

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*Ελαστικός Λυγισμός Χαλύβδινων Τοξωτών Φορέων:
Θεωρία και Πρακτική*

Φοιτητής : Απόστολος Δ. Χλέμπος

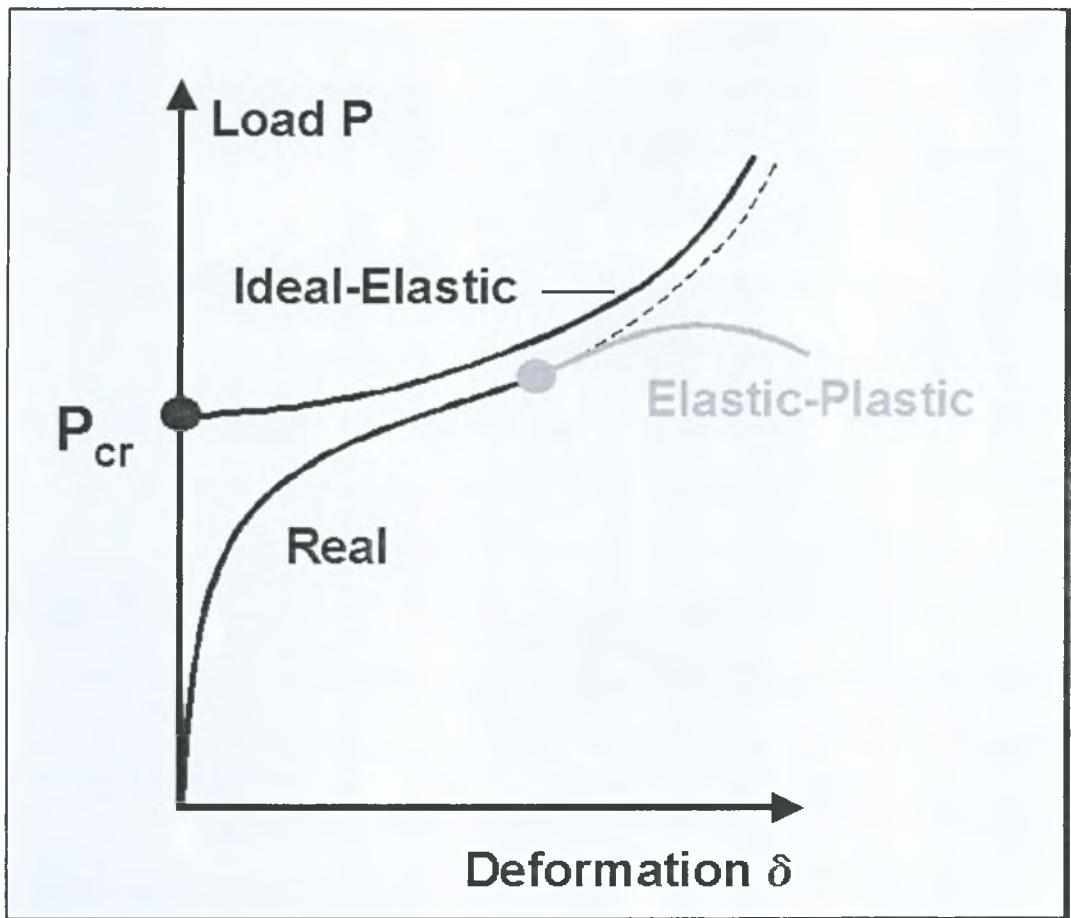
Επιβλέπων : Δημ. Σοφιανόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

Βόλος 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6706/1
Ημερ. Εισ.: 14-01-2009
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ- ΠΜ
2008
ΧΛΕ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μεταλλικοί τοξωτοί φορείς – χρήσεις και εφαρμογές.....2

1. ΦΟΡΤΙΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΟΞΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

Θεωρητικά και ρεαλιστικά.....28

2. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

2.1 Γενικά περί ευστάθειας των φορέων.....34

2.2 Ευστάθεια μεταλλικών τόξων.....36

3. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία.....39

3.2 Θεωρητικές προσεγγίσεις και διαφορές λυγισμικής απόκρισης.....41

3.3 Προς μια συνολική ενεργειακή προσέγγιση.....56

4. ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΠΕΡΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

4.1 Ευρωπαϊκοί Κανονισμοί.....60

4.2 Προτάσεις εφαρμογής με βάση τον Ευρωκώδικα 3: Μέρος 1-1.....63

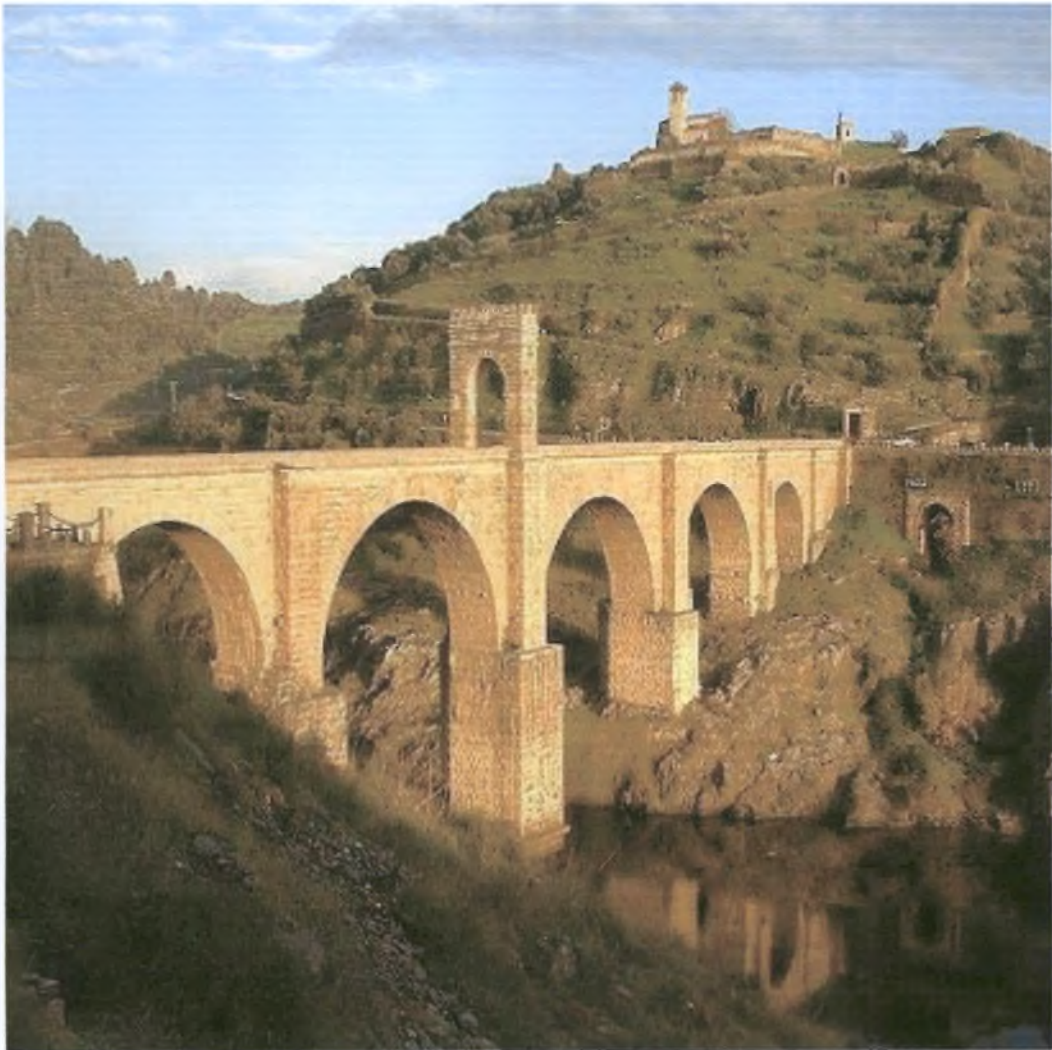
4.3 Ελληνικά Πρότυπα.....75

ΤΕΛΙΚΕΣ ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....80

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....81

Εισαγωγή : *Μεταλλικοί τοξωτοί φορείς – χρήσεις και εφαρμογές*

Το τόξο ως φορέας αποτελεί ένα ανθεκτικό, λειτουργικό και σίγουρα καλαισθητό δομικό στοιχείο από την εποχή αιόμη της αρχαιότητας. Ενδεχομένως ο πιο παλιός υπάρχων τοξωτός φορέας είναι στις Μυκήνες και χρονολογείται περίπου στο 1300 π.Χ. . Παρόλο που τα τόξα ως φορείς ήταν γνωστά και στους Ετρουσκούς και στους αρχαίους Έλληνες ήταν τελικά οι Ρωμαίοι που πλήρως συνειδητοποίησαν την προοπτική των τοξωτών φορέων. Βέβαια το υλικό με το οποίο κατασκευάστηκαν οι τοξωτοί φορείς στις μακρινές, χρονικά, εκείνες εποχές ήταν η πέτρα, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 1 : Ρωμαϊκή τοξωτή πέτρινη γέφυρα στην Alcantara, Ισπανία



Εικόνα 2: Ρωμαϊκό υδραγωγείο

Τις πραγματικά μεγάλες δυνατότητες των τόξων η ανθρωπότητα κατάφερε να τις αξιοποιήσει όταν ξεκίνησε η παραγωγή χάλυβα, καθόσον οι κατασκευές με αυτόν ως βασικό δομικό υλικό διαθέτουν μεγάλα πλεονεκτήματα, που απορρέουν από τις ιδιότητες του χάλυβα και των διαφόρων κραμάτων του, και έχουν συνοπτικά ως εξής:

- α. Υψηλή αντοχή, λόγω χρήσης λεπτών διατομών, μικρού ιδίου βάρους και οικονομίας υλικού και χώρου.
- β. Ολιμιότητα, ήτοι δυνατότητα μεγάλων παραμορφώσεων χωρίς αστοχία.
- γ. Ομοιομορφία υλικού, εφόσον υπάρχουν επιστάμενοι έλεγχοι κατά την παραγωγή και την μόρφωση των επί μέρους στοιχείων σε εργοστασιακούς χώρους ειδικά με την συνεχή πρόοδο της τεχνολογίας.

δ. Μεγάλη διάρκεια ζωής, που είναι πρακτικά απεριόριστη, υπό την προϋπόθεση τήρησης των κανόνων τακτικής συντήρησης και τυχόν αναγκαιών επεμβάσεων-ενισχύσεων.

ε. Ταχύτητα ανέγερσης.

στ. Δυνατότητα τροποποίησης ή ενίσχυσης με σκοπό την αύξηση του ωφέλιμου φορτίου, υπό την προϋπόθεση τήρησης των κανόνων τακτικής συντήρησης και τυχόν αναγκαιών επεμβάσεων-ενισχύσεων.

ζ. Δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης υλικού.

η. Ευκολία προκατασκευής, με την έννοια ότι τα έτοιμα στοιχεία μεταφέρονται επί τόπου πλήρως κατασκευασμένα και προστατευμένα από την δυσμενή επιρροή των καιρικών συνθηκών.

θ. Δυνατότητα ζεύξης μεγάλων ανοιγμάτων, άνω και των 1500 μέτρων.

ι. Αναμφισβήτητη αισθητική ανωτερότητα λόγω της καμπύλης φύσης των φορέων.

Οι τοξωτοί φορείς από χάλυβα βρίσκουν χρήση στην γεφυροποιία, στη διάνοιξη σηράγγων υπό την μορφή αντιστήριξης, στην κατασκευή κτιρίων ή μνημείων.

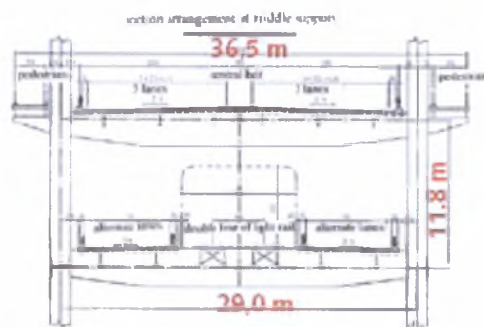
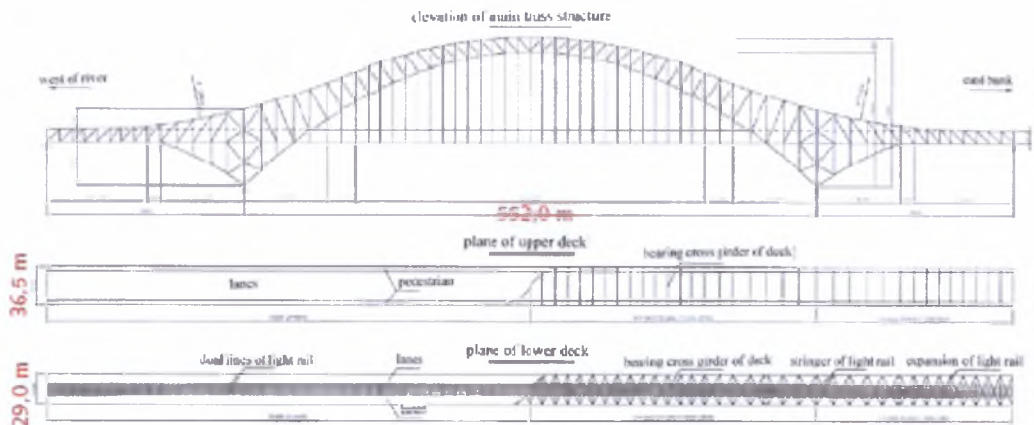
α) *Γεφυροποιία* : Οι τοξωτές γέφυρες, με τις ιδιαιτερότητες και τις διαφοροποιήσεις τους, αποτελούν την *κατ' εξοχήν εφαρμογή* μεταλλικών τοξωτών φορέων στις δομοστατικές κατασκευές. Υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός τέτοιων γεφυρών παγκοσμίως, μερικές δε από αυτές παρόλο παλαιές ακόμα και σήμερα βρίσκονται σε λειτουργία. Αν θεωρηθεί σαν βασικό κριτήριο κατάταξης το μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα σε ότι ακολουθεί παρατίθενται ιστορικά στοιχεία, γεωμετρικά χαρακτηριστικά και ενδεικτικές φωτογραφίες μερικών τέτοιων φορέων. Μόνο η τελευταία γέφυρα μνημονεύεται εκτός του παραπάνω κριτηρίου λόγω παλαιότητας.

1. Chaotianmen Bridge

Είδος	:	Μικτή, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	552 m
Συνολικό μήκος	:	1741 m
Πλάτος καταστρώματος	:	36.5 m (έξι λωρίδες κυκλοφορίας και δύο πεζόδρομοι άνω, τρεις γραμμές ελαφρών συρμών κάτω διπλής κατεύθυνσης)
Μορφή τόξου	:	Τετραγωνική παραβολή ύψους 128 m με λόγο ύψους προς

		άνοιγμα 1/4.31
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	25 Οκτωβρίου 2007
Θέση	:	Chongqing, Κίνα
Υλικό κατασκευής	:	Χάλυβας υψηλής αντοχής
Κύριο μέσο σύνδεσης μελών	:	Κοχλίες υψηλής αντοχής





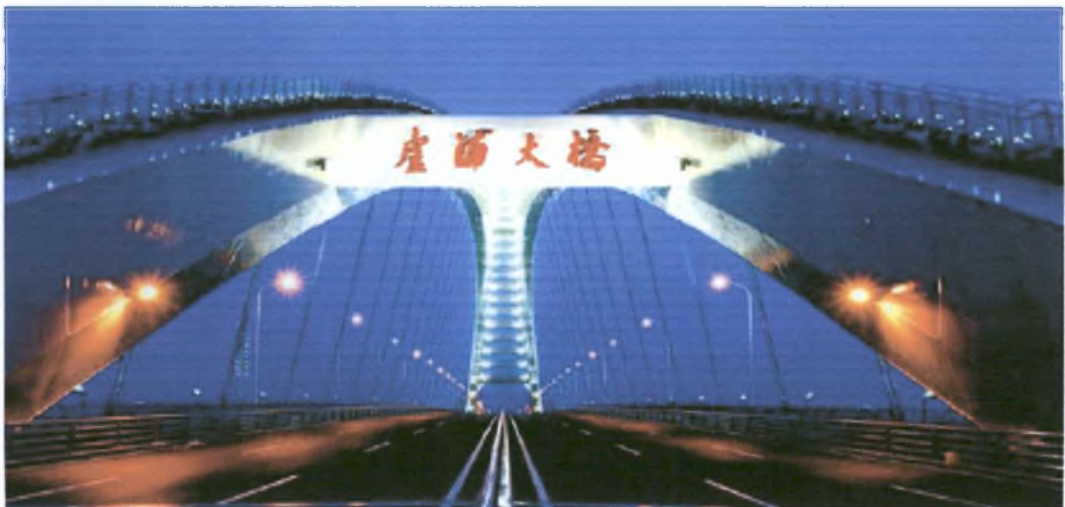
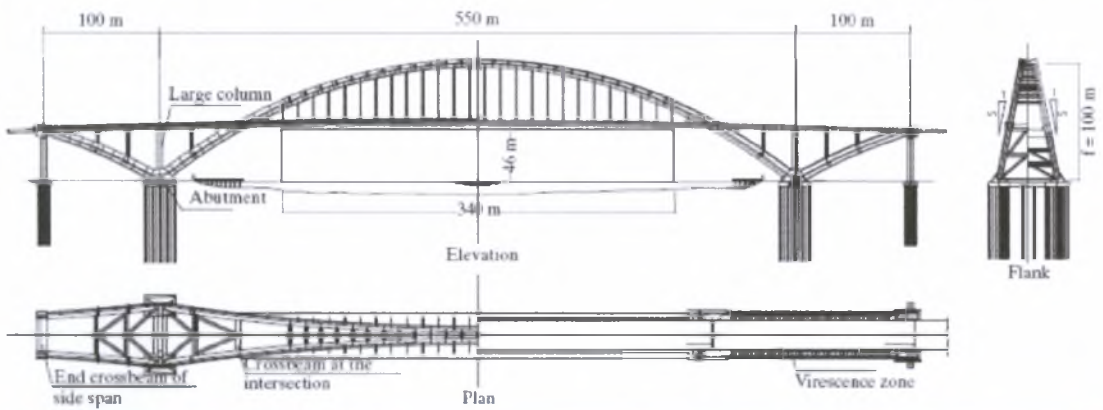
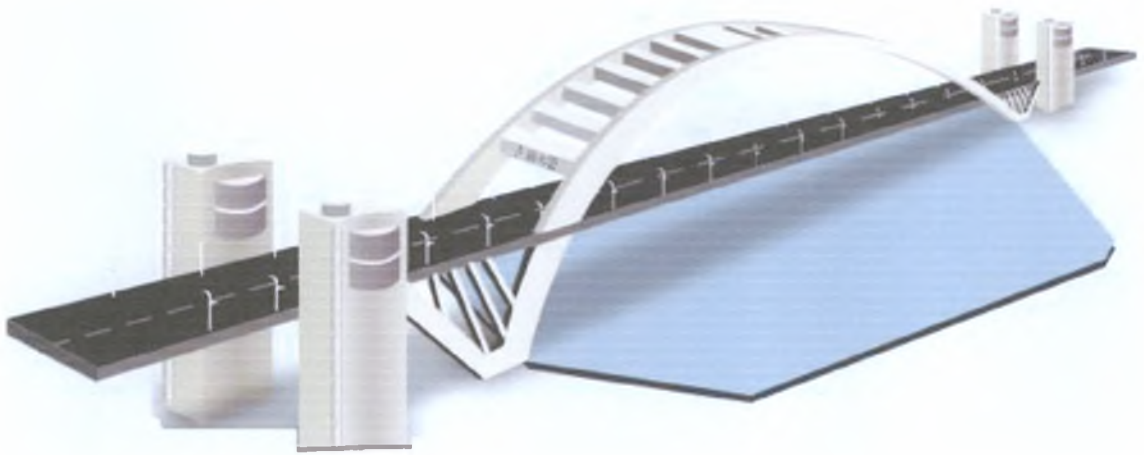
2. Lupu Bridge

Είδος	:	Οδοφόρα, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	550 m
Συνολικό μήκος	:	3,900 m
Πλάτος καταστρώματος	:	28.7 m (τέσσερεις λωρίδες κυκλοφορίας)
Μορφή τόξου	:	Κυκλικό
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	28 Ιουνίου 2003
Θέση	:	Shanghai, Κίνα
Υλικό κατασκευής	:	Χάλυβας υψηλής αντοχής

Κύριο μέσο σύνδεσης μελών

:

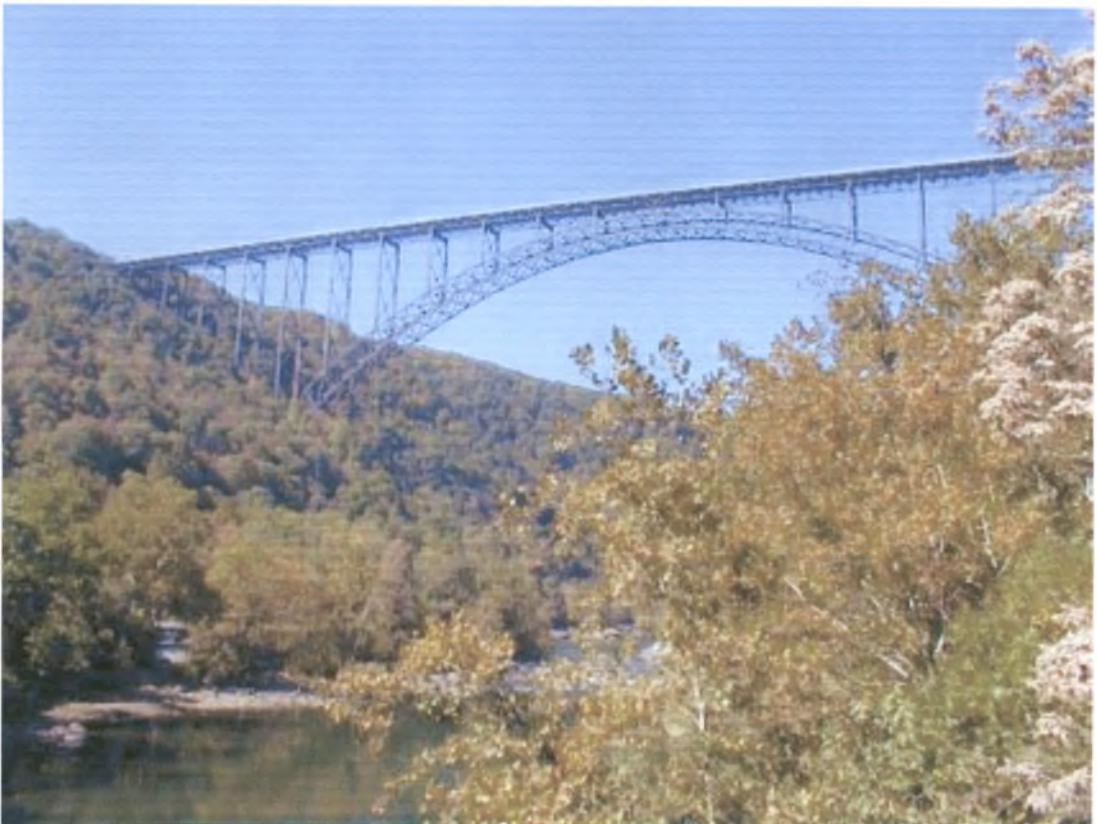
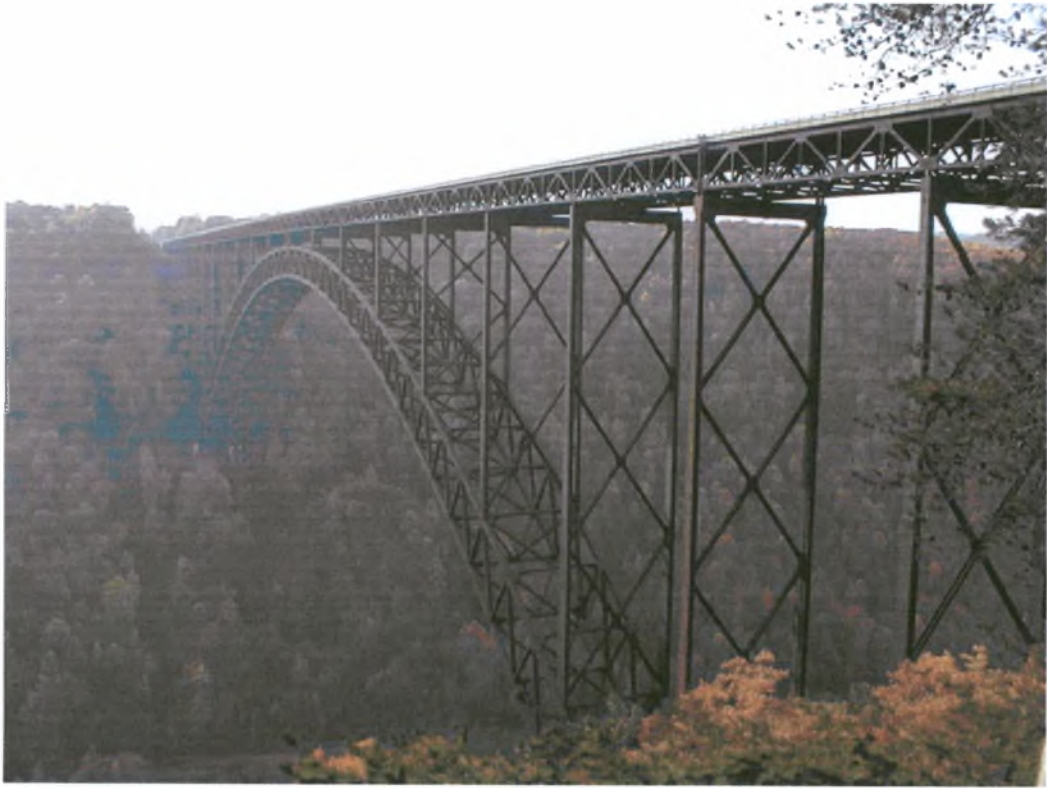
Συγκολλήσεις

