρόλο στη ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου λαμβάνουν οι σταθερές  $k_{ij}^x, k_{ij}^p, k_j^u$  και  $k_i^\lambda$ . Τέλος, στην προαπάθεια να αιτολογήσουμε το χαρακτηρισμό της προτεινόμενης μεθόδου ως κατανεμημένη είναι αναγκάιο να ανφερθούμε λεπτομερέστερα στις ανταλλαγές μηνυμάτων ανάμεσα στα συμμετέχοντα μέρη της επικοινωνίας. Εξάλλου η ιδιότητά του αυτή, αποτέλεσε ένα από τα σπουδαιότερα θέληγτρα για την ανάπτυξή του. Ο κινητός λοιπόν, συνδρομητής  $i$  είναι υπεύθυνος για την τοπική ενημέρωση των  $x_{ij}$  και  $p_{ij}$  καθώς και της δυϊκής μεταβλητής  $\ell_i$  για κάθε κανάλι  $j$ . Απαιτείται ακόμη να στείλει τις ενημερωμένες τιμές των  $x_{ij}$  στο σταθμό βάσης του κελιού του. Οι υπολοιπες μεταβλητές δεν χρειάζεται να σταλούν. Στο σημείο αυτό είναι η σειρά του σταθμού βάσης, έχοντας συγκεντρώσει τα διανύσματα  $x_{ij}$  από όλους τους χρήστες  $i$  να προχωρήσει στη δική του τοπική ενημέρωση της μεταβλητής  $u_j$

και την οποία μεταδίδει με πανεκπομπή (broadcast) σε όλους τους χρήστες του κελιού. Το συνολικό κόστος επικοινωνίας σε επίπεδο μηνυμάτων ανά επανάληψη του αλγορίθμου ανάγεται σε  $(M + 1)N$  μηνύματα. Ο μικρός αυτός αριθμός μηνυμάτων πετυχαίνει να διαφυλάξει και τις ατομικές πληροφορίες του χρήστη, μιας και τα βάρη (που συνδέονται με QoS) των ζεύξεων ή οι περιορισμοί ισχύος, δεν γνωστοποιούνται στο σταθμό βάσης, αλλά χρησιμοποιούνται τοπικά από τον ίδιο κινητό συνδρομητή.

## 9.5 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Στην παράγραφο αυτή αξιολογούμε και σχολιάζουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής του primal-dual αλγορίθμου σε ένα ρεαλιστικό σενάριο WiMAX δικτύου. Η υλοποίηση του αλγορίθμου στο εργαλείο MATLAB, που χρησιμοποιήθηκε για τις προσομοιώσεις, περιλαμβάνεται συγκεντωμένη στο Παράρτημα Γ, στο τέλος της εργασίας. Υιοθετούμε το μοντέλο μοναδικού OFDM κελιού και θεωρούμε την περίπτωση κινητών χρηστών και uplink μετάδοσης σε σταθμό βάσης. Το εύρος ζώνης του καναλιού είναι 10MHz και χρησιμοποιείται η μέθοδος πρόσβασης OFDMA. Ο συνολικός αριθμός των διαθέσιμων subchannels είναι 16 και οι κινητοί χρήστες του κελιού στους οποίους πρέπει να ανατεθούν τα υπο-φέροντα είναι τέσσερις. Τα βάρη των χρηστών  $w_i$  παράγονται τυχαία με τις τιμές τους να περιέχονται στο διάστημα  $[0,1]$ . Οι περιορισμοί ισχύος για τον κάθε συνδρομητικό σταθμό δίνονται από το διάνυσμα  $\mathbf{P}$  με μονάδα μέτρησης Watt. Ολοκληρώνοντας την περιγραφή του σεναρίου, για το SNR θέτουμε τυχαίες τιμές. Θα εξετάσουμε δύο στιγμιότυπα αυτού του σεναρίου για περιπτώσεις Low - SNR ( $SNR \ll 1$ ) και medium-High SNR ( $SNR > 10$ ). Συγκεκριμένα για την πρώτη περίπτωση, υποθέσαμε ότι ο σηματοθορυβικός λόγος κάθε χρήστη κινείται γύρω από μία σταθερή μέση τιμή που όμως παρουσιάζει διακύμανση 0,01 ανάμεσα στο σύνολο των 16 subchannels (στην υλοποίηση του κώδικα χρησιμοποιήθηκε κανονική κατανομή για την γέννηση των ψευδοτυχαίων τιμών). Επιλέξαμε τον τρόπο αυτό ώστε τα δεδομένα να ανταποκρίνονται με μεγαλύτερη πιστότητα σε πραγματικές συνθήκες. Το βήμα ενημέρωσης των ουρών επιλέχτηκε να είναι  $k_{ij}^x = k_{ij}^p = k_j^u = k_i^l = 0.01$  για κάθε  $i$  και  $j$ . Οι ουρές μπορούν να αρχικοποιηθούν με τυχαίες τιμές, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τις θεωρήσαμε μηδενικές κατά την έναρξη του αλγορίθμου. Στην σταθερά  $e_{ij}$  θέσαμε  $10^{-4}$  για όλα τα  $i$  και  $j$ . Αρκετά μικρή τιμή, ώστε η λύση που θα προκύψει να απέχει ελάχιστα από την βέλτιστη. Το SNR τα  $P_i$  και τα  $e_{ij}$  της εκδοχής που εξετάζουμε δίνονται στον πίνακα.

