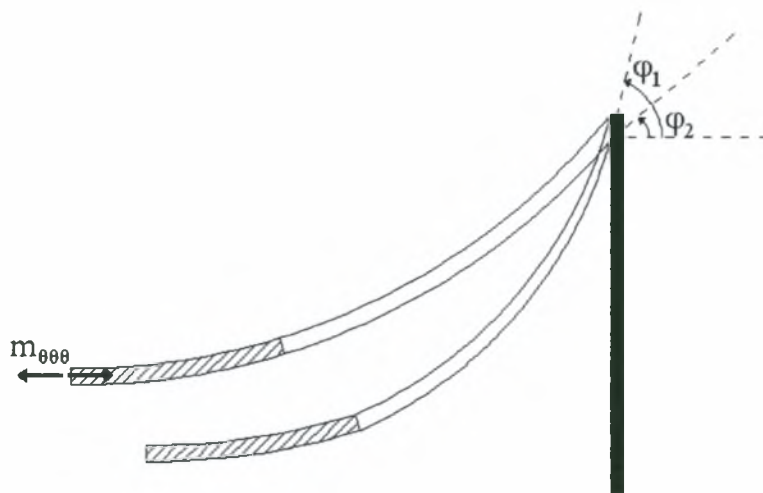




**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΛΩΔΙΩΝ ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ
ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΥΠΟΥ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ**



ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΠΕΤΡΙΔΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΑΡΑΒΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ , Καθηγητής

ΣΟΦΙΑΝΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, Επ.

Καθηγητής

Βόλος, Ιούλιος 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6410/1
Ημερ. Εισ.: 10-07-2008
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2008
ΠΕΤ

Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια η περιοχή της μηχανικής υλικών με μικροδομή προσελκύει ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον των επιστημόνων δεδομένο ότι οι σύγχρονες κατευθύνσεις/ανταγωνισμός στον τομέα των κατασκευών και η ανάπτυξη της τεχνολογίας απαιτούν μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση της μηχανικής των υλικών. Η θεωρία ελαστικότητας τύπου βαθμίδας (gradient elasticity) είναι σε θέση να απαντήσει σε ερωτήματα τα οποία η κλασσική θεωρία παραμορφώσιμου στερεού είναι αδύνατο να κάνει αφού εισάγει την επιρροή της μικροδομής μέσω των διπολικών τάσεων, των οποίων η φυσική σημασία αναφέρεται στην παρούσα διπλωματική.

Το ενδιαφέρον της διπλωματικής μου εστιάζεται στις συμπεριφορά καλωδίων με μικροδομή. Τα πόδια του χταποδιού τα οποία δεν έχουν κόκκαλα, αποτελούν παράδειγμα στο οποίο καταλαβαίνουμε ότι η επιβολή διπολικών δυνάμεων μπορεί να επηρεάσει την παραμόρφωση των ποδιών/καλωδίων. Η ανάλυση των καλωδίων έγινε συνδυάζοντας πληροφορίες από συνοριακές συνθήκες, καταστατικό νόμο του υλικού, και παραδοχές των οποίων η ορθότητα επαληθεύεται με ποιοτικές λύσεις και που η μηχανικοί συχνά κάνουμε για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα. Στόχος ήταν να κατασκευαστούν οι νέες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας των καλωδίων των οποίων η επίλυση έγινε επιστρατεύοντας αριθμητικές μεθόδους. Συγκρίνοντας τα εξαγόμενα αποτελέσματα αξονικών τάσεων και καμπυλότητας συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας για κάθε σημείο και συγκρίνοντας τα με την κλασσική ανάλυση προκύπτει ότι τα «διπολικά καλώδια» είναι πιο άκαμπτα από ότι νομίζουμε.

Κλείνοντας θέλω να ευχαριστήσω τον δάσκαλο μου κ. Αντώνιο Γιαννακόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια του στα διάφορα προβλήματα που αντιμετώπισα κατά την εκπόνηση της εργασίας καθώς και για την υπομονή του όταν είχα πληθώρα αποριών. Υπήρξαν πολλές φορές που αναρωτήθηκα αν έκανα την σωστή επιλογή να εργαστώ με μια διπλωματική μικρομηχανικής που πολλοί

συνάδελφοι μου να μην θεωρούσαν κατάλληλη της ειδικότητας μου, όμως τώρα στο τέλος καταλαβαίνω ότι για μένα μεγαλύτερη αξία είχε πως μέσω της πολυπλοκότητας και δυσκολίας του προβλήματος καθώς και μέσω του τρόπου και διαδικασίας που ακολουθήθηκε απέκτησα έστω και λίγη ερευνητική «παιδεία» σε προπτυχιακό επίπεδο.

Βόλος, Ιούλιος 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1) Εισαγωγή.....	4
1.1) Εισαγωγή στις διπολικές τάσεις.....	8
2) Μετασχηματισμοί καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων σε πολικό.....	10
3) Συνοριακές συνθήκες.....	14
3.1) 2 ^η συνοριακή συνθήκη.....	14
3.2) 1 ^η συνοριακή συνθήκη.....	20
4) Εξισώσεις ισορροπίας.....	37
5) Αριθμητικά παραδείγματα-εφαρμογές.....	43
5.1) Εύρεση διπολικών τάσεων.....	43
5.2) Επίλυση Δ.Ε. ισορροπίας.....	47
5.3) Άλλοι παράμετροι επηρεασμού.....	62
6) Εύρεση χαρακτηριστικού μήκους $C^{1/2}$	78
Παράρτημα Α.....	80
Παράρτημα Β.....	82
Παράρτημα Γ.....	84
Παράρτημα Δ.....	87
Παράρτημα Ε.....	88
Βιβλιογραφία.....	89

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

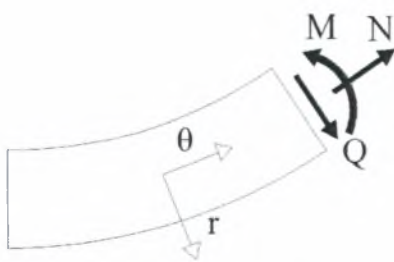
Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η συμπεριφορά (παραμορφώσεις, δυσκαμψία, καμπυλότητα, τάσεις) λεπτών εύκαμπτων φορέων **στο επίπεδο** υπό την επίδραση διπολικών φορτίων. Εύκαμπτοι φορείς είναι ισοστατικές κατασκευές όπως σχοινιά, καλώδια, αλυσίδες κλπ. όπου μπορούν πρακτικά να παραλάβουν μόνο **εφελκυστικές αξονικές δυνάμεις**. Υπενθυμίζουμε ότι ισοστατική είναι η κατασκευή όπου η κατανομή των δυνάμεων μπορεί να βρεθεί από τις μακροσκοπικές εξισώσεις ισορροπίας. Οπότε [1]:

$$Q=M=0, \quad N>0$$

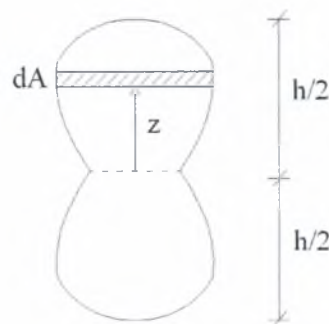
Δηλαδή οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές!

M είναι η συνολική ροπή που αναπτύσσει η διατομή, Q η συνολική τέμνουσα δύναμη που αναπτύσσει η διατομή και N η συνολική αξονική δύναμη που αναπτύσσει η διατομή. Στην κλασσική περίπτωση :

$$M = \int_{(A)} \tau_{\theta\theta} \cdot z \cdot dA, \quad Q = \int_{(A)} \tau_{r\theta} \cdot dA, \quad N = \int_{(A)} \tau_{\theta\theta} \cdot dA$$



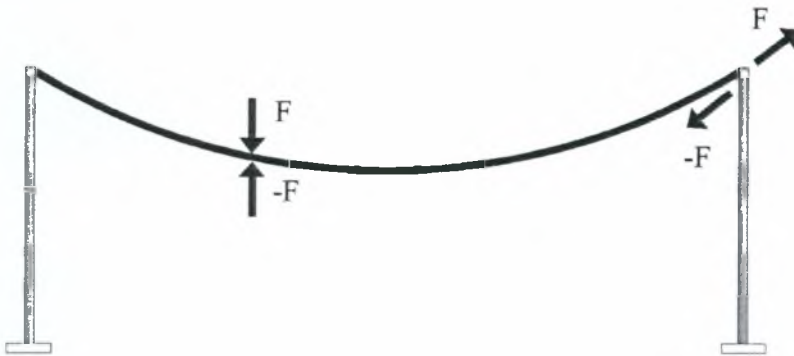
Σχήμα 1.1: Κατανομή εσωτερικών φορτίων.



Σχήμα 1.2: Συμμετρική διατομή.

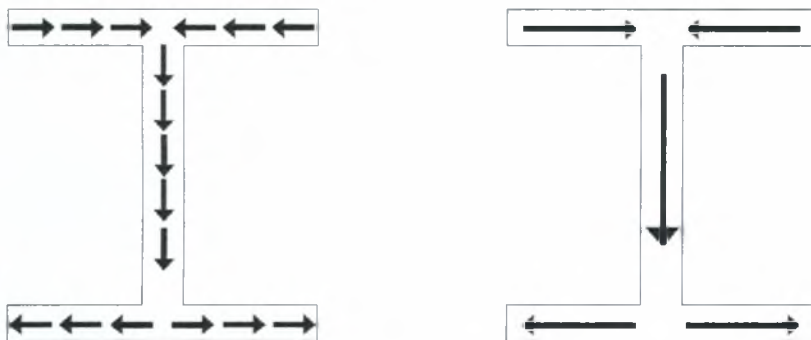
Μέχρι τώρα η κλασσική μηχανική και η θεωρία ελαστικότητας αρκούνται στα αποτελέσματα που εξάγονται από την θεωρία των μονοπολικών τάσεων (τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yy}). Όταν όμως τα επιβαλλόμενα φορτία είναι διπολικά τότε αναγκαστικά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ανώτερη θεωρία ελαστικότητας αφού με την

κλασική μηχανική προσέγγιση το δίπολο ουσιαστικά εμφανίζεται σαν 2 ίσες και αντίθετες δυνάμεις οι οποίες τελικά δεν επηρεάζουν την κατάσταση και συμπεριφορά του παραμορφώσιμου στερεού. π.χ. το «τσίμπημα» του καλωδίου:



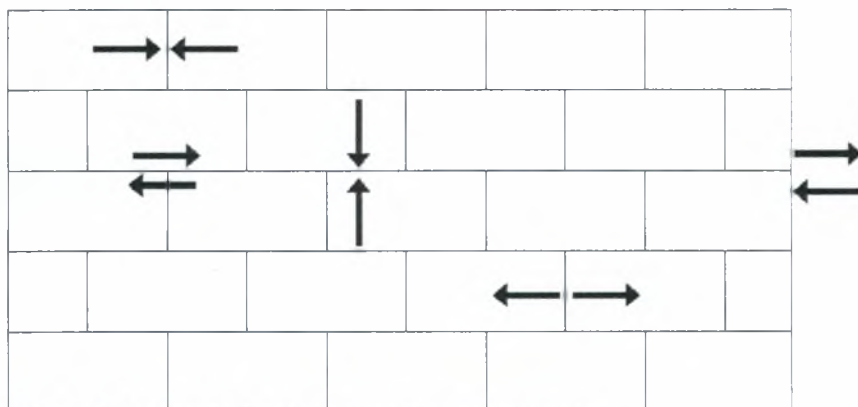
Σχήμα 1.3: Επιβαλλόμενο διπολικό φορτίο («τσίμπημα») σε καλώδιο.

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε με τους εύκαμπτους φορείς είναι ότι λόγω των μεγάλων βελών κάμψης η **καμπυλότητα** παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο. Επομένως ήταν επιτακτική ανάγκη να εργαστούμε σε πολικές συντεταγμένες εμφανίζοντας έτσι στις εξισώσεις ισορροπίας και συνοριακές συνθήκες οι οποίες παρουσιάζονται στην διεθνή βιβλιογραφία σε καρτεσιανές συντεταγμένες, την καμπυλότητα και εφαπτόμενη γωνία κάθε διατομής κατά μήκος της κατασκευής. Οι πολικές συντεταγμένες αποτελούν και το **φυσικό σύστημα συντεταγμένων** όπου τα μεγέθη (τάσεις, παραμορφώσεις) είναι ευκολότερα αντιληπτά αν εργαστούμε σε αυτό. Αξίζει να σημειωθεί ότι προηγούμενες μελέτες που έχουν γίνει με βάση την θεωρία διπολικών τάσεων καταλήγουν γενικά ότι οι κατασκευές είναι περισσότερο άκαμπτες από ότι νομίζουμε. Δηλαδή τα μεγέθη παραμόρφωσης προκύπτουν μεγαλύτερα αγνοώντας την ύπαρξη των διπολικών τάσεων που αναπτύσσονται στο υλικό αφού έχει αποδειχτεί ότι τα **δίπολα «καταναλώνουν» ενέργεια**. Κλασική εφαρμογή αποτελεί το παράδειγμα της διατομής του διπλού ταυ [2]:

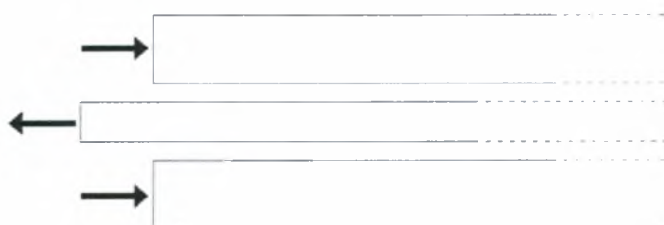


Σχήμα 1.4: Ροή διατμητικών τάσεων σε διατομή διπλού ταυ.

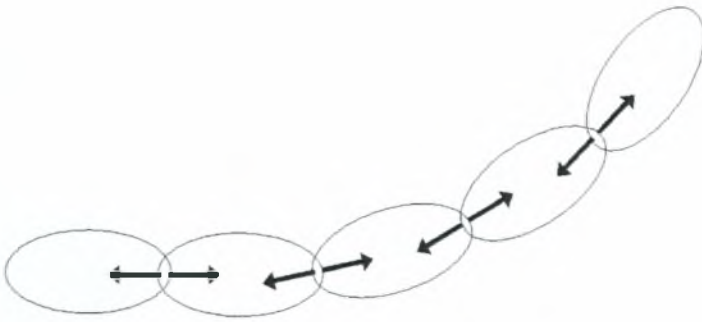
Στην παραπάνω διατομή παρατηρούμε την ροή των διατμητικών τάσεων υπό την επίδραση π.χ. ενός κατακόρυφου φορτίου. Στην κλασική στατική θεωρούσαμε ότι μόνο οι διατμητικές τάσεις του κορμού μας επηρεάζουν στην ελαστική γραμμή (βύθιση) του φορέα, ενώ στην πραγματικότητα συμβάλλουν και οι ροές των πελμάτων όπου δημιουργούν δίπολα τα οποία όπως αναφέραμε συνεισφέρουν στην δυσκαμψία του φορέα. Παρακάτω φαίνονται επιπλέον σχήματα-παραδείγματα στα οποία παρουσιάζεται η «μικροδομή» και τα διπολικά φορτία που αναπτύσσονται σε κάποιες κατασκευές.



Σχήμα 1.5: Ανάπτυξη διπολικών φορτίων σε τοιχοποιία.



Σχήμα 1.6: Ανάπτυξη διπολικού φορτίου σε φρένο (καλώδιο) ποδηλάτου.



Σχήμα 1.7: Ανάπτυξη διπολικών φορτίων σε αλυσίδα .

Η μικροδομή του σώματος αρχίζει να επηρεάζει την μακροσκοπική του ακαμψία, όταν η χαρακτηριστική διάσταση της μικροδομής ($c^{1/2}$) γίνει συγκρίσιμη με κάποια μακροσκοπική διάσταση της κατασκευής.

1.1) ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΠΟΛΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Γνωρίζουμε ότι οι σχέσεις κλασσικές σχέσεις τάσεων (τ_{ij}) τροπών (ε_{ij}) στο πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης είναι:

$$\tau_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} \right] = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (1.1a)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} \right] = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{yy} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) \quad (1.1b)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy} \quad (1.1c)$$

Όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας.

Οι παραπάνω σχέσεις είναι σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Αντίστοιχα σε πολικές, θέτουμε όπου $\theta \equiv y$ και $r \equiv x$. Για συντομογραφία με την βοήθεια των σταθερών του Lamé (λ, μ) οι ανωτέρω σχέσεις γίνονται :

$$\tau_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad (1.1.2a)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr}) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \quad (1.1.2b)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad (1.1.2c)$$

Σε μία απλή θεωρία βαθμίδας [3] οι διπολικές τάσεις συνδέονται με τις μονοπολικές τάσεις (και με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων με τις τροπές), με βάση τις παρακάτω σχέσεις :

$$m_{xxx} = c \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} \quad (1.1.3a)$$

$$m_{xxy} = c \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} = m_{xyx} \quad (1.1.3b)$$

$$m_{xyy} = c \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yy} \quad (1.1.3c)$$

$$m_{yxx} = c \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xx} \quad (1.1.3d)$$

$$m_{yyx} = c \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} = m_{xy} \quad (1.1.3e)$$

$$m_{yyy} = c \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} \quad (1.1.3f)$$

Παρατηρούμε ότι με βάση τον συμβολισμό που ακολουθήθηκε ο πρώτος αριστερά δείκτης φανερώνει την κατεύθυνση της παραγώγου ενώ οι άλλοι 2 την μονοπολική τάση που παραγωγίζεται.

Οι διπολικές τάσεις αντίθετα με τις μονοπολικές τάσεις έχουν μονάδες **N/m** και όχι **N/m²** που έχουν οι μονοπολικές τάσεις .

Στις ανωτέρω σχέσεις όπου **c=χαρακτηριστικό εμβαδό του υλικού** το οποίο έχει μονάδες **m²** και είναι θετικό.

Το c εκφράζει την μικροδομή του υλικού. Για παράδειγμα μεγάλο c μπορεί να σημαίνει: →μεγάλοι κόκκοι εδαφικού υλικού

→μεγάλο πορώδες

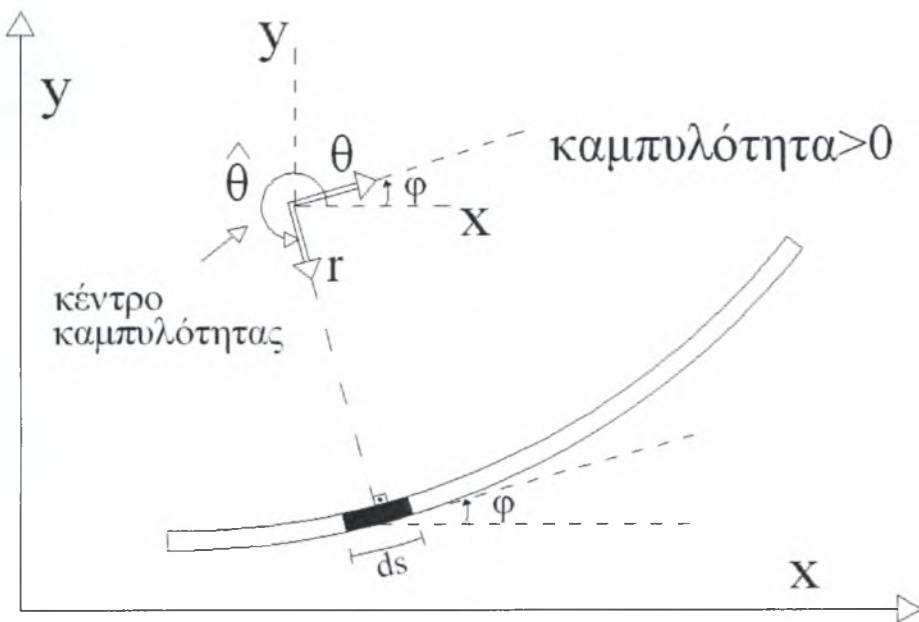
→μεγάλοι κρίκοι μίας αλυσίδας

→μεγάλα τούβλα μίας τοιχοποιίας

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι για να αναπτύξει το υλικό μας εσωτερικά διπολικές τάσεις απ'ότι φαίνεται και στις εξισώσεις 1.3, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των μονοπολικών τάσεων. Όμως αυτό δεν αποτελεί και ικανή συνθήκη αφού είναι δυνατή επιπλέον και η επιβολή ενός εξωτερικού διπολικού φορτίου ή μίας παραμόρφωσης (τροπής) που μεταφράζεται σε δίπολο στα σύνορα της κατασκευής.

2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΕ ΠΟΛΙΚΟ

Όπως έχει αναφερθεί, επειδή οι εξισώσεις ισοροπίας και οι συνοριακές συνθήκες παρουσιάζονται στην διεθνή βιβλιογραφία σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ήταν επιτακτική ανάγκη να λάβουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 2.1: Απειροστό τμήμα καλωδίου. Σύστημα συντεταγμένων [ολικό (x,y) , τοπικό (r,θ)].

Οι μεταβλητές (x,y) σε ορθογώνιο διδιάστατο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, τοποθετημένων στο κέντρο καμπυλότητας του καλωδίου, συνδέονται με τις αντίστοιχες μεταβλητές (r,θ) του συστήματος πολικών συντεταγμένων με βάση τις κατωτέρω σχέσεις:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2.1a, b)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.2a, b)$$

και

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (2.3a, b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.3c,d)$$

Με χρήση του κανόνα αλυσίδας καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις οι οποίες συνδέουν τις μερικές παραγώγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες με τις αντίστοιχες παραγώγους σε πολικές συντεταγμένες

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.4a,b)$$

Ομοίως αποδεικνύονται οι σχέσεις

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right), \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right), \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \cos 2\theta \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right), \quad (2.5c)$$

Έτσι με τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων (διάνυσμα) :

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad (2.6a)$$

$$u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad (2.6b)$$

των τροπών (τανυστές 2^{ης} τάξης):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rr} \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{r\theta} \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (2.7a)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{rr} \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \varepsilon_{\theta\theta} \cos \theta \sin \theta, \quad (2.7b)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{rr} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{r\theta} \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{\theta\theta} \cos^2 \theta, \quad (2.7c)$$

των μονοπολικών τάσεων (τανυστές 2^{ης} τάξης):

$$\tau_{xx} = \tau_{rr} \cos^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \cos \theta \sin \theta + \tau_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (2.8a)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{rr} \cos \theta \sin \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \tau_{\theta\theta} \cos \theta \sin \theta, \quad (2.8b)$$

$$\tau_{yy} = \tau_{rr} \sin^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \cos \theta \sin \theta + \tau_{\theta\theta} \cos^2 \theta, \quad (2.8c)$$

και των διπολικών τάσεων (τανυστές 3^{ης} τάξης):

$$m_{xxx} = m_{rrr} \cos^3 \theta - m_{rr\theta} \cos^2 \theta \sin \theta - m_{\theta rr} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{r\theta\theta} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{\theta\theta r} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{\theta\theta\theta} \sin^3 \theta, \quad (2.9a)$$

$$m_{xyx} = m_{rrr} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{rr\theta} \cos^3 \theta - m_{\theta rr} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{r\theta\theta} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{\theta\theta r} \sin^3 \theta - m_{\theta\theta\theta} \cos \theta \sin^2 \theta, \quad (2.9b)$$

$$m_{xyy} = m_{rrr} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{rr\theta} \cos^2 \theta \sin \theta - m_{\theta rr} \sin^3 \theta + m_{r\theta\theta} \cos^3 \theta - m_{\theta\theta r} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{\theta\theta\theta} \cos^2 \theta \sin \theta, \quad (2.9c)$$

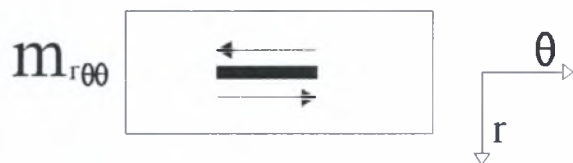
$$m_{yxx} = m_{rrr} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{rr\theta} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{\theta rr} \cos^3 \theta + m_{r\theta\theta} \sin^3 \theta - m_{\theta\theta r} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{\theta\theta\theta} \cos \theta \sin^2 \theta, \quad (2.9d)$$

$$m_{yyx} = m_{rrr} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{rr\theta} \sin^3 \theta - m_{\theta rr} \cos^2 \theta \sin \theta - m_{r\theta\theta} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{\theta\theta r} \cos^3 \theta - m_{\theta\theta\theta} \cos^2 \theta \sin \theta, \quad (2.9e)$$

$$m_{yyy} = m_{rrr} \sin^3 \theta + m_{rr\theta} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{\theta rr} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{r\theta\theta} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{\theta\theta r} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{\theta\theta\theta} \cos^3 \theta, \quad (2.9f)$$

Παρατηρούμε από τον τρόπο μετασχηματισμού των διπολικών τάσεων ότι οι διπολικές τάσεις είναι τανυστής ανώτερου βαθμού από τις μονοπολικές τάσεις, δηλαδή **οι διπολικές τάσεις είναι τανυστής 3^{ης} τάξης**. Αυτό οφείλεται στο ότι, ενώ οι τάσεις περιέχουν παραγώγους 1^{ης} τάξης ως προς τις μετακινήσεις, οι διπολικές τάσεις περιέχουν παραγώγους 2^{ης} τάξης ως προς τις μετακινήσεις, αφού περιέχουν 1^{ης} τάξης παράγωγο ως προς τις τάσεις. Επομένως ο μετασχηματισμός των διπολικών τάσεων έχει τριγωνομετρικές συναρτήσεις 3^{ου} βαθμού όταν η μετασχηματισμοί των μονοπολικών τάσεων έχει τριγωνομετρικές συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού. Τέλος ο τρόπος μετασχηματισμού της τριγωνομετρικών εξισώσεων για γωνία φ (εφαπτόμενη γωνία) αναφέρονται στο Παράρτημα Α.

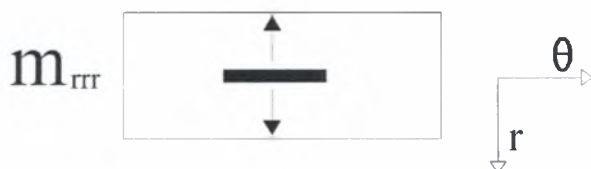
Παρακάτω φαίνονται σχηματικά τα δίπολα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ) :



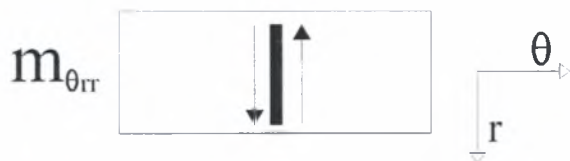
Σχήμα 2.2: Σχηματική παρουσίαση της διπολικής τάσης $m_{r\theta\theta}$.



Σχήμα 2.3: Σχηματική παρουσίαση της διπολικής τάσης $m_{\theta\theta\theta}$.



Σχήμα 2.4: Σχηματική παρουσίαση της διπολικής τάσης m_{rrr} .



Σχήμα 2.5: Σχηματική παρουσίαση της διπολικής τάσης $m_{\theta rr}$.

3. ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες για τον ελκυστή των τάσεων κατά μήκος ενός ομαλού συνόρου μπορούν να προκύψουν από μεταβολικές θεωρήσεις (Mindlin 1964) [3]. Πιο συγκεκριμένα, το ζήτημα των συνοριακών συνθηκών του ελκυστή τάσεων και της φυσικής τους σημασίας διευκρινίστηκε από τον Bleustein (1967) [4] με μία σημαντική, αλλά όχι ευρέως γνωστή δημοσίευση. Σύμφωνα με τις ανωτέρω εργασίες, οι συνοριακές συνθήκες γράφονται σαν συνθήκες του βοηθητικού ελκυστή P_q :

$$\boxed{n_p (\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) - D_p (n_r m_{rpq}) + (D_j n_j) n_r n_p m_{rpq} = P_q} \quad (3.1)$$

και του πραγματικού ελκυστή

$$\boxed{n_r n_p m_{rpq} = R_q} \quad (3.2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες!

3.1) 2^η ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

Έτσι από την 2^η εξίσωση λαμβάνουμε 2 εξισώσεις, μια για κάθε άξονα (x,y), οι οποίες είναι:

$$R_x = n_x n_x m_{xxx} + n_x n_y m_{xyx} + n_y n_x m_{yxx} + n_y n_y m_{yyx} \quad (3.1.1)$$

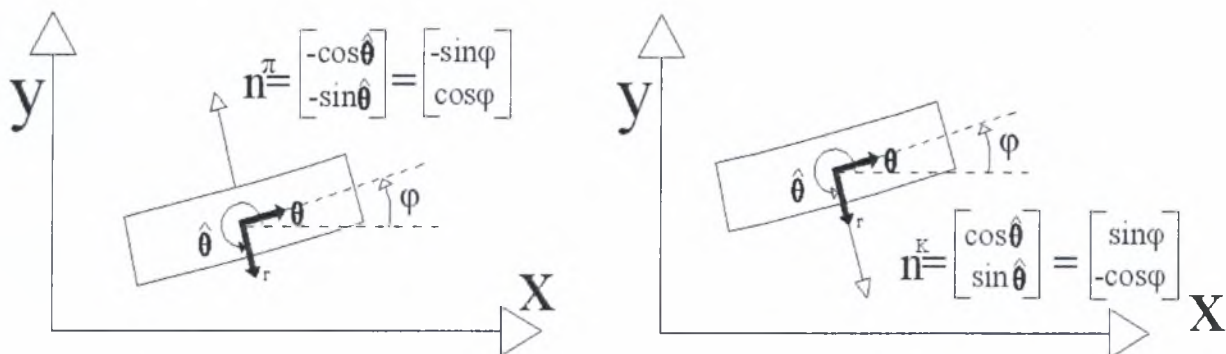
$$R_y = n_x n_x m_{xxy} + n_x n_y m_{xyy} + n_y n_x m_{yxy} + n_y n_y m_{yyy} \quad (3.1.2)$$

ή

$$R = [m] \{n\} \{n\} \quad (3.1.3)$$

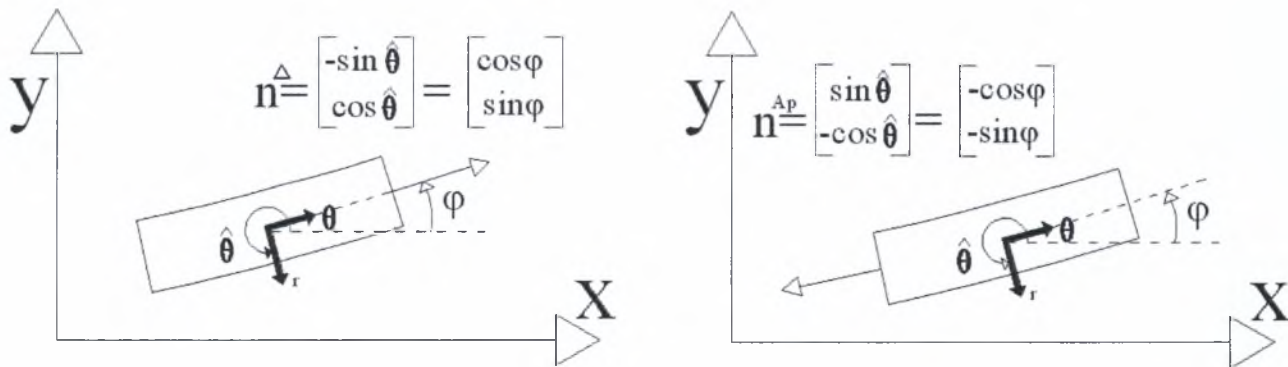
Όπου $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y$ είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια και R_q ο ελκυστής των διπολικών τάσεων. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.1.3) μοιάζει με την εξίσωση των μονοπολικών τάσεων στην κλασική του μορφή $\underline{t} = [\tau] \{n\}$ μόνο που περιέχει μια ακόμη φορά τον όρο του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος $\{n\}$. Αυτό οφείλεται στο ότι όπως έχουμε είδη αναφέρει οι διπολικές τάσεις είναι τανυστής 3^{ης} τάξης και περιέχουν

παραγώγους 2^{ης} τάξης ως προς τις μετακινήσεις. Επομένως χρειαζόμαστε παραπάνω «πληροφορίες» για να περιγράψουμε το πρόβλημα, δηλαδή το επιβαλλόμενο διπολικό φορτίο. Επομένως για κάθε σύνορο τα μοναδιαία διανύσματα είναι :



Σχήμα 3.1.1: Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο πάνω και κάτω σύνορο απειροστού τμήματος.

Θέτουμε \mathbf{n}^{Π} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο πάνω σύνορο και \mathbf{n}^{κ} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο κάτω σύνορο αντίστοιχα, του καλωδίου. Ομοίως για το δεξιά και αριστερά σύνορο έχουμε:



Σχήμα 3.1.2: Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο δεξιά και αριστερά σύνορο απειροστού τμήματος.

Επομένως οι εξισώσεις (3.1.1) και (3.1.2) για κάθε σύνορο, αν εκφραστούν ως προς τις διπολικές τάσεις στο πολικό σύστημα συντεταγμένων με την βοήθεια των εξισώσεων που μετατρέπουν τις διπολικές τάσεις από το καρτεσιανό στο πολικό γίνονται:

Πάνω και κάτω σύνορο

$$R_x = [\cos\theta] \mathbf{m}_{rrr} + [\sin^3\theta \cos 2\theta] \mathbf{m}_{rr\theta} + [-2\cos^2\theta \sin\theta] \mathbf{m}_{\theta rr} + [\sin^2\theta \cos\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta r} + [-2\sin^3\theta \cos^2\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.4)$$

και

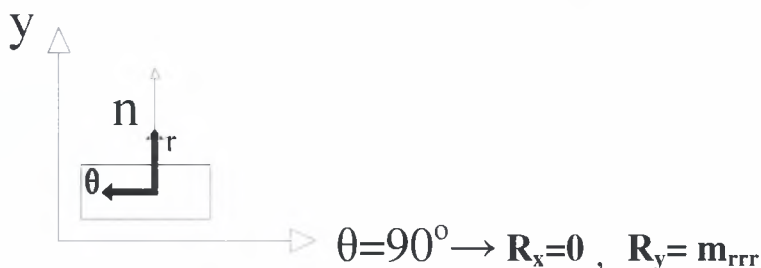
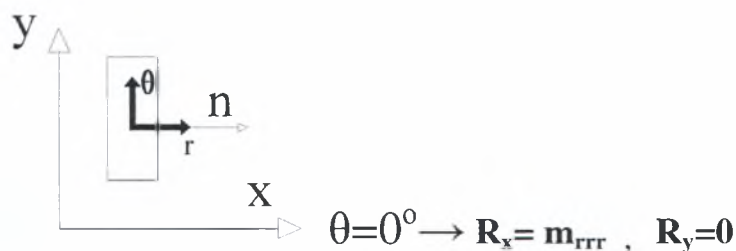
$$R_y = [\sin\theta] \mathbf{m}_{rrr} + [\cos^3\theta] \mathbf{m}_{rr\theta} + [-2\cos^3\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{\theta rr} + [\cos^2\theta \sin\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta r} + [-2\cos^3\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.5)$$

Παρατηρούμε ότι σε καμία από τις παραπάνω εξισώσεις δεν υπάρχει ο όρος $\mathbf{m}_{r\theta\theta}$! Επίσης λαμβάνοντας υπόψιν ότι το υλικό μας δεν είναι σε θέση να αναπτύξει διατμητικές τάσεις ($\tau_{r\theta} = 0$) δηλαδή $\mathbf{m}_{rr\theta} = 0$, $\mathbf{m}_{\theta rr} = 0$ ($\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta}$) τότε οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$R_x = [\cos\theta] m_{rrr} + [-2\cos^2\theta \sin\theta] m_{\theta rr} + [-2\sin^3\theta \cos^2\theta] m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.6)$$

$$R_y = [\sin\theta] m_{rrr} + [-2\cos^3\theta \sin^2\theta] m_{\theta rr} + [-2\cos^3\theta \sin^2\theta] m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.7)$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta=0^\circ$ και στην συνέχεια για $\theta=90^\circ$ παίρνουμε τις συνθήκες:



Δεξιά και αριστερά σύνορο

$$R_x = [\cos^2\theta \sin\theta(-2+\cos 2\theta)] \mathbf{m}_{rr\theta} + [\cos^3\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta r} + \left[-\frac{1}{4} \sin\theta(3+\cos 4\theta)\right] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.8)$$

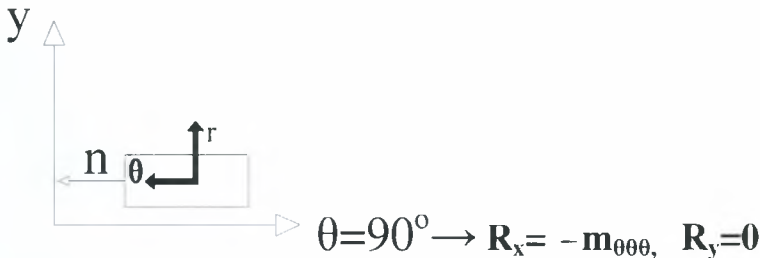
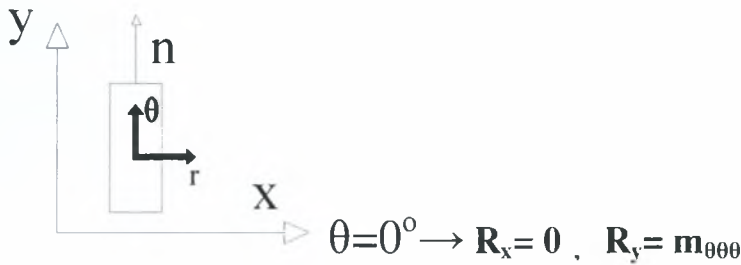
$$R_y = [\cos\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{rr\theta} + [2\cos^3\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{\theta rr} + [\sin^3\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta r} + \left[-\frac{1}{4} \cos\theta(-1-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\right] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.9)$$

Παρατηρούμε ότι η 1^η εξίσωση δεν περιέχει καθόλου τους όρους \mathbf{m}_{rrr} , $\mathbf{m}_{\theta rr}$, $\mathbf{m}_{r\theta\theta}$ και η 2^η δεν περιέχει τους όρους \mathbf{m}_{rrr} , $\mathbf{m}_{r\theta\theta}$! Επίσης λαμβάνοντας υπόψιν ότι το υλικό μας δεν είναι σε θέση να αναπτύξει διατμητικές τάσεις δηλαδή $\mathbf{m}_{rr\theta}=0$, $\mathbf{m}_{\theta\theta r}=0$ τότε οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$R_x = \left[-\frac{1}{4} \sin\theta(3 + \cos 4\theta) \right] m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.10)$$

$$R_y = \left[2\cos^3\theta \sin^2\theta \right] m_{\theta rr} + \left[-\frac{1}{4} \cos\theta(-1 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \right] m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.11)$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta=0^\circ$ και στην συνέχεια για $\theta=90^\circ$



Αν τώρα απαιτήσουμε στο πάνω και κάτω σύνορο να μην έχουμε κανένα επιβαλλόμενο διπολικό φορτίο τότε έχουμε από τις εξισώσεις (3.1.6) και (3.1.7)

$$0 = [\cos\theta] \mathbf{m}_{rrr} + [-2\cos^2\theta \sin\theta] \mathbf{m}_{\theta rr} + [-2 \sin^3\theta \cos^2\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.12)$$

$$0 = [\sin\theta] \mathbf{m}_{rrr} + [-2\cos^3\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{\theta rr} + [-2 \cos^3\theta \sin^2\theta] \mathbf{m}_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.13)$$

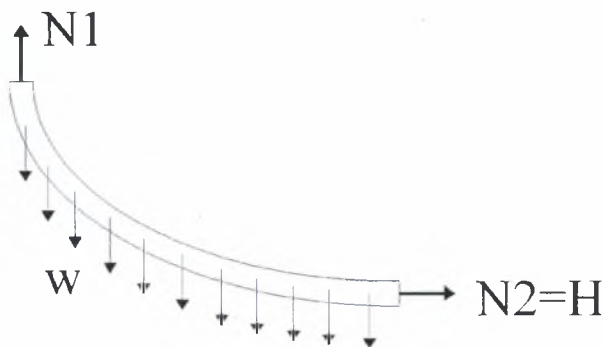
Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την τάση $m_{\theta\theta\theta}$ σαν μια ανεξάρτητη μεταβλητή τότε οι τάσεις m_{rrr} , $m_{\theta rr}$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει μόνο της διπολικής τάσης $m_{\theta\theta\theta}$ λύνοντας ουσιαστικά το παραπάνω 2×2 σύστημα.

