

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΙΣ ΣΔ 1^{ης} ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Δεβλιώτη Βασιλική

Επιβλέποντες

Δημητρόπουλος Παναγιώτης, Λέκτορας ΤΜΗΥΤΔ

Σταμούλης Γεώργιος, Καθηγητής ΤΜΗΥΤΔ

Βόλος, Οκτώβριος 2008

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται μια ειδική κατηγορία μετατροπέων σήματος από αναλογική σε ψηφιακή μορφή. Οι μετατροπείς αυτοί καλούνται διαμορφωτές Σίγμα-Δέλτα και κατέχουν εξέχουσα θέση στα σύγχρονα μικροηλεκτρονικά κυκλώματα. Ο λόγος της επιλογής των διαμορφωτών αυτών και, ειδικότερα, των διαμορφωτών Σίγμα-Δέλτα 1^{ης} τάξης έγκειται στην απλότητα της υλοποίησής τους και στην μεγάλη συμβατότητα που προσφέρουν στην ενσωμάτωση στις πλάκες πυριτίου. Οι δυνατότητες που προσφέρουν παρουσιάζουν ιδιαίτερα μεγάλο εύρος σε πολλούς τομείς εφαρμογής.

Στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες της επεξεργασίας σημάτων και η θεμελιώδης θεωρία που απαντάται σε όλο το εύρος της παρούσας εργασίας.

Στο 2^ο κεφάλαιο προσφέρεται μια εισαγωγή στη θεωρία των διαμορφωτών ΣΔ 1^{ης} τάξης και μελετώνται οι βασικές λειτουργίες που τους διέπουν, καθώς και των επιμέρους στοιχείων από τα οποία αποτελούνται.

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την υλοποίηση του διαμορφωτή ΣΔ 1^{ης} τάξης στην υπολογιστική πλατφόρμα *MATLAB*.

Στο 4^ο κεφάλαιο μελετώνται κάποιες επιπρόσθετες σημαντικές συνιστώσες της διαμόρφωσης ΣΔ που επηρεάζουν τη λειτουργία και την ποιότητα των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, μελετάται η ιδιαίτερα σημαντική έννοια του αποδεκατισμού και παρουσιάζονται πολλαπλές συγκρίσεις μεταξύ των κυριότερων φίλτρων που υλοποιούν τη διαδικασία αυτή.

Στο 5^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές των διαμορφωτών ΣΔ και το πεδίο της υλοποίησής τους.

Για την παρούσα διπλωματική εργασία δε θα μπορούσα να παραλείψω την ιδιαίτερα σημαντική και πολυποίκιλη συνεισφορά κάποιων ατόμων για την ολοκλήρωσή της.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Παναγιώτη Δημητρόπουλο, Λέκτορα του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων, για την

ανάθεση και την βοήθειά που μου προσέφερε σε όλες τις φάσεις της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας.

Έπειτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Γεώργιο Σταμούλη, Καθηγητή και Πρόεδρο του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων και δεύτερο επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, για την αμέριστη βοήθεια και τη συνεχή του παρουσία σε όλο το διάστημα αυτό.

Δε θα μπορούσα να παραλείψω την πολυτιμότερη και καθοριστικής σημασίας βοήθεια του κυρίου Ιωάννη Κατσαβουνίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων για τη βοήθεια σε κρίσιμα ζητήματα και ερωτήματα που ανέκυπταν κατά τη διάρκεια της έρευνας και της συγγραφής της εργασίας.

Σημαντικότερη ήταν, και εξακολουθεί να είναι, η συνεισφορά όλων των καθηγητών του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων για τις γνώσεις, το μεράκι και, κυρίως την παιδεία που μεταλαμπάδευσαν σε όλους μας, μέσα από το το ενδιαφέρον για το αντικείμενο της επιστήμης τους.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος όλους τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου στη σημαντική αυτή περίοδο. Ειδικότερα, τη φίλη μου κυρία Φλωράτου Σάρρα, που η πολύχρονη φιλία της αποτελεί τον πιο όμορφο συνοδοιπόρο. Τους αγαπημένους μου φίλους Τάτση Λάζαρο, Πουλάκη Αναστασία, Γιαννάκη Βασίλη για την εμπύχωση, τις συμβουλές και την παρουσία τους. Την κυρία Αγγελίδου Πολυξένη για την... καλλιτεχνική της συνεισφορά στην παρούσα διπλωματική εργασία. Τη γειτόνισσα και δεύτερη μητέρα μου, κυρία Ευανθία Βελισσαρίου-Σιδέρη, καθώς και την υπέροχη οικογένειά της, για τη φροντίδα, το ενδιαφέρον και την υποστήριξη που μου προσέφεραν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου. Η συμπαράσταση και η αγάπη της μητέρας μου, της αδερφής μου και του συζύγου της, δημιούργησαν μια κοινή πορεία και ένα σημείο αναφοράς όλο αυτό το διάστημα, μέσα σε όλες τις δυσάρεστες και ευχάριστες εκφάνσεις της ζωής.

Στη μνήμη του πατέρα μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Σήμα	1
1.2 Σύστημα	2
1.3 Ευστάθεια Συστήματος.....	4
1.4 Μετασχηματισμός Fourier.....	4
1.5 Σειρά Fourier.....	6
1.6 Μετασχηματισμός Z.....	6
1.7 Δειγματοληψία.....	7
2 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΙΓΜΑ-ΔΕΛΤΑ	10
2.1 Εισαγωγή.....	10
2.2 Διαμόρφωση Δέλτα	10
2.2.1 Παράδειγμα διαμόρφωσης Δέλτα στο MATLAB.....	11
2.3 Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα (ΣΔ) – Sigma Delta (SD) Modulation	15
2.4 Λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ	16
2.4.1 Αθροιστής	16
2.4.2 Ολοκληρωτής.....	16
2.4.3 Διαφοριστής-Σταθμιστής	17
2.4.4 Μετατροπέας Ψηφιακό προς Αναλογικό (Digital-to-Analog Converter)	18
2.5 Ελαχιστοποίηση θορύβου – Oversampling	18
2.6 Χαμηλοπερατό Φίλτρο – Lowpass Filter.....	22
2.7 Ανάλυση της διαμόρφωσης ΣΔ στο πεδίο του μετασχηματισμού Z	25
2.8 Διαμορφωτές ΣΔ μεγαλύτερης τάξης	26
3 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ ΣΔ ΣΤΟ MATLAB.....	28
3.1 Ο Αλγόριθμος υλοποίησης του διαμορφωτή ΣΔ.....	28
3.2 Δοκιμή λειτουργίας με ημιτονοειδή είσοδο.....	31
3.3 Δοκιμή λειτουργίας με πραγματικό σήμα ήχου	38
3.4 Δοκιμή εισόδου με ημιτονοειδή είσοδο με εφαρμογή δειγματοληψίας.....	44
3.5 Δοκιμή λειτουργίας με πραγματικό σήμα ήχου και εφαρμογή δειγματοληψίας.....	50

4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ ΣΔ.....	57
4.1 Θόρυβος στάθμισης στους διαμορφωτές ΣΔ.....	57
4.2 Αποδεκατισμός στην έξοδο.....	61
4.2.1 Αποδεκατισμός σε ένα στάδιο	64
4.2.1.1 Αποδεκατισμός με χρήση φίλτρου Chebyshev	65
4.2.1.2 Αποδεκατισμός με χρήση φίλτρου μεσαίας τιμής (median filter)	69
4.2.1.3 Comb Filter	72
4.2.2 Αποδεκατισμός σε περισσότερα στάδια	85
4.2.2.1 Cascaded Comb Filter.....	88
4.2.2.2 Cascaded Integrator Comb Filter – CIC Filter	119
4.2.2.3 CIC - Halfband	129
4.2.3 Ποσοτική ανάλυση των φίλτρων αποδεκατισμού.....	138
4.2.4 Συμπεράσματα	145
4.3 Εξάλειψη τόνων - Dithering	146
5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΩΝ ΣΔ	159
A.1 ΦΙΛΤΡΑ FIR.....	162
A.2 ΦΙΛΤΡΑ IIR.....	165
B.1 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΜΕ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ.....	170
B.2 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΜΕ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ II.....	172
B.3 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ	173
Γ.1 ΠΑΛΜΟΚΩΔΙΚΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ	176
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	180

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισάγουμε κάποια αρχικά και απλά στοιχεία της Θεωρίας Σημάτων, που έχουν ως στόχο την υπενθύμιση και κατανόηση από την πλευρά του αναγνώστη των εννοιών που αναφέρονται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Για το λόγο αυτό, παρατίθενται κάποιες στοιχειώδεις σημειώσεις που ακολουθούν παρακάτω, χωρίς επιπλέον επεξήγηση, καθώς οποιαδήποτε περαιτέρω εμβάθυνση ξεφεύγει από το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αυτής.

1.1 Σήμα

Η έννοια σήμα απαντάται τόσο στον κλάδο των επικοινωνιών, της επεξεργασίας όσο και σε αυτόν της ηλεκτρονικής και αναφέρεται ως μία ποσότητα που μεταβάλλεται στο πεδίο του χρόνου ή/και στο πεδίο του χώρου.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ως σήμα ορίζεται *το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια φυσική ποσότητα όταν αυτή μεταβάλλεται και παρίσταται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσοτέρων ελεύθερων μεταβλητών*¹.

Ένα σήμα μπορεί να είναι είτε *αναλογικό* είτε *ψηφιακό*. Στην πρώτη περίπτωση, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει το σήμα είναι όλο το διάστημα των πραγματικών αριθμών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή λαμβάνει διακριτές τιμές.

Ειδικότερα, ένα αναλογικό σήμα $x(t)$, μπορεί να οριστεί στο *συνεχή χρόνο*, ενώ ένα ψηφιακό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια ακολουθία αριθμών στο πεδίο του *διακριτού χρόνου*.

Για παράδειγμα, ο ήχος που παράγεται από ένα δίσκο βινυλίου ή ένα ημίτονο αποτελούν αναλογικό σήμα, ενώ ένα αρχείο ήχου της μορφής *mp3* αποτελείται από διακριτές τιμές και έτσι μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ψηφιακό σήμα.

Τα σήματα μπορούν επίσης να κατηγοριοποιηθούν σε *περιοδικά* και *μη-περιοδικά*. Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ ονομάζεται *περιοδικό* όταν υπάρχει μια τιμή T για την οποία ισχύει $x(t+T) = x(t)$. Όταν η τιμή T είναι η ελάχιστη για την οποία ισχύει η παραπάνω ιδιότητα, τότε αναφερόμαστε σε αυτήν ως *βασική περίοδο* ή απλά *περίοδο*. Έτσι, το ημιτονοειδές σήμα $x(t)=A\sin(\Omega t+\theta)$, έχει περίοδο $T=2\pi/\Omega=2\pi f$,

¹ Θεοδωρίδης Σ. κ.ά. *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων* (Αθήνα: Εκδόσεις Τυπωθήτω, 2004).

όπου Ω η κυκλική συχνότητα και f η συχνότητα του ημιτόνου. Σημειώνεται ότι, επειδή $A\sin(\Omega t + \theta) = A\cos(\Omega t)$, αναφερόμαστε γενικά για ημιτονοειδή σήματα, χωρίς να προβούμε σε περαιτέρω διακρίσεις.

Σημειώνεται, επίσης, ότι μέσω του τύπου του *Euler*:

$$e^{j(\Omega t + \theta)} = \cos(\Omega t + \theta) + j\sin(\Omega t + \theta)$$

οι τύποι του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι δυνατό να γραφτούν ως εξής:

$$\cos(\Omega t + \theta) = \frac{e^{j(\Omega t + \theta)} + e^{-j(\Omega t + \theta)}}{2}$$

$$\sin(\Omega t + \theta) = \frac{e^{j(\Omega t + \theta)} - e^{-j(\Omega t + \theta)}}{2j}$$

Επιπλέον, ορίζουμε ως $\varphi(t) = \Omega t + \theta$ τη γωνία των ημιτονοειδών σημάτων.

1.2 Σύστημα

Ως σύστημα ορίζουμε την οντότητα εκείνη που μετατρέπει ένα σήμα σε ένα άλλο². Με άλλα λόγια, το σύστημα είναι ένα «μαύρο κουτί» στο οποίο ένα δεδομένο σήμα εισόδου υφίσταται μια κάποιου είδους επεξεργασία, έτσι ώστε να προκύψει στην έξοδο το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τα συστήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν, ούτως ώστε να καταστούν κατανοητά τόσο ως προς τη συμπεριφορά τους, όσο και προς τους νόμους που διέπουν τη λειτουργία τους, με απώτερο στόχο τη μοντελοποίησή τους πριν την πειραματική δοκιμή τους. Οι κατηγορίες συνοψίζονται επιγραμματικά ως εξής:

- *Στατικά και Δυναμικά Συστήματα.* Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα δεν έχει μνήμη και το σήμα εξόδου, έστω $y(t)$, εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή του σήματος εισόδου $x(t)$ τη δεδομένη χρονική στιγμή. Στον αντίποδα, τα δυναμικά συστήματα διαθέτουν μνήμη. Ως παράδειγμα μπορεί να αναφερθεί η χωρητική αντίσταση, ο τύπος της οποίας δίνεται παρακάτω

•

² Θεοδωρίδης Σ. κ.ά. *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων* (Αθήνα: Εκδόσεις Τυπωθήτω, 2004).

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i(t) dt.$$

Ο τύπος αυτός υπονοεί ότι η έξοδος $y(t)$ είναι συνάρτηση όλων των εισόδων τους ιστορικού της συνάρτησης $i(t)$.

- *Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα.* Στα αιτιατά συστήματα το σήμα εξόδου $y(t)$ εξαρτάται από τις τρέχουσες και τις προηγούμενες τιμές του σήματος εισόδου. Με άλλα λόγια, η έξοδος έπεται της διέγερσης που προκαλείται στην είσοδο. Τα μη-αιτιατά συστήματα λαμβάνουν τιμή στην είσοδο συναρτήσει και των μελλοντικών τιμών εισόδου.

- *Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα.* Αν ορίσουμε την έξοδο ως

$$y(t) = F[x(t)],$$

τότε ένα σύστημα καλείται γραμμικό όταν όταν δοθέντων δύο οποιωνδήποτε σημάτων ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$F[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1F[x_1(t)] + a_2F[x_2(t)]$$

Η διέγερση στην είσοδο του συστήματος που προκαλείται από δύο ξεχωριστά σήματα εισόδου, ισούται με τη συνολική διέγερση που προκαλεί ο γραμμικός συνδυασμός τους.

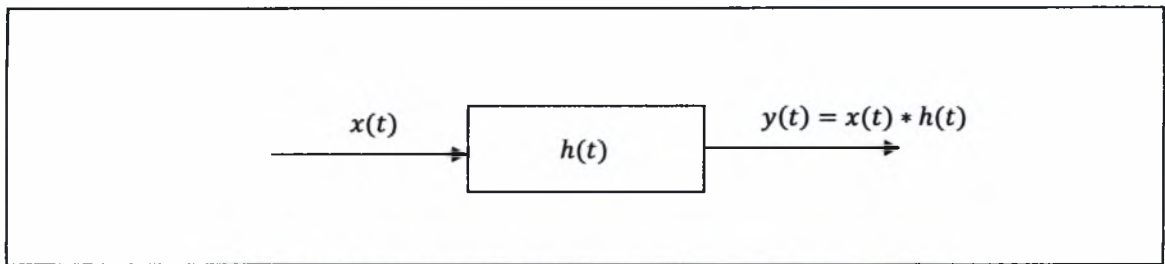
Βασική προϋπόθεση είναι το σύστημα να βρίσκεται σε *ηρεμία*, δηλαδή να μην έχει αποθηκευμένη ενέργεια από προηγούμενη διέγερση.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, που δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα, το σύστημα καλείται μη-γραμμικό.

Το σύστημα, ως έννοια που ορίστηκε παραπάνω, μπορεί να προσεγγιστεί μέσω μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *κρουστική απόκριση* και συμβολίζεται ως $h(t)$. Η βασική εξίσωση που σχετίζει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος είναι η:

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

όπου αντιλαμβάνεται κανείς ότι η έξοδος αποτελεί τη συνέλιξη του σήματος εισόδου και της κρουστικής απόκρισης. Ειδικότερα, μπορεί να γραφεί ως εξής:



Εικόνα 1-1: Διαγραμματική απεικόνιση εισόδου - συστήματος - εξόδου

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

και στην περίπτωση που το σήμα είναι αιτιατό, τότε η σχέση λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau,$$

με την $h(t)$ να λαμβάνει μηδενικές τιμές για $t < 0$.

1.3 Ευστάθεια Συστήματος

Στο ζήτημα της ευστάθειας του συστήματος θα αρκεστούμε απλώς στον ορισμό της *ευστάθειας φραγμένης εισόδου – φραγμένης εξόδου (ΦΕΦΕ)*. Αποτελεί *ικανή και αναγκαία συνθήκη* ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος (ΓΧΑ) η ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι για πεπερασμένη είσοδο σήματος $x(t)$, το σύστημα πρέπει να παράγει πεπερασμένη έξοδο. Για να είναι εφικτό αυτό, τότε πρέπει η κρουστική απόκριση του συστήματος να έχει φραγμένη τιμή.

1.4 Μετασχηματισμός Fourier

Ο Μετασχηματισμός *Fourier* είναι ένα πολύ απλό, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο. Ο κύρια ιδέα του βασίζεται στην μεταφορά της παρατήρησης ενός σήματος από το πεδίο του χρόνου, που εφαρμόζαμε ως τώρα, στο πεδίο της συχνότητας. Με απλά λόγια, μελετούμε ένα σήμα ως προς το συχνοτικό του περιεχόμενο. Με τον τρόπο αυτό καθίσταται εφικτός λ.χ. ο υπολογισμός της ενέργειας ενός σήματος στις διάφορες συχνότητες. Ο τύπος του μετασχηματισμού

Fourier και του αντιστρόφου του δίνεται παρακάτω:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad \text{και}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega,$$

όπου $\Omega=2\pi f$ η κυκλική συχνότητα.

Για τα σήματα διακριτού χρόνου x_n ορίζεται ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}$$

ο δε αντίστροφός του ως:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

όπου $\omega=2\pi l$ η κυκλική ψηφιακή συχνότητα. Η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ των δύο μετασχηματισμών *Fourier* είναι ότι, στην περίπτωση του αναλογικού σήματος, οι συχνότητες μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, ενώ στη δεύτερη οι τιμές τους περιορίζονται στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ή στο $[-\pi, \pi]$ στην περίπτωση των κυκλικών συχνοτήτων. Επίσης, ο Μετασχηματισμός *Fourier* διακριτού χρόνου είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο 2π , ενώ ο αντίστοιχος του αναλογικού χρόνου είναι μια κανονική συνάρτηση του Ω .

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει διάφορες ιδιότητες, η πιο σημαντική όμως που θα μας απασχολήσει είναι αυτή που περιγράφει το *Θεώρημα της Συνέλιξης* στο πεδίο του χρόνου. Έχει αναφερθεί προηγουμένως ότι για ένα σήμα εισόδου $x(t)$, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = h(t) * x(t).$$

Στο πεδίο της συχνότητας, όπου μεταφερόμαστε μέσω του Μετασχηματισμού *Fourier*, η συνέλιξη ισούται με πολλαπλασιασμό. Ειδικότερα, ισχύει:

$$y(t) \equiv x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\Omega)H(\Omega) \quad \text{και}$$

$$y(t) \equiv h(t)x(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} H(\Omega) * X(\Omega).$$

Ο δυϊκός ορισμός της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο της συχνότητας καλείται *συνάρτηση μεταφοράς* ή *απόκριση συχνοτήτων* $H(\Omega)$ που, σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, προκύπτει από το λόγο του MF του σήματος εξόδου προς τον MF του σήματος εισόδου:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

1.5 Σειρά Fourier

Στην κατηγορία των Μετασχηματισμών *Fourier* μπορεί να συμπεριληφθεί και η Σειρά *Fourier*, η οποία χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να εξάγουμε συχνοτική πληροφορία από ένα περιοδικό σήμα. Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T , τότε η Σειρά *Fourier* ορίζεται ως

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\Omega_0 t}$$

όπου $\Omega_0 = 2\pi/T$ η βασική κυκλική συχνότητα του σήματος και οι όροι x_n της Σειράς *Fourier* ορίζονται ως

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{jn\Omega_0 t} dt.$$

Η Σειρά *Fourier* αναλύει ένα περιοδικό σήμα στη βασική συχνότητα και στις αρμονικές της και οι όροι x_n περιέχουν την πληροφορία πλάτους και φάσης κάθε αρμονικής.

1.6 Μετασχηματισμός Z

Ο Μετασχηματισμός Z εφαρμόζεται σε σήματα διακριτού χρόνου. Έστω ένα σήμα διακριτού χρόνου x_n και $X(z)$ ο συμβολισμός του αντίστοιχου μετασχηματισμού. Ορίζουμε δύο μορφές Μετασχηματισμού Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \text{Αμφίπλευρος}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \text{Μονόπλευρος}$$

όπου $z \in \mathbb{C}$ μιγαδικός. Το πεδίο σύγκλισης του Μετασχηματισμού Z περιλαμβάνει όλα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία οι παραπάνω σειρές είναι απόλυτα αθροίσιμες

$$z \in \mathbb{C}: \sum_{n=-\infty(0)}^{\infty} |x_n z^{-n}| < \infty$$

Στην περίπτωση του αμφίπλευρου μετασχηματισμού, το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $0 \leq r_l < |z| < r_u$, με r_l, r_u δύο πραγματικούς θετικούς αριθμούς. Επομένως το πεδίο σύγκλισης είναι όλα τα σημεία ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση του μονόπλευρου μετασχηματισμού, το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $0 \leq \sigma < |z|$, δηλαδή όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στο εξωτερικό ενός κύκλου.

1.7 Δειγματοληψία

Πολλές φορές κρίνεται αναγκαία η αναπαράσταση ενός σήματος από την αναλογική μορφή σε ψηφιακή, όπως για παράδειγμα όταν ηχογραφεί κανείς μουσική και την αποθηκεύει σε αρχείο *mp3*. Η δίοδος η οποία συνδέει τους δύο αυτούς κόσμους – τον αναλογικό και τον ψηφιακό- είναι η *δειγματοληψία*. Η δειγματοληψία αναφέρεται στην αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος με διακριτές τιμές, λαμβάνοντας δείγματα σε τακτικά χρονικά διαστήματα. Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες πραγματοποιούνται οι λήψεις των τιμών του αναλογικού σήματος καλούνται *συχνότητα δειγματοληψίας*, και έχει καθιερωθεί να συμβολίζεται ως f_s . Αναλόγως ορίζεται και η *περίοδος δειγματοληψίας*. Το βασικό θεώρημα της δειγματοληψίας ή αλλιώς *Θεώρημα Nyquist* αναφέρει ότι, για να υπάρχει ακριβής ανακατασκευή του αναλογικού σήματος, θα πρέπει η συχνότητα της δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον ίση με το διπλάσιο της συχνότητας του αρχικού σήματος. Με άλλα λόγια το *Θεώρημα Nyquist* δηλώνει κάτι πολύ απλό που συνοψίζεται στον παρακάτω τύπο:

$$f_s \geq 2f_o$$

όπου f_o η συχνότητα του αρχικού σήματος.

Επεκτείνοντας το πεδίο της δειγματοληψίας, και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που δόθηκαν στην παράγραφο 1.1, μπορούμε να θεωρήσουμε με ασφάλεια ότι, αν έχουμε ένα αναλογικό σήμα $x(t)$, τότε το ψηφιακό σήμα που αναπαριστά τη δειγματοληψία του μπορεί να οριστεί ως:

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

όπου

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

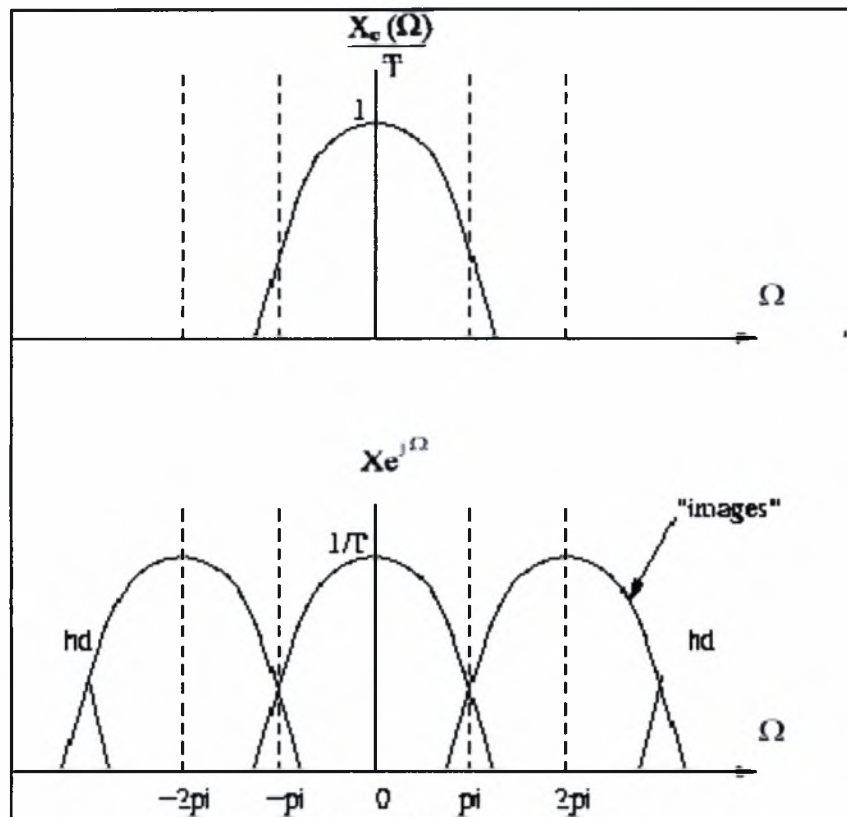
με τη $\delta(t)$ να είναι γνωστή και ως *συνάρτηση Δέλτα Dirac*. Δεδομένου ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι περιοδική με περίοδο T , τότε μπορεί να αναπαρασταθεί ως σειρά *Fourier* με τον τρόπο που δίδεται παρακάτω:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi nt/T}$$

Δεδομένου ότι $T=1/f_s$, λαμβάνουμε τελικά

$$x(n) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{\frac{j2\pi nt}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi n f_s t}.$$

Ο παραπάνω τύπος δηλώνει όλα όσα ειπώθηκαν προηγουμένως. Η δειγματοληψία είναι ισοδύναμη με την αναπαράσταση του σήματος εισόδου με φέρουσες συχνότητες στα σημεία $0, f_s, 2f_s$, κ.ό.κ. Επίσης, το σήμα που προκύπτει από τη δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί στο πεδίο των συχνοτήτων ως το άθροισμα του αρχικού σήματος με σήματα συχνότητας που αποτελεί ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας δειγματοληψίας. Επιπλέον, τα αρχικά αναλογικά σήματα με συχνότητα μεγαλύτερη από αυτή που ορίζει η εκάστοτε συχνότητα δειγματοληψίας *Nyquist*, δεν είναι δυνατό να ανακατασκευαστούν πλήρως, καθώς δημιουργούνται νέες συχνότητες οι οποίες δεν προϋπήρχαν στο αρχικό σήμα, δηλαδή οι «ουρές» των σημάτων αναδιπλώνονται μέσα στο κυρίως φάσμα. Το φαινόμενο αυτό καλείται και *αναδίπλωση (aliasing)*.



Εικόνα 1-2: Παράδειγμα αναδίπλωσης

2 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΙΓΜΑ-ΔΕΛΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Οι περισσότεροι μετατροπείς από αναλογικό σε ψηφιακό μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο ομάδες, σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούν δειγματοληψία. Έτσι, διακρίνουμε τους μετατροπείς που χρησιμοποιούν την συχνότητα δειγματοληψίας *Nyquist* και τους μετατροπείς που πραγματοποιούν *υπερδειγματοληψία*, οι οποίοι χρησιμοποιούν συχνότητες πολύ μεγαλύτερες από αυτές που ορίζει η συχνότητα *Nyquist*.

Η διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα (*Sigma-Delta Modulation*), με την οποία ασχολείται η παρούσα εργασία, είναι ένα από τα πολλά είδη μετατροπής πληροφορίας από αναλογική σε ψηφιακή μορφή. Η διαμόρφωση ΣΔ πρωτοπαρουσιάστηκε ως τεχνική στις αρχές της δεκαετίας του 1960, ωστόσο τα τελευταία χρόνια γνωρίζει ευρεία εφαρμογή. Οι λόγοι που οδήγησαν στην, αργοπορημένη ομολογουμένως, χρήση τους συνοψίζονται κυρίως στη ραγδαία πτώση του κόστους, λόγω της βελτιώσης των προϊόντων του πυριτίου και της ολοένα αυξανόμενης χρήσης τους, όπως επίσης και στη δυνατότητα τους να ενσωματώνονται σε κυκλώματα μεγάλης κλίμακας (*VLSI circuits*) εμφανίζοντας άριστη συμβατότητα. Επιπλέον προτερήματα των διαμορφωτών ΣΔ είναι η αυξημένη λειτουργικότητα, και η μεγάλη ταχύτητα τους, που είναι κύριο χαρακτηριστικό των κυκλωμάτων *VLSI*. Ακόμα, το γεγονός ότι αποτελούνται από στοιχεία που δεν διαθέτουν μεγάλη ακρίβεια και, επομένως, είναι πιο οικονομικά, τους καθιστά περισσότερο ελκυστικούς στη χρήση τους και ενσωμάτωσή τους στις σημερινές πλακέτες πυριτίου.

Το κύκλωμα που την υλοποιεί τη διαμόρφωση ΣΔ αναφέρεται και ως *Διαμορφωτής ΣΔ (Sigma-Delta Modulator)*. Η υλοποίηση του τελευταίου είναι αρκετά απλή και προκύπτει από την επέκταση του κυκλώματος που υλοποιεί τη Διαμόρφωση Δέλτα (*Delta Modulation*).

2.2 Διαμόρφωση Δέλτα

Η Διαμόρφωση Δέλτα υλοποιεί την μετατροπή ενός αναλογικού σήματος στην είσοδο σε ψηφιακό σήμα στην έξοδο. Χρησιμοποιείται κυρίως σε συστήματα

μετάδοσης φωνής, όπου δεν παίζει πρωταρχικό ρόλο η ποιότητα, λόγω του γεγονότος ότι το μεταδιδόμενο σήμα κωδικοποιείται με μόνο ένα *bit*. Η διαμόρφωση Δέλτα ανήκει σε μια ευρύτερη οικογένεια τεχνικών οι οποίες βασίζονται στην στάθμιση (*quantization*) της παραγώγου του σήματος δηλαδή της διαφοράς

$$\frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\Delta t}$$

όπου ο αριθμητής δηλώνει τη διαφορά τιμής δύο διαδοχικών στιγμιοτύπων του σήματος εισόδου.

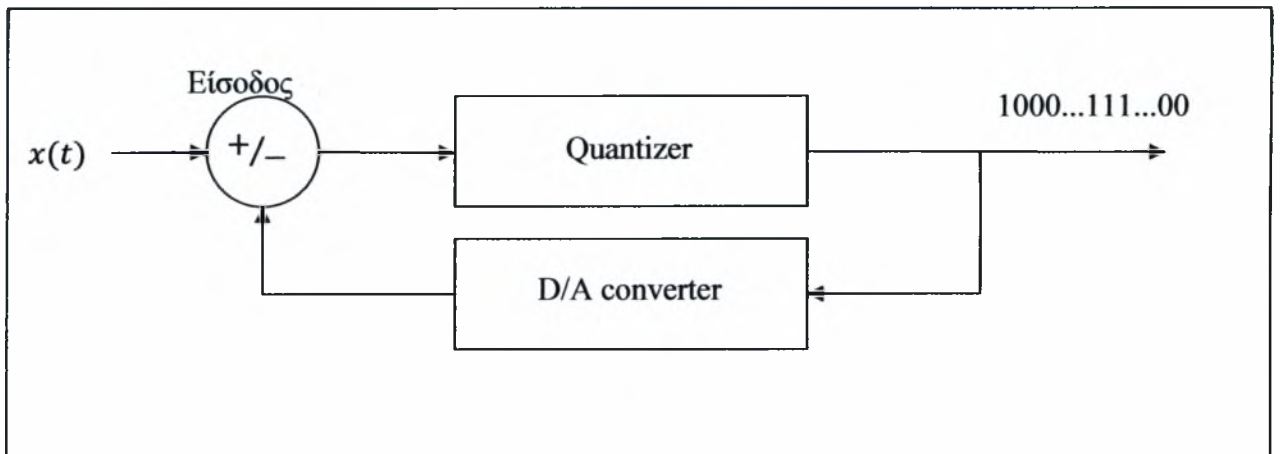
Η λειτουργία της διαμόρφωσης Δέλτα είναι αρκετά απλή. Αρχικά το αναλογικό σήμα προσεγγίζεται με μια σειρά από στάθμες. Έπειτα, κάθε στάθμη συγκρίνεται με την τρέχουσα τιμή του (αναλογικού) σήματος εισόδου, έτσι ώστε να υπολογιστεί εάν υπάρχει αύξηση ή μείωση του σχετικού πλάτους. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει και η ακολουθία των δυαδικών ψηφίων. Εάν, δηλαδή, το τρέχον πλάτος του σήματος εισόδου βρίσκεται σε υψηλότερο σημείο από τη στάθμη σύγκρισης, τότε αποφασίζεται στην έξοδο το λογικό ψηφίο 1, διαφορετικά παράγεται στην έξοδο το λογικό ψηφίο 0. Το στοιχείο που πραγματοποιεί την πράξη αυτή αποκαλείται *διαφοριστής*, εξ' ου και το όνομα της συγκεκριμένης τεχνικής. Από τα παραπάνω, συνάγεται το συμπέρασμα ότι στην ουσία αποστέλλεται μόνο η διαφορά στο πλάτος της πληροφορίας και όχι η πληροφορία αυτούσια. Για το λόγο αυτό, η διαμόρφωση Δέλτα εμφανίζει αυξημένο σηματοθορυβικό λόγο (*SNR*) κατά την ανάκτηση του σήματος στον δέκτη. Οι τεχνικές για τη μείωση του λόγου αυτού παρουσιάζονται στη συνέχεια.

2.2.1 Παράδειγμα διαμόρφωσης Δέλτα στο MATLAB

Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζονται κάποια απλά παραδείγματα διαμόρφωσης Δέλτα που πραγματοποιήθηκαν με το υπολογιστικό πρόγραμμα *MATLAB*.

Το διάγραμμα 2-2 παρουσιάζει το πλάτος του ηχητικού σήματος στη διάρκεια του χρόνου.

Στην εικόνα 2-3 παρουσιάζεται το επίπεδο κβάντισης σύμφωνα με το οποίο θα συγκριθεί το σήμα εισόδου ώστε να αποφανθεί το σύστημα για τιμές 0 ή 1.



Εικόνα 2-1: Διαγραμματική απεικόνιση Διαμόρφωσης Δέλτα

Το MATLAB υπολογίζει τα επίπεδα κβάντισης,

Ulevels =

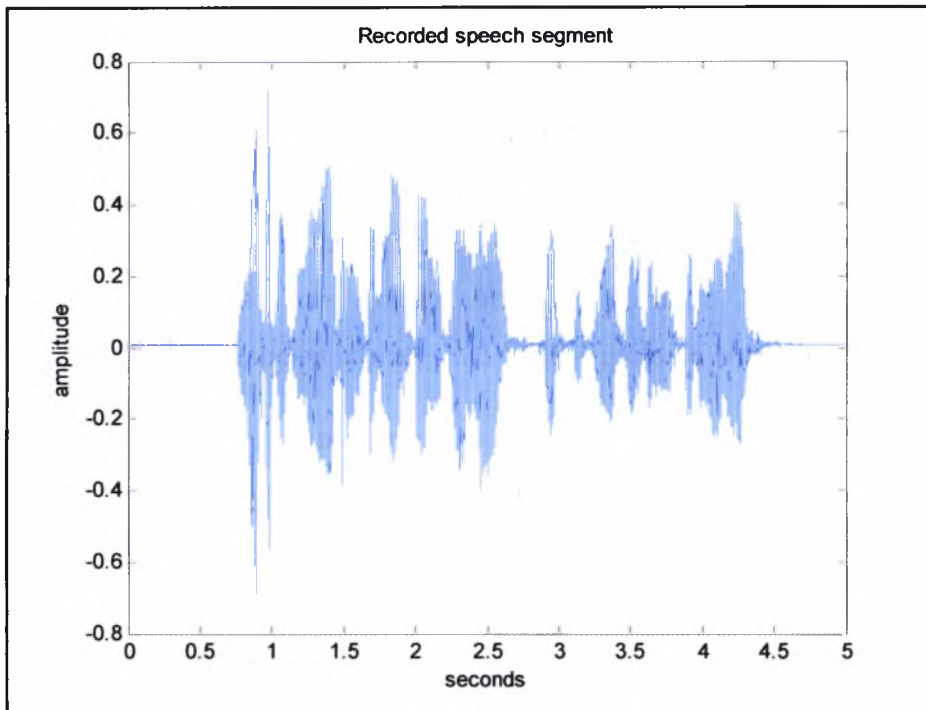
-0.3377

0.3664

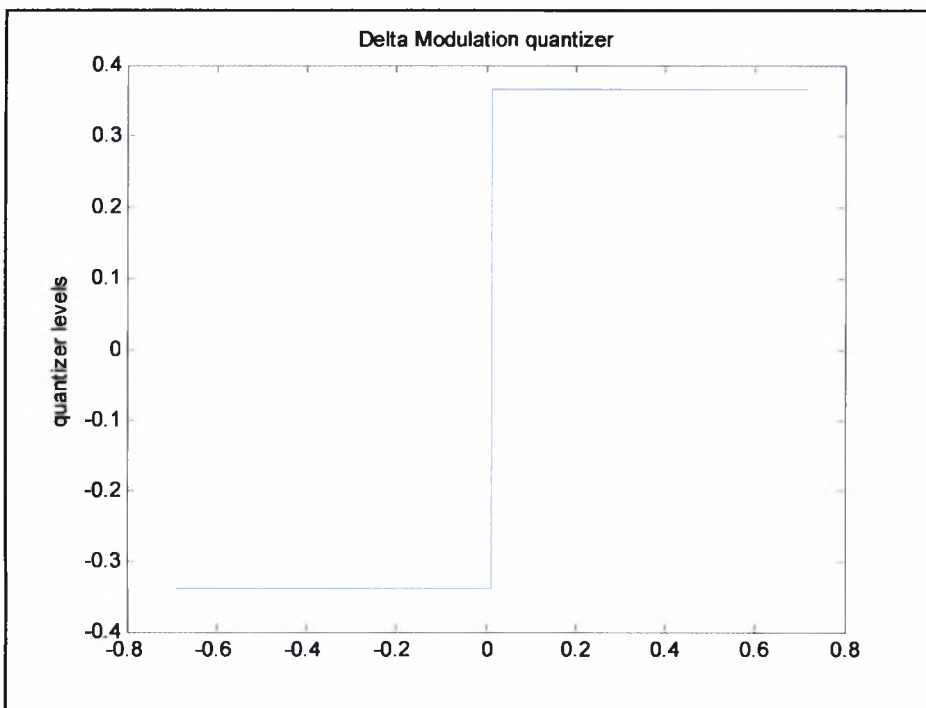
καθώς και την τιμή για την οποία το σύστημα αποφαινεται 1 – αν το σήμα εισόδου την υπερβαίνει - διαφορετικά αποφαινεται 0.

Ubreakpoints =

0.0144



Εικόνα 2-2: Διάγραμμα πλάτους (έντασης) ηχητικού σήματος



Εικόνα 2-3: Στάθμες σύγκρισης του διαφοριστή

Σημειώνεται εκ νέου ότι η διαμόρφωση Δέλτα χρησιμοποιεί μόνο 1 bit για την κωδικοποίηση του σήματος. Για λόγους ευθείας σύγκρισης παραθέτουμε και τις στάθμες κβάντισης ενός ομοιόμορφου συστήματος κωδικοποίησης, στην οικογένεια του οποίου ανήκει και η διαμόρφωση Δέλτα, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Με τον τρόπο αυτό καθίσταται κατανοητή η διαφορά στην ποιότητα του σήματος εξόδου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιούνται 4 δυαδικά ψηφία (*bits*) για την κωδικοποίηση.

Ο σηματοθορυβικός λόγος για τη διαμόρφωση Δέλτα και τον ομοιόμορφο κβαντιστή 4 *bits*, αντίστοιχα, δίνεται παρακάτω:

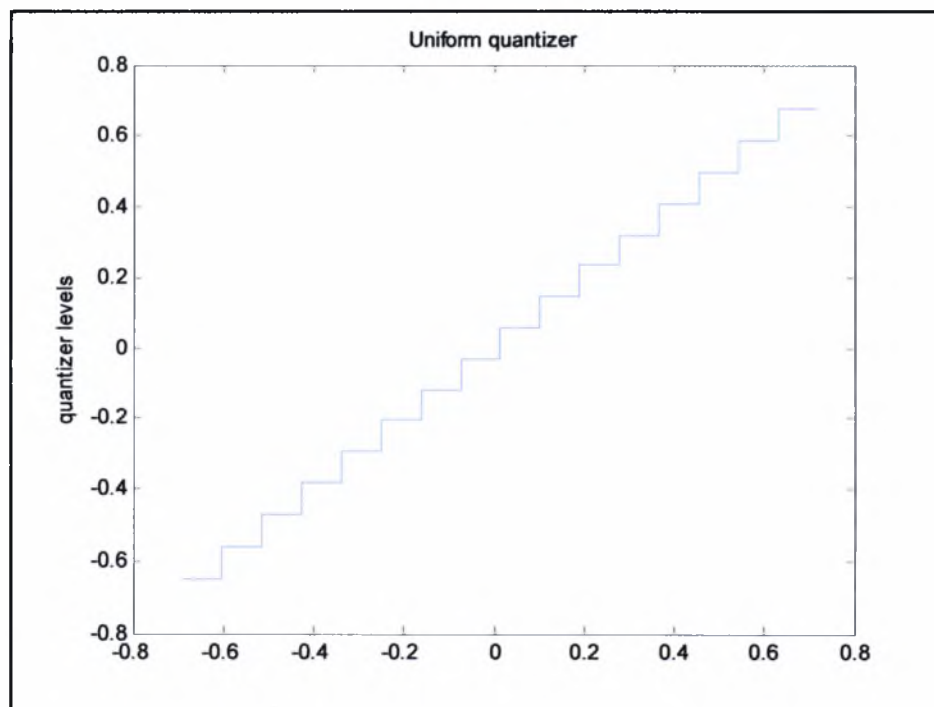
SQRN_DPCM_DM =

0.0693 dB

SQRNUnidPCM =

10.7966 dB

Καθίσταται ευκρινής η διαφορά στην ποιότητα των σημάτων εξόδου, καθώς



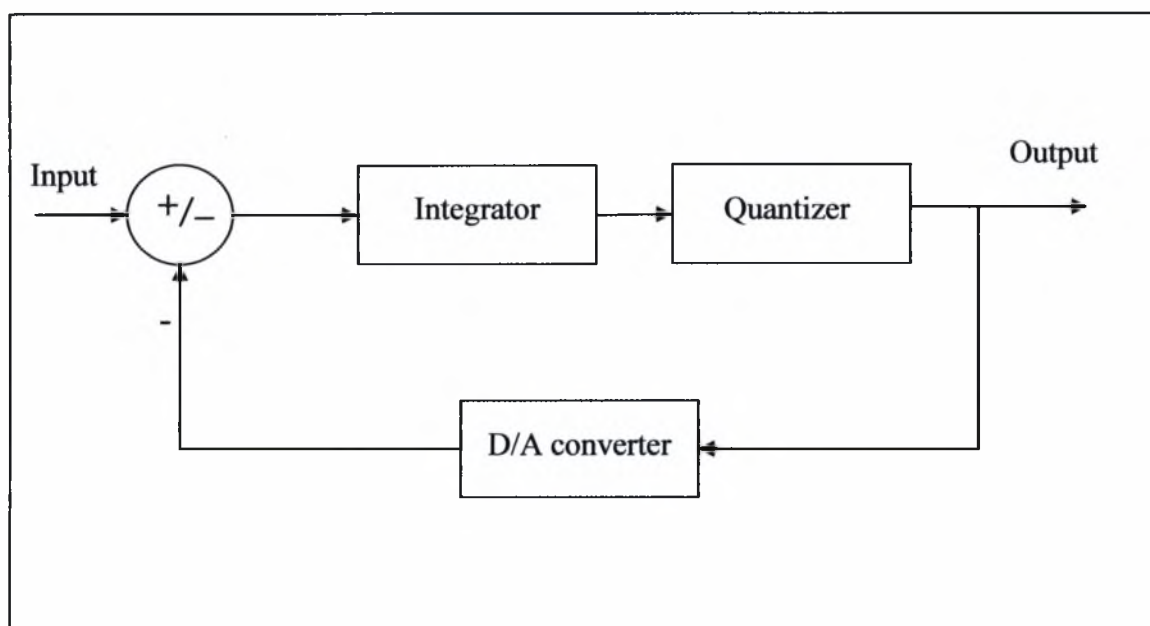
Εικόνα 2-4: Επίπεδα κβάντισης για ομοιόμορφο κβαντιστή 4 bits.

όσο μεγαλύτερος είναι σηματοθορυβικός λόγος, τόσο πιο «εύηχο» το σήμα στην έξοδο, λόγω της μείωσης του θορύβου.

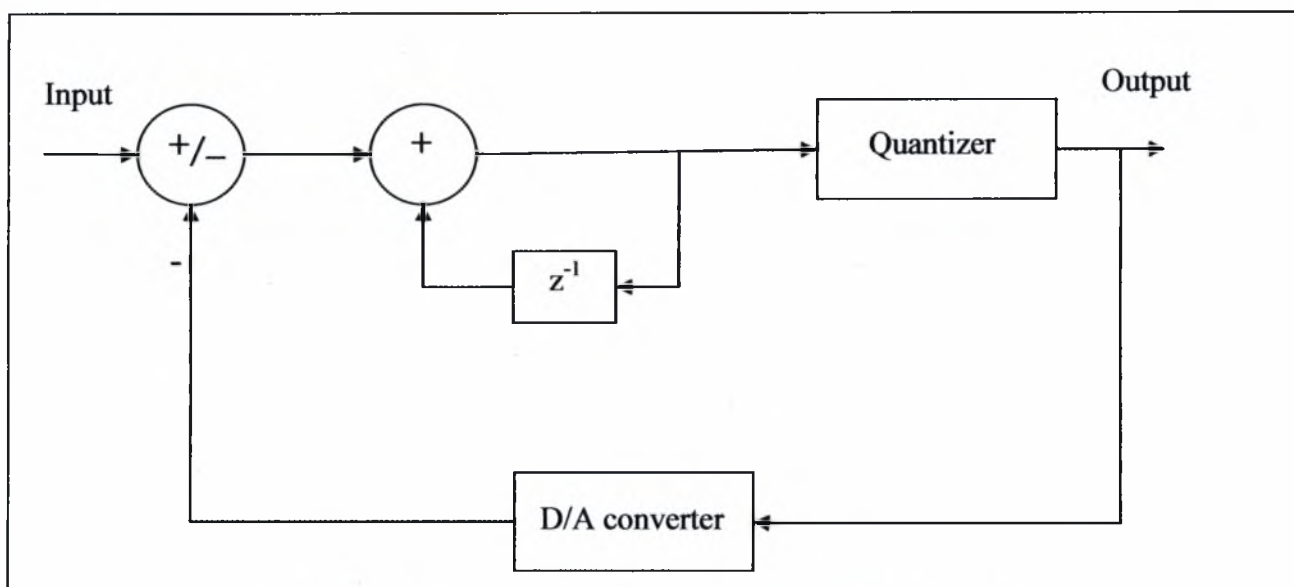
2.3 Διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα (ΣΔ) – *Sigma Delta (SD) Modulation*

Η διαμόρφωση ΣΔ αποτελεί μια επέκταση της διαμόρφωσης Δέλτα. Ειδικότερα, η διαφοροποίηση της ως προς την διαμόρφωση Δέλτα συνίσταται στην προσθήκη ενός ολοκληρωτή πριν το στάδιο της διαφόρισης. Το γεγονός αυτό μπορεί να επιλύσει το βασικό πρόβλημα του θορύβου που υπεισέρχεται στη διαμόρφωση Δέλτα, λόγω του περιορισμένου αριθμού *bits*. Το όνομα της διαμόρφωσης αυτής, προκύπτει, επομένως, από τον συνδυασμό ολοκλήρωσης (*Sum*) και διαφόρισης (*Difference*) – SD.

Στην πραγματικότητα, ο ολοκληρωτής υλοποιείται με ένα σύστημα κλειστού βρόγχου πριν από την «άφιξη» του σήματος στον διαφοριστή. Σχηματικά, η διαμόρφωση ΣΔ απεικονίζεται στα παρακάτω διαγράμματα:



Εικόνα 2-5: Διαγραμματική απεικόνιση διαμορφωτή ΣΔ 1^{ης} τάξης (1)

Εικόνα 2-6: Διαγραμματική απεικόνιση διαμορφωτή ΣΔ 1^{ης} τάξης (2)

Λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις που σημειώθηκαν παραπάνω σχετικά με το στοιχείο του ολοκληρωτή, το παραπάνω διάγραμμα μπορεί να σχηματιστεί όπως φαίνεται στο σχήμα 2-6.

2.4 Λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ βήμα προς βήμα.

2.4.1 Αθροιστής

Αρχικά, το σήμα εισέρχεται στον 1^ο αθροιστή, όπου και μειούται κατά την τιμή του αποτελέσματος από τον προηγούμενο κύκλο. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει προηγούμενος κύκλος, δηλαδή όταν βρισκόμαστε στην έναρξη της επεξεργασίας, τότε η τιμή του αναλογικού σήματος διέρχεται ακέραια.

2.4.2 Ολοκληρωτής

Μετά από την διέλευση από τον αθροιστή το αναλογικό –ακόμη– σήμα διέρχεται από τον ολοκληρωτή. Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι ο ολοκληρωτής είναι στην πραγματικότητα ένας βρόγχος. Στο στάδιο αυτό, πραγματοποιείται η πράξη της ολοκλήρωσης, δηλαδή της σταδιακής άθροισης. Στην τιμή του σήματος που μόλις έχει διέλθει από τον 1^ο αθροιστή,

προστίθεται εκ νέου η τιμή που έχει αποθηκεύσει ο ολοκληρωτής από τον προηγούμενο κύκλο. Για το λόγο αυτό, εμφανίζεται η μονάδα καθυστέρησης z^{-1} ³ στην εικόνα 2-6. Με άλλα λόγια, ο ολοκληρωτής διατηρεί ένα στοιχείο μνήμης, ώστε να καθίσταται εφικτή η πράξη αυτή. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι, όταν ο διαμορφωτής βρίσκεται στον 1^ο κύκλο λειτουργίας, το στοιχείο μνήμης δεν έχει κάποια αποθηκευμένη τιμή και, ως εκ τούτου, το σήμα διέρχεται αμετάβλητο μέσα από τον ολοκληρωτή. Σε αντίθετη περίπτωση, η τιμή του επηρεάζεται με τον τρόπο που αναλύθηκε προηγουμένως.

2.4.3 Διαφοριστής-Σταθμιστής

Ο διαφοριστής είναι το σταδίο που πραγματοποιεί αυτή καθ' εαυτή την ψηφιοποίηση του σήματος. Το επεξεργασμένο, μέχρι τη στιγμή αυτή, σήμα διέρχεται μέσα από τον διαφοριστή, ο οποίος αποφαινεται στην έξοδο 1 ή 0. Το κρίσιμο ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό είναι με βάση ποιο κατώφλι πρέπει να ληφθεί η ανάλογη απόφαση.

Έχοντας στη μνήμη ότι ο διαμορφωτής ΣΔ χρησιμοποιεί 1 bit στην έξοδο για αναπαράσταση, όπως ακριβώς και η απλοϊκή διαμόρφωση Δέλτα, συνάγεται εύκολα το συμπέρασμα ότι χρησιμοποιείται ένα κομβικό σημείο απόφασης, πάνω από το οποίο λαμβάνουμε 1 στην έξοδο και κάτω από το οποίο λαμβάνουμε 0. Στη διαμόρφωση Σίγμα Δέλτα το σημείο απόφασης υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$A_{ref} = \frac{A_{full}}{2^Q},$$

όπου A_{ref} η τιμή του σημείου απόφασης (*breakpoint*), A_{full} το συνολικό πλάτος του σήματος εισόδου και Q ο αριθμός των bits που χρησιμοποιεί ο διαμορφωτής. Στην περίπτωση του διαμορφωτή ΣΔ $Q=1$, επομένως η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε:

³ Καταχρηστικά, χρησιμοποιείται η σημειολογία z^{-1} για την απόδοση της μονάδος καθυστέρησης. Στην πραγματικότητα, ο συγκεκριμένος συμβολισμός αναφέρεται στον μετασχηματισμό z ενός σήματος διακριτού χρόνου και όχι αναλογικού –άρα συνεχούς χρόνου, ωστόσο, στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει η συγκεκριμένη απόδοση.

⁴ Ball, Stuart, *Analog-to-Digital Converters*, 01/05/01 (προσπελάστηκε την 24/04/2008), διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.embedded.com/story/OEG20010418S0038>, Διαδίκτυο

$$A_{ref} = \frac{A_{full}}{2}.$$

Έστω ένα ημιτονοειδές σήμα τάσης, με τιμή πλήρους πλάτους⁵ $V=+5V$. Τότε, η αντίστοιχη V_{ref} ισούται με 2.5V.

2.4.4 Μετατροπέας Ψηφιακό προς Αναλογικό (Digital-to-Analog Converter)

Στο τελευταίο στάδιο, η εκάστοτε έξοδος του διαμορφωτή πρέπει να ανακτήσει την αναλογική της τιμή, έτσι ώστε να είναι εφικτή η επανεκκίνηση της διαδικασίας από την αρχή για το επόμενο στιγμιότυπο του αναλογικού σήματος. Το θέμα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι ποια τιμή πρέπει να ανακτήσει το ψηφιοποιημένο δείγμα. Ορίζουμε μια τιμή αναφοράς, έστω V_{REF} , η οποία ανατίθεται στο δείγμα με τιμή 1, ενώ, αντίθετα, όταν στην έξοδο έχουμε τιμή 0, τότε αναθέτουμε την τιμή $-V_{REF}$. Θεωρούμε ότι η τιμή V_{REF} δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

Συνοψίζοντας τη λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ, το αναλογικό σήμα διέρχεται από τον αθροιστή, όπου μειούται κατά την τιμή $\pm V_{REF}$ που προκύπτει από τον προηγούμενο κύκλο. Έπειτα, διέρχεται από τον ολοκληρωτή, όπου προστίθεται με την προηγούμενη τιμή που έχει αποθηκευμένη σε στοιχείο μνήμης. Κατόπιν, έρχεται η στιγμή όπου το δείγμα λαμβάνει μια ψηφιακή τιμή 0 ή 1 συγκρινόμενη με ένα προκαθορισμένο κατώφλι στο διαφοριστή. Τέλος, η τιμή που προκύπτει μεταβάλλεται εκ νέου σε μια αναλογική ποσότητα, έτσι ώστε να επανεκκινηθεί η διαδικασία για την επόμενη τιμή του διανύσματος του αναλογικού σήματος.

2.5 **Ελαχιστοποίηση θορύβου – Oversampling**

Όπως διαφαίνεται από τις προηγούμενες παραγράφους, η διαμόρφωση ΣΔ είναι και αυτή μια απλοϊκή διαδικασία μετατροπής ενός σήματος από αναλογική μορφή σε ψηφιακή. Για το λόγο αυτό, υπεισέρχεται θόρυβος, με άλλα λόγια, η προσέγγιση της ψηφιακής εξόδου προς την αναλογική είσοδο δεν είναι αρκετά ακριβής. Η ποιότητα, βεβαίως, της εξόδου και η βελτιστοποίησή της έγκειται στο είδος της εφαρμογής και στο κατά πόσο είναι αυτή επιθυμητή.

⁵ Πλήρες πλάτος ή πλάτος από κορυφή σε κορυφή (*peak-to-peak*)

Μία μέθοδος για την ελαχιστοποίηση του θορύβου είναι αυτή της υπερδειγματοληψίας (*oversampling*). Από το θεώρημα του *Nyquist* είναι γνωστό ότι για να υπάρχει ακριβής ανάκτηση ενός αναλογικού σήματος από το αντίστοιχο ψηφιακό πρέπει η συχνότητα της δειγματοληψίας, η ταχύτητα δηλαδή με την οποία λαμβάνονται οι αναλογικές τιμές για την μετατροπή τους σε ψηφιακές, να είναι τουλάχιστον διπλάσια της αρχικής συχνότητας του σήματος. Η σχέση που επιβάλλεται να συνδέει την αρχική συχνότητα του σήματος με την συχνότητα της δειγματοληψίας είναι:

$$f_s \geq 2 f_o,$$

όπου f_o η μέγιστη συχνότητα του σήματος εισόδου ή *εύρος ζώνης*. Στην περίπτωση της υπερδειγματοληψίας, πολλαπλασιάζουμε το δεξί μέλος της ανισότητας με έναν παράγοντα $\beta \gg 1$.

Οι κύριοι λόγοι για τους οποίους εφαρμόζεται η υπερδειγματοληψία είναι οι παρακάτω:

- Μειώνει την *αναδίπλωση* (*aliasing*)⁶. Τα αναλογικά φίλτρα που πραγματοποιούν την ελαχιστοποίησή της είναι εξαιρετικά δύσκολο να κατασκευαστούν, καθώς η απαιτούμενη προδιαγραφή τους είναι η απότομη κλίση της καμπύλης στη συνάρτηση μεταφοράς. Κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς η τάξη της πολυπλοκότητας του φίλτρου αυξάνεται απαγορευτικά. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η τεχνική της υπερδειγματοληψίας. Αυξάνοντας το εύρος ζώνης του σήματος που δειγματοληπτείται, μειώνεται η πολυπλοκότητα του φίλτρου και οι προδιαγραφές γίνονται σημαντικά ελαστικότερες.
- Ελάττωση / Εξάλειψη / Διαμόρφωση θορύβου (*Noise shaping*). Αν ληφθούν πολλαπλά δείγματα από το ίδιο σήμα ή από κάποιο τμήμα του και το καθένα από αυτά περιέχει κάποιο τυχαίο, διαφορετικό, ασυσχέτιστο θόρυβο, τότε ο μέσος όρος των N δειγμάτων έχει συνολικό θόρυβο ελαττωμένο κατά παράγοντα $1/N$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αν πραγματοποιηθεί δειγματοληψία με συχνότητα 4-πλάσια της συχνότητας *Nyquist*, τότε ο

⁶ Στην επεξεργασία σήματος η αναδίπλωση είναι ένα είδος παραμόρφωσης που εμφανίζεται όταν αναπαριστούμε ένα σήμα υψηλής συχνότητας σε χαμηλότερη συχνότητα. Όταν εργαζόμαστε με ηχητικά σήματα, η αναδίπλωση μπορεί να έχει τη μορφή θορύβου ή να προσθέτει συχνότητες που δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα.

δυναμικός (ιδανικός) σηματοθρομβικός λόγος βελτιώνεται κατά παράγοντα 4. Αναλυτικότερα, έχουμε:

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2$$

όπου P_{signal} και P_{noise} η ισχύς του σήματος και του θορύβου, αντίστοιχα, και A_{signal} και A_{noise} το πλάτος RMS^7 σήματος και του θορύβου αντίστοιχα. Αν πραγματοποιηθεί υπερδειγματοληψία με παράγοντα $\beta=4$, τότε λαμβάνουμε:

$$SNR_{os} = \frac{4P_{signal}}{P_{noise}} = 4 * \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 = 4 * SNR$$

και

$$SNR_{os}(\text{dB}) = 10 \log \frac{4P_{signal}}{P_{noise}} = 10 \log 4 \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2 =$$

$$10 \log 4 + 20 \log \frac{A_{signal}}{A_{noise}} \cong 6\text{dB} + SNR(\text{dB}).$$

Υπάρχει κέρδος της τάξεως των 6 dB, το οποίο μπορεί να αυξηθεί περισσότερο αυξάνοντας τον παράγοντα β .

Οι διαμορφωτές ΣΔ παράγουν ένα ακόμη σφάλμα, το οποίο ονομάζεται *σφάλμα στάθμισης* (*quantization error*). Το σφάλμα αυτό οφείλεται στη διαφορά που υπάρχει μεταξύ της αναλογικής τιμής του σήματος και της ψηφιακής τιμής του. Στο διαμορφωτή ΣΔ το σφάλμα αυτό εμφανίζεται όταν το δυαδικό ψηφίο στην έξοδο πρέπει να ανακτήσει την αναλογική του τιμή στον Ψ/Α μετατροπέα. Η τιμή που ανακτά, τελικά, είναι $A_{ref} = \frac{A_{full}}{2}$, η οποία μπορεί να διαφέρει σημαντικά από την πραγματική τιμή του αναλογικού δείγματος. Το σφάλμα στάθμισης, όταν αυτό είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, εκφράζεται μέσω του τύπου:

$$SNR_{ADC} = 20 \log_{10}(2^Q) \text{ dB},$$

⁷ RMS: Root Mean Square, η μέση τετραγωνική τιμή μιας ποσότητας που εμφανίζει διακυμάνση. Π.χ., για ένα ημιτονοειδές σήμα η τιμή αυτή είναι $A/\sqrt{2}$, όπου A το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

με Q τον αριθμό των *bits* που παράγει στη έξοδο ο αναλογικό-προς-ψηφιακό μετατροπέας. Έτσι, ένας διαμορφωτής ΣΔ που χρησιμοποιεί 1 bit έχει μέγιστο σφάλμα στάθμησης ίσο με:

$$SNR_{ADC} = 20 \log_{10}(2) \cong 6.026 \text{ dB.}$$

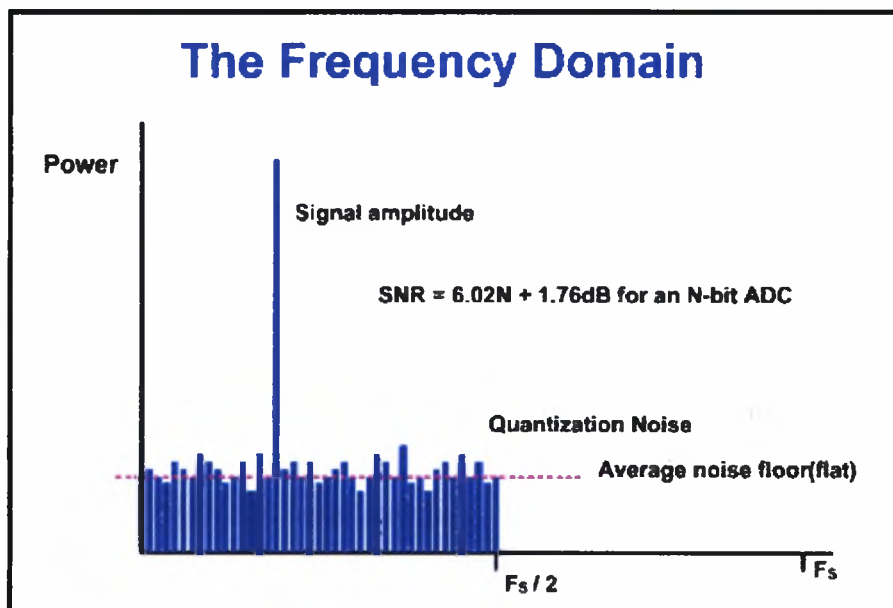
Όταν χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός *bits*, τότε ο σηματοθορυβικός λόγος δίνεται από τον τύπο

$$SNR_{ADC} = 20 \log_{10}(2) \cong 6.026Q \text{ dB.}$$

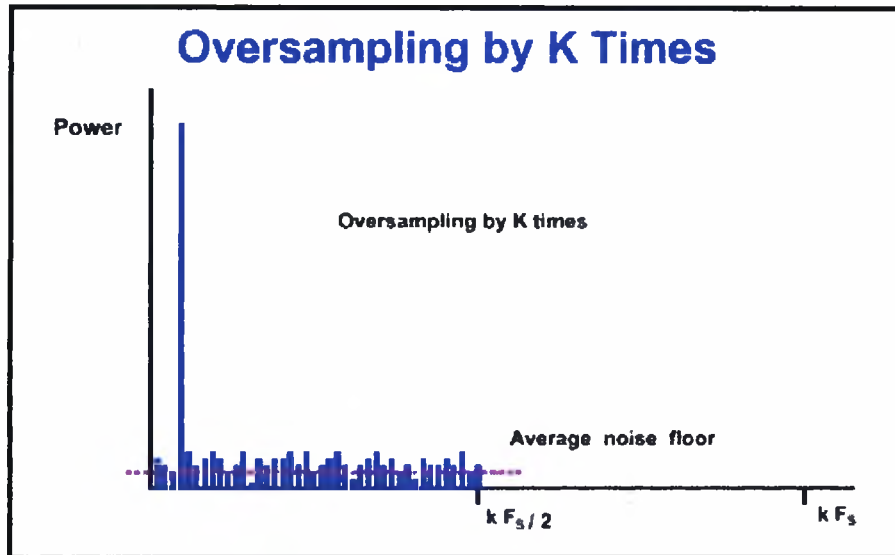
Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που στην είσοδο έχουμε ένα ημιτονοειδές σήμα πλήρους πλάτους, τότε η κατανομή του σφάλματος στάθμησης παύει να είναι ομοιόμορφη και εκφράζεται από τη σχέση:

$$SNR_{ADC} = (1.761 + 6.026Q) \text{ dB,}$$

δηλαδή 7.787 dB για την περίπτωση του μετατροπέα ΣΔ, όπου $Q = 1$.



Εικόνα 2-7: Θόρυβος που προκύπτει από το σφάλμα στάθμησης πριν την εφαρμογή υπερδειγματοληψίας



Εικόνα 2-8: Θόρυβος από σφάλμα στάθμισης μετά την εφαρμογή υπερδειγματοληψίας

Πρέπει, επίσης, να υπογραμμιστεί η σημασία του ολοκληρωτή στη διαμόρφωση ΣΔ. Η λειτουργία του είναι να αθροίζει κάθε δείγμα που εισέρχεται σε αυτόν με το προηγούμενό του, που διατηρεί σε στοιχείο μνήμης. Με τον τρόπο αυτό αθροίζονται και τα επιμέρους σφάλματα στάθμισης. Ειδικότερα, έστω ότι η έξοδος του ολοκληρωτή είναι $y(t)$. Τότε η σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο του ολοκληρωτή είναι η:

$$y(n) = x(n) + y(n - 1),$$

που λειτουργεί ως *χαμηλοπερατό φίλτρο*. Με τον τρόπο αυτό «καθαρίζονται» η χαμηλότερες συχνότητες που περιέχουν τη χρήσιμη πληροφορία και ο θόρυβος μεταφέρεται σε υψηλότερες συχνότητες, που δεν περιέχουν την επιθυμητή πληροφορία. Η λειτουργία του χαμηλοπερατού φίλτρου αναλύεται στην επόμενη παράγραφο. Περισσότερα για τον θόρυβο στους διαμορφωτές ΣΔ θα αναλυθούν στο κεφάλαιο 4.

2.6 Χαμηλοπερατό Φίλτρο – Lowpass Filter

Ένα χαμηλοπερατό φίλτρο είναι ένα σύστημα το οποίο αφήνει τις χαμηλές συχνότητες ενός σήματος εισόδου να περάσουν αδιάβλητες και αποκόπτει τις υψηλότερες συχνότητες που θεωρούνται ανεπιθύμητες. Η συχνότητα στην οποία το

φίλτρο αρχίζει να αποκόπτει τις ανεπιθύμητες συχνότητες ονομάζεται *συχνότητα αποκοπής* και συμβολίζεται με Ω_c . Η συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου είναι:

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Δεδομένου ότι το μέτρο της ποσότητας $e^{-j\Omega t}$ είναι 1, γίνεται αντιληπτό ότι συχνότητες χαμηλότερες της Ω_c «περνούν» μέσα από το φίλτρο χωρίς να υποστούν οποιαδήποτε μεταβολή.

Ιδανικά, στο διάγραμμα πλάτους – συχνότητας υπάρχει ακαριαία μεταβολή από το 1 στο 0 στη συχνότητα Ω_c . Ένα τέτοιο φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούνται αναλογικά (*IIR*) φίλτρα τα οποία αποτελούνται από μη-ιδανικά στοιχεία όπως πηνεία και πυκνωτές. Το απλούστερο από αυτά είναι ένα κύκλωμα αντίστασης – πυκνωτή (*Resistance – Capacitor – RC*) που καλείται, επίσης, και *φίλτρο πρώτης τάξης*.

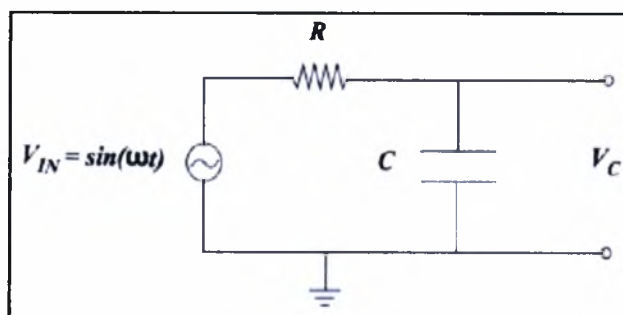
Επανερχόμενοι στο πεδίο της συχνότητας, η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι

$$Z_c = \frac{1}{j\Omega C}$$

και εκφράζεται σε *Ohm*. Θεωρώντας το παραπάνω κύκλωμα ως διαίρετη τάσης, η τάση κατά μήκος του πυκνωτή –επομένως η έξοδος- είναι:

$$V_c = \frac{1}{1 + j\Omega RC} V_{IN}$$

Η συχνότητα αποκοπής δίνεται από τον τύπο



Εικόνα 2-9: Κύκλωμα *RC* που υλοποιεί το χαμηλοπερατό φίλτρο

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Και, δεδομένου ότι $\Omega_c = 2\pi f_c$, έχουμε ότι $\Omega_c = \frac{1}{RC}$. Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω κυκλώματος είναι η

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega RC}$$

Ο παράγοντας $j\Omega RC$ μπορεί να αυξομειωθεί αναλόγως, ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το κέρδος κατά μήκος του πυκνωτή είναι

$$G_c = |H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + (\Omega RC)^2)}}$$

Παρατηρεί κανείς ότι όσο το $\Omega \rightarrow \infty$, τόσο μεγαλώνει το κέρδος στον πυκνωτή. Με άλλα λόγια, όσο χαμηλότερη είναι συχνότητα, τόσο η έξοδος τείνει να φτάσει στην τιμή της εισόδου V_{IN} .

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής της συνάρτησης μεταφοράς ενός αναλογικού χαμηλοπερατού φίλτρου δίνεται παρακάτω

$$H(s) = \frac{b_0}{s^L + a_L s^{L-1} + \dots + a_0}$$

όπου το L δίνεται εμπειρικά από το άθροισμα του αριθμού των πηγίων και των πυκνωτών στο κύκλωμα. Στην περίπτωση που περιγράφεται στην παράγραφο αυτή $L=1$, επομένως

$$H(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

και θεωρώντας $s = \sigma + j\Omega$, και στη γενική περίπτωση όπου $\sigma = 0$, επανέρχεται κανείς στην αρχική εξίσωση.

Παρουσιάζουμε στο σχήμα 2-10 ένα παράδειγμα απόκρισης του χαμηλοπερατού φίλτρου που υλοποιείται από το κύκλωμα RC , με τη βοήθεια των διαγραμμάτων *Bode*.

Έστω $\Omega_c = 100 \text{ Hz}$. Το σημείο που σημειώνεται με την κάθετη γραμμή υποδεικνύει τη συχνότητα αποκοπής. Επειδή στη συχνότητα αυτή αρχίζει να φθίνει η καμπύλη στο διάγραμμα πλάτους, η Ω_c αποκαλείται επίσης *συχνότητα γονάτου* ή *συχνότητα 3 dB*.

Στον ψηφιακό κόσμο ένα χαμηλοπερατό φίλτρο (*FIR – Finite Impulse Responding*) περιγράφεται από τη σχέση:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

όπου M η τάξη του φίλτρου. Επομένως, για ένα φίλτρο τάξης $M=1$, η σχέση απλοποιείται σε

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

και για $b_0 = b_1 = 1$ λαμβάνουμε $y(n) = x(n) + x(n-1)$, που είναι η σχέση που συνδέει την έξοδο του ολοκληρωτή που βρίσκεται μέσα στον διαμορφωτή ΣΔ.

Γενικά, ένα χαμηλοπερατό φίλτρο μπορεί –και επιβάλλεται– να εφαρμοστεί στην έξοδο του διαμορφωτή ΣΔ, για να αποκοπεί ο επιπλέον θόρυβος που υπεισέρχεται λόγω της όλης διαδικασίας και δεν εξαλείφεται με την υπερδειγματοληψία.

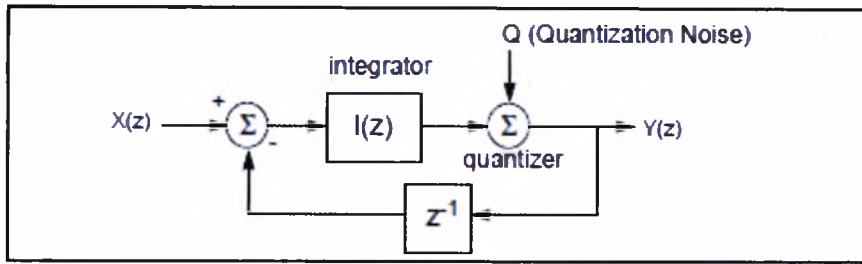
Τα διαγράμματα *Bode* ακολουθούν την ίδια λογική και παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο, όπου και παρουσιάζονται εκτενώς τα πειράματα που διενεργήθηκαν με τη χρήση του υπολογιστικού προγράμματος *MATLAB*.

2.7 Ανάλυση της διαμόρφωσης ΣΔ στο πεδίο του μετασχηματισμού Z

Ας θεωρήσουμε το βρόγχο 1^{ης} τάξης της διαμόρφωσης που δίνεται στην εικόνα 2.10. Η *συνάρτηση μεταφοράς* του ολοκληρωτή σημειώνεται ως $I(z)$ και ο σταθμιστής ενός *bit* μοντελοποιείται ως μία πηγή που προσθέτει θόρυβο. Από την τυπική ανάλυση σήματος διακριτού χρόνου προκύπτει:

$$Y(z) = Q(z) + I(z)[X(z) - z^{-1}Y(z)].$$

Λύνοντας ως προς $Y(z)$ την παραπάνω εξίσωση, λαμβάνουμε



2-10: Ανάλυση πεδίου z για τον διαμορφωτή ΣΔ

$$Y(z) = X(z) \frac{I(z)}{1 + I(z)z^{-1}} + Q(z) \frac{1}{1 + I(z)z^{-1}}$$

Η σχέση που χαρακτηρίζει τον ιδανικό ολοκληρωτή γράφεται ως

$$I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

επομένως η έξοδος του βρόγχου του ολοκληρωτή ΣΔ μπορεί να απολοποιηθεί ως εξής

$$Y(z) = X(z) + Q(z)(1 - z^{-1})$$

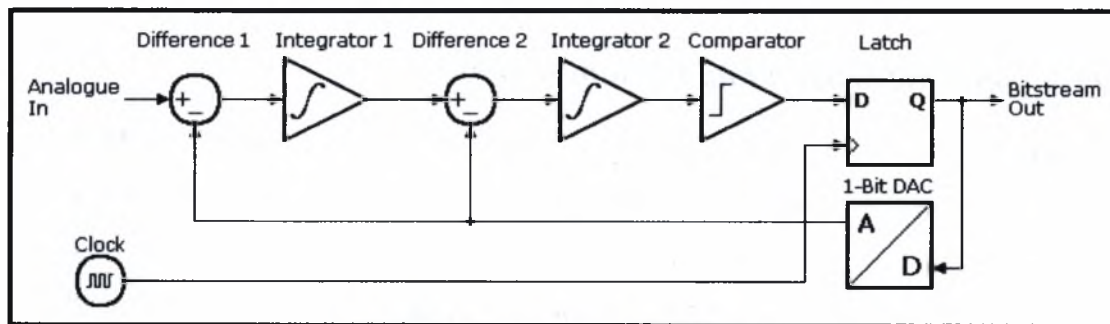
Ο διαφοριστής $(1 - z^{-1})$ διπλασιάζει την ισχύ του *θορύβου στάθμισης*. Ωστόσο, το σφάλμα μετατοπίζεται προς υψηλότερες συχνότητες, εξαιτίας της ύπαρξης του. Δεδομένου ότι το αναλογικό σήμα στην είσοδο υφίσταται υπερδειγματοληψία, ο υψίσυχνος θόρυβος μπορεί να αφαιρεθεί με τη χρήση ενός ψηφιακού χαμηλοπερατού φίλτρου, χωρίς να επηρεαστεί το σήμα εισόδου και η ποιότητα της πληροφορίας που περιέχεται στο κυρίως συχνοτικό φάσμα. Η διαδικασία του φιλτραρίσματος αποτελεί μέρος της διαδικασίας του *αποδεκατισμού (decimation)*.

2.8 Διαμορφωτές ΣΔ μεγαλύτερης τάξης

Πέρα από του διαμορφωτές ΣΔ 1^{ης} τάξης, υφίστανται αντίστοιχοι διαμορφωτές μεγαλύτερης τάξης. Το κυριότερο πλεονέκτημά τους είναι ότι παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στην ελάττωση του θορύβου στάθμισης. Γενικά, οι έξοδοι των μετατροπέων ΣΔ μεγαλύτερης τάξης παρουσιάζουν μικρότερο ποσοστό θορύβου στάθμισης κατά την είσοδό τους στο χαμηλοπερατό φίλτρο, καθώς δεν παρουσιάζουν τόσο έντονα το φαινόμενο της ύπαρξης διακριτών τόνων στο φάσμα συχνοτήτων – ισχύος της εξόδου τους. Στους αντίστοιχους διαμορφωτές ΣΔ 1^{ης} τάξης,

το φαινόμενο αυτό είναι εντονότερο και αναλύεται διεξοδικά στην παράγραφο 4.3. Ένα μετατροπέας ΣΔ 2^{ης} τάξης θα μπορούσε να είναι όπως αυτός που εμφανίζεται στην εικόνα 2.11. Η τάξη του υπολογίζεται από τον αριθμό των ολοκληρωτών που περιέχονται στο κύκλωμα.

Οι μετατροπείς ΣΔ μεγαλύτερης της 2^{ης} τάξης είναι δυνατό να υλοποιηθούν, αλλά δεν μπορούν να κατασκευαστούν προσθέτοντας απλώς επιπλέον επίπεδα. Ο λόγος στον οποίο οφείλεται αυτό είναι διότι η διαφορά φάσης που δημιουργείται από την προσθήκη ολοκληρωτών προκαλεί αστάθεια στο κύκλωμα. Συνήθως χρησιμοποιούνται στη θέση τους χαμηλοπερατά φίλτρα. Οι διαμορφωτές ΣΔ που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ήχου είναι, συνήθως, 5^{ης} τάξης και είναι δυνατό να πραγματοποιούν υπερδειγματοληψία με παράγοντα $\beta=64$.



Εικόνα 2-11: Διαμορφωτής ΣΔ 2^{ης} τάξης

3 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ ΣΔ ΣΤΟ MATLAB

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται τα πειράματα που εκτελέστηκαν προς περαιτέρω κατανόηση της λειτουργίας των διαμορφωτών ΣΔ. Αρχικά, χρησιμοποιείται ένα ημιτονοειδές σήμα, ώστε να αναλυθεί η συμπεριφορά του διαμορφωτή σε απλές εισόδους και έπειτα δοκιμάζεται στην είσοδο ένα πραγματικό σήμα φωνής και επαναλαμβάνεται η όλη διαδικασία εξ αρχής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών και τα συμπεράσματα που προκύπτουν.

Σημειώνεται ότι στις παρακάτω δοκιμές προβαίνουμε σε μία επιπλέον κατηγοριοποίηση. Ειδικότερα, θεωρείται ότι αρχικά το σήμα εισόδου είναι δειγματοληπτημένο, ενώ, στη συνέχεια, θεωρείται ότι το σήμα εισόδου είναι αναλογικό, οπότε πρέπει να υποστεί τη διαδικασία της δειγματοληψίας.

3.1 Ο Αλγόριθμος υλοποίησης του διαμορφωτή ΣΔ

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου της διαμόρφωσης ΣΔ είναι αρχικά αναγκαίο να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της υπερδειγματοληψίας. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η υπερδειγματοληψία έγκειται στον πολλαπλασιασμό της συχνότητας δειγματοληψίας *Nyquist* με έναν παράγοντα β . Κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου στο *MATLAB* η σύμβαση αυτή συνεπάγεται την δημιουργία ενός β -πλάσιου διανύσματος του δειγματοληπτημένου σήματος. Οι τιμές του νέου αυτού διανύσματος αλλάζουν κάθε β στοιχεία. Με άλλα λόγια, αντιγράφεται β φορές η τρέχουσα τιμή του δειγματοληπτημένου σήματος στο νέο διάνυσμα.

Επίσης, είναι αναγκαίο να ορίσουμε τα τρία διανύσματα που είναι αναγκαία για τη λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ. Τα διανύσματα αυτά αντιπροσωπεύουν τα εκάστοτε στάδια της λειτουργίας του. Ορίζουμε, επομένως, τα διανύσματα x_1 , x_s , x_q , που αναφέρονται στις εξόδους του αθροιστή, του ολοκληρωτή και του διαφοριστή-αντιστοίχως.

Ένα ακόμη στοιχείο που πρέπει να οριστεί στην υλοποίηση του αλγορίθμου είναι αυτό που υλοποιεί τον αποδεκατισμό του σήματος. Το υπερδειγματοληπτημένο σήμα είναι β φορές μεγαλύτερο από το δειγματοληπτημένο σήμα. Για το λόγο αυτό, πρέπει να επανέλθει στο μέγεθος του δειγματοληπτημένου σήματος, με την πρόσθεση ανά β -άδες των τιμών του σήματος και την διαίρεση του τελικού διανύσματος με την τιμή β , έτσι ώστε να γίνει και η ανάλογη κανονικοποίηση του πλάτους.

Ακολουθεί η παραβολή του αλγορίθμου με όλα τα στοιχεία που αναφέρθηκαν παραπάνω.

```
1. xn=zeros(1, dataLength*OSR);
2. tn=zeros(1, timeLength*OSR);
3. noSamples=length(xn);

4. k=1;

5. for i=0:10:noSamples
5.1.   for j=1:1:OSR
5.1.1.   xn(i+j)=syn(k);
5.2.   end
5.3.   k=k+1;
5.4.   if (k>dataLength)
5.4.1.   break;
5.5.   end
6. end

7. k=1;

8. for i=0:10:noSamples
8.1.   for j=1:1:OSR
8.1.1.   tn(i+j)=t(k);
8.2.   end
8.3.   k=k+1;
8.4.   if (k>timeLength)
8.4.1.   break;
8.5.   end
9. end

10. xi=zeros(1, noSamples);
11. xs=zeros(1, noSamples);
12. xq=zeros(1, noSamples);
```

```

16. for i=2:1:noSamples
    16.1. xs(i)=xn(i)-xq(i-1);
    16.2. xi(i)=xs(i)+xi(i-1);
    16.3. xq(i)=Vref*sign(xi(i));
17. end

18. xqq=zeros(1, noSamples+OSR);

19. for i=1:1:noSamples
    19.1. xqq(i+OSR)=xq(i);
20. end

21. xd=zeros(1,dataLength);

22. for i=1:1:dataLength
    22.1. for j=1:1:OSR
        22.1.1. xd(i)=xd(i)+xqq((i-1)*OSR+j);
    22.2. end
23. end

```

- Στις γραμμές 1 και 2 ορίζονται τα διανύσματα υπερδειγματοληψίας σήματος και χρόνου, x_n και t_n . Το μέγεθός τους είναι τόσες φορές μεγαλύτερο από το σήμα που έχει δειγματοληπτηθεί, όσες μας υποδεικνύει ο παράγοντας β (OSR).
- Στις γραμμές 4 έως 9 αντιγράφεται β φορές η τιμή του δείγματος του δειγματοληπτημένου σήματος στο διάνυσμα υπερδειγματοληψίας. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για το διάνυσμα του χρόνου, που, όπως θα φανεί παρακάτω, πραγματοποιείται για λόγους διευκόλυνσης με τα διαγράμματα που ακολουθούν.
- Στις γραμμές 10 έως 15 ορίζονται τα διανύσματα x_s , x_i , και x_q και αρχικοποιούνται οι τιμές του πρώτου στοιχείου τους. Η εξήγηση για την επιλογή των συγκεκριμένων τιμών αρχικοποίησης δίδεται στο εδάφιο 2.4.2.
- Στις γραμμές 16 και 17 βρίσκεται η υλοποίηση του κυρίως αλγορίθμου της διαμόρφωσης ΣΔ.

