

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΥΓΡΟΥ  
ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΜΕ ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑ  
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ**

υπό

**Δημόπουλου Δημητρίου Απ.**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης Μηχανολόγου Μηχανικού

ΙΟΥΝΙΟΣ 2010



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 8585/1  
Ημερ. Εισ.: 11-08-2010  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
537.6  
ΔΗΜ

Copyright © 2010 Δημόπουλος Δημήτριος

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία

ii

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος  
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Βαλουγεώργης Δημήτριος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Βλάχος Νικόλαος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Επιθυμώ να ευχαριστήσω το Θεό που μου έδωσε υγεία, δύναμη, υπομονή και φωτισμό έτσι ώστε να ανταπεξέλθω σε αυτό το διάστημα των μεταπτυχιακών σπουδών μου και να καταφέρω τη συγγραφή του παρόντος πονήματος. Σε Αυτόν χρωστάω τα πάντα.

Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Αν. Καθ. κ. Ν. Πελεκάση που είναι χαλκέντερο άτομο και επιστήμονας που αποτελεί πηγή γνώσης για εμένα όλα αυτά τα χρόνια. Οφείλω θερμές ευχαριστίες στους Καθηγητές κ. Δ. Βαλουγεώργη και κ. Ν. Βλάχο για τις πολύτιμες υποδείξεις - συμβουλές τους διότι συνετέλεσαν τα μέγιστα για την άρτια ολοκλήρωση της εργασίας.

Ακολουθώς να ευχαριστήσω τη σύντροφο μου Σοφία για την αμέριστη συμπαράσταση και την ανιδιοτελή της αγάπη σε όλο το διάστημα των σπουδών μου, την αδερφή μου Θεοδοσία και ιδιαίτερα τους γονείς μου Απόστολο και Θεανώ καθώς χάρη στους αγώνες και τους κόπους τους κατόρθωσα να σπουδάσω.

Εν τέλει να ευχαριστήσω το υς φίλο υς μου Διαμαντή, Δημήτρη και Λοικά για όλες τις υπέροχες στιγμές που έχουμε περάσει έως τώρα.

Αφιερώνω αυτή την εργασία στο υς Δασκάλο υς που σημάδεψαν τη ζωή μου με τον ώριμο και πολλές φορές σοφό τρόπο σκέψης τους και τον αδαμάντινο χαρακτήρα τους. Ελπίζω έστω και ελάχιστα κάποια στιγμή να τους προσεγγίσω...



*"Εἰς μὲν τὸν πατέρα μου οφείλω τὸ ζῆν, εἰς δὲ τὸν διδάσκαλό μου τὸ εὖ ζῆν"*

**Ἀλέξανδρος ὁ Μέγας**

**ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΡΟΗΣ ΥΓΡΟΥ  
ΜΕΤΑΛΛΟΥ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑ  
ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ**

ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2010

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η παρούσα εργασία αποτελεί παραμετρική μελέτη ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής έτσι ώστε να καλυφθούν τρισδιάστατες διαταραχές που εφαρμόζονται κατά την αξονική διεύθυνση του αγωγού. Το ομογενές μαγνητικό πεδίο που επιβάλλεται είναι κάθετο ως προς την κατεύθυνση της δύναμης της βαρύτητας. Οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το πρόβλημα και επιλύονται αριθμητικά είναι : η συνέχεια της μάζας και της ορμής, διατήρηση της ενέργειας και του ηλεκτρικού φορτίου.

Υιοθετούμε τη μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων τύπου Galerkin για τον υπολογισμό της δισδιάστατης μόνιμης κατάστασης του συστήματος και για την διακριτοποίηση του γραμμικού προβλήματος ευστάθειας στο παραμετρικό πεδίο που καθορίζεται από τους αδιάστατους αριθμούς Gr, Ha, Pr, τον ογκομετρικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας S και τον λόγο όψεως A της διατομής. Η επαναληπτική μέθοδος Arnoldi χρησιμοποιείται για την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών που προκύπτει μέσω της ανάλυσης το  $u$  προ βήματος  $\zeta$  και για τον

υπολογισμό των ιδιοτιμών με την μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή, με σημαντική εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και κόστους.

Η μέθοδος GMRES (General Minimal Residual) εφαρμόζεται για την επίλυση του προβλήματος ευστάθειας προκειμένου να καταστεί δυνατή η ενδελεχής παρακολούθηση, μέσω της παραμετρικής συνέχειας (parametric continuation), της εξέλιξης μιας συγκεκριμένης ασταθούς ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί σε αυτήν και κατ' επέκταση να λάβει χώρα η κατασκευή των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας μέσω των οποίων είναι εφικτή η αναγνώριση του κυρίαρχου μήκους κύματος που καθορίζει την δυναμική του συστήματος που εξετάζουμε.

Για μία μικρή σχετικά τιμή του αριθμού  $Pr=0.032$  διαπιστώθηκε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς εν συγκρίσει με τις δισδιάστατες διαταραχές, που είχαν προκύψει κατά την δισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας από τον Pelekasis (2006), ενώ σε κάθε περίπτωση η αύξηση του αριθμού  $Ha$  επέφερε αύξηση στην κρίσιμη τιμή του αριθμού  $Gr$ . Κατά την διάρκεια της παραμετρικής ανάλυσης αναδύονται δύο είδη ασταθών ιδιομορφών : το στάσιμο κύμα που χαρακτηρίζεται από μηδενικό φανταστικό μέρος της μιγαδικής ιδιοτιμής και το οδεύον κύμα το οποίο διαθέτει μη μηδενικό φανταστικό μέρος και αποτελεί το κυρίαρχο μήκος κύματος. Οι συγκεκριμένες ιδιομορφές προκύπτουν ως αποτέλεσμα κεντρόφυγης αστάθειας εξαιτίας των καμπυλότητας των ροϊκών γραμμών στη διαμόρφωση της βασικής ροής.

Τέλος, εφαρμόζουμε παραμετρική ανάλυση μεταβάλλοντας τον ογκομετρικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας  $S$  έτσι ώστε αφενός μεν να κατανοηθεί και αφετέρου δε να ταυτοποιηθεί η φύση των ασταθειών που εμφανίζονται και επιπλέον μελετούμε την επίδραση του λόγου όψεως  $A$  της διατομής καθώς λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές προκειμένου να αναδειχθεί η επίδραση των εστιών ανακυκλοφορίας στη δυναμική του προβλήματος.



Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία  
viii

# Περιεχόμενα

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Εισαγωγή</b> .....   | <b>1</b>  |
| 1.1 Γενικά-Βιβλιογραφική Ανασκόπηση .....   | 1         |
| 1.2 Οργάνωση της Εργασίας .....   | 17        |
| <b>2 Κατάστρωση του Προβλήματος</b> .....   | <b>18</b> |
| 2.1 Ελεύθερη συναγωγή υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής με βαθμίδα θερμοκρασίας και ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας ..... | 18        |
| 2.2 Συνοριακές Συνθήκες .....   | 23        |
| 2.3 Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας .....   | 26        |
| <b>3 Αριθμητική Ανάλυση</b> .....   | <b>30</b> |
| 3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων .....  | 30        |
| 3.1.1 Περιγραφή μεθόδου .....   | 30        |
| 3.1.2 Συναρτήσεις βάσης .....   | 30        |
| 3.1.3 Συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange .....  | 31        |
| 3.1.4 Συναρτήσεις βάσης linear Lagrange .....   | 32        |
| 3.2 Αριθμητική επίλυση προβλήματος μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή .....  | 33        |
| 3.2.1 Μέθοδος GMRES .....   | 37        |
| 3.2.2 GMRES με preconditioner .....   | 39        |
| 3.3 Αριθμητική επίλυση του προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή .....  | 42        |
| 3.3.1 Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών - Επαναληπτική μέθοδος Arnoldi .....  | 46        |
| 3.3.2 Παρακολούθηση της εξέλιξης συγκεκριμένης ιδιομορφής στον χώρο των παραμέτρων – Χρήση της επαναληπτικής μεθόδου GMRES .....                              | 49        |
| <b>4 Αποτελέσματα</b> .....   | <b>53</b> |
| 4.1 Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή .....  | 53        |
| 4.2 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής .....   | 62        |
| 4.3 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου .....                            | 65        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.3.1 Επίδραση του μαγνητικού πεδίου στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση τετραγωνικής διατομής αγωγού (λόγος όψης $A=1$ ) και ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S=100000$ ..... | 66        |
| 4.3.2 Επίδραση του ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S$ στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση τετραγωνικής διατομής αγωγού (λόγος όψης $A=1$ ) και αριθμού $Ha=20$ .....          | 71        |
| 4.3.3 Επίδραση του λόγου όψεως στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S=100000$ και αριθμού $Ha=20$ .....  | 75        |
| <b>5 Συμπεράσματα &amp; Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα.....</b>  | <b>80</b> |
| <b>Βιβλιογραφία .....</b>   | <b>84</b> |

# I) Εισαγωγή

## 1.1 Γενικά-Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η Μαγνητοϋδροδυναμική (ΜΥΔ ή MHD MagnetoHydroDynamics) αποτελεί κλάδο της Φυσικής που εξετάζει την μακροσκοπική αλληλεπίδραση (macroscopic interaction) των ηλεκτρικά φορτισμένων ρευστών με ένα μαγνητικό πεδίο (magnetic field).

Σύμφωνα με τις αρχές της μαγνητοϋδροδυναμικής παράγεται ρεύμα, όταν ένα μαγνητικό πεδίο εφαρμοστεί κατά διεύθυνση κάθετη προς τη ροή ενός ηλεκτρικά αγωγίμου ρευστού. Στην περίπτωση αυτή ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει το αγωγίμο ρευστό με διεύθυνση κάθετη τόσο ως προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου όσο και ως προς τη ροή του ρευστού.

Η μελέτη μαγνητοϋδροδυναμικών ροών - ροές αγωγίμων ρευστών (υγρά μέταλλα, ηλεκτρολύτες, πλάσμα κ.τ.λ.) παρουσία μαγνητικού πεδίου - αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της σύγχρονης ρευστομηχανικής. Οι συγκεκριμένες μελέτες έχουν ως απαρχή το έτος 1937 όταν δημοσιεύτηκαν οι πρωτοποριακές, για την εποχή, εργασίες των Hartmann και Lazarius [1,2], οι οποίοι εφάρμοσαν θεωρητική και πειραματική ανάλυση σε στρωτή ροή υδραργύρου σε αγωγούς, παρουσία μαγνητικού πεδίου. Το εν λόγω θέμα αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Alfven [3,4], ο οποίος θεμελίωσε τις βασικές αρχές της ΜΥΔ συσχετίζοντας την κλασική υδροδυναμική με τον ηλεκτρομαγνητισμό και για τη συνεισφορά του στην Επιστήμη έτυχε βράβευσης με το Βραβείο Nobel το 1970. Οι βασικές αρχές της ΜΥΔ περιγράφονται λεπτομερώς σε πολλά εγχειρίδια γενικού περιεχομένου, βλ. [5-7].

Οι ΜΥΔ ροές καταλαμβάνουν εξέχουσα θέση σε πολλές εφαρμοσμένες και θεμελιώσεις μελέτες. Αρχικά, οι ΜΥΔ ροές ρευστών σε κανάλια αποτελούν τη βάση σε διάφορες βιομηχανικές εφαρμογές. Ενδεικτικά αναφέρουμε: μετρήσεις αγωγίμων ρευστών ευρισκόμενα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [8,9], ηλεκτρομαγνητικές αντλίες που βρίσκουν εφαρμογή στη μεταλλουργία καθώς και συστήματα ψύξης σε πυρηνικούς αντιδραστήρες όπου χρησιμοποιούνται υγρά μέταλλα [10], ΜΥΔ γεννήτριες οι οποίες αποτελούν συσκευές για την απευθείας μετατροπή της θερμικής ενέργειας σε ηλεκτρική [11,12], και ΜΥΔ συστήματα για την προώθηση θαλάσσιων

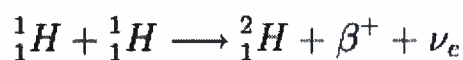
δεξαμενών [13]. Μάλιστα, στη βιομηχανία της χύτευσης χάλυβα και αλουμινίου είναι πολλές φορές απαραίτητη η μεταφορά του υγρού μετάλλου μέσα σε ανοιχτά κανάλια. Οι συσκευές που έχουν αναπτυχθεί στηρίζονται στο γεγονός ότι η ροή του υγρού μετάλλου καθορίζεται από την επίδραση του μαγνητικού πεδίου που ασκείται στο ανοιχτό κανάλι. Να τονίσουμε ότι η ΜΥΔ αρχικά εφαρμοζόταν σε προβλήματα αστροφυσικής και γεωφυσικής, όπου και σήμερα συνεχίζει να έχει κύριο ρόλο, αλλά βρίσκει εφαρμογή στον τομέα της πυρηνικής σύντηξης.

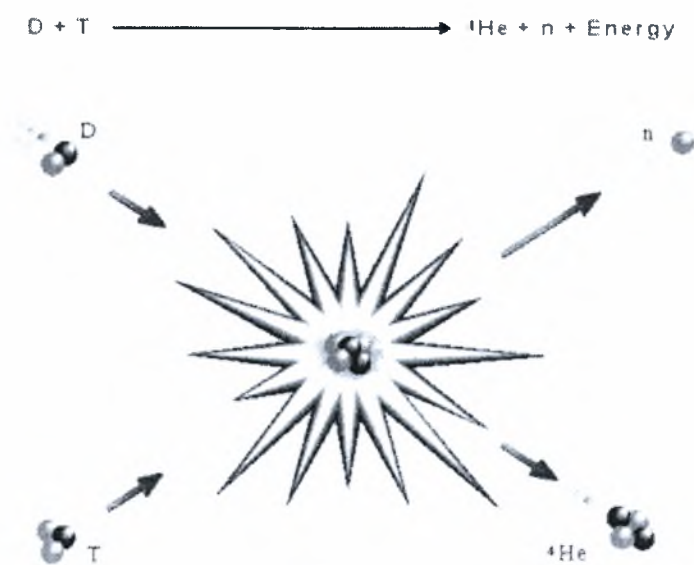
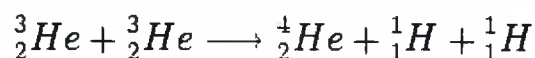
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε σχετικά με τη σύντηξη ότι αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη μελλοντική ενεργειακή λύση, χαρακτηριστικό της οποίας θα είναι τα μεγάλα ενεργειακά αποθέματα ενώ παράλληλα δεν θα υπάρχουν δυσμενείς συνέπειες στο περιβάλλον.

Πυρηνική σύντηξη (*συν + τήξη*) ονομάζεται η συνένωση ελαφρών πυρήνων με ταυτόχρονη απελευθέρωση ενέργειας. Η ενέργεια που απελευθερώνεται οφείλεται στο ότι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο στα προϊόντα της σύντηξης είναι μικρότερη από το άθροισμα των ενεργειών σύνδεσης που χαρακτηρίζει κάθε αντιδρών συστατικό της σύντηξης. Κατ' αυτόν τον τρόπο, με τη δημιουργία των προϊόντων στη διαδικασία της σύντηξης υπάρχει ένα "περίσσειμα" ενέργειας, που οφείλεται στη διαφορά των ενεργειών σύνδεσης, και αυτή απελευθερώνεται στο περιβάλλον με μορφή κινητικής ενέργειας στα παραπροϊόντα (πχ σωματίδια β ή νετρίνα ηλεκτρονίου) και με τη μορφή ακτινοβολίας γάμμα.

Πυρηνική σύντηξη μπορούν να δημιουργήσουν μόνον ελαφρά στοιχεία, όπως τα ισότοπα του υδρογόνου δευτέριο και τρίτιο. Με την θέρμανση αερίου υδρογόνου σε υψηλές θερμοκρασίες προκαλούνται συγκρούσεις των πυρήνων των ατόμων του υδρογόνου, με μεγάλη ενέργεια που τελικά αυτοί συνενώνονται δημιουργώντας σταδιακά πυρήνες ενός άλλου στοιχείου (μεταστοιχείωση), του ηλίου, εκλύοντας ταυτόχρονα θερμική ενέργεια και κινητική ενέργεια λόγω των νετρονίων.

Οι πυρηνικές αντιδράσεις που περιγράφουν την εξώθερμη σύντηξη υδρογόνου, αρχικά σε δευτέριο και τελικά σε ήλιο είναι οι ακόλουθες:





Σχήμα 1: Αντίδραση του δευτέρου με τρίτιο

όπου:

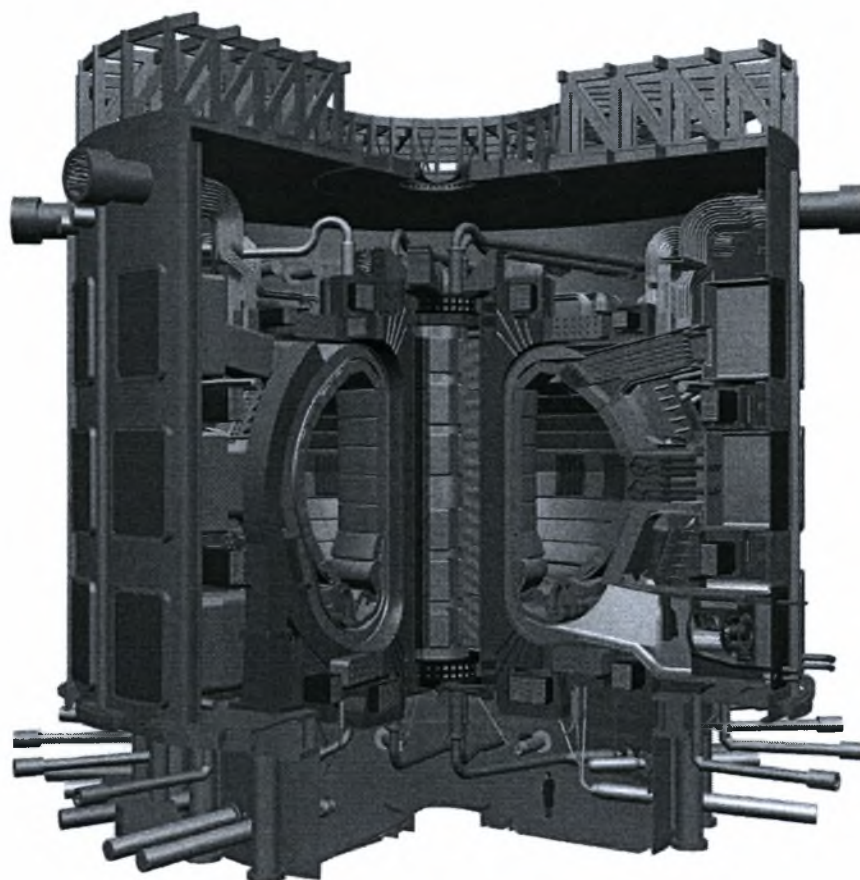
- ${}^1_1\text{H}$  ο πυρήνας του υδρογόνου,
- ${}^2_1\text{H}$  ο πυρήνας του δευτερίου,
- ${}^3_2\text{He}$  το ελαφρύ ισότοπο 3/2 του ηλίου
- ${}^4_2\text{He}$  το ισότοπο 4/2 του ηλίου που συναντάμε και πιο συχνά στο περιβάλλον,
- $\beta^+$  είναι το ποζιτρόνιο,
- $\nu_e$  είναι το νεutrίνο ηλεκτρονίου,
- $\gamma$  είναι η ακτινοβολία γάμμα.

Τα τελικά προϊόντα των αντιδράσεων είναι ήλιο και νετρόνια. Η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται, από τη σύντηξη ενός γραμμαρίου μίγματος 50% σε δευτέριο και τρίτιο αντίστοιχα, είναι 94000 kWh, δηλαδή ποσότητα ενέργειας που

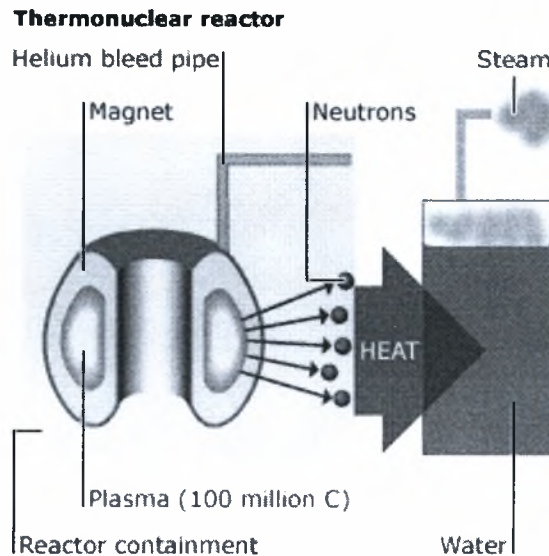


είναι πολλαπλάσια κατά 10,000,000 φορές από την ποσότητα ενέργειας που λαμβάνουμε από καύση ενός γραμμαρίου πετρελαίου.

Αντιδράσεις σύντηξης εξελίσσονται συνέχεια στον Ήλιο, καθώς και σε θερμοπυρηνικούς αντιδραστήρες. Εν συντομία τονίζουμε ότι θερμοπυρηνικός αντιδραστήρας ονομάζεται η διάταξη εκείνη εντός της οποίας παράγεται θερμική ενέργεια μέσω ελεγχόμενης πυρηνικής σύντηξης. Τα αντιδρώντα και τα προϊόντα της αντίδρασης είναι σε μορφή ιονισμένου αερίου που ονομάζεται πλάσμα.



Σχήμα 2: Σχηματικό διάγραμμα του αντιδραστήρα ITER.



Σχήμα 3: Συνοπτική αρχή λειτουργίας του θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα

Θεωρείται ότι οι θερμοπυρηνικοί αντιδραστήρες βρίσκονται ακόμη σε πειραματικό στάδιο. Το γνωστότερο είδος τέτοιου αντιδραστήρα είναι τα Τόκαμακ (ΤΟΚΑΜΑΚ) όπου τοροειδές μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιείται για τη συγκράτηση του πλάσματος στο εσωτερικό του. Τέτοιοι αντιδραστήρες υπάρχουν αρκετοί διεθνώς. Στην Ευρώπη και συγκεκριμένα στο Cadarache της Γαλλίας το 2008 έχει δρομολογηθεί η κατασκευή του αντιδραστήρα ITER. Το έργο αυτό θεωρείται σημαντικό βήμα όσον αφορά τη δημιουργία πρωτότυπων αντιδραστήρων σύντηξης για ασφαλείς, φιλικούς προς το περιβάλλον και οικονομικά βιώσιμους σταθμούς ηλεκτροπαραγωγής.

Η λειτουργία ενός θερμοπυρηνικού αντιδραστήρα στηρίζεται στο γεγονός ότι ισχυρό ηλεκτρικό ρεύμα, που διοχετεύεται, θερμαίνει το εντός του αντιδραστήρα αέριο υδρογόνο, ενώ ισχυρότατα μαγνητικά πεδία αποτρέπουν την πρόσκρουσή του στα τοιχώματα της σωληνοειδούς διάταξης. Τα εκλυόμενα νετρόνια διέρχονται μέσω του μανδύα που περιβάλλει τον αντιδραστήρα όπου θερμαίνουν το νερό που κυκλοφορεί για την παραγωγή ατμού. Με αυτό τον τρόπο έχουν μεν επιτευχθεί αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης αλλά όχι σε τέτοιο βαθμό που να μπορούν να προσφέρουν εκμεταλλεύσιμο ποσό ενέργειας σε σταθερή βάση. Στον μανδύα κυκλοφορεί παράλληλα υγρό λίθιο το οποίο χρησιμοποιείται για την αναπαραγωγή του τριτίου που είναι ένα από τα αντιδρώντα της πυρηνικής σύντηξης.

Από τα βασικά ζητήματα που απασχολούν τους σχεδιαστές αντιδραστήρα σύντηξης αποτελεί το γεγονός ότι η οικονομική βιωσιμότητα ενός αντιδραστήρα σύντηξης δύναται να μειωθεί σημαντικά από τη συχνή διακοπή λειτουργίας (shutdown) και τη συντήρηση αντικατάστασης. Στη μηχανική της σύντηξης ένα από τα μείζονα θέματα είναι ο σχεδιασμός συστημάτων με σκοπό την αντιμετώπιση υψηλών θερμοκρασιών και τον βομβαρδισμό από σωματίδια υψηλής ροής με αποτέλεσμα την διάβρωση των υλικών PFC (Plasma Facing Components) [14].

Αρχικά, είχε προταθεί από τον Christofilos [15] το 1971 η ιδέα αντικατάστασης του στερεού πρώτου τοιχώματος (first wall) με τοίχωμα όπου θα περιστρέφεται υγρό μέταλλο. Αργότερα, το 1987 ο Moir [16] μελέτησε την σκοπιμότητα του εγχειρήματος και σημειώθηκαν περαιτέρω βελτιώσεις το 1995 [17]. Εν συνεχεία, προτάθηκε ο σχεδιασμός εκτροπέα και του πρώτου τοιχώματος έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί η υψηλή ροή θερμότητας και η ροή των σωματιδίων στην επιφάνεια των PFC, από τους Mattas και Abdou [18]. Επιπλέον, στο πρόγραμμα ALPS (Advanced Limiter-divertor Plasma-facing Systems) που έχει αναπτυχθεί στις Η.Π.Α. μελετήθηκε η χρήση των PFC και συνεχίζεται η εν λόγω έρευνα για τον σχεδιασμό μελλοντικών αντιδραστήρων σύντηξης [19,20].

Οι μελέτες που έχουν αναπτυχθεί περιλαμβάνουν αποτελέσματα από το sputtering του υγρού μετάλλου, ΜΥΔ αστάθειες και εν γένει της δυναμικής της ροής των υγρών μετάλλων, ανακύκλωση σωματιδίων και λειτουργία τους, θερμική υδραυλική και τέλος από την ασταθή λειτουργία του tokamak [21-25].

Οι Cheng-Yue et al. καταλήγουν στο γεγονός ότι η χρήση του υγρού λιθίου στο εμπρόσθιο μέρος του στερεού πρώτου τοιχώματος δεν θέτει σε κίνδυνο τον πυρήνα του πλάσματος. Για παράδειγμα, αν η θερμοκρασία εισόδου του υγρού λιθίου είναι 500K, ακόμη και αν η ταχύτητα της ροής είναι μικρή της τάξης των  $0.1 \text{ m/s}$ , η θερμοκρασία εξόδου δεν θα υπερβεί τους 740K. Κατά συνέπεια ο ρυθμός εξάτμισης του υγρού λιθίου δεν είναι υψηλός για τέτοιου είδους χαμηλή θερμοκρασία [26], αν μάλιστα λάβουμε υπόψη μας ότι η θερμότητα εξάτμισης του ατόμου του εν λόγω υγρού μετάλλου είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ενός ατόμου του νερού.

Ως εκ τούτου, αν μπορεί να παραληφθεί το sputtering του υγρού μετάλλου, έστω και αν δεν εξεταστούν οι επιπτώσεις της απομάκρυνσης του εκτροπέα, το υγρό λίθιο δεν είναι σε θέση να θέσει σε κίνδυνο τον πυρήνα του πλάσματος. Η χρήση της ροής

του υγρού μετάλλου παρέχει το πλεονέκτημα ανανεώσιμου πρώτου τοιχώματος, απομακρύνει τη θερμική ενέργεια και συγχρόνως προστατεύει το όπισθεν μέρος του στερεού πρώτου τοιχώματος από την ρηγμάτωση. Άμεση συνέπεια είναι ο πυρήνας του πλάσματος να μην μολύνεται από ακαθαρσίες, ιδιαίτερα από τη στιγμή που το λίθιο αποτελεί ένα ισχυρό μέσο απομάκρυνσης ακαθαρσιών όπως έχει αποδειχθεί από πειράματα με υγρό λίθιο [25].

Όπως είναι φανερό, στον μανδύα του αντιδραστήρα λαμβάνουν χώρα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας, μάζας και ορμής υπό την παρουσία ισχυρότατου μαγνητικού πεδίου. Αποτελεί λοιπόν σημαντική ερευνητική προτεραιότητα να μελετηθούν κλασσικά προβλήματα ροής και υδροδυναμικής ευστάθειας υπό το πρίσμα των μαγνητοϋδροδυναμικών αλληλεπιδράσεων. Η κατανόηση τέτοιων προβλημάτων αναμένεται να συμβάλλει τόσο στον βέλτιστο σχεδιασμό αντιδραστήρων σύντηξης αλλά και γενικότερα στην περαιτέρω ανάπτυξη υπαρχουσών εφαρμογών της μαγνητοϋδροδυναμικής.

Εξαιτίας της σημαντικότητάς τους σε εφαρμογές μηχανικής, οι ΜΥΔ ροές έχουν μελετηθεί εντατικά σε θεωρητικό επίπεδο [7, 27, 28]. Η περίπτωση που έχει μελετηθεί ιδιαίτερος αφορά κανάλι ορθογωνικής διατομής καθώς αποτελεί την βάση για την πλειονότητα των ΜΥΔ τεχνολογικών εφαρμογών.

Οι ΜΥΔ ροές είναι συνήθη φαινόμενα σε σύγχρονες πειραματικές διατάξεις όπως το tokamak που έχουν ως σκοπό την συγκράτηση του πλάσματος σύντηξης. Η ροή του πλάσματος σε tokamak αναπτύσσεται σε συστήματα με επιπρόσθετη θέρμανση όπως, για παράδειγμα, σε κυκλοτρόνια θέρμανσης ιόντων σε συχνότητα συντονισμού. Η επίδραση των ροών στην διαμόρφωση του πλάσματος από την πλευρά της ευστάθειας δεν έχει κατανοηθεί πλήρως. Πολυάριθμες πειραματικές παρατηρήσεις κατέδειξαν ότι η ροή του πλάσματος σε διατάξεις tokamak μπορεί να βελτιώσει τον περιορισμό του συνολικού πλάσματος σταθεροποιώντας τους kink and resistive wall modes και ταυτόχρονα καταστέλλοντας την τύρβη [29-31].

Η ανάλυση ευστάθειας των ΜΥΔ ροών συνιστά ένα ενδιαφέρον και συγχρόνως δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα. Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας τέτοιου είδους συστημάτων διενεργήθηκε για πρώτη φορά στην κλασσική εργασία των Frieman και Rotenberg [32]. Απέδειξαν ότι, σε αντίθεση με το στατικό πρόβλημα, ο γραμμικός τελεστής της δυναμικής της ροής γίνεται non-Hermitian (non-self-adjoint) και κατ'επέκταση δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η θεωρία που αφορά τους



Hermitian γραμμικούς τελεστές. Επιπρόσθετα, οι ιδιοσυχνότητες μιας ιδιομορφής, έχοντας εισάγει διαταραχές στη ροή, δύνανται να προσλαμβάνουν εν γένει μιγαδικές τιμές. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ανάλυση ευστάθειας σε ΜΥΔ ροές να καθίσταται δύσκολη ακόμη και σε περιπτώσεις απλής γεωμετρίας προβλημάτων.

