



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

***Πρακτικός Σχεδιασμός Μεταλλικών  
Κατασκευών Ελκυστήρων - Θλιπτήρων  
(Tensegrity)***

**Φοιτητές**  
**Δημήτριος Βουδούρης**  
**Ανδρέας Κουρέτας**

**Επιβλέπων**  
**Δημ. Σοφιανόπουλος**  
**Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ**

**Βόλος, Φεβρουάριος 2007**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5300/1

Ημερ. Εισ.: 11-10-2007

Δωρεά: Συγγραφέα

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ

2007

ΒΟΥ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....	1
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή περί Κατασκευών Ελκυστήρων – Θλιπτήρων (ΚΕΘ).....	3
<u>1.1 Βασικές αρχές των ΚΕΘ</u> .....	3
<u>1.2 Εφαρμογές ΕΘ</u> .....	5
<u>1.3 Πρώιμη έρευνα για ΚΕΘ – Ιστορική αναδρομή</u> .....	5
<u>1.4 Πρόσφατη έρευνα επί των ΚΕΘ</u> .....	7
<u>1.5 Άλλες τεχνολογίες πλασιωτών χωρικών κατασκευών</u> .....	8
<u>1.6 Περίγραμμα του περιεχομένου της εργασίας</u> .....	9
Κεφάλαιο 2: Βασικές Κατασκευές Ελκυστήρων – Θλιπτήρων.....	11
<u>2.1 Εισαγωγή</u> .....	11
<u>2.2 Πρίσμα ΕΘ (Τ-πρίσμα): Η απλούστερη μορφή ΚΕΘ</u> .....	11
<i>2.2.1 Πειραματικό προσομοίωμα</i> .....	11
<i>2.2.2 Μαθηματικοί υπολογισμοί Τ-πρίσματος: Κυλινδρικές συντεταγμένες</i> .....	13
<i>2.2.3 Μαθηματικοί υπολογισμοί Τ-πρίσματος: Καρτεσιανές συντεταγμένες</i> .....	18
<i>2.2.4 Μαθηματικοί υπολογισμοί Τ-πρίσματος: Περαιτέρω γενικεύσεις</i> .....	21
<u>2.3 Εικοσάεδρο ΕΘ (Τ-εικοσάεδρο): Μια «αδαμοντοειδής» ΚΕΘ</u> .....	21
<u>2.4 Τετράεδρο ΕΘ (Τ-τετράεδρο): ΚΕΘ Οδοντωτής μορφής (Zig-Zag)</u> .....	26
<u>2.5 Βασικές κατασκευές ΕΘ: Συμπεράσματα</u> .....	33
Κεφάλαιο 3: Γενικές Κατασκευές Ελκυστήρων – Θλιπτήρων.....	34
<u>3.1 Γενικό πρόβλημα προγραμματισμού</u> .....	34
<i>3.1.1 Εισαγωγή</i> .....	34
<i>3.1.2 Αντικειμενική συνάρτηση</i> .....	36
<i>3.1.3 Περιορισμοί μελών</i> .....	38
<i>3.1.4 Περιορισμοί συμμετρίας</i> .....	38
<i>3.1.5 Περιορισμοί σημείων</i> .....	39
<i>3.1.6 Περιορισμοί διανυσμάτων</i> .....	40
<u>3.2 Επίλυση του προβλήματος</u> .....	41
Κεφάλαιο 4: Σφαίρες Υψηλότερων Συχνοτήτων.....	48
<u>4.1 Εισαγωγή</u> .....	48
<u>4.2 Αδαμαντοειδείς Κατασκευές</u> .....	48
<i>4.2.1 Εισαγωγή</i> .....	48
<i>4.2.2 Μαθηματικό μοντέλο</i> .....	52

4.2.3 Επίλυση.....	57
4.3 Οδοντωτές Κατασκευές.....	61
4.3.1 Περιγραφική Γεωμετρία.....	61
4.3.2 Μαθηματικό Μοντέλο.....	62
4.3.3 Επίλυση.....	63
<b>Κεφάλαιο 5: Κατασκευές ΕΘ Διπλού Στρώματος.....</b>	<b>66</b>
5.1 Εισαγωγή.....	66
5.2 Δικτυώματα.....	67
5.3 Γεωδαιτικά Δίκτυα.....	69
5.4 Δίκτυα Εξαγώνου/Τριγώνου.....	80
<b>Κεφάλαιο 6: Θόλοι ΕΘ Διπλού Στρώματος.....</b>	<b>89</b>
6.1 Εισαγωγή.....	89
6.2 Διαδικασία Σχεδιασμού Θόλων ΕΘ Διπλού Στρώματος.....	91
6.2.1 Βήμα 1: Υπολογισμός της Σφαιράς.....	
92	
6.2.2 Βήμα 2: Εφαρμογή της Κολόβωσης.....	100
6.2.3 Βήμα 3: Ρυθμίσεις Σημείων Βάσης.....	114
6.2.4 Βήμα 4: Προσθήκη Αναρτήρων.....	116
6.2.5 Βήμα 5: Υπολογισμός του Θόλου.....	118
6.2.6 Βήμα 6: Προσαρμογές για την Διόρθωση Προβλημάτων.....	119
<b>Κεφάλαιο 7: Ανάλυση των Δυνάμεων στα Μέλη ΚΕΘ.....</b>	<b>128</b>
7.1 Εισαγωγή.....	128
7.2 Ενδογενείς Δυνάμεις Μελών.....	129
7.2.1 Μέθοδος Υπολογισμού.....	129
7.2.2 Τεκμηρίωση της Μεθόδου.....	129
7.2.3 Περαιτέρω Τεκμηρίωση της Μεθόδου.....	133
7.2.4 Ένας Απλός Υπολογισμός της Ακριβούς Μεθόδου.....	136
7.2.5 Υπολογισμοί με Βάση τη Μέθοδο Ποιής.....	138
7.2.6 Γενικότητα των Σταθμικών Μοντέλων.....	138
7.3 Εξωγενείς Δυνάμεις Μελών.....	141
7.3.1 Μέθοδος Ανάλυσης.....	141
7.3.2 Μαθηματικό Πλαίσιο.....	142
7.3.3 Αρχικές Τιμές – Συνθήκες και Τιμές Έναρξης.....	145
7.3.4 Εφαρμογή 1.....	145
7.3.5 Σύνθετες Κεντρικές Περιοχές Σύνδεσης.....	151
7.3.6 Εφαρμογή 2.....	161
<b>Κεφάλαιο 8: Ανάλυση Αποστάσεων μεταξύ Μελών ΚΕΘ.....</b>	<b>169</b>

8.1 Εισαγωγή.....	169
8.2 Μαθηματικές Σχέσεις.....	169
8.2.1 Απόσταση μεταξύ δύο Ευθυγράμμων Τμημάτων στο Χώρο.....	169
8.2.2 Γωνία μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων.....	172
8.2.3 Εφαρμογή 1.....	172
8.2.4 Εφαρμογή 2.....	173

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α: Άλλες Τεχνολογίες Κατασκευών Ελκυστήρων – Θλιπτήρων.....	176
Παράρτημα Β: Μη κυρτότητα της Περιοχής Περιορισμών.....	179
Παράρτημα Γ: Στοιχεία Τοπολογίας και Βελτιστοποίησης.....	180
Παράρτημα Δ: Περί Γεωδαιτικών.....	220
Παράρτημα Ε: Εσωτερικό Γινόμενο και Σταθμική Συνάρτηση.....	232

Βιβλιογραφία.....	236
-------------------	-----

## **ΕΙΣΑΓΩΓΗ : ΣΚΟΠΟΣ, ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία πραγματεύεται ένα συναρπαστικό είδος κατασκευών, οι οποίες συντίθενται από αλληλοσυνδεόμενα θλιβόμενα και εφελκυσόμενα μέλη, και αναγνωρίζονται ως **Κατασκευές Ελκυστήρων – Θλιπτήρων (ΚΕΘ)**, όρος που αποτελεί μια ελεύθερη μεταφορά στην Ελληνική του αντίστοιχου διεθνούς όρου **Tensegrity Structures (T)**, συντομογραφία της έκφρασης **Tensional Integrity** (δηλ. «εφελκυστική ακεραιότητα»).

Ειδικότερα, οι εν λόγω κατασκευές μορφώνονται μέσω συνεχών ευθύγραμμων στοιχείων, τα οποία δύνανται να αναλάβουν μόνο εφελκυσμό (ελκυστήρες – τένοντες) και στη συνήθη πρακτική είναι μεταλλικά καλώδια, και ασυνεχών ευθύγραμμων επίσης μελών (τα οποία ως επί το πλείστον είναι μεταλλικές ράβδοι κοίλης κυκλικής και σπανιότερα ορθογωνικής διατομής), που υπόκεινται αποκλειστικά σε θλίψη (θλιπτήρες). *Η προκύπτουσα χωρική κατασκευή αποτελεί ένα πλήρως αποδεκτό (με την έννοια της αυτο – ισορροπίας αλλά και της γεωμετρικής συμβατότητας) δόμημα.*

Στην τρέχουσα Εργασία, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο δυσκολότερο από πλευράς μόρφωσης και σχεδιασμού είδος τέτοιων κατασκευών, τις λεγόμενες «*κινητές*» (*floating tensegrity*) ΚΕΘ, στις οποίες τα θλιβόμενα μέλη *δεν συντρέχουν*. Ο σχεδιασμός τους, όπως αναλυτικά παρατίθεται στο πλήρες κείμενο της Εργασίας, σχετίζεται με την επίλυση ιδιαίζόντων προβλημάτων βελτιστοποίησης (μαθηματικού προγραμματισμού), τα οποία προκύπτουν τόσο από την απαιτούμενη γεωμετρική χωρική συμβατότητα, όσο και από τα μοναδικά χαρακτηριστικά των επί μέρους μελών τους (μόνο θλίψη ή μόνο εφελκυσμός ως επιτρεπόμενη ένταση).

Οι ειδικές γνώσεις τοπολογίας, γεωμετρίας και ανάλυσης, που απαιτήθηκαν για τον προτεινόμενο *πρακτικό σχεδιασμό μεταλλικών ΚΕΘ* αντλήθηκαν από την διεθνή βιβλιογραφία και παρατίθενται εν συντομία υπό μορφή Παραρτημάτων στο τέλος της Εργασίας, καθόσον κατά τεκμήριο δεν αποτελούν αντικείμενο προπτυχιακών σπουδών. Πέραν των Παραρτημάτων αυτών και της παρούσας Εισαγωγής, η όλη εργασία απαρτίζεται από οκτώ (8) Κεφάλαια και Βιβλιογραφία, έκαστο δε των Κεφαλαίων αυτών πραγματεύεται επιγραμματικά τα ακόλουθα :

*Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : Εισαγωγή περί Κατασκευών Ελκυστήρων – Θλιπτήρων*

*Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> : Βασικές Κατασκευές Ελκυστήρων – Θλιπτήρων*

*Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : Γενικές Κατασκευές Ελκυστήρων – Θλιπτήρων*

- Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> : Σφαίρες Υψηλότερων Συχνοτήτων*  
*Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> : Κατασκευές ΕΘ Διπλού Στρώματος*  
*Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> : Θόλοι ΕΘ Διπλού Στρώματος*  
*Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup> : Ανάλυση των Δυνάμεων στα Μέλη ΚΕΘ*  
*Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup> : Ανάλυση Αποστάσεων μεταξύ Μελών ΚΕΘ*

Τα ήδη μνημονευθέντα Παραρτήματα έχουν το ακόλουθο περιεχόμενο :

- Παράρτημα Α : Άλλες Τεχνολογίες Κατασκευών Ελκυστήρων - Θλιπτήρων*  
*Παράρτημα Β : Μη Κυρτότητα της Περιοχής Περιορισμών*  
*Παράρτημα Γ : Στοιχεία Τοπολογίας και Βελτιστοποίησης*  
*Παράρτημα Δ : Περί Γεωδαιτικών*  
*Παράρτημα Ε : Εσωτερικό Γινόμενο και Σταθμική Συνάρτηση*

Στο σημείο αυτό θεωρείται επιβεβλημένο, τόσο από τους υπεύθυνους για την εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας όσο και από τον Επιβλέποντα αυτής, να δοθούν ιδιαίτερες ευχαριστίες στον Λέκτορα του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ κ. *Βασίλη Κοκκίνη* για τις οδηγίες του, την αμέριστη συμπαράσταση του και κυρίως για την παροχή εκ μέρους του της δυνατότητας χρήσης του απαραίτητου εξειδικευμένου λογισμικού μαθηματικού προγραμματισμού.

Βόλος, Φεβρουάριος 2007

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΕΛΚΥΣΤΗΡΩΝ - ΘΛΙΠΤΗΡΩΝ (ΚΕΘ)

### 1.1 Βασικές Αρχές των ΚΕΘ

Οι πλέον αντιπροσωπευτικοί ορισμοί για τα συστήματα Ελκυστήρων – Θλιπτήρων έχουν δοθεί από τους Pugh<sup>[17,α]</sup>, Kanchanasaratool<sup>[60,β]</sup> και Wang<sup>[51-52,γ]</sup> και είναι:

α Ένα σύστημα ΕΘ προσδιορίζεται όταν ένα σύνολο ασυνεχών θλιβόμενων στοιχείων αλληλεπιδρά με ένα σύνολο ασυνεχών εφελκόμενων στοιχείων ορίζοντας έναν σταθερό όγκο στο χώρο.

β. Ένα σύστημα ΕΘ είναι μια ευσταθής συλλογή συνεχώς συνδεδεμένων αξονικά φορτιζόμενων μελών. ΚΕΘ τάξης  $k$  είναι εκείνη στην οποία το πολύ  $k$  θλιβόμενα μέλη συντρέχουν σε έναν κόμβο.

γ. Ένα σύστημα (κατασκευή) ΕΘ αναγνωρίζεται από τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

- ο Αποτελείται από εφελκόμενα και θλιβόμενα στοιχεία
- ο Οι θλιπτήρες (θλιβόμενα στοιχεία) είναι ασυνεχή, ενώ οι ελκυστήρες (καλώδια / τένοντες, εφελκόμενα στοιχεία) είναι συνεχή.
- ο Η κατασκευή αποκτά δυσκαμψία αυτο – ισορροπούσα.
- ο Η κατασκευή είναι αυτο – στηριζόμενη.

Οι ΚΕΘ διακρίνονται από τον τρόπο κατανομής των εντατικών μεγεθών εντός αυτών. Τα μέλη μιας τέτοιας κατασκευής υπόκεινται είτε πάντα μόνο σε εφελκυσμό είτε πάντα μόνο σε θλίψη. Στα δομήματα που πραγματεύεται η παρούσα Εργασία, τα εφελκόμενα στοιχεία είναι μεταλλικά καλώδια, ενώ τα θλιβόμενα στοιχεία είναι μεταλλικές ευθύγραμμες ράβδοι κοίλης κυκλικής (ή σπανιότερα) ορθογωνικής διατομής. Τα εφελκόμενα μέλη δημιουργούν ένα συνεχές δίκτυο, με αποτέλεσμα οι εφελκυστικές δυνάμεις να μεταφέρονται σε ολόκληρη την κατασκευή. Τα θλιβόμενα μέλη είναι ασυνεχή οπότε η δράση τους είναι κατά κανόνα τοπική, και γενικά το μήκος τους είναι μικρό. Κατά συνέπεια, ο κίνδυνος αστοχίας λόγω λυγισμού είναι μικρός, οπότε τα μέλη αυτά μπορούν να σχεδιαστούν περισσότερο λυγηρά (slender), χωρίς απώλεια της δομικής ακεραιότητας.

Παρόλο που στην παρούσα Εργασία το είδος των ΚΕΘ που αναλύεται δεν είναι τόσο διαδεδομένο, συστήματα που λειτουργούν ως ΚΕΘ είναι ευρέως αντιληπτά και υπάρχουν τόσο στο φυσικό περιβάλλον όσο και στο ανθρώπινα διαμορφωμένο (τεχνητό). Εντός της



κυριαρχίας της ανθρώπινης δημιουργίας, οι κατασκευές με αέρα («φουσκωτές») είναι ουσιαστικά ΚΕΘ. Για παράδειγμα, σε ένα μπαλόνι, η επιφάνεια του είναι το εφελκόμενο στοιχείο ενώ τα άτομα του αέρα μέσα στο μπαλόνι αποτελούν τα θλιβόμενα στοιχεία. Η επιφάνεια του μπαλονιού απαρτίζεται από υλικό, του οποίου τα άτομα τα οποία είναι συνεχή, συνδεδεμένα το καθένα με το άλλο, ενώ τα άτομα του αέρα εσωτερικά είναι υπερβολικά ασυνεχή μεταξύ τους. Εάν πιέσουμε το μπαλόνι με το δάχτυλό μας, αυτό δεν ρηγματώνεται, και η συνέχεια του εύκαμπτου υλικού του πλέγματος στην επιφάνεια του μπαλονιού κατανέμει τη δύναμη από άκρη σε άκρη του δομήματος. Όταν δε αφαιρεθεί η εξωτερική φόρτιση, το μπαλόνι επανακάμπτει στο αρχικό του σχήμα. Αυτή η ικανότητα ανάκτησης του αρχικού σχήματος (επανάταξη, *resilience*) είναι άλλο ένα σπουδαίο χαρακτηριστικό των ΚΕΘ.

Ένα άλλο τεχνητό προϊόν, το οποίο εμφανίζει την ποιοτική συμπεριφορά των ΕΘ, είναι το προεντεταμένο σκυρόδεμα. Μία δοκός προεντεταμένου σκυροδέματος διαθέτει εσωτερικούς χαλύβδινους τένοντες, οι οποίοι, ακόμα και χωρίς την παρουσία εξωτερικού φορτίου, βρίσκονται εντόνως σε εφελκυσμό ενώ το σκυρόδεμα αντίστοιχα βρίσκεται σε θλίψη. Όταν η δοκός φορτίζεται, οι τένοντες τοποθετούνται σε περιοχές τέτοιες, που να απορροφούν τις εφελκυστικές δυνάμεις, και το σκυρόδεμα, υλικό μικρής εφελκυστικής αντοχής, παραμένει υπό θλίψη και ανθίσταται των μεγάλων θλιπτικών δυνάμεων που δρουν στη δοκό. Το χαρακτηριστικό αυτό του προεντεταμένου σκυροδέματος, δηλαδή η παρουσία δυνάμεων στα επί μέρους στοιχεία του χωρίς την ύπαρξη εξωτερικών φορτίων, είναι επίσης χαρακτηριστικό των ΚΕΘ.

Στον φυσικό κόσμο, ο δομικός σκελετός – κορμός ενός φυτού (εξαιρουμένων των δένδρων) υπακούει πλήρως στις αρχές των ΕΘ. Ένα νεαρό σε ηλικία φυτό αποτελείται από υδατώδη κύτταρα, τα οποία συμπεριφέρονται παρόμοια με το παραπάνω παράδειγμα με το μπαλόνι. Το περίβλημα των κυττάρων αυτών αποτελεί ένα εύκαμπτο σύνδεσμο ατόμων που υπόκεινται εφελκυσμό από την πίεση του νερού που περιέχεται. Όταν το φυτό εντείνεται και κάμπτεται από τον άνεμο, τη βροχή και από άλλες φυσικές δυνάμεις, οι δυνάμεις αυτές κατανέμονται από την αρχή ως το τέλος του στοιχείου χωρίς κάποια διαταραχή στην δομική του ακεραιότητα. Μπορεί να επιστρέψει στο αρχικό του σχήμα, ακόμα και αν, κατά την διάρκεια των φυσικών διαταραχών που καλείται να αντέξει και να αναλάβει, υποστεί ενδιάμεσες μεγάλες παραμορφώσεις μακριά από το φυσικό του σχήμα. Η ουσιώδης από δομικής πλευράς χρήση του

νερού από το φυτό καταδεικνύεται όταν το φυτό ξεραίνεται και μαραίνεται, οπότε πλέον αποκλείεται να επανέλθει.

## 1.2 Εφαρμογές ΕΘ

Τα πλεονεκτήματα - διαζόντως ευνοϊκά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των ΚΕΘ, που τις καθιστούν ελκυστικές για χρήση και εφαρμογή είναι η ικανότητα ανάκτησης του αρχικού σχήματος τους και η οικονομία στα χρησιμοποιούμενα υλικά. Στις κατασκευές αυτές καθίσταται δυνατή η πλήρης εκμετάλλευση της συνεχώς αυξανόμενης εφελκυστικής αντοχής, των μοντέρνων κατασκευαστικών υλικών. Στις ΚΕΘ δεσπόζουν τα αιθέρια (από πλευράς αισθητικής αλλά και ιδιαίτερα ανθεκτικά) εφελκυστικά στοιχεία ενώ τα θλιπτικά στοιχεία (που απαιτούν περισσότερο υλικό) ελαχιστοποιούνται. Συνεπώς, αν στο δομοστατικό σχεδιασμό και την υλοποίηση γεφυρών, κτιρίων και άλλων κατασκευών χρησιμοποιηθούν οι αρχές που διέπουν τους ΕΘ, τότε αυτές οι κατασκευές μπορούν να καταστούν ιδιαίτερα ελαστικές (με την έννοια της επανάταξης) και ταυτόχρονα οικονομικές.

Υπό μορφή θόλων, η τεχνολογία ΕΘ μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή έργων πολύ μεγάλης κλίμακας. Τέτοιου είδους κατασκευές, μπορούν να λειτουργήσουν σαν πλαίσια βάσης για περιβαλλοντικό έλεγχο, για μετατροπή ενέργειας και για παραγωγή τροφίμων. Μπορεί να φανούν χρήσιμες όπου πιθανόν να απαιτηθεί προστασία έναντι ευρείας κλίμακας ηλεκτρικών ή ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, ή ακόμα και σε κατασκευές εκτός του πλανήτη, για προστασία από μικρο - μετεωρίτες. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθούν και σαν το βασικό φέρον κατασκευαστικό υπόβαθρο για έργα αναχαίτισης πτηνών πάνω από μεγάλες περιοχές ή προστασίας από θραύσματα εκρήξεων.

Οι θολοί αυτοί μπορούν να περικλείσουν πολύ μεγάλες περιοχές με μικρό σχετικά αριθμό μόνο περιμετρικών στηρίξεων, με προφανή ευνοϊκά λειτουργικά αλλά και οικονομικά αποτελέσματα, λόγω δε της ευκαμψίας τους και της δυνατότητας επανάταξης που διαθέτουν, είναι εξ ορισμού ιδιαίτερα ανθεκτικές σε σεισμικές δράσεις.

## 1.3 Πρώιμη έρευνα για ΚΕΘ – Ιστορική αναδρομή

Θεμελιώδης συνεισφορά για την αρχική ανάπτυξη των κατασκευών ΕΘ φαίνεται πως οφείλεται σε διάφορους ερευνητές. Κάποιοι ιστορικοί<sup>[48]</sup> ισχυρίζονται ότι ο Λετονός καλλιτέχνης Karl Ioganson σε μια έκθεση του παρουσίασε ένα πρίσμα ΕΘ στη Μόσχα την περίοδο 1920-21. Παρά ταύτα ο ισχυρισμός αυτός είναι αμφιλεγόμενος. Πιο συγκεκριμένα ο Kenneth Snelson

([www.kennethsnelson.net](http://www.kennethsnelson.net)) τον αμφισβητεί και δεν πιστεύει ότι το γλυπτό στην φωτογραφία της παλαιάς αυτής έκθεσης, βάσει της οποίας στοιχειοθετήθηκε ο παραπάνω ισχυρισμός είναι στην πραγματικότητα μια ΚΕΘ. Τα εκθέματα του Ioganson καταστράφηκαν στα μέσα της δεκαετίας του 1920 από το σοβιετικό καθεστώς, πλην όμως διασώθηκαν φωτογραφίες της έκθεσης αυτής. Ο Γάλλος αρχιτέκτονας David Georges Emmenrich<sup>[31]</sup> αναφέρθηκε σε μία διαφορετική κατασκευή από τον Ioganson σαν προηγούμενο των δικών του έργων. Ο όρος tensegrity (μία συντομογραφία του όρου *tensional integrity* = εφελκυστική ακεραιότητα) επινοήθηκε από τον Αμερικανό Μηχανικό, Φιλόσοφο και Μαθηματικό Buckminster Fuller. Ο εν λόγω θεώρησε το πλαίσιο του έργου του Dymaxion House (1927) και μια δικιά του κατασκευή του 1944 ως πρώιμα παραδείγματα της τεχνολογίας ΕΘ<sup>[10]</sup>.

Τον Δεκέμβριο του 1948, αφού παρακολούθησε διαλέξεις του Fuller στο Black Mountain College στη North Carolina, ο Kenneth Snelson προέβη σε μια καταλυτική συνεισφορά για την κατανόηση των κατασκευών ΕΘ, κατασκευάζοντας ένα γλυπτό που το ονόμασε X-Piece<sup>[42,10]</sup>. Η πρωτοποριακή αυτή κατασκευή ακολουθήθηκε και από άλλες παρόμοιες των Fuller, Snelson και άλλων του κύκλου τους. Ανεξάρτητα, το 1958 στη Γαλλία, ο Emmenrich διερεύνησε τα πρίσματα ΕΘ και συνδυασμούς πρισμάτων μέσα σε πιο περίπλοκες ΚΕΘ, τις οποίες χαρακτήρισε αυτεντατικές εφελκυστικές κατασκευές<sup>[42]</sup>.

Οι Emmenrich, Fuller και Snelson εμφανίστηκαν δημόσια εξασφαλίζοντας ευρεσιτεχνίες για διάφορα είδη της ΕΘ τεχνολογίας τη δεκαετία του 1960, και όλοι συνέχισαν να την αναπτύσσουν. Ο Fuller κυρίως ενδιαφέρθηκε να προσαρμόσει την τεχνολογία για την ανάπτυξη σφαιρικών και θολωτών κατασκευών, έχοντας στο μυαλό του αρχιτεκτονικές εφαρμογές. Επίσης χρησιμοποίησε τις κατασκευές ΕΘ για να καταδείξει κάποια φιλοσοφικά σημεία<sup>[10, 53]</sup>. Σαν αρχιτέκτων, ο Emmenrich, ενδιαφέρθηκε επίσης για αρχιτεκτονικές εφαρμογές και τελικά σχεδίασε τουλάχιστον άλλον έναν θόλο<sup>[31]</sup>. Ο Snelson κατά κύριο λόγο ενδιαφέρθηκε για τις καλλιτεχνικές εφαρμογές των ΕΘ και διερεύνησε την τεχνολογία αυτή για μία ποικιλία γλυπτών. Επίσης η ενασχόληση του με τους ΕΘ τον οδήγησε στην ανάπτυξη ενός μοντέλου του ατόμου. Παράλληλα, οι αρχές των ΕΘ εφαρμόστηκαν τελευταία με αξιοπρόσεκτη επιτυχία στις λεγόμενες πτυσσόμενες (deployable) κατασκευές<sup>[43]</sup>.