- Στη γραμμή 18 υλοποιείται το βοηθητικό διάνυσμα x_{qq} που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για τη διαδικασία του αποδεκατισμού. Το μέγεθος του διανύσματος αυτού είναι όσο του διανύσματος υπερδειγματοληψίας αυξημένο κατά β (OSR) θέσεις. Ο λόγος, για τον οποίο επιλέγεται το μέγεθος αυτό, αναλύεται αμέσως μετά. Στις γραμμές 19 και 20 του αλγορίθμου το διάνυσμα x_{qq} αρχικοποιείται. Οι β πρώτες θέσεις παραμένουν μηδενικές, ενώ στις υπόλοιπες αντιγράφονται οι τιμές του διανύσματος εξόδου του διαφοριστή – κβαντιστή.
- Αμέσως μετά, στη γραμμή 21, ορίζεται το διάνυσμα εξόδου x_d . Το μέγεθός του είναι ίσο με αυτό του δειγματοληπτημένου σήματος. Στις γραμμές 22 και 23 πραγματοποιείται ο αποδεκατισμός. Οι τιμές του βοηθητικού διανύσματος αθροίζονται ανά β και ανατίθενται σε μία θέση του διανύσματος x_d . Ουσιαστικά, η διαδικασία αυτή αποτελεί ένα φίλτρο που υπακούει στον γενικό τύπο

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k).$$

Στο σημείο αυτό, καθίσταται εμφανής ο λόγος για τον οποίο προτιμήθηκε η συγκεκριμένη μορφή του διανύσματος x_{qq} . Με τον τρόπο με τον οποίο είναι ορισμένο, εξασφαλίζεται η αιτιατότητα του φίλτρου, δηλαδή ότι σε κάθε βήμα της άθροισης δεν θα ζητούνται δείγματα από ύστερους χρόνους της διαδικασίας. Με άλλα λόγια το διάνυσμα x_d θα λαμβάνει διαδοχικά τιμές. Π.χ.:

$$x_d(1) = x_{qq}(1)$$

$$x_d(2) = x_{qq}(1) + x_{qq}(2)$$

...

$$x_d(10) = x_{qq}(1) + x_{qq}(2) + \dots + x_{qq}(10).$$

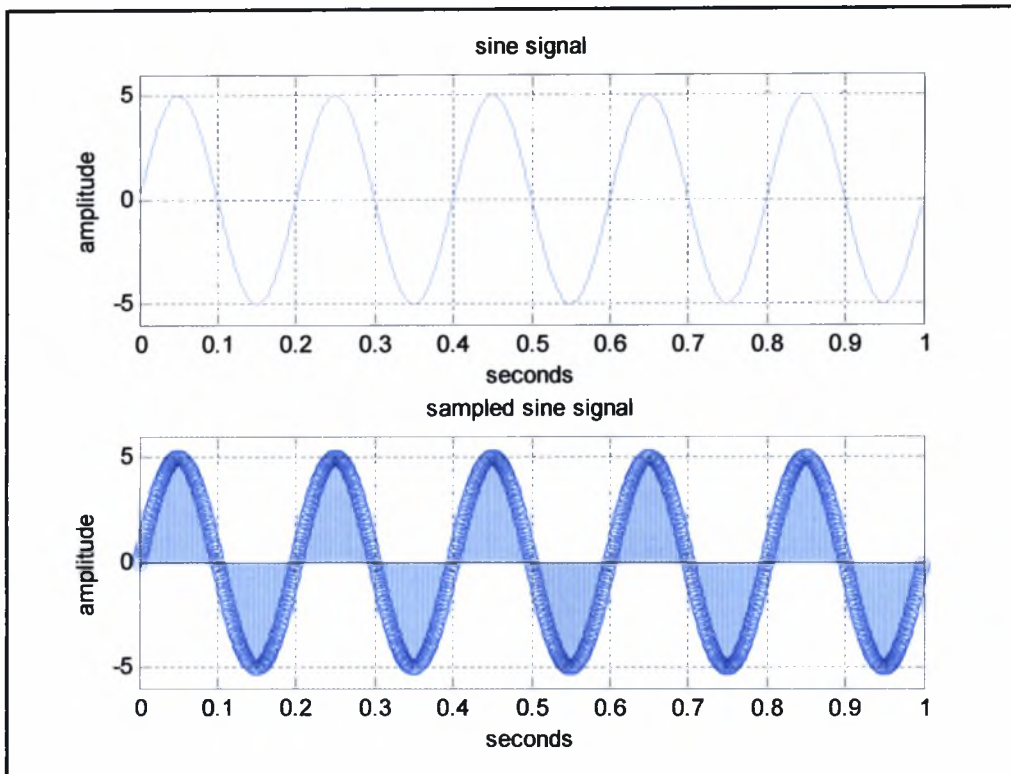
3.2 Δοκιμή λειτουργίας με ημιτονοειδή είσοδο

Στην παρούσα παράγραφο, όπως και στην επόμενη, μελετούμε τη

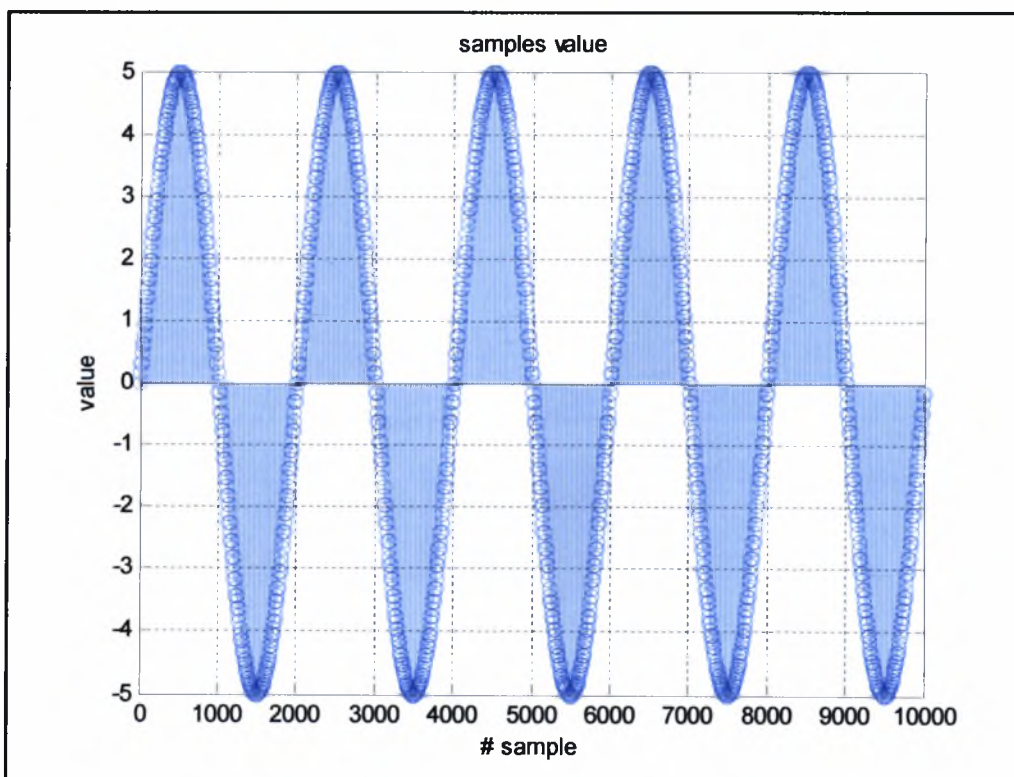
λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ, θεωρώντας ως δεδομένο ότι το σήμα έχει υποστεί δειγματοληψία. Εξετάζεται, δηλαδή, η διαδικασία από το στάδιο της υπερδειγματοληψίας και έπειτα.

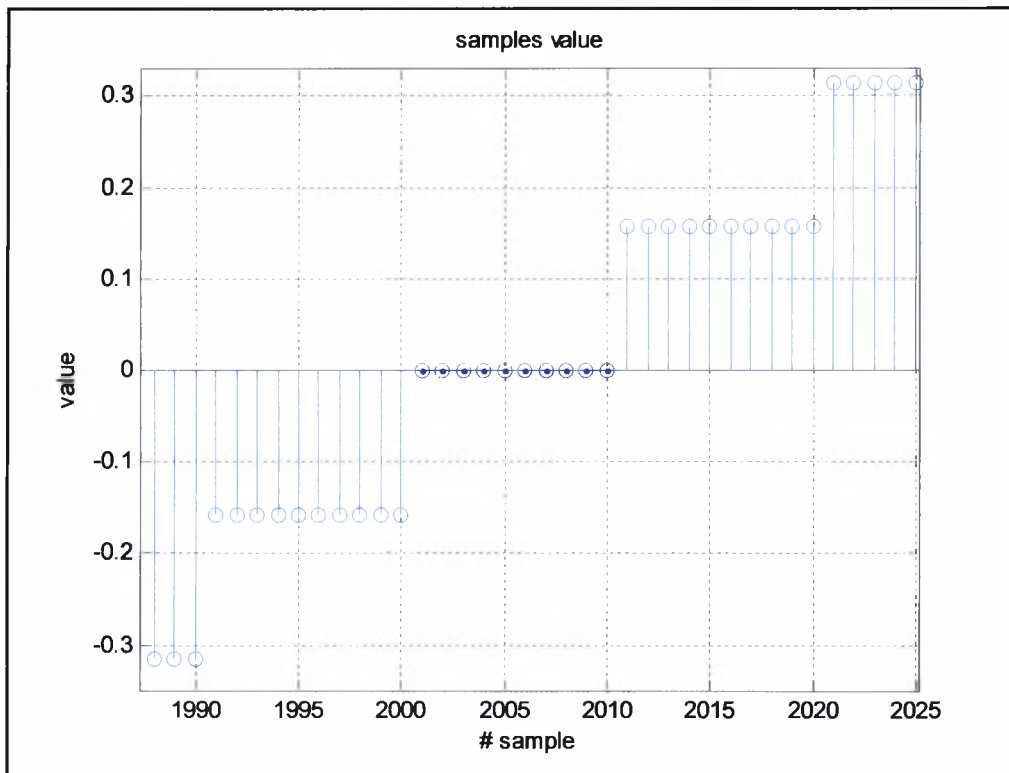
Το αρχικό σήμα εισόδου είναι ένα ημίτονο με πλάτος $A=5$ και συχνότητα $f_0=5$. Μετά τη δειγματοληψία, το μήκος του σήματος είναι 1000 δείγματα. Θεωρούμε $OSR=10$, επομένως το διάνυσμα υπερδειγματοληψίας θα έχει 10000 στοιχεία.

Στην εικόνα 3.1 μπορεί κανείς να δει το αρχικό σήμα σε αντιπαραβολή με τις τιμές της υπερδειγματοληψίας. Ίσως να μη γίνεται εμφανής η διαδοχική αντιγραφή της ίδιας τιμής στο διάνυσμα υπερδειγματοληψίας για το λόγο αυτό, στις εικόνες 3.2 και 3.3 φαίνεται περισσότερο ευκρινώς η ιδιότητα αυτή. Στις εικόνες 3.4 και 3.5 αναπαρίσταται η έξοδος του διαφοριστή. Είναι ευδιάκριτες οι διαδοχικές αρνητικές τιμές της εξόδου του, καθώς το σήμα εισόδου πλησιάζει στην αρνητική κορυφή, ενώ το αντίστροφο συμβαίνει όταν το σήμα εισόδου προσεγγίζει την θετική κορυφή. Στο αμέσως επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται η ανακατασκευή του σήματος στην έξοδο του διαμορφωτή. Τέλος, στην εικόνα 3.9 εμφανίζεται το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εξόδου, που υπολογίζεται μέσω του *Μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform)*. Το συχνοτικό περιεχόμενο είναι κατοπτρικό στα διαστήματα $[0, \frac{f_s}{2}]$ και $[\frac{f_s}{2}, f_s]$, για το λόγο αυτό αρκεί η παρατήρηση μόνο στο ήμισυ του διαστήματος. Διακρίνεται καθαρά η κύρια συχνότητα του σήματος εισόδου, ως αποτέλεσμα του χαμηλού κατωφλίου θορύβου.

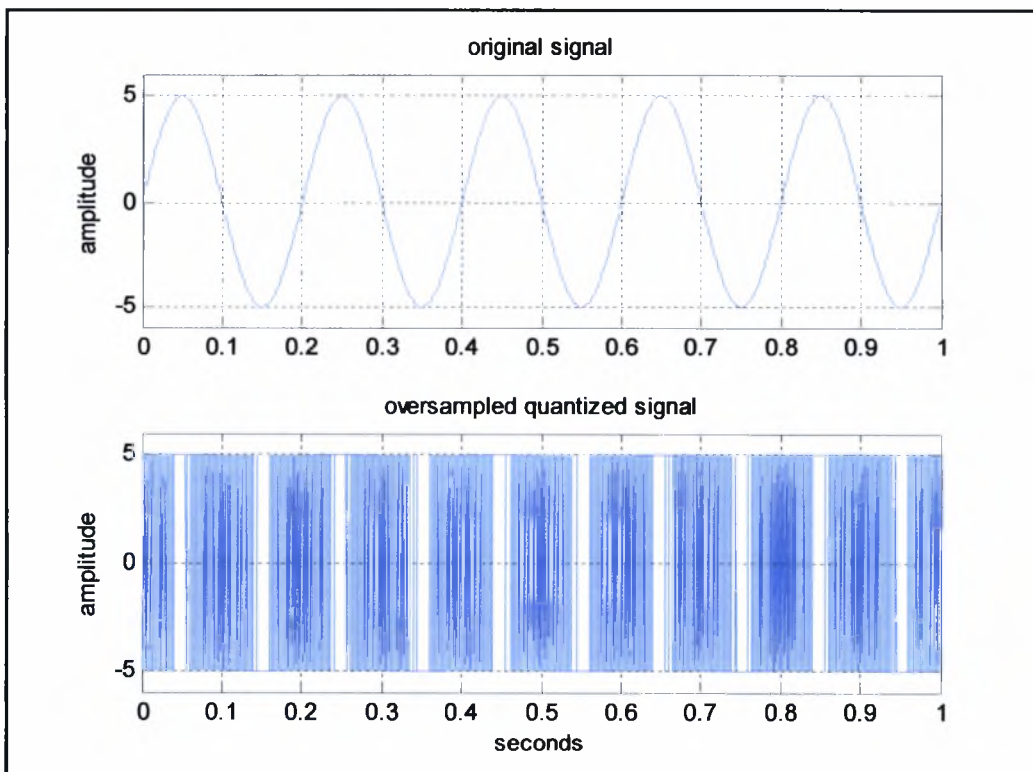


Εικόνα 3-1: Αρχικό σήμα και δειγματοληψία

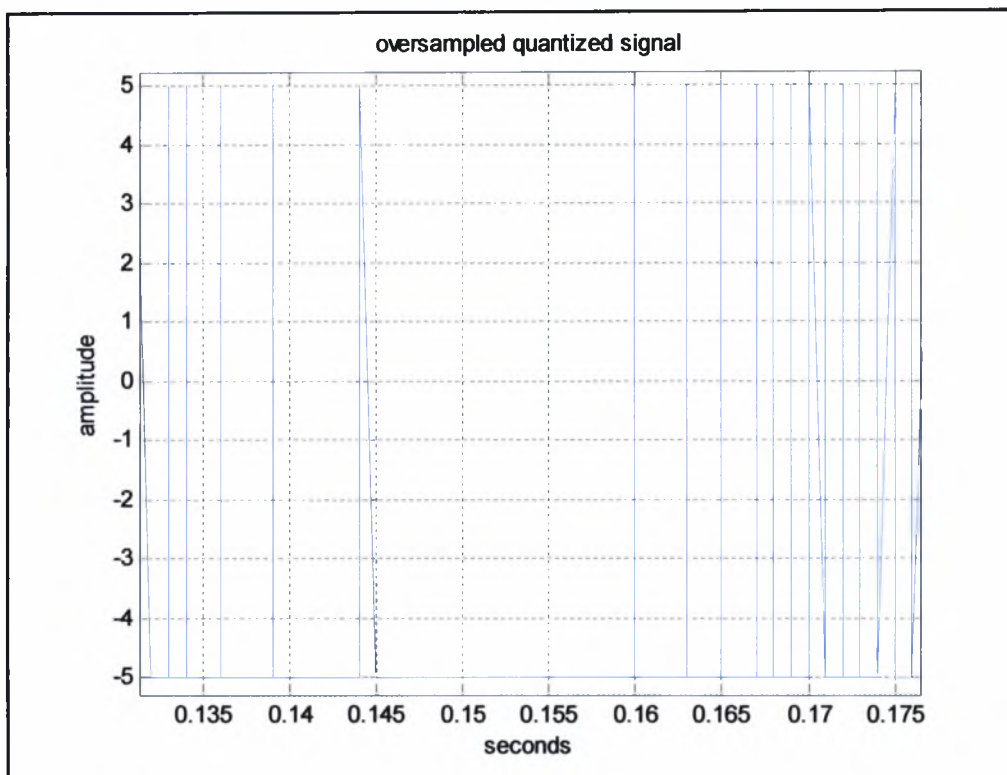
Εικόνα 3-2: Στιγμιότυπο υπερδειγματοληψίας (*oversampling*)



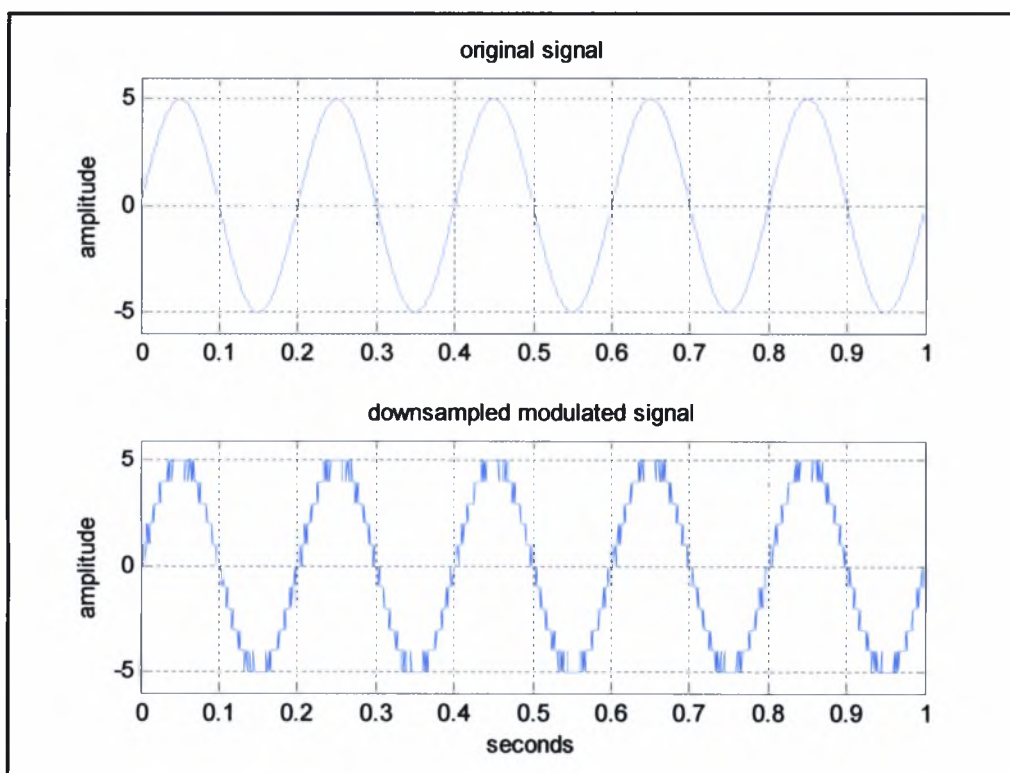
Εικόνα 3-3: Λεπτομέρεια στιγμιότυπου υπερδειγματοληψίας



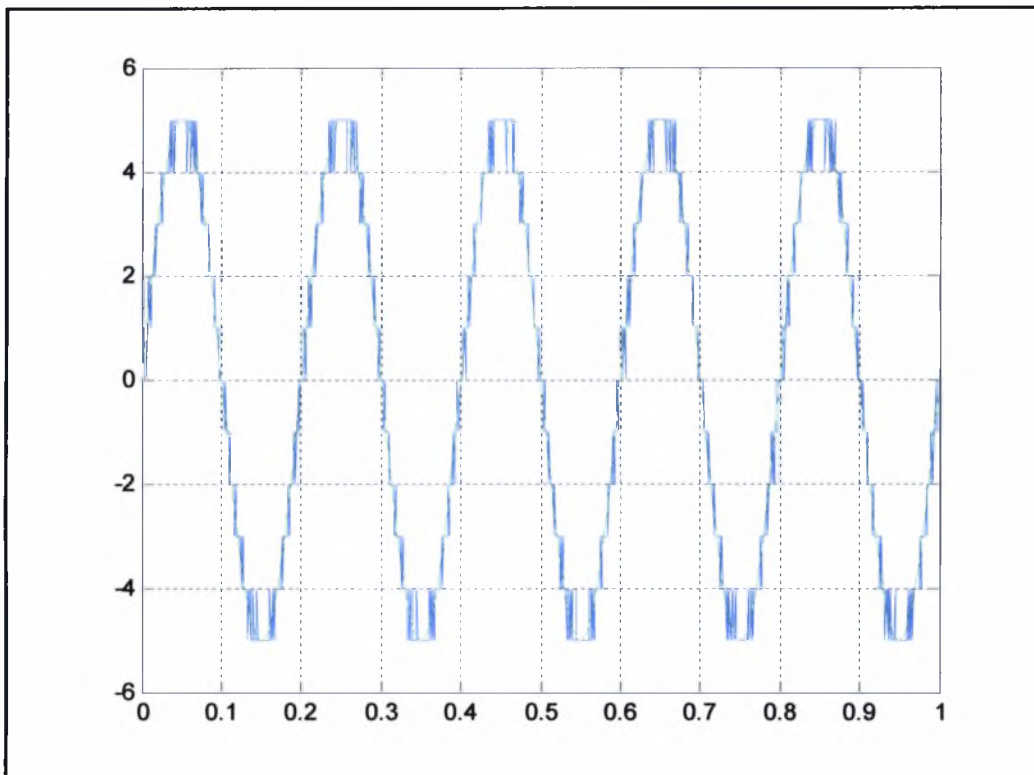
Εικόνα 3-4: Έξοδος σταθμιστή σε σύγκριση με το σήμα εισόδου



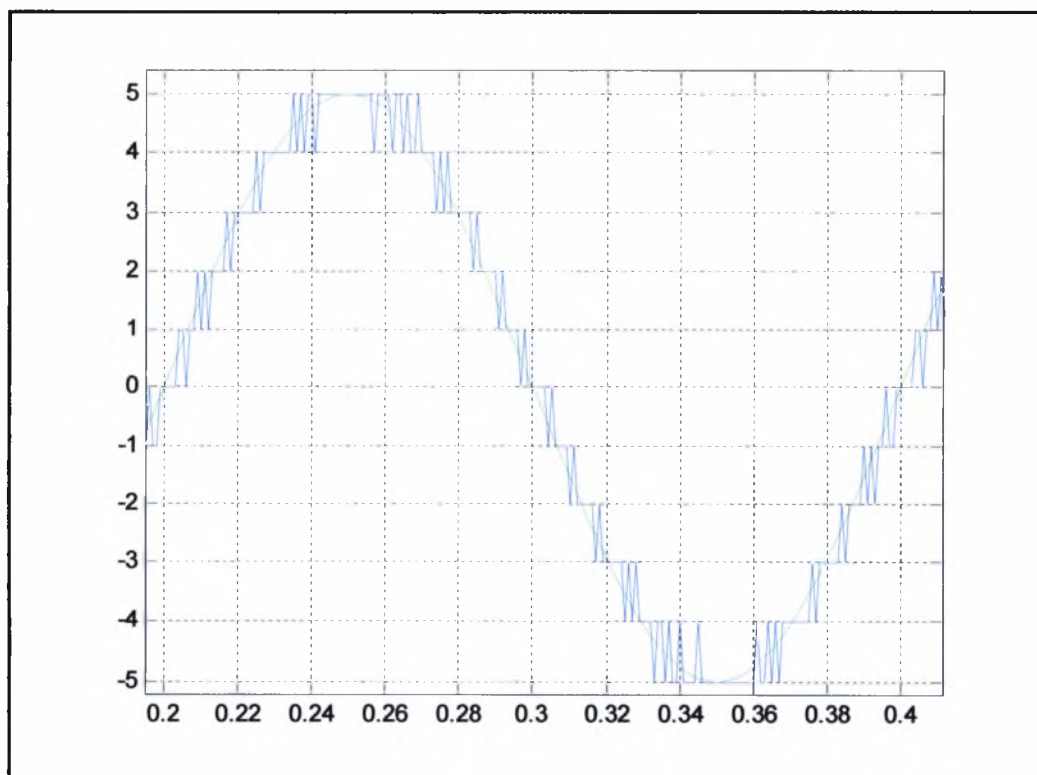
Εικόνα 3-5: Λεπτομέρεια εξόδου σταθμιστή



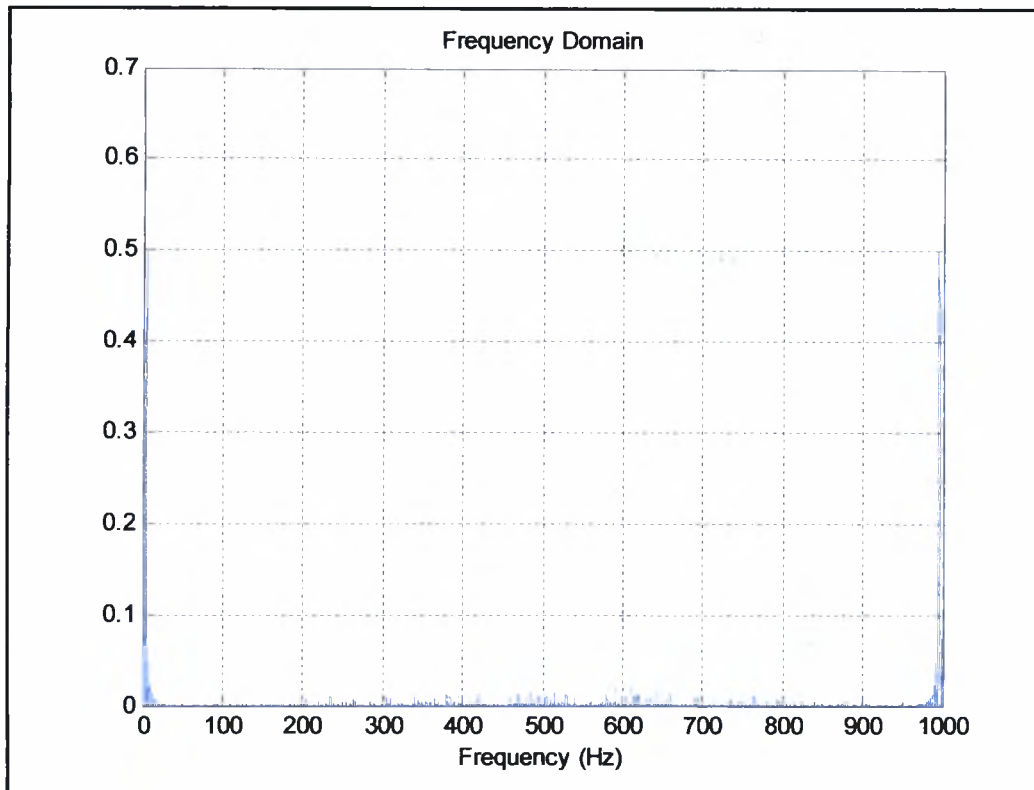
Εικόνα 3-6: Σήμα εισόδου και τελική έξοδος



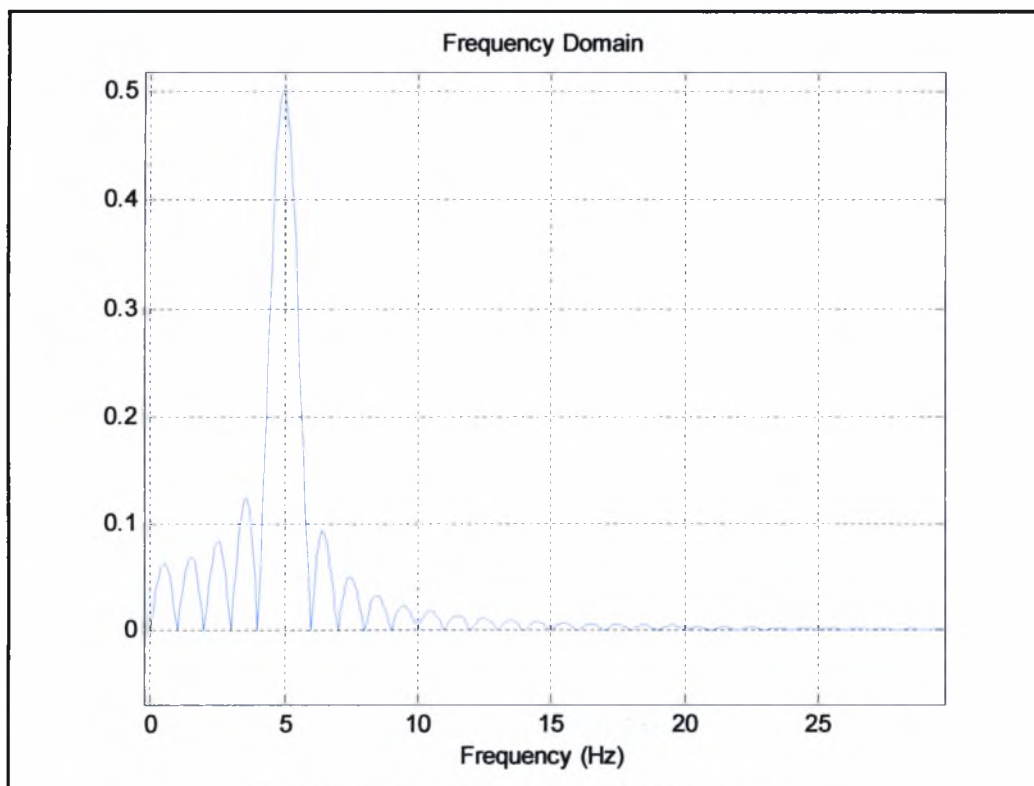
Εικόνα 3-7: Παραβολή των δύο σημάτων



Εικόνα 3-8: Λεπτομέρεια παραβολής των δύο σημάτων



Εικόνα 3-9: Φάσμα συχνοτήτων σήματος εξόδου



Εικόνα 3-10: Λεπτομέρεια συχνοτικού περιεχομένου

Στο τελευταίο διάγραμμα διακρίνεται ότι η κύρια συχνότητα του σήματος εισόδου παραμένει η $f_0=5$, ενώ οι παρασιτικές συχνότητες θορύβου, που υπεισέρχονται στη διαμόρφωση λόγω της κβάντισης, έχουν πολύ μικρή ή μηδενική

ισχύ. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδανικό και οφείλεται τόσο στην καλή αρχική δειγματοληψία του σήματος, όσο και στις ιδιότητες του διαμορφωτή ΣΔ.

3.3 Δοκιμή λειτουργίας με πραγματικό σήμα ήχου

Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ έχοντας ως είσοδο ένα πραγματικό σήμα ήχου. Θεωρείται και πάλι ότι η δειγματοληψία του σήματος έχει πραγματοποιηθεί, οπότε μελετάται η διαδικασία από το στάδιο της υπερδειγματοληψίας και έπειτα.

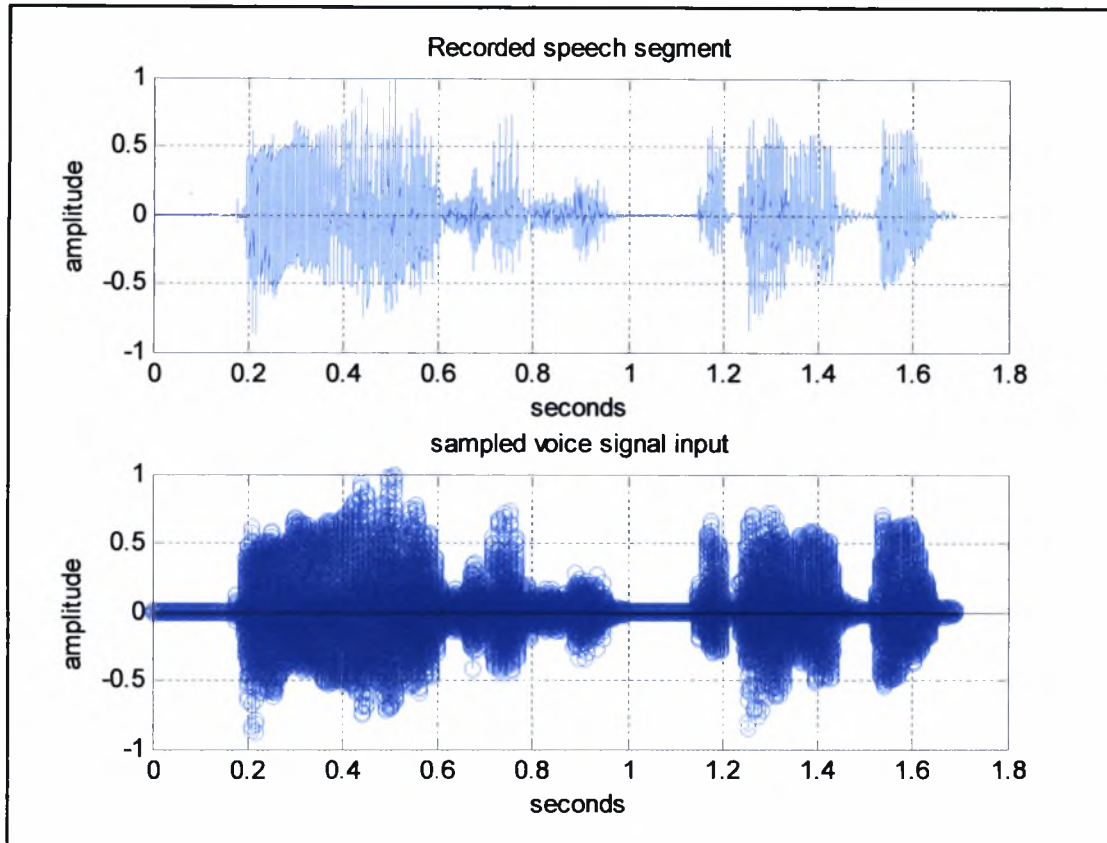
Αρχικά, πραγματοποιείται η φόρτωση του –δειγματοληπτημένου- σήματος εισόδου στην εφαρμογή *MATLAB* και υπολογίζεται η διάρκειά του σε seconds, το μήκος του σε δείγματα, καθώς και το πλήρες πλάτος του.

```
voiceSignal = load('y.mat');
dataLength=length(voiceSignal.data);
sec = 0:(1/voiceSignal.fs):(1/voiceSignal.fs)*
(length(voiceSignal.data)-1);
timeLength=length(sec);
fullAmpl=2*abs(max(voiceSignal.data));
```

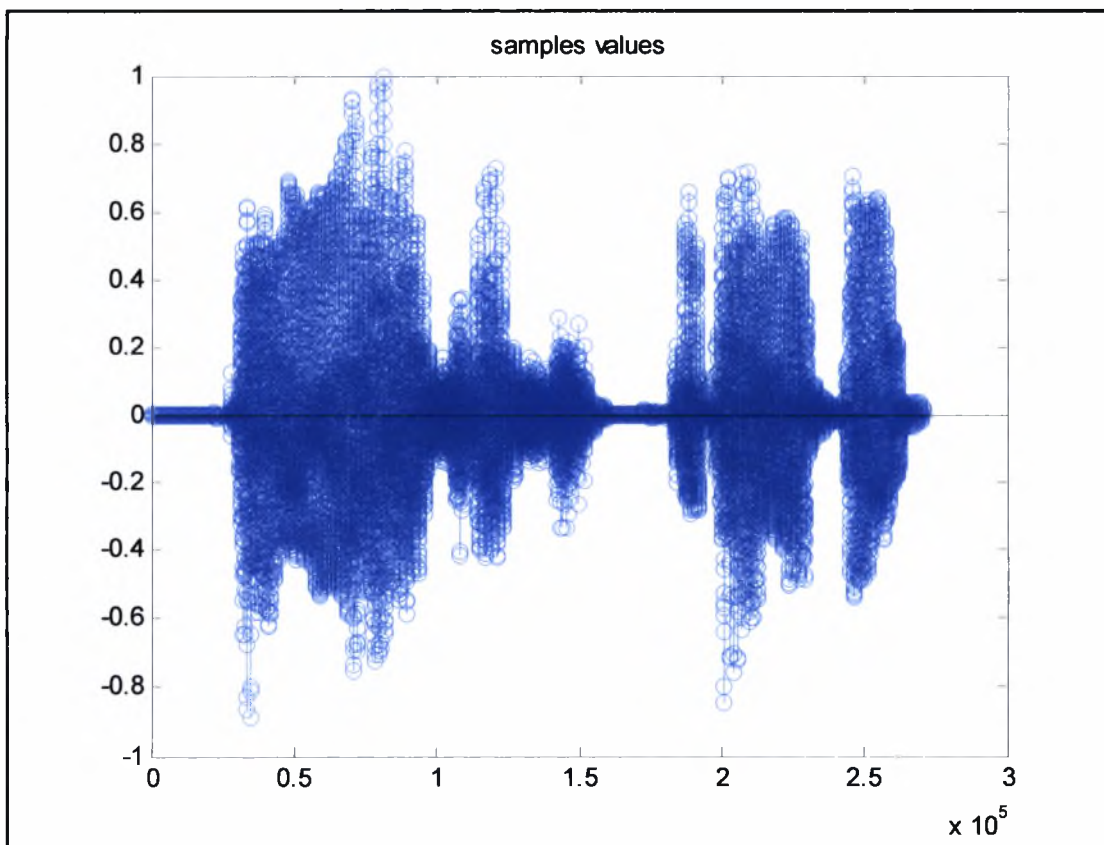
Από τον υπολογισμό του πλήρους πλάτους προκύπτει η τιμή αναφοράς V_{REF} , από τον τύπο που αναφέρθηκε στο εδάφιο 2.4.3.

```
Vref=fullAmpl/(2^noBits);
```

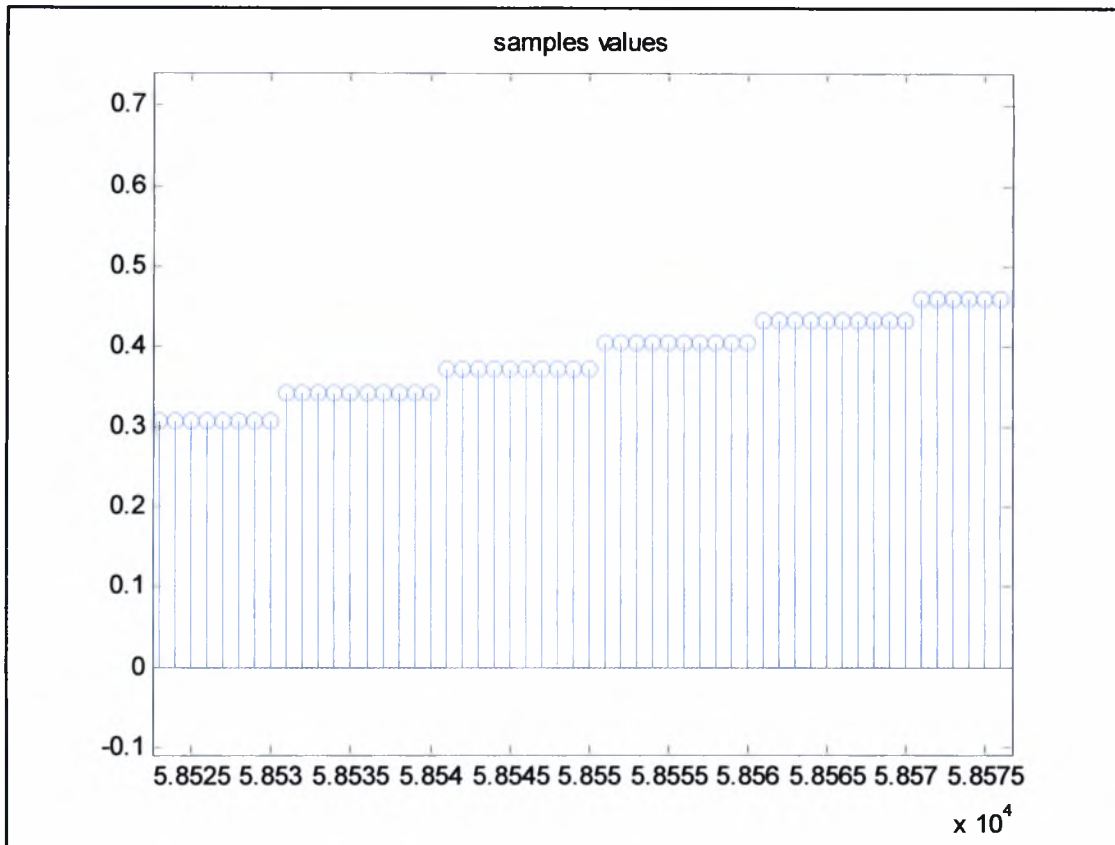
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διαμόρφωσης στο δεδομένο σήμα εισόδου. Στο διάγραμμα 3-11 παρουσιάζεται το αρχικό σήμα και η υπερδειγματοληψία που πραγματοποιείται. Στην επόμενη εικόνα, παρουσιάζεται εκ νέου το διάνυσμα της υπερδειγματοληψίας, έτσι ώστε να φανούν τα πολλαπλά αντίγραφα της ίδιας τιμής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται, όπως και προηγουμένως, και τα υπόλοιπα σχετικά διαγράμματα.



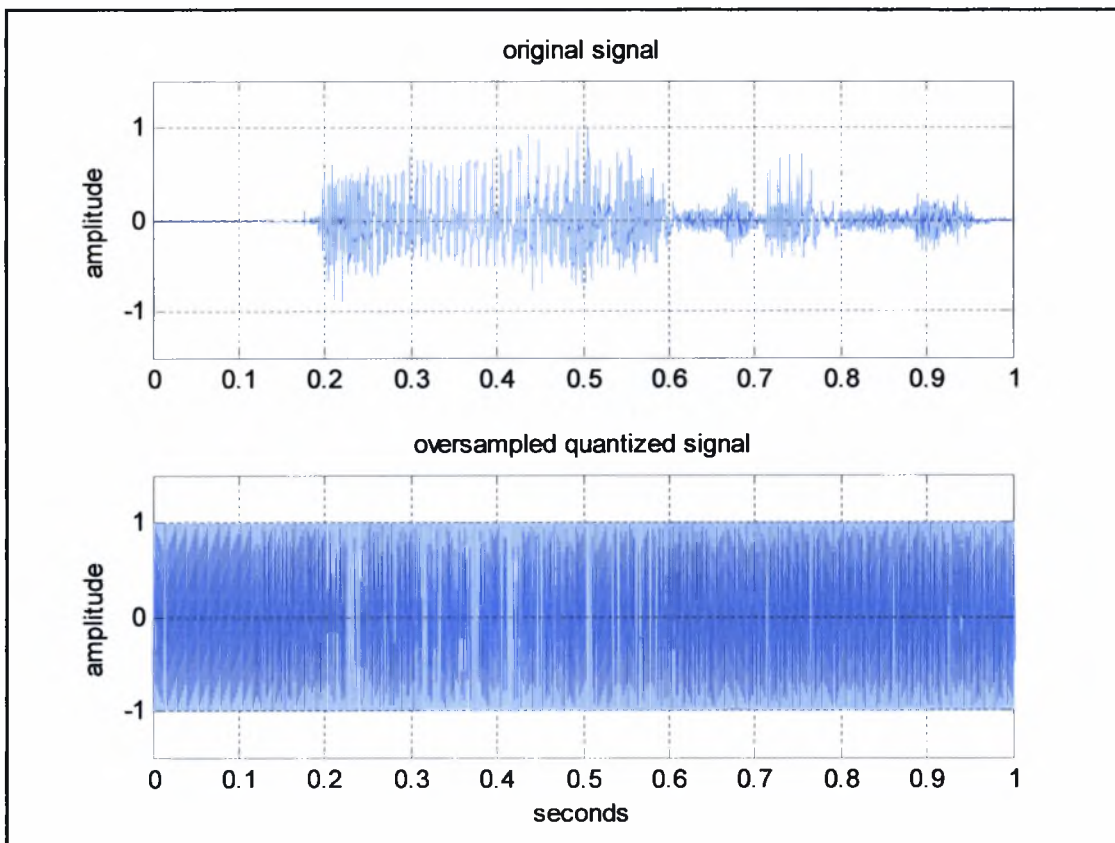
Εικόνα 3-11: Σήμα εισόδου και αντίστοιχη υπερδειγματοληψία



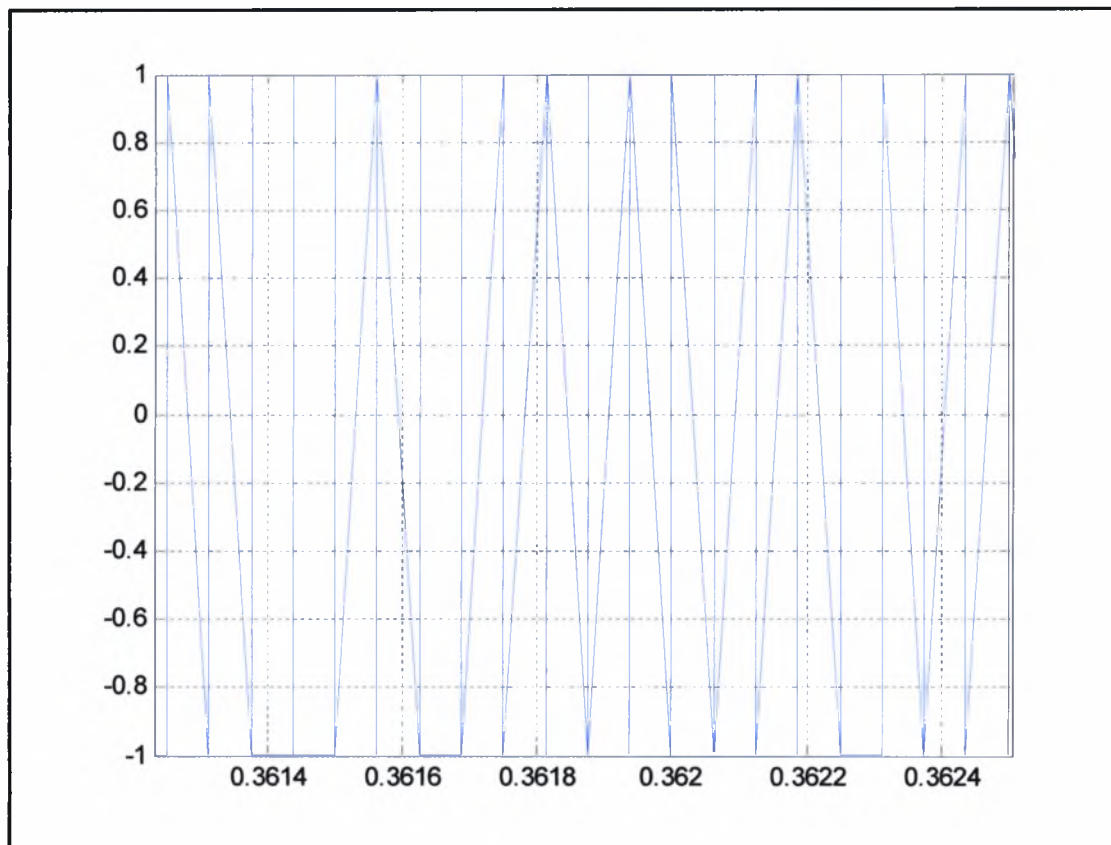
Εικόνα 3-12: Στιγμιότυπο διανύσματος υπερδειγματοληψίας



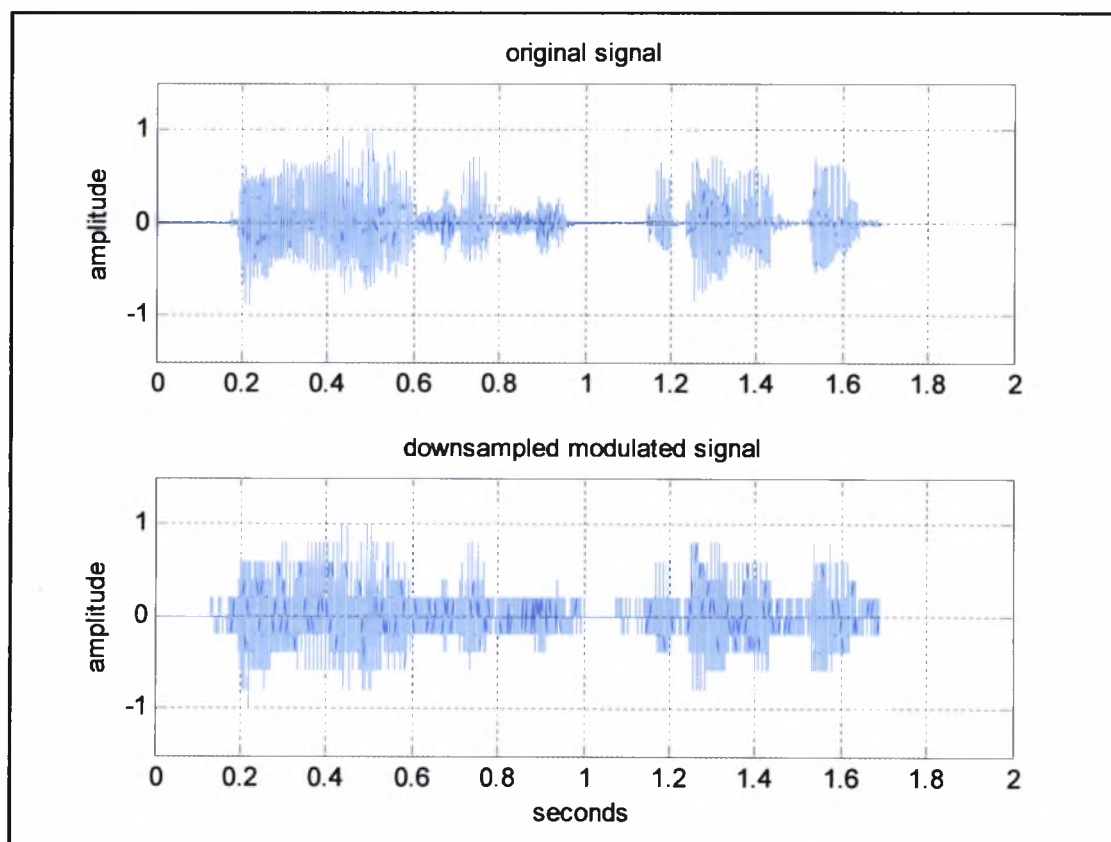
Εικόνα 3-13: Λεπτομέρεια του διανύσματος υπερδειγματοληψίας



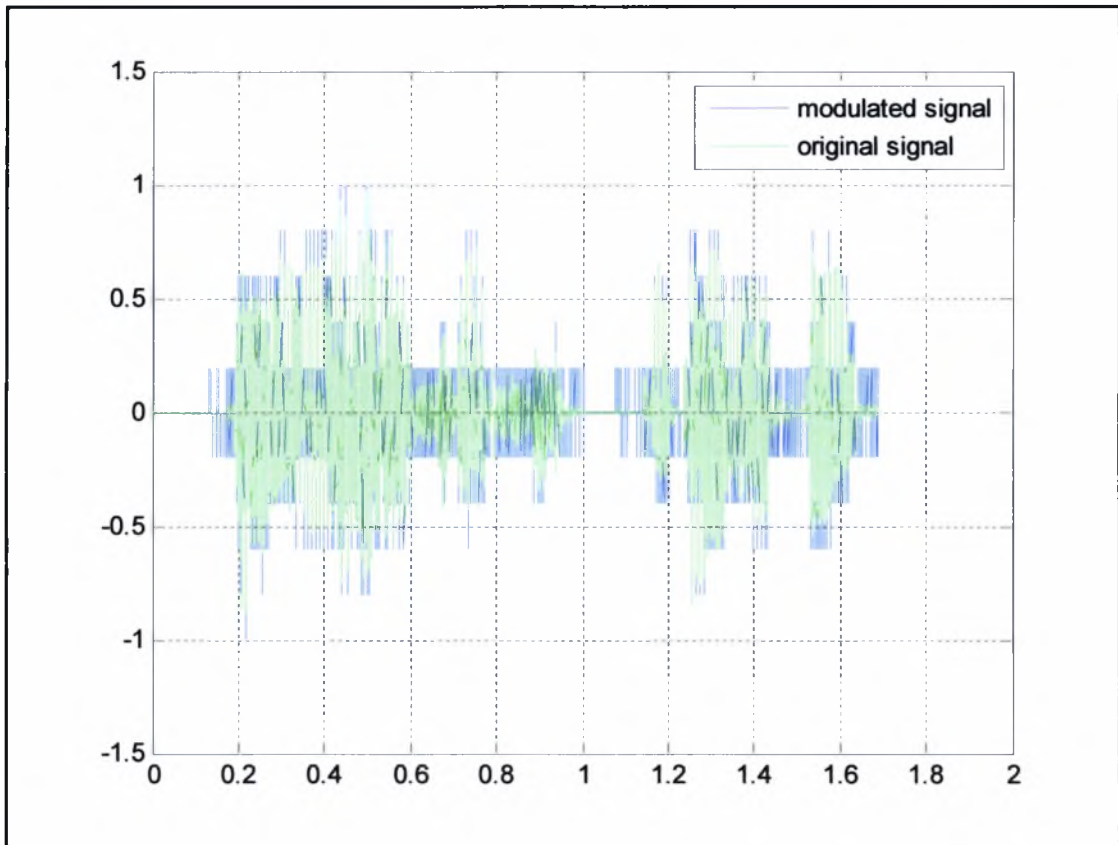
Εικόνα 3-14: Σήμα εισόδου και έξοδος διαφοριστή



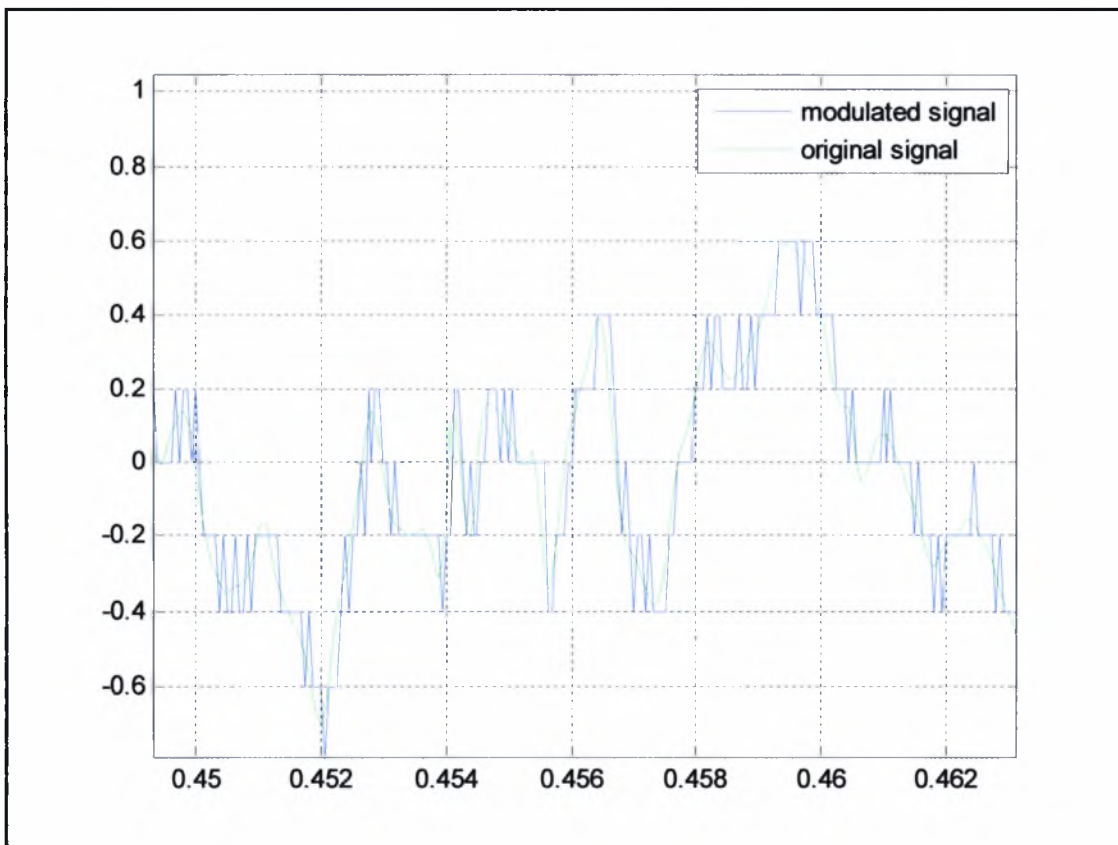
Εικόνα 3-15: Λεπτομέρεια εξόδου διαφοριστή



Εικόνα 3-16: Σήμα εισόδου και εξόδου

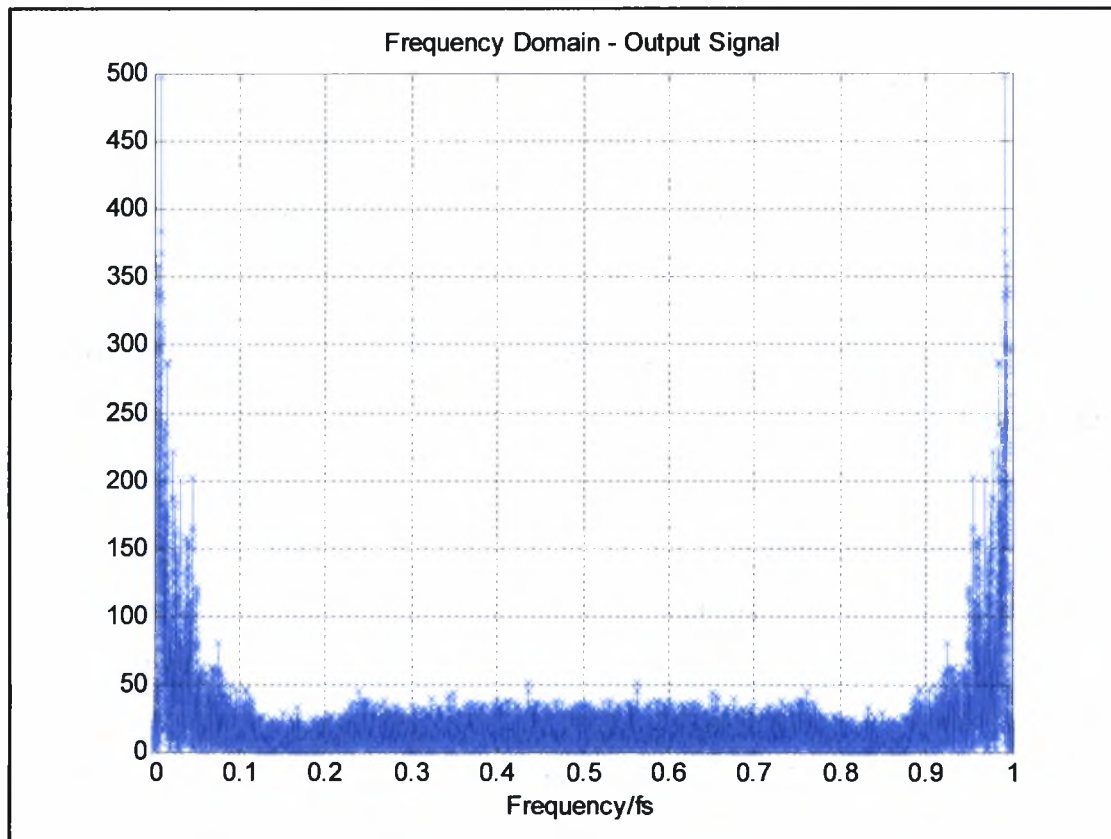


Εικόνα 3-17: Παραβολή σημάτων εισόδου και εξόδου

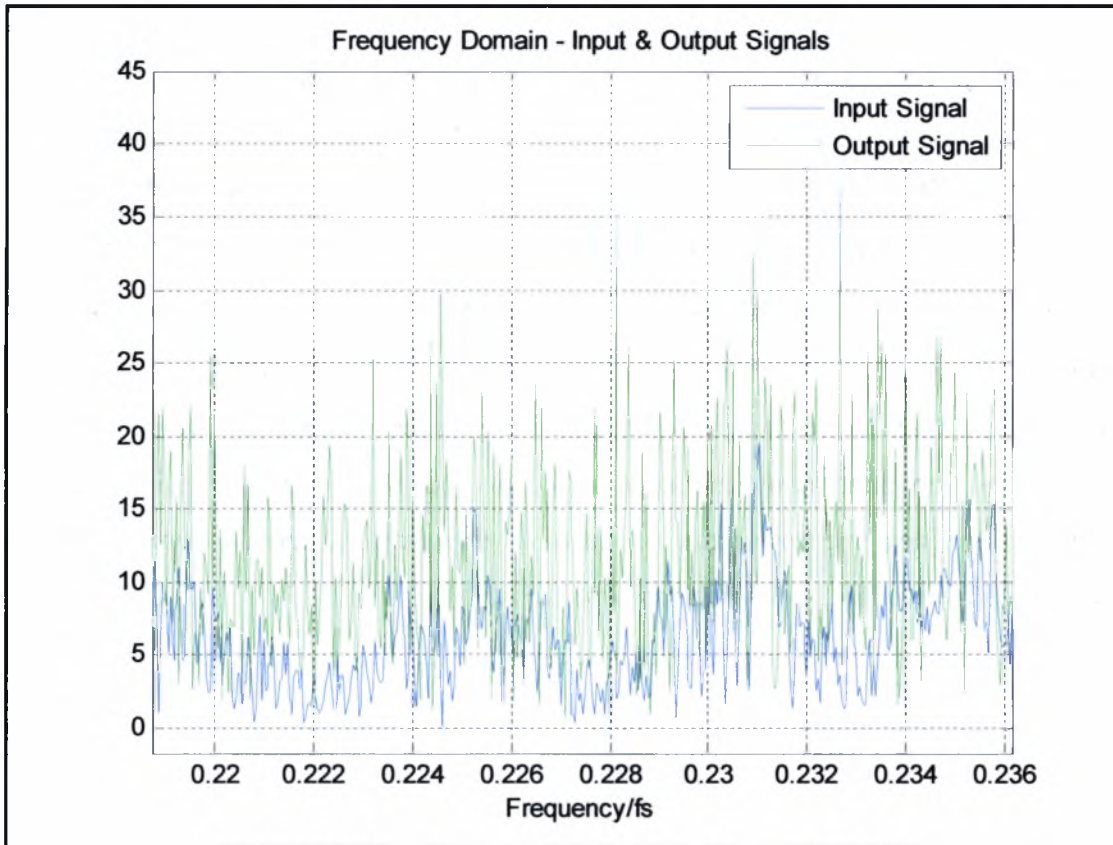


Εικόνα 3-18: Λεπτομέρεια παραβολής των δύο σημάτων

Στη συνέχεια, παρατίθεται το διάγραμμα του *Μετασχηματισμού Fourier* του δεδομένου σήματος. Σε αντίθεση με το απλό ημιτονοειδές σήμα εισόδου, όπου ο θόρυβος ήταν σχεδόν αμελητέος, στο σήμα αυτό η ύπαρξη του θορύβου γίνεται περισσότερο αισθητή, τόσο στο ακουστικό μέσο, όσο και στα αποτελέσματα και οφείλεται στο ότι η προσέγγιση στο διαφοριστή είναι περισσότερο ποσοτική παρά ποιοτική. Το διάστημα παρατήρησης είναι το $[0, \frac{f_s}{2}]$. Παρατίθεται, επίσης, και το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εισόδου, καθώς και η παραβολή των δύο σημάτων ταυτόχρονα, έτσι ώστε να γίνουν ευδιάκριτες οι διαφοροποιήσεις στο κατώφλι του θορύβου, που υπεισέρχεται λόγω της διαμόρφωσης. Ειδικότερα, παρατηρείται αύξηση της ισχύος των παρασιτικών συχνοτήτων, πράγμα φυσιολογικό και αναμενόμενο εξαιτίας του *σφάλματος στάθμισης*.



Εικόνα 3-19: Συχνοτικό περιεχόμενο σήματος εξόδου



Εικόνα 3-20: Στιγμιότυπο συχνοτικού περιεχομένου των δύο σημάτων

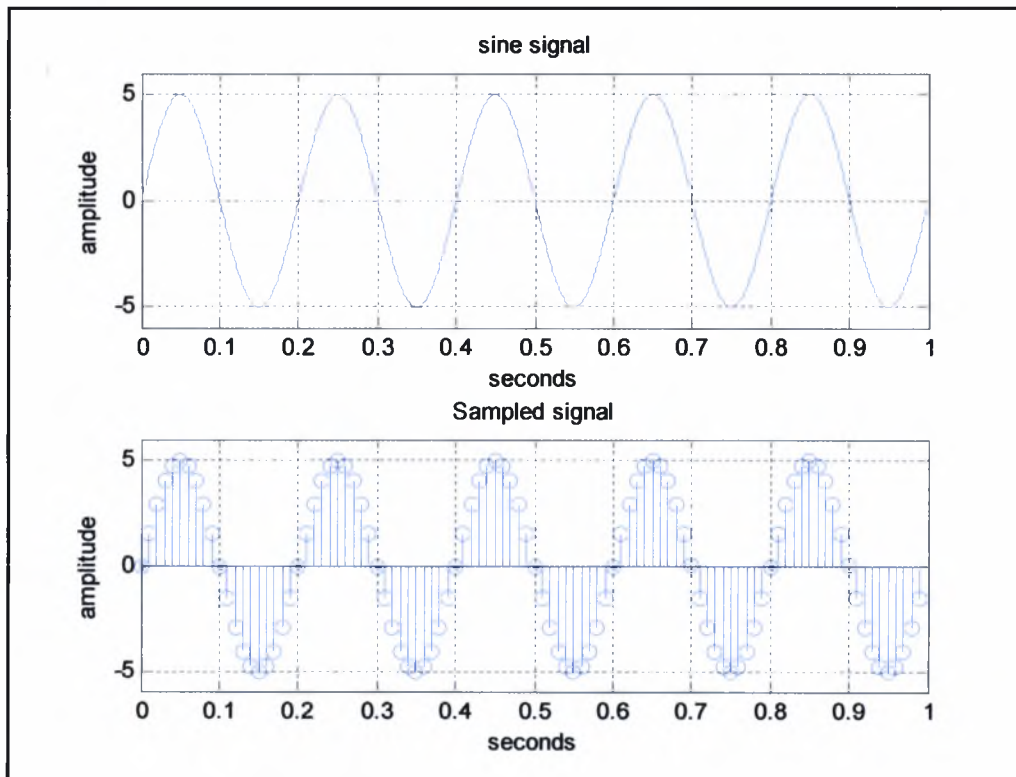
3.4 Δοκιμή εισόδου με ημιτονοειδή είσοδο με εφαρμογή δειγματοληψίας

Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η συμπεριφορά του διαμορφωτή ΣΔ με ημιτονοειδή είσοδο. Σε αντίθεση με όσα γράφτηκαν στα προηγούμενα σημεία, στη συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά και σε αυτή που παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο, εφαρμόζεται δειγματοληψία στο σήμα, που αρχικά θεωρείται αναλογικό. Θα παρατηρήσουμε τις επιπτώσεις που έχει η δειγματοληψία στην γενική εικόνα της εξόδου, καθώς και στην ποιότητα του τελικού σήματος.

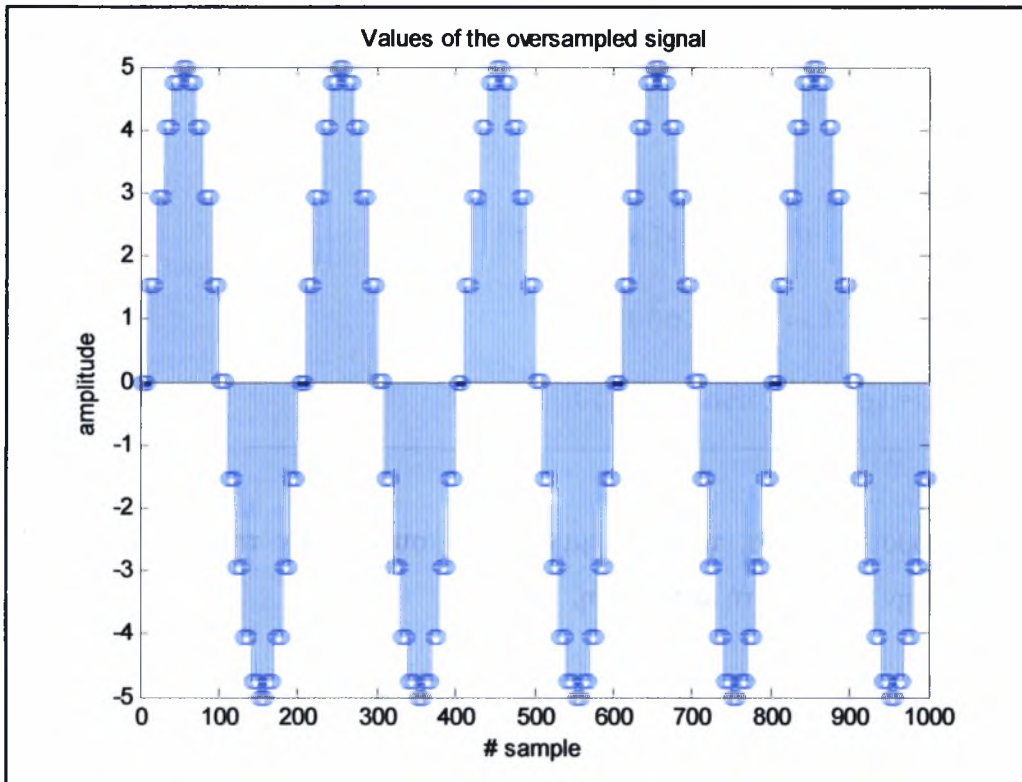
Το σήμα εισόδου είναι το ίδιο όπως αυτό στην παράγραφο 3.2, πάνω στο οποίο εφαρμόζουμε δειγματοληψία με την απαιτούμενη συχνότητα $Nyquist f_s = 2f_o = 10Hz$, λαμβάνοντας δηλαδή 10 δείγματα ανά περίοδο. Το παρακάτω τμήμα κώδικα δείχνει την υλοποίηση στην εφαρμογή *MATLAB*.

```
nyquistRate=2;  
  
OSR=10;  
  
fs=nyquistRate*fo;  
  
xsampled=syn(1:fs:dataLength);  
  
tsampled=t(1:fs:dataLength);  
  
noSampled=length(xsampled);
```

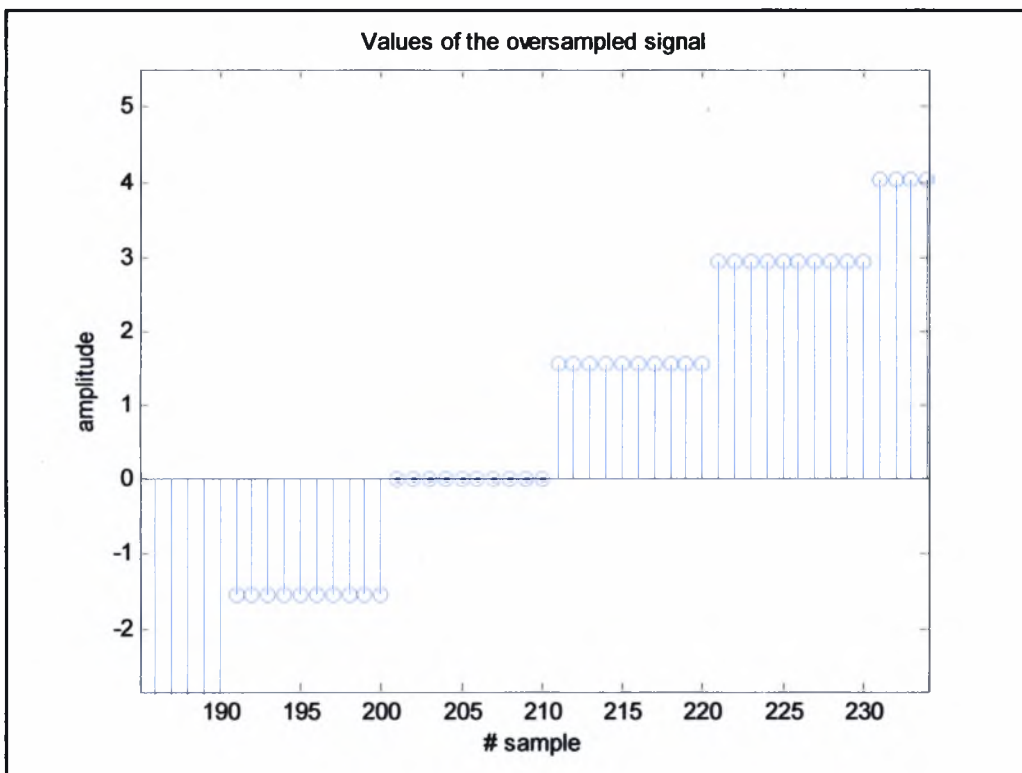
Ακολουθούν, έπειτα, τα διαγράμματα που συνοψίζουν την λειτουργία του διαμορφωτή στην ειδική αυτή περίπτωση.



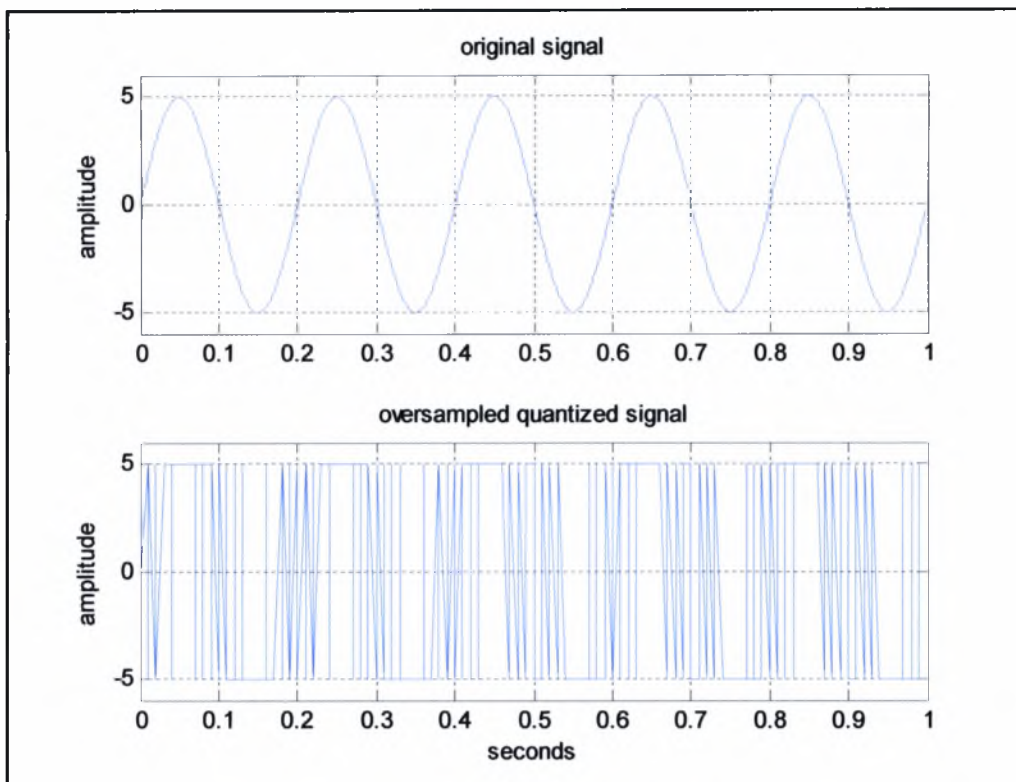
Εικόνα 3-21: Σήμα εισόδου και δειγματοληψία



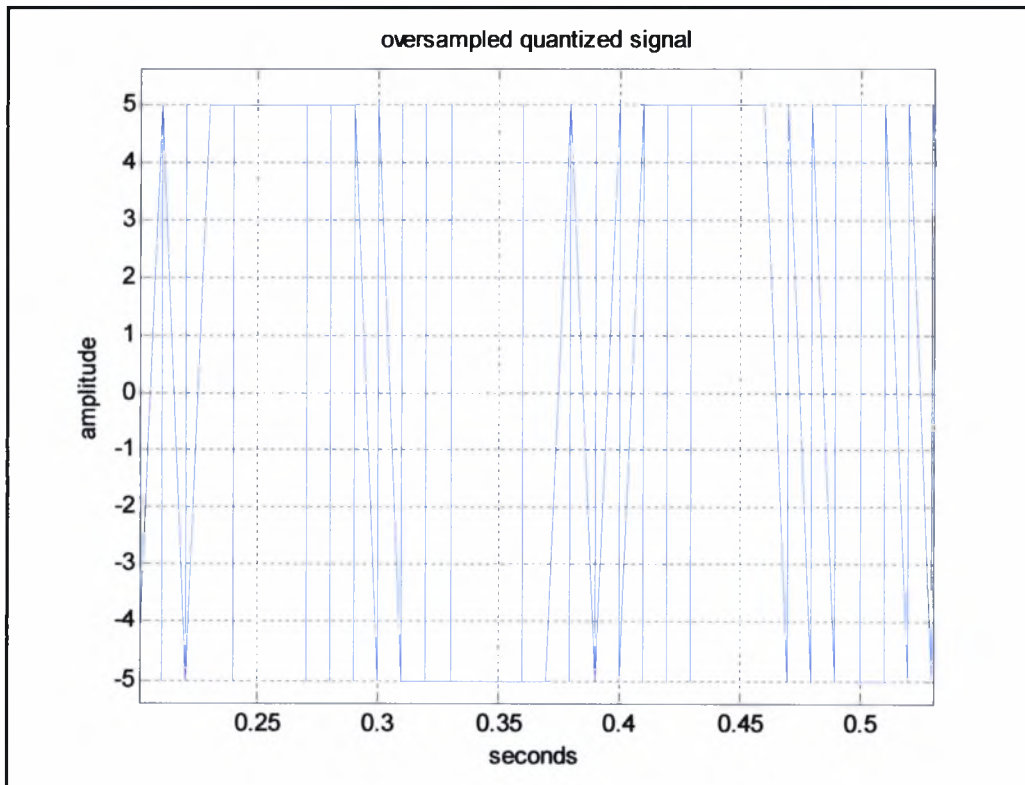
Εικόνα 3-22: Τιμές διανύσματος υπερδειγματοληψίας ανά δείγμα



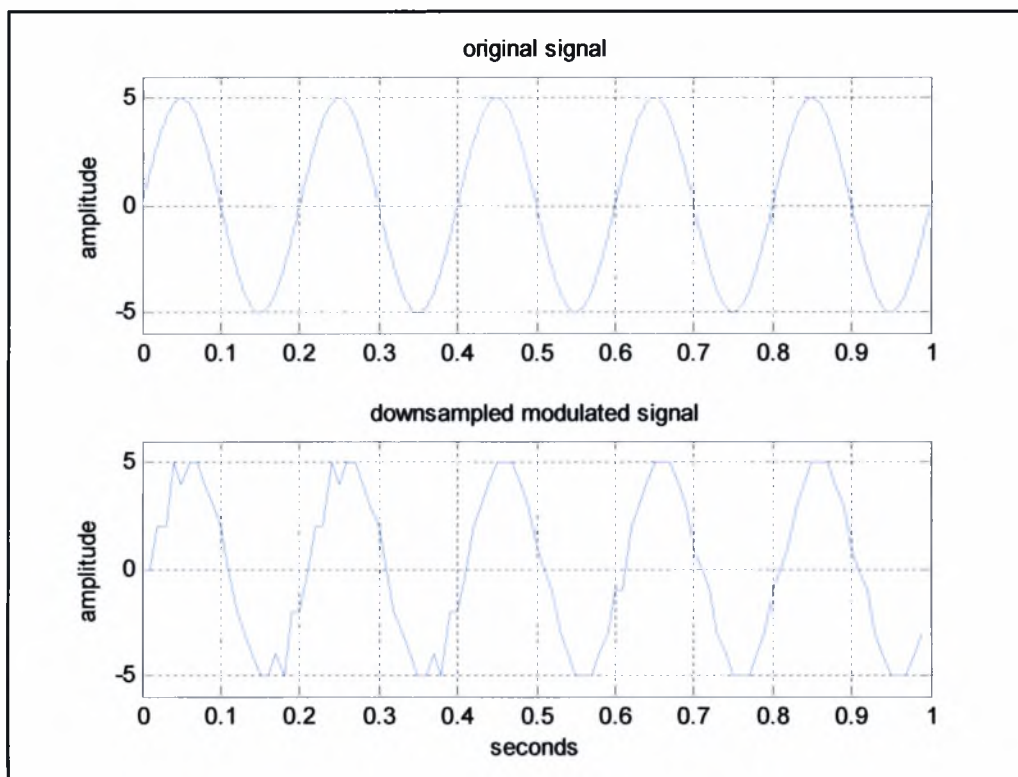
Εικόνα 3-23: Στιγμιότυπο τιμών διανύσματος υπερδειγματοληψίας



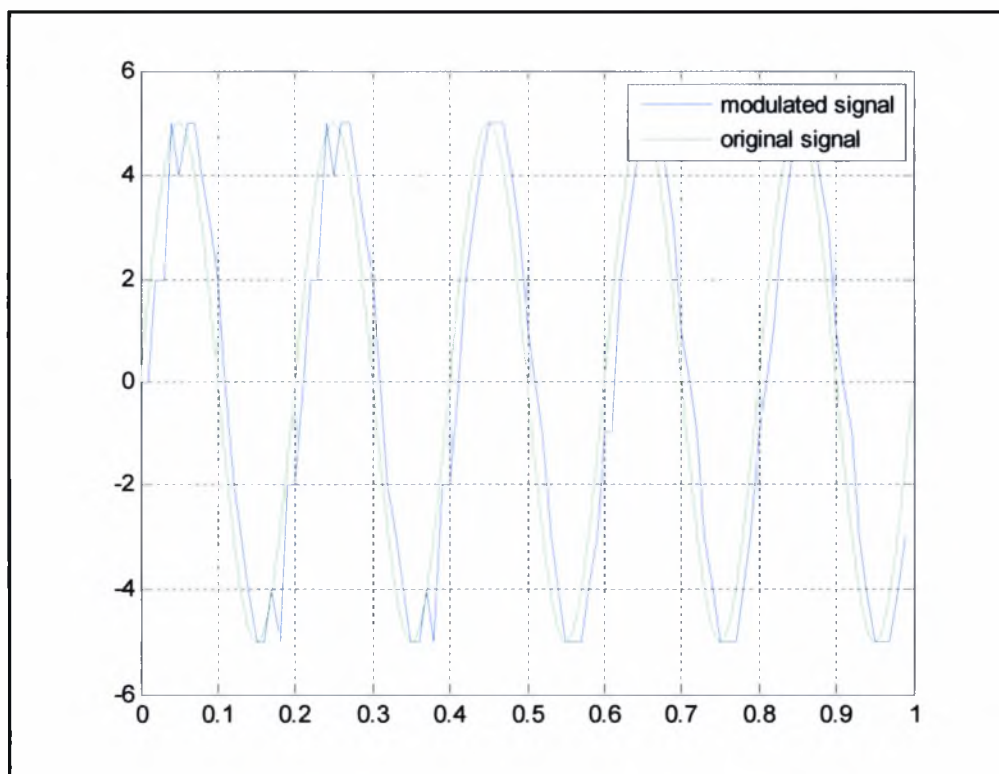
Εικόνα 3-24: Σήμα εισόδου και έξοδος διαφοριστή



Εικόνα 3-25: Στιγμιότυπο εξόδου διαφοριστή

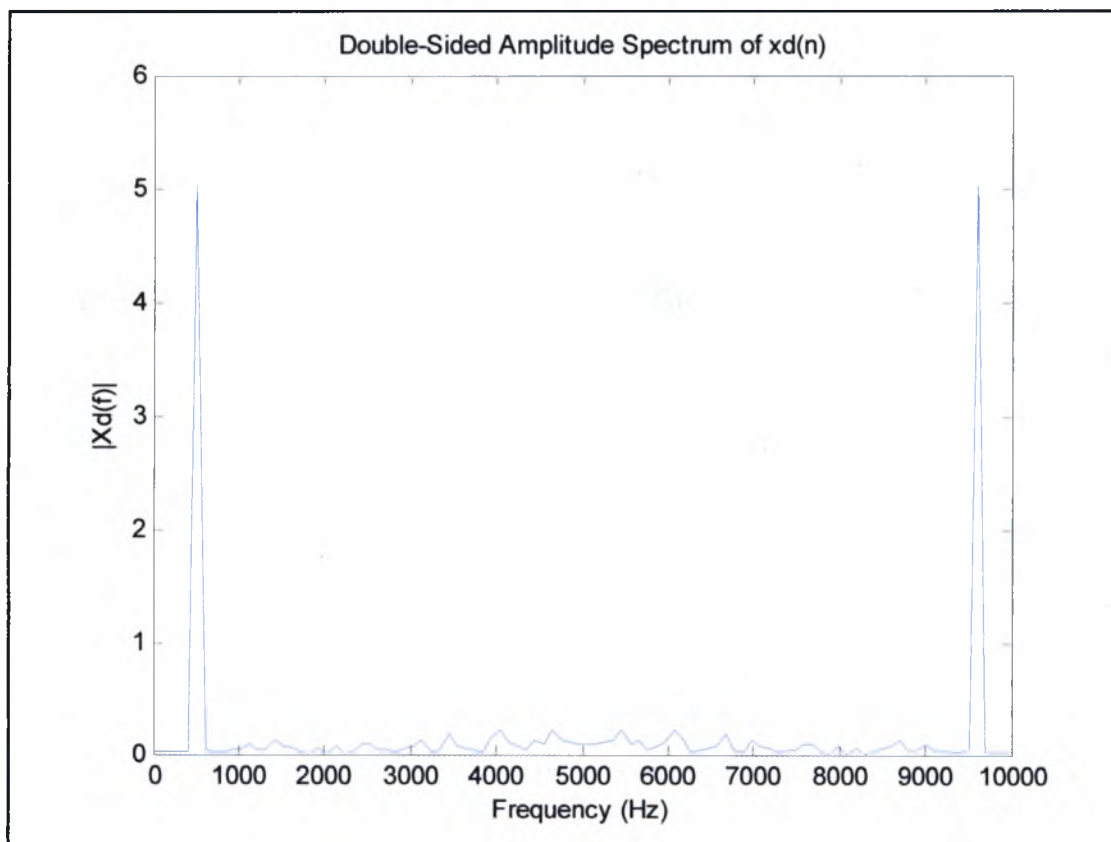


Εικόνα 3-26: Σήμα εισόδου και ανακατασκευή στην έξοδο

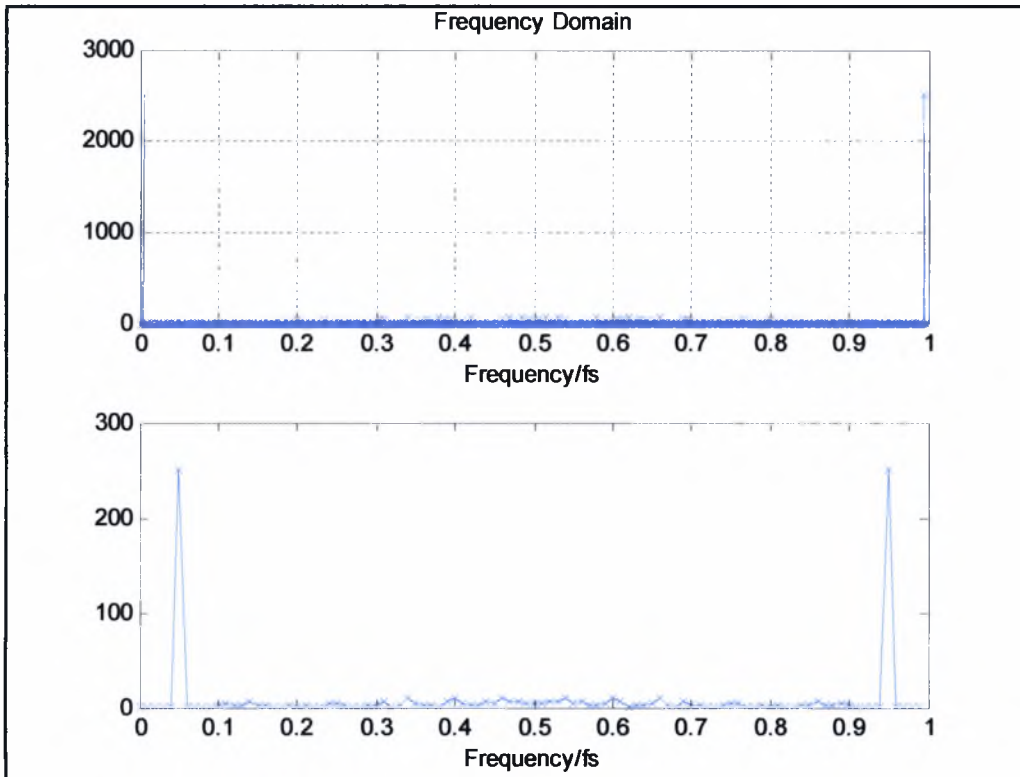


Εικόνα 3-27: Παραβολή σήματος εισόδου και εξόδου

Είναι χρήσιμο να μελετηθεί στο σημείο αυτό το συχνοτικό περιεχόμενο των δύο σημάτων εξόδου που προέκυψαν από το τρέχον παράδειγμα αυτό, αλλά και από εκείνο της παραγράφου 3.2. Όπως φαίνεται και στην εικόνα 3-31, με μια πρώτη ματιά καταλαβαίνει κανείς ότι τα δύο σήματα διαφέρουν ως προς το μέγεθος των στοιχείων που αυτά περιέχουν. Πραγματικά, το πρώτο σήμα περιέχει πολλαπλάσια δείγματα από το δεύτερο και ο λόγος είναι ότι στην παράγραφο 3.2 θεωρήσαμε ότι το σήμα έχει ήδη δειγματοληπτηθεί και, επομένως, το μέγεθός του ήταν 1000 δείγματα. Στην δεύτερη περίπτωση, κρατήθηκαν από το αρχικό σήμα μόνο 100 δείγματα, επομένως η ανακατασκευή είχε και αυτή το ίδιο μέγεθος. Το γεγονός αυτό, επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα της εξόδου, πράγμα που θα φανεί διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.



