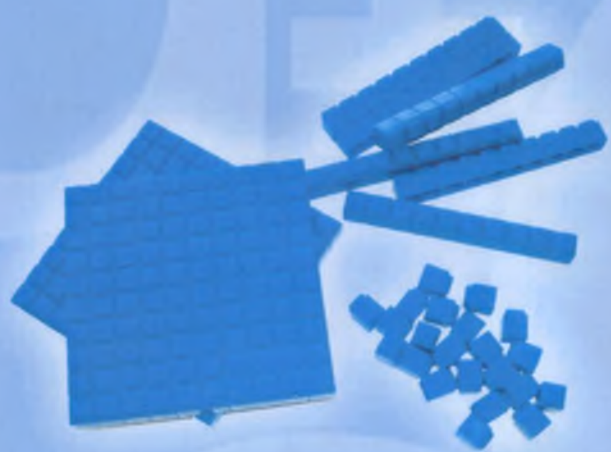
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης των μαθητών και μαθητριών των Τμημάτων Ένταξης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και η συσχέτισή τους με δυσκολίες ανάγνωσης. Διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικού υλικού



ΓΚΟΥΜΑΣ ΕΥΘΥΜΙΟΣ

Επιβλέποντες:
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος - Φιλιππάτου Διαμάντω

ΒΟΛΟΣ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2008

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης των μαθητών και μαθητριών των Τμημάτων Ένταξης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και η συσχέτισή τους με δυσκολίες ανάγνωσης. Διδακτική παρέμβαση με τη χρήση χειραπτικού υλικού.

ΓΚΟΥΜΑΣ ΕΥΘΥΜΙΟΣ

Επιβλέποντες:
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος
Φιλιππάτου Διαμάντω

ΒΟΛΟΣ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα ερευνητική μελέτη εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης και Παραγωγή Διδακτικού Υλικού» του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Τριανταφυλλίδη Τριαντάφυλλου και της Λέκτορα κ. Φιλιππάτου Αμάντας και αποτελεί μια προκαταρκτική μελέτη για τη διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης των παιδιών στα μαθηματικά.

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωσή της και ιδιαίτερα:

Τον κ. Τριανταφυλλίδη Τριαντάφυλλο, Καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για την ουσιαστική και συνεχή συμπαράστασή του σε όλα τα στάδια της ερευνητικής προσπάθειας, αλλά και για την έμπνευση και διάθεση που μου εμφύσησε με τη διδασκαλία του.

Την κ. Φιλιππάτου Αμάντα, Λέκτορα στο Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για την πολύπλευρη βοήθειά της, τον απεριόριστο χρόνο που μου διέθεσε, την ηθική συμπαράσταση και ενθάρρυνση σ' όλα τα επίπεδα της παρούσας έρευνας.

Την κ. Παντελιάδου Σουζάνα Καθηγήτρια στο Π.Τ.Ε.Α. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για τη χορήγηση του ΤΕΣΤ-Α, τον κ. Σίμο Παναγιώτη Αναπληρωτή Καθηγητή Αναπτυξιακής Νευροψυχολογίας Πανεπιστημίου Κρήτης για τη χορήγηση των ΑΣυΠ & ΑξΕΛ, τις κ. Κουμούλα Αλεξάνδρα και Τσιρώνη Βάντα από τον Ιατροπαιδαγωγικό Σταθμό Παλλήνης για τη διάθεση του τεστ ΖΑΡΕΚΙ και την κ. Αντωνίου Φαίη για τις πολύτιμες συμβουλές της.

Επίσης, εκτός από τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους διευθυντές των σχολείων Τζουβάρα Νικόλαο, Χριστόπουλο Κωνσταντίνο, Κλειτσάκη Αθανάσιο και Μπασιακούρα Θωμά που βοήθησαν τα μέγιστα για την απρόσκοπτη επαφή με τα παιδιά, τους/ις εκπαιδευτικούς των Τμημάτων Ένταξης Νοτοπούλου Όλγα, Καλλέργη Γεωργία και Χριστόπουλο Γεώργιο για την ουσιαστική συμβολή τους στην ανίχνευση του μαθησιακού προφίλ των μαθητών και τους δασκάλους των τάξεων Γκιόλα Χρήστο, Κουτσιλόπουλο Στέφανο, Χουλιάρα-Σιδερά Παναγιώτα και Παπαδόπουλο Θεόδωρο για τη συνεργασία τους.

Τέλος, ευχαριστώ ολόψυχα τη σύζυγό μου Σαΐτη Ευθυμία και τα δυο μου παιδιά Παναγιώτη και Βασίλη για τη συμπαράσταση και υπομονή τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αδυναμία ενός σημαντικού τμήματος του μαθητικού πληθυσμού να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις των σχολικών μαθηματικών, συγκεντρώνει το αυξανόμενο ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών αρχών και των ειδικών επιστημόνων. Η μετατροπή αυτού του ενδιαφέροντος σε υποστηρικτικά μέτρα και εκπαιδευτικά προγράμματα, εξαρτάται μεταξύ άλλων, από την αποτελεσματική διερεύνηση της φύσης των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά και από την υιοθέτηση μιας λειτουργικής αντίληψης για τις πιθανές αιτίες του προβλήματος. Αφενός ο περιορισμός της διαγνωστικής διαδικασίας στην απλή διαπίστωση της ύπαρξης λαθών στην εργασία του μαθητή[1] και αφετέρου η απόδοση όλων των λαθών σε παράγοντες όπως η απροσεξία, η έλλειψη εξάσκησης ή η ανεπαρκής ενίσχυση, δεν αποτελούν παρά μόνο επιφανειακές και αναποτελεσματικές προσεγγίσεις του προβλήματος. Τέτοιες αδυναμίες χρησιμοποιούν και οι εκπαιδευτικοί σαν επιχείρημα για να υποστηρίξουν αποφάσεις που αφορούν τη μετακίνηση ενός μαθητή στο Τμήμα Ένταξης του σχολείου ή σαν μέσο ερμηνείας των δυσκολιών μάθησης που γενικότερα εμφανίζουν οι μαθητές τους στα μαθηματικά.

Οι δυσκολίες στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης, μπορεί να απορρέει από τη δράση μιας σειράς εσωτερικών και εξωτερικών σε σχέση με το μαθητή παραγόντων, που εμποδίζουν την κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών και οδηγούν σε χαμηλή σχολική επίδοση ή σε αποτυχία στη γνωστική αυτή περιοχή (Magne, 1993). Είναι προφανές ότι από τη στιγμή που είναι γνωστοί οι παράγοντες – όπως προκύπτουν από ερευνητικά δεδομένα - οι οποίοι συνδέονται συχνότερα με την αποτυχία στον τομέα των μαθηματικών, είναι δυνατόν να υπάρξει καλύτερη πρόληψη για παιδιά που μπορεί να παρουσιάσουν μαθηματικές δυσκολίες, να γίνει ακριβέστερη διάγνωση των δυσκολιών και να εξασφαλιστεί κατάλληλο πλαίσιο δράσης για την αντιμετώπισή τους.

Τα τελευταία χρόνια κερδίζει συνεχώς έδαφος η άποψη ότι ο μεγάλος όγκος των αριθμητικών λαθών και η συνακόλουθη αποτυχία στα μαθηματικά είναι αποτελέσματα του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται και εργάζονται (Αγαλιώτης, 2004). Με άλλα λόγια, θεωρείται ότι ο μαθητής φτάνει στο λάθος και στην αποτυχία στα μαθηματικά, μέσω κάποιων συγκεκριμένων γνωστικών ελλείψεων, εννοιολογικών παρανοήσεων και αναποτελεσματικών στρατηγικών. Αυτές οι ελλείψεις, οι παρανοήσεις και οι στρατηγικές, είναι δυνατόν να ανιχνευθούν με την κατάλληλη ανάλυση της μαθηματικής συμπεριφοράς

[1] Για την αποφυγή των διπλών τύπων ο/η εκπαιδευτικός και ο/η μαθητής/τρια, στο κείμενο όπου «ο εκπαιδευτικός» και «ο μαθητής» θα αναφέρονται και στα δυο γένη.

του μαθητή και να αποτελέσουν συγκεκριμένους στόχους αποτελεσματικής υποστήριξης. Κύριο στοιχείο της ακρίβειας της ανάλυσης της μαθηματικής συμπεριφοράς, θεωρείται η άντληση άμεσων πληροφοριών από τον ίδιο το μαθητή για τη διερεύνηση της πορείας που ακολούθησε για να φτάσει στο συγκεκριμένο λαθεμένο αποτέλεσμα.

Ο καθορισμός της ταυτότητας των μαθηματικών δυσκολιών των μαθητών που φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης, η διερεύνηση των γνωστικών ελλειμμάτων και των μαθησιακών επιπτώσεων αυτών των δυσκολιών, η ανίχνευση της σχέσης μεταξύ δυσκολιών ανάγνωσης και μαθηματικών δυσκολιών, καθώς και των αλλαγών που επιφέρει στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών η χρήση κατάλληλου χειραπτικού[2] υλικού, αποτελούν τους στόχους της παρούσας ερευνητικής μελέτης. Ακολούθως περιγράφονται συνοπτικά τα κεφάλαια στα οποία είναι διαρθρωμένη.

Αναλυτικότερα, στο 1ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο με τις επικρατούσες απόψεις για τους παράγοντες πρόκλησης δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των παιδιών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, τη γλώσσα ή και τα δύο γνωστικά αντικείμενα, αναφέρονται τα κυριότερα εργαλεία αξιολόγησης των δυσκολιών μάθησης, επισημαίνονται τα κυριότερα είδη λαθών των παιδιών σε επιμέρους μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες καθώς και τρόποι αντιμετώπισης.

Στο 2ο Κεφάλαιο, περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας, ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα, οι λόγοι στους οποίους στηρίχθηκε η επιλογή της, τα μέσα συλλογής των δεδομένων, καθώς και η διαδικασία συλλογής πριν και μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Στο 3ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα και γίνεται ποιοτική ανάλυση και κατηγοριοποίηση των λαθών των μαθητών της έρευνας και τέλος, στο 4ο Κεφάλαιο καταγράφονται τα συμπεράσματα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, οι περιορισμοί της έρευνας καθώς και προτάσεις για τη μελλοντική έρευνα.

[2] Λέγοντας χειραπτικό υλικό εννοούμε κάθε είδους αντικείμενο, που μπορεί να βοηθήσει στην διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1. Σχολική αποτυχία, μαθησιακές δυσκολίες: Προσδιορισμός όρων

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών, ένας σημαντικός και αυξανόμενος αριθμός μαθητών, αδυνατεί να ανταποκριθεί στις σχολικές απαιτήσεις, στο αναμενόμενο για την ηλικία τους επίπεδο επίδοσης, σε ένα ή περισσότερα σχολικά γνωστικά αντικείμενα (Docrell & McShane, 1993). Η χαμηλή επίδοση των παιδιών, έχει σαν αποτέλεσμα τη μη επίτευξη των εκπαιδευτικών αντικειμενικών στόχων. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως «σχολική αποτυχία» και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της σημερινής εκπαίδευσης.

Η σχολική αποτυχία είναι, αναμφίβολα, ένα πολυσύνθετο φαινόμενο, που κατά καιρούς έχει συνδεθεί με καταστάσεις όπως: 1) η ατομική παθολογία (π.χ. καθυστερήσεις στην ανάπτυξη, ψυχοσυναισθηματικές δυσκολίες, δυσλειτουργίες ψυχολογικών διεργασιών), 2) η κοινωνική προέλευση (π.χ. οικογενειακό περιβάλλον φτωχό σε ερεθίσματα που δεν ευνοεί τη νοητική εξέλιξη), 3) το είδος της αλληλεπίδρασης μεταξύ παιδιού και περιβάλλοντος (π.χ. αναποτελεσματικές ρυθμίσεις του σχολείου σε σχέση με τις πραγματικές ανάγκες του παιδιού) (Καΐλα, 1995). Κοινό χαρακτηριστικό αποτέλεσμα των παραπάνω αιτιών, είναι η παρεμπόδιση της μαθησιακής διαδικασίας, μέσω της δημιουργίας δυσκολιών μάθησης, που δεν επιτρέπουν στο μαθητή να επωφεληθεί από τα διδακτικά αγαθά που προσφέρει το σχολείο. Αυτή η αναποτελεσματική συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία, καταλήγει συνήθως στον περιορισμό των ευκαιριών για επαγγελματική αποκατάσταση και κοινωνική ένταξη και είναι φυσικά ανάγκη να αντιμετωπισθεί (Chancerel, 1987).

Στη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών εστιάζεται συχνά στις δυσκολίες μάθησης που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στο σχολείο και ιδιαίτερα στο φαινόμενο της σχολικής αποτυχίας. Στην προσπάθειά τους να περιγράψουν, να ερμηνεύσουν και να προτείνουν λύσεις, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα «δανεικό» λεξιλόγιο, που οδηγεί τελικά σε μεγαλύτερη σύγχυση. Ο όρος «Μαθησιακές Δυσκολίες», αν και αναφέρεται σε συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών αναγκών, στην πράξη χρησιμοποιείται ελαστικά, πολυσυλλεκτικά και με ιδιαίτερη ευκολία με αποτέλεσμα να αλλοιώνεται το περιεχόμενό του (Παντελιάδου, 2000).

Πολλές φορές οι Μαθησιακές Δυσκολίες θεωρούνται η μοναδική συνθήκη που οδηγεί στη σχολική αποτυχία γι' αυτό και ο όρος «Μαθησιακές Δυσκολίες» συχνά συγχέεται με τον όρο «σχολική αποτυχία», ο οποίος είναι εξαιρετικά ευρύτερος και πολυδιάστατος.

Σύμφωνα με τον ευρέως αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα ορισμό:

«Οι Μαθησιακές Δυσκολίες είναι ένας γενικός όρος που αναφέρεται σε μια ανομοιογενή ομάδα διαταραχών οι οποίες εκδηλώνονται με σημαντικές δυσκολίες στην πρόσκτηση και χρήση ικανοτήτων ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης, γραφής, συλλογισμού ή μαθηματικών ικανοτήτων. Οι διαταραχές αυτές είναι εγγενείς στο άτομο και αποδίδονται σε δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος· μάλιστα είναι δυνατόν να υπάρχουν σ' όλη τη διάρκεια της ζωής. Με τις Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να συνυπάρχουν προβλήματα σε συμπεριφορές αυτοελέγχου, κοινωνικής αντίληψης και κοινωνικής αλληλεγγύης. Αυτά τα προβλήματα ωστόσο δεν συνιστούν από μόνα τους Μαθησιακές Δυσκολίες. Αν και οι Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να εμφανίζονται μαζί με άλλες καταστάσεις μειονεξίας (π.χ. αισθητηριακή βλάβη, νοητική καθυστέρηση, σοβαρή συναισθηματική διαταραχή) ή να δέχονται την επίδραση εξωτερικών παραγόντων, όπως είναι οι πολιτισμικές διαφορές και η ανεπαρκής ή ακατάλληλη διδασκαλία, αυτές δεν είναι το άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω καταστάσεων ή εξωτερικών επιδράσεων» (Hammill, 1990, αναφέρεται από την Παντελιάδου, 2000, σελ. 18)

Ο όρος «Μαθησιακές Δυσκολίες» είναι επιστημονικός και υπονοεί ότι το πρόβλημα είναι ενδογενές στο μαθητή. Παρά την ενδογενή φύση του, ο παραπάνω ορισμός παραπέμπει στην ανάγκη για παροχή εκπαιδευτικής βοήθειας. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί τον χρησιμοποιούν συχνά για όλα τα παιδιά που χρειάζονται εκπαιδευτική βοήθεια. Σύμφωνα με την Παντελιάδου (2000), σημαντικός αριθμός παιδιών χαρακτηρίζονται ως παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες χωρίς αυτό να ισχύει στην πραγματικότητα. Έτσι, ο εν λόγω όρος χρησιμοποιείται λανθασμένα για παιδιά που έχουν προβλήματα στη μάθηση εξαιτίας κοινωνικών ή οικογενειακών προβλημάτων, για παιδιά παλλινοστούντων, για παιδιά τσιγγάνων και για παιδιά με προβλήματα κοινωνικής προσαρμογής ή με ελαφρά νοητική υστέρηση.

Στην παρούσα μελέτη θα χρησιμοποιούμε τον όρο Δυσκολίες Μάθησης, επειδή τα παιδιά δεν είχαν διάγνωση που να καθορίζει την ενδογενή φύση των παραγόντων που επηρεάζουν την σχολική τους πορεία και εξέλιξη.

1.2. Σχολική αποτυχία και μαθηματικά

Η πολυπλοκότητα και σοβαρότητα του φαινομένου των δυσκολιών μάθησης και της σχολικής αποτυχίας, επιβάλλουν στα Προγράμματα Υποστήριξης να βασίζονται σε ερευνητικά δεδομένα ανάλογης επιστημονικής τεκμηρίωσης. Σύμφωνα με τον Mercer (1987), οι δυσκολίες μάθησης, σε παγκόσμιο επίπεδο, έχουν διερευνηθεί πολύ περισσότερο σε σχέση με τη Γλώσσα, παρά σε σχέση με τα Μαθηματικά. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί σε αιτίες όπως: (1) η σημασία της ανάγνωσης και της γραφής για τη γενικότερη ακαδημαϊκή επιτυχία, (2) η πολυσύνθετη φύση των μαθηματικών και η ποικιλομορφία στην επίδοση που καθιστούν δύσκολη την υιοθέτηση γενικών κριτηρίων για το αναμενόμενο επίπεδο κατανόησης, (3) οι παρατηρούμενες αλλαγές στη φύση και το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, που απαιτούν αλλαγές και στα κριτήρια αξιολόγησης και (4) η βαθιά ριζωμένη αντίληψη ότι, αντίθετα με τα λάθη στην ανάγνωση και τη γραφή, τα λάθη στα μαθηματικά και η συνακόλουθη αποτυχία είναι κάτι το αποδεκτό και ίσως αναμενόμενο, πιθανόν λόγω της φύσης του αντικειμένου (Αγαλιώτης, 1999).

Ανεξάρτητα από το ποια από τις παραπάνω αιτίες θα θέλαμε να υιοθετήσουμε, γεγονός παραμένει ότι υπάρχει ανάγκη για περισσότερη έρευνα στο χώρο των μαθησιακών δυσκολιών και της σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά.

1.3. Παράγοντες πρόκλησης δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά

Μια ανασκόπηση της σχετικής έρευνας έχει δείξει ότι υπάρχει μια ολόκληρη σειρά παραγόντων οι οποίοι σχετίζονται με τα ατομικά γνωστικά χαρακτηριστικά και τις ιδιαιτερότητες του περιβάλλοντος του κάθε παιδιού και είναι δυνατόν να εμποδίζουν την πρόοδο των παιδιών στα μαθηματικά με αποτέλεσμα τη χαμηλή επίδοσή τους.

Συνοψίζοντας τα στοιχεία ερευνών των Lansdown (1978), Reisman (1982), Τρούλη (1992), Magne (1993), Lerner (1993), Miller & Mercer (1998), μπορούμε να ταξινομήσουμε τους παράγοντες πρόκλησης δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά σε: (α) Ενδογενείς – ατομικούς παράγοντες όπως: συναισθηματικοί (συναισθηματικές διαταραχές, στάση προς το γνωστικό αντικείμενο, άγχος), ψυχοκινητικοί (έλλειψη μαθησιακής ετοιμότητας, διαταραχές στην οπτικο-χωρική αντίληψη), γνωστικοί (νοητική ικανότητα, αναγνώριση συμβόλων, γλωσσική ικανότητα και επικοινωνία, μνήμη, γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, ελλείψεις στις βασικές γνώσεις), (β) Εξωγενείς – περιβαλλοντικούς: κοινωνικό και οικονομικό επίπεδο της οικογένειας, στερημένο περιβάλλον, ανεπαρκής διδασκαλία, ύλη των μαθηματικών, διαφορές των δύο φύλων και (γ) Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες όπως η δυσαριθμησία κ.ά. Ωστόσο, επισημαίνεται ότι ο κάθε μαθητής είναι μοναδικός και ότι δε θα παρουσιάσουν όλα τα παιδιά που έχουν μαθησιακές δυσκολίες τα ίδια χαρακτηριστικά.

Οι Miller και Mercer (1998) αναφέρουν ότι το μοντέλο επεξεργασίας των πληροφοριών μας παρέχει το πλαίσιο για να εξετάσουμε και να ερμηνεύσουμε τα προβλήματα μάθησης των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες. Η θεωρία επεξεργασίας των πληροφοριών ερμηνεύει το ποια πληροφορία αποκτάται και με ποιο τρόπο. Στα θεμελιώδη στοιχεία της περιλαμβάνονται η προσοχή, οι αισθήσεις, η αντίληψη, η βραχυπρόθεσμη μνήμη, η μακροπρόθεσμη μνήμη και η αντίδραση (απόκριση). Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά συχνά παρουσιάζουν προβλήματα που συμβάλλουν στη χαμηλή τους επίδοση, τα οποία σχετίζονται με την επεξεργασία των πληροφοριών. Τέτοια προβλήματα είναι η διάσπαση της προσοχής, οι αντιληπτικές διαταραχές (δυσκολίες οπτικοχωρικές και ακουστικής επεξεργασίας), τα προβλήματα μνήμης, οι κινητικές δυσκολίες και άλλα ελλείμματα στην επεξεργασία των πληροφοριών.

Όπως επισημαίνουν πολλοί μελετητές των μαθησιακών δυσκολιών στα Μαθηματικά (Lerner 1993· Bley & Thornton 1995· Miller & Mercer 1998) πολλοί ενδογενείς παράγοντες επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών. Στις επόμενες παραγράφους θα σκιαγραφήσουμε τους σημαντικότερους από αυτούς τους παράγοντες στηριζόμενοι κυρίως στη σχετική αναφορά των Bley και Thornton (1995).

Οι Bley και Thornton (1995) αναφέρουν ότι πολλοί ενδογενείς παράγοντες επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών. Οι σημαντικότεροι από αυτούς είναι:

(1) *Δυσκολίες αντίληψης μορφής πλαισίου*

Τα συμπτώματα που παρουσιάζουν οι μαθητές με δυσκολίες οπτικής αντίληψης μορφής πλαισίου είναι ποικίλα: συχνά χάνουν το σημείο που εργάζονται σε ένα φύλλο εργασίας ή δεν ολοκληρώνουν την εργασία τους, φαίνονται απρόσεκτοι όταν αντιγράφουν ασκήσεις από το βιβλίο τους, έχουν την τάση να μπερδεύουν τα μέρη των ασκήσεων και συχνά αντιγράφουν σύμβολα εσφαλμένα, δυσκολεύονται να διακρίνουν την άσκηση από τον αύξοντα αριθμό της και μπορεί να συμπεριλάβουν στους υπολογισμούς τους και γειτονικά άσχετα ψηφία, η ανάγνωση πολυψήφιων αριθμών συχνά τους δημιουργεί σύγχυση αφού έχουν την τάση να εστιάζουν την προσοχή τους σε μεμονωμένα ψηφία και να μην τα ομαδοποιούν ταυτόχρονα.

Οι μαθητές με δυσκολίες ακουστικής αντίληψης μορφής πλαισίου συγχέουν τους ήχους, δίνουν την εντύπωση ότι ονειροπολούν ή ότι δε συγκεντρώνονται, ενώ στην πραγματικότητα προσπαθούν να παρακολουθήσουν, αλλά είναι δύσκολο να ακούσουν και να μάθουν, μπορεί να έχουν δυσκολίες στην αρίθμηση με υπερπήδηση ψηφίων (ανά 3 ή 5 ή 10), λόγω δυσκολιών στην ακουστική διάκριση.

(2) *Προβλήματα αντιληπτικής διάκρισης*

Οι διαταραχές οπτικής διάκρισης αντιληπτικών μορφών μπορεί να γίνουν η αιτία της εσφαλμένης ανάγνωσης ή γραφής των αριθμών και των συμβόλων των πράξεων, της αντιστροφής μονοψήφιων αριθμών (όπως οι 2, 3, 5 και 6), της εμφάνισης δυσκολιών και λαθών κατά τη γραφή των αριθμών και των συμβόλων, κατά την αντιγραφή των ασκήσεων από τον πίνακα και κατά την αυθόρμητη γραφή τους καθ' υπαγόρευση. Μία άλλη συνήθης αντιληπτική δυσκολία έχει ως αποτέλεσμα τις αντιστροφές διψήφιων αριθμών όταν τους διαβάζουν ή τους γράφουν (13 - 31 ή 12 - 21 κ.λπ). Οι μαθητές αυτοί μπορεί να έχουν πρόβλημα με τα κρατούμενα (γράφουν τις δεκάδες και κρατούν τις μονάδες).

Τα προβλήματα ακουστικής αντιληπτικής διάκρισης έχουν ως συνέπεια: αδυναμία να αντιληφθούν τους αριθμούς σωστά, να αντιλαμβάνονται εσφαλμένα καταλήξεις λέξεων ή λέξεις που μοιάζουν στην προφορά τους και αυτό μπορεί να τους οδηγήσει σε ποικίλα λάθη (π.χ. επιλέγουν λάθος πράξη, λάθη λόγω προβλημάτων στην προφορική-ακουστική επικοινωνία), να έχουν δυσκολία στην αναγνώριση και στη χρήση των νομισμάτων, επειδή αδυνατούν να διακρίνουν τις διαφορές των μεγεθών τους.

(3) *Διαταραχές χώρου και χρόνου*

Η απόδοση των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά μπορεί να επηρεαστεί σοβαρά, λόγω διαταραχών στην οργάνωση του χώρου και του χρόνου: δεν μπορούν να αντιληφθούν τις έννοιες δεξιά - αριστερά, πάνω – κάτω, μπροστά – πίσω, δυσκολεύονται να εντοπίσουν θέσεις στο χώρο, ο χειρισμός των κρατούμενων στους αλγόριθμους γίνεται ακόμη πιο δύσκολος, μπορεί να αποστηθίζουν και να είναι σε θέση να πουν την ώρα, όμως η αντίληψη του χρόνου είναι σημαντικά ελαττωμένη.

(4) *Κινητικές ανεπάρκειες και ελλείμματα στον οπτικο-κινητικό συντονισμό*

Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι αποτυγχάνουν στα μαθηματικά, επειδή η διαδικασία γραφής των αριθμών και των συμβόλων είναι γι' αυτούς ιδιαίτερα δύσκολη. Δυσκολεύονται στο να συσχετίσουν αυτά που βλέπουν με αυτά που γράφουν, δηλαδή να συντονίσουν τα μάτια τους με τις κινήσεις του χεριού τους, λόγω διαταραχών στον οπτικο-κινητικό τους συντονισμό. Δυσκολεύονται επίσης και στο χειρισμό υλικών αντικειμένων (π.χ. κατά την απαρίθμηση). Όταν οι ασκήσεις των μαθηματικών γίνουν μεγαλύτερες και πιο περίπλοκες, οι μαθητές αυτοί αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες για να συμπληρώσουν τις γραπτές εργασίες τους.

(5) *Ανεπάρκειες μνήμης (βραχύχρονης - μακρόχρονης και ακολουθιών)*

Όπως αναφέρουν οι Bley και Thornton (1995), κάποιες από τις διαταραχές της μνήμης μπορεί να ταξινομηθούν και ως αντιληπτικές ανεπάρκειες, αλλά είναι χρήσιμο να εξετασθούν και ιδιαιτέρως για να ληφθούν υπόψη κατά το σχεδιασμό και την ανάπτυξη θεραπευτικών προγραμμάτων. Υπάρχουν περιπτώσεις μαθητών που οι δυσκολίες τους οφείλονται σε ειδικά προβλήματα βραχυπρόθεσμης ή μακροπρόθεσμης μνήμης. Τα προβλήματα αυτά τους εμποδίζουν να μάθουν ή να διατηρήσουν στη μνήμη τους αυτά που έμαθαν και αδυνατούν να στηριχτούν στις προγενέστερες γνώσεις για να οικοδομήσουν νέες.

Τα οπτικά και ακουστικά προβλήματα βραχυπρόθεσμης μνήμης επηρεάζουν την ικανότητα των παιδιών να επιλύουν λεκτικά προβλήματα. Αν και οι μαθητές μπορεί να μη δυσκολεύονται στην ανάγνωση και στην κατανόηση του προβλήματος, μπορεί να αδυνατούν να διατηρήσουν τις πληροφορίες αρκετό χρόνο για να σκεφτούν και να λύσουν το πρόβλημα. Αυτό είναι πιο εμφανές στα σύνθετα προβλήματα, τα οποία απαιτούν για τη λύση τους δύο ή περισσότερες πράξεις.

(6) *Τα προβλήματα ολοκλήρωσης*

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες συχνά έχουν πρόβλημα στην ολοκλήρωση και στην εφαρμογή των όσων μαθαίνουν. Πιο συγκεκριμένα, στο να χρησιμοποιούν και να συσχετίζουν πληροφορίες για να καταλήξουν σε συμπεράσματα, για να οικοδομήσουν νέες γνώσεις. Τα πιο συνηθισμένα προβλήματα που αντιμετωπίζουν είναι ότι έχουν δυσκολία να διαβάσουν πολυψήφιους αριθμούς, επειδή αδυνατούν να ομαδοποιήσουν τα ψηφία τους, δυσκολεύονται με την ταξινόμηση αρχικά αντικειμένων ή εικόνων (π.χ. σχημάτων) με βάση κάποιο κοινό χαρακτηριστικό τους και στη συνέχεια σε συμβολικό επίπεδο δυσκολεύονται περισσότερο να βρουν τις ομοιότητες από τις διαφορές (π.χ. των μονών ή των ζυγών αριθμών). Έχουν δυσκολίες, επειδή χάνουν προσθετέους ή παράγοντες, δυσκολεύονται στη επίλυση λεκτικών προβλημάτων και γενικότερα στις εφαρμογές των μαθηματικών που προϋποθέτουν ολοκλήρωση. Η ικανότητα να επιλύουν λεκτικά προβλήματα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την κατανόηση του εννοιολογικού πεδίου των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (σε ποιες περιπτώσεις κάνουμε πρόσθεση, αφαίρεση κλπ.). Δυσκολεύονται στη αρίθμηση, ιδιαίτερα όταν τους ζητηθεί να ξεκινήσουν από ένα τυχαίο αριθμό εντός μιας αλυσίδας αριθμών, έχουν δυσκολία να εντοπίσουν τον αμέσως επόμενο αριθμό από το σημείο εκκίνησης ή όταν τους ζητηθεί να αριθμήσουν με υπερπήδηση ψηφίων (ανά 2, 5 κλπ.) ή να λογαριάσουν με κέρματα.

(7) *Οι διαταραχές της επικοινωνίας*

Στις διαταραχές επικοινωνίας σύμφωνα με την APA - DSM IV (1995) υπάγονται οι διαταραχές της Γλωσσικής Έκφρασης (εκφραστικού λόγου), η Μεικτή Διαταραχή της Γλωσσικής Αντίληψης Έκφρασης (προσληπτικού - εκφραστικού λόγου), η φωνολογική Διαταραχή, ο Τραυλισμός και η Διαταραχή της Επικοινωνίας μη Προσδιοριζόμενη Αλλιώς. Σ' όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ένα από τα διαγνωστικά κριτήρια είναι οι δυσκολίες στη γλωσσική έκφραση ή στη γλωσσική αντίληψη και έκφραση ή στην παραγωγή ήχου ομιλίας ή στη ροή και τη χρονική διαμόρφωση της ομιλίας να παρεμποδίζουν τη σχολική ή επαγγελματική επίδοση ή την κοινωνική επικοινωνία.

(7.α) *Η διαταραχή της γλωσσικής έκφρασης*

Η διαταραχή της Γλωσσικής Έκφρασης (εκφραστικού λόγου) χαρακτηρίζεται από αναπτυξιακά προβλήματα στην προφορική γλωσσική έκφραση που εκδηλώνονται ως ελαττωμένη ποσότητα λόγου, περιορισμένο λεξιλόγιο, δυσκολία στην απόκτηση νέων λέξεων, δυσκολίες στην ανάκληση λέξεων, λάθη στους χρόνους των ρημάτων, απλοποιημένη γραμματική, δυσκολίες στην παραγωγή σύνθετων και μεγάλων προτάσεων.

Σ' ό,τι αφορά τα μαθηματικά, οι μαθητές έχουν πρόβλημα με τις προφορικές ασκήσεις, ειδικά όταν ο ρυθμός είναι γρήγορος. Δεν μπορούν να αποδώσουν υπό πίεση χρόνου είτε προφορικά είτε γραπτά (π.χ. χρονομετρούμενα τεστ). Είναι ευκολότερο να διακρίνουν το σωστό από το λάθος παρά να μπορέσουν να το εξηγήσουν. Αποδίδουν καλύτερα στις γραπτές εργασίες και γενικότερα κατανοούν μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες, αλλά αδυνατούν να εκφραστούν με το λόγο, δηλαδή εκφράζονται περιορισμένα ή και καθόλου (Bley & Thornton, 1995).

(7.β) *Η μεικτή διαταραχή της γλωσσικής αντίληψης – έκφρασης*

Χαρακτηρίζεται από αναπτυξιακά προβλήματα τόσο στη γλωσσική έκφραση (εκφραστικός λόγος) όσο και στη γλωσσική αντίληψη που διαπιστώνονται με ειδικές δοκιμασίες. Τα συμπτώματα περιλαμβάνουν εκείνα της γλωσσικής έκφρασης που αναφερθήκαμε προηγουμένως καθώς και δυσκολία του ατόμου να κατανοεί λέξεις, προτάσεις ή συγκεκριμένους όρους, όπως εκείνους που σχετίζονται με το χώρο.

Ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά, ενώ ακούνε τη λέξη ως λέξη, αδυνατούν να κατανοήσουν τη σημασία της με αποτέλεσμα να έχουν δυσκολία: να κατανοήσουν μαθηματικούς όρους και ειδικά αυτούς με πολλαπλές σημασίες (πολυσήμαντοι), να κατανοήσουν οδηγίες, να λύσουν μία άσκηση ή ένα πρόβλημα που τους δίνεται προφορικά, διαφορετικά απ' ότι αρχικά τους είχε δοθεί καθώς και στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων.

(8) *Προβλήματα στον αφηρημένο συλλογισμό*

Οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης αρκετά συχνά έχουν προβλήματα με τον αφηρημένο συλλογισμό, δηλαδή αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία στην κατανόηση και στη χρήση των αριθμών, των συμβόλων, των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Στην περίπτωση αυτή αποτελεί λανθασμένη επιλογή από διδακτική και μεθοδολογική άποψη η χρήση αποκλειστικά συμβόλων κατά τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Αντίθετα η νέα ύλη των μαθηματικών πρέπει να παρουσιάζεται με πολυαισθητηριακό τρόπο ώστε οι μαθητές να βλέπουν, να χειρίζονται, να αισθάνονται, να δραματοποιούν τις νέες έννοιες ή διαδικασίες και μέσω του φυσικού-υλικού υπόβαθρου να γίνει η σύνδεση και η μεταφορά του νοήματος στα γραπτά σύμβολα. Δηλαδή τα γραπτά σύμβολα πρέπει να συσχετίζονται με μοντέλα χειροπιαστών αντικειμένων ή εικόνων που απεικονίζουν την έννοια ή τη διαδικασία, πριν χρησιμοποιηθούν από μόνα τους.

Οι μαθητές που έχουν πρόβλημα στον αφηρημένο συλλογισμό έχουν σοβαρή δυσκολία να εκφράσουν με λόγια ό,τι παρατηρούν ή μαθαίνουν, να συσχετίσουν όσα παρατηρούν με τη συμβολική τους αναπαράσταση, να αντιληφθούν και να κατανοήσουν ό,τι δείχνεται ή εξηγείται.

(9) *Οι μη λεκτικές μαθησιακές δυσκολίες*

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αυτού του τύπου είναι καλοί στην αναγνώριση των λέξεων και στην ορθογραφία, αλλά έχουν δυσκολίες στην αριθμητική. Τα παιδιά αυτά μπορεί να έχουν δυσκολίες στην κοινωνική αλληλεπίδραση, επειδή δυσκολεύονται να κατανοήσουν χαρακτηριστικά όπως ο τόνος της φωνής και η έκφραση του προσώπου. Επίσης έχουν δυσκολίες με την οπτικο-χωρική οργάνωση. Έχουν πρόβλημα στον αφηρημένο συλλογισμό, όμως είναι καλοί στη μηχανική αποστήθιση. Επίσης μπορεί να έχουν πρόβλημα με τον οπτικο-κινητικό συντονισμό, που έχει ως συνέπεια να είναι κοπιώδης η γραφή τους και η εργασία τους να χαρακτηρίζεται από ακαταστασία. Μπορεί να έχουν πρόβλημα με τις οργανωτικές δεξιότητες και έχουν φτωχή οπτική αναπαράσταση της πραγματικότητας.

(10) *Το σύνδρομο διάσπασης προσοχής/ υπερκινητικότητας*

Σύμφωνα με τη Lerner (1993) το σύνδρομο διάσπασης της προσοχής (Attention Deficit Disorder ή ADD) είναι μία αρκετά συνήθης διαταραχή της παιδικής ηλικίας. Η υπερκινητικότητα μπορεί να συνυπάρχει με το σύνδρομο διάσπασης της προσοχής, δηλαδή μπορεί να συνοδεύει τα προβλήματα προσοχής σε μερικά, όχι όμως σε όλα τα παιδιά. Στην περίπτωση αυτή κάνουμε λόγο για σύνδρομο διάσπασης της προσοχής με Υπερκινητικότητα (Attention Deficit Hyperactivity Disorder ή ADHD).

Αν και το σύνδρομο διάσπασης της προσοχής δεν είναι συνώνυμο με τις μαθησιακές δυσκολίες, ένα αρκετά υψηλό ποσοστό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζει τα συμπτώματα της διαταραχής. Τα άτομα με τη διαταραχή αυτή συχνά εμφανίζουν εκρήξεις θυμού, ανυπομονησία, ισχυρογνωμοσύνη, έντονη απαιτητικότητα, ευμετάβλητο συναίσθημα, έντονη πτώση του ηθικού, χαμηλή αυτοεκτίμηση, υφίστανται απόρριψη, παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα μαθήματα. Οι χαμηλές επιδόσεις στα μαθήματα, το ότι δεν ασχολούνται με τα μαθήματά τους (που συχνά ερμηνεύεται λανθασμένα ως τεμπελιά), οι συγκρούσεις με τους δασκάλους και τους γονείς για την απρόσεκτη, διασπαστική και «ανεύθυνη» συμπεριφορά τους στην τάξη και στο σπίτι δημιουργούν συχνά μια χαώδη κατάσταση (Μάνος, 1997)

(11) *Διαταραχές στο γνωστικό ύφος.*

Οι ιδιαιτερότητες στο γνωστικό ή μαθησιακό ύφος επηρεάζει την αποτελεσματικότητα της μάθησης. Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, συνήθως, χαρακτηρίζονται από γνωστικό παρορμητισμό. Όταν ερωτηθούν δίνουν απαντήσεις πολύ γρήγορα, χωρίς να εξετάσουν εναλλακτικές λύσεις. Ο χρόνος που μεσολαβεί για σκέψη μεταξύ ερεθίσματος και απάντησης είναι ελάχιστος. Τα παιδιά αυτά φαίνεται να μη διαθέτουν εναλλακτικές γνωστικές στρατηγικές και βοηθούνται ιδιαίτερα, εάν μέσω κατάλληλης διδασκαλίας διευρύνουν τις γνωστικές τους στρατηγικές (Lerner, 1993).

Ένα άλλο αρνητικό στοιχείο που χαρακτηρίζει το γνωστικό ύφος των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι το ότι προσεγγίζουν τη μάθηση με παθητικό τρόπο. Στερούνται ενδιαφέροντος για μάθηση, επειδή έχουν αποκομίσει πολλές αρνητικές εμπειρίες, λόγω των συχνών αποτυχιών και των απογοητεύσεων που δοκιμάζουν. Δεν πιστεύουν ότι είναι σε θέση να μάθουν και δε γνωρίζουν πώς να αντιμετωπίσουν ένα έργο μάθησης και αποκτούν αρνητική αυτοαντίληψη και χαμηλή αυτοεκτίμηση (Lerner 1993· Ματσαγγούρας 2000).

1.4. Χαρακτηριστικά Παιδιών με Δυσκολίες Μάθησης

1.4.1 Χαρακτηριστικές δυσκολίες στη Γλώσσα - Δυσκολίες στην ανάγνωση

Η ανάγνωση ή διάβασμα είναι μια από τις σημαντικότερες σχολικές δεξιότητες. Αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αναγνωρίζει και να προφέρει τις λέξεις όταν βρίσκονται στη γραπτή μορφή τους. Παρά τον πολύπλοκο χαρακτήρα των λειτουργικών μηχανισμών της ανάγνωσης, απαιτείται από το άτομο όχι μόνο να μάθει να διαβάζει, να γράφει και να ορθογραφεί, αλλά και να αναπτύξει αυτές τις δεξιότητες σε ικανοποιητικό βαθμό απόδοσης. Η αποτυχία ενός ποσοστού ατόμων στην επιτυχημένη επεξεργασία του γραπτού λόγου μπορεί να οφείλεται σε ποικίλους παράγοντες ο προσδιορισμός της φύσης των οποίων είναι απαραίτητος για να καθορισθεί η φύση της μαθησιακής δυσκολίας και να μεθοδευθεί η κατάλληλη αναγνωστική αγωγή (Πόρποδας, 2003).

Παρόλο που η φύση της αναγνωστικής διαδικασίας έχει μελετηθεί αρκετά έως σήμερα, υπάρχει ακόμα μεγάλη σύγχυση και αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με το πρόβλημα των μαθησιακών δυσκολιών που αφορούν αυτή τη δεξιότητα. Ένα μεγάλο πρόβλημα που υπάρχει στο χώρο των αναγνωστικών δυσκολιών είναι ο ορισμός και η συνεχιζόμενη ποικιλία ορολογιών που χρησιμοποιούνται για να τις περιγράψουν. Μια αρχική διάκριση, η οποία φαίνεται έγκυρη είναι ο διαχωρισμός: (α) σε αναγνωστικές δυσκολίες, οι οποίες, φαίνονται στο πλαίσιο μιας χαμηλής νοημοσύνης και χαμηλής συνολικά σχολικής επίδοσης. Αυτές οφείλονται κυρίως σε ψυχο-περιβαλλοντικούς παράγοντες που επιδρούν αρνητικά στην ανάπτυξη της αναγνωστικής ικανότητας (β) σε ειδικές αναγνωστικές δυσκολίες (δυσλεξία), οι οποίες είναι ειδικές κατά την έννοια ότι υπάρχει ασυμφωνία ανάμεσα στην αναγνωστική επίδοση και στην επίδοση σε τεστ γενικής νοημοσύνης (Magne, 1999).

Οι Rutter και Yale (1975) χρησιμοποίησαν δύο διαφορετικούς όρους για την κάθε περίπτωση: τη «γενική αναγνωστική καθυστέρηση» για να περιγράψουν τα παιδιά με φτωχή γενικά ικανότητα και τον όρο «ειδική αναγνωστική καθυστέρηση» για να περιγράψουν τα παιδιά εκείνα τα οποία είχαν μια ειδική καθυστέρηση στην ανάγνωση. Άλλοι ερευνητές χρησιμοποιούν άλλους όρους, όπως «δυσλεξία», «μαθησιακή δυσκολία», «αναγνωστική δυσκολία» ή «φτωχός αναγνώστης». Οι διαφορές στην ορολογία δείχνουν ότι δεν είναι ίδια τα αναγνωστικά προβλήματα μεταξύ των ομάδων, στις οποίες έχουν δοθεί αυτές οι ονομασίες.

Ο Radinovitch (1968) μελέτησε τις μαθησιακές δυσκολίες που παρουσιάζονται στην επεξεργασία του γραπτού λόγου και τις κατάταξε, ανάλογα με την αιτιολογία τους, στις εξής τρεις κατηγορίες: (1) στην *πρωτογενή* μαθησιακή δυσκολία, κατά την οποία η εκμάθηση της ανάγνωσης εμποδίζεται από παράγοντες που δεν οφείλονται σε εμφανές εγκεφαλικό τραύμα. Η κατηγορία αυτή χαρακτηρίζεται από τη δυσκολία του παιδιού να ασχοληθεί με τα γραπτά σύμβολα και λέξεις και φαίνεται να αντανακλά μια διαταραχή του νευρικού συστήματος, (2) στη δευτερογενή αναγνωστική δυσκολία που οφείλεται σε εμφανή εγκεφαλικό τραυματισμό και (3) στη δευτερογενή αναγνωστική δυσκολία που οφείλεται σε περιβαλλοντικούς παράγοντες.

Οι ερευνητές της ανάγνωσης βρέθηκαν αντιμέτωποι με μια ευρεία σειρά δυσκολιών που διαφοροποιούν τα παιδιά με δυσκολίες ανάγνωσης. Για παράδειγμα, παιδιά με αναγνωστικές δυσκολίες, παρουσιάζουν χαμηλή απόδοση στις δοκιμασίες που αξιολογούν τη φωνολογική επεξεργασία, το λεξιλόγιο, τη συντακτική επεξεργασία και τη λεκτική εργαζόμενη μνήμη. Εντούτοις, προχώρησαν στη διάκριση μεταξύ εκείνων των παραγόντων που παίζουν έναν αιτιώδη ρόλο στην αποτυχία ανάγνωσης και εκείνων που είναι συνέπειες αυτών των παραγόντων. Υπάρχει ιδιαίτερη συναίνεση μεταξύ των ερευνητών ότι το αιτιώδες έλλειμμα των δυσκολιών ανάγνωσης είναι η δυσκολία στη φωνολογική επεξεργασία, η οποία εμφανίζεται ως μειωμένη φωνολογική επίγνωση - μειωμένη δυνατότητα του ατόμου να προσδιορίσει και να χειριστεί τα φωνήματα (Adams, 1990· Cunningham & Stanovich, 1997· Stanovich & Siegel, 1994). Ελλείμματα στη φωνολογική επίγνωση επηρεάζουν άμεσα την απόκτηση και τον έλεγχο της αντιστοιχίας γραφήματος-φωνήματος, δεξιότητες που υποδηλώνουν ευχερή ανάγνωση. Εντούτοις, επειδή τα παιδιά με αναγνωστικές δυσκολίες τείνουν να αποφεύγουν την ανάγνωση, η έκθεσή τους στο γραπτό κείμενο είναι περιορισμένη. Αυτό τους παρέχει λιγότερες ευκαιρίες να αποκτήσουν το εύρος του λεξιλογίου και των συντακτικών δομών που αποκτούν έμπειροι αναγνώστες (Stanovich, 1986). Εν ολίγοις, τα ελλείμματα στη φωνολογική επίγνωση έχουν μια άμεση σχέση με την δυνατότητα αποκωδικοποίησης και μια έμμεση σχέση με άλλα συστατικά δυσκολιών ανάγνωσης.

Τα αποτελέσματα των μακροχρόνιων μελετών στον τομέα της φωνολογικής επίγνωσης οδήγησαν στη διαπίστωση ότι η ύπαρξη ελλείμματος στη φωνολογική επίγνωση αποτελεί έναν από τους πιο δυνατούς προάγγελους της ικανότητας που θα επιδείξει μελλοντικά το άτομο στην ανάγνωση (Cunningham & Stanovich, 1997· Share, Jorm, Maclean, & Matthews, 2002).

1.4.2. Χαρακτηριστικές δυσκολίες στα Μαθηματικά

Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες έχουν σημαντική δυσκολία απόκτησης και διατήρησης μαθηματικών δεξιοτήτων. Ποικίλοι παράγοντες φαίνεται ότι συνεισφέρουν στην κακή μαθηματική απόδοση αυτών των ατόμων. Τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες έχουν συχνά δυσκολία με τον μαθηματικό υπολογισμό και την επίλυση προβλήματος. Οι στατιστικές σχετικά με την μαθηματική απόδοση μεταξύ των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι ανησυχητικές. Οι Cawley και Miller (1989) ανέφεραν ότι παιδιά 8 και 9 ετών με μαθησιακές δυσκολίες εκτέλεσαν υπολογισμούς και πράξεις στο επίπεδο της 1η τάξης. Επιπλέον, οι Fleischner, Garnett, και Shepherd (1982) διαπίστωσαν ότι παιδιά 6ης βαθμίδας με μαθησιακές δυσκολίες, έλυσαν πράξεις πρόσθεσης όχι καλύτερα από παιδιά 3ης βαθμίδας χωρίς δυσκολίες. Επίσης διαπίστωσαν ότι παιδιά 5ης βαθμίδας με μαθησιακές δυσκολίες έλυσαν το ένα τρίτο από προβλήματα πολλαπλασιασμού σε σχέση με συνομηλίκους τους χωρίς δυσκολίες, σε χρονομετρημένες αξιολογήσεις. Οι Cawley και Miller (1989) ανέφεραν ότι η μαθηματική γνώση μαθητών και μαθητριών με μαθησιακές δυσκολίες τείνει να προχωρά περίπου 1 έτος για κάθε 2 έτη σχολικής συμμετοχής.

Αν και κάθε μαθητής είναι μοναδικός, μια αξιολόγηση των γενικών χαρακτηριστικών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες δίνει χρήσιμες πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές για τους διδακτικούς στόχους που αξίζουν την προσοχή κατά τον προγραμματισμό και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι δυσκολίες που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, στην επεξεργασία των πληροφοριών, τη γλώσσα, την απόκτηση της γνώσης, τη μεταγνώση και την κοινωνική και συναισθηματική συμπεριφορά είναι τομείς άξιοι να ερευνηθούν.

Μια λεπτομερής μελέτη της βιβλιογραφίας καταδεικνύει ότι πολλά άτομα με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν πολυάριθμα χαρακτηριστικά που προαναγγέλλουν δυσκολίες στα μαθηματικά.

1.4.2.1. Γνωστικά χαρακτηριστικά

Ο στόχος της έρευνας στον τομέα των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά είναι να προσδιορίσει ένα πυρηνικό έλλειμμα ή ελλείμματα. Επιπλέον, αυτό το έλλειμμα πρέπει να ικανοποιήσει την υπόθεση της ιδιομορφίας (Stanovich, 1993· Stanovich & Siegel, 1994). Αυτή, είναι η υπόθεση, στην οποία παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες έχουν ένα γνωστικό έλλειμμα που περιλαμβάνει μια ειδικού-πεδίου διαδικασία, παρά γενικού-πεδίου, όπως η ταχύτητα επεξεργασίας, η γενική ακουστική επεξεργασία ή ο αυτοματισμός. Η έννοια των μαθησιακών δυσκολιών απαιτεί ότι τα ελλείμματα δεν εκτείνονται πάρα πολύ μακριά σε άλλα πεδία γνωστικών ικανοτήτων. Διαφορετικά, τα ελλείμματα θα πίεζαν τη γνωστική λειτουργία σε όλες τις περιοχές, και όχι μόνο, στην ανάγνωση ή τα μαθηματικά.

Οι Gersten et al (1999) έχουν περιγράψει μια ευρεία σειρά ελλειμμάτων που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Αυτή περιλαμβάνει χαμηλό βαθμό ανάκλησης αριθμητικών συνδυασμών, αργό ρυθμό κατονομασίας ψηφίων, ανεπαρκείς και ανώριμες στρατηγικές μέτρησης, περιορισμένη αντίληψη αριθμού, και αδύναμη μη λεκτική εργαζόμενη μνήμη.

Ένα πεδίο μαθηματικής γνώσης που συχνά παρουσιάζει έλλειμμα στα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, μπορεί να είναι η αναπαράσταση των αριθμών (Ansari & Karmilloff-Smith, 2002). Η ύπαρξη δυσκολιών στην ικανότητα αναπαράστασης και χειρισμού των αριθμών φαίνεται να είναι ισχυροί πρόάγγελοι επακόλουθων μαθηματικών δεξιοτήτων (Gersten et al, 1999). Στις νευρολογικές και συμπεριφοριστικές μελέτες των μαθηματικών σε παιδιά σχολικής ηλικίας και ενήλικες, οι ερευνητές έχουν εξετάσει την ανάπτυξη της ικανότητας αναπαράστασης και επεξεργασίας των αριθμητικών ερεθισμάτων μεταξύ βρεφικής και πρώιμης παιδικής ηλικίας. Αυτές οι πρόδρομες αναπαραστάσεις παρέχουν τα θεμέλια για την ανάπτυξη ώριμων αναπαραστάσεων του αριθμού.

Καθυστερήσεις ή αποτυχίες στην απόκτηση ώριμων αναπαραστάσεων μπορούν να ελλοχεύουν μια σειρά ελλειμμάτων που παρουσιάζονται σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Carey, 2001).

Η δυσκολία στην ανάπτυξη ώριμων αναπαραστάσεων των αριθμών θα μπορούσε να σχετίζεται με την καθυστερημένη ικανότητα κατανόησης των αριθμών. Παιδιά που δεν αναπαριστούν αριθμούς χρησιμοποιώντας το ακριβές σύστημα όταν η διδασκαλία στα μαθηματικά αρχίζει, αντιμετωπίζουν αξιοσημείωτα προβλήματα στην ανάπτυξη βασικών μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα, επειδή αυτά τα παιδιά έχουν μια φτωχή κατανόηση των αριθμών, είναι ανακριβείς και αφελείς στον υπολογισμό (Geary, 2003). Ανώριμες αναπαραστάσεις των αριθμών μπορούν να υποδηλώνουν την περιορισμένη αντίληψη αριθμών και τις δυσκολίες στη διάκριση μεταξύ ποσοτήτων σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Παιδιά των οποίων οι αριθμητικές αναπαραστάσεις είναι χαμηλής ποιότητας ή ανακριβείς θα δοκιμάσουν σημαντικές δυσκολίες στην κωδικοποίηση, αποθήκευση και ανάκληση των αριθμητικών συμβόλων από τη μνήμη.

Η απόκτηση εννοιολογικής, δηλωτικής, διαδικαστικής, και στρατηγικής γνώσης στα μαθηματικά μπορεί να επηρεαστεί δυσμενώς από αναπτυξιακές καθυστερήσεις, προβλήματα αναπαράστασης και ανάκλησης, ή οπτικο-χωρικά ελλείμματα (Geary, 1993). Οι αναπτυξιακές καθυστερήσεις στην απόκτηση της εννοιολογικής γνώσης φαίνεται να οδηγούν στη χρήση εξελικτικά ανώριμων αριθμητικών διαδικασιών και υψηλών ποσοστών λάθους. Οι δυσκολίες στην αναπαράσταση και την ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων από τη μακρόχρονη σημασιολογική μνήμη μπορούν να εμποδίσουν την απόκτηση της δηλωτικής γνώσης. Τα οπτικο-χωρικά ελλείμματα (δυσκολίες με τη χωρική αντιπροσώπευση των αριθμητικών πληροφοριών) μπορούν να παρεμποδίσουν την εννοιολογική, δηλωτική, και διαδικαστική κατανόηση ως αποτέλεσμα των ελλιπώς οργανωμένων σχημάτων και των ελαττωματικών νοητικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών προτύπων (patterns). Επιπλέον, τα ελλείμματα στο σχεδιασμό και την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής μπορούν να έχουν επιπτώσεις στη μαθηματική ικανότητα επίλυσης προβλήματος (Montague & Applegate, 1992· Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, & Riley 1998).

Οι Parmar και Cawley (1991) υποστηρίζουν ότι πολλοί μαθητές με ειδικές ανάγκες έχουν ιστορικό ακαδημαϊκής αποτυχίας που συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθησιακής δυσκολίας στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τους ερευνητές η μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά εντοπίζεται σε μικρότερους μαθητές που προσπαθούν επανειλημμένα να λύσουν προβλήματα όταν έχουν ελάχιστη ή καμία κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. μπορούν να κάνουν προσθέσεις αλλά δεν καταλαβαίνουν τι σημαίνει πρόσθεση). Αυτή η

Καθυστερήσεις ή αποτυχίες στην απόκτηση ώριμων αναπαραστάσεων μπορούν να ελλοχεύουν μια σειρά ελλειμμάτων που παρουσιάζονται σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Carey, 2001).

Η δυσκολία στην ανάπτυξη ώριμων αναπαραστάσεων των αριθμών θα μπορούσε να σχετίζεται με την καθυστερημένη ικανότητα κατανόησης των αριθμών. Παιδιά που δεν αναπαριστούν αριθμούς χρησιμοποιώντας το ακριβές σύστημα όταν η διδασκαλία στα μαθηματικά αρχίζει, αντιμετωπίζουν αξιοσημείωτα προβλήματα στην ανάπτυξη βασικών μαθηματικών εννοιών. Για παράδειγμα, επειδή αυτά τα παιδιά έχουν μια φτωχή κατανόηση των αριθμών, είναι ανακριβείς και αφελείς στον υπολογισμό (Geary, 2003). Ανώριμες αναπαραστάσεις των αριθμών μπορούν να υποδηλώνουν την περιορισμένη αντίληψη αριθμών και τις δυσκολίες στη διάκριση μεταξύ ποσοτήτων σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Παιδιά των οποίων οι αριθμητικές αναπαραστάσεις είναι χαμηλής ποιότητας ή ανακριβείς θα δοκιμάσουν σημαντικές δυσκολίες στην κωδικοποίηση, αποθήκευση και ανάκληση των αριθμητικών συμβόλων από τη μνήμη.

Η απόκτηση εννοιολογικής, δηλωτικής, διαδικαστικής, και στρατηγικής γνώσης στα μαθηματικά μπορεί να επηρεαστεί δυσμενώς από αναπτυξιακές καθυστερήσεις, προβλήματα αναπαράστασης και ανάκλησης, ή οπτικο-χωρικά ελλείμματα (Geary, 1993). Οι αναπτυξιακές καθυστερήσεις στην απόκτηση της εννοιολογικής γνώσης φαίνεται να οδηγούν στη χρήση εξελικτικά ανώριμων αριθμητικών διαδικασιών και υψηλών ποσοστών λάθους. Οι δυσκολίες στην αναπαράσταση και την ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων από τη μακρόχρονη σημασιολογική μνήμη μπορούν να εμποδίσουν την απόκτηση της δηλωτικής γνώσης. Τα οπτικο-χωρικά ελλείμματα (δυσκολίες με τη χωρική αντιπροσώπευση των αριθμητικών πληροφοριών) μπορούν να παρεμποδίσουν την εννοιολογική, δηλωτική, και διαδικαστική κατανόηση ως αποτέλεσμα των ελλιπώς οργανωμένων σχημάτων και των ελαττωματικών νοητικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών προτύπων (patterns). Επιπλέον, τα ελλείμματα στο σχεδιασμό και την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής μπορούν να έχουν επιπτώσεις στη μαθηματική ικανότητα επίλυσης προβλήματος (Montague & Applegate, 1992· Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, & Riley 1998).

Οι Parmar και Cawley (1991) υποστηρίζουν ότι πολλοί μαθητές με ειδικές ανάγκες έχουν ιστορικό ακαδημαϊκής αποτυχίας που συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθησιακής δυσκολίας στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τους ερευνητές η μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά εντοπίζεται σε μικρότερους μαθητές που προσπαθούν επανειλημμένα να λύσουν προβλήματα όταν έχουν ελάχιστη ή καμία κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. μπορούν να κάνουν προσθέσεις αλλά δεν καταλαβαίνουν τι σημαίνει πρόσθεση). Αυτή η έλλειψη κατανόησης ενθαρρύνει την εξάρτηση του παιδιού από τον εκπαιδευτικό και προωθεί έτσι την πεποίθηση ότι απαιτείται εξωτερική βοήθεια για να λύσει ο μαθητής τα προβλήματα σωστά. Αυτός ο κύκλος δημιουργεί, επίσης, παθητικούς μαθητές, ένας όρος που συχνά χρησιμοποιείται για να περιγράψει τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και αναφέρεται σ' αυτούς που τυπικά δεν συμμετέχουν ενεργά ή δεν αυτορρυθμίζουν τη μάθησή τους (Parmar & Cawley, 1991). Δεν αποτελεί έκπληξη ότι πολλοί από αυτούς τους μαθητές χαρακτηρίζονται ως έχοντες έλλειψη κινήτρων λόγω της παθητικότητάς τους.

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν συχνά προβλήματα που συμβάλλουν στη χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και που είναι σχετικά με την ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών. Μεταξύ αυτών των προβλημάτων είναι η διάσπαση της προσοχής, τα προβλήματα μνήμης (Zentall & Ferkis, 1993), οι οπτικό-χωρικές δυσκολίες (Garnett, 1992), οι δυσκολίες ακουστικής επεξεργασίας, οι κινητικές δυσκολίες και τα ελλείμματα επεξεργασίας πληροφοριών (Montague & Van Garderen 2003). Οι ακόλουθοι είναι τομείς στους οποίους οι αδυναμίες στα επιλεγμένα συστατικά επεξεργασίας πληροφοριών μπορούν να έχουν επιπτώσεις στην απόδοση στα μαθηματικά:

Διάσπαση της προσοχής: τα παιδιά:

- έχουν δυσκολία να διατηρούν την προσοχή τους στα βήματα των αλγορίθμων ή κατά την επίλυση προβλημάτων καθώς και στην κρίσιμη πρώτη φάση της διδασκαλίας (critical instruction).

