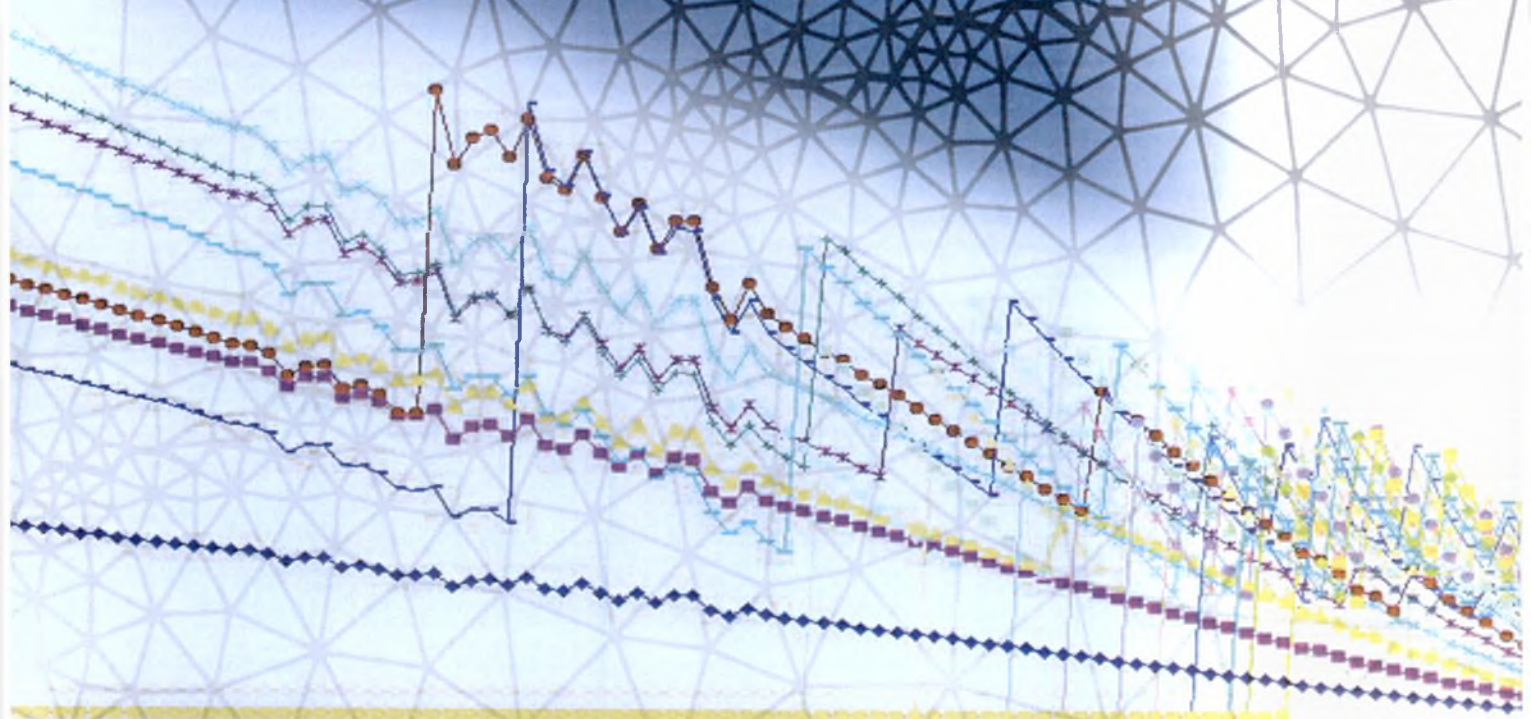


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διερεύνηση της εξάρτησης της λύσης από τη διάσταση του κανάβου πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα μη κυρτής βελτιστοποίησης.

Νικόλαος Π. Α. Πολίτης



Τριμελής Επιτροπή \_\_\_\_\_  
Ευριπίδης Μυστακίδης, επίκ. καθηγητής Π.Θ.  
Φίλιππος Περδικάρης, καθηγητής Π.Θ.  
Σπύρος Καραμάνος, λέκτορας Π.Θ.

ΒΟΛΟΣ 2000



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ 204/2000 ΠΑ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 924/1  
Ημερ. Εισ.: 17-07-2000  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2000  
ΠΟΛ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000062106

## Ευχαριστίες

Θεωρώ χρέος μου από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Δρ. Ε. Μυστακίδη για την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλε και για την άψογη συνεργασία που είχαμε τόσο κατά την εκπόνηση της Διπλωματικής αυτής Εργασίας όσο και καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Ευχαριστώ τους σεβαστούς μου καθηγητές για τις γνώσεις και τον τρόπο σκέψης που μου μετέδωσαν. Θα θυμάμαι πάντα την αγωνία τους για την ανάπτυξη του Τμήματος και την προσπάθειά τους για την παροχή υψηλού επιπέδου εκπαίδευσης. Ευχαριστώ τους καθηγητές Φ. Περδικάρη και Σπ. Καραμάνο που με τίμησαν με την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή. Επίσης ευχαριστώ τη γραμματεία του Τμήματος που ήταν πάντα ανοιχτή για τους φοιτητές και πρόθυμη να μας εξυπηρετήσει.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Δρ. Ολυμπία Κ. Παναγούλη για την σημαντική συνεισφορά της στο 2<sup>ο</sup> παράδειγμα με τα fractals καθώς και τον γραφίστα κ. Δ. Ζήσιμο για την επιμέλεια του εξώφυλλου.

Ευχαριστώ τους φίλους μου που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου που με βοήθησε με κάθε τρόπο στις σπουδές μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, στους οποίους και αφιερώνεται αυτή η εργασία.

Νικόλαος Π. Α. Πολίτης  
Βόλος, 30 Ιουνίου 2000

*Η εργασία αυτή αφιερώνεται  
στους γονείς μου.*

# Περιεχόμενα

<b>1</b>		<b>3</b>
1.1	Η ΜΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ . . . . .	3
1.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΠΕΡΔΥΝΑΜΙΚΟΥ . . . . .	4
1.3	ΤΥΠΙΚΟ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ . . . . .	8
<b>2</b>		<b>15</b>
2.1	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ . . . . .	15
2.1.1	ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗΣ . . . . .	15
2.1.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗΣ ΕΠΑΦΗΣ . . . . .	19
2.1.3	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΒΗΣ ΜΕ ΚΥΡΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ . . . . .	27
2.1.4	ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ-ΤΡΙΒΗΣ . . . . .	30
2.2	ΝΟΜΟΙ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΕΠΑΦΗΣ (ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗΣ) . . . . .	31
2.2.1	ΜΟΡΦΩΣΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΗΜΙΜΕΤΑΒΟΛΩΝ . . . . .	31
2.2.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΒΗΣ ΜΕ ΜΗ ΚΥΡΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ . . . . .	34
<b>3</b>		<b>37</b>
3.1	ΓΕΝΙΚΑ . . . . .	37
3.2	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΜΗ ΚΥΡΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ . . . . .	38
3.3	ΚΥΡΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ . . . . .	40
3.3.1	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ . . . . .	41
3.3.2	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ COULOMB . . . . .	44
3.3.3	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ COULOMB ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ . . . . .	45

3.4	ΜΗ ΚΥΡΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ . . . . .	49
3.4.1	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ . . . . .	50
3.4.2	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΤΡΙΒΗ . . . . .	53
3.4.3	ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΤΡΙΒΗ ΚΑΙ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ . . . .	54
<b>4</b>		<b>59</b>
4.1	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 . . . . .	59
4.2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ FRACTALS . . . . .	73
4.2.1	ΓΕΝΙΚΑ . . . . .	73
4.2.2	ΤΑ FRACTALS ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΔΡΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ . . . . .	73
4.2.3	Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΔΡΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΠΟΛΥΕΠΙΠΕΔΟΥ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΠΡΟΦΙΛ . .	76
4.3	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 . . . . .	78

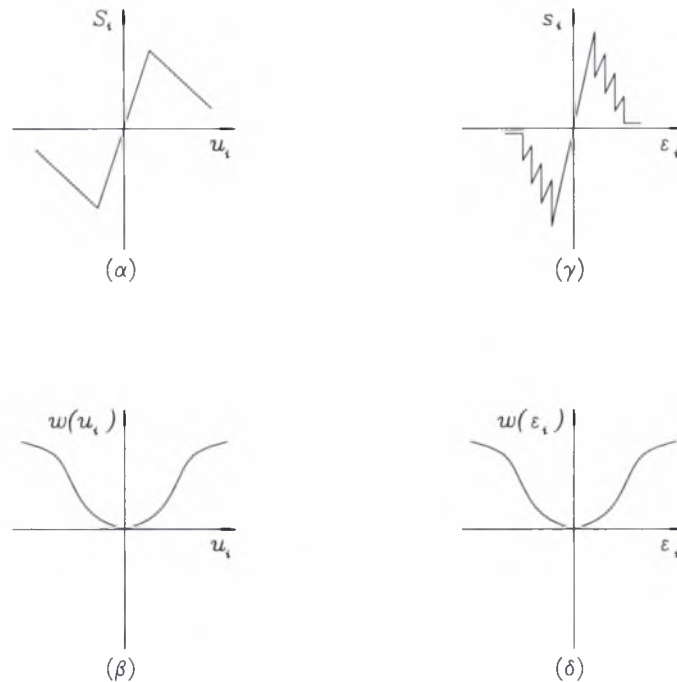
# Κεφάλαιο 1

## 1.1 Η ΜΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μη κυρτά και η μη λεία προβλήματα παρουσιάζονται συχνά στη μηχανική. Σε πολλές περιπτώσεις, με πρακτικό ενδιαφέρον και σημασία, οι δυνατότητες που προσφέρει η βελτιστοποίηση, με τους αλγόριθμους, μπορούν πραγματικά να βελτιώσουν την συμπεριφορά και να διευρύνουν το εύρος της εφαρμοσιμότητας των αλγορίθμων της υπολογιστικής μηχανικής. Για μία ομάδα προβλημάτων αυτή η προσέγγιση είναι η μόνη που μπορεί να εφαρμοσθεί.

Στα προβλήματα αυτά η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορεί να είναι μη κυρτή ή/και μη λεία. Η μη κυρτότητα της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζεται σαν αποτέλεσμα της εισαγωγής ενός μη μονότονου και πιθανώς πλειότιμου νόμου τάσης - παραμόρφωσης ή δύναμης - μετακίνησης. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το μη μονότονο διάγραμμα δύναμης ( $S_i$ ) - μετακίνησης ( $u_i$ ) του σχήματος 1.1α το οποίο αντιστοιχεί στο μη κυρτό ενεργειακό δυναμικό του σχήματος 1.1β. Παρόμοια είναι και η κατάσταση με τον πριονωτό νομο τάσης - παραμόρφωσης του σχήματος 1.1γ ο οποίος εμφανίζεται για οπλισμένο σκυρόδεμα υπό εφελκυσμό και οδηγεί σε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του σχήματος 1.1δ. Τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να εμφανισθούν σε σε διάφορα προβλήματα της δομικής μηχανικής.

Μία συνήθης περίπτωση είναι αυτή των προβλημάτων διεπιφανειών. Μπορούμε εδώ να αναφέρουμε το διάγραμμα δύναμης μετακίνησης (ή σχετικής μετακίνησης) του σχήματος 1.2α το οποίο παρουσιάζεται κατά την εφαπτομενική διεύθυνση όταν δύο σώματα είναι σε επαφή μέσω συγκόλλησης όπως για παράδειγμα όταν είναι κολλημένα με κάποιο συγκολλητικό υλικό. Το υλικό αυτό μπορεί να αντέξει μικρές εφελκυστικές ή θλιπτικές δράσεις και παρουσιάζει είτε ψαθυρή θραύση (διάστικτη γραμμή) είτε ημιψαθυρή θραύση. Στην περίπτωση ψαθυρής θραύσης ο νόμος έχει εντελώς κατακόρυφους κλάδους



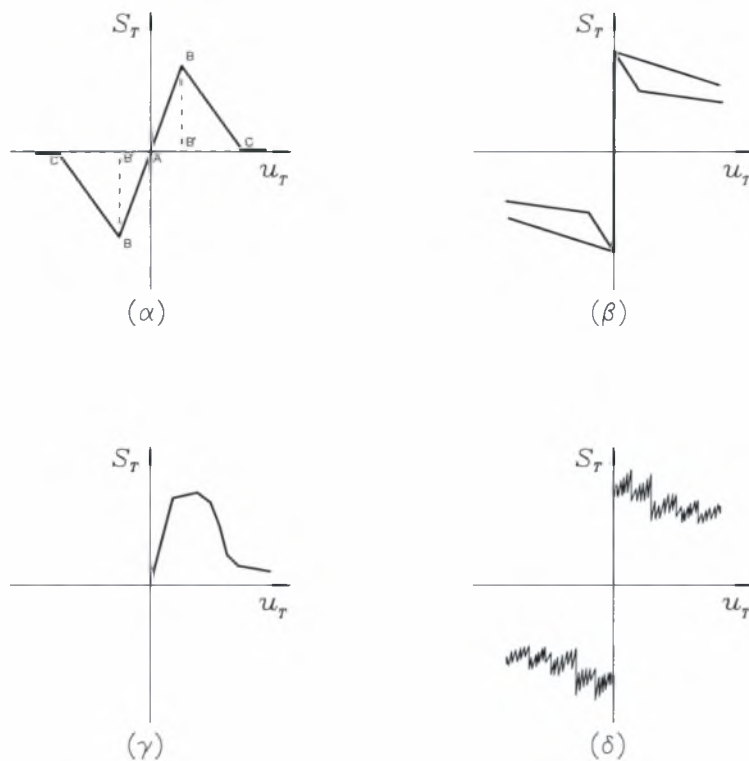
Σχήμα 1.1: Μη μονότονοι νόμοι και τα αντίστοιχα μη κυρτά υπερδυναμικά

(δηλαδή είναι πλειότιμος). Το ίδιο μπορεί να συμβεί και στις διεπιφάνειες μεταξύ δοκών ή δίσκων τύπου sandwich. Μπορούν ακόμη να αναφερθούν οι μη μονότονες εκδοχές του γνωστού νόμου τριβής του Coulomb (σχήμα 1.2β) ή του νόμου τριβής μεταξύ του σπλισμού και του σκυροδέματος του σχήματος 1.2γ. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι πειραματικά δεδομένα επιβεβαιώνουν την τύπου fractal φύση των νόμων τριβής σε ένα αριθμό προβλημάτων της μηχανικής που εμπλέκουν διαδικασία εμπλοκής - ολίσθησης (stick - slip) (σχήμα 1.2δ, [1]). Αυτό έχει σαν συνέπεια να αυξάνεται η δυσκολία της θεωρητικής και αριθμητικής διαχείρισης τέτοιων προβλημάτων.

## 1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΠΕΡΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Το σύνηθες πρόβλημα στην ανάλυση των κατασκευών συνίσταται στην εύρεση ενός σημείου ισορροπίας μέσα στο χώρο του πεδίου των μετακινήσεων κάτω από μια δοσμένη τιμή του πεδίου των δυνάμεων και των συνοριακών συνθηκών. Κατά τη διαδικασία επιβολής ενός πεδίου μετακινήσεων, το μηχανικό σύστημα





Σχήμα 1.2: Μη μονότονοι νόμοι διεπιφάνειας

περνά από ανηγμένες παραμορφώσεις, αντιστέκεται αναπτύσσοντας τοπικές δυνάμεις αντίδρασης σε απειροστό επίπεδο (τάσεις) και απορροφά έργο το οποίο προέρχεται από το πεδίο των φορτίσεων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί με τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Η εύρεση του σημείου ισορροπίας ενός δομικού συστήματος είναι ισοδύναμη με την εύρεση του ελάχιστου της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας που εκφράζει το συνολικό έργο του συστήματος, δηλαδή το έργο που απορροφήθηκε από την κατασκευή μείον το παρεχόμενο από το πεδίο των φορτίσεων έργο.

Όταν το μηχανικό σύστημα παραμένει στο κανονικό πλαίσιο λειτουργίας, δηλαδή τα φορτία δεν είναι ικανά να προκαλέσουν αστοχία του συστήματος και κανένας άλλος σύνθετος φυσικός μηχανισμός (συμπεριφορά υλικού, μονόπλευρη επαφή, γεωμετρική μη γραμμικότητα, κ.λ.π.) δεν συνεισφέρει στην ενεργειακή ισορροπία του συστήματος, η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι τετραγωνική και το αντίστοιχο χωρίς περιορισμούς τετραγωνικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης αποτελεί ένα απλό πρόβλημα για την αριθμητική επίλυση.

Σε άλλες περιπτώσεις εμφανίζονται μη τετραγωνικά στοιχεία δυναμικής ενέργειας. Λόγω της μη τετραγωνικής μορφής της συνάρτησης δυναμικού αναγκάζεται κανείς να κάνει χρήση μιας τεχνικής μη γραμμικής επίλυσης τύπου Newton - Raphson. Ωστόσο υπάρχει συχνά η πιθανότητα οι παλιές κλασσικές μέθοδοι της γραμμικής ή γραμμικοποιημένης ανάλυσης να παρουσιάζουν απαγορευτικές δυσκολίες τόσο στην διατύπωση όσο και στην αριθμητική προσέγγιση προβλημάτων τα οποία εμπλέκουν μη μονότονους και πιθανώς πλειότιμους νόμους τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης ή δύναμης μετακίνησης [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είτε οι νόμοι τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης στο εσωτερικό του ελαστικού σώματος, είτε οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι πλειότιμες στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος. Κατά συνέπεια οι αντίστοιχες συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας είναι μη κυρτές και μη λείες.

Οι τύποι μεταβολής τέτοιων προβλημάτων ονομάστηκαν ανισότητες ημιμεταβολών [9], [4], [5], [6], [10]. Οι αντίστοιχες μη κυρτές συναρτήσεις ενέργειας ονομάζονται μη κυρτά υπερδυναμικά σε αντιστοιχία με την περίπτωση της μονότονης μηχανικής συμπεριφοράς που περιγράφεται από κυρτό υπερδυναμικό, από όπου προκύπτουν οι ανισότητες μεταβολών [11], [12], [4].

Η θεωρία των ανισοτήτων μεταβολών είναι στενά συνδεδεμένη με την ιδέα των κυρτών, μη διαφορίσιμων υπερδυναμικών τα οποία εισήχθησαν στην μηχανική από τον J. J. Moreau [13], [14] για μονότονες και πιθανώς πλειότιμες συνοριακές συνθήκες και καταστατικούς νόμους. Από την άλλη οι ανισότητες ημιμεταβολών εισήχθησαν σαν μια γενίκευση των ανισοτήτων μεταβολών από τον Π. Δ. Παναγιωτόπουλο [9], [4], [3]. Συνδέονται ευθέως με τα μη κυρτά υπερδυναμικά και περιγράφουν μη μονότονες συνοριακές συνθήκες ή καταστατικούς νόμους.

Από τη θεωρητική πλευρά του θέματος η μετάβαση αυτή στα μη κυρτα προβλήματα απαιτεί νέα εργαλεία για τη μελέτη των προβλημάτων που εμφανίζονται. Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για τα μη λεία υπερδυναμικά τα οποία εμπλέκονται [4], [3], [15] οι προαναφερθείσες ανισότητες ημιμεταβολών είναι ισοδύναμες με προβλήματα ελαχιστοποίησης μη κυρτης, μη λείας δυναμικής ή συμπληρωματικής ενέργειας.

Η θεωρία των ανισοτήτων ημιμεταβολών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα τοπικά ελάχιστα της δυναμικής ή συμπληρωματικής ενέργειας της κατασκευής εκφράζουν θέσεις ισορροπίας του προβλήματος. Είναι ωστόσο πιθανό κάποιες από τις λύσεις του προβλήματος να μην είναι τοπικά ελάχιστα αλλά άλλα πιο γενικού τύπου σημεία τα οποία καθιστούν την δυναμική ή συμπληρωματική ενέργεια "υποστάσιμη". Είναι λύσεις του διαφορικού εγκλεισμού  $0 \in \partial \Pi(u)$ ,

όπου  $\Pi$  είναι η δυναμική ενέργεια,  $u$  είναι το διάνυσμα των μετακινήσεων και το  $\bar{\delta}$  συμβολίζει το γενικευμένο διαφορικό των Clarke - Rockafellar [16], [17]. Ανάλογο πρόβλημα υποστασιμότητας μπορεί να μορφωθεί σε όρους της συμπληρωματικής ενέργειας της κατασκευής  $\Pi^c$  και των τάσεων  $s$  ήτοι  $0 \in \bar{\delta}\Pi^c(s)$ .

Τα σημεία υποστασιμότητας που προκύπτουν (όλα τα τοπικά ελάχιστα, συγκεκριμένα τοπικά μέγιστα ή σημεία σάγματος) αποτελούν όλες τις πιθανές λύσεις μιας ανισότητας ημιμεταβολών. Αυτό αποτελεί μια γενίκευση των θεωρημάτων της ελάχιστης δυναμικής ή συμπληρωματικής ενέργειας τα οποία ισχύουν στην περίπτωση των ισοτήτων και ανισοτήτων μεταβολών [11], [4].

Ο προσδιορισμός ολόκληρου του συνόλου των λύσεων ενός προβλήματος υποστασιμότητας ακόμα και όταν εμπλέκονται μόνο λεία συναρτησιακά εμπλέκονται, παραμένει μέχρι τώρα ένα ανοιχτό πρόβλημα και αποτελεί περιοχή έρευνας της υπολογιστικής μηχανικής.

Επιπλέον, πρέπει να έχουμε κατά νου ότι τα ερωτήματα που τίθενται στη μηχανική είναι κάποιες φορές διαφορετικά από αυτά που τίθενται στην καθολική βελτιστοποίηση. Ένα καθολικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας μιας κατασκευής μπορεί να είναι σχετικά ήσσωνος σημασίας εάν μια δοσμένη ιστορία φόρτισης δεν είναι επαρκής να οδηγήσει την κατασκευή πλησίον του σημείου ισορροπίας. Σταθερές ή ασταθείς ισορροπίες, δηλαδή τοπικά ελάχιστα ή σημεία υποστασιμότητας, που προκύπτουν από μία δοσμένη ιστορία φορτίσεων ίσως να είναι μεγαλύτερης σημασίας σε αυτή την περίπτωση.

Επιπρόσθετα, τα προβλήματα της μηχανικής συνήθως έχουν μεγάλη διάσταση, λόγω των μερικών χιλιάδων βαθμών ελευθερίας. Επιπλέον αρκετοί τύποι προβλημάτων της μηχανικής είναι ανεξάρτητοι της ιστορίας ή του μονοπατιού της φόρτισης. Για το λόγο αυτό μόνο σταθερές ή ασταθείς λύσεις πάνω στο συγκεκριμένο μονοπάτι φόρτισης είναι σημαντικές. Συνεπώς οι αλγόριθμοι που υπάρχουν σήμερα για προβλήματα μη κυρτής βελτιστοποίησης παρέχουν μόνο μερική λύση στα προβλήματα της μηχανικής.

Παρά την εξέλιξη στη θεωρητική μελέτη της ύπαρξης και της προσέγγισης λύσεων πολλά είναι τα ερωτήματα σχετικά με τις μεταβλητές ανισότητες [6], [3],[18], [19], [20], [21], [22], [15], [23], [24] και σχετικά λίγες είναι οι μέθοδοι που υπάρχουν για την αριθμητική διαχείριση των προβλημάτων αυτών. Στη βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

- Η dissipation method [25] η οποία έχει πολλά πλεονεκτήματα από την άποψη της φυσικής ερμηνείας της μη μονοτονικότητας.
- Μέθοδοι τύπου δέσμης μη λείας βελτιστοποίησης [26], [27], [2], [28], [29],

[30].

- Τεχνικές κανονικοποίησης που καταλήγουν σε μια σειρά ισοτήτων μεταβολών.
- Μη γραμμικοί επιλύτες με έλεγχο βήματος - μήκους για να μένουν σταθεροί γύρω από οριακά σημεία βασισμένα σε μία ευθεία επιβολή του μη μονότονου διαγράμματος τάσεων - ανηγμένων παραμορφώσεων [31], [32], [33], [34], [35].

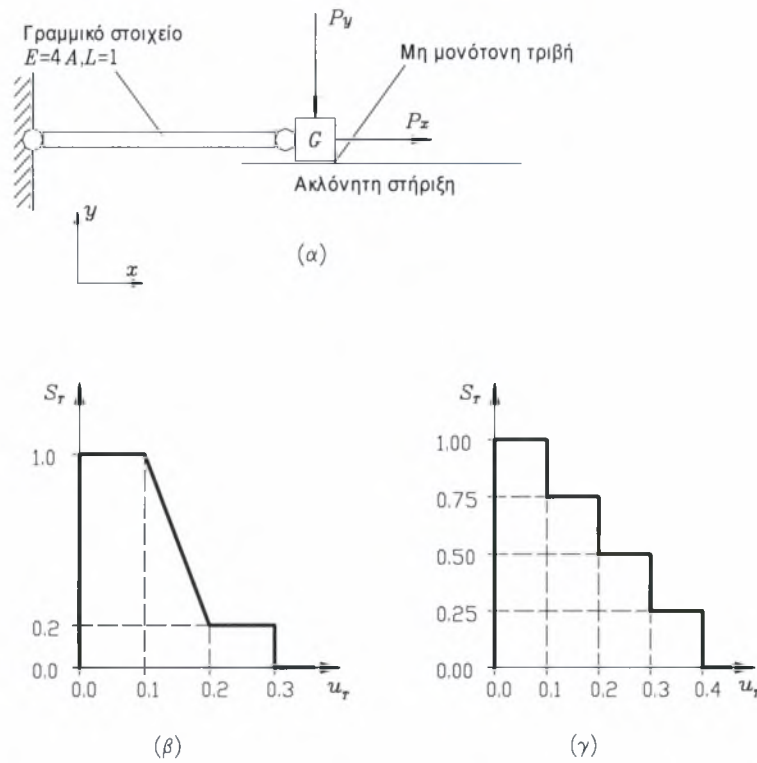
Κάποιες από τις μεθόδους αυτές μπορούν να βρουν μόνο περιορισμένες πρακτικές εφαρμογές επειδή η αποτελεσματικότητά τους πέφτει κατακόρυφα με την αύξηση του μεγέθους του προβλήματος (της τάξεως των 100 αγνώστων) λόγω κυρίως των προβλημάτων μαθηματικής ευστάθειας. Ακόμα έχουν έμφυτες δυσκολίες σχετικά με τη διαχείριση των απολύτως κατακόρυφων κλάδων των διαγραμμάτων τάσεων - ανηγμένων παραμορφώσεων ή δυνάμεων - μετακινήσεων.

### 1.3 ΤΥΠΙΚΟ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε με την εισαγωγή μη μονότονων νόμων στα προβλήματα της μηχανικής μέσω ενός απλού παραδείγματος. Η κατασκευή αποτελείται από ένα άκαμπτο σώμα  $G$  το οποίο έρχεται σε επαφή με μία άκαμπτη ακλόνητη στήριξη. Ανάμεσα στο σώμα και τη στήριξη θεωρούμε ότι αναπτύσσονται συνθήκες επαφής με τριβή ή με κάποιο συγκολλητικό. Θεωρούμε ότι οι συνθήκες αυτές περιγράφονται είτε με το μη μονοτονο νόμο του σχήματος 1.3β είτε από τον επίσης μη μονότονο νόμο του σχήματος 1.3γ. Επιπλέον το σώμα συνδέεται μέσω μιας ράβδου με μια ακλόνητη στήριξη. Το μέτρο ελαστικότητας του του στοιχείου είναι  $E = 4$  και έχει μοναδιαίο μήκος  $L$  και μοναδιαία επιφάνεια  $A$ , όλα σε συμβατές μονάδες. Η κατασκευή φορτίζεται με δυνάμεις  $P_x$  και  $P_y$  στο  $G$ . Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις πιθανές θέσεις ισορροπίας του συστήματος.