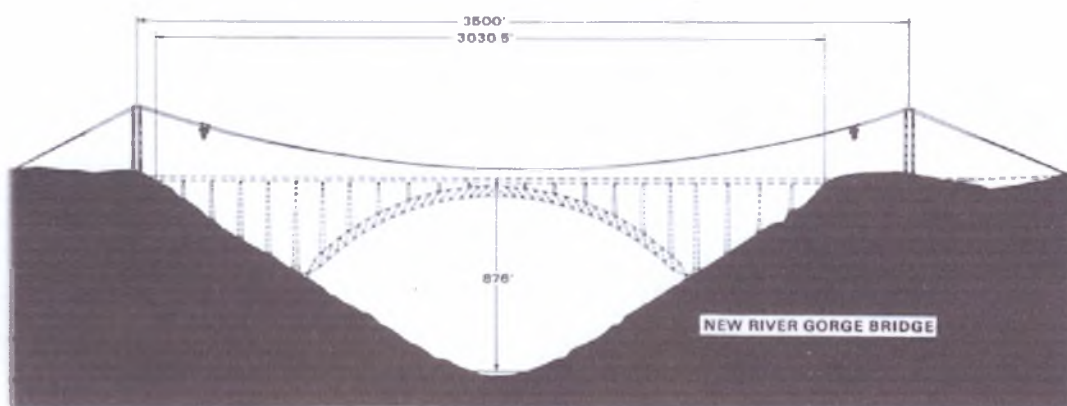




3. New River Gorge Bridge

Είδος	:	Οδοφόρα, άνω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	518 m
Συνολικό μήκος	:	924 m
Πλάτος καταστρώματος	:	21.1 m (τέσσερεις λωρίδες κυκλοφορίας με διαχωριστική νησίδα)
Μορφή τόξου	:	Κυκλικό
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	22 Οκτωβρίου 1977
Θέση	:	Fayetteville, West Virginia, ΗΠΑ
Υλικό κατασκευής	:	Χάλυβας COR-TEN
Κύριο μέσο σύνδεσης μελών	:	Κοχλίες υψηλής αντοχής





4. Bayonne Bridge

Είδος	:	Οδοφόρα, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	510.54 m
Συνολικό μήκος	:	1,761.74 m
Πλάτος καταστρώματος	:	25.91 m (4 λωρίδες κυκλοφορίας)
Μορφή τόξου	:	Παραβολικό
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	<u>15 Νοεμβρίου 1931</u>
Θέση	:	Kill Van Kull (N. Jersey, ΗΠΑ)

Υλικό κατασκευής : Manganese steel

Κύριο μέσο σύνδεσης μελών : Ήλοι





5. Sydney Harbour Bridge

Είδος	:	Μεικτή, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	503 m
Συνολικό μήκος	:	1149 m
Πλάτος καταστρώματος	:	49 m (οκτώ λωρίδες οδικής κυκλοφορίας, δύο σιδηροδρομικές γραμμές και ένας πεζόδρομος)
Μορφή τόξου	:	Παραβολικό
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	<u>19 Μαρτίου 1932</u>
Θέση	:	Sydney Harbour, Αυστραλία
Υλικό κατασκευής	:	Δομικός Χάλυβας St 37
Κύριο μέσο σύνδεσης μελών	:	Ήλοι





6. Caiyuanba Bridge

Είδος	:	Μικτή, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	420 m
Συνολικό μήκος	:	1,741 m
Πλάτος	:	43 m (τέσσερις λωρίδες κυκλοφορίας και δύο πεζόδρομοι στο άνω κατάστρωμα και δύο γραμμές μονής τροχιάς στο κάτω)
Μορφή τόξου	:	Παραβολικό
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	29 Οκτωβρίου 2007
Θέση	:	Chongqing, Κίνα
Υλικό κατασκευής	:	Χάλυβας υψηλής αντοχής
Κύριο μέσο σύνδεσης μελών	:	Κοχλίες υψηλής αντοχής

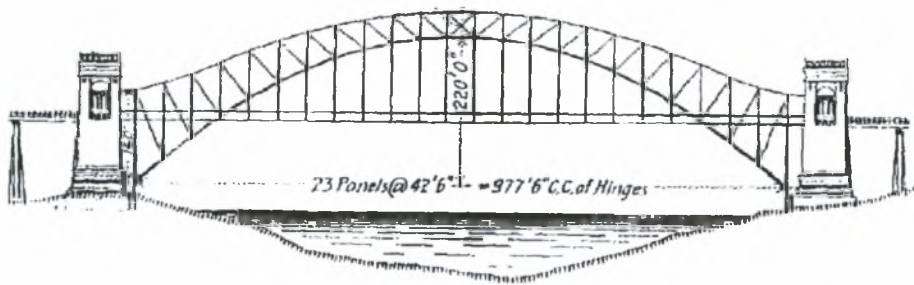


*Caiyuanba Bridge,
in Chongqing, China*

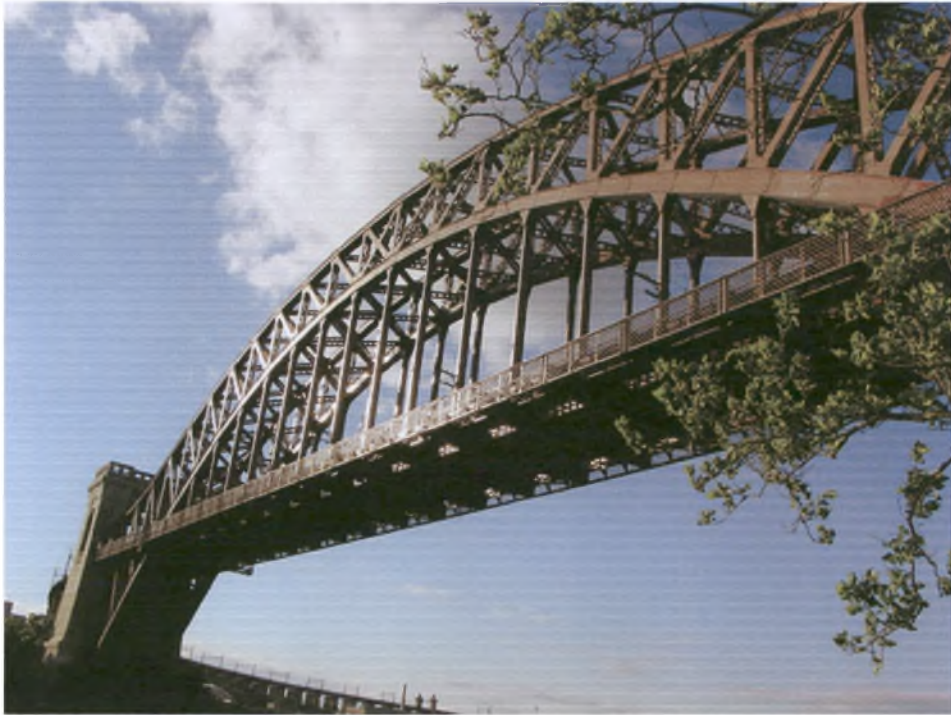


7. Hell Gate Bridge

Είδος	:	Σιδηροδρομική, κάτω διαβάσεως
Μέγιστο ελεύθερο άνοιγμα	:	310 m
Συνολικό μήκος	:	5,200 m
Πλάτος	:	30.5 m (αρχικά τέσσερεις και από το 1970 σε λειτουργία τρεις σιδηροδρομικές γραμμές)
Μορφή τόξου	:	Σύνθετο
Ημερομηνία πρώτης λειτουργίας	:	<u>30 Σεπτεμβρίου 1916</u>
Θέση	:	New York City, ΗΠΑ
Υλικό κατασκευής	:	Carbon steel
Κύριο μέσο σύνδεσης μελών	:	Ήλοι



Span 1,000 Feet, Width 91 Feet, Rise of Arch 220 Feet, Maximum Depth of Truss 140 Feet.
THE LARGEST ARCH BRIDGE IN THE WORLD CROSSING EAST RIVER AT HELL GATE.



β) *Αντιστήριξη σιράγγων* : Μεταλλικοί τόξωτοι φορείς χρησιμοποιούνται για την προσωρινή ή και την μόνιμη αντιστήριξη του όγκου των γαιών σε μία σήραγγα. Η μορφή των τόξων αυτών είναι συνήθως παραβολική ή ελλειψοειδής και σπανίως κυκλική, όπως διακρίνεται στις Εικόνες 3 και 4 που έπονται.



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6

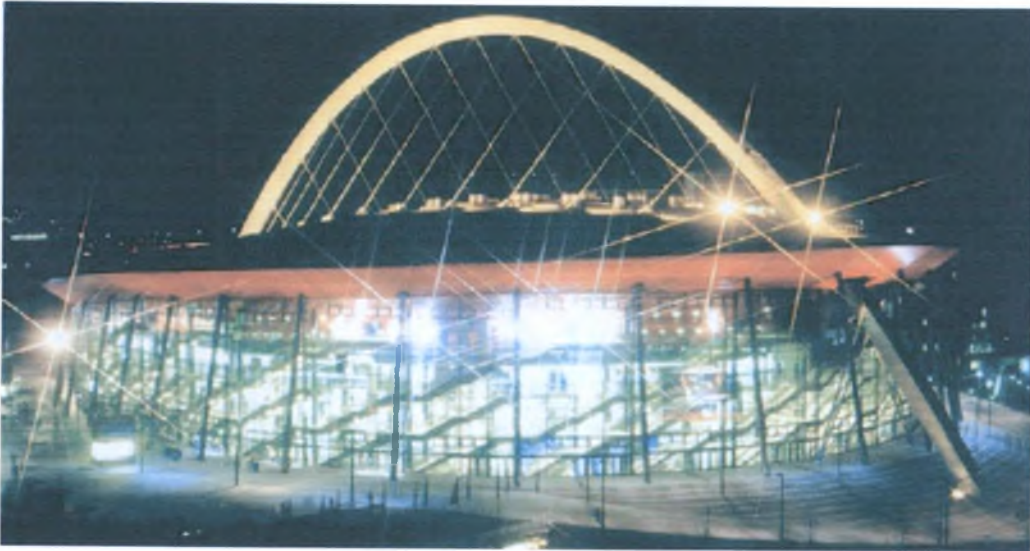
γ) Κατασκευή κτιριακών και αθλητικών εγκαταστάσεων : Ο φέρων οργανισμός αρκετών κτιριακών και αθλητικών εγκαταστάσεων στις μέρες μας περιλαμβάνει και μεταλλικά τόξα. Ενδεικτικές είναι οι εικόνες 7-10 που έπονται.....



Εικόνα 7 : Σταθμός τραμ και υπόγειου σιδηρόδρομου, Rotterdam



Εικόνα 8: Σταθμός τραμ και υπόγειου σιδηρόδρομου, Rotterdam



Εικόνα 9: Κόλναarena, Γερμανία



Εικόνα 10: Κόλναarena, Γερμανία



Εικόνα 11: Ludwig Erhard Haus, Γερμανία



Εικόνα 12: Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο Αθηνών (Ο.Α.Κ.Α.)



Εικόνα 13: Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο Αθηνών (Ο.Α.Κ.Α.)



Εικόνα 14: Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο Αθηνών (Ο.Α.Κ.Α.)



Εικόνα 15: Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο Αθηνών (Ο.Α.Κ.Α.)



Εικόνα 16: Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο Αθηνών (Ο.Α.Κ.Α.)



Εικόνα 17: Στάδιο Wembley, Αγγλία



Εικόνα 18: Στάδιο Wembley, Αγγλία

δ) *Αυτούσια τόξα ως κατασκευές*: Ίσως η πιο σπάνια περίπτωση όπου συναντά κανείς μεταλλικό τοξωτό φορέα αφ' εαυτού, όπως φαίνεται στη συνέχεια.



Εικόνα 19 : Gateway Arch , Washington , Η.Π.Α



Εικόνα 20: Gateway Arch , Washington , Η.Π.Α

Κεφάλαιο 1^ο : Φορτία επί των τοξωτών φορέων(Θεωρητικά και ρεαλιστικά)

Ένας τοξωτός φορέας μπορεί να υποβληθεί σε διάφορα είδη φορτίσεων κατά την λειτουργία του. Οι φορτίσεις του τόξου κατά την μελέτη είναι δυνατόν να αναφέρονται τόσο σε πραγματικά υπάρχουσες καταστάσεις καταπόνησης όσο και σε καθαρά περιπτώσεις που αποσκοπούν σε ερευνητική και μόνον εξέταση. Βασικές φορτίσεις θα μπορούσε κανείς να αναφέρει ότι είναι οι εξής ακόλουθες :

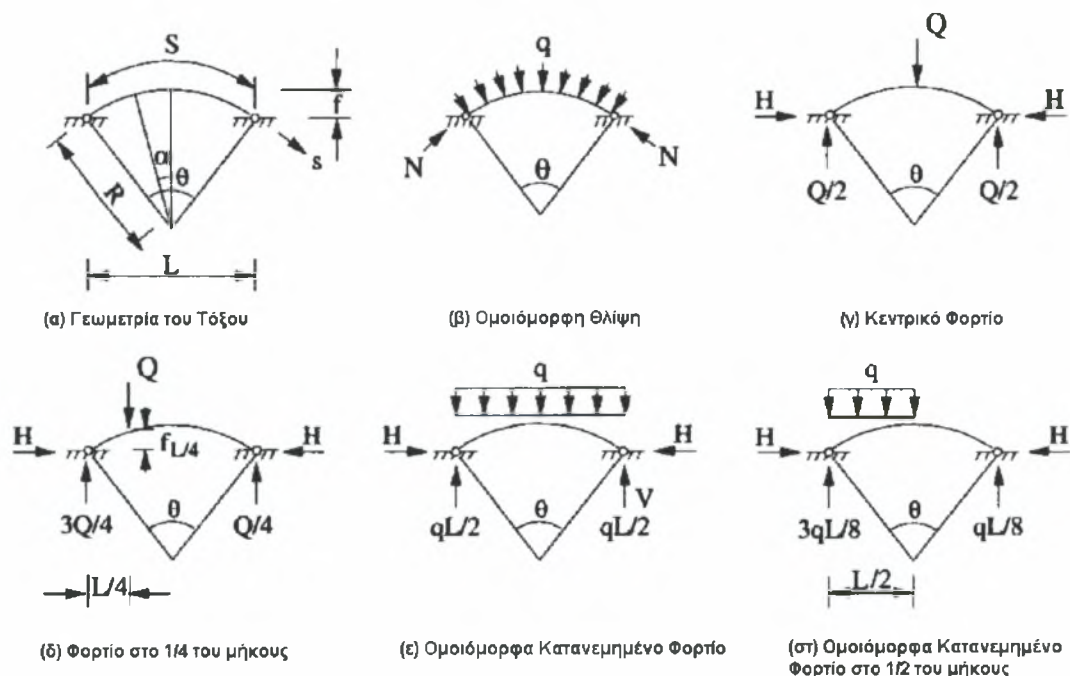
1. Συμμετρικές φορτίσεις

- Κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το άνοιγμα
- Συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή
- Οριζόντιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο καθ' ύψος του τόξου
- Ακτινικά ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

2. Μη συμμετρικές φορτίσεις

- Κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο $1/2$ του ανοίγματος
- Συγκεντρωμένο φορτίο στο $1/4$ του ανοίγματος

Στο σχήμα που ακολουθεί παρατίθεται η γεωμετρία του τόξου καθώς και οι προαναφερθέντες καταστάσεις φορτίσεως. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει σχολιασμός των διαφόρων τύπων φορτίσεως όσον αφορά στην ρεαλιστική ή μη τους υπόσταση.



Σχήμα 1.1 Είδη φορτίσεων επίπεδων τοξωτών φορέων

Σημείωση : Στην πλειονότητά τους οι τοξωτοί φορείς φορτίζονται εμμέσως , για παράδειγμα ως στήριξη γέφυρας οπότε τα φορτία (συγκεντρωμένα ή κατανεμημένα) μεταβιβάζονται στο τόξο . Η περίπτωση της άμεσης φόρτισης του τόξου αναφέρεται στην σπάνια κατάσταση κατά την οποία το τόξο λειτουργεί καθαρά ως αυτόνομος δομικός φορέας .

Ρεαλιστικές καταστάσεις Φόρτισης

1. Συμμετρικές φορτίσεις

- *Κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το άνοιγμα :* Θα μπορούσε να είναι το φορτίο ενός σιδηροδρομικού συρμού που διέρχεται από την γέφυρα , η οποία στηρίζεται πάνω στον τοξωτό φορέα .
- *Συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή :* Θα μπορούσε να είναι το σημείο όπου στηρίζεται ένα τμήμα της γέφυρας πάνω στον τοξωτό φορέα .
- *Οριζόντιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο καθ' ύψος του τόξου :* Εδώ αναφερόμαστε στην πίεση του ανέμου που δέχεται η μία πλευρά του τοξωτού φορέα . Η κατεύθυνση του ανέμου θεωρούμε ότι θλίβει τη συγκεκριμένη πλευρά .
- *Ακτινικά ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο :* Ίσως το μοναδικό φορτίο που στην πραγματικότητα έχει αυτή την δράση είναι στην περίπτωση προσωρινής ή και μόνιμης αντιστήριξης σηράγγων από μεταλλικούς τοξωτούς φορείς. Οι συγκεκριμένοι φορείς φορτίζονται ομοιόμορφα από το έδαφος που αντιστηρίζουν.

2. Μη συμμετρικές φορτίσεις

- *Κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο $\frac{1}{2}$ του ανοίγματος :* Η περίπτωση κατά την οποία δεν βρίσκεται όλος ο σιδηροδρομικός συρμός πάνω στην γέφυρα αλλά κάποιο κομμάτι του έχει ήδη διέρθει .
- *Συγκεντρωμένο φορτίο στο $\frac{1}{4}$ του ανοίγματος :* Φορτίο που δέχεται ο τοξωτός φορέας από την στήριξη της γέφυρας .

Θεωρητικές καταστάσεις Φόρτισης

Στις πιο πολλές ερευνητικές μελέτες εξετάζεται ως φόρτιση του τοξωτού φορέα η ακτινικά κατανεμημένη . Αυτό αποτελεί γενικώς μία ιδεατή κατάσταση καθώς και στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην αντιστήριξη σηράγγων δεν μπορούμε με βεβαιότητα να αποφανθούμε πως πρόκειται για πλήρως ομοιόμορφα ακτινικά κατανεμημένο φορτίο . Η υδροστατική πίεση ίσως να μπορούσε να προσομοιώσει σε θεωρητικό επίπεδο μίας τέτοιας μορφής φορτίο κατανεμημένο μη ομοιόμορφα , καθώς πρακτικά φαντάζει αρκετά δύσκολο

να συναντήσουμε υδροστατική καταπόνηση σε μεταλλικό τοξωτό φορέα(ίσως σε υποθαλάσσια σήραγγα επί του βυθού).

Ρεαλιστικές καταστάσεις Φόρτισης υπό μορφή εικόνων

· *Κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το άνοιγμα*





· Συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή καθώς και στο $\frac{1}{4}$ του ανοίγματος

Στις ακόλουθες εικόνες φαίνεται πως η στήριξη της γέφυρας ασκεί δυνάμεις στον τοξωτό φορέα. Για παράδειγμα στην κορυφή του τόξου ή σε διαφορετικές θέσεις ασκούνται από τους ορθοστάτες συγκεντρωμένες δυνάμεις με κατακόρυφη διεύθυνση πάνω στο τόξο.



· Ακτινικά ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

Από πρακτικής άποψης η περίπτωση που γεινιάζει περισσότερο από κάθε άλλη σε ακτινική ομοιόμορφη κατανομή είναι αυτή των μεταλλικών τόξων που χρησιμοποιούνται για την αντιστήριξη σηράγγων . Σε αυτό το σημείο τονίζεται ότι δεν μπορούμε να δεχθούμε με σιγουριά αυτή την περίπτωση καθώς υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το τόξο να μην είναι εντελώς κυκλικό.



Σημείωση

Τα φορτία που ασκούνται στους τοξωτούς φορείς είναι ως επί το πλείστον δυναμικά. Με εξαίρεση το ίδιο βάρος της κατασκευής και τις ωθήσεις των γαιών όλα τα προαναφερθέντα φορτία ασκούνται στα τόξα δυναμικά.

Κεφάλαιο 2^ο : Ευστάθεια Μεταλλικών Τοξωτών Φορέων

1. Γενικά περί ευστάθειας των φορέων

Η ευστάθεια αντιπροσωπεύει ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην μηχανική των στερεών, το οποίο πρέπει να κατέχουμε πλήρως έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε την ασφάλεια των κατασκευών έναντι κατάρρευσης. Η θεωρία της ευστάθειας είναι εξέχουσας σημασίας για την εφαρμοσμένη δομική μηχανική, την αεροναυπηγική, την πυρηνική μηχανική, την παράκτια μηχανική καθώς και σε αρκετούς άλλους τομείς της επιστήμης.

Η σπουδαιότητα του θέματος της ευστάθειας είναι έδηλη από τα περιστατικά δομικών καταρρεύσεων που προκλήθηκαν είτε από αμέλεια είτε από μη κατανόηση του προβλήματος της ευστάθειας κατά τον σχεδιασμό. Τα πιο γνωστά ατυχή συμβάντα είναι η κατάρρευση της Tacoma Narrows Bridge το 1940, λόγω φαινομένων εσωτερικών συντονισμών - μη-αεροδυναμικής ευστάθειας και η κατάρρευση της Quebec Bridge πάνω από τον ποταμό St. Lawrence το 1907. Βεβαίως τα παραδείγματα καταστροφών παρόλο που – δυστυχώς – είναι πολυάριθμα, μας προσφέρουν πολύ χρήσιμα συμπεράσματα, καθόσον η γνώση της επιστήμης υπαγορεύει πέραν άλλων την βαθειά κατανόηση των φαινομένων με σκοπό την μη επανάληψη λαθών.

Η ανάλυση της ευστάθειας στην μηχανική των στερεών ξεκίνησε με την επίλυση του Euler για λυγισμό ενός ελαστικού υποστυλώματος (Euler, 1744). Τα περισσότερα από τα γραμμικά ελαστικά προβλήματα της δομικής ευστάθειας λύθηκαν μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα, μολονότι περαιτέρω λύσεις προέκυπταν καθώς νέα δομικά στοιχεία έκαναν την εμφάνισή τους. Ο 20^{ος} αιώνας έχει γίνει μάρτυρας μιας μεγάλης επέκτασης της θεωρίας της ευστάθειας σε μη-γραμμική συμπεριφορά, που οφείλεται είτε σε γεωμετρικές μη γραμμικότητες είτε σε μη γραμμικότητα του καταστατικού νόμου του υλικού. Στο δεύτερο μισό του συγκεκριμένου αιώνα, η μελέτη της δυναμικής ευστάθειας των κατασκευών αναπτύχθηκε μέσω της άνθισης ορισμένων «νέων» θεωριών, όπως αυτή των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και χάους καθώς και αυτή των ανωμαλιών αλλά και των καταστροφών.

Υφίσταται μια τεράστια βιβλιογραφία σε ότι αφορά την ευστάθεια των κατασκευών, περαιτέρω αναφορά στην οποία εκφεύγει των σιοπών της

παρούσας εργασίας. Πλην όμως, πρέπει ιδιαίτερα να τονιστεί ότι η ελαστική ευστάθεια, η οποία πραγματεύεται την ισορροπία των φορέων στην παραμορφωμένη μορφή, και ιδιαίτερα η μη γραμμική, αποτελεί το θεμέλιο για την ορθή κατανόηση της πραγματικής συμπεριφοράς ενός δομήματος, και τούτο δεν επιδέχεται ουδεμίας αμφισβήτησης πλέον.