User	Βάρος $w_i$	SNR	SNR (dB)	Pi (Watt)	λόγος $e_{ij}$
1	0.8	0.1	-10	0.2	0.5
2	0.7	0.3	-5.23	0.7	0.45
3	0.3	0.5	-3.01	0.8	0.625
4	0.2	0.8	-0.97	0.9	0.88

με τα  $e_{ij}$  να διαμορφώνονται τελικά ως εξής:

User \ subchannel	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.5886	0.4993	0.4433	0.4916	0.4586	0.5166	0.5295	0.5526
2	0.4393	0.4105	0.4141	0.4259	0.4168	0.4379	0.4231	0.4125
3	0.6172	0.6237	0.6442	0.6323	0.6115	0.6385	0.6321	0.6369
4	0.8901	0.8728	0.8974	0.8963	0.8768	0.9018	0.8920	0.8826

User \ subchannel	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.4695	0.5498	0.5144	0.5566	0.5678	0.4854	0.5800	0.4884
2	0.4340	0.4366	0.4231	0.4194	0.4158	0.4226	0.4448	0.4219
3	0.6278	0.6242	0.6270	0.6296	0.6265	0.6234	0.6152	0.6199
4	0.8681	0.8957	0.8956	0.8876	0.8989	0.8829	0.8964	0.8921

Τα αποτελέσματα αποδίδονται παραστατικά στην παρακάτω εικόνα (Figure 22)

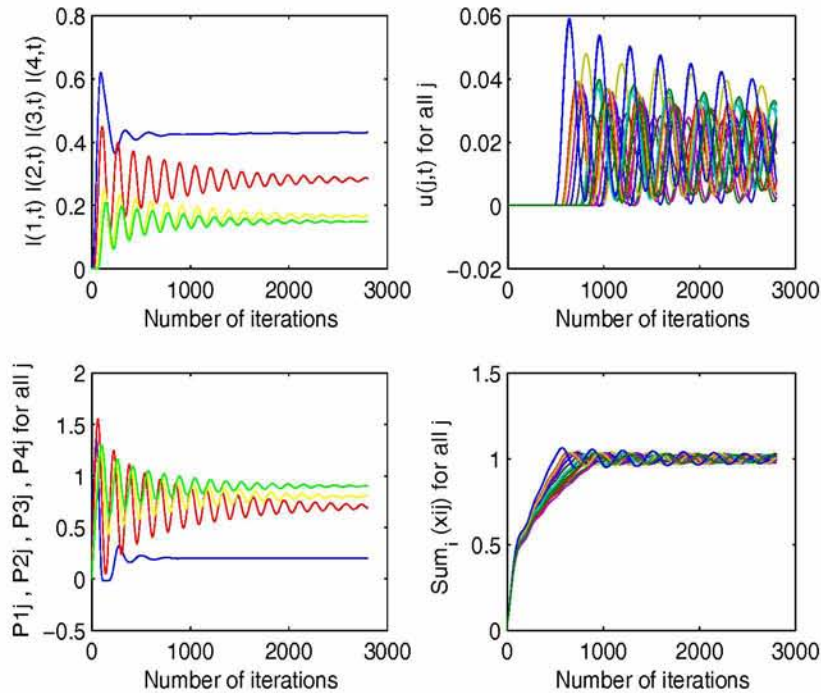


Figure 22: Απεικόνιση αποτελεσμάτων του primal dual για Low-SNR

Η σύγκλιση τόσο των ουρών  $l_i, u_j$  όσο και των αθροισμάτων  $\sum_j p_{ij} \forall i, \sum_i x_{ij} \forall j$  είναι εμφανής και επαληθεύει την ορθότητα του αλγορίθμου. Για παράδειγμα, η ποσότητα  $\sum_j p_{ij}$  συγκλίνει στις τιμές 0.2W, 0.7W, 0.8W και 0.9W που αρχικά είχαμε θέσει ως περιορισμό ισχύος για τα αντίστοιχα κινητά. Η ίδια ακριβώς συμπεριφορά παρατηρείται και για το άθροισμα  $\sum_i x_{ij}$  που τελικά συγκλίνει στην τιμή του περιορισμού δηλαδή την μονάδα για κάθε subchannel  $j$ .

Ενδιαφέρον, παρουσιάζει το γράφημα (εικόνα Figure 23) στο οποίο παρουσιάζεται το σύνολο των subchannels που ανατίθενται τελικά σε κάθε χρήστη από τα 16 διαθέσιμα, δηλαδή η



ποσότητα  $\sum_j x_{ij}$ . Όπως γίνεται φανερό από τη γραφική παράσταση οι τιμές στις οποίες συγκλίνουν τελικά αυτές οι ποσότητες, αθροιζόμενες επαληθεύουν τον συνολικό αριθμό subchannels.

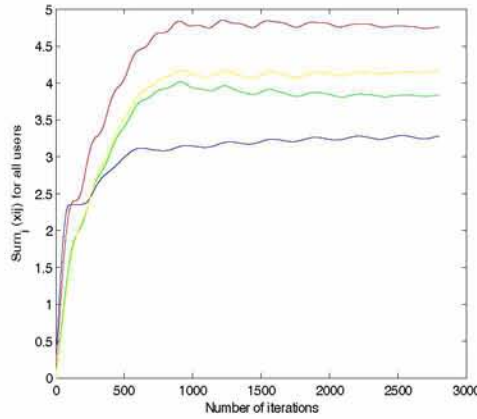


Figure 23: Αριθμός των subchannels που ανατίθενται σε κάθε χρήστη (περίπτωση Low-SNR)

Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που το SNR λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές; Εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο για  $SNR > 10$ , υποθέτοντας αυτή την φορά διακύμανση της τάξεως του 0.1 και διατηρώντας τα ίδια βάρη με το προηγούμενο στιγμιότυπο. Οι αντιστοιχοί πίνακες για τα δεδομένα αυτού του προβλήματος παρατίθενται με την σειρά παρακάτω :

User	Βάρος $w_i$	SNR	SNR (dB)	Pi (Watt)	λόγος $e_{ij}$
1	0.8	12	10.79	1.5	8
2	0.7	14	11.46	2	7
3	0.3	16	12.04	2.5	6.4
4	0.2	18	12.55	2.3	7.2

User \ subchannel	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7.9725	8.0618	7.8791	8.0539	8.0110	7.9661	8.0393	7.9514
2	7.1317	6.9167	6.9651	6.9987	7.0746	7.0407	7.0794	7.0268
3	6.4152	6.3886	6.3857	6.3906	6.4078	6.4279	6.3981	6.3859
4	7.8276	7.8791	7.8569	7.8734	7.8387	7.7997	7.6706	7.7980

User \ subchannel	9	10	11	12	13	14	15	16
1	7.9393	7.9856	8.0313	8.0132	8.0264	8.1157	8.0774	8.1277
2	6.9632	6.9816	6.9885	6.9733	6.9848	6.9982	6.9480	7.0526
3	6.3745	6.3795	6.4214	6.4446	6.4491	6.3738	6.3411	6.4526
4	7.8220	7.7662	7.8008	7.8024	7.8455	7.8226	7.9224	7.8619

Σύγκλιση είχαμε και στην περίπτωση αυτή. Η εικόνες (Figure 24 και 25 ) επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό μας.

