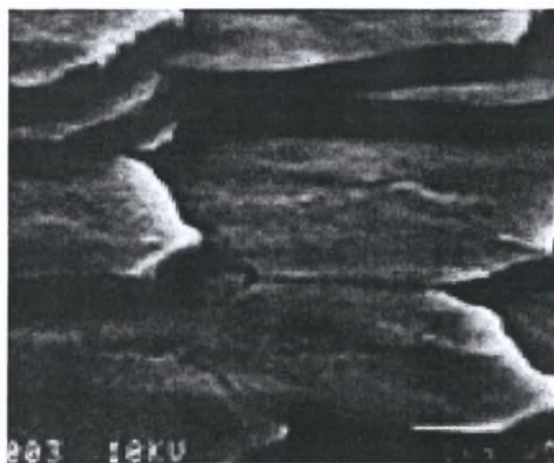
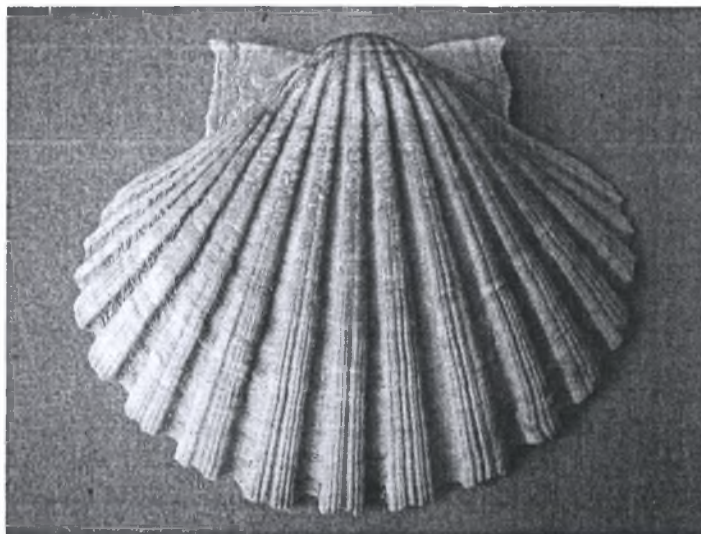


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΠΙΡΡΟΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**  
**ΠΛΑΚΩΝ**



ΕΠΙΜΕΛΗΤΡΙΑ: ΠΟΥΡΝΑΡΑ ΑΓΛΑΪΑ-ΕΥΓΕΝΙΑ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6502/1  
Ημερ. Εισ.: 26-08-2008  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2008  
ΠΟΥ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....1

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ1 (Διάτμηση ορθογωνικών διατομών)

A) Διατμητική τάση  $\sigma_{xz}$ .....3

B) Διατμητική τάση  $\sigma_{xy}$  .....12

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 (Κλασσική ανάλυση πλακών)

Γενικά.....15

Καταστατικοί νόμοι Kirchhoff.....17

Εσωτερική ελαστική ενέργεια (κλασσική ανάλυση).....19

Κατάσωση και αποτελέσματα της Α.Δ.Ε.....22

Τασικές συναρτήσεις Southwell.....36

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 (Ανάλυση πλακών με ελαστικότητα βαθμίδας)

Γενικά.....37

Νέοι καταστατικοί νόμοι και παραδοχές.....38

Νέα εσωτερική ελαστική ενέργεια.....41

Κατάσωση και αποτελέσματα της νέας Α.Δ.Ε.....44

Τασικές συναρτήσεις Southwell (προέκταση στη θεωρία βαθμίδας).....57

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 (Παράδειγμα κυκλικής πλάκας)

4.1.Γενικά.....58

4.2.Παράδειγμα πακτωμένης συμπαγούς πλάκας.

A) Βέλη κάμψης.

1) Κλασσική θεωρία.....61

2) Θεωρία βαθμίδας.....62

B)Κατανομή ροπών.....65

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τελικά συμπεράσματα



# ΕΠΙΡΡΟΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΚΩΝ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πλάκες ονομάζονται οι επίπεδοι φορείς σχετικά λεπτού πάχους που φορτίζονται κυρίως κάθετα στο επίπεδό τους και στηρίζονται γραμμικά ή σημειακά (Κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα Γ.Πενέλης-Κ.Στυλιανίδης).

Επίπεδες πλάκες δεν θεωρούμε μόνο τις πλάκες που τοποθετούμε στις κατασκευές κτηρίων. Πλάκα μπορεί να θεωρηθεί και ένα λεπτότοιχο τοίχωμα με φόρτιση εγκάρσια στη μεγάλη του επιφάνεια. Μία τέτοια φόρτιση θα μπορούσε να προκαλείται από σεισμικές μετατοπίσεις που επιβάλλονται στο κτήριο κατά τη διάρκεια μιας σεισμικής δόνησης.

Άλλα παραδείγματα πλακών βρίσκουμε στον τομέα της νανοτεχνολογίας και εμβιομηχανικής, (τα διαφράγματα, οι ανθρώπινες βαλβίδες, είδη μυών, ανθρώπινοι ιστοί, τα τοιχώματα της καρδιάς, τα κελύφη των οστρακόδερμων). Τα παραπάνω που αναφέραμε μπορεί να θεωρούνται κατά γενική ομολογία, κελύφη, αλλά σαν μια αρχική προσέγγιση θεωρούνται πλάκες με πολύπλοκότερες διαφορικές εξισώσεις και δύσκολες συνοριακές συνθήκες. Η πολυπλοκότητα αυτή οφείλεται εν μέρει στην παρουσία έργων νέων δυναμικών και κινηματικών μεγεθών.

Τα καινούργια δυναμικά μεγέθη θεωρούνται δυνάμεις, ροπές, κτλ ίσες και αντίθετες μεταξύ τους οι οποίες δεν παίρνουν μέρος στις εξισώσεις ισορροπίας, γιατί αλληλοαναιρούνται, αλλά παράγουν έργο, και προσδίδουν ενέργεια! Στη ουσία σε πιο μαθηματική προσέγγιση αυτά τα μεγέθη αποτελούν τις παραγώγους των δυνάμεων κτλ που εμφανίζονται καθώς τείνουμε πολύ κοντά στο σημείο που εξετάζουμε. Τα μεγέθη αυτά τα ονομάζουμε δίπολα τα οποία με την κλασσική θεωρία της μηχανικής προσπαθούμε να τα αμελήσουμε γιατί αυτοισσοροπούνται.

Ένα καλό παράδειγμα διπόλου είναι το τσίμπημα από δύο δάχτυλα (αντιχειρας και δείκτης) στο χέρι. Οι δυνάμεις αυτές που ασκούνται από τα δύο δάχτυλα στο ανασηκώμένο δέρμα είναι ίσες και αντίθετες και θα έπρεπε να αλληλοαναιρούνται. Το ερώτημα όμως είναι: γιατί επιδρούν σε μία μεγάλη περιοχή και πονάμε?

Ένα άλλο παράδειγμα είναι μία ομογενής λεπτότοιχη διατομή μονού T. Όπως έχουμε μάθει στην κλασσική θεωρία της μηχανικής τη διάτμηση την αναλαμβάνει ο κορμός της διατομής. Όμως οι τάσεις των πελμάτων ενώ είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται παράγουν έργο, σχηματίζεται δηλαδή ένα «δίπολο» στην πάνω πλευρά της διατομής. Εν τούτοις η αντίστοιχη ενέργεια δεν λαμβάνεται υπ' όψη στην κλασσική θεωρία. Τα αποτελέσματα της ύπαρξης του διπόλου γίνονται εμφανή όταν υπόκειται η διατομή σε κάμψη και στρέψη εξαιτίας των οποίων έχουμε και διάτμηση.

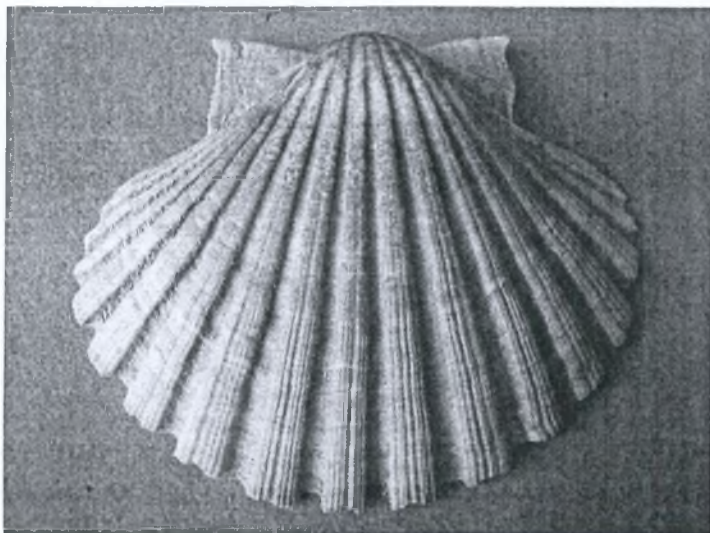
Επίσης ένα άλλο παράδειγμα που εμφανίζονται παρόμοια διπολικά μεγέθη είναι τα υφάσματα. Μερικά είδη υφασμάτων θεωρούνται πλάκες κατά μία καλή προσέγγιση. Τα υφάσματα είναι αρκετά πολύπλοκες «κατασκευές» και οι κλασσικές θεωρίες αδυνατούν να δώσουν κάποιες γενικές απαντήσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί αποτελούνται από πολλές ίνες οι οποίες αλληλοσυνδέονται περίπλοκα με αποτέλεσμα

να δυσκολεύει η ανάλυση της διάτμησης, η οποία εμφανίζεται και στα σημεία επαφής των ινών.

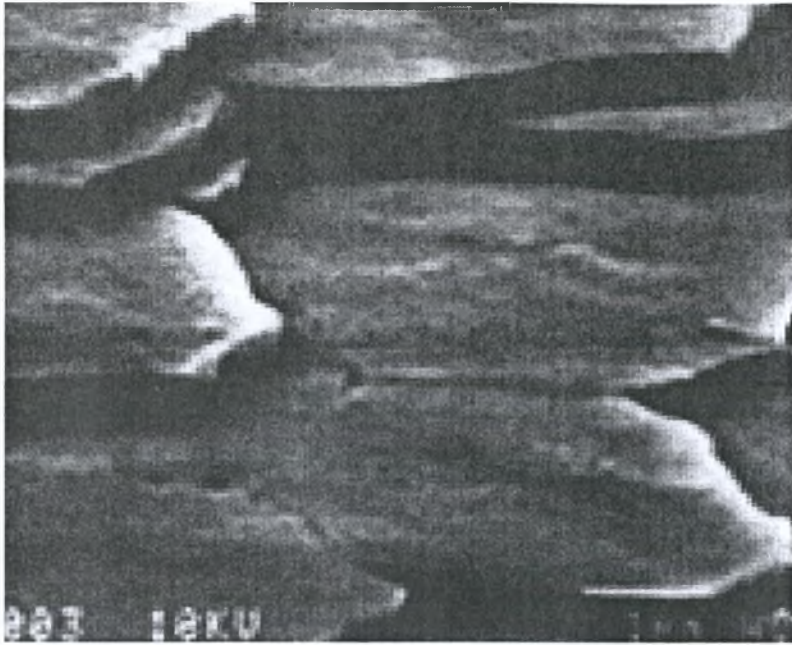
Σε αυτή την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε και μια μεταλλική αλυσίδα ποδηλάτου, η οποία αποτελείται από περιπλεγμένες μεταλλικές ίνες, μια απλή μεταλλική αλυσίδα που αποτελείται από περιπλεγμένους μεταλλικούς κρίκους, ή ακόμη και ένα συρματοπλέγμα

Βλέπουμε λοιπόν ότι η φύση χρησιμοποιεί τα δίπολα σαν τρόπους δημιουργίας αποτελεσματικών «μηχανών». Ένα τρανταχτό παράδειγμα είναι η καρδιά. Η καρδιά είναι μία αντλία, μία μηχανή η οποία σε αντίθεση με τις κλασικές τεχνητές μηχανές δεν έχει στηρίξεις ή εμφανείς αρθρώσεις για να μεταδίδεται η ενέργεια ώστε να γίνονται οι συσπάσεις. Έτσι λοιπόν είναι λογικό να αναρωτιέται κανείς πώς αυτή η τόσο σημαντική μηχανή λαβαίνει ενέργεια για να την μετατρέψει σε μηχανικό έργο. Η απάντηση δεν είναι τόσο εμφανής. Η κινητήριος ενέργεια μετατρέπεται σε κάποιες αυτοισορροπούμενες δυνάμεις που εμφανίζονται στα λεπτά τοιχώματα του οργάνου, τα γνωστά δίπολα. Η σύσπασή της οφείλεται στην αυτοένταση που προσδίδουν τα δίπολα.

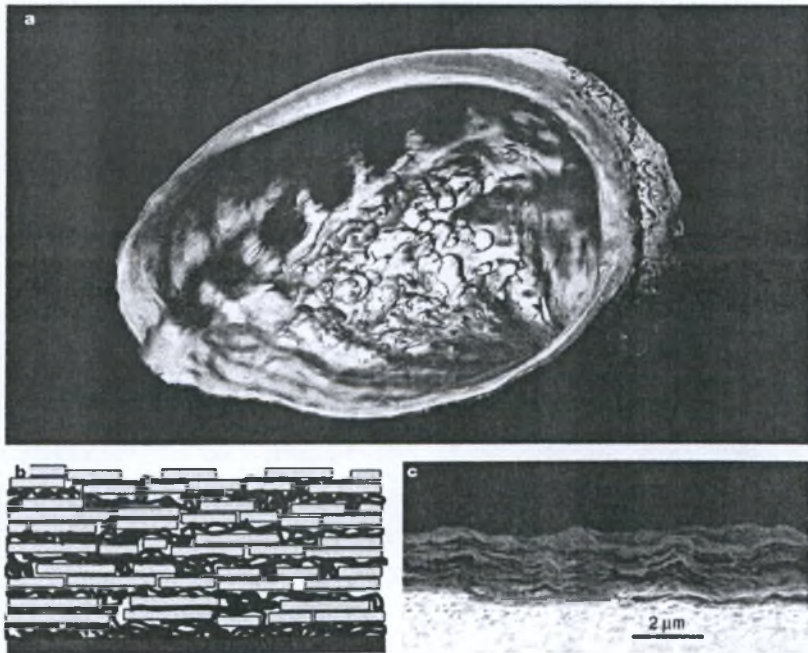
Επίσης παρόμοια θέματα εμφανίζονται και στα κοχύλια. Αναρωτιέται κανείς πώς τόσο λεπτές και μικρές κατασκευές έχουν τόσο μεγάλες ακαμψίες και αντοχές. Λόγω της μεγάλης επιρροής της μικροδομής τους, δεδομένου ότι μιλάμε για τόσο μικρές κλίμακες, δημιουργούνται εσωτερικοί μηχανισμοί από δίπολα και δίροπα που όπως θα δούμε βοηθούν στην αύξηση της συνολικής ακαμψίας του υλικού. Η μικροδομή αποτελείται πρώτον από κατακόρυφες πτυχώσεις οι οποίες είναι μακροσκοπικά εμφανείς και δεύτερον από μικροσκοπικά πλακίδια κατά την οριζόντια διεύθυνση. (βλ.εικόνες 1, 2, 3)



Εικόνα1.Κοχύλι. Παρατηρούμε πτυχώσεις σε πολλαπλές κλίμακες  
( [giotavita.blogspot.com](http://giotavita.blogspot.com))



Εικόνα 2. Μικροδομή κοχυλιού στην οποία παρατηρούμε πλακίδια πλάτους αρκετών μικρομέτρων. ([www.cogito.org](http://www.cogito.org))



Εικόνα 3. Μικροδομή κοχυλιού. Παρατητούμε τη μικροδομή σε πολλαπλές στρώσεις. ([www.nature.com](http://www.nature.com))

Για την επίλυση κατασκευών με τις κλασσικές θεωρίες αποδεχόμαστε ουσιαστικά κάποια **θεωρία μέσου όρου** επειδή οι κλίμακες που αναφερόμαστε είναι μεγάλες όπου η επιρροή της μικροδομής μπορεί να αμεληθεί. Πολλές εξισώσεις της στατικής κρύβουν θεωρίες μέσου όρου (π.χ.ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων σε μία διατομή κτλ.).

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα κάτω από ποιες κλίμακες και σε τι ποσοστό ισχύουν οι μέσοι όροι.

Παρόμοια με τη μηχανική, οι θεωρίες μέσου όρου απασχολούν και τη στατιστική. Παράγοντες όπως το μέγεθος του αντιπροσωπευτικού δείγματος ανομοιογενούς υλικού, η διασπορά του κτλ καθορίζουν την καταλληλότητά του και την επιτυχία των κλασσικών στατιστικών αποτελεσμάτων όσον αφορά την αντιπροσωπευτικότητά τους.

Η διάτμηση για την οποία θα μιλήσουμε, είτε από κάμψη είτε από στρέψη είναι ένα ζήτημα το οποίο προκαλεί την εμφάνιση φαινομένων κλίμακας στους φορείς με αποτέλεσμα να μην επαρκούν οι κλασσικές θεωρίες που βασίζονται στις απλές θεωρίες μέσου όρου. Ένα παράδειγμα φαινομένου κλίμακας βλέπουμε στο σπλισμένο σκυρόδεμα σε ένα κομμάτι πλάκας: η απόσταση διαδοχικών σκύρων, ή η απόσταση διαδοχικών εγκάρσιων συνδετήρων σε σχέση με το πάχος της πλάκας.

Στη νέα θεωρία πλακών που θα εξετάσουμε (κεφαλαίο3) λαβαίνουμε υπ'όψη τα φαινόμενα κλίμακας και ουσιαστικά την επιρροή της μικροδομής του υλικού στη συμπεριφορά του. Εφόσον όλα τα υλικά έχουν μικροδομή επιλέγουμε να την εισάγουμε στη νέα θεωρία με έναν συστηματικό τρόπο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν δεν λάβουμε υπ'όψη τα φαινόμενα κλίμακας με προσοχή θα παραμείνουμε σε επίπεδο εμπειρισμού και γενικολογιών, όπως οι κανονισμοί οι οποίοι είναι συχνά εμπειρικοί, γενικευμένοι και όχι πάντα επαρκώς τεκμηριωμένοι από ανάλυση.

Για να δείξουμε πειραματικά την επιρροή των φαινομένων αυτών θα πρέπει να κατασκευάσουμε σώματα που να αναδεικνύουν τις απαιτούμενες κλίμακες.

- Στο κεφάλαιο 1 θα ασχοληθούμε με το φαινόμενο της διάτμησης σε ορθογωνικές πεπλατισμένες δοκούς και θα δείξουμε τις αλλαγές της κατανομής των διατμητικών τάσεων ανάλογα με την αυξομείωση του λόγου των πλευρών της διατομής. Θα δώσουμε επίσης κάποια παραδείγματα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εμφάνιση διατμητικών τάσεων και στις δύο κατευθύνσεις.
- Στο κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την κλασσική ανάλυση πλακών αναγνωρίζοντας τα εντατικά συζυγή μεγέθη, προσδιορίζοντας την εσωτερική ελαστική ενέργεια, τα εξωτερικά έργα και τις συνοριακές συνθήκες μέσα από την αρχή των δυνατών έργων που καταστρώσαμε.
- Στο κεφάλαιο 3 θα ασχοληθούμε με τη νέα **θεωρία της ελαστικότητας βαθμίδας** όπου εισάγοντας την μικροδομή του υλικού βρίσκουμε μία καινούργια διαφορική εξίσωση πλάκας, αναγνωρίζουμε την εσωτερική ελαστική ενέργεια, τα νέα συζυγή μεγέθη, τα διπολικά έργα και τις νέες συνοριακές συνθήκες.
- Στο κεφάλαιο 4 θα λύσουμε ένα παράδειγμα κυκλικής πλάκας με την κλασσική θεωρία και τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας.
- Στο κεφάλαιο 5 θα κάνουμε μία σύνοψη νέων αποτελεσμάτων.
- Παραρτήματα



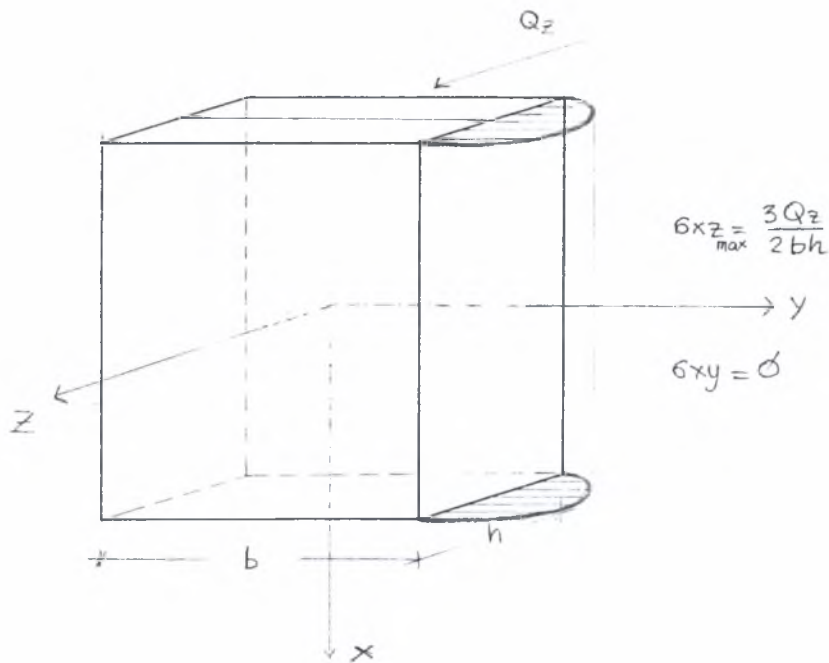
- Βιβλιογραφία

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

### ΔΙΑΤΜΗΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

#### A) ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ $\sigma_{xz}$

Η κλασική ανάλυση μας λέει ότι η διατμητική τάση  $\sigma_{xz}$  κατά τον άξονα x (κατά ύψος ενός τοιχείου π.χ.) έχει παραβολική κατανομή με μέγιστη τιμή στο μέσον του ύψους  $\sigma_{xz\max} = \frac{3 Q_z}{2 bh}$  (βλ. Σχήμα 1.1)



Σχήμα 1.1 Κατανομή  $\sigma_{xz}$  καθ' ύψος του δομικού στοιχείου.