Εξαιρετική και ιδιαίτερα εποπτική παρουσίαση των αρχών ευστάθειας χαλύβδινων φορέων βρίσκεται στη διάλεξη του ESDEP (European Steel Design Education Program) υπ' αριθμ. 6 (Applied Stability, <http://www.kuleuven.ac.be/bwk/materials/Teaching/master/wg06/toc.htm>), η οποία επιμερίζεται ως εξής:

- 6.1 Concepts of Stable and Unstable Elastic Equilibrium
- 6.2 General Criteria for Elastic Stability
- 6.3 Elastic Instability Modes
- 6.4 General Methods for Assessing Critical Loads
- 6.5 Iterative Methods for Solving Stability Problems
- 6.6 Buckling of Real Structural Elements I, II



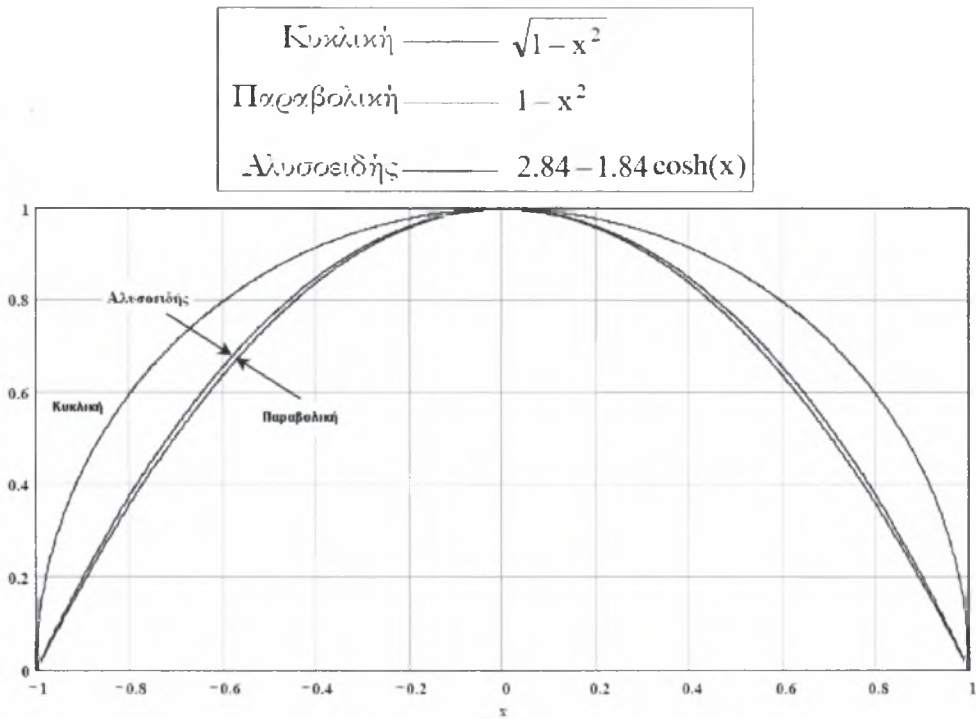
Εικόνα 2.1 : Κατάρρευση του κεντρικού ανοίγματος του τόξου της Quebec Bridge
(1907)



Εικόνα 2.2 : Κατάρρευση της Tacoma Narrows Bridge (1940)

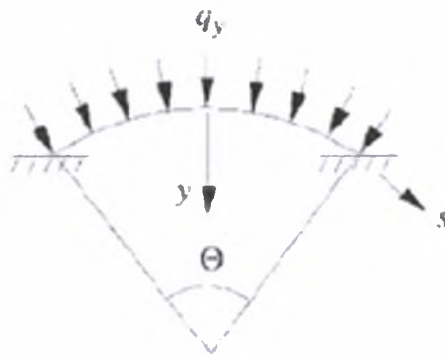
2. Ευστάθεια μεταλλικών τόξων

Πριν την οποιαδήποτε εμβάθυνση στα προβλήματα ευστάθειας μεταλλικών τόξων δέον όπως δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι, κατ' αρχήν, το τόξο αυτό καθεαυτό ως καμπύλος φορέας παρουσιάζει γεωμετρικές και φυσικές ιδιαιτερότητες, οι οποίες δεν απαντώνται σε ευθύγραμμους φορείς, επί των οποίων θεμελιώθηκε η όλη θεωρία της ευστάθειας. Σημειωτέον επίσης ότι τα μεταλλικά τόξα που χρησιμοποιούνται στις δομοστατικές κατασκευές, εκτός ορισμένων «φρουτουριστικών» εξαιρέσεων, δεν έχουν τυχαία καμπυλότητα ή σχήμα αλλά περιορίζονται σε ορισμένες γεωμετρικές μορφές, οι οποίες παρατίθενται στο Σχήμα 1, που έπεται. Υφίστανται επίσης και μεταλλικοί τοξωτοί φορείς με ημιτονοειδή ή ακόμη και ελλειπτικής μορφής καμπυλότητα, αλλά για λόγους ευκρίνειας δεν χαράχθηκαν στο σχήμα αυτό.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρικές μορφές μεταλλικών τοξωτών φορέων

Λόγω ακριβώς του καμπύλου σχήματος του, και ανεξάρτητα (εκτός ορισμένων σπάνιων καταστάσεων συνδυασμού παραμέτρων) του είδους της εξωτερικής φόρτισης, σε ένα στοιχειώδες κομμάτι της διατομής ενός τοξωτού φορέα δρουν ΠΑΝΤΑ δύο συνιστώσες φόρτισης οι οποίες είναι οι εξής : **α)** ακτινική και **β)** αξονική, οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2.2: Συνιστώσες φόρτισης

Κατά συνέπεια υφίσταται αλληλεπίδραση λόγω φόρτισης τόσο σε επίπεδο **διατομής** όσο σε επίπεδο **φορέα**, η οποία εξαρτάται από τους ακόλουθους παράγοντες.

A) Σε επίπεδο φορέα

- Οι συνθήκες στήριξης (απλές ή σύνθετες), όπως είναι απολύτως λογικό, αποτελούν εξέχουσας σημασίας παράγοντα στην λειτουργία του φορέα.
- Η γεωμετρία του τοξωτού φορέα. Μεγάλη διαφορά στην συμπεριφορά παρατηρείται ανάμεσα στα Ψηλά (**High**) και στα Χαμηλά τόξα (**Low**).
- Το είδος της φόρτισης. Ο τοξωτός φορέας μπορεί να βρίσκεται κάτω από την επίδραση εγκάρσιων ή κατακόρυφων φορτίων σε όλο το μήκος του ή σε ένα τμήμα αυτού και τέλος συγκεντρωμένων φορτίων στην κορυφή ή και σε κάποιο άλλο σημείο.
- Μη γραμμικότητες του υλικού. Εδώ αναφερόμαστε στις ατέλειες που πιθανόν να παρουσιάζει το υλικό κατασκευής του τοξωτού φορέα.

B) Σε επίπεδο διατομής

- Διατομές διπλής συμμετρίας : α) κλειστές (ορθογωνικές, κυλινδρικές κλπ) και β) ανοιχτές (διπλού ταυ)
- Διατομές απλής συμμετρίας

Η επιρροή της ανωτέρω αλληλεπίδρασης έχει σαν αποτέλεσμα στις μαθηματικές εκφράσεις του συνολικού δυναμικού και κατ' επέκταση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας να υπάρχει σύζευξη, γεγονός που δυσχεραίνει εξαιρετικά το πρόβλημα. Τούτο ισχύει τόσο στην ανάλυση της εντός επιπέδου ελαστικής ευστάθειας μεταλλικών τόξων και επεκτείνεται στην εκτός επιπέδου. Ακόμα μεγαλύτερες δυσχέρειες παρουσιάζονται όταν πραγματευθεί κανείς το φαινόμενο του στρεπτο-καμπτικού λυγισμού (που αφ' εαυτού είναι τρισδιάστατο), ενώ περιπλέκονται ακόμα περισσότερο τα πράγματα σε περιπτώσεις ανελαστικού λυγισμού ΟΛΩΝ των ανωτέρω τύπων. Όσον αφορά την *ευστάθεια μεταλλικών τόξων* υπάρχουν δύο «σχολές» που ασχολήθηκαν με την μελέτη του αντικειμένου (α) η λεγόμενη Αυστραλιανή και (β) η Αμερικανική. Τα τελευταία χρόνια έχει επεκταθεί η έρευνα και στην Ευρώπη με επίκεντρο την εξέταση της συμπεριφοράς *χαμηλών* καμπύλων φορέων.

Κεφάλαιο 3^ο : Ελαστική Εντός Επιπέδου Ευστάθεια Μεταλλικών Τοξωτών Φορέων

1. Εισαγωγικά στοιχεία

Οι περισσότεροι Κώδικες και Κανονισμοί περί τα έργα από χάλυβα δεν παρέχουν μεθόδους για τον σχεδιασμό μεταλλικών τόξων έναντι απώλειας εντός επιπέδου ευστάθειας. Οι λίγοι που όντως παρέχουν τέτοιες μεθόδους βασίζονται υποχρεωτικά σε μια γραμμική εξίσωση αλληλεπίδρασης για τις δυνάμεις εντός επιπέδου ενός ισοδύναμου στοιχείου δοκού-υποστυλώματος που χρησιμοποιεί τη μέγιστη ελαστική καμπτική ροπή και την αξονική θλίψη στο τόξο. Παρόλα αυτά, η γραμμική εξίσωση αλληλεπίδρασης για ένα στοιχείο δοκού-υποστυλώματος μπορεί να *μη* είναι κατάλληλη για ένα τόξο γιατί δεν λαμβάνει υπόψη τα δυναμικά χαρακτηριστικά των μεταλλικών τοξωτών φορέων. Έχει βρεθεί ότι η εξίσωση σχεδιασμού για μεταλλικά υποστυλώματα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας για τα μεταλλικά τόξα σε ομοιόμορφη θλίψη, ούτε και οι εξισώσεις αλληλεπίδρασης για μεταλλικά στοιχεία δοκού-υποστυλώματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μεταλλικά τόξα υπό μη-ομοιόμορφη θλίψη και κάμψη. Στην τωρινή βιβλιογραφία διατίθενται προτεινόμενες εξισώσεις σχεδιασμού που παρέχουν πολύ 'κοντινές' προβλέψεις για τις εντός επιπέδου δυνάμεις λυγισμού αμφότερων των *χαμηλών* και των *ψηλών* μεταλλικών τόξων υπό ομοιόμορφη θλίψη.

Τα μεταλλικά τόξα μπορούν να εκδηλώσουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά στην συμπεριφορά τους όταν υπόκεινται σε διάφορα είδη φόρτισης. Η πιο συνηθής κατάσταση φόρτισης που συναντάται στην διεθνή βιβλιογραφία αφορά στο ομοιόμορφα κατανεμημένο ακτινικό φορτίο. Για αυτή την κατάσταση τα φορτία λυγισμού έχουν υπολογιστεί από τους Timoschenko και Gere, ενώ τα γεωμετρικά μη-γραμμικά φορτία λυγισμού καθώς και οι καμπύλες εκκεντρότητας φορτίσεως για τόξα με κοχλιωτά άκρα έχουν δοθεί από τους Schreyer και Masur. Οι προαναφερθέντες ερευνητές παρείχαν ακριβείς λύσεις για τις μη-γραμμικές ελαστικές εξισώσεις ισορροπίας για κυκλικά, *χαμηλά* τόξα με ορθογωνική διατομή, μαζί με μία λεπτομερή ανάλυση των διαφόρων κριτηρίων λυγισμού τα οποία διακρίνουν τους διαφορετικούς πιθανούς τύπους λυγισμού που μπορεί να εκδηλώσουν τα μεταλλικά τόξα. Επιπροσθέτως, απέδειξαν πως, ενάντια σε ότι υπήρχε ως αντίληψη, η ύπαρξη μιας αντισυμμετρικής μορφής λυγισμού δεν είναι επαρκής συνθήκη έτσι ώστε η απώλεια ευστάθειας να λάβει χώρα.

Εκτός από ομοιόμορφα ακτινικά φορτία, τα μεταλλικά τόξα μπορεί να υπόκεινται και σε άλλα είδη φορτίων, τόσο κατανεμημένα όσο και συγκεντρωμένα,

συμμετρικά ή μη-συμμετρικά και ανθίστανται σε αυτά τα φορτία μέσω ανάπτυξης συνδυασμού καμπτικών ροπών και αξονικών θλιπτικών δυνάμεων.

Μια άκρως ενδιαφέρουσα προσέγγιση του προβλήματος της μη γραμμικής ανελαστικής λυγισμικής ανάλυσης τόξων (που όμως δεν περιλαμβάνεται κατ' ουσίαν στην ύλη της παρούσας εργασίας αλλά παρά ταύτα αξίζει να σημειωθεί) παρουσιάστηκε από τους Pi και Trahair, οι οποίοι χρησιμοποιώντας έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, διερεύνησαν τον εντός επιπέδου λυγισμό για κυκλικά μεταλλικά τόξα διατομής διπλού ταυ (I). Η επιρροή των αρχικών ατελειών, του λόγου ύψους προς άνοιγμα, των παραμενουσών τάσεων, του λόγου ίδιου βάρους προς συνολικό μόνιμο φορτίο στην εντός επιπέδου ανελαστική ευστάθεια των μεταλλικών τόξων υπό ομοιόμορφη θλίψη και κάμψη ήταν οι παράμετροι που εξετάστηκαν. Η επιρροή των αρχικών ατελειών εξαρτάται από το εάν η κάμψη ή η αξονική θλίψη είναι η κύρια δράση. Όταν η αξονική θλίψη κυριαρχεί, η επιρροή τους είναι σημαντική. Ως παράδειγμα μπορεί να αναφερθεί η περίπτωση ενός τόξου υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη ή αυτή κατά την οποία δέχεται φορτία ομοιόμορφα κατανομημένα κατά μήκος της οριζόντιας προβολής όλου του τόξου. Όταν η κάμψη είναι κρίσιμη, όπως στην περίπτωση τόξων που υπόκεινται σε μη συμμετρικά κατανομημένα φορτία ή σε συγκεντρωμένα φορτία η επιρροή των αρχικών ατελειών είναι λιγότερο σημαντική.

Το μη γραμμικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση μεγάλων παραμορφώσεων των τόξων αναπτύχθηκε για να συμπεριλάβει την ανελαστικότητα του υλικού (Pi και Trahair 1994,1995). Το εν λόγω μοντέλο βασίζεται στις ακόλουθες θέσεις και παραδοχές :

1. Χρήση της θεωρίας Euler-Bernoulli για την κάμψη.
2. Οι μη γραμμικές σχέσεις τάσης - παραμόρφωσης επιτρέπουν μεγάλες παραμορφώσεις.
3. Οι επιρροές της εντός επιπέδου καμπυλότητας του τόξου λαμβάνονται υπ' όψιν.
4. Η αρχική καμπυλότητα θεωρείται ότι μεταβάλλεται ημιτονοειδώς κατά μήκος του άξονα του τόξου.
5. Διαμήκεις παραμένουσες τάσεις λαμβάνονται υπ' όψιν.

6. Η επαυξητική ελαστοπλαστική σχέση τάσης - παραμόρφωσης προέρχεται από το κριτήριο διαρροής του Von Mises, σε έναν κανόνα ροής τάσεων και σε έναν κανόνα κράτυνσης.

Περισσότερες λεπτομέρειες για το μοντέλο και την μέθοδο επίλυσης των μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας δίνονται από τους ερευνητές Pi και Trahair 1994, 1995, 1995b. Το συγκεκριμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων έχει επαληθευτεί ότι είναι ακριβές, αποτελεσματικό και αποδοτικό (Pi και Trahair 1994, 1996 a,b και 1998 a,c,d).

2. Θεωρητικές προσεγγίσεις και διαφορές λυγισμικής απόκρισης

Από την οπτική γωνία της ανάλυσης του λυγισμού είναι πολύ χρήσιμο να διακρίνουμε δύο βασικούς τύπους τόξων :

α) Ψηλά τόξα και

β) Χαμηλά ή ρηχά τόξα.

Τα *ψηλά τόξα* είναι εκείνα, το μήκος της κεντροβαρικής γραμμής των οποίων θεωρείται ασυμπίεστο (η αλλαγή του μήκους της είναι αμελητέα) ενώ τα *χαμηλά ή ρηχά τόξα* είναι εκείνα στα οποία η βράχυνση της διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Κατά κανόνα, και σύμφωνα με τις μεθόδους που έχουν μέχρι σήμερα προταθεί, η ανάλυση των ψηλών τόξων πραγματοποιείται συνήθως μέσω των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας (και σπανιότερα μέσω εφαρμογής προσεγγιστικών ενεργειακών μεθόδων) ενώ των χαμηλών τόξων μέσω αμιγώς ενεργειακών μεθόδων, βασισμένων στη συνάρτηση συνολικού δυναμικού. Οι δύο αυτές κατηγορίες τόξων λογικό είναι να εμφανίζουν διαφορά στην προ- αλλά και μετα- λυγισμική τους απόκριση. Γενικά, ένα μεταλλικό τόξο το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφη θλίψη μπορεί είτε να υποστεί αντισυμμετρικό λυγισμό (με σημείο διακλάδωσης) είτε συμμετρικό λυγισμό (με οριακό σημείο). Τα μεταλλικά τόξα που συμπεριφέρονται ως *ψηλά* επιδεικνύουν αντισυμμετρικό λυγισμό με διακλάδωση ενώ εκείνα που εμφανίζουν συμπεριφορά ως *χαμηλά* χάνουν την ευστάθειά τους μέσω ακαριαίου λυγισμού με ύπαρξη οριακού σημείου στον κύριο δρόμο ισορροπίας. Στο σχήμα που ακολουθεί παρατίθενται οι δύο προαναφερθείσες ελαστικές μορφές λυγισμού.



Σχήμα 3.1 : Ελαστικές μορφές λυγισμού.

Το φορτίο συμμετρικού λυγισμού είναι συνήθως υψηλότερο από το αντίστοιχο αντισυμμετρικού λυγισμού. Παρά ταύτα, το φορτίο συμμετρικού (ακαριαίου) λυγισμού ενός χαμηλού τόξου υπάρχει πιθανότητα να είναι χαμηλότερο από το φορτίο διακλάδωσης.

Η κλασική θεωρία ελαστικού λυγισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί *μόνο* το γραμμικό φορτίο διακλάδωσης (αντισυμμετρικού λυγισμού) ενός μεταλλικού τόξου υπό ομοιόμορφη θλίψη. Σε αυτή την κλασική θεωρία γίνονται κάποιες απλοποιητικές παραδοχές :

- 1^{ον} Η προ-λυγισμού συμπεριφορά θεωρείται γραμμική.
- 2^{ον} Η επιρροή των παραμορφώσεων λόγω λυγισμού αγνοούνται στην δυσκαμψία.
- 3^{ον} Οι τάσεις που προκύπτουν γραμμικοποιούνται.
- 4^{ον} Οι παραμορφώσεις πριν το λυγισμό αγνοούνται.

Το αντισυμμετρικό φορτίο λυγισμού τύπου διακλάδωσης λαμβάνεται μέσω χρήσης *ενεργειακών εξισώσεων*.

(Α) ΨΗΛΑ ΤΟΞΑ

Αλλαγή καμπυλότητας

Κατ' αρχήν, πρέπει να περιγράψουμε την γεωμετρία της παραμόρφωσης, η οποία αναλυτικά έχει ως εξής :

R = η ακτίνα καμπυλότητας του τόξου,

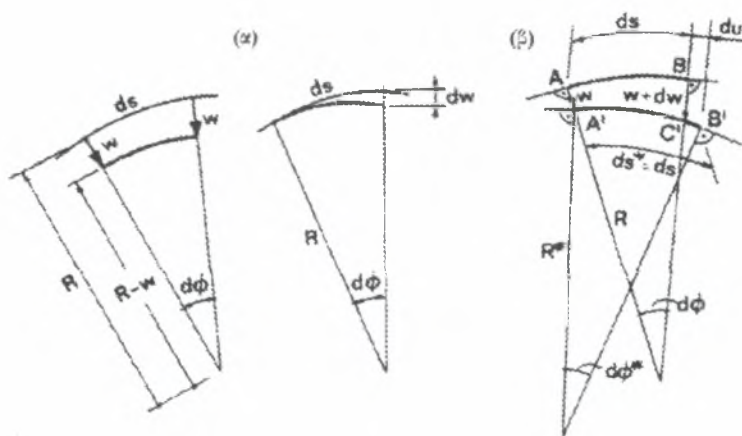
s = η διαμήκης συντεταγμένη μετρούμενη κατά μήκος του καμπυλομένου κεντροβαρικού άξονα,

w = βέλος κάμψης (κάθετο στον κεντροβαρικό άξονα), θετικό αν έχει την φορά της εκτροπής,

M = η καμπτική ροπή, η οποία είναι ανάλογη με την αλλαγή καμπλότητας κ και στην περίπτωση που το τόξο είναι αρκετά λυγρό, η σταθερά αναλογίας είναι EI (όπως ακριβώς για τις δοκούς). Επομένως, έχουμε :

$$M = EI \kappa \quad \kappa = \frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \quad (3.1)$$

R^* = η ακτίνα καμπλότητας του κεντροβαρικού άξονα μετά την εκτροπή.



Σχήμα 3.2: Γεωμετρία παραμορφώσεως τόξου.

Προσεγγιστικά, μπορούμε να δεχθούμε ότι η αλλαγή καμπλότητας (Σχήμα 3.2.α) προκύπτει ως άθροισμα της αλλαγής καμπλότητας υπό σταθερή εκτροπή, η οποία δίνεται

από την σχέση : $\frac{1}{(R-w)} - \frac{1}{R}$ και της αλλαγής καμπλότητας λόγω της απόκλισης της

εκτροπής, η οποία είναι : $\frac{d^2w}{ds^2}$. Συνεπώς, έχουμε :

$$\kappa = \frac{d^2w}{ds^2} + \left(\frac{1}{R-w} - \frac{1}{R} \right) = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R(R-w)} \cong \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \quad (3.2)$$

όπου, s = διαμήκης συντεταγμένη του κεντροβαρικού άξονα του τόξου.

