Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Διπλωματική εργασία

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΑΦΙΞΗΣ ΚΑΙ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

Εκπόνηση: Γερολυμάτος Σωτήρης

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Ανδρέας Ζούπας
(Επιβλέπων) Διδάσκων ΠΔ 407/80, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Δυμπερόπουλος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Παντελής
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν στην εκπόνηση αυτής της εργασίας. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κ. Ζούπα Ανδρέα για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του. Επίσης ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής κκ. Λυμπερόπουλο Γιώργο και Παντελή Δημήτρη για τις οδηγίες τους και το χρόνο που αφιέρωσαν στην εργασία μου. Είμαι ευγνώμων στον Αναπληρωτή Καθηγητή Οικονόμου Αντώνιο του Πανεπιστημίου Αθηνών για τις κατευθύνσεις που μου έδωσε. Ευχαριστώ όλους τους φίλους και τις φίλες μου που με στήριξαν, ο καθένας με τον τρόπο του σε όλη τη διάρκεια της δουλειάς μου. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους φίλους μου Αμαργιανό Παναγιώτη που με φιλοξενούσε στο Βόλο το τελευταίο διάστημα των σπουδών μου και τον Σταμέλο Αντώνη για την εμψύχωση και το πείσμα που μου μετέδωσε. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου Παναγή και Δήμητρα για την υλική και ηθική υποστήριξή τους όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Γερολυμάτος Σωτήρης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα συστήματα ουρών είναι ένα συνεχώς αναπτυσσόμενο αντικείμενο με μεγάλη εφαρμογή σε διάφορους τομείς της παραγωγής. Σε αυτή την εργασία γίνεται μια παρουσίαση μεθόδων που βοηθάνε στην επίλυση των συστημάτων αυτών. Τα συστήματα ουρών που αντιμετωπίζουν είναι τα πιο γενικά με αποτέλεσμα την ευρύτερη εφαρμογή των μεθόδων. Η γενικότητα αυτή οδηγεί στην έλλειψη αναλυτικών αποτελεσμάτων και στη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων.

Αρχικά γίνεται μια ανασκόπηση του θεωρητικού υποβάθρου των συστημάτων ουρών για την διευκόλυνση και των λιγότερο έμπειρων αναγνωστών. Στη συνέχεια αναλύονται τέσσερις κατηγορίες προσεγγίσεων και παρουσιάζονται επιλεγμένα αποτελέσματα από την κάθε μία. Ακολουθεί αριθμητική σύγκριση ανάμεσα στις μεθόδους που έχουν παρουσιαστεί πάνω σε βασικά μεγέθη των συστημάτων ουρών. Τέλος γίνεται ένας σχολιασμός για την χρησιμότητα της κάθε μεθόδου.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα συστήματα ουρών σήμερα είναι ένα αντικείμενο με ευρεία και συνεχή ανάπτυξη. Είναι η βασική μέθοδος μοντελοποίησης προβλημάτων σε μια σειρά καίριων τομέων της οικονομίας και της παραγωγής. Οι βασικότεροι τέτοιοι τομείς είναι η οργάνωση της παραγωγής και οι τηλεπικοινωνίες. Όπως είναι φυσικό αφιερώνεται μεγάλη προσπάθεια και κόπος σε αυτούς τους κλάδους. Δεν είναι εύκολο όμως να βρίσκεται πάντα ένα σύστημα ουράς που και να εξομοιώνει αποτελεσματικά το φυσικό πρόβλημα και να είναι σχετικά απλό, ώστε να καταλήγει σε αναλυτικές λύσεις.

Τα συστήματα ουρών που απασχολούν αυτή την εργασία (οι ουρές με γενικευμένους χρόνους αφίξεων και εξυπηρετήσεων και παράλληλους εξυπηρετητές) θεωρούνται τα γενικότερα. Δηλαδή συμπεριλαμβάνουν την συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων ουρών. Αυτή η γενικότητα τους όμως μας εμποδίζει να εξάγουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τα μεγέθη του συστήματος. Όπως φαίνεται και στο πέμπτο κεφάλαιο τα αναλυτικά αποτελέσματα είναι ελάχιστα και κυρίως για την περίπτωση με ένα εξυπηρετητή.

Παρατηρείται στις μέρες μας πληθώρα ερευνών που στόχο έχουν την λύση περίπλοκων συστημάτων με προσεγγιστικές μεθόδους. Οι μέθοδοι αυτοί είναι πολύ διαφορετικές μεταξύ τους και με διαφορετική σκοπιμότητα και χρήση η κάθε μία. Ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι μια ταξινόμηση και παρουσίαση των πιο διαδεδομένων προσεγγιστικών μεθόδων.

Σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται τέσσερις βασικές ομάδες προσεγγίσεων. Για κάθε μία σχολιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά τους, η χρησιμότητα τους, τα υπέρ και τα κατά. Επίσης παρουσιάζονται κάποια αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα ερευνών για την κάθε μία καθώς και η μέθοδος εξαγωγής τους. Τέλος δίνονται αναφορές και για άλλα αποτελέσματα που παραλείπονται από την εργασία.

Η εργασία διαρθρώνεται ως εξής:

- Τα πέντε πρώτα κεφάλαια αφιερώνονται σε μια ανακεφαλαίωση του θεωρητικού υποβάθρου που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του αντικειμένου. Πιο αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικά στατιστικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην συνέχεια. Το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει το επιστημονικό αντικείμενο στο οποίο βασίζονται τα συστήματα ουρών, τις στοχαστικές διαδικασίες. Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζονται οι κατανομές φάσεων, μια κατηγορία κατανομών πολύ βασική για τα συστήματα ουρών. Στο τέταρτο παρουσιάζεται η θεωρία ουρών και ορίζονται τα συστήματα ουρών. Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται πιο αναλυτικά το σύστημα ουράς που απασχολεί αυτή την εργασία, η ουρά με γενικευμένους χρόνους αφίξεων και εξυπηρετήσεων και παράλληλους εξυπηρετητές.
- Το επόμενο κομμάτι της εργασίας είναι και το κυριότερο. Τα κεφάλαια έξι με εννιά παρουσιάζουν τις μεθόδους που επιλέχθηκαν. Κατά σειρά που παρουσιάζονται οι κατηγορίες προσεγγιστικών μεθόδων είναι: προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας, προσεγγίσεις δύο ροπών, προσεγγίσεις φάσεων και προσέγγιση διάχυσης.
- Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια ανακεφαλαίωση της συζήτησης. Οι μέθοδοι συγκρίνονται μεταξύ τους και αναφέρονται κάποιοι προβληματισμοί που προέκυψαν από την εκπόνηση της εργασίας καθώς και σκέψεις για μελλοντική έρευνα.

Η βιβλιογραφία πάνω σε αυτό το αντικείμενο είναι τεράστια. Αυτό προκάλεσε κάποια δυσκολία στην εύρεση και συλλογή των καταλληλότερων μεθόδων. Εκτιμάται όμως ότι έγινε μια καλή προσπάθεια στην ταξινόμηση και ολοκληρωμένη παρουσίαση των μεθόδων με επαρκείς αναφορές για περαιτέρω έρευνα. Δηλαδή αυτή η εργασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν οδηγός για κάποιον που θέλει να πάρει μια ιδέα των μεθόδων που "κυκλοφορούν" και να κατευθυνθεί αναλόγως. Αυτός είναι ο στόχος και η προσφορά αυτής της εργασίας.

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια παρουσίαση βασικών στατιστικών μεγεθών, με σκοπό την διευκόλυνση του αναγνώστη στην κατανόηση του κύριου θέματος αυτής της εργασίας.

Ενδεχόμενο:
Ονομάζουμε ενδεχόμενο ένα δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος που χαρακτηρίζεται από τυχαιότητα.

Δειγματικός χώρος:
Ονομάζουμε δειγματικό χώρο το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος. Συμβολίζεται με Ω

Γεγονός:
Ονομάζουμε γεγονός ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Συμβολίζεται, συνήθως, με κεφαλαίο γράμμα. Οι συνδυασμοί γεγονότων είναι οι παρακάτω.

- Ένωση γεγονότων ορίζεται το γεγονός να συμβεί οποιοδήποτε από τα αυτά και συμβολίζεται με $A \cup B$.
- Τομή γεγονότων ορίζεται το γεγονός να συμβούν ταυτόχρονα και συμβολίζεται $A \cap B$.
- Συμπλήρωμα ενός γεγονότος είναι το γεγονός να μην συμβεί αυτό και συμβολίζεται με ^{-}A
- Διαφορά δύο γεγονότων ορίζεται το γεγονός να συμβεί το πρώτο χωρίς να συμβεί το δεύτερο και συμβολίζεται $A - B = A \cap {}^{-}B$.

Τέλος δύο γεγονότα A και B ονομάζονται ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επιρρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.

Πιθανότητα:
Η πιθανότητα ενός γεγονότος, $P(A)$ ορίζεται ως η συχνότητα της πραγματοποίησης του A καθώς επαναλαμβάνεται συνεχώς ένα πείραμα. Δηλαδή

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

με N_A τον αριθμό των πραγματοποιήσεων του Α και Ν τον αριθμό εκτέλεσης του πειράματος. Επίσης ορίζεται η υπό συνθήκη πιθανότητα, $P(A/B)$ ως η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί το Β.

Νόμος ολικής πιθανότητας
Έστω B_i τμήματα του δειγματικού χώρου που τον καλύπτουν πλήρως.
Δηλαδή $\Omega = \cup_i B_i$ Τότε:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i) P(B_i)$$

Ιδιότητες Πιθανότητας
Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
Π.1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
Π.2 $P(\Omega) = 1$

Π.3 $P(\emptyset)=0$
Π.4 $P(\bar{A})=1-P(A)$
Π.5 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
Π.6 $P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Π.7 Για A και B ανεξάρτητα $P(A/B)=P(A)$
Π.8 A και B ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(A \cap B)=P(A)*P(B)$

Τυχαία Μεταβλητή:
Οι τυχαίες μεταβλητές είναι μεταβλητές που σχετίζονται με το ενδεχόμενο ενός πειράματος και παίρνουν μια συγκεκριμένη τιμή ανάλογα με αυτό. Μεταφράζουν τον δειγματικό χώρο σε έναν πραγματικό αριθμό, δηλαδή σε μια μετρήσιμη μορφή $X:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Οι τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν. Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στο σύνολο των ακεραίων $X \in \mathbb{Z}$ ενώ οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές στο σύνολο των πραγματικών $X \in \mathbb{R}$.

Κατανομές Πιθανοτήτων

- Ορίζεται ως κατανομή ή αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X η πραγματική συνάρτηση $F(x)$ αν $F(x)=P(X \leqslant x)$.
- Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ως

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{dx \to 0} \frac{P(x<X<x+dx)}{dx}$$

- Για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές ορίζεται η συνάρτησης μάζας πιθανότητας $p(x)$ ως

$$p(x)=P(X=x)$$

Προφανώς για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x} p(i)$$

Προσδωκόμενη τιμή
Προσδωκόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η μέση τιμή της μετά από άπειρες επαναλήψεις του πειράματος. Ορίζεται ως

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} X\, dF(x)$$

Διακύμανση
Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ένα μέτρο του πόσο συγκεντρωμένες είναι οι τιμές που θα πάρει κατά την εκτέλεση του πειράματος γύρω από την προσδοκώμενη. Συγκεκριμένα όσο μικρότερη η τιμή της τόσο πιο κοντά στην προσδοκώμενη τιμή είναι τα αποτελέσματα του πειράματος. Συμβολίζεται με $Var[X]$ ή σ_X^2 και είναι ίση με

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2$$

Ροπές

Ως ροπή n τάξης της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται η ποσότητα $E[X^n]$

Συντελεστής διακύμανσης

Το μέγεθος αυτό δίνει μια εικόνα της διακύμανσης σε αδιάστατη μορφή. Ορίζεται για μια τυχαία μεταβλητή X ως:

$$C_X^2 = \frac{Var[X]}{E[X]^2} \quad \text{ή} \quad C_X^2 = \frac{E[X^2]}{E[X]^2} - 1$$

Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$

Η κανονική κατανομή είναι από τις πιο σημαντικές για την επιστήμη της στατιστικής. Μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή έχει το χαρακτηριστικό ότι οι τιμές της συγκεντρώνονται ομοιόμορφα γύρω από μια μέση τιμή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου $\mu = E[X]$ και $\sigma^2 = Var[X]$.

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης έχει σχήμα “καμπάνας” με κέντρο της το μ.

Ως $\Phi(x)$ ορίζεται η συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$.

Εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Η εκθετική κατανομή είναι και αυτή από τις πιο σημαντικές με ιδιαίτερη εφαρμογή στην θεωρεία ουρών. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της είναι η αμνήμονη ή Μαρκοβιαννή ιδιότητα η οποία ορίζεται και συζητιέται στο επόμενο κεφάλαιο. Η εκθετική κατανομή συμβολίζεται με $\mathrm{Exp}(\lambda)$ όπου λ είναι η παράμετρος της. Οι συναρτήσεις πιθανότητας της είναι:

$$F(x) = \begin{matrix} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{matrix}$$

$$f(x) = \begin{matrix} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{matrix}$$

Επίσης για μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή X με εκθετική κατανομή:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$C_X^2 = 1$$

Κατανομή Poisson $\mathit{Poisson}(\lambda)$

Η κατανομή Poisson είναι το αντίστοιχο της εκθετικής κατανομής για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Για μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Poisson έχουμε:

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{\lambda}$$

$$E[X] = \lambda$$

$$Var[X] = \lambda$$

$$C_X^2 = \frac{1}{\lambda}$$

Την εργασία αυτή απασχολούν και άλλες κατανομές. Χρειάζονται για να οριστούν όμως την έννοια της Μαρκοβιαννής αλυσίδας που δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο. Έτσι θα παρουσιαστούν αργότερα.

2. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών προήλθε κυρίως από τις ανάγκες των φυσικών. Ξεκίνησε με την μελέτη φυσικών φαινομένων τα οποία εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον παράγοντα τύχη και δεν είναι δυνατή η επακριβώς πρόβλεψη της συμπεριφοράς τους στο μέλλον. Έτσι αυτά τα συστήματα μοντελοποιήθηκαν μαθηματικά από τις στοχαστικές διαδικασίες, ώστε η μελλοντική κατάσταση των συστημάτων αυτών να προβλεφθεί πιθανοθεωρητικά. Σημαντική κατηγορία τέτοιων στοχαστικών συστημάτων είναι τα συστήματα ουρών αναμονής.

Ορισμός Στοχαστικής Διαδικασίας

Έστω t μια παράμετρος με πεδίο ορισμού το T, και έστω X(t) μια τυχαία μεταβλητή για κάθε $t \in T$. Κάθε οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$, που είναι ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο έστω Ω ονομάζεται στοχαστική διαδικασία.

Η παράμετρος ή δείκτης t στη γενική περίπτωση συμβολίζει χρόνο. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) λέγεται σύνολο καταστάσεων της διαδικασίας (έστω S). Κάθε στοχαστική διαδικασία ουσιαστικά είναι μια συνάρτηση

$$X : Tx\Omega \ni (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) \in S .$$

Για δεδομένα $t = t_0$ και $\omega = \omega_0$, η $X(t_0, \omega_0)$ είναι η κατάσταση της διαδικασίας τη χρονική στιγμή t_0. Για δεδομένο $t = t_0$ και τυχαίο ω η συνάρτηση $X(t_0, \omega)$ είναι η τυχαία μεταβλητή X(t). Τέλος για δεδομένο μόνο το $\omega = \omega_0$ η συνάρτηση $X(t, \omega_0)$ περιγράφει μια συγκεκριμένη εξέλιξη της διαδικασίας στο χρόνο το οποίο ονομάζεται πραγματοποίηση.

Ταξινόμηση Στοχαστικών Διαδικασιών

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με τον χαρακτήρα των συνόλων T και S.

- Αν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο (συνήθως το $\mathbb{N}_0$) τότε η διαδικασία λέγεται **στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου** $(\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\})$
- Αν το T είναι υπεραριθμήσιμο τότε η διαδικασία λέγεται **στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου** $(\{X(t) : t \geqslant 0\})$.
- Αν ο χώρος καταστάσεων S της διαδικασίας είναι αριθμήσιμος (συνήθως το $\mathbb{N}_0$ ή κάποιο υποσύνολό του) η διαδικασία λέγεται **στοχαστική διαδικασία διακριτού χώρου καταστάσεων**
- Αν ο χώρος καταστάσεων S της διαδικασίας είναι υπεραριθμήσιμος $(\textit{συνήθως το } \mathbb{R}_0^+)$ η διαδικασία λέγεται **στοχαστική διαδικασία συνεχούς χώρου καταστάσεων**

Τα παραπάνω συνδυάζονται σε τέσσερις κατηγορίες διαδικασιών.

Μια διαδικασία είναι **πλήρως ορισμένη** όταν δίνονται τα παρακάτω:

1. Ο παραμετρικός χώρος T
2. Ο χώρος καταστάσεων S
3. Η στοχαστική εξάρτηση των μελών της, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών που απαρτίζουν τη διαδικασία.

Δύο διαδικασίες που συμπίπτουν και στα τρία παραπάνω λέγονται στοχαστικά ισοδύναμες.

Ενώ αν κάθε τυχαίες μεταβλητές δύο στοχαστικών διαδικασιών είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, οι διαδικασίες είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Παρακάτω δίνονται οι ορισμοί σημαντικών μεγεθών στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών.

- **Προσδοκώμενη τιμή** στο χρόνο t $X_t = E(X_t)$
- **Μεταβατική κατανομή** της στοχαστικής διαδικασίας είναι η οικογένεια των κατανομών των τυχαίων μεταβλητών της διαδικασίας $(F_t(x) : t \in T)$ ενώ το όριο της καθώς $t \to \infty$ λέγεται **οριακή κατανομή.**
- **Πιθανότητα μετάβασης** $p_{ij}^{(n)}$ είναι η πιθανότητα η διαδικασία φεύγοντας από μια κατάσταση i να μεταβεί σε μια κατάσταση j σε n βήματα (για διαδικασίες διακριτού χρόνου). $p_{ij}(t)$ είναι η πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση i στην j μέσα στον χρόνο t (για διαδικασίες συνεχούς χρόνου).
- Για διαδικασίες συνεχούς χρόνου ορίζεται ο **ρυθμός μετάβασης** q_{ij} που είναι η πιθανότητα στην μονάδα του χρόνου το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση i στην κατάσταση j.
- Η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση j μετά από n χρόνο (ή βήματα) $\pi_j^{(n)}$. Με $\pi_j^{(0)}$ συμβολίζουμε την **αρχική κατανομή** της διαδικασίας. Η πιθανότητα το σύστημα να καταλήξει στην κατάσταση j μετά από άπειρο χρόνο ή άπειρο αριθμό βημάτων ονομάζεται **οριακή κατανομή ή κατανομή ισορροπίας** και συμβολίζεται ως $\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)}$.
- **Πιθανότητα εισόδου.** Η πιθανότητα το σύστημα να εισέλθει σε ένα υποσύνολο του S ανεξάρτητα του πότε.
- f_{ii} Η πιθανότητα η διαδικασία να επιστρέψει κάποτε στην κατάσταση i δεδομένου ότι ξεκίνησε από εκεί.
- **Χρόνος πρώτης διάβασης** είναι ο χρόνος (ή ο αριθμός βημάτων) πηγαίνοντας από μια κατάσταση i σε μια κατάσταση j για πρώτη φορά. Αν $i = j$ τότε μιλάμε για **χρόνο πρώτης επανόδου.** Έστω $f_{ij}^{(n)}$ η πιθανότητα ο χρόνος πρώτης διάβασης να είναι n βήματα και μ_{ij} η προσδοκώμενη τιμή του χρόνου αυτού. Επίσης $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$.

Ταξινόμηση καταστάσεων

Μια κατάσταση j λέγεται προσβάσιμη από την κατάσταση i αν $p_{ij}^{(n)} > 0$ για κάποιο n. Αν η κατάσταση j είναι προσβάσιμη από την κατάσταση i και η i από την κατάσταση j, τότε λέμε ότι οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν. Κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της. Επίσης αν η i επικοινωνεί με την j και η j επικοινωνεί με την k, τότε η i επικοινωνεί με την k. Τέλος αν η i είναι προσβάσιμη από την j αλλά η j δεν είναι από την i τότε δεν επικοινωνούν.

Έτσι ο χώρος S μπορεί να χωριστεί σε κλάσεις, όπου κάθε κατάσταση ανήκει σε μία μόνο κλάση και καταστάσεις που επικοινωνούν ανήκουν στην ίδια κλάση. Αν ο χώρος S αποτελείται από μία μόνο κλάση τότε η στοχαστική διαδικασία λέγεται **ανάγωγη** ή **αδιαχώριστη**.

- Αν $f_{ii} < 1$ η κατάσταση i λέγεται **μεταβατική.**
- Αν $f_{ii} = 1$ η κατάσταση i λέγεται **επαναληπτική**.
- Ειδική περίπτωση των επαναληπτικών καταστάσεων είναι όταν $p_{ii}^{(1)} = 1$ όπου η κατάσταση i λέγεται **απορροφητική**.

Για τις επαναληπτικές καταστάσεις ορίζεται και η *περίοδος της κατάστασης*. Έτσι για μια κατάσταση i η περίοδος είναι ίση με t αν $p_{ii}^{(n)}=0$ για κάθε n που δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του t και $p_{ii}^{(nt)}=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Αν δεν υπάρχει τέτοιο t ή αυτό είναι ίσο με 1, τότε η κατάσταση λέγεται **απεριοδική**.

Επίσης για μια επαναληπτική κατάσταση i, αν το μ_{ii} είναι πεπερασμένο αυτή ονομάζεται **θετικά επαναληπτική**, ενώ αν είναι άπειρο ονομάζεται **μηδενικά επαναληπτική**. Μια απεριοδική θετικά επαναληπτική κατάσταση ονομάζεται **εργοδική**. Τέλος τα παραπάνω μπορούν να γενικευθούν και για ολόκληρες κλάσεις.

Ιδιότητες διαδικασιών

1. **Μαρκοβιανή ιδιότητα**
Μια στοχαστική διαδικασία έχει αυτήν την ιδιότητα όταν δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ οι τυχαίες μεταβλητές $X(s), s<t$ *και* $X(h), h>t$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Δηλαδή κάθε μελλοντική εξέλιξη της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την τωρινή της κατάσταση και όχι από την παρελθούσα εξέλιξή της. Για αυτό και η Μαρκοβιανή ιδιότητα λέγεται και αμνήμονη.
2. **Στάσιμη διαδικασία**
Είναι η διαδικασία με την ιδιότητα ότι $F_t(x)=F_{t+s}(x)$ ή οι τυχαίες μεταβλητές $X(t)$ και $X(t+s)$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες για κάθε s.
3. **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις**
Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \ldots\ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ τότε η διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
4. **Ομογενείς προσαυξήσεις**
Αν η κατανομή της $X(t)-X(s), s<t$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά t-s και όχι από τα s,t, τότε η διαδικασία έχει ομογενείς προσαυξήσεις.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια βασικά εργαλεία για την μελέτη στοχαστικών διαδικασιών.

1) Αντιστροφή χρόνου

Για κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X(t):t\in T\}, T=\mathbb{Z}_0$ *ή* $T=\mathbb{R}_0$ μπορούμε να ορίσουμε την $\{X(\tau-t):t\in T\}$, *για ορισμένο* $\tau\in T$. Τότε η $X(\tau-t)$ λέγεται αντίστροφη στοχαστική διαδικασία της $X(t)$. Η παράμετρος τ δεν είναι σημαντική, καθορίζει απλώς το “σημείο εκκίνησης” του χρόνου της νέας διαδικασίας. Εφόσον είναι τυχαίο όμως, είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειρες αντίστροφες της X(t). Έτσι ορίζεται ως τυπική αντίστροφη η $X(-t)$. Με βάση τον ορισμό της αντίστροφης διαδικασίας είναι δυνατό $\tau-t<0$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό των στοχαστικών διαδικασιών που δώσαμε. Στην πραγματικότητα όμως δεν υπάρχει πρόβλημα, αν σκεφτούμε μια στοχαστική διαδικασία που ήδη έχει λειτουργήσει ένα μεγάλο χρονικό διάστημα [πχ το $(-\infty,0)$] πριν αρχίσει η μελέτη της.

Η αντιστροφή χρόνου έχει μεγάλη σημασία στην μελέτη στοχαστικών διαδικασιών και πιο συγκεκριμένα στη θεωρία ουρών. Αρχικά η αντίστροφη διαδικασία μπορεί να μας δώσει πολλές πληροφορίες για την αρχική διαδικασία που δεν φαίνονται εξ αρχής. Επίσης, με αυτόν τον τρόπο απλουστεύονται πολλοί υπολογισμοί, όπως οι εξισώσεις ισορροπίας ενός πολύπλοκου συστήματος. Τέλος, συγκεκριμένα στη θεωρία ουρών η διαδικασία εξόδου των πελατών μπορεί να μελετηθεί συνήθως πιο εύκολα από τη διαδικασία εισόδου.