Εν αντιθέσει με την στατική περίπτωση, όπου η γνωστή αρχή διατήρησης της ενέργειας χρησιμοποιείται με σκοπό να καθοριστεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια του μη γραμμικού προβλήματος [33], στην περίπτωση όπου υπάρχει ροή η αρχή διατήρησης της ενέργειας καθορίζει μόνο την ικανή συνθήκη η οποία είναι καθοριστικής σημασίας για το πρόβλημα και σχεδόν ποτέ δεν ικανοποιείται [34]. Διάφορες προσπάθειες διενεργήθηκαν για την εύρεση προσέγγισης μεταβολών (variational approach) έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η γενίκευση της αρχής διατήρησης της ενέργειας για συστήματα όπου μελετώνται ΜΥΔ ροές [35]. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό απέχει αρκετά από μια ολοκληρωμένη λύση.

Η παρούσα εργασία αποτελεί επέκταση μελέτης που είχε διενεργηθεί από τον Pelekasis [36] στην οποία είχε ερευνηθεί διατομή αγωγού παρουσία οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, εσωτερικής πηγής θερμότητας και βαθμίδα θερμοκρασίας τιθέμενη κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας. Η εν λόγω μελέτη είναι συνυφασμένη με σύγχρονες τεχνολογικές εφαρμογές τις οποίες και θα παραθέσουμε πιο αναλυτικά.

Στο πλαίσιο του σχεδιασμού του αντιδραστήρα τύπου tokamak έχει ενδιαφέρον η συσχέτιση της απομάκρυνσης θερμότητας με την αναγέννηση του τριτίου που λαμβάνει χώρα σε ειδικά διαμορφωμένες μονάδες στο μανδύα του αντιδραστήρα. Σύμφωνα με ορισμένες σχεδιαστικές προτάσεις που διερευνώνται, η αναπαραγωγή του τριτίου και η ψύξη του αντιδραστήρα πραγματοποιούνται σε διαφορετικά τμήματα του μανδύα.

Στις μονάδες όπου η απομάκρυνση της θερμότητας κατέχει δεσπόζουσα θέση το υγρό μέταλλο (π.χ. υγρό λίθιο) αντλείται μέσω της χρήσης κεφαλής υψηλής πίεσης η οποία είναι απαραίτητη για την επίτευξη υψηλών ρυθμών μεταφορών θερμότητας. Στις περιοχές όπου πραγματοποιείται η παραγωγή υγρού μετάλλου το υγρό λίθιο αντλείται αργά, ενεργώντας τοιουτοτρόπως ως το μέσο λειτουργίας, και απορροφά ακτινοβολία υπό την μορφή νετρονίων που εκπέμπονται εντός του πυρήνα του αντιδραστήρα, προκειμένου να παράσχει την απαιτούμενη ποσότητα τριτίου έτσι ώστε να συντηρηθεί η αντίδραση σύντηξης που λαμβάνει χώρα στο εσωτερικό του πυρήνα [37].

Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την ύπαρξη μιας εξαιρετικά εξώθερμης αντίδρασης και έχει ως συνέπεια την απομάκρυνση υψηλού ποσού θερμότητας που παράγεται εντός του περιβλήματος και αυτό αποτελεί εκ των πραγμάτων μια επιπλέον παράμετρο σχεδιασμού που πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Στην παρούσα εργασία η ροή του υγρού μετάλλου χαρακτηρίζεται από φυσική συναγωγή που κυριαρχεί έναντι της βεβιασμένης συναγωγής ενώ ταυτόχρονα παρατηρείται μια ενδιαφέρουσα αλληλεπίδραση των διαφόρων δυνάμεων που αναπτύσσονται και καθορίζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος και κατ' επέκταση θα επηρεάζουν την τον τελικό σχεδιασμό του αντιδραστήρα.

Ιδιαίτερως η επίδραση της δύναμης Lorentz, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο ισχυρό τοροειδές μαγνητικό πεδίο του αντιδραστήρα tokamak και στην κίνηση του ηλεκτρικού ρεύματος εντός του μανδύα, πρέπει να ληφθεί υπόψη όσον αφορά την ανάλυση ευστάθειας της ροής. Η πτώση πίεσης στους αγωγούς κυκλοφορίας λιθίου στον αντιδραστήρα οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις Lorentz, οι οποίες ασκούνται στο κινούμενο ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό, το οποίο έρχεται σε επαφή με το μαγνητικό πεδίο μέσα στον αγωγό. Ιδανική ηλεκτρική μόνωση στο τοίχωμα του αγωγού θα εμπόδιζε τα ρεύματα να διέλθουν το υψηλής αγωγιμότητας τοίχωμα και θα ελαχιστοποιούσε το ρεύμα στο ρευστό και κατ' επέκταση την πτώση πίεσης λόγω της δύναμης Lorentz. Όμως τα τοιχώματα συνήθως έχουν κάποια αγωγιμότητα και είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί η εμφάνιση εστιών ανακυκλοφορίας και η συνεπαγόμενη πτώση πίεσης σαν αποτέλεσμα των ασταθειών που εμφανίζονται.

Όσον αφορά τις ΜΥΔ ροές σε σημεία διεύρυνσης και στενώσεις, γνωρίζουμε ότι ένα αδιάστατο μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι ο αριθμός Hartmann:

$$Ha = BL \sqrt{\sigma/\eta}$$

όπου :

- B είναι το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής,
- L είναι το χαρακτηριστικό μήκος,
- $\sigma$  είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα,
- $\eta$  είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.



Για μεγάλους αριθμούς Hartmann (όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές, οι οποίες αφορούν τη σύντηξη και λαμβάνει τιμές από  $10^3 - 3 \times 10^4$ ), η κύρια ισορροπία δυνάμεων επέρχεται ανάμεσα σε πίεση και δυνάμεις Lorentz, ενώ οι δυνάμεις ιξώδους συγκρατώνται από σχετικά λεπτό πάχος συνοριακού στρώματος κατά μήκος των τοιχωμάτων του αγωγού.

Η ευστάθεια βεβαιωμένης συναγωγής έχει μελετηθεί θεωρητικά και πειραματικά σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής. Είναι γνωστό από πειραματικές μελέτες [38] όπου ρέει υγρό μέταλλο μέσω ορθογωνικού αγωγού τιθέμενο σε ισχυρό και κάθετο στην κίνησή του μαγνητικό πεδίο ότι η στρωτή πλήρως ανεπτυγμένη ροή γίνεται ασταθής λόγω της τρισδιάστατης διαταραχής. Επιπλέον, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι στην γειτονική περιοχή των δύο τοιχωμάτων του αγωγού που είναι παράλληλοι στο μαγνητικό πεδίο, σχηματίζονται δύο στρώματα με πάχος  $O(Ha^{-1/2})$  όπου η ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ μεγαλύτερη συγκρινόμενη με οποιαδήποτε μέρος της διατομής.

Τα στρώματα αυτά καλούνται πλευρικά στρώματα (side layers) και εμφανίζονται επίσης στην περίπτωση όπου έχουμε φυσική συναγωγή. Μελετώντας τη συμπεριφορά του προβλήματος σε υψηλούς αριθμούς  $Ha$  σχηματίζονται δύο στρώματα με πάχος  $O(Ha^{-1})$  εφαπτομενικά στα δύο τοιχώματα τα οποία είναι κάθετα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Τα στρώματα αυτά ονομάζονται στρώματα Hartmann (Hartmann layers) και παρατηρούνται στη ροή υγρού μετάλλου με φυσική συναγωγή.

Σύμφωνα με τους Ting et al. [39] η αποσταθεροποίηση της πλήρως ανεπτυγμένης ροής σε αγωγό αποδίδεται στην ύπαρξη υψηλών ταχυτήτων που επικρατούν στα πλευρικά στρώματα. Στο πλαίσιο αυτό, εφάρμοσαν ανάλυση ευστάθειας στη διαμόρφωση της ροής που προσιδιάζεται από τα πλευρικά συνοριακά στρώματα έλαβαν μια κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds για την περίπτωση της συναγωγής η οποία είναι αρκετά χαμηλότερη από την αντίστοιχη πειραματική τιμή.

Τονίζουμε ότι ο αριθμός Reynolds συσχετίζει τις αδρανειακές δυνάμεις με τις ιξώδεις δυνάμεις και εκφράζεται ως εξής :

$$Re = \frac{Vh}{\nu} = \frac{\rho Vh}{\mu} = \frac{\rho V^2 h^2}{\mu Vh}$$

όπου :

- $V$  η χαρακτηριστική ταχύτητα,
- $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,

- $\mu$  το δυναμικό ιξώδες,
- $h$  το χαρακτηριστικό μήκος,
- $\nu$  το κινηματικό ιξώδες.

Σημειωτέον ότι στην πλήρως αναπτυγμένη ροή ο αριθμός Reynolds δεν μεταβάλλεται με την απόσταση, αλλά καθορίζεται από τη διάμετρο του αγωγού και την μέση ταχύτητα της ροής. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέση ταχύτητα της ροής, τόσο αυξάνεται ο αριθμός Reynolds.

Παρόλα αυτά, η ανάλυση που εφάρμοσαν βρίσκεται σε ποιοτική συμφωνία με τα πειραματικά ευρήματα των δισδιάστατων εστιών ανακυκλοφορίας, οι οποίες είναι παράλληλες με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και περιορίζονται εντός των πλευρικών τοιχωμάτων στην περίπτωση βεβιασμένης συναγωγής σε αγωγούς [40].

Από την άλλη πλευρά, οι Lingwood και Alboussiere [41] μελέτησαν την ευστάθεια της συνοριακής στοιβάδας Hartmann στο όριο απειροστών διαταραχών και διαπίστωσαν μια κρίσιμη τιμή του λόγου  $Re/Ha$ , σχετικά με την ευστάθεια, αρκετά χαμηλότερη από την παρατηρούμενη πειραματική τιμή. Καταφεύγοντας σε μια ενεργειακή προσέγγιση που λαμβάνει υπόψη τις πεπερασμένες διαταραχές κατάφεραν να βρουν μια πιο λογική τιμή του συγκεκριμένου λόγου.

Η διαπίστωσή τους αυτή ενισχύεται από την ασθενώς μη γραμμική ανάλυση [42] όπου η υποκρίσιμη αποσταθεροποίηση της βασικής λύσης που αντιστοιχεί σε στοιβάδα Hartmann επαληθεύεται για τιμές του λόγου  $Re/Ha$  που είναι χαμηλότερες από την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή του.

Στην περίπτωση της ΜΥΔ ροής σε αγωγούς ο σχηματισμός της προαναφερθείσας πλευράς και των στοιβάδων Hartmann παρατηρείται επίσης μαζί με τον πυρήνα της ροής (core flow), ο οποίος δύναται να είναι τρισδιάστατης φύσης [37]. Στην ίδια μελέτη, διαπιστώθηκε για πρώτη φορά η επίδραση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του τοιχώματος.

Στην πραγματικότητα είχε τονιστεί ότι για τέλεια αγωγίμα τοιχώματα σχηματίζονται υψηλής ταχύτητας δέσμες (jets) κοντά στα πλευρικά τοιχώματα. Το γεγονός αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις στο ποσό της θερμότητας που μεταφέρεται υπό την προϋπόθεση ότι η δομή αυτή παραμένει σταθερή.

Έχει διαπιστωθεί πειραματικά και θεωρητικά μέσω της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας [43] ο σχηματισμός μιας οιονεί διαστάτης δομής εστιών ανακυκλοφορίας, λόγω συναγωγής, η οποία είναι παράλληλη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ενώ η κρίσιμη τιμή του αριθμού Rayleigh αυξάνεται περίπου όπως ο όρος  $Ha^2$  καθώς ο  $Ha$  αυξάνεται. Τονίζουμε ότι ο αριθμός Rayleigh εκφράζει την ένταση της φυσικής συναγωγής και περιγράφεται από την παρακάτω σχέση :

$$Ra = \frac{\beta_g \Delta T_h^3}{\nu \alpha}$$

όπου :

- $\beta$  ο συντελεστής θερμικής διαστολής,
- $g$  η βαρύτητα,
- $\Delta T$  η διαφορά θερμοκρασίας,
- $\alpha$  η θερμοδιαχυτότητα.

Στην παρούσα εργασία, το μαγνητικό πεδίο δύναται να μεταβάλλεται ως προς την τιμή της έντασής του που καθορίζεται από τον αριθμό  $Ha$  και τίθεται κάθετα ως προς τη θερμοκρασιακή διαφορά και στην κατεύθυνση της βαρύτητας. Αποτέλεσμα αυτής της διαμόρφωσης αποτελεί το γεγονός η διάχυση Joule (Joule dissipation) να καταστρέφει εστίες ανακυκλοφορίας που είναι κάθετες στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ενώ επιμηκύνει τις εστίες που βρίσκονται παράλληλες σε αυτό.

Για την περίπτωση ανωστικής ροής ανάμεσα σε δύο κάθετες πλάκες η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου παρατηρήθηκε [44] να επιδρά σταθεροποιητικά έχοντας σταθερή θερμοκρασιακή διαφορά με ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο τιθέμενο κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας. Διαπιστώθηκε επίσης η μετάβαση από στάσιμα σε οδεύοντα κύματα με κατεύθυνση κάθετη στις δύο πλάκες υποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο την σκοπιμότητα των περιοδικών λύσεων όταν υπάρχει οριοθετούμενο πλέγμα.

Επιπλέον, αριθμητικές προσομοιώσεις εσωτερικά θερμαινόμενων ανωστικών ροών σε ορθογώνιες και κυβικές διατάξεις διεξήχθησαν από τους Arcidiacono et al. απουσία μαγνητικού πεδίου [45] και από τους Ciofalo και Cricchio για ΜΥΔ ροές [46], αντίστοιχα. Στην προηγούμενη μελέτη είχε μελετηθεί αριθμητικά η επίδραση του αριθμού Grashof,  $Gr=Ra/Pr$ , στην μετάβαση από συμμετρικές σε ασυμμετρικές λύσεις και από στάσιμες σε περιοδικές και χαοτικές λύσεις. Επιπλέον, στην τελευταία

Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία

αναφορά περιελήφθησαν οι επιδράσεις του μαγνητικού πεδίου και της τρισδιάστατης φύσης του προβλήματος και διαπιστώθηκε η εμφάνιση των πλευρικών και στοιβάδων Hartmann καθώς ο  $Ha$  λάμβανε υψηλότερες τιμές.

Σε μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τους Gelfgat και Bar-Yoseph [47] και αφορούσε κοιλότητα σταθερού λόγου όψεως ίσο με 4 και ρευστό που χαρακτηριζόταν από χαμηλό αριθμό  $Pr=0.015$ , απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας και ομογενούς μαγνητικού πεδίου του οποίου ο προσανατολισμός και η ένταση μεταβαλλόταν, διαπιστώθηκε ότι η επίδραση ενός εξωτερικού ομογενούς μαγνητικού πεδίου ποικίλλει ανάλογα με την ανακυκλοφορία της ροής που θα θεωρηθεί.

Οι εν λόγω ερευνητές συμπέραναν ότι η ροή που χαρακτηρίζεται από μία εστία ανακυκλοφορίας μπορεί να σταθεροποιηθεί αποτελεσματικά από τέτοιου είδους μαγνητικό πεδίο ενώ για οριζόντιες επιμήκεις κοιλότητες η δυνατότερη σταθεροποιητική κατάσταση μπορεί να επέλθει με την εφαρμογή ενός κάθετου πεδίου. Ωστόσο, σε μεσαίας εντάσεως μαγνητικά πεδία ( $Ha \leq 20$ ) η συμπεριφορά των καμπυλών των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας είναι μη-μονοτονική και περιλαμβάνει βρόχους υστέρησης όπου ο κρίσιμος αριθμός  $Gr$  μειώνεται με αύξηση του αριθμού  $Ha$ .

Επίσης, διέγνωσαν την πιθανότητα σημαντικής αποσταθεροποίησης της ροής από αυξανόμενο μαγνητικό πεδίο μεν, αλλά μεσαίας εντάσεως δε. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε πρόβλημα καθορισμού της βέλτιστης, από πλευράς ευστάθειας, έντασης του μαγνητικού πεδίου, η οποία εξαρτάται από τις κυρίαρχες παραμέτρους του προβλήματος. Θεωρείται επίσης ότι οι διαταραχές μειώνονται πριν λάβει χώρα σημαντική μείωση της βασικής κατάστασης της ροής.

Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε ροές που χαρακτηρίζονται από δύο εστίες ανακυκλοφορίας είναι αρκετά διαφορετική. Το φαινόμενο της σταθεροποίησης της ροής δεν είναι αρκετά ισχυρό για μικρές τιμές του αριθμού  $Ha$ . Ωστόσο, καθώς η ένταση του μαγνητικού πεδίου λαμβάνει υψηλότερες τιμές οι ροές αυτές αποσταθεροποιούνται και μετασχηματίζονται σε ροές με μία εστία ανακυκλοφορίας.

Ως εκ τούτου είναι πιθανή η χρήση του μαγνητικού πεδίου με σκοπό τον έλεγχο όχι μόνο της ευστάθειας αλλά και της δομής της ροής καταστέλλοντας ταυτόχρονα την πιθανότητα ύπαρξης πολλαπλών μόνιμων καταστάσεων. Παρόμοια εξέλιξη αναμένεται για ροές αποτελούμενες από τρεις ή και περισσότερες εστίες

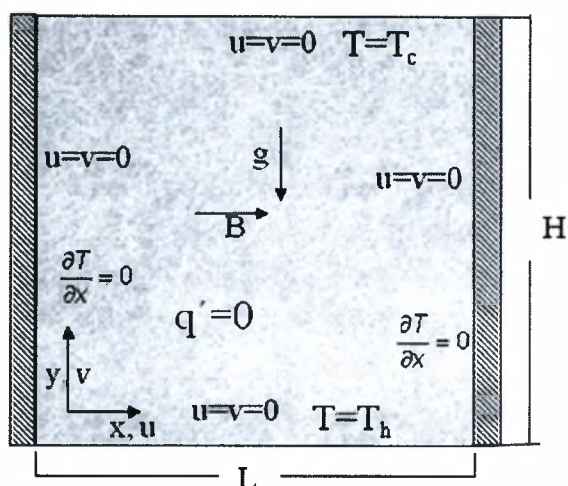
ανακυκλοφορίας των οποίων η ευστάθεια απουσία μαγνητικού πεδίου έχει μελετηθεί από τους Gelfgat et al. [48].

Σε ροές με μία εστία ανακυκλοφορίας η ηλεκτρομαγνητική απόσβεση οδηγεί στην ανάπτυξη των συνοριακών στοιβάδων Hartmann, όπως επίσης και σε συνοριακά στρώματα παρακείμενα στα τοιχώματα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο. Αυτά τα στρώματα, των οποίων το πάχος μειώνεται με τάξη μεγέθους  $Ha^{-1}$  και  $Ha^{-1/2}$ , αντίστοιχα, οφείλουν να λαμβάνονται υπόψη σε κάθε αριθμητικό μοντέλο που προσεγγίζει τέτοιου είδους ροές. Σημαντική επιβράδυνση ως προς την αριθμητική σύγκλιση αναμένεται σε υψηλούς αριθμούς Hartmann και ταυτόχρονα αντανακλά την ανάγκη επίλυσης των συνοριακών στρωμάτων.

Σκοπό της παρούσας εργασίας αποτελεί η επέκταση της παραμετρικής ανάλυσης σε δισδιάστατη ροή ελεύθερης συναγωγής σε τετραγωνική κοιλότητα, παρουσία ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας υπό την επίδραση ισχυρού οριζόντιου ομογενούς μαγνητικού πεδίου, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι κάθετη στη δύναμη της βαρύτητας, με σκοπό να αντιμετωπιστούν και να καλυφθούν τρισδιάστατες διαταραχές που εφαρμόζονται κατά την  $z$  κατεύθυνση. Η δισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας σε παρόμοιες γεωμετρίες δίνει ιδιομορφές τύπου Hopf ως κυρίαρχες αστάθειες οι οποίες, όταν επιτραπούν τρισδιάστατες διαταραχές, οδηγούν σε οδεύοντα κύματα κατά μήκος του αγωγού.

Η συγκεκριμένη επέκταση οδηγεί στην αναγνώριση του μηχανισμού της παραγωγής των οιονεί δισδιάστατων δομών σε αγωγούς, όπου λαμβάνει μέρος η συναγωγή Rayleigh – Bernard. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούνται οι U. Burr & U. Muehler [43], οι οποίοι εξετάζουν τη συναγωγή Rayleigh – Bernard σε στρώματα υγρού μετάλλου υπό την επίδραση οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι παράλληλη στη δύναμη της βαρύτητας, (βλ. Σχήμα 4).





Σχήμα 4 : Διατομή του αγωγού σε πειράματα των Burr & Muehler.

Στα πειράματα των παραπάνω ερευνητών διαπιστώθηκε η ύπαρξη οριζωνίων διαστάσεων περιοδικών δομών όπου η ανακυκλοφορία είναι παράλληλη με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου κάθετα στην αξονική διεύθυνση του αγωγού. Οι δομές αυτές είναι στάσιμες και δεν εμφανίζουν χρονική μεταβολή.

Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε ότι η μεταφορά θερμότητας λόγω ανακυκλοφορίας σε συνθήκες υπερκρίσιμες, υπό την έννοια ότι ο αριθμός Rayleigh υπερβαίνει τις κρίσιμες τιμές  $O(10^3)$  και  $O(10^4)$  για περιπτώσεις μαγνητικού πεδίου με  $(200 \leq Ha \leq 400)$  και  $(600 \leq Ha \leq 800)$  αντίστοιχα, παρουσιάζεται εμφανώς μειωμένη και επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τα ηλεκτροδυναμικά αποτελέσματα. Σε γειτονική περιοχή από την έναρξη της συναγωγής υπάρχει μια σημαντική περιοχή σταθερής συναγωγής με αξιοσημείωτη μεταφορά θερμότητας λόγω της προαναφερθείσας περιοχής πριν η ροή προχωρήσει σε χρονο-μεταβαλλόμενη συναγωγή.

Ωστόσο, παρά την επίδραση της διάχυσης Joule υπάρχει ένα συγκεκριμένο εύρος έντασης μαγνητικού πεδίου  $(200 \leq Ha \leq 400)$  όπου παρατηρείται ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας, γεγονός που αντανακλάται στο Σχήμα 5. Επιπλέον, η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας λόγω ανακυκλοφορίας συνοδεύεται από το σχηματισμό ισχυρής μη-ισοτροπικής χρονο-μεταβαλλόμενης ροής υπό την μορφή εστιών ανακυκλοφορίας, οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την μεταφορά θερμότητας λόγω ανακυκλοφορίας και ταυτόχρονα ευθυγραμμίζονται με την διεύθυνση του



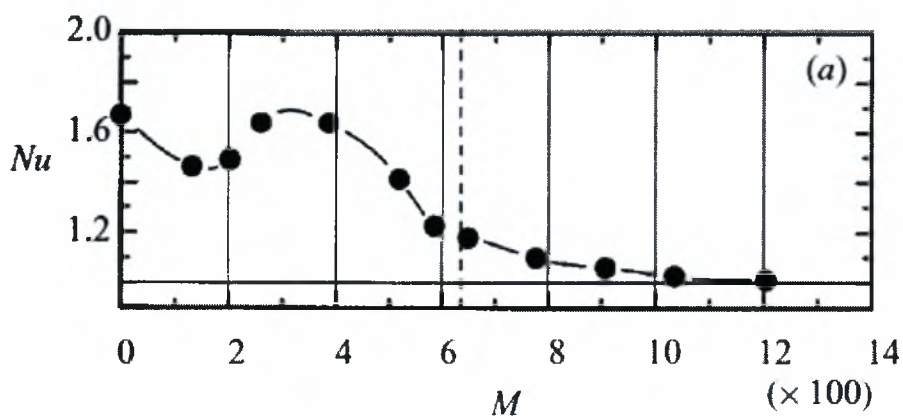
μαγνητικού πεδίου που επιδεικνύει μια απλούστερη χρονική δομή συγκρινόμενη με την συνήθη υδροδυναμική ροή.

Τονίζουμε ότι η μεταφορά θερμότητας εκφράζεται μέσω του αριθμού Nusselt και περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση :

$$Nu = \frac{q}{\lambda \Delta T / H}$$

όπου :

- $q$  η θερμοροή,
- $\lambda$  ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας,
- $\Delta T$  η διαφορά θερμοκρασίας,
- $H$  το ύψος της διατομής του αγωγού.



Σχήμα 5 : Επίδραση της αύξησης του αριθμού Hartmann  $M$  στον αριθμό Nusselt  $Nu$  για σταθερή θερμοροή  $q = 2.8 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$ .

Η μέτρηση των συντελεστών της τοπικής ισοτροπίας της τοπικής θερμοκρασιακής βαθμίδας επετεύχθη με χρήση καθετήρα στο μέσο επίπεδο και κατέδειξε ότι η αύξηση της μεταφοράς θερμότητας λόγω ανακυκλοφορίας συσχετίζεται άμεσα με την μετάβαση της δομής της συναγωγής σε μία αυξανόμενη μη-ισοτροπική κατάσταση των εστιών ανακυκλοφορίας οι οποίες είναι κατά κύριο λόγο συννευθιακές με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Στόχο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ταυτοποίηση του κυρίαρχου μηχανισμού αστάθειας της βασικής δισδιάστατης ροής σε κοιλότητα, λόγω ελεύθερης συναγωγής υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, παρουσία τρισδιάστατων διαταραχών. Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχετική ένταση με την οποία

αναπτύσσονται στάσιμες δομές έναντι οδευόντων κυμάτων σε αγωγό με διατομή που χαρακτηρίζεται από οριζόντια ή κάθετη βαθμίδα θερμοκρασίας, οριζόντιο, ομογενές μαγνητικό πεδίο και παραγωγή θερμότητας.

## 1.2 Οργάνωση της Εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο καταστρώνουμε το πρόβλημα παραμετρικής μελέτης ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με φυσική συναγωγή παρουσία ομογενούς μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας σε αγωγό ορθογωνικής διατομής εξετάζοντας τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες που ολοκληρώνουν την περιγραφή του προβλήματος και εν συνεχεία εισάγουμε διαταραχές κατά την διαμήκη κατεύθυνση του αγωγού. Επιπλέον, εφαρμόσαμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας στο παραπάνω πρόβλημα.

Στο τρίτο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων τύπου Galerkin στις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια επίλυσης των προβλήματος που εξετάζουμε και εν συνεχεία περιγράφουμε και χρησιμοποιούμε την επαναληπτική μέθοδο GMRES (General Minimal Residual) έτσι ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή της παραμετρικής συνέχειας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα υπολογιστικά αποτελέσματα μέσω επιλεγμένων διαγραμμάτων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας και επιπρόσθετα προτείνουμε τρόπους επέκτασης και βελτίωσής της. Στο τέλος έχουμε επισυνάψει τις βιβλιογραφικές αναφορές που έχουν χρησιμοποιηθεί καθ' όλη την έκταση της μεταπτυχιακής εργασίας.

## II) Κατάστρωση του Προβλήματος

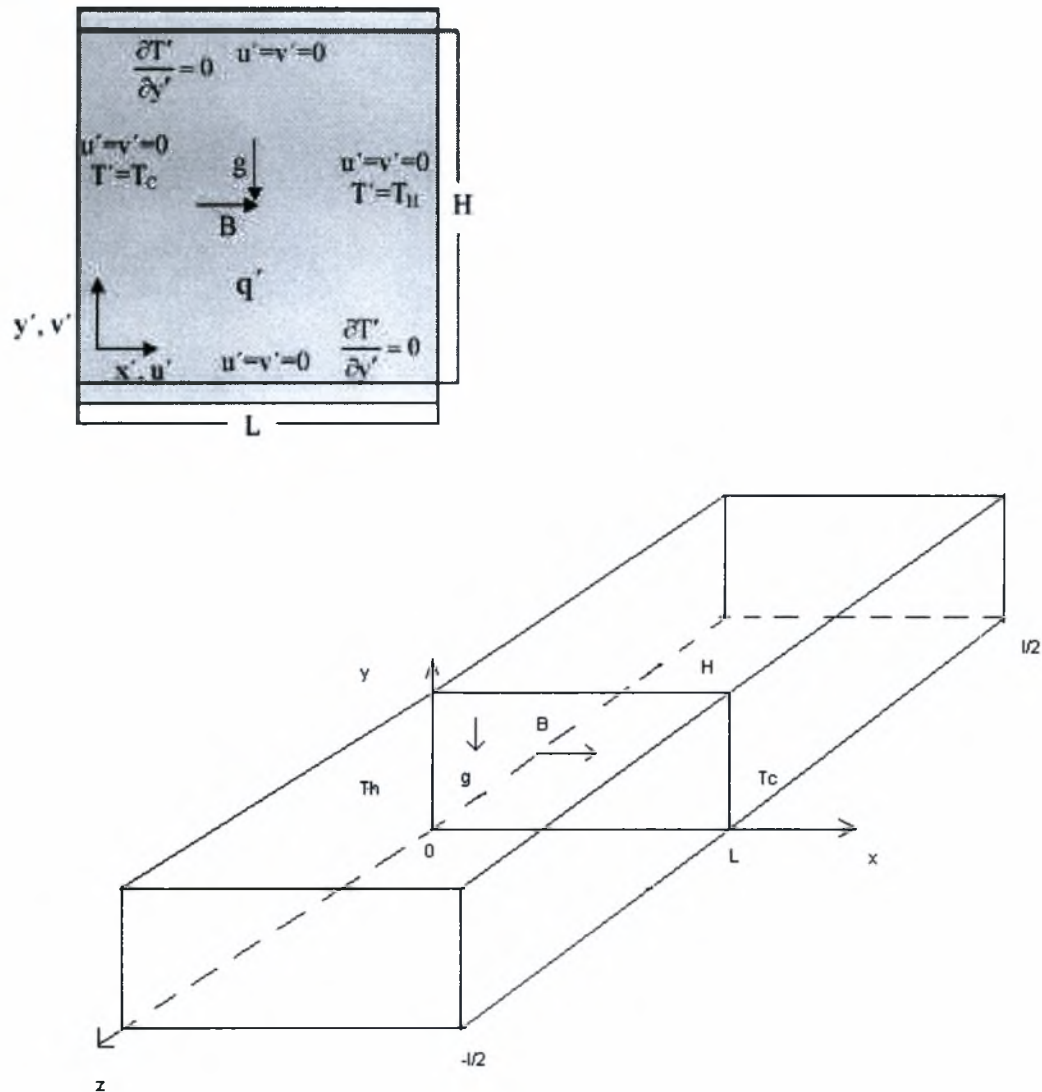
### 2.1 Ελεύθερη συναγωγή υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής με βαθμίδα θερμοκρασίας και ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας

Η συναγωγή αποτελεί το πρότυπο της μεταφοράς ενέργειας μεταξύ μιας στερεάς επιφάνειας και ενός κινούμενου υγρού ή αερίου. Περιλαμβάνει το συνδυασμένο αποτέλεσμα της αγωγής και της μαζικής κίνησης του ρευστού. Απουσία κίνησης του ρευστού, η μεταφορά θερμότητας μεταξύ της επιφάνειας του στερεού και του ρευστού γίνεται αποκλειστικά με αγωγή. Η κίνηση του ρευστού ενισχύει τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ της επιφάνειας του στερεού και του ρευστού, ωστόσο περιπλέκει τον υπολογισμό των ρυθμών μεταφοράς θερμότητας. Όσο γρηγορότερα κινείται το ρευστό, τόσο μεγαλύτερη είναι η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή.