Παρόλο το γεγονός ότι πολλά μοντέλα ΕΘ κατασκευάστηκαν και απέκτησαν μεγάλη φήμη, για παράδειγμα μέσω μιας αξιόλογης έκθεσης του Fuller στο Μουσείο Μοντέρνας

Τέχνης στη Νέα Υόρκη (1959) και της ανασκόπησης της δουλειάς του Snelson στο Μουσείο Hirschorn στην Ουάσινγκτον D.C (1981), μεγαλύτερο μέρος των κατασκευών του Fuller και των συνεργατών ήταν γεωδαιτικοί θόλοι παρά ΚΕΘ.

Η κύρια αιτία για την οποία οι ΚΕΘ δεν έτυχαν αρχικά ευρύτερης εφαρμογής, ακόμα και σε κύκλους όπου υπήρξε ισχυρό ενδιαφέρον προς τούτο, ήταν η προφανής έλλειψη ισχυρών και μεγάλης ακρίβειας «εργαλείων» για τον σχεδιασμό τους. Στην βασική ευρεσιτεχνία του Fuller για τις ΚΕΘ υπάρχουν παραπομπές περί του μήκους των επί μέρους μελών τους, χωρίς όμως σαφή ένδειξη περί της μεθόδου υπολογισμού του.

Μία πρόσφατη εξαίρεση αυτής της έλλειψης πληροφοριών στον υπολογισμό των ΕΘ αποτελεί η εξαιρετική εργασία του Hugh Kenner «Geodesic Math...»<sup>[16]</sup>, στην οποία μέσω μιας επακριβούς τεχνικής για το πολύ απλό πρίσμα ΕΘ κατέληξε σε μια προσεγγιστική μέθοδο υπολογισμού μερικών απλών σφαιρικών κατασκευών. Η τεχνική του για το σχεδιασμό πρισμάτων παρουσιάζεται στην παράγραφο 2.2 ως μία εισαγωγή στον υπολογισμό ΕΘ, καθόσον οι πολύ απλές αυτές κατασκευές αποτελούν μια εξαιρετική αφετηρία για την κατανόηση της πραγματικής λειτουργίας των ΚΕΘ.

#### 1.4 Πρόσφατη έρευνα επί των ΚΕΘ

Πρόσφατα παρατηρείται αυξανόμενο ενδιαφέρον της Επιστημονικής Κοινότητας των Πολιτικών Μηχανικών για τον σχεδιασμό ΚΕΘ, γεγονός που καταδεικνύεται από μια ειδική έκδοση του διεθνούς περιοδικού *International Journal of Space Structures* (Vol. 7, No. 3, 1992) αφιερωμένη στις ΚΕΘ. Στην συλλογή επιστημονικών εργασιών που περιέχεται στο τεύχος αυτό, στο άρθρο ανασκόπησης του, ο R. Motro<sup>[38, 39]</sup> αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «... δεν υπάρχουν πολλές εφαρμογές των αρχών των ΕΘ σε κατασκευαστικό επίπεδο και γενικά .... υπάρχουν κατά κανόνα μόνο πρωτότυπες εφαρμογές της τεχνολογίας αυτής υφίστανται .... λόγω ακριβώς της έλλειψης αξιόπιστων και κατάλληλων τεχνολογικών μελετών σχεδιασμού...».

Τα σπουδαιότερα εμπόδια για την πρακτική εφαρμογή της τεχνολογίας ΕΘ, τα οποία αναγνώρισαν οι ερευνητές που δημοσίευσαν εργασίες τους στην ανωτέρω έκδοση, ήταν:

1. Συμφόρηση θλιπτήρων – στο σχεδιασμό ορισμένων ΚΕΘ μεγάλου μεγέθους με σαφείς γεωμετρικές δεσμεύσεις, τα θλιβόμενα στοιχεία μπορεί να πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο<sup>[29]</sup>.

2. Ανεπαρκής συμπεριφορά έναντι φορτίων – υπερβολικά μεγάλες σχετικές μετακινήσεις και μικρής κλίμακας εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εν χρήσει υλικού σε σχέση με άλλες συμβατικές γεωμετρικά δύσκαμπτες – στερεές κατασκευές<sup>[29]</sup>.

3. Πολυπλοκότητα στην ανέγερση και την κατασκευή, ιδιαίτερα σε θολωτής μορφής ΚΕΘ<sup>[29]</sup>.

4. Ανεπαρκή «εργαλεία» σχεδιασμού.

Ο σχεδιασμός κατασκευών διπλού στρώματος (double layer), που αρχικά εισήχθη από τους Snelson και τον Emmerich και αργότερα ερευνήθηκε από τους Motro και Hanaor, κατ' αρχήν ασχολήθηκε με την αντιμετώπιση του πρώτου από τα παραπάνω εμπόδια. Σύμφωνα με τα περιεχόμενα της εν λόγω ειδικής έκδοσης, τα επόμενα δύο εμπόδια συνεχίζουν να αποτελούν πρόβλημα προς διερεύνηση, ενώ σε αυτή παρουσιάστηκε η ανάπτυξη μεθόδων για την αντιμετώπιση του τέταρτου εμποδίου, οι οποίες βασίστηκαν στις πρώιμες εργασίες των J.H. Argyris και D.W. Scharpf<sup>[8]</sup>, που ανέλυσαν προεντεταμένα δίκτυα.

Σε ότι ακολουθεί γίνεται αναφορά στις παραπάνω εργασίες. Πλην όμως οι τεχνικές που παρουσιάζονται εδώ είναι κάπως διαφορετικές, εκμεταλλεζόμενες μερικά ειδικά χαρακτηριστικά των ΚΕΘ. Ο όρος «διπλού στρώματος (double-layer)» έχει απ' ευθείας υιοθετηθεί από την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού για να περιγράψει μερικά από τα είδη των κατασκευών που αποτελούν αντικείμενο της παρούσας. Στο Παράρτημα Α παρατίθενται εν συντομία οι σχέσεις μεταξύ των έργων Πολιτικού Μηχανικού και μερικών από τις ιδέες, στις οποίες βασίζεται η όλη εργασία.

### 1.5 Άλλες τεχνολογίες πλαισιωτών χωρικών κατασκευών

Άλλες τεχνολογίες πλαισιωτών χωρικών κατασκευών μπορούν να ταξινομηθούν χονδρικά σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιέχει τις τεχνολογίες αυτές στις οποίες τα μήκη των μελών είναι πολύ ομογενή. Τυπικά θεωρούνται ως επίπεδα ζευκτά, τα οποία μπορεί να είναι συνδεδεμένα υπό γωνία με άλλα επίπεδα ζευκτά. Η πολυεδρική τους μορφή έχει σαν αποτέλεσμα να περιέχουν λιγότερο χώρο ανά μονάδα μέτρησης υλικού απ' ό,τι μια αντίστοιχη σφαιρική μορφή. Στην εργασία του Makowski<sup>[4]</sup> περιέχεται μια πληθώρα παραδειγμάτων τέτοιων χωρικών κατασκευών.

Η δεύτερη κατηγορία περιέχει αυτές τις τεχνολογίες, που απαρτίζονται από γεωδαιτικούς θόλους και θόλους Kiewitt<sup>[4]</sup>. Οι γεωδαιτικοί θόλοι διαθέτουν αρκετά από τα

πλεονεκτήματα των ΚΕΘ, με τη διαφορά ότι τα μέλη τους πρέπει να είναι ικανά να φέρουν τόσο εφελκυστικές όσο και θλιπτικές δυνάμεις.

Η τρίτη κατηγορία αντιπροσωπεύεται τυπικά από την γνωστή σε όλους τέντα ενός τσίρκου. Εδώ, ένα εφελκυστικό δίκτυο (το ύφασμα επικάλυψης της τέντας) στηρίζεται σε διάφορες θέσεις μέσω μεγάλου μεγέθους στύλων. Αγκυρώσεις και καλώδια στήριξης υφίστανται επίσης σαν μέλη τέτοιων κατασκευών, που μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα είδος ΚΕΘ, αφού ορισμένα μέρη τους εφελκύνονται πάντοτε ενώ άλλα θλιβόνται πάντοτε. Όμως διαφέρουν από τις κατ' εξοχήν ΚΕΘ, στο ότι τα θλιβόμενα μέρη τους είναι λιγότερα αλλά πολύ μεγαλύτερα. Πρόκειται περί των κατακόρυφων στοιχείων στήριξης, τα οποία σε πολλές περιπτώσεις διασπούν σημαντικά τη συνέχεια του εσωτερικού (καλυπτόμενου) χώρου. Το εφελκυστικό δίκτυο συνήθως έχει αλυσοειδές σχήμα μεταξύ των θλιβόμενων στηρίξεων, με αποτέλεσμα δυνατότητα κάλυψης λιγότερου χώρου απ' όπi μια συνήθης ΚΕΘ. Πληθώρα παραδειγμάτων κατασκευών της τρίτης αυτής κατηγορίας περιέχονται στην εργασία του Otto<sup>[12]</sup>.

### 1.6 Περιγραμμά του περιεχομένου της εργασίας

Το περιεχόμενο της Διπλωματικής Εργασίας εστιάζεται στον σχεδιασμό και την ανάλυση ενός ξεχωριστού είδους κατασκευών ελκυστήρων – θλιπτήρων. Αυτές απαρτίζονται από διακριτά ευθύγραμμα μέλη : τα εφελκυόμενα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν ως καλώδια τα οποία έλκουν δύο σημεία μαζί, ενώ τα θλιβόμενα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν ως μέλη από άκαμπτη σωληνωτή διατομή, τα οποία διατηρούν το διαχωρισμό των δύο σημείων. Τα εφελκυόμενα μέλη είναι συνεχώς συνδεδεμένα μεταξύ τους και στα άκρα των θλιβόμενων μελών, ενώ τα τελευταία είναι συνδεδεμένα μόνο με τα εφελκυόμενα μέλη και όχι με άλλα θλιβόμενα μέλη. Το πρωταρχικό κίνητρο για την σύνταξη της όλης εργασίας είναι η πρόταση – περιγραφή μαθηματικών μεθόδων, οι οποίες να μπορούν να εφαρμοστούν στο σχεδιασμό και την ανάλυση αυτού του είδους ΚΕΘ.

Επίσης παρουσιάζονται μερικές νέες κατηγορίες κατασκευών ΕΘ. Ιδιαίτερα, εξετάζονται μέθοδοι δικτύωσης ΕΘ υψηλού τριγωνισμού, οι οποίες μπορεί να εφαρμοστούν στον σχεδιασμό σφαιρικών, θολωτών και άλλων γενικών μορφών ΚΕΘ.

Πέραν δε της επικέντρωσης σε σφαιρικές υψηλής συμμετρίας κατασκευές, αντιμετωπίζεται πλήρως τόσο ο σχεδιασμός όσο και η ανάλυση κολοβωμένων κατασκευών όπως οι θόλοι. Η ανάπτυξη τεχνικών για αυτές τις λιγότερο συμμετρικές κατασκευές τις καθιστά πολύ

περισσότερο ελκυστικές για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων δομοστατικού σχεδιασμού.

Τέλος, στο περιεχόμενο της εργασίας περιλαμβάνονται και μέρη που αναφέρονται στην ανάλυση των δυνάμεων των μελών και των μεταξύ τους αποστάσεων, με σκοπό την πληρέστερη κατανόηση της συμπεριφοράς των ΚΕΘ.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΕΛΚΥΣΤΗΡΩΝ - ΘΛΙΠΤΗΡΩΝ**

### 2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές απλές κατασκευές ελκυστήρων-θλιπτήρων. Σε αυτή την μορφή, τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτού του είδους των κατασκευών είναι πολύ εύκολα κατανοητά. Στα πλαίσια του σχεδιασμού των κατασκευών αυτών, διάφορες μαθηματικές μέθοδοι είναι άμεσα αξιοποιήσιμες. Μερικές από αυτές τις κατασκευές είναι τόσο απλές, ώστε τα μήκη των μελών τους μπορούν να εκφραστούν με αλγεβρικούς τύπους. Αλλά ακόμα και με αυτές τις απλές κατασκευές, μερικές φορές η βοήθεια του Η/Υ και των προγραμμάτων επίλυσης πολύπλοκων μαθηματικών υπολογισμών που αυτός παρέχει, είναι απαραίτητη.

Αυτές οι απλές κατασκευές επιτρέπουν μερικές μαθηματικές προσεγγίσεις, που να μην είναι διαισθητικά ελκυστικές, δύσκολα όμως εφαρμόσιμες σε περισσότερες πολύπλοκες κατασκευές. Οι διαισθητικές προσεγγίσεις πραγματεύονται αποκλειστικά γωνιακές μετρήσεις, δηλαδή χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων ως επί το πλείστον. Η εναλλακτική Καρτεσιανή προσέγγιση δεν περιλαμβάνει γωνίες, παρά μόνο σημεία και τις μεταξύ αυτών αποστάσεις. Για υπολογισμούς η Καρτεσιανή προσέγγιση είναι απλή και αξιόπιστη, αλλά μειονεκτεί σε ότι αφορά την φυσική αναπαράσταση και αντίληψη της συμπεριφοράς και της γεωμετρίας των κατασκευών, οπότε σαν αρωγός – με σκοπό την οπτικοποίηση / απεικόνιση των κατασκευών θα πρέπει να γίνει χρήση και άλλων επιπρόσθετων εργαλείων.

### 2.2 Πρίσμα $E\Theta$ (T – Πρίσμα): Η απλούστερη μορφή $KE\Theta$

#### 2.2.1 Πειραματικό προσομοίωμα

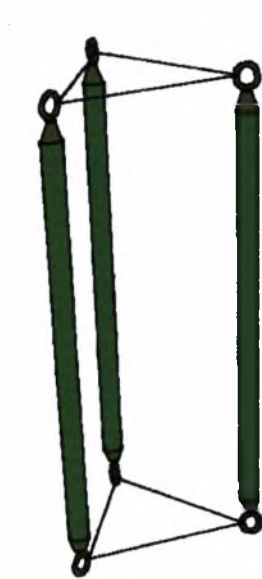
Το πρίσμα  $E\Theta$  απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Πρόκειται περί της απλούστερης και ταυτόχρονα της πλέον «διδασκτικής» μορφής της οικογένειας των  $KE\Theta$ . Ένα πειραματικό προσομοίωμα (μοντέλο) ενός τέτοιου πρίσματος περιγράφεται παρακάτω. Τούτο κατασκευάζεται σχεπικά εύκολα χρησιμοποιώντας γόμφους (μικρά βλήτρα) με διάμετρο περίπου 8 mm, μερικούς μικρούς βιδωτούς κρίκους και λίγη πετονιά. Ο γόμφος πρέπει να κοπεί σε 3 κομμάτια των 178 mm σε κάθε άκρο των οποίων θα τοποθετηθούν οι βιδωτοί κρίκοι. Σε κάθε κομμάτι και οι δύο κρίκοι πρέπει να κοιτάζουν προς την ίδια κατεύθυνση. Μετά, χρησιμοποιώντας την πετονιά προσδένονται τα πάνω άκρα των γόμφων μεταξύ τους έτσι ώστε σε κάθε ζευγάρι γόμφων το μήκος της πετονιάς να είναι 76 mm. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο τενόντων (με πλευρά



μήκους 76 mm), που θα ενώνει τρεις (3) θλιπτήρες μαζί. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η ίδια σύνδεση και για τα κάτω άκρα των γόμφων. Προκύπτει τότε ένα τριγωνικό πρίσμα, του οποίου οι ακμές ορίζονται από τους θλιπτήρες και του οποίου οι τριγωνικές άκρες έχουν σχηματιστεί από πετονιά, σύμφωνα με το Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.1 Πρίσμα ΕΘ (Τ - Πρίσμα)



Σχήμα 2.2 Κατασκευή Τ - Πρίσματος : Φάση Τριγωνικού Πρίσματος

Η κατασκευή μπορεί να κρατηθεί ψηλά χρησιμοποιώντας τον αντίχειρα και δύο (2) δάχτυλα από κάθε χέρι, έτσι ώστε να ειδωθεί σαν πρίσμα. Όταν το ένα άκρο του πρίσματος στραφεί σχετικά με το άλλο, οι ορθογωνικές πλευρές του πρίσματος χάνουν την ορθογωνικότητα τους και καθίστανται μη επίπεδα τετράπλευρα. Δύο απέναντι γωνίες σε κάθε τετράπλευρο γίνονται αμβλείες και οι άλλες δύο οξείες. Η κατασκευή ολοκληρώνεται ενώνοντας τις κορυφές του κάθε τετραπλεύρου, που αντιστοιχούν σε αμβλείες γωνίες, μέσω τένοντα από πετονιά.

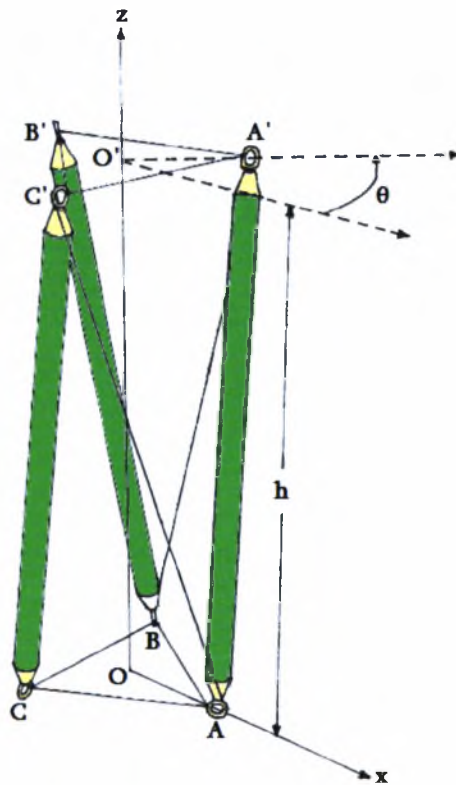
Το μήκος καθενός από αυτούς τους τρεις τένοντες (ένας για κάθε πλευρά του πρίσματος - πλευρικοί τένοντες) πρέπει να επιλεγεί πολύ προσεκτικά, αλλιώς η κατασκευή θα μετατραπεί σε φύρδην μίγδην ανακάτωμα πετονιάς και γόμφων. Καθώς τα άκρα του πρίσματος στέφονται σχετικά το ένα με το άλλο, οι κορυφές που αντιστοιχούν στις απέναντι αμβλείες γωνίες πλησιάζουν αρχικά η μία την άλλη. Καθώς η περιστροφή συνεχίζεται, από ένα σημείο και μετά αρχίζουν να απομακρύνονται η μια από την άλλη. Αν το μήκος των πλευρικών τενόντων ανταποκρίνεται στο ελάχιστο μήκος που μπορεί να φτάσει σε αυτό το σημείο, η κατασκευή καθίσταται σταθερή, αφού δεν μπορεί να μετακινηθεί πέρα από αυτή την διαμόρφωση, εκτός και αν μεγαλώσει η απόσταση μεταξύ των ως άνω κορυφών, κάτι το οποίο όμως παρεμποδίζεται από την εφαρμογή τενόντων κατάλληλου ελαχίστου μήκους. Αυτό είναι το 'τέχνασμα', στο οποίο βασίζονται όλες οι μεθόδους σχεδιασμού που θα αναλυθούν κατωτέρω. Στη συνέχεια λοιπόν θα διερευνηθεί ο υπολογισμός του ελάχιστου μήκους του τένοντα.

### 2.2.2 Μαθηματικοί υπολογισμοί T- πρίσματος: Κυλινδρικές Συντεταγμένες<sup>[16]</sup>

Για το πρίσμα  $E\Theta$ , το πιο αξιόπιστο και βολικό σύστημα συντεταγμένων για μαθηματικές αναλύσεις είναι το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Στο Σχήμα 2.3 φαίνεται πώς το T - πρίσμα είναι προσανατολισμένο εντός αυτού του συστήματος. Ο άξονας των  $z$  του συστήματος συμπίπτει με τον άξονα ( $\overline{OO'}$ ) του πρίσματος και γι' αυτό διέρχεται από το κέντρο βάρους των δύο τριγωνικών βάσεων. Το κέντρο βάρους της μίας βάσης ( $O$ ) συμπίπτει με το κέντρο των αξόνων, ενώ το άλλο κέντρο ( $O'$ ) βρίσκεται στον θετικό άξονα  $z$ . Τα σημεία που αποτελούν τις κορυφές του τριγώνου γύρω από το κέντρο των αξόνων ορίζονται ως  $A, B, C$ . Οι συντεταγμένες τους κατά  $z$  είναι 0. Οι θέσεις τους θεωρούνται σταθερές στη μαθηματική ανάλυση. Στην άλλη τριγωνική βάση τα αντίστοιχα σημεία ορίζονται ως  $A', B', C'$ . Οι συντεταγμένες τους κατά  $z$  είναι

$h$ , όσο και το ύψος δηλαδή του πρίσματος. Αυτό το ύψος θεωρείται μεταβλητή στην μαθηματική ανάλυση.

Εφόσον ο άξονας  $z$  διέρχεται από το κέντρο βάρους και των δύο τριγωνικών βάσεων, οι κορυφές τους ισαπέχουν από τον άξονα  $z$ . Η απόσταση, που ορίζεται ως  $r$ , εκφράζει το ακτινικό μέρος των συντεταγμένων. Η τιμή του  $r$  θεωρείται ως σταθερά για τους σκοπούς της μαθηματικής ανάλυσης. Εκτός του άξονα  $z$ , στο Σχήμα αυτό απεικονίζεται επίσης και ο άξονας  $x$ , ο οποίος θεωρείται ως άξονας αναφοράς για τον προσδιορισμό της γωνιακής συντεταγμένης<sup>[9]</sup>. Η τιμή της συντεταγμένης αυτής για το σημείο  $A$  είναι σταθερά 0 ενώ για το σημείο  $A'$  ισούται με την μεταβλητή  $\theta$ . Η τιμή του  $\theta$  (σε ακτίνια) μετράει την συστροφή της μιας τριγωνικής βάσης σχετικά με την άλλη. Αφού τα  $A'$ ,  $B'$  και  $C'$  βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο, η γωνιακή συνιστώσα του  $B'$  είναι  $\theta + 2\pi/3$  και του  $C'$  είναι  $\theta - 2\pi/3$ . Στον Πίνακα 2.1 συνοψίζονται οι συντεταγμένες των έξι αυτών σημείων.



Σχήμα 2.3 Πρίσμα  $E\Theta$  : Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$z$	ακτίνα	γωνία
$A$	0	$r$	0
$B$	0	$r$	$\frac{2\pi}{3}$
$C$	0	$r$	$-\frac{2\pi}{3}$
$A'$	$h$	$r$	$\theta$
$B'$	$h$	$r$	$\theta + \frac{2\pi}{3}$
$C'$	$h$	$r$	$\theta - \frac{2\pi}{3}$

Πίνακας 2.1: T – Πρίσμα : Πολικές Συντεταγμένες

Τώρα οι θλιπτήρες, τα θλιβόμενα μέλη της κατασκευής, μπορούν να εισαχθούν στο προσομοίωμα. Αυτά αντιστοιχούν στα ευθύγραμμα τμήματα  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  και  $\overline{CC'}$ . Στη συνέχεια, οι πλευρικοί τένοντες καθορίζονται έτσι ώστε για να συνδέονται με τα δύο τρίγωνα τενόντων στα άκρα του πρίσματος. Ξεκινώντας από το σημείο A, ο πλευρικός τένοντας μπορεί να ενωθεί είτε με το B' είτε με το C'. Οποιαδήποτε εκ των δύο επιλογών θα οδηγήσει σε μια δομικά αποδεκτή κατασκευή, υπό τον όρο οι ενώσεις γύρω από την κατασκευή να γίνονται με συνέπεια. Η μια από αυτές τις κατασκευές θα είναι ο αντικατοπτρισμός της άλλης. Εδώ ο πλευρικός τένοντας ενώνεται με το C', έτσι οι πλευρικοί τένοντες αντιστοιχούν στα ευθύγραμμα τμήματα  $\overline{AC'}$ ,  $\overline{BA'}$  και  $\overline{CB'}$ .

Η ουσία του προβλήματος έχει επιτευχθεί : πόσο μακρύ πρέπει κάθε μέλος (κάθε τένοντας και κάθε θλιπτήρας) να είναι; Κρατώντας σταθερή την τιμή του  $r$  (ακτίνα των τριγωνικών άκρων του πρίσματος), το μήκος κάθε ακραίου τένοντα (ονομαζόμενο  $u$ ) έχει καθοριστεί μέσω της εξίσωσης  $u = 2r \sin(\pi/3)$ . Για τα άλλα μέλη υπάρχουν δύο επιλογές. Τα μήκη των πλευρικών τενόντων,  $|\overline{AC'}|$  κτλ, μπορεί να θεωρηθούν σταθερά και τα μήκη  $|\overline{AA'}|$  κτλ, να επιλεγούν ως τα μέγιστα μήκη θλιπτήρων συμβατά με τα ήδη σταθερά μήκη των τενόντων, ή θεωρώντας σταθερά τα μήκη των τενόντων  $|\overline{AA'}|$  κτλ, και στη συνέχεια επιλέγοντας τα μήκη  $|\overline{AC'}|$  κτλ ως τα ελάχιστα μήκη πλευρικών τενόντων συμβατά με τα ήδη υπάρχοντα σταθερά μήκη των θλιπτήρων. Εδώ ακολουθείται η δεύτερη επιλογή. Η επιλογή είναι τυχαία, και δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο όφελος επιλέγοντας την μια ή την άλλη. Σε πιο πολύπλοκες κατασκευές ωστόσο, η επιλογή των

μηκών των θλιπτήρων εξ' αρχής, διευκολύνει τον σχεδιασμό θεωρώντας όλους τους θλιπτήρες ισομήκεις. Αυτή η ομοιομορφία οδηγεί στην κατασκευή ενός μόνο είδους θλιπτήρα, με προφανή ευνοϊκά αποτελέσματα.