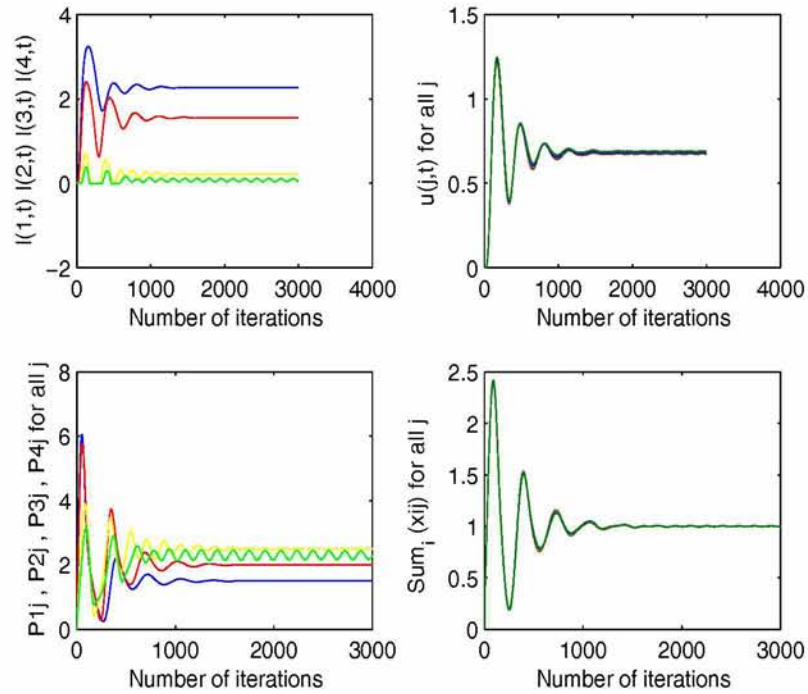


Figure 24: Απεικόνιση αποτελεσμάτων του primal dual για Medium High-SNR

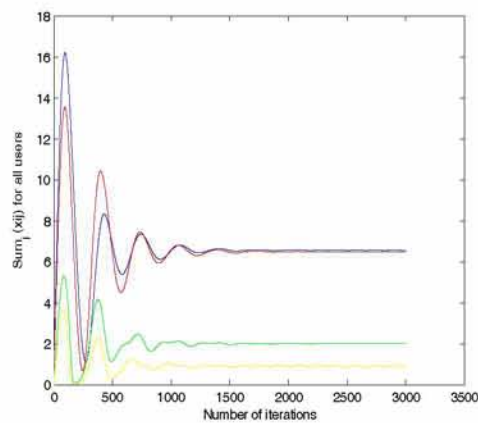


Figure 25: Αριθμός των subchannels που ανατίθενται σε κάθε χρήστη (περίπτωση Medium-High-SNR)

Γενική παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι, ο primal-dual αλγόριθμος πετυχαίνει το 90 % της βέλτιστης απόδοσής του σε μόλις 500 επαναλήψεις ενώ το ποσοστό αγγίζει το 95 %, όταν ο αριθμός των επαναλήψεων φτάσει τις 1000. Ακόμη, από τις προσομιώσεις διαφάνηκε ότι ο χρόνος σύγκλισης εξαρτάται ιδιαίτερα από την επιλογή των βημάτων ενμέρωσης των μεταβλητών. Βήματα με μεγάλες τιμές οδηγούν σε γρηγορότερη ταχύτητα σύγκλισης, δημιουργώντας ωστόσο μεγαλύτερες διακυμάνσεις των μεταβλητών γύρω από τις βέλτιστη λύση.

Τέλος, η εφαρμογή primal-dual αλγορίθμων γενικότερα, για την επίλυση μη-αυστηρά κοίλων προβλημάτων δεν εγγυάται συγχρόνως και την σύγκλισή τους. Έχει αποδειχθεί ότι primal-dual αλγόριθμοι σε μη-αυστηρώς κοίλα προβλήματα βελτιστοποίησης υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις απέτυχαν να συγκλίνουν σε κάποια τιμή. Ο αλγόριθμος που προτείνεται παρουσιάζει πάντα ασυμπτωτική σύγκλιση σε ένα αμετάβλητο σύνολο  $V$  που περιέχει τα σημεία ισορροπίας που αναζητούμε. Δυστυχώς, στο σύνολο αυτό ενδέχεται να περιέχονται και άλλα σημεία εκτός των σημείων ισορροπίας, που οδηγούν σε περιορισμένους κύκλους (limit circles). Εάν η τροχιά σύγκλισης τείνει στα σημεία αυτά, ο αλγόριθμος αναλώνεται σε επανεξέταση ορισμένων σημείων διαγράφοντας κύκλους. Καταλήγουμε τελικώς στο συμπέρασμα, πως η σύγκλιση του primal-dual αλγορίθμου που εξετάζουμε είναι επιτεύξιμη αν και μόνο αν το σύνολο  $V$  περιέχει σημεία ισορροπίας (equalibrium points) και μόνο.