Στη διατομή  $zy$  (βλ. σχήμα 1.1) εξετάζουμε την κατανομή της  $\sigma_{xz}$  κατά τον  $y$  άξονα και για  $z=0$ . Ενώ η κλασική θεωρία υποστηρίζει ότι οι τάσεις αυτές παραμένουν σταθερές κατα μήκος του  $y$  και ίσες μαλιστα με  $\sigma_{xz\max} = \frac{3 Q_z}{2 bh}$ , βλέπουμε ότι αυτό δεν ισχύει ( Sokolnikoff 1956) [1].

Έχουμε την έκφραση των διατμητικών τάσεων για δοκό με σταθερή τέμνουσα:

$$\sigma_{xz}(y,0) = \frac{3 Q_z}{2 A} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{\nu}{(1+\nu)} \left(\frac{b}{h}\right)^2 - \frac{4}{\pi^2} \frac{\nu}{(1+\nu)} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos(kny)}{\cosh\left(kn \frac{h}{2}\right)} + \frac{4\nu}{(1+\nu)} \left(\frac{\nu}{h}\right)^2 \right\} \quad (1.1)$$

Όπου  $h = \eta$  μικρότερη διάσταση της λεπτότοιχης διατομής

$b = \eta$  μεγαλύτερη διάσταση -//- -//- -//-

$A =$  το εμβαδόν της διατομής

Τροποποιώντας την (1.1) έχουμε τους παρακάτω βοηθητικούς συντελεστές:

$$\alpha_1^* = \left(\frac{1}{h/b}\right)^2 \left( 1 + \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta}}{\eta^2} \frac{1}{\cosh \frac{\eta \pi h}{b}} \right)$$

$$\alpha_2^* = \left(\frac{1}{h/b}\right)^2 \left( 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{\cosh \frac{\eta \pi h}{b}} \right)$$

Οι παραπάνω αδιάστατες μεταβλητές συμπεριλαμβάνονται στους παρακάτω τελικούς τύπους:

1. Αναλογία διατμητικής τάσης στο μέσον από τη max τιμή της:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\nu}{3(1+\nu)} \alpha_1^* = \frac{\sigma_{xz}(0,0)}{\frac{3 Q_z}{2 bh}} \quad (1.2)$$

2. Αναλογία διατμητικής τάσης στο σύνορο από τη max τιμή της:

$$\alpha_2 = 1 + \frac{2\nu}{3(1+\nu)} \alpha_2^* = \frac{\sigma_{xz}\left(\pm \frac{b}{2}, 0\right)}{\frac{3 Q_z}{2 bh}} \quad (1.3)$$

Οι παραπάνω αδιάστατες μεταβλητές  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  δείχνουν τις σχέσεις των διατμητικών τάσεων στο μέσο της διατομής και στο σύνορο αντίστοιχα, με την τιμή max που θα έπρεπε να είναι ίσες.

Πίνακας 1.1 Οι τιμές  $\alpha_1^*$  και  $\alpha_2^*$  για κάθε υλικό (λόγο Poisson  $\nu$ ) για διαφορετικούς λόγους διαστάσεων μιας λεπτότοιχης διατομής.

h/b	0.2	0.5	1	1.5	2
$\alpha_1^*$	3,051	2,163	0,906	0,439	0,251
$\alpha_2^*$	9,931	2,989	0,943	0,435	0,24

Διαπιστώνουμε ότι οι τάσεις στο μέσον είναι μικρότερες από τη max τιμή της  $\sigma_{xz}$  και όσο προχωράμε προς τα άκρα της διατομής γίνονται μεγαλύτερες από αυτήν (πίνακας 1.1). Γεγονός που σημαίνει ότι το δομικό μας στοιχείο ενδεχομένως υστερεί λόγω διάτμησης στα άκρα, αφού εμείς έχουμε υπολογίσει με βάση την

$$\sigma_{xz_{max}} = \frac{3 Q_z}{2 bh}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι όσο πιο λεπτότοιχη η διατομή μας τόσο πιο μεγάλη είναι η μεταβολή της  $\sigma_{xz}$  από τη μέση της διατομής μέχρι το σύνορο (πίνακας 1.1). Βλέπουμε επίσης ότι η μεταβολή για λόγο πλευρών 0,2 είναι πολύ μεγάλη (σχήμα 1.2).

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε κάνει σημαντική παράληψη με την παραδοχή ότι η  $\sigma_{xz}$  μένει σταθερή κατά  $y$  με αποτέλεσμα να μην έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα όσον αφορά την αντοχή σε διάτμηση κυρίως στα ακρα, όπου οι διατμητικές τάσεις αυξάνονται. Για λόγο Poisson  $\nu=0$  δεν χρειάζεται διόρθωση των διατμητικών τάσεων. Όσο το  $\nu$  αυξάνεται τόσο πιο συμπιεστό είναι ένα υλικό, επομένως η μεγαλύτερη μεταβολή της  $\sigma_{xz}$  είναι για  $\nu=0.5$ .

Μετασχηματίζουμε την (1.1) αυτή την φορά για να δείξουμε την πορεία της κατανομής της  $\sigma_{xz}$  κατά τον  $y$  άξονα της διατομής.

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\mu\epsilon \quad \sigma_{xz}(y,0) = \frac{3 Q_z}{2 A} \left\{ 1 + \frac{4\nu}{(1+\nu)} \alpha_3^* \right\} \quad (1.4)$$

$$\text{Οπου } \alpha_3^* = -\frac{1}{12} \left( \frac{b}{h} \right)^2 - \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{b}{h} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\cos(kny)}{\cosh\left(kn \frac{h}{2}\right)} + \left( \frac{y}{h} \right)^2$$

Πίνακας 1.2 Η τιμή του  $\alpha_3^*$  σε διαφορες διατομες από το μέσον της διατομής μέχρι το σύνορο μας δίνει την κατανομή των διατμητικών τάσεων.

h/b	0,2			0,5			1		
y/b	0,125	0,25	0,375	0,125	0,25	0,375	0,125	0,25	0,375
$\alpha_3^*$	-0,239	-0,211	0,551	-0,157	-0,075	0,1159	-0,0617	-0,0204	0,0511

Τελικά αποδεικνύεται ότι η μορφή της κατανομής των τάσεων από το μέσο της διατομής μέχρι το σύνορο είναι κάπως παραβολική (πίνακας 1.2).

Παρατηρούμε επίσης ότι ο μέσος όρος της κατανομής της  $\sigma_{xz}$  είναι η max τιμή

$\sigma_{xzmax} = \frac{3 Q_z}{2 bh}$  που δεχόμαστε με την κλασσική μηχανική η οποία στην προκειμένη περίπτωση στηρίζεται σε θεωρία «μέσου όρου».

Η θεωρία «μέσου όρου» είναι μία κλασσική γραμμική διδιάστατη θεωρία κατά την οποία οι ορθές τάσεις εμφανίζονται κυρίως από κάμψη. Οι διατμητικές τάσεις επειδή έχουν πολυπλοκότητα και μερικές απ'αυτές δεν συμπεριλαμβάνονται στην κλασσική «στατική» των κατασκευών.(βλ διατμητικές τάσεις  $\sigma_{xy}$  σελ 12)

**Παράδειγμα1:**

Επιλέγουμε ένα υλικό με  $\nu=0,3$

Για διατομή με λογο πλευρών  $h/b=1$  από τον πίνακα 1.1 έχουμε:

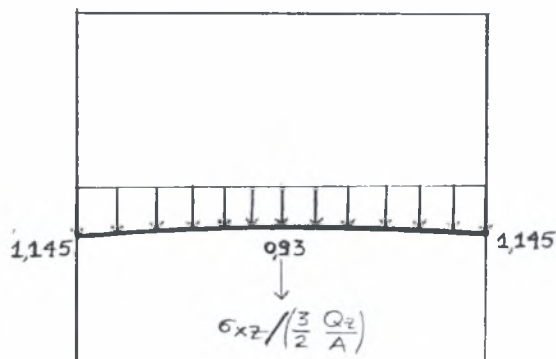
$$\alpha_1^* = 0,906$$

$$\alpha_2^* = 0,943$$

Έτσι με αντικατάσταση στην (1.1) και (1.2) έχουμε:

$$\alpha_1 = 0,93 \Rightarrow \frac{\sigma_{xz}(0,0)}{\frac{3 Q_z}{2 A}} = 0,93 \text{ και } \alpha_2 = 1,145 \Rightarrow \frac{\sigma_{xz}\left(\pm \frac{b}{h}, 0\right)}{\frac{3 Q_z}{2 A}} = 1,145$$

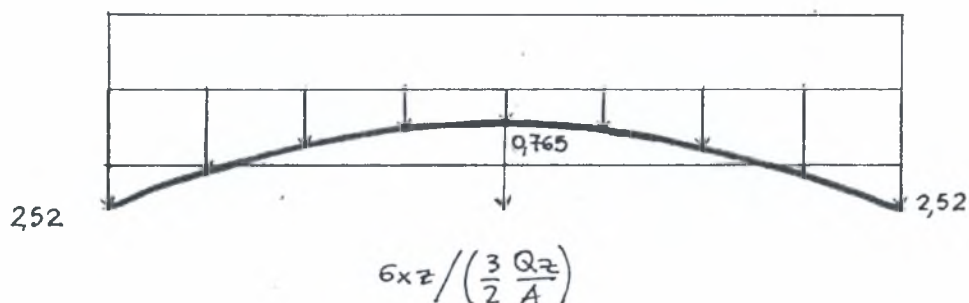
και η κατανομή είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα1.2. Κατανομή διατμητικών τάσεων σε τετραγωνική διατομή δοκού (για  $h/b=1$ ) και  $\nu=0,3$ .

### Παράδειγμα2:

Με το ίδιο υλικό  $\nu=0,3$  και λόγο πλευρών  $h/b=0,2$  έχουμε κατά τον ίδιο τρόπο  $\alpha_1 = 0,765$  και  $\alpha_2 = 2,527$  και η κατανομή φαίνεται στο σχήμα 1.3



Σχήμα1.3. Κατανομή διατμητικών τάσεων σε διατομή με λόγο πλευρών  $h/b=0,2$  και  $\nu=0,3$

Συμπερασματικά είναι λογικό οι άοπλες τοιχοποιίες να υποφέρουν από διάτμηση στα άκρα εάν η δύναμη (σεισμική δυναμική κτλ) ασκηθεί κάθετα στη μεγάλη διάσταση.

Βλέπουμε λοιπόν ότι από τα παλιά χρόνια είχε παρατηρηθεί το πρόβλημα της διάτμησης κυρίως στις γωνίες των κατασκευών γι αυτό και στα παλιά παραδοσιακά κτήρια οι γωνίες είναι καθ'ύψος ενισχυμένες με καλαίσθητες πέτρες ή «αγκωνάρια» όχι μόνο από αισθητική άποψη όπως είδαμε αλλά και από άποψη ασφάλειας.

(βλ εικόνες1.1, 1.2,1.3)

Ενισχυμένες γωνίες τοιχωμάτων σε κτήρια:



Εικόνα 1.1. Πύργος Ρεθύμνου



Εικόνα 1.2. Ζαχάρω Ηλείας



Εικόνα 1.3. Χαλκίδα

## B) ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ $\sigma_{xy}$

Εκτός βέβαια από το θέμα της διατμητικής τάσης  $\sigma_{xz}$  σε μία διατομή δοκού θα εξετάσουμε και το θέμα της διατμητικής  $\sigma_{xy}$  η οποία θεωρείται μηδενική σε όλο το μήκος της δοκού στην κλασική θεωρία. Αυτό συμβαίνει γιατί εξετάζουμε συνήθως υψίκορμες δοκούς όπου και η επιρροή των  $\sigma_{xy}$ , σχετικά με τη διεύθυνση εφαρμογής του φορτίου, είναι τόσο μικρή που θεωρείται αμελητέα. Θα δούμε όμως ότι όσο η διατομή γίνεται πιο πεπλατισμένη, δηλαδή ο λόγος των πλευρών της  $h/b$  μειώνεται και δεδομένου ότι το φορτίο ασκείται εγκάρσια στη μεγαλύτερη διάσταση ( $h$ ), η  $\sigma_{xy}$  γίνεται σημαντική. Ισχύει:

$$\sigma_{xy}(y,z) = \frac{Q_z}{bh} \frac{6}{\pi^2} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh \frac{2n\pi z}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{b}} \sin \frac{2n\pi y}{b} \Rightarrow \quad (1.5)$$

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μία αρκετά λεπτότοιχη διατομή (λόγος πλευρών  $h/b=0,2$ ) στην οποία δείξαμε παραπάνω και ένα παράδειγμα κατανομής της διατμητικής τάσης  $\sigma_{xz}$  ώστε να γίνουν πιο εμφανή τα αποτελέσματα.

Έχουμε λοιπόν ένα υλικό με  $\nu=0,3$  και θέλουμε την κατανομή της  $\sigma_{xy}$  κατά μήκος του άξονα  $y$  στο σημείο  $z=h/4$  της διατομής (βλ σχήμα 1.4). Έτσι θεωρούμε:

$$\frac{\sigma_{xy}(y,z)}{\frac{Q_z}{bh}} = \alpha_4 \quad (1.6)$$

$$\text{όπου } \alpha_4 = \frac{6}{\pi^2} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh \frac{2n\pi z}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{b}} \sin \frac{2n\pi y}{b} \quad (1.7)$$

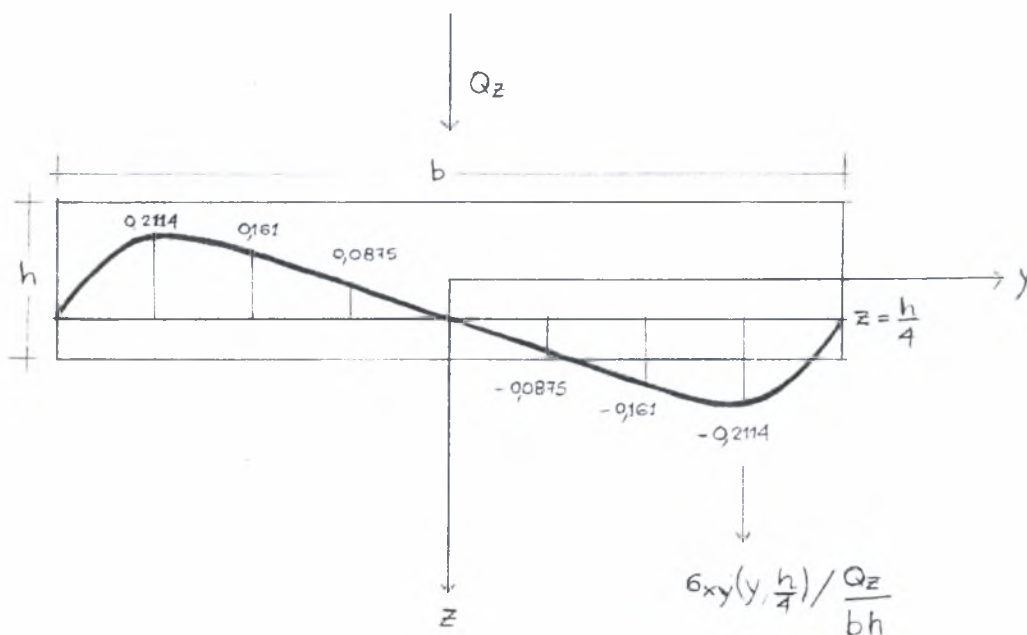
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα για το πρόβλημά μας δηλαδή το υλικό, το λόγο των πλευρών της διατομής κτλ στην (1.7) και έχουμε: (βλ. Πίνακα 1.3 και σχήμα 1.4)

$$\alpha_4 = 0,702165 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh 0,1n\pi}{\cosh 0,2n\pi} \sin \frac{2n\pi y}{b}$$



Πίνακας 1.3 Οι τιμές  $\alpha_4$  για την κατανομή διατμητικών τάσεων κατά μήκος του άξονα  $y$  και  $z=h/4$  για υλικό  $\nu=0,3$  και λόγο πλευρών διατομής  $h/b=0,2$

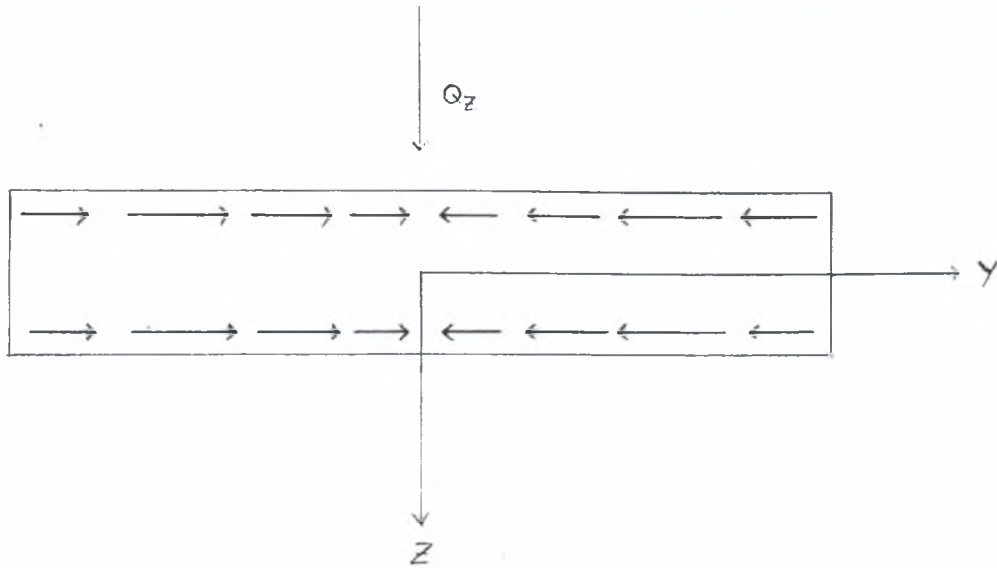
$y/b$	-0,5	-0,375	-0,25	-0,125	0	0,125	0,25	0,375	0,5
$\alpha_4$	0	0,2114	0,161	0,0875	0	-0,0875	-0,161	-0,2114	0



Σχήμα.1.4 Κατανομή διατμητικής τάσης  $\sigma_{xy}$  κατά  $y$  με φόρτιση  $Q_z$ .

Όπως παρατηρούμε, η κατανομή εμφανίζεται κατά μήκος του άξονα  $y$  και το εμβαδόν της αυξάνεται με τη μείωση του λόγου των πλευρών της διατομής, είναι σχεδόν γραμμική ως προς  $y$  και αντισυμμετρική ως προς τον άξονα  $z$ . Προφανώς η  $\sigma_{xy}$  αυτοισορροπεί. (πίνακας 1.3, σχήμα 1.4).

Επίσης η κατανομή στον  $z=h/4$  παραμένει σταθερή κατά μήκος του άξονα  $x$  (ο διαμήκης άξονας του στοιχείου), δεδομένου ότι έχουμε σταθερή τέμνουσα σε εκείνη την περιοχή (πχ πρόβολος με ένα σταθερό φορτίο στο άκρο). Παρατηρούμε επίσης από την (1.5) ότι η κατανομή της  $\sigma_{xy}$  μηδενίζεται όταν  $z \rightarrow 0$  και  $z \rightarrow \pm \frac{h}{2}$



Σχήμα 1.5 Εμφάνιση «διπόλων» στην κατανομή της  $\sigma_{xy}$  κατά τη φόρτιση με  $Q_z$ .