Στη γενική περίπτωση η αντίστροφη διαδικασία είναι διαφορετική από την αρχική. Παρόλα αυτά οι δύο διαδικασίες έχουν κοινή οριακή κατανομή. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, καθώς οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης π_i δηλώνουν το ποσοστό του χρόνου που η διαδικασία είναι στην κατάσταση i , κάτι το οποίο δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση του χρόνου. Συγκεκριμένα οι Μαρκοβιανές διαδικασίες διατηρούν την Μαρκοβιανή ιδιότητα κατά την αντιστροφή του χρόνου. Αν για την X(t) το $\{X(t_3)|X(t_2)\}$ είναι ανεξάρτητο από το $\{X(t_1)|X(t_2)\}, t_1<t_2<t_3$, τότε ισχύει και το αντίστροφο και έτσι η $X(-t)$ διατηρεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Στην ειδική περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την αντίστροφή της, λέμε ότι η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη. Επίσης καθώς αυτό σημαίνει ότι η $X(t)$ είναι ισοδύναμη με την $X(\tau-t)\ \forall\tau$ η αντίστροφη διαδικασία, άρα και η αρχική, είναι στάσιμη.

Ένας απλός τρόπος για να εξακριβώσουμε την αντιστρεψιμότητα μιας διαδικασίας είναι το κριτήριο Kolmogorov. Σύμφωνα με αυτό μια διαδικασία είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν το γινόμενο των ρυθμών μετάβασης που αντιστοιχούν σε έναν πεπερασμένο κύκλο μεταβάσεων ισούται με το γινόμενο των ρυθμών μεταβάσεων του ίδιου κύκλου, αλλά με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή: $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \kappa\alpha\iota\ i_0\, i_{1,\dots}\, i_n\in S$

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots\cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n i_0} = q_{i_0 i_n} q_{i_n i_{n-1}} \cdots\cdots q_{i_2 i_1} q_{i_1 i_0}$$

2) Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.

Έστω τυχαία μεταβλητή $X\in\mathbb{N}_0$ και $p_i=P\{x=i\}$ η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας. Ορίζεται ως πιθανογεννήτρια συνάρτηση της X η

$$G(z)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = E(z^X)$$

Οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις βοηθούν πολύ τη μελέτη μη αρνητικών, ακεραίων, τυχαίων μεταβλητών. Συγκεκριμένα η G(z) διατηρεί με συνοπτικό τρόπο όλες της τιμές των p_i. Επίσης από την G(z) μπορούν να ανακτηθούν τα p_i. Όλα αυτά είναι σχετικά απλά καθώς οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις μπορούν συνήθως να βρεθούν αναλυτικά. Τέλος ορισμένες μελέτες των τυχαίων μεταβλητών γίνονται πολύ πιο απλές με τη χρήση των πιθανογεννητριών συναρτήσεων, όπως η επίλυση αναδρομικών σχέσεων.

Από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των πιθανογεννήτριων συναρτήσεων είναι οι:

Ι)Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ πιθανογεννητριών και συναρτήσεων πιθανότητας. Συγκεκριμένα

$$p_i=\frac{G^{(i)}(0)}{i!}$$

ΙΙ)Οι ροπές της τυχαίας μεταβλητής X μπορούν να υπολογισθούν από της παραγώγους της G(z). Αν $E[X^i]<\infty$ ορίζεται η $G^{(k)}(1)$ και η παραγοντική ροπή i τάξης είναι:

$$F_i=E[X(X-1)\dots(X-i+1)]=G^{(k)}(1)$$

Έτσι για παράδειγμα η μέση τιμή και η διασπορά του X είναι:

$$E[x]=F_1=G^{(1)}(1)$$
$$Var[X]=E[X(X-1)]+E[X]-E^2[X]=G^{(2)}(1)+G^{(1)}(1)-[G^{(2)}(1)]^2$$

III)Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος ανεξάρτητων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανογεννητριών τους. Έτσι αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πιθανογεννήτριες $G_{X_i}(z)$ και $Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$ με πιθανογεννήτρια την $G_Y(z)$ τότε

$$G_Y(z)=\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z)$$

IV)Έστω X_n ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πιθανογεννήτρια την $G_X(z)$ και $N \in \mathbb{N}_0$ τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_n με πιθανογεννήτρια της την $G_N(z)$. Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $Y_N=X_1+X_2+\ldots+Y_N$ είναι :

$$G_{Y_N}(z)=G_N(G_X(z))$$

3)Μετασχηματισμοί Laplace (Laplace-Stieltjes)

Οι μετασχηματισμοί Laplace είναι το αντίστοιχο των πιθανογεννήτριων συναρτήσεων για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Ορίζεται για την μη αρνητική συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας $F(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ ως:

$$f^*(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zx}\,dF(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zx} f(x)\,dx=E[\mathrm{e}^{-zX}]$$

Έχουν την ίδια σημασία με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις και αντίστοιχες ιδιότητες.

I)Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Για να ανακτηθεί απλώς αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό.

II)Οι ροπές της X μπορούν να υπολογιστούν από τις παραγώγους της $f^*(z)$. Αν $E[X^i]<\infty$ τότε ορίζεται η $f^{*(k)}(z)$ και

$$E[X^k]=(-1)^k f^{*(k)}(0)$$

III)Ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων μετασχηματισμών Laplace. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μετασχηματισμούς Laplace $f^*_{X_i}(z)$ και $f^*_Y(z)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$ τότε:

$$f^*_Y(z)=\prod_{i=1}^{n} f^*_{X_i}(z)$$

IV)Έστω X_n ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μετασχηματισμό Laplace $f^*_X(z)$ και $N \in \mathbb{N}_0$ τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη των X_n με πιθανογεννήτρια $G_N(z)$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace του τυχαίου αθροίσματος $Y_N=X_1+X_2+\ldots+X_N$ είναι:

$$f^*_{Y_N}=G_N(f^*_X(z))$$

4) Οριακά θεωρήματα στοχαστικών διαδικασιών

Υπάρχουν δύο θεωρήματα στην θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών που ονομάζονται έτσι. Χρησιμοποιούνται σε αθροιστικές διαδικασίες που αυξάνονται με το χρόνο και περιγράφουν προσεγγιστικά την συμπεριφορά τους καθώς ο χρόνος ή τα χρονικά βήματα τείνουν στο άπειρο. Αυτά τα θεωρήματα είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών και το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Για μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών X_n με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 και επίσης $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, τα θεωρήματα είναι:

I) Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu$$

II) Κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] \to \Phi(x)$$

Στη συνέχεια παραθέτονται ειδικές περιπτώσεις στοχαστικών διαδικασιών με ιδιαίτερη σημασία.

1. Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Συχνά οι διαδικασίες με διακριτό σύνολο καταστάσεων λέγονται αλυσίδες. Στο κομμάτι αυτό μελετούνται οι αλυσίδες με τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Αυτές χωρίζονται σε Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου και Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.

1.1. Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου.

Σύμφωνα με τον ορισμό της Μαρκοβιανής ιδιότητας για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου ισχύει :

$$P(X_{n+1}=j|X_0=k_0, X_1=k_1, \ldots, X_{n-1}=k_{n-1}, X_n=i) = P(X_{n+1}=j|X_n=i) \quad \forall\, n, i, j, k_0, k_1, \ldots$$

Η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως η πιθανότητα μετάβασης (ενός βήματος) από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο (n+1)-οστό βήμα. Αν οι πιθανότητες είναι στάσιμες, δηλαδή ανεξάρτητες του n τότε συμβολίζονται με

$$p_{ij} = P(X_{n+1}=j|X_n=i) \quad \forall\, n$$

και η διαδικασία λέγεται χρονικά ομογενείς.

Οι πιθανότητες μετάβασης ταξινομούνται σε πίνακα που ονομάζεται **πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης (ενός βήματος)**.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ο P είναι ένας τετραγωνικός πίνακας μη αρνητικών στοιχείων. Η κάθε γραμμή του περιλαμβάνει τις πιθανότητες το σύστημα φεύγοντας από την συγκεκριμένη κατάσταση i να καταλήξει σε κάποια άλλη. Αφού το σύστημα πάντα καταλήγει σε κάποια κατάσταση το άθροισμα της κάθε γραμμής ισούται με 1. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται στοχαστικός πίνακας.

Η πιθανότητα το σύστημα να ακολουθήσει ένα μονοπάτι είναι:

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i_n)=\pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$$

Έτσι βλέπουμε ότι αν είναι γνωστός ο πίνακας μεταβάσεων και η αρχική κατανομή, μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα κάθε πραγματοποίησης της διαδικασίας και έτσι η χρονική εξέλιξή της θεωρείται γνωστή.

Παρόμοια με τον πίνακα μεταβάσεων ενός βήματος ορίζονται και οι πίνακες περισσότερων βημάτων:

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Για τους πίνακες αυτούς και τα στοιχεία τους ισχύουν:

I) Είναι και αυτοί στοχαστικοί πίνακες.

II) $P^{(n)}=P^n$

III) $P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)}$

IV) $p_{ij}^{(n+m)}=\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$ (σχέση Chapman-Kolmogorov)

V) $\vec{\pi}^{(n)}=\vec{\pi}^{(0)} P^{(n)}$

Γενικά η μεταβατική κατανομή $\vec{\pi}^{(n)}$ εξαρτάται τόσο από την αρχική κατανομή $\vec{\pi}^{(0)}$ όσο και από τους πίνακες μετάβασης $P(n)$ και άρα εξαρτάται κάθε φορά από το n. Σε ειδικές περιπτώσεις όμως είναι ανεξάρτητη του n. Τότε η διαδικασία παρουσιάζει στάσιμη στοχαστική συμπεριφορά. Αυτό συμβαίνει όταν $\vec{\pi}^{(0)}=\vec{\pi}^{(0)}P$ Τότε η κατανομή $\vec{\pi}^{(n)}$ ονομάζεται στάσιμη κατανομή και ο δείκτης (0) δεν είναι απαραίτητος. Έτσι $\vec{\pi}^{(\nu)}=\vec{\pi}^{(0)}$. Η στάσιμη αυτή κατανομή μιας αλυσίδας (αν υπάρχει) μπορεί να βρεθεί από το σύστημα:

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_i \pi_i=1 \quad \text{(εξίσωση κανονικοποίησης)}$$

Προφανώς σε μια στάσιμη αλυσίδα η στάσιμη κατανομή ισούται με την οριακή.

1.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Στην περίπτωση που ο παραμετρικός χώρος T είναι συνεχής, η μετάβαση από μια κατάσταση σε μια άλλη μπορεί να συμβεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Έτσι με βάση τον ορισμό της Μαρκοβιανής ιδιότητας ισχύει:

$$P(X(s+t)=j|X(u)=k)=P(X(s+t)=j|X(s)=i) \text{ για } 0\leqslant u\leqslant s$$

Αν οι πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση i στην j είναι στάσιμες, δηλαδή εξαρτώνται μόνο από το διάστημα t και όχι από το s η διαδικασία είναι χρονικά ομογενείς και οι πιθανότητες μετάβασης συμβολίζονται ως:

$$p_{ij}(t)=P(X(s+t)=j|X(s)=i) \quad \forall\, s\geqslant 0$$

Οι $p_{ij}(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου και ονομάζονται συναρτήσεις πιθανότητας μετάβασης. Αυτές γράφονται συνοπτικά με την μορφή πίνακα: $P=(p_{ij}(t))$
Η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $\pi_j(t)$. Μια αλυσίδα είναι πλήρως ορισμένη όταν δίνεται ο πίνακας P(t) και η αρχική κατανομή $\bar{\pi}(0)$. Έτσι μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα οποιασδήποτε πραγματοποίησης. Τέλος αποδεικνύεται ότι $\bar{\pi}(t)=\bar{\pi}(0)P(t)$.
Οι συναρτήσεις $p_{ij}(t)$ υποθέτουμε ότι είναι δεξιά συνεχείς στο ο και: $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}$
Επίσης αποδεικνύεται ότι είναι παραγωγίσιμες στο $(0,\infty)$ και υπάρχει η δεξιά παράγωγος στο 0.
Έτσι:

$$q_i=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h} \text{ για } i\neq j$$

και

$$q_{ii}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-p_{ii}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=-q_i$$

Τα q_{ij} γράφονται συνοπτικά σε μορφή πίνακα:

$$Q=\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

που ονομάζεται πίνακας ρυθμών μετάβασης με την ιδιότητα $q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του συνεχόμενου χρόνου που περνάει το σύστημα σε μια κατάσταση i. Αν ονομάσουμε το τυχαίο αυτό μέγεθος T_i αποδεικνύεται ότι: $P(T_i>t+s|T_i>s)=P(T_i>t)$. Δηλαδή η κατανομή του χρόνου που απομένει για τη μετάβαση από μια κατάσταση δεν εξαρτάται από το πόσο χρόνο το σύστημα βρίσκεται ήδη σε αυτήν την κατάσταση. Δηλαδή η τυχαία μεταβλητή T_i έχει εκθετική κατανομή και αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της είναι $\frac{1}{q_i}$. Τέλος όταν περάσει ο χρόνος T_i το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i}$.

Για την εύρεση των μεταβατικών κατανομών Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι αναγκαία η επίλυση των παρακάτω συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

$$P'(t)=P(t)Q$$
$$P'(t)=Q\,P(t)$$
με Α.Σ. την $P(0)=I$

και

$$\vec{\pi}'(t)=\vec{\pi}(t)Q$$
$$\sum_j \pi_j(t)=1$$
με Α.Σ. την $\vec{\pi}(0)$

Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων συνήθως είναι δύσκολη. Γι' αυτό έχει αξία η μελέτη της οριακής και της στάσιμης κατανομής. Το διάνυσμα $\vec{\pi}=\lim_{t\to\infty}\vec{\pi}(t)$ ονομάζεται **οριακή κατανομή** και ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε μια δεδομένη κατάσταση μετά από άπειρο χρόνο λειτουργίας του συστήματος. Επίσης η οριακή κατανομή ικανοποιεί την εξίσωση κανονικοποίησης: $\sum_j \pi_j=1$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που η κατανομή $\vec{\pi}(t)$ είναι στάσιμη δηλαδή δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Δηλαδή $\vec{\pi}(t)=\vec{\pi}(0)=\vec{\pi}\ \forall t$. Αυτή η στάσιμη κατανομή μπορεί να βρεθεί από τις εξισώσεις:

$$\vec{\pi}Q=0$$
$$\sum_j \pi_j=1$$

Ένα σημαντικό εργαλείο με μεγάλη εφαρμογή στην θεωρία ουρών είναι η **εμφυτευμένη Μαρκοβιαννή αλυσίδα**. Για κάθε Μαρκοβιαννή αλυσίδα συνεχούς χρόνου X(t) μπορούμε να ορίσουμε μια Μαρκοβιαννή αλυσίδα διακριτού χρόνου X_n. Η τιμή της X_n ισούται με την τιμή της X(t) αμέσως μετά την n-οστή μετάβαση. Δηλαδή αν t_n η στιγμή της n-οστής μετάβασης

$$X_n=X(t_n^+)\ \text{ή}\ X_n=X(s),\ t_n<s<t_{n+1}$$

Η στοχαστική συμπεριφορά της X_n είναι ανάλογη της X(t).

Όπως έχουμε πει όταν το σύστημα φεύγει από την κατάσταση i μεταβαίνει στην κατάσταση j με πιθανότητα

$$p_{ij}=\begin{Bmatrix} \dfrac{q_{ij}}{q_i} & \text{για } i\neq j \\ 0 & \text{για } i=j \end{Bmatrix}$$

Οι πιθανότητες αυτές είναι οι πιθανότητες μετάβασης της X_n.
Προφανώς οι οριακές κατανομές των δύο διαδικασιών δεν είναι ίσες. Η οριακή κατανομή δείχνει το ποσοστό του χρόνου που περνάει μια διαδικασία στην κάθε κατάσταση. Η εμφυτευμένη αλυσίδα όμως κρατάει από την αρχική μόνο τις μεταβάσεις και όχι το χρόνο ανάμεσα σε αυτές. Έτσι η οριακή κατανομή της δείχνει το ποσοστό των μεταβάσεων που καταλήγει σε μια κατάσταση μετά από άπειρα βήματα.

Η εμφυτευμένη αλυσίδα έχει ιδιαίτερη χρήση στην μελέτη διαδικασιών που αναπαριστούν μεγέθη ουράς που δεν παρουσιάζουν την Μαρκοβιαννή ιδιότητα. Διαλέγοντας όμως συγκεκριμένες χρονικές στιγμές για να μελετήσουμε την διαδικασία (συνήθως στιγμές άφιξης ή αναχώρησης ενός πελάτη) η εμφυτευμένη αλυσίδα είναι Μαρκοβιαννή.

1.3 Διαδικασία γέννησης-θανάτου

Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι χρήσιμη για την μοντελοποίηση συστημάτων που ο πληθυσμός τους αυξομειώνεται λόγω μεμονωμένων γεννήσεων και θανάτων. Για παράδειγμα ο υπολογισμός του μεγέθους μιας ουράς ενός συστήματος αναμονής με μεμονωμένες αφίξεις και εξυπηρετήσεις. Η διαδικασία αυτή είναι ειδική περίπτωση των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου, οπότε τα παραπάνω ισχύουν κι εδώ. Η διαφορά είναι ότι το σύστημα μεταβαίνει πάντα από μια κατάσταση σε μια γειτονική της. Δηλαδή οι ρυθμοί μετάβασης είναι:

$$q_{ij}=\begin{Bmatrix} \lambda_i \; για \; j=i+1 \\ \mu_i \; για \; j=i-1 \\ 0 \; για \; |j-i|>1 \end{Bmatrix}$$

Προφανώς $q_i=(\mu_i+\lambda_i)$ και $\mu_0=0$.

2. Διαδικασία Poisson

Είναι ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα σε εφαρμογές της θεωρίας ουρών. Είναι το καλύτερο μοντέλο για την περιγραφή φαινομένων που συμβαίνουν εντελώς τυχαία στο χρόνο. Χρησιμοποιείται συνήθως για την περιγραφή αφίξεων σε ένα σύστημα, όπου οι αφίξεις είναι μεμονωμένες και ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ορίζουμε την απαριθμήτρια διαδικασία N(t) που ισούται με τον αριθμό των αφίξεων στο διάστημα (0,t). Η N(t) περιγράφει την διαδικασία Poisson. Η N(t) είναι μια διαδικασία γεννήσεων, δηλαδή έχει ένα σταθερό ρυθμό αφίξεων έστω λ, που δηλώνει την πιθανότητα άφιξης στη μονάδα του χρόνου, και μηδενικό αριθμό θανάτου $(\mu_i=0 \; \forall \, i)$. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητος και έχουν την εκθετική κατανομή. Έστω T_i ο χρόνος μεταξύ της i και της i-1 άφιξης

$$P\{T_i>t\}=e^{-\lambda t}$$

Ενώ η μεταβατική κατανομή της $N(t)$ είναι Poisson(λt) κατανομή. Δηλαδή

$$P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

Η διαδικασία Poisson έχει ορισμένες πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

I)Υπέρθεση

Η Υπέρθεση δύο ή περισσότερων διαδικασιών Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\ldots$

II)Τυχαία επιλογή

Έστω ότι κάθε άφιξη της διαδικασίας $N(t)$ με ρυθμό λ έχει πιθανότητα να καταγραφεί p. Τότε η διαδικασία των καταγεγραμμένων αφίξεων είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda(1-p)$.

III)Αμνήμονη ιδιότητα

Η εκθετική κατανομή είναι η μόνη συνεχής κατανομή με την αμνήμονη ή Μαρκοβιανή ιδιότητα. Έτσι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Αυτή είναι η σημαντικότερη ιδιότητα της διαδικασίας Poisson, καθώς στη θεωρία ουρών αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των πελατών έχουν εκθετική κατανομή η ουρά μπορεί να μελετηθεί εύκολα και να εξαχθούν αναλυτικά αποτελέσματα.

3. Ανανεωτικές διαδικασίες

Οι ανανεωτικές διαδικασίες είναι γενίκευση της διαδικασίας Poisson. Η διαφορά έγκειται στο ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι πραγματοποίησης δεν έχουν αναγκαστικά την εκθετική κατανομή.

Χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση συστημάτων που η λειτουργία τους χωρίζεται σε κύκλους λειτουργίας που διαδέχονται ο ένας τον άλλο. Η διάρκεια των κύκλων είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η χρονική στιγμή που τελειώνει ο ένας κύκλος και ξεκινάει ο άλλος λέγεται στιγμή ανανέωσης.

- Γενική απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία ορίζεται η διαδικασία $M(t)$ με τιμή τον αριθμό των πραγματοποιήσεων (ή ανανεώσεων) στο διάστημα $[0,t]$.
- Έστω ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι των ανανεώσεων δίνονται από τις τυχαίες μεταβλητές X_n, $n=1,2,\ldots$ Οι X_n έχουν κοινή κατανομή $F(t)$ και μέση τιμή
$$E[X_n]=\frac{1}{\mu}>0$$
με εξαίρεση την X_1 που μπορεί να διαφέρει (με κατανομή έστω A).
- Η $Z_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ονομάζεται γενική ανανεωτική διαδικασία και δίνει το χρόνο της n-οστής ανανέωσης.

Αν A=F οι διαδικασίες αναφέρονται ως απλές. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων ονομάζεται ανανεωτικός κύκλος με διάρκεια X_n.

Οι μεταβατικές κατανομές των παραπάνω διαδικασιών είναι:

$$P(Z_n\leqslant t)=A*F^{(n-1)}(t)$$
$$P(M(t)=n)=\begin{cases} A*F^{(n-1)}(t)-A*F^{(n)}(t) & n>0 \\ 1-A(t) & n=0 \end{cases}$$
$$m(t)=E[M(t)]=\sum_{n=1}^{\infty} A*F^{(n-1)}(t)$$

όπου * είναι το σύμβολο της συνέλιξης και $F^{(n)}$ η n-οστή απλή συνέλιξη της F με τον εαυτό της. Για την οριακή κατανομή:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\mu .$$

Αν $P(X_i<\infty)=1$ η διαδικασία ονομάζεται επαναληπτική καθώς κάθε κύκλος ανανέωσης τελειώνει και αρχίζει ο επόμενος. Δηλαδή η διαδικασία ανανέωσης επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Επιπλέον αν ο μέσος χρόνος ανανέωσης $1/\mu$ είναι πεπερασμένος η διαδικασία λέγεται θετικά επαναληπτική, ενώ αν $\frac{1}{\mu}=\infty$ η διαδικασία λέγεται μηδενικά επαναληπτική. Τέλος αν $P(X_i=\infty)>0$ υπάρχει πιθανότητα κάποιος κύκλος να μην τελειώσει και να μην γίνει άλλη ανανέωση. Τότε η διαδικασία λέγεται παροδική.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ιδιαίτερη περίπτωση των **εναλλασσόμενων ανανεωτικών διαδικασιών**. Εδώ υποθέτουμε ότι πριν από μια ανανέωση το σύστημα περνάει κάποιο "νεκρό" χρόνο με τυχαία διάρκεια έστω Y_j. Αυτές οι μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές έχουν κοινή κατανομή και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και με τις X_j. Επίσης έχουν μέση τιμή $E[Y]=\frac{1}{v}$.

Έτσι η διάρκεια του ανανεωτικού κύκλου είναι $W_j=X_j+Y_j$ όπου οι W_j είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Επομένως οι διαδοχικοί χρόνοι ανανέωσης σχηματίζουν την ανανεωτική διαδικασία $S_n=W_1+W_2+\cdots+W_n$.

Επίσης ορίζεται η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία

$$I(t)=\begin{cases}0, & \text{αν } t \text{ ανήκει σε νεκρό χρόνο}\\ 1, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

και η διάρκεια του "ενεργού" χρόνου σε έναν κύκλο $R_j=\int_{S_{j-1}}^{S_j} I(t)\,dt=X_j$

ενώ ο συνολικός ενεργός χρόνος στο $[0,t]$ είναι $C(t)=\int_0^t I(x)\,dx$

Τέλος το ποσοστό του ενεργού χρόνου που ταυτίζεται με την οριακή πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε ενεργό χρόνο είναι:

$$\pi_1=\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t}=\frac{E[R]}{E[W]}=\frac{E[X]}{E[Y]+E[X]}=\frac{v}{\mu+v}$$

4. Αναγεννητικές διαδικασίες

Ορισμένες στοχαστικές διαδικασίες έχουν την ιδιότητα να αναγεννώνται στο χρόνο. Δηλαδή για την διαδικασία X(t) μπορεί να υπάρξει χρονική στιγμή t_1 όπου το τμήμα της X(t) για $t\in[t_1,\infty)$ είναι στοχαστικά ισοδύναμο του τμήματος $t\in[0,\infty)$ και ανεξάρτητο από το $[0,t_1]$. Τέτοιες διαδικασίες λέγονται αναγεννητικές. Κάθε απλή ανανεωτική διαδικασία είναι και αναγεννητική, με στιγμές αναγέννησης τις στιγμές ανανέωσης. Δηλαδή οι αναγεννητικές διαδικασίες είναι γενίκευση των ανανεωτικών.