Έτσι λύνοντας το σύστημα (3.1.12-3.1.13) έχουμε ότι :

$$\boxed{m_{rrr} = 2 \frac{\cos^5 \theta}{\sin \theta} m_{\theta\theta\theta}} \quad (3.1.14)$$

$$\boxed{m_{\theta rr} = \frac{\cos[2\theta]}{\sin^2 \theta} m_{\theta\theta\theta}} \quad (3.1.15)$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta=0^\circ$ ($\varphi=90$) τάσεις \mathbf{m}_{rrr} , $\mathbf{m}_{\theta rr}$ απειρίζονται. Όμως δεν είναι δυνατό ένα καλώδιο να αναπτύξει τέτοια γωνία, κάτι που είναι γνωστό από την κλασική θεωρία του καλωδίου. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχτεί αφού άμα κάνουμε ένα διάγραμμα ελευθέρου σώματος (τομή στο κατώτατο σημείο του καλωδίου και στο σημείο όπου $\theta=0^\circ$) στο καλώδιο θα δούμε ότι αν σε κάποιο σημείο του έχει $\theta=0^\circ$ τότε υπό την επίδραση π.χ. μόνο του βάρους του δεν ικανοποιείται η ισορροπία κατά x , αφού δεν μπορούμε δεχτούμε ότι η τάση στο κατώτερο άκρο του καλωδίου είναι μηδέν!



Σχήμα 3.1.3: Καλώδιο με κατακόρυφη επαπτόμενη ευθεία στο ένα ακρο.

Από το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι αν $N_2=H$ τότε θα πρέπει σε οποιαδήποτε ενδιάμεση τομή η αξονική δύναμη να μηδενίζεται. Όμως τότε δεν θα ισχύει η ισορροπία κατά y ! Άρα καταλήγουμε ότι όντως δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί γωνία $\theta=0^\circ$.

Επομένως οι (3.1.10) και (3.1.11) αναδιατυπώνονται και γράφονται ως εξής:

Δεξιό και αριστερό σύνορο

$$R_x = -\frac{1}{4} \sin \theta (3 + \cos 4\theta) m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.16)$$

$$R_y = -\frac{1}{4} \cos \theta (-1 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta - 8 \cos^2 \theta \cos 2\theta) m_{\theta\theta\theta} \quad (3.1.17)$$

Παρατηρούμε τώρα που ο ελκυστής των διπολικών τάσεων είναι εκφρασμένος μόνο ως προς μία μεταβλητή ότι για $\theta=315^\circ$ (φ = γωνία εφαπτομένης= 45°)

$$R_x = R_y = 0, 3535 m_{\theta\theta\theta}$$

Ενώ πάλι ισχύει $R_x = 0$ για $\theta=0$ και $R_y=0$ για $\theta=3\pi/2$

κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο.

Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι γενικά $\frac{R_x}{R_y} \neq \tan \theta$.

Ακόμα αναδιατυπώνονται και οι μετασχηματισμοί των διπολικών τάσεων (εξισώσεις 2.9) από το τοπικό (πολικό) στο καθολικό (καρτεσιανό) σύστημα.

$$m_{xx} = \left[2 \frac{\cos^8 \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 2\theta \cos^2 \theta}{\sin \theta} - \sin^3 \theta \right] m_{\theta\theta\theta} + \left[\cos \theta \sin^2 \theta \right] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18a)$$

$$m_{xy} = \left[2 \cos^7 \theta - \cos 2\theta \cos \theta - \cos \theta \sin^2 \theta \right] m_{\theta\theta\theta} - \left[\cos^2 \theta \sin \theta \right] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18b)$$

$$m_{yy} = \left[2 \cos^6 \theta \sin \theta - \cos 2\theta \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta \right] m_{\theta\theta\theta} + \left[\cos^3 \theta \right] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18c)$$

$$m_{yx} = \left[2 \cos^7 \theta - \frac{\cos 2\theta \cos \theta}{\tan^2 \theta} + \cos \theta \sin^2 \theta \right] m_{\theta\theta\theta} + \left[\sin^3 \theta \right] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18d)$$

$$m_{yxx} = \left[2 \cos^6 \theta \sin \theta - \frac{\cos 2\theta \cos^2 \theta}{\sin \theta} - \cos^2 \theta \sin \theta \right] m_{\theta\theta\theta} - [\cos \theta \sin^2 \theta] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18e)$$

$$m_{yyy} = [2 \cos^5 \theta \sin^2 \theta + \cos 2\theta \cos \theta + \cos^3 \theta] m_{\theta\theta\theta} + [\cos^2 \theta \sin \theta] m_{r\theta\theta} \quad (3.1.18f)$$

3.2) 1^η συνοριακή συνθήκη

$$\boxed{n_p (\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) - D_p (n_r m_{rpq}) + (D_j n_j) n_r n_p m_{rpq} = P_q}$$

ή

$$n_p (\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) - D_p (n_r m_{rpq}) + (D_j n_j) R_q = P_q \quad (3.2.1)$$

Όπου $D_p(\cdot) = \partial_p(\cdot) - n_p D(\cdot)$ είναι ο επιφανειακός τελεστής βαθμίδας (surface gradient operator), $D(\cdot) = n_r \partial_r(\cdot)$ ο κάθετος τελεστής βαθμίδας (normal gradient operator), n_p το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο σύνορο με φορά προς το εξωτερικό της τομής και P_q είναι ο βοηθητικός ελκυστής των τάσεων.

Άρα τα αθροίσματα για καθένα από τους παραπάνω όρους είναι:

Ο τελευταίος(τέταρτος) όρος είναι :

$$\left. \begin{aligned} & (D_x n_x) R_q + (D_y n_y) R_q \\ & = \frac{\partial n_x}{\partial x} - n_x \left[n_x \frac{\partial n_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_x}{\partial y} \right] \\ & = \frac{\partial n_y}{\partial x} - n_y \left[n_x \frac{\partial n_y}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \longrightarrow (D_j n_j) R_q = \left[\left(\frac{\partial n_x}{\partial x} - n_x \left[n_x \frac{\partial n_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_x}{\partial y} \right] \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} - n_y \left[n_x \frac{\partial n_y}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial y} \right] \right) \right]$$

Ο πρώτος όρος είναι

$$n_p \tau_{pq} = n_x \tau_{xq} + n_y \tau_{yq},$$

Ο δεύτερος όρος

$$-n_p \partial_r m_{rpq} = - \left[n_x \frac{\partial m_{xq}}{\partial x} + n_y \frac{\partial m_{yq}}{\partial x} + n_x \frac{\partial m_{xq}}{\partial y} + n_y \frac{\partial m_{yq}}{\partial y} \right]$$

Ο τρίτος όρος

$$-D_p(n_r m_{rpq}) = -\left[D_x(n_x m_{xxq}) + D_x(n_y m_{yxq}) + D_y(n_x m_{xyq}) + D_y(n_y m_{yyq}) \right]$$

ο όποιος αναπτύσσεται περαιτέρω ως εξής:

$$\begin{aligned} -D_p(n_r m_{rpq}) = & -\left[\left(\frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial x} - n_x \left(n_x \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial y} \right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial x} - n_x \left(n_x \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial y} \right) \right) \\ & + \left(\frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial y} - n_y \left(n_x \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial y} \right) \right) \\ & \left. + \left(\frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial y} - n_y \left(n_x \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Ο τελικός όρος προκύπτει από το άθροισμα των παραπάνω όρων και είναι:

$$\begin{aligned} P_q = & n_x \tau_{xq} + n_y \tau_{yq} - \left[n_x \frac{\partial m_{xxq}}{\partial x} + n_y \frac{\partial m_{xyq}}{\partial x} + n_x \frac{\partial m_{yxq}}{\partial y} + n_y \frac{\partial m_{yyq}}{\partial y} \right] \\ & - \left[\left(\frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial x} - n_x \left(n_x \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial y} \right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial x} - n_x \left(n_x \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial y} \right) \right) \\ & + \left(\frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial y} - n_y \left(n_x \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial y} \right) \right) \\ & \left. + \left(\frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial y} - n_y \left(n_x \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial x} + n_y \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial y} \right) \right) \right] \\ & + \left[\left(\frac{\partial n_x}{\partial x} - n_x \left[n_x \frac{\partial n_x}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_x}{\partial y} \right] \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} - n_y \left[n_x \frac{\partial n_y}{\partial x} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial y} \right] \right) \right] R_q \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Όπου ο δείκτης q μπορεί να είναι x, y παίρνοντας αντίστοιχα δυο συνοριακές συνθήκες, μια για κάθε άξονα x, y . Αν λάβουμε ακόμα υπόψιν μας ότι έχουμε 4 σύνορα (πάνω, κάτω, αριστερά, δεξιά), τότε παίρνουμε 4 συνοριακές συνθήκες. Στην παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι κατά x και y , όμως γνωρίζουμε όπως έχει ήδη αναφερθεί ότι:

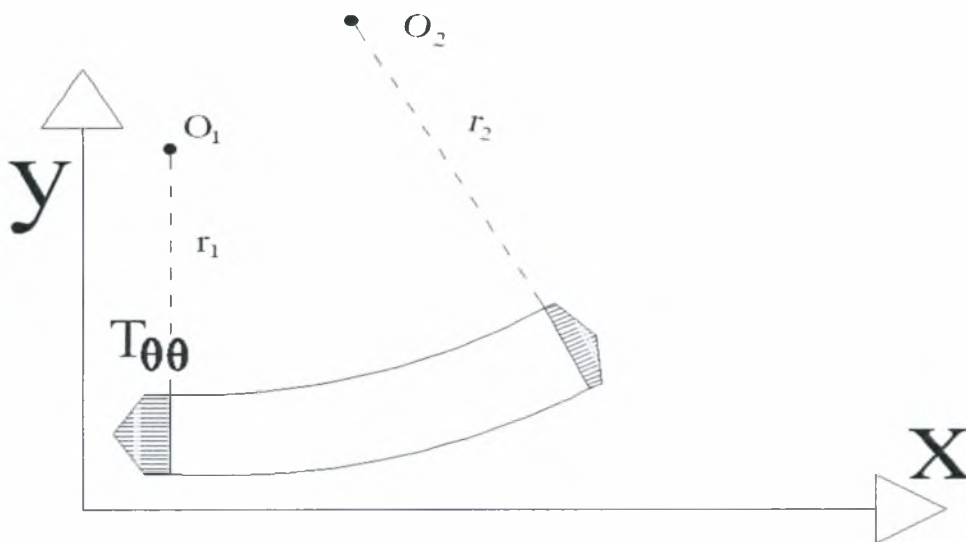
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

οπότε η παραπάνω εξίσωση θα περιλαμβάνει αντί των μερικών παραγόντων $\frac{\partial(\quad)}{\partial x}, \frac{\partial(\quad)}{\partial y}$ τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial(\quad)}{\partial \theta}, \frac{\partial(\quad)}{\partial r}$. Ακόμα λαμβάνοντας υπόψιν ότι

όλες οι διπολικές τάσεις στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι εκφρασμένες ως προς τις διπολικές τάσεις $\mathbf{m}_{\theta\theta}, \mathbf{m}_{r\theta}$, τότε η συνοριακή συνθήκη θα περιλαμβάνει μόνο τις μερικές παραγώγους των $\mathbf{m}_{\theta\theta}, \mathbf{m}_{r\theta}$ κατά θ, r . Μπορούμε όμως να απαλλαχτούμε των μερικών παραγώγων $\frac{\partial(\quad)}{\partial r}$ αν

κάνουμε τις εξής παραδοχές (απλή θεωρία καλωδίου) :

1^η παραδοχή) Η κατανομή των τάσεων $\tau_{\theta\theta}$ κατά μήκος της διατομής μπορεί να προσομοιαστεί ικανοποιητικά από μία τμηματικά γραμμική κατανομή, όπως για παράδειγμα στο σχήμα 3.2.1. :



Σχήμα 3.2.1: Κατανομή των τάσεων $\tau_{\theta\theta}$ κατά μήκος της διατομής σε διαφορετικές γωνίες (διαφορετικά σημεία).

Οπότε από το Σχήμα 3.2.1. συμπεραίνουμε ότι κατά μήκος της διατομής η καμπυλότητα της κατανομής είναι άπειρη, δηλαδή:

$$\frac{\partial(\tau_{\theta\theta}[\theta, r])}{\partial r} = f(\theta) \longrightarrow m_{r\theta\theta}[\theta, r] = m_{r\theta\theta}[\theta]. \text{ Επομένως :}$$

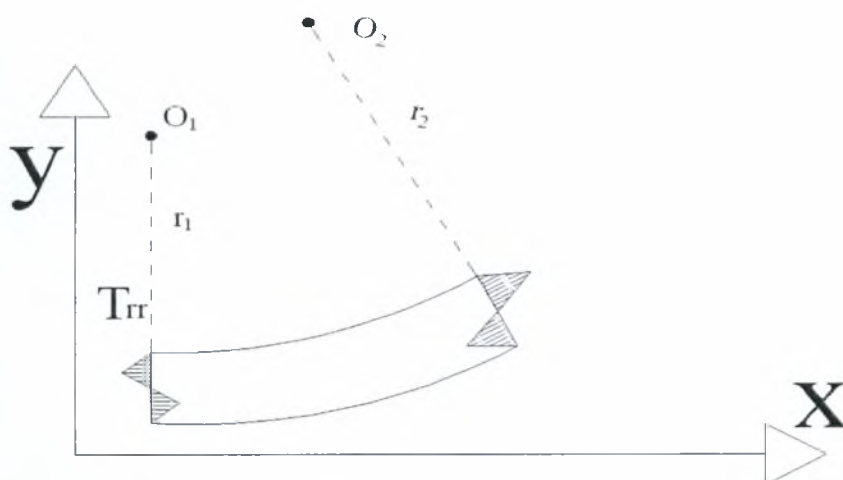
$$\boxed{\frac{\partial(m_{r\theta\theta}[\theta, r])}{\partial r} = 0}$$

Επίσης πρέπει να επισημανθεί ότι αυτό σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι και η μερική παράγωγος της διπολικής τάσης $m_{r\theta\theta}$ κατά την διεύθυνση θ είναι μηδέν αφού, όπως βλέπουμε και από το σχήμα (3.2.1), για διαφορετική γωνία (αριστερή και δεξιά διατομή) έχουμε διαφορετική κλίση της κατανομής της αξονικής μονοπολικής τάσης $\tau_{\theta\theta}$. Επομένως:

$$\boxed{\frac{\partial(m_{r\theta\theta}[\theta, r])}{\partial \theta} \neq 0}$$

Τέλος αναφέρεται ότι η κατανομή της αξονικής μονοπολικής τάσης $\tau_{\theta\theta}$ σχεδιάστηκε συμμετρικά ως προς το κέντρο βάρους της διατομής, αφού φυσικά πρέπει να πληρείται η συνθήκη των μηδενικών ροπών που χαρακτηρίζει τους εύκαμπτους φορείς.

2^η παραδοχή) Η κατανομή των τάσεων τ_{rr} κατά μήκος τις διατομής μπορεί να προσομοιαστεί ικανοποιητικά από μία τιμηματικά γραμμική κατανομή όπως για παράδειγμα:



Σχήμα 3.2.2: Κατανομή των τάσεων τ_{rr} κατά μήκος της διατομής σε διαφορετικές γωνίες (διαφορετικά σημεία).

Ομοίως από το σχήμα 3.2.2 βλέπουμε ότι :

$$\frac{\partial(\tau_{rr}[\theta, r])}{\partial r} = g(\theta) \longrightarrow m_{rrr}[\theta, r] = m_{rrr}[\theta]. \text{ Επομένως:}$$

$$\boxed{\frac{\partial(m_{rrr}[\theta, r])}{\partial r} = 0}$$

Όμως έχουμε αποδείξει από πριν ότι $m_{rrr} = 2 \frac{\cos^5 \theta}{\sin \theta} m_{\theta\theta\theta}$ [σχέση (3.1.14)]. Άρα

αν ισχύει $\frac{\partial(m_{rrr}[\theta, r])}{\partial r} = 0$ τότε από την σχέση (3.1.14) πρέπει να ισχύει

και:

$$\boxed{\frac{\partial(m_{\theta\theta\theta}[\theta, r])}{\partial r} = 0}$$

Τέλος αναφέρουμε για μια ακόμη φορά ότι αφού $\frac{\partial(m_{rrr}[\theta, r])}{\partial \theta} \neq 0$ όπως φαίνεται

και στο σχήμα τότε σίγουρα $\frac{\partial(m_{\theta\theta\theta}[\theta, r])}{\partial \theta} \neq 0$.

Συνεπώς με την βοήθεια των παραπάνω παραδοχών έχουμε απαλλαχτεί των

μερικών παραγώγων $\frac{\partial(\quad)}{\partial r}$ που εμφανίστηκαν στην συνοριακή μας συνθήκη η

οποία τελικά γίνεται:

$$\begin{aligned}
P_q = & n_x \tau_{xq} + n_y \tau_{yq} - \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(m_{xxq})}{\partial \theta} \right) + n_y \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(m_{yyq})}{\partial \theta} \right) + n_x \left(+\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(m_{yxq})}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& n_y \left. \left(+\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(m_{xyq})}{\partial \theta} \right) \right] - \left[\left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial \theta} - n_x \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \right. \\
& n_y \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xxq})}{\partial \theta} \right) \right] \right] + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial \theta} - n_x \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\
& n_y \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yxq})}{\partial \theta} \right) \right] \right] + \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial \theta} - n_y \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\
& n_y \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_x m_{xyq})}{\partial \theta} \right) \right] \right] + \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial \theta} - n_y \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\
& n_y \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_y m_{yyq})}{\partial \theta} \right) \right] \right] \right] + \left[\left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_x)}{\partial \theta} - n_x \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_x)}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \right. \\
& n_y \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_x)}{\partial \theta} \right) \right] \right] + \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_x)}{\partial \theta} - n_y \left[n_x \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(n_y)}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\
& n_x \left. \left. \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(n_y)}{\partial \theta} \right) \right] \right] R_q \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

Πάνω και κάτω σύνορο

Για το κάτω σύνορο $n^k = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουμε απαιτήσει $R_q=0$

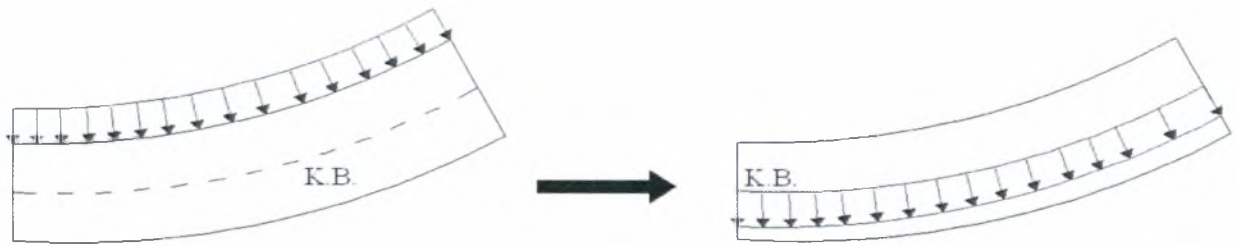
(δηλαδή μηδενίζεται ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 3.2.3) η συνοριακή συνθήκη δίνει μία εξίσωση κατά x και μία κατά y οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned}
P_x^k = & \cos \theta \cdot \tau_{rr} + \frac{1}{8r} \left[(8 \csc \theta - 16 \csc^3 \theta + 18 \sin \theta + 19 \sin 3\theta + 9 \sin 5\theta) m_{\theta\theta\theta} + (8 \cos \theta) m_{r\theta\theta} - (24 \cos \theta \right. \\
& \left. + 6 \cos 3\theta + 2 \cos 5\theta - 8 \cot \theta \csc \theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} + (8 \sin \theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} \right] \tag{3.2.4a}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
P_y^k = & \sin \theta \cdot \tau_{rr} - \frac{1}{8r} \left[(-2 \cos \theta + 33 \cos 3\theta + 9 \cos 5\theta + 8 \cot \theta \csc \theta) m_{\theta\theta\theta} + (-8 \sin \theta) m_{r\theta\theta} + (-8 \csc \theta \right. \\
& \left. + 12 \sin \theta + 14 \sin 3\theta + 2 \sin 5\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} + (8 \cos \theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} \right] \tag{3.2.4b}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στις παραπάνω εξισώσεις δεν εμφανίζεται καθόλου η αξονική μονοπολική τάση $\tau_{\theta\theta}$. Επίσης για το πάνω σύνορο $n^\pi = \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix} = -n^\kappa$, επομένως παίρνουμε τα αντίθετα αποτελέσματα δηλαδή $P_x^\kappa = -P_x^\pi$ και $P_y^\kappa = -P_y^\pi$. Όμως οι 4 τέσσερις εξισώσεις που παρέχονται μπορούν να μειωθούν σε δύο **με παραδοχή ότι η φόρτιση γίνεται μέσω μαζικών δυνάμεων**.



Σχήμα 3.2.3: Μεταφορά φορτίου \rightarrow παραδοχή μαζικών δυνάμεων.

Οπότε στο πάνω και κάτω σύνορο το επιβαλλόμενο φορτίο είναι μηδενικό. Επομένως ισχύει $P_x^\kappa = -P_x^\pi = 0$ και $P_y^\kappa = -P_y^\pi = 0$. Επιπλέον μπορούμε να απαλλαχτούμε από την μονοπολική τάση τ_{rr} από τις εξισώσεις (3.2.4a) και (3.2.4b) θεωρώντας ότι στο πάνω και κάτω σύνορο τ_{rr} είναι **μηδέν**, κάτι που ισχύει ακριβώς στην κλασσική θεωρία αν πάλι γίνει παραδοχή των μαζικών δυνάμεων: Σημειώνω ότι σε καμιά περίπτωση αυτό δεν συνεπάγει ότι μηδενίζεται και η διπολική τάση \mathbf{m}_{rrr} !



Σχήμα 3.2.4: Κατανομή τάσης τ_{rr} μήκος μιας διατομής.

Έτσι οι εξισώσεις (3.2.4a) και (3.2.4b) ι τόσο για το πάνω όσο και για το κάτω σύνορο γίνονται:

Από την συνθήκη $P_x=0$

$$0 = \left[(8\csc\theta - 16\csc^3\theta + 18\sin\theta + 19\sin 3\theta + 9\sin 5\theta) m_{\theta\theta\theta} + (8\cos\theta) m_{r\theta\theta} - (24\cos\theta + 6\cos 3\theta + 2\cos 5\theta - 8\cot\theta\csc\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial\theta} + (8\sin\theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial\theta} \right] \quad (3.2.5a)$$

Και από την συνθήκη $P_y=0$

$$0 = \left[(-2\cos\theta + 33\cos 3\theta + 9\cos 5\theta + 8\cot\theta\csc\theta) m_{\theta\theta\theta} + (-8\sin\theta) m_{r\theta\theta} + (-8\csc\theta + 12\sin\theta + 14\sin 3\theta + 2\sin 5\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial\theta} + (8\cos\theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial\theta} \right] \quad (3.2.5b)$$

Ο όρος $\frac{1}{8r}$ που εμφανίζονταν στις εξισώσεις (3.2.4a),(3.2.4b) απαλείφεται αφού βγαίνει κοινός παράγοντας. Επομένως από τις εξισώσεις (3.2.5a) και (3.2.5b) βλέπουμε ότι διαθέτουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού το οποίο για να επιλυθεί χρειαζόμαστε 2 αρχικές τιμές, οι οποίες μπορεί να είναι για παράδειγμα:

- 1) Μια αρχική τιμή για την $m_{r\theta\theta}(\theta_1)$ και μία αρχική τιμή για την $m_{\theta\theta\theta}(\theta_1)$ ή $m_{\theta\theta\theta}(\theta_2)$.
- 2) Δύο αρχικές τιμές για την $m_{r\theta\theta}(\theta_1)$ και $m_{r\theta\theta}(\theta_2)$ μετατρέποντας ουσιαστικά το παραπάνω σύστημα σε μία διαφορική εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς την $m_{r\theta\theta}$.
- 3) Δύο αρχικές τιμές για την $m_{\theta\theta\theta}(\theta_1)$ και $m_{\theta\theta\theta}(\theta_2)$ μετατρέποντας ουσιαστικά το παραπάνω σύστημα σε μία διαφορική εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς την $m_{\theta\theta\theta}$.
- 4) Δυο αρχικές τιμές οποιασδήποτε διπολικής τάσης εκτός των $m_{r\theta\theta}$ και $m_{\theta\theta\theta}$ όπου με την βοήθεια των εξισώσεων (3.1.14) και (3.1.15) θα μετατραπούν σε τάσεις $m_{\theta\theta\theta}$ (η γωνία θ φυσικά θα θεωρείται δεδομένη).

Οι παραπάνω αρχικές τιμές αναφέρονται φυσικά στο αριστερό και δεξιά σύνορο με γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα αφού στο πάνω και κάτω σύνορο έχουμε

απαιτήσει μηδενικό διπολικό φορτίο. Έτσι μπορούν τα φορτία να είναι σχηματικά όπως φαίνονται εναλλακτικά στα σχήματα 3.2.5 , 3.2.6 και 3.2.7 :



Σχήμα 3.2.5: Επιβαλλόμενα διπολικά φορτία τύπου $m_{\theta\theta\theta}$ στο αριστερό και δεξιό σύνορο.

ή



Σχήμα 3.2.6: Επιβαλλόμενα διπολικά φορτία τύπου $m_{r\theta\theta}$ στο αριστερό και δεξιό σύνορο.

ή



Σχήμα 3.2.7: Επιβαλλόμενα διπολικά φορτία τύπου $m_{r\theta\theta}$ και $m_{\theta\theta\theta}$ στο αριστερό και δεξιό σύνορο.

Υπάρχουν πολλοί ακόμα πιθανοί συνδυασμοί φορτίων. Πρέπει να αναφερθεί ότι αν έχουμε παραπάνω από 2 αρχικές τιμές (δηλαδή φορτία) τότε ουσιαστικά καταστρατηγείται η ισοστατικότητα του καλωδίου. Δηλαδή δεν μπορούμε να επιβάλλουμε εκ των προτέρων και κάποιο επιπλέον διπολικό φορτίο αν δεν γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε διπλό ζεύγος αρχικών τιμών σαν αρχικές τιμές θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα στην επίλυση των (3.2.5a) και (3.2.5b).

Τέλος ένας ακόμα τρόπος να βρεθούν αυτές οι αρχικές τιμές είναι από την συνοριακή συνθήκη $R = [m]\{n\}\{n\}$ δηλαδή οι εξισώσεις (3.1.16) και (3.1.17) για το δεξιά και αριστερά σύνορο.

$$R_x = \left[-\frac{1}{4} \sin\theta(3+\cos 4\theta)\right] m_{\theta\theta\theta}$$

$$R_y = \left[-\frac{1}{4} \cos\theta(-1-4\cos 2\theta+\cos 4\theta-8\cos^2\theta \cos 2\theta)\right] m_{\theta\theta\theta}$$

Έτσι αν υποθέσουμε για ένα σύνορο (π.χ. το αριστερό) τα R_x , R_y τότε αποκτούμε το θ_1 και την διπολική τάση $m_{\theta\theta\theta}(\theta_1)$ στο σύνορο αυτό. Αν ακόμα υποθέσουμε και τα R_x , R_y στο άλλο σύνορο (π.χ. το δεξί) τότε αποκτούμε το θ_2 και την διπολική τάση $m_{\theta\theta\theta}(\theta_2)$ στο σύνορο αυτό. Επομένως υποθέτοντας τα R_x , R_y και στα δύο σύνορα παίρνουμε 2 αρχικές τιμές για την $m_{\theta\theta\theta}$ με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.2.5a) και (3.2.5b). Είναι βέβαια προφανές ότι για $R_x = R_y = 0$ και στα 2 σύνορα (αριστερό και δεξί) τότε αναγκαστικά $m_{\theta\theta\theta}(\theta_1) = m_{\theta\theta\theta}(\theta_2) = 0$. Που συνεπάγεται αναπτύσσονται μηδενικές διπολικές τάσεις εσωτερικά στον φορέα !

Η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων (3.2.5a) και (3.2.5b) είναι επίπονη με το χέρι. Επίσης έγινε προσπάθεια επίλυσης από γνωστά μαθηματικά προγράμματα (Mathematica, Maple, Mat lab) αλλά αδυνατούσαν να εμφανίσουν αποτέλεσμα, κάτι που μας κάνει να υποπτευόμαστε ότι πολύ πιθανό να μην υπάρχει αναλυτική λύση. Συνεπώς οποιαδήποτε περαιτέρω προσπάθεια μας κινείται στα πλαίσια της αριθμητικής επίλυσης των παραπάνω εξισώσεων. Οι εξισώσεις (3.2.5a) και (3.2.5b) έχουν την γενική μορφή:

$$[f_{11}(\theta)] \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} + [f_{12}(\theta)] \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + [g_{11}(\theta)] m_{\theta\theta\theta} + [g_{12}(\theta)] m_{r\theta\theta} = 0 \quad (3.2.6a)$$

$$[f_{21}(\theta)] \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} + [f_{22}(\theta)] \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + [g_{21}(\theta)] m_{\theta\theta\theta} + [g_{22}(\theta)] m_{r\theta\theta} = 0 \quad (3.2.6b)$$

ή

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) \\ f_{21}(\theta) & f_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} m_{\theta\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} m_{r\theta\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}(\theta) & g_{12}(\theta) \\ g_{21}(\theta) & g_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta} \\ m_{r\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Επομένως για να είναι πιο εύκολη η αριθμητική τους επίλυση έγινε προσπάθεια να μετατραπούν στην μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} m_{\theta\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} m_{r\theta\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1(\theta) & B_1(\theta) \\ A_2(\theta) & B_2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta} \\ m_{r\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.9)$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{\theta\theta}}{\partial \theta} + A_1(\theta)m_{\theta\theta} + B_1(\theta)m_{r\theta\theta} &= 0 \\ \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + A_2(\theta)m_{\theta\theta} + B_2(\theta)m_{r\theta\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.10a,b)$$

Αυτό επιτυγχάνεται αν πολλαπλασιάσουμε την (3.2.8) με τον αντίστροφο του

πίνακα $\begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) \\ f_{21}(\theta) & f_{22}(\theta) \end{bmatrix}$ ο οποίος μας δίνει τον παρακάτω πίνακα ως

αποτέλεσμα

$$\frac{1}{6 + \cos 2\theta + 10\cos 4\theta - \cos 6\theta} \begin{bmatrix} \frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{4} & \frac{-2\sin^3\theta}{8} \\ \frac{(2 - \cos 2\theta + 6\cos 4\theta + \cos 6\theta)\sin\theta}{4} & \frac{7\cos\theta + 7\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta}{8} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

Όποτε οι συντελεστές $A_1(\theta)$, $B_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, $B_2(\theta)$ των εξισώσεων (3.2.10a,b) παίρνουν την μορφή:

$$A_1(\theta) = \frac{(-29\cos\theta - 51\cos 3\theta + 15\cos 5\theta + \cos 7\theta)\csc\theta}{2(6 + \cos 2\theta + 10\cos 4\theta - \cos 6\theta)} \quad (3.2.11a)$$

$$B_1(\theta) = \frac{32 \sin^2 \theta}{2(6 + \cos 2\theta + 10 \cos 4\theta - \cos 6\theta)} \quad (3.2.11b)$$

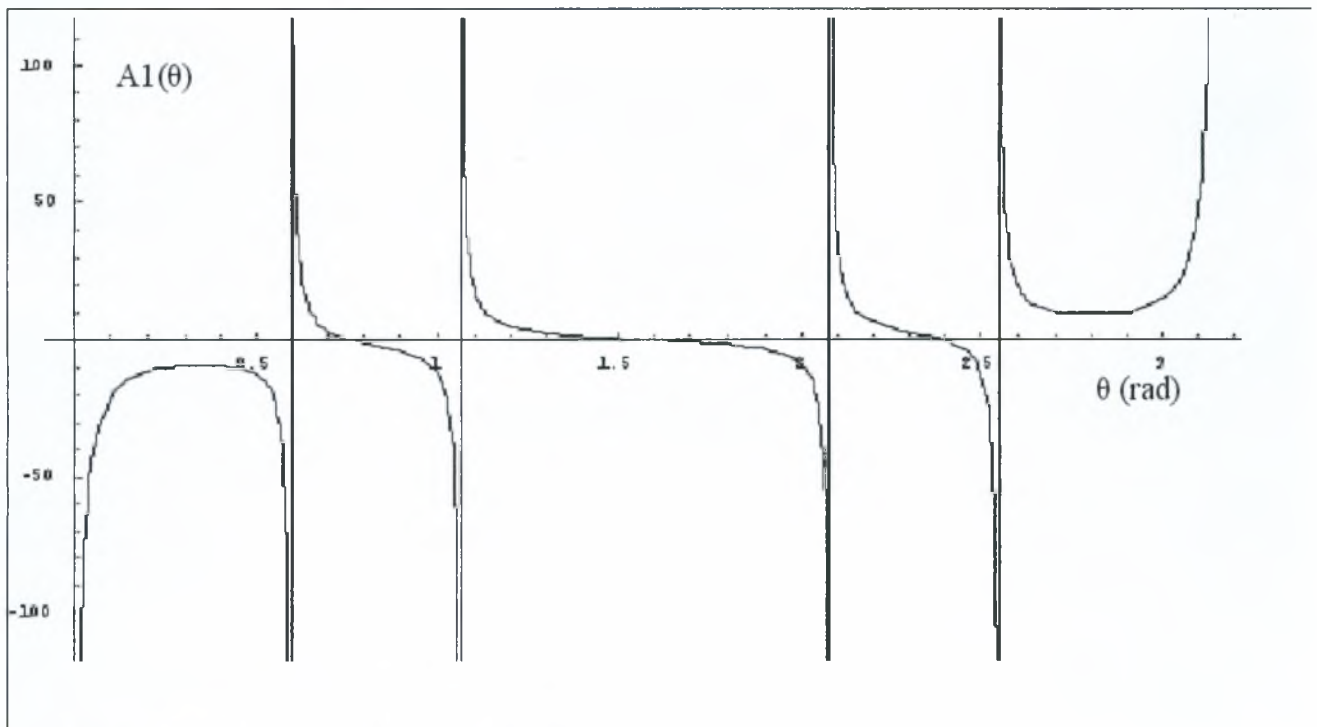
Και για την 2^η εξίσωση έχουμε:

$$A_2(\theta) = \frac{(42 - 34 \cos 2\theta - 104 \cos 4\theta + 23 \cos 6\theta - 66 \cos 8\theta + 11 \cos 10\theta) \cot^2 \theta}{8(6 + \cos 2\theta + 10 \cos 4\theta - \cos 6\theta)} \quad (3.2.11c)$$

$$B_2(\theta) = \frac{-32(5 \cos \theta + 3 \cos 3\theta) \sin^3 \theta}{4(6 + \cos 2\theta + 10 \cos 4\theta - \cos 6\theta)} \quad (3.2.11c)$$

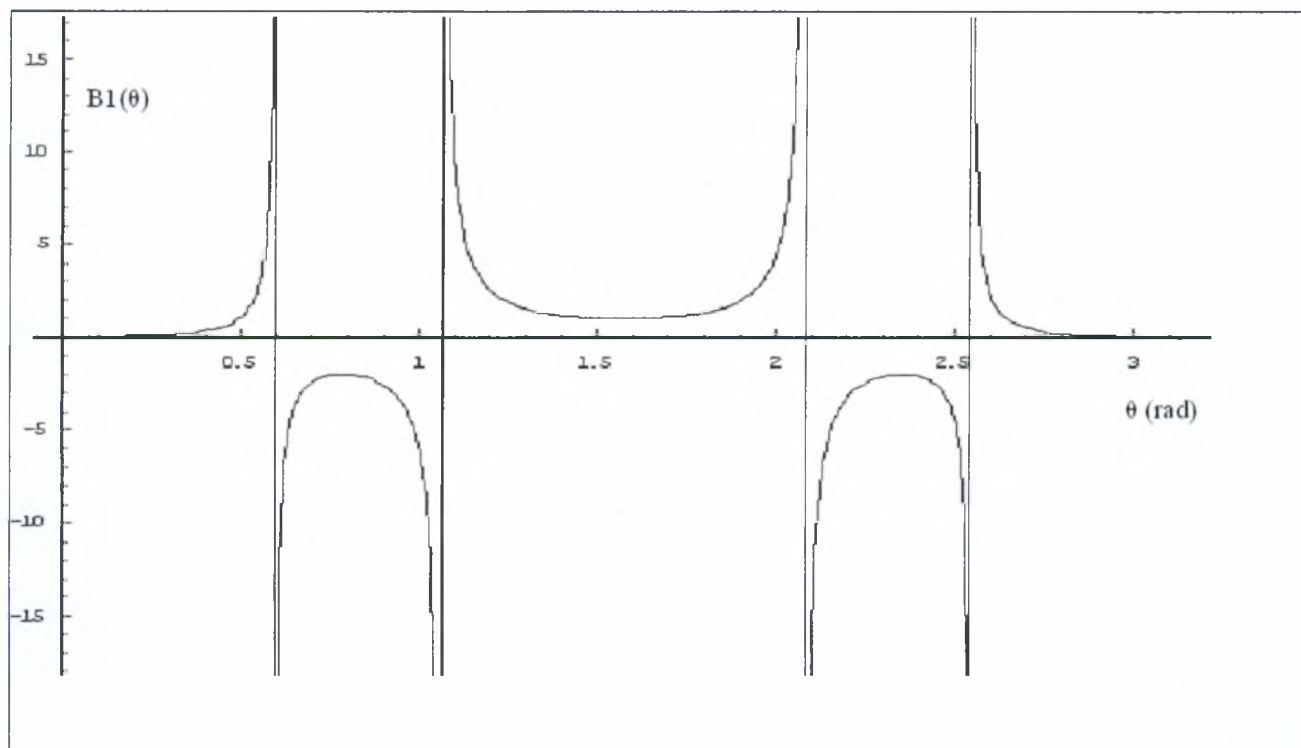
Έτσι δημιουργώντας τις γραφικές παραστάσεις για θ από $[0, \pi]$ των συντελεστών $A_1(\theta)$, $B_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, $B_2(\theta)$, έχουμε:

Για τον συντελεστή $A_1(\theta)$



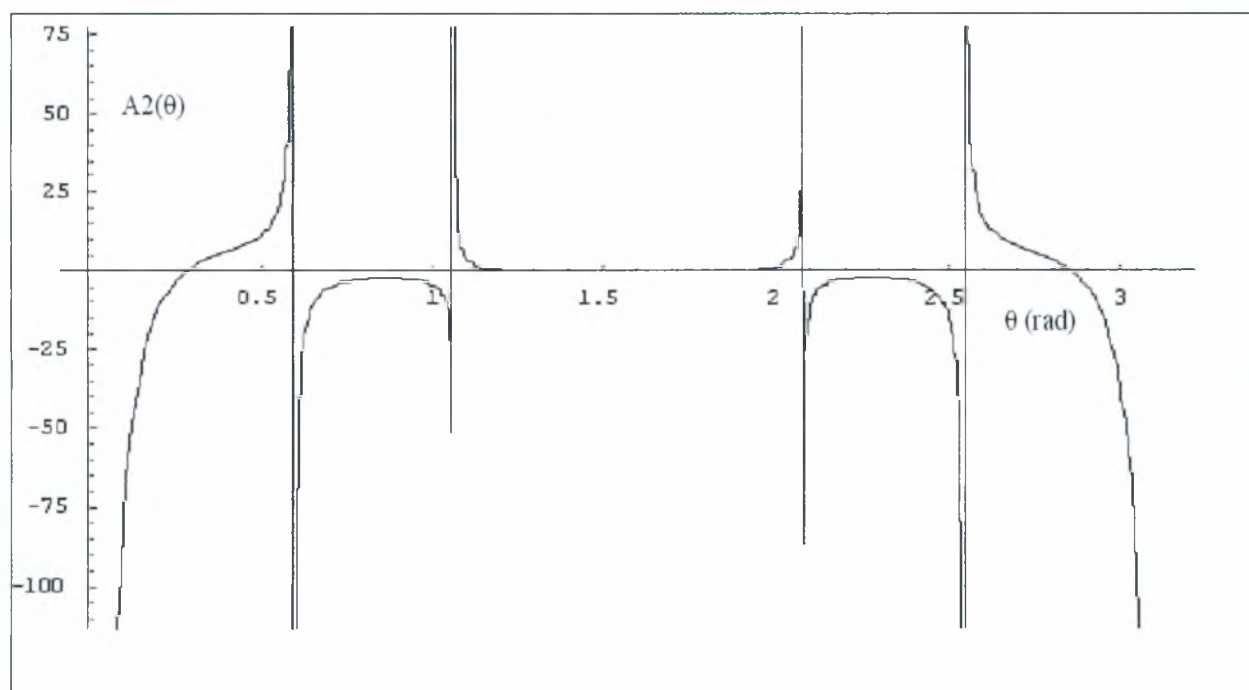
Σχήμα 3.2.8: Γραφική παράσταση συντελεστή $A_1(\theta)$.