Παρ' όλα αυτά, υπολογίζοντας την αλλαγή καμπλότητας λόγω του w υπό την υπόθεση πως το w είναι σταθερό είναι κατά κάποιο τρόπο "ενορατικό" βήμα. Απαιτείται μία πιο άτεγκτη τεκμηρίωση μέσω υπολογισμού της αλλαγής καμπλότητας στην μεταβλητή $w(s)$. Σε αυτό το σημείο, να σημειώσουμε ότι επειδή ο κεντροβαρικός άξονας θεωρείται ασυμπέστος (Σχήμα 3.2.β), ισχύει ότι: $ds = R d\phi = R^* d\phi^* = ds^*$. Η γωνία που αντίκειται των εφαπτόμενων του κεντροβαρικού άξονα στα άκρα A' και B' του

παραμορφωμένου στοιχείου ds^* (Σχήμα 3.2.β) δίνεται από τη σχέση:
 $d\phi^* = (w' + w''ds) + d\phi - w' + \frac{du}{R}$. Ο τελευταίος όρος στην προηγούμενη σχέση αντιπροσωπεύει την επιπρόσθετη σχετική στροφή μεταξύ των εφαπτόμενων στα σημεία B' και C' που προκαλείται από την αξονική μετατόπιση u . Αυτή ακριβώς η μετατόπιση u είναι που απαιτείται για να ικανοποιήσει την υπόθεση της μη-αλλαγής του μήκους, η οποία είναι :
 $du = w d\phi$ (Σχήμα 3.2.β). Για το λόγο αυτό, έχουμε :

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} = \\ &= \frac{d\phi^*}{ds} - \frac{1}{R} = \\ &= \frac{1}{ds} \left[d\phi + \left(\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} ds \right) - \frac{dw}{ds} + \left(w \frac{d\phi}{R} \right) \right] - \frac{1}{R} = \\ &= \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{d\phi}{ds} \left(1 + \frac{w}{R} \right) - \frac{1}{R} = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

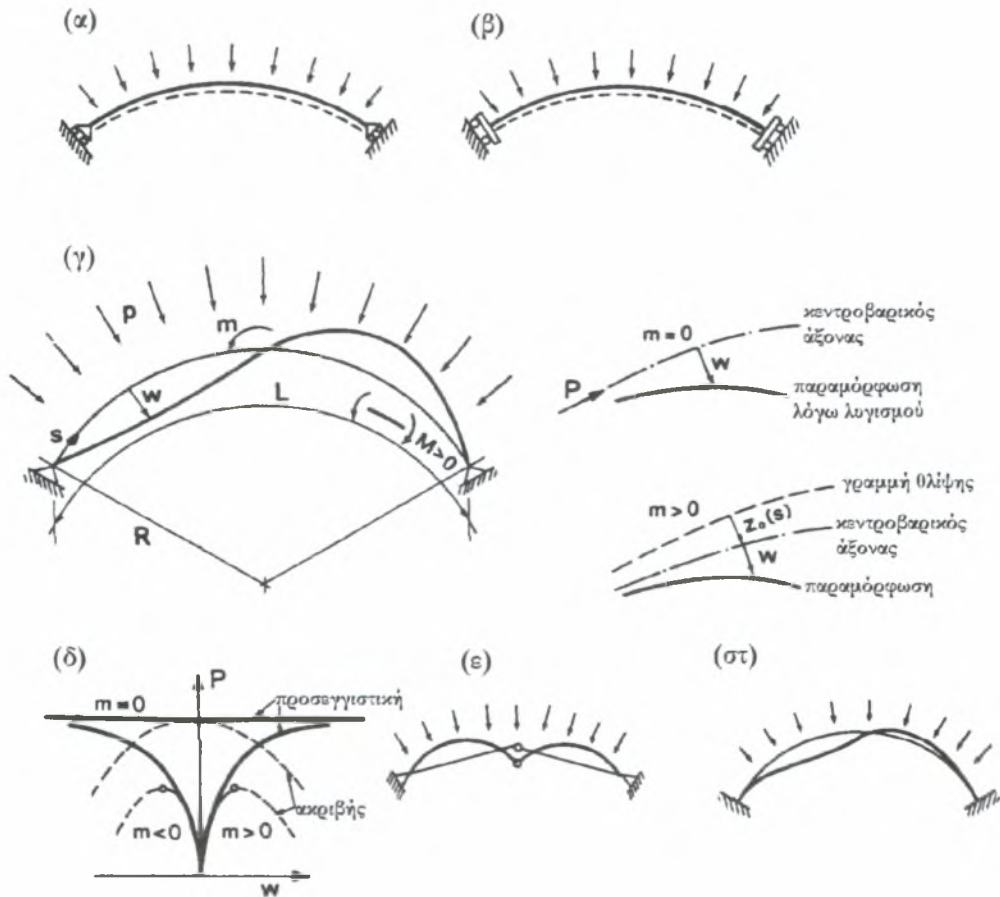
Όμως η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με την εξίσωση (3.2) καθώς ισχύει ότι $\frac{d\phi}{ds} \cong \frac{1}{R}$. Αντικαθιστώντας την γραμμικοποιημένη έκφραση της αλλαγής καμπυλότητας από την εξίσωση (3.2) στην εξίσωση (3.1), λαμβάνουμε την ακόλουθη κυρίαρχη διαφορική εξίσωση για τον λυγισμό των ψηλών τόξων :

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.4)$$

Προσεγγιστική θεωρία για τόξα χωρίς αρχικές ατέλειες

Σκόπιμο είναι πρώτα να αναλύσουμε ένα τέλειο σύστημα. Ένα τέλειο τόξο είναι ένα τόξο στο οποίο πριν τον λυγισμό ο κεντροβαρικός άξονας και η γραμμή που χωρίζει την διατομή μεταξύ εφελκυσμού και θλίψης συμπίπτουν. Τέλεια τόξα είναι, για παράδειγμα, κυκλικά τόξα υπό ομοιόμορφη ακτινική θλίψη, παραβολικά τόξα υπό κατακόρυφο ομοιόμορφο φορτίο, το οποίο είναι ομοιόμορφο κατά την οριζόντια προβολή του και αλυσοειδή τόξα υπό την επιρροή μόνον του ίδιου βάρους που είναι ομοιόμορφο κατά μήκος του τόξου. Όλα τα προαναφερθέντα ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι συνοριακές συνθήκες δεν εισάγουν σημαντικές καμπτικές ροπές. Παρ' όλα αυτά, τέτοιες συνοριακές συνθήκες δεν χρησιμοποιούνται συνήθως, εάν το τόξο δεν είναι αρκετά λυγρό οι καμπτικές ροπές που προκαλούνται λόγω των συνοριακών συνθηκών με την θλίψη του

κεντροβαρικού άξονα είναι μικρές και μπορούν να αγνοηθούν. Εν πάση περιπτώσει, η θεώρηση ότι ο κεντροβαρικός άξονας είναι ασυμπίεστος υπονοεί ότι αυτές οι καμπτικές ροπές θα είναι μηδενικές. Στο σχήμα 3.3.α και 3.3.β παρεμποδίζεται η ακτινική κύλιση των στηρίξεων.



Σχήμα 3.3 : (α, β) Συνοριακές συνθήκες για τέλεια τόξα , (γ) κυκλικό τόξο που υπόκειται σε ομοιόμορφο ακτινικό φορτίο και ροπή m , (δ) προσεγγιστική και ακριβής συμπεριφορά, (ε), (στ) μορφές λυγισμού αμφιαρθρωτών και αμφίπακτων τόξων.

Μία σημαντική απλοποίηση είναι το γεγονός ότι στα αρθρωτά ψηλά τόξα η συνισταμένη αντίδραση δεν αλλάζει σημαντικά μετά τον λυγισμό. Η γραμμή που χωρίζει την διατομή μεταξύ εφελκυσμού και θλίψης παραμένει σταθερή μετά τον λυγισμό. Συνεπώς, η καμπτική ροπή M λόγω της εκτροπής λυγισμού w είναι απλά : $M = -Pw$ (Σχήμα 3.2.3.γ) και η Εξίσωση (3.4) παίρνει την παρακάτω μορφή :

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \kappa^2 w = 0 \quad \text{όπου} \quad \kappa^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{P}{EI} \quad (3.5)$$

Μαζί με τις συνοριακές συνθήκες για το $\mathbf{w}(\mathbf{s})$, η (3.5) οριοθετεί ένα μονοδιάστατο, όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες, πρόβλημα για το $\mathbf{w}(\mathbf{x})$.

Το πρόβλημα μπορεί εύκολα να επιλυθεί εάν το κ είναι σταθερό, κάτι το οποίο συμβαίνει για κυκλικά τόξα ($R = \text{σταθ.}$) όταν η αξονική δύναμη P είναι σταθερή. Αυτή η κατάσταση λαμβάνεται εάν η φόρτιση αποτελείται από ένα ομοιόμορφα καταναμημένο ακτινικό φορτίο p και τότε $P = pR = \text{σταθ.}$, σύμφωνα με την διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Για τις υπόλοιπες αναφερθείσες περιπτώσεις μεταλλικών τόξων, η αξονική δύναμη αυξάνει από την κορυφή προς την στήριξη.

Θεωρούμε τώρα ένα αμφιαρθρωτό κυκλικό μεταλλικό τόξο με ασυμπίεστο τον κεντροβαρικό άξονα και καθόλου ατέλειες, το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφη ακτινική καταπόνηση p (Σχήμα 3.3.γ). Η διαφορική εξίσωση (3.5) όπως και οι συνοριακές συνθήκες στις αρθρώσεις ($w = 0$) μπορεί να ικανοποιηθεί (για $P = \text{σταθ.}$) από την συνάρτηση $w = A \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right)$, όπου $L =$ το μήκος του κεντροβαρικού άξονα του τόξου από την μία άρθρωση έως την άλλη. Μετά από αντικατάσταση στην εξίσωση (3.5) προκύπτει ότι $\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{pR}{EI}$, η οποία αποδίδει για την κρίσιμη τιμή του φορτίου p , τον παρακάτω μαθηματικό τύπο, σύμφωνα με τον Hurlbrink (1908) :

$$p_{\kappa, n} = \frac{EI}{R^3} \left[\frac{n^2\pi^2}{\left(\frac{L}{R}\right)^2} - 1 \right] \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (3.6)$$

Σε αυτό ακριβώς το σημείο προκύπτει κάτι πολύ ξεχωριστό για τα τόξα. Δεν είναι αποδεκτή κάθε ημιτονοειδής καμπύλη εάν ο κεντροβαρικός άξονας θεωρηθεί ασυμπίεστος. Αυτή η συνθήκη μη συμπίεστότητας δεν μπορεί σε καμία των περιπτώσεων να ικανοποιηθεί εάν ο αριθμός των ημιτονοειδών ημικυμάτων από στήριξη σε στήριξη είναι περιττός. Ο αριθμός n των ημιτονοειδών ημικυμάτων πρέπει να είναι άρτιος, διότι οι προς τα έξω παραμορφώσεις τείνουν να επιμηκύνουν το τόξο ενώ υπάρχουν και οι προς τα κάτω παραμορφώσεις που τείνουν να βραχύνουν το τόξο. Όμως πρέπει οι δύο αυτές αντίστροφες παραμορφώσεις να αντισταθμίζουν η μία την άλλη. Κατά συνέπεια, η μικρότερη αποδεκτή τιμή για το n στην εξίσωση 6 δεν είναι $n = 1$ αλλά $n = 2$. Αυτό είχε επισημανθεί από τον

Hurlbrink(1908), παρόλο που η επικρατούσα διαφορική εξίσωση (3.5) είχε βρεθεί αργότερο νωρίτερα από αυτόν από τον Boussinesq (1883).

Η εξίσωση (3.6) βρίσκει εφαρμογή και σε ένα πλήρως κυκλικό δακτύλιο. Όμως στην περίπτωση αυτή το κρίσιμο φορτίο είναι για $n = 2$ $P_{κρ,2} = 0$ επειδή $\frac{L}{R} = 2\pi$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς σε αυτή την περίπτωση οι δύο στηρίξεις (αρθρώσεις) συμπίπτουν και το μεταλλικό τόξο δεν έχει πια μία στατικά ορισμένη διαμόρφωση. Σε κάποιο βαθμό τότε το μεταλλικό τόξο μπορεί να στραφεί σαν άκαμπτο σώμα γύρω από την άρθρωση. Το χαμηλότερο σε τιμή φορτίο που προκαλεί λυγισμό είναι :

$$P_{κρ,4} = \frac{3EI}{R^3}.$$

Διάφορα είδη τόξων και η επιρροή των ατελειών

Συχνά οι διατομές των τόξων πριν το λυγισμό δεν φορτίζονται κεντρικά, πράγμα που σημαίνει ότι θα υπάρχει μία αρχική καμπτική ροπή $M_0(s) = -Pz_0(s)$, όπου $z_0(s)$ είναι η απόσταση του κεντροβαρικού άξονα από την γραμμή που χωρίζει την διατομή μεταξύ εφελκυσμού και θλίψης στο απαραμόρφωτο τόξο (Σχήμα 3.2.3.γ). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.5) τον όρο $\frac{M_0(s)}{EI}$ αντί για 0. Αυτή είναι η περίπτωση, για παράδειγμα, όταν εφαρμόζεται μη μηδενική ροπή $m \neq 0$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2.γ. Αντί για αντισυμμετρικό λυγισμό με διακλάδωση με κρίσιμο φορτίο όπως λαμβάνεται μέσα από την εξίσωση (3.6), λαμβάνουμε μία καμπύλη φορτίου παραμόρφωσης, η οποία είναι παρόμοια με την γραμμικοποιημένη λύση των υποστυλωμάτων με ατέλειες. Καθώς πλησιάζουμε στην τιμή του κρίσιμου φορτίου μέσω της εξίσωσης (3.6) οι ατέλειες τείνουν να γίνουν άπειρες (Σχήμα 3.2.δ). Σημειώνουμε ότι τέτοιου είδους συμπεριφορά προκύπτει μόνον για αντισυμμετρική φόρτιση του τόξου. Οι συμμετρικοί όροι της φόρτισης μπορούν να παράγουν μόνον πεπερασμένες παραμορφώσεις, δηλαδή δεν μπορούν να προκαλέσουν την πρώτη κρίσιμη μορφή μιας και το n πρέπει να είναι άρτιος αριθμός(3.6). Η εξίσωση (3.6) για $n = 2$ παίρνει την μορφή :

$$P_{κρ}R = P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{\beta L}{2}\right)^2} \quad (3.7)$$

Στην παραπάνω εξίσωση $\beta L =$ το ενεργό μήκος, όπου $\beta = \frac{2}{\left[4 - \left(\frac{L^2}{\pi^2 R^2}\right)\right]^{1/2}}$ και όπου

$P_{κρ}$ = η κρίσιμη αξονική ώση. Για την περίπτωση που $\frac{L}{R} \rightarrow 0$ λαμβάνουμε $\beta = 1$, το οποίο αντιστοιχεί σε ένα μεταλλικό τόξο με πολύ χαμηλό ύψος. Το σημαντικό όμως είναι ότι για αυτή την περίπτωση η Εξίσωση (3.7) δεν ισχύει, λόγω του ότι η αξονική επιμήκυνση γίνεται σημαντική. Για την περίπτωση που $\frac{L}{R} = \pi$, έχουμε $\beta = 1.15$, που αντιστοιχεί σε ένα ημικυκλικό τόξο. Παρατηρώντας πως μετά τον λυγισμό στο σχήμα του τόξου (Σχήμα 3.3.γ) υπάρχει σημείο αλλαγής κλίσης στην κορυφή, είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η τιμή του β , μεταξύ 1 και 1.15, δεν είναι και πολύ διαφορετική από εκείνη που προκύπτει για αμφιαρθρωτό υποστύλωμα με μήκος ίσο με $L/2$ ($\beta = 1$).

Ένα τριαρθρωτό τόξο με επαρκώς υψηλό ύψος παρουσιάζει μορφή αντισυμμετρικού λυγισμού διακλάδωσης παρόμοια με αυτή ενός διαρθρωτού τόξου. Όπως υπολογίστηκε από τον Austin(1971), $\beta = 1.14$ έως 1.15. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι αυτές οι τιμές δεν είναι πολύ διαφορετικές από την τιμή του β για ένα ημικυκλικό αμφιαρθρωτό τόξο. Για ένα όχι πολύ ρηχό τριαρθρωτό τόξο, ωστόσο, ο λυγισμός είναι αντισυμμετρικός, όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 3.3.ε.

Ένα αμφίπακτο τόξο δεν μπορεί να επιλυθεί με την παρούσα μεθοδολογία από την στιγμή που η γραμμή που χωρίζει την διατομή μεταξύ εφελκυσμού και θλίψης μετατοπίζεται μετά τον λυγισμό. Σε τούτη την περίπτωση είναι προτιμότερο να επιλύσουμε το τόξο με προσεγγιστικές ενεργειακές μεθόδους.

Οι πληροφορίες που παρέχονται από τους Timoshenko και Gere (1961) για τα παραβολικά τόξα υπό κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε οριζόντια προβολή, όπως και για τα αλυσοειδή τόξα υπό την επιρροή του ιδίου μόνον βάρους, δείχνουν ότι η τιμή του συντελεστή ενεργού μήκους β είναι πολύ κοντά σε αυτή που έχει προαναφερθεί για κυκλικά τόξα που σε κανονική φόρτιση (Austin,1971). Για τυπικά σχήματα τόξων και για την P ορισμένη ως η κρίσιμη αξονική ώση σε θέσεις που προκύπτουν ως ακέραια πολλαπλάσια του 1/4 του ανοίγματος του τόξου, έχει βρεθεί ότι :

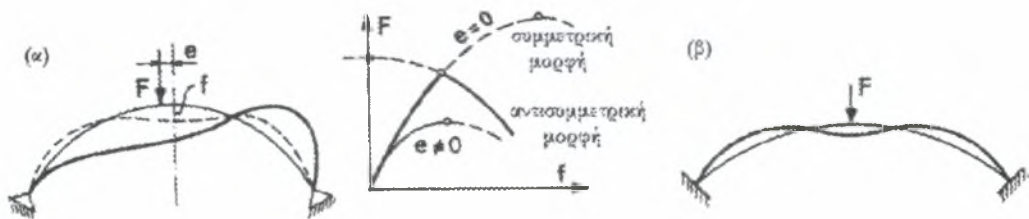
$$\beta = 0.68 \text{ έως } 0.73 \quad (\text{Αμφίπακτο τόξο})$$

$$\beta = 1.10 \text{ έως } 1.24 \quad (\text{Αμφιαρθρωτό τόξο})$$

$\beta = 1.10$ έως 1.15 (Τριαρθρωτό τόξο πλην αλυσοειδούς)

Στην περίπτωση του ιδίου βάρους, οι DaDeppo και Schmidt (1971) απέδειξαν ότι στα αμφιαρθρωτά κυκλικά τόξα η κρίσιμη τιμή της αξονικής θλίψης είναι σημαντικά μικρότερη από αυτή που προκύπτει για κανονική φόρτιση.

Η περίπτωση του κυκλικού τόξου που δέχεται ένα συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή του έχει αναλυθεί από τους DaDeppo και Schmidt (1969). Η κρίσιμη θλίψη σε θέσεις που προκύπτουν ως ακέραια πολλαπλάσια του $1/4$ του ανοίγματος, όπως ακριβώς εκράζεται στην εξίσωση (3.7), αντιστοιχεί σε τιμές $\beta = 1.0$ έως 1.14 , οι οποίες είναι περίπου ίδιες για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο. Η παραμόρφωση πριν το λυγισμό λόγω των αρχικών καμπτικών ροπών προφανώς και δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί σε αυτή την περίπτωση. Οδηγούμαστε σε μια καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης όπως αποτυπώνεται στο σχήμα 3.4.α. Στο κρίσιμο φορτίο ο δρόμος της ισορροπίας διασταυρώνεται πλαγίως με έναν άλλο που αντιστοιχεί σε αντισυμμετρική μορφή και έχει αρνητική κλίση. Το μεταλλικό τόξο ακολουθεί αυτό το δρόμο μετά το σημείο διακλάδωσης, όπου ακριβώς η παραμόρφωση παύει να είναι συμμετρική. Αυτό το γεγονός προκαλεί ευαισθησία του τόξου σε ατέλειες. Όπως είναι έκδηλο από το σχήμα 3.4.α, η παρουσία αναπόφευκτων ατελειών προκαλεί την καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης να έχει ως μέγιστο ένα φορτίο το οποίο είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο του σημείου διακλάδωσης.



Σχήμα 3.4 : (α) Αμφιαρθρωτό κυκλικό τόξο υπό συγκεντρωμένο φορτίο , (β) δρόμοι ισορροπίας αμφίπακτου τόξου υπό συγκεντρωμένο φορτίο.

Από την άλλη πλευρά, τα αμφίπακτα τόξα με ένα συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή λυγίζουν συμμετρικά (Σχήμα 3.4.β). Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής ενεργού μήκους β είναι $\beta = 0.77$ έως 0.83 , τιμή που είναι σημαντικά υψηλότερη από την περίπτωση του κατανεμημένου φορτίου (DaDeppo και Schmidt, 1972).

Ένα σημαντικό γεγονός για τα λυγηρά τόξα είναι ότι είναι πολύ ευαίσθητα στις ατέλειες. Αυτό σημαίνει ότι, σε αντίθεση με τα υποστυλώματα, ατέλειες όπως η ασυμμετρία του επιβαλλόμενου φορτίου προκαλούν μείωση του μέγιστου φορτίου συγκρινόμενο με το κρίσιμο φορτίο του *τέλειου τόξου*. Αυτό οφείλεται στην εμφάνιση μίας μη συμμετρικής μορφής παραμόρφωσης. Ο τύπος της διακλάδωσης στο λυγισμό των μεταλλικών τόξων καλείται *συμμετρικά ασταθής* (Σχήμα 3.3.8).

(B) ΧΑΜΗΛΑ ΤΟΞΑ

Τα μέχρι στιγμής προβλήματα που έχουν αναλυθεί επιδέχονται γραμμικοποιημένων προσεγγίσεων. Πλην όμως, για ορισμένα προβλήματα όπως η ευστάθεια των *χαμηλών* (ή *ρηχών*) τόξων, η γραμμικοποίηση στερεί την διατύπωση ορισμένων απαραίτητων χαρακτηριστικών που οδηγούν σε απώλεια ευστάθειας και αστοχία.

Ο κίνδυνος απώλειας της ευστάθειας μέσω ακαριαίου λυγισμού (*snap-through buckling*), με κύριο δρόμο ισορροπίας που εμφανίζει οριακό σημείο (*limit point*) αποτελεί κατ' εξοχή φαινόμενο που χαρακτηρίζει τα *χαμηλά* (ή *ρηχά*) τόξα, αυτά δηλαδή των οποίων το ύψος είναι μικρό σε σύγκριση με το άνοιγμα τους (δηλ. που θα μπορούσαν κάλλιστα να θεωρηθούν ως δοκοί με αρνητική αρχική καμπυλότητα). Οι ερευνητές Timoschenko (1935) και Biezeno (1938) παρουσίασαν λύσεις για τις περιπτώσεις κατανεμημένου και συγκεντρωμένου φορτίου αντίστοιχα, ενώ ο Marguerre (1938) διερεύνησε ορισμένες επιπτώσεις όσον αφορά στην θεωρία του λυγισμού. Οι Fung και Kaplan (1952) έλαβαν υπ' όψιν διαφόρους τύπους τόξων και την καμπτική φόρτιση. Οι Hoff και Bruce (1953) ανέλυσαν το πρόβλημα δυναμικά, ενώ οι Masur και Lo (1972) έδωσαν μία γενική εικόνα του προβλήματος συμπεριλαμβάνοντας την ανάλυση των ατελειών. Η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους Franciosi, Augusti, και Sparacio (1964). Ο Simitses (1973) εξέτασε την φόρτιση των τόξων μέσω ελαστικής στήριξης. Τα πειραματικά αποτελέσματα αναφέρονται από τον Roorda (1965).

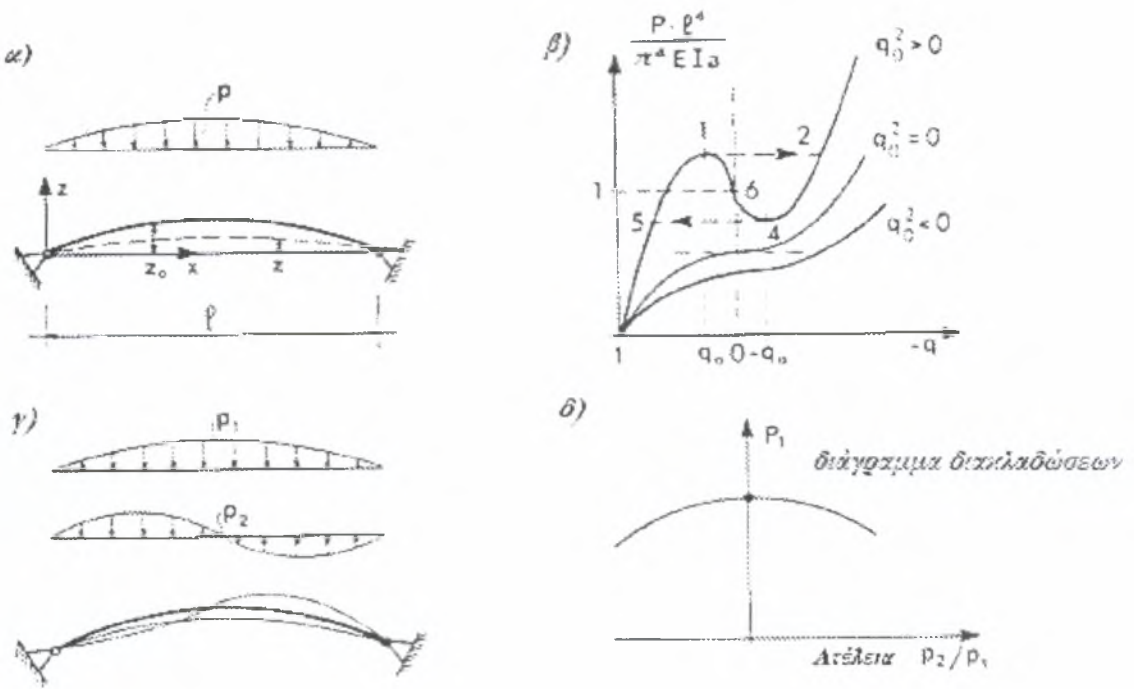
Όπως ακριβώς επιβεβαιώνεται τόσο από τα πειράματα όσο και από τις θεωρητικές μελέτες, τα *χαμηλά* τόξα εκτός εξαιρετικών περιπτώσεων χάνουν την ευστάθειά τους ως άνω, γεγονός που σχετίζεται με συμμετρική παραμόρφωση και ταυτόχρονη βράχυνση του κεντροβαρικού άξονά τους. Τούτο έρχεται σε αντίθεση με την συμπεριφορά των *ψηλών* τόξων, στα οποία η βράχυνση του κεντροβαρικού άξονα είναι αμελητέα, κάνοντας έτσι την ασυμμετρία της παραμόρφωσης το χαρακτηριστικό με την ύψιστη σημασία. Από την άλλη πλευρά, η ανάλυση των *ψηλών* τόξων πρέπει οπωσδήποτε να περιλαμβάνει τον όρο

της καμπυλότητας w/R^2 (3.2), ο οποίος είναι αμελητέος για τα *χαμηλά* τόξα όπου η ακτίνα R είναι πολύ μεγάλη.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα αμφιαρθρωτό τόξο, του οποίου το αρχικό σχήμα πριν την φόρτιση δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$z_0(x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (3.8)$$

όπου ℓ = το μήκος του ανοίγματος και α = το ύψος του τόξου. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι $\alpha \ll \ell$ από την στιγμή που τόξο είναι *χαμηλό*. Η φόρτιση που δέχεται είναι ένα κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο p , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.5, που έπεται.