Άρα το πρόβλημα που ανακύπτει έχει ως εξής :

Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές  $h$  και  $\theta$ , ελαχιστοποιείται το μήκος  $l = |\overline{AC'}|$  του πλευρικού τένοντα έχοντας υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς :

- Σταθερή τιμή τριγωνικής ακτίνας  $\bar{r}$
- Σταθερά μήκη θλιπτήρων  $\bar{s} = s = |\overline{AA'}|$
- Περιορισμοί συμμετρίας θλιπτήρων:  $|\overline{AA'}| = |\overline{BB'}| = |\overline{CC'}|$
- Περιορισμοί συμμετρίας πλευρικών τενόντων:  $|\overline{AC'}| = |\overline{BA'}| = |\overline{CB'}|$

Οι περιορισμοί συμμετρίας προέρχονται από το γεγονός ότι αυτή η μορφή ΕΘ βασίζεται σε ένα τριγωνικό πρίσμα, το οποίο διαθέτει τριπλή συμμετρία. Οι συμμετρικοί θλιπτήρες έχουν επιλεγεί με ίσα μήκη χάριν ευκολίας. Θα μπορούσαν κάλλιστα να είχαν επιλεγεί με διαφορετικό μήκος ο καθένας. Τα ίδια ισχύουν και για τους πλευρικούς τένοντες, που έχουν όλοι το ίδιο μήκος για τους ίδιους ακριβώς λόγους. Εδώ βέβαια πρέπει να δοθεί περισσότερη προσοχή καθώς τα μήκη των πλευρικών τενόντων,  $|\overline{AC'}|$  κτλ, είναι μεταβλητές του προβλήματος, και τεχνητοί περιορισμοί μπορεί να ακυρώσουν το μαθηματικό μοντέλο της κατασκευής. Δεν υπάρχει τίποτα στην γεωμετρία της κατασκευής που να υπαγορεύει ότι αυτοί οι τένοντες πρέπει να είναι ισομήκεις, και ουσιαστικά, ακόμα και με όλα τα μήκη των θλιπτήρα ίσα, μία έγκυρη κατασκευή μπορεί να κατασκευαστεί με διαφορετικού μήκους τένοντες. Αλλά, όπως τελικά αποδεικνύεται, όταν η κατασκευή έτσι ή αλλιώς παρουσιάζει περιστροφική συμμετρία, επιβάλλοντας την συμμετρία αυτή στην αναζητούμενη λύση οδηγεί όχι μόνο σε μια καθ' όλα αποδεκτή κατασκευή αλλά και σε σημαντική μείωση του μεγέθους του προβλήματος.

Για να ευρεθούν μαθηματικές εκφράσεις (ένα τύπο) για τα διαφορετικά μήκη, χρειάζεται ο τύπος υπολογισμού μιας χορδής ενός κυλίνδρου, που ισούται με

$$l^2 = (\Delta z)^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos(\Delta\theta)$$

όπου

$\ell$	=	μήκος χορδής
$\Delta z$	=	διαφορά των συντεταγμένων κατά $z$ των δύο σημείων
$r$	=	ακτίνα του κυλίνδρου
$\Delta \theta$	=	διαφορά των γωνιακών συντεταγμένων των δύο σημείων

Όπως παρατηρούμε ο τύπος δίνει την τιμή του τετραγώνου του μήκους. Η τετραγωνική ρίζα της παραπάνω έκφρασης δίνει εξίσου ένα τύπο για το μήκος, αλλά πιο έγκυρο και κυρίως μαθηματικά πιο βολικό, είναι να εργαζεται κανείς με δεύτερες δυνάμεις.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, η τελική μαθηματική μορφή για το πρόβλημα έχει ως εξής :

ελαχιστοποίηση ως προς  $\theta$  και  $h$  της (αντικειμενικής) συνάρτησης

$$f(\theta, h) t^2 = |\overline{AC}|^2 = h^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$$

υπό τον περιορισμό να ισχύει επίσης ότι

$$\bar{s}^2 = s^2 = |\overline{AA'}|^2 = h^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos(\theta)$$

$$\bar{r} = r$$

Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς μπορεί να μετατραπεί σε ένα ευκολότερο χωρίς περιορισμούς, επιλύοντας τον περιορισμό ως προς  $h^2 + 2r^2$  και αντικαθιστώντας τη λύση στην αντικειμενική συνάρτηση. Κάνοντας αυτό, οδηγούμεθα στο ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα χωρίς περιορισμό:

ελαχιστοποίηση ως προς  $\theta$  της

$$g(\theta) = \bar{s}^2 + 2\bar{r}^2 \cos \theta - 2\bar{r}^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$$

Τα τοπικά ακρότατα της ανωτέρω αντικειμενικής συνάρτησης είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου της ως προς  $\theta$ , ήτοι :

$$\frac{dg}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2\bar{r}^2 \sin \theta - 2\bar{r}^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 0$$

ή

$$\sin \theta = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Τα ημίτονα δύο γωνιών είναι ίσα μόνο εάν η διαφορά τους είναι ένα άρτιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ , ή αν το άθροισμα τους είναι περιττό πολλαπλάσιο του  $\pi$ . Στην προκειμένη

περίπτωση μόνο το τελευταίο είναι πιθανό, αφού η διαφορά μεταξύ των γωνιών ισούται με  $\frac{2\pi}{3}$ , που δεν είναι άρτιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ .

Η πρώτη εναλλακτική λύση είναι ότι το άθροισμα να είναι ακριβώς  $\pi$ , δηλ.:

$$\theta + (\theta - 2\pi/3) = \pi$$

που σημαίνει ότι μια λύση στο πρόβλημα είναι

$$\theta = 5\pi/6 = 150^\circ$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του  $\theta$  στην αντικειμενική συνάρτηση έχουμε :

$$t^2 = |\overline{AC'}|^2 = \bar{s}^2 + 2\bar{r}^2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2\bar{r}^2 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right).$$

Στο πιο πάνω πείραμα, τα σταθερά μήκη των θλιπτήρων  $\bar{s}$  ήταν ίσα με 17.78 cm και τα σταθερά μήκη των ακραίων τενόντων  $\bar{u}$  ίσα με 7.62 cm, οπότε μετά από πράξεις το μήκος  $t = |\overline{AC'}|$  προκύπτει ίσο με 15.78 cm.

Η δεύτερη λύση είναι το άθροισμα των γωνιών να παίρνει την τιμή  $-\pi$ , που μας δίνει  $\theta = -\pi/6$ . Αυτή η λύση αντιστοιχεί σε μια μέγιστη τιμή της συνάρτησης και όχι σε ελάχιστη. Μαθηματικά, αυτή η εναλλακτική λύση θα μπορούσε να εξαιρεθεί με την εξέταση του πρόσημου της 2ης παραγώγου. Προς το παρόν, δεν χρειάζεται τόση προσοχή, εφόσον είναι γνωστό ότι η τιμή του  $\theta$  πρέπει να είναι θετική. Ωστόσο, καθώς τα μοντέλα γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα, αυτά τα ζητήματα πρέπει να διευκρινιστούν. Αυτή η τελευταία λύση θα μπορούσε να είναι μια έγκυρη λύση αν η τιμή του μήκους του θλιπτήρα μεγιστοποιούνταν όσον αφορά έναν καθορισμένου μήκους πλευρικό τένοντα. Όλες οι άλλες εναλλακτικές λύσεις είναι ισοδύναμες με τις δύο που εξετάστηκαν, καθώς μπορούν να αναχθούν σε μια από τις λύσεις αυτές συν ένα άρτιο πολλαπλάσιο του  $\pi$ .

### 2.2.3 Μαθηματικοί υπολογισμοί T- πρίσματος: Καρτεσιανές Συντεταγμένες

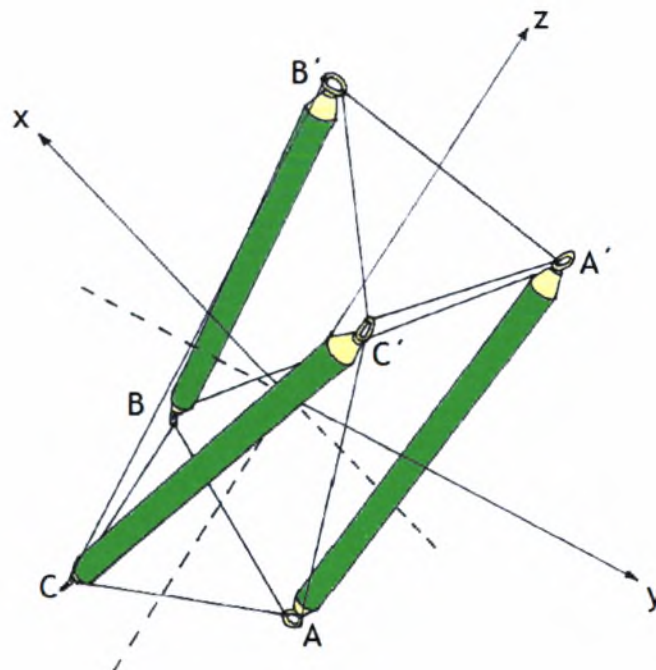
Σαν μια εισαγωγή για το υλικό που θα παρουσιαστεί σε επόμενα Κεφάλαια, το τριγωνικό T - πρίσμα επανεξετάζεται με χρήση αυτή τη φορά Καρτεσιανών συντεταγμένων. Η τριπλή συμμετρία του τριγωνικού πρίσματος καθιστά την ανάλυση πολύ πιο απλή, σε σύγκριση με πρίσματα υψηλότερης συμμετρίας.

Τώρα, κάθε κορυφή του πρίσματος εκφράζεται σαν σημείο στον χώρο  $xyz$ . Η τριπλή συμμετρία έχει σαν αποτέλεσμα οι συντεταγμένες των τριών σημείων μέσα σε κάθε τρίγωνο να είναι αντισυμμετρικές η μια της άλλης. Αυθαίρετα επιλέγονται τα σημεία A και A' ως βασικά

σημεία. Τα άλλα σημεία καλούνται σημεία συμμετρίας καθόσον παράγονται από τα βασικά σημεία μέσω μετασχηματισμών συμμετρίας, αντιμεταθέσεων στην προκειμένη περίπτωση. Αυτές οι τιμές συντεταγμένων συνοψίζονται στον πίνακα 2.2 και απεικονίζονται στο Σχήμα 2.4.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$A$	$x_A$	$y_A$	$z_A$
$B$	$z_A$	$x_A$	$y_A$
$C$	$y_A$	$z_A$	$x_A$
$A'$	$x_{A'}$	$y_{A'}$	$z_{A'}$
$B'$	$z_{A'}$	$x_{A'}$	$y_{A'}$
$C'$	$y_{A'}$	$z_{A'}$	$x_{A'}$

Πίνακας 2.2: T – Πρίσμα : Καρτεσιανές Συντεταγμένες



Σχήμα 2.4 Πρίσμα EΘ : Καρτεσιανές Συντεταγμένες



Με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, δεν είναι πλέον κατάλληλο να εξεταστεί η παράμετρος  $t$ , και αντί αυτής το κοινό μήκος  $u$  κάθε ακραίου τένοντα, χρησιμοποιείται άμεσα. Οι περιορισμοί που επιβλήθηκαν από τον καθορισμό σταθερών μηκών για τις πλευρές των τριγώνων, που μορφώνονται από τους ακραίους τένοντες, πρέπει να γραφούν αναλυτικά για κάθε τρίγωνο :

$$\begin{aligned}\bar{u}^2 = u^2 &= \left| \overline{AB} \right|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \\ &= (x_A - z_A)^2 + (y_A - x_A)^2 + (z_A - y_A)^2\end{aligned}$$

$$\bar{u}^2 = u^2 = \left| \overline{A'B'} \right|^2 = (x_{A'} - z_{A'})^2 + (y_{A'} - x_{A'})^2 + (z_{A'} - y_{A'})^2$$

Μόνο ο περιορισμός για μια πλευρά κάθε τριγώνου καταγράφεται, αφού η συμμετρία της κατασκευής εξασφαλίζει ότι, εάν ο περιορισμός ικανοποιείται για μια πλευρά του τριγώνου, οι άλλες πλευρές ικανοποιούν τον περιορισμό επίσης.

Ο περιορισμός που επιβάλλεται από το μήκος θλιπτήρα έχει ως εξής :

$$\bar{s}^2 = s^2 = \left| \overline{AA'} \right|^2 = (x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2$$

Πάλι, αυτή η εξίσωση δεν καταγράφεται και για τους τρεις θλιπτήρες, καθώς η συμμετρία της κατασκευής εξασφαλίζει ότι, εάν ο περιορισμός ικανοποιείται από έναν θλιπτήρα, συναντάται και για τους υπόλοιπους. Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, η μαθηματική αναπαράσταση του προβλήματος τώρα εμφανίζεται ως εξής:

ελαχιστοποίηση ως προς  $x_A, y_A, z_A, x_{A'}, y_{A'}$  και  $z_{A'}$  της συνάρτησης

$$t^2 = \left| \overline{AC} \right|^2 = (x_A - y_{A'})^2 + (y_A - z_{A'})^2 + (z_A - x_{A'})^2.$$

υπό τον περιορισμό να ισχύει επίσης ότι

$$\bar{u}^2 = u^2 = \left| \overline{AB} \right|^2 = (x_A - z_A)^2 + (y_A - x_A)^2 + (z_A - y_A)^2$$

$$\bar{u}^2 = u^2 = \left| \overline{A'B'} \right|^2 = (x_{A'} - z_{A'})^2 + (y_{A'} - x_{A'})^2 + (z_{A'} - y_{A'})^2$$

$$\bar{s}^2 = s^2 = \left| \overline{AA'} \right|^2 = (x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2$$

$$\bar{d} = x_A + y_A + z_A$$

$$0 = x_A - z_A$$

Οι τελικοί δύο περιορισμοί προστίθενται για υπολογιστικούς λόγους. Χωρίς αυτούς τους περιορισμούς, το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις. Ειδικότερα, ο 4<sup>ος</sup> περιορισμός επιβάλλει στη

βάση του  $T$  – πρίσματος να βρίσκεται πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα  $(1,1,1)$ , ενώ ο  $5^{\circ}$  σταθεροποιεί το  $T$  – πρίσμα σε σχέση με περιστροφές περί τον κεντρικό άξονα του.

Αυτές οι εξισώσεις δεν υπόκεινται στις απλές αντικαταστάσεις που έλαβαν χώραν προηγουμένως, και, σε αυτό το πρόβλημα, βεβαίως η προηγούμενη προσέγγιση πρόκειται να προτιμηθεί δεδομένου ότι είναι τόσο απλή να λυθεί. Το πρόβλημα με την προηγούμενη προσέγγιση είναι ότι δεν γενικεύεται τόσο εύκολα στα πιο σύνθετα προβλήματα όσο αυτή η Καρτεσιανή προσέγγιση.

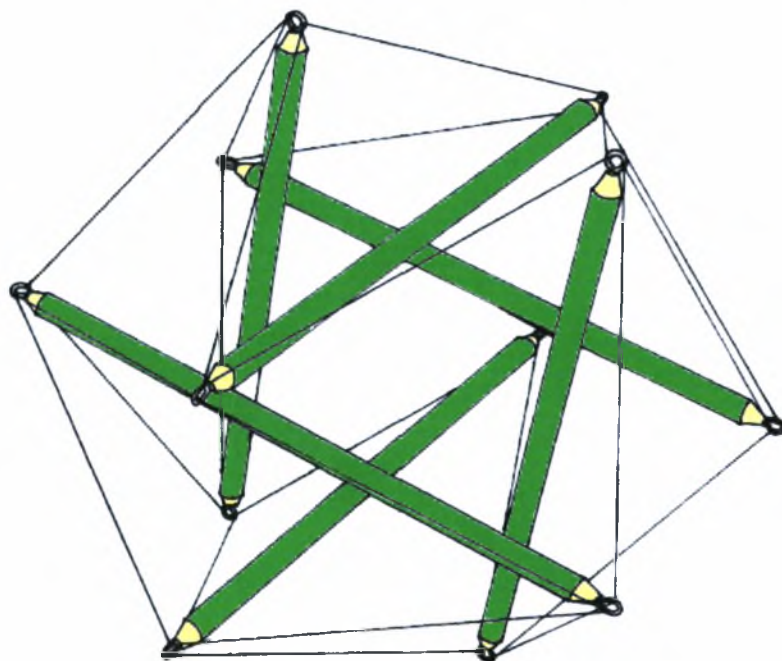
Δοθείσας της πολυπλοκότητας που σχετίζεται με την επίλυση ενός συστήματος όπως αυτό, η συζήτηση για το πώς η λύση αποκτάται αφήνεται για αργότερα, όταν τα προβλήματα απολύτως το απαιτήσουν.

#### 2.2.4 Μαθηματικοί υπολογισμοί $T$ - πρίσματος: Περαιτέρω Γενικεύσεις

Ο Kenner<sup>[16]</sup> καταδεικνύει πώς οι τύποι της παραγράφου 2.2.2 μπορούν να γενικευτούν για να χειριστούν πρίσματα τετραπλής και υψηλότερης συμμετρίας, και περιπτώσεις όπου οι ακτίνες των κέντρων διαφέρουν. Για τα πρίσματα υψηλής συμμετρίας, δεν είναι επίσης απαραίτητο ο πλευρικοί τένοντας να περιορίζεται να συνδέει γειτονικούς θλιπτήρες : μπορεί να παραβλέψει έναν ή περισσότερους θλιπτήρες στην πορεία του από ένα άκρο του πρίσματος σε άλλο. Αν και ο Kenner δεν διερευνά αυτήν την δυνατότητα, είναι αρκετά εύκολο να γενικεύσει κανείς τους τύπους του για να την αντιμετωπίσει.

#### 2.3 Εικοσάεδρο $E\Theta$ ( $T$ – εικοσάεδρο) : Μια «αδαμαντοειδής» $KE\Theta$

Το εικοσάεδρο  $E\Theta$  απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5. Εκτέθηκε αρχικά από Buckminster Fuller στο Black Mountain College το 1949<sup>[14]</sup>. Είναι μια από τις λίγες  $KE\Theta$  που παρουσιάζουν τη συμμετρία καθρέφτη (mirror symmetry). Το δίκτυο του τενόντων θα σχημάτιζε ένα κυβοοκτάεδρο κύβο, εάν τα (μη επίπεδα) τετράπλευρα, στα οποία οι θλιπτήρες τοποθετούνται, άλλαζαν σε τετράγωνα. Οι θλιπτήρες εισάγονται ως οι διαγώνιοι αυτών των τετραγώνων, έτσι ώστε κάθε θλιπτήρας είναι παράλληλος με τον θλιπτήρα του απέναντι τετραγώνου, με αποτέλεσμα κανένας θλιπτήρας να έχει κοινή κορυφή με έναν άλλο θλιπτήρα. Αυτή η  $KE\Theta$  ταξινομείται ως «αδαμαντοειδής», επειδή κάθε θλιπτήρας περιβάλλεται από ένα διαμάντι τεσσάρων τενόντων, από τους οποίους υποστηρίζεται φαινομενικά μέσω των δύο παρακείμενων θλιπτήρων. Αυτός ο τύπος αντιπαραβάλλεται με τον «οδοντωτό» (zig-zag) τύπο που περιγράφεται στην παράγραφο 2.4.

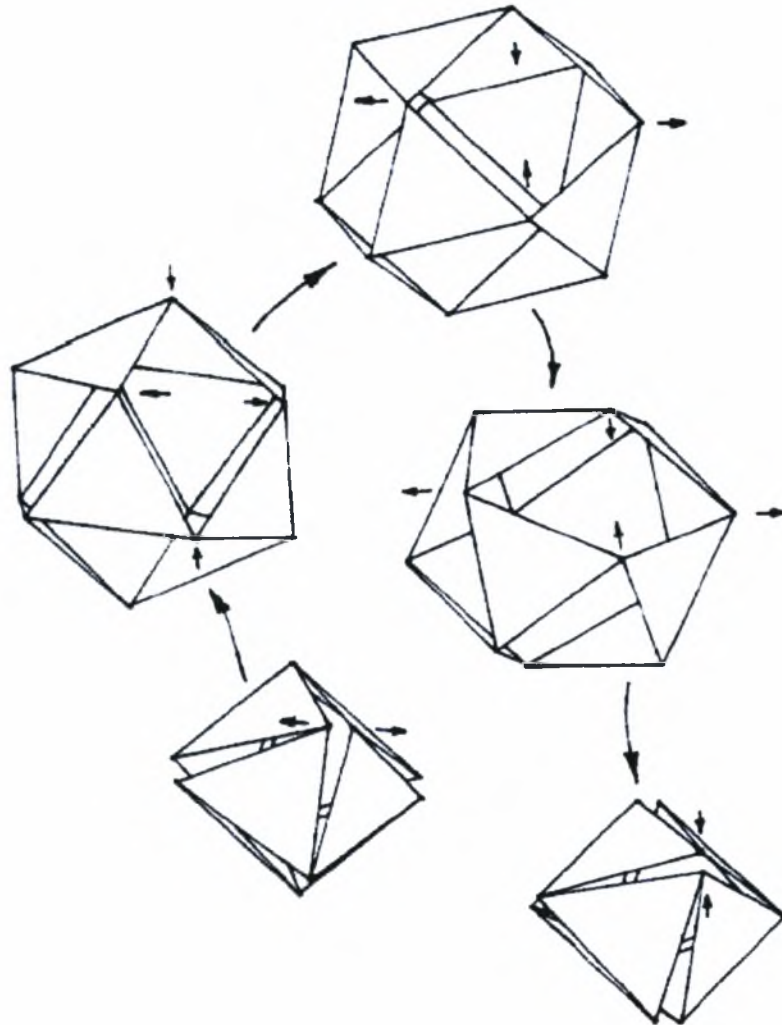


Σχήμα 2.5 Εικοσάεδρο EΘ (T – Εικοσάεδρο)

Η οκταεδρική συμμετρία του εικοσάεδρου E-Θ προσδίδει στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ένα πραγματικό πλεονέκτημα στην ανάλυση αυτής της κατασκευής, καθόσον οι Καρτεσιανοί άξονες συντεταγμένων διαθέτουν ακριβώς την ίδια συμμετρία. Σαν μια αντίθεση στη μέθοδο που υιοθετήθηκε για το EΘ, τα μήκη μελών για αυτήν την κατασκευή υπολογίζονται μεγιστοποιώντας το μήκος των θλιπτήρων σε σχέση με ένα σταθερό μήκος για τους τένοντες.

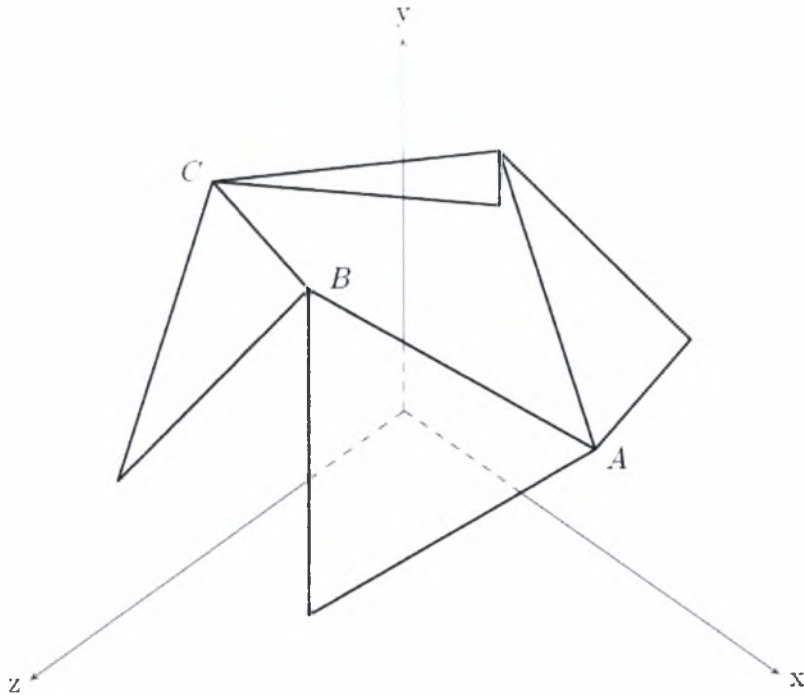
Το Σχήμα 2.6 καταδεικνύει πώς το σύστημα των τενόντων μπορεί να μετατραπεί από μια διπλασιασμένη οκταεδρική στερεομετρική διευθέτηση σε ένα κυβοοκτάεδρο κύβο και στη συνέχεια σε ένα απλό οκτάεδρο. Η θέση στην οποία καταλήγει ένας τυπικός θλιπτήρας σημαίνεται με ένα ζεύγος βελών που δείχνουν προς τα έξω. Αυτά τα μικρά βέλη δείχνουν επίσης την κατεύθυνση της μετακίνησης αυτού του ζεύγους αντίθετων σημείων του τετράπλευρου καθώς το σύστημα των τενόντων μετασχηματίζεται. Ένα ζεύγος μικρών βελών που δείχνει προς τα μέσα, καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το άλλο ζεύγος σημείων του τετράπλευρου κινείται κατά την διάρκεια των μετασχηματισμών. Λίγο μετά τη μέση των μετασχηματισμών, η απόσταση μεταξύ των σημείων που καταδεικνύονται από τα βέλη που κοιτούν προς τα έξω φθάνει σε ένα μέγιστο. Εισάγοντας τους θλιπτήρες στο σύστημα τενόντων σε αυτή τη φάση, η κατασκευή μπορεί να

σταθεροποιηθεί, δεδομένου ότι σε οποιοδήποτε άλλο στάδιο στους μετασχηματισμούς δεν μπορεί να δεχθεί έναν θλιπτήρα αυτού του μήκους.



Σχήμα 2.6 T – Εικοσάεδρο : Μετασχηματισμοί

Όπως αναφέρθηκε, αυτή η οικογένεια των  $KE\Theta$  είναι εξαιρετικά εύκολο να προσομοιωθεί με Καρτεσιανές συντεταγμένες. Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζεται το μοντέλο που χρησιμοποιείται εδώ. Η οικογένεια είναι εξαιρετικά απλή, αφού σε κάθε στάδιο κάθε σημείο είναι συμμετρικό με όλα τα άλλα. Έτσι όταν οι συντεταγμένες για ένα σημείο είναι γνωστές, οι μετασχηματισμοί συμμετρίας της  $KE\Theta$  μπορούν να εφαρμοστούν για να ευρεθούν οι συντεταγμένες οποιουδήποτε άλλου σημείου.



Σχήμα 2.7 Γ – Εικοσάεδρο : Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Η σύμπτωση της συμμετρίας της ΚΕΘ με τη συμμετρία του συστήματος συντεταγμένων είναι ευκολότερα εκμεταλλεύσιμη εάν το πρώτο σημείο Α, επιλεγεί να βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο του  $xy$  χώρου. Οι συντεταγμένες του είναι  $x_A$ ,  $y_A$  και  $0$ . Για να γίνει μια μαθηματική ανάλυση, απαιτούνται και δύο άλλα σημεία, τα Β και C. Χρησιμοποιούνται για να εκφραστούν οι εξισώσεις για το μήκος ενός θλιπτήρα (που μεγιστοποιείται) και το μήκος ενός τένοντα (που αντιπροσωπεύει έναν περιορισμό).