Έστω Z_n οι αναγεννητικές στιγμές της διαδικασίας X(t). Οι χρόνοι $T_n=Z_n-Z_{n-1}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές. Έτσι η $Z_n=T_1+T_2+...+T_n$ είναι μια ανανεωτική διαδικασία, εμφυτευμένη στην αναγεννητική διαδικασία X(t). Τα τμήματα της διαδικασίας X(t), $t\in[Z_{n-1},Z_n]$ ονομάζονται αναγεννητικοί κύκλοι με διάστημα T_n. Στην γενική περίπτωση ο πρώτος αναγεννητικός κύκλος μπορεί να διαφέρει στοχαστικά από τους υπόλοιπους. Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε γενικές αναγεννητικές διαδικασίες σε πλήρη αντιστοιχία με τις ανανεωτικές.

Οι αναγεννητικές διαδικασίες έχουν εφαρμογή στην θεωρία ουρών. Για παράδειγμα, έστω ένα σύστημα αναμονής με έναν εξυπηρετητή. Το σύστημα μεταβαίνει συνεχώς μεταξύ δύο καταστάσεων ελεύθερο-κατειλημμένο. Επίσης ξεκινάει τη λειτουργία του ελεύθερο. Έτσι κάθε στιγμή που το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση ελεύθερο μπορεί να θεωρηθεί ως αναγεννητική στιγμή.

5. Τυχαίοι περίπατοι

Τυχαίος περίπατος ορίζεται η ακολουθία μερικών αθροισμάτων, τυχαίων μεταβλητών που μπορούν να πάρουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

Δηλαδή: $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ με $Y_n \in \mathbb{R}$

Η Z_n αναφέρεται ως το ύψος του τυχαίου περιπάτου στο βήμα n. Τα βήματα στα οποία η Z_n ξεπερνάει το προηγούμενο μέγιστο ή ελάχιστο λέγονται γνήσιες ανιούσες ή κατιούσες σκαλωτές στιγμές αντίστοιχα. Σε περίπτωση που $Z_n \geqslant Z_i$ ή $Z_n \leqslant Z_i$, $i<n$ η σκαλωτή στιγμή λέγεται μη-γνήσια ανιούσα ή κατιούσα αντίστοιχα.

Έστω $N_1, N_2, \ldots$ τα βήματα ανάμεσα σε συνεχόμενες γνήσιες ανιούσες στιγμές. Ορίζεται $T_n = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ η ακολουθία των διαδοχικών γνήσιων ανιουσών στιγμών. Επίσης ορίζεται η ακολουθία των διαδοχικών γνήσιων ανιουσών υψών $(X_n = Z_{T_n})$ και οι αντίστοιχες διαφορές των υψών $S_n = X_n - X_{n-1}$. Άρα $X_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. Τα ζεύγη (T_n, X_n) ονομάζονται γνήσια ανιούντα ζεύγη ή σημεία. Αντίστοιχα μεγέθη ορίζονται και για τα υπόλοιπα σημεία. Με παύλα συμβολίζονται τα κατιόντα και με άνω-δείκτη 0 τα μη-γνήσια σημεία.

Οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με αποτέλεσμα κάθε φορά που εμφανίζεται ένα σκαλωτό σημείο (t,x) η συνέχεια της στοχαστικής διαδικασίας $\{Z_{t+n} - x,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι ένας ισοδύναμος τυχαίος περίπατος με τον αρχικό ανεξάρτητος από το παρελθόν τμήμα. Έτσι οι στοχαστικές διαδικασίες $\{T_n\}$ και $\{X_n\}$ είναι απλές ανανεωτικές διαδικασίες, στην περίπτωση γνήσιων ανιόντων σημείων. Ομοίως οι $\{\bar{T}_n\}$ και $\{-X_n\}$ για τα κατιόντα. Τέλος όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $\{S_1^0 = 0\}$, δηλαδή υπάρχει η πρώτη ανιούσα στιγμή και δεν είναι γνήσια, ο τυχαίος περίπατος αναγεννάται στοχαστικά.

Οι τυχαίοι περίπατοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

- Ταλαντευόμενος τυχαίος περίπατος ονομάζεται αυτός που ταλαντεύεται χωρίς φράγμα μεταξύ $-\infty$ και $+\infty$, και οι ανανεωτικές διαδικασίες T_n και $\bar{T}_n$ είναι μηδενικά επαναληπτικές.
- Αποκλίνων τυχαίος περίπατος ονομάζεται αυτός που αποκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ και έχει πεπερασμένο ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα. Επίσης οι ανανεωτικές διαδικασίες T_n και $\bar{T}_n$ είναι η πρώτη θετικά επαναληπτική και η δεύτερη παροδική ή το αντίστροφο.

6. Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown είναι μια πολύ σημαντική στοχαστική διαδικασία καθώς είναι η βάση της προσέγγισης διάχυσης που θα συζητηθεί αργότερα.

Ορισμός

Κίνηση Brown με μετατόπιση m και παράμετρο διακύμανσης D^2 ονομάζεται μια στοχαστική διαδικασία $\{B(t), t>0\}$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

A) Η B(t) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή για κάθε $s<t<b<a$ οι προσαυξήσεις $\{B(t)-B(s)\}$ και $\{B(a)-B(b)\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αυτή η ιδιότητα ισχύει και για παραπάνω από ένα διαστήματα. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση Brown έχει την Μαρκοβιαννή ιδιότητα.

B) Κάθε προσαύξηση $\{B(t)-B(s)\}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $m(t-s)$ και διακύμανση $D^2(t-s)$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι:

$$P[B(t) \leq x | B(s) = x_0] = P[B(t) - B(s) \leq x - x_0] = \Phi(a)$$

με $$\alpha = \frac{x - x_0 - m(t-s)}{D\sqrt{t-s}}$$

και $$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής.

Οι παράμετροι m και D^2 ονομάζονται απειροστή μέση τιμή και απειροστή διακύμανση αντίστοιχα και μπορούν να εκφραστούν ως:

$$m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[B(t+\Delta t) - B(t)]}{\Delta t}$$

$$D^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E[(B(t+\Delta t) - B(t))^2]}{\Delta t}$$

Έστω $F(t, x|x_0) = P[B(t) \leq x | B(0) = x_0]$
Τότε η F ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης και τις παρακάτω αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -m\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$F(0, x|x_0) = \begin{Bmatrix} 0 \ , & x < x_0 \\ 1 \ , & x \geq x_0 \end{Bmatrix}$$

$$F(t, 0|x_0) = 0 \quad x_0 > 0 \ , \ t > 0$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$F(t, x|x_0) = \Phi\left(\frac{x - x_0 - mt}{D\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2xm_0}{D^2}} \Phi\left(\frac{x - x_0 - mt}{D\sqrt{t}}\right)$$

η οποία δίνει τη λύση με χρονική εξάρτηση.

Για την λύση ισορροπίας $F(x) = \lim_{t \to \infty} F(t, x|x_0)$ η εξίσωση διάχυσης γίνεται:

$$0 = -m\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

με την παραπάνω συνοριακή συνθήκη και έχει λύση:

$$F(x) = 1 - e^{\frac{2xm}{D^2}}$$

3. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΦΑΣΕΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κατανομές φάσεων (Phase-type distributions).

Στην μοντελοποίηση στοχαστικών συστημάτων έχει φανεί πολύ χρήσιμη η εκθετική κατανομή. Λόγω της μαθηματικής της μορφής αλλά και της αμνήμονης ιδιότητας καταλήγει σε απλούς και εύχρηστους τύπους. Επίσης λόγω της "τυχαιότητας" που την χαρακτηρίζει μπορεί να περιγράψει επαρκώς μεγάλο αριθμό φυσικών προβλημάτων. Καθώς όμως τα προβλήματα γίνονται πιο περίπλοκα, με λιγότερες παραδοχές και εξιδανικεύσεις, το εκθετικό μοντέλο αρχίζει να υστερεί. Οι κατανομές φάσεων χρησιμοποιούνται για να λύσουν αυτό το πρόβλημα.

Έχουν δύο βασικές ιδιότητες που τις καθιστούν τόσο χρήσιμες. Πρώτον επειδή βασίζονται στην εκθετική, διατηρούν μια σχετικά απλή μορφή. Δεύτερον οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι πυκνές στο πεδίο των συναρτήσεων, που σημαίνει ότι μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση.

Ορισμός

Έστω μια Μαρκοβιαννή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με k μεταβατικές καταστάσεις και 1 απορροφητική. Ο χρόνος που το σύστημα περνάει στην κατάσταση ή φάση i, $i=1,2,\dots,k$ έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i. Επίσης ορίζεται το διάνυσμα κατανομής αρχικής κατάστασης $\vec{\pi}^0$. Μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή φάσεων είναι ίση με το χρόνο που κάνει το σύστημα να φτάσει στην απορροφητική κατάσταση.

Για να οριστεί πλήρως μια τέτοια κατανομή πρέπει, όπως και σε όλες τις Μαρκοβιαννές αλυσίδες, να καθοριστούν:

1) Το πλήθος των καταστάσεων ή φάσεων k
2) Ο πίνακας των ρυθμών μετάβασης
3) Η αρχική κατανομή π_j^0 με $0 \leqslant \pi_j^0 \leqslant 1 \quad \forall\, j$, $\sum_{j=1}^{k+1} \pi_j^0 = 1$

Ειδική κατηγορία των κατανομών φάσεων είναι οι ακυκλικές κατανομές φάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας των ρυθμών μετάβασης είναι άνω τριγωνικός. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν μπορεί να μεταβεί από μια κατάσταση i σε μια κατάσταση j αν $j<i$.

Η γενική περίπτωση των κατανομών φάσεων ακόμα και των ακυκλικών είναι περίπλοκη. Παρακάτω παρουσιάζονται ειδικές περιπτώσεις που συναντιούνται συχνά σε προβλήματα και χρησιμοποιούνται ευρύτερα. Παραλείπεται η εκθετική κατανομή καθώς παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Είναι ακυκλική κατανομή φάσεων με μία μόνο μεταβατική κατάσταση που ξεκινά πάντα από αυτήν.

3.1. Κατανομή Erlang $Er(r, \lambda)$

Η κατανομή Erlang αποτελείται από r διαδοχικές φάσεις κάθε μία από τις οποίες ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Εδώ το σύστημα ξεκινάει πάντα από την πρώτη φάση, περνάει εκεί κάποιο χρόνο που έχει εκθετική κατανομή και συνεχίζει στην επόμενη. Όλες οι φάσεις είναι υποχρεωτικές και έχουν την ίδια παράμετρο.

Η κατανομή Erlang είναι σχετικά απλή. Για να περιγραφεί χρειάζεται μόνο δύο παραμέτρους. Χρησιμοποιείται κυρίως για την μοντελοποίηση συστημάτων που απαρτίζονται από στοχαστικά ισοδύναμα διαδοχικά κομμάτια.

Για μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Er(r,λ) κατανομή:

$$E[X]=\frac{r}{\lambda}$$

$$Var[X]=\frac{r}{\lambda^2}$$

$$C_X^2=\frac{1}{r}$$

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!},\quad x\geqslant 0$$

$$f(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}}{(r-1)!},\quad x\geqslant 0$$

και σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για r=3:

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\pi_1^0=1,\ \pi_j^0=0\ \forall j\geqslant 2$$

Μια σημαντική ιδιότητα της κατανομής Erlang έχει να κάνει με το συντελεστή μεταβλητότητας της. Όπως φαίνεται παραπάνω $C_X^2=\frac{1}{r}\leqslant 1$ και μικραίνει όσο αυξάνεται το r. Έτσι η κατανομή Erlang μπορεί να προσεγγίσει την σταθερή κατανομή. Έστω μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang με εκθετική παράμετρο $r\lambda$. Καθώς $r\rightarrow\infty$ $C_X^2\rightarrow 0$ και έτσι η τυχαία μεταβλητή X προσεγγίζει σταθερή κατανομή με τιμή $E[X]=\frac{1}{\lambda}$

Υπάρχει επίσης και μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή της Erlang η μίξη δύο Erlang με ίδια εκθετική παράμετρο και φάσεις r και $r-1$. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο επιμέρους Erlang είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και επιλέγονται με πιθανότητα α και $1-\alpha$

Σε αυτή την περίπτωση:

$$E[X]=\frac{r-a}{\lambda}$$

$$\frac{1}{r}<C^2<\frac{1}{r-1}$$

$$f_Y(x)=a\frac{\lambda(\lambda x)^{r-2}e^{-\lambda x}}{(r-2)!}+(1-a)\frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}}{(r-1)!}$$

και σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για r=3:

$$Q=\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pi_1^0=\alpha,\ \pi_4^0=1-\alpha,\ \pi_j^0=0\ \forall\ j\neq\{1,4\}$$

Η κατανομή Erlang έχει πολλές παραλλαγές όπως η παραπάνω που προσπαθούν να την γενικεύσουν, συχνά με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Αυτές οι παραλλαγές χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση περίπλοκων προβλημάτων και δεν αφορούν αυτή την εργασία.

3.2. Υποεκθετική κατανομή ή γενικευμένη κατανομή Erlang $GEr(r,\vec{\lambda})$

Η υποεκθετική κατανομή ουσιαστικά είναι μια γενίκευση της Erlang στην οποία οι φάσεις δεν έχουν κατ' ανάγκη ίσες παραμέτρους. Ονομάζεται υποεκθετική κατανομή γιατί έχει μικρότερο συντελεστή διακύμανσης από την εκθετική. Η κύρια διαφορά της από την Erlang είναι ότι δεν περιορίζεται ο συντελεστής διακύμανσης στις τιμές $C_X^2=\frac{1}{r}$ αλλά παίρνει και τιμές όπου $\frac{1}{C_X^2}\notin\mathbb{N}$.

Για μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί $GEr(r,\vec{\lambda})$ κατανομή:

$$E[X]=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}$$

$$Var[X]=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i^2}$$

$$C_X^2 \leqslant 1$$

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{r} b_i e^{-\lambda_i x}, \ x \geqslant 0 \quad \text{όπου } b_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \ x \geqslant 0$$

και σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για r=3:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1^0 = 1, \ \pi_j^0 = 0 \ \forall j \geqslant 2$$

3.3. Υπερεκθετική κατανομή $H(r, \vec{\lambda}, \vec{a})$

Η υπερεκθετική κατανομή είναι μια μίξη αμοιβαία αποκλειόμενων εκθετικών φάσεων. Οι φάσεις αυτές δεν είναι διαδοχικές όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις αλλά επιλέγεται μια μόνο βάση κάποιας κατανομής a_j. Επίσης δεν έχουν αναγκαστικά την ίδια εκθετική παράμετρο. Ονομάζεται υπερεκθετική κατανομή γιατί έχει μεγαλύτερο συντελεστή διακύμανσης από την εκθετική.

Για μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί $H(r, \vec{\lambda}, \vec{a})$ κατανομή:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda_i}$$

$$Var[X] = 2\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda_i^2} - \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\lambda_i}\right]^2$$

$$C_X^2 \geqslant 1$$

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{r} a_i e^{-\lambda_i x}, \ x \geqslant 0$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \ x \geqslant 0$$

και σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για r=3:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_j^0=a_j\,,\ \forall j$$

3.4. Κατανομή του Cox $C(r,\vec{\lambda},\vec{a})$

Η κατανομή αυτή παρουσιάστηκε από τον Cox το 1955, που έδειξε ότι κάθε κατανομή με κλασματικό μετασχηματισμό Laplace μπορεί να αναπαρασταθεί από την κατανομή του Cox. Στην ουσία πρόκειται για συνδυασμό των στοιχείων της υπερεκθετικής και υποεκθετικής κατανομής. Το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή που έχει μεγάλη ευελιξία και μπορεί να προσαρμοστεί σε πάρα πολλά συστήματα.

Το σύστημα διέρχεται από διαδοχικές εκθετικές φάσεις με τη διαφορά ότι μπορεί να σταματήσει μετά από οποιαδήποτε από αυτές. Δεν είναι σίγουρο δηλαδή πόσες φάσεις θα εκτελεστούν. Το διάνυσμα $\vec{a}$ περιέχει τις πιθανότητες το σύστημα να εισέλθει στην επόμενη φάση. Δηλαδή βγαίνοντας απ' την i-οστή φάση το σύστημα συνεχίζει στην $i+1$ με πιθανότητα a_i και μπαίνει στην απορροφητική φάση με πιθανότητα $1-a_i$.

Είναι προφανές ότι η πιθανότητα να εκτελεστούν ακριβώς k φάσεις είναι $p_k=(1-a_k)\prod_{i=1}^{k-1} a_i$. Έτσι η κατανομή του Cox μπορεί να παρουσιαστεί και σαν τη μείξη r υποεκθετικών κατανομών με αναλογία την κατανομή p_k.

Η κατανομή αυτή έχει την πολύ χρήσιμη ιδιότητα ότι μπορεί να αναπαραστήσει οποιαδήποτε ακυκλική κατανομή φάσεων.

Για μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί $C(r,\vec{\lambda},\vec{a})$ κατανομή:

$$E[X]=\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{\lambda_i}\ \text{ με }\ A_1=1\ \text{ και }\ A_k=\prod_{i=1}^{k-1} a_i$$

Περισσότερες αναλυτικές πληροφορίες υπάρχουν για την περίπτωση $r=2$.

$$Var[X]=\frac{\lambda_2^2+a_1\lambda_1^2(2-a_1)}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$$

$$C_X^2=\frac{\lambda_2^2+a_1\lambda_1^2(2-a_1)}{(\lambda_2+a_1\lambda_1)^2}$$

και σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για r=3:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_1 & a_1\lambda_1 & 0 & (1-a_1)\lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & a_2\lambda_2 & (1-a_2)\lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1^0=1\,,\ \ \pi_j^0=0\ \forall\, j\geqslant 2$$

4. ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ

Η θεωρία ουρών ξεκίνησε το 1909, όταν ο Agner Krarup Erlang (1878-1929) δημοσίευσε τη θεμελιώδη εργασία του πάνω στην συμφόρηση του τηλεφωνικού δικτύου. Εκτός του ότι μαθηματικοποίησε σε αναλυτική μορφή αρκετά προβλήματα που προκύπτουν στην τηλεφωνία και τα έλυσε, ο Erlang έβαλε τις βάσεις της θεωρίας ουρών όσο αναφορά τη φύση των υποθέσεων και τις τεχνικές ανάλυσης, τα οποία χρησιμοποιούνται συνεχώς μέχρι και σήμερα ακόμα και σε τομείς εκτός της τηλεφωνίας. Ο Kendall (1951, 1953) ήταν ο πρώτος που μελέτησε την θεωρία ουρών από τη σκοπιά των στοχαστικών διαδικασιών.

Η θεωρία ουρών είναι η μαθηματική μελέτη ουρών ή γραμμών αναμονής. Ως ουρά αναμονής ορίζεται κάθε σύστημα το οποίο παρέχει εξυπηρέτηση κάποιου είδους σε πελάτες που προσέρχονται σε αυτό. Μια ουρά δημιουργείται οποιαδήποτε χρονική στιγμή η ζήτηση για μια υπηρεσία ξεπερνά τη δυνατότητα παροχής της. Το σύστημα που μελετάται αποτελείται από πελάτες ή μονάδες που χρειάζονται κάποια υπηρεσία, το χώρο εξυπηρέτησης και το χώρο αναμονής όπου περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως. Οι πελάτες που εξυπηρετούνται φεύγουν από το σύστημα. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι πελάτες αναχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν έχοντας περιμένει ήδη κάποιο διάστημα στην ουρά ή χωρίς να μπουν καν. Οι αφίξεις των πελατών και η εξυπηρέτηση τους γίνεται με τυχαίο τρόπο. Έτσι δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς ο αριθμός των πελατών στο σύστημα (μήκος ουράς) καθώς μεταβάλλεται τυχαία με το χρόνο, είναι δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία.

Οι όροι πελάτης και εξυπηρετητής είναι γενικοί. Πελάτες μπορεί να θεωρηθεί οτιδήποτε χρειάζεται κάποια υπηρεσία και φτάνει στο σημείο που αυτή παρέχεται, ενώ εξυπηρετητής είναι οποιοσδήποτε μηχανισμός παρέχει αυτή την υπηρεσία σε πελάτες που του τροφοδοτούνται. Για παράδειγμα πελάτες σε μια τράπεζα, κλήσης που φτάνουν στο τηλεφωνικό κέντρο, μηχανές που χρειάζονται επισκευή και ο επισκευαστής, εμπορεύματα προς φόρτωση, εντολές που φτάνουν σε έναν επεξεργαστή κτλ.

Βασικά στοιχεία συστήματος ουράς:

1. **Αφίξεις**
   Περιγράφονται από τους χρόνους αφίξεων των πελατών $(t_1, t_2, ...)$ ή τα διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων $T_n = t_{n+1} - t_n$. Τα διαστήματα αυτά μπορεί να είναι σταθερά ή ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οπότε πρέπει να προσδιοριστεί η κατανομή τους και η μέση τιμή τους $\frac{1}{\lambda}$. Η παράμετρος λ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων στην μονάδα του χρόνου. Επίσης οι αφίξεις μπορεί να είναι μεμονωμένες ή σε παρτίδες. Στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να διευκρινίζεται πως καθορίζεται το μέγεθος της παρτίδας. Σε κάποιες περιπτώσεις ένας πελάτης μπορεί να μην μπει στο σύστημα είτε από επιλογή του επειδή η ουρά είναι μεγάλη είτε επειδή το σύστημα έχει περιορισμένο χώρο αναμονής. Ο πληθυσμός των πελατών μπορεί να είναι άπειρος ή όχι. Στην δεύτερη περίπτωση οι ίδιες μονάδες ανακυκλώνονται στο σύστημα. Επίσης υπάρχει η περίπτωση οι πελάτες να ανήκουν σε κλάσεις διαφορετικής προτεραιότητας με καθεμία διαφορετικό ρυθμό αφίξεων.

2. Εξυπηρέτηση

Ένα σύστημα μπορεί να έχει έναν εξυπηρετητή ή περισσότερους που δουλεύουν παράλληλα. Ένας πελάτης που βρίσκει πάνω από έναν ελεύθερους εξυπηρετητές διαλέγει τυχαία έναν. Αν είναι όλοι κατειλημμένοι τότε φτιάχνει ή μπαίνει στην υπάρχουσα ουρά κοινή για όλους τους εξυπηρετητές. Ο πρώτος πελάτης της ουράς πηγαίνει στον πρώτο εξυπηρετητή που είναι διαθέσιμος (πχ Τράπεζα). Σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να υπάρχει ξεχωριστή ουρά για κάθε εξυπηρετητή (πχ Σουπερμάρκετ).

Βασικό μέγεθος είναι η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης μιας μονάδας. Οι χρόνοι αυτοί μπορεί πάλι να είναι σταθεροί ή ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οπότε πρέπει να προσδιορίζεται η κατανομή τους και η μέση τιμή τους $\frac{1}{\mu}$. Η παράμετρος μ στην περίπτωση ουράς με έναν εξυπηρετητή που είναι συνεχώς απασχολημένος, συμβολίζει το μέσο αριθμό εξυπηρετήσεων στη μονάδα του χρόνου. Σε μερικές περιπτώσεις η εξυπηρέτηση γίνεται σε παρτίδες, όπως για παράδειγμα σε έναν ανελκυστήρα. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να δίνεται και ο τρόπος δημιουργίας των παρτίδων.

3. Πειθαρχεία ουράς

Κάθε ουρά εξυπηρετεί τους πελάτες με διαφορετικό τρόπο. Η συνηθισμένη προτεραιότητα είναι εξυπηρέτηση με την σειρά άφιξης (FIFO). Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις η προτεραιότητα είναι ανάποδη, εξυπηρετήται πρώτος αυτός που έφτασε τελευταίος (LIFO). Μπορεί η εξυπηρέτηση να γίνεται εντελώς τυχαία (SIRO) ή με τις λιγότερο απαιτητικές δουλειές πρώτα. Σε συστήματα Η/Υ συνήθως χρησιμοποιείται το processor-sharing όπου η παροχή του εξυπηρετητή κατανέμεται ίσα σε όσους είναι στην ουρά ταυτόχρονα. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι πελάτες ανήκουν σε κλάσεις με διαφορετική προτεραιότητα. Ουρές με πειθαρχεία LIFO ή που οι πελάτες ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις χωρίζονται σε διακόπτουσες και μη-διακόπτουσες. Σε διακόπτουσες ουρές αν κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης έρθει νέος πελάτης (LIFO) ή νέος πελάτης ανώτερης κλάσης η εξυπηρέτηση διακόπτεται και εξυπηρετήται ο νέος πελάτης. Σε μη-διακόπτουσες ο νέος πελάτης περιμένει την αναχώρηση αυτού που εξυπηρετήται. Οι διακόπτουσες πειθαρχίες χωρίζονται σε συντηρητικές και μη-συντηρητικές. Στις πρώτες ο πελάτης που διακόπηκε συνεχίζει την εξυπηρέτηση του από το σημείο που έμεινε όταν έρθει η σειρά του ενώ στις δεύτερες αρχίζει πάλι από την αρχή.