Σύμφωνα με την στοιχειώδη θεωρία της μηχανικής, η μη κυρτή συνάρτηση ενέργειας  $\Pi_{nc}$  για το πρόβλημα αυτό είναι το άθροισμα των μη κυρτών υπερδυναμικών  $j$  του μη μονότονου νόμου που απεικονίζεται στα σχήματα 1.3β ή 1.3γ μείον την ενέργεια που προσδίδει η φόρτιση, ήτοι:

$$\Pi_{nc} = \Pi_q(u_x) + j(u_x) = \frac{1}{2}u_x \frac{EA}{L}u_x - P_x u_x + j(u_x)$$



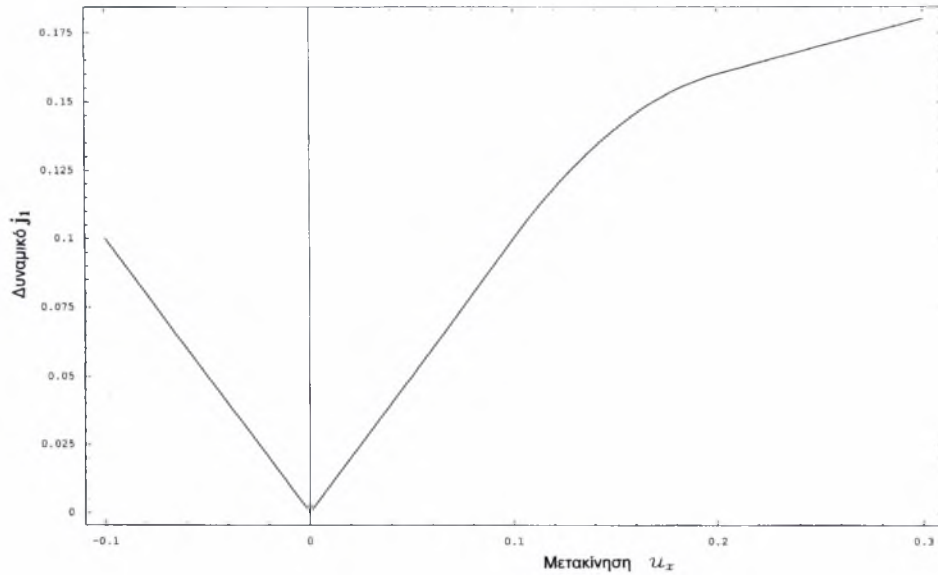
Σχήμα 1.3: Μοντέλο μονόπλευρης επαφής με μη μονότονη τριβή

$$= 2u_x^2 - P_x u_x + j(u_x) \quad (1.1)$$

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση του πρώτου νόμου. Εύκολα προκύπτει ότι ο μη μονότονος αυτός νόμος  $g_1(u_x)$  του σχήματος 1.3β εκφράζεται από την πολυκλαδική συνάρτηση (1.2)

$$g_1(u_x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{για } u_x = 0 \\ 1.0 & \text{για } u_x \in (0, 0.1] \\ -8u_x + 1.8 & \text{για } u_x \in (0.1, 0.2] \\ 0.2 & \text{για } u_x \in (0.2, 0.3) \\ [0, 0.2] & \text{για } u_x = 0.3 \\ 0 & \text{για } u_x \in (0.3, \infty) \end{cases} \quad (1.2)$$

και το αντίστοιχο μη κυρτό υπερδυναμικό  $j_1(u_x)$  έχει τη μορφή:



Σχήμα 1.4: Εξίσωση δυναμικού

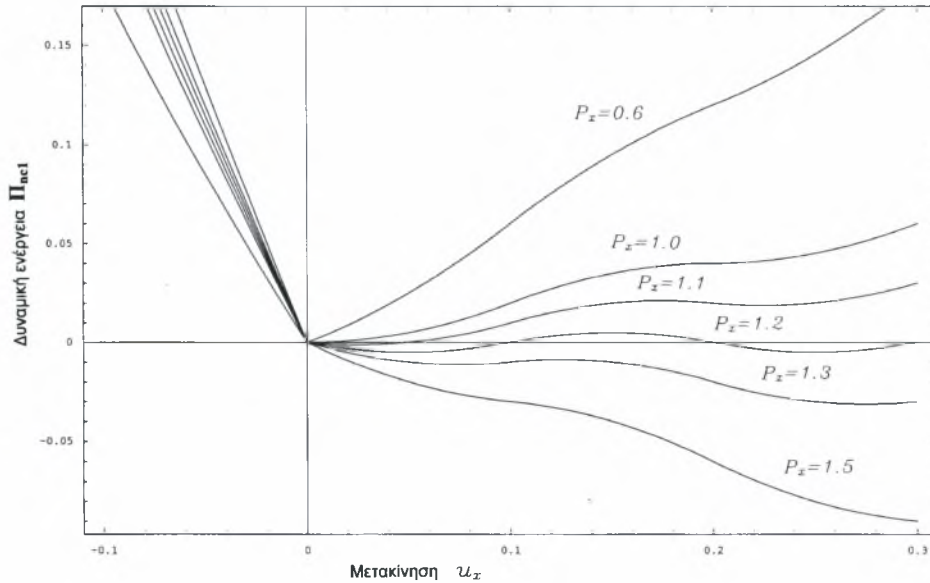
$$j_1(u_x) = \begin{cases} 0 & \text{για } u_x = 0 \\ u_x & \text{για } u_x \in (0, 0.1] \\ -4u_x^2 + 1.8u_x - 0.04 & \text{για } u_x \in (0.1, 0.2] \\ 0.2u_x + 0.12 & \text{για } u_x \in (0.2, 0.3) \\ 0.18 & \text{για } u_x = 0.3 \\ 0.18 & \text{για } u_x \in (0.3, \infty) \end{cases} \quad (1.3)$$

και παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 1.4

Το σχήμα 1.5 απεικονίζει τη συνάρτηση  $\Pi_{nc1}$  για διάφορες τιμές της εξωτερικής φόρτισης. Σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι μη κυρτή και μη λεία. Πράγματι η μη λειότητα προκαλείται από την ύπαρξη κατακόρυφου κλάδου στο σημείο  $u_x = 0$  (σχήμα 1.3β). Σαν συνέπεια του κλάδου αυτού παίρνουμε το σημείο μη διαφορισιμότητας στο διάγραμμα του σχήματος 1.5. Επιπλέον η μη κυρτότητα των υπερδυναμικών προκαλείται από τη φθίνουσα μορφή του διαγράμματος 1.3β.

Τα σημεία υποστασιμότητας της μη κυρτής συνάρτησης  $\Pi_{nc1}$  για μια δεδομένη φόρτιση μπορούν να βρεθούν (στο συγκεκριμένο απλό παράδειγμα) υπολογίζοντας τις παραγώγους ως προς  $u_x$  στα αντίστοιχα διαστήματα. Παρατηρούμε ότι ενώ η συνάρτηση είναι πάντα μη κυρτή δεν έχει πολλαπλές για

όλες τις φορτίσεις. Για παράδειγμα, για  $P_x = 0.6$  και  $P_x = 1.0$  το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Αντίστοιχα για  $1.1 \leq P_x \leq 1.3$  έχουμε 2 λύσεις.

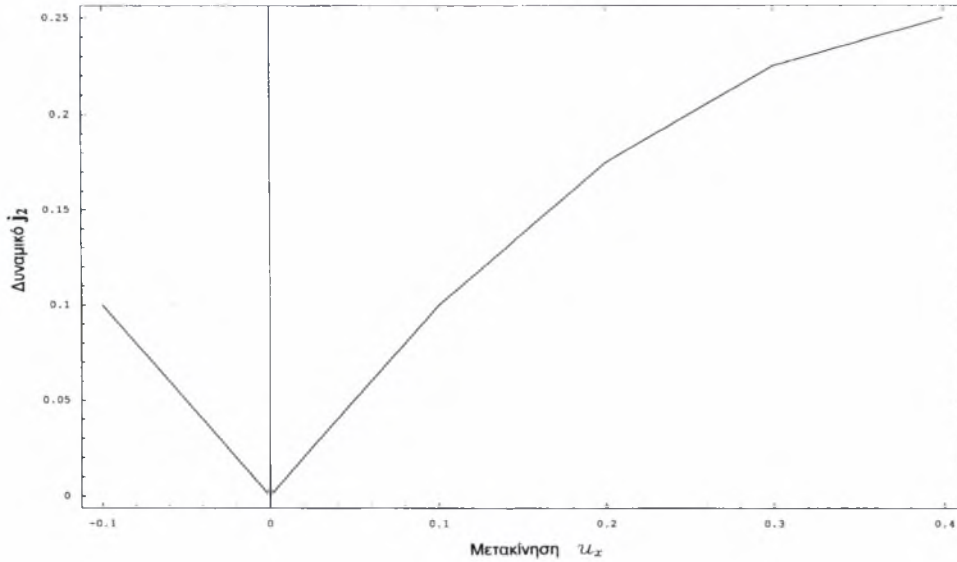


Σχήμα 1.5: Δυναμική ενέργεια

Ομοίως ο μη μονότονος νόμος  $g_2(u_x)$  του σχήματος 1.3γ εκφράζεται από την πολυκλαδική συνάρτηση

$$g_2(u_x) = \begin{cases} [0.00, 1.00] & \text{για } u_x = 0 \\ 1.00 & \text{για } u_x \in (0, 0.1) \\ [0.75, 1.00] & \text{για } u_x = 0.1 \\ 0.75 & \text{για } u_x \in (0.1, 0.2) \\ [0.75, 0.50] & \text{για } u_x = 0.2 \\ 0.50 & \text{για } u_x \in (0.2, 0.3) \\ [0.50, 0.25] & \text{για } u_x = 0.3 \\ 0.25 & \text{για } u_x \in (0.3, 0.4) \\ [0.25, 0.00] & \text{για } u_x = 0.4 \\ 0.00 & \text{για } u_x \in (0.4, \infty) \end{cases} \quad (1.4)$$

και το αντίστοιχο μη κυρτό υπερδυναμικό  $j_2(u_x)$  έχει τη μορφή:



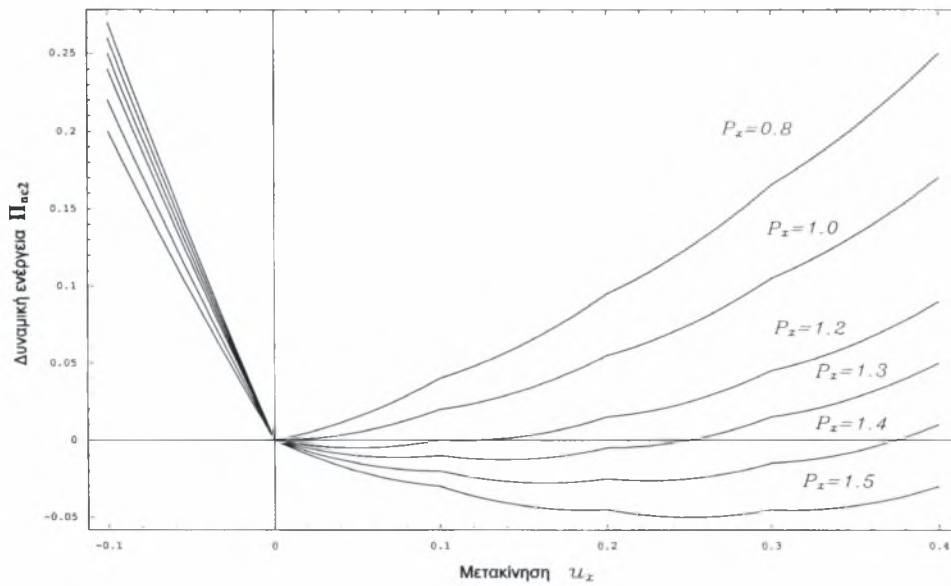
Σχήμα 1.6: Εξίσωση δυναμικού

$$j_2(u_x) = \begin{cases} 0 & \text{για } u_x = 0 \\ u_x & \text{για } u_x \in (0, 0.1) \\ 0.1 & \text{για } u_x = 0.1 \\ 0.1 + (u_x - 0.1)0.75 & \text{για } u_x \in (0.1, 0.2) \\ 0.175 & \text{για } u_x = 0.2 \\ 0.175 + (u_x - 0.2)0.5 & \text{για } u_x \in (0.2, 0.3) \\ 0.225 & \text{για } u_x = 0.3 \\ 0.225 + (u_x - 0.3)0.25 & \text{για } u_x \in (0.3, 0.4) \\ 0.25 & \text{για } u_x = 0.4 \\ 0.25 & \text{για } u_x \in (0.4, \infty) \end{cases} \quad (1.5)$$

και παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 1.6.

Το σχήμα 1.7 απεικονίζει τη συνάρτηση  $\Pi_{nc2}$  για διάφορες τιμές της εξωτερικής φόρτισης. Σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι μη κυρτή και μη λεία. Πράγματι η μη λειότητα προκαλείται από την ύπαρξη κατακόρυφου κλάδου στα σημεία  $u_x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  (σχήμα 1.3γ). Σαν συνέπεια του κλάδου αυτού παίρνουμε τα σημεία μη διαφορισιμότητας στο διάγραμμα του σχήματος 1.7. Επιπλέον η μη κυρτότητα των υπερδυναμικών προκαλείται από τη φθίνουσα μορφή του διαγράμματος 1.3γ.





Σχήμα 1.7: Δυναμική ενέργεια

Τα σημεία υποστασιμότητας της μη κυρτής συνάρτησης  $\Pi_{nc1}$  για μια δεδομένη φόρτιση μπορούν να βρεθούν (στο συγκεκριμένο απλό παράδειγμα) υπολογίζοντας τις παραγώγους ως προς  $u_x$  στα αντίστοιχα διαστήματα. Παρατηρούμε και εδώ ότι ενώ η συνάρτηση είναι πάντα μη κυρτή δεν έχει πολλαπλές λύσεις για όλες τις φορτίσεις. Για παράδειγμα, για  $P_x = 0.8$  και  $P_x = 1.0$  έχουμε μοναδική λύση το  $u_x = 0$ . Για  $1.2 \leq P_x \leq 1.4$  έχουμε 2 λύσεις ενώ για  $P_x = 1.5$  έχουμε 3 λύσεις.

Βέβαια αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα και μπορούμε εύκολα να βρούμε όλα τα ελάχιστα της μη κυρτής συνάρτησης. Αλλά εάν το πρόβλημα περιέχει μερικούς ακόμα αγνώστους ο προσδιορισμός όλων των ελαχίστων της συνάρτησης γίνεται μια αρκετά επίπονη διαδικασία. Σε αυτή την περίπτωση επιπλέον υποθέσεις πρέπει να εισαχθούν για να βρούμε την τελική λύση (ή λύσεις) αφού όλες οι λύσεις είναι μαθηματικά αποδεκτές.



# Κεφάλαιο 2

## 2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

### 2.1.1 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Εδώ θα εξετάσουμε το ελαστοστατικό πρόβλημα των μικρών μετακινήσεων. Θεωρούμε έναν ελαστικό φορέα που καταλαμβάνει μία περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  με σύνορο  $\Gamma$ . Θεωρούμε επίσης ότι αυτή ανήκει σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Ox_1x_2(x_3)$ . Στόχος της ενότητας αυτής είναι να εκθέσει τον τρόπο με τον γίνεται η μόρφωση των μεταβολών και της αρχής των δυνατών έργων του προβλήματος της ελαστοστατικής ανάλυσης υπό την προϋπόθεση των μικρών μετακινήσεων και της ισχύος γραμμικών ή μη γραμμικών νόμων ελαστικών υλικών. Επισημαίνεται η σύνδεση με την κυρτή (τετραγωνική για γραμμικό υλικό) βελτιστοποίηση.

Η κατασκευή διακριτοποιείται σε  $m_1$  πεπερασμένα στοιχεία. Τα διανύσματα των τάσεων και παραμορφώσεων συμβολίζονται με  $s_i, e_i, i = 1, \dots, m$ . Εδώ το  $m$  εξαρτάται από τον αριθμό των ανεξάρτητων τάσεων (και των αντίστοιχων ανηγμένων παραμορφώσεων) κάθε πεπερασμένου στοιχείου του φορέα [36]). Επιπλέον, έστω  $\mathbf{u}$  το  $n$ -διάστατο διάνυσμα των κομβικών μετακινήσεων και  $\mathbf{p}$  το αντίστοιχο  $n$ -διάστατο διάνυσμα των επικόμβιων φορτίων. Το κλασσικό πρόβλημα της στατικής ανάλυσης περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- *Εξισώσεις ισορροπίας*

$$\mathbf{G}\mathbf{s}=\mathbf{p} \quad (2.1)$$

όπου  $\mathbf{G}$  είναι το μητρώο ισορροπίας του διακριτοποιημένου φορέα.

- *Εξισώσεις συμβιβαστού ανηγμένων παραμορφώσεων - μετακινήσεων:*

$$\mathbf{e} = \mathbf{G}^T \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

- *Καταστατικός νόμος γραμμικού υλικού για την κατασκευή:*

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{F}_0 \mathbf{s}, \quad (2.3)$$

ή

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_0(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0). \quad (2.4)$$

όπου  $\mathbf{F}_0$  και  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{F}_0^{-1}$  είναι τα μητρώα ευκαμψίας και δυσκαμψίας της μη συναρμολογημένης κατασκευής και  $\mathbf{e}_0$  το διάνυσμα των αρχικών παραμορφώσεων.

- Κλασσικές συνοριακές συνθήκες ισότητας γραμμένες στη γενική μορφή:

$$\mathbf{E} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad (2.5)$$

και

$$\mathbf{Z} \mathbf{s} = \mathbf{F} \quad (2.6)$$

όπου  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{Z}$  είναι κατάλληλα ορισμένα μητρώα μετατροπής και  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{F}$  συμβολίζουν τις γνωστές συνοριακές μετακινήσεις (στηρίξεις) και συνοριακές φορτίσεις. Σημειωτέον ότι σε κάθε σημείο του συνόρου μόνο μία από τις (2.5), (2.6) μπορεί να ισχύει.

Για την διακριτοποιημένη κατασκευή μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις των *δυνατών έργων* και των *συμπληρωματικών δυνατών έργων*. Η πρώτη εκφράζει την ισότητα μεταξύ των έργων που παράγονται από τις εσωτερικές τάσεις και των έργων των εφαρμοζόμενων φορτίων και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{s}^T (\mathbf{e}^* - \mathbf{e}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}), \forall \mathbf{e}^*, \mathbf{u}^*, \text{ δεδομένου ότι ισχύουν οι (2.2), (2.5).} \quad (2.7)$$

Το συμπληρωματικό δυνατό έργο περιλαμβάνει μεταβολές στις τάσεις και είναι:

$$\mathbf{e}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) = \mathbf{u}^T(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}), \forall \mathbf{s}^*, \mathbf{p}^*, \text{ δεδομένου ότι ισχύουν οι (2.1), (2.6).} \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας το νόμο γραμμικής ελαστικότητας (2.4) στην αρχή των δυνατών έργων (2.7) και λαμβάνοντας υπόψη την (2.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{K}_0^T \mathbf{G}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - (\mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_0)^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) &= 0, \\ \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid (2.5) \text{ ισχύει} \}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Το  $\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}^T$  συμβολίζει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής ενώ το  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_0$  εκφράζει το ισοδύναμο διάνυσμα επικόμβιων φορτίων (συμπεριλαμβανομένων και των επιδράσεων των αρχικών παραμορφώσεων).

Για μια διατύπωση βασισμένη στις τάσεις (μέθοδος των δυνάμεων) χρησιμοποιούμε το νόμο της ελαστικότητας της μορφής (2.3) και συνοριακές συνθήκες (2.6). Με αντίστοιχη αιτιολογία παίρνουμε από τη σχέση (2.3) την ισότητα για το δυνατό συμπληρωματικό έργο:

$$(\mathbf{e}_0 + \mathbf{s} \mathbf{F}_0)^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) = 0, \quad \forall \mathbf{s}^* \in \Sigma_{ad} = \{ \mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid (2.6) \text{ ισχύει} \}. \quad (2.10)$$

Σημειώνεται ότι λόγω της γραμμικότητας της ισορροπίας και των σχέσεων συμβιβαστού (2.1), (2.2) καθώς και λόγω της γραμμικότητας του καταστατικού νόμου του υλικού (2.3) (ή (2.4)) τα προηγούμενα προβλήματα μεταβολών περιέχουν γραμμικούς και διγραμμικούς όρους. Επομένως και το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας και το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της συμπληρωματικής ενέργειας περιέχουν γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους. Τα δύο προβλήματα ελαχιστοποίησης δυναμικού διατυπώνονται ως εξής:

Να βρεθούν οι  $\mathbf{u} \in V_{ad}$  τέτοιες ώστε:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V_{ad}} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{v} \right\}. \quad (2.11)$$

Να βρεθούν οι  $\mathbf{s} \in \Sigma_{ad}$  τέτοιες ώστε:

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{t} \in \Sigma_{ad}} \left\{ \Pi^c(\mathbf{t}) = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{t} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{t} \right\}. \quad (2.12)$$

Μπορεί να επαληθεύσει κανείς ότι το πρόβλημα (2.7) (και αντιστοιχα το (2.10)) εκφράζει στην πραγματικότητα τις συνθήκες ελαχιστοποίησης για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της ενέργειας (2.11) (και αντίστοιχα το (2.12)) Επιπλέον με χρήση της δυικής θεωρίας κυρτής ανάλυσης είναι δυνατό να δείξουμε ότι οι (2.11) και (2.12) σχετίζονται μεταξύ τους με την έννοια ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας  $\Pi$  είναι η κυρτή σύζευξη της συμπληρωματικής ενέργειας  $\Pi^c$  και το αντίστροφο [4], [37].

Ας θυμηθούμε ότι λόγω των φυσικών περιορισμών που θέλουν ένα υλικό στοιχείο το οποίο υποβάλλεται σε μια ιστορία φορτίσεων να μην μπορεί να παράγει ενέργεια, τα μητρώα  $\mathbf{K}_0, \mathbf{F}_0$  είναι συμμετρικά και θετικώς ημι-ορισμένα. Επιπλέον, το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}^T$  έχει τις ίδιες ιδιότητες. Οι περιορισμοί του στο υποσύνολο που περιγράφεται από επαρκείς συνοριακές συνθήκες στήριξης (2.5) ώστε να αποτραπεί κάθε (έστω και απειροστή) μετακίνηση ή στροφή στερεού σώματος, δηλαδή το μητρώο  $\mathbf{K}_{Vad} = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$  όπου  $\mathbf{V}$  είναι ένα μητρώο που έχει προκύψει από τη σύνθεση βασικών διανυσμάτων του υποσυνόλου  $V_{ad}$  είναι θετικώς ορισμένο (καί γι' αυτό μη ιδιάζον και αντιστρέψιμο). Οι τελευταίες αυτές ιδιότητες εγγυώνται ότι τα προβλήματα βελτιστοποίησης (2.11)-(2.12) είναι κυρτά προβλήματα (και αυστηρώς κυρτά για μια επαρκώς στηριγμένη κατασκευή χωρίς ελευθερίες κίνησης στερεού σώματος).

Το πλαίσιο της κυρτής βελτιστοποίησης της ενέργειας μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί εάν αντί του γραμμικού νόμου ελαστικότητας (2.3), (2.4) υιοθετηθεί ένας γενικός μη γραμμικός μονότονος ελαστικός καταστατικός νόμος. Συνήθως υιοθετείται ένας υπερελαστικός νόμος ο οποίος προκύπτει από μία σχέση τοπικού δυναμικού (αντί των (2.3), (2.4)):

$$\mathbf{s} = \frac{\partial w(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}}, \text{ και αντίστοιχα } \mathbf{e} = \frac{\partial w^c(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}. \quad (2.13)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια έχει σε αυτή την περίπτωση τη μορφή:

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = W(\mathbf{e}) - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} = \sum_{j=1, m_1} w_j(\mathbf{e}_j) - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} \quad (2.14)$$

όπου ο δείκτης  $j$  του αθροίσματος "τρέχει" σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία της κατασκευής. Είναι προφανές ότι η κυρτότητα της  $W(\mathbf{e})$  δεν επηρεάζεται από το γραμμικό κινηματικό μετασχηματισμό (2.2), γι' αυτό καταλήγουμε στην συνάρτηση δυναμικής ενέργειας σε όρους μεταβολών μετακίνησης:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{in}(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} = W(\mathbf{G}^T \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} \quad (2.15)$$

Το τελευταίο αυτό δυναμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να φθάσουμε στη διατύπωση μεταβολών ή του προβλήματος ελαχιστοποίησης της ενέργειας, με τη βοήθεια των κατάλληλων υπολογιστικών κανόνων για τις μερικές παραγώγους ως προς  $u$ . Ανάλογες διατυπώσεις μπορεί να προκύψουν και για το πρόβλημα που βασίζεται στις τάσεις (μέθοδος των δυνάμεων)

## 2.1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗΣ ΕΠΑΦΗΣ

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα μοντέλο διδιάστατης διακριτής ελαστικής κατασκευής με διεπιφάνειες. Το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα γίνει η ανάλυσή μας θα είναι γενικό καθώς οι διεπιφάνειες μπορούν να αντικατασταθούν με συνοριακές συνθήκες (θεωρούμενες σαν διεπιφάνειες με ακλόνητη στήριξη). Χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα θεωρούμε μια κατασκευή αποτελούμενη από δύο μέρη,  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$ , με σύνορα  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  και μια διεπιφάνεια  $\Gamma^{(1,2)}$  που τα συνδέει. Παντού χρησιμοποιείται ένα δεξιόστροφο καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Ox_1x_2$ . Μέσα σε αυτό το πλαίσιο της θεωρίας των μικρών μετακινήσεων και παραμορφώσεων, χρησιμοποιείται μια απλή, κόμβο προς κόμβο, τεχνική τύπου συγκριτικής παράθεσης για τη μοντελοποίηση των σχετικών μετακινήσεων της διεπιφάνειας. Σε αυτή την ενότητα οι πιθανές μη γραμμικότητες του προβλήματος περιορίζονται στην περιοχή της διεπιφάνειας και είναι μονόπλευρου τύπου.

Η μηχανική συμπεριφορά κάθε ζεύγους κόμβων κατά μήκος της διεπιφάνειας εξετάζεται χωριστά κατά την κάθετη και τη εφαπτομενική διεύθυνση ως προς τη διεπιφάνεια. Για το λόγο αυτό θεωρούνται νόμοι διεπιφάνειας μεταξύ των σχετικών, κάθετων στη διεπιφάνεια μετακινήσεων  $[u]_N \in \mathcal{R}$  και των κάθετων στη διεπιφάνεια δυνάμεων  $-S_N \in \mathcal{R}$  και μεταξύ των εφαπτομενικών μετακινήσεων της διεπιφάνειας  $[u]_T \in \mathcal{R}$  και των εφαπτομενικών δυνάμεων της διεπιφάνειας  $-S_T \in \mathcal{R}$ . Σε ότι αφορά τις συμβάσεις θετικότητας τα  $S_N$ ,  $[u]_N$  θεωρούνται θετικά όταν έχουν φορά κάθετη στη διεπιφάνεια και προς τα έξω, ενώ τα  $S_T$ ,  $[u]_T$  είναι κάθετα στη διεύθυνση των  $N$  με τέτοιο τρόπο που να μορφώνουν ένα τοπικό  $N, T$  δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα η κατασκευή μας διακριτοποιείται σε  $m_1$  πεπερασμένα στοιχεία. Τα διανύσματα των τάσεων και των παραμορφώσεων του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων συμβολίζονται με  $\mathbf{s}_i, \mathbf{e}_i, i = 1 \dots m$ . Το  $m$  εξαρτάται από τον αριθμό των ανεξάρτητων τάσεων (και των αντίστοιχων παραμορφώσεων) κάθε πεπερασμένου στοιχείου της κατασκευής. Έστω  $\mathbf{u}$  το  $n$ -διάστατο διάνυσμα των κομβικών μετακινήσεων (των βαθμών ελευθερίας στη μέθοδο των μετακινήσεων) και  $\mathbf{p}$  το εργικώς αντίστοιχο  $n$ -διάστατο διάνυσμα κομβικών δυνάμεων. Οι διακριτές ποσότητες της διεπιφάνειας συνδέονται στα  $q$ -διάστατα διανύσματα  $\mathbf{S}_N, \mathbf{S}_T$  και  $[\mathbf{u}]_N, [\mathbf{u}]_T$  αντίστοιχα, όπου  $q$  είναι ο αριθμός των ζευγών των κόμβων που μορφώνουν την διεπιφάνεια της κατασκευής. Για το σύνολο της κατασκευής (συμπεριλαμβανομένων και των διεπιφανειών) τα διευρυμένα διανύσματα τάσεων  $\bar{\mathbf{s}}$  και παραμορφώσεων  $\bar{\mathbf{e}}$  είναι:

$$\bar{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ -\mathbf{S}_N \\ -\mathbf{S}_T \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ -[\mathbf{u}]_N \\ -[\mathbf{u}]_T \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Το πρόβλημα της στατικής ανάλυσης περιγράφεται σε αυτή την περίπτωση από τις εξισώσεις:

- *Εξισώσεις ισορροπίας:*

$$\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}_N & \mathbf{G}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ -\mathbf{S}_N \\ -\mathbf{S}_T \end{bmatrix} = \mathbf{p} \quad (2.17)$$

όπου  $\mathbf{G}$  είναι το μητρώο ισορροπίας της διακριτοποιημένης κατασκευής και  $\bar{\mathbf{G}}$  είναι το διευρυμένο μητρώο ισορροπίας ώστε να ληφθούν υπόψη οι δυνάμεις της διεπιφάνειας  $\mathbf{S}_N, \mathbf{S}_T$ .

- *Εξισώσεις συμβιβαστού παραμορφώσεων - μετακινήσεων:*

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{u} \text{ ή αναλυτικότερα } \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ [\mathbf{u}]_N \\ [\mathbf{u}]_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}_N^T \\ \mathbf{G}_T^T \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.18)$$



- Γραμμικός καταστατικός νόμος υλικού για την κατασκευή (εκτός διεπιφάνειας):

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{F}_0 \mathbf{s}, \quad (2.19)$$

ή

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_0(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0). \quad (2.20)$$

όπου  $\mathbf{F}_0$  και  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{F}_0^{-1}$  είναι τα μητρώα ευκαμψίας και δυσκαμψίας της διακριτοποιημένης κατασκευής και  $\mathbf{e}_0$  είναι το μητρώο αρχικών παραμορφώσεων.