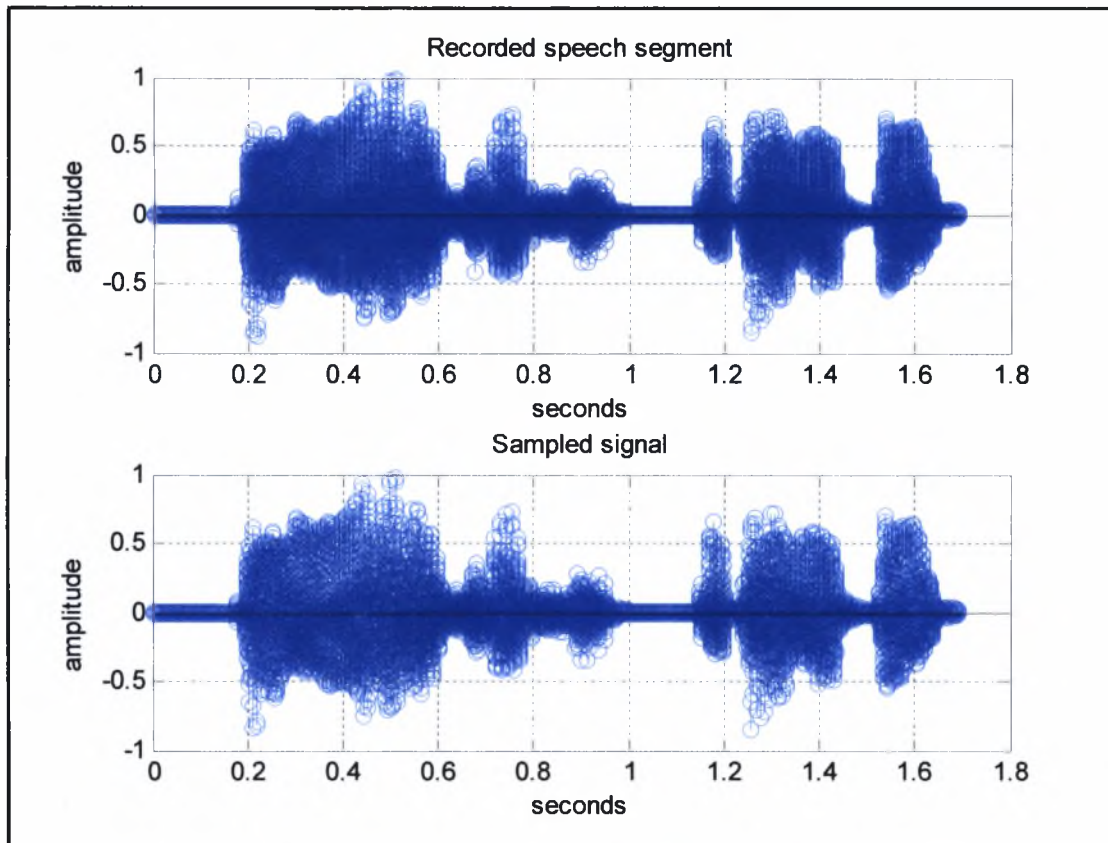
Εικόνα 3-28: Συχνοτικό περιεχόμενο σήματος εξόδου



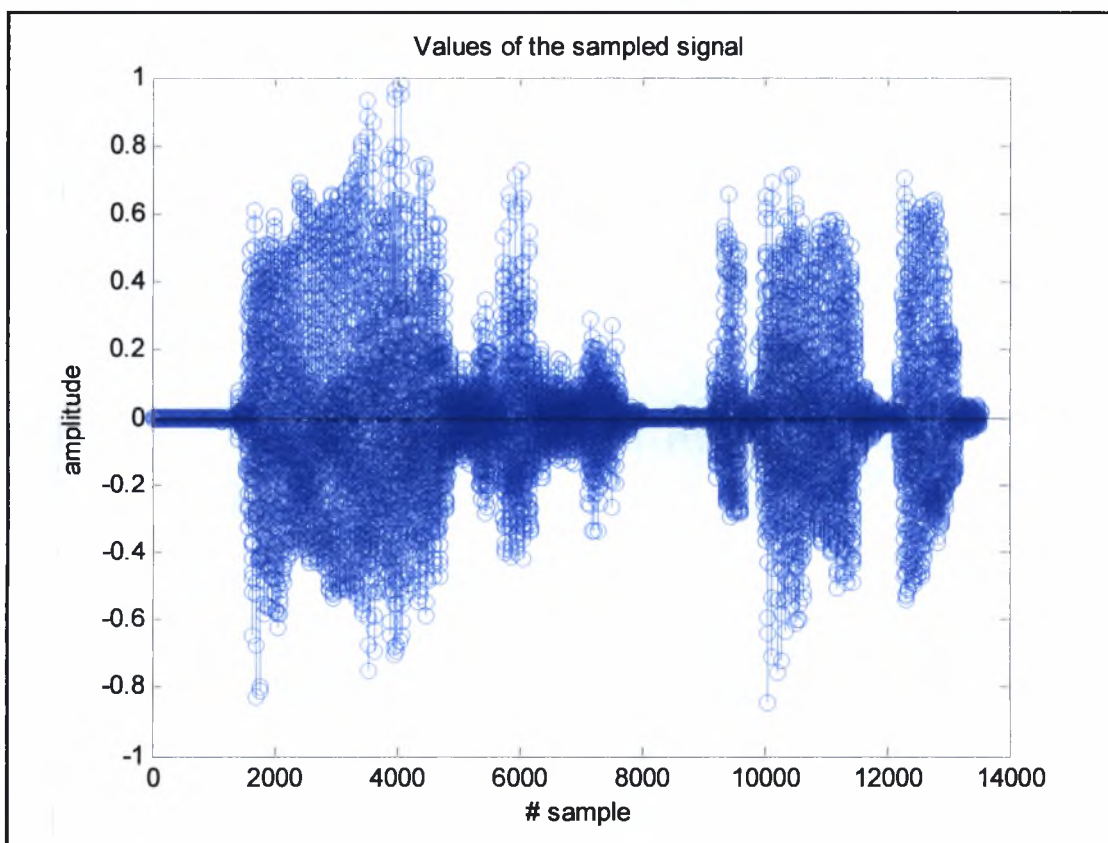
Εικόνα 3-29: Συχνотικό περιεχόμενο σημάτων εξόδου παραγράφου 3.2 και 3.4

3.5 Δοκιμή λειτουργίας με πραγματικό σήμα ήχου και εφαρμογή δειγματοληψίας

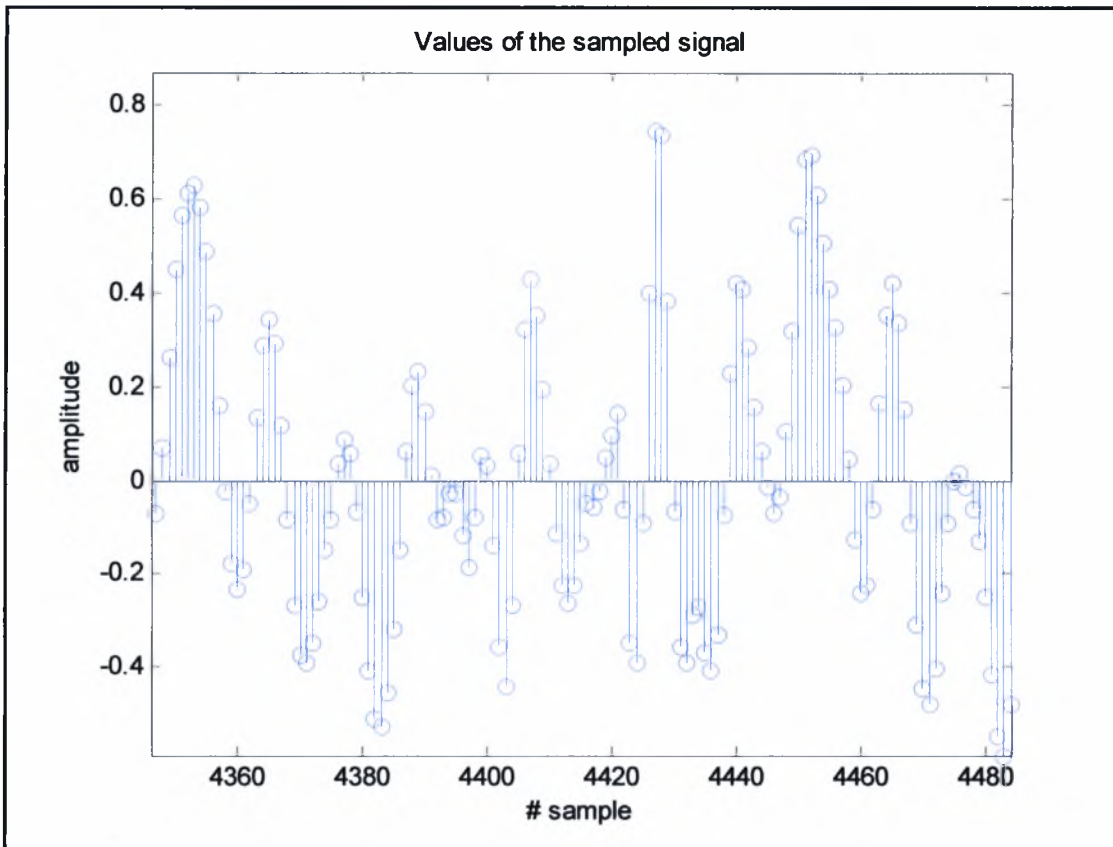
Όπως και στην παράγραφο 3.3, δοκιμάζουμε το ίδιο σήμα ήχου, πραγματοποιώντας δειγματοληψία, θεωρώντας, δηλαδή, το σήμα εισόδου ως αναλογικό. Παρατίθενται, στη συνέχεια, τα αποτελέσματα της λειτουργίας του διαμορφωτή. Υποθέτοντας ότι η συχνότητα της ανθρώπινης φωνής μπορεί να φτάσει ως τα 4 kHz, τότε μπορούμε με ασφάλεια να θεωρήσουμε ως συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=8kHz$, οπότε θα λάβουμε 8000 δείγματα ανά δευτερόλεπτο ηχογράφησης ή, διαφορετικά, 8 δείγματα ανά χιλιοστό του δευτερολέπτου.



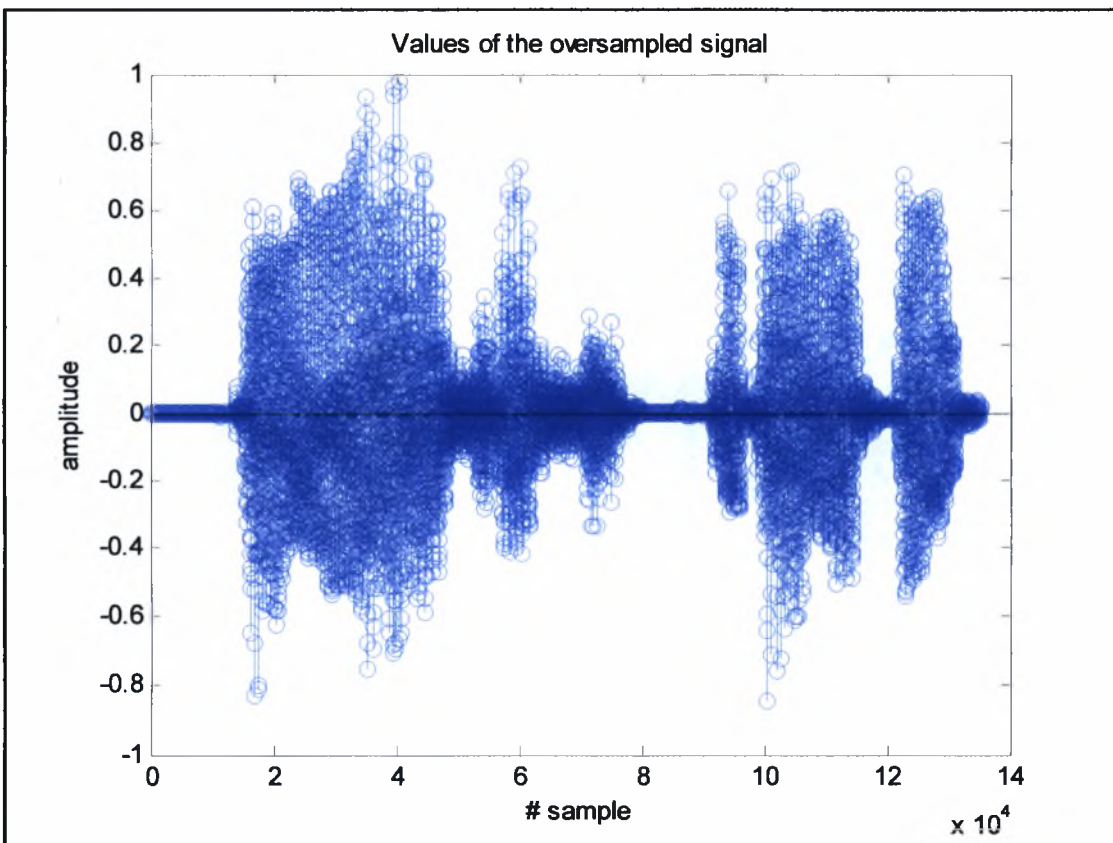
Εικόνα 3-30: Αρχικό σήμα και δειγματοληψία



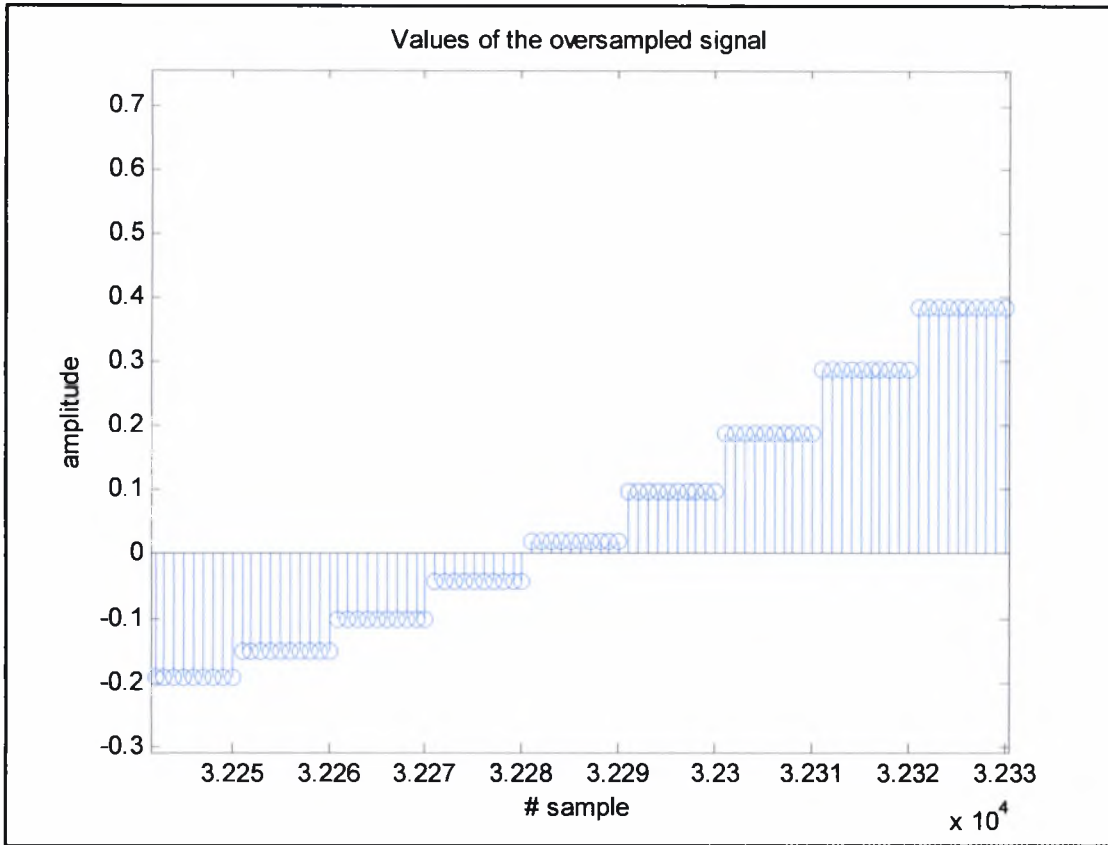
Εικόνα 3-31: Διάνυσμα δειγματοληψίας



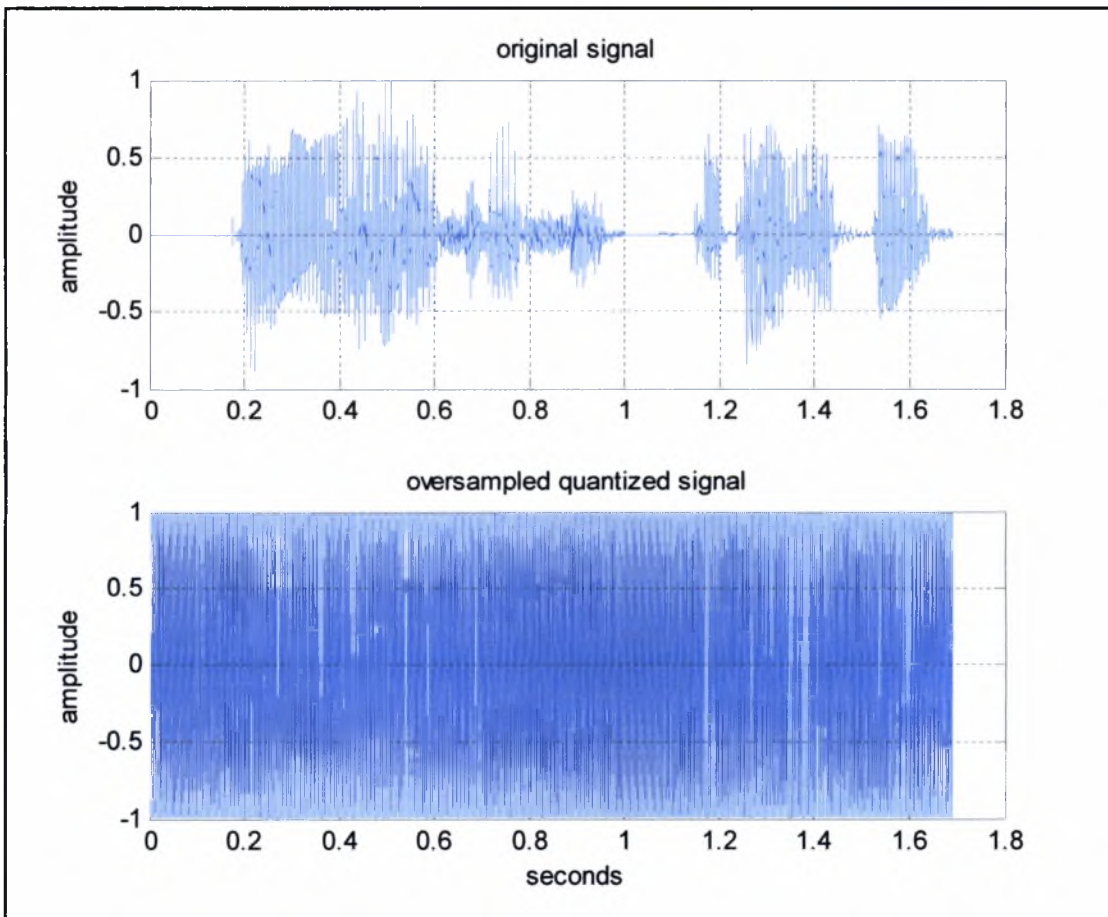
Εικόνα 3-32: Στιγμιότυπο δειγματοληψίας



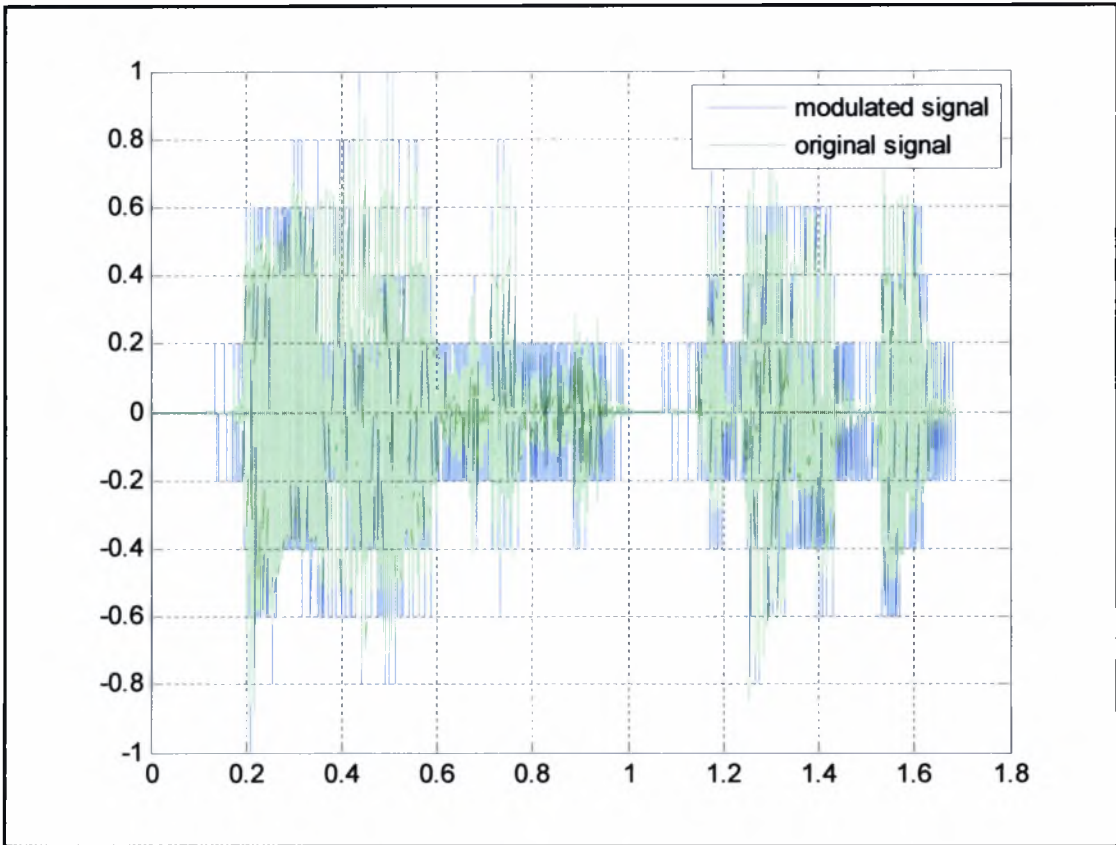
Εικόνα 3-33: Διάγραμμα υπερδειγματοληψίας



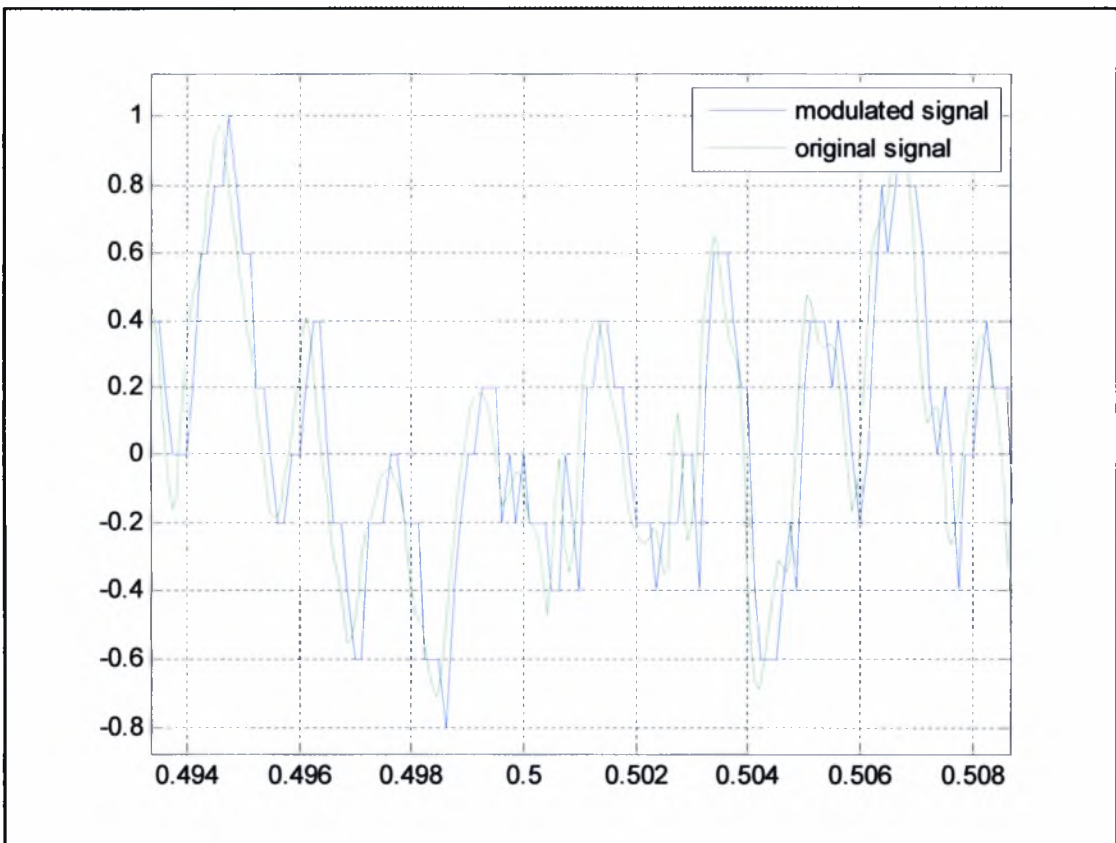
Εικόνα 3-34: Στιγμιότυπο διανύσματος υπερδειγματοληψίας



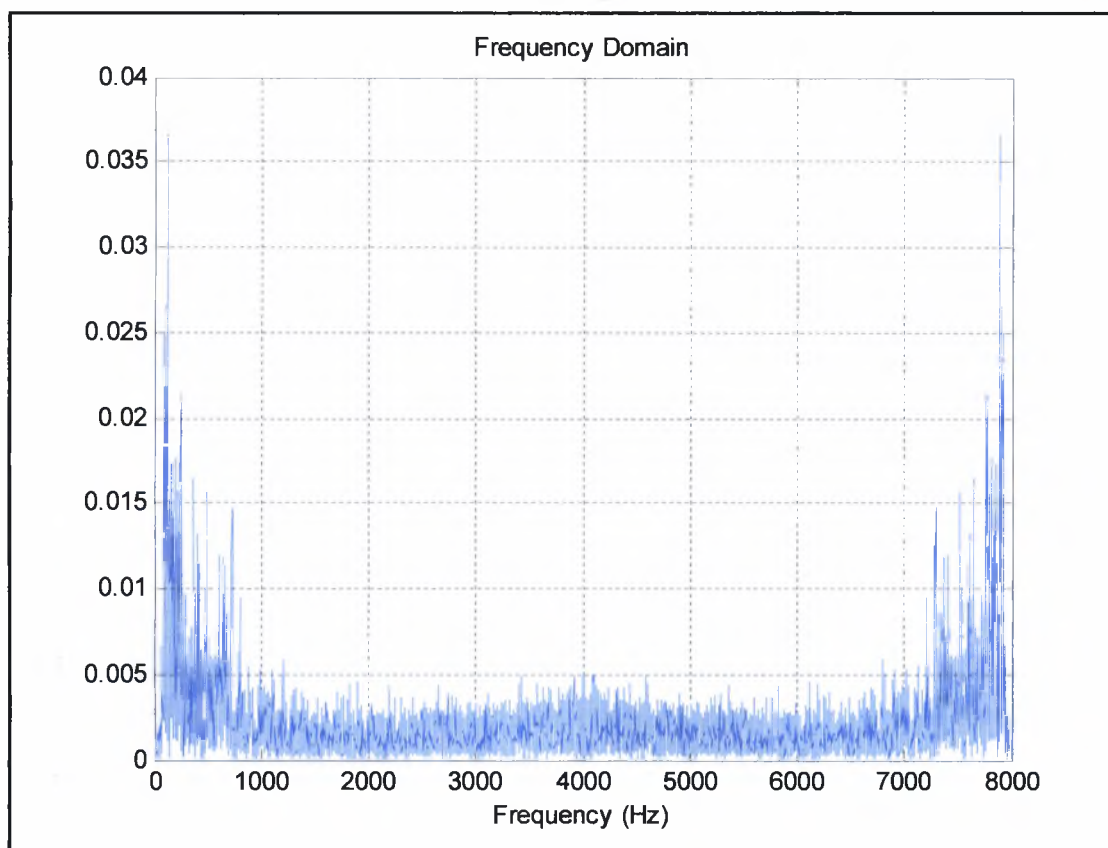
Εικόνα 3-35: Σήμα εισόδου και έξοδος σταθμιστή



Εικόνα 3-36: Σήμα εισόδου και ανακατασκευή

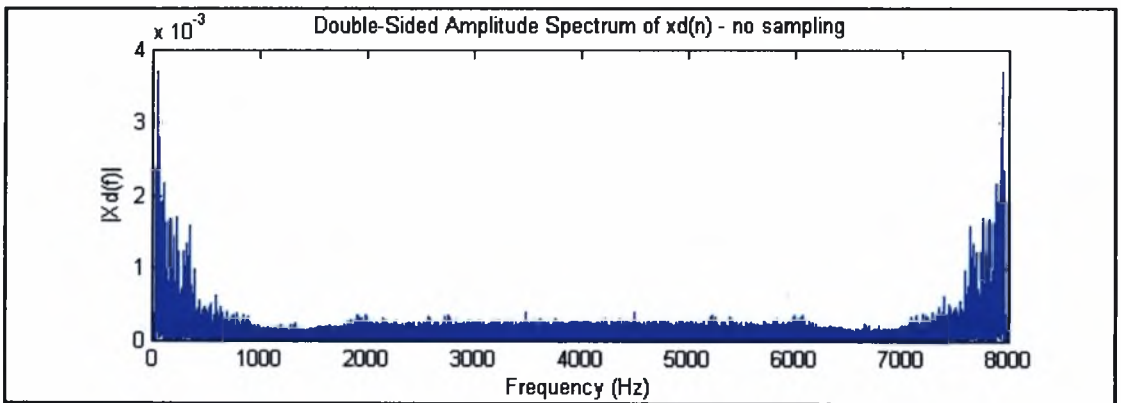
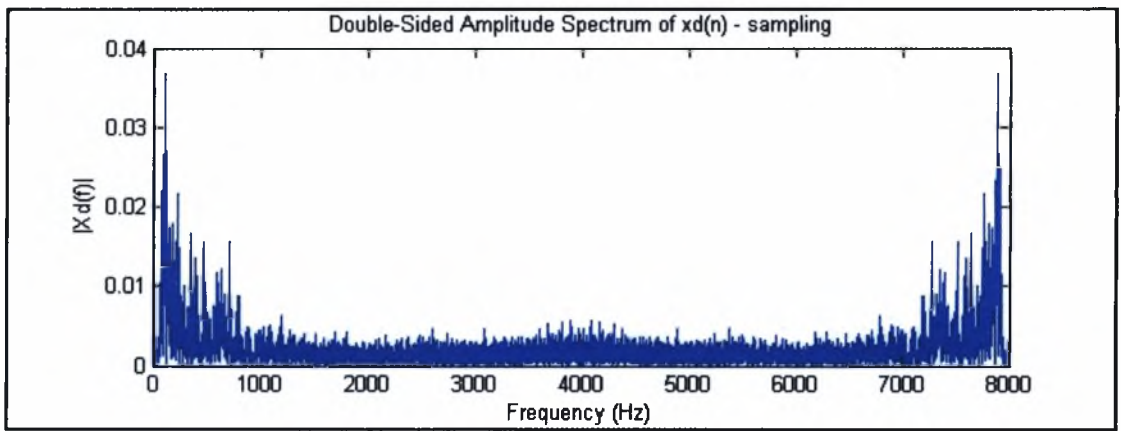


Εικόνα 3-37: Στιγμιότυπο αρχικού σήματος και ανακατασκευής



Εικόνα 3-38: Φάσμα συχνοτήτων σήματος εξόδου

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το κατώφλι θορύβου, στο διάγραμμα συχνοτικού, περιεχομένου βρίσκεται υψηλότερα από το αντίστοιχο στην παράγραφο 3.3. Επίσης, παρατηρείται η μείωση της ισχύος των κυρίως συχνοτήτων του σήματος. Παρόλ'αυτά, μπορεί η ποιότητα της εξόδου να βελτιωθεί αυξάνοντας το λόγο υπερδειγματοληψίας (*OSR*), θυσιάζοντας, στον αντίποδα, μνήμη και υπολογιστικό χρόνο. Η επιλογή αυτή εξαρτάται από τις προδιαγραφές της εξόδου που επιθυμεί κανείς.



Εικόνες 3-39, 3-40: Σύγκριση διαγραμμάτων συχνοτικού περιεχομένου μεταξύ παραδείγματος παραγράφου 3.3 και τρέχοντος παραδείγματος

4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ ΣΔ

Στο παρόν κεφάλαιο μελετώνται κάποιες παράμετροι λειτουργία τους διαμορφωτή ΣΔ, που παρουσιάζονται στο ψηφιακό κομμάτι του διαμορφωτή. Με άλλα λόγια, γίνεται αναφορά σε κάποια πολύ σημαντικά στοιχεία που επηρεάζουν την απόδοση και τη λειτουργία του, από το στάδιο του σταθμιστή και έπειτα.

4.1 Θόρυβος στάθμισης στους διαμορφωτές ΣΔ

Η διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος (με άπειρη ανάλυση εξ ορισμού) σε ένα σήμα πεπερασμένης ανάλυσης εισάγει ένα σφάλμα που εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η προσέγγιση του αναλογικού σήματος από το ψηφιακό και καλείται *σφάλμα στάθμισης* (*quantization error*). Το σφάλμα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί ποσοτικά ως προς τάξη ενός ψηφίου ελάχιστης σημασίας (*Least Significant Bit – LSB*) και είναι αμελητέο συγκριτικά με το σήμα πλήρους πλάτους. Ωστόσο, όσο το σήμα εισόδου ελλατώνεται σε μήκος, τόσο το σφάλμα στάθμισης αντιπροσωπεύει μεγαλύτερο μέρος του σήματος εξόδου.

Η καρδιά, αν μπορεί να χαρακτηριστεί έτσι, ενός διαμορφωτή ΣΔ οποιουδήποτε σταδίου είναι ο σταθμιστής, το στοιχείο, δηλαδή, που μετατρέπει τις πραγματικές τιμές του σήματος εισόδου και διακριτές τιμές, πολλές φορές τόσο λίγες όσο τα δυαδικά ψηφία. Επομένως, η όποια ανάλυση του διαμορφωτή ΣΔ πρέπει εξ ορισμού να περιλαμβάνει και την ανάλυση συμπεριφοράς του στοιχείου αυτού. Ωστόσο, η συμπεριφορά του διαφοριστή είναι μη-γραμμική και, επομένως, οποιαδήποτε ανάλυση μπορεί να καταστεί ιδιαίτερα περίπλοκη, ακόμα και για έναν απλό διαμορφωτή, όπως αυτός που μελετείται στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Καθώς το αναλογικό σήμα εισόδου δειγματοληπτείται, έτσι ώστε να προκύψει το διάνυσμα $x(n)$, κάθε τιμή του μεταφράζεται σε μια νέα, πεπερασμένη, δυαδική τιμή που αποτελείται από Q bits, συμπεριλαμβανομένου και του ψηφίου προσήμου. Αναφέρθηκε προηγουμένως, ότι αν ο μετατροπέας χρησιμοποιεί Q δυαδικά ψηφία, τότε τα διαθέσιμα επίπεδα κβάντισης είναι 2^Q , επομένως, για τον μετατροπέα ΣΔ, ο αριθμός των επιπέδων ισούται με 2 .

Το *βήμα στάθμισης*, δηλαδή το μεσοδιάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων στάθμισης είναι

$$\Delta = \frac{1}{2^{Q-1}}.$$

Στη γενική περίπτωση, όπου έχουμε M επίπεδα στάθμισης, τότε αυτά κατανέμονται με ίσο τρόπο στο διάστημα $B=[\alpha, \alpha+M\Delta]$, όπου η περιοχή στάθμισης επιλέγεται να είναι συμμετρική γύρω από ένα σημείο $\alpha=-M\Delta/2$ και το επίπεδο στάθμισης αποτελεί το κέντρο του κελιού $R_k = [\alpha+k\Delta, \alpha+(k+1)\Delta]$ με $k=0,1,\dots,M$. Η τιμή του δειγματοληπτημένου σήματος $x(n)$ προσεγγίζεται από την εγγύτερη τιμή του σταθμιστή. Στην ειδικότερη περίπτωση του μετατροπέα ΣΔ 1^{ης} τάξης, όπου τα επίπεδα στάθμισης είναι 2, το κάθε δείγμα προσεγγίζεται με ένα από τα δύο επίπεδα τα οποία είναι διαθέσιμα, με άλλα λόγια, θα λάβει είτε την τιμή $+V_{REF}$ είτε $-V_{REF}$.

Γίνεται, επομένως, αντιληπτό ότι στο σήμα εξόδου του διαφοριστή υπεισέρχεται θόρυβος, ο οποίος προκύπτει από όλη αυτή τη διαδικασία προσέγγισης. Το γεγονός αυτό μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$$x_o(n) = x(n) + e(n)$$

όπου $x_o(n)$ το σήμα εξόδου του μετατροπέα και $e(n)$ το σφάλμα στάθμισης.

Το σφάλμα στάθμισης μπορεί κατόπιν να οριστεί ως

$$e(n) = x_o(n) - x(n).$$

Αν το σήμα εισόδου $x_o(n)$ βρίσκεται εντός του διαστήματος B , τότε το μέγιστο σφάλμα στάθμισης που προκύπτει είναι $\Delta/2$. Σε αντίθετη περίπτωση, το σφάλμα στάθμισης είναι μεγαλύτερο της προηγούμενης τιμής, οπότε αναφέρεται ότι ο σταθμιστής *υπερχειλίζει* ή *βρίσκεται σε κορεσμό*.

Στη συνέχεια, θα μελετηθεί αν είναι δυνατό το σφάλμα αυτό να μοντελοποιηθεί και να εκφραστεί ως *τυχαίος θόρυβος*. Προς το παρόν διαφαίνεται από τις σχέσεις ότι πρόκειται για μια *αθροιστική* ποσότητα, υπερτίθεται, δηλαδή, του ωφέλιμου σήματος.

Οι ιδιότητες που πρέπει να διέπουν το σφάλμα στάθμισης είναι οι εξής:

1. Το σφάλμα στάθμισης $e(n)$ είναι ανεξάρτητο του σήματος εισόδου $x_o(t)$, για κάθε n και t , ή ασυσχέτιστο με το δειγματοληπτημένο σήμα $x(n)$.
2. Το σφάλμα στάθμισης $e(n)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[-\Delta/2, \Delta/2]$.

3. Το σφάλμα στάθμισης $e(n)$ αποτελεί μια *iid*⁸ ακολουθία ή, διαφορετικά, το σφάλμα στάθμισης $e(n)$ παρουσιάζει επίπεδη φασματική πυκνότητα ισχύος.

Οι παραπάνω ιδιότητες αναφέρονται και ως *προσέγγιση αθροιστικού λευκού θορύβου ανεξάρτητου της εισόδου*. Η προσέγγιση αυτή απλοποιεί δραματικά την ανάλυση του συστήματος, καθώς περιγράφουν ένα μη γραμμικό στοιχείο, όπως ο σταθμιστής, με ένα γραμμικό στοχαστικό σύστημα. Εγείρονται, συνεπώς, κάποια ερωτήματα σχετικά με την αποτελεσματικότητά της και την ακρίβεια που μπορεί να προσφέρει, κατά την περαιτέρω ανάλυση του διαμορφωτή. Η έρευνα διαφόρων επιστημόνων και, ιδιαίτερα, του *W.R. Bennett* οδήγησε στο παρακάτω θεώρημα:

Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις (*συνθήκες Bennett*):

1. Το σήμα δεν περιέχει περιοχή υπερχειλίσσης, δηλαδή το σήμα εισόδου βρίσκεται εντός του διαστήματος $B=[\alpha, \alpha+M\Delta]$.
2. Ο αριθμός M των επιπέδων στάθμισης είναι ασυμπτωτικά πολύ μεγάλος.
3. Το βήμα στάθμισης Δ είναι ασυμπτωτικά πολύ μικρό.
4. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*σ.π.π. – p.d.f.*) του σήματος εισόδου είναι ομαλή και δεν παρουσιάζει ασυνέχειες.

Τότε, η ακολουθία που περιγράφει το σφάλμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η ακολουθία $\{e_n\}$ είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανομημένη, έχει δηλαδή *σ.π.π.*

$$f_e(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \alpha \in \left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι $E[e_n] \approx 0$,

$$\sigma_e^2 = E[e_n^2] = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2Q}}{3}.$$

2. Η ακολουθία $\{\varepsilon_n\}$ τείνει να αποτελεί μια ακολουθία *iid*.

Δεδομένου ότι η ισχύς του θορύβου είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε όλο

⁸ *Independent identically distributed sequence (iid)* στη θεωρία πιθανοτήτων ονομάζεται η ακολουθία ή οποιαδήποτε άλλη συλλογή τυχαίων μεταβλητών αν κάθε στοιχείο της έχει την ίδια κατανομή πιθανότητας και είναι ανεξάρτητο από όλα τα άλλα στοιχεία της ακολουθίας.

το εύρος των συχνοτήτων, το φάσμα πυκνότητας της ισχύος του θορύβου μπορεί να εκφραστεί από την παρακάτω σχέση:

$$N(f) = \frac{\Delta^2}{12f_s} = \frac{2^{-2Q}}{3f_s}.$$

Είναι όμως οι θεωρήσεις αυτές ικανές να ισχύουν και στην περίπτωση των διαμορφωτών ΣΔ; Αναφορικά με την πρώτη υπόθεση, αν, δηλαδή, το σήμα δεν υπερχειλίζει, δεν υπάρχει ξεκάθαρη απάντηση, καθώς τις περισσότερες φορές κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα γνωστό. Θα πρέπει να εξακριβωθεί αναλόγως για κάθε συγκεκριμένο τύπο διαμορφωτή ΣΔ και στην πραγματικότητα η υπόθεση αυτή ισχύει για πολύ λίγους διαμορφωτές. Σε ότι αφορά την δεύτερη υπόθεση, στους περισσότερους διαμορφωτές ΣΔ το M δεν είναι ασυμπτωτικά πολύ μεγάλο, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου μελετώνται οι διαμορφωτές 1^{ης} τάξης, όπου το M ισούται με 2. Για την τρίτη υπόθεση, μπορεί να αποδειχθεί ότι το Δ δεν είναι σχεδόν ποτέ πολύ μικρό, ιδιαίτερα για τους διαμορφωτές ΣΔ 1^{ης} τάξης. Τέλος, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σήματος εισόδου του σταθμιστή δεν είναι ποτέ ομαλή, καθώς περιέχει ένα διακριτό στοιχείο που οφείλεται στην ύπαρξη της αναδρομής. Έτσι, η είσοδος στον σταθμιστή αποτελείται από ένα συνεχές και ένα ασυνεχές τμήμα που παραβιάζει την υπόθεση ομαλότητας που χρησιμοποιείται για να αποδείξει το θεώρημα του *Bennett*.

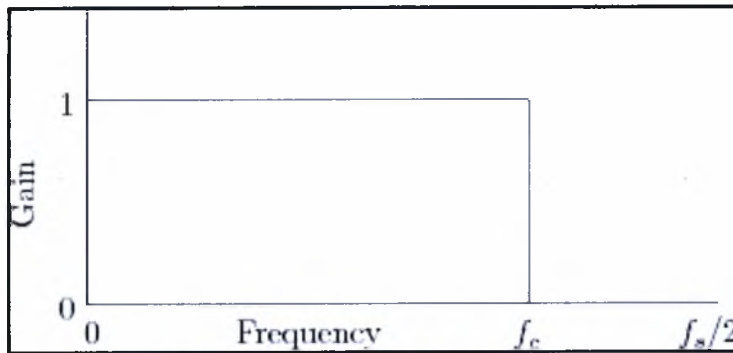
Δεδομένων των παραπάνω παρατηρήσεων, είναι τουλάχιστον αφελές να θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος στους διαμορφωτές ΣΔ είναι πράγματι λευκός. Ακριβέστερα, αποδείχθηκε αρκετά νωρίς ότι στους διαμορφωτές ΣΔ, που χρησιμοποιούσαν την τεχνική υπερδειγματοληψίας, ο θόρυβος που προερχόταν από τον σταθμιστή παρουσίαζε διακριτούς τόνους των οποίων η συχνότητα και το πλάτος εξαρτώνται από το σήμα εισόδου. Στους διαμορφωτές ΣΔ μεγαλύτερης τάξης, ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι ο θόρυβος στάθμισης ομοίαζε προς τον λευκό θόρυβο, ωστόσο, τέτοια συστήματα είναι εξαιρετικά ασταθή και η συμπεριφορά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί από την ανάλυση λευκού θορύβου. Στην παράγραφο 4.3 εξετάζεται μια τεχνική με την οποία ο θόρυβος στάθμισης μπορεί να προσεγγιστεί από την ανάλυση λευκού θορύβου.

4.2 Αποδεκατισμός στην έξοδο

Στα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3, χρησιμοποιήθηκε στο τέλος της κάθε δοκιμής το πιο απλό φίλτρο αποδεκατισμού (*decimation filter*), έγινε, δηλαδή, μια διαδοχική άθροιση ανά β -άδες των δειγμάτων του προέκυψαν στην έξοδο του σταθμιστή και υπολογίστηκε ο μέσος όρος των τιμών αυτών. Η προσέγγιση αυτή αποφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ωστόσο στην παρούσα παράγραφο εξηγείται ενδελεχέστερα η σημασία του αποδεκατισμού στην έξοδο του διαμορφωτή ΣΔ και η σημασία που έχει στη λειτουργία του. Για το λόγο, αυτό κρίνεται αναγκαία η παράθεση κάποιων εισαγωγικών αλλά ουσιαστικών λεπτομερειών που αφορούν τον αποδεκατισμό.

Στην παράγραφο 2.1 αναφέρθηκαν ότι οι μετατροπείς Α/Ψ χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες: τους μετατροπείς που χρησιμοποιούν τη συχνότητα *Nyquist* και αυτούς που εφαρμόζουν *υπερδειγματοληψία*. Η υπερδειγματοληψία έχει ευεργετικές ιδιότητες στην εξάλειψη της *αναδίπλωσης* (*aliasing*). Για να γίνει αντιληπτή η χρησιμότητα της υπερδειγματοληψίας, μπορεί κανείς να αναλογιστεί ένα απλό παράδειγμα.

Έστω ένας μετατροπέας – διαμορφωτής που λειτουργεί σε συχνότητα 48 kHz . Αν πρόκειται για ένα μετατροπέα *Nyquist*, τότε η μέγιστη επιτρεπτή συχνότητα εισόδου του σήματος είναι 24 kHz , έτσι ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο της *αναδίπλωσης* (*aliasing*). Αν ληφθούν υπόψη και οι εγγενείς περιορισμοί που τίθενται από την υλοποίηση του κυκλώματος –όπως για παράδειγμα οι ατέλειες των στοιχείων που χρησιμοποιούνται, τότε, πρακτικά, η υψηλότερη συχνότητα του σήματος εισόδου που μπορεί να διέλθει και να εξέλθει αμετάβλητο είναι περίπου 22 kHz . Οι προδιαγραφές ενός τέτοιου συστήματος καθιστούν απαραίτητη την ελάττωση των συχνοτήτων άνω των 24 kHz με ακαριαίο τρόπο, μετά τη διέλευση του σήματος από τον μετατροπέα. Με άλλα λόγια, το χαμηλοπερατό φίλτρο στην έξοδο θα πρέπει να είναι ιδανικό, δηλαδή να έχει μοναδιαίο κέρδος για



Εικόνα 4-1: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο

συχνότητες έως 24 kHz και μηδενικό για συχνότητες μεγαλύτερες και η μετάβαση από τη μία τιμή στην άλλη θα πρέπει να είναι ακαριαία.

Η απαίτηση αυτή είναι πρακτικώς αδύνατον να υλοποιηθεί σε ένα αναλογικό χαμηλοπερατό φίλτρο. Για το λόγο αυτό, σε έναν μετατροπέα υπερδειγματοληψίας αν θεωρήσουμε ότι λειτουργεί με συχνότητα, έστω $2f_s = 96 \text{ kHz}$, τότε και πάλι είναι αναγκαία η αποκοπή των συγκεκριμένων συχνοτήτων, δίνοντας όμως τη δυνατότητα μετάβασης από την μοναδιαία στη μηδενική τιμή σε ένα εύρος της τάξεως των 74 kHz , καθιστώντας επομένως το φίλτρο ρεαλιστικό και άμεσα υλοποιήσιμο.

Ένα επιπλέον σημαντικό στοιχείο είναι αυτό της αναδίπλωσης. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται, όταν ο θόρυβος που προκύπτει από το σφάλμα στάθμισης ανακατεύεται, κατά κάποιον τρόπο, με το κομμάτι του σήματος που περιέχει τη χρήσιμη πληροφορία. Πιο συγκεκριμένα, το συχνοτικό περιεχόμενο του θορύβου –ή της άχρηστης πληροφορίας που φέρει το σήμα– αναδιπλώνεται μέσα στο συχνοτικό περιεχόμενο του τμήματος του σήματος που μας ενδιαφέρει. Το φαινόμενο αυτό είναι δυνατό να προκύψει όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν ικανοποιεί το *θεώρημα Nyquist* ή, ακόμη, όταν το σήμα –αν και δειγματοληπτείται στη συχνότητα *Nyquist*– περιέχει αρκετά μεγάλο ποσοστό θορύβου. Στους μετατροπείς *Nyquist*, παρατηρείται αρκετά συχνά η *διασυμβολική παρεμβολή*. Για το λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη η ύπαρξη ενός φίλτρου που θα απομακρύνει τον αναδιπλούμενο θόρυβο. Το φίλτρο αυτό καλείται *antialiasing filter*. Το πρόβλημα που εγείρεται, όμως, και στην συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ότι το πεδίο μετάβασης του φίλτρου αυτού πρέπει να έχει απότομη κλίση, να πλησιάζει δηλαδή το ιδανικό φίλτρο. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός, η πολυπλοκότητα του φίλτρου πρέπει να είναι ιδιαίτερα αυξημένη, πράγμα που καθιστά πρακτικώς ανέφικτη την κατασκευή του.

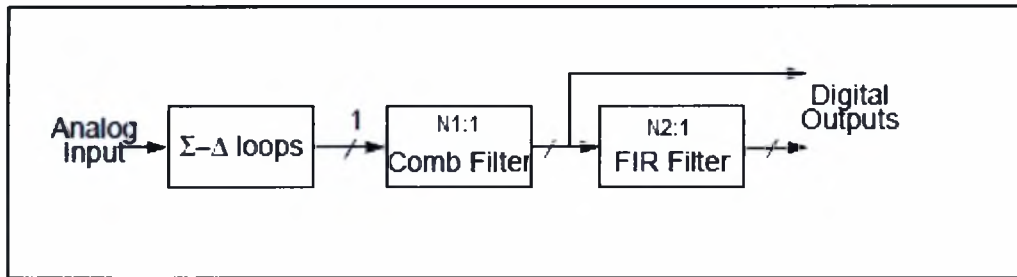
Το πρόβλημα αυτό δεν υφίσταται τους μετατροπείς υπερδειγματοληψίας. Για την ακρίβεια, ένα απλό *RC* φίλτρο κρίνεται αρκετό. Επομένως, το πλεονέκτημα της

υπερδειγματοληψίας δεν είναι μόνο ότι προσφέρει οικονομικότερους τρόπους για την υλοποίηση φίλτρων στο ψηφιακό τμήμα του μετατροπέα. Το κύριο στοιχείο είναι ότι ο αποδεκατισμός της εξόδου του σταθμιστή προσφέρει αυξημένη ανάλυση στο τελικό σήμα εξόδου.

Στο σημείο αυτό είναι αναγκαία η ενσωμάτωση, όσων ειπώθηκαν προηγουμένως για την εισαγωγή θορύβου στάθμισης, στο σήμα εξόδου. Το φιλτράρισμα του θορύβου που εισέρχεται ως αποτέλεσμα του *σφάλματος στάθμισης* και η αύξηση της ανάλυσης σε δυαδικά ψηφία του σήματος εξόδου είναι οι κύριοι στόχοι της διαδικασίας του αποδεκατισμού. Ουσιαστικά, ο αποδεκατισμός είναι ένα φίλτρο που υπολογίζει τη μέση τιμή του των δειγμάτων του σήματος, αλλά και μια συνάρτηση ελάττωσης της συχνότητας του σήματος εξόδου. Οι δύο αυτές λειτουργίες πραγματοποιούνται ταυτόχρονα.

Η διαδικασία του φιλτραρίσματος στο ψηφιακό τμήμα του διαμορφωτή ΣΔ χωρίζεται σε τρία κύρια σημεία:

1. *Απομάκρυνση του θορύβου στάθμισης*: Ο διαμορφωτής ΣΔ είναι σχεδιασμένος έτσι ώστε να μετατοπίζει το θόρυβο που προκύπτει από το σφάλμα στάθμισης σε υψηλότερες συχνότητες (*noise shaping*). Με τον τρόπο αυτό, το φάσμα συχνοτήτων του κυρίως σήματος περιέχει σημαντικά λιγότερο θόρυβο. Ο σκοπός του ψηφιακού φίλτρου είναι να αποκόψει τον θόρυβο που βρίσκεται εκτός του πεδίου συχνοτήτων όπου βρίσκεται το σήμα πληροφορίας. Έτσι, παραμένει και πάλι ένα ποσό θορύβου εντός του φάσματος (*baseband quantization noise*), οπότε περαιτέρω ελάττωσή του, οδηγεί σε υψηλότερη ανάλυση στην έξοδο του φίλτρου.
2. *Αποδεκατισμός*: Η έξοδος του σταθμιστή στο κύκλωμα του διαμορφωτή ΣΔ έχει πολύ μεγάλη συχνότητα. Το κύριο αυτό γνώρισμα του διαμορφωτή ΣΔ είναι πολύ χρήσιμο, διότι χρησιμοποιεί μεγάλο τμήμα του φάσματος του σήματος για την εναπόθεση του πλεονάζοντος θορύβου στάθμισης. Μετά την πραγματοποίηση του σταδίου του φιλτραρίσματος που περιγράφηκε παραπάνω, είναι αναγκαία η ελάττωση του μεγέθους των δειγμάτων και η μείωση της συχνότητας έτσι ώστε να εξισωθεί με την συχνότητα *Nyquist* για λόγους συρρίκνωσης του μεγέθους της επιθυμητής πληροφορίας για τη μετάδοση, αποθήκευση ή ψηφιακή επεξεργασία της.



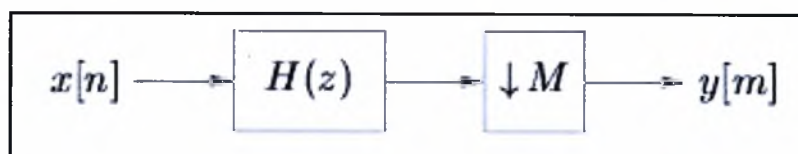
Εικόνα 4-2: Σχεδιάγραμμα αποδεκατισμού στους διαμορφωτές ΣΔ

3. *Antialiasing*: Στην πράξη, τα σήματα εισόδου σπανίως περιορίζονται σε ένα φάσμα συχνοτήτων. Ωστόσο, στους διαμορφωτές υπερδειγματοληψίας ο θόρυβος στάθμισης δεν αναδιπλώνεται μέσα στο φάσμα συχνοτήτων της χρήσιμης πληροφορίας. Παρόλ'αυτά, κάποιες φορές είναι επιθυμητή η ύπαρξη ενός φίλτρου που αποτρέπει την αναδίπλωση, έτσι ώστε να απορριφθεί ο εγγενής θόρυβος στάθμισης, που υπεισέρχεται στο κυρίως φάσμα (*baseband*).

Στη συνέχεια της παραγράφου, θα ασχοληθούμε κυρίως με τα δύο πρώτα στάδια του ψηφιακού τμήματος του διαμορφωτή, καθώς η ύπαρξη της υπερδειγματοληψίας αποτρέπει από μόνη της τη δημιουργία της αναδίπλωσης. Παρατίθενται διάφορες εφαρμογές και παραλλαγές των φίλτρων που χρησιμοποιούνται και θα αναλυθούν τα αποτελέσματά τους.

4.2.1 Αποδεκατισμός σε ένα στάδιο

Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η λειτουργία του αποδεκατισμού που πραγματοποιείται σε ένα στάδιο. Μετά την έξοδο του σταθμιστή, ακολουθεί ένα χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες και στη συνέχεια υποδειγματοληπτεί το σήμα, έτσι ώστε να επανέλθει στην αρχική συχνότητα που είχε στην είσοδο του διαμορφωτή ΣΔ. Το σχεδιάγραμμα που απεικονίζει τη γενικότερη μορφή του αποδεκατισμού δίνεται στην εικόνα 4.3. Παρουσιάζονται διάφορα χαμηλοπερατά φίλτρα, το καθένα με τα δικά του χαρακτηριστικά.



Εικόνα 4-3: Αποδεκατισμός σε ένα στάδιο

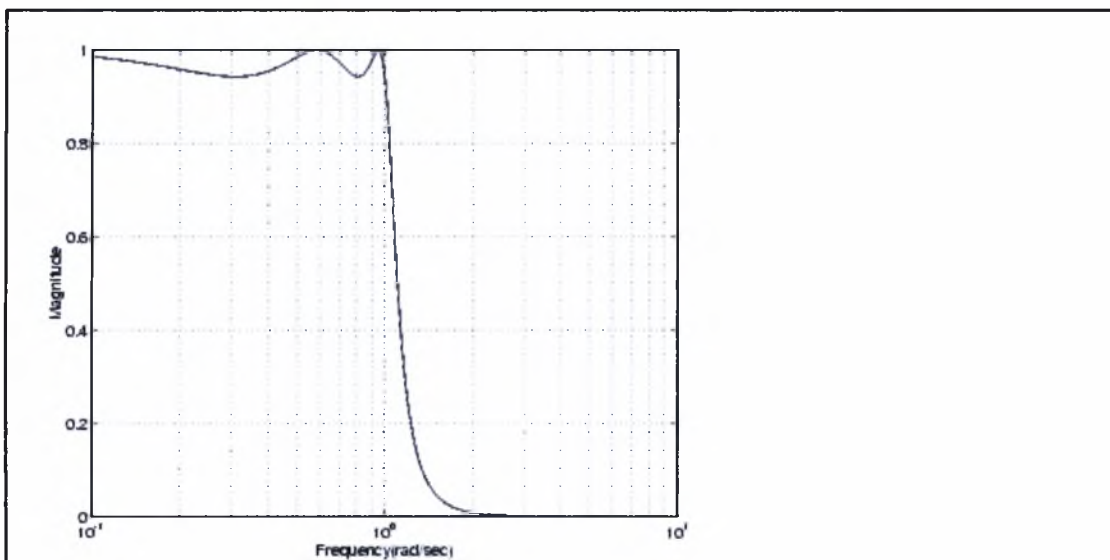
4.2.1.1 Αποδεκατισμός με χρήση φίλτρου *Chebyshev*

Το *MATLAB* προσφέρει μια συνάρτηση η οποία υλοποιεί τη διαδικασία του αποδεκατισμού χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο *Chebyshev* 1^{ου} τύπου και στη συνέχεια υποδειγματοληπτεί το σήμα, έτσι ώστε να φτάσει στην επιθυμητή συχνότητα. Το συγκεκριμένο φίλτρο παρουσιάζει κυματισμό στη ζώνη διάβασης (*passband*).

Η απόκριση πλάτους του φίλτρου *Chebyshev* 1^{ου} τύπου είναι η ακόλουθη:

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

όπου ϵ είναι ο παράγοντας κυματισμού (*ripple factor*), ω_0 η συχνότητα αποκοπής, και $T_n()$ είναι το πολυώνυμο *Chebyshev* n -οστού βαθμού.

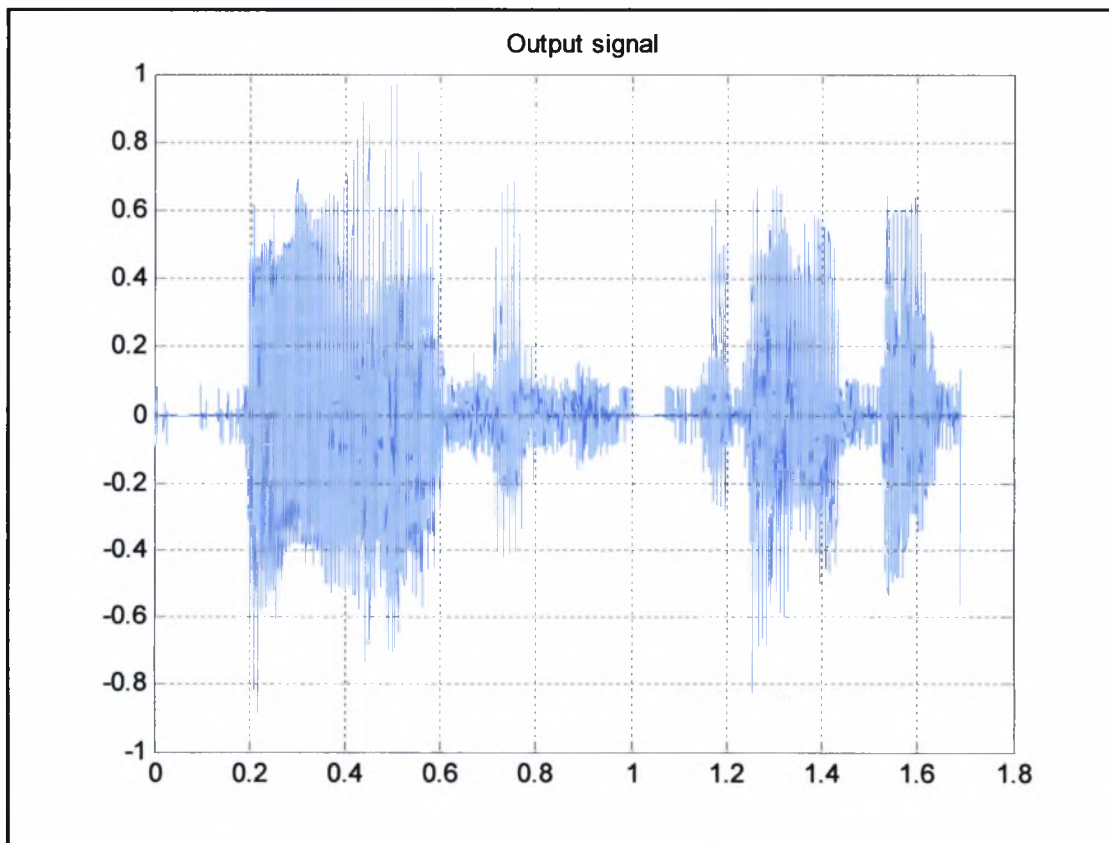


Εικόνα 4-4: Απόκριση πλάτους φίλτρου *Chebyshev* 1ου τύπου

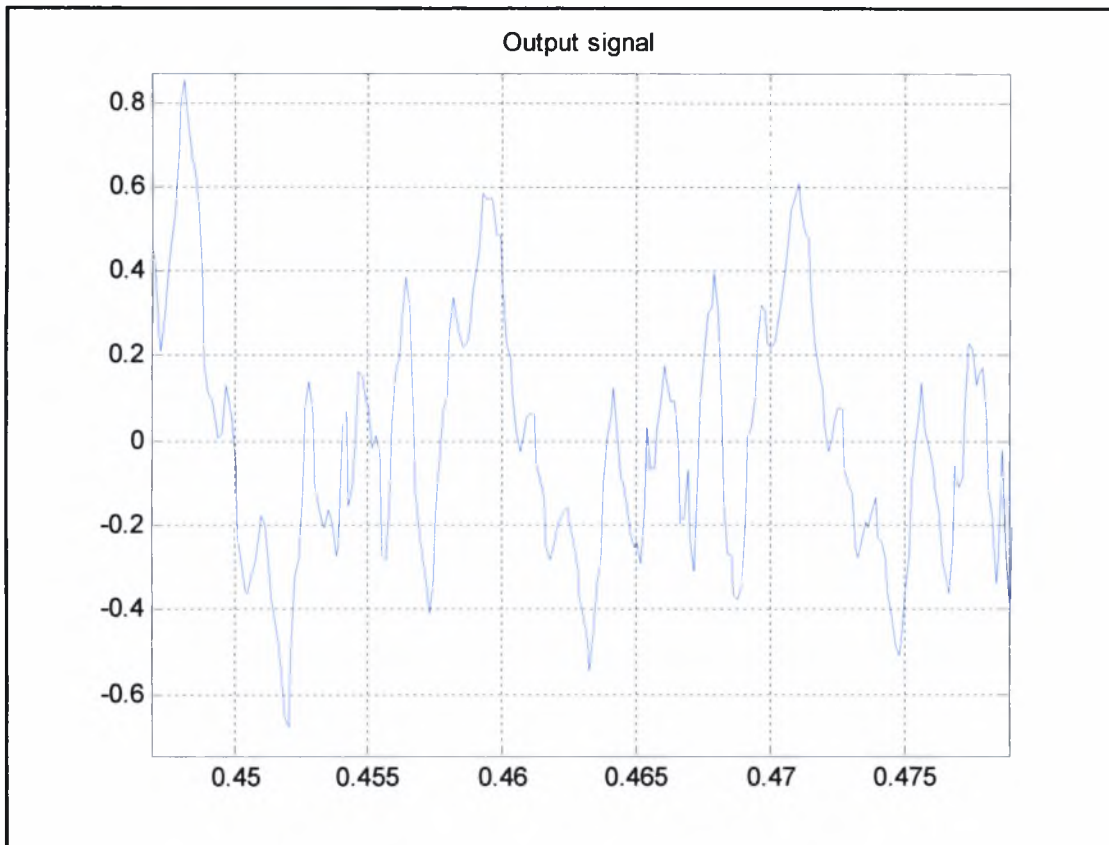
Η συνάρτηση στο *MATLAB* που πραγματοποιεί τη συγκεκριμένη λειτουργία δίδεται παρακάτω:

```
y = decimate(X, R, N)
```

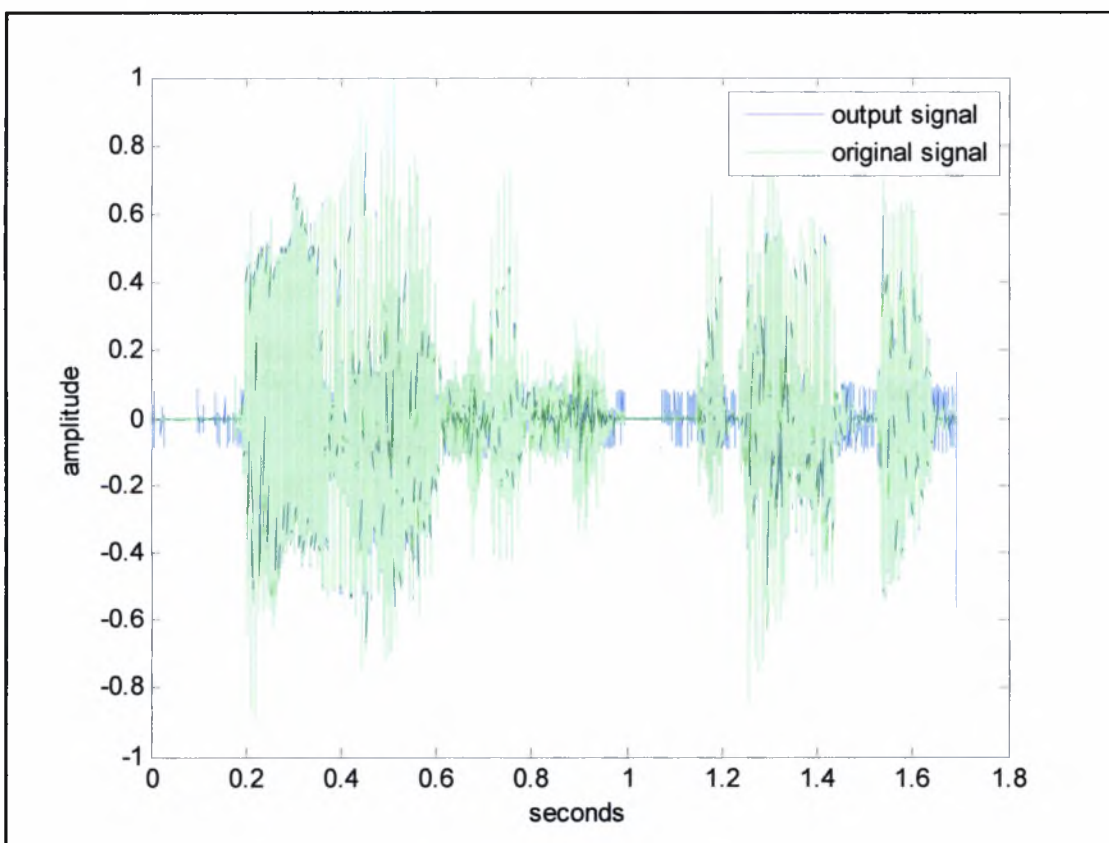
με X το διάνυσμα εισόδου που θα υποστεί την υποδειματοληψία, R τον παράγοντα υποδειματοληψίας και N την τάξη του φίλτρου *Chebyshev*. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το διάνυσμα εισόδου στο χαμηλοπερατό φίλτρο είναι το διάνυσμα εξόδου του σταθμιστή, x_q , ο παράγοντας υποδειματοληψίας είναι ίσος με τον παράγοντα υπερδειματοληψίας, OSR , και η τάξη του φίλτρου είναι πάλι ίση με OSR . Ακολουθούν τα διαγράμματα που περιγράφουν τα αποτελέσματα της διαδικασίας.



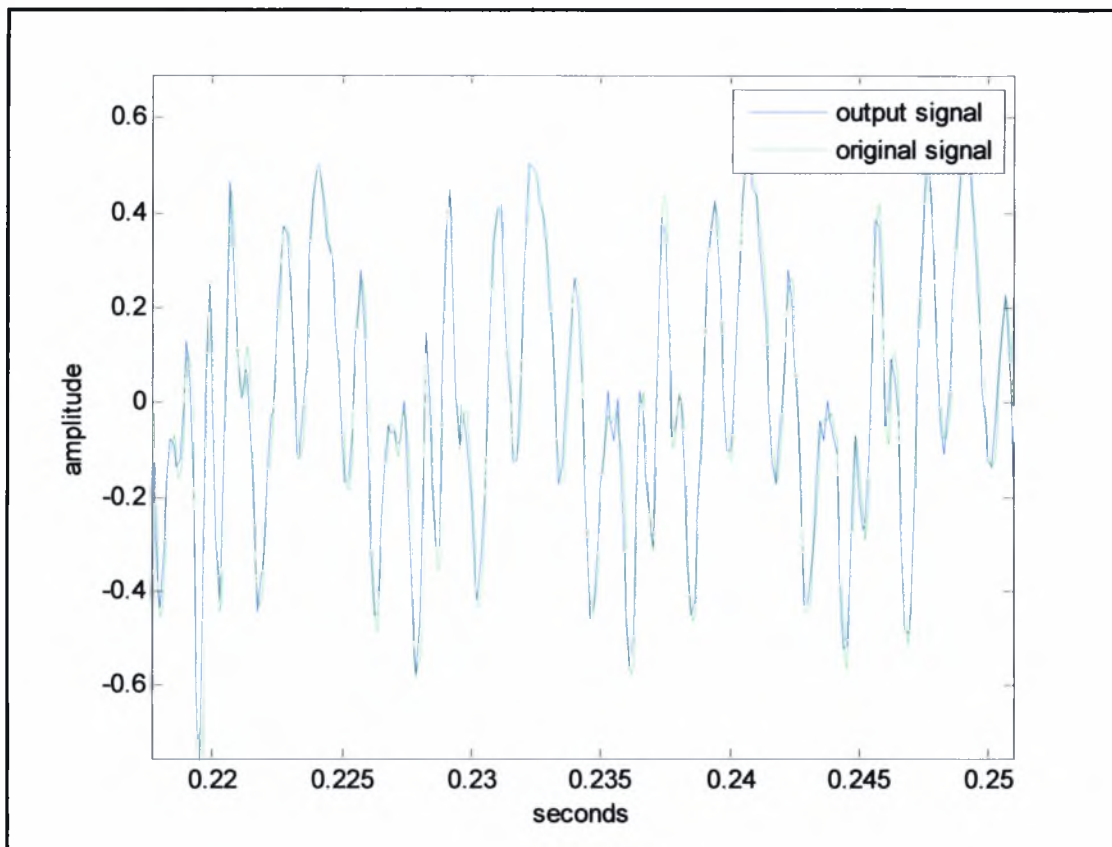
Εικόνα 4-5: Έξοδος φίλτρου *Chebyshev*



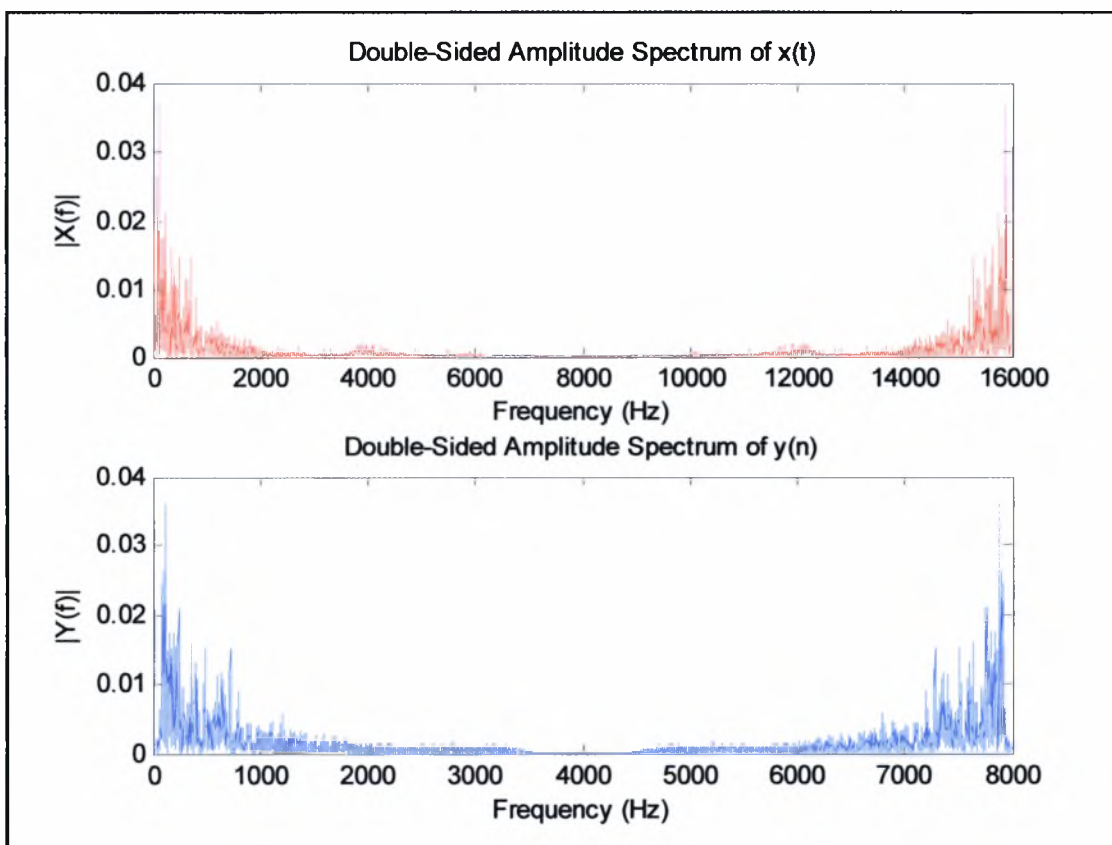
Εικόνα 4-6: Λεπτομέρεια εξόδου φίλτρου



Εικόνα 4-7: Αρχικό σήμα και τελική έξοδος



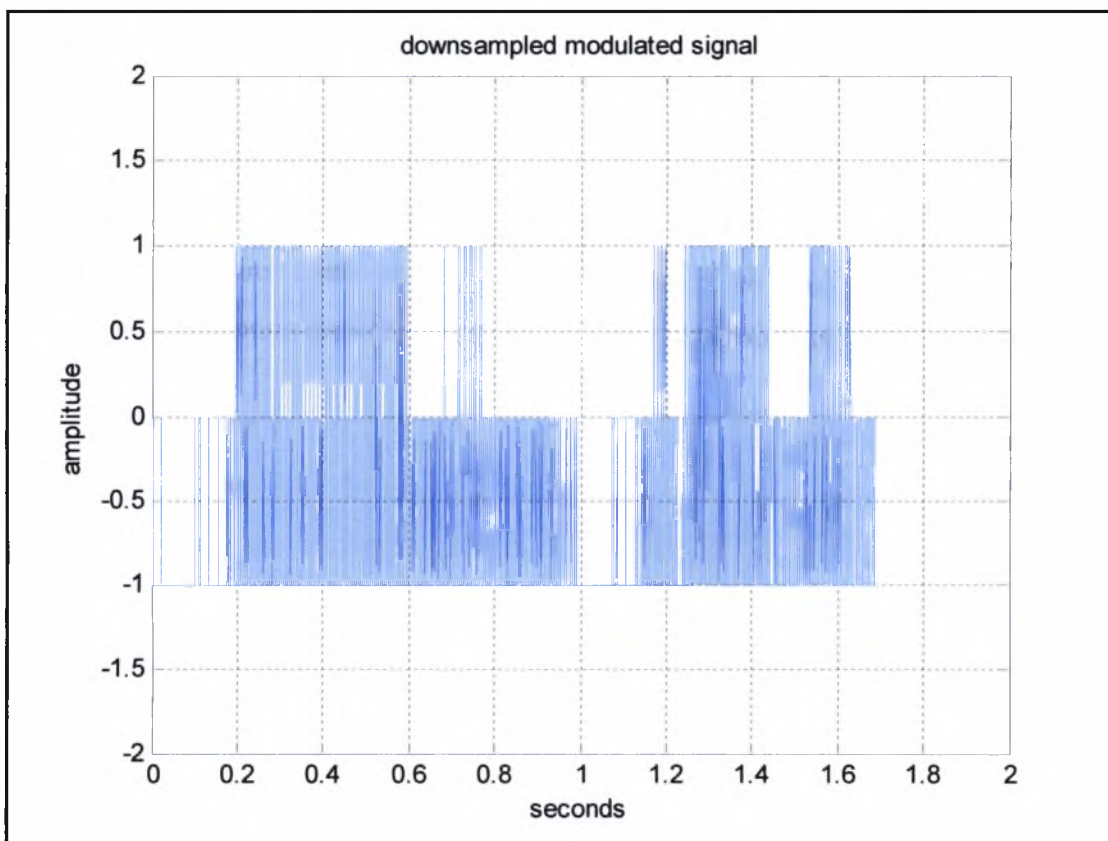
Εικόνα 4-8: Λεπτομέρεια εισόδου - εξόδου



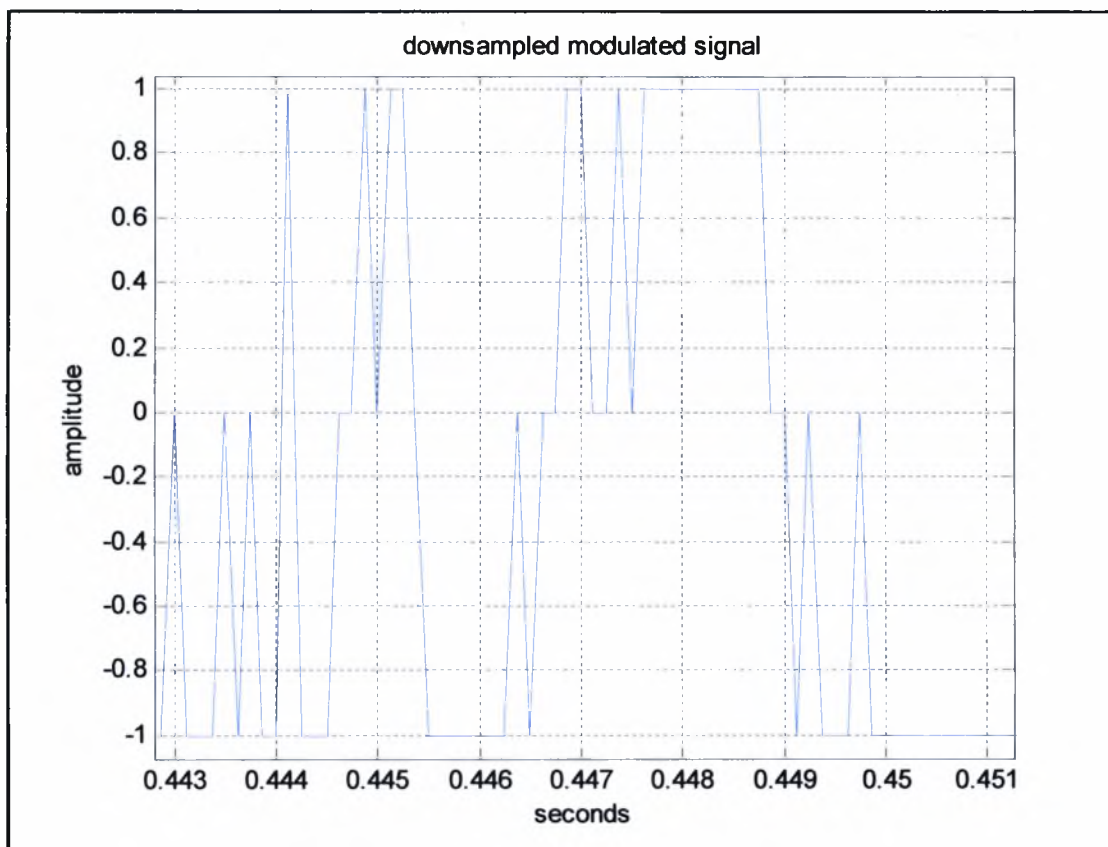
Εικόνα 4-9: Φάσμα συχνοτήτων σημάτων εισόδου - εξόδου

4.2.1.2 Αποδεκατισμός με χρήση φίλτρου μεσαίας τιμής (*median filter*)

Στην παρούσα παράγραφο μελετάται ένα άλλο φίλτρο που είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για το στάδιο του αποδεκατισμού. Πρόκειται για το φίλτρο μεσαίας ή κεντρικής τιμής (*median filter*). Η υλοποίησή του είναι πολύ απλή. Δημιουργούμε ένα παράθυρο με μήκος n όσο ο λόγος υπερδειγματοληψίας – OSR . Τεμαχίζουμε, κατά κάποιο τρόπο, την έξοδο του σταθμιστή ανά n -άδες, ταξινομούμε τα δείγματα σε άξουσα σειρά και επιλέγεται η κεντρική τιμή του διανύσματος. Όταν το n είναι περιττός αριθμός τότε επιλέγεται η τιμή που αντιστοιχεί στη θέση $\left\lfloor \frac{OSR}{2} \right\rfloor$, διαφορετικά, αν το n είναι άρτιος αριθμός επιλέγεται η τιμή $\frac{OSR}{2} + \left(\frac{OSR}{2} - 1 \right)$. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης υλοποίησης ακολουθούν παρακάτω.

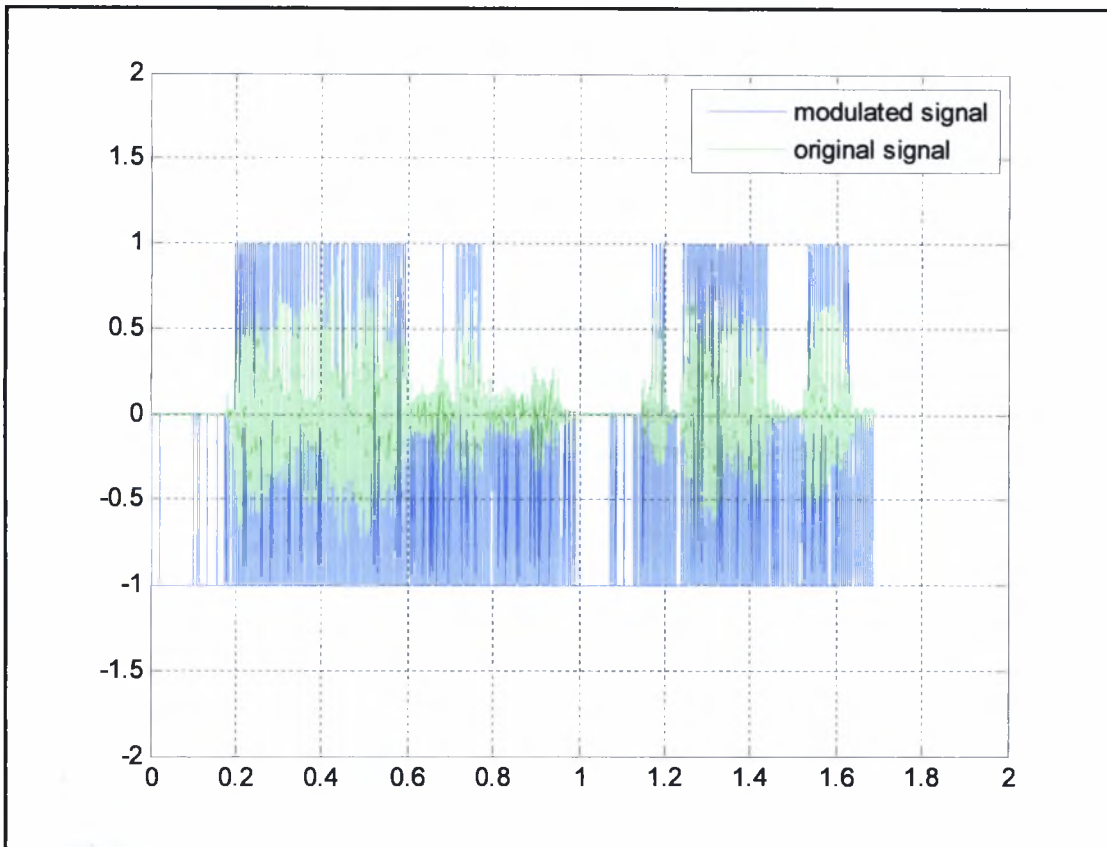


Εικόνα 4-10: Έξοδος φίλτρου

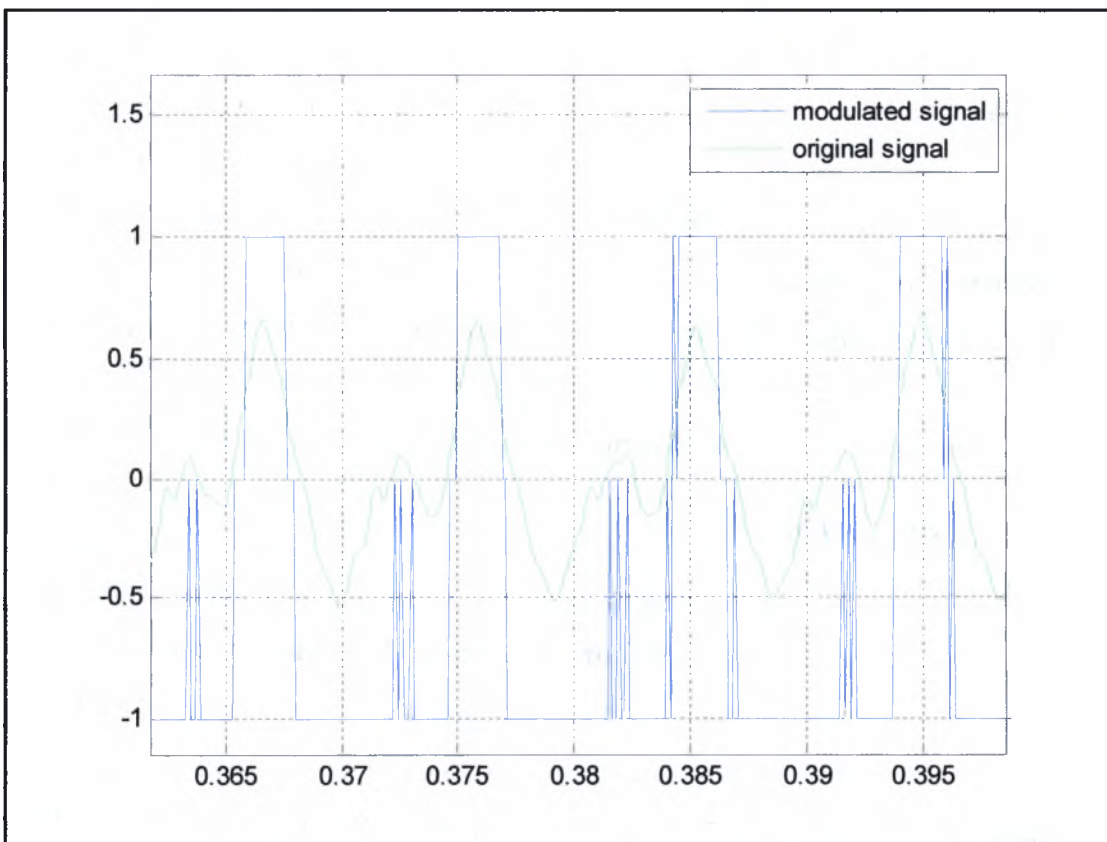


Εικόνα 4-11: Λεπτομέρεια εξόδου φίλτρου

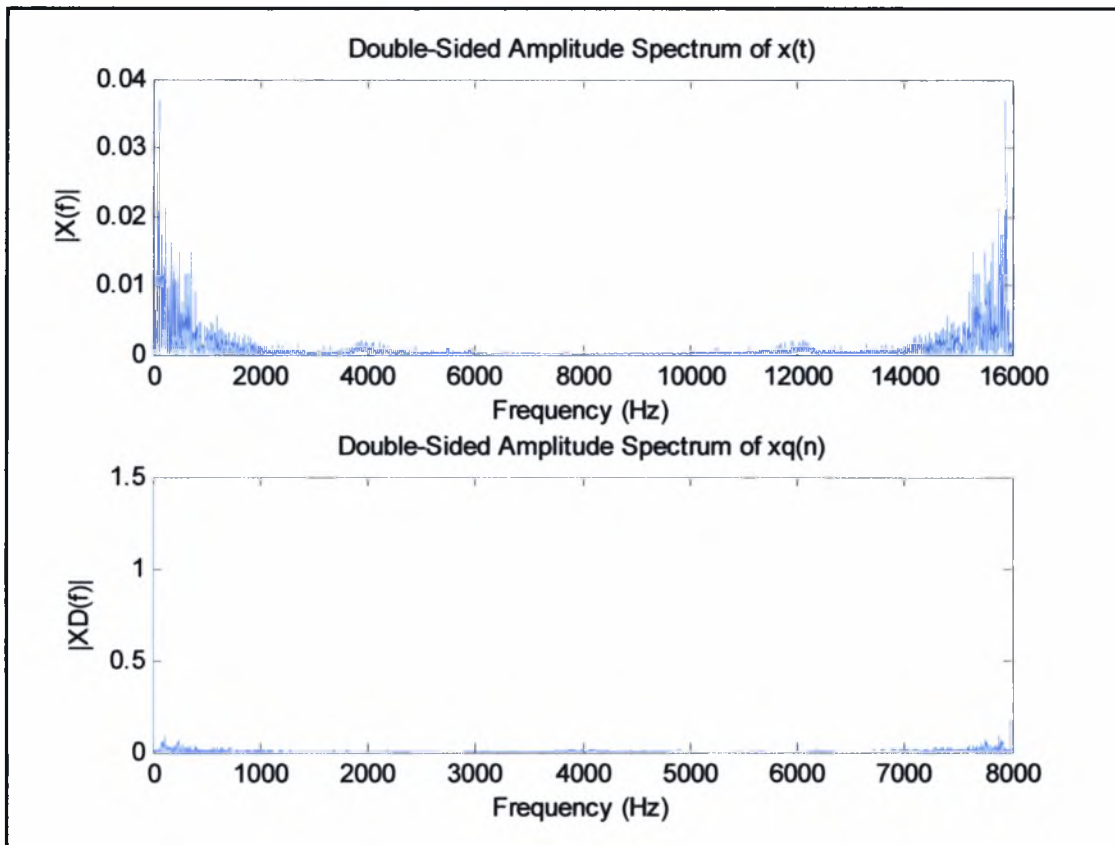
Παρατηρεί κανείς ότι η έξοδος του αποδεκατισμού δίνει ένα σήμα με 3 διακριτές τιμές $+V_{REF}$, $-V_{REF}$ και 0 . Ο λόγος, για τον οποίο συμβαίνει αυτό, εξηγείται από τη διαδικασία επιλογής της τιμής που δόθηκε παραπάνω.