Σχήμα 3.5 : (α) Χαμηλό τόξο υπό συμμετρική φόρτιση, (β) δρόμος ισορροπίας, (γ) συμμετρικές και αντισυμμετρικές φορτίσεις και (δ) ευαισθησία σε ατέλειες.

Η επίλυση του τόξου μετατρέπεται σε απλή υπόθεση εάν το φορτίο θεωρήσουμε πως έχει ημιτονοειδή μορφή :

$$p = P \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (3.9)$$

Η τεταγμένη της παραμόρφωσης μπορεί να διατυπωθεί με την ακόλουθη μορφή :

$$z = q\alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (3.10)$$

Η συνάρτηση του συνολικού δυναμικού του τόξου είναι δυνατόν να εκφραστεί ως :

$$\Pi = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} EI (\Delta\kappa)^2 dx + \frac{1}{2} EA \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} \right)^2 \ell - \int_0^{\ell} p(z_0 - z) dx \quad (3.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι όροι EI και EA θεωρούνται σταθεροί κατά μήκος του άξονα x , και :

$$\Delta\kappa \cong z'' - z_0'' = \frac{\pi^2}{\ell^2} \alpha (1 - q) \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (3.12)$$

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \sqrt{dx^2 + dz^2} - \int_0^{\ell} \sqrt{dx^2 + dz_0^2} \cong \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (z'^2 - z_0'^2) dx = \frac{\pi^2 \alpha^2}{4\ell} (q^2 - 1) \quad (3.13)$$

Ο όρος $\Delta\kappa$ αντιπροσωπεύει την αλλαγή καμπυλότητας του τόξου και $\Delta\ell$ είναι η αλλαγή μήκους του κεντροβαρικού άξονα του τόξου. Οι ερευνητές Simitses και Rapp (1977) μελέτησαν και την περίπτωση που το EI δεν είναι ομοιόμορφο. Σημειώνεται ότι ο όρος w/R^2 , ο οποίος συμπεριλήφθη στην έκφραση για την αλλαγή καμπυλότητας (εξ. 3.2) για τα ψηλά τόξα, εδώ τώρα αμελείται καθώς για τα χαμηλά τόξα ο όρος R^2 θεωρείται πάρα πολύ μεγάλος. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.8) και (3.10) στην εξίσωση (3.13) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \int_0^{\ell} \left[\frac{EI}{2} \alpha^2 \left(\frac{\pi^4}{\ell^4} \right) (1 - q^2) \left(\sin \frac{\pi x}{\ell} \right)^2 \right] dx + \frac{EA}{2\ell} \left(\frac{\pi^4}{16\ell^2} \right) \alpha^2 (1 - q^2)^2 = \\ &= \frac{EI}{2} \alpha^2 \left(\frac{\pi^4}{\ell^4} \right) (1 - q)^2 \left(\frac{\ell}{2} \right) + \frac{EA}{32} \left(\frac{\pi^4}{\ell^3} \right) \alpha^2 (1 - q^2)^2 - P\alpha (1 - q) \left(\frac{\ell}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi^4 EI}{2\ell^3} \alpha^2 \left[\frac{1}{2} (1 - q)^2 + \frac{n}{4} (1 - q^2)^2 \right] - \frac{\alpha}{2} P\ell (1 - q) \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου εισάγεται η μαθηματική παράσταση $n = \frac{A\alpha^2}{4I} = \frac{\alpha^2}{4r^2}$ που είναι η αδιάστατη παράμετρος της λυγηρότητας του τόξου και r = ακτίνα περιστροφής. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.14), λαμβάνουμε για την κατάσταση ισορροπίας την ακόλουθη συνθήκη :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{\pi^4 EI}{2\ell^3} \alpha^2 [1 + (n-1)q - nq^3] + \frac{\alpha}{2} P\ell = 0 \quad (3.15)$$

που μας παρέχει τελικά την παρακάτω σχέση :

$$P = \frac{\pi^4}{\ell^4} EI\alpha [1 + (n-1)q - nq^3] \quad (3.16)$$

Το διάγραμμα $P(q)$ μπορεί, αλλά όχι κατ' ανάγκη, να έχει οριακά σημεία (Σχήμα 3.2.5.β). Η συνθήκη για τα οριακά σημεία είναι $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, που δίνει $n - 1 - 3nq^2 = 0$ ή διαφορετικά :

$$q = \pm q_0 = \pm \sqrt{\frac{n-1}{3n}} \quad (3.17)$$

Το διάγραμμα ισορροπίας έχει οριακά σημεία μόνο όταν $n > 1$, κάτι που πρακτικά συμβαίνει αν ο λόγος του ύψους του τόξου προς την ακτίνα περιστροφής δεν είναι αρκετά μικρός. Η ισορροπία είναι ευσταθής εάν :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = -\frac{EI\pi^4}{2\ell^3} \alpha^2 (n - 1 - 3nq^2) > 0 \quad (3.18)$$

Η πιο πάνω εξίσωση ικανοποιείται όταν $n - 1 - 3nq^2 < 0$, ή $q_0^2 - q^2 > 0$, ή $(q_0 - q)(q_0 + q) < 0$. Από εδώ προκύπτει η συνθήκη ευστάθειας :

$$\text{είτε } q > q_0 \quad \text{είτε } q < -q_0 \quad (3.19)$$

Στην περίπτωση όπου $-q_0 \leq q \leq q_0$, το τόξο είναι ασταθές. Είναι εύκολο να διακρίνει κανείς ότι οι καταστάσεις $q = \pm q_0$ είναι αυτές που αντιστοιχούν στο μέγιστο και ελάχιστο σημείο της καμπύλης ισορροπίας του διαγράμματος $P - q$.

Οι σχηματισμοί ισορροπίας του συστήματος μπορούν επίσης να ευρεθούν μέσω της αρχής των δυνατών έργων. Μία ακόμη μέθοδος, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τους Timoschenko και Gere (1961), είναι η εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας σε ένα πρωταρχικό σύστημα στο οποίο η μία στήριξη επιτρέπεται να ολισθήσει οριζόντια και στη

συνέχεια να αποκατασταθεί η *συμβατότητα* μέσω της εισαγωγής της στατικά απροσδιόριστης ώθησης στο τόξο.

Όταν το κατανεμημένο φορτίο p είναι ομοιόμορφο, $p = p_0$, η εξ. (3.9) μπορεί προσεγγιστικά να αντικατασταθεί από τον πρώτο όρο ενός ημιτονοειδούς

αναπτύγματος Fourier για ομοιόμορφο φορτίο, το οποίο είναι το εξής: $p = \frac{\left[4 P \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \right]}{\pi}$.

Η υπόλοιπη ανάλυση παραμένει η ίδια. Έχει αποδειχθεί ότι η λύση που προκύπτει είναι μόνον 0.38% λιγότερο ακριβής από την αντίστοιχη ακριβή για το κρίσιμο ομοιόμορφο φορτίο. Αν θεωρήσουμε περισσότερους όρους στο ανάπτυγμα Fourier θα λάβουμε λίγο πιο ακριβείς λύσεις, για οποιοδήποτε $p(x)$. Όμως ο πρώτος όρος του αναπτύγματος έχει κυρίαρχη επιρροή.

Εκτός από την περίπτωση $n < 1$ όπου δεν υπάρχουν οριακά σημεία (μη κρίσιμη κατάσταση) και η απόκριση είναι πάντα ευσταθής (Σχήμα 3.5.β), η συμπεριφορά του συστήματος είναι εντελώς ανάλογη με το κλασσικό προσομοίωμα ενός βαθμού ελευθερίας του von Mises. Ειδικότερα, το τόξο υποβάλλεται σε ακαριαίο λυγισμό (Σχήμα 3.5.β, δρόμος 1-2), και αυτή η απότομη μετάβαση οδηγεί σε έκλυση ενέργειας λόγω της αυτογενούς μετατροπής του *δυναμικού* σε *κινητική ενέργεια* και εν συνεχεία σε *θερμότητα*.

Επιρροή των ατελειών

Η κύρια διαφορά σε σχέση με τα *ψηλά* τόξα είναι ότι η βράχυνση του κεντροβαρικού άξονα είναι σημαντική ενώ η αντισυμμετρική κάμψη όχι. Το γεγονός αυτό μπορεί να επαληθευτεί αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.9 και 3.10) με πιο γενικές εκφράσεις της μορφής:

$$p = P_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} + P_2 \sin \frac{2\pi x}{\ell} \quad (3.20\alpha)$$

$$z(x) = q_1 \alpha \sin \frac{\pi x}{\ell} + q_2 \alpha \sin \frac{2\pi x}{\ell} \quad (3.20\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι ημιτονοειδείς (αντισυμμετρικοί) όροι που έχουν προστεθεί μπορούν να χαρακτηριστούν ως ατέλειες, οι οποίες διαταράσσουν την συμμετρία (Σχήμα 3.2.5.γ). Οι παράμετροι P_1 και P_2 αναφέρονται στην συμμετρική και αντισυμμετρική φόρτιση αντίστοιχα (στην γενικότερη περίπτωση, οι δύο πρώτοι όροι του αναπτύγματος μίας

σειράς Fourier), ενώ οι q_1 και q_2 είναι οι γενικευμένες μετατοπίσεις που χαρακτηρίζουν την συμμετρική και αντισυμμετρική παραμόρφωση. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.20α,β) καθώς και τις (3.8, 3.12, 3.13) στην (3.11) μετά από ολοκλήρωση προκύπτει η έκφραση για το συνολικό δυναμικό:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{B\ell}{2} \left[\frac{1}{2}(q_1 - 1)^2 + \frac{n}{4}(1 - q_1^2)^2 \right] + P_1 \left(\frac{\alpha\ell}{2} \right) (q_1 - 1) + P_2 \left(\frac{\alpha\ell}{2} \right) q_2 + 4B\ell q_2^2 + \\ & + 2nB\ell q_2^4 + B\ell n(q_1^2 - 1)q_2^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{όπου } B = \frac{\pi^4 E I \alpha^2}{\ell^4}.$$

Τότε οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής:

$$\frac{2}{B\ell} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = q_1 - 1 - n(1 - q_1^2)q_1 + P_1 \left(\frac{\alpha}{B} \right) + 4nq_1 q_2^2 = 0 \quad (3.22\alpha)$$

$$\frac{2}{B\ell} \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = P_2 \left(\frac{\alpha}{B} \right) + 4(4 - n + 4nq_2^2 + nq_1^2)q_2 = 0 \quad (3.22\beta)$$

Λύνοντας το ανωτέρω σύστημα προκύπτουν οι δρόμοι ισορροπίας $P_1(q_1, q_2)$ και $P_2(q_1, q_2)$.

Ένα ερώτημα που προκαλεί ενδιαφέρον είναι το κατά πόσον μια μικρή ανεπιθύμητη ατέλεια φόρτισης που αντιπροσωπεύεται μέσω της παραμέτρου P_2 μπορεί να προκαλέσει δραματική μείωση του κρίσιμου φορτίου του τόξου. Να ληφθεί υπ' όψιν ότι οι παράμετροι P_2 και q_2 είναι πάρα πολύ μικρές, ενώ οι P_1 και q_1 είναι «μετρήσιμες». Στην (3.22β) ο όρος $4nq_2^2$ μπορεί να αγνοηθεί και τότε η εξίσωση γίνεται $q_2 = -f_0(q_1)P_2$, όπου $f_0(q_1)$ είναι συνάρτηση του q_1 . Κάνοντας αυτή την αντικατάσταση στην (3.22α), παρατηρούμε ότι $P_1 = f_1(q_1) - f_2(q_1)P_2^2$, όπου $f_1(q_1)$ και $f_2(q_1)$ είναι θετικές συναρτήσεις και η $f_1(q_1)$ αντιπροσωπεύει την προηγούμενη λύση για συμμετρική φόρτιση ($P_2 = 0$) που είναι η εξίσωση (3.16). Αυτή ισχύει για κάθε q_1 , συμπεριλαμβανομένης και της κρίσιμης τιμής. Κατά συνέπεια, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι αν το P_2 είναι μικρό, τότε η αλλαγή στην φέρουσα ικανότητα σε ότι αφορά τη συμμετρική συνιστώσα φόρτισης είναι $O(\|h^2\|)$, $h \ll 1$. Το γεγονός αυτό δείχνει μικρή ευαισθησία στις ατέλειες, που σημαίνει ότι στην ανάλυση ευστάθειας των χαμηλών τόξων, δεν χρειάζεται να ανησυχεί κανείς για μικρές, αναπόφευκτες, ασύμμετρες συνιστώσες φόρτισης.

3. Προς μια συνολική ενεργειακή προσέγγιση

Ουσιαστικά, οι παράμετροι ελέγχου του όλου προβλήματος, δηλαδή αυτές που επηρεάζουν την ελαστική εντός επιπέδου συμπεριφορά σε λυγισμό μεταλλικών τοξωτών φορέων, είναι ιδιαιζόντως πολλοί και θα αποτελούσε μεγάλη πρόκληση να μπορούσε κανείς να εκφράσει το συνολικό δυναμικό με τέτοιο τρόπο, που να περιείχε όλες τις παραμέτρους αυτές. Τούτο καθόσον δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό αν ένα μεταλλικό τόξο θα επιδειξει συμμετρική ή αντισυμμετρική παραμόρφωση κατά το λυγισμό, μόνο και μόνο από τη γεωμετρία του, με άλλα λόγια η κατάταξη σε χαμηλό ή ψηλό δεν εξαρτάται ΜΟΝΟ από το λόγο ύψους προς άνοιγμα, αλλά και από το είδος της φόρτισης, τις αρχικές ατέλειες, τις συνοριακές συνθήκες (στήριξης) αλλά και το είδος της διατομής.

Πέραν τούτων, η αρχική γεωμετρία του τόξου, δηλαδή η μορφή της καμπύλης του, επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τις σχέσεις που διέπουν την παραμόρφωση μετά την επιβολή κάποιου φορτίου και ειδικότερα τον νόμο μεταβολής της καμπυλότητας αλλά και την σύζευξη των συνιστωσών παραμόρφωσης μέσα στις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Υπάρχουν όμως κάποιες τρόπων τινά “τεχνικές” ομαδοποίησης κάποιων παραγόντων και μείωσης των λεγόμενων ενεργών παραμέτρων ελέγχου. Αυτές συνίστανται βασικά στην προσομοίωση των συνθηκών στήριξης, στη γεωμετρία της αρχικής μορφής των τοξωτών χαλύβδινων φορέων, και στην γενικευμένη έκφραση των κατά τεκμήριο αποδεκτών (ρεαλιστικών) ειδών φόρτισης, χωρίς να είναι όμως σίγουρο ότι κάτι τέτοιο είναι και εφικτό.

(1) Ελαστικές στηρίξεις

Συνήθως, οι μεταλλικοί τοξωτοί φορείς διαθέτουν συμμετρικές από πλευράς συνοριακών συνθηκών ελαστικές κατά το μάλλον ή ήττον στηρίξεις. Άρα, στα πλαίσια μιας μη γραμμικής λυγισμικής ανάλυσης εντός επιπέδου, η στήριξη θα μπορεί να προσομοιωθεί με ένα στροφικό και ένα εκτατικό ελατήριο γνωστής (πεπερασμένης, μηδενικής ή άπειρης κατά περίπτωση δυσιαμφίας). Με κατάλληλες δε αδιαστατοποιήσεις, οι σχετικές παράμετροι ελέγχου μπορούν κάλλιστα να περιοριστούν σε δύο, λόγω της προαναφερθείσας συμμετρίας. Στην αδιαστατοποίηση φυσικά υπεισέρχεται τόσο το άνοιγμα του τόξου όσο και η ροπή αδρανείας του, οπότε πιθανά να υπάρξει δυνατότητα μείωσης κατά μια ακόμα παράμετρο. Ισχύουν από πλευράς ελαστικών στηρίξεων οι γνώσεις που έχουν αποκτηθεί στο 9^ο εξάμηνο σπουδών Δομοστατικής Κατεύθυνσης του μαθήματος “Ελαστική Ευστάθεια”.

(2) Αρχική γεωμετρία του τόξωτού φορέα

Αν εξαιρέσει κανείς την αλυσοειδή (που αποτελεί την ελάχιστη χρησιμοποιούμενη στην καθημερινή πράξη μορφή τόξου, παρά ταύτα απαιτεί τρεις παραμέτρους για να οριστεί ως καμπύλη στο επίπεδο), όλες οι υπόλοιπες διαδεδομένες μορφές (κυκλική, ελλειψοειδής, παραβολική, υπερβολική) διέπονται ΟΛΕΣ από έναν γνωστό κανόνα της αναλυτικής γεωμετρίας. Πρόκειται περί *κωνικών τομών*, οι οποίες εν γένει μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή Καρτεσιανών συντεταγμένων ως καμπύλες της μορφής $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$. Ανάλογα δε από την επιθυμητή μορφή οι παράμετροι a, b, c, d, e και f μπορούν κάλλιστα να περιοριστούν σε τρεις, καθόσον οι τόξωτοι φορείς είναι κατά κανόνα συμμετρικοί ως προς άξονα και οι συνήθεις κωνικές τομές απαιτούν το πολύ τρεις παραμέτρους για να οριστούν στο επίπεδο. Αν δε χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες πιθανώς οι εκφράσεις που θα προκύψουν να είναι ακόμα πιο εύχρηστες.

(3) Γενικευμένες εκφράσεις συνήθων φορτίων

Αρχικά, σε ότι αφορά συγκεντρωμένα φορτία σταθερής διεύθυνσης, τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκη τέτοια ώστε κατά την παραμόρφωση του φορέα να παράγουν έργο ΜΟΝΟ προς μια συνιστώσα μετακίνησης, η θέση τους κατά μήκος του ανοίγματος του τόξου μπορεί αποτελεσματικά να αναπαραχθεί με χρήση της συνάρτησης Dirac δέλτα. Αυτή είναι γνωστή ως $\delta(x)$ και διαθέτει τις ακόλουθες ευνοϊκές ιδιότητες:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (3.23\alpha)$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \varepsilon > 0 \quad (3.23\beta)$$

$$\delta(x-a) = 0 \text{ για } x \neq a \quad (3.23\gamma)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (3.23\delta)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x+a) + \delta(x-a)] \quad (3.23\epsilon)$$

ενώ γενικότερα η συνάρτηση δ μιας συνάρτησης $g(x)$ ισούται με

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (3.24)$$

όπου x_i οι ρίζες της $g(x)$.

Η θεμελιώδης εξίσωση, η οποία ορίζει παραγώγους της δ είναι:

$$\int f(x) \delta^{(n)}(x) dx = - \int \frac{\partial f}{\partial x} \delta^{(n-1)}(x) dx \quad (3.25)$$

αν δε $f(x) = xg(x)$ θα ισχύει ότι $\int xg(x) \delta'(x) dx = - \int g(x) \delta(x) dx$, και επίσης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a) \quad (3.26)$$

Με τον τρόπο αυτό, κάθε συγκεντρωμένο φορτίο P , αφού αναλυθεί στις δύο κύριες συνιστώσες P_x και P_y , μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$P = P_x \delta(x-x_p) + P_y \delta(y-y_p) \quad (3.27)$$

όπου (x_p, y_p) οι συντεταγμένες του σημείου εφαρμογής του, με ανάλογο δε τρόπο μπορεί να εκφραστεί και το παραγόμενο κατά την παραμόρφωση έργο.

Για ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία είτε κατακόρυφα είτε οριζόντια, τα οποία δρουν καθ' όλο το μήκος ή το ύψος του τόξου, κανείς εύκολα μπορεί να προσομοιάσει τη δράση τους μέσω συνδυασμού των σχέσεων (3.24) και (3.26), ενώ εναλλακτικά μέσω έκφρασης τους ως πυκνά ίδια συγκεντρωμένα φορτία κατάλληλης έντασης με ανάλογα σημεία εφαρμογής μέσω των (3.23α) και (3.27). Η περίπτωση του ακτινικά ομοιόμορφα κατανεμημένου (που αναφέρεται μόνο σε κυκλικά τόξα) έχει εξαιρεθεί, καθώς αποτελεί ναί μεν προσφιλές είδος φόρτισης για παραγωγή δημοσιεύσεων, αλλά δεν αντιπροσωπεύει – πλην ίσως της ώθησης γαιών ή της υδροστατικής πίεσης – συχνά απαντώμενη φόρτιση μεταλλικών τοξωτών φορέων δομοστατικών κατασκευών, όπως έχει ήδη αναφερθεί και σε προηγούμενο Κεφάλαιο.

Δεν είναι άλλωστε τυχαίο ότι στη διεθνή σχετική βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί λιγότερες από δέκα εργασίες θεωρητικής φύσεως, οι οποίες περιέχουν προσπάθειες έκφρασης των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας και κατ' επέκταση του συνολικού δυναμικού μέσω μίας γενικής συναρτησιακής προσέγγισης, με προεξάρχουσες τις μνημειώδεις εργασίες του διάσημου ασιάτη ερευνητή Yoo (Kang, Yoo 1994α,β). Σε αυτές, αφού αμφισβητήθηκε έντονα η θεωρία του Vlasov (για την συμπεριφορά κατασκευών με μέλη από λεπτότοιχες διατομές), επιχειρήθηκε μία εξαιρετικά κοπιώδης θεωρητική προσπάθεια εύρεσης των Δ.Ε. και του συνολικού δυναμικού λεπτότοιχων καμπύλων δοκών και σε συνέχεια των αναλυτικών λύσεων σχετικών με το λυγισμό τόξων. Πλην όμως η όλη εξαιρετική ερευνητική εργασία **αναφέρεται ΜΟΝΟ σε κυκλικά τόξα**, γεγονός που μας

επαναφέρει στον προβληματισμό του τέλους της δεύτερης παραγράφου της τρέχουσας ενότητας.

Θα ήταν συνεπώς από ρομαντικό έως ουτοπικό να αναζητήσει κανείς μία συνολική έκφραση του συνολικού δυναμικού, η οποία να περιλαμβάνει όλες τις παραμέτρους ελέγχου του προβλήματος που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, αν δε ποτέ αυτό καταστεί δυνατό, σε συνδυασμό με την ύπαρξη τουλάχιστον δύο ενεργών συντεταγμένων, θα οδηγούσε σε ένα συνολικό δυναμικό, το οποίο ούτε ο ίδιος ο Arnold¹ δεν θα είχε φανταστεί.

Εγκαταλείπεται συνεπώς η φιλόδοξη αυτή ιδέα και επαφίεται μερική ομαδοποίηση με βάση την διαφορετικότητα των τόξων από πλευράς αρχικής καμπύλης, χωρίς και αυτό επίσης να είναι σίγουρο ότι είναι εφικτό.

¹ V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, 3rd edn., Springer, Berlin, 1992

Κεφάλαιο 4^ο : Κανονισμοί και Διατάξεις περί Ευστάθειας Μεταλλικών Τοξωτών Φορέων

1. Ευρωπαϊκοί Κανονισμοί

Σε ότι αφορά τον εντός επιπέδου λυγισμό χαλύβδινων τόξων, στον νέο Ευρωκώδικα 3 υπάρχει πρόβλεψη και αναφορά στο EN 1993-2: 2004 **Χαλύβδινες Γέφυρες**, όπου στο Υποκεφάλαιο D4 προβλέπονται τα ακόλουθα:

(α) Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού N_{cr} στο τόξο για εντός του επιπέδου λυγισμό δίνεται από τη σχέση

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{\beta s} \right)^2 EI_y$$

όπου N_{cr} σχετίζεται με τη δράση στις στηρίξεις,

s είναι το μισό μήκος του τόξου,

EI_y είναι η εντός του επιπέδου δυσκαμψία του τόξου,

β είναι ο συντελεστής μήκους λυγισμού, ο οποίος δίδεται ανάλογα με τη γεωμετρία και το σχήμα του τόξου από τον Πίνακα 4.1 για τόξα με άκαμπτες στηρίξεις και από το Σχήμα 4.1 για τόξα με ελκυστήρες και αναρτήρες.