## 10 Βιβλιογραφία

### References

- [1] Jeffrey G.Andrews, arunabha Ghosh and Rias Muhamed.Fundamentals of WiMAX Understanding Broadband Wireless Networking. *Prestige Hall Communications Engineering Technologiew series*,2007
- [2] G. Ayorkor Mills-Tettey,Anthony Stentz and M. Bernardine Dias.The Dynamic Hungarian Algorithm for the Assignment Problem with Changing Costs. *Robotics Institute Carnegie Mellon University Pittsburgh, Pennsylvania*, July 2007
- [3] Minghua Chen and Jianwei Huang.Optimal Resource Allocation for OFDM Uplink Communication: A Primal-Dual Approach *Dept. of Information Engineering, Chinese University of Hong Kong*
- [4] Ιωάννης Τερζάκης, Δημήτριος Τσαπάρας.Σχεδίαση ασύρματων Δικτύων WiMAX για πρόσβαση και διασύνδεση. Μελέτη QoS και ανάλυση υποστηριζόμενων υπηρεσιών δικτύου -Case study:Πιλοτικά συστήματα WiMAX Ο.Τ.Ε. *Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*, Απρίλιος 2007
- [5] Michael Fineral.WiMAX versus WiFi Acomparison of technologies,Markets and Business Plans,*dBrn Associates, Inc*, June 2004
- [6] Christos H.Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. Compinational Optimization Algorithms and Complexity. *Dover Publications,INC*,1998
- [7] Simon Haykin Μετάφραση Ε.Δ.Συγκάς Μ.Ε.Θεολόγου. Συστήματα επικοινωνίας *Παπασωτηρίου*,1995
- [8] Mordecai J. Golin.Bipartite Matching and the Hungarian Method, Course Notes. *Hong Kong University of Science and Technology*.,August 2006
- [9] R. A. Pilgrim, Munkres' Assignment Algorithm. Modified for Rectangular Matrices, Course notes. *Murray State University*
- [10] Mike Dawes, The Optimal Assignment Problem, Course notes.*University of Western Ontario*.
- [11] On Kuhn's Hungarian Method - A tribute from Hungary. *Andras Frank, Egervary Research Group, Pazmany P. setany 1/C, H1117, Budapest, Hungary*.
- [12] Γ.Παργάλου. Ασφάλεια Πληροφοριακών Συστημάτων και Δικτύων *Εκδόσεις Ανικουλα*,2002
- [13] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/6543>
- [14] <http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarianalgorithm>

- 
- [15] <http://en.wikipedia.org/wiki/Assignmentproblem>
  - [16] <http://www.public.iastate.edu/~ddoty/HungarianAlgorithm.html>
  - [17] <http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/hungarian/index.html>
  - [18] <http://www.skidmore.edu/~adean/MC3020409/Slides/MC302041019.ppt>
  - [19] [http://www.math.ntu.edu.tw/~gjchang/courses/2002-09-graph-theory/Ch3 Matching and Factors.ppt](http://www.math.ntu.edu.tw/~gjchang/courses/2002-09-graph-theory/Ch3%20Matching%20and%20Factors.ppt)
  - [20] <https://www.cse.yorku.ca/~jeff/courses/6111/syllabus/03.5-NetworkFlow.ppt>
  - [21] <http://www.csc.liv.ac.uk/~michele/TEACHING/COMP309/2005/Lec8.2.4.pdf>

## 11 Παράρτημα Α

```

function maxWeight = hungarian( allocationMatrix )

%allocationMatrix = [7 4 3 ; 3 1 2 ; 3 0 0];

% Αρχικοποίηση μεταβλητών

[rows, columns] = size(allocationMatrix);
n = rows;
xMatchedTo = zeros(1,n); % Η κορυφή x_i είναι matched με την κορυφή y_j του Y συνόλου
yMatchedTo = zeros(1,n); % Η κορυφή y_i είναι matched με την κορυφή x_j του X συνόλου
slack = zeros(1,n); % το διάνυσμα αυτό ορίζεται για όλα τα y in Y και κρατά το min
% (l[x]+l[y] - w[x,y]) A x in S
slackx = zeros(1,n); % Για κάθε y σημειώνουμε σε αυτό το διάνυσμα το αντίστοιχο x για το οποίο
% ιοχχει min (l[x]+l[y] - w[x,y]) A x in S
maxWeight = 0; % Μεταβλητή που μετρά το συνολικό "βάρος" του ταιριάσματος
maxMatch=0; % Μεταβλητή που χρησιμοποιείται για να μετρά το μέγεθος του ταιριάσματος
%σε κάθε φάση του αλγορίθμου

% Βήμα 1 του αλγορίθμου
% αρχικοποίησης των ετικετών (labels)

ly = zeros(1,n); % Ετικέτες για το Y σύνολο, l[y]=0 A y in Y
lx = max(allocationMatrix, [], 2); % Ετικέτες για το X σύνολο, l[x]=max(allocationMatrix(x, y)) A y in Y

[xMatchedTo, yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch]=augment(allocationMatrix, xMatchedTo,
yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch, n);

for x=1:n
    maxWeight = maxWeight + allocationMatrix(x, xMatchedTo(x));
end

fprintf('Η τελική ανθεση απεικονίζεται στο διάνυσμα xMatchedTo : %d \n'); xMatchedTo

fprintf('Το συνολικό κόστος της παραπάνω ανθεσης είναι : \n');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Αρχή της βασικής συνάρτησης του Hungarian Αλγορίθμου
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [xMatchedTo, yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch] = augment(allocationMatrix,
xMatchedTo, yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch, n)

if maxMatch == n % Έλεγχος αν έχει βρεθεί το μέγιστο ταιρίασμα (perfect matching)
    return;
end

q = zeros(1,n); % Βοηθητική FiFo ουρά (πίνακας) χρησιμοποιείται
%για αναζήτηση κατά πλάτος κατά την δημιουργία
%του hungarian δέντρου

wr=0; % Σημεία για διάβασμα και γράψιμο στην ουρά
rd=0;

S = zeros(1,n); % Αρχικοποιούμε τα συνολα S,T του αλγορίθμου
T = zeros(1,n);

prevTree = zeros(1,n); % Βοηθητικός πίνακας που θα χρησιμοποιηθεί για να
% εντοπίσουμε το εσποιημένο
% μονοπάτι (augmenting path) του δέντρου.
% υποδεικνύει τη σειρά προσέλασης των x
% κορυφών του συνόλου S

for x=1:n
    if xMatchedTo(x) == 0 % Ψάξε για το πρώτο ελεύθερο (free or unmatched) x
        wr = wr+1;
        q(wr) = x; % όταν το βρεις βάλε το στο σύνολο S θα είναι η ρίζα του
        prevTree(x) = -1; % δέντρου που θα δημιουργήσεις σημείωσε το και στις βοηθητικές
        S(x) = 1; % διατάξεις prev_tree και q
        break;
    end
end

for y=1:n
    slack(y)= lx(x) + ly(y)- allocationMatrix(x,y); % Για την ρίζα του δέντρου υπολόγισε το slack[y]