Οπτικο-χωρικά ελλείμματα:

- χάνουν τη θέση τους στο φύλλο εργασίας.
- έχουν δυσκολία διαφοροποίησης μεταξύ αριθμών (6 και 9, 2 και 5 ή 17 και 71), νομισμάτων, συμβόλων των πράξεων.
- έχουν δυσκολία να γράφουν στο χαρτί σε ευθεία γραμμή.
- έχουν δυσκολία σχετικά με τις κατευθυντικές πτυχές των μαθηματικών, π.χ. προβλήματα που περιλαμβάνουν αυξομειώσεις (π.χ. πρόσθεση), αριστερά-δεξιά (ανασυγκρότηση), και ευθυγράμμιση των αριθμών.
- έχουν δυσκολία χρήσης της αριθμογραμμής.

***Δυσκολίες ακουστικής επεξεργασίας*:**

- έχουν δυσκολία να κάνουν προφορική εξάσκηση.
- δυσκολεύονται να μετρήσουν επάνω από… μέσα από μια ακολουθία.

Προβλήματα μνήμης:

- δυσκολεύονται να διατηρήσουν μαθηματικά δεδομένα ή νέες πληροφορίες.
- ξεχνούν τα βήματα σε έναν αλγόριθμο.

- έχουν κακή απόδοση στα μαθήματα ανακεφαλαίωσης ή τα τεστ.
- έχουν δυσκολία στην αφήγηση.
- έχουν δυσκολία να λύνουν σύνθετα λεκτικά προβλήματα.

Γραφοκινητικές δυσκολίες:

- γράφουν τους αριθμούς δυσανάγνωστα, αργά, και ανακριβώς.
- έχουν δυσκολία στο γράψιμο αριθμών σε προκαθορισμένα διαστήματα στο χαρτί

Εκτός από τα γενικά χαρακτηριστικά οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες έχουν επίσης δυσκολία με τις γνωστικές και μεταγνωστικές διαδικασίες. Παιδιά που στερούνται δεξιότητες, στρατηγικές, και γνώσεις που απαιτούνται για να εκτελέσουν έναν στόχο και που αποτυγχάνουν να χρησιμοποιήσουν τους αυτορρυθμιστικούς μηχανισμούς θα έχουν αναμφισβήτητα προβλήματα με τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, αυτοί οι μαθητές περιγράφονται ότι έχουν δυσκολία (α) στην αξιολόγηση των δυνατοτήτων τους να λύσουν προβλήματα, (β) στον προσδιορισμό και την επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών, (γ) στην οργάνωση των πληροφοριών, (δ) στον έλεγχο των διαδικασιών επίλυσης προβλήματος, (ε) στην αξιολόγηση της ακρίβειας της λύσης, και (ζ) στη γενίκευση των στρατηγικών σε αντίστοιχες καταστάσεις (Brownell, Mellard, & Deshler, 1993· Rivera, 1997).

Διάφοροι ερευνητές (Kulak, 1993· Montague & Applegate, 1993· Swanson, 2004) σημειώνουν ότι πολλοί μαθητές προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν τις γνωστικές στρατηγικές, αλλά οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν μπορεί να μην είναι ικανοποιητικές για την επίλυση του προβλήματος. Π.χ. τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν πολυάριθμες στρατηγικές με τα προβλήματα (π.χ. διαβάζοντας, ελέγχοντας ή στρατηγικές υπολογισμού), αλλά δεν φαίνεται να έχουν γνώση των στρατηγικών που συνδέονται με την αναπαράσταση των προβλημάτων (Montague & Applegate, 1993). Η αναπαράσταση του προβλήματος περιλαμβάνει τη μετατροπή των γλωσσικών και αριθμητικών πληροφοριών μέσω της παράφρασης, της απεικόνισης και της υπόθεσης σε μαθηματικές εξισώσεις και αλγορίθμους. Πολλοί μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες βρίσκουν αυτόν τον στόχο πολύ δύσκολο.

1.4.2.2. Κοινωνικά και συναισθηματικά χαρακτηριστικά

Η συναισθηματική κατάσταση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, επίσης αναγνωρίζεται ως σημαντική μεταβλητή για την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Για παράδειγμα θεωρείται ότι η επαναλαμβανόμενη ακαδημαϊκή αποτυχία οδηγεί συχνά σε χαμηλό αυτοσεβασμό και συναισθηματική παθητικότητα στη μαθηματική μάθηση (Bryant, Bryant & Hammill, 2000). Η συναισθηματική αντίδραση μερικών ατόμων στα μαθηματικά είναι τόσο αρνητική που αναπτύσσουν «μαθηματικό άγχος». Αυτός ο όρος θεωρείται ότι προέρχεται από το φόβο αποτυχίας και το χαμηλό αυτοσεβασμό και αναγκάζει τους μαθητές να γίνονται τόσο ανήσυχοι που η δυνατότητά τους να λύσουν, να μάθουν ή να εφαρμόσουν μαθηματικά είναι μειωμένη. Οι ταραγμένες σκέψεις, η αποδιοργάνωση, η αποφυγή συμπεριφοράς και η μαθηματική φοβία είναι κοινά αποτελέσματα (Silver, Pennett, Black, Fair, & Balise 1999).

1.4.3. Μικτές δυσκολίες στη Γλώσσα και στα Μαθηματικά - Συνοσηρότητα (comorbidity)

Αν και μερικοί μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες έχουν μια μαθησιακή δυσκολία μόνο στα μαθηματικά, άλλοι έχουν έναν συνδυασμό ακαδημαϊκών δυσκολιών (π.χ. δυσκολία στην ανάγνωση και στα μαθηματικά). Ο Chiappe (2005), σημείωσε ότι δυσκολίες σε διαφορετικούς τομείς συμβάλλουν στην αποτυχία στα μαθηματικά (π.χ. η ανάγνωση, η γλώσσα και οι δυσκολίες γραφής μπορούν να έχουν μια ισχυρή αρνητική επιρροή στη μαθηματική απόδοση).

Περίπου 80% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες εμφανίζουν προβλήματα ανάγνωσης (Light & DeFries 1995) και οι περισσότεροι από αυτούς τους μαθητές παρουσιάζουν στοιχεία συνύπαρξης ελλειμμάτων και στα μαθηματικά (McLeod & Armstrong, 1982). Η συνοσηρότητα αναφέρεται στη συνύπαρξη δύο τουλάχιστον διαφορετικών διαταραχών στο ίδιο άτομο. Όσον αφορά τις μαθησιακές δυσκολίες, η γνώση σχετικά με την αιτιολογία της συνοσηρότητας μπορεί να επηρεάσει τη στρατηγική αντιμετώπισης των δυσκολιών καθώς επίσης και την τελική έκβαση. Π.χ. εάν η δυσκολία ανάγνωσης προκαλεί τα ελλείμματα μαθηματικών, κατόπιν η αντιμετώπιση των δυσκολιών ανάγνωσης μπορεί επίσης να ανακουφίσει τις μαθηματικές δυσκολίες. Αφ' ετέρου, εάν οι δυσκολίες ανάγνωσης και μαθηματικών συνυπάρχουν αλλά χωρίς αιτιώδη σχέση, τότε και οι δύο διαταραχές είναι πιο εύκολα αντιμετωπίσιμες (Fletcher, 2005).

Η παρουσία μιας διαταραχής μπορεί να αυξήσει τον κίνδυνο εμφάνισης δεύτερης διαταραχής. Για παράδειγμα η παρουσία μιας δυσκολίας ανάγνωσης μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερο κίνδυνο για δυσκολίες στα μαθηματικά. Ορισμένες φορές τα άτομα που τοποθετούνται στα διάφορα προγράμματα εκπαιδευτικής αντιμετώπισης μπορεί να λάβουν μαθησιακή βοήθεια για την ικανότητα ανάγνωσης εις βάρος του χρόνου που αφιερώνεται στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (McLeod & Armstrong, 1982).

Αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών δείχνουν ότι η λεκτική ικανότητα διαδραματίζει έναν ισχυρό ρόλο στις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Δεδομένου ότι η ουσία των μαθηματικών είναι σύμβολα και γλώσσα, η λεκτική ικανότητα είναι αναπόσπαστο μέρος σε πολλές πτυχές των μαθηματικών συμπεριλαμβανομένων των εννοιών της ποσότητας και της ταξινόμησης. Ως εκ τούτου, ένα μεγάλο μέρος της θεμελίωσης της επιτυχίας στα μαθηματικά, περιλαμβάνει τις γλωσσικές έννοιες. Τα παιδιά που έχουν μόνο μαθηματικές δυσκολίες παρουσιάζουν ένα διαφορετικό προφίλ γνωστικών ελλειμμάτων από τα παιδιά με συνοσηρότητα (Geary, Hamson, & Hoard, 2000· Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001· Jordan & Hanich, 2000). Ειδικότερα, τα παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες έχουν ένα πλεονέκτημα σε σχέση με τα παιδιά με συνδυασμό δυσκολιών γλώσσας και μαθηματικών, όσον αφορά την επίτευξη μαθηματικών στόχων στους οποίους εμπλέκεται η γλώσσα, αλλά όχι στους στόχους που απαιτούν τη βασική αντίληψη της έννοιας του αριθμού. Επιπλέον, τα παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες έχουν καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά από τα παιδιά με συνύπαρξη δυσκολιών σε γλώσσα και μαθηματικά (Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002· Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003).

Η σύγχρονη έρευνα στις μαθησιακές δυσκολίες εστιάζει στη διάκριση μεταξύ δυσκολιών μόνο στα μαθηματικά και δυσκολιών σε μαθηματικά και γλώσσα μαζί (Fuchs & Fuchs, 2002· Geary, 1993). Συγκρίνοντας παιδιά 2^{ης} βαθμίδας με δυσκολίες στα μαθηματικά με και χωρίς δυσκολίες ανάγνωσης, οι Jordan και Hanich (2000) προσδιόρισαν περισσότερες διάχυτες δυσκολίες για την ομάδα συνοσηρότητας. Η ομάδα με δυσκολίες στα μαθηματικά μόνο, αντίθετα, σημείωσε χαμηλότερη επίδοση από την ομάδα με δυσκολίες ανάγνωσης, μόνο στα αριθμητικά προβλήματα (word problems). Οι Hanich et al (2001), επιβεβαίωσαν τα παραπάνω συμπεράσματα με ένα μεγαλύτερο δείγμα και πρόσθετες μετρήσεις. Σε κάθε ικανότητα, συμπεριλαμβάνοντας το βασικό υπολογισμό, την κατά προσέγγιση εκτίμηση, τα αριθμητικά προβλήματα, τη θεσιακή αξία και το γραπτό υπολογισμό, οι μαθητές και μαθήτριες με δυσκολίες και στη γλώσσα και στα μαθηματικά απέδωσαν χαμηλότερα από τους τυπικούς μαθητές, αλλά και από εκείνους με δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά ειδικά στο γραπτό υπολογισμό και τα αριθμητικά προβλήματα.

Αυτές οι μελέτες δείχνουν περισσότερα διάχυτα προβλήματα για τα παιδιά με συνδυασμένες δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση από ότι για εκείνους με δυσκολίες στα μαθηματικά μόνο. Οι Jordan και Hanich (2000) και οι έρευνες των Hanich et al (2001) επίσης έδειξαν ότι η απόδοση στα προβλήματα μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τα παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες μόνο έναντι άλλων πτυχών της απόδοσης στα μαθηματικά. Στην πραγματικότητα, οι Jordan και Hanich κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «παιδιά με δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά μπορεί να διατρέξουν ιδιαίτερο κίνδυνο για δυσκολίες στα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο δεδομένου ότι οι ανώτερες γνωστικά δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων λαμβάνουν περισσότερη έμφαση στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών».

Η έρευνα επίσης έχει δείξει ότι συγκεκριμένες λεκτικές ικανότητες και αδυναμία στην οπτικό-αντιληπτική οργάνωση, ενδέχεται να αποτελούν τη βάση των δυσκολιών σε μαθητές με δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά και σε μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση. Για παράδειγμα οι Siegel και Ryan (1989) έδειξαν ότι ενώ τα παιδιά με δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση έχουν προβλήματα εργαζόμενης μνήμης, τα παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες μόνο έχουν δυσκολίες στην οπτική μνήμη και την οπτικό-χωρική εργαζόμενη μνήμη (Fletcher, 1985· McLean & Hitch, 1999). Αυτό αντηχεί και στα συμπεράσματα των Rourke και Finlayson (1978) στα οποία οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες μόνο, είχαν χαμηλότερη επίδοση στην οπτικό-αντιληπτική και οπτικό-χωρική ικανότητα από εκείνους που είχαν δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση, ενώ εκείνοι με δυσκολίες στα μαθηματικά μόνο παρουσίασαν υψηλότερη επίδοση στις λεκτικές και ακουστικό-αντιληπτικές δοκιμασίες έναντι των μαθητών με συνύπαρξη μαθηματικών και αναγνωστικών δυσκολιών. Οι παραπάνω μελέτες δείχνουν περισσότερα κυρίαρχα προβλήματα για τα παιδιά με δυσκολίες στα μαθηματικά και τη γλώσσα απ' ότι για αυτά με δυσκολίες στα μαθηματικά μόνο.

Οι Jordan και Montani (1997) μελέτησαν το μαθηματικό υπολογισμό και την επίλυση προβλημάτων σε δύο υποομάδες παιδιών με αριθμητικές δυσκολίες μάθησης: μια ομάδα με συγκεκριμένες δυσκολίες στα μαθηματικά, και μια άλλη με ελλείμματα στην ανάγνωση καθώς επίσης και στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματά τους επιβεβαίωσαν ότι οι δυσκολίες των παιδιών με συγκεκριμένα ελλείμματα μαθηματικών σχετίζονται περισσότερο με την ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων από τη μνήμη, ενώ η ομάδα με τις γενικότερες δυσκολίες είχε ελλείμματα που περισσότερο συνδέθηκαν με τη σύλληψη και την επίλυση των προβλημάτων. Οι Fuchs και Fuchs (2002) περιέγραψαν το προφίλ επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων των μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες με και χωρίς δυσκολίες ανάγνωσης και τις διαφορές μεταξύ των μαθητών με δυσκολίες μόνο στα μαθηματικά και εκείνων με δυσκολίες και στη γλώσσα και στα μαθηματικά, σχετικά με το βαθμό δυσκολίας επίλυσης του προβλήματος (αριθμητικά λεκτικά προβλήματα vs σύνθετα λεκτικά προβλήματα) Στα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα, οι διαφορές μεταξύ των ομάδων ήταν παρόμοιες τόσο για τις αριθμητικές διαδικασίες όσο και για την επίλυση προβλήματος.

Αντίθετα, στα σύνθετα προβλήματα, οι διαφορές μεταξύ των ομάδων ήταν μεγαλύτερες για την επίλυση προβλήματος απ' ότι για τις αριθμητικές διαδικασίες.

1.4.4. Η Γλώσσα των Μαθηματικών

Οι περιοχές του εγκεφάλου που χρησιμοποιούνται για την ανάγνωση και την ορθογραφία, χρησιμοποιούνται επίσης και για τη μάθηση άλλου υλικού, όπως αριθμοί, αριθμητικές πράξεις, μαθηματικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, σχήματα κ.ά. Πιο συγκεκριμένα, δυσκολίες στη γραπτή γλώσσα και στη γλώσσα των μαθηματικών μπορεί να σχετίζονται με τις ομοιότητες που υπάρχουν και στις δύο περιοχές γνώσης:

- Είναι και οι δύο μορφές επικοινωνίας που αναπαριστώνται με σύμβολα, συμβατικά αποδεκτά και πολιτισμικά καθορισμένα,
- και οι δύο γλώσσες έχουν δομή και απαιτούν ικανότητες σειροθέτησης και ακολουθίας για την αποτελεσματική χρήση τους.
- και οι δύο γλώσσες απαιτούν ικανοποιητική προφορική ικανότητα ώστε να συντελεσθεί η μάθηση και η απομνημόνευση
- και για τις δύο διαδικασίες η άμεση μνήμη είναι σημαντική

Η φράση, «έχει δυσκολία με τη μαθηματική γλώσσα» μπορεί να ερμηνευθεί λαμβάνοντας υπόψη την εργασία των Bryant, Bryant & Hammill, (2000). Τα μαθηματικά είναι εννοιολογικά πυκνά δηλαδή οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν την έννοια μαθηματικών συμβόλων και λέξεων επειδή, αντίθετα από την ανάγνωση, οι συναφείς ενδείξεις είναι περιορισμένες ή ανύπαρκτες. Στο πλαίσιο των αποτελεσματικών εκπαιδευτικών παρεμβάσεων προτείνεται το λεξιλόγιο (π.χ. αριθμητής, διαφορά, ποσό, μειωτέος) και τα αφηρημένα σύμβολα (π.χ.$<$, $>$, $+$) να προσδιορίζονται και να διδάσκονται συγκεκριμένα για κάθε μάθημα σύμφωνα με τις βασικές διδακτικές αρχές (π.χ. σαφής διδασκαλία, παραδείγματα και καθοδηγημένη πρακτική) (Rivera, 1997).

Επειδή τα μαθηματικά σύμβολα εκφράζουν αριθμητικές γλωσσικές έννοιες, οι γλωσσικές δεξιότητες είναι πολύ σημαντικές στη μαθηματική επίδοση. Η χρήση της γλώσσας είναι απαραίτητη για τους υπολογισμούς και τα λεκτικά προβλήματα. Στον υπολογισμό, οι γλωσσικές δεξιότητες απαιτούνται για να συστηματοποιήσουν την ανάκληση και τη χρήση πολλών βημάτων, κανόνων και αριθμητικών δεδομένων. Για παράδειγμα, στην πράξη 73 x 96, υπάρχουν περίπου 33 σχετικά βήματα (Strang & Rourke, 1985). Οι αναγνωστικές απαιτήσεις των λεκτικών προβλημάτων αυξάνονται σε κάθε επίπεδο βαθμίδας. Οι άσχετες αριθμητικές και γλωσσικές πληροφορίες στα προβλήματα προκαλούν σύγχυση σε πολλούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004). Επιπλέον, πολλοί μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες έχουν δυσκολίες ανάγνωσης που παρεμποδίζουν τη δυνατότητά τους να κατανοήσουν και να λύσουν τα λεκτικά προβλήματα (Smith, 1994).

Η επίλυση προβλήματος παρουσιάζει επίμονες δυσκολίες για εκείνα τα παιδιά που έχουν συνυπάρχοντα ελλείμματα στην ανάγνωση, τον υπολογισμό, ή και στα δύο (Hanich, Jordan, 1997). Όπως καταδεικνύεται στις προηγούμενες μελέτες (Geary & Hoard, 2001· Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004), κάθε ένα από τα ποσοτικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του κειμένου (δηλ., μήκος λέξης, αριθμός προτάσεων, λέξεις ανά πρόταση, και αριθμός ρημάτων) αυξάνει τη δυσκολία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Τα μαθηματικά κείμενα παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές από τα συνηθισμένα κείμενα. Η πιο σημαντική διαφορά αφορά τη χρησιμοποίηση στα μαθηματικά κείμενα, παράλληλα με τη φυσική γλώσσα, της μαθηματικο-συμβολικής γλώσσας. Οι διαφορές αυτές δίνουν έναν ιδιαίτερο χαρακτήρα στην ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων.

Η προηγούμενη έρευνα έχει καταδείξει τα αρνητικά αποτελέσματα που έχουν στην επίδοση στο μάθημα το εκτενές κείμενο (μεγάλος αριθμός λέξεων στην εκφώνηση προβλημάτων), το περιεχόμενο της ιστορίας που περιγράφεται (οικεία ή μη), η μορφή διατύπωσης της εκφώνησης, οι σύνθετες προτάσεις καθώς και τα σύνθετα προβλήματα και η ύπαρξη περιττών πληροφοριών (McLeod & Crump, 1978· Geary & Hoard, 2001· Κολέζα, 2000).

1.4.5. Δομικά στοιχεία και απαιτήσεις στη μάθηση των Μαθηματικών

Η προσπάθεια συστηματικής μελέτης των επιμέρους γνώσεων και δεξιοτήτων που πρέπει να κατακτήσουν οι μαθητές προκειμένου να θεωρηθούν πετυχημένοι στη γνωστική περιοχή των μαθηματικών έχει οδηγήσει σε διάφορες κατηγοριοποιήσεις της μαθηματικής γνώσης (Goldman, Hasselbring, & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1998). Όλες αυτές οι κατηγοριοποιήσεις αναγνωρίζουν σταθερά τη σημασία και το ρόλο κάποιων βασικών δομικών στοιχείων, τα οποία κατά τον A. Orton (1992) είναι: (1) η διατήρηση και ανάκληση των δεδομένων, (2) η χρήση αλγορίθμων, (3) η μάθηση εννοιών, και (4) η επίλυση προβλημάτων.

Καθεμιά από αυτές τις κατηγορίες, για να κατακτηθεί, θέτει ορισμένες γνωστικές απαιτήσεις:

(1) *Η διατήρηση στη μνήμη και ανάκληση από αυτή διάφορων δεδομένων.* Δεδομένα είναι: (α) αριθμητικά δεδομένα (π.χ. 6+2=8), (β) όροι (π.χ. άθροισμα, συν), (γ) σύμβολα (π.χ.

+, x, :) και (δ) τύποι (π.χ εμβαδών), τα οποία εμπλέκουν όλα τα είδη της μνήμης (εργαζόμενη-βραχυπρόθεσμη, μακροπρόθεσμη, μνήμη ακολουθιών κ.λπ.) σ' αυτή τη διαδικασία με στόχο την αυτοματοποιημένη χρήση των παραπάνω στοιχείων (Orton, 1992). Ιδιαίτερα η αυτοματοποίηση στην ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων έχει κεντρική σημασία στα πλαίσια εκτέλεσης σύνθετων έργων (πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς, επίλυση προβλημάτων). Στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών δεδομένων, θα πρέπει να είναι να γίνει το άτομο ικανό να χρησιμοποιεί αποτελεσματικά τις σχετικές γνώσεις, τόσο στο πλαίσιο των σχολικών μαθημάτων όσο και στο πλαίσιο των πρακτικών αναγκών της καθημερινής ζωής.

(2) *Η χρήση των αλγορίθμων.* Οι αλγόριθμοι αποτελούν ένα βασικό τμήμα της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τον Τρούλη (1992), «αλγόριθμος είναι μια σειρά κανόνων, ορισμένη με ακρίβεια, που δείχνει πώς θα επιτύχουμε καθορισμένες πληροφορίες εξόδου, με βάση δοσμένες πληροφορίες εισόδου ύστερα από ένα καταληκτικό αριθμό πράξεων». Παραδείγματα αλγορίθμων είναι τα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούνται κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων. Η μνήμη παίζει καίριο ρόλο στην ικανότητα χρήσης αλγορίθμων σε πιο σύνθετο επίπεδο μιας και αποτελούνται από πολλά βήματα με αυστηρή ακολουθία (García, Jiménez & Hess, 2006)

Αν και ως προς τη φύση τους συνιστούν συγκεκριμένη ακολουθία ενεργειών, κατά την εφαρμογή τους στο πλαίσιο εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, οι αλγόριθμοι εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό και από τις οπτικο-χωρικές ικανότητες του παιδιού. Η σωστή αντίληψη της σειράς των ψηφίων, της θεσιακής αξίας, η έναρξη της εκτέλεσης της πράξης από το σωστό σημείο στο χώρο, η τοποθέτηση των ψηφίων στις σωστές στήλες, και η μεταφορά των ψηφίων ανώτερης τάξης (κρατούμενα), προϋποθέτουν την απρόσκοπτη λειτουργία της χωρικής αντίληψης (Geary, 1994).

(3) *Η μάθηση εννοιών.* Παραδείγματα μαθηματικών εννοιών είναι το σύνολο, ο αριθμός, η πρόσθεση κ.λπ. Λόγω της δυνατότητας που προσφέρουν στο παιδί να προσαρμόζει σε νέες καταστάσεις όσα έχει ήδη μάθει, οι έννοιες συνιστούν το κύριο στοιχείο της συμβολικής δύναμης των μαθηματικών (Miller & Mercer, 1997). Από διάφορες έρευνες προκύπτει το συμπέρασμα ότι μια έννοια δεν μπορεί να μεταβιβαστεί ως έτοιμη γνώση (π.χ. με έναν ορισμό) από κάποιον που την κατέχει σε κάποιον που την αγνοεί (Orton, 1992). Η εννοιολογική ανάπτυξη προϋποθέτει την κατασκευή από τον ίδιο το μαθητή, σχέσεων ανάμεσα σε διάφορες (παλιές ή νέες) πληροφορίες. Η κατασκευή αυτή έχει προσωπικό χαρακτήρα και εξαρτάται από την προηγούμενη γνώση, την εμπειρία και τη στάση του παιδιού προς το αντικείμενο. Επομένως το παιδί πρέπει να έχει όσο το δυνατόν πιο

ενεργητικό ρόλο σε κατάλληλες μαθησιακές συνθήκες προκειμένου το ίδιο να επισημάνει και να συνθέσει τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των εννοιών. Επίσης ένα άλλο στοιχείο των εννοιών σχετίζεται με την αλυσιδωτή τους σύνδεση και την ανάγκη να ελέγχεται ο βαθμός στον οποίο ο μαθητής έχει κατακτήσει τις «προϋποτιθέμενες» ή χαμηλότερης τάξης έννοιες, πριν διδαχθεί μια καινούρια, υψηλότερης τάξης έννοια (Ostad, 1998).

(4) *Επίλυση προβλημάτων*. Σύμφωνα με τον Εξαρχάκο, (1993) επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά είναι η διαδικασία εύρεσης των ζητούμενων μιας δήλωσης ή πρότασης η οποία περιγράφει ποσοτικές σχέσεις μεταξύ διαφόρων στοιχείων, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που υπάρχουν στην πρόταση (πρόβλημα), αλλά και άλλα στοιχεία και προτάσεις των οποίων την αλήθεια και ισχύ ήδη γνωρίζουμε (Εξαρχάκος, 1993). Τα στάδια από τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος είναι: (1) *η μετάφραση*, δηλαδή η μετατροπή των στοιχείων του προβλήματος, με τη σειρά που εμφανίζονται σε αυτό, σε νοητική αναπαράσταση, (2) *η ολοκλήρωση*, δηλαδή ο συνδυασμός όλων των επιμέρους αναπαραστάσεων σε μια περιεκτική, συνολική νοητική εικόνα του προβλήματος, (3) *ο σχεδιασμός*, δηλαδή η επινόηση και ο έλεγχος ενός σχεδίου επίλυσης, μιας στρατηγικής προσέγγισης των ζητούμενων, και (4) *η εκτέλεση*, δηλαδή η μετατροπή του σχεδίου σε συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις και η εύρεση του αποτελέσματος. Τα τρία πρώτα από τα παραπάνω στάδια έχουν έναν ποιοτικό χαρακτήρα και στοχεύουν στη δημιουργία μιας μαθηματικής αναπαράστασης των ενεργειών και των σχέσεων που περιγράφονται στο πρόβλημα. Το τέταρτο στάδιο είναι ποσοτικό και αποσκοπεί στην παρουσίαση της λύσης σε αριθμητική μορφή (Αγαλιώτης, 2004).

Απαιτούνται διάφορα είδη γνώσης για την αναπαράσταση και την επίλυση των προβλημάτων: (1) *Γλωσσική γνώση*, δηλαδή γνώση της δομής της ελληνικής γλώσσας και της σημασίας των λέξεων (2) *Πραγματολογική γνώση*, δηλαδή γνώση πληροφοριών από τον περιβάλλοντα κόσμο, (3) *Γνώση υποδειγμάτων προβλημάτων*, δηλαδή γνώση διαφόρων κατηγοριών προβλημάτων, (4) *Στρατηγική γνώση*, δηλαδή γνώση του τρόπου ανάπτυξης ενός σχεδίου επίλυσης και παρουσίασης μιας κατάλληλης απάντησης, και (5) *Αλγοριθμική γνώση*, δηλαδή γνώση του τρόπου εκτέλεσης των πράξεων. Τυχόν ελλείψεις στα παραπάνω είδη γνώσεων είναι δυνατόν να προκαλέσουν διάφορα λάθη, όπως για παράδειγμα: (1) ασυμφωνία ανάμεσα στο νοητικό μοντέλο του προβλήματος που κατασκευάζει ο μαθητής και στην κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα ή (2) αναντιστοιχία ανάμεσα στο νοητικό μοντέλο και στην ποσοτική του έκφραση (στους αριθμούς που χρησιμοποιούνται για τη λύση) (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004).

Σύμφωνα με τον Geary (1994), για τα παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σημαντικές παράμετροι της επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων είναι: (1) η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων, (2) το επίπεδο κατάκτησης του μαθηματικού λεξιλογίου και (3) ο βαθμός επιβάρυνσης της βραχυπρόθεσμης μνήμης από τους όρους και την έκταση του προβλήματος. Με την προϋπόθεση ότι οι υπολογιστικές δεξιότητες και το λεξιλόγιο των παιδιών βελτιώνονται με την πάροδο του χρόνου και τη σχετική εκπαίδευση, οι μνημονικές απαιτήσεις του προβλήματος αποκτούν προοδευτικά μεγαλύτερη σημασία. Ένας τρόπος μείωσης της επιβάρυνσης της βραχυπρόθεσμης μνήμης είναι η βελτίωση της αναγνωστικής ταχύτητας, καθώς, σύμφωνα με σχετικές έρευνες, η ταχύτητα ανάγνωσης αυξάνει τον αριθμό των συγκρατούμενων λέξεων (Geary, 1994).

Μια άλλη παράμετρος, που φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και που συγκεντρώνει τα τελευταία χρόνια το έντονο ενδιαφέρον των ερευνητών, είναι η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί κατάλληλες στρατηγικές και διαδικασίες για να οδηγηθεί με ταχύτητα και ασφάλεια στην οργάνωση και εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης. Τέτοιες στρατηγικές είναι, για παράδειγμα, η αντικατάσταση των αριθμών του προβλήματος με μικρότερους, η δραματοποίηση του προβλήματος κ.λπ. (Αγαλιώτης, 2004).

1.5. Αξιολόγηση Δυσκολιών Μάθησης

Ο όρος «αξιολόγηση» στο χώρο της εκπαίδευσης αναφέρεται σε μια οργανωμένη και σκόπιμη διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί μετρήσεις και δεδομένα με τρόπο που ορίζει κάποια συγκεκριμένη θεωρία προκειμένου να απαντήσει σε ουσιώδη παιδαγωγικά ερωτήματα (Αγαλιώτης, 2004). Ειδικότερα στα πλαίσια της εκπαίδευσης των παιδιών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες η αξιολόγηση έχει οριστεί ως «η συστηματική διαδικασία συλλογής κατάλληλων εκπαιδευτικών πληροφοριών ώστε να ληφθούν νομικές και εκπαιδευτικές αποφάσεις για την παροχή υπηρεσιών ειδικής εκπαίδευσης» (Garcia, Jimenez & Hess, 2006).

Η αξιολόγηση δεν θα πρέπει να συγχέεται με τη «διάγνωση», η οποία είναι διαδικασία αναζήτησης των ενδογενών αιτιολογικών παραγόντων και του είδους των ειδικών αναγκών του παιδιού και η οποία έχει ως στόχο την κατάταξή του σε μία από τις κατηγορίες ειδικών αναγκών. Η αξιολόγηση είναι μια ευρύτερη διαδικασία που λαμβάνει μεν υπόψη της τη διάγνωση, αλλά ενδιαφέρεται πολύ περισσότερο για τη διαπίστωση μαθησιακών δυνατοτήτων και αδυναμιών, για την οργάνωση και παρακολούθηση εξατομικευμένων διδακτικών προγραμμάτων, για την ποιοτική εξέταση της διδασκαλίας και για την αποτίμηση όλων των υπηρεσιών ειδικής αγωγής που παρέχονται στο παιδί (Αγαλιώτης, 2004). Ο σκοπός της αξιολόγησης είναι να επιδιωχθούν οι απαντήσεις στις συγκεκριμένες ερωτήσεις (π.χ., υπάρχει πρόβλημα σχολικής απόδοσης; Ποιες είναι οι ακαδημαϊκές δυνατότητες και οι αδυναμίες του παιδιού; Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιεί για να λύσει τα προβλήματα; Ο μαθητής έχει μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά;) για να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς και τους γονείς στη λήψη κατάλληλων εκπαιδευτικών αποφάσεων για τις ιδιαίτερες ανάγκες των μαθητών.

Επίσης η αξιολόγηση δεν θα πρέπει να συνδέεται αποκλειστικά με τη χρήση διάφορων τυποποιημένων δοκιμασιών (tests). Αυτές οι δοκιμασίες, προσφέρουν αξιόλογες, αλλά σε καμιά περίπτωση επαρκείς πληροφορίες για τη λήψη αποφάσεων σχετικών με τη διδακτική υποστήριξη των παιδιών με ειδικές ανάγκες γενικά και των παιδιών με Μαθησιακές Δυσκολίες ειδικότερα. Για το λόγο αυτόν, κατά την αξιολόγηση χρησιμοποιείται ποικιλία διαδικασιών και μέσων, ανάλογα με τον επιδιωκόμενο στόχο.

Οι προσπάθειες να μεταρρυθμιστούν τα προγράμματα σπουδών και η αξιολόγηση των μαθηματικών (π.χ. NCTM, 1989) έχουν εστιάσει στον επαναπροσδιορισμό των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών και των διαδικασιών αξιολόγησης, τα οποία εξετάζουν την απόδοση μαθητών και μαθητριών σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς στόχους και τις τεχνικές. Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών ενθαρρύνονται για να επιλέξουν τις διαδικασίες αξιολόγησης όπως (α) δοκιμασίες βασισμένες στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) (β) αξιολόγηση με τη χρήση εκπαιδευτικών υλικών (π.χ., χειραπτικό υλικό, υπολογιστές) (γ) δοκιμασίες διαφορετικών ειδών απάντησης (π.χ. γραπτά, προφορικά) και (δ) σύγκριση της δυνατότητας των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες με αυτήν της μέσης επίδοσης των συνομηλίκων τους.

1.5.1. Επίσημες-Τυποποιημένες δοκιμασίες αξιολόγησης

Η διαδικασία της αξιολόγησης, ανάλογα με τους γενικούς στόχους που θέτει, χρησιμοποιεί κατάλληλα εργαλεία και μεθόδους. Αν η αξιολόγηση έχει σκοπό να διατυπώσει άποψη για το αν ο μαθητής είναι σε θέση να παρακολουθήσει το Πρόγραμμα Σπουδών της τάξης του ή πρέπει να καταταχθεί σε μια κατηγορία ειδικών αναγκών, τότε η συγκέντρωση των πληροφοριών γίνεται συνήθως μέσω επίσημων ή τυποποιημένων δοκιμασιών. Οι δοκιμασίες αυτές χρησιμοποιούν ως μέτρο σύγκρισης την επίδοση ενός υποθετικού, στατιστικά δημιουργημένου, «μέσου» μαθητή (νόρμα) σε ένα συγκεκριμένο σύνολο έργων και ερωτήσεων, για να κατατάξουν τον κάθε μαθητή που εξετάζεται στα ίδια έργα και ερωτήσεις σε μια κλίμακα ικανοτήτων (συγκριτική κατάταξη). Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων που συνιστά σημαντική επιτυχία, ανησυχητική αποτυχία ή μέσου όρου επίδοση είναι προαποφασισμένος και με βάση αυτό το αποτέλεσμα γίνονται γενικές εκτιμήσεις σχετικά με τις δυνατότητες και τις αδυναμίες του μαθητή (Αγαλιώτης, 2004). Οι τυποποιημένες δοκιμασίες μπορεί να φανούν χρήσιμες στον εκπαιδευτικό που καλείται να διδάξει ένα παιδί με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, αφού το να γνωρίζει ότι το παιδί ανήκει σε συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών αναγκών (ως αποτέλεσμα των τυποποιημένων διαδικασιών και εργαλείων) σε συνδυασμό με καλή γνώση των γενικών γνωστικών και άλλων χαρακτηριστικών της κατηγορίας, μπορεί να βοηθήσει στην επιλογή κάποιων βασικών και κατευθυντήριων γραμμών αντιμετώπισης.

Από τις σταθμισμένες δοκιμασίες δεν είναι δυνατόν να προκύψουν όλες οι πληροφορίες για: την εξασφάλιση ενός κατάλληλου Αναλυτικού Προγράμματος, την επιλογή κατάλληλων διδακτικών μεθόδων, τη συνεχή εκτίμηση της επίδοσης του μαθητή, την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας των διδακτικών παρεμβάσεων. Οι δοκιμασίες αυτές, λόγω της φύσης τους, είναι δυνατόν να χορηγηθούν μια ή δυο φορές το χρόνο και επομένως δεν είναι σίγουρο ότι ανιχνεύουν την τυπική συμπεριφορά του παιδιού και λειτουργώντας συνήθως με βάση ένα δίπολο («σωστό-λάθος» ή «επιτυχία-αποτυχία»), προσπαθούν να προσδιορίσουν αυτό που έχει ήδη κατακτήσει ο μαθητής, χωρίς να ενδιαφέρονται για τις διαδικασίες που οδηγούν στις συγκεκριμένες απαντήσεις. Η λήψη τεκμηριωμένων διδακτικών αποφάσεων δεν είναι δυνατή αν δεν διερευνηθεί ακριβώς το γιατί το παιδί σκέπτεται με το συγκεκριμένο αναποτελεσματικό τρόπο στα σχολικά έργα και απαιτήσεις (Kavale & Forness, 2000).

Οι Baroody και Ginsburg (1991) υποστηρίζουν ότι για να είναι αποτελεσματική η αξιολόγηση των Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά πρέπει να πληρεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Να ελέγχει τόσο την επίσημη όσο και την ανεπίσημη μαθηματική γνώση του παιδιού
- Να προσφέρει μια ακριβή περιγραφή των δυνατοτήτων και αδυναμιών του παιδιού ως προς τη μαθηματική γνώση
- Να ελέγχει ειδικά την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα με την οποία το παιδί χρησιμοποιεί τις μαθηματικές δεξιότητες
- Να επικεντρώνεται στον έλεγχο της κατοχής εννοιών και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων

- Να προσδιορίζει τις στρατηγικές και τις διαδικασίες που χρησιμοποιεί ο μαθητής ή η μαθήτρια για την αντιμετώπιση των απαιτήσεων του μαθήματος
- Να περιλαμβάνει μια ανάλυση των λαθών που εμφανίζονται στην εργασία του παιδιού
- Να εξετάζει την ικανότητα του μαθητή να επωφελείται από τη διδασκαλία, καθώς και την ετοιμότητά του για την κατάκτηση νέων γνώσεων
- Να ελέγχει τις μεταγνωστικές δυνατότητες και αδυναμίες του παιδιού
- Να παίρνει υπόψη της τους συναισθηματικούς παράγοντες και τις πεποιθήσεις του παιδιού
- Να εξετάζει τη φύση της διδασκαλίας που δέχεται ο μαθητής (Baroody & Ginsburg, 1991 αναφέρεται στον Αγαλιώτη, 2004, σελ. 149).

Οι παραπάνω αξιολογικοί στόχοι, δεν μπορούν να καλυφθούν από μια αξιολόγηση των Μαθησιακών Δυσκολιών που στοχεύει στην κατηγοριοποίηση του παιδιού. Απαιτούνται τεχνικές αξιολόγησης που θα ανιχνεύουν τον πραγματικό πυρήνα της σκέψης του παιδιού, τόσο από άποψη περιεχομένου όσο και από άποψη διαδικασιών, για να διαμορφωθεί μια σταθερή βάση καταρτισμού υποστηρικτικών προγραμμάτων (Montague, 1996).

1.5.2. Άτυπες δοκιμασίες αξιολόγησης

Για τη συγκέντρωση συγκεκριμένων στοιχείων αναφορικά με όλες τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν προηγουμένως, απαιτείται ευελιξία στις διαδικασίες και προσαρμοστικότητα στα εργαλεία αξιολόγησης. Κάτι τέτοιο μπορεί να εξασφαλιστεί με τη χρήση της ανεπίσημης ή μη τυποποιημένης αξιολόγησης. Η ανεπίσημη ή μη τυποποιημένη αξιολόγηση έχει τις ιδεολογικές της ρίζες στην αντίληψη η οποία δέχεται το επίπεδο των αναγκών που βιώνει ένα παιδί ως αποτέλεσμα της σύνθετης αλληλεπίδρασης μεταξύ: (α) των δυνατοτήτων και αδυναμιών του παιδιού, (β) του ποσού και του είδους της βοήθειας που έχει στη διάθεσή του και (γ) της καταλληλότητας της εκπαίδευσης που του παρέχεται (Mazzocco, 2005). Αυτή η θεώρηση των εκπαιδευτικών αναγκών οδηγεί στην υιοθέτηση μιας αξιολόγησης που: (1) έχει δυναμικό και συνεχή χαρακτήρα, (2) στοχεύει κυρίως στον προγραμματισμό της διδασκαλίας και (3) προβλέπει έναν κεντρικό ρόλο για τον εκπαιδευτικό. Η πρακτική εφαρμογή αυτού του τύπου αξιολόγησης, ειδικά στο χώρο των Μαθησιακών Δυσκολιών στα μαθηματικά είναι απαραίτητη, γιατί όπως χαρακτηριστικά σημειώνουν διάφοροι ερευνητές (Baroody, & Ginsburg, 1991), είναι αναγκαίο να προχωρήσει κανείς πέρα από τον έλεγχο των εξωτερικών συμπεριφορών των μαθητών και τη συνήθη διάκρισή τους σε σωστές και λανθασμένες και να διερευνήσει το «πώς» και το «γιατί» ένα παιδί έφθασε σε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Οι διαδικασίες που συνήθως χρησιμοποιούνται για τη συγκέντρωση των πληροφοριών στα πλαίσια της ανεπίσημης ή μη τυποποιημένης αξιολόγησης των μαθηματικών ικανοτήτων είναι: οι δοκιμασίες αναφοράς σε κριτήριο απόδοσης, η αξιολόγηση διαμέσου του Αναλυτικού Προγράμματος και η ποιοτική ή γνωστική ανάλυση των λαθών των μαθητών/ριών (Bryant, B. & Rivera, D., 1998).

1.5.2.1. Δοκιμασίες αναφοράς σε κριτήριο απόδοσης

Πρόκειται για μια ιδιαίτερα χρήσιμη διαδικασία στη φάση του καθορισμού της κατεύθυνσης της διδασκαλίας, όπου γίνεται μια γενική επισκόπηση των γνώσεων, με στόχο να ελεγχθεί δειγματοληπτικά η επίδοση του παιδιού στα επιμέρους κεφάλαια των μαθηματικών τα οποία έχει διδαχθεί. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να επισημανθούν έννοιες και δεξιότητες που δεν έχουν κατακτηθεί από το παιδί και να σχεδιαστεί μια ανάλογη διδασκαλία. Θα πρέπει όμως να επισημανθεί ότι, όπως και οι τυποποιημένες ή επίσημες αξιολογήσεις, είναι προσανατολισμένες στο τελικό προϊόν της μάθησης και δεν παρέχουν πληροφορίες σχετικά με την εξελικτική πορεία του μαθητή ή της μαθήτριας, ούτε επιτρέπουν να γίνει συσχέτιση ανάμεσα στο επίπεδο επίδοσης και στις διδακτικές μεθόδους (Αγαλιώτης, 2004).

1.5.2.2. Δοκιμασίες βάσει του Αναλυτικού Προγράμματος

Ως θεωρητικό υπόβαθρο χρησιμοποιεί την άποψη ότι, ανεξάρτητα από τις ιδιαιτερότητες κάθε παιδιού, η συνηθέστερη αιτία των μαθησιακών προβλημάτων είναι η έλλειψη αντιστοιχίας ανάμεσα στον όγκο των πληροφοριών, στην ταχύτητα επεξεργασίας των θεμάτων και στο επίπεδο δυσκολίας του συνηθισμένου Αναλυτικού Προγράμματος, από τη μια μεριά, και στις δεξιότητες και τις γνώσεις που διαθέτουν ορισμένα παιδιά κατά την είσοδό τους στο Πρόγραμμα από την άλλη (Taylor, 1997). Οι επιπτώσεις αυτής της έλλειψης αντιστοιχίας είναι δυνατόν να αρθούν, αν επισημανθούν οι ικανότητες που διαθέτει το παιδί σε σχέση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, κατά τη φάση της εισαγωγής του σε αυτό (αν δηλαδή καθοριστεί τι γνωρίζει και τι είναι σε θέση να κάνει το παιδί σε σχέση με αυτά που πρέπει να μάθει) και στη συνέχεια γίνουν οι αναγκαίες τροποποιήσεις από άποψη περιεχομένου, ρυθμού, μεθόδων και υλικών. Από τη στιγμή που οι ειδικές ανάγκες αντιμετωπίζονται ως επακόλουθα μιας αναποτελεσματικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο παιδί και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, είναι απόλυτα λογικό να υποστηρίζεται ότι πρέπει και να αξιολογούνται με βάση το ίδιο το Πρόγραμμα (Mazzocco, 2005).

Σύμφωνα με τον R. Taylor (1997), η αξιολόγηση διαμέσου του Αναλυτικού Προγράμματος έχει πέντε στάδια:

1. Καθορισμός του ετήσιου (μακροπρόθεσμου ή γενικού) στόχου: ο στόχος επιλέγεται: α) με βάση τα όσα έχει διδαχθεί και αναμένεται να γνωρίζει ο μαθητής και η μαθήτρια και β) με βάση τα όσα πιστεύουμε ότι πρέπει να κατέχει στο τέλος του προγράμματος.
2. Ανάλυση του ετήσιου στόχου σε διδακτικούς στόχους: ο γενικός στόχος μπορεί και πρέπει να αναλυθεί στις επιμέρους ή προϋποτιθέμενες γνώσεις και δεξιότητες από τις οποίες συντίθεται. Είναι μέχρις ενός σημείου δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι τίτλοι των κεφαλαίων του επίσημου Προγράμματος Σπουδών της κάθε τάξης ως διδακτικοί ή γενικοί στόχοι.
3. Καθορισμός δοκιμασιών για τον έλεγχο κατοχής των διδακτικών στόχων: επιλέγονται τρεις ή τέσσερις ασκήσεις ή αντιπροσωπευτικές δοκιμασίες για κάθε στόχο και δίνονται στο μαθητή ή τη μαθήτρια προς επίλυση
4. Καθορισμός των κριτηρίων κατοχής των στόχων: ποσοστό επιτυχίας ή ακρίβειας, ή ρυθμός παρουσίασης σωστών συμπεριφορών σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα
5. Χορήγηση και ερμηνεία του αξιολογικού οργάνου.

1.5.2.3. Ποιοτική ανάλυση λαθών

Ένα γεγονός που κάνει ιδιαίτερα απαιτητική την ακριβή αξιολόγηση των μαθησιακών αναγκών των παιδιών με δυσκολίες μάθησης στην αριθμητική, είναι το ότι *οι μαθηματικές συμπεριφορές είναι δυνατόν να έχουν επιφανειακές ομοιότητες, που κρύβουν μεγάλες διαφορές επιπέδου κατανόησης και γνωστικού υπόβαθρου* (Pellegrino & Goldman, 1987)

Στην περίπτωση λαθών που κάνουν τα παιδιά στον αλγόριθμο μιας πράξης ή στον υπολογισμό, η απλή εξάσκηση στην εκτέλεση παρόμοιων πράξεων ή η επανάληψη της εξήγησης του νοήματος της πράξης δεν βοηθούν. Για να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά τα λάθη αυτά, είναι ανάγκη να επισημανθούν οι συγκεκριμένοι τρόποι που τα παράγουν. Αυτή η προσέγγιση μελέτης του λάθους, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη συγκέντρωση πληροφοριών που αναφέρονται στον τρόπο υλοποίησης της διδασκαλίας, αφού ως στόχο έχει τη διαλεύκανση των διαδικασιών που οδήγησαν στη δημιουργία του λάθους, λέγεται *ποιοτική ή γνωστική ανάλυση* (Rourke, 1993).

Κύριος σκοπός της όλης προσπάθειας κατά την ποιοτική ανάλυση των λαθών είναι να βρεθούν οι έννοιες ή οι δεξιότητες που αποτελούν, από δομική και χρονική άποψη, την άμεση αιτία της λανθασμένης ενέργειας του μαθητή. Πιο συγκεκριμένα αυτό που επιδιώκεται είναι: (1) η κατανόηση της επίδοσης του παιδιού όσον αφορά το τι γνωρίζει, τι κάνει και γιατί το κάνει, (2) η πρόβλεψη του τι θα κάνει στο επόμενο βήμα, και (3) η επιλογή κατάλληλων στρατηγικών παρέμβασης (Pellegrino & Goldman, 1987).

Προκειμένου όμως να είναι αποτελεσματική η ποιοτική ανάλυση, πρέπει να καλυφθούν κάποιες απαιτήσεις. Τα συμπεράσματα για τη σκέψη του παιδιού που στηρίζονται αποκλειστικά στην ανάλυση των γραπτών απαντήσεών του είναι μόλις κάτι περισσότερο από απλή εικασία από τη μεριά του ερευνητή. Οι γραπτές απαντήσεις δίνουν ενδείξεις σχετικά με την αιτία του λάθους. Δεδομένης όμως της ποικιλίας των αιτιών που ενδέχεται να προκαλέσουν ένα και το αυτό λάθος και προκειμένου να αναγνωριστούν σταθερά πρότυπα λαθών, με οποιοδήποτε βαθμό βεβαιότητας, πρέπει να γίνουν συνεντεύξεις με το παιδί. Μόνο αν το ίδιο το παιδί εκθέσει τον τρόπο σκέψης και ενεργείας του, μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ουσία της δυσκολίας του. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο M. Sharma (1985), δεν είναι δυνατόν να διαπιστώσει κανείς γιατί ο μαθητής σκέφτηκε μ' έναν συγκεκριμένο τρόπο αν δεν ρωτήσει τον ίδιο. Προκειμένου λοιπόν να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε με ποιο τρόπο σκέφτεται ο μαθητής, του δίνουμε ασκήσεις και προβλήματα σχετικά με το θέμα που μας ενδιαφέρει, ενθαρρύνοντάς τον παράλληλα να περιγράφει φωναχτά ότι κάνει ή κάνοντάς του κατάλληλες ερωτήσεις. Οι Thornton, Langrall και Jones (1997), συγκεκριμενοποιούν τις αρχές διεξαγωγής της ποιοτικής ανάλυσης των λαθών, προτείνοντας: (1) συγκέντρωσε κατάλληλο δείγμα της μαθηματικής συμπεριφοράς βάζοντας το παιδί να λύσει αρκετά προβλήματα της μορφής που σε ενδιαφέρει, (2) ενθάρρυνέ το, αλλά μην επεμβαίνεις στη δουλειά του, (3) κατάγραψε όλες τις απαντήσεις και τα σχόλια, (4) ψάξε για τύπους λαθών, (5) ψάξε για εξαιρέσεις στους τύπους λαθών, (6) κάνε έναν κατάλογο με όλους τους τύπους των λαθών που είναι πιθανές αιτίες των δυσκολιών του μαθητή ή της μαθήτριας.

Σύμφωνα με τους R. Underhill, A. Uprichard και J. Heddens (1980) υπάρχουν τρεις τεχνικές ερωτήσεων που μπορούν να εξασφαλίσουν ικανοποιητικές συνθήκες διερεύνησης των σκέψεων και των συναισθημάτων των μαθητών: *η δομημένη συνέντευξη, η κλινική συνέντευξη και το διδακτικό πείραμα.*

Η *δομημένη συνέντευξη* γίνεται με τη βοήθεια ενός πρωτοκόλλου με ερωτήσεις, που σχετίζονται με τις ανάγκες επίλυσης κάποιων συγκεκριμένων ασκήσεων ή προβλημάτων. Οι ερωτήσεις έχουν σταθερή σειρά και χρησιμοποιούνται με τον ίδιο τρόπο σε όλους τους μαθητές. Οι απαντήσεις κωδικοποιούνται σε προαποφασισμένες κατηγορίες και στη συνέχεια εξετάζεται η σχέση τους με τη γενική επίδοση του παιδιού.

Η *κλινική συνέντευξη*, όπως και η δομημένη, στηρίζεται στην επίλυση κάποιων προβλημάτων ή ασκήσεων από το μαθητή, αλλά οι ερωτήσεις που χρησιμοποιούνται κατά τη διεξαγωγή της εξαρτώνται από τις απαντήσεις και τις αντιδράσεις των παιδιών και δεν είναι προκαθορισμένες. Η βασική επιδίωξη στα πλαίσια αυτής της τεχνικής είναι να «αναγκαστεί» το παιδί να εξαντλήσει τα λογικά του επιχειρήματα προσπαθώντας να δικαιολογήσει τις ενέργειές του, ώστε να διαπιστωθεί πού φθάνει η συλλογιστική του και ποιες είναι οι βαθύτερες ρίζες των λαθών του. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι φυσικά ανάγκη να αναπτυχθεί ένα κλίμα οικειότητας και εμπιστοσύνης, που θα βοηθήσει το μαθητή να νιώσει άνετα και να εκθέσει ελεύθερα τον τρόπο σκέψης και δράσης του σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Με άλλα λόγια, στα πλαίσια της κλινικής συνέντευξης μεγάλη σημασία έχει και το γενικό κλίμα που θα αναπτυχθεί μεταξύ των ατόμων (Αγαλιώτης, 1997).

Το *διδακτικό πείραμα* αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση τεχνικής αξιολόγησης, αφού στόχος της δεν είναι αυτό που ήδη γνωρίζει ο μαθητής, αλλά το τι μπορεί να μάθει όταν δεχτεί κατάλληλη διδασκαλία. Ο αξιολογητής λοιπόν σχεδιάζει μια διδακτική ακολουθία, μια σειρά διδακτικών στόχων, στο τέλος της οποίας προβλέπεται η εκτέλεση κάποιου σχετικού έργου από το μαθητή. Με κατάλληλες ερωτήσεις το παιδί οδηγείται στην κατάκτηση των προϋποτιθέμενων διδακτικών στόχων και κατόπιν τοποθετείται μπροστά στην προβληματική κατάσταση η οποία αποτελεί λογική διδακτική συνέχεια των παραπάνω στόχων και η οποία πρέπει φυσικά να επιλυθεί.

1.6. Είδη λαθών σε επιμέρους μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες

Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά, ανεξαρτήτως πρωτογενούς αιτιολογίας, εκδηλώνονται μέσω της ύπαρξης λαθών στην εργασία του μαθητή δηλαδή στην εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων.

Τα λάθη είναι αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής διαδικασίας (Bouvier, 1989) και είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα ισχυρό διαγνωστικό εργαλείο που θα μας προσφέρει ένα «παράθυρο» στον εννοιολογικό κόσμο του παιδιού (Τουμάσης, 1994). Σύμφωνα με τη θέση αυτή, τα μαθηματικά λάθη οφείλονται στις ιδιαίτερες διαδικασίες σκέψης που χρησιμοποιεί το παιδί. Το γεγονός αυτό εξηγεί και το ότι τα περισσότερα λάθη διαθέτουν κανονικότητα και συνέπεια.

Λόγω της αλυσιδωτής φύσης της Αριθμητικής, τα λάθη με τη σειρά τους είναι δυνατόν να τροφοδοτήσουν τη δημιουργία νέων ελλείψεων και παρανοήσεων, οι οποίες βέβαια οδηγούν σε νέα λάθη. Για παράδειγμα, η μη κατανόηση της έννοιας της θεσιακής αξίας, οδηγεί σε λάθη στην αφαίρεση, τα οποία με τη σειρά τους, μπορούν να αποτελέσουν τη βάση δημιουργίας ελλείψεων και λαθών στη διαίρεση. Υπάρχουν βέβαια και τυχαία λάθη ή ολισθήματα (slips). Όμως τα περισσότερα λάθη των παιδιών στην Αριθμητική, ανάγονται στον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο σκέφτονται και μαθαίνουν (Bouvier, 1989)

Όπως παρατηρεί ο B. Rourke (1993), πάρα πολύ συχνά, τα λάθη των παιδιών στην αριθμητική, είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης περισσότερων της μιας γενεσιουργών αιτιών, αλλά και των συνεπειών τους και επομένως είναι πολύ δύσκολο να υπάρξει απόλυτη βεβαιότητα για την πρωταρχική αιτία της αποτυχίας σε κάθε ατομική περίπτωση.

Η αντιμετώπιση των λαθών ως συστατικών της μαθησιακής διαδικασίας, που, αν χρησιμοποιηθούν σωστά, μπορούν να προσφέρουν χρήσιμες πληροφορίες για τη βελτίωση της διδασκαλίας, είναι δυνατόν να επηρεάσει θετικά και το όλο κλίμα αντιμετώπισης της αποτυχίας στην τάξη. Κι αυτό γιατί ο εκπαιδευτικός που πιστεύει ότι τα παιδιά τα οποία κάνουν συστηματικά τα ίδια λάθη πιθανότατα δεν είναι αδιάφορα ή απρόσεκτα, αλλά απλώς στηρίζονται σ' ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης και αντίληψης των μαθηματικών εννοιών, θα βρεθεί απέναντι στο ενδιαφέρον έργο της αναζήτησης του συγκεκριμένου λάθους. Αντίθετα, εκείνος που θεωρεί ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα απροσεξίας ή έλλειψης εξάσκησης θα επαναλαμβάνει ξανά και ξανά το μονότονο έργο της διδασκαλίας της ίδιας έννοιας ή διαδικασίας.

Η αναδιοργάνωση της γνώσης των παιδιών μέσω εξειδικευμένης βοήθειας, που θα στηρίζεται στη διερεύνηση της φύσης των λαθών τους, είναι ένας ιδιαίτερα πρόσφορος τρόπος αντιμετώπισης της αποτυχίας στα μαθηματικά, η οποία κάθε άλλο παρά αναπόφευκτη είναι. Η μελέτη και αξιοποίηση των λαθών των μαθητών από τον εκπαιδευτικό της τάξης αλλά και από τον ερευνητή διευκολύνεται σημαντικά στην περίπτωση που είναι γνωστοί οι συνηθέστεροι τύποι των λαθών, γεγονός που άλλωστε επιβάλλεται και από τη βασικά επιστημονική ανάγκη για κατηγοριοποίηση των φαινομένων. Η εξοικείωση με τα λάθη που συναντώνται με τη μεγαλύτερη συχνότητα μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην πρόληψη και στην αντιμετώπισή τους. Ο ενημερωμένος εκπαιδευτικός θα γνωρίζει τις διδακτικές ρυθμίσεις που πρέπει να αποφύγει ή να υιοθετήσει προκειμένου να προλάβει ή να άρει τις δυσκολίες. Από την άλλη μεριά ο ερευνητής γνωρίζοντας τις κατηγορίες των συνηθέστερων λαθών, μπορεί να μελετήσει καλύτερα τις διαδικασίες που τα παράγουν, είναι σε θέση να ασχοληθεί με τη διερεύνηση προγραμμάτων αντιμετώπισης και έχει την ευκαιρία να αξιολογήσει καλύτερα τη σημασία της εμφάνισης κάποιων νέων λαθών, παραδείγματος χάρη μετά την εισαγωγή κάποιου νέου Προγράμματος Σπουδών. Στη συνέχεια λοιπόν θα αναφερθούμε σε συνήθη λάθη των μαθητών στην αριθμητική, έτσι όπως αυτά έχουν προκύψει από σχετικές έρευνες.

1.6.1. Ανάγνωση και γραφή αριθμητικών συμβόλων.