Συμβολισμός ουρών

Το πρότυπο συμβολισμού που επικρατεί καθιερώθηκε από τον Kendall (1951). Αποτελείται από τρεις παραμέτρους: κατανομή χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων, κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, και τον αριθμό των εξυπηρετητών. Κάποια συνηθισμένα σύμβολα για τις κατανομές είναι τα παρακάτω:

- M : εκθετική κατανομή
- D : σταθεροί χρόνοι
- E_r : κατανομή Erlang με r φάσεις

- GE_r : υποεκθετική κατανομή με r φάσεις
- H_r : υπερεκθετική κατανομή (μείγμα r εκθετικών κατανομών)
- Cox_r : κατανομή Cox με r φάσεις
- Ph : κατανομή τύπου φάσεων
- G : γενική κατανομή

Άλλοι δύο παράμετροι χρησιμοποιούνται όταν χρειάζεται: η τέταρτη δίνει το μέγιστο δυνατό αριθμό πελατών στο σύστημα και η πέμπτη το μέγεθος του πληθυσμού των πελατών (αν παραλείπονται θεωρούνται ∞). Τέλος συμπληρώνεται σε παρένθεση η πειθαρχία της ουράς αν δεν είναι FIFO.

Για παράδειγμα: M/G/1/5/10 (LIFO/P-R) σημαίνει ουρά με εκθετικούς χρόνους αφίξεων, γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης, ένα εξυπηρετητή, πέντε θέσεις αναμονής, πληθυσμό πελατών δέκα και πειθαρχία LIFO, διακόπτουσα, συντηρητική.

Παρακάτω ορίζονται τα πιο σημαντικά μεγέθη στην μελέτη των συστημάτων αναμονής.

1. t_j: η στιγμή άφιξης του j-οστού πελάτη
2. τ_j: η στιγμή αναχώρησης του j-οστού πελάτη
3. T_j: το διάστημα μεταξύ της άφιξης του j-οστού πελάτη και του επόμενου. $T_j = t_{j+1} - t_j$ και $E[T_j] = \frac{1}{\lambda}$
4. W_j: ο χρόνος αναμονής του j-οστού πελάτη στην ουρά
5. $\bar{W}(t)$: ο εικονικός χρόνος αναμονής τη χρονική στιγμή t. Είναι ο χρόνος που θα περίμενε στην ουρά ένας υποθετικός πελάτης που θα έφτανε τη χρονική στιγμή t.
6. X_j: χρόνος εξυπηρέτησης του j-οστού πελάτη με μέση τιμή $\frac{1}{\mu}$
7. S_j: συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα του j-οστού πελάτη. Προφανώς $S_j = W_j + X_j$
8. λ: μέσος ρυθμός αφίξεων στην μονάδα του χρόνου (για μεμονωμένες αφίξεις).
9. μ: μέσος ρυθμός αναχωρήσεων στη μονάδα του χρόνου (για έναν εξυπηρετητή και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις).
10. m: αριθμός εξυπηρετητών.
11. ρ: ρυθμός συνωστισμού ή ένταση κυκλοφορίας. $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ Χρήσιμο μέτρο του φόρτου εργασίας του συστήματος. Αν $\rho < 1$ τότε το σύστημα φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας. Αντίθετα το σύστημα δεν προλαβαίνει να εξυπηρετήσει τους πελάτες που καταφτάνουν και η ουρά αυξάνεται συνεχώς. Τέλος στην περίπτωση που $m=1$ το ρ δίνει το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κατηλειμμένο και έτσι η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος είναι $\pi_0 = 1 - \rho$.
12. $Q_q(t)$. ο αριθμός των πελατών στο χώρο αναμονής τη χρονική στιγμή t.

13. $Q_s(t)$: ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται τη χρονική στιγμή t. Προφανώς $Q_s(t)<c$

14. $Q(t)$: ο συνολικός αριθμός των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t. Προφανώς $Q(t)=Q_s(t)+Q_q(t)$.

Η Q(t) είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου – διακριτών καταστάσεων (ομοίως οι $Q_s(t)$ και $Q_q(t)$). Η μελέτη της είναι το βασικότερο αντικείμενο της θεωρίας ουρών, μαζί με την μελέτη του S_j. Στην γενική περίπτωση δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά αποτελέσματα για την μεταβατική συμπεριφορά της. Τέτοια αποτελέσματα υπάρχουν για την $D/D/m$ ουρά που δεν εμφανίζει κάποιο ενδιαφέρον και τις Μαρκοβιανές ουρές. Για την γενική περίπτωση της $G/G/m$ ουράς διαπώνονται κάποια όρια που θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο. Για τα αναλυτικά αποτελέσματα των Μαρκοβιανών ουρών βλέπε [3],[24],[32],[40],[41],[42].

Για να απλουστευτεί η μελέτη μιας μη Μαρκοβιανής ουράς χρησιμοποιούνται οι εμφυτευμένες διαδικασίες Μαρκοβιανές αλυσίδες στην Q(t). Ορίζονται οι στοχαστικές διαδικασίες $Q_n^-=Q(t_n^-)$ και $Q_n^+=Q(\tau_n^+)$. Δηλαδή το μήκος ουράς πριν τη n-οστή άφιξη και μετά την n-οστή αναχώρηση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι έχουν κοινή οριακή κατανομή στην περίπτωση των μεμονωμένων αφίξεων και εξυπηρετήσεων. Δηλαδή αν

$$\lim_{n\to\infty} P(Q_n^-=j)=a_j \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} P(Q_n^+=j)=d_j \quad \text{τότε} \quad a_j=d_j$$

Θεώρημα του Little

Το θεώρημα του Little είναι μια απλή αλλά πολύ βασική σχέση στην θεωρία ουρών. Σύμφωνα με αυτό ο μέσος αριθμός των πελατών σε ένα σύστημα είναι ίσος με το ρυθμό αφίξεων επί τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα $E[Q]=\lambda\cdot E[S]$. Το θεώρημα αυτό ισχύει για όλα τα συστήματα αναμονής αρκεί να έχουν φτάσει σε στατιστική ισορροπία. Έχει μεγάλη χρησιμότητα καθώς επιτρέπει την εύρεση του $E[Q]$ με υπολογισμό του $E[S]$ ή αντίστροφα. Ακόμα το θεώρημα ισχύει και για μέρη του συστήματος πχ $E[Q_q]=\lambda\cdot E[W]$. Χρειάζεται όμως προσοχή στην επιλογή του συστήματος ελέγχου που εφαρμόζεται και των αντίστοιχων μεγεθών.

Ιδιότητα PASTA

Όπως έχει αναφερθεί η διαδικασία Poisson έχει μεγάλη σημασία στην μοντελοποίηση συστημάτων αναμονής. Η διαδικασία αυτή έχει μια πολύ σημαντική ιδιότητα. Καθώς όπως χαρακτηρίζεται είναι “η πιο τυχαία διαδικασία”, το μήκος ουράς δεν εξαρτάται από τον αν ο παρατηρητής είναι εκτός του συστήματος ή έχει μπει στην ουρά. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται στην διεθνή βιβλιογραφία ως PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages). Στην γενική περίπτωση η οριακή κατανομή της $Q(t)$ (π_j) δεν συμπίπτει με τις a_j και d_j. Όταν όμως η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson $\pi_j=a_j=d_j$ ως συνέπεια της ιδιότητας PASTA.

5. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ G/G/m

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συστήματα αναμονής που απασχολούν την εργασία αυτή. Τα συστήματα γενικευμένων αφίξεων και αναχωρήσεων έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να περιγράψουν πληθώρα φυσικών συστημάτων καθώς δεν γίνεται κάποια υπόθεση για τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών T και X. Από την άλλη μεριά, για τον ίδιο λόγο παρουσιάζονται δυσκολίες στην μελέτη τους, καθώς δεν εμφανίζεται πουθενά η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Έτσι είναι αδύνατη η εξαγωγή αναλυτικών αποτελεσμάτων για βασικά μεγέθη των συστημάτων όπως την οριακή κατανομή του μήκους ουράς $Q(t)$. Το μέγεθος που χρησιμεύει στην ανάλυση της είναι η εργασία συστήματος που ορίζεται παρακάτω.

Στην ειδική περίπτωση του συστήματος με έναν εξυπηρετητή υπάρχουν κάποιες αναλυτικές σχέσεις που χρησιμεύουν και στην εξαγωγή προσεγγίσεων. Αντίθετα στην περίπτωση των πολλών εξυπηρετητών θα δοθούν μόνο τα φράγματα του προσδοκώμενου χρόνου αναμονής πριν προχωρήσουμε στις προσεγγίσεις. Επίσης υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους καθώς και με τους χρόνους εξυπηρέτησης.

Οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι ίδιοι με του προηγούμενου κεφαλαίου. Επίσης ορίζονται τα μεγέθη:

1. $\sigma_T^2 = Var[T]$
2. $\sigma_X^2 = Var[X]$
3. $c_T^2 = \dfrac{Var[T]}{E[T^2]}$ τετραγωνικός συντελεστής διακύμανσης του T.
4. $c_X^2 = \dfrac{Var[X]}{E[X^2]}$ τετραγωνικός συντελεστής διακύμανσης του X.
5. $D_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ Ενδιάμεσοι χρόνοι διαδοχικών αναχωρήσεων.
6. $Y_n = X_n - T_n$ Ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $K(x) = P[Y_n \leqslant x]$, μέση τιμή $E[Y] = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}$ και διακύμανση $Var[Y] = \sigma_T^2 + \sigma_X^2$.
   Προφανώς για να φτάσει το σύστημα σε στατιστική ισορροπία πρέπει $E[Y] < 0$ που είναι ισοδύναμο με $\rho < 1$.
7. U_{n-1} Περίοδος αργίας για το σύστημα πριν την άφιξη του n-οστού πελάτη.
8. $J_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$ Συνολική περίοδος αργίας μέχρι την άφιξη του n-οστού πελάτη.
9. I_n Διάρκεια της n-οστής περιόδου αργίας με συνάρτηση πιθανότητας $h(x) = P[I_n \leqslant x]$.
10. B_n Διάρκεια της n-οστής περιόδου συνεχούς λειτουργίας με συνάρτηση πιθανότητας $b(x) = P[B_n \leqslant x]$.
11. N_n Αριθμός εξυπηρετηθέντων πελατών στη διάρκεια της n-οστής συνεχούς λειτουργίας.
12. a_0 Πιθανότητα μια άφιξη να βρει το σύστημα κενό. Δεν είναι απαραίτητο $a_0 = \pi_0$ διότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων είναι γενικοί, Στην περίπτωση που οι χρόνοι αυτοί έχουν την εκθετική κατανομή η παραπάνω ισότητα ισχύει λόγω της ιδιότητας

PASTA.

5.1 Περίπτωση ουράς με έναν εξυπηρετητή.

Η βασική στοχαστική διαδικασία για την μελέτη της G/G/1 ουράς είναι η εργασία συστήματος. Για κάθε $t \leqslant 0$ ορίζεται η $V(t)$ ως το άθροισμα των υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα. Η στοχαστική διαδικασία $V(t)$ αυξάνεται κατά X_n όταν εισέρχεται στο σύστημα ο n-οστός πελάτης και μειώνεται με κλίση -1 στα διαστήματα μεταξύ αφίξεων μέχρι να γίνει 0. Στη γενική περίπτωση η $V(t)$ δεν έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Η εμφυτευμένη διαδικασία θεωρούμενη στις στιγμές αφίξεων όμως είναι Μαρκοβιανή. Επίσης όταν η πειθαρχία είναι FIFO όπως εδώ, αυτή συμπίπτει με την W_n. Έτσι θα επικεντρωθούμε στην μελέτη της W_n.

Είναι προφανές ότι με την υπάρχουσα πειθαρχία

$$W_{n+1} = max[W_n + X_n - T_n, 0]$$

ή σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό

$$W_{n+1} = max[W_n + Y_n, 0].$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να πούμε ότι κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου λειτουργίας ισχύει:

$$W_{n+1} = W_n + Y_n$$

Καθώς ο χρόνος αναμονής δεν μηδενίζεται σε μια περίοδο λειτουργίας. Έτσι φτάνουμε στον παρακάτω αναδρομικό τύπο για την πρώτη περίοδο λειτουργίας. Από τον ορισμό του συστήματος $W_1 = 0$

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Το $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ όμως είναι ένας τυχαίος περίπατος. Έτσι μπορούμε να συνδέσουμε το χρόνο αναμονής με έναν τυχαίο περίπατο έστω:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Αυτός ο τυχαίος περίπατος αποκλίνει στο $-\infty$ και ταυτίζεται με το χρόνο αναμονής μέχρι την πρώτη γνήσια κατιούσα στιγμή, η οποία είναι στιγμή αναγέννησης της W_n. Σε αυτήν τη στιγμή ο τυχαίος περίπατος παίρνει αρνητική τιμή ενώ ο χρόνος αναμονής συνεχίζεται. Έστω αυτή η τιμή S_k. Στη συνέχεια όταν ξεκινήσει η δεύτερη περίοδος λειτουργίας οι δύο διαδικασίες θα έχουν την ίδια διαφορά αλλά οι τιμές τους θα έχουν μια διαφορά ίση με $|S_k|$. Δηλαδή $W_n = S_n + |S_k|$. Όπως βλέπουμε οι γνήσιες κατιούσες στιγμές της S_n ταυτίζονται με τις στιγμές αναγέννησης του χρόνου αναμονής και τα βήματα που απέχουν μεταξύ τους οι στιγμές αυτές ισούνται με τους πελάτες που εξυπηρετήθηκαν σε έναν κύκλο.

Επίσης ισχύει η σχέση

$$W_{n+1} - U_n = W_n + Y_n \quad (5.1)$$

όπου $W_{n+1}=0$ ή $U_n=0$.

Για την οριακή κατανομή του W_n υπάρχει ένας πολύ χρήσιμος τύπος που αποκαλείται στην διεθνή βιβλιογραφία ως "η ολοκληρωτική εξίσωση του Lindley":

$$W(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} W(x-u)\,dK(u), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Η χρησιμότητά της είναι κυρίως θεωρητική καθώς για να λυθεί απαιτούνται τεχνικές και αλγόριθμοι προχωρημένης θεωρίας πιθανοτήτων.

Πριν προχωρήσουμε στην μέση τιμή και την διακύμανση του W_n, θα αναφερθούμε στον κύκλο λειτουργίας του συστήματος. Ο κάθε κύκλος λειτουργίας αποτελείται από μια περίοδο συνεχούς λειτουργίας και μια περίοδο αργίας, στο τέλος της οποίας οι στοχαστικές διαδικασίες $Q(t), V(t), W_n$ αναγεννώνται στοχαστικά. Η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να βρει το σύστημα άδειο είναι:

$$a_0 = \frac{1}{E[N]}$$

Επίσης

$$E[B] = E[X] \cdot E[N] = \frac{1}{\mu \cdot a_0}$$

$$E[B] + E[I] = E[T] \cdot E[N] = \frac{1}{\lambda \cdot a_0}$$

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος είναι $\pi_0 = 1-\rho$. Έτσι από την θεωρεία των εναλλασσόμενων ανανεωτικών διαδικασιών:

$$\pi_0 = \frac{E[I]}{E[I] + E[B]} = 1-\rho \rightarrow E[I] = \frac{1-\rho}{\lambda \cdot a_0} \quad (5.2)$$

Από τα παραπάνω μπορούν να υπολογιστούν η προσδοκώμενη τιμή και η διακύμανση του W_n. Συγκεκριμένα:

$$E[W] := \frac{\lambda^2 \cdot \left[\sigma_T^2 + \sigma_X^2 - a_0 E[I^2]\right] + (1-\rho)^2}{2\lambda(1-\rho)}$$

$$Var[W] = -\frac{E[Y^3]}{E[Y]} + \left[\frac{E[Y^2]}{2E[Y]}\right]^2 + \frac{E[I^3]}{3E[I]} - \left[\frac{E[I^2]}{2E[I]}\right]^2$$

Οι παραπάνω τύποι είναι ιδιαίτερα δύσχρηστοι καθώς βασίζονται σε ροπές του I και το a_0. Για αυτό το λόγο σε πρακτικές εφαρμογές που χρειάζονται γρήγορα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις.

Όσον αφορά την έξοδο του συστήματος υπάρχουν κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Είναι προφανές ότι

$$D_n=\tau_{n+1}-\tau_n=t_{n+1}+W_{n+1}+X_{n+1}-(t_n+W_n+X_n)$$

στην κατάσταση ισορροπίας $E[W_{n+1}]=E[W_n]$, άρα:

$$E[D]=E[T]=\frac{1}{\lambda}$$

Δηλαδή σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ο ρυθμός εισόδου είναι ίσος με τον ρυθμό εξόδου πελατών, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Η διακύμανση είναι:

$$Var[D]=\sigma_X^2-\frac{(1-\rho)^2}{\lambda^2}-\left[\frac{1-\rho}{\lambda}\right]\left[\frac{E[I^2]}{E[I]}\right]$$

Ιδιαίτερη χρησιμότητα έχουν οι μετασχηματισμοί Laplace και Laplace-Stieltjes του W. Ο πρώτος μπορεί να εξαχθεί μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Lindley και ο δεύτερος από την σχέση (5.1).

Αρχικά πρέπει να οριστεί το παρακάτω μέγεθος ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και αρνητικές τιμές του x.

$$W^-(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x} W(x-u)dK(u)\,, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}$$

Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$W(s)=\frac{\bar{W}^-(s)}{X^*(s)T^*(-s)-1}=\frac{\bar{W}^-(s)}{K^*(s)-1}$$

ενώ ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes:

$$W^*(s)=\frac{a_0[I^*(-s)-1]}{K^*(s)-1}$$

Τέλος υπάρχουν κάποια φράγματα για το $E[W]$ και το $E[I]$.
Για το $E[I]$ από την σχέση (5 .2) και το γεγονός ότι $a_0\leqslant 1$:

$$E[I]\geqslant\frac{1-\rho}{\lambda}$$

η ισότητα ισχύει για το σύστημα D/D/1.

Το άνω φράγμα για το $E[W]$ είναι:

$$E[W] \leqslant \frac{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}{2(1-\rho)}$$

η ισότητα ισχύει ξανά για το σύστημα D/D/1.
Το κάτω φράγμα είναι:

$$E[W] \geqslant \frac{\lambda^2\sigma_X^2+\rho(\rho-2)}{2\lambda(1-\rho)}$$

5.2 Περίπτωση ουράς με περισσότερους από έναν εξυπηρετητές.

Σε αυτή την περίπτωση δίνονται μόνο τα φράγματα του προσδοκώμενου χρόνου αναμονής.

$$\frac{\rho^2 C_X^2-\rho(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)}-\frac{m-1}{m}\cdot\frac{C_X^2+1}{2\mu} \leqslant E[W] \leqslant \frac{\left(\sigma_T^2+\frac{\sigma_X^2}{m}\right)+\frac{m-1}{m^2\mu^2}}{2(1-\rho)}\lambda$$

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιαστούν μέθοδοι που προσπαθούν να λύσουν το κύριο πρόβλημα των G/G/m ουρών. Θυσιάζοντας την ακρίβεια των αναλυτικών σχέσεων μπορούν να εξαχθούν πολύ χρήσιμες σχέσεις για τα μέτρα λειτουργίας μιας ουράς.

6. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΒΑΡΙΑΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ

Η πρώτη προσέγγιση που θα παρουσιαστεί είναι η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας (Heavy-traffic approximation). Αυτή η προσέγγιση παρουσιάστηκε από τον Kingman το 1960 [9],[10],[11] και προσεγγίζει σε κλειστή μορφή την οριακή κατανομή του χρόνου αναμονής στην ουρά. Για την προσέγγιση αυτή υποθέτουμε ένα σύστημα ουράς όπου ο ρυθμός συνωστισμού ρ πλησιάζει την μονάδα αλλά παραμένει πάντα μικρότερος της. Όπως φαίνεται η μέθοδος δεν κάνει κάποια υπόθεση για την ίδια την ουρά. Δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε ουρά που δουλεύει σε βαριά κυκλοφορία. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η κλειστή μορφή των αποτελεσμάτων.

Το μειονέκτημα της είναι ότι η προϋπόθεση για να ισχύει δεν είναι σαφής. Η συνθήκη για την ισχύ της μεθόδου είναι $\rho \to 1^-$ δεν υπάρχει δηλαδή κάποια συγκεκριμένη τιμή που όταν την ξεπεράσει το ρ το σύστημα βρίσκεται σε βαριά κυκλοφορία. Βέβαια όπως είναι αναμενόμενο καθώς το ρ μικραίνει, μειώνεται και η ακρίβεια της μεθόδου. Συνήθως ένα σύστημα ουράς θεωρείται ότι βρίσκεται σε βαριά κυκλοφορία για $\rho > 0.9$ αλλά η μέθοδος χρησιμοποιείται και για $\rho > 0.75$

Αλλά ακόμα και ο περιορισμός $\rho \to 1^-$ δεν μειώνει την αξία της μεθόδου. Αντιθέτως η περίπτωση αυτή παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Όταν μια ουρά λειτουργεί σε βαριά κυκλοφορία το μήκος ουράς και ο χρόνος αναμονής μεγαλώνουν πάρα πολύ, βρίσκεται δηλαδή το σύστημα στην χειρότερη κατάσταση του. Επίσης με μεγάλο ρ η ουρά είναι πιο επικίνδυνη να βγει εκτός ισορροπίας. Τέλος σε πολλές εφαρμογές, όπως σε μια γραμμή παραγωγής είναι επιθυμητό το ρ να βρίσκεται πολύ κοντά στην μονάδα, καθώς έτσι αξιοποιούνται στο μέγιστο οι πόροι του συστήματος. Έτσι αυτή η περίπτωση έχει μεγάλο ενδιαφέρον που φαίνεται και από τις μελέτες που ακολούθησαν γενικεύοντας τα αποτελέσματα.

6.1 Περίπτωση ουράς με έναν εξυπηρετητή

Παρακάτω παρουσιάζεται η απόδειξη του αποτελέσματος του Kingman που έδειξε ότι για μια G/G/1 ουρά με FIFO πειθαρχία και $\rho \to 1^-$ η οριακή κατανομή του W ακολουθεί την εκθετική κατανομή ([24] Ch. 8.1).

Η απόδειξη ξεκινά από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου αναμονής W που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\bar{W}(s)=\frac{\bar{W}^-(s)}{B^*(s)A^*(-s)-1} \quad \text{Ή} \quad B^*(s)A^*(-s)-1=\frac{\bar{W}^-(s)}{\bar{W}(s)} \qquad (6.1)$$

Το ανάπτυγμα σε σειρά Mclaurin του $B^*(s)$ δίνει:

$$B^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}B^{*(k)}(0)$$

όπου $f^{(k)}$ είναι η k-οστή παράγωγος της f.

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace:

$$B^{*(k)}(0)=(-1^k)E[X^k]$$

Έτσι παίρνοντας τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος και ορίζοντας $E[X^k]=b_k$ και $E[T^k]=a_k$ έχουμε:

$$B^*(s)=1-b_1 s+\frac{b_2}{2}s^2+O(s^2)$$

$$A^*(-s)=1+a_1 s+\frac{a_2}{2}s^2+O(s^2)$$

Άρα

$$B^*(s)A^*(-s)-1=s[(a_1-b_1)+(\frac{a_2}{2}+\frac{b_2}{2}-a_1 b_1)s]+O(s^2) \quad (6.2)$$

Το δεξί μέλος έχει δύο ρίζες. Η μία είναι το 0 και η άλλη έστω s_0 που ικανοποιεί την:

$$a_1-b_1+(\frac{a_2}{2}+\frac{b_2}{2}-a_1 b_1)s_0=0$$

Σύμφωνα με τους ορισμούς των προηγούμενων κεφαλαίων:

$a_1=\frac{1}{\lambda}$, $b_1=\frac{1}{\mu}$, $a_2-a_1^2=\sigma_T^2$, $b_2-b_1^2=\sigma_X^2$ Έτσι:

$$a_1-b_1=\frac{1-\rho}{\lambda} \quad \text{και} \quad \frac{a_2}{2}+\frac{b_2}{2}-a_1 b_1=\frac{(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}{2}+\frac{(1-\rho)^2}{2\lambda^2}$$

Για βαριά κυκλοφορία $\rho\to 1^-$ άρα $\frac{(1-\rho)^2}{2\lambda^2}\to 0$ πολύ γρήγορα και έτσι μπορεί να αγνοηθεί. Άρα

$$s_0=-\frac{2(1-\rho)}{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}$$

Με παραγοντοποίηση της (6.2) κοντά στο 0 έχουμε:

$$B^*(s)A^*(-s)-1=s(s-s_0)K \quad (6.3)$$

όπου $K=\frac{\sigma_T^2+\sigma_X^2}{2}$ και αντικαθιστώντας στην (6.1):

$$\bar{W}(s)=\frac{W^-(s)}{s(s-s_0)K}\rightarrow W^-(s)=s(s-s_0)K\bar{W}(s)\rightarrow W^-(s)=(s-s_0)KW^*(s) \quad (6.4)$$

με $W^*(s)$ το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes του W δηλαδή:

$$W^*(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dW(t)=s\int_0^{\infty} e^{-st}W(t)dt=s\bar{W}(s)$$

Κοντά στο 0 $W^*(s)=1$ άρα από την $(6.4)\rightarrow W^-(s)=-s_0K$ (6.5)

$$(6.1),(6.3),(6.5)\rightarrow\bar{W}(s)=-\frac{s_0}{s(s-s_0)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-s_0}$$

και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό:

$$W(t)=1-e^{s_0t}=1-e^{-\frac{2(1-\rho)}{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}t}$$

Αυτή είναι προσεγγιστικά η οριακή κατανομή του χρόνου αναμονής. Η κατανομή αυτή είναι εκθετική με παράμετρο $-s_0=\frac{2(1-\rho)}{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}$ δηλαδή:

$$E[W]=\frac{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}{2(1-\rho)}$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί και ως:

$$E[W(G/G/1)]\simeq\frac{c_T^2+c_X^2}{2}E[W(M/M/1)]$$

6.2 *Περίπτωση ουράς με περισσότερους από έναν εξυπηρετητές*

Για πολλούς εξυπηρετητές η προσέγγιση καταλήγει στο

$$W(x)=1-\exp\left(-\frac{2m(1-\rho)}{\lambda\left(\sigma_T^2+\frac{\sigma_X^2}{m^2}\right)}x\right)$$

$$E[W]=\frac{\lambda\left(\sigma_T^2+\frac{\sigma_X^2}{m^2}\right)}{2m(1-\rho)}$$

όπου m είναι ο αριθμός των εξυπηρετητών ή

$$E[W(G/G/m)]\simeq\frac{c_T^2+c_X^2}{2}E[W(M/M/m)]$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι γνωστή ως προσέγγιση των Kingman-Kollerstrom. Ο Kingman είχε προτείνει αυτό το αποτέλεσμα το 1964 [11], αλλά αποδείχτηκε τελικά από τον Kollerstrom το 1974 [21]. Για την απόδειξη η G/G/m ουρά προσεγγίστηκε από μια G/G/1 ουρά με τα ίδια χαρακτηριστικά αλλά τροποποιημένους χρόνους εξυπηρέτησης ίσους με $\frac{X_n}{m}$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρονται κάποια φράγματα για το $E[W]$ όταν $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Το άνω φράγμα για την ουρά με τον ένα εξυπηρετητή είναι:

$$E[W]\leqslant\frac{\lambda(\sigma_T^2+\sigma_X^2)}{2(1-\rho)}$$

Δηλαδή το άνω όριο του προσδοκώμενου χρόνου αναμονής δίνεται από την τιμή του όταν το σύστημα δουλεύει κάτω από βαριά κυκλοφορία, κάτι που είναι απολύτως λογικό.