Όταν το ρευστό εξαναγκάζεται από εξωτερικά μέσα να ρέει μέσα σε ένα σωλήνα ή πάνω από μια επιφάνεια τότε η μεταφορά θερμότητας καλείται εξαναγκασμένη συναγωγή. Αντίθετα, η συναγωγή που προκαλείται από την κίνηση του ρευστού εξαιτίας ανωστικών δυνάμεων που οφείλονται στη διαφορετική πυκνότητα του ρευστού σε διαφορετική θερμοκρασία ονομάζεται ελεύθερη ή φυσική συναγωγή την οποία και μελετούμε στο παρόν πόνημα.

Εν γένει η μεταφορά θερμότητας με φυσική συναγωγή σε μια επιφάνεια εξαρτάται από το γεωμετρικό σχήμα της επιφάνειας και τον προσανατολισμό της. Παράλληλα εξαρτάται από τη μεταβολή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια καθώς και από τις θερμοφυσικές ιδιότητες του ρευστού.

Θεωρούμε τετραγωνική κοιλότητα, παρουσία ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας και ομογενούς μαγνητικού πεδίου, το οποίο είναι κάθετο στην διεύθυνση της βαρύτητας και παράλληλο σε βαθμίδα θερμοκρασίας  $T_h-T_c$ , βλέπε Σχήμα 6α και 6β.



Σχήμα 6: (α) Διατομή του αγωγού, (β) Τρισδιάστατη διαμόρφωση του προβλήματος.

Απαραίτητες παραδοχές έτσι ώστε να μελετηθεί η ροή εντός της κοιλότητας είναι το ρευστό να θεωρείται ασυμπίεστο Νευτώνειο και να είναι δυνατή η εφαρμογή της προσέγγισης Boussinesq. Οι θερμοκρασιακές διακυμάνσεις έχουν ως αποτέλεσμα τη μεταβολή όχι μόνο της πυκνότητας αλλά και των άλλων ιδιοτήτων του ρευστού όπως για παράδειγμα του ιξώδους. Μια ανάλυση που θα περιλαμβάνει όλες τις επιδράσεις αυτών των διακυμάνσεων είναι αρκετά πολύπλοκη γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη χρήση κατάλληλης προσέγγισης.

Οι εξισώσεις προσλαμβάνουν τη μορφή της προσέγγισης Boussinesq. Στη συγκεκριμένη προσέγγιση οι διακυμάνσεις άλλων ιδιοτήτων του ρευστού, πλην της πυκνότητας, αγνοούνται τελείως. Ωστόσο, οι διακυμάνσεις στην πυκνότητα λαμβάνονται υπόψη μόνο στον υπολογισμό των βαρυτικών δυνάμεων κατά συνέπεια η εξίσωση της συνέχειας διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή της.

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη Boussinesq:  $\beta(T_h - T_c) \ll 1$ , όπου  $\beta$  είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του λιθίου που ρέει στη κοιλότητα. Αναφορικά με την πυκνότητα του ρευστού ισχύει ότι:  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_{AV})]$ , όπου  $T_{AV} = (T_h - T_c)/2$ .

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στις περισσότερες εφαρμογές όπου απαντάται τέτοιου είδους ροή, τα υγρά διαλύματα μιγμάτων λιθίου (όπως για παράδειγμα Pb-17Li) χρησιμοποιούνται ως λειτουργούντα μέσα (operating fluids). Έτσι, παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τις θερμοφυσικές ιδιότητες του λιθίου για να ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές, οι οποίες προσδιορίζουν το παρόν πρόβλημα.

Θεωρούμε ότι η διάταξη που μελετούμε εφάπτεται σε αντιδραστήρα, ο οποίος αποτελεί πηγή νετρονίων. Τα νετρόνια εισέρχονται εντός του υγρού λιθίου και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τις συγκρούσεις με τους πυρήνες του λιθίου. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην έκλυση της ενέργειας την οποία προσομοιώνουμε με την ύπαρξη εσωτερικής πηγής θερμότητας εντός του αγωγού που μελετούμε.

Επιπλέον, το μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται στη διάταξη που μελετούμε εκφράζεται μέσω της δύναμης Lorentz της οποίας η συνεισφορά παρουσιάζεται μαθηματικά μέσω της προσθήκης του όρου  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  στις εξισώσεις Navier - Stokes, όπου  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B}$  είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα.

Σημειωτέον ότι η δύναμη Lorentz κατέχει δεσπόζοντα ρόλο στις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και συνδυάζει τις μηχανικές και ηλεκτροδυναμικές καταστάσεις του συστήματος. Στη φυσική η δύναμη Lorentz είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το σωματίδιο θα αντιληφθεί τη δύναμη λόγω της ύπαρξης του ηλεκτρικού πεδίου, και εξαιτίας του ρεύματος παρουσία μαγνητικού πεδίου.

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονισθεί ότι δεν έχουμε λάβει υπόψη το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από την κίνηση του ρευστού καθώς θεωρούμε ότι το εξωτερικό πεδίο είναι σχετικά πολύ μεγαλύτερης έντασης, ως εκ τούτου δεν

χρειάζεται η επίλυση της εξίσωσης της μαγνητικής επαγωγής και εφαρμόζουμε το μοντέλο του χαμηλού αριθμού Reynolds.

Ο αριθμός Prandtl  $Pr = \nu/\alpha = 0.032$ , όπου  $\alpha$  και  $\nu$  υποδηλώνουν την θερμική διαχυτότητα και το κινηματικό ιξώδες του υγρού λιθίου. Για το συγκεκριμένο ρευστό ο μαγνητικός αριθμός Reynolds έχει αρκετά μικρή τιμή και κατά συνέπεια η μαγνητική επαγωγή θεωρείται αμελητέα ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι παντού ομογενές στην κοιλότητα. Από το Σχήμα 6 γίνεται εμφανές ότι  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ . Επίσης, ο μαγνητικός αριθμός Reynolds ορίζεται ως εξής:  $R_m = \sigma \mu_0 u L$ , όπου ο όρος  $(\sigma \mu_0)^{-1}$  δηλώνει την μαγνητική διαχυτότητα του λιθίου,  $u$  η χαρακτηριστική ταχύτητα του ρευστού και  $L$  το χαρακτηριστικό μήκος.

Η χρήση της προσέγγισης του χαμηλού μαγνητικού αριθμού Reynolds χρησιμοποιείται όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται σε μια ροή επηρεάζει τις ταχύτητες του ρευστού, ενώ οι ταχύτητες του ρευστού δεν επιδρούν στο μαγνητικό πεδίο.

Από το νόμο του Ohm λαμβάνουμε για την πυκνότητα του ρεύματος :

$$\mathbf{j}' = \sigma (-\nabla \phi' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \quad (2.1)$$

όπου  $\phi'$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό,  $\sigma$  η ηλεκτρική αγωγιμότητα του λιθίου και  $\mathbf{v}'$  το διάνυσμα της ταχύτητας, το οποίο σε συνδυασμό με την απαίτηση της συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου :  $\nabla \cdot \mathbf{j}' = 0$  δίνει:

$$\nabla^2 \phi' = \omega' \cdot \mathbf{B}' \quad (2.2)$$

όπου  $\omega'$  είναι το διάνυσμα της στροβιλότητας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τονούμενες μεταβλητές έχουν διαστάσεις, ενώ το πεδίο των ταχυτήτων θεωρείται περιοδικό στην  $z$  κατεύθυνση.

Επιλέγουμε το μήκος  $L$  ως χαρακτηριστικό μήκος για κάθε μια από τις πλευρές της κοιλότητας, τη θερμοκρασιακή διαφορά  $\Delta T (= T_h - T_c)$  ως χαρακτηριστική θερμοκρασία και στη συνέχεια αποδίδουμε αδιάστατα τον χρόνο, τις χωρικές συντεταγμένες, την πίεση, την ταχύτητα, τη θερμοκρασία, την ένταση του μαγνητικού πεδίου και το ηλεκτρικό δυναμικό:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{L/g\beta\Delta T}}, \quad x = \frac{x'}{L}, \quad P = \frac{P'}{\rho_g \beta \Delta T L} = \frac{p' + \rho_0 g y}{\rho_g \beta \Delta T L},$$

$$u = \frac{u'}{\sqrt{g\beta\Delta T L}}, \quad T = \frac{T' - T_{AV}}{T_h - T_{AV}}, \quad B = \frac{B'}{B_0}, \quad \phi = \frac{\phi'}{\sqrt{g\beta\Delta T L B L}}$$



Οι παρακάτω εξισώσεις αποτελούν τη βάση της περιγραφής της ΜΥΔ ροής του υγρού λιθίου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής.

#### Εξίσωση της συνέχειας της μάζας

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0 \quad (2.3)$$

#### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην x-κατεύθυνση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

#### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην y-κατεύθυνση

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + T - \frac{Ha^2}{Gr_E^{-1/2}} \left( v + \frac{d\phi}{dz} \right) \quad (2.5)$$

#### Αρχή Διατήρησης της ορμής στην z-κατεύθυνση

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + Gr_E^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2}{Gr_E^{-1/2}} \left( w - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

#### Εξίσωση της ενέργειας

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Gr_E^{1/2} Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Gr_I}{Gr_E^{-1/2}} \quad (2.7)$$

#### Αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.8)$$

Στην παραπάνω μορφοποίηση του προβλήματος εμπλέκονται οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι :

$$Gr_E = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}, \quad Ha = \sqrt{\frac{L^2 \sigma B_o^2}{\rho\nu}}, \quad Gr_I = \frac{qL^2}{\Delta T\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad A = \frac{H}{L} = 1$$

Οι αριθμοί Gr, Ha δηλώνουν την σχέση αλλά και τη σημασία των βαρυτικών δυνάμεων με τις δυνάμεις ιξώδους, και των μαγνητικών δυνάμεων με τις δυνάμεις ιξώδους, αντίστοιχα. Στην εξίσωση (2.5) ο όρος της αδιάστατης θερμοκρασίας T δηλώνει την άνωση και ο τελευταίος όρος στην ίδια σχέση αποτελεί τη δύναμη Lorentz, ενώ η επίλυση των εξισώσεων (2.3) έως (2.8) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες, μας παρέχουν τη δυναμική κατάσταση του συστήματος. Αντίστοιχα, αν αγνοήσουμε τους χρονομεταβαλλόμενους όρους στις εξισώσεις (2.4)-(2.7) προκύπτουν λύσεις σε μόνιμη κατάσταση για το πρόβλημα που μελετούμε.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η παρουσία της ομοιόμορφης εσωτερικής πηγής θερμότητας αυξάνει την κίνηση του υγρού μετάλλου, ενώ αντίθετα το μαγνητικό πεδίο επιβραδύνει την κίνηση του ρευστού λόγω της δύναμης Lorentz.

## 2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.3-2.7) είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που θα εμπεριέχουν τις άγνωστες συναρτήσεις.

Όταν τα τοιχώματα θεωρούνται μονωμένα τότε οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet. Στην περίπτωση όπου τα τοιχώματα είναι αγωγίμα, (συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann), τότε το ρεύμα μπορεί να διαπεράσει την διεπιφάνεια μεταξύ του ρευστού και του τοιχώματος.

Επιβάλλουμε θερμοκρασιακή βαθμίδα στα κατακόρυφα τοιχώματα του αγωγού και μόνωση στα οριζόντια τοιχώματα ως εκ τούτου λαμβάνουμε τις παρακάτω συνθήκες που αφορούν τη συνάρτηση της θερμοκρασίας :

$$T(x=0, y) = -1 \quad T(x=1, y) = 1 \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=1) = 0$$

Σύμφωνα με την συνήθη υδροδυναμική συνθήκη, η ταχύτητα του ιξώδους ρευστού σε ένα στερεό τοίχωμα θα πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα  $v^{(w)}$ , [50] :

$$v|_{\Gamma} = v^{(w)}|_{\Gamma}, \text{ όπου } \Gamma \text{ δηλώνει το σύνορο ανάμεσα στο ρευστό και στο τοίχωμα.}$$

Για το πεδίο των ταχυτήτων επιβάλλουμε συνθήκες μη ολίσθησης στα τοιχώματα της κοιλότητας, οπότε ισχύει :

$$\begin{aligned} u(x=0, y) = v(x=0, y) = 0 & \quad u(x=1, y) = v(x=1, y) = 0 \\ u(x, y=0) = v(x, y=0) = 0 & \quad u(x, y=A) = v(x, y=A) = 0 \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε τις συνθήκες που αφορούν το ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο επάγεται από την κίνηση του υγρού μετάλλου στον αγωγό υπό την επίδραση ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Στα τοιχώματα δεν υπάρχει κίνηση ρευστού και ως εκ τούτου η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace.

Κατόπιν ολοκλήρωσης κατά μήκος της τρίτης διάστασης των τοιχωμάτων, το πάχος των οπών είναι μικρό σε σχέση με το μήκος και το ύψος, παίρνουμε την εξίσωση κατανομής του δυναμικού σε απλοποιημένη μορφή όπου περιγράφεται η κατανομή της μέσης τιμής του δυναμικού αναφορικά με το πάχος του τοιχώματος, η οποία και δεν διαφέρει από την τιμή επάνω στο σημείο επαφής του υγρού μετάλλου με το τοίχωμα λόγω του μικρού πάχους του τελευταίου. Επιπλέον, λαμβάνουμε υπόψη το γεγονός ότι δεν υπάρχει μεταφορά ρεύματος προς το ρευστό που περιβάλλει εξωτερικά το τοίχωμα.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_w = 0 & \Rightarrow \int_{-l}^0 \left( \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial z^2} \right) dx = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=-l}^0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-l}^0 \phi_w dx + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-l}^0 \phi_w dx & = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=-l} = 0 \right) \\ l \left[ \frac{\partial^2 \bar{\phi}_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_w}{\partial z^2} \right] = - \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{c_l}{c_w} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} & \Rightarrow \text{(αδιαστατοποιώντας)} \\ \frac{\partial^2 \bar{\phi}'_l}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}'_l}{\partial z'^2} = - \frac{c_l L}{l c_w} \frac{\partial \phi'_l}{\partial x'} \Big|_{x'=0} & \Rightarrow \left( \phi'_l(x'=0, y, z) \approx \bar{\phi}'_l(y, z) = \phi'_l(x'=0, y, z) \right) \\ \frac{\partial \phi'_l}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = - c_v \left( \frac{\partial^2 \phi'_l}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi'_l}{\partial z'^2} \right) \Big|_{x'=0} & \quad (\alpha) \\ \mu \epsilon \quad c_v = \frac{l c_w}{c_l L} & \end{aligned}$$

όπου  $t$  είναι το πάχος του τοιχώματος,  $c_l$ ,  $c_w$  είναι οι ηλεκτρικές αγωγιμότητες του υγρού λιθίου και του τοιχώματος αντίστοιχα,  $\phi_l$ ,  $\phi_w$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό του υγρού μετάλλου στην περιοχή της βασικής ροής και το δυναμικό του τοιχώματος του αγωγού, (βλ. Σχήμα 7). Οι τόνοι συμβολίζουν αδιάστατες μεταβλητές και οι παύλες πάνω από τις μεταβλητές μέσες τιμές.

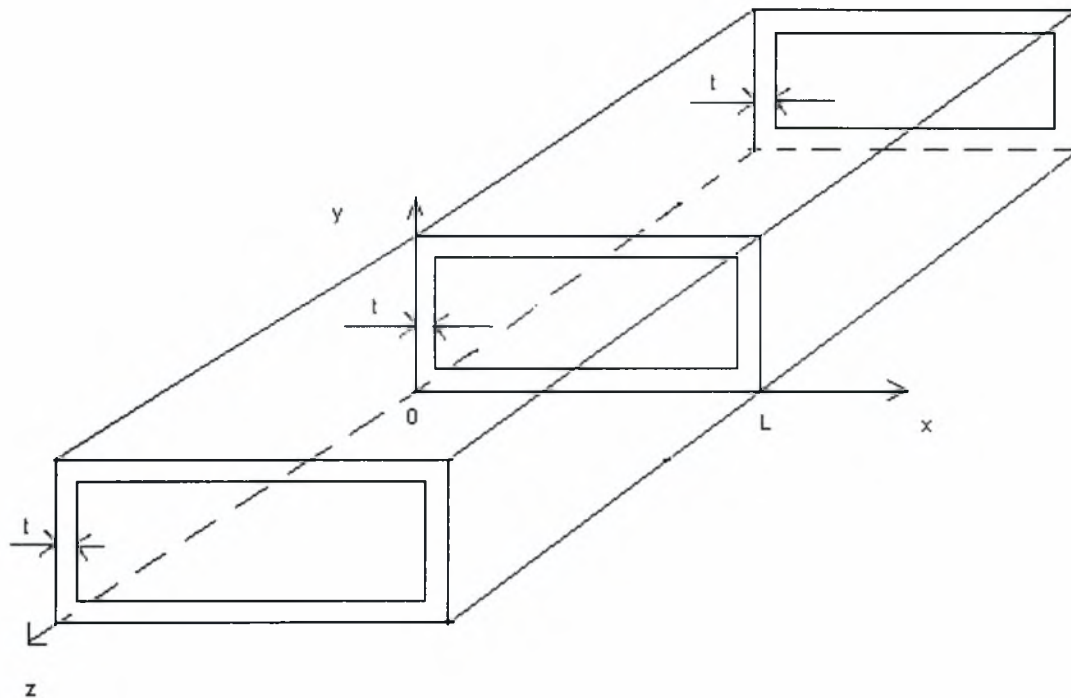
Στη διεπιφάνεια τοιχώματος - υγρού μετάλλου θα ισχύει  $\phi_l = \phi_w = \phi$ , ως εκ τούτου η εξίσωση (α) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς είναι δυνατό να αναπαραχθούν οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες που αφορούν το ηλεκτρικό δυναμικό, όπου ανάλογα με το αν εφαρμόζεται συνοριακή συνθήκη στις οριζόντιες ή κατακόρυφες πλευρές του αγωγού θα εμφανίζεται στην εξίσωση η αγωγιμότητα του τοιχώματος  $c_v$  ή  $c_H$ , αντίστοιχα.

Συνοπτικά έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x=0, y, z) &= -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) & \frac{\partial \phi}{\partial x}(x=1, y, z) &= c_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=0, z) &= -c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) & \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=A, z) &= c_H \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Τρισδιάστατη διαμόρφωση του προβλήματος για πολύ μικρό πάχος των οριζόντιων,  $xz$ , και κάθετων,  $yz$ , τοιχωμάτων του αγωγού.

### 2.3 Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας

Ο κύριος κλάδος μόνιμης κατάστασης αναπτύσσεται από τη λύση που λαμβάνουμε για  $Gr=0$ , μέσω απλής συνέχισης στον χώρο των παραμέτρων ο οποίος ορίζεται από τους αριθμούς  $Gr$ ,  $Ha$ ,  $Pr$ . Η μορφή και η ευστάθεια του  $\nu$  εν λόγω κλάδου, ο οποίος αφορά δισδιάστατη ροή λόγω ελεύθερης συναγωγής σε μόνιμη κατάσταση, σε δισδιάστατες διαταραχές έχει ήδη εξεταστεί (Pelekasis 2006). Αυτό έγινε αγνοώντας μεταβολές στην αξονική διεύθυνση  $z$  στην μοντελοποίηση του προβλήματος όπως αυτή περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.3)-(2.8). Έτσι βρέθηκε ότι δίνει διακλάδωση τύπου Hopf σε περιοδική λύση όταν ο αριθμός  $Gr$  υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο αυξάνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$ .

Επιθυμούμε να διερευνήσουμε το ενδεχόμενο ο ίδιος βασικός κλάδος να δίνει τρισδιάστατη αστάθεια για τιμές του  $Gr$  μικρότερες αυτών που οδηγούν σε περιοδική λύση, υποβαθμίζοντας έτσι την σημασία της δισδιάστατης ανάλυσης ευστάθειας.



Επίσης μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην ευστάθεια της βασικής λύσης και την συνακόλουθη ανάπτυξη παράλληλων στοιβάδων και στοιβάδων Hartmann.

Συνεπώς είναι επιθυμητή η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του τρισδιάστατου αγωγού ορθογωνικής διατομής και η επίδρασή της στην ψύξη του παρουσία εσωτερικών πηγών θερμότητας. Άρα σε επόμενο βήμα, εισάγουμε μικρές απειροστές διαταραχές κατά την αξονική διεύθυνση  $z$ , σε όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι η τρισδιάστατη ροή επιδέχεται λύση της παρακάτω μορφής :

$$\begin{aligned} (u, v) &= [u_0(x, y), v_0(x, y)] + \varepsilon [u_1(x, y), v_1(x, y)] e^{st} e^{ikz} \\ T &= T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y) e^{st} e^{ikz}, \quad p = p_0(x, y) + \varepsilon p_1(x, y) e^{st} e^{ikz} \\ \phi &= \varepsilon \phi_1(x, y) e^{st} e^{ikz}, \quad w = \varepsilon w_1(x, y) e^{st} e^{ikz} \end{aligned}$$

όπου :

- οι δείκτες 0,1 αντιστοιχούν σε κατάσταση προ και μετά την επιβολή της διαταραχής αντίστοιχα,
- $\varepsilon$  είναι μέτρο του μεγέθους της εφαρμοζόμενης διαταραχής,
- $s$  είναι η ιδιοτιμή, η οποία ουσιαστικά έχει τον κυρίαρχο ρόλο ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς αυξάνεται ο χρόνος  $t$ .

Στο σημείο αυτό επιθυμούμε να τονίσουμε ότι η λύση, που προκύπτει από την μόνιμη κατάσταση του προβλήματος, είναι ασυμπτωτικά ασταθής αν υπάρχει ιδιοτιμή τέτοια ώστε το πραγματικό της μέρος  $s_r$  να είναι θετικό. Αν δεν υπάρχει τέτοια ιδιοτιμή τότε θεωρούμε ότι η λύση μόνιμης κατάστασης είναι ευσταθής στο εύρος των παραμέτρων που έχουμε μελετήσει.

Κατά την περίπτωση όπου το πραγματικό μέρος  $s_r$  μιας ιδιοτιμής διέρχεται από το μηδέν, έχουμε ουδέτερη ευστάθεια και προκύπτει μια λύση διακλάδωσης. Όσον αφορά το φανταστικό μέρος  $s_i$  μιας ιδιοτιμής, όταν αυτό είναι διάφορο του μηδενός, τότε προκύπτει διακλάδωση Hopf, η οποία οδηγεί σε περιοδική λύση.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τρισδιάστατες διαταραχές στις εξισώσεις (2.3-2.8) που ορίζουν το πρόβλημα, ενώ παράλληλα αγνοούμε τους όρους τάξεως  $O(\varepsilon^2)$  ή μικρότερους όρους, λαμβάνουμε το παρακάτω πρόβλημα ευστάθειας.

### Πρόβλημα Ευστάθειας

$$s u_1 + \frac{\partial(u_0 u_1)}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_1 k^2 \right) \quad (2.9)$$

$$s v_1 + \frac{\partial(v_0 v_1)}{\partial y} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - v_1 k^2 \right) + T_1$$

$$-\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} (v_1 + ik\phi_1) \quad (2.10)$$

$$s w_1 + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} = -ikP_1 + Gr^{-1/2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - w_1 k^2 \right) - \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \left( w_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

$$s T_1 + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{Gr^{-1/2}}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - T_1 k^2 \right) \quad (2.12)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 k^2 \right) = \frac{\partial w_1}{\partial y} - ikv_1 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + ikw_1 = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \pm c_v \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 k^2 \right), \quad x = \pm \frac{1}{2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \pm c_u \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1 k^2 \right), \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (2.16)$$

$$c_v \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -c_u \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad (2.17)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν πρόβλημα ιδιοτιμών και διακριτοποιούνται έτσι ώστε να λάβουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις  $u_1, v_1, w_1, T_1, P_1, \phi_1$  οι οποίες εμπεριέχουν την συμπεριφορά της τρισδιάστατης λύσης που προκύπτει όταν η δισδιάστατη βασική λύση γίνει ασταθής. Συνεπώς οι ιδιοσυναρτήσεις είναι πολύ σημαντικές καθώς εμπεριέχουν τα αναγκαία χαρακτηριστικά της λύσης, που προκύπτει από ενδεχόμενη διακλάδωση που οδηγεί στον νέο τρισδιάστατο κλάδο, ο

οποίος σημειωτέον θα παρουσιάζει περιοδικότητα στην  $z$  κατεύθυνση. Επιπρόσθετα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να προκύψει μια αξιόπιστη αρχική υπόθεση με σκοπό την εύρεση πλήρους λύσης του εν λόγω τρισδιάστατου κλάδου σε επόμενο βήμα της μελέτης του προβλήματος.

## III) Αριθμητική Ανάλυση

### 3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

#### 3.1.1 Περιγραφή μεθόδου

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιείται ευρύτατα για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Ανάμεσα στα πλεονεκτήματά της είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου το πεδίο προσομοίωσης είναι αρκετά πολύπλοκο ή μεταβλητό, καθώς και για προσομοιώσεις όπου δεν απαιτείται η ίδια τάξη ακρίβειας σε όλο το πεδίο επίλυσης. Τα βήματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου είναι τα παρακάτω :

- Επιλογή κατάλληλων στοιχείων και συναρτήσεων βάσης  $\psi_i$ .
- Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης.
- Κατασκευή του πίνακα συνεκτικότητας ο οποίος προσδιορίζει για κάθε στοιχείο τους κόμβους του πλέγματος που συνεισφέρουν στην επίλυση στο συγκεκριμένο στοιχείο.
- Υπολογισμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των κόμβων (π.χ. συντεταγμένες).
- Κατασκευή των διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων σε κάθε στοιχείο του πεδίου, προσεγγίζοντας την άγνωστη μεταβλητή  $u$  με μια σχέση της μορφής  $u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$ . Τελικά, προκύπτει σε κάθε στοιχείο  $e$  σε ένα σύστημα  $[K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$ .
- Σύνδεση των τοπικών διακριτοποιημένων εξισώσεων για τον ορισμό του συνολικού προβλήματος.
- Επιβολή των οριακών συνθηκών του προβλήματος.
- Επίλυση του συνολικού συστήματος εξισώσεων.

#### 3.1.2 Συναρτήσεις βάσης

Κατά την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων παίζει η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης.

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιούνται οι διτετραγωνικές (biquadratic) συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Phi_i(x,y)$  για την προσομοίωση της ταχύτητας, της θερμοκρασίας και του ηλεκτρικού δυναμικού, ενώ η πίεση του υγρού λιθίου προσεγγίζεται με διγραμμικές (bilinear) συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Psi_i(x,y)$ .

Εν συνεχεία παρουσιάζονται συνοπτικά οι συναρτήσεις βάσης για προσομοίωση σε μία και σε δύο διαστάσεις.

### 3.1.3 Συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange

Για την επίλυση προβλημάτων σε μια διάσταση με συναρτήσεις quadratic Lagrange χρησιμοποιούνται 3 κόμβοι σε κάθε στοιχείο. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο  $e$  με συνταταγμένες μεταξύ  $x_e$  και  $x_{e+1}$  τότε οι συναρτήσεις quadratic Lagrange είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζονται στο Σχήμα 8 :

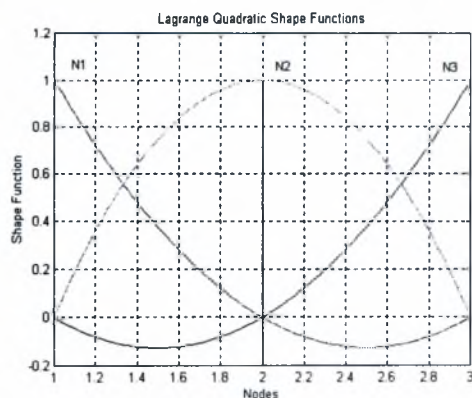
$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$$

$$\psi_2 = (1+\xi)(1-\xi)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

όπου  $\xi = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{x_{e+1} - x_e}$  και είναι μετασχηματισμένη μεταβλητή η οποία λαμβάνει

τιμές μεταξύ -1 και 1 σε κάθε στοιχείο.



Σχήμα 8 : Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης quadratic Lagrange σε μια διάσταση.

Οι συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange είναι συνεχείς χωρίς όμως να διαθέτουν συνεχείς παραγώγους. Όπως όλες οι συναρτήσεις της κατηγορίας Lagrange έχουν τις εξής ιδιότητες σε ένα στοιχείο  $e$  :

$$\psi_i^e(\xi_j) = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases} \text{ και } \sum_{i=1}^3 \psi_i^e(\xi) = 1$$

Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής :  $u = \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i$  όπου  $i$  οι τρεις κόμβοι σε κάθε στοιχείο,  $u_i$  είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και  $\psi_i$  οι συναρτήσεις βάσης.

Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις βάσης quadratic Lagrange δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση και κατά συνέπεια επιβιώνουν εννιά σε κάθε στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Psi_{ij}(x, y) = \psi_i(x) \psi_j(y), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3$$

### 3.1.4 Συναρτήσεις βάσης linear Lagrange

Για την επίλυση προβλημάτων σε μια διάσταση με συναρτήσεις linear Lagrange χρησιμοποιούνται 3 κόμβοι σε κάθε στοιχείο. Λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο εδάφιο 3.1.2, εντελώς ανάλογα θεωρούμε ένα στοιχείο  $e$  με συντεταγμένες μεταξύ  $x_e$  και  $x_{e+1}$  οπότε εν τω μεταξύ περιπτώσει οι συναρτήσεις linear Lagrange είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζονται στο Σχήμα 9 :

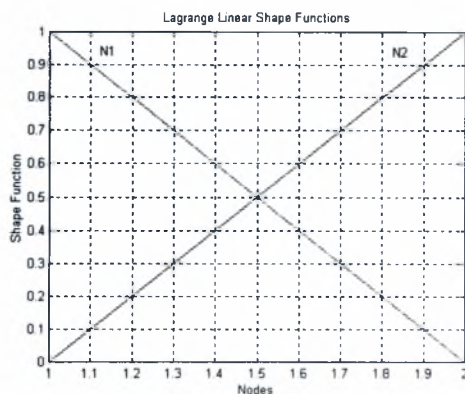
$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

όπου  $\xi = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{x_{e+1} - x_e}$  και είναι μετασχηματισμένη μεταβλητή η οποία λαμβάνει

τιμές μεταξύ -1 και 1 σε κάθε στοιχείο.





Σχήμα 9 : Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης linear Lagrange σε μια διάσταση.

Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής :  $u = \sum_{i=1}^2 u_i \psi_i$  όπου  $i$  οι δύο κόμβοι σε κάθε στοιχείο,  $u_i$  είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και  $\psi_i$  οι συναρτήσεις βάσης.

Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις βάσης linear Lagrange δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση και κατά συνέπεια επιβιώνουν τέσσερις σε κάθε στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Psi_{ij}(x, y) = \psi_i(x)\psi_j(y), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

### 3.2 Αριθμητική επίλυση προβλήματος μόνιμης κατάστασης ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων διακριτοποιούμε αριθμητικά τις εξισώσεις (2.3-2.8) με σκοπό τον υπολογισμό της μόνιμης ή της δυναμικής κατάστασης του συστήματος η επίλυση των οποίων μας παρέχει τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις που σχετίζονται με συγκεκριμένη βασική λύση.

Σημειωτέον ότι και στις δύο περιπτώσεις αγνοούμε μεταβολές στην  $z$  κατεύθυνση υποθέτοντας δισδιάστατο πεδίο ροής, δηλαδή θεωρούμε ότι η  $z$ -συνιστώσα της ταχύτητας  $w$ , το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi$ , είναι ίση με το μηδέν. Κατά συνέπεια για το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi$ , για το οποίο ισχύει ότι:

$$\sigma \nabla^2 \phi = \vec{\omega} \cdot \vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \xrightarrow{\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0} \sigma \nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}),$$

μπορούμε να πούμε ότι για δισδιάστατη ροή το διάνυσμα στροβιλότητας  $\vec{\omega}$  θα βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα z και συνεπώς θα είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  που είναι παράλληλο με τον άξονα y. Έτσι το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace και ελλείπει πηγών στα σύνορα του αγωγού θα είναι σταθερό και μπορεί να αγνοηθεί.

Οι x και y συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας και η θερμοκρασία προσεγγίζονται με διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Phi_i(x,y)$ , ενώ η πίεση του υγρού λιθίου αναπαρίσταται με διγραμμικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Psi_i(x,y)$ . Έχουμε δηλαδή :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ T_i \end{bmatrix} \Phi_i(x,y) \quad , P(x,y) = \sum_{i=1}^M p_i \Psi_i(x,y) \quad (3.1)$$

όπου :

- $u_i, v_i, T_i, p_i$ , είναι οι συντελεστές της αναπαράστασης κατά Lagrange και συμπίπτουν με τις τιμές των αντίστοιχων εξαρτημένων μεταβλητών στα σημεία παρεμβολής,
- $N, M$  αναπαριστούν τον αριθμό των συντελεστών σε κάθε άθροισμα.

Χρησιμοποιούμε την επαναληπτική μέθοδο Galerkin έτσι ώστε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις των υπολοίπων. Οι εξισώσεις (2.4,2.5,2.7) πολλαπλασιάζονται με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Phi_i(x,y)$ , η εξίσωση (2.3) αντίστοιχα με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Psi_i(x,y)$ , και εν συνεχεία ολοκληρώνονται στην επιφάνεια της κοιλότητας.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss στις συγκεκριμένες εξισώσεις, εκτός από την εξίσωση της συνέχειας της μάζας (βλ. σχέση 2.3), οπότε οι παράγωγοι δεύτερης τάξης απαλείφονται.

Η ασθενής μορφή του προβλήματος παρουσιάζεται παρακάτω :

#### Ασθενής Μορφή

$$\left[ \iint \Psi_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx dy \right] = 0, i = 1, M \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial u_i}{\partial t} \\
& + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy \\
& - \oint \Phi_i \left[ -P n_x + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right) \right] ds = 0, \quad i = 1, N, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial v_i}{\partial t} \\
& + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - P \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] dx dy \\
& + \iint \left( \frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} v - T \right) \Phi_i dx dy - \oint \Phi_i \left[ -P n_y + Gr^{-1/2} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x \right) \right] ds = 0, \\
& i = 1, N \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right] \frac{\partial T_i}{\partial t} \\
& + \iint \left[ \Phi_i \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (Gr^{-1/2} / Pr) \left( 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \Phi_i Gr^{-1/2} S \right] dx dy \\
& - \oint \Phi_i \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) \right] ds = 0, \quad i = 1, N, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το διαφορικό  $ds$  δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου κατά μήκος της περιμέτρου της κοιλότητας, ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα εμφανίζονται λόγω της εφαρμογής του θεωρήματος της απόκλισης. Οι όροι εντός των αγκυλών των ολοκληρωμάτων γραμμής στις εξισώσεις (3.3, 3.4) αντιστοιχούν στις  $x$  και  $y$  συνιστώσες της δύναμης που ασκείται στα σύνορα της κοιλότητας,  $(-p_I + \tau) \cdot \bar{n}$ , όπου  $\bar{I}$  και  $\bar{\tau}$  εκφράζουν τον μοναδιαίο πίνακα και τον αποκλίνοντα ταυστή των τάσεων, αντίστοιχα, ενώ το  $\bar{n}$  είναι το ορθομοναδιαίο διάνυσμα στις πλευρές της κοιλότητας. Τέλος οι μερικές παράγωγοι ως προς τον χρόνο μηδενίζονται

κατά την επίλυση του προβλήματος μόνιμης κατάστασης. Οι συντελεστές των εν λόγω όρων δίνουν τον πίνακα μάζας που χρησιμοποιείται παρακάτω για την επίλυση του προβλήματος ευστάθειας.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω των αναγκαίων συνοριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στις πλευρές της κοιλότητας για τις συνιστώσες της ταχύτητας και εξαιτίας των συνθηκών μόνωσης που αφορούν το θερμοκρασιακό πεδίο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στις εξισώσεις (3.3-3.5) δεν θα επηρεάσει την αριθμητική λύση του προβλήματος, [51].

Ο υπολογισμός των αγνώστων συντελεστών των εξαρτημένων μεταβλητών, που λαμβάνουν μέρος στην αναπαράσταση του προβλήματος με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, γίνεται μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Newton – Raphson (NR), η οποία καταλήγει στην επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής  $Ax=b$ . Διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη κατανάλωση του χρόνου αντιστοιχεί στην αντιστροφή της ιακωβιανής  $J=A$  του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου NR. Το πρόβλημα της μεγάλης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο αντιμετωπίστηκε μερικώς με την αποφυγή ανανέωσης του  $A$  μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων της NR..

Η σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου ελέγχεται μέσω της ευκλείδειας νόρμας. Όταν επιτευχθεί η σύγκλιση και υπολογίσουμε τη λύση μόνιμης κατάστασης, διερευνούμε την ευστάθεια μέσω της λύσης από το πρόβλημα ιδιοτιμών, που προέκυψε με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων.

Σε τέτοιου είδους προσομοιώσεις η ιακωβιανή πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί πολλές φορές κατά τη διάρκεια μιας επίλυσης. Παράλληλα η χρήση πυκνού πλέγματος αυξάνει κατακόρυφα το χρόνο που καταναλίσκεται προς επίλυση του συστήματος  $Ax=b$  με αντιστροφή μία φορά.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε πυκνά αριθμητικά πλέγματα πρέπει να μειωθεί σημαντικά ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, εγκαταλείφθηκε η ιδέα της απευθείας επίλυσης του συστήματος με αντιστροφή και εξετάστηκε η δυνατότητα χρήσης επαναληπτικής μεθόδου που θα υλοποιούσε την παραπάνω απαίτηση. Εν τέλει επιλέχθηκε η μέθοδος GMRES την οποία και θα περιγράψουμε αναλυτικά παρακάτω.

### 3.2.1. Μέθοδος GMRES

Για την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής  $Ax=b$  απαιτείται μια καλή αρχική πρόβλεψη. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη προσέγγιση για τον πίνακα  $A$  γίνεται προσπάθεια να βελτιωθεί η πρόβλεψη μειώνοντας το λάθος. Αν υποθέσομε ότι ο πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός προσεγγιστικού πίνακα  $K$  και ενός άλλου πίνακα  $\Lambda$  τότε σχηματικά η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως ακολούθως.

Στο βήμα  $i+1$  βρίσκεται η νέα προσεγγιστική λύση  $x_{i+1}$  από το σύστημα :

$$Kx_{i+1} = Kx_i + b - \Lambda x_i - Kx_i \xrightarrow{r_i = b - Ax_i} Kx_{i+1} = Kx_i + r_i$$

Με την παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης, ιδιαίτερος δε για θετικά ορισμένους πίνακες  $K$  [55]. Όμως δεν υπάρχει εγγύηση για την σύγκλιση της μεθόδου για πίνακες γενικής μορφής.

Ερευνητές για πολλές δεκαετίες έκαναν προσπάθειες να αναπτύξουν καλύτερες και ταχύτερες επαναληπτικές μεθόδους. Μια από τις μεθόδους η οποία χρησιμοποιείται ευρέως και έχει ιδιαίτερη απήχηση στην επίλυση μεγάλων συστημάτων είναι η GMRES (General Minimal Residual). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε το 1986 από τους Saad και Schultz για την επίλυση μεγάλων, μη συμμετρικών και αραιών συστημάτων [56].

Η βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου τέθηκε στην δεκαετία του 50 από τους Lanczos και Arnoldi οι οποίοι είχαν την ιδέα της διατήρησης όλων των προσεγγιστικών λύσεων μέχρι ένα σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας. Εν συνεχεία, πρότειναν τον συνδυασμό των προσεγγίσεων ώστε να προκύψει μια καλύτερη λύση. Ο Lanczos παρατήρησε ότι η βασική επανάληψη οδηγεί σε προσεγγίσεις  $x_i$  οι οποίες βρίσκονται σε καλά κατασκευασμένους υποχώρους,  $K_i[A, r^{(0)}]$ , που ορίζονται από τα διανύσματα  $r^{(0)}, Ar^{(0)}, A^2r^{(0)}, \dots, A^{i-1}r^{(0)}$  όπου  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  το υπόλοιπο της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων.

Ένας τέτοιος υποχώρος ονομάζεται Krylov υποχώρος τάξεως  $i$ . Έπειτα, ο Lanczos απέδειξε ότι για τον υποχώρο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα μια ορθοκανονική βάση γεγονός που απλοποίησε σημαντικά τους υπολογισμούς.

Στη μέθοδο GMRES κατασκευάζεται στον Krylov υποχώρο τάξεως  $k$  η προσέγγιση  $x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A, r^{(0)})$ . Ο υποχώρος  $K_k$  περιγράφεται με τη βοήθεια μίας

ορθοκανονικής βάσης  $v^{(k)} = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$  με πρώτο στοιχείο το  $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$ .

Για τον υπολογισμό της ορθοκανονικής βάσης  $V_k$  του Krylov υποχώρου

$K_k = \text{span}\{v^{(1)}, Av^{(1)}, \dots, A^{k-1}v^{(1)}\} = K_k[A, r^{(0)}]$  χρησιμοποιείται η μέθοδος του Arnoldi.

Η τελευταία αντί των ιδιοσυναρτήσεων του  $A$  υπολογίζει αυτές του upper-Hessenberg πίνακα  $H_k = [h_{ij}]$  για  $1 \leq i, j \leq k$ ,  $h_{ij} = 0$  για  $j < i - 1$  για τον οποίο ισχύει ότι :

$$H_k = V_k^T A V_k$$

$$A V_k = V_k H_k + h_{k+1,k} [0, \dots, v^{(k+1)}] \rightarrow A V_k = V_{k+1} \tilde{H}_k, \quad \tilde{H}_k = [h_{i,j}]_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k}$$

Ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής. Με  $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$  κατασκευάζεται μία αλληλουχία ορθοκανονικών διανυσμάτων έτσι ώστε το τελευταίο,  $v^{(k+1)}$ , να είναι ορθογώνιο στα διανύσματα που συνιστούν τον Krylov χώρο  $K_k$ . Η διαδικασία παραγωγής  $v^{(k)}$  βασίζεται στην διαφοροποιημένη μέθοδο Gram-Schmidt [55]. Συνεπώς προκύπτει :

$$x^{(k)} = x^{(0)} + V_k y^{(k)} \rightarrow A x^{(k)} - b = A x^{(0)} - b + A V_k y^{(k)}$$

για κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα  $y^{(k)}$ . Αντικαθιστώντας τον ορισμό του  $H_k$  στην παραπάνω σχέση έχουμε :

$$r^{(k)} = r^{(0)} - V_{k+1} \tilde{H}_k y^{(k)} = V_{k+1} (\|r^{(0)}\| e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)}), \quad e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$$

Λόγω της ορθοκανονικότητας των  $v^{(k)}$  ισχύει ότι :

$$\|r^{(k)}\| \equiv \beta_k = \|\beta_0 e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)}\|, \quad \|r^{(0)}\| \equiv \beta_0$$

και τα  $y^{(k)}$  επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η Ευκλείδεια νόρμα

$$\|r^{(k)}\| = \|b - A x^{(k)}\|. \text{ Αυτό συνιστά ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων το οποίο, με}$$

δεδομένη την μορφή του  $H_k$  λύνεται χωρίς ιδιαίτερες υπολογιστικές απαιτήσεις.

Επίσης, για την μείωση των απαιτήσεων σε μνήμη και του υπολογιστικού φόρτου κατά επανάληψη, λόγω υπέρμετρης αύξησης του μεγέθους του  $H_k$ , υπάρχει η δυνατότητα επανεκκίνησης του αλγορίθμου κάθε  $m$  βήματα, όπου  $m$  είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο αλγόριθμος της GMRES περιγράφεται συνοπτικά παρακάτω [56]:



- Επιλέγεται μια αρχική πρόβλεψη  $x^{(0)}$  και υπολογίζονται οι παρακάτω σχέσεις  $r^{(0)} = f - Ax^{(0)}$  και  $v^{(1)} = \frac{r^{(0)}}{\|r^{(0)}\|}$ .
- Υπολογισμός των  $v^{(k)}$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η ορθοκανονικότητα. Επαναλαμβάνεται για  $j=1,2,\dots,m$ 

$$h_{i,j} = (Av^{(j)}, v^{(i)}), \text{ για } i=1,2,\dots,j$$

$$\tilde{v}^{(j+1)} = Av^{(j)} - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v^{(i)}$$

$$h_{j+1,j} = \|\tilde{v}^{(j+1)}\|, \quad v^{(j+1)} = \frac{\tilde{v}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}}$$
- Υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση  $x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y^{(m)}$  όπου το  $y^{(m)}$  ελαχιστοποιεί το μέτρο  $\|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|$ ,  $y \in R^m$ .
- Η διαδικασία ξεκινάει πάλι και υπολογίζεται το  $r^{(m)} = f - Ax^{(m)}$ . Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης,  $\beta_k < \tau\beta_0$ ,  $t \ll 1$ , σταματάμε.  
Αν δεν ικανοποιείται θέτουμε  $x^{(0)} = x^{(m)}$ ,  $v^{(1)} = \frac{r^{(m)}}{\|r^{(m)}\|}$  και επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα.

### 3.2.2 GMRES με preconditioner

Η GMRES είναι μια επαναληπτική μέθοδος και επομένως συμπεριφέρεται καλύτερα όταν ο πίνακας του συστήματος είναι καλά ορισμένος, δηλαδή δεν έχει μηδενικές τιμές στην κύρια διαγώνιο. Στην περίπτωση που δεν ισχύει κάτι τέτοιο πριν την εφαρμογή της εν λόγω μεθόδου ο πίνακας πρέπει να τροποποιηθεί με κάποιο κατάλληλο preconditioner.

Γενικά, το preconditioning είναι οποιαδήποτε διαδικασία με την οποία τροποποιείται ένα αρχικό γραμμικό σύστημα έτσι ώστε να είναι πιο εύκολο να

επιλυθεί επαναληπτικά. Αυτό συνήθως ισοδυναμεί με την απαίτηση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου συστήματος να είναι κατανεμημένες σε ένα όσο το δυνατόν πιο στενό διάστημα γύρω από την μονάδα.

Για παράδειγμα, η τροποποίηση ενός συστήματος ώστε όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να είναι μονάδα αποτελεί μια εξεζητημένη περίπτωση preconditioning όπου εισάγεται ο βοηθητικός πίνακας  $M$  ως preconditioner ο οποίος ταυτίζεται με τον  $A$ . Τις περισσότερες φορές κατά την εφαρμογή του preconditioning σε ένα σύστημα της μορφής  $Ax=b$  εισάγεται ένας απλοποιημένος πίνακας  $M$  που διατηρεί όσο το δυνατόν πιο πολλά χαρακτηριστικά του  $A$  και τελικά το σύστημα παίρνει μία από τις δύο παρακάτω μορφές :

$$[M^{-1} A]x = M^{-1} b, \quad [AM^{-1}][Mx] = b$$

που είναι γνωστές με το όνομα αριστερό ή δεξιό preconditioning.

Είθισται να προτιμάται το δεξιό preconditioning διότι δεν εξαρτάται η προς ελαχιστοποίηση νόρμα από τον πίνακα  $M$ . Εν τω μεταξύ περιπτώσει, η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται στη συνέχεια λειτουργεί με τους πίνακες  $M^{-1}$  και  $A$  [55].

Υπολογίζεται η ορθοκανονική βάση,  $V^{(k)} = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ , του Krylov υποχώρου

$$K_k \equiv \text{span} \left\{ r^{(0)}, AM^{-1}r^{(0)}, (AM^{-1})^2 r^{(0)}, \dots, (AM^{-1})^{k-1} r^{(0)} \right\} \quad \text{και τελικά υπολογίζεται η}$$

$k$  προσέγγιση με την χρήση της παρακάτω σχέσης :

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M^{-1} V_k y^{(k)}.$$

Με αυτόν τον τρόπο δεν απαιτείται η αποθήκευση του πίνακα  $AM^{-1}$  παρά μόνο η χρήση του αντιστρόφου  $M^{-1}$ .

Ένας από τους πιο απλούς και πιο συνηθισμένους τρόπους να οριστεί ένας preconditioner είναι η εφαρμογή Incomplete LU παραγοντοποίησης στον αρχικό πίνακα  $A$ . Έτσι, υπολογίζεται άμεσα ο  $M^{-1}$  με την βοήθεια των  $L$  και  $U$ . Αν θεωρήσουμε έναν αραιό πίνακα  $A$  με στοιχεία  $a_{ij}$  με  $i, j=1, \dots, n$  τότε κατά την εφαρμογή του ILU υπολογίζεται ο κάτω τριγωνικός πίνακας  $L$  και ο άνω τριγωνικός πίνακας  $U$  ώστε το υπόλοιπο  $R=LU-A$  να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο, όπως λόγω χάρη η απουσία στοιχείων σε κάποιες συγκεκριμένες θέσεις.

Ο αλγόριθμος του ILU βασίζεται στην χρήση της απαλοιφής του Gauss ώστε να εξαλειφθούν κάποια στοιχεία σε προκαθορισμένες θέσεις εκτός της κυρίας διαγωνίου και μπορεί να περιγραφεί με τα παρακάτω βήματα [57] :

1. For  $i=2,\dots,n$  Do:
2.     For  $k=1,\dots,i-1$  and if  $(i,k) \notin P$  Do:
3.         
$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$
4.         For  $j=k+1,\dots,n$  and for if  $(i,k) \notin P$  Do:
5.             
$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$$
6.         End Do
7.     End Do
8. End Do

όπου το  $P$  είναι μια καθορισμένη μηδενική μορφή που ορίζεται ως εξής :

$$P \subset \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε κάθε βήμα  $i$  του αλγορίθμου κατασκευάζεται η αντίστοιχη γραμμή των  $L$  και  $U$  και η  $i$  γραμμή του  $A$  μπορεί να ξαναγραφεί με βάση τις γραμμές αυτές. Οι προηγούμενες γραμμές των  $L$  και  $U$  1,...,  $i-1$  χρησιμοποιούνται αλλά δεν τροποποιούνται. Η διαδικασία αυτή δεν γίνεται πλήρως και η έκτασή της καθορίζεται από τη μορφή του υποσυνόλου  $P$ .

Η χρήση της Incomplete LU παραγοντοποίησης και της GMRES στο συγκεκριμένο πρόβλημα στηρίχτηκε σε υπορουτίνες που διατίθενται στην προσωπική ιστοσελίδα του Youcef Saad. Στις υπορουτίνες αυτές οι μεταβλητές που εισάγονται είναι ο αριθμός των μέγιστων επαναλήψεων και το μέγεθος του Krylov υποχώρου για την GMRES καθώς και η έκταση εφαρμογής του Incomplete LU παραγοντοποίησης.

Επίσης, για την χρήση των παραπάνω υπορουτίνων ο πίνακας του συστήματος προς επίλυση πρέπει να εισαχθεί σε συγκεκριμένη μορφή, την CSR (Compressed Sparse Row Format). Σύμφωνα με τη μορφή αυτή αποθηκεύονται μόνο τα μη-μηδενικά στοιχεία του πίνακα και ο συνολικός πίνακας δεν κατασκευάζεται ποτέ. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια τριών διανυσμάτων από τα οποία το πρώτο περιέχει όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία, το δεύτερο δίνει τη στήλη στην οποία βρίσκεται κάθε μη-μηδενικό στοιχείο και το τελευταίο καθορίζει τον αύξοντα αριθμό που έχει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε σειράς στη μη-μηδενική αρίθμηση.

### 3.3 Αριθμητική επίλυση του προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Οι  $x$ ,  $y$  και  $z$  συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας, η θερμοκρασία και το ηλεκτρικό φορτίο προσεγγίζονται με διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Phi_i(x,y)$ , ενώ η πίεση του υγρού λιθίου αναπαριστάται με διγραμμικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange  $\Psi_i(x,y)$ . Έχουμε δηλαδή :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ T_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ T_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \Phi_i(x,y) \quad , p(x,y) = \sum_{i=1}^M p_i \Psi_i(x,y) \quad (3.6)$$

όπου :

- $u_i, v_i, w_i, T_i, p_i, \phi_i$  είναι οι συντελεστές της αναπαράστασης κατά Lagrange και συμπίπτουν με τις τιμές των αντίστοιχων εξαρτημένων μεταβλητών στα σημεία παρεμβολής,
- $N, M$  αναπαριστούν τον αριθμό των συντελεστών σε κάθε άθροισμα.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Galerkin έτσι ώστε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις των υπολοίπων. Οι εξισώσεις (2.9-2.13) πολλαπλασιάζονται με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Phi_i(x,y)$ , η εξίσωση (2.14) αντίστοιχα με τη δοκιμαστική συνάρτηση  $\Psi_i(x,y)$ , και εν συνεχεία ολοκληρώνονται στην επιφάνεια της κοιλότητας.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss στις συγκεκριμένες εξισώσεις, εκτός από την εξίσωση της συνέχειας της μάζας, οπότε οι παράγωγοι δεύτερης τάξης απαλείφονται.

Η ασθενής μορφή του προβλήματος παρουσιάζεται παρακάτω :

#### Ασθενής Μορφή

$$\left[ \iint \Psi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy \right]_{u_i} + \left[ \iint \Psi_i \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{v_i} + \left[ \iint ik \Psi_i \Phi_j dx dy \right]_{w_j} = 0, i=1, M \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{u_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial x} \Phi_j dx dy \right]_{u_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} u_0 dx dy \right]_{u_i} + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial y} v_0 dx dy \right]_{u_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial u_0}{\partial y} \Phi_j dx dy \right]_{v_i} = - \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi_j dx dy \right]_{P_j} \quad (3.8) \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy \right]_{u_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{u_i} + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{u_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial y} dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial y} v_0 dx dy \right]_{v_i} + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} u_0 dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j \frac{\partial v_0}{\partial x} dx dy \right]_{u_i} = \sum_{j=1}^N \left[ - \iint \Psi_j \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{P_j} \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{v_i} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{T_j} - \frac{Ha^2}{Gr} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{v_i} + \sum_{j=1}^N \left[ ik \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{\phi_j} \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ s \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{w_j} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} u_0 dx dy \right]_{w_j} + \\ & \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial y} v_0 dx dy \right]_{w_j} = \sum_{j=1}^N \left[ -ik \iint \Psi_j \Phi_i dx dy \right]_{P_j} \\ & - Gr^{-1/2} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy \right]_{w_j} + \sum_{j=1}^N \left[ \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{w_j} + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{w_j} \right] \\ & - \frac{Ha^2}{Gr} \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \Phi_j dx dy \right]_{w_j} - \sum_{j=1}^N \left[ \iint \Phi_i \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy \right]_{\phi_j} \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \int_S \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial x} dx dy \right] u_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} u_0 dx dy \right] T_j + \\
& \sum_{j=1}^N \left[ \int \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} v_0 dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int \Phi_i \Phi_j \frac{\partial T_0}{\partial y} dx dy \right] v_j = \\
& -(Gr^{-1/2} / Pr) \left[ \sum_{j=1}^N \left[ \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ k^2 \int \Phi_i \Phi_j dx dy \right] T_j \right]
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 c_s \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dy \Big|_{x=0} - \int_0^1 c_s \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x=1) dy - \int_0^1 c_{II} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (y=A) dx - \int_0^1 c_{II} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (y=0) dx + \\
& \Phi_i \left( c_s \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x=0, y=A) - c_{II} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=0, y=A) \right) - \Phi_i \left( c_s \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x=0, y=0) + c_{II} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=0, y=0) \right) + \\
& \Phi_i \left( -c_s \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x=1, y=0) + c_{II} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=1, y=0) \right) + \Phi_i \left( c_s \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x=1, y=A) + c_{II} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=1, y=A) \right) = \\
& = \int \Phi_i \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS = -(c_s ik \int dx dy) \Phi^2 \phi_1 + \sum_{j=1}^N \left[ \int dx dy \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} ik \right] T_j - i \sum_{j=1}^N \left[ dx dy \int \Phi \Phi k \right] T_j + \sum_{j=1}^N \left[ dx dy \int \Phi \Phi \right] \phi_j + \\
& \sum_{j=1}^N \left[ \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} dx dy \right] \phi_j + \sum_{j=1}^N \left[ \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} dx dy \right] \phi_j, \quad i=1, M. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Σχετικά με την παραπάνω μορφοποίηση του προβλήματος πρέπει να τονισθεί ότι το διαφορικό  $dS$  δηλώνει το διαφορικό μήκος τόξου κατά μήκος της περιμέτρου της κοιλότητας. Επιπρόσθετα, όσον αφορά την εξίσωση (3.12), η οποία εμφανίζει μια ιδιαιτερότητα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες εξισώσεις που εμφανίζονται στην ασθενή μορφή του προβλήματος, δίδονται στα παρακάτω λεπτομέρειες σχετικά με την διαδικασία παραγωγής της ασθενούς μορφής.

Στην περίπτωση αυτή απουσιάζουν ουσιαστικές συνθήκες, ενώ οι φυσικές συνθήκες της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=0, y, z) &= -c_v \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - k^2 \phi_1 \right), & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (x=1, y, z) &= c_v \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - k^2 \phi_1 \right) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x, y=0, z) &= -c_{II} \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - k^2 \right), & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} (x, y=A, z) &= c_{II} \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - k^2 \phi_1 \right)
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες έχει ήδη ληφθεί υπόψη η μορφή της τρισδιάστατης διαταραχής του ηλεκτρικού δυναμικού.



Η εξίσωση (2.13) η οποία προκύπτει από την ανάλυση ευστάθειας της διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, ολοκληρώνεται στη διατομή του αγωγού, ενώ ταυτόχρονα πολλαπλασιάζεται κατά μέλη με την δοκιμαστική συνάρτηση  $h(x,y)$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin και θέτουμε:  $h(x,y) = \Phi_j(x,y)$ , όπου  $\Phi_i$  είναι οι διτετραγωνικές συναρτήσεις βάσεις Lagrange. Έτσι λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί την ασθενή μορφή της εξίσωσης της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\begin{aligned}
& \iint \Phi_i \nabla^2 \phi_{i,dA} = \iint k^2 \phi_i \Phi_{i,dA} + \iint \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_{i,dA} - \iint ikv_1 \Phi_{i,dA} \Rightarrow \\
& \iint \nabla \cdot (\Phi_i \nabla \phi_i)_{dA} - \iint \nabla \Phi_i \cdot \nabla \phi_{i,dA} = \iint k^2 \phi_i \Phi_{i,dA} + \iint \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_{i,dA} - \iint ikv_1 \Phi_{i,dA} \Rightarrow \\
& \oint \Phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = \iint \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + k^2 \phi_i \Phi_i + \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i - ikv_1 \Phi_i \right] dA \Rightarrow \\
& \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dy \Big|_{x=1} - \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dy \Big|_{x=0} + \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx \Big|_{y=A} - \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx \Big|_{y=0} = \\
& \iint \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + k^2 \phi_i \Phi_i + \frac{\partial w_1}{\partial y} \Phi_i - ikv_1 \Phi_i \right] dA \equiv I \Rightarrow \\
& I + \int_0^1 c_v \Phi_i k^2 \phi_i dy \Big|_{x=1} + \int_0^1 c_v \Phi_i k^2 \phi_i dy \Big|_{x=0} + \int_0^1 c_H \Phi_i k^2 \phi_i dx \Big|_{y=A} + \int_0^1 c_H \Phi_i k^2 \phi_i dx \Big|_{y=0} = \\
& + \Phi_{i,c_v} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \Big|_{0,x=1}^{A,x=1} + \Phi_{i,c_v} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \Big|_{0,x=0}^{A,x=0} + \Phi_{i,c_H} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{0,y=0}^{1,y=0} + \Phi_{i,c_H} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{0,y=A}^{1,y=A} \\
& - \int_0^1 c_v \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dy \Big|_{x=1} - \int_0^1 c_v \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dy \Big|_{x=0} - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \Big|_{y=A} - \int_0^1 c_H \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \Big|_{y=0} \Rightarrow \\
& I + \int_0^1 c_v \left[ \Phi_i k^2 \phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] dy \Big|_{x=1} + \int_0^1 c_v \left[ \Phi_i k^2 \phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] dy \Big|_{x=0} \\
& + \int_0^1 c_H \left[ \Phi_i k^2 \phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] dx \Big|_{y=A} + \int_0^1 c_H \left[ \Phi_i k^2 \phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right] dx \Big|_{y=0} = \\
& + \Phi_{i,c_v} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \Big|_{0,x=1}^{A,x=1} + \Phi_{i,c_v} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \Big|_{0,x=0}^{A,x=0} + \Phi_{i,c_H} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{0,y=0}^{1,y=0} + \Phi_{i,c_H} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{0,y=A}^{1,y=A} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Εξαιτίας της γραμμικής φύσης του προβλήματος ευστάθειας, εκτός από τον πίνακα μάζας (mass matrix) που πηγάζει από την διαδικασία της διακριτοποίησης των μεταβατικών όρων, οι τελευταίοι εμπεριέχουν την ιδιοτιμή  $s$  στην διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων (3.2–3.5), η διακριτοποίηση των υπολοίπων όρων αναπαράγει

τον Ιακωβιανό πίνακα που χρησιμοποιείται στην επίλυση του προβλήματος μόνιμης κατάστασης.