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 1.5 οι «διπολικές» τάσεις  $\sigma_{xy}$  αλληλοεξουδετερώνονται από άποψη ισορροπίας γιατί το εμβαδόν της κατανομής αριστερά και δεξιά του κέντρου των αξόνων είναι ίδιο αλλά αντίθετο. Παρόλ'αυτά οι τάσεις αυτές παράγουν κάποια ενέργεια η οποία είναι:

$$U_d = \frac{1}{2} \iint_A \sigma_{xy} \gamma_{xy} dydz = \frac{1}{2G} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_{xy})^2 dydz$$

όπου  $\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$  η διατμητική τροπή

Η παραπάνω ενέργεια ονομάζεται διπολική και δεν έχει συμπεριληφθεί στους τύπους της στατικής ούτε και στα έργα των διατμητικών δυνάμεων.

Τέτοιου είδους διπολική ενέργεια εισάγεται κατά κάποιο τρόπο και μέσω της μικροδομής του υλικού που λαβαίνουμε υπ'όψη στη νέα θεωρία πλακών για την οποία θα μιλήσουμε στο κεφάλαιο 3.

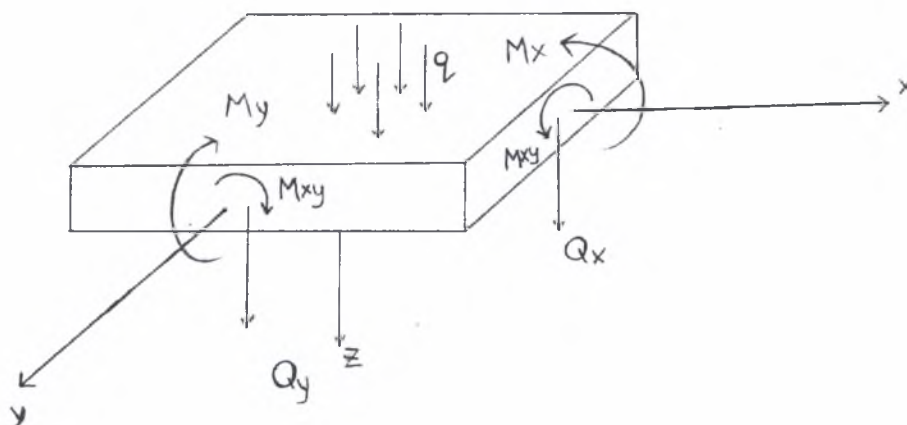
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ (ΠΛΑΚΕΣ KIRCHHOFF)

Οι πλάκες Kirchhoff στην κλασσική ανάλυση [2,3] βασίζονται στη θεωρία μικρών παραμορφώσεων.

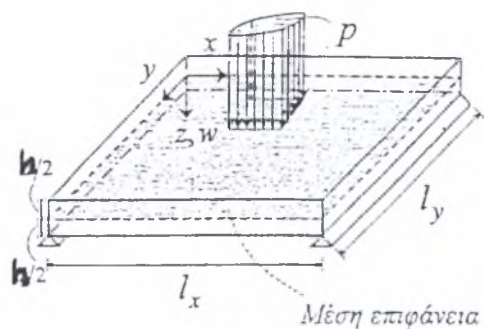
#### **Παραδοχές:**

- Επιπεδότητα διατομών και στις δύο διευθύνσεις για πλάκες (Bernoulli-Kirchhoff) όχι όμως στις άκρες των στοιχείων ή σε σημεία εφαρμογής φορτίων (Saint Venant).
- Συνάρτηση στρέβλωσης (Pradtl) στο χώρο αμελείται.



Σχήμα 2.1 Δομικό στοιχείο ομοιόμορφα φορτιζόμενης πλάκας.

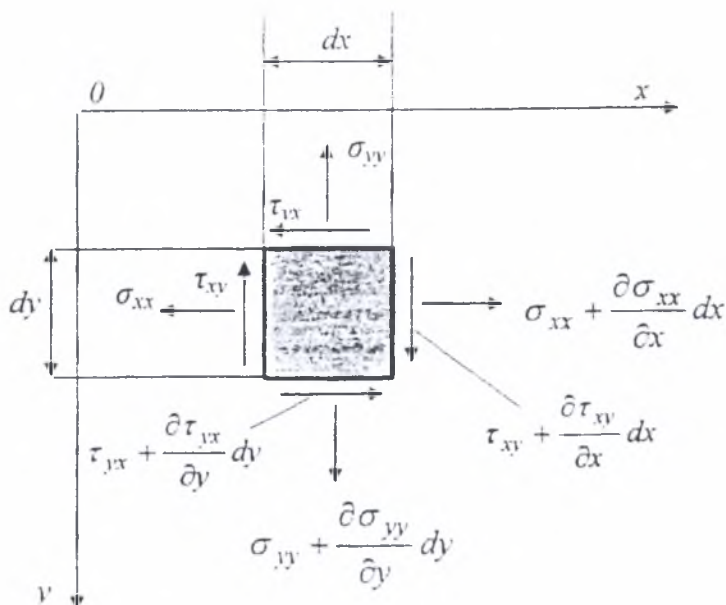
Τα φορτία που ασκούνται στην πλάκα θεωρούμε ότι είναι μαζικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στη μέση επιφάνεια της πλάκας και συμπεριλαμβάνονται στις εξισώσεις ισορροπίας. (βλ σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2 Μέση επιφάνεια ομοιόμορφα φορτιζόμενης πλάκας. (Ι.Σαπουντζάκης Θεωρία Πλακών)

Στις πλάκες που εμείς θα μελετήσουμε δεν λαβαίνουμε υπ'όψη τις τάσεις κατά τη διάσταση του πάχους της πλάκας. Παρόλ'αυτά η τάση  $\sigma_{zz}$  θεωρείται μαζική και μπαίνει στις εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας.

Θα εξετάσουμε δηλαδή το πρόβλημα της επίπεδης έντασης με την  $\sigma_{zz}=0$  χωρίς αυτό να αποκλείει ότι και η παραμόρφωση κατ'αυτή τη διεύθυνση θα είναι μηδενική από τους καταστατικούς νόμους του Hooke. (βλ σχήμα 2.3)



Σχήμα 2.3 Πρόβλημα πλάκας με επίπεδη ένταση. (Ι.Σαπουντζάκης Θεωρία Πλακών).

Επομένως έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της πλάκας με βάση την αρχή των δυνατών έργων, το θεώρημα της μοναδικότητας, τις συνθήκες συμβιβαστού και τις συνοριακές συνθήκες που θα προκύψουν.

Οι τάσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι αυτές που εφαρμόζονται παράλληλα στην επιφάνεια της πλάκας εφόσον έχουμε να αντιμετωπίσουμε το διδιάστατο πρόβλημα. Αυτές οι τάσεις είναι οι  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  και  $\gamma_{xy}$  (δεν υπάρχουν οι τάσεις κατά τη διάσταση του πάχους της πλάκας)

Διατμητικές τάσεις στα πλάγια τοιχώματα των πλακών δημιουργούν οι ροπές συστροφής  $M_{xy}$  και  $M_{yx}$ .

### Το Κλασσικό Πρόβλημα των πλακών Kirchhoff.

Η βασική κινηματική παραδοχή, που ουσιαστικά κρύβει μία θεώρηση «μέσου όρου»

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.1.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.1.β)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\varepsilon_{xy} \quad (2.1.γ)$$

όπου  $w(x,y)$  είναι το βέλος κάμψης της μέσης επιφάνειας της πλάκας. Το  $w(x,y)$  είναι το μοναδικό ουσιαστικό μέγεθος του προβλήματος.

Καταστατικοί νόμοι του Hooke για πρόβλημα επίπεδης έντασης και ισότροπο υλικό:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \equiv \overline{\sigma_{xx}} \quad (2.2.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \equiv \overline{\sigma_{yy}}, \quad (2.2.β)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \equiv \overline{\sigma_{xy}} \quad (2.2.γ)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  ο συντελεστής Poisson. ( $E > 0$  και  $-1 < \nu < 0,5$ )

Εσωτερικές συνθήκες ισορροπίας:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad (2.3.α)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, \quad (2.3.β)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (2.3.γ)$$

όπου  $h$  είναι το πάχος της πλάκας.

Τελικά μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις των (2.1) (2.2) και (2.3) έχουμε:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \equiv \overline{M_{xx}}, \quad (2.4.α)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \equiv \overline{M_{yy}}, \quad (2.4.β)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \equiv \overline{M_{xy}} \quad (2.4.γ)$$

όπου  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  [N/m<sup>2</sup>],[m<sup>3</sup>] και

$M_x$   $M_y$   $M_{xy}$  [Nm/m] Ροπές ανά μονάδα μήκους στην επιφάνεια

Εξισώσεις μακροσκοπικής ισορροπίας:

$$1. \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (\text{κεντρική εξίσωση ισορροπίας}) \quad (2.5.α)$$

$$2. \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (2.5.β)$$

$$3. \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (2.5.γ)$$

Από τις εξισώσεις (2.5.β) και(2.5.γ) και αντικαθιστώντας τις ροπές με τις εκφράσεις τους σε βέλη παραμορφώσεων, ορίζονται οι κλασσικές τέμνουσες δυνάμεις ως εξής:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Rightarrow \boxed{-D\nabla^2 w_x \equiv \overline{Q_x}} \quad (2.6.a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{-D\nabla^2 w_y \equiv \overline{Q_y}} \quad (2.6.β)$$

Όπου  $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  και  $w_y = \frac{\partial w}{\partial y}$  και  $Q_x, Q_y$  [N/m]

Κανονικά οι τέμνουσες υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα των τάσεων. Εμείς όμως τις υπολογίζουμε κατευθείαν από τις εξισώσεις ισορροπίας (2.5.β)και (2.5.γ) όπως παραπάνω. Αυτό γίνεται γιατί οι κατανομές των τάσεων δεν είναι ομοιόμορφες κατά μήκος του άξονα z( δηλ του πάχους του στοιχείου) επομένως το πρόβλημα θα είχε εσφαλμένη λύση! Επίσης κατ'αυτόν τον τρόπο παραμένουμε σε επίπεδο πρόβλημα.

Η κυρίαρχη εξίσωση της πλάκας στην κλασσική θεωρία είναι:

$$\boxed{D\nabla^4 w - q = 0} \quad (2.7)$$

$$\text{Όπου } \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

Η εξίσωση της πλάκας προκύπτει από την (2.5.α) με αντικατάσταση των τεμνουσών από εκφράσεις που έχουν το βέλος  $w(x,y)$ . Η εξίσωση αυτή είναι μία διαρμονική, μη ομογενής διαφορική εξίσωση ως προς  $w(x,y)$ .

### Εσωτερική ελαστική ενέργεια

Από τη σχέση της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας στην κλασσική μηχανική έχουμε:

$$e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Ειδικότερα έχουμε:

$$e = \frac{1}{2} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}] \quad (2.8)$$

Με αντικατάσταση των (2.1) και (2.2) στην (2.8) και με μια μετατροπή της διατμητικής τάσης  $\sigma_{xy}$  :

$$\sigma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \gamma_{xy} \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xy}$$

Έχουμε:

$$e = \frac{1}{2} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \varepsilon_{yy} + 2 \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xy}^2 \right] \Rightarrow$$

$$e = \frac{1}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2(1-\nu) \varepsilon_{xy}^2] \Rightarrow$$

$$e = \frac{1}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} z^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

Εν συνεχεία με τις κατάλληλες μετατροπές έχουμε:

$$e = \frac{1}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} z^2 \underbrace{\left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}}_{\tilde{e}}$$

Έτσι λοιπόν εάν ολοκληρώσουμε την πυκνότητα ενέργειας ως προς το πάχος της πλάκας έχουμε την επιφανειακή πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας :

$$u(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{e} dz = \frac{1}{2} D \underbrace{\left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}}_{\tilde{e}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\}$$

$$\text{Όπου } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πυκνότητα ενέργειας παραμένει σταθερή κατά z, κατά τον άξονα του πάχους της πλάκας, δηλαδή κάθετα με την επιφάνειά της.

Η ολική εσωτερική ελαστική ενέργεια στην κλασική ανάλυση είναι:

$$U = \iint_A u dx dy \quad \text{όπου } A \text{ το εμβαδόν της επιφάνειας της πλάκας.}$$

Έτσι έχουμε:

$$U = \frac{1}{2} D \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} dx dy \quad (2.9)$$



Για την επίλυση του προβλήματος θέλουμε να δημιουργήσουμε την αρχή των δυνατών έργων και χρησιμοποιούμε την ισορροπία είτε το δυναμικό:

$$\Pi=U-W \Rightarrow \delta\Pi = \delta U - \delta W \quad (*)$$

όπου  $\Pi$  το δυναμικό,  $U$  η εσωτερική ελαστική ενέργεια,  $W$  το έργο των εξωτερικών δυνάμεων (μαζικών και μη).

Απαιτούμε λόγω ισορροπίας  $\delta\Pi=0$  για κάθε μεταβολή του βέλους κάμψης (Αρχή των δυνατών έργων)

Επομένως από (\*)  $\rightarrow \delta U = \delta W$  και μας εμφανίζεται το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα.

Επιπλέον θα δεχθούμε ότι οι πλάκες είναι επαρκώς λεπτές ώστε να κυριαρχούνται από ροπές κάμψεως αποκλείοντας περιπτώσεις υψίκορμων πλακών. Επίσης στις λεπτές πλάκες δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την πραγματική κατανομή των τεμνουσών τάσεων κατά  $z$ .

Το φορτίο της πλάκας (κατανεμημένο)  $q(x,y)$  παρόλο που θεωρείται ότι επενεργεί στην πάνω επιφάνεια της πλάκας, στην αυστηρή θεώρηση του προβλήματος πρόκειται για μαζικό φορτίο το οποίο δρα στο κέντρο βάρους της, δηλαδή στη μέση επιφάνεια της.

Η συνεισφορά των μαζικών δυνάμεων στο έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$W_q = \iint_A q w dx dy \quad \text{όπου } q \text{ είναι οι μαζικές δυνάμεις και } w \text{ το βέλος κάμψης.}$$

Αυτό που θέλουμε στη συνέχεια είναι να βρούμε την ασθενή μορφή της διαφορικής εξίσωσης της πλάκας για να καταστρώσουμε την αρχή των δυνατών έργων. Έτσι πολλαπλασιάζουμε την ισχυρή εξίσωση με μία συνάρτηση βάρους που δεν έχουμε χαρακτηρίσει και έπειτα ολοκληρώνουμε ώστε να μπορέσουμε τελικά να προσδιορίσουμε τα έργα που εμφανίζονται.

## ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΑΔΕ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Έχουμε λοιπόν τις 3 εξισώσεις ισορροπίας (2.5.α) (2.5.β) και (2.5.γ)

Η πρώτη είναι ουσιαστικά εξίσωση ισορροπίας τεμνουσών και οι άλλες δύο είναι εξισώσεις ορισμού τεμνουσών.

Επίσης έχουμε την «ισχυρή» εξίσωση της πλάκας ( strong differential equation) που είναι η εξής:  $D\nabla^4 w - q = 0$ . (2.7)

Για να διαπιστώσουμε τις ζητούμενες συνοριακές συνθήκες που δεν είναι καθόλου προφανείς προσπαθούμε να μετατρέψουμε την εξίσωση ισορροπίας (διαφορική εξίσωση της πλάκας) σε αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ) που είναι ισοδύναμα.

Με αυτόν τον τρόπο ξεκαθαρίζουμε 1) το ζήτημα αποθήκευσης της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας και 2) το έργο που προέρχεται από δυνάμεις που δρουν στην επιφάνεια ( μαζικές δυνάμεις) καθώς και το έργο που προέρχεται από επενέργεια δυνάμεων στο σύνορο. ( τέμνουσες, ροπες, και ό,τι άλλο μέγεθος προκύψει.)

Η διαδικασία είναι η εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τη διαφορική εξίσωση με μία συνάρτηση βάρους που εδώ την έχουμε ορίσει ως τη μεταβολή του βέλους κάμψεως. Εν συνεχεία την ολοκληρώνουμε σε όλη την περιοχή της πλάκας (επιφανειακά) διότι έχουμε φροντίσει να απαλείψουμε την τρίτη διάσταση εκ των προτέρων. Εφαρμόζοντας ουσιαστικά τη μέθοδο της «κατά παράγοντες ολοκλήρωσης» προκύπτουν όροι ενέργειας που αποθηκεύονται μέσα στο σώμα και όροι που ταυτοποιούνται με το εξωτερικό έργο στο σύνορο και στην επιφάνεια της πλάκας.

Με τον τρόπο αυτό απομονώνοντας τα ζεύγη «δυνάμεων-μετατοπίσεων» βρίσκουμε τι είδους συνοριακές συνθήκες μπορούμε να επιβάλλουμε στο σύνορο της πλάκας. Προφανώς για να είναι καλώς ορισμένο το πρόβλημα μπορούμε να επιβάλλουμε είτε «μετατοπίσεις» (κυλίσεις, αρθρώσεις κτλ) είτε «δυνάμεις» (τέμνουσες, ροπές, στρέψεις κτλ) αλλά όχι και τα δύο μαζί.

Θα έχουμε στο τέλος τη μορφή η οποία παραπέμπει στην ΑΔΕ:

$$\delta\bar{U} = \underbrace{\iint_A q \delta w dx dy}_{\delta W_q} - \underbrace{\int_{\partial A} \bar{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds}_{\delta W_M} + \underbrace{\int_{\partial A} \left( \bar{Q}_n - \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s} \right) \delta w ds}_{\delta W_Q} = \delta W$$

Όπου  $\frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s}$  ορίζονται οι επιπλέον τέμνουσες που μου δίνουν οι μεταβολές των ροπών στρέψεως. Στην ουσία είναι ένα δίπολο και δεν υπάρχει στις δοκούς. Με  $\partial A$  ορίζουμε το σύνορο της πλάκας.

Τελικά προσδιορίζουμε με αυτό τον τρόπο τις εξείς επιλογές συνοριακών συνθηκών στο σύνορο  $\partial A$  :

$$\begin{array}{l} \bar{M}_n \quad \quad \quad \text{ή} \quad \quad \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{και} \\ \bar{Q}_n - \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s} \quad \text{ή} \quad \quad \quad w \end{array}$$

Ξεκινώντας τη διαδικασία, ορίζουμε μια συνάρτηση βάρους  $\Phi$ , που έχει ως αρχική προσέγγιση την μεταβολή της μετατόπισης  $\delta w$ , και την πολλαπλασιάζουμε στη διαφορική εξίσωση της πλάκας εφαρμόζοντας έτσι την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) με την εξής διατύπωση:

$$\boxed{(D\nabla^4 w - q)\Phi = 0}$$

(δηλαδή δύναμη x μετακίνηση (μετατόπιση βάρους))

Με αυτό τον τρόπο ζητάμε τη μεταβολή της εξίσωσης της πλάκας ώστε να εισάγουμε τις συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια την ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$D \iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \Phi dx dy = \iint_{\Lambda} q dx dy \quad (2.10)$$

Θεωρούμε  $\Phi = \delta w$  απειροστή μεταβολή του βέλους παραμόρφωσης.

Επομένως το πρώτο μέλος της (2.10) γίνεται:

$$D \left\{ \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \delta w dx dy + 2 \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \delta w dx dy + \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w dx dy \right\}$$

Έπειτα παίρνουμε καθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά και κάνουμε κατά παράγοντες ολοκληρώσεις οι οποίες θα δούμε ότι θα μας οδηγήσουν στη συνολική εσωτερική ενέργεια.

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε την (2.10) πρέπει να λάβουμε υπόψη τα παρακάτω:

1. Μαθηματική υπενθύμιση 1<sup>η</sup>. Κατά παράγοντες ολοκλήρωση σε μία διάσταση (δηλαδή σε μία ευθύγραμμη δοκό):

$$\int_a^b f'g dx = fg|_a^b - \int_a^b fg' dx$$

2. Προέκταση της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης με μεγαλύτερης τάξης παράγωγο.