Εικόνα 4-12: Αρχικό σήμα και σήμα εξόδου



Εικόνα 4-13: Λεπτομέρεια αρχικού σήματος και σήματος εξόδου



Εικόνα 4-14: Φάσμα συχνοτήτων σημάτων εισόδου και εξόδου

Παρατηρεί κανείς τη μεγάλη διαφορά που υπάρχει στο συχνοτικό φάσμα μεταξύ των δύο σημάτων. Ο λόγος, για τον οποίο παρουσιάζεται το φαινόμενο αυτό, είναι διότι η ιδιότητα ενός φίλτρου κεντρικής τιμής είναι να αποκόπτει τις ακραίες τιμές, οι οποίες και εναποτίθενται στις τελευταίες θέσεις του παραθύρου επιλογής. Με τον τρόπο αυτό, εμφανίζεται μια σχετική ομοιογένεια στις τιμές του διανύσματος εξόδου, η οποία γίνεται αντιληπτή στα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

4.2.1.3 Comb Filter

Παραπάνω παρουσιάστηκαν δύο εισαγωγικά φίλτρα που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στο στάδιο του αποδεκατισμού. Η υλοποίηση του φίλτρου κεντρικής τιμής, σε επίπεδο υλικού, είναι εξαιρετικά εύκολη και για το λόγο αυτό αποτελεί μια ελκυστική πρόταση προς εφαρμογή. Ωστόσο, τα φτωχά αποτελέσματα που δίνει στην έξοδο και η μικρή πιστότητά του ως προς το αρχικό σήμα, το καθιστούν μια λύση πραγματοποιήσιμη όταν πραγματικά οι απαιτήσεις στην έξοδο είναι πολύ χαμηλές. Ιδιαίτερα, όταν το προς

επεξεργασία σήμα περιέχει αρκετές ακραίες διακυμάνσεις, τότε η χρήση του θα πρέπει να αποφευχθεί.

Γενικά, ο σχεδιασμός ενός φίλτρου αποδεκατισμού περιστρέφεται γύρω από την υλοποίηση ενός ψηφιακού χαμηλοπερατού φίλτρου με μία ή περισσότερες ζώνες αποκοπής. Θεωρητικά, είναι δυνατή η χρήση μεγάλου εύρους «κλασικών» ψηφιακών φίλτρων που να ικανοποιούν τις συγκεκριμένες απαιτήσεις. Ωστόσο, εξαιτίας της ύπαρξης του φαινομένου της υπερδειγματοληψίας, πολλές από τις επιλογές αυτές πρέπει να διαγραφούν για χάρη φίλτρων που εκμεταλεύονται καλύτερα το κριτήριο της υπερδειγματοληψίας και έχουν πιο αποτελεσματικό σχεδιασμό.

Ανάμεσα στα φίλτρα που είναι υλοποιήσιμα, η επιλογή συνήθως βασίζεται σε κριτήρια που σχετίζονται με την αρχιτεκτονική τους. Απαιτήσεις, όπως η ελαχιστοποίηση των συντελεστών του φίλτρου, η εξοικονόμηση μνήμης και η μεγαλύτερη ευκολία ελέγχου του προγράμματος, είναι κρίσιμες. Επιπλέον, η απαίτηση ύπαρξης αυστηρώς γραμμικής φάσης είναι επιβεβλημένη στους περισσότερους μετατροπείς δεδομένων ψηφιακού ήχου. Αυτός και μόνο ο περιορισμός διαγράφει από τις επιλογές τη χρήση των *IIR* φίλτρων, επομένως και τη χρήση του φίλτρου *Chebyshev* που δοκιμάστηκε παραπάνω.

Στο σημείο αυτό, εισάγεται η χρήση του *comb filter*. Πρόκειται για το απλούστερο και οικονομικότερο φίλτρο αποδεκατισμού, διότι η υλοποίησή του σε επίπεδο υλικού δεν απαιτεί την παρουσία ενός πολλαπλασιαστή, καθώς όλοι οι συντελεστές του φίλτρου ισούνται με τη μονάδα. Η λειτουργία του *comb filter* είναι ισοδύναμη με αυτή ενός *FIR* τετραγωνικού παραθύρου. Παρόλ' αυτά, το συγκεκριμένο φίλτρο δεν είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό στην απομάκρυνση του μεγαλύτερου μέρους του θορύβου στάθμισης που προκαλείται από τη λειτουργία του διαμορφωτή ΣΔ και η απόκριση συχνότητάς του είναι δυνατό να προκαλέσει σημαντική πτώση πλάτους στην υψηλότερη περιοχή του κυρίως φάσματος. Επομένως, πολλές φορές είναι αναγκαίο να συνδυάζεται με ένα ή περισσότερα ψηφιακά φίλτρα.

Το *comb filter* είναι ένα *FIR* φίλτρο με μήκος N και όλοι οι συντελεστές του ισούνται με τη μονάδα. Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Για $N=4$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3).$$

Πρόκειται επομένως για έναν απλό αθροιστή που υλοποιεί την πράξη της κυλιόμενης μέσης τιμής (*moving average*). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του γεωμετρικού αθροίσματος,

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} ar^k = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

η σχέση γίνεται

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν δύο διαφορετικές υλοποιήσεις για το *comb filter*. Η πρώτη υλοποιείται με την παράθεση των μοναδιαίων συντελεστών του φίλτρου και η δεύτερη «σπάζοντας» το φίλτρο σε δύο τμήματα: στο πρώτο, που υλοποιεί την πράξη $\frac{1}{1-z^{-1}}$, πρόκειται, ουσιαστικά, για έναν ολοκληρωτή, και στο δεύτερο τμήμα, που υλοποιεί την πράξη $1-z^{-N}$, που αποτελεί έναν διαφοριστή. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να υλοποιηθεί η πράξη της ολοκλήρωσης, στη συνέχεια η υποδειγματοληψία και, τέλος, η πράξη της διαφορίσης.

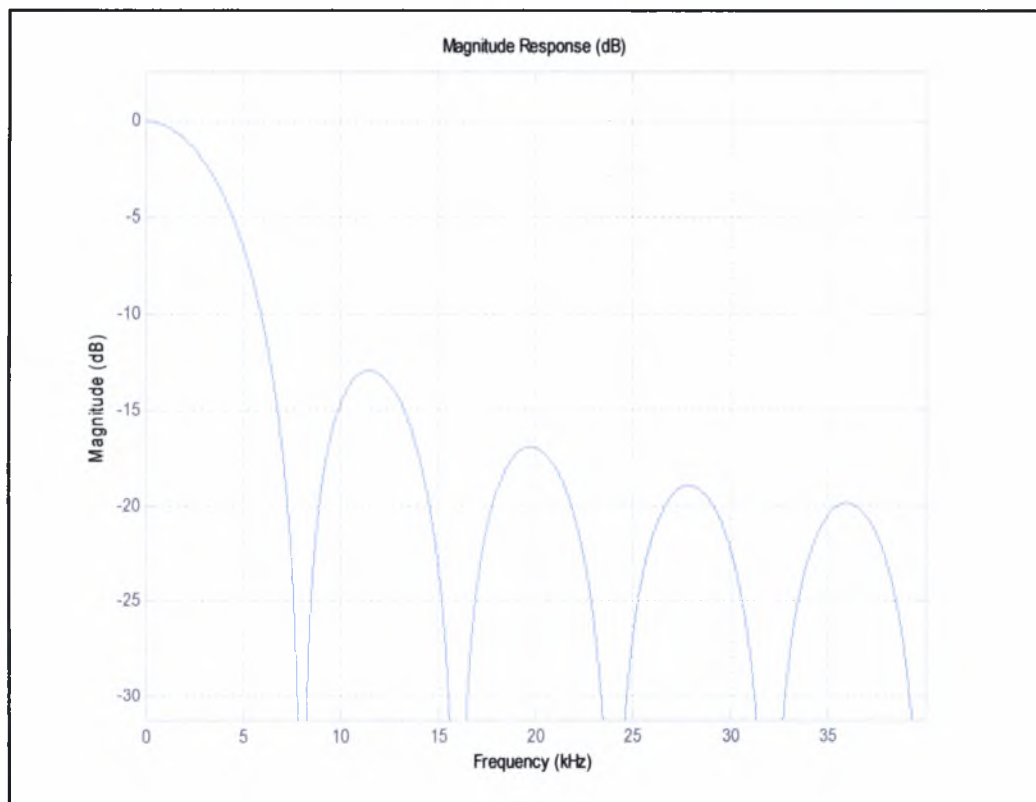
Σημειώνεται ότι το *comb filter* παρουσιάζει φασματικά μηδενικά, ή αλλιώς αποκόπτει τις συχνότητες οι οποίες είναι πολλαπλάσια της συχνότητας αποδεκατισμού.

Αρχικά, παρατίθεται η υλοποίηση του *comb filter* σύμφωνα με τον τύπο που δίνεται από τη σχέση

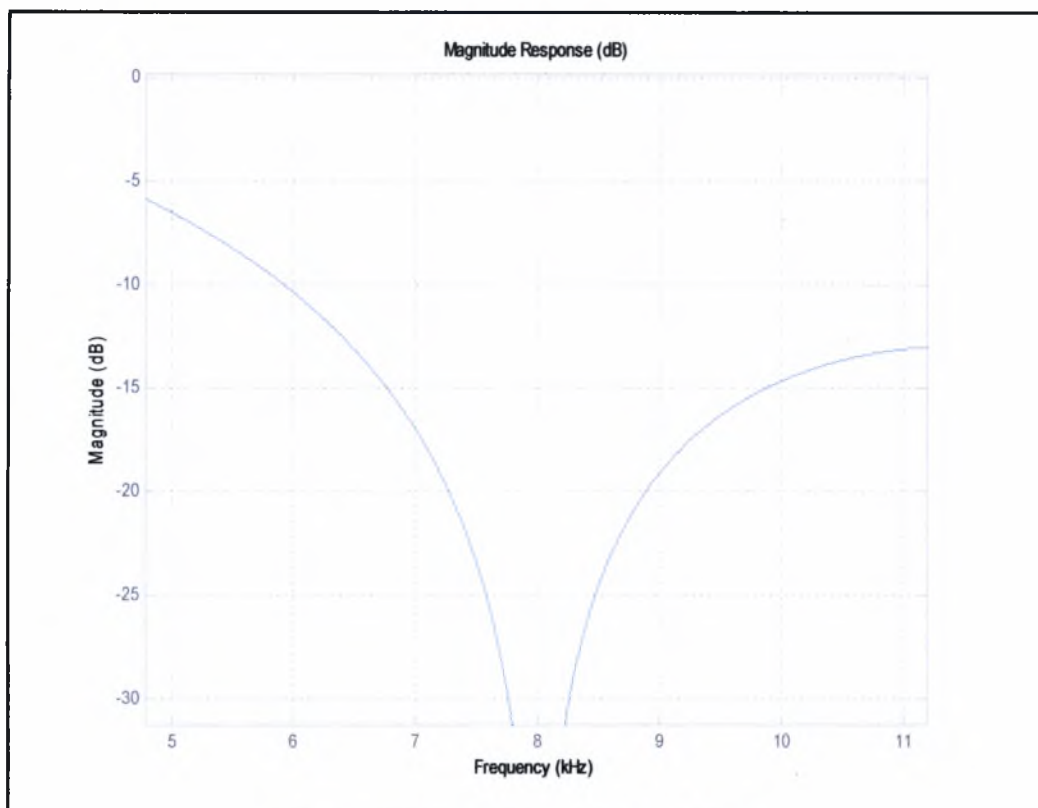
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

Έπειτα, το φίλτρο υλοποιείται σύμφωνα με τον τρόπο της «διάσπασης» σε ένα φίλτρο ολοκληρωτή και σε ένα φίλτρο διαφοριστή.

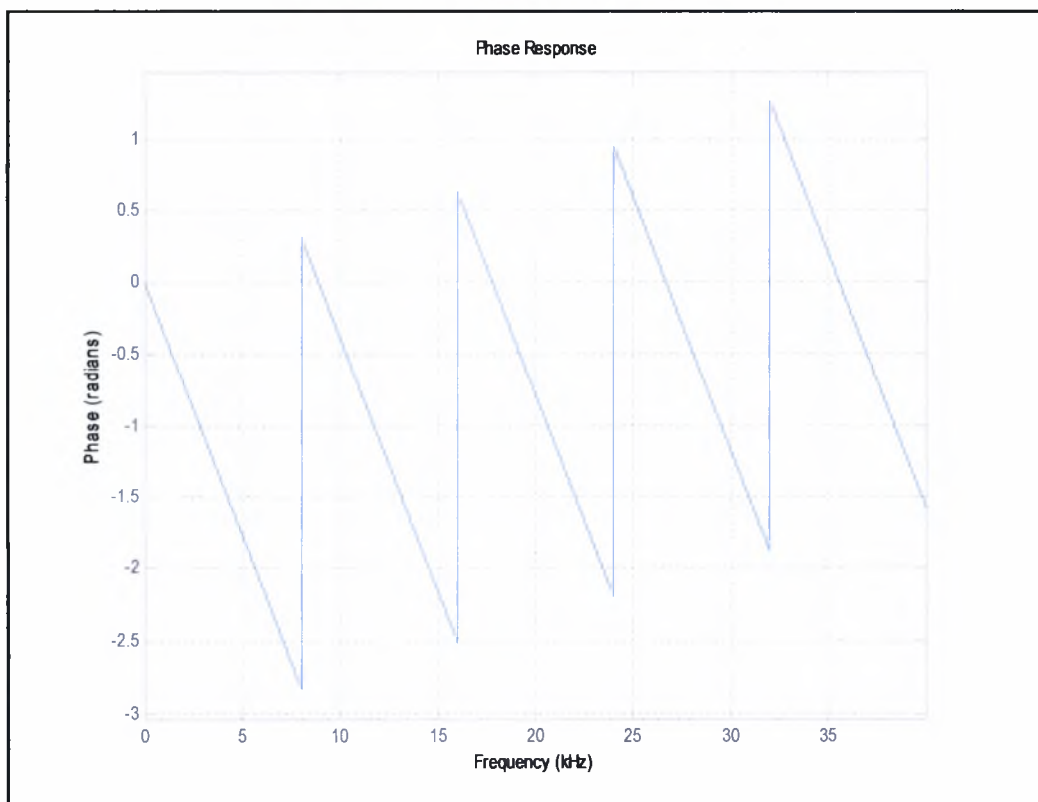
Για τη συγκεκριμένη υλοποίηση χρησιμοποιείται το σήμα εξόδου του σταθμιστή, το οποίο έχει υποστεί υπερδειγματοληψία με παράγοντα $\beta=OSR=10$, με συχνότητα υπερδειγματοληψίας $f_s=80000$ Hz και ζητούμενη συχνότητα $f_o=8000$ Hz. Τα αποτελέσματα της τελικής, αποδεκατισμένης εξόδου παρατίθενται μία φορά, καθώς είναι τα ίδια, τόσο για τον πρώτο, όσο και για τον δεύτερο τρόπο υλοποίησης.



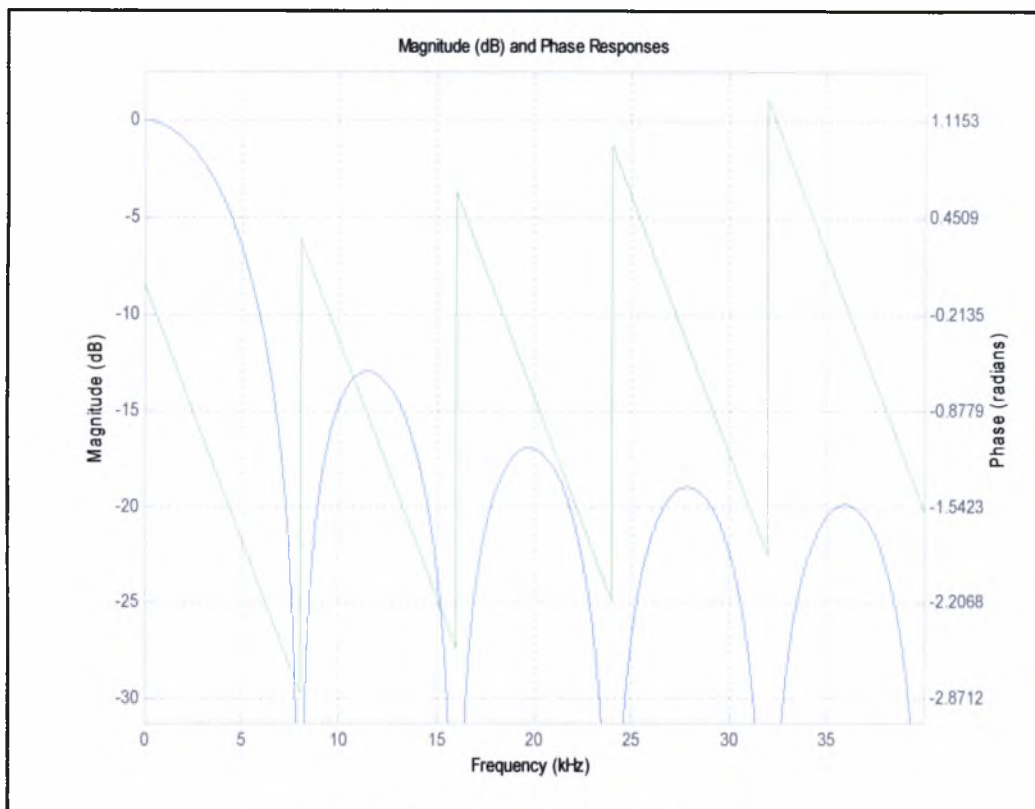
Εικόνα 4-15: Απόκριση πλάτους φίλτρου *comb*



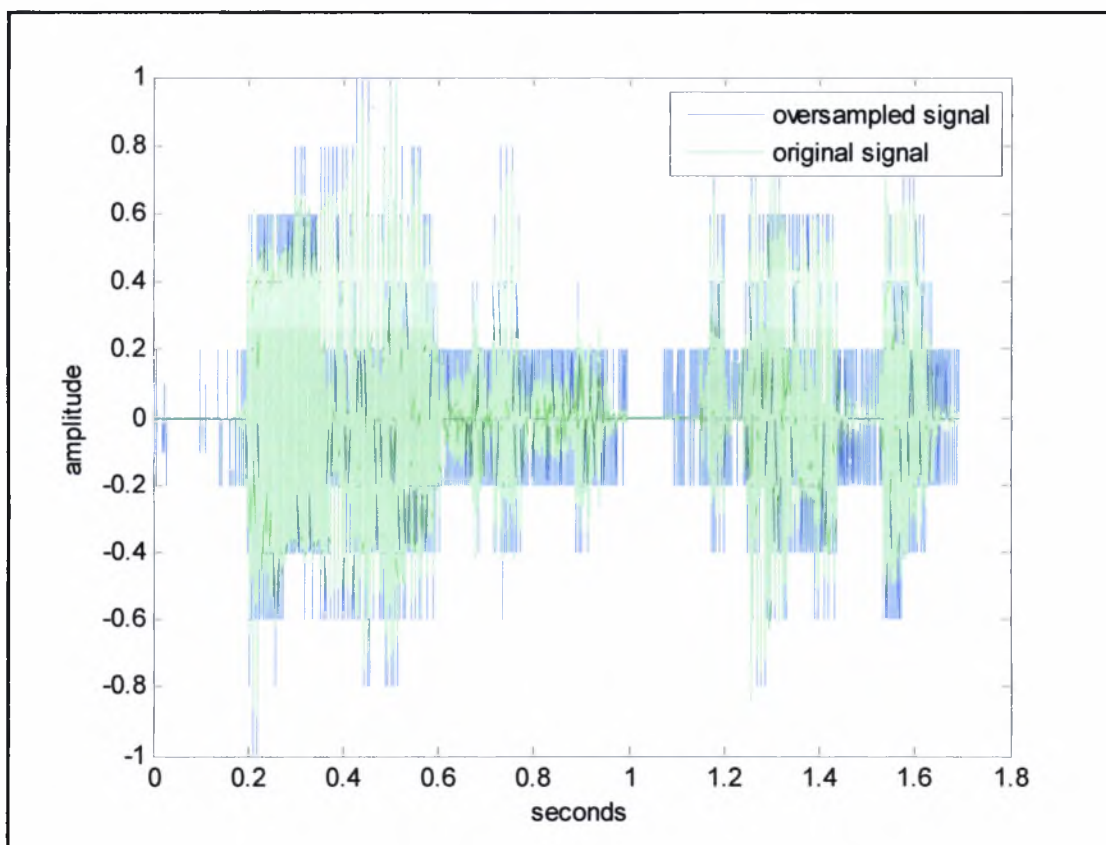
Εικόνα 4-16: Λεπτομέρεια απόκρισης πλάτους

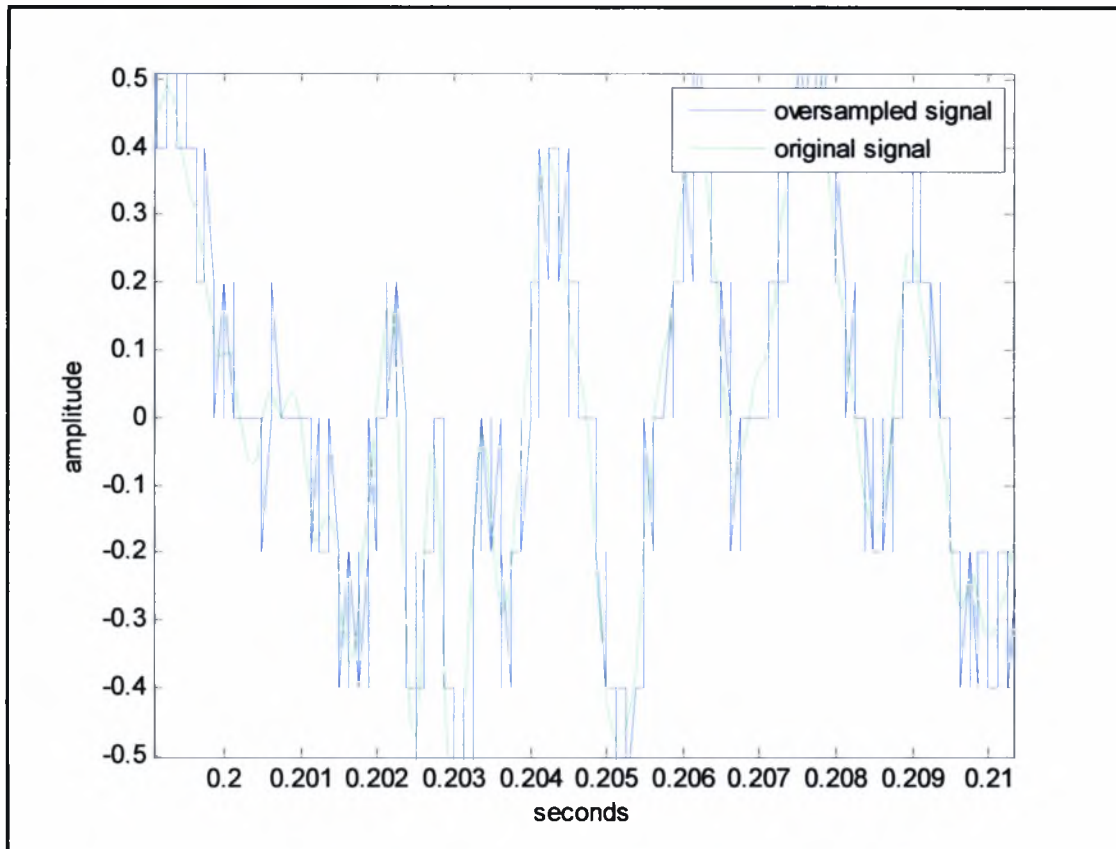


Εικόνα 4-17: Απόκριση φάσης



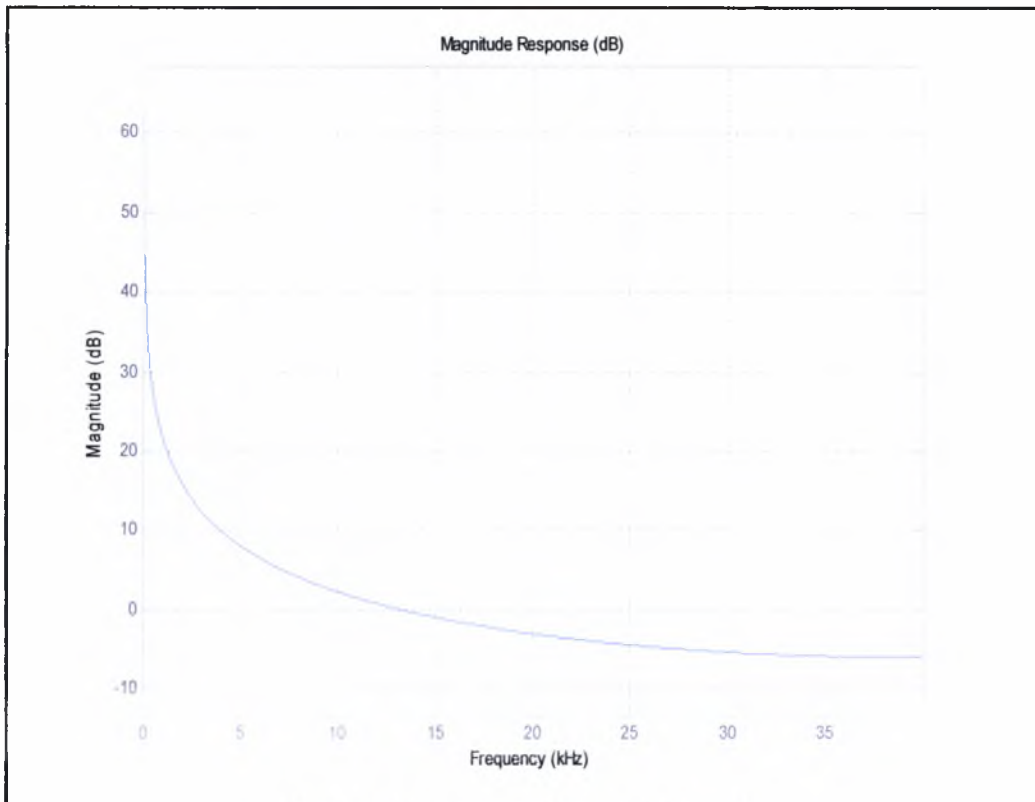
Εικόνα 4-18: Απόκριση πλάτους - φάσης

Εικόνα 4-19: Έξοδος φίλτρου *comb* πριν το *downsampling* και αρχικό σήμα

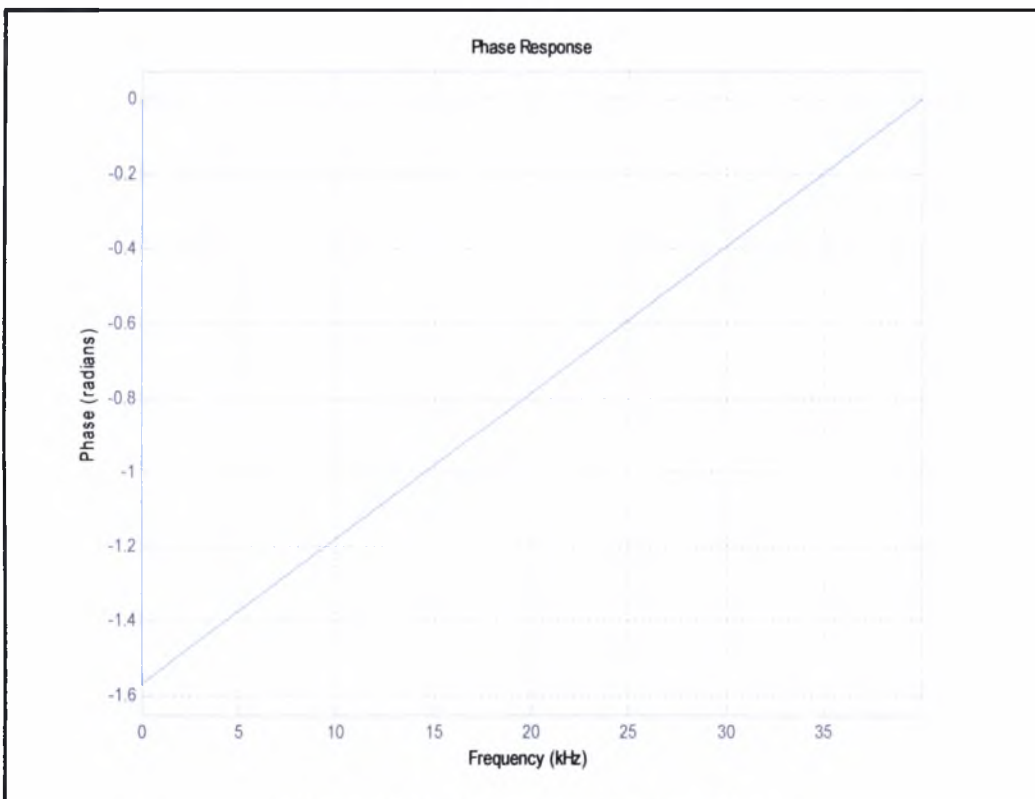


Εικόνα 4-20: Λεπτομέρεια εξόδου φίλτρου πριν τον αποδευκατισμό και αρχικό σήμα

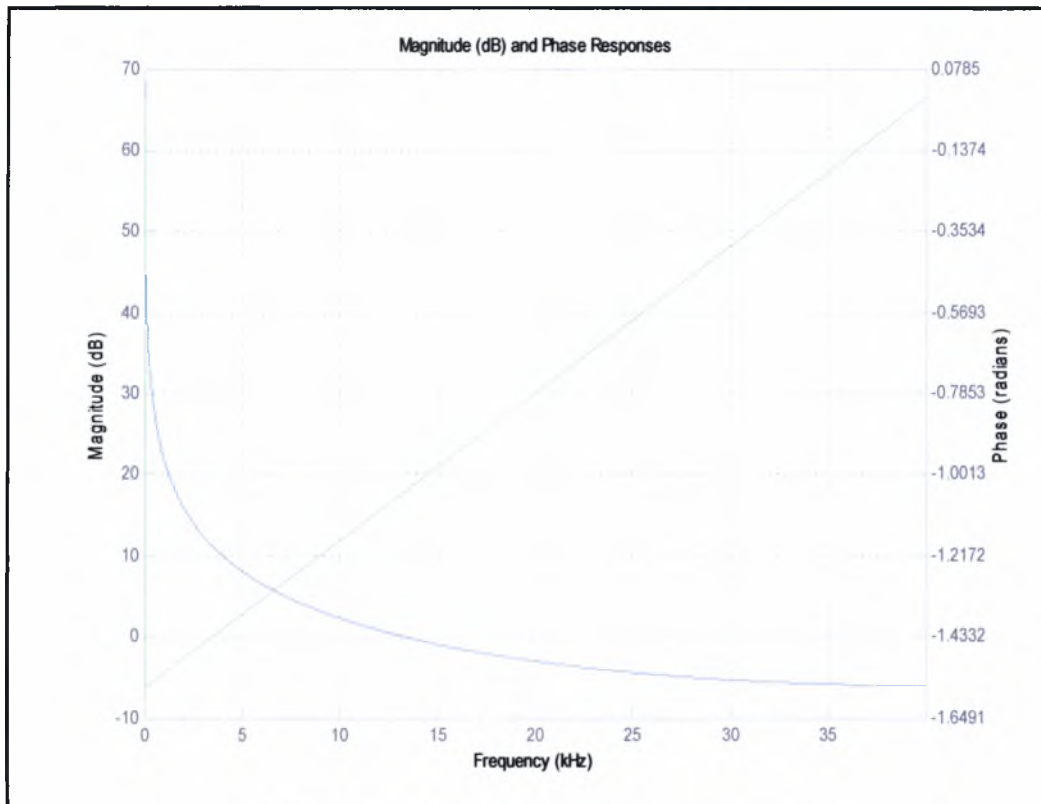
Στη συνέχεια, παρατίθεται ο δεύτερος τρόπος υλοποίησης, όπου διαχωρίζεται το στάδιο της ολοκλήρωσης από αυτό της διαφορίσης.



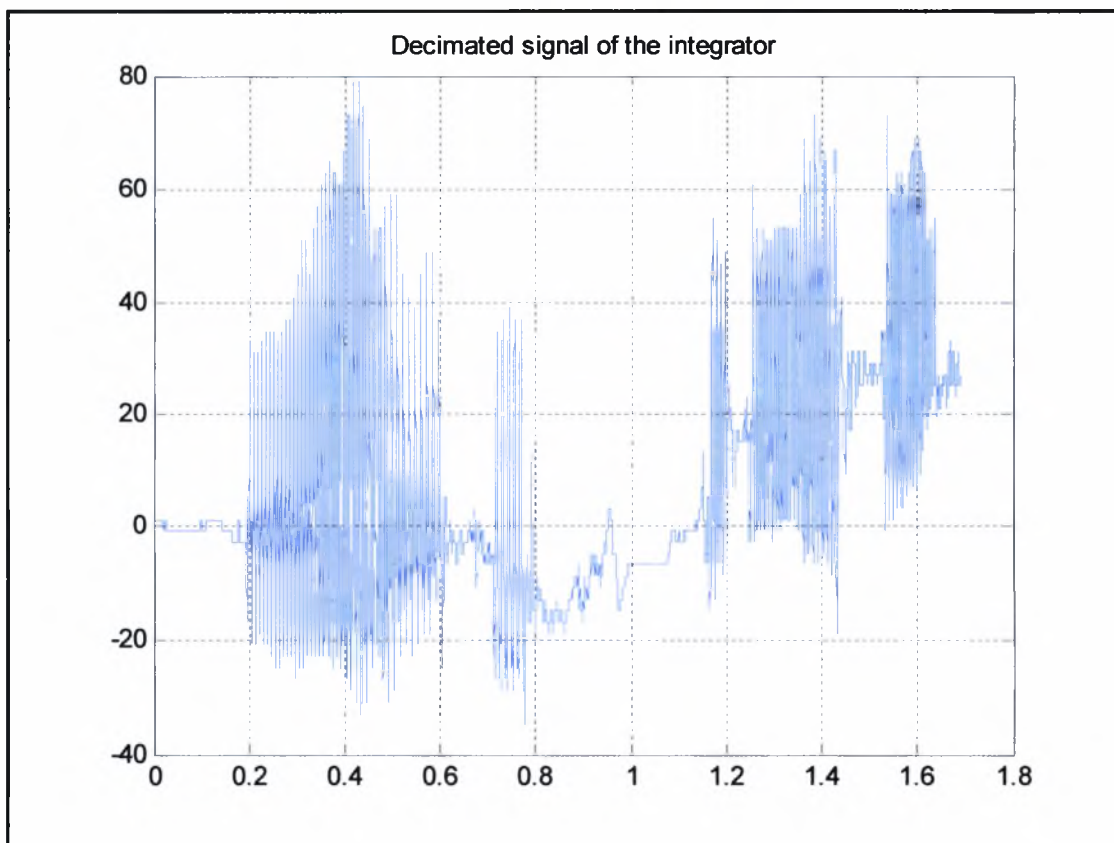
Εικόνα 4-21: Απόκριση πλάτους ολοκληρωτή



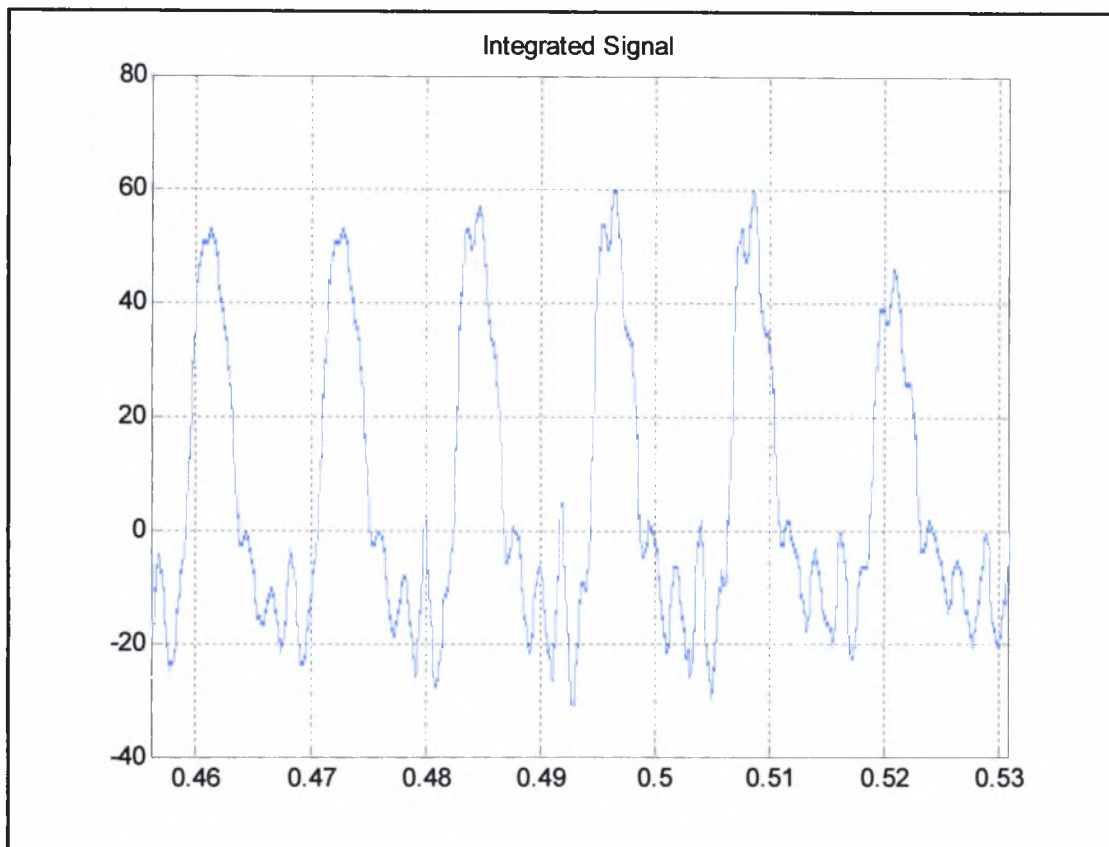
Εικόνα 4-22: Απόκριση φάσης ολοκληρωτή



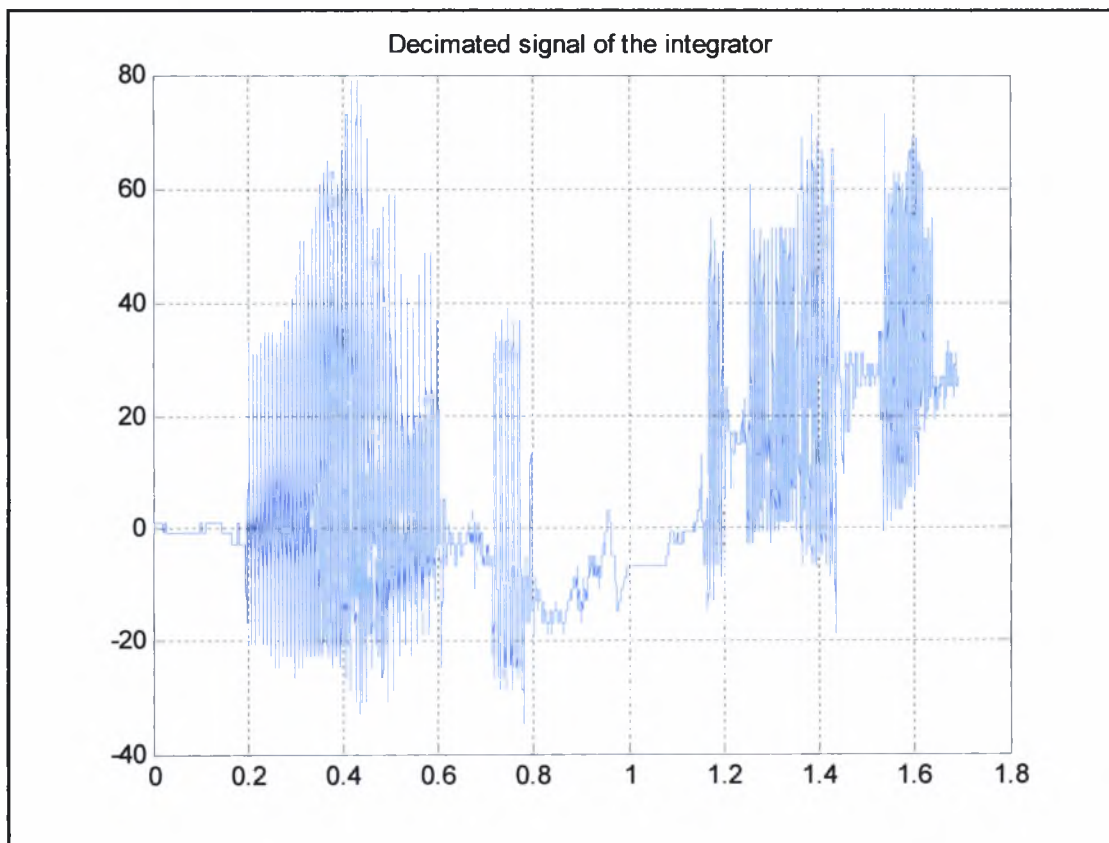
Εικόνα 4-23: Απόκριση πλάτους - φάσης ολοκληρωτή

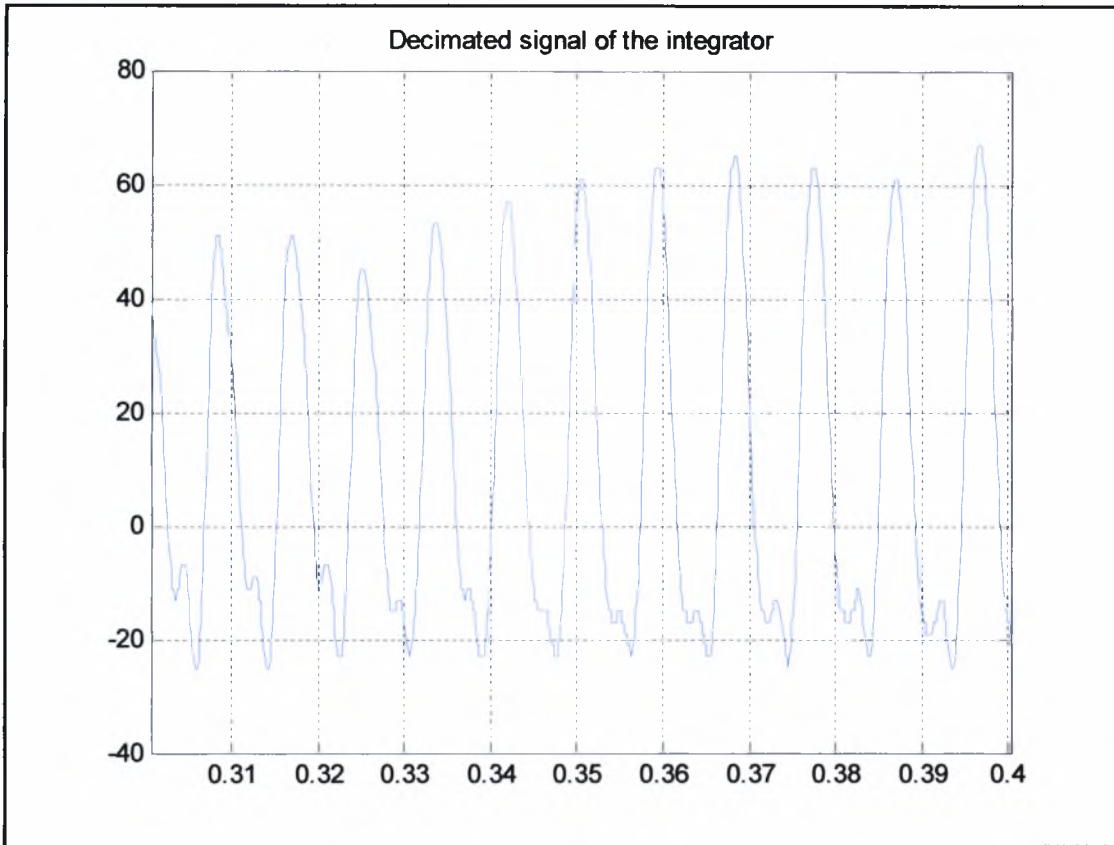


Εικόνα 4-24: Έξοδος ολοκληρωτή

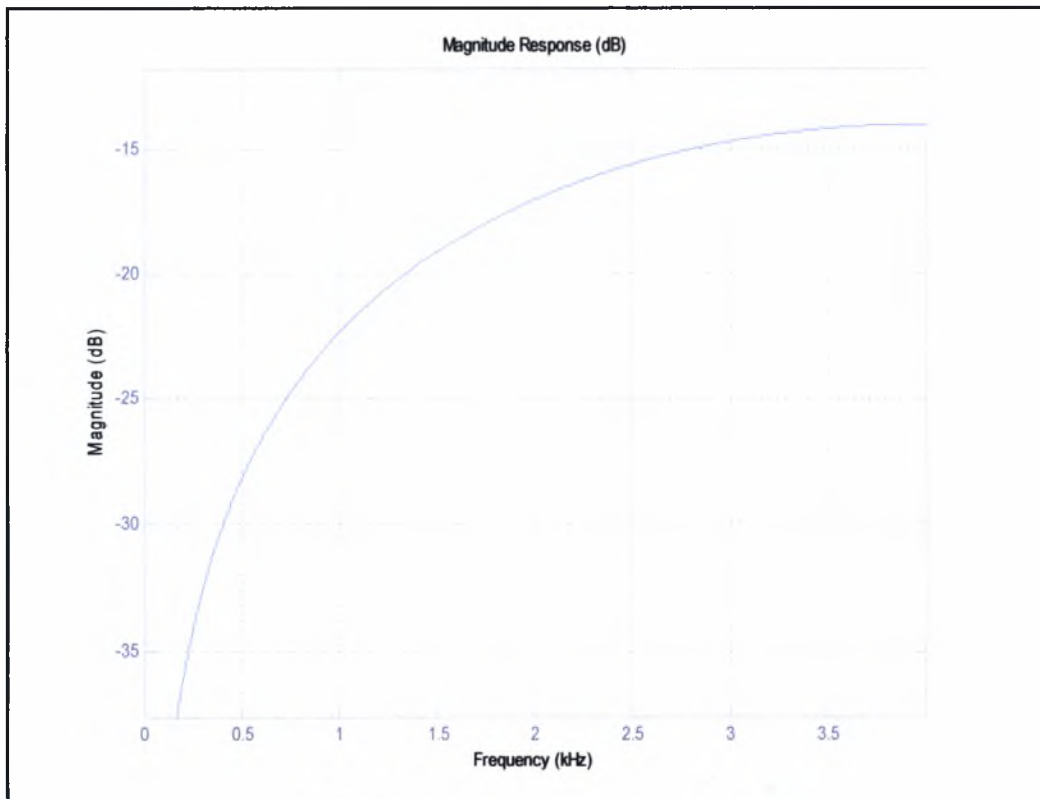


Εικόνα 4-25: Λεπτομέρεια εξόδου ολοκληρωτή

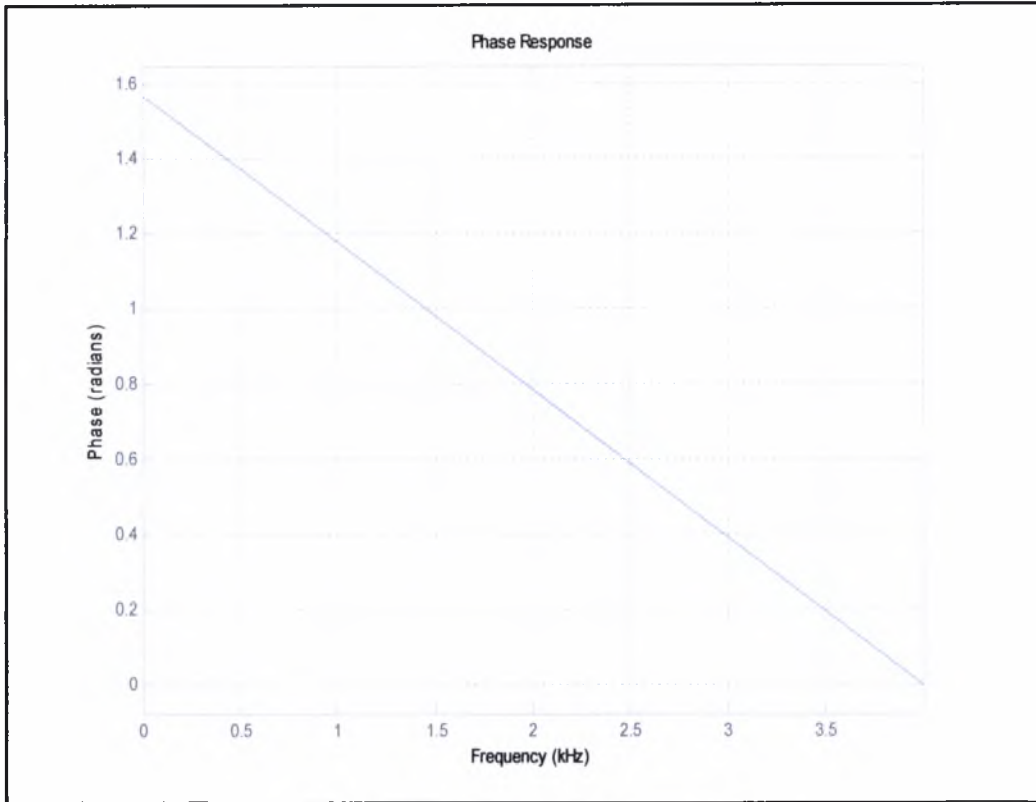
Εικόνα 4-26: Έξοδος ολοκληρωτή μετά το *downsampling*



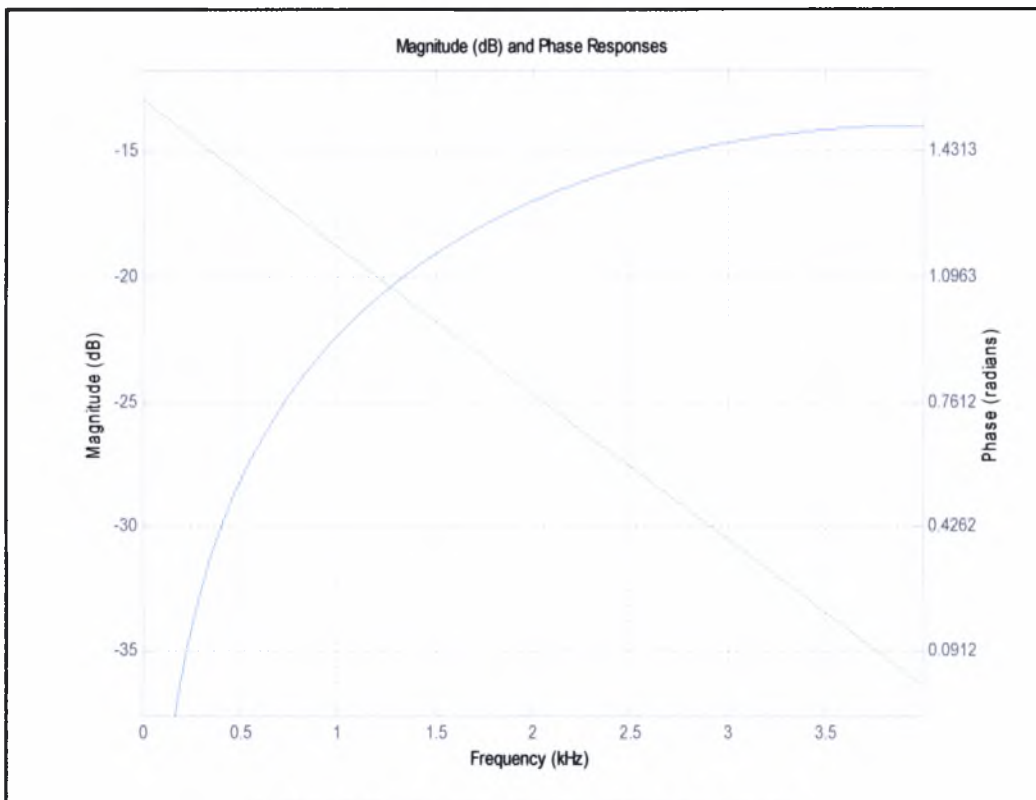
Εικόνα 4-27: Λεπτομέρεια αποδεδαισμένου σήματος



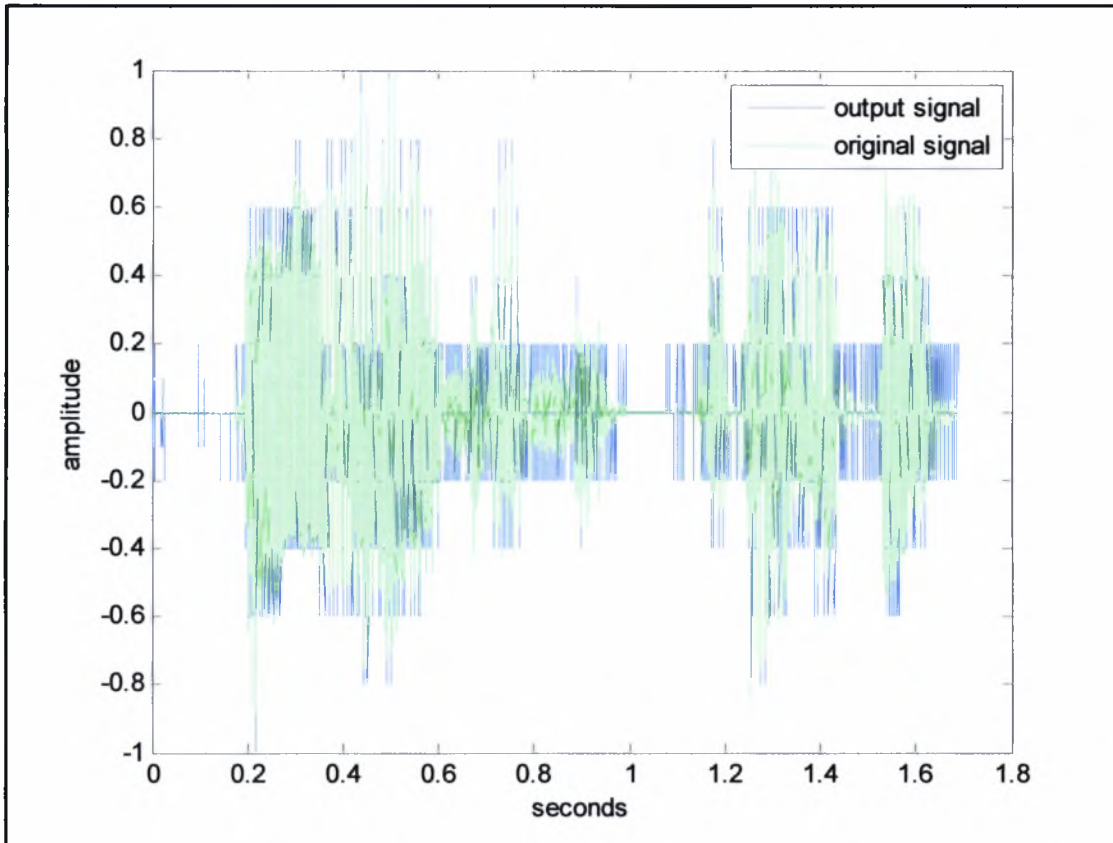
Εικόνα 4-28: Απόκριση πλάτους διαφοριστή



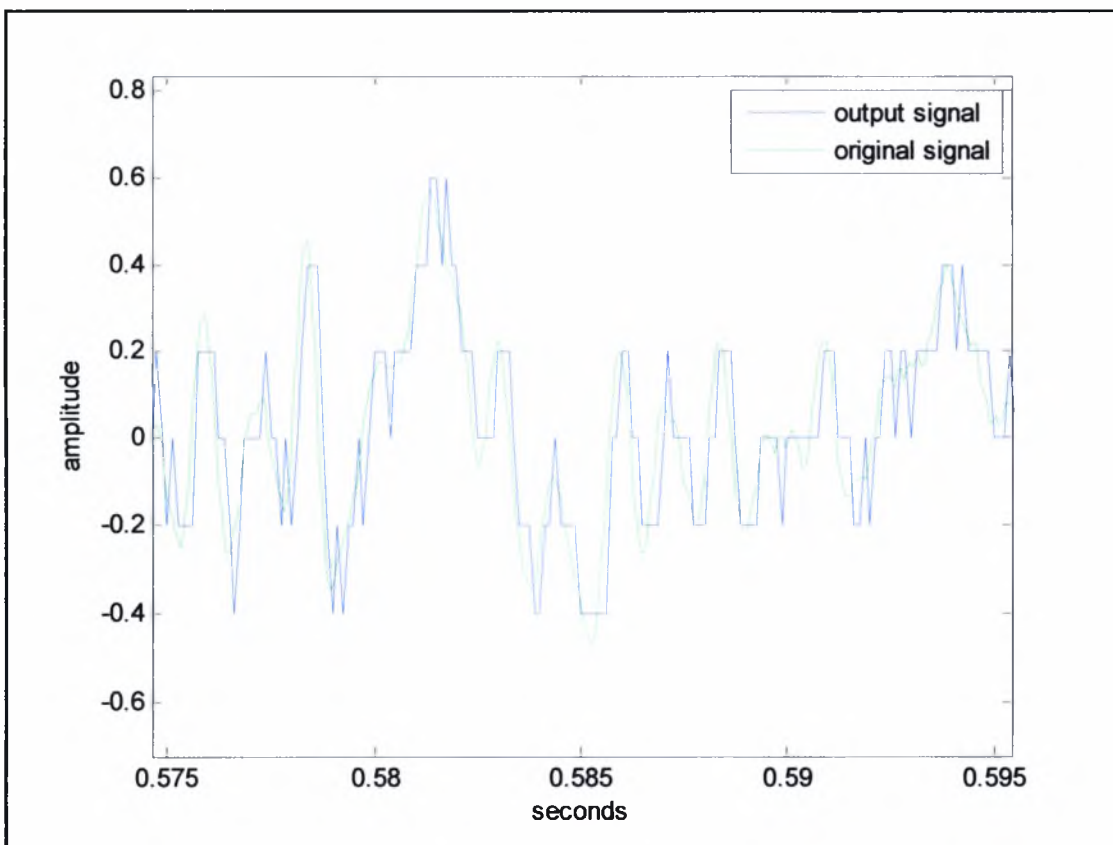
Εικόνα 4-29: Απόκριση φάσης διαφοριστή



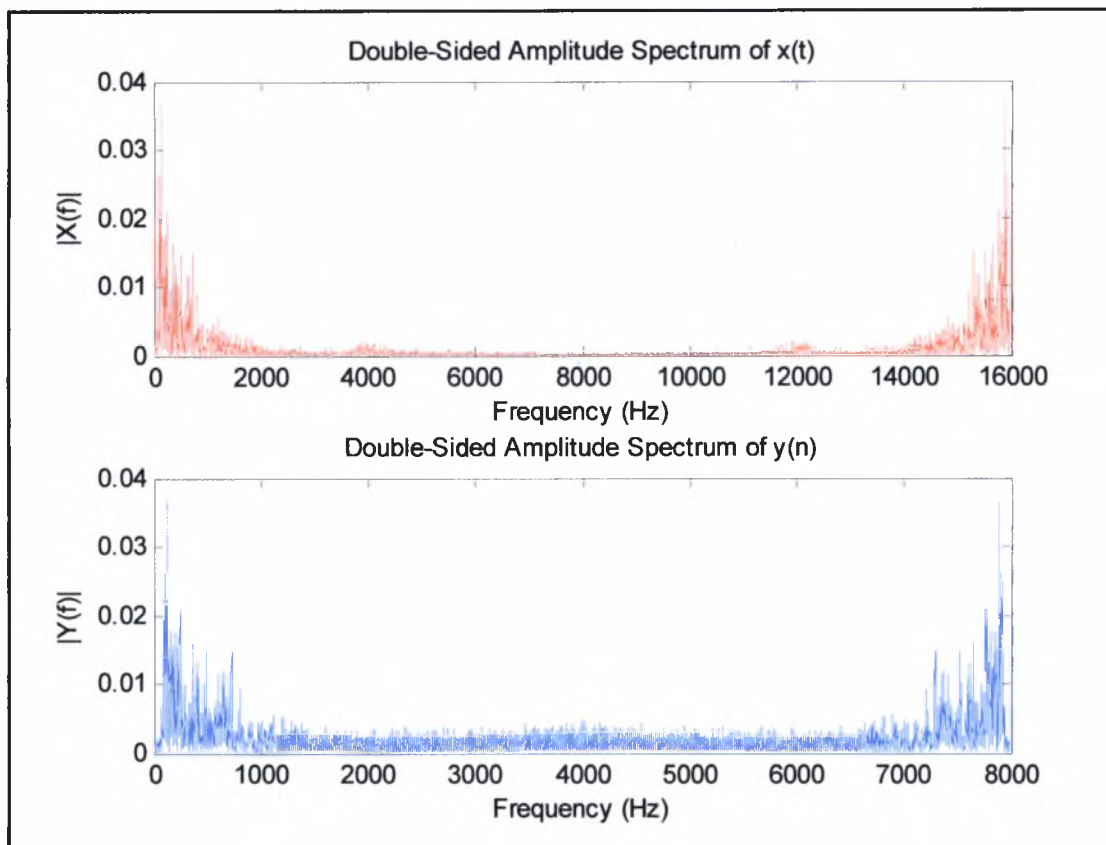
Εικόνα 4-30: Απόκριση πλάτους - φάσης διαφοριστή



Εικόνα 4-31: Αρχικό και τελικό σήμα



Εικόνα 4-32: Λεπτομέρεια αρχικού και τελικού σήματος



Εικόνα 4-33: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού και τελικού σήματος

4.2.2 Αποδεκατισμός σε περισσότερα στάδια

Τα συστήματα αποδεκατισμού που εξετάστηκαν στο προηγούμενο εδάφιο είναι μονοσταδιακά, περιλαμβάνουν δηλαδή ένα μόνο φίλτρο σε συνδυασμό με ένα σύστημα αλλαγής ρυθμού. Στην πράξη, τέτοια συστήματα δεν βρίσκουν ευρεία χρήση στους διαμορφωτές ΣΔ, καθώς μετά την έξοδό τους απαιτούνται συμπληρωματικά φίλτρα για ραφινάρισμα στο τελικό σήμα. Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούνται συστοιχίες φίλτρων και έπεται ο αποδεκατισμός ή σε κάθε στάδιο φιλτραρίσματος ακολουθεί ένα στάδιο αποδεκατισμού. Για παράδειγμα, αν ο παράγοντας υποδειγματοληψίας M μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο παραγόντων $M=M_1M_2$, τότε είναι δυνατόν η διαδικασία του αποδεκατισμού να πραγματοποιηθεί σε δύο στάδια. Η ίδια ιδέα επεκτείνεται και στην περίπτωση που υλοποιούνται περισσότερων των δύο στάδια, εφόσον ο αντίστοιχος συντελεστής μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο περισσότερων παραγόντων.

Ο λόγος, για τον οποίον προτιμάται η πολυσταδιακή υλοποίηση συστημάτων, είναι διότι μειώνεται σημαντικά η υπολογιστική πολυπλοκότητα, σε σχέση με τη μονοσταδιακή υλοποίηση. Στην τυπική περίπτωση, η τάξη ενός FIR χαμηλοπερατού φίλτρου είναι ευθέως ανάλογη με τη συνάρτηση των απαιτούμενων κυματισμών στη ζώνη διάβασης και αποκοπής, δ_p και δ_s αντίστοιχα, και αντιστρόφως ανάλογη με το κανονικοποιημένο πλάτος της ζώνης μετάβασης. Η προσεγγιστική σχέση είναι η παρακάτω:

$$N \approx \frac{D_{\infty}(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F/F}$$

όπου

$$\begin{aligned} D_{\infty}(\delta_p, \delta_s) &= \log_{10} \delta_s \left[a_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_2 \log_{10} \delta_p + a_3 \right] \\ &+ \left[a_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_5 \log_{10} \delta_p + a_6 \right] \end{aligned}$$

με $\alpha_1=0.005309$, $\alpha_2=0.07114$, $\alpha_3=-0.4761$, $\alpha_4=-0.00266$, $\alpha_5=-0.5941$, $\alpha_6=-0.4278$, ΔF το πλάτος της ζώνης διάβασης και F τη συχνότητα δειγματοληψίας στην οποία αναφέρεται ο σχεδιασμός του φίλτρου.

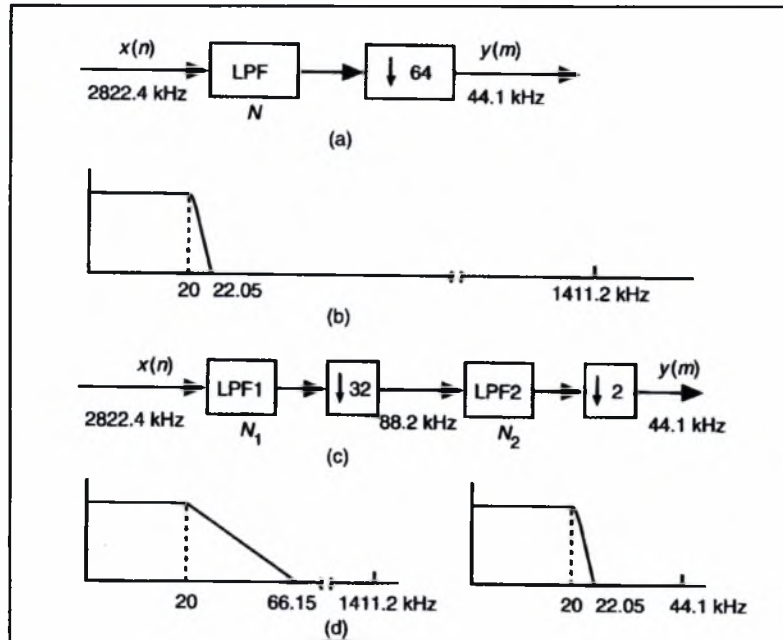
Όταν χρησιμοποιείται μεγάλος λόγος υπερδειγματοληψίας, όπως στην περίπτωση των διαμορφωτών ΣΔ, γίνεται αντιληπτό ότι η απαίτηση για τη συχνότητα αποκοπής του ψηφιακού φίλτρου μπορεί να είναι αρκετά περιοριστική, διότι η ποσότητα ΔF είναι πολύ μικρή σε σχέση με το F . Το γεγονός αυτό οδηγεί σε φίλτρα υπερβολικά μεγάλης τάξης, που πρέπει να επεξεργάζονται πολλά στοιχεία ταυτόχρονα.

Μπορούμε να δούμε τη σημασία του πολυσταδιακού αποδεκατισμού μέσα από ένα απλό παράδειγμα. Έστω ένας αποδεκατιστής 64:1 που υλοποιείται σε ένα και σε δύο στάδια. Το σήμα που πρέπει να φιλτραριστεί έχει δειγματοληπτηθεί σε συχνότητα 2822,4 kHz και πρέπει η τελική συχνότητα να είναι 44,1 kHz, με το κυρίως φάσμα να εκτείνεται μεταξύ 0-20kHz και τους κυματισμούς της ζώνης διάβασης και αποκοπής να ισούνται με 0,001 και

0,00001 αντίστοιχα. Η ζώνη διάβασης εκτείνεται μεταξύ 20 και 22,05 kHz. Στην περίπτωση αυτή το D ισούται με 4,54 και η τάξη του φίλτρου M είναι ίση με 6250!

Όταν το ίδιο σύστημα υλοποιηθεί σε δύο στάδια, με το πρώτο να εκτελεί αποδεκατισμό 32:1 (από 2822,4 kHz σε 88,2 kHz) και το δεύτερο 2:1 (από 88,2 kHz σε 44,1 kHz), τότε η περιοχή μετάβασης του πρώτου φίλτρου είναι μεταξύ 20-66.15 kHz και η αντίστοιχη στο δεύτερο φίλτρο είναι μεταξύ 20-22,05 kHz. Το γεγονός, ότι η ζώνη διάβασης του δεύτερου φίλτρου είναι η ίδια όπως και στην πρώτη υλοποίηση, δεν οδηγεί στην ίδια τάξη φίλτρου, καθώς τώρα το εύρος αυτό αναφέρεται σε πολύ μικρότερη συχνότητα δειγματοληψίας. Οι κυματισμοί στη ζώνη διάβασης και αποκοπής πρέπει να διαιρεθούν με 2, έτσι ώστε το άθροισμά τους να συμπίπτει με αυτό των αρχικών απαιτήσεων. Οι τάξεις των φίλτρων που προκύπτουν είναι $N1=291$ και $N2=205$, για το πρώτο και το δεύτερο φίλτρο, αντίστοιχα.

Γίνεται κατανοητό, επομένως, ότι είναι σαφώς προτιμότερη η χρήση πολυσταδιακών φίλτρων αποδεκατισμού για λόγους ταχύτητας και ευκολότερης υλοποίησής τους σε επίπεδο προγραμματισμού αλλά και αρχιτεκτονικής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα πιο διαδεδομένα πολυσταδιακά φίλτρα που χρησιμοποιούνται. Πρόκειται για τα *Cascaded Comb Filters*, το *Cascaded Integrator Comb Filter*, που πρόκειται για μια παραλλαγή του προηγούμενου, και τα *Cascaded Half-band Filters*. Μελετώνται, επίσης, και συνδυασμοί των παραπάνω.



Εικόνα 4-34: Παράδειγμα μονοσταδιακής και πολυσταδιακής υλοποίησης φίλτρου αποδεκατισμού

4.2.2.1 Cascaded Comb Filter

Τα φίλτρα της κατηγορίας αυτής ονομάζονται και sinc^K φίλτρα. Πρόκειται για μια συστοιχία φίλτρων *comb*, όπως αυτά που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 4.2.1.3. Τα συγκεκριμένα φίλτρα είναι πολύ ελκυστικά για υλοποίηση σε επίπεδο υλικού, διότι δεν απαιτείται η χρήση ενός ψηφιακού πολλαπλασιαστή. Υλοποιούνται παραθέτοντας K στάδια *comb filter* στη σειρά.

Η συνάρτηση μεταφοράς των συγκεκριμένων φίλτρων έχει την παρακάτω γενική μορφή:

$$H(z) = \left(\frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right)^K$$

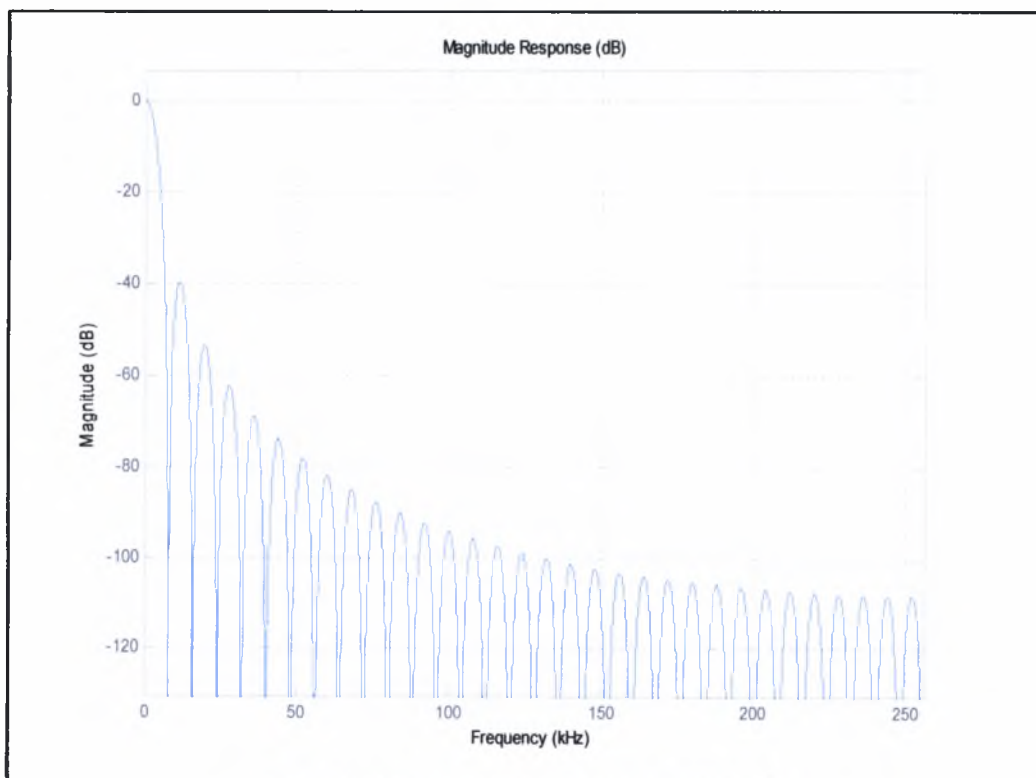
και η απόκριση συχνότητας είναι επομένως:

$$|H(e^{j\omega})| = \left(\frac{1}{M} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^K$$

όπου M είναι ο παράγοντας υποδειγματοληψίας. Τα συγκεκριμένα φίλτρα έχουν μια πολύ σημαντική ιδιότητα: παρουσιάζουν $M/2$ φασματικά μηδενικά όταν το M είναι άρτιος αριθμός και $[M/2] - 1$ φασματικά μηδενικά, όταν το M είναι περιττός αριθμός, στις συχνότητες που αποτελούν πολλαπλάσια της τελικής συχνότητας αποδεκατισμού. Ωστόσο, τα φίλτρα της κατηγορίας

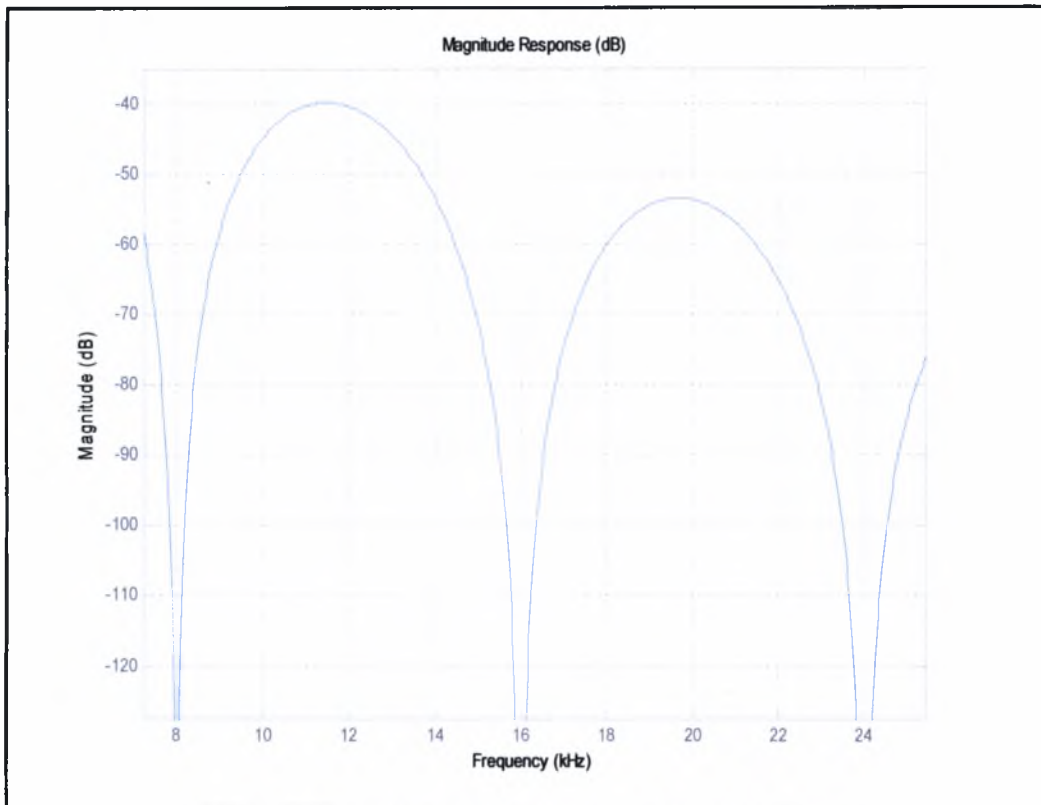
αυτής, όπως και τα μονοσταδιακά φίλτρα *comb*, παρουσιάζουν ραγδαία πτώση του κέρδους στα όρια της ζώνης διάβασης.

Έχει αποδειχθεί ότι η τάξη K ενός φίλτρου sinc^K πρέπει να είναι τουλάχιστον μία μονάδα μεγαλύτερη από την τάξη του διαμορφωτή ΣΔ⁹, έτσι ώστε να αποφεύγεται η ανάμειξη μεγάλου μέρους του εκτός φάσματος θορύβου εντός του κυρίου φάσματος που περιέχει την πληροφορία. Στη συνέχεια, ακολουθούν τα πειραματικά αποτελέσματα για σήμα ήχου με τη χρήση της συγκεκριμένης κατηγορίας φίλτρων. Υποθέτουμε ότι $M=OSR=64$ και $K=3$. Η υλοποίηση του φίλτρου έγινε με τη βοήθεια του εργαλείου *SPTool* που παρέχει το *MATLAB*. Ειδικότερα, η δημιουργία του φίλτρου βασίστηκε στη συνάρτηση μεταφοράς που δόθηκε παραπάνω, στην ανάπτυξη, δηλαδή, του γινομένου.

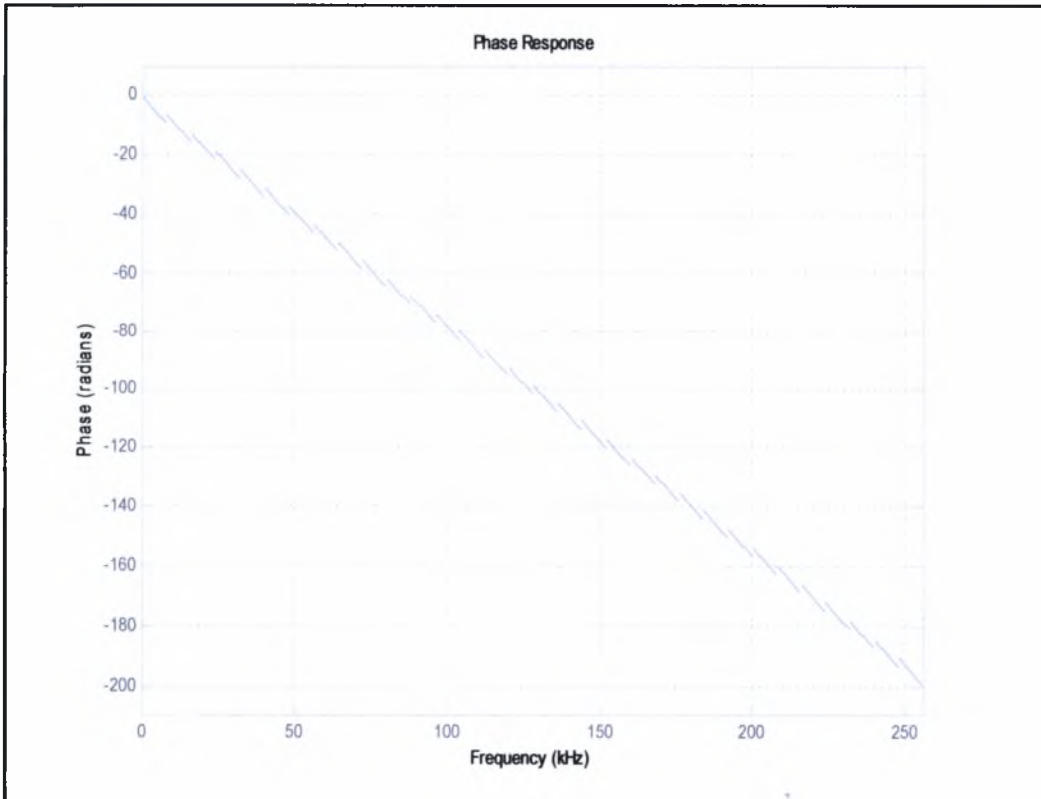


Εικόνα 4-35: Απόκριση συχνότητας φίλτρου sinc^3

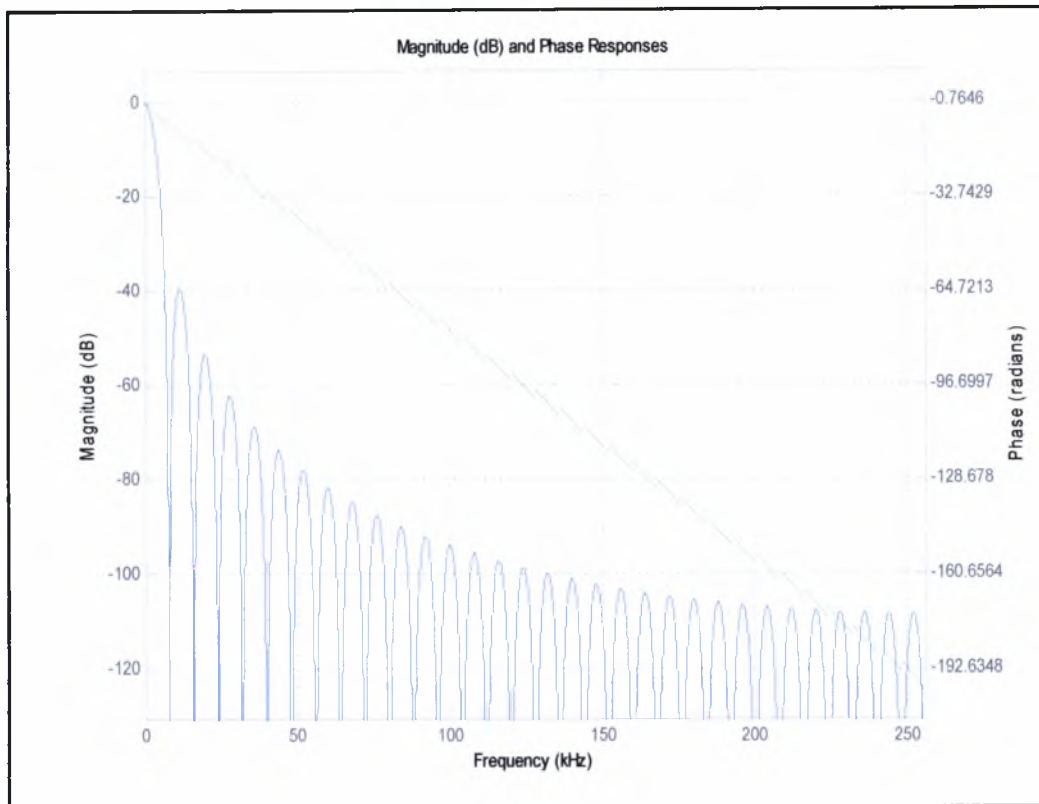
⁹ J.C. Candym , *Decimation for sigma delta modulation*, IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, (Ιανουάριος 1986): 72-76.