Στην περίπτωση με παραπάνω εξυπηρετητές δεν ισχύει το ίδιο. Το άνω φράγμα και η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας δεν ταυτίζονται. Ο Kingman ισχυριζόταν ότι τα δύο μεγέθη ταυτίζονται [12] αλλά αυτό δεν αποδείχτηκε ποτέ και εξακολουθεί να είναι μόνο υπόθεση.

7. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΥΟ ΡΟΠΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι προσεγγίσεις δύο ροπών. Οι προσεγγίσεις αυτές λέγονται έτσι γιατί βασίζονται στις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων $(E[T], E[T^2])$ και των χρόνων εξυπηρετήσεων $(E[X], E[X^2])$. Το αποτέλεσμα κάθε μεθόδου είναι μια φόρμουλα για τα κυριότερα μεγέθη της ουράς σε κλειστή μορφή.

Η κύρια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή αυτών των τύπων είναι η ευρετική. Δηλαδή ο ερευνητής ξεκινάει από έναν τύπο ο οποίος συμπίπτει με τα αναλυτικά αποτελέσματα ειδικών περιπτώσεων όπως η M/M/m. Στη συνέχεια εισάγει κάποια μεγέθη που πιστεύει ότι επηρεάζουν το αποτέλεσμα με κάποιους άγνωστους συντελεστές. Τέλος με σύγκριση των αποτελεσμάτων για διάφορες περιπτώσεις με γνωστά καταλήγει στην τιμή των συντελεστών. Γενικά αυτή η μέθοδος βασίζεται στην λογική "δοκιμή και σφάλμα" και παρ' όλο που τα αποτελέσματα φαίνεται να βγαίνουν αβίαστα στην πραγματικότητα είναι αρκετά δύσκολο να μαντέψεις τις σωστές εξαρτήσεις ανάμεσα στα μεγέθη. Κάτι τέτοιο απαιτεί μεγάλη εμπειρία και εξοικείωση με τη θεωρία ουρών.

Το κυριότερο προτέρημα τους είναι η γρήγορη εξαγωγή αποτελεσμάτων για πρακτικές εφαρμογές, σε αντίθεση με τη χρήση χρονοβόρων υπολογιστικών μεθόδων για την επίλυση αναλυτικών σχέσεων. Κάτι τέτοιο τις καθιστά ιδανικές σε περιπτώσεις που που απαιτούνται κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα για λήψη αποφάσεων. Επίσης είναι πολύ χρήσιμες σε πρακτικές εφαρμογές αφού η ακρίβεια τους είναι πολύ ικανοποιητική και έτσι εξάγονται αποτελέσματα χωρίς την χρήση πολύπλοκων τύπων και μεθόδων. Το μειονέκτημα είναι ότι δεν προσφέρουν στην θεωρητική ανάλυση των συστημάτων.

Οι προσεγγίσεις δύο ροπών που μπορεί να βρει κανείς στην βιβλιογραφία είναι αμέτρητοι. Στην εργασία αυτή επιλέχθηκαν να παρουσιαστούν τρεις μέθοδοι. Οι μέθοδοι αυτοί δίνουν αποτελέσματα για τα σημαντικότερα μεγέθη ενός συστήματος ουράς και δίνουν έτσι μια ολοκληρωμένη άποψη για το σύστημα. Συγκεκριμένα όταν κάποιος θέλει να μελετήσει ή να αξιολογήσει μια ουρά τα μεγέθη που τον ενδιαφέρουν είναι η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να περιμένει, η κατανομή του χρόνου αναμονής και του μεγέθους της ουράς καθώς και οι μέσες τιμές τους. Για άλλες προσεγγίσεις δύο ροπών ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην παρακάτω βιβλιογραφία: [5],[13],[14],[34],[35].

Αρχικά η φόρμουλα των Kramer και Lagenbach-Belz [20] που δίνει τον μέσο χρόνο αναμονής και την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να περιμένει σε ένα σύστημα G/G/1 που είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Παρ' όλο που το αποτέλεσμα περιορίζεται σε έναν εξυπηρετητή, παρουσιάζεται γιατί είναι μία από τις πρώτες μεθόδους δύο ροπών που διατυπώθηκαν και πάνω της βασίστηκαν πολλές άλλες μελέτες.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το αποτέλεσμα του Ward Whitt [39] για τα ίδια μεγέθη σε σύστημα G/G/m. Ουσιαστικά αποτελεί γενίκευση της προηγούμενης προσέγγισης. Επίσης δίνει προσεγγίσεις για την διακύμανση και την κατανομή του χρόνου αναμονής.

Τέλος παρουσιάζεται η φόρμουλα του Adam Shore [31] για τις οριακές πιθανότητες κατάστασης της G/G/m ουράς.

7.1. Kramer και Lagenbach-Belz

7.1.1. Προσδοκώμενος χρόνος αναμονής

Η έρευνα για την προσέγγιση αυτή ξεκίνησε από την μορφή:

$$E[W]=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(c_T^2+c_X^2)\,g(\rho,c_T^2,c_X^2)$$

όπου η συνάρτηση g είναι όρος κανονικοποίησης και ικανοποιεί τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

α) Για $c_T^2=1$ $g(\rho,1,c_X^2)=1$ ώστε η φόρμουλα να συμφωνεί με αυτήν των Pollaczek-Knintchine για την M/G/1 ουρά.

β) Για $\rho\to 1$ $g(\rho,c_T^2 c_X^2)=1$ ώστε η φόρμουλα να συμφωνεί με την προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας.

γ) Για την περίπτωση της D/D/1 ουράς $E[W]=0$ άρα $c_T^2=c_X^2=0$ $g(\rho,0,0)<\infty$

Στην συνέχεια η έρευνα χωρίζεται σε δύο περιπτώσεις $c_T^2<1$ και $c_T^2>1$.

7.1.1.1 $c_T^2<1$

Για την πρώτη περίπτωση μελετήθηκε η D/M/1 ουρά όπου βρέθηκε ότι η

$$E[W]=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}\exp\left(\frac{-2(1-\rho)}{3\rho}\right)$$

είναι μια ικανοποιητική προσέγγιση. Λαμβάνοντας υπόψιν τις οριακές συνθήκες οι Kramer και Lagenbach-Belz κατέληξαν για $c_T^2<1$ στη μορφή

$$g(\rho,c_T^2 c_X^2)=\exp\left(\frac{-2(1-\rho)}{3\rho}\,\frac{(1-c_T^2)^b}{a\,c_T^2+c_X^2}\right)$$

όπου a, b αυθαίρετες παράμετροι. Στην συνέχεια σύγκριναν τη μορφή αυτή με αποτελέσματα για συστήματα με $c_T^2\leq 1$ όπως $E_4/G/1$ και $E_2/G/1$ Οι καλύτερες συμβιβαστικές τιμές για τις παραμέτρους βρέθηκαν a=1, b=2.

7.1.1.2 $c_T^2 > 1$

Για την δεύτερη περίπτωση η μελέτη ξεκίνησε από την μορφή

$$g(\rho, c_T^2, c_X^2) = \exp\left(-(1-\rho)\frac{(c_T^2-1)^c}{a\,c_T^2 + b\,c_X^2}\right)$$

με a,b,c, αυθαίρετες παραμέτρους.

Για την εύρεση των a,b,c το αποτέλεσμα συγκρίθηκε με αποτελέσματα ουρών που οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης έχουν κατανομές με $c_T^2 \geq 1$. Αρχικά συγκρίθηκε με αποτελέσματα προσομοίωσης της $H_2/D/1$ ουράς με $c_T^2 = 2$ την οποία επηρεάζει μόνο το α, το οποίο βρέθηκε 1. Στη συνέχεια συγκρίθηκε με την $H_2/D/1$ με $c_T^2 = 4$. Από αυτήν την σύγκριση επιλέχθηκε c=1. Τέλος συγκρίνοντας την g με αποτελέσματα προσομοίωσης $H_2/M/1$ ουρών βρέθηκε b=4.

Έτσι το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$E[W] = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(c_T^2 + c_X^2) * \begin{cases} \exp\left[\frac{-2(1-\rho)}{3\rho}\frac{(1-c_T^2)^2}{c_T^2 + c_X^2}\right] & \text{για } c_T^2 \leq 1 \\ \exp\left[-(1-\rho)\frac{(c_T^2-1)}{c_T^2 + 4c_X^2}\right] & \text{για } c_T^2 \geq 1 \end{cases}$$

7.1.2. Πιθανότητα αναμονής αφικνούμενου πελάτη

Όπως και προηγουμένως η μελέτη ξεκινάει από μια γενική μορφή που πρέπει να ικανοποιεί κάποιες οριακές συνθήκες:

$$P(W>0) = \rho + (c_T^2 - 1)\,\rho(1-\rho)\,f(\rho, c_T^2, c_X^2)$$

όπου η f είναι άλλη μια συνάρτηση κανονικοποίησης.

Οι οριακές συνθήκες είναι:

α)Για $c_T^2 = 1$ δηλαδή T με εκθετική κατανομή, πρέπει λόγω της ιδιότητας PASTA $P(W>0) = \rho$

β)Για $\rho \to 1$ $P(W>0) \to 1$ ενώ για $\rho \to 0$ $P(W>0) \to 0$

γ)Είναι γνωστό ότι αν $c_T^2 > 1$ τότε $P(W>0) > \rho$ και αν $c_T^2 < 1$ τότε $P(W>0) < \rho$. Άρα $f > 0$ πάντα.

Πάλι η μελέτη χωρίζεται σε δύο περιπτώσεις $c_T^2 \leq 1$ και $c_T^2 > 1$.

7.1.2.1. $c_T^2<1$

Το γεγονός ότι για την D/D/1 ουρά $P(W>0)=0$ άρα $f(\rho,0,0)=\frac{1}{1-\rho}$, οδήγησε στην γενική μορφή:

$$f(\rho,c_T^2,c_X^2)=\frac{1+a c_T^2+b c_X^2}{1-\rho+c c_T^2+d c_X^2} \quad (7.1.1)$$

όπου τα a,b,c,d είναι πάλι αυθαίρετες παράμετροι που μπορεί να εξαρτώνται από το ρ.

Ξεκινώντας την σύγκριση με την D/M/1 ώστε να απαλειφθούν τα a,c βρέθηκαν $b=\rho$, $d=\rho(1+\rho)$ τα οποία δεν έρχονται σε σύγκρουση με αποτελέσματα άλλων D/G/1 ουρών.

Για τα a,c χρησιμοποιήθηκαν κατανομές Erlang 2 και 4 φάσεων και κατέληξαν σε: $a=1$, $d=4\rho^2$

7.1.2.2. $c_T^2>1$

Για αυτήν την περίπτωση επιλέχτηκε η παρακάτω μορφή:

$$f(\rho,c_T^2,c_X^2)=\frac{a}{b c_T^2+c c_X^2}$$

Ξανά οι παράμετροι a,b,c είναι αυθαίρετες με πιθανή εξάρτηση από το ρ. Από σύγκριση με προσομοιώσεις $H_2/D/1$ ουρών, βρέθηκε ότι ταιριάζουν $a=4\rho$ και $b=1+4\rho^2$. Το γεγονός ότι η επιρροή του c_X^2 στο $P(W>0)$ είναι σχετικά μικρή, οδήγησε στο $c=\rho^2$.

Η τελική σχέση είναι:

$$P(W>0)=\rho+(c_T^2-1)\rho(1-\rho)*\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1+c_T^2+\rho c_X^2}{1+\rho(c_X^2-1)+\rho^2(4c_T^2+c_X^2)} & \text{για } c_T^2<1 \\ \dfrac{4\rho}{c_T^2+\rho^2(4c_T^2+c_X^2)} & \text{για } c_T^2>1 \end{array}\right\}$$

Τέλος τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να γενικευτούν και για ομαδικές αφίξεις, κάτι που ξεπερνάει τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

7.2. W. Whitt

Το σύστημα που μελετήθηκε σε αυτή την προσέγγιση είναι G/G/m με απεριόριστο χώρο αναμονής, ανεξάρτητες εξυπηρετήσεις από αφίξεις, FIFO πειθαρχεία και $\rho=\frac{\lambda}{m\mu}<1$.

Η μελέτη αυτή βασίζεται στην παρακάτω πεντάδα βασικών παραμέτρων $(\lambda, c_T^2, \mu, c_X^2, m)$. Σε μια προσπάθεια να μειωθούν οι παράμετροι για ευκολία στους υπολογισμούς το μ θεωρείται ίσο με την μονάδα. Για να γίνει αυτό χωρίς να επιφέρει κάποια αλλαγή στο σύστημα πρέπει να αλλάξει με την ίδια κλίμακα και το λ. Αυτά τα δύο μεγέθη όμως συνδέονται με το ρυθμό συνωστισμού ρ που δεν μπορεί να αλλάξει χωρίς να αλλάξει εντελώς τη φύση του συστήματος. Έτσι έχοντας σταθερό το ρ και $\mu=1$ έχουμε $\lambda=\rho m$. Τελικά το σύστημα χαρακτηρίζεται απ' την τετράδα πλέον (ρ, c_T^2, c_X^2, m).

Η προσέγγιση αυτή αξιοποιεί τα αναλυτικά αποτελέσματα που υπάρχουν για την M/M/m ουρά. Έτσι η προσέγγιση έχει μεγαλύτερη ακρίβεια και συνέπεια με αυτά τα αποτελέσματα.

7.2.1. $E[W]$

Η βάση της προσέγγισης αυτής είναι τα παρακάτω προσεγγιστικά αποτελέσματα:
1) Η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας:

$$E[W(\rho, c_T^2, c_X^2, m)] \simeq \frac{(c_T^2+c_X^2)}{2} E[W(M/M/m)]$$

2) Οι πολύ ακριβείς προσεγγίσεις του Κοσμετάτου [4] για τα συστήματα M/D/m και D/M/m:

$$E[W(M/D/m)]=\varphi_1(m,\rho)\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2} E[W(M/M/m)] \quad (7.2.1)$$

με

$$\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\varphi_1(m,\rho)=1+\gamma(m,\rho)$$

$$\gamma(m,\rho)=min\left[0.24,(1-\rho)(m-1)\frac{(4+5m)^{\frac{1}{2}}-2}{16m\rho}\right]$$

και

$$E[W(D/M/m)]=\varphi_2(m,\rho)E[W(M/M/m)]\frac{E[W(D/M/1)]}{E[W(M/M/1)]} \quad (7.2.2)$$

με $\varphi_2(m,\rho)=1-4\gamma(m,\rho)$

Η μόνη τροποποίηση του Whitt στις φόρμουλες αυτές είναι το άνω όριο του 0.24 στο γ. Χωρίς αυτό το γ απειρίζεται όταν $\rho \to 0$ και το φ_2 γίνεται αρνητικό για $\gamma > 0.25$.

Επιπλέον η φόρμουλα για την D/M/m είναι λίγο δύσχρηστη λόγω του όρου $E[W(D/M/1)]$ που απαιτεί την εύρεση ρίζας πολύπλοκης εξίσωσης. Χρησιμοποιώντας όμως την προσέγγιση των Kramer και Lagenbach-Belz:

$$\frac{E[W(D/M/1)]}{E[W(M/M/1)]}=\frac{\exp\left(-2\frac{1-\rho}{3\rho}\right)}{2}$$

η εξίσωση (7.2.2) απλοποιείται:

$$E[W(D/M/m)]=\varphi_3(m,\rho)\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2}E[W(M/M/m)] \quad (2.3)$$

$$\text{όπου} \quad \varphi_3(m,\rho)=\varphi_2(m,\rho)\exp\left(-2\frac{1-\rho}{3\rho}\right)$$

Η μελέτη χωρίζεται σε αυτό το σημείο σε δύο περιπτώσεις $c_T^2=c_X^2$ και $c_T^2 \neq c_X^2$.

7.2.1.1. $c_T^2=c_X^2$

Αν $c_T^2=c_X^2 \geqslant 1$ τότε η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας είναι ικανοποιητική. Σε αντίθετη περίπτωση υπερεκτιμά το αποτέλεσμα. Αν $c_T^2=c_X^2<1$ ο Whitt επέλεξε να συνδυάσει τις προσεγγίσεις (7.2.1) και (7.2.3) διορθώνοντας τις συναρτήσεις κανονικοποίησης. Στην ειδική περίπτωση που $c_T^2=c_X^2=0.5$ η προσέγγιση είναι γραμμική παρεμβολή των (7.2.1) και (7.2.3) και σε διαφορετική περίπτωση η συνάρτηση κανονικοποίησης είναι ένα μείγμα των αρχικών.

Η προσέγγιση είναι:

$$E[W(\rho,c^2,c^2,m)] \simeq \Psi(c^2,m,\rho)\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2}E[W(M/M/m)]$$

$$\text{όπου} \quad \Psi(c^2,m,\rho)=\begin{cases} 1 & c^2>1 \\ [\varphi_4(m,\rho)]^{2(1-c^2)} & c^2<1 \end{cases}$$

$$\text{και} \quad \varphi_4(m,\rho)=min\left[1,\frac{\varphi_1(m,\rho)+\varphi_3(m,\rho)}{2}\right]$$

7.2.1.2. $c_T^2 \neq c_X^2$

Το αποτέλεσμα για αυτήν την περίπτωση είναι γενίκευση του προηγουμένου, αντικαθιστώντας το C^2 με $\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2}$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$E[W(\rho, c^2, c^2, m)] \simeq \varphi(\rho, c_T^2, c_X^2, m)\frac{(c_T^2+c_X^2)}{2}E[W(M/M/m)]$$

με
$$\varphi(\rho, c_T^2, c_X^2, m) = \begin{cases} \frac{4(c_T^2-c_X^2)}{4c_T^2-3c_X^2}\varphi_1(m,\rho)+\frac{c_X^2}{4c_T^2-3c_X^2}\Psi\left(\frac{c_T^2+c_X^2}{2}, m, \rho\right) & c_T^2 \geq c_X^2 \\ \frac{(c_X^2-c_T^2)}{2c_T^2+2c_X^2}\varphi_3(m,\rho)+\frac{c_X^2+3c_T^2}{2c_T^2+2c_X^2}\Psi\left(\frac{c_T^2+c_X^2}{2}, m, \rho\right) & c_T^2 \leq c_X^2 \end{cases}$$

$$\Psi(c^2, m, \rho) = \begin{cases} 1 & c^2 \geq 1 \\ [\varphi_4(m,\rho)]^{2(1-c^2)} & c^2 < 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(m,\rho) = 1+\gamma(m,\rho)$$

$$\varphi_2(m,\rho) = 1-4\gamma(m,\rho)$$

$$\varphi_3(m,\rho) = \varphi_2(m,\rho)\exp\left(-2\frac{1-\rho}{3\rho}\right)$$

$$\varphi_4(m,\rho) = min\left[1, \frac{\varphi_1(m,\rho)+\varphi_3(m,\rho)}{2}\right]$$

$$\gamma(m,\rho) = min\left[0.24, (1-\rho)(m-1)\frac{(4+5m)^{\frac{1}{2}}-2}{16m\rho}\right]$$

Αν $c_T^2 = c_X^2 \rightarrow \varphi = \Psi$, δηλαδή η γενική προσέγγιση καλύπτει την προηγουμένη. Επίσης το φ γίνεται ίσο με φ_1 όταν $c_X^2 = 0$ και ίσο με φ_3 όταν $c_T^2 = 0$. Δηλαδή συμφωνεί με τις προσεγγίσεις για τις ουρές M/D/m και D/M/m.

7.2.2. Πιθανότητα αναμονής αφικνούμενου πελάτη

Η πιθανότητα αναμονής $P(W>0)$ ενός αφικνούμενου πελάτη δεν είναι ίση στη γενική περίπτωση με την πιθανότητα όλοι οι εξυπηρετητές να είναι κατειλημμένοι $P(Q \geqslant m)$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι αφίξεις έχουν την Μαρκοβιανή ιδιότητα λόγω της ιδιότητας PASTA. Ο λόγος όμως $\frac{P(W>0)}{P(Q \geqslant m)}$ είναι σχετικά σταθερός σε σχέση με το m. Έτσι χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Kramer και Lagenbach-Belz για το $P(W>0)$ της G/G/1 και το γεγονός ότι $P(Q \geqslant 1) = \rho$ για αυτήν την ουρά, μπορούμε να προσεγγίσουμε το λόγο αυτό για μεγαλύτερα m. Έτσι με την παρακάτω προσέγγιση μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά και το $P(Q \geqslant m)$.

Η προσέγγιση για το $P(W>0)$ βασίζεται πάλι στα αναλυτικά αποτελέσματα για την M/M/m ουρά. Συγκεκριμένα υπάρχει η Erlang-c φόρμουλα:

$$P(W>0)=P(N\geqslant m)=\frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\left[\frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^k}{k!}\right]^{-1} \quad (7.2.2.1)$$

και μια απλουστευμένη προσέγγιση της:

$$P(W>0)=P(N\geqslant m)\simeq\xi(\beta):=\left[1+\sqrt{2\pi}\,\beta\,\Phi(\beta)\exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right)\right]^{-1} \quad (7.2.2.2)$$

με $\beta=(1-\rho)\sqrt{m}$ και $\Phi(x)$ την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ καλή για τα M/G/m συστήματα. Για τα G/M/m όμως πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα το β. Με αντικατάσταση στην (7.2.2.2) του $\beta_G=\frac{2\beta}{1+c_T^2}$ εχουμε:

$$HW(c_T^2)=\xi(\beta_G) \quad (7.2.2.3)$$

Για να χρησιμοποιηθεί η (7.2.2.3) μαζί με τα αναλυτικά αποτελέσματα:

$$P(W(c_T^2)>0)\simeq min\left\{1,\frac{HW(c_T^2)}{HW(1)}P(W(M/M/m)>0)\right\} \quad (7.2.2.4)$$

Μετά από σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις και αναλυτικά αποτελέσματα αποφασίστηκε ότι για να βελτιστοποιηθεί η (7.2.2.4) θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί το κάτω-φράγμα της (7.2.2.3). Έτσι η προσέγγιση γίνεται:

$$P(W(c_T^2)>0)\simeq min\left\{1,\frac{1-\Phi(\beta_G)}{1-\Phi(\beta)}P(W(M/M/m)>0)\right\} \quad (7.2.2.5)$$

Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή. Όμως για $c_T^2<1$ υποτιμά το αποτέλεσμα, όταν το m είναι μεγάλο και ταυτόχρονα το ρ μικρό. Έτσι χρησιμοποιείται η προσέγγιση κανονικής κατανομής που δουλεύει καλά κάτω από αυτές τις συνθήκες, για να βελτιωθεί η (7.2.25). Η προσέγγιση κανονικής κατανομής είναι:

$$P(N\geqslant m)\simeq 1-\Phi(\gamma) \quad (7.2.2.6)$$

όπου $\gamma=\frac{m-m\rho-0.5}{\sqrt{m\rho z}}$

και $z=1+(c_T^2-1)\mu\int_0^\infty[1-X(x)]^2dx \quad (7.2.2.7)$

όπου $X(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης.