Η ακριβής ανάγνωση και γραφή των συμβόλων των αριθμών είναι μια από τις προϋποθέσεις της επιτυχημένης εκτέλεσης πράξεων και της σωστής επίλυσης προβλημάτων. Η ακριβής ανάγνωση στηρίζεται στη δημιουργία μιας νοητικής εικόνας για κάθε αριθμό, η οποία περιλαμβάνει τα συστατικά στοιχεία της μορφής του αριθμού (καμπύλες, ευθείες) και τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία αυτά ενώνονται για να αποτελέσουν την πλήρη μορφή του συγκεκριμένου συμβόλου. Λόγω διαταραχών της οπτικο-χωρικής αντίληψης ή της ακουστικής/οπτικής μνήμης, ορισμένα παιδιά συγχέουν αριθμούς που έχουν κοινά αντιληπτικά στοιχεία, όπως το 6 και το 9 ή το 2 και το 5 (Baroody, & Ginsburg, 1991). Η ακριβής γραφή ενός αριθμού, εκτός από την ύπαρξη της νοητικής εικόνας του αριθμού, προϋποθέτει και την ικανότητα μετάφρασης αυτής της εικόνας σε συγκεκριμένη κινητική δραστηριότητα με βάση ένα οργανωμένο σχέδιο. Διάφορες διαταραχές της οπτικο-κινητικής αντίληψης, μνήμης και ολοκλήρωσης είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε αντιστροφές, καθρεφτικές αποδόσεις και συγχύσεις των αριθμητικών συμβόλων κατά τη γραφή, ιδιαίτερα των αριθμών που μοιάζουν αντιληπτικά (Geary, Hoard & Hamson, 1999)

1.6.2. Θεσιακή αξία

Η έννοια της αξίας θέσης του ψηφίου αποτελεί ένα από τα θεμέλια κάθε εργασίας με αριθμούς. Σύμφωνα με τον A. Orton (1992), δυσκολίες στην κατάκτηση αυτής της έννοιας γίνονται συνήθως φανερές:

(α) Με τη δυσκολία του παιδιού να διακρίνει το μεγαλύτερο/μικρότερο μεταξύ δύο αριθμών που αποτελούνται από τα ίδια ψηφία (π.χ. 152-125)

(β) Με την αδυναμία διάκρισης της αξίας ενός και του αυτού ψηφίου, ανάλογα με τη θέση του (π.χ. «στους αριθμούς 35, 521, 256, με τι ισούται το 5;»)

(γ) Με το να αποδίδονται αριθμοί όπως ο 432 με τη μορφή 40032 ή 4032

(δ) Με την αδυναμία σχηματισμού του μικρότερου ή μεγαλύτερου αριθμού που μπορεί να προκύψει από δύο ή περισσότερα δοθέντα ψηφία (π.χ. «ποιος ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός που σχηματίζεται με τα ψηφία 2, 8, 9;»)

Όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο Orton (1992), είναι πολύ δύσκολο να διαπιστωθεί η αιτία αυτών των δυσκολιών και λαθών, καθώς η έννοια είναι σύνθετη.

1.6.3. Λάθη κατά την εύρεση των βασικών αριθμητικών δεδομένων

Θεμελιώδης προϋπόθεση για την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων είναι η ακριβής και ταχεία ανάκληση των Βασικών Αριθμητικών Δεδομένων (Β.Α.Δ.) από τη μνήμη. Ωστόσο, αδυναμίες της μνήμης, της διάκρισης, του εκφραστικού λόγου και της τήρησης ακολουθιών, που συχνά χαρακτηρίζουν τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες στα μαθηματικά, καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολή την ευχερή χρήση αυτών των στοιχείων της μαθηματικής γνώσης (Bley & Thornton, 1995).

Στην ύπαρξη δυσκολιών με τα Β.Α.Δ. συμβάλλει σημαντικά και η αναποτελεσματική χρήση των στρατηγικών που συνήθως εφαρμόζονται για την εύρεσή τους. Οι στρατηγικές αυτές είναι τρεις και ισχύουν για τα Β.Α.Δ. και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Και στις τέσσερις πράξεις κατά την πρώτη φάση αξιοποιείται η *απαρίθμηση* (συγκεκριμένου υλικού, δαχτύλων, λεκτική). Κατόπιν μεσολαβεί μια φάση έμμεσης εύρεσης των αποτελεσμάτων που στηρίζεται σε άλλη πράξη και που ονομάζεται *φάση των παραγόμενων δεδομένων* (για παράδειγμα, με βάση το γνωστό άθροισμα 6+6=12, ο μαθητής βρίσκει το άθροισμα 7+6). Τέλος, ακολουθεί η τελική φάση της *άμεσης ανάκλησης των δεδομένων από τη μνήμη* (γνωστά δεδομένα). Οι υπάρχουσες γνώσεις για τα λάθη που προκύπτουν κατά τη διάρκεια χρήσης των παραπάνω στρατηγικών προέρχονται κυρίως από έρευνες στην πρόσθεση και την αφαίρεση, ενώ οι δύο άλλες πράξεις έχουν ερευνηθεί πολύ λιγότερο. Από τα διαθέσιμα στοιχεία προκύπτουν τα εξής:

(1) Το συνηθέστερο λάθος στη φάση της μέτρησης είναι η εύρεση αποτελεσμάτων μεγαλύτερων ή και συχνότερα μικρότερων από το πραγματικό, συνήθως κατά 1. Το λάθος αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι: (α) ο μαθητής, αφού δηλώσει τον πρώτο αριθμό (π.χ. 4 στην πρόσθεση 4+3), μετά ξεχνά ή συγχέει το δεύτερο αριθμό. Έτσι στην πρόσθεση 4+3 μπορεί να μετρήσει άλλα τέσσερα αντί άλλα τρία (5, 6, 7, 8, το αποτέλεσμα είναι 8) (β) ο μαθητής μετρά τις σωστές φορές το δεύτερο αριθμό (3 στην παραπάνω πρόσθεση), αλλά ξεκινά από λάθος σημείο τη μέτρηση. Δηλαδή, λέει «4, 5, 6, το αποτέλεσμα είναι 6», αντί «5, 6, 7» (Geary, 1994)

(2) Όταν επιχειρείται άμεση ανάκληση των δεδομένων από τη μνήμη παρατηρούνται λάθη που χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες: α) τυχαίες εικασίες (τυχαίες απαντήσεις όπως 4+1=41), (β) παρά λίγο σωστά (π.χ. 4+3=6 επειδή λανθασμένα μέτρησε «4, 5, 6»), (γ)

σύγχυση πράξεων (π.χ. ανάκληση του 12 για την πράξη 4+3 λόγω σύγχυσης με το 4x3) και (δ) λάθη πλαισίου (π.χ. ανάκληση του 10 για την αφαίρεση 6-4, επειδή το 6+4 είναι γνωστότερο και ανακαλείται ευκολότερα) (Geary, 1994).

1.6.4. Λάθη κατά την εφαρμογή των αλγόριθμων των πράξεων

Τα αλγοριθμικά λάθη είναι η περισσότερο διερευνημένη κατηγορία λαθών, ίσως επειδή οι σχετικές δεξιότητες έχουν πολλές και άμεσες πρακτικές εφαρμογές. Κάποιες (ελάχιστες) κατηγοριοποιήσεις υπολογιστικών λαθών έχουν προταθεί και αποκλειστικά σε σχέση με παιδιά με Ειδική Μαθησιακή Δυσκολία στην Αριθμητική. Συγκεκριμένα ο P. Spiers (1987), με βάση μια επισκόπηση σχετικών ερευνών, πρότεινε έξι βασικές κατηγορίες με τριάντα, συνολικά, επιμέρους περιπτώσεις λαθών:

(1) *Λάθη σχετικά με τη θεσιακή αξία*, όπως π.χ. αδυναμία διάκρισης του μεγαλύτερου μεταξύ δύο αριθμών με τα ίδια ψηφία, καθρεφτικές ή αμοιβαίες αντιστροφές (564 γραμμένο ως 465) κ.λπ.

(2) *Λάθη με τα ψηφία*, όπως π.χ. αντικατάσταση ψηφίου με άλλο (36+47 γραμμένο σαν 36+41) ή παράλειψη ψηφίου κατά την εκτέλεση πράξεων κ.λπ.

(3) *Λάθη με τα κρατούμενα και τα δανεικά*, όπως π.χ. παράλειψη του κρατούμενου, τοποθέτηση δανεικού σε λάθος στήλη, αδυναμία δανεισμού από 0 κ.λπ.

(4) *Λάθη με τα βασικά δεδομένα* και το ρόλο του 0 και του 1 στον πολλαπλασιασμό

(5) *Αλγοριθμικά λάθη*, όπως π.χ. εκτέλεση μόνο ενός τμήματος του αλγορίθμου, σύγχυση ως προς τη σειρά των ενεργειών, πλήρης αδυναμία εκτέλεσης κ.λπ.

(6) *Λάθη με τα σύμβολα*, όπως π.χ. σύγχυση των συμβόλων των πράξεων και εκτέλεση άλλης πράξης.

Μια πιθανή εξήγηση λαθών όπως: η εκτέλεση πρόσθεσης αντί για αφαίρεση (και το αντίθετο), παρά την κατανόηση και τη διάκριση των εννοιών των πράξεων, η εκτέλεση μιας πράξης από αριστερά προς τα δεξιά, η τοποθέτηση αριθμών σε λάθος στήλη, η σύγχυση των αριθμητικών ψηφίων και συμβόλων πράξεων κατά την ανάγνωση και τη γραφή κ.ά., βρίσκεται στις παρατηρήσεις ερευνητών όπως οι Geary, Hoard και Hamson (1999), οι οποίοι αναφέρουν ότι υπολογιστικά λάθη μπορεί να προέλθουν και από δυσκολίες που αφορούν τη σωστή αντίληψη και διάκριση μέσα στο χώρο της διάταξης και της μορφής των αριθμών και των πραξιακών συμβόλων που συμμετέχουν σε μια πράξη. Οι δυσκολίες αυτές αποδίδονται σε διαταραχές της οπτικο-χωρικής αντίληψης και οπτικο-κινητικής μνήμης και ολοκλήρωσης, οι οποίες είναι καίριο στοιχείο του προφίλ των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών.

1.6.5. Λάθη κατά την επίλυση προβλημάτων

Από την αρχή της δεκαετίας του '80, έχει υπογραμμιστεί η σπουδαιότητα της επίλυσης προβλήματος στη βασική εκπαίδευση μαθηματικών και στη μαθηματική κατάρτιση των παιδιών (De Corte, & Verschaffel, 1995). Μέχρι τότε, τα προβλήματα χρησιμοποιούνταν ως ασκήσεις στην εφαρμογή των αλγορίθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, δεδομένου ότι συνήθως θεωρήθηκε ότι ήταν δύσκολα για τα παιδιά όλων των ηλικιών και ότι τα παιδιά πρέπει να μάθουν να χειρίζονται τις διαδικασίες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης πριν προσπαθήσουν να επιλύσουν ακόμα και τα απλούστερα προβλήματα. Αυτό οφειλόταν στο παραδοσιακό σχολικό πρόγραμμα σπουδών, το οποίο υπογράμμιζε μόνο τη διαδικαστική και δηλωτική γνώση, εις βάρος της εννοιολογικής γνώσης, και εστίαζε στην αποστήθιση γεγονότων και υπολογιστικών δεξιοτήτων παρά στην ανάπτυξη των σημαντικών εννοιών και την εφαρμογή των μαθηματικών στις πραγματικές καταστάσεις (Montague, Warger & Morgan, 2000).

Εντούτοις, σήμερα, η διδασκαλία που υπογραμμίζει την αντανακλαστική σκέψη και το συλλογισμό θεωρείται από πολλούς κρίσιμη στη μαθηματική μεταρρύθμιση (Jitendra, Di Pipi, & Rerron- Jones, 2002· Montague,1997b). Η εισαγωγή των προβλημάτων στα πρώτα έτη εκπαίδευσης ενσωματώνει τα μαθηματικά στην εμπειρία των παιδιών και την άτυπη εκπαίδευση έξω από το σχολείο και, επομένως, διευκολύνει τη σημαντικότερη εκμάθηση των εννοιών, των διαδικασιών, και των αριθμητικών συμβόλων. Πολλοί ερευνητές (π.χ., Carpenter & Fennema 1992· Patton, Cronin, Bassett & Koppel, 1997· Montague, 1997a) επιμένουν στην προτεραιότητα διδασκαλίας των παιδιών πώς να λύνουν αριθμητικά προβλήματα, σε αντιδιαστολή με τους αλγορίθμους, ως βασική διδακτική αρχή στη διδασκαλία της αριθμητικής.

Διάφορες μελέτες έχουν βρει συστηματικές διαφορές στα επίπεδα επίδοσης των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων (Judd & Bilsky, 1989· Lewis & Mayer, 1987· Moreno & Mayer, 1999). Οι Judd και Bilsky κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η κατανόηση είναι η σημαντικότερη πηγή δυσκολίας στα προβλήματα και ο τομέας ο οποίος εμφανίζει τις περισσότερες μεμονωμένες διαφορές στη μαθηματική επίδοση των παιδιών, επειδή τα παιδιά δεν έχουν ακόμα ένα ρεπερτόριο ιδιαίτερα αυτοματοποιημένων σχημάτων για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλήματος. Οι Moreno και Mayer (1999) υποστηρίζουν ότι κατά την επίλυση ενός αριθμητικού προβλήματος, οι χαμηλότερης επίδοσης μαθητές (συγκριτικά με τους μαθητές υψηλότερης επίδοσης στα μαθηματικά) δεν ωφελούνται από τη χρήση των διδακτικών μεθόδων που προωθούν τη χρήση της πολλαπλής αναπαράστασης του προβλήματος (δηλ., συμβολική, οπτική και λεκτική) σε αντιδιαστολή με τη συμβολική αναπαράσταση (δηλ., μόνο συμβολική) σε σύγκριση με τις υψηλότερης επιτυχίας ομάδες μαθητών.

Όπως ήδη αναφέρθηκε (βλ. υποκεφάλαιο 1.4.5.), οι φάσεις επίλυσης ενός προβλήματος είναι: (1) η μετάφραση, (2) η ολοκλήρωση, (3) ο σχεδιασμός της λύσης και (4) η εκτέλεση της λύσης (εκτέλεση των πράξεων).

Κατά την πρώτη φάση της επίλυσης, οπότε κάθε πρόταση του προβλήματος μετατρέπεται σε εσωτερική αναπαράσταση, ενδέχεται να προκύψουν τα εξής λάθη: (1) Ο μαθητής μπορεί να κάνει ένα αναγνωστικό λάθος π.χ. «Είχα 45 ευρώ και ξόδεψα τα 62 (αντί τα 26). Πόσα ευρώ έχω τώρα;». (2) Ο μαθητής, αντί να προσπαθεί να φτιάξει ένα νοητικό μοντέλο του προβλήματος, ψάχνει για λέξεις-κλειδιά (έδωσε/πήρε, λιγότερο/περισσότερο κ.ά.) που θα του επιτρέψουν να μαντέψει το είδος της πράξης που απαιτείται. Όχι σπάνια όμως, οι λέξεις αυτές δεν βρίσκονται σε απόλυτη αντιστοιχία με την απαιτούμενη πράξη, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται λάθη. (3) Το πρόβλημα μπορεί να είναι ασαφώς διατυπωμένο και να επιτρέπει περισσότερες της μιας ερμηνείες, πράγμα που δυσκολεύει το μαθητή. (4) Ο μαθητής, λόγω ελλείψεων στις γλωσσικές γνώσεις, δυσκολεύεται να κατανοήσει και να μετατρέψει σε αναπαράσταση συγκεκριμένες προτάσεις του προβλήματος. Ιδιαίτερα δύσκολες είναι οι συσχετιστικές προτάσεις, αυτές δηλαδή που εκφράζουν μια ποσοτική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές. Τέτοιου είδους προτάσεις γίνονται αιτία για διάφορα σφάλματα: π.χ. η πρόταση «ο Β. έχει 5 βόλους περισσότερους από τον Α.» γίνεται «ο Β. έχει 5 βόλους».

Στη δεύτερη φάση της επίλυσης, όπου απαιτείται η σύνθεση των επιμέρους αναπαραστάσεων σε μια συνολική νοητική εικόνα του προβλήματος, είναι ανάγκη το παιδί να διαθέτει κάποιες γενικές γνώσεις και την κατάλληλη εμπειρία με τους διάφορους τύπους προβλημάτων. Αναγνωρίζοντας ότι το πρόβλημα που έχει μπροστά του είναι π.χ. «σύγκρισης» ή «αλλαγής» ή όποιας άλλης κατηγορίας έχει μάθει, θα μπορέσει να επικεντρώσει την προσοχή του στις σημαντικές πληροφορίες και να καθορίσει τη σειρά των ενεργειών και τις πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του. Φαίνεται ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν κατά βάση ένα υπόδειγμα προβλημάτων «πρόκλησης αλλαγής», που προσπαθούν να εφαρμόσουν σε όλα τα προβλήματα (Dockrell & McShane, 1993).

Τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης μπορούν να παρουσιαστούν ως λεκτικά προβλήματα (word problems). Οι Cawley και Miller (1986), καθόρισαν τα λεκτικά προβλήματα ως "εκείνα τα στοιχεία στα οποία οι λέξεις και οι δομές τους δημιουργούν προβλήματα". Ένας δεύτερος τρόπος να παρουσιαστούν τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι *στα σχήματα αριθμητικών δεδομένων*: π.χ. όπως με το σχήμα εξίσωσης $7 + 5 = \square$. Τα προβλήματα *αριθμητικών δεδομένων* περιλαμβάνουν τη γλώσσα, χωρίς την αναφορά σε αντικείμενα.

Τα λεκτικά προβλήματα στην αριθμητική είναι στόχοι που απαιτούν την ολοκλήρωση γλωσσικών και αριθμητικών δεξιοτήτων επεξεργασίας. Στα προβλήματα, περιγράφεται μια κατάσταση μέσα στην οποία υπάρχει κάποια τροποποίηση, ανταλλαγή, ή συνδυασμός ποσοτήτων (Riley, & Greeno, 1988). Οι Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, και Reys (1980) πρότειναν ότι η επίλυση προβλήματος από τα παιδιά προϋποθέτει σκέψη και ανάλυση, όχι απλά ψάχνοντας τις λέξεις κλειδιά (όπως "*έδωσε*" για την αφαίρεση), και αυτά τα προβλήματα μπορούν να συμπεριλάβουν περισσότερα από ένα βήματα στη λύση τους. Για να λύσουν τα προβλήματα, τα παιδιά πρέπει να έχουν αναπτύξει αρκετά τις λεκτικές δεξιότητες καθώς επίσης και τη βασική ικανότητα υπολογισμού. Επιπλέον, «το άτομο πρέπει να αναλύσει και να ερμηνεύσει πληροφορίες ως βάση για τις επιλογές και αποφάσεις» (Cawley & Miller, 1986).

Η επίλυση των αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων έχει θεωρηθεί σημαντικός τομέας του ελλείμματος στα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Mercer & Miller, 1992· Miller & Mercer, 1997). Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία είτε με την αναπαράσταση του προβλήματος είτε με τον προσδιορισμό των σχετικών πληροφοριών, παράλληλα με δυσκολίες στην ανάγνωση, τον υπολογισμό και τον προσδιορισμό των διαδικασιών (Parmar, Cawley & Frazita, 1996).

Οι Carpenter και Moser (1984) επιβεβαίωσαν ότι τα δυσκολότερα λεκτικά προβλήματα είναι εκείνα που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν άμεσα από τα πρότυπα (π.χ. προβλήματα όπου η αρχική ποσότητα είναι η άγνωστη). Η έλλειψη γνώσης της αρχικής ποσότητας αναγκάζει τα παιδιά να προσπαθούν με λανθασμένες διαδικασίες να λύσουν το πρόβλημα. Τα προβλήματα που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν εύκολα είναι σημαντικά δυσκολότερα από εκείνα που μπορούν.

Τα συμπεράσματά από προηγούμενες μελέτες (Carpenter, Hiebert, & Moser, 1981· Riley & Greeno, 1988) δείχνουν ότι η *θέση της άγνωστης ποσότητας* έχει μεγαλύτερη επιρροή στο επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων από άλλες μεταβλητές. Τα μη κανονικά προβλήματα —συγκεκριμένα, εκείνα με τον άγνωστο όρο αρχικά—είναι εκείνα όπου τα παιδιά παρουσιάζουν χαμηλότερο αριθμό σωστών απαντήσεων. Αυτή η μεταβλητή έχει επιπτώσεις στα παιδιά με τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά περισσότερο από ότι στα παιδιά τυπικής απόδοσης.

1.7. Αντιμετώπιση των Δυσκολιών Μάθησης στα Μαθηματικά

Τα μέτρα που λαμβάνονται για την αντιμετώπιση του φαινομένου της σχολικής αποτυχίας, έχουν συνήθως ως στόχους: 1) την αναβάθμιση της δομής και της οργάνωσης του σχολείου, 2) την αύξηση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών, 3) την ενίσχυση του ρόλου της οικογένειας και 4) τη βελτίωση της μαθησιακής ικανότητας των παιδιών (European Unit of EYRYDICE, 1994). Η επίτευξη αυτών των στόχων σαφώς συμβάλλει στην καταπολέμηση της σχολικής αποτυχίας, όμως οι ενέργειες που στοχεύουν στον πυρήνα του προβλήματος αντιμετωπίζοντας την άμεση αιτία της αποτυχίας, δηλαδή τις δυσκολίες μάθησης, είναι εκείνες που αποσκοπούν στην αναβάθμιση της μαθησιακής ικανότητας των μαθητών και μαθητριών.

Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες μάθησης, είναι επιτακτική η ανάγκη μιας ειδικά σχεδιασμένης διδασκαλίας που θα λαμβάνει υπόψη της τις ιδιαίτερες ανάγκες του παιδιού. Αυτό μας επιτρέπει να υποστηρίξουμε ότι στην ουσία αναφερόμαστε σε παροχή ειδικής αγωγής αφού ειδική αγωγή ενός παιδιού είναι ακριβώς «κάθε επιπλέον βοήθεια ή κατά οποιοδήποτε τρόπο διαφορετική από εκείνη που παρέχεται γενικά στα συνηθισμένα παιδιά της ηλικίας του μέσα στο κοινό σχολείο» (Warnock Report, 1978, αναφέρεται από την Πολυχρονοπούλου, 1995, σελ. 30).

Όπως αναφέρει η Σ. Πολυχρονοπούλου (1995), η ειδική αγωγή για την κάλυψη των δυσκολιών μάθησης και γενικότερα των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών ενός μαθητή, μπορεί να παρέχεται: (1) μέσα στη συνηθισμένη τάξη, (2) σε ειδικά τμήματα μέσα στα κοινά σχολεία, (3) σε ξεχωριστές εκπαιδευτικές μονάδες και (4) σε μη εκπαιδευτικά ιδρύματα. Στις ξεχωριστές εκπαιδευτικές μονάδες (π.χ. ειδικά σχολεία) και στα μη εκπαιδευτικά ιδρύματα (π.χ. ειδικά τμήματα νοσοκομείων), συνήθως φοιτούν μαθητές που αντιμετωπίζουν σοβαρές ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες ή σοβαρά προβλήματα υγείας που δεν τους επιτρέπουν να παρακολουθούν το σχολείο γενικής εκπάιδευσης. Τα παιδιά αυτά ακολουθούν ένα εξειδικευμένο πρόγραμμα, που, εκτός από τους άμεσους μαθησιακούς, περιέχει και άλλους βιοπρακτικούς στόχους (π.χ. εξάσκηση κοινωνικών και αντιληπτικών δεξιοτήτων). Αντίθετα στις συνηθισμένες τάξεις και τα ειδικά τμήματα των κοινών σχολείων (τμήματα ένταξης, τμήματα ενισχυτικής διδασκαλίας), φοιτούν μαθητές με δυσκολίες μάθησης και ιδιαίτερες εκπαιδευτικές ανάγκες, που χαρακτηρίζονται μεν από ανομοιογένεια ως προς την αιτία του προβλήματός τους, αλλά που γενικά θεωρούνται ικανοί να παρακολουθήσουν το αναλυτικό πρόγραμμα του κοινού σχολείου με τη βοήθεια ειδικών υποστηρικτικών προγραμμάτων. Αυτή η ομάδα των παιδιών αποτελεί μια αναμφισβήτητη και διαρκή πρόκληση για την Εκπαίδευση, αφού από κάποιες ανεπίσημες δειγματοληπτικές έρευνες φαίνεται να προκύπτει ότι, με τις κατάλληλες διδακτικές ρυθμίσεις, τα παιδιά αυτά είναι δυνατόν να ξεπεράσουν τα προβλήματά τους και να ενταχθούν πλήρως στο πρόγραμμα της κανονικής τους τάξης (Πολυχρονοπούλου, 1995).

1.7.1. Εκπαιδευτικά και Υποστηρικτικά Προγράμματα για παιδιά με Δυσκολίες Μάθησης

Το πρόγραμμα διδασκαλίας στα μαθηματικά πρέπει να περιλαμβάνει εκτός από τη διδασκαλία μαθηματικών δεξιοτήτων και την εφαρμογή τους σε καταστάσεις καθημερινής ζωής (π.χ. χρήση των τεσσάρων πράξεων, συναλλαγές με χρήματα, μέτρηση επιφανειών, αντίληψη χρονικών εννοιών) προκειμένου τα άτομα με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες να μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα στην καθημερινή τους ζωή.

Στο πλαίσιο των ενδοατομικών διαφορών φαίνεται μη ρεαλιστικό να υποτεθεί ότι ένα πρόγραμμα σπουδών ή ένα σύνολο προτύπων θα ικανοποιήσει επαρκώς τις μαθηματικές ανάγκες του κάθε μαθητή. Ομοίως, η ιδέα ότι υπάρχει μια καλύτερη μέθοδος για τη διδασκαλία σε όλα τα παιδιά δεν είναι πιθανό να έχει θετικές συνέπειες για τα άτομα με μαθησιακά προβλήματα (Carnine, 1991). Επιπλέον, είναι επίσης μη ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι οι μαθητές με διαφορετικές νοητικές και γνωστικές δυνατότητες μπορούν όλοι να μάθουν μέσα στο ίδιο χρονικό πλαίσιο. Ο καταναγκασμός όλων των μαθητών να ακολουθήσουν ένα σχεδιασμένο πρόγραμμα σπουδών είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της προσαρμογής τους στο πρόγραμμα σπουδών παρά της προσαρμογής του προγράμματος σπουδών στους μαθητές. Απλά, μια τέτοια προσέγγιση παραβιάζει τις βασικές αρχές της ειδικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες χρειάζονται συχνά μεθόδους που διαφέρουν από αυτές που τα τυπικά σχολεία παρέχουν (Miller & Mercer, 1997). Τα περισσότερα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες πρόκειται να χρειαστούν προσαρμογές ή τροποποιήσεις στα κείμενα, τα υλικά, τις εργασίες, τις μεθόδους διδασκαλίας, τα τεστ, και την εργασία (Bateman, 1992). Ανεξάρτητα από τον τρόπο που οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά, η εξατομίκευση της διδασκαλίας τους απαιτείται για να αντιμετωπίσει επαρκώς τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά.

Επιπλέον, οι δάσκαλοι πρέπει να γνωρίζουν ποιοι μαθητές δεν έχουν αποκτήσει τους βασικούς αριθμητικούς μηχανισμούς και να σημειώσουν ότι αυτοί χρειάζονται πρόσθετο χρόνο για να καταλάβουν τις έννοιες και διαδικασίες που εξηγούνται ή συζητούνται. Από εννοιολογική άποψη, χρειάζεται να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στη σχέση που υπάρχει μεταξύ συγκεκριμένων μετρήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για έγκαιρη προληπτική διάγνωση και στις θεωρίες που ερμηνεύουν τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, η μετάβαση από τις πραγματικές στις νοητικές αναπαραστάσεις φαίνεται κρίσιμη για την ανάπτυξη υπολογιστικής ευχέρειας (Jordan & Hanich, 2003 Jordan et al, 2003). Έγκαιρη προληπτική αξιολόγηση απαιτείται για να διερευνώνται οι στρατηγικές υπολογισμού των παιδιών στους διαφορετικούς τύπους προβλήματων για να καθορίσει εάν τα παιδιά κάνουν αυτή τη μετάβαση.

1.7.2. Διδακτικές τεχνικές για την αντιμετώπιση των Δυσκολιών Μάθησης στα Μαθηματικά

Εκτός από το σχεδιασμό ενός προγράμματος σπουδών που λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά και τους στόχους των μαθητών, οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να εφαρμόσουν το πρόγραμμα σπουδών χρησιμοποιώντας αποτελεσματικές εκπαιδευτικές τεχνικές με βάση τα πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα. Οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί έχουν αρχίσει να προσδιορίζουν τις πιο αποτελεσματικές πρακτικές στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι Mastropieri, Scruggs, και Shiah (1991) διεξήγαγαν μια εκτενή αναζήτηση της βιβλιογραφίας και εντόπισαν 30 μελέτες που επικύρωναν τις εκπαιδευτικές τεχνικές για τα μαθηματικά που βοηθούσαν περισσότερο τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Συμπεριέλαβαν μεταξύ εκείνων των τεχνικών (α) εφαρμογή, επίδειξη, μοντελοποίηση και διαδικασία ανατροφοδότησης (β) παροχή ενίσχυσης για οικοδόμηση ευχέρειας (fluency building), (γ) χρησιμοποίηση μιας ιεραρχημένης ακολουθίας διδασκαλίας που εκτείνεται από τις συγκεκριμένες έννοιες έως τις αφηρημένες, (δ) θέσπιση στόχων (ε) συνδυασμό της επίδειξης με το μόνιμο πρότυπο (ζ) χρησιμοποίηση της φωναχτής σκέψης κατά την επίλυση προβλημάτων (ζ) διδασκαλία στρατηγικών για τον υπολογισμό και την επίλυση προβλήματος και (η) χρήση των συνομήλικων, των υπολογιστών, και των βιντεοδίσκων ως εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τον Dixon (1994), οι σημαντικές έννοιες: οι τέσσερις βασικές πράξεις, η θεσιακή αξία, τα κλάσματα, η εκτίμηση, το εμβαδό, ο όγκος και η επίλυση προβλήματος, διδάσκονται κυρίως για να καλύψουν τις πολυάριθμες μαθηματικές δεξιότητες επιφανειακά. Μία από τις προτάσεις του για την επιλογή των μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών ήταν να αναζητηθούν υλικά μεσολάβησης. Τα υλικά αυτά βοηθούν τους μαθητές να εξασφαλίσουν επιτυχή μάθηση όταν μαθαίνουν καινούριες δεξιότητες. Η υποστήριξη, ή το υλικό, μειώνεται βαθμιαία καθώς ο μαθητής γίνεται ικανότερος. Τα υλικά μεσολάβησης χρησιμοποιούνται μετά από την παρουσίαση της νέας γνώσης από τον εκπαιδευτικό κι την μοντελοποίηση αλλά πριν από την ανεξάρτητη πρακτική.

Επειδή η έρευνα έχει δείξει ότι η εξάσκηση στις γνωστικές στρατηγικές μπορεί να βελτιώσει την απόδοση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα λεκτικά προβλήματα (Landi, Anne 2001), αυτοί οι μαθητές ίσως ωφεληθούν από την εξάσκηση που δίνει έμφαση στις στρατηγικές αναπαράστασης προβλήματος. Η δυνατότητα να απεικονιστεί και να επαναδιατυπωθεί ένα πρόβλημα καθώς επίσης και να γίνουν υποθέσεις για τη λύση του είναι κρίσιμες πτυχές της αποτελεσματικής επίλυσης προβλήματος και πρέπει να τεθούν στη διάθεση των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες για να γίνουν αποτελεσματικοί λύτες προβλημάτων.

Στα πλαίσια της διδασκαλίας, η χρήση εξωτερικών (οπτικών) αναπαραστάσεων (εικόνων, σχημάτων, διαγραμμάτων κ.λπ.) έχει σημαντικά πλεονεκτήματα. Οι εικόνες και τα σχήματα είναι μέσα έκφρασης, που προσανατολίζουν και οργανώνουν τη σκέψη διευκολύνοντας μ’ αυτόν τον τρόπο τη διαδικασία μάθησης. Ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μια οπτική αναπαράσταση εκτός του ότι συμβάλει στην πληρέστερη κατανόηση του προβλήματος, μέσα από μια συνοπτική παρουσίαση της πληροφορίας, αποτυπώνει επίσης τα ενδιάμεσα βήματα της σκέψης του λύτη διευκολύνοντας έτσι διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης (Brunning et al 1999).

Ενδιαφέρουσα άποψη πάνω στο θέμα της αναπαράστασης της γνώσης και των σταδίων που μεσολαβούν μεταξύ των ενεργειών πάνω στα πράγματα και των σκέψεων με τα βασικά σύμβολα, διατυπώνεται από τους Van Erp και Heshusius (1986). Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι η εκμάθηση της εκτέλεσης πράξεων και η πρώτη προσέγγιση μαθηματικών εννοιών δεν μπορεί να γίνει παρά διαμέσου του φυσικού χειρισμού και διευθετήσεων χειροπιαστού υλικού. Οι φυσικοί χειρισμοί και διευθετήσεις (υλικές πράξεις) ακολουθούνται από το στάδιο των αντιληπτικών πράξεων στο οποίο το συγκεκριμένο-τρισδιάστατο υλικό είναι προσιτό στο παιδί, αλλά δεν χρησιμοποιείται. Το παιδί προσπαθεί να εκτελέσει πράξεις νοερά διαμέσου της οπτικοποίησης και της φαντασίας και αν δυσκολευτεί έχει στη διάθεσή του το υλικό. Στο επόμενο στάδιο το παιδί φαντάζεται το υλικό (που έχει αποσυρθεί) και εκτελεί την πράξη. Ακολουθεί το στάδιο των λεκτικών πράξεων, όπου η εσωτερική ανακατασκευή της πραγματικότητας αναπαρίσταται με λέξεις στηρίζοντας αποφασιστικά την κατανόηση. Στο τελικό στάδιο της συμβολοποίησης οι μαθηματικές ιδέες εκφράζονται με σύμβολα και τύπους. Οι Van Erp και Heshusius, προτείνουν τη μετάφραση των συμβόλων σε όσο το δυνατόν περισσότερες μορφές και είδη αναπαράστασης (υλικά, εικόνες, σχέδια κ.λπ.) πριν τη χρήση τους για την εύρεση αποτελεσμάτων.

Η Lewis (1989) σχεδίασε μια διδασκαλία με στόχο την υποστήριξη της νοητικής αναπαράστασης προβλημάτων σύγκρισης. Τα διαγράμματα που προτείνει στηρίζονται στο μοντέλο της αριθμογραμμής. Ο μαθητής κάθε φορά που ένα δεδομένο εμφανίζεται στην εκφώνηση, το προσθέτει στην αριθμογραμμή. Σύμφωνα με τη Lewis τέτοιου είδους σταδιακά εξελισσόμενα διαγράμματα επιτρέπουν τον εύκολο έλεγχο της ορθότητας της εσωτερικής αναπαράστασης.

Τη χρήση αριθμογραμμών υιοθέτησαν και οι Venger και Gorbov (1993) για την κατανόηση του μεγέθους ενός αριθμού και την επίλυση απλών προσθετικών προβλημάτων. Μέσα από το χτίσιμο της αριθμογραμμής, επιχειρήθηκε η εισαγωγή των αριθμών και η εισαγωγή της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως κίνηση, δεξιά και αριστερά αντίστοιχα της αριθμογραμμής.

Λαμβάνοντας υπόψη το μικρό αριθμό μελετών και τις σημαντικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, η ανάγκη για περαιτέρω εξέταση των εκπαιδευτικών μεθόδων που παρέχουν αποτελεσματική διδασκαλία στις δεξιότητες επίλυσης προβλήματος και οδηγούν στη διατήρηση της γνώσης σε βάθος χρόνου και στη γενίκευση και εφαρμογή της γνώσης σε νέα λεκτικά προβλήματα είναι σαφής. Οι τεχνικές αναπαράστασης που επιτρέπουν την αποτελεσματική μετάφραση ή την ερμηνεία των πληροφοριών στα λεκτικά προβλήματα είναι γνωστό ότι διευκολύνουν την επίλυση προβλήματος (Jitendra & Hoff, 1996).

Οι Carpenter και Moser (1984) περιέγραψαν ευδιάκριτες στρατηγικές που συμπεριλαμβάνουν τον υπολογισμό, και ονομάζονται *υλικές στρατηγικές (material strategies).* Τα παιδιά χρησιμοποιούν χειροπιαστά αντικείμενα (δηλ. δάχτυλα ή φυσικά αντικείμενα) για να αντιπροσωπεύσουν φυσικά τους ακέραιους αριθμούς του προβλήματος και κατόπιν τα μετρούν για να φθάσουν σε ένα ποσό.

Στην θεωρία του Vygotsky είναι κεντρικός ο ρόλος της διαμεσολάβησης και των εργαλείων στη σκέψη (Vygotsky, 1960). Σύμφωνα με αυτή την παράδοση, η σκέψη δεν είναι παράσταση που εδράζεται στο νου, αλλά αποτέλεσμα της συνεργασίας ανάμεσα σε πρόσωπα, πραγματικά αντικείμενα, εργαλεία και παρεμβαλλόμενα μέσα. Από αυτή την άποψη, σε περίπτωση που κάποιος αλλάζει τον τρόπο μεσολάβησης ή το εργαλείο, εμφανίζονται διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, η δραστηριοποίηση της μνήμης με ένα κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι είναι εντελώς διαφορετική από την ανάλογη εργασία που δεν περιλαμβάνει τα συγκεκριμένα αντικείμενα. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη χαρτιού και μολυβιού δεν επεκτείνει την ικανότητα της μνήμης κάποιου, αλλά αλλάζει τη φύση του έργου.

Ο Norman (1989), εκτίμησε ότι η γνωστική διαδικασία και οι νοητικές δραστηριότητες των ανθρώπων γίνονται πάντα με τη μεσολάβηση εργαλείων και είναι προσανατολισμένες στα αντικείμενα, ανεξάρτητα με το τι είδους τεχνάσματα ή φυσικά διαθέσιμα εργαλεία μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς στις γνωστικές δραστηριότητες. Στην περίπτωση των μαθηματικών υπάρχουν πολλά παραδείγματα στα οποία μπορεί κανείς να εισαγάγει καθαρά μαθηματικές έννοιες, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αντικείμενα ως μέσα διαμεσολάβησης. Με αυτά τα αντικείμενα, είναι δυνατόν να κατανοήσει κανείς αφηρημένες έννοιες ως σημαντικές, από πρακτική άποψη, πλευρές των αντικειμένων, ως γνωρίσματα που είναι απαραίτητα να παρατηρηθούν από οποιονδήποτε χρησιμοποιεί τα αντικείμενα μέσα σε ένα πρακτικό περιβάλλον. Στα ιαπωνικά σχολεία το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου εξηγείται και διδάσκεται απλώς με τη βοήθεια του «μοντέλου του κομμένου χαρτιού» (με αυτή τη μέθοδο μπορεί κανείς να παράγει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κόβοντας τη μια πλευρά του παραλληλογράμμου και προσαρμόζοντας την άλλη πλευρά. Το εμβαδό του παραλληλογράμμου ισούται με το εμβαδό του ορθογωνίου). Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ένα κομμάτι χαρτί ως ένα είδος διαμεσολάβησης που χρησιμοποιήθηκε για να βρούμε το εμβαδόν. Οι μαθητές καταλαβαίνουν εύκολα την πραγματική φύση των μαθηματικών εννοιών με την κατάλληλη διαμεσολάβηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Μεθοδολογία της έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται: (1) ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα (2) η σύνθεση και ο τρόπος επιλογής του δείγματος, (3) το είδος και η δομή των μέσων συλλογής των δεδομένων και των δοκιμασιών αξιολόγησης, (4) η διαδικασία της συλλογής των δεδομένων και (5) οι στόχοι, η διαδικασία και το υλικό του προγράμματος παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε.

2.1. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Όπως στηρίχθηκε και στην ενότητα 1.5.2.3. του παρόντος κεφαλαίου, η ποιοτική ανάλυση λαθών στα μαθηματικά μπορεί να συμβάλλει αποφασιστικά στη συγκεκριμενοποίηση και στην αποτελεσματική αντιμετώπιση της αποτυχίας στο γνωστικό αυτό τομέα. Μέσω της ποιοτικής ανάλυσης των λαθών, είναι δυνατόν να επισημανθούν οι πραγματικές εννοιολογικές ελλείψεις και διαδικαστικές αδυναμίες, που συνιστούν το προφίλ αποτυχίας σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση.

Η διερεύνηση της φύσης των μαθηματικών δυσκολιών συγκεκριμένων παιδιών ή ευρύτερων ομάδων, μπορεί να βοηθήσει σε μια έμμεση εκτίμηση της καταλληλότητας και της αποτελεσματικότητας των ήδη χρησιμοποιούμενων μορφών της υποστηρικτικής διδασκαλίας. Για να επιτευχθεί αυτό, αρκεί να συγκρίνουμε: (α) τις πραγματικές ανάγκες των μαθητών, όπως αυτές προκύπτουν από την ποιοτική ανάλυση των λαθών τους και (β) τις τεχνικές και τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στα προγράμματα των σχολείων, μ' αυτές που συστήνονται για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις, από τη σχετική έρευνα και την τεκμηριωμένη πρακτική (Αγαλιώτης 1997).

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει μέσα από μελέτες περίπτωσης μαθητών των τμημάτων ένταξης τα ακόλουθα: (1) Τι είδους δυσκολίες παρουσιάζουν στα βασικά δομικά στοιχεία των μαθηματικών, μαθητές των τμημάτων ένταξης με χαμηλή μαθηματική επίδοση; (2) Με ποιον τρόπο οι βασικές γνωστικές ελλείψεις και αδυναμίες, επηρεάζουν τη μαθηματική συμπεριφορά και διαμορφώνουν την τελική εικόνα των δυσκολιών μάθησης και της συνακόλουθης αποτυχίας στο συγκεκριμένο γνωστικό τομέα; (3) Ποια είναι σχέση των γνωστικών ελλείψεων στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με την ταυτόχρονη ύπαρξη δυσκολιών ανάγνωσης και ελλειμμάτων στην αποκωδικοποίηση του γραπτού λόγου; (4) Αν η χρήση κατάλληλου χειραπτικού υλικού βοηθά στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων (πρόσθεση – αφαίρεση), την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος και την επίλυση απλών και σύνθετων προβλημάτων;

Στην προσπάθεια πληρέστερης διερεύνησης των παραπάνω ερωτημάτων, προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε ζητήματα όπως:

- Σε ποιο βαθμό, οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, έχουν κατακτήσει τις βασικές μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, που αποτελούν τις γνωστικές προϋποθέσεις εκτέλεσης πράξεων και επίλυσης προβλημάτων σε συμβολικό επίπεδο;
- Ποια γνωστικά στοιχεία της διαδικασίας εκτέλεσης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δυσκολεύουν συνήθως τα παιδιά με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά και ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν προκειμένου να βρουν τα αποτελέσματα;
- Κατά πόσο οι μαθητές που συστηματικά αποτυχαίνουν στα μαθηματικά, κατανοούν απλά αριθμητικά προβλήματα και είναι σε θέση να επιλέξουν τις σωστές αριθμητικές αναπαραστάσεις και τις κατάλληλες πράξεις επίλυσης;
- Σε ποιο βαθμό οι δυσκολίες ανάγνωσης/αποκωδικοποίησης που παρουσιάζουν κάποιοι μαθητές επηρεάζουν την επίδοσή τους κυρίως στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων απλών και σύνθετων;
- Κατά πόσο η απλοποίηση της «μαθηματικής γλώσσας» και κυρίως των λέξεων της εκφώνησης ενός προβλήματος, αλλά και η εικονοποίηση κάποιων αριθμητικών δεδομένων βοηθά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων;
- Κατά πόσο η χρήση υλικών βοηθά την κατάκτηση μαθηματικών εννοιών, την απόκτηση δεξιοτήτων πρόσθεσης και αφαίρεσης και τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με την υλική αναπαράσταση των δεδομένων τους;

Από τα στοιχεία που έχουν αναφερθεί, εύκολα γίνεται κατανοητό ότι, η διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί, μόνο μέσω της ποιοτικής ανάλυσης των λαθών που γίνονται από τους μαθητές και μαθήτριες, που παρουσιάζουν συστηματική αποτυχία ή χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά λόγω δυσκολιών μάθησης. Τέτοιοι είναι οι μαθητές που φοιτούν στα Τμήματα Ένταξης.

2.2. Επιλογή της μεθόδου

Σύμφωνα με τον Βάμβουκα (1993), η ερευνητική στρατηγική που χρησιμοποιείται σε κάθε επιστημονική έρευνα, εξαρτάται από τη φύση του θέματος που διερευνάται και από το σκοπό της διερεύνησης. Στην περίπτωση ερευνών όπως η παρούσα, που: (α) γίνονται στα αρχικά στάδια διερεύνησης μιας γνωστικής περιοχής για την οποία διαθέτουμε λίγα στοιχεία, (β) δίνουν έμφαση στη φυσική ροή των γεγονότων και (γ) επιδιώκουν την απεικόνιση της υπάρχουσας κατάστασης κάποιων σύνθετων μορφών συμπεριφοράς, η μέθοδος που θεωρείται η καταλληλότερη είναι η *περιγραφική* (Παρασκευόπουλος, 1993).

Χαρακτηριστικά της περιγραφικής έρευνας είναι ο χαμηλός βαθμός περιοριστικών ελέγχων και παρεμβάσεων από τη μεριά του ερευνητή και η μεθοδολογική ευελιξία κατά τη συγκέντρωση των δεδομένων. Συνήθης τελικός στόχος αυτού του είδους των ερευνών, είναι η καταγραφή των διαφόρων εκφάνσεων ενός φαινομένου, καθώς και η ανίχνευση των κυρίαρχων μεταβλητών και ο προσδιορισμός των γενικών τους τάσεων (Παρασκευόπουλος, 1993). Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις περιγραφικών ερευνών, όπως η παρούσα, που δε στοχεύουν μόνο στην ανίχνευση του είδους και του τρόπου λειτουργίας των μεταβλητών μιας κατάστασης, αλλά προσπαθούν επιπλέον να προσφέρουν κάποιες ερμηνείες για τη συγκεκριμένη μορφή της κατάστασης και ακόμη να προτείνουν κάποια μέτρα για τον αποτελεσματικό χειρισμό της. Σ' αυτήν την περίπτωση μιλάμε για *διαγνωστική-περιγραφική έρευνα* (Βάμβουκας, 1993).

Μια έρευνα με σκοπούς διαγνωστικούς-περιγραφικούς, απαιτεί μια ιδιαίτερη τακτική ως προς τον τρόπο και τα μέσα συλλογής των δεδομένων. Όταν στο στόχαστρο της αναζήτησης βρίσκονται το νόημα, η δομή και η πηγή πολύπλοκων μορφών ανεπιθύμητης συμπεριφοράς, καθώς και η λήψη συγκεκριμένων υποστηρικτικών μέτρων, δεν αρκεί μόνο π.χ. η συστηματική παρατήρηση (που οδηγεί σε καταγραφές χωρίς διευκρινίσεις) και δεν αρμόζει π.χ. η χρήση αυστηρά προκαθορισμένων κριτηρίων αξιολόγησης. Αυτό που χρειάζεται είναι η άμεση επαφή και επικοινωνία μεταξύ ερευνητή και υποκειμένων, ώστε να κατανοηθούν και να προσδιοριστούν η ακριβής φύση του προβλήματος και οι προσφορότερες λύσεις του. Αυτή την επαφή και την επικοινωνία, σε πλαίσια όπου δεν υπάρχουν αυστηροί περιορισμοί και μπορεί να αναπτυχθεί η ανθρώπινη αλληλοκατανόηση, την εξασφαλίζει ένα είδος περιγραφικής έρευνας, η κλινική (Βάμβουκας, 1993).

Βασική επιδίωξη του ερευνητή που χρησιμοποιεί την κλινική μέθοδο έρευνας, είναι η ανάπτυξη στο πλαίσιο της ερευνητικής διαδικασίας, ενός κλίματος οικειότητας και εμπιστοσύνης, που βοηθά τα υποκείμενα να νιώσουν άνετα και να εκθέσουν ελεύθερα τον τρόπο σκέψης και δράσης τους, σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο θέμα (Βάμβουκας, 1993). Αυτή η ανεπιτήδευτη συμπεριφορά των υποκειμένων της έρευνας, είναι απαραίτητη για την ανίχνευση και λεπτομερή ανάλυση των πραγματικών δεδομένων της κατάστασης.

Η κλινική έρευνα μπορεί να αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη στο πεδίο των Επιστημών της Αγωγής, ιδιαίτερα σε σχέση με τη διερεύνηση σύνθετων συμπεριφορών πολυπαραγοντικής αιτιολογίας, όπως η χαμηλή επίδοση και η αποτυχία στη σχολική μάθηση. Στο πλαίσιο αυτό μπορεί να προσφέρει πολλά, μια ιδιαίτερη μορφή της κλινικής μεθόδου, η κλινική ή κριτική μέθοδος του J. Piaget. Η μέθοδος αυτή που επινοήθηκε από το μεγάλο ερευνητή το 1923 και χρησιμοποιήθηκε για τη θεμελίωση του έργου του, περιλαμβάνει: (1) εμπλοκή του παιδιού-υποκειμένου της έρευνας, σ' ένα ανάλογο με την ηλικία του πρόβλημα, (2) ελεύθερη συζήτηση για τον τρόπο σκέψης και δράσης του υποκειμένου πάνω στο πρόβλημα και (3) σχολιασμό των απαντήσεων του υποκειμένου από τον ερευνητή. Στόχος του ερευνητή είναι να αναγκάσει το παιδί να εξαντλήσει τα λογικά του επιχειρήματα προσπαθώντας να δικαιολογήσει τις ενέργειές του, ώστε να διαπιστωθεί πού φθάνει η συλλογιστική του. Για το λόγο αυτό οι ερωτήσεις του ερευνητή δεν είναι προκαθορισμένες, αλλά εξαρτώνται από τις απαντήσεις που παίρνει (Piaget, 1979γ στο Αγαλιώτης 1999). Αν και ξεκινά από την ανάλυση ατομικών περιπτώσεων, η μέθοδος του Piaget δεν μένει σ' αυτό το επίπεδο, αλλά έχει ως στόχο την ανακάλυψη του «κοινού» και «γενικού» στον τρόπο σκέψης των παιδιών. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την εξαγωγή γενικότερων συμπερασμάτων, που έχουν εφαρμογή σε ομάδες και πληθυσμούς. Εξάλλου, όπως αναφέρει ο Βάμβουκας (1993) όλα τα είδη της περιγραφικής μεθόδου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για έρευνα σε ομάδες.

Έχοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω στοιχεία, καθώς και το συγκεκριμένο στόχο της δικής μας εργασίας, επιλέξαμε την περιγραφική στρατηγική και ειδικότερα την κλινική μέθοδο, για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας.

2.3. Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 6 μαθητές (1 αλλοδαπός και 5 Έλληνες), Δ΄ και Ε΄ τάξης Δημοτικού Σχολείου (4 παιδιά Δ΄ τάξης και 2 Ε΄ τάξης – 5 αγόρια και 1 κορίτσι), που παρακολουθούσαν τα Τμήματα Ένταξης τεσσάρων δημόσιων δημοτικών σχολείων της Λαμίας. Τέσσερα από τα παιδιά του δείγματος παρακολουθούσαν στο Τμήμα Ένταξης και το μάθημα της Γλώσσας, ενώ τα υπόλοιπα μόνο τα Μαθηματικά. Μόνο ένα από τα παιδιά του δείγματος είχε διάγνωση από το οικείο Κ.Δ.Α.Υ. για γενικευμένες μαθησιακές δυσκολίες.

Τα Τμήματα Ένταξης στα οποία φοιτούσαν τα παιδιά του δείγματος, ήταν «συνηθισμένα» τμήματα ένταξης, δηλαδή δεν φοιτούσαν σ' αυτά μόνο παιδιά από κάποια συγκεκριμένη κατηγορία ειδικών αναγκών, και λειτουργούσαν για έναν τουλάχιστον χρόνο οπότε είχαν, κατά τεκμήριο, ξεπερασθεί τα άμεσα οργανωτικά προβλήματα. Στην περιοχή υπήρχε ειδικό σχολείο, στο οποίο μπορούσαν να παραπεμφθούν τυχόν παιδιά με ιδιαίτερα σοβαρές δυσκολίες κι έτσι η σύνθεση του πληθυσμού του τμήματος ένταξης ήταν αποτέλεσμα επιλογής κι όχι ανάγκης. Επίσης, υπήρχε διαγνωστική υπηρεσία ή ομάδα (Κέντρο Διάγνωσης Αξιολόγησης Υποστήριξης [Κ.Δ.Α.Υ.], Ιατροπαιδαγωγικό Κέντρο) η οποία, σύμφωνα τουλάχιστον με τις ισχύουσες διατάξεις, θα έπρεπε να συμμετέχει στο έργο της επιλογής των μαθητών. Η συμμετοχή των παραπάνω παιδιών στο Τμήμα Ένταξης δεν ήταν πρόταση της διαγνωστικής υπηρεσίας, αλλά αποτέλεσμα της εισήγησης του δασκάλου της τάξης σε συνεννόηση με το Σχολικό Σύμβουλο το Τμήμα Ένταξης

Στην επιλογή του δείγματος βασιστήκαμε κυρίως στις κρίσεις των εκπαιδευτικών της κάθε τάξης για τις δυσκολίες του κάθε μαθητή στα μαθηματικά, καθώς και των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης που φοιτούσαν τα παιδιά. Από τα 6 παιδιά του δείγματος, μόνον ένα είχε διάγνωση (το 2004) από το οικείο Κ.Δ.Α.Υ. για μαθησιακές δυσκολίες, κυρίως στη Γλώσσα, με την προτροπή της εγγραφής του σε ειδικό σχολείο. Σύμφωνα με την ισχύουσα νομοθεσία: *«Σε καμιά περίπτωση δεν αποκλείεται μαθητής από το Τμήμα Ένταξης, αν οι γονείς του επιθυμούν τη φοίτησή του σε αυτό, ακόμα κι αν δεν έχει διάγνωση από τις αρμόδιες διαγνωστικές υπηρεσίες. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί σχετική εισήγηση από το Σχολικό Σύμβουλο Ειδικής Αγωγής.»* (Υπ. Απόφαση 27922/Γ6/08-03-2007).

Επίσης η επιλογή της ηλικίας των μαθητών του δείγματος (9-11 ετών, Δ΄ & Ε΄ τάξη) έγινε για δύο λόγους: (1) τα παιδιά αυτής της ηλικίας σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) έχουν κατακτήσει τις βασικές μαθηματικές έννοιες, γνωρίζουν τις τέσσερις πράξεις, επιλύουν προβλήματα. Στόχος της έρευνάς μας ήταν να ανιχνεύσουμε κατά πόσο οι επιμέρους στόχοι που θέτει το Α.Π.Σ. έχουν κατακτηθεί από τα παιδιά (2) υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός ερευνητικών δεδομένων που προέρχονται από μελέτες με παιδιά αυτής της ηλικίας (3η και 4η βαθμίδα) για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας.

2.4. Μέσα συλλογής των δεδομένων – Δοκιμασίες αξιολόγησης

Σύμφωνα με τους Beattie και Algozzine (1982, στο Αγαλιώτης 1999), μια καλή διαγνωστική προσέγγιση των δυσκολιών μάθησης στα Μαθηματικά, περιλαμβάνει: (1) την χορήγηση ενός «έτοιμου» γνωστού τεστ, μέσω του οποίου θα τεκμηριωθεί η ύπαρξη της αποτυχίας και θα ανιχνευθούν αδρά οι γνωστικές περιοχές στις οποίες αυτή εμφανίζεται και (2) τη λεπτομερέστερη εξέταση των παιδιών που έχουν επιλεγεί μέσω της προηγούμενης διαδικασίας, με βάση ένα αυτοσχέδιο κριτήριο αξιολόγησης, που θα επιτρέπει τον ακριβή καθορισμό της φύσης των λαθών του κάθε μαθητή, σε όποιο επιμέρους τμήμα των μαθηματικών μας ενδιαφέρει.

Στη δική μας περίπτωση, η πρώτη από τις παραπάνω φάσεις προφανώς θα επιβεβαιώσει τη χαμηλή μαθηματική επίδοση των παιδιών αφού η αποτυχία των συγκεκριμένων μαθητών στα Μαθηματικά, είχε ήδη τεκμηριωθεί από το σχολείο ή τις διαγνωστικές υπηρεσίες, με την παραπομπή τους στα Τμήματα Ένταξης.

2.4.1. Σταθμισμένα κριτήρια αξιολόγησης

Χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω σταθμισμένες δοκιμασίες για να ανιχνεύσουν τις μαθηματικές και τις γλωσσικές δυσκολίες που εμφανίζουν τα παιδιά.

2.4.1.1. Τεστ ZAPEKI

Πρόκειται για ένα σταθμισμένο τεστ που αξιολογεί τις μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών Β΄ μέχρι και Δ΄ Δημοτικού. Αποτελεί την ελληνική έκδοση του NUCALC, μιας νευροψυχολογικής δοκιμασίας για την αριθμητική επεξεργασία και τον υπολογισμό των παιδιών που αναπτύχθηκε από μια πολλαπλών ειδικοτήτων ερευνητική ομάδα και έχει χρησιμοποιηθεί σε παρόμοιες μελέτες στη Γαλλία, την Ελβετία, και τη Βραζιλία (Dellatolas et al, 2000). Το τεστ NUCALC είναι ένα διεθνώς αναγνωρισμένο εργαλείο που βοηθά στη διαφορική ανίχνευση των αδυναμιών στις περιοχές της μαθηματικής επεξεργασίας και του αριθμητικού υπολογισμού και συμβάλλει στη διάγνωση των μαθηματικών διαταραχών. Η στάθμιση της ελληνικής έκδοσης του NUCALC με την ονομασία ZAPEKI έγινε το 2004 από ομάδα ερευνητών (Koumoula A., Tsironi V., Stamouli,V. Bardani I., Siapati S., Graham A., Kafantaris I, Charalambidou I., Dellatolas G., and Von Aster M.). Κατάλληλα εκπαιδευμένα πρόσωπα μπορούν να το διαχειριστούν, και μπορεί αμέσως να ανιχνεύσει τις μαθηματικές δυσκολίες (Koumoula et al, 2004)

Το τεστ ZAPEKI περιλαμβάνει 12 υπο-τεστ, που καλύπτουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων όσον αφορά την επεξεργασία μαθηματικών δεδομένων ανιχνεύοντας τα ελλείμματα των παιδιών. Το τεστ χωρίζεται στις ακόλουθες δραστηριότητες (υπο-τεστ): 1) *Απαρίθμηση κηλίδων* 2) *Μέτρηση προς τα πίσω 3) Υπαγόρευση αριθμών* 4) *Νοερός υπολογισμός 5) Ανάγνωση αριθμών 6) Αντιστοίχιση οπτικά δοσμένων αριθμών με τις θέσεις τους πάνω σε κάθετο 7) Μνήμη αριθμών 8) Προφορική σύγκριση 9) Αντιληπτική εκτίμηση ποσότητας* 10) *Εκτίμηση ποσότητας ανάλογα με το πλαίσιο 11) Επίλυση προβλήματος και 12*) *Γραπτή σύγκριση αριθμών.*

2.4.1.2. ΑΣυΠ - Αξιολόγηση Συγκέντρωσης και Προσοχής στο δημοτικό σχολείο

Αν και η στενή σχέση μεταξύ της λειτουργίας της προσοχής και της ακαδημαϊκής επίδοσης είναι πλέον τεκμηριωμένη, στην Ελλάδα δεν ήταν μέχρι πρότινος διαθέσιμο ένα εργαλείο ειδικά σχεδιασμένο για τη σφαιρική αξιολόγηση των βασικών παραμέτρων της προσοχής και την παροχή χρήσιμων στοιχείων για την τροποποίηση/εξατομίκευση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Το παρόν εργαλείο βασίζεται σε δοκιμασίες που χρησιμοποιούνται ευρέως σε αρκετές δυτικοευρωπαϊκές χώρες είτε μεμονωμένα είτε ως τμήμα μεγαλύτερων συστοιχιών. Υλοποιήθηκε από το Πανεπιστήμιο Κρήτης (Π. Σίμος, Α. Μουζάκη, Γ. Σιδερίδης) στο πλαίσιο του έργου «Κατασκευή και στάθμιση 12 διερευνητικών – ανιχνευτικών εργαλείων (κριτηρίων) των μαθησιακών δυσκολιών» του Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ ΙΙ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων».

Το τεστ Ανίχνευσης και Αξιολόγησης της Συγκέντρωσης και της Προσοχής (ΑΣΥΠ) απευθύνεται σε παιδιά σχολικής ηλικίας (6-10 ετών). Σκοπός του ΑΣΥΠ είναι (α) η ανίχνευση της πιθανότητας εμφάνισης δυσκολιών προσοχής και συγκέντρωσης στο δημοτικό σχολείο, και (β) η αναλυτική εκτίμηση πιθανών ελλειμμάτων σε κάθε μία από τις δύο διαστάσεις (διάρκεια και εύρος) των λειτουργιών της προσοχής και της συγκέντρωσης. Η συμβολή της λειτουργίας της παρατεταμένης προσοχής και, κυρίως του εύρους της προσοχής, φαίνεται να είναι ιδιαίτερα σημαντική στην ικανότητα κατανόησης του προφορικού και του γραπτού λόγου.