Από το Σχήμα 2.7 φαίνεται ότι το Β λαμβάνεται από το Α με την περιστροφή του σχήματος περί άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και το σημείο  $(1.0, 1.0, 1.0)$ , κατά  $120^\circ$ . Ο άξονας αυτός δεν φαίνεται στο Σχήμα 2.7, αφού κατευθύνεται από το  $(0,0,0)$  κατ' ευθείαν στον θεατή, οπότε θα είναι απλά ένα σημείο. Η αντίστοιχη περιστροφή των αξόνων των συντεταγμένων οδηγεί τον άξονα  $x$  στον άξονα  $y$ , τον άξονα  $y$  στον άξονα  $z$  και τον άξονα  $z$  στον άξονα  $x$ . Αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του Β είναι  $x_B = z_A = 0$ ,  $y_B = x_A$  και  $z_B = y_A$ . Το C λαμβάνεται από το Α μέσω περιστροφής κατά  $180^\circ$  περί τον άξονα  $y$ . Έτσι  $x_C = -x_A$ ,  $y_C = y_A$  και  $z_C = -z_A = 0$ ,

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

μεγιστοποίηση ως προς  $x_A, y_A$  του  $s^2 = |\overline{AC}|^2$

υπό τον περιορισμό

$$1 = |\overline{AB}|^2$$

Η τιμή για τα σταθερά μήκη των τενόντων έχει επιλεγεί ίση με 1. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες και κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος το πρόβλημα λαμβάνει την μορφή :

μεγιστοποίηση ως προς  $x_A, y_A$  του  $(2x_A)^2$

υπό τον περιορισμό

$$1 = x_A^2 + (y_A - x_A)^2 + y_A^2$$

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange<sup>[9]</sup>.

Η σχετική αντικειμενική συνάρτηση

$$(2x_A)^2 + \lambda(x_A^2 + (y_A - x_A)^2 + y_A^2 - 1)$$

παραγωγίζεται ως προς  $x_A, y_A$  και  $\lambda$ , και οι εξισώσεις που προκύπτουν τίθενται ίσες με το μηδέν :

$$0 = 8x_A + \lambda(4x_A - 2y_A)$$

$$0 = \lambda(4y_A - 2x_A)$$

$$0 = x_A^2 + (y_A - x_A)^2 + y_A^2 - 1$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει  $x_A = 2y_A$ , που αν αντικατασταθεί στην 3<sup>η</sup> λαμβάνουμε :

$$0 = 4y_A^2 + y_A^2 + y_A^2 - 1$$

Έτσι  $y_A = \sqrt{\frac{1}{6}}$ ,  $x_A = 2\sqrt{\frac{1}{6}}$ , και το μήκος των θλιπτήρων είναι ίσο με  $4\sqrt{\frac{1}{6}} = 1.63299$ .

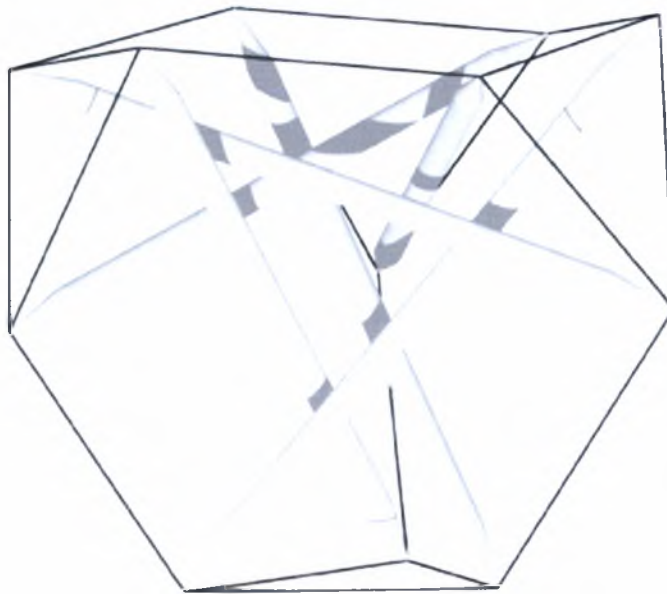
Το Θεώρημα του Πυθαγόρα και η συμμετρία του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων συνδυάστηκαν για να καταστήσουν την εργασία πολύ εύκολη εδώ. Η έκφραση των σημείων ως μετασχηματισμούς συμμετρίας άλλων σημείων μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες, με τη γενική περίπτωση να περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό μητρώων. Εδώ μερικές αντιμεταθέσεις ήταν αρκετές.

Άρα, η ενασχόληση με κατασκευές οκταεδρικής συμμετρίας είναι κάτι πολύ επιθυμητό κυρίως από υπολογιστική άποψη. Στα επόμενα μέρη της παρούσας μελετώνται μερικά

σφαιρικά δικτυώματα  $E\Theta$ , όπου η χρήση της οκταεδρικής συμμετρίας είναι πρακτικά απαραίτητη μόνο από γεωμετρική άποψη. Σύμφωνα με αυτές τις παρατηρήσεις, διαπιστώνεται ότι οι υπολογιστικές πολυπλοκότητες περιορίζονται στο ελάχιστο εάν χρησιμοποιούνται Καρτεσιανές συντεταγμένες.

#### 2.4 Τετράεδρο $E\Theta$ (T – τετράεδρο) : ΚΕΘ Οδοντωτής Μορφής (Zig-Zag)

Το τετράεδρο  $E\Theta$ , που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8, εκτέθηκε αρχικά από τον Francesco della Sala στο πανεπιστήμιο του Michigan το 1952<sup>[10]</sup>. Καλείται οδοντωτή ΚΕΘ, επειδή κάθε θλιπτήρας υποστηρίζεται από δύο άλλους θλιπτήρες, που προσδέονται σε ένα ζιγκ-ζαγκ τριών τενόντων, που συνδέουν τον θλιπτήρα. Το T - τετράεδρο είναι το οδοντωτό ισοδύναμο του αδαμαντοειδούς T- εικοσάεδρου, που εξετάστηκε στην παράγραφο 2.3. Και οι δύο κατασκευές διαθέτουν έξι θλιπτήρες. Το T - τετράεδρο έχει τέσσερα τρίγωνα τενόντων, ενώ το T - εικοσάεδρο έχει οκτώ.



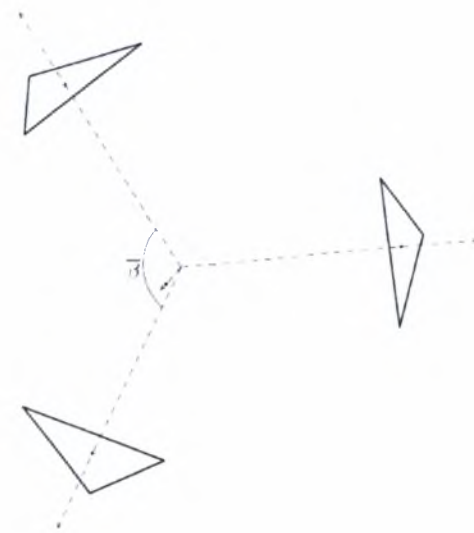
Σχήμα 2.8 Τετράεδρο  $E\Theta$  (T – Τετράεδρο)

Με πιο προσεκτική εξέταση αυτών των δύο κατασκευών οδηγεί σε έναν εναλλακτικό τρόπο αντιπαραβολής της οδοντωτής με την αδαμαντοειδή μορφή. Τέσσερα μη γειτονικά τρίγωνα του T - εικοσάεδρου μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε εκείνα του T - τετράεδρου. Κάθε ένα από αυτά τα τέσσερα τρίγωνα συνδέεται με τους τρεις "συνεργάτες" του με δύο τένοντες (Σχήμα 2.5). Για κάθε ζευγάρι των τριγώνων, η "μύτη" του ενός συνδέεται με το

"αυτί" του άλλου (υποθέτοντας ότι δύο τρίγωνα ότι βρίσκονται το ένα απέναντι στο άλλο). Αυτό αντιπαραβάλλεται με το T – τετράεδρο, όπου κάθε τρίγωνο συνδέεται με κάθε έναν από τα γειτονικά του με έναν μόνο τένοντα, που συνδέει τις "μύτες" των δύο τριγώνων. Έχοντας λιγότερους τένοντες, το T – τετράεδρο είναι απλούστερο και λιγότερο άκαμπτο από το αντίστοιχο αδαμαντοειδές. Γενικά, λόγω της χρήσης λιγότερων τενόντων, οι οδοντωτές κατασκευές είναι απλούστερες και λιγότερο άκαμπτες από τις αντίστοιχες αδαμαντοειδείς.

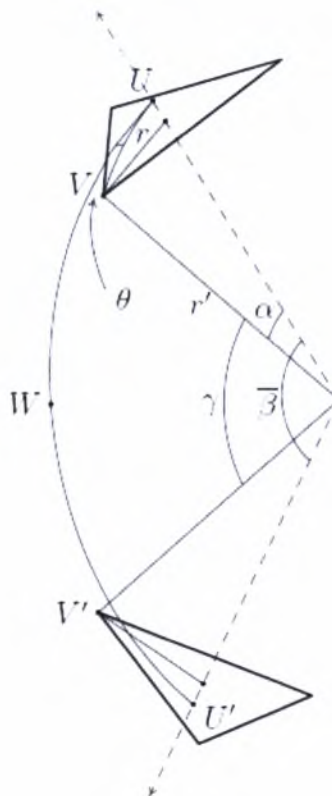
Το μαθηματικό προσομοίωμα για αυτήν την κατασκευή είναι βασισμένο στην ίδια την κατασκευή χωρίς συγκεκριμένη αναφορά σε κάποιο τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Η μαθηματική ανάλυση στηρίζεται σε μεγάλο ποσοστό σε αποτελέσματα από τη σφαιρική τριγωνομετρία<sup>[3,1]</sup>.

Στο Σχήμα 2.9 παρατίθεται το μοντέλο για την ανάλυση του T – τετράεδρου. Το T – τετράεδρο μπορεί να θεωρηθεί ως τέσσερα τρίγωνα που ανυψώνονται σε τέσσερις ακτίνες εκτεινόμενες από το κέντρο του τετράεδρου. Η γωνία μεταξύ οποιωνδήποτε δύο τέτοιων ακτίνων συμβολίζεται με  $\bar{\beta}$ . Το κύριο ενδιαφέρον εδώ εστιάζεται στην τιμή  $\frac{\bar{\beta}}{2}$ , που είναι περίπου  $54.736^\circ$  [ $\cos(\frac{\bar{\beta}}{2}) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $\sin(\frac{\bar{\beta}}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ]. Δύο από αυτές τις ακτίνες και τα αντίστοιχα τρίγωνα έχουν περιληφθεί Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.9 T – Τετράεδρο : Μαθηματικό Προσομοίωμα (Μοντέλο)





Σχήμα 2.10 T – Τετράεδρο : Λεπτομέρεια

Και τα τέσσερα τρίγωνα είναι συμμετρικά το ένα ως προς το άλλο και έχουν ακτίνα ίση με  $r$ . Αυτή η συμμετρία επιτρέπει μόνο δύο μεθόδους μετασχηματισμού ενός τριγώνου : να μετακινηθεί μέσα και έξω κατά μήκος της ακτίνας του ή να περιστραφεί γύρω από εκείνη την ακτίνα. Αυτή η συμμετρία υπαγορεύει επίσης ότι εάν ένα τρίγωνο περιστραφεί αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, τα άλλα τρίγωνα περιστρέφονται όμοια. Υποτίθεται ότι αρχικά τα τρίγωνα είναι προσανατολισμένα έτσι ώστε όλα να δείχνουν το ένα στο άλλο. Η γωνία περιστροφής συμβολίζεται με  $\theta$ .

Όπως αναφέρθηκε, κάθε ζευγάρι τριγώνων συνδέεται με έναν τένοντα (του οποίου το μήκος ελαχιστοποιείται) και έναν θλιπτήρα επίσης (του οποίου το μήκος αντιπροσωπεύει έναν περιορισμό). Υποτίθεται ότι ο τένοντας διατρέχει τις δύο κορυφές των τριγώνων, που δείχνουν αρχικά η μία την άλλη, και ότι ο θλιπτήρας διατρέχει τις δύο κορυφές υπό γωνία  $120^\circ$  ( $2\pi/3$ ), αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ως προς τις κορυφές που συνδέονται με τον τένοντα.

Δεδομένου ότι και τα δύο τρίγωνα είναι κάθετα στις αντίστοιχες ακτίνες τους, όλες οι κορυφές τους ισαπέχουν από το κέντρο του τετράεδρου. Αυτή η απόσταση συμβολίζεται με  $r'$ . Κατά συνέπεια όλες οι κορυφές μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται πάνω σε μια περιγεγραμμένη σφαίρα ακτίνας  $r'$ . Δύο συμμετρικές θέσεις αυτών των κορυφών σημειώνονται ως  $V$  και  $V'$ . Άλλα σημαντικά σημεία σε αυτήν την σφαίρα είναι τα σημεία τομής της με τις ακτίνες, που σημειώνονται ως  $U$  και  $U'$ .

Το τόξο που αντιστοιχεί στον τένοντα ( $\widehat{VV'}$ ), το τόξο που ενώνει τα κέντρα βάρους των δύο τριγώνων ( $\widehat{UU'}$ ), και τα τόξα που αντιστοιχούν στις ακτίνες των δύο τριγώνων ( $\widehat{UV}$  και  $\widehat{U'V'}$ ) ορίζουν δύο σφαιρικά τρίγωνα. Αυτά τα δύο τρίγωνα αγγίζουν το ένα το άλλο στο σημείο όπου τα  $\widehat{UU'}$  και  $\widehat{VV'}$  τέμνονται. Αυτό το σημείο σημειώνεται ως  $W$ . Η συμμετρία της κατασκευής υπαγορεύει ότι τα αντίστοιχα μέρη αυτών των δύο τριγώνων πρέπει να είναι ίσα. Ειδικότερα, η κατασκευή θα μπορούσε να στραφεί κατά  $180^\circ$ , ανταλλάσσοντας το  $U$  με το  $U'$ , χωρίς καμιά απολύτως μεταβολή. Αυτό σημαίνει ότι τα τόξα  $\widehat{UW}$  και  $\widehat{U'W}$  είναι ίσα και το κοινό τους μέτρο ισούται με  $\frac{\bar{\beta}}{2}$ . Επίσης δε ισχύει ότι  $\widehat{VW} = \widehat{V'W} = \widehat{VV'} / 2$ .

Το μέτρο της γωνίας  $\widehat{VV'}$  συμβολίζεται με  $\gamma$ . Είναι χρήσιμο να γνωρίσει κανείς πώς το  $\gamma$  αλλάζει συναρτήσει της γωνίας συστροφής  $\theta$ , της γωνιακής ακτίνα  $r$  και της σφαιρικής ακτίνας  $r'$ . Αυτό το μήκος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το νόμο των Σνημίτων της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας, σύμφωνα με τον οποίο :

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)\cos a + \sin\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)\sin a \cos \theta$$

όπου με  $a$  συμβολίζεται το μήκος του τόξου  $\widehat{UV}$ , που είναι ίσο με το μήκος του τόξου  $\widehat{U'V'}$ .

Παρατηρούμε επιπρόσθετα πως  $\sin a = \frac{r}{r'}$  και επομένως  $\cos a = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r'^2}}$ , οπότε :

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)\sqrt{r'^2 - r^2} + \sin\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)r \cos \theta}{r'} = \frac{g(\theta, r')}{r'}$$

Για ευκολία, η συνάρτηση

$$g(\theta, r') \equiv \cos\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)\sqrt{r'^2 - r^2} + \sin\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)r \cos \theta$$

περιλαμβάνει μέρος αυτής της έκφρασης. Σημειώτεον ότι μόνο τιμές που είναι μεταβλητές στην ανάλυση εμφανίζονται ρητά ως ορίσματα σε αυτήν την συνάρτηση.

Από αυτήν την τιμή συνημίτονου, το μήκος του τένοντα που συνδέει τα δύο τρίγωνα (που συμβολίζεται με  $t$ ) και η δεύτερη δύναμή της υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{t}{2} = r' \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$t^2 = 4r'^2(1 - \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right))$$

$$t^2 = 4(r'^2 - g^2(\theta, r'))$$

$$t^2 = f(\theta, r')$$

Εκ νέου χρησιμοποιείται για ευκολία η συνάρτηση :

$$f(\theta, r') \equiv 4(r'^2 - g^2(\theta, r'))$$

Τα  $f_1(\theta, r')$  και  $f_2(\theta, r')$  αναφέρονται στις μερικές παραγώγους της συνάρτησης αυτής ως προς το πρώτο και δεύτερο όρισμα της αντίστοιχα και δίδονται από τις εκφράσεις :

$$f_1(\theta, r') = -8g(\theta, r')g_1(\theta, r') = 8g(\theta, r')\sin\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)r \sin(\theta)$$

$$f_2(\theta, r') = 8(r' - g(\theta, r'))g_2(\theta, r') = 8(r' - g(\theta, r'))r' \frac{\cos\left(\frac{\bar{\beta}}{2}\right)}{\sqrt{r'^2 - r^2}}$$

Στο σημείο αυτό απαιτείται η εύρεση μιας έκφρασης για το μήκος θλιπτήρων, πριν η ανάλυση προχωρήσει στον προσδιορισμό του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Το μήκος των θλιπτήρων, που συμβολίζεται με  $s$ , προσδιορίζεται πολύ απλά από τον τύπο :

$$s^2 = f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)$$

Αυτό προκύπτει δεδομένου ότι, όπως σημειώνεται ανωτέρω, οι κορυφές βρίσκονται  $2\pi/3$  ακτίνια αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού από τις κορυφές των τενόντων στα δύο ίδια τρίγωνα.

Έτσι, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι απλά το ακόλουθο:

ελαχιστοποίηση ως προς  $\theta$  και  $r'$  του  $t^2 = f(\theta, r')$

υπό τον περιορισμό

$$\bar{s}^2 = s^2 = f\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)$$

$$\bar{r} = r$$

Υποθέτοντας ότι οι περιορισμοί μπορεί να λυθούν ως προς  $r'$  με όρους του  $\theta$ , δυνάμεθα να επαναπροσδιορίσουμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς :

Ελαχιστοποίηση ως προς  $\theta$  του  $t^2 = f(\theta, r'), r' = r'(\theta)$

Η συνθήκη 1<sup>ου</sup> όρου για ένα ελάχιστο είναι:

$$0 = f_1(\theta, r') + f_2(\theta, r') \frac{d_{r'}}{d_\theta}$$

όπου η έκφραση για το  $\frac{d_{r'}}{d_\theta}$  παραγωγίζοντας τον περιορισμό :

$$0 = f_1\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right) + f_2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right) \frac{d_{r'}}{d_\theta}$$

$$\frac{d_{r'}}{d_\theta} = - \frac{f_1\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)}{f_2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην αρχική συνθήκη 1<sup>ης</sup> τάξης λαμβάνουμε :

$$0 = f_1(\theta, r') + f_2(\theta, r') \frac{f_1\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)}{f_2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}, r'\right)}$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται ταυτόχρονα με την εξίσωση περιορισμού για να ευρεθεί η ελαχιστοποιούσα τιμή του  $\theta$  και η αντίστοιχη τιμή του  $r'$ . Ενώ τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού που εξετάστηκαν στα προηγούμενα τμήματα μπορούσαν να λυθούν πλήρως χρησιμοποιώντας μαθηματικούς τύπους, αυτό το πρόβλημα απαιτεί αριθμητικά εργαλεία για να φθάσει σε μια τελική λύση.

Η διαδικασία για μια αριθμητική λύση σε αυτές τις εξισώσεις, δηλ. του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού, είναι η ακόλουθη:

Βήμα 1 : Έστω  $\theta = 0$ ,

Βήμα 2 : Με δεδομένο το  $\theta$ , επίλυση του περιορισμού ως προς  $r'$ .

Βήμα 3 : Με δεδομένο το  $r'$ , επίλυση της συνθήκης 1<sup>ης</sup> τάξης ως προς  $\theta$ .

Βήμα 4 : Επανάληψη της διαδικασίας από το βήμα 2 μέχρι το  $\theta$  να συγκλίνει.

Για την εύρεση λύσεων εξισώσεων, χρησιμοποιείται ένας απλός δυαδικός αλγόριθμος μηδενισμού συναρτήσεων. Αυτό απαιτεί τον καθορισμό ενός διαστήματος αναζήτησης για κάθε εξίσωση και έπειτα τον υπολογισμό της τιμής της εξίσωσης στα ακραία σημεία. Για τον περιορισμό, τα όρια του  $r'$  είναι τα  $r$  και  $\bar{r}$ , ενώ για την συνθήκη 1<sup>ης</sup> τάξης τα όρια της  $\theta$  είναι  $-\pi/2$  και  $\pi/2$ . Μια από τις τιμές πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός και μια μικρότερη του μηδενός. Η εξίσωση υπολογίζεται στη συνέχεια στο μεσαίο σημείο του διαστήματος και ένα διάστημα αναζήτησης, το οποίο έχει σαν όρια το μεσαίο σημείο και το τελικό σημείο που διαφέρει από αυτό στο πρόσημο. Με αυτόν τον τρόπο, το διάστημα αναζήτησης διχοτομείται σε κάθε επανάληψη. Όταν το διάστημα αναζήτησης είναι λιγότερο από το διπλάσιο της ανοχής (tolerance) που ορίζεται για την λύση, το μεσαίο σημείο του διαστήματος αναζήτησης λαμβάνεται ως λύση. Αυτή η τεχνική λειτουργεί εντυπωσιακά καλά για την απλότητα της.

Η σταθερή τιμή για την τριγωνική ακτίνα τριγώνων  $r'$ , επιλέγεται για να είναι ίση με 1, γεγονός που υπονοεί ένα μήκος  $\sqrt{3}$  για τους τένοντες τριγώνων. Το σταθερό μήκος θλιπτήρων  $\bar{s}$ , επιλέγεται για να είναι ίσο με 4. Εφαρμόζοντας την ανωτέρω τεχνική, αποκτάται η ακολουθία τιμών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3.

Επανάληψη #	Αποτελέσματα Επίλυσης	
	$r'$	$\theta$
1	2.10683424	0.124151607
2	2.07636415	0.120243860
3	2.07719872	0.120351753
4	2.07717557	0.120348762
5	2.07717622	0.120348845
6	2.07717620	0.120348842

Πίνακας 2.3: T – Τετράεδρο : Αποτελέσματα Επίλυσης

Η τελική λύση ήταν  $\theta = 0.120348842$  ακτίνια. Το μήκος του τένοντα λαμβάνεται με αντικατάσταση των τελικών τιμών των  $\theta$  και  $r'$  στην εξίσωση για το μήκος τενόντων. Αυτή δίδει τελικά ένα μήκος τενόντων ίσο με 1.84242715.

## 2.5 Βασικές Κατασκευές E-Θ : Συμπεράσματα

Σε αυτό το Κεφάλαιο, εξετάστηκαν διάφορες απλές ΚΕΘ και παρουσιάστηκαν μερικές μέθοδοι για το σχεδιασμό τους. Τα μελλοντικά Κεφάλαια στηρίζονται σε αυτήν την ανάλυση, καθώς εξερευνείται ο σχεδιασμός κατασκευών συνεχώς αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις Καρτεσιανές μεθόδους και η σφαιρική τριγωνομετρία εξαφανίζεται από την όλη ανάλυση, όσο κανείς προβαίνει στον σχεδιασμό όλο και περισσότερο σύνθετων κατασκευών. Είναι κάτι που φαίνεται να απαιτείται από την φύση των προβλημάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΓΕΝΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΕΛΚΥΣΤΗΡΩΝ - ΘΛΙΠΤΗΡΩΝ

### 3.1 Γενικό Πρόβλημα Προγραμματισμού

#### 3.1.1 Εισαγωγή

Μια καταγραφή - απαρίθμηση των επί μέρους συστατικών μιας Κατασκευής Ελκυστήρων - Θλιπτήρων μπορεί να ξεκινήσει με υποσυστήματα τα οποία ονομάζονται Κομβικές Περιοχές Σύνδεσης (ΚΠΣ – hubs), που διαθέτουν διαστάσεις σε αντίθεση με την παραδοσιακή σημειακή θεώρηση. Οι ΚΠΣ είναι οι περιοχές σε μια ΚΕΘ, όπου τα μέλη συναντώνται και συνδέονται μεταξύ τους. Στα άκρα των μελών (ελκυστήρων και θλιπτήρων) βρίσκονται οι ΚΠΣ. Τα μέλη, μπορεί να αποτελέσουν περιορισμούς από πλευράς μήκους, συμμετρίας αλλά και δομικής προσδιοριστικότητας (determinacy).

Στα αρχικά στάδια σχεδιασμού, μπορεί να είναι ευκολότερα στην συμπεριφορά των κόμβων ως αδιαφοροποίητα συστήματα όπου όλα τα μέλη συναντώνται σε ένα σημείο. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο 2. Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές ωστόσο, οι τένοντες είναι προσαρτημένοι στην ΚΠΣ σε πολλαπλά σημεία. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο μελετητής είτε πρέπει να προσομοιώσει μεθοδικά την ΚΠΣ, θεωρώντας ότι απαρτίζεται από πολλά σημεία σύνδεσης, είτε να υιοθετήσει κάποιον επί τούτου (ad hoc) τρόπο συσχέτισης της γεωμετρίας του μοντέλου με αυτή της πραγματικής κατασκευής. Όταν η ΚΠΣ προσομοιώνεται σαν μία συλλογή από ξεχωριστά σημεία σύνδεσης, ένα ή περισσότερα διανύσματα καταδεικνύουν πως αυτά τα σημεία σύνδεσης είναι τοποθετημένα τόσον το ένα σε σχέση με το άλλο όσο και σχετικά με ένα βασικό σημείο, το οποίο σχετίζεται με την ΚΠΣ. Άρα θα απαιτηθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί για τον προσδιορισμό του μήκους και της κατεύθυνσης κάθε διανύσματος.

Σύμφωνα με το περιεχόμενο του Κεφαλαίου 2, μία αποτελεσματική στρατηγική για το σχεδιασμό ΚΕΘ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ελαχιστοποίηση ή την μεγιστοποίηση των μηκών ενός συνόλου μελών, ενώ τα άλλα μέλη περιορίζονται να έχουν ποικίλα αμετάβλητα (σταθερά) μήκη.

Έτσι, το γενικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{ελαχιστοποίηση} \quad 0 \equiv \bar{w}_1 I_1^2 + \dots + \bar{w}_{no} I_{no}^2$$

$P_1, \dots, P_{nh}, V_1, \dots, V_{nu}$

υποκείμενο σε : περιορισμούς μελών :

$$\pm \bar{I}_{no+1}^2 \geq \pm I_{no+1}^2$$

...

$$\pm \bar{I}_{nm}^2 \geq \pm I_{nm}^2$$

περιορισμούς συμμετρίας :

$$\bar{s}_1 = s_1(\dots)$$

...

$$\bar{s}_{ns} = s_{ns}(\dots)$$

περιορισμούς σημείων :

$$\bar{d}_1 = \bar{W}_1 \cdot P_{d1}$$

...

$$\bar{d}_{nd} = \bar{W}_{nd} \cdot P_{dn_z}$$

περιορισμούς διανυσμάτων :

$$\bar{c}_1 = c_1(\dots)$$

...

$$\bar{c}_{nc} = c_{nc}(\dots)$$

όπου:

$n_h$	=	αριθμός των ΚΠΣ	=	αριθμός των βασικών σημείων
$n_u$	=	αριθμός διανυσμάτων		
$n_o$	=	αριθμός μελών στην αντικειμενική συνάρτηση		
$n_m$	=	αριθμός μελών στο μοντέλο		
$n_s = n_m - n_o$	=	αριθμός των περιορισμών μελών		
$n_B$	=	αριθμός των περιορισμών συμμετρίας		
$n_d$	=	αριθμός των περιορισμών σημείων		
$n_c$	=	αριθμός των περιορισμών διανυσμάτων		

Η έκφραση  $P_1, \dots, P_n, V_1, \dots, V_n$  που εμφανίζονται κάτω από την ελαχιστοποίηση δείχνει ότι οι τιμές των συντεταγμένων των βασικών σημείων και των διανυσμάτων είναι οι μεταβλητές ελέγχου του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Αυτές είναι οι τιμές που μεταβάλλονται (σύμφωνα με τους περιορισμούς) για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του  $\Phi$ .