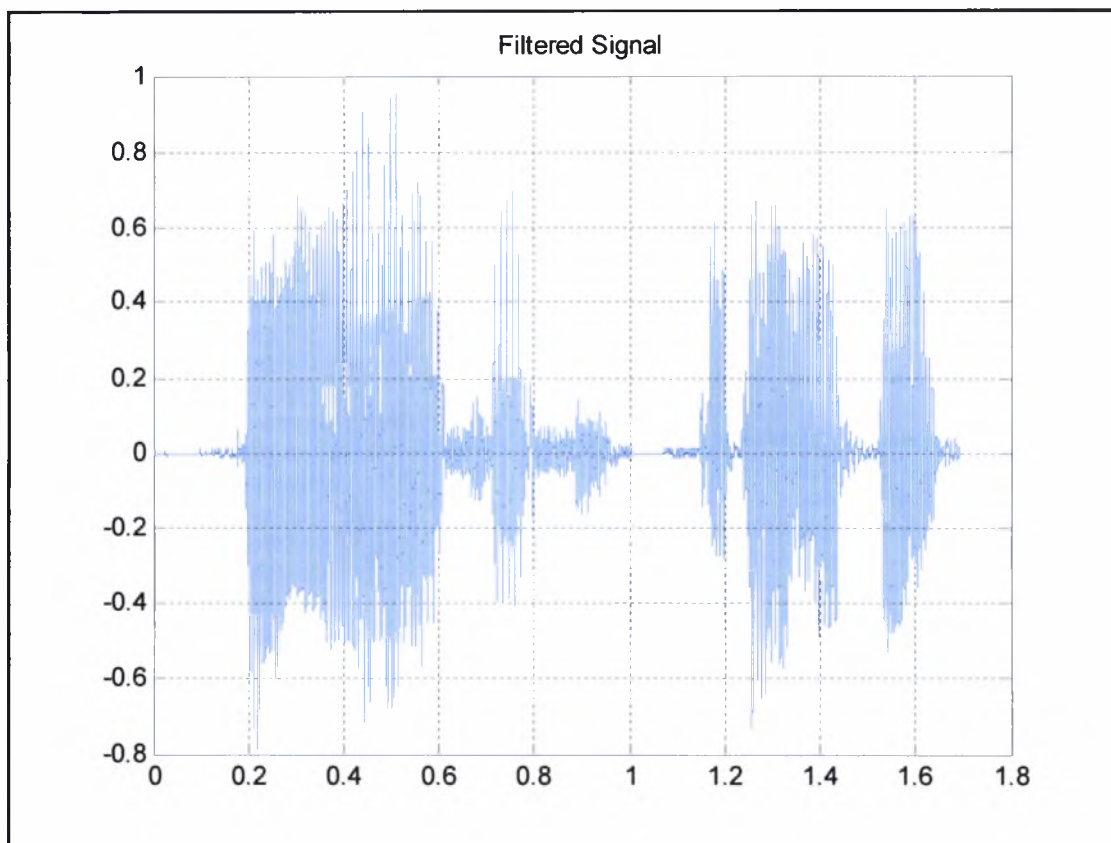
Εικόνα 4-36: Λεπτομέρεια απόκρισης συχνότητας του φίλτρου



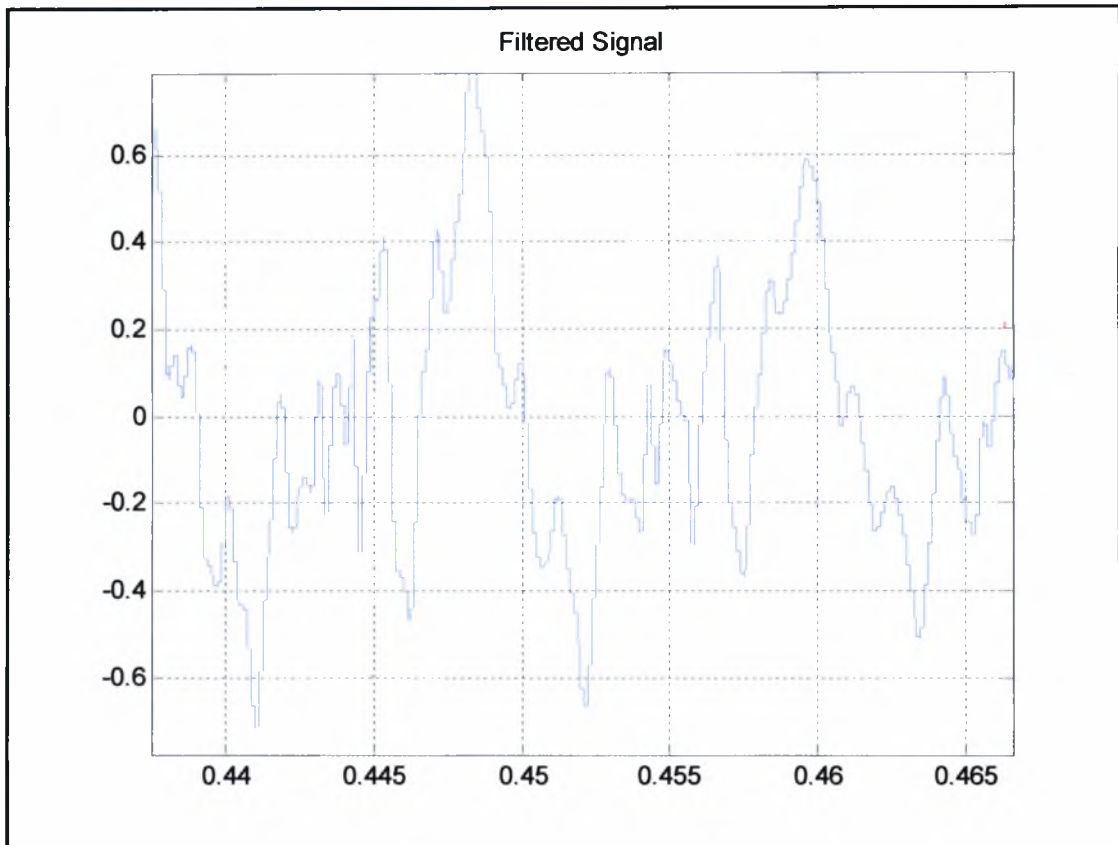
Εικόνα 4-37: Απόκριση φάσης



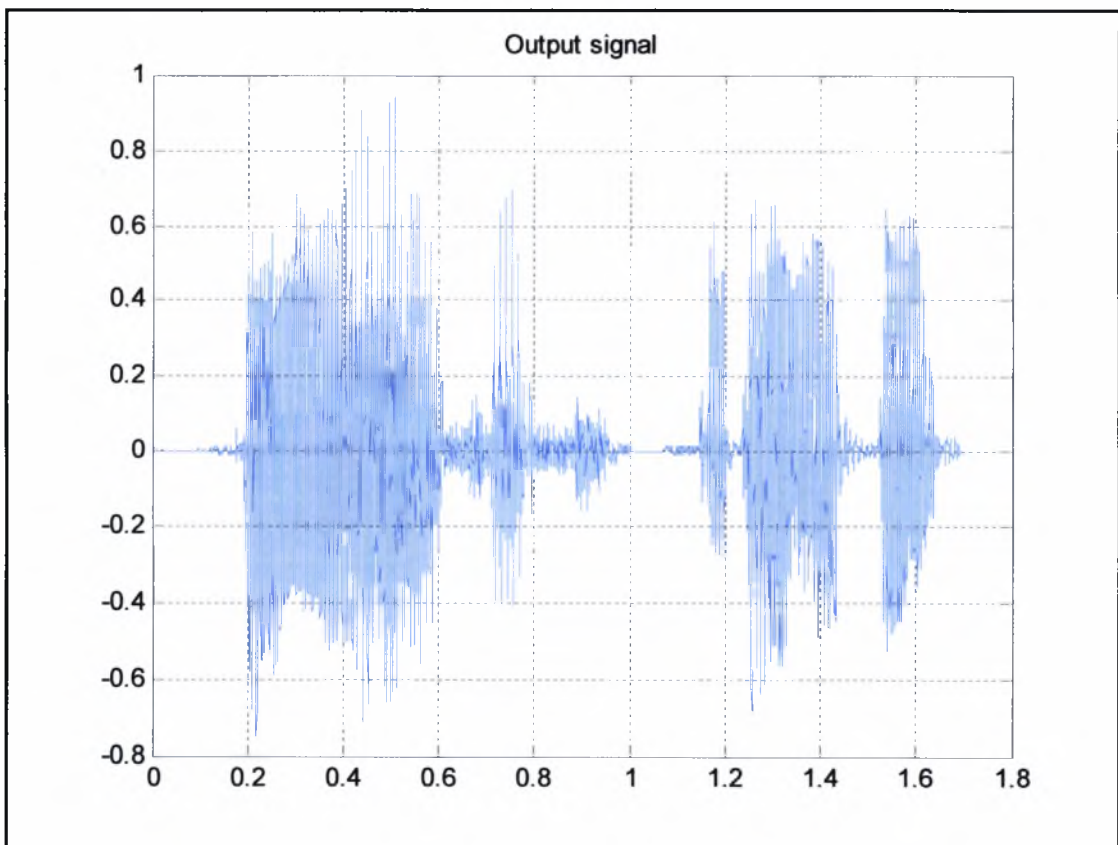
Εικόνα 4-38: Απόκριση πλάτους - φάσης



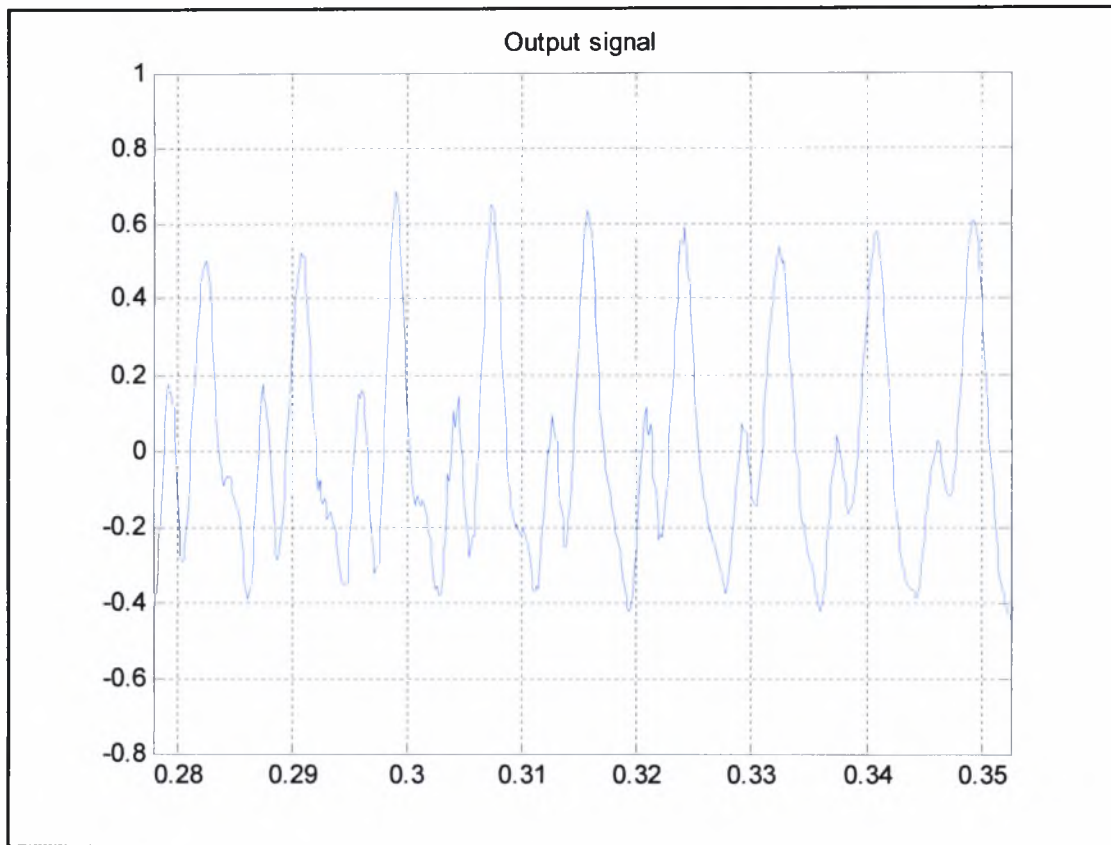
Εικόνα 4-39: Έξοδος φίλτρου



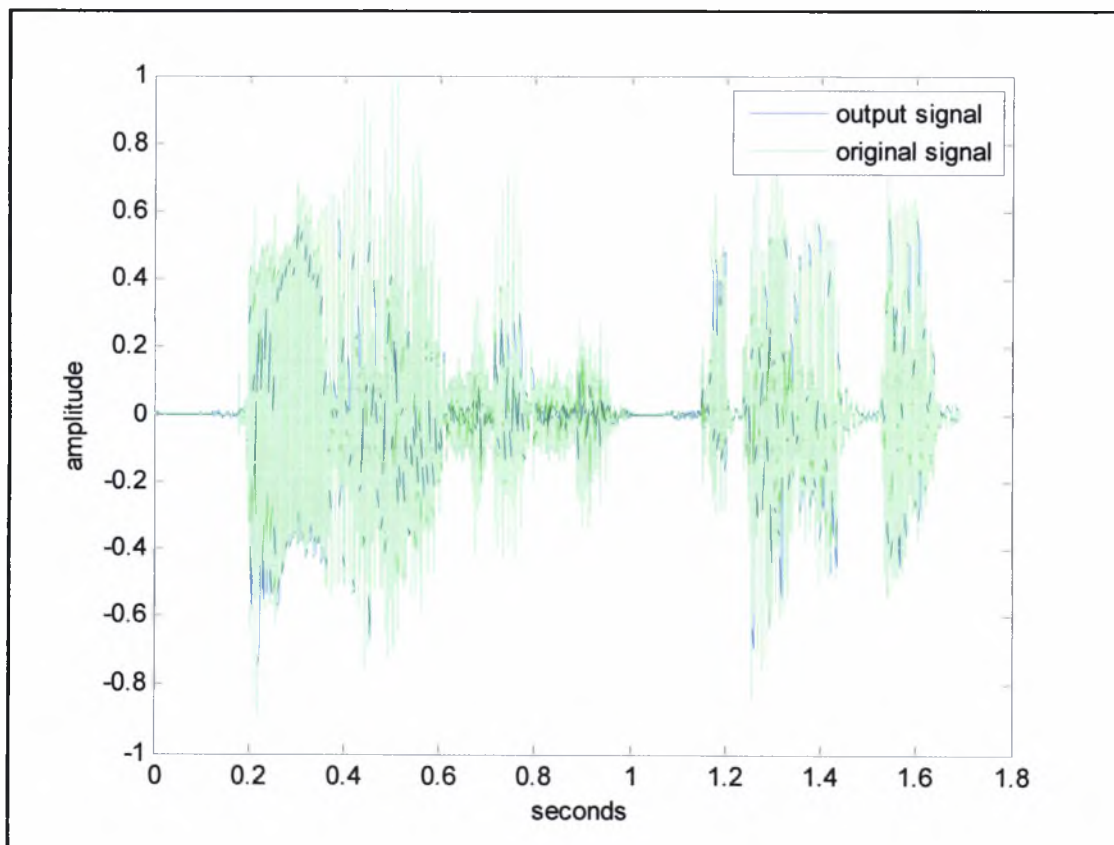
Εικόνα 4-40: Λεπτομέρεια εξόδου



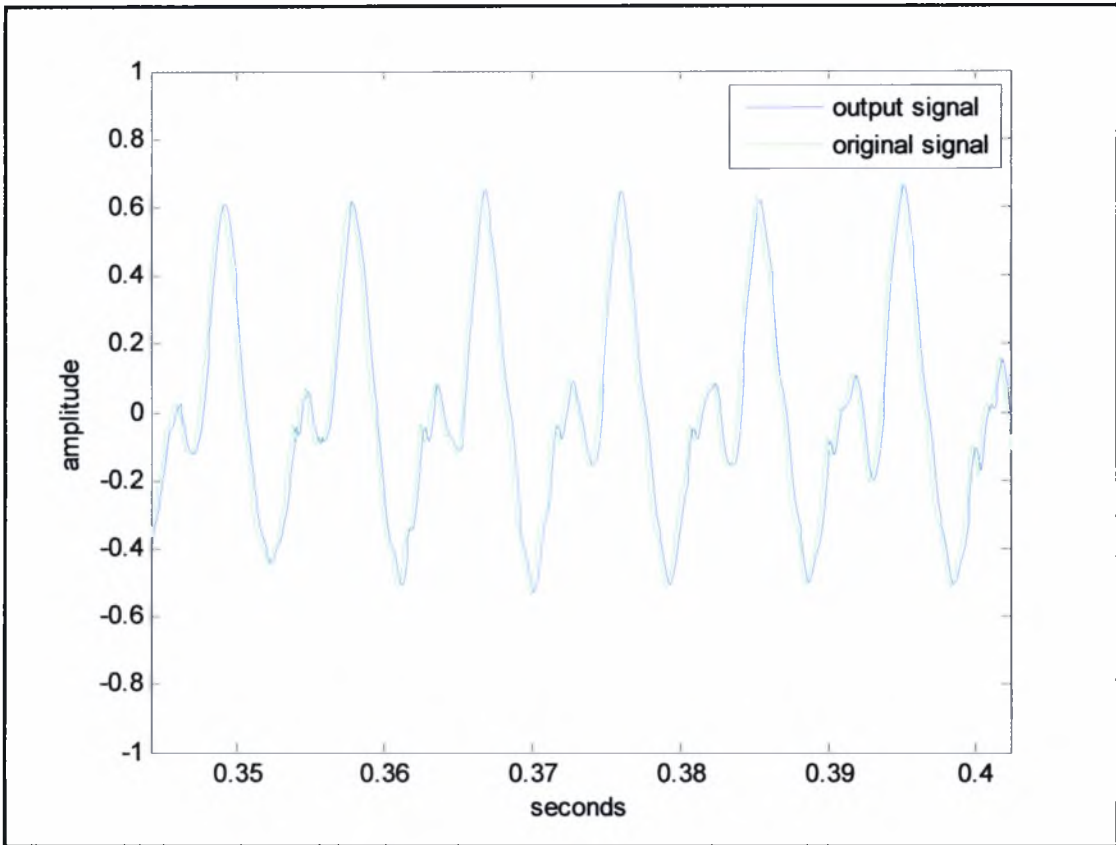
Εικόνα 4-41: Αποδεκατισμένο σήμα (τελική έξοδος)



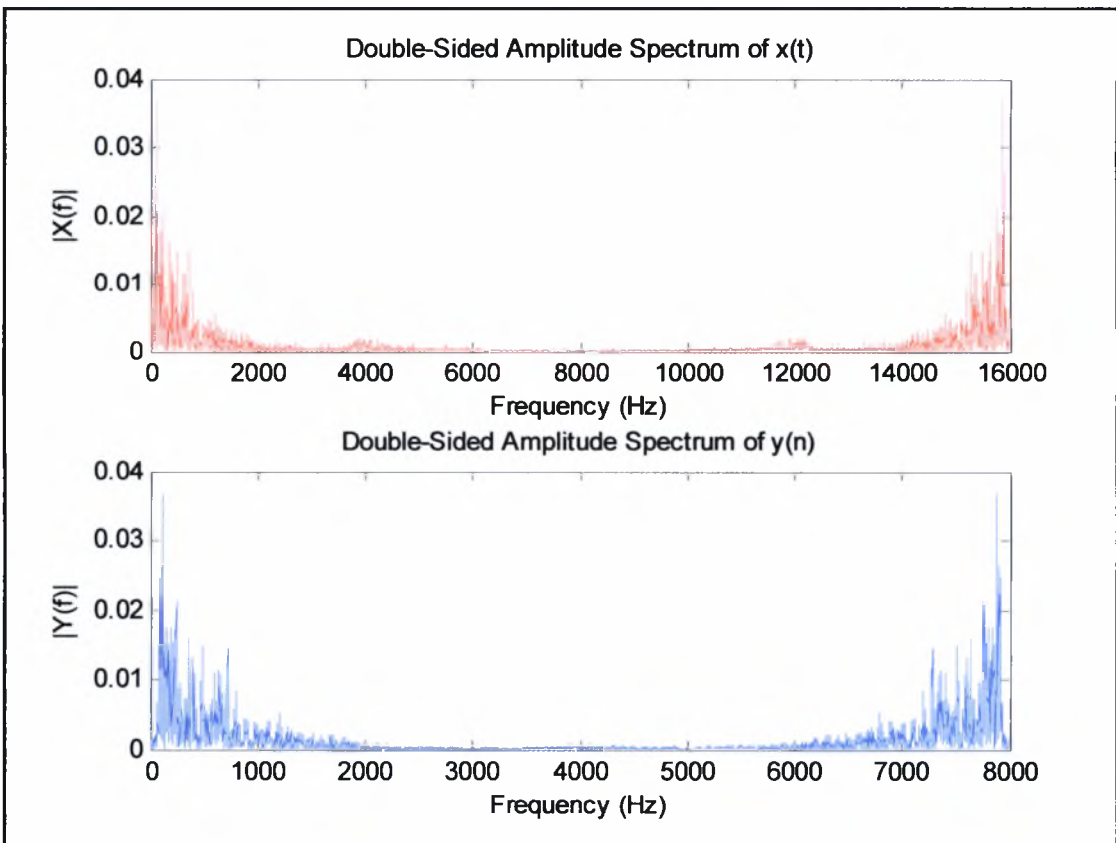
Εικόνα 4-42: Λεπτομέρεια τελικής εξόδου



Εικόνα 4-43: Αρχικό σήμα και τελική έξοδος

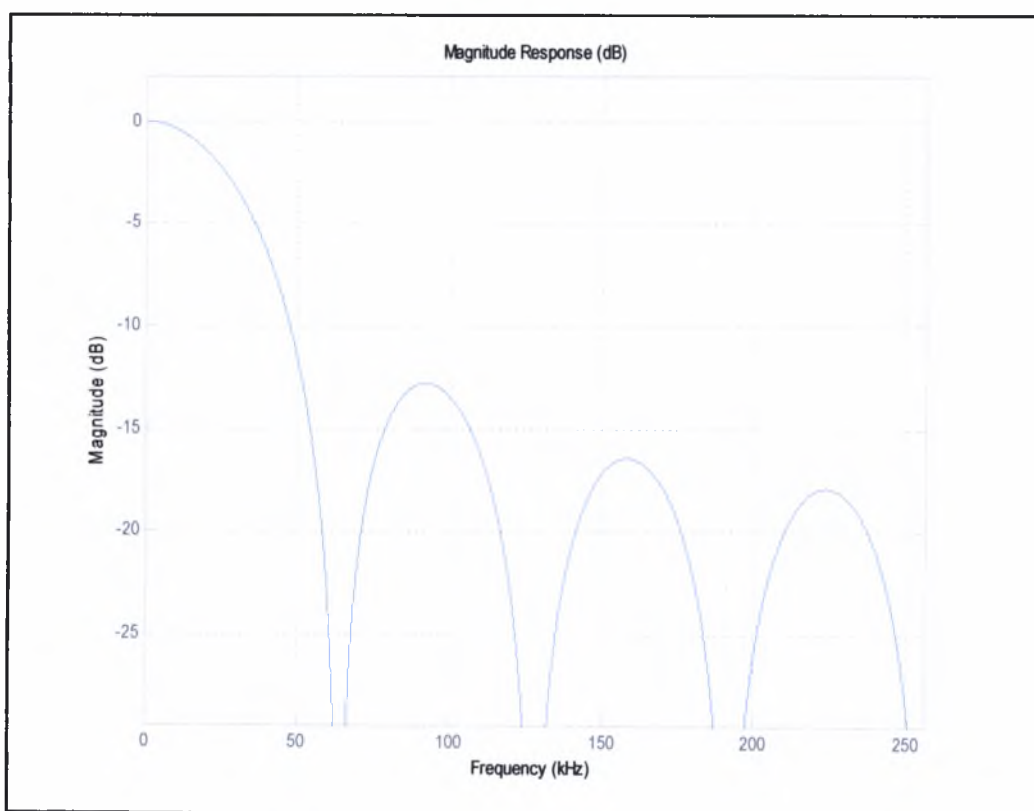


Εικόνα 4-44: Λεπτομέρεια αρχικής εισόδου και τελικού σήματος

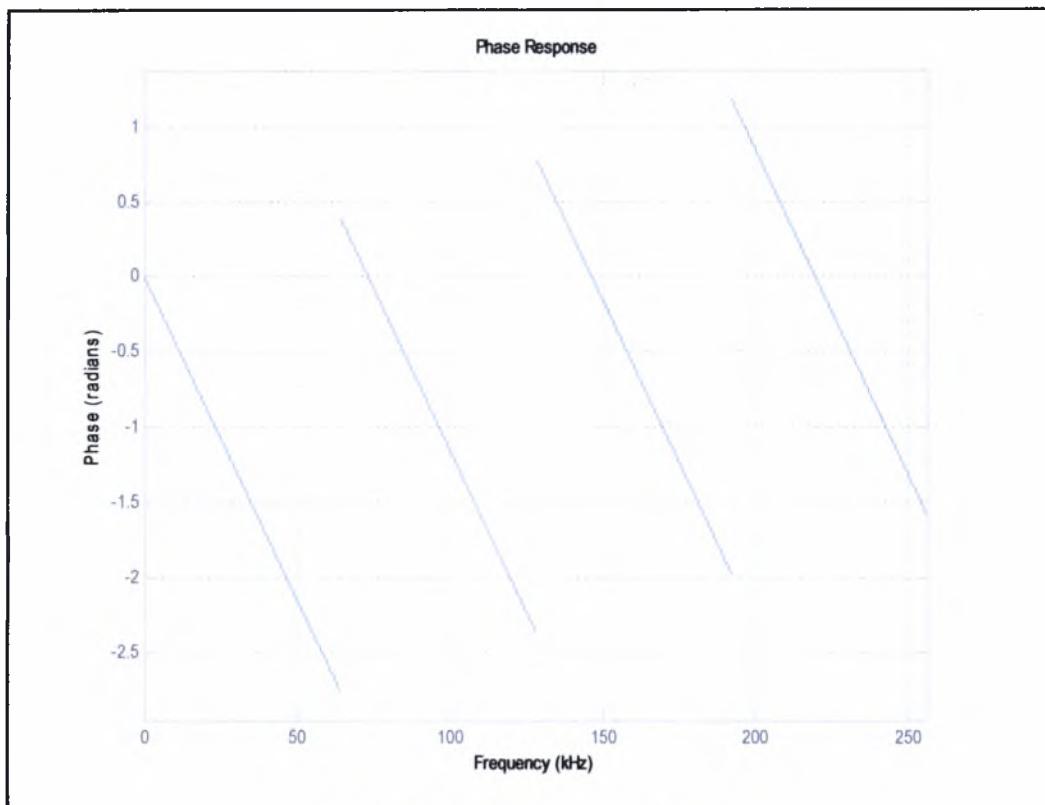


Εικόνα 4-45: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού και τελικού σήματος

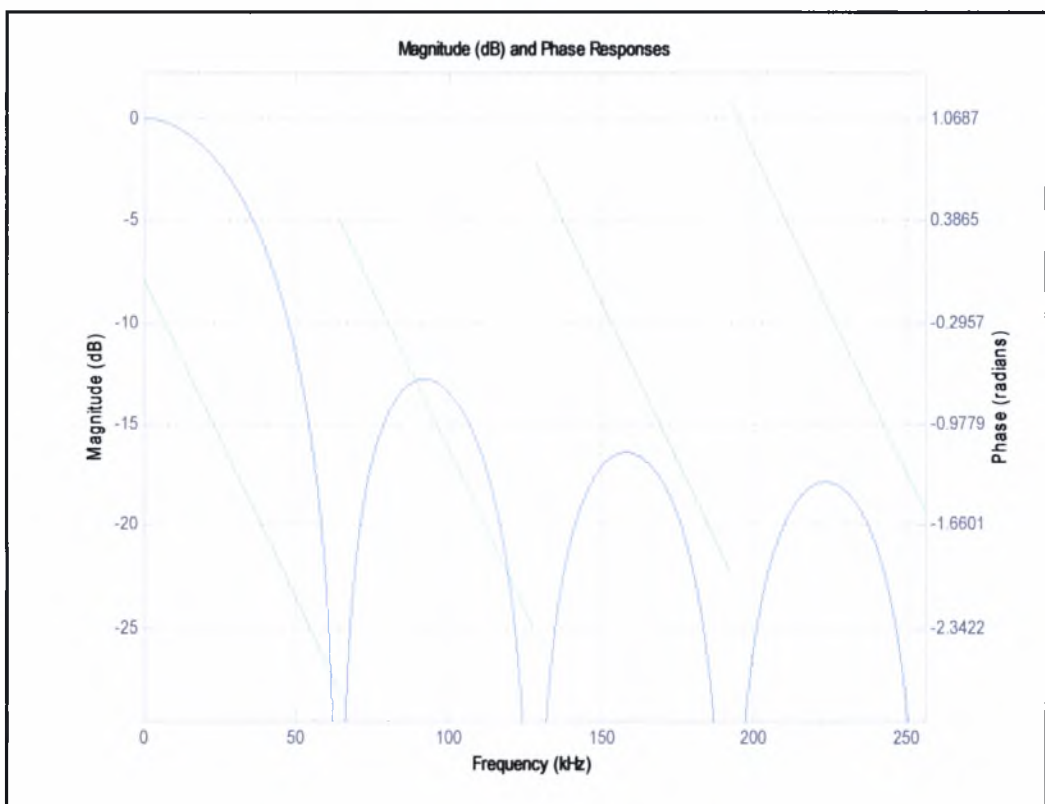
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σήμα του σταθμιστή διέβη μέσα από τρία στάδια φίλτρων και στη συνέχεια αποδεκατίστηκε. Ωστόσο, για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η πολυσταδιακή υλοποίηση, ακολουθούν δύο ακόμη παραδείγματα, όπου μετά από κάθε στάδιο φιλτραρίσματος ακολουθεί η υποδειματοληψία. Χρησιμοποιούνται και πάλι τρία φίλτρα *comb*, και οι παράγοντες αποδεκατισμού για το 1^ο, 2^ο και 3^ο στάδιο είναι 8,4 και 2 αντίστοιχα. Στο δεύτερο παράδειγμα, οι αντίστοιχοι παράγοντες υποδειματοληψίας είναι 4,4 και 4.



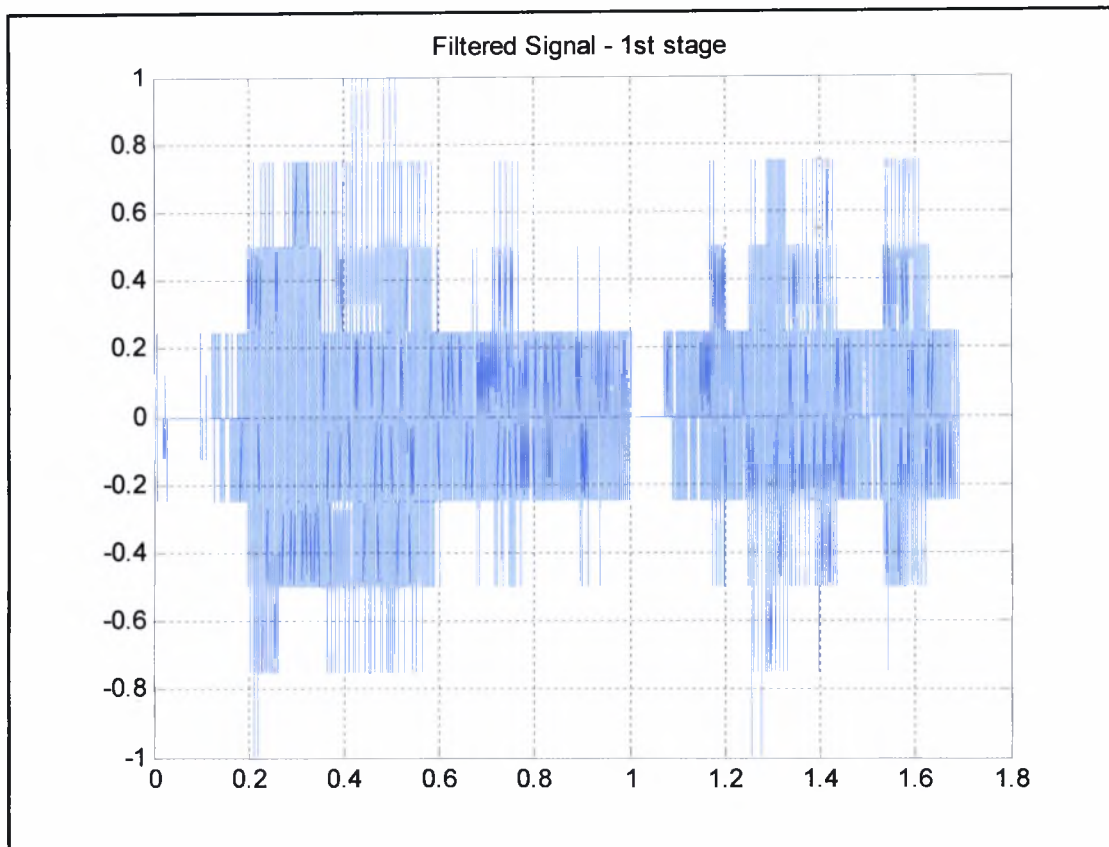
Εικόνα 4-46: 1^ο φίλτρο αποδεκατισμού, με παράγοντα $M=8$



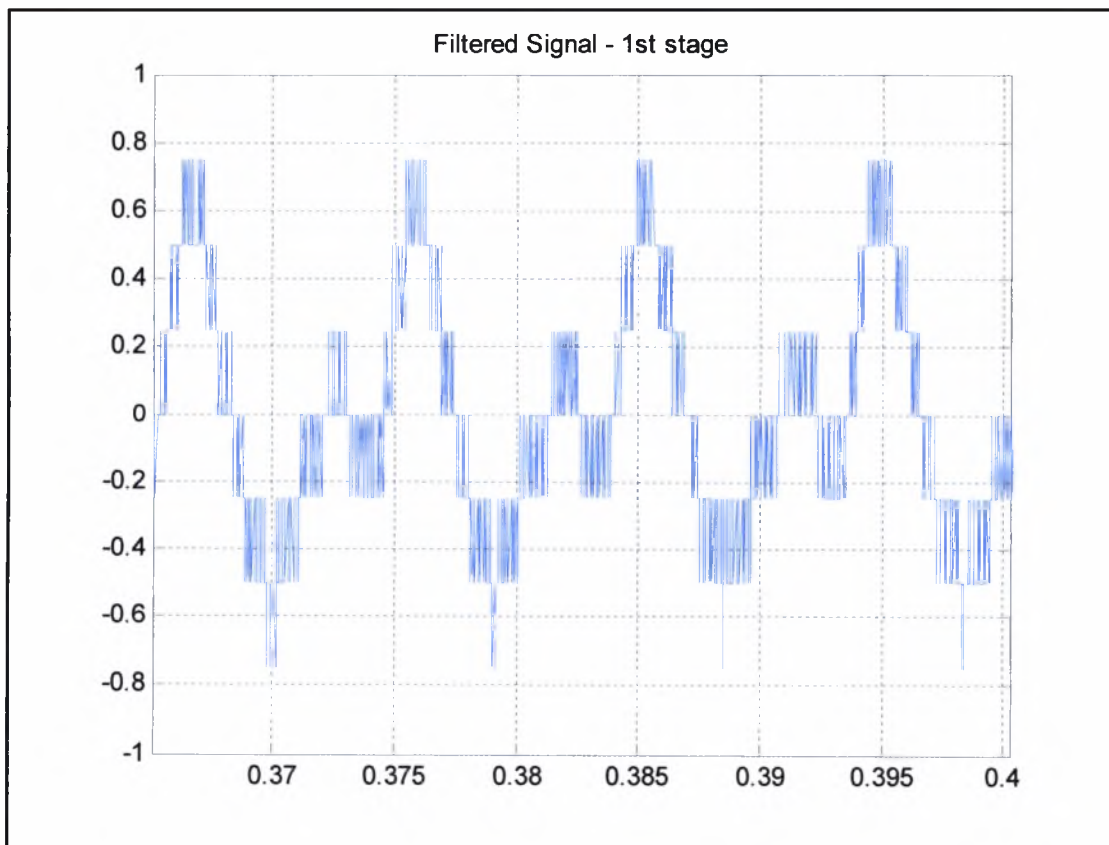
Εικόνα 4-47: Απόκριση φάσης φίλτρου



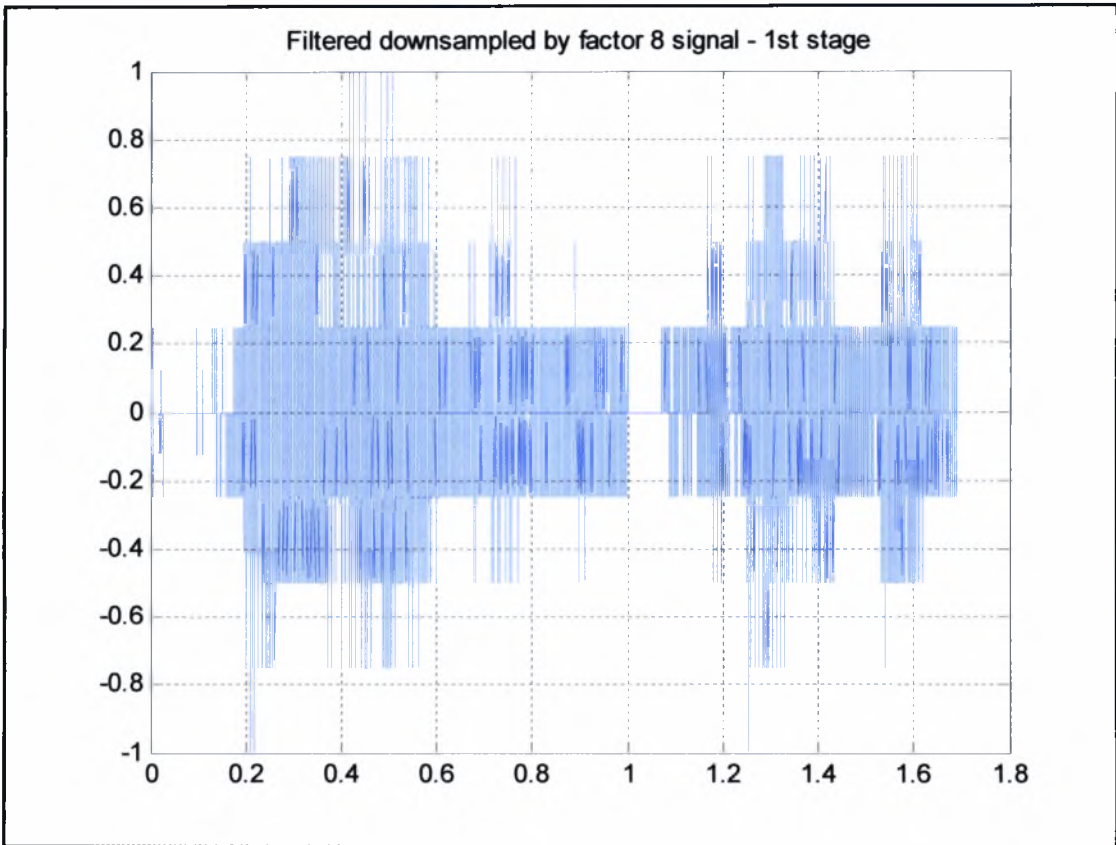
Εικόνα 4-48: Απόκριση πλάτους-φάσης του φίλτρου



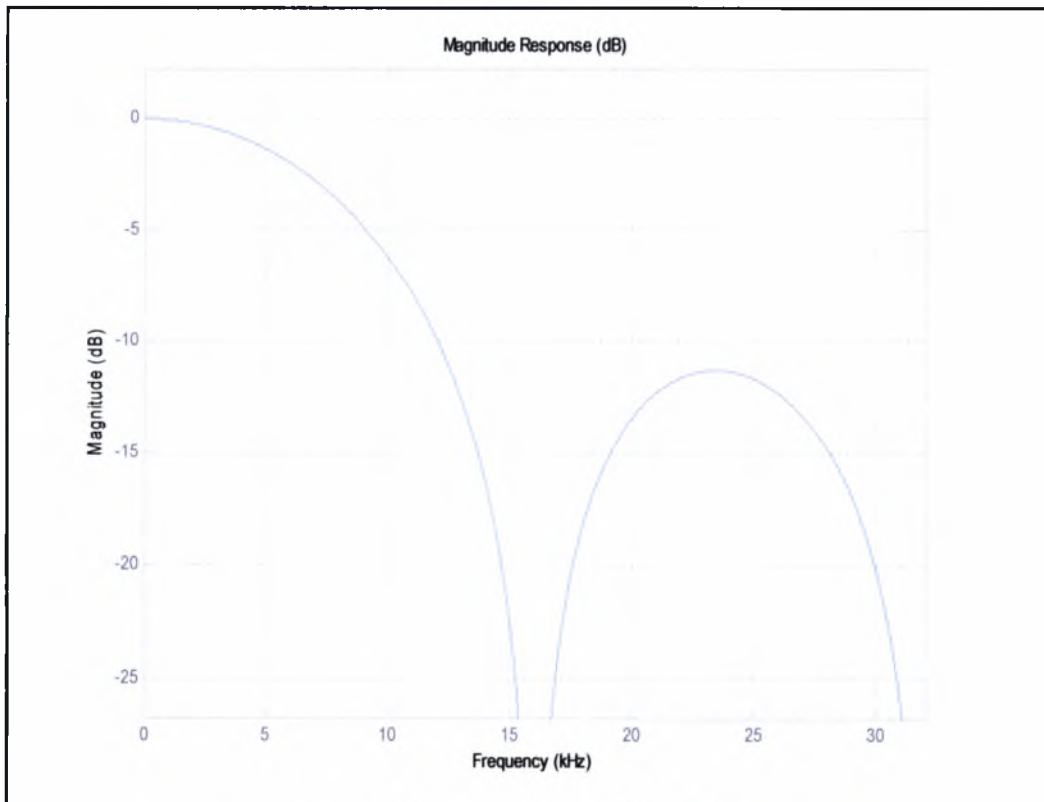
Εικόνα 4-49: Έξοδος 1^{ου} φίλτρου



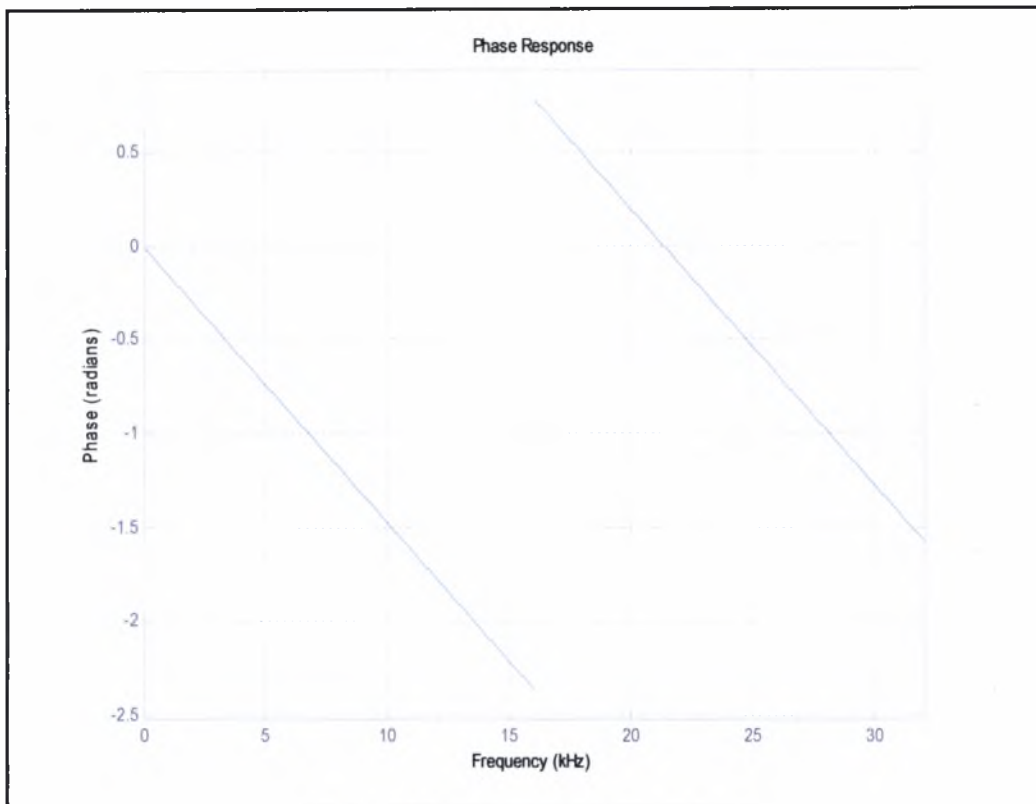
Εικόνα 4-50: Λεπτομέρεια εξόδου



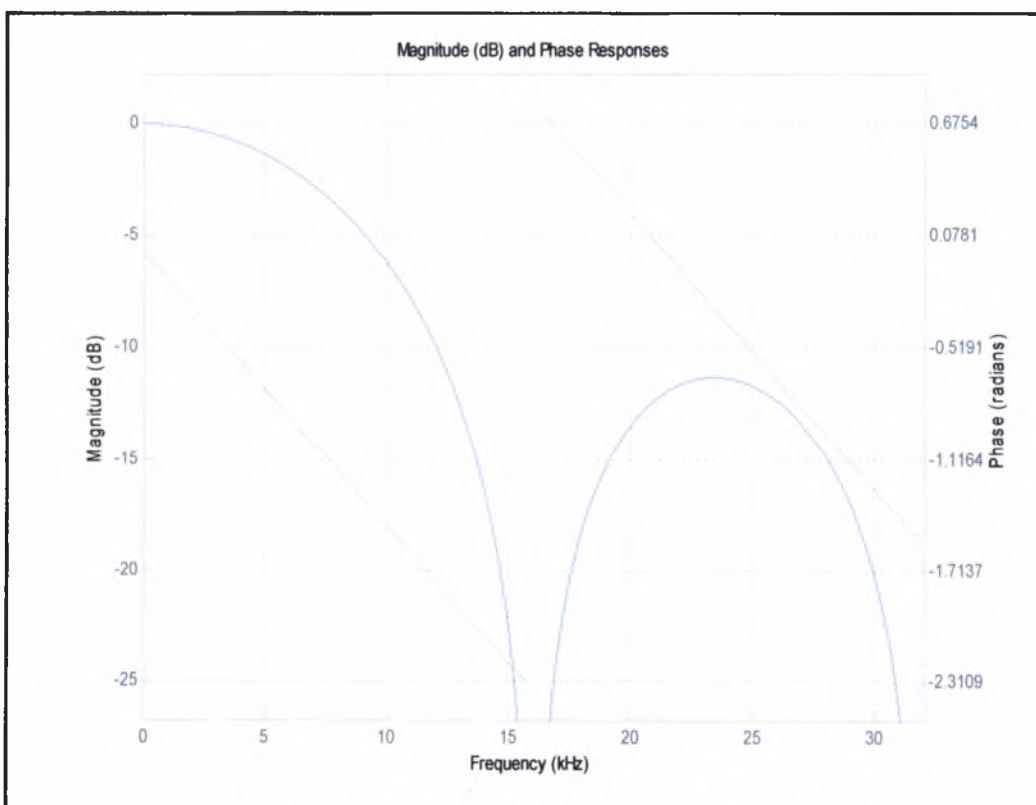
Εικόνα 4-51: Αποδεκατισμένο σήμα κατά παράγοντα M=8



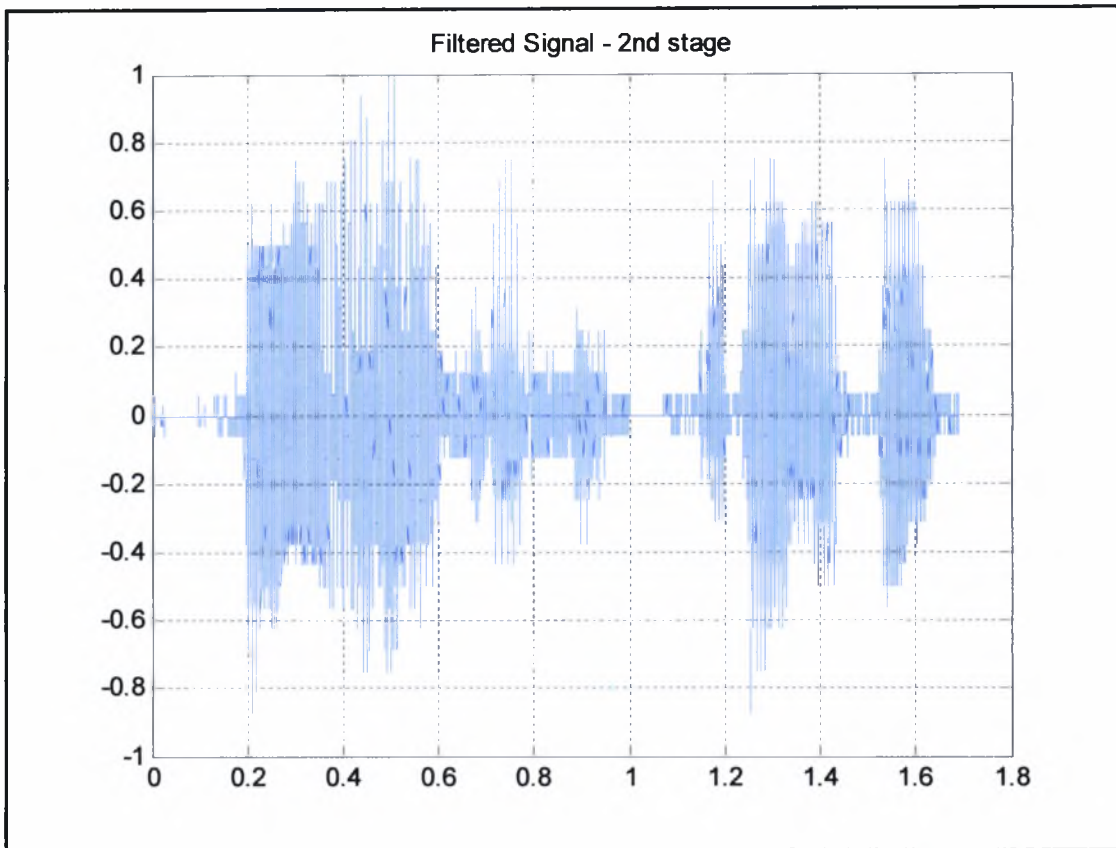
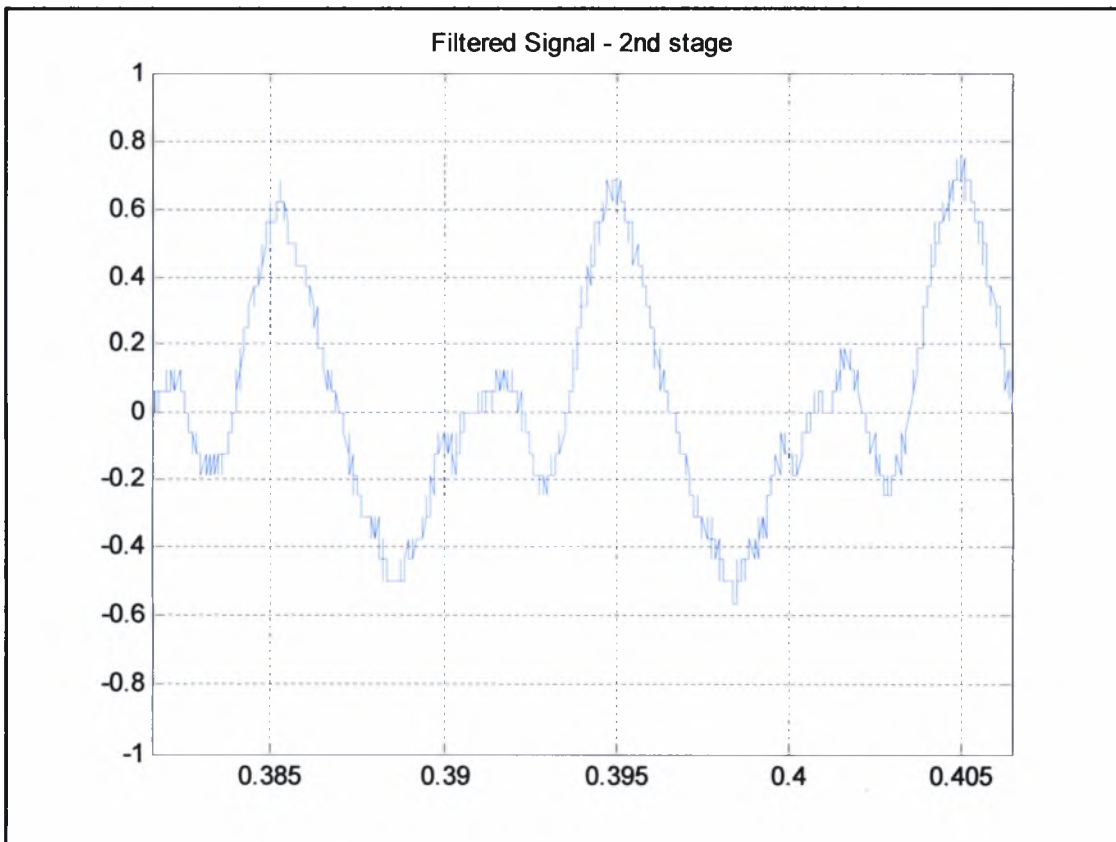
Εικόνα 4-52: Απόκριση πλάτους 2ου φίλτρου

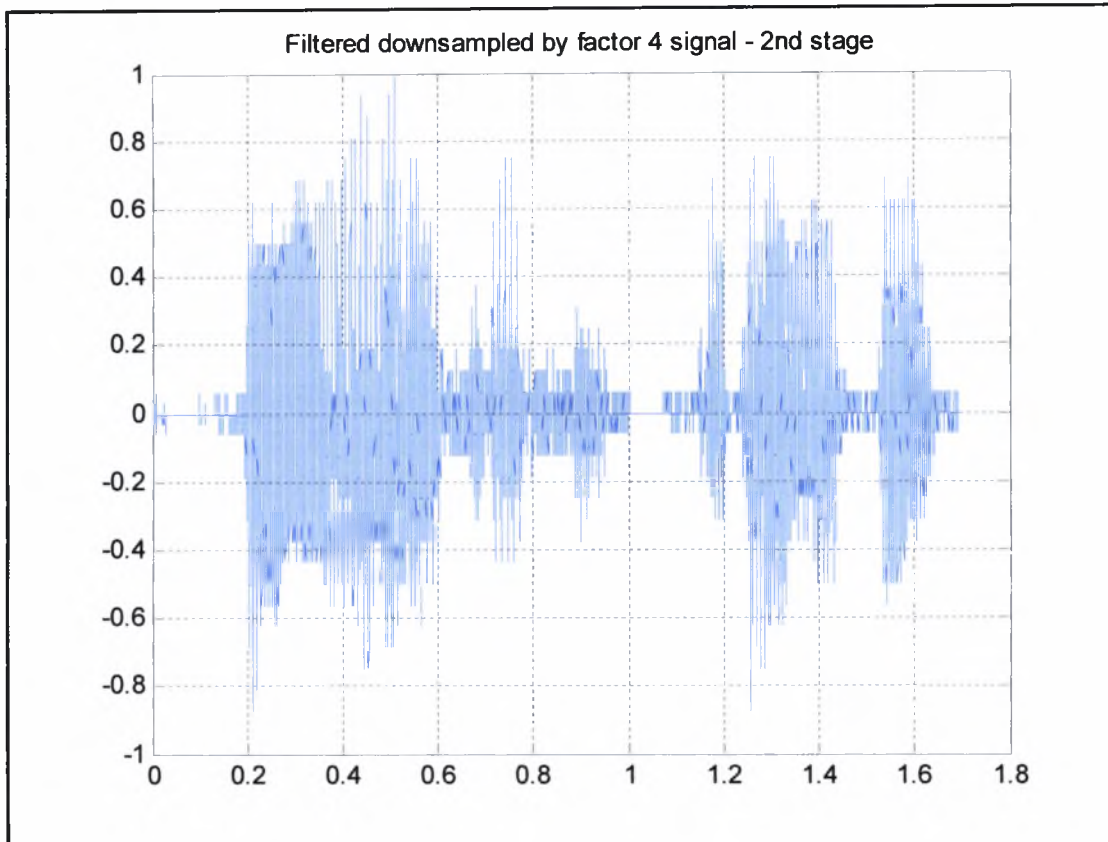
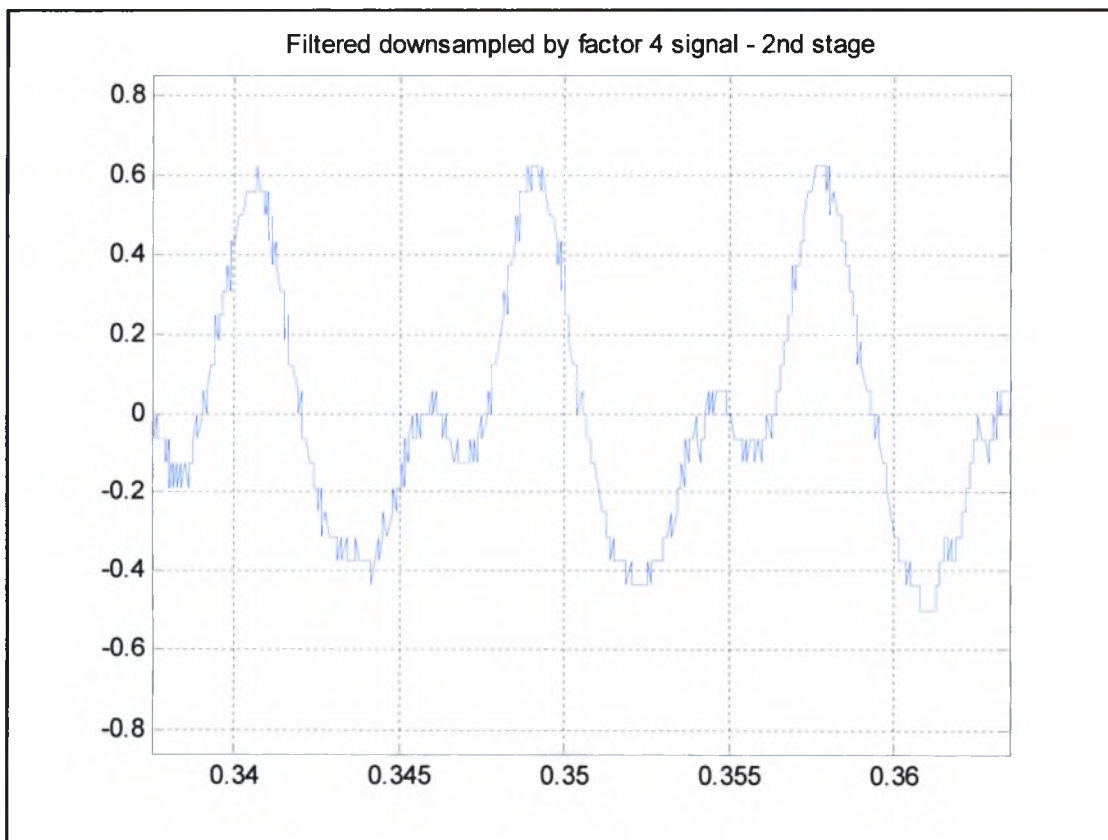


Εικόνα 4-53: Απόκριση φάσης 2ου φίλτρου

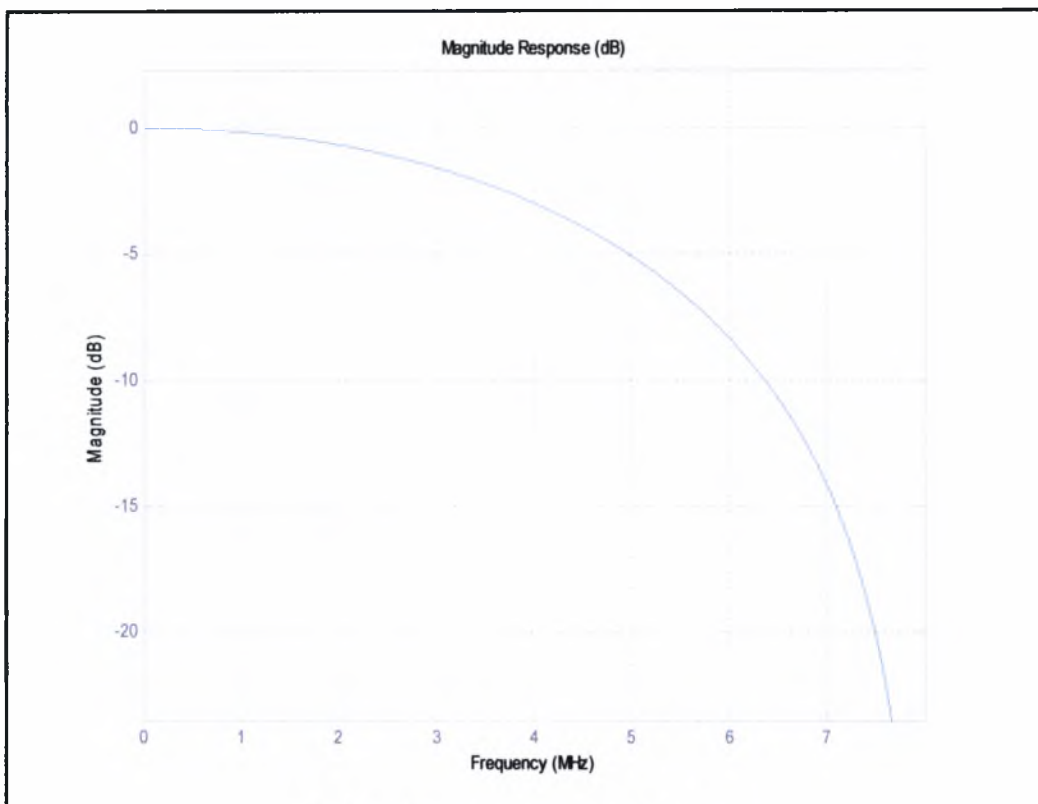


Εικόνα 4-54: Απόκριση πλάτους - φάσης 2ου φίλτρου

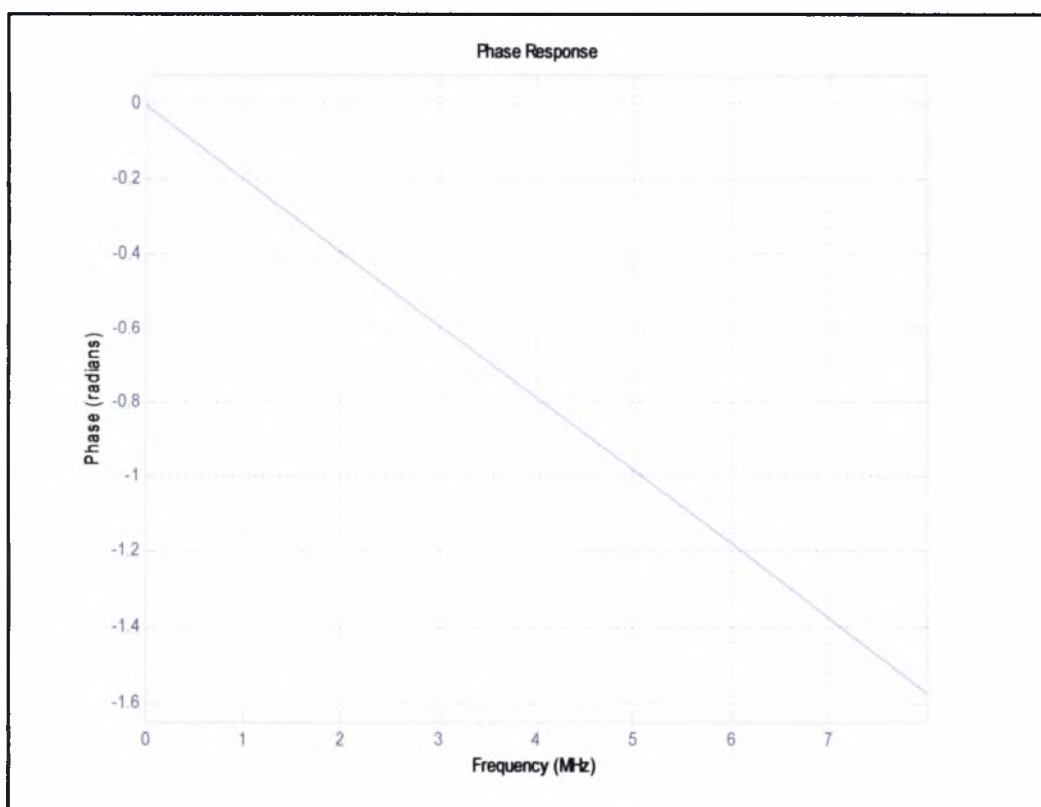
Εικόνα 4-55: Αποτέλεσμα 2^{ου} σταδίου φιλτραρίσματοςΕικόνα 4-56: Λεπτομέρεια εξόδου 2^{ου} φίλτρου

Εικόνα 4-57: Αποδεδειγμένο σήμα κατά παράγοντα $M=4$ 

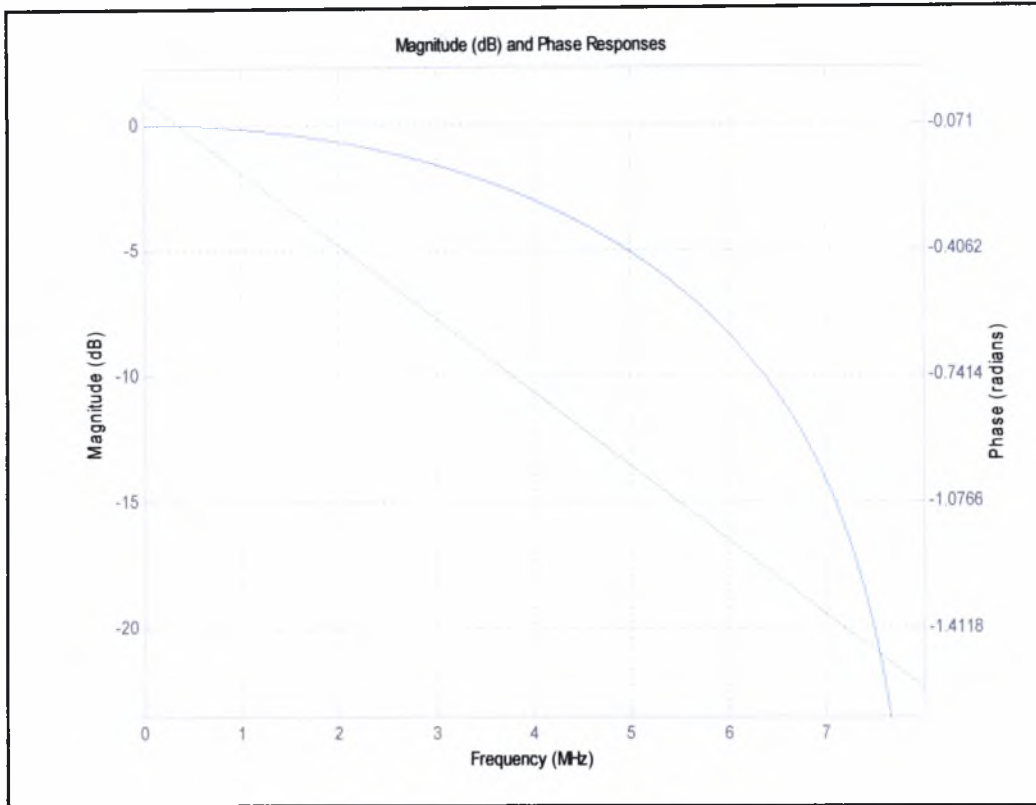
Εικόνα 4-58: Λεπτομέρεια αποδεδειγμένου σήματος



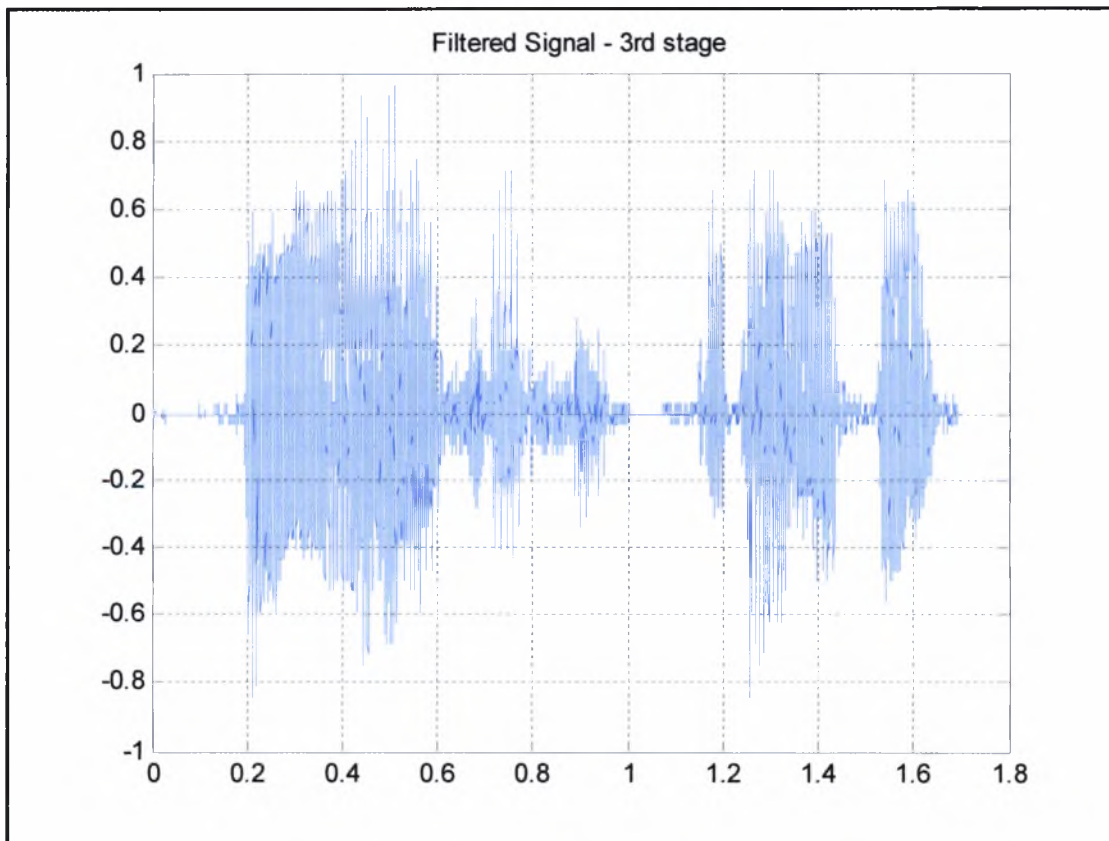
Εικόνα 4-59: Απόκριση πλάτους 3^{ου} φίλτρου

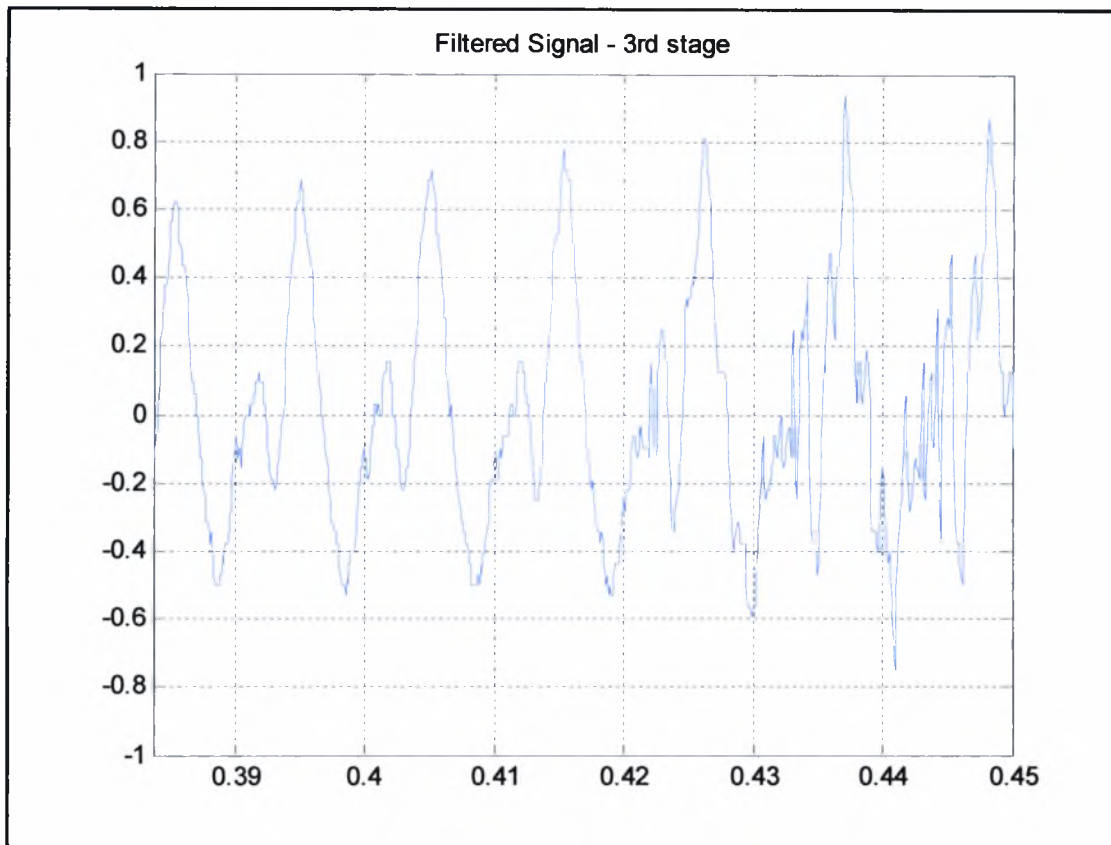
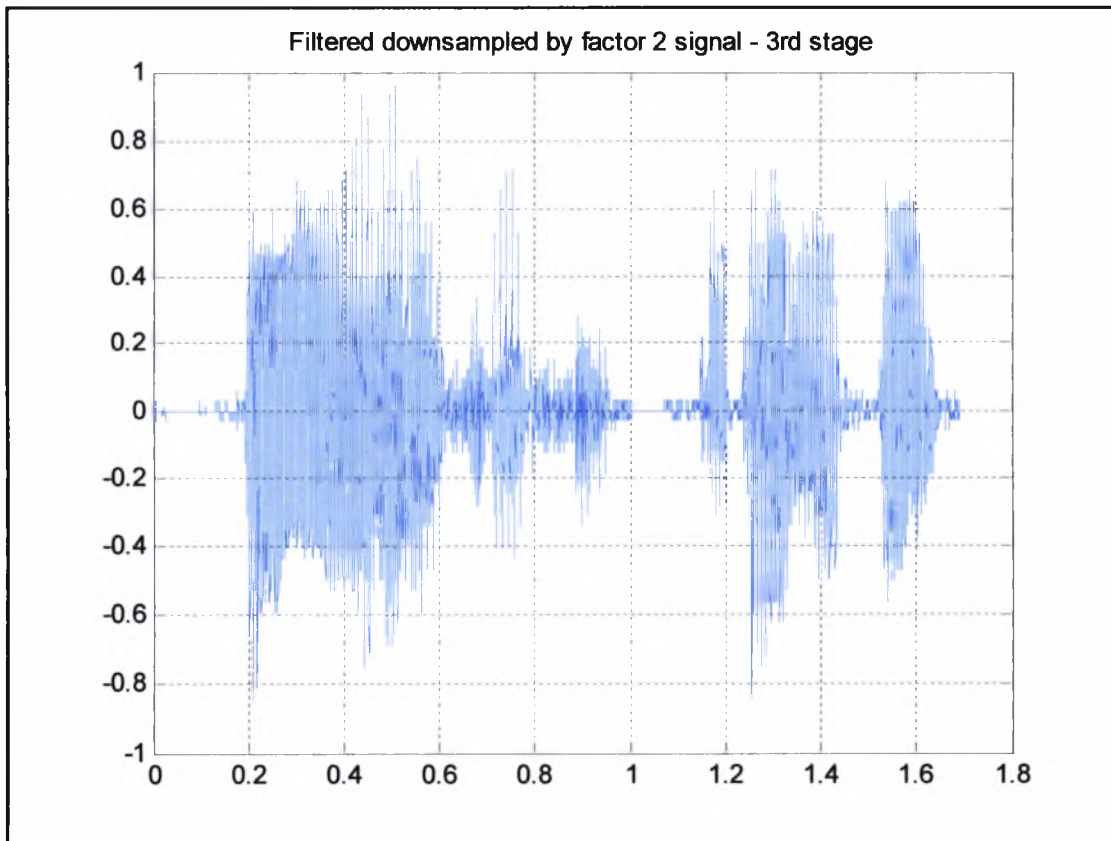


Εικόνα 4-60: Απόκριση πλάτους - φάσης 3^{ου} φίλτρου

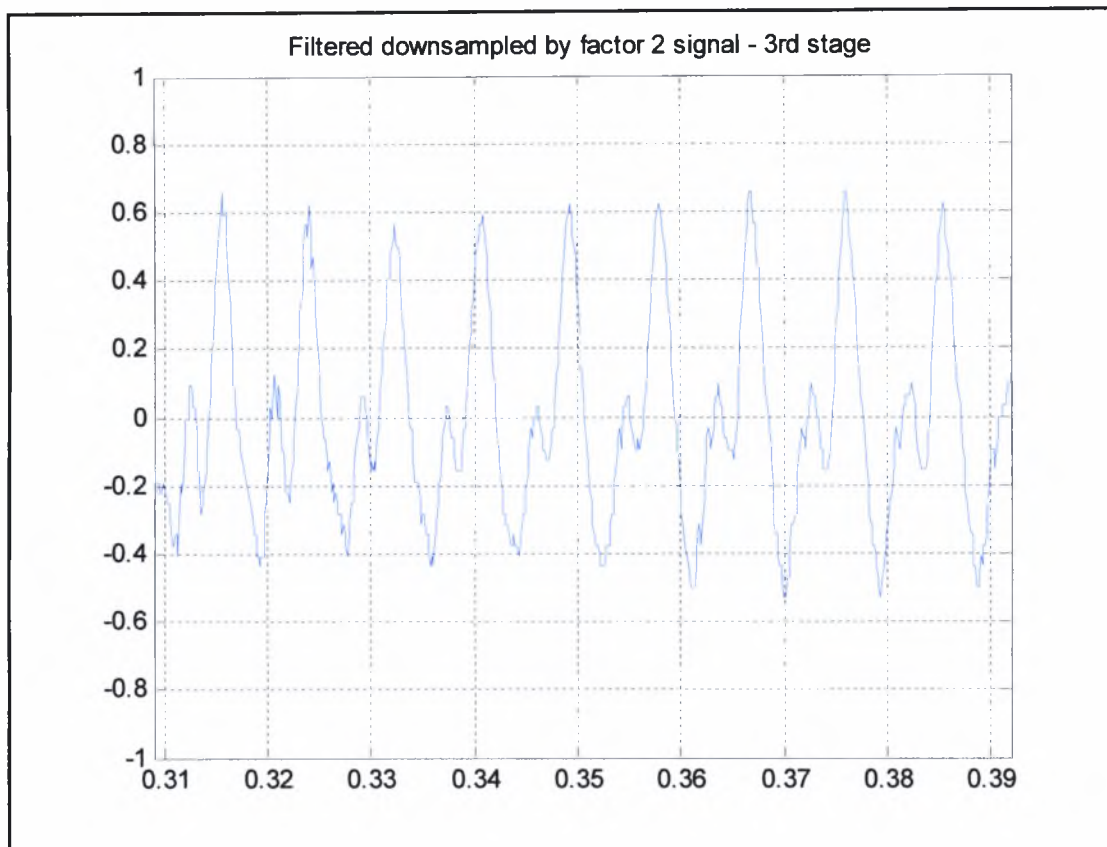


Εικόνα 4-61: Απόκριση πλάτους - φάσης 3ου φίλτρου

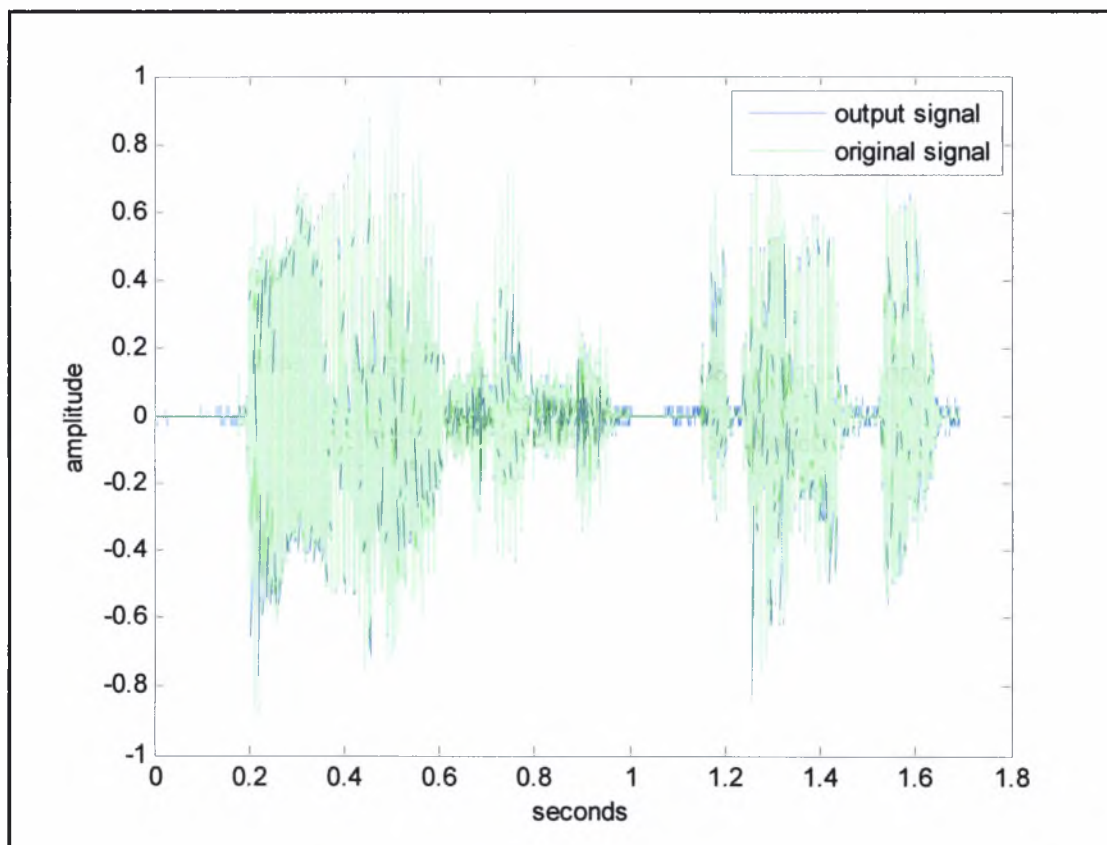
Εικόνα 4-62: Αποτέλεσμα 3^{ου} σταδίου φιλτραρίσματος

Εικόνα 4-63: Λεπτομέρεια εξόδου 3^{ου} φίλτρου

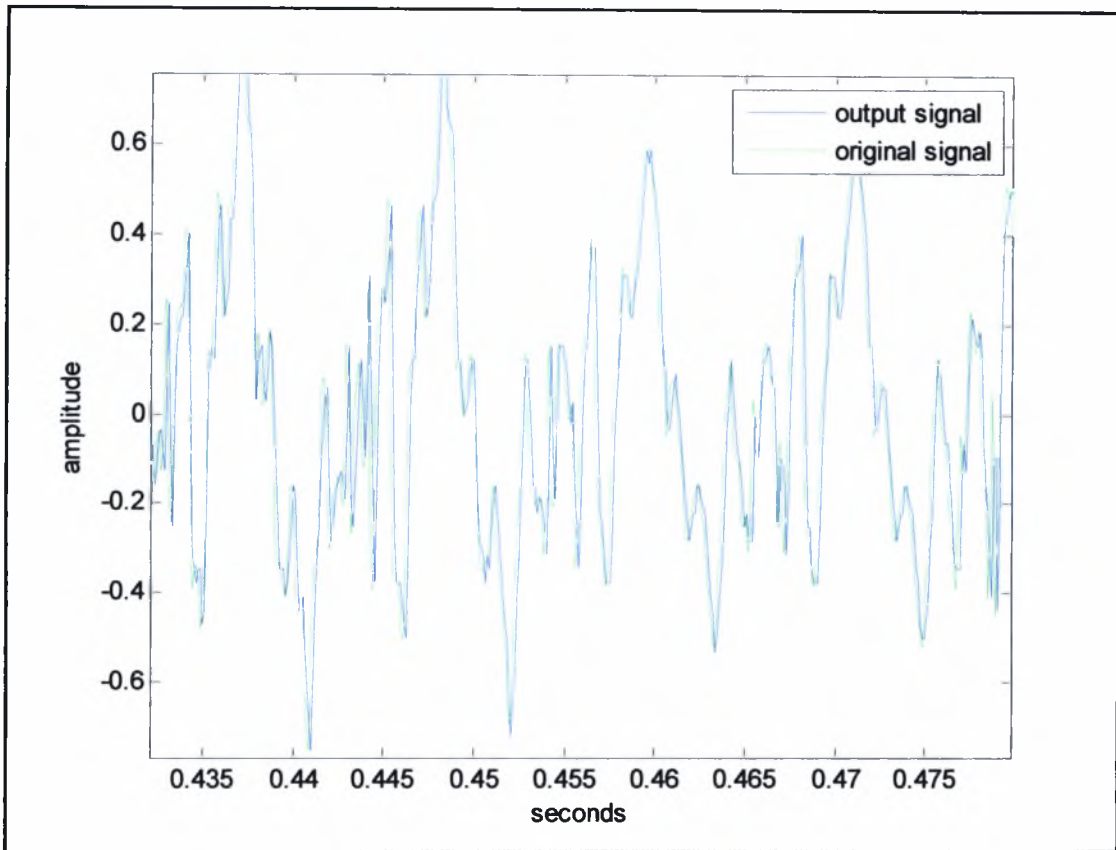
Εικόνα 4-64: Αποδεκατισμένο σήμα - τελική έξοδος



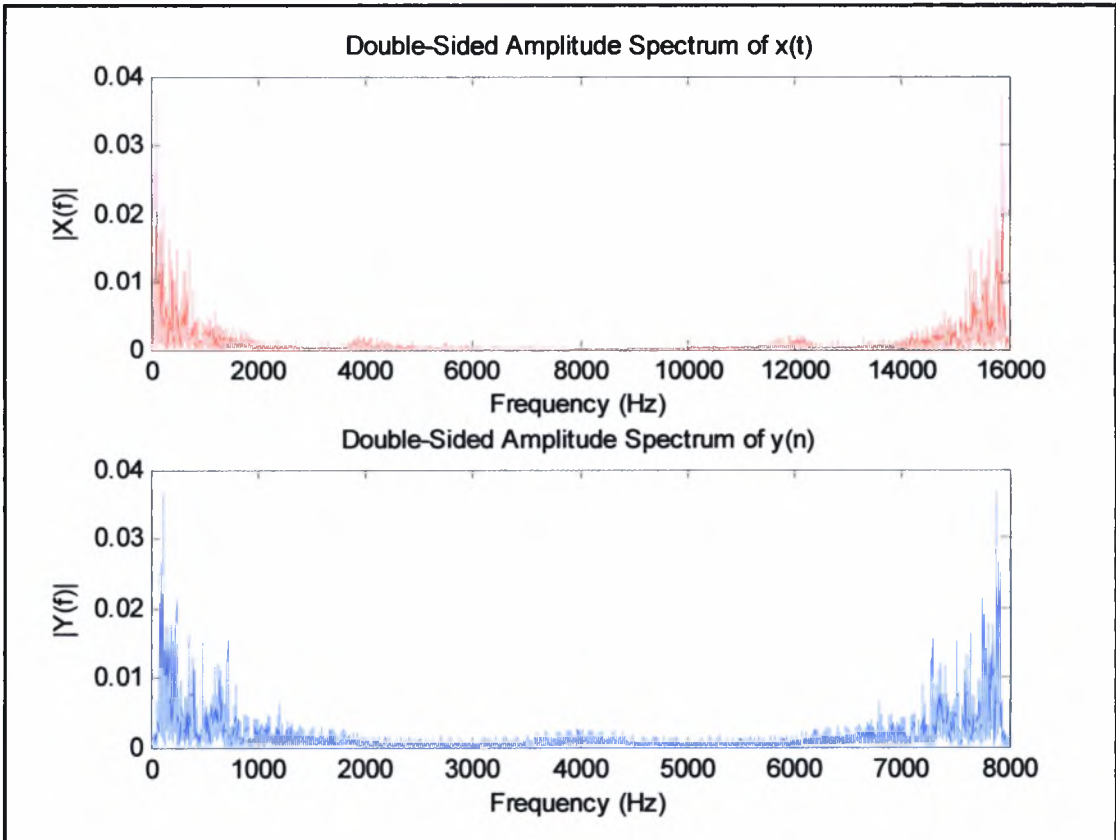
Εικόνα 4-65: Λεπτομέρεια τελικής εξόδου



Εικόνα 4-66: Αρχική είσοδος και τελικό σήμα

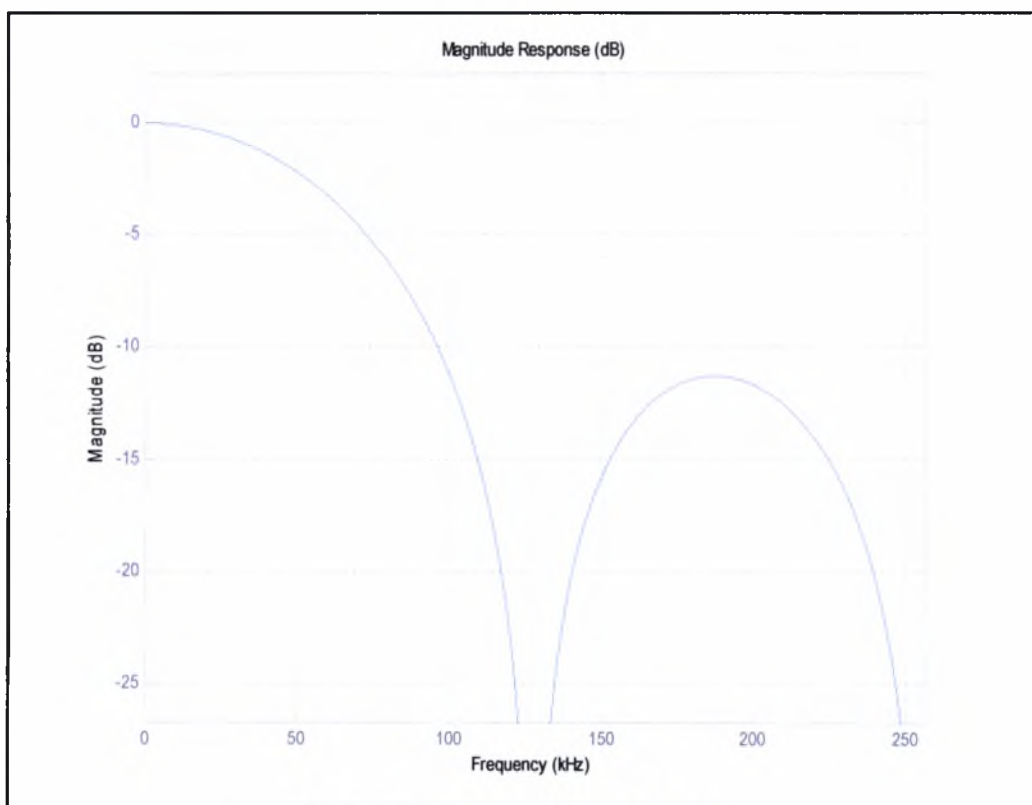


Εικόνα 4-67: Λεπτομέρεια αρχικής εισόδου και τελικού σήματος

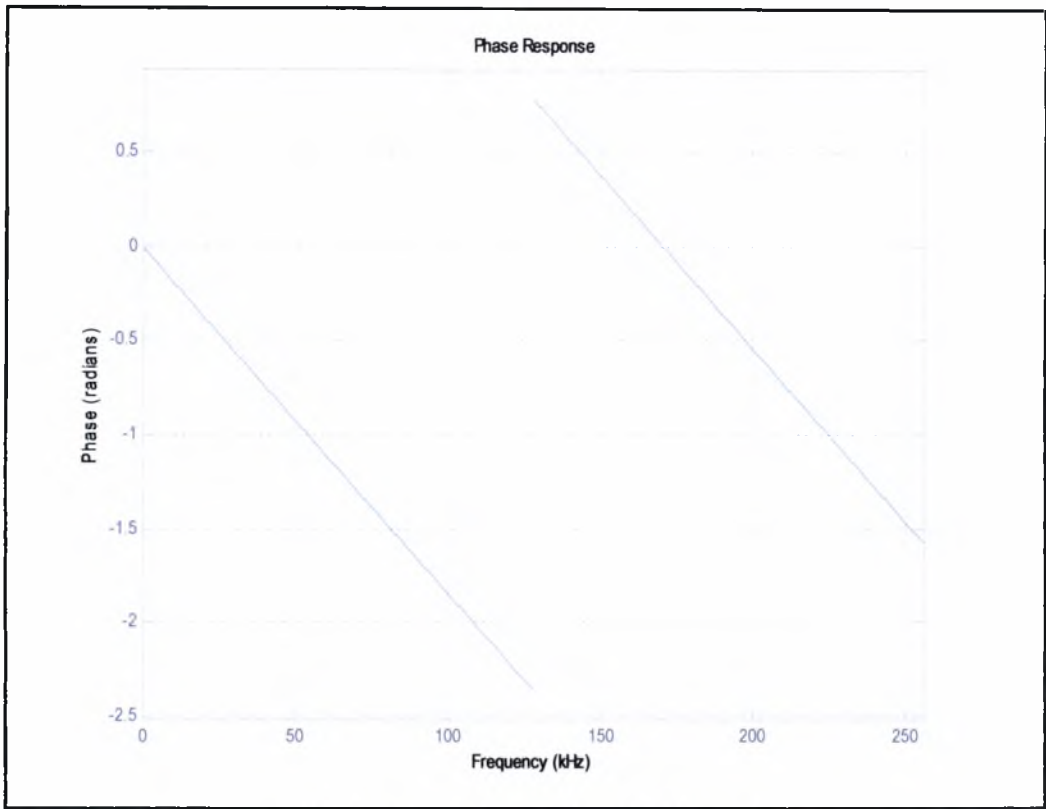


Εικόνα 4-68: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού και τελικού σήματος

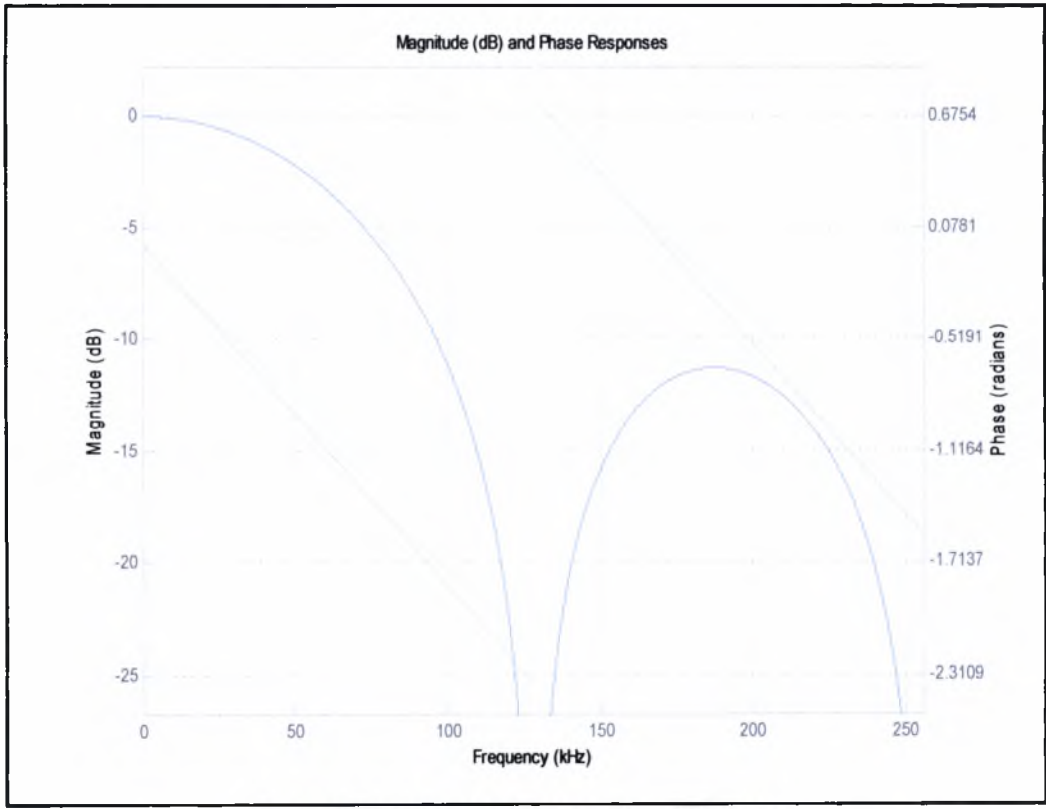
Στη συνέχεια, εξετάζεται η ίδια διαδικασία, χρησιμοποιώντας, όμως, τον ίδιο παράγοντα υποδειγματοληψίας σε όλα τα στάδια.