```

```

    slackx(y)=x ;           % Σημείωση για κάθε slack[y] την αντίστοιχη κορυφή x
                           % εδώ την ρίζα (root)

end

while true

    while rd < wr
        rd = rd+1;
        x=q(rd);

        y=1;
        while y<n+1
            if allocationMatrix(x,y) == lx(x) + ly(y)&& ~T(y) % Eαν το y ανήκει στο σύνολο Nl(S)-T
                if yMatchedTo(y) == 0 % Eαν n y κορυφή είναι free ή unmatched
                    break; % Βγές από το for(while) loop έχετε βρεί augmenting path
                end

                T(y) = 1;
                wr = wr+1;
                q(wr) = yMatchedTo(y);
                [slack, slackx, S, prevTree]= addNodesToTree(yMatchedTo(y), x,
                    allocationMatrix, slack, slackx, lx, ly, S, prevTree, n);
            end
            y=y+1;
        end % End of while y < n + 1 loop

        if y<n+1
            break; % Βρήκαμε επαυξημένο μονοπάτι (augmenting path) βγές από το βρόγχο while rd < wr
        end

    end % end of while rd<rw

    if y<n+1
        break; % Έχει βρεθεί το επαυξημένο μονοπάτι (augmenting path)
    end %βγές από το βρόγχο while true

    % Εδώ συνεχίζει ο υπολογισμός εάν δεν έχει
    % βρεθεί το επαυξημένο μονοπάτι
    [lx, ly, slack] = updateLabels(slack, slackx, lx, ly, S, T, n); % Ενημέρωση τις ετικέτες
    wr=0; % Αρχικοποίηση της ουράς πάλι
    rd=0;

    y=1;
    while y<n+1
        if ~T(y)&& slack(y) == 0 % Επιλέγουμε y να ανήκει στο σύνολο Nl(S)-T

            if yMatchedTo(y) == 0 % Δηλαδή εάν έχουμε unmatched ή free y κορυφή βρήκαμε επαυξημένο μονοπάτι
                x= slackx(y);
                break; % Βγές από το for(while) loop

            else

                T(y) = 1;
                if ~S(yMatchedTo(y))
                    wr = wr+1;
                    q(wr) = yMatchedTo(y);
                    [slack, slackx, S, prevTree]= addNodesToTree(yMatchedTo(y),
                        x, allocationMatrix, slack, slackx, lx, ly, S, prevTree, n);
                end

            end

        end % End of if-else-end

    end

    y=y+1;
end % end of while y<n+1

if y<n+1
    break; % Έχει βρεθεί το επαυξημένο μονοπάτι
end

end % end of while true

```

```

if y<n+1          % Έχει βρεθεί το επαυξημένο μονοπάτι

    maxMatch = maxMatch + 1 ; % Αυξάνουμε το μέγεθος ταιριάσματος κατά ένα
    cx = x;
    cy = y;

    while cx /= -1          % Στο επαυξημένο δέντρο κάνουμε τις matched ακμές
                            % free και αντίστοιχα τις free matched

        tempy = xMatchedTo(cx);
        yMatchedTo(cy) = cx;
        xMatchedTo(cy) = cy;

        cx =prevTree(cx);
        cy = tempy;

    end

    [xMatchedTo, yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch]=augment(allocationMatrix,
    xMatchedTo, yMatchedTo, slack, slackx, lx, ly, maxMatch, n);
    % Αναδρομική κλήση της συνάρτησης augment μέχρι maxMatch == n

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          Συνάρτηση ενημέρωσης των ετικετών (labels) των κορυφών
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [lx, ly, slack] = updateLabels(slack, slackx, lx, ly, S, T, n)

lambda = 100000; % Αρχικοποιούμε το lambda με μια "άπειρη" τιμή

for y=1:n
    if ~T(y)
        lambda = min(lambda, slack(y));
    end
end

for x=1:n
    if S(x)
        lx(x) = lx(x) - lambda;
    end
end

for y=1:n
    if T(y)
        ly(y) = ly(y) + lambda;
    end
end

for y=1:n
    if ~T(y)
        slack(y)= slack(y) - lambda;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          Συνάρτηση πρόσθεσης κόμβων στο (alternating tree) δέντρο
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [slack, slackx, S, prevTree]= addNodesToTree(x, previousToX,
    allocationMatrix, slack, slackx, lx, ly, S, prevTree, n)

S(x) = 1;
prevTree(x) = previousToX;

for y=1:n
    if lx(x) + ly(y) - allocationMatrix(x, y) < slack(y)
        slack(y)= lx(x) + ly(y) - allocationMatrix(x, y);
        slackx(y) = x;
    end
end
end