Στην αντικειμενική συνάρτηση,  $\bar{w}_{i_0}$  είναι μια θετική σταθερά, αν το αντίστοιχο μέλος είναι ελκυστήρας και αρνητική αν είναι θλιπτήρας, όπου  $i_0 \in \{1, \dots, n_0\}$ .

Στην αντικειμενική συνάρτηση και στον περιορισμό των μελών,  $l_{i_m}$  είναι το μήκος του μέλους  $i_m$  όπου  $i_m \in \{1, \dots, n_m\}$ .

Στους περιορισμούς των μελών,  $\bar{l}_{i_b}$  είναι μία θετική σταθερά. Το '+' προηγείται των  $\bar{l}_{i_b}$  και  $l_{i_b}$  εάν το αντίστοιχο μέλος είναι τένοντας και το '-' προηγείται αυτών όταν το μέλος είναι θλιπτήρας, όπου  $i_b \in \{n_0+1, \dots, n_m\}$ .

Στους άλλους περιορισμούς,  $s_{i_s}(\dots)$  και  $c_{i_c}(\dots)$  είναι συναρτήσεις των τιμών των συντεταγμένων, και τα  $\bar{s}_{i_s}$ ,  $\bar{d}_{i_d}$  και  $\bar{c}_{i_c}$  είναι σταθερές, όπου  $i_s \in \{1, \dots, n_s\}$ ,  $i_d \in \{1, \dots, n_d\}$  και  $i_c \in \{1, \dots, n_c\}$ .

Στους περιορισμούς σημείων, το  $\bar{W}_{i_d}$  είναι μία τριάδα από σταθερές τιμές, οι οποίες εφαρμόζεται στο  $P_{d_{i_d}}$  χρησιμοποιώντας ένα εσωτερικό γινόμενο, όπου για οποιαδήποτε τιμή  $i_d$ ,  $d_{i_d} \in \{1, \dots, n_h\}$ .

Έτσι η εξέταση του προβλήματος αυτού διαίρεται σε πέντε μέρη : αντικειμενική συνάρτηση, περιορισμοί μελών, περιορισμοί συμμετρίας, περιορισμοί σημείων και περιορισμοί διανυσμάτων.

### 3.1.2 Αντικειμενική Συνάρτηση

Στις βασικές ΚΕΘ του Κεφαλαίου 2, οι αντικειμενικές συναρτήσεις αποτελούνται από τα τετράγωνα του μήκους ενός μέλους. Εάν το συγκεκριμένο μέλος ήταν τένοντας, η ποσότητα αυτή ελαχιστοποιούνταν. Εάν το μέλος ήταν ένας θλιπτήρας, η ποσότητα μεγιστοποιούνταν. Για αυτές τις απλές κατασκευές, η λήψη υπ' όψιν μόλις μιας συμβατής κατάστασης από μια κατηγορία συμμετρικών μελών στην αντικειμενική συνάρτηση είχε άριστα αποτελέσματα. Πλην όμως, για περισσότερο πολύπλοκες κατασκευές, αυτή η διαδικασία οδηγεί σε μια ανισόρροπη – ασύμμετρη κατασκευή, η οποία διαθέτει έναν ελκυστήρα πολύ κοντότερο από τους υπόλοιπους της ίδιας ομάδας. Έτσι, σε πολύπλοκες κατασκευές, τα μήκη αρκετών περιπτώσεων κατηγοριών μη συμμετρικών μελών ελαχιστοποιούνται (για τένοντες) ή μεγιστοποιούνται (για θλιπτήρες).

Ανακύπτει συνεπώς η απορία, με ποιο τρόπο δύναται κανείς να επιτύχει κάτι τέτοιο. Ένα μαθηματικό πρόβλημα προγραμματισμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις. Έτσι, μία διαφορετική αντικειμενική συνάρτηση για το μήκος κάθε μιας μη συμμετρικής περίπτωσης δεν αποτελεί μια εφαρμοστέα δυνατότητα. Συνεπώς, θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το σταθμικό άθροισμα του αθροίσματος των τετραγώνων των μηκών αυτών. Θετικές στάθμες (σταθμικοί παράγοντες) χρησιμοποιούνται για τα μήκη ελκυστήρων. Εάν ένας θλιπτήρας εμπεριέχεται στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε εισάγεται με έναν αρνητικό σταθμικό παράγοντα, καθόσον η ελαχιστοποίηση ενός προσθετικού ανάστροφου μιας ποσότητας ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση της ποσότητας αυτής. Αυτή η διαδικασία οδηγεί σε μια συμβατή ΚΕΘ, αφού στην τελική λύση καθένα από τα μήκη των μελών ελαχιστοποιείται (για τένοντες) ή μεγιστοποιείται (για θλιπτήρες) σε σχέση με τα υπόλοιπα. Αν δεν συνέβαινε αυτό, το μήκος ενός μέλους θα μπορούσε να μειωθεί (για έναν τένοντα) ή να αυξηθεί (για έναν θλιπτήρα), κρατώντας σταθερό το μήκος των υπολοίπων. Αυτό θα οδηγούσε σε ένα σταθμικό άθροισμα μικρότερο από το ελάχιστο, γεγονός άτοπο εφόσον το πρόβλημα είχε επιλυθεί σωστά. Έτσι η γενική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

$$0 \equiv \bar{w}_1 I_1^2 + \dots + \bar{w}_{no} I_{no}^2$$

Πέραν του γεγονότος να αφεθούν οι μεν ελκυστήρες να ελαχιστοποιηθούν οι δε θλιπτήρες να μεγιστοποιηθούν μέσα στην ίδια αντικειμενική συνάρτηση, οι σταθμικοί παράγοντες παρέχουν στον μελετητή την δυνατότητα ελέγχου των σχετικών μηκών των μελών εντός της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι παράγοντες αυτοί (τα σταθμικά αθροίσματα) μπορούν να επιλεγούν κατά το δοκούν, με μοναδική απαίτηση να είναι θετικοί για τους ελκυστήρες (καθόσον τα μήκη αυτών ελαχιστοποιούνται) και αρνητικοί για τους θλιπτήρες (καθόσον τα μήκη τους μεγιστοποιούνται). Στην παράγραφο 7.2.6 θα καταδειχθεί ότι οποιαδήποτε έγκυρη (συμβατή) μορφή ΚΕΘ μπορεί να ειπωθεί ως η λύση ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού της ανωτέρω μορφής, με μια κατάλληλη επιλογή των σταθμικών παραγόντων. Το γεγονός αυτό προσδίδει στην μεθοδολογία μέσω σταθμικών αθροισμάτων μια πλήρη γενικότητα ως μέσο σχεδιασμού ΚΕΘ.

### 3.1.3 Περιορισμοί Μελών

Τα μήκη των μελών τα οποία δεν εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση εμφανίζονται στους περιορισμούς. Η συνάρτηση περιορισμών είναι το τετράγωνο των μηκών των μελών στην περίπτωση τενόντων και το αρνητικό του τετραγώνου των μηκών των μελών στην περίπτωση θλιπτήρων. Η τιμή αυτή περιορίζεται να είναι μικρότερη ή ίση από  $\pm \bar{l}_i^2$ , όπου ξανά το είδος του μέλους προσδιορίζει το πρόσημο το οποίο χρησιμοποιείται.

Στο γενικό μοντέλο, οι περιορισμοί αυτοί είναι ανισότητες, αφού οι τένοντες είναι μέλη, τα οποία μπορούν να έλκουν σημεία μαζί αλλά δεν μπορούν να τα απομακρύνουν, και οι θλιπτήρες είναι μέλη, τα οποία μπορούν να χωρίσουν δύο σημεία αλλά δεν μπορούν συγχρόνως να τα έλξουν. Πρακτικά οι θλιπτήρες μπορούν να κατασκευαστούν από υλικά, τα οποία είναι ικανά να αντέξουν μία πολύ σημαντική εφελκυστική δύναμη (έστω κι αν σίγουρα μπορούν να κατασκευαστούν με πρακτικά μηδενική εφελκυστική αντοχή) αλλά στον τελικό σχεδιασμό δεν πρέπει να εφελκύνονται εξ ορισμού. Έτσι ακόμα και για θλιπτήρες, μία ανισότητα ακολουθεί τους περιορισμούς.

Αφού, για ομοιομορφία, οι εξισώσεις οργανώνονται έτσι ώστε οι τιμές των περιορισμών να είναι πάντα μικρότερες ή ίσες με μερικές σταθερές τιμές, το τετράγωνο των μηκών των θλιπτήρων και τα αντίστοιχα  $\pm \bar{l}_i^2$  τίθενται αρνητικά στις εξισώσεις περιορισμών των θλιπτήρων. Πρακτικά (βλέπε παράγραφο 3.2) όλοι οι περιορισμοί μεταχειρίζονται ως εξισώσεις.

### 3.1.4 Περιορισμοί Συμμετρίας

Στις απλές ΚΕΘ που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 2, να μεν αναφέρθηκαν περιορισμοί συμμετρίας αλλά αυτοί αντιμετωπίστηκαν έμμεσα μέσω γεωμετρικών υποθέσεων (παράγραφοι 2.2.2 και 2.4) ή στο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού μέσω αντικαταστάσεων (παράγραφοι 2.2.3 και 2.3). Στην τελευταία περίπτωση, η απλότητα των μετασχηματισμών συμμετρίας και τα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκαν, έδωσαν την δυνατότητα οι συντεταγμένες ενός σημείου να μπορούν να εκφραστούν σαν μια απλή προσημασμένη (αντι)μετάθεση των συντεταγμένων ενός άλλου σημείου.

Στο γενικό πρόβλημα, η γεωμετρία είναι αρκετά γενική και δεν παρέχει καμιά υπόθεση περί συμμετρίας. Συμπληρωματικά, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα μερικοί περιορισμοί συμμετρίας να μην είναι δυνατόν να ληφθούν υπ' όψη μέσω απλών αντικαταστάσεων

συντεταγμένων, καθόσον, γενικά, μια συντεταγμένη, που προέρχεται από κάποιο συμμετρικό μετασχηματισμό είναι ένας γραμμικός συνδυασμός και των τριών συντεταγμένων ενός άλλου σημείου. Ωστόσο, για τα περισσότερα μοντέλα που εξετάζονται στην παρούσα, παρόλο που μερικά από αυτά είναι όντως περίπλοκα, οι περιορισμοί συμμετρίας είναι του απλούστερου δυνατού τύπου. Σαν αποτέλεσμα, αυτού του είδους οι περιορισμοί εισάγονται άμεσα στα προβλήματα προγραμματισμού, αλλά εμφανίζονται έμμεσα υπό μορφή προσημασμένων μεταθέσεων συντεταγμένων. Αυτό γίνεται επειδή τα περισσότερα από τα μοντέλα έχουν οκταεδρικές συμμετρίες. Όταν χρησιμοποιούνται διαφορετικές συμμετρίες, για παράδειγμα η εικοσαεδρική συμμετρία του μοντέλου που παρουσιάζεται στην παράγραφο 5.4, οι περιορισμοί συμμετρίας μπορεί να χρειαστεί να παρουσιαστούν αναλυτικά. Η παρουσίαση αυτή δεν δημιουργεί ιδιαίτερα μαθηματικά προβλήματα, παρά μόνο επιβραδύνει τους υπολογισμούς, λόγω δημιουργίας ογκωδέστερων συστημάτων.

Το  $\bar{s}_i$  είναι πάντα ίσο με 0, αλλά είναι βολικό να συνεχίζει να εμφανίζεται στις εκφράσεις, για μεταγενέστερους συμβολικούς υπολογισμούς.

### 3.1.5 Περιορισμοί Σημείων

Αυτός ο τύπος περιορισμών εμφανίστηκε άμεσα στους δύο τελευταίους περιορισμούς στο μοντέλο Καρτεσιανών συντεταγμένων του T - πρίσματος στην παράγραφο 2.2.3. Εμφανίστηκε έμμεσα στο μοντέλο κυλινδρικών συντεταγμένων του T - πρίσματος στην παράγραφο 2.2, όπου οι συντεταγμένες  $z$  των σημείων A, B και C ήταν σταθερές και ίσες με 0. Γενικά, για κυλινδρικές (π.χ. πυλώνες) ή κολοβωμένες (π.χ. θόλους) κατασκευές οι περιορισμοί σημείων χρειάζεται να εισαχθούν, προκειμένου να καταστεί το μαθηματικό μοντέλο δομικά ορισμένο. Για κατασκευές με σφαιρική συμμετρία, τα μέλη, οι περιορισμοί συμμετρίας και οι περιορισμοί διανύσματος επαρκούν για τον προσδιορισμό της κατασκευής.

Οι περιορισμοί σημείων είναι γραμμικές ισότητες, οι οποίες περιορίζουν ένα σημείο να βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Στις Καρτεσιανές συντεταγμένες, η μορφή ενός περιορισμού σημείου είναι ένα εσωτερικό γινόμενο ενός σημείου με μία τριάδα σταθερών τιμών. Το εσωτερικό γινόμενο περιορίζεται να έχει μία συγκεκριμένη τιμή. Η τριάδα των σταθερών τιμών αναφέρεται εδώ ως το διάνυσμα που καθορίζει τον περιορισμό σημείου, και το σημείο μένει σε ένα επίπεδο ορθογώνιο με αυτό το διάνυσμα όταν ικανοποιεί τον περιορισμό. Οι περιορισμοί σημείων

δεν φαίνονται να είναι απαραίτητοι όταν χρησιμοποιούνται μέθοδοι συζυγών κατευθύνσεων για την επίλυση ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού, αλλά μπορεί να είναι απαραίτητοι όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton – Raphson για τη βελτίωση της ακρίβειας της λύσης.

### 3.1.6 Περιορισμοί Διανυσμάτων

Οι περιορισμοί διανυσμάτων συμπληρώνουν τις λεπτομέρειες της γεωμετρίας σύνθετων ΚΠΣ. Η χρήση των περιορισμών αυτών και η λίστα των διανυσμάτων που επηρεάζουν,  $V_1, \dots, V_{nu}$ , αντιπροσωπεύουν ένα βήμα βαθύτερα, σε σχέση με την αρχική χονδροειδή ανάλυση των ΚΕΘ, όπου οι λεπτομέρειες σύνδεσης ελκυστήρων - θλιπτήρων αμελούνται χάριν απλότητας, προς μία πιο λεπτομερή ανάλυση των κατασκευών, όπου οι θλιπτήρες και οι τένοντες δεν θεωρείται ότι συναντώνται σε ένα σημείο. Τούτο περιλαμβάνει καταστάσεις όπου ένας τένοντας συνδέεται με ένα σημείο μακριά από τα άκρα του θλιπτήρα, δηλ. κάπου μεταξύ αυτών, ή εκτός της κεντροβαρικής γραμμής του θλιπτήρα ή αμφότερα. Ένα διάνυσμα είναι η διαφορά ανάμεσα σε δύο σημεία και είναι απαραίτητο να προσομοιωθεί η μετατόπιση από το άκρο του τένοντα στο σημείο σύνδεσης του ελκυστήρα.

Γενικά, τα σημεία σύνδεσης ενός τένοντα είναι ομοειδώς δεσμευμένα σε δύο περιοχές στον θλιπτήρα, πολύ κοντά στην ιδεατή σημειακή σύνδεση που υιοθετήθηκε στην χονδροειδή ανάλυση. Κάθε ομοειδής ομάδα (cluster) σημείων ορίζεται σε σχέση με το βασικό σημείο, το οποίο αντιστοιχεί με την ΚΠΣ που αναπαριστά ή σε μερικές περιπτώσεις ορίζονται σε σχέση με έναν κυρτό συνδυασμό των δύο βασικών σημείων, που αντιστοιχούν με τις δύο ΚΠΣ, που ο θλιπτήρας συνδέει. Ειδικά στην τελευταία περίπτωση, το κέντρο της ΚΠΣ δεν συμπίπτει αναγκαστικά με τη θέση του αντίστοιχου βασικού σημείου.

Σαν ένα παράδειγμα που καταδεικνύει την φύση των περιορισμών διανυσμάτων, αντί να υποθεθεί ότι ο ελκυστήρας συνδέεται πάνω στον κεντροβαρικό άξονα του θλιπτήρα, θεωρείται ως πλέον ρεαλιστική η υπόθεση ότι ο ελκυστήρας συνδέεται με την επιφάνεια του θλιπτήρα, οπότε το σημείο σύνδεσης δεν ανήκει στον κεντροβαρικό άξονα αυτού. Για το συγκεκριμένο διευκρινιστικό παράδειγμα, ο θλιπτήρας θεωρείται απλά κυλινδρικός.

Το πρώτο βήμα εμπεριέχει την εισαγωγή ενός μοναδικού διανύσματος, το οποίο αντιπροσωπεύει την μετάθεση (απόσταση) του σημείου σύνδεσης του ελκυστήρα ως προς (από) ένα σημείο αναφοράς που βρίσκεται επί της κεντροβαρικής γραμμής του θλιπτήρα. Αυτό το σημείο αναφοράς μπορεί να είναι ένα από τα βασικά σημεία, τα αντίστοιχα με τις δύο ΚΠΣ με τις οποίες

συνδέεται ο θλιπτήρας. Στο σημείο αυτό ακριβώς εισάγεται ένας περιορισμός διανύσματος, ο οποίος καταδεικνύει πόσο απέχει το σημείο σύνδεσης του ελκυστήρα από το σημείο αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή, η απόσταση αυτή θα μπορούσε να είναι αντίστοιχη με την ακτίνα του θλιπτήρα. Ο περιορισμός αυτός θα επέβαλε στο σημείο σύνδεσης του ελκυστήρα να βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα γύρω από την ΚΠΣ. Ένας δεύτερος περιορισμός εισάγεται στη συνέχεια, με σκοπό να αναγκάσει το διάνυσμα να είναι ορθογωνικό προς τον κεντροβαρικό άξονα του θλιπτήρα. Με τον τρόπο αυτό, το σημείο σύνδεσης περιορίζεται να κείται επί ενός επιπέδου που διέρχεται από το σημείο αναφοράς και είναι ορθογωνικό προς τον κεντροβαρικό άξονα του θλιπτήρα. Αυτός ο δεύτερος περιορισμός εξασφαλίζει ότι ο τένοντας προσαρτάται στην επιφάνεια του θλιπτήρα, παρά σε ένα εσωτερικό σημείο. Ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί περιορισμούς διανύσματος παρουσιάζεται στην παράγραφο 7.3.6.

### 3.2 Επίλυση του Προβλήματος

Σε αυτήν την παράγραφο, περιγράφονται δύο μέθοδοι για την επίλυση αυτού του γενικού προβλήματος. Το πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού, στο οποίο τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών ελέγχου. Η περιοχή περιορισμών δεν είναι κυρτή<sup>\*</sup>, οπότε δεν είναι εφαρμόσιμες μέθοδοι μονής κατεύθυνσης (simplex). Η μη γραμμικότητα των αντικειμενικών συναρτήσεων και των περιορισμών είναι απλή, όντας τετραγωνική ως προς τις μεταβλητές ελέγχου.

Για να καταστεί το πρόβλημα αυτό περισσότερο παρακολουθήσιμο, επαναμορφώνεται σαν ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού, όπου οι περιορισμοί μελών είναι ισότητες παρά ανισότητες. Αυτή η νέα διαμόρφωση οδηγεί σε περαιτέρω χειρισμούς, βάσει των οποίων το όλο πρόβλημα καθίσταται χωρίς περιορισμούς. Μόλις το πρόβλημα διατυπωθεί χωρίς περιορισμούς, υπάρχει μια πλειάδα ευρέως διαδεδομένων τεχνικών, που μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση του.

Η παραδοχή ότι οι περιορισμοί μελών ικανοποιούνται μέσω ισότητας είναι αρκετά αβλαβής. Η τελική λύση πρέπει να ελέγχεται πάντως σε ότι αφορά τις δυνάμεις που αναπτύσσονται στα μέλη. Μία ακατάλληλη δύναμη μέλους για ένα από τα περιορισμένα μέλη, ένας τένοντας σε

---

<sup>\*</sup> η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δίδεται στο Παράρτημα Β

θλίψη ή ένας θλιπτήρας σε εφελκυσμό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός δεν είναι αποτελεσματικός για τη λύση του προβλήματος και μπορεί να αφαιρεθεί από το πρόβλημα, ή οι παράμετροι του προβλήματος πρέπει να διαφοροποιηθούν, έτσι ώστε ο περιορισμός να είναι αποτελεσματικός.

Ο απλούστερος τρόπος για την διαμόρφωση ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού με περιορισμούς ισότητας σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς είναι η χρήση μεθόδων ποινής<sup>[11]</sup>. Σε μια μέθοδο ποινής, οι περιορισμοί αναμορφώνονται σαν αποκλίσεις από το μηδέν και το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων αυτών ενσωματώνεται μέσα στην αντικειμενική συνάρτηση με ένα μεγάλο θετικό συντελεστή. Τούτο χρησιμοποιείται ειδικά στα αρχικά στάδια της λύσης ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού ΚΕΘ, αφού εύκολα διαχειρίζεται μεγάλες αποκλίσεις από τις απαιτήσεις των περιορισμών. Αυτό επιτρέπει στις αρχικές τιμές συντεταγμένων να είναι πολύ χονδροειδείς προσεγγίσεις των απαιτήσεων των περιορισμών και διευκολύνει τη μέθοδο στη διατύπωση των αρχικών τιμών.

Το γενικό πρόβλημα προγραμματισμού ΚΕΘ αναμορφώνεται σε όρους ποινής και γίνεται :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_1 I_1^2 + \dots + \bar{w}_{n_0} I_{n_0}^2 + \\ & \bar{\mu} (\bar{l}_{n_0+1}^2 - l_{n_0+1}^2)^2 + \dots + \bar{\mu} (\bar{l}_{n_m}^2 - l_{n_m}^2)^2 + \\ \text{ελαχιστοποίηση της} & \bar{\mu} (\bar{s}_1 - s_1(\dots))^2 + \dots + \bar{\mu} (\bar{s}_{n_s} - s_{n_s}(\dots))^2 + \\ & \bar{\mu} (\bar{d}_1 - (\bar{W}_1 \cdot P_{d_1}))^2 + \dots + \bar{\mu} (\bar{d}_{n_d} - (\bar{W}_{n_d} \cdot P_{d_{n_d}}))^2 + \\ & \bar{\mu} (\bar{c}_1 - c_1(\dots))^2 + \dots + \bar{\mu} (\bar{c}_{n_c} - c_{n_c}(\dots))^2 \end{aligned}$$

ως προς  $P_1, \dots, P_{n_h}, V_1, \dots, V_{n_u}$

όπου  $\bar{\mu}$  μια πολύ μεγάλη θετική σταθερά

Ο δεύτερος τρόπος για την διαμόρφωση του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού ΚΕΘ σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς αναφέρεται εδώ ως *ακριβής μέθοδος*. Χρησιμοποιεί τους περιορισμούς για να διαχωρίσει τις συντεταγμένες του βασικού σημείου και του διανύσματος σε ένα εξαρτημένο και ένα ανεξάρτητο σύνολο. Οι περιορισμοί λύνονται κατόπιν για τις τιμές του εξαρτημένου συνόλου με όρους των τιμών του ανεξάρτητου συνόλου. Ο αριθμός των συντεταγμένων στο εξαρτημένο σύνολο ισούται με τον αριθμό των εξισώσεων περιορισμών. Μόλις γίνει αυτό, το πρόβλημα προγραμματισμού μπορεί έπειτα να αντιμετωπιστεί ως πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, με τις ανεξάρτητες τιμές συντεταγμένων ως μεταβλητές ελέγχου. Η μέθοδος των

Newton - Raphson χρησιμοποιήθηκε για τη λύση συστήματος περιορισμών για τις τιμές των εξαρτημένων συντεταγμένων. Η ακριβής μέθοδος μπορεί να μην είναι κατάλληλη για τα αρχικά στάδια της λύσης του προβλήματος, γιατί, εάν οι αρχικές τιμές συντεταγμένων οδηγήσουν σε μεγάλες αποκλίσεις από τις απαιτήσεις των περιορισμών, η μέθοδος Newton - Raphson μπορεί να μην συγκλίνει.

Το γενικό πρόβλημα προγραμματισμού ΚΕΘ διαμορφώνεται σύμφωνα με την ακριβή μέθοδο ως εξής :

$$\text{ελαχιστοποίηση ως προς } \mathbf{x}_i \text{ της } \bar{w}_1 I_1^2 + \dots + \bar{w}_{n_o} I_{n_o}^2 ; \mathbf{x}_d = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i)$$

όπου το  $\mathbf{x}_i$  είναι ένα  $3(n_h + n_u) - (n_{\bar{\sigma}} + n_c + n_s + n_d)$  διάνυσμα-στήλη και το  $\mathbf{x}_d$  είναι ένα  $n_{\bar{\sigma}} + n_c + n_s + n_d$  διάνυσμα-στήλη. Τα δύο αυτά διανύσματα μαζί περιέχουν όλες τις  $3(n_h + n_u)$  συντεταγμένες των σημείων  $P_1, \dots, P_{n_h}, V_1, \dots, V_{n_u}$ . Η συνάρτηση απεικόνισης διανυσμάτων  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_i)$  δεν είναι άμεσα καθορισμένη. Τα χαρακτηριστικά της καθορίζονται έμμεσα από τις εξισώσεις περιορισμών.

Πολλοί από τους υπολογισμούς, που υπεισέρχονται στην επίλυση και την ανάλυση αυτών των δύο προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς, απαιτούν την γνώση των μερικών παραγώγων των μηκών των μελών και των εξισώσεων περιορισμού όχι μελών ως προς τις τιμές των συντεταγμένων. Αυτές οι μερικές παράγωγοι μπορούν να αντιπροσωπευθούν από ένα μητρώο με  $n_m + n_c + n_s + n_d$  γραμμές, μία για κάθε μέλος και κάθε εξίσωση περιορισμού όχι μέλους, και  $3(n_h + n_u)$  στήλες μία για κάθε μια συντεταγμένη των  $P_1, \dots, P_{n_h}, V_1, \dots, V_{n_u}$ . Το μητρώο αυτό σημειώνεται ως  $\Psi$ . Το στοιχείο στην  $i$  σειρά και  $j$  στήλη του μητρώου παριστάνει την μερική παράγωγο της  $i$  εξίσωσης με σεβασμό στην  $j$  συντεταγμένη. Το στοιχείο αυτό παριστάνεται ως  $\psi_{ij}$  και αντιπροσωπεύει την μερική παράγωγο της  $i$  εξίσωσης ως προς την  $j$  συντεταγμένη.