Με τον υπολογισμό των συντελεστών των αγνώστων καταλήγουμε σε ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$sB_{ij}x_{1j} + J_{ij}(x_{0i})_{x_{1j}} = 0 \quad \rightarrow J_{ij}(x_{0i})_{x_{1j}} = -sB_{ij}x_{1j} \quad (3.14)$$

όπου :

- $B_{ij}$  είναι ο πίνακας μάζας,
- $x_{1j}$  είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $s$ ,
- $x_{0i}$  είναι η βασική λύση,
- $J_{ij}$  υποδηλώνει τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα.

Το παραπάνω πρόβλημα επιλύεται για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών  $s$ . Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν αυτές των οποίων το πραγματικό μέρος τείνει να μηδενιστεί, οπότε εισάγουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό Cayley:

$$J_{ij}x_j - \sigma B_{ij}x_j = -sB_{ij}x_j - \sigma B_{ij}x_j \rightarrow (J_{ij} - \sigma B_{ij})x_j = -(s + \sigma)B_{ij}x_j \rightarrow \frac{1}{s + \sigma}x_j = -(J_{ij} - \sigma B_{ij})^{-1}B_{ij}x_j \quad (3.15)$$

Στο μετασχηματισμένο πρόβλημα υπολογίζονται οι ιδιοτιμές  $1/(s+\sigma)$  όπου  $\sigma$  παράμετρος η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ιδιοτιμών των οποίων το πραγματικό μέρος μηδενίζεται ενώ το φανταστικό παραμένει μη μηδενικό, travelling waves στον τρισδιάστατο χώρο. .

### 3.3.1 Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών - Επαναληπτική μέθοδος Arnoldi

Εν γένει, οι αριθμητικές μέθοδοι εύρεσης ιδιοτιμών διακρίνονται σε δύο κατηγορίες τις άμεσες μεθόδους και τις επαναληπτικές μεθόδους. Οι άμεσες μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η μέθοδος QR, εφαρμόζονται συνήθως σε πυκνούς πίνακες.

Από την άλλη πλευρά, οι επαναληπτικές μέθοδοι εφαρμόζονται κυρίως σε αραιούς πίνακες ή σε πίνακες που ο πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα είναι η μόνη πράξη που μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα. Συνήθως αυτές οι μέθοδοι βρίσκουν ένα υποσύνολο του φάσματος του πίνακα και των ιδιοδιανυσμάτων του και

εκτελούνται τόσες επαναλήψεις ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια. Η σύγκλιση σε αυτήν την περίπτωση εξαρτάται από τα στοιχεία του πίνακα.

Ο Ιακωβιανός πίνακας καθώς επίσης και ο πίνακας μάζας έχουν την ιδιότητα ότι είναι πίνακες ζώνης και το γεγονός αυτό συνεπάγεται μείωση του υπολογιστικού κόστους, που απαιτείται κατά την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών. Κατά την προσπάθεια μας να ενσωματώσουμε την ιδιότητα αυτή στον υπολογισμό των ιδιοτιμών προβαίνουμε στην υιοθέτηση της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, η οποία υπολογίζει τις ιδιοτιμές με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος ή κατά την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Είναι χρήσιμο για λόγους πληρότητας να αναφερθούμε εκτενώς στην προαναφερθείσα επαναληπτική μέθοδο. Η μέθοδος Arnoldi [52] προτάθηκε αρχικά ως τρόπος μετασχηματισμού ενός πίνακα σε μορφή Hessenberg, του οποίου η γενική μορφή είναι :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-3} & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-3} & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \dots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ωστόσο, ο Arnoldi είχε επισημάνει ότι η μεθοδολογία του θα μπορούσε να παρέχει καλή προσέγγιση σε κάποιες ιδιοτιμές εάν σταματούσε ο αλγόριθμος πριν την ολοκλήρωσή του. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε πλήρως σε μεταγενέστερες εργασίες κυρίως από τον Saad [53] καθιστώντας την ως μια από τις πιο επιτυχείς μεθόδους για ιδιοπροβλήματα non-Hermitian. Έκτοτε, έχουν προταθεί αρκετές διασκευές της μεθόδου [54].

Ο βασικός αλγόριθμος Arnoldi μπορεί να περιγραφεί ως εξής. Δοθέντος ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  τάξεως  $n$ , εάν έχουν πραγματοποιηθεί  $n$  βήματα της εν λόγω μεθόδου τότε επιτυγχάνεται ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός σε μορφή Hessenberg και ισχύει :  $AV = VH$ , όπου  $H$  είναι άνω Hessenberg πίνακας τάξης  $n$  με θετικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου και  $V$  είναι ορθογώνιος πίνακας. Οι πίνακες  $V$  και  $H$  ορίζονται μοναδικά από την πρώτη στήλη του  $V$  και ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $v_1 = Ve_1$  που ονομάζεται αρχικό διάνυσμα.

Στη γενική περίπτωση όπου η μέθοδος λειτουργεί επιτυχώς μετά από  $m$  βήματα ο αλγόριθμος παράγει έναν πίνακα  $V_m$  διάστασης  $n \times m$  με ορθογώνιες στήλες και έναν

άνω πίνακα Hessenberg  $H_m$  τάξεως  $m$  οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση:  $AV_m - V_m H_m = f e_m^*$ , όπου το διάνυσμα  $f$  διάστασης  $1 \times n$  είθισται να καλείται residual του  $m$ -βήματος της παραγοντοποίησης Arnoldi και η ποσότητα  $e_m^*$  αποτελεί ορθομοναδιαίο διάνυσμα διάστασης  $1 \times m$ .

Συνοπτικά ο αλγόριθμος της μεθόδου Arnoldi ακολουθεί το παρακάτω διάγραμμα ροής :

Είσοδος : Πίνακας  $A$ , αριθμός βημάτων  $m$  και αρχικό μοναδιαίο διάνυσμα  $v_1$ .

Έξοδος :  $(V_m, H_m, f, \beta)$  έτσι ώστε να ισχύει  $AV_m - V_m H_m = f e_m^*$

Για  $j=1, 2, \dots, m-1$

$$w = AV_j$$

Ορθογωνιοποίηση του  $w$  ως προς  $V_j$  (προκύπτουν  $h_{1:j,j}$ )

$$h_{j+1,j} = \|w\|_2$$

Αν  $h_{j+1,j} = 0$ , stop

$$v_{j+1} = w / h_{j+1,j}$$

Τέλος

$$f = Av_m$$

Ορθογωνιοποίηση του  $f$  ως προς  $V_m$  (προκύπτουν  $h_{1:m,m}$ )

$$\beta = \|f\|_2$$

Αποδεικνύεται ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δημιουργεί μια ορθογώνια βάση του υπόχωρου Krylov  $K_m(A, v_1)$ . Τα υπολογιζόμενα διανύσματα βάσης συνιστούν τις στήλες του  $V_m$  και ονομάζονται διανύσματα Arnoldi. Στην περίπτωση που προκύψει  $w=0$  μετά την ορθογωνιοποίηση, τότε ο αλγόριθμος παύει να λειτουργεί πριν ολοκληρωθούν  $m$  βήματα και σε αυτή την περίπτωση το residual της παραγοντοποίησης Arnoldi είναι μηδέν και επιπλέον ισχύει ότι  $K_j(A, v_1)$ ,  $j < m$  αποτελεί αναλλοίωτο υπόχωρο του  $A$ . Στην πράξη όμως τέτοια περίπτωση είναι ασυνήθιστη λόγω της αριθμητικής ακρίβειας της μεθόδου.

Με αυτό τον τρόπο, οι ιδιοτιμές μικρού μέτρου, που προέρχονται από το αρχικό πρόβλημα, τροποποιούνται σε ιδιοτιμές μεγάλου μέτρου στο μετασχηματισμένο πρόβλημα. Στη βιβλιογραφία συναντώνται μετασχηματισμοί, όπως για παράδειγμα ο Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία

μετασχηματισμός Cayley που αναφέρθηκε παραπάνω, ο οποίος στηρίζεται στην περίπτωση όπου το φανταστικό μέρος μιας ιδιοτιμής είναι διάφορο του μηδενός σε αστάθεια Hopf. Ωστόσο ο μετασχηματισμός της εξίσωσης (3.15) παράγαγε ακριβή αποτελέσματα στις περιπτώσεις όπου εμφανίζονταν αστάθειες Hopf για τιμή της παραμέτρου  $\sigma=0$ , συνεπώς υιοθετήθηκε στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Σημειωτέον ότι οι ιδιοτιμές που διαθέτουν τα μεγαλύτερα μέτρα κινούνται σε υπόχωρο Krylov και μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από το αν είναι γνωστό το σύνολο των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι ένας μικρός αριθμός ιδιοτιμών υπολογίζεται με χρήση της μεθόδου Arnoldi. Ο συγκεκριμένος αριθμός αυξάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση των μεγαλύτερων ιδιοτιμών, οπότε και ο αλγόριθμος σταματά.

Η χρήση της μεθόδου Arnoldi επιτρέπει (βλ. Pelekasis (2006)) την μείωση του υπολογιστικού χρόνου του κώδικα που επιλύει το πρόβλημα καθώς και τις απαιτήσεις σε υπολογιστική μνήμη.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται επαναληπτικά έχοντας κάνει μια τυχαία αρχική υπόθεση :  $c_{1i}=c^0_{1i}$ . Η μέθοδος συγκλίνει στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή  $\tau_1$  με ρυθμό ανάλογο του πηλίκου  $\tau_1/\tau_2$  κατά απόλυτο τιμή, όπου  $\tau_2$  είναι η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή και  $\tau=1/s$ .

Σημαντικό πλεονέκτημα της προσέγγισης είναι ότι η δομή του πίνακα ζώνης μπορεί να αξιοποιηθεί, καθώς ο πίνακας μάζας και ο Ιακωβιανός πίνακας αποτελούν πίνακες ζώνης. Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία του πίνακα μάζας συμπεραίνουμε ότι δεν είναι αναγκαία η αποθήκευση όλου του πίνακα, γεγονός που συνεπάγεται σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση εκτέλεσης του κώδικα που διαθέτουμε αριθμός 200 ιδιοτιμών είναι ικανός για να λάβουμε μια αξιόπιστη εικόνα της δυναμικής του συστήματος που εξετάζουμε.

### **3.3.2 Παρακολούθηση της εξέλιξης συγκεκριμένης ιδιομορφής στον χώρο των παραμέτρων – Χρήση της επαναληπτικής μεθόδου GMRES**



Κατά την προσομοίωση της ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή παρουσία ομογενούς μαγνητικού πεδίου και έχοντας εισάγει τρισδιάστατες διαταραχές κατά την διαμήκη κατεύθυνση του αγωγού χρειάστηκε η χρήση πυκνών πλεγμάτων. Στόχος είναι να κατανοηθεί πλήρως ο μηχανισμός παραγωγής εστιών ανακυκλοφορίας και κατ' επέκταση η φύση των ασταθειών που παρουσιάζονται. Για τον λόγο αυτό διεξάγεται παραμετρική μελέτη ευστάθειας για την κατασκευή των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας. Αυτά παρέχουν πληροφορίες που αφορούν την κυρίαρχη ιδιομορφή που καθορίζει τη δυναμική του συστήματος που εξετάζεται, ενώ αποκαλύπτουν την περιοχή αστάθειας στον χώρο των παραμέτρων.

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας κατά την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών αναζητούμε την κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένο αριθμό Ha. Η κρίσιμη αυτή τιμή αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του Gr για την οποία εμφανίζεται αστάθεια. Για την εύρεση του κρίσιμου Gr υπολογίζονται αρχικά οι κυρίαρχες ασταθείς ιδιοτιμές για διδιάστατες διαταραχές. Επιθυμούμε να γνωρίζουμε την εξέλιξη αυτών των ιδιομορφών καθώς αυξάνεται ο κυματαριθμός (μηδενικός κυματαριθμός αντιστοιχεί σε διδιάσπτες διαταραχές). Αυτό αντιστοιχεί σε μείωση του μήκους κύματος της διαταραχής. Για τον σκοπό αυτό επιλέγουμε μια συγκεκριμένη ασταθή ιδιοτιμή  $\lambda$  και ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο GMRES.

Καλούμαστε να επιλύσουμε το σύστημα εξισώσεων (3.14) για την ιδιοτιμή  $s$  και την ιδιομορφή  $x_{1j}$  για κάποια τιμή του κυματαριθμού  $k$  και των παραμέτρων του προβλήματος, π.χ. Gr, με βάση προηγούμενη επίλυση της ιδιοτιμής και ιδιομορφής για  $k_0$  ή Gr<sub>0</sub>. Με τον τρόπο αυτό διεξάγουμε το λεγόμενο *parametric continuation* με στόχο να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη μιας ασταθούς ιδιοτιμής  $s$  και του ιδιοδιανύσματος  $x$  που αντιστοιχεί σε αυτήν. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι καθίσταται δυνατή η κατασκευή των διαγραμμάτων ουδέτερης ευστάθειας, που μας παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τη δυναμική του συστήματος που εξετάζουμε στο πεδίο των παραμέτρων που καθορίζεται από τον κυματάρημο  $k$  και τον αριθμό Grashof για δεδομένο αριθμό Hartmann. Η ιδιοτιμή αντιμετωπίζεται ως ένας επι πλέον άγνωστος του προβλήματος (3.14). Για να υπάρχει ισοζύγιο μεταξύ αγνώστων και εξισώσεων εισάγεται ως επι πλέον εξίσωση η κανονικοποίηση της ιδιομορφής για κάποιο στοιχείο  $n$ :



$$x_n = x_{r,n} + ix_{i,n} = 1 \quad (3.16)$$

Το συζευγμένο πρόβλημα που σχηματίζουν οι (3.14) και (3.16) αποτελεί ένα μη γραμμικό πρόβλημα με αγνώστους την ιδιοτιμή και την ιδιομορφή, το οποίο μπορεί να επιλυθεί επαναληπτικά με την μέθοδο Newton-Raphson. Για κάθε επανάληψη κ της NR επιλύεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{bmatrix} J_x - s^k B & B\bar{x}^k \\ 0 \dots 1 \dots 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x}^k \\ \delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \bar{x}^k - s^k B \bar{x}^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

για την επίλυση του οποίου απαιτείται η αντιστροφή του μητρώου που εμφανίζεται στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης. Ο όρος  $J_x - s^k B$  είναι πίνακας διάστασης  $n \times n$  και ο όρος  $B\bar{x}^k$  αποτελεί διάνυσμα διάστασης  $n$ , ενώ το ιδιοζεύγος (eigenpair)  $\{\delta\bar{x}^k, \delta s\}$  είναι η μεταβολή που επιτρέπουμε στην ασταθή ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της προκειμένου να εξετάσουμε την εξέλιξή της. Οι πίνακες J και B δηλώνουν τον πίνακα Ιακωβιανής και τον πίνακα μάζας, αντίστοιχα.

Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος GMRES είναι απαραίτητη η εύρεση και η χρήση ενός preconditioner, ειδικά όταν ο αντιστρεφόμενος πίνακας δεν είναι ερμιτιανός. Εν τέλει, καταλήξαμε στην επιλογή του τελεστή Stokes ο οποίος προκύπτει όταν απαλειφθούν οι αδρανειακοί όροι από τις εξισώσεις κίνησης. Συγκεκριμένα, έτσι ώστε να γίνει πιο κατανοητή η εύρεση του προαναφερθέντος τελεστή, θεωρήσαμε μία χρονομεταβαλλόμενη εκδοχή του γραμμικοποιημένου προβλήματος όπως ορίζεται από τις εξισώσεις διατήρησης ορμής ως προς τους τρεις άξονες x,y,z αντίστοιχα και την αρχή διατήρησης της ενέργειας (βλ. σχέσεις 2.4-2.7) :

$$B\dot{x} = Jx = \left( \frac{C}{Gr} L + N \right) x \quad (3.18)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι μεταβλητές L και N αναπαριστούν το τμήμα του πίνακα Ιακωβιανής που πηγάζει από το γραμμικό και το μη-γραμμικό κομμάτι του συστήματος εξισώσεων, ενώ η μεταβλητή C : i) λαμβάνει την τιμή της μονάδας στην περίπτωση των εξισώσεων κίνησης, και ii) ταυτίζεται με τον αριθμό  $Pr^{-1}$  στην περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας. Διακριτοποιώντας ως προς τον χρόνο και υλοποιώντας ένα semi-implicit αριθμητικό σχήμα παίρνουμε :

$$\begin{aligned}\frac{Bx^{n+1} - Bx^n}{\Delta t} &= \frac{C}{Gr^{0.5}} Lx^{n+1} + Nx^n \Rightarrow \\ \left( B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right) x^{n+1} &= (\Delta t N + B) x^n \Rightarrow \\ x^{n+1} &= \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} (\Delta t N + B) x^n \Rightarrow\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left( \Delta t N + B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L + \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right) x^n \Rightarrow \\ x^{n+1} &= x^n + \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left( \Delta t N + \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right) x^n \Rightarrow \\ \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} &= \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left( N + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) x^n\end{aligned}\tag{3.20}$$

Παρατηρώντας την εξίσωση στην οποία καταλήξαμε συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (3.20) αποτελεί τον αντίστροφο του τελεστή Stokes και ο δεύτερος όρος αναπαριστά τον πίνακα Ιακωβιανής. Όταν μηδενιστεί το δεξιό μέλος της (3.20) έχουμε την επίλυση προβλήματος μόνιμης κατάστασης. Μάλιστα, μία μορφή της διαδικασίας NR με Stokes preconditioner είναι η παρακάτω

$$\left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left( N_x + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) \delta x = - \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} \left( N + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) x^k\tag{3.21}$$

Κατ' επέκταση ο τελεστής Stokes μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως preconditioner του προβλήματος (3.17) κάθε φορά που απαιτείται η αντιστροφή πίνακα με την επαναληπτική μέθοδο GMRES. Η αρχική υπόθεση παρέχεται από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών που έχει διεξαχθεί προηγουμένως με την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, ή από την επίλυση της (3.17) για παρεμφερή τιμή παραμέτρου. Με την παραπάνω διαδικασία και σε συνδυασμό με τον απ' ευθείας υπολογισμό ιδιοτιμών, κατασκευάζονται διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας για σημαντικό εύρος παραμέτρων.

## IV) Αποτελέσματα

### 4.1 Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης προβλήματος ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή

Θεωρούμε τετραγωνική κοιλότητα με μήκος πλευράς 1cm και θερμοκρασιακή διαφορά τάξεως 1K ανάμεσα στις δύο κάθετες πλάκες, ο αριθμός Gr υπολογίζεται να είναι  $5 \times 10^4$  για υγρό λίθιο στους 300°C περίπου, αν και ο αριθμός Ha λαμβάνει τιμές από 5 έως 500 όταν οι αντίστοιχες τιμές για την ένταση του μαγνητικού πεδίου  $B_0$  είναι 0.1 έως 1T. Οι παραπάνω τιμές των παραμέτρων καθορίζουν το εύρος της παραμετρικής ανάλυσης.

Επιπρόσθετα, λόγω της μεγάλης ποσότητας θερμότητας που απελευθερώνεται σε κάποιες από τις προσομοιώσεις, οι ιδιότητες του ρευστού είναι δυνατό να αποκλίνουν από τις τιμές που αντιστοιχούν στους 300°C. Παρ'όλα αυτά, σαν μια πρώτη προσπάθεια να μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος υπό την επίδραση μεγάλου θερμικού φορτίου αγνοούμε θερμοκρασιακές μεταβολές των θερμοφυσικών ιδιοτήτων που εμπλέκονται στη μορφοποίηση του προβλήματος.

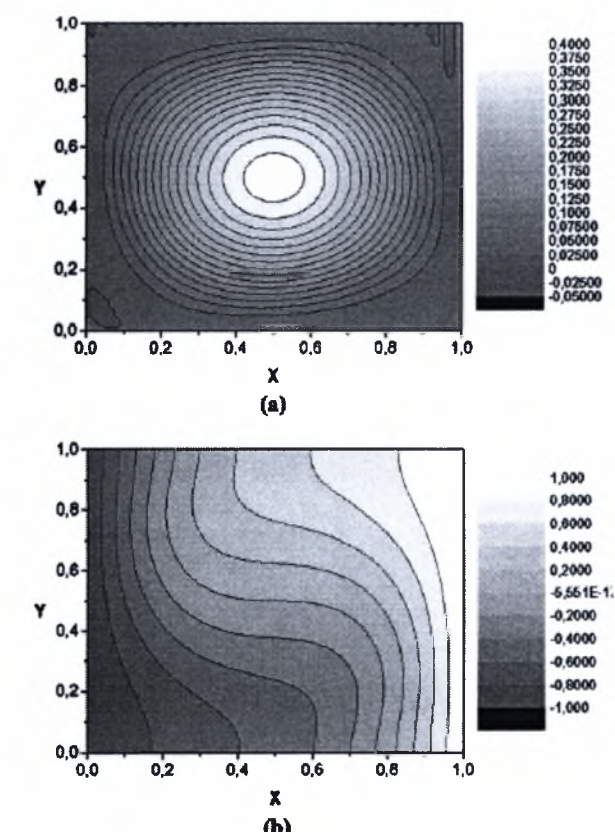
Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί σημαντικό περιορισμό για να επιδρά στην εγκυρότητα της μορφοποίησης του προβλήματος, καθώς ο αριθμός Pr, ψυκτικών υγρών αποτελούμενων κυρίως από λίθιο (π.χ. Pb – 17Li), προσλαμβάνει σχετικά μικρές τιμές (0.05 έως 0.02) σε θερμοκρασίες που κυμαίνονται από 300°C έως 600°C. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις λύσεις σε μόνιμη κατάσταση για το εύρος των παραμέτρων που ορίσαμε.

Οι καμπύλες που προκύπτουν από ουδέτερη ευστάθεια διαχωρίζουν τις λύσεις μόνιμης κατάστασης από τις περιοδικές, οι οποίες προκύπτουν στο επίπεδο (Gr, S) ως συνάρτηση του αριθμού Ha. Σημειωτέον ότι έχουν χρησιμοποιηθεί πλέγματα 30x30 και 60x60 διτετραγωνικών στοιχείων στα παρακάτω διαγράμματα.

Εξετάστηκε αρχικά η περίπτωση με μηδενική παραγωγή θερμότητας που αντιστοιχεί σε αριθμό  $S=0$  καθώς ο αριθμός Gr αυξάνεται, απουσία μαγνητικού πεδίου. Το θερμοκρασιακό πεδίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του στο δεξιό κατακόρυφο τοίχωμα και η ροική συνάρτηση παρουσιάζει μια εστία ανακυκλοφορίας.

Αυτός ο τύπος μόνιμης ροής συνεχίζει να διατηρείται όσο ο αριθμός Gr αυξάνεται ενώ οι ισοϋψείς της θερμοκρασίας καμπυλώνουν προς τα πάνω υποδεικνύοντας μια τάση του θερμού υλικού να βρίσκεται στο άνω τμήμα της κοιλότητας, (βλ. Σχήμα 10(b)), καθώς εντείνεται η επίδραση της άνωσης. Την ίδια στιγμή η ανακυκλοφορία της δίνης έχει φορά προς τα πάνω (βλ. Σχήμα 10(a)). Η λύση μόνιμης κατάστασης παραμένει ευσταθής σε όλο το εύρος των τιμών που λαμβάνει ο αριθμός Gr, όπως υποδεικνύεται από το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών το οποίο παραμένει αρνητικό.

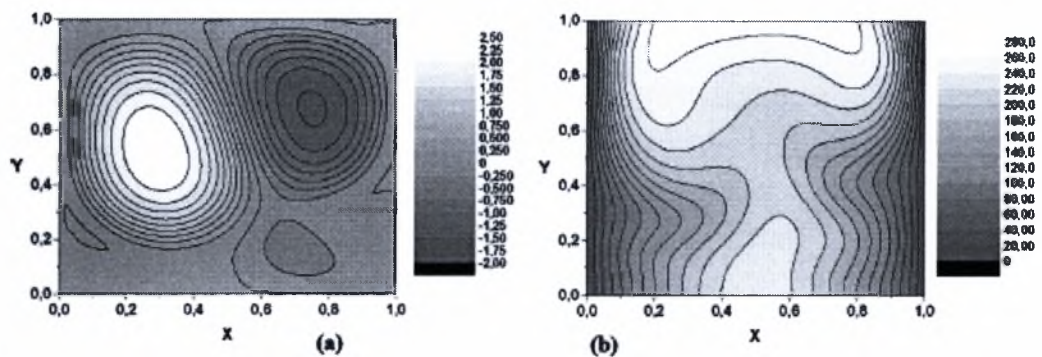
Καθώς το ποσό της θερμότητας που απελευθερώνεται ογκομετρικά αυξάνεται, το θερμοκρασιακό πεδίο λαμβάνει μέγιστη τιμή στην κεντρική περιοχή της κοιλότητας και εμφανίζεται δεύτερη εστία ανακυκλοφορίας, (βλ. Σχήμα 11(a) και 11(b)). Το ρευστό ουσιαστικά απομακρύνεται από τα ψυχρότερα κατακόρυφα τοιχώματα και κινείται προς την κατεύθυνση του πυθμένα, ενώ το ρευστό που βρίσκεται σε υψηλότερη θερμοκρασία από το κέντρο της κοιλότητας κινείται προς την κορυφή του αγωγού.



Σχήμα 10: (a) Ροϊκή γραμμή και (b) ισοϋψείς της θερμοκρασίας για την περίπτωση  $Gr=100000$ ,  $S=0$  και  $Ha=0$ .

Όσο ο αριθμός  $Gr$  αυξάνεται η δομή αυτής της ροής παραμένει σταθερή σε συνδυασμό με την επίδραση της ανάμιξης των δύο δυνάμεων που εντείνεται και της ασυμμετρίας ανάμεσα στο αριστερό και δεξιό τμήμα της κοιλότητας που οξύνεται καθώς η δομή της συνολικής ροϊκής γραμμής κλίνει προς την κατεύθυνση της ψυχρότερης αριστερής πλευράς.

Το γεγονός αυτό εξηγείται από την αυξανόμενη επίδραση της άνωσης στη δομή της ροής, η οποία επίσης έχει αντίκτυπο σε χαμηλότερες θερμοκρασίες που παρατηρούνται στην κοιλότητα όσο ο αριθμός  $Gr$  αυξάνεται.



Σχήμα 11: Ισοϋψείς για (a) ροϊκή γραμμή, (b) θερμοκρασία και  $Gr=6000$ .

Ο Πίνακας 1 απεικονίζει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών, ως προς το πραγματικό μέρος. Στα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχει χρησιμοποιηθεί πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Από τον συγκεκριμένο πίνακα παρατηρούμε ότι έχει επιτευχθεί ακρίβεια δύο ή τριών σημαντικών ψηφίων μέσω της μεθόδου Arnoldi, και ιδιαίτερα για το φανταστικό μέρος που έχει σημασία στις χρονικές κλίμακες που παρουσιάζονται στις δυναμικές προσομοιώσεις του προβλήματος που μελετούμε.

Η πρώτη ιδιοτιμή που τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών αποκτώντας θετικό πραγματικό μέρος και μη μηδενικό φανταστικό μέρος παρατηρείται για  $Gr \approx 5800$ , το οποίο είναι ενδεικτικό αστάθειας Hopf που οδηγεί σε περιοδική λύση. Αυτό απεικονίζεται καλύτερα σε διάγραμμα αστάθειας στο εύρος των παραμέτρων που μελετούμε.



| Gr=4 000 |           | Gr=6 000 |           | Gr=8 000 |           | Gr=10 000 |           | Gr=12 000 |           |
|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Real     | Imaginary | Real     | Imaginary | Real     | Imaginary | Real      | Imaginary | Real      | Imaginary |
| -2.897   | ±17.264   | 0.423    | ±64.044   | 3.313    | ±61.935   | 4.967     | ±60.041   | 5.923     | ±58.200   |
| -3.591   | 0.0       | -1.721   | ±17.545   | -0.716   | ±17.476   | -0.020    | ±17.222   | 0.419     | ±16.889   |
| -3.731   | ±38.792   | -3.024   | ±37.347   | -2.499   | 0.0       | -2.203    | 0.0       | -1.976    | 0.0       |
| -4.190   | ±4.240    | -2.920   | 0.0       | -2.991   | ±35.734   | -3.110    | ±34.141   | -2.839    | 0.0       |
| -4.623   | ±66.564   | -3.922   | 0.0       | -3.449   | 0.0       | -3.103    | 0.0       | -3.054    | ±5.118    |
| -4.637   | 0.0       | -4.006   | ±4.935    | -3.754   | ±5.277    | -3.387    | ±5.315    | -3.245    | ±32.654   |

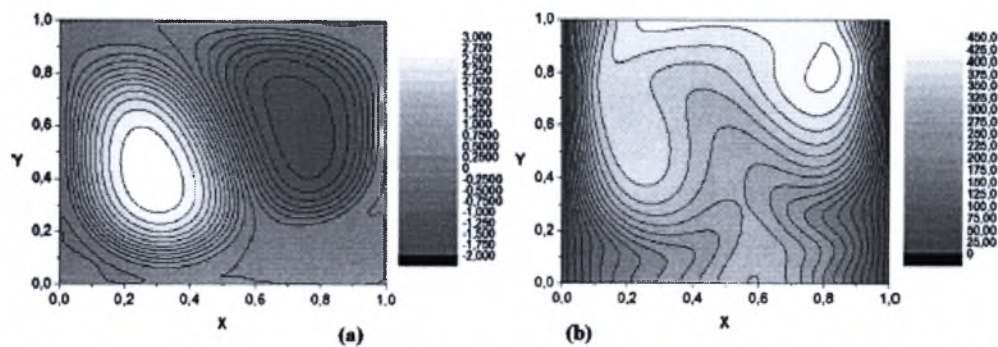
Πίνακας 1: Επίδραση των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών και η σύγκλιση τους με πλέγμα 60 x 60 διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Pr=0.0321$  και  $Ha=0$ .

Καθώς ο αριθμός Gr αυξάνεται, μια επιπλέον ιδιοτιμή της λύσης μόνιμης κατάστασης αποκτά θετικό πραγματικό μέρος και μη μηδενικό φανταστικό μέρος για  $Gr \approx 10000$ . Συνεπώς μια τρίτη ιδιοτιμή τέμνει τον πραγματικό άξονα για  $Gr \approx 13500$ . Σε όλες τις περιπτώσεις οι μιγαδικές ιδιοτιμές προκύπτουν ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η επίδραση της δεύτερης και τρίτης ιδιοτιμής, όπως επίσης και το υπόλοιπο των ασταθών ιδιοτιμών, δεν είναι τόσο σημαντική διότι η λύση μόνιμης κατάστασης είναι ήδη ασταθής. Ωστόσο, επηρεάζουν τη μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος εισάγοντας επιπρόσθετες χρονικές κλίμακες πριν το σύστημα σταθεροποιηθεί τελικά στην περιοδική μόνιμη κατάσταση του. Η ύπαρξη ασταθειών Hopf σε διαφορικές θερμαινόμενες κοιλότητες έχει μελετηθεί εκτενώς από διάφορους ερευνητές [52].