```



## 12 Παράρτημα Β

```

function [assignment, cost] = resource_allocation(assignmentMatrix)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%           Αρχή της βασικής συνάρτησης (resource_allocation)

% Συνάρτηση υπολογισμού ανάθεσης πόρων (carriers) σε χρήστες της ασύρματης
% τεχνολογίας WiMAX . Υλοποίηση του αλγορίθμου του Mukre ή για να
% χρησιμοποιήσουμε το πιο διαδεδομένο όνομα, του Hungarian αλγορίθμου.
%
% Η συνάρτηση επιστρέφει την ανάθεση (assignment) και το αντίστοιχο
% ελάχιστο κόστος (cost).

% Αποθηκεύουμε τον αρχικό πίνακα για να τον χρησιμοποιήσουμε αργότερα στον
% υπολογισμό του κόστους

givenMatrix = assignmentMatrix;

% Ελέγχουμε αν ο πίνακας που εισήγαγε ο χρήστης περιέχει αρνητικές τιμές.
% Σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζεται σχετικό μήνυμα λάθους.

if any(assignmentMatrix(:)<0)

    fprintf('Your matrix contains elements with negative values.\n');
    error('Please enter another positive value matrix. ');

end

% Αποθηκεύουμε τις διαστάσεις του πίνακα.
[rows, columns] = size(assignmentMatrix);

% Δημιουργία βοηθητικών πινάκων και διανυσμάτων που θα χρησιμοποιηθούν
% κατά τον υπολογισμό.

coveredColumns = zeros(1, columns);
coveredRows    = zeros(rows, 1);
starMatrix     = zeros(rows, columns);
primeMatrix    = zeros(rows, columns);

% Παρακάτω παρουσιάζουμε το πρώτο βήμα του αλγορίθμου
% Ο Αλγόριθμος ξεκινά αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής από τον
% αρχικό πίνακα. Ακόμη λαμβάνουμε υπόψη την περίπτωση μη τετραγωνικών
% πινάκων και ενεργούμε καταλλήλως. Εκτελούμε και το δεύτερο βήμα
% όπου χρειάζεται ιδιαίτερη μεταχείριση για να υποστηρικτούν και μη
% τετραγωνικοί πίνακες
if rows <= columns

    dimOfMatrix =rows;
    minVector = min(assignmentMatrix, [], 2);
    assignmentMatrix = assignmentMatrix - repmat(minVector, 1, columns);

    % Ελέγχουμε τα σημεία στον αρχικό πίνακα στα οποία έχουν εμφανιστεί
    % μηδενικά. Σαρώνουμε τον αρχικό πίνακα ανά γραμμή και σημειώνουμε με έναν
    % άσσο στο πίνακα starMatrix τα μηδενικά που συναντάμε, φροντίζοντας να
    % επιλέγουμε ένα μηδενικό για κάθε γραμμή - στήλη. Οι στήλες στις οποίες έχει βρεθεί
    % μηδενικό σημειώνονται με 1 στο διάνυσμα coveredColumns

    for row = 1:rows
        for col = find(assignmentMatrix(row, :)==0)
            if ~coveredColumns(col) % εαν η στήλη δεν έχει ξαναεξεταστεί-καλυφθεί.
                starMatrix(row, col) = 1;
                coveredColumns(col) = 1;
                break % προχωρούμε στην επόμενη γραμμή
            end
        end
    end

    %Εκτελούμε τα ίδια βήματα με παραπάνω αυτήν την φορά όμως για την
    %περίπτωση που rows>columns

else % Δηλαδή αν rows > columns
    dimOfMatrix =columns;
    minVector = min(assignmentMatrix);
    assignmentMatrix = assignmentMatrix - repmat(minVector, rows, 1);

```

```

for col = 1:columns
    for col = find(allocationMatrix(:,col)==0)
        if coveredRows(row) % εαν η στήλη δεν έχει ξαναεξεταστεί-καλυφθεί.
            starMatrix(row,col) = 1;
            coveredColumns(col) = 1;
            coveredRows(row)=1;
            break % προχωρούμε στην επόμενη γραμμή
        end
    end
end
coveredRows(:) = 0; % Ξαναμηνδενίζουμε το διανυσμα, ο ρόλος του ήταν βοηθητικός

end %end of if-else

% Εαν οι στήλες που έχουν καλυφθεί ισούνται με το μέγεθος του πίνακα τότε ο
% υπολογισμός έχει ολοκληρωθεί
if sum(coveredColumns) == dimOfMatrix

[maxVal, assignment]= max(starMatrix, [], 2);
assignment(maxVal==0)=0; %Εάν δεν έχουμε ανάθεση σε κάποια στήλη το σημειώνουμε

else

    % Διαφορετικά προχωρείστε στην συνάρτηση step3

    [assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows]
    = step3(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix);

end

% Υπολογισμός του κόστους που αντιστοιχεί στην ανάθεση που έχει υπολογιστεί
cost = 0;
for i = 1:dimOfMatrix
    if assignment(i)~=0
        cost = cost + givenMatrix(i, assignment(i));
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Αρχή της συνάρτησης step3

%Βήμα 3. Το βασικότερο βήμα ροής του αλγορίθμου. Αρχικά για κάθε μη
%καλυφθείσα στήλη - γραμμή προσπαθούμε να εντοπίσουμε στον πίνακα που
%προέκυψε μετά το πρώτο βήμα κάποιο στοιχείο με 0. Σημαδεύουμε το σημείο
%αυτό με 1 στον primeMatrix. Στην γραμμή του στοιχείου αυτού ελέγχουμε αν
%υπάρχει κάποιο άλλο σημείο σημειωμένο(με άσσο) στον starMatrix. Αν δεν
%βρεθεί τέτοιο σημείο η ροή του προγράμματος περνά στο βήμα 4. Σε αντιθετη
%περίπτωση (δηλαδή εαν βρέθηκε τέτοι σημείο) σημειώνεται στις αντίστοιχες
%καλυφθείσες γραμμές - στήλες. Τέλος σε κάθε περίπτωση εκτελείται το βήμα 5.
%

function [assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows]
= step3(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix)

flag = 1;

while flag

    flag = 0;

    for col = find('coveredColumns)
        for row =find('coveredRows')
            if allocationMatrix(row,col) == 0

                primeMatrix(row,col)=1;
                starColumn = find(starMatrix(row,:));
                if isempty(starColumn) % Προχωρείστε στην συνάρτηση step4