(β) Ο ακαριαίος λυγισμός τόξων θεωρείται ότι αποφεύγεται, αν ικανοποιείται το ακόλουθο κριτήριο:

$$\ell \sqrt{\frac{EA}{12EI_y}} > K$$

όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής,

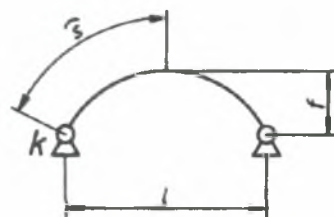
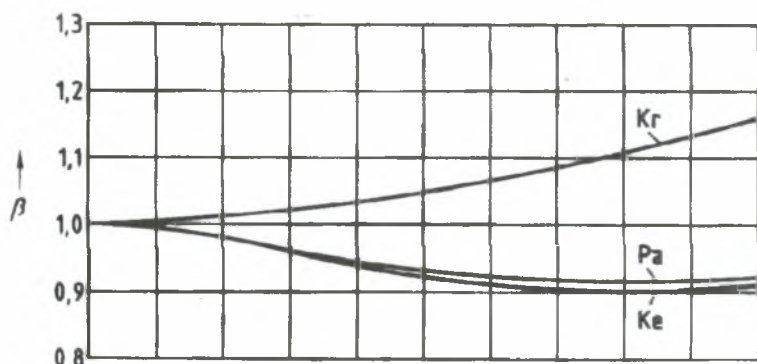
I_y είναι η ροπή αδράνειας,

K είναι ένας συντελεστής που λαμβάνεται από τον Πίνακα 4.2.

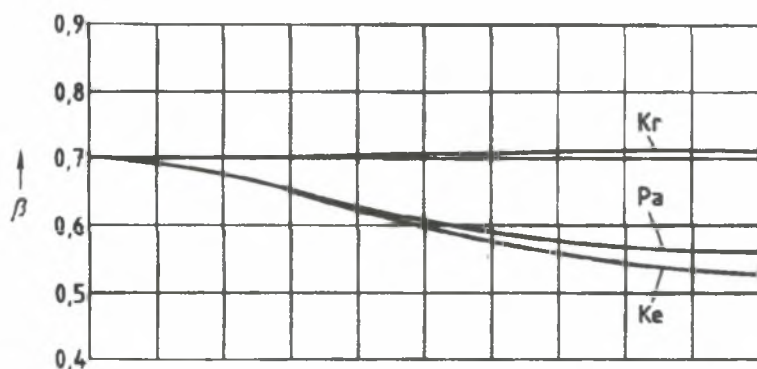
(γ) Εκτός αν οι σχετικές ιδιομορφές λυγισμού χρησιμοποιούνται ως ατέλειες, θα χρησιμοποιούνται οι καμπυλότητες που δίνονται στον Πίνακα 4.3.

Ακολουθούν οι Πίνακες 4.1 - 4.3 και το Σχήμα 4.1.

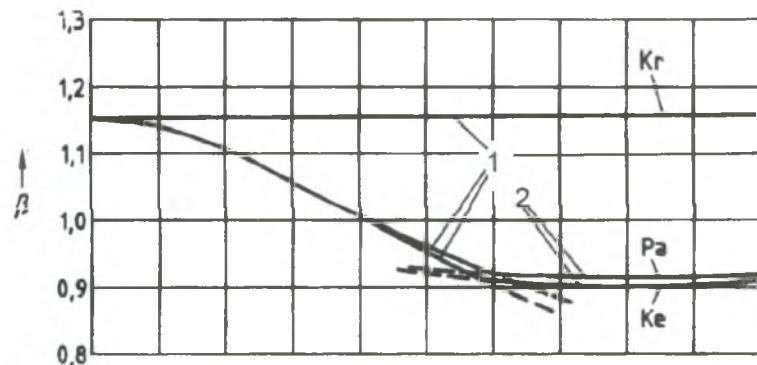
Πίνακας 4.1: Συντελεστές μήκους λυγισμού β για τόξα με άκαμπτες στηρίξεις



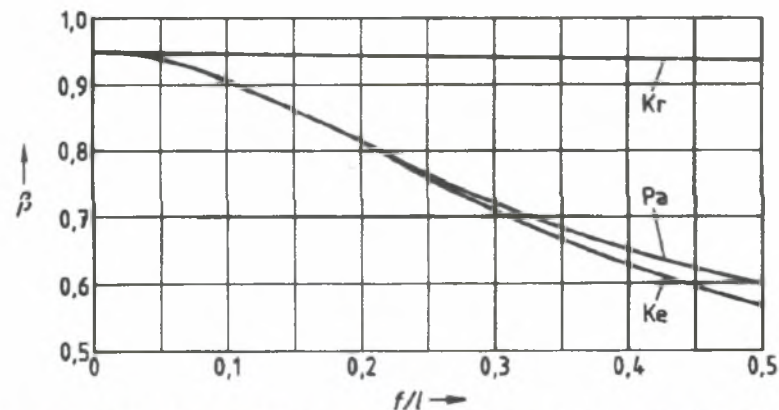
αντισυμμετρικός λυγισμός



αντισυμμετρικός λυγισμός

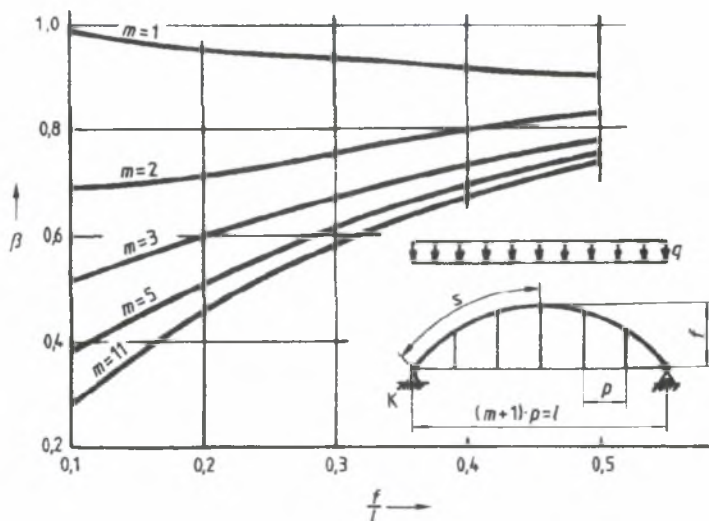


1 συμμετρικός λυγισμός
2 αντισυμμετρικός λυγισμός



συμμετρικός λυγισμός

Pa: παραβολική μορφή Ke: μορφή αλυσίδας Kr: κυκλική μορφή
για τα Pa και Ke τα φορτία είναι κατακόρυφα



Σχήμα 4.1: Συντελεστές μήκους λυγισμού β για τόξα με ελκυστήρες και αναρτήσεις

Πίνακας 4.2: Συντελεστής K

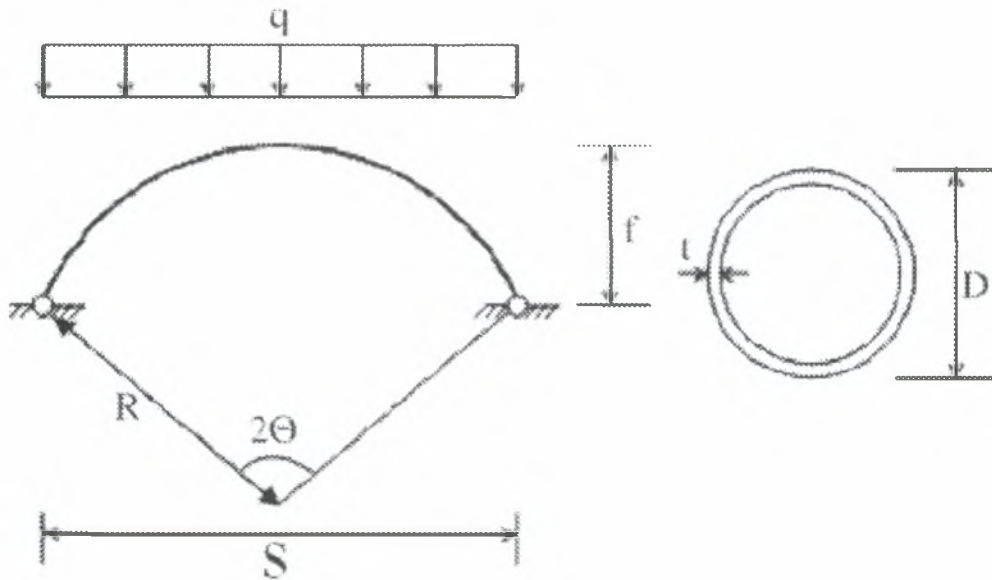
	f/l	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20
	K	35	23	17	10	8
		319	97	42	13	6

Πίνακας 4.3: Σχήμα και εύρος ατελειών για λυγισμό τόξων εντός του επιπέδου

	1	2	3			
		σχήμα ατελειών (ημιτονοειδές ή παραβολικό)	εο σύμφωνα με την κατηγορία διατομής για καμπύλη λυγισμού			
			a	b	c	d
1			$\frac{s}{300}$	$\frac{s}{250}$	$\frac{s}{200}$	$\frac{s}{150}$
2			$\frac{l}{600}$	$\frac{l}{500}$	$\frac{l}{400}$	$\frac{l}{300}$

2. Προτάσεις εφαρμογής με βάση τον Ευρωκώδικα 3: Μέρος 1-1

Σε περιπτώσεις είτε αμφιαρθρωτών είτε αμφίπακτων κυκλικών χαλύβδινων τόξων από κλειστές διατομές διπλής συμμετρίας (όπως λ.χ. κοίλες κυκλικές), τα οποία υπόκεινται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο σύμφωνα με το Σχήμα 4.2, υπάρχει η δυνατότητα σχεδιασμού μέσω των διατάξεων του Ευρωκώδικα 3, Μέρος 1-1.



Σχήμα 4.2 : Γεωμετρία, φόρτιση και διατομή

Πιο συγκεκριμένα, έχει πρόσφατα προταθεί η χρήση των εξισώσεων αλληλεπίδρασης για ευθύγραμμα μέλη υπό σύγχρονη θλίψη και κάμψη ελαφρά τροποποιημένων σύμφωνα με ότι ακολουθεί:

2.1. Γραμμική εξίσωση αλληλεπίδρασης του ΕΚ3

για δοκούς – στύλους

Η εντός επιπέδου γραμμική εξίσωση αλληλεπίδρασης για δοκούς – στύλους διατομής κατηγορίας I ή II έχει ως εξής:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{A f_y}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{W_{pl,y} f_y} \leq \varphi \quad (4.1)$$

Για την εφαρμογή της εξίσωσης αυτής για την περίπτωση τόξων N_{Ed} και $M_{y,Ed}$ λαμβάνονται ως οι τιμές σχεδιασμού για τις δράσεις θλίψης και κάμψης, που είναι οι μέγιστες τιμές των εσωτερικών δράσεων κατά μήκος του τόξου, χωρίς απαραίτητα να

εμφανίζονται στην ίδια διατομή. Εδώ A είναι η επιφάνεια της διατομής, W_{ply} η πλαστική ροπή αντίστασης, f_y η τάση διαρροής, χ_y ένας μειωτικός συντελεστής λόγω του εντός επιπέδου καμπτικού λυγισμού και k_{yy} ένας συντελεστής αλληλεπίδρασης λόγω συνδυασμένης θλίψης και κάμψης. Η έκφραση στην αριστερή πλευρά της ανισότητας (4.1), που ορίζεται ως παράγων εκμετάλλευσης, πρέπει να είναι φραγμένη για λόγους σχεδιασμού και στον ΕΚ3 ισούται με 1. Ο μειωτικός συντελεστής χ_y ισούται με

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi + \sqrt{[\Phi^2 - \bar{\lambda}_y^2]}} \quad (4.2)$$

όπου

$$\Phi = 0.50 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_y - 0.20) + \bar{\lambda}_y^2 \right] \quad (4.3)$$

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr,y}}} = \frac{L_{cr,y}}{\lambda_1 i_y}, \quad \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.4)$$

με $L_{cr,y}$ να είναι το ισοδύναμο μήκος λυγισμού. Για εντός επιπέδου λυγισμό τόξων, το μήκος αυτό μπορεί να ληφθεί ίσο με $L_{cr,y} = \gamma \delta$, όπου γ είναι ένας συντελεστής που λαμβάνει την τιμή 0.50 για αμφιαρθρωτά τόξα και 0.25 για αμφίπακτα [Pi and Trahair, 1996].

Ο συντελεστής ατελειών a εξαρτάται από το είδος της διατομής και την αντιστοιχούσα σε αυτό *καμπύλη λυγισμού*, που για CHS θερμής εξέλασης ισούται με 0.21. Ο συντελεστής αλληλεπίδρασης k_{yy} μπορεί να υπολογιστεί μέσω δύο εναλλακτικών μεθόδων, που περιγράφονται στα Παραρτήματα Α και Β του Μέρους 1-1 του ΕΚ3.

Μέθοδος 1

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή ο συντελεστής αλληλεπίδρασης είναι :

$$k_{yy} = C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{1}{C_{yy}} \quad (4.5)$$

Καθόσον πρόκειται για την εντός επιπέδου αντοχή τόξων, ο αδιάστατος παράγων λυγηρότητας $\bar{\lambda}_0$ για στρεπτο-καμπτικό λυγισμό λόγω ομοιόμορφης ροπής θα ισούται με μηδέν. Τούτο σημαίνει ότι ο συντελεστής καμπτικού λυγισμού $C_{my} = C_{m_{y,0}}$ και οι συντελεστές στρεπτο-καμπτικού λυγισμού $C_{mLT} = 1$, $b_{LT} = 0$.

Για τον υπολογισμό των ανωτέρω συντελεστών αλληλεπίδρασης απαιτείται η εύρεση της τιμής των κατωτέρω μεταβλητών:

$$C_{my,0} = 1 + \left(\frac{\pi^2 EI_y |\delta|}{L_{cr}^2} - 1 \right) \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \quad (4.6)$$

$$C_{yy} = 1 + (w_y - 1) \left[\left(2 - \frac{1.6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max} - \frac{1.6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^2 \right) n_{pl} - b_{LT} \right] \geq \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{cr,y} &= \pi^2 \frac{EI_y}{L_{cr,y}^2}, \quad \mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \chi_y \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \\ w_y &= \frac{W_{pl,y}}{W_{el,y}}, \quad n_{pl} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk} / \gamma_{M1}} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

όπου I_y η εντός επιπέδου ροπή αδρανείας της διατομής, δ η τιμή της κατακόρυφης μετατόπισης της κορυφής του τόξου, που υπολογίζεται μέσω γραμμικής ανάλυσης. $M_{y,Ed}$ είναι η μέγιστη καμπτική ροπή. $W_{el,y}$ και $W_{pl,y}$ οι εντός επιπέδου ελαστική και πλαστική ροπή αντίστασης αντίστοιχα, $\bar{\lambda}_{max} = \bar{\lambda}_y$, $N_{Rk} = Af_y$.

Η μεταβλητή $C_{my,0}$ εξαρτάται από τη μορφή του διαγράμματος ροπών κάμψης του τόξου και επιλέγεται ίσο με την έκφραση στην εξίσωση (4.6) καθώς ο το αντίστοιχο διάγραμμα στο ΕΚ3 πλησιάζει σχηματικά αυτό που εμφανίζεται στο μισό του τόξου, είτε του αμφιαρθρωτού είτε του αμφίπακτου.

Μέθοδος 2

Η τροποποίηση – προσαρμογή της μεθόδου αυτής σε ότι αφορά τα τόξα έγκειται στον κατάλληλο προσδιορισμό του παράγοντα C_{my} , όπως επεξηγείται παρακάτω. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ο συντελεστής αλληλεπίδρασης ισούται με:

$$\begin{aligned} k_{yy} &= C_{my} \left(1 + (\bar{\lambda}_y - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) \\ &\leq C_{my} \left(1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

όπου

$$C_{my} = \left\{ \begin{array}{l} 0.2 + 0.8\alpha_s \geq 0.40, \quad 0 \leq \alpha_s \leq 1, \quad -1 \leq \psi \leq 1 \\ 0.1 - 0.8\alpha_s \geq 0.40, \quad -1 \leq \alpha_s < 0, \quad 0 \leq \psi \leq 1 \\ 0.1(1 - \psi) - 0.8\alpha_s \geq 0.40, \quad -1 \leq \alpha_s < 0 \\ -1 \leq \psi < 0 \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

$\alpha_s = M_x / M_h$, M_s η ροπή κάμψης στο ένα τέταρτο του ανοίγματος του τόξου και γ_{M1} (μερικός) συντελεστής ασφαλείας,

$$M_h = \max[|M(0)|, |M(S/2)|] \quad \text{και} \quad (4.11)$$

$$\psi = \begin{cases} M(S/2)/M(0), & |M(S/2)| < |M(0)| \\ M(0)/M(S/2), & |M(0)| < |M(S/2)| \end{cases} \quad (4.12)$$

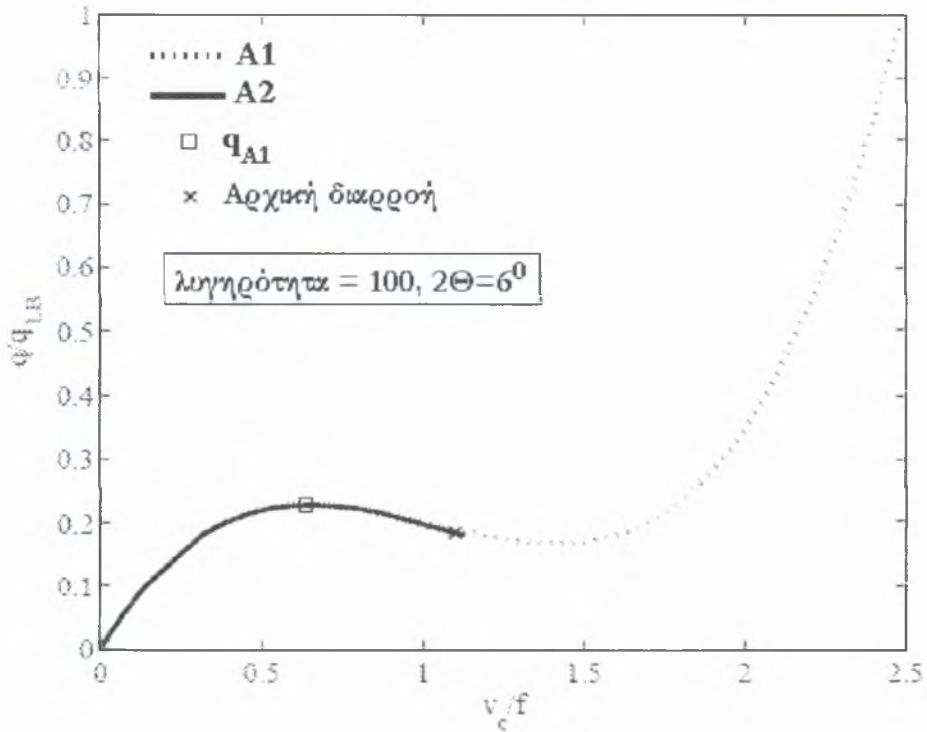
όπου $M(0)$, $M(S/2)$ είναι οι καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στην αριστερή στήριξη και την κορυφή του τόξου αντίστοιχα. Για αμφιαρθρωτά τόξα, η παράμετρος ψ είναι πάντοτε ίση με μηδέν, αφού ισχύσει ότι $M(0)=0$. Για αμφίπακτα όμως τόξα, η παράμετρος αυτή είναι πάντα διάφορη του μηδενός.

2.2. Χρήση της Γραμμική εξίσωσης αλληλεπίδρασης του ΕΚ3

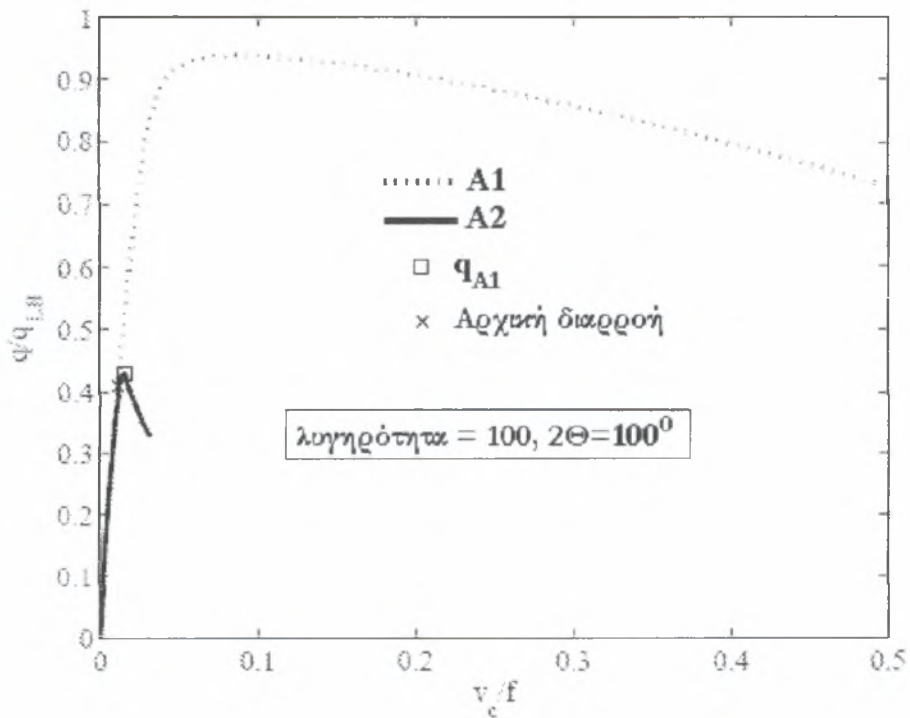
για δοκούς – στύλους για τον έλεγχο του εντός επιπέδου ανελαστικού λυγισμού κυκλικών τόξων

(α) Αμφιαρθρωτά τόξα

Για ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 250 τόξων (με λυγηρότητες $0.5S/i$ 40 και 170 και γωνίες Θ μεταξύ 10° και 180°) έγινε ανάλυση μέσω πεπερασμένων στοιχείων (ADINA System 8.3) τόσο γεωμετρικά μη γραμμική ελαστική με αρχικές ατέλειες (A1), όσο και πλήρως μη γραμμική με αρχικές ατέλειες (A2). Στα Σχήματα 4.3 και 4.4 απεικονίζονται τυπικοί δρόμοι ισορροπίας (φορτίου-μετατόπισης) των τόξων που μελετήθηκαν. Στον οριζόντιο άξονα έχει χαραχθεί η αδιάστατη κατακόρυφη μετατόπιση v/f της κορυφής του τόξου, όπου f το ύψος αυτού. Το αδιάστατο φορτίο q/q_{LB} χαραχθηκε στον κατακόρυφο άξονα, όπου q_{LB} το φορτίο γραμμικού λυγισμού. Ο δρόμος ισορροπίας του Σχήματος 4.3 είναι αντιπροσωπευτικός για χαμηλά τόξα (οριακό σημείο – ακαριαίος λυγισμός), ενώ αυτός του Σχήματος 4.4 αντιπροσωπεύει τη συμπεριφορά ενός ψηλού τόξου, που χαρακτηρίζεται από αστοχία υλικού. Το φορτίο αστοχίας q_{A2} εφαρμόστηκε στη συνέχεια μέσω γραμμικής ελαστικής ανάλυσης για τον υπολογισμό της μέγιστης ροπής κάμψης και της μέγιστης θλιπτικής δύναμης που αναπτύσσονται κατά μήκος του τόξου (εμφανιζόμενα όχι κατ' ανάγκη στην ίδια διατομή). Οι τιμές αυτές αποτελούν τις τιμές σχεδιασμού ροπής και αξονικής για τις γραμμικές εξισώσεις αλληλεπίδρασης που θα ακολουθήσουν.