Θεωρώντας  $f = M$  (ροπή)  $\Rightarrow f' =$  (τέμνουσα) και  $g = \delta w$  (απειροστή μεταβολή μετατόπισης)  $\Rightarrow g' = \delta w'$  (στροφή), αφού ισχύει  $\frac{dM}{dx} = Q$  και  $\frac{dQ}{dx} = -q$  (στη δοκό) και

έχοντας μία μεγαλύτερης τάξης παράγωγο σχηματίζονται τα παρακάτω έργα τα οποία και μας προϋδεάζουν για τη μορφή της αρχής των δυνατών έργων όπως μιλήσαμε παραπάνω.

$$\underbrace{\int_a^b f''g dx}_{-\int_a^b q \delta w dx = \delta W_q} = f'g|_a^b - \underbrace{\int_a^b f'g' dx}_{\underbrace{Q \delta w}_{\delta W_Q}} = \underbrace{f'g|_a^b}_{\underbrace{M \delta w'}_{\delta W_M}} - \underbrace{\left[ f'g|_a^b - \int_a^b f'g'' dx \right]}_{\underbrace{M \delta w''}_{\delta U} \text{ Εσωτερική ελαστική ενέργεια}}$$

Έτσι εάν  $\int_a^b f''g dx = 0$  σχηματίζεται η ΑΔΕ ως εξής:

$$\delta U = \delta W_q + \delta W_Q + \delta W_M$$

3. Μαθηματική υπενθύμιση 2<sup>η</sup>.

Έχουμε πχ την εξής μορφή μέρους της ελαστικής ενέργειας:

$$U = \frac{1}{2} D \int_a^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Επειδή για την ΑΔΕ χρειαζόμαστε την μεταβολή της ενέργειας έχουμε:

$$\delta U = \frac{1}{2} D \int_a^b 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \Rightarrow D \int_a^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx = - \int_a^b M \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx$$

4. Το Θεώρημα Stokes (παράρτημα)

5. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού από το σχήμα 2.4:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos a \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{και} \quad dx = \sin a ds$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin a \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial}{\partial s} \quad dy = \cos a ds$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \cos a \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial}{\partial s} \right) \Rightarrow$$

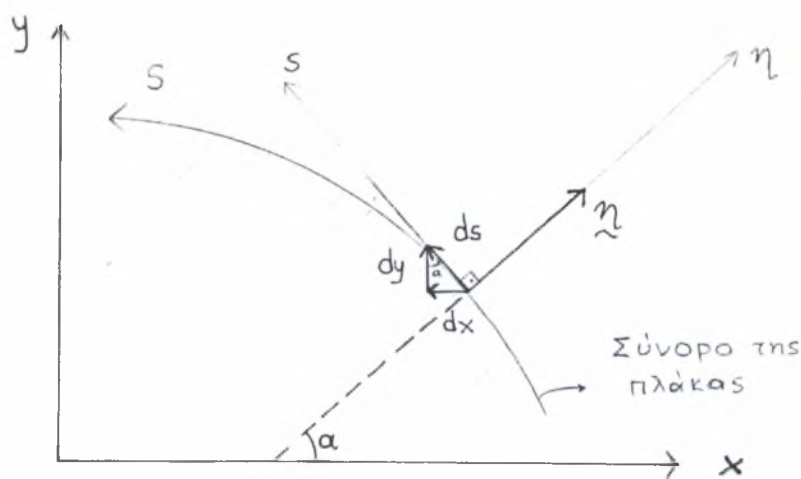
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 a \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial s} + \sin^2 a \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \sin a \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \sin a \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial}{\partial s} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 a \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial s} + \cos^2 a \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \left( \cos a \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \sin a \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial}{\partial s} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \sin a \cos a \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial s} - \sin a \cos a \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$



Σχήμα 2.4 Μετασχηματισμοί αξόνων για την περιγραφή των συνθηκών στο σύνορο της πλάκας

6. Καταπαράγοντες ολοκλήρωση σε επιφάνεια:

$$\iint w_{xxxx} \delta w dx dy = \int dy \left[ w_{xxx} \delta w \Big|_a^b - \underbrace{\int w_{xxx} \delta w_x dx}_{I_1} \right]$$

Απομονώνουμε το  $I_1$  μέχρι να φτάσουμε το  $w$  σε 2<sup>η</sup> τάξης μερικούς παραγώγους γιατί έτσι θα μπορέσουμε να εμφανίσουμε τετραγωνικές μορφές που να θυμίζουν την εσωτερική ενέργεια. Έτσι έχουμε:

$$I_1 = w_{xx} \delta w_x \Big|_a^b - \int_a^b w_{xx} \delta w_{xx} dx. \text{ Έπειτα το αντικαθιστούμε πιο πάνω και με τη βοήθεια}$$

των μετασχηματισμών που αναφέραμε στο 5. έχουμε μετατρέψει τα επιφανειακά ολοκληρώματα σε επικαμπύλια εκτός από την τελευταία τετραγωνική μορφή που είναι μέρος της εσωτερικής ενέργειας.

7. Πρέπει να επισημάνουμε ότι μας εμφανίζονται όροι με την παρακάτω μορφή και οι οποίοι γίνονται:

$$\text{Π.χ.} \quad \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \delta w \Big|_a^a - \int \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \right) \delta w ds$$

όπου  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \delta w \Big|_a^a = 0$  για ομαλό σύνορο, δηλαδή πλάκα χωρίς γωνίες. Ο όρος

αυτός είναι μέρος του συμβιβαστού των παραμορφώσεων και στην ουσία μας δείχνει ότι δεν πρέπει να υπάρχει μεταβολή καμπυλότητας κατά μήκος του συνόρου. Τέτοιοι όροι εμφανίζονται στον υπολογισμό και των υπόλοιπων όρων επιλύοντάς τους με «κατά παράγοντες» ολοκλήρωση.

Παίρνουμε, λοιπόν, ξεχωριστά τους όρους του πρώτου μέλους της (2.10), αντικαθιστώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού και με τη βοήθεια της «κατά παράγοντες» ολοκλήρωσης σε επιφανειακό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy &= \int dy \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \Big|_a^b - \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \right] \\ &= \int dy \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_a^b + \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx \right] \\ &= \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \cos a ds - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \delta \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \delta \iint_A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \cos^2 a ds - \int \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a \right] \delta w ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy &= \int dx \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w \Big|_a^b - \int \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dy \right] \\
&= \int dx \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \Big|_a^b + \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dy \right] \\
&= \int \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w \sin a ds - \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds - \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \delta \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \\
&= \frac{1}{2} \delta \iint_A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \sin^2 a ds + \int \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \right] \delta w ds
\end{aligned}$$

Τον παρακάτω όρο θα τον υπολογίσουμε δύο φορές δεδομένου ότι εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση της πλάκας με συντελεστή 2. Στην πρώτη επίλυση απλοποιούμε το ολοκλήρωμα ως προς dy και αμέσως μετά ως προς dx. Στη δεύτερη επίλυση κάνουμε την ανάποδη διαδικασία.

Έτσι η πρώτη επίλυση είναι:

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy &= \int dx \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w \Big|_a^b \right] - \iint_A \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy \\
&= \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w dx - \int dy \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \Big|_a^b \right] + \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} dx dy \\
&= \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w \sin a ds - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \cos a ds + \frac{1}{2} \delta \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \\
&= \frac{1}{2} \delta \iint_A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \int \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos^2 a \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right] \delta w ds
\end{aligned}$$

Και η δεύτερη είναι:

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy &= \int dy \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w \Big|_a^b \right] - \iint_A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy \\
&= \int \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w dy - \int dx \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_a^b \right] + \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} dx dy \\
&= \int \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w \cos a ds - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \sin a ds + \frac{1}{2} \delta \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \\
&= \frac{1}{2} \delta \iint_A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds - \int \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin^2 a \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a \right] \delta w ds
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία προσθέτουμε τους δύο τελευταίους όρους και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & 2 \iint_{\Lambda} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy = \delta \iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy - 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds - \\
 & - \iint \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 a - \cos^2 a) \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right] \delta w ds \\
 & D \left\{ \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \delta w dx dy + 2 \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \delta w dx dy + \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w dx dy \right\} - \int_{\Lambda} q \delta w dx dy = 0 \quad (**) \\
 & \Rightarrow D \left[ \int_{\Lambda} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w dx dy \right] - \int_{\Lambda} q \delta w dx dy = 0
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και ομαδοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην (2.10) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & D \left\{ \frac{1}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dx dy - \right. \\
 & - \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 a + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 a + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \sin a \cos a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
 & + \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a \cos a - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} (\sin^2 a - \cos^2 a) \right] + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right\} \delta w ds \left. \right\} - \\
 & - \iint_{\Lambda} q \delta w dx dy = 0 \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Έλεγχος διαστάσεων:

$$\text{Πχ. } \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{m}^4} \right] \Rightarrow \left[ \frac{1}{\text{m}^3} \right]$$

$$D \nabla^4 w = q \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{m}^3 \right] \left[ \frac{1}{\text{m}^3} \right] \Rightarrow \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Όπως ξέρουμε η παράγωγος διαιρεί τις διαστάσεις και το ολοκλήρωμα τις πολλαπλασιάζει. Έπειτα όταν παραγωγίζω παίρνω πάντα κάτι διπολικό



Από την (2.11) παρατηρούμε ότι λείπει ένα μέρος της ελαστικής ενέργειας που βρήκαμε με την μικροσκοπική ανάλυση (εξίσωση 2.9). Έτσι για να εμφανίσουμε όλη την ενέργεια θα πρέπει να απομονώσουμε αυτόν τον όρο και με κάποιες μετατροπές να τον προσθέσουμε στην (2.11)

Ο όρος αυτός είναι  $\frac{1}{2}D2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$  και αναφέρεται στο σύνορο της πλάκας.

Επίσης παρατηρούμε ότι αυτός ο όρος αποτελεί μία ορίζουσα :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

(καμπυλότητα στρέβλωσης)

με ίχνος  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  (καμπυλότητα Gauss) τα οποία είναι αναλλοίωτες σε πιθανούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Παίρνουμε αυτόν τον όρο και εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα Stokes

$$\iint_A \left( \frac{\partial N^*}{\partial x} - \frac{\partial M^*}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} (M^* dx + N^* dy) \quad \text{έχουμε:}$$

Αρχικά τροποποιούμε τον όρο της εσωτερικής ενέργειας που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να μας θυμίζει το 1<sup>ο</sup> μέλος του θεωρήματος του Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_A \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right)^2 \right) dx dy &= \iint_A \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y} \right] dx dy = \\ &= \iint_A \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right]}_{N^*} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right]}_{M^*} \right) dx dy \quad (2.12) \end{aligned}$$

Έπειτα ξεκινάμε από το 2<sup>ο</sup> μέλος του θεωρήματος του Stokes και από την (2.12) έχουμε:

(Εδώ επειδή εξετάζουμε ξεχωριστά το dx και το dy έχουμε τα αλγεβρικά πρόσημα τους δηλαδή αυτά που κατά το μετασχηματισμό τους είναι σύμφωνα με την κατεύθυνση της επικαμπύλιας συντεταγμένης στην οποία και μετασχηματίζονται!)

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta: \begin{aligned} dx &= -\sin a ds \\ dy &= \cos a ds \end{aligned}$$

$$N^* = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow$$

$$N^* = \left( \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\int_{\partial A} N^* dy = \iint \left[ \cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \iint \frac{\partial}{\partial s} \left( \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w ds$$

$$M^* = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$M^* = \left( \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} - \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \left( \sin a \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} + \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\int_{\partial A} M^* dx = \iint \left[ \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds - \iint \frac{\partial}{\partial s} \left( \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w ds$$

Αφού προσθέσουμε τις δύο παραπάνω έχουμε:

$$\int_{\partial A} N^* dy + M^* dx = \iint \left[ \cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \iint \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 a - \sin^2 a) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a \cos a \right] \delta w ds \quad (2.13)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι έπρεπε να εμφανίζονται όροι συμβιβαστού οι οποίοι και δεν προστέθηκαν λόγω απλούστευσης εφ' όσον είναι μηδενικοί.

Από την ισότητα της (2.12) και(2.13) έχουμε την τελικά εξίσωση:  
(δεν ξεχνάμε ότι οι όροι αυτοί πολλαπλασιάζονται με  $\nu D$  που για λόγους ευκολίας κατά την παραπάνω μετατροπή τους το παραλείψαμε.)

$$\begin{aligned}
 & \nu D \iint_{\Lambda} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy = \\
 & = \nu D \left[ \oint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 a + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 a - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \right] + \\
 & + \nu D \left[ \oint \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a \cos a + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 a - \sin^2 a) \right] \delta w ds \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Έτσι αφού προσθέσουμε τους επιπλέον όρους της εξίσωσης (2.14) στην ασθενή μορφή της αρχικής διαφορικής εξίσωσης της πλάκας(2.11) θα ξεχωρίσουμε τους επιφανειακούς όρους από τους επικαμπύλιους.

Θα έχουμε δηλαδή την εσωτερική ενέργεια (επιφανειακός όρος) από το ένα μέλος, και από το άλλο μέλος θα έχουμε το έργο από το καταναμημένο φορτίο(επιφανειακός όρος) και το έργο στο σύνορο της πλάκας (επικαμπύλιος όρος).

Παράλληλα θα προσδιορίσουμε στα επικαμπύλια ολοκληρώματα τα κινηματικά μεγέθη στο σύνορο.

Από την πρόσθεση των (2.11) και(2.14) κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & D \left\{ \frac{1}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dx dy + \nu \iint_{\Lambda} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \right\} \\
 & - D \oint \left\{ - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 a - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 a - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \sin a \cos a \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
 & + \oint \left[ D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos a + D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin a \right] \delta w ds + \\
 & + \oint \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ (1-\nu) D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a \cos a + (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} (\sin^2 a - \cos^2 a) \right] \right\} \delta w ds - \\
 & - \iint_{\Lambda} q \delta w dx dy = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \left\{ \frac{1}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dx dy + \nu \iint_A \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \right\} - \\
& - \iint \underbrace{\{ \overline{M}_x \cos^2 a + \overline{M}_y \sin^2 a + 2 \overline{M}_{xy} \sin a \cos a \}}_{\overline{M}_\eta} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
& + \iint \left[ \underbrace{D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}}_{-\overline{Q}_x} \cos a + \underbrace{D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}}_{-\overline{Q}_y} \sin a \right] \delta w ds + \\
& + \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \underbrace{(\overline{M}_x - \overline{M}_y) \sin a \cos a + \overline{M}_{xy} (\sin^2 a - \cos^2 a)}_{\overline{M}_\eta} \right] \right\} \delta w ds - \\
& - \iint_A q \delta w dx dy = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

Αφού συγκεντρώσουμε τους όρους της παραπάνω τελικής εξίσωσης (2.15) θα θεωρήσουμε ότι πολλαπλασιάζει το  $\delta w$  σαν τέμνουσα στο σύνορο και ότι πολλαπλασιάζει το  $\frac{\partial \delta w}{\partial \eta}$  θα το θεωρήσουμε ροπή στο σύνορο.

Δηλαδή:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta w} = V_n \quad \text{και} \quad \frac{\partial U}{\partial \left( \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \right)} = M_n$$

όπου  $U$  η ενέργεια που έχω βρεί και με την μικροσκοπική διαδικασία με τη βοήθεια των τάσεων και των τροπών.

$$\text{Και όπου } V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

Έτσι λοιπόν έχουμε τα εξής από την (2.15) :

A) Την εσωτερική ελαστική ενέργεια:

$$\delta W = D \left\{ \frac{1}{2} \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dx dy + \nu \iint_A \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \right\}$$

B) Το έργο εκ ροπών στο σύνορο:

$$\oint \overline{M}_\eta \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds$$

Γ) Το έργο εκ τεμνουσών στο σύνορο:

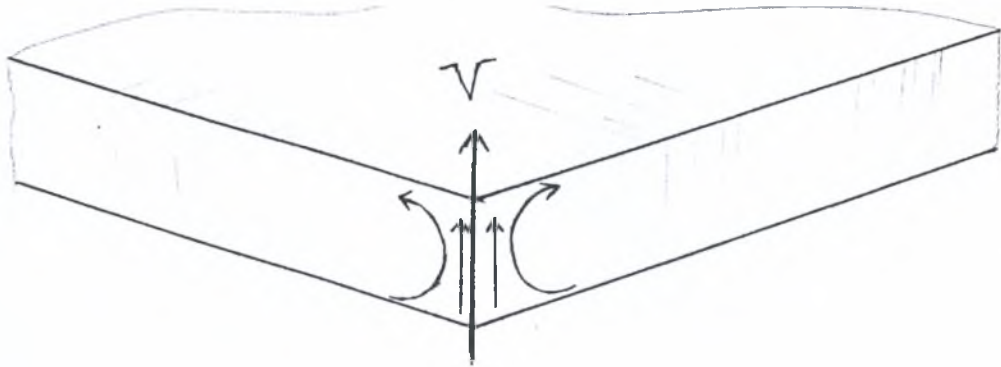
$$\begin{aligned} & \oint \left[ D \frac{\partial w}{\partial x} \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{-\overline{Q}_x} \cos a + D \frac{\partial w}{\partial y} \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{-\overline{Q}_y} \sin a \right] \delta w ds + \\ & + \oint \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \underbrace{\left( \overline{M}_x - \overline{M}_y \right) \sin a \cos a + \overline{M}_{xy} \left( \sin^2 a - \cos^2 a \right)}_{-\overline{M}_{\eta s}} \right] \right\} \delta w ds = \\ & = - \oint \left\{ \overline{Q}_x \cos a + \overline{Q}_y \sin a + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \overline{M}_y - \overline{M}_x \right) \sin a \cos a - \overline{M}_{xy} \left( \sin^2 a - \cos^2 a \right) \right] \right\} \delta w ds = \\ & = \oint \overline{V} \delta w ds \end{aligned}$$

Όπου  $\overline{V} = -(\overline{Q}_x \cos a + \overline{Q}_y \sin a - \frac{\partial}{\partial s} \overline{M}_{\eta s})$  η σύνθετη τέμνουσα που επιδρά στις γωνίες της πλάκας. (βλ σχήμα 2.5)

και όπου  $\overline{M}_{\eta s} = (\overline{M}_y - \overline{M}_x) \sin a \cos a - \overline{M}_{xy} (\sin^2 a - \cos^2 a)$  η στρεπτική ροπή.

Δ) Το έργο των μαζικών δυνάμεων (ή των καταναμεμένων φορτίων):

$$\iint_A q \delta w dx dy$$



Σχήμα 2.5 Έργο τεμνουσών στις γωνίες της πλάκας.

Επομένως φτάνουμε στην έκφραση της αρχής των δυνατών έργων ως εξής.

$$\delta\bar{U} = \left[ \int \bar{M}_\eta \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \int \bar{V} \delta w ds + \iint q \delta w dx dy \right] \quad (\text{κλασσική ανάλυση}) \quad (2.16)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με την παραπάνω σχέση οι συνοριακές συνθήκες που αναφέραμε είναι πλέον προφανείς.

Επιπλέον θα συγκεντρώσουμε τους όρους του συμβιβαστού που προκύπτουν από την κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Συμβιβαστό:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \delta w \Big|_a - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a \delta w \Big|_a + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 a - \cos^2 a) \delta w \Big|_a + \\ & + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a + \cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w \Big|_a - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w \Big|_a = 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι είναι εκ ταυτότητας 0 με  $\delta w \neq 0$ .

Επομένως θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις συμβιβαστού που έχουμε είναι:

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

και

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

Ο τανυστής της καμπυλότητας είναι:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_y, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_x, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

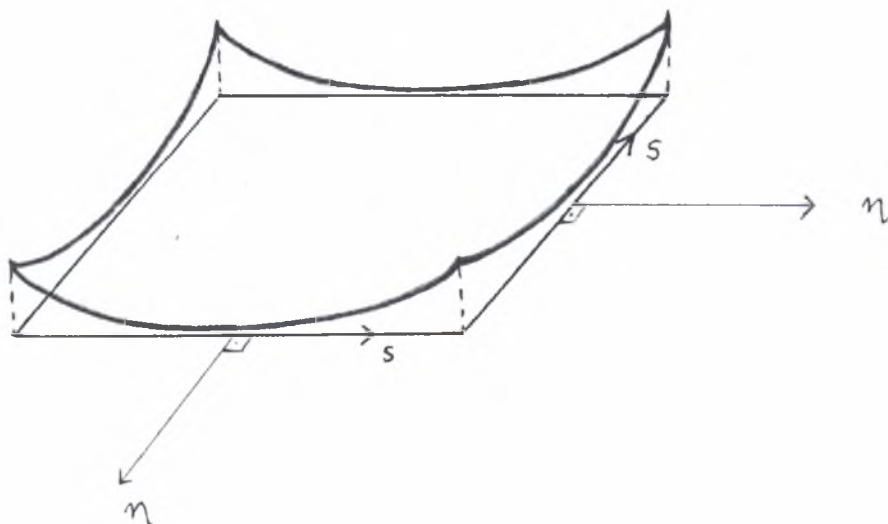
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k_y}{\partial x} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} &= -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \right\} \frac{\partial k_y}{\partial x} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} &= -\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial k_x}{\partial y} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right\} \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial k_x}{\partial y} = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

Επομένως δεχόμαστε σαν συνθήκες συμβιβαστού τις εξισώσεις (2.16) και (2.17).