- Μονότονοι (και πιθανώς πλειότιμοι) νόμοι διεπιφάνειας (αναλυόμενοι κάθετα και εφαπτομενικά στη διεπιφάνεια) στη γενικότερη υποδιαφορισμη μορφή:

$$-S_a \in \partial \phi_a([u]_a), \quad a = N, T, \quad (2.21)$$

ή

$$[u]_a \in \partial \bar{\phi}_a(-S_a), \quad a = N, T. \quad (2.22)$$

όπου  $\phi_a(\cdot)$ ,  $\bar{\phi}_a(\cdot)$ ,  $a = N, T$  είναι κυρτές, κάτω ημισυνεχείς και κατάλληλες συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας οι οποίες "παράγουν" τους σημειακούς νόμους της διεπιφάνειας. Μετά από ολοκλήρωση σε όλη τη διεπιφάνεια παίρνουμε τα δυναμικά:

$$\Phi_a(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^q \phi_a^{(i)}([\mathbf{u}]_a), \quad a = N, T, \quad (2.23)$$

και

$$\bar{\Phi}_a(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^q \bar{\phi}_a^{(i)}(-\mathbf{S}_a), \quad a = N, T. \quad (2.24)$$

- Κλασσικές *συνοριακές συνθήκες ισότητας* γραμμένες στην γενική μορφή:

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad (2.25)$$

και

$$\mathbf{Z}\mathbf{s} = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

όπου  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{Z}$  είναι κατάλληλα ορισμένα μητρώα μετατροπής και  $\mathbf{u}_0, \mathbf{F}$  συμβολίζουν τις γνωστές κομβικές συνοριακές συνθήκες μετακινήσεων (στηρίξεις) και συνοριακές συνθήκες φορτίσεων (δυνάμεις)

Για τις διατυπώσεις μεταβολών του προβλήματος απαιτούνται επίσης η εξίσωση των *δυνατών έργων* και η εξίσωση των *συμπληρωματικών δυνατών έργων* στην μορφή που παίρνουν για διακριτό σύστημα. Σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα και οι δύο είναι ισότητες μεταβολών. Η εξίσωση δυνατών έργων εμπλέκει μεταβολές των μετακινήσεων και έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T(\mathbf{e}^* - \mathbf{e}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \mathbf{S}_N^T([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N) + \mathbf{S}_T^T([\mathbf{u}]_T^* - [\mathbf{u}]_T), \\ \forall \mathbf{e}^*, \mathbf{u}^*, [\mathbf{u}]_N^*, [\mathbf{u}]_T^* & \text{ δεδομένου ότι ισχύουν οι (2.18), (2.25)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Η εξίσωση των *συμπληρωματικών δυνατών έργων* εμπλέκει μεταβολές στις τάσεις και παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) &= \mathbf{u}^T(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}) + [\mathbf{u}]_N^T(\mathbf{S}_N^* - \mathbf{S}_N) + [\mathbf{u}]_T^T(\mathbf{S}_T^* - \mathbf{S}_T), \\ \forall \mathbf{p}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{S}_N^*, \mathbf{S}_T^* & \text{ δεδομένου ότι ισχύουν οι (2.17), (2.26)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ας περιγράψουμε πρώτα μαθηματικά το πρόβλημα ελαστοστατικής ανάλυσης που περιγράψαμε προηγουμένως μέσα στο πλαίσιο της μεθόδου των μετακινήσεων. Εισάγουμε λοιπόν το νόμο ελαστικότητας (2.19) στην εξίσωση δυνατών έργων (2.27) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{K}_0^T \mathbf{G}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - (\mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_0)^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) &= \mathbf{S}_N^T([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N) + \\ &+ \mathbf{S}_T^T([\mathbf{u}]_T^* - [\mathbf{u}]_T), \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid (2.18), (2.25) \text{ ισχύουν}\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

όπου  $\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{K}_0\mathbf{G}^T$  συμβολίζει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής και  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{G}\mathbf{K}_0\mathbf{e}_0$  εκφράζει το μητρώο των ισοδύναμων επικόμβιων φορτίσεων (συμπεριλαμβανομένων και των επιδράσεων των αρχικών παραμορφώσεων).

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε τις ανισότητες που εισήχθησαν από τις σχέσεις της διεπιφάνειας (2.21), (2.23), δηλαδή

$$-\mathbf{S}_a([\mathbf{u}]_a^* - [\mathbf{u}]_a) \leq \Phi_a(\mathbf{u}^*) - \Phi_a(\mathbf{u}), \quad a = N, T, \quad (2.30)$$

για  $\Phi_a(\mathbf{u}^*) < \infty$ . Γι' αυτό από την (2.27) παίρνουμε το ακόλουθο πρόβλημα ανισοτήτων μεταβολών σε όρους μετακινήσεων:

Να βρεθούν οι κινηματικά επιτρεπτές μετακινήσεις  $\mathbf{u} \in V_{ad} \cap K$  τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \Phi_N(\mathbf{u}^*) - \Phi_N(\mathbf{u}) + \Phi_T(\mathbf{u}^*) - \Phi_T(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} \cap K \quad (2.31)$$

όπου  $K = \{\mathbf{u}^* \text{ τέτοιο ώστε } \Phi_N(\mathbf{u}^*) < \infty \text{ και } \Phi_T(\mathbf{u}^*) < \infty\}$ .

Ας σημειώσουμε ότι το γεγονός ότι αναζητούμε το  $\mathbf{u}$  στο και  $\mathbf{u}^* \in K$  μας επιτρέπει να ενσωματωθούμε σε αυτό το πλαίσιο συνθηκών όπου  $\Phi_N$  ή  $\Phi_T$  είναι ο δείκτης ενός κλειστού κυρτού συνόλου όπως και στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Signorini - Fichera.

Για μια διατύπωση βασισμένη στις τάσεις (μέθοδος των δυνάμεων) χρησιμοποιούμε το νόμο ελαστικότητας στη μορφή της (2.20) και τις σχέσεις διεπιφάνειας (2.22), (2.24). Με ανάλογη αιτιολογία παίρνουμε από την (2.28) την εξίσωση των δυνατών συμπληρωματικών έργων:

$$\mathbf{e}^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) = [\mathbf{u}]_N^T(\mathbf{S}_N^* - \mathbf{S}_N) + [\mathbf{u}]_T^T(\mathbf{S}_T^* - \mathbf{S}_T), \quad \forall \mathbf{s}^* = [\mathbf{s}^*, -\mathbf{S}_N^*, -\mathbf{S}_T^*] \in \Sigma_{ad} = \{\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid (2.17), (2.26) \text{ ισχύουν}\}. \quad (2.32)$$

Τελικά παίρνουμε την ανισότητα μεταβολών:

Να βρεθούν οι στατικά επιτρεπτές τάσεις  $\mathbf{s} \in \Sigma_{ad} \cap L$  τέτοιες που να ικανοποιούν τη σχέση:

$$(\mathbf{e}_0 + \mathbf{s}\mathbf{F}_0)^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) + \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}^*) - \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}) + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}^*) - \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{s}^* \in \Sigma_{ad} \cap L \quad (2.33)$$

όπου  $L = \{ \mathbf{s}^* \text{ τέτοια ώστε } \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}^*) < \infty \text{ και } \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}^*) < \infty \}$ .

Επισημαίνουμε ότι λόγω της γραμμικότητας της ισότητας και των εξισώσεων συμβιβαστού (2.17), (2.18) και σύμφωνα με τη γραμμικότητα του καταστατικού νόμου του υλικού (2.19), (2.20) τα προηγούμενα προβλήματα μεταβολών εμπλέκουν γραμμικούς και διγραμμικούς τύπους για τις άγνωστες μεταβλητές, πέρα από τις μη γραμμικές συνεισφορές της διεπιφάνειας. Επομένως, τόσο το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας όσο και το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της συμπληρωματικής ενέργειας εμπλέκουν γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους και την συνεισφορά των μηχανισμών της διεπιφάνειας. Τα δύο αυτά προβλήματα διατυπώνονται ως εξής:

Να βρεθούν τα  $\mathbf{u} \in V_{ad} \cap K$  τέτοια ώστε:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V_{ad} \cap K} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{v} + \Phi_N(\mathbf{v}) + \Phi_T(\mathbf{v}) \right\}. \quad (2.34)$$

Να βρεθούν τα  $\mathbf{s} \in \Sigma_{ad} \cap L$  τέτοια ώστε:

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{t} \in \Sigma_{ad} \cap L} \left\{ \Pi^c(\mathbf{t}) = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{t} - \bar{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{t} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{t}) + \bar{\Phi}_T(\mathbf{t}) \right\}. \quad (2.35)$$

Εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει ότι το πρόβλημα (2.31) (και αντίστοιχα το (2.33)) εκφράζει κατ' ουσία τις συνθήκες ελαχιστοποίησης για το πρόβλημα βελτιστοποίησης της ενέργειας (2.34) (και αντίστοιχα το (2.35)).

Το παραπάνω πλαίσιο εργασίας μπορεί να ακολουθηθεί για τη διατύπωση και μελέτη όλων των προβλημάτων στατικής ανάλυσης με την προϋπόθεση των μικρών μετακινήσεων. Εδώ θα εξετάσουμε μόνο κυρτά προβλήματα. Λόγω της κυρτότητας της συνεισφοράς της τετραγωνικής ενέργειας παραμορφώσεων στη δυναμική ενέργεια και της γραμμικότητας της συνεισφοράς της εξωτερικής φόρτισης τα προβλήματα κυρτότητας προϋποθέτουν ότι τα δυναμικά των νόμων της διεπιφάνειας είναι κυρτές συναρτήσεις. Συνεπώς θα μελετήσουμε μόνο μονότονες και πιθανώς πλειότιμες σχέσεις της μορφής των (2.21) και (2.22). Πιο συγκεκριμένα θα δούμε σχέσεις ανισότητας οι οποίες περιγράφουν το πρόβλημα της μονόπλευρης επαφής χωρίς τριβή. Αυτές οδηγούν σε προβλήματα ανισοτήτων βελτιστοποίησης της κυρτής ενέργειας παραμορφώσεων.

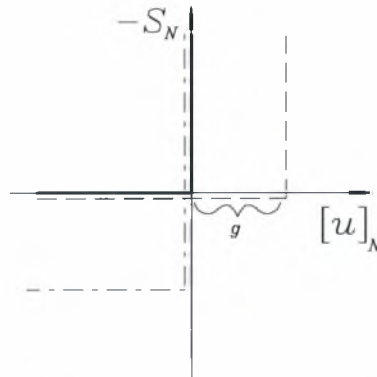
Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε και την περίπτωση της τριβής (νόμων τριβής) κατά την οποία εισάγονται μη διαφορίσιμοι όροι στη δυναμική ενέργεια.

### Η ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ Ή ΣΥΝΘΗΚΕΣ SIGNORINI-FICHERA

Ο νόμος της μονόπλευρης σημειακής επαφής χωρίς τριβή έχει τη μορφή (σχήμα 2.1)

$$-S_N \geq 0, [u]_N - g \leq 0, \quad -S_N([u]_N - g) = 0, \quad (2.36)$$

όπου το  $g$  εκφράζει το αρχικό άνοιγμα (gap) στο σημείο μονόπλευρης επαφής. Οι περιορισμοί ανισοτήτων στις δυνάμεις της διεπιφάνειας (δεν επιτρέπονται εφελκυστικές δυνάμεις), στις σχετικές μετακινήσεις κάθετα στη διεπιφάνεια (δεν επιτρέπεται διείσδυση) και η μεταξύ τους σχέση συμπληρωματικότητας απεικονίζονται καθαρά στο σχήμα 2.1. Στο σχήμα 2.1 με έντονη γραμμή παρουσιάζεται η κατάσταση κατά την οποία δεν υπάρχει αρχικό άνοιγμα και με διακεκομμένη η περίπτωση αρχικού ανοίγματος  $g$ .



Σχήμα 2.1: Νόμος μονόπλευρης επαφής

Επίσης ο νόμος μονόπλευρης επαφής μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$[u]_N \in \partial \phi^c(-S_N). \quad (2.37)$$

όπου  $\phi^c$  κυρτή συνάρτηση.

Οι παρακάτω σημειακοί νόμοι οδηγούν στις (τοπικές) ανισότητες μεταβολών

$$-S_N([u]_N)([u]_N^* - [u]_N) \leq 0, \quad \forall [u]_N^* \in U_{ad}^N \quad (2.38)$$

όπου

$$U_{ad}^N = \{[u]_N \mid [u]_N - g \leq 0\} \quad (2.39)$$

και

$$[u]_N(-S_N)(-S_N^* + S_N) \leq \phi^c(-S_N^*) - \phi^c(-S_N), \quad \forall S_N^* \in \mathcal{R} \quad (2.40)$$

αντίστοιχα.

Για το σύνολο της διακριτοποιημένης κατασκευής οι τοπικοί περιορισμοί (2.39) χρησιμοποιούνται για να οριστεί το σύνολο των κινηματικά επιτρεπτών μετακινήσεων.

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid [u]_N \in U_{ad}^N \text{ για όλους τους μονόπλευρους κόμβους} \} \\ &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{N}\mathbf{u} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0} \} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Εδώ  $V_{ad} \cap K = U_{ad}$ . Επιπλέον έχουμε υποθέσει μονόπλευρη επαφή χωρίς τριβή. Γι' αυτό το  $[u]_T$  δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό και δεν εμφανίζεται σε καμία από τις παραπάνω σχέσεις. Επομένως, το πρόβλημα της στατικής ανάλυσης γράφεται στη μορφή των μεταβολών ανισοτήτων:

Να βρεθεί το  $\mathbf{u} \in U_{ad}$  τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}^* \in U_{ad}. \quad (2.42)$$

Κλασσικές συνοριακές συνθήκες αμφίπλευρης στήριξης ( cf (2.25)) μπορούν να ληφθούν υπόψη αλλάζοντας το  $U_{ad}$  με  $V_{ad} \cap U_{ad}$  στην (2.42)

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας ( cf (2.25)) είναι σε αυτή την περίπτωση ένα τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με γραμμικούς περιορισμούς και διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθεί το  $\mathbf{u} \in U_{ad}$  τέτοιο ώστε:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in U_{ad}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{v} \right\}. \quad (2.43)$$

Επιπλέον ακολουθώντας τη γενικότερη μαθηματική θεωρία βελτιστοποίησης οι συνθήκες βελτιστοποίησης για την (2.43) οδηγούν μετά από λίγους χειρισμούς στο πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (Linear Complementary Problem L.C.P.):

Να βρεθούν τα  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{S}_N \in \mathbb{R}^q$  τέτοια ώστε:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{N}^T \mathbf{S}_N = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}\mathbf{u} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_N \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_N^T (\mathbf{N}\mathbf{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Η προηγούμενη σχέση αποτελεί ένα L.C.P. και με αυτή τη μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί απ' ευθείας για την αριθμητική πραγμάτευση του προβλήματος [4], [38].

### 2.1.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΒΗΣ ΜΕ ΚΥΡΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Αρχικά θα δούμε ένα απλοποιημένο πρόβλημα στατικής τριβής τύπου Coulomb το οποίο προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Duvault και Lions το 1972. Στο μοντέλο που θα εξετάσουμε οι συνθήκες εμπλοκής - ολίσθησης του μηχανισμού τριβής εκφράζονται σε όρους μεταβλητών της στατικής μηχανικής. Επιπλέον ο μηχανισμός κάθετης επαφής αποσυνδέεται από αυτόν της τριβής με την υπόθεση ότι η ορθή δύναμη επαφής είναι γνωστή, δηλαδή  $S_N = C_N$ . Οι σχέσεις που διέπουν την τριβή είναι (σχήμα 2.2α)

$$-S_T = \begin{cases} -T_0 & \text{για } [u]_T \leq 0 \\ [-T_0, T_0] & \text{για } [u]_T = 0 \\ T_0 & \text{για } [u]_T \geq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Χρησιμοποιώντας το μη διαφορίσιμο δυναμικό τριβής (σχήμα 2.2β):

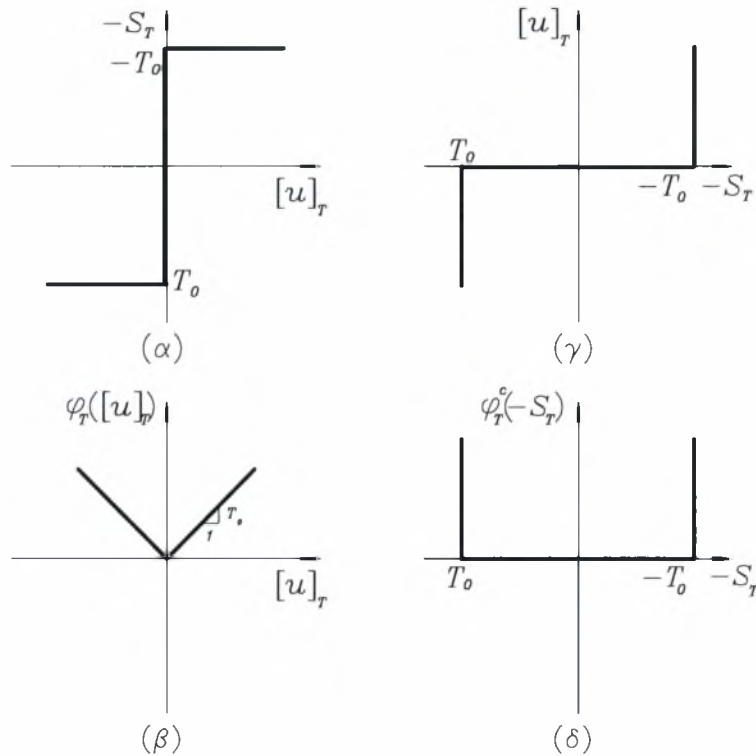
$$\phi_T([u]_T) = T_0 | [u]_T |, \quad (2.46)$$

όπου  $|\cdot|$  δηλώνει την απόλυτη τιμή, ο νόμος μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μη-διαφορίσιμη μορφή:

$$-S_T \in \partial \phi_T([u]_T). \quad (2.47)$$

Οι αντίστροφες ως προς τη (2.45) συναρτήσεις είναι οι εξής σχήμα 2.2γ:

$$\begin{array}{lll} \text{Εάν} & -S_T = -T_0 & \text{τότε } [u]_T \leq 0. \\ \text{Εάν} & -T_0 \leq -S_T \leq T_0 & \text{τότε } [u]_T = 0. \\ \text{Εάν} & -S_T = T_0 & \text{τότε } [u]_T \geq 0. \end{array} \quad (2.48)$$



Σχήμα 2.2: Ο νόμος τριβής του Coulomb και τα αντίστοιχα υπερδυναμικά

Ορίζοντας το σύνολο των επιτρεπόμενων δυνάμεων:

$$S_{ad} = \{S_T \mid -T_0 \leq -S_T \leq T_0\}, \quad (2.49)$$

παίρνουμε το νόμο του σχήματος 2.2δ:

$$[u]_T \in \partial \phi_T^c(-S_T). \quad (2.50)$$



Η διατύπωση της ανισότητας τοπικών μεταβολών για τους παραπάνω νόμους δίνει:

$$-S_T([u]_T)([v]_T - [u]_T) \leq \phi_T([v]_T) - \phi_T([u]_T), \quad \forall [u]_T \in \mathcal{R}, \quad (2.51)$$

και

$$[u]_T(-S_T)(-S_T^* + S_T) \leq 0, \quad \forall S_T^* \in S_{ad}^T. \quad (2.52)$$

Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα της ανισότητας μεταβολών του τύπου (2.31) ως εξής:

$$\Phi_T(\mathbf{u}) = \sum \phi_T([u]_T) \quad (2.53)$$

ή σε όρους τάσεων (μέθοδος των δυνάμεων) την ανισότητα μεταβολών:

Να βρεθούν οι  $\mathbf{s} \in \Sigma_{ad}$  τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0^T(\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) &\leq 0, \\ \forall \mathbf{s}^* \in \Sigma_{ad} &= \{\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid (2.17), (2.26) \text{ και } (2.49) \text{ ισχύουν}\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Σημειώνουμε ότι η ανισότητα  $\Phi_T(\mathbf{u}) < \infty$  ικανοποιείται για τις συνοριακές συνθήκες τριβής.

Τα προβλήματα ανισοτήτων μεταβολών για μονόπλευρες (με ή χωρίς τριβή) συνοριακές συνθήκες ήταν από τις εφαρμογές της ανισοτικής μηχανικής που μελετήθηκαν πρώτες [11], [39], [4], κ.λ.π.). Επιπλέον για αυτή την ειδική περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ένα σημαντικό σχόλιο. Η μαθηματική διατύπωση ανισοτήτων μεταβολών που σχετίζονται με λεία δυναμικά και το σύνολο επιτρεπτών μεταβολών με περιορισμούς ανισοτήτων μπορεί να γίνει (βλέπε για παράδειγμα (2.42), (2.54)) με κατάλληλη χρήση της δυϊκής θεωρίας. Στα προηγούμενα παραδείγματα λόγω των σχετικά απλών σχέσεων η δυϊκότητα δεν αποτελεί και την καλύτερη επιλογή, για τη διατύπωση που είναι βασισμένη σε μετακινήσεις ή τάσεις, για το πρόβλημα της στατικής ανάλυσης.

Ο νόμος στατικής τριβής που μελετήθηκε προηγουμένως εμπλέκει δύο απλοποιήσεις οι οποίες μας επιτρέπουν να γράψουμε την διατύπωση ανισοτήτων μεταβολών του προβλήματος ή ισοδύναμα των προβλημάτων ελαχιστοποίησης της δυναμικής ή συμπληρωματικής ενέργειας: η δυναμική φύση της επιρροής της τριβής και η ενδεχόμενη σύνδεση μεταξύ ορθής και εφαπτομενικής μηχανικής συμπεριφοράς δεν λαμβάνονται υπόψη στις σχέσεις (2.45) - (2.50).

## 2.1.4 ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ-ΤΡΙΒΗΣ

Αναφορικά με τη σχέση ορθής και επαπτομενικής μηχανικής συμπεριφοράς μπορεί κανείς να διατυπώσει τον ακόλουθο νόμο (με τη χρήση του συντελεστή τριβής  $\mu$ ):

$$\begin{aligned} \text{Εάν } & -S_T = -\mu|S_N| & \text{τότε } [u]_T & \leq 0. \\ \text{Εάν } & -\mu|S_N| \leq -S_T \leq \mu|S_N| & \text{τότε } [u]_T & = 0. \\ \text{Εάν } & -S_T = \mu|S_N| & \text{τότε } [u]_T & \geq 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Η σύνδεση μεταξύ ορθής και επαπτομενικής συμπεριφοράς γίνεται φανερή με την εξάρτηση της (2.55) από τη λύση του προβλήματος μονόπλευρης επαφής (μέσω τάσεων επαφής  $S_N$ ). Ένα δυναμικό τριβής είναι συνάρτηση του  $S_N$  και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\phi_T([u]_T, S_N) = \mu|S_N||[u]_T|. \quad (2.56)$$

Ανάλογα, το σύνολο των επιτρεπόμενων δυνάμεων είναι:

$$S_{ad}(S_N) = \{S_T \mid -\mu|S_N| \leq -S_T \leq \mu|S_N|\}. \quad (2.57)$$

Λόγω του γεγονότος ότι το  $S_N$  είναι συνάρτηση του  $u$  το οποίο δεν είναι γνωστό, κάθε διατύπωση εξαρτώμενη από τις μετακινήσεις οδηγεί σε ενδεχόμενες ανισότητες μεταβολών οι οποίες τελικά δημιουργούν προβλήματα ανισοτήτων οiwνεί μεταβολών [40], [41], [42], [43], [44], [45] του τύπου:

- Για τη μέθοδο των μετακινήσεων παίρνουμε την ανισότητα μεταβολών:  
Να βρεθούν οι κινηματικά επιτρεπτές μετακινήσεις  
 $\mathbf{u} \in V_{ad} \cap U_{ad}$  τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \Phi_T(\mathbf{u}^*, \mathbf{S}_N) - \Phi_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N) & \geq 0, \\ \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} \cap U_{ad}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

- Για τη μέθοδο των δυνάμεων παίρνουμε την ανισότητα οiwνεί μεταβολών:

Να βρεθούν οι στατικά επιτρεπτές τάσεις  $\mathbf{s} \in \Sigma_{ad}(S_N)$  τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) & \leq 0, \\ \forall \mathbf{s}^* \in \Sigma_{ad}(S_N) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{R} \mid (2.17), (2.26), \text{ και } (2.57) \text{ ισχύουν}\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Χρησιμοποιώντας επαναληπτική διαδικασία ανάλογη με αυτές που θα προτείνουμε στο επόμενο κεφάλαιο οι παραπάνω ανισότητες οιωνεί μεταβολών μπορούν να προσεγγισθούν με μια σειρά ισοτήτων μεταβολών. Για τα επόμενα υποπροβλήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί όλη η μεθοδολογία που διατυπώθηκε προηγουμένως. Αυτή η μεθοδολογία προτάθηκε πρώτα από τον Παναγιωτόπουλο το 1975 για ένα πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με τριβή και σήμερα αναγνωρίζεται ως ισχυρή μέθοδος επίλυσης για τη μελέτη προβλημάτων επαφής με τριβή. Αυτή η τεχνική ονομάστηκε από τον Kalker ως αλγόριθμος PANA (PANA-algorithm) [46], [46].

## 2.2 ΝΟΜΟΙ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΕΠΑΦΗΣ (ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗΣ)

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ελαστοστατικής ανάλυσης σε μία γραμμικώς ελαστική κατασκευή κατασκευή υπο την υπόθεση μικρών μετακινήσεων και παραμορφώσεων. Επιπλέον, η κατασκευή περιέχει διεπιφάνειες και όρια όπου ισχύουν μη μονότονοι νόμοι επαφής (συγκόλλησης). Γι' αυτό οι σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι αυτές που δόθηκαν στην ενότητα 2.2 με τη διαφορά ότι αντί των μονότονων νόμων διεπιφάνειας που χρησιμοποιήθηκαν στην 2.2 εδώ χρησιμοποιούνται μη μονότονοι και πιθανώς πλειότιμοι νόμοι διεπιφάνειας ή ορίων. Οι μονότονοι νόμοι μπορούν να προκύψουν από μη κυρτά υπερδυναμικά. Συνεχείς νόμοι μπορούν να προκύψουν από λεία υπερδυναμικά ενώ οι νόμοι με απολύτως κατακόρυφους κλάδους προκύπτουν από μη διαφορίσιμα υπερδυναμικά.

### 2.2.1 ΜΟΡΦΩΣΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΗΜΙΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Θεωρείται μία ελαστική κατασκευή με γραμμικώς ελαστικά και απομειούμενης αντοχής στοιχεία. Το πρόβλημα της στατικής ανάλυσης περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- *Εξισώσεις ισορροπίας*

$$\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ -\mathbf{S}_N \end{bmatrix} = \mathbf{p} \quad (2.60)$$

όπου  $\bar{\mathbf{G}}$  είναι το μητρώο ισορροπίας της διακριτοποιημένης κατασκευής το οποίο λαμβάνει υπόψη τη συνεισφορά της τάσεως στα γραμμικά  $s$  και μη γραμμικά  $q$  στοιχεία.

- *Εξισώσεις συμβιβαστού ανηγμένων παραμορφώσεων - μετακινήσεων*

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{u} \quad \text{ή αναλυτικότερα} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ [\mathbf{u}]_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}_N^T \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.61)$$

- *Καταστατικός νόμος γραμμικού υλικού* για την κατασκευή

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_0(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) \quad (2.62)$$

όπου  $K_0$  είναι το μητρώο δυσκαμψίας και  $\mathbf{e}_0$  η αρχική παραμόρφωση

- *Μη μονότονος, καταστατικός νόμος υπερδυναμικού* των μη γραμμικών στοιχείων

$$-S_N \in \bar{\partial} \tilde{\phi}_N([u]_N) \quad \text{ή} \quad [u]_N \in \bar{\partial} \bar{\phi}_N(-S_N) \quad (2.63)$$

όπου  $\tilde{\phi}_N(\cdot)$ ,  $\bar{\phi}_N(\cdot)$  είναι γενικά μη κυρτά και μη διαφορίσιμα δυναμικά τα οποία παράγουν τους νόμους (2.63) μέσω ενός κατάλληλα γενικευμένου διαφορικού, τελεστή  $\bar{\partial}$ . Το άθροισμα σε όλα τα μη γραμμικά στοιχεία δίνει τη συνεισφορά της συνολικής ενέργειας παραμορφώσεων καθώς,

$$\bar{\Phi}_N(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^q \tilde{\phi}_N^{(i)}([\mathbf{u}]_N) \quad \text{ή} \quad \bar{\Phi}_N(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^q \bar{\phi}_N^{(i)}(-\mathbf{S}_N). \quad (2.64)$$

- *Κλασσικές συνοριακές συνθήκες στήριξης* εκφρασμένες είτε σε όρους μετακινήσεων,

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad (2.65)$$

είτε σε όρους συνοριακών δυνάμεων,

$$\mathbf{Z}\mathbf{s} = \mathbf{F}. \quad (2.66)$$

Για λόγους απλότητας στους συμβολισμούς σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το μοντέλο μιας διεπιφάνειας η οποία περιγράφεται με μη γραμμικά στοιχεία μιας διάστασης κατά την κάθετη ως προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση. Αυτή είναι μία γενίκευση του προβλήματος μονόπλευρης επαφής χωρίς τριβή όπου οι απομένουσες σχέσεις, δηλαδή η μηδενική επαπτομενική δύναμη  $S_T$ , μπορεί να θεωρηθεί στο σύνολο των κλασικών συνοριακών συνθηκών στήριξης ( 2.65). Πιο γενική μη γραμμική επαπτομενική συμπεριφορά μπορεί να θεωρηθεί μέσω των επαπτομενικών δυνάμεων  $S_T$  και των επαπτομενικών σχετικών μετακινήσεων  $[u]_T$  (σε αναλογία με τις σχέσεις (2.63), (2.64)).