Στην περίπτωση της G/M/m $z=\frac{c_T^2+1}{2}$.

Η τελική προσέγγιση για την G/M/m είναι η (7.2.2.5) στις περισσότερες περιπτώσεις. Στις υπόλοιπες χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός των (7.2.2.5) και (7.2.2.6). Δηλαδή:

$$P(W(G/M/m)>0)=\begin{cases} (2.2.5) & \text{αν } \gamma\leqslant 0.5 \text{ ή } m\leqslant 6 \text{ ή } c_T^2\geqslant 1 \\ c_T^2(2.2.5)+(1-c_T^2)(2.2.6) & \text{αν } m\geqslant 7,\gamma\geqslant 1 \text{ και } c_T^2<1 \\ 2(1-c_T^2)(\gamma-0.5)(2.2.6)+[1-2(1-c_T^2)(\gamma-0.5)](2.2.5) & \\ \text{αν } m\geqslant 7, c_T^2<1 \text{ και } 0.5<\gamma<1 & \end{cases}$$

Για την περίπτωση της G/G/m ουράς γενικεύεται η παραπάνω προσέγγιση στην:

$$P(W(\rho,c_T^2,c_X^2,m)>0)\approx min\{\pi,1\}$$

με $$\pi=\begin{cases} \pi_1 & \text{αν } \gamma\leqslant 0.5 \text{ ή } m\leqslant 6 \text{ ή } c_T^2\geqslant 1 \\ \pi_2 & \text{αν } m\geqslant 7,\gamma\geqslant 1 \text{ και } c_T^2<1 \\ \pi_3 & \text{αν } m\geqslant 7,c_T^2<1 \text{ και } 0.5<\gamma<1 \end{cases}$$

$$\pi_1=\rho^2\pi_4+(1-\rho^2)\pi_5$$

$$\pi_2=c_T^2\pi_1+(1-c_T^2)\pi_6$$

$$\pi_3=2(1-c_T^2)(\gamma-0.5)\pi_2+[1-2(1-c_T^2)(\gamma-0.5)]\pi_1$$

$$\pi_4=min\left\{1,\frac{1-\Phi\left((1+c_T^2)(1-\rho)\sqrt{m}/(c_T^2+c_X^2)\right)}{1-\Phi((1-\rho)\sqrt{m})}P(W(M/M/m)>0)\right\}$$

$$\pi_5=min\left\{1,\frac{1-\Phi\left(2(1-\rho)\sqrt{m}/(c_T^2+1)\right)}{1-\Phi((1-\rho)\sqrt{m})}P(W(M/M/m)>0)\right\}$$

$$\pi_6=1-\Phi(\gamma)$$

$$\gamma=\frac{m-m\rho-0.5}{\sqrt{m\rho z}}$$

$$z=\frac{c_T^2+c_X^2}{1+c_X^2}$$

Το z εδώ είναι μια προσέγγιση του (7.2.2.7) για την G/G/m. Είναι ακριβές για $c_T^2=1$ ή $c_X^2=1$ ή $c_X^2=0$. Το π_5 είναι η προσέγγιση κάτω φράγματος για την G/M/m, ενώ το π_4 είναι η τροποποίηση της με το νέο z. Το π_1 είναι ο συνδυασμός τους και συνήθως η τελική τιμή της προσέγγισης. Το π_6 είναι η προσέγγιση κανονικής κατανομής.

7.2.3. Η διακύμανση του W

Για την διακύμανση η μελέτη ξεκινά από τον υπό συνθήκη χρόνο αναμονής $D=(W|W>0)$.

Προφανώς $E[D]=\frac{E[W]}{P(W>0)}$ (7.2.3.1) το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις.

Από προηγουμένη μελέτη [38] χρησιμοποιείται η εξής προσέγγιση για τον τετραγωνικό συντελεστή μεταβλητότητας του D:

$$c_D^2=2\rho-1+\frac{4(1-\rho)d_X^3}{3(c_X^2+1)^2} \quad (7.2.3.2)$$

με $d_X^3=\frac{E[X^3]}{E[X]^3}$

Επειδή η τελική προσέγγιση πρέπει να εξαρτάται από τις ροπές μόνο πρώτης και δεύτερης τάξης των T και X, χρησιμοποιείται η παρακάτω προσέγγιση για το d_X^3

$$d_X^3=\begin{cases} 3c_X^2(1+c_X^2), & c_X^2\geqslant 1 \\ (2c_X^2+1)(c_X^2+1), & c_X^2<1 \end{cases}$$

Από την σχέση (7.2.3.1):

$$c_W^2=\frac{E[W]^2}{E[W^2]}-1=\frac{c_D^2+1-P(W>0)}{P(W>0)} \quad (7.2.3.3)$$

Επίσης

$$Var[W]=E[W]^2c_W^2 \quad (7.2.3.4)$$

Έτσι από τις σχέσεις (7.2.3.2),(7.2.3.3),(7.2.3.4) και τις προηγούμενες προσεγγίσεις μπορεί να υπολογιστεί η διακύμανση του W.

7.2.4 Η κατανομή του W

Η κατανομή του W μπορεί να προσεγγιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$P(W>x)\simeq a\,e^{-nx}$$

με τα a και n να ικανοποιούν το όριο:

$$\lim_{x\to\infty} e^{nx}P(W<x)=a$$

Η ασυμπτωτική αυτή προσέγγιση είναι γνωστό ότι ισχύει με σημαντική γενικότητα. Η παράμετρος n μπορεί να υπολογιστεί ως η ρίζα της εξίσωσης:

$$E\left[e^{n(\frac{T}{m}-X)}\right]=1$$

Μια απλή προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας βασισμένη στην τετράδα (ρ, c_T^2, c_X^2, m) είναι:

$$n \simeq \frac{2m(1-\rho)}{c_T^2+c_X^2}$$

η οποία μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά αν συμπεριληφθούν και ροπές ανώτερης τάξης των T και X.

Για την παράμετρο a υπάρχει η προσέγγιση:

$$a \simeq n E[W]$$

7.3. Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης συστήματος G/G/m

Αυτή η προσέγγιση βασίζεται στα εξής μεγέθη:

α) Ένταση κυκλοφορίας $\rho=\frac{\lambda}{\mu m}$

β) Συντελεστές διακύμανσης των T και X., c_T^2 και c_X^2 αντίστοιχα

γ) Προσδοκώμενος αριθμός πελατών στο σύστημα, όπως φαίνεται σε τυχαίο παρατηρητή $E[Q_m]$

δ) Προσδοκώμενος αριθμός πελατών σε G/G/1 ουρά με ίση ένταση κυκλοφορίας, όπως φαίνεται σε τυχαίο παρατηρητή $E[Q_1]$

Τα δύο τελευταία μεγέθη δεν είναι άμεσα υπολογίσιμα. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν αρκετές καλές προσεγγίσεις (όπως οι προηγούμενες) για το $E[W]$. Από αυτές τις προσεγγίσεις και τις αναλυτικές σχέσεις $E[Q]=\lambda E[S]$, $S=W+X$ μπορούν να υπολογιστούν αυτά τα μεγέθη. Άρα θεωρούνται γνωστά.

Οι πιθανότητες που θα προσεγγιστούν είναι:

$$p_j=P(Q_m=j)$$

Ορίζοντας ως P_d την πιθανότητα αναμονής (όχι σε στιγμή άφιξης):

$$P_d=\sum_{j=m}^{\infty} p_j$$

Το σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε δύο καταστάσεις:

1) Όλοι οι εξυπηρετητές είναι κατειλημμένοι με πιθανότητα P_d

2) Έστω και ένας εξυπηρετητής είναι ελεύθερος με πιθανότητα $1-P_d$

Από τον νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$p_j = P_d f_1(j) + (1-P_d) f_2(j) \quad (7.3.1)$$

όπου $f_2(j)\ (j=1,1...m-1)$ και $f_1(j)\ (j=m, m+1...)$ είναι οι υπό συνθήκη κατανομές του N_m.

Στη μελέτη αυτή τα $f_1(j)$ και $f_2(j)$ προσεγγίζονται θεωρώντας το σύστημα $G/G/m$ ως $G/G/1$ στην περίπτωση 1 και ως $G/G/\infty$ στην περίπτωση 2.

7.3.1 Περίπτωση 1

Σαν βάση για την μελέτη επιλέχθηκε η προσέγγιση των Shanthikumar και Buzacott:

$$p_j(G/G/1) = \begin{cases} 1-\rho & j=0 \\ \rho(1-\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_1^{\,j-1} & j \geqslant 1 \end{cases} \quad [30]$$

με $\hat{\rho}_1 = \dfrac{E[Q_1]-\rho}{E[Q_1]}$

Έτσι μια προφανής προσέγγιση του f_1 είναι:

$$f_1 = (1-\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_1^{\,j-m}$$

7.3.2 Περίπτωση 2

Για την περίπτωση αυτή η ουρά προσεγγίζεται από την $G/G/\infty$ και αξιοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που υπάρχουν για την $M/G/\infty$. Είναι γνωστό ότι οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης ενός συστήματος $M/G/\infty$ ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\hat{\rho}_2 = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Άρα για την $M/G/m$ ουρά :

$$f_2(j) = K \frac{\hat{\rho}_2^{\,j}}{j!} e^{-\hat{\rho}_2},\ j \leqslant m-1$$

όπου το $K = \left[e^{-\hat{\rho}_2} \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{\hat{\rho}_2^{\,j}}{j!} \right]^{-1}$ είναι παράγοντας κανονικοποίησης που διασφαλίζει ότι η $f_2(j)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.

Για γενικές μη-Μαρκοβιανές αφίξεις θεωρείται ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε εξυπηρετητή να είναι κατηλειμμένος σε τυχαία χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητος του αριθμού των πελατών που εξυπηρετούνται. Δηλαδή το σύστημα θεωρείται ότι αποτελείται από m ανεξάρτητες ροές πελατών, με μέσο ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{\mu}$ η καθεμία. Προφανώς αυτή η προσέγγιση γίνεται πιο ακριβής όσο μεγαλώνει το m. Έτσι καταλήγουμε στην προσέγγιση:

$$f_2(j)=K\binom{m}{j}\hat{\rho}_2^{\,j}(1-\hat{\rho}_2)^{m-j},\ j\leqslant m-1$$

με $K=\left[1-\hat{\rho}_2^{\,m}\right]^{-1}$ ξανά παράγοντα κανονικοποίησης.

Αυτό που μένει είναι να υπολογιστεί τοκ P_d και το $\hat{\rho}_2$

Από την (7.3.1) το προσδοκώμενο μέγεθος της ουράς είναι:

$$E[Q_m]-m\rho=\frac{P_d\hat{\rho}_1}{1-\hat{\rho}_1} \text{ ή } P_d=\frac{(E[Q_m]-m\rho)(1-\hat{\rho}_1)}{\hat{\rho}_1}$$

για πολύ μεγάλα m, $\hat{\rho}_2=\frac{\lambda}{m\mu}$. Αυτό όμως δεν ισχύει για μικρά m, έτσι τροποποιείται. Από την (7.3.1) έχουμε:

$$E[Q_m]=\sum_{j=0}^{\infty} j\,p_j=(1-P_d)K(m\hat{\rho}_2-m\hat{\rho}_2^{\,m})+P_d\left[\frac{\hat{\rho}_1}{1-\hat{\rho}_1}+m\right] \quad (7.3.2)$$

Για γνωστό P_d η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί με έναν αλγόριθμο εύρεσης ριζών.

Έτσι η τελική προσέγγιση είναι:

$$p_j=P_d(1-\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_1^{\,j-m}+(1-P_d)\binom{m}{j}\frac{\hat{\rho}_2^{\,j}(1-\hat{\rho}_2)^{m-j}}{1-\hat{\rho}_2^{\,m}}$$

με $\hat{\rho}_1=\frac{E[Q_1]-\rho}{E[Q_1]}$

$\hat{\rho}_2$ την ρίζα της εξίσωσης (7.3.2)

$$P_d=\frac{(E[Q_m]-m\rho)(1-\hat{\rho}_1)}{\hat{\rho}_1}$$

8. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΦΑΣΕΩΝ

Μια άλλη μέθοδος για να αντιμετωπιστούν οι ουρές με γενικευμένες αφίξεις και εξυπηρετήσεις είναι να αντικατασταθεί η άγνωστη κατανομή G (είτε των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεις είτε των χρόνων εξυπηρέτησης) με μια κατανομή φάσεων. Όπως έχει ειπωθεί ήδη κάτι τέτοιο είναι εφικτό επειδή οι κατανομές φάσεων είναι πυκνές στο πεδίο των συναρτήσεων. Πρέπει όμως να βρεθεί κάθε φορά μια κατανομή φάσεων που να έχει την ίδια ή παρόμοια συμπεριφορά με την αρχική κατανομή για να μπορέσει να την αντικαταστήσει. Για να θεωρηθεί η κατανομή φάσεων ικανή να αντικαταστήσει την άγνωστη G πρέπει να συμφωνούν οι ροπές τους. Ο αριθμός των ροπών που ταυτίζονται εξαρτάται από τις απαιτήσεις της κάθε συγκεκριμένης μεθόδου όπως θα δούμε και παρακάτω.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κυρίως όταν είναι γνωστές μόνο οι δύο ή τρεις πρώτες ροπές της κατανομής ή υπάρχουν μόνο κάποια δεδομένα (ως αποτέλεσμα πειράματος για παράδειγμα). Όμως ακόμα και όταν η κατανομή είναι γνωστή η προσέγγιση αυτή μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή ενός μοντέλου με πιο απλή μαθηματική μορφή (π.χ. αντικατάσταση της κανονικής κατανομής). Τα πλεονεκτήματα αυτού του είδους προσεγγίσεων είναι ότι χρησιμοποιώντας τις κατανομές φάσεων το σύστημα ουράς μπορεί να αναλυθεί ευρύτερα θεωρητικά καθώς και να κατασκευαστούν μοντέλα προσομοίωσης για αυτό. Το κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν δίνει άμεσα αποτελέσματα όπως για παράδειγμα οι προσεγγίσεις δύο ροπών. Δηλαδή για να λυθεί το σύστημα ουράς απαιτούνται επιπλέον μέθοδοι και προσεγγίσεις.

Το αντικείμενο αυτό είναι πολύ ευρύ και καταλαμβάνει μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που ασχολείται με τα συστήματα ουράς. Στόχος των ερευνητών είναι να βρουν μεθόδους που πληρούν κατά το μέγιστο τα παρακάτω κριτήρια:

1) Των αριθμό των ροπών που ταυτίζονται.
2) Την υπολογιστική "ευκολία" της μεθόδου. Δηλαδή οι εκφράσεις των παραμέτρων της κατανομής φάσεων δίνονται σε κλειστή μορφή ή ο αλγόριθμος καταλήγει για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης?
3) Την γενικότητα της μεθόδου. Η κατανομή φάσεων που χρησιμοποιείται να είναι αρκετά πυκνή στο πεδίο των συναρτήσεων ώστε να μπορεί να αντικαταστήσει όσο το δυνατόν περισσότερες κατανομές.
4) Την ελαχιστοποίηση των φάσεων. Όσο λιγότερες φάσεις έχει η κατανομή στην οποία καταλήγουμε τόσο μειώνεται ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου.

Συγκεκριμένα κάθε ερευνητής αρχικά αναζητά μια υποκατηγορία των κατανομών φάσεων για να αντικαταστήσει την άγνωστη κατανομή. Αυτές οι κατανομές πρέπει να είναι αρκετά πυκνές ώστε να μπορούν να αντικαταστήσουν όσο το δυνατό περισσότερες κατανομές, ενώ συγχρόνως να έχουν πολύ λιγότερες παραμέτρους από την γενική περίπτωση. Στη συνέχεια κατασκευάζει έναν αλγόριθμο που να υπολογίζει αυτές τις παραμέτρους ταυτίζοντας ροπές της άγνωστης κατανομής με ροπές της κατανομής φάσεων. Συνήθως η μέθοδος καταλήγει σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί μεθόδους που ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Γενική κατεύθυνση είναι η επιλογή κατανομών φάσεων με όσο το δυνατόν λιγότερες παραμέτρους και φάσεις, καθώς αυτό συμβάλλει στην ευκολία και την ταχύτητα των υπολογισμών.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν μέθοδοι που καταλήγουν σε κλειστές μορφές για τον υπολογισμό των παραμέτρων της κατανομής φάσεων. Αρχικά θα παρουσιαστεί ένας απλός αλγόριθμος που βασίζεται στην ταύτιση των δύο πρώτων ροπών ([32] Ch. 7.6). Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η μέθοδος των Osogami και Harchol-Balter [27],[28] που ταυτίζει τις τρεις πρώτες ροπές και χρησιμοποιεί μια κάπως πιο περίπλοκη κατανομή φάσεων.

8.1. Μέθοδος ταύτισης δύο πρώτων ροπών

Για αυτήν την μέθοδο θα χρησιμοποιηθούν οι κατανομές Erlang και Coxian που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Όπως είδαμε προηγουμένως ο συντελεστής διακύμανσης της Erlang παίρνει τιμές $C_{Er}^2=\frac{1}{r}$ όπου r οι φάσεις της κατανομής. Έτσι η Erlang είναι κατάλληλη για $C_G^2\leqslant 1$.

Στην περίπτωση όμως που το $\frac{1}{C_G^2}$ δεν είναι ακέραιος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μίξη δύο κατανομών Erlang με φάσεις r και r-1 ώστε ο συντελεστής διακύμανσης να πάρει τιμή $\frac{1}{r}<C_{Er}^2<\frac{1}{r-1}$.

Αντιθέτως η Coxian έχει πολύ πιο ευρύ φάσμα τιμών για το συντελεστή διακύμανσης, έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για $C_G^2\geqslant 1$. Επειδή όμως δεν υπάρχουν αναλυτικά αποτελέσματα για την γενική περίπτωση θα χρησιμοποιηθεί η ειδική περίπτωση της Coxian δύο φάσεων.

Όπως φαίνεται η μέθοδος εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή διακύμανσης.

<u>1.1</u> $C_G^2\leqslant 1$, $\frac{1}{C_G^2}\in\mathbb{N}$

Η κατανομή Erlang όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως έχει δύο παραμέτρους. Τον αριθμό των φάσεων r και την εκθετική παραμέτρων της κάθε φάσης λ. Από τα αποτελέσματα για την Erlang έχουμε αμέσως:

$$r=\frac{1}{C_{Er}^2} \quad \text{και} \quad \lambda=\frac{r}{E[G]}$$

1.2 $C_G^2\leqslant 1$, $\frac{1}{C_G^2}\notin\mathbb{N}$

Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται η μίξη δύο κατανομών Erlang με ίδια εκθετική παράμετρο και φάσεις r και $r-1$ αντίστοιχα. Οι δύο αυτές Erlang είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και επιλέγονται με πιθανότητα α και $1-\alpha$. Το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή φάσεων με $\frac{1}{r}<C^2<\frac{1}{r-1}$. Οι παράμετροι r,α,λ υπολογίζονται ως εξής:

$$r = \min\left[k, k > \frac{1}{C_G^2}\right], k \in \mathbb{N}$$

$$a = \frac{r C_G^2 - \sqrt{r(1 + C_G^2) - r^2 C_G^2}}{1 + C_G^2}$$

$$\lambda = \frac{r - a}{E[G]}$$

1.3 $C_G^2 \geqslant 1$

Για αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται μια Coxian δύο φάσεων. Όπως έχει αναφερθεί ήδη η κατανομή αυτή έχει τρεις παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ και είναι γνωστό ότι:

$$E[Cox] = \frac{\lambda_2 + \alpha \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$C_{Cox}^2 = \frac{\lambda_2^2 + a_1 \lambda_1^2 (2 - a_1)}{(\lambda_2 + a_1 \lambda_1)^2}$$

Για την εύρεση των $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ συνήθως χρησιμοποιούνται οι παρακάτω απλοί τύποι:

$$\lambda_1 = \frac{2}{E[G]}$$

$$a = \frac{1}{2 C_G^2}$$

$$\lambda_2 = a \lambda_1$$

Η κατανομή αυτή μπορεί να αντικαταστήσει και κατανομές με $C_G^2 \geqslant 0{,}5$.

8.2 Μέθοδος ταύτισης τριών πρώτων ροπών

Στην μέθοδο των Osogami και Harchol-Balter χρησιμοποιείται η λεγόμενη Erlang-Coxian κατανομή (EC) με r φάσεις. Αυτή ορίζεται ως η συνέλιξη μιας r-2 φάσεων Erlang με μια Coxian δύο φάσεων. Επίσης $EC(0) \geqslant 0$. Σε μορφή Μαρκοβιαννής αλυσίδας για $r = 4$:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_E & \lambda_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_E & \lambda_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{C1} & p_C \lambda_{C1} & (1 - p_C)\lambda_{C1} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{C2} & \lambda_{C2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ με } \vec{\pi}^0 = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - p \end{bmatrix}$$

Η ιδέα πίσω από την δημιουργία αυτής της κατανομής είναι η εξής. Έστω ότι έχουμε μια κατανομή G που θέλουμε να αντικαταστήσουμε με μια κατανομή φάσεων. Αν η G έχει υψηλές ροπές δεύτερης και τρίτης τάξης μπορούμε να αρκεστούμε σε μια Coxian δύο φάσεων έστω X Αν όμως οι ροπές έχουν χαμηλότερες τιμές, μπορούμε να προσθέσουμε μια εκθετική φάση πριν την Coxian έστω Y. Έτσι η τελική κατανομή θα είναι: $Z=Y*X$ Αν οι ροπές είναι ακόμα πιο χαμηλές προσθέτουμε μια δεύτερη και μια τρίτη ώστε να μειωθεί η διακύμανση της Z.

Θέλουμε όμως η κατανομή στην οποία καταλήγουμε να έχει όσο το δυνατόν μικρότερο αριθμό φάσεων. Αποδεικνύεται αλλά είναι και απολύτως λογικό ότι για δεδομένο αριθμό εκθετικών φάσεων που έχουμε προσθέσει η διακύμανση γίνεται ελάχιστη όταν όλες οι φάσεις έχουν τη ίδια παράμετρο. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι για να ελαχιστοποιούνται οι ροπές σε κάθε βήμα η εκθετική φάση που προστίθεται έχει συγκεκριμένη παράμετρο που εξαρτάται μόνο από την X Άρα καταλήγουμε στην

$$Z=Y^{(r-2)}*X$$

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του αλγορίθμου για την εύρεση της κατανομής EC που ταιριάζει στην G, πρέπει να ορίσουμε τα παρακάτω:

Κανονικοποιημένες ροπές δεύτερης και τρίτης τάξης της κατανομής X.

$$m_X^2=\frac{E[X^2]}{E[X]^2}$$
$$m_X^3=\frac{E[X^3]}{E[X]E[X^2]}$$

Παρατήρηση: $m_X^2=C_X^2+1$

Σύνολα κατανομών.

$$U_0=\{F \mid m_F^2>2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ m_F^3>2m_F^2-1\}$$
$$U_i=\{F \mid \frac{i+2}{i+1}<m_F^2<\frac{i+1}{i} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ m_F^3>2m_F^2-1\}$$
$$M_0=\{F \mid m_F^2>2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ m_F^3=2m_F^2-1\}$$
$$M_i=\{F \mid \frac{i+2}{i+1}<m_F^2<\frac{i+1}{i} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ m_F^3=2m_F^2-1\} \qquad \text{για } i\in\mathbb{N}$$
$$L_0=\{F \mid \frac{3}{2}m_F^2<m_F^3<2m_F^2-1\}$$
$$L_i=\{F \mid \frac{i+3}{i+2}m_F^2<m_F^3<\frac{i+2}{i+1}m_F^2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ m_F^3<2m_F^2-1\}$$

Επίσης:

$$U^+=\cup_{i=1}^{\infty} U_i \ , \ M^+=\cup_{i=1}^{\infty} M_i \ , \ L^+=\cup_{i=1}^{\infty} L_i$$

$$U=U_0\cup U^+ \ , \ M=M^i\cup M^+ \ , \ L=L_0\cup L^+$$

Η σημασία των παραπάνω συνόλων είναι η εξής. Αν $G\in M_0\cup U_0$ τότε μπορεί να αναπαρασταθεί από μια Coxian δύο φάσεων. Αν $G\in M_N\cup U_N$ τότε μπορεί να αναπαρασταθεί από μια EC N+2 φάσεων με $p=1$. Δηλαδή εκτός από την Coxian δύο φάσεων χρειάζεται και N εκθετικές φάσεις. Τέλος αν $G\in L_N$ τότε μπορεί να αναπαρασταθεί από μια EC N+2 φάσεων με $p<1$. Τα σύνολα αυτά όπως φαίνεται από τα παραπάνω χρησιμεύουν στον διαχωρισμό περιπτώσεων κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Μέθοδος εύρεσης της κατανομής EC

Νωρίτερα αναφέρθηκε ότι η εκθετική παράμετρος λ_E είναι συγκεκριμένη και εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους της Coxian. Αυτή δίνεται από:

$$\lambda_E=\frac{1}{(m_{Cox}^2-1)E[Cox]} \quad (8.1)$$

Άρα μένει να προσδιοριστούν οι παράμετροι $(r,p,\lambda_{C1},\lambda_{C2},p_C)$ από τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν τα m_{Cox}^2 και $E[Cox]$ όπως δείξαμε στο κεφάλαιο που παρουσιάζεται η Coxian και να βρεθεί το λ_E.