Περαιτέρω αύξηση του ποσού της θερμότητας που απελευθερώνεται αποσταθεροποιεί το σύστημα με την έννοια ότι μειώνει την κρίσιμη τιμή του αριθμού  $Gr_{cr}$ , για την οποία η λύση μόνιμης κατάστασης γίνεται για πρώτη φορά ασταθής. Πιο συγκεκριμένα, η παραγωγή θερμότητας είναι γενεσιουργός αιτία μεγάλων θερμοκρασιακών κλίσεων στην κοιλότητα, (βλ. Σχήμα 12(b)), και κατ' επέκταση αυξάνεται η επίδραση της άνωσης στη διάταξη της ροής για δεδομένο αριθμό Gr, (βλ. Σχήμα 12(a)). Συνεπώς επηρεάζει τη συμπεριφορά και την ευστάθεια του συστήματος καθώς αυξάνεται ο αριθμός Gr με την έννοια ότι εισάγει ασυμμετρία και αποσταθεροποιεί το σύστημα. Στην πραγματικότητα, όταν  $S=2 \times 10^5$  τότε η κρίσιμη τιμή του αριθμού Gr είναι  $Gr_{cr} \approx 2400$ .





Σχήμα 12: Ισοϋψείς για ροική γραμμή και θερμοκρασία για (a) και (b)  $S=2 \times 10^5$ ,  $Ha=0$ .

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα που τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών υπολογίζεται στην κρίσιμη τιμή  $Gr_{cr} \approx 10000$  με παραμέτρους  $S=10^5$  και  $Ha=0$  με χρήση πλέγματος  $60 \times 60$  στοιχείων. Το γεγονός αυτό αντιστοιχεί σε μετατόπιση των εστιών ανακυκλοφορίας. Η μορφή αυτή της ευστάθειας βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες ελεύθερης συναγωγής σε κοιλότητες, [52].

Στην πραγματικότητα, σε πρόσφατη μελέτη είχε δείχθει ότι για κοιλότητα με λόγο διαστάσεων  $A=2$  και σε σχετικά μικρές τιμές του αριθμού  $Pr$  ( $Pr < 0.71$ ), η διαμόρφωση της μόνιμης κατάστασης αρχικά χάνει την ευστάθειά της λόγω της εμφάνισης συμμετρικού mode, ο οποίος ακολουθείται από αντισυμμετρικό mode.

Στην παρούσα μελέτη τα πιο ασταθή ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$ , στο εύρος τιμών όπου  $0 \leq Ha \leq 20$ , αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω. Για την ακρίβεια, για  $Ha \geq 12.5$  τα πιο ασταθή ιδιοδιανύσματα γίνονται πιο συμμετρικά με επιπλέον μικρότερες εστίες ανακυκλοφορίας.

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που παρατηρείται όσο ο αριθμός  $Ha$  αυξάνεται από 15 έως 20 είναι το γεγονός ότι υπάρχει αλλαγή στη σειρά με την οποία οι δύο πιο ασταθείς ιδιοτιμές τέμνουν τον πραγματικό άξονα. Το ιδιοδιάνυσμα που στο διάστημα  $12.5 \leq Ha \leq 15$  είναι το δεύτερο ασταθές αναπτύσσεται γρηγορότερα και όταν ο αριθμός  $Ha$  λάβει την τιμή 20 γίνεται το πιο ασταθές. Αυτό συσχετίζεται με το σημείο ελαχιστοποίησης της συχνότητας της λύσης ταλάντωσης, όπως προβλέπεται από το φανταστικό μέρος της συγκεκριμένης ιδιοτιμής σε ουδέτερη ευστάθεια, το οποίο τώρα λαμβάνει υψηλότερες τιμές.

Καθώς αυξάνουμε τον αριθμό  $G_r$  εισάγουμε ασυμμετρία στη λύση μόνιμης κατάστασης και αυτό έχει αντίκτυπο στη διαφορά θερμότητας που απομακρύνεται μέσω των δύο πλευρών της κοιλότητας. Ωστόσο το μεγαλύτερο ποσό απομακρύνεται από την ψυχρότερη αριστερή πλευρά του αγωγού καθώς η διαφορά  $Nu_L - Nu_R = \Delta Nu$  είναι θετική, όπου οι δείκτες  $L$  και  $R$  δηλώνουν την αριστερή και δεξιά κατακόρυφη πλευρά της κοιλότητας ενώ οι αριθμοί  $Nu_L$  και  $Nu_R$  εκφράζουν το ποσό της θερμότητας που απομακρύνεται σε κάθε μία από τις δύο αυτές πλευρές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα σε ευστάθεια και συμμετρία η οποία έχει παρατηρηθεί και αλλού [53] όπως επίσης και στο πεδίο της ελεύθερης και εξαναγκασμένης συναγωγής. Παρουσιάζοντας διαγραμματικά την επίδραση των πρώτων δύο ιδιοτιμών που γίνονται ασταθείς, μπορούμε να αναγνωρίσουμε την συσχέτιση ανάμεσα στην απώλεια ευστάθειας και τη συμμετρία.

Οι υπολογισμοί των ιδιοτιμών καθορίζονται από την πρώτη διακλάδωση και υποδηλώνουν ότι το πραγματικό μέρος του πιο ασταθούς mode αρχίζει να μειώνεται μετά το σχηματισμό ενός μεγίστου όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση παραβλέπεται από τη δεύτερη πιο ασταθή ιδιοτιμή.

Ο πίνακας 2(a) και (b) απεικονίζει την επίδραση των πιο ασταθών ιδιοτιμών στο κατάλληλο εύρος παραμέτρων όταν ο αριθμός  $Ha$  ισούται με μηδέν και δέκα, αντίστοιχα. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται για την περίπτωση όπου  $Ha=20$  λαμβάνοντας υπόψη ότι η πιο ασταθής ιδιοκατάσταση (eigenmode) είναι τώρα διαφορετική.

Επιπλέον αύξηση του αριθμού  $G_r$  μπορεί είτε να σταθεροποιήσει τελείως τον mode που έγινε πρώτη φορά ασταθής,  $Ha=0$ , είτε να επανεργοποιήσει την αστάθεια από τη στιγμή που το πραγματικό του μέρος διέλθει ένα ελάχιστο. Ωστόσο, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν η αύξηση του  $G_r$  συνδεόταν με την εμφάνιση των πιο ασταθών ιδιοτιμών, τουλάχιστον στο εύρος των παραμέτρων που εφαρμόσαμε.

| (a) $S=10^5$ , $Ha=0$ , $Pr=0.0321$ , $60 \times 60$ biquadratic finite element mesh |              |           |              |           |              |           |              |           |              |           |             |
|--|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|-------------|
| Gr=18 000  |              | Gr=20 000 |              | Gr=25 000 |              | Gr=30 000 |              | Gr=40 000 |              | Gr=60 000 |             |
| Real   | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary   |
| 7.164  | $\pm 52.820$ | 7.352     | $\pm 51.150$ | 7.177     | $\pm 47.860$ | 5.865     | $\pm 45.728$ | 3.786     | $\pm 40.053$ | 3.237     | $\pm 43.47$ |
| 3.791  | $\pm 82.240$ | 4.535     | $\pm 80.323$ | 4.731     | $\pm 76.011$ | 3.033     | $\pm 71.455$ | 3.641     | $\pm 63.950$ | 3.186     | $\pm 58.0$  |
| 0.717  | $\pm 15.729$ | 0.5650    | $\pm 15.319$ | -0.366    | $\pm 1.934$  | 1.172     | $\pm 53.617$ | 4.038     | $\pm 49.900$ | 2.663     | $\pm 29.24$ |
| -1.500   | 0.0          | -1.387    | 0.0          | -0.698    | $\pm 14.005$ | 0.118     | $\pm 76.761$ | 0.732     | $\pm 68.821$ | 2.587     | $\pm 62.16$ |
| -2.241   | $\pm 3.816$  | -1.872    | $\pm 3.155$  | -0.809    | $\pm 39.167$ | -0.926    | 0.0          | 1.535     | $\pm 32.904$ | 2.510     | $\pm 45.05$ |
| -2.403   | 0.0          | -2.275    | $\pm 44.500$ | -1.053    | $\pm 62.823$ | -0.155    | $\pm 3.571$  | -1.229    | 0.0          | -0.620    | $\pm 26.91$ |

| (b) $S=10^5$ , $Ha=10$ , $Pr=0.0321$ , $60 \times 60$ biquadratic finite element mesh |              |           |              |           |              |           |              |           |              |
|---|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|
| Gr=10 000   |              | Gr=14 000 |              | Gr=20 000 |              | Gr=22 000 |              | Gr=24 000 |              |
| Real  | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    | Real      | Imaginary    |
| -0.086  | $\pm 47.017$ | 0.676     | $\pm 43.952$ | 0.261     | $\pm 39.260$ | 0.176     | $\pm 37.471$ | 0.251     | $\pm 35.677$ |
|   |              |           |              | -1.083    | $\pm 52.266$ | -0.122    | $\pm 51.170$ | 0.482     | $\pm 50.208$ |

Πίνακας 2: (a) Επίδραση των έξι μεγαλύτερων ιδιοτιμών με πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Ha=0$  και  $Pr=0.0321$  (b) Επίδραση των τριών μεγαλύτερων ιδιοτιμών με πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων,  $S=10^5$ ,  $Ha=10$ , και  $Pr=0.0321$

Για να εξεταστεί η φύση της προκύπτουσας διακλάδωσης Hopf θα πρέπει κάποιος να καταφύγει είτε στην μη γραμμική ανάλυση είτε να χρησιμοποιήσει δυναμικές προσομοιώσεις. Επιλέξαμε τις δυναμικές προσομοιώσεις στο εύρος των παραμέτρων που καλύφθηκε από την ανάλυση ευστάθειας. Οι περισσότερες από τις προσομοιώσεις έγιναν κοντά στο σημείο διακλάδωσης έτσι ώστε να ορίσουμε την κρισιμότητα της νέας διακλάδωσης, δηλαδή να εξετάσουμε αν η νέα διακλάδωση είναι υπέρ/ υποκρισίμη ( $1^{os}$  δείκτης Lyapunov).

Επιπλέον, η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας χρησιμοποιήθηκε ως παράμετρος της διακλάδωσης έτσι ώστε να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα της θερμικής απομάκρυνσης στις λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές διακλαδώσεις.

Παρά το γεγονός ότι όσο ο Gr αυξάνεται το επίπεδο της συμμετρίας της λύσης μόνιμης κατάστασης μπορεί να διαφοροποιείται, η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας συνεχώς μειώνεται ως αποτέλεσμα της ανακυκλοφορίας, η οποία εμπεριέχει ένα ακόμη μεγαλύτερο μέρος του ρευστού στην κοιλότητα, με εξαίρεση τα πολύ μικρά οριακά στρώματα ιξώδους που αναπτύσσονται κοντά στα τοιχώματα.

Για τιμές του  $Gr < 5800$ , ακόμη και με την επιβολή μεγάλων αρχικών διαταραχών, το σύστημα τελικά αποκαθίσταται στη λύση μόνιμης κατάστασης. Το γεγονός αυτό

επεξηγείται από την ευστάθεια της λύσης μόνιμης κατάστασης στο εφαρμοζόμενο εύρος παραμέτρων.

Ένα επίσης σημαντικό χαρακτηριστικό των δυναμικών προσομοιώσεων είναι η επίδραση των διαδοχικών ασταθών ιδιοτιμών. Αυτό γίνεται εμφανές στις προσομοιώσεις με  $Gr \sim O(10^4)$ , όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν δύο ασταθείς ιδιοτιμές όπως φαίνεται στον πίνακα 1 και η μέση θερμοκρασία της κοιλότητας σχεδόν αμέσως δημιουργεί μια κορεσμένη περιοχή κοντά στην τιμή μόνιμης κατάστασης για  $Gr = 10000$ , αρχίζει να παρουσιάζει συμπεριφορά όμοια με ταλάντωση, η οποία χαρακτηρίζεται από παλμό ανάμεσα στους δύο πρώτους modes που γίνονται ασταθείς.

Η περιοδική διακλάδωση εμφανίζεται στο προσκήνιο ως μια υπερκρίσιμη διακλάδωση από την στατική διακλάδωση και αυτή η δομή διατηρείται καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της αριθμητικής μελέτης.

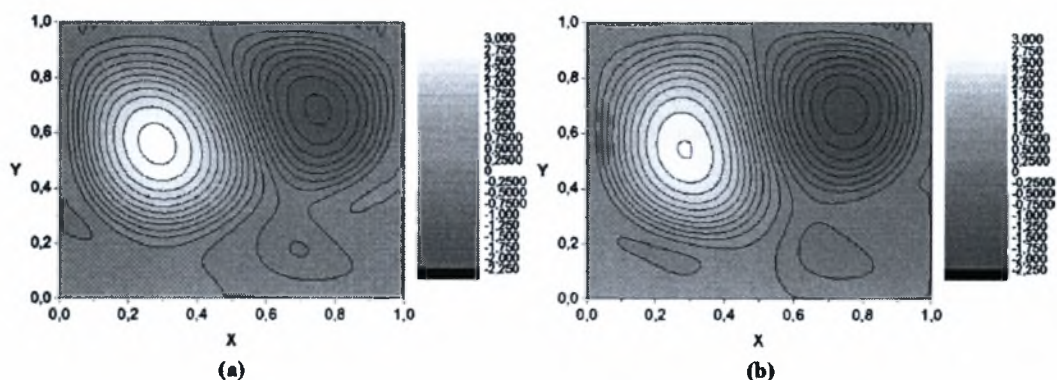
Αποτελεί ενδιαφέρον η φύση της περιοδικής κατάστασης που καθορίζει τη δυναμική του συστήματος. Αν επικεντρώσουμε στη ροϊκή συνάρτηση, παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της κίνησης οι δύο κύριες εστίες ανακυκλοφορίας προσλαμβάνουν περιοδικά μια θέση πιο κοντά στο κέντρο της ροής, (βλ. Σχήμα 13).

Η συμπεριφορά αυτή είχε προβλεφθεί από τη φύση του ιδιοδιανύσματος στο σημείο διακλάδωσης και οδηγεί σε μια πιο αποδοτική ψύξη της κοιλότητας καθώς εντείνει τη μεταφορά θερμότητας υποχρεώνοντας το θερμότερο κεντρικό τμήμα σε κυκλική κίνηση στις κατακόρυφες πλευρές της κοιλότητας, ως μια εναλλακτική βάση κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Επιπρόσθετα, η διαφορά στο ποσό της θερμότητας που απομακρύνεται μέσω των κατακόρυφων πλευρών του αγωγού παρατηρήθηκε να μειώνεται συγκρινόμενη με τη λύση μόνιμης κατάστασης και αυτή η ασυμβατότητα εντείνεται όσο ο αριθμός  $Gr$  αυξάνεται, υποδεικνύοντας παράλληλα το ρόλο της συμμετρίας στην ευστάθεια της περιοδικής διακλάδωσης και την αποδοτικότητα της θερμικής απομάκρυνσης.

Σημειώνουμε ότι θερμαινόμενη τετραγωνική κοιλότητα έχει μελετηθεί επισταμένως [54], ενώ η σταθεροποίηση του μαγνητικού πεδίου και η αποσταθεροποίηση της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας, για την περίπτωση τετραγωνικής κοιλότητας, έχει ερευνηθεί το 2005 [55].





Σχήμα 13: Στιγμιότυπα της ροϊκής συνάρτησης στην αρχή και στη μέση της μόνιμης περιοδικής κίνησης για την περίπτωση όπου  $Gr=7000$ ,  $S=10^5$  και  $Ha=0$  με πλέγμα  $30 \times 30$  στοιχείων. Η περίοδος  $T_0 \approx 0.1$

Εξετάστηκε επίσης η φύση της αστάθειας Hopf χρησιμοποιώντας τον αριθμό  $Ha$  ως βασική παράμετρο. Βέβαια για υψηλές τιμές του  $Ha$  η στατική διακλάδωση είναι ευσταθής και καθορίζει τη δυναμική του συστήματος, αν και καθώς ο  $Ha$  μειώνεται κάτω από μια σταθερή κρίσιμη τιμή η οποία εξαρτάται από τον αριθμό  $Gr$ , το σύστημα παρουσιάζει συμπεριφορά ανάλογη των ταλαντώσεων.

Η αιτία της αυξημένης θερμικής απομάκρυνσης μπορεί να συσχετιστεί με την κίνηση του ρευστού στην κοιλότητα όπως προβλέπεται από τη λύση ταλάντωσης, στην οποία οι δύο δίνες ανακυκλοφορίας καταλαμβάνουν μεγαλύτερο μέρος του υγρού μετάλλου που ρέει στην κοιλότητα, εν αντιθέσει με τη λύση σε μόνιμη κατάσταση.

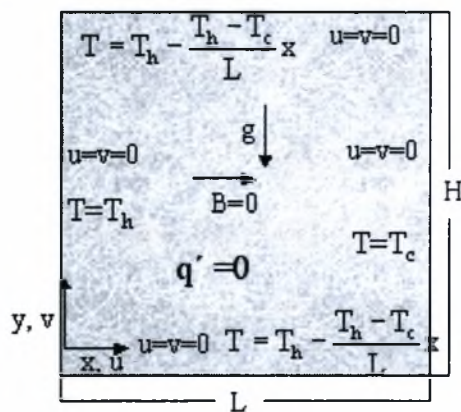
Η περίπτωση για  $Ha=12.5$ ,  $S=10^5$  και  $Gr=55000$  προσομοιώθηκε αριθμητικά με χρήση πλέγματος  $30 \times 30$  στοιχείων. Για τη συγκεκριμένη τιμή του  $Ha$  η δομή των πιο ασταθών ιδιοδιανυσμάτων είναι παρόμοια με την αντίστοιχη που προκύπτει για υψηλές τιμές του  $Ha$ , ενώ παράλληλα να σημειώσουμε ότι επαρκεί πλέγμα  $30 \times 30$  στοιχείων για να μελετηθεί η δυναμική του συστήματος. Ωστόσο για υψηλές τιμές του  $Ha$  είναι απαραίτητη η χρήση πλέγματος  $60 \times 60$  στοιχείων για να εξασφαλιστεί αξιόπιστη περιγραφή της δυναμικής του συστήματος, κατά συνέπεια οι προσομοιώσεις είναι πιο χρονοβόρες.

Οι παραπάνω λύσεις για την μόνιμη κατάσταση της κοιλότητας λαμβανόμενης ως διδιάστατης χρησιμοποιούνται παρακάτω ως βασικές λύσεις για την ανάλυση ευστάθειας σε τρισδιάστατες διαταραχές που ακολουθεί.

## 4.2 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής

Η διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με αγωγία οριζόντια τοιχώματα έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Ενδεικτικά αναφέρουμε Henkes & Le Quere (1996), Gelfgat & Tanasawa (1994) [56,57]. Οι περισσότερες από τις μελέτες επικεντρώνονται σε δισδιάστατες βασικές ροές με εφαρμογή δισδιάστατων διαταραχών, ωστόσο στην παρούσα μελέτη εισάγουμε τρισδιάστατες απειροστές διαταραχές.

Επικεντώσαμε το ενδιαφέρον μας σε μελέτη των Xin & Le Quere (2001) [58] που αφορούσε την χρήση γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας σε διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με θερμικά αγωγία οριζόντια τοιχώματα, μέσα στην οποία η ροή ρευστού γίνεται λόγω ελεύθερης συναγωγής απουσία μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η συνάρτηση της θερμοκρασίας έχει γνωστή κατανομή σε όλα τα τοιχώματα του αγωγού, (βλ. Σχήμα 14).



Σχήμα 14: Διατομή του αγωγού σε μελέτη των S. Xin & P. Le Quere.

Στην ανάλυση που εφάρμοσαν οι παραπάνω μελετητές, οι αριθμητικοί υπολογισμοί που διεξήγαγαν έδειξαν ότι οι διαταραχές αρχικά μετριάζονται σε συμπεριφορά που προσεγγίζει ταλάντωση όταν ο αριθμός Rayleigh  $Ra=1.64 \times 10^6$ , αλλά με την πάροδο του υπολογιστικού χρόνου (περίπου 1000 αδιάστατα χρονικά βήματα) διαπίστωσαν ιδιομορφή στάσιμου κύματος που διαρκώς ενισχυόταν. Η επαναληπτική μέθοδος Arnoldi που χρησιμοποίησαν απέδωσε μόνο ένα ζεύγος



ιδιοτιμών που ανήκε στην συγκεκριμένη ιδιομορφή. Η τελευταία εμφανίζεται μόνο για τρισδιάστατες διαταραχές και μάλιστα εμφανίζεται πριν από τις αντίστοιχες Horf που κυριαρχούν για δισδιάστατες ( $k=0$ ) διαταραχές.

Στη συνέχεια, εισάγοντας τρισδιάστατες απειροστές διαταραχές στο πρόβλημα ροής υγρού μετάλλου με ελεύθερη συναγωγή ο κυματάρριθμος  $k$  παίρνει πεπερασμένη τιμή. Όταν ο κυματάρριθμος διαιρεθεί με την τιμή  $2\pi$  τότε εκφράζει το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην προκύπτουσα ιδιοτιμή κατά τη διαμήκη κατεύθυνση του αγωγού. Στην περίπτωση όπου ο κυματάρριθμος μηδενιστεί τα αποτελέσματα του τρισδιάστατου προβλήματος συμπίπτουν με τα αντίστοιχα από την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός αυτό εφαρμόσαμε κάποιους αριθμητικούς ελέγχους έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων από το τρισδιάστατο πρόβλημα.

Προσαρμόσαμε κατάλληλα τον κώδικα που διαθέταμε έτσι ώστε να επιλύει το πρόβλημα που μελετήθηκε από τους Xin & Le Quere και αναπαρήγαμε τα αποτελέσματα που είχαν δημοσιεύσει (βλ. Πίνακας 3), ως εκ τούτου κατασκευάσαμε το διάγραμμα ουδέτερης καμπύλης, (βλ. Σχήμα 15), που αντιστοιχεί στις κυρίαρχες ιδιομορφές που είχαν διαπιστώσει στη μελέτη τους.

| Συχνότητα κρίσιμης ιδιομορφής                             | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 |
|---|--------|--------|--------|
| Pelekasis&Dimopoulos<br>(20x20<br>διτετραγωνικά στοιχεία) | 1.38   | 1.16   | 1.61   |
| Xin&Quere<br>(41x41 collocation points)                   | 1.41   | 1.19   | 1.62   |

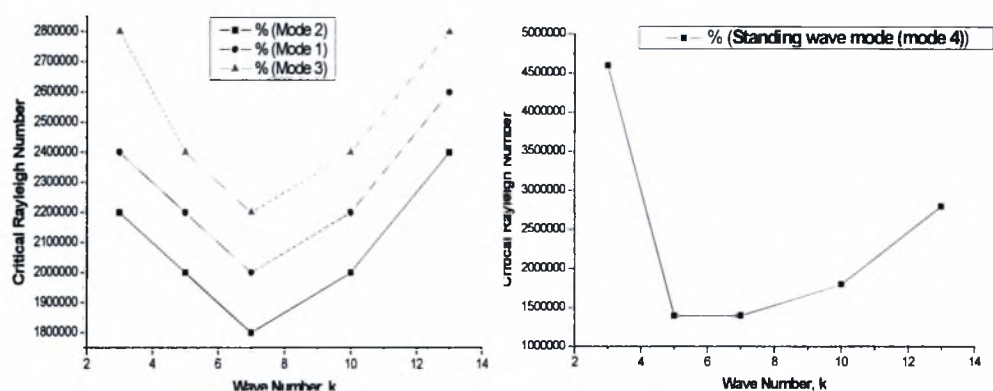
Πίνακας 3: Σύγκριση τιμών συχνότητας που αντιστοιχούν σε κρίσιμες ιδιομορφές οδευόντων κυμάτων όπως προέκυψε από την μελέτη των Xin & Le Quere και την ημέτερη εργασία.

Παρατηρώντας τον παραπάνω Πίνακα γίνεται εμφανές ότι με χρήση αραιού πλέγματος 20x20 διτετραγωνικών στοιχείων κατέστη δυνατή επιτυχής σύγκλιση ως προς τις τιμές της συχνότητας των τριών κρίσιμων οδευόντων κυμάτων, η μορφή των

Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία

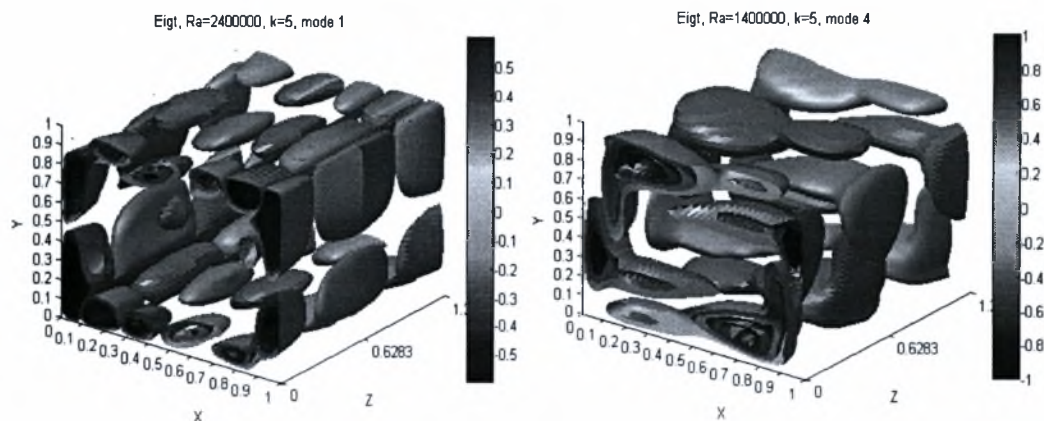
οποίων παρουσιάζεται στο Σχήμα 15(a), που υπολόγισαν οι προαναφερθέντες ερευνητές.

Στο Σχήμα 15 εφαρμόζουμε ουσιαστικά μια παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Rayleigh ως προς τον κυματαριθμό  $k$ . Η κρίσιμη τιμή του  $Ra$ , όπως βρέθηκε από τους Xin & Quere είναι  $10^6$  και αντιστοιχεί για  $k=5$ . Επιπλέον, το γεγονός αυτό εξηγεί το λόγο που σε μελέτη των Henkes & Le Quere (1996) [59] σχετικά με τρισδιάστατες μεταβολές των ροών με ελεύθερη συναγωγή, είχε παρατηρηθεί λύση σε μόνιμη κατάσταση για  $Ra=1.8 \times 10^6$ .



Σχήμα 15: Διάγραμμα ουδέτερης καμπύλης των ασταθών ιδιομορφών (a) οδεύοντων κυμάτων και (b) στάσιμου κύματος, με τιμή παραμέτρου  $Pr=0.71$  και χρήση πλέγματος  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων κατά την  $x$  και  $y$  διεύθυνση του προβλήματος.

Στο παραπάνω σχήμα πιστοποιήσαμε την ύπαρξη των τεσσάρων συνολικά ιδιομορφών που είχαν διαπιστωθεί προγενέστερα από τους Xin & Quere εκ των οποίων οι τρεις ιδιομορφές αντιστοιχούν σε οδεύοντα κύματα με τιμές συχνοτήτων όπως φαίνεται στον Πίνακα 3 και η τέταρτη ιδιομορφή η οποία αντιπροσωπεύει το στάσιμο κύμα. Η δυναμική του εν λόγω προβλήματος καθορίζεται από το στάσιμο κύμα καθώς γίνεται εμφανές στο Σχήμα 15(b) ότι για τιμές κυματάριθμου  $5 < k < 7$  η κρίσιμη τιμή του αριθμού Rayleigh λαμβάνει την ελάχιστη τιμή ( $Ra=1400000$ ). Παράλληλα, στο Σχήμα 16 δίδονται οι ισο-επιφάνειες (iso-surfaces) της θερμοκρασίας στην κοιλότητα όπως καθορίζεται από τις ασταθείς ιδιομορφές που αντιστοιχούν σε οδεύον κύμα με συχνότητα  $\omega=1.38$  και σε στάσιμο κύμα.



Σχήμα 16: Κατανομή θερμοκρασίας στην κοιλότητα με βάση την ασταθή ιδιομορφή που αντιστοιχεί (a) στο οδεύον κύμα συχνότητας  $\omega=1.38$ ,  $Ra=2400000$  και (b) στο στάσιμο κύμα,  $Ra=1400000$ , με τιμή παραμέτρου  $Pr=0.71$ , κυματάριθμο  $k=5$  και χρήση πλέγματος  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων κατά την  $x$  και  $y$  διεύθυνση του προβλήματος.

Οι ισο-επιφάνειες στο Σχήμα 16(a) δείχνουν ότι, εν συγκρίσει με τις δισδιάστατες διαταραχές, η πιο σημαντική διαφορά λαμβάνει χώρα στα κάθετα συνοριακά στρώματα και στις γωνίες της διατομής όπου οι δομές είναι μικρότερες. Επιπλέον, οι διαταραχές αποσβεννύονται πριν φτάσουν στις γωνίες και ύστερα ενισχύονται ελαφρώς εκ νέου. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 16(b) παρατηρούμε την δημιουργία εστιών ανακυκλοφορίας στις γωνίες και μάλιστα οι δομές που σχηματίζονται σε αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις αντίστοιχες δομές του Σχήματος 16(a), ως εκ τούτου η ανακυκλοφορία είναι πιο έντονη.

### 4.3 Αποτελέσματα προβλήματος ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου σε κοιλότητα λόγω ελεύθερης συναγωγής παρουσία μαγνητικού πεδίου

Πριν περάσουμε στην παράθεση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της παραμετρικής μελέτης που εφαρμόστηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας εξετάζοντας την επίδραση: i) της έντασης του μαγνητικού πεδίου που εκφράζεται μέσω του αριθμού Hartmann (βλ. εδάφιο 4.3.1), ii) του ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας  $S$  (βλ. εδάφιο 4.3.2) και iii) του λόγου όψεως της

διατομής  $A$  (βλ. εδάφιο 4.3.3), είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τις τυπικές τιμές των μεγεθών που συναντώνται στη βιβλιογραφία ΜΥΔ ροών υγρού μετάλλου σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής.

Από μελέτη των Molokov & Buehler (2003) [67] σε ορθογωνικό αγωγό με λεπτά αγώγιμα τοιχώματα υπό την επίδραση ισχυρού οριζόντιου μαγνητικού πεδίου προτείνονται για μανδύα που ψύχεται από ήλιο και τον οποίο διαρρέει υγρό μέταλλο  $PbLi$  οι παρακάτω τιμές για παραμέτρους με διαστάσεις : ύψος διατομής  $0.1m$ , χαρακτηριστική διαφορά θερμοκρασίας  $100K$  και ένταση μαγνητικού πεδίου ίση με  $10T$ . Επιπρόσθετα, για υγρό μέταλλο  $Pb17Li$  και θερμοκρασία αναφοράς  $673K$  σε καθορισμένο σημείο εντός της ροής προκύπτουν αριθμός  $Ha \sim 2.5 \cdot 10^4$  και αριθμός  $Gr \sim 10^9 - 2 \cdot 10^{10}$ .