Το  $\bar{\delta}$  συμβολίζει το γενικευμένο διαφορικό τελεστή του Clarke [17], [16], [4], [47].

Για τις διατυπώσεις των μεταβολών του προβλήματος πρώτα εκφράζεται η εξίσωση δυνατών έργων σε διακριτοποιημένη μορφή,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T(\mathbf{e}^* - \mathbf{e}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \mathbf{S}_N^T([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N) \\ \forall \mathbf{e}^*, \mathbf{u}^*, [\mathbf{u}]_N^* & \text{ δεδομένου ότι ισχύουν οι (2.61), (2.65)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Εισάγοντας το νόμο ελαστικότητας (2.62) στην εξίσωση δυνατών έργων (2.67) και χρησιμοποιώντας την (2.61) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{K}_0^T \mathbf{G}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - (\mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_0)^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) &= \mathbf{S}_N^T([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N) \\ \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid (2.61), (2.65) \text{ ισχύουν} \}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

όπου  $\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}^T$  συμβολίζει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής και  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{G} \mathbf{K}_0 \mathbf{e}_0$  εκφράζει το μητρώο των ισοδύναμων επικόμβιων φορτίσεων.

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε τους μη μονότονους νόμους (2.63) στην ακόλουθη μορφή:

$$-S_N^T([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N) \leq \bar{\phi}_N^0([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N), \quad \forall [\mathbf{u}]_N^* \quad (2.69)$$

όπου  $\bar{\phi}_N^0([\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N)$  είναι η παράγωγος κατεύθυνσης του Clarke του δυναμικού  $\phi_N$  ή σε όρους μηχανικής το δυνατό έργο των μη γραμμικών στοιχείων για μια μικρή παραμόρφωση ίση με  $[\mathbf{u}]_N^* - [\mathbf{u}]_N$ . Γι' αυτό παίρνουμε και την παρακάτω ανισότητα ημιμεταβολών:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \bar{\Phi}_N^0(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad}, \quad (2.70)$$

όπου  $\bar{\Phi}_N^0$  προκύπτει από την άθροιση των  $\bar{\phi}_N^0$  σε όλα τα στοιχεία.

Τα αντίστοιχα προβλήματα υποστασιμότητας διατυπώνονται ως εξής:

Να βρεθούν τα  $\mathbf{u} \in V_{ad}$  τέτοια ώστε:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{v} \in V_{ad}}{\text{subst}} \left\{ \Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{v} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{v}) \right\}. \quad (2.71)$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τους μη μονότονους νόμους (2.63β) και εισάγωντάς τους στην έκφραση των συμπληρωματικών έργων, παίρνουμε μία ανισότητα ημιμεταβολών σε όρους τάσεων και το αντίστοιχο πρόβλημα υποστασιμότητας της συμπληρωματικής ενέργειας:

Να βρεθούν οι  $s \in \Sigma_{ad}$  τέτοια ώστε:

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \underset{\mathbf{t} \in \Sigma_{ad}}{\text{subst}} \left\{ \Pi^c(\mathbf{t}) = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{t} - \bar{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{t} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{t}) \right\}. \quad (2.72)$$

Εδώ το σύνολο των στατικά επιτρεπτών τάσεων ορίζεται ως εξής:

$$\Sigma_{ad} = \{ \bar{\mathbf{s}} \in \mathcal{R}^m \text{ έτσι ώστε να επαλυθούν οι (2.60), (2.66)} \}. \quad (2.73)$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να εξειδικευθεί παραπέρα οδηγώντας σε κλασικά μη γραμμικά προβλήματα ελαχιστοποίησης και ισότητες μεταβολών για διαφορίσιμα δυναμικά και προβλήματα ανισοτήτων μεταβολών για κυρτά μη διαφορίσιμα δυναμικά. Γι' αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε μη γραμμική σχέση, ακόμα και αυτές με κατακόρυφους κλάδους.

## 2.2.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΒΗΣ ΜΕ ΜΗ ΚΥΡΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ακολουθώντας μια κατάλληλη μεθοδολογία και χρησιμοποιώντας ένα μη κυρτό δυναμικό τριβής, μπορεί κανείς να εισάγει ένα μη κυρτό νόμο δυναμικού τριβής (παρέβαλε (2.47)):

$$-S_T \in \tilde{\phi}_T([u]_T).$$

Εξετάζουμε αρχικά μόνο την επαπτομενική μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας ή του ορίου. Η αντίστοιχη μηχανική συμπεριφορά κατά την ορθή διεύθυνση υποθέτουμε πως είναι πιο κλασικής φύσης (για παράδειγμα, τέλεια επαφή μεταξύ των δύο επιφανειών δηλαδή μια μηδενική ορθή σχετική μετακίνηση  $[u]_N$  που μπορεί να περιγραφεί με πιο κλασικό τρόπο).

Υποθέτουμε ένα μη κυρτό δυναμικό τριβής το οποίο εξαρτάται από την ορθή δύναμη επαφής:  $\tilde{\phi}_T([u]_T, S_N)$ . Η διατύπωση του προβλήματος για δεδομένα  $S_N$  είναι η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε για το απλό πρόβλημα τριβής. Η σύνδεση του προβλήματος τριβής με το πρόβλημα μονόπλευρης επαφής οδηγεί σε προβλήματα ανισοτήτων οιωνεί μεταβολών - ημιμεταβολών του τύπου:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \tilde{\Phi}_T(\mathbf{u}^*, \mathbf{S}_N) - \tilde{\Phi}_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N) \geq 0, \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} \quad (2.74)$$

Εδώ, ακολουθώντας την προσέγγιση της μη κυρτής βελτιστοποίησης, εισάγουμε την αποσύνδεση μέσω επαναληπτικής διαδικασίας μεταξύ των προβλημάτων επαφής και τριβής (σε αναλογία με την προσέγγιση που παρουσιάστηκε από τον Παναγιωτόπουλο [39] για το πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με τριβή, με κλασική τριβή Coulomb και κυρτά δυναμικά).

Εάν και τόσο οι ορθές όσο και επαπτομενικές δυνάμεις συνδέονται με ένα μη κυρτό δυναμικό, μπορούμε να μορφώσουμε ένα πιο γενικό πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση τα δύο υποπροβλήματα που προκύπτουν κατά την κάθετη και επαπτομενική ως προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση συνδέονται μεταξύ τους, δηλαδή το υπερδυναμικό που προκύπτει κατά την επαπτομενική διεύθυνση παίρνει τη μορφή  $\tilde{\phi}_T([u]_T, S_N)$  και το υπερδυναμικό που προκύπτει κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση παίρνει τη μορφή  $\tilde{\phi}_N([u]_N, S_T)$ . Σε αυτή την περίπτωση η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων στο παραπάνω πρόβλημα οδηγεί στην ανισότητα οιωνεί μεταβολών - ημιμεταβολών:

Να βρεθούν οι κινηματικά επιτρεπτές συνθήκες  $u \in V_{ad}$  τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{p}}^T (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + \tilde{\Phi}_N(\mathbf{u}^*, \mathbf{S}_T) - \tilde{\Phi}_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T) + \\ + \tilde{\Phi}_T(\mathbf{u}^*, \mathbf{S}_N) - \tilde{\Phi}_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N) \geq 0, \forall \mathbf{u}^* \in V_{ad} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι πολύ σύνηθες στη μελέτη κατασκευών που συνδέονται μέσω κάποιου συγκολλητικού υλικού, όπως για παράδειγμα σε μία πολυστρωματική κατασκευή.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μη μονότονοι νόμοι τριβής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση φαινομένων εμπλοκής - ολίσθησης στα οποία λαμβάνεται υπόψη η διαφορά μεταξύ στατικών και δυναμικών συντελεστών τριβής (το λεγόμενο sticktion effect) [48], [49], [50], [51].



# Κεφάλαιο 3

## 3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια οικογένεια αλγόριθμων που οδηγούν σε λύση προβλημάτων διεπιφανειών. Εξετάζονται προβλήματα που οδηγούν σε κυρτά και μη κυρτά προβλήματα δυναμικής και συμπληρωματικής ενέργειας. Για τις περισσότερες των περιπτώσεων, που παρουσιάζονται εδώ, αυτή η προσέγγιση είναι η μόνη διέξοδος σήμερα για την λύση τέτοιων προβλημάτων.

Η μαθηματική διατύπωση προβλημάτων που περιλαμβάνουν διεπιφάνειες δεν οδηγεί απεθείας σε ανεξάρτητα προβλήματα βελτιστοποίησης. Αυτό είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ των δυνάμεων που παρουσιάζονται κατά την εφαπτομενική και την κάθετη ως προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση. Στις επόμενες ενότητες θα χρησιμοποιήσουμε τεχνικές παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στο πεδίο της πολυεπίπεδης βελτιστοποίησης για να διαχειριστούμε τα παραπάνω προβλήματα.

Ο στόχος της πολυεπίπεδης βελτιστοποίησης είναι να καθορίσει, σε σχέση με ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, κατάλληλα αμοιβαίως ανεξάρτητα υποπροβλήματα. Καθένα από αυτά όταν επιλύεται ανεξάρτητα αποφέρει το βέλτιστο για το συνολικό πρόβλημα μετά από μια επαναληπτική διαδικασία η οποία καλείται ελεγκτής δευτέρου επιπέδου (*second-level controller*) με τέτοιο τρόπο που τα υποπροβλήματα (πρώτο επίπεδο του προβλήματος) να έχουν λύσεις οι οποίες στην ουσία αποφέρουν το βέλτιστο για το αρχικό πρόβλημα, δηλαδή πριν την διάσπασή του σε υποπροβλήματα [52], [53], [54].

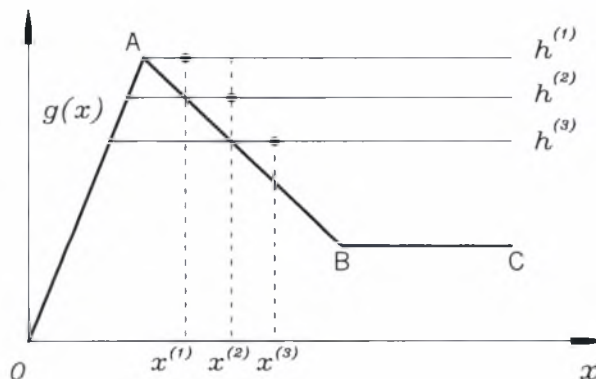
Στα προβλήματα διαπιφανειών οι ιδέες από το πεδίο της πολυεπίπεδης βελτιστοποίησης εφαρμόζονται με τη διάσπαση των δράσεων σε διευθύνσεις κάθετες και εφαπτομενικές προς τη διεπιφάνεια (βλέπε για παράδειγμα την πρωτοπόρα εργασία του καθηγητή Παναγιωτόπουλου το 1975 [39] όπου εκεί παραρουσιάστηκε για πρώτη φορά η διάσπαση αυτή). Για το λόγο αυτό οι

άγνωστοι του προβλήματος χωρίζονται σε δύο ομάδες που αναφέρονται στις διεύθυνσεις της διεπιφάνειας. Τότε μορφώνονται νέα προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία εμπλέκουν μόνο τους αγνώστους που αντιστοιχούν σε μία διεύθυνση (κάθετη ή εφαπτομενική), ενώ οι άγνωστοι που αντιστοιχούν στην άλλη διεύθυνση θεωρούνται γνωστοί. Τα προβλήματα αυτά επιλύονται με επαναληπτική διαδικασία μέχρι να ικανοποιηθούν κάποια προκαθορισμένα κριτήρια σύγκλισης. Η παραπάνω τεχνική είναι ανάλογη με ένα πολυεπίπεδο αλγόριθμο βελτιστοποίησης, με την έννοια ότι σε κάθε επίπεδο επιλύεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης το οποίο εμπλέκει μόνο τους αγνώστους μίας ομάδας. Γι' αυτό το ελάχιστο όλου του προβλήματος επιτυγχάνεται μόνο στην περίπτωση σύγκλισης.

### 3.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΜΗ ΚΥΡΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Αρχικικά παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο μη κυρτής βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε από τον Ε. Μυστακίδη [55] και θα τον χρησιμοποιήσουμε παρακάτω μέσα σε άλλους αλγόριθμους.

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Διαλέγουμε ένα σημείο εκκίνησης  $x^{(0)}$  και θέτουμε αρχική τιμή του  $i$  το 1.



Σχήμα 3.1: Γραφική επεξήγηση του ευριστικού αλγόριθμου μη κυρτής ελαχιστοποίησης

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Για το σημείο  $x^{(i)}$  διαλέγουμε ένα κυρτό υπερδυναμικό  $p^{(i)}$  τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.3) στο σημείο αυτό.

$$\partial p^{(i)}(x) = \bar{\partial} w(x) \quad (3.1)$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Βρίσκουμε το ελάχιστο  $x^{(i)}$  της κυρτής συνάρτησης

$$f_c(x) + p^{(i)}(x). \quad (3.2)$$

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** Υπολογίζουμε το

$$C^{(i+1)} = w(x^{(i)}) - p^{(i)}(x^{(i)}). \quad (3.3)$$

**Βήμα 5<sup>ο</sup>** Εάν  $\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\| \leq \varepsilon_1$  και  $\|C^{(i+1)} - C^{(i)}\| \leq \varepsilon_2$  όπου  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έχουν κατάλληλα μικρές τιμές τότε το σημείο υποστασιμότητας της (3.4) έχει βρεθεί και τερματίζει ο αλγόριθμος, αλλιώς θέτουμε  $i = i + 1$  και επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2.

$$\Pi(x) = f_c(x) + w(x) \quad (3.4)$$

Δοθέντος ενός αρχικού σημείου  $x^{(0)}$ , ο παραπάνω αλγόριθμος είναι ικανός να εντοπίσει ένα σημείο υποστασιμότητας της  $\Pi(x)$  και όχι μόνο ένα σημείο τοπικού ελαχίστου όπως γίνεται πρόδηλο από την (3.5).

$$\begin{aligned} 0 \in \bar{\partial} \Pi(x) &= \bar{\partial}(f_c(x) + w(x)) = \\ &= \bar{\partial}(f_c(x) + p^{(i)}(x) + w(x) - p^{(i)}(x)) \subset \\ &\subset \bar{\partial}(f_c(x) + p^{(i)}(x)) + \bar{\partial}(w(x) - p^{(i)}(x)) = \\ &= \partial(f_c(x) + p^{(i)}(x)) + \bar{\partial}(w(x) - p^{(i)}(x)) = \\ &= \partial \Pi_c^{(i)} + \bar{\partial}(w(x) - p^{(i)}(x)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Διαφορετικά σημεία έναρξης στην επαναληπτική διαδικασία μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά σημεία υποστασιμότητας της  $\Pi(x)$ . Παρά το γεγονός ότι από τη μαθηματική πλευρά του θέματος η διαδικασία προσδιορισμού του αρχικού σημείου για τον αλγόριθμο φαίνεται να καθοδηγείται μόνο από την πείρα, στα προβλήματα μηχανικής ο προσδιορισμός των αρχικών σημείων απορρέει από μια διαδικασία με σαφή εξήγηση από άποψη μηχανικής.

### 3.3 ΚΥΡΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Η γενική διατύπωση των προβλημάτων διεπιφάνειας έχει παρουσιασθεί στην ενότητα 2.2. Ακολουθώντας τους συμβολισμούς που εισήχθησαν εκεί υπενθυμίζουμε ότι πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είτε τη δυναμική ενέργεια της κατασκευής (παρέβαλε (2.34)):

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} + \Phi_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T) + \Phi_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N), \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.6)$$

είτε τη συμπληρωματική ενέργεια (παρέβαλε (2.35)):

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}, \mathbf{S}_T) + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}, \mathbf{S}_N), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad} \quad (3.7)$$

όπου  $\Phi_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T)$ ,  $\Phi_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N)$ ,  $\bar{\Phi}_N(\mathbf{s}, \mathbf{S}_T)$  και  $\bar{\Phi}_T(\mathbf{s}, \mathbf{S}_N)$  είναι κατάλληλα ορισμένα κυρτά υπερδυναμικά και  $V_{ad}$ ,  $\Sigma_{ad}$  είναι κατάλληλα κινηματικά και στατικά επιτρεπτά σύνολα αντίστοιχα. Εδώ τα υπερδυναμικά που ισχύουν στην κάθετη προς την διεπιφάνεια διεύθυνση  $\Phi_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T)$ ,  $\bar{\Phi}_N(\mathbf{s}, \mathbf{S}_T)$  εξαρτώνται από τις τιμές του  $\mathbf{S}_T$ . Αντίστοιχα τα υπερδυναμικά που ισχύουν στην εφαπτομενική προς την διεπιφάνεια διεύθυνση  $\Phi_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N)$ ,  $\bar{\Phi}_T(\mathbf{s}, \mathbf{S}_N)$  εξαρτώνται από τις τιμές του  $\mathbf{S}_N$ .

Σύμφωνα με τις ιδέες του Παναγιωτόπουλου [39] το πρόβλημα (3.6) διασπάται στα ακόλουθα υποπροβλήματα

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u} + \Phi_N(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^1 \quad (3.8)$$

και

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \Phi_T(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.9)$$

υποθέτοντας ότι στην πρώτη οι τιμές του  $\mathbf{S}_T$  είναι αμετάβλητες και στην δεύτερη ότι οι τιμές του  $\mathbf{S}_N$  είναι αμετάβλητες.

Στις προηγούμενες σχέσεις,  $\bar{\mathbf{p}}_1$  είναι ένα νέο διάνυσμα δυνάμεων που περιέχει το αποτέλεσμα της υπόθεσης ότι οι εφαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T$  είναι γνωστές στην κατασκευή

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_T \mathbf{S}_T \quad (3.10)$$

και είναι το διάνυσμα δυνάμεων που περιέχει το αποτέλεσμα της υπόθεσης ότι οι ορθές δυνάμεις  $\mathbf{S}_N$  είναι γνωστές

$$\bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N \quad (3.11)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις για τα  $\mathbf{S}_N$ ,  $\mathbf{S}_T$  χρησιμοποιήσαμε  $\Phi_N(\mathbf{u})$  αντί για  $\Phi_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T)$  και  $\Phi(\mathbf{u})$  αντί για  $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N)$ . Επιπλέον,  $V_{ad}^1$  και  $V_{ad}^2$  είναι κατάλληλα ορισμένα κινηματικά επιτρεπτά σύνολα όπως θα δούμε ακολούθως.

Ομοίως το πρόβλημα (3.7) διασπάται στα ακόλουθα υποπροβλήματα

$$\Pi_1^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^1 \quad (3.12)$$

και

$$\Pi_2^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^2 \quad (3.13)$$

όπου  $\Sigma_{ad}^1$  και  $\Sigma_{ad}^2$  είναι κατάλληλα ορισμένα στατικώς επιτρεπτά σύνολα που προκύπτουν από το στατικώς επιτρεπτό σύνολο  $\Sigma_{ad}$  με την υπόθεση ότι οι επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T$  ή οι ορθές δυνάμεις  $\mathbf{S}_N$  εφαρμόζονται σαν εξωτερική φόρτιση αντιστοίχως.

Βασισμένοι στις παραπάνω διασπάσεις των κάθετων και των επαπτομενικών δράσεων μπορούμε να μορφώσουμε αλγόριθμους για την επίλυση των αρχικών προβλημάτων. Όπως είναι προφανές από τη μορφή των παραπάνω υποπροβλημάτων, η λύση των (3.8) και (3.12) εξαρτάται μόνο από τις υποτιθέμενες γνωστές τιμές των επαπτομενικών δυνάμεων  $\mathbf{S}_T$  και η λύση των (3.9) και (3.13) εξαρτάται μόνο από τις υποτιθέμενες γνωστές τιμές των ορθών δυνάμεων  $\mathbf{S}_N$ . Γι' αυτό είναι δυνατό να διατυπωθούν μικτά πλάνα εργασιών των πολυεπίπεδων προβλημάτων με την ελαχιστοποίηση για παράδειγμα σε πρώτο βήμα της δυναμικής ενέργειας και σε ένα δεύτερο βήμα της συμπληρωματικής ενέργειας ή το αντίθετο. Αυτή η δυνατότητα μας δίνει μεγάλη ευελιξία στο υπολογιστικό σχέδιο εργασιών, αφού με αυτό τον τρόπο είναι δυνατό να αποφύγουμε την επίλυση δύσκολων αριθμητικών προβλημάτων όπως θα διαπιστώσουμε και στις επόμενες ενότητες.

### 3.3.1 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ένα πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με την υπόθεση ότι σε περίπτωση ανοίγματος της διεπιφάνειας ένας μονότονος νόμος

συσχετίζει την δύναμη αποκόλλησης  $S_D$  με την σχετική, κάθετη στη διεπιφάνεια μετακίνηση  $[u]_D$ . Ο νόμος αυτός εγείρει το κυρτό υπερδυναμικό  $\phi_D([u]_D)$ , δηλαδή ισχύει ο διαφορικός συνυπολογισμός  $-S_D \in \partial\phi_D([u]_D)$ . Αυτές οι συνθήκες περιγράφουν για παράδειγμα τη συμπεριφορά ενός συγκολλητικού υλικού που συνδέει τα δύο μέρη της διεπιφάνειας. Σε αυτή την ενότητα δεν θα δώσουμε σημασία στην επίδραση της επαπτομενικής καθώς σε αυτό είναι το θέμα άλλων προβλημάτων της μηχανικής [56]. Εδώ πρέπει να διακρίνουμε τα δύο τμήματα της διεπιφάνειας, το τμήμα επαφής  $\Gamma_C$  και το τμήμα μη επαφής  $\Gamma_D$ . Στο τμήμα επαφής αναπτύσσονται οι δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N$  ενώ στο τμήμα μη επαφής αναπτύσσονται οι δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D$ . Επιπλέον στη διακριτοποιημένη κατασκευή δηλώνουμε με  $c$  τους κόμβους που ανήκουν στο  $\Gamma_C$  και με  $d$  τους κόμβους του  $\Gamma_D$ . Γι' αυτό η δυναμική ενέργεια της κατασκευής παίρνει τη μορφή

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} + \Phi_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.14)$$

όπου  $\Phi_D$  το καθολικό κυρτό δυναμικό της διεπιφάνειας, δηλαδή

$$\Phi_D(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \phi_D^{(i)}([u]_D) \quad (3.15)$$

και  $V_{ad}$  είναι το κινηματικά επιτρεπτό σύνολο δηλαδή (βλ. ενότητα 2.2 για συμβολισμούς)

$$V_{ad} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{E} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0}\}. \quad (3.16)$$

Ας σημειώσουμε ότι λόγω του ότι οι περιοχές επαφής και μη επαφής (και γι' αυτό και ο όρος της ενέργειας  $\Phi_D$  ο οποίος εξαρτάται από το δείκτη αθροίσματος  $d$ ) δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων η απευθείας λύση που υποδηλώνει η (3.14) δεν είναι δυνατή.

Ακολουθώντας μια στρατηγική ανάλογη με αυτή που πρότεινε ο Παναγιωτόπουλος το 1975 [39] σπάμε το πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα. Στο πρώτο επίπεδο θεωρούμε το υποπρόβλημα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με γνωστές τις δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D$ , δηλαδή θεωρούμε το υποπρόβλημα ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας.

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.17)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D \quad (3.18)$$

Ακολουθώς θεωρούμε το υποπρόβλημα που αντιστοιχεί στην επίλυση του προβλήματος αποκόλλησης με γνωστές τις δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_D$ , δηλαδή θεωρούμε το υποπρόβλημα ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας

$$\Pi_2^c(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \Phi_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.19)$$

όπου

$$V_{ad}^2 = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{E} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \}. \quad (3.20)$$

δηλαδή το  $V_{ad}^2$  είναι το  $V_{ad}$  χωρίς τις συνθήκες μονόπλευρης επαφής.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο προβλημάτων είναι πολύ ισχυρή επειδή οι διαφορετικές περιοχές επαφής και μη επαφής οδηγούν σε διαφορετικές τιμές του δείκτη αθροίσματος  $d$  στην (3.15). Βασισμένοι λοιπόν στην παραπάνω αποσύνδεση προτείνεται ο ακόλουθος αλγόριθμος για τη λύση του προβλήματος.

**Αλγόριθμος 1.** *Επιλύτης μονόπλευρης επαφής και μονότονης αποκόλλησης*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Αρχίζοντας τον αλγόριθμο θεωρούμε ότι οι δυνάμεις αποκόλλησης είναι σταθερές. Συνήθως υποθέτουμε ότι  $\mathbf{S}_D^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε αρχική τιμή του  $i$  το 1.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολογίζεται η κατασκευή με τις δοσμένες εφαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_D^{(i-1)}$ . Η λύση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας (3.17). Η διαδικασία επίλυσης δίδει τις περιοχές μη επαφής καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Επιλύεται το πρόβλημα αποκόλλησης θεωρώντας σταθερές τις δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$ . Η επίλυση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της έκφρασης δυναμικής ενέργειας (3.19). Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές για το  $\mathbf{S}_D^{(i)}$ .

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** Έλεγχος σύγκλισης: εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_D \end{bmatrix}^T$

και  $\varepsilon$  έχει επαρκώς μικρή τιμή τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ολοκληρώνεται (τερματίζει) ο αλγόριθμος αλλιώς συνεχίζει για άλλη επανάληψη θέτοντας  $i = i + 1$  και επιστρέφοντας στο βήμα 2.

### 3.3.2 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ COULOMB

Εδώ θα μελετήσουμε το κλασικό πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με τριβή κατά Coulomb. Εδώ προτείνουμε ένα αλγόριθμο για μια αριθμητική λύση βασισμένη σε μια πολυεπίπεδη αποσύνδεση των ορθών και εφαπτομενικών δράσεων. Το πρόβλημα που προκύπτει κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση επιλύεται με την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.21)$$

όπου  $V_{ad}$  είναι το σύνολο των κινηματικά επιτρεπτών μετακινήσεων το οποίο δίνεται από την σχέση (3.16) και  $\bar{\mathbf{p}}_1$  δίνεται από τη σχέση (3.10). Για το πρόβλημα κατά την εφαπτομενική στη διεπιφάνεια κατεύθυνση προτιμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συμπληρωματική ενέργεια της κατασκευής με σκοπό να αποφύγουμε τις συνθήκες μη διαφορισιμότητας που εισάγονται από τους περιορισμούς της τριβής. Για το λόγο αυτό στο δεύτερο βήμα ελαχιστοποιείται η συμπληρωματική ενέργεια (βλέπε (2.59))

$$\Pi_2^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^2 \quad (3.22)$$

όπου  $\Sigma_{ad}^2$  είναι το σύνολο των στατικά επιτρεπτών τάσεων, δηλαδή

$$\Sigma_{ad}^2 = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Z} \mathbf{s} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{G} \mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N, \quad |\mathbf{S}_T| \leq \mathbf{T}_0 \} \quad (3.23)$$

και  $\mathbf{T}_0 = \mu \mathbf{S}_N$ , όπου  $\mu$  είναι ο συντελεστής τριβής Coulomb.

Από πλευρά αριθμητικής βελτιστοποίησης και τα δύο υποπροβλήματα (3.21) και (3.22) είναι τετραγωνικά με περιορισμούς προβλήματα ελαχιστοποίησης και μπορούν εύκολα να λυθούν με τη χρήση ενός αλγόριθμου τετραγωνικού προγραμματισμού (quadratic programming algorithm, QP). Σημειώνουμε ότι λόγω της κυρτότητας των εκφράσεων (3.21) και (3.22) το ελάχιστο κάθε μίας από αυτές είναι μοναδικώς ορισμένο. Ο ακόλουθος αλγόριθμος έχει διατυπωθεί για την επίλυση του προβλήματος:

#### **Αλγόριθμος 2.** *Επιλύτης μονόπλευρης επαφής και τριβής Coulomb*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Αρχίζοντας τον αλγόριθμο θεωρούμε ότι οι εφαπτομενικές δυνάμεις είναι σταθερές. Συνήθως υποθέτουμε ότι  $\mathbf{S}_T^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε αρχική τιμή του  $i$  το 1.



**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολογίζεται η κατασκευή με τις δοσμένες επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$ . Η λύση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας (3.21). Η διαδικασία επίλυσης δίδει τις περιοχές επαφής καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Επιλύεται το πρόβλημα που προκύπτει κατά την επαπτομενική διεύθυνση της διεπιφάνειας θεωρώντας σταθερές τις δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$ . Η επίλυση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της συμπληρωματικής ενέργειας (3.22). Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές για το  $\mathbf{S}_T^{(i)}$ .

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** Έλεγχος σύγκλισης: εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_T \end{bmatrix}^T$  και  $\varepsilon$  έχει επαρκώς μικρή τιμή τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ολοκληρώνεται (τερματίζει) ο αλγόριθμος αλλιώς συνεχίζει για άλλη επανάληψη θέτοντας  $i = i + 1$  και επιστρέφοντας στο βήμα 2.