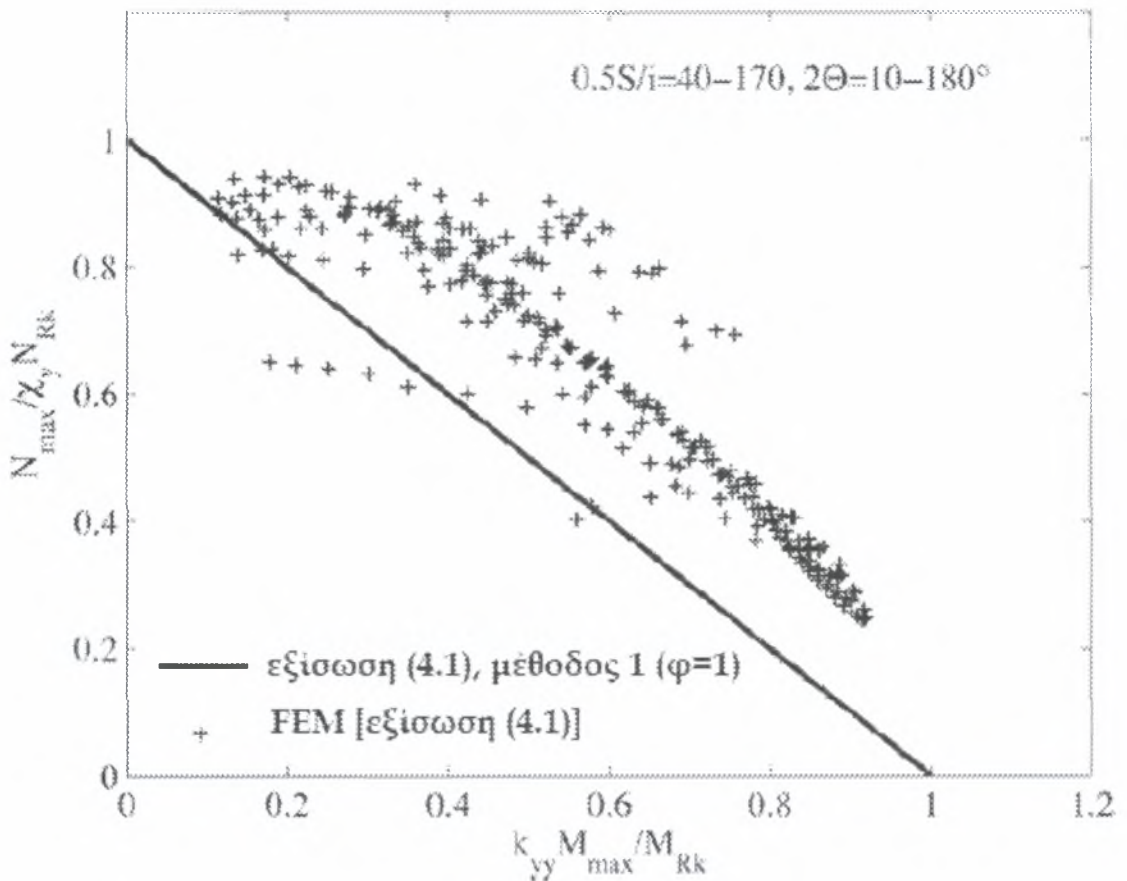
Σχήμα 4.3: Δρόμος ισορροπίας χαμηλού αμφιαρθρωτού χαλύβδινου τόξου (λυγισμός μέσω οριακού σημείου και κατόπιν διαρροή στον κατιόντα κλάδο)



Σχήμα 4.4: Δρόμος ισορροπίας υψηλού αμφιαρθρωτού χαλύβδινου τόξου (αστοχία λόγω διαρροής πολύ πριν το φαινόμενο του λυγισμού)

• **Μέθοδος 1**

Στο Σχήμα 4.5 φαίνονται οι προβλέψεις της εξίσωσης αλληλεπίδρασης (4.1) με $\phi = 1$ και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Διακρίνεται άμεσα ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι προβλέψεις αυτές είναι ιδιαίτερα συντηρητικές και για πολύ χαμηλά τόξα εκτός της ασφαλείας. Άρα, δεν είναι η εξίσωση αυτή κατάλληλη για χρήση για τον σχεδιασμό αμφιαρθρωτών τόξων.



Σχήμα 4.5: Αντοχή αμφιαρθρωτών χαλύβδινων τόξων – μέθοδος 1

Αντί αυτής προτείνεται μια παραλλαγή - τροποποίηση της που έχει ως εξής:

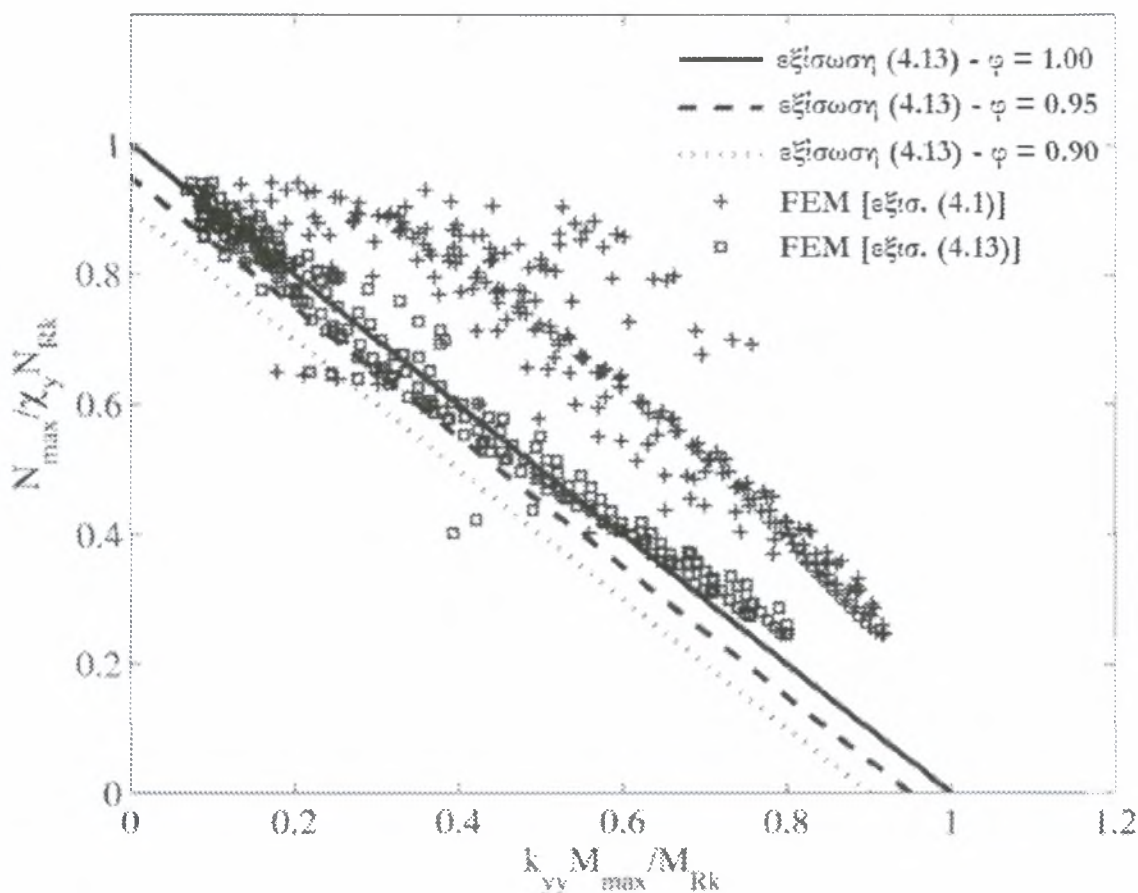
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{A f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{yy}}{p_1} \frac{M_{y,Ed}}{W_{pl,y} f_y \gamma_{M1}} \leq \phi \quad (4.13)$$

όπου ο **διορθωτικός παράγων** προέρχεται από διαδικασίες μαθηματικής βελτιστοποίησης και δίνεται από την έκφραση:

$$P_1 = \begin{cases} 0.661 + 0.125(\lambda_s/\lambda_T) - 0.000155(0.5S/i) \\ \quad - 0.000595(\lambda_s/\lambda_T)(0.5S/i), \\ 15 \leq \lambda_s/\lambda_T \leq 50 \\ 4.10 \ln^{-1.59}(0.0681(\lambda_s/\lambda_T)), \\ 50 < \lambda_s/\lambda_T \leq 140 \end{cases} \quad (4.14)$$

και $\lambda_s = S^2/4iR$, $\lambda_T = (\gamma S/i)\sqrt{f_y/(\pi^2 E)}$.

Στο Σχήμα 4.6 απεικονίζονται οι αντοχές των χαλύβδινων τόξων με χρήση της τροποποιημένης εξίσωσης (4.13), και διακρίνεται ότι η εξίσωση αυτή παρέχει αρκετά ικανοποιητικές κάτω φράγματα προβλέψεις της αντοχής. Προτείνεται η χρήση της (4.13) για $\varphi=0.90$ σε συνδυασμό με $\lambda_s/\lambda_T \geq 15$.

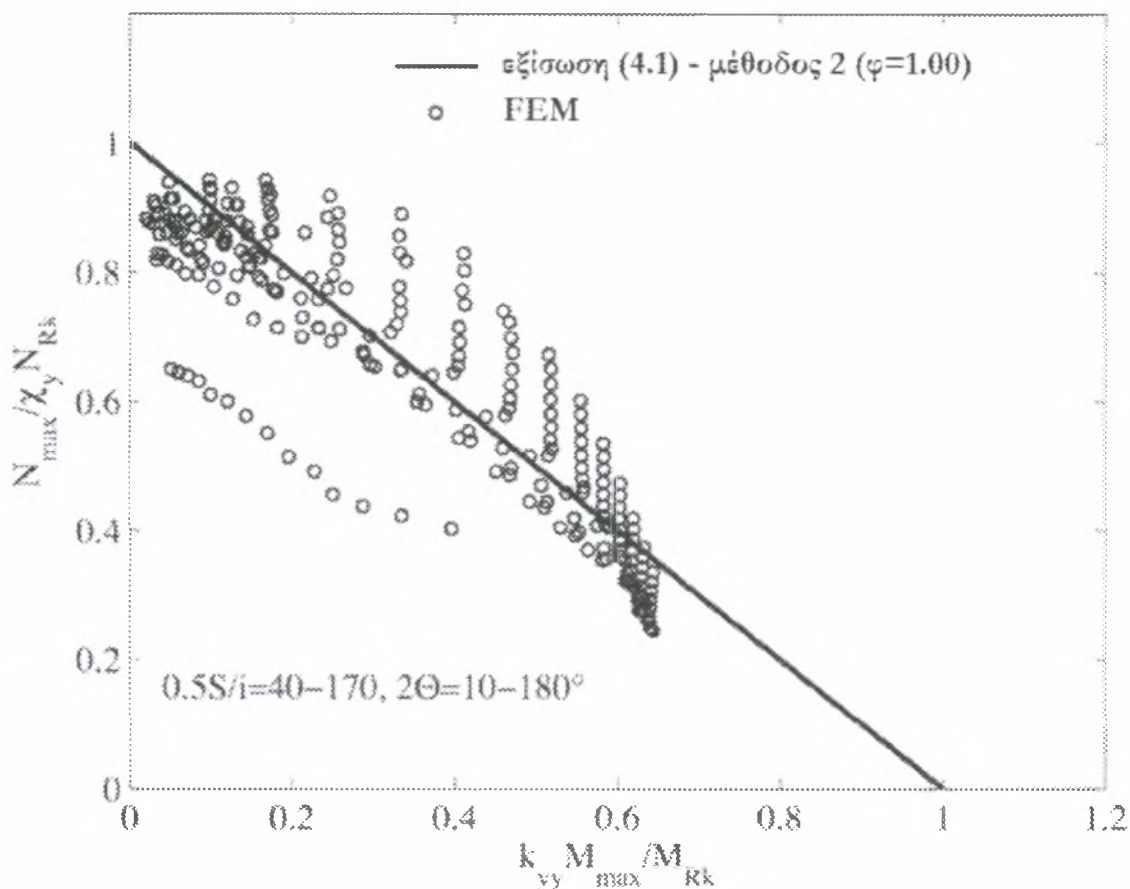


Σχήμα 4.6: Αντοχή αμφιαρθρωτών χαλύβδινων τόξων – τροποποιημένη μέθοδος 1

• **Μέθοδος 2**

Όπως προκύπτει από το Σχήμα 4.7, όπου φαίνονται τόσο οι προβλέψεις της εξίσωσης αλληλεπίδρασης (4.1) για $\varphi = 1$ με τον παράγοντα αλληλεπίδρασης με βάση τη μέθοδο 2, όσο και τα αποτελέσματα μέσω ανάλυσης

πεπερασμένων στοιχείων, οι προβλέψεις αυτές είναι κατά κανόνα εκτός της ασφαλείας. Άρα ούτε και με εφαρμογή της μεθόδου 2 είναι η εξίσωση (4.1) κατάλληλη για τον σχεδιασμό κυκλικών αμφιαρθρωτών τόξων.



Σχήμα 4.7: Αντοχή αμφιαρθρωτών χαλύβδινων τόξων – μέθοδος 2

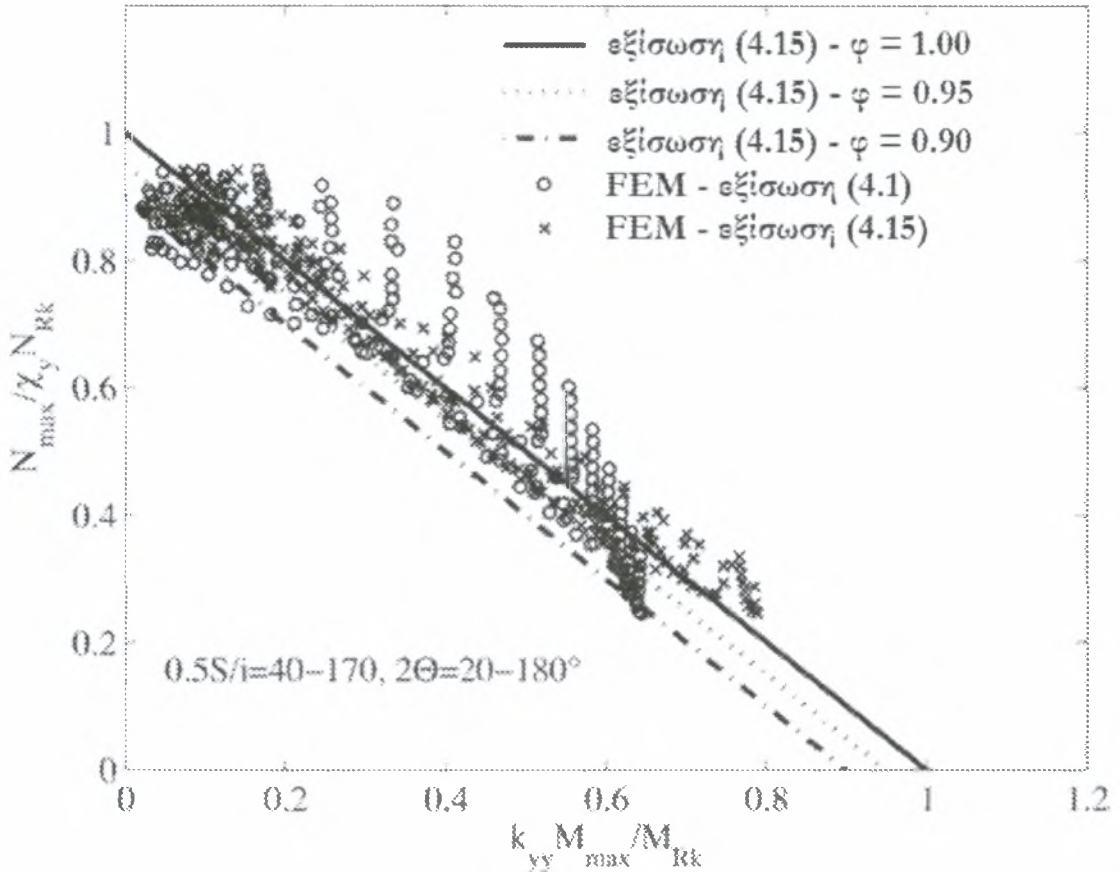
Η προτεινόμενη τροποποιημένη εξίσωση αλληλεπίδρασης έχει εδώ τη μορφή:

$$\chi_y \frac{N_{Ed}}{A f_y \gamma_{M1}} + \frac{k_{yy}}{p_2} \frac{M_{y,Ed}}{W_{pl,y} f_y \gamma_{M1}} \leq \phi \quad (4.15)$$

όπου, με διαδικασίες παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του p_1 βρέθηκε ότι

$$p_2 = \begin{cases} 0.704 + 0.0168(\lambda_s / \lambda_T) - 0.00509(0.5S/i) \\ + 0.0000121(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S/i), & 15 \leq \lambda_s / \lambda_T \leq 50 \\ -0.065 + 0.00628(\lambda_s / \lambda_T) + 0.0191(0.5S/i) \\ - 0.000138(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S/i), & 50 \leq \lambda_s / \lambda_T \leq 140 \end{cases} \quad (4.16)$$

Κατ' αναλογία, τα σχετικά αποτελέσματα εφαρμογής της τροποποιημένης εξίσωσης αλληλεπίδρασης (4.15) δίδονται στο Σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8: Αντοχή αμφιαρθρωτών χαλύβδινων τόξων – τροποποιημένη μέθοδος 2

Η (4.15) δίδει καλές κάτω φράγματος προσεγγίσεις, για λόγους δε δομοστατικού σχεδιασμού προτείνεται να γίνεται χρήση της για τους ακόλουθους συνδυασμούς: Με $\varphi = 0.90$ για $15 \leq \lambda_s / \lambda_T < 60$ και με $\varphi = 0.95$ για $\lambda_s / \lambda_T \geq 60$.

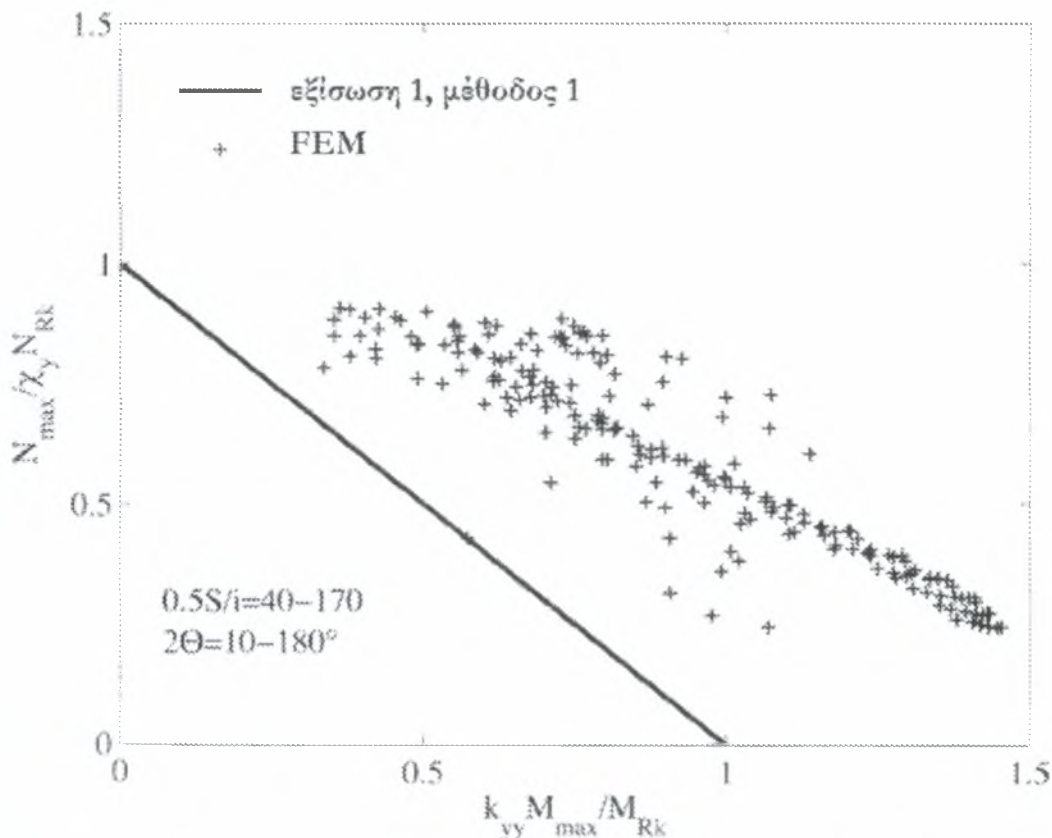
(β) Αμφίπακτα τόξα

Για ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 198 τέτοιων τόξων με λυγηρότητες από 40 έως 170 και γωνίες 2Θ από 10° έως 180° , ακολουθήθηκε διαδικασία παρόμοια με αυτή της περίπτωσης των αμφιαρθρωτών τόξων. Τα σχετικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

• Μέθοδος 1

Οι προβλέψεις της εξίσωσης (4.1) συγκρινόμενες με τα αποτελέσματα μέσω πεπερασμένων στοιχείων αποδείχτηκαν πάρα πολύ συντηρητικές. Τούτο διακρίνεται άμεσα από τα περιεχόμενα του Σχήματος 4.9, και κατά συνέπεια η εν

λόγω εξίσωση αλληλεπίδρασης δεν είναι κατάλληλη για την περίπτωση αμφίπακτων κυκλικών τόξων.



Σχήμα 4.9: Αντοχή αμφίπακτων χαλύβδινων τόξων – μέθοδος 1

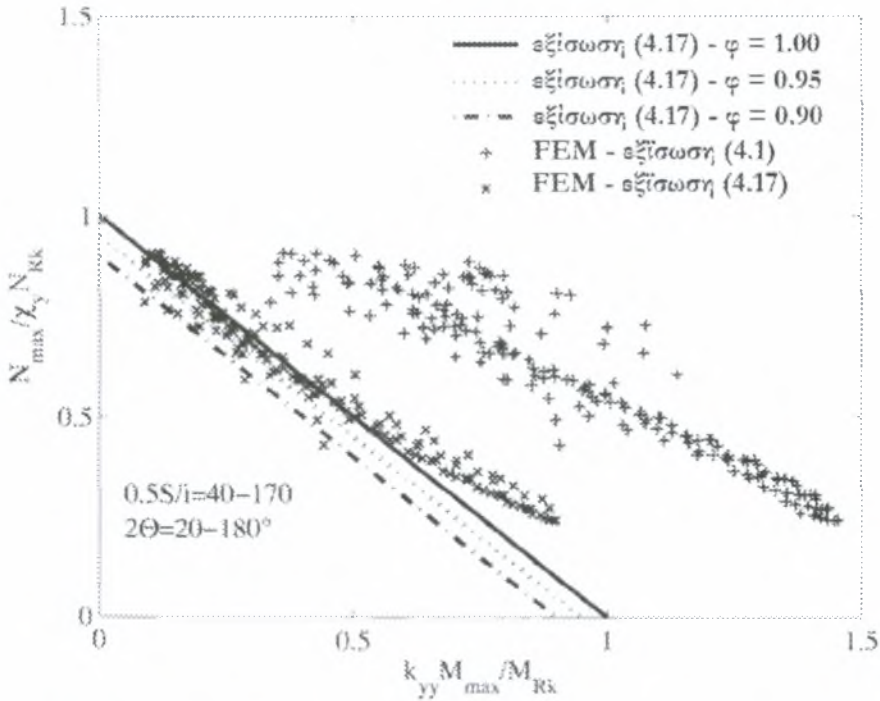
Η τροποποιημένη εξίσωση αλληλεπίδρασης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{A f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{yy} M_{y,Ed}}{f_1 \frac{W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M1}}} \leq \phi \quad (4.17)$$

με τον διορθωτικό συντελεστή f_1 να βρίσκεται ίσος με

$$f_1 = \begin{cases} 0.168 + 0.0795(\lambda_s / \lambda_T) - 0.00955(0.5S/i) \\ -0.000251(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S/i), & 20 \leq \lambda_s / \lambda_T < 70 \\ 11.176 \ln^{-1.906}(0.0807(\lambda_s / \lambda_T)), & 70 \leq \lambda_s / \lambda_T \leq 195 \end{cases} \quad (4.18)$$

ενώ τα αποτελέσματα εφαρμογής της παρατίθενται στο Σχήμα 4.10, από το οποίο προκύπτει ότι προσφέρει ικανοποιητικά κάτω φράγματα της αντοχής. Προτείνεται να λαμβάνεται $\phi = 0.90$ για $20 \leq \lambda_s / \lambda_T < 195$.