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι καμπυλότητες θυμίζουν «τάσεις» και οι εξισώσεις συμβιβαστού θυμίζουν εξισώσεις «ισορροπίας» στη διδιάστατη ελαστικότητα.

Σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων που είναι σε γωνία  $\alpha$  με το σύστημα  $(x,y)$ , ο τανυστής καμπυλότητας αλλάζει όπως ο τανυστής ροπών αδράνειας διατομής.



Σχήμα 2.6 Αλλαγή καμπυλότητας στις ελεύθερες γωνίες της πλάκας.

### Τασικές συναρτήσεις του Southwell $V(x,y)$ και $U(x,y)$ στην κλασσική θεωρία.

Οι τασικές συναρτήσεις του Southwell μας βοηθούν στην επίλυση του προβλήματος και ορίζονται ως εξής:

$$M_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + M_0 \quad M_x = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} + M_0 \quad M_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$\text{και } -\nabla^2 M_0 = q$$

Όπου  $M_0$  είναι η αρχική ισότροπη ροπή (μερική λύση).

Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι η 1<sup>η</sup> εξίσωση ισορροπίας ικανοποιείται αυτομάτως με τον τρόπο αυτό οι παραπάνω εκφράσεις των ροπών επαληθεύεται ότι ισχύουν

Έτσι λοιπόν παίρνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας (2.5.β) και (2.5.γ) και λύνουμε ως προς τις τέμνουσες. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε με τις εκφράσεις του Southwell και έχουμε:

$$Q_x = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} M_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)$$

$$Q_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} M_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)$$

και τώρα παίρνουμε τις 1<sup>ες</sup> παραγώγους τους:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Αντικαθιστούμε στην (2.5.α) και τελικά  $\theta=0!$

Όντως ισχύει αυτομάτως η ισορροπία άρα οι συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην κλασσική θεωρία πλακών, απλοποιώντας σημαντικά το πρόβλημα.

Παρατηρούμε ότι η χρήση των τασικών συναρτήσεων  $V(x,y)$  και  $U(x,y)$ , θυμίζει «τροπές» και η εξίσωση ισορροπίας θυμίζει «συμβιβαστό» στη διδιάστατη ελαστικότητα.



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Η καινούργια θεωρία με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η θεωρία της ελαστικότητας τύπου βαθμίδας[4,5]. Σ' αυτή τη θεωρία δεν έχουμε μόνο τους, γνωστούς από την κλασσική θεωρία, γραμμικούς όρους στις τάσεις αλλά και όρους βαθμίδας.

Εισάγονται λοιπόν μέσω της βαθμίδας μαζί με τις συνολικές τάσεις και οι κλίσεις των γραμμικών τάσεων πολλαπλασιασμένες με ένα χαρακτηριστικό εσωτερικό μήκος που εμείς καθορίζουμε. Το εσωτερικό μήκος είναι ο συντελεστής  $c$  που αντιστοιχεί σε  $[m^2]$  και που στη πραγματικότητα εισάγει στο πρόβλημα τη μικροδομή του υλικού.

Συνεπώς οι συνολικές τάσεις διασπώνται σε δύο σκέλη τα οποία είναι : οι μονοπολικές και οι διπολικές τάσεις.

Οι μονοπολικές τάσεις είναι οι γνωστές γραμμικές και οι διπολικές οι επιπλέον που εισάγαμε από τη μη γραμμική θεωρία.

Να σημειώσουμε ότι χρησιμοποιώντας τη θεωρία μέσου όρου(δηλαδή την κλασσική θεωρία) για να μελετήσουμε τη διάτμηση, οι διπολικές δυνάμεις εμφανίζονται σαν αυτοίσοροπούμενες οριζόντιες διατμητικές τάσεις (Βαρδουλάκης-Γιαννακόπουλος 2005)

Εξετάζουμε λοιπόν εάν πλάκες οι οποίες έχουν έντονη διαδοκίδωση και μοιάζουν σαν εσχάρες αντιμετωπίζονται σαν ισοδύναμες πλάκες. Αυτό σημαίνει πως περνάμε αυτομάτως σε θεωρία «μέσου όρου», εφόσον προσεγγιστικά κάναμε την παραδοχή ότι μία σύνθετη πλάκα μπορεί να λυθεί σαν μία απλή ομογενής πλάκα.

Η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας που αποθηκεύεται στην περίπτωση της θεωρίας ελαστικότητας με βαθμίδα (θεωρία τύπου 1, Mindlin) είναι μία θετικά

ορισμένη συνάρτηση των τροπών  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  και των καμπυλοτήτων της

μετατόπισης  $\kappa_{rpq} = \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_r \partial x_p}$  και την καλούμε  $W(\varepsilon_{ij}, \kappa_{rpq})$

Οι μονοπολικές (γραμμικές) τάσεις είναι:  $\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$ ,

και οι διπολικές είναι:  $m_{rpq} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{rpq}}$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει γραμμικότητα μεταξύ

των  $\varepsilon_{ij}$  και  $\tau_{ij}$ .

Στην απλούστερη περίπτωση οι παραπάνω διπολικές τάσεις είναι οι πρώτες παράγωγοι των μονοπολικών πολλαπλασιασμένες με κάποιον συντελεστή. Δηλαδή έχουμε τον πρώτο απλό τύπο της διπολικής τάσης:

$$\boxed{m_{rpq} = c \partial_r \tau_{rpq}} \quad \text{όπου} \quad \partial_r \tau_{rpq} = \frac{\partial \tau_{rpq}}{\partial x_r}$$

Ο συντελεστής  $c$  που εμφανίζεται στις διπολικές τάσεις στη θεωρία της βαθμίδας, σχετίζεται με ένα εσωτερικό μήκος το οποίο εμμέσως εισάγει φαινόμενα κλίμακας.

Το  $c$  όπως είπαμε πιο πάνω έχει διαστάσεις  $[m^2]$  και αποτελεί μία νέα σταθερά του προβλήματος ( $c > 0$ ). Το εσωτερικό αυτό μήκος είναι δύσκολο να προσδιοριστεί καθώς εξαρτάται από την κρίση μας στο τί θα θεωρήσουμε ως μικροδομή του υλικού σε σχέση με την κλίμακα που έχουμε στο συνολικό πρόβλημα.

Για να γίνουμε πιο σαφείς ένα υλικό μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει πολλών ειδών μικροδομές δηλαδή το  $c$  δεν είναι σταθερό στο ίδιο υλικό αλλά εξαρτάται από την συνολική κλίμακα που θα επιλέξουμε στο πρόβλημά μας.

Για παράδειγμα σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα (πχ σε μία δοκό) σαν εσωτερικό μήκος θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη μέση διάμετρο των σκύρων σε σχέση με το ύψος της διατομής. Κατά τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε σαν εσωτερικό μήκος και την απόσταση των συνδετήρων σε σχέση με το ύψος της διατομής.

Οι συνολικές τάσεις λοιπόν περιέχουν δύο σκέλη τις κλασσικές τάσεις (μονοπολικές) και τις διπολικές (μας θυμίζει σειρά Taylor). Το πρώτο σκέλος είναι ο γνωστός τανυστής των τάσεων ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα της επιφάνειας της διατομής  $\bar{n}$  δίνει τον κλασσικό ελκυστή των τάσεων  $\bar{t}$ . Η παράγωγος των διπολικών τάσεων παίρνει μέρος στην ισορροπία, ενώ οι διπολικές τάσεις στη θερμοδυναμική του προβλήματος, την οποία σύμφωνα με την κλασσική θεωρία την αμελούμε.

Στο μακρόκοσμο είναι εμφανή τα αποτελέσματα και των δύο ειδών τάσεων.

Στην απλή θεωρία της βαθμίδας έχουμε τις εξείς καταστατικές σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - c\nabla^2 \left( \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \right) = (1-c\nabla^2) \overline{\sigma_{xx}} \quad (3.1.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - c\nabla^2 \left( \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \right) = (1-c\nabla^2) \overline{\sigma_{yy}} \quad (3.1.β)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} - c\nabla^2 \left( \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \right) = (1-c\nabla^2) \overline{\sigma_{xy}} \quad (3.1.γ)$$

$$\text{όπου } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Ο όρος  $(1-c\nabla^2)$  είναι ο τελεστής Shrödinger.

Οι ανωτέρω σχέσεις υποθέτουν ισοτροπία και γραμμικότητα. Είναι οι απλούστερες επεκτάσεις του κλασσικού νόμου του Hooke

Αν κάνουμε και τις αντικαταστάσεις των τροπών με τα βέλη παραμορφώσεων έχουμε:

$$\sigma_{xx} = -z \frac{E}{1-\nu^2} (w_{xx} + \nu w_{yy}) + c \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (1+\nu) \right) \quad (3.2.a)$$

$$\sigma_{yy} = -z \frac{E}{1-\nu^2} (w_{yy} + \nu w_{xx}) + c \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (1+\nu) \right) \quad (3.2.β)$$

$$\sigma_{xy} = -z \frac{E}{1+\nu} w_{xy} + cz \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} \right) \quad (3.2.γ)$$

Όπου  $c$  ο συντελεστής με μονάδες  $[m^2]$  και

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Και οι αντίστοιχες ροπές θα είναι:

$$M_x = -D (w_{xx} + \nu w_{yy}) + cD \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (1+\nu) \right) = (1-c\nabla^2) \overline{M}_x \quad (3.3.a)$$

$$M_y = -D (w_{yy} + \nu w_{xx}) + cD \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (1+\nu) \right) = (1-c\nabla^2) \overline{M}_y \quad (3.3.β)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)w_{xy} - cD(1-\nu) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} \right) = (1-c\nabla^2) \overline{M}_{xy} \quad (3.3.γ)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την εξίσωση ισορροπίας της πλάκας συμπεριλαμβανομένων και των διπολικών τάσεων.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας(2.5.β) και (2.5.γ) σε επίπεδη πλάκα έχουμε :

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Αντικαθιστούμε τα  $Q_x$  και  $Q_y$  στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας (2.5.α) και έχουμε:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad (3.4)$$

Έπειτα αντικαθιστούμε στην (3.4) τις ροπές με τις εκφράσεις τους σε βυθίσεις (3.3) με τη θεωρία της βαθμίδας:

$$\begin{aligned} & -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + cD \left[ \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \nu \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} (1 + \nu) \right] \\ & -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + cD \left[ \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + \nu \frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial x^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^4 \partial x^2} (1 + \nu) \right] \\ & + 2cD(1 - \nu) \left( \frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial x^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^4 \partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + q = 0 \end{aligned}$$

Έτσι με τις κατάλληλες απλοποιήσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} & -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + cD \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + q = 0 \end{aligned}$$

Τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση της πλάκας με τη θεωρία της βαθμίδας:

$$\boxed{D \nabla^4 w - c D \nabla^6 w = q \Rightarrow D(1 - c \nabla^2) \nabla^4 w = q} \quad (3.5)$$

Η ανωτέρω διαφορική εξίσωση είναι η λεγόμενη «ισχυρή» εξίσωση ισορροπίας που διέπει το πρόβλημα [6,7].

Παρατηρούμε ότι έχουν συμπεριληφθεί και οι κλίσεις των καμπυλοτήτων στη νέα εξίσωση!

Έλεγχος μονάδων  $c D \nabla^6 w = q$   $\left[ m^2 \right] \left[ \frac{N}{m^2} m^3 \right] \left[ \frac{1}{m^5} \right] \Rightarrow \left[ \frac{N}{m^2} \right]$

Εάν  $c \rightarrow 0$  τότε επιστρέφουμε στο κλασικό πρόβλημα δηλ  $D \nabla^4 w = q$

Στη συνέχεια ορίζουμε τις νέες τέμνουσες με την θεωρία της βαθμίδας αντικαθιστώντας τις νέες τιμές των ροπών στις εξισώσεις ισορροπίας (2.5.β) και (2.5.γ):

$$(2.5.γ) \rightarrow Q_x = \frac{\partial}{\partial x}(1 - c\nabla^2)\overline{M}_x - \frac{\partial}{\partial y}(1 - c\nabla^2)\overline{M}_{xy} = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial \overline{M}_x}{\partial x} - \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial y} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_x = (1 - c\nabla^2)\overline{Q}_x} \quad (3.6.α)$$

Ομοίως έχουμε:

$$(2.5.β) \rightarrow \boxed{Q_y = (1 - c\nabla^2)\overline{Q}_y} \quad (3.6.β)$$

Επανερχόμενοι στον ορισμό των τεμνουσών και αντικαθιστώντας τις ροπές στην μακροσκοπική ισορροπία ξανασυνατάμε τον τελεστή Shrödinger.

Παρατηρούμε ότι ο Shrödinger operator έχει περάσει από τη μικροσκοπική δομή ( τάσεις κλπ.) στα μακροσκοπικά μεγέθη M Q με τη νέα θεωρία.

### Η εσωτερική ελαστική ενέργεια:

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι δύναμη x μετατόπιση ή ροπή x στροφή. Παρόλ' αυτά το έργο των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι προφανές στη νέα θεωρία διότι εκτός από τις μεταβολές των βελών κάμψεως εισέρχονται και οι κλίσεις των μεταβολών αυτών.

Πιθανότατα υπάρχουν διπολικές τέμνουσες και διπολικές ροπές εκτός από τις κλασσικές με αποτέλεσμα να μην ξέρουμε πώς θα χειριστούμε το εξωτερικό έργο.

Κάνουμε την παραδοχή ότι οι εξισώσεις ισορροπίας εκφρασμένες σε ροπές και τέμνουσες είναι ίδιες με την κλασσική περίπτωση. Και αυτό γιατί τόσο τα δίπολα των ροπών όσο και των τεμνουσών είναι αυτοισορροπούμενα επομένως δεν επηρεάζουν την ισορροπία της πλάκας

Η πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$e^{\Sigma} = \underbrace{\frac{1}{2} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}}_{\text{μονοπολικών τάσεων}} + \frac{1}{2} c \underbrace{\frac{\partial \tau_{pq}}{\partial x_r} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial x_r}}_{\text{διπολικών τάσεων}} \quad (3.7)$$

Έτσι θα πρέπει να προσδιορίσουμε την πυκνότητα ενέργειας των διπολικών τάσεων.

Επειδή ο πρώτος όρος του 2<sup>ου</sup> μέλους της εξίσωσης (3.7) έχει υπολογιστεί από την κλασική θεωρία απομονώνουμε τον δεύτερο που αφορά τις διπολικές τάσεις και έχουμε:

(Πυκνότητα ενέργειας διπολικών τάσεων)  $e' =$

$$= c \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right) \right]$$

Έτσι εάν αντικαταστήσουμε τις τάσεις και τις τροπές με τις εκφράσεις τους σε βέλη παραμορφώσεων (3.1) και (3.2) έχουμε:

$$e' = \frac{1}{2} c \frac{z^2 E}{(1-\nu^2)} \tilde{e}_g =$$

$$z^2 \frac{E}{1-\nu^2} c \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \left( \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$$

Και

$$\tilde{e}_g = \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 + (3-2\nu) \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + 2\nu \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \right\}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας των διπολικών τάσεων είναι:

$$u'(x,y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e' dz = \frac{1}{2} D c \bar{e}_g$$

Επομένως έχουμε την συνολική εσωτερική ενέργεια:

$$U_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} D \iint_A [\bar{e}(x,y) + c \bar{e}_g(x,y)] dx dy \quad (3.8)$$

$$\text{όπου } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

και  $\bar{e} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$  από την εσωτερική ενέργεια της κλασσικής θεωρίας.

Παρατηρούμε αρχικά ότι η νέα εσωτερική ενέργεια έχει περισσότερους όρους από την κλασσική. Έτσι θα μπορούσαμε αρχικά να συμπεράνουμε ότι η πλάκα εφόσον μπορεί να αποθηκεύσει περισσότερη ενέργεια είναι και πιο εύκαμπτη. Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί οι όπως θα δούμε παρακάτω οι επιπλέον ενεργειακοί όροι που προκύπτουν δεν συνεισφέρουν στην αποθήκευση της ενέργειας στο ενιαίο σώμα.

## ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ Α.Δ.Ε. ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Από τη νέα θεωρία έχουμε καταλήξει στη νέα εξίσωση ισορροπίας της πλάκας η οποία περιεχει και τον τελεστή Shrödinger.

$$\boxed{D\nabla^4 w - cD\nabla^6 w = q} \quad (3.5)$$

Με βάση τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην απλή θεωρία πλακών, θέλουμε να δημιουργήσουμε τις νέες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μας

Κατά τον ίδιο τρόπο δημιουργούμε την ασθενή μορφή της νέας διαφορικής εξίσωσης πολλαπλασιάζοντας με μία συνάρτηση βάρους που αντιστοιχεί όπως και πριν στη μεταβολή της βύθισης ( $\Phi = \delta w$ ) και εν συνεχεία ολοκληρώνουμε ως προς την επιφάνεια της πλάκας. Επομένως έχουμε:

$$\iint_A (D\nabla^4 w - cD\nabla^6 w - q)\Phi dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$D \iint_A \nabla^4 w \Phi dx dy - cD \iint_A \nabla^6 w \Phi dx dy - \iint_A q \Phi dx dy = 0$$

$$\text{όπου } \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \text{ και}$$

$$\text{όπου } \nabla^6 w = \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}$$

Ο πρώτος όρος έχει υπολογιστεί στην απλή θεωρία καθώς και ο τρίτος. Εμείς θα υπολογίσουμε απλά τον δεύτερο έκτης τάξης όρο ο οποίος είναι:

$$\iint_A \nabla^6 w \delta w dx dy = \iint_A \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \right) \delta w dx dy =$$

$$= \iint_A \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right) \delta w dx dy + 3 \iint_A \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right) \delta w dx dy +$$

$$+ 3 \iint_A \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \delta w dx dy + \iint_A \left( \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \right) \delta w dx dy$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τους παραπάνω όρους κάνοντας τη γνωστή κατά παράγοντες ολοκλήρωση, και αντικαθιστώντας τους μετασχηματισμούς και το συμβιβαστό όπου χρειάζονται όπως παρακάτω:



$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \delta w dx dy &= \int dy \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \delta w \Big|_a^b - \int \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \right] = \\
&= \int dy \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_a^b + \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx \right] = \\
&= \int dy \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_a^b + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \Big|_a^b - \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} dx \right] = \\
&= \int \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a \delta w ds - \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cos a ds + \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \cos a ds - \frac{1}{2} \delta \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 dx dy = \\
&= \int \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin^2 a \cos a \right) \right] \delta w ds + \\
&+ \int \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a \cos^2 a \right) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
&+ \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos^3 a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds - \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \delta w dx dy &= \int dx \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \delta w \Big|_a^b - \int \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dy \right] = \\
&= \int dx \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \Big|_a^b + \int \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dy \right] = \\
&= \int dx \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \delta w \Big|_a^b - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \Big|_a^b + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \Big|_a^b - \int \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} dx \right] = \\
&= \int \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a \delta w ds - \int \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \sin a ds + \int \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \sin a ds - \frac{1}{2} \delta \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 dx dy = \\
&= \int \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \cos^2 a \right) \right] \delta w ds - \\
&- \int \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^2 a \cos a \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \cos^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
&+ \int \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^3 a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds - \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 dx dy
\end{aligned}$$

Και επίσης:

$$\begin{aligned}
& 3 \iint_{\Lambda} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \delta w dx dy + 3 \iint_{\Lambda} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \delta w dx dy = \\
& \iint \left[ 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \sin a + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \cos a - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial s} \left( (\sin^2 a - \cos^2 a) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^2 a - 2 \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) \right) \right] \delta w ds - \\
& - \iint \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \sin a \cos a + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial s} \left( \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) (\cos^2 a - \sin^2 a) + \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right) \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
& + 3 \iint \left[ \cos a \sin a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds - 3 \frac{1}{2} \delta \iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 dx dy - 3 \frac{1}{2} \delta \iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 dx dy
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}
 cD \iint_A \nabla^6 w \delta w dx dy = 0 \Rightarrow \\
 cD \left\{ \iint [2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \sin a + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a - \right. \\
 \left. - \frac{\partial}{\partial s} \left( (\sin^2 a - \cos^2 a) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \sin a \cos a \right) + \right. \\
 \left. + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a - 2 \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) \right) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \cos a \right) \sin a \cos a \right] \delta w ds - \\
 - \iint \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \sin a \cos a + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos^2 a + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin^2 a \right) + \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) (\cos^2 a - \sin^2 a) + \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right) - \right. \\
 \left. - \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \right) \sin a \cos a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \\
 \left. + \iint \left[ 3 \cos a \sin a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^3 a \right) \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \right\} = \\
 \frac{1}{2} cD \delta \iint_A \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Η τελική ελαστική ενέργεια με τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας είναι όπως είδαμε παραπάνω:

$$U_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} D \iint_A [\bar{\epsilon}(x,y) + c\bar{\epsilon}_g(x,y)] dx dy$$

και η μεταβολή της ενέργειας που προκύπτει από τις διπολικές τάσεις είναι:

$$\delta U_{\text{διπολ}} = \frac{1}{2} cD \delta \iint_A \bar{\epsilon}_g dx dy$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}_g = & \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 + (3-2\nu) \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)^2 \right] + \right. \\
 \text{Όπου} & \left. + 2\nu \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Απομονώνουμε και μετατρέπουμε σύμφωνα με το θεώρημα Stokes τους όρους του συνόρου της ελαστικής ενέργειας οι οποίοι λείπουν από το 2<sup>ο</sup> μέλος της (3.10) όπως κάναμε και στην κλασική θεωρία. Θα δημιουργήσουμε μία νέα εξίσωση την οποία και προσθέσουμε κατά μέλη με την (3.9) για να εμφανίσουμε όλη τη νέα ελαστική ενέργεια. Με τον τρόπο αυτό θα προσδιορίσουμε τα έργα που εμφανίζονται κατά την κατάστρωση της ΑΔΕ, θα αναγνωρίσουμε τα συζυγή μεγέθη που τα παράγουν και θα καταστήσουμε σαφείς τις πολύπλοκες συνοριακές συνθήκες.