Σημειώνουμε ότι με τον παραπάνω αλγόριθμο μπορούμε να διαχειριστούμε και προβλήματα επαφής μέσω συγκολλητικού υλικού (adhesive contact) δηλαδή προβλήματα μονόπλευρης επαφής όπου κατά την επαπτομενική διεύθυνση η διεπιφάνεια συγκολλάται με κάποιο συγκολλητικό υλικό το οποίο χαρακτηρίζεται από ένα μονότονο νόμο δύναμης - μετακίνησης παρόμοιο με αυτόν της τριβής. Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια με την προηγούμενη με μόνη διαφορά ότι οι επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T$  δεν εξαρτώνται από τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N$  αλλά είναι μια μονότονη συνάρτηση των σχετικών επαπτομενικών μετακινήσεων. Σημειώνουμε επίσης ότι αυτό το γεγονός δεν καθιστά τα προβλήματα που προκύπτουν κατά τις δύο διευθύνσεις ανεξάρτητα αλλά εξακολουθεί να υπάρχει ισχυρή σύζευξη των δύο δράσεων.

### 3.3.3 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ COULOMB ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται προβλήματα μονόπλευρης επαφής στα οποία υποθέτουμε ότι στη διεπιφάνεια ισχύουν μονότονοι νόμοι δύναμης - μετακίνησης τόσο κατά την κάθετη όσο και κατά την επαπτομενική διεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, για την κάθετη διεύθυνση θεωρούμε ότι ισχύει ένας διαφορικός εγκλεισμός της μορφής  $-S_D \in \partial\phi_D([u]_D)$ . Για την επαπτομενική διεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει ένα διάγραμμα παρόμοιο με αυτό του σχήματος 2.2 το

οποίο μπορεί να εκφραστεί στη μορφή  $-S_T \in \partial\phi_D([u]_T)$ . Αυτή για παράδειγμα είναι η περίπτωση μιας διεπιφάνειας κολλημένης με ένα συγκολλητικό υλικό.

Αυτό το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο από το προηγούμενο γιατί πρέπει να προσδιορισθεί η ενεργός επιφάνεια επαφής  $\Gamma_C$  όπου αναπτύσσονται οι δυνάμεις επαφής  $S_N$  και η περιοχή μη επαφής  $\Gamma_D$  όπου αναπτύσσονται οι δυνάμεις αποκόλλησης  $S_D$  λόγω της παρουσίας συγκολλητικού υλικού. Επιπλέον, σε ότι αφορά τα τμήματα της διεπιφάνειας που έρχονται σε επαφή υποθέτουμε την ισχύ ενός μονότονου νόμου τριβής ή συγκολλητικού υλικού κατά την εφαπτομενική διεύθυνση.

Η λύση αυτού του προβλήματος μπορεί να προκύψει με την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας της κατασκευής

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} + \Phi_D(\mathbf{u}) + \Phi_T(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.24)$$

όπου  $\Phi_D(\mathbf{u})$  και  $\Phi_T(\mathbf{u})$  είναι τα κυρτά υπερδυναμικά των μονότονων νόμων δύναμης - μετακίνησης που ισχύουν κατά την κάθετη και κατά την εφαπτομενική διεύθυνση αντίστοιχα και  $V_{ad}$  είναι το κινηματικά επιτρεπτό σύνολο που δίνεται από την (3.16). Συμβολίζοντας με  $c$  τους κόμβους του  $\Gamma_C$  και με  $d$  τους κόμβους του  $\Gamma_D$  έχουμε ότι

$$\Phi_D(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \phi_D^{(i)}([\mathbf{u}]_D) \quad (3.25)$$

και

$$\Phi_T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^c \phi_T^{(i)}([\mathbf{u}]_T) \quad (3.26)$$

Η μέθοδος για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στη προηγούμενη ενότητα. Εδώ όμως διασπάται το πρόβλημα που αναφέρεται στην κάθετη προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση σε δύο υποπροβλήματα.

Διατυπώνονται λοιπόν τώρα τρία υποπροβλήματα. Το πρώτο υποπρόβλημα αντιστοιχεί αντιστοιχεί στην επίλυση του προβλήματος μονόπλευρης επαφής με την υπόθεση ότι οι δυνάμεις  $S_D$  και  $S_T$  είναι γνωστές. Η δυναμική ενέργεια

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.27)$$

ελαχιστοποιείται, όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D + \mathbf{G}_T \mathbf{S}_T \quad (3.28)$$

και το  $V_{ad}$  δίνεται από την (3.16).

Το δεύτερο υποπρόβλημα στην επίλυση του προβλήματος αποκόλλησης με την υπόθεση ότι οι δυνάμεις  $S_N$  και  $S_D$  είναι γνωστές. Εδώ η δυναμική ενέργεια

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \Phi_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.29)$$

ελαχιστοποιείται, όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{S}_T \quad (3.30)$$

και το  $V_{ad}^2$  δίνεται από την (3.20).

Το τρίτο υποπρόβλημα αναφέρεται στο πρόβλημα που προκύπτει κατά την εφαπτομενική διεύθυνση θεωρώντας ότι οι ορθές δυνάμεις  $S_N$  και  $S_D$  είναι γνωστές δηλαδή ελαχιστοποιούμε την συμπληρωματική ενέργεια

$$\Pi_3^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^3 \quad (3.31)$$

όπου

$$\Sigma_{ad}^3 = \{\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{G} \mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D, \quad \mathbf{Z} \mathbf{s} = \mathbf{F}, \quad |\mathbf{S}_T| \leq \mathbf{T}_0\}. \quad (3.32)$$

Στο τρίτο υποπρόβλημα περάσαμε στο δυϊκό πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της συμπληρωματικής ενέργειας για αποφύγουμε τις συνθήκες μη διαφορισιμότητας που είσηχθησαν με τον αντίστοιχο νόμο δύναμης μετακίνησης (βλ. σχήμα (2.2)).

Βασισμένοι στα παραπάνω υποπροβλήματα παραθέτουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

**Αλγόριθμος 3.** *Επιλύτης του γενικού προβλήματος της διεπιφάνειας (μονότονοι νόμοι επιφάνειας)*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Στο πρώτο βήμα θεωρούμε ότι οι εφαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T$  και οι δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D$  είναι σταθερές. Συνήθως υποθέτουμε ότι  $\mathbf{S}_T^{(0)} = \mathbf{0}$  και  $\mathbf{S}_D^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε  $i = 0$  και  $j = 0$ . Ο δείκτης  $i$  σχετίζεται με τις επαναλήψεις για τη λύση του προβλήματος κατά την εφαπτομενική

διεύθυνση ενώ ο δείκτης  $j$  σχετίζεται με τις επαναλήψεις για τη λύση του προβλήματος κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Θέτουμε  $i = i + 1$ .

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Θέτουμε  $j = j + 1$ .

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** Υπολογίζουμε την κατασκευή με δοσμένες επαπτομενικές δυνάμεις και δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$  και  $\mathbf{S}_D^{(j-1)}$ . Η λύση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας (3.27). Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τις περιοχές επαφής και μη επαφής, καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(j)}$ .

**Βήμα 5<sup>ο</sup>** Σε αυτό το βήμα ελαχιστοποιείται η έκφραση της δυναμικής ενέργειας (3.29) υποθέτοντας γνωστές τις δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(j)}$  και τις επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$ . Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τις δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D^{(j)}$ .

**Βήμα 6<sup>ο</sup>** Αντί να προχωρήσουμε στην ελαχιστοποίηση της έκφρασης της συμπληρωματικής ενέργειας (3.31) ελέγχουμε τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων για την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση, δηλαδή ελέγχουμε την

έκφραση  $\frac{\|\mathbf{s}^{(j)} - \mathbf{s}^{(j-1)}\|}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_D \end{bmatrix}^T$ . Ο λόγος για αυτό τον

προκαταρκτικό έλεγχο βασίζεται στο γεγονός ότι αριθμητικές δοκιμές έχουν δείξει υψηλή ευαισθησία του αλγόριθμου σε περίπτωση ασταθών περιοχών επαφής. Εάν ο έλεγχος ικανοποιείται προχωράμε στο επόμενο βήμα. Αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 3.

**Βήμα 7<sup>ο</sup>** Σε αυτό το βήμα το πρόβλημα που προκύπτει κατά την επαπτομενική σε σχέση με τη διεπιφάνεια διεύθυνση επιλύεται ελαχιστοποιώντας την έκφραση της συμπληρωματικής ενέργειας (3.31), υποθέτωντας ότι οι ορθές δυνάμεις  $\mathbf{S}_N^{(j)}$  και  $\mathbf{S}_D^{(j)}$  είναι γνωστές. Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τις τιμές για τις  $\mathbf{S}_T^{(i)}$ .

**Βήμα 8<sup>ο</sup>** Εδώ ελέγχουμε την καθολική σύγκλιση: Εάν  $\frac{\|\mathbf{s}^{(i)} - \mathbf{s}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_D & \mathbf{S}_T \end{bmatrix}^T$  και  $\varepsilon$  η επιθυμητή ακρίβεια τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ο αλγόριθμος τερματίζει. Αλλιώς επιστρέφουμε για άλλη μια επανάληψη στο βήμα 2.

### 3.4 ΜΗ ΚΥΡΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα, οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν για την περίπτωση των κυρτών προβλημάτων επεκτείνονται ώστε να επιλύσουμε τα αντίστοιχα μη κυρτά προβλήματα. Η γενική διατύπωση είναι ανάλογη με αυτή που δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Εδώ η δυναμική ενέργεια της κατασκευής έχει την μορφή

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T) + \bar{\Phi}_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N), \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.33)$$

και η συμπληρωματική ενέργεια έχει τη μορφή

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}, \mathbf{S}_T) + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}, \mathbf{S}_N), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad} \quad (3.34)$$

όπου  $\bar{\Phi}_N(\mathbf{u}, \mathbf{S}_T)$ ,  $\bar{\Phi}_T(\mathbf{u}, \mathbf{S}_N)$ ,  $\bar{\Phi}_N(\mathbf{s}, \mathbf{S}_T)$  και  $\bar{\Phi}_T(\mathbf{s}, \mathbf{S}_N)$  είναι κατάλληλα ορισμένα μη κυρτά υπερδυναμικά και  $V_{ad}$ ,  $\Sigma_{ad}$  είναι κατάλληλα κινηματικά και στατικά επιτρεπτά σύνολα αντίστοιχα, τα ίδια με αυτά στην περίπτωση των κυρτών προβλημάτων. Ακολουθώντας την προσέγγιση της προηγούμενης ενότητας, το πρόβλημα (3.33) σπάει σε δύο υποπροβλήματα

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^1 \quad (3.35)$$

και

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \bar{\Phi}_T(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.36)$$

υποθέτοντας ότι στην πρώτη οι τιμές του  $\mathbf{S}_T$  είναι αμετάβλητες και στην δεύτερη ότι οι τιμές του  $\mathbf{S}_N$  είναι αμετάβλητες.

Εδώ τα  $\bar{\mathbf{p}}_1$  και  $\bar{\mathbf{p}}_2$  ορίζονται από τις (3.10) και (3.11) και  $V_{ad}^1$ ,  $V_{ad}^2$  είναι κατάλληλα ορισμένα και κινηματικώς επιτρεπτά σύνολα.

Ομοίως το πρόβλημα (3.34) διασπάται στα ακόλουθα υποπροβλήματα

$$\Pi_1^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_N(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^1 \quad (3.37)$$

και

$$\Pi_2^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^2 \quad (3.38)$$

όπου  $\Sigma_{ad}^1$  και  $\Sigma_{ad}^2$  είναι κατάλληλα ορισμένα στατικώς επιτρεπτά σύνολα όπως και στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος.

Βασισμένοι στις παραπάνω διασπάσεις των κάθετων και των εφαπτομενικών δράσεων μπορούμε να μορφώσουμε αλγόριθμους για την επίλυση των αρχικών προβλημάτων οι οποίοι είναι παρόμοιοι με αυτούς που είδαμε παραπάνω στα κυρτά προβλήματα.

### 3.4.1 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με ένα μη μονότονο νόμο να περιγράψει την διαδικασία αποκόλλησης κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση, δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας

$$-S_D \in \bar{\partial}\tilde{\phi}_D([u]_D) \quad \text{ή} \quad [u]_D \in \bar{\partial}\bar{\phi}_D(-S_D) \quad (3.39)$$

όπου  $\tilde{\phi}_D, \bar{\phi}_D$  είναι κατάλληλα ορισμένα μη κυρτά υπερδυναμικά που αποδίδουν το νόμο συγκόλλησης.

Όπως και στην περίπτωση του αντίστοιχου κυρτού προβλήματος πρέπει να διακρίνουμε τα δύο τμήματα της διεπιφάνειας. Το τμήμα επαφής  $\Gamma_C$  με  $c$  κόμβους και το τμήμα μη επαφής  $\Gamma_D$  με  $d$  κόμβους. Γι' αυτό η δυναμική ενέργεια της κατασκευής παίρνει τη μορφή

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} + \tilde{\Phi}_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.40)$$

$$\Pi^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_D(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad} \quad (3.41)$$

Στις προηγούμενες σχέσεις τα  $\tilde{\Phi}_D, \bar{\Phi}_D$  εκφράζουν τα μη κυρτά υπερδυναμικά του νόμου συγκόλλησης, δηλαδή

$$\tilde{\Phi}_D(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \tilde{\phi}_D^{(i)}([u]_D) \quad (3.42)$$

$$\bar{\Phi}_D(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^d \bar{\phi}_D^{(i)}(-\mathbf{S}_D) \quad (3.43)$$

και  $V_{ad}$  είναι το κινηματικά αποδεκτό σύνολο που δίνεται από τη σχέση (3.16) και  $\Sigma_{ad}$  είναι το κινηματικά επιτρεπτό σύνολο που δίνεται από τη σχέση

$$\Sigma_{ad} = \{ \mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{Zs} = \mathbf{F}, \mathbf{Gs} = \mathbf{p} \}. \quad (3.44)$$

Για την επίλυση του προβλήματος εξετάζουμε πρώτα το υποπρόβλημα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα της μονόπλευρης επαφής με γνωστές τις δυνάμεις αποκόλλησης  $S_D$ . Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας για αυτό το πρόβλημα είναι.

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V_{ad} \quad (3.45)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D. \quad (3.46)$$

Για το υποπρόβλημα που αντιστοιχεί στην επίλυση του προβλήματος της αποκόλλησης με γνωστές τις δυνάμεις επαφής, μπορούμε να εξετάσουμε είτε το πρόβλημα υποστασιμότητας της δυναμικής ενέργειας

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \tilde{\Phi}_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.47)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N. \quad (3.48)$$

και

$$V_{ad}^2 = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{Eu} = \mathbf{u}_0 \}. \quad (3.49)$$

είτε το πρόβλημα υποστασιμότητας της συμπληρωματικής ενέργειας

$$\Pi_2^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\bar{\Phi}}_D(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^2 \quad (3.50)$$

όπου

$$\Sigma_{ad}^2 = \{ \mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{Gs} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N, \mathbf{Zs} = \mathbf{F}, \}. \quad (3.51)$$

Όπως και στην περίπτωση του αντίστοιχου κυρτού προβλήματος, η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο υποπροβλημάτων είναι πολύ ισχυρή. Βασισμένοι στην παραπάνω διάσπαση παραθέτουμε τον παρακάτω πολυεπίπεδο αλγόριθμο

για την επίλυση του προβλήματος.

**Αλγόριθμος 4.** *Επιλύτης μονόπλευρης επαφής και μη μονότονης αποκόλλησης*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Αποφασίζουμε τον αριθμό  $N$  των μεταβολών του φορτίου που θα χρησιμοποιηθούν. Αυτή η επιλογή γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε στην πρώτη αύξηση να μην παρουσιάζονται οι μη γραμμικότητες που οφείλονται στο διάγραμμα της μη μονότονης αποκόλλησης. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαίες μερικές προκαταρκτικές λύσεις του προβλήματος ώστε να διαλέξουμε μια κατάλληλη τιμή για την μεταβολή του φορτίου  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}/N$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Για  $k = 1, N$

- (α) Θέτουμε  $\mathbf{p} = k\delta \mathbf{p}$
- (β) Θεωρούμε ότι οι δυνάμεις αποκόλλησης είναι σταθερές και πιο συγκεκριμένα ότι  $\mathbf{S}_D^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε  $i = 1$ .
- (γ) Υπολογίζουμε την κατασκευή με τις δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D^{(i-1)}$  εφαρμοζόμενες σαν εξωτερικά φορτία. Η λύση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας της κατασκευής (3.17). Η διαδικασία επίλυσης δίδει τις περιοχές επαφής και μη επαφής καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$ .
- (δ) Επιλύουμε το πρόβλημα αποκόλλησης υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$  είναι σταθερές. Η λύση επιτυγχάνεται επιλύοντας τα προβλήματα υποστασιμότητας (3.47) ή (3.50). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο μη κυρτής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Σαν αποτελέσματα λαμβάνουμε τις τιμές των  $\mathbf{S}_T^{(i)}$ .
- (ε) Έλεγχος σύγκλισης: εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_D \end{bmatrix}^T$  και  $\varepsilon$  έχει επαρκώς μικρή τιμή τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ολοκληρώνεται (τερματίζει) ο αλγόριθμος αλλιώς συνεχίζει για άλλη επανάληψη θέτοντας  $i = i + 1$  και επιστρέφοντας στο βήμα 2c.



### 3.4.2 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΤΡΙΒΗ

Εδώ εξετάζουμε το πρόβλημα της μονόπλευρης επαφής με μη μονότονη τριβή, δηλαδή υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$-S_T \in \bar{\partial}\tilde{\phi}_T([u]_T) \quad \text{ή} \quad [u]_T \in \bar{\partial}\bar{\phi}_T(-S_T) \quad (3.52)$$

κατά την εφαπτομενική προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση όπου  $\tilde{\phi}_T, \bar{\phi}_T$  είναι κατάλληλα ορισμένα μη κυρτά υπερδυναμικά τα οποία οδηγούν σε μη μονότονο νόμο τριβής.

Εδώ προτείνεται ένας αλγόριθμος για την αριθμητική επίλυση βασισμένη σε μια πολυεπίπεδη αποσύνδεση των ορθών και εφαπτομενικών δράσεων. Το πρόβλημα που προκύπτει κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση είναι το ίδιο με αυτό στην περίπτωση του διαγράμματος τριβής κατά Coulomb (βλέπε (3.21)).

Στο δεύτερο βήμα τα προβλήματα υποστασιμότητας (3.36) ή (3.38) επιλύονται με

$$V_{ad}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0\} \quad (3.53)$$

και

$$\Sigma_{ad}^2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N, \quad \mathbf{Z}\mathbf{s} = \mathbf{F}\}. \quad (3.54)$$

Η τεχνική των σταδιακών μεταβολών εφαρμόζεται υποθέτοντας ότι η τελική τιμή της φόρτισης επιτυγχάνεται μέσω ενός συγκεκριμένου αριθμού  $N$  μεταβολών του φορτίου. Η διαδικασία επίλυσης μπορεί να συνοψισθεί στον ακόλουθο αλγόριθμο:

**Αλγόριθμος 5.** *Επιλύτης μονόπλευρης επαφής και μη μονότονης τριβής*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Αποφασίζουμε τον αριθμό  $N$  των βημάτων φόρτισης που θα χρησιμοποιηθούν. Τότε,  $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}/N$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Για  $k = 1, N$

(α) Θέτουμε  $\mathbf{p} = k\delta\mathbf{p}$

- (β) Θεωρούμε ότι οι επαπτομενικές δυνάμεις είναι σταθερές. Συνήθως υποθέτουμε ότι  $\mathbf{S}_T^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε  $i = 1$  όπου ο δείκτης  $i$  δηλώνει τον αριθμό των ορθών και επαπτομενικών υποπροβλημάτων που επιλύονται.
- (γ) Υπολογίζουμε την κατασκευή για τις δεδομένες επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$ . Η λύση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας της κατασκευής (3.21). Η διαδικασία επίλυσης δίδει τις περιοχές επαφής και μη επαφής καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$ .
- (δ) Επιλύουμε το πρόβλημα που προκύπτει κατά την επαπτομενική προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(i)}$  είναι σταθερές. Η λύση επιτυγχάνεται επιλύοντας τα προβλήματα υποστασιμότητας εκφραζόμενα είτε σε όρους δυναμικής, είτε σε όρους συμπληρωματικής ενέργειας. Αυτό το βήμα επιλύεται με την εφαρμογή του αλγόριθμου μη κυρτής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Για την εφαρμογή του αλγόριθμου χρησιμοποιούμε για σημείο εκκίνησης τη λύση που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Η λύση του προβλήματος δίνει τις τιμές του  $\mathbf{S}^{(i)}$ .

- (ε) Έλεγχος σύγκλισης: εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_N & \mathbf{S}_T \end{bmatrix}^T$  και  $\varepsilon$  έχει επαρκώς μικρή τιμή τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ολοκληρώνεται (τερματίζει) ο αλγόριθμος αλλιώς συνεχίζει για άλλη επανάληψη θέτοντας  $i = i + 1$  και επιστρέφοντας στο βήμα 2c.

### 3.4.3 ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΤΡΙΒΗ ΚΑΙ ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗ

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το πρόβλημα που προκύπτει εάν υποθέσουμε ότι στη διεπιφάνεια, τόσο κατά την κάθετη διεύθυνση όσο και κατά την επαπτομενική, ισχύουν μη μονότονοι νόμοι δύναμης - μετακίνησης. Για την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες.

$$-S_D \in \bar{\partial}\tilde{\phi}_D([u]_D) \quad \text{ή} \quad [u]_D \in \bar{\partial}\bar{\phi}_D(-S_D) \quad (3.55)$$

Στην εφαπτομενική διεύθυνση ισχύουν οι συνθήκες

$$-S_T \in \bar{\partial}\bar{\phi}_T([u]_T) \quad \text{ή} \quad [u]_T \in \bar{\partial}\bar{\phi}_T(-S_T) \quad (3.56)$$

Όπως και στις προηγούμενες ενότητες, έτσι και εδώ  $\bar{\phi}_D, \bar{\phi}_D, \bar{\phi}_T, \bar{\phi}_T$  είναι μη κυρτά υπερδυναμικά που αποδίδουν τους αντίστοιχους μη μονότονους νόμους.

Αυτές οι συνθήκες περιγράφουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα διεπιφανειών όπου για παράδειγμα τα δύο μέρη της διεπιφάνειας συγκολλώνται με ένα συγκολλητικό υλικό. Για το λόγο αυτό μετά τον προσδιορισμό της ενεργού περιοχής επαφής  $\Gamma_C$  όπου αναπτύσσονται οι δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N$  και της περιοχής μη επαφής  $\Gamma_D$  όπου αναπτύσσονται οι δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D$  πρέπει να προσδιορίσουμε την ακριβή κατανομή των εφαπτομενικών δυνάμεων.

Η λύση αυτού του προβλήματος υποστασιμότητας της δυναμικής ή αντίστοιχα της συμπληρωματικής ενέργειας της κατασκευής. Όπως και στην περίπτωση του αντίστοιχου κυρτού προβλήματος η απευθείας λύση των προαναφερθέντων προβλημάτων υποστασιμότητας δεν είναι εφικτή.

Τρία είναι τα υποπρόβληματα που μορφώνονται:

Το πρώτο υποπρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μονόπλευρης επαφής με την υπόθεση γνωστών δυνάμεων αποκόλλησης και εφαπτομενικών δυνάμεων (παρέβαλε (3.27), (3.28)).

Το δεύτερο υποπρόβλημα αναφέρεται στην επίλυση του προβλήματος αποκόλλησης με την υπόθεση ότι οι δυνάμεις  $\mathbf{S}_N$  και  $\mathbf{S}_T$  είναι δοσμένες. Το πρόβλημα υποστασιμότητας διατυπώνεται σε όρους μετακινήσεων:

$$\Pi_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u} + \bar{\Phi}_D(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^2 \quad (3.57)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{S}_T, \quad (3.58)$$

και

$$V_{ad}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{E} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0\}. \quad (3.59)$$

Σε όρους τάσεων το πρόβλημα υποστασιμότητας γράφεται:

$$\Pi_2^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_D(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^2 \quad (3.60)$$

όπου

$$\Sigma_{ad}^2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_T \mathbf{S}_T, \mathbf{Z}\mathbf{s} = \mathbf{F}\}. \quad (3.61)$$

Το τρίτο υποπρόβλημα αντιστοιχεί στο πρόβλημα που εγείρεται κατά την επαπτομενική διεύθυνση, υποθέτοντας ότι οι κάθετες στη διεπιφάνεια δυνάμεις  $\mathbf{S}_N$  και  $\mathbf{S}_D$  είναι γνωστές. Σε όρους μετακινήσεων η δυναμική ενέργεια που πρέπει να είναι υποστάσιμη γράφεται

$$\Pi_3(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{p}}_3^T \mathbf{u} + \bar{\Phi}_T(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V_{ad}^3 \quad (3.62)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{p}}_3 = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D, \quad (3.63)$$

και  $V_{ad}^3$  είναι το ίδιο ακριβώς με το  $V_{ad}^2$ . Σε όρους τάσεων η συμπληρωματική ενέργεια

$$\Pi_3^c(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{e}_0^T \mathbf{s} + \bar{\Phi}_T(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \Sigma_{ad}^3 \quad (3.64)$$

πρέπει να είναι υποστάσιμη, όπου

$$\Sigma_{ad}^3 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{G}\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{G}_N \mathbf{S}_N + \mathbf{G}_D \mathbf{S}_D, \mathbf{Z}\mathbf{s} = \mathbf{F}\}. \quad (3.65)$$

Τα παραπάνω υποπροβλήματα μπορούν να οργανωθούν στο ακόλουθο πλαίσιο εργασιών επίλυσης:

**Αλγόριθμος 6.** *Επιλύτης γενικού προβλήματος διεπιφανειών (μη μονότονοι νόμοι διεπιφάνειας)*

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Αποφασίζουμε τον αριθμό  $N$  των μεταβολών του φορτίου που θα χρησιμοποιηθούν. Τότε,  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}/N$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Για  $k = 1, N$

(α) Θέτουμε  $\mathbf{p} = k\delta \mathbf{p}$

(β) Στο πρώτο βήμα θεωρούμε ότι οι επαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T$  και οι δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D$  είναι σταθερές. Συνήθως υποθέτουμε ότι  $\mathbf{S}_T^{(0)} = \mathbf{0}$  και  $\mathbf{S}_D^{(0)} = \mathbf{0}$ . Θέτουμε  $i = 0$  και  $j = 0$  όπου ο δείκτης  $i$  σχετίζεται με τον αριθμό των επαναλήψεων για τη λύση

του προβλήματος που προκύπτει κατά την εφαπτομενική διεύθυνση και ο δείκτης  $j$  σχετίζεται με τον αριθμό των επαναλήψεων για τη λύση του προβλήματος που προκύπτει κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση.

(γ) Θέτουμε  $i = i + 1$ .

(δ) Θέτουμε  $j = j + 1$ .

(ε) Υπολογίζουμε την κατασκευή για τις δεδομένες εφαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$  και τις δυνάμεις αποκόλλησης  $\mathbf{S}_D^{(j-1)}$ . Η λύση επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας της κατασκευής (3.27). Η διαδικασία επίλυσης δίδει τις περιοχές επαφής και μη επαφής καθώς και τις τιμές των δυνάμεων επαφής  $\mathbf{S}_N^{(j)}$ .

(στ) Αυτό το βήμα έχει να κάνει με το πρόβλημα υποστασιμότητας των εκφράσεων της δυναμικής και της συμπληρωματικής ενέργειας (3.57) ή (3.60) υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις επαφής  $\mathbf{S}_N^{(j)}$  και οι εφαπτομενικές δυνάμεις  $\mathbf{S}_T^{(i-1)}$  είναι σταθερές και λύνεται. Αυτό το βήμα επιλύεται με την εφαρμογή του αλγόριθμου μη κυρτής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Για την εφαρμογή αυτού του αλγόριθμου χρησιμοποιούμε για σημείο εκκίνησης τη λύση που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Η λύση του προβλήματος δίνει τις τιμές του  $\mathbf{S}_D^{(j)}$ .

(ζ) Έλεγχος σύγκλισης: εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(j)} - \mathbf{S}^{(j-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(j)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_N \quad \mathbf{S}_D]^T$  και  $\varepsilon$  έχει επαρκώς μικρή τιμή τότε η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και προχωράμε στο επόμενο βήμα αλλιώς συνεχίζουμε για άλλη επανάληψη επιστρέφοντας στο βήμα 2d.

(η) Εδώ εξετάζουμε το πρόβλημα που προκύπτει κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Η λύση των προβλημάτων υποστασιμότητας (3.62) ή (3.64) επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του αλγόριθμου μη κυρτής βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Λαμβάνουμε σαν αποτέλεσμα τις τιμές  $\mathbf{S}_T^{(i)}$ .