Το ΑΣΥΠ περιλαμβάνει τέσσερις δοκιμασίες (δύο οπτικές και δύο ακουστικές) που εξασφαλίζουν επαρκή κάλυψη των δύο κύριων παραμέτρων της λειτουργίας της προσοχής και της συγκέντρωσης, δηλαδή της παρατεταμένης διατήρησης και του εύρους (ποσότητα στοιχείων που μπορούν να διατηρηθούν στη συνείδηση προς επιλογή και περαιτέρω επεξεργασία ή μακρόχρονη αποθήκευση).

2.4.1.3. ΑξΕΛ - Αξιολόγηση Επιτελικών Λειτουργιών στο δημοτικό σχολείο

Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις αναφορικά με τη συμβολή των επιτελικών λειτουργιών στην ικανότητα κατανόησης του γραπτού και προφορικού λόγου, στην ικανότητα επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων, στην ικανότητα συγκράτησης πληροφοριών εκτός του πλαισίου στο οποίο συντελείται η μάθηση (μακροπρόθεσμη-μνήμη για γενικές γνώσεις), καθώς και στο συνεχή έλεγχο και ρύθμιση της συμπεριφοράς (Hooper et al., 2002).

Με τον όρο επιτελικές (ή εκτελεστικές) (executive functions) αναφερόμαστε σε λειτουργίες που σχετίζονται με την ικανότητα σχεδιασμού και αποτελεσματικής διεκπεραίωσης δραστηριοτήτων και αφορούν την ευκολία με την οποία το άτομο θέτει σε ενέργεια ένα ήδη διαμορφωμένο ή εξωτερικά υποδεικνυόμενο σχέδιο δράσης αγνοώντας εναλλακτικούς τρόπους δράσης (που πιθανώς φαίνονται πιο "φυσικοί" ή εύκολοι), παρεμβαλλόμενα ερεθίσματα, επιθυμίες κτλ. που δεν έχουν σχέση με το υπό εκτέλεση έργο.

Το ΑΞΕΛ συμπληρώνει το Τεστ για την Αξιολόγηση της Συγκέντρωσης και της Προσοχής (ΑΣΥΠ) καθώς είναι γενικά παραδεκτό ότι η ικανότητα διαμόρφωσης και τήρησης σχεδίων δράσης αποτελεί τον κύριο παράγοντα ελέγχου της προσοχής και της συγκέντρωσης, ιδιαίτερα στην ύστερη παιδική ηλικία (Brookshire et al., 2004). Όπως και το ΑΣυΠ, βασίζεται σε δοκιμασίες που χρησιμοποιούνται ευρέως σε αρκετές δυτικοευρωπαϊκές χώρες και που αξιολογούν α) την ικανότητα σχεδιασμού δραστηριοτήτων, β) την ικανότητα επίλυσης λεκτικών και μη λεκτικών προβλημάτων που απαιτούν σχεδιασμό, επαγωγική και συνδυαστική σκέψη. Συντελεί στην ανίχνευση παραμέτρων που σχετίζονται με γλωσσικές διαταραχές, μαθησιακές δυσκολίες και γενικότερα χαμηλή ακαδημαϊκή επίδοση. Υλοποιήθηκε και αυτό από το Πανεπιστήμιο Κρήτης (Π. Σίμος, Α. Μουζάκη, Γ. Σιδερίδης) στο πλαίσιο του έργου «Κατασκευή και στάθμιση 12 διερευνητικών – ανιχνευτικών εργαλείων (κριτηρίων) των μαθησιακών δυσκολιών» του Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ ΙΙ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Σκοπός του τεστ είναι (α) η ανίχνευση (κυρίως στην Α' Τάξη) της πιθανότητας εμφάνισης δυσκολιών μάθησης, και (β) η αναλυτική εκτίμηση (στις Β'-Ε' Τάξεις) πιθανών ελλειμμάτων σε επιμέρους γνωστικούς τομείς που συμβάλλουν στην εμφάνιση των εν λόγω δυσκολιών. Απώτερος στόχος της χρήσης του εργαλείου είναι επομένως η εξαγωγή αξιόπιστων και επαρκών στοιχείων για τον καλύτερο σχεδιασμό προγραμμάτων εξατομικευμένης εκπαιδευτικής παρέμβασης για την πρόληψη (στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού) ή την αντιμετώπισή δυσκολιών μάθησης (στις μεγαλύτερες τάξεις) λαμβάνοντας υπ' όψη τις γνωστικές ιδιαιτερότητες του μαθητή.

2.4.1.4. Τεστ Ανάγνωσης ΤΕΣΤ-Α

Το Τεστ Ανάγνωσης ΤΕΣΤ-Α υλοποιήθηκε από το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας – Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής με επιστημονική υπεύθυνο την Κα Παντελιάδου Σουζάνα, στο πλαίσιο του έργου «Κατασκευή και στάθμιση 12 διερευνητικών – ανιχνευτικών εργαλείων (κριτηρίων) των μαθησιακών δυσκολιών» του Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ ΙΙ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Αποτελείται από τέσσερις δομικούς άξονες: (α) αποκωδικοποίηση, (β) ευχέρεια, (γ) μορφολογία – σύνταξη και (δ) κατανόηση. Στο Τεστ Ανάγνωσης (Τεστ-Α) αξιολογείται τόσο η επίδοση στην ακρίβεια και την ευχέρεια της αναγνωστικής αποκωδικοποίησης, όσο και η κατανόηση των μαθητών. Επιπλέον, με βάση τον βαρύνοντα ρόλο της γνώσης της μορφολογίας και της σύνταξης στην ελληνική γλώσσα, στο πλαίσιο του Τεστ-Α αξιολογείται και η μορφοσυντακτική επίδοση στην ανάγνωση.

Σκοπός του Τεστ Ανάγνωσης (Τεστ-Α) είναι η σφαιρική αξιολόγηση της αναγνωστικής ικανότητας μαθητών της Γ΄ δημοτικού έως και της Γ΄ γυμνασίου (8 έως 15 ετών) και ο εντοπισμός όσων μαθητών αντιμετωπίζουν σοβαρές αναγνωστικές δυσκολίες στις ηλικίες της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Το Τεστ-Α προσφέρει μεγάλο πλούτο πληροφοριών για την αναγνωστική συμπεριφορά των μαθητών και μπορεί να αξιοποιηθεί με πολλαπλούς τρόπους:

α) Παρέχεται η δυνατότητα για σφαιρική αξιολόγηση της αναγνωστικής ικανότητας. Μέχρι σήμερα, τα διάφορα μέσα (τεστ) αξιολόγησης της αναγνωστικής επίδοσης εστιάζουν είτε μόνο στην αποκωδικοποίηση, είτε μόνο στην κατανόηση, δίνοντας ελλιπείς πληροφορίες. Με το Τεστ-Α περιγράφεται μια συνολική εικόνα της αναγνωστικής επίδοσης για το μαθητή.

β) Παρέχεται η δυνατότητα για συγκριτική αξιολόγηση της αναγνωστικής επίδοσης ενός μαθητή σε σχέση με το μέσο όρο επίδοσης στην κάθε τάξη, σε όλη τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και όχι μόνο στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

γ) Παρέχεται η δυνατότητα για ανίχνευση των μαθητών με σοβαρές αναγνωστικές δυσκολίες στο πλαίσιο του σχολείου.

δ) Διευκολύνεται η τυπική διάγνωση μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες, καθώς με τη χορήγηση του Τεστ-Α μπορεί να πιστοποιηθεί η αναγνωστική τους απόκλιση από το μέσο όρο των μαθητών που φοιτούν στην ίδια τάξη.

ε) Παρέχεται η δυνατότητα για διευρυμένη συμμετοχή των εκπαιδευτικών στην ανίχνευση των Μαθησιακών Δυσκολιών των μαθητών.

στ) Δίνεται η δυνατότητα για ορθολογική και τεκμηριωμένη σύνταξη του εξατομικευμένου εκπαιδευτικού προγράμματος κάθε μαθητή μέσα από την συγκριτική ανάλυση της επίδοσης στις διαφορετικές δοκιμασίες.

ζ) Δίνεται η δυνατότητα της ερευνητικής αξιοποίησης, σε κάθε περίπτωση που απαιτείται η έγκυρη και αξιόπιστη μέτρηση του αναγνωστικού επιπέδου για μαθητές που φοιτούν στις τάξεις από Γ΄ δημοτικού έως και Γ΄ γυμνασίου. Ακόμη, οι ερευνητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις επιμέρους δοκιμασίες, όταν διερευνάται η αξιολόγηση επιμέρους αναγνωστικών δεξιοτήτων, στο βαθμό που και αυτές οι δοκιμασίες είναι έγκυρες και αξιόπιστες, διατηρώντας όλες τις απαιτούμενες ψυχομετρικές ιδιότητες.

2.4.2. Άτυπες δοκιμασίες

2.4.2.1. Δοκιμασίες αξιολόγησης με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Μια μελέτη του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών (Α.Π.Σ.) κάθε τάξης θέτει τους στόχους της διδασκαλίας των επιμέρους ενοτήτων και αποτελεί τη βάση του προγράμματος της επόμενης τάξης στο πλαίσιο της σπειροειδούς διάταξης της ύλης. Με στόχο να ανιχνευθούν ποιοι από τους στόχους που τίθενται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα κατακτήθηκαν από τους μαθητές, κατασκευάστηκαν από τον ερευνητή δύο δοκιμασίες αξιολόγησης που βασίστηκαν στο Α.Π.Σ. της Α΄ και Β΄ τάξης (βλ. Παράρτημα, έντυπα A_1 και A_2). Οι συγκεκριμένες δοκιμασίες χορηγήθηκαν στην πρώτη φάση της έρευνας με σκοπό να ανιχνευθούν τυχόν αδυναμίες ή ελλείψεις των παιδιών σε βασικές μαθηματικές έννοιες και δραστηριότητες. Οι ασκήσεις που περιλάμβαναν οι δύο δοκιμασίες βασίστηκαν στους γενικούς στόχους που θέτει το Α.Π.Σ. σε κάθε τάξη στο μάθημα των μαθηματικών και ειδικότερα στις ευρύτερες ενότητες: (α) αριθμοί και πράξεις, (β) μετρήσεις, (γ) γεωμετρία και (δ) επίλυση προβλήματος.

Στην κατασκευή του κριτηρίου αξιολόγησης, που αποτέλεσε εργαλείο συλλογής των δεδομένων της παρούσας έρευνας, χρησιμοποιήθηκε η ιεραρχία των μαθησιακών στόχων που προκύπτει από το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου. Λέγοντας ιεραρχία εννοούμε έναν κατάλογο, που περιλαμβάνει τις χαμηλότερης τάξης ή απλούστερες και τις υψηλότερης τάξης ή συνθετότερες έννοιες και δεξιότητες, σε μια λογική ακολουθία, με κριτήριο, το ποια γνωστικά στοιχεία αποτελούν τις προϋποθέσεις για την εξέλιξη των διαφόρων εννοιών και την τελική κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Underhill et al, 1980). Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκαν οι μαθησιακοί στόχοι του τμήματος του σχετικού με την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων με ακέραιους αριθμούς, με την προσθήκη ενός τμήματος ελέγχου ορισμένων βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως η διατήρηση του αριθμού ή η θεσιακή αξία. Έγινε προσπάθεια, ώστε κάθε δραστηριότητα να ελέγχεται σε πραξιακό, εικονιστικό και συμβολικό επίπεδο.

2.4.2.2. Προβλήματα των Eric De Corte & Lieven Verschaffel

Για την ανίχνευση των δεξιοτήτων των παιδιών και των διαδικασιών που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων, χρησιμοποιήσαμε την ομάδα προβλημάτων των De Corte και Verschaffel (1998) (βλ. Παράρτημα, έντυπο A_3). Οι ίδιοι πρότειναν ένα θεωρητικό μοντέλο επίλυσης στοιχειωδών λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, στο οποίο η σημασιολογική επεξεργασία του προβλήματος θεωρείται ως μια αποφασιστική συνιστώσα σε μια ικανή διαδικασία επίλυσης. Ένα βασικό εύρημα των μελετών τους που αφορά την επίδοση των παιδιών είναι ότι τα λεκτικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, αλλά διαφέρουν ως προς τη σημασιολογική τους δομή, είναι δυνατόν να διαφέρουν πολύ στο βαθμό της δυσκολίας τους. Σύμφωνα με το μοντέλο, το επίπεδο δυσκολίας της σημασιολογικής διάκρισης των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει, είτε επειδή το αναγκαίο σημασιολογικό σχήμα για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλημάτων δεν είναι κάτι που τα παιδιά το κατέχουν εξίσου καλά, είτε επειδή μερικές αναπαραστάσεις προβλημάτων ταιριάζουν πιο εύκολα με την κατάλληλη αριθμητική πράξη απ' ότι άλλες.

Η δοκιμασία αποτελείται από οκτώ προβλήματα που ανήκουν στις τρεις κύριες κατηγορίες λεκτικών προβλημάτων: μεταβολής (αύξησης και ελάττωσης), σύνθεσης και σύγκρισης (περισσότερο και λιγότερο). Καθεμιά από τις τρεις κατηγορίες υποδιαιρείται σε διαφορετικούς τύπους προβλημάτων, ανάλογα με το ποια είναι η άγνωστη ποσότητα.

2.4.2.3. Κριτήριο Γεωμετρίας

Με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα κατασκευάστηκε μια δοκιμασία ανίχνευσης των πιθανών δυσκολιών στο πεδίο της Γεωμετρίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο A_4)και συγκεκριμένα:

- στην αναγνώριση και κατασκευή των βασικών επίπεδων σχημάτων (τρίγωνο – τετράγωνο – ορθογώνιο – κύκλος),
- την αναγνώριση βασικών στερεών (κύβος – ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο – σφαίρα – κύλινδρος – πυραμίδα),
- την αντιστοίχιση πολυγώνων,

- την καταμέτρηση βασικών σχημάτων σε πολύπλοκες εικόνες και
- μια διαισθητική μέτρηση του εμβαδού και του όγκου χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης ένα τετραγωνάκι κι ένα κυβάκι αντίστοιχα.

2.5. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Μετά την επιλογή του δείγματος ξεκίνησε η διαδικασία συλλογής των δεδομένων της έρευνάς μας η οποία διήρκεσε από τον Ιανουάριο μέχρι τον Ιούνιο του 2007.

Σε όλη τη διάρκεια της έρευνας πέρα από τη συστηματική παρατήρηση, ο ερευνητής, σύμφωνα με την κλινική μέθοδο, φρόντισε για τη δημιουργία κλίματος εμπιστοσύνης και οικειότητας μεταξύ αυτού και των υποκειμένων της έρευνας, ώστε να επιτευχθεί η ανεπιτήδευτη συμπεριφορά των παιδιών. Στην 1η φάση της έρευνας χορήγησε τις τυποποιημένες και άτυπες δοκιμασίες παρατηρώντας και καταγράφοντας τη συμπεριφορά των παιδιών στην επεξεργασία μαθηματικών δεδομένων. Στη 2η φάση και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης αρχικά βοήθησε τους μαθητές στην εξάσκηση και χρήση του χειραπτικού υλικού φροντίζοντας όλα τα υποκείμενα να χρησιμοποιήσουν όλα τα υλικά, ενώ στην περίοδο της αξιολόγησης ενθάρρυνε τα παιδιά στην αβίαστη και ελεύθερη χρήση του χειραπτικού υλικού με βάση τις επιλογές τους.

2.5.1. 1η ΦΑΣΗ: Χορήγηση τυποποιημένων και άτυπων δοκιμασιών

Αρχικά κάθε μαθητής του δείγματος παρακολουθήθηκε για δύο διδακτικές ώρες – όχι την ίδια μέρα - μέσα στην τάξη του και την ώρα των Μαθηματικών. Η συμπεριφορά του και γενικότερα η παρουσία του μαθητή στην τάξη του παρατηρήθηκε και καταγράφηκε σε φύλλο παρατήρησης. Στη συνέχεια τα παιδιά παρατηρήθηκαν για δύο ακόμη διδακτικές ώρες και στα Τμήματα Ένταξης τα οποία παρακολουθούσαν και αντίστοιχα καταγράφηκε η συμπεριφορά τους και η γενικότερη επίδοσή τους, στην προσπάθεια των εκπαιδευτικών των Τμημάτων Ένταξης να ενισχύσουν τις μαθηματικές, αλλά και τις γλωσσικές τους δεξιότητες.

Μετά το πρώτο στάδιο της παρατήρησης, η εργασία με όλα τα υποκείμενα της έρευνας έγινε ατομικά και με βάση τις αρχές της κλινικής μεθόδου. Βασική μέριμνα του ερευνητή σ' όλη τη διάρκεια της εξέτασης ήταν όχι απλώς να εξασφαλιστούν κάποιες απαντήσεις στις δοκιμασίες των κριτηρίων αξιολόγησης, αλλά να δημιουργηθεί εκείνο το κλίμα που θα επέτρεπε στο παιδί να εκφραστεί ελεύθερα και να εκθέσει το ίδιο τις λογικές διαδικασίες που ακολουθούσε, μέσω της «φωναχτής σκέψης». Σε κάθε σχολείο ο χώρος της εργασίας με το κάθε παιδί ήταν ξεχωριστός, αυτόνομος και ήσυχος, με όσο το δυνατόν λιγότερες πηγές απόσπασης της προσοχής. Μέχρι τον Απρίλιο εφαρμόστηκαν όλα τα κριτήρια ανίχνευσης των μαθησιακών δυσκολιών πρώτιστα στα Μαθηματικά και δευτερευόντως στη Γλώσσα και συλλέχθηκαν όλα τα δεδομένα για τα ελλείμματα των παιδιών και για την κατηγοριοποίηση των λαθών τους, προκειμένου να ακολουθήσει το παρεμβατικό πρόγραμμα με τη χρήση χειραπτικών υλικών, με απώτερο σκοπό τη διευκόλυνση της αναπαράστασης των αριθμητικών δεδομένων, της κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών και εκμάθησης των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

2.5.2. 2η ΦΑΣΗ: Παρεμβατικό πρόγραμμα

Μετά τη συλλογή των δεδομένων από την πρώτη φάση της παρατήρησης και της ανίχνευσης των δυσκολιών που συναντούν στα μαθηματικά τα παιδιά της έρευνάς μας, ακολούθησε το πρόγραμμα της παρέμβασης που διήρκεσε από το Μάιο μέχρι τον Ιούνιο.

Σ' αυτή τη δεύτερη φάση της έρευνας ο ερευνητής εργάστηκε με καθένα από τους μαθητές του δείγματος σε δύο περιόδους. Αρχικά, για πέντε διδακτικές ώρες, με στόχο την εκμάθηση της χρήσης του χειραπτικού υλικού που θα χρησιμοποιήσουν. Κάθε μαθητής είχε τη δυνατότητα να χειριστεί το υλικό σε προβληματικές μαθηματικές καταστάσεις και λεκτικά προβλήματα, να επιλέγει εκείνο που εξυπηρετεί καλύτερα την επίλυση της συγκεκριμένης άσκησης ή προβλήματος και κατόπιν να αντιστοιχεί την ενέργεια που κάνει με την αντίστοιχη πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση). Ύστερα από την περίοδο εκμάθησης της χρήσης του χειραπτικού υλικού ακολούθησε η περίοδος της αξιολόγησης, που διήρκεσε τρεις διδακτικές ώρες και όπου τα παιδιά κλήθηκαν να επιλύσουν επιλεγμένα μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας όποιο από τα υλικά επιθυμούσαν.

2.5.2.1. Στόχοι και υλικό της παρέμβασης

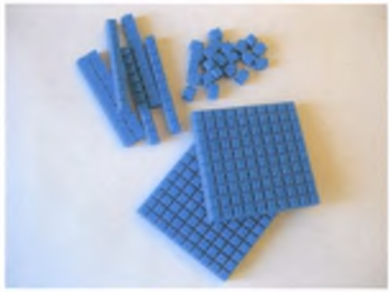
Στόχος του παρεμβατικού προγράμματος ήταν η ενίσχυση των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών με τη χρήση κατάλληλου χειραπτικού υλικού όσον αφορά την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, την κατανόηση «δύσκολων» μαθηματικών εννοιών, την εκμάθηση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και τη διαισθητική κατανόηση γεωμετρικών εννοιών όπως το εμβαδό και ο όγκος.

Για την εξάσκηση των παιδιών με το υλικό κατασκευάστηκαν κατάλληλα φύλλα εργασίας (βλ. Παράρτημα) που κατευθύνουν τους μαθητές στη χρήση του για τον υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων, την κατανόηση εννοιών όπως «μεγαλύτερο»/«λιγότερο», την επίλυση προβλημάτων απλών και σύνθετων, τη διαισθητική κατανόηση της επιφάνειας των σχημάτων και του όγκου των στερεών.

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε αποτελούνταν:

(1) Από μια *αριθμογραμμή – χαλάκι* (εικόνα 1). Πρόκειται για ένα πλαστικό χαλάκι διαστάσεων 0,40 x 3 μ., το οποίο έχει διαβάθμιση αριθμών από το 1 μέχρι το 20 σε ίσα διαστήματα. Με μοντέλο αυτό φτιάχτηκαν αριθμογραμμές από το 1-20 και τυπώθηκαν σε μέγεθος Α4.

Εικόνα 1


Εικόνα 2

(2) *Τα base ten blocks – κυβάκια δεκαδικής βάσης* (Εικόνα 2). Πρόκειται για ένα σύνολο πλαστικών κύβων (με δυνατότητα συγκόλλησης), που είναι χωρισμένοι σε μονάδες (απλά κυβάκια), σε δεκάδες (10 εμφανή κυβάκια ενωμένα στη σειρά), εκατοντάδες (100 εμφανή κυβάκια ή 10 εμφανείς δεκάδες κύβων ενωμένοι) και μία χιλιάδα (1000 κυβάκια ή 100 δεκάδες ή 10 εμφανείς εκατοντάδες ενωμένα).

(3) *Η ράβδος μέτρησης* (σιδηρόδρομος) (Εικόνα 3). Πρόκειται για μια πλαστική ράβδο μήκους 1 μ. διαβαθμισμένη από το 0 μέχρι το 100, η οποία έχει τη δυνατότητα να «φιλοξενήσει» κυβάκια δεκαδικής βάσης σ' ένα «αυλάκι» που υπάρχει στο μέσο της και κατά μήκος της ράβδου. Κάθε κυβάκι αντιστοιχεί σε 1 εκ. ή σε 1 διάστημα της ράβδου.


Εικόνα 3


Εικόνα 4

(4) *Ψεύτικα χαρτονομίσματα και κέρματα* (Εικόνα 4). Συγκεκριμένα χαρτονομίσματα των 5, 10, 20 και 50 € και κέρματα των 2 και 1 € και των 50, 20, 10 Λ.

(5) *Αλυσίδες* (Εικόνα 5). Πρόκειται για πλαστικούς κρίκους διαφορετικών χρωμάτων οι οποίοι μπορούσαν να ενωθούν ο ένας με τον άλλο δημιουργώντας αλυσίδες.

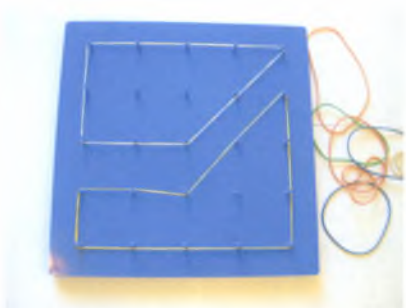
Εικόνα 5

Εικόνα 6

(6) *Διαφανή σχήματα* (Εικόνα 6). Χρησιμοποιήσαμε τέσσερα διαφανή σχήματα: ένα τετράγωνο (αποτελεί τη μονάδα μέτρησης), ένα ορθογώνιο με εμβαδό ίσο με δύο τετράγωνα, ένα ορθογώνιο με εμβαδό ίσο με τρία τετράγωνα και ένα ορθογώνιο με εμβαδό ίσο με 6 τετράγωνα.

(7) *Ξύλινους κύβους* (Εικόνα 7). Κύβοι φτιαγμένοι από ξύλο οι οποίοι και αποτελούσαν μονάδες μέτρησης όγκου (κυβικά εκατοστά) για διάφορα τρισδιάστατα σχήματα.

Εικόνα 7



Εικόνα 8

(8) *Γεωπίνακας* (Εικόνα 8). Ο Γεωπίνακας είναι υλικό που αποτελείται από μια τετράγωνη πλαστική βάση διπλής όψης. Στη μια όψη υπάρχουν 16 ακίδες που σχηματίζουν ένα Καρτεσιανό επίπεδο 4 x 4. Στις ακίδες αυτές πιάνονται πολύχρωμα λαστιχάκια δημιουργώντας τα περισσότερα είδη πολύπλευρων επίπεδων σχημάτων. Τοποθετώντας κατάλληλα τα λαστιχάκια μπορούμε να σχηματίσουμε τα περισσότερα απλά και σύνθετα επίπεδα σχήματα.. Επίσης μπορούμε να συγκρίνουμε σχήματα ως προς το εμβαδόν τους το οποίο μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τα ευδιάκριτα ορθογώνια τετράπλευρα και

τρίγωνα (τετράγωνα ή μισά), που χωρίζονται τα σχήματα. Η δεύτερη όψη έχει μια κεντρική ακίδα και πολλές περιφερειακές και χρησιμοποιείται για τη δημιουργία κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο.

2.5.2.2. Διαδικασία παρέμβασης

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την εκμάθηση του υλικού οι μαθητές εργάστηκαν με κατάλληλα φύλλα εργασίας για πέντε διδακτικές ώρες. Στο 1ο 45λεπτο χρησιμοποιήθηκε η αριθμογραμμή (χαλάκι) μέχρι το 20. Με την αριθμογραμμή – χαλάκι τα παιδιά έκαναν συγκρίσεις αριθμών – πατώντας στο αντίστοιχο σημείο - χρησιμοποιώντας τις έννοιες μεγαλύτερος/μικρότερος, και σαν παιχνίδι κάθε μαθητής πατούσε (με τα πόδια) σε κάποιο από τα νούμερα 1 – 20 ανάλογα με τις οδηγίες: «περισσότερο ή λιγότερο από ...». Αφού ασκήθηκαν σε αρκετά παραδείγματα στη συνέχεια τους δόθηκε φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_1) στο οποίο είχαν απεικονιστεί αρκετές αριθμογραμμές μέχρι το 20 και ζητούνταν από τα παιδιά να μετακινηθούν πάνω σ' αυτές ανεβαίνοντας (περισσότερο) ή κατεβαίνοντας (λιγότερο) από τον αριθμό που εκφωνούνταν κάθε φορά. Ακολούθως ζητήθηκε από τα παιδιά νοερά να υπολογίσουν το περισσότερο ή λιγότερο διάφορων εκφράσεων με το νου.

Ιδιαίτερη εντύπωση τους έκαναν τα κυβάκια δεκαδικής βάσης. Στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_2), εξασκήθηκαν με τις μονάδες, τις 10δες και τις 100δες, συγκρίνοντας τα μεγέθη και κατανοώντας διαισθητικά τη θεσιακή αξία των ποσοτήτων. Απεικόνισαν αρκετούς αριθμούς μέχρι το 1000 χρησιμοποιώντας τα Blocks. Στη συνέχεια οι μαθητές εξασκήθηκαν στην εκτέλεση απλών προσθέσεων και αφαιρέσεων με διψήφιους αλλά και με τριψήφιους αριθμούς. Ακολούθησαν προσθέσεις και αφαιρέσεις με υπέρβαση της δεκάδας (κρατούμενο). Στο τελευταίο μέρος ασχολήθηκαν με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια των ράβδων δεκαδικής βάσης.

Στην αρχή του 2ου 45λεπτου οι μαθητές εξασκήθηκαν σε κατάλληλο φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_3) με τη χρήση της ράβδου 1 μέτρου. Στη μέση της ράβδου υπάρχει μια εγκοπή (αυλάκι) όπου μπορούν να τοποθετούνται τα Blocks. Αφού τους έδειχνε ο ερευνητής τη ράβδο και την αρίθμηση πάνω σ' αυτή από το 1 – 100, προσπάθησαν να κάνουν αρχικά προσθέσεις και στη συνέχεια αφαιρέσεις (μέσα στην 1η εκατοντάδα). Τα παιδιά έχοντας πια κατανοήσει τη διάσπαση των αριθμών σε Μ, Δ, Ε, εξασκήθηκαν στις προσθέσεις ξεκινώντας στη ράβδο από το σημείο του 1ου προσθετέου και τοποθετώντας από εκεί και πάνω (ανεβαίνοντας) όσες Δ και Μ έχει ο 2ος προσθετέος. Ο αριθμός στον οποίο έφταναν ήταν και το άθροισμα της πρόσθεσης. Κατά τον ίδιο τρόπο στις αφαιρέσεις ξεκινούσαν από το μειωτέο και τοποθετώντας προς τα κάτω (κατεβαίνοντας) τις Δ και Μ του αφαιρετέου κατέληγαν στον αριθμό που αποτελεί και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης.

Ύστερα από την εξάσκηση με την αριθμογραμμή, κυβάκια δεκαδικής βάσης και τη ράβδο, ακολούθησε το φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_4) με προβλήματα σύγκρισης με τις έννοιες «περισσότερο-λιγότερο», στα οποία οι ερωτήσεις διατυπώνονταν χωριστά. Τα παιδιά έχοντας στη διάθεσή τους τα κυβάκια δεκαδικής βάσης, την αριθμογραμμή-χαλάκι, τις τυπωμένες αριθμογραμμές και τη ράβδο και χρησιμοποιώντας τα εκ περιτροπής, έλυναν τα προβλήματα.

Στο 3° 45λεπτο τους δόθηκε ένα φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_5) όπου υπήρχαν στερεά σχήματα αποτελούμενα από κυβάκια τα οποία έπρεπε να καταμετρηθούν. Τα παιδιά μετρούσαν μόνο τα κυβάκια που «φαίνονταν» αγνοώντας αυτά που δεν φαίνονταν και τα οποία υπήρχαν πίσω ή κάτω από τα ορατά. Χωρίς να σχολιαστούν οι απαντήσεις των παιδιών τους παρουσιάστηκε το υλικό που αποτελούνταν από ξύλινα κυβάκια με τα οποία θα «χτίζαμε» διάφορα σχήματα που τους παρουσιάστηκαν σε ξεχωριστό φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_6). Πριν από το «χτίσιμο» κάθε σχήματος τους ζητήθηκε να κάνουν μια εκτίμηση για το πόσα κυβάκια έχει το σχήμα. Κατόπιν έφτιαχναν το σχήμα και μετρούσαν τα κυβάκια προσεκτικά επιβεβαιώνοντας ή απορρίπτοντας τις αρχικές τους εκτιμήσεις.

Το 4° 45λεπτο αφιερώθηκε στην εκμάθηση και χρήση των διαφανών σχημάτων για τη Γεωμετρία και τη διαισθητική αντίληψη της επιφάνειας των σχημάτων και μακροπρόθεσμα της έννοιας του «εμβαδού». Τα παιδιά ασχολήθηκαν με το υλικό και ανακάλυψαν μόνα τους τη σχέση ανάμεσα στα μεγέθη των σχημάτων. Εξασκήθηκαν τοποθετώντας τα διαφανή σχήματα πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί (με τετράγωνα στο μέγεθος του σχήματος). Στη συνέχεια προχωρήσαμε σε φύλλα εργασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_7) με κανονικά και μη κανονικά σχήματα όπου τα παιδιά καλούνταν να εκτιμήσουν αρχικά, να υπολογίσουν διαισθητικά την επιφάνεια των σχημάτων (με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο) και τέλος να επιβεβαιώσουν ή να ανασκευάσουν την εκτίμησή τους χρησιμοποιώντας το υλικό.

Στο 5° 45λεπτο χρησιμοποιήθηκε ο γεωπίνακας για την κατασκευή και μέτρηση γεωμετρικών σχημάτων. Σε πρώτη φάση έγινε επαφή των παιδιών με το γεωπίνακα μέσω φύλλων εργασίας: με τετραγωνισμένα τμήματα (5x5) στα οποία είχαν σχεδιαστεί ζευγάρια σχημάτων όπως αυτά θα φαίνονταν στο γεωπίνακα, τα οποία και θα έπρεπε να συγκριθούν (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_8). Στο 1° φύλλο μόνο τα σχήματα χωρίς τετραγωνισμό, στο 2° χωρίς διαγράμμιση μέσα στα σχήματα και στο 3° υπήρχε και διαγράμμιση μέσα στα σχήματα. Στη δεύτερη φάση χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας όπου είχαν απεικονιστεί οι ακίδες του γεωπίνακα και μορφές σχημάτων που έπρεπε οι μαθητές να φτιάξουν στο γεωπίνακα με τα λαστιχάκια και να τα συγκρίνουν ανά δύο (βλ. Παράρτημα, έντυπο B_9).

Σ' όλη τη διάρκεια της ενασχόλησης των παιδιών με τα υλικό, καταγράφηκε σε φύλλο παρατήρησης η συμπεριφορά και ο τρόπος σκέψης των παιδιών.

Στο τελευταίο μέρος της παρέμβασης μετά την εκμάθηση και χρήση του χειραπτικού υλικού, ακολούθησε η περίοδος της αξιολόγησης που διήρκεσε τρεις διδακτικές ώρες. Χορηγήθηκε στα παιδιά μια δοκιμασία αξιολόγησης με προβλήματα για επίλυση με τη χρήση του υλικού. Πάνω στο τραπέζι υπήρχαν τα κυβάκια δεκαδικής βάσης, η ράβδος, οι αριθμογραμμές, οι αλυσίδες, τα ευρώ (πλαστικά κέρματα των 1Λ, 2Λ, 5Λ, 10Λ, 20Λ, 50Λ, 1€, 2€ και χαρτονομίσματα των 5, 10, 50, 100 €) και τα διάφανα σχήματα. Κάθε μαθητής διάβαζε το πρόβλημα και στη συνέχεια μπορούσε να επιλέξει όποιο από τα υλικά ήθελε για να λύσει το πρόβλημα. Η δοκιμασία στο 1^o μέρος (βλ. Παράρτημα, έντυπο Γ_1), ξεκινούσε με απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και προοδευτικά έφτανε σε σύνθετα προβλήματα. Χρησιμοποιήθηκαν και τα προβλήματα που δόθηκαν στο προ-τεστ του Αναλυτικού Προγράμματος. Μιας και τα παιδιά είχαν αποκτήσει την ικανότητα χρήσης του υλικού στην αναπαράσταση των στοιχείων των προβλημάτων, θέλαμε να διαπιστώσουμε αν με το υλικό μπορούσαν να διατυπώσουν άποψη και να επιλύσουν προβλήματα πιο σύνθετα ή με διαφορετική διατύπωση. Στο 2^o μέρος (βλ. Παράρτημα, έντυπο Γ_2), υπήρχαν εικονοπροβλήματα δηλαδή προβλήματα με αναπαραστάσεις/εικόνες κάποιων από τα στοιχεία τους. Στόχος ήταν να διερευνηθεί αν η απλοποίηση των κειμένων εκφώνησης των προβλημάτων βοηθούσε τα παιδιά – κυρίως εκείνα με αναγνωστικά προβλήματα – να κατανοήσουν τα δεδομένα του προβλήματος και να προχωρήσουν στην επίλυσή του. Στο 3^o μέρος της δοκιμασίας (βλ. Παράρτημα, έντυπο Γ_3), δόθηκαν στα παιδιά τα φύλλα για τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου που είχαν χρησιμοποιηθεί και στο αρχικό τεστ. Στο σημείο αυτό θέλαμε να δούμε αν η χρήση των διάφανων σχημάτων και η εξάσκηση των παιδιών στο διαισθητικό υπολογισμό του εμβαδού με τον γεωπίνακα καθώς και οι ξύλινοι κύβοι βελτίωσαν την αντίληψη των παιδιών για το μέγεθος της επιφάνειας και του όγκου των σχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της έρευνας, διαρθρωμένα σε τρία τμήματα. Στα δύο πρώτα γίνεται αναφορά στα λάθη και τις ελλείψεις των παιδιών του δείγματος στα αντίστοιχα κριτήρια σταθμισμένα ή όχι, και παρουσιάζονται εκτενή ποιοτικά στοιχεία, που δείχνουν τον τρόπο σκέψης και οικοδόμησης της γνώσης των παιδιών. Στο τρίτο μέρος σκιαγραφείται η μαθηματική απόδοση των παιδιών ύστερα από τη χρήση του υλικού υποστήριξης και οι τυχόν εννοιολογικές αλλαγές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και στην εφαρμογή των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

3.1. Δεδομένα από σταθμισμένες δοκιμασίες

Πίνακας 1: Επίδοση των μαθητών στο τεστ ΖΑΡΕΚΙ

ΤΕΣΤ ΖΑΡΕΚΙ	ΠΑΝΑΓΙ ΩΤΗΣ (Ε΄)	ΓΙΑΝΝΗΣ (Δ΄)	ΓΚΕΝΤΥ (Δ΄)	ΒΑΓΓΕΛΗΣ (Δ΄)	ΓΙΩΤΑ (Ε΄)	ΕΥΘΥΜΗΣ (Δ΄)	ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ
1. Απαρίθμηση κηλίδων	3	2	3	4	2	2	**4**
2. Προφορική αντίστροφη μέτρηση	2	0	2	2	4	0	**4**
3. Καταγραφή υπαγορευμένων αριθμών	12	4	10	8	12	6	**16**
4.1 Νοερός υπολογισμός προφορικών προβλημάτων: Πρόσθεση	9	8	7	2	8	5	**16**
4.2 Νοερός υπολογισμός προφορικών προβλημάτων: Αφαίρεση	6	2	5	2	4	0	**16**
4.3 Νοερός υπολογισμός προφορικών προβλημάτων: Πολλαπλασιασμός	6	4	5	0	6	4	**12**
5. Ανάγνωση αριθμών	12	8	12	6	10	6	**16**
6. Αντιστοίχηση οπτικά δοσμένων αριθμών με τις θέσεις τους πάνω σε κάθετο άξονα	8	10	12	4	12	6	**12**
7. Μνήμη αριθμών (στη σειρά & αντίστροφα)	24	12	18	16	16	14	**48**
8. Σύγκριση δύο αριθμών (προφορικά)	10	8	10	7	11	6	**16**
9. Αντιληπτική εκτίμηση ποσότητας	2	2	2	2	2	2	**6**
10. Εκτίμηση ποσότητας ανάλογα με το πλαίσιο	12	14	18	12	6	10	**20**
11. Λύση προβλημάτων αριθμητικής	6	3	5	0	0	0	**12**
12. Σύγκριση αριθμών σε μορφή ψηφίων (γραπτά)	14	12	16	12	16	8	**20**
ΣΥΝΟΛΟ (ασκήσεις: 4, 5, 8, 11, 12)	63	45	60	29	55	29	

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι επιδόσεις των 6 μαθητών του δείγματος στο σταθμισμένο τεστ των μαθηματικών (ΖΑΡΕΚΙ). Όπως προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα όλοι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στα μαθηματικά συγκριτικά με τη χρονολογική τους ηλικία. Τρεις μαθητές της Δ΄ τάξης (Βαγγέλης, Γιάννης, Ευθύμης) έχουν συνολική επίδοση η οποία βρίσκεται κάτω από το σημείο τομής (48-50) για την τάξη τους. Ο τέταρτος μαθητής της Δ΄(Γκέντυ), παρουσίασε συνολική επίδοση πάνω από το σημείο τομής της τάξης του και επομένως με βάση το συγκεκριμένο τεστ, δεν αντιμετωπίζει ιδιαίτερες δυσκολίες στα μαθηματικά. Για τους δύο μαθητές της Ε΄ τάξης (Παναγιώτης, Γιώτα), δεν υπάρχουν νόρμες εφόσον οι κατάλληλες ηλικίες χορήγησης του τεστ – σύμφωνα με τους κατασκευαστές του - είναι οι Β΄, Γ΄ και Δ΄ τάξεις Δημοτικού. Οι επιδόσεις αυτών των μαθητών όμως φαίνεται να αντιστοιχούν στις επιδόσεις μαθητών της Δ΄ τάξης, δηλαδή, βρίσκονται έναν περίπου χρόνο πίσω από τη χρονολογική τους ηλικία.

Μια προσεκτικότερη μελέτη των αποτελεσμάτων του τεστ ΖΑΡΕΚΙ επιβεβαίωσαν τις αρχικές εκτιμήσεις για τα ελλείμματα και τις γνωστικές αδυναμίες των παιδιών του δείγματος. Στην έρευνά μας, οι τομείς που μας ενδιέφεραν και τους οποίους εξετάζει το τεστ αυτό, ήταν ο νοερός υπολογισμός προφορικών προβλημάτων και η λύση απλών λεκτικών προβλημάτων. Στους συγκεκριμένους τομείς όλα τα παιδιά είχαν πολύ χαμηλή επίδοση (Πίνακας 1 ασκήσεις 4.1, 4.2 και 11). Επίσης και στις υπόλοιπες ασκήσεις του τεστ (βλ. Πίνακα 1) είχαν χαμηλή επίδοση αναδεικνύοντας γνωστικές ελλείψεις σε βασικά αριθμητικά δεδομένα.

Πίνακας 2: Επίδοση των μαθητών στα τεστ ΑΣυΠ και ΑξΕΛ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΠΡΟΣΟΧΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΤΕΛΙΚΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ	**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ (Ε΄)**	**ΓΙΑΝΝΗΣ(Δ΄)**	**ΓΚΕΝΤΥ (Δ΄)**	**ΒΑΓΓΕΛΗΣ(Δ΄)**	**ΓΙΩΤΑ (Ε΄)**	**ΕΥΘΥΜΗΣ (Δ΄)**
ΤΕΣΤ ΑΣΥΠ ΟΛΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΠΡΟΣΟΧΗΣ	**0,523**	**0,418**	**0,414**	**0,435**	**0,458**	**0,529**
ΤΕΣΤ ΑξΕΛ ΟΛΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΕΠΙΤΕΛΙΚΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ	**0,481**	**0,407**	**0,419**	**0,430**	**0,496**	**0,405**

Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα των παιδιών στα τεστ ΑΣυΠ και ΑξΕΛ (Πίνακας 2) και ειδικότερα στους τομείς της προσοχής και των επιτελικών λειτουργιών, οι επιδόσεις όλων των μαθητών ήταν χαμηλότερες από αυτές που αντιστοιχούν στο 5^{o} εκατοστημόριο της τάξης τους. Δηλαδή, το 95% των συμμαθητών τους είχε στο συγκεκριμένο τεστ καλύτερες επιδόσεις.

Πίνακας 3: Επίδοση των μαθητών στην αναγνωστική ικανότητα

ΤΕΣΤ Τεστ-Α	**ΠΑΝΑΓΙ ΩΤΗΣ (Ε΄)**	**ΓΙΑΝΝΗΣ (Δ΄)**	**ΓΚΕΝΤΥ (Δ΄)**	**ΒΑΓΓΕΛΗΣ (Δ΄)**	**ΓΙΩΤΑ (Ε΄)**	**ΕΥΘΥΜΗΣ (Δ΄)**
ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ(Ανάγνωση/ διάκριση πραγματικών και άσημων λέξεων)	**55**	**70**	**71**	**72**	**89**	**73**
ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΟ	**<5**	**<10**	**<10**	**<10**	**<20**	**<10**
ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΤΑΞΗ	**-**	**-**	**-**	**-**	**2,2**	**1**
ΕΥΧΕΡΕΙΑ (Αναγνωστική ευχέρεια)	**12**	**15**	**39**	**51**	**61**	**46**
ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΟ	**<5**	**<5**	**<5**	**<10**	**<10**	**<10**
ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΤΑΞΗ	**1,6**	**1,6**	**2,2**	**2,6**	**2,7**	**2,4**
ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑ-ΣΥΝΤΑΞΗ (σχηματισμός ρημάτων, παραγωγή λέξεων, σύνταξη προτάσεων)	**2**	**4**	**8**	**6**	**9**	**13**
ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΟ	**<5**	**=1**	**<20**	**<10**	**=5**	**=30**
ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΤΑΞΗ	**1,2**	**1.4**	**2.2**	**1.8**	**2**	**3,4**
ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ (Αναγνώριση ισοδύναμων σημασιολογικά προτάσεων, κατανόηση κειμένου)	**2**	**4**	**7**	**6**	**9**	**7**
ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΟ	**=1**	**=5**	**<5**	**<10**	**=5**	**=10**
ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΤΑΞΗ	**1**	**1,2**	**1,8**	**1,6**	**1,8**	**1,8**

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των 6 μαθητών στο Τεστ αναγνωστικής ικανότητας (ΤΕΣΤ- Α). Δίνονται οι συνολικοί βαθμοί αποκωδικοποίησης, ευχέρειας, μορφολογίας-σύνταξης και κατανόησης, τα εκατοστημόρια και οι ισοδύναμες τάξεις στις οποίες αντιστοιχούν οι επιδόσεις των μαθητών αυτών. Όπως φαίνεται, όλοι σχεδόν οι μαθητές έχουν και στους 4 τομείς ανάγνωσης επιδόσεις αρκετά χαμηλότερες από αυτές που αντιστοιχούν στο 25^{o} εκατοστημόριο για τη συγκεκριμένη τάξη των μαθητών, πράγμα που υποδηλώνει ότι σύμφωνα με το παρόν τεστ αντιμετωπίζουν σημαντική δυσκολία στην ανάγνωση. Μόνο ο Ευθύμης έχει επίδοση στη μορφολογία-σύνταξη πάνω από το 25^{o} εκατοστημόριο αλλά η επίδοσή του εντούτοις βρίσκεται στο χαμηλό φυσιολογικό επίπεδο για την ηλικία του. Ο Παναγιώτης αντιμετωπίζει τα περισσότερα προβλήματα στην ανάγνωση συγκριτικά με τους υπόλοιπους μαθητές. Η αποκωδικοποίηση, η ευχέρεια, η σύνταξη- μορφολογία ενός κειμένου και η κατανόηση έχουν άμεση σχέση με την ικανότητα των μαθητών να διαβάζουν και να κατανοούν γραπτά κείμενα όπως είναι τα λεκτικά προβλήματα.

3.2. Δεδομένα από άτυπες δοκιμασίες: Κατηγορίες λαθών στα μαθηματικά

Από την ανάλυση των ανεπίσημων δοκιμασιών, αλλά και τμημάτων των σταθμισμένων δοκιμασιών, ανιχνεύσαμε και προσπαθήσαμε να κατηγοριοποιήσουμε τα συχνότερα λάθη των παιδιών σε διάφορους τομείς των μαθηματικών. Τα περισσότερα από τα λάθη δεν διαφέρουν από τις κατηγορίες που διάφοροι ερευνητές έχουν αναφέρει (βλ. υποκεφ. 1.6.). Διακρίθηκαν οι εξής κατηγορίες λαθών:

(1) Λάθη με το μηδέν (0).

Τέτοια λάθη είναι:
(α) η πεποίθηση ότι το υπόλοιπο της αφαίρεσης ενός αριθμού από το (0) είναι ο ίδιος ο αριθμός ($0 - α = α$). Αιτία αυτού του λάθους είναι η αντίληψη των μαθητών ότι, αφού το μηδέν είναι το «τίποτα» (όπως συνήθως τους διδάσκεται), η αφαίρεση από το «τίποτα» δεν επιφέρει καμιά αλλαγή στον αφαιρετέο, ο οποίος παραμένει και γράφεται σαν αποτέλεσμα.
(β) Η άποψη ότι το υπόλοιπο κάθε αφαίρεσης από το μηδέν είναι το μηδέν ($0 - α = 0$). «*Από το 0 δεν μπορώ να βγάλω κανέναν αριθμό, δηλ. δεν γίνεται καμιά πράξη και άρα το αποτέλεσμα είναι πάλι 0*» προφανώς και εδώ υπάρχει παρανόηση του ρόλου του μηδενός και της έννοιας της αφαίρεσης.

Φαίνεται πως και οι δύο προαναφερθείσες απόψεις των παιδιών σχετίζονται και με τη μη κατανόηση του $α\text{-}β \neq β\text{-}α$ σε αντίθεση με την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης $α+β=β+α$ την οποία ίσως γνωρίζουν διαισθητικά μιας και πολλές φορές προσθέτουν τους προσθετέους με όποια σειρά θέλουν χωρίς να κάνουν λάθη.

Τέτοια λάθη στην περίπτωση των παιδιών του δείγματος παρατηρήθηκαν πολύ συχνά σε κάθε αλγόριθμο πρόσθεσης ή αφαίρεσης κατά τη διάρκεια των άτυπων δοκιμασιών και ιδιαίτερα στις κάθετες πράξεις:

(34+20)	Βαγγέλης:	*0 από 4 ... 0*
	Ε:	*Κοίταξε καλά, είναι πρόσθεση*
	Βαγγέλης:	*Ωχ! ... 4 από 0* (!)*... 4 ... 3 και 2 ... 5 ... 54*
(60-15)	Βαγγέλης:	*0 από 5 ... 0, ...6 βγάζω 1 ... 5 μένει ...50*
	Γιώτα:	«0 να βγάλω 5 … 0 … 6 να βγάλω 1 …5 … 50»
	Παναγιώτης:	*0 βγάζω 5 ... 5 .....*

Φαίνεται επίσης ότι τα παιδιά αναπαράγουν φράσεις από τον αλγόριθμο όχι όμως με δόκιμο και ολοκληρωμένο τρόπο.

(2) Λάθη ελαττωματικού αλγόριθμου και παραβίαση της θεσιακής αξίας ψηφίων

Παραδείγματα τέτοιων λαθών είναι:

(α) Η αφαίρεση του 'μικρού' από το 'μεγάλο' αριθμό της κάθε στήλης ανεξάρτητα από το αν ανήκει στο μειωτέο ή στον αφαιρετέο. Με βάση αυτό το σκεπτικό γίνονται λάθη του τύπου :

Γιάννης: ... (γράφει την πράξη 43 – 18) … *έχουμε 3 και θέλουμε να βγάλουμε τα 8 δεν μπορούμε ... θα πούμε 8 βγάζω 3*

Αυτό το λάθος είναι το συχνότερο μεμονωμένο αλγοριθμικό λάθος της αφαίρεσης. Τα περισσότερα από τα παιδιά που κάνουν αυτό το λάθος, βλέπουν κάθε στήλη ως ανεξάρτητη αφαίρεση δύο αριθμών, που μπορεί κανείς να τους χειρισθεί με την ελευθερία που ισχύει για τους όρους της πρόσθεσης. Δεν έχουν κατανοήσει δηλαδή τη σημασία του αλγόριθμου της αφαίρεσης. Σε μια άλλη περίπτωση και στην οριζόντια αφαίρεση (8 – 2):

Παναγιώτης: *8 βγάζω 2 δεν αφαιρείται…*

Ε: *Δείξε μου πώς θα 'πρεπε να το γράψουμε.*

Παναγιώτης: …(γράφει από κάτω 2 – 8) …

Ε: *Μπορούμε απ' τα 2 να βγάλουμε 8;*

Παναγιώτης: *Όχι.!* (το σβήνει και κάνει την πράξη σωστά)

Η αφαίρεση του 'μικρού' από το 'μεγάλο' αριθμό ανεξαρτήτως θέσης, όπως διαπιστώσαμε, συνδέεται ορισμένες φορές με ξεκίνημα της αφαίρεσης από το μειωτέο, με τη χρήση όμως ορολογίας που αρμόζει σε ξεκίνημα από τον αφαιρετέο.

Π.χ. στην αφαίρεση

$$\begin{array}{r} 47 \\ -\ 19 \\ \hline 32 \end{array}$$

Παναγιώτης: *7 βγάζω 9* ...(μετράει απ' το 7 μέχρι το 9) *...2 ...1 βγάζω 4 ...3...βρήκα 32.*

Ουσιαστικά αναφέρονται στη διαφορά μεταξύ των δύο ζευγών αριθμών κι όχι στον αλγοριθμικό χειρισμό μειωτέου και αφαιρετέου. Όταν τους ζητήθηκε να αρχίζουν πάλι από το μειωτέο, αλλά να λένε π.χ. «*έχω 7 και θέλω να βγάλω 9*» και να προσπαθούν να εκτελέσουν αυτές τις αφαιρέσεις, άρχισαν οι αμφιβολίες και κάποια παιδιά είπαν «*έτσι δεν γίνεται*».

Γιώτα: *8 να βγάλω 4 ...*

Ε: *Πρόσεχε! Πες το σωστά.*

Γιώτα: *4 να βγάλω 8 ... δεν γίνεται ... θα πούμε 8 βγάζω 4 ...*

Παναγιώτης: *12 να βγάλω 4 ... δεν αφαιρείται*

Ε: *Γιατί;*

Παναγιώτης: *Γιατί έπρεπε να είναι 4 βγάζω 12. Το 12 είναι πιο μεγάλο. Έτσι δε γίνεται...!*

(β) Ένας άλλος τύπος λάθους αυτής της κατηγορίας προκύπτει από τη χρησιμοποίηση του αλγόριθμου της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης μεταξύ αριθμών με άνισο αριθμό ψηφίων (διαφορετικής τάξης) και στις δύο τάξεις με τον ίδιο προσθετέο ή αφαιρετέο.

Παραδείγματα αυτού του τύπου λάθους είναι:

(34+7) Βαγγέλης: *4 και 7 ... 11 ... γράφω το 1 ... 3 και 7 ...10 ... να το γράψω ολόκληρο κύριε; ... εγώ λέω να μην το γράψω ολόκληρο* (γράφει το 1) ... *11*

(59-3) Βαγγέλης: *9 βγάζω 3 ... 6, ...5 βγάζω 3 ... 2 ... 26*

Παναγιώτης: *9 βγάζω 3 ... 6, ...5 βγάζω 3 ... 2 ... 26*

(34+7) Παναγιώτης: (γράφει 111)

Ε: *Εξήγησε μου γιατί έγραψες 111.*

Παναγιώτης: *Γιατί 7 και 4 ... 11. Γράφουμε το 1. Το κρατούμενο και 3 ... 4... 7 και 4 πάλι 11, άρα θα είναι ... 111 ... Νομίζω ...*

Οι ατέλειες στην κατανόηση του αλγόριθμου, αλλά και η ελλιπής συγκρότηση της έννοιας της θεσιακής αξίας των ψηφίων ενός αριθμού είναι στην προκείμενη περίπτωση προφανής. Το ίδιο φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα όπου ο μαθητής προσθέτει τα ψηφία τυχαία από όποια τάξη και να προέρχονται:

(25+48) Ευθύμης: 8 και 2 … 10 (γράφει το 0) …ένα το κρατούμενο … 5 και 4 … 9 … 90

(3) Λάθη στο «δανεισμό»

Παραδείγματα τέτοιων λαθών είναι:

(α) Η παράλειψη των “δανεικών”. Το λάθος αυτό οδηγεί σε αφαιρέσεις της μορφής:

(145-88) Γιώτα: *8 να βγάλω 5 … 3* (τη διορθώνω) .. *Α! … 5 να βγάλω 8 δεν βγαίνει θα πάρω ένα από το 4 … 15 βγάζω 8 … 7* (ξεχνά το κρατούμενο) … *4 βγάζω 8 … 4 … όχι ! δεν βγαίνει … 14 να βγάλω 8 … 6 … 67*

Ευθύμης: *5 βγάζω 8 … δεν γίνεται …* (εξηγούμε το δανεισμό) παίρνω 1 *… 15 … 15 στο μυαλό και 8 στα δάχτυλα … (μετά από ώρα) … 14, 13, … 7, … 4 να βγάλω 8 …*

Ε: *4 έχουν μείνει;*

Ευθύμης: *Όχι 3 … 3 να βγάλω 8 δεν γίνεται … γίνεται όμως 8 να βγάλω 3 … 5*

Η παράλειψη των «δανεικών» μπορεί να οφείλεται σε εγγενείς αδυναμίες της μνήμης του μαθητή ή σε ατελή γνώση του αλγόριθμου. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, η παράλειψη είναι αποτέλεσμα της έλλειψης αυτοματοποίησης στη χρήση των βασικών αριθμητικών δεδομένων της αφαίρεσης. Το λάθος αυτό εμφανίστηκε πολύ λίγες φορές γιατί τα παιδιά στις αφαιρέσεις όταν ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο δεν «δανείζονται» από το ψηφίο της διπλανής τάξης, αλλά συνήθως αντιστρέφουν τους αριθμούς και κάνουν την αφαίρεση.

(4) Επίλυση προβλημάτων

(α) Προσκόλληση στις λέξεις «κλειδιά»

Σε κάθε πρόβλημα που κλήθηκαν να λύσουν οι μαθητές παρατηρήθηκε μια ιδιαίτερη εξάρτηση, για το ποια πράξη θα επιλέξουν για τη λύση του προβλήματος, στις λέξεις που κατευθύνουν προς τη συγκεκριμένη πράξη, τις λεγόμενες λέξεις 'κλειδιά'. Π.χ. στο πρόβλημα

«Η Ελένη και η μαμά φτιάχνουν μπισκότα. Η μαμά έφτιαξε 38 μπισκότα και η Ελένη 15. Πόσα έφτιαξαν και οι δύο μαζί;»

Γκέντυ: *Μου φαίνεται ότι θα κάνουμε αφαίρεση.*

Ε: *Γιατί;*

Γκέντυ: *Γιατί είναι πρώτο το 38 και δεύτερο το 15 και δεν γίνεται αυτό …*

Ε: *Δηλαδή τι δεν γίνεται;*

Γκέντυ: *Δεν γίνεται να κάνουμε πρόσθεση. Αν ήταν να κάνουμε πρόσθεση έπρεπε να βάλουμε από πάνω το 15 και από κάτω το 38. Όταν δίνουμε, ψάχνουμε, χαρίζουμε, χάνουμε, αγοράζουμε κάνουμε αφαίρεση, έτσι μού ΄μαθε η Κυρία. Εδώ κάνουμε κάτι απ' αυτά. Ψάχνουμε εδώ πόσα μπισκότα έφτιαξαν και οι δύο μαζί. Αφού ψάχνουμε θα κάνουμε αφαίρεση ...*

Παρομοίως και στο επόμενο πρόβλημα:

«Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 43 επιβάτες. Στη στάση κατέβηκαν 18 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες συνέχισε;»

Γκέντυ: *Εδώ λέει κατέβασε. Πάλι αφαίρεση εμένα μου βγαίνει. Λέει κατέβασε σαν να λέει έδωσε ... αφαίρεση*

Ευθύμης: *Λέει αφαίρεση γιατί κατέβηκαν ... βγήκαν.*

Βαγγέλης: *Θα κάνω «βγάζω»*

Ε: *Γιατί;*

Βαγγέλης: *Γιατί έφυγαν οι επιβάτες ...*

Γιάννης: (Αφού το διαβάζει μόνος του) ... *πρέπει να κάνουμε αφαίρεση γιατί οι άλλοι βγαίνουν ...*

Παναγιώτης: *Θέλει αφαίρεση*

Ε: *Γιατί;*

Παναγιώτης: *Γιατί είχε 43 επιβάτες και άφησε 18 επιβάτες ... κατέβηκαν*

Ευθύμης: *Εδώ είμαι σίγουρος ότι θα κάνουμε πρόσθεση, γιατί λέει βάζω όχι βγάζω ...*

Ευθύμης: *Θα κάνω αφαίρεση*

Ε: *Πώς το κατάλαβες;*

Ευθύμης: *Αφού λέει κατέβασε δηλαδή έδωσε. Όταν παίρνω κάνω πρόσθεση, όταν δίνω κάνω αφαίρεση ... !*

Η προσκόλληση των παιδιών στις λέξεις «κλειδιά» είναι μερικές φορές τόσο ισχυρή που δεν δίνουν σημασία στην τελική ερώτηση του προβλήματος. Για παράδειγμα στα προβλήματα: «*Ένας φούρνος πούλησε το πρωί 18 τυρόπιτες και το μεσημέρι 13 τυρόπιτες. Πόσες πούλησε συνολικά;*»

Γιώτα:	*Θα κάνουμε αφαίρεση*
Ε:	*Γιατί αφαίρεση;*
Γιώτα:	*Επειδή λέει πούλησε*

«*Ο Πέτρος είχε 3 μήλα. Η Άννα του έδωσε 5 μήλα . Πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα;*»

Γιάννης:	*Θα έχει 2 μήλα*
Ε:	*Πώς το βρήκες;*
Γιάννης:	*Έκανα αφαίρεση. Αφού λέει έδωσε ...*

Φαίνεται λοιπόν πως όλα τα παιδιά της έρευνας έχουν μάθει την τεχνική να αναζητούν τις λέξεις "κλειδιά" στα προβλήματα που καλούνται να λύσουν, αλλά δείχνουν να μην έχουν κατανοήσει πότε κάνουμε την πράξη που η λέξη "κλειδί" φανερώνει.