Δεδομένου ότι οι εξισώσεις μελών και περιορισμών είναι γραμμικές ή τετραγωνικές ως προς τις τιμές των συντεταγμένων, οι μερικές παράγωγοι είναι σταθερές ή γραμμικές ως προς αυτές. Αυτό σημαίνει ότι είναι εύκολο να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας έτοιμους τύπους. Είναι επίσης πιθανό να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι μέσω αριθμητικών μεθόδων, που όμως μπορεί να οδηγήσει σε λιγότερο ακριβή αποτελέσματα.



Συχνά γίνεται αναφορά σε υπο – μητρώα του μητρώου αυτού, οπότε είναι χρήσιμο να λάβει χώραν διαχωρισμός – διαίρεση (partition) του. Το μητρώο διαχωρίζεται ως προς τις γραμμές του σε δύο υπομητρώα, σημειούμενα ως  $\Psi^0$  και  $\Psi^c$ , τα οποία αναπαριστούν τις μερικές παραγώγους των μηκών των μελών στην αντικειμενική συνάρτηση και τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων περιορισμών αντίστοιχα. Αυτός ο διαχωρισμός μπορεί να παρουσιαστεί ως :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^c \end{bmatrix}$$

Όταν χρησιμοποιείται η ακριβής μέθοδος, το μητρώο διαχωρίζεται ως προς τις στήλες του σε δύο υπο - μητρώα  $\Psi^d$  και  $\Psi^i$ , τα οποία αναπαριστούν τις συντεταγμένες ταξινομώντας τις σε εξαρτημένες και ανεξάρτητες αντίστοιχα. Ο διαχωρισμός αυτός μπορεί να παρασταθεί ως :

$$\Psi = [\Psi^d \quad \Psi^i]$$

Για να είναι αυτή η αναπαράσταση λογική, οι στήλες του  $\Psi$  πρέπει να επανατοποθετηθούν, έτσι ώστε όλες οι στήλες των εξαρτημένων μεταβλητών να βρίσκονται αριστερά και όλες οι στήλες των ανεξάρτητων μεταβλητών να βρίσκονται στα δεξιά. Όταν οι στήλες επανατοποθετηθούν, το  $\psi_{ij}$  συνεχίζει να αντιστοιχεί στην ίδια μερική παράγωγο, που αντιστοιχούσε και πριν την επανατοποθέτηση. Αμφότεροι οι διαχωρισμοί μπορούν να συνδυαστούν για να ληφθεί η ακόλουθη αναπαράσταση :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^{0r,d} & \Psi^{0r,i} \\ \Psi^{c,r,d} & \Psi^{c,r,i} \end{bmatrix}$$

Για να είναι εφαρμόσιμη και αποτελεσματική η γενική μέθοδος, θα πρέπει να ευρεθεί μια τεχνική, μέσω της οποίας να εξασφαλίζεται αξιόπιστος διαχωρισμός των συντεταγμένων μέσα σε ένα εξαρτημένο και ένα ανεξάρτητο σύνολο, καθώς όχι όλοι οι διαχωρισμοί οδηγούν σε επιλύσιμο σύστημα. Για να είναι συνεπώς το σύστημα επιλύσιμο, το τετραγωνικό υπο - μητρώο  $n_{\bar{o}} + n_c + n_s + n_d \times n_{\bar{o}} + n_c + n_s + n_d \Psi^{c,r,d}$  πρέπει να μην είναι ανώμαλο, και όσο απέχει από να καταστεί ανώμαλο, τόσο πιο αξιόπιστη και ακριβής καθίσταται η δυνατότητα επίλυσης για την εύρεση νέων τιμών των εξαρτημένων συντεταγμένων, όταν αλλάζουν οι τιμές των ανεξάρτητων συντεταγμένων.

Για να ληφθεί ο βέλτιστος διαχωρισμός μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την ακόλουθη μέθοδο : Αρχή με το υπομητρώο  $\Psi^c$  το οποίο έχει  $n_o + n_c + n_s + n_d$  γραμμές και  $3(n_h + n_u)$  στήλες. Το  $ij$  στοιχείο του μητρώου αυτού  $\psi_{ij}^c$  αντιπροσωπεύει την μερική παράγωγο του  $i$  περιορισμού ως προς την τιμή της  $j$  συντεταγμένης. Η απαλοιφή του Gauss εφαρμόζεται στο μητρώο με περιστροφή τόσο περί τις γραμμές όσο και περί τις στήλες. Τούτο καλείται πλήρης περιστροφή (complete, total pivoting). Στο τέλος αυτής της διαδικασίας, οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις  $n_o + n_c + n_s + n_d$  πιο αριστερά ευρισκόμενες στήλες επιλέγονται ως το εξαρτημένο σύνολο. Οι εναπομένουσες συντεταγμένες συνθέτουν το ανεξάρτητο σύνολο. Αν οι τιμές των συντεταγμένων αλλάζουν κατά πολύ κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού, μπορεί να χρειαστεί να ξαναυπολογιστεί αυτός ο διαχωρισμός, για να διατηρηθεί ο καλλίτερος δυνατός.

Μόλις επιλεγεί διατύπωση του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού ΚΕΘ χωρίς περιορισμούς, πρέπει να επιλεγεί η πιο κατάλληλη μέθοδος για την επίλυση του. Η μέθοδος Newton – Raphson μπορεί να εφαρμοστεί εδώ δεδομένου ότι ο όρος 1<sup>ης</sup> τάξης για τη λύση απαιτεί η κλίση της (χωρίς περιορισμούς) αντικειμενικής συνάρτησης να είναι ένα μηδενικό διάνυσμα, ή όσο κοντά στο μηδέν υπαγορεύει η απαίτηση ακρίβειας για τη λύση. Ωστόσο, η μέθοδος Newton – Raphson είναι πραγματικά χρήσιμη στο τέλος των επαναλήψεων στη διαδικασία επίλυσης, για να αυξήσει την ακρίβεια της. Εάν οι τιμές των συντεταγμένων δεν βρίσκονται στη γειτονιά μιας λύσης, η μέθοδος αυτή αποκλίνει και δεν είναι ικανή να προσεγγίσει μία λύση.

Αρχικά είναι καλύτερο να χρησιμοποιηθεί κάποιο είδος μεθόδου συζυγών κατευθύνσεων. Δύο αποτελεσματικές μέθοδοι σε αυτήν την κατηγορία είναι αυτή των παράλληλων εφαπτόμενων (PARTAN)<sup>[11]</sup> και αυτή των Fletcher-Reeves<sup>[11]</sup>. Αυτές και άλλες μέθοδοι συζυγών κατευθύνσεων συνιστώνται, ειδικά σε συνδυασμό με τις μεθόδους ποινήs, δεδομένου ότι δεν επηρεάζονται από τα προβλήματα που δημιουργούνται από τις ασύμμετρες ιδιοτιμές της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει.

Αμφότερες μέθοδοι απαιτούν μία τεχνική για την πραγματοποίηση γραμμικής αναζήτησης, με σκοπό την εύρεση του σημείου εκείνου πάνω σε μια δοθείσα διεύθυνση, το οποίο ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Μία τέτοια τεχνική περιγράφεται παρακάτω, στην

οποία έχει υποτεθεί ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τις τρέχουσες τιμές συντεταγμένων έχει ήδη υπολογιστεί.

1. Επιλέγεται ένα αρχικό μέγεθος βημάτων και βρίσκεται εκείνο το σημείο στη δεδομένη κατεύθυνση, του οποίου η απόσταση από το αρχικό σημείο ταιριάζει με το επιλεγέν μέγεθος βήματος. Στο νέο αυτό σημείο υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

2. Εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη στο νέο σημείο, το μέγεθος βήματος υποδιπλασιάζεται, και ο υποδιπλασιασμός αυτός συνεχίζεται μέχρι να μην επιτυγχάνεται περαιτέρω βελτίωση (δηλ. όχι άλλη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης). Εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη στο νέο σημείο, το μέγεθος βημάτων διπλασιάζεται μέχρι να μην λαμβάνεται καμία περαιτέρω μείωση. Σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση, εάν ο πρώτος διπλασιασμός του μεγέθους βήματος δεν οδηγεί σε πρόσθετη μείωση, το αρχικό μέγεθος βήματος υποδιπλασιάζεται, για να παρατηρηθεί εάν αυτό οδηγεί σε μείωση. Εάν οδηγεί, τότε ο υποδιπλασιασμός συνεχίζεται μέχρι να μην πραγματοποιηθεί καμία περαιτέρω μείωση.

3. Για την τελειοποίηση του μεγέθους του βήματος χρησιμοποιείται μία τετραγωνική τεχνική. Τρία σημεία επιλέγονται από την διαδικασία υποδιπλασιασμού – διπλασιασμού που αναφέρθηκε πριν : το αρχικό σημείο, το βέλπστο σημείο και το σημείο αμέσως μετά το βέλπστο. Μία δευτεροβάθμια καμπύλη προσαρμόζεται στα μεγέθη των βημάτων και στις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, που αντιστοιχούν σε αυτά τα τρία σημεία. Χρησιμοποιώντας αυτήν την καμπύλη, υπολογίζεται το μέγεθος βημάτων που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται, αντικαθιστώντας ένα από τα παλαιά σημεία με το νέο σημείο που παράγεται. Η επανάληψη σταματά όταν δεν λαμβάνεται καμία περαιτέρω βελτίωση στην πραγματική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο τύπος για τον υπολογισμό του νέου μεγέθους βημάτων είναι:

$$s_n = \frac{(s_2^2 - s_3^2)o_1 + (s_3^2 - s_1^2)o_2 + (s_1^2 - s_2^2)o_3}{2((s_2 - s_3)o_1 + (s_3 - s_1)o_2 + (s_1 - s_2)o_3)}$$

όπου το  $s_n$  είναι το νέο μέγεθος βημάτων, τα  $s_1, s_2, s_3$  είναι τα μεγέθη των βημάτων που αντιστοιχούν στα τρία ως άνω σημεία και  $o_1, o_2, o_3$  είναι οι τρεις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Το τελικό βήμα τελειοποίησης είναι σημαντικό, δεδομένου ότι και η μέθοδος PARTAN και η μέθοδος Fletcher-Reeves βασίζονται στο να είναι το σημείο ακριβές σημείο ελαχιστοποίησης στην κατεύθυνση που επιλέγεται. Μόλις ευρεθεί μια λύση στο πρόβλημα χωρίς

περιορισμούς, έχοντας χρησιμοποιήσει μεθόδους συζυγών κατευθύνσεων, μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Newton - Raphson στο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς για να βελτιώσει την ακρίβεια του αποτελέσματος.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΣΦΑΙΡΕΣ ΥΨΗΛΟΤΕΡΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ**

### 4.1 Εισαγωγή

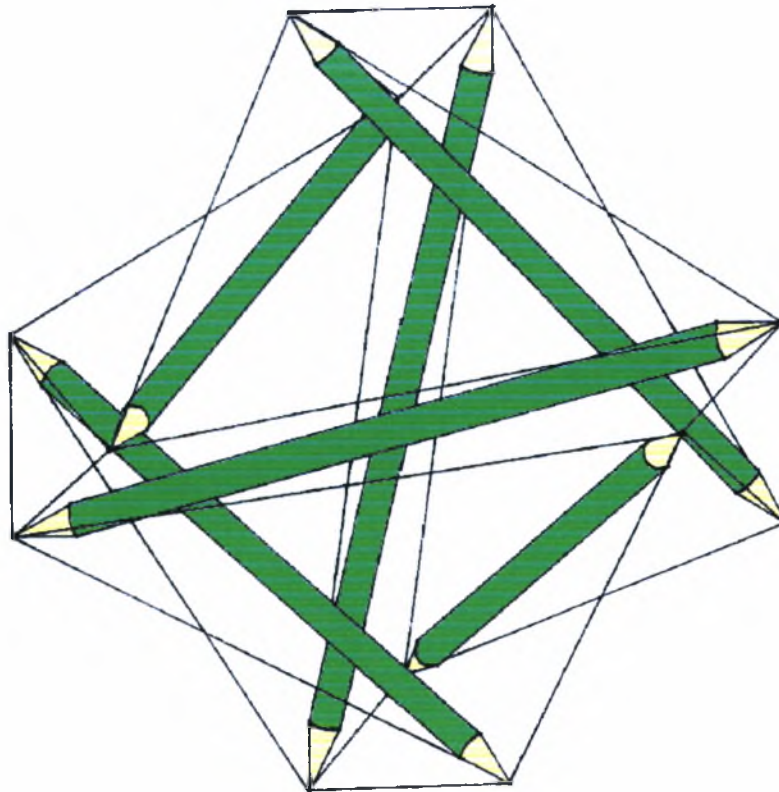
Τώρα μπορούν να εξεταστούν μερικές χειροπιαστές εφαρμογές των μεθόδων που συζητήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Εφαρμόζονται σε «υψηλότερης-συχνότητας» εκδοχές των απλών σφαιρικών κατασκευών που συζητήθηκαν στο Κεφάλαιο 2. «Υψηλότερης-συχνότητας» σημαίνει ότι οι σφαιρικές κατασκευές αποτελούνται από έναν μεγαλύτερο αριθμό μελών. Εάν τα χρησιμοποιούμενα μέλη είναι σχεδόν στο ίδιο μέγεθος όπως πριν, σημαίνει ότι η σφαίρα θα αυξηθεί σε μέγεθος. Εάν αντί αυτού η ακτίνα της σφαίρας παραμένει στο ίδιο μέγεθος, η επιφάνεια έχει τώρα μια πιο εκλεπτυσμένη υφή. Όπως στο μοντέλο για το T - τετράεδρο της παραγράφου 2.4, οι ΚΕΘ θεωρούνται ως μια συλλογή τριγώνων τενόντων, που βρίσκονται περίπου πάνω σε μια σφαίρα, συνδεδεμένα με γειτονικά τρίγωνα τενόντων μέσω θλιπτήρων και τενόντων. Τα μήκη των θλιπτήρων καθώς επίσης και τα μήκη των τενόντων, που σχηματίζουν τα τρίγωνα τενόντων είναι καθορισμένα (σταθερά), και εμφανίζονται έτσι ως παράμετροι στο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού, ενώ οι δεύτερες δυνάμεις των μηκών των τενόντων, που συνδέουν τα παρακείμενα τρίγωνα τενόντων εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση και ελαχιστοποιούνται συλλογικά. Παρόλο που τουλάχιστον ένα μήκος μέλους πρέπει να εμφανιστεί ως περιορισμός για να είναι το πρόβλημα από μαθηματικής άποψη καθορισμένο, δεν υπάρχει καμιά βία για την ταξινόμηση μελών ως ελαχίστων ή περιορισμών. Για διαφορετικές εφαρμογές, ίσως είναι χρήσιμο να γίνουν διαφορετικές ταξινομήσεις. Η ταξινόμηση που επιλέγεται εδώ είναι κατάλληλη, επειδή επιτρέπει για περιορισμό ένα ικανοποιητικό αριθμό μηκών τενόντων και θλιπτήρων, και ακόμα αρκετοί βαθμοί ελευθερίας αφήνονται στη διαδικασία ελαχιστοποίησης, και έτσι οι τένοντες της ίδιας κατηγορίας δεν είναι τρομερά ασύμμετροι. Το να υπάρχει ένας ικανοποιητικός αριθμός περιορισμένων μηκών των μελών είναι βολικό, επειδή σημαίνει ότι τα μήκη τους μπορούν να καθοριστούν επακριβώς. Όλοι οι τένοντες ή οι θλιπτήρες μιας ορισμένης κατηγορίας μπορεί να περιοριστούν ώστε να έχουν τα ίδια μήκη.

### 4.2 Αδαμαντοειδείς Κατασκευές

#### 4.2.1 Εισαγωγή

Όπως περιγράφεται στην παράγραφο 2.3, οι αδαμαντοειδείς κατασκευές χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι κάθε ένα τρίγωνο τενόντων συνδέεται με τα παρακείμενα

τρίγωνα τενόντων μέσω ενός θλιπτήρα και δύο συνδετικών τενόντων. Αυτή η παράγραφος εξετάζει μια αδαμαντοειδή διαμόρφωση του  $T$  – τετράεδρου. Η οδοντωτή διαμόρφωση του  $2ν$   $T$ -τετράεδρου εξετάστηκε στην παράγραφο 2.4. Η αδαμαντοειδής μορφή του  $2ν$   $T$  - τετράεδρου φαίνεται στο σχήμα 4.1. Είναι τοπικά ίδιο με το  $T$  - εικοσάεδρο (σχήμα 2.5 της παραγράφου 2.3). Η μόνη διαφορά είναι ότι τα τρίγωνα τενόντων του  $2ν$  αδαμαντοειδούς  $T$  – τετράεδρου έχουν δύο διαφορετικά μεγέθη. Το  $T$  - εικοσάεδρο είναι όντως μια ειδική περίπτωση  $2ν$  αδαμαντοειδούς  $T$  - τετράεδρου, με όλους τους τένοντες να έχουν το ίδιο μήκος.



Σχήμα 4.1  $2ν$  Αδαμαντοειδές  $T$  – Τετράεδρο

Για να επανεξεταστεί η διαφορά μεταξύ της αδαμαντοειδούς και της οδοντωτής διαμόρφωσης, που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.4, είναι παραγωγικότερο να εσπαστεί η προσοχή στην ομάδα των τεσσάρων μικρών τριγώνων από το  $2ν$  αδαμαντοειδές  $T$  – τετράεδρο. Αυτά αντιστοιχούν στα τέσσερα τρίγωνα τενόντων του  $2ν$  οδοντωτού  $T$  – τετράεδρου. Εάν δύο τρίγωνα τενόντων από αυτήν την ομάδα θεωρηθούν το ένα να βλέπει το άλλο μύτη με μύτη, ο θλιπτήρας μπορεί να φανεί ότι συνδέει το δεξί αυτί ενός τριγώνου με το δεξί αυτί του άλλου

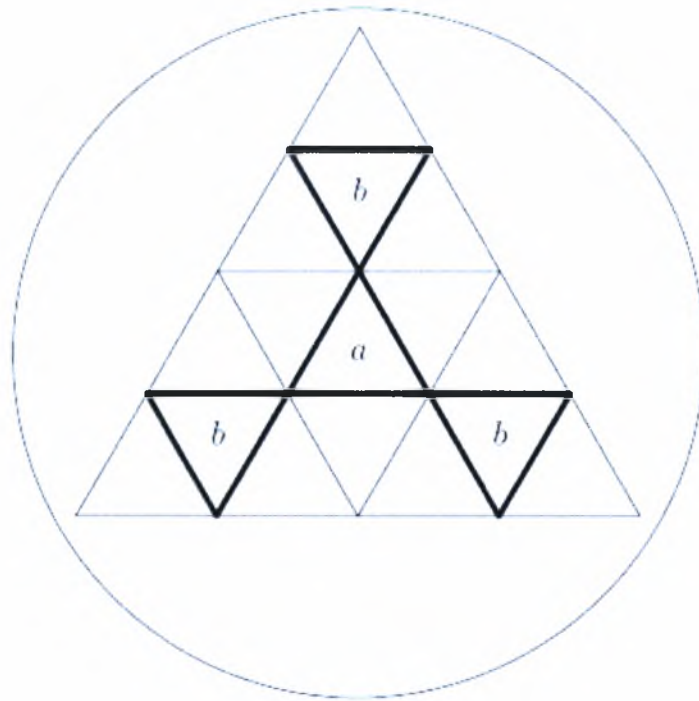
τριγώνου όπως έκανε στο οδοντωτό T - τετράεδρο. Εντούτοις, υπάρχουν τώρα δύο τένοντες που συνδέουν τα δύο τρίγωνα τενόντων αντί μόνο ενός. Κάθε ένας συνδέει το δεξί αυτί ενός τριγώνου τενόντων με τη μύτη του άλλου.

Αυτοί οι δύο τένοντες είναι συμμετρικοί μεταξύ τους, έτσι ως πρόβλημα ακόμα παραμένει η ελαχιστοποίηση ενός μήκους όπως και στο αρχικό «οδοντωτό» πρόβλημα, και ακόμη και το ίδιο γεωμετρικό μοντέλο, που χρησιμοποιήθηκε για να λύσει εκείνο το πρόβλημα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και εδώ. Εντούτοις, η γενική περίπτωση είναι πιο σύνθετη από την τρέχουσα και δεν επιδέχονται επεξεργασίας με μοντέλα σαν αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για να εξεταστεί το απλό 2n οδοντωτό T - τετράεδρο. Έτσι, για να επεξηγηθεί η γενική διαδικασία, οι υπολογισμοί γίνονται για ένα συχνότητας-τέσσερα (ή 4n για πιο σύντομα) αδαμαντοειδές T - τετράεδρο.

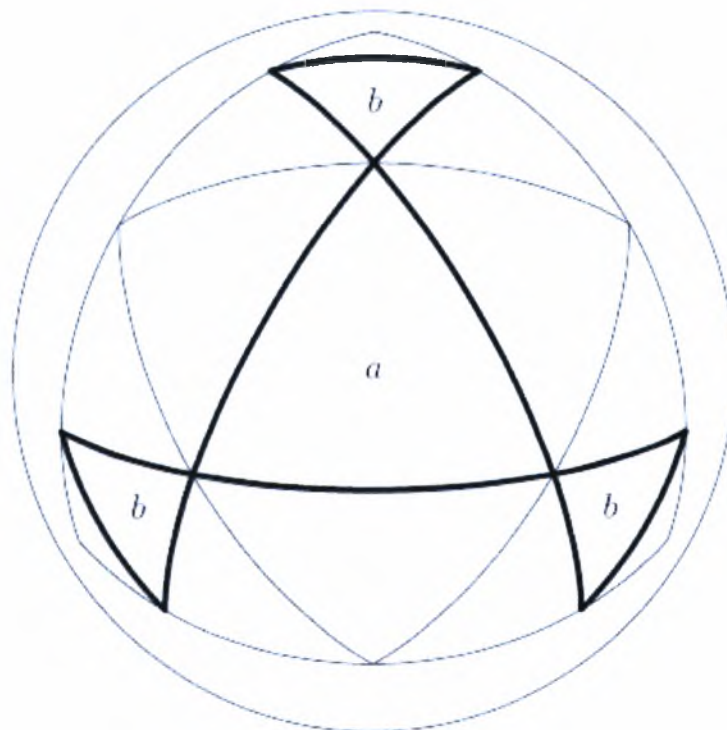
Καλείται ως 4n κατασκευή επειδή η γεωμετρία της προέρχεται από 4n γεωδαιτική υποδιαίρεση του τετράεδρου. Μόνο οι υποδιαίρεσεις άρτιας συχνότητας χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό ΚΕΘ. Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται μια 4n αποσύνθεση (κατακερματισμός, breakdown) ενός τριγώνου, σε αυτήν την περίπτωση πρόσοψη ενός τετράεδρου.

Οι προσδιορισμοί  $a$  και  $b$  καταδεικνύουν ποια τρίγωνα είναι συμμετρικά ισοδύναμα. Οι έντονες γραμμές αντιπροσωπεύουν τις γραμμές της γεωδαιτικής αποσύνθεσης, που χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό ΚΕΘ. Ακολουθείται η διαδικασία του Kenner και αυτά τα τρίγωνα προβάλλονται επάνω σε μια σφαίρα περιγεγραμμένη του τετράεδρου (ως Σχήμα 4.3). Σημειώτεον ότι, εξετάζοντας τους μετασχηματισμούς της συμμετρίας, υπάρχουν δύο τύποι τριγώνων τενόντων που συνθέτουν το σύστημα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο τενόντων και ένα ισοσκελές.

Στο σημείο αυτό εισάγονται οι συνδετήριοι θλιπτήρες και τένοντες. Το Σχήμα 4.4 απεικονίζει αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των συνδετήριων θλιπτήρων. Υπάρχουν δύο τύποι θλιπτήρων. Ο ένας τύπος συνδέει τα παρακείμενα ισοσκελή τρίγωνα ενώ ο άλλος συνδέει τα ισοσκελή με τα ισόπλευρα τρίγωνα. Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι συνδετήριοι τένοντες. Υπάρχει ένα ζευγάρι των τενόντων που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο θλιπτήρων. Σημειώστε ότι και στα δύο σχήματα, τα τρίγωνα είναι λοξά προς τις τελικές θέσεις τους χάριν σαφήνειας. Στο πρόβλημα προγραμματισμού ΚΕΘ, το άθροισμα των δεύτερων δυνάμεων των μηκών των τεσσάρων αδαμαντοειδών τενόντων ελαχιστοποιείται, ενώ τα μήκη των θλιπτήρων και των τενόντων τριγώνων θεωρούνται ως περιορισμοί.