(θ) Σε αυτό το βήμα ελέγχουμε την καθολική σύγκλιση:

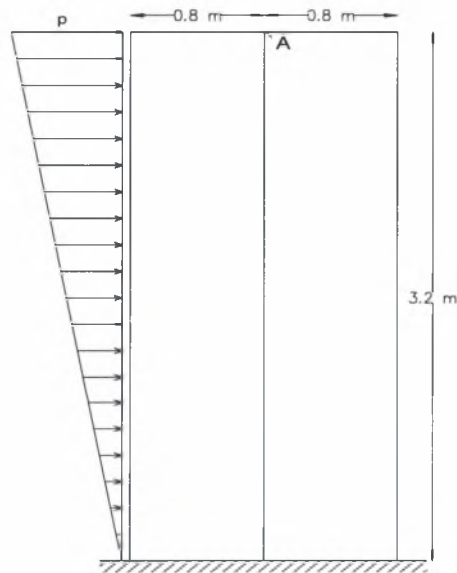
Εάν  $\frac{\|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{S}^{(i)}\|} \leq \varepsilon$  όπου  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_N \quad \mathbf{S}_D \quad \mathbf{S}_T]^T$  και  $\varepsilon$  η επιθυμητή ακρίβεια, η σύγκλιση έχει επιτευχθεί και ο αλγόριθμος τερματίζει

αλλιώς συνεχίζουμε για άλλη επανάληψη επιστρέφοντας στο βήμα 2c.

# Κεφάλαιο 4

## 4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Θεωρούμε την κατασκευή του σχήματος 4.1, η οποία αποτελείται από δύο τοιχώματα που χωρίζονται μεταξύ τους με έναν αρμό. Η κατασκευή υποβάλλεται σε τριγωνική καθ' ύψος φόρτιση μέσα στο επίπεδό της. Η φόρτιση είναι σταδιακά αυξανόμενη. Υποθέτουμε την ισχύ της γραμμικής ελαστικότητας και της γεωμετρικής γραμμικότητας. Το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνεται ίσο με  $E = 2.9 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$  και ο λόγος του Poisson  $\nu = 0.16$ . Τα στοιχεία έχουν πάχος  $0.20 \text{ m}$ .

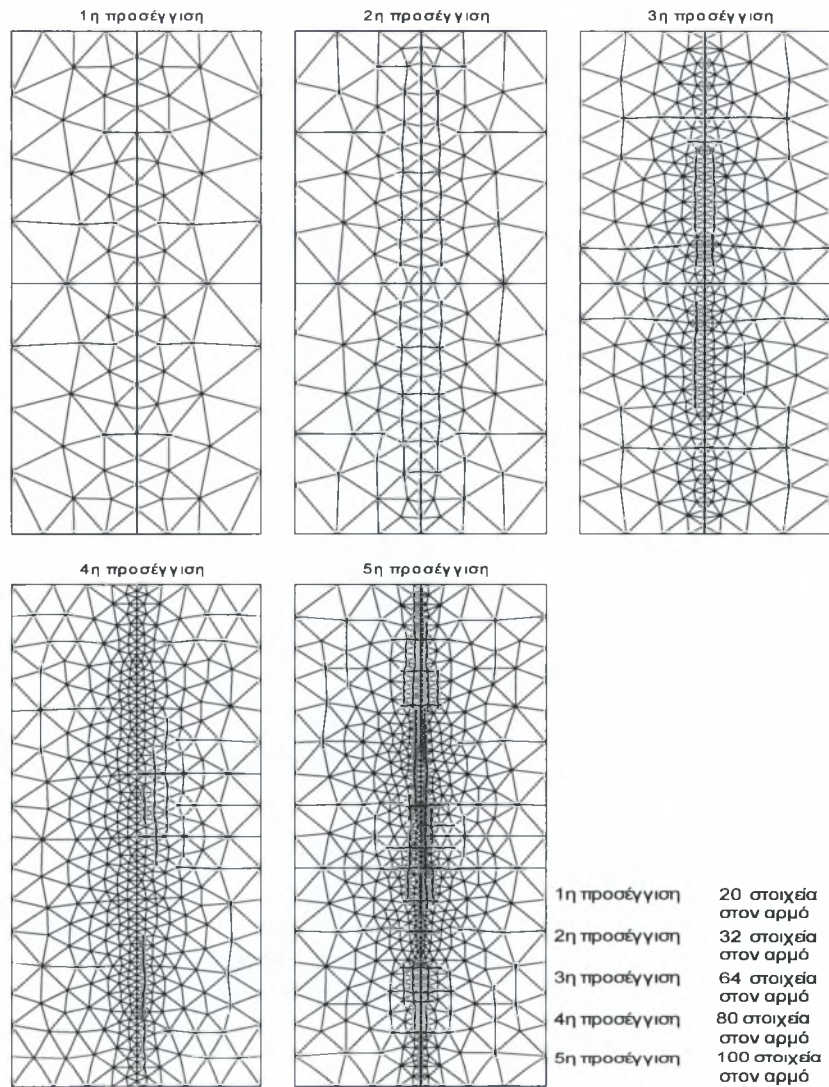


Σχήμα 4.1: Η θεωρούμενη κατασκευή

Στο σχήμα 4.2 απεικονίζονται οι διακριτοποιήσεις της κατασκευής με σταδιακή πύκνωση του κανάβου κοντά στον αρμό, ενώ στον πίνακα 4.1 δίνονται περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα προσομοιώματα. Στον πίνακα 4.1 δίνονται περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διακριτοποίηση.

Τα δύο τοιχώματα έρχονται σε επαφή κατά την φόρτιση. Μεταξύ τους αναπτύσσεται τριβή κατά την επαπτομενική προς τον αρμό διεύθυνση. Για την τριβή αυτή υποθέτουμε το νόμο του σχήματος 4.3.



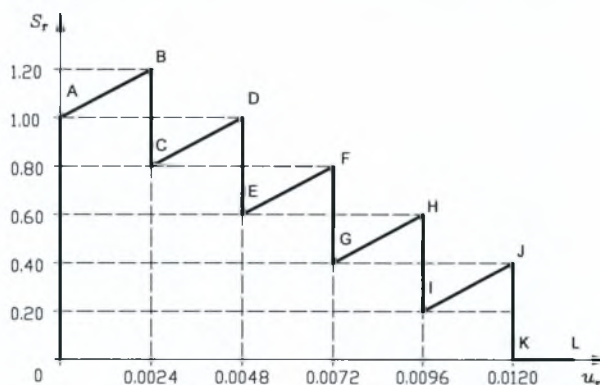


Σχήμα 4.2: Οι διακριτοποιήσεις της κατασκευής

Προσέγγιση	Αριθμός στοιχείων στον αρμό	Συνολικός αριθμός στοιχείων
1	20	164
2	32	280
3	64	708
4	80	974
5	100	1248

Πίνακας 4.1: Αριθμός στοιχείων στις προσεγγίσεις

Εγινε ανάλυση και για τις πέντε διακριτοποιήσεις της κατασκευής. Χρησιμοποιήθηκαν οι 12 φορτίσεις που φαίνονται στον πίνακα 4.2 ώστε να λάβουμε παραμετρική λύση. Στην ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκε ο **αλγόριθμος 5** που αναφέρεται σε προβλήματα *μονόπλευρης επαφής με μη μονότονη τριβή*.



Σχήμα 4.3: Ο θεωρούμενος νόμος τριβής

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζονται οι ορθές τάσεις στη διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις στην 5η στάθμη φόρτισης. Η απόσταση στη διεπιφάνεια έχει σημείο αναφοράς την κορυφή του τοιχώματος. Παρατηρούμε ότι έχουμε σχεδόν ταύτιση των καμπύλων. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση των ορθών δυνάμεων δεν εξαρτάται από τη διακριτοποίηση. Στο σχήμα 4.5 δίνονται για την 3η διακριτοποίηση (64 στοιχεία στον αρμό) οι κατανομές των ορθών τάσεων στις διάφορες στάθμες φόρτισης.

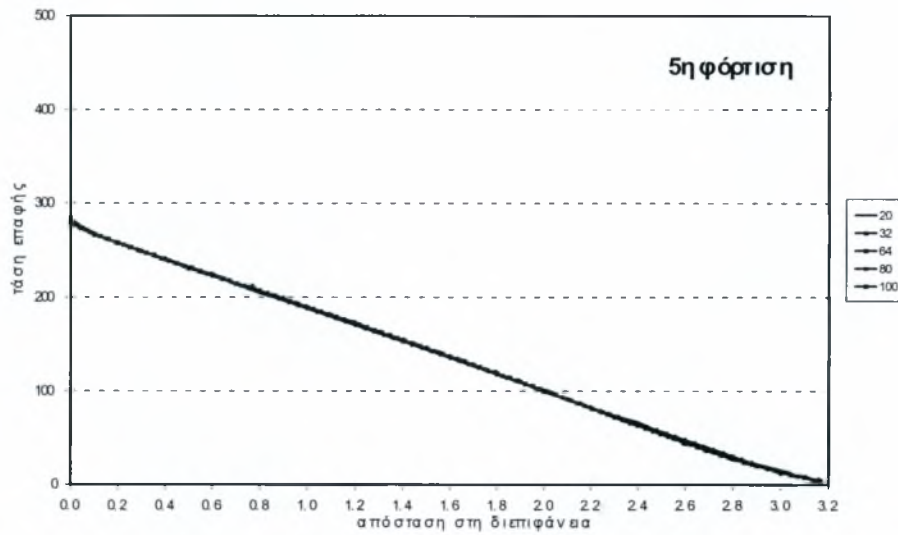
Στα σχήματα 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 απεικονίζονται τα διαγράμματα της κατανομής των τάσεων τριβής στη διεπιφάνεια, και της εξέλιξης αυτών κατά τις διάφορες

Φόρτιση	(kN)
1	160.0
2	320.0
3	480.0
4	640.0
5	800.0
6	960.0
7	1120.0
8	1280.0
9	1440.0
10	1600.0
11	1760.0
12	1920.0

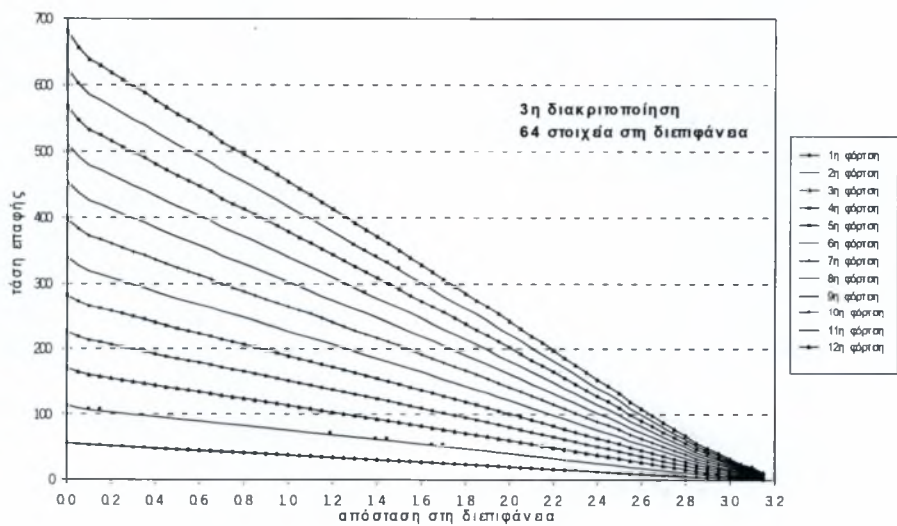
Πίνακας 4.2: Οι θεωρηθείσες φορτίσεις

φορτίσεις. Αρχικά (1η, 2η φόρτιση) για όλες τις διακριτοποιήσεις οι τάσεις τριβής είναι στον 2ο κλάδο του νόμου τριβής. Καθώς αυξάνεται η φόρτιση φαίνεται η επιρροή της διακριτοποίησης στην εξέλιξη των τάσεων τριβής. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα συγκλίνει, αλλά προφανώς πολύ δυσκολότερα από το πρόβλημα του πρώτου παραδείγματος. Η διαδικασία επίλυσης γίνεται ιδιαίτερα επίπονη και απαιτητική σε υπολογιστική ισχύ όσο πηγαίνουμε σε μεγαλύτερες προσεγγίσεις. Από τα διαγράμματα βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα των δύο πυκνότερων προσεγγίσεων (4η και 5η προσέγγιση) είναι αρκετά κοντά και μπορεί πλέον να θεωρηθεί ότι έχουμε φθάσει σε ικανοποιητικό βαθμό διακριτοποίησης.

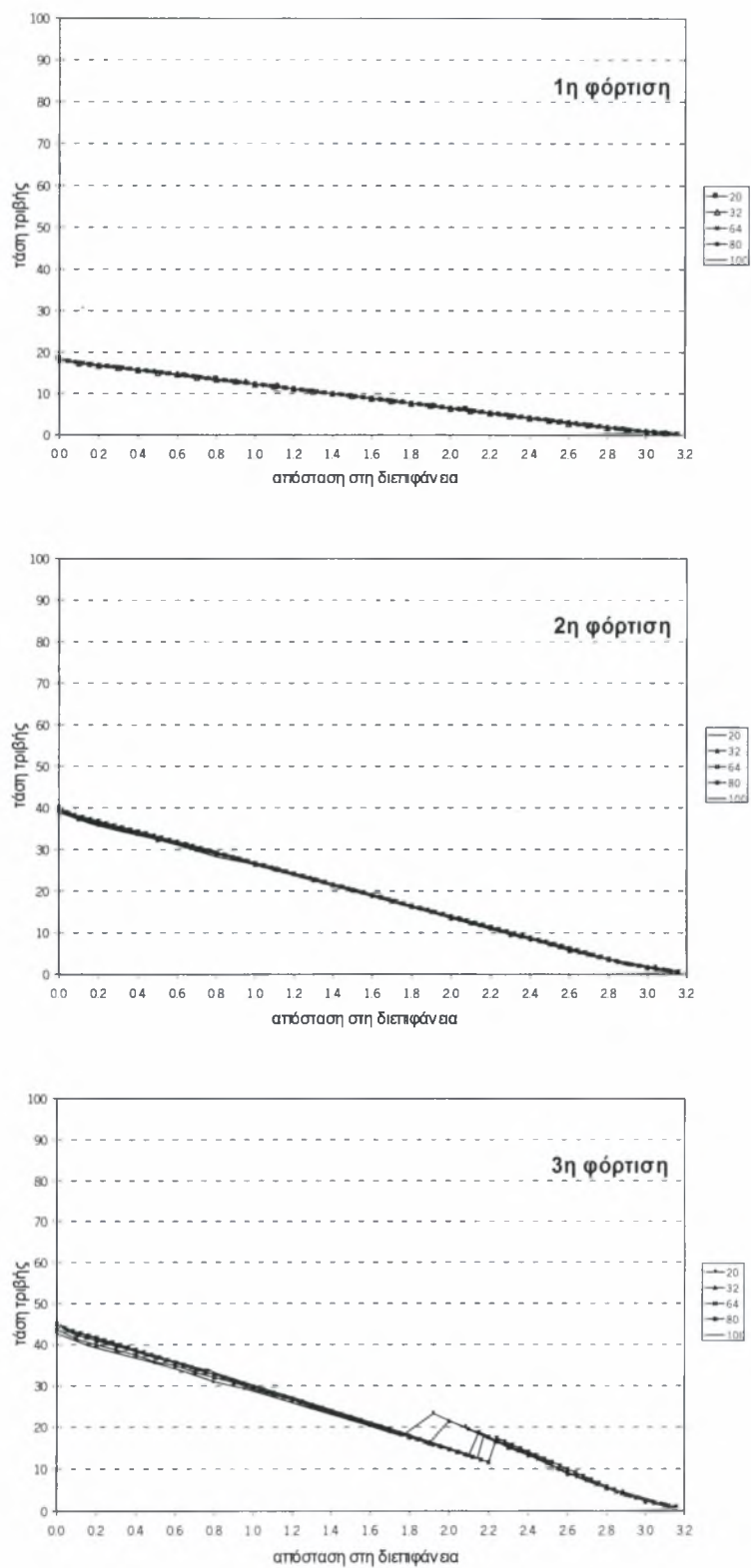
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι πυκνότητα του κανάβου δεν επηρεάζει το πρόβλημα της εκτίμησης των ορθών δυνάμεων. Αντίθετα είναι ισχυρή η εξάρτηση της πυκνότητας του κανάβου στο πρόβλημα προσδιορισμού των εφαπτομενικών δυνάμεων.



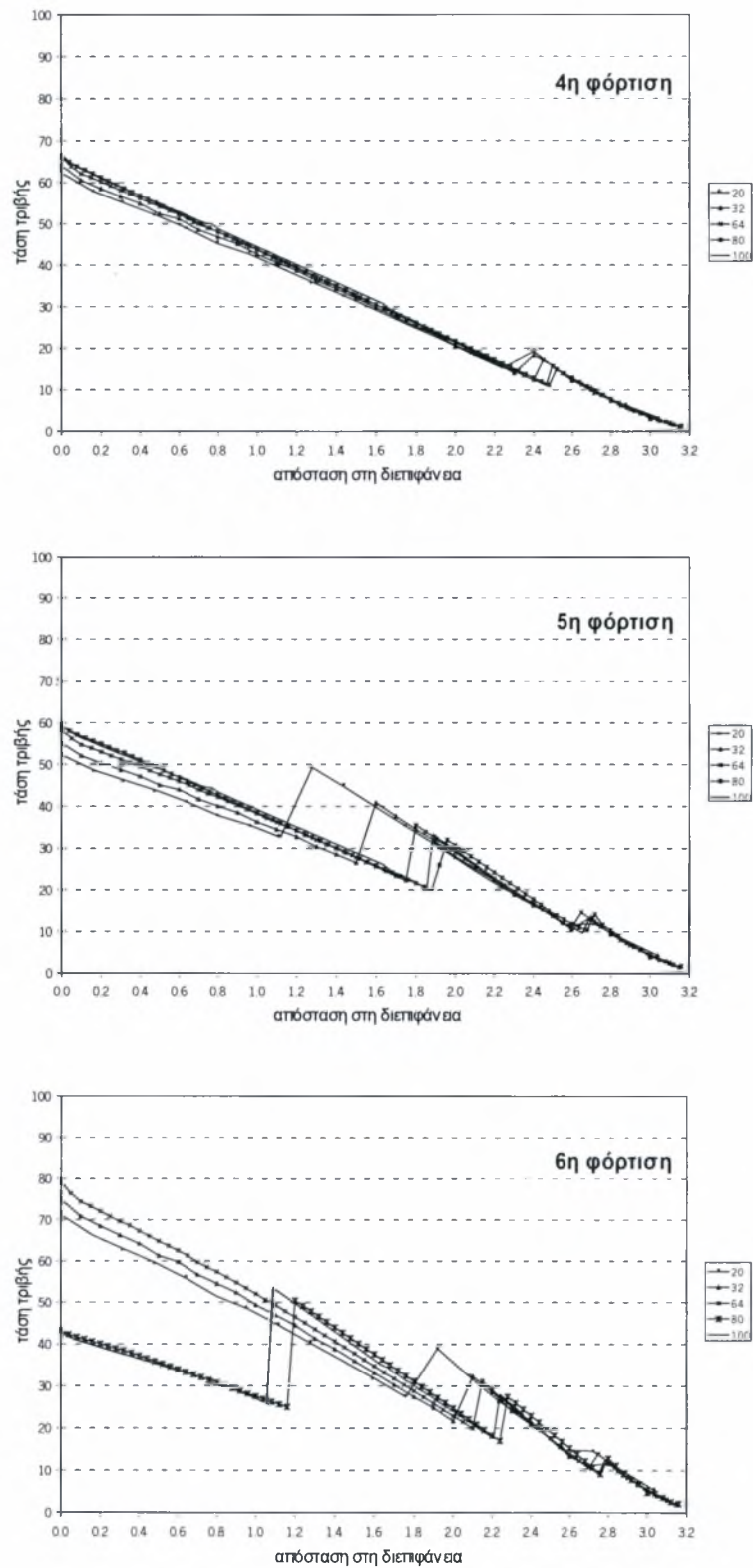
Σχήμα 4.4: Διαγράμματα κατανομής της τάσης επαφής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 5η φόρτιση



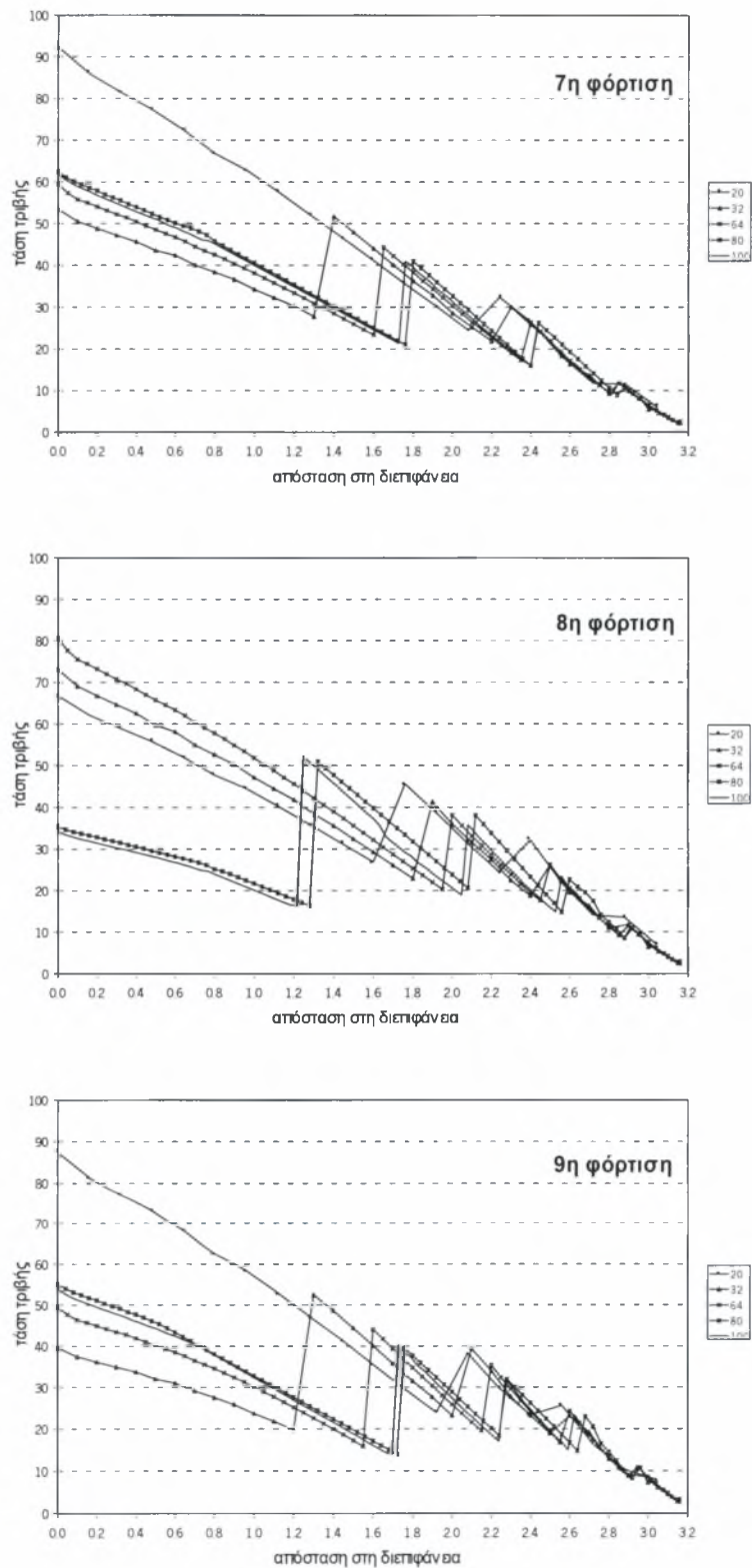
Σχήμα 4.5: Διαγράμματα κατανομής της τάσης επαφής στην διεπιφάνεια για την 3η διακριτοποίηση για όλες τις φορτίσεις



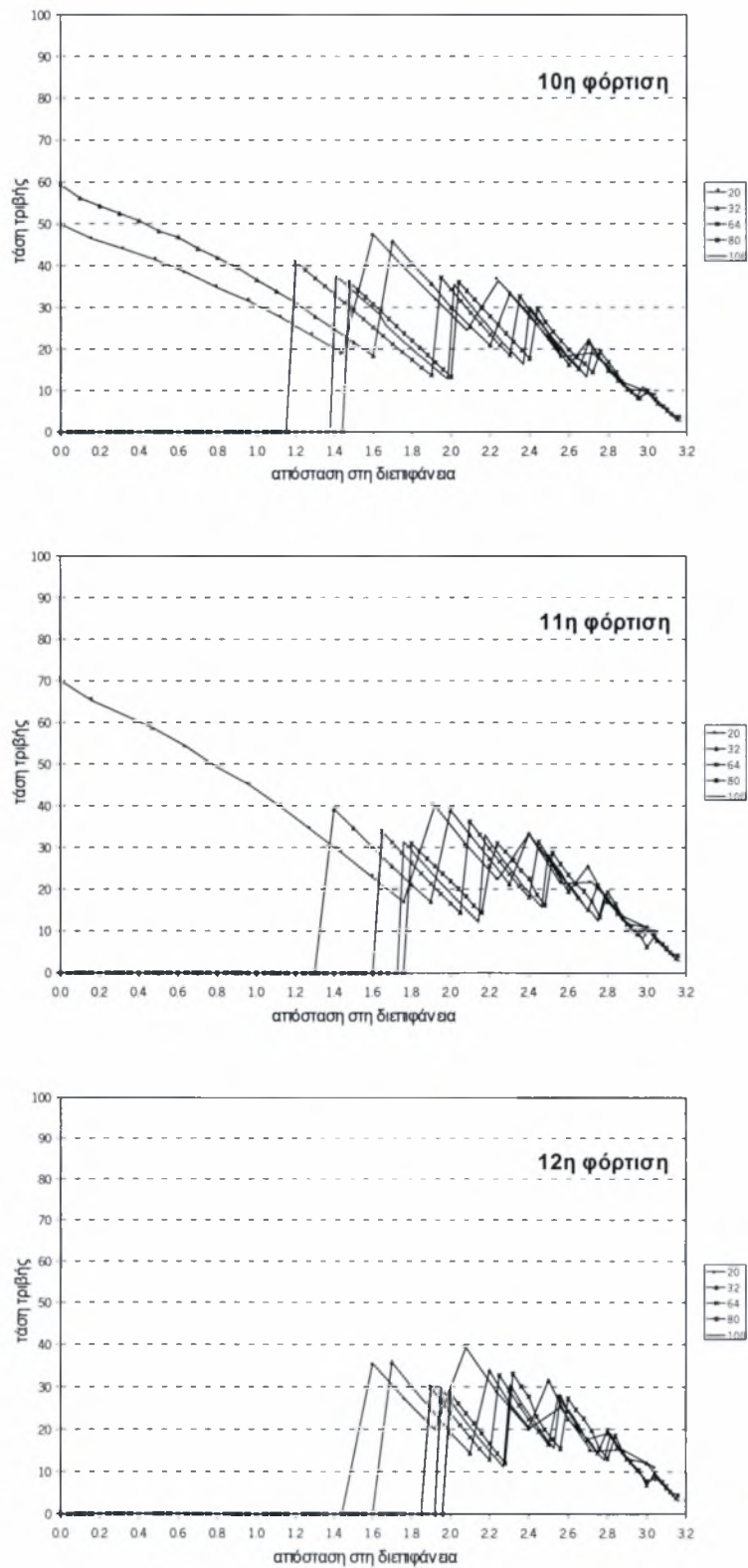
Σχήμα 4.6: Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 1η, 2η και 3η φόρτιση



Σχήμα 4.7: Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 4η, 5η και 6η φόρτιση



Σχήμα 4.8: Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 7η, 8η και 9η φόρτιση



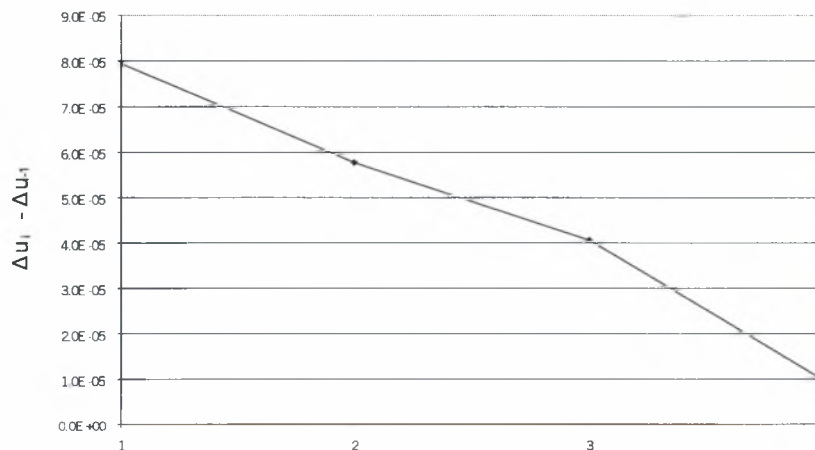
Σχήμα 4.9: Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 10η, 11η και 12η φόρτιση



Στον πίνακα 4.3 δίδονται οι τιμές της σχετικής εφαπτομενικής μετακίνησης στο σημείο A της διεπιφάνειας. Ακολουθώντας στο διάγραμμα του σχήματος 4.10 απεικονίζονται οι διαφορές των σχετικών εφαπτομενικών μετακινήσεων μεταξύ των διαδοχικών προσεγγίσεων. Στο σημείο 1 αντιστοιχεί η διαφορά μεταξύ των σχετικών μετακινήσεων της 2ης και της 1ης διακριτοποίησης, στο σημείο 2 αντιστοιχεί η διαφορά μεταξύ των σχετικών μετακινήσεων της 3ης και της 2ης διακριτοποίησης κ.ο.κ. Βλεπούμε λοιπόν την απότομη πτώση στη διαφορά αυτή με την πύκνωση του κανάβου.