Έτσι λοιπόν οι επιπλέον όροι είναι : (εκτός ολοκληρώματος και πολλαπλασιασμένοι με  $vcD$ )

Σύμφωνα πάλι με το θεώρημα Stokes

$$\iint_A \left( \frac{\partial N^*}{\partial x} - \frac{\partial M^*}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} (M^* dx + N^* dy)$$

Έχουμε τους επιπλέον ενεργειακούς όρους που τους μετατρέπουμε στο 1<sup>ο</sup> μέλος του Stokes:

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left( \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right) \right] = \\ & = \delta w_{xy^2} w_{x^3} + \delta w_{x^3} w_{xy^2} + \delta w_{yx^2} w_{y^3} + \delta w_{y^3} w_{yx^2} - 2 \left( \delta w_{xy^2} w_{xy^2} + \delta w_{yx^2} w_{yx^2} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial x}} \right\} \text{1ο μέλος του Stokes}$$

Με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις στους μετασχηματισμούς ξεκινάμε από το 2<sup>ο</sup> μέλος του Stokes και έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint N^* dy &= \oint \left[ \cos^2 a \sin a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \\ &+ \oint \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos a - 4 \sin a \cos^2 a \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta \partial s} ds \\ &- \oint \left[ \cos^2 a \sin a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial s^2} ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint N^* dy &= \oint \left[ \cos^2 a \sin a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \\ &- \oint \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos a - 4 \sin a \cos^2 a \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \\ &- \oint \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \cos^2 a \sin a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right] \delta w ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint M^* dx &= - \oint \left[ \cos a \sin^2 a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \\ &+ \oint \left[ -(\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a + 4 \sin^2 a \cos a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta \partial s} ds \\ &- \oint \left[ -\cos a \sin^2 a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial s^2} ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint M^* dx &= - \oint \left[ \cos a \sin^2 a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \\ &- \oint \left[ -(\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin a + 4 \sin^2 a \cos a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \\ &- \oint \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ -\cos a \sin^2 a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right] \delta w ds \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε συνολικά:

$$\begin{aligned}
& \nu c D \delta \iint_S \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left( \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right) \right\} dx dy = \\
& = \nu c D \left\{ \iint [(\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) + \right. \\
& + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \\
& - \iint \frac{\partial}{\partial s} [(\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)] \\
& - 4 \sin a \cos a \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right)] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \\
& - \iint \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) + \\
& + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)] \delta w ds
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Προσθέτουμε λοιπόν τις (3.9) και (3.10) κατά μέλη και έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} c D \delta \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 + \right. \\
& 2 \nu \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right) \left. \right\} dx dy = \\
& = c D \left\{ \iint [3 \cos a \sin a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^3 a \right) + \right. \\
& + \nu ((\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) + \\
& + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \int 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \sin a + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \left( (\sin^2 a - \cos^2 a) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \sin a \cos a \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a - 2 \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) \right) + \\
& + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \cos a \right) \sin a \cos a - \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} [(\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) + \\
& + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)] \delta w ds - \\
& - \left[ \int \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \sin a \cos a + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos^2 a + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin^2 a \right) \right] + \right. \\
& + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) (\cos^2 a - \sin^2 a) + \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right) - \right. \\
& - \left. \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \right) \sin a \cos a + \right. \\
& + \nu \left( (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right) \\
& \left. - 4 \sin a \cos a \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \}
\end{aligned}$$

Επομένως η επιπλέον αρχή δυνατών έργων στην θεωρία βαθμίδας διαμορφώνεται ως εξής:

$$\boxed{\delta U^* = \int M_{nn}^* \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds + \int V^* \delta w ds + \int M_n^* \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds} \quad (3.11)$$

Εμφανίζονται τα παρακάτω έργα:

Α) Έργο επιπέδων τέμνουσας

$$\int V^* \delta w ds \quad \text{Με μονάδες [N][m]}$$

Όπου η επιπέδων τέμνουσα είναι

$$\begin{aligned} V^* = cD \{ & 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \sin a + 2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a - \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left( (\sin^2 a - \cos^2 a) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \sin a \cos a \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a - 2 \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) \right) + \\ & + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \cos a \right) \sin a \cos a - \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) \right] + \\ & + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \} \end{aligned}$$

Β) Έργο επιπέδων ροπής:

$$\int M_n^* \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds \quad \text{Με μονάδες [Nm/m][m]}$$

Όπου η επιπέδων ροπή είναι:

$$\begin{aligned} M_n^* = -cD \{ & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \sin a \cos a + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos^2 a + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin^2 a \right) + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) (\cos^2 a - \sin^2 a) + \sin a \cos a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right) \right] - \\ & - \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \right) \sin a \cos a + \\ & + \nu (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\ & - 4 \sin a \cos a \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a \right) \} \end{aligned}$$



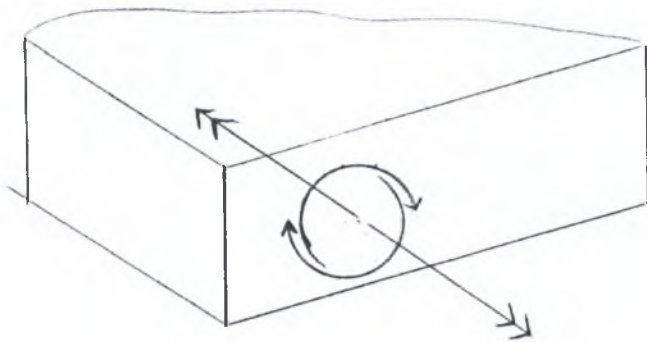
Γ) Νέο έργο διπολικής ροπής

$$\int M_{mn}^* \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} ds \quad \text{Με μονάδες } \underbrace{[m^2]}_c \underbrace{\left[\frac{N}{m^2} m^3\right]}_D \underbrace{\left[\frac{1}{m^3}\right]}_{\substack{\text{Οι 3ες} \\ \text{παράγωγοι} \\ \text{ολοκληρώματος}}} \underbrace{[m]}_{ds} \left[\frac{1}{m}\right] \rightarrow [Nm]$$

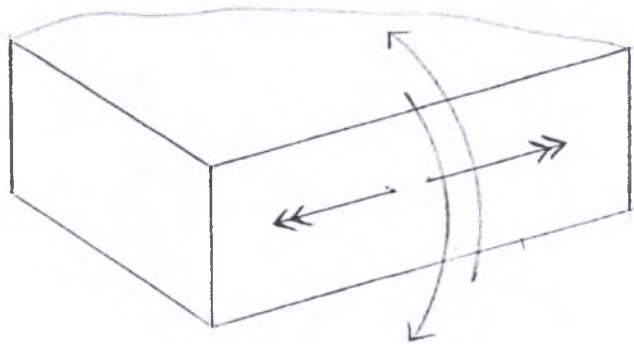
Όπου η νέα διπολική ροπή:

$$\begin{aligned} M_{mn}^* = & cD \left\{ 3 \cos a \sin a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cos a + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos^3 a + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^3 a \right) + \right. \\ & + \nu \left( (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos a - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin a \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

Τα ενεργειακά δίπολα και δίροπα που εμφανίζονται στη νέα εσωτερική ελαστική ενέργεια είναι όπως στα σχήματα παρακάτω..(Σχήμα 3.1)



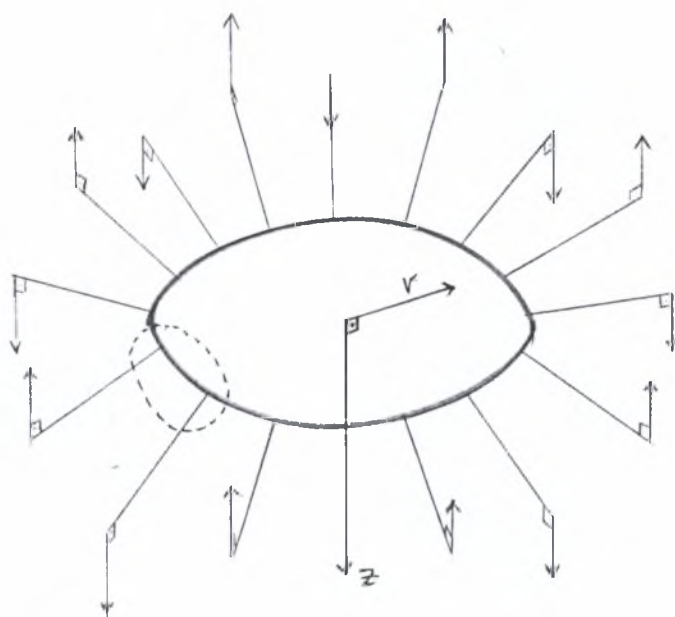
α) Διπολικές ροπές συβτροφή) σε πλάκα



β) Διπολικές ροπές κάμψης σε πλάκα ( $M_{\eta\eta}^+$ )

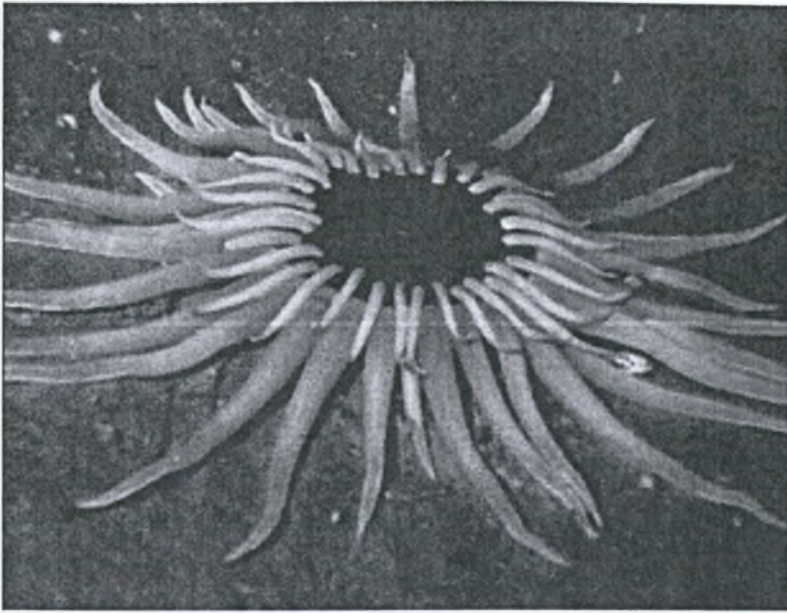
Σχήμα 3.1 Διπολικά δυναμικά μεγέθη (δίροπα) που εμφανίζονται επιπλέον στη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας.

Τέτοια δίροπα στο σύνορο θα μπορούσαν να δημιουργούνται σε είδη κατασκευών όπως στο σχήμα παρακάτω. Πχ μία πλάκα που έχει προσαρτημένες δοκούς προβόλους. Στη φύση συναντούμε τέτοιες «κατασκευές» μέρος των οποίων είναι τα μαλάκια, τα χταπόδια αλλά και οι μέδουσες, τσούχτρες, σουπιές κτλ. Δημιουργούνται στα άκρα του κυρίως κορμού τους δίπολικές μορφές ενέργειας που τους βοηθούν να κινούνται μέσα στο νερό.

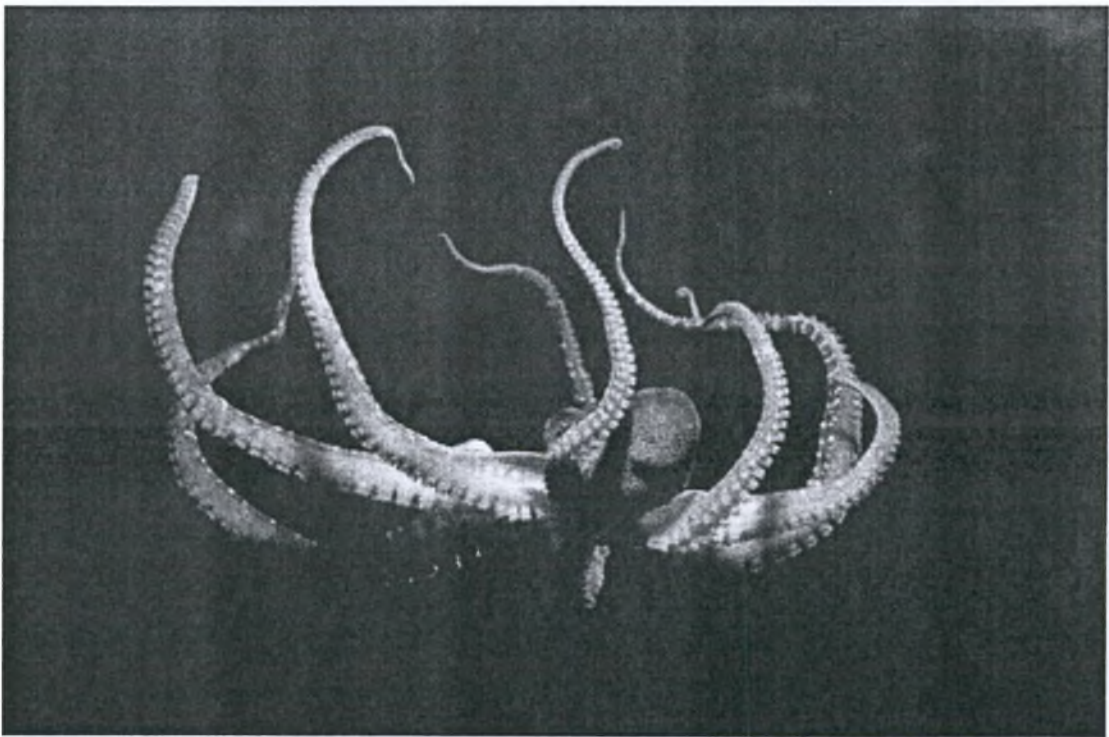


Σχήμα 3.2. Πλάκα με προσαρτημένες στο σύνορο πρόβολουσ δοκούς με εναλλασσόμενη συγκεντρωμένη φόρτιση στα άκρα τους. Σχηματίζονται κατ'αυτόν τον τρόπο δίροπα στο σύνορο της πλάκας.

Παρακάτω βλέπουμε τρόπους εφαρμογής των διπολικών ροπών στη φύση



Εικόνα 3.1 Θαλάσσια ανεμώνη. Τα μικρά «πόδια» δημιουργούν δίροπα στον κύριο κορμό της κατά την κίνησή της.( flickr.com)



Εικόνα 3.2. Τα πλοκάμια του χταποδιού του δίνουν κινητήριο ενέργεια μέσω διπολικών μεγεθών.(student.britannica.com)

Έτσι τελικά έχουμε τα αποτελέσματα της αρχής των δυνατών έργων στη θεωρία της βαθμίδας

$$\boxed{D \iint_A \nabla^4 w \delta w dx dy - cD \iint_A \nabla^6 w \delta w dx dy - \iint_A q \delta w dx dy = 0} \quad (3.5)$$

Προσθέτοντας και τα αποτελέσματα της απλής θεωρίας έχουμε τις τελικές συνοριακές συνθήκες μέσω της συνολικής αρχής των δυνατών έργων:

$$\boxed{\delta U_{\text{συνολ}} = \iint M_{\text{πσυνολ}} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} ds + \iint V_{\text{συνολ}} \delta w ds + \iint M_{\text{nn}} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \eta^2} + \iint q \delta w dx dy} \quad (3.11)$$

Όπου:

$$\delta U_{\text{συνολ}} = \delta \bar{U} + \delta U^*$$

$$V_{\text{συνολ}} = \bar{V} + V^*$$

$$M_{\text{πσυνολ}} = \bar{M}_n + M_n^*$$

την καινούργια διπολική ροπή  $M_{\text{nn}}^*$  και τις μαζικές δυνάμεις  $q$ .

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής Schrödinger δεν περνάει στις δυναμικές συνοριακές συνθήκες που δημιουργήσαμε.

Επίσης βλέπουμε ότι θα μπορούσαμε να προβούμε σε λάθος συμπεράσματα με το σκεπτικό ότι εφ'όσον η ελαστική εσωτερική ενέργεια αυξάνεται σημαίνει ότι το υλικό είναι πιο εύκαμπτο. Στην πραγματικότητα οι νέοι όροι αφορούν ενέργειακά δίπολα τα οποία αποσπών μέρος της απορροφούμενης ενέργειας από τη φύση της μικροδομής και επιδρούν ανάμεσα στα μικροσώματα που έρχονται σε επαφή.

Τέλος έχουμε στη νέα θεωρία την εξίσωση συμβιβαστού συνολικά:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin a \cos a \delta w \Big|_a - 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a \cos^2 a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin^2 a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a - \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin^2 a \cos a \right) \delta w \Big|_a - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin a \cos a \delta w \Big|_a + 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a + \\ & + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \cos^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \cos^2 a \right) \delta w \Big|_a + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin a \cos a \right) \delta w \Big|_a - 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a \right) \delta w \Big|_a - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} (\cos^2 a - \sin^2 a) \right) \delta w \Big|_a + 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} (\cos^2 a - \sin^2 a) \cos a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a - \\
& - 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \cos^2 a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \cos^2 a \right) \delta w \Big|_a - \\
& - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cos a \sin a \right) \delta w \Big|_a + 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \cos^2 a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a \right) \delta w \Big|_a - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} (\cos^2 a - \sin^2 a) \right) \delta w \Big|_a + 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a - \\
& - 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin^2 a \cos a \right) \delta w \Big|_a + \\
& - \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \left[ \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right] - \\
& 4 \sin a \cos a \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \Big|_a + \\
& + \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
& + \sin a \cos a \left[ \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial s} \Big|_a - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \left[ (\cos^2 a - \sin^2 a) \left( \cos a \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
& + \sin a \cos a \left[ \cos a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sin a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \delta w \Big|_a = \\
& \boxed{\left[ \sin a \cos a \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + (\sin^2 a - \cos^2 a) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \right] \delta w \Big|_a} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Αυτό είναι το επιλέον συμβιβαστό το οποίο θα απαιτήσουμε να είναι μηδέν.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στη νέα θεωρία εκτός από τις εξισώσεις συμβιβαστού των καμπυλοτήτων που είχαμε από την κλασσική θεωρία εμφανίζεται και μία δεύτερη εξίσωση συμβιβαστού που αφορά τις 2<sup>εξ</sup> παραγώγους αυτών των καμπυλοτήτων.

### Τασικές συναρτήσεις του Southwell στη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας

Το πρόβλημα είναι τί γίνεται με τις τασικές συναρτήσεις του Southwell στη νέα θεωρία όπου ισχύει:

$$M_x = (1 - c\nabla^2) \overline{M}_x$$

$$M_y = (1 - c\nabla^2) \overline{M}_y$$

$$M_{xy} = (1 - c\nabla^2) \overline{M}_{xy}$$

Επομένως θέτουμε σαν προέκταση του Southwell τα εξής:

$$M_y = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial V}{\partial x} + M_0 \right]$$

$$M_x = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial V}{\partial y} + M_0 \right]$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} (1 - c\nabla^2) \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$Q_x = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} M_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \right] = (1 - c\nabla^2) \overline{Q}_x$$

$$Q_y = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} M_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \right] = (1 - c\nabla^2) \overline{Q}_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = (1 - c\nabla^2) \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right]$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ισορροπίας( 2.5.α) όπως πιο πάνω έχουμε τελικά:

$$\boxed{q = -(1 - c\nabla^2) \nabla^2 M_0} \quad (3.13)$$

Αυτό σημαίνει ότι το κατανεμημένο φορτίο πρέπει να έχει αυτή τη μορφή ώστε να συμφωνούν και οι παραπάνω παραδοχές στην προέκταση του προβλήματος.