Για τον συντελεστή $B_1(\theta)$



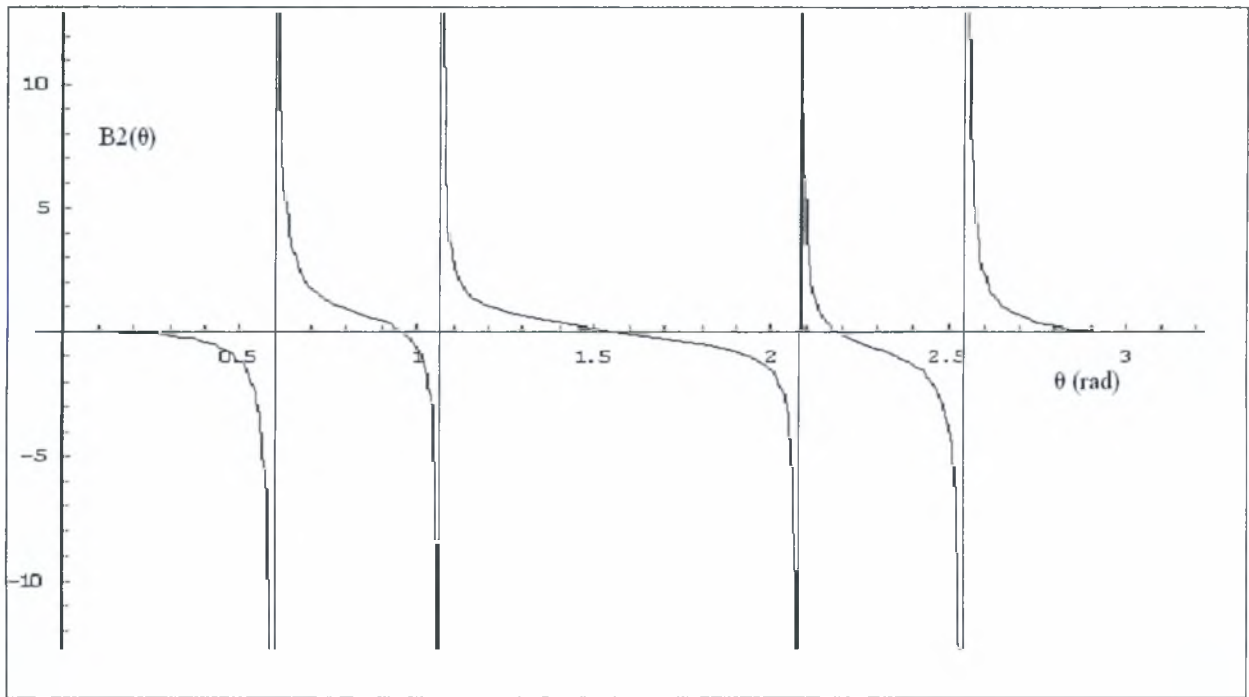
Σχήμα 3.2.9: Γραφική παράσταση συντελεστή $B_1(\theta)$.

Για τον συντελεστή $A_2(\theta)$



Σχήμα 3.2.10: Γραφική παράσταση συντελεστή $A_2(\theta)$.

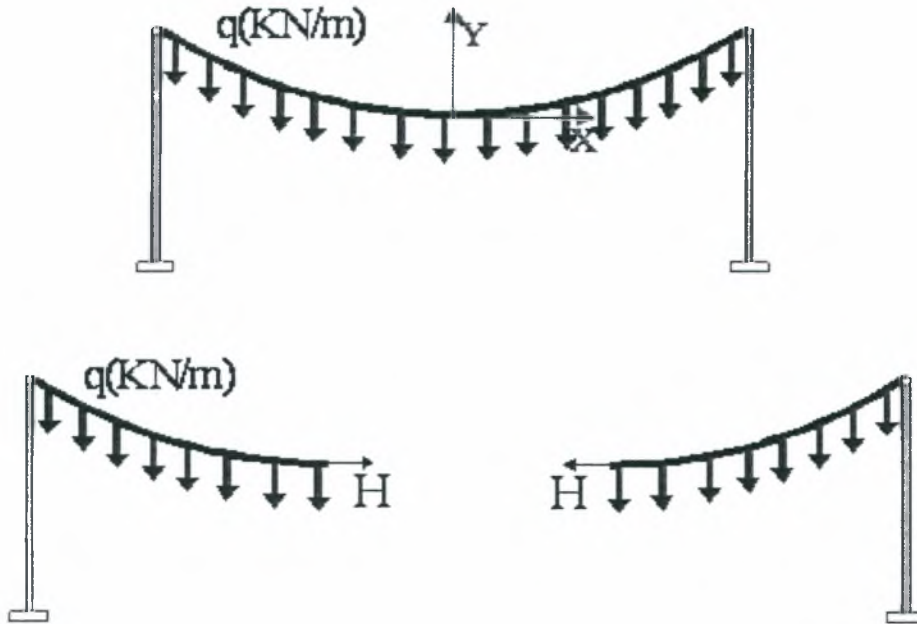
Για τον συντελεστή $B_2(\theta)$



Σχήμα 3.2.11: Γραφική παράσταση συντελεστή $B_2(\theta)$.

Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις είναι για θ από $[0, \pi]$ ενώ ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα βγάζουμε για θ από $[\pi, 2\pi]$! Η σημαντικότερη παρατήρηση που βγαίνει από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις είναι η «ανωμαλία» των γωνιών 0.6 rad , 1.05 rad , 2.1 rad και 2.55 rad αφού βλέπουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις κινούνται ασυμπτωτικά ως προς τις κατακόρυφες νητές ευθείες που περνάνε από αυτές τις γωνίες. Αυτό σημαίνει ότι αν δώσουμε π.χ. δύο αρχικές τιμές για $\theta = \pi/2$ (ή $3\pi/2$) δηλαδή $\varphi = 0$ (γωνία εφαπτομένης) το οποίο είναι και το κατώτατο άκρο του καλωδίου τότε οι εξισώσεις (3.2.10a,b) αποκλείεται να μας δώσουν κατά την επίλυση τους τιμές των διπολικών τάσεων $m_{\theta\theta}$, $m_{r\theta}$ για γωνίες εκτός του διαστήματος $(1.05, 2.1) \text{ rad}$! Το παραπάνω πόρισμα μας δίνει να καταλάβουμε ότι ουσιαστικά το καλώδιο πρέπει να σπάσει σε επιμέρους καλώδια-προβλήματα για να επιλυθεί, στα διαστήματα $(0, 0.6) \text{ rad}$, $(0.6, 1.05)$, $(1.05, 2.1)$, $(2.1, 2.55)$ και $(2.55, \pi)$. Εξάλλου κάτι τέτοιο συνέβαινε και στην κλασική επίλυση του καλωδίου όπου ενώ γνωρίζουμε ότι το καλώδιο αποτελεί ισοστατικό φορέα δεν μας αρκούσε μόνο η απόσταση των στηρίξεων και το επιβαλλόμενο φορτίο για την επίλυση του αλλά και η τάση στο κατώτατο άκρο

του καλωδίου (H) που σημαίνει ότι η γωνία $\varphi=0$ λειτουργεί όπως ακριβώς οι παραπάνω γωνίες, αφού απαιτείται να σπάσουμε το πρόβλημα σε 2 επιμέρους προβλήματα όπως στο σχήμα 3.2.12 .



Σχήμα 3.2.12: Καλώδιο-σπάσιμο σε δύο επιμέρους προβλήματα.

Κατά την κλασσική λύση του καλωδίου είχαμε:

1) Την αξονική δύναμη σε ένα σημείο του καλωδίου όπου γνωρίζουμε την υψομετρική διαφορά του y από το κατώτατο σημείο του καλωδίου και μέσω της παρακάτω σχέσης να προσδιορίσουμε την δύναμη H στο κατώτατο σημείο του καλωδίου.

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{H^2 + (qs)^2} = H \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{qx}{H} \right)} = H \cosh \left(\frac{qx}{H} \right)$$

ή

$$\boxed{N = H + qy}$$

οι δυνάμεις είναι της μορφής $\tau_{\theta\theta} \cdot A$, όπου $\tau_{\theta\theta}$ ο μέσος όρος των τάσεων κατά μήκος της διατομής A

2) Τις συντεταγμένες (x,y) ενός σημείου και μέσω της παρακάτω σχέσης να προσδιορίσουμε την τάση H στο κατώτατο σημείο του καλωδίου.

$$y = \frac{H}{q} \left(\cosh \left(\frac{qx}{H} \right) - 1 \right)$$

Δεξιό και αριστερό σύνορο

Για το δεξιό σύνορο $n^\Delta = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix}$ και η εξίσωση (3.2.3) γίνεται:

$$P_x^\Delta = -\sin \theta \cdot \tau_{\theta\theta} + \frac{1}{32r} \left[\csc^2 \theta (23 \cos \theta - 3(\cos 3\theta - 5 \cos 5\theta + \cos 7\theta)) m_{\theta\theta\theta} + 32 \sin \theta m_{r\theta\theta} + \sin \theta (24 + 8 \cos 4\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} \right] \quad (3.2.6a)$$

και

$$P_y^\Delta = \cos \theta \cdot \tau_{\theta\theta} + \frac{1}{4r} \cos \theta \left[\cot \theta (11 - 4 \cos 2\theta - 3 \cos 4\theta) m_{\theta\theta\theta} - 4 m_{r\theta\theta} - (3 + 8 \cos 2\theta + \cos 4\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} \right] \quad (3.2.6b)$$

Για το αριστερά σύνορο $n^{\Delta\rho} = \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{Bmatrix}$ παίρνουμε τα αντίθετα αποτελέσματα,

$$\text{δηλαδή } P_x^\Delta = -P_x^{\Delta\rho} \quad \text{και} \quad P_y^\Delta = -P_y^{\Delta\rho}$$

Αξίζει όμως να σημειώσουμε τα εξής για τις παραπάνω εξισώσεις:

► Δεν εμφανίζεται πουθενά η μερική παράγωγος της διπολικής τάσης $m_{r\theta\theta}$ ως προς την γωνία θ .

► Δεν εμφανίζεται η τάση τ_{rr} ασχέτως αν την έχουμε μηδενίσει.

► Μηδενίζεται ο συντελεστής του όρου R_q τόσο κατά x όσο και κατά y . Επομένως δεν εμφανίζεται πουθενά R_x και R_y του αριστερού και δεξιού συνόρου. Αυτό σημαίνει ότι τα $P_x^\Delta, P_x^{\Delta\rho}$ και $P_y^\Delta, P_y^{\Delta\rho}$ περιγράφουν των πραγματικό ελκυστή των τάσεων.

► Γενικά $\frac{P_x^\Delta}{P_y^\Delta} \neq -\tan \theta$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι αν από τις εξισώσεις (3.2.5a) και (3.2.5b) έχουμε:

- τις τιμές των δίπολων για κάθε γωνία θ .
- τις γωνίες θ στα άκρα αφού γνωρίζουμε τις κατανομές των δίπολων για τις συγκεκριμένες γωνίες θ .

τότε αν προσδιορίσουμε τα P_x^Δ, P_y^Δ ή $P_x^{A\rho}, P_y^{A\rho}$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $\tau_{\theta\theta}$ και \mathbf{r} (καμπυλότητα) για το αντίστοιχο άκρο.

Οι τιμές αυτές των $\tau_{\theta\theta}(\theta_1)$ και $\mathbf{r}(\theta_1)$ αποτελούν ουσιαστικά και τις αρχικές τιμές-αρχικές συνθήκες για να επιλυθούν οι εξισώσεις ισορροπίας. Στην συνέχεια επιλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για διαφορετικά θ αποκτούμε τις επιθυμητές τιμές των $\tau_{\theta\theta}$ και \mathbf{r} για οποιοδήποτε τομή που εμφανίζεται, προσδιορίζοντας κάθε φορά το θ . Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ταυτόχρονα τα P_x, P_y και στα δυο σύνορα του φορέα γιατί έτσι καταστρατηγούμε την ισορροπία του φορέα. Επομένως τα P_x, P_y σε κάθε άλλο σύνορο θα προσδιοριστούν μέσω των εξισώσεων ισορροπίας (3.2.6) αφού αυτές θα μας δώσουν τα $\tau_{\theta\theta}$ και \mathbf{r} στο **σύνορο** αυτό (με γνωστό θ) και δεδομένου ότι είναι γνωστά τα δίπολα και οι παράγωγοι τους για κάθε γωνία.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ισχύει:

$$\boxed{\partial_p (\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq}) + f_q = 0} \quad \text{σε περιοχή } V \text{ (όγκος)} \quad (4.1)$$

η οποία αναφέρεται φυσικά πάντα σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων,

όπου $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x_p}$ δηλαδή μερική παράγωγος ως προς x_p και f_q η μαζική δύναμη ανά

μονάδα όγκου κατά x_q . Ο πραγματικός ελκυστής των τάσεων είναι $n_p (\tau_{pq} - \partial_r m_{rpq})$

Αν βέβαια στην παραπάνω εξίσωση αναπτύξουμε τα αθροίσματα τότε παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\partial_x \tau_{xq} + \partial_y \tau_{yq} - \partial_x^2 m_{xxq} - \partial_y^2 m_{yyq} - \partial_x \partial_y m_{yxq} - \partial_y \partial_x m_{xyq} + f_q = 0 \quad (4.2)$$

και επειδή ισχύει $\partial_x \partial_y () = \partial_y \partial_x ()$ τότε η εξίσωση (4.2) γίνεται:

$$\partial_x \tau_{xq} + \partial_y \tau_{yq} - \partial_x^2 m_{xxq} - \partial_y^2 m_{yyq} - \partial_x \partial_y (m_{yxq} + m_{xyq}) + f_q = 0 \quad (4.3)$$

Όπου ο δείκτης q μπορεί να είναι x, y άξονες. Επομένως η εξίσωση (4.3) γίνεται

κατά x:

$$\boxed{\partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{yx} - \partial_x^2 m_{xxx} - \partial_y^2 m_{yyx} - \partial_x \partial_y (m_{yxx} + m_{xyx}) + f_x = 0} \quad (4.4a)$$

και **κατά y:**

$$\boxed{\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} - \partial_x^2 m_{xxy} - \partial_y^2 m_{yyy} - \partial_x \partial_y (m_{yyx} + m_{xyy}) + f_y = 0} \quad (4.4b)$$

Επίσης επειδή έχουμε τις εξής παραμέτρους-παραδοχές:

► Ο καταστατικός νόμος του υλικού (εύκαμπτο καλώδιο) επιβάλλει για τις διατμητικές τάσεις $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$.

► Η παραδοχή λεπτότοιχου καλωδίου επιβάλλει να αγνοηθεί η τ_{rr} .

Την ίδια παραδοχή υπονοούσαμε με την κλασσική θεώρηση στις λεπτότοιχες πλάκες, στις κλειστές και ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές καθώς και στους λεπτότοιχους λέβητες (μεμβράνες)! Εξάλλου, εάν προσεγγίσουμε ενεργειακά την επιρροή της τάσης, θα καταλάβουμε ότι είναι αμελητέα αφού το έργο της που εκφράζεται από την λέπτυνση (μείωση πάχους) του καλωδίου είναι λογικό ότι είναι μικρό μιας και εξετάζουμε λεπτότοιχες κατασκευές! Το ίδιο συμπέρασμα ενισχύεται αν δεχτούμε ότι ο συντελεστής Poisson είναι μηδέν.

Έτσι οι εξισώσεις (2.8) γίνονται:

$$\tau_{xx} = \tau_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (4.5a)$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{\theta\theta} \cos \theta \sin \theta, \quad (4.5b)$$

$$\tau_{yy} = \tau_{\theta\theta} \cos^2 \theta, \quad (4.5c)$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (2.4) και (2.5) όπου συνδέουν τις παραγώγους 1^{ης} τάξης και 2^{ης} τάξης αντίστοιχα του καρτεσιανού συστήματος με του τοπικού-πολικού συστήματος και τις εξισώσεις (3.1.18) οι οποίες συνδέουν τις καρτεσιανές διπολικές τάσεις με τις πολικές, οι (4.4a) και (4.4b) γίνονται **κατά x**:

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos \theta}{r} \tau_{\theta\theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_x + \frac{1}{8r^2} \left[(8 \csc \theta - 16 \csc^3 \theta + 18 \sin \theta + 27 \sin 3\theta - 15 \sin 5\theta) m_{\theta\theta\theta} \right. \\ & + (8 \cos \theta) m_{r\theta\theta} - 4(3 \cos \theta + 3 \cos \theta - 2(\cos 5\theta + \cot \theta \csc \theta)) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} + (8 \sin \theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} \\ & \left. + 2 \sin \theta (3 + \cos 4\theta) \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.6a)$$

κατά y:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sin \theta}{r} \tau_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_y + \frac{1}{8r^2} \left[(2 \cos \theta + 39 \cos 3\theta + 15 \cos 5\theta - 8 \cot \theta \csc \theta) m_{\theta\theta\theta} \right. \\ & + (8 \sin \theta) m_{r\theta\theta} + 8(\csc \theta + 2 \sin \theta + 5 \sin 3\theta + \sin 5\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - (8 \cos \theta) \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} \\ & \left. - (14 \cos \theta + 9 \cos 3\theta + \cos 5\theta) \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.6b)$$

Αν όμως υποθέσουμε ότι το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού \sqrt{c} είναι μηδέν τότε τα δίπολα σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.3) μηδενίζονται (συνεπάγεται ότι μηδενίζονται και οι παράγωγοι τους). Επομένως από τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας μένουν μόνο οι όροι που περιέχουν τις μονοπολικές τάσεις καθώς και το μαζικό φορτίο να μονάδα όγκου f_x, f_y . Έτσι η εξίσωση (4.6α) γίνεται:

$$-\frac{\cos\theta}{r}\tau_{\theta\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} + f_x = 0 \quad (4.7a)$$

και η εξίσωση (4.6b) γίνεται :

$$-\frac{\sin\theta}{r}\tau_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} + f_y = 0 \quad (4.7b)$$

Όμως τα φορτία f_x, f_y μετασχηματίζονται σαν διανύσματα και συγκεκριμένα ως εξής:

$$f_x = f_r \cos\theta - f_\theta \sin\theta \quad (4.8a)$$

$$f_y = f_r \sin\theta + f_\theta \cos\theta \quad (4.8b)$$

Συνεπώς αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις αυτές στις εξισώσεις (4.7) και πολλαπλασιάσουμε την (4.7α) με $\sin\theta$ και την (4.7b) με $-\cos\theta$ τότε έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\tau_{\theta\theta} - \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} + f_r \cos\theta\sin\theta - f_\theta \sin^2\theta = 0 \\ +\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\tau_{\theta\theta} - \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} - f_r \cos\theta\sin\theta - f_\theta \cos^2\theta = 0 \end{aligned} \right\} +$$

Τα οποία αν προσθέσουμε κατά μέλη τότε έχουμε:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_{\theta} = 0 \quad (4.9a)$$

Ομοίως αν προσπαθήσουμε να απαλείψουμε την τάση f_r τότε θα πάρουμε

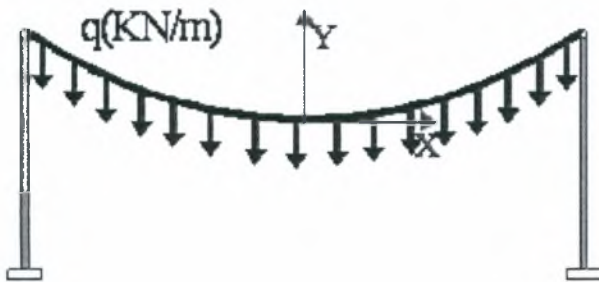
$$-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \quad (4.9b)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συμπίπτουν με τις κλασσικές εξισώσεις ισορροπίας [5] στους πολικούς άξονες (r, θ) , αν σε αυτούς μηδενίσουμε τις διατμητικές τάσεις καθώς και την τάση τ_{rr} . Υπενθυμίζεται τις εξισώσεις στην κλασσική περίπτωση:

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_{\theta} = 0 \quad (4.10b)$$

Στο κλασσικό πρόβλημα του καλωδίου έχουμε μόνο f_y αφού $f_x = 0$



Σχήμα 4.1: Κλασσική φόρτιση καλωδίου.

Επομένως αν μηδενίσουμε στην εξίσωση (4.7a) την f_x τότε οι εξισώσεις (4.7) αναδιατυπώνονται και μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$-\tau_{\theta\theta} + f_y \cdot \sin \theta \cdot r = 0 \quad (4.11a)$$

Και

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_y \cdot \cos \theta \cdot r = 0 \quad (4.11b)$$

Οι οποίες θυμίζουν τις εξισώσεις του καλωδίου οι οποίες είναι:

$$N + q \cdot r = 0 \quad (4.11c)$$

και

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + p \cdot r = 0 \quad (4.11d)$$

Οι επιπλέον τριγωνομετρικοί όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις (4.11) οφείλονται στο ότι οι μαζικές δυνάμεις αναφέρονται σε όγκο. Επομένως η επιφάνεια της διατομής A μετασχηματίζεται σαν διάνυσμα και εμφανίζεται στις εξισώσεις ως εξής:

$$N = \tau_{\theta\theta} \cdot A$$

$$q = f_y \cdot A \cdot \sin \theta$$

$$p = f_y \cdot A \cdot \cos \theta$$

Τέλος, όπως ακριβώς μετασχηματίσαμε τις εξισώσεις (3.2.5) σε τέτοια μορφή ώστε να μπορούν να λυθούν εύκολα αριθμητικά, έτσι θα ωφεληθούμε αν μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας σε τέτοια μορφή ώστε να μπορούν να λυθούν εύκολα και αυτές .

$$\left. \begin{array}{l} (4.6.a) \cdot \sin \theta \\ (4.6.b) \cdot -\cos \theta \end{array} \right\} + \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (f_y \cos \theta - f_x \sin \theta) + \frac{1}{4r^2} \left[2(5 \cos 4\theta - 3 \cos 6\theta) \csc^2 \theta \cdot m_{\theta\theta\theta} + (14 \sin 2\theta + 17 \sin 4\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 4 \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - (5 + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 4\theta) \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0} \quad (4.12a)$$

$$\left. \begin{array}{l} (4.6.a) \cdot \cos \theta \\ (4.6.b) \cdot \sin \theta \end{array} \right\} + \longrightarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{r} \tau_{\theta\theta} + (f_y \sin \theta + f_x \cos \theta) + \frac{1}{4r^2} \left[(-8 \cot \theta \csc^2 \theta + 2 \sin 2\theta + 9 \sin 4\theta) m_{\theta\theta\theta} + 4 m_{r\theta\theta} + (1 - 9 \cos 4\theta + 4 \csc^2 \theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 2 \sin 4\theta \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0} \quad (4.12b)$$

Για την περίπτωση της απλής ευθύγραμμης ράβδου έχουμε:

$\theta=3\pi/2 \rightarrow$ οι εξισώσεις (2.4a) και (2.5a) δίνουν:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = \frac{d(\quad)}{dx}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\quad)}{\partial\theta^2} = \frac{d^2(\quad)}{dx^2} \text{ ενώ για ευθύγραμμη δοκό ισχύει } r \rightarrow \infty$$

οπότε οι εξισώσεις (4.12a) και (4.12b) αντίστοιχα γίνονται:

$$(4.12a) \rightarrow \frac{d\tau_{\theta\theta}}{dx} + f_x - \frac{d^2 m_{\theta\theta\theta}}{dx^2} = 0 \quad (4.13)$$

$$(4.12b) \rightarrow 0 = 0 \text{ για πεπερασμένα } \tau_{\theta\theta}, m_{\theta\theta\theta}, m_{r\theta\theta} \text{ και παραγώγους αυτών.}$$

Η εξίσωση (4.13) είναι αυτή που προβλέπεται από την Papargiri et al [6] κάτι που επαληθεύει την εγκυρότητα της θεωρίας και των παραδοχών που έχουν γίνει.

Ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων καθώς και ο αλγόριθμος που δημιουργήθηκε για την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β . Πρέπει όμως να αναφερθεί ότι οι εξισώσεις ισορροπίας (4.12) δίνουν ένα πολυώνυμο 2^{ov} βαθμού ως προς την καμπυλότητα (1/r). Συνεπάγεται λοιπόν ότι κατά την επίλυση είναι πιθανόν να μην υπάρχουν πραγματικές τιμές καμπυλότητας, που σημαίνει ότι το καλώδιο δεν είναι δυνατό να παραλάβει τα διπολικά φορτία που του επιβάλουμε όπως για παράδειγμα δεν μπορεί να παραλάβει θλιπτικό αξονικό φορτίο. Στην περίπτωση που όμως έχουμε 2 πραγματικές λύσεις τότε η επιλογή της σωστής καμπυλότητας θα βασιστεί στα παρακάτω κριτήρια:

1) Αν οι 2 λύσεις που βρέθηκαν έχουν αντίθετα πρόσημα τότε η λύση που θα επιλεχτεί είναι αυτή που συμβαδίζει με την φορά του φορτίου, δηλαδή με το πρόσημο της καμπυλότητας από το κλασσικό πρόβλημα.

2) Αν έχουν το ίδιο πρόσημο τότε επιλέγουμε την καμπυλότητα με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή γιατί μεγάλες καμπυλότητες συνεπάγεται μικρότερες τάσεις άρα μικρότερη ενέργεια, την οποία προφανώς και θα επιλέξει ο φορέας για να παραμορφωθεί.

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σύνοψη των προς λύση εξισώσεων

Για να επιλυθούν οι εξισώσεις ισορροπίας (4.12) απαιτούνται κάποια γνωστά δεδομένα για το πρόβλημα. Αυτά τα δεδομένα μπορεί να είναι:

- 1) Τα δίπολα για κάθε γωνία θ και η τάση $\tau_{\theta\theta}^0 = \tau_{\theta\theta}(\phi = 0)$.
- 2) Τα δίπολα για κάθε γωνία και η ακτίνα καμπυλότητας $r^0 = r(\phi = 0)$.
- 3) Τα δίπολα για κάθε γωνία και το χαρακτηριστικό εμβαδό c του υλικού.

5.1) Εύρεση διπολικών τάσεων

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να προχωρήσουμε είναι η εύρεση των διπολικών τάσεων για κάθε γωνία θ του φορέα, επιλύοντας τις εξισώσεις (3.2.10) επιλέγοντας για αρχικές τιμές διπόλων $m_{r\theta\theta}$ και $m_{\theta\theta\theta}$ για γωνία $\theta=3\pi/2 \rightarrow \phi=0$. Συνεπώς θα επιλύσουμε το καλώδιο στο διάστημα $[3\pi/2, 5.21]$ rad η $[0^0, 28^0]$.

Δοκιμαστικά τοποθετούμε ενδεικτικές τιμές για να βγάλουμε γενικότερα συμπεράσματα.

Έτσι για:

αρχικές τιμές

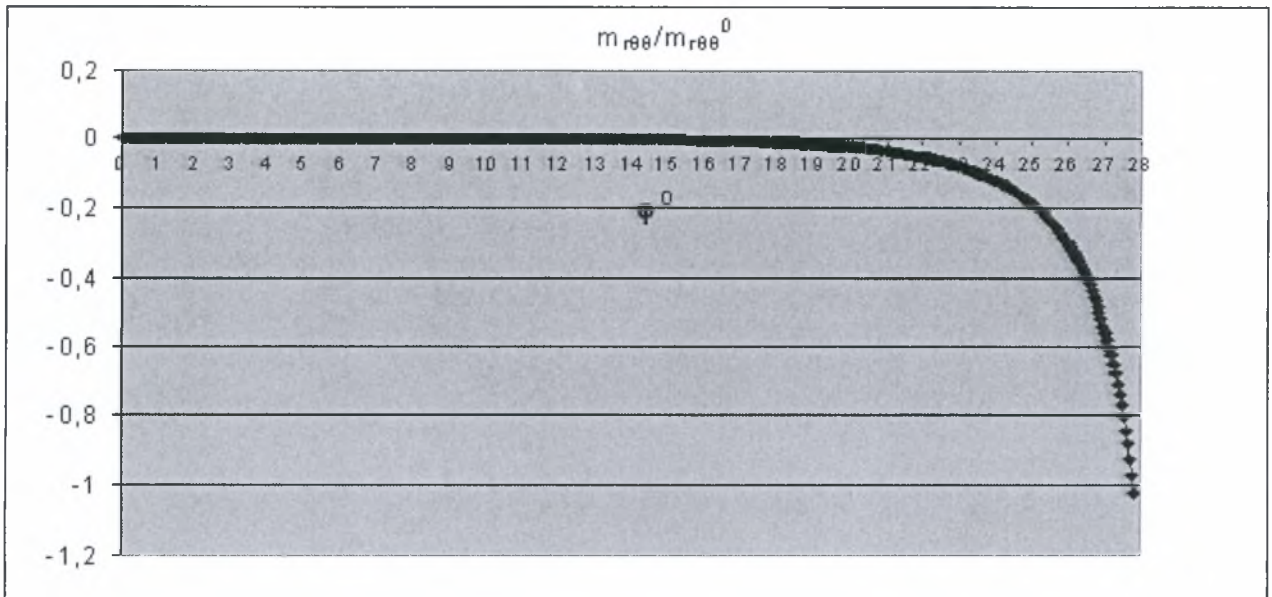
$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
0	0

ο φορέας δεν αναπτύσσει καθόλου δίπολα $m_{\theta\theta\theta}$ και $m_{r\theta\theta}$. Συνεπώς με την βοήθεια των εξισώσεων (3.1.14) και (3.1.15) συμπεραίνουμε ότι δεν αναπτύσσεται και κανένα άλλο είδος διπολικής τάσης!

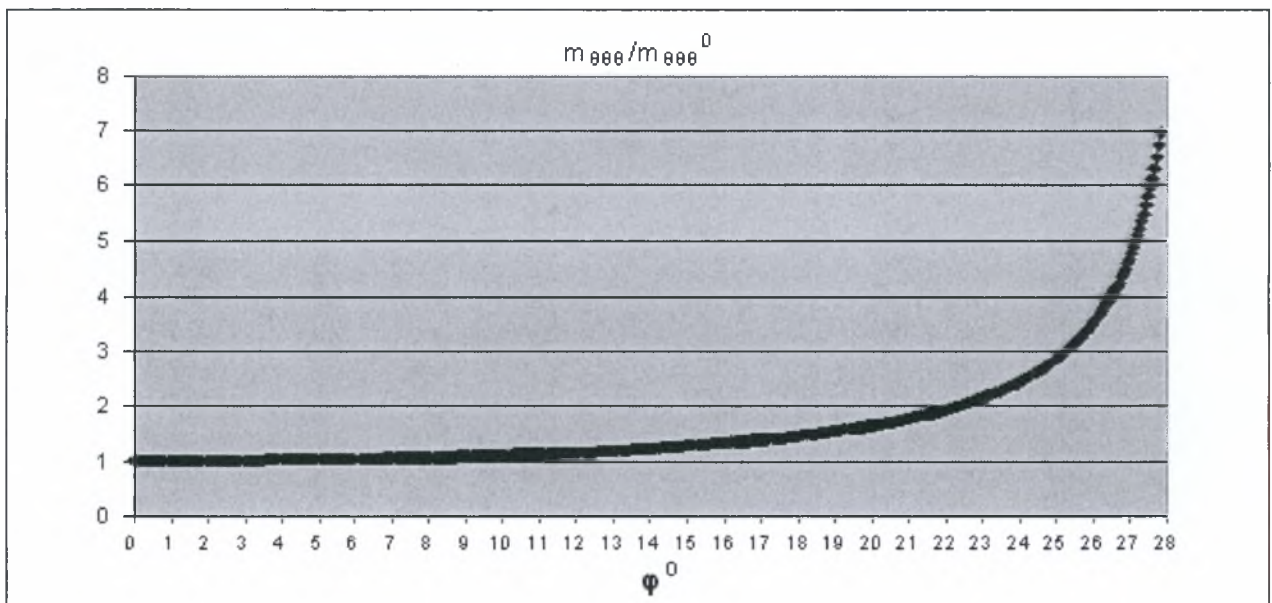
αρχικές τιμές

$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
1	0

Επιλύουμε τις διαφορικές εξισώσεις με βήμα $\Delta\theta=0,001$ rad με βάση την μέθοδο του Euler (Παράρτημα Δ) και καταλήγουμε στα εξής διαγράμματα:



Διάγραμμα 5.1.2: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{r\theta\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .

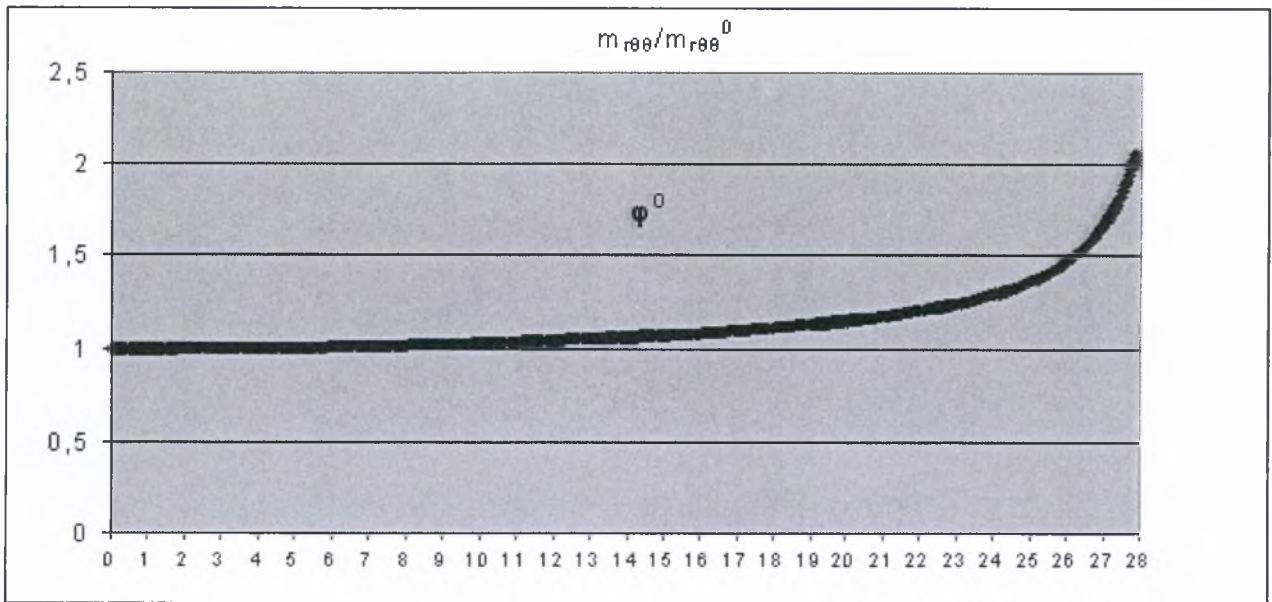


Διάγραμμα 5.1.2: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{\theta\theta\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .

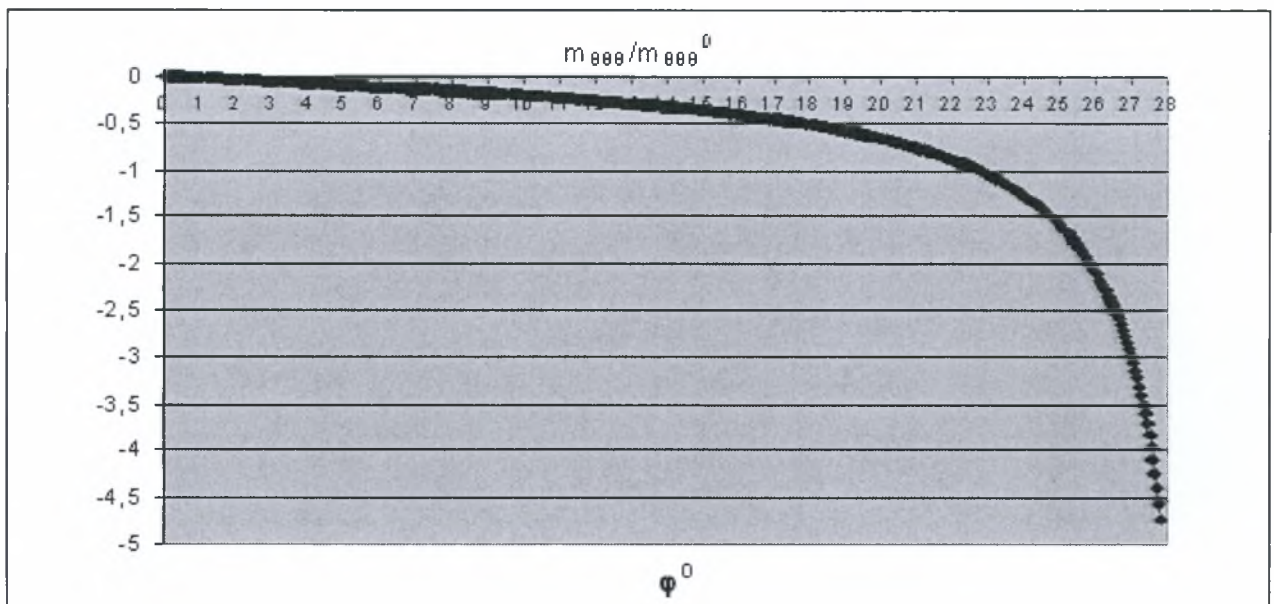
Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι για επιβολή διπολικού φορτίου $m_{\theta\theta\theta}$ τα δίπολα γίνονται πιο ισχυρά σε μεγαλύτερες γωνίες. Επιπλέον τα δίπολα $m_{\theta\theta\theta}$ που αναπτύσσει εσωτερικά ο φορέας μας είναι πιο ισχυρά από τα δίπολα $m_{r\theta\theta}$. Ομοίως για:

αρχικές τιμές

$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
0	1



Διάγραμμα 5.1.3: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{r\theta\theta}$ για κάθε γωνία φ .

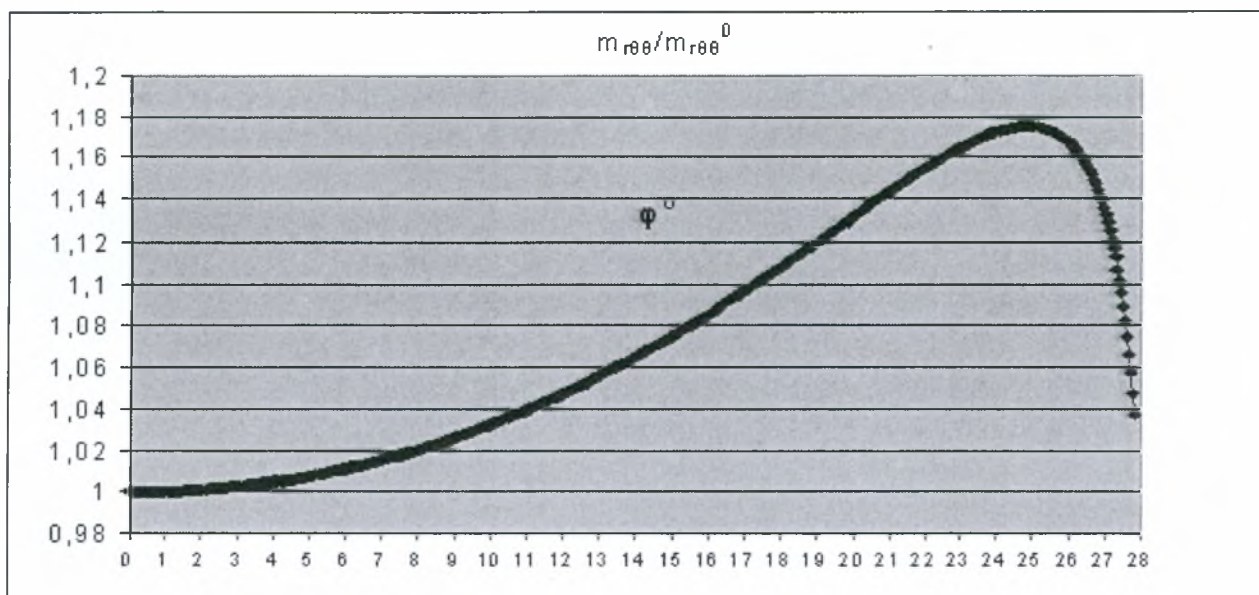


Διάγραμμα 5.1.4: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{\theta\theta\theta}$ για κάθε γωνία φ .

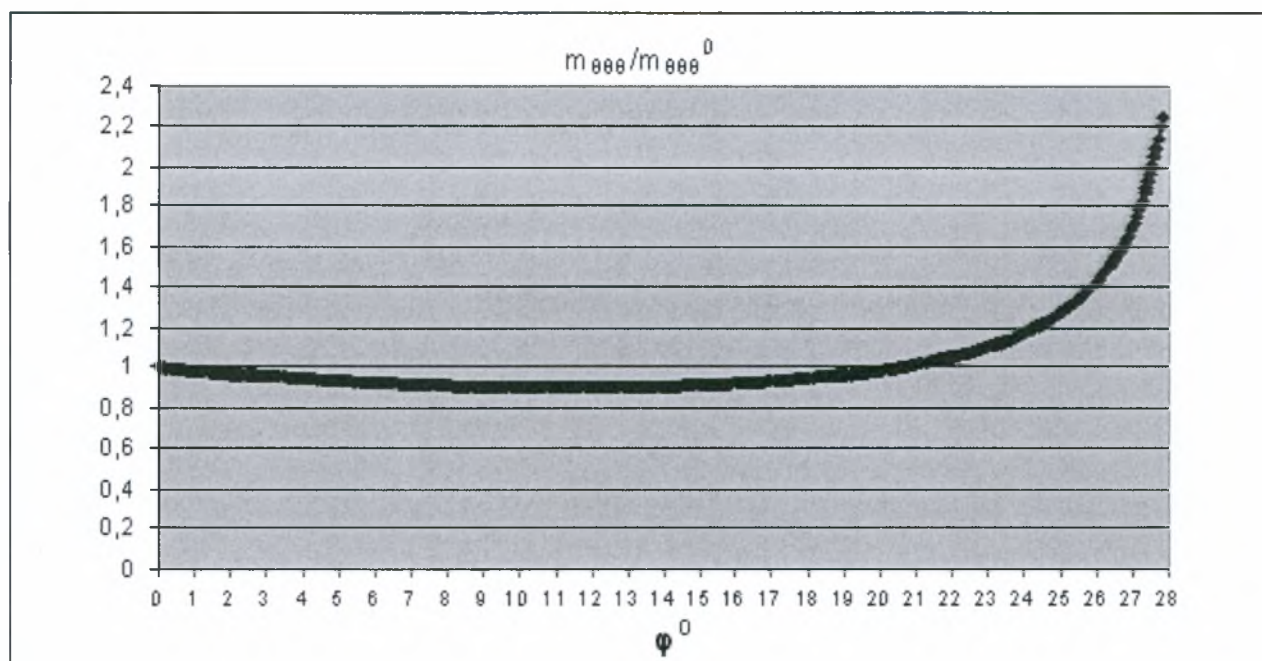
Για αρχικές τιμές:

αρχικές τιμές

$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
1	1



Διάγραμμα 5.1.5: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{r\theta\theta}$ για κάθε γωνία φ .



Διάγραμμα 5.1.6: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{\theta\theta\theta}$ για κάθε γωνία φ .

Παρατηρώντας τα 3 τελευταία ζεύγη διαγραμμάτων που ακολούθησαν και μετά από πολλές εισαγωγές αρχικών τιμών (δοκιμές) στο αρχείο EXCEL που κατασκευάστηκε, καταλήγουμε ότι ένα διάγραμμα με αρχικές τιμές:

$m_{\theta\theta\theta} = A$ και $m_{r\theta\theta} = B$ προκύπτει από επαλληλία των αντίστοιχων διαγραμμάτων για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta\theta} = 1$, $m_{r\theta\theta} = 0$ και $m_{\theta\theta\theta} = 0$, $m_{r\theta\theta} = 1$, αν αυτά πολλαπλασιαστούν με τους αριθμούς A , B αντίστοιχα. Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται η γραμμικότητα του υλικού αφού τα διπολικά φορτία που

αναπτύσσονται εσωτερικά του φορέα είναι ανάλογα των εξωτερικών διπολικών φορτίων που έχουν επιβληθεί!

5.2) Επίλυση Δ.Ε. ισορροπίας (τάσεις-παραμορφώσεις)

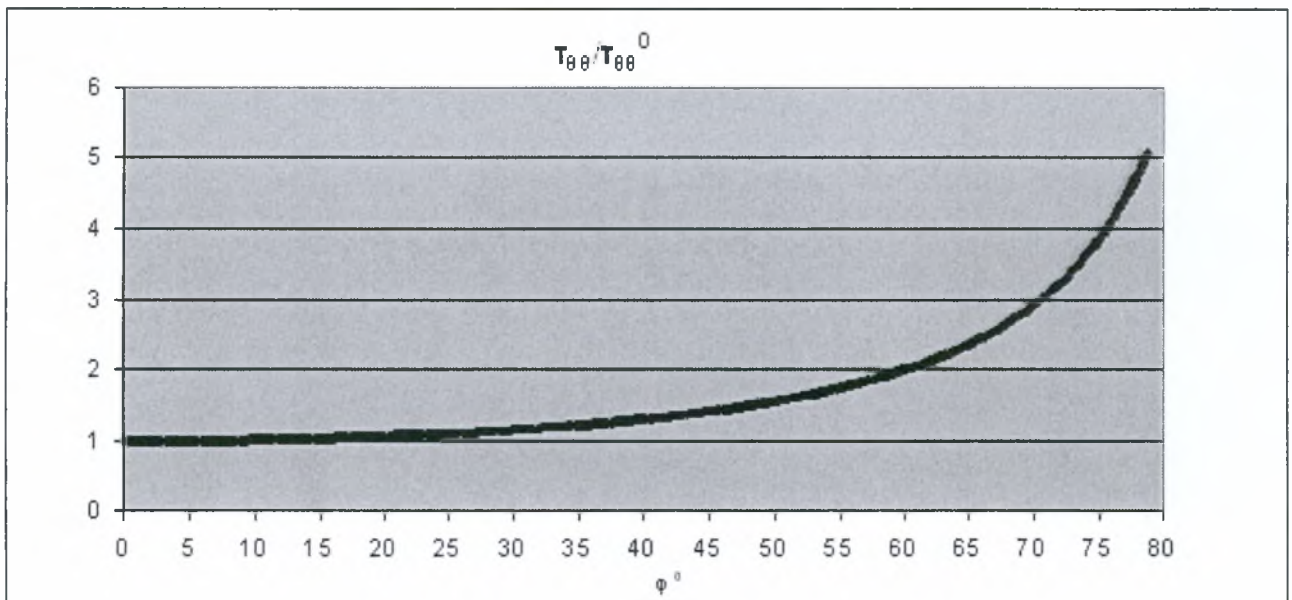
Κλασσικό πρόβλημα

Υπενθυμίζουμε ότι οι κλασσικές εξισώσεις του καλωδίου είναι:

$$-\tau_{\theta\theta} + f_y \cdot \sin \theta \cdot r = 0 \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_y \cdot \cos \theta \cdot r = 0 \quad (5.2b)$$

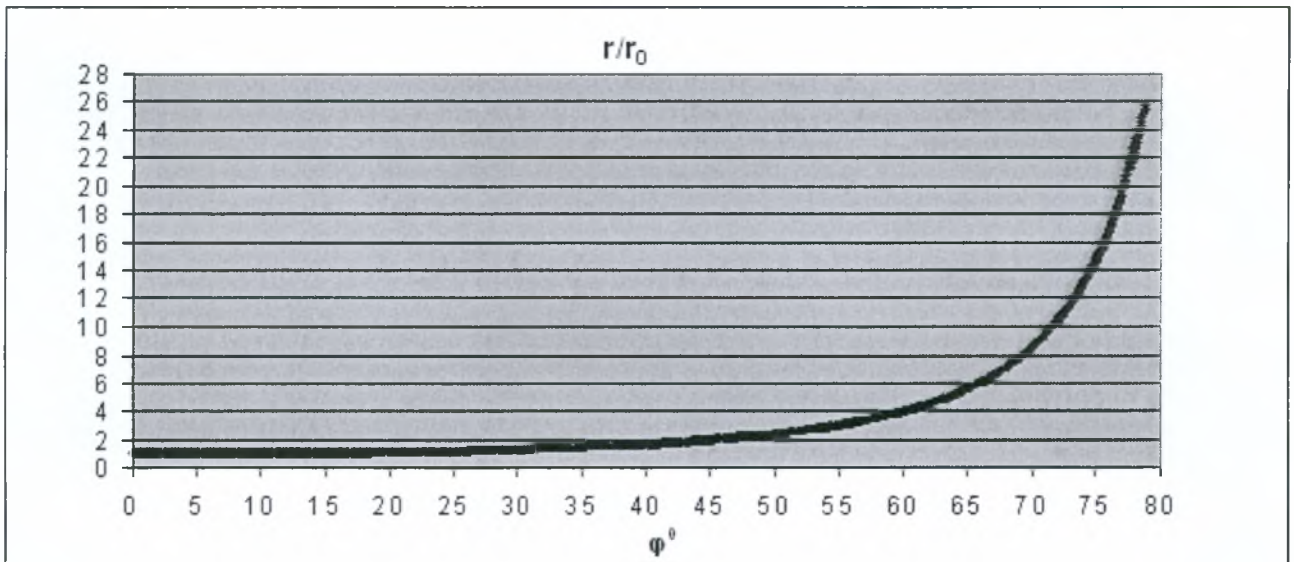
Δίνοντας μια αρχική τιμή τάσης $\tau_{\theta\theta}^0 = \tau_{\theta\theta}(\phi=0) = 1 \text{ kN/m}^2$ και $f_y = -1 \text{ kN/m}^3$ (θετική καμπυλότητα) τότε επιλύοντας έχουμε:



Διάγραμμα 5.2.1. : Αξονικές τάσεις συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας ϕ (κλασσικό πρόβλημα).

Όπως ήταν αναμενόμενο οι τάσεις μεγαλώνουν για μεγαλύτερες γωνίες. Αυτό οφείλεται στο ότι μικραίνει το $\cos \phi$ επομένως για να υπάρχει ισορροπία κατά τον άξονα $x-x'$ όπου πρέπει $\tau_{\theta\theta}^0 = \tau_{\theta\theta}(\phi) \cdot \cos \phi$ αναγκαστικά να αυξάνονται οι τάσεις. Επιπλέον η μεθοδολογία της αριθμητικής επίλυσης (Euler) καθώς και το βήμα επίλυσης ($\Delta\theta=0,001 \text{ rad}$) φαίνεται ικανοποιητικό αφού παρατηρούμε στο παραπάνω διάγραμμα ότι για γωνία $\phi = 60^\circ$ όπου $\cos 60^\circ = 1/2$ η τάση είναι όντως διπλάσια! Το παραπάνω διάγραμμα είναι κανονικοποιημένο ως προς την τάση

$\tau_{\theta\theta}^0$ που σημαίνει ότι για κάθε τιμή τάσης $\tau_{\theta\theta}^0$ που θα τοποθετούμε για $\varphi=0^0$ οι τιμές του διαγράμματος (5.2.1) πολλαπλασιάζονται με $\tau_{\theta\theta}^0$ για να πάρουμε τις πραγματικές τιμές των τάσεων που αναπτύσσονται.



Διάγραμμα 5.2.2. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας φ (κλασσικό πρόβλημα).

Ομοίως με το προηγούμενο διάγραμμα οι ακτίνες καμπυλότητας αυξάνονται. Δηλαδή ο εφαπτόμενος κύκλος για μεγαλύτερες γωνίες έχει μεγαλύτερη ακτίνα. Τέλος αναφέρεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας για $\varphi=0^0$ ισούται κάθε φορά με $-\frac{\tau_{\theta\theta}^0}{f_y}$ (στην περίπτωση μας $r_0 = -1/-1=1$ m) με την οποία πολλαπλασιάζονται οι τιμές του παραπάνω κανονικοποιημένου διαγράμματος για να πάρουμε τις πραγματικές τιμές .

Διπολική θεωρία

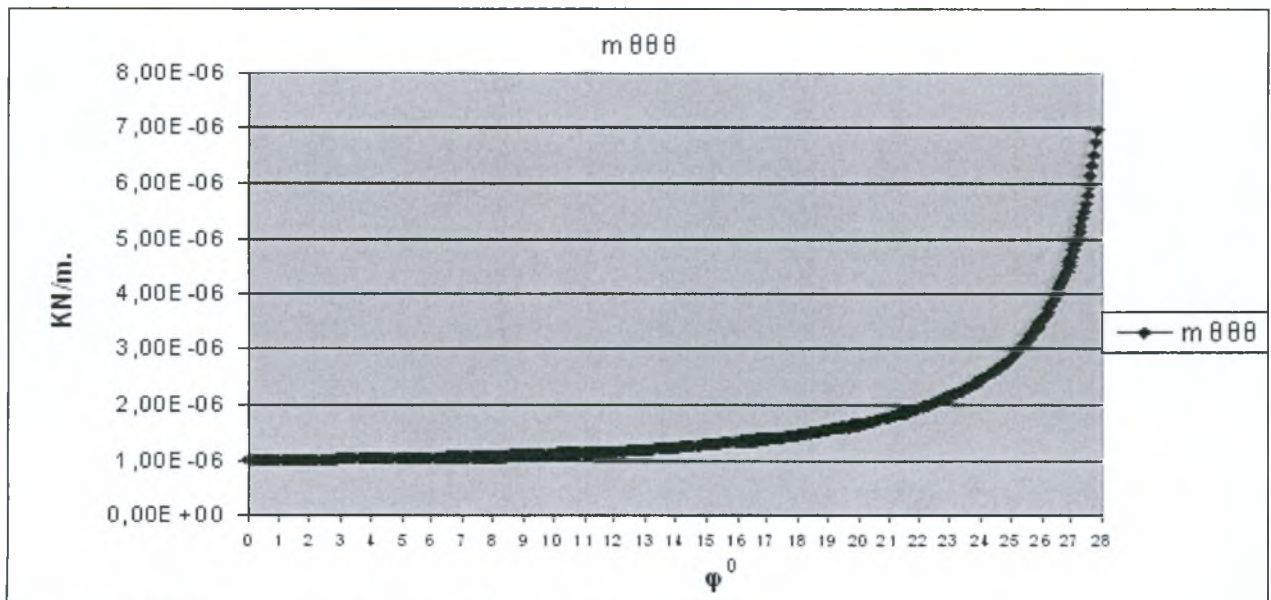
Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω υπάρχουν διάφοροι τρόποι αρχικών τιμών για να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις. Για λόγους ευκολίας (εύκολη αριθμητική επίλυση) καθώς και για να είμαστε σίγουροι ότι συγκρίνοντας κλασσική με διπολική θεωρία συγκρίνουμε 2 όμοια καλώδια διαλέγουμε να δώσουμε σαν αρχική τιμή την τιμή της τάσης στο κατώτατο άκρο ($\varphi=0^0$) του καλωδίου . Οι τιμές των δίπολων στο σημείο αυτό αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση αφού όπως έχει προαναφερθεί χωρίς αυτές δεν μπορούμε να βρούμε τις διπολικές

τάσεις εσωτερικά του φορέα . Έτσι λοιπόν η πρώτη εφαρμογή που επιλέχτηκε είναι να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα με $\tau_{\theta\theta}^0 = 1 \text{ KN/m}^2$ και $f_y = -1 \text{ KN/m}^3$ υπό την επιρροή πολύ μικρών διπολικών φορτίων .

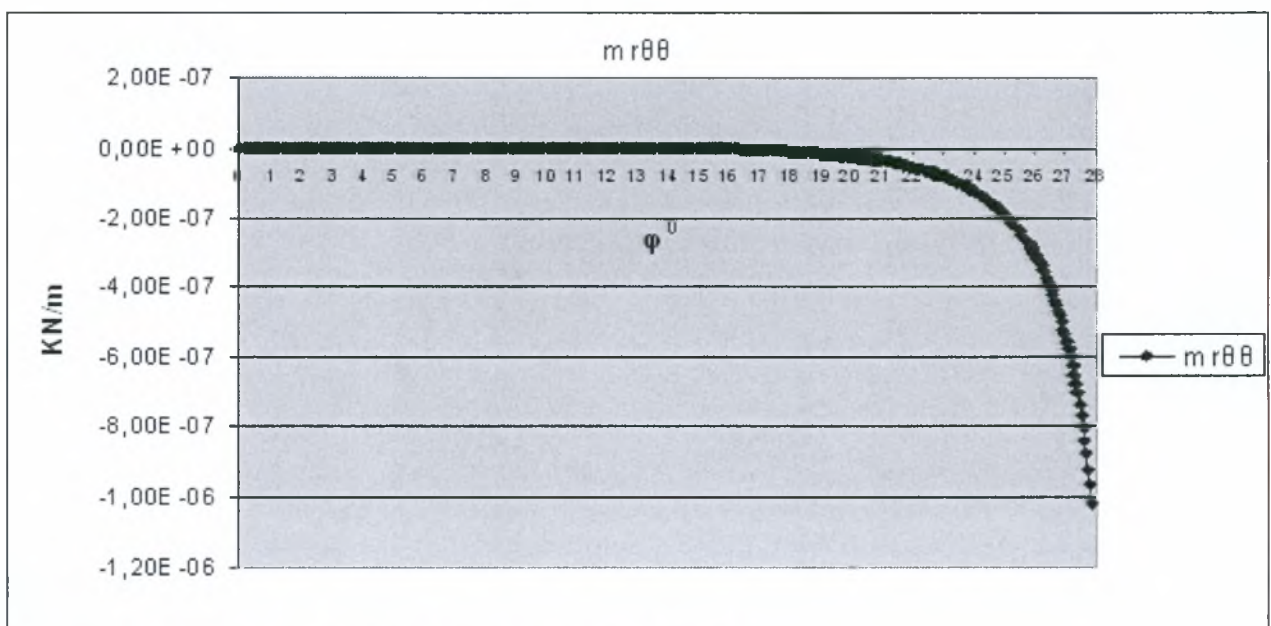
Έτσι λοιπόν έχω για :

αρχικές τιμές kN/m

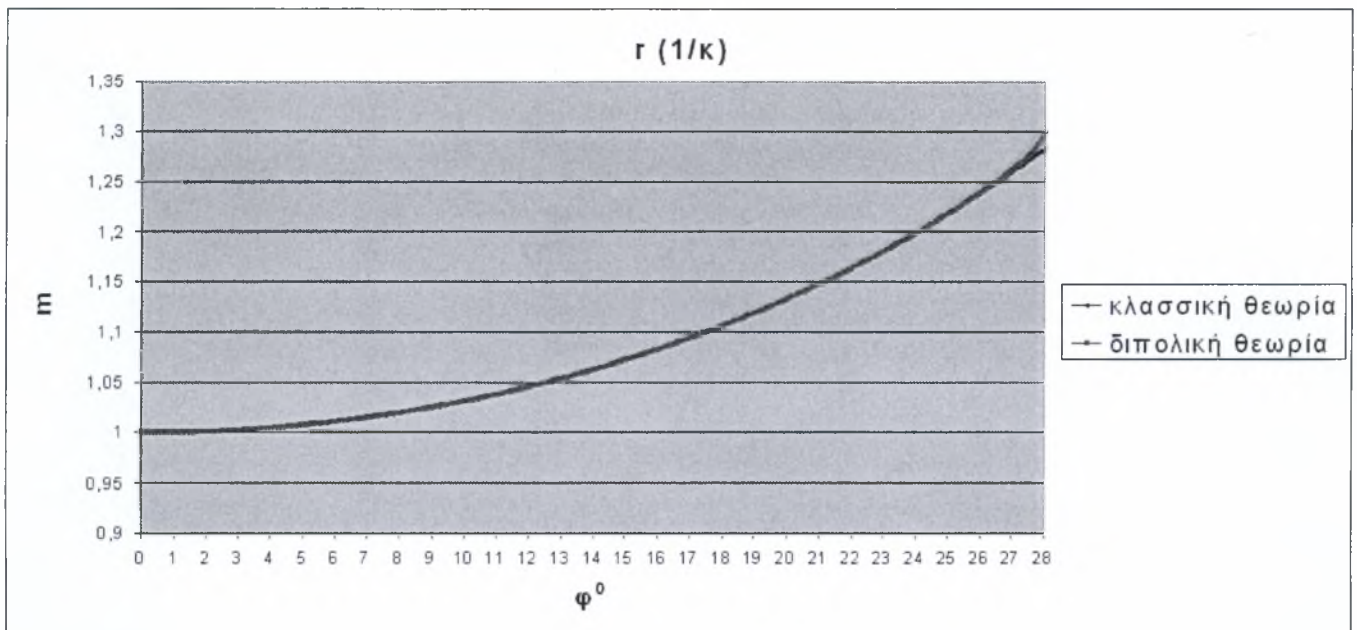
$\pi_{\theta\theta}$	$\pi_{r\theta}$	$f_y \text{ (kN/m}^3\text{)}$	$\tau_{\theta\theta}^0 \text{ (kN/m}^2\text{)}$
1,00E-06	0	-1	1



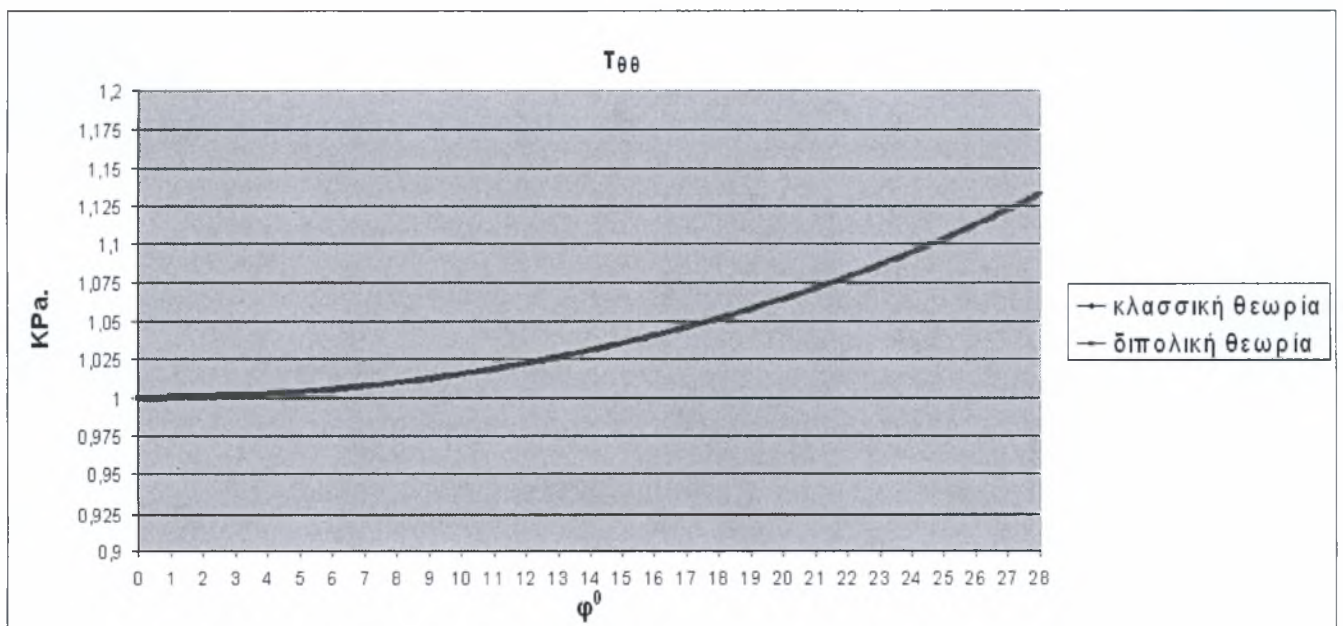
Διάγραμμα 5.2.3: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{\theta\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .



Διάγραμμα 5.2.4: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{r\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .

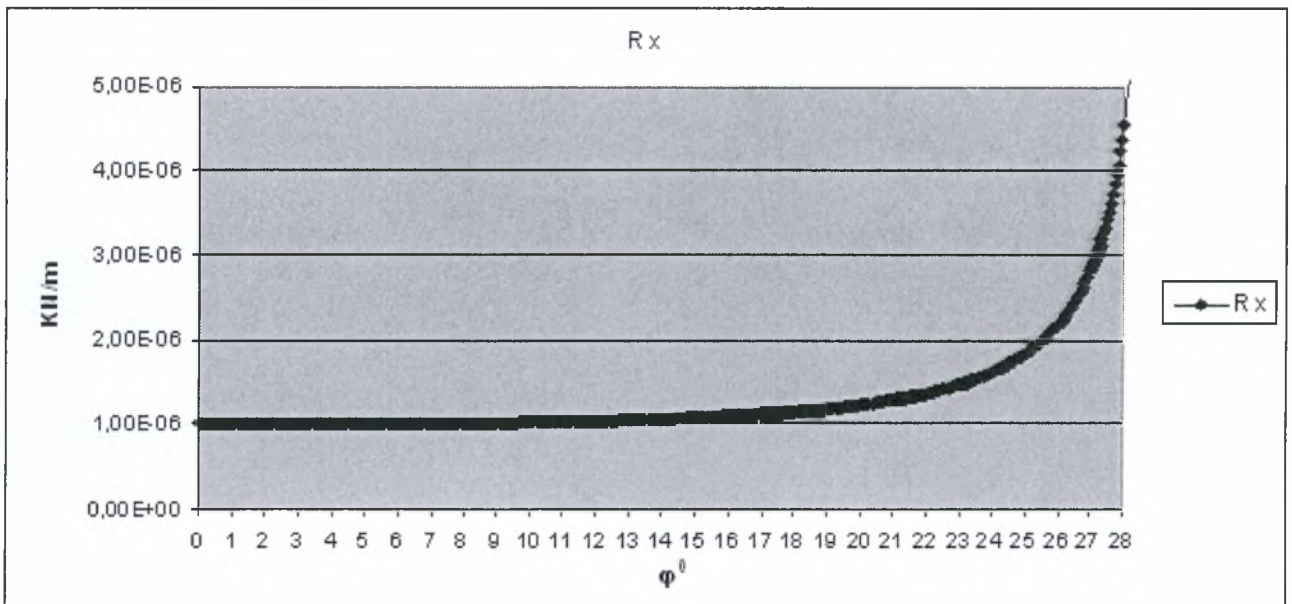


Διάγραμμα 5.2.5. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας ϕ .



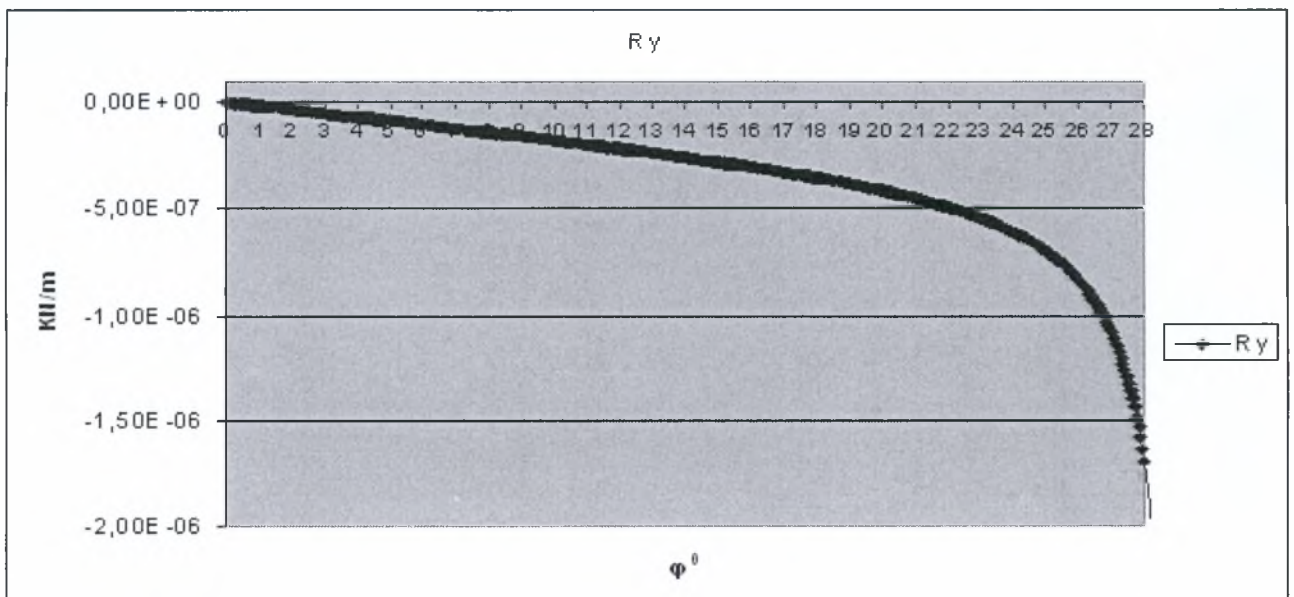
Διάγραμμα 5.2.6. : Αξονικές τάσεις συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας ϕ .

Παρατηρούμε ότι για πολύ μικρά διπολικά φορτία τόσο οι ακτίνα καμπυλότητας (παραμόρφωση) όσο και οι τάσεις της διπολικής θεωρίας συμπίπτουν με αυτές της κλασσικής θεωρίας ! Επίσης αν υπολογίσουμε της συνοριακές συνθήκες τότε έχουμε:



Διάγραμμα 5.2.7. : Συνοριακή συνθήκη R_x (αριστερό και δεξιό σύνορο).

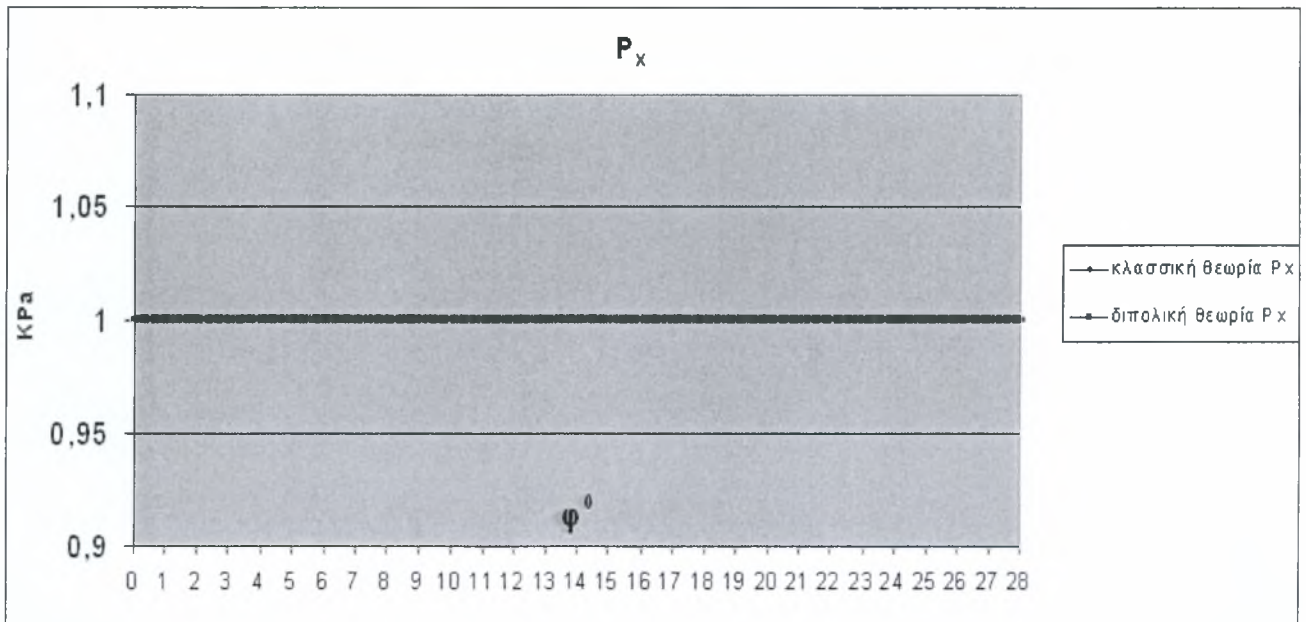
Το διάγραμμα της συνοριακής συνθήκης R_x ακολουθεί για μηδενικό διπολικό φορτίο $m_{r\theta\theta}$ την μορφή του διαγράμματος 5.2.3 (κατανομή διπολικών τάσεων $m_{\theta\theta}$)



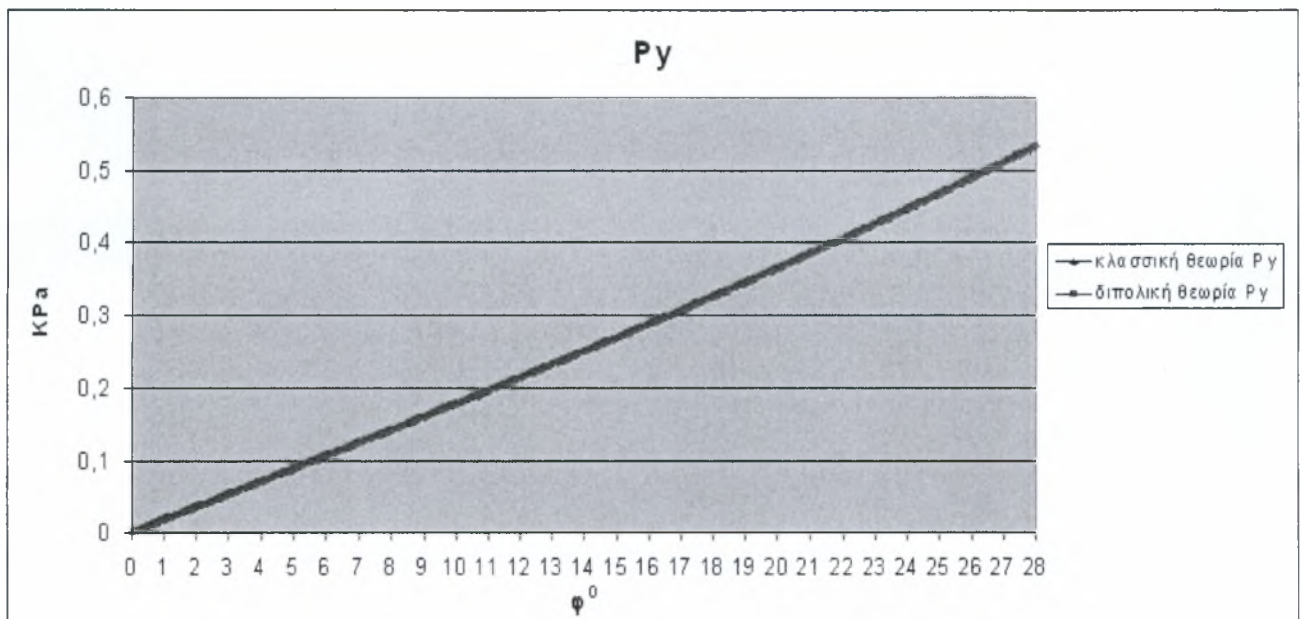
Διάγραμμα 5.2.7. : Συνοριακή συνθήκη R_y (αριστερό και δεξιό σύνορο).

Το διάγραμμα της συνοριακής συνθήκης R_y έχει μηδενική τιμή πάντα για $\phi=0$ και ακολουθεί για μηδενικό διπολικό φορτίο $m_{r\theta\theta}$ περίπου την μορφή του διαγράμματος 5.2.4 (κατανομή διπολικών τάσεων $m_{r\theta\theta}$).