(β) Λάθη σε προβλήματα με τις έννοιες «περισσότερο» και «λιγότερο»

Σ' αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα προβλήματα σύγκρισης. Τα παιδιά συγκρίνουν δύο ποσότητες γνωρίζοντας από το πρόβλημα τη διαφορά αύξησης ή μείωσης του ενός ποσού με το άλλο. Αυτό που παρατηρήθηκε στο σύνολο των παιδιών του δείγματος είναι μια συστηματική αδιαφορία ή άγνοια, των όρων του προβλήματος «περισσότερο» και «λιγότερο», που καθόριζαν την κατεύθυνση της διαφοράς (αύξουσα ή φθίνουσα). Γι' αυτούς σύγκριση γίνονταν μόνο στα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος χωρίς να συσχετίζουν αυτά τα δεδομένα με τους αντίστοιχους όρους που τα συνοδεύουν. Π.χ. στο πρόβλημα: «*Ο Γιώργος έχει 8 μπίλιες και ο Νίκος έχει 5 μπίλιες περισσότερες από το Γιώργο. Πόσες μπίλιες έχει ο Νίκος;*»

Ε:	*Ποιος έχει περισσότερες;*
Γιάννης:	*Ο Γιώργος γιατί έχει 8 και τον περνάει.*
Ε:	*Ο Νίκος πόσες έχει;*
Γιάννης:	(ξαναδιαβάζει στο πρόβλημα ότι ο Νίκος έχει 5 μπίλιες

	περισσότερες χωρίς να το καταλαβαίνει). *Ο Νίκος έχει 5 ... το λέει ...Θα κάνουμε αφαίρεση. Έχουμε 8 και βγάζουμε τα 5 ... 3 ... 3 μπίλιες.*
Ε:	*Ποιος έχει 3 μπίλιες;*
Γιάννης:	*Ο Γιώργος ... ο Νίκος; ... δεν ξέρω...*

Ε:	*Ποιος έχει περισσότερες;*
Ευθύμης:	*Ο Γιώργος, ... έχει 8*
Ε:	*Ο Νίκος, πόσες λέει το πρόβλημα ότι έχει;*
Ευθύμης:	*... 5 ...*
Ε:	*5 περισσότερες.*
Ευθύμης:	*Δηλαδή το 5 είναι μεγαλύτερο; (!)*

Ε:	*Πόσες μπίλιες νομίζεις ότι έχει ο Νίκος;*
Γιώτα:	*5*
Ε:	*Διάβασε ξανά το πρόβλημα*
Γιώτα:	*5 μπίλιες περισσότερες από το Γιώργο*
Ε:	*Δηλαδή πόσες μπορεί να έχει; Τι πιστεύεις;*
Γιώτα:	*Θα έχει ... 3 ... δεν ξέρω*
Ε:	*Ποιος έχει τις πιο πολλές*
Γιώτα:	*Ο Γιώργος*

Επίσης διαφαίνεται και μια άγνοια της σημασίας αυτών των όρων μέσα στο πρόβλημα όπως και του συνδυασμού τους με τις αντίστοιχες πράξεις (συνήθως περισσότερο – πρόσθεση και λιγότερο – αφαίρεση). Π.χ. στο πρόβλημα:

«*Ο φούρνος πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες και την Τρίτη 5 τυρόπιτες περισσότερες. Πόσες πούλησε την Τρίτη;*»

Βαγγέλης:	*Θα κάνουμε «και»...!*
Ε:	*Τι ζητάει το πρόβλημα;*
Βαγγέλης:	(διαβάζει) *Πόσες πούλησε την Τρίτη*
Ε:	*Πόσες πούλησε τη Δευτέρα;*
Βαγγέλης:	*13*
Ε:	*Την Τρίτη;*
Βαγγέλης:	*5*
Ε:	*Άρα ξέρουμε πόσες πούλησε την Τρίτη. Τότε τι ζητάμε;*

Βαγγέλης: (διαβάζει ξανά το πρόβλημα) ... *5 περισσότερες ... θα κάνουμε «βγάζω»*

Ε: *Πώς το κατάλαβες;*

Βαγγέλης: *... λέει ...περισσότερες* (κάνει την αφαίρεση) ... *3 βγάζω 5* (βάζει δάχτυλα) *...δεν γίνεται ...*(απογοητεύεται) *...τώρα τι να κάνω;...*

Γκέντυ: *Θα κάνουμε αφαίρεση γιατί έδωσε, πούλησε*

Ε: *Τι ζητάει το πρόβλημα;*

Γκέντυ: (διαβάζει) ... *πόσες πούλησε την Τρίτη;*

Ε: *Όταν λέμε περισσότερο τι εννοούμε;*

Γκέντυ: *Όταν λέμε 13 και 5 το περισσότερο είναι το 13. Όταν λέμε 3 περισσότερα είναι σαν να λέμε 15 (;)*

«Ο Βαγγέλης έλυσε 8 ασκήσεις και η Αλέκα 3 λιγότερες. Πόσες ασκήσεις έλυσε η Αλέκα;»

Ε: *Ποιος έλυσε περισσότερες;*

Ευθύμης: *Ο Βαγγέλης*

Ε: *Γιατί;*

Ευθύμης: *Γιατί η Αλέκα έλυσε 3 λιγότερες από το Βαγγέλη*

Ε: *Δηλαδή, πόσες έλυσε;*

Ευθύμης: *Θα κάνουμε πρόσθεση* (κάνει την πρόσθεση και βρίσκει 12)

Ε: *Δηλαδή η Αλέκα έλυσε 12; Άρα δεν έλυσε περισσότερες ο Βαγγέλης*

Ευθύμης: *Όχι 12 έλυσαν και οι δυο μαζί ... !*

(γ) Προσκόλληση σε τεχνικές (μέτρηση με τα δάχτυλα)

Κάποια απ' τα παιδιά αδυνατούν να αφομοιώσουν νέες στρατηγικές κυρίως στην εκτέλεση των πράξεων γι' αυτό και προσκολλώνται σε τεχνικές απλές, οικείες, ασφαλείς όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα.

(615+124) Ευθύμης: *5 στο μυαλό* (δείχνει το μέτωπο) *και 4 στο χέρι* (βάζει 4 δάχτυλα) ... *5, 6, 7, 8, 9... 2 στο μυαλό και 1 στο χέρι ... 3 .... 739* (το διαβάζει)

(48+31)	Ευθύμης:	*8 και 1 ... 8 στο μυαλό και 1 στο χέρι ... ωχ ! ...δεν χωράει ... θα πω 1 στο μυαλό και 8 στα δάχτυλα*
	Ε:	*Γιατί δεν χωράει το 1;*
	Ευθύμης:	*Γιατί τι θα πω κύριε, 8 στο μυαλό και 1 (δείχνει ένα δάχτυλο) ... πώς θα το μετρήσω ... δεν μπορώ ... τι να πω ... να το ανοιγοκλείνω;*

Επίσης σε άλλες περιπτώσεις τείνουν να προεκτείνουν τη μέτρηση με τα δάχτυλα με άλλα αντικείμενα όταν δεν μπορούν να δείξουν αριθμούς μεγαλύτερους από το 10. π.χ.

(12 – 4)	Γιάννης:	*Έχουμε 12, θέλουμε να βγάλουμε τα 4... 4 μας μένουν*
	Ε:	*Εξήγησε μου πώς το βρήκες;*
	Γιάννης:	*Έχουμε 12* (δείχνει τα δάχτυλά του)
	Ε:	*Πού είναι τα 12;*
	Γιάννης:	(Δείχνει 10 δάχτυλα)
	Ε:	*Αυτά είναι 12;*
	Γιάννης:	*Όχι 10 ... κι αυτά ... 12...* (δείχνει τη γόμα και το μολύβι του)!

Ή προσπάθησαν να αναπαραστήσουν τους αριθμούς:

	Γιάννης:	*Αφαίρεση θα κάνουμε ... έχει 13 € και θα βγάλει 6 για να αγοράσει το βιβλίο. Έχουμε 3 και βγάζουμε 6 ... δεν μπορούμε* (παίρνει το μολύβι και φτιάχνει 13 γραμμούλες στο θρανίο κρυφά και λέει) *13 σβήνω 6 ... 7*
	Ε:	*Γιατί έφτιαξες γραμμές;*
	Γιάννης:	*Για να μπορώ να κάνω την αφαίρεση*
(43 – 18)	Βαγγέλης:	*... 3 βγάζω 8 δεν μας συμφέρει ... θα πούμε καλύτερα ... 4 βγάζω 8 ... πάλι δεν γίνεται ... θα πάρουμε το χαρτάκι ...* (ένα φύλλο χαρτί όπου ζωγραφίζει κυκλάκια όταν κατανοεί ότι «δεν βγαίνει») ... *ωχ! ... είναι πολλά ...* (απογοητεύεται) *... τι να κάνω τώρα; ... αυτό είναι δύσκολο ... να το κάνουμε μαζί κύριε;*

Συνολικά, διαφαίνεται η ανάγκη των μαθητών να απεικονίσουν τα δεδομένα του προβλήματος κυρίως με τα δάχτυλα ή άλλα αντικείμενα όταν οι αριθμοί είναι 'μικροί' (μέσα στην πρώτη δεκάδα). Όταν όμως οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι χάνουν την όποια αυτοπεποίθηση η μέτρηση με δάχτυλα τους παρέχει, δυσκολεύονται και συνήθως κάνουν λάθη.

(δ) Λάθη σε σύνθετα προβλήματα:

Τα παιδιά δείχνουν να αντιμετωπίζουν τα σύνθετα προβλήματα με τον ίδιο τρόπο όπως και τα απλά. Έχοντας μάθει να επιλύουν συνήθως προβλήματα με μια πράξη και αδυνατώντας να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του προβλήματος, χρησιμοποιούν τα αριθμητικά στοιχεία αδόκιμα (χωρίς να κατανοούν την αριθμητική τους αξία), κατασκευάζοντας αριθμούς που να τους εξυπηρετούν στη λύση που αυτοί θεωρούν σωστή:

«*Στο ψυγείο υπάρχουν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 κι ο αδερφός μου 5. Πόσα έμειναν στο ψυγείο;*»

Γκέντυ: *Γράφει κάθετα 14 – 35 ...*
Ε: *Τι είναι το 35;*
Γκέντυ: *Αυτοί οι δύο αριθμοί το 3 και το 5 ...*
Ε: *Και γιατί τους έγραψες έτσι;*
Γκέντυ: *Πώς αλλιώς να τους βάλουμε από κάτω; ... δεν γίνεται ...*(δεν μπορεί να κάνει την αφαίρεση)
Ε: *Γιατί δυσκολεύεσαι;*
Γκέντυ: *Απ' το 1 δεν βγαίνει το 3 και δεν έχω να δανειστώ ...*

Παναγιώτης: *Να πούμε καλύτερα μήλα ...! Θα κάνουμε αφαίρεση.*
Ε: *Τι θα αφαιρέσουμε;*
Παναγιώτης: *Το 14, το 5 και το3*
Ε: *Πώς;*
Παναγιώτης: *Θα τα βάλουμε από κάτω*
Ε: *Μπορούμε να κάνουμε αφαίρεση με τρία νούμερα;*
Παναγιώτης: *Εγώ, το κάνω με δικό μου τρόπο. Ακούστε:* (βάζει το 14, το 3 και το 5 το ένα κάτω από το άλλο) *..το 5 το κάνω 4 για να βγει το 4 ... 1 από 3 ... 2 ... κατεβάζω και το 1 ... 12*

Σ' όλα τα προβλήματα τα παιδιά κάνουν πράξεις τυχαία χωρίς να ελέγχουν το αποτέλεσμα. Ακόμη και όταν καταλάβαιναν (ειδικά η Γιώτα) ότι το αποτέλεσμα δεν συμφωνεί με τη λογική απάντηση για το πρόβλημα προτιμούν να κάνουν άλλη πράξη χωρίς να σκέφτονται τη διαδικασία του προβλήματος π.χ.:

Γιώτα: (κάνει κάθετα την πρόσθεση 14+3+5) *Βρήκα, κύριε, ότι έμειναν 22 ροδάκινα ... τι λέω κύριε;...αποκλείεται...αφαίρεση έπρεπε να κάνω... !*

Ευθύμης: *... έφαγαν ... πρόσθεση θα κάνω. Θα προσθέσω πρώτα το ένα και μετά το άλλο, έτσι μου είπε ο κύριος ...* (κάνει τις προσθέσεις) *14 + 3 = 17 και 17+ 5 = 22.*

Αν και το πρόβλημα μπορεί να είναι οικείο στα παιδιά δείχνουν να αγνοούν τη διαδικασία επίλυσης όταν τα βήματα είναι περισσότερα από ένα και να προσπαθούν να το επιλύσουν με λάθος τρόπους.

«Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 14 επιβάτες. Στην α΄ στάση κατέβηκαν 8 επιβάτες και στη β΄ στάση ανέβηκαν 11 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες έφτασε το λεωφορείο στο τέρμα;»

Ευθύμης: *Αφού ανέβηκαν ...θα κάνω πρόσθεση ...*(κάνει αφαίρεση 14-11) *... 4 βγάζω 1 ... 3, 1 από 1 ...0... 03, τώρα αυτό που βρήκα θα το προσθέσω με το 8 ...* (γράφει 03 + 8) *... 8 να βγάλω 3 ... 4 ...*

(ε) Λάθη στα προβλήματα των De Corte & Verchaffel (με διαφορετική διατύπωση)

Στα προβλήματα αυτά παρατηρήθηκε η δυσκολία των παιδιών να επιλύσουν ένα αριθμητικό πρόβλημα όταν αλλάζει η σημασιολογική δομή του και κατά συνέπεια η θέση του αγνώστου στο πρόβλημα. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα παιδιά της παρούσας έρευνας αντιμετωπίζουν σύμφωνα με το ΤΕΣΤ-Α δυσκολίες στην αναγνωστική κατανόηση οι οποίες επιτείνονται όταν η σημασιολογική δομή της πρότασης γίνεται πιο δύσκολη. Έτσι προβλήματα μεταβολής (αύξησης ή ελάττωσης) δείχνουν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας όταν συντάσσονται με διαφορετικό τρόπο. Φαίνεται ότι η θέση του αγνώστου όταν είναι στην αρχή του προβλήματος δυσκολεύει περισσότερο τα παιδιά και ιδιαίτερα στη νοητική αναπαράσταση του προβλήματος που μπορεί να οδηγήσει στη λύση του. Έτσι:

Στο πρόβλημα: «*Ο Πέτρος είχε 6 μήλα. Έδωσε 2 στην Άννα. Πόσα έχει ο Πέτρος τώρα;*»

Γιώτα: *Θα κάνω αφαίρεση* (την κάνει εύκολα με τα δάχτυλα και τη γράφει)

Ε: *Πώς το κατάλαβες;*

Γιώτα: *Γιατί έδωσε ... μια στιγμή κύριε ... και πριν έδωσε... θα κάνω πρόσθεση ... όχι δεν γίνεται αφαίρεση θα κάνω*

«Ο Πέτρος έχει μερικά μήλα. Έδωσε 3 μήλα στην Άννα. Τώρα ο Πέτρος έχει 5 μήλα. Πόσα μήλα είχε ο Πέτρος στην αρχή;»

Παναγιώτης: *Αφαίρεση θα κάνουμε ...*

Ε: *Γιατί;*

Παναγιώτης: *Αφού έδωσε, κύριε ...* (γράφει 5-3) *... 2 μήλα του έμειναν*

Γιώτα: *Αφού έδωσε θα κάνουμε αφαίρεση ...* (γράφει 5-3) *... 2 μήλα είχε στην αρχή*

Ε: *Και πώς έδωσε 3 μήλα στην Α;*

Γιώτα: *... δε γίνεται ... πρόσθεση θα κάνουμε ...*

Η διατύπωση του προβλήματος φαίνεται ότι δημιουργεί σύγχυση στα παιδιά. Άλλες φορές, αν και δείχνουν να κατανοούν νοερά την επίλυση του προβλήματος, όταν κάνουν γραπτά την πράξη δίνουν μεγαλύτερη σημασία στο αποτέλεσμα της γραπτής επίλυσης. Για παράδειγμα:

«Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Του έδωσε η Άννα μερικά και τώρα έχει 10. Πόσα του έδωσε;»

Παναγιώτης: *Για να 'χει 3 μήλα θα του 'δωσε 7*

Ε: *Πώς το βρήκες αυτό;*

Παναγιώτης: *Άμα πούμε 6 θα γίνει 9, άμα πούμε 7 θα γίνει 10*

Ε: *Και πώς θα το βρούμε αυτό;*

Παναγιώτης: *Με πρόσθεση*. (κάνει την πρόσθεση 10+3) *0 και 3 ... 3 και 1 ... 13*

Ε: *Πόσα λοιπόν μήλα του έδωσε η Άννα;*

Παναγιώτης: *Του έδωσε 10*

Ε: *Πώς το βρήκες αυτό;*

Παναγιώτης: *Αφού έχουμε βρει 13 ... άρα του έδωσε 10*

«Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έχει μερικά μήλα. Και οι δύο μαζί έχουν 9 μήλα. Πόσα μήλα έχει η Άννα;»

Ευθύμης: *Θα έχει 6 μήλα*

Ε: *Πώς το βρήκες αυτό;*

Ευθύμης: *Αφού και οι δυο έχουν 9 μήλα τότε η Άννα θα έχει 6*

Ε: *Ωραία! Και με ποια πράξη θα το βρούμε;*

Ευθύμης: *Με πρόσθεση.* (κάνει την πρόσθεση 9 και 3 και βρίσκει 12) ... *λάθος ... 12 έχουν και οι δύο μαζί ... όχι 9 ... 12.*

Γιάννης: (ταλαντεύεται μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης. Καταλήγει σε πρόσθεση)

Ε: *Γιατί;*

Γιάννης: *Λέει και οι δύο μαζί* (κάνει την πρόσθεση) ... *9 και 3 ... 12*

Ε: *Δηλαδή η Άννα έχει 12 μήλα, αυτό βρήκες;*

Γιάννης: *Ναι* ... (κοιτάζει το πρόβλημα) ... *μια στιγμή ...δεν γίνεται, ...αφαίρεση θα κάνω*

Ε: *Πώς το κατάλαβες;*

Γιάννης: *Λέει έδωσε (!)... τώρα το είδα* (κάνει την αφαίρεση)

(5) Λάθη στη Γεωμετρία

Αν και υπήρξαν παραλείψεις στην αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών, καθώς και στην αντιγραφή των σχημάτων, τα σημαντικότερα λάθη των μαθητών παρατηρήθηκαν στη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου με προκαθορισμένη μονάδα μέτρησης.

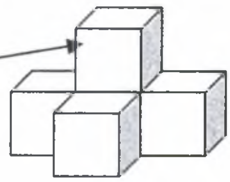
Όταν δόθηκαν απλά και σύνθετα σχήματα στα παιδιά μέσα σε ένα τετραγωνισμένο πλαίσιο όπου η διαγράμμιση βοηθούσε στην καταμέτρηση των τετραγωνικών μονάδων που αποτελούσαν κάθε σχήμα, τα περισσότερα παιδιά (με εξαίρεση τον Γκέντυ) αδυνατούσαν να μετρήσουν τα τετράγωνα κάθε σχήματος. Κάποιοι μαθητές (Ευθύμης, Γιάννης) παρόλο που οι γραμμές βοηθούσαν στη διάκριση των τετραγώνων κάθε σχήματος, έδειχναν ότι μετρούσαν «κάτι» το οποίο μόνο αυτοί φαντάζονταν και τους ωθούσε σε λάθος απαντήσεις. Άλλοι (Γιώτα, Παναγιώτης) αν και στα απλά σχήματα τα κατάφεραν έδειξαν να μπερδεύονται στα σύνθετα σχήματα χάνοντας την αίσθηση της τετραγωνικής μονάδας. Ο Βαγγέλης δεν μπόρεσε να κατανοήσει την επιφάνεια που καταλαμβάνει το τετραγωνάκι – μονάδα. Και χρησιμοποίησε μια τυχαία διαγράμμιση των σχημάτων μετρώντας τις γραμμές που τραβούσε, μ' έναν δικό του τρόπο χωρισμού των σχημάτων. Μόνο ο Γκέντυ μέτρησε εύκολα την επιφάνεια των σχημάτων.

Στα σχήματα χωρίς βοηθητική διαγράμμιση το σύνολο των παιδιών έκανε πολλά λάθη δείχνοντας δυσκολία να κατανοήσουν το χωρισμό της επιφάνειας των σχημάτων σε τετραγωνικές μονάδες. Κάποιες απόπειρες χωρισμού των σχημάτων σε αυτοσχέδια τμήματα (Παναγιώτης, Γκέντυ, Βαγγέλης) δεν είχαν το αναμενόμενο αποτέλεσμα και οδήγησαν σε λάθος υπολογισμούς.

Όσον αφορά τη διαισθητική μέτρηση του όγκου δόθηκαν στέρεα σχήματα στα παιδιά που απαρτίζονταν από κυβάκια (μονάδα μέτρησης). Η συντριπτική πλειοψηφία των παιδιών (εκτός του Παναγιώτη) μετρούσαν μόνο τα «ορατά» κυβάκια αδυνατώντας να κατανοήσουν και την τρίτη διάσταση των σχημάτων ώστε να συμπεριλάβουν και τα κυβάκια που δεν φαίνονται. Μόνο ο Παναγιώτης μετρούσε εύκολα τα κυβάκια:

Ε: *Γιατί είναι 5 εδώ;*

Παναγιώτης: *Γιατί πώς στηρίζεται αυτό εδώ* (δείχνει το πίσω) *στον αέρα; Έχει κι άλλο από κάτω...*



3.3. Δεδομένα από το παρεμβατικό πρόγραμμα και την επαναξιολόγηση

Τα αποτελέσματα της παρέμβασης φάνηκαν από το στάδιο της εκμάθησης με το υλικό. Ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί η άνεση και αποτελεσματικότητα των παιδιών και ιδιαίτερα του Βαγγέλη στη χρήση των ράβδων δεκαδικής βάσης, γεγονός που προκάλεσε και την έκπληξη της δασκάλας του Τμήματος Ένταξης που τον παρακολούθησε για λίγο. Εξαρχής φάνηκε ότι η χρήση του συγκεκριμένου υλικού βοήθησε πολύ στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων ενός αριθμού (σημείο που βρέθηκαν αρκετά λάθη από τους μαθητές στα πρώτα τεστ αξιολόγησης) και μακροπρόθεσμα της επιτυχημένης σύγκρισης των αριθμών. Χρησιμοποίησαν με μεγάλη ευκολία και με πολύ καλή διάθεση το υλικό ενώνοντας ή βγάζοντας τις Μονάδες (Μ), Δεκάδες (Δ), Εκατοντάδες (Ε) ανάλογα με τις πράξεις.

Εντύπωση προκαλεί η σχεδόν ταυτόχρονη (προηγήθηκε ο Παναγιώτης) «ανακάλυψη» και από τους τρεις μαθητές του μετασχηματισμού των 10 Μ σε 1 Δ κατά την εύρεση του αθροίσματος:

Γιάννης: (Στην πράξη 56 + 28) Ωχ! Έχω πολλές μονάδες … για να δω με 1,2,3,…10 μονάδες φτιάχνω 1 Δ άρα έχω …. 8 Δ και … 4 Μ … 84

Στις αφαιρέσεις που χρειάζεται δανεισμός (με κρατούμενο) – πράξεις στις οποίες παρατηρήθηκαν πολλά λάθη κατά τη διάρκεια των δοκιμασιών αξιολόγησης – υπήρξε δημιουργικός προβληματισμός από τους μαθητές:

Παναγιώτης: (Στην πράξη 32 – 19) *Θα βγάλουμε 1 Δ* (τη βγάζει) *και 9 Μ … 1,2 …ωχ! Δεν μπορούμε … αυτό είναι ενωμένο* (δείχνει τη Δ)

Βαγγέλης: (φωνάζει) *Το βρήκα …! Να αφήσουμε ένα μεγάλο* (δείχνει τη Δ) *και να βάλουμε 10 μικρά* (δείχνει τις Μ).

Γκέντυ: *Ααα! Θα βάλουμε αντί για 1 Δ καλύτερα λέω 'γω 10 Μ…*

Επίσης, μετά την εκμάθηση των ράβδων δεκαδικής βάσης, αντιστοίχισαν τις Μ, Δ, Ε με τα κατάλληλα σχήματα και αναπαράστησαν με επιτυχία τους αριθμούς που τους δόθηκαν (8, 14, 29, 128…) (…). Το ίδιο και στο χωρισμό των Μ, Δ, Ε, σε στήλες όπου κατανόησαν ότι με τη χρήση των ράβδων δεκαδικής βάσης αναγνωρίζουν εύκολα τη θεσιακή αξία των ψηφίων. Π.χ.

Γιάννης: *Τα αγόρια ήταν 38 … 3Δ και 8Μ* (παίρνει τα κυβάκια) *… νάτα … και τα κορίτσια 19 περισσότερα, δηλαδή … 1Δ και 9Μ. Μετράμε τις Μ … 1, 2, 3, …10 άρα 1Δ … έτσι … έχουμε 5Δ και 7Μ = 57*

Στην άσκηση που ζητούσε να κυκλώσουν το μεγαλύτερο αριθμό (...) βρήκαν τα τρία πρώτα με τη χρήση των ράβδων δεκαδικής βάσης και στη συνέχεια μόνοι τους τα υπόλοιπα.

Στη χρήση της αριθμογραμμής για την εξάσκηση στις έννοιες «περισσότερο – λιγότερο» τα παιδιά με πολύ γρήγορο ρυθμό απάντησαν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. (…) Έλυσαν προβλήματα με «περισσότερο – λιγότερο» και σύνθεσης των δύο δεδομένων όπου και παρατηρήθηκε ότι, ενώ σε τέτοιου είδους προβλήματα τα παιδιά αγνοούσαν ή χρησιμοποιούσαν λανθασμένα τις έννοιες αυτές, τώρα και με τη βοήθεια της αριθμογραμμής (για το «περισσότερο – λιγότερο») και των ράβδων δεκαδικής βάσης για τη σύνθεση, έλυσαν τα προβλήματα αβίαστα και χωρίς καμιά δυσκολία.

Συνέχισαν με τη χρήση της αριθμογραμμής σε συγκρίσεις αριθμών και προβλήματα με «περισσότερο» ή «λιγότερο». Τα παιδιά σημείωναν το σημείο της αριθμογραμμής και ανάλογα με τη λέξη ανέβαιναν (περισσότερο) ή κατέβαιναν (λιγότερο):

Γκέντυ: *Επειδή λέει περισσότερο θα ανεβούμε άρα … θα κάνουμε πρόσθεση*

Δεν έδειξαν να περιορίζονται από το εύρος της αριθμογραμμής:

Ε: *Έχω 17 κάρτες κι εσύ έχεις 7 περισσότερες. Πόσες έχεις εσύ;*

Ευθύμης: (βρίσκει στην αριθμογραμμή το 17) ... *7 περισσότερα ... ανεβαίνουμε ... 18, 19, 20 ... ωχ! ...*(φτιάχνει κι άλλα κουτάκια με νούμερα) ...*21, 22, 23, 24 ...*

Ιδιαίτερα σημαντική φαίνεται η μετάβαση των παιδιών από το ένα υλικό στο άλλο όταν τα δεδομένα του προβλήματος είναι τέτοια, ώστε κάποιο από τα υλικά να μην βοηθά στη λύση του. Για παράδειγμα, στα προβλήματα που υπερβαίνουν την 20άδα εύκολα όλοι οι μαθητές καταλάβαιναν ότι δεν μπορούν να τα λύσουν με τη χρήση της αριθμογραμμής-χαλάκι και γι' αυτό έπαιρναν τη ράβδο ή τις ράβδους δεκαδικής βάσης. Παρομοίως όταν οι πράξεις ξεπερνούσαν την 100άδα, επέλεγαν τις ράβδους δεκαδικής βάσης.

Όταν ζητήθηκε να βρεθεί το περισσότερο ενός αριθμού πάνω από το 20:

Βαγγέλης: *Δεν μπορούμε γιατί πάει παραπάνω και δεν έχουμε νούμερα ...*

Ε: *Και τώρα τι θα κάνουμε;*

Γιάννης: *Να γράψουμε τα νούμερα πιο πάνω ... 21, 22, 23, μέχρι εκεί που θέλουμε.*

Παναγιώτης: *Α! ... κύριε μπορούμε να πάρουμε αυτό που είχαμε χθες, το ξύλο* (δείχνει τη ράβδο) *με τα νούμερα μέχρι το 100*

Ε: *Έχω 18 ευρώ και ο Γιάννης 14 περισσότερα. Δείξε μου ...*

Παναγιώτης: (παίρνει τη ράβδο) *έχετε 18* (δείχνει το 18), *ανεβαίνουμε 14* (μετράει) ... *32*

Επίλυση προβλημάτων – Χρήση υλικού

Στα προβλήματα με πράξεις μέσα στην πρώτη 20αδα, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν την αριθμογραμμή με μεγάλη ευκολία αντιστοιχίζοντας τις πράξεις ανάλογα με το ανέβασμα ή κατέβασμα. Ο Βαγγέλης έγραφε τα στοιχεία του προβλήματος το ένα κάτω από το άλλο, και μόνο αφού έβρισκε στην αριθμογραμμή αν πρέπει να ανεβεί ή να κατεβεί, σημείωνε αντίστοιχα το σύμβολο της πράξης (+/-). Η χρήση της αριθμογραμμής ουσιαστικά βοηθούσε στην εύρεση της πράξης. Ο Παναγιώτης χρησιμοποίησε την αριθμογραμμή μόνο στα προβλήματα της αφαίρεσης κυρίως για ενίσχυση της αυτοπεποίθησής του:

Ε: *Γιατί, Παναγιώτη τα άλλα τα έκανες μόνος σου;*

Παναγιώτης: *Σ' αυτά κύριε, φοβάμαι μην κάνω λάθος ...*

Στο πρόβλημα «*Στο ψυγείο υπήρχαν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 και ο αδερφός μου 5. Πόσα ροδάκινα έμειναν στο ψυγείο;*»

Ο Γιάννης με το Βαγγέλη αφού χρησιμοποίησαν την αριθμογραμμή, στη συνέχεια έγραψαν στο χαρτί τις δύο διαδοχικές αφαιρέσεις που έκαναν (14-3=11, 11-5=6), ενώ ο Παναγιώτης με τις ράβδους δεκαδικής βάσης απεικόνισε τα ροδάκινα με κυβάκια και πρόσθεσε πρώτα αυτά που έφαγαν τα παιδιά (3+5=8) και στη συνέχεια τα αφαίρεσε από τα 14 γράφοντας στο χαρτί μια πρόσθεση και μια αφαίρεση (3+5=8, 14-8=6). Η Γιώτα αν και αναπαράστησε με κυβάκια τα ροδάκινα και βρήκε το αποτέλεσμα, δεν ήξερε τις πράξεις που έπρεπε να γράψει. Πήρε την αριθμογραμμή. Κατέβηκε μόνη της 3 απ' το 14 κι έγραψε την αφαίρεση 14-3=11 και μετά απ' το 11 κατέβηκε 5 γράφοντας την αφαίρεση 11-5=6. Ο Ευθύμης δυσκολεύτηκε ιδιαίτερα στην αντιστοίχιση των πράξεων:

Ευθύμης: (παίρνει την αριθμογραμμή) *...λοιπόν ... στο ψυγείο ήταν 14* (δείχνει το 14) ... *εγώ έφαγα 3 ... κατεβαίνουμε ..* (κατεβαίνει τρία) ... *κι ο αδερφός μου 5* ... (κατεβαίνει πέντε) ... *άρα έμειναν 6.*

Ε: *Πολύ ωραία Ευθύμη! Για να δούμε τώρα με ποιες πράξεις θα το βρούμε.*

Ευθύμης: *Ήταν 14* (γράφει το 14) ... *κατεβήκαμε 3 ... άρα 14-3=11 ... μετά κατεβήκαμε 5 ... άρα 14-5*

Ε: *Από το 14 κατέβηκες 5;*

Ευθύμης: (το ξανακάνει στην αριθμογραμμή) ... *απ' το 11 κατέβηκα 5 ... Αααα! θα γράψω 11 βγάζω 5 σωστά κύριε;*

Στο πρόβλημα: «*Ο Πέτρος έχει 3 μπίλιες. Στο διάλειμμα έπαιξε με έναν φίλο του και κέρδισε ακόμη μερικές. Μετά το παιχνίδι όταν τις μέτρησε, είχε 10 μπίλιες. Πόσες μπίλιες κέρδισε ο Πέτρος από το φίλο του;*»

Βαγγέλης: ... *θα βάλω 10* (δείχνει το 10 στην αριθμογραμμή) *και θα κατέβω 3 ...άρα 7 !*

Παναγιώτης: *Μπορούμε ... από το 3* (δείχνει το 3 στην αριθμογραμμή) *να ανεβούμε κύριε μέχρι το 10 ...*

Ε: *Τι πράξη θα κάνουμε Παναγιώτη;*

Παναγιώτης: ... *Πρόσθεση κύριε* ... (γράφει 10 + 3=13) ... *όχι ... δεν γίνεται αφαίρεση θα κάνουμε ... δεν ξέρω ...*

Γιώτα : *Είχε 3…* (παίρνει τρία κυβάκια) … *και τώρα έχει 10* … (συμπληρώνει κυβάκια μετρώντας) *…4…5…6…7…8…9…10… άρα 7 μπίλιες κέρδισε… σωστά, κύριε;*

Γκέντυ: (πήρε την αριθμογραμμή) … *3* … *μέχρι το 10 (μετράει) … 7*

Όταν ζητήθηκε να γράψουν την πράξη στο χαρτί αρχικά είπαν την πρόσθεση 7+3=10.

Βαγγέλης: (σκέφτεται) … *Ααα! Θα μετρήσουμε αυτά* (δείχνει τα ενδιάμεσα) … *1,2,3,…7.* (δυσκολεύτηκε στην αντιστοίχιση της πράξης)

Η ανάγκη της αναπαράστασης του προβλήματος δεν περιοριζόταν μόνο στο υλικό αλλά συχνά έπαιρνε κι άλλες μορφές που βοηθούσαν στην κατανόηση και την τελική επίλυση του προβλήματος:

Στο πρόβλημα: «*Ο Βαγγέλης αγόρασε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι που κόστιζε 25 €. Έδωσε στον ταμία 50 €. Πόσα χρήματα θα πάρει ρέστα;*» η Γιώτα δραματοποίησε κατά κάποιο τρόπο τη σκηνή της συναλλαγής παίζοντας το ρόλο του ταμία και του πελάτη και θέλησε να το λύσει με το μυαλό:

Γιώτα: *Έδωσε 50 …ορίστε κύριε ταμία 50… το παιχνίδι κάνει 25 … θα μου δώσετε πίσω 30 €* … (γράφει στο χαρτί την αφαίρεση)

Ε: *Να το κάνουμε και με τα χρήματα;*

Γιώτα: *Μπορώ να το κάνω με τα κυβάκια κύριε;* (το κάνει και βρίσκει 25)

Αξιοσημείωτη είναι επίσης η ανάγκη της Γιώτας να απεικονίσει τα στοιχεία του προβλήματος, όπως στο πρόβλημα («*Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;*») όπου με τα κυβάκια δεκαδικής βάσης έβαλε 19 κυβάκια (τα παιδιά) και μάλιστα σε δυάδες και στη συνέχεια γύρισε τα 11 ανάποδα αναπαριστώντας τα αγόρια. Στη συνέχεια μέτρησε τα υπόλοιπα.!

Ένας άλλος παράγοντας που δυσκόλεψε τα παιδιά στα αρχικά τεστ ανίχνευσης μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά ήταν το μήκος του κειμένου του προβλήματος, καθώς και το λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται. Οι όποιες αναγνωστικές δυσκολίες των παιδιών παρεμπόδιζαν την κατανόηση του προβλήματος και καθυστερούσαν σημαντικά την επίλυσή του. Ειδικότερα ο Παναγιώτης –ο οποίος είχε και τις μεγαλύτερες γλωσσικές δυσκολίες από τα παιδιά του δείγματος, δυσκολεύτηκε πολύ σε δύο προβλήματα τα οποία είχαν σχετικά μεγάλη εκφώνηση. Το εύρος της διατύπωσης του προβλήματος τον επηρέασε αρνητικά και επέδρασε στην ψυχολογία του. Για πολλή ώρα προσπαθούσε να διαβάσει το πρόβλημα, αλλά όταν τελείωσε πήρε τη ράβδο και το έλυσε πολύ γρήγορα. Ενδεικτικό του προβλήματος της αναγνωστικής δυσκολίας του Παναγιώτη στην επίλυση προβλημάτων, είναι το γεγονός ότι βρισκόταν ακόμη στο τρίτο πρόβλημα (από τα πέντε της σελίδας) όταν οι δύο άλλοι είχαν ήδη τελειώσει. Είναι επίσης σημαντικό το ότι, όταν με κάποιο τρόπο, είτε με ανάγνωση του προβλήματος από τον ερευνητή είτε με εικονοποίηση του προβλήματος, ξεπερνιόταν το αναγνωστικό πρόβλημα του Παναγιώτη, το αποτέλεσμα ήταν η γρήγορη λύση του προβλήματος.

Για να ανιχνευθεί ο ρόλος του κειμένου ενός προβλήματος στην κατανόηση των πληροφοριών που παρέχει και την περαιτέρω επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων για την επίλυσή του, δημιουργήθηκαν από τον ερευνητή στην τελευταία φάση της παρέμβασης εικονοπροβλήματα, που απεικόνιζαν ορισμένα ή όλα τα στοιχεία του προβλήματος μειώνοντας σημαντικά το εύρος του κειμένου. Σ' αυτά τα προβλήματα παρατηρήθηκε ταχύτερη απόκριση όλων των μαθητών και όχι μόνο του Παναγιώτη, προφανώς επειδή καλύφθηκε περιστασιακά το πρόβλημα της αναγνωστικής ευχέρειας και διευκολύνθηκε η επεξεργασία των στοιχείων του προβλήματος για την εξεύρεση λύσης. Επίσης, όλα τα παιδιά υποδέχτηκαν με καλύτερη διάθεση και έδειξαν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση στα εικονοπροβλήματα από ότι στα συνήθη προβλήματα που το σχολικό βιβλίο[3] περιέχει.

Στο εικονοπρόβλημα με το ασανσέρ (…) εντύπωση προκαλεί το πόσο εύκολα κατάλαβαν τα παιδιά τον περιορισμό του βάρους (100 κιλά) και διαπίστωσαν ότι δεν θα μπορέσει να τους σηκώσει:

Ε: *Μπορούν να μπουν μέσα στο ασανσέρ;*

Ευθύμης: (σκέφτεται) … *όχι … αφού χωράει 100 κιλά*

Ε: *Και γιατί να μην μπουν;*

Ευθύμης: *Αφού είναι παραπάνω … είναι 112 κιλά*

Ή

Γιώτα: *… δεν μπορεί να τους σηκώσει …*

Γενικότερα οι εικόνες στα προβλήματα εκτός από το ότι έκαναν πιο ελκυστικά τα προβλήματα τις περισσότερες φορές βοήθησαν στην αναπαράσταση των αριθμητικών δεδομένων και την ταχύτερη επεξεργασία τους για την εξεύρεση λύσης. Έτσι, ακόμη και σε

[3] Αξίζει να αναφέρουμε ότι στα νέα διδακτικά πακέτα του Δημοτικού Σχολείου και στα διδακτικά βιβλία των Μαθηματικών έγινε προσπάθεια να συμπεριληφθούν αρκετά εικονοποιημένα προβλήματα σε όλες τις τάξεις.

σύνθετα προβλήματα στα οποία τα παιδιά δυσκολεύονταν πολύ στα αρχικά τεστ, τώρα και με τη βοήθεια των εικόνων έβρισκαν γρήγορα και σωστά τα βήματα επίλυσής τους. Π.χ. στο εικονοπρόβλημα με το λεωφορείο (…)

Βαγγέλης: *κατέβηκαν … αφαίρεση θα κάνουμε* (γράφει 34-18 και κάνει την αφαίρεση με τη ράβδο) … *16 έμειναν … μετά ανέβηκαν … θα κάνω πρόσθεση, για να δω … 16 που 'ταν μέσα και 7* … (γράφει την πρόσθεση 16+7, με τη ράβδο) … *23… τώρα έχει 23 … Ωχ! πάλι κατέβηκαν … αφαίρεση 23-14* (με τη ράβδο) … *9 … 9 έμειναν κύριε…*

Παρομοίως στο εικονοπρόβλημα με την αγορά παιχνιδιών (…)

Γιάννης: *η μπάλα κάνει … 19 € και το τζιπάκι … 24 € θα κάνω πρόσθεση …* (γράφει 19+24 και την κάνει με τα κυβάκια) … *43* … (διαβάζει) *πόσα θα του μείνουν; … πόσα είχε; … είχε 50 … έδωσε 43 … αφαίρεση …*

Σε τέτοια προβλήματα φαίνεται πως η εικόνα βοήθησε τους μαθητές να αναπαραστήσουν τα στοιχεία του προβλήματος και να οδηγηθούν καλύτερα στη λύση τους.

Διαισθητική μέτρηση της επιφάνειας – Χρήση μονάδας μέτρησης

Στα αρχικά σχήματα όλα τα παιδιά έκαναν αρκετά λάθη επειδή δεν μπορούσαν να επεκτείνουν νοερά τα τετράγωνα μέσα στα σχήματα για να μπορέσουν να μετρήσουν την επιφάνειά τους. Η ένταξη των σχημάτων σε τετραγωνισμένο πλαίσιο βοήθησε στη μέτρηση των τετραγωνικών μονάδων. Κάποιοι μαθητές (Βαγγέλης, Γιάννης, Ευθύμης) προσπάθησαν να συνεχίσουν (ανεπιτυχώς) τη διαγράμμιση μέσα στα σχήματα.:

Βαγγέλης: *Κύριε, μπορώ να τραβήξω γραμμές;*

Όταν παρουσιάστηκαν τα σχήματα χωρίς τη διαγράμμιση, γρήγορα κατάλαβαν την ανάγκη της χρήσης των διάφανων σχημάτων:

Γιάννης: *Κύριε γιατί να μη βάζουμε τέτοια;* (δείχνοντας τα διαφανή σχήματα)

Η χρήση των διάφανων σχημάτων βοήθησε να βελτιωθεί η αντιληπτική ικανότητα των παιδιών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αυθόρμητη ονομασία κάθε σχήματος από όλα τα παιδιά με διάφορα ονόματα π.χ.:

Παναγιώτης: *Θα βάλουμε δύο «μονά» και ένα «τριπλό» …*

Γιάννης: *Εδώ θα βάλουμε ένα «τριάρι» κι ένα «δυάρι» ... ένα «εξάρι» κι ένα «μονό» ...*

Ευθύμης: *χωράει ένα «εξαπλό» και ένα «διπλό»...*

Μετά από αρκετή εξάσκηση με τα διαφανή σχήματα, μπορούσαν νοερά (χωρίς να τα χρησιμοποιούν για την κάλυψη κάθε ζητούμενης επιφάνειας) να υπολογίζουν από πόσες τετραγωνικές μονάδες αποτελείται κάθε σχήμα:

Γιάννης: *Α! εδώ θα βάλουμε ένα μικρό* (διπλό), *ένα μεγάλο*(τριπλό) *κι ένα πολύ μεγάλο* (εξαπλό)*... 6 και 3 ... 9 και 2* (μετράει) *... 11*

Ο γεωπίνακας επίσης, αν και ήταν πιο δύσκολος στη χρήση του από τα διαφανή σχήματα, βοήθησε πολύ τα παιδιά να κατανοήσουν την επιφάνεια που καταλαμβάνει κάθε σχήμα που φτιάχναμε με τα λαστιχάκια. Αυτό ακριβώς (τα λαστιχάκια) ήταν και το σημείο που αρκετά παιδιά δίσταζαν να χρησιμοποιήσουν αρχικά, φοβούμενα μήπως και το λαστιχάκι τα χτυπήσει. Όταν ξεπέρασαν τους αρχικούς δισταγμούς έφτιαχναν με ευκολία τα σχήματα στον γεωπίνακα και μετρούσαν τα τετράγωνα (και τα «μισά») που αποτελούσαν κάθε σχήμα.

Ε: *Πώς βρήκες 4 τετράγωνα; Εγώ μόνο δύο βλέπω ...*

Παναγιώτης: *Δύο ολόκληρα κύριε, ... είναι και τα μισά ... 3* (δείχνει με δύο δάχτυλα δύο μισά) *... 4*

Όταν άρχισαν να συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας (…) παρατηρήθηκε η επιλογή κάποιων παιδιών (Γιάννης, Βαγγέλης, Ευθύμης) να τραβούν γραμμές στο εσωτερικό των σχημάτων για να μπορούν να μετρήσουν τα τετράγωνα που συμπληρώνονται, ενώ τα υπόλοιπα παιδιά μετρούσαν τα τετράγωνα οριοθετώντας τα νοερά μέσα στα σχήματα. Ο Παναγιώτης σημείωνε κάθε τετράγωνο στο σχήμα με μια κουκκίδα για να μην τα ξεχνά. Ο Ευθύμης δεν μπόρεσε να χρησιμοποιήσει τα λαστιχάκια στο γεωπίνακα επειδή δεν κατάφερνε να τα τοποθετήσει (αδυναμία στη λεπτή κινητικότητα). Εντύπωση προκαλεί στα σχήματα του γεωπίνακα, η ευκολία με την οποία τα παιδιά μετρούσαν τις τετραγωνικές μονάδες (‘μισές’ ή ‘ολόκληρες’) και έβρισκαν το αποτέλεσμα που μερικές φορές ήταν δεκαδικός αριθμός (π.χ. 7,5 τετράγωνα).

Η χρήση του γεωπίνακα βοήθησε επίσης τα παιδιά στη σύγκριση της επιφάνειας σχημάτων, κάτι το οποίο πριν την έναρξη της παρέμβασης συνήθως γινόταν με τυχαίες απαντήσεις με μόνο κριτήριο τη μορφή του σχήματος. Μετά τη χρήση του υλικού, όλα τα παιδιά σύγκριναν τα σχήματα αφού πρώτα προσπαθούσαν να μετρήσουν τα τετράγωνα της επιφάνειάς τους είτε με τα διαφανή σχήματα είτε με το γεωπίνακα.

Διαισθητική μέτρηση του όγκου – Χρήση μονάδας μέτρησης

Στη συνέχεια περάσαμε στα σχήματα από κύβους όπου και ζητήθηκε από τα παιδιά να εκτιμήσουν και στη συνέχεια να μετρήσουν πόσα κυβάκια αποτελούν κάθε σχήμα. Συνήθως εκτίμηση και μέτρηση γινόταν ταυτόχρονα. Ο Γιάννης και ο Παναγιώτης φάνηκε να καταλαβαίνουν την ύπαρξη και άλλων κύβων πίσω ή κάτω απ’ αυτούς που φαίνονται κάνοντας λάθη κυρίως στη μέτρηση. Ο Βαγγέλης μετρούσε ξεκάθαρα όλα τα κυβάκια που φαίνονταν είτε μπροστά είτε στο πλάι. Ακολούθησε το φύλλο εργασίας το οποίο είχε σκοπό την εξάσκηση με τα ξύλινα κυβάκια. Αφού κατασκεύασαν διάφορα απλά και σύνθετα σχήματα και τα παρατήρησαν από όλες τις πλευρές, προχώρησαν στα επόμενα σχήματα (πιο δύσκολα). Ο Γιάννης έκανε μικρά λάθη στη μέτρηση των κύβων, ο Παναγιώτης τα βρήκε όλα σωστά, ενώ ο Βαγγέλης – αν και κατάλαβε τον τρόπο έκανε πολλά λάθη.

Το «χτίσιμο» με τα ξύλινα κυβάκια έδωσε στα παιδιά τη δυνατότητα να παρατηρήσουν τα “κρυφά” σημεία του σχήματος και να συναισθανθούν διαισθητικά τις τρεις διαστάσεις του χώρου. Από το σημείο αυτό και μετά σε παρόμοιες ασκήσεις και στην αρχική τους εκτίμηση και στη μέτρηση ήταν πιο προσεκτικοί και σπάνια έκαναν λάθη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Συζήτηση – Συμπεράσματα - Προτάσεις

Όπως αναφέραμε ήδη, βασικοί στόχοι της έρευνάς μας ήταν: α) να εντοπιστούν οι βασικές γνωστικές ελλείψεις και αδυναμίες που προκαλούν δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά στα παιδιά με χαμηλή μαθηματική επίδοση, β) να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι ελλείψεις επηρεάζουν τη μαθηματική συμπεριφορά, γ) να εξεταστεί η σχέση των γνωστικών ελλειμμάτων στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με την ταυτόχρονη ύπαρξη δυσκολιών στην ανάγνωση και δ) να ερευνηθεί αν η χρήση κατάλληλου χειραπτικού υλικού βοηθά τα παιδιά στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και την επίλυση προβλημάτων.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτουν αρκετά χρήσιμα συμπεράσματα:
1) Η πιο κοινή μαθηματική δυσκολία των συγκεκριμένων παιδιών είναι η κατανόηση και η επιτυχημένη εκτέλεση της αλγοριθμικής διαδικασίας των βασικών αριθμητικών πράξεων και κυρίως της αφαίρεσης. Τα συστηματικά αλγοριθμικά λάθη αποτελούν πηγή αποτυχίας στα μαθηματικά για τους συγκεκριμένους μαθητές. Από την ανάλυση της φύσης αυτών των λαθών φαίνεται ότι δεν οφείλονται στην έλλειψη γνώσης ή σε ανικανότητα εκμάθησης μιας συγκεκριμένης σειράς ενεργειών που πρέπει να εκτελεστούν για να βρεθεί το αποτέλεσμα μιας πράξης, αλλά αποτελούν προϊόντα λανθασμένου τρόπου σκέψης που μπορεί να οφείλεται στη μη κατάκτηση προϋποτιθέμενων γνώσεων ή στην ατυχή χρήση κανόνων.

Η ανεπαρκής γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων (Β.Α.Δ.) φαίνεται ότι επηρεάζει την αλγοριθμική διαδικασία. Σύμφωνα με τους Baroody και Ginsburg (1991) η ανεπάρκεια στη γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, είναι χαρακτηριστική για τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα: α) τα παιδιά δεν γνωρίζουν αρκετά Β.Α.Δ. σε επίπεδο αυτοματισμού με αποτέλεσμα να μην μπορούν να τα ανακαλέσουν από τη μνήμη όταν χρειάζεται για την εκτέλεση μιας πράξης ή επίλυσης ενός προβλήματος, β) στην προσπάθειά τους να βρουν τα Β.Α.Δ. χρησιμοποιούν χρονοβόρες στρατηγικές με πολλές μετρήσεις (κυρίως με τα δάχτυλα και κάποτε με αντικείμενα ή σημάδια) που αυξάνουν την πιθανότητα του λάθους και γ) οδηγούνται είτε στην εγκατάλειψη της προσπάθειας είτε στην αύξηση του χρόνου επίλυσης της πράξης ή του προβλήματος, αλλά ακόμη και στο να ξεχνούν σημαντικά στοιχεία του αλγόριθμου (π.χ. τα «κρατούμενα») ή να απαντούν τυχαία. Η μη κατάκτηση των Β.Α.Δ. σε επίπεδο αυτοματισμού επομένως επηρεάζει αρνητικά την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν πράξεις και να λύνουν προβλήματα.

Οι δυσκολίες στην ανάκληση αριθμητικών δεδομένων κυρίως της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, έχουν άμεση σχέση με τις αναποτελεσματικές στρατηγικές που εφαρμόζει ο μαθητής για την εύρεση αυτών των δεδομένων, στρατηγικές οι οποίες σχετίζονται με τον τρόπο αναπαράστασης της γνώσης από το γνωστικό σύστημα του μαθητή. Το άτομο ενεργεί πάνω στις πληροφορίες που λαμβάνει από το περιβάλλον του και δομεί τη γνώση μέσα από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον (Πόρποδας, 1996). Η γνώση αυτή, τουλάχιστον για τη γνωστική περιοχή των μαθηματικών, αναπαρίσταται κυρίως με τρεις τρόπους. Αρχικά εμφανίζεται ένας πραξιακός τρόπος ο οποίος είναι κατεξοχήν κιναισθητικός. Ένα κλασικό παράδειγμα αυτού του τρόπου αναπαράστασης είναι η χρήση των δακτύλων για την εκτέλεση απλών μαθηματικών πράξεων όπως είναι η πρόσθεση ή η αφαίρεση. Η ολοκλήρωση αυτού του τρόπου αναπαράστασης οδηγεί το παιδί στον επόμενο τρόπο, τον εικονιστικό. Εδώ κυρίαρχο στοιχείο είναι η οπτικοποίηση κάποιων συγκεκριμένων εννοιών (οι οποίες ενέχουν τη δυνατότητα εικονικοποίησής τους), χωρίς όμως απόλυτο προσδιορισμό αυτών των εννοιών από τις δημιουργημένες εικόνες. Παράδειγμα αυτού του τρόπου είναι ο μερισμός μιας ποσότητας αντικειμένων σε ίσα τμήματα τα οποία έχουν το ίδιο πλήθος αντικειμένων μεταξύ τους και το άθροισμα των οποίων ισούται με την αρχική ποσότητα. Τελευταίος σε απόκτηση τρόπος αναπαράστασης είναι ο συμβολικός. Μέσω αυτού ο μαθητής είναι σε θέση να κατακτά την ικανότητα χρήσης αφηρημένων στοιχείων τα οποία έχουν τη δυνατότητα συμβολισμού πραγματικών ή και πιθανών τμημάτων της πραγματικότητας. Κατακτώντας ο μαθητής αυτόν τον τρόπο μπορεί να επέμβει ενεργά πάνω σε αυτά τα τμήματα ή γεγονότα χωρίς τη βοήθεια απτών στοιχείων εικόνων (Mercer, 1997).

Φυσικά υπάρχουν και λάθη που δείχνουν να οφείλονται σε δομικές αδυναμίες ή λειτουργικές ιδιαιτερότητες του μαθησιακού μηχανισμού των παιδιών, όπως π.χ. η έναρξη εκτέλεσης των προσθέσεων από αριστερά προς τα δεξιά λόγω δυσκολιών με τον προσανατολισμό στο χώρο. Τα περισσότερα όμως αλγοριθμικά λάθη φαίνεται ότι προκύπτουν στην προσπάθεια των παιδιών να καλύψουν μαθησιακά κενά μέσα από τη χρήση εννοιών και κανόνων που σε άλλες περιπτώσεις είχαν οδηγήσει σε σωστά αποτελέσματα. Στο πλαίσιο αυτό αξίζει να επισημανθούν: α) η ποικιλία των λαθών που προκύπτουν από τη μη κατανόηση της έννοιας και του ρόλου του μηδενός στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Φαίνεται ότι είναι το συνηθέστερο μεμονωμένο λάθος της πρόσθεσης. Η πρόσθεση ενός αριθμού με το 0 δίνει άθροισμα το 0. Είναι προφανές ότι δεν έχει κατανοηθεί η λειτουργία του μηδενός. Όπως διαπιστώθηκε και στην έρευνα του Αγαλιώτη (1997), στη συγκεκριμένη περίπτωση η άποψη των παιδιών που κάνουν αυτό το λάθος είναι ότι «το μηδέν είναι τίποτα». Και στην αφαίρεση το 0 αναγνωρίζεται ως «τίποτα» κι έτσι ξαναγράφεται το ψηφίο που είναι από κάτω ή από πάνω του. β) Η συχνή παραβίαση της θεσιακής αξίας των αριθμών. Αυτό το είδος των λαθών πιθανότατα προέρχεται από έλλειψη κατανόησης των θεμελιωδών αρχών και των συγκεκριμένων βημάτων του αλγόριθμου της κάθετης πρόσθεσης και της αφαίρεσης καθώς και της έννοιας της θεσιακής αξίας. Η διαφορετική αξία του κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό (θεσιακή αξία) δεν λαμβάνεται υπόψη και δεν δίνεται σημασία στη σχέση τελικού αθροίσματος και προσθετέων. γ) Οι περίπλοκοι - λαθεμένοι αλγόριθμοι που προκύπτουν από συγχύσεις πράξεων και συνδυασμό ατυχών γνωστικών υποκαταστάσεων (π.χ. εύρεση μερικών αθροισμάτων πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση τριψήφιου με διψήφιο). Παρατηρήθηκε αρκετά συχνά και κυρίως στην αφαίρεση να γίνεται αφαίρεση στη στήλη των μονάδων και να συνεχίζεται ως πρόσθεση στις δεκάδες. Το λάθος αυτό συνήθως οφείλεται σε σύγχυση του συμβόλου της πράξης ή σε μικρότερο βαθμό στη χρησιμοποίηση από το μαθητή του αλγόριθμου που γνωρίζει καλά σε όλα τα είδη των πράξεων που καλείται να εκτελέσει, είτε γιατί δεν ξέρει άλλον αλγόριθμο είτε γιατί τον έχει ξεχάσει (Αγαλιώτης, 2004). δ) αρκετά λάθη στο δανεισμό (αφαίρεση) και τα κρατούμενα δείγμα εγγενών αδυναμιών της μνήμης των μαθητών ή ατελούς γνώσης του αλγόριθμου.

Η επαφή των παιδιών με το χειραπτικό υλικό, οδήγησε σε μια διαφορετική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και πράξεων. Τα περισσότερα λάθη στην αλγοριθμική διαδικασία της πρόσθεσης και κυρίως της αφαίρεσης μειώθηκαν σημαντικά. Η απεικόνιση των αριθμητικών δεδομένων με το υλικό βοήθησε τα παιδιά στη γρήγορη και σωστή επίλυση των πράξεων παρακάμπτοντας προβλήματα όπως: η κατανόηση της αξίας του μηδενός (0), η σύγχυση πράξεων ή η παραβίαση της θεσιακής αξίας. Ο άυλος δανεισμός (τα παιδιά δανείζονται 'κάτι' στο μειωτέο και το επιστρέφουν στον αφαιρετέο) κατά τη διάρκεια της αφαίρεσης με κρατούμενο, από το ψηφίο της διπλανής τάξης και, το «κρατούμενο» στην πρόσθεση, έλαβαν υλική υπόσταση με τη βοήθεια των ράβδων δεκαδικής βάσης και διόρθωσαν σε έναν πολύ μεγάλο βαθμό τα αλγοριθμικά λάθη των μαθητών στη συγκεκριμένη ενέργεια. μιας και τα παιδιά μπορούσαν να παρατηρήσουν την ανάλυση και τη σύνθεση της δεκάδας με χειροπιαστό τρόπο. Στρατηγικές χρονοβόρες, όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα που μερικές φορές (όταν ξεπερνούσαν τη δεκάδα) αποθάρρυναν τα παιδιά, αντικαταστάθηκαν από πιο ασφαλείς μετρήσεις με τη χρήση του υλικού. Παρόλα αυτά η χρήση του χειραπτικού υλικού δεν βελτίωσε το επίπεδο αυτοματισμού των παιδιών σε Β. Α. Δ. που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της αλγοριθμικής διαδικασίας. Η μεταφορά των πράξεων στο χαρτί μετά την εύρεση του αποτελέσματος με το υλικό μείωσε σημαντικά τα λάθη στις πράξεις και ιδιαίτερα στην αφαίρεση, όμως δεν διόρθωσε εξ' ολοκλήρου την δυσκολία των παιδιών να κάνουν τις πράξεις χωρίς τη βοήθεια του υλικού. Ειδικά στο δανεισμό από το ψηφίο της διπλανής τάξης φαίνεται ότι μετά την παρέμβαση και όταν ζητήθηκε από τα παιδιά να κάνουν πράξεις χωρίς τη βοήθεια του υλικού, φάνηκε ότι διευκολύνθηκαν στο δανεισμό, αλλά δεν ολοκλήρωσαν την πράξη (αφαίρεση) επιστρέφοντας το «δανεικό» στο ψηφίο διπλανής τάξης του αφαιρετέου, γιατί η συγκεκριμένη ενέργεια δεν αναπαραστάθηκε με το υλικό.