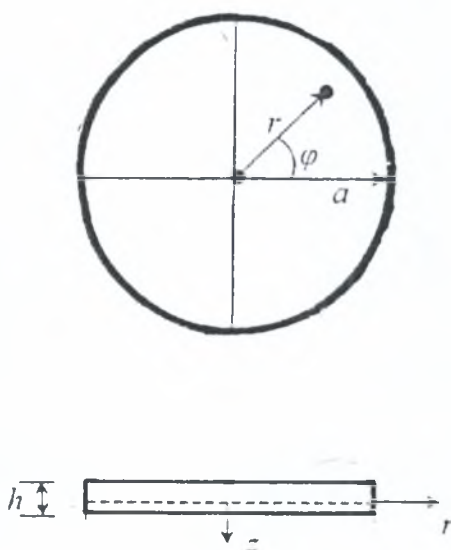
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

#### 4.1.ΓΕΝΙΚΑ

Στις κυκλικές πλάκες με διάμετρο  $R=a$  δεχόμαστε μία διάσταση την ακτινική  $r$ . Εξετάζουμε λοιπόν τις απόλυτα αξονοσυμμετρικές πλάκες με συμμετρία στη γεωμετρία (αρχή αξόνων στο κέντρο) και στη φόρτιση (ομοιόμορφα κατανεμημένη). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απλοποιούνται κατά πολύ οι τύποι που υπολογίσαμε στα παραπάνω κεφάλαια καθώς έχουμε να αντιμετωπίσουμε μονοδιάστατο πλέον πρόβλημα.

Στην περίπτωση της κυκλικής πλάκας η βύθιση είναι συνάρτηση της ακτινικής απόστασης  $r$  μόνο, δηλαδή  $w=w(r)$ .



Σχήμα 4.1 Κυκλική πλάκα.

Έτσι η Laplasian γίνεται:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \quad (4.1.1)$$

Η διαρμονική γίνεται:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \nabla^2 w \right) \quad (4.1.2)$$

Και η 3<sup>ου</sup> βαθμού αρμονική γίνεται:

$$\nabla^6 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \nabla^4 w \right) \quad (4.1.3)$$



Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι ουσιαστικά μονοδιάστατο έχουμε τα εξής:

Στο σύνορο ισχύει  $\frac{\partial}{\partial s}(\dots) \rightarrow 0$  και  $\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\dots) \rightarrow 0$

Οι αντιστοιχίες με το διδιάστατο πρόβλημα  $\frac{\partial}{\partial \eta}(\dots) \rightarrow \frac{d}{dr}(\dots)$  και  $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\dots) \rightarrow \frac{d^2}{dr^2}(\dots)$

Επομένως η εξίσωση ισορροπίας γίνεται μία διαφορική εξίσωση 6<sup>ου</sup> βαθμού ως προς r. Άρα η ομογενής λύση έχει 6 σταθερές με αποτέλεσμα να χειαζόμαστε 6 συνθήκες για να λύσουμε το πρόβλημα.(συνοριακές, συμμετρίας, συνθήκες ομαλότητας ).

Για παράδειγμα:

$$r=0 \begin{cases} \text{συνθήκη ομαλότητας} \\ \text{συνθήκη συμμετρίας} \\ \text{συνοριακή συνθήκη} \end{cases}$$

$$r=a \begin{cases} \text{συνθήκη ομαλότητας} \\ \text{συνθήκη συμμετρίας} \\ \text{συνοριακή συνθήκη} \end{cases}$$

Σε περίπτωση που το κατανεμημένο φορτίο είναι ομοιόμορφο (q=σταθ), το βέλος κάμψης στην κλασσική θεωρία είναι:

$$w(r) = \underbrace{\beta r^4}_{\substack{\text{μερική} \\ \text{λύση} \\ D\nabla^4 w_H = p}} + \underbrace{A r^2 + B + C r^2 \ln \frac{r}{a} + F \ln \frac{r}{a}}_{\substack{\text{λύση ομογενοίς} \\ D\nabla^4 w_H = 0}} \quad (4.1.4)$$

όπου  $\beta = \frac{q}{64D}$  και  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Περιορισμοί:

Αν το  $r=0$  είναι σημείο της πλάκας (δηλαδή η πλάκα είναι συμπαγής και δεν έχει κενό στο κέντρο) τότε  $C=0$ ,  $F=0$  ώστε να αποφύγουμε τον απειρισμό του  $w(0)$ .

(  $|w(0)| < +\infty$  )

$$\text{Έτσι τελικά το βέλος γίνεται: } \boxed{w(r)_1 = \beta r^4 + A r^2 + B} \quad (4.1.5)$$

Στο κλασσικό πρόβλημα έχουμε 2 άγνωστους συντελεστές που σημαίνει ότι θέλουμε μόνο 2 συνοριακές συνθήκες. ( πχ.  $w(r=a)=0$  και  $w'(r=a)=0$ , δηλαδή συνθήκες πάκτωσης στο σύνορο  $r=a$  )

Το βέλος κάμψης στη νέα θεωρία είναι:

$$\boxed{w(r)_2 = \beta r^4 + A r^2 + B + C \text{Bessell} \left[ 0, \frac{r}{\sqrt{c}} \right]} \quad (4.1.6)$$

$$w'(r)_2 = 4\beta r^3 + 2Ar + C \frac{1}{\sqrt{c}} \text{Bessell} \left[ 1, \frac{r}{\sqrt{c}} \right] \quad (4.1.7)$$

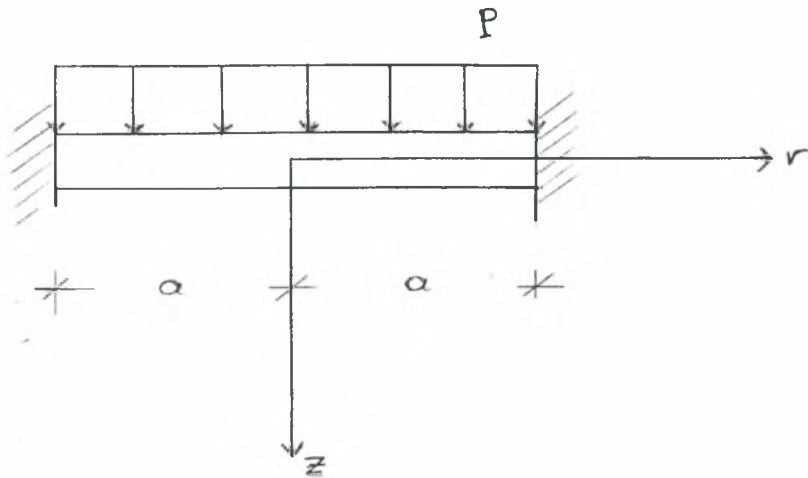
$$w''(r)_2 = 12\beta r^2 + 2A + \frac{1}{c} C \frac{\left( \text{Bessell} \left[ 0, \frac{r}{\sqrt{c}} \right] + \text{Bessell} \left[ 2, \frac{r}{\sqrt{c}} \right] \right)}{2} \quad (4.1.8)$$

Όπου  $c$  το εσωτερικό μήκος που έχουμε επιλέξει ως τη μικροδομή μας.

Η συνάρτηση Bessel δείχνει την επιρροή της μικροδομής του υλικού στο βέλος κάμψης. Ο πρώτος αριθμός (0,1,2) δείχνει την τάξη της συνάρτησης Bessel ( $I_0, I_1, I_2$ ).

#### 4.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗΣ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΠΛΑΚΑΣ

Με το παρακάτω παράδειγμα θα δείξουμε την επιρροή της μικροδομής στο βέλος κάμψης και κατ'επέκταση στην ακαμψία του υλικού.



Σχήμα 4.2 Τομή κυκλικής πλάκας φορτιζόμενη ομοιόμορφα.

##### A) Βέλη κάμψης

##### 1) Κλασσική θεωρία:

$$\text{Συνοριακές συνθήκες } r=a \begin{cases} w(a) = 0 \\ \frac{dw}{dr}(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w(r)_1 = \beta(a^2 - r^2)^2} \quad (4.2.1)$$

όπου  $a$  η ακτίνα της κυκλικής πλάκας.

Θέτοντας  $r^* = r/a$  και  $w^*(r) = \frac{w(r)}{\beta a^4}$  κανονικοποιούμε το πρόβλημα δηλαδή γίνεται ανεξάρτητο της τιμής του φορτίου. Η εξίσωση (4.2.1) γίνεται:

$$w^*(r^*)_1 = \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^2 \quad \text{με } 0 \leq r^* \leq 1 \quad (4.2.2)$$

2) Θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας:

Θέτουμε  $r^* = r/a$  και  $w^*(r) = \frac{w(r)}{\beta a^4}$  και οι εξισώσεις (4.1.6),(4.1.7) και (4.1.8) γίνονται:

$$w^*(r^*)_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^4 + A^* \left(\frac{r}{a}\right)^2 + B^* + C^* \text{Bessell} \left[ 0, \frac{r}{a} \frac{a}{\sqrt{c}} \right] \quad (4.2.3)$$

$$w''(r^*)_2 = 4 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + 2A^* \left(\frac{r}{a}\right) + C^* \frac{a}{\sqrt{c}} \text{Bessell} \left[ 1, \frac{r}{a} \frac{a}{\sqrt{c}} \right] \quad (4.2.4)$$

$$w'''(r^*)_2 = 12 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2A^* + \frac{a^2}{c} C^* \frac{\left( \text{Bessell} \left[ 0, \frac{r}{a} \frac{a}{\sqrt{c}} \right] + \text{Bessell} \left[ 2, \frac{r}{a} \frac{a}{\sqrt{c}} \right] \right)}{2} \quad (4.2.5)$$

Όπου  $A^* = \frac{A}{\beta a^2}$ ,  $B^* = \frac{B}{\beta a^4}$ ,  $C^* = \frac{C}{\beta a^4}$

Ο λόγος  $\frac{a}{\sqrt{c}}$  που εμφανίζεται μετά την κανονικοποίηση δηλώνει τη σύγκριση του εσωτερικού μήκους  $\sqrt{c}$  με τη συνολική διάσταση  $a$ .

Αρχικά για να βρούμε το βέλος κάμψης με τη νέα θεωρία προσδιορίζουμε τις συνοριακές συνθήκες στο  $r^*=1$  ( $r=a$ ) οι οποίες είναι οι εξής :

$$r^*=1 \begin{cases} w^*(1)_2 = 0 & (4.2.6.a) \\ w'^*(1)_2 = 0 & (4.2.6.β) \\ w''^*(1)_2 = 0 & (4.2.6.γ) \end{cases}$$

Η συνθήκη (4.2.6.γ) υπάρχει γιατί θεωρούμε το σύνορο υπερπαγιωμένο και απαιτούμε η συνοριακή καμπυλότητα να είναι μηδενική. Η συνθήκη αυτή είναι νέου τύπου, λόγω της θεωρίας ελαστικής βαθμίδας. Οι συνθήκες (4.2.α και β) είναι οι κλασσικές πακτώσεις.

- για λόγο  $\frac{a}{\sqrt{c}}=5$  που σημαίνει ότι το εσωτερικό μήκος είναι αρκετά σημαντικό σε σχέση με τη διάσταση  $a$  (την ακτίνα της πλάκας) έχουμε:

Τα δεδομένα για την Bessel συνάρτηση για το λόγο  $\frac{a}{\sqrt{c}}=5$  στο σημείο  $r=a$  τα βρίσκουμε από πίνακες και είναι τα εξής:

$$\text{Bessel I}[0, 5] = 27,24$$

$$\text{Bessel I}[1, 5] = 23,34$$

$$\text{Bessel I}[1, 5] = 17,51$$

Αντικαθιστούμε στις (4.2.3) (4.2.4) και (4.2.5) και έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$1 + A^* + B^* + C^* 27,24 = 0 \quad (4.2.7.a)$$

$$4 + 2A^* + 5C^* 23,34 = 0 \quad (4.2.7.b)$$

$$12 + 12A^* + (C^*/2)[27,24 + 17,51]25 = 0 \quad (4.2.7.c)$$

Τελικά

$$A^* = -0,945$$

$$B^* = 0,44$$

→ Η σταθερά  $B^*$  για μικρό  $C^*$  αντιστοιχεί στο max βέλος κάμψης στο κέντρο της πλάκας

$$C^* = -0,018$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (4.2.3) η έκφραση του βέλους γίνεται:

$$w_2^* = \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 0,945 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0,44 - 0,018 \text{Bessel I} \left[ 0, \frac{r}{a} 5 \right] \quad (4.2.8)$$

- για λόγο  $\frac{a}{\sqrt{c}}=10$  που σημαίνει ότι το εσωτερικό μήκος είναι μικρό σε σχέση με τη διάσταση  $a$  (την ακτίνα της πλάκας) έχουμε:

Τα δεδομένα για την Bessel συνάρτηση για τον λόγο  $\frac{a}{\sqrt{c}}=10$  στο σημείο  $r=a$  είναι:

$$\text{Bessel I}[0, 10] = 2815,72$$

$$\text{Bessel I}[1, 10] = 2670,99$$

$$\text{Bessel I}[1, 10] = 2281,52$$

Αντικαθιστούμε κατά τον ίδιο τρόπο και έχουμε το παρακάτω σύστημα:

$$1 + A^* + B^* + C^*2815,72 = 0 \quad (4.2.9.a)$$

$$4 + 2A^* + 10C^*2670,99 = 0 \quad (4.2.9.β)$$

$$12 + 12A^* + (C^*/2)[2815,72 + 2281,52]100 = 0 \quad (4.2.9.γ)$$

Επιλύοντας το σύστημα έχουμε:

$$A^* = -1,53$$

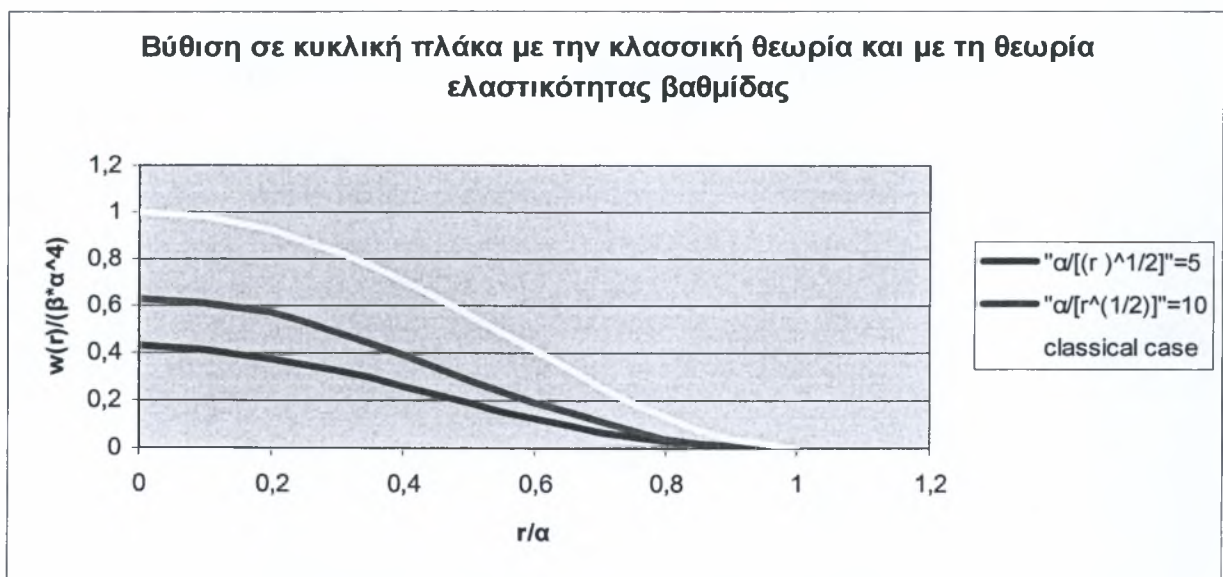
$$B^* = 0,63$$

$$C^* = -0,000035$$

Άρα η έκφραση του βέλους είναι:

$$w_2^* = \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 1,53\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 0,63 - 0,000035 BesselI\left[0, \frac{r}{a}10\right] \quad (4.2.10)$$

Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται συγκρητικά τα βέλη κάμψης ακολουθώντας α) την κλασσική θεωρία [σχέση (4.2.2)] και β) τη θεωρία της ελαστικότητας βαθμίδας στην περίπτωση που η μικροδομή είναι σχετικά μεγάλη [σχέση (4.2.8)] και σε περίπτωση που η μικροδομή είναι σχετικά μικρή. [σχέση (4.2.10)].



Γράφημα 4.1. Κατανομή βελών κάμψεως σε κυκλική αμφίπακτη πλάκα με ομοιόμορφη φόρτιση κατά την κλασσική θεωρία και κατά τη θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας.

Ενδεικτικά πήραμε και το λόγο  $\frac{a}{\sqrt{c}}=1$  που σημαίνει ότι έχουμε μία πλάκα από μονόκοκκο υλικό. Φτάνουμε σε σημείο δηλαδή που θεωρούμε το εσωτερικό μήκος πλήρως συγκρήσιμο με την ολική διάσταση. Σε αυτό το οριακό σημείο, οι συντελεστές του βέλους κάμψης είναι αρκετά μεγάλοι και  $B^* \neq w(0)$ . Επίσης έχουμε οριακά αποτελέσματα στο θέμα της ακαμψίας αφού το  $\max$  βέλος κάμψης γίνεται  $w^*(0) \approx 0,03$  δηλαδή σχεδόν αμελητέο συγκριτικά με τις παραπάνω περιπτώσεις.

#### Συμπεράσματα από το διάγραμμα 4.1:

- Αρχικά το  $\max$  βέλος κάμψης στην κλασσική θεωρία είναι μεγαλύτερο απ'ότι στη νέα θεωρία στην οποία συμπεριλαμβάνεται η ενέργεια της μικροδομής.
- Οι καμπύλες των βελών της θεωρίας ελαστικότητας βαθμίδας στο σημείο  $r/a \rightarrow 1$  (στο άκρο της πλάκας) εκτός από μηδενική κλίση έχουν και μηδενική καμπυλότητα. Η καμπύλη του βέλους της κλασσικής θεωρίας στο ίδιο σημείο έχει μόνο την κλίση μηδενική (απλή πάκτωση).
- Όσο ο λόγος  $\frac{a}{\sqrt{c}}$  μειώνεται, είναι σαν να αυξάνεται η διάσταση της μικροδομής (δηλαδή το εσωτερικό μήκος που εμείς αρχικά θεωρήσαμε) σχετικά με τη συνολική διάσταση της πλάκας. Όσο λοιπόν αυξάνεται η επιρροή της μικροδομής βλέπουμε ότι η κατανομή του βέλους κάμψης και η  $\max$  τιμή στο μέσον μειώνονται. Αυτό τελικά σημαίνει ότι ακαμψία αυξάνεται και η πλάκα γίνεται σημαντικά πιο δύσκαμπτη.

#### B) Κατανομή ροπών

Θα δείξουμε τι συμβαίνει με τις ροπές στην κυκλική πλάκα με την κλασσική θεωρία και με τη νέα θεωρία.

1) Στην κλασσική θεωρία ( $\frac{\sqrt{c}}{a}=0$ ) τα αποτελέσματα της κατανομής είναι γνωστά (Timoshenko and Krieger 1959)

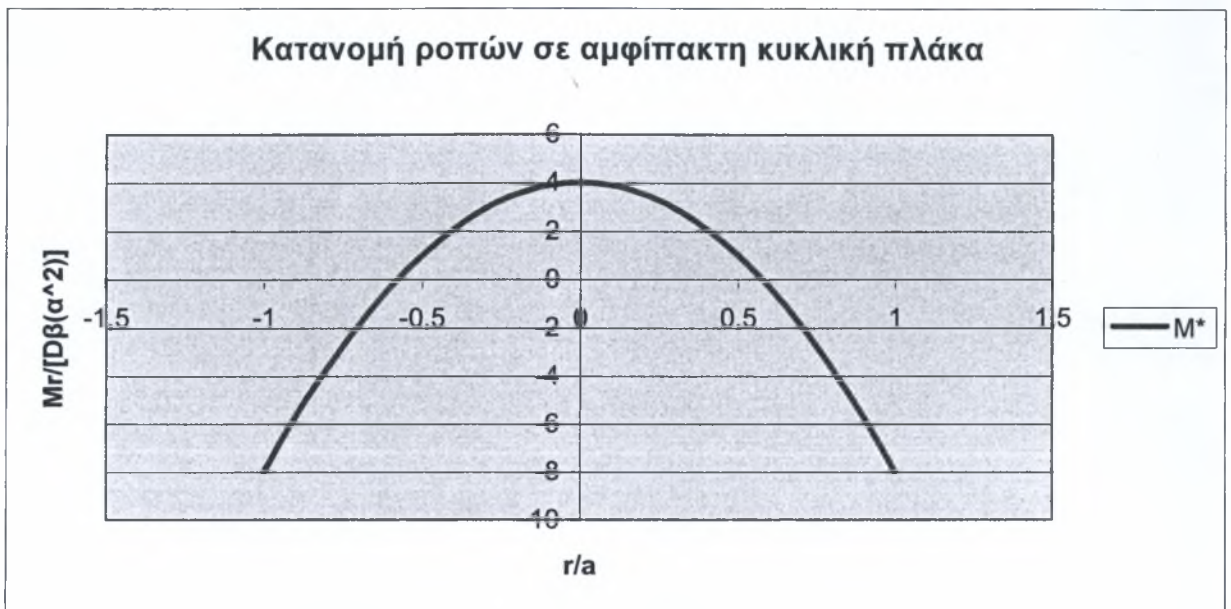
Θεωρούμε  $\nu=0$  για απλούστευση οπότε έχουμε κατ'αντιστοιχία με το μονοδιάστατο πρόβλημα τη ροπή κάμψης:

$$\bar{M}_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (4.2.11)$$

Για  $r^* = r/a$  και  $\bar{M}_r^* = \frac{\bar{M}_r}{D\beta a^2} = -\frac{d^2 w^*}{dr^{*2}}$  έχουμε για αμφίπακτη πλάκα

$$\bar{M}_r^* = -8r^{*2} + 4(1 - r^{*2}) \quad (4.2.12)$$

Η κατανομή της ροπής φαίνεται στο παρακάτω γράφημα που μας είναι γνωστό από την κλασσική θεωρία πλάκων.