Επιπλέον για τις συνοριακές συνθήκες P_x και P_y στο δεξιό σύνορο έχω:



Διάγραμμα 5.2.8. : Συνοριακή συνθήκη P_x (δεξιό σύνορο).



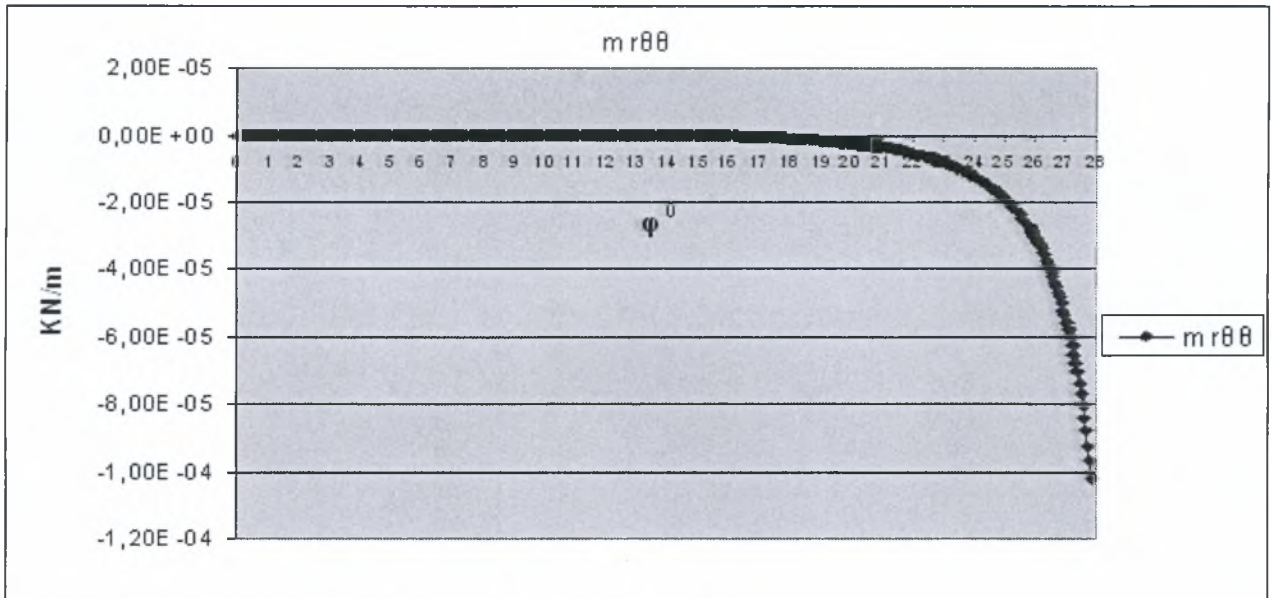
Διάγραμμα 5.2.9. : Συνοριακή συνθήκη P_y (δεξιό σύνορο).

Για μία ακόμη φορά επαληθεύουμε ότι για μικρά διπολικά φορτία οι δύο θεωρίες (διπολική-κλασσική) συμπίπτουν αφού ακόμα και οι συνοριακές συνθήκες μένουν ανεπηρέαστες και ακολουθούν την μορφή της κλασσικής θεωρίας. Επομένως το επόμενο βήμα είναι η επιβολή ενός μεγαλύτερου διπολικού φορτίου. Έτσι έχω για :

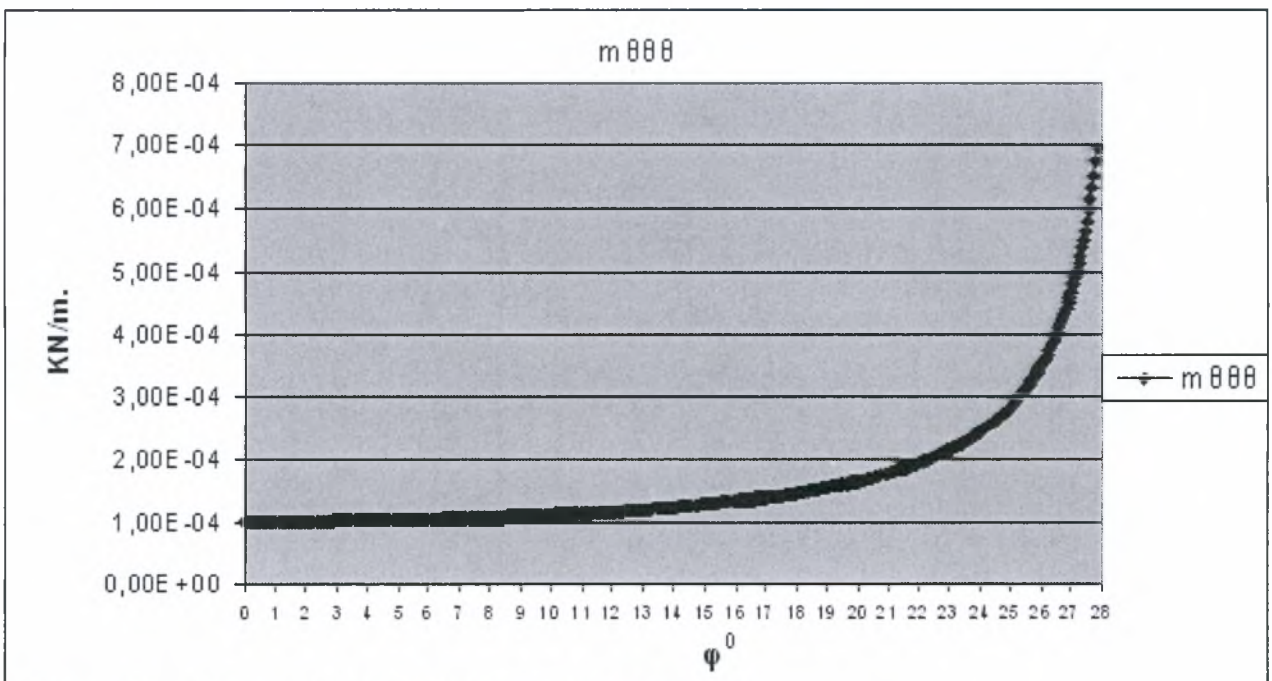
αρχικές τιμές kN/m

$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
1,00E-04	0

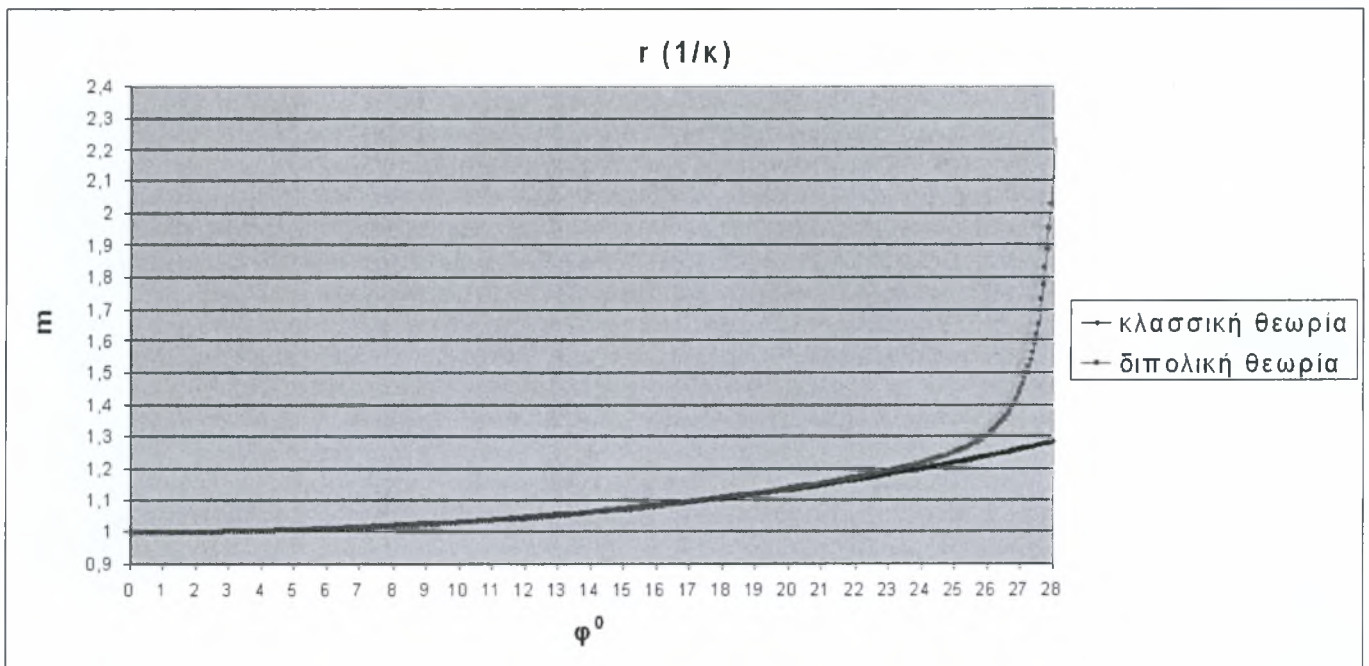
f_y (kN/m ³)	$r_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	1



Διάγραμμα 5.2.10: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{r\theta\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .

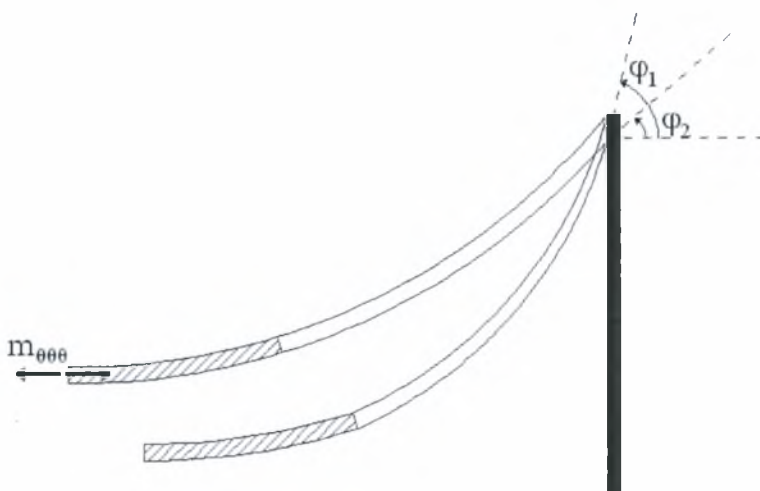


Διάγραμμα 5.2.11: Κατανομή διπολικής τάσεις $m_{\theta\theta\theta}$ για κάθε γωνία ϕ .



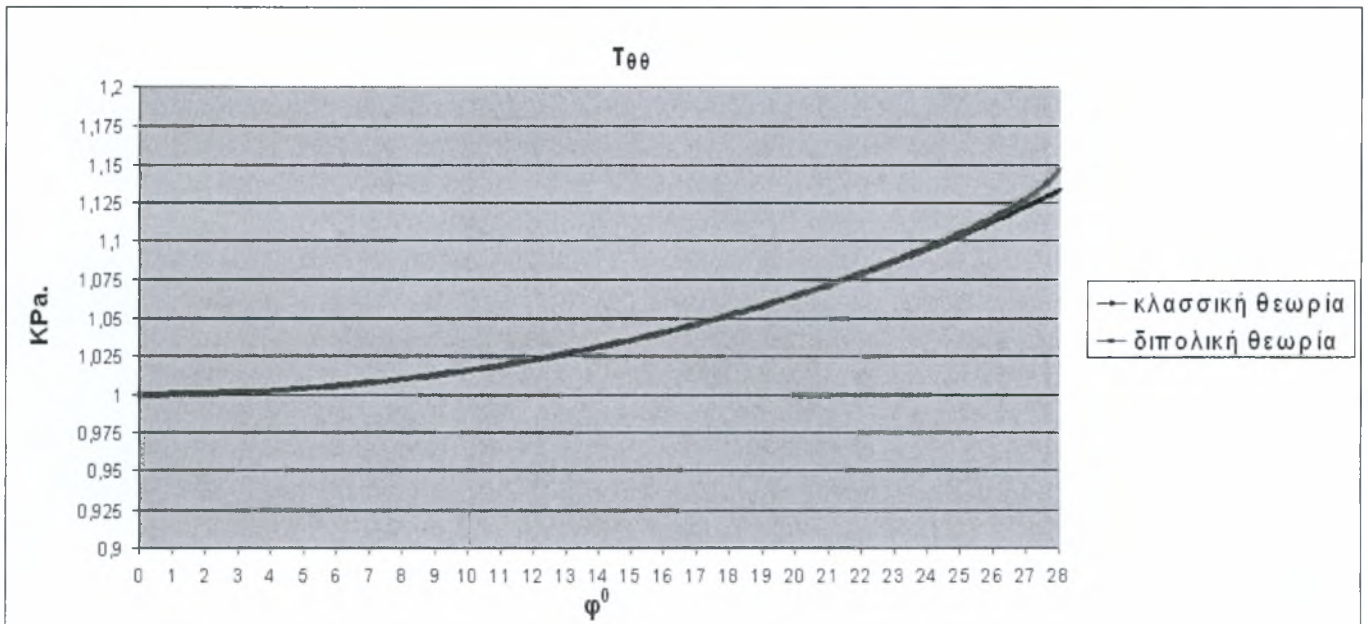
Διάγραμμα 5.2.12. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας φ .

Παρατηρούμε ότι για 100 φορές μεγαλύτερο διπολικό φορτίο, το διάγραμμα των ακτινών καμπυλότητας της διπολικής θεωρίας για μεγάλες γωνίες παίρνει σημαντικά μεγαλύτερες τιμές από αυτές της κλασσικής θεωρίας. Η αύξηση παρατηρείται σε μεγάλες γωνίες γιατί σε αυτές τις γωνίες είναι πιο ισχυρά τα δίπολα $m_{\theta\theta}$ (διάγραμμα 5.2.11) . Το αποτέλεσμα πάντως είναι ότι η κατασκευή μας γίνεται στο σύνολο της πιο άκαμπτη ! Δηλαδή η νέα κατάσταση παραμόρφωσης θα είναι:



Σχήμα 5.2.13: Παραμόρφωση καλωδίου υπό διπολικό φορτίου τύπου $m_{\theta\theta}$.

Το διαγραμμισμένο κομμάτι του καλωδίου είναι εκείνο στο οποίο οι ακτίνες καμπυλότητας της διπολικής θεωρίας συμπίπτουν με εκείνες της κλασσικής θεωρίας.



Διάγραμμα 5.2.14. : Αξονική τάση συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας φ .

Βλέπουμε ότι ακόμα και στις μονοπολικές τάσεις εμφανίζεται μία αύξηση των τιμών για μεγάλες τιμές γωνιών. Αυτό είναι λογικό, αφού η κατασκευή μας τείνει να γίνει σε μεγάλες γωνίες πιο ευθύγραμμη! Το παραπάνω όμως πόρισμα δεν σημαίνει ότι οι διπολικές τάσεις αυξάνουν τις τάσεις. Αντίθετα, με βάση την παρακάτω απόδειξη, μάλλον τις μειώνουν.

Απόδειξη:

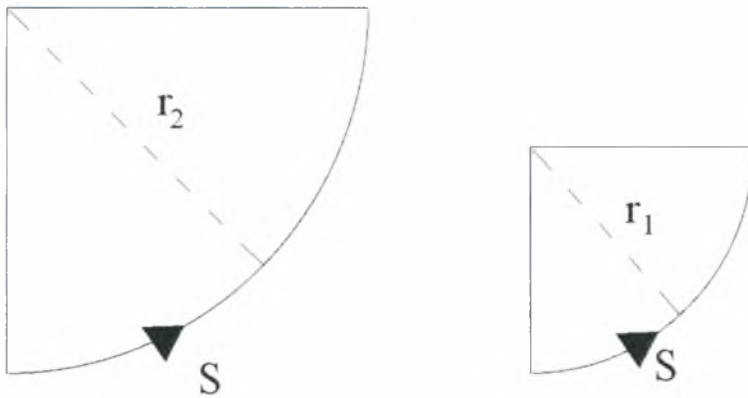
Για να συγκρίνουμε το ίδιο καλώδιο χωρίς ή με τα δίπολα πρέπει να αναφερθούμε στα ίδια σημεία. Ίδιο σημείο για το καλώδιο σημαίνει ίδιο s (επικαμπύλια συντεταγμένη). Επιπλέον λαμβάνουμε υπόψιν ότι:

A) Η γωνία του καλωδίου στο δεξιό άκρο χωρίς την επιβολή του δίπολου (φ_1) μικραίνει σε γωνία μετά την επιβολή σε φ_2 .

B) Η μερική παράγωγος $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ μικραίνει όσο αυξάνεται η ακτίνα καμπυλότητας.

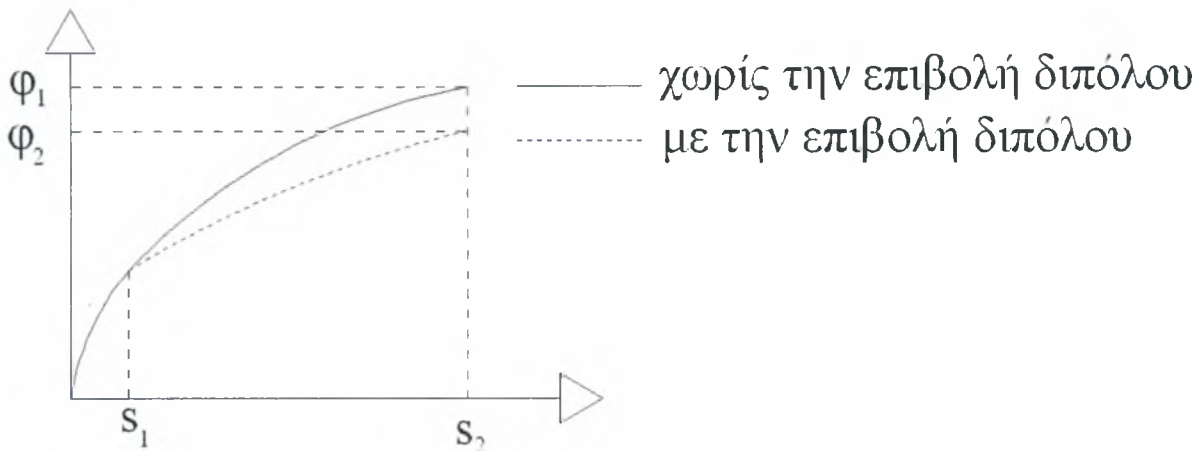
Για το παραπάνω επιχείρημα μας βοηθάει το παρακάτω σχήμα, αφού βλέπουμε ότι ο κύκλος με την μεγαλύτερη ακτίνα θέλει μεγαλύτερη απόσταση να διανύσει

για να μεταβληθεί η γωνία από 0 σε $\pi/2$. Άρα $\frac{\partial \phi_2}{\partial s} < \frac{\partial \phi_1}{\partial s}$.



Σχήμα 5.2.15: Τεταρτημόρια διαφορετικής ακτίνας.

Συνεπώς τα διαγράμματα ϕ - s του καλωδίου πριν και μετά το δίπολο θα έχουν την μορφή:



Σχήμα 5.2.16: Διαγράμματα ϕ - s του καλωδίου πριν και μετά το δίπολο.

Το διάστημα $0-S_1$ είναι το διάστημα στο οποίο οι ακτίνες καμπυλότητας μας διπολικής θεωρίας συμπίπτουν περίπου με αυτές μας κλασσικής και S_1-S_2 είναι το διάστημα στο οποίο παρατηρείται αύξηση της ακτίνας καμπυλότητας, άρα

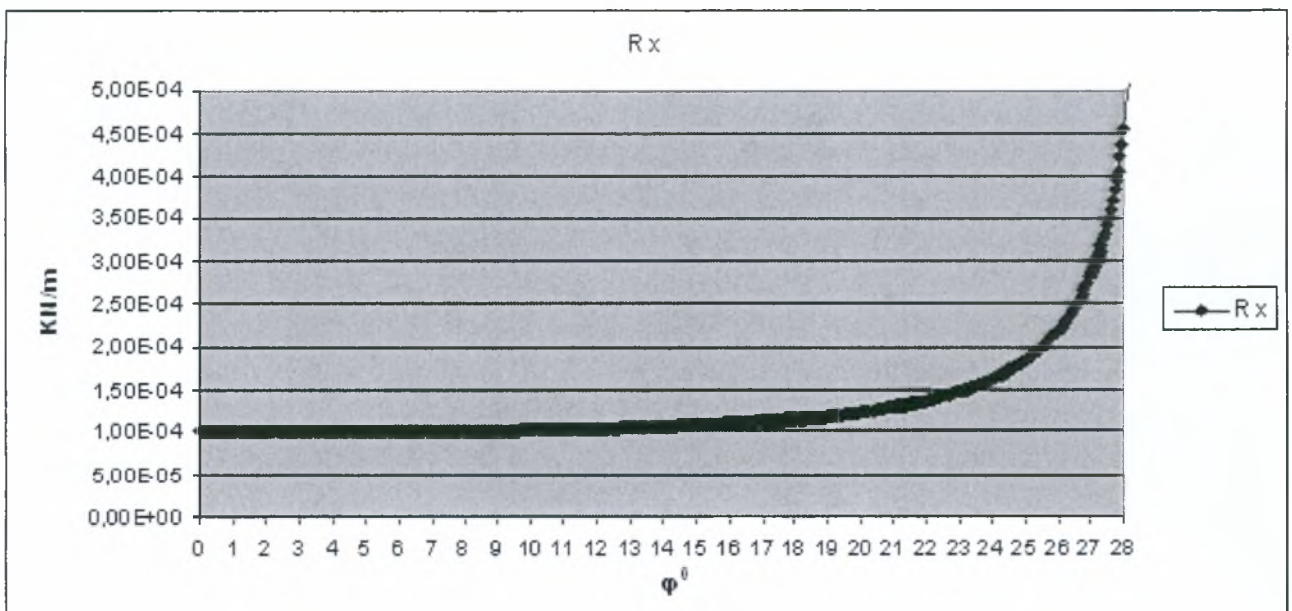
καταλήγουμε ότι για κάθε S (σημείο) σε αυτό το διάστημα οι γωνίες είναι μικρότερες για το «διπολικό καλώδιο». Επομένως:

1) Βλέπουμε ότι η αύξηση των ακτινών καμπυλότητας στο διάγραμμα 5.2.12 έχει αρχίσει να γίνεται εμφανής για γωνία φ μικρότερη από εκείνη την γωνία που γίνεται εμφανής η αύξηση μας αξονικής τάσης στο διάγραμμα 5.2.14.

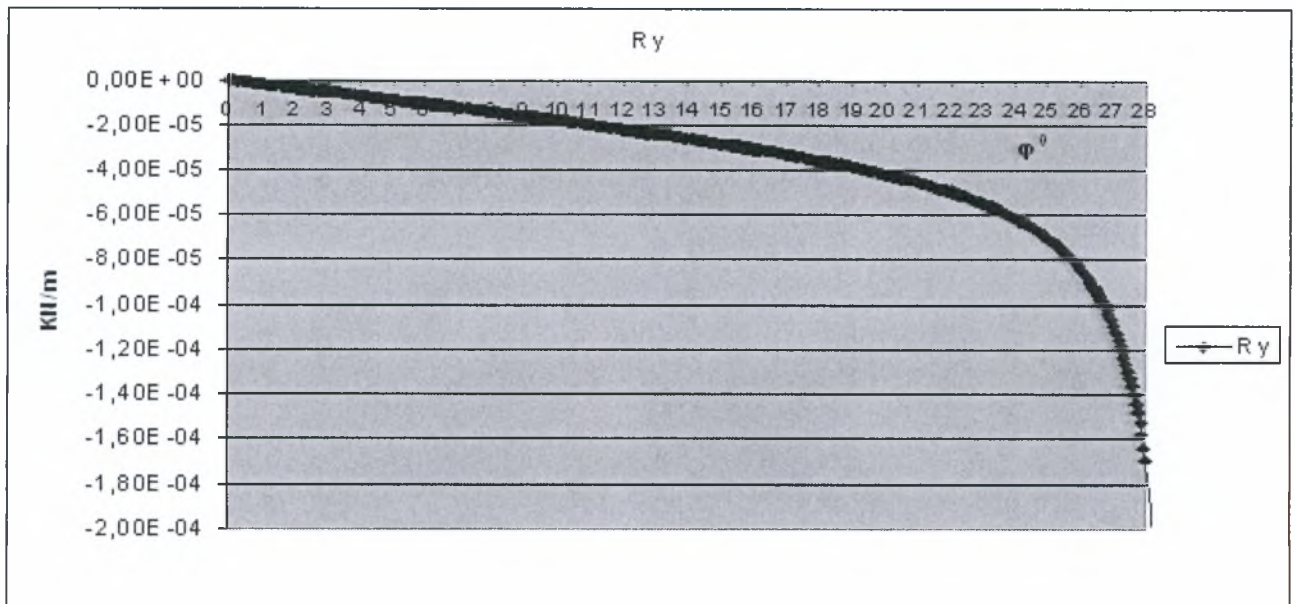
2) Η ακτίνα αυξάνεται πιο γρήγορα από την τάση.

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι τάσεις μικραίνουν! Δηλαδή οι διπολικές τάσεις που αναπτύσσονται εσωτερικά του φορέα «καταναλώνουν» αρκετή ενέργεια ώστε η κατασκευή μας και να παραμορφωθεί λιγότερο αλλά και να «ανακουφιστεί» λόγω των μικρότερων τάσεων.

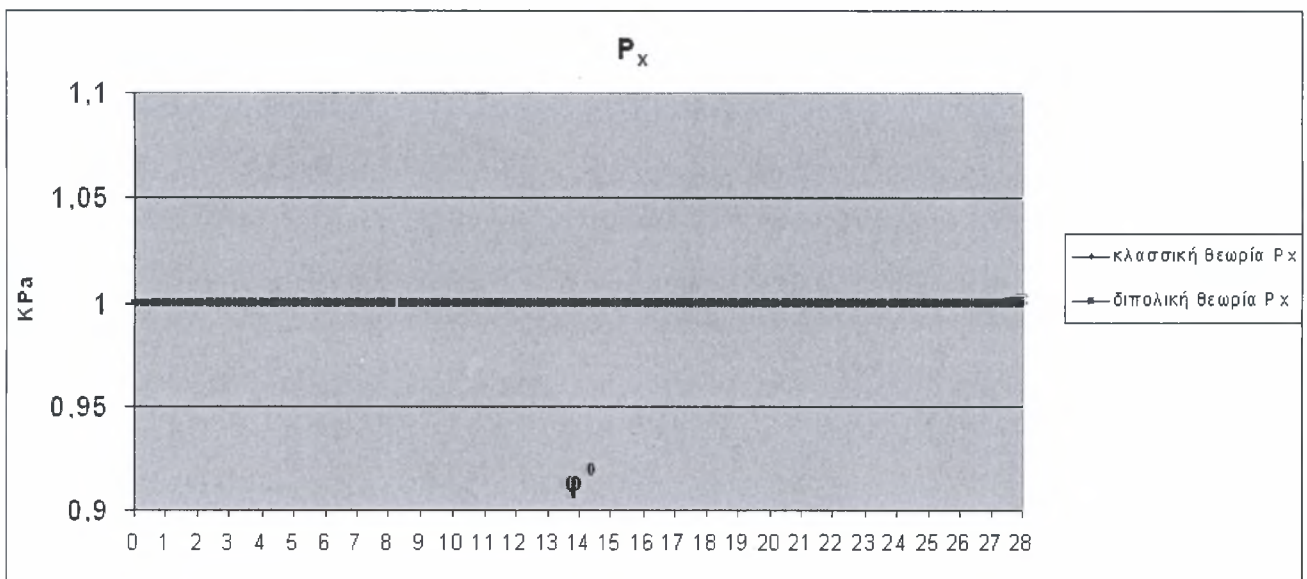
Οι συνοριακές τιμές αυτού του προβλήματος (διαγράμματα $[R_x],[R_y],[P_x],[P_y]$) είναι:



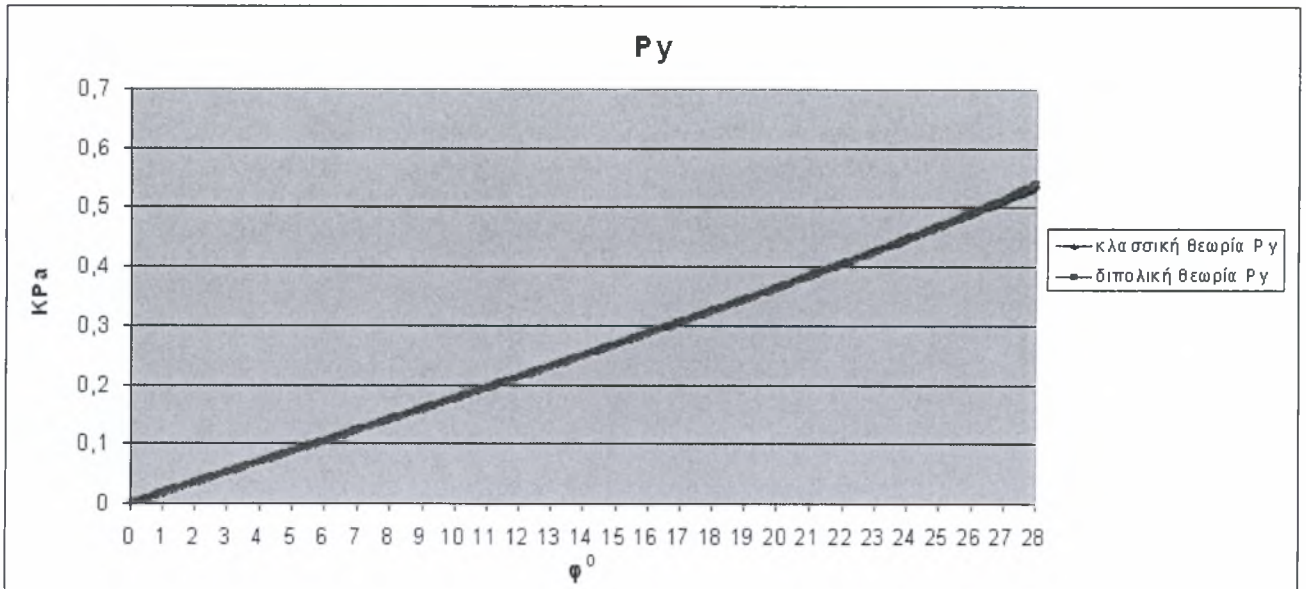
Διάγραμμα 5.2.17: Συνοριακή τιμή R_x (διάγραμμα $[R_x]$).



Διάγραμμα 5.2.18: Συνοριακή τιμή R_y (αριστερό και δεξιό σύνορο).



Διάγραμμα 5.2.19. : Συνοριακή συνθήκη P_x (διάγραμμα [P_x]).



Διάγραμμα 5.2.20. : Συνοριακή συνθήκη P_y (διάγραμμα $[P_y]$).

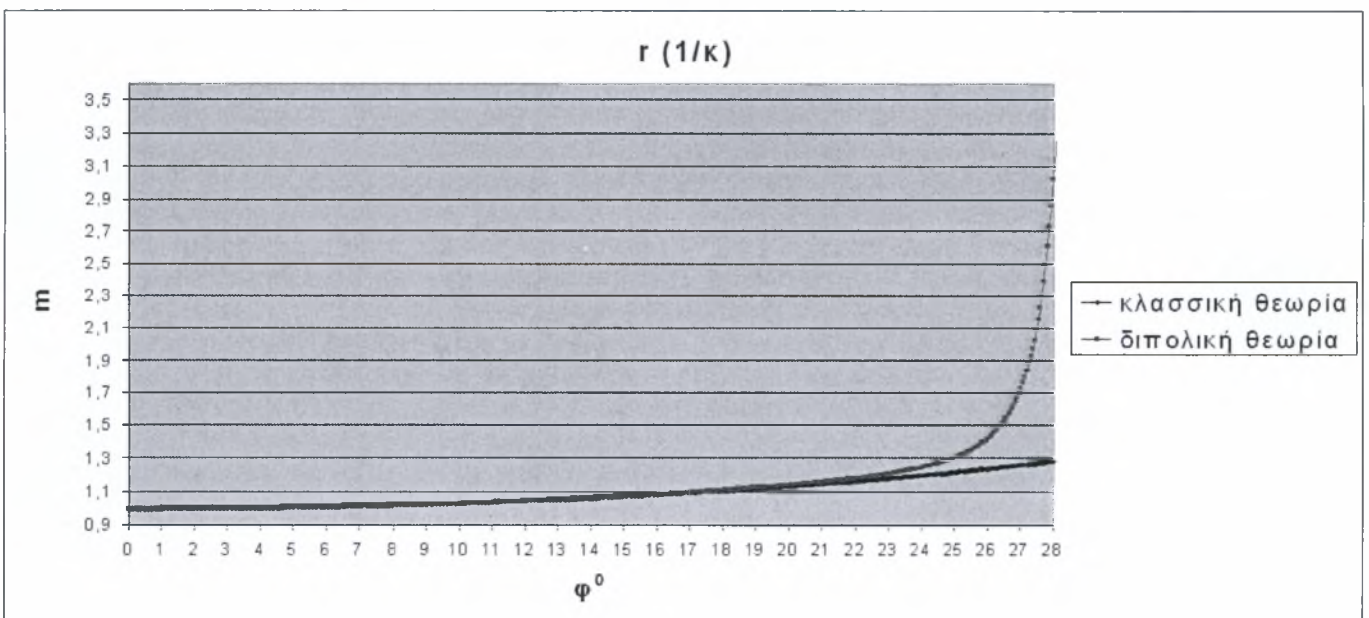
Αντίθετα με τα διαγράμματα τάσεων και ακτίνας καμπυλότητας δεν παρατηρείται αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ της διπολικής και κλασσικής θεωρίας στα διαγράμματα $[P_x],[P_y]$.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα επιπλέον παράδειγμα με διπολικό φορτίο τριπλάσιο του προηγούμενου. Έτσι έχουμε για:

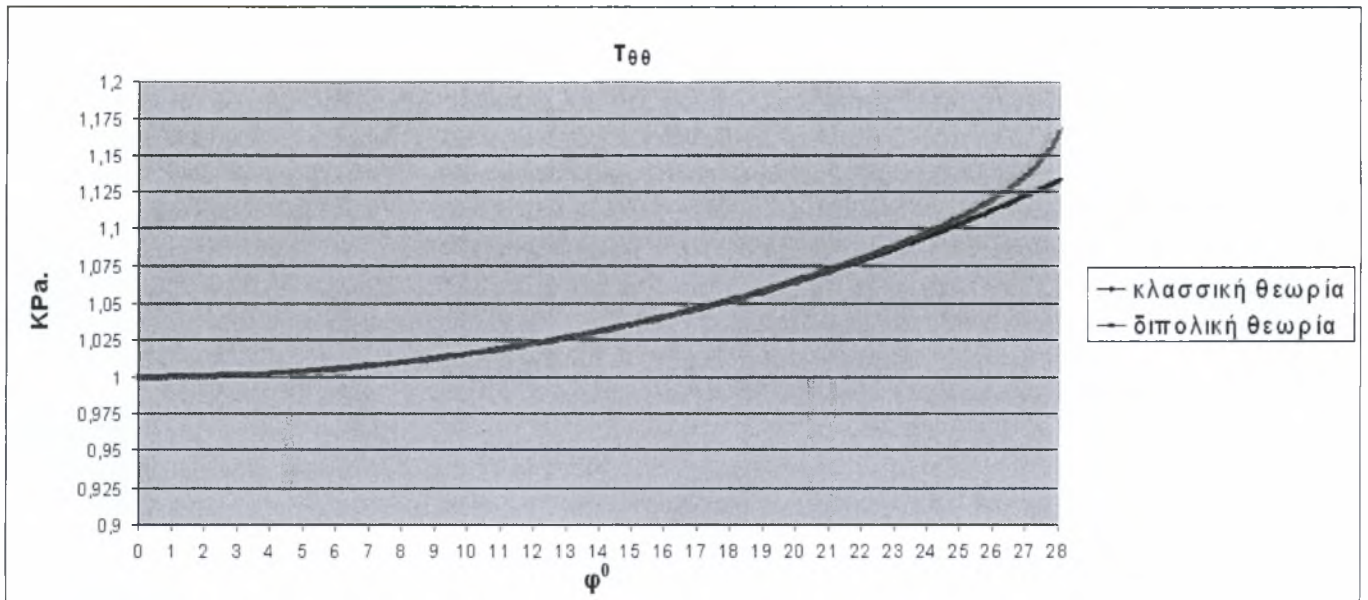
αρχικές τιμές kN/m

$m_{\theta\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
3,00E-04	0

f_y (kN/m ³)	$\Gamma_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	1



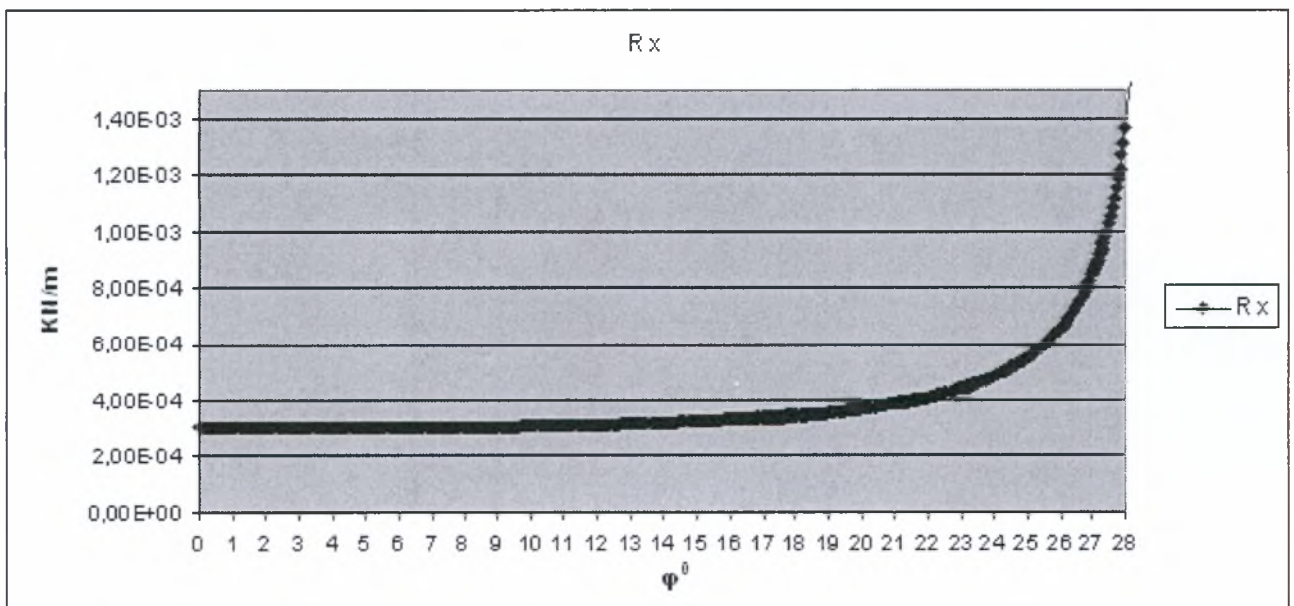
Διάγραμμα 5.2.21. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας φ .