```

```

[assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows]
= step4(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix, row, col);

return % Βγαίνουμε εντελώς από το while loop
else
coveredRows(row) =1;
coveredColumns(starColumn) =0;
flag =1;
break % Βγαίνουμε από το for loop της γραμμής (row) και
%μπαινουμε στην επόμενη στήλη (column)
end
end
end
end

end

% Προχωρούμε στο βήμα 5

[assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step5(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Αρχή της συνάρτησης step4

% Βήμα 4. Η συνάρτηση step4 υλοποιεί το ακόλουθο βήμα του αλγορίθμου. Κατασκευάζεται
% μια σειρά από εναλλασσόμενα prime και star μηδενικά. Πιο συγκεκριμένα
% έστω x το prime μηδενικό που βρήκαμε από το προηγούμενο βήμα (συνάρτηση
% step3) βρίσκουμε το star μηδενικό y στη στήλη του x (αν υπάρχει) και
% έπειτα το prime μηδενικό z στην γραμμή του y (πάντα θα υπάρχει).
% Τερματίζουμε την διαδικασία όταν βρούμε ένα prime μηδενικό που δεν
% ακολουθείτε από star στην στήλη του. Στη συνέχεια κάνουμε unstar κάθε
% star μηδενικό, star κάθε prime μηδενικό σβήνουμε τον πίνακα prime και
% όλες τις γραμμές που είχαμε καλύψει.

function [assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step4(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix, row, col)

newStarMatrix = starMatrix;
newStarMatrix(row, col)= 1; % Είναι το στοιχείο που σημειώσαμε και στον prime πίνακα στο βήμα 3
%κάνουμε star το prime μηδενικό

starColumn = col;
starRow = find(starMatrix(:, starColumn)); % Βρίσκουμε το star μηδενικό (αν υπάρχει)

while ~isempty(starRow)

newStarMatrix(starRow, starColumn) = 0; % unstar το star μηδενικό

primeRow = starRow;
primeColumn = find(primeMatrix(primeRow, :)); % Βρίσκουμε ένα prime μηδενικό (πάντα υπάρχει)

newStarMatrix(primeRow, primeColumn)= 1; % star το prime μηδενικό

starColumn = primeColumn;
starRow = find(starMatrix(:, starColumn));

end

starMatrix=newStarMatrix;

% Μηδενίζουμε τον prime πίνακα και το διάνυσμα των γραμμών που έχουν
% καλυφθεί. Ο υπολογισμός ξεκινά πάλι από την αρχή

primeMatrix(:)=0;
coveredRows(:)=0;

% Προχωρείστε στο βήμα 2

[assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step2(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Αρχή της συνάρτησης step5

% Βήμα 5. Με την συνάρτηση step5 εντοπίζουμε το ελάχιστο από όλα τα στοιχεία
% (allocationMatrix) που δεν έχουν καλυφθεί και 1) το προσθέτουμε σε κάθε
% καλυμμένη γραμμή 2)το αφαιρούμε από κάθε μη καλυμμένη στήλη. Συνεχίζουμε
% με το βήμα 3

function [assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step5(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix)

% Πρώτα βρίσκουμε ποιές γραμμές και στήλες δεν είναι καλυμμένες
uncoveredRowsIndex = find('coveredRows');
uncoveredColumnsIndex = find('coveredColumns');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%[s, i] = min(allocationMatrix(uncoveredRowsIndex, uncoveredColumnsIndex)); % Το min κάθε στήλης
%[s, ii] = min(s); % Το τελικό min των ακόλυπτων γραμμών-στηλών

%h = allocationMatrix(uncoveredRowsIndex(i(ii)), uncoveredColumnsIndex(ii));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
min_element = allocationMatrix(uncoveredRowsIndex(1), uncoveredColumnsIndex(1));

for row = uncoveredRowsIndex
    for col = uncoveredColumnsIndex
        if(allocationMatrix(row, col)<min_element)
            min_element = allocationMatrix(row, col);
        end
    end
end

index=find(coveredRows);
allocationMatrix(index, :) = allocationMatrix(index, :) + min_element ; % Πρόσθεση
allocationMatrix(:, uncoveredColumnsIndex) = allocationMatrix(:, uncoveredColumnsIndex) - min_element ; % Αφαίρεση

% Προχωρείστε στο βήμα 3

[assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step3(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Αρχή της συνάρτησης step2

% Βήμα 2. Με την συνάρτηση step2 ελέγχουμε αν φτάσαμε στο τέλος του
% υπολογισμού σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε το διάνυσμα ανάθεσης
% διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μεταφερόμενοι
% στον βήμα 3

function [assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step2(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix)

maxVal = max(starMatrix);
coveredColumns(maxVal==1)=1; % Σημειώνουμε ως καλυφθείσες εκείνες τις στήλες που έχουν ως μέγιστη τιμή το 1

if(sum(coveredColumns)==dimOfMatrix) % Ελέγχουμε αν φτάσαμε στο τέλος του υπολογισμού

[maxVal, assignment]= max(starMatrix, [], 2);
assignment(maxVal==0)=0; %Εάν δεν έχουμε ανάθεση σε κάποια στήλη το σημειώνουμε

```

```

else % Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία ξεκινώντας από το βήμα 3

[assignment, allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows] =
step3(allocationMatrix, starMatrix, primeMatrix, coveredColumns, coveredRows, dimOfMatrix);

end