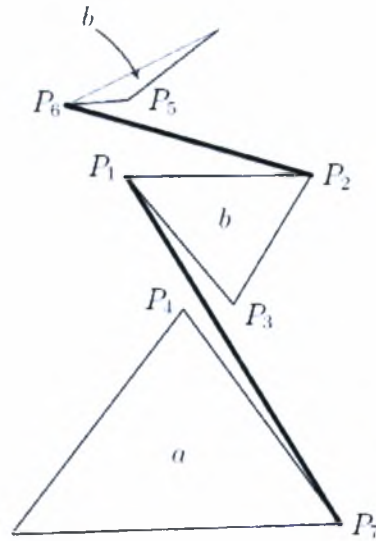


Σχήμα 4.2 4ν Διαίρεση (Διάσπαση) Τριγώνου Όψης Τετραέδρου

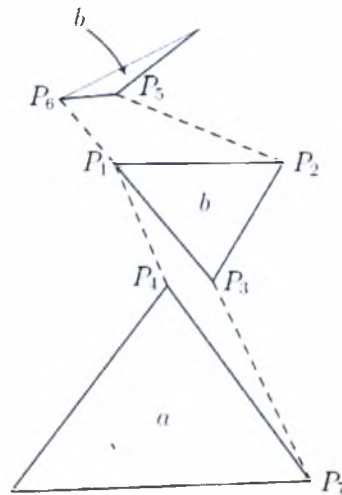


Σχήμα 4.3 Τρίγωνο Όψης Τετραέδρου Προβεβλημένο σε Σφαίρα





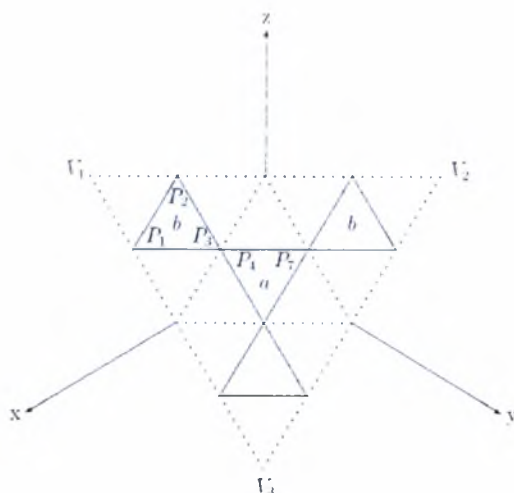
Σχήμα 4.4 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Αντιπροσωπευτικοί Θλιπτήρες



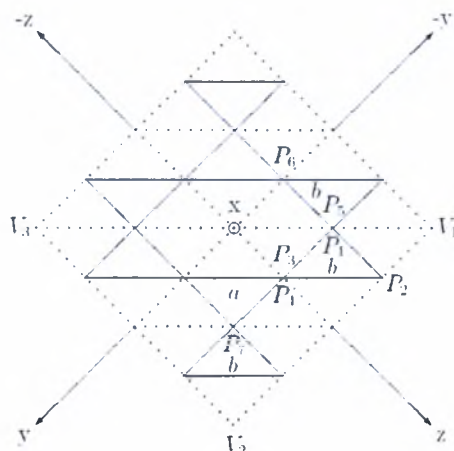
Σχήμα 4.5 Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Αντιπροσωπευτικοί Ελκυστήρες (Τένοντες)

#### 4.2.2 Μαθηματικό Μοντέλο

Στα Σχήματα 4.6 και 4.7 παρουσιάζεται ένα τετράεδρο που εγγράφεται μέσα σε χώρο Καρτεσιανών συντεταγμένων με κατάλληλο προσανατολισμό. Με αυτόν τον προσανατολισμό, οποιοσδήποτε μετασχηματισμός συμμετρίας τετράεδρου μπορεί να επιτευχθεί μόνο με μετάθεση των αξόνων συντεταγμένων. Πάνω στην τετραεδρική πρόσοψη που βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο (αλλά επεκτείνεται στα τρία άλλα επίσης), μπορούν να εγγραφούν τα στοιχεία της σχετικής 4ν γεωδαιτικής υποδιαίρεσης.



Σχήμα 4.6 Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Μοντέλο Συντεταγμένων (Πρόσοψη)



Σχήμα 4.7 Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Μοντέλο Συντεταγμένων (Όψη Ακμής)

Πάνω σε αυτό το τρίγωνο, υπάρχουν τέσσερα σημεία, τα  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  και  $P_4$ . Τα  $P_1$ ,  $P_2$  και  $P_3$  αντιπροσωπεύουν τις κορυφές του ισοσκελούς τριγώνου (ή τουλάχιστον θα είναι ισοσκελές όταν προβάλλονται αυτά τα σημεία επάνω σε μια σφαίρα) ενώ το  $P_4$  είναι ένα σημείο επί του ισοπλεύρου τριγώνου.

Με αυτά τα τέσσερα σημεία, όλα τα άλλα σημεία των  $4n$  υποδιαίρεσεων μπορούν να παραχθούν με τη χρησιμοποίηση των μετασχηματισμών συμμετρίας του τετράεδρου. Ας σημειωθεί ότι, ενώ οι γεωδαιτικές κατασκευές παρουσιάζουν συμμετρία καθρέφτη συχνά, οι κατασκευές ΚΕΘ γενικά όχι. Έτσι το  $P_2$  δεν μπορεί να παραχθεί από  $P_1$  χρησιμοποιώντας μια λειτουργία καθρέφτη. Επίσης, αρχικά τα  $P_3$  και  $P_4$  συμπίπτουν, δεδομένου ότι αρχικά οι κορυφές

του ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου είναι σε επαφή. Όταν οι υπολογισμοί αρχίζουν εν τούτοις, τα σημεία αυτά απομακρύνονται το ένα από το άλλο.

Τα τέσσερα σημεία  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  και  $P_4$ , μπορούν να παραχθούν από τα τρία σημεία των κορυφών  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$  της πρόσοψης του τριγωνικού τετράεδρου ως εξής:

$$P_1 = \frac{3}{4}V_1 + \frac{0}{4}V_2 + \frac{1}{4}V_3$$

$$P_2 = \frac{3}{4}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{0}{4}V_3$$

$$P_3 = \frac{2}{4}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{4}V_3$$

$$P_4 = \frac{2}{4}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{4}V_3$$

Κατά συνέπεια, οι συντεταγμένες των  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$ , που συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 οδηγούν στις τιμές συντεταγμένων των  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  και  $P_4$ , που συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2.

Κορυφή	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$V_1$	1.0	-1.0	1.0
$V_2$	-1.0	1.0	1.0
$V_3$	1.0	1.0	-1.0

Πίνακας 4.1: Όψη Τετράεδρου : Τιμές Συντεταγμένων Κορυφών

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.0	-0.5	0.5
$P_2$	0.5	-0.5	1.0
$P_3$	0.5	0.0	0.5
$P_4$	0.5	0.0	0.5

Πίνακας 4.2: Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Συντεταγμένες μη Προβεβλημένων Σημείων

Όταν οι τιμές για  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  και  $P_4$  προβάλλονται επάνω στη μοναδιαία σφαίρα, προκύπτει ο Πίνακας 4.3. Αυτές οι συντεταγμένες χρησιμεύουν ως οι αρχικές τιμές για τη διαδικασία υπολογισμού. Από αυτές, υπολογίζονται οι αρχικές τιμές όλων των μηκών των μελών.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$P_2$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$P_3$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$P_4$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

Πίνακας 4.3: Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Συντεταγμένες Προβεβλημένων Σημείων

Προκειμένου να εκφραστούν όλα τα μέλη της ΚΕΘ, απαιτούνται τρία περισσότερα σημεία, τα  $P_5$ ,  $P_6$  και  $P_7$ . Αυτά τα σημεία είναι μετασχηματισμοί συμμετρίας των  $P_2$ ,  $P_3$  και  $P_4$  αντίστοιχα. Τα  $P_5$  και  $P_6$  λαμβάνονται από τα  $P_2$  και  $P_3$  με μια αριστερόστροφη περιστροφή  $120^\circ$  του τετράεδρου περί το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων στο  $V_1$ . Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, αυτό επιτυγχάνεται με την μεταφορά του  $x$  άξονα στον  $-y$  άξονα, του  $-y$  άξονα στον  $z$  άξονα, και του  $z$  άξονα στον  $x$  άξονα, έτσι ώστε τα  $P_5$  και  $P_6$  να μπορέσουν να εκφραστούν αντίστοιχα σαν  $(z_2, -x_2, -y_2)$  και  $(z_3, -x_3, -y_3)$ . Το  $P_7$  λαμβάνεται από το  $P_4$  με μια αριστερόστροφη περιστροφή  $120^\circ$  του τετράεδρου γύρω από το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων στο σημείο  $(1.0, 1.0, 1.0)$ . Αυτό επιτυγχάνεται μεταφέροντας τον  $x$  άξονα στον  $z$  άξονα, τον  $y$  άξονα στον  $x$  άξονα, και τον  $z$  άξονα στον  $y$  άξονα, έτσι ώστε το  $P_7$  να μπορεί να εκφραστεί ως  $(y_4, z_4, x_4)$ .

Έτσι όποτε απαιτούνται οι συντεταγμένες των  $P_5$ ,  $P_6$  ή  $P_7$ , χρησιμοποιούνται αυτές οι μετασχηματισμένες εκδόσεις των  $P_2$ ,  $P_3$  ή  $P_4$ . Κατά συνέπεια, οι περιορισμοί συμμετρίας του προβλήματος προγραμματισμού είναι έμμεσα ενταγμένοι σε αυτές τις εκφράσεις για τα  $P_5$ ,  $P_6$  και  $P_7$ . Οι μεταβλητές του προβλήματος προγραμματισμού οριοθετούνται ακόμα από τις  $xyz$  συντεταγμένες των αρχικών τεσσάρων σημείων, και κανένας νέος περιορισμός δεν απαιτείται να προστεθεί για να λάβει υπόψη τη συμμετρία. Ο Πίνακας 4.4 συνοψίζει τα αρχικά μήκη για τα περιορισμένα μέλη αποκτηθέντα χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές συντεταγμένων.

Μέλος		Άκρα Μέλους		Μήκος	Σχόλια
#	Σημειολογία				
1	$t_{12}$	$P_1$	$P_2$	0.577350	Περιορισμός
2	$t_{13}$	$P_1$	$P_3$	0.517638	Περιορισμός
3	$t_{23}$	$P_2$	$P_3$	0.517638	Περιορισμός
4	$t_{47}$	$P_4$	$P_7$	1.0	Περιορισμός
5	$s_{ab}$	$P_1$	$P_7$	1.414214	Περιορισμός
6	$s_{bb}$	$P_2$	$P_6$	0.919401	Περιορισμός
7	$t_{ab1}$	$P_3$	$P_7$	1.0	Προς ελαχιστοποίηση
8	$t_{ab2}$	$P_1$	$P_4$	0.517638	Προς ελαχιστοποίηση
9	$t_{bb1}$	$P_1$	$P_6$	0.517638	Προς ελαχιστοποίηση
10	$t_{bb2}$	$P_2$	$P_5$	0.577350	Προς ελαχιστοποίηση

Πίνακας 4.4: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Αρχικά Μήκη Μελών

Το σχετικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού έχει ως ακολούθως :  
ελαχιστοποίηση ως προς  $P_1, P_2, P_3, P_4$

$$\text{της } 0 \equiv |P_3 - P_7|^2 + |P_1 - P_4|^2 + |P_1 - P_6|^2 + |P_2 - P_5|^2$$

υποκείμενης σε περιορισμούς ελκυστήρων :

$$\frac{1}{3} \geq |P_1 - P_2|^2$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq |P_1 - P_3|^2$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq |P_2 - P_3|^2$$

$$1 \geq |P_4 - P_7|^2$$

περιορισμούς θλιπτήρων :

$$-2 \geq -|P_1 - P_7|^2$$

$$-0,84529946 \geq -|P_2 - P_6|^2$$

Αυτό ορίζει εντελώς το πρόβλημα. Πάλι, μόνο οι συντεταγμένες των  $P_1, P_2, P_3$  και  $P_4$  είναι μεταβλητές στη διαδικασία ελαχιστοποίησης, καθόσον οι συντεταγμένες των  $P_5, P_6$  και  $P_7$  έχουν οριστεί ως μετασχηματισμοί συμμετρίας των συντεταγμένων των σημείων αυτών.

Προκύπτει συνεπώς ξεκάθαρα η δομή του προβλήματος, και όπως καταγράφηκε και στην παράγραφο 3.2, για την επίλυση του οι περιορισμοί ανισοτήτων υποτίθεται ότι ικανοποιούνται μέσω ισοτήτων.

### 4.2.3 Επίλυση

Σύμφωνα και με τα περιεχόμενα της παραγράφου, οι μερικές παράγωγοι των εξισώσεων των μελών και των εξισώσεων περιορισμού μη μελών μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα μητρώο  $\Psi$ , το οποίο έχει τόσες γραμμές όσες και οι εξισώσεις (10 σε αυτή την περίπτωση) και τόσες στήλες όσες είναι οι τιμές συντεταγμένων (12 σε αυτή την περίπτωση). Το  $ij$  στοιχείο αυτού του μητρώου,  $(\alpha_{ij})$ , είναι η παράγωγος της  $i$  εξίσωσης ως προς την  $j$  τιμή συντεταγμένης. Οι τιμές συντεταγμένων είναι αριθμημένες με τη σειρά που εμφανίζονται, για παράδειγμα, το  $\psi_{4,11}$  είναι η μερική παράγωγο της δεύτερης δύναμης του μήκους του  $t_4$  ως προς  $y_4$ . Η τιμή της είναι ίση με  $2(y_4 - x_4) + 2(y_4 - z_4)$ . Αυτός η μερική παράγωγος είναι ασυνήθιστη δεδομένου ότι περιέχει δύο όρους. Οι περισσότερες από τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων μελών είναι είτε μηδέν είτε αποτελούνται από μια και μόνο διαφορά.

Το πρώτο βήμα στην διαδικασία επίλυσης έγκειται στην αναδιατύπωση του προβλήματος σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς, επιλέγοντας ένα υποσύνολο συντεταγμένων να είναι εξαρτημένες, του οποίου οι τιμές λαμβάνονται με την επίλυση των περιορισμών δεδομένων των τιμών για τις συντεταγμένες που επελέγησαν ως ανεξάρτητες. Δεδομένου ότι υπάρχουν έξι περιορισμοί, υπάρχουν έξι εξαρτημένες συντεταγμένες. Αυτό αφήνει έξι (12 - 6) ανεξάρτητες συντεταγμένες. Από σύμπτωση, σε αυτό το πρόβλημα ο αριθμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων είναι ίσος με τον αριθμό εξαρτημένων συντεταγμένων. Κάνοντας χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss με διπλή περιστροφή στο μητρώο μερικών παραγώγων για το σύστημα, οδήγησε στην χρησιμοποίηση των  $x_1, x_2, x_3, z_3, x_4$  και  $z_4$  ως αρχικών ανεξάρτητων συντεταγμένων. Έτσι, με δεδομένες τις τιμές για αυτές τις συντεταγμένες, οι περιορισμοί λύθηκαν για τις υπόλοιπες εξαρτημένες συντεταγμένες  $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3$  και  $y_4$ .

Οι αρχικές παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ανεξάρτητες συντεταγμένες συνοψίζονται στον Πίνακα 4.5. Σε ένα σημείο ελαχίστου, οι τιμές όλων αυτών των

παραγώγων θα είναι τόσο κοντά στο μηδέν όσο η ακρίβεια των υπολογισμών το επιτρέπει. Αντί συνεχώς να εξετάζουμε ολόκληρο τον κατάλογο παραγώγων (που μπορεί να είναι πολύ μακρύς για μια σύνθετη κατασκευή) για να αξιολογήσουμε πόσο κοντά είναι το σύστημα σε ένα ελάχιστο, μπορούν να εξεταστούν στατιστικές παράμετροι, ο γεωμετρικός μέσος όρος των απόλυτων τιμών αυτών των παραγώγων, και η απόκλιση του φυσικού λογαρίθμου (της απόλυτης τιμής) αυτών των παραγώγων. Η απόκλιση είναι μια σημαντική στατιστική παράμετρος, καθόσον αν το σύστημα αρχίζει να γίνεται ανώμαλο, μια ή περισσότερες από τις παραγώγους αρχίζει να αποκλίνει από τις υπόλοιπες. Αυτή η ανωμαλία αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη ότι ο διαχωρισμός των μεταβλητών σε ανεξάρτητες και εξαρτημένες πρέπει να ξαναγίνει.

Συντεταγμένη	Παράγωγος
$x_1$	-0.875117
$x_2$	-0.160155
$x_3$	1.38037
$z_3$	0.345092
$x_4$	-0.345093
$z_4$	0.597720

Πίνακας 4.5: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Αρχικές Παράγωγοι της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρχικά ίση με 1.86923. Το σύστημα λύθηκε με την χρησιμοποίηση της τεχνικής των Παράλληλων Εφαπτόμενων, που οδηγεί σε τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 1.65453. Ο Πίνακας 4.6 συνοψίζει τις αντίστοιχες τιμές σημείων, και ο Πίνακας 4.7 συνοψίζει τα μήκη των μελών στην αποκτηθείσα με αυτόν τον τρόπο αντικειμενική συνάρτηση.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	0.887555	-0.438450	0.455646
$P_2$	0.677306	-0.505030	0.989215
$P_3$	0.614181	-0.076748	0.705421
$P_4$	0.710900	-0.048791	0.590190

Πίνακας 4.6: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Προκαταρκτικές Τιμές Συντεταγμένων

Σημειολογία μέλους	Μήκος
$t_{ab1}$	0.940409
$t_{ab2}$	0.448489
$t_{bb1}$	0.455651
$t_{bb2}$	0.601166

Πίνακας 4.7: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Προκαταρκτικές Τιμές των Μηκών των Μελών στην Αντικειμενική Συνάρτηση

Αυτό θα μπορούσε να είναι το τέλος των υπολογισμών. Όμως, κατά τον υπολογισμό των λεγόμενων ενδογενών δυνάμεων των μελών (αυτών που αναπτύσσονται στα μέλη, όταν η κατασκευή βρίσκεται σε αυτο – ισορροπία χωρίς εξωτερική φόρτιση), που εκτίθεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 7, προκύπτει ότι ελκυστήρας  $t_{12}$  θλίβεται (βλέπε Πίνακα 7.1). Αυτό το πρόβλημα προέρχεται από την αντικατάσταση στους περιορισμούς των ανισοτήτων με τις ισότητες. Εάν οι ανισότητες είχαν χρησιμοποιηθεί, αυτός ο συγκεκριμένος περιορισμός δεν θα επηρέαζε την επίλυση. Σε αυτό το σημείο το πρόβλημα διευθετείται με την εξάλειψη του μέλους από τους περιορισμούς, που σημαίνει ότι ο τένοντας δεν εμφανίζεται στην τελική κατασκευή (εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να προβεί σε σταδιακή μείωση του μήκους του). Εξάλειψη αυτού του περιορισμού σημαίνει επίσης ότι πρέπει να γίνει μια νέα επιλογή ανεξάρτητων μεταβλητών εφόσον τώρα χρειάζονται επτά. Ο νέος διαχωρισμός έχει σαν αποτέλεσμα η τιμή του  $z_1$  να προστεθεί στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Κάνοντας χρήση της μεθόδου των Παράλληλων Εφαπτόμενων στο τρέχον πρόβλημα οδήγησε στην τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 1.65174. Στον Πίνακα 4.8 συνοψίζονται τις τιμές των αντίστοιχων σημείων, στον Πίνακα 4.9



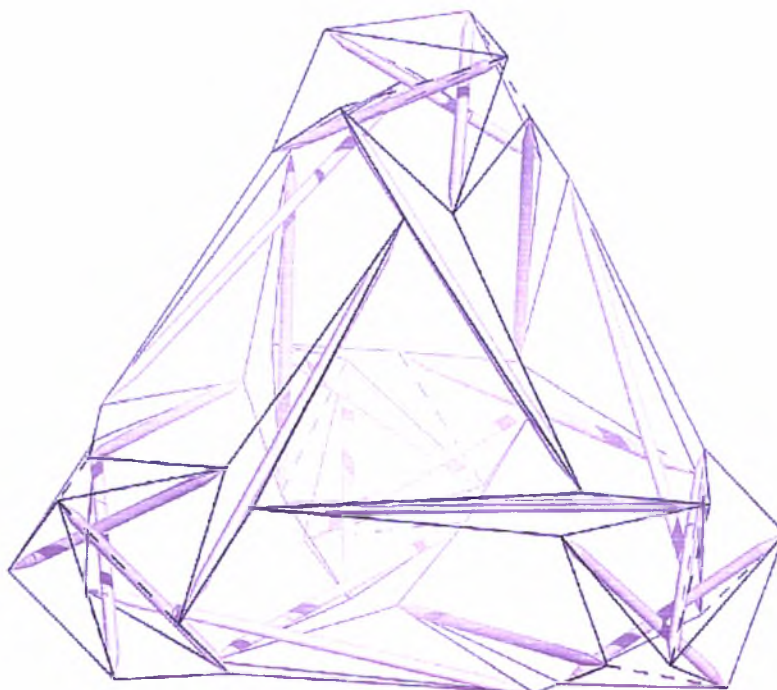
συνοψίζονται τα μήκη των μελών της αντικειμενικής συνάρτησης, και το Σχήμα 4.8 απεικονίζεται το τελικός σχεδιασμός, όπου η θέση του τένοντα που απαλείφθηκε εμφανίζεται με διακεκομμένη γραμμή.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P1$	0.874928	-0.442843	0.484207
$P2$	0.675644	-0.506061	0.981906
$P3$	0.602311	-0.068420	0.715369
$P4$	0.699892	-0.049794	0.605188

Πίνακας 4.8: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Τελικές Τιμές Συντεταγμένων

Σημειολογία μέλους	Μήκος
$t_{ab1}$	0.937671
$t_{ab2}$	0.446946
$t_{bb1}$	0.473042
$t_{bb2}$	0.590748

Πίνακας 4.9: 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Τελικές Τιμές των Μηκών των Μελών στην Αντικειμενική Συνάρτηση



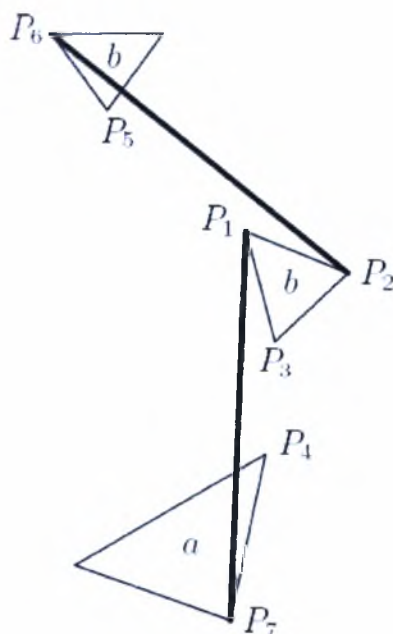
Σχήμα 4.8 4ν Αδαμαντοειδές T – Τετράεδρο : Τελικός Σχεδιασμός

### 4.3 Οδοντωτές Κατασκευές

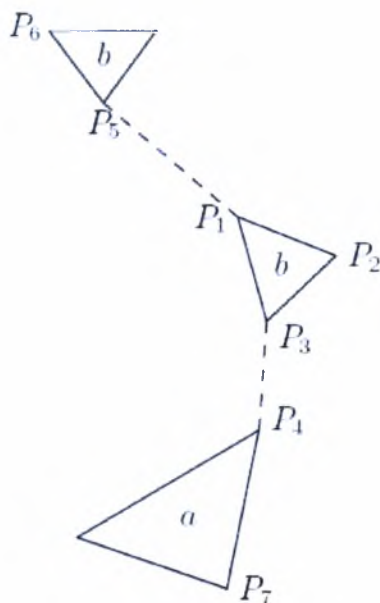
#### 4.3.1 Περιγραφική Γεωμετρία

Μια οδοντωτή (ζιγκ-ζαγκ) κατασκευή διατηρεί τα τρίγωνα θλιπτήρων και ελκυστήρων τενόντων της αντίστοιχης αδαμαντοειδούς, μόνο που εδώ τα γειτονικά τρίγωνα τενόντων διασυνδέονται με μόνο έναν τένοντα αντί με δύο. Αυτός ο ενιαίος τένοντας συνδέει τις "μύτες" των δύο τριγώνων τενόντων. Η εξέταση της κατασκευής από την οπτική γωνία των θλιπτήρων δεικνύει ότι κάθε θλιπτήρας διασχίζεται από ένα "ζιγκ-ζαγκ" τριών τενόντων. Η απλούστερη οδοντωτή ΚΕΘ είναι το T – τετράεδρο, που εξετάστηκε στην παράγραφο 2.4 (Σχήμα 2.8). Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι οι πιο σύνθετες οδοντωτές κατασκευές δεν μπορούν να αναλυθούν με βάση την επεξεργασία που χρησιμοποιήθηκε σε εκείνη την απλή ΚΕΘ, σε ότι ακολουθεί παρατίθεται η γενική διαδικασία χρησιμοποιώντας την οδοντωτή εκδοχή του 4ν T – τετράεδρου, που εξετάζεται στην παράγραφο 4.2.

Τα Σχήματα 4.9 και 4.10 αντίστοιχα παρουσιάζουν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των διασυνδεόμενων θλιπτήρων και τενόντων. Σε αυτά τα Σχήματα, το μοντέλο έχει επεκταθεί, έτσι ώστε οι θλιπτήρες να είναι μακρύτεροι απ' ό τι στον αρχικό γεωδαιτικό υπολογισμό, ενώ τα τρίγωνα τενόντων παραμένουν στο ίδιο μέγεθος.



Σχήμα 4.9 4ν Οδοντωτό (Zig – Zag ) T – Τετράεδρο : Αντιπροσωπευτικοί Θλιπτήρες



Σχήμα 4.10 4n Οδοντωτό (Zig – Zag) T – Τετράεδρο : Αντιπροσωπευτικοί Ελκυστήρες (Τένοντες)

Αυτό γίνεται δεδομένου ότι, στην αρχική διαμόρφωση, οι μύτες των τριγώνων τενόντων αγγίζουν η μια την άλλη και έτσι οι διασυνδεδεμένοι ζιγκ-ζαγκ τένοντες έχουν μηδενικό μήκος. Επεκτείνοντας την κατασκευή χωρίς αύξηση των μεγεθών των τριγώνων τενόντων οδηγεί σε μη μηδενικό μήκος των τενόντων αυτών.

Τα μήκη αυτά μπορούν να ελαχιστοποιηθούν για να αποκτηθεί μια έγκυρη ΚΕΘ. Στην αρχική διαμόρφωση, αυτοί οι τένοντες είναι όντως ελάχιστου μήκους, και η κατασκευή είναι θεωρητικά ΕΘ σε εκείνη την διαμόρφωση, αλλά πρακτικά δεν πρόκειται περί ενδιαφέρουσας λύσης, δεδομένου ότι ο θλιπτήρας  $s_{bb}$  και οι μετασχηματισμοί του τέμνει ο ένας τον άλλον.

#### 4.3.2 Μαθηματικό μοντέλο

Ο κατάλογος σημείων είναι ο ίδιος με αυτόν της παραγράφου 4.2.2, όπως και ο κατάλογος περιορισμένων μελών. Για να αποφευχθεί η περίπτωση να καταλήξει κανείς σε μια λύση στην οποία το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης ισούται με μηδέν, επιμηκύνονται οι θλιπτήρες  $s_{ab}$  και  $s_{bb}$  από  $\sqrt{2}$  και 0.919401 σε 2 και  $\sqrt{3}$  αντίστοιχα. Στην αντικειμενική συνάρτηση οι αδαμαντοειδείς τένοντες της παραγράφου 4.2.2,  $t_{ab1}$ ,  $t_{ab2}$ ,  $t_{bb1}$  και  $t_{bb2}$ , αντικαθίστανται από τους οδοντωτούς τένοντες  $t_{ab}$  και  $t_{bb}$ . Όπως αναφέρθηκε, τα αρχικά μήκη τους είναι μηδέν. Ο Πίνακας 4.10 απαριθμεί τα ακραία σημεία των πρόσθετων αυτών μελών.