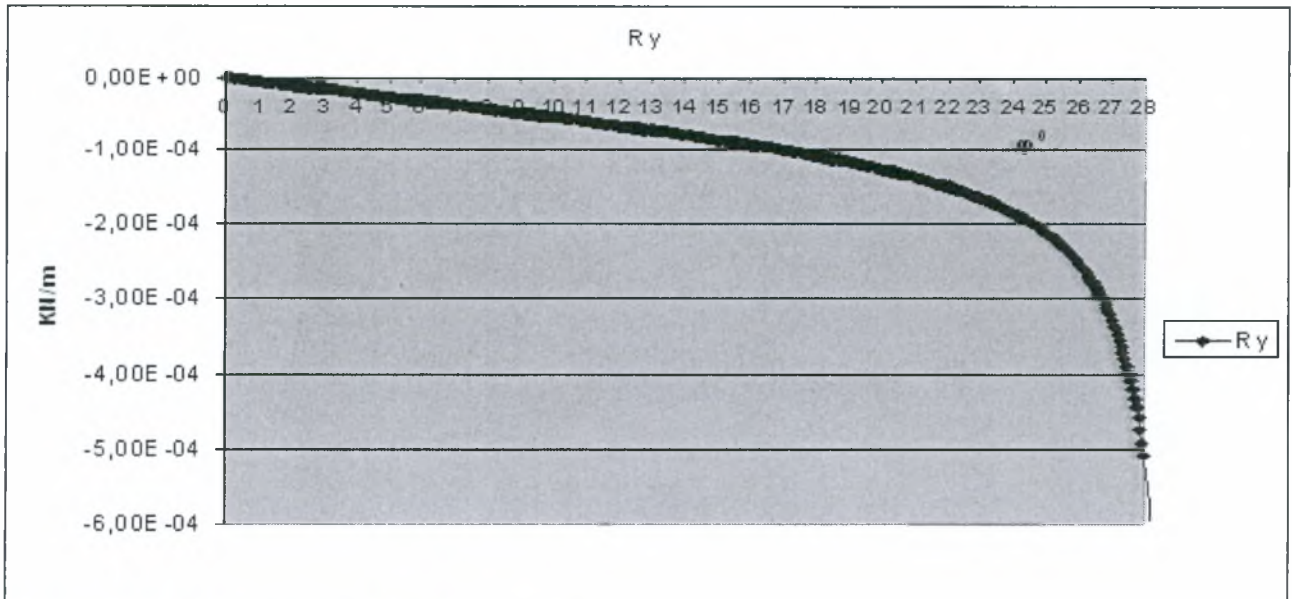
Διάγραμμα 5.2.22. : Αξονική τάση συναρτήσει της εφαπτόμενης γωνίας φ .

Βλέπουμε ότι η αύξηση της ακαμψίας και των τάσεων για τριπλάσιο διπολικό φορτίο είναι ακόμα εντονότερη σε σχέση με τα διαγράμματα (5.2.12) και (5.2.14).

Συνοριακές τιμές (διαγράμματα κατανομών των $[R_x], [R_y], [P_x], [P_y]$):

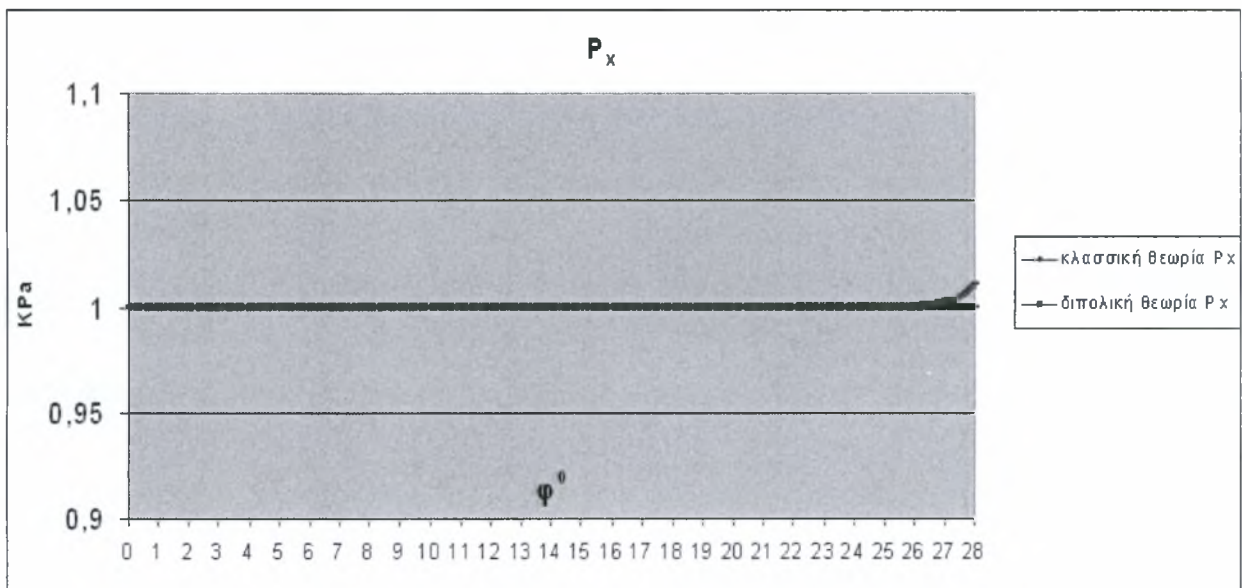


Διάγραμμα 5.2.23: Συνοριακή τιμή R_x (διάγραμμα $[R_x]$).

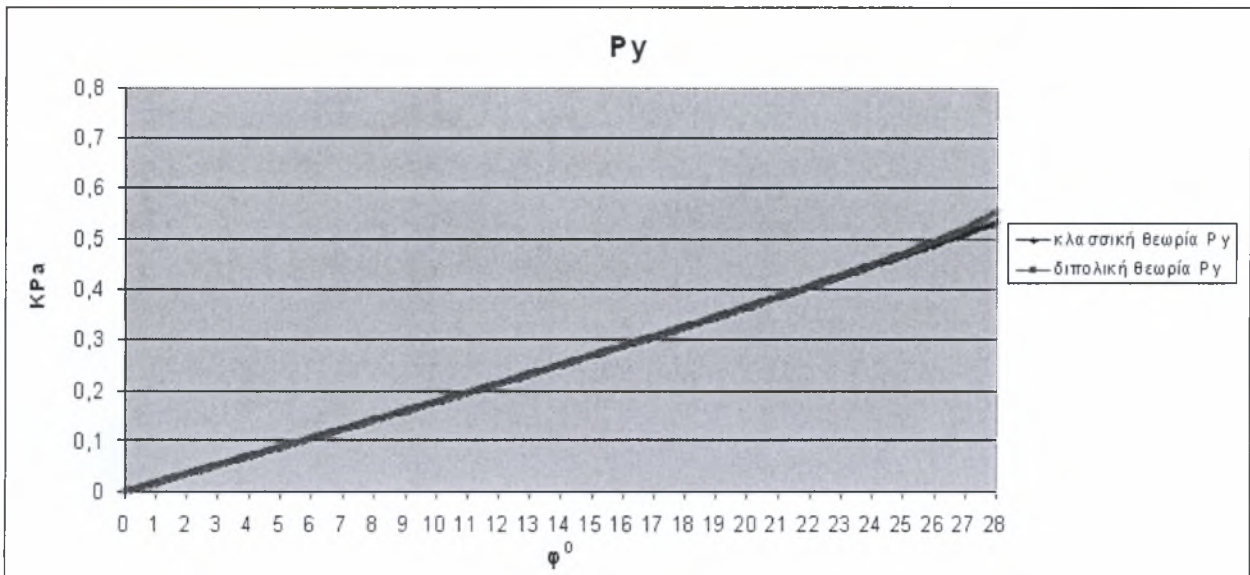


Διάγραμμα 5.2.24: Συνοριακή τιμή R_y (διάγραμμα [R_y]).

Η αρχή της επαλληλίας ισχύει και στις συνοριακές τιμές. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στα διαγράμματα 5.2.17 και 5.2.23 όπου οι τιμές είναι τριπλάσιες στην 2^η περίπτωση (τριπλάσιο διπολικό φορτίο).



Διάγραμμα 5.2.25. : Συνοριακή συνθήκη P_x (διάγραμμα [P_x]).



Διάγραμμα 5.2.26. : Συνοριακή συνθήκη P_y (δεξιό σύνορο).

Με την επιβολή τριπλάσιου διπολικού φορτίου εμφανίζεται μεγαλύτερη αύξηση των τιμών της διπολικής θεωρίας από ότι πριν. Παρόλα αυτά, όπως αναφέρθηκε και πριν σε καμιά περίπτωση δεν παρατηρείται τόσο μεγάλη αύξηση όσο στις μονοπολικές τάσεις και στις ακτίνες καμπυλότητας.

5.3) Άλλοι παράμετροι επηρεασμού

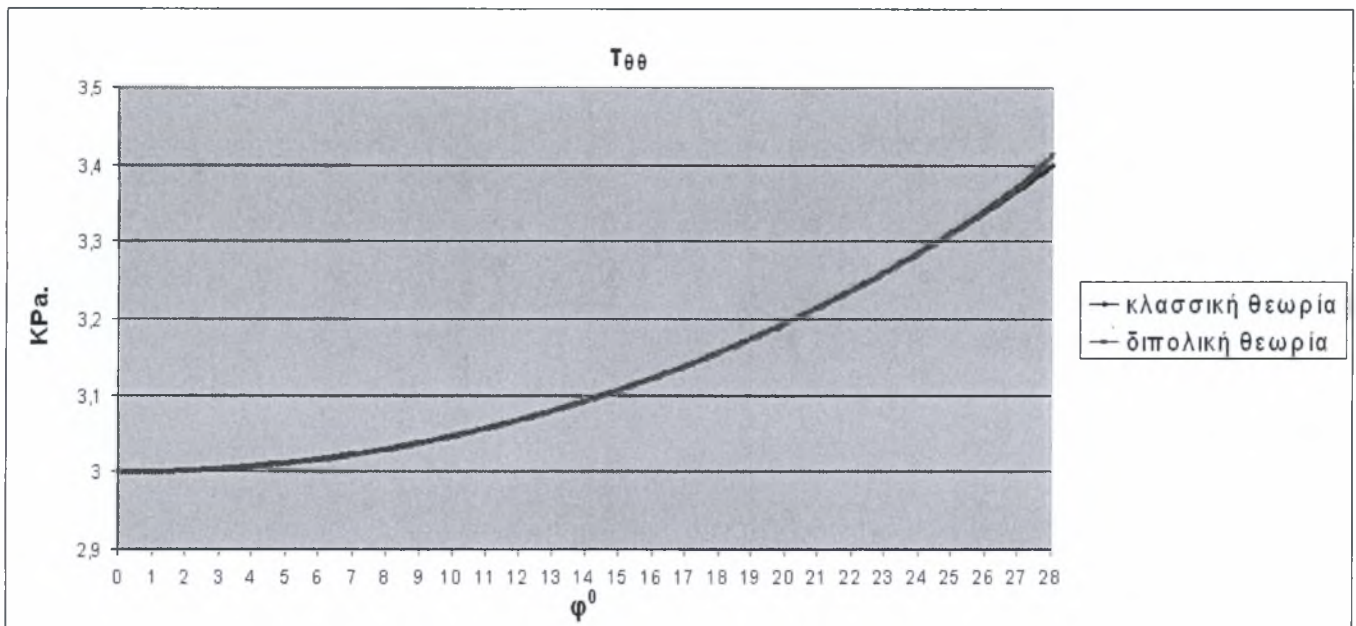
5.3.1) Επίδραση τάσης $\tau_{\theta\theta}^0$ (kN/m²)

Αρχικές τιμές σε kN/m

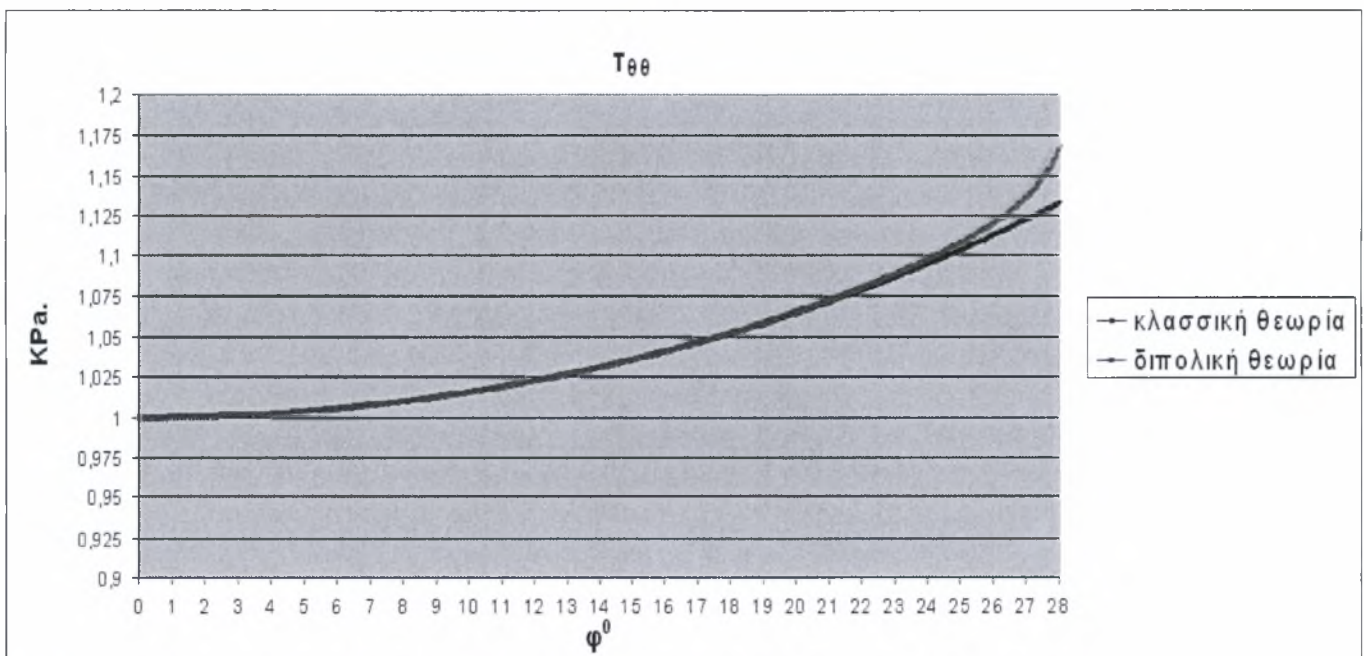
$m_{\theta\theta}$	$m_{r\theta\theta}$
3,00E-04	0

f_y (kN/m ³)	$\tau_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	3

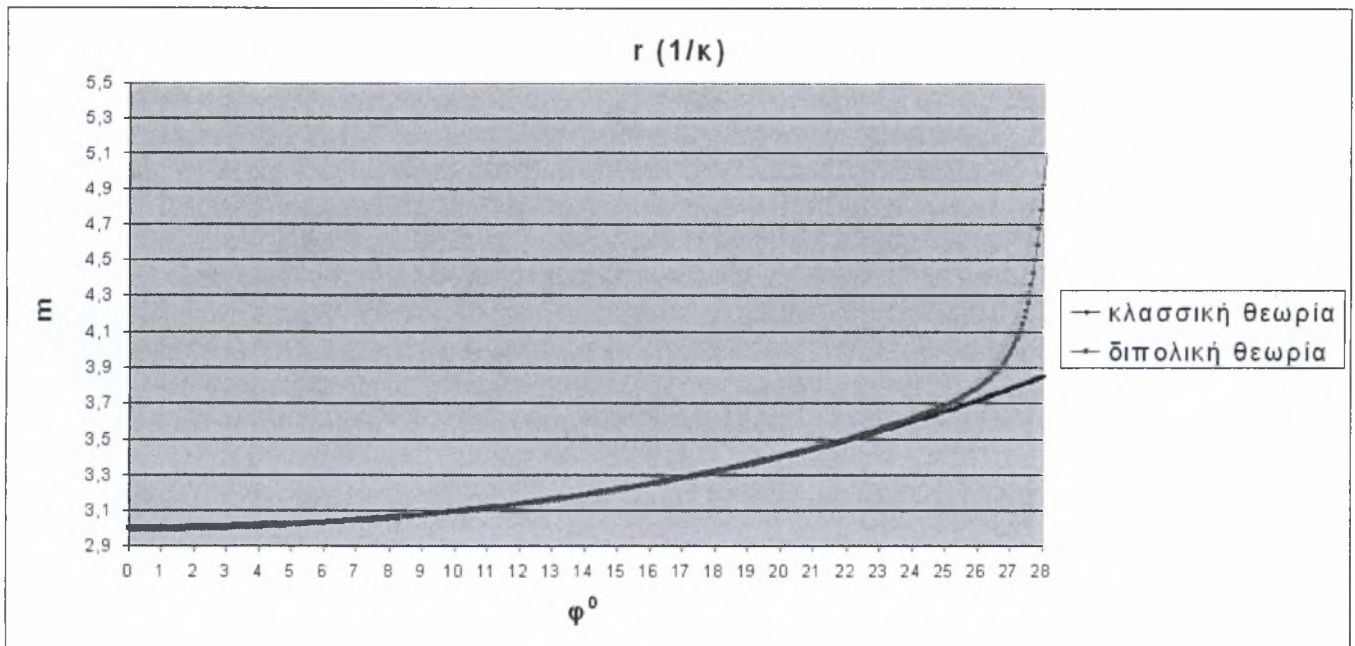
Επιλύοντας το παραπάνω πρόβλημα με τριπλάσια τάση στο κατώτατο άκρο και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα έχουμε:



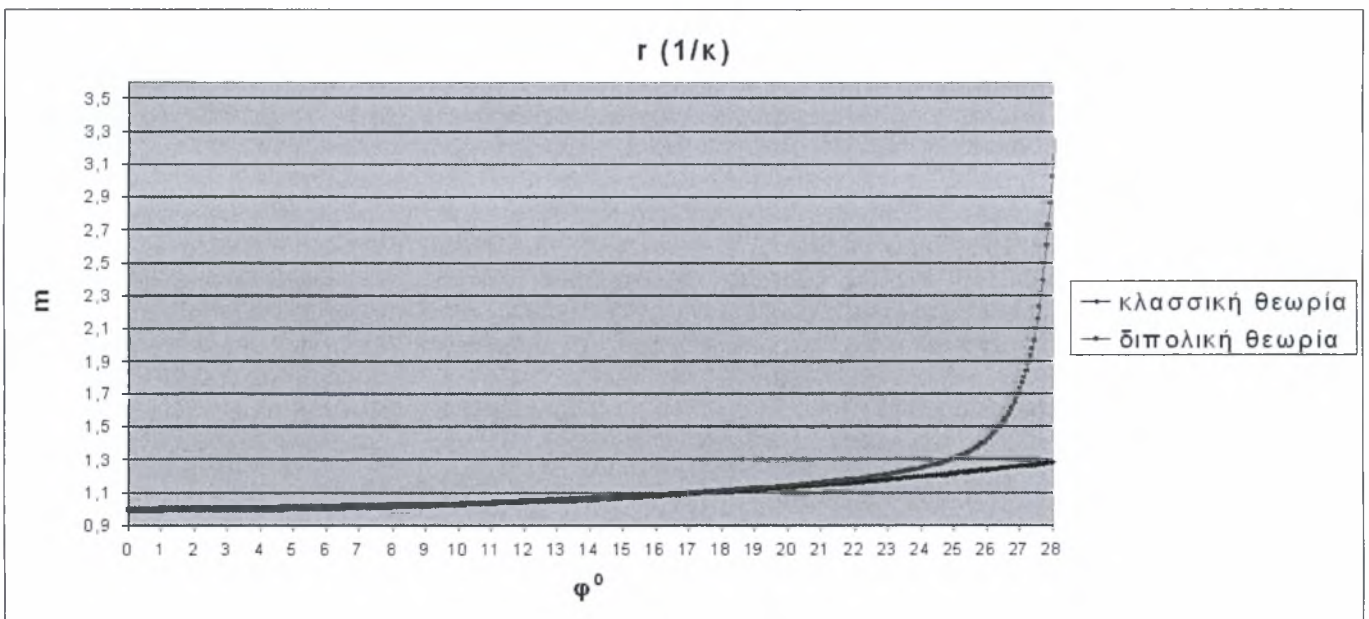
Διάγραμμα 5.3.1.1. : Αξονική τάση συναρτήσει της εραπτόμενης γωνίας ϕ για αρχική τάση 3 kPa .



Διάγραμμα 5.3.1.2. : Αξονική τάση συναρτήσει της εραπτόμενης γωνίας ϕ για αρχική τάση 1 kPa.



Διάγραμμα 5.3.1.3. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της επαπτόμενης γωνίας φ για αρχική τάση 3 kPa.



Διάγραμμα 5.3.1.4. : Ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει της επαπτόμενης γωνίας φ για αρχική τάση 1 kPa.

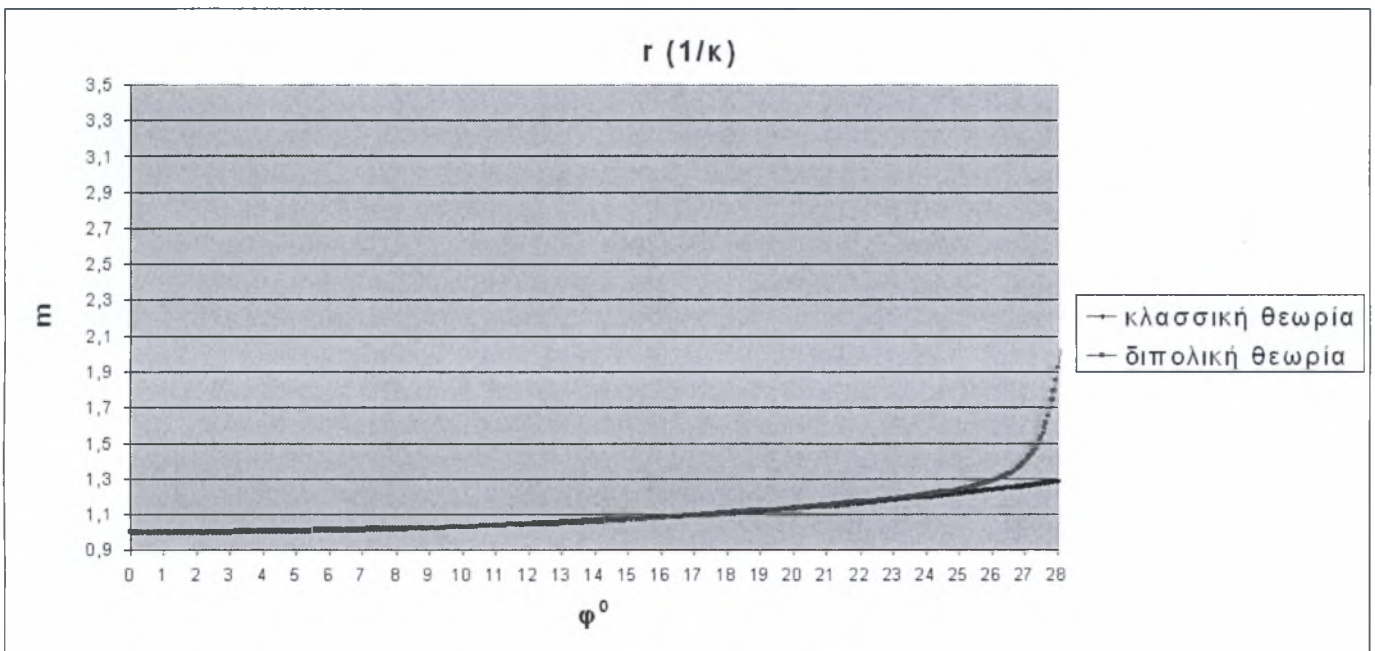
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα για ίδιο διπολικό φορτίο και φορτίο f_y , αλλά με διαφορετική αρχική τάση συμπεραίνουμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η αρχική τάση τόσο μικρότερη είναι η επιρροή του δίπολου στην αύξηση των μεγεθών (ακτίνα καμπυλότητας, κατανομή τάσεων κ.λ.π.)!

5.3.2) Επίδραση διπολικής τάση $m_{r\theta\theta}$

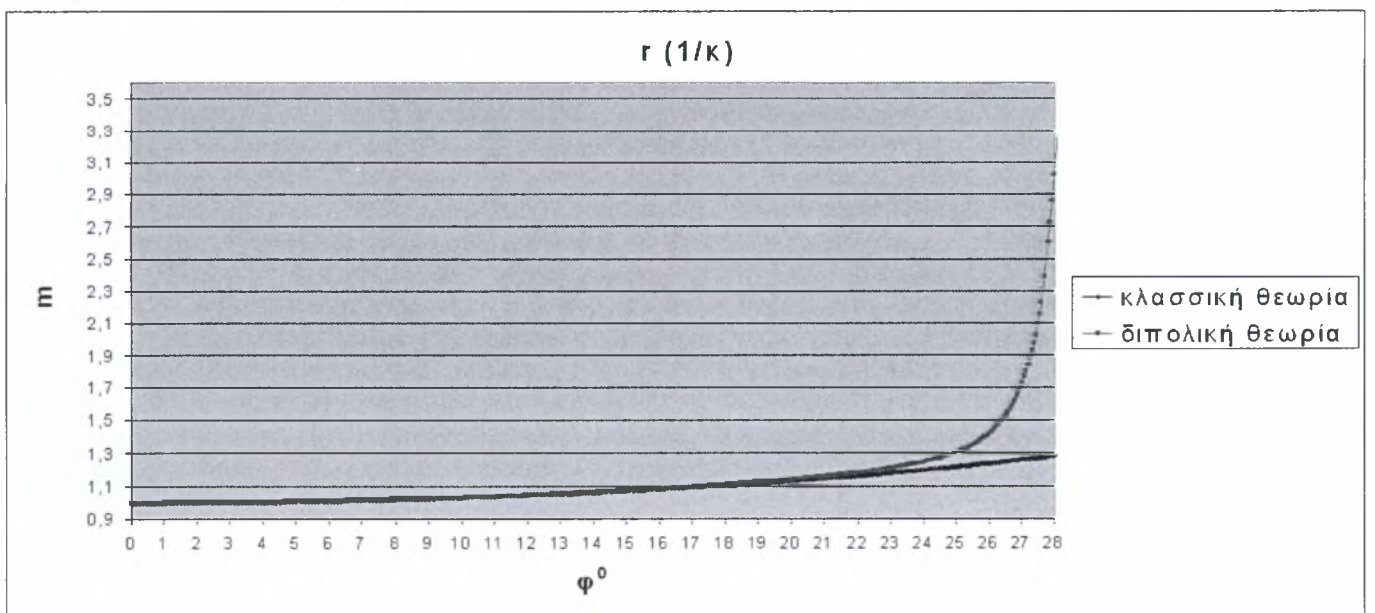
Μέχρι τώρα στα παραδείγματα που λύσαμε ασκούσαμε διπολικό φορτίο τύπου $m_{\theta\theta\theta}$. Το καλώδιο όμως μπορεί να δεχτεί και διπολικό φορτίο τύπου $m_{r\theta\theta}$. Στα επόμενα παραδείγματα που ακολουθούν θα συμπεριλάβουμε αυτό το διπολικό φορτίο μελετώντας την επιρροή του σε συνδυασμό με διπολικό φορτίο τύπου $m_{\theta\theta\theta}$. Έτσι έχουμε για:

$m_{\theta\theta\theta}$ kN/m	$m_{r\theta\theta}$ kN/m
3,00E-04	3,00E-04

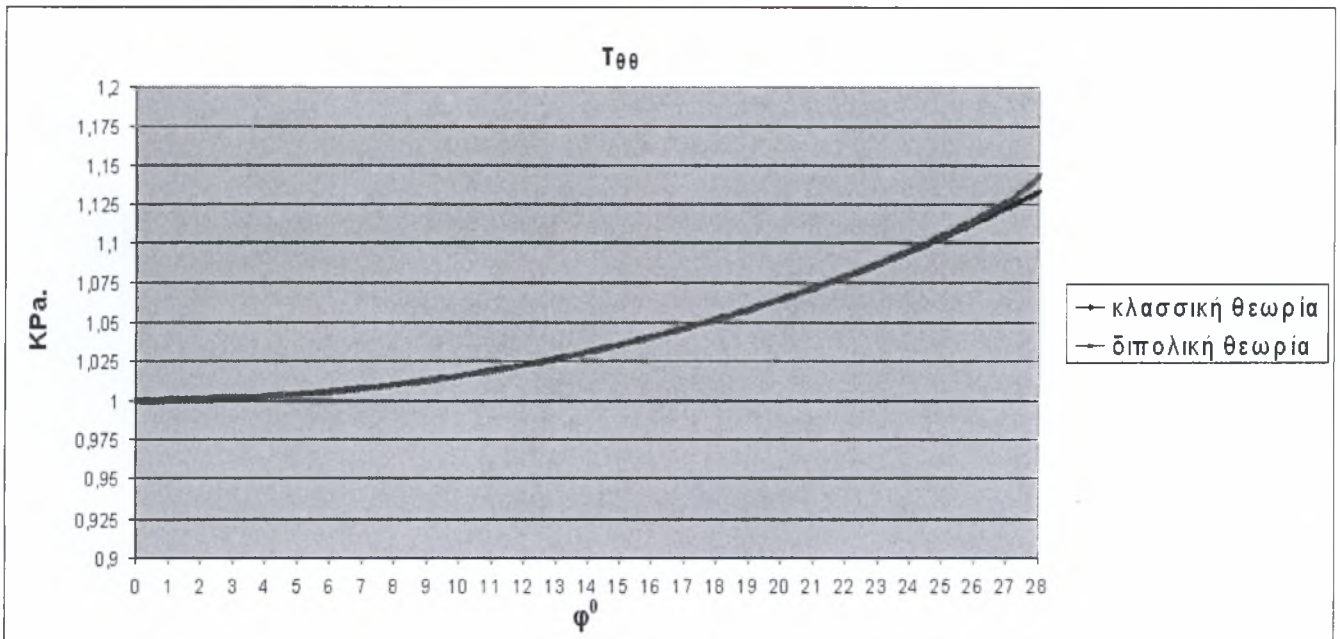
f_y (kN/m ³)	$\Gamma_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	1



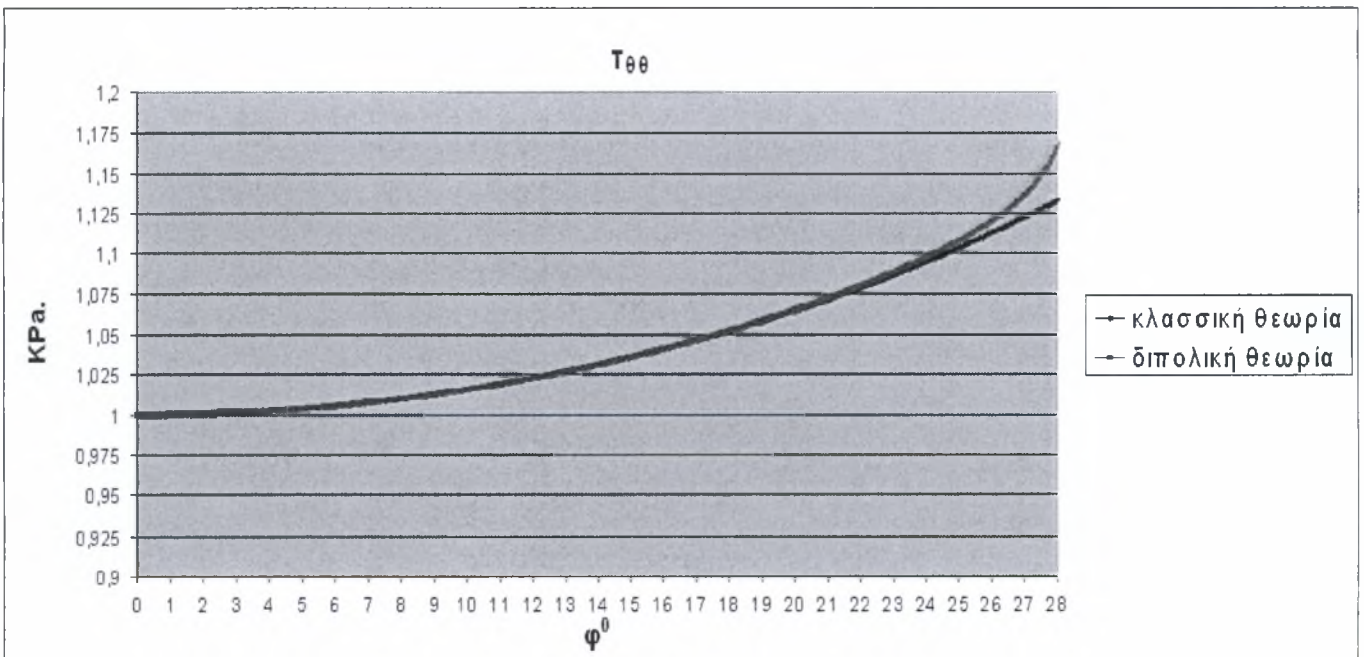
Διάγραμμα 5.3.2.1 : Ακτίνα καμπυλότητας για $m_{\theta\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=3*10^{-4}$.



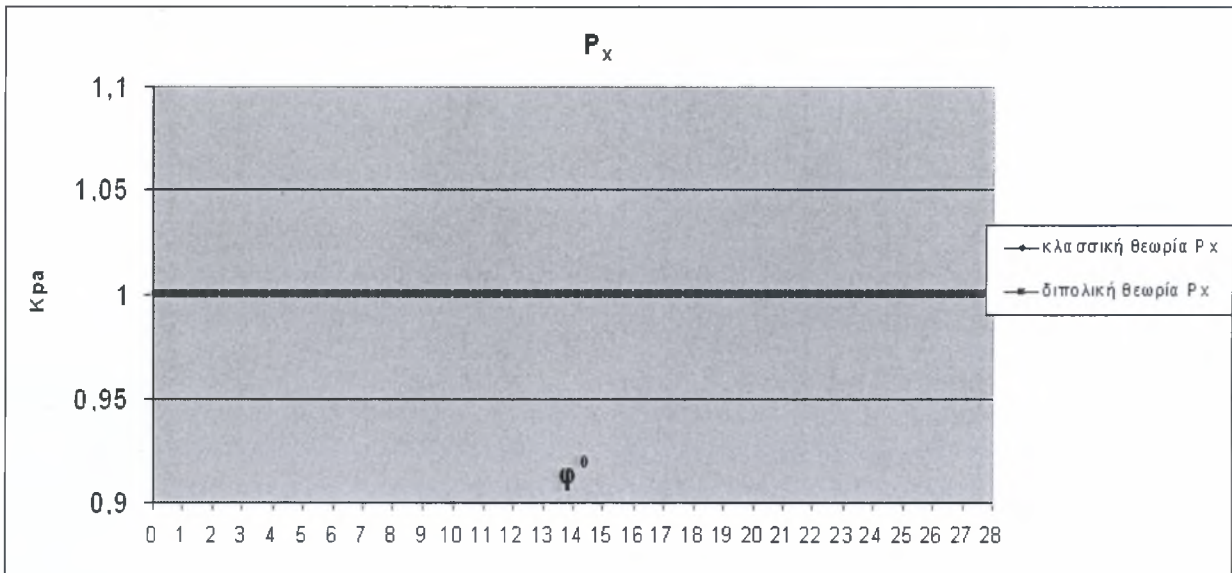
Διάγραμμα 5.3.2.2 : Ακτίνα καμπυλότητας για $m_{\theta\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=0$.



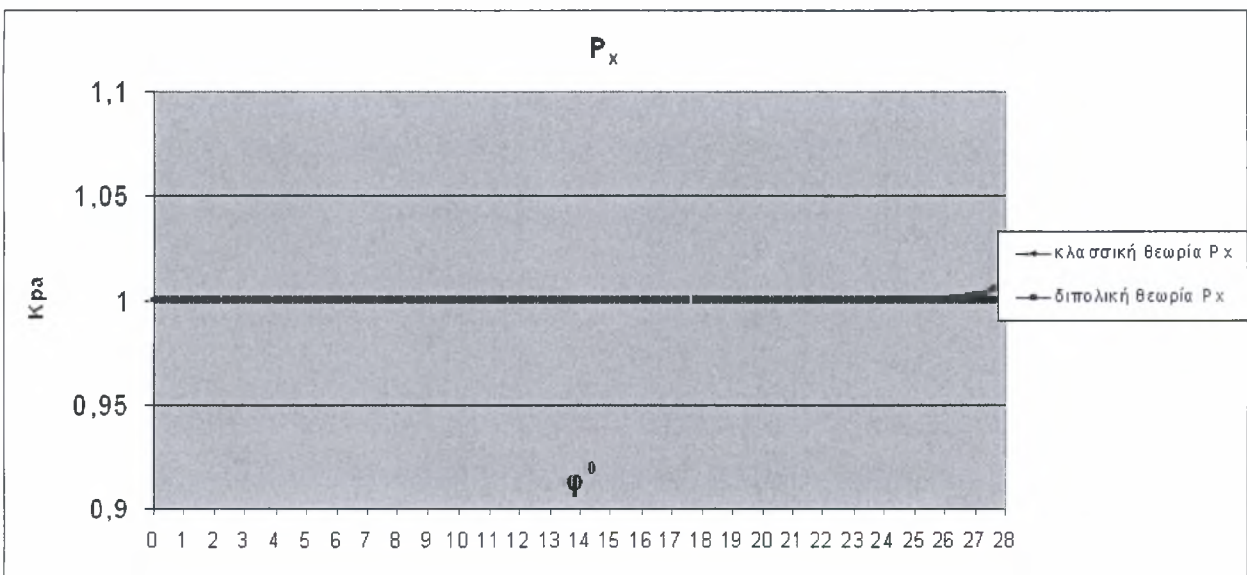
Διάγραμμα 5.3.2.3 : Αξονική τάση για αρχικές συνθήκες $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=3*10^{-4}$ [kN/m].



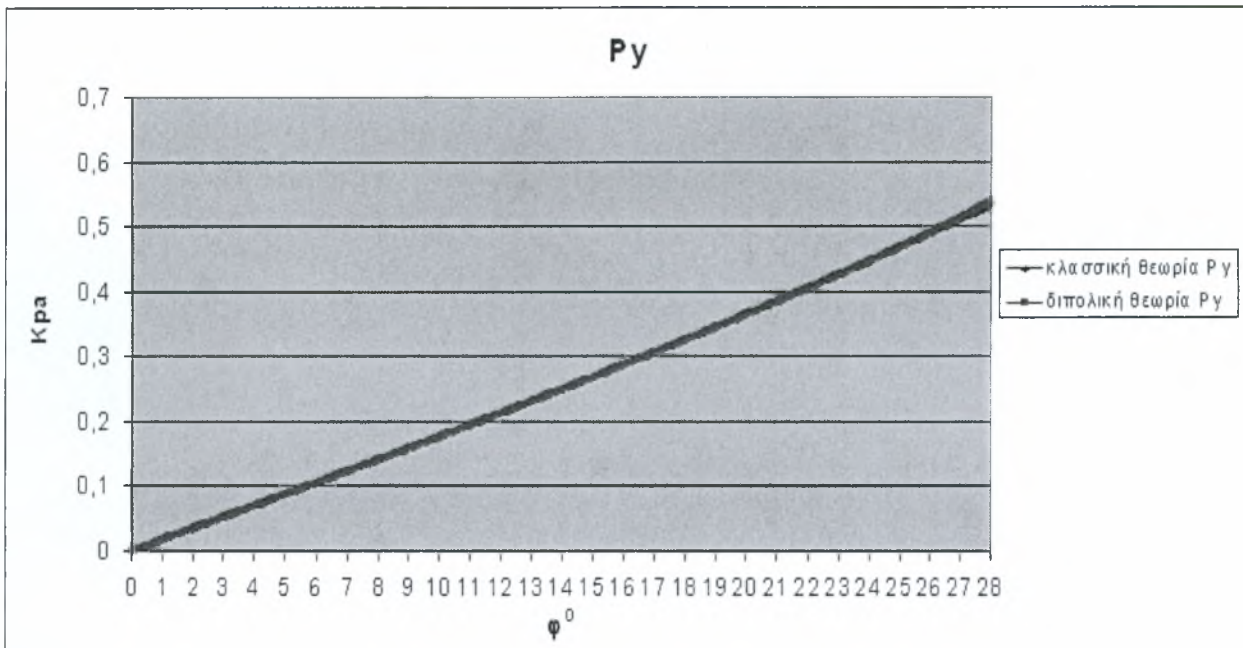
Διάγραμμα 5.3.2.4 : Αξονική τάση για αρχικές συνθήκες $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=0$ [kN/m].