#### **4.3.1 Επίδραση του μαγνητικού πεδίου στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση τετραγωνικής διατομής αγωγού (λόγος όψης $A=1$ ) και ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S=100000$ .**

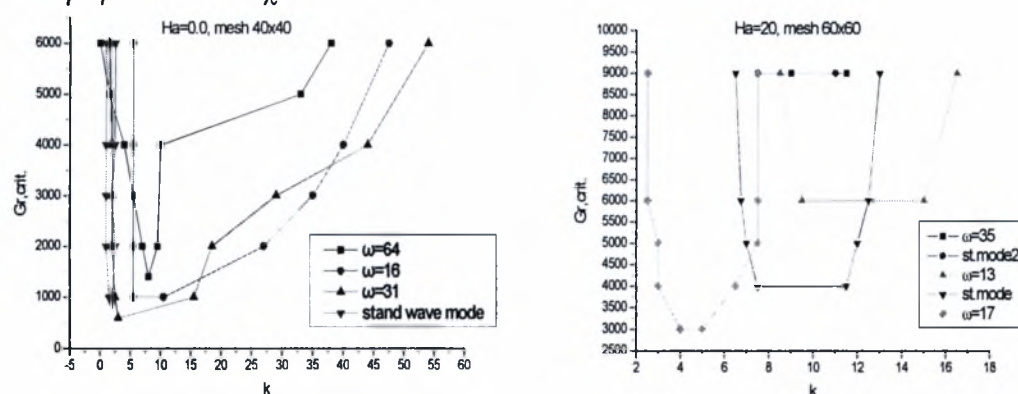
Εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση εξετάζοντας τις κρίσιμες τιμές που λαμβάνει ο αριθμός  $Gr$  συναρτήσει του κυματάριθμου  $k$ . Κατά τη διάρκεια της μελέτης αναδύονται δύο ειδών ασταθείς ιδιομορφές. Η μία αντιστοιχεί στην εμφάνιση στάσιμου κύματος (standing wave mode) και χαρακτηρίζεται από μηδενική τιμή του φανταστικού μέρους της ασταθούς ιδιοτιμής ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στην εμφάνιση οδεύοντος κύματος (travelling wave mode), χαρακτηρίζεται από μη μηδενική τιμή του φανταστικού μέρους της ασταθούς ιδιοτιμής και εμφανίζεται με την μορφή ζεύγους συζυγών μιγαδικών αριθμών,. Η τελευταία αποτελεί εξέλιξη της διακλάδωσης Hopf που παρατηρήθηκε στην δισδιάστατη ανάλυση, για τρισδιάστατες διαταραχές.

Τα παρακάτω διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας παριστούν την παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού  $Gr$  ως προς τον κυματάριθμο  $k$ . Παρατηρούμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες. Επιπλέον, καθώς ο κυματάριθμος  $k$  αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του  $Gr$  μειώνεται. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός  $Ha$  αυξάνεται ο  $Gr$  λαμβάνει

μεγαλύτερες κρίσιμες τιμές, ενώ σε κάθε περίπτωση η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος κυριαρχεί στην ανάλυση που εφαρμόσαμε, κατά συνέπεια οι ιδιομορφές οδευόντων κυμάτων είναι πιο ασταθή σε σχέση με τις αντίστοιχες στάσιμου κύματος.

Στην περιοχή που ορίζεται κάτω από την καμπύλη της ιδιομορφής οδεύοντος κύματος, η οποία αποτελεί το κυρίαρχο μήκος κύματος στη δυναμική του προβλήματος που εξετάζουμε, έχουμε την περιοχή της ευστάθειας ενώ αντίθετα στην περιοχή που ορίζεται πάνω από την καμπύλη της ιδιομορφής οδεύοντος κύματος εμφανίζεται η περιοχή της αστάθειας.

Στο Σχήμα 17 παραθέτουμε τα διαγράμματα ουδέτερης ευστάθειας για τις περιπτώσεις όπου απουσιάζει το μαγνητικό πεδίο, ως εκ τούτου ο αριθμός  $Ha=0$ , και όταν έχουμε μαγνητικό πεδίο μεσαίας εντάσεως ( $Ha=20$ ), ενώ ο ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας  $S=100000$ . Στη μεν πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε πλέγμα  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων ως προς την  $x,y$  διεύθυνση του προβλήματος, στη δε δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 17: Διάγραμμα παραμετρικής ανάλυσης κρίσιμης τιμής του αριθμού  $Gr$  ως προς τον κυματάριθμο  $k$  με παραμέτρους (a)  $Ha=0.0$ ,  $S=100000$ , (b)  $Ha=20.0$ ,  $S=100000$ .

Γίνεται εμφανές ότι στο Σχήμα 17(a) το κυρίαρχο μήκος κύματος αντιστοιχεί σε ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=31$  και αντίστοιχα στο Σχήμα 17(b) το κυρίαρχο μήκος κύματος είναι οδεύον κύμα συχνότητας  $\omega=17$ . Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με σχετική μελέτη των Burr & Muehler (2002) που αφορούσε διαφορικό ορθογωνικό αγωγό παρουσία ισχυρού οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, απουσία εσωτερικής πηγής θερμότητας και θερμοκρασιακού πεδίου παράλληλου στη

Εργαστήριο Ρ & Σ / Δ. Δημόπουλος : Μεταπτυχιακή Εργασία 67



δύναμη της βαρύτητας όπου παρατηρήθηκε, μέσω των πειραμάτων που διεξήγαγαν, ιδιομορφή στάσιμου κύματος που κυριαρχούσε στο πρόβλημα που διερεύνησαν.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιομορφές που παρατηρήθηκαν στην παρούσα εργασία δεν συσχετίζονται με τις κυρίαρχες ιδιομορφές οι οποίες καθορίζουν τη διαδιάστατη ανάλυση της κοιλότητας και επιπλέον εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της υδροδυναμικής αστάθειας εξαιτίας των καμπύλων ροϊκών γραμμών της διαμόρφωσης της βασικής ροής [60], όπως φαίνεται και στο κάτωθι Σχήμα 18.



Σχήμα 18: Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής με παραμέτρους  $Ha=0.0$ ,  $Gr=2000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων.

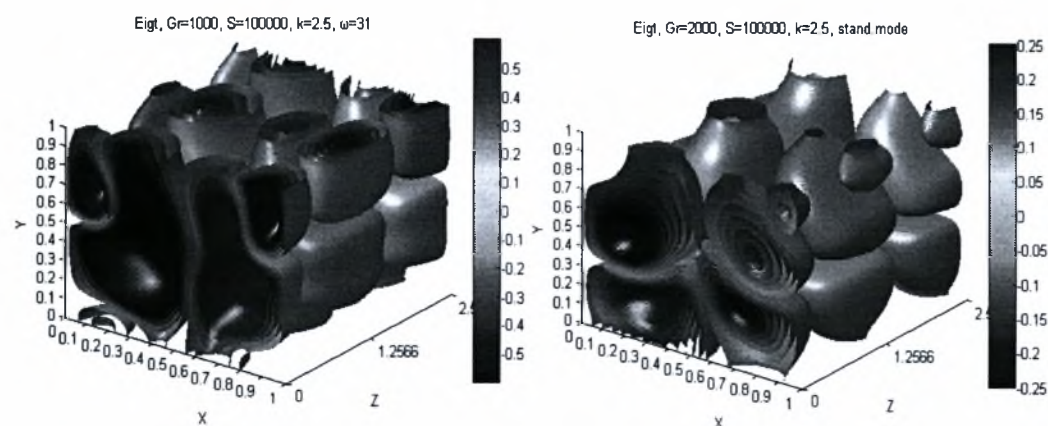
Στα Σχήματα που παραθέτουμε παρακάτω αναπαριστούμε με ισο-επιφάνειες τις ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφουν το πεδίο της θερμοκρασίας. Οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν υπολογιστεί αριθμητικά, μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Arnoldi, στα σημεία όπου ο αριθμός  $Gr$  λαμβάνει κρίσιμη τιμή, κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές που έχουν προκύψει από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών είναι ασταθείς.

Στο Σχήμα 19 παριστάνεται η ιδιοσυναρτήση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία με παραμέτρους  $Ha=0.0$ ,  $S=100000$  και  $k=2.5$ , για τις περιπτώσεις στάσιμου και οδεύοντος κύματος. Σημειωτέον ότι αμφότερες οι ιδιομορφές είναι ασταθείς στο συγκεκριμένο πεδίο παραμέτρων. Παρατηρείται μία σχεδόν συμμετρική διαμόρφωση στην περίπτωση του κυρίαρχου οδεύοντος κύματος ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος (βλ. Σχήμα 19(a)) και μία σχεδόν διπλή αντισυμμετρική δομή για το στάσιμο κύμα ως προς τους άξονες  $x$ ,  $y$  του προβλήματος, (βλ. Σχήμα 19(b)).

Η απουσία μαγνητικού πεδίου συντελεί στο γεγονός ότι οι δομές των εστιών ανακυκλοφορίας που παρατηρούνται να μην είναι απόλυτα συμμετρικές ή

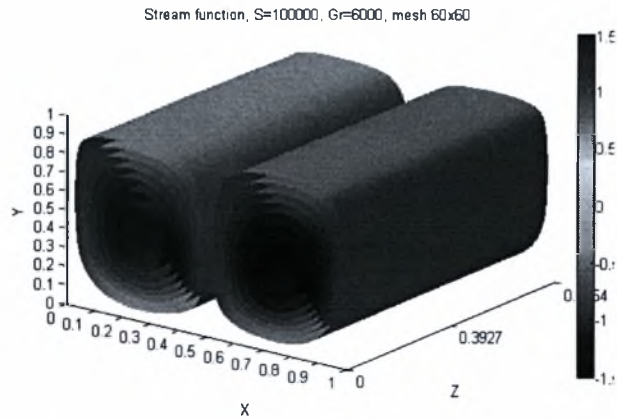


αντισυμμετρικές. Η παρατήρηση αυτή παύει να υφίσταται σε μεγάλο ποσοστό όταν επιτρέψουμε την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου, (βλ. Σχήμα 21,22). Επιπλέον, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δύο κυρίαρχες δομές δινών του Σχήματος 19(a) συναντώνται στη γειτονία της γραμμής που διαχωρίζει τις δύο εστίες, οι οποίες παρατηρούνται στη διαμόρφωση της βασικής ροής του Σχήματος 18.



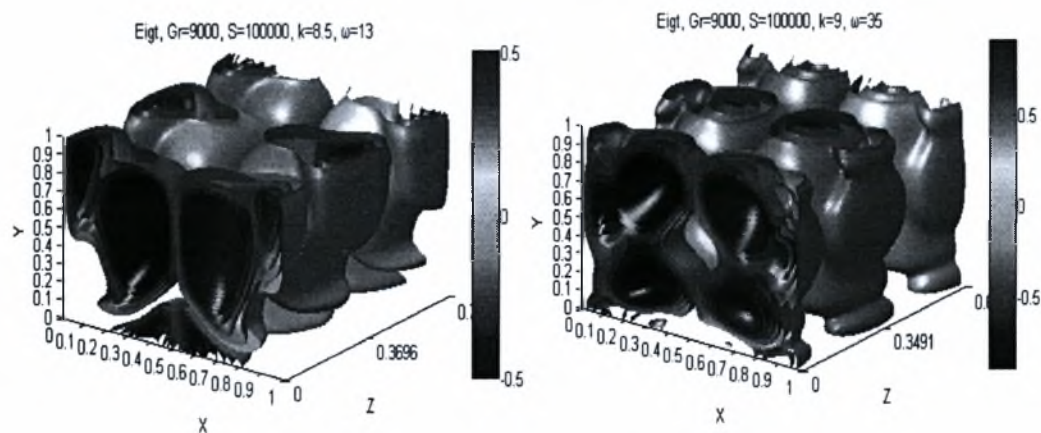
Σχήμα 19: Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή (a) οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=31$ ,  $Gr=1000$ , (b) στάσιμου κύματος και  $Gr=2000$ , με παραμέτρους  $Ha=0.0$ ,  $S=100000$ ,  $k=2.5$  και πλέγμα  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Στο Σχήμα 20 παραθέτουμε το διάγραμμα ροϊκής συνάρτησης της βασικής ροής με παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=6000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων. Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση απουσίας μαγνητικού πεδίου παρατηρείται ο σχηματισμός δύο εστιών ανακυκλοφορίας στην κεντρική περιοχή της διατομής. Εντούτοις η ανακυκλοφορία γίνεται εντονότερη και οφείλεται στην αύξηση του μαγνητικού πεδίου η οποία εντείνει τη μεταφορά θερμότητας εντός της κοιλότητας.

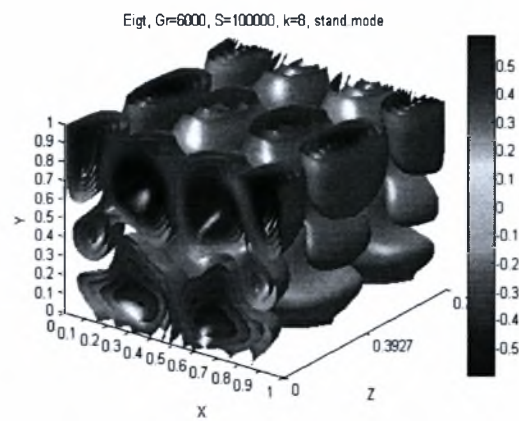


Σχήμα 20: Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής με παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=6000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 21 παριστάνεται η ιδιοσυνάρτηση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία με παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=9000$  και  $S=100000$  για τις περιπτώσεις στάσιμου και οδοντών κυμάτων. Παρατηρείται μία συμμετρική διαμόρφωση στις περιπτώσεις οδοντών κυμάτων με συχνότητα  $\omega=13$  και  $\omega=35$  ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος (βλ. Σχήμα 21) και μία σχεδόν διπλή αντισυμμετρική δομή για το στάσιμο κύμα ως προς τους άξονες  $x$ ,  $y$  του προβλήματος, (βλ. Σχήμα 22).



Σχήμα 21: Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή (α) οδοντός κύματος με συχνότητα  $\omega=13$ ,  $k=8.5$  και (β) οδοντός κύματος με συχνότητα  $\omega=35$ ,  $k=9.0$  και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=9000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 22: Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή στάσιμου κύματος και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=6000$ ,  $S=100000$ ,  $k=8.0$  και πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Ha$  υπάρχει μια πιο ομοιόμορφη θερμοκρασιακή κατανομή στην διατομή του αγωγού. Στην τρέχουσα ερευνητική προσπάθεια γίνονται προσομοιώσεις για μεγαλύτερες τιμές του αριθμού  $Ha$  ώστε να αναδειχθεί καλύτερα η επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να ληφθούν υπόψη στην ανάλυση που εφαρμόζουμε αρκετά υψηλότερες τιμές του  $Ha$  έτσι ώστε να διαφανεί η λειτουργία του Hartmann braking effect και η φύση των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν.

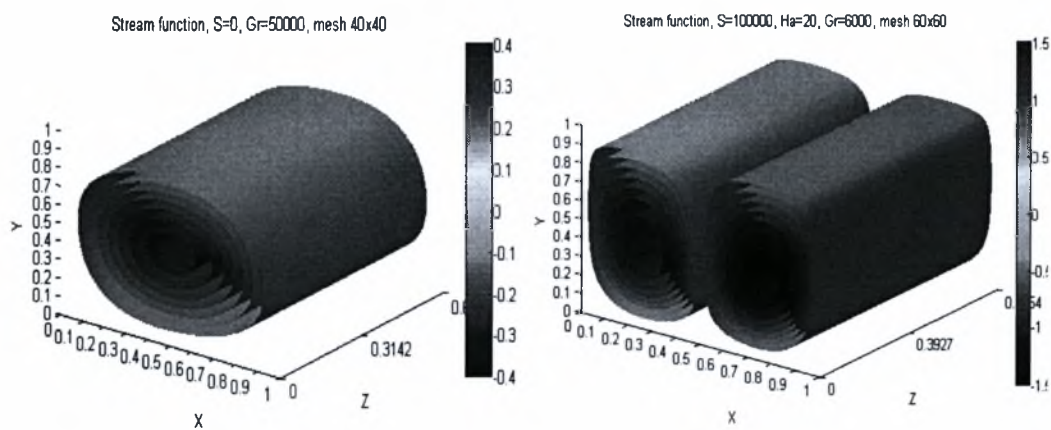
#### 4.3.2 Επίδραση του ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S$ στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση τετραγωνικής διατομής αγωγού (λόγος όψης $A=1$ ) και αριθμού $Ha=20$ .

Προκειμένου να ταυτοποιήσουμε τον τύπο των ασταθειών που παρατηρήσαμε στα προηγούμενα διαγράμματα διεξήγαμε μια παραμετρική ανάλυση μεταβάλλοντας τον ογκομετρικό ρυθμό παραγωγής θερμότητας  $S$ , ο οποίος προσομοιώνει τις συγκρούσεις των νετρονίων που εισέρχονται εντός του υγρού λιθίου με τους πυρήνες του λιθίου.

Μειώνοντας τον όρο  $S$ , από 100000 σε 0 (βλ. Σχήμα 23), η διαμόρφωση της βασικής ροής μετασχηματίζεται από δομή με δύο εστίες ανακυκλοφορίας σε

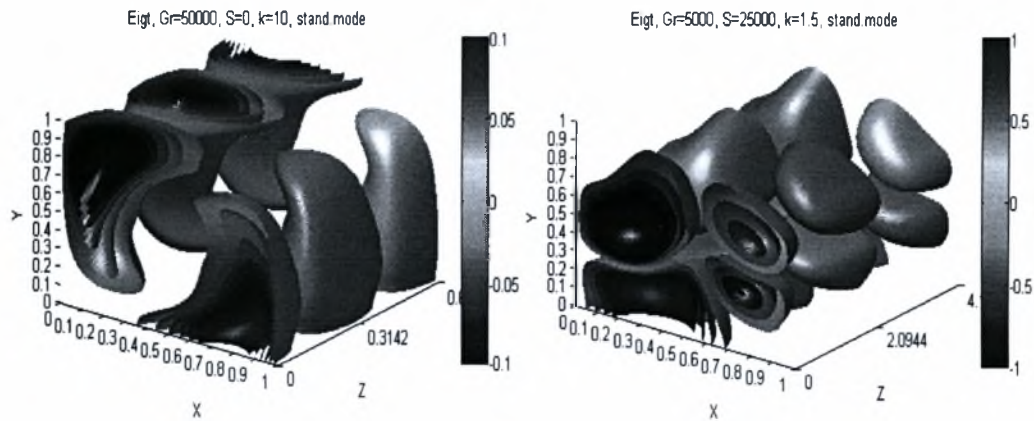
αντίστοιχη δομή μίας εστίας. Η βασική ροή με μια εστία χαρακτηρίζεται από καμπύλες ροϊκές γραμμές πλησίον των γωνιών της κοιλότητας, ενώ η βασική ροή με δύο εστίες χαρακτηρίζεται κυρίως από τη διαμόρφωση υπερβολικής ροής στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας όπου οι δύο εστίες συναντώνται.

Οι παραπάνω επισημάνσεις γίνονται εμφανείς καθώς αντανακλώνται στην δομή της κυρίαρχης ιδιομορφής και αντιστοιχεί στις προαναφερθέντες δύο περιπτώσεις. Όταν ο όρος  $S=0$  λαμβάνουμε μία αστάθεια τύπου Goertler πλησίον των γωνιών της διατομής (βλ. Σχήμα 24(a)) και στην περίπτωση όπου ο όρος  $S$  λαμβάνει υψηλές τιμές και συγχρόνως έχουμε το σχηματισμό δύο εστιών στη βασική ροή παρατηρούμε ότι η ιδιομορφή στάσιμου κύματος είναι σχεδόν αντισυμμετρική ως προς τους άξονες  $x, y$  του προβλήματος (βλ. Σχήμα 24(b)). Όταν ο όρος  $S$  υπερβεί την τιμή 25000 τότε η ιδιομορφή στάσιμου κύματος (βλ. Σχήμα 25(a)) υποσκελίζεται από την ιδιομορφή οδεύοντος κύματος (βλ. Σχήμα 25(b)) η οποία καθίσταται κυρίαρχη σε αυτή την περίπτωση.

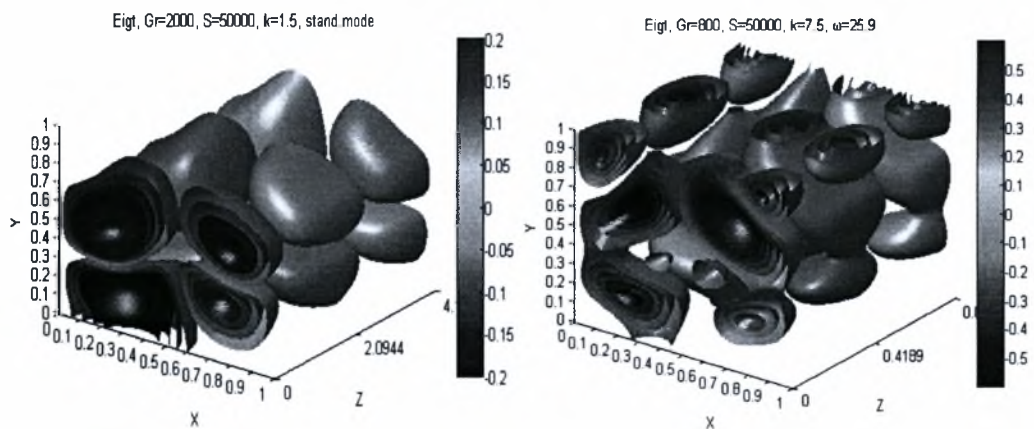


Σχήμα 23: Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής με παραμέτρους : (a)  $Ha=20.0$ ,  $Gr=50000$ ,  $S=0$  και πλέγμα  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων, (b)  $Ha=20.0$ ,  $Gr=6000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.



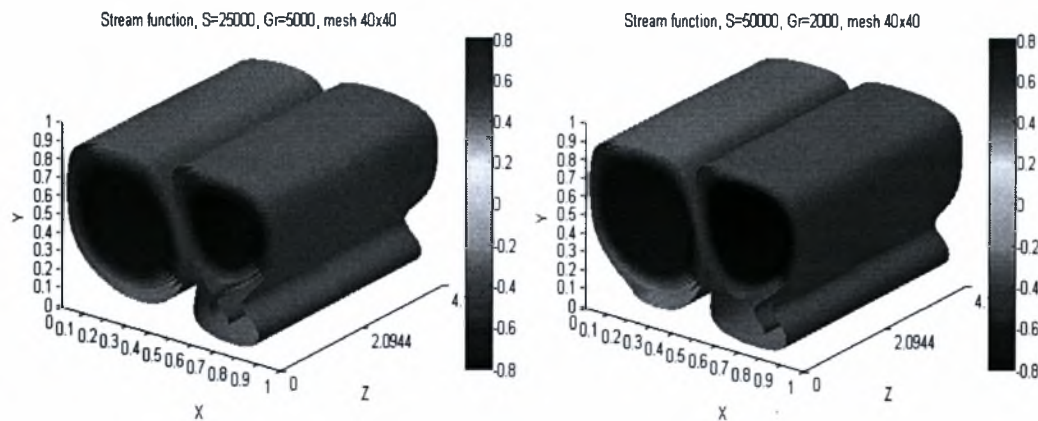


Σχήμα 24: Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή στάσιμου κύματος με (a)  $Gr=50000$ ,  $S=0$  και  $k=10.0$ , (b)  $Gr=5000$ ,  $S=25000$ ,  $k=1.5$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ , πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 25: Ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή (a) στάσιμου κύματος και  $k=1.5$ , (b) οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=25.9$ ,  $k=7.5$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $S=50000$ , πλέγμα  $60 \times 60$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Παρατηρώντας τα Σχήματα 24, 25 όπου ο ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας  $S$  λαμβάνει τις τιμές 25000 και 50000 παραθέτουμε για λόγους πληρότητας τη διαμόρφωση της βασικής ροής όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Για τις συγκεκριμένες τιμές η βασική ροή χαρακτηρίζεται από το σχηματισμό δύο εστιών ανακυκλοφορίας κατά το κεντρικό τμήμα της διατομής.



Σχήμα 26: Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής με παραμέτρους : (a)  $Ha=20.0$ ,  $Gr=5000$ ,  $S=25000$ , (b)  $Ha=20.0$ ,  $Gr=2000$ ,  $S=50000$ , και πλέγμα  $40 \times 40$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθούμε στην αστάθεια τύπου Goertler σύμφωνα με την οποία χαρακτηρίσαμε το Σχήμα 24(a). Η συγκεκριμένη αστάθεια ταξινομείται στις κεντρόφυγες αστάθειες. Ο Goertler (1940) [61], ο οποίος για πρώτη φορά την μελέτησε, έδειξε ότι μπορεί να παρατηρηθεί σε συνοριακά στρώματα κατά μήκος ενός κοίλου τοιχώματος. Το πρόβλημα αυτό είχε επίσης μελετηθεί μεταγενέστερα από τους Meksyn (1950) [62], Hammerlin (1955) [63] και Witting (1958) [64].

Η θεωρία που ανέπτυξε ο Goertler στηρίζεται σε τρεις προσεγγίσεις. Πρώτον, προχώρησε στην παραδοχή ότι το πάχος του συνοριακού στρώματος  $\delta$  είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της καμπυλότητας του τοιχώματος  $R_0$ . Δεύτερον, υπέθεσε ότι η βασική ροή είναι σχεδόν παράλληλη ως προς το τοίχωμα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι αμελούνται οι κεντρόφυγες επιδράσεις στην περιγραφή της βασικής ροής. Τρίτον, θεώρησε μία τοπική ανάλυση ευστάθειας κατά την οποία υπέθεσε ότι η βασική ροή είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής  $x$  και αγνόησε την  $y$ -συνιστώσα της βασικής ροής.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μπορεί να θεωρηθεί ότι οι γωνίες που σχηματίζονται στην κοιλότητα χαρακτηρίζονται από καμπυλότητα και με αυτόν τον τρόπο να θεωρήσουμε ότι η κυρίαρχη ιδιομορφή στάσιμου κύματος, στην περίπτωση απουσίας εσωτερικής πηγής θερμότητας, διακρίνεται από αστάθεια τύπου Goertler.



### 4.3.3 Επίδραση του λόγου ύψους στο πρόβλημα ευστάθειας ροής υγρού μετάλλου για την περίπτωση ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας $S=100000$ και αριθμού $Ha=20$ .

Οι μεταβολές του λόγου ύψους  $A$  που ισούται με το λόγο του ύψους της διατομής προς το μήκος της μπορεί να επιφέρει μεγάλες και σύνθετες επιδράσεις στην κλίση της πίεσης, στις κατανομές των ταχυτήτων και στη μεταφορά θερμότητας. Δύναται να σημειωθούν κάποιες γενικές παρατηρήσεις που αφορούν το σχεδιασμό των αγωγών τους οποίες διαρρέει υγρό μέταλλο [65].

Υπό συνθήκες σταθερής ταχύτητας η μέση θερμοκρασία του πλευρικού τοιχώματος είναι εν γένει χαμηλότερη και η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας είναι μεγαλύτερη σε επιμηκυμένους αγωγούς εν συγκρίσει με τετραγωνικά κανάλια. Όμως, από τη στιγμή που ο σχεδιασμός αγωγών περιορίζεται από την μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας τότε είναι αμφίβολο το πλεονέκτημα χρήσης επιμηκυμένων αγωγών.

Ωστόσο, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη μια μεγάλη μείωση στην βαθμίδα της πίεσης υπέρ των αγωγών που χαρακτηρίζονται από υψηλή τιμή του λόγου ύψους. Η μείωση της κλίσης της πίεσης μπορεί να αντισταθμίσει την επίδραση της μέγιστης θερμοκρασίας που αναπτύσσεται εντός του αγωγού. Απόρροια αυτού του γεγονότος είναι η αύξηση της ταχύτητας ως εκ τούτου η θερμοκρασία στο κέντρο του αγωγού και στο τοίχωμα μειώνεται.

Από μελέτη των Ying και Tillack (1991) προέκυψε ότι η βαθμίδα της πίεσης είναι 7 φορές μικρότερη από την αντίστοιχη που αναπτύσσεται σε τετραγωνικό αγωγό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό προκειμένου να δημιουργηθούν οι συνθήκες που θα διατηρήσουν σε επιθυμητά επίπεδα τις τάσεις λόγω πίεσης, οι οποίες εξαρτώνται σε κάθε περίπτωση από τις σχεδιαστικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα έχουν προταθεί σχεδιασμοί που θα χρησιμοποιούν ράβδους ακαμψίας προκειμένου να επιλυθεί μερικώς το πρόβλημα των τάσεων λόγω πίεσης σε επιμηκυμένους αγωγούς [66].

Εν γένει τα πλεονεκτήματα των επιμηκυμένων αγωγών δεν είναι καθολικά και εξαρτώνται από τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού που περιλαμβάνει τη θεώρηση των κατανομών θερμοκρασίας, της βαθμίδας πίεσης, των τάσεων λόγω πίεσης, θερμικών τάσεων και περιορισμών που αφορούν τις συνθήκες σχεδιασμού.

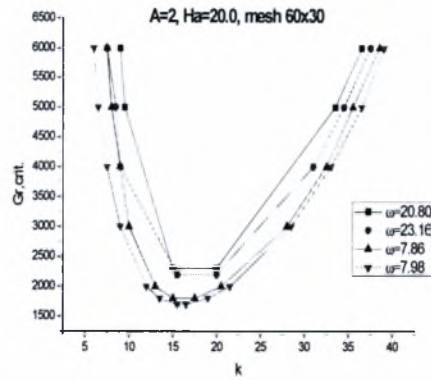
Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω σχετικά με τους επιμηκυμένους αγωγούς εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση επιτρέποντας στον λόγο όψεως  $A$  της διατομής του αγωγού να λαμβάνει τιμές διάφορες της μονάδας με απώτερο σκοπό να ταυτοποιήσουμε τη σημασία των εστιών ανακυκλοφορίας που προκύπτουν κατά τη μελέτη της δυναμικής του προβλήματος.

Το παρακάτω διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας παριστά την παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού  $Gr$  ως προς τον κυματάριθμο  $k$  για λόγο όψεως  $A=2$ . Παρατηρούμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες διότι καθώς ο κυματάριθμος  $k$  αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του  $Gr$  μειώνεται. Στην ανάλυση που εφαρμόσαμε και για  $Gr < 7000$  παρατηρήθηκε η ύπαρξη οδούντων κυμάτων ενώ απουσίαζε η ιδιομορφή στάσιμου κύματος. κατά συνέπεια οι ιδιομορφές οδούντων κυμάτων είναι πιο ασταθή σε σχέση με τις αντίστοιχες στάσιμου κύματος.