Στη συγκεκριμένη αλγοριθμική ακολουθία, φάνηκε πιο εύκολη και κατανοητή στα παιδιά η τεχνική της διαγραφής του ψηφίου της διπλανής τάξης (βλ. την πράξη δεξιά) χωρίς επιστροφή του «δανεικού».

$$\begin{array}{rr} & 3\;15 \\ \text{Π.χ.} & \cancel{4}\;\;5 \\ & +\;\underline{2\;\;9} \\ & 1\;\;6 \end{array}$$

2) Πολύ έντονες ήταν οι δυσκολίες που εμφανίζουν τα παιδιά της συγκεκριμένης μελέτης στην επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων. Κατά το μεγαλύτερο μέρος τους οφείλονται σε δυσκολία να μετατρέψουν σε νοητικές αναπαραστάσεις, τις καταστάσεις που περιγράφονται στα προβλήματα. Η αδυναμία αναπαράστασης του προβλήματος οδηγεί τα παιδιά σε λανθασμένες διαδικασίες επίλυσης και επιτείνουν τις δυσκολίες τους. Ειδικά στο πρώτο στάδιο επίλυσης ενός προβλήματος (τη μετάφραση), η αδυναμία μετατροπής των προτάσεων ενός προβλήματος σε σωστή εσωτερική αναπαράσταση οφείλεται πιο συχνά στην προσκόλληση των μαθητών σε λέξεις-κλειδιά, αλλά και σε ελλείψεις σε γλωσσικές γνώσεις και ιδίως στην ανάγνωση και την κατανόηση. Επίσης σε συμφωνία με τους Carpenter και Moser (1984), τη μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάζουν τα προβλήματα που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν άμεσα από τα στοιχεία που δίνονται όπως για παράδειγμα αυτά στα οποία η άγνωστη ποσότητα είναι η αρχική.

Στην επίλυση προβλημάτων και ιδιαίτερα στο επίπεδο της αναπαράστασης, το υλικό έδωσε την ευκαιρία στα παιδιά να απεικονίσουν τα στοιχεία του προβλήματος και να οδηγηθούν με λογικούς συσχετισμούς στη λύση του. Πολλές από τις αδυναμίες των παιδιών φάνηκε να καλύφθηκαν μετά από τη χρήση του χειραπτικού υλικού. Τόσο οι ράβδοι δεκαδικής βάσης και οι αλυσίδες όσο και η ράβδος μέτρησης, τα χρήματα και οι αριθμογραμμές, βοήθησαν πολύ στην αναπαράσταση και απεικόνιση των δεδομένων του προβλήματος οδηγώντας τις περισσότερες φορές στη σωστή επίλυσή του. Ακόμη και στα προβλήματα των De Corte και Verschaffel όπου άλλαζε η σημασιολογική δομή (π.χ. ο άγνωστος στην αρχή του προβλήματος) και στα οποία παρατηρήθηκαν πολλά λάθη στα αρχικά τεστ, τα παιδιά με τη βοήθεια του υλικού έδειξαν να κατανοούν τη δομή του προβλήματος και να μπορούν να το επιλύουν αναπαριστώντας τα δεδομένα του.

Ιδιαίτερη δυσκολία παρατηρήθηκε επίσης και σε προβλήματα με συσχετιστικές προτάσεις και συγκεκριμένα με τις έννοιες «περισσότερο» - «λιγότερο». Τέτοιου είδους προτάσεις που εκφράζουν μια ποσοτική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές φαίνεται ότι δυσκολεύουν τα παιδιά με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Τα περισσότερα λάθη προήλθαν από τη συνήθεια των παιδιών της παρούσας έρευνας να μη δίνουν σημασία κατά την ανάγνωση του προβλήματος στις συγκεκριμένες έννοιες παρά μόνο στον αριθμό που έδειχνε «πόσο περισσότερο ή λιγότερο». Έτσι συχνά οδηγήθηκαν σε λάθη σύγκρισης των ποσοτήτων και σύγχυσης των πράξεων (πρόσθεση ή αφαίρεση).

Μετά την εξάσκηση με την αριθμογραμμή και την αντιστοίχιση του 'ανεβαίνω' με έννοιες όπως περισσότερο/μεγαλύτερο/βαρύτερο και του 'κατεβαίνω' με τις έννοιες λιγότερο/μικρότερο/ελαφρύτερο, τα προβλήματα σύγκρισης έγιναν πιο προσιτά για όλα τα παιδιά που έδειξαν ότι μ' αυτό τον τρόπο κατανόησαν τη σημασία των εννοιών και τη θέση τους ανάμεσα στα στοιχεία του προβλήματος. Στο συγκεκριμένο είδος προβλημάτων η χρήση του υλικού βοήθησε και στην αντιστοίχιση της κατάλληλης κάθε φορά πράξης (πρόσθεση ή αφαίρεση) με τη συσχετιστική έννοια (περισσότερο ή λιγότερο) και την τελική λύση των προβλημάτων. Έννοιες όπως το «περισσότερο», «λιγότερο» απέκτησαν σημασία γιατί μετουσιώθηκαν από απλές λέξεις σε ένα μαθηματικό κείμενο, σε συγκεκριμένες ενέργειες (ανεβαίνω ή κατεβαίνω) με τη χρήση της αριθμογραμμής ή των ράβδων δεκαδικής βάσης και έγιναν πράξεις στο χαρτί. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι κι αυτές οι λέξεις έγιναν λέξεις 'κλειδιά' που βοηθούν στην κατανόηση της κατεύθυνσης της συσχέτισης (αύξουσα ή φθίνουσα) και στην επιλογή της κατάλληλης πράξης. Δεν είναι τυχαίο ότι αφού τα παιδιά κατανόησαν τη χρήση της αριθμογραμμής δεν έκαναν λάθη σε προβλήματα αυτής της κατηγορίας ακόμα κι όταν τους ζητήθηκε να τα λύσουν χωρίς το υλικό.

Αναμφισβήτητα, η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων επηρεάζεται σημαντικά και από τις δυσκολίες των μαθητών στην εκτέλεση των πράξεων (Geary, 1994). Η μη κατανόηση της έννοιας της πράξης, η μη κατάκτηση βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων (π.χ. της σωστής μέτρησης), αλλά και η συχνή χρήση ακατάλληλου λεξιλογίου κατά την εκτέλεση της πράξης που οδηγεί σε ατυχείς συνειρμούς και ενέργειες είναι κάποιοι από τους παράγοντες που παρατηρήθηκαν στους μαθητές της έρευνάς μας και έδειξε ότι επηρεάζουν την εκτέλεση των πράξεων και περαιτέρω την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίστηκαν σε μεγάλο βαθμό με τη χρήση του χειραπτικού υλικού.

Ιδιαίτερη μνεία χρειάζεται να γίνει στα σύνθετα προβλήματα ή γενικότερα στα προβλήματα με περισσότερα του ενός βήματα (κυρίως πράξεις) για την επίλυσή τους. Στα αρχικά τεστ συμπεριλήφθηκαν και τέτοια προβλήματα στην προσπάθεια ανίχνευσης των δυσκολιών των παιδιών. Τα παιδιά αντιμετώπισαν τα προβλήματα όπως και τα απλά, μη κατανοώντας ότι η ύπαρξη κι άλλων δεδομένων προϋποθέτει επιπλέον βήματα/πράξεις για την επίλυσή τους. Έτσι συνακόλουθα με την άγνοια της αλγοριθμικής διαδικασίας τοποθετούσαν τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο σε μια προσπάθεια τυχαίας επίλυσης του προβλήματος. Όταν είχαν να επιλύσουν τα ίδια ή παρόμοια προβλήματα και μετά τη φάση της εκμάθησης του χειραπτικού υλικού, παρατηρήθηκε μια διαφορετική αντιμετώπιση, αφού η απεικόνιση των στοιχείων του προβλήματος με το υλικό βοηθούσε την κατανόηση της δομής του προβλήματος και τα οδηγούσε σε μια ακολουθία βημάτων (τα οποία αντιστοιχούσαν σε πράξεις) για την ολοκλήρωση της λύσης του προβλήματος. Φαίνεται πως η αναπαράσταση των δεδομένων διευκόλυνε και τη διαδικασία επίλυσης κάτι που φάνηκε και σε προβλήματα με περισσότερα βήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην τελική φάση του παρεμβατικού προγράμματος.

Ένας άλλος παράγοντας που φάνηκε ότι επιδρά αρνητικά στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων είναι, όπως κι ο Geary (1994) αναφέρει, αφενός η κατάκτηση του μαθηματικού λεξιλογίου από τα παιδιά και αφετέρου οι όροι και η έκταση του κειμένου της εκφώνησης του προβλήματος. Παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά που έχουν αρκετές δυσκολίες στην ανάγνωση και κατανόηση κειμένων (στην έρευνά μας κυρίως ο Παναγιώτης), δυσκολεύτηκαν πολύ στην επίλυση προβλημάτων με εκτενές κείμενο, περιττές πληροφορίες και ανοίκεια θέματα με το περιβάλλον και την καθημερινή ζωή των παιδιών. Η εννοιολογική πυκνότητα των μαθηματικών κειμένων δυσχεραίνει την αναγνωστική ευχέρεια και επιπρόσθετα την κατανόηση της δομής ενός μαθηματικού προβλήματος που θα οδηγήσει στην αποτελεσματική επίλυσή του. Χαρακτηριστικά η Henderson (1992) θεωρεί ότι, ο μαθητής με δυσκολίες στην αναγνωστική διαδικασία θα εκδηλώνει συνακόλουθα δυσκολίες στην ανάγνωση μαθηματικών λέξεων, κατανόηση εννοιών και σύνδεση λέξεων με σύμβολα. Επομένως, στο μαθητή που δυσκολεύεται στην ανάγνωση, του είναι πολύ δύσκολο να κατανοήσει ένα πρόβλημα, και ιδιαίτερα όταν υπάρχουν μαθηματικοί όροι που δεν συνδέονται με τον καθημερινό του λόγο. Ως εκ τούτου το χρησιμοποιούμενο λεξιλόγιο στα διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών αποτελεί συνήθως παράγοντα δυσκολίας για έναν τέτοιο μαθητή.

Όπως φάνηκε και κατά τη διάρκεια του παρεμβατικού προγράμματος, ένα μέσο που διευκόλυνε τους μαθητές με αναγνωστικές δυσκολίες, ήταν η εικονοποίηση του προβλήματος. Η απεικόνιση της προβληματικής κατάστασης με τη χρήση εικόνων επιδρά καταλυτικά στη μείωση της έκτασης του κειμένου, στην παράκαμψη των δυσκολιών αποκωδικοποίησης και βοηθά το μαθητή στην άμεση κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος πριν προχωρήσει στη διαδικασία επίλυσής του. Επίσης η μεταφορά της θεματολογίας των προβλημάτων από άγνωστες και δυσνόητες καταστάσεις, κοντά στην καθημερινότητα των παιδιών, διευκολύνει τα παιδιά με δυσκολίες στην ανάγνωση να αποκωδικοποιήσουν και να κατανοήσουν το πρόβλημα. Ακόμα, η εκφώνηση των προβλημάτων κάποιες φορές από τον ερευνητή, βοήθησε τα παιδιά με δυσκολίες στην ανάγνωση και αποκωδικοποίηση να κατανοήσουν πιο γρήγορα τη διαδικασία επίλυσης. Η βελτίωση της αναγνωστικής ικανότητας των παιδιών θα βοηθήσει σημαντικά στην ταχύτερη επίλυση των λεκτικών προβλημάτων.

3) Ένας άλλος τομέας όπου φαίνεται η αδυναμία των μαθητών με δυσκολίες στα μαθηματικά, είναι η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών όπως το εμβαδό επίπεδων σχημάτων και ο όγκος στερεών. Αν και τα παιδιά αναγνωρίζουν τα βασικά επίπεδα σχήματα (τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο, κύκλος) και τα στερεά, δείχνουν να μην έχουν αίσθηση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους καθώς και της επιφάνειας που καλύπτουν και δεν μπορούν να αντιληφθούν διαισθητικά το μέγεθος του εμβαδού με τη χρήση μιας μονάδας μέτρησης. Επίσης έδειξαν μεγάλη δυσκολία στη σύγκριση σχημάτων με ίδιο ή διαφορετικό εμβαδό δίνοντας συνήθως τυχαίες απαντήσεις. Στις ασκήσεις ταξινόμησης επίπεδων και στερεών σχημάτων παρατηρήθηκε σύγχυση τετραγώνου και κύβου ή ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Όσον αφορά τον όγκο των στερεών σχημάτων δυσκολεύονται να αντιληφθούν το χώρο που καλύπτουν σε σύγκριση με μια κυβική μονάδα μέτρησης.

Είναι φανερό ότι το χειραπτικό υλικό και στην προκειμένη περίπτωση τα διαφανή σχήματα και οι ξύλινοι κύβοι, έδωσαν τη δυνατότητα στα παιδιά να διερευνήσουν εμπειρικά το εμβαδό και τον όγκο επίπεδων και στερεών σχημάτων, να συγκρίνουν υπολογίζοντας την επιφάνεια σχημάτων στο γεωπίνακα, να διαισθανθούν την έννοια του εμβαδού ως κάλυψη επιφάνειας με τα διαφανή σχήματα και τον όγκο ως κάλυψη χώρου με τους ξύλινους κύβους και να αντιληφθούν το εμβαδό και τον όγκο ως μεγέθη που μετρούνται με τη βοήθεια κάποιας μονάδας. Ιδιαίτερα ο γεωπίνακας βοήθησε τα παιδιά να αντιληφθούν την κάλυψη της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων από τετράγωνα (μονάδες) και να υπολογίζουν με βάση αυτές τις μονάδες το εμβαδόν ακόμη και πολύπλοκων σχημάτων.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι με τη χρήση του χειραπτικού υλικού οι μαθητές: διευκολύνθηκαν στα στάδια επίλυσης μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων και κυρίως στην αναπαράσταση των αριθμητικών δεδομένων, κατάφεραν να παρακάμψουν τα αλγοριθμικά λάθη που εμφάνισαν στα αρχικά διαγνωστικά τεστ και να φτάσουν στην ορθή ολοκλήρωση προσθέσεων και αφαιρέσεων, κατανόησαν έννοιες σύγκρισης αριθμητικών δεδομένων και τις συσχέτισαν με τις αντίστοιχες πράξεις, απεξαρτήθηκαν από τεχνικές μέτρησης όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα και οδηγήθηκαν με επιτυχία στην επίλυση βήμα προς βήμα σύνθετων προβλημάτων. Ταυτόχρονα καλύφθηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό η ανάγκη των μαθητών να απεικονίσουν τα αριθμητικά δεδομένα και να τα επεξεργαστούν για την εξεύρεση λύσης. Το ίδιο το υλικό και η χρήση του αφενός ενίσχυσαν την αυτοπεποίθηση των παιδιών που έδειξαν ότι βρήκαν τρόπο να ξεπεράσουν δυσκολίες που συναντούσαν στην επίλυση πράξεων και προβλημάτων, αφετέρου όμως δημιούργησε μια ελλοχεύουσα εξάρτηση των παιδιών απ' αυτό, τα οποία φαίνονταν αποδυναμωμένα όταν τους ζητήθηκε στην τελική φάση της παρέμβασης να λύσουν προβλήματα χωρίς τη χρήση του υλικού. Οι μαθητές, δεν βοηθήθηκαν στο επίπεδο αυτοματισμού Β.Α.Δ. και στη διατήρηση και γρήγορη ανάκτηση μαθηματικών δεδομένων που το σχολικό πρόγραμμα επιτάσσει για την απόκτηση δεξιοτήτων επίλυσης μαθηματικών πράξεων και προβλημάτων, αλλά έδειξαν σημαντική πρόοδο στην κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης και στην επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων για την ολοκλήρωση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων. Προφανώς δεν αποκαταστάθηκαν οι ελλείψεις και αδυναμίες των μαθητών στη γρήγορη και μηχανική εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων, σίγουρα όμως κατανοήθηκε η αλγοριθμική διαδικασία των συγκεκριμένων πράξεων σε πραξιακό και εικονιστικό επίπεδο. Άλλωστε, η τεχνολογική υποστήριξη των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά αρχίζοντας από την απλή αριθμομηχανή (κομπιουτεράκι), θα μπορούσε σταδιακά να υποκαταστήσει τη χρονοβόρα διαδικασία εκμάθησης του συμβολικού τρόπου αντιμετώπισης πράξεων και προβλημάτων. Αναμφισβήτητα το χειραπτικό υλικό ενίσχυσε σημαντικά την ικανότητα των μαθητών για την αναπαράσταση των αριθμητικών δεδομένων – βασική προϋπόθεση για την επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων – και την κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης ακόμη και σε προβλήματα με περισσότερες από μιας πράξεις.

Επίσης, η εικονοποίηση προβλημάτων βοήθησε περιστασιακά τους μαθητές με αναγνωστικές δυσκολίες στην ταχύτερη και πληρέστερη κατανόηση του κειμένου, γεγονός που είναι πολύ σημαντικό στην ελληνική σχολική πραγματικότητα η οποία θέτει χρονικούς περιορισμούς στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η εικονοποίηση όμως, δεν είναι εύκολο να επεκταθεί σε έναν μεγάλο αριθμό προβλημάτων αφού είναι πολλές οι λέξεις ή οι έννοιες που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ευδιάκριτα με εικόνες. Σίγουρα όμως η μείωση της έκτασης του μαθηματικού κειμένου, η χρήση απλού λεξιλογίου και κοντά στον καθημερινό λόγο των παιδιών και η μερική ή ολική αντικατάσταση δεδομένων του προβλήματος με εικόνες, θα διευκολύνει σημαντικά την αναγνωστική ευχέρεια και κατανόηση των μαθητών που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάγνωση.

Στον τομέα της Γεωμετρίας η χρήση του χειραπτικού υλικού από τα παιδιά, τους έδωσε τη δυνατότητα να ασκηθούν εμπειρικά στην κάλυψη της επιφάνειας σχημάτων με τα διαφανή σχήματα και στη σύγκριση του εμβαδού σχημάτων στο γεωπίνακα. Έτσι αντιλήφθηκαν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού και το υπολόγισαν με βάση μια τετραγωνική μονάδα. Κατά τον ίδιο τρόπο αντιλήφθηκαν την έννοια του όγκου στερεών σχημάτων με τη χρήση μιας κυβικής μονάδας. Σε καμιά περίπτωση το υλικό δεν βοήθησε στην εκμάθηση κανόνων και τύπων υπολογισμού των εμβαδών σχημάτων και των όγκων στερεών που το αναλυτικό πρόγραμμα προτάσσει, όμως διευκόλυνε τους μαθητές να διερευνήσουν και να αντιληφθούν τις έννοιες αυτές με την έμπρακτη κάλυψη της επιφάνειας και του χώρου.

Ασφαλώς τα παραπάνω συμπεράσματα θα πρέπει να επαληθευτούν και από άλλες έρευνες, αφού προκύπτουν από μια ποιοτική μελέτη, ενός μικρού δείγματος που επιλέχθηκε με βάση συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Είναι γνωστό ότι όλες οι μελέτες αυτού του είδους δίνουν κυρίως ενδείξεις κι όχι απόλυτες αποδείξεις. Συνεπώς, τα παραπάνω αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευτούν λόγω του μικρού δείγματος της έρευνας. Επίσης, ένας άλλος περιορισμός της έρευνας, είναι το σύντομο χρονικό διάστημα εφαρμογής του παρεμβατικού προγράμματος καθώς και το περιορισμένο γνωστικά εύρος εστίασης. Η συγκεκριμένη έρευνα φαίνεται να δίνει μια αξιόπιστη εικόνα των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, έτσι όπως προκύπτει από τη σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με αυτά άλλων σχετικών ερευνών, καθώς και προτάσεις για αναμόρφωση της παρεχόμενης υποστηρικτικής διδασκαλίας.

Η μελλοντική έρευνα στο χώρο των μαθηματικών θα μπορούσε να εστιάσει στη μελέτη των παρακάτω ερωτημάτων:

- Η συγκεκριμένη δομή και φύση των γνωστικών ελλείψεων που επισημάνθηκαν, αντικατοπτρίζουν ιδιαιτερότητες που εμφανίζονται μόνο στους μαθητές των Τμημάτων Ένταξης ή αποτελούν γενικότερες τάσεις που συναντώνται σ' όλο το μαθητικό πληθυσμό;
- Ποια είναι η ακριβής σχέση μεταξύ των επιμέρους μαθηματικών γνωστικών ελλείψεων;
- Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά μαθητών με χαμηλή επίδοση στο γλωσσικό τομέα και ταυτόχρονη χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά;

Επίσης είναι πολύ σημαντικό να διερευνηθεί η επίδραση των χειραπτικών υλικών σε παιδιά με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά και σε άλλες ενότητες του γνωστικού πεδίου των μαθηματικών από τις πρώτες βασικές έννοιες μέχρι και σύνθετα προβλήματα τεσσάρων πράξεων, καθώς και σε ανώτερες έννοιες (κλάσματα, μονάδες μέτρησης, υπολογισμό εμβαδού και όγκου κ.ά.) με σκοπό την κατάρτιση ενός υποστηρικτικού προγράμματος που θα απευθύνεται κυρίως σε μαθητές που φοιτούν στα Τμήματα Ένταξης, αλλά και σε όλους τους μαθητές, προσφέροντας τη δυνατότητα της εμπειρικής διερεύνησης και ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών.

Σε μια εποχή που νέα διδακτικά εγχειρίδια εκπονούνται και αξιολογούνται, ανεβάζοντας τον πήχη των γνωστικών απαιτήσεων από τους μαθητές σε υψηλότερα επίπεδα, θαρρείς επιτηδευμένα, αγνοούνται καταφανέστατα οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες οι οποίοι προφανώς θα αυξήσουν τις αδυναμίες τους, μέσα σε ένα Αναλυτικό Πρόγραμμα υψηλών απαιτήσεων. Οι εκπαιδευτικοί που ασχολούνται με τέτοιους μαθητές είτε μέσα στη σχολική τάξη είτε στα Τμήματα Ένταξης, αισθάνονται διαρκώς άοπλοι στον τομέα αντιμετώπισης προσπαθώντας να καλύψουν τις γνωστικές ελλείψεις των μαθητών με τρόπους πολλές φορές ανούσιους και αναποτελεσματικούς. Τα προγράμματα αντιμετώπισης των δυσκολιών των παιδιών των Τμημάτων Ένταξης στα μαθηματικά, χαρακτηρίζονται από έλλειψη ποιοτικής ανάλυσης λαθών, έλλειψη εξειδικευμένων τεχνικών, εμμονή στη συμβολική αναπαράσταση της γνώσης και στη συνεχή εκτέλεση πράξεων και την έλλειψη κατάλληλου χειραπτικού υλικού. Αναφερόμαστε σε προγράμματα που δεν ανταποκρίνονται στις ανάγκες των παιδιών και είναι πιθανό να επιτείνουν κάποιες ήδη επιβαρυμένες καταστάσεις, αναγκάζοντας τα παιδιά να λειτουργήσουν μέσα από μη κατάλληλα μαθησιακά σχήματα και πρακτικές.

Η ετερογένεια των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι προφανής στις μαθηματικές αδυναμίες. Αυτή η ετερογένεια γίνεται ακόμη μεγαλύτερη όταν οι μαθητές χωρίς αδυναμίες, οι μαθητές με κίνδυνο να εμφανίσουν δυσκολίες στο μέλλον, και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και ήπια καθυστέρηση συμμετέχουν συνεχώς στα ίδια μαθήματα μαθηματικών. Οι Parmar, Cawley, και Miller (1994) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και ήπια καθυστέρηση εκτελούν διαφορετικά και απαιτούν διαφοροποιημένη διδασκαλία. Επιπλέον, οι Kavale, Fuchs, και Scruggs (1994) ανέφεραν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και οι μαθητές χαμηλής επίδοσης έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά μάθησης. Κατά συνέπεια, η πολυπλοκότητα των μαθηματικών ανικανοτήτων και των χαρακτηριστικών των μαθητών παρουσιάζει μια τεράστια πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς που επιδιώκουν να βελτιώσουν την απόδοση των σπουδαστών τους στα μαθηματικά. Σ’ αυτή τη δυσκολία, εκτός από τα χαρακτηριστικά των μαθητών οι εκπαιδευτικοί παράγοντες διαδραματίζουν επίσης έναν σημαντικό ρόλο στις εκπαιδευτικές εκβάσεις.

Αναμφισβήτητα το περίπλοκο ζήτημα των δυσκολιών μάθησης και της σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά, χρειάζεται ακόμα πολλή έρευνα προκειμένου να φωτισθούν όλες οι πλευρές του. Μέχρι τότε, οι ευαισθητοποιημένοι εκπαιδευτικοί θα αποτελούν τη μοναδική ελπίδα για τα παιδιά που θα συνεχίσουν να έχουν δυσκολίες με το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Η ευαισθητοποίηση απέναντι στις δυσκολίες μάθησης των μαθητών και στις σχετικές απαιτήσεις της διδακτικής εργασίας, αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη επιτυχίας, αφού πρέπει να συνοδεύεται από ουσιαστική γνώση, έστω κάποιων βασικών χαρακτηριστικών του αντικειμένου. Προκειμένου να είναι όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματική, η γνώση αυτή είναι σημαντικό να αποκτηθεί σε οργανωμένα πλαίσια σπουδών, δηλαδή να αποτελεί στόχο τόσο της βασικής εκπαίδευσης όσο και της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγαλιώτης, Ι. (1997). *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην Αριθμητική των μαθητών των Ειδικών Τάξεων. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπισή τους από τους εκπαιδευτικούς*. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Τομέας Ειδικής Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας.

Αγαλιώτης, Ι. (1999). Η σημασία της γνωστικής ανάλυσης των λαθών, στην περίπτωση καταρτισμού υποστηρικτικών διδακτικών προγραμμάτων, για παιδιά με δυσκολίες μάθησης στην Αριθμητική. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 109, σελ. 26-34.

Αγαλιώτης, Ι. (2004). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά*. Αθήνα, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα

Adams, M. J. (1990). Beginning to read: Thinking and learning about print. In: Chiappe, P. (2005). How Reading Research Can Inform Mathematics Difficulties: The Search for the Core Deficit. *Journal of Learning Disabilities*, 36, 313-317.

Ansari, D., & Karmiloff-Smith, A. (2002). Atypical trajectories of number development: A neuroconstructivist perspective. *Trends in Cognitive Sciences, 6,* 511–516.

A.P.A. – American Psychiatric Association. (1994). Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders 4th Edition (DSM IV). Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Βάμβουκας, Μ. (1993). *Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη

Baroody, A., & Ginsburg, H. (1991). A Cognitive Approach to Assessing the Mathematical Difficulties of Children Labeled "Learning Disabled". Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Bateman, B. (1992). Learning disabilities: The changing landscape. *Journal of Learning Disabilities*, 25, 29-36

Beattie, J. & Algozzine, B. (1982). Testing for Teaching. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην Αριθμητική των μαθητών των Ειδικών Τάξεων. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπισή τους από τους εκπαιδευτικούς*. Διδακτορική διατριβή.

Bley, N. S., & Thornton, C. A. (1995). Teaching Mathematics to Students with Learning Disabilities. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Bouvier, A. (1989). Το δικαίωμα στο λάθος. *Ευκλείδης Γ'*, 21, σελ. 69-86

Brookshire B, Levin HS, Song J, Zhang L. (2004). Components of executive function in typically developing and head-injured children. *Developmental Neuropsychology*, 25.

Brownell, M. T., Mellard, D. F., & Deshler, D. D. (1993). Differences in the learning and transfer performances between students with learning disabilities and other low-achieving students on problem-solving tasks. *Learning Disability Quarterly*, 16.

Brunning R., Schraw G. & Ronning R., Cognitive Psychology and Instruction, Merrill: Prentice Hall, 3rd Ed., 1999. Στο Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Εκδ. Leader Books

Bryant, B. & Rivera, D. (1998). Educational Assessment of Mathematics Skills and Abilities. In Rivera, D. (Ed). *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities*. Austin, TX: Pro-Ed

Bryant, D., Bryant, B. & Hammill, D. (2000). Characteristic behaviours of students with LD who have teacher-identified math weaknesses.*Journal of Learning Disabilities*, 33 (2)

Carey, S. (2001). Cognitive foundations of arithmetic: Evolution and ontogenesis. *Mind and Language, 16,* 37–55.

Carnine, D. (1991). Curricular interventions for teaching higher order thinking to all students: Introduction to the special series. *Journal of Learning Disabilities*, 24, 261-269.

Carpenter, T.P, Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M., & Reys, R. (1980). Solving word problems: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, *28.*

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). The effect of problem structure on first-graders' initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 27–39.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education,15*(3)

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1992). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 345–357.

Cawley, J.F., & Miller, J.H. (1986). Selected views on metacognition, arithmetic problem solving and learning disabilities. *Learning Disabilities Focus*, *1*, 36–48.

Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1989). Cross-sectional comparisons of the mathematical performance of children with learning disabilities: Are we on the right track toward comprehensive programming? *Journal of Learning Disabilities*, 23, 250-254.

Chancerel, J. L. (1987). *Η ειδική Αγωγή στο διεθνή χώρο.* (Μετ. Α. Σιπητάνου). Αθήνα: Γεν. Γραμ. Νέας Γενιάς.

Chiappe, P., (2005). How Reading Research Can Inform Mathematics Difficulties: The Search for the Core Deficit. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (4), 313-317.

Cunningham, A. E., & Stanovich, K. E. (1997). Early reading acquisition and its relation to reading experience and ability 10 years later. *Journal of Experimental Child Psychology, 82,* 934–945.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1995). Δεξιότητες των παιδιών και διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων. Στο Βοσνιάδου, Σ. (Επιμ.). *Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg

Dellatolas, G., von Aster, M., Willadino- Braga, L., Meier, M., & Deloche, G. (2000). Number processing and mental calculation in school children aged 7 to 10 years: A transcultural comparison. *European Child and Adolescent Psychiatry, 9*(2), 102– 110.

Dixon, B. (1994). Research guidelines for selecting mathematics curriculum. *Effective School Practices*, 13(2), 47-55.

Dockrell, J. & McShane, J. (1993). Children's Learning Difficulties Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά* Αθήνα, 2004, Ελληνικά Γράμματα.

European unit of EURYDICE. (1994). Measures to combat Failure at Schools: A Challenge for the Construction of Europe. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην Αριθμητική των μαθητών των Ειδικών Τάξεων. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπισή τους από τους εκπαιδευτικούς*. Διδακτορική διατριβή.

Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών* (γ΄ έκδ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Fleischner, J. E., Garnett, K., & Shepherd, M. (1982). Proficiency in arithmetic basic fact computation by learning disabled and nondisabled children. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 4, 47-55.

Fletcher, J. M. (1985). Memory for verbal and nonverbal stimuli in learning disabilities subgroups: Analysis by selective reminding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 40,244–259.

Fletcher, J. M. (2005). Predicting Math Outcomes: Reading Predictors and Comorbidity. *Journal of Learning Disabilities,* 38 (4) 308-312.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35,* 563–573.

Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Prentice, K. (2004). Responsiveness to Mathematical Problem-Solving Instruction: Comparing Students at Risk of Mathematics Disability With and Without Risk of Reading Disability. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (4).

Garcia, A. I., Jimenez, J.E., & Hess, S. (2006). Solving Arithmetic Problems: An Analysis of Difficulty in Children Arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities*,39 (3).

Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 7, 210-216.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin, 114,* 345–362.

Geary, D.C., Hoard, M. K & Hamson, C. O., (1999). Numerical and arithmetical cognition: Patterns of Functions and Deficits in Children at Risk for a Mathematical Disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 213-239

Geary, D.C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 236-263.

Geary, D.C. & Hoard M.K. (2001). Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology, 15 (7), 635-647*

Geary, D. C. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem solving differences and cognitive deficits. In H. L. Swanson, K. Harris, & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 199–212). New York: Guilford.

Geary. D.C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities,* 37 (1), 4-15.

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education, 33* (1).

Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (4).

Goldman, S., Hassellbring, T., and The Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1998). Achieving Meaningful Mathematics Literacy for Students with Learning Disabilities. In Rivera, D. (Ed). *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities*. Austin, TX: Pro-Ed (pp. 237-254).

Hammill, D.D. (1990). A brief history of Learning Disabilities. Στο Παντελιάδου, Σ. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες και εκπαιδευτική πράξη. Τι και γιατί.* Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93, 615-626

Hanich, L. B., Jordan, N. C., (1997). Achievement-Related Beliefs of Third-Grade Children With Mathematics and Reading Difficulties, *Journal of Educational Research, 97(5)*

Jitendra, A. K., & Hoff, K. (1996). The effects of schema-based instruction on mathematical word problem solving performance of students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 29, 422-431.

Jitendra, A. K., Griffin, C.C., McGoey, K., Gardill, M.C., Bhat, P., & Riley, T. (1998). Effects of mathematical word problem solving by students at risk or with mild disabilities. *Journal of Educational Research, 91*

Jitendra, A., Di Pipi, C., & Perron-Jones, N. (2002). An exploratory study of schema based word problem solving for instruction for middle school students with learning disabilities: A conceptual and procedural understanding. *The Journal of Special Education, 36,* 23–38.

Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second-grade children with different types of learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 33, 567-578.

Jordan, N. C., & Montani, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 624–634.

Jordan, N. C., Kaplan, D., & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 586-597

Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with co-morbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74, 834-850.

Jordan, N., & Hanich, L. (2003). Characteristics of children with moderate mathematics deficiencies: A longitudinal perspective. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*, 213–221.

Judd, T. P., & Bilsky, L. H. (1989). Comprehension and memory in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and non-retarded individuals. *Journal of Educational Psychology, 81,* 541– 546.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Εκδ. Leader Books

Kavale, K. A., Fuchs, D., & Scruggs, T. E. (1994). Setting the record straight on learning disability and low achievement: Implications for policy making. *Learning Disabilities Research & Practice*, 9, 70-77.

Kavale, K.A., Forness, S.R. (2000). What Definitions of Learning Disability Say and Don't Say. *Journal of Learning Disabilities,* 33 (3).

Koumoula, A., Tsironi V., Stamouli V., Bardani I., Siapati S., Graham A., Kafantaris I., Charalambidou I., Dellatolas G.& von Aster M.(2004). An Epidemiological Study of Number Processing and Mental Calculation in Greek Schoolchildren. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (5), 377-388.

Kulak, A. G. (1993). Parallels between math and reading disability: Common issues and approaches. *Journal of Learning Disabilities*, 26, 666-673.

Lansdown, R. (1978). Retardation in Mathematics: a consideration of multifactorial determination. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*. 19, pp. 181-185

Lerner, J. (1993). Learning Disabilities: Theories, Diagnosis & Teaching Strategies. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2000.

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79,* 363–371.

Lewis, A.B. (1989). Training Students to Represent Arithmetic Word Problems, *Journal of Educational Psychology*, 81 (4), p.p. 521-531

Light, J. & DeFries J. (1995). Comorbidity of reading and mathematics disabilities: Genetic and environmental etiologies. *Journal of Learning Disabilities,* 28 (2)

Μάνος, Ν. (1997). *Βασικά στοιχεία Κλινικής Ψυχιατρικής*, Θεσ/νίκη, εκδ. UNIVERSITY STUDIO PRESS.

Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση*, Αθήνα, εκδ. Γρηγόρη.

Magne O., (1993). Διάγνωση και θεραπευτικά προγράμματα για παιδιά με δυσκολίες στα μαθηματικά. Στο Στασινός, Δ. (Επιμ.) *Μαθησιακές δυσκολίες του παιδιού και του εφήβου*. Αθήνα, Gutenberg.

Magne, O. (1999). Η ψυχολογία της Θεραπείας των Δυσκολιών στα Μαθηματικά. Στο *Μαθησιακές Δυσκολίες του Παιδιού και το Εφήβου: Η εμπειρία της Ευρώπη*, (Επιμ. Δ. Στασινός). Αθήνα, Gutenberg- Παιδαγωγική Σειρά.

Mastropieri, M. A., Scruggs, T. E., & Shiah, S. (1991). Mathematics instruction for learning disabled students: A review of research. Learning Disabilities. *Research & Practice*, 6, 89-98.

Mazzocco, M. M. (2005). Challenges in Identifying Target Skills for Math Disabilities: Screening and Intervetion. *Journal of Learning Disabilities,* 38(4) 38-323

McLean, J. F., & Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 240–260.

McLeod, T., & Armstrong, S. (1982). Learning disabilities in mathematics-skill deficits and remedial approaches at the intermediate and secondary level. *Learning Disability Quarterly*, 5, 305-311

McLeod, T. & Crump, W. (1978). The Relationship of Visuospatial Skills and Verbal Ability to Learning Disabilities in Mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 11 (4)

Mercer, C. D. (1987). Students with Learning Disabilities. Στο Αγαλιώτης, Ι. Η σημασία της γνωστικής ανάλυσης των λαθών, στην περίπτωση καταρτισμού υποστηρικτικών διδακτικών προγραμμάτων, για παιδιά με δυσκολίες μάθησης στην Αριθμητική. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 109, σελ. 26-34.

Mercer, C. D., & Miller, P. S. (1992). Teaching students with learning problems to acquire, understand, and apply basic math facts. *Remedial and Special Education, 13* (3).

Miller, S., & Mercer, C. (1997). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30 (1), 47-56

Miller, S., & Mercer, C. (1998). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. In Rivera, D. (Ed), *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities*. Austin, TX: Pro- Ed, (pp 81 – 96).

Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 25, 230-248

Montague, M. (1996). Assessing Mathematical Problem Solving. *Learning Disabilities Research & Practice*, 11 (4), pp. 238-248.

Montague, M. (1997a). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30,* 164–177.

Montague, M. (1997b). Student's perception, mathematical problem solving, and learning disabilities. *Remedial and Special Education, 18,* 46–53.

Montague, M., Warger, C., & Morgan, T. (2000). Solve it! Strategy instruction to improve mathematical problem solving. *Learning Disabilities Research & Practice, 15.*

Montague, M. & Van Garderen D. (2003). A Cross-Sectional Study of Mathematics Achievement, Estimation Skills, and Academic Self-Perception in Students ofVarying Ability. *Journal of Learning Disabilities,36 (5), 437-448.*

Moreno, R., & Mayer, R. E. (1999). Multimedia - supported metaphors for meaning making in mathematics. *Cognition and Instruction, 17,* 215–248.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and evaluation standards for teaching mathematics. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Norman, D. A. (1989). Cognitive artifacts Στο *Κοινωνιογνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες των Φυσικών και Λογικομαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο.* (Επιμ. Γ. Παπαμιχαήλ). Αθήνα, Gutenberg- Ψυχολογία

Orton, A. (1992). Learning Mathematics. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Ostad, S. (1998). Developmental Differences in Solving Simple Arithmetic Word Problems and Simple Number-fact Problems: A Comparison of Mathematically Normal and Mathematically Disabled Children. *Mathematical Cognition*, 4 (1), 1-19

Παντελιάδου, Σ. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες και εκπαιδευτική πράξη. Τι και γιατί.* Ελληνικά Γράμματα. Αθήνα 2000

Παρασκευόπουλος, Ι. (1993). *Μεθοδολογία Επιστημονικής Έρευνας.* (Τομ.1,2). Αθήνα, Εκδόσεις του ιδίου

Πολυχρονοπούλου-Ζαχαρογέωργα, Σ. (1995). *Παιδιά και έφηβοι με ειδικές ανάγκες και δυνατότητες.* Αθήνα, Εκδόσεις της ιδίας.

Πόρποδας, Κ. (1996). *Γνωστική Ψυχολογία.* Τόμοι 1 και 2. Αθήνα.

Πόρποδας, Κ. (2003). *Διαγνωστική αξιολόγηση και αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο.* Πάτρα, Έκδοση στο πλαίσιο ΕΠΕΑΕΚ 2000-2006

Parmar, R. S., & Cawley, J. F. (1991). Challenging the routines and passivity that characterize arithmetic instruction for children with mild handicaps. *Remedial and Special Education*, 12 (5), 23-32, 43.

Parmar, R. S., Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1994). Differences in mathematics performance between students with learning disabilities and students with mild retardation. *Exceptional Children*, 60, 549-563

Parmar, R. S., Cawley, J. F., & Frazita, R. R. (1996). Word problem solving by students with and without mild disabilities. *Exceptional Children, 62,* 415–429.

Patton, J. R., Cronin, M. E., Bassett, D. S., & Koppel, A. E. (1997). A life skills approach to mathematics instruction: Preparing students with learning disabilities for the real-life math demands of adulthood. *Journal of Learning Disabilities, 30,* 178– 187.

Pellegrino, J., & Goldman, S. (1987). Information processing and elementary mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 20 (5), pp. 23-32.

Piaget, J. (1979γ). Ψυχολογία και Παιδαγωγική. Στο Αγαλιώτης. Ι. *Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην Αριθμητική των μαθητών των Ειδικών Τάξεων. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπισή τους από τους εκπαιδευτικούς*. Διδακτορική διατριβή.

Radinovitch, R.D. (1968) Reading problems in children: Definitions and classifications. Στο Πόρποδας, Κ. *Δυσλεξία*. Αθήνα

Reisman, F. (1982). A Guide to the Diagnostic Teaching of Arithmetic. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Riley, M.S., & Greeno, J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, *5*, 49–101.

Rivera, D. P. (1997). Mathematics Education and Students with Learning Disabilities: Introduction to the Special Series. *Journal of Learning Disabilities, 30, 2-19*

Rourke, B. P., & Finlayson, M. A. L. (1978). Neuropsychological significance of variations in patterns of academic performance: Verbal and visual-spatial abilities. *Journal of Abnormal Child Psychology*, 6, 121–133.

Rourke, B. P. (1993). Arithmetic Disabilities, specific and otherwise: A Neuropsychological Perspective. *Journal of Learning Disabilities*, 26 (4), pp. 214-226.

Rutter, M. & Yale, W. (1975). The concept of specific reading retardation. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 16, pp. 181-197.

Shalev, R.S., (2001) Developmental Dyscalculia Is a Familial Learning Disability. *Journal of Learning Disabilities,* 34 (1)

Share, D. L., Jorm, A. F., MacLean, R., & Matthews, R. (2002). Temporal processing and reading disability. *Reading and Writing*: *An Interdisciplinary Journal, 15,* 151–178.

Sharma, M. (1985).Mathematics learning personality. *Math Notebook*, 7 (1,2) pp.1-10

Siegel, L. S., & Ryan, E. B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. *Child Development*, 60.

Silver, C.H., Pennett, D.L, Black J.L., Fair, G.W. & Balise, R.R. (1999). Stability of Arithmetic Disability Subtypes. *Journal of Learning Disabilities*,32 (2) 108-119.

Spiers, A. (1987). Acalculia Revisited: Current Issues. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Stanovich, K. E. (1986). Matthew effects in reading: Some consequences of individual differences in the acquisition of literacy. *Reading Research Quarterly, 21,* 360– 407.

Stanovich, K. E. (1993). A model for studies of reading disability. *Developmental Review, 13,* 225–245.

Stanovich, K. E., & Siegel, L. S. (1994). Phenotypic performance profile of children with reading disabilities: A regression based test of the phonological-core variable difference model. *Journal of Educational Psychology, 86,* 24–53.

Swanson, H. L. & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *79*, 294–321.

Τρούλης, Γ. (1992). *Τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα Gutenberg.

Taylor, R. (1997).Assessment of Exceptional Students: Educational and Psychological Procedures. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Thornton, C.A., Langrall, C.W., & Jones, G.A. (1997). Mathematics Instruction for Elementary Students with Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities,* 30 (2) 142-150

Underhill, R., Uprichard, A. & Heddens J. (1980). Diagnosing Mathematical Difficulties. Στο Αγαλιώτης, Ι. *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Αθήνα, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2004.

Van Erp, J. & Heshusius, L. (1986). Action Pshychology: Learning as the Interiozation of Action in Early Instruction of Mathematically Disabled Learners. *Journal of Learning Disabilities,* 19 (5) 274-279

Venger, A.L., Gorbov, S.F. (1993). Psychological foundations for an introductory course of mathematics for six years olds, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 15 (1), p.p. 85-97

Vygotsky, L. S. (1960). The development of higher mental functions Στο *Κοινωνιογνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες των Φυσικών και Λογικομαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο*. (Επιμ. Γ. Παπαμιχαήλ). Αθήνα, Gutenberg- Ψυχολογία

Zentall, S. S., & Ferkis, M. A. (1993). Mathematical problem solving for children with ADHD with and without learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 16, 6-18

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

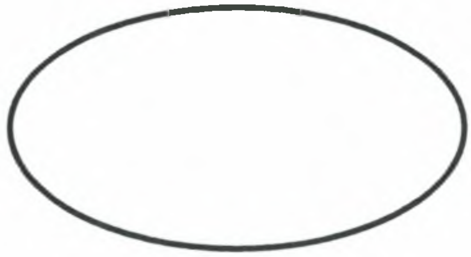
ΕΝΤΥΠΟ A_1

1. Ζωγραφίζω:

4 βόλους **μέσα** στη γραμμή

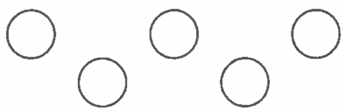
3 βόλους **πάνω** στη γραμμή

5 βόλους **έξω** από τη γραμμή

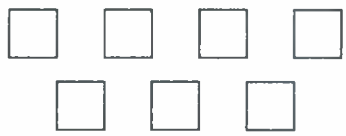


2. Βάζω σε κύκλο όσα λέει ο αριθμός

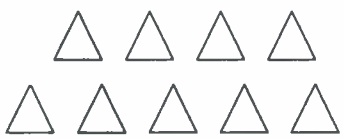
2



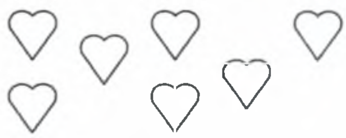
5



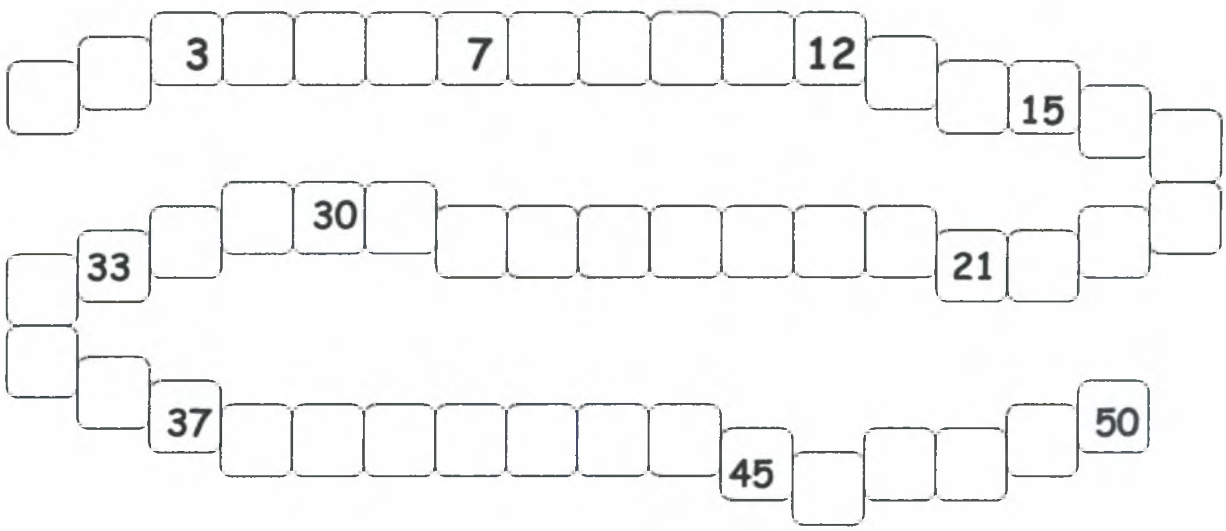
7



4



3. Συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν:



4. Διαβάζω τους αριθμούς:

5 7 41 20 4 78 66 12 0 97 19

5. Κυκλώνω :

- το μεγαλύτερο

8 11   14 41   19 9   20 19

- το μικρότερο

9 17   15 16   20 10   18 14

6. Συμπληρώνω τους αριθμούς:

τέσσερα ☐   ένδεκα ☐   δεκατέσσερα ☐

δεκαεννιά ☐   οχτώ ☐   δώδεκα ☐

τρία ☐   δέκα ☐   δεκαεφτά ☐   ένα ☐

7. Συμπληρώνω τους αριθμούς :

2	4	6							
5	10	15							

8. Βρίσκω τον προηγούμενο και τον επόμενο αριθμό:

___ 8 ___   ___ 10 ___   ___ 20 ___   ___ 25 ___

___ 39 ___   ___ 71 ___   ___ 60 ___   ___ 100 ___

9. Βάζω τα σύμβολα > = < ανάμεσα στους αριθμούς:

41 ◯ 14 56 ◯ 48 17 ◯ 71

10 ◯ 8+2 32 ◯ 23 28 ◯ 29 10 ◯ 100

10. Βάζω στη σειρά τους αριθμούς από:

- το μικρότερο στο μεγαλύτερο: 3 45 21 15 8 12 17

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- το μεγαλύτερο στο μικρότερο: 12 59 21 4 32 23 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

11. Γράφω με τη σειρά:

- τις μέρες της εβδομάδας

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Τρίτη	Κυριακή	Πέμπτη	Σάββατο	Παρασκευή	Δευτέρα	Τετάρτη

- Τι κάνω το πρωί:

☐	☐	☐	☐	☐
Ξυπνώ	πίνω γάλα	φεύγω	ντύνομαι	πλένομαι

- τα νομίσματα

☐	☐	☐	1	☐
20 Λεπτά	1 Ευρώ	50 Λεπτά	10 Λεπτά	2 Ευρώ

12. Αντιστοιχίζω:

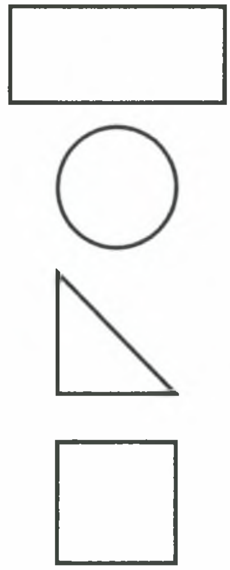
- Σχήμα και όνομα

τετράγωνο

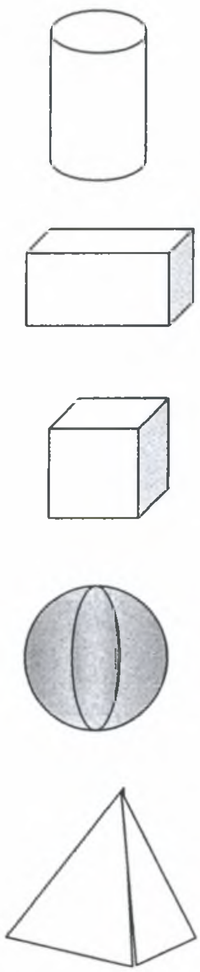
τρίγωνο

ορθογώνιο

κύκλος



- Στερεό και όνομα



Κύβος

πυραμίδα

ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

κύλινδρος

σφαίρα

13. Πόσα χρήματα έχει κάθε παιδί;

Η Μαρία έχει

__ € __ λεπτά

Ο Νίκος έχει

__ € __ λεπτά

Η Άννα έχει

__ € __ λεπτά

14. Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς:

6 + 3 = ___	8 + 5 = ___	7 + 7 = ___
9 + 8 = ___	6 + __ = 10	10 + 9 = ___
3 + __ = 12	15 + 4 = ___	4 + 7 = ___

15. Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς:

7 - 3 = __	8 - 2 = __	9 - 5 = __
12 - 4 = __	10 - 6 = __	11 - 3 = __
9 - 8 = __	16 - __ = 10	15 - 8 = __

16. Κάνω τις πράξεις:

23	34	25	34	50	78
+3	20	48	+7	29	39
65	59	50	67	60	79
40	-3	20	-8	15	22

ΟΧΙ

17. Λύνω τα προβλήματα:

Ο ταχυδρόμος έβαλε μέσα στο σάκο του 9 μεγάλους φακέλους και 7 μικρούς φακέλους. Πόσοι είναι όλοι οι φάκελοι μαζί;

Μέσα σε ένα καλάθι είναι 14 μήλα. Αν βάλω ακόμη 3 μήλα πόσα θα είναι τα μήλα μέσα στο καλάθι;

Ο Γιώργος έχει 8 μπίλιες και ο Νίκος έχει 5 μπίλιες περισσότερες από το Γιώργο. Πόσες μπίλιες έχει ο Νίκος;

Η Ελένη είχε 10 αυτοκόλλητα και έδωσε 4 από αυτά στη φίλη της Μαρία. Πόσα αυτοκόλλητα έχει τώρα η Ελένη;

Η Κατερίνα είχε 13 ευρώ. Αγόρασε ένα βιβλίο με 6 ευρώ. Πόσα χρήματα της έμειναν;

Ο Βαγγέλης έλυσε 8 ασκήσεις και η Αλέκα 3 λιγότερες. Πόσες ασκήσεις έλυσε η Αλέκα;

ΕΝΤΥΠΟ A_2

- Συμπληρώνω τη σειρά με ό,τι ταιριάζει:

□ ○ □ ○ □ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

▲ □ ○ ▲ □ ○ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

+ + × × + + _ _ _ _ _ _ _

■	□	□	■	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

- Γράφω και διαβάζω τους αριθμούς:

εβδομήντα □ τριάντα δύο □ ενενήντα ένα □

84 97 60 74 47 89

εξήντα τρία □ είκοσι οκτώ □ ογδόντα δύο □

- Κατεβαίνω απ' το 20

20						14						8							

- Βάζω σε κύκλο τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το **20**

61 19 34 15 21 10 29 78 100 11

- Χωρίζω αριθμούς σε μονάδες (Μ), δεκάδες (Δ), εκατοντάδες (Ε)

15	109	87	100

Ε	Δ	Μ

Ε	Δ	Μ

Ε	Δ	Μ

Ε	Δ	Μ

- Βρίσκω τι δείχνει το **6** στους παρακάτω αριθμούς:

στο 1 2 **6** δείχνει _______________

στο 2 **6** 4 δείχνει _______________

στο **6** 4 7 δείχνει _______________

- Βάζω **>** **=** **<** ανάμεσα στους αριθμούς:

98 ◯ 89   100 ◯ 10   71 ◯ 70   18 ◯ 8 + 8

25 ◯ 52   48 ◯ 68   5 + 5 ◯ 55   7+3 ◯ 3+7

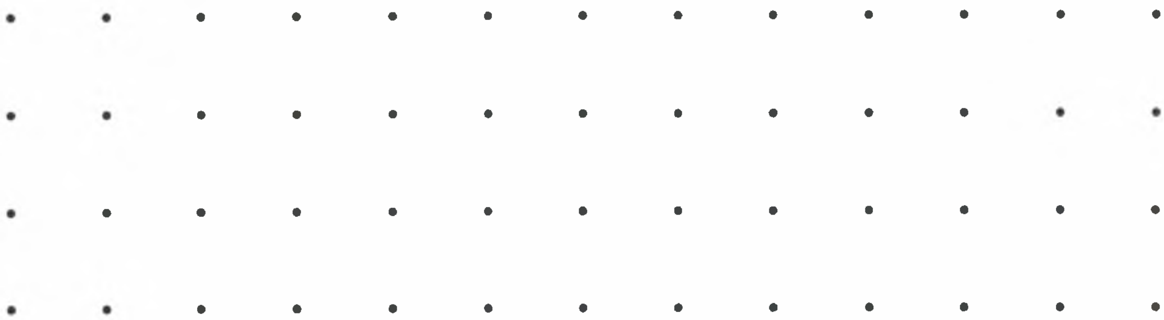
- Κάνω τις πράξεις:

48	54	43	176	109	274
+31	+35	+28	+15	+86	+325

39	68	34	120	145	281
- 25	- 46	- 28	- 15	-88	- 164

- Ενώνω τις τελείες για να φτιάξω ένα:

τετράγωνο **τρίγωνο** **ορθογώνιο**



- Αντιστοιχίζω γεωμετρικά στερεά και αντικείμενα

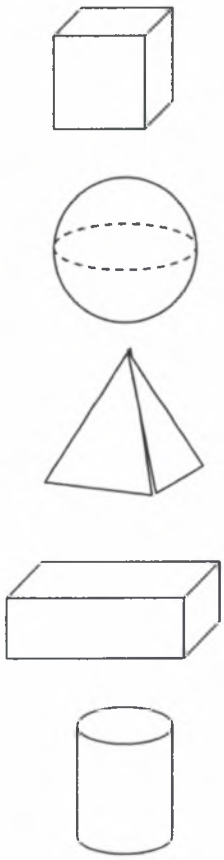
Πυραμίδα

Κύβος

Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο

Κύλινδρος

Σφαίρα



Μπάλα

Ζάρι

Ποτήρι

Κουτί τσίχλες

Σκεπή σπιτιού

Χαρτί υγείας

Γόμα

Πορτοκάλι

όλ

- Λύνω τα προβλήματα:

Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;

Η Ελένη θέλει να φτιάξει με τη μητέρα της μπισκότα. Η μαμά της έφτιαξε 38 μπισκότα. Η Ελένη έφτιαξε 15 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξαν και οι δυο μαζί;

Ο φούρνος της γειτονιάς πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες. Την Τρίτη πούλησε 5 περισσότερες. Πόσες τυρόπιτες πούλησε την Τρίτη;

Ο Βαγγέλης μάζευε χρήματα στον κουμπαρά του. Όταν τον άνοιξε είχε συγκεντρώσει 50 €. Πήγε σ' ένα μεγάλο κατάστημα με παιχνίδια και αγόρασε ένα επιτραπέζιο με 25 €. Πόσα ευρώ του έμειναν;

Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 43 επιβάτες. Στη στάση κατέβηκαν 18 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες συνέχισε το λεωφορείο;

Η Δήμητρα ζυγίστηκε στη ζυγαριά και είδε ότι ήταν 32 κιλά. Ύστερα από μια εβδομάδα έχασε 3 κιλά. Πόσο ζυγίζει τώρα η Δήμητρα;

Ο Τάκης και ο Νίκος μετρούσαν τις τάπες τους. Ο Τάκης μέτρησε 27 τάπες. Ο Νίκος είδε ότι είχε 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη. Πόσες τάπες έχει ο Νίκος;

Στο ψυγείο υπήρχαν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 και ο αδερφός μου 5. Πόσα ροδάκινα έμειναν στο ψυγείο;

Ο Γιάννης πήγε στο κυλικείο του σχολείου και κοίταξε τον κατάλογο με τα προϊόντα. Ήθελε να φάει μια τυρόπιτα και να πιει και ένα χυμό. Έχει 3 ευρώ. Του φτάνουν;

Τοστ	1 €
Τυρόπιτα	1 €
Κουλούρι	50 Λ
Νερό	30 Λ
Χυμός	1,20 €

ΕΝΤΥΠΟ A_3

Προβλήματα των DeCorte & Verschaffel (διαφορετικής διατύπωσης)

1. Ο Πέτρος είχε 3 μήλα. Η Άννα έδωσε στον Πέτρο 5 ακόμη μήλα. Πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα ;

2. Ο Πέτρος είχε 6 μήλα. Έδωσε 2 μήλα στην Άννα. Πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα ;

3. Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έδωσε στον Πέτρο μερικά ακόμη μήλα. Ο Πέτρος τώρα έχει 10 μήλα. Πόσα μήλα έδωσε στον Πέτρο η Άννα ;

4. Ο Πέτρος είχε μερικά μήλα. Έδωσε 3 μήλα στην Άννα Τώρα ο Πέτρος έχει 5 μήλα. Πόσα μήλα είχε ο Πέτρος στην αρχή ;

5. Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έχει 7 μήλα. Πόσα μήλα έχουν και οι δύο μαζί;

6. Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έχει επίσης, μερικά μήλα. Ο Πέτρος και η Άννα έχουν 9 μήλα και οι δύο μαζί. Πόσα μήλα έχει η Άννα ;

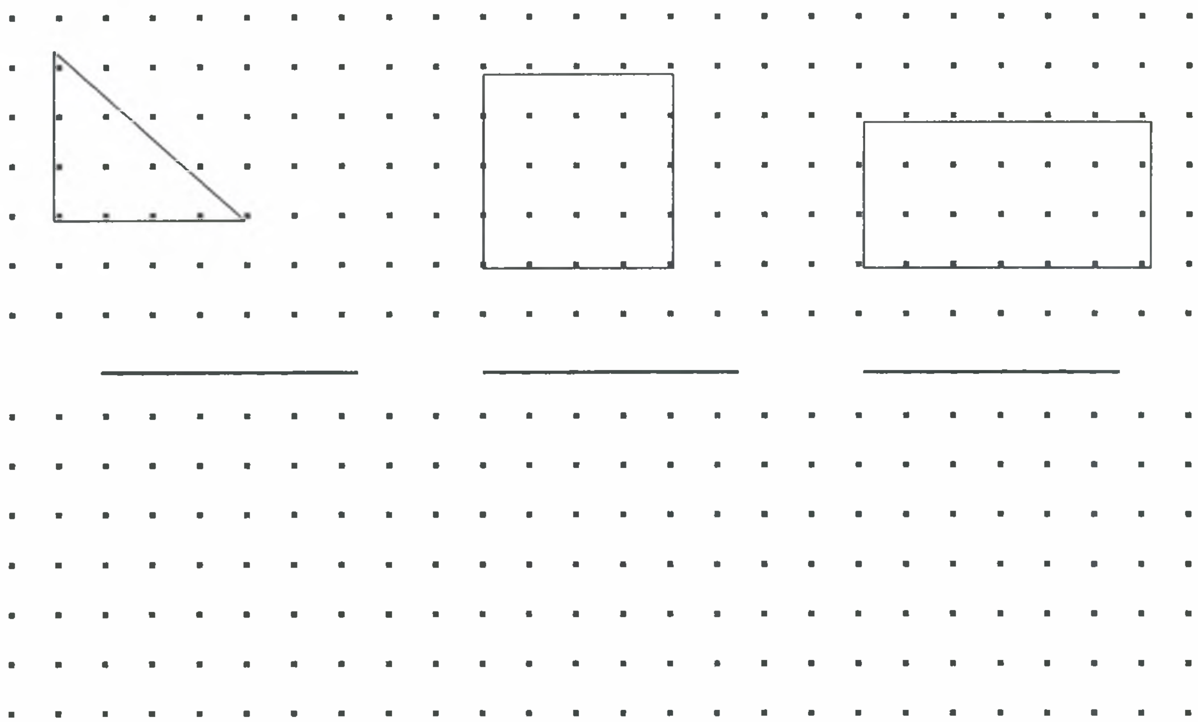
7. Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έχει μερικά περισσότερα από τον Πέτρο. Η Άννα έχει 8 μήλα. Πόσα περισσότερα μήλα έχει η Άννα;

8. Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Άννα έχει 6 μήλα περισσότερα από τον Πέτρο. Πόσα μήλα έχει η Άννα ;

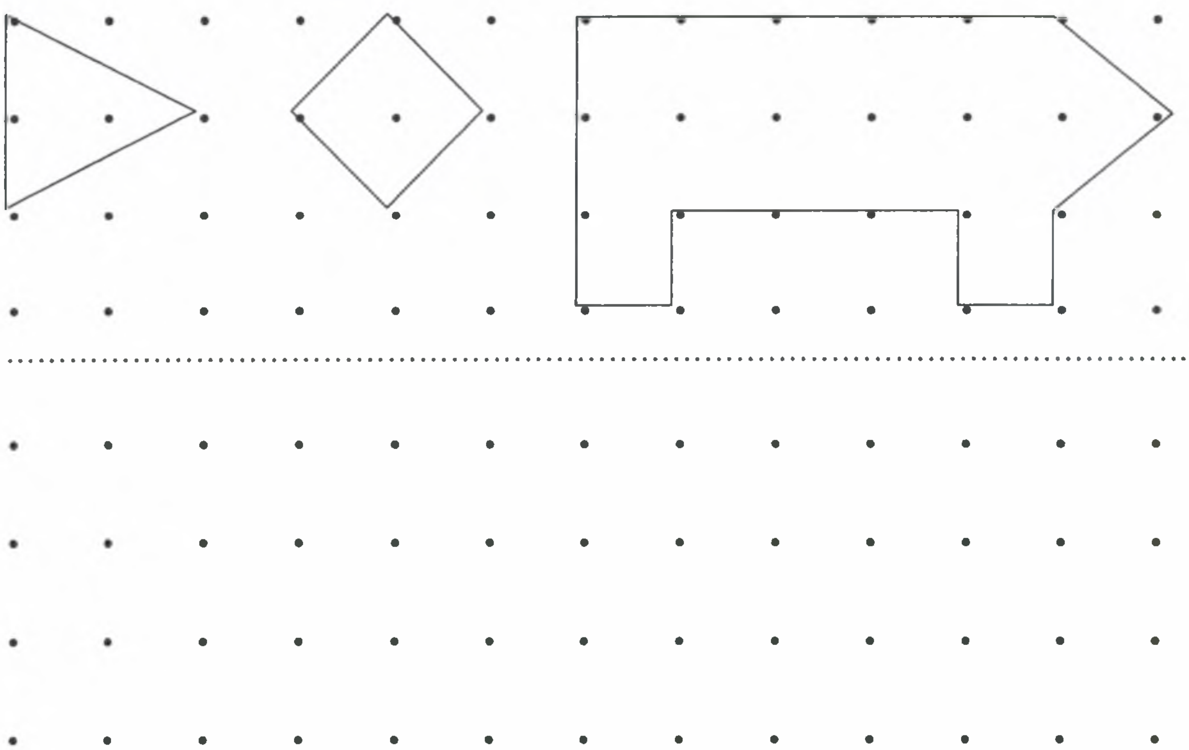
ΕΝΤΥΠΟ A_4

Ασκήσεις Γεωμετρίας

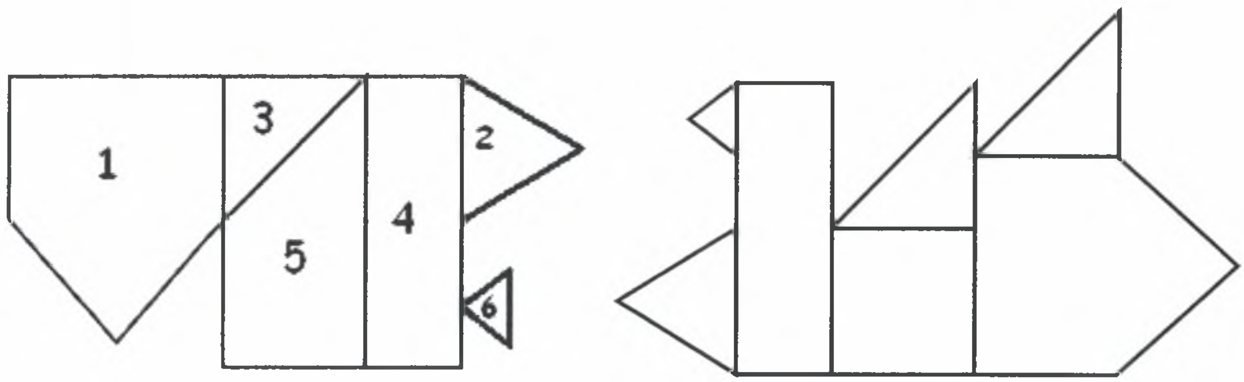
1. Ονόμασε τα παρακάτω σχήματα και σχεδίασέ τα ξανά



2. Ξαναφτιάξε τα παρακάτω σχήματα ενώνοντας τις τελείες



3. Γράψε τους αριθμούς στα κομμάτια που είναι ίδια:



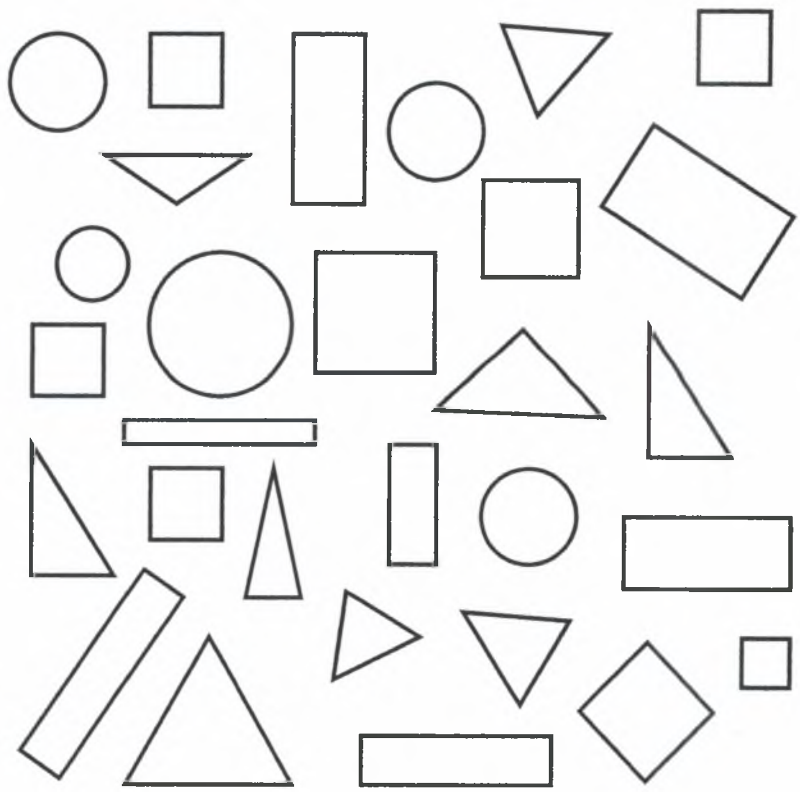
4. Κοίταξε τα παρακάτω σχήματα και γράψε πόσα είναι:

Τρίγωνα: ____

Τετράγωνα: ____

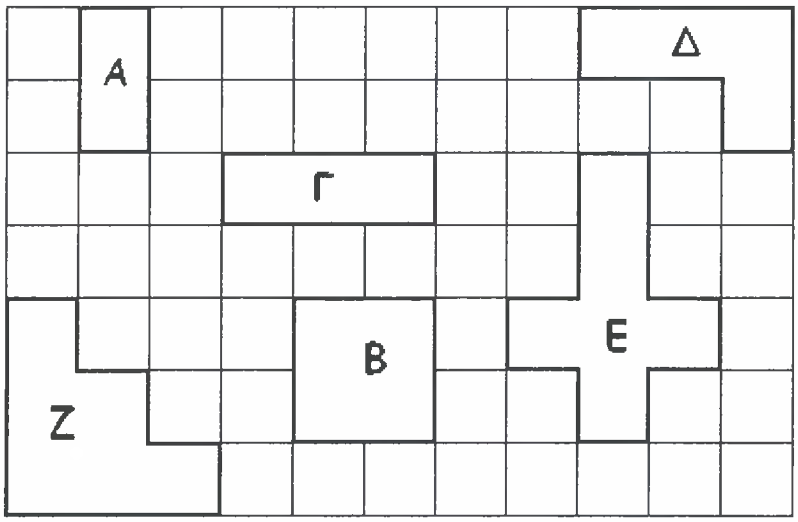
Ορθογώνια: ____

Κύκλοι: ______



Μέτρηση επιφάνειας

5. Γράψε πόσα ☐ έχει το κάθε σχήμα



A = ____

B = ____

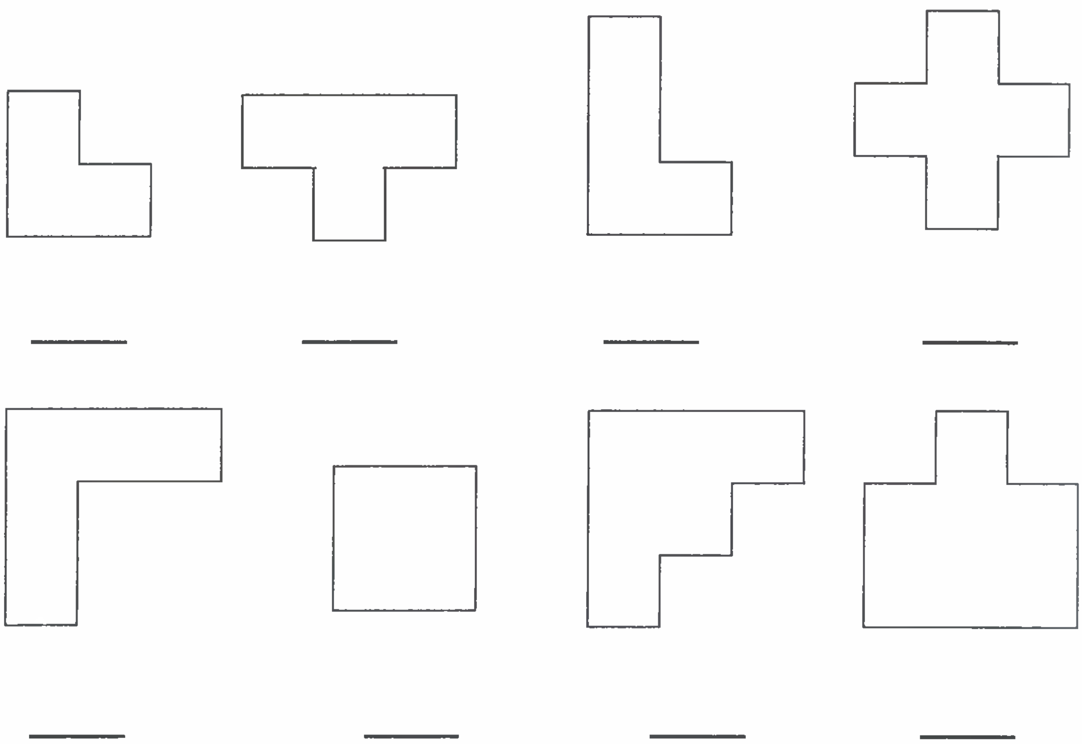
Γ = ____

Δ = ____

E = ____

Z = ____

6. Πόσα ☐ έχει το κάθε σχήμα



7. Γράψε τους αριθμούς των σχημάτων εκεί που ταιριάζουν:

Τετράγωνα: ____________

Ορθογώνια: ____________

Τρίγωνα: ______________

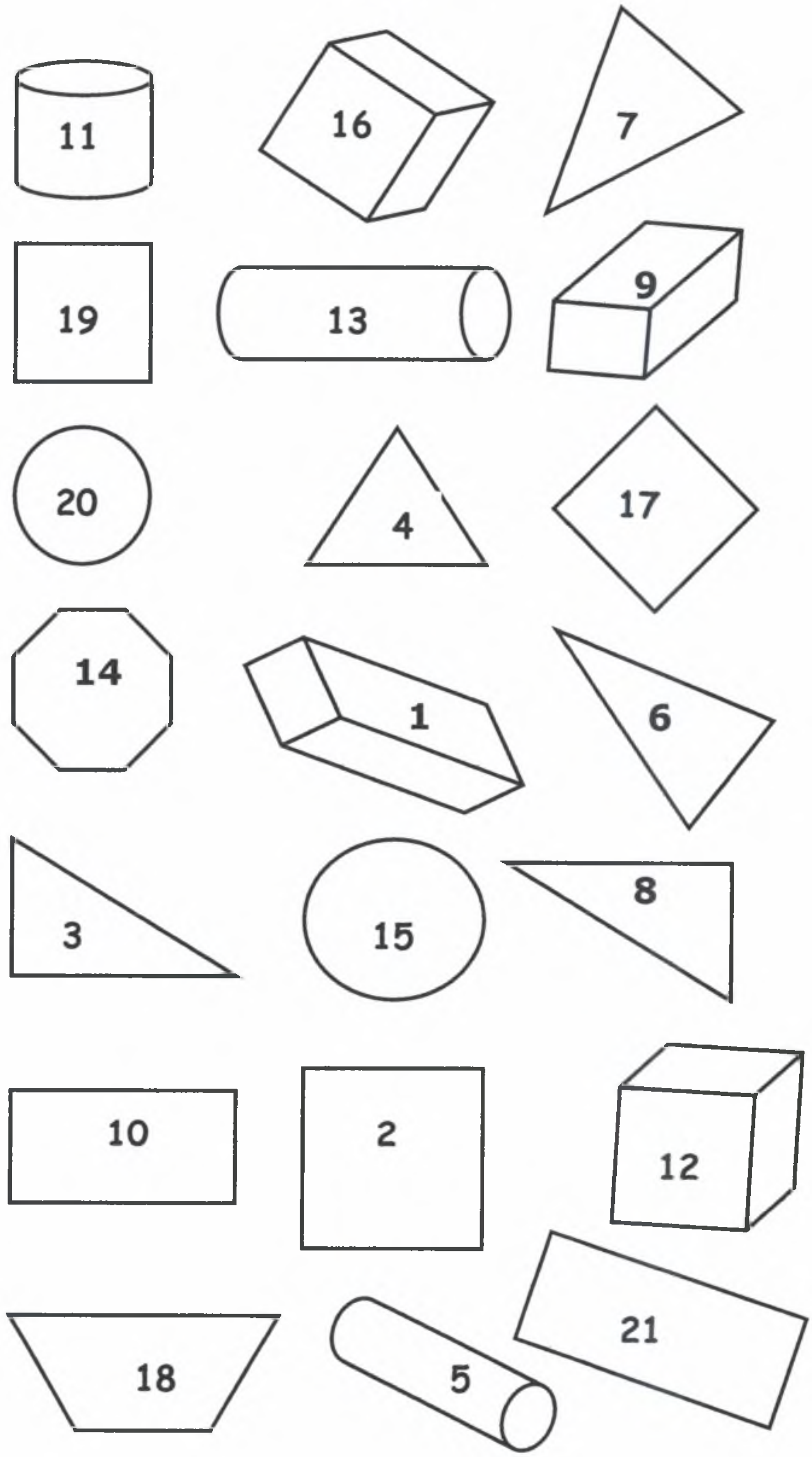
Κύκλοι: _______________

Κύλινδροι: ____________

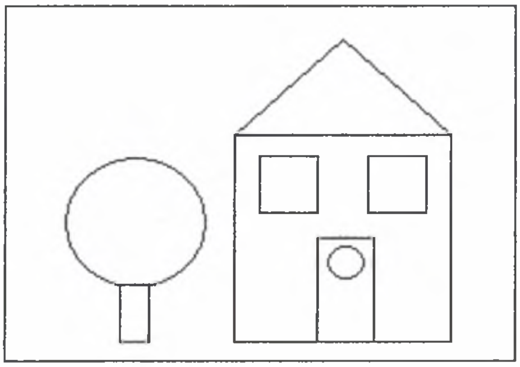
Ορθογώνια παραλληλεπίπεδα: ______
____

Κύβοι: ________________

Άλλα σχήματα: ____________



8. Βρες από πόσα σχήματα αποτελείται κάθε εικόνα

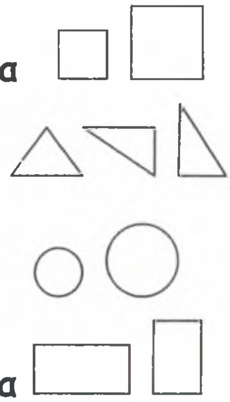


____ Τετράγωνα

____ Τρίγωνα

____ Κύκλοι

____ Ορθογώνια

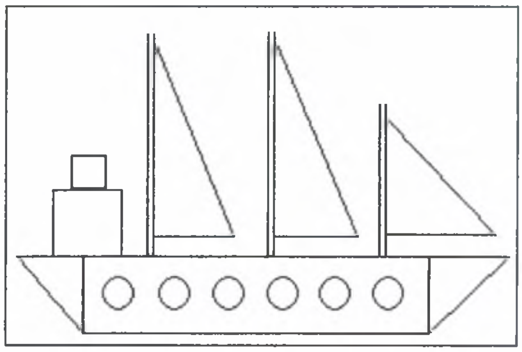


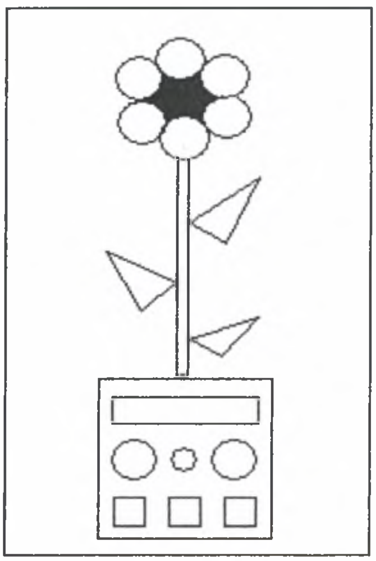
Τετράγωνα ____

Τρίγωνα ____

Κύκλοι ____

Ορθογώνια ____



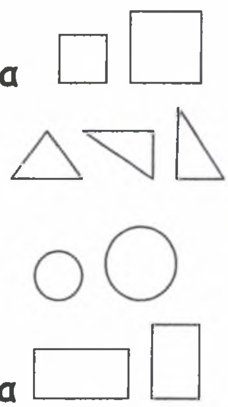


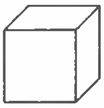
____ Τετράγωνα

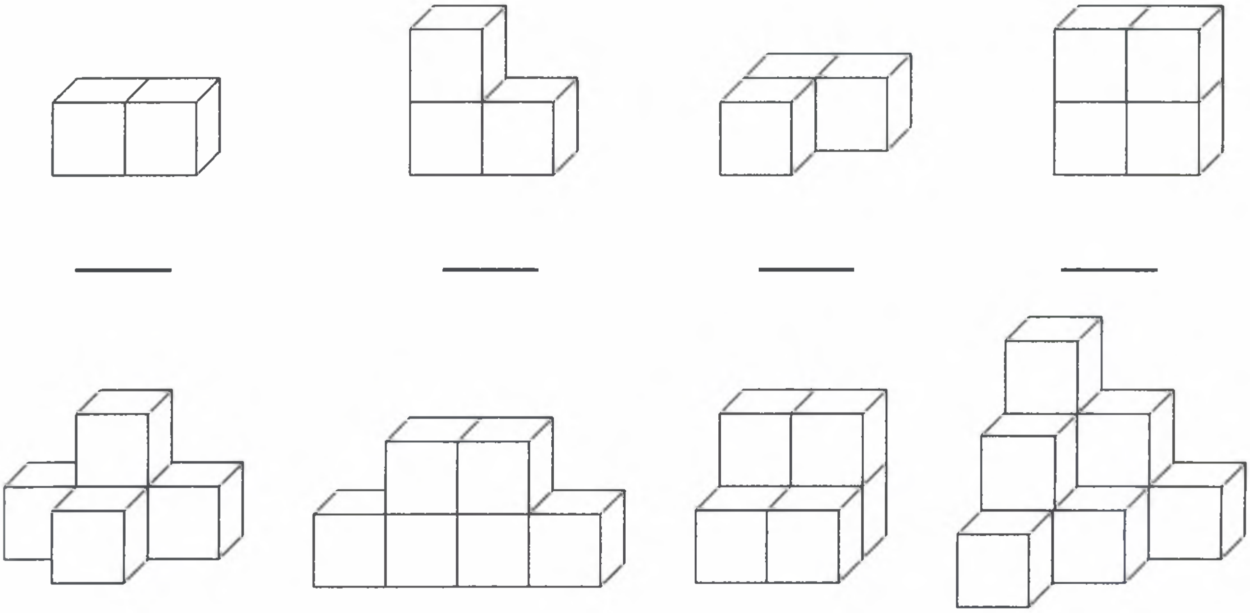
____ Τρίγωνα

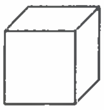
____ Κύκλοι

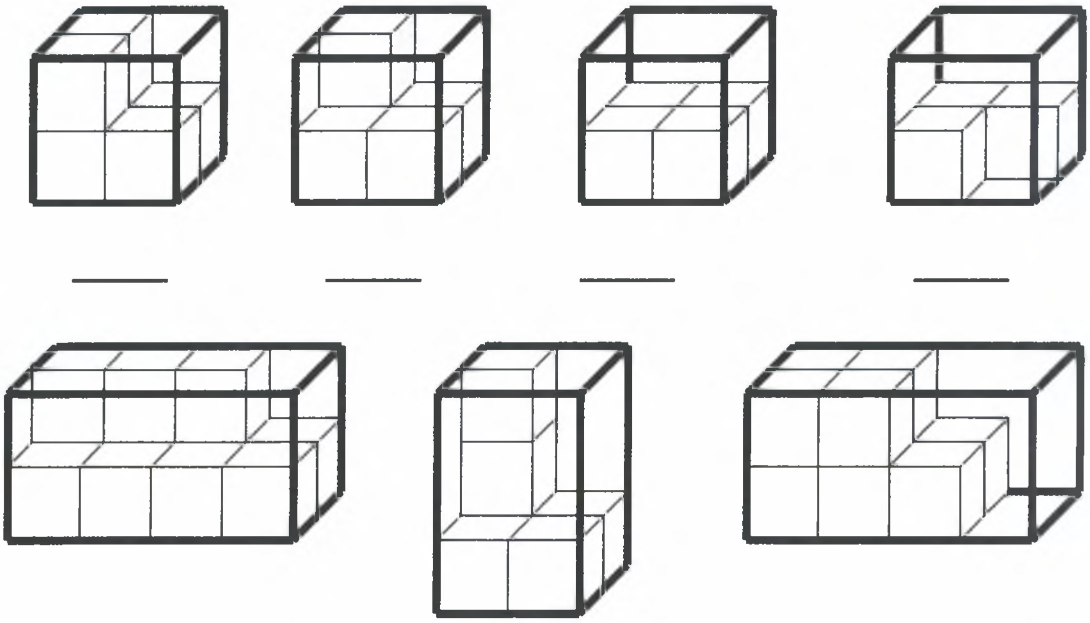
____ Ορθογώνια



9. Πόσα  έχει κάθε σχήμα από τα παρακάτω;



10. Πόσα  πρέπει να βάλουμε για να γεμίσει το κουτί;



ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ (+ ΧΑΛΑΚΙ) 1

ΕΝΤΥΠΟ B_1

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

περισσότερο

Ο Κώστας έχει 6

λιγότερο

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ 2

20	20	20	20	20
19	19	19	19	19
18	18	18	18	18
17	17	17	17	17
16	16	16	16	16
15	15	15	15	15
14	14	14	14	14
13	13	13	13	13
12	12	12	12	12
11	11	11	11	11
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7
6	6	6	6	6
5	5	5	5	5
4	4	4	4	4
3	3	3	3	3
2	2	2	2	2
1	1	1	1	1

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ 3

20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Ο Γιάννης έχει 14 μπίλιες και η Ελένη 3 περισσότερες ...

Ο Νίκος έχει 11 βιβλία και ο Τάκης 4 λιγότερα ...

Την Τρίτη πούλησε 12 τοστ και την Τετάρτη 7 περισσότερα

Η Μαρία είχε 14 € και η Γιώτα 6 € λιγότερα ...

Η Ε' τάξη έχει 19 παιδιά και η Δ' τάξη 3 λιγότερα ...

Ο Γιώργος έφαγε 6 κεράσια κι ο Μάκης 8 περισσότερα ...

Η Νίκη έλυσε 16 ασκήσεις κι ο Πάνος 7 λιγότερες ...

Ανέβηκα 17 σκαλοπάτια κι ο φίλος μου 9 λιγότερα ...

Οι μηλιές είναι 11 και οι πορτοκαλιές 8 περισσότερες ...

Τα αγόρια είναι 9 και τα κορίτσια 5 περισσότερα ...

Μια λέξη έχει 20 γράμματα και μια άλλη 7 λιγότερα ...

Η Αθηνά είναι 7 χρονών και η αδερφή της 8 περισσότερα ...

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ 4 (ΠΑΙΧΝΙΔΙ)

Έχεις 1 περισσότερα	Έχεις 1 λιγότερα
Έχεις 2 περισσότερα	Έχεις 2 λιγότερα
Έχεις 3 περισσότερα	Έχεις 3 λιγότερα
Έχεις 4 περισσότερα	Έχεις 4 λιγότερα
Έχεις 5 περισσότερα	Έχεις 5 λιγότερα
Έχεις 6 περισσότερα	Έχεις 6 λιγότερα
Έχεις 7 περισσότερα	Έχεις 7 λιγότερα
Έχεις 8 περισσότερα	Έχεις 8 λιγότερα
Έχεις 9 περισσότερα	Έχεις 9 λιγότερα

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ 1

ΕΝΤΥΠΟ Β$_2$

- Δείχνω τους αριθμούς με τη βοήθεια των κύβων

8 14 29 40 128 345

- Χωρίζω τους αριθμούς σε **Μ** = μονάδες, **Δ** = δεκάδες, **Ε** = εκατοντάδες

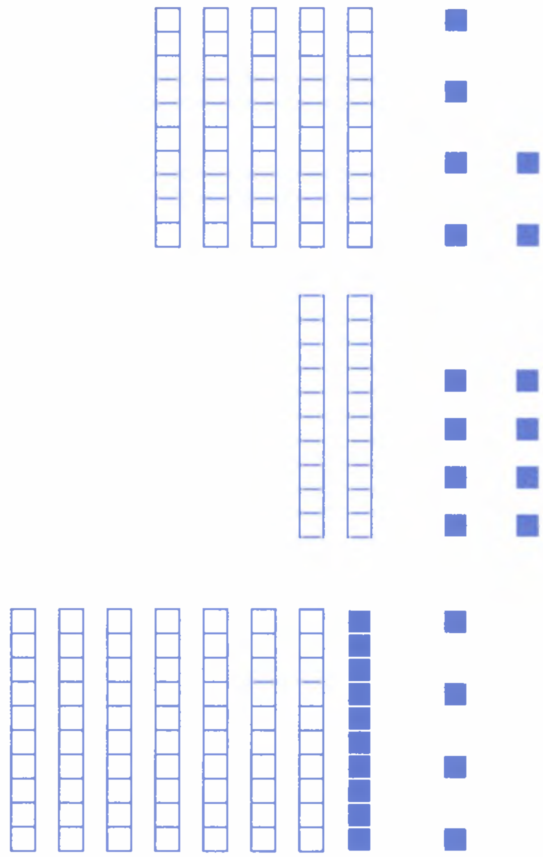
56 134 305 9 560

- Βάζω σε κύκλο το μεγαλύτερο αριθμό

31	13
105	15
28	82
49	48
70	69
164	156
209	210
1406	147

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ 2

$$\begin{array}{r} 56 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array}$$

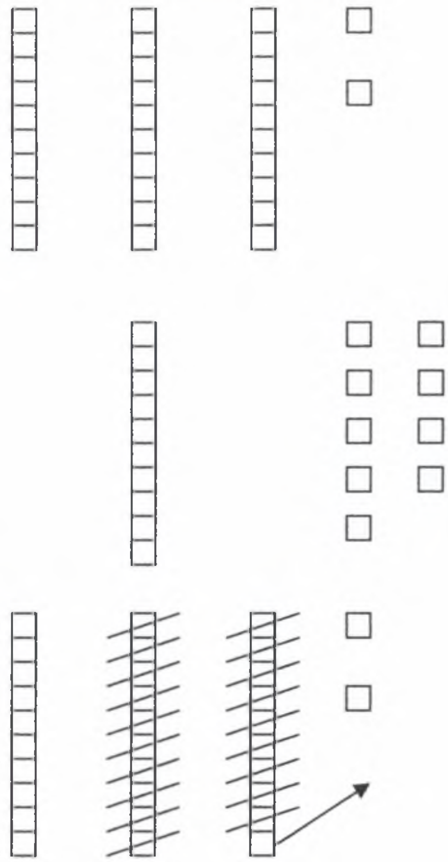


- Κάνω τις πράξεις

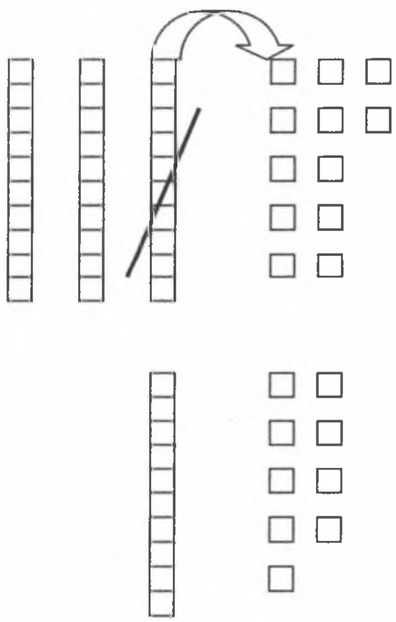
$\begin{array}{r} 72 \\ +19 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 29 \\ +58 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 87 \\ +9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 63 \\ +27 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 56 \\ +24 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ +26 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ +28 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 59 \\ +3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 207 \\ +24 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 164 \\ +26 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 320 \\ +84 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 159 \\ +123 \\ \hline \end{array}$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ 3

$$\begin{array}{r} 32 \\ -19 \\ \hline 13 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2\;12 \\ \cancel{3}\;\cancel{2} \\ -1\;9 \\ \hline \end{array}$$



ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΒΑΣΗΣ 4

- Κάνω τις πράξεις

όχι

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 17 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ -\ 46 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ -\ 15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 83 \\ -\ 57 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array}$$

- Δείχνω πόσα έχουν

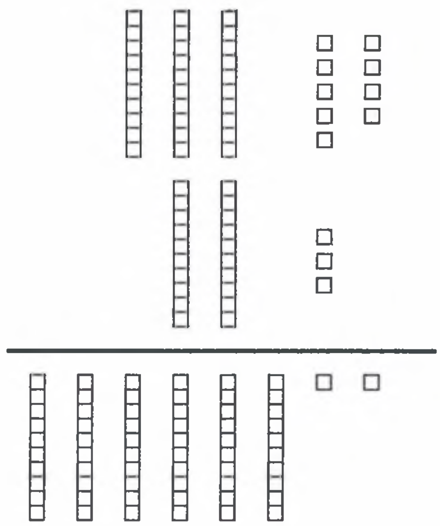
Ο Γιάννης έχει:	Η Μαρία έχει:
3	2 περισσότερα
9	2 λιγότερα
7	4 περισσότερα
3 λιγότερα	8
5 περισσότερα	9
4 λιγότερα	7

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 1

Ε εκατοντάδες	Δ δεκάδες	Μ μονάδες

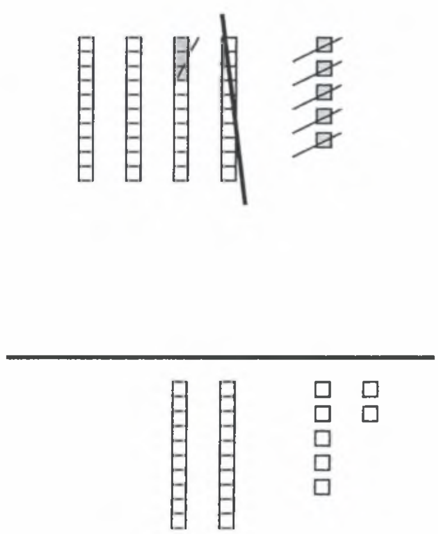
- Η Ελένη είχε στο πορτοφόλι της 39 ευρώ και της έδωσε και η μητέρα της άλλα 23 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα η Ελένη;

$$\begin{array}{r} 39 \\ +\ 23 \\ \hline 62 \end{array}$$



- Η Ελένη είχε στο πορτοφόλι της 45 ευρώ και αγόρασε ένα βιβλίο που κόστιζε 18 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα η Ελένη;

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 18 \\ \hline 27 \end{array}$$

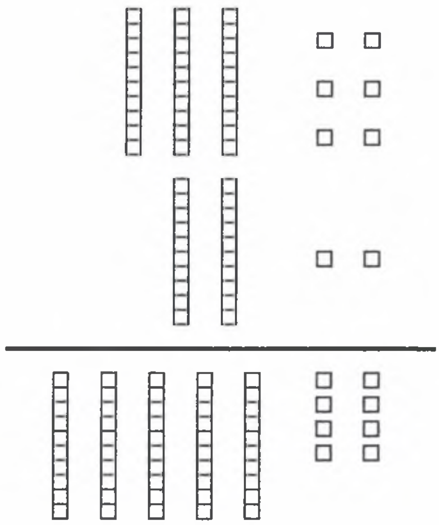


ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΡΑΒΔΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 2

Ε εκατοντάδες	Δ δεκάδες	Μ μονάδες

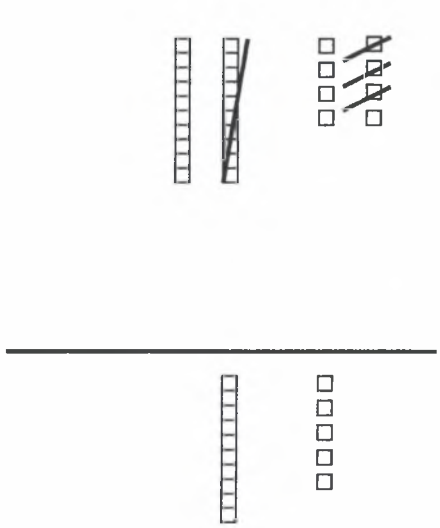
- Η Ελένη είχε στο πορτοφόλι της 36 ευρώ και της έδωσε και η μητέρα της άλλα 23 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα η Ελένη;

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 22 \\ \hline 58 \end{array}$$



- Η Ελένη είχε στο πορτοφόλι της 28 ευρώ και αγόρασε ένα βιβλίο που κόστιζε 13 ευρώ. Πόσα ευρώ έχει τώρα η Ελένη;

$$\begin{array}{r} 28 \\ -\ 13 \\ \hline 15 \end{array}$$



ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΡΑΒΔΟ ΜΕΤΡΗΣΗΣ 1 ΜΕΤΡΟΥ

ΕΝΤΥΠΟ Β$_3$

- Κάνω τις πράξεις

72	29	87	63
+ 19	+ 58	+ 9	+ 27
64	72	78	69
- 23	- 40	- 56	- 27
56	38	14	59
+24	+ 26	+ 28	+ 3
52	25	87	63
- 19	- 18	- 9	- 27
100	64	100	59
- 24	+ 26	- 84	+ 23

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 1	**ΕΝΤΥΠΟ B_4**

- Λύνω τα προβλήματα:

1. Η Ελένη είχε 14 € και η αδερφή της 6 € περισσότερα.

   Πόσα χρήματα έχει η αδερφή της; ______

   Πόσα χρήματα έχουν και οι δύο μαζί; ________

2. Το κυλικείο του σχολείου πούλησε τη Δευτέρα 15 τοστ και την Τρίτη 6 λιγότερα.

   Πόσα τοστ πούλησε την Τρίτη; _______

   Πόσα τοστ πούλησε και τις δύο ημέρες; _______

3. Στην Δ' τάξη τα αγόρια είναι 9 και τα κορίτσια 3 περισσότερα.

   Πόσα είναι τα κορίτσια; ________

   Πόσα είναι όλα τα παιδιά της τάξης; _______

4. Ο Νίκος έλυσε 13 ασκήσεις στο τετράδιό του και ο Δημήτρης 5 ασκήσεις λιγότερες.

   Πόσες ασκήσεις έλυσε ο Δημήτρης; _______

   Πόσες ασκήσεις έλυσαν και τα δύο παιδιά; _______

ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 2

5. Η Ελένη είχε 65 € και η αδερφή της 19 € περισσότερα.

   Πόσα χρήματα έχει η αδερφή της; ______ όχι

   Πόσα χρήματα έχουν και οι δύο μαζί; ________

6. Το κυλικείο του σχολείου πούλησε τη Δευτέρα 28 τοστ και την Τρίτη 9 λιγότερα.

   Πόσα τοστ πούλησε την Τρίτη; _______

   Πόσα τοστ πούλησε και τις δύο ημέρες; _______

7. Στην Δ' τάξη τα αγόρια είναι 35 και τα κορίτσια 17 περισσότερα.

   Πόσα είναι τα κορίτσια; ________

   Πόσα είναι όλα τα παιδιά της τάξης; _______

8. Ο Νίκος έλυσε 36 ασκήσεις στο τετράδιό του και ο Δημήτρης 18 ασκήσεις λιγότερες.

   Πόσες ασκήσεις έλυσε ο Δημήτρης; _______

   Πόσες ασκήσεις έλυσαν και τα δύο παιδιά; _______

όχι

9. Στο ψυγείο υπήρχαν 16 κεράσια. Ο Γιάννης έφαγε 5 κεράσια και ο αδερφός του ο Νίκος 4 κεράσια. Πόσα κεράσια έμειναν στο ψυγείο;

10. Η Νίκη είχε στον κουμπαρά της 20 ευρώ. Αγόρασε ένα βιβλίο που έκανε 12 ευρώ και ένα ντοσιέ με 6 ευρώ. Πόσα χρήματα θα της μείνουν;

11. Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 14 επιβάτες. Στην α΄στάση κατέβηκαν 8 επιβάτες και στη β΄στάση ανέβηκαν 11 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες έφτασε το λεωφορείο στο τέρμα;

12. Τρεις φίλοι μετρούσαν την ηλικία τους. Ο Νίκος ήταν 12 ετών, ο Γιώργος 3 χρόνια μικρότερος από το Νίκο και ο Τάκης 5 χρόνια μεγαλύτερος από το Γιώργο. Ποια είναι η ηλικία κάθε παιδιού;

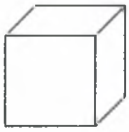
Νίκος:_________

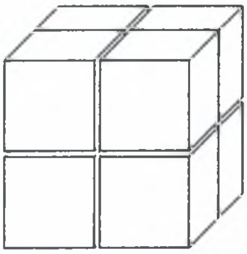
Γιώργος: _______

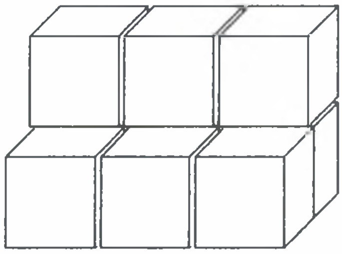
Τάκης: _________

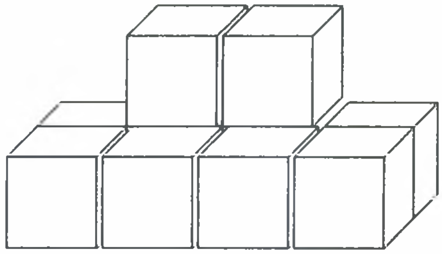
ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΑ ΞΥΛΙΝΑ ΚΥΒΑΚΙΑ

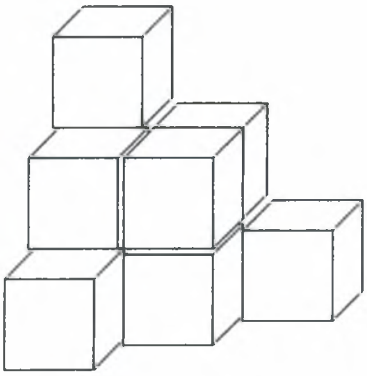
ΕΝΤΥΠΟ B_5

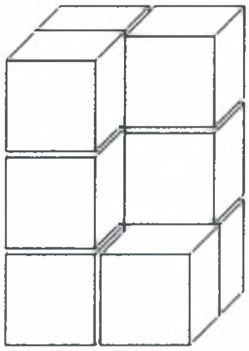
-
- Βρίσκω πόσα  έχει το κάθε σχήμα

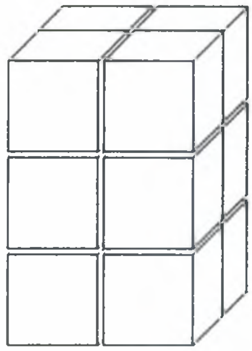


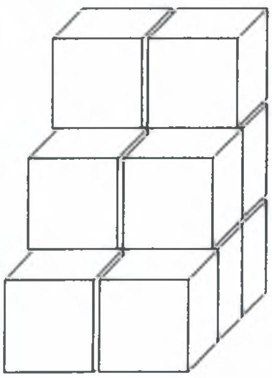


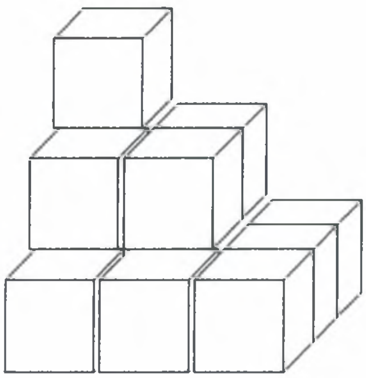


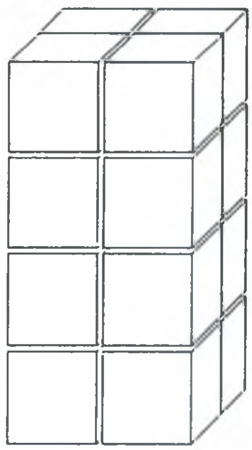


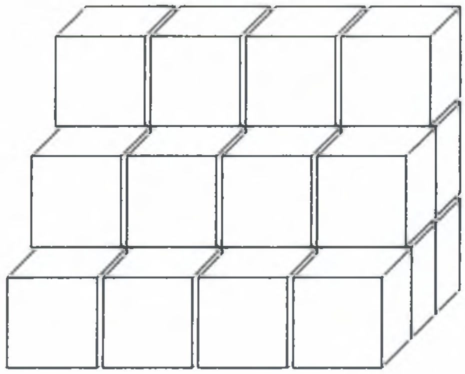


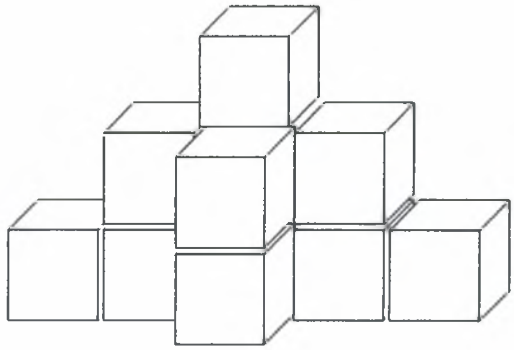


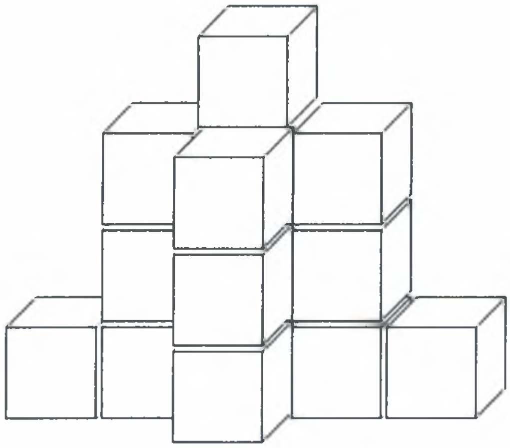


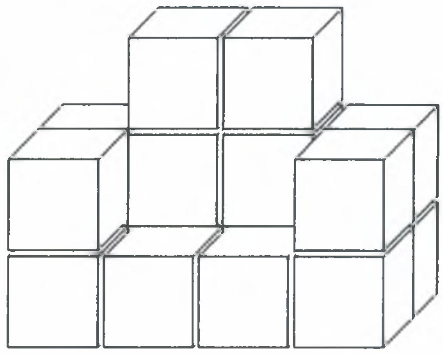


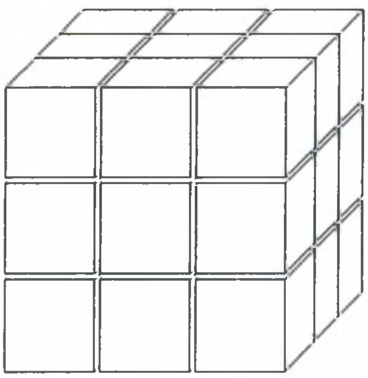


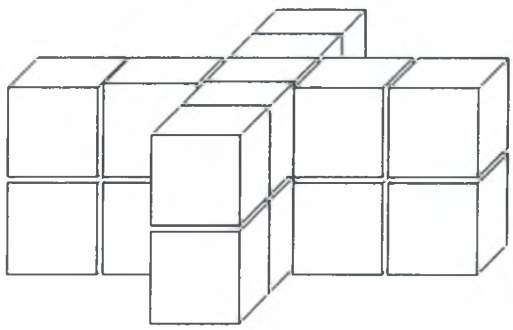








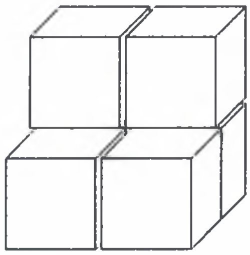


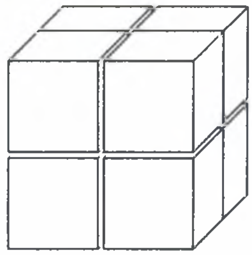


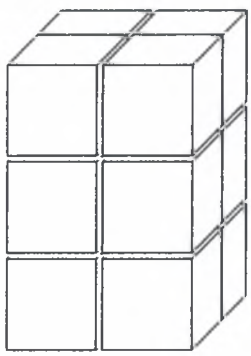
ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΑ ΞΥΛΙΝΑ ΚΥΒΑΚΙΑ

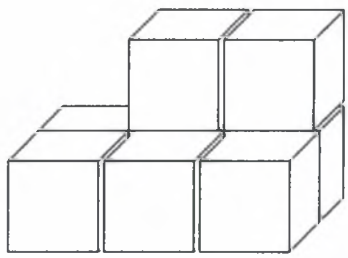
ΕΝΤΥΠΟ B_6

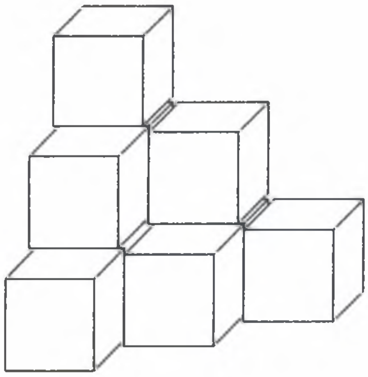
- Φτιάχνω τα παρακάτω σχήματα με τα ξύλινα κυβάκια

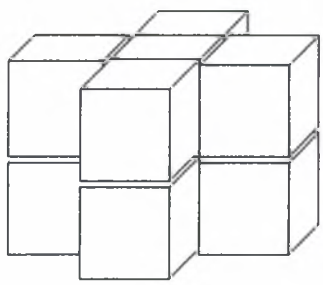






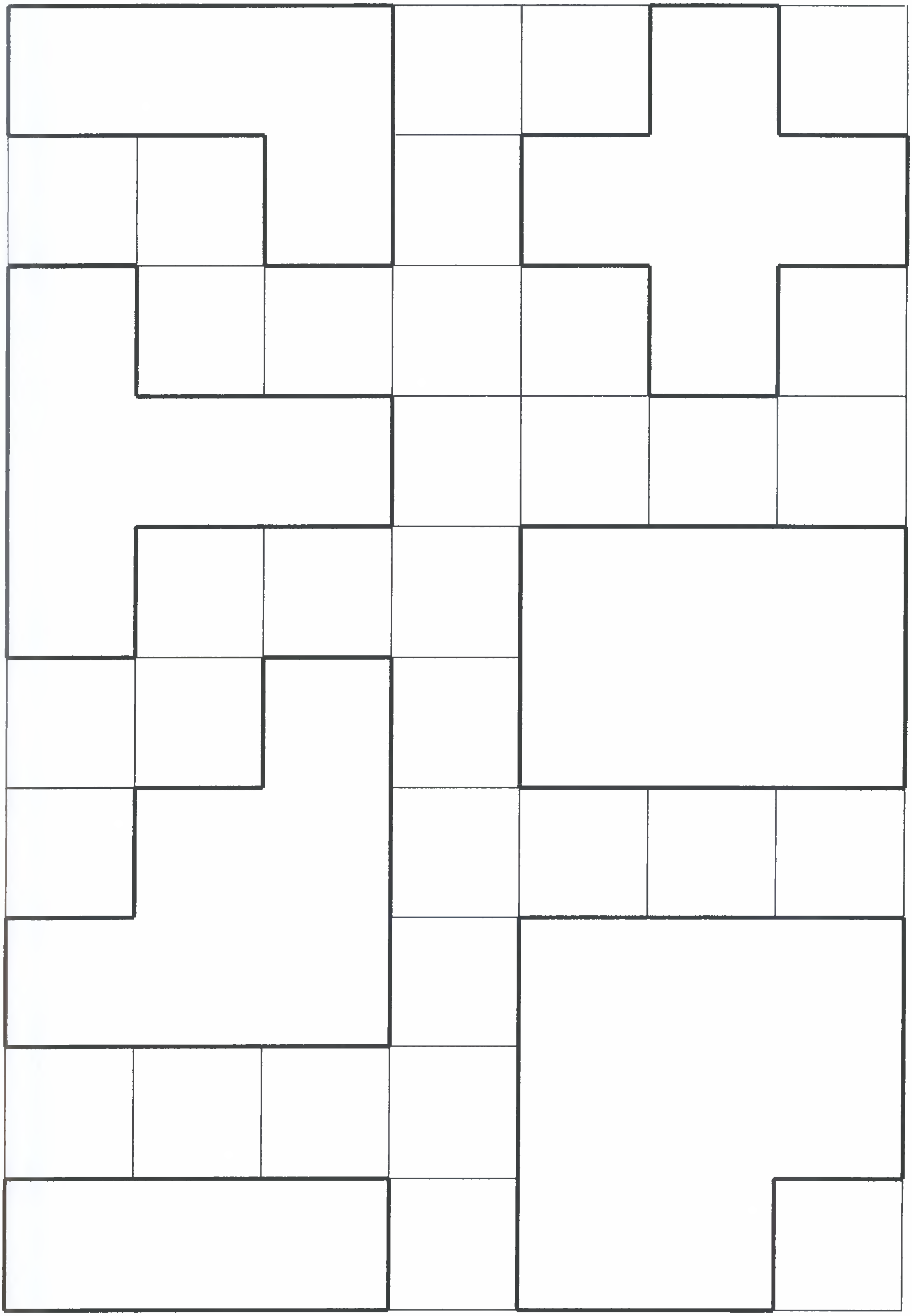


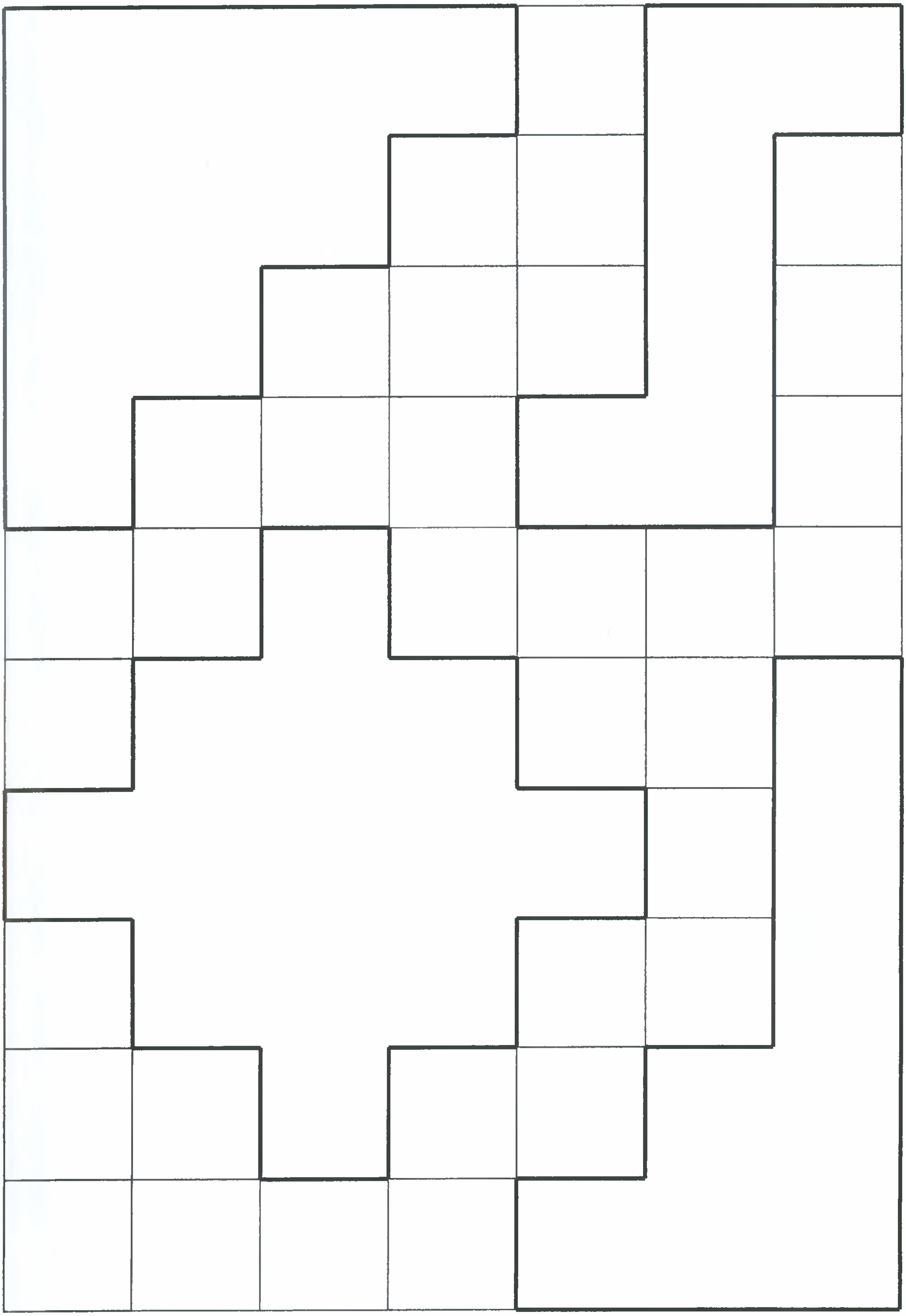


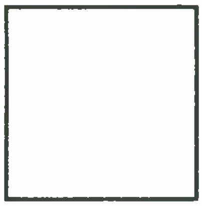


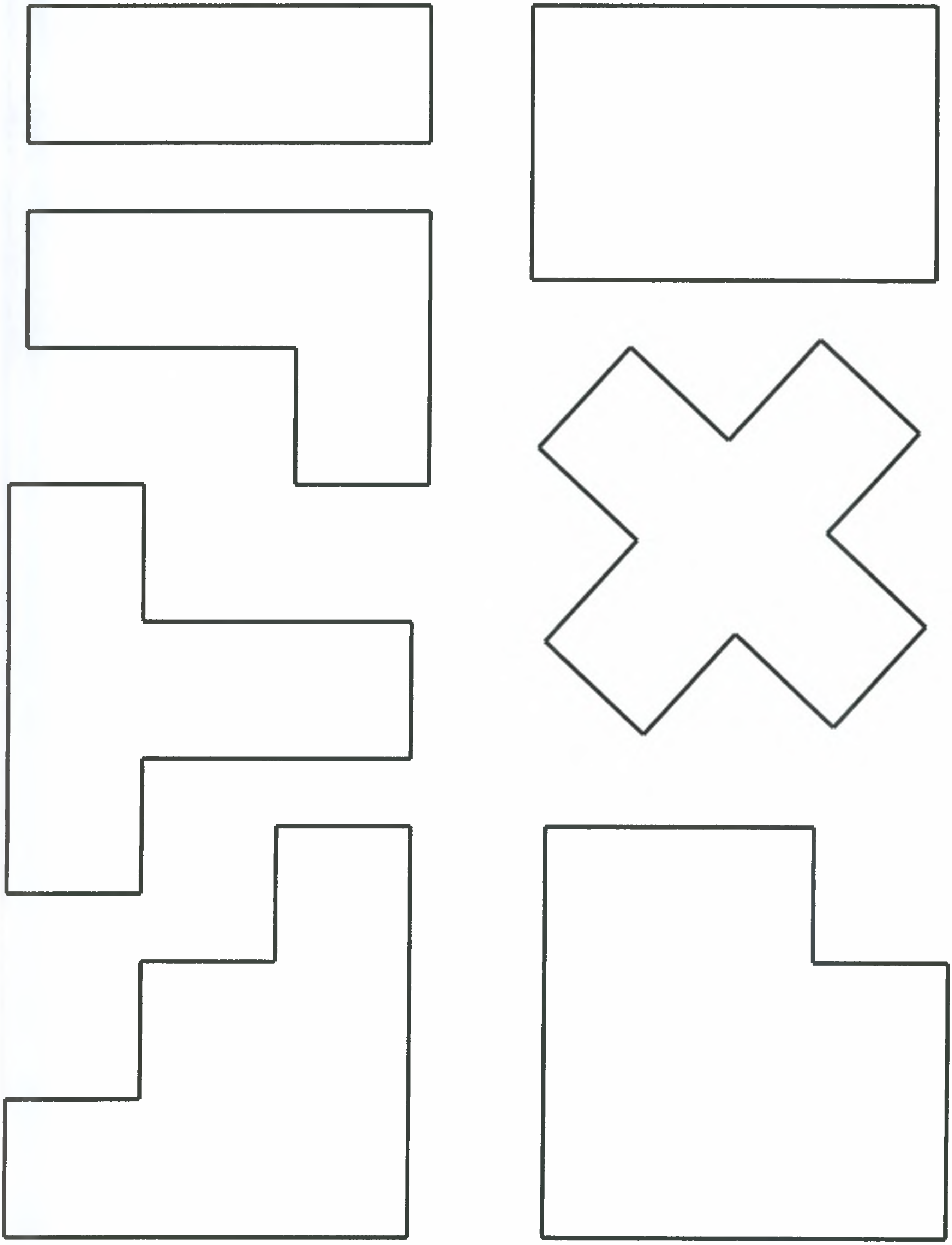
ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΤΑ ΔΙΑΦΑΝΗ ΣΧΗΜΑΤΑ