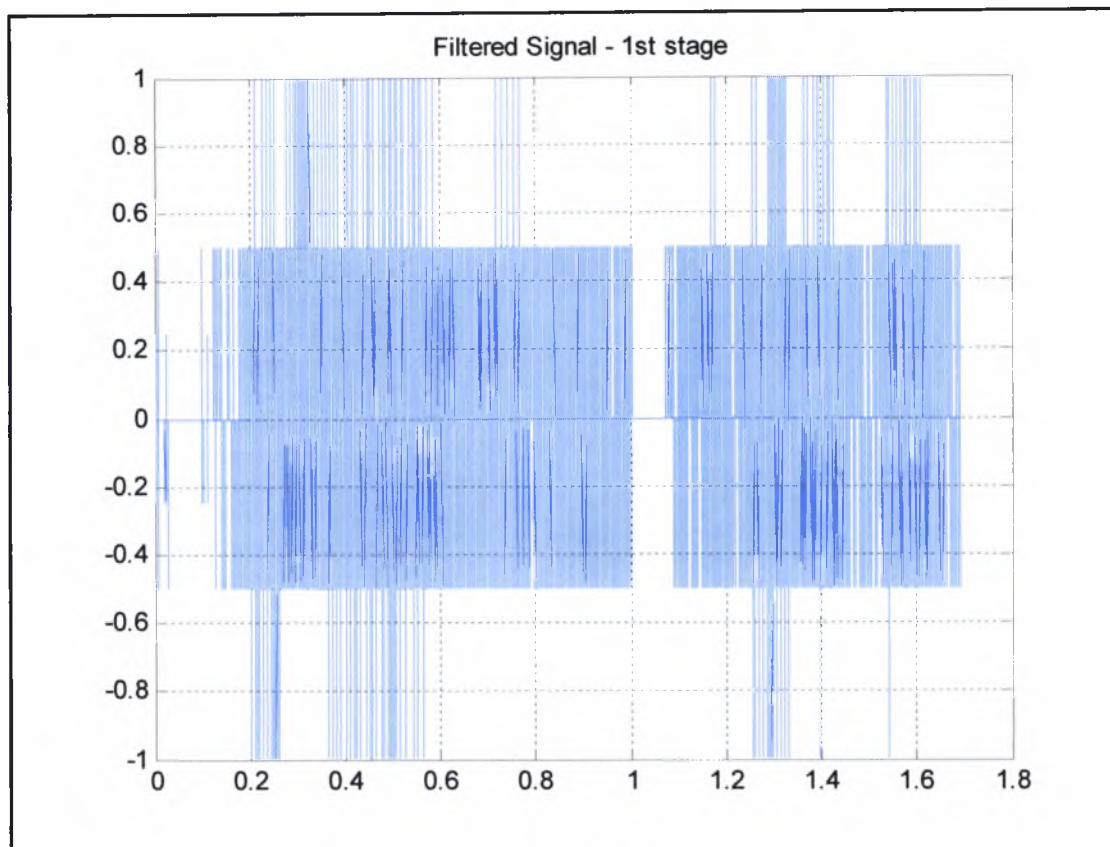
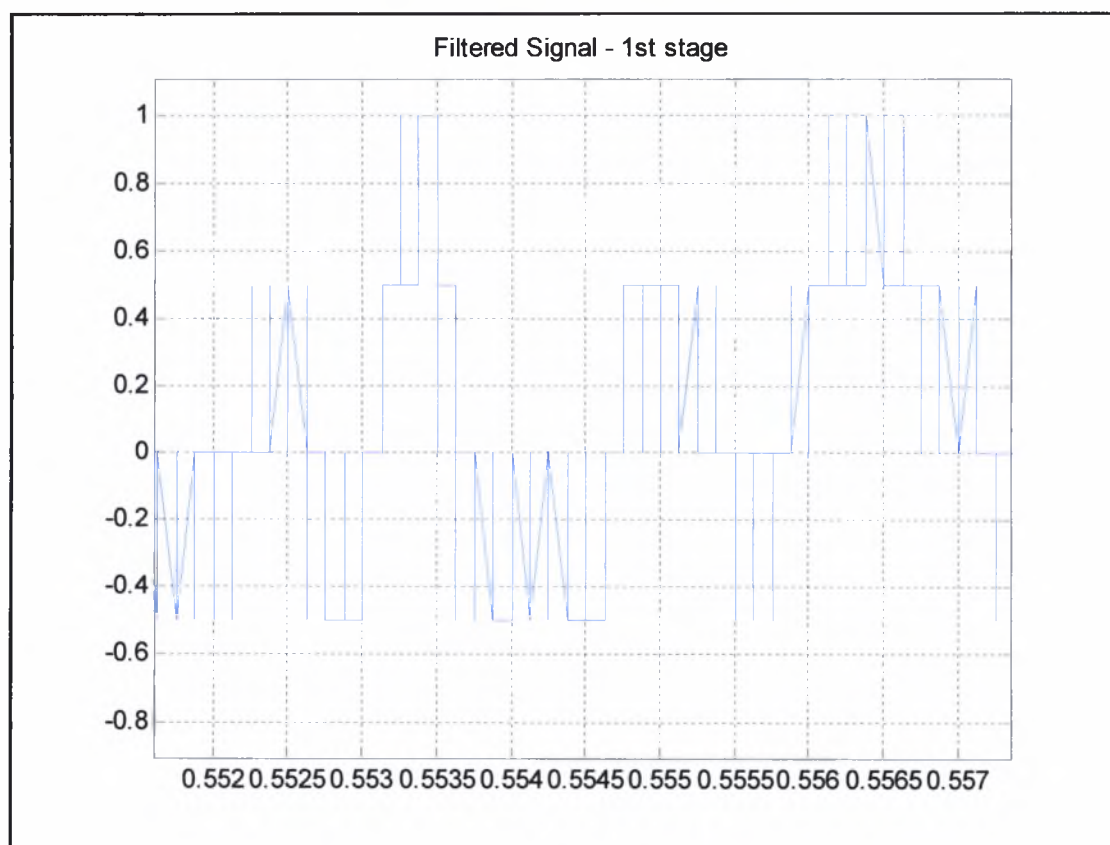
Εικόνα 4-69: Απόκριση πλάτους 1^{ου} φίλτρου



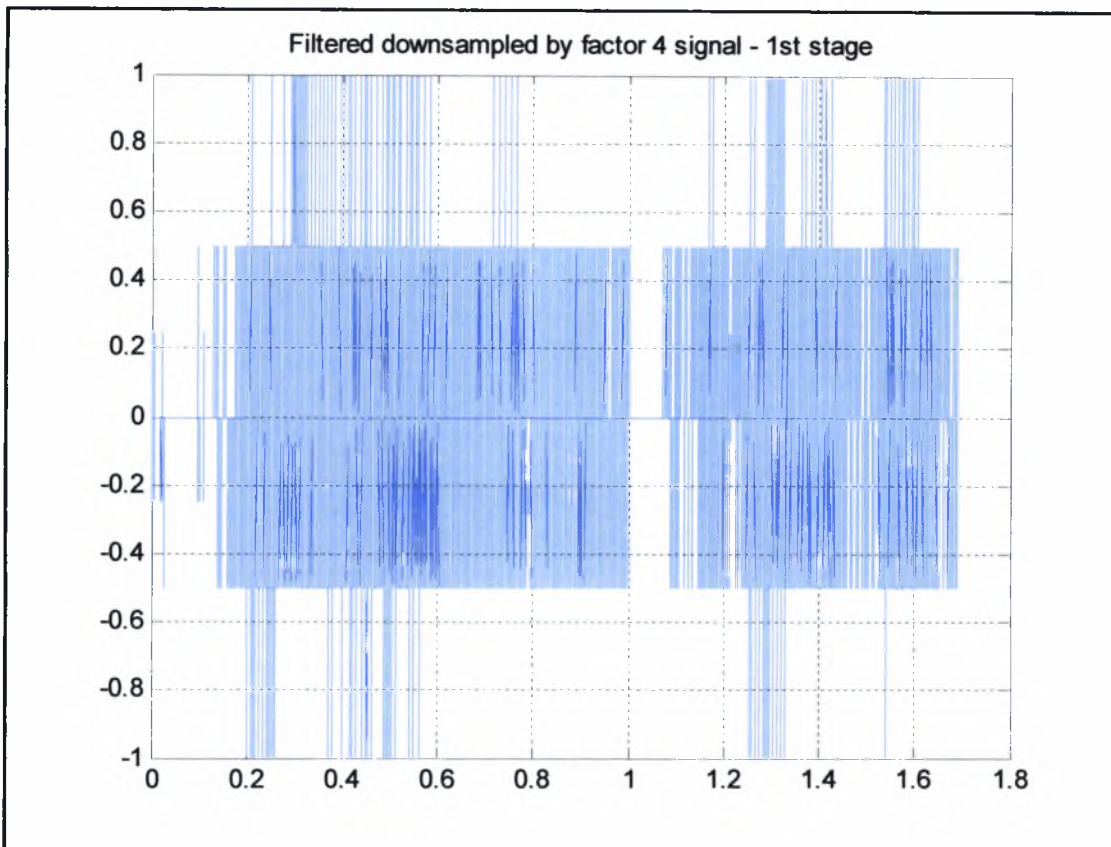
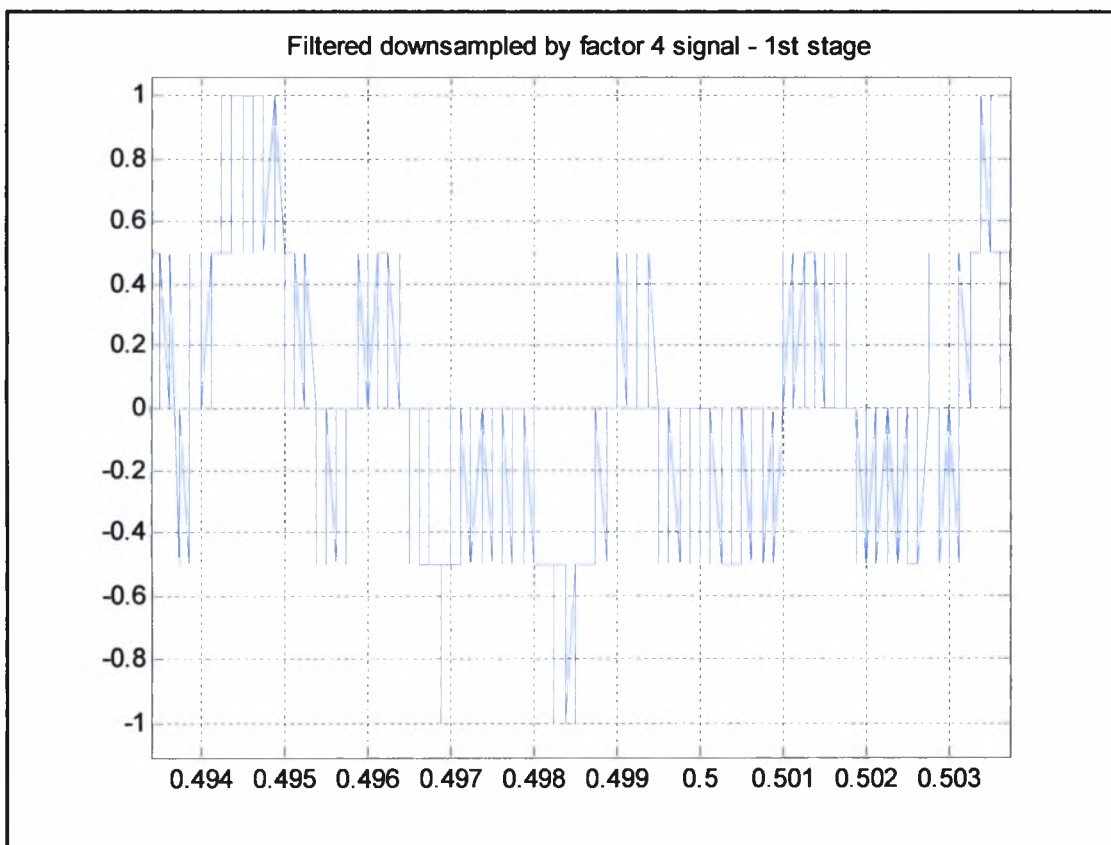
Εικόνα 4-70: Απόκριση φάσης 1^{ου} φίλτρου



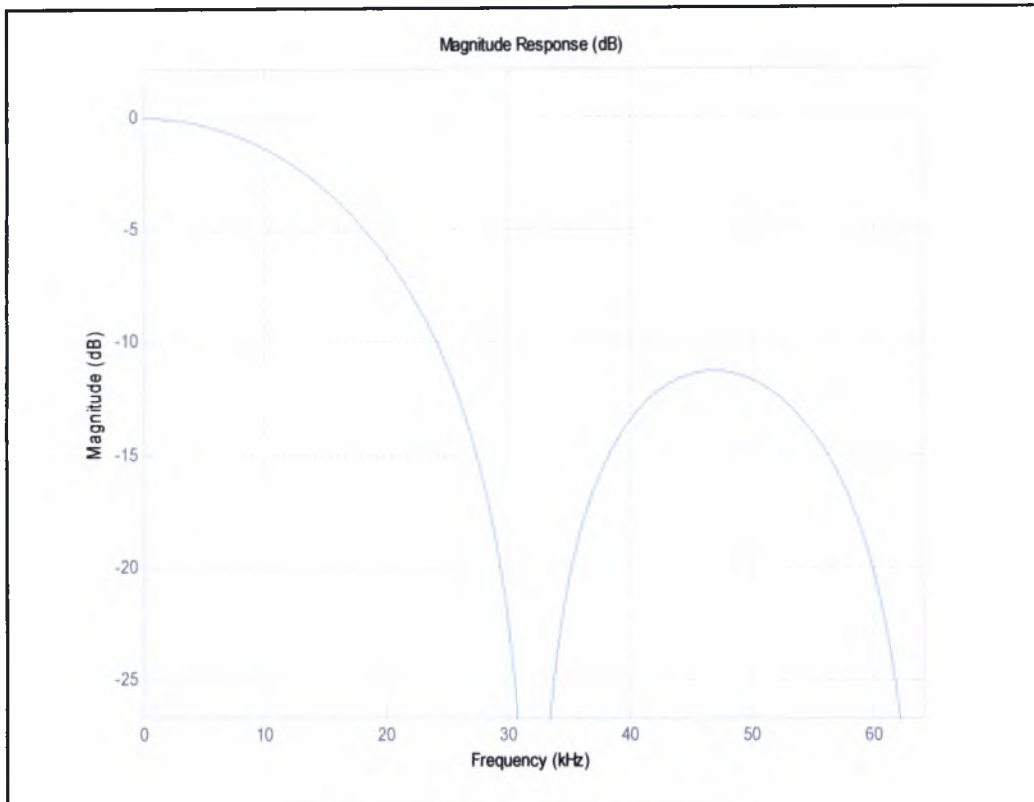
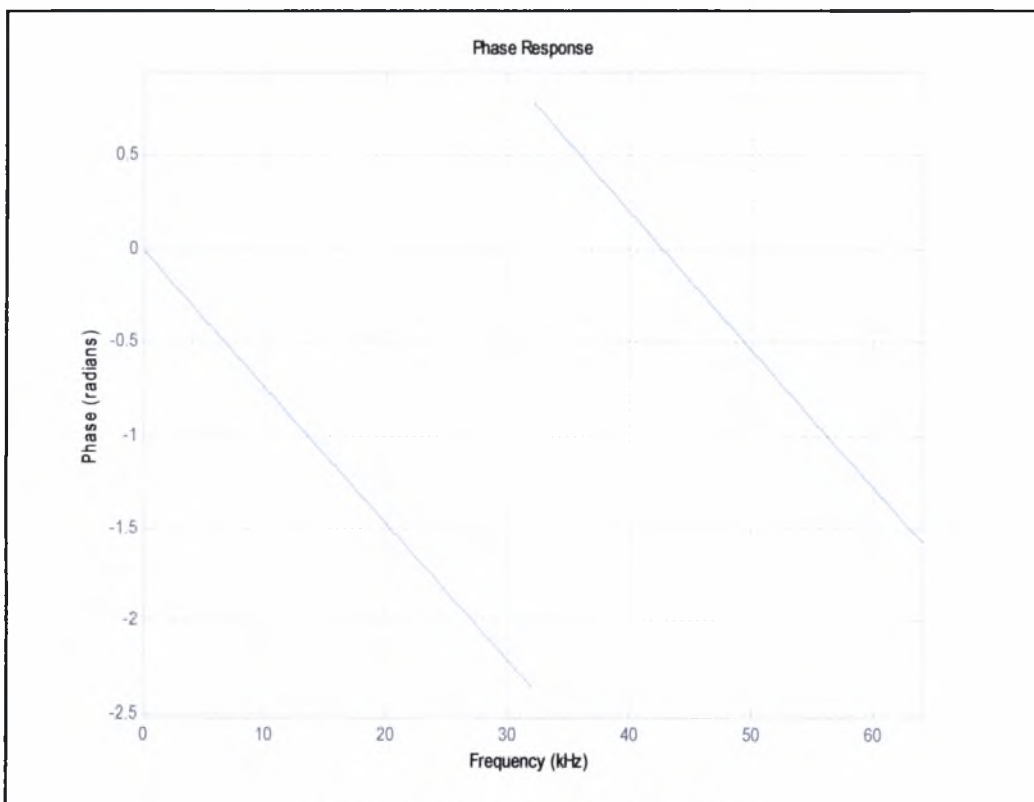
Εικόνα 4-72: Απόκριση πλάτους - φάσης 1^{ου} φίλτρου

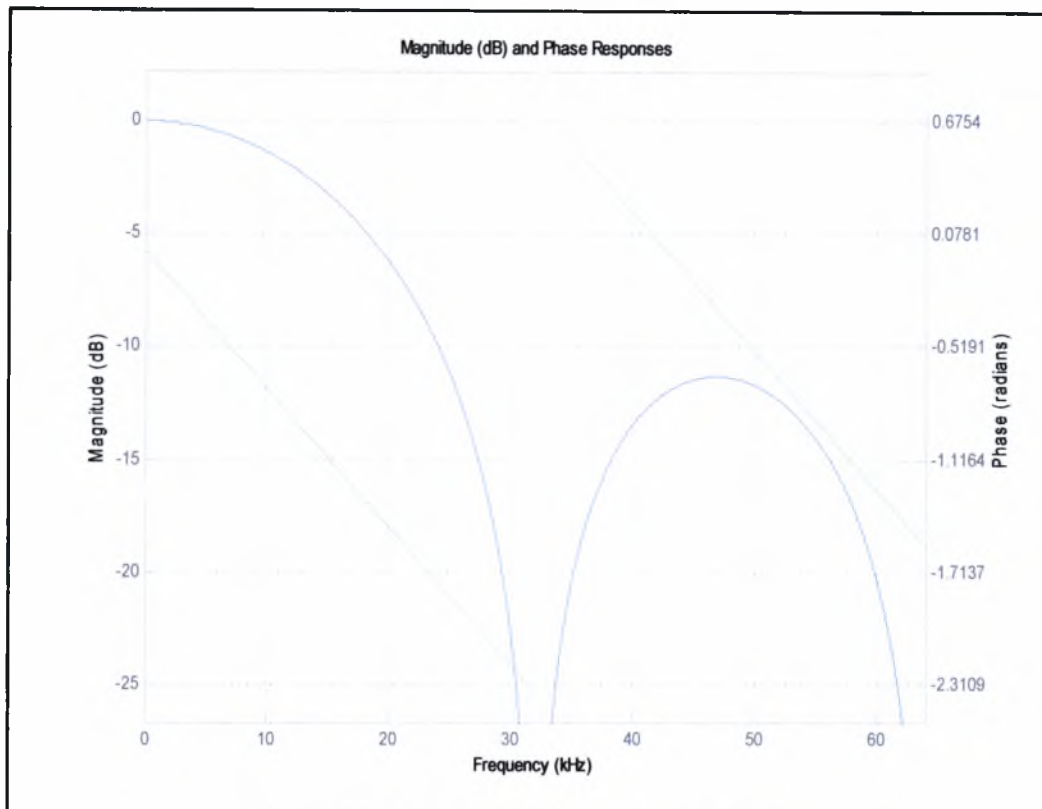
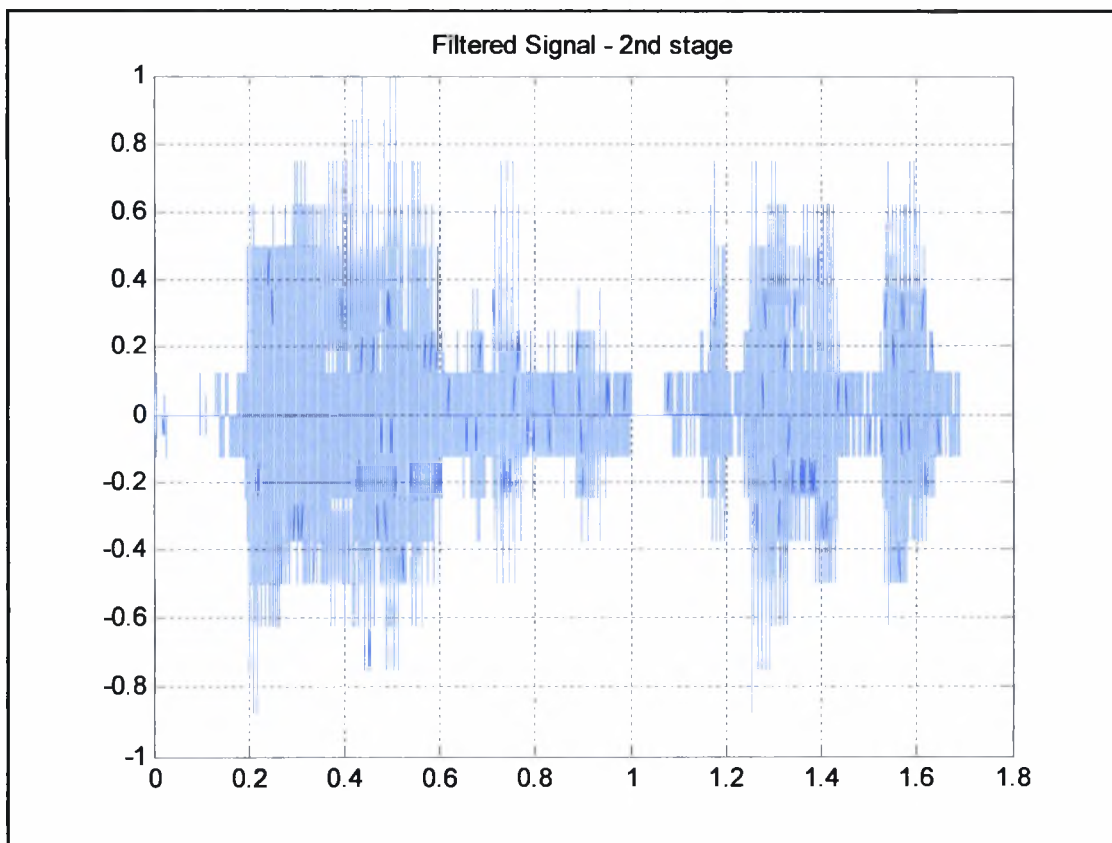
Εικόνα 4-73: Αποτέλεσμα 1^{ου} φιλτραρίσματος

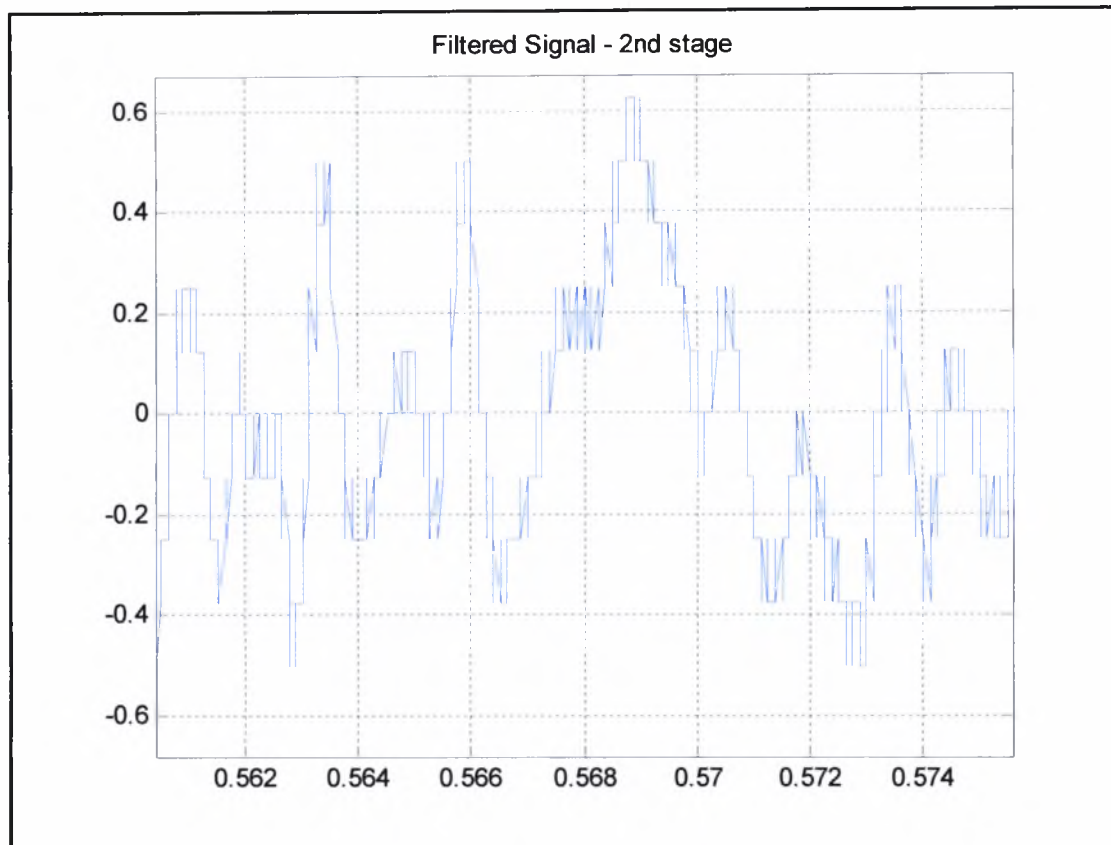
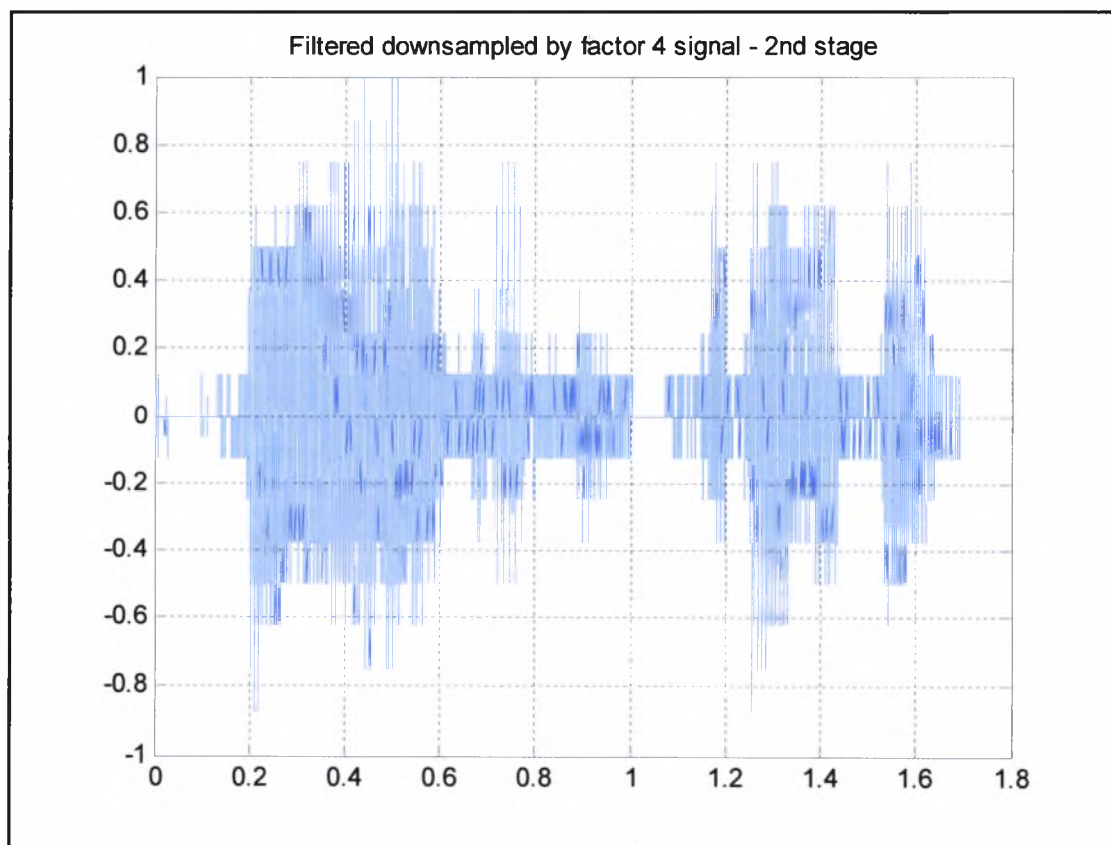
Εικόνα 4-74: Λεπτομέρεια φιλτραρισμένου σήματος

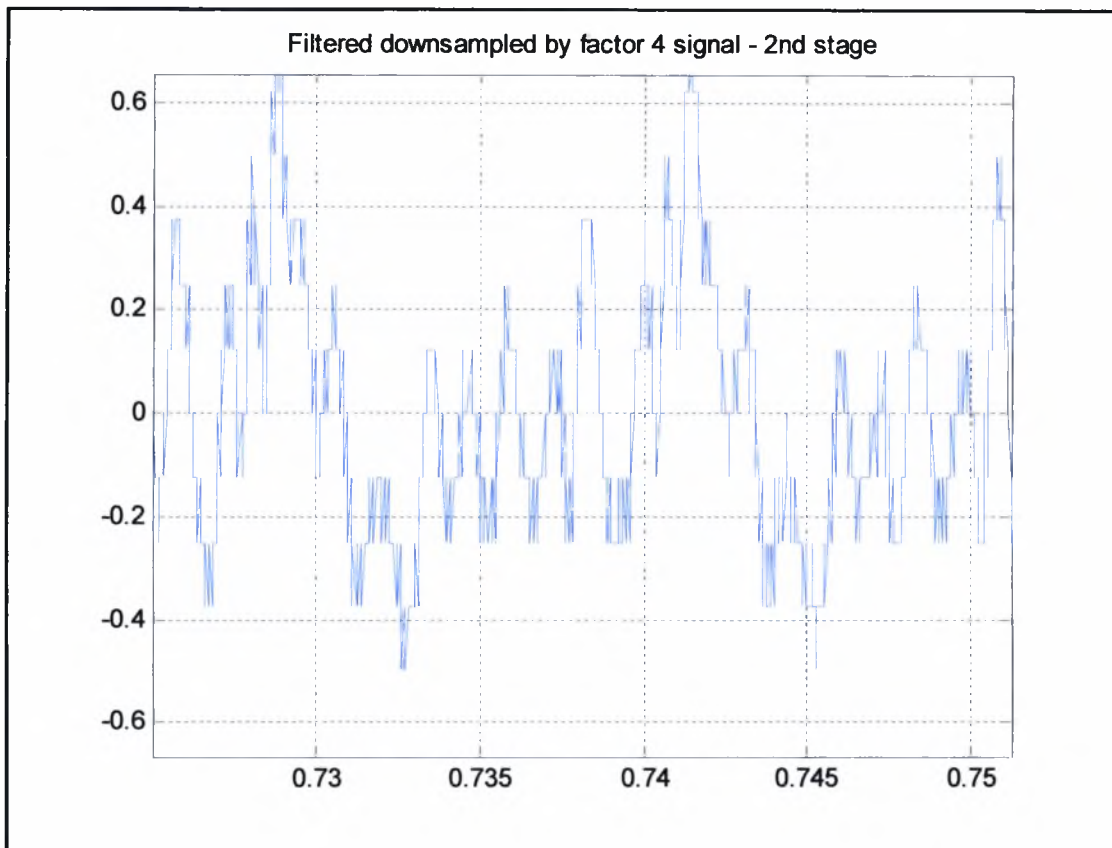
Εικόνα 4-75: Αποδεδκατισμένο σήμα κατά παράγοντα $M=4$ 

Εικόνα 4-76: Λεπτομέρεια αποδεδκατισμένου σήματος

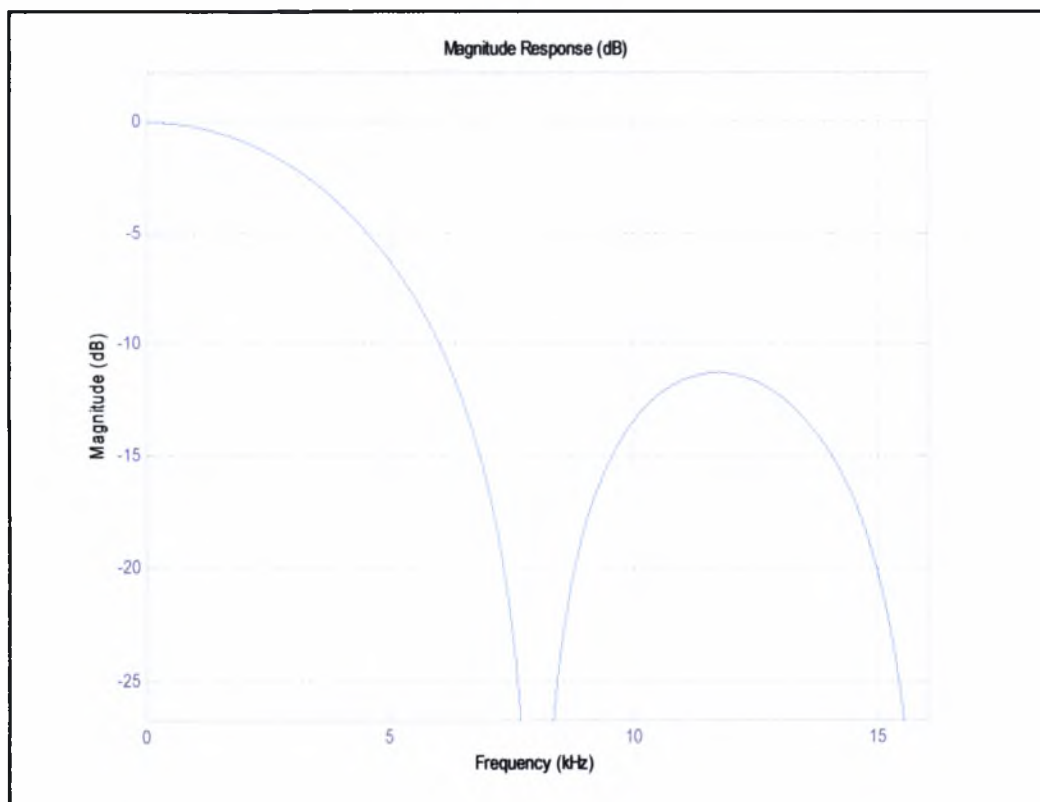
Εικόνα 4-77: Απόκριση πλάτους 2^{ου} φίλτρουΕικόνα 4-78: Απόκριση φάσης 2^{ου} φίλτρου

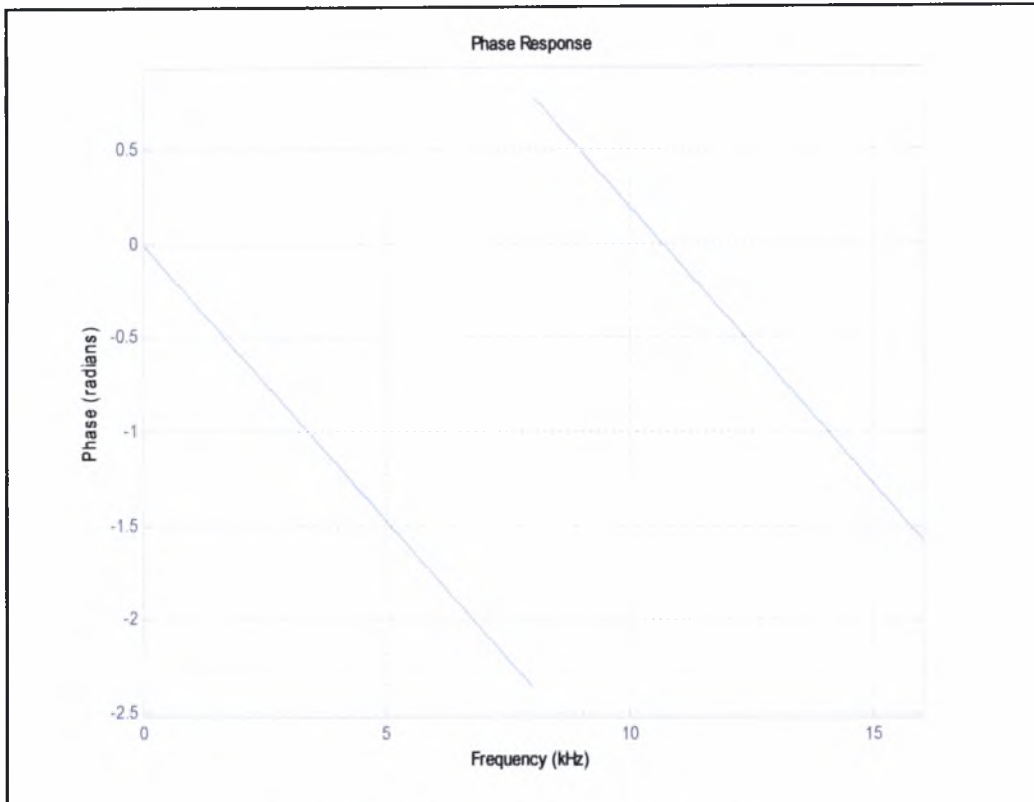
Εικόνα 4-79: Απόκριση πλάτους - φάσης 2^{ου} φίλτρουΕικόνα 4-80: Έξοδος 2^{ου} φίλτρου

Εικόνα 4-81: Λεπτομέρεια εξόδου 2^{ου} φίλτρουΕικόνα 4-82: Αποδεκατισμένο σήμα κατά παράγοντα $M=4$

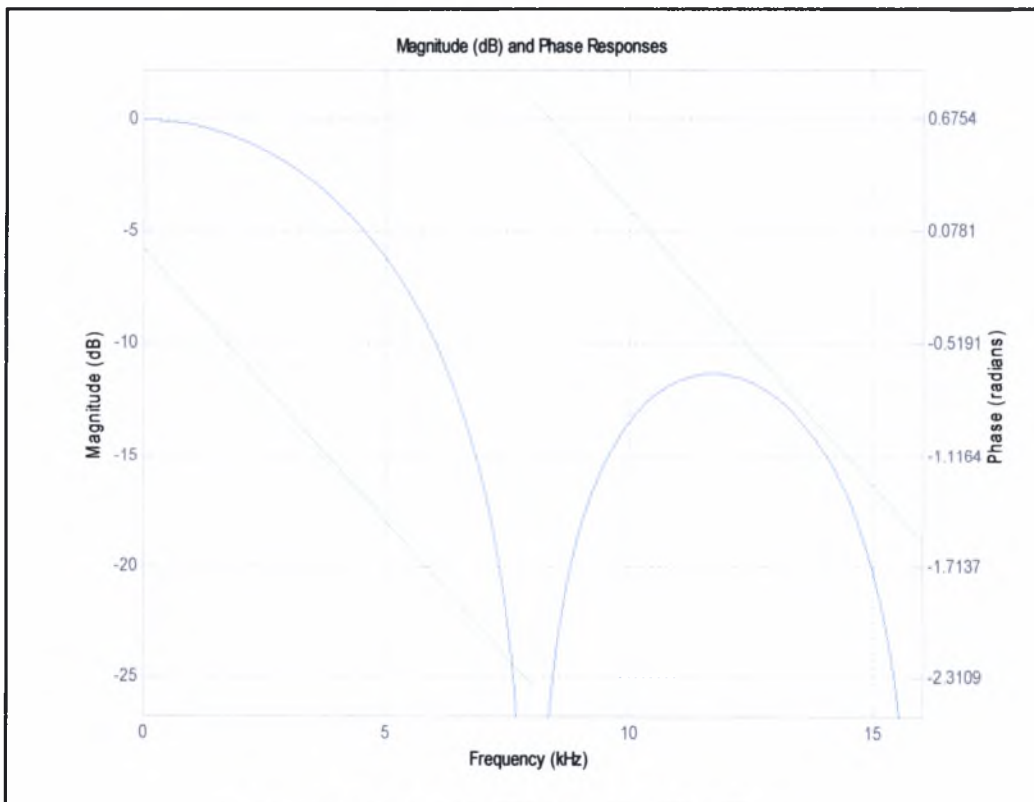


Εικόνα 4-83: Λεπτομέρεια αποδεκατισμένου σήματος

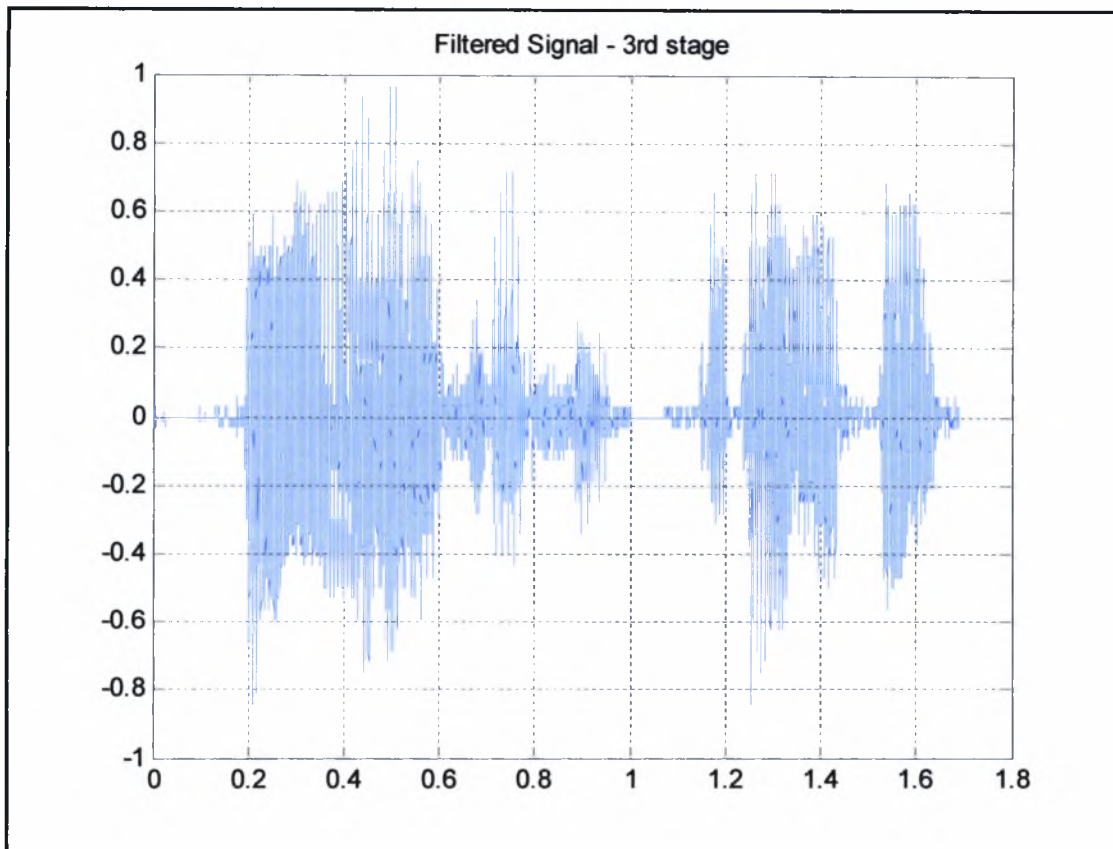
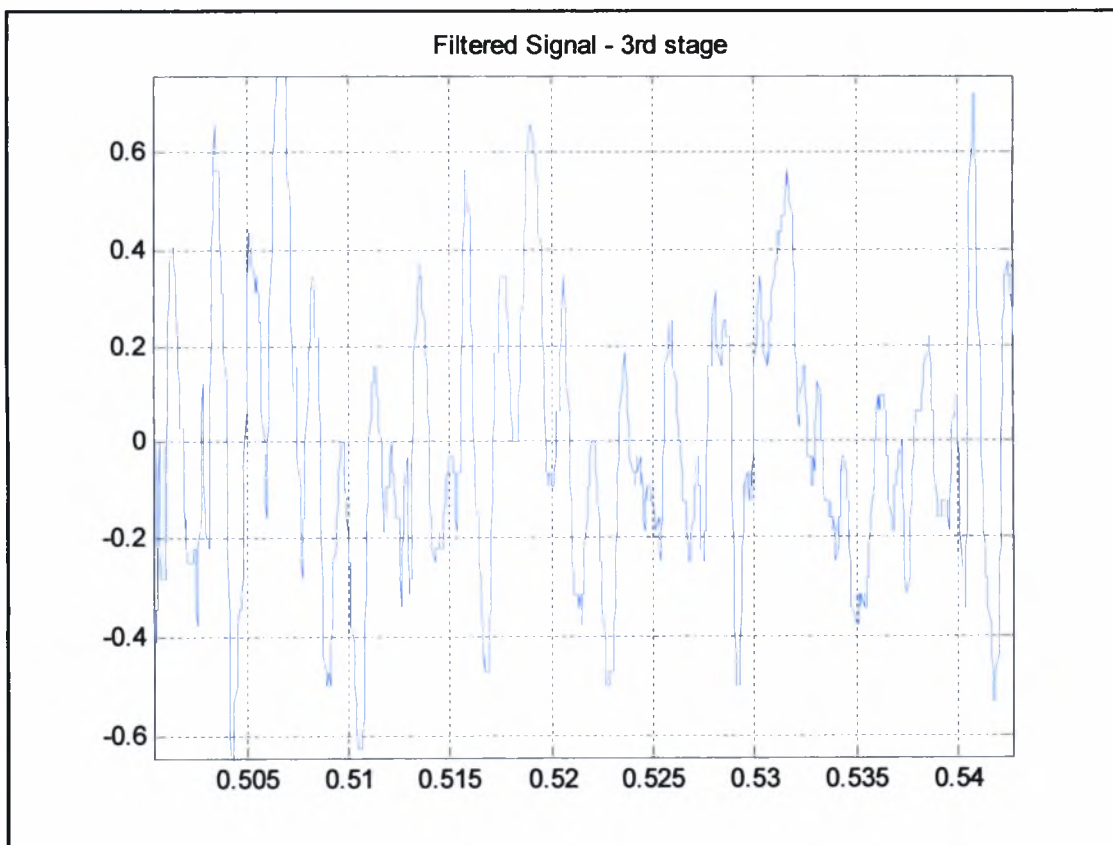
Εικόνα 4-84: Απόκριση πλάτους 3^{ου} φίλτρου

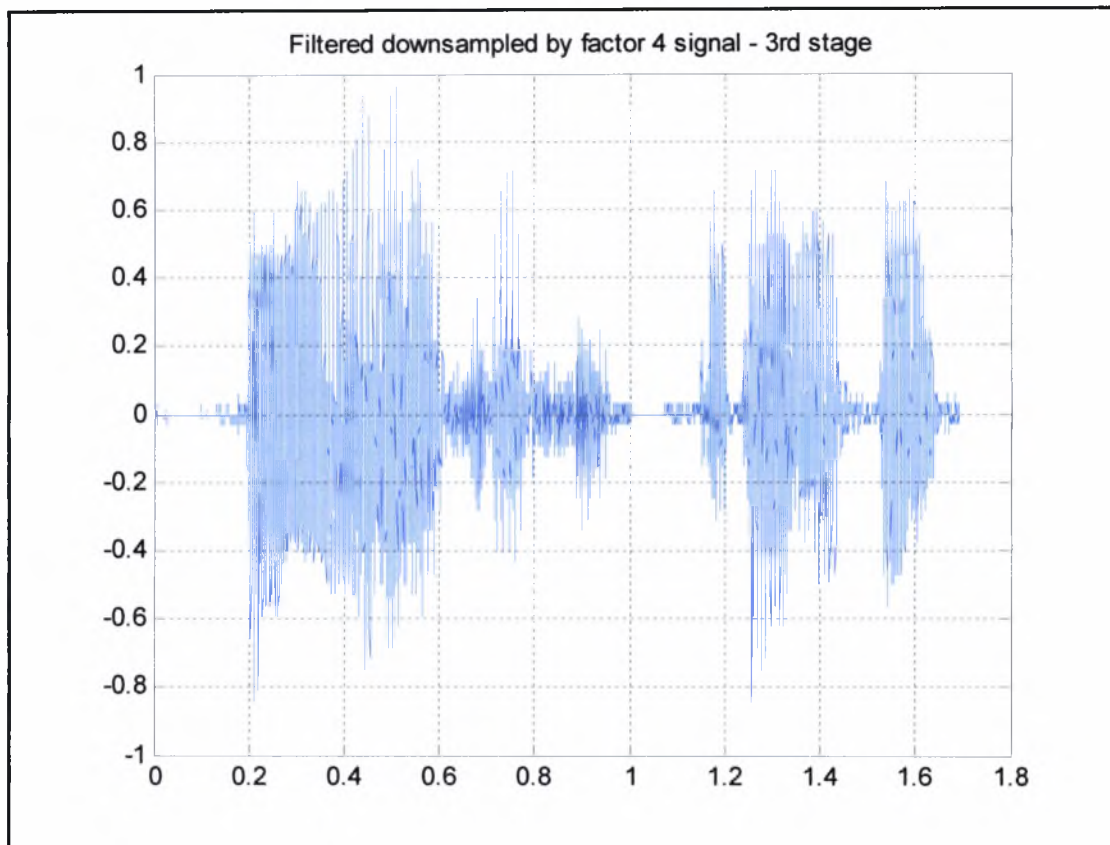
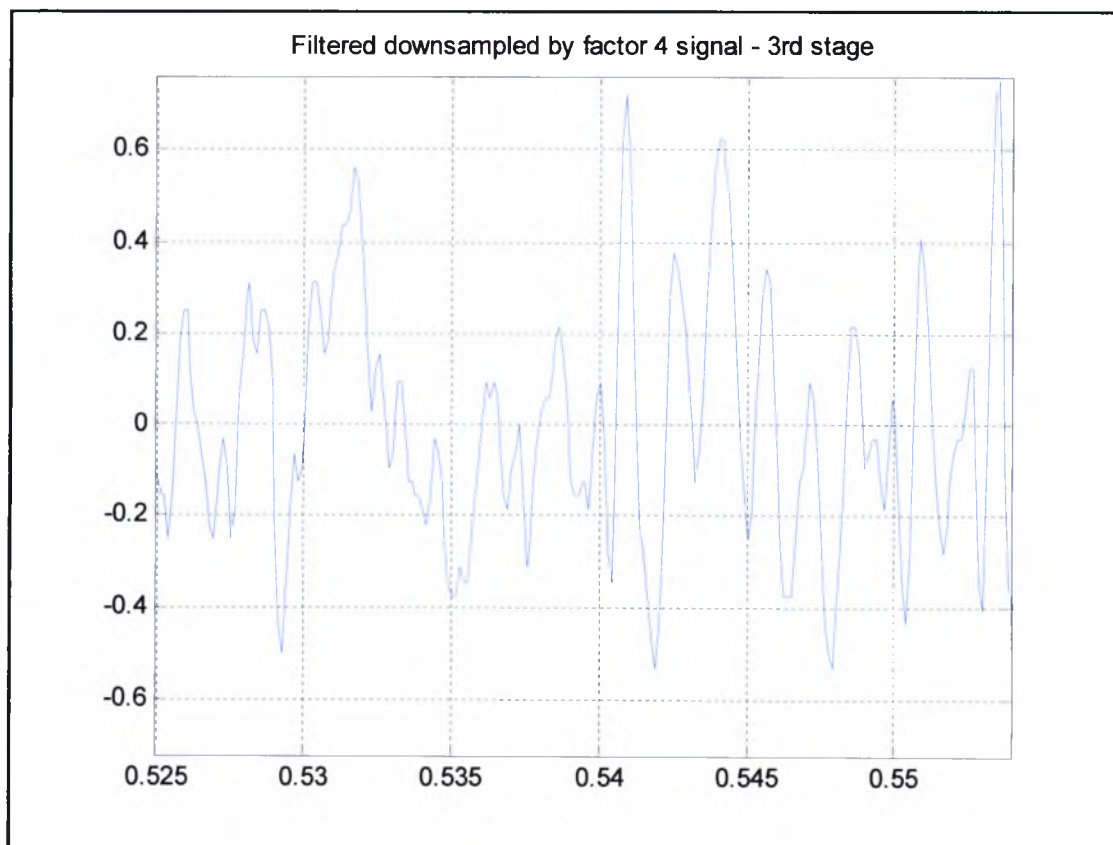


Εικόνα 4-85: Απόκριση φάσης 3^{ου} φίλτρου

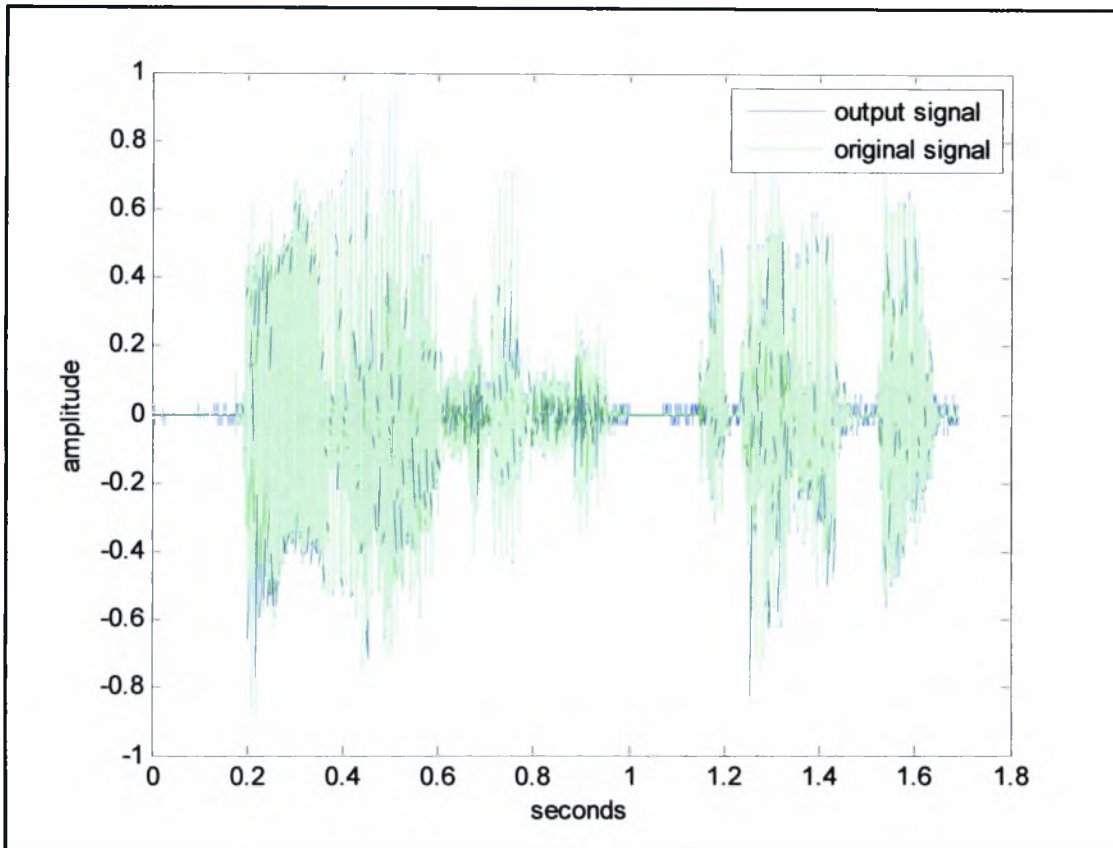


Εικόνα 4-86: Απόκριση πλάτους - φάσης 3ου φίλτρου

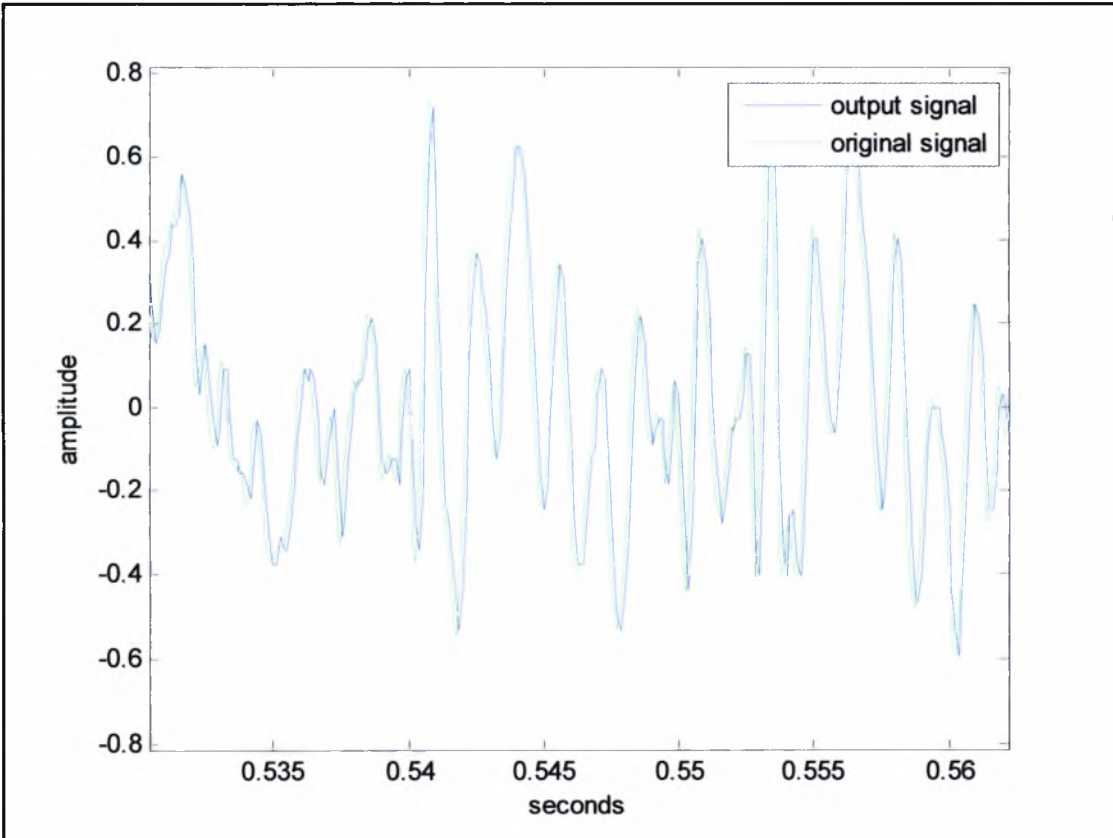
Εικόνα 4-87: Έξοδος 3^{ου} φίλτρουΕικόνα 4-88: Λεπτομέρεια εξόδου 3^{ου} φίλτρου

Εικόνα 4-89: Αποδεκατισμένο σήμα κατά παράγοντα $M=4$ (τελική έξοδος)

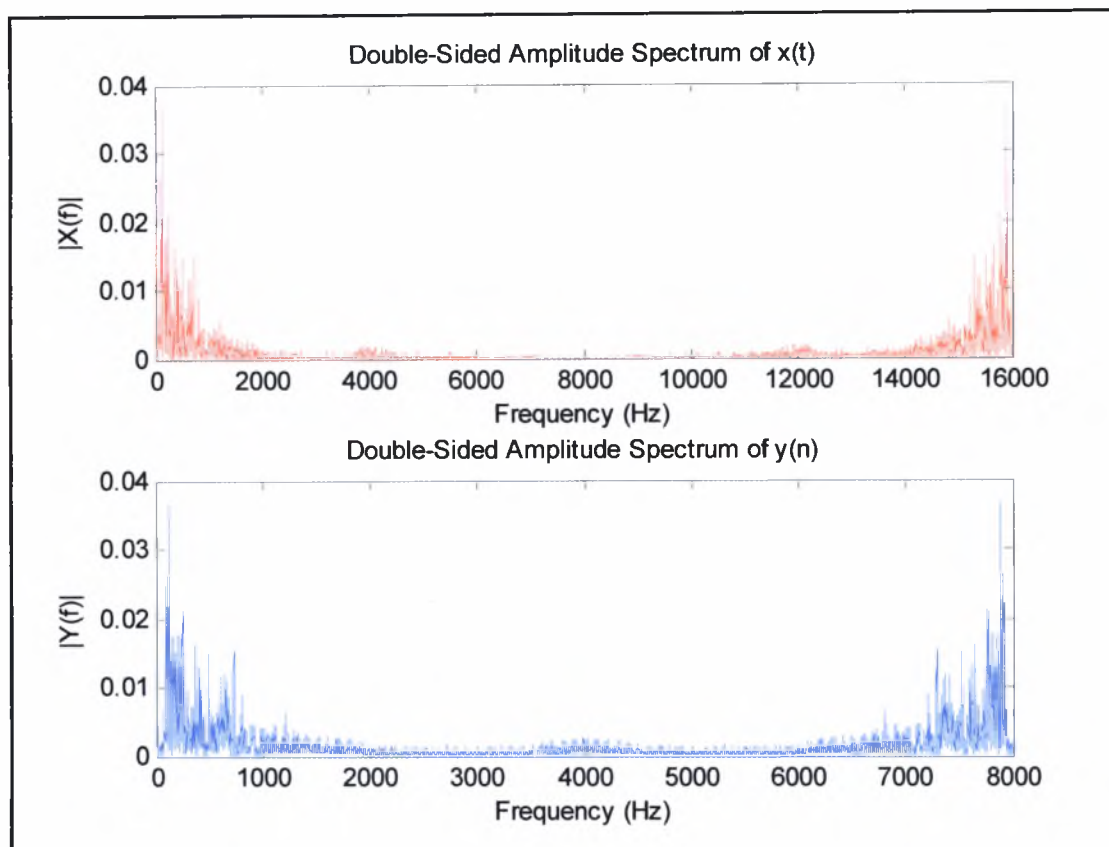
Εικόνα 4-90: Λεπτομέρεια τελικής εξόδου



Εικόνα 4-91: Αρχικό σήμα και τελική έξοδος



Εικόνα 4-92: Λεπτομέρεια αρχικής εισόδου και τελικού σήματος



Εικόνα 4-93: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού σήματος και τελικής εξόδου

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, κάποιοι κυματισμοί που εμφανίζονται στις εξόδους των πρώτων φίλτρων, σταδιακά εξαλείφονται όσο προχωράει η διαδικασία του αποδεκατισμού. Οι κυματισμοί αυτοί, που οφείλονται στην ύπαρξη της υπερδειγματοληψίας, ελαττώνονται και τελικά εξαφανίζονται, καθώς τα φίλτρα που χρησιμοποιούνται στη συστοιχία παρουσιάζουν όλο και μικρότερη συχνότητα αποκοπής.

4.2.2.2 Cascaded Integrator Comb Filter – CIC Filter

Στο εδάφιο αυτό εξετάζεται μια παραλλαγή των φίλτρων *cascaded comb*, η οποία έχει πολύ συχνή εφαρμογή στους διαμορφωτές ΣΔ. Η υλοποίηση των συγκεκριμένων φίλτρων πραγματοποιείται σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο έχουμε μια συστοιχία ολοκληρωτών, αμέσως μετά ακολουθεί το *downsampling* και στο τελικό στάδιο παραθέτουμε μια συστοιχία φίλτρων *comb*. Από την υλοποίηση αυτή προκύπτει και το όνομα του συγκεκριμένου φίλτρου.

Το *MATLAB* προσφέρει τη δυνατότητα υλοποίησης μέσω μιας συστοιχίας

εντολών.

```
d = fdesign.decimator(M, RESPONSE, SPEC, SPEC1,
SPEC2, ...);
hml = design(d);
```

Η πρώτη εντολή δημιουργεί έναν κατασκευαστή τύπου *decimator* που έχει κάποιες συγκεκριμένες προδιαγραφές. Η δεύτερη εντολή, υλοποιεί το φίλτρο αποδεκατισμού και εισάγει ένα αντικείμενο τύπου *mfilt* στην επιφάνεια εργασίας του *MATLAB*.

Για να γίνει το παράδειγμα πιο συγκεκριμένο, παρατίθενται οι αντίστοιχες εντολές που δόθηκαν για τη δημιουργία του *cic - comb filter* που χρησιμοποιείται στα παραδείγματα.

```
Fp=8000; %Hz
Fs=512000;
Ast=80;

d =
fdesign.decimator(OSR, 'CIC', 1, 'Fp,Ast', Fp,Ast, Fs);
hml = design(d);
```

Αρχικά, ορίζεται η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου $F_p=8 \text{ kHz}$ και, έπειτα, η αντίστοιχη συχνότητα δειγματοληψίας $F_s=512 \text{ kHz}$. Τέλος, ορίζεται η επιθυμητή εξασθένηση του σήματος στην ζώνη αποκοπής. Τυπικά, για τα περισσότερα χαμηλοπερατά φίλτρα, κυμαίνεται μεταξύ 75 και 100 db.

Έπειτα, ορίζουμε έναν κατασκευαστή φίλτρου d με πρώτο όρισμα τον παράγοντα αποδεκατισμού – εδώ $OSR = 64$ - και δεύτερο όρισμα τον τύπο του φίλτρου - 'CIC'. Τα αντικείμενα αυτά εισάγονται στο εργαλείο *Simulink* που

προσφέρει το *MATLAB*, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η προσομοίωση του κυκλώματος και να εξαχθούν τα ανάλογα συμπεράσματα.

Το μοντέλο του κυκλώματος που προκύπτει δίνεται στην εικόνα 4.94. Ο λόγος που χρησιμοποιείται ένας μετατροπέας ανάμεσα στο σήμα εισόδου x_q και στο φίλτρο είναι διότι το φίλτρο αποδεκατισμού παίρνει είσοδο πεπερασμένου μήκους σε *bits* και με πεπερασμένη ακρίβεια, οπότε ο μετατροπέας διαμορφώνει το σήμα, έτσι ώστε να έχει επιτρεπτή μορφή όταν εισάγεται στο φίλτρο. Το γεγονός αυτό, ωστόσο, δεν προκαλεί αλλοιώσεις στις τιμές του διανύσματος, απλώς τους προσθέτει κάποια επιπλέον χαρακτηριστικά.

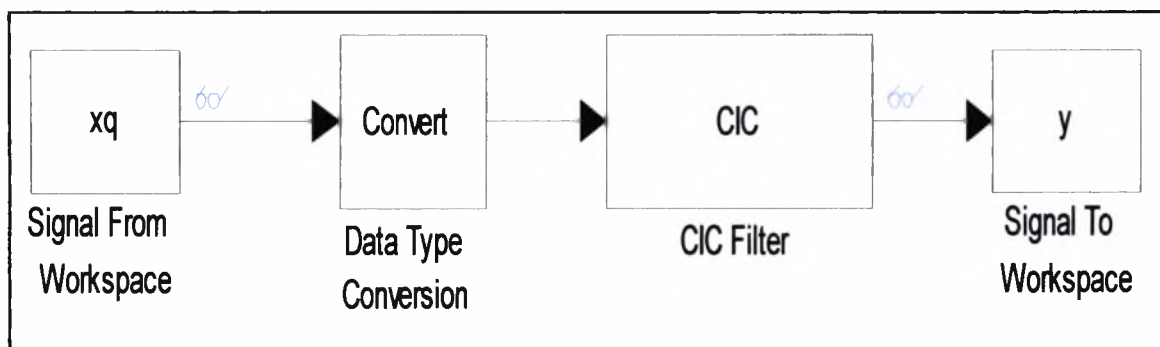
Στη συνέχεια, ακολουθεί το φίλτρο αποδεκατισμού, στο οποίο έχουν «φορτωθεί» τα χαρακτηριστικά από τα αποτελέσματα των εντολών που δόθηκαν παραπάνω.

Ειδικότερα, οι παράμετροι λειτουργίας του φίλτρου αποδεκατισμού είναι οι παρακάτω:

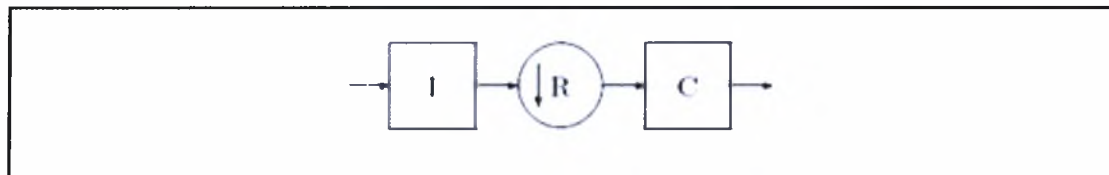
```
d =  
  
    MultirateType: 'Decimator'  
  
    Response: 'CIC'  
  
    DecimationFactor: 64  
  
    Specification: 'Fp,Ast'  
  
    Description: {'Passband  
Frequency'; 'Aliasing Attenuation(dB)'}  
  
    DifferentialDelay: 1  
  
    NormalizedFrequency: false  
  
    Fs: 512000  
  
    Fs_in: 512000  
  
    Fs_out: 8000  
  
    Fpass: 8000  
  
    Astop: 80
```

```
hml =  
  
    FilterStructure: 'Cascaded Integrator-  
Comb Decimator'  
  
    Arithmetic: 'fixed'  
  
    DifferentialDelay: 1  
  
    NumberOfSections: 1  
  
    DecimationFactor: 64  
  
    PersistentMemory: false  
  
    InputWordLength: 16  
  
    InputFracLength: 15
```

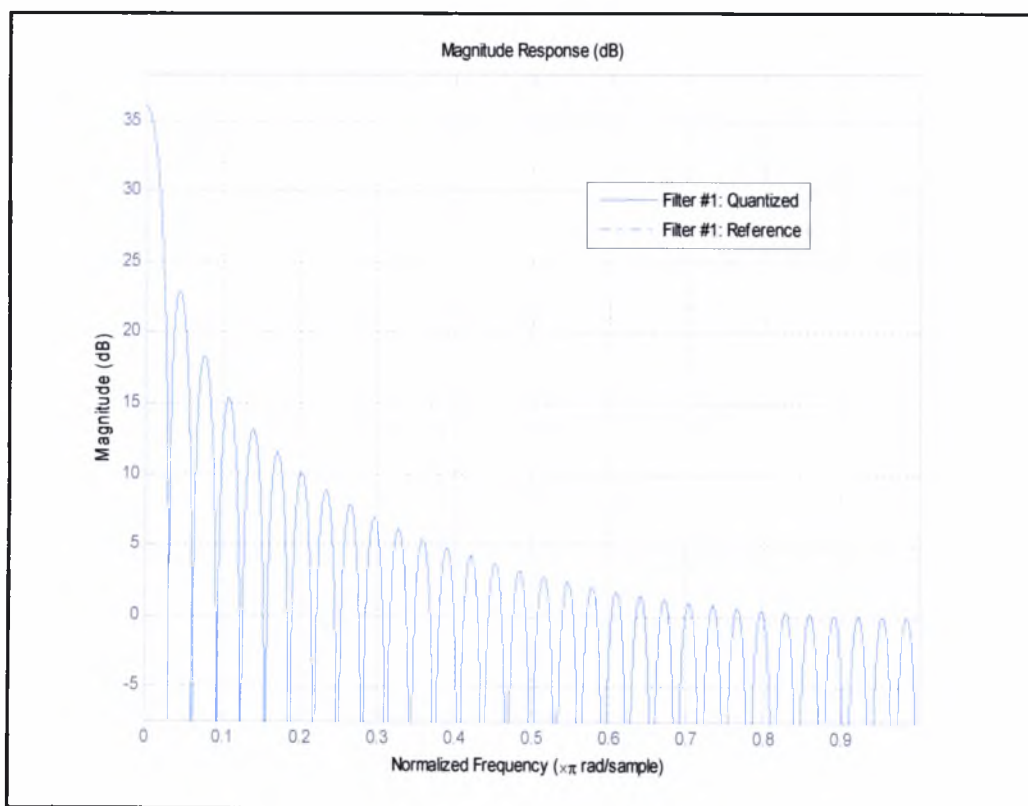
Τέλος, το αποτέλεσμα της διαδικασίας αποθηκεύεται στη μεταβλητή y , η οποία αποθηκεύεται στην επιφάνεια εργασίας του *MATLAB*, για περαιτέρω επεξεργασία. Τα αποτελέσματα της επεξεργασίας με τη μέθοδο αυτή δίνονται παρακάτω.