Μέλος		Ακραία σημεία		Σχόλια
#	Σημειολογία			
7	$t_{ab}$	$P_3$	$P_4$	Προς ελαχιστοποίηση
8	$t_{bb}$	$P_1$	$P_5$	Προς ελαχιστοποίηση

Πίνακας 4.10: 4ν Οδοντωτό T – Τετράεδρο : Ακραία Σημεία Οδοντωτών Ελκυστήρων (Τενόντων)

Το σχετικό μαθηματικό πρόβλημα προγραμματισμού γίνεται:

Ελαχιστοποίηση ως προς  $P_1, P_2, P_3, P_4$  της  $0 \equiv |P_3 - P_4|^2 + |P_1 - P_5|^2$

υποκείμενης σε περιορισμούς ελκυστήρων :

$$\frac{1}{3} \geq |P_1 - P_2|^2$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq |P_1 - P_3|^2$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq |P_2 - P_3|^2$$

$$1 \geq |P_4 - P_7|^2$$

περιορισμούς θλιπτήρων :

$$-4 \geq -|P_1 - P_7|^2$$

$$-3 \geq -|P_2 - P_6|^2$$

Όπως πριν, μόνο οι συντεταγμένες των  $P_1, P_2, P_3$  και  $P_4$  είναι μεταβλητές στην διαδικασία ελαχιστοποίησης, δεδομένου ότι οι συντεταγμένες των  $P_5, P_6$  και  $P_7$  προέρχονται από μετασχηματισμούς συμμετρίας των συντεταγμένων των προηγούμενων. Επίσης, όλοι οι περιορισμοί ανισότητας μετετρέπονται σε περιορισμοί ισότητας.

### 4.3.3 Επίλυση

Με τα νέα μεγαλύτερα μήκη των θλιπτήρων, οι αρχικές τιμές που χρησιμοποιούνται για το πρόβλημα δεν ικανοποιούν πλέον τους περιορισμούς. Με τον βέλτιστο διαχωρισμό του συστήματος (που χρησιμοποιήθηκε στην παράγραφο 4.2.3), η μέθοδος Newton-Raphson αποκλίνει, όταν εφαρμόζεται στο σύστημα για να λύσει τις εξισώσεις περιορισμού. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιείται η μέθοδος ποινής, με μια τιμή ποινής  $\bar{\mu} = 10^5$ . Το πρόβλημα λαμβάνει μετά από αυτά την ακόλουθη μορφή :

ελαχιστοποίηση ως προς  $P_1, P_2, P_3, P_4$  της :

$$\begin{aligned} & |P_3 - P_4|^2 + |P_1 - P_5|^2 + \bar{\mu} \left[ \frac{1}{3} - |P_1 - P_5| \right]^2 + \\ & \bar{\mu} \left[ \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) - |P_1 - P_3| \right]^2 + \bar{\mu} \left[ \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) - |P_2 - P_3| \right]^2 + \\ & \bar{\mu} [1 - |P_4 - P_7|]^2 + \bar{\mu} [4 - |P_1 - P_7|]^2 + \bar{\mu} [3 - |P_2 - P_6|]^2 \end{aligned}$$

Δέκα επαναλήψεις της μεθόδου των Fletcher-Reeves εφαρμόζονται σε αυτήν την αναδιατυπωμένη αντικειμενική συνάρτηση. Αυτές οι επαναλήψεις φέρνουν τους περιορισμούς αρκετά κοντά σε μια λύση, που η μέθοδος ποινής δεν απαιτείται. Άλλες δέκα Fletcher-Reeves επαναλήψεις οδηγούν σε επίλυση του συστήματος

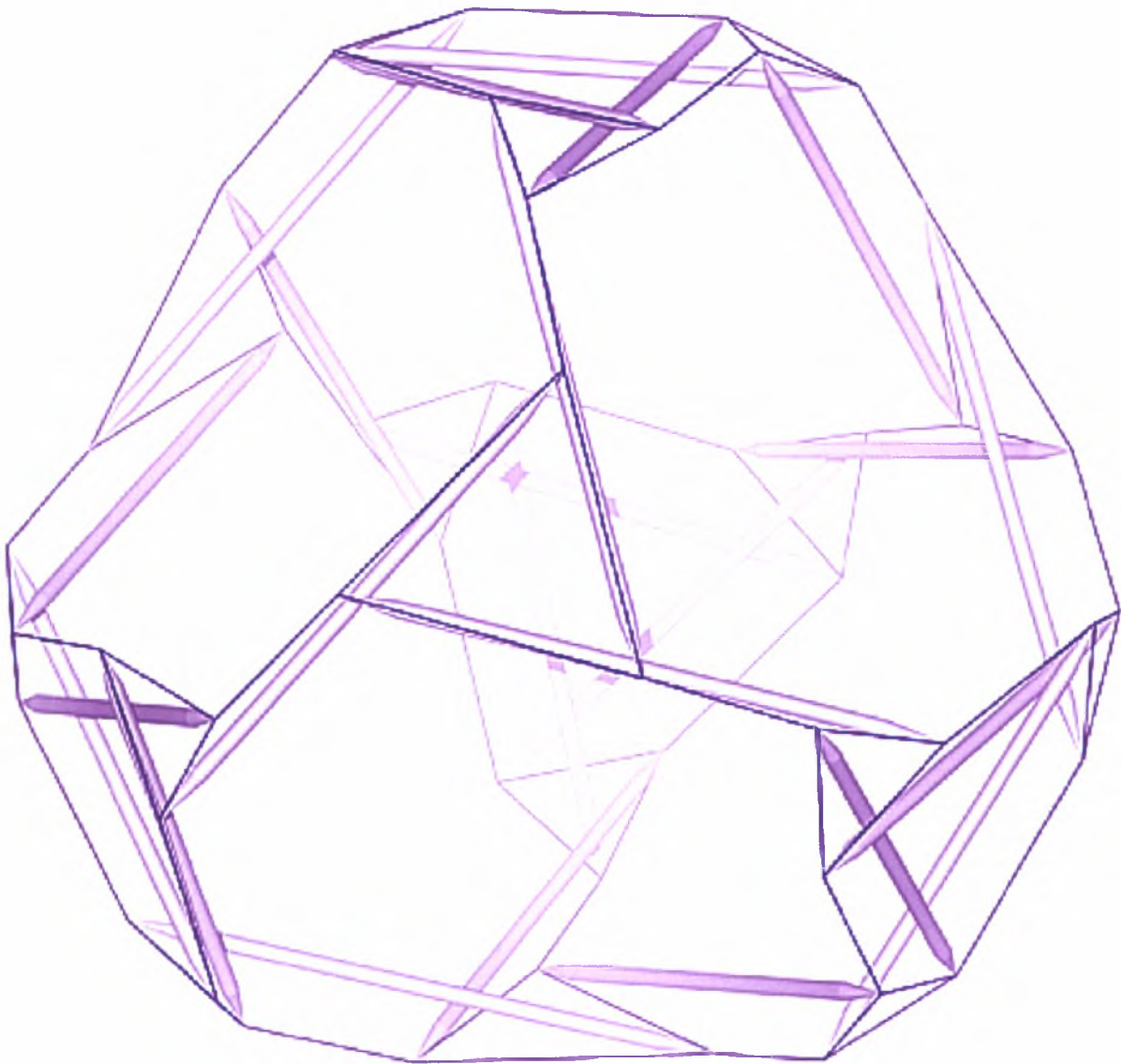
Οι τελικές τιμές για τα μήκη των μελών στην αντικειμενική συνάρτηση συνοψίζονται στον Πίνακα 4.11, ενώ οι αντίστοιχες τιμές σημείων στον Πίνακα 4.12. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 1.03848. Σε αυτήν την κατασκευή, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα με τους μη-αποτελεσματικούς περιορισμούς, σε σχέση με την προηγούμενη. Στο Σχήμα 4.11 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα του τελικού σχεδιασμού.

Σημειολογία μέλους	Μήκος
$l_{ab}$	0.579238
$l_{bb}$	0.838431

Πίνακας 4.11: 4νΟδοντωτό T – Τετράεδρο : Τελικά Μήκη Μελών στην Αντικειμενική Συνάρτηση

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.374465	-0.537613	1.081334
$P_2$	1.008191	-0.399971	1.505871
$P_3$	1.314861	-0.058122	1.267036
$P_4$	1.067078	0.464915	1.243542

Πίνακας 4.12: 4νΟδοντωτό T – Τετράεδρο : Τελικές Τιμές Συντεταγμένων



Σχήμα 4.11 4n Οδοντωτό (Zig – Zag) T – Τετράεδρο : Τελικός Σχεδιασμός

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΕΘ ΔΙΠΛΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

### 5.1 Εισαγωγή

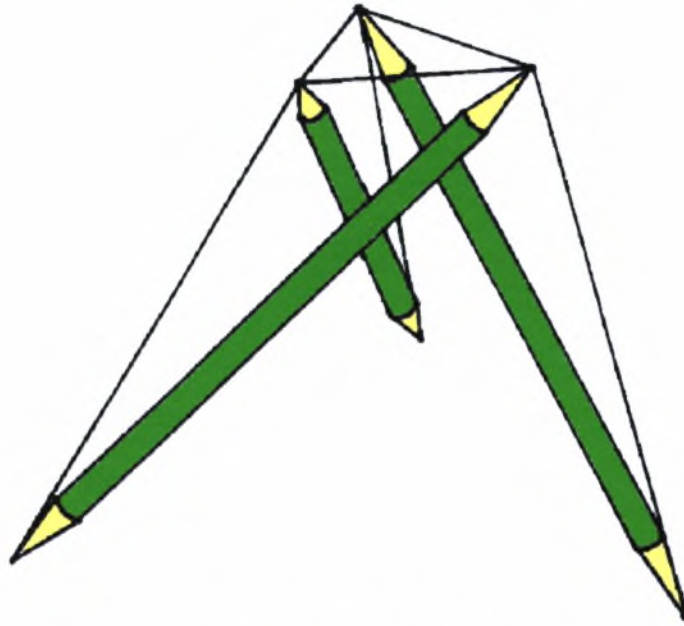
Για τις περισσότερες ΚΕΘ που εξετάστηκαν μέχρι τώρα, τα εφελκούμενα μέλη συνθέτουν ένα απλό συνεχές σφαιρικό επίπεδο, με μοναδική εξαίρεση το T – πρίσμα της παραγράφου 2.2, που έχει ένα περισσότερο κυλινδρικό σχήμα. Τέτοιες κατασκευές διαθέτουν την ιδιότητα της επανάταξης, αλλά δεν είναι πολύ άκαμπτες και στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών ταλαντώνονται υπερβολικά. Επίσης, πιθανότατα κατασκευές τέτοιου είδους ιδιαιτέρως υψηλής συχνότητας, όπως οι γεωδαιτικοί θόλοι, έχουν μικρή αντίσταση στα συγκεντρωμένα φορτία, οπότε θα ήταν δύσκολο να αναρτηθούν άλλες υπο – κατασκευές από τις οροφές τους, ενώ θα υπήρχε αυξημένος κίνδυνος κατάρρευσης λόγω φορτίου χιονιού. Οι εκτιμήσεις αυτές αποτελούν ένα ισχυρό κίνητρο για την ανάπτυξη μιας διαμόρφωσης χωρικών δικτυωμάτων για τις ΚΕΘ. Μία τέτοια διαμόρφωση θα ήταν ανάλογη με τα χωροδικτύωματα που αναπτύχθηκαν για τον γεωδαιτικό θόλο, όπως οι θόλοι Kaiser του Don Richter<sup>[10]</sup>, ή ο θόλος Expo '67 των Fuller και Sadao<sup>[16]</sup>, και εξυπηρετούν τον ίδιο σκοπό. Τα χωροδικτύωματα ΕΘ χαρακτηρίζονται από ένα εξωτερικό και ένα εσωτερικό κέλυφος τενόντων, που αλληλοσυνδέονται από μία συλλογή θλιπτήρων και ελκυστήρων. Το αποτέλεσμα είναι μία περισσότερο δύσκαμπτη κατασκευή που είναι ανθεκτικότερη σε συγκεντρωμένα φορτία.

Σχεδιασμός για δικτύωματα ΕΘ έχουν αναπτυχθεί στο επίπεδο από διάφορους συγγραφείς. Το δικτύωμα που περιγράφεται στην παρούσα εργασία, ειδικά το γεωδαιτικό που περιγράφεται στην παράγραφο 5.3, είναι συγγενικά με εκείνα που υπήρξαν αντικείμενα πειραματικής διερεύνησης από τον Kenneth Snelson την δεκαετία του 1950<sup>[42]</sup>. Στο Παράρτημα Α συγκρίνεται το δικτύωμα της παραγράφου 5.3 με ένα παράδειγμα μιας άλλης παρόμοιας προσέγγισης στα δικτύωματα ΕΘ από διαφορετικούς συγγραφείς.

Στην παράγραφο 5.2, περιγράφεται μία γενική προσέγγιση για το σχεδιασμό δικτυωμάτων ΕΘ. Κατόπιν, στις παραγράφους 5.3 και 5.4, παρουσιάζονται δύο παραδείγματα γεωμετρίας, στην οποία εφαρμόζεται την προσέγγιση αυτή. Το δεύτερο παράδειγμα καταδεικνύει επίσης πως εικοσαεδρικές συμμετρίες μπορούν να αντιμετωπιστούν μέσω χρήσης Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων

## 5.2 Δικτυώματα

Θεωρούμε στη συνέχεια το τελικό T - πρίσμα της παραγράφου 2.2 και αφαιρούμε το τρίγωνο των τενόντων που αντιστοιχούν σε μία από τις άκρες. Όταν πιέζεται η μια προς την άλλη, οι τρεις ελεύθερες άκρες των θλιπτήρων αντιστέκονται έντονα στην προσπάθεια αυτή και παραμένουν σε απόσταση μεταξύ τους. Αυτό το σύνθετο θλιβόμενο μέλος, ένας T - τρίποδας ΕΘ (T - τρίποδας), μπορεί να συνδεθεί με τρεις ΚΠΣ μιας ΚΕΘ και να τις κρατήσει χωριστά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Όταν χρησιμοποιούνται για να υποστηρίξουν ένα δίκτυο τενόντων μονού στρώματος, οι θλιπτήρες των T - τριπόδων βρίσκονται εκτός του στρώματος, που εμπεριέχει τις τρεις ΚΠΣ, με αποτέλεσμα να μην υφίστανται πλέον τα δυσεπίλυτα προβλήματα παρέμβασης, που μπορούν να συμβούν σε μεγαλύτερου μεγέθους κατασκευές, όταν απλοί θλιπτήρες με δύο ΚΠΣ βρίσκονται στο ίδιο στρώμα με αυτό που υποστηρίζουν.



Σχήμα 5.1 Τρίποδας ΕΘ

Έστω ότι το δίκτυο απλού στρώματος, που υποστηρίζεται από τους T -τρίποδες, είναι σφαιρικό και αποτελείται από πολύπλευρα που συνδέονται μέσω των κορυφών τους. Μεταξύ δύο γειτονικών πολύπλευρων δεν υπάρχουν παραπάνω από μια κοινές κορυφές, και κάθε κορυφή είναι κοινή για δύο πολύπλευρα ακριβώς. Οι κορυφές (arexes) των T - τριπόδων θα μπορούσαν να κοιτούν προς τα έξω ή προς τα μέσα, αλλά υποθέτουμε ότι κοιτούν προς τα έξω. Πέραν δε του συνεχούς σφαιρικού δικτύου απλού στρώματος, υπάρχει ένα ασυνεχές εξωτερικό δίκτυο, που



διαμορφώνεται από τα τρίγωνα ελκυστήρων των κορυφών των  $T$  - τριπόδων. Αυτοί καλούνται στο εξής εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλισης, ενώ οι τένοντες των  $T$  - τριπόδων, που τα συνδέουν αυτά με τις αντίθετες άκρες των θλιπτήρων του  $T$ - τριπόδου καλούνται κύριοι μεσοστρωματικοί ελκυστήρες.

Για να προσδοθεί μεγαλύτερη ευστάθεια στην κατασκευή, το εξωτερικό δίκτυο ολοκληρώνεται με την σύνδεση μεταξύ τους των κορυφών των  $T$  - τριπόδων, χρησιμοποιώντας ένα άλλο σύνολο τενόντων που καλούνται εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) δέσμησης. Έστω επίσης ότι το εξωτερικό δίκτυο διαθέτει την ίδια τοπολογία με το εσωτερικό δίκτυο αν και φυσικά τα μήκη των τενόντων του εξωτερικού δικτύου είναι διαφορετικά. Αποσυστρέφοντας έναν  $T$  - τρίποδα απομακρύνονται ακόμα περισσότερο το ένα από το άλλο τα ελεύθερα άκρα του. Κατά συνέπεια, εφόσον είναι δυνατόν, οι εξωτερικές συγκλίσεις πρέπει να δεσμευτούν μαζί κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο εφελκυσμός των εξωτερικών τενόντων να αποσυστρέφει τους  $T$  - τρίποδες. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ενώ το εξωτερικό δίκτυο των τενόντων πιέζει προς τα μέσα, το εσωτερικό δίκτυο θα πιέσει προς τα έξω κάτω από την ώθηση των επεκταμένων θλιβόμενων μελών, δηλαδή των αποσυστρεφόμενων  $T$  - τριπόδων.

Όταν οι θλιπτήρες συναντώνται στο εσωτερικό δίκτυο, διαμορφώνουν συγκλίσεις, όπου θλιπτήρες από πολλούς διαφορετικούς  $T$  -τρίποδες συνδέονται μαζί με τους τένοντες σχηματίζοντας ένα πολύπλευρο. Αυτοί οι τένοντες καλούνται οι εσωτερικοί τένοντες σύγκλισης και τοπολογικά είναι ισοδύναμοι με τους εξωτερικούς τένοντες δέσμησης. Οι υπόλοιποι τένοντες του εσωτερικού δικτύου είναι οι εσωτερικοί τένοντες δέσμησης, των οποίων τα πολύπλευρα εναλλάσσονται με εκείνα των εσωτερικών τενόντων σύγκλισης. Είναι τοπολογικά ισοδύναμοι με τους εξωτερικούς τένοντες σύγκλισης, που σημαίνει ότι για το παράδειγμα που παρουσιάζεται εδώ είναι τρίγωνα.

*Ένα  $T$  - πρίσμα μπορεί πέραν ενός τριγώνου να βασιστεί και σε οποιοδήποτε πολύπλευρο, και η απαλοιφή των τενόντων από ένα άκρο του θα οδηγήσει σε έναν πολύποδα  $E\Theta$  ( $T$  - πολύποδα), που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακριβώς όπως ο  $T$  - τρίποδας, ως σύνθετο θλιβόμενο μέλος για να υποστηρίξει ένα δίκτυο τενόντων. Η προσεκτική εξέταση των τενόντων μιας εσωτερικής σύγκλισης καταδεικνύει ότι, από κοινού με τους συγκλίνοντες θλιπτήρες, διαμορφώνουν ένα εσωτερικού προσανατολισμού (προς τα μέσα προσανατολισμένου)  $T$  - πολύποδα, αν προστεθούν οι κατάλληλοι τένοντες συνδέοντας τα πολύεδρα σύγκλισης με τα*

αντίθετα άκρες θλιπτήρων. Αυτοί οι τένοντες σύνδεσης καλούνται **δευτερεύοντες μεσοστρωματικοί ελκυστήρες** και ολοκληρώνουν το δίκτυο .

Με αυτή τη μέθοδο δημιουργίας ενός δικτύωματος  $E\Theta$ , η τοπολογία των εσωτερικών και εξωτερικών στρωμάτων όχι μόνο θα πρέπει να είναι ίδια, αλλά επιπρόσθετα θα χρειαστεί τα τρίγωνα τενόντων και πολυπλεύρων, που αποτελούν κάθε στρώμα, να διαιρεθούν σε δύο ομάδες που εναλλάσσονται. Ένα τρίγωνο ή πολύπλευρο από μια ομάδα θα πρέπει να περιβάλλεται εντελώς από τα πολύπλευρα της άλλης ομάδας. Ένα πανομοιότυπο δίκτυωμα θα μπορούσε να παραχθεί αρχίζοντας από τους  $T$  - πολύποδες που υποστηρίζουν ένα πλήρες εξωτερικό δίκτυο και έπειτα δεσμεύοντας τις κορυφές τους μεταξύ τους και προσθέτοντας τους μεσοστρωματικούς τένοντες, για να παραχθούν οι  $T$  - τρίποδες εξωτερικού προσανατολισμού.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα δύσκαμπτο χωροδίκτυωμα  $E\Theta$ , που στοχεύει σε υπερβολικά μεγάλης κλίμακας εφαρμογές, όπως στην κάλυψη ολόκληρων οικισμών ή την υπερκατασκευή ενός διαστημικού σταθμού. Αν και είναι δυνατό να υπάρξουν πολύπλευρα εναλλασσόμενα με πολύπλευρα στο σφαιρικό δίκτυο, αντί να περιορίζεται ένα σύνολο πολυπλεύρων να αποτελείται από τρίγωνα, μία έμφαση στα τρίγωνα μπορεί να παράγει μία πιο δύσκαμπτη κατασκευή. Η πολυπλοκότητα αυτής της  $KE\Theta$  απαιτεί προσεκτικό έλεγχο του σχεδιασμού, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι οι θλιπτήρες και οι ελκυστήρες έχουν επαρκή απόσταση μεταξύ τους και ότι οι δυνάμεις των μελών είναι κατάλληλες, δηλ. οι τένοντες είναι σε εφελκυσμό και οι θλιπτήρες σε θλίψη.

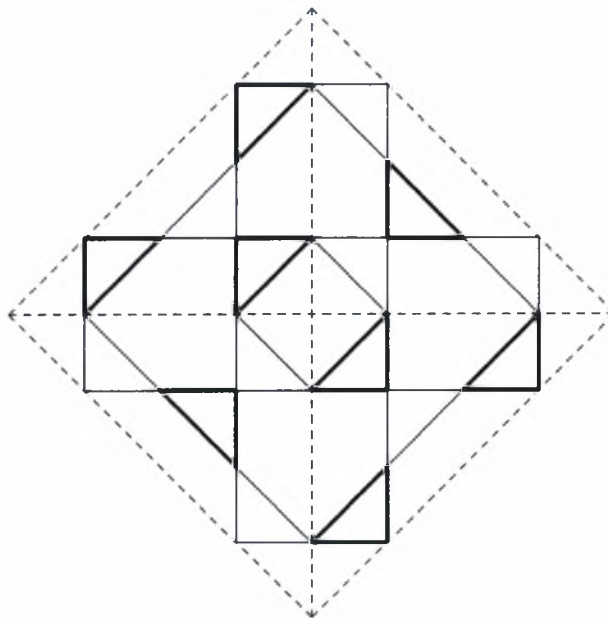
### 5.3 Γεωδαιτικά Δίκτυα

Μία τοπολογία δικτύων κατάλληλη για το σχεδιασμό  $KE\Theta$  μπορεί να ληφθεί από μία κατηγορίας  $I$  υποδιαίρεση άρτιας συχνότητας των τριγωνικών εδρών του τετραέδρου, του οκταέδρου ή του εικοσαέδρου. Εναλλακτικά η κατηγορίας  $2$  υποδιαίρεση αυτών των ίδιων πολυέδρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εάν η συχνότητα είναι ένα πολλαπλάσιο του τέσσερα. Οι τοπολογίες δικτύων που παράγονται με αυτόν τον τρόπο αναφέρονται ως **γεωδαιτικά δίκτυα** , δεδομένου ότι είναι βασισμένα στα συστήματα υποδιαίρεσης που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό γεωδαιτικών θόλων. Μία υποδιαίρεση της κατηγορίας  $I$  εξηγείται στο Σχήμα 4.2. Μόνο η υποδιαίρεση κατηγορίας  $I$  χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Ένας  $4n$  κατακερματισμός του οκταέδρου εξυπηρετεί για το παράδειγμα αυτής της μεθόδου παραγωγής δικτυωτών  $KE\Theta$ . Το μέρος αυτού του κατακερματισμού που σχετίζεται με

ΚΕΘ παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Τα τρίγωνα κατακερματισμού παρουσιάζονται με τις συνεχείς γραμμές, και οι ακμές οκταέδρου βάσης παρουσιάζονται με διακεκομμένες γραμμές.

Το πρώτο βήμα στην μόρφωση της ΚΕΘ έγκειται στην διαίρεση του προκύπτοντος δικτύου σε δύο σύνολα εναλλασσόμενων τριγώνων. Στο Σχήμα 5.2 το ένα σύνολο παρουσιάζεται με τις απαλές συνεχείς γραμμές, και το άλλο σύνολο παρουσιάζεται με έντονες συνεχείς γραμμές. Ένα τρίγωνο ενός συνόλου είναι γειτονικό μόνο με τα τρίγωνα του άλλου συνόλου. Η απαίτηση εναλλαγής αναφέρεται στην παράγραφο 5.2 και εδώ σημαίνει απλά γεωδαιτικές υποδιαίρεσεις οκταέδρου. Τα τετράεδρα και τα εικοσάεδρα αποκλείονται καθώς οι περιττής τάξης τριπλές και πενταπλές συμμετρίες τους δεν επιτρέπουν την απαραίτητη εναλλασσόμενη ταξινόμηση των τριγώνων. Η αποκλειστική χρήση οκταέδρων καθιστά την υπολογιστική εργασία απλούστερη αφού, όπως αναφέρθηκε ήδη στην παράγραφο 2.3, οι συμμετρίες του οκταέδρου εκφράζονται πολύ εύκολα μέσω Καρτεσιανών συντεταγμένων.



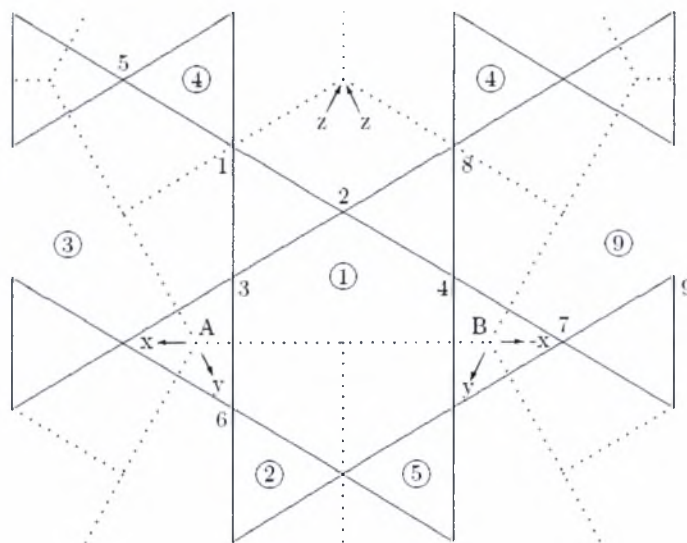
Σχήμα 5.2 4v Οκτάεδρο : Ανελλασσόμενα Τρίγωνα (Όψη Κορυφής)

Εδώ και τα δύο (εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού) T – πολύπλευρα, που αναφέρονται στην παράγραφο 5.2, είναι T - τρίποδες. Οι τοποθετήσεις των θλιπτήρων επιλέγονται με τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η επιρροή αποσυστροφής, που αναφέρθηκε στην