Διακριτοποίηση	Σχετική μετακίνηση στο σημείο A (m)
1	7.02 E-04
2	7.81 E-04
3	8.39 E-04
4	8.79 E-04
5	8.69 E-04

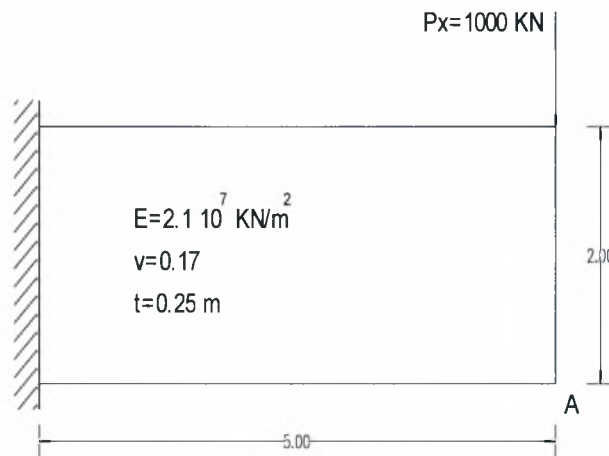
Πίνακας 4.3: Η σχετικές μετακινήσεις του σημείου A στην 7η φόρτιση για τις διάφορες διακριτοποιήσεις



Σχήμα 4.10: Διαφορά μεταξύ σχετικών μετακινήσεων του σημείου A της διεπιφάνειας μεταξύ των διαφόρων διακριτοποιήσεων

Για να γίνει κατανοητό το πόσο πολύπλοκο γίνεται το πρόβλημα με την εισαγωγή σε αυτό μη μονότονων όρων, παραθέτουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα μίας απλής κατασκευής στο οποίο δεν έχουμε μη γραμμικούς όρους.

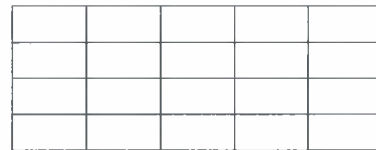
Θεωρούμε το τοίχωμα του σχήματος (4.11) το οποίο υποβάλλεται σε φόρτιση εντός του επιπέδου του. Η κατασκευή φορτίζεται με σταθερό φορτίο  $Px = 1000\text{KN}$ . Το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνεται ίσο με  $E = 2.1 \times 10^7\text{KN/m}^2$  και ο λόγος του Poisson  $\nu = 0.17$ . Το τοίχωμα έχει πάχος  $0.25\text{m}$ . Το σχήμα (4.12) δίνει τις διακριτοποιήσεις της κατασκευής που θεωρήσαμε κατά την ανάλυση.



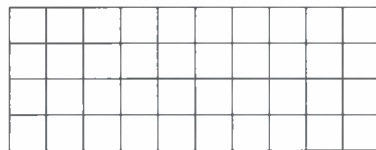
Σχήμα 4.11: Η θεωρούμενη κατασκευή



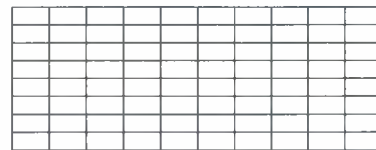
1η διακριτοποίηση - 10 στοιχεία



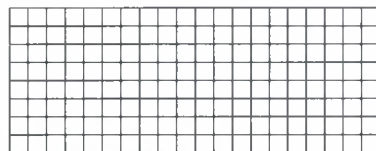
2η διακριτοποίηση - 20 στοιχεία



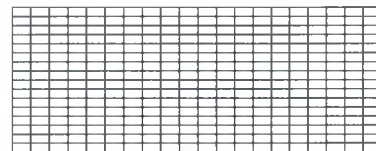
3η διακριτοποίηση - 40 στοιχεία



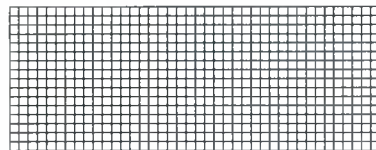
4η διακριτοποίηση - 80 στοιχεία



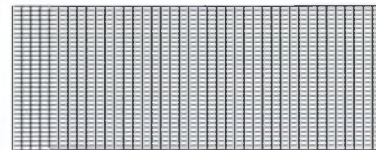
5η διακριτοποίηση - 160 στοιχεία



6η διακριτοποίηση - 320 στοιχεία



7η διακριτοποίηση - 640 στοιχεία



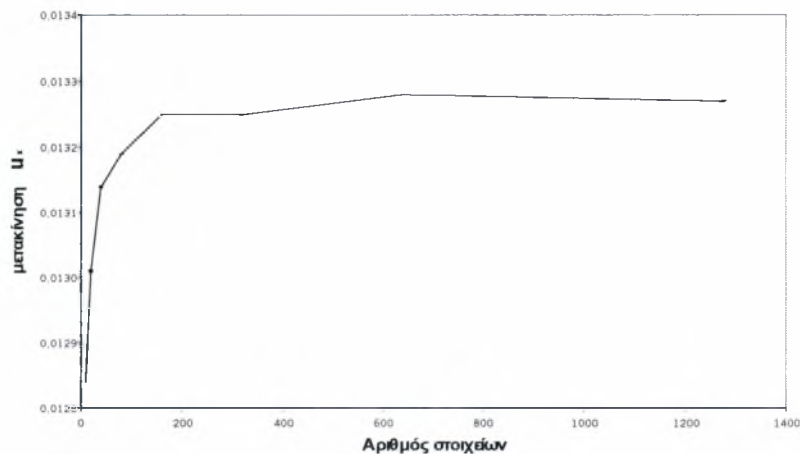
8η διακριτοποίηση - 1280 στοιχεία

Σχήμα 4.12: Οι διακριτοποιήσεις του τοιχώματος

Μετά από την ανάλυση σε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων πήραμε τα αποτελέσματα του πίνακα 4.4 σχετικά με τις μετακινήσεις του σημείου  $A$  της κατασκευής κατά τη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται και σε μορφή διαγράμματος στο σχήμα 4.13. Βλέπουμε λοιπόν ότι σε στο πρόβλημα αυτό που δεν εμπλέκει μη γραμμικούς όρους η σύγκλιση επιτυγχάνεται εύκολα και πάρα πολύ γρήγορα.

Διακριτοποίηση	Αριθμός στοιχείων	$u_x$
1	10	0.01284
2	20	0.01301
3	40	0.01314
4	80	0.01319
5	160	0.01325
6	320	0.01325
7	640	0.01328
8	1280	0.01327

Πίνακας 4.4: Οι μετακινήσεις του  $A$  στη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης δύναμης



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα αριθμού στοιχείων - μετακίνησης  $u_x$  του σημείου  $A$

## 4.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ FRACTALS

### 4.2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η τοπογραφία της επιφάνειας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στα προβλήματα επαφής. Όπως είναι γνωστό η τοπογραφία των επιφανειών και των διεπιφανειών στα προβλήματα της μηχανικής είναι τόσο σύνθετη που δεν μπορεί να περιγραφεί με λίγες μόνο παραμέτρους. Έχειδειχθεί ότι η αδρότητα τέτοιων επιφανειών έχει πολυεπίπεδη φύση [57], [58] και χρειάζονται νέα προχωρημένα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή της. Η fractal προσέγγιση εισήχθει για να δώσει έναν σταθερής κλίμακας χαρακτηρισμό της τοπογραφίας της διεπιφάνειας [59].

Ακολουθώντας εδώ τον ορισμό του Mandelbrot [59] όπως αυτός ολοκληρώθηκε από τον Wallin [60], θεωρούμε ότι ένα σύνολο  $F \subset \mathbb{R}^n$  είναι fractal φύσης, εάν το  $F$  έχει μη ακέραια "Hausdorf" διάσταση, ή εάν η διάσταση του  $F$  είναι ένας ακέραιος αυστηρά μεγαλύτερος από την τοπολογική του διάσταση. Πολλές γεωμετρικές προσεγγίσεις που υπερβαίνουν τα όρια της ισχύος της περιγραφής από την κλασσική γεωμετρία έχουν αναπτυχθεί από μαθηματικούς [61], [62], [63], [64], [65] αλλά μόνο μερικές από αυτές [64], [65] είναι κατάλληλες για την επιστήμη του μηχανικού. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε εδώ είναι μία πολυεπίπεδη ιεραρχική προσέγγιση. Οι προκύπτουσες σχέσεις αυτής της προσέγγισης μας επιτρέπουν τη μελέτη της αδρότητας των διεπιφανειών πάνω σε επαναληπτικώς γενικευμένα αδρά προφίλ. Αυτό το γεγονός κάνει την παραπάνω προσέγγιση πολύ κατάλληλη για προβλήματα μηχανικής καθώς επιτρέπει την ικανοποιητική μελέτη ολόκληρου του προβλήματος με αξιόπιστους αριθμητικούς υπολογισμούς.

### 4.2.2 ΤΑ FRACTALS ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΔΡΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Κατά τις προηγούμενες δεκαετίες η fractal γεωμετρία χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για την περιγραφή της αδρότητας των διεπιφανειών. Πειραματικές μελέτες [57], [58] αποδεικνύουν τον fractal χαρακτήρα ρηγματωμένων διεπιφανειών που έχουν μη κανονικότητες σε όλες τις κλίμακες. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε διάφορες προσεγγίσεις στη fractal ανάλυση της τοπογραφίας της διεπιφάνειας.

## Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ FRACTALS

Όπως προαναφέρθηκε ένα σύνολο  $F \subset \mathbb{R}^n$  είναι fractal φύσης, εάν η "Hausdorff - Besicovitch" διάσταση του συνόλου είναι ένας ακέραιος αυστηρά μεγαλύτερος από την τοπολογική του διάσταση. Αυτός είναι ο μαθηματικός ορισμός των fractals. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικοί ορισμοί που χρησιμοποιούνται στη fractal μοντελοποίηση.

Δυστυχώς, ο υπολογισμός της Hausdorff διάστασης των μαθηματικών συνόλων απαιτεί μεγάλη προσπάθεια ώστε να ξεπεράσουμε έναν αριθμό σύνθετων μαθηματικών δυσκολιών. Το γεγονός αυτό κάνει την Hausdorff διάσταση να έχει περιορισμένη εφαρμογή στη μελέτη fractal καμπύλων που παρουσιάζονται σε επιστήμες όπως τη φυσική, τη βιολογία ή τη μηχανική. Για το λόγο αυτό οδηγούμαστε σε άλλους ορισμούς των διαστάσεων που είναι χρήσιμοι για το χαρακτηρισμό fractal σωμάτων. Ένας τέτοιος εναλλακτικός ορισμός είναι αυτός της ορθογωνικής διάστασης, του οποίου οι αναλυτικοί υπολογισμοί είναι συνήθως ευκολότεροι επειδή οι αντίστοιχοι ορισμοί αυτής της διάστασης εμπλέκουν κάλυψη από σφαίρες ίσων ακτίνων.

Εστω  $E$  η Ευκλείδεια διάσταση του χώρου στον οποίο ανήκει ένα σύνολο  $S$ . Για  $\delta \geq 0$ , έστω  $N(\delta)$  ο μικρότερος αριθμός  $E$ -διάστατων σφαιρών ή κυλίνδρων διαμέτρου  $\delta$  που χρειάζεται για να καλυφθεί το σύνολο  $S$ . Η "ορθογωνική διάσταση", που συμβολίζεται με  $dim_B S$ , μπορεί να ορισθεί εάν υπάρχει το ακόλουθο όριο

$$dim_B S = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} \quad (4.1)$$

Υπάρχουν και άλλοι ορισμοί της fractal διάστασης. Για τον υπολογισμό αυτών των διαστάσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορες μεθόδους [63]. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε εδώ ότι χρησιμοποιώντας διαφορετικούς ορισμούς, μπορούμε να πάρουμε διαφορετικές τιμές για τις fractal διαστάσεις.

## Η ΦΥΣΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ FRACTALS

Είναι καλά γνωστό ότι είναι αδύνατο να συνεχισθεί η διαδικασία προσέγγισης ενός φυσικού σώματος σε απείρως μικρές κλίμακες. Για το λόγο αυτό, η μαθηματική έννοια του μέτρου Hausdorff είναι εφαρμόσιμη σε μαθηματικά μοντέλα των σωμάτων, παρά στα σώματα αυτά καθεαυτά και η διάσταση Hausdorff δεν μπορεί να προκύψει μέσω πειραματικών διαδικασιών.

Για τα φυσικά σώματα, η ορθογωνική διάσταση δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά, αλλά εκτιμάται μέσω πειραματικών ή αριθμητικών υπολογισμών. Διάφορα σφάλματα μπορούν να εμφανισθούν κατά τους αριθμητικούς αυτούς υπολογισμούς.

Δεν υπάρχει κανείς κανονικός ορισμός για τα fractal και υπάρχουν αρκετές μέθοδοι για τον πρακτική εκτίμηση της fractal διάστασης ενός σώματος. Λαμβάνουμε σαν πρώτο παράδειγμα ορισμού της φυσικής διάστασης του fractal το σύμπλεγμα διαστάσεων του fractal.

Ας υποθέσουμε ότι όλο το σύμπλεγμα αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα μεγέθους  $\delta_*$ . Ένα σώμα μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα σύμπλεγμα fractal διαστάσεως  $D$  όταν στο μοντέλο θεωρούνται κλίμακες  $\mathcal{R}$  τέτοιες ώστε  $\delta_* \leq \mathcal{R} \leq \Delta_*$ , όπου  $\delta_*$  και  $\Delta_*$  είναι τα άνω και κάτω όρια για τον νόμο του fractal.

Για να πάρουμε την διάσταση  $D$ , η περιοχή που θεωρήσαμε διακριτοποιείται σε κυλίνδρους με μήκος πλευράς  $\delta_*$ . Επειτα βρίσκουμε τον μικρότερο αριθμό των  $E$ -διάστατων κυλίνδρων που χρειάζονται για να καλυφθεί το σύμπλεγμα ( $N(\delta_*)$ ). Το σύμπλεγμα θεωρείται fractal εάν οι αριθμοί ( $N(\delta_*)$ )

$$N(\delta_*) \approx (\mathcal{R}/\delta_*)^D, \quad \delta_* \leq \mathcal{R} \leq \Delta_*. \quad (4.2)$$

Το  $D$  καλείται "διάσταση συμπλέγματος" ή "διάσταση μάζας".

Σαν παράδειγμα της χρήσης αυτού του ορισμού, ας θεωρήσουμε ένα προφίλ το οποίο απεικονίζεται σε μία οθόνη ηλεκτρονικού υπολογιστή σαν μία ομάδα σημείων (pixels) μεγέθους  $\delta_*$ . Έτσι είναι εύκολο να πάρουμε μια εκτίμηση μέσω υπολογιστή του αριθμού των pixels ( $\delta_*$ ) τα οποία μορφώνουν την γραμμή και τα οποία κείνται στο εσωτερικό ενός κύκλου ή ενός ορθογωνίου ακτίνας  $\mathcal{R}$  με κέντρο ένα σημείο  $\mathbf{x}$ . Εάν το προφίλ έχει ιδιότητες fractal επαναλαμβάνοντας την διαδικασία εκτίμησης για διάφορες τιμές του  $\mathcal{R}$  θα προκύψει η παραπάνω σχέση.

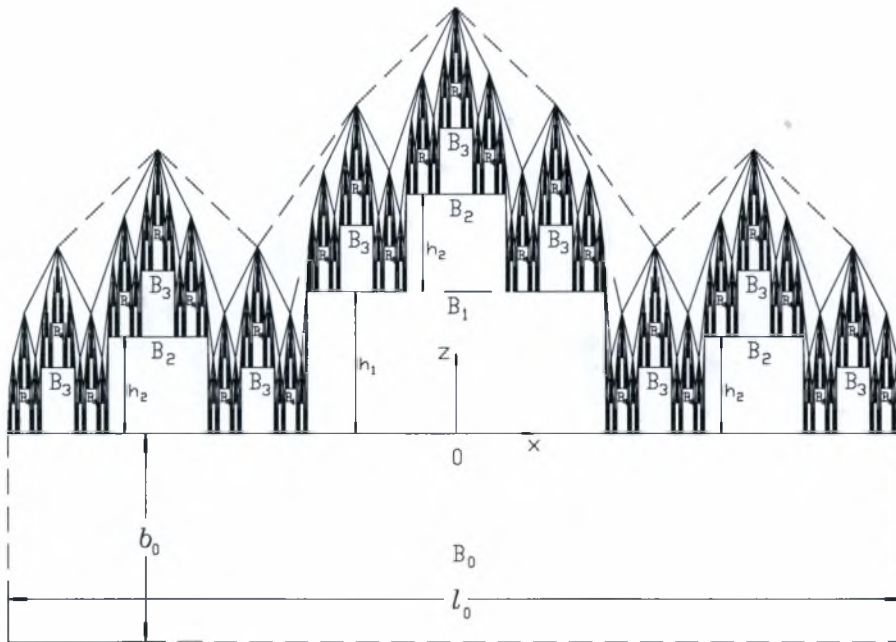
Ένας άλλος ορισμός της φυσικής διάστασης του fractal βασίζεται στη μέθοδο Richardson [63]. Η μέθοδος κάνει χρήση διαιρετών οι οποίοι τίθενται σε ένα προκαθορισμένο διάστημα  $\delta$ . Κινούμενοι κατά μήκος της καμπύλης, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε νέο βήμα να ξεκινά εκεί που τελειώνει το προηγούμενο βήμα, παίρνουμε τον αριθμό των βημάτων ( $\delta_*$ ). Η καμπύλη θεωρείται fractal φύσεως εάν ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για διαφορετικές τιμές του  $\delta$  προκύπτει η σχέση

$$N(\delta) \sim (\delta)^{-D} \quad (4.3)$$

σε κάποιο διάστημα  $\delta_* < \delta < \Delta_*$ . Η δύναμη  $D$  καλείται συνήθως "διάσταση του Richardson"  $D_R$ .

### 4.2.3 Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΔΡΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΠΟΛΥΕΠΙΠΕΔΟΥ ΙΕΡΑΡΧΙΚΟΥ ΠΡΟΦΙΛ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα νέο μοντέλο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περιγραφή αδρών επιφανειών [65]. Αυτό το προφίλ έχει ιεραρχική δομή και καλείται πολυεπίπεδο και κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη επαναληπτική διαδικασία.



Σχήμα 4.14: Κατασκευή του πολυεπίπεδου προφίλ

Το πολυεπίπεδο αυτό προφίλ το συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}$  και το κατασκευάζουμε με μία βήμα προς βήμα διαδικασία. Σε κάθε βήμα  $i, i = 1, 2, \dots$  προστίθενται διαφορετικά ορθογώνια στην κατασκευή, που έχουν προκύψει από το προηγούμενο βήμα. Οι ενδιάμεσες δομές καλούνται  $i$ -οστές προκατασκευές γέννησης και συμβολίζονται με  $S_1^{(i)}$ . Το προφίλ είναι μια καμπύλη της τελικής δομής, το οποίο περιλαμβάνει την συνεισφορά από όλα τα βήματα, ξεκινώντας από το πρώτο. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε εδώ ότι κάτω από αυτή την



επαναληπτική κατασκευή του προφίλ, μερικά σημεία μπορούν να περιληφθούν προσωρινά στο προφίλ σε κάποιο βήμα και να αφαιρεθούν από αυτό σε επόμενο βήμα.

Ακολουθώντας θα περιγράψουμε την διαδικασία κατασκευής λεπτομερώς. Θεωρούμε ένα τμήμα μήκους  $l_0$  το οποίο ανήκει στον άξονα  $Ox$  με το σημείο  $O$  στο μέσο. Παίρνουμε μια τιμή  $h_0$  και θεωρούμε ένα ορθογώνιο  $B_0$  μήκους  $l_0$  και ύψους  $h_0$ . Αυτό είναι το αρχικό στοιχείο του προφίλ που θέλουμε να κατασκευάσουμε και καλείται initiator. Κατόπιν λαμβάνουμε δύο παράμετρους του προφίλ,  $\alpha$  and  $\beta$  τέτοιες ώστε

$$0 < \alpha < 1/2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (4.4)$$

Στο πρώτο βήμα, διαιρούμε το τμήμα  $l_0$  σε τρία μέρη με μήκη  $\alpha l_0$ ,  $(1 - 2\alpha)l_0$  και  $\alpha l_0$ , και θέτουμε ένα ορθογώνιο  $B_1$  ύψους  $h_1 = \beta h_0$  και μήκους  $(1 - 2\alpha)l_0$  στο μεσαίο τμήμα του αρχικού τμήματος  $l_0$ . Αυτή η κατασκευή, που περιέχει μόνο το ορθογώνιο  $B_1$ , είναι η προκατασκευή 1ης τάξεως ή προκατασκευή 1ης γενιάς. Η καμπύλη του είναι μια συνεχής τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από δύο κατακόρυφα τμήματα μήκους  $h_1$  και  $3^1$  οριζόντια τμήματα, δύο μήκους  $\alpha l_0$  που βρίσκονται στο επίπεδο  $z = 0$ , και ένα μήκους  $(1 - 2\alpha)l_0$  που βρίσκεται στο επίπεδο  $B_1$ . Σημειώνουμε ότι τα κατακόρυφα τμήματα περιλαμβάνονται στην τελική καμπύλη.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία σε καθένα από τα τρία οριζόντια τμήματα. Θέτουμε τρία ορθογώνια  $B_2$  στο μέσο εκάστου των τριών οριζόντιων τμημάτων. Τα ύψη των ορθογωνίων αυτών είναι ίσα με  $h_2 = \beta h_1$ . Τα μήκη τους δεν είναι ίσα, και από κατασκευής έχουμε την τιμή  $\alpha(1 - 2\alpha)l_0$  για το μήκος των ακραίων νέων ορθογωνίων και  $(1 - 2\alpha)^2 l_0$  για το μήκος του μεσαίου. Γι' αυτό, η προκατασκευή 2ης γενιάς περιέχει ένα ορθογώνιο  $B_1$  από το πρώτο βήμα και τρία ορθογώνια  $B_2$  από το δεύτερο βήμα. Η καμπύλη αυτής της προκατασκευής είναι μία τεθλασμένη γραμμή αποτελούμενη από  $3^2$  οριζόντια τμήματα, και 8 κατακόρυφα τμήματα, 2 από τα οποία έχουν ύψος  $h_1$  και τα άλλα 6 έχουν ύψος  $h_2$ . Σημειώνουμε ξανά ότι τα κατακόρυφα τμήματα ανήκουν στο τελικό προφίλ.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, προσθέτουμε σε κάθε βήμα  $n_i = 3^{i-1}$  ορθογώνια  $B_i$  ύψους

$$h_i = \beta h_{i-1} = \beta^i h_0, \quad (4.5)$$

όπου  $i$  είναι ο αριθμός της αντίστοιχης γενιάς. Γι' αυτό, για κάθε  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , η  $m$ -οστή προκατασκευή  $S_1^{(m)}$  αποτελείται από τα ορθογώνια  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  και υπάρχουν ακριβώς άλλα  $n_i$  ίδια για καθένα από αυτά ορθογώνια.

Τα μήκη αυτών των ορθογωνίων ενδεχομένως διαφέρουν. Ωστόσο είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση αυτά τα μήκη κείνται στο διάστημα  $[\alpha^i l_0, (1 - 2\alpha)^i l_0]$ . Επιπλέον, βλέπουμε ότι εάν  $\alpha = 1/3$ , όλα τα μήκη είναι ίσα με

$$l_i = \alpha l_{i-1} = \dots = \alpha^i l_0. \quad (4.6)$$

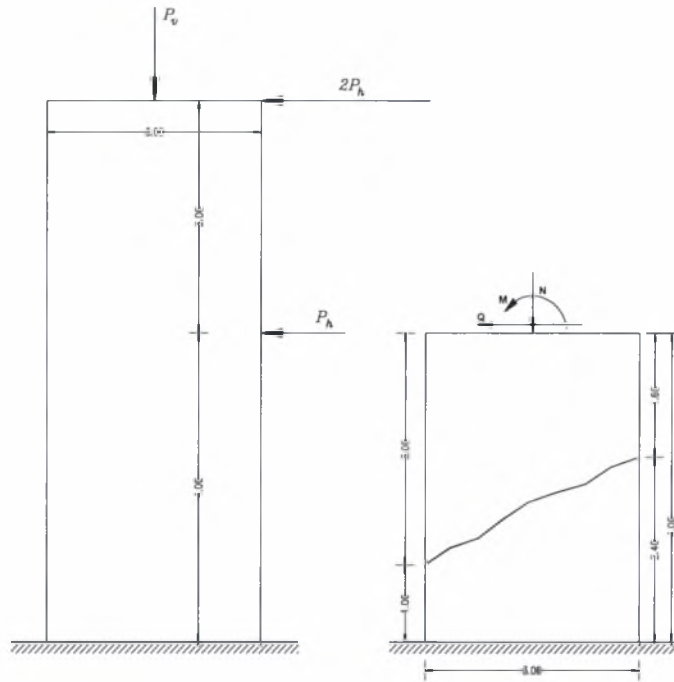
Το σχήμα (4.14) απεικονίζει ένα παράδειγμα κατασκευής πολυεπίπεδου προφίλ όπου  $\alpha = 1/3$  και  $\beta = 2/3$ .

Από την παρατήρηση του σχήματος (4.14) προκύπτει ότι έχουμε τουλάχιστον δύο τρόπους να καταλήξουμε σε μια τέτοια προσέγγιση της τελικής καμπύλης μετά από  $i$  επαναλήψεις. Μπορούμε να πάρουμε σαν τέτοια προσέγγιση (i) την καμπύλη της  $i$ -οστής διαδικασίας ή (ii) την καμπύλη που προκύπτει από την συνεχή σύνδεση γειτονικών πραγματικών κορυφών. Αυτός ο τελευταίος τρόπος δίδεται στο σχήμα (4.14) με διακεκομμένη γραμμή μετά την 3η επανάληψη και με συνεχή γραμμή μετά την 6η επανάληψη. Οι δύο τρόποι οδηγούν στο ίδιο ονομαστικά όριο  $\mathcal{A}$ . Για το λόγο αυτό και οι δύο προσεγγίσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των ιδιοτήτων του προφίλ. Στα προβλήματα της μηχανικής όπου η γραφική εξομοίωση της αδρότητας παίζει ένα σημαντικό ρόλο στην διατύπωση του προβλήματος ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης φαίνεται να είναι καλύτερος.

### 4.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Θεωρούμε το τοίχωμα του σχήματος 4.15 το οποίο υποβάλλεται σε φόρτιση μέσα στο επίπεδό του. Η κατασκευή φορτίζεται με κατακόρυφο φορτίο  $P_v = 4000 \text{ KN}$  το οποίο θεωρείται σταθερό και με οριζόντιο σταδιακά αυξανόμενο φορτίο.

Μετά από υπερβολική διατμητική φόρτιση η κατασκευή ρηγματώνεται όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Η ρωγή επισκευάζεται με ένα συγκολλητικό υλικό. Εξετάζεται το κάτω μέρος της κατασκευής για το οποίο υποθέτουμε την ισχύ της γραμμικής ελαστικότητας και της γεωμετρικής γραμμικότητας. Το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνεται  $E = 2.1 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$  και ο λόγος του Poisson  $\nu = 0.16$ . Το στοιχείο έχει πάχος  $0.25 \text{ m}$ . Υποθέτουμε ότι η ρωγή περιγράφεται από μια αδρή διεπιφάνεια  $\mathcal{A}$  fractal γεωμετρίας η οποία μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας ένα πολυεπίπεδο ιεραρχικό προφίλ. Οι παράμετροι του προφίλ αυτού έχουν τις παρακάτω τιμές,  $\alpha = 0.333$  και  $\beta = 0.682$ .

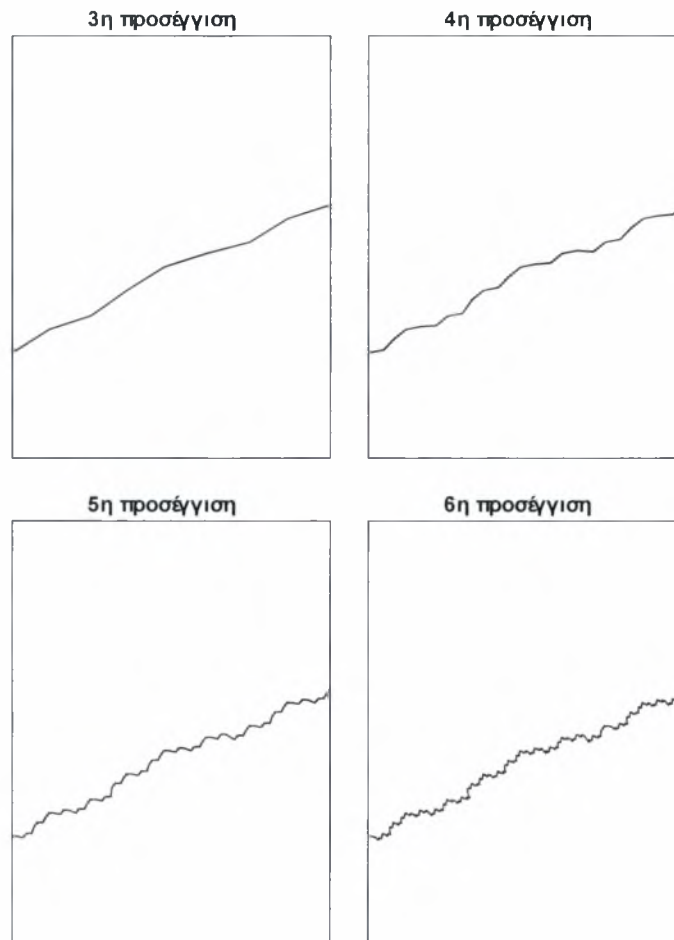


Σχήμα 4.15: Η θεωρούμενη κατασκευή

Το σχήμα 4.16 απεικονίζει την 3<sup>η</sup>, 4<sup>η</sup>, 5<sup>η</sup> και 6<sup>η</sup> προσέγγιση της fractal διεπιφάνειας. Η διακριτοποίηση δίδεται στο σχήμα 4.17.