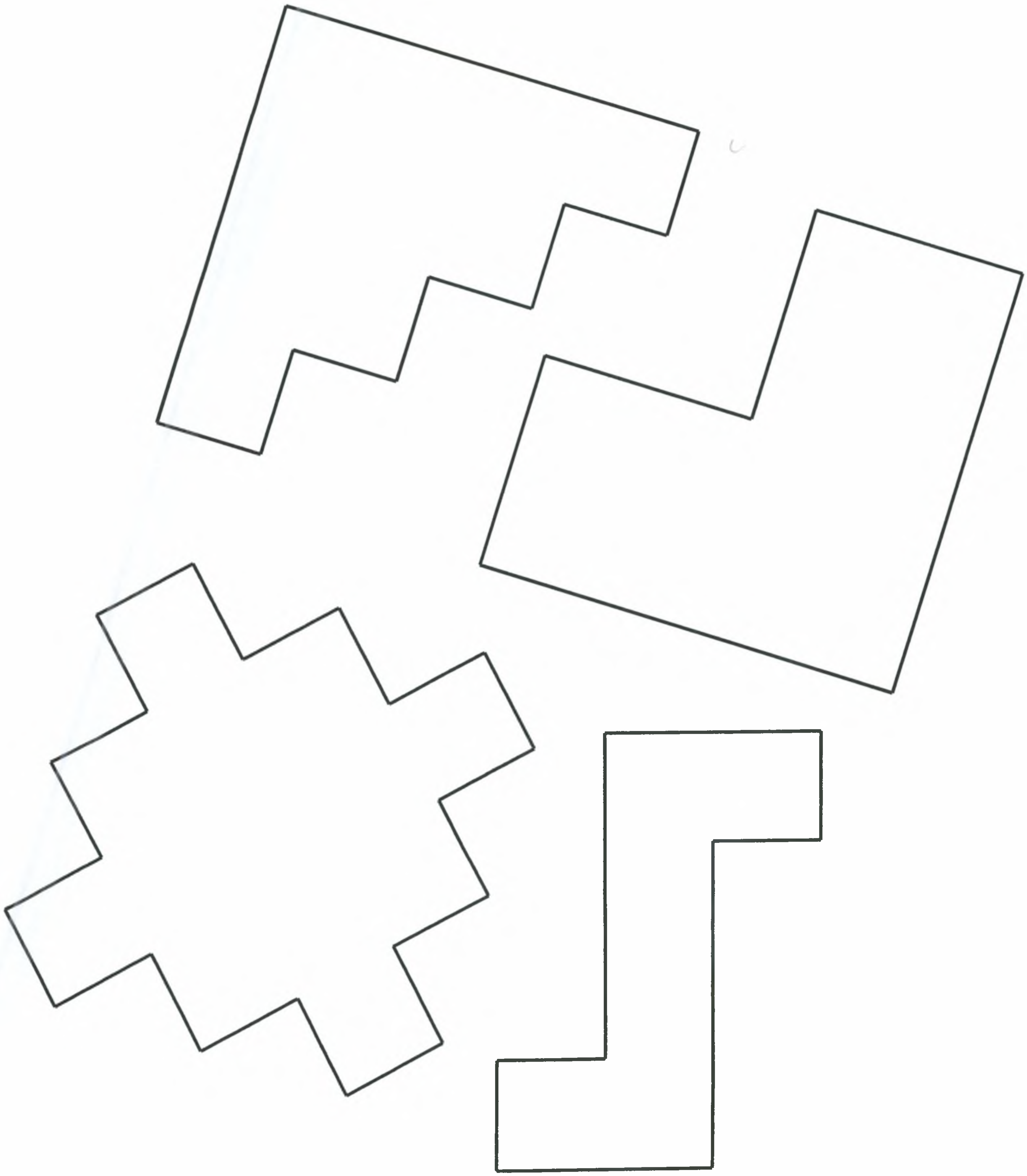
ΕΝΤΥΠΟ B_7

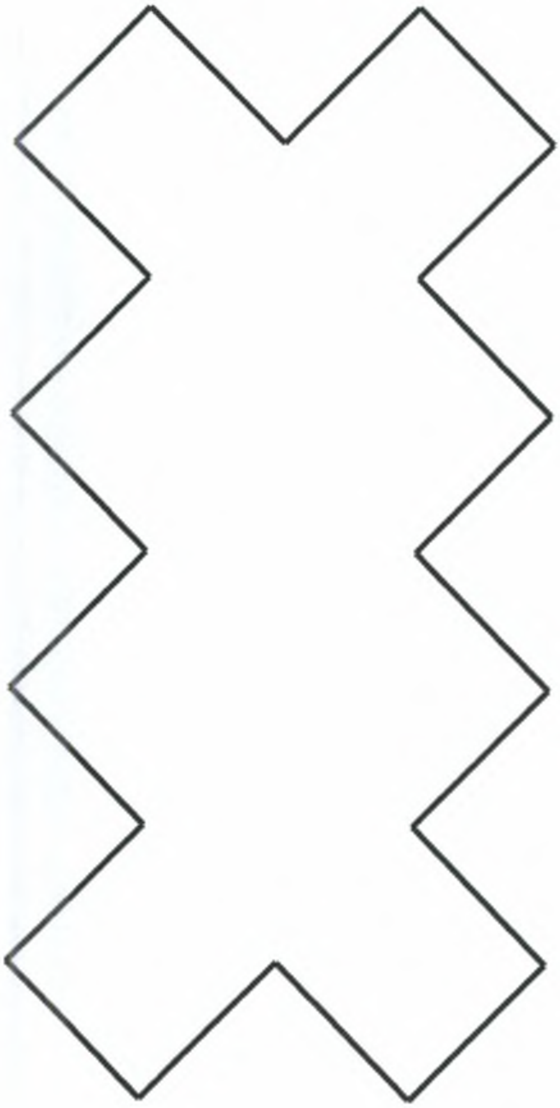




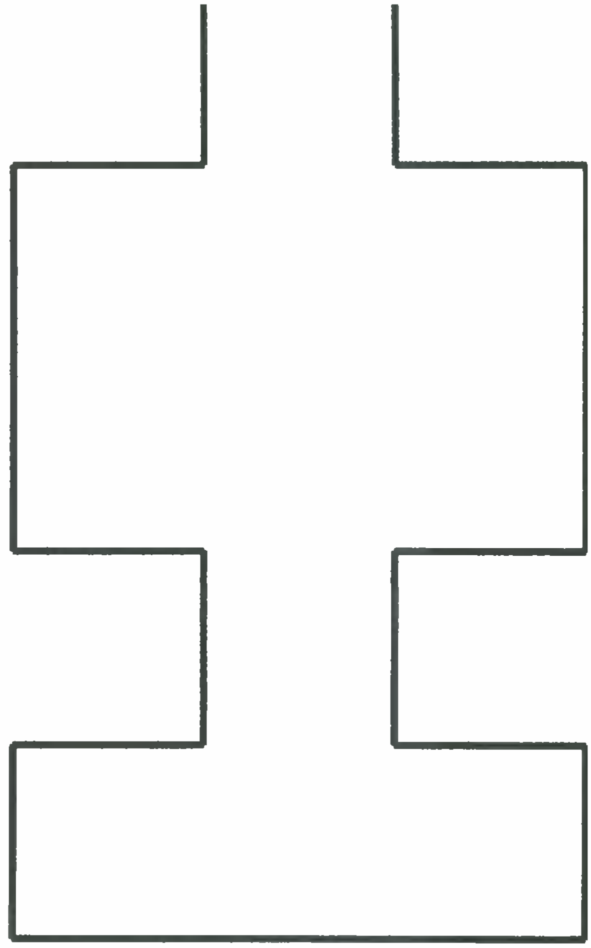
- **Από πόσα**  **αποτελείται κάθε σχήμα**

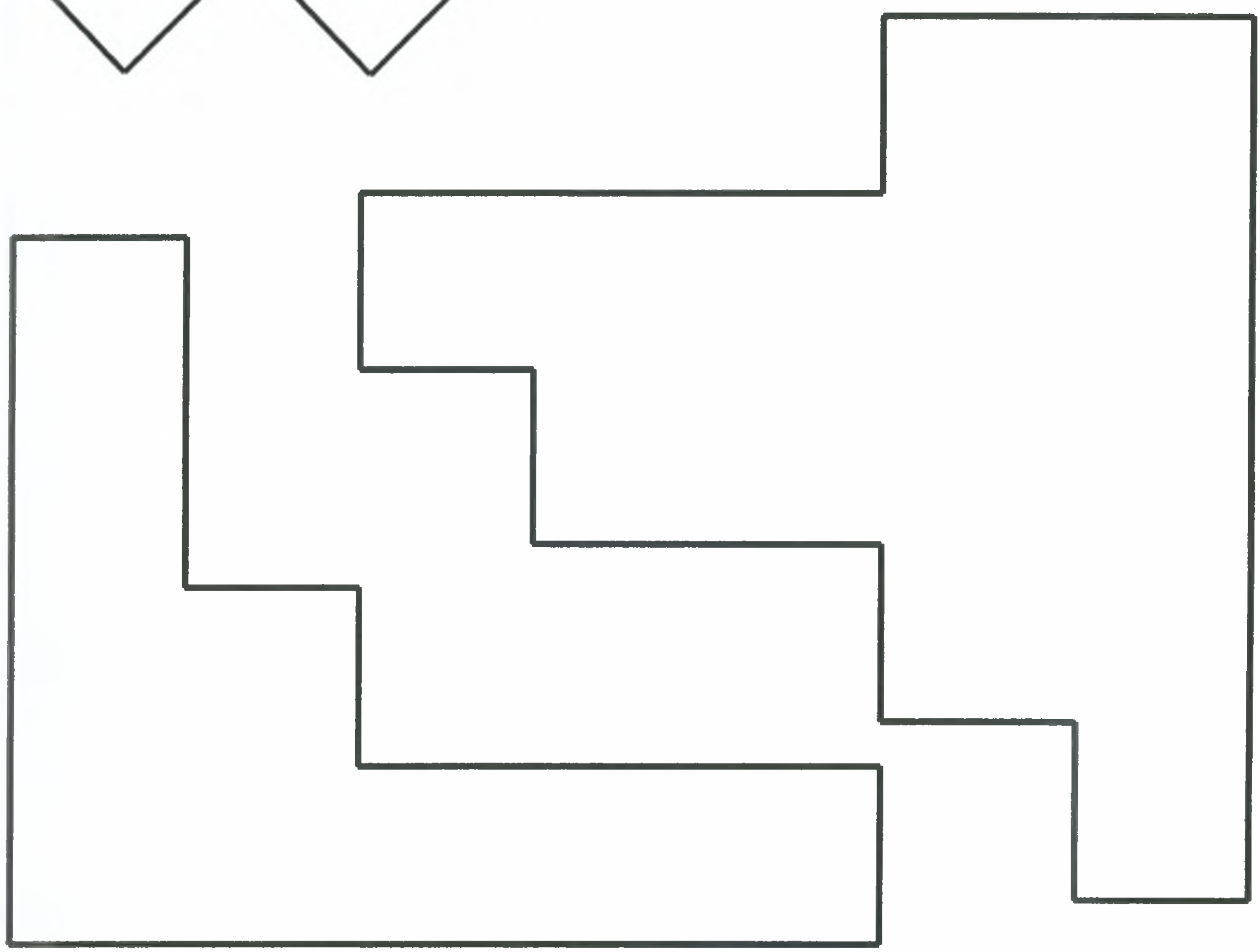




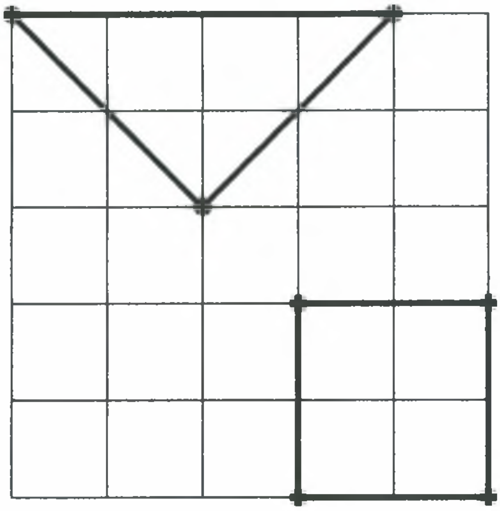


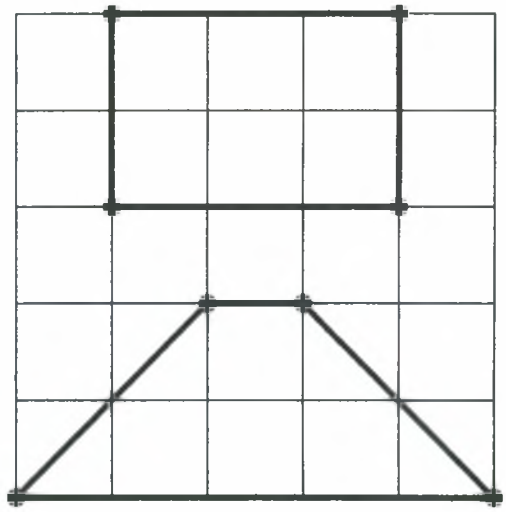
όχι

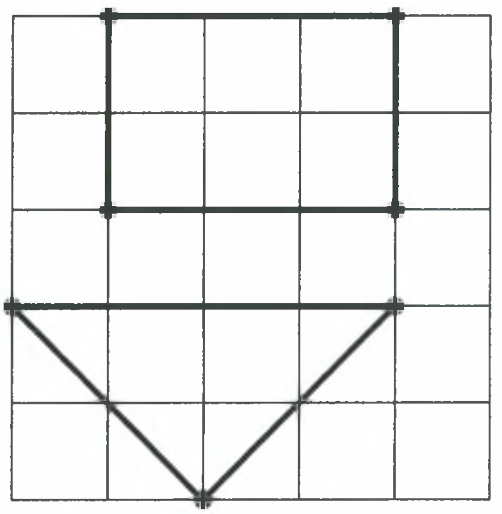


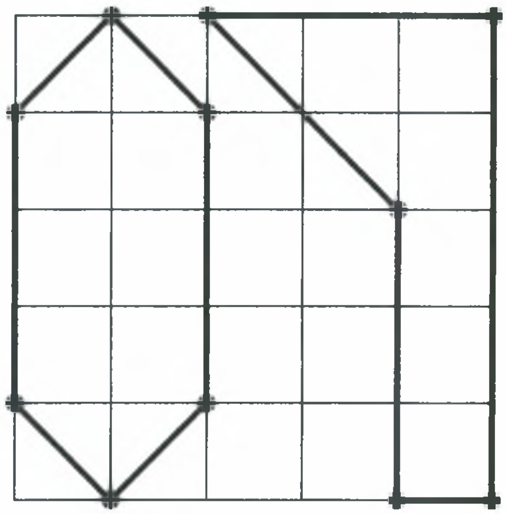


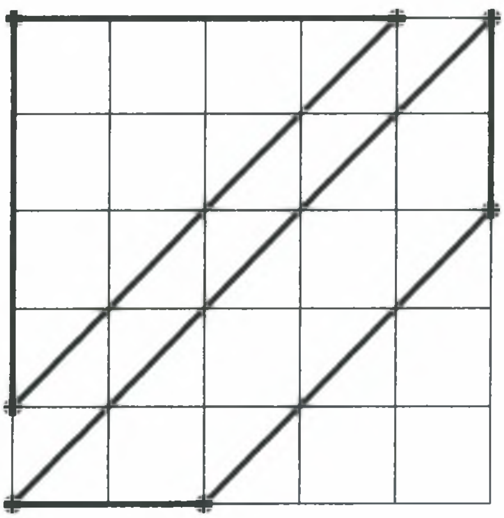
- Βρίσκω πόσα $\square$ έχει κάθε σχήμα

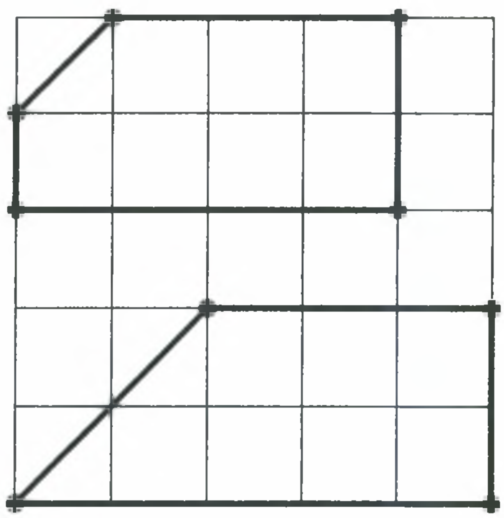






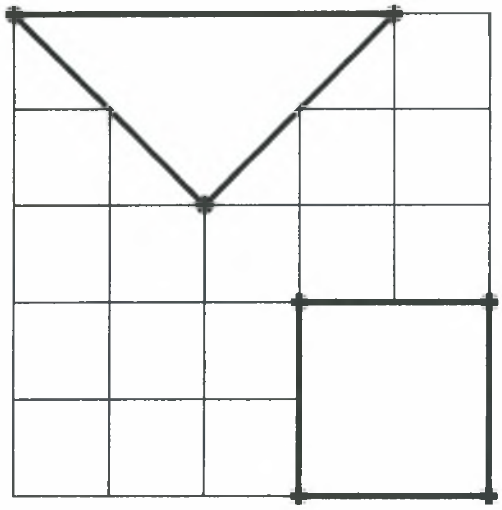


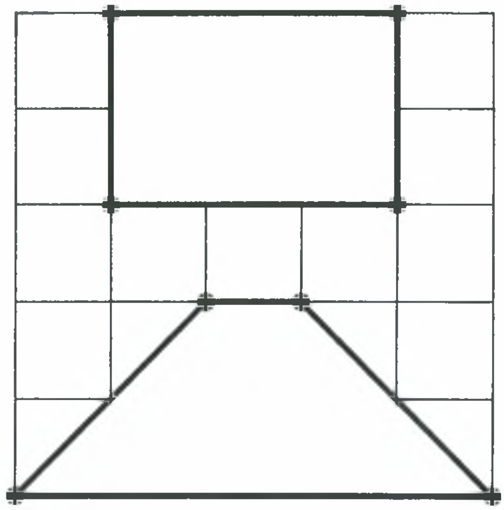


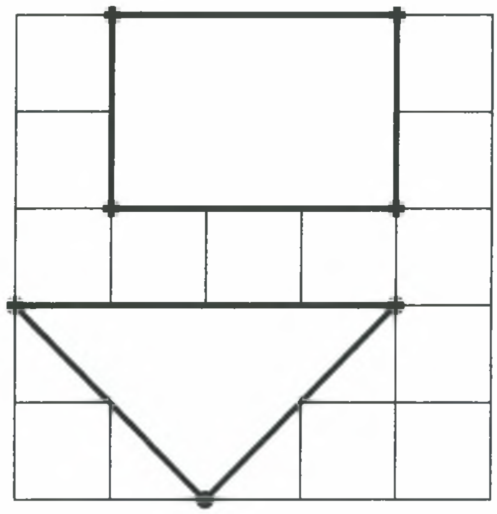


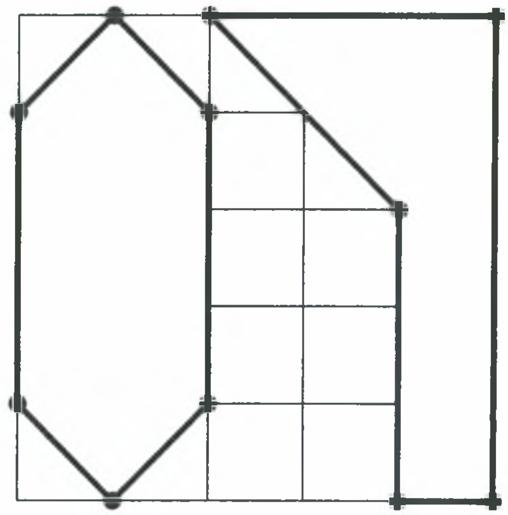
- Βρίσκω πόσα ☐ έχει κάθε σχήμα

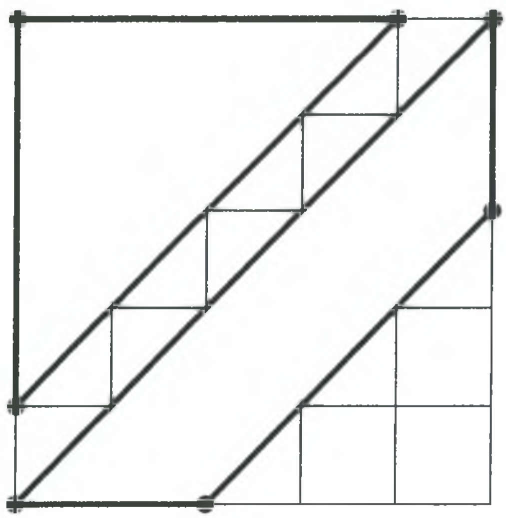
όχι

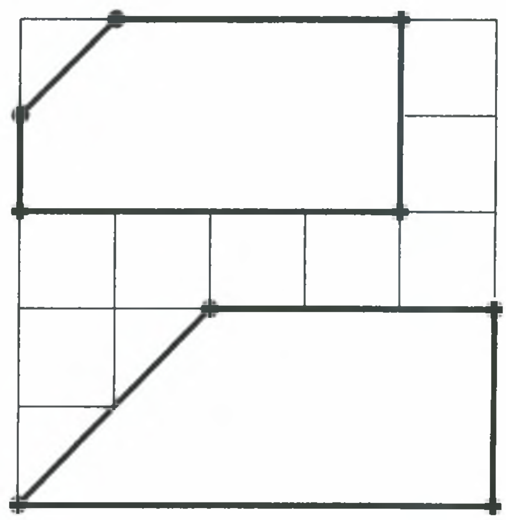






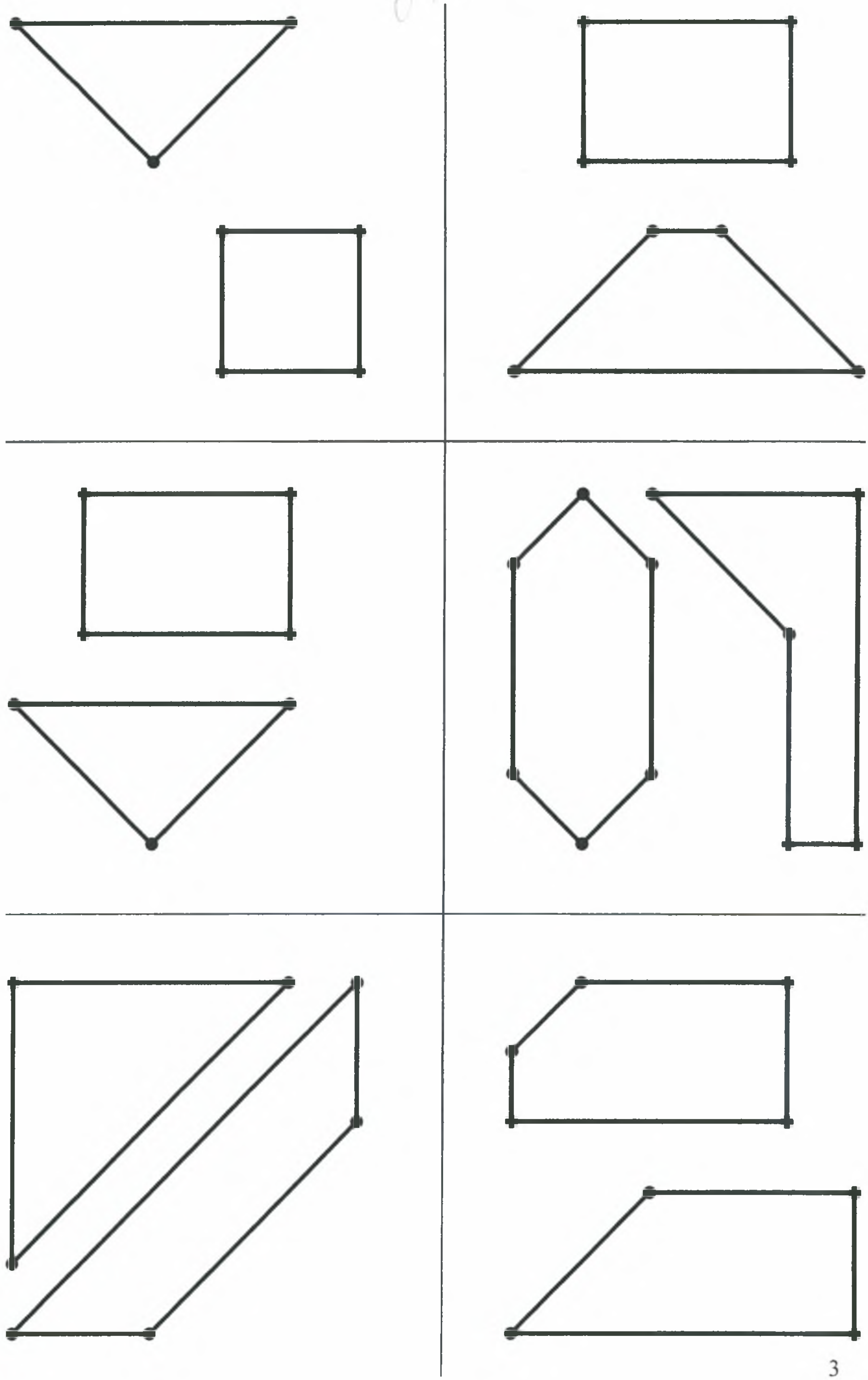






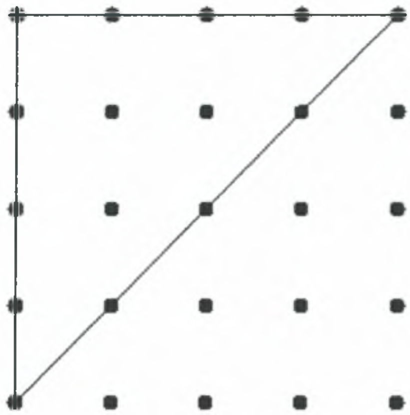
- Βρίσκω πόσα □ έχει κάθε σχήμα

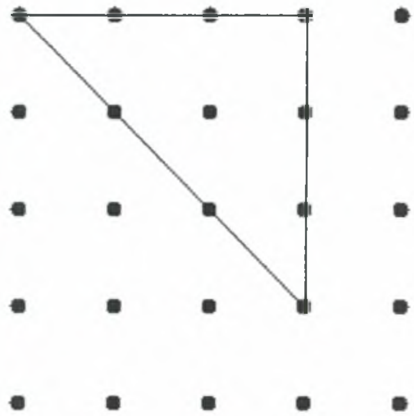
όχι

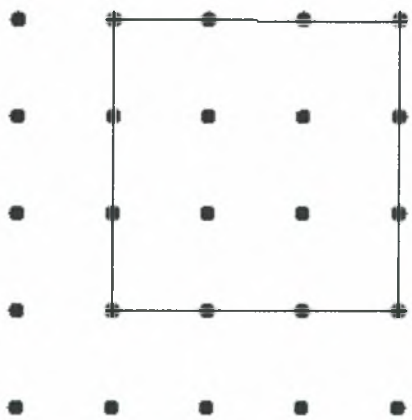


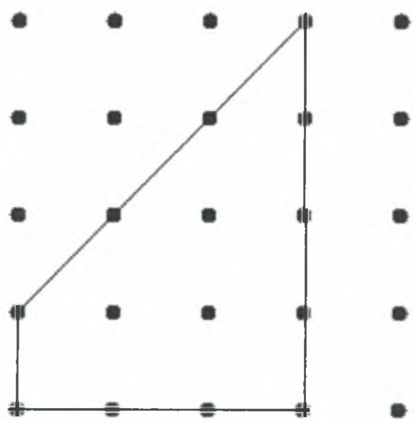
ΕΝΤΥΠΟ B_9

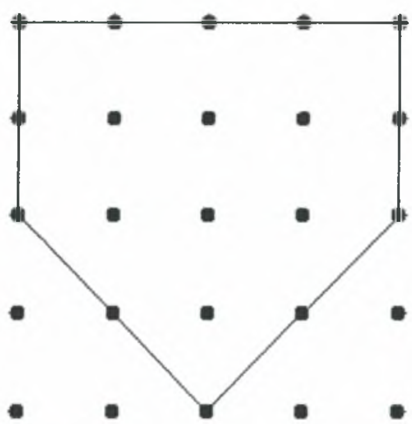
Φτιάχνω στο Γεωπίνακα τα παρακάτω σχήματα

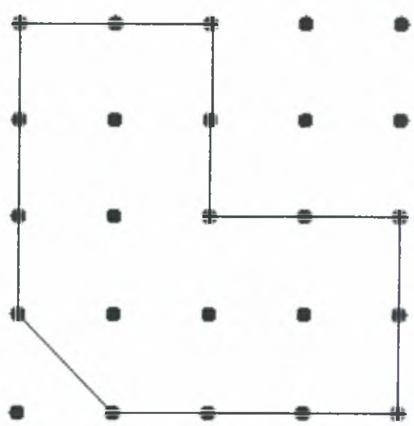


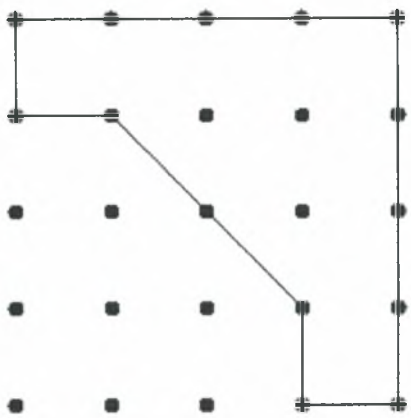


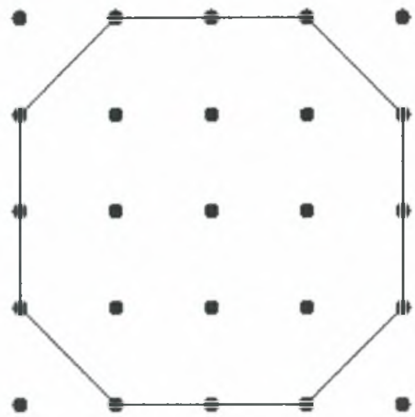


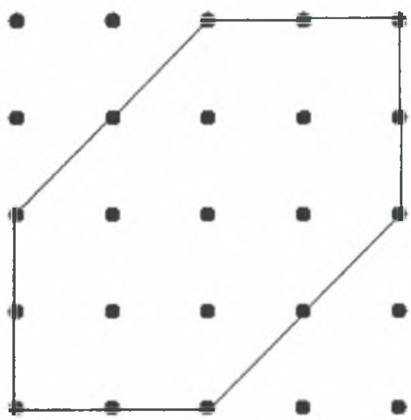


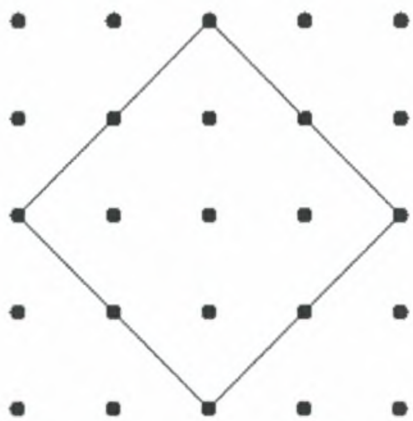


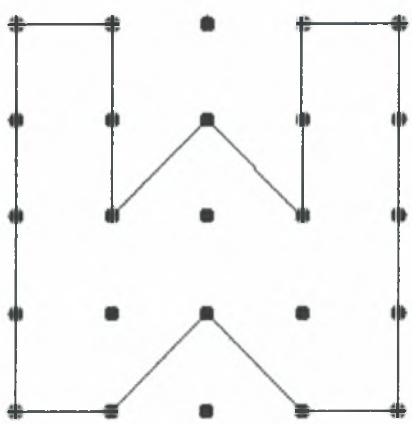


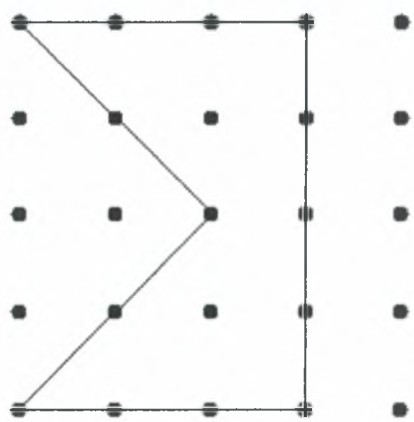


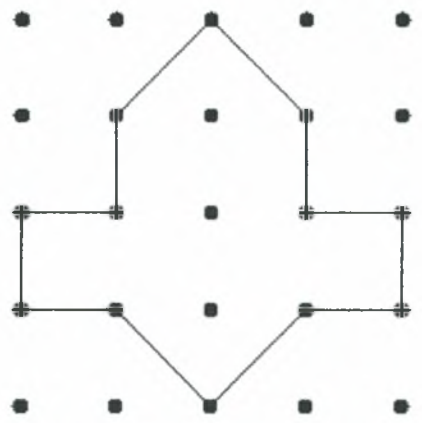


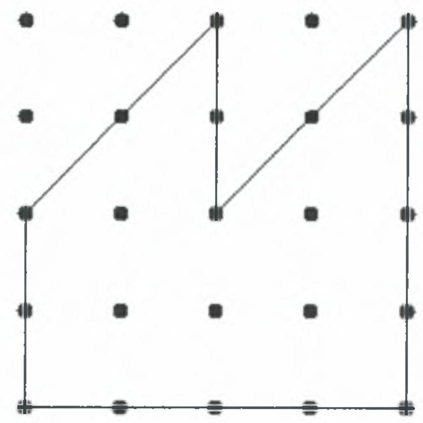


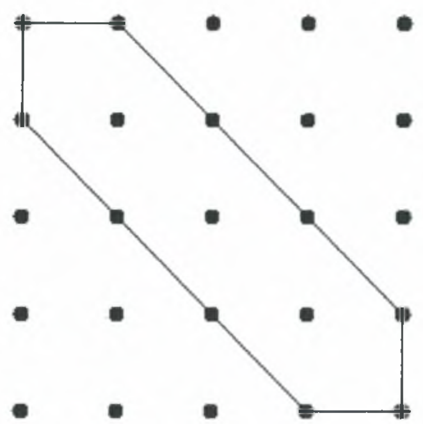


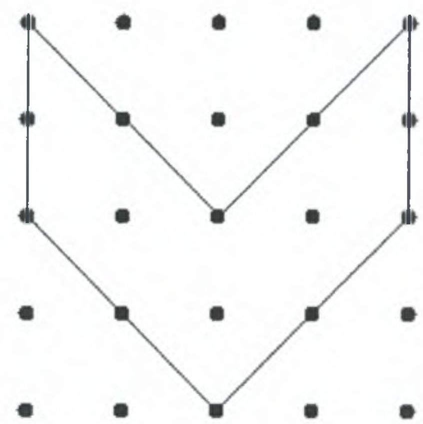


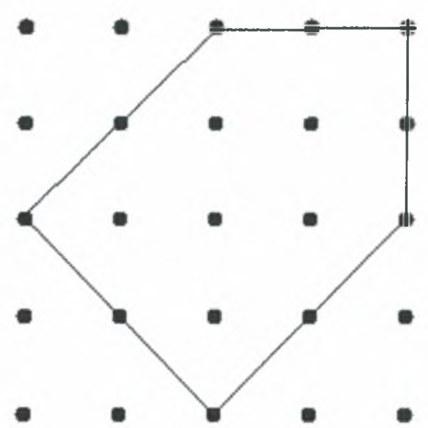


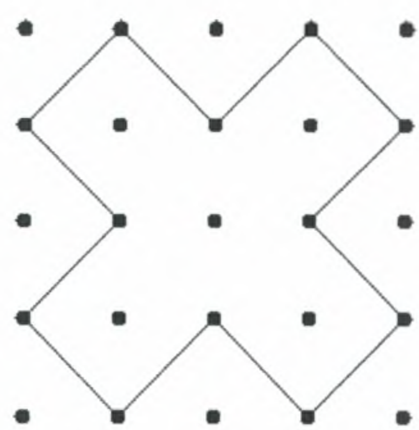












ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΕΝΤΥΠΟ $Γ_1$

- Λύνω τα προβλήματα:

Στην τάξη του Νικόλα είναι 19 παιδιά. Τα 11 είναι αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;

Η Ελένη θέλει να φτιάξει με τη μητέρα της μπισκότα. Η μαμά της έφτιαξε 38 μπισκότα. Η Ελένη έφτιαξε 15 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξαν και οι δυο μαζί;

Ο φούρνος της γειτονιάς πούλησε τη Δευτέρα 13 τυρόπιτες. Την Τρίτη πούλησε 5 περισσότερες. Πόσες τυρόπιτες πούλησε την Τρίτη;

Ο Βαγγέλης μάζευε χρήματα στον κουμπαρά του. Όταν τον άνοιξε είχε συγκεντρώσει 50 €. Πήγε σ' ένα μεγάλο κατάστημα με παιχνίδια και αγόρασε ένα επιτραπέζιο με 25 €. Πόσα ευρώ του έμειναν;

Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 43 επιβάτες. Στη στάση κατέβηκαν 18 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες συνέχισε το λεωφορείο;

Η Δήμητρα ζυγίστηκε στη ζυγαριά και είδε ότι ήταν 32 κιλά. Ύστερα από μια εβδομάδα έχασε 3 κιλά. Πόσο ζυγίζει τώρα η Δήμητρα;

Ο Τάκης και ο Νίκος μετρούσαν τις τάπες τους. Ο Τάκης μέτρησε 27 τάπες. Ο Νίκος είδε ότι είχε 8 τάπες περισσότερες από τον Τάκη. Πόσες τάπες έχει ο Νίκος;

Στο ψυγείο υπήρχαν 14 ροδάκινα. Εγώ έφαγα 3 και ο αδερφός μου 5. Πόσα ροδάκινα έμειναν στο ψυγείο;

Ο Γιάννης πήγε στο κυλικείο του σχολείου και κοίταξε τον κατάλογο με τα προϊόντα. Ήθελε να φάει μια τυρόπιτα και να πιει και ένα χυμό. Έχει 3 ευρώ. Του φτάνουν;

Τοστ	1 €
Τυρόπιτα	1 €
Κουλούρι	50 Λ
Νερό	30 Λ
Χυμός	1,20 €

Ο ταχυδρόμος έβαλε μέσα στο σάκο του 9 μεγάλους φακέλους και 7 μικρούς φακέλους. Πόσοι είναι όλοι οι φάκελοι μαζί;

Μέσα σε ένα καλάθι είναι 14 μήλα. Αν βάλω ακόμη 3 μήλα πόσα θα είναι τα μήλα μέσα στο καλάθι;

Ο Γιώργος έχει 8 μπίλιες και ο Νίκος έχει 5 μπίλιες περισσότερες από το Γιώργο. Πόσες μπίλιες έχει ο Νίκος;

Η Ελένη είχε 10 αυτοκόλλητα και έδωσε 4 από αυτά στη φίλη της Μαρία. Πόσα αυτοκόλλητα έχει τώρα η Ελένη;

Η Κατερίνα είχε 13 ευρώ. Αγόρασε ένα βιβλίο με 6 ευρώ. Πόσα χρήματα της έμειναν;

Ο Βαγγέλης έλυσε 8 ασκήσεις και η Αλέκα 3 λιγότερες. Πόσες ασκήσεις έλυσε η Αλέκα;

Ο Πέτρος έχει 3 μπίλιες. Στο διάλειμμα έπαιξε με ένα φίλο του και κέρδισε ακόμη μερικές. Μετά το παιχνίδι όταν τις μέτρησε, είχε 10 μπίλιες. Πόσες μπίλιες κέρδισε ο Πέτρος από το φίλο του;

Σε ένα άδειο λεωφορείο μπήκαν 5 αγόρια και 4 κορίτσια. Το λεωφορείο είχε 12 θέσεις. Πόσες θέσεις του λεωφορείου έμειναν άδειες;

Ο Αλέκος είναι 9 χρονών. Ο αδελφός του είναι 8 χρόνια μεγαλύτερος. Πόσο χρονών είναι ο αδελφός του;

Ο Ανέστης αγόρασε ένα βιβλίο που έκανε 8 € και ένα τετράδιο που έκανε 5 €. Πλήρωσε με 10 €. Πόσα ρέστα θα πάρει;

Ο Απόστολος έχει μαζέψει 25 εικόνες με ζώα. Ο αδερφός του του έδωσε ακόμη μερικές. Τώρα όλες οι εικόνες που έχει, μαζί με αυτές που του έδωσε ο αδερφός του, είναι 39. Πόσες εικόνες του έδωσε ο αδερφός του;

Εγώ κι ο αδερφός μου φάγαμε κεράσια. Εγώ έφαγα 14 κεράσια και ο αδερφός μου έφαγε 12 περισσότερα. Πόσα κεράσια έφαγε ο αδερφός μου;

ΕΙΚΟΝΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	ΕΝΤΥΠΟ $Γ_2$

Τα παιδιά μέτρησαν το βάρος τους σε κιλά:

ΕΛΕΝΗ	ΝΙΚΟΣ	ΠΟΠΗ	ΦΩΤΗΣ	ΡΕΝΑ

34	53	37	46	29

Πόσο ζυγίζουν;

- Ο ΝΙΚΟΣ και η ΠΟΠΗ ______
- Ο ΦΩΤΗΣ και η ΡΕΝΑ ______
- Η ΕΛΕΝΗ και η ΠΟΠΗ ______

Πόσο βαρύτερος είναι:

- Ο ΝΙΚΟΣ από την ΠΟΠΗ ______
- Ο ΦΩΤΗΣ από τη ΡΕΝΑ ______
- Ο ΝΙΚΟΣ από την ΕΛΕΝΗ ______

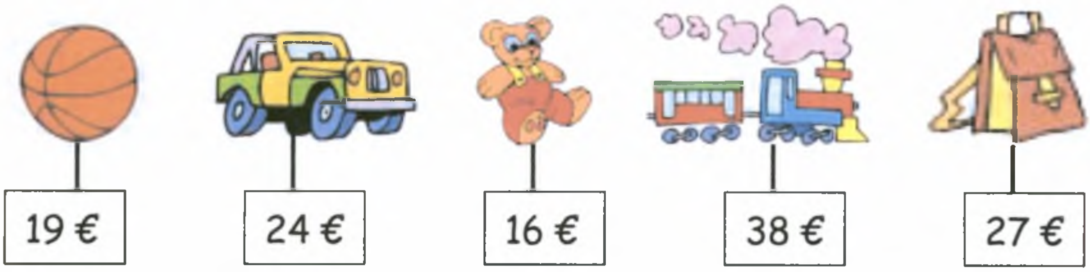
Πόσο ελαφρύτερη είναι:

- Η ΠΟΠΗ από το ΦΩΤΗ ______
- Η ΡΕΝΑ από το ΝΙΚΟ ______

Πόσο ζυγίζουν τα αγόρια; ______

Πόσο ζυγίζουν τα κορίτσια; ______

Ο  έχει **50 €** και θέλει να αγοράσει παιχνίδια.



Μπορεί να αγοράσει :

- Τη  και το  ; .... Πόσα θα του μείνουν; ___
- Το  και το  ; .... Πόσα χρειάζεται; ______
- Την  και τη  ; .... Πόσα θα του μείνουν; ___
- Το  και την  ; .... Πόσα χρειάζεται; ______
- Το  και το  ; .... Πόσα χρειάζεται; ______
- Το  και τη  ; .... Πόσα θα του μείνουν; ___
- Τη , το  και την  ; .... Πόσα χρειάζεται; ______

Ένα λεωφορείο ξεκίνησε με 34 επιβάτες.

Με πόσους επιβάτες έφτασε στο τέρμα;

Η Δ΄ τάξη έχει **15** . Τα  είναι **6** λιγότερα.

Πόσα   έχει όλη η τάξη;

Η  είχε στο  **43** €. Της έδωσε ο  της άλλα **28** €.

Αγόρασε μία  με **35** € και ένα  με **19** €. Πόσα

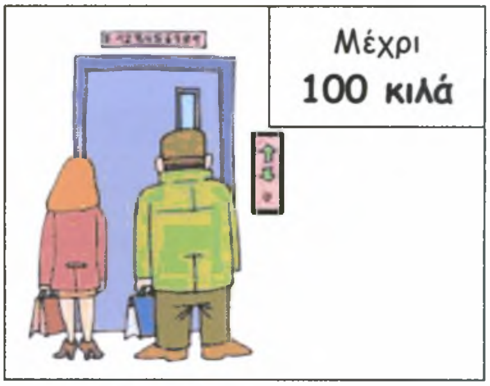
χρήματα της έμειναν;

Ο  ζυγίζει **64** κιλά και

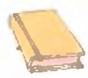
η  ζυγίζει **48** κιλά.

Πόσο ζυγίζουν και οι δύο; _______

Μπορούν να μπουν; ________



Ένα  μεταφέρει **75** . Κατέβασε τα **38**. Πόσα  έμειναν στο  ;

Η  έχει στο  της **42 €**. Θέλει να αγοράσει ένα  με **24 €** και μια  με **17 €**. Πόσα € θα της μείνουν;

Ένα  έχει **38** . Τα  είναι **19** περισσότερα. Πόσα είναι όλα τα παιδιά του χωριού;

Περισσότερο - Λιγότερο

1. Ο  ζυγίζει **42** κιλά και η  ζυγίζει **27** κιλά.
   Ποιο παιδί είναι βαρύτερο; _______________
   Πόσο βαρύτερο είναι; _______________

2. Η  έχει **35 €** και η  έχει **17 €** λιγότερα. Πόσα έχει η  ;

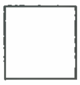
3. Ο  είναι **70** χρονών και ο  είναι **11** χρονών.
   Ποιος είναι μεγαλύτερος; _______________
   Πόσα χρόνια μεγαλύτερος είναι;

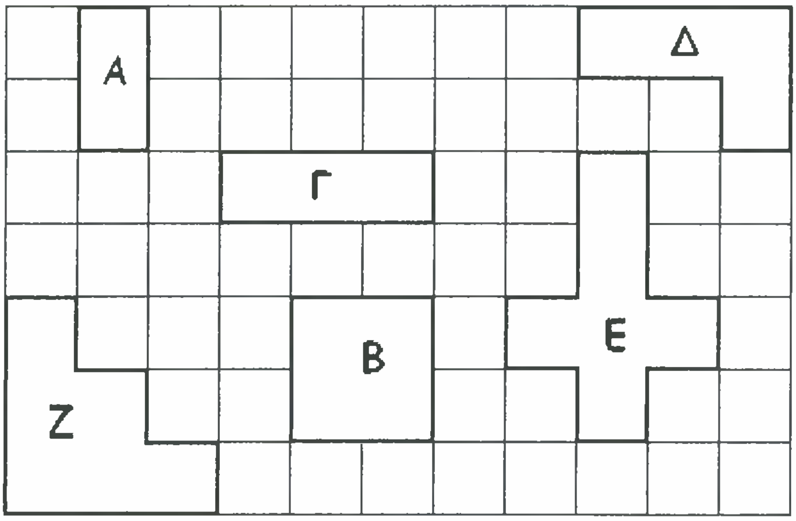
4. Ένα  κοστίζει **84 €**. Το  κοστίζει **47 €** λιγότερο. Πόσο κοστίζει το  ;

5. Το κυλικείο του σχολείου πούλησε τη Δευτέρα **36**  και την Τρίτη **9**  περισσότερα.
   Πόσα πούλησε την Τρίτη; _________________
   Πόσα πούλησε και τις δύο μέρες;

ΕΝΤΥΠΟ $Γ_3$

Μέτρηση επιφάνειας

Γράψε πόσα  έχει το κάθε σχήμα



Α = ____

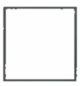
Β = ____

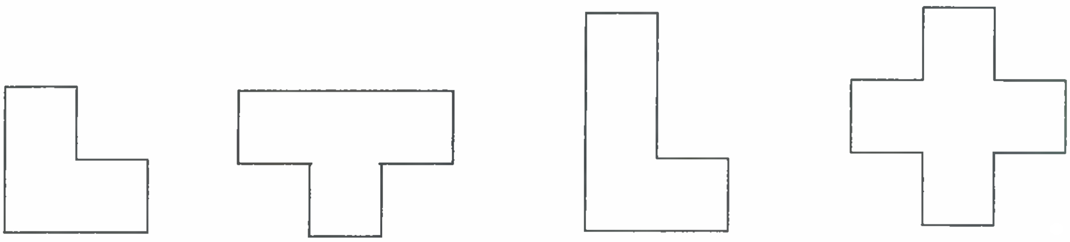
Γ = ____

Δ = ____

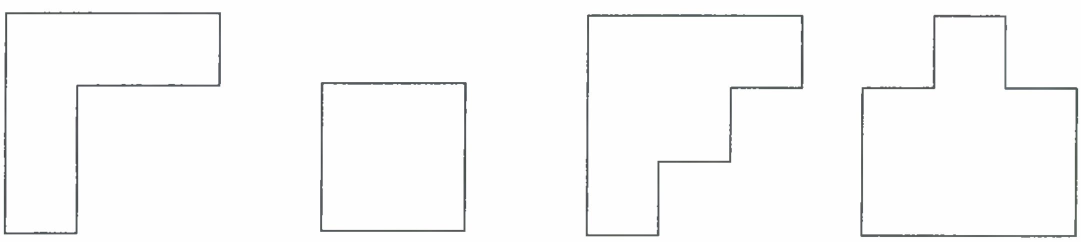
Ε = ____

Ζ = ____

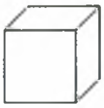
Πόσα  έχει το κάθε σχήμα

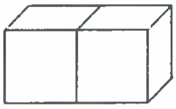


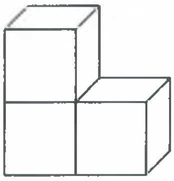
____ ____ ____ ____

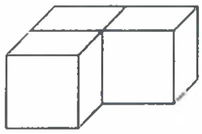


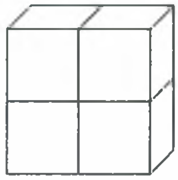
____ ____ ____ ____

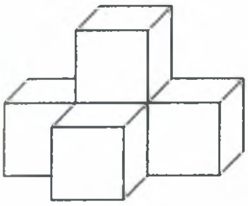
Πόσα  έχει κάθε σχήμα από τα παρακάτω;

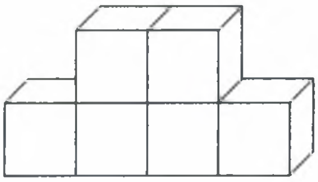
 ______

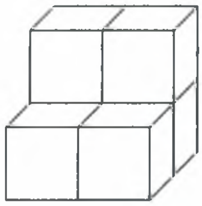
 ______

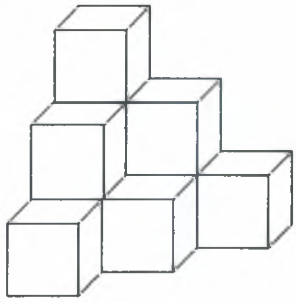
 ______

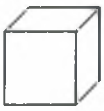
 ______

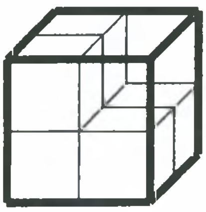
 ______

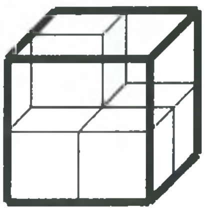
 ______

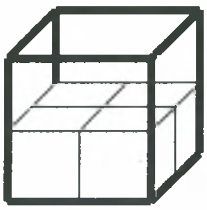
 ______

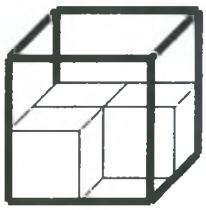
 ______

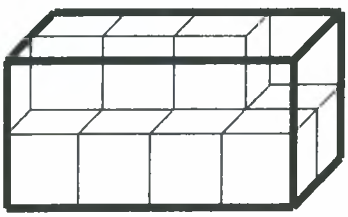
Πόσα  πρέπει να βάλουμε για να γεμίσει το κουτί;

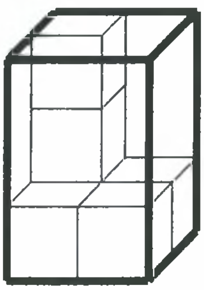
 ______

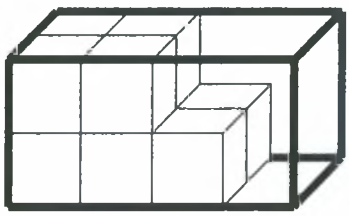
 ______

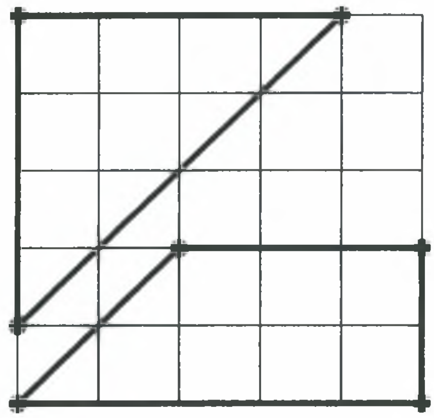
 ______

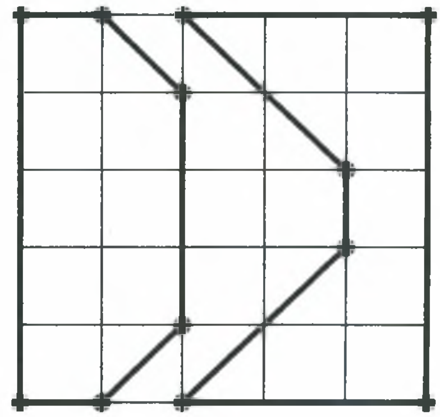
 ______

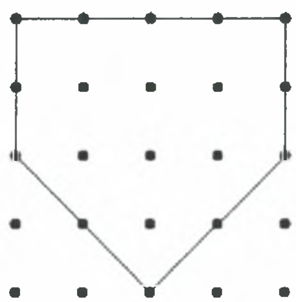


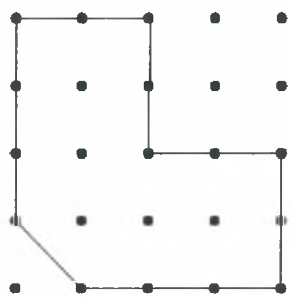


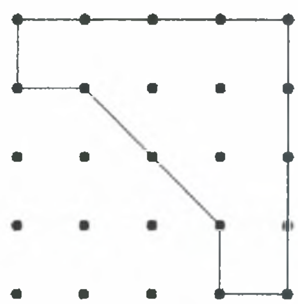


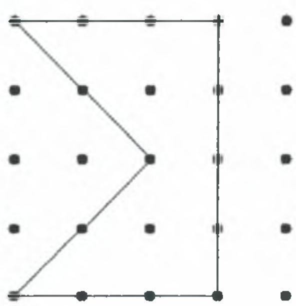


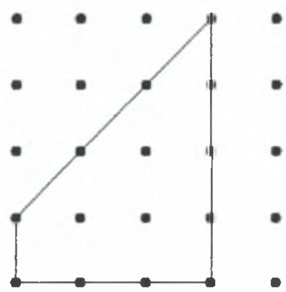


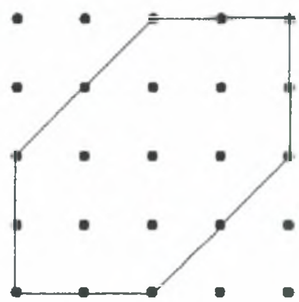


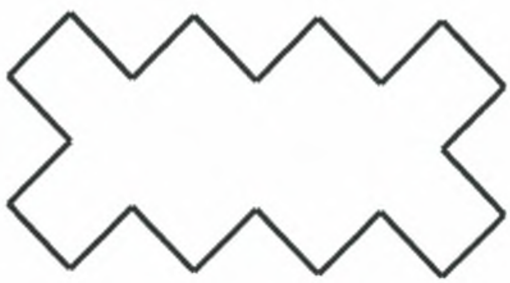


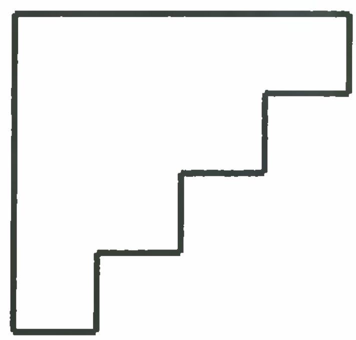


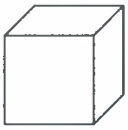


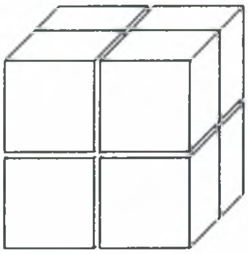


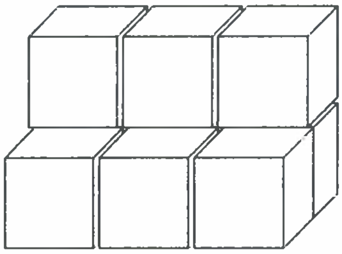


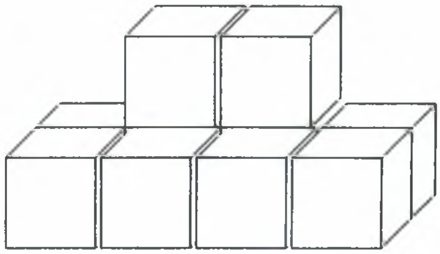


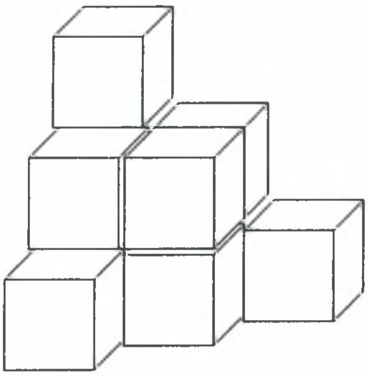


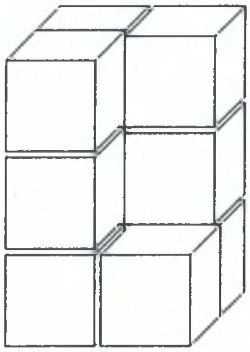
- Βρίσκω πόσα  έχει το κάθε σχήμα

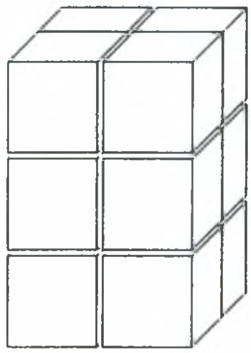


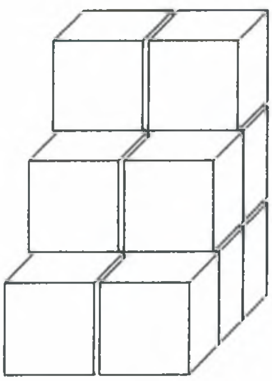


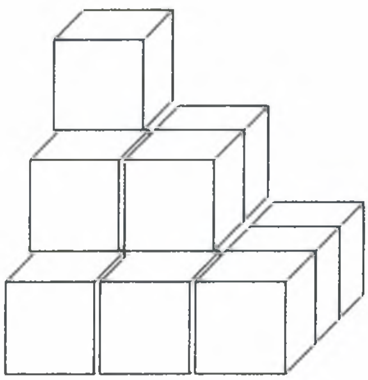


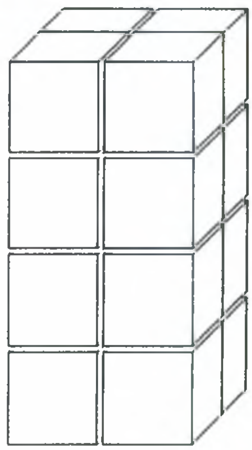












Έργα μαθητών

- Χωρίζω αριθμούς σε μονάδες (Μ), δεκάδες (Δ), εκατοντάδες (Ε)

15 109 87 100

Ε	Δ	Μ

Ε	Δ	Μ

Ε	Δ	Μ

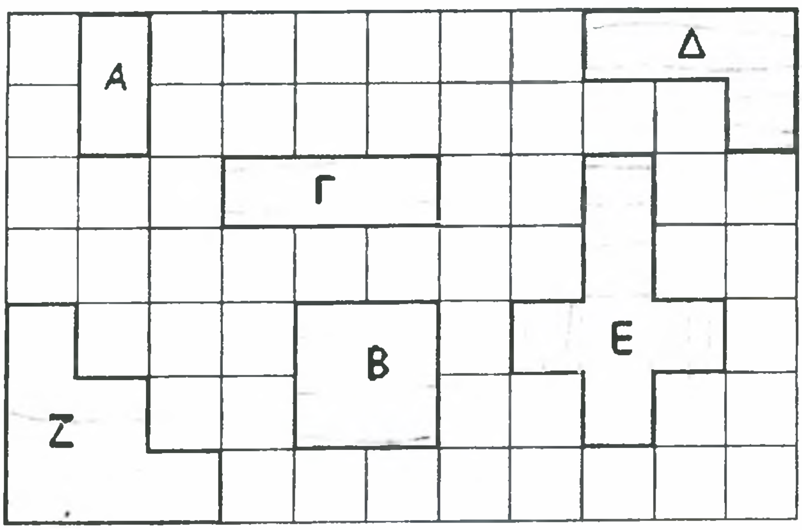
Ε	Δ	Μ

$$\begin{array}{r} 51 \\ -\,28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 207 \\ +\;24 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 164 \\ +\;26 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 320 \\ +\;84 \\ \hline \end{array}$$

Μέτρηση επιφάνειας

5. Γράψε πόσα ☐ έχει το κάθε σχήμα



Α = ____

Β = ____

Γ = ____

Δ = ____

Ε = ____

Ζ = ____

6. Πόσα έχει το κάθε σχήμα