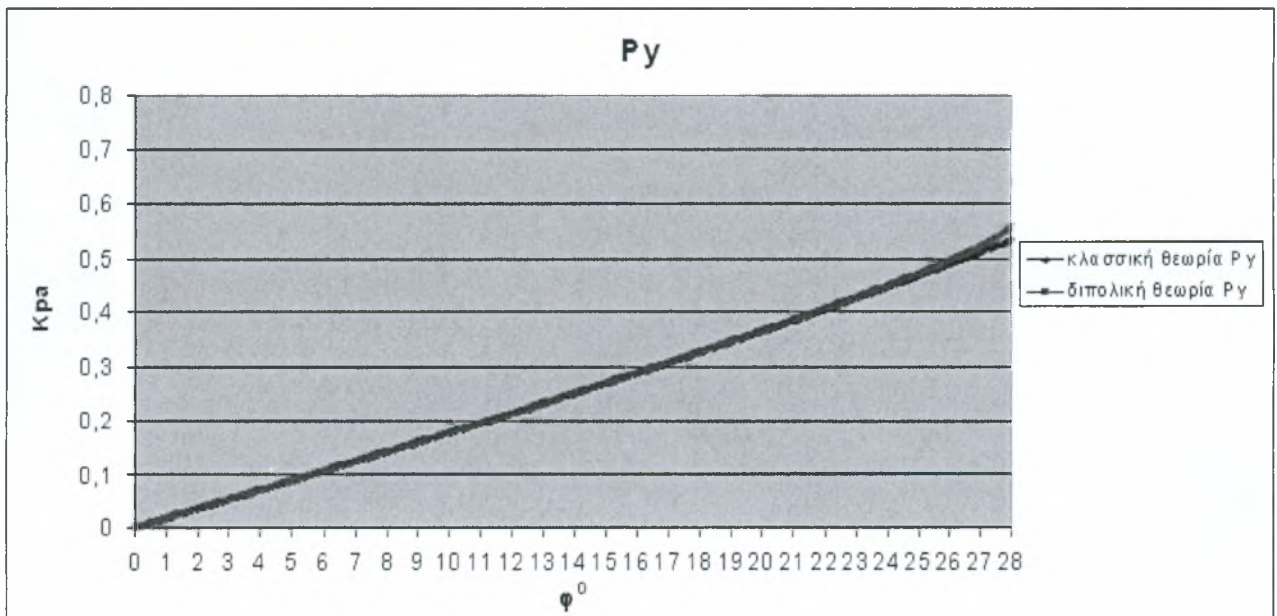
Διάγραμμα 5.3.2.5 : Συνοριακή συνθήκη P_x (δεξιό σύνορο) για $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=3*10^{-4}$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.2.6 : Συνοριακή συνθήκη P_x (δεξιό σύνορο) για $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=0$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.2.7 : Συνοριακή συνθήκη P_y (δεξιό σύνορο) για $m_{\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r 0}=3 \cdot 10^{-4}$ [kN/m].

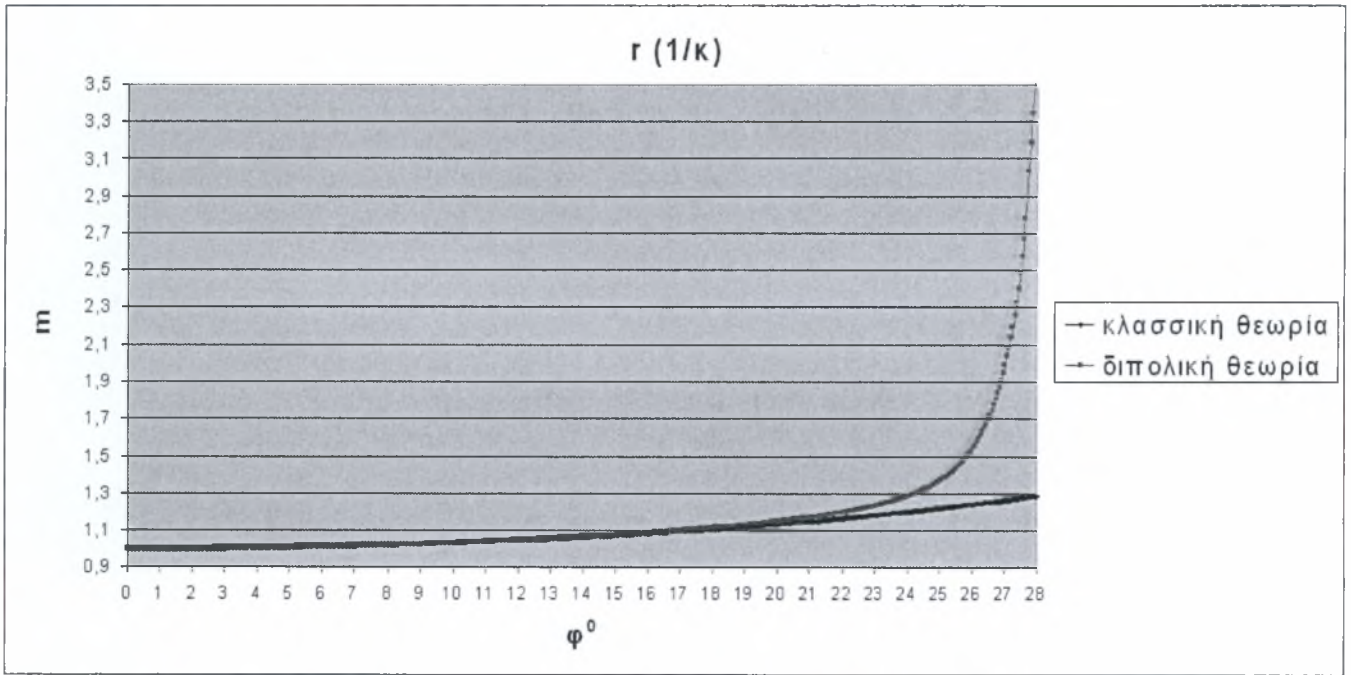


Διάγραμμα 5.3.2.8: Συνοριακή συνθήκη P_y (δεξιό σύνορο) για $m_{\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r 0}=0$ [kN/m].

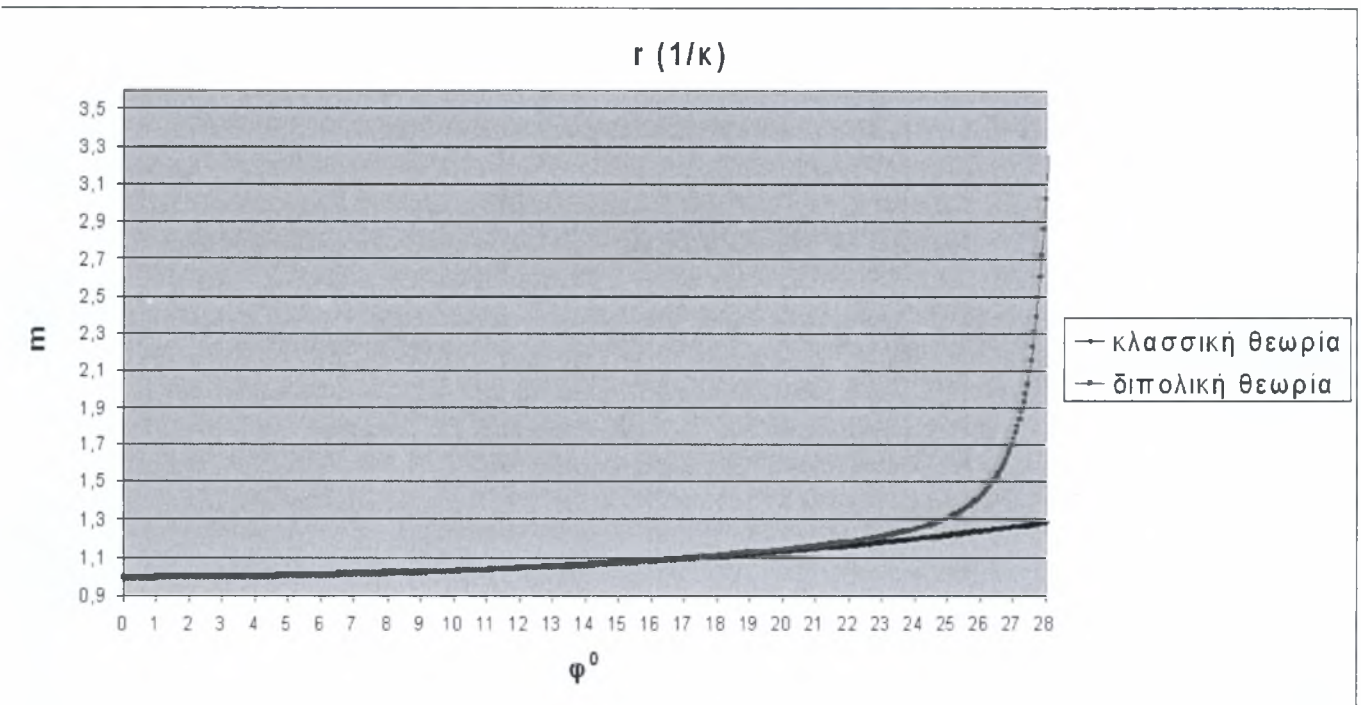
Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι η επιβολή θετικού διπολικού φορτίου $m_{r\theta\theta}$ έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της αυξητικής τάσης που προσδίδει το δίπολο $m_{\theta\theta\theta}$ στα μεγέθη (τάσεις, ακτίνα, συνοριακές τιμές). Μετά από διάφορες δοκιμές-τιμές του δίπολου $m_{r\theta\theta}$ παρατηρήθηκε ότι όσο πιο μεγάλο είναι τόσο πιο μικρή είναι η αύξηση στα μεγέθη. Αυτό όμως δεν ισχύει για κάθε τιμή του $m_{r\theta\theta}$ αφού για πολύ μεγάλες τιμές παρατηρήθηκε ότι δεν ήταν δυνατό να πάρουμε πραγματικές τιμές ακτινών καμπυλότητας και τάσης σε υψηλές γωνίες. Το παραπάνω οφείλεται στο ότι για πολύ μεγάλες τιμές του $m_{r\theta\theta}$ η επαλληλία των διαγραμμάτων 5.1.2 και 5.1.4 μας δίνει για υψηλές τιμές γωνιών αρνητικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}$. Όμως αρνητικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}$ εκφράζονται σε θλίψη (για θετικές καμπυλότητες) για τον φορέα μας, ο οποίος είναι αδύνατον να παραλάβει! Στην συνέχεια παρατίθεται άλλο ένα παράδειγμα επιρροής του $m_{r\theta\theta}$ για αρνητικές τιμές του.

$m_{\theta\theta}$	kN/m	$m_{r\theta}$	kN/m
3,00E-04		-3,00E-04	

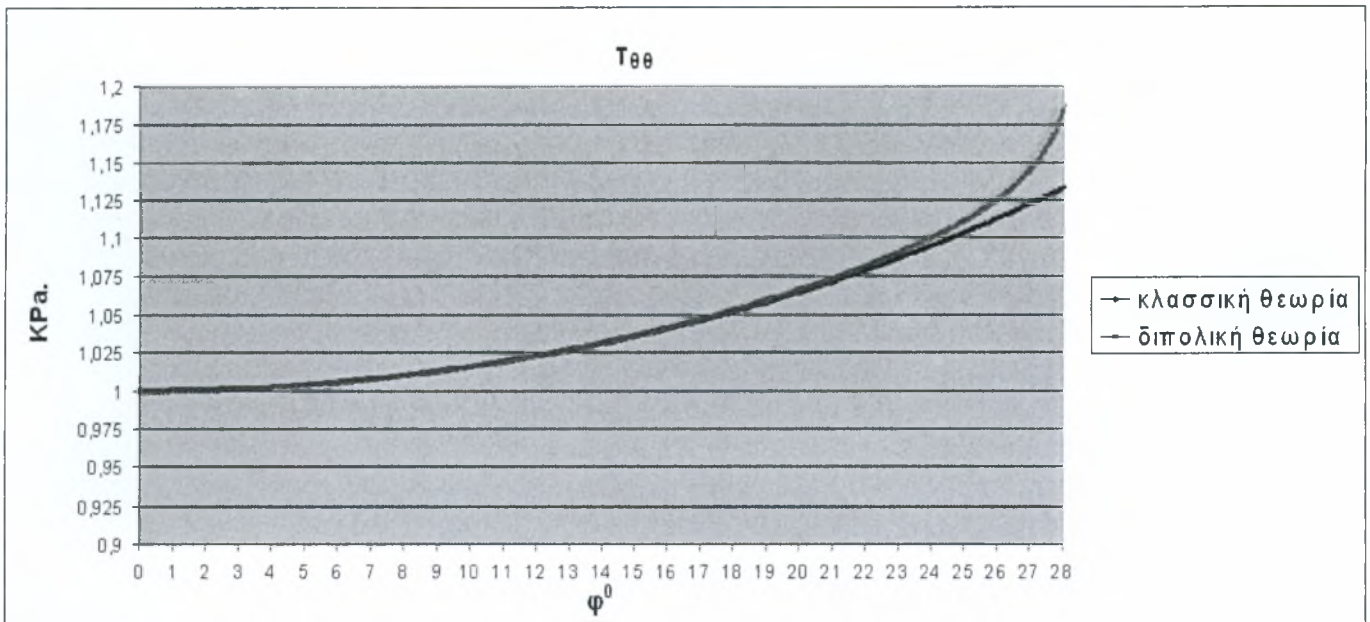
f_y (kN/m ³)	$r_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	1



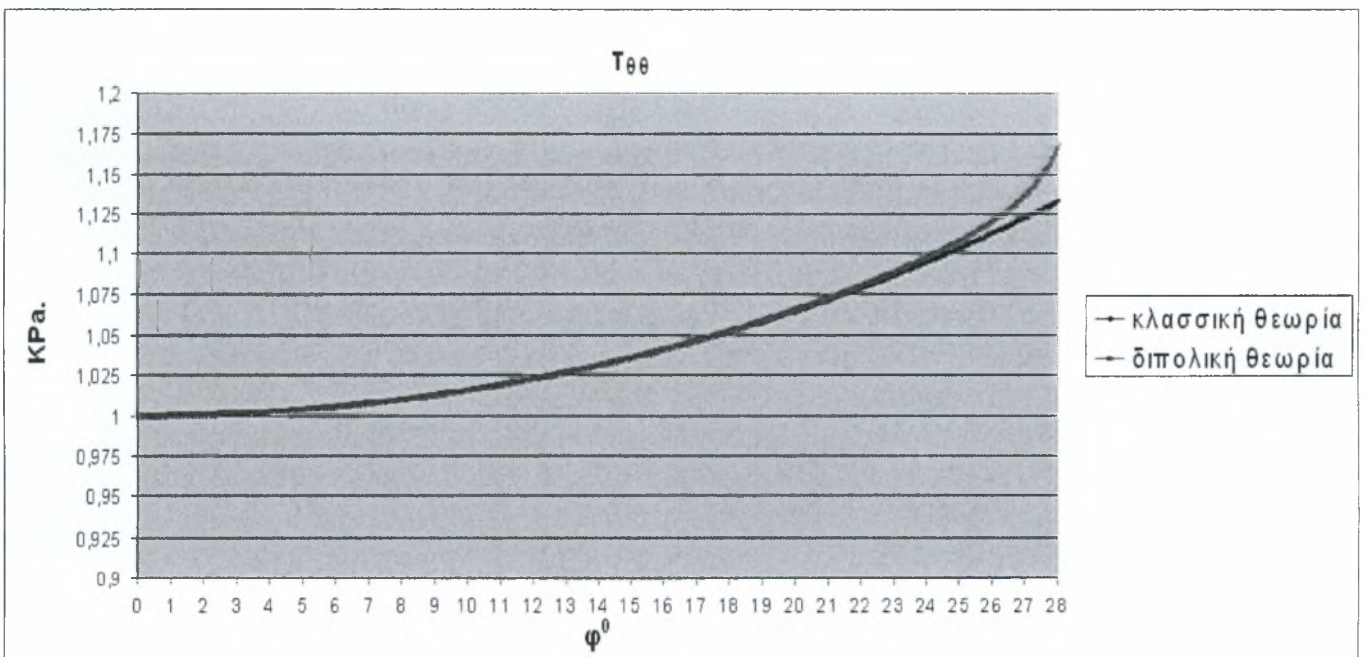
Διάγραμμα 5.3.2.9 : Ακτίνα καμπυλότητας για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=-3*10^{-4}$ [kN/m].



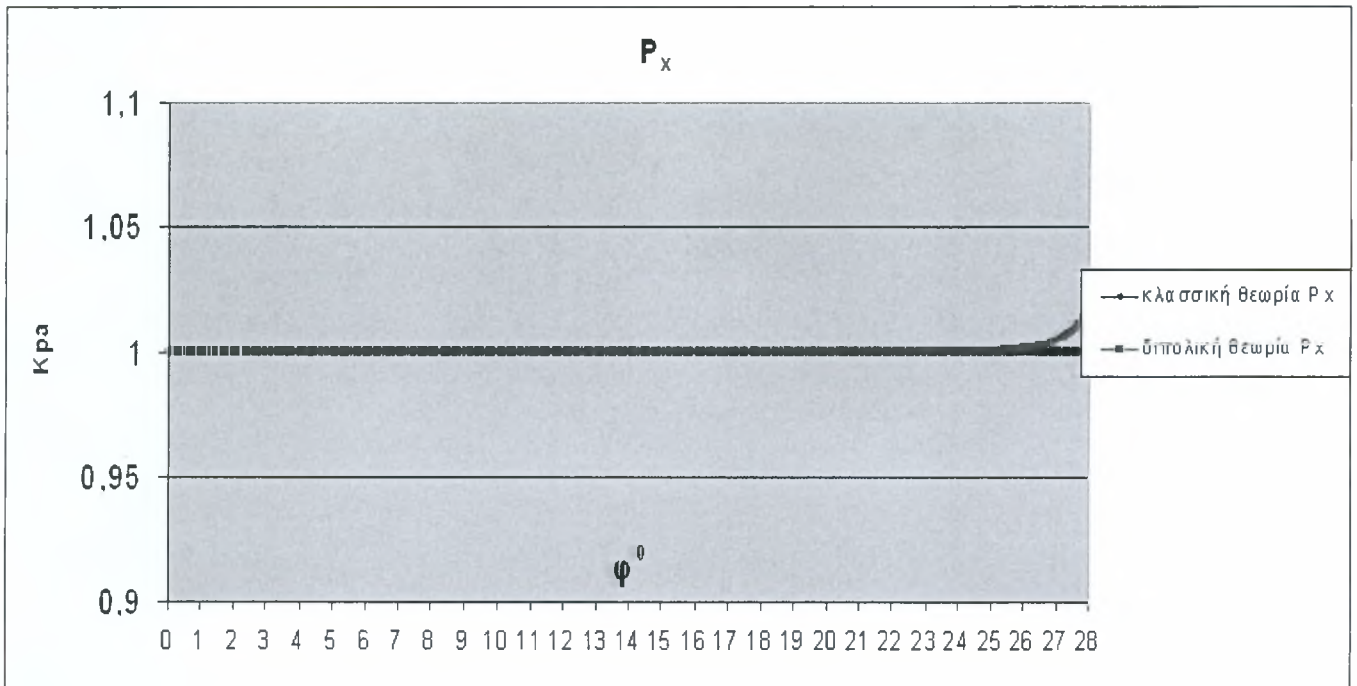
Διάγραμμα 5.3.2.10 : Ακτίνα καμπυλότητας για $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta}=0$ [kN/m].



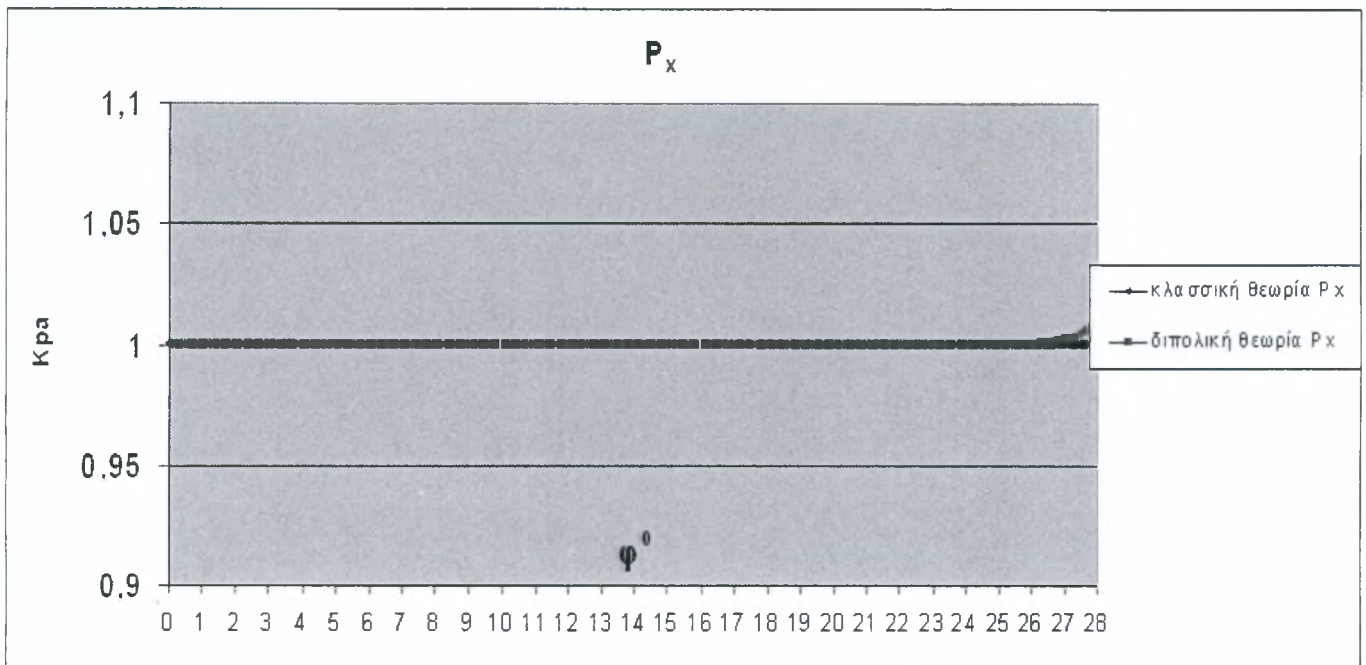
Διάγραμμα 5.3.2.11 : Αξονικές τάσεις για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=-3*10^{-4}$ [kN/m].



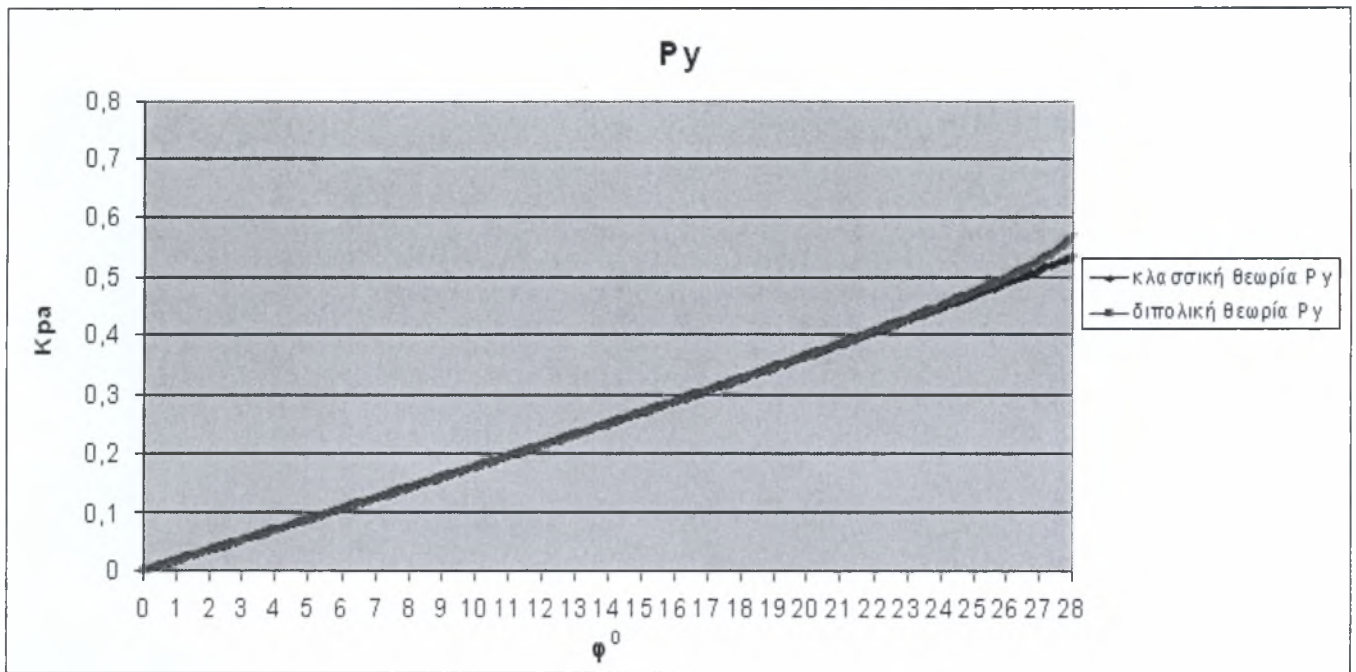
Διάγραμμα 5.3.2.12 : Αξονικές τάσεις για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}=3*10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=0$ [kN/m].



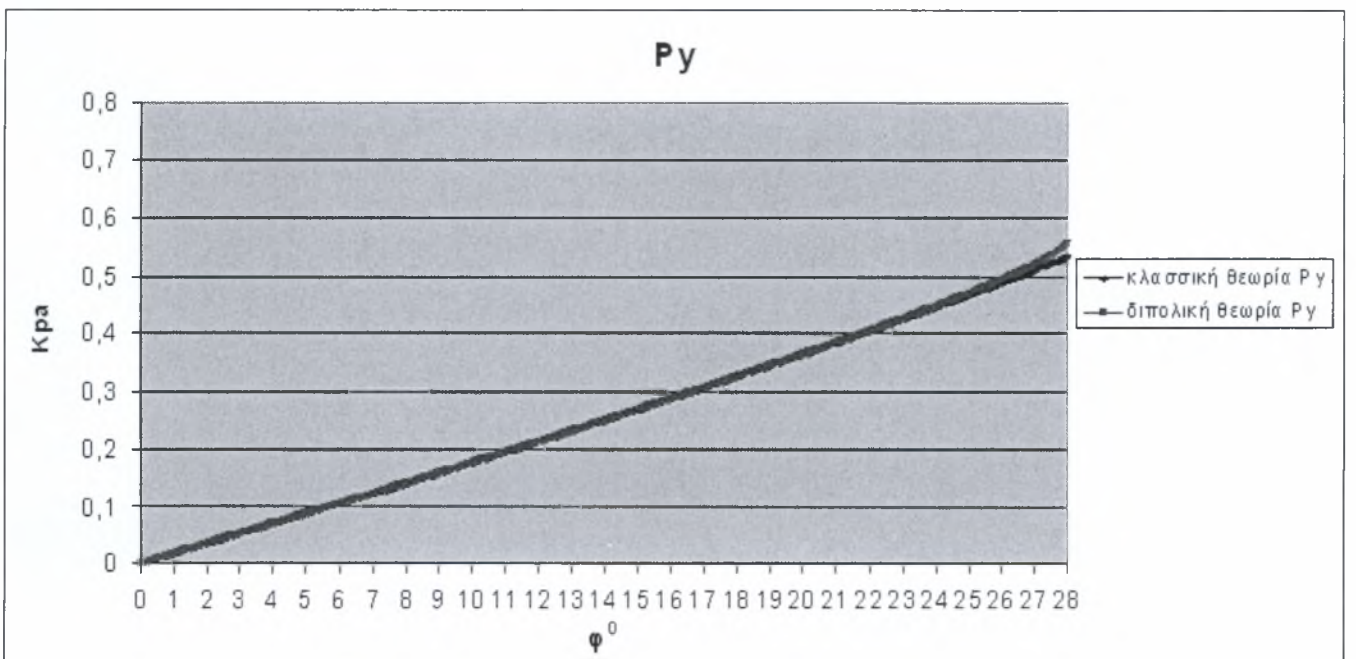
Διάγραμμα 5.3.2.13 : Κατανομή [P_x] (δεξιό σύνορο) για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r\theta 0}=-3 \cdot 10^{-4}$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.2.14 : Συνοριακή συνθήκη P_x (δεξιό σύνορο) για $m_{\theta\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r\theta 0}=0$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.2.15 : Κατανομή [P_y] (δεξιό σύνορο) για αρχικές τιμές $m_{\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r 0}=-3 \cdot 10^{-4}$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.2.15 : Κατανομή [P_y] (δεξιό σύνορο) για αρχικές τιμές $m_{\theta 0}=3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r 0}=0$ [kN/m].

Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι η επιβολή αρνητικού διπολικού φορτίου $m_{r\theta\theta}$ έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της τάσης που προσδίδει το δίπολο $m_{\theta\theta\theta}$ στα μεγέθη (τάσεις, ακτίνα, συννοριακές τιμές). Μετά από διάφορες δοκιμές-τιμές του δίπολου $m_{r\theta\theta}$ παρατηρήθηκε ότι όσο πιο μεγάλο είναι κατά απόλυτη τιμή, τόσο πιο μεγάλη είναι η αύξηση στα εν λόγω μεγέθη.

5.3.3) Επιβολή αρνητικού διπολικού φορτίου $m_{\theta\theta\theta}$

Όπως έχει αναφερθεί αρνητικό δίπολο $m_{\theta\theta\theta}$ με θετική καμπυλότητα μεταφράζεται σε θλίψη για το καλώδιο το οποίο είναι αδύνατο να παραλάβει. Αυτό οφείλεται στο ότι για γωνία $\varphi=0^0$ (κατώτατο άκρο) η εξίσωση (2.9a) η οποία θυμίζω ότι είναι :

$$m_{xxx} = m_{rrr} \cos^3 \theta - m_{rr\theta} \cos^2 \theta \sin \theta - m_{\theta rr} \cos^2 \theta \sin \theta + m_{r\theta\theta} \cos \theta \sin^2 \theta + m_{\theta\theta r} \cos \theta \sin^2 \theta - m_{\theta\theta\theta} \sin^3 \theta, \quad (2.9a)$$

γίνεται

$$m_{xxx}^0 = m_{\theta\theta\theta}^0 \quad (5.3.3.1)$$

όμως ισχύει:

$$m_{xxx}^0 = c \frac{\partial \tau_{xx}^0}{\partial x} \quad (5.3.3.2)$$

Για $\theta=3\pi/2$ ($\varphi=0^0$) έχω όμως:

$$\tau_{xx}^0 = \tau_{\theta\theta}^0, \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial x} = \frac{1}{r^0} \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta}$$

Άρα

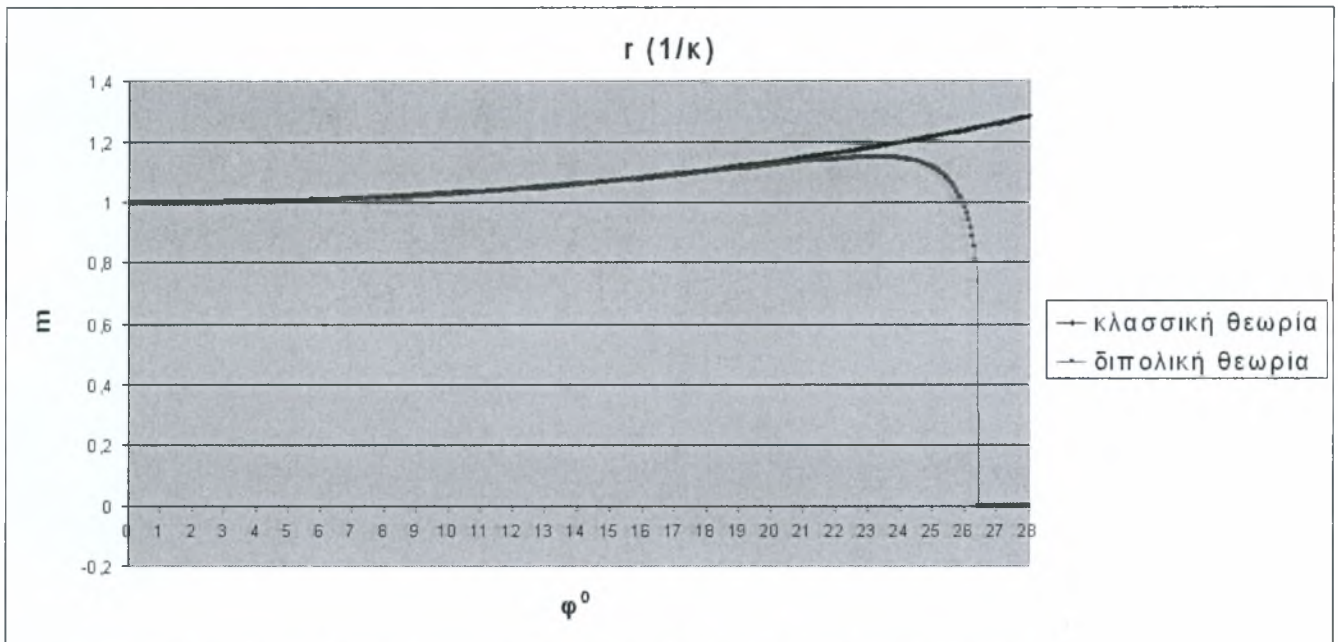
$$\boxed{m_{\theta\theta\theta}^0 = c \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} \frac{1}{r_0}} \quad (5.3.3.3)$$

Από τον παραπάνω τύπο δεδομένο ότι $c > 0$ και $1/r_0 > 0$ τότε αρνητικό δίπολο μεταφράζεται σε αρνητικό $\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}$, που σημαίνει θλίψη. Έτσι λοιπόν τα

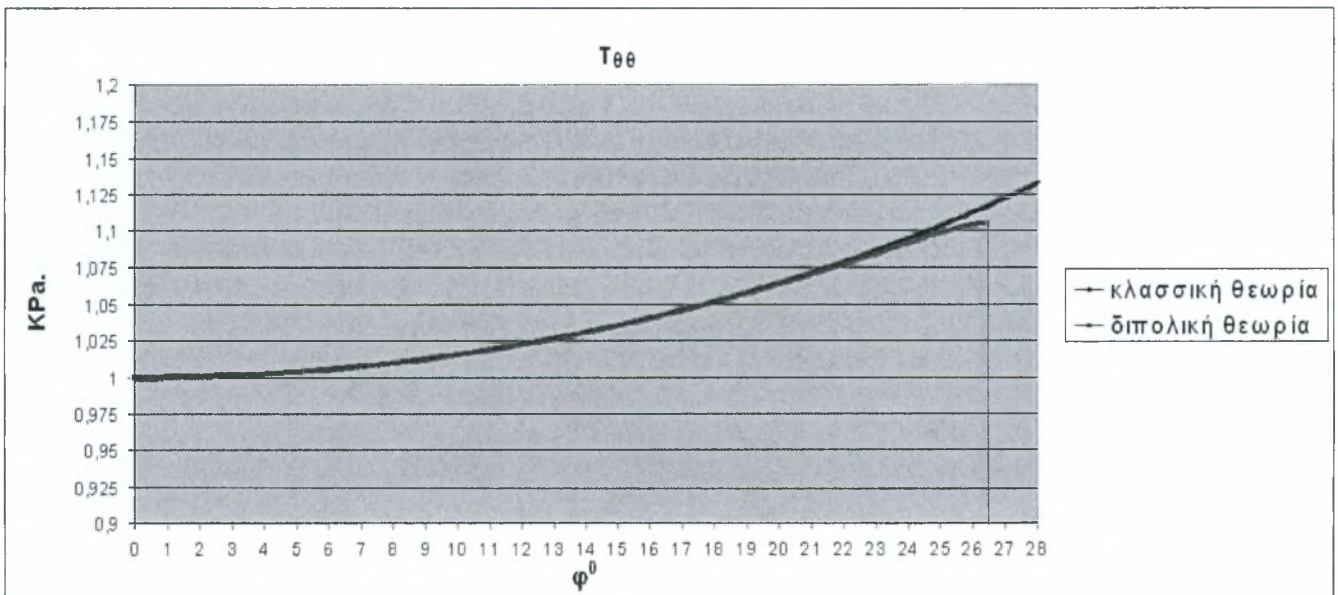
διαγράμματα που παίρνουμε για αρνητικό διπολικό φορτίο είναι π.χ. για:

$m_{\theta\theta\theta}$	kN/m	$m_{r\theta\theta}$	kN/m
-3,00E-04		0	

F_y (kN/m ³)	$T_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
-1	1



Διάγραμμα 5.3.3.1 : Ακτίνα καμπυλότητας για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}=-3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=0$ [kN/m].



Διάγραμμα 5.3.3.2 : Αξονική τάση για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta\theta}=-3 \cdot 10^{-4}$ και $m_{r\theta\theta}=0$ [kN/m].