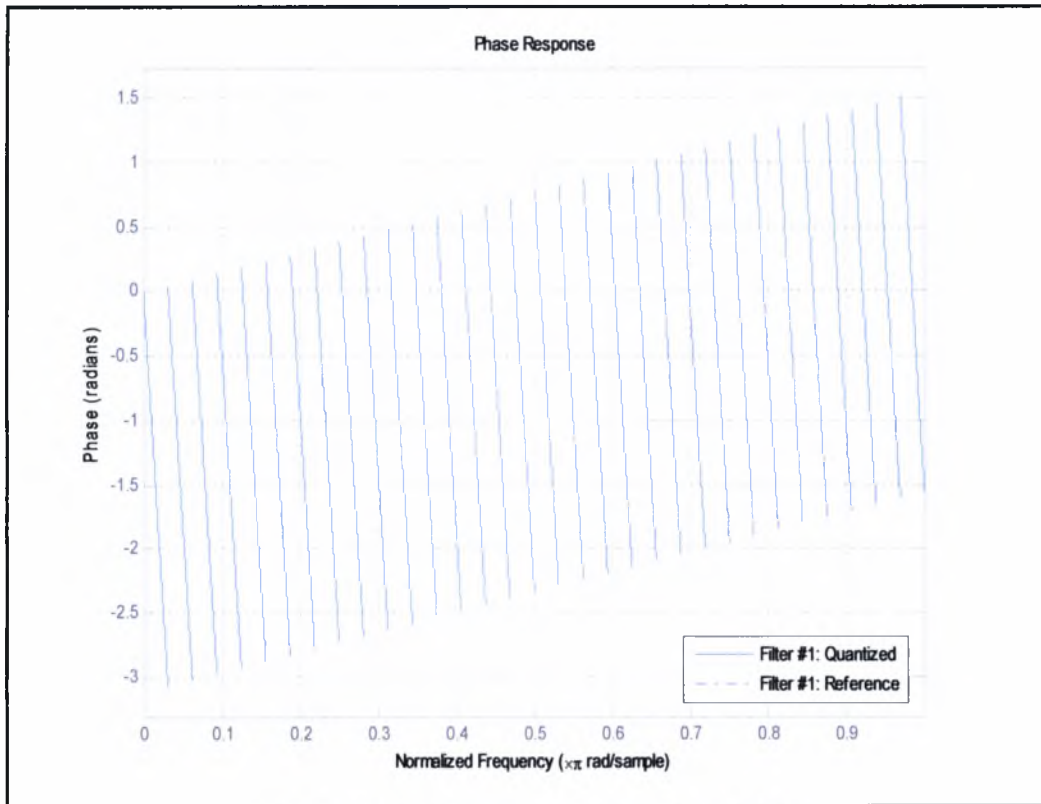
4-94: Μοντέλο αποδεκατισμού σήματος



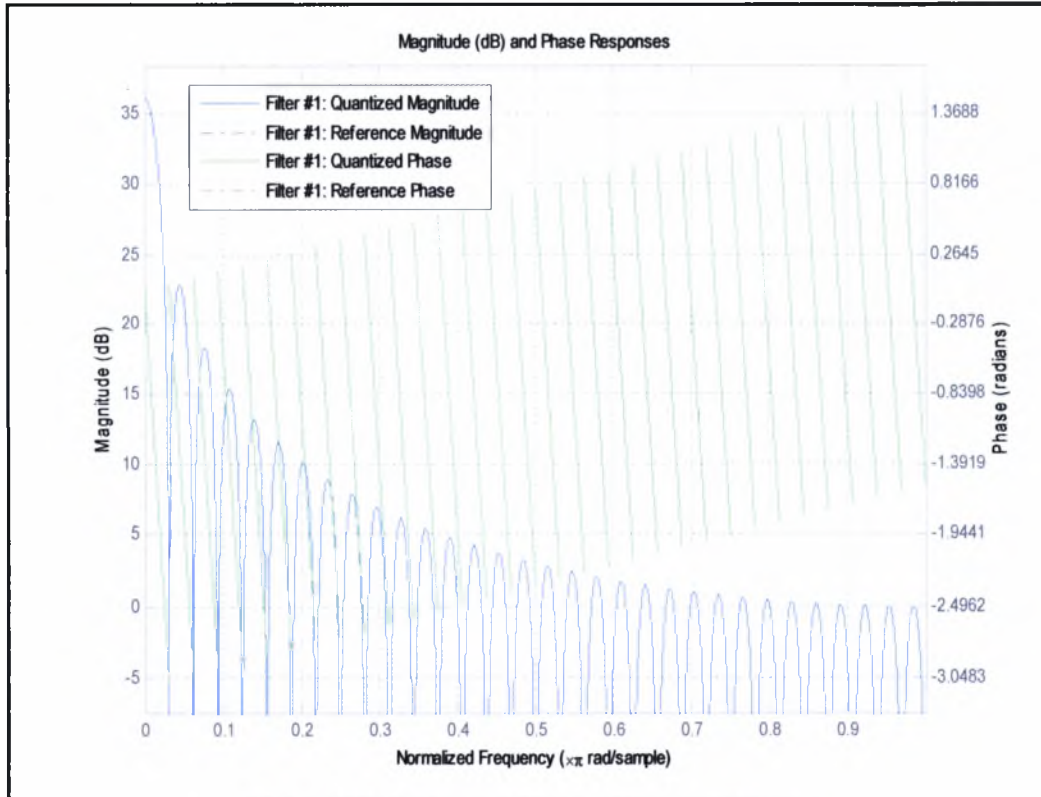
Εικόνα 4-95: Διάγραμμα φίλτρου *CIC* που χρησιμοποιείται στο τρέχον παράδειγμα



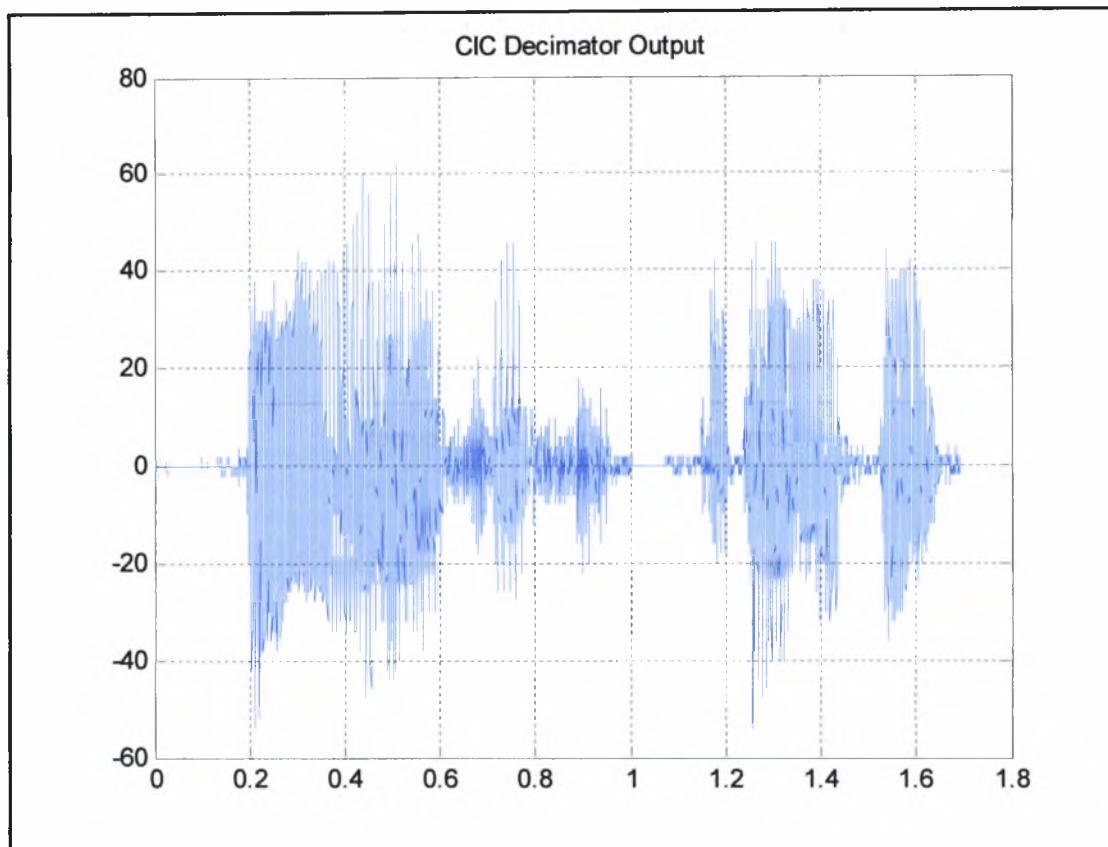
Εικόνα 4-96: Απόκριση πλάτους φίλτρου *CIC*



Εικόνα 4-97: Απόκριση συχνότητας φίλτρου CIC



Εικόνα 4-98: Απόκριση πλάτους - φάσης του φίλτρου



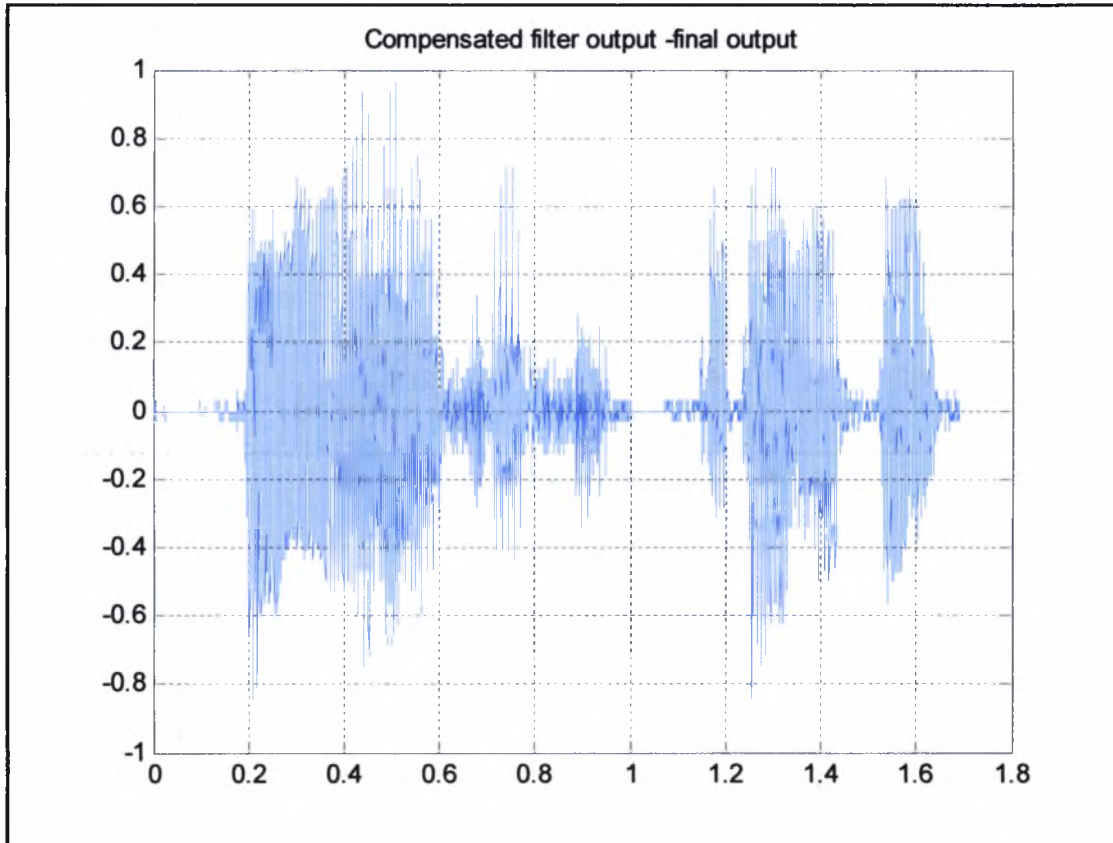
Εικόνα 4-99: Έξοδος φίλτρου CIC

Στην εικόνα 4.99 διαφαίνεται καθαρά ότι η έξοδος του φίλτρου παρουσιάζει πολύ μεγάλο κέρδος σε σχέση με το σήμα στην είσοδο. Ο λόγος είναι πολύ απλός. Το μεγάλο κέρδος είναι εγγενές στα φίλτρα αποδεκατισμού CIC, όπως μπορεί κανείς να αντιληφθεί από την απόκριση πλάτους. Το κέρδος αυτό, που υπάρχει εκ του φυσικού στα φίλτρα της συγκεκριμένης κατηγορίας, μπορεί επίσης να φανεί στη συνάρτηση μεταφοράς:

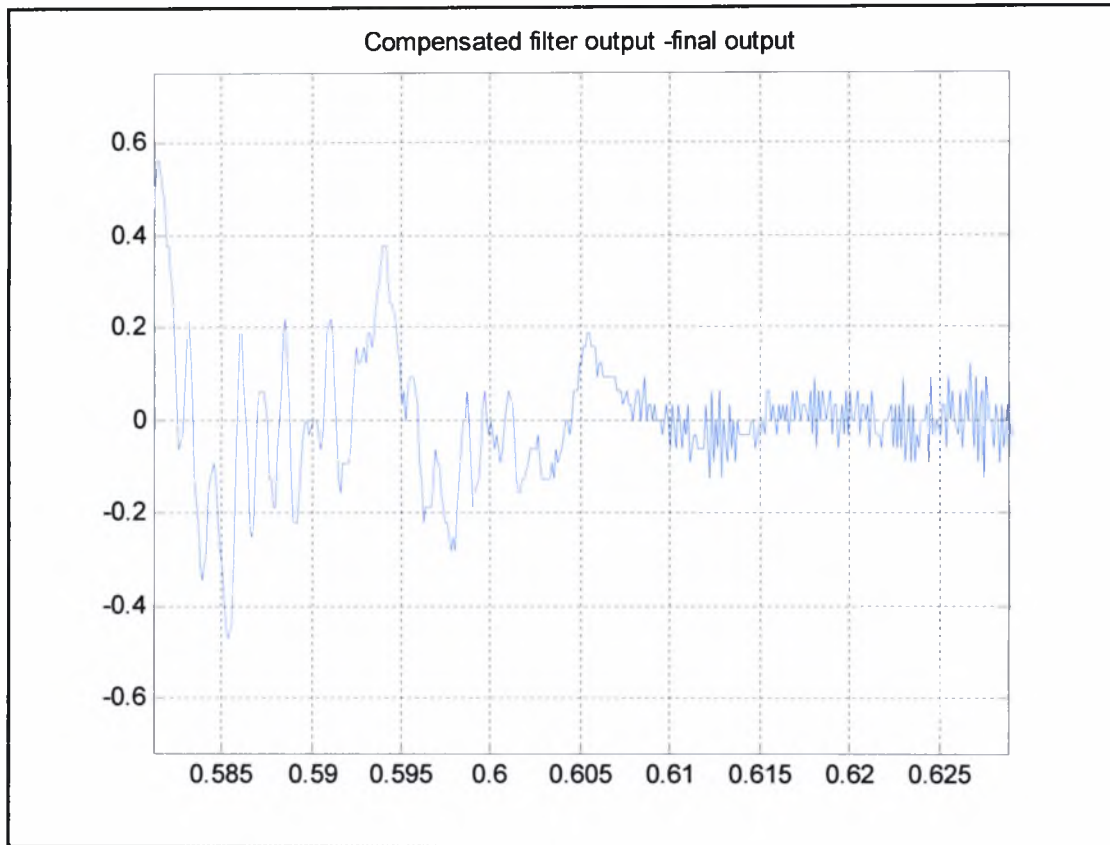
$$H(z) = H_I^N(z)H_C^N = \frac{(1 - z^{-RM})^N}{(1 - z^{-1})^N} = \left(\sum_{k=0}^{RM-1} z^{-k} \right)^N.$$

Παρατηρεί κανείς ότι πραγματοποιείται διαδοχική άθροιση των δειγμάτων, χωρίς να υπάρχει κάποιος όρος διαίρεσης και, ως εκ τούτου, κανονικοποίησης του αποτελέσματος, όπως στα απλά φίλτρα *cascaded comb*. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζεται μεγάλο κέρδος στην έξοδο του φίλτρου που πρέπει να περικοπεί. Το κέρδος αυτό ισούται με $(R \cdot D)^M$, όπου R ο παράγοντας *downsampling*, D η διαφορική καθυστέρηση και M ο αριθμός των σταδίων του φίλτρου, δηλαδή, ο αριθμός των ολοκληρωτών ή ο αριθμός των *comb*

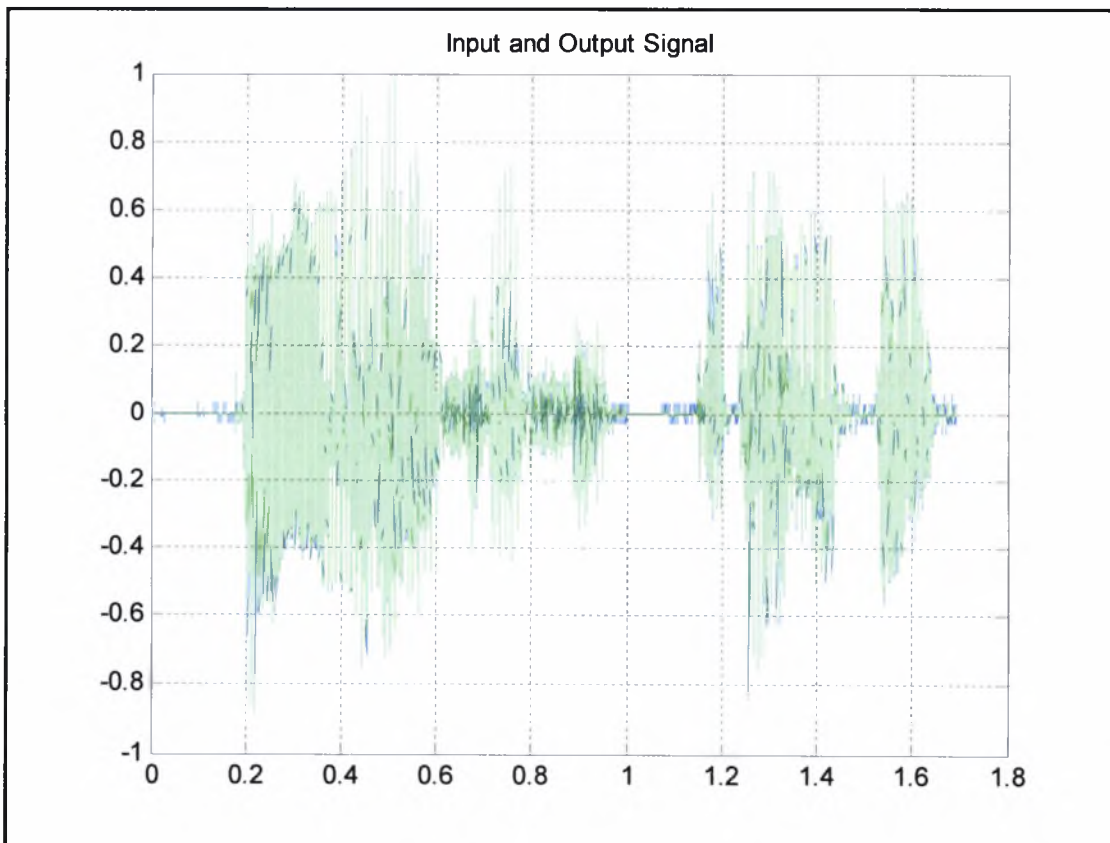
filter που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση του φίλτρου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, $R=64$, $D=1$, $M=1$. Επομένως, η έξοδος θα πρέπει να διαιρεθεί με το κέρδος, έτσι ώστε να είναι συγκρίσιμη με την αρχική είσοδο. Τα τελικά αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.



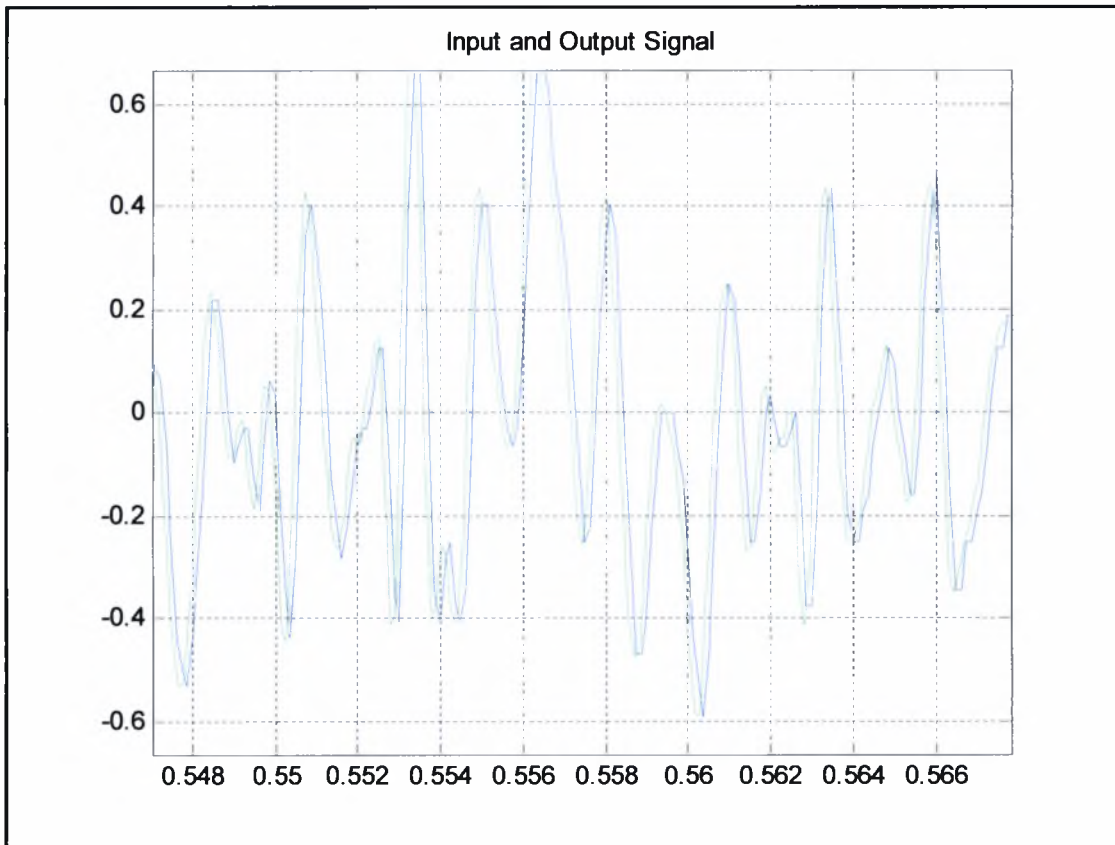
Εικόνα 4-100: Κανονικοποιημένο σήμα εξόδου (τελική έξοδος)



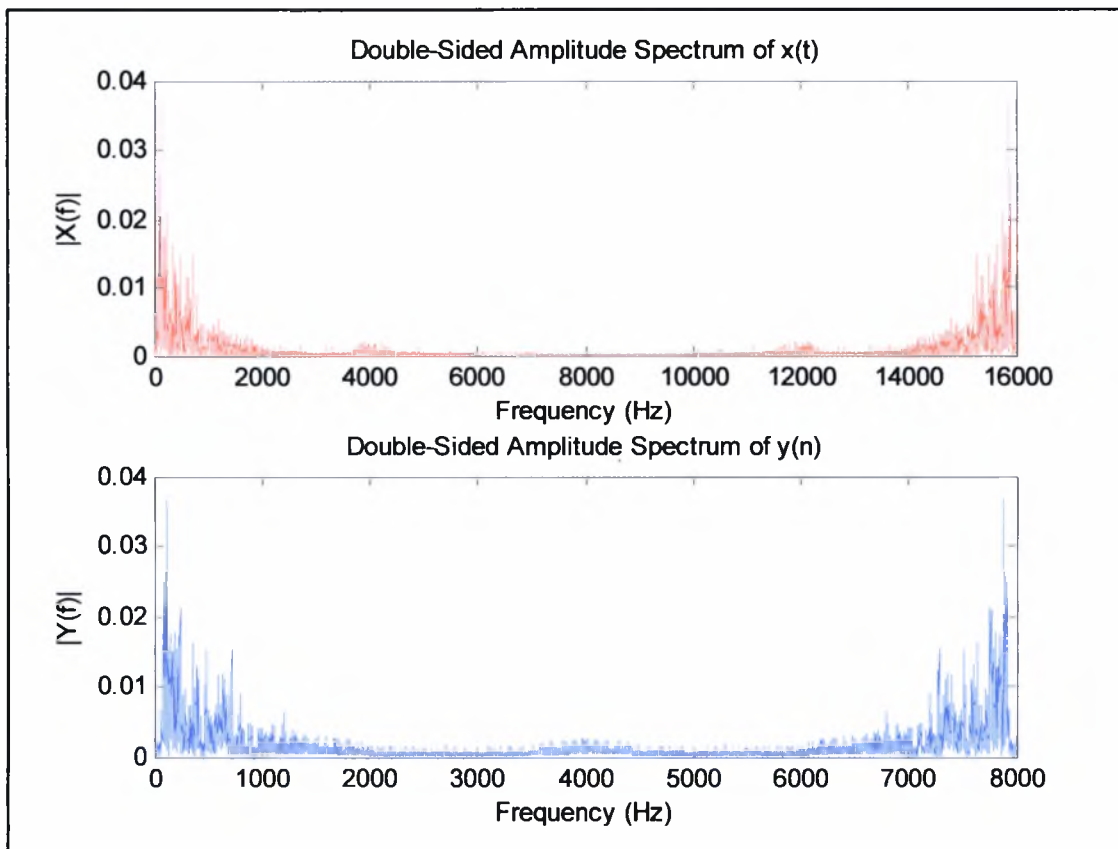
Εικόνα 4-101: Λεπτομέρεια τελικής εξόδου



Εικόνα 4-102: Αρχικό σήμα και τελική έξοδος



Εικόνα 4-103: Λεπτομέρεια αρχικού σήματος και τελικής εξόδου



Εικόνα 4-104: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού σήματος και τελικής εξόδου

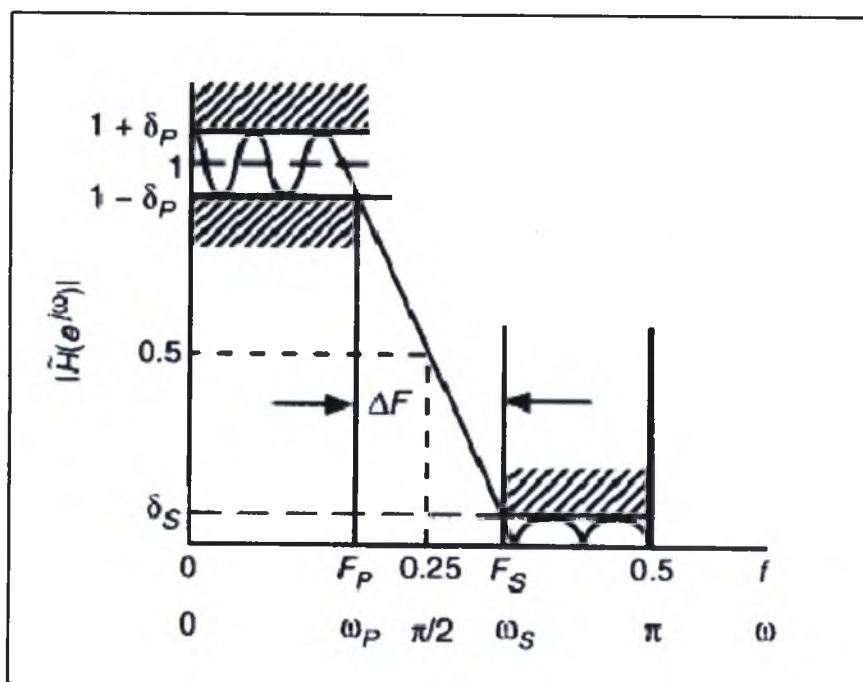
4.2.2.3 CIC - Halfband

Μια άλλη κατηγορία φίλτρων που χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολυσταδιακά φίλτρα αποδεκατισμού είναι τα φίλτρα *halfband*. Τα φίλτρα αυτά χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τα φίλτρα *CIC* στο δεύτερο στάδιο του αποδεκατισμού, όταν πλέον απαιτείται η διαδικασία του *downsampling* να πραγματοποιηθεί σε χαμηλότερες συχνότητες. Τα φίλτρα της κατηγορίας *halfband* παρουσιάζουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Χαρακτηρίζονται από κυματισμούς τόσο στη ζώνη διάβασης όσο και στη ζώνη αποκοπής. Επίσης, οι συχνότητες αποκοπής παρουσιάζουν συμμετρία γύρω από την τιμή $\pi/2$, δηλαδή

$$\omega_p + \omega_s = \pi.$$

Οι ιδιότητες αυτές οδηγούν σε μια οικογένεια φίλτρων η οποία παρουσιάζει περιττή συμμετρία γύρω από το $\pi/2$ και οι κρουστικές τους αποκρίσεις $h(n)$ έχουν μηδενικές τιμές, για όλες τις άρτιες τιμές του n εκτός από τη τιμή $n=0$. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επεξεργασίας του σήματος με τον συνδυασμό που περιγράφηκε παραπάνω.

Στην περίπτωση αυτή, όπως και στις προηγούμενες που παρουσιάστηκαν, το *MATLAB* προσφέρει και πάλι μια συστοιχία εντολών για τη δημιουργία του



Εικόνα 4-105: Απόκριση πλάτους φίλτρου κατηγορίας *halfband*

συγκεκριμένου φίλτρου. Οι εντολές αυτές είναι:

```
d2=fdesign.decimator(8,'halfband','tw,ast',16000,Ast,64000)
hm2=design(d2)
```

Στην πρώτη γραμμή καλείται ο κατασκευαστής του φίλτρου. Σαν πρώτο όρισμα δηλώνεται ο παράγοντας *downsampling* (8), ο τύπος του φίλτρου ('*halfband*'), η εξασθένιση του σήματος στη ζώνη αποκοπής και το πλάτος της ζώνης μετάβασης του φίλτρου (*Ast*, 16000). Το πλάτος της ζώνης μετάβασης υπολογίστηκε με βάση τη συγκεκριμένη ιδιότητα που παρουσιάζουν τα φίλτρα της κατηγορίας αυτής. Αμέσως μετά, δίνεται η διαδικασία υπολογισμού του πλάτους της ζώνης μετάβασης.

Η αρχική σχέση είναι η εξής:

$$\omega_p + \omega_s = \pi \quad (1)$$

όπου

$$\omega_p = 2\pi\lambda_p \quad (2)$$

$$\omega_s = 2\pi\lambda_s \quad (3)$$

με λ_p , λ_s τις συχνότητες στον ψηφιακό κόσμο. Η ιδιότητα που τις διέπει είναι ότι

$$0 \leq \lambda_p, \lambda_s \leq \frac{1}{2}$$

επομένως,

$$\omega_p + \omega_s = \pi \stackrel{2,3}{\Leftrightarrow}$$

$$2\pi\lambda_p + 2\pi\lambda_s = \pi \Leftrightarrow$$

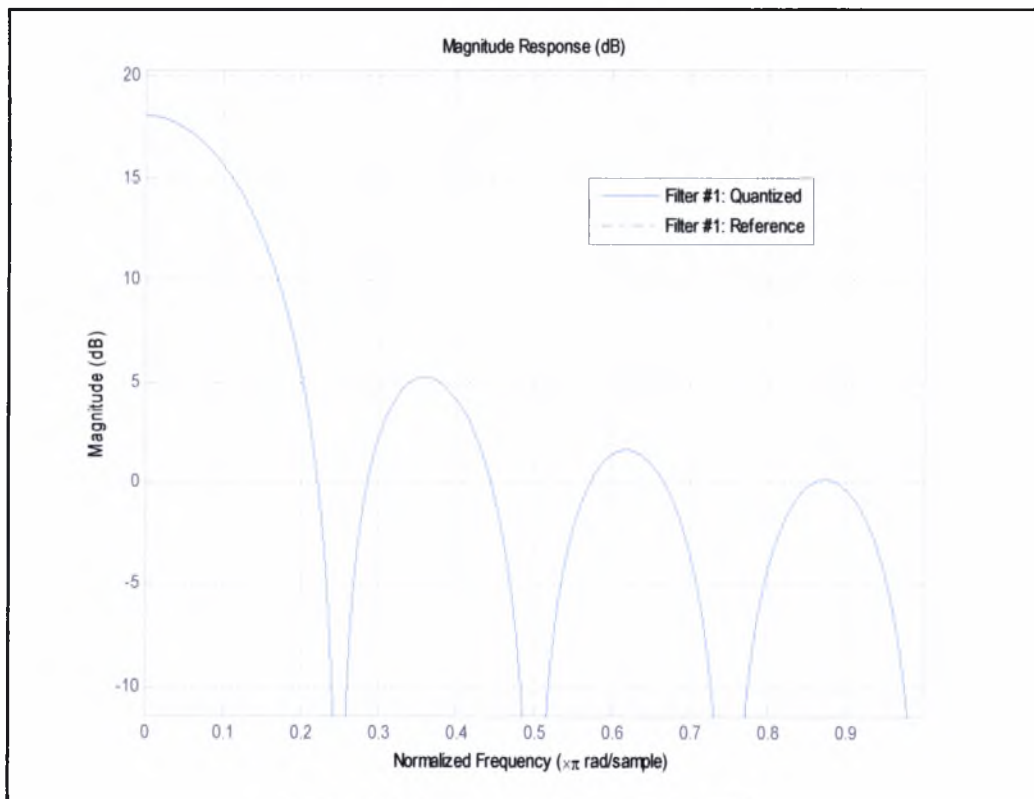
$$2\lambda_p + 2\lambda_s = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_p + \lambda_s = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

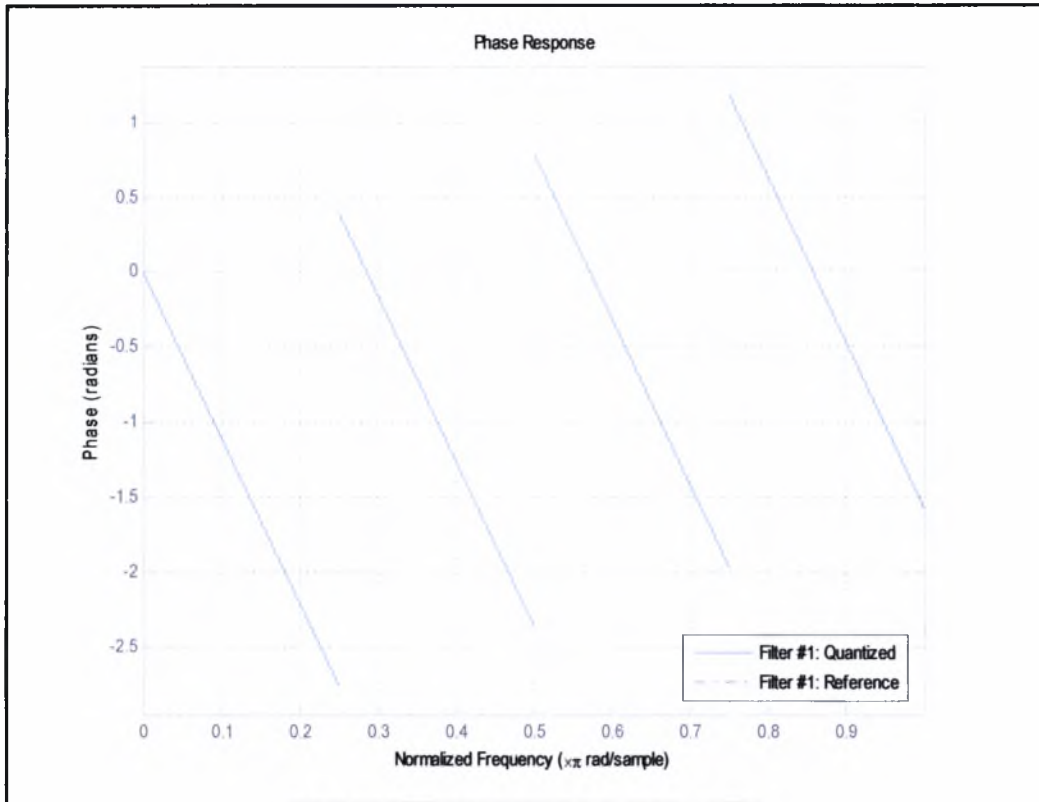
$$\frac{f_p}{f_s} + \frac{f_{stop}}{f_s} = \frac{1}{2}$$

$$f_p + f_{stop} = \frac{f_s}{2}$$

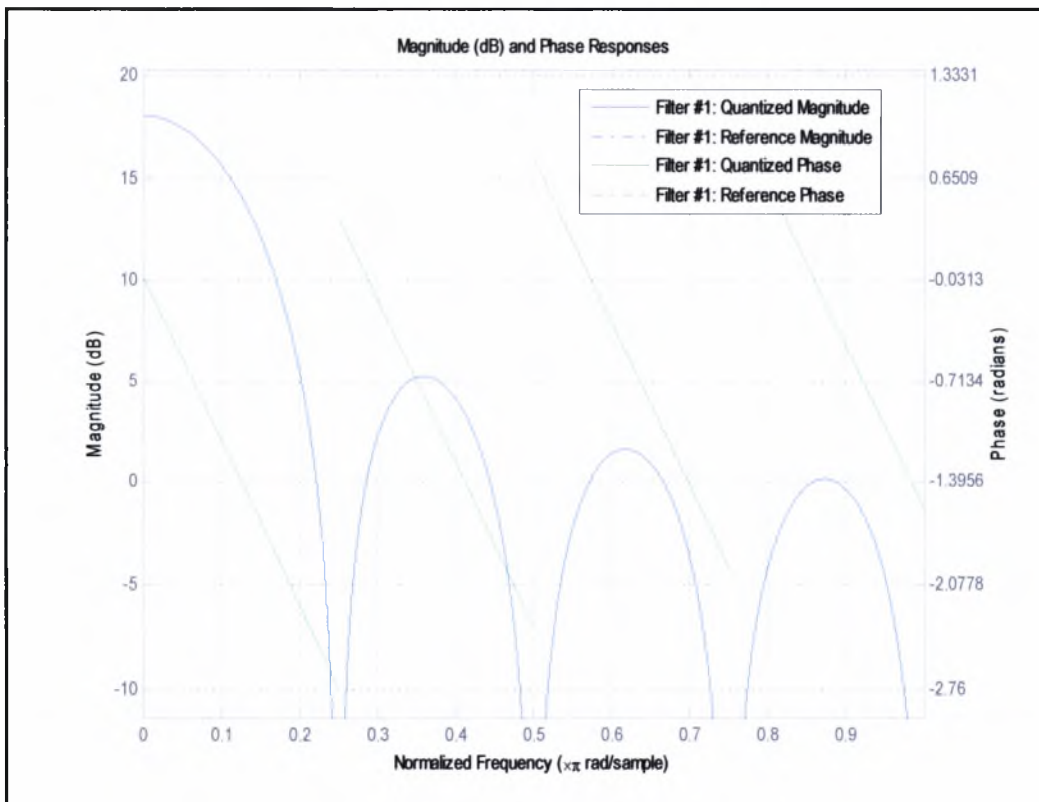
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα που μελετάται στο εδάφιο αυτό έχουμε ότι $f_p=8 \text{ kHz}$, και $\frac{f_s}{2} = 32 \text{ kHz}$. Επομένως, $f_{stop}=24 \text{ kHz}$ και το πλάτος της ζώνης μετάβασης ισούται με 16 kHz . Το φίλτρο *CIC* πραγματοποιεί *downsampling* με παράγοντα $M=8$. Σημειώνεται ότι, για τις ανάγκες της υλοποίησης, το ενδιάμεσο αποτέλεσμα της εξόδου του φίλτρου *CIC*, αποθηκεύεται προσωρινά, έτσι ώστε να επεξεργαστεί κατάλληλα για την αφαίρεση του πλεονάζοντος κέρδους και έπειτα εισάγεται στο φίλτρο *halfband*. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επεξεργασίας.



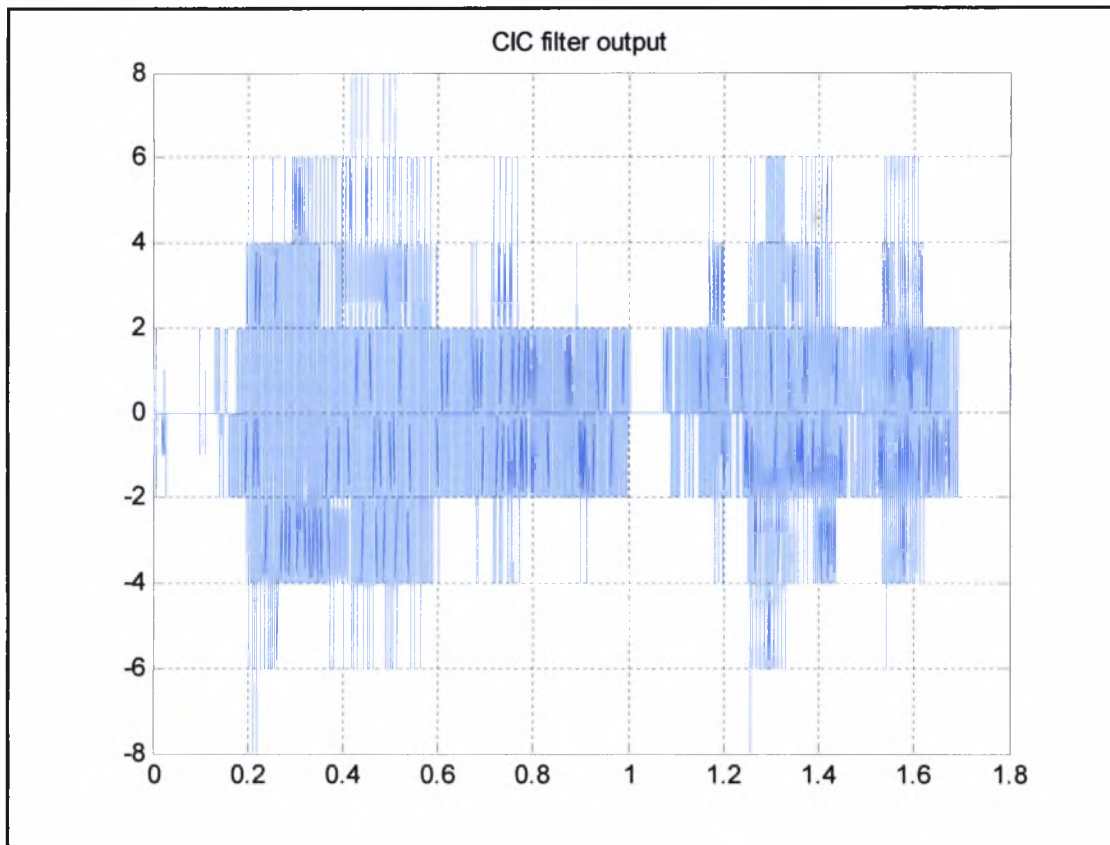
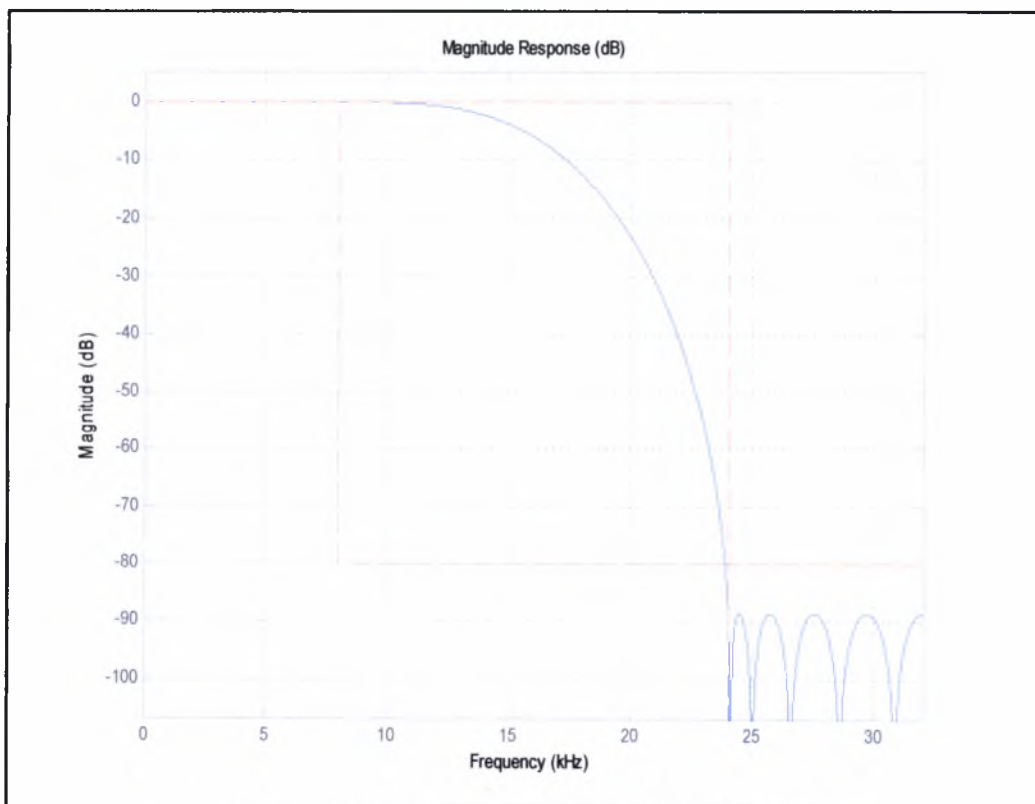
Εικόνα 4-106: Απόκριση πλάτους φίλτρου *CIC*

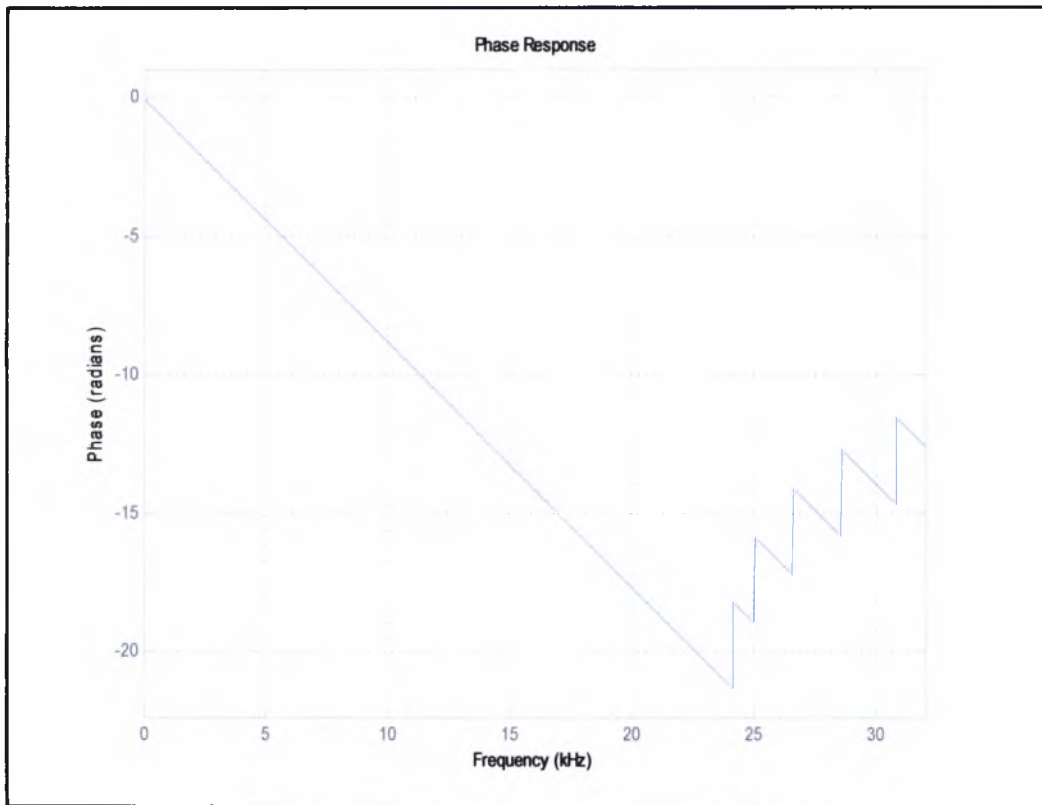
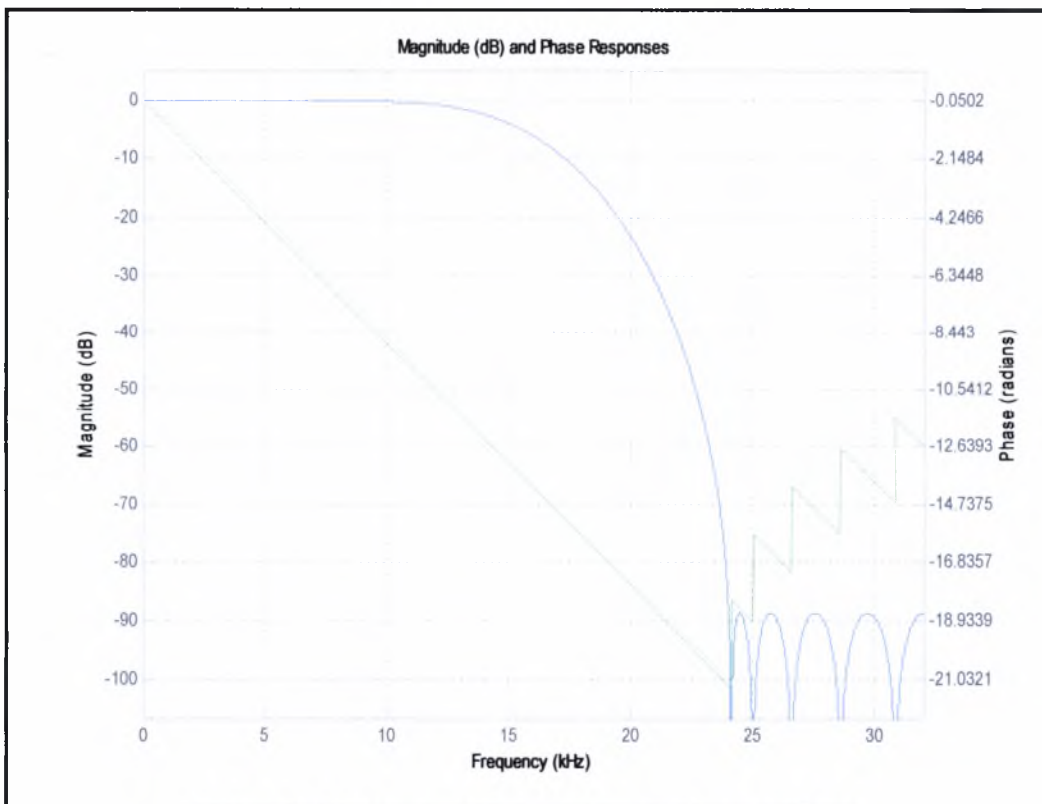


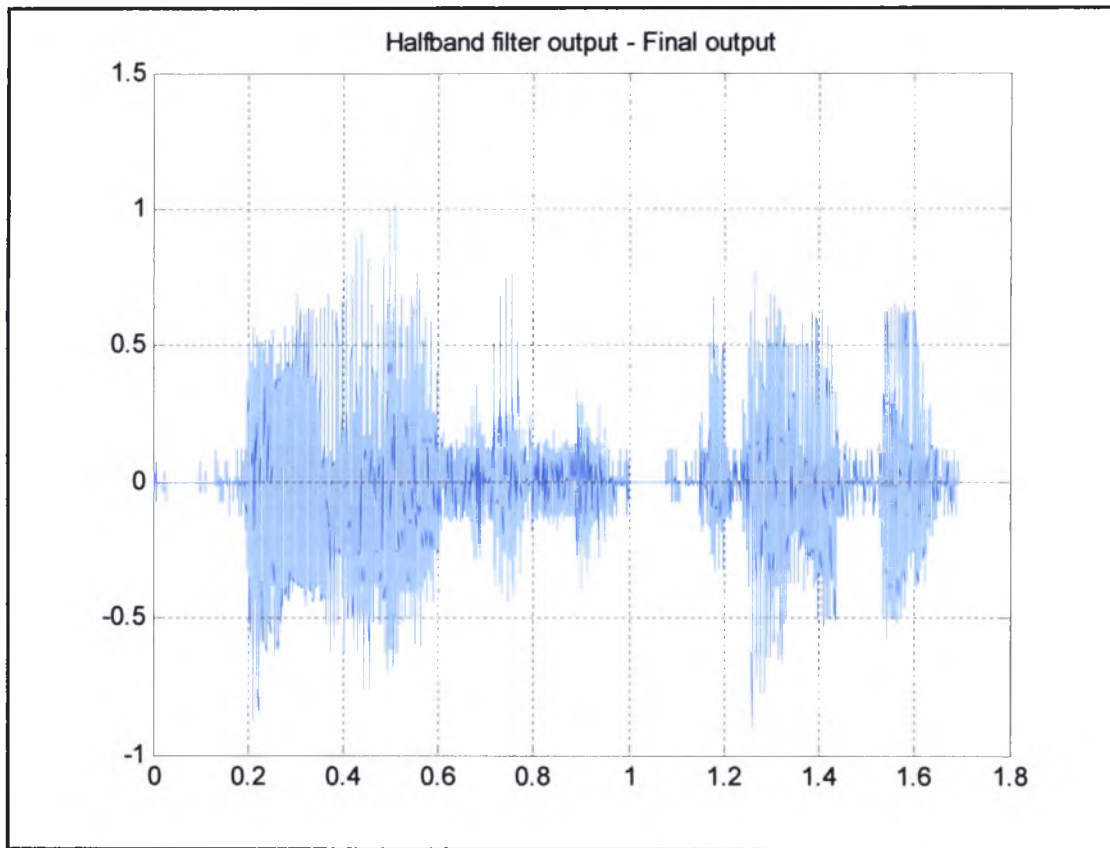
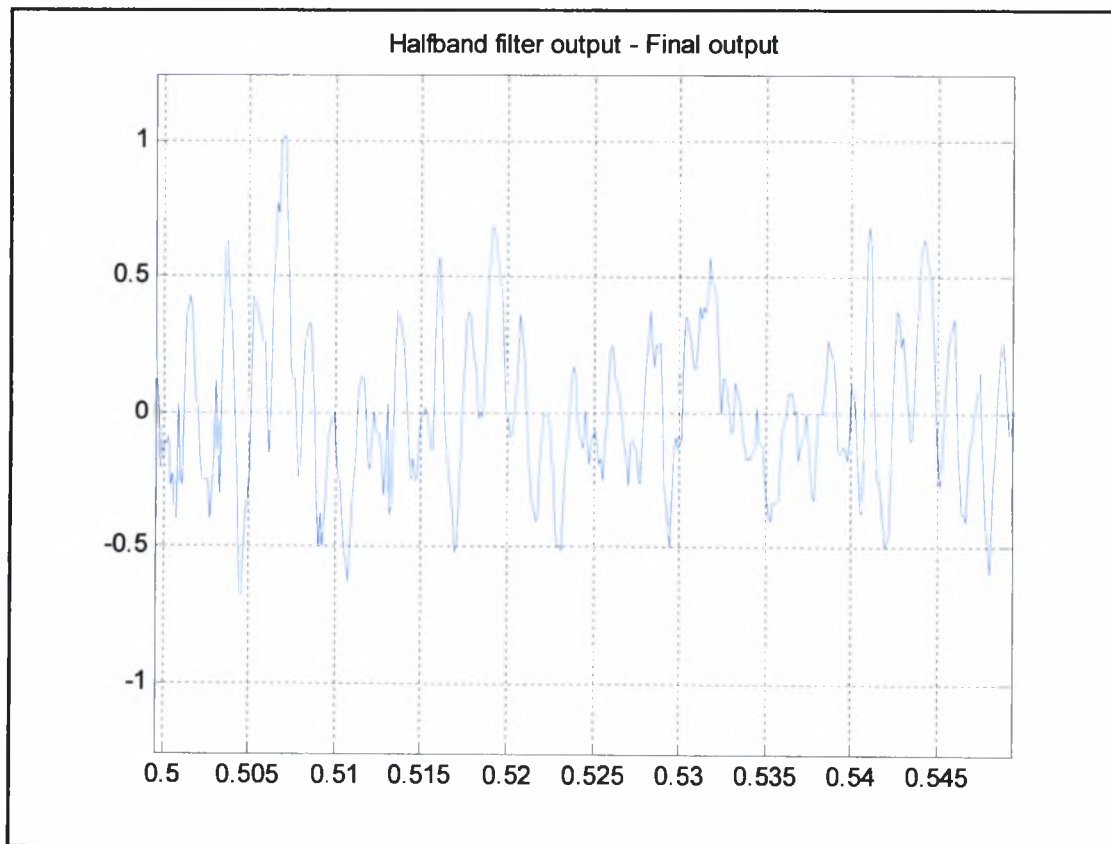
Εικόνα 4-107: Απόκριση φάσης φίλτρου CIC



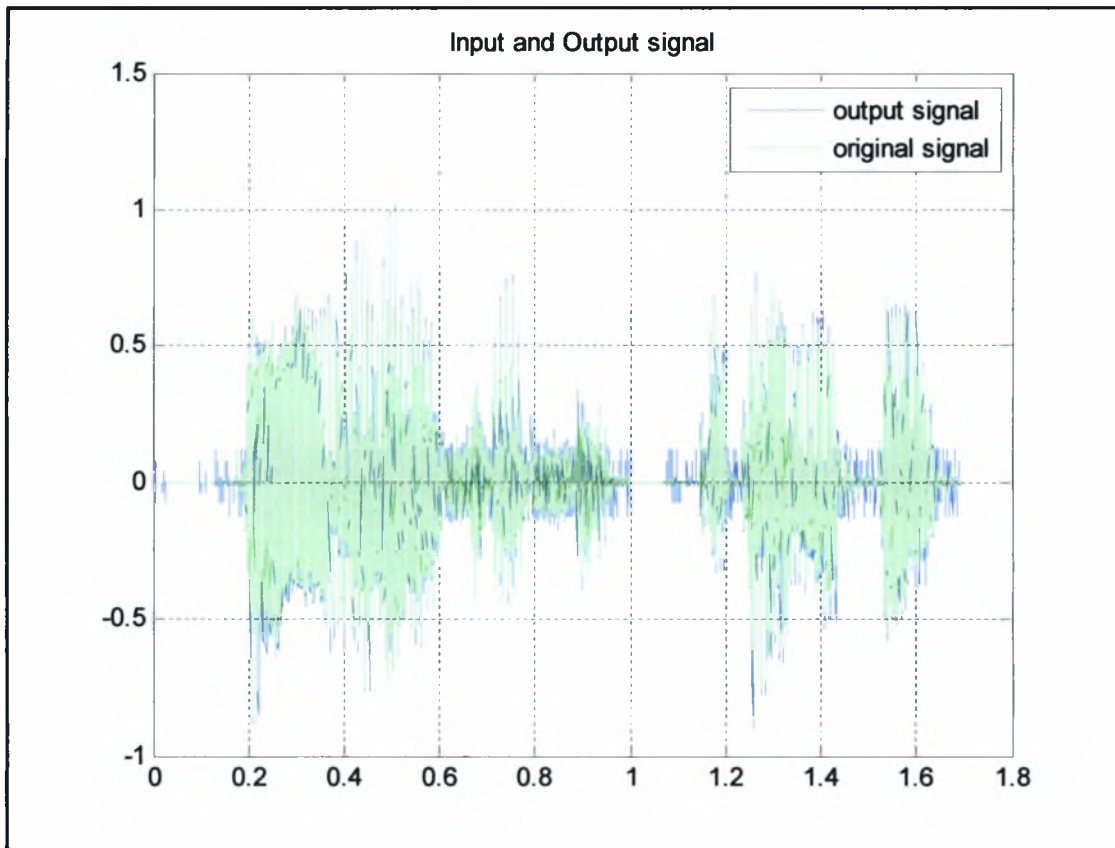
Εικόνα 4-108: Απόκριση πλάτους-φάσης του φίλτρου

Εικόνα 4-109: Έξοδος φίλτρου *CIC*Εικόνα 4-110: Απόκριση πλάτους του φίλτρου *halfband*

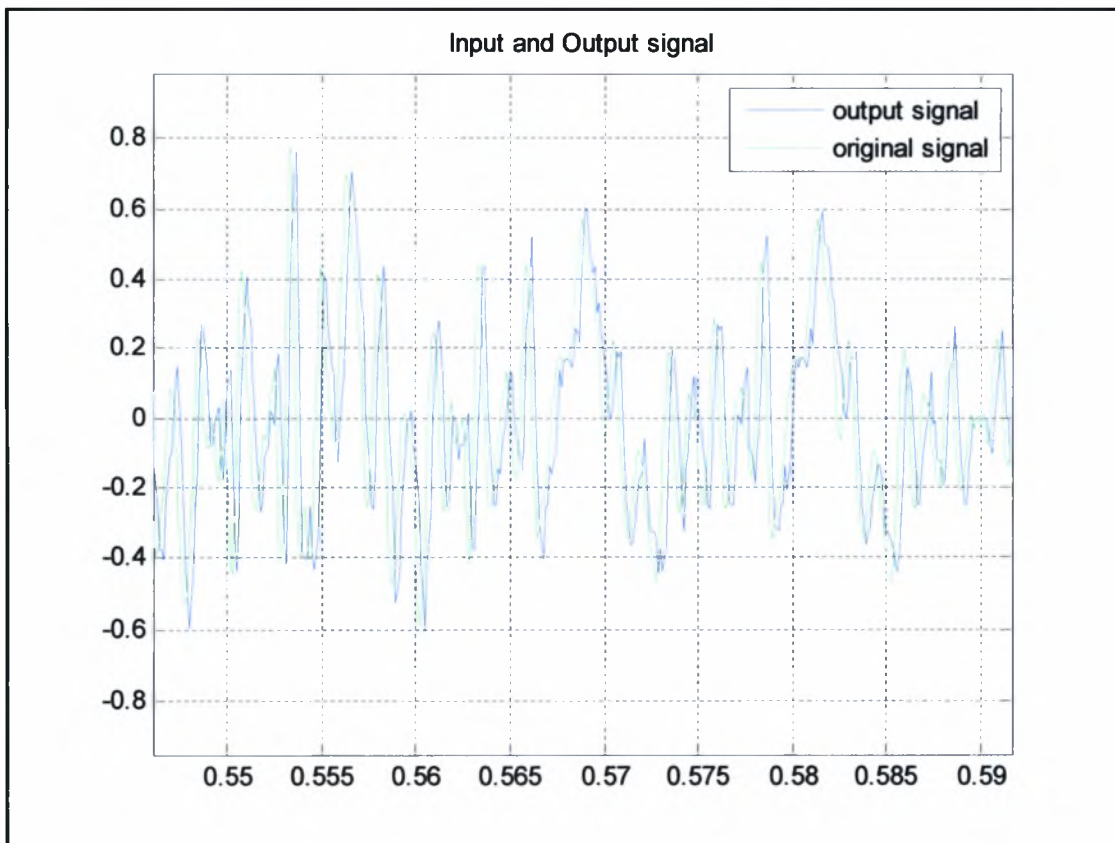
Εικόνα 4-111: Απόκριση φάσης του φίλτρου *halfband*Εικόνα 4-112: Απόκριση πλάτους - φάσης του φίλτρου *halfband*

Εικόνα 4-113: Έξοδος φίλτρου *halfband* - τελική έξοδος

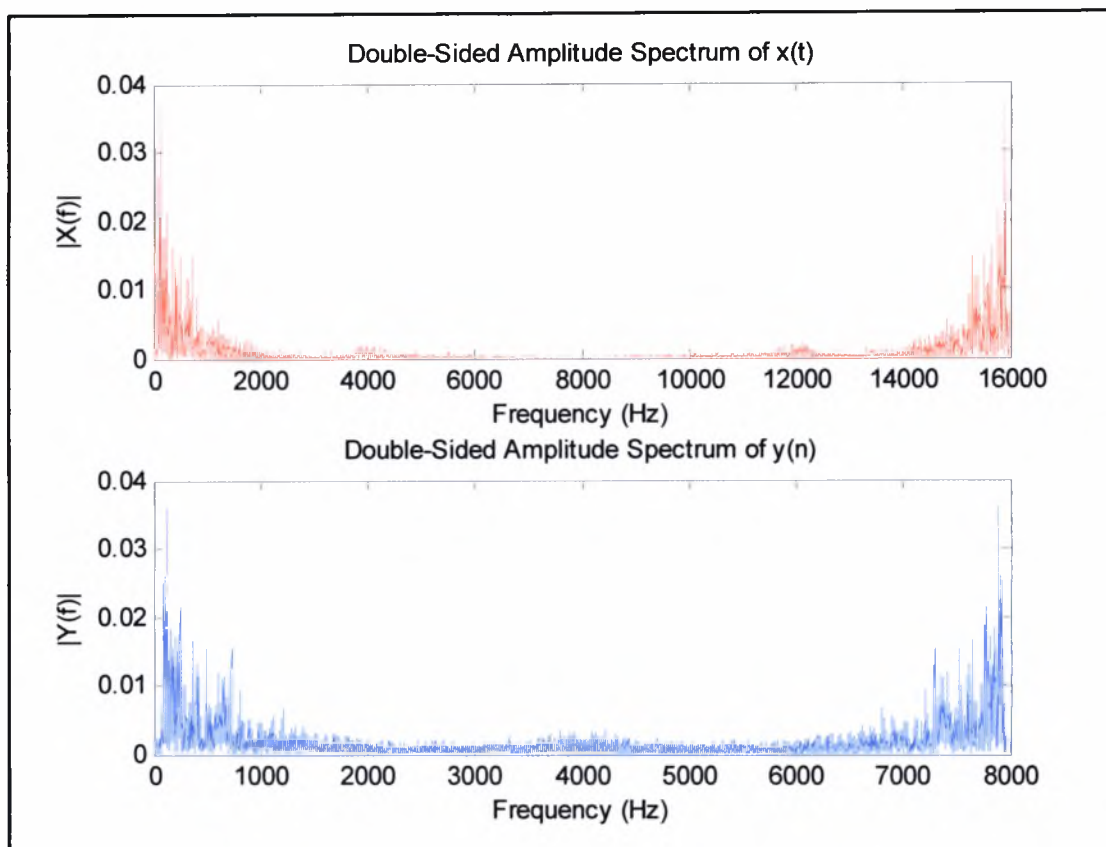
Εικόνα 4-114: Λεπτομέρεια τελικής εξόδου



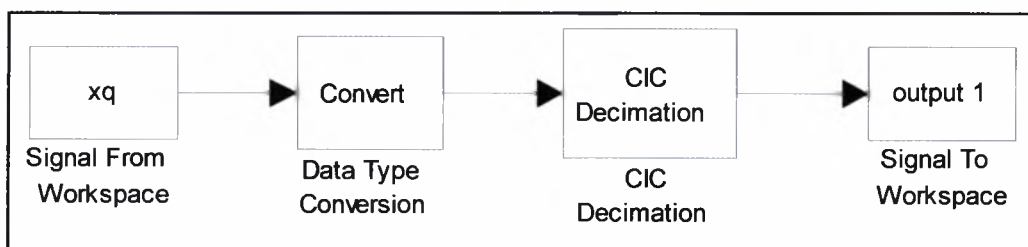
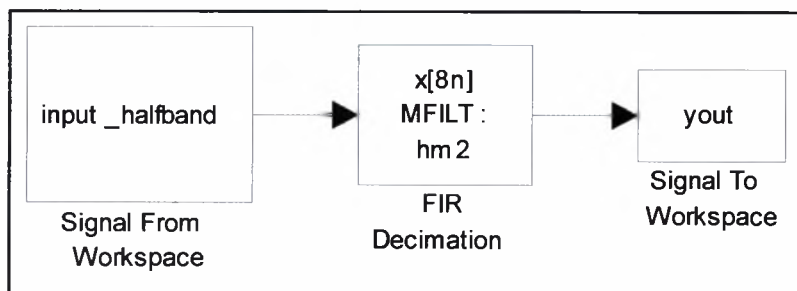
Εικόνα 4-115: Αρχικό σήμα και τελική έξοδος



Εικόνα 4-116: Λεπτομέρεια αρχικού και τελικού σήματος



Εικόνα 4-117: Φάσμα συχνοτήτων αρχικού και τελικού σήματος

Εικόνα 4-118: 1^ο τμήμα υλοποίησης του φίλτρου αποδεκατισμούΕικόνα 4-119: 2^ο τμήμα υλοποίησης του φίλτρου αποδεκατισμού

4.2.3 Ποσοτική ανάλυση των φίλτρων αποδεκατισμού

Μια παράμετρος, που είναι ιδιαίτερος χρήσιμη ως προς την επιλογή του κατάλληλου φίλτρου αποδεκατισμού, είναι το σφάλμα. Στο εδάφιο αυτό αναλύεται το σφάλμα στάθμισης που παρουσιάζεται στην έξοδο των φίλτρων, λαμβάνοντας υπόψη ότι δεν υπεισέρχεται εξωτερικός θόρυβος στο υπό επεξεργασία σήμα. Επομένως, ο συνολικός θόρυβος που υπεισέρχεται στο σήμα είναι ουσιαστικά ο *θόρυβος στάθμισης* με όλα τα χαρακτηριστικά που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 4.1. Λογικά, αναμένει κανείς να υπάρχουν ισχυρές διαφοροποιήσεις από το δυναμικό εύρος του *σηματοθορυβικού λόγου* (SNR) που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.18, λόγω της ύπαρξης της υπερδειγματοληψίας, που μειώνει δραστικά το θόρυβο λόγω του *σφάλματος στάθμισης*.

Αρχικά, κρίνεται χρήσιμο να παρατεθεί το φασμα συχνοτήτων του σταθμισμένου σήματος x_q . Παρατηρεί κανείς τη συσσώρευση του σφάλματος στάθμισης που υπάρχει στις υψηλότερες συχνότητες. Το γεγονός αυτό εξηγείται από τη ροή του σήματος μέσα στο κύκλωμα του διαμορφωτή ΣΔ. Ειδικότερα, στην έξοδο του σταθμιστή το σήμα εκφράζεται ως:

$$Y(z) = \left(\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) (X(z) - Y(z)) + E(z) \Leftrightarrow$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = z^{-1}(X(z) - Y(z)) + E(z)(1 - z^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)z^{-1} - Y(z)z^{-1} + E(z)(1 - z^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$Y(z)(1 - z^{-1} + z^{-1}) = X(z)z^{-1} + E(z)(1 - z^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$Y(z) = X(z)z^{-1} + E(z)(1 - z^{-1}).$$

Παρατηρεί κανείς ότι το σήμα $X(z)$ διέρχεται αμετάβλητο, καθυστερημένο, ωστόσο, κατά ένα δείγμα, ενώ ο θόρυβος $E(z)$ διέρχεται μέσω ενός διαφοριστή που λειτουργεί ως υπηπερατό φίλτρο, πράγμα που εξηγεί τη μετατόπισή του σε υψηλότερες συχνότητες.

Το σφάλμα στάθμισης, που αναφέρεται και ως θόρυβος στάθμισης, εκφράζεται στο διαμορφωτή ΣΔ μέσω της εγγενούς υπηπερατής συνάρτησης

μεταφοράς του θορύβου. Το υπερβατό αυτό φίλτρο είναι σχεδιασμένο με σκοπό να καταστέλλει τα στοιχεία του σφάλματος στάθμισης, τα οποία υπεισέρχονται στο κυρίως συχνοτικό φάσμα, έτσι ώστε να απαντώνται οι προδιαγραφές του επιθυμητού σηματοθορυβικού λόγου.

Οι παραπάνω σχέσεις, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι στον αποδεδειγμένο χρησιμοποιήθηκαν αυστηρώς φίλτρα *FIR*, μας δίνει τη δυνατότητα να γενικεύσουμε την υπόθεση ότι το σήμα που προκύπτει από την έξοδο των φίλτρων αποδεδειγμένου είναι και αυτό καθυστερημένο κατά ένα δείγμα. Πραγματικά, μπορεί κανείς να διαπιστώσει στα διαγράμματα εισόδου- εξόδου που δόθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ότι υπάρχει μια μικρή καθυστέρηση και ότι τα δύο σήματα δεν συμπίπτουν εντελώς. Αρκεί μόνο να αποδείξουμε πρακτικά ότι η καθυστέρηση αυτή ισούται με ένα δείγμα, έτσι ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός του σηματοθορυβικού λόγου *SQNR* (*Signal-to-Quantization-Noise Ratio*).

Η υπόθεση αυτή δεν ισχύει για τα φίλτρα της κατηγορίας *Halfband*, καθώς η εξ ορισμού καθυστέρησή τους δεν είναι ίση με ένα δείγμα. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε το φίλτρο *Halfband* που εξετάστηκε νωρίτερα, το οποίο αποτελείται από 19 συντελεστές εκ των οποίων οι 11 είναι μη μηδενικοί και πραγματοποιεί αποδεδειγμένο κατά παράγοντα $M=8$, τότε συμπεραίνουμε ότι στην εσωτερική του μνήμη αποθηκεύονται 8 δείγματα από τα οποία, τελικά, κρατείται μόνο το 1. Η καθυστέρησή του δίνεται από τον τύπο $d = (N - 1)/2 + K$. Ο αριθμός N εκφράζει τον αριθμό των μη μηδενικών συντελεστών του φίλτρου και το K τον αριθμό των δειγμάτων προς επεξεργασία που αποθηκεύει το φίλτρο στον εσωτερικό *buffer*. Επομένως, για το συγκεκριμένο φίλτρο, η καθυστέρηση σε δείγματα είναι

$$d = \frac{11 - 1}{2 + 8} = 1$$

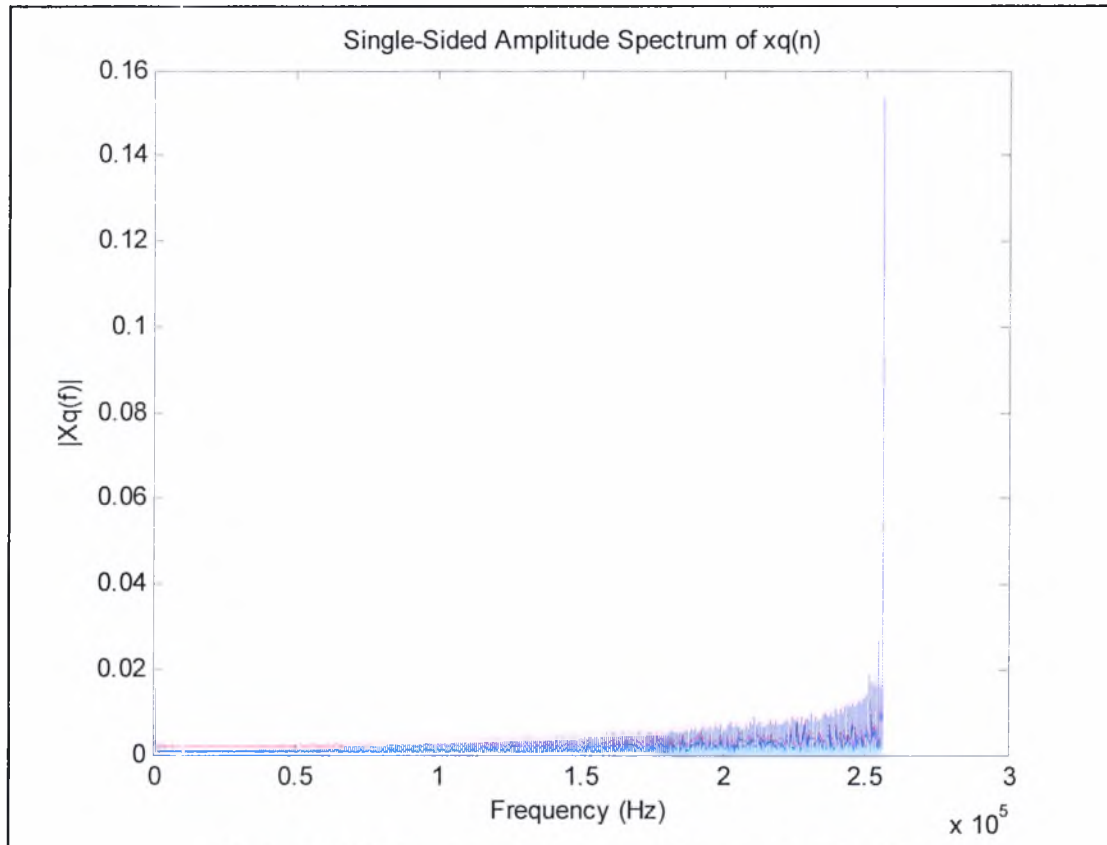
Για το λόγο αυτό, θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι στην έξοδο του φίλτρου έχουμε καθυστέρηση ενός δείγματος από τη διαδικασία του φιλτραρίσματος και ακόμη ενός δείγματος, που είναι εγγενές στη διαμόρφωση ΣΔ. Άρα στο σύνολο έχουμε δύο δείγματα καθυστέρησης.

Δεδομένου ότι στην πράξη χρησιμοποιείται πολυσταδιακός αποδεκατισμός, θα υπολογιστεί το $SQNR$ των φίλτρων που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 4.2.2, έτσι ώστε να υπάρχει μια κοινή βάση σύγκρισης. Για τα πειράματα του παρόντος εδαφίου χρησιμοποιήθηκαν οι πλατφόρμες προγραμμάτων *MATLAB* και *CoolEdit*.

Ο πιο εύκολος τρόπος, για να αποδείξει κανείς ότι το σήμα εξόδου είναι καθυστερημένο κατά ένα ακριβώς δείγμα από το αντίστοιχο δειγματοληπτημένο σήμα, είναι να προσπαθήσει να βρει τα σημεία εκείνα που το σήμα τέμνει τον άξονα x στο καρτεσιανό επίπεδο. Τα σημεία αυτά ονομάζονται σημεία *zero-crossing*. Επίσης, είναι χρήσιμο να μελετηθούν και τα σημεία στα οποία εμφανίζονται τοπικά ή ολικά μέγιστα, για τη διευκόλυνση της αποδείξεως της υπόθεσης.

Αρχικά, θα μελετηθεί το σήμα εξόδου που αποδεκατίστηκε με τη χρήση φίλτρων *cascaded comb* σε σύγκριση με το αρχικό σήμα δειγματοληψίας. Η εικόνα 4.121 αποδεικνύει τον ισχυρισμό περί καθυστέρησης κατά ένα δείγμα. Γενικά, όταν το δείγμα n στο σήμα δειγματοληψίας βρίσκεται σε μια θέση a τη χρονική στιγμή t , συμπίπτει με το δείγμα $n-1$ στο σήμα εξόδου. Το διάστημα που χωρίζει το δείγμα n σήμα δειγματοληψίας με το δείγμα n στο σήμα εξόδου είναι ίσο με την περίοδο T της δειγματοληψίας. Με άλλα λόγια, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η χρονική απόσταση των δύο δειγμάτων είναι $T=1/8000=0,000125$ δευτερόλεπτα.

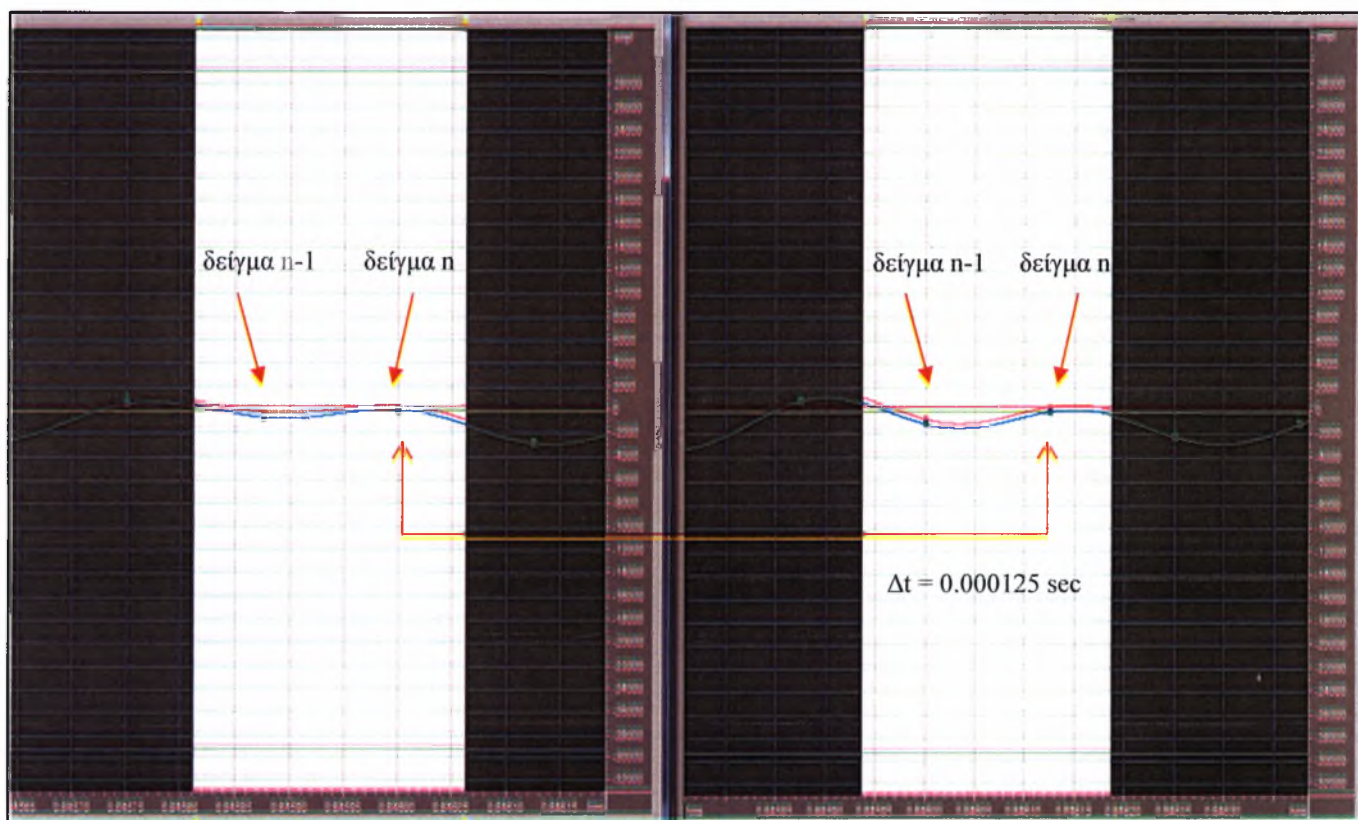
Αφού επαληθευτεί η παραπάνω υπόθεση, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί στο σήμα εξόδου μια κύληση προς τα αριστερά κατά ένα δείγμα, έτσι ώστε τα δείγματα των σημάτων εισόδου και εξόδου να συμπίπτουν μεταξύ τους. Στη συνέχεια, είναι αναγκαίο να βρούμε τη σχέση μεταξύ του σήματος δειγματοληψίας και το σήματος εισόδου. Κατά τη διάρκεια της διαμόρφωσης ΣΔ χάνεται κάποιο τμήμα της ισχύος του σήματος, λόγω της διαδικασίας της στάθμισης, όπως, επίσης, και κατά τη διάρκεια του αποδεκατισμού, όπου, ουσιαστικά, το σήμα υφίσταται υποδειγματοληψία, οπότε χάνονται κάποιες τιμές.



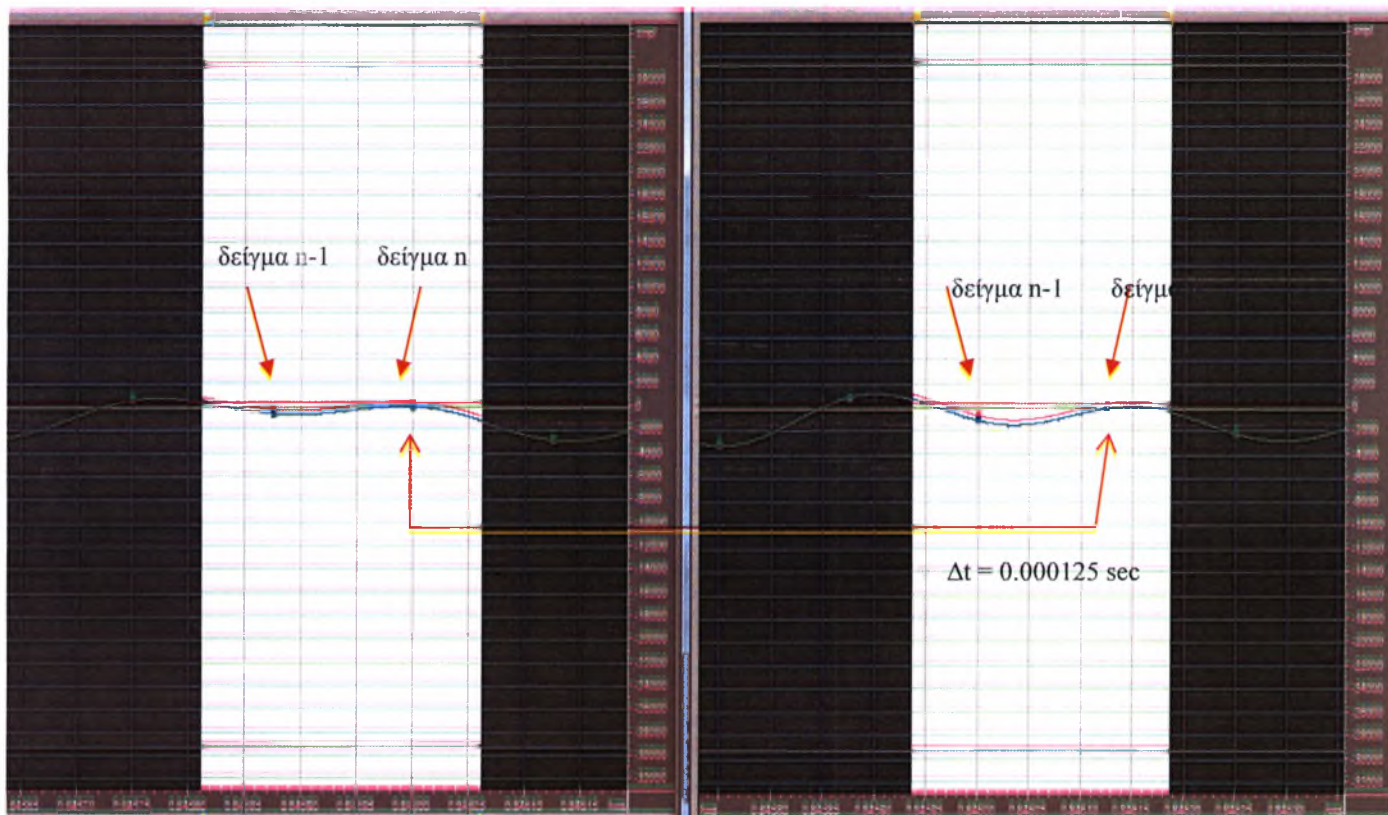
Εικόνα 4-120: Φάσμα συχνοτήτων σήματος εξόδου σταθμιστή $x_q(n)$

Το τμήμα αυτό της ισχύος (ή της ενέργειας) είναι πολύ μικρό, αλλά είναι αναγκαίο για το σωστό υπολογισμό του σηματοθορυβικού λόγου. Συνήθως, αναμένεται το σήμα εξόδου να έχει λίγο μικρότερη ισχύ από το σήμα δειγματοληψίας.

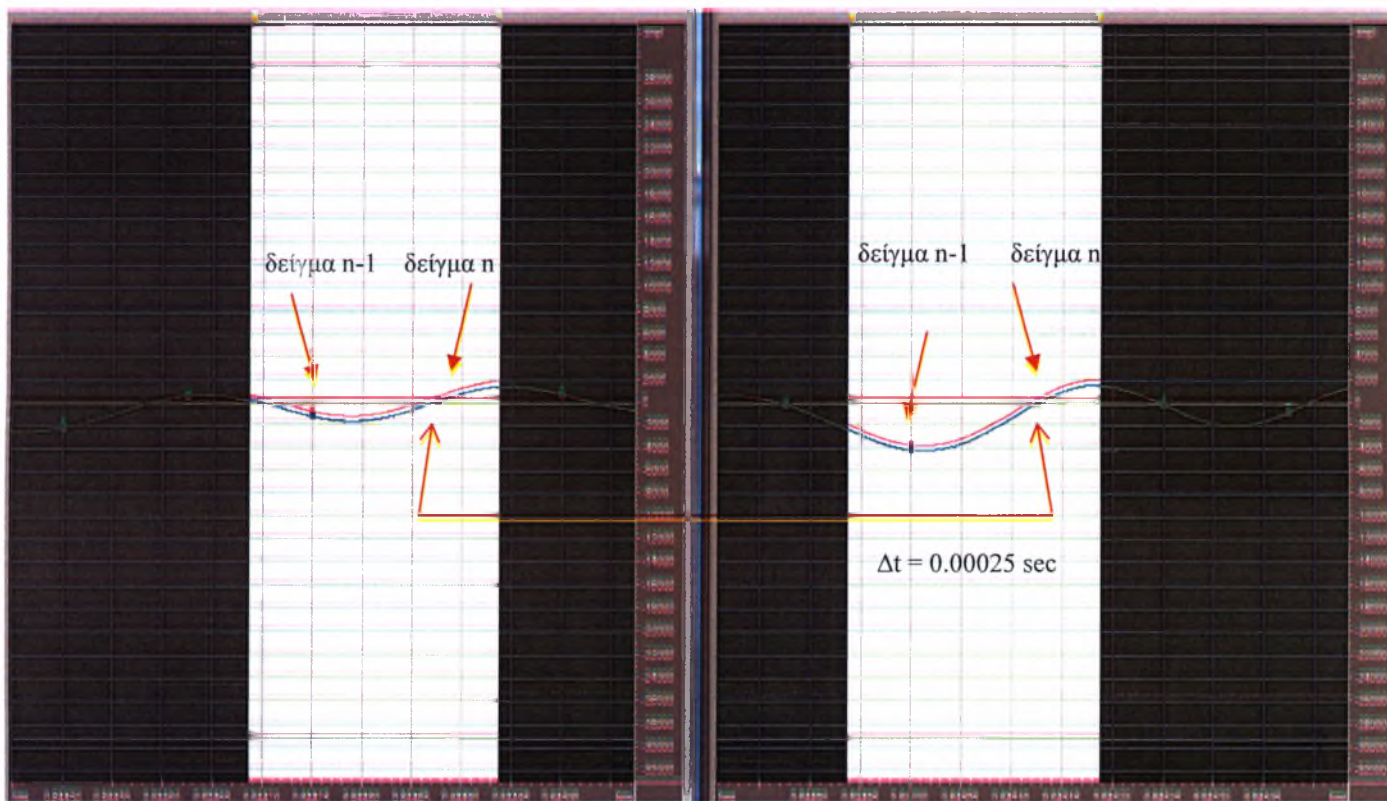
Τέλος, θα πρέπει να υπολογιστεί το σφάλμα μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου. Με τον όρο σφάλμα εννοούμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς δείγμα προς δείγμα των δύο διανυσμάτων. Το σφάλμα αυτό που προκύπτει θα είναι ο *θόρυβος στάθμισης* που παρουσιάζεται στο διάνυσμα εξόδου, δεδομένου ότι στην αρχική μας υπόθεση θεωρήσαμε ότι δεν υπάρχει εξωτερικός θόρυβος, ο οποίος να εισέρχεται στο σύστημα της διαμόρφωσης και του αποδεκατισμού. Ο λόγος της ισχύος του σήματος εξόδου προς την ισχύ του σφάλματος είναι ο *σηματοθορυβικός λόγος (SQNR)* που προκύπτει.



Εικόνα 4-121: Καθυστέρηση ενός δείγματος στο σήμα εισόδου (αριστερά) και στο σήμα εξόδου (δεξιά) για την περίπτωση του φίλτρου αποδεκατισμού τύπου *cascaded comb*



Εικόνα 4-122: Καθυστέρηση ενός δείγματος στο σήμα εισόδου (αριστερά) και στο σήμα εξόδου (δεξιά) για την περίπτωση του φίλτρου αποδεκατισμού τύπου *CIC*



Εικόνα 4-123: Καθυστέρηση δύο δειγμάτων στο σήμα εισόδου (αριστερά) και στο σήμα εξόδου (δεξιά) για την περίπτωση του φίλτρου αποδεκατισμού τύπου *CIC* και *halfband*

Για το φίλτρο αποδεκατισμού τύπου *cascaded comb*:

$$\text{SQNR} = 24.23 \text{ dB.}$$

Για το φίλτρο αποδεκατισμού τύπου *CIC*:

$$\text{SQNR} = 24.23 \text{ dB.}$$

Για το φίλτρο αποδεκατισμού *CIC-Halfband*:

$$\text{SQNR} = 14.77 \text{ dB.}$$

Ένα άλλο μέγεθος που παρουσιάζει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον είναι το *Peak SQNR*, το οποίο εκφράζει το λόγο ανάμεσα στη μέγιστη δυνατή τιμή της ισχύος ενός σήματος και την τιμή της ισχύος του θορύβου που εξασθενεί το σήμα. Η ποσότητα αυτή καλείται επίσης και *δυναμικό εύρος*. Το εύρος αυτό για την *παλμοκωδική κωδικοποίηση* δίνεται από τον τύπο $\text{SNR}_{\text{ADC}} = 20 \log_{10}(2) \cong 6.026Q \text{ dB}$, με Q τον αριθμό των δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται.

Για το φίλτρο αποδεκατισμού τύπου *cascaded comb*:

$$\text{PSQNR} = 88.7936 \text{ dB.}$$

Για το φίλτρο αποδεκατισμού τύπου *CIC*:

$$\text{PSQNR} = 88.7936 \text{ dB.}$$

Για το φίλτρο αποδεκατισμού *CIC-Halfband*:

$$\text{PSQNR} = 66.9946 \text{ dB.}$$

Παρατηρεί κανείς ότι οι δύο πρώτες μέθοδοι αποδεκατισμού δίνουν σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από την τρίτη. Σε ανάλογη περίπτωση, αν χρησιμοποιούσαμε την παλμοκωδική μέθοδο μετατροπής των δεδομένων από

αναλογικά σε ψηφιακά, για τα δεδομένα $SQNR$ θα χρησιμοποιούσαμε 15 δυαδικά ψηφία, για τα φίλτρα αποδεκατισμού *cascaded comb*, και *CIC* και 12 δυαδικά ψηφία για την περίπτωση του συνδυασμού φίλτρων *comb* και *halfband*. Ωστόσο, εμείς χρησιμοποιούμε μόνο 1 δυαδικό ψηφίο για την επίτευξη των αποτελεσμάτων αυτών.

4.2.4 Συμπεράσματα

Στην ενότητα 4.2.2 υλοποιήθηκαν τα πλέον διαδεδομένα φίλτρα αποδεκατισμού που χρησιμοποιούνται στους μετατροπείς ΣΔ. Η επιλογή του καλύτερου ανάμεσά τους αποτελεί συνάρτηση της ευκολίας υλοποίησης, των απαιτήσεων σε επίπεδο υλικού, των αποτελεσμάτων στην έξοδο και άλλων παραμέτρων που ορίζονται από τον σχεδιαστή.

Το κυριότερο στοιχείο, που χαρακτηρίζει όλα τα φίλτρα που παρουσιάστηκαν, είναι οι χαμηλές απαιτήσεις σε πολυπλοκότητα και η απώλεια της ανάγκης ύπαρξης ακαριαίας μετάβασης από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη αποκοπής, λόγω της υπερδειγματοληψίας.