```

## 13 Παράρτημα Γ

```

clf; % Καθαρισμός από προηγούμενες μεταβλητές
clear;
clc;

kx = 0.01; % Σταθερές που καθορίζουν την ταχύτητα σύγκλισης
kp = 0.01;
ku = 0.01;
kl = 0.01;

tfinal = 3000; % Χρονική διάρκεια εφαρμογής του αλγορίθμου
channels = 16; % Ο αριθμός των καναλιών
users = 4; % Ο αριθμός των χρηστών
epsilon = 1e-4; %  $\epsilon_{i,j} = 10^{-4}$  για όλα τα  $i, j$ 
P = [1.5 2 2.5 2.3]; % Το διάνυσμα P της ισχύς  $P_i$  των χρηστών
W = [0.8 0.7 0.3 0.2]; % Τυχαία βάρη στο διάστημα [0,1],
% αρχικά τα θεωρούμε όλα ίσα με τη μονάδα.

for i=1:users % Δίνουμε αρχικές τιμές στο e(i, j)

for j=1:channels
if(i==1)
SNR(i, j)=normrnd(12, 0.1);
e(i, j)=SNR(i, j)/P(i);
end
if(i==2)
SNR(i, j)=normrnd(14, 0.1);
e(i, j)=SNR(i, j)/P(i);
end

if(i==3)
SNR(i, j)=normrnd(16, 0.1);
e(i, j)=SNR(i, j)/P(i);
end

if(i==4)
SNR(i, j)=normrnd(18, 0.1);
e(i, j)=SNR(i, j)/P(i);
end

x(i, j, 1) = 0;
p(i, j, 1) = 0;
end
l(i, 1) = 0;
end

for j=1:channels
u(j, 1) = 0;
end

% Κάθε χρήστης i εκτελεί τοπικά τους υπολογισμούς που παρουσιάζονται
% παρακάτω. Έπειτα στέλνει ένα μήνυμα που περιλαμβάνει τα x(i, j, t)
% για όλα τα j κανάλια στον σταθμό βάσης.

for t=1:tfinal % Αρχή του χρόνου

for i=1:users

sumpj(i, t) = 0;
for j=1:channels

% Υπολογισμός των x(i, j, t)
% Μάζι με τον έλεγχο x(i, j, t)>0 πραγματοποιείται και ένας
% δευτερος έλεγχος που μας εξασφαλίζει ότι από την εκτέλεση του
% λογαρίθμου δεν θα προκύψει αρνητικός αριθμός

if x(i, j, t)>0 && (W(i)*log2(1 + p(i, j, t)*e(i, j))/(x(i, j, t)+ epsilon))
- W(i)*p(i, j, t)*e(i, j)/(x(i, j, t)+ epsilon + p(i, j, t)*e(i, j))>0

```

```

        x(i, j, t+1) = x(i, j, t) + kx*(W(i)*log2(1 + p(i, j, t)*e(i, j)/(x(i, j, t)+ epsilon))
        - W(i)*p(i, j, t)*e(i, j)/(x(i, j, t)+ epsilon + p(i, j, t)*e(i, j)) - u(j, t));
    else
        x(i, j, t+1) = x(i, j, t) + kx*max(W(i)*log2(1 + p(i, j, t)*e(i, j)/(x(i, j, t)+ epsilon))
        - W(i)*p(i, j, t)*e(i, j)/(x(i, j, t)+ epsilon + p(i, j, t)*e(i, j)) - u(j, t), 0);
    end

    %Υπολογισμός των p(i, j, t)

    if p(i, j, t)>0
        p(i, j, t+1) = p(i, j, t) + kp*(W(i)*(x(i, j, t)+epsilon)*e(i, j)/
        (x(i, j, t)+ epsilon + p(i, j, t)*e(i, j))- l(i, t));
    else
        p(i, j, t+1) = p(i, j, t) + kp*max(W(i)*(x(i, j, t)+epsilon)*e(i, j)/
        (x(i, j, t)+ epsilon + p(i, j, t)*e(i, j))- l(i, t), 0);
    end

    %Υπολογισμός του αθροίσματος Σp_ij forall j που θα
    %χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ουράς l(i, t).

    sumpij(i, t) = sumpij(i, t) + p(i, j, t);

end %end of for channels

% Υπολογισμός της ουράς l(i, t);

if l(i, t)>0
    l(i, t+1) = l(i, t) + kl*((sumpij(i, t) - P(i)));
else
    l(i, t+1) = l(i, t) + kl*max((sumpij(i, t) - P(i)), 0);
end
end % end of users

% Ο σταθμός βάσης έχοντας λάβει τα μηνύματα από όλους τους χρήστες μπορεί
% στην συνέχεια να υπολογίσει την ποσότητα u(j, t) forall j την οποία
% και αποστέλει σε όλους τους χρήστες ώστε να μπορέσουν να την
% χρησιμοποιήσουν στους υπολογισμούς τους την επόμενη χρονική στιγμή.

for j=1:channels

    sumxij(j, t) = 0;

%Υπολογισμός του αθροίσματος Σx_ij for all i, απαιτείται στην εξίσωση της
%ουράς u(j, t).

    for i=1:users
        sumxij(j, t) = sumxij(j, t) + x(i, j, t);
    end

    if u(j, t)>0
        u(j, t+1)= u(j, t) + ku*(sumxij(j, t) - 1);
    else
        u(j, t+1)= u(j, t) + ku*max(sumxij(j, t) - 1, 0);
    end
end %end of channels

sumx1(t+1)=0;
sumx2(t+1)=0;
sumx3(t+1)=0;
sumx4(t+1)=0;

for j=1:channels

sumx1(t+1)=sumx1(t+1) + x(1, j, t+1);
sumx2(t+1)=sumx2(t+1) + x(2, j, t+1);
sumx3(t+1)=sumx3(t+1) + x(3, j, t+1);
sumx4(t+1)=sumx4(t+1) + x(4, j, t+1);

end

end % end of time

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Εμφάνιση συναρτήσεων%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
subplot(2, 2, 1)
plot(l(1,:))
hold on
plot(l(2,:), 'r-')
hold on

```

```
plot(l(3,:), 'y-')
hold on
plot(l(4,:), 'g-')
xlabel('Number of iterations')
ylabel('l(1,t) l(2,t) l(3,t) l(4,t)')

subplot(2,2,2)
for k=1:channels
    plot(u(k,:))
    hold all
end
xlabel('Number of iterations')
ylabel('u(j,t) for all j ')

subplot(2,2,3)
plot(sumpij(1,:))
hold on
plot(sumpij(2,:), 'r-')
hold on
plot(sumpij(3,:), 'y-')
hold on
plot(sumpij(4,:), 'g-')
xlabel('Number of iterations')
ylabel('P1j , P2j , P3j , P4j for all j')

subplot(2,2,4)
for n=1:channels
    plot(sumxij(n,:))
    hold all
end
xlabel('Number of iterations')
ylabel('Sum_i (xij) for all j ')

%plot(sumx1, 'b-')
%hold all
%plot(sumx2, 'r-')
%hold all
%plot(sumx3, 'g-')
%hold all
%plot(sumx4, 'y-')
%hold all
%xlabel('Number of iterations');
%ylabel('Sum_j (xij) for all users');
```