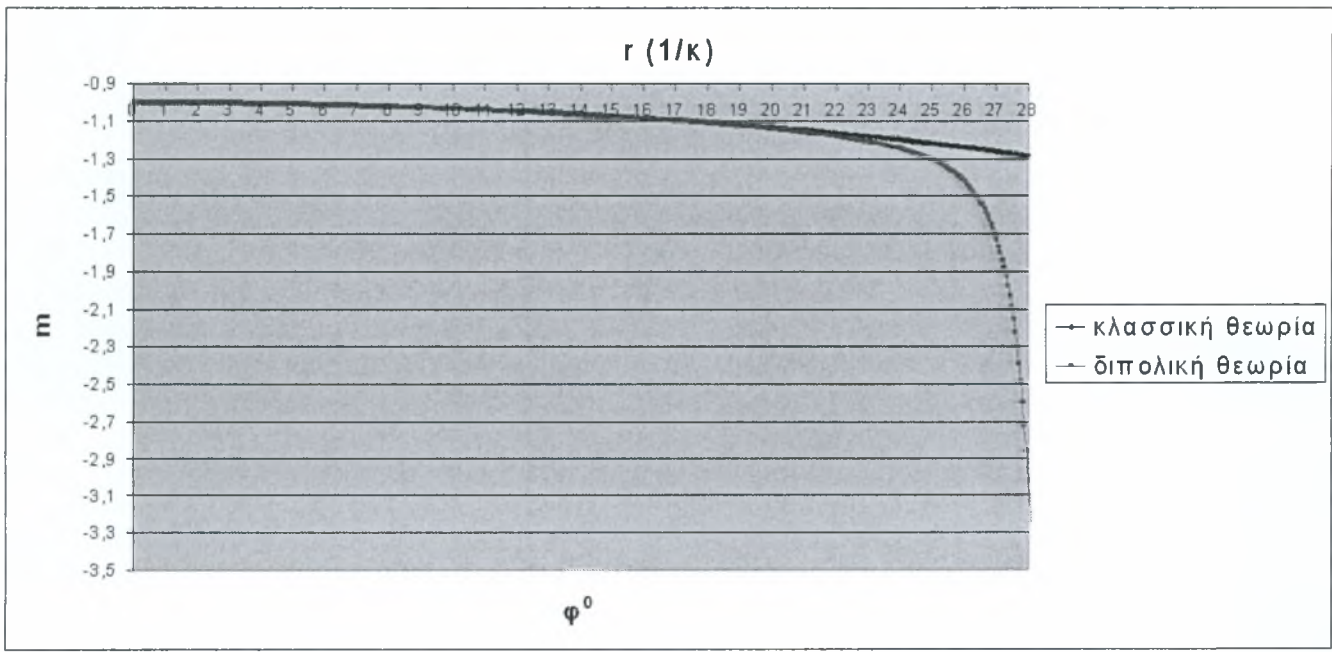
Παρατηρούμε ότι για αρνητικό δίπολο $m_{\theta\theta\theta}$, τα διαγράμματα που παίρνουμε δεν δίνουν πραγματικές τιμές από ένα σημείο και πέρα! Το ερώτημα όμως που γεννιέται μετά από αυτό είναι : Άν το κατανεμημένο φορτίο f_y ασκείτο ανάποδα (αρνητική τιμή), δηλαδή επιβάλλαμε στον φορέα αρνητική καμπυλότητα, τότε

ποιο είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αφού με βάση τον τύπο (5.3.3.1) η

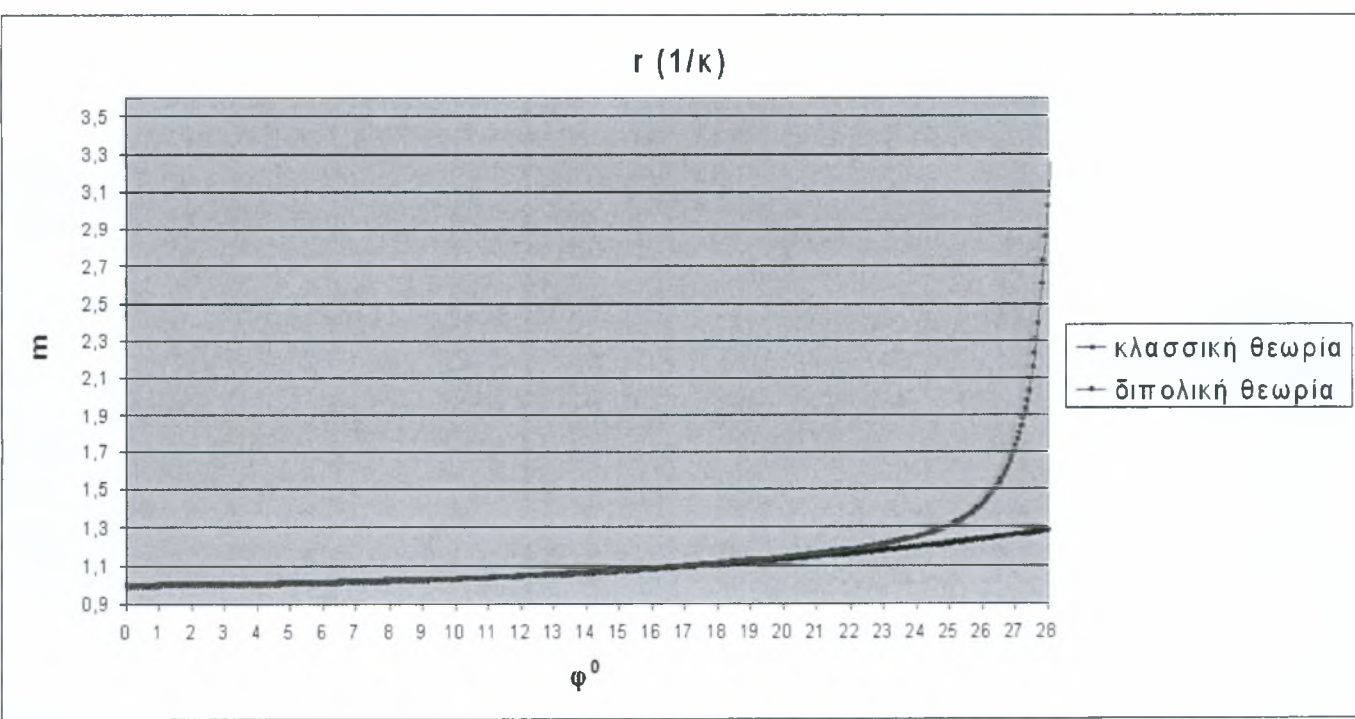
ποσότητα $\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ είναι θετική; Η απάντηση δίνεται με το εξής παράδειγμα:

$m_{\theta\theta}$	kN/m	$m_{r\theta\theta}$	kN/m
-3,00E-04		0	

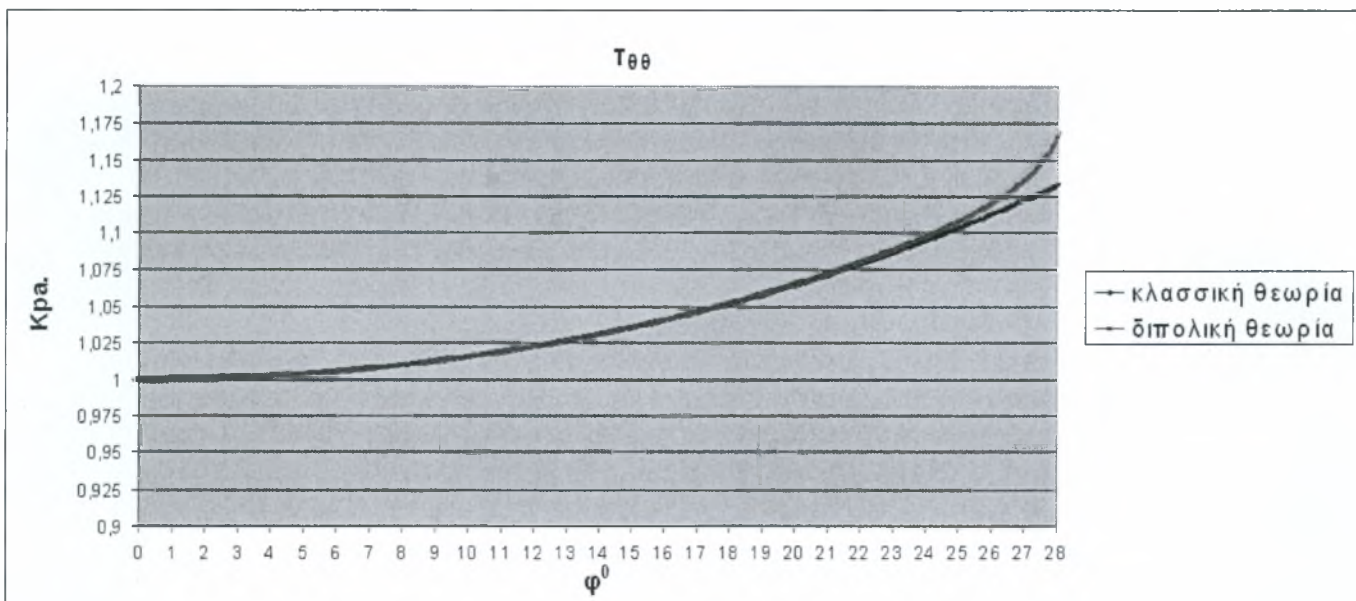
f_y (kN/m ³)	$\Gamma_{\theta\theta}^0$ (kN/m ²)
1	1



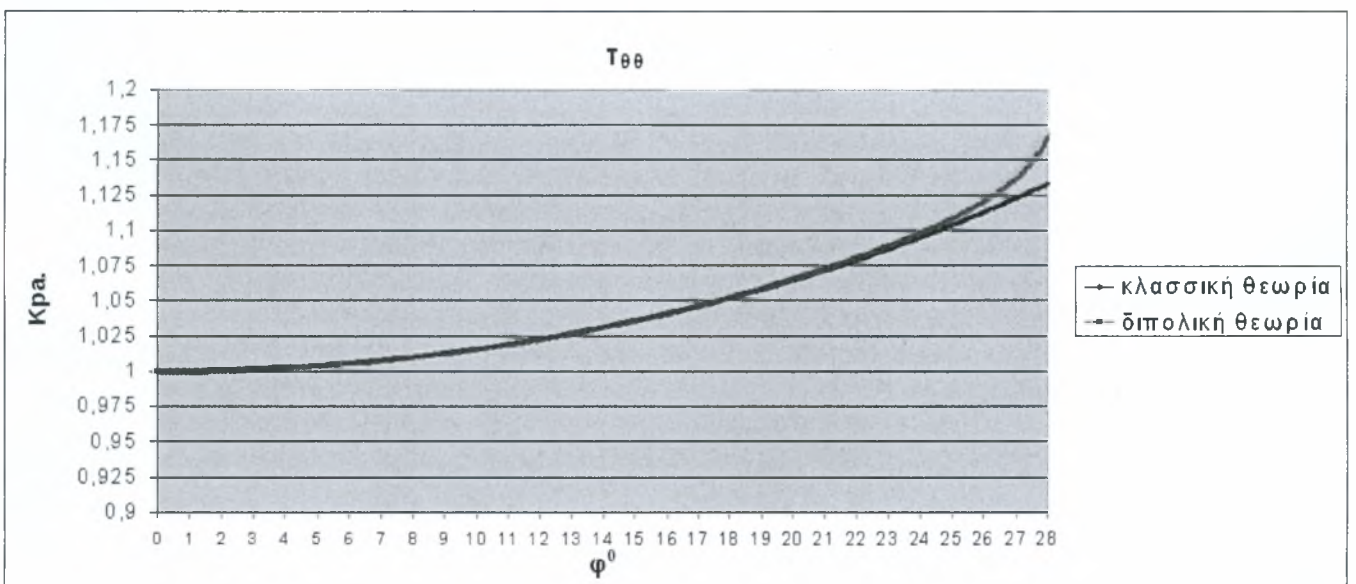
Διάγραμμα 5.3.3.3 : Ακτίνα καμπυλότητας για $m_{\theta\theta}=-3*10^{-4}$, $m_{r\theta\theta}=0$ [kN/m] και $f_y= 1$ kN/m³.



Διάγραμμα 5.3.3.4 : Ακτίνα καμπυλότητας για $m_{\theta\theta}=3*10^{-4}$, $m_{r\theta\theta}=0$ και $f_y= -1$ kN/m³.



Διάγραμμα 5.3.3.5 : Αξονική τάση για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta} = -3 \cdot 10^{-4}$, $m_{r\theta\theta} = 0$ [kN/m] και $f_y = 1$ kN/m³.



Διάγραμμα 5.3.3.5 : Αξονική τάση για αρχικές τιμές $m_{\theta\theta} = 3 \cdot 10^{-4}$, $m_{r\theta\theta} = 0$ [kN/m] και $f_y = -1$ kN/m³.

Παρατηρούμε ότι με αντίθετη καμπυλότητα το αρνητικό $m_{\theta\theta}$ μεταφράζεται σε εφελκυσμό. Έτσι σε σύγκριση με το αντίστοιχο πρόβλημα με θετικές τιμές καμπυλότητας και $m_{\theta\theta}$ παρατηρούμε ότι έχουμε αντίθετα διαγράμματα καμπυλοτήτων αλλά ακριβώς ίδια διαγράμματα μονοπολικών τάσεων!

6. ΕΥΡΕΣΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΜΗΚΟΥΣ $C^{1/2}$

Όπως έχει αναφερθεί ένας από τους τρόπους επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας είναι να δώσουμε τα δίπολα για κάθε γωνία και το χαρακτηριστικό εμβαδό c του υλικού. Στα μέχρι τώρα όμως παραδείγματα εμείς επιλέξαμε να προσδιορίσουμε την μονοπολική τάση αντί του χαρακτηριστικού εμβαδού c του υλικού. Όμως αυτό δεν σημαίνει ότι μετά την επίλυση δεν είμαστε σε θέση να το προσδιορίσουμε, αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει για $\varphi=0^0$ (κατώτατο άκρο):

$$m_{\theta\theta\theta}^0 = c \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} \frac{1}{r_0} \quad (6.1)$$

Άρα αν λύσουμε ως προς το χαρακτηριστικό εμβαδό c τότε η (6.1) γίνεται:

$$c = r_0 m_{\theta\theta\theta}^0 \left(\frac{\partial \tau_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} \right)^{-1} \quad (6.2)$$

Στον τύπο (6.2) οι όροι στο δεξιά σκέλος της εξίσωσης είναι γνωστοί αφού είναι γνωστά τα διαγράμματα τάσεων και ακτινών καμπυλότητας καθώς και η αρχική τιμή του διπολικού φορτίου $m_{\theta\theta\theta}^0$.

Μετά από διάφορες τιμές που δοκιμάστηκαν και επιλύοντας την (6.2) παρατηρήθηκε ότι το χαρακτηριστικό εμβαδό μπορεί να βρεθεί εναλλακτικά από τον τύπο:

$$c \approx 0.5 \left(\frac{\tau_{\theta\theta}^0}{f_y} \right)^2 \quad (6.3)$$

Ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει γενικά για πολύ μικρές της τάσης στο κατώτατο άκρο καθώς και για πάρα πολύ μεγάλες τιμές της τάσης σε σχέση με το κατανεμημένο φορτίο f_y . Δηλαδή σε αυτές τις περιπτώσεις συντελεστής σταθερός αριθμός 0.5 παύει να είναι σταθερός και εξαρτάται από τις τιμές των $\tau_{\theta\theta}^0, f_y$

Στον παραπάνω τύπο παρατηρούμε τα εξής :

1) Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα που λύθηκαν και συγκρίθηκαν με ίδιο $\tau_{\theta\theta}^0$ εξασφαλίζεται ότι μιλούσαμε για το ίδιο υλικό αφού για σταθερό φορτίο f_y έχω και ίδιο c .

2) Οι μονάδες του χαρακτηριστικού εμβαδού βγαίνουν m^2 αφού

$$\left(\frac{KN/m^2}{KN/m^3} \right)^2 = m^2$$

3) Για σταθερό c αν διπλασιαστεί το επιβαλλόμενο φορτίο f_y τότε προκύπτει διπλασιάζεται και η τάση στο κατώτατο άκρο του καλωδίου.

4) Για $c=0$ δεν ισχύει η σχέση (6.3) διότι όλη η μεθοδολογία βασίζεται στην επίλυση των πολωνύμων (4.12). Η επίλυση αυτή όμως απαιτεί ο συντελεστής A ($A\kappa^2 + B\kappa + \Gamma = 0$) να είναι διάφορος του μηδενός. Συνεπώς αφού ο συντελεστής A περιέχει μόνο από διπολικές τάσεις και δεδομένο ότι για χαρακτηριστικό μήκος μηδέν, μηδενίζονται και τα δίπολα τότε καταλήγουμε ότι σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να έχουμε μηδενικό χαρ/κο μήκος για να ισχύει η ορθότητα της μεθόδου επίλυσης.

Αν τώρα θυμηθούμε ότι για $\varphi=0^0$ η ακτίνα καμπυλότητας στο κλασσικό

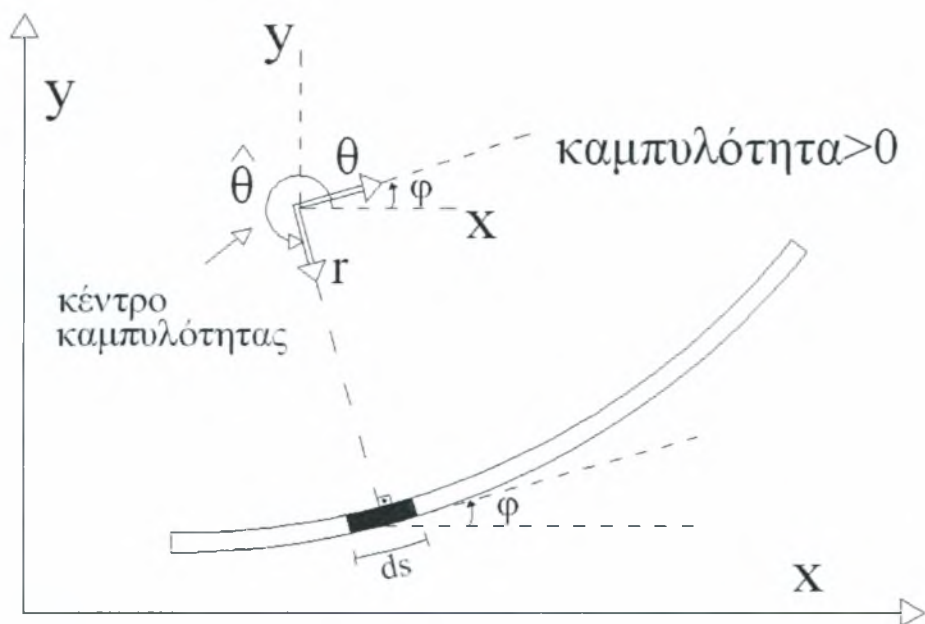
πρόβλημα ισούται : $r_{cl}^0 = \left(\frac{\tau_{\theta\theta}^0}{f_y} \right)$ και θυμηθούμε ότι για μικρές τιμές διπολικών

φορτίων η πραγματική ακτίνα καμπυλότητας στο κατώτατο άκρο ήταν πολύ κοντά στην κλασσική $r_{cl}^0 \approx r_{real}^0$ τότε από τον τύπο (6.3) συμπεραίνουμε ότι :

$$\boxed{\frac{\sqrt{c}}{r_{real}^0} \approx 0,5} \quad (6.4)$$

Από τον παραπάνω τύπο συμπεραίνουμε ότι όσο πιο μεγάλο είναι το χαρακτηριστικό μήκος τόσο πιο άκαμπτη είναι η κατασκευή.

Παράρτημα Α



Σχήμα Α.1: Απειροστό τμήμα καλωδίου. Σύστημα συντεταγμένων [ολικό (x,y), τοπικό (r,θ)]

Η σχέση μεταξύ της γωνίας θ δηλαδή της γωνίας περιστροφής από καθολικό σύστημα σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων και της εφαπτόμενης γωνίας ϕ όπως φαίνεται και από το σχήμα Α.1 είναι:

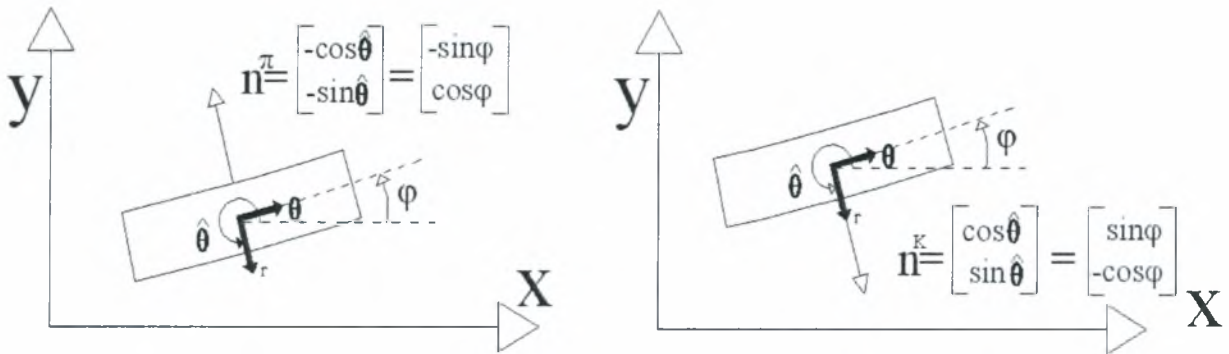
$$\theta = \frac{3\pi}{2} + \phi \quad \text{A.1}$$

Άρα :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \phi \\ \sin \theta &= -\cos \phi \\ \frac{\partial(\)}{\partial \theta} &= \frac{\partial(\)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad \text{(A.2a,b,c)}$$

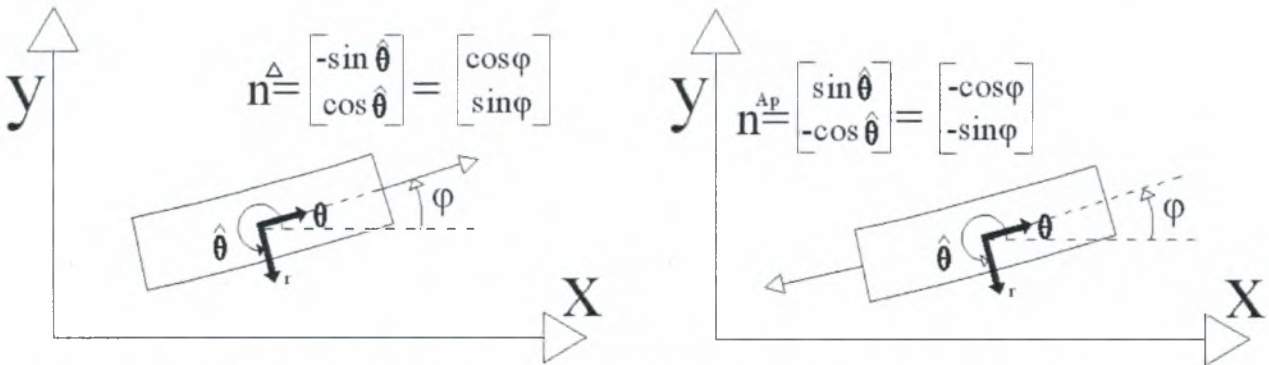
Επομένως το κάθετο στα σύνορα μοναδιαίο διάνυσμα είναι για το πάνω και κάτω σύνορο όπως φαίνονται στο σχήμα Α.2 Στην πρώτη γραμμή του πίνακα

που περιγράφει το διάνυσμα αναγράφεται η συνιστώσα κατά x ενώ στην δεύτερη γραμμή η συνιστώσα κατά y.



Σχήμα A.2: Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο πάνω και κάτω σύνορο απειροστού τμήματος .

Ομοίως για το αριστερά και δεξιά σύνορο έχω:



Σχήμα A.3: Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο δεξιά και αριστερά σύνορο απειροστού τμήματος .

Παράρτημα Β

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας του καλωδίου στην κλασική θεωρία [εξισώσεις (4.9)] για κλασική κατακόρυφη φόρτιση f_y γίνονται:

$$-\frac{1}{r} \tau_{\theta\theta} + f_y \sin \theta = 0 \quad (\text{B.1a})$$

και

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + f_y \cos \theta = 0 \quad (\text{B.1b})$$

Αν αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων λυθεί με την βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου Euler, τότε η ποσότητα $\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ γίνεται ίση με $\frac{(\tau_{\theta\theta}^{i+1} - \tau_{\theta\theta}^i)}{\Delta \theta}$. $\Delta \theta$ είναι το βήμα επίλυσης που επιλέγεται και $\tau_{\theta\theta}^{i+1}, \tau_{\theta\theta}^i$ η επόμενη τιμή (ζητούμενη) της τάσης και προηγούμενη (γνωστή) τιμή της τάσης αντίστοιχα. Έτσι ο επαναληπτικός αλγόριθμος που δημιουργείται μετατρέποντας τις εξισώσεις (B.1) κατάλληλα είναι :

$$-\frac{1}{r^i} \tau_{\theta\theta}^i + f_y \sin \theta^i = 0 \quad (\text{B.1a})$$

Αν υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή που θα δώσουμε είναι αυτή της τάσης και όχι της ακτίνας καμπυλότητας, τότε επιλύοντας την (B.1a) ως προς την ζητούμενη τιμή (ακτίνα καμπυλότητας) έχουμε:

$$\boxed{r^i = \frac{\tau_{\theta\theta}^i}{f_y \sin \theta^i}} \quad (\text{B.2b})$$

Ομοίως η (B.1b) γίνεται:

$$\frac{1}{r^i} \frac{(\tau_{\theta\theta}^{i+1} - \tau_{\theta\theta}^i)}{\Delta\theta} + f_y \cos\theta^i = 0 \quad (\text{B.2c})$$

Και δεδομένο ότι η ακτίνα r^i είναι γνωστή από τύπο (B.2b) τότε η ζητούμενη τιμή είναι η τιμή τάση $\tau_{\theta\theta}^{i+1}$. Έτσι η (B.2c) γίνεται :

$$\boxed{\tau_{\theta\theta}^{i+1} = -r^i \cdot \cos\theta^i \cdot f_y \cdot \Delta\theta + \tau_{\theta\theta}^i} \quad (\text{B.2d})$$

Στην συνέχεια η τάση $\tau_{\theta\theta}^{i+1}$ γίνεται $\tau_{\theta\theta}^i$ με γωνία $\theta^i + \Delta\theta$ και βρίσκουμε μια νέα ακτίνα καμπυλότητας και συνεχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία.

Παράρτημα Γ

Οι εξισώσεις ισορροπίας στην διπολική θεωρία όπως έχει αναφερθεί είναι:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (f_y \cos \theta - f_x \sin \theta) + \frac{1}{4r^2} \left[2(5 \cos 4\theta - 3 \cos 6\theta) \csc^2 \theta \cdot m_{\theta\theta\theta} + (14 \sin 2\theta + 17 \sin 4\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 4 \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - (5 + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 4\theta) \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (\Gamma.1a)$$

$$-\frac{1}{r} \tau_{\theta\theta} + (f_y \sin \theta + f_x \cos \theta) + \frac{1}{4r^2} \left[(-8 \cot \theta \csc^2 \theta + 2 \sin 2\theta + 9 \sin 4\theta) m_{\theta\theta\theta} + 4m_{r\theta\theta} + (1 - 9 \cos 4\theta + 4 \csc^2 \theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 2 \sin 4\theta \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (\Gamma.1b)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς την καμπυλότητα $\left(\kappa = \frac{1}{r} \right)$ και έχουν την μορφή:

$$A1 \cdot \kappa^2 + B1 \cdot \kappa + \Gamma1 = 0 \quad (\Gamma.2a)$$

Και

$$A2 \cdot \kappa^2 + B2 \cdot \kappa + \Gamma2 = 0 \quad (\Gamma.2b)$$

Όπου :

$$A1 = \frac{1}{4} \left[2(5 \cos 4\theta - 3 \cos 6\theta) \csc^2 \theta \cdot m_{\theta\theta\theta} + (14 \sin 2\theta + 17 \sin 4\theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 4 \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - (5 + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 4\theta) \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right]$$

$$B1 = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}$$

$$\Gamma1 = (f_y \cos \theta - f_x \sin \theta)$$

Ομοίως

$$A2 = \frac{1}{4} \left[(-8 \cot \theta \csc^2 \theta + 2 \sin 2\theta + 9 \sin 4\theta) m_{\theta\theta\theta} + 4 m_{r\theta\theta} + (1 - 9 \cos 4\theta + 4 \csc^2 \theta) \frac{\partial m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta} - 2 \sin 4\theta \frac{\partial^2 m_{\theta\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right]$$

$$B2 = -\tau_{\theta\theta}$$

$$\Gamma 2 = (f_y \sin \theta + f_x \cos \theta)$$

Αν επιλέξουμε να δώσουμε στο πρόβλημα σαν αρχική τιμή την τάση τότε από την (Γ.2α) επιλύουμε ως προς $\tau_{\theta\theta}$ και εφαρμόζοντας πάλι την αριθμητική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων Euler έχουμε 2 λύσεις καμπυλότητας :

1^η λύση:

$$\kappa_1^i = \frac{-B2_1^i + \sqrt{(B2_1^i)^2 - 4 \cdot A2^i \cdot \Gamma 2^i}}{2 \cdot A2^i} \quad (\Gamma.3a)$$

2^η λύση:

$$\kappa_2^i = \frac{-B2_2^i + \sqrt{(B2_2^i)^2 - 4 \cdot A2^i \cdot \Gamma 2^i}}{2 \cdot A2^i} \quad (\Gamma.3b)$$

Ο δείκτης 1 κάτω αριστερά φανερώνει ότι προκύπτει από την πρώτη πραγματική λύση καμπυλότητας.

Ακόμα αυτός ο δείκτης υπάρχει και στον συντελεστή B2 γιατί αυτός ισούται $-\tau_{\theta\theta}$. Λόγω του ότι παίρνουμε 2 τιμές καμπυλότητας κατά την επίλυση του επαναληπτικού τύπου θα παίρνουμε στα επόμενα βήματα (εκτός της αρχικής τιμής) και 2 τιμές τάσης. Έτσι οι 2 τιμές τάσεων βρίσκονται από την (Γ.2b) οι οποίες αν λυθούν ως προς την ζητούμενη τάση γίνονται:

$$(\tau_{\theta\theta}^{i+1})_j = -\frac{\Delta\theta}{\kappa_j^i} \left[(\kappa_j^i)^2 \cdot A1^i + \Gamma 1^i \right] + (\tau_{\theta\theta}^i)_j \quad (\Gamma.3c)$$

Όπου $\Delta\theta$ το βήμα επίλυσης και j ο δείκτης που φανερώνει την προέλευση της λύσης ($1^{\text{η}}$ ή $2^{\text{η}}$). Προφανώς για την $1^{\text{η}}$ (αρχική) τιμή της τάσης ισχύει $(\tau_{\theta\theta}^0)_1 = (\tau_{\theta\theta}^0)_2 = \tau_{\theta\theta}^0$

Επιπλέον πρέπει να αναφερθεί ότι σύμφωνα με την τεχνική Euler οι ποσότητες των παραγώγων των διπολικών τάσεων είναι ίσες με:

$$\frac{\partial m_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} = \frac{(m_{\theta\theta}^{i+1} - m_{\theta\theta}^i)}{\Delta\theta} \quad (\Gamma.4a)$$

Και

$$\frac{\partial^2 m_{\theta\theta}^i}{\partial \theta^2} = \frac{\left(\frac{\partial m_{\theta\theta}^{i+1}}{\partial \theta} - \frac{\partial m_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} \right)}{\Delta\theta} \quad (\Gamma.4b)$$

Οι ποσότητες $m_{\theta\theta}^i$ έχουν προκύψει από τις διαφορικές εξισώσεις (3.2.5) και είναι ανεξάρτητες των καμπυλοτήτων και τάσεων του προβλήματος. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκονται και οι παράγωγοι της διπολικής τάσης $m_{r\theta\theta}^i$

Παράρτημα Δ

Ο τρόπος αριθμητικής επίλυσης είναι για μία ακόμη φορά η μέθοδος Euler. Οι εξισώσεις (3.2.10a,b) οι οποίες θυμίζουμε ότι είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_{\theta\theta}}{\partial \theta} + A_1(\theta)m_{\theta\theta} + B_1(\theta)m_{r\theta\theta} &= 0 \\ \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + A_2(\theta)m_{\theta\theta} + B_2(\theta)m_{r\theta\theta} &= 0\end{aligned}\tag{\Delta.1a,b}$$

με την μέθοδο του Euler γίνονται:

$$\begin{aligned}\frac{(m_{\theta\theta}^{i+1} - m_{\theta\theta}^i)}{\Delta\theta} + A_1^i(\theta_i)m_{\theta\theta}^i + B_1^i(\theta_i)m_{r\theta\theta}^i &= 0 \\ \frac{(m_{r\theta\theta}^{i+1} - m_{r\theta\theta}^i)}{\Delta\theta} + A_2^i(\theta_i)m_{\theta\theta}^i + B_2^i(\theta_i)m_{r\theta\theta}^i &= 0\end{aligned}\tag{\Delta.2a,b}$$

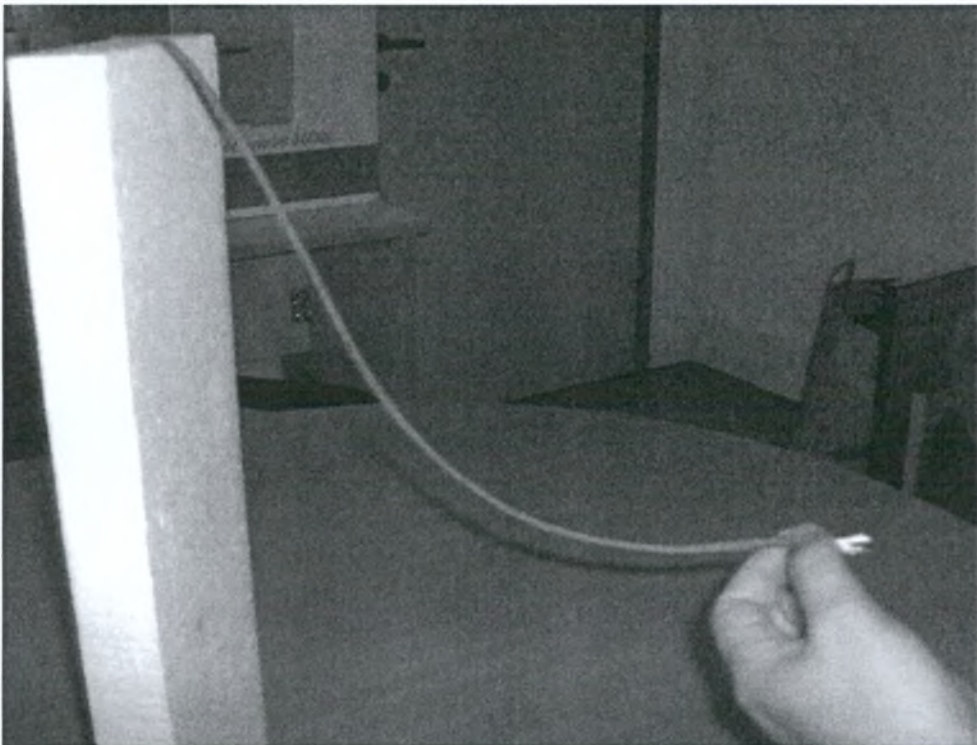
οι οποίες αν λυθούν ως προς τις ζητούμενες τιμές γίνονται:

$$\begin{aligned}m_{\theta\theta}^{i+1} &= [-A_1^i(\theta_i)m_{\theta\theta}^i - B_1^i(\theta_i)m_{r\theta\theta}^i]\Delta\theta + m_{\theta\theta}^i \\ m_{r\theta\theta}^{i+1} &= [-A_2^i(\theta_i)m_{\theta\theta}^i - B_2^i(\theta_i)m_{r\theta\theta}^i]\Delta\theta + m_{r\theta\theta}^i\end{aligned}\tag{\Delta.3a,b}$$

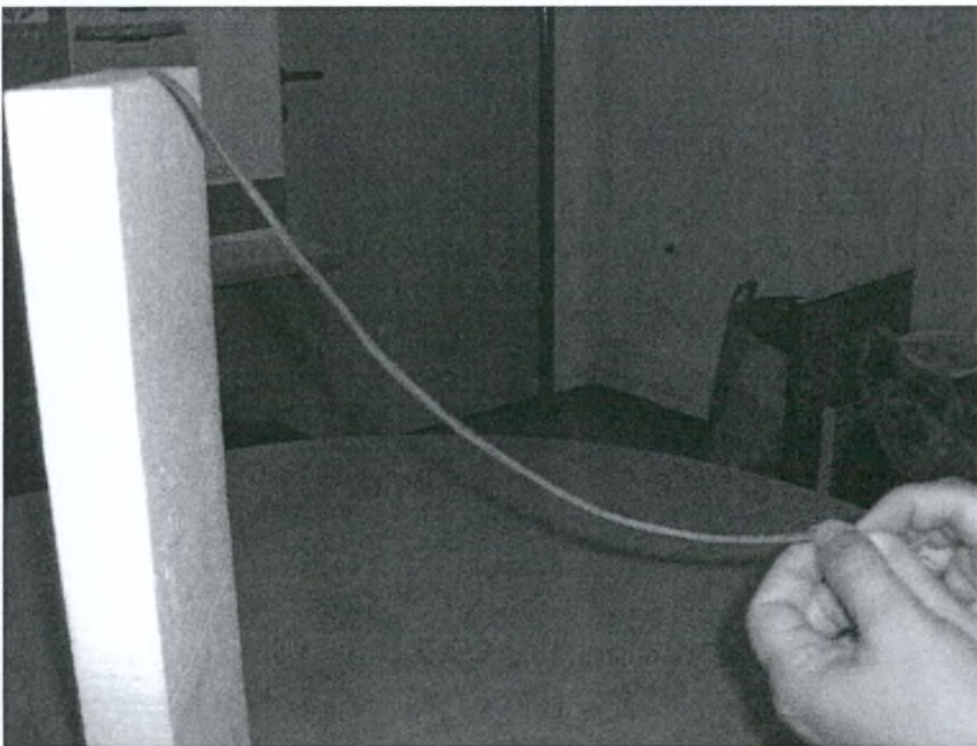
Οπότε αν δώσουμε 2 αρχικές τιμές για τις διπολικές τάσεις $m_{\theta\theta}, m_{r\theta\theta}$ τότε με τον επαναληπτικό τύπο που δημιουργήθηκε μπορούμε να υπολογίσουμε τα δίπολα για κάθε γωνία $\theta_i + \Delta\theta_i$

Παράρτημα Ε

Παρακάτω παρουσιάζονται εικόνες στις οποίες φαίνεται η επιρροή του διπολικού φορτίου στην παραμόρφωση του καλωδίου.



Εικόνα 1: Παραμόρφωση του καλωδίου χωρίς επιβολή διπολικού φορτίου.



Εικόνα 1: Παραμόρφωση του καλωδίου με επιβολή διπολικού φορτίου.

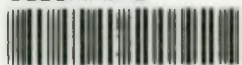
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Βαρδουλάκης Ι. Γιαννακόπουλος Α.Ε. (2004). Τεχνική Μηχανική Ι. Εκδόσεις «Συμμετρία»
- [2] Vardoulakis, I. and Giannakopoulos, A.E. (2006). An example of double forces taken from structural analysis, *Int. J. of Solids and Structures*. Vol 43, pp 4047-4062
- [3] Mindlin, R.D. and Eshel, N.H. (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity, *Int. J. of Solids and Structures*. Vol 4, pp 109-124
- [4] Bleustein, J.L. (1967). A note of the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory, *Int. J. of Solids and Structures*. Vol 3 pp 1053-1057
- [5] Τσαμασφύρος, Γ (1990). Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων ΙΙ, εκδόσεις «Φούντας»
- [6] Papargyri-Beskou, S. , Tsepoura, K.G., Polyzos, P and Beskos, D.E. (2003). Bending and elasticity analysis of gradient elastic beams, *Int. J. of Solids and Structures*. Vol 40, pp 385-400
- [7] Σιφναίου, Μ.Δ. (2006). Προβλήματα εγκοπών και Ρωγμών στα Πλαίσια Θεωριών Ελαστικότητας Τύπου Βαθμίδας. Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ.





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091565