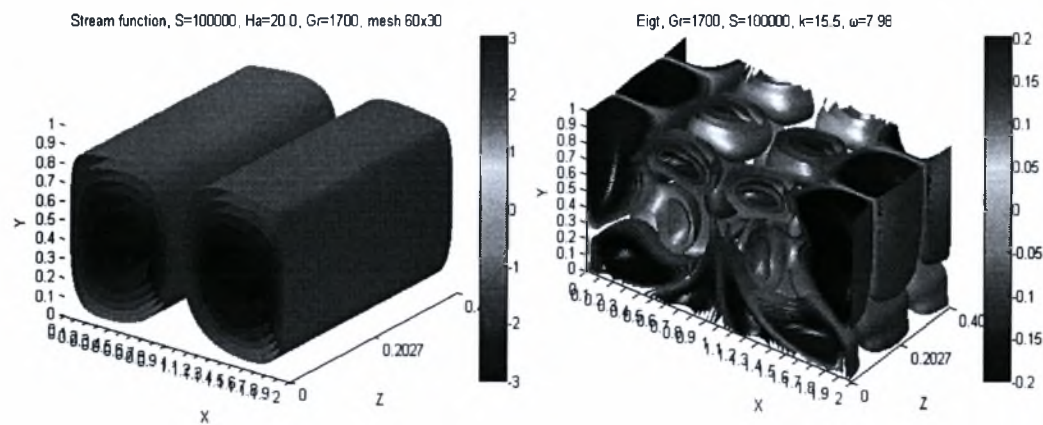
Στην περιοχή που ορίζεται κάτω από την καμπύλη της ιδιομορφής οδούντος κύματος με συχνότητα  $\omega=7.98$ , η οποία αποτελεί το κυρίαρχο μήκος κύματος στη δυναμική του προβλήματος που εξετάζουμε, έχουμε την περιοχή της ευστάθειας ενώ αντίθετα στην περιοχή που ορίζεται πάνω από την καμπύλη της ιδιομορφής οδούντος κύματος εμφανίζεται η περιοχή της αστάθειας.

Στο Σχήμα 27 παραθέτουμε το διάγραμμα ουδέτερης ευστάθειας για την περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μεσαίας εντάσεως ( $Ha=20$ ), ενώ ο ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας  $S=100000$ . Υιοθετήσαμε πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων ως προς την  $x,y$  διεύθυνση του προβλήματος.

Στο Σχήμα 28(a) επισυνάπτουμε το διάγραμμα ροϊκής συνάρτησης της βασικής ροής με παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=1700$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων. Παρατηρείται ο σχηματισμός δύο εστιών ανακυκλοφορίας στην κεντρική περιοχή της διατομής. Συγχρόνως, στο Σχήμα 28(b) παριστάνεται η ιδιοσυνάρτηση που προσεγγίζει τη θερμοκρασία με τις ίδιες παραμέτρους και κυματάριθμο  $k=15.5$  για την περίπτωση του κυρίαρχου οδούντος κύματος. Γίνεται εμφανής μία αντισυμμετρική διαμόρφωση ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος.



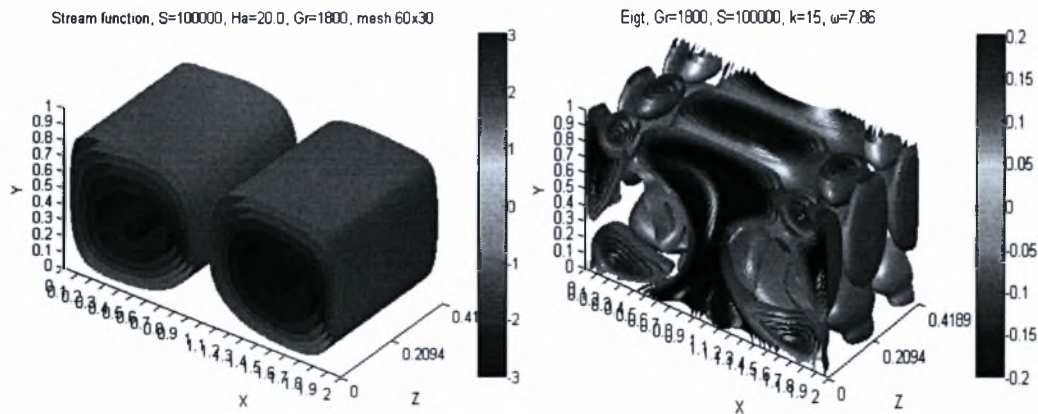
Σχήμα 27: Διάγραμμα παραμετρικής ανάλυσης κρίσιμης τιμής του αριθμού Gr ως προς τον κυματάρημο k με παραμέτρους  $A=2$ ,  $Ha=20.0$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων.



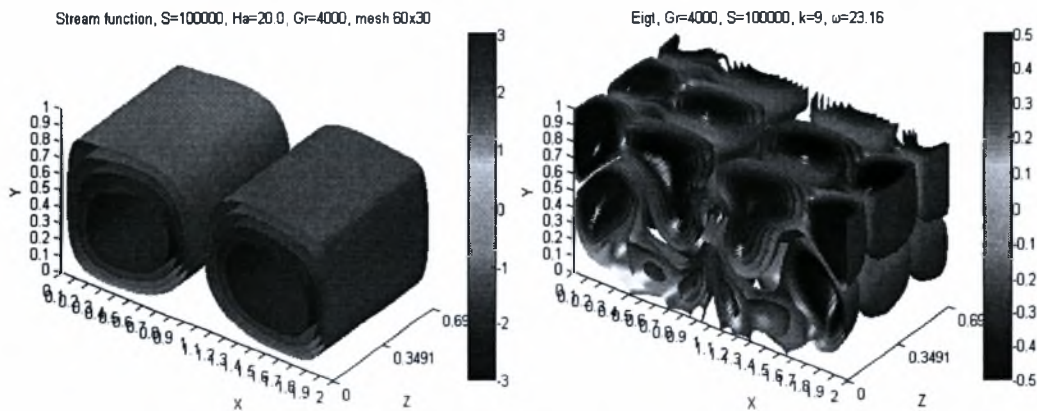
Σχήμα 28: (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=7.98$ ,  $k=15.5$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=1700$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων.

Εργαζόμενοι ανάλογα όπως στην προηγούμενη περίπτωση, στα Σχήματα 29, 30, 31 παραθέτουμε διαγράμματα ροϊκής συνάρτησης της βασικής ροής και ιδιοσυνάρτησης της θερμοκρασίας με παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων. Σε κάθε περίπτωση η δομή της βασικής ροής χαρακτηρίζεται από δύο εστίες ανακυκλοφορίας στην κεντρική περιοχή της διατομής. Στα Σχήματα 29(b), 31(b) παρατηρείται μία αντισυμμετρική διαμόρφωση ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση του προβλήματος, ενώ το Σχήμα 30(b) παρουσιάζει μία αντισυμμετρική διαμόρφωση ως προς την κατεύθυνση y.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η νοητή, κατακόρυφη και διαχωριστική γραμμή που συντελεί στην ύπαρξη συμμετρικής (βλ. Σχήματα 29(b), 28(b)) ή μη συμμετρικής διαμόρφωσης (βλ. Σχήματα 28(b), 30(b)) ταυτίζεται με τη γραμμή που διαχωρίζει τις δύο εστίες ανακυκλοφορίας, οι οποίες παρατηρούνται στη δομή της βασικής ροής των Σχημάτων 28(a), 29(a), 30(a), 31(a).

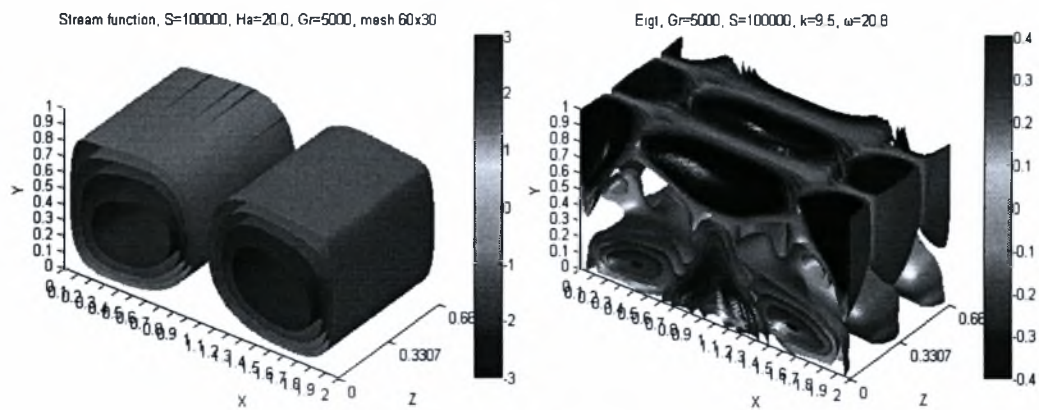


Σχήμα 29: (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=7.86$ ,  $k=15.0$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=1800$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων.



Σχήμα 30: (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=23.16$ ,  $k=9.0$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=4000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων.





Σχήμα 31: (a) Ροϊκή συνάρτηση της βασικής ροής, (b) ισο-επιφάνειες της θερμοκρασίας για ιδιομορφή οδεύοντος κύματος με συχνότητα  $\omega=20.8$ ,  $k=9.5$ , και παραμέτρους  $Ha=20.0$ ,  $Gr=5000$ ,  $S=100000$  και πλέγμα  $60 \times 30$  διτετραγωνικών στοιχείων.

## V) Συμπεράσματα & Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε το πρόβλημα ροής υγρού μετάλλου σε αγωγό ορθογωνικής διατομής με ελεύθερη συναγωγή παρουσία ισχυρού, ομογενούς, οριζόντιου μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής ομοιόμορφης πηγής θερμότητας, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει βαθμίδα θερμοκρασίας κάθετα στη δύναμη της βαρύτητας, επιτρέποντας διαταραχές κατά την αξονική διεύθυνση του αγωγού.

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων όπως προκύπτει από την ανάλυση ευστάθειας του παραπάνω προβλήματος λάβαμε υπόψη μας την αριθμητική μελέτη των Xin και Le Queere (2001) που αφορούσε διαφορική θερμαινόμενη κοιλότητα με θερμικά αγωγίμα οριζόντια τοιχώματα, μέσα στην οποία η ροή ρευστού γίνεται λόγω ελεύθερης συναγωγής απουσία μαγνητικού πεδίου και εσωτερικής πηγής θερμότητας, ενώ η συνάρτηση της θερμοκρασίας έχει γνωστή κατανομή σε όλα τα τοιχώματα του αγωγού.

Προσαρμόζοντας κατάλληλα τον κώδικα που διαθέταμε κατέστη δυνατή η αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της προαναφερθείσας μελέτης. Συγκεκριμένα, εφαρμόσαμε παραμετρική ανάλυση της κρίσιμης τιμής του αριθμού Rayleigh ως προς τον κυματάριθμο  $k$  και παρατηρήσαμε ότι προκύπτει ιδιομορφή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα, η οποία γίνεται ασταθής γρηγορότερα από τις ιδιομορφές που αποτελούν συνέχεια των ασταθειών Hopf του δισδιάστατου προβλήματος. Αυτό είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της παραπάνω μελέτης.

Επιπρόσθετα, καταλήξαμε στην ύπαρξη κυρίαρχου μήκους κύματος που αντιστοιχεί σε ιδιομορφή στάσιμου κύματος, η οποία καθορίζει τη δυναμική του συστήματος και η ελάχιστη τιμή του κρίσιμου αριθμού Rayleigh προέκυψε να είναι ίση με 1400000 για κυματάριθμο  $k \in (5,7)$ . Αυτό είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της μελέτης των προαναφερθέντων ερευνητών.

Η ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος εφαρμόζοντας τρισδιάστατες διαταραχές μας οδήγησε στην εξαγωγή των παρακάτω συμπερασμάτων:

- Κατά τη διάρκεια της παραμετρικής μελέτης, εξετάζοντας τις κρίσιμες τιμές που λαμβάνει ο αριθμός Grashof συναρτήσει του κυματάριθμου  $k$  αναδύονται δύο ειδών ασταθείς ιδιομορφές. Αυτή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα (standing wave mode) και η οποία χαρακτηρίζεται από



μηδενικό φανταστικό μέρος, και αυτή που αντιστοιχεί σε οδεύον κύμα (travelling wave mode) και η οποία χαρακτηρίζεται από μη μηδενικό φανταστικό μέρος και εμφανίζεται με την μορφή συζυγών ιδιοτιμών.

- Παρατηρήσαμε ότι οι τρισδιάστατες διαταραχές είναι λιγότερο ευσταθείς σε σχέση με τις αντίστοιχες δισδιάστατες καθώς όσο ο κυματάρηθος  $k$  αυξάνεται η κρίσιμη τιμή του  $Gr$  μειώνεται.
- Αύξηση του αριθμού Hartmann συνεπάγεται ότι ο αριθμός  $Gr$  λαμβάνει μεγαλύτερες κρίσιμες τιμές, ενώ σε κάθε περίπτωση αποτελεσμάτων που προέκυψαν διαπιστώθηκε ότι η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος αποτελεί το κυρίαρχο μήκος κύματος, το οποίο καθορίζει τη δυναμική του συστήματος.
- Οι δύο ιδιομορφές, που ενέσκησαν κατά τη διάρκεια της παραμετρικής ανάλυσης που εφαρμόστηκε και εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της υδροδυναμικής αστάθειας εξαιτίας των καμπύλων ροϊκών γραμμών της διαμόρφωσης της βασικής ροής, δεν συσχετίζονται με τις αντίστοιχες ιδιομορφές που καθόριζαν τη δυναμική της δισδιάστατης ανάλυσης, (Pelekasis (2006)).
- Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν η ιδιομορφή οδεύοντος κύματος ακολουθούνταν από την ιδιομορφή στάσιμου κύματος, δηλαδή παρατηρήθηκε ένα επαναλαμβανόμενο pattern.
- Στην περίπτωση όπου ο λόγος όψεως  $A$  της διατομής ισούται με δύο προέκυψαν ιδιομορφές οδευόντων κυμάτων ενώ απουσίαζε η ιδιομορφή στάσιμου κύματος τουλάχιστον για τιμή του αριθμού  $Gr < 7000$ .

Σε επόμενο στάδιο προκειμένου να βελτιωθεί περαιτέρω η παρούσα εργασία προτείνονται οι παρακάτω βελτιώσεις:

- Συνίσταται η υιοθέτηση πυκνότερων αριθμητικών πλεγμάτων με σκοπό να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στα υπολογιστικά αποτελέσματα και κατ'επέκταση καλύτερη κατανόηση των φυσικών φαινομένων.
- Χρήση παράλληλου προγραμματισμού έτσι ώστε αφενός μεν να παραλληλιστεί η επαναληπτική μέθοδος GMRES και αφετέρου δε να περιοριστεί το υπολογιστικό κόστος της αντιστροφής του πίνακα ζώνης

που πηγάζει από το πρόβλημα ιδιοτιμών, και να ξεπεραστεί το πρόβλημα αποθήκευσης του πίνακα στη κεντρική μνήμη μέσω ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος κατανεμημένης μνήμης.

- Μελέτη του προβλήματος σε υψηλότερους αριθμούς  $Ha$  έτσι ώστε να διαπιστωθεί η επίδραση του φαινομένου Hartmann braking effect, ανάπτυξη οριακών στρωμάτων Hartmann και πλευρικών στρωμάτων στα τοιχώματα του αγωγού και παράλληλα να κατανοηθεί η φύση των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών.
- Επέκταση της παραμετρικής ανάλυσης που διενεργήθηκε προκειμένου να καλυφθεί μια ευρεία τάξη διαφόρων τιμών του λόγου όψεως  $A$  της διατομής και του ογκομετρικού ρυθμού παραγωγής θερμότητας  $S$  έτσι ώστε να ταυτοποιηθεί η σημασία των εστιών ανακυκλοφορίας που προκύπτουν κατά τη μελέτη της δυναμικής του προβλήματος.
- Περαιτέρω βελτίωση της αριθμητικής μεθόδου η οποία αφορά την εύρεση των κυρίαρχων ιδιοτιμών που πηγάζουν από το πρόβλημα της ευστάθειας, ενώ οι ιδιοτιμές  $s$  που αντιστοιχούν στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$s \approx \frac{1}{\Delta t} \log \lambda(B_x), \text{ όπου } B_x = \left( B - \frac{C}{Gr^{0.5}} \Delta t L \right)^{-1} (\Delta t N_x + B). \quad (5.1)$$

Σημειώνουμε ότι η σημασία των μεταβλητών που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνεται παραπάνω στην συζήτηση σχετικά με τις εξισώσεις (3.19)-(3.22). Όπως φαίνεται από την σχέση (3.19), είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών που δίδεται από την σχέση (3.18) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα που ορίζεται από την σχέση (3.19). Ο πίνακας  $B_x$  κατ'ουσίαν αποτελεί μέρος του εκθετικού αναπτύγματος του πίνακα  $B^{-1}J$  καθώς το χρονικό βήμα  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} e^{B^{-1}J\Delta t} \approx I + \Delta t B^{-1} \left( N_x + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) \approx I + \Delta t \left( B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right)^{-1} \left( N_x + \frac{C}{Gr^{0.5}} L \right) = \left( B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right)^{-1} \left( B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L + \Delta t N_x + \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right) = \left( B - \frac{\Delta t C}{Gr^{0.5}} L \right)^{-1} (B + \Delta t N_x) \quad (5.2)$$

Έτσι τελικά αντί την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών (3.14) αρκεί να βρεθούν οι ιδιοτιμές  $\lambda$  του πίνακα  $B_x$  οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $s$  μέσω της (5.1). Πιο συγκεκριμένα, οι ιδιοτιμές του  $B_x$  που είναι μεγαλύτερες κατά απόλυτο τιμή αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $s$ , του αρχικού προβλήματος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Επί πλέον οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_x$  υπολογίζονται με διαδικασία η οποία παραλληλίζεται πολύ ευκολότερα [59].

## Βιβλιογραφία

1. Hartmann J., "Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field", Hg dynamics I, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-Fysiske Meddelelser, Vol. 15 (6), pp. 1-28, 1937.
2. Hartmann J. and Lazarius F., "Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field", Hg dynamics II, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-Fysiske Meddelelser, Vol. 15(7), pp. 1-45, 1937
3. Alfven H., "Cosmical electrodynamics", Oxford: Clarendon Press, 1950.
4. Alfven H. and Falthammar C.G., "Cosmical electrodynamics: fundamental principles", Oxford: Clarendon Press, second edition, 1963.
5. Cowling T.G., "Magnetohydrodynamics", New York: Interscience Publishers, 1957.
6. Shercliff J.A., "A textbook of magnetohydrodynamics", Oxford; New York: Pergamon Press, 1965.
7. Hughes W.F. and Young F.J., "The electromagnetodynamics of fluids", New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
8. Shercliff J.A., "The theory of electromagnetic flow-measurement", Cambridge: University Press, 1962.
9. Hofmann F., "Fundamental principles of electromagnetic flow measurement", Duisburg: KROHNE Messtechnik GmbH & Co. KG., third edition, 2003.
10. Branover H. and Unger Y., "Metallurgical technologies, energy conversion, and magnetohydrodynamic flows", volume 148 of Progress in Astronautics and Aeronautics Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.
11. Rosa R.J., "Magnetohydrodynamic energy conversion", New York: McGraw-Hill, 1968.
12. Mitchner M., Charles H. and Kruger Jr., "Partially ionized gases", John Wiley & Sons, Inc., 1973.
13. Takezawa S., Tamama H., Sugawawa K., Sakai H., Matsuyama C., Morita H., Suzuki H. and Ueyama Y., "Operation of the thruster for superconducting electromagnetohydrodynamic propulsion ship 'YAMATO 1' ", Bulletin of the Marine Engineering Society of Japan, Vol. 23(1), pp. 46-55, 1995.
14. Cheng-Yue L., Allain J.P. and Bai-Quan D., "Effects of a liquid lithium curtain as the first wall in a fusion reactor plasma", Chin. Phys. Soc., Vol. 16, No 11, pp. 1009-1063, 2007.
15. Christofilos N.C., "Design for a high power-density Astron reactor", J. Fusion Eng., Vol. 8, pp. 97-105, 1989.
16. Moir R.W., "Rotating liquid blanket for a toroidal fusion reactor", Fusion Eng. Des., Vol. 5, pp. 269-272, 1987.
17. Moir R.W., "The logic behind thick, liquid-walled, fusion concepts", Vol. 29, pp. 34-42, 1995.
18. Mattas R.F. and Abdou M.A., "Liquid divertor and first wall concepts and critical issues", Ninth International Conference on Fusion Reactor Materials (ICFRM-9). Colorado, Springs, Colorado, USA, Oct. 1999.

19. Mattas R.F., Allain J. P., Bastasz R., Brooks J.N., Evans T., Hassanein A., Luckhardt S., McCarthy K., Mioduszewski P., Maingi R., Mogahed E., Moir R., Molokov S., Morely N., Nygren R., Rognlien T., Reed C., Ruzic D., Sviatoslavsky I., Sze D., Tillack M., Ulrickson M., Wade P.M., Wooley R. and Wong C., "ALPS—advanced limiter-divertor plasma-facing systems", *Fusion Eng. Des.* Vol. 49–50, pp. 127-134, 2000.
20. Brooks J.N., Allain J. P., Bastasz R., Doerner R., Evans T., Hassanein A., Kaita R., Luckhardt S., Maingi R., Majeski R., Morley N.B., Narula M., Rognlien T., Ruzic D., Stubbers R., Ulrickson M., Wong C.P.C., Whyte D. and Ying A., "Overview of the ALPS program", *Fusion Sci. Tech.*, Vol. 47, pp. 669-677, 2005.
21. Hassanein A., Allain J.P. and Insepov Z., "Plasma/Liquid-Metal Interactions During Tokamak Operation", *Fusion Sci. Tech.*, Vol. 47, pp. 686-697, 2005.
22. Abdou M., Morley N. and Sawan M., "Special issue on innovative high-power density concepts for fusion plasma chambers", *Fusion Eng. Des.*, Vol.72 (1–3), pp. 1–326, 2004.
23. Hassanein A., "Modeling and key issues of plasma/surface interactions in future tokamaks", *Fusion Eng. Des.*, Vol. 60 (4), pp. 493-570, 2002.
24. Baldwin M.J., Doerner R.P., Luckhardt S.C. and Conn R.W., "Deuterium retention in liquid lithium", *Nucl. Fusion*, Vol. 42, pp. 1318-1323, 2002.
25. Majeski R., Jardin S., Kaita R., Gray T., et al., "Recent liquid lithium limiter experiments in CDX-U", *Nucl. Fusion*, Vol. 45 (6), pp. 519-523, 2005.
26. Huang J.H., Feng K.M., Deng B.Q., et al., "Design activities of a fusion experimental breeder", 17<sup>th</sup> Conference Proceedings of Fusion Energy, Vol. 4, Yokohama, Japan, 1998.
27. Kalikhman L.E., "Elements of magnetogasdynamics", WB Saunders, 1967.
28. Mueller U. and Buehler. L., "Magnetofluidynamics in channels and containers", Berlin: Springer, 2001.
29. Taylor T.S., Strait E.J., Lao L.L., Mauel M., Turnbull A.D., Burrell K.H., Chu M.S., Ferron J.R., Groebner R.J., La Haye R.J., Rice B.W., Snider R.T., Thompson S.J., Wroblewski D. and Lightly D.J., "Wall stabilization of high beta plasmas in DIII-D", *Physics of Plasmas*, Vol. 2 (6), pp. 2390-2396, 1995.
30. Garofalo A.M., Turnbull A.D., Strait E.J., Austin M.E., Bialek J., Chu M.S., Fredrickson E., La Haye R.J., Navratil G.A., Lao L.L., Lazarus E.A., Okabayashi M., Rice B.W., Sabbagh S.A., Scoville J.T., Taylor T.S. and Walker M.L., "Stabilization of the external kink and control of the resistivewall mode in tokamaks", *Physics of Plasmas*, Vol. 6(5), pp. 1893-1898, 1999.
31. Takechi M., Matsunaga G., Aiba N., Fujita T., Ozeki T., Koide Y., Sakamoto Y., Kurita G., Isayama A. and Kamada Y., "Identification of a low plasma-rotation threshold for stabilization of the resistive-wall mode", *Physical Review Letters*, Vol. 98(5), pp. 055002, 2007.
32. Frieman E. and Rotenberg M., "On hydromagnetic stability of stationary equilibria", *Review of Modern Physics*, Vol.32(4), pp. 898-902, 1960.
33. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D. and Kulsrud R.M., "An energy principle for hydromagnetic stability problems", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 244(1236), pp. 17-40, 1958.
34. Hameiri E., "Variational principles for equilibrium states with plasma flow", *Physics of Plasmas*, Vol. 5(9), pp. 3270-3281, 1998.



35. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T. and Weinstein A., "Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria", *Physics Reports (Review Section of Physics Letters)*, Vol. 123(1,2), pp. 1-116, 1985.
36. Pelekasis N., "Bifurcation Diagrams, Linear Stability Analysis and Dynamic Simulations of Free Convection in a Differentially Heated Cavity in the Presence of a Magnetic Field", *Physics of Fluids*, Vol. 18(3), pp. 1-23, 2006.
37. Bühler L., "Laminar buoyant magnetohydrodynamic flow in vertical rectangular ducts", *Phys. Fluids*, Vol. 10, pp. 223, 1998.
38. Reed R.C. and Picologlou B.F., "Sidewall flow instabilities in liquid-metal MHD flow under blanket relevant conditions", *Fusion Technol.*, Vol. 15, pp. 705, 1989.
39. Ting A.L., Walker J.S., Moon T.J., Reed C.B. and Picologlou B.F., "Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 29, pp. 939, 1991.
40. Burr U., Barleon L., Müller U. and Tsinober A., "Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong sidewall jets", *J. Fluid Mech.*, Vol. 406, pp. 247, 2000.
41. Lingwood R.J. and Alboussière T., "On the stability of the Hartmann layer", *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 2058, 1999.
42. Moresco P. and Alboussière T., "Weakly nonlinear stability of Hartmann boundary layers", *Eur. J. Mech. B/Fluids*, Vol. 22, pp. 345, 2003.
43. Burr U. and Müller U., "Rayleigh-Bernard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field," *J. Fluid Mech.*, Vol. 453, pp. 345, 2002.
44. Takashima M., "The stability of natural convection in a vertical layer of electrically conducting fluid in the presence of a transverse magnetic field", *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 14, pp. 121, 1994.
45. Arcidiacono S., Di Piazza I. and Ciofalo M., "Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures. II. Square cavity,  $AR=1$ ", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 537, 2001.
46. Ciofalo M. and Cricchio F., "Influence of a magnetic field on liquid metal free convection in an internally heated cubic enclosure", *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, Vol. 12, pp. 687, 2002.
47. Gelfgat A.Yu. and Bar-Yoseph P.Z., "The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity", *Physics of Fluids*, Vol. 13(8), pp. 2269-2278, 2001.
48. Gelfgat A.Yu., Bar-Yoseph P.Z. and Yarin A.L., "Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities", *J. Fluid Mech.*, Vol. 388, pp. 315, 1999.
49. Lyapunov A.M., "General problem of the stability of motion", Taylor & Francis Books Ltd, 1992.
50. Landau L.D. and Lifshitz E.M., "Fluid mechanics", Butterworth-Heinemann, second edition, 1987.
51. Gresho P.M. and Sani R.L., "Incompressible Flow and the Finite Element Method", Wiley, New York, 1998.
52. Arnoldi W.E., "The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem", *Quart. Appl. Math.*, Vol.9, pp. 17-29, 1951.
53. Saad Y., "Variations of Arnoldi's Method for Computing Eigenvalues of Large Unsymmetric Matrices", *Linear Algebra Appl.*, Vol. 34, pp. 269-295, 1980.



54. Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A. and Van der Vorst H., "Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA., 2000.
55. Elman H., Silvester D. and Wathen A., "Finite Elements and Fast Iterative Solvers", Oxford Science Publications, Oxford, 2005.
56. Saad Y. and Schultz M.H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, pp. 856-869, 1986.
57. Saad Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", PWS, 1996.
58. Xin S. and Le Quere P., "Linear stability analysis of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls", Phys.Fluids, Vol. 13, pp. 2529-2542, 2001.
59. Mamun C.K. and Tuckerman L.S., "Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow", Physics of Fluids, Vol. 7(1), pp. 80-91, 1995.
60. Drazin P.G. and Reid W.H., "Hydrodynamic stability", Cambridge University Press, 1981.
61. Goertler H., "Ueber eine dreidimensionale Instabilitaet laminarer Grenzschichten an konkaven Waenden", Nachr. Ges. Wiss. Goetingen, Vol. 2(1), pp. 1-26, 1940.
62. Meksyn D., "Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces", Proc. Roy. Soc., Vol. 203, pp. 253-65, 1950.
63. Haemmerlin G., "Ueber das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilitaet laminarer Grenzschichten an konkaven Waenden", J. Rat. Mech. Anal., Vol. 4, pp. 279-321, 1955.
64. Witting H., " Ueber den Einfluss der Stromlinienkruemmung auf die Stabilitaet laminarer Stroemungen", Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 2, pp. 243-83, 1958.
65. Ying A.Y. and Tillack M.S., "MHD heat transfer in elongated rectangular ducts for liquid metal blankets", Fusion Tech., Vol. 19, pp. 990-995, 1991.
66. Proceedings of the USSR/US Exchange II.5, "Workshop on Comparison of Liquid Metal Blanket Approaches and Experiments", Nov. 1989.
67. Molokov S. and Buehler L., "Three dimensional buoyant convection in a rectangular box with thin conducting walls in a strong horizontal magnetic field", Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, FZKA 6817, 2003.
68. Βλαχομήτρου Μ., "Υπολογιστική και θεωρητική μελέτη αλληλεπίδρασης αερίου οριακού στρώματος με λεπτό υμένα υγρού πάνω σε πτέρυγα", Διδακτορική διατριβή, Εργ. Ρ&Σ, Παν. Θεσσαλίας, 2008.
69. Κακαράντζας Σ., "Μαγνητοϋδροδυναμική συναγωγή με εσωτερικές πηγές θερμότητας σε κυλινδρικούς αγωγούς", Διδακτορική διατριβή, Εργ. Ρ&Σ, Παν. Θεσσαλίας, 2007.
70. Sarris I. E., Kakarantzas S. C., Grecos A. P. and Vlachos N. S., "MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated cavity", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 48, pp.3443, 2005.
71. Kakarantzas S. C., Grecos A. P., Vlachos N. S., Sarris I. E, Knaepen B. and Carati D., "Direct numerical simulation of a heat removal configuration for fusion blankets", Energy Conversion and Management, Vol. 48, pp. 2775-2783, 2007.
72. Reddy J.N., "An introduction to the finite element method", New York: McGraw-Hill, 1993.
73. Δημόπουλος Δ., "Μαγνητοϋδροδυναμική ευστάθεια σε τρισδιάστατες διαταραχές, ροής με ελεύθερη συναγωγή σε αγωγό ορθογωνικής διατομής", Εργ. Ρ&Σ, Παν. Θεσσαλίας, 2008.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000104669