Σχήμα 4.10 Αντοχή αμφίπακτων χαλύβδινων τόξων – τροποποιημένη μέθοδος 1

• **Μέθοδος 2**

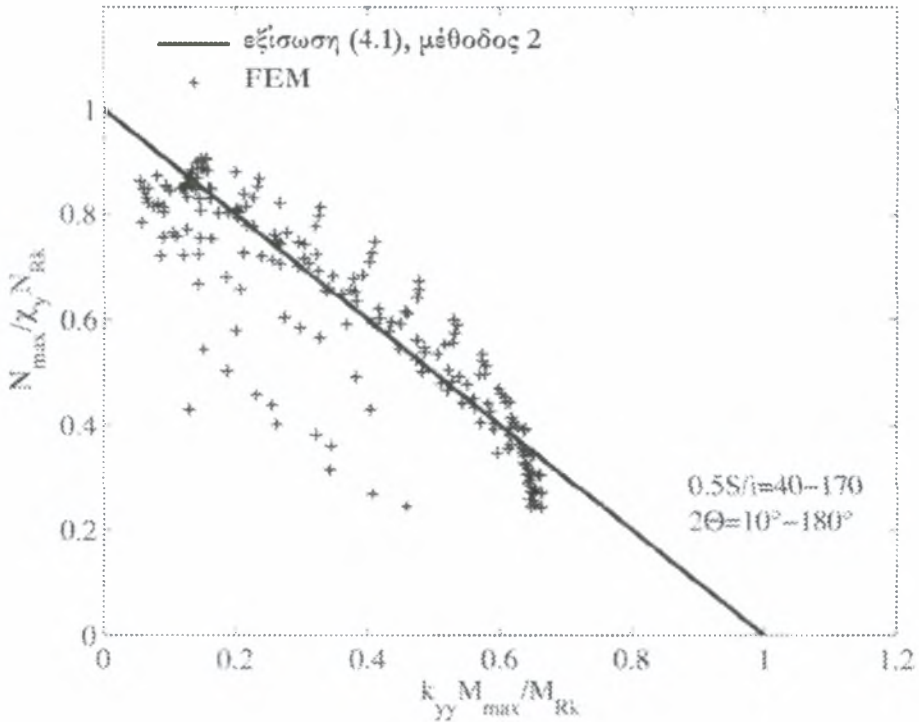
Όπως προκύπτει από το Σχήμα 4.11, όπου φαίνονται τόσο οι προβλέψεις της εξίσωσης αλληλεπίδρασης (4.1) για $\varphi = 1$ με τον παράγοντα αλληλεπίδρασης με βάση τη μέθοδο 2, όσο και τα αποτελέσματα μέσω ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, οι προβλέψεις αυτές είναι για μικρές τιμές του λόγου λ_s / λ_T εκτός της ασφαλείας, ενώ γενικότερα λιγότερο συντηρητικές από αυτές της μεθόδου 1.

Η αντίστοιχη τροποποιημένη εξίσωση έχει ως εξής:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{A f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{k_{yy}}{f_2} \frac{M_{y,Ed}}{W_{pl,y} f_y \gamma_{M1}} \leq \phi \quad (4.19)$$

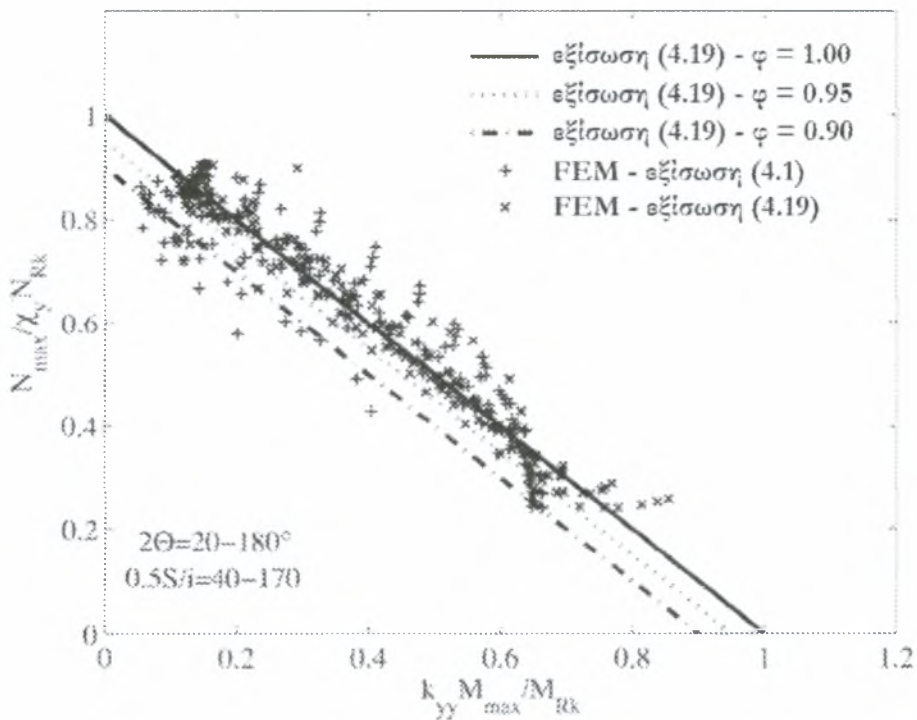
με

$$f_2 = \begin{cases} 0.195 + 0.0239(\lambda_s / \lambda_T) + 0.00101(0.5S / i) - 0.00013(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S / i), & 20 \leq (\lambda_s / \lambda_T) < 70 \\ 0.230 + 0.00714(\lambda_s / \lambda_T) + 0.0102(0.5S / i) - 0.0000775(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S / i), & 70 \leq (\lambda_s / \lambda_T) < 120 \\ 0.0344 + 0.00581(\lambda_s / \lambda_T) + 0.0131(0.5S / i) - 0.0000797(\lambda_s / \lambda_T)(0.5S / i), & 120 \leq (\lambda_s / \lambda_T) < 195 \end{cases} \quad (4.20)$$



Σχήμα 4.11: Αντοχή αμφίπακτων χαλύβδινων τόξων – μέθοδος 2

Τα αποτελέσματα εφαρμογής της τροποποιημένης εξίσωσης αλληλεπίδρασης (4.19) παρατίθενται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12 Αντοχή αμφίπακτων χαλύβδινων τόξων – τροποποιημένη μέθοδος 2

Και εδώ η τροποποιημένη εξίσωση (4.19) παρέχει ικανοποιητικά κάτω φράγματα της αντοχής, με προτεινόμενη τιμή του $\varphi = 1$ για $20 \leq \lambda_s / \lambda_T < 195$.

Πιθανώς παρόμοιες τροποποιήσεις θα μπορούσαν να προκύψουν και άλλες σε περιπτώσεις φόρτισης, διατομής του τόξου και αρχικής γεωμετρίας του (με την έννοια της μορφής της καμπύλης). Πλην όμως για κάθε συνδυασμό θα χρειαζόταν η επανάληψη της εφαρμογής της ως άνω μεθοδολογίας, πράγμα που για λόγους δομοστατικού σχεδιασμού και κωδικοποίησης θεωρείται πρακτικά *ανεφάρμοστο*.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι προβλέψεις – κανόνες του Αυστραλιανού Κώδικα AS4100 περί χαλύβδινων κατασκευών σε ότι αφορά τοξωτούς φορείς, ενώ οι αντίστοιχοι Κανονισμοί στις ΗΠΑ *LRFD* (όπως άλλωστε και οι Ευρωπαϊκοί) δεν διαθέτουν ιδιαίτερες προβλέψεις σε ότι αφορά τα τόξα. Στις ΗΠΑ, σχετικές κανονιστικές διατάξεις μπορούν να ευρεθούν στους κανονισμούς του AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials) για χαλύβδινες τοξωτές γέφυρες.

3. Ελληνικά Πρότυπα

Το μοναδικό Ελληνικό Πρότυπο, το οποίο περιέχει κανονισμούς για τοξωτούς μεταλλικούς φορείς (διατίθεται μόνο στην Αγγλική Γλώσσα) είναι το *ΕΛΟΤ EN 13031.01: Θερμοκήπια: Σχεδιασμός και κατασκευή - Μέρος 1: Θερμοκήπια παραγωγής (Greenhouses - Design and Construction - Part 1: Commercial production greenhouses)*. Ειδικότερα, στο *Παράρτημα D* αυτού δίδονται σαφείς οδηγίες για τον σχεδιασμό τοξωτών μεταλλικών φορέων θερμοκηπίων, που κατασκευάζονται από λεπτότοιχες κοίλες κυκλικές διατομές και επικάλυψη από λεπτή πλαστική μεμβράνη, στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Μάλιστα, όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται στο Παράρτημα αυτό, οι κανόνες σχεδιασμού που παρέχει βασίζονται στο ENV 1991-1 Eurocode 1 - Basis of Design and Actions on Structures - Part 1: Basis of Design, και όχι στον Ευρωκώδικα 3, καθόσον αυτός *δεν περιέχει κανόνες σχεδιασμού για λυγηρά τόξα από κοίλες κυκλικές διατομές (δηλ. κανόνες για γεωμετρικές ατέλειες, μήκη λυγισμού και εκφράσεις προσαυξημένων ροπών μετάθεσης – amplified sway moment expressions – για τόξα)*. Η προτεινόμενοι κανόνες βασίζονται σε κατανομές φορτίσεων πάνω στο πλαστικό (χιόνι και άνεμο) που περιέχονται στο Παράρτημα I του Προτύπου.

Πιο συγκεκριμένα, οι απαιτήσεις για την εφαρμογή των κανόνων του Παραρτήματος D του Προτύπου αυτού στην οριακή κατάσταση αστοχίας συνοψίζονται στον Πίνακα 4.4 και το διάγραμμα ροής του Σχήματος 4.13., ενώ το ισοδύναμο προσομοίωμα (μοντέλο) για την συμπεριφορά της διατομής λεπτότοιχων σωλήνων, που χρησιμοποιείται στις εν λόγω κανονιστικές διατάξεις περιγράφεται στον Πίνακα 4.5.

Πίνακας 4.4 : Απαιτήσεις σχεδιασμού

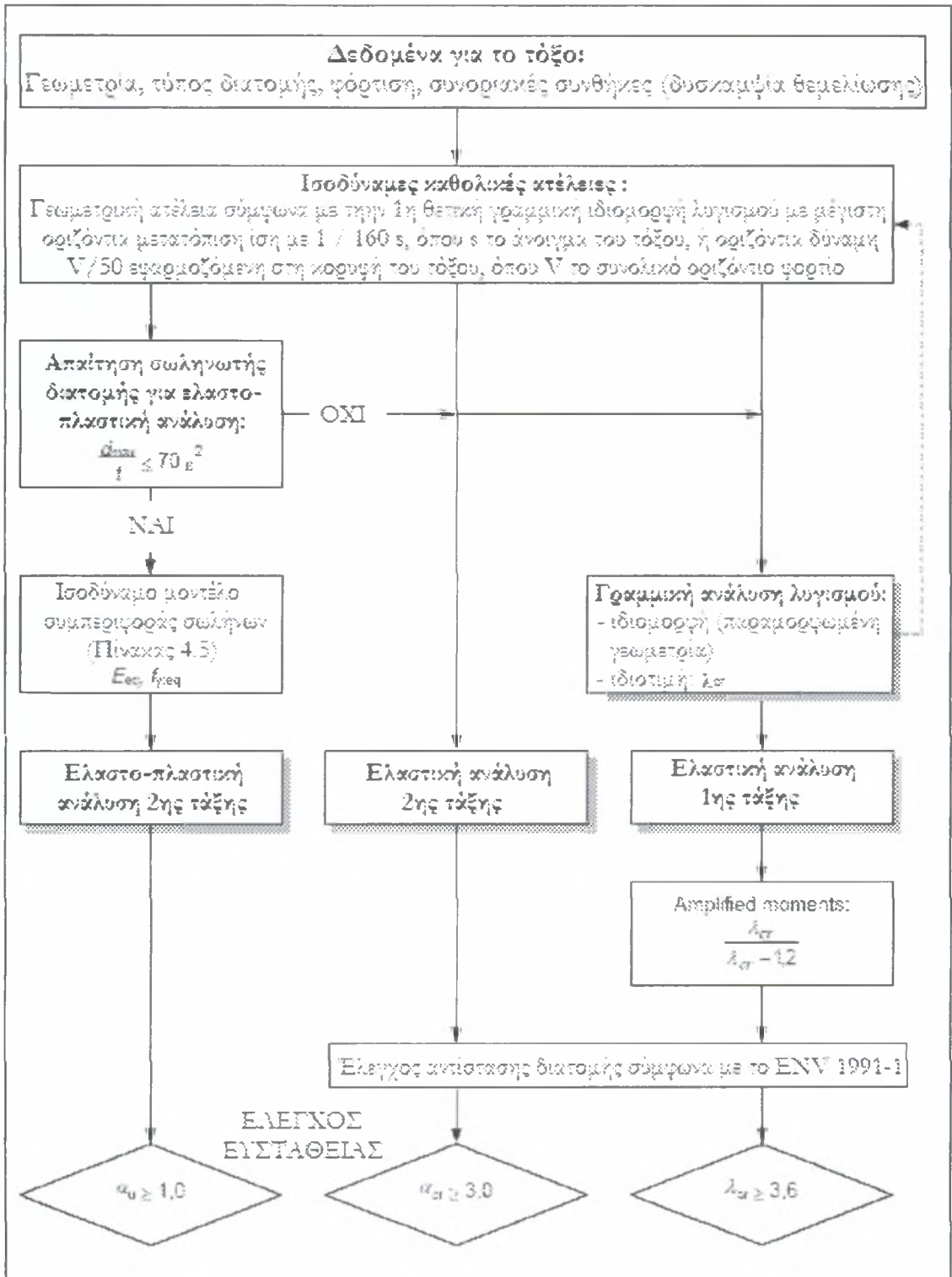
Μέθοδος ανάλυσης	Ισοδύναμες γεωμετρικές ατέλειες	Κριτήρια που πρέπει να ελεγχθούν	
		Αντίσταση διατομής	Ευστάθεια
Ελαστική 1 ^{ης} τάξης και ελαστικός λυγισμός	Ναι	Ναι	$\lambda_{cr} \geq 3.6$
Ελαστική 2 ^{ης} τάξης	Ναι	Ναι	$a_{cr} \geq 3.0$
Ελαστο-πλαστική 2 ^{ης} τάξης	Ναι	Όχι ^a	$a_u \geq 1.0$

^A Περιέχεται στην ανάλυση

Πίνακας 4.5 : Ισοδύναμο μοντέλο για την συμπεριφορά της διατομής

Τιμή λόγου μέγιστης διαμέτρου προς πάχος d_{max}/t	Ισοδύναμη τάση διαρροής $f_{y,eq}$ και ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας E_{eq}
$d_{max}/t \leq 25\epsilon^2$	$E_{eq} = E$, $f_{y,eq} = f_y$
	$E_{eq} = 0.85 E$, $f_{y,eq} = f_y$
$25\epsilon^2 < d_{max}/t \leq 50\epsilon^2$	$E_{eq} = 0.85 E$, $f_{y,eq} = f_y (f_{ref}/f_y)^{0.45}$
$50\epsilon^2 < d_{max}/t \leq 75\epsilon^2$	Δεν επιτρέπεται ελαστοπλαστική ανάλυση 2 ^{ης} τάξης

όπου:
 d_{max}/t η μέγιστη εξωτερική διάμετρος
 E το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα ψυχρής διαμόρφωσης
 f_y η μέση τάση διαρροής της χαλύβδινης διαρροής μετά την ψυχρή διαμόρφωση και την κάμψη (για τόξα)
 f_{ref} η τάση διαρροής αναφοράς. Για σωληνωτά μέλη $f_{ref} = 11750(t/d_{max}) N/mm^2$
 t το πάχος της σωληνωτής διατομής και
 $\epsilon = \sqrt{235/f_y}$



Σχήμα 4.13 Μεθοδολογία σχεδιασμού τόξων θερμοκηπίων

Πιο αναλυτικά το Πρότυπο αυτό, στο Παράρτημα D, προβλέπει τα εξής:

1. *Ισοδύναμες ατέλειες*

Οι επιρροές των ατελειών θα πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψη στην ανάλυση μέσω μιας ισοδύναμης γεωμετρικής ατέλειας, που λαμβάνεται ίση με το πλέον ανεπιθύμητο σχήμα, με βάση την πρώτη θετική γραμμική ιδιομορφή λυγισμού προσαυξημένη με κάποιον παράγοντα. Αυτός ο προσαυξητικός παράγων θα πρέπει να λαμβάνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η μέγιστη μετατόπιση της ισοδύναμης γεωμετρικής ατέλειας να ισούται με $s/160$, όπου s το άνοιγμα του τόξου.

Η ισοδύναμη γεωμετρική ατέλεια μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη οριζόντια δύναμη, δρώσα στην κορυφή του τόξου, που θα ισούται με $V/50$, όπου V η συνολική κατακόρυφη δράση που εφαρμόζεται στο τόξο.

2. *Ελαστική ανάλυση 1ης τάξης και ελαστικός λυγισμός (Euler)*

Για την ελαστική ανάλυση 1ης τάξης και το γραμμικό λυγισμό θα λαμβάνονται ισοδύναμες ατέλειες όπως παραπάνω.

Η αντίσταση της διατομής θα πρέπει να ελέγχεται με βάση την παράγραφο 5.4 του ENV 1993-1-1: 1992. Σε αυτούς τους κανόνες επαλήθευσης η ροπή που βρέθηκε από ελαστική ανάλυση 1ης τάξης θα πρέπει να προσαυξάνεται με έναν παράγοντα ίσο με $\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_{cr} - 1.2}$, όπου λ_{cr} η 1η γραμμική ιδιομορφή λυγισμού, η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $\lambda_{cr} \geq 3.6$.

3. *Ελαστική ανάλυση 2ης τάξης*

Και εδώ θα λαμβάνονται υπ' όψη ισοδύναμες ατέλειες ως άνω, και η αντίσταση της διατομής θα πρέπει να ελέγχεται με βάση την παράγραφο 5.4 του ENV 1993-1-1: 1992), όπως προηγούμενα, αλλά και με την υποπαράγραφο 5 που έπεται.

Το φορτίο για το οποίο επέρχεται απώλεια ευστάθειας της κατασκευής (ισορροπία απόκλισης – equilibrium divergence) a_{cr} θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα: $a_{cr} \geq 3.00$.

4. *Ελαστο – πλαστική ανάλυση 2ης τάξης*

Και εδώ θα λαμβάνονται υπ' όψη ισοδύναμες ατέλειες ως άνω, και η αντίσταση της διατομής θα πρέπει να ελέγχεται με βάση την παράγραφο 5.3.3 του ENV 1993-1-1: 1992), με την προϋπόθεση η διατομή να καλύπτει τις εκεί αναφερόμενες απαιτήσεις.

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση λεπτότοιχων σωλήνων, η ελαστοπλαστική ανάλυση 2^{ης} τάξης θα πρέπει να εκτελείται με βάση τα περιεχόμενα της υποπαραγράφου 5, αν η διατομή καλύπτει τις εκεί απαιτήσεις, ή με βάση μοντέλα απόκρισης που έχουν προκύψει από πειράματα στη διατομή.

Το φορτίο για το οποίο επέρχεται απώλεια ευστάθειας της κατασκευής (ελαστοπλαστική ισορροπία απόκλισης) a_{cr} θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα: $a_{cr} \geq 1.00$.

5. Ισοδύναμο μοντέλο συμπεριφοράς λεπτότοιχων σωλήνων

Για κυκλικές και ελλειψοειδείς σωληνωτές διατομές με λόγο μέγιστης προς ελάχιστη εξωτερική διάμετρο $d_{outer,max} / d_{outer,min} \leq 1.5$, και για $50 \text{ mm} \leq d_{outer,max} \leq 70 \text{ mm}$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα ισοδύναμο μοντέλο απόκρισης για ελαστοπλαστική ανάλυση 2^{ης} τάξης. Το μοντέλο αυτό, (Πίνακας 4.5) βασίζεται σε μια ισοδύναμη τάση διαρροής $f_{y,eq}$ και σε ένα ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας E_{eq} .

Η αντίσταση (αντοχή) της διατομής σε περίπτωση συνδυασμένης θλίψης και κάμψης για κυκλικές ή ελλειψοειδείς διατομές Κατηγορίας 1 και 2 $[(d_{max} / t) \leq 50\epsilon^2]$ μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση:

$$M_{N,Rd} = 1.20M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{N_{Sd}}{N_{pl,Rd}} \right) \text{ αλλά με } M_{N,Rd} \leq M_{pl,Rd}$$

όπου

$M_{N,Rd}$ η τιμή σχεδιασμού της μέγιστης πλαστικής καμπτικής αντοχής της διατομής, μειωμένης λόγω της επιρροής θλιπτικών δυνάμεων

$M_{pl,Rd}$ η πλαστική ροπή αντοχής της διατομής

N_{Sd} η τιμή σχεδιασμού της δρώσας θλιπτικής δύναμης

$N_{N,Rd}$ η πλαστική αντοχή σχεδιασμού της διατομής σε θλίψη

Τελικές Διαπιστώσεις και Συμπεράσματα

Αντί τελικών διαπιστώσεων και συμπερασμάτων, πολλά από τα οποία έχουν ήδη κατά κόρον διατυπωθεί στο πλήρες κείμενο των προηγούμενων Κεφαλαίων της παρούσας, και σε ορισμένα σημεία με έντονο κριτικό πνεύμα, παρατίθεται αυτούσιο ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα από το αρχικό κείμενο της πρωτοπόρου εργασίας του γηραιού πλέον Ρουμάνου ερευνητή V. Giocci, και επαφίεται στον αναγνώστη η τελική συσχέτιση του με το περιεχόμενο της Διπλωματικής Εργασίας.

The loss of stability is a dynamic phenomenon, but for conservative systems static methods can be used, for which there are two fundamental approaches:

- (a) the equilibrium method: this uses the equilibrium conditions as an axiom to establish the differential equations for the problem. The integration of these equations gives the required solutions;
- (b) the energy method: this uses a potential energy function as the starting point. The equilibrium of the structure is associated with the stationary values of the potential energy function, and leads essentially to the same differential equations as does the equilibrium method.

Engineers prefer the first method, having a more physical logic, while theorists prefer the second method, which is more general.

The theory of coupled instabilities is based exclusively on the energy method. There are many reasons for this choice:

it is more formal and analytical than the equilibrium method, containing in a condensed form all the conditions (equilibrium, boundary conditions), behaviour parameters (deformations), control parameters (loads, imperfections), etc.;

the condensed form of the potential function allows an overall view of the essential terms, number of active coordinates, main loading parameters, etc.;

the elimination of passive coordinates, with a secondary role in the behaviour of the structure near to buckling, by the coupling of some loading parameters, is easier to perform for potential energy than for a great number of equilibrium equations;

the theory is easier to develop in generalized coordinates with a finite number of degrees of freedom;

most numerical methods are based on this method;

the companion theory, catastrophe theory, which has contributed greatly to the development of modern structural stability theory, is formulated for systems with a potential function.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of elastic stability*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill (1961).
2. Schreyer H. L. and Masur E. F. “*Buckling of shallow arches*”, Journal of Engineering Mechanics Division (ASCE) **92**(4), 1 – 20 (1966).
3. Papangelis J. P., Trahair N. S. “*Flexural-torsional buckling of arches*”, Journal of Structural Engineering (ASCE) **113**(4), 889 – 906 (1987).
4. Bazant, Zdeněk P. and Cedolin, L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, New York, Oxford. Oxford University Press (1991).
5. Kang, Y. J. and Yoo, C. H. “*Thin-Walled Curved Beams. I: Formulation of Nonlinear Equations*”, Journal of Engineering Mechanics (ASCE) **120**(10), 2072 – 2101 (1994).
6. Kang, Y. J. and Yoo, C. H. “*Thin-Walled Curved Beams. II: Analytical Solutions for Buckling of Arches*”, Journal of Engineering Mechanics (ASCE) **120**(10), 2102 – 2125 (1994).
7. Verstappen, I., Snijder, H. H., Bijlaard, F. S. K. and Steenbergen, H. M. G. M.. “*Design Rules for Steel arches – In-Plane Stability*”, Journal of Construction of Steel Research **46**(1-3), 125 - 126 (1998).
8. Pi, Y-L and Trahair N. S. “*Non-linear buckling and post-buckling of elastic arches*”, Engineering Structures **20**(7), 571 – 579 (1998).
9. Pi, Y-L and Trahair N. S. “*In-Plane Buckling and Design of Steel Arches*”, Journal of Structural Engineering (ASCE) **125**(11), 1291 – 1298 (1999).
10. Dagowin la Poutre. “*Experimental Stability of steel arches*”, PhD Thesis, Eindhoven University of Technology, February 2001.

11. Pi Y-L, Bradford, M. A., Uy, B. “*In-plane Stability of Arches*”, International Journal of Solids and Structures **39**, 105-125 (2002).
12. Pi Y-L, Bradford, M. A. “*Elastic Flexural-Torsional Buckling of Fixed Arches*”, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **57**(4), 551 – 569, (2004).
13. Pi Y-L, Bradford, M. A. “*In-plane strength and design of fixed steel I-section arches*”, Engineering Structures **26**, 291 – 301 (2004).
14. Pi Y-L, Bradford, M. A., Trahair N. S. “*A Further Study of Flexural-Torsional Buckling of Elastic Arches*”, International Journal of Structural Stability and Dynamics **5**(2), 163 – 183 (2005).
15. Y-L, Bradford, M. A. “*Flexural-torsional buckling of fixed steel arches under uniform bending*”, Journal of Constructional Steel Research **62**, 20 – 26 (2006).
16. Y-L, Bradford, M. A., Tin-Loi, F. “*Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches*”, International Journal of Solids and Structures **44**, 2401 – 2425 (2007).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091701