Γράφημα 4.2. Κατανομή ροπών σε αμφίπακτη κυκλική πλάκα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.

Από το γράφημα βλέπουμε ότι για  $r^*=0 \rightarrow M^*=4$

$$r^*=1 \rightarrow M^*=-8$$

Παρατηρούμε ότι η αναλογία της ροπής στο μέσον με τη ροπή στα άκρα είναι 1/2 όπως θα συνέβαινε σε μία αμφίπακτη ευθύγραμμη δοκό.



2) Στη νέα θεωρία έχουμε:

$$M^* = \bar{M}^* + \left(\frac{\sqrt{c}}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{d^3 w}{dr^{*3}} + \frac{d^4 w}{dr^{*4}}\right) \quad (4.2.13)$$

- Για  $\frac{a}{\sqrt{c}} = 5$  έχουμε τα εξής αποτελέσματα

$$r^*=0 \rightarrow M^* = 3,70 \quad \text{στο μέσον}$$

$$r^*=1 \rightarrow M^* = -8,82 \quad \text{στα άκρα}$$

- Για  $\frac{a}{\sqrt{c}} = 10$  έχουμε

$$r^*=0 \rightarrow M^* = 3,59 \quad \text{στο μέσον}$$

$$r^*=1 \rightarrow M^* = -8,62 \quad \text{στα άκρα}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι τιμές των ροπών στην νέα θεωρία δεν διαφέρουν πολύ από της κλασικής. Στο μέσον μειώνονται λίγο και στα άκρα αυξάνονται. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τη νέα θεωρία έχουμε μεγάλο όφελος στο θέμα της ακαμψίας αλλά και μικρή επιβάρυνση στις ροπές στα άκρα. Η επιβάρυνση αυτή είναι σαφώς πολύ μικρότερη από το όφελος της μείωσης των βελών κάμψης. Αυτό σημαίνει ότι η μικροδομή λειτουργεί έτσι ώστε να μειώνονται οι παραμορφώσεις και ταυτόχρονα να μην χρειάζεται μεγάλη επιπλέον αντοχή.

## ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ.

1) Στην κλασσική περίπτωση έχουμε κανονικοποιημένο το βέλος κάμψης:

$$w^*(r^*)_1 = \left(1 - (r^*)^2\right)^2, \text{ όπου } r^* = \frac{r}{a} \text{ και } w^*(r) = \frac{w(r)}{\beta a^4}$$

$$U = W = \iint_A p w dx dy = 2\pi p \int_0^a w(r) r dr = 2\pi p a^2 \beta a^4 \int_0^1 w(r^*) r^* dr^* =$$

$$= 2\pi p \beta a^6 \int_0^1 \left[1 - (r^*)^2\right]^2 r^* dr^* \Rightarrow$$

$$U = \frac{2\pi p \beta a^6}{6} = 2\pi p \beta a^6 0,167$$

2) Στη νέα θεωρία έχουμε γενικά:

$$U = W = \iint_A p w dx dy = 2\pi p \int_0^a w(r) r dr = 2\pi p a^2 \beta a^4 \int_0^1 w(r^*) r^* dr^* =$$

$$= 2\pi p \beta a^6 \int_0^1 \left[ (r^*)^4 + A^* (r^*)^2 + B^* + C^* I_0 \left( r^* \frac{a}{\sqrt{c}} \right) \right] r^* dr^* \Rightarrow$$

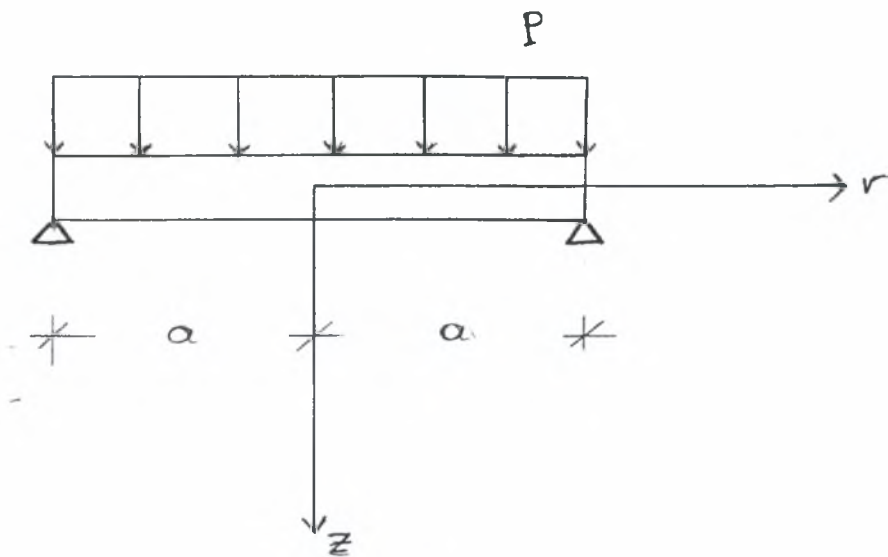
$$U = 2\pi p \beta a^6 \left( \frac{1}{6} + \frac{A^*}{4} + \frac{B^*}{2} + C^* \text{BesselI} \left[ 1, \frac{a}{\sqrt{c}} \right] \frac{\sqrt{c}}{a} \right)$$

A) Για  $\frac{a}{\sqrt{c}} = 5$  (Ισχυρή μικροδομή)  $U = 2\pi p \beta a^6 0,063$

B) Για  $\frac{a}{\sqrt{c}} = 10$  (Σχετικά ασθενής μικροδομή)  $U = 2\pi p \beta a^6 0,090$

Βλέπουμε και αριθμητικά πλέον ότι η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο υλικό στην κλασσική περίπτωση είναι σαφώς μεγαλύτερη απ' όση στη νέα θεωρία. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο η μικροδομή ισχυροποιείται τόσο η ελαστική ενέργεια μειώνεται με αποτέλεσμα το σώμα να είναι στην πραγματικότητα πιο άκαμπτο.

Σε κυκλική πλάκα με αρθρώσεις στο σύνορο και ομοιόμορφη φόρτιση ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες:



$$w(a) = 0$$

$$M_{\text{συνολ}}(a) = 0$$

$$M_{nn}^*(a) = 0$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

Εισάγοντας τη μικροδομή του υλικού στην επίλυση προβλημάτων βλέπουμε αρχικά ότι η εσωτερική ελαστική ενέργεια αυξάνεται. Αυτό όπως αποδείξαμε δεν σημαίνει ότι το υλικό απορροφάει περισσότερη ενέργεια. Αναπτύσσονται κάποιοι εσωτερικοί διπολικοί μηχανισμοί που σχετίζονται με την αλληλεπίδραση των μικροπλακιδίων της πλάκας οι οποίοι αποσπούν κάποιο μέρος της απορροφούμενης ενέργειας. Αυτό τελικά αποδεικνύει ότι η εσωτερική ενέργεια που απορροφάται από την πλάκα είναι μικρότερη από αυτή που απορροφάται κατά την κλασσική θεωρία η οποία δεν συμπεριλαμβάνει την επίδραση της μικροδομής. Έτσι με τη νέα θεωρία αποδεικνύουμε ότι οι πλάκες έχουν στην πραγματικότητα μεγαλύτερη ακαμψία απ'ότι μας λέει η κλασσική θεωρία.

Βλέπουμε ότι όσο πιο πολύ εστιάζουμε στο μικρόκοσμο, η επιρροή της μικροδομής του υλικού στην εσωτερική ελαστική ενέργεια και στην ακαμψία του σώματος είναι μεγάλη και οδηγεί σε καλύτερη απόκριση και συμπεριφορά.π.χ κοχύλια κτλ. Παρόλ'αυτά εμείς χρησιμοποιούμε τις κλασσικές θεωρίες γιατί οι κλίμακες των σύνηθων κατασκευών που μας απασχολούν είναι τέτοιες που η μικροδομή έχει πολύ μικρή επιρροή στην τελική συμπεριφορά τους.

Εάν καταφέρουμε να εισάγουμε, είτε μέσω μικροδομής, είτε μέσω άλλων χαρακτηριστικών, εσωτερικά μήκη στο πρόβλημα των πλακών, τότε μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερες ακαμψίες και υψηλότερες αντοχές. Η μελέτη της φύσης μπορεί να μας δώσει τρόπους για να το πετύχουμε.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ/ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ [8]:

Ένα παράδειγμα της ασθενούς μορφής είναι το παρακάτω:  
Έστω θέτουμε μία διατομή  $A(x,y)$  που είναι η επιφάνεια μιας κλειστής περιοχής ως την «ισχυρή» εξίσωση. Από την εξίσωση αυτή μπορώ να προσδιορίσω τις εξής επόμενες οι οποίες ε τη σειρά τους προσδιορίζουν εν μέρη την παραπάνω:

- $A = \iint dx dy$  το εμβαδόν της επιφάνειας  
 $Ax_{CG} = \iint x dx dy$
- $Ay_{CG} = \iint y dx dy$  το κέντρο βάρους και ροπές αδράνειας της επιφάνειας  
 $I_x = \iint y^2 dx dy$   
 $I_y = \iint x^2 dx dy \dots\dots$

Παρόλ'αυτά δεν μπορούμε να ξεκινήσουμε ανάποδα, από τις τελευταίες δηλαδή, γιατί τα στοιχεία είναι ελλειπή και δεν μπορεί εκτός και αν βρούμε όλες αυτές τις εξισώσεις οι οποίες είναι άπειρες. Γι'αυτό το λόγο οι τελευταίες εξισώσεις είναι ασθενείς μορφές της «ισχυρής» αρχικής εξίσωσης.

A) Θεώρημα απόκλεισης ( GAUSS) μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα όγκου σε επιφανειακό με εσωτερικό γινόμενο:

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{A} dV = \iint_S \underline{A} \cdot \underline{n} dS$$

Όπου:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad \underline{A} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad \underline{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \underline{n} = (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z)$$

B) Θεώρημα Stokes μετατρέπουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο με το εξωτερικό γινόμενο:

$$\iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot \underline{ndS} = \oint_G \underline{A} \cdot \underline{dr}$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad \underline{A} = \{A_x, A_y, A_z\} \quad \underline{dr} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i}_x & \underline{i}_y & \underline{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \underline{i}_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} - \underline{i}_y \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + \underline{i}_z \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \underline{dr} = (A_x d_x + A_y d_y + A_z d_z)$$

Μετατρέπουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε επικαμπύλιες γιατί μας ενδιαφέρει η κατάσταση στο σύνορο της επιφάνειας της πλάκας.

## ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΔΙΠΟΛΩΝ ΣΕ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ.

### Κάμψη ανοικτών λεπτότοιγων διατομών

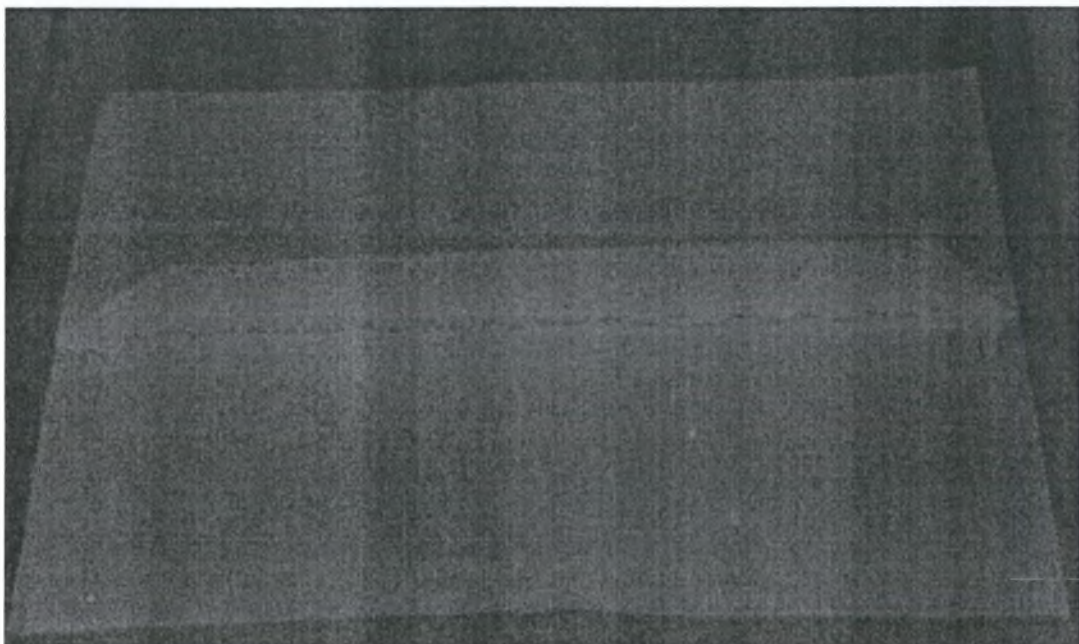
( Ευγενική προσφορά της Δ.Παπαγεωργοπούλου Α. από τη διπλωματική της Θεωρία στρέψης με ελαστικότητα βαθμίδας και εφαρμογές σε λεπτότοιχες διατομές.)

Για τα αποτελέσματα των διπλών κατά την κάμψη έχουν μιλήσει ο Βαρδουλάκης και Γιαννακόπουλος(2005). Με αφορμή το παράδειγμα της διατομής T που παραθέτουν έφτιαξε η δ.Παπαγεωργοπούλου σε συνεργασία με τον κ. Γιαννακόπουλο μια ίδια διατομή από χαρτί με μεγάλα φτερά, για τον λόγο ότι ήθελαν να δώσουν τη δυνατότητα στο σύστημα να αποθηκεύσει μεγάλη ποσότητα διπολικής ενέργειας. Χρησιμοποίησαν εφελκυσμό για να αποφύγουν φαινόμενα αστάθειας.

Η διατομή έχει τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- Μήκος 29.7cm
- Μήκος φτερών 8,2cm
- Ύψος κορμού 2,1 cm
- Πάχος χαρτιού  $10^{-4}$  m

Το πάνω μέρος του κορμού έχει συρραφεί καθ'όλο το μήκος της δοκού ενώ έχει επισυναφθεί στα δύο άκρα της δοκού ο κορμός, με σκοπό να κρατηθεί σταθερός.

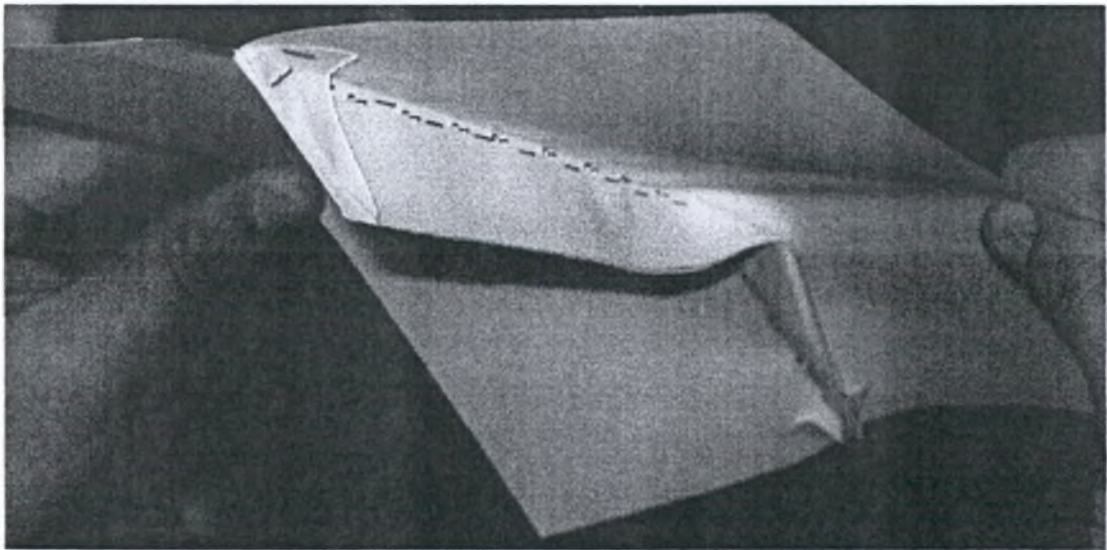


Εικόνα1. Δοκός T χωρίς την επίδραση κάποιας δύναμης.

Στη συνέχεια ασκήθηκαν στα δύο φτερά εφελκυστικές δυνάμεις ίσες και αντίθετες (βλ σχήμα 1). Η κλασσική θεωρία δοκών δεν αναμένει κάποιο αποτέλεσμα. Στην πράξη όμως η διατομή κάμπτεται και ο κορμός καθώς υφίσταται θλιπτικές τάσεις λόγω του ότι είναι λεπτός και αδυνατεί να προβάλει αντίσταση υπόκειται σε τοπικό λυγισμό. Βλέπουμε λοιπόν ότι εφαρμόζοντας ένα δίπολο, αν και μακροσκοπικά δεν υπάρχει κάποια ένταση τελικά εκδηλώνεται μέσω της σύζευξης κάμψη.



Σχήμα 1. Διατομή T υπό την επίδραση εφελκυστικών δυνάμεων  $F$  ίσων και αντίθετων.



Εικόνα 2. Δοκός T υπό την επίδραση δίπολου εφελκυστικών δυνάμεων  $F$  κάμπτεται και ταυτόχρονα παρουσιάζει τοπικό λυγισμό στον κορμό της.



Εικόνα 3. Δοκός παρουσιάζει τοπικό λυγισμό στον κορμό λόγω θλιπτικών τάσεων από την κάμψη που αναπτύσσεται υπό την επίδραση του εφελκυστικού διπόλου.

Σε περίπτωση που έχουμε μέτριες στροφές, η κατά Kirchhoff [10] κινηματική πρέπει να αντικατασταθεί από τις εξισώσεις Von Karman [11].

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Sokolnicoff I.(1959).  
Mathematical theory of elasticity, Mc Graw- Hill.
- [2] Timoshenko, S.P and Woinowsky- Krieger, S. (1959).  
Theory of Plates and Shells, 2<sup>nd</sup> ed, Mc Graw- Hill.
- [3] Donnel, L.H. (1976).  
Beams, Plates and Shells, Mc Graw- Hill.
- [4] Mindlin R.D. (1964).  
Micro- structure in linear elasticity, Archives or Rational Mechanics and Analysis, vol 16, pp.51-78.
- [5] Mindlin, R.D. and Eshel, N.N. (1968).  
On first strain-gradient theories in linear elasticity, Int. J. Solids and structures, vol 4, pp. 109-124.
- [6] Papargyri-Beskou, S. , Tsepoura, K., Polyzos, D. and Beskos, D.E.. (2005).  
Bending and stability analysis of gradient elastic beams, Int. J. of solids and structures, vol 40, pp.385-400.
- [7] Papargyri-Beskou, S. , and Beskos, D.E. (2007).  
Satic and stability analysis of gradient elastic plates in bending, 8<sup>th</sup> HSTAM Inter. Congress on Mechanics, Patras, pp.687-692.
- [8] Von Karman T. and Biot M.(1940) Mathematical Methods in Engineering, Mc Graw- Hill, Hew York.
- [9] John, F. (1975).  
Partial Differential Equations, 2<sup>nd</sup> Ed, Springer-Verlag, New York.
- [10] Kirchhoff G.(1852) Uber die Gleichungers des Gleichgewichts eines elastischen Korpers bei nicht unenollich Kleinen Verschiebungers Seiner Theile, Sitzungsber. AKad. Wiss.Wien, vol 9, pp 762-773.
- [11] Von Karman T.(1910) Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften, vol 4.