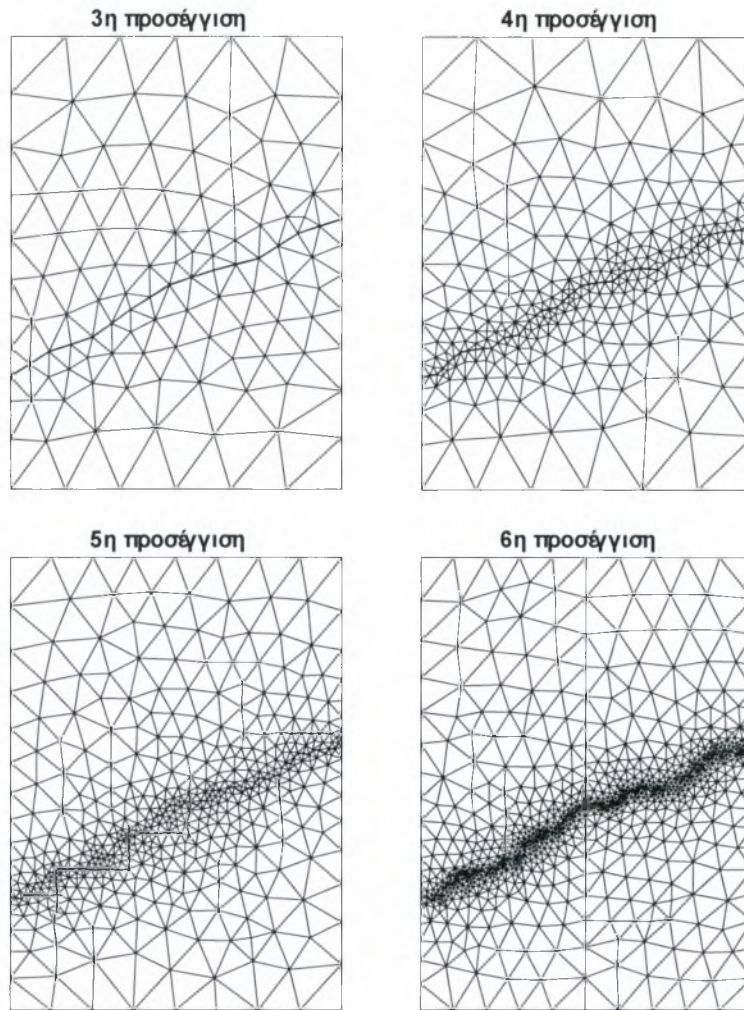
Τα δύο μέρη της διεπιφάνειας  $\mathcal{A}$  συγκολλώνται με κάποιο συγκολλητικό υλικό για το οποίο υποθέτουμε ότι παρουσιάζει διαφορετικές αποκρίσεις κατά την κάθετη και την εφαπτομενική προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση. Για την εφαπτομενική προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει ο μη μονότονος νόμος του σχήματος 4.18α. Αντίστοιχα για την κάθετη προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει ο νόμος του σχήματος 4.18β.

Το διάγραμμα αυτό περιέχει τον κατακόρυφο κλάδο και τον μη μονότονο κλάδο  $OBCDE$ . Ο πρώτος κλάδος καλείται κλάδος επαφής ενώ ο δεύτερος κλάδος συγκόλλησης. Ο πρώτος κλάδος (αντίστοιχα ο δεύτερος) θεωρείται για θλιπτικές (αντίστοιχα μη θλιπτικές) δυνάμεις της διεπιφάνειας. Για να λύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζουμε μια μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που προτάθηκε από τον Παναγιωτόπουλο για τη λύση του προβλήματος μονόπλευρης επαφής με τριβή Coulomb. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση το πρόβλημα σπάει σε δύο υποπροβλήματα. Το ένα προκύπτει κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση και το άλλο κατά την εφαπτομενική διεύθυνση.



Σχήμα 4.16: Κλασικές προσεγγίσεις της fractal διεπιφάνειας

Επιπλέον το πρόβλημα κατά την κάθετη στη διεπιφάνεια διεύθυνση χωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα θεωρώντας είτε το νόμο συγκόλλησης του σχήματος 4.18γ είτε το νόμο μονόπλευρης επαφής του σχήματος 4.18δ. Συμβολίζουμε με  $[u_N]$  τις σχετικές μετακινήσεις των δύο όψεων της διεπιφάνειας, με  $\mathcal{A}_C$  την περιοχή επαφής και με  $\mathcal{A}_D$  την περιοχή όπου εμφανίζονται δυνάμεις λόγω συγκόλλησης με ταυτόχρονη έναρξη αποκόλλησης της διεπιφάνειας  $\mathcal{A}$ . Σημειώνουμε εδώ ότι οι περιοχές επαφής και μη επαφής είναι γνωστές εκ των προτέρων. Συνεπώς, η συμπεριφορά της διεπιφάνειας μπορεί να περιγραφεί από τις ακόλουθες συνθήκες:



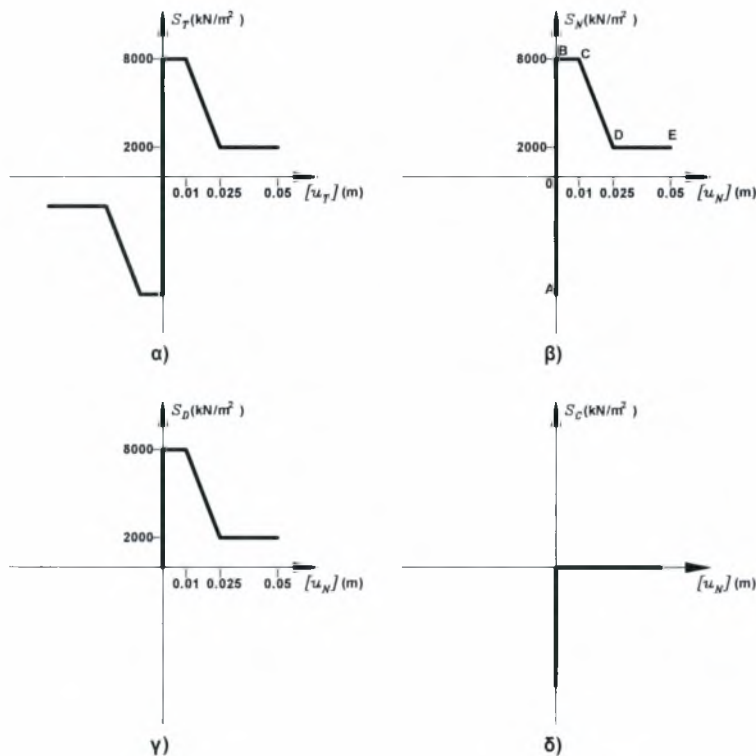
Σχήμα 4.17: Η διακριτοποιήσεις της κατασκευής

$$\text{Εάν } [u]_N = 0 \text{ τότε } S_C \leq 0 \text{ και } S_T = g([u_T], x) \text{ στην } \mathcal{A}_C \quad (4.7)$$

$$\text{Εάν } [u]_N > 0 \text{ τότε } S_D = h([u], x) \text{ στην } \mathcal{A}_D \quad (4.8)$$

όπου  $\mathcal{A}_C$  είναι η κάθετη δύναμη στην περιοχή επαφής (δύναμη επαφής),  $\mathcal{A}_D$  είναι η αντίσταση του συγκολλητικού κατά την κάθετη προς τη διεπιφάνεια διεύθυνση,  $[u_T]$  οι σχετικές μετακινήσεις και  $g, h$  είναι οι μη μονότονες συναρτήσεις οι οποίες ενδεχομένως περιέχουν άλματα. Οι δυνάμεις  $S_C$  είναι πάντα

αρνητικές ενώ οι δυνάμεις  $F_D$  είναι πάντα θετικές.



Σχήμα 4.18: Οι θεωρούμενοι νόμοι διεπιφάνειας

Η λύση του προβλήματος αυτού προκύπτει με την προσέγγιση και των δύο μη μονότονων νόμων με δυο ακολουθίες μονότονων νόμων. Διασπάμε το πρόβλημα αυτό σε δύο υποπροβλήματα. Το υποπρόβλημα (α) αφορά τη λύση των προβλημάτων που προκύπτουν σε διεύθυνση κάθετη στη διεπιφάνεια. Η λύση του προβλήματος που προκύπτει κατά την εφαπτομενική στη διεπιφάνεια διεύθυνση αντιστοιχεί στο υποπρόβλημα (β). Επιπλέον το υποπρόβλημα (α) διασπάται σε δύο ακόμη υποπροβλήματα ( $\alpha_1$ ) και ( $\alpha_2$ ). Το υποπρόβλημα ( $\alpha_1$ ) αντιστοιχεί στο πρόβλημα μονόπλευρης επαφής και το υποπρόβλημα ( $\alpha_2$ ) αντιστοιχεί στο πρόβλημα αποκόλλησης.

Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε ο **αλγόριθμος 6** που αναφέρεται σε *προβλήματα μονόπλευρης επαφής με μη μονότονη τριβή και μη μονότονη αποκόλληση* στην ανάλυση τεσσάρων προσεγγίσεων της fractal κατασκευής.

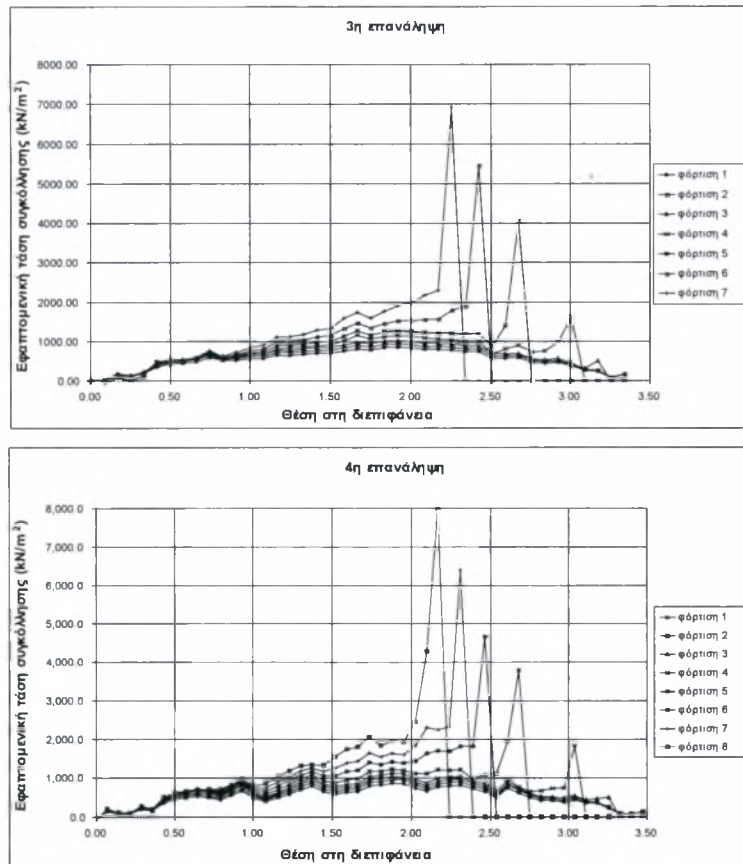
Χρησιμοποιήθηκαν 17 φορτίσεις με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον πίνακα 4.5 ώστε να πετύχουμε παραμετρική λύση.

Φόρτιση	$P_h$	N (kN)	Q (kN)	M (kNm)
1	300.0	4000.0	450.0	900.0
2	330.0	4000.0	495.0	990.0
3	360.0	4000.0	540.0	1080.0
4	390.0	4000.0	585.0	1170.0
5	420.0	4000.0	630.0	1260.0
6	450.0	4000.0	675.0	1350.0
7	480.0	4000.0	720.0	1440.0
8	510.0	4000.0	765.0	1530.0
9	540.0	4000.0	810.0	1620.0
10	570.0	4000.0	855.0	1710.0
11	600.0	4000.0	945.0	1800.0
12	630.0	4000.0	990.0	1890.0
13	660.0	4000.0	1035.0	1980.0
14	690.0	4000.0	1080.0	2070.0
15	720.0	4000.0	1125.0	2160.0
16	750.0	4000.0	1170.0	2250.0
17	780.0	4000.0	1215.0	2340.0

Πίνακας 4.5: Οι θεωρηθείσες φορτίσεις

Το σχήμα 4.19 απεικονίζει τις κατανομές των εφαπτομενικών τάσεων συγκόλλησης κατά μήκος της διεπιφάνειας για τις προσεγγίσεις 3 και 4. Οι μεγαλύτερες τάσεις εμφανίζονται στο δεξί μέρος της κατασκευής από το οποίο ξεκινάει η σταδιακή θραύση του συγκολλητικού υλικού. Η θραύση αυτή εξελίσσεται προς το εσωτερικό μέρος της διεπιφάνειας καθώς η φόρτιση αυξάνει.

Το διάγραμμα 4.20 απεικονίζει τη μέση τάση συγκόλλησης για τις διάφορες προσεγγίσεις της fractal διεπιφάνειας. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η μέση τάση συγκόλλησης μειώνεται για πυκνότερες διακριτοποιήσεις της fractal διεπιφάνειας. Το συμπέρασμα αυτό συνδέεται ευθέως με το μήκος των διαφόρων προσεγγίσεων του fractal. Για χαμηλότερες προσεγγίσεις του fractal έχουμε μικρότερα μήκη διεπιφάνειας. Καθώς πηγαίνουμε σε υψηλότερες προσεγγίσεις το μήκος αυξάνεται. Κατά συνέπεια η τάση συγκόλλησης είναι μικρότερη σε υψηλές προσεγγίσεις αφού η αντίστοιχη ενεργή επιφάνεια συγκόλλησης είναι μεγαλύτερη.

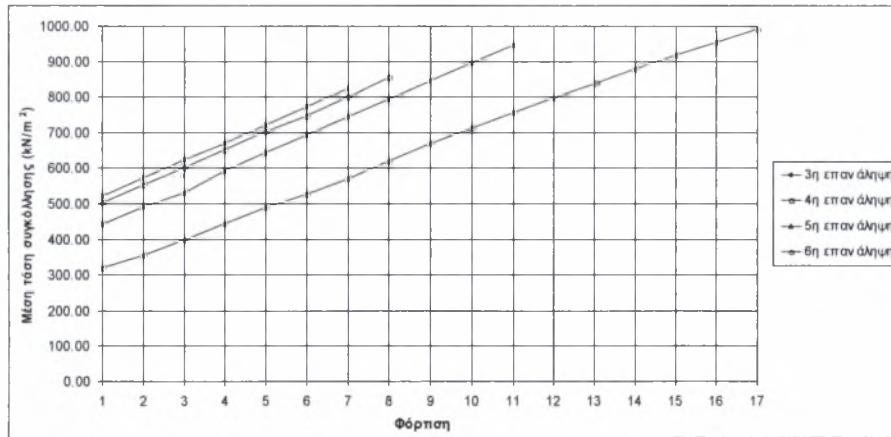


Σχήμα 4.19: Οι εφαπτομενικές τάσεις για την 3η και την 4η προσέγγιση

Συνεπώς, οι fractal διεπιφάνειες, όπως αυτή που μελετήθηκε στο παρόν παράδειγμα παρουσιάζουν υψηλότερες αντοχές από αυτή που υπολογίζεται με το να προσομοιάσουμε τη διεπιφάνεια μέσω Ευκλείδειας γραμμής με συγκεκριμένη γεωμετρία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το θεωρητικό μήκος των fractal διεπιφανειών τείνει στο άπειρο. Ωστόσο σε φυσικά προβλήματα το πραγματικό μήκος περιορίζεται από το μέγεθος του μικρότερου μέρους που θραύεται (δηλαδή με η μικρότερη πλευρά του fractal δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μικρότερο μήκος που θραύεται).

Για το λόγο αυτό, στην εξεταζόμενη περίπτωση, η αντοχή της διεπιφάνειας είναι αυτή που υπολογίζεται από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων της 6<sup>ης</sup> προσέγγισης της fractal διεπιφάνειας, όπου το μικρότερο μέρος που θραύεται είναι περίπου 2 cm.





Σχήμα 4.20: Μέση τάση συγκόλλησης για διάφορες φορτίσεις

Τα παραπάνω αποδεικνύονται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία τα οποία συνοψίζονται στον πίνακα 4.6

Fractal προσέγγιση	Μήκος ρωγμής (m)	Φορτίο αστοχίας $P_h$ (kN)
3	3.343	480.0
4	3.474	510.0
5	3.998	600.0
6	5.598	780.0

Πίνακας 4.6: Μήκος διεπιφάνειας και τάση αστοχίας για διάφορες προσεγγίσεις του fractal



# Βιβλιογραφία

- [1] H. J. S. Feder and J. Feder. Self-organized criticality in a stick-slip process. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2669–2672, 1991.
- [2] J. J. Strodiot and V. H. Nguyen. On the numerical treatment of the inclusion  $0 \in \partial f(\mathbf{x})$ . In J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, and G. Strang, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*. Birkhauser, Basel, 1988.
- [3] P. D. Panagiotopoulos. *Hemivariational inequalities. Applications in mechanics and engineering*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1993.
- [4] P. D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*. Birkhauser, Basel - Boston - Stuttgart, 1985. Russian translation, MIR Publ., Moscow 1988.
- [5] P. D. Panagiotopoulos. Hemivariational inequalities and their applications. In J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, and G. Strang, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*. Birkhauser, Basel, 1988.
- [6] P. D. Panagiotopoulos. Coercive and semicoercive hemivariational inequalities. *Nonlin. Anal. Theo. Meth. Appl.*, 16:209 – 231, 1991.
- [7] C. C. Baniotopoulos and P. D. Panagiotopoulos. A hemivariational approach to the analysis of composite material structures. In S. A. Paipetis and G. C. Papanicolaou, editors, *Engineering Applications of New Composites*. Omega Publications, London, 1987.
- [8] R. I. Gilbert and R. F. Warner. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. *J. Struct. Div. ASCE*, 104(12):1885 – 1900, 1978.
- [9] P. D. Panagiotopoulos. Nonconvex energy functions. Hemivariational inequalities and substationary principles. *Acta Mechanica*, 42:160–183, 1983.

- [10] J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, and G. Strang, editors. *Topics in nonsmooth mechanics*. Birkhauser, Basel-Boston, 1988.
- [11] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [12] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 8. Elsevier, Amsterdam-New York, 1981.
- [13] J. J. Moreau. Fonctionnelles sous - différentiables. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 257A:4117 – 4119, 1963.
- [14] J. J. Moreau. La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 267A:954 – 957, 1968.
- [15] Z. Naniewicz and P. D. Panagiotopoulos. *Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications*. Marcel Dekker, 1995.
- [16] R. T. Rockafellar. *La théorie des sous-gradients et ses applications à l'optimization. Fonctions convexes et non-convexes*. Les Presses de l' Université de Montréal, Montréal, 1979.
- [17] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. J. Wiley, New York, 1983.
- [18] P. D. Panagiotopoulos and G. E. Stavroulakis. The delamination effect in laminated von Karman plates under unilateral boundary conditions. A variational - hemivariational inequality approach. *J. Elast.*, 23:69 – 96, 1990.
- [19] M. Miettinen and J. Haslinger. Approximation of optimal control problems of hemivariational inequalities. *Numer. Funct. Anal. and Optim.*, 13:43–68, 1992.
- [20] D. Motreanu and P. D. Panagiotopoulos. On the eigenvalue problem for hemivariational inequalities: existence and multiplicity of solutions. *Math. Anal. Appl.*, 197:75–89, 1996.
- [21] J. Haslinger and P. D. Panagiotopoulos. Optimal control of systems governed by hemivariational inequalities. Existence and approximation results. *Nonlin. Anal. Theo. Meth. Appl.*, 24:105–119, 1995.

- [22] M. Fundo. Hemivariational inequalities in subspaces of  $L^p(\Omega)$  ( $p \geq 3$ ). *Nonlin. Anal. Theo. Meth. Appl.*, (to appear), 1997.
- [23] Z. Naniewicz. On some nonconvex variational problems related to hemivariational inequalities. *Nonlin. Anal.*, 13:87–100, 1989.
- [24] Z. Naniewicz. On the existence of solutions to the continuum model of delamination. *Nonl. Anal. Theory, Meth. Appl.*, 20:481–507, 1993.
- [25] M. Frémond. Contact unilatéral avec adhérence : une théorie du premier gradient. In G. DelPierro and F. Maceri, editors, *Unilateral problems in structural analysis - 2*, volume 304 of *CISM Courses and Lectures*. Springer, Wien - New York, 1987.
- [26] C. Lemarechal and R. Mifflin, editors. *Bundle methods in nonsmooth optimization*. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [27] K. C. Kiwiel. *Methods of descent for nondifferentiable optimization*. Springer, Berlin, 1985. Lecture notes in mathematics No. 1133.
- [28] H. Schramm and J. Zowe. A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results. *SIAM J. Optimization*, 2:121–152, 1992.
- [29] M. M. Makela and P. Neittaanmaki. *Nonsmooth optimization: analysis and algorithms with applications to optimal control*. Word Scientific Publ. Co, 1992.
- [30] M. Miettinen, M. M. Mkel, and J. Haslinger. On numerical solution of hemivariational inequalities by nonsmooth optimization methods. *Journal of Global Optimization*, 8(4):401–425, 1995.
- [31] M. A. Crisfield. Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 22:751–767, 1986.
- [32] M. A. Crisfield and J. Wills. Solution strategies and softening materials. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 66:267–289, 1988.
- [33] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. J. Wiley, Chichester, 1991.

- [34] E. Riks. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 39:1060 – 1066, 1972.
- [35] J. C. J. Schellekens and R. DeBorst. Applications of linear and nonlinear fracture mechanics options to free edge delamination in laminated composites. *Heron*, 36:37 – 48, 1991.
- [36] J. H. Argyris. Continua and discontinua. In *Proc. 1st Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.*, pages 66–80, Dayton, Ohio, 1965. Wright Petterson Air Force Base. AFFDL TR.
- [37] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. IV: Applications to mathematical physics*. Springer Verlag, New York - Heidelberg, 1988.
- [38] A. Klarbring. A quadratic program in frictionless contact problems. *International Journal of Engineering Sciences*, 24:459–479, 1986.
- [39] P. D. Panagiotopoulos. A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity. *Ing. Archiv*, 44:421–432, 1975.
- [40] V. Mosco. Implicit variational problems and quasi-variational inequalities. In *Nonlinear operators and the calculus of variations*, pages 83–156, Berlin, 1976. Springer Verlag. Lect Notes in Math. 543.
- [41] C. Baiocchi and A. Capelo. *Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems*. J. Wiley and Sons, Chichester, 1984.
- [42] J. J. Telega. Topics on unilateral contact problems in elasticity and inelasticity. In J. J. Moreau and P. D. Panagiotopoulos, editors, *Nonsmooth Mechanics and Applications, CISM Lect. Notes. 302*, pages 341–462. Springer, Wien New York, 1988.
- [43] G. Zavarise, P. Wriggers, E. Stein, and B. A. Shreffler. Real contact mechanisms and finite element formulation - a coupled thermomechanical approach. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 35:767–785, 1992.

- [44] C. D. Bisbos. A competitive game algorithm with five players for unilateral contact problems including the rotational and the thermal degrees of freedom. In M. Raous, M. Jean, and J. J. Moreau, editors, *Contact mechanics*, pages 251–258, New York–London, 1995. Plenum Press.
- [45] J. V. Outrata and J. Zowe. A Newton method for a class of quasi-variational inequalities. *Computational Optimization and Applications*, 4:5–21, 1995.
- [46] J. J. Kalker. Contact mechanical algorithms. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:25–32, 1988.
- [47] V. F. Dem’yanov, G. E. Stavroulakis, L. N. Polyakova, and P. D. Panagiotopoulos. *Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.
- [48] E. Rabinowicz. A study of stick-slip processes. In R. Daview, editor, *Friction and wear*, pages 149–161. Elsevier, London, 1959.
- [49] J. R. Ionescu and J. C. Paumier. On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamics. *European Journal of Mechanics A / Solids*, 13(4):555–568, 1994.
- [50] A. Visintin. *Differential models of hysteresis*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [51] Ch. Glocker and F. Pfeiffer. Multiple impacts with friction in rigid multi-body systems. *Nonlinear Dynamics*, 7(4):471–498, 1995.
- [52] E. J. Bauman. Trajectory decomposition. In C. T. Leondes, editor, *Optimization methods for large scale systems with applications*. McGraw-Hill, N. York, 1971.
- [53] J. D. Schoeffler. Static multilevel systems. In C. T. Leondes, editor, *Optimization methods for large scale systems with applications*. McGraw-Hill, N. York, 1971.
- [54] D. A. Wismer, editor. *Optimization methods for large scale systems with applications*. McGraw-Hill, N. York, 1971.
- [55] E.S. Mistakidis and G.E. Stavroulakis. *NONCONVEX OPTIMIZATION IN MECHANICS, Algorithms, heuristics and engineering applications by the F.E.M.* Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1998.

- [56] P. Davies and M. L. Benzeggagh. Interlaminar mode-I fracture testing. In K. Friedrich, editor, *Application of fracture mechanics to composite materials*. Elsevier, 1989.
- [57] V. Saouma, C. Barton, and N. Gamaleldin. Fractal characterization of fracture surfaces in concrete. *Eng. Fract. Mech.*, 35:47–53, 1990.
- [58] B. Mandelbrot, D. E. Passoja, and A. J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308:721–722, 1984.
- [59] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co., N. York, 1982.
- [60] H. Wallin. Interpolating and orthogonal polynomials on fractals. *Constr. Approx.*, 5:137–150, 1989.
- [61] H. Takayasu. *Fractals in physical sciences*. Manchester Univ. Press, Manchester, 1990.
- [62] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, New York, 1988.
- [63] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [64] M. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, Boston-New York, 1988.
- [65] F. M. Borodich and D. A. Onishchenko. Similarity and fractality in the modelling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure. *Solids and Structures*, 36 (17):2585–2612, 1999.



# Ευρετήριο Σχημάτων

1.1	Μη μονότονοι νόμοι και τα αντίστοιχα μη κυρτά υπερδυναμικά	4
1.2	Μη μονότονοι νόμοι διεπιφάνειας . . . . .	5
1.3	Μοντέλο μονόπλευρης επαφής με μη μονότονη τριβή . . . . .	9
1.4	Εξίσωση δυναμικού . . . . .	10
1.5	Δυναμική ενέργεια . . . . .	11
1.6	Εξίσωση δυναμικού . . . . .	12
1.7	Δυναμική ενέργεια . . . . .	13
2.1	Νόμος μονόπλευρης επαφής . . . . .	25
2.2	Ο νόμος τριβής του Coulomb και τα αντίστοιχα υπερδυναμικά .	28
3.1	Γραφική επεξήγηση του ευριστικού αλγόριθμου μη κυρτής ελα- χιστοποίησης . . . . .	38
4.1	Η θεωρούμενη κατασκευή . . . . .	59
4.2	Οι διακριτοποιήσεις της κατασκευής . . . . .	61
4.3	Ο θεωρούμενος νόμος τριβής . . . . .	62
4.4	Διαγράμματα κατανομής της τάσης επαφής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 5η φόρτιση . . . . .	64
4.5	Διαγράμματα κατανομής της τάσης επαφής στην διεπιφάνεια για την 3η διακριτοποίηση για όλες τις φορτίσεις . . . . .	64
4.6	Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 1η, 2η και 3η φόρτιση .	65
4.7	Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 4η, 5η και 6η φόρτιση .	66
4.8	Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 7η, 8η και 9η φόρτιση .	67
4.9	Διαγράμματα κατανομής της τάσης τριβής στην διεπιφάνεια για όλες τις διακριτοποιήσεις κατά την 10η, 11η και 12η φόρτιση	68

4.10	Διαφορά μεταξύ σχετικών μετακινήσεων του σημείου A της διεπιφάνειας μεταξύ των διαφόρων διακριτοποιήσεων . . . . .	69
4.11	Η θεωρούμενη κατασκευή . . . . .	70
4.12	Οι διακριτοποιήσεις του τοιχώματος . . . . .	71
4.13	Διάγραμμα αριθμού στοιχείων - μετακίνησης $u_x$ του σημείου A . . . . .	72
4.14	Κατασκευή του πολυεπίπεδου προφίλ . . . . .	76
4.15	Η θεωρούμενη κατασκευή . . . . .	79
4.16	Κλασσικές προσεγγίσεις της fractal διεπιφάνειας . . . . .	80
4.17	Η διακριτοποιήσεις της κατασκευής . . . . .	81
4.18	Οι θεωρούμενοι νόμοι διεπιφάνειας . . . . .	82
4.19	Οι εφαπτομενικές τάσεις για την 3η και την 4η προσέγγιση . . . . .	84
4.20	Μέση τάση συγκόλλησης για διάφορες φορτίσεις . . . . .	85