Σε επιμέρους ζητήματα, τα κυριότερα πλεονεκτήματα των φίλτρων της κατηγορίας *Comb* και *Cascaded Integrator Comb (CIC)* είναι η ευκολία υλοποίησης σε επίπεδο υλικού, καθώς δεν υφίσταται η ύπαρξη πολλαπλασιαστή. Το χαρακτηριστικό αυτό τα καθιστά περισσότερο φιλικά και προτιμούνται από το μεγαλύτερο ποσοστό των σχεδιαστών.

Ένα ακόμη στοιχείο, που συνηγορεί υπέρ της χρήσης των δύο πρώτων συστοιχιών φίλτρων, είναι τα ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα σηματοθορυβικού λόγου. Αντιθέτως, οι συστοιχίες φίλτρων *cic* και *halfband* φαίνεται να υπολείπονται στον τομέα αυτό.

Στο σημείο αυτό, είναι πολύ σημαντικό να αναλύσουμε τη μοναδική ικανότητα που έχουν οι μετατροπείς ΣΔ να αναπαριστούν με 1 μόνο δυαδικό ψηφίο όλη τη χρήσιμη πληροφορία εμφανίζοντας τόσο μεγάλο κέρδος. Αρκεί να μελετήσουμε τη διαδικασία από την αρχή. Θεωρούμε ότι όταν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται, τότε κάθε δείγμα του αναπαρίσταται από 1 δυαδικό ψηφίο. Στη συνέχεια, η ανάλυσή του αυξάνεται σε *OSR bits* (εδώ $OSR=64$) μέσω της διαδικασίας της υπερδειγματοληψίας. Μέσα από τη

διαδικασία του αποδεκατισμού, λαμβάνουμε και πάλι 1 bit στην έξοδο, που όμως αντιστοιχεί σε πολλαπλάσια δυαδικά ψηφία, αν μπορούσε να συγκριθεί με την απλή παλμοκωδική διαμόρφωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι εντυπωσιακό, αν αναλογιστεί κανείς την απλότητα του κυκλώματος που υλοποιεί τη διαμόρφωση ΣΔ.

Αυτό είναι το κύριο προτέρημα των διαμορφωτών ΣΔ. Μέσω της διαδικασίας της υπερδειγματοληψίας, όχι μόνο αυξάνουν την ανάλυση, έστω και παροδικά, αλλά βελτιώνουν την ποιότητα του σήματος, ελαττώνοντας τον θόρυβο στη βάση του συχνοτικού πεδίου. Η διάταξη του διαμορφωτή επιτρέπει τη μετατόπιση του θορύβου σε υψηλότερες συχνότητες, έτσι ώστε να μην υπεισέρχεται στις ωφέλιμες συχνότητες. Με την κατάλληλη χρήση φίλτρων αποδεκατισμού, πετυχαίνονται ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα, καθώς εξαλείφονται όποια υπολείμματα θορύβου.

Η απλούστατη διάταξη του διαμορφωτή, σε συνδυασμό με τη σωστή επιλογή των φίλτρων αποδεκατισμού, συνιστούν ένα κύκλωμα ιδιαίτερα προσιτό στην υλοποίησή του, που δεν περιέχει στοιχεία για πολύπλοκες πράξεις. Εξοικονομείται, με άλλα λόγια, υλικό και ισχύς από την μείωση των απαιτήσεων, τόσο υπολογιστικών, όσο και μνήμης.

4.3 Εξάλειψη τόνων - *Dithering*

Ο θόρυβος στάθμισης στους διαμορφωτές ΣΔ δεν είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, λευκός. Για εισόδους dc , το σφάλμα στάθμισης είναι περιοδικό και το φάσμα του περιέχει διακριτούς τόνους, των οποίων οι συχνότητες και το πλάτος είναι συνάρτηση του σήματος εισόδου. Για εισόδους ac , το σφάλμα στάθμισης είναι επίσης περιοδικό και περιέχει στοιχεία αρμονικώς συσχετισμένα με την συχνότητα και το πλάτος εισόδου. Θα δούμε, στην πορεία, ότι, όταν είναι επιθυμητό να καταπολεμηθούν οι ακραίες περιοδικές τιμές που εμφανίζονται στην έξοδο του σταθμιστή, τότε πολλές φορές δεν αρκεί απλά η απεικόνιση του φάσματος συχνοτήτων. Μεγέθη όπως η αυτοσυσχέτιση και οι βραχυπρόθεσμες εκτιμήσεις μπορούν να αποδειχθούν πολύ πιο διαφωτιστικές. Η παρούσα παράγραφος δίνει κάποιες εισαγωγικές έννοιες πάνω σε αυτό το ζήτημα.

Μέχρι πρόσφατα, πολλοί ερευνητές και σχεδιαστές αποφαίνονταν ότι η λύση, για την τυχαιοποίηση και την εξάλειψη οποιωνδήποτε ιδιαιτεροτήτων του θορύβου, ήταν είτε ο σχεδιασμός διαμορφωτών μεγαλύτερης τάξης είτε η πολυσταδιακή υλοποίησή τους. Δυστυχώς, μερικά από τα πρώιμα συμπεράσματα αυτά βασίζονταν σε ημιτελείς εμπειρικές γνώσεις και σε συνθήκες και παραδοχές υλοποίησης που ήταν πρακτικώς αδύνατο να πραγματοποιηθούν.

Στην πορεία, ανακαλύφθηκε μια τεχνική για τη «λευκοποίηση» του θορύβου και την εξάλειψη των διακριτών τόνων: η τεχνική αυτή ονομάζεται *dithering*. Η βασική της αρχή είναι η ενσωμάτωση στο σήμα εισόδου ενός ψευδοτυχαίου σήματος σχετικώς μεγάλου πλάτους. Η τεχνική αυτή δε χρησιμοποιείται πάντα, παρά μόνο σε εξειδικευμένες περιπτώσεις. Οι κύριες κατηγορίες της τεχνικής αυτής είναι:

1. *Dithering* διαμόρφωσης θορύβου (*noise-shaped dithering*), η οποία μειώνει τους διακριτούς τόνους και λευκοποιεί το κατώφλι του θορύβου στάθμισης. Επιπλέον, αυτή η κατηγορία *dithering* μπορεί πολλές φορές να αυξήσει την ανάλυση του διαμορφωτή για χαμηλότερα επίπεδα εισόδων *AC*. Χρησιμοποιείται επιτυχώς σε πολλές εμπορικές πλακέτες μετατροπών ΣΔ και μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους τύπους της διαμόρφωσης. Το κύριο μειονέκτημα της είναι ότι ενώ είναι πολύ πρακτική, μειώνει κατά αρκετά *decibel* το χρήσιμο δυναμικό εύρος του διαμορφωτή, όταν στην είσοδο εφαρμόζονται σήματα με πλάτος όσο περίπου το Δ . Επιπλέον, για διαμορφωτές μεγαλύτερης τάξης προκαλεί την πτώση κατά μερικά *decibel* του κατωφλίου ευστάθειας.
2. *Δυναμικό dithering* (*dynamic dithering*). Η τεχνική της κατηγορίας αυτής ελαττώνει τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη μέθοδο. Η διαδικασία με την οποία το επιτυγχάνει αποτελείται από τη διαμόρφωση του ψευδοτυχαίου σήματος με μια μη-γραμμική συνάρτηση του αρχικού σήματος εισόδου, με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην παράγεται περαιτέρω διαστρέβλωση και να μην είναι αντιληπτή στο ακουστικό μέσο.

Θα πρέπει, ωστόσο, να αναφερθεί ότι, στις παρακάτω διαπιστώσεις, η όποια γνώση σχετικά με την τεχνική του *dithering* προέρχεται κυρίως από αλληπάλληλα πειράματα και από την εμπειρική παρατήρηση.

Η παρατήρηση των περιοδικών τόνων που προκύπτουν από τη διαμόρφωση ΣΔ πολλές φορές δεν είναι δυνατό να εντοπιστούν από το φάσμα συχνοτήτων, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παραγράφου. Ο κύριος λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό μπορεί να φανεί αντιφατικός και συνίσταται στο ότι *η ισχυρή περιοδικότητα μπορεί να είναι εμφανής στο πεδίο του χρόνου, αλλά όχι στο πεδίο των συχνοτήτων*. Για την ορθότητα του συμπεράσματος αυτού, μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι, από τη στιγμή που το αντίστροφο ισχύει, δηλαδή, ότι το πεδίο της συχνότητας μπορεί να αποκαλύψει τυχόν περιοδικότητα, όταν στο πεδίο του χρόνου δεν είναι αντιληπτή, τότε είναι εφικτό να υφίσταται μια κατηγορία σημάτων για την οποία ισχύει το αντίστροφο.

Ως παράδειγμα, μπορούμε θεωρήσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα το οποίο πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με μια τυχαία ακολουθία λευκού θορύβου. Το αποτέλεσμα είναι μια ακόμη τυχαία ακολουθία λευκού θορύβου. Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου ισούται με συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας. Δεδομένου ότι το ημίτονο αναπαρίσταται στο πεδίο της συχνότητας από ένα συρμό συναρτήσεων δέλτα και ο λευκός θόρυβος έχει επίπεδο συχνοτικό περιεχόμενο, συμπεραίνουμε ότι η συνέλιξη των δύο δίνει, επίσης, επίπεδο συχνοτικό περιεχόμενο. Στο σημείο αυτό, μπορούμε να προσθέσουμε στο παρόν σήμα κάποια επιπλέον ημιτονοειδή σήματα των οποίων οι συχνότητες είναι αρμονικά συσχετισμένες με το αρχικό ημιτονοειδές σήμα. Τότε το άθροισμά τους δίνεται από τον τύπο

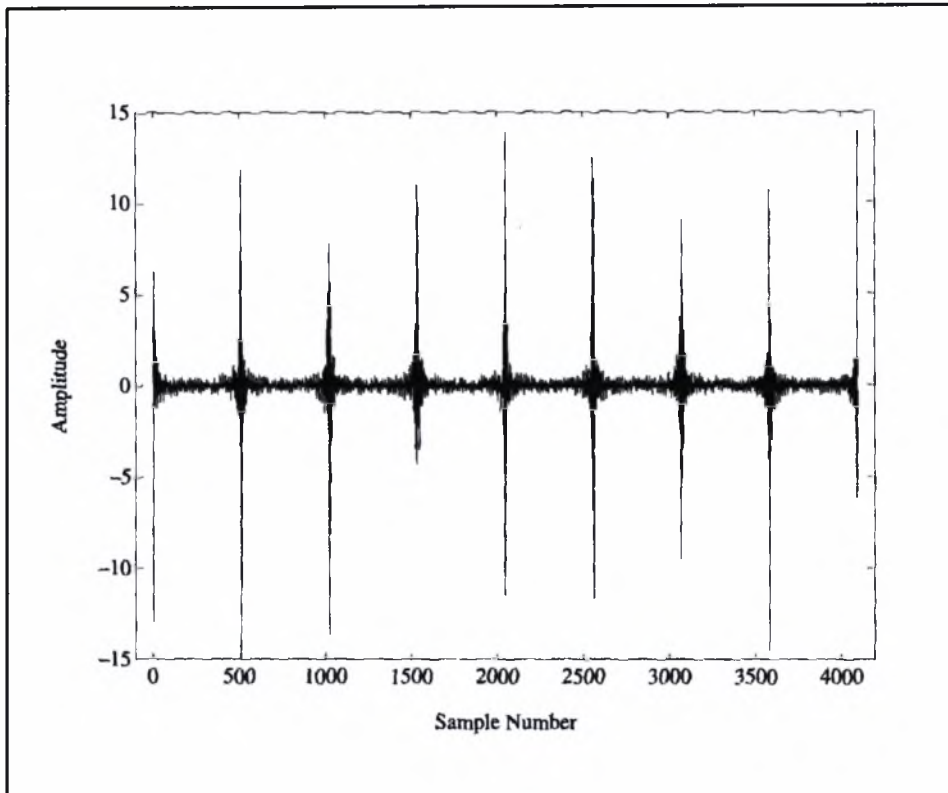
$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=1}^K \cos(k\omega_0 n)$$

και η συνέλιξή τους στο πεδίο της συχνότητας με την ακολουθία λευκού θορύβου εκφράζεται ως

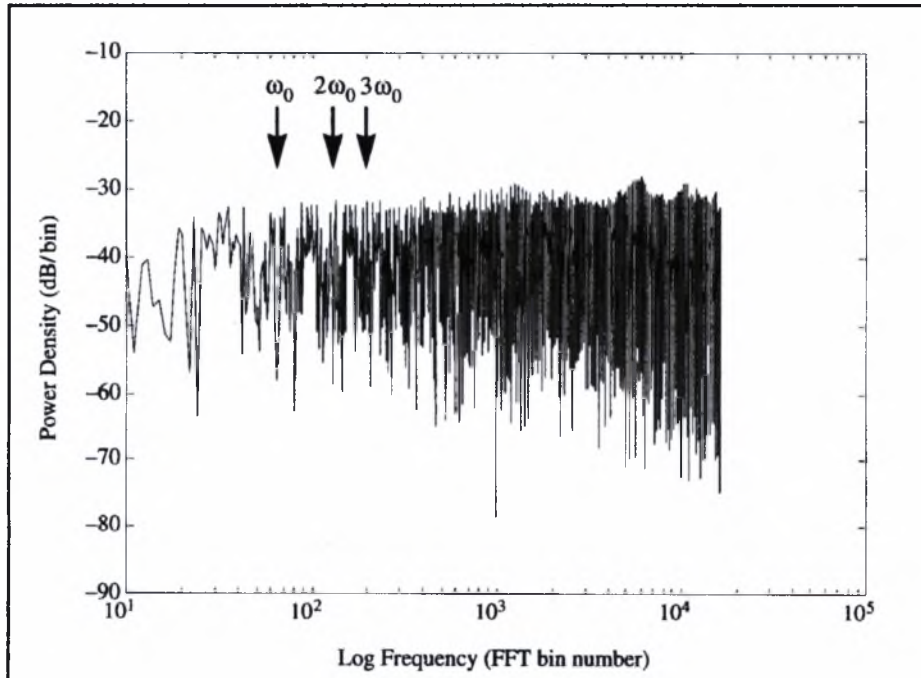
$$S(e^{j\omega}) * \tilde{X}(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega}) * \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \delta(\omega \pm k\omega_0).$$

Αν θεωρήσουμε ότι $K=32$, τότε το αποτέλεσμα είναι ένας συρμός από παλμούς *sinc* με φορέα τον προστιθέμενο θόρυβο. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ημιτονοειδών σημάτων, οι παλμοί *sinc* γίνονται στενότεροι και ψηλότεροι. Η σημαντικότερη παρατήρηση στο παρόν παράδειγμα είναι ότι η απεικόνιση της ισχύος του σήματος, μέσω του μετασχηματισμού *Fourier* δεν είναι σε θέση να αποκαλύψει την

περιοδικότητα, όπως διαφαίνεται και στις εικόνες 4.124 και 4.125.

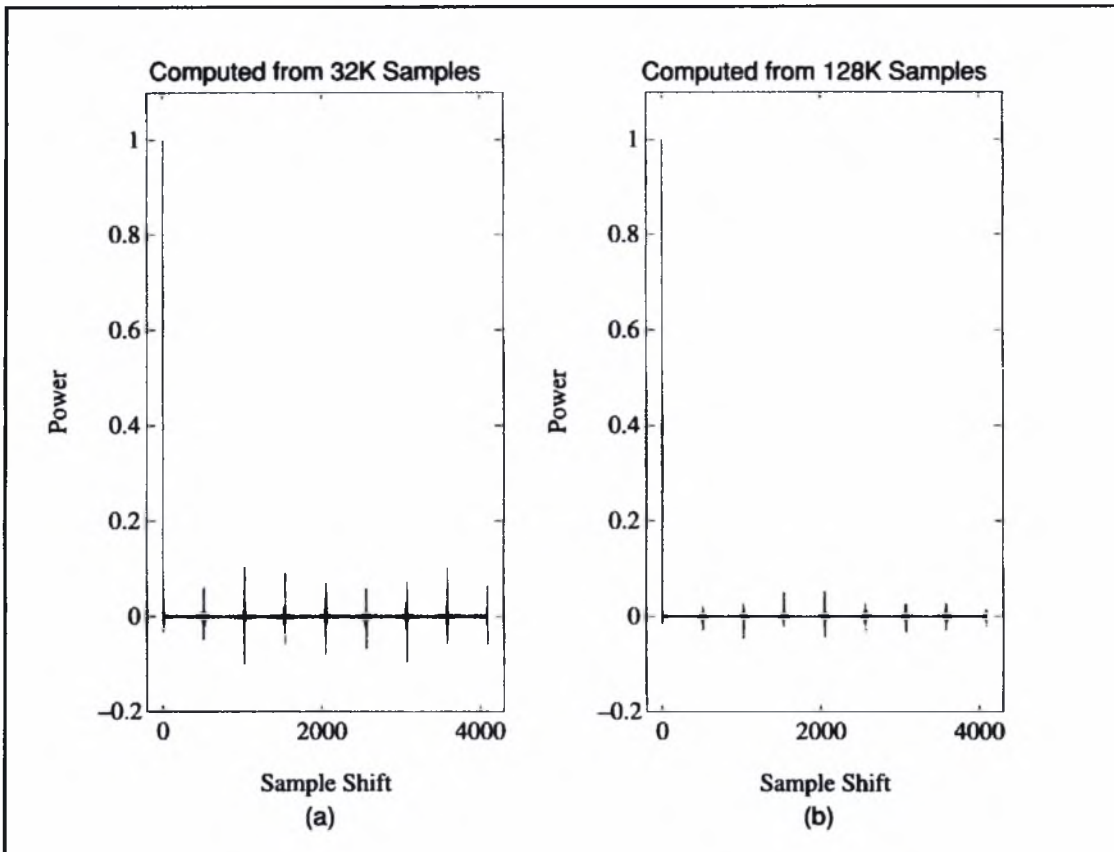


Εικόνα 4-124: Σήμα στο πεδίο του χρόνου



Εικόνα 4-125: Εκτίμηση φασματικής συχνότητας ισχύος, όπου δε διαφαίνεται καμία ισχυρή περιοδικότητα στα πολλαπλάσια του ω_0

Γίνεται, επομένως, αμέσως αντιληπτό ότι είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης, έτσι ώστε να αποκαλυφθεί η περιοδικότητα του



Εικόνα 4-126: Αυτοσυσχέτιση σήματος και υπολογισμός για (a) 32000 δείγματα και (b) για 128000 δείγματα

σήματος και αναλυθεί ακριβέστερα ο θόρυβος στάθμισης. Για ένα σήμα διακριτού χρόνου και πεπερασμένου μήκους η εξίσωση της αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\varphi_{xx}(m) = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x(n)x(n+m).$$

Η πρώτη τιμή της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης $\varphi_{xx}(0)$ είναι η μέση τετραγωνική τιμή του αρχικού σήματος ή η μέση ισχύς του σήματος. Τα υπόλοιπα δείγματα της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης $\varphi_{xx}(m)$, $m \neq 0$, αποκαλύπτουν την αλληλοεξάρτηση του σήματος συναρτήσει του εαυτού του, για m στοιχεία ολίσθησης. Εάν το αρχικό σήμα δεν είναι περιοδικό, τότε τα στοιχεία αυτά θα τείνουν προς μία σταθερά. Στην περίπτωση που το σήμα είναι ακριβώς λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή, τότε $\varphi_{xx}(m) \rightarrow 0$, για $m \neq 0$. Η εικόνα 4.126 δείχνει την αυτοσυσχέτιση του σήματος που αποτελείται από το άθροισμα των ημιτονοειδών σημάτων που πολλαπλασιάζονται με μια ακολουθία λευκού θορύβου.

Η ανάλυση των διαγραμμάτων αποκαλύπτει την ύπαρξη περιοδικότητας κάθε 512 δείγματα, η οποία είναι η περίοδος της βασικής συχνότητας ω_0 . Στο τρέχον

παράδειγμα, ο λόγος, για τον οποίο το διάγραμμα της αυτοσυσχέτισης εμφανίζει περιοδικότητα, είναι ότι η ακολουθία θορύβου $s(n)$, η οποία έχει προστεθεί στο άθροισμα των ημιτονοειδών σημάτων, έχει πεπερασμένο μήκος. Επιπλέον, τα περιοδικά στοιχεία ισχύος που εμφανίζονται τείνουν στο μηδέν, όσο μεγαλώνει ο αριθμός των δειγμάτων που χρησιμοποιούνται. Με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται ότι, πράγματι, υπάρχουν κατηγορίες σημάτων των οποίων η περιοδικότητα δεν είναι δυνατό να ανιχνευθεί στο πεδίο του χρόνου, αλλά στο πεδίο της συχνότητας.

Στο σημείο αυτό, είναι χρήσιμο να αναλυθεί εκτενέστερα η παρουσία τόνων στους διαμορφωτές ΣΔ. Ένας απλός τρόπος προκύπτει από την παρατήρηση του διαγράμματος που περιγράφει την υλοποίησή τους.

Ακολουθώντας τη ροή του σήματος λαμβάνει κανείς

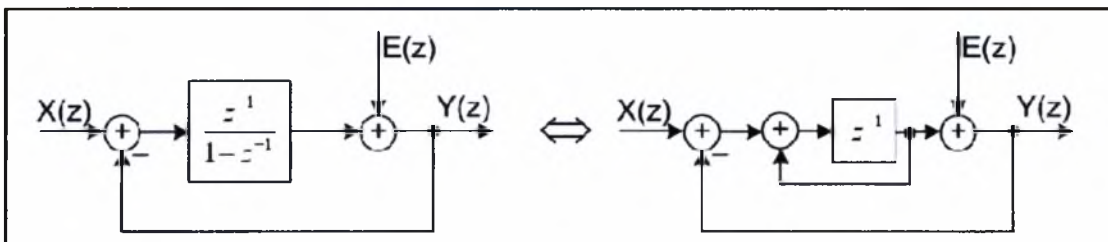
$$y(n) = Q \left(\sum_{k=0}^n (x(k-1) - y(k-1)) \right)$$

$$y(n) = Q \left(\sum_{k=0}^n x(k-1) \right) - Q \left(\sum_{k=0}^n y(k-1) \right)$$

όπου με Q συμβολίζεται η διαδικασία της στάθμισης. Θεωρώντας ότι ο σταθμιστής χρησιμοποιεί ένα δυαδικό ψηφίο για την αναπαράσταση, τότε μπορούμε να μεταγράψουμε την παραπάνω σχέση ως εξής

$$y(n) = \text{sign} \left(\sum_{k=0}^n x(k-1) \right) - \text{sign} \left(\sum_{k=0}^n y(k-1) \right)$$

Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η αρχική είσοδος είναι ένα σήμα dc , για παράδειγμα $1/3$, τότε διαπιστώνει κανείς ότι το σήμα εξόδου έχει τις τιμές $[1,1,-$



Εικόνα 4-127: Διάγραμμα διαμορφωτή ΣΔ

$1,1,1,-1,\dots,1,1,-1]$, πράγμα που σημαίνει ότι παράγει τη σωστή μέση τετραγωνική τιμή του σήματος, ωστόσο, παρουσιάζει ένα ισχυρό φασματικό στοιχείο κάθε $f_s/3$ χρονική

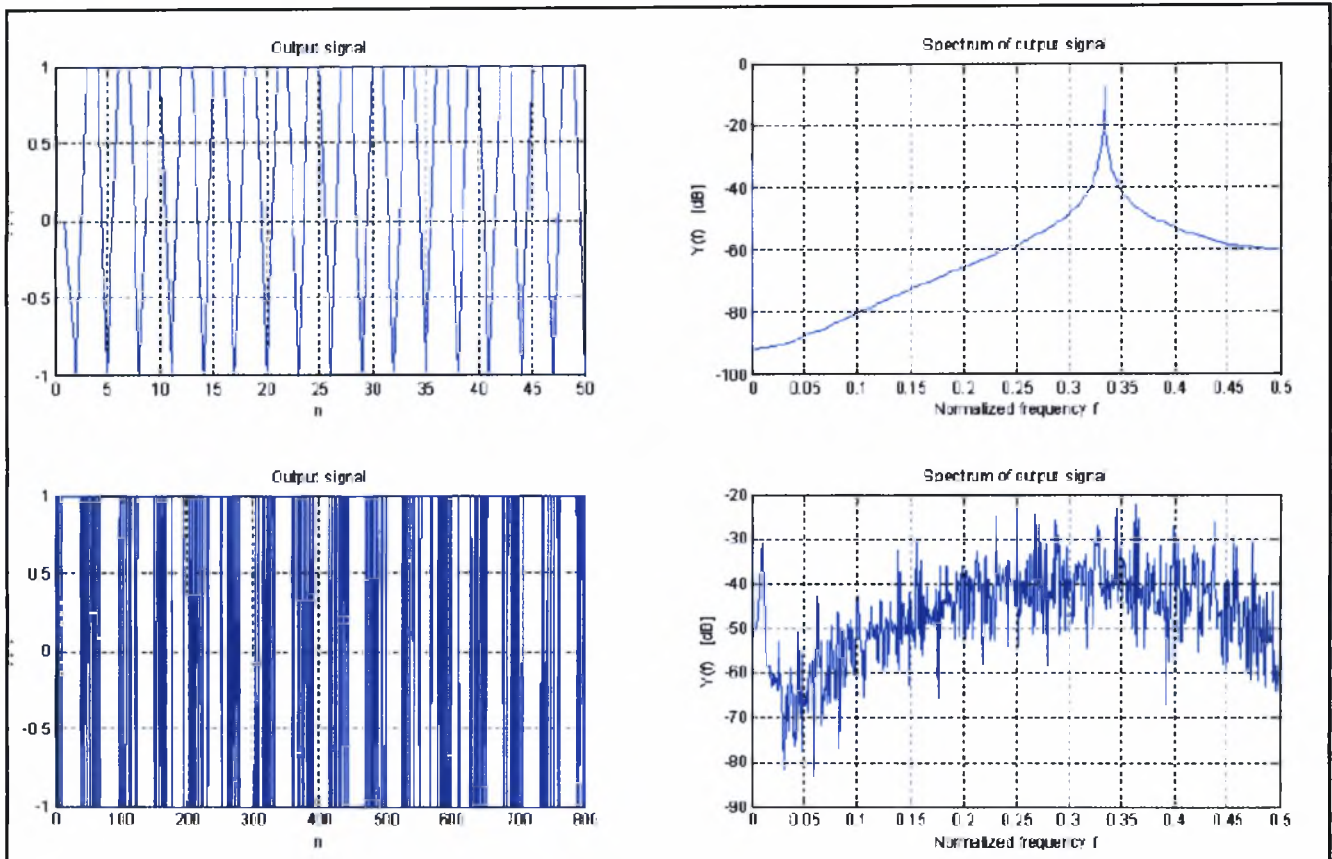
στιγμή. Εισάγοντας κάποιες παραπάνω τιμές στο διαμορφωτή, τότε παρατηρείται ότι ο διαμορφωτής έχει τονική συμπεριφορά κάθε f_s/k χρονικές στιγμές, για ένα dc σήμα εισόδου k φορές μικρότερου πλάτους από το μοναδιαίο dc σήμα. Οι διακριτοί αυτοί τόνοι παράγονται κάθε φορά που το σήμα είναι σταθερό ή μεταβάλλεται εξαιρετικά αργά και πάλι η απειριοδικότητα στο χρόνο, είναι δυνατό να φανερώσει ισχυρή περιοδικότητα στο πεδίο της συχνότητας. Στην εικόνα 4-128 παρουσιάζεται το απλό παράδειγμα που θεωρήσαμε και την έξοδο του διαμορφωτή ΣΔ που ομοιάζει ως προς την ημιτονοειδή μορφή, όπως επίσης και την ξεκάθαρα τονική συμπεριφορά του διαμορφωτή ΣΔ. Για τις περισσότερες εισόδους, είναι δυνατό να υπάρχουν τέτοιοι τόνοι οι οποίοι να εισέρχονται στο φάσμα συχνοτήτων του σήματος. Κάτι τέτοιο πρέπει να αποφεύγεται.

Εάν εφαρμόσουμε σειρά *Fourier* στο σήμα $e_Q(V_{in}(t))$, λαμβάνουμε

$$e_Q\{V_{in}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n\pi V_{in}(t))}{n\pi}$$

και η αρχική σχέση γίνεται

$$D_{out} = V_{in}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n\pi V_{in}(t))}{n\pi}.$$

Εικόνα 4-128: Αποτελέσματα παραδείγματος για dc είσοδο ίση με $1/3$

Γενικά, στους διαμορφωτές ΣΔ μεγαλύτερων τάξεων η ύπαρξη διακριτών τόνων αποτελεί πρόβλημα, όχι όμως τόσο σοβαρό όσο σε αυτούς της 1^{ης} τάξης.

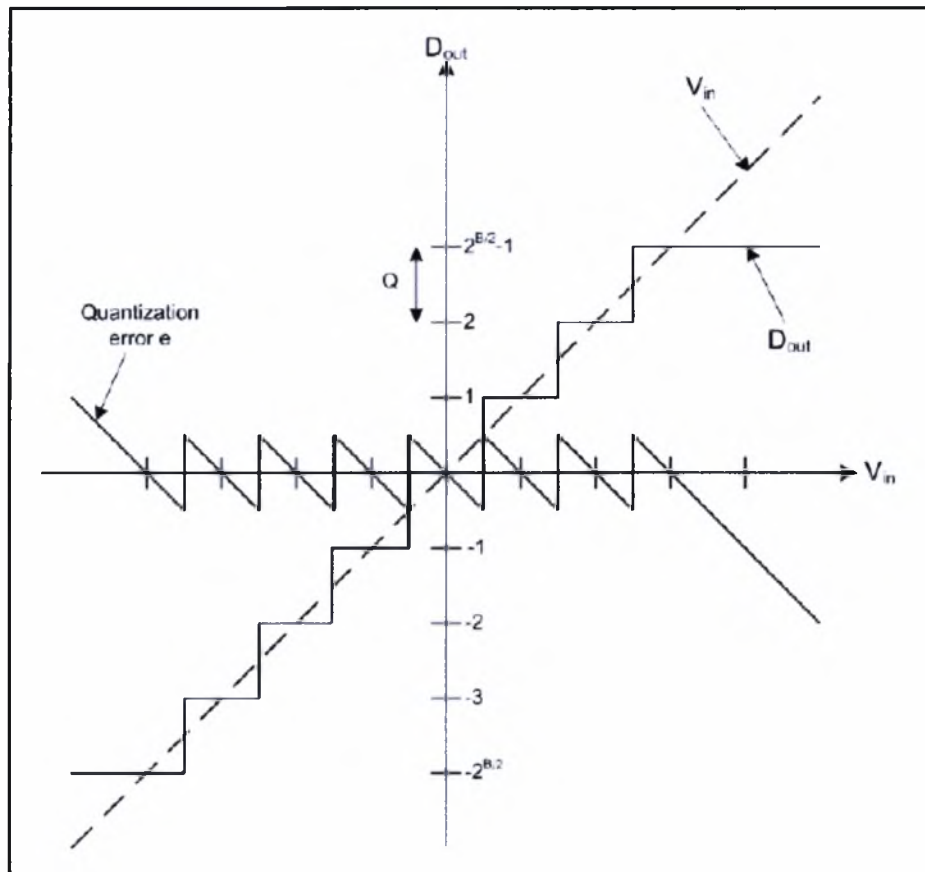
Αν παρατηρήσει κανείς το σφάλμα στάθμισης στην εικόνα 4-129, συμπεραίνει κατευθείαν ότι είναι άμεσα συσχετισμένο με το σήμα εισόδου. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει υπερχειλίση, τότε είναι το σφάλμα είναι μια *ντετερμινιστική* συνάρτηση της εισόδου. Επομένως είναι δυνατό να περιγραφεί μαθηματικά ως

$$D_{out} = Q(V_{in}) = V_{in}(t) + e_Q(V_{in}(t)).$$

Υποθέτοντας ότι η είσοδος ακολουθεί ημιτονοειδή μορφή, τότε

$$A \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n\pi V_{in}(t))}{n\pi}$$

και εκφράζοντας την παραπάνω σχέση μέσω των συναρτήσεων *Bessel* λαμβάνουμε



Εικόνα 4-129: Απεικόνιση σφάλματος στάθμισης συναρτήσεως της εισόδου

$$D_{out} = A \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{(2p-1)}(2n\pi A) \sin((2p-1)\omega t)$$

με $J_p(x)$ μια συνάρτηση *Bessel* 1^{ου} τύπου¹⁰. Διαφαίνεται καθαρά ότι η τελική σχέση αποτελείται από ένα πλήρως διακριτό συχνοτικό φάσμα, που αποτελείται αποκλειστικά από περιττές αρμονικές.

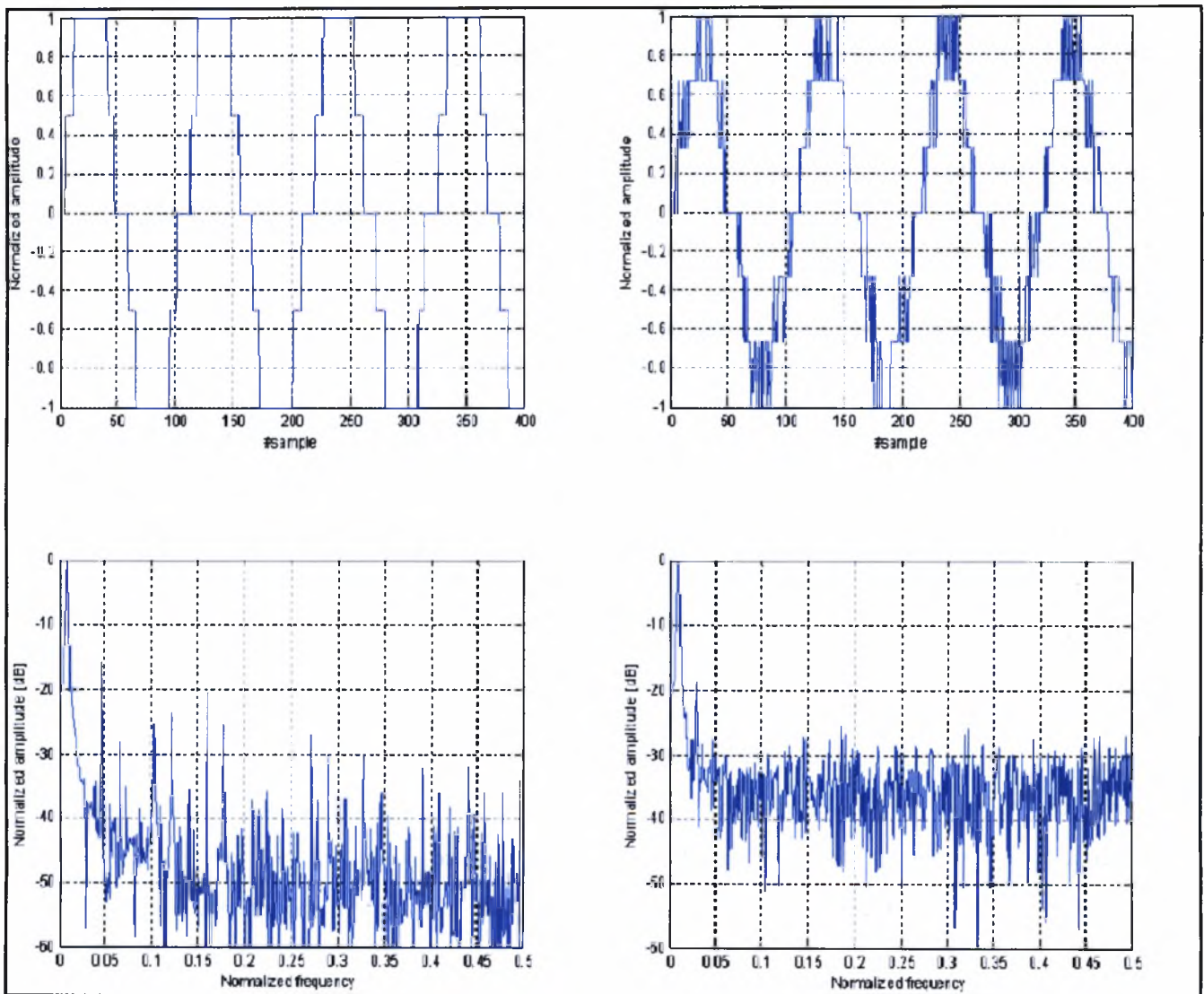
Από την τελευταία σχέση είναι ξεκάθαρο ότι η διαδικασία της στάθμισης δημιουργεί διαστρέβλωση, στη μορφή ημιτονοειδών αρμονικών, οι οποίες είναι σημαντικές, ιδιαίτερα όταν ο αριθμός των επιπέδων στάθμισης είναι αρκετά μεγάλος.

Η λύση για το πρόβλημα αυτό προκύπτει από την εφαρμογή της τεχνικής του *dithering*. Από την εφαρμογή της τεχνικής αυτής λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην εικόνα 4-130. Το εξαιρετικά αιχμηρό και διαστρεβλωμένο συχνοτικό φάσμα της απλής στάθμισης αντικαθίσταται με ένα αρκούντως λευκό

¹⁰Η συνάρτηση *Bessel* 1^{ου} τύπου ορίζεται ως: $J_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+a+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a}$

συχνотικό φάσμα. Ωστόσο, ενώ η τεχνική αυτή είναι ιδιαίτερα ευεργετική από καθαρά ψυχοακουστική άποψη, μειώνει τον ωφέλιμο σηματοθορυβικό λόγο (*SQNR*). Εν τω μεταξύ, είναι διακριτές κάποιες αρμονικές, παρόλ'αυτά είναι εμφανώς εξασθενημένες.

Η ύπαρξη των αρμονικών αυτών εξηγείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ψευδοτυχαίας ακολουθίας θορύβου είναι τετραγωνική, με άλλα λόγια, ομοιόμορφη. Η συμπεριφορά της ψευδοτυχαίας ακολουθίας και τα



Εικόνα 4-130: Έξοδος σταθμιστή 5 επιπέδων με και χωρίς εφαρμογή *dithering*

αποτελέσματά της εξαρτώνται ισχυρά από τη σ.π.π. και το πλάτος της.

Ορίσαμε προηγουμένως τη χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου, $Q(V_{in})$, της διαδικασίας της στάθμισης ως συνάρτηση της τάσης-πλάτους εισόδου. Αν σε αυτήν

προσθέσουμε την ψευδοτυχαία ακολουθία θορύβου με σ.π.π. $p(v)$, τότε λαμβάνουμε

$$Q_{dithered}(V_{in}) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(v + V_{in})p(v)dv.$$

Η διασπορά ή η τετραγωνική ισχύς της ακολουθίας θορύβου για σταθερή είσοδο V_{in} γίνεται

$$v_n^2(V_{in}) = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(v + V_{in}) - Q_{dithered}(V_{in})]^2 p(v)dv$$

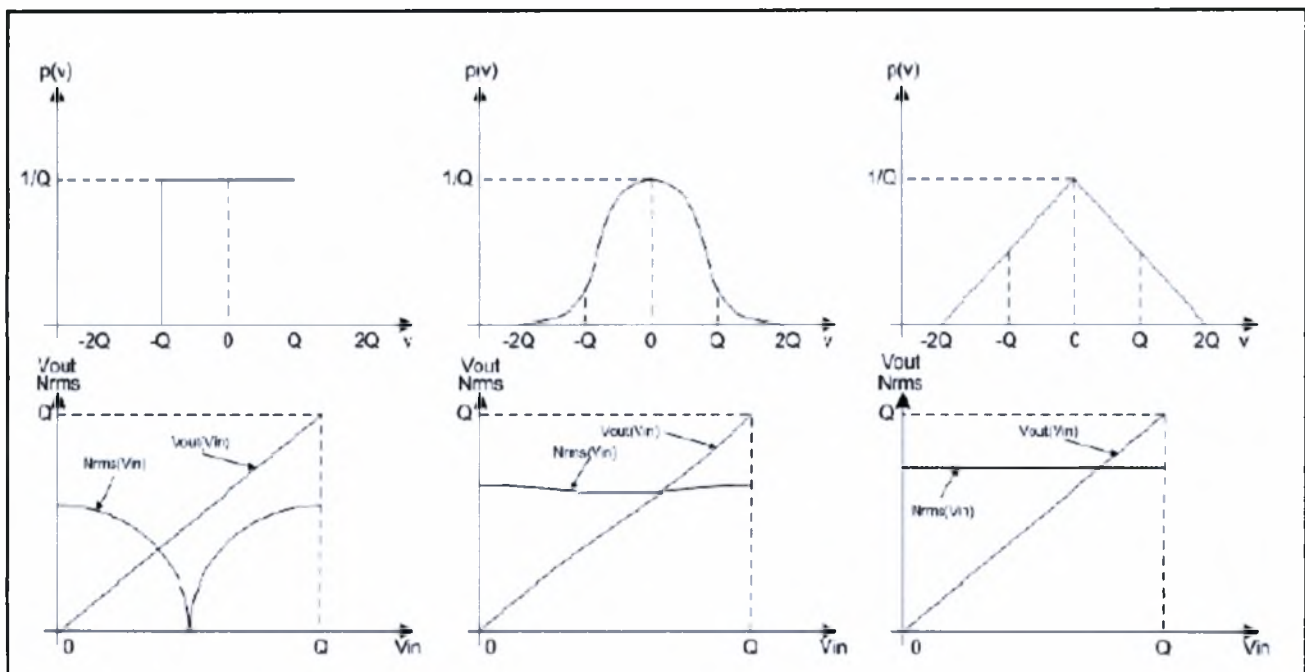
Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της εξάρτησης της ψευδοτυχαίας ακολουθίας θορύβου από την αρχική είσοδο, με άλλα λόγια, τη *διαμόρφωση θορύβου* στον σταθμιστή. Ιδανικά, επιδιώκουμε να είναι ο θόρυβος πλήρως ασυσχέτιστος, δηλαδή η τιμή της $v_n^2(V_{in})$ να είναι μια σταθερά (ή να τείνει). Επιπλέον, είναι απαραίτητο η χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου να παρουσιάζει γραμμικότητα, να είναι μια ευθεία, για παράδειγμα.

Στην περίπτωση της ομοιόμορφης σ.π.π., η χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου είναι γραμμική, όταν το μέγιστο πλάτος της είναι της τάξεως του ενός *LSB*. Παρόλ'αυτά, η διαμόρφωση θορύβου εξακολουθεί να είναι παρούσα, γεγονός που εξηγεί την παρουσία εναπομένουσων αιχμών στο συχνοτικό φάσμα. Στην πραγματικότητα, η ομοιόμορφη σ.π.π. δεν μπορεί να προσφέρει ποτέ μηδενική διαμόρφωση θορύβου, οποιοδήποτε κι αν είναι το πλάτος, πράγμα που την καθιστά μη ιδανική.

Η *Γκαουσιανή* σ.π.π. έχει και αυτή αναλογικό θόρυβο και, αν εκτελέσουμε τους υπολογισμούς σύμφωνα με την τελευταία σχέση, παρατηρούμε ότι, για μια τιμή *rms* της τάξεως $\frac{1}{2}$ *LSB*, προσφέρει μια σχεδόν γραμμική χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου και πολύ μικρή διαμόρφωση θορύβου. Συνάγεται το συμπέρασμα, λοιπόν, ότι αν χρησιμοποιηθεί ως σήμα *dithering* μια *Γκαουσιανή* σ.π.π., τότε το αποτέλεσμα είναι σαφώς ανώτερο. Το μειονέκτημα, ωστόσο, είναι ότι μια τέτοια σ.π.π. είναι εξαιρετικά δύσκολο να υλοποιηθεί στον ψηφιακό κόσμο.

Έχει αποδειχθεί ότι ένα σήμα *dithering*, που ακολουθεί την τριγωνική σ.π.π. με μέγιστο πλάτος ίσο με 2 *LSB*, δίνει τέλεια γραμμικότητα στη χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου και μηδενική διαμόρφωση θορύβου. Η ποινή, ωστόσο, της χρήσης

μια τέτοιας σ.π.π. είναι ότι προκαλεί αύξηση του θορύβου κατά 6 dB, σε αντίθεση με τα 3.8 dB και 4 dB που προκαλούν η ομοιόμορφη και η Γκαουσιανή σ.π.π., αντίστοιχα. Η τριγωνική σ.π.π. υλοποιείται εξαιρετικά εύκολα στον ψηφιακό κόσμο, συνελίσσοντας δύο ομοιόμορφες (τετραγωνικές) συναρτήσεις που εκφράζουν ψευδοτυχαία σήματα *dither*. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει εσωτερική υπερχειλίση, μια στάθμιση που χρησιμοποιεί τριγωνική σ.π.π. για την υλοποίηση του σήματος *dither*, ισοδυναμεί ουσιαστικά με με την προσθήκη λευκού θορύβου.



Εικόνα 4-131: Χαρακτηριστικές εισόδου-εξόδου και διαμόρφωσης θορύβου για (από αριστερά προς δεξιά) για ομοιόμορφη, γκαουσιανή και τριγωνική σ.π.π. ως σήματα *dithering*

Η ιδανική στάθμιση των διαμορφωτών ΣΔ είναι ένα εξαιρετικά περίπλοκο ζήτημα, που πολλές φορές δεν αναλώνεται μόνο στην εύρεση του κατάλληλου σήματος για την πραγματοποίηση του *dithering*. Τις περισσότερες φορές, όταν σχεδιάζουμε μετατροπείς ΣΔ πολλών δυαδικών ψηφίων, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η ευστάθεια του διαμορφωτή, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι δε θα υπάρξει εσωτερική υπερχειλίση. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει να ενσωματώνονται οι παράμετροι του σήματος που υπερτίθεται στην είσοδο, του σήματος, δηλαδή, που πραγματοποιεί το *dithering*, στις προδιαγραφές του μετατροπέα. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε ότι, σε έναν διαμορφωτή ΣΔ που περιέχει M βήματα στάθμισης και, επομένως, παράγει M δυαδικά ψηφία στην έξοδο, θα πρέπει να ισχύει

$$M \geq 1 + \frac{1(1 + \delta)(\|ntf\|_1 - 1) - \|stf\|_1 \|x\|_\infty}{1 - \|stf\|_1 \|x\|_\infty}$$

όπου ntf και stf οι συναρτήσεις μεταφοράς του θορύβου στάθμισης και του σήματος, έτσι όπως προκύπτουν από τη σχέση $Y(z) = X(z)z^{-1} + E(z)(1 - z^{-1})$ και $\|x\|_\infty$ είναι η \mathcal{L}_∞ νόρμα, η οποία είναι απλά η μέγιστη τιμή $\|x\|_\infty = |x|_{max}$ και \mathcal{L}_1 η νόρμα η οποία ισούται με $\|stf\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |stf(k)|$.

5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΩΝ ΣΔ

Οι μετατροπείς ΣΔ γνωρίζουν μεγάλο εύρος εφαρμογών. Η υψηλές αποδόσεις τους, οι χαμηλές απαιτήσεις σε υλικό και η συνεπακολουθούμενη χαμηλή κατανάλωση, τους καθιστούν ιδανικούς για ενσωμάτωση σε ένα πλήθος εμπορικών εφαρμογών και κυκλωμάτων. Η κυριότερη εφαρμογή τους απαντάται στο πρότυπο των οπτικών δίσκων *Super Audio*.

Οι οπτικοί δίσκοι *Super Audio* εισήχθησαν στην αγορά για εμπορική χρήση το 1999. Αναπτύχθηκαν από τις εταιρείες *Sony* και *Philips Electronics*, οι οποίες ήταν οι πρώτες που δημιούργησαν τους πολύ γνωστούς οπτικούς δίσκους (*compact disk - CD*). Οι δίσκοι της κατηγορίας αυτής προορίζονται μόνο για ανάγνωση και προσφέρουν ιδιαίτερα υψηλή πιστότητα ήχου. Έχουν, επίσης, τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις με έναν κοινό οπτικό δίσκο. Η κύρια διαφορά τους είναι χρήση της τεχνολογίας *Direct Stream Digital (DSD)* στην οποία ενσωματώνεται η χρήση των διαμορφωτών ΣΔ και η οποία διαφέρει σημαντικά από την παλμοκωδική κωδικοποίηση που χρησιμοποιείται στους συμβατικούς οπτικούς δίσκους.

Η τεχνολογία του *DSD* συνίσταται στη χρήση ενός δυαδικού ψηφίου σε συχνότητα λειτουργίας 28224 MHz , η οποία εκμεταλλεύεται την ύπαρξη του φαινομένου της διαμόρφωσης θορύβου, έτσι ώστε να μετατοπιστεί ο θόρυβος σε υψηλότερες, μη αντιληπτές από το ακουστικό μέσο συχνότητες. Το γεγονός αυτό δίνει στο συγκεκριμένο πρότυπο μεγαλύτερο δυναμικό εύρος και ευρύτερη απόκριση συχνότητας από τον κοινό οπτικό δίσκο. Σύμφωνα με τους κατασκευαστές, το δυναμικό εύρος ισούται με 120 dB σε εύρος συχνοτήτων από 20 Hz έως 20 kHz , με απόκριση που εκτείνεται ως τα 100 kHz .

Η διαδικασία με την οποία δημιουργείται ένα σήμα *DSD* περιλαμβάνει την διάβαση του ηχητικού σήματος μέσα από ένα διαμορφωτή ΣΔ, χωρίς, ωστόσο, να παρεμβάλλεται το στάδιο του αποδεκατισμού. Αντιθέτως, η ακολουθία των δυαδικών ψηφίων εγγράφεται απευθείας και, θεωρητικά, χρειάζεται μόνο ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για την ανακατασκευή της αναλογικής κυματομορφής.

Εξαιτίας, ωστόσο, της δυσκολίας περάτωσης λειτουργιών επεξεργασίας ήχου σε ένα περιβάλλον όπου χρησιμοποιείται μόνο ένα δυαδικό ψηφίο και της

κυριαρχίας του λογισμικού και του υλικού που βασίζονται στην παλμοκωδική κωδικοποίηση και πραγματοποιούν τις λειτουργίες αυτές, η συντριπτική πλειοψηφία των οπτικών δίσκων εγγράφονται πρώτα σε μορφή *PCM*. Στη συνέχεια, με διάφορες τεχνικές μετατρέπονται σε σήματα *DSD* και εγγράφονται, τελικά, σε οπτικούς δίσκους *SACD*.

Για την επίλυση των προβλημάτων συμβατότητας, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, αναπτύχθηκαν νέα συστήματα επεξεργασίας που αναφέρονται και ως '*DSD-wide*', τα οποία διατηρούν τον προκαθορισμένο υψηλό ρυθμό δειγματοληψίας, αλλά χρησιμοποιούν ανάλυση 8 δυαδικών ψηφίων έναντι του ενός που υφίσταται στα σήματα *DSD*. Τα συστήματα αυτά διατηρούν, όμως, τη συχνότητα των 28224 MHz ($64f_s$) δειγματοληψίας, σε αντίθεση με τη συχνότητα στην οποία επεξεργάζονται τα σήματα *PCM*, η οποία φτάνει ως τα $352,8 \text{ kHz}$ ($8f_s$). Τα πιο γνωστά συστήματα που πραγματοποιούν τις λειτουργίες αυτές είναι τα *Pyramix* και τα *SADiE*.

Σημειώνεται ότι ακόμα και τα πρότυπα *PCM* υψηλής ανάλυσης (*DVD-Audio*, *HD DVD* και *Blu-ray Disc*) είναι δυνατό να διαφέρουν από τα πρότυπα *DSD* (*SACD*) αναφορικά με την πιστότητα σε υψηλές συχνότητες, καθώς τα δεύτερα δεν παρουσιάζουν τα φαινόμενα παρουσίας μεταλλικού ήχου (*ringing effect*). Αντίθετα, εμφανίζουν σταθερά, υψηλά επίπεδα θορύβου στις ίδιες συχνότητες στις οποίες παρουσιάζεται ο χαρακτηριστικός μεταλλικός ήχος της διαμόρφωσης *PCM*. Παρόλ' αυτά, το δυναμικό εύρος ενός σήματος *DSD* μειώνεται ταχύτατα σε συχνότητες άνω των 20 kHz , εξαιτίας των ισχυρών τεχνικών διαμόρφωσης θορύβου, που μετατοπίζουν το θόρυβο εκτός του ακουστικού φάσματος, προκαλώντας αύξηση του θορυβικού κατωφλίου μόλις πάνω από τα 20 kHz . Το δυναμικό εύρος των σημάτων *PCM*, αντιθέτως, είναι το ίδιο σε όλη την έκταση των συχνοτήτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

A.1 Φίλτρα FIR

Τα φίλτρα *FIR* (*Finite Impulse Response*) είναι μια κατηγορία ψηφιακών φίλτρων. Χρησιμοποιούνται κατά κόρον και είναι ιδιαίτερα δημοφιλή, λόγω της γραμμικής φάσης που παρουσιάζουν και του πεπερασμένου μήκους τους. Η *κρουστική απόκριση* (*impulse response*) που διαθέτουν είναι *πεπερασμένη* (*finite*) διότι δεν υφίσταται ανάδραση στο φίλτρο, δηλαδή τα φίλτρα *FIR* δεν περιέχουν κάποιο βρόγχο. Αν στην είσοδο έχουμε τη συνάρτηση *Δέλτα*, τότε μετά από κάποιο διάστημα στο σήμα εξόδου θα αρχίζουν να εμφανίζονται μηδενικά. Για να καταστεί αυτό κατανοητό, παρατίθεται η εξίσωση που περιγράφει την έξοδο ενός φίλτρου *FIR* συναρτήσει της εισόδου:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + \dots + b_nx[n - N]$$

όπου $y[n]$ η έξοδος του φίλτρου, $x[n]$ η είσοδος του φίλτρου και b_i οι συντελεστές του φίλτρου. Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να μεταγραφεί και ως συνέλιξη των συντελεστών του φίλτρου με το σήμα εισόδου:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n - i]$$

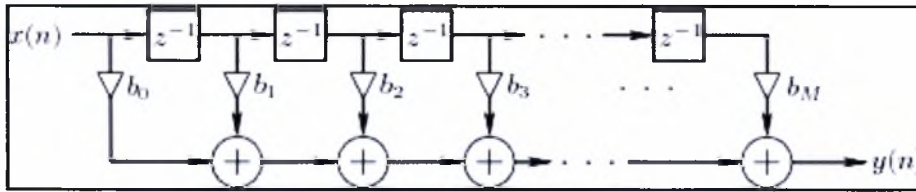
και η κρουστική απόκριση έχει τη μορφή:

$$h(n) \triangleq \begin{cases} 0, & n < 0 \\ b_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από το μετασχηματισμό Z της κρουστικής απόκρισης είναι η παρακάτω

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}.$$

Η *τάξη* ενός φίλτρου *FIR* ορίζεται από την τάξη του πολυωνύμου που προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς. Επομένως, για ένα φίλτρο *FIR* μήκους M η τάξη του είναι $N=M+1$, δεδομένου ότι $b_M \neq 0$. Η τάξη του φίλτρου αποτελεί και τον συνολικό αριθμό των στοιχείων καθυστέρησης του φίλτρου. Σημειώνεται, επίσης, ότι κατά την υλοποίηση ενός φίλτρου, όταν η τάξη συμπίπτει με τον αριθμό των

Εικόνα Α-1: Διάγραμμα φίλτρου *FIR*

στοιχείων καθυστέρησης, τότε η υλοποίηση καλείται *κανονική με βάση την καθυστέρηση*. Δεν είναι δυνατή η υλοποίηση ενός φίλτρου με λιγότερα στοιχεία καθυστέρησης από αυτά που ορίζει η τάξη του φίλτρου, αλλά είναι δυνατό να έχει περισσότερα στοιχεία καθυστέρησης.

Τα πλεονεκτήματα των φίλτρων *FIR* συνοψίζονται παρακάτω:

- Σχεδιάζονται εύκολα ώστε να έχουν γραμμική απόκριση φάσης (και συνήθως έχουν), δηλαδή, να αναπαρίσταται από μια ευθεία γραμμή, με εξαίρεση κάποιες αναδιπλώσεις (ασυνέχειες) μεγέθους 2π , λόγω αλλαγής προσήμου της συνάρτησης φάσης $\varphi(\omega)$. Επομένως, το φίλτρο δεν προκαλεί παραμόρφωση στο σήμα.
- Η υλοποίησή τους είναι ιδιαίτερα απλή και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται στους περισσότερους επεξεργαστές ψηφιακού σήματος.
- Είναι ιδανικά για πολυσταδιακές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα τη διαδικασία του *αποδεκατισμού* (μείωση του ρυθμού δειγματοληψίας) και της *παρεμβολής* (αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας). Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις, τα φίλτρα *FIR* επιτρέπουν την παράκαμψη κάποιων υπολογισμών, προσφέροντας μεγάλο υπολογιστικό κέρδος.
- Παρουσιάζουν ιδιαίτερα επιθυμητά αριθμητικά χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, τα περισσότερα φίλτρα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων πρέπει να υλοποιούνται χρησιμοποιώντας αριθμητικές αναπαραστάσεις πεπερασμένης ακρίβειας, με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας λιγότερα δυαδικά ψηφία. Τα φίλτρα *FIR* είναι ιδανικά όταν τέτοιες απαιτήσεις παρουσιάζονται. Σε συνδυασμό με τη γραμμική φάση και το πεπερασμένο μήκος που είναι εγγενή χαρακτηριστικά τους, τα φίλτρα *FIR* προσφέρουν εξασφαλισμένη ευστάθεια κάτω από οποιοσδήποτε συνθήκες πεπερασμένης ακρίβειας.
- Μπορούν να σχεδιαστούν με βέλτιστο τρόπο, δηλαδή ο προσδιορισμός των

συντελεστών τους να προκύπτει μέσα από από καλώς ορισμένα μαθηματικά κριτήρια.

- Παρουσιάζουν την ιδιότητα *Φραγμένης Εισόδου – Φραγμένης Εξόδου (ΦΕΦΕ)* και επομένως είναι σταθερά, αφού η έξοδος του φίλτρου είναι το άθροισμα ενός πεπερασμένου αριθμού πεπερασμένων πολλαπλασίων των τιμών εισόδου, άρα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $\sum |b_i|$ φορές τη μέγιστη τιμή που εμφανίζεται στην είσοδο.

Το κυριότερο μειονέκτημα των φίλτρων *FIR* είναι ότι χρησιμοποιούν περισσότερη μνήμη από τα φίλτρα *IIR* και χρειάζονται αρκετούς υπολογισμούς, έτσι ώστε να επιτευχθεί μια δεδομένη χαρακτηριστική απόκριση. Επιπλέον, κάποιες αποκρίσεις είναι πρακτικώς ασύμφορες να υλοποιηθούν με ένα φίλτρο *FIR*.

Κάποιοι τύποι φίλτρων *FIR* δίνονται στη συνέχεια:

- *Φίλτρα τύπου Boxcar*: Στα φίλτρα της κατηγορίας αυτής όλοι οι συντελεστές ισούνται με 1. Επομένως το αποτέλεσμα της εξόδου ισούται με το άθροισμα των N προηγούμενων δειγμάτων. Υλοποιούνται αποκλειστικά με τη χρήση αθροιστών και έτσι προτιμώνται, όταν η χρήση των πολλαπλασιαστών πρέπει να αποφευχθεί για λόγους κόστους.
- *Hilbert Transformer*: Τα φίλτρα της κατηγορίας αυτής μετατοπίζουν τη φάση του σήματος κατά 90 μοίρες. Χρησιμοποιούνται κυρίως για τη δημιουργία του φανταστικού τμήματος ενός σήματος, δεδομένου του πραγματικού του μέρους.
- *Διαφοριστές*: Οι διαφοριστές έχουν απόκριση πλάτους που είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας. Δεν είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς στις μέρες μας, ωστόσο, βρίσκουν εφαρμογή στους αποδιαμορφωτές *FM*.
- *Φίλτρα Nyquist*: Τα φίλτρα της κατηγορίας αυτής χρησιμοποιούνται πρωτίστως για πολυσταδιακές υλοποιήσεις. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι κάθε L -οστός συντελεστής τους είναι μηδενικός. Το πιο αντιπροσωπευτικό φίλτρο της συγκεκριμένης οικογένειας είναι τα περιφέρμα φίλτρα *Halfband* για τα οποία $L=2$.
- *Φίλτρα Raised-Cosine*: Τα ειδικά αυτά φίλτρα χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για εφαρμογές ψηφιακών δεδομένων. Η απόκριση συχνότητας στη ζώνη διάβασης έχει τη μορφή συνημιτόνου μετατοπισμένο προς τα πάνω κατά μία σταθερά.

A.2 Φίλτρα IIR

Τα φίλτρα *IIR* (*Infinite Impulse Response*) αποτελούν τον έτερο τύπο φίλτρων που χρησιμοποιούνται στην *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. Υφίστανται τόσο στον αναλογικό όσο και στον ψηφιακό κόσμο, ωστόσο, θα εστιάσουμε στα ψηφιακά φίλτρα της κατηγορίας αυτής, των οποίων οι ιδιότητες μπορούν να επεκταθούν και στα αναλογικά. Η απόκριση συχνότητάς (*impulse response*) τους είναι μη μηδενική για απροσδιόριστο (*infinite*) μήκος χρόνου και από την ιδιότητά τους αυτή πηγάζει το όνομά τους.

Ο σχεδιασμός των ψηφιακών φίλτρων *IIR* βασίζεται κατά μεγάλο βαθμό στα αντίστοιχα αναλογικά, καθώς προσφέρονται πολλοί τρόποι και μέθοδοι σχεδιασμού τους, σε αντίθεση με τα ψηφιακά. Για το λόγο αυτό, κατά τη φάση της υλοποίησης ενός ψηφιακού φίλτρου *IIR*, σχεδιάζεται συνήθως το ομώνυμο αναλογικό και, στη συνέχεια, μετατρέπεται σε ψηφιακό μέσω διάφορων τεχνικών *διακριτοποίησης*, όπως ο *Διγραμμικός Μετασχηματισμός* και η *Μέθοδος της Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης*.

Η εξίσωση που συνδέει την είσοδο και την έξοδο ενός φίλτρου *IIR* δίνεται από τη σχέση

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + \dots + b_px[n - P] \\ - a_1y[n - 1] - a_2x[n - 2] - \dots - a_Qy[n - Q].$$

Από την παραπάνω σχέση διαφαίνεται ξεκάθαρα ότι τα φίλτρα *IIR* χρησιμοποιούν ανάδραση για τον υπολογισμό της εξόδου, που βασίζεται στις προηγούμενες εξόδους του φίλτρου. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά που τα χαρακτηρίζει σε σχέση με τα φίλτρα *FIR*.

Αν συμπτύξουμε την παραπάνω σχέση, τότε λαμβάνουμε

$$y[n] = \sum_{i=0}^P b_i x[n - i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n - j]$$

$$\sum_{j=1}^Q a_j y[n - j] = \sum_{i=0}^P b_i x[n - i]$$

υποθέτοντας ότι $a_0=1$. Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Z του φίλτρου, καθώς και τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j}}$$

Ο αριθμός Q προσδιορίζει την τάξη του φίλτρου, το οποίο για να είναι αιτιατό προϋποθέτει ότι $Q \geq P$. Για να είναι ένα τέτοιο φίλτρο ευσταθές, θα πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικού του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο Z .

Το γεγονός ότι τα φίλτρα *IIR* είναι ανδρομικά ή επαναληπτικά παρουσιάζει μεγάλο πλεονέκτημα από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, σε σχέση με τα *FIR* φίλτρα. Με άλλα λόγια, για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές -και επομένως λιγότερη μνήμη- για ένα *IIR* φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο *FIR* φίλτρο.

Ωστόσο, τα φίλτρα *IIR* παρουσιάζουν διάφορα σημαντικά μειονεκτήματα:

- Τα *IIR* φίλτρα είναι ασταθή, αν οι συντελεστές b_i δεν έχουν επιλεγεί σωστά, δηλαδή αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
- Τα *IIR* φίλτρα δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως έχουν τα μη επαναληπτικά *FIR* φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.
- Είναι περισσότερο επιρρεπή σε προβλήματα που ανακύπτουν λόγω της ύπαρξης αριθμητικών στοιχείων πεπερασμένου μήκους, όπως ο θόρυβος που δημιουργείται από τους υπολογισμούς. Το γεγονός αυτό απορρέει ευθέως από την ύπαρξη της αναδρομής, καθώς όταν η έξοδος δεν υπολογίζεται με ακρίβεια, τότε το σφάλμα συσσωρεύεται.
- Είναι δυσκολότερο να υλοποιηθούν όταν χρησιμοποιούνται αριθμητικά στοιχεία σταθερής υποδιαστολής.
- Δεν προσφέρουν τα υπολογιστικά πλεονεκτήματα των φίλτρων *FIR* για εφαρμογές που απαιτούν διαδικασίες, όπως ο αποδεκατισμός και η παρεμβολή.

Κάποια τυπικά φίλτρα *IIR* είναι τα φίλτρα *Butterworth*, *Chebyshev 1^{ov}* και *2^{ov}* τύπου, *Bessel* και τα *Ελλειπτικά* φίλτρα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

B.1 Σχεδιασμός Φίλτρων με Απ' Ευθείας Υλοποίησηση

Υπάρχουν αρκετές μεθοδολογίες με τις οποίες μπορεί να σχεδιαστεί στην πράξη ένα φίλτρο. Αυτή που παρατίθεται στη συγκεκριμένη παράγραφο ακολουθεί την απ' ευθείας υλοποίηση I (*Direct Form-I*), η οποία εφαρμόζεται στα τόσο στα ψηφιακά φίλτρα *FIR* όσο και στα *IIR*.

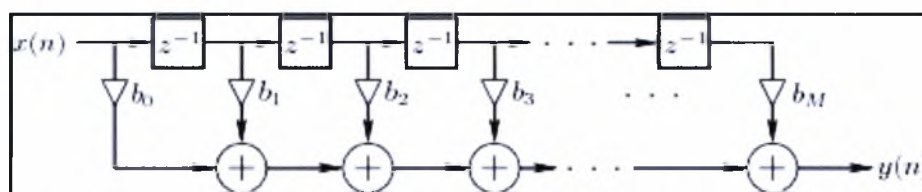
Αν θεωρήσουμε την εξίσωση που περιγράφει τη σχέση εισόδου και εξόδου σε ένα ψηφιακό, τότε για την περίπτωση του φίλτρου *FIR* έχουμε:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_Nx[n-N] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i]$$

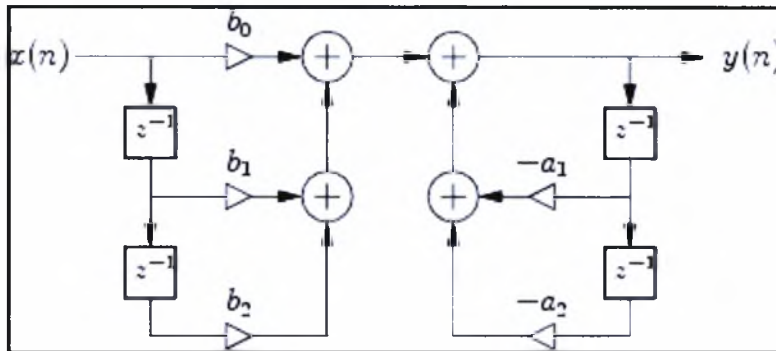
οπότε η μορφή της υλοποίησης του φίλτρου είναι αυτή που παρουσιάζεται στην εικόνα B-1. Στην περίπτωση ενός φίλτρου *IIR* με εξίσωση εισόδου-εξόδου

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_Px[n-P] \\ &\quad - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - \dots - a_Qy[n-Q] \\ &= \sum_{i=0}^P b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n-j] \end{aligned}$$

η υλοποίηση του φίλτρου δίνεται στην εικόνα B-2.



Εικόνα B-1: Άμεση Υλοποίηση I φίλτρου *FIR*



Εικόνα Β-2: Άμεση Υλοποίηση I φίλτρου FIR

Οι ιδιότητες της δομής της απευθείας υλοποίησης συνοψίζονται ως εξής:

- Μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο τμήματα: ένα τμήμα που υλοποιεί τα δύο μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς και ένα τμήμα που υλοποιεί τους δύο πόλους της.
- Στις περισσότερες περιπτώσεις, όπου χρησιμοποιούνται αριθμητικά στοιχεία σταθερής υποδιαστολής, δεν υπάρχει πιθανότητα εσωτερικής υπερχειλίσης του φίλτρου. Με άλλα λόγια, από τη στιγμή που υπάρχει ένα σημείο άθροισης και οι αριθμοί στρογγυλεύονται γύρω από τον μεγαλύτερο θετικό ή το μικρότερο αρνητικό, τότε, εφόσον η έξοδος $y(n)$ βρίσκεται εντός του επιθυμητού εύρους, η υπερχειλίση αποφεύγεται, ακόμα και αν υφίσταται υπερχειλίση στα ενδιάμεσα στάδια της άθροισης. Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική και πολύτιμη, καθώς και μη αναμενόμενη για ένα φίλτρο που υλοποιείται με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία.
- Υπάρχουν διπλάσια στοιχεία καθυστέρησης από αυτά που χρειάζονται στην πραγματικότητα. Το γεγονός αυτό καθιστά την απ' ευθείας υλοποίηση I μη κανονική ως προς την καθυστέρηση. Ωστόσο, γενικά είναι εφικτή η υλοποίηση ενός φίλτρου τάξης N με ισάριθμα στοιχεία καθυστέρησης.
- Οι πόλοι και τα μηδενικά του φίλτρου είναι πολύ ευαίσθητα σε σφάλματα στρογγυλοποίησης στους συντελεστές του. Ενώ δεν αποτελεί σημαντικό πρόβλημα για απλά φίλτρα, όπως το 2^{16} τάξης που παρουσιάζεται στην εικόνα Β-2, μπορεί να προκαλέσει σημαντικές ανωμαλίες σε φίλτρα μεγαλύτερης τάξης. Πρόκειται για την ίδια αριθμητική ευαισθησία που ενέχουν οι ρίζες του πολυωνύμου συναρτήσεως της στρογγυλοποίησης που μπορεί να υποστούν οι συντελεστές του πολυωνύμου. Είναι γνωστό ότι η ευαισθησία αυτή μπορεί να γίνει ακόμη πιο μεγάλη, όταν οι ρίζες απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους, σε αντίθεση με την περίπτωση που βρίσκονται αραιότερα διεσπαρμένες.

B.2 Σχεδιασμός φίλτρων με Απ' Ευθείας Υλοποίηση II

Η κύρια διαφορά της απ' ευθείας υλοποίησης τύπου I με την αντίστοιχη τύπου II (*direct form II*) είναι ότι η δεύτερη είναι *κανονική ως προς την καθυστέρηση*. Η εικόνα B-3 δείχνει σχηματικά τον τρόπο σχεδιασμού με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία, από όπου προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις που συσχετίζουν την είσοδο και την έξοδο του φίλτρου.

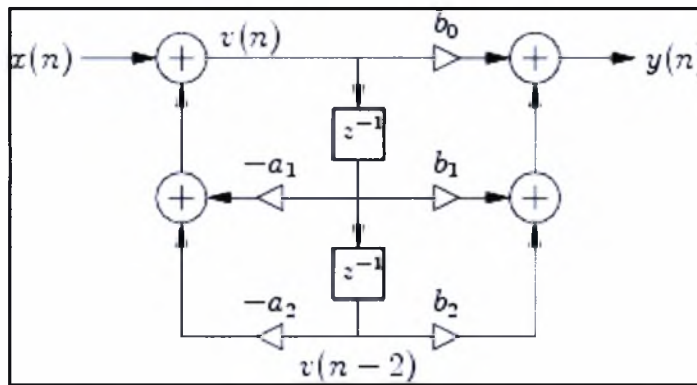
$$v[n] = x[n] - a_1v[n - 1] - a_2v[n - 2]$$

$$y[n] = b_0v[n] + b_1v[n - 1] + b_2v[n - 2].$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να μεταφραστούν ως ένα τμήμα που υλοποιεί τα δύο *μηδενικά* της συνάρτησης μεταφοράς, ακολουθούμενο σε σειρά από ένα τμήμα που υλοποιεί τους *πόλους* της. Ο σχεδιασμός αυτός έρχεται σε αντίθεση με την απ' ευθείας υλοποίηση I, στην οποία το τμήμα των *μηδενικών* της συνάρτησης μεταφοράς προηγείται του τμήματος των *πόλων*. Από τη στιγμή, όμως που, στον μετασχηματισμό Z η υλοποίηση δύο φίλτρων σε σειρά ισούται με ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς όση ο πολλαπλασιασμός τους, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά των δύο τμημάτων και να υλοποιήσουμε πρώτα το τμήμα που περιγράφει τους *πόλους* και, έπειτα, αυτό που περιγράφει τα *μηδενικά* και να τα συνδέσουμε σε σειρά, χωρίς να επέλθει αλλαγή στη συνάρτηση μεταφοράς. Μόλις πραγματοποιηθεί το στάδιο αυτό, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι τα δύο τμήματα του φίλτρου περιέχουν ισάριθμα στοιχεία καθυστέρησης. Ως αποτέλεσμα, είναι εφικτό να μοιραστεί μια μοναδική γραμμή καθυστέρησης μεταξύ των τμημάτων *πόλων* και *μηδενικών*. Αυτός ο συνδυαστικός τρόπος υλοποίησης καλείται ως *απ' ευθείας υλοποίηση II*.

Συνοπτικά, οι ιδιότητες της απ' ευθείας υλοποίησης II είναι οι παρακάτω:

- Είναι *κανονική ως προς την καθυστέρηση*, καθώς τα στοιχεία καθυστέρησης που χρησιμοποιούνται μοιράζονται ανάμεσα στα δύο τμήματα της υλοποίησης.
- Όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία αριθμητικής σταθερής υποδιαστολής, τότε είναι δυνατό να προκύψει υπερχειλίση στη γραμμή της καθυστέρησης, σε αντίθεση με την απ' ευθείας υλοποίηση I.



Εικόνα Β-3: Σχεδιασμός φίλτρου με Απ'ευθείας υλοποίηση II

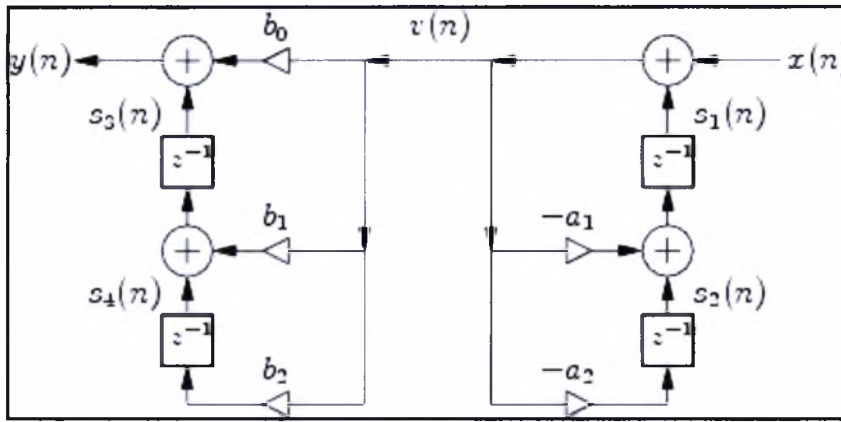
- Όπως συμβαίνει με όλες τις απ' ευθείας υλοποιήσεις, και στην συγκεκριμένη παρουσιάζεται ευαισθησία στα τμήματα μηδενικών και πόλων σε σφάλματα στρογγυλοποίησης στους συντελεστές του φίλτρου.

Β.3 Σχεδιασμός Φίλτρων με Μετατοπισμένη Απ' Ευθείας Υλοποίηση

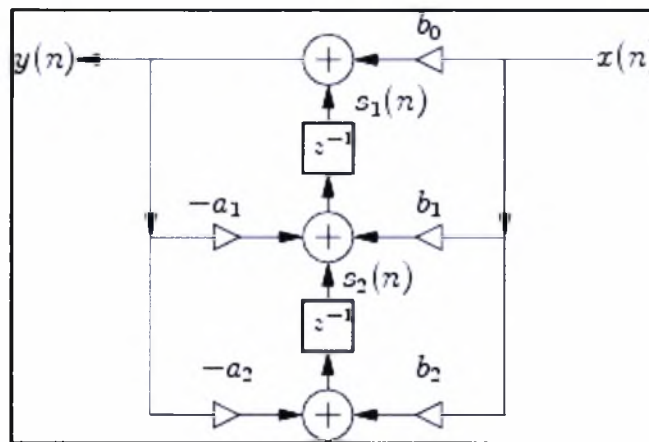
Οι δύο τελευταίες κατηγορίες σχεδιασμού φίλτρων προκύπτουν μετατοπίζοντας τις δύο τελευταίες μεθόδους που συζητήθηκαν προηγουμένως. Η μετατοπισμένη απ' ευθείας υλοποίηση ονομάζεται αλλιώς και αντιστροφή του κατευθυνόμενου γράφου που περιγράφει το σχεδιασμό του φίλτρου, καθώς η μετατόπιση ενός φίλτρου μοναδικής εισόδου – μοναδικής εξόδου (SISO) δεν αλλοιώνει τη συνάρτηση μεταφοράς του.

Η στρατηγική σχεδιασμού ενός φίλτρου χρησιμοποιώντας τη μετατοπισμένη απ' ευθείας υλοποίηση είναι εξαιρετικά απλή. Το μόνο που χρειάζεται είναι να αντιστρέψουμε την κατεύθυνση όλων των μονοπατιών του γράφου και να μετατρέψουμε τους κόμβους διακλάδωσης σε αθροιστές και τους αθροιστές σε κόμβους διακλάδωσης.

Κάποια παραδείγματα σχεδιασμού φίλτρων με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία δίνονται στις εικόνες Β-4 και Β-5.



Εικόνα Β-4: Μετατοπισμένη Απ' Ευθείας Υλοποίηση I φίλτρου IIR



Εικόνα Β-5: Μετατοπισμένη Απ' Ευθείας Υλοποίηση II φίλτρου IIR

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Γ.1 ΠΑΛΜΟΚΩΔΙΚΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

Η παλμοκωδική διαμόρφωση (*Pulse-code modulation - PCM*) είναι μια ψηφιακή αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος, στην οποία το πλάτος του σήματος δειγματοληπτείται ανά προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα και μετά σταθμίζεται σε μια σειρά από ψηφία, ως επί το πλείστον δυαδικά. Η παλμοκωδική διαμόρφωση έχει χρησιμοποιηθεί στα συστήματα ψηφιακής τηλεφωνίας και στα ηλεκτρονικά μουσικά πληκτρολόγια. Αποτελεί, επίσης, την επίσημη μορφή ψηφιακού ήχου στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ακόμα και σε μερικούς ψηφιακούς δίσκους *CD*. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ως πρότυπο σε κάποιες εφαρμογές ψηφιακής εικόνας, που απαιτούν χαμηλή ανάλυση.

Η ιστορία της παλμοκωδικής διαμόρφωσης είναι πολύχρονη. Το 1937 ο Βρετανός μηχανικός *Alec Reeves*, συνέλαβε την ιδέα της χρήσης της για φωνητικές επικοινωνίες, ενώ εργαζόταν για την *International Telephone and Telegraph* στη Γαλλία. Περιέγραψε τη θεωρία και τα προτερήματα που την διέπουν, χωρίς ωστόσο να χρησιμοποιήσει κάποια πρακτικά παραδείγματα. Στη συνέχεια, έκανε αίτηση για να αποκτήσει την πατέντα της ανακάλυψής του, η οποία έγινε δεκτή στη Γαλλία το 1939 και στις Ηνωμένες Πολιτείες το 1943. Την ίδια χρονιά, στα εργαστήρια *Bell Labs* ερευνητές που σχεδίαζαν το σύστημα *SISGALY*¹¹, ανακάλυψαν τη χρήση της δυαδικής παλμοκωδικής διαμόρφωσης, η οποία είχε ήδη προταθεί από τον *Alec Reeves*. Το 1949, για λογαριασμό του συστήματος *DATAR* του Καναδικού Στόλου, η εταιρεία *Ferranti Canada* κατασκεύασε ένα ραδιοφωνικό σύστημα παλμοκωδικής διαμόρφωσης, που ήταν σε θέση να μεταδίδει ψηφιοποιημένα τα δεδομένα των ραντάρ σε πολύ μεγάλες αποστάσεις.

Η διαδικασία της διαμόρφωσης είναι πολύ απλή. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε στην είσοδο ένα ημιτονοειδές σήμα, τότε το δειγματοληπτούμε σε τακτικά χρονικά διαστήματα. Για κάθε δείγμα, επιλέγεται η αντίστοιχη ψηφιακή τιμή y . Η τιμή αυτή μπορεί να επιλεγεί βάση ενός αλγορίθμου (για παράδειγμα στρογγυλοποίηση προς τον εγγύτερο ακέραιο). Στη συνέχεια, η τιμή αυτή αναπαρίσταται με δυαδικά ψηφία από όπου μπορεί να υποστεί περαιτέρω επεξεργασία. Ο αριθμός των δυαδικών

¹¹ Το σύστημα *SISGALY*, αλλιώς γνωστό και ως *X System*, *Project X*, *Ciphony I*, και *Green Hornet* ήταν ένα σύστημα ασφαλούς φωνητικής επικοινωνίας που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου, για την επικοινωνία των Συμμαχικών Δυνάμεων.

ψηφίων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση είναι ο ίδιος για όλα τα δείγματα. Είναι αρκετά σύνηθες, να πολυπλέκονται πολλαπλές ροές δεδομένων *PCM*, δημιουργώντας μια ακόμα μεγαλύτερη ροή δεδομένων, για τη μετάδοση πάνω από μία φυσική σύνδεση. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου* (*Time Division Multiplexing - TDM*) και χρησιμοποιείται ευρέως στα σύγχρονα τηλεφωνικά συστήματα.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για τη δημιουργία ενός συστήματος που να πραγματοποιεί τη λειτουργία της κωδικοποίησης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η συσκευή αυτή υλοποιείται από ένα μοναδικό ολοκληρωμένο κύκλωμα που λειτουργεί ως μετατροπέας αναλογικού σε ψηφιακό.

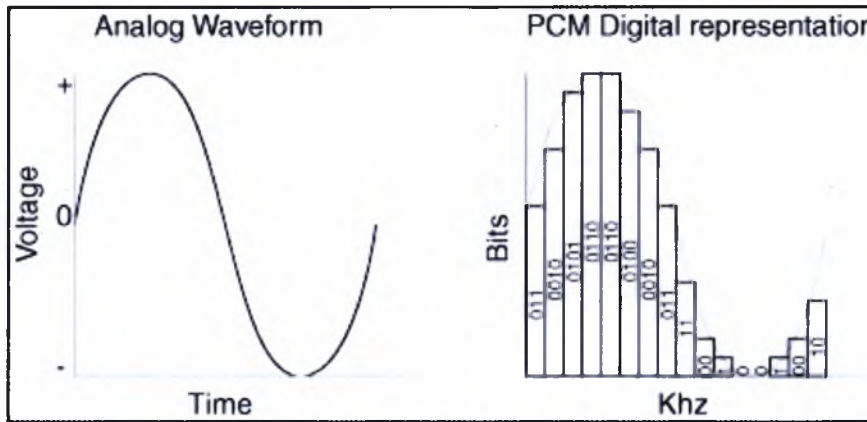
Η παλμοκωδική διαμόρφωση παρουσιάζει μία πηγή εγγενούς εξασθένησης. Συνίσταται στην επιλογή μια διακριτής τιμής για κάθε δείγμα που να βρίσκεται κοντά στην πραγματική τιμή του αντίστοιχου στιγμιότυπου του αναλογικού σήματος, με άλλα λόγια, επιλογή ελαχιστοποίησης του θορύβου στάθμισης. Το σφάλμα στάθμισης κινείται μεταξύ των τιμών $-q/2$ και $q/2$. Στην ιδανική περίπτωση, όταν υλοποιείται ένας πλήρως γραμμικός ΜΑΨ, το σφάλμα είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο διάστημα αυτό, με $p(x) = 1/q$, μηδενική μέση τιμή και διασπορά ίση με $q/12$.

Υπάρχουν αρκετές παραλλαγές της κωδικοποίησης *PCM* που, εκτός από τη μετατροπή το σήματος σε ψηφιακή μορφή, πραγματοποιούν και ταυτόχρονη επεξεργασία του. Κάποιες από αυτές είναι:

1. Η *Διαφορική* (ή *Δέλτα*) *Παλμοκωδική Διαμόρφωση* (*DPCM*), η οποία αναπαριστά το σήμα ως τη διαφορά ανάμεσα στην τρέχουσα και στην προβλεπόμενη τιμή. Ένας αλγόριθμος προβλέπει την επόμενη τιμή του δείγματος, βάσει των προηγούμενων δειγμάτων και ο κωδικοποιητής αποθηκεύει μόνο τη διαφορά ανάμεσα στην πρόβλεψη αυτή και στην πραγματική τιμή. Αν η ποιότητα της εκτίμησης είναι αρκετά καλή, τότε χρησιμοποιούνται λιγότερα δυαδικά ψηφία για να αναπαραστήσουν την ίδια πληροφορία. Για παράδειγμα, όταν στην είσοδο υπάρχει ένα σήμα ήχου, ο τύπος της αναπαράστασης αυτής μπορεί να δώσει έως και 25% λιγότερα δυαδικά ψηφία για κάθε δείγμα, σε σχέση με την απλή παλμοκωδική κωδικοποίηση.

2. Η Προσαρμοσμένη DPCM (*Adaptive DPCM*), η οποία μεταβάλλει το βήμα στάθμισης, έτσι ώστε να επιτρέπεται επιπλέον μείωση του απαιτούμενου εύρους ζώνης για ένα δεδομένο σηματοθορυβικό λόγο.

3. Η Διαμόρφωση Δέλτα.



Εικόνα Γ-1: Αναπαράσταση παλμοκωδικής διαμόρφωσης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Θεοδωρίδης Σ., Μπερμπερίδης Κ., Κοφίδης Λ., *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*, Αθήνα: Εκδόσεις τυπωθήτω, 1998, Ανατύπωση Αθήνα: Εκδόσεις Τυπωθήτω, 2004
- Κουνιάς Σ., Μουσιάδης Χ., *Θεωρία Πιθανοτήτων I*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 1999, Ανατύπωση, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 1999
- Μουστακίδης Γ.Β., *Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2004
- Σκόδρας, Α., Αναστασόπουλος Β., *Εισαγωγή στη Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος και Εικόνας*, Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, 2000
- Anderson, Russel, *Getting the Most out of Delta-Sigma Converters*, Texas Instruments Inc.
- Ball, Stuart, *Analog-to-Digital Converters*, 01/05/01 (προσπελάστηκε την 24/04/2008), διαθέσιμο στην ιστοσελίδα <http://www.embedded.com/story/OEG20010418S0038>, Διαδίκτυο
- Candym, J.C., *Decimation for sigma delta modulation*, IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, Ιανουάριος 1986: 72-76.
- Donadio, Matthew P., *CIC Filter Introduction*, Free Publication by Iowegian, 18 July 2000
- Haykin, Simon, *Συστήματα Επικοινωνίας*, επιμέλεια Συκάς, Ε.Δ., Θεολόγου, Μ.Ε., Αθήνα: Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995
- Hsu, Hwei P., *Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2002
- Hsu, Hwei P., *Fourier Analysis*, New York: Simon and Schuster, 1967, Ανατύπωση, New York: Simon and Schuster, 1970
- Jarman, David, *A Brief Introduction to Sigma Delta Conversion*, Application Note, May 1995, Intersil Corporation
- Norsworthy, Steven R., Schreier, Richard, Temes, Gabor C., *Delta-Sigma Data Converters: Theory, Design and Simulation*, New York: IEEE Press, 1997
- Safarian, Amin Qasem, Sahandi, Farzad, Atarodi, S. Mojtaba, *A New Single-Loop Single-Stage Low Power Sigma-Delta Modulator*, IEEE magazine (017-2002), 215-218
- Sangil, Park, *Principles of Sigma-Delta Modulation for Analog-to-Digital Converters*, Motorola, APR8

MATLAB® Documentation

Ιστοσελίδες

<http://www.wikipedia.org>

<http://www.dsprelated.com>

<http://www.dspguru.com>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091671