Στη συνέχεια η μέθοδος διακρίνεται σε τρεις περιπτώσεις.

1) $G\in M_0\cup U_0$

Όπως είπαμε και προηγουμένως σε αυτήν την περίπτωση η G μπορεί να αντικατασταθεί από μια Coxian δύο φάσεων με $Cox(0)=0$. Άρα $r=2$ και $p=1$ Οι υπόλοιπες τρεις παράμετροι δίνονται από τους τύπους:

$$\lambda_{C1}=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2E[G]}$$

$$\lambda_{C2}=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2E[G]}$$

$$p_C=\frac{\lambda_{C2}E[G](\lambda_{C1}E[G]-1)}{\lambda_{C1}E[G]}$$

$$a=\frac{6-2m_G^3}{3m_G^2-2m_G^3}$$

$$b=\frac{12-6m_G^2}{(3m_G^2-2m_G^3)m_G^2}$$

2) $G \in M^+ \cup U^+$

Σε αυτή την περίπτωση καθορίζεται πρώτα το r ως:

$$r=min\left\{k \mid m_G^2 > \frac{k}{k-1}\right\}=max\left\{k \mid k<\frac{m_G^2}{m_G^2-1}+1\right\} \quad k \in \mathbb{N}$$

Επίσης $p=1$

Σε αυτήν την περίπτωση η G μπορεί να αντικατασταθεί από την $Z=Y^{(r-2)}*X$

Για την X ισχύουν:

$$m_X^2=\frac{(r-3)m_G^2-(r-2)}{(r-2)m_G^2-(r-1)}$$

$$m_X^3=\frac{d\,m_G^3-c}{m_G^2}$$

$$E[X]=\frac{E[G]}{(r-2)m_X^2-(r-3)}$$

$$c=(r-2)(m_X^2-1)[r(r-1)(m_X^2)^2-r(2r-5)m_X^2+(r-1)(r-3)]$$

$$d=[(r-1)m_X^2-(r-2)][(r-2)m_X^2-(r-3)]^2$$

Όμως $X \in M_0 \cup U_0$ άρα χρησιμοποιώντας τους τύπους της περίπτωσης 1) μπορούν να υπολογιστούν οι παράμετροι $(\lambda_{C1}, \lambda_{C2}, p_C)$

3) $G \in L$

Σε αυτήν την περίπτωση η G μπορεί να αντικατασταθεί από την $Z=pW+(1-p)O$ όπου O είναι η $O(x)=0 \;\; \forall x$ Τότε:

$$p=\frac{1}{2m_G^2-m_G^3}$$

$$m_W^2=p\,m_G^2$$

$$m_W^3=p\,m_G^3$$

$$E[W]=\frac{E[G]}{p}$$

Παρατηρούμε ότι $0<p<1$ και $W \in M$. Αν $W \in M_0$ οι παράμετροι $(r, p, \lambda_{C1}, \lambda_{C2}, p_C)$ υπολογίζονται από την περίπτωση 1) ενώ αν $W \in M^+$ δίνονται από την περίπτωση 2).

Αυτές ήταν δύο προσεγγίσεις φάσεων. Η βιβλιογραφία πάνω σε αυτό το θέμα είναι ανεξάντλητη. Ακόμα και χρησιμοποιώντας την ίδια κατανομή φάσεων γίνονται συνεχώς έρευνες ώστε να βελτιωθούν άλλα κομμάτια της μεθόδου, όπως ο αλγόριθμος εύρεσης των παραμέτρων . Επιλέχθηκαν αυτές οι δύο μέθοδοι για δύο λόγους. Πρώτον καταλήγουν σε κλειστές μορφές, δεύτερον χρησιμοποιούν δύο πολύ βασικές κατανομές ή παραλλαγές τους, πάνω στις οποίες βασίζονται οι περισσότεροι ερευνητές.

Για περισσότερες προσεγγίσεις φάσεων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην παρακάτω βιβλιογραφία: [1],[8],[22],[25],[33],[36]

9. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η προσέγγιση διάχυσης ([24] Ch. 8.2). Η βασική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι ότι κάτω από βαριά κυκλοφορία κάποια μεγέθη του συστήματος που είναι διακριτά, προσεγγίζονται από μια διαδικασία διάχυσης που είναι συνεχής. Στην πράξη αυτή η διαδικασία είναι μια κίνηση Brown.

Η λογική της προσέγγισης είναι η αναλογία με τη ροή ενός ρευστού. Γι' αυτό και δουλεύει καλύτερα κάτω από βαριά κυκλοφορία. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις είναι τόσο συχνές που μοιάζουν περισσότερο με ρευστό που μπαίνει και βγαίνει από μια δεξαμενή παρά με μεμονωμένες.

Η προσέγγιση αυτή βασίζεται πάνω στα οριακά θεωρήματα. Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών η οριακή προσέγγιση που εξάγεται είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση με το χρόνο, ενώ από το κεντρικό οριακό θεώρημα εξάγεται μια στοχαστική διαδικασία. Εδώ θα επικεντρωθούμε στο δεύτερο.

Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί η μεταβατική κατάσταση του συστήματος. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις που οι ρυθμοί εισόδου και εξόδου δεν είναι σταθεροί. Χωρίς αυτόν τον περιορισμό μπορεί να μελετηθεί και μια περίπτωση λειτουργίας όπου $\rho \geq 1$ έστω και στιγμιαία, αυτή όμως η περίπτωση δεν ενδιαφέρει αυτή την εργασία. Τέλος μπορεί να βοηθήσει απλοποιώντας κάπως τους υπολογισμούς όταν οι κατανομές είναι πολύ περίπλοκες.

9.1 Περίπτωση ουράς με έναν εξυπηρετητή.

Έστω οι στοχαστικές διαδικασίες $Q(t), A(t), D(t)$ που είναι αντίστοιχα ο αριθμός των πελατών στο σύστημα, ο συνολικός αριθμός αφίξεων και αναχωρήσεων μέχρι τη στιγμή t. Είναι προφανές ότι:

$$Q(t)=Q(0)+A(t)-D(t)$$

Είναι βασική η υπόθεση ότι $Q(t)>0$ πάντα. Έτσι η $D(t)$ μπορεί να υποτεθεί ότι είναι ανεξάρτητη της $A(t)$. Επίσης υποθέτουμε ότι το σύστημα ξεκινά τη λειτουργία του άδειο, άρα $Q(0)=0$

Επίσης είναι λογικό ότι

$$P[A(t)\geq n]=P[t_n\leq t]$$

Αφού το $t_n=\sum_{k=1}^{n} T_k$ είναι άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να εφαρμόσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Έχουμε:

$$E[t_n]=\frac{n}{\lambda} \quad \text{και} \quad var[t_n]=n\,\sigma_T^2$$

Άρα $$P\left[\frac{\tau_n-\frac{n}{\lambda}}{\sigma_T\sqrt{n}}<x\right]=\Phi(x)$$

Ορίζεται $$t=x\sigma_T^2\sqrt{n}+\frac{n}{\lambda} \rightarrow n=\lambda t-x\lambda\sigma_{Tsqrt}^2 t\lambda$$

Άρα $$P[t_n<t]=\Phi(x)=P[A(t)>n]$$

$$P[A(t)>\lambda t-x\lambda\sigma_T^2\sqrt{t\lambda}]=\Phi(x)$$

$$P\left[\frac{A(t)-\lambda t}{\lambda\sigma_T\sqrt{\lambda t}}>-x\right]=\Phi(x)$$

$$P\left[\frac{A(t)-\lambda t}{\lambda\sigma_T\sqrt{\lambda t}}\leq x\right]=\Phi(x)$$

Δηλαδή η διαδικασία $A(t)$ ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή με $E[A(t)]=\lambda t$ και $var[A(t)]=\lambda^3\sigma_T^2 t$

Με την ίδια λογική καταλήγουμε στο ότι και η $D(t)$ έχει προσεγγιστικά κανονική κατανομή με $E[D(t)]=\mu t$ και $var[D(t)]=\mu^3\sigma_X^2 t$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι για μέση με βαριά κυκλοφορία η διαδικασία $Q(t)=A(t)-D(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί από μια διαδικασία διάχυσης με απειροστή μέση τιμή και διακύμανση:

$m=\lambda-\mu$ και $D^2=\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2$

Δηλαδή:

$$F(t,x;x_o)=P[Q(t)\leq x]=\Phi\left(\frac{x-(\lambda-\mu)t}{\sqrt{(\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2)t}}\right)-e^{\frac{2x(\lambda-\mu)}{\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2}}\Phi\left(\frac{x-(\lambda-\mu)t}{\sqrt{(\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2)t}}\right)$$

Και για την λύση ισορροπίας:

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x;x_0)=F(x)=P[Q\leq x]=1-e^{\frac{2x(\lambda-\mu)}{\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2}}$$

Από το παραπάνω φαίνεται ότι η μέση τιμή του αριθμού πελατών στην ουρά σε κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$E[Q]=\frac{-D^2}{2\mathrm{m}}=-\frac{\lambda^3\sigma_T^2+\mu^3\sigma_X^2}{2(\lambda-\mu)}=\frac{1}{\gamma}$$

Στη συνέχεια γίνεται διακριτοποίηση στην λύση ισορροπίας.

$$p_n = P[Q=n] = \int_n^{n+1} dF(x)$$
$$p_n = F(n+1) - F(n)$$
$$p_n = e^{-n\gamma}(1-e^{-\gamma})$$

Όμως $p_0 = 1-\rho$ σε μια ουρά με έναν εξυπηρετητή. Έτσι το αποτέλεσμα τροποποιείται:

$$p_0 = 1-\rho$$
$$p_n = \rho\, e^{-(n-1)\gamma}(1-e^{-\gamma})$$

9.2 Περίπτωση ουράς με περισσότερους από έναν εξυπηρετητές

Για περισσότερους εξυπηρετητές η μέθοδος γίνεται πολύ περίπλοκη. Συγκεκριμένα ενώ η διαδικασία αφίξεων παραμένει αμετάβλητη, η διαδικασία αναχωρήσεων εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των εξυπηρετητών (έστω m) που απασχολούνται κάθε στιγμή. Όταν δεν είναι κατειλημμένοι όλοι έχουμε:

$$E[D(t)] = n\mu t \quad \text{και} \quad var[D(t)] = n\mu^3\sigma_X^2 t$$

Ενώ αν $n>m$ ο ρυθμός αναχώρησης παίρνει τη μέγιστη τιμή του $m\mu$ και:

$$E[D(t)] = m\mu t \quad \text{και} \quad var[D(t)] = m\mu^3\sigma_X^2 t$$

Μπορούμε να ισχυριστούμε τα ίδια με την προηγουμένη περίπτωση και να εφαρμόσουμε την προσέγγιση διάχυσης με την διαφορά ότι η απειροστή μέση τιμή και διακύμανση πλέον εξαρτιούνται από την κατάσταση του συστήματος. Έτσι:

$$m = b(x) = \lambda - min[x, m]\mu$$
$$D^2 = a(x) = \lambda^3\sigma_T^2 + min[x, m]\mu^3\sigma_X^2$$

Επιπλέον η εξίσωση διάχυσης γίνεται:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(b(x)F) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)F)$$

Για πιο εξεζητημένες προσεγγίσεις διάχυσης ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην παρακάτω βιβλιογραφία: [15],[16],[29]

10. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα των μεθόδων για συγκεκριμένες περιπτώσεις με ακριβή αποτελέσματα καθώς και μεταξύ τους.

Το κεφάλαιο χωρίζεται σε πέντε μέρη. Αρχικά συγκρίνεται το προσδοκώμενο μήκος ουράς με έναν εξυπηρετητή. Σε αυτήν την περίπτωση συγκρίνονται οι προσεγγίσεις βαριάς κυκλοφορίας, διάχυσης και από τις προσεγγίσεις δύο ροπών οι τύποι των Kramer και Lagenbach-Belz και W. Whitt. Στη συνέχεια συγκρίνεται το ίδιο μέγεθος, αλλά για ουρές με περισσότερους εξυπηρετητές. Η σύγκριση γίνεται για την προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας και την μέθοδο δύο ροπών του W. Whitt. Στο τρίτο μέρος συγκρίνεται η πιθανότητα αναμονής ενός αφικνούμενου πελάτη από τις μεθόδους των των Kramer και Lagenbach-Belz και W. Whitt. Στο τέταρτο μέρος αξιολογείται η προσέγγιση δύο ροπών του A. Shore για την κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Στο πέμπτο μέρος συγκρίνονται οι προσεγγίσεις φάσεων με βάση τη κατανομή και την προσδοκώμενη τιμή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Τέλος γίνεται ένας γενικός σχολιασμός για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου.

Για την εκτέλεση των αλγορίθμων των παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού Fortran. Συγκεκριμένα για την μέθοδο του A. Shore που απαιτεί την εύρεση ρίζας, χρησιμοποιήθηκε και το πρόγραμμα Mathematica. Για τις προσεγγίσεις φάσεων χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα σε Fortran για την εύρεση των παραμέτρων των νέων κατανομών και το πρόγραμμα προσομοίωσης Arena για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Οι ακριβείς τιμές των μεγεθών έχουν παρθεί από διάφορες επιστημονικές εκδόσεις που παρατίθενται σε κάθε περίπτωση και είναι αποτελέσματα προσομοιώσεων ή αναλυτικών μεθόδων.

Στις περισσότερες περιπτώσεις το μέγεθος που συγκρίνεται είναι το προσδοκώμενο μήκος ουράς. Ο λόγος που επιλέχθηκε αυτό το μέγεθος είναι ότι ενώ εξαρτάται από το ρ δεν εξαρτάται από τις επιμέρους τιμές των λ και μ. Έτσι για κάθε μέθοδο που προσεγγίζει τον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής υπολογίζεται το προσδοκώμενο μήκος ουράς μέσω του νόμου του Little.

10.1. Προσδοκώμενο μήκος ουράς με έναν εξυπηρετητή

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μεθόδων σε διάφορες περιπτώσεις. Για κάθε διαφορετική τιμή του ρ δίνεται και το μέσο σχετικό σφάλμα της κάθε μεθόδου.

ρ=0.3

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	0.04357	0.03894	0.06430	0.164286	0.03920
$(0.5, 1)$	0.07441	0.06594	0.09645	0.521429	0.06490
$(0.5, 4)$	0.265336	0.200576	0.289350	2.66429	0.24860
$(0.333, 0.333)$	0.01515	0.02193	0.04282	0.00921	0.01690
$(0.333, 1.083)$	0.05314	0.05250	0.08809	0.512071	0.04800
$(0.333, 0.342)$	0.02624	0.03015	0.05716	0.168500	0.02780

$(2.33, 0.333)$	0.132863	0.171424	0.171424	0.437786	0.19520
$(2.33, 1.083)$	0.187593	0.216691	0.216691	0.940643	0.26100
$(2.33, 0.342)$	0.151334	0.185763	0.185763	0.597071	0.21530
$(0.58, 0.333)$	0.04346	0.05249	0.05871	0.06214	0.03190
$(0.58, 1.083)$	0.08773	0.07678	0.103973	0.56500	0.07100
$(0.58, 0.342)$	0.05736	0.05114	0.07304	0.221429	0.04490
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.181960	0.152773	0.544313	4.04491	-

Από τα νούμερα φαίνεται ότι η μέθοδος του W. Whitt έχει καλύτερη ακρίβεια από τις άλλες για χαμηλή με μέση κυκλοφορία. Όμως για $\rho > 0.9$ η μέθοδος των Kramer και Lagenbach-Belz είναι πιο ακριβής.

Τέλος οι άλλες δύο μέθοδοι υστερούν πάρα πολύ στην χαμηλή κυκλοφορία και μόνο από $\rho = 0.9$ και πάνω το σφάλμα τους είναι συγκρίσιμο με των άλλων μεθόδων. Αυτή η παρατήρηση ήταν αναμενόμενη καθώς και οι δύο μέθοδοι βασίζονται σε συνθήκες βαριάς κυκλοφορίας. Συγκεκριμένα η προσέγγιση διάχυσης βασίζεται στην υπόθεση ότι η ουρά δεν αδειάζει ποτέ. Σαν αποτέλεσμα σε χαμηλή και μέτρια κυκλοφορία αποκλίνει από την ακριβή τιμή πάρα πολύ. Αντίθετα στην περίπτωση του $\rho = 0.98$ το σφάλμα της είναι το μικρότερο καθώς σε αυτήν την περίπτωση η βασική υπόθεση είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα.

Οι ακριβείς τιμές έχουν παρθεί από [5].

ρ=0.5

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	0.211620	0.189177	0.250000	0.250000	0.195000
$(0.5, 1)$	0.335565	0.303929	0.375000	0.750000	0.309000
$(0.5, 4)$	1.08410	0.912120	1.12500	3.75000	1.04700
$(0.333, 0.333)$	0.106662	0.114790	0.166500	-0.0005	0.105700
$(0.333, 1.083)$	0.287176	0.269352	0.354075	0.749800	0.268600
$(0.333, 0.342)$	0.108677	0.116379	0.168675	0.0082	0.107200
$(2.33, 0.333)$	0.555676	0.666500	0.666500	0.999500	0.758400
$(2.33, 1.083)$	0.772813	0.854075	0.854075	1.74980	0.975900
$(2.33, 0.342)$	0.558443	0.668675	0.668675	1.00820	0.763500
$(0.58, 0.333)$	0.200665	0.213208	0.228250	0.123000	0.174500
$(0.58, 1.083)$	0.387440	0.353594	0.415825	0.873300	0.353400
$(0.58, 0.342)$	0.202823	0.214638	0.230425	0.131700	0.175900
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.110921	0.08941	0.246299	0.881508	-

ρ=0.7

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	0.760368	0.713727	0.815000	0.716667	0.7268
$(0.5, 1)$	1.16803	1.10647	1.22250	1.55000	1.1200
$(0.5, 4)$	3.61713	3.31304	3.66750	6.55000	3.5572
$(0.333, 0.333)$	0.449398	0.454736	0.542790	0.243500	0.4422
$(0.333, 1.1)$	1.07095	1.02823	1.16790	1.52183	1.0243
$(0.333, 0.354)$	0.466280	0.469625	0.559905	0.278500	0.4565
$(2.33, 0.333)$	1.95217	2.17279	2.17279	2.57683	2.3697
$(2.33, 1.1)$	2.63992	2.79545	2.79545	3.85167	2.9830
$(2.33, 0{,}354)$	1.97047	2.18746	2.18746	2.60833	2.4076
$(0.58, 0.333)$	0.705572	0.718902	0.744095	0.531667	0.6662
$(0.58, 1.1)$	1.33145	1.26843	1.36920	1.81000	1.2619
$(0.58, 0{,}354)$	0.722697	0.732957	0.761210	0.566667	0.6797
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.06457	0.04305	0.107488	0.29452	-

ρ=0.9

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	3.97569	3.90542	4.05000	3.85000	3.92400
$(0.5, 1)$	6.00046	5.91153	6.07500	6.35000	5.93100
$(0.5, 4)$	18.1501	17.7190	18.2250	21.3500	18.0585
$(0.333, 0.333)$	2.56708	2.56962	2.69730	2.26350	2.57140
$(0.333, 1.0833)$	5.60409	5.53901	5.73602	6.01500	5.63920
$(0.333, 0.36)$	2.67631	2.67505	2.80665	2.39850	2.65250
$(2.33, 0.333)$	10.4005	10.7852	10.7852	11.2500	11.0740
$(2.33, 1.0833)$	13.5507	13.8239	13.8239	15.0015	13.9874
$(2.33, 0{,}36)$	10.5169	10.8945	10.8945	11.3850	11.3381
$(0.58, 0.333)$	3.64511	3.66154	3.69765	3.37500	3.6202
$(0.58, 1.0833)$	6.68365	6.59405	6.73637	7.12650	6.6081
$(0.58, 0{,}36)$	3.75444	3.76522	3.80700	3.51000	3.7455

Μέσο σχετικό σφάλμα	0.019335	0.019774	0.021142	0.071291	-

ρ=0.95

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	8.94618	8.89398	9.05000	8.80000	8.89200
$(0.5, 1)$	13.4586	13.3991	13.5750	13.8000	13.3760
$(0.5, 4)$	40.5334	40.1789	40.7250	43.8000	40.4415
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.004846	0.004920	0.010843	0.041697	-

ρ=0.98

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Heavy-traffic	Diffusion	Ακριβές
$(0.5, 0.5)$	23.9285	23.8378	24.0000	23.7700	23.8630
$(0.5, 1)$	35.9335	35.8174	36.0000	36.2700	35.8435
$(0.5, 4)$	107.963	107.432	108.000	111.270	107.898
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.001954	0.002305	0.004219	0.015683	

10.2. Προσδοκώμενο μήκος ουράς με πολλούς εξυπηρετητές

Τα συμπεράσματα σε αυτή την περίπτωση είναι αντίστοιχα των προηγούμενων. Η μέθοδος του W. Whitt είναι πιο ακριβής. Η ακρίβεια και των δύο μεθόδων αυξάνεται όσο αυξάνεται η κυκλοφορία και μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των εξυπηρετητών.

Οι ακριβείς τιμές έχουν παρθεί από [39].

ρ=0.5

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25, 1)$	0.560572	0.536250	0.570000
	$(0.25, 1)$	0.138642	0.206250	0.122000
	$(0.5, 0.5)$	0.120126	0.165000	0.118000
	$(2, 0)$	0.347961	0.330000	0.320000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.051669	0.235868	-
4	$(2.25, 1)$	0.298877	0.276250	0.350000
	$(0.25, 1)$	0.067150	0.106250	0.047000
	$(0.5, 0.5)$	0.059919	0.085000	0.051000

	$(2,0)$	0.186709	0.170000	0.220000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.180196	0.473058	-
8	$(2.25,1)$	0.115050	0.095875	0.157000
	$(0.25,1)$	0.018486	0.036875	0.009000
	$(0.5,0.5)$	0.018593	0.029500	0.012300
	$(2,0)$	0.073160	0.059000	0.113000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.437078	1.07256	-
20	$(2.25,1)$	0.007215	0.006013	0.021000
	$(0.25,1)$	0.001159	0.002313	0.000110
	$(0.5,0.5)$	0.001166	0.001850	0.000300
	$(2,0)$	0.004588	0.003700	0.021000
	Μ. Σ. σφάλμα	2.77273	5.34538	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		1.01226	2.09614	-

ρ=0.7

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25,1)$	2.23639	2.19375	2.27000
	$(0.25,1)$	0.696399	0.843750	0.670000
	$(0.5,0.5)$	0.575332	0.675000	0.580000
	$(2,0)$	1.38149	1.35000	1.33000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.020194	0.094350	-
4	$(2.25,1)$	1.68204	1.62500	1.83000
	$(0.25,1)$	0.498801	0.625000	0.440000
	$(0.5,0.5)$	0.416745	0.500000	0.400000
	$(2,0)$	1.04212	1.00000	1.13000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.066825	0.179504	-
8	$(2.25,1)$	1.11639	1.02375	1.30000
	$(0.25,1)$	0.276071	0.393750	0.240000
	$(0.5,0.5)$	0.241550	0.315000	0.230000
	$(2,0)$	0.698413	0.630000	0.860000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.105929	0.298026	-
20	$(2.25,1)$	0.553173	0.471250	0.590000
	$(0.25,1)$	0.100355	0.181250	0.050000
	$(0.5,0.5)$	0.096644	0.145000	0.058000
	$(2,0)$	0.350497	0.290000	0.470000

	Μ. Σ. σφάλμα	0.398012	0.941850	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		0.173812	0.445215	-

ρ=0.8

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25, 1)$	4.66733	4.61500	4.75000
	$(0.25, 1)$	1.58101	1.77500	1.55000
	$(0.5, 0.5)$	1.28795	1.42000	1.30000
	$(2, 0)$	2.87864	2.84000	2.85000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.011346	0.053880	-
4	$(2.25, 1)$	3.96328	3.88375	4.17000
	$(0.25, 1)$	1.30333	1.49375	1.23000
	$(0.5, 0.5)$	1.06824	1.19500	1.06000
	$(2, 0)$	2.44873	2.39000	2.58000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.033569	0.096816	-
8	$(2.25, 1)$	3.13073	2.97375	3.42000
	$(0.25, 1)$	0.924149	1.14375	0.860000
	$(0.5, 0.5)$	0.775620	0.915000	0.780000
	$(2, 0)$	1.94592	1.83000	2.22000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.057650	0.161835	-
20	$(2.25, 1)$	1.82558	1.65750	2.22000
	$(0.25, 1)$	0.452782	0.637500	0.390000
	$(0.5, 0.5)$	0.396816	0.510000	0.380000
	$(2, 0)$	1.14412	1.02000	1.57000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.130832	0.316083	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		0.068646	0.184887	-

ρ=0.9

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25, 1)$	12.5266	12.4637	12.7000
	$(0.25, 1)$	4.54765	4.79375	4.52000
	$(0.5, 0.5)$	3.66662	3.83500	3.69000
	$(2, 0)$	7.71638	7.67000	7.70000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.005647	0.024472	-

4	$(2.25, 1)$	11.6261	11.5212	11.9000
	$(0.25, 1)$	4.16412	4.43125	4.08000
	$(0.5, 0.5)$	3.36591	3.54500	3.36000
	$(2, 0)$	7.16743	7.09000	7.40000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.015364	0.042975	-
8	$(2.25, 1)$	10.4943	10.2537	10.9000
	$(0.25, 1)$	3.58107	3.94375	3.51000
	$(0.5, 0.5)$	2.92182	3.15500	2.94000
	$(2, 0)$	6.48765	6.31000	6.90000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.024683	0.068301	-
20	$(2.25, 1)$	8.42327	8.06000	9.10000
	$(0.25, 1)$	2.66667	3.10000	2.55000
	$(0.5, 0.5)$	2.20943	2.48000	2.20000
	$(2, 0)$	5.22826	4.96000	6.00000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.050606	0.126116	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		0.028323	0.077018	-

ρ=0.95

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25, 1)$	28.6683	28.6000	28.8000
	$(0.25, 1)$	10.7261	11.0000	10.7000
	$(0.5, 0.5)$	8.61222	8.80000	8.63000
	$(2, 0)$	17.6504	17.6000	17.6000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.002387	0.010936	-
4	$(2.25, 1)$	27.5809	27.4625	28.0000
	$(0.25, 1)$	10.2529	10.5625	10.2000
	$(0.5, 0.5)$	8.24177	8.45000	8.26000
	$(2, 0)$	16.9874	16.9000	17.3000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.008086	0.020172	-
8	$(2.25, 1)$	26.0000	26.2889	26.9000
	$(0.25, 1)$	9.55047	10.0000	9.50000
	$(0.5, 0.5)$	7.70941	8.00000	7.76000
	$(2, 0)$	16.2134	16.0000	16.7000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.012737	0.031787	-
	$(2.25, 1)$	23.7336	23.2375	24.7000

20	$(0.25, 1)$	8.32510	8.93750	8.20000
	$(0.5, 0.5)$	6.76461	7.15000	6.81000
	$(2, 0)$	14.6664	14.3000	15.6000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.024179	0.056482	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		0.013938	0.035110	-

ρ=0.98

m	(C_T^2, C_X^2)	Whitt	Heavy-traffic	Ακριβές
2	$(2.25, 1)$	77.2589	77.1875	77.5000
	$(0.25, 1)$	29.3972	29.6875	29.4000
	$(0.5, 0.5)$	23.5507	23.7500	23.6000
	$(2, 0)$	47.5528	47.5000	47.6000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.001257	0.004454	-
4	$(2.25, 1)$	76.1771	76.0500	76.7000
	$(0.25, 1)$	28.9127	29.2500	28.8000
	$(0.5, 0.5)$	23.1728	23.4000	23.2000
	$(2, 0)$	46.8939	46.8000	47.2000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.003678	0.008239	-
8	$(2.25, 1)$	74.9089	74.5875	75.4000
	$(0.25, 1)$	28.1787	28.6875	28.1000
	$(0.5, 0.5)$	22.6201	22.9500	22.6000
	$(2, 0)$	46.1374	45.9000	46.6000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.004026	0.012438	-
20	$(2.25, 1)$	72.0919	71.5000	73.0000
	$(0.25, 1)$	26.7555	27.5000	26.6000
	$(0.5, 0.5)$	21.5294	22.0000	21.6000
	$(2, 0)$	44.4371	44.0000	45.4000
	Μ. Σ. σφάλμα	0.008553	0.020748	-
Μέσο σχετικό σφάλμα		0.005151	0.013494	-

10.3. Πιθανότητα αναμονής ενός αφικνούμενου πελάτη

Για αυτό το μέγεθος παρουσιάζονται αποτελέσματα μόνο για την περίπτωση με ένα εξυπηρετητή ώστε να μπορούν να συγκριθούν οι δύο μέθοδοι. Ξανά η ακρίβεια και τον δύο αυξάνεται όσο αυξάνεται η κυκλοφορία, αλλά αυτή την φορά ο τύπος των Kramer και Lagenbach-Belz παρουσιάζει αρκετά μικρότερο σφάλμα από τον τύπο του W. Whitt.

Οι ακριβείς τιμές έχουν παρθεί από [39].

ρ=0.5

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Ακριβές
$(0.25, 0)$	0.187500	0.266707	0.163000
$(0.25, 1)$	0.281250	0.343321	0.301000
$(0.25, 2.5)$	0.321429	0.363746	0.337000
$(2, 0)$	0.625000	0.611601	0.615000
$(2, 1)$	0.617647	0.598696	0.590000
$(2, 2.5)$	0.608108	0.590287	0.580000
$(4, 0)$	0.687500	0.693789	0.715000
$(4, 1)$	0.681818	0.682369	0.635000
$(4, 2.5)$	0.673913	0.670945	0.660000
$(0, 1)$	0.200000	0.439273	0.200000
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.050698	0.198107	-

ρ=0.7

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Ακριβές
$(0.25, 0)$	0.450791	0.398188	0.410200
$(0.25, 1)$	0.544886	0.578215	0.553000
$(0.25, 2.5)$	0.574502	0.610249	0.578900
$(2, 0)$	0.799324	0.788442	0.798000
$(2, 1)$	0.791732	0.770810	0.777000
$(2, 2.5)$	0.782295	0.760517	0.763000
$(4, 0)$	0.848987	0.844560	0.875000
$(4, 1)$	0.843066	0.828523	0.847000
$(4, 2.5)$	0.835017	0.813794	0.782600
$(0, 1)$	0.460403	0.502441	0.469980
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.028886	0.028888	-

ρ=0.9

(C_T^2, C_X^2)	K.L.B.	Whitt	Ακριβές
$(0.25, 0)$	0.807280	0.708059	0.736200

$(0.25, 1)$	0.844609	0.853587	0.837900
$(0.25, 2.5)$	0.854436	0.874056	0.853200
$(2, 0)$	0.938208	0.936432	0.945000
$(2, 1)$	0.934876	0.925918	0.927000
$(2, 2.5)$	0.930842	0.918913	0.927000
$(4, 0)$	0.957311	0.956168	0.972000
$(4, 1)$	0.954699	0.946694	0.954000
$(4, 2.5)$	0.951198	0.937953	0.954000
$(0, 1)$	0.805525	0.837532	0.810000
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.015014	0.015919	-

10.4. Κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Σύστημα ουράς	$M/E_8/2$		$M/E_3/5$		$M/D/6$	
ρ	0.7		0.4		0.9	
	Προσέγγιση	Ακριβές	Προσέγγιση	Ακριβές	Προσέγγιση	Ακριβές
0	0.1797	0.1688	0.1346	0.1339	0.0023	0.0017
1	0.2515	0.2624	0.2692	0.2682	0.0123	0.0098
2	0.2459	0.2250	0.2692	0.2688	0.0333	0.0282
3	0.1396	0.1488	0.1794	0.1800	0.0600	0.0548
4	0.0792	0.0874	0.0897	0.0911	0.0810	0.0817
5	0.0450	0.0488	0.0401	0.0376	0.0875	0.1004
6	0.0255	0.0268	0.0123	0.0137	0.1316	0.1068
7	0.0145	0.0146	0.0038	0.0046	0.1076	0.1024
8	0.0082	0.0079	0.0012	0.0014	0.0881	0.0912
9	0.0047	0.0043	0.0004	0.0004	0.0720	0.0776
10	0.0026	0.0024			0.0589	0.0643
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.0585	-	0.046781	-	0.124497	-

Όπως φαίνεται από τους πίνακες η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ικανοποιητικά μικρό σφάλμα, εκτός από τις περιπτώσεις βαριάς κυκλοφορίας ή πολλών εξυπηρετητών. Οι ακριβείς τιμές έχουν παρθεί από [31].

Σύστημα ουράς	$D/M/10$		$E_4/M/5$		$E_8/E_2/5$	
ρ	0.5		0.8		0.95	
	Προσέγγιση	Ακριβές	Προσέγγιση	Ακριβές	Προσέγγιση	Ακριβές
0	0.0010	0.0005	0.0029	0.0042	0	0.0001
1	0.0100	0.0076	0.0272	0.0324	0	0.0023
2	0.0447	0.0423	0.1025	0.1012	0.0013	0.0157
3	0.1184	0.1231	0.1934	0.1756	0.0189	0.0504
4	0.2057	0.2153	0.1824	0.1949	0.1406	0.0922
5	0.2453	0.2461	0.1505	0.1505	0.1279	0.1117
6	0.2031	0.1936	0.1044	0.1044	0.1084	0.1073
7	0.1153	0.1088	0.0725	0.0725	0.0919	0.0947
8	0.0429	0.0448	0.0503	0.0503	0.0779	0.0812
9	0.0095	0.0138	0.0349	0.0349	0.0660	0.0689
10	0.0033	0.0033	0.0242	0.0242	0.0559	0.0583
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.160114	-	0.054030	-	0.364657	-

10.5. Προσέγγιση Φάσεων

Για τις προσεγγίσεις αυτές έχουν επιλεχθεί πέντε συστήματα ουρών. Οι περιπτώσεις $1-4$ είναι συστήματα ουρών $H_4/Cox_2/1$ και η πέμπτη $Cox_2/H_4/1$. Στις τέσσερις πρώτες περιπτώσεις οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την ίδια κατανομή. Στον πρώτο πίνακα δίνονται οι παράμετροι των κατανομών ανά περίπτωση.

Υπερεκθετικές κατανομές								
Περίπτωση	Πιθανότητα φάσης				Παράμετρος φάσης			
	α_1	α_2	α_3	α_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	0.2	0.1	0.3	0.4	0.05	0.02	0.06	0.0667
2	0.1	0.3	0.3	0.3	0.0133	0.05	0.60	0.05
3	0.2	0.1	0.3	0.4	0.05	0.009	0.08	0.35
4	0.2	0.1	0.3	0.4	0.01	5	10	1

5	0.2	0.1	0.3	0.4	0.01	5	10	1

Κατανομές Cox			
Περίπτωση	Παράμετρος φάσης 1	Πιθανότητα μετάβασης στην φάση 2	Παράμετρος φάσης 2
1−4	0.14286	0.33333	0.04762
5	0.49019	0.2	0.09804

Για κάθε περίπτωση η υπερεκθετική κατανομή προσεγγίστηκε από μια κατανομή φάσεων χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Στη συνέχεια έγινε προσομοίωση της ουράς με την νέα κατανομή και υπολογίστηκε η κατανομή και η προσδοκώμενη τιμή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Για κάθε περίπτωση έγιναν πέντε προσομοιώσεις, όπου εξυπηρετήθηκαν περίπου 88,000 πελάτες στην καθεμία.

Από τους πίνακες φαίνεται ότι η μέθοδος που αντιστοιχεί τρεις ροπές ανάμεσα στις κατανομές, υπερτερεί απέναντι σε αυτήν που αντιστοιχεί δύο. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς συμπεριλαμβάνοντας την τρίτη ροπή η μέθοδος παίρνει σαν δεδομένα περισσότερες πληροφορίες για την αρχική κατανομή. Μόνο στην περίπτωση δύο η μέθοδος δύο ροπών επιστρέφει καλύτερα αποτελέσματα.

Οι ακριβείς τιμές έχουν παρθεί από [1].

1

N_i	Δύο ροπές	Τρεις ροπές	Ακριβές
0	30.1280	29.8740	29.9990
1	16.1060	16.8280	16.6190
2	11.8100	12.2320	12.0930
3	9.03200	9.26200	9.16800
4	7.05600	7.09600	7.07400
5	5.51200	5.55400	5.49800
6	4.34600	4.35800	4.25800
7	3.35600	3.38800	3.34400
8	2.65200	2.63200	2.61100
9	2.11400	2.00000	2.03900
10	1.64200	1.51600	1.59200
11	1.32800	1.21200	1.54300
12	1.07600	0.956000	0.971000
13	0.846000	0.732000	0.758000
14	0.668000	0.574000	0.592000
15	0.526000	0.422000	0.462000
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.051668	0.033439	-

$E[N]$	3.23772	3.08266	3.11055
Σχετικό σφάλμα	0.040883	0.008966	-

2

N_i	Δύο ροπές	Τρεις ροπές	Ακριβές
0	30.1700	30.7020	30.0000
1	13.3660	13.1380	11.3370
2	9.22400	9.55800	9.26400
3	7.62000	7.83000	7.60500
4	6.41400	6.52800	6.44900
5	5.30200	5.39600	5.43100
6	4.51800	4.55800	4.58500
7	3.87400	3.77400	3.87600
8	3.31600	3.16200	3.27900
9	2.78800	2.68800	2.77500
10	2.35600	2.27200	2.34900
11	1.98800	1.88200	1.98800
12	1.70000	1.59200	1.68300
13	1.44800	1.36000	1.42500
14	1.20000	1.14800	1.20600
15	1.03800	0.940000	1.02100
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.018878	0.042170	-
$E[N]$	4.49496	4.19226	4.49349
Σχετικό σφάλμα	0.032716	0.067037	-

4

N_i	Δύο ροπές	Τρεις ροπές	Ακριβές
0	29.7580	29.8840	30.0130
1	7.75600	7.44200	7.28900
2	6.64000	6.43400	6.39300
3	5.84200	5.73400	5.67300
4	5.24600	5.02200	5.06700

5	4.66000	4.48200	4.54300
6	4.19600	3.99200	4.08200
7	3.75600	3.62000	3.67200
8	3.37000	3.28600	3.30500
9	3.00400	2.92200	2.97500
10	2.70000	2.65000	2.67900
11	2.44400	2.41300	2.41400
12	2.14800	2.19200	2.17300
13	1.92400	1.98400	1.95800
14	1.68600	1.77000	1.76300
15	1.50600	1.60600	1.58800
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.025920	0.011596	-
$E[N]$	6.76464	7.11210	6.98254
Σχετικό σφάλμα	0.031206	0.018555	-

5

N_i	Δύο ροπές	Τρεις ροπές	Ακριβές
0	31.6560	32.1760	31.5400
1	6.30600	4.48000	4.42500
2	5.49200	4.21000	4.13400
3	4.98200	3.86400	3.86300
4	4.45200	3.63000	3.61000
5	4.07600	3.33200	3.37500
6	3.65800	3.14400	3.15600
7	3.36200	2.91600	2.95100
8	3.06200	2.72600	2.76000
9	2.79600	2.56800	2.58200
10	2.57400	2.38200	2.41500
11	2.37200	2.24400	2.26000
12	2.14600	2.05800	2.11400
13	1.99600	1.94400	1.97800
14	1.85200	1.83000	1.85100
15	1.68800	1.71600	1.73200
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.134006	0.011746	-

$E[N]$	7.89948	10.4180	10.6496
Σχετικό σφάλμα	0.258236	0.021744	-

3

N_i	Δύο ροπές	Τρεις ροπές	Ακριβές
0	40.1560	40.0380	39.9510
1	15.0400	10.4800	9.69600
2	7.70400	6.86000	6.86500
3	5.48200	5.66600	5.60000
4	4.34000	4.79800	4.78300
5	3.60000	4.09800	4.15100
6	3.09400	3.60600	3.62200
7	2.68800	3.20200	3.16600
8	2.34400	2.82200	2.77000
9	2.03200	2.48000	2.42300
10	1.83200	2.11000	2.12100
11	1.65800	1.86600	1.85600
12	1.43200	1.67200	1.62400
13	1.22800	1.45200	1.42100
14	1.15000	1.25800	1.24300
15	0.992000	1.08400	1.08800
Μέσο σχετικό σφάλμα	0.137305	0.015451	-
$E[N]$	4.40566	4.50230	4.56605
Σχετικό σφάλμα	0.035127	0.013962	-

10.6. Σχολιασμός

Δεν μπορεί κανείς να πει ξεκάθαρα ποια προσέγγιση είναι η καλύτερη. Η κάθε μία υπερτερεί απέναντι στις άλλες σε κάτι διαφορετικό. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα θετικά και τα αρνητικά της κάθε μίας με τη σειρά που παρουσιάστηκαν και στα προηγούμενα κεφάλαια.

Η παρουσίαση άρχισε με την προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας. Η προσέγγιση αυτή δίνει μια κλειστή μορφή για την κατανομή και την προσδοκώμενη τιμή του χρόνου αναμονής σε συνθήκες ισορροπίας. Τα μεγέθη αυτά είναι από τα πιο χρήσιμα στη μελέτη ενός συστήματος. Η ακρίβειά της είναι αρκετά καλή αλλά μόνο για $\rho \geq 0.9$. Από αυτή την άποψη η προσέγγιση έχει περιορισμένη εφαρμογή, όμως αυτή η περιοχή εφαρμογής έχει μεγάλο ενδιαφέρον και ίσως είναι η σημαντικότερη. Τέλος η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας προσέφερε μεγάλη θεωρητική γνώση πάνω στη θεωρία ουρών. Είναι ίσως η πρώτη προσέγγιση στο αντικείμενο (1960) και πάνω τις βασίζονται όλες οι μετέπειτα.

Το μεγάλο προτέρημα των προσεγγίσεων δύο ροπών είναι η πρακτικότητά τους. Χρειάζονται λίγες πληροφορίες, λίγο χρόνο υπολογισμών και είναι οι πιο ακριβείς. Επίσης δεν έχουν περιορισμούς στην εφαρμογή τους όπως η προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας. Το αρνητικό τους είναι ο περιορισμός στα αποτελέσματα. Για κάθε διαφορετικό μέγεθος πρέπει να αναπτυχθεί και καινούργια μέθοδος.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν οι προσεγγίσεις φάσεων. Οι προσεγγίσεις αυτές έχουν ένα μεγάλο μειονέκτημα, δεν δίνουν άμεσα αποτελέσματα. Αφού βρεθεί η κατανομή που θα αντικαταστήσει την υπάρχουσα, απαιτούνται επιπλέον μέθοδοι για να λυθεί το σύστημα. Η μεγάλη τους χρησιμότητα είναι στην κατασκευή μοντέλων και προσομοιώσεων αφού έχουν σαν βάση τους την εκθετική κατανομή.

Τέλος η προσέγγισης διάχυσης. Το μεγαλύτερο ελάττωμά της είναι ότι χρειάζεται ακόμα πιο βαριά κυκλοφορία από την προσέγγιση βαριάς κυκλοφορίας για να είναι ακριβής. Η χρησιμότητά της όμως είναι ότι μπορεί να αντιμετωπίσει περιπτώσεις που οι άλλες δεν μπορούν. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συστήματα με μεταβλητούς ρυθμούς άφιξης και εξυπηρέτησης, καθώς και για να μελετηθεί η μεταβατική κατάσταση ενός συστήματος. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να μελετήσει και περιπτώσεις που η ένταση κυκλοφορίας ξεπερνάει την μονάδα είτε για κάποιο διάστημα, είτε μόνιμα.

Σε αυτή την εργασία έγινε μια προσπάθεια να κατηγοριοποιηθούν και να παρουσιαστούν οι βασικότερες προσεγγίσεις πάνω στα συστήματα ουρών. Το αντικείμενο αυτό όμως είναι ανεξάντλητο και συνεχώς εξελίσσεται. Στο μέλλον θα μπορούσε κάποιος να επανέλθει στο θέμα συμπεριλαμβάνοντας μεθόδους που παραλήφθηκαν εδώ καθώς και νέες που δεν έχουν δημοσιευτεί ακόμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Altiok T. (2007) On the Phase-Type Approximations of General Distributions. Department of Industrial Engineering, Rutgers University, Piscataway, New Jersey.

[2] Belch G., Greiner S., De Meer H., and Trivedi K. S., (1998) Queueing Networks and Markov Chains. Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications. John Wiley & Sons, Inc.

[3] Cooper, R. B. (1981) Introduction to Queueing Theory. Elsevier, North Holland Inc.

[4] Cosmetatos, G. P. (1975) Approximate Explicit Formulae for the Average Queueing Time in the Process (M/D/r) and (D/M/r). INFOR, 13,328-331.

[5] Girish M.K., Hu J.Q. (1997) An Interpolation Approximation for the GI/G/1 Queue Based on Multipoint Pade Approximation. Baltzer Journals

[6] Glynn, P. W. (1990) Diffusion Approximations. D.E Heyman, M.J. Sobel, Eds., *Handbooks on OR & MS, Vol. 2, Chapter 4.* Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland) 1990

[7] Hillenmeyer, M. (2005) Applied Statistics. Stanford University

[8] Jonson, M. A., Taaffe, M. R. (1989) Matching moments to Phase distributions: Mixtures of Erlang distributions of common order. Commun. Statist. - Stochastic models, 5(4), 711-743, 1989

[9] Kingman, J. F. C. (1960) The single server queue in heavy traffic. Research notes

[10] Kingman, J. F. C. (1962) On Queues in Heavy Traffic. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 24, No. 2(1962), pp. 383-392

[11] Kingman, J. F. C. (1964) The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues. W. L. Smith and R. I. Wilkinson, eds., Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, Univ. of North Carolina (Chapel Hill), pp. 137-169

[12] Kingman, J. F. C. (1970) Inequalities in the Theory of Queues. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 32, No. 1, pp. 102-110

[13] Kimura, T. (1986) A Two-Moment Approximation for the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue. Management Science, Vol. 32, No. 6 (Jun., 1986), pp. 751-763

[14] Kimura, T. (1991) Approximating the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue. The Journal of the Operational Research Society, Vol. 42, No. 11 (Nov., 1991), pp. 959-970

[15] Kimura, T. (1994) An M/M/s consistent diffusion model for the GI/G/s queue. Queueing Systems 19 (1995) 377-397

[16] Kimura, T. (2002) Diffusion Approximations for Queues with Markovian Bases. Annals of Operations Research 113, 27–40, 2002

[17] Kirk, R. E. (2008) Statistics An Introduction. Thomson Wadsworth

[18] Kleinrock, L. (1975) Queueing Systems vol I: Theory. Wiley-Interscience Publications

[19] Kleinrock, L. (1976) Queueing Systems vol II: Computer Applications. Wiley-Interscience Publications

[20] Kramer, W. and Lagenbach-Belz, M. (1976) Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System GI/G/1, University of Stuttgart

[21] Kollerstrom, J. (1974) Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers. I, Journal of Applied Probability, ch. 11, pp. 544-552.

[22] Kong, F., Nakase, I. and Arizono, I. (2006) Proposal of Approximation Analysis Method for GI/G/1 Queueing System. Proceedings of the 7th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference 2006 17-20 December 2006, Bangkok, Thailand

[23] Marshall, K. T. (1968) Some Relationships Between the Distributions of Waiting Time, Idle Time and Interoutput Time in the GI/G/1 Queue. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 16, No. 2 (Mar., 1968), pp. 324-327

[24] Medhi, J. (1991) Stochastic Models in Queueing Theory, Elsevier science

[25] Li, J. (1997) An Approximation Method for the Analysis of GI/G/1 Queues. Operations Research, Vol. 45, No. 1 (Jan. - Feb., 1997), pp. 140-144

[26] Lipsky L. (2009) Queueing Theory. Pearson Publications Inc.

[27] Osogami T., Harchol-Balter M. (2003) Necessary and sufficient conditions for representing general distributions by Coxians. Technical Report CMU-CS-02-178, School of Computer Science, Carnegie Mellon University.

[28] Osogami, T., Harchol-Balter M. (2004) Closed Form Solutions for Mapping General Distributions to Minimal PH Distributions. Department of Computer Science, Carnegie Mellon University

[29] Reiser M., Kobayashi H. (1974) Accuracy of Diffusion Approximation for Some Queuing Systems

[30] Shanthikumar J. G. and Buzacott J. A. (1980) On the approximations to the single server queue. Int. J. Prod. Res.18, 761-773.

[31] Shore, H. (1988) Simple Approximations for the GI/G/c Queue-I: The Steady-State Probabilities. The Journal of the Operational Research Society, Vol. 39, No. 3 (Mar., 1988), pp. 279-284

[32] Steward, W. J. (2009) Probability, Markov chains, queues and simulation: the mathematical basis of performance modeling.

[33] Thu¨mmler, A., Buchholz, P. and Telek, M. (2006) A Novel Approach for Phase-Type Fitting with the EM Algorithm. IEEE Transactions on dependable and secure computing, VOL. 3, NO. 3, July-September 2006

[34] Tijms H. C. (1988) Numerical Methods for Queueing Models. Research Memorandum 1988-43 Sept. '88

[35] Tijms H.C. (2003) A First Course in Stochastic Models. John Wiley & Sons Ltd.

[36] Valakevicius E. () The Application of Phase Type Distributions for Modelling Queueing Systems

[37] Virtamo, J. Queueing Theory, Lecture Notes http://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/english.shtml

[38] Whitt, W. (1983) The Queueing Network Analyzer. Bell System Technical Journal, 62, 2779-2815.

[39] Whitt, W. (1993) Approximations for the GI/G/m Queue. Production and Operations Management Vol. 2. No. 2, Spring 1993

[40] Ζούπας, A. (2003) Queueing Theory. Lecture Notes

[41] Λυμπερόπουλος, Γ. (2007) Στοχαστικά πρότυπα στην επιχειρησιακή έρευνα. (Σημειώσεις του μαθήματος) Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

[42] Φακίνος, Δ. (2003) Ουρές αναμονής. Θεωρία και ασκήσεις. Πανεπιστήμιο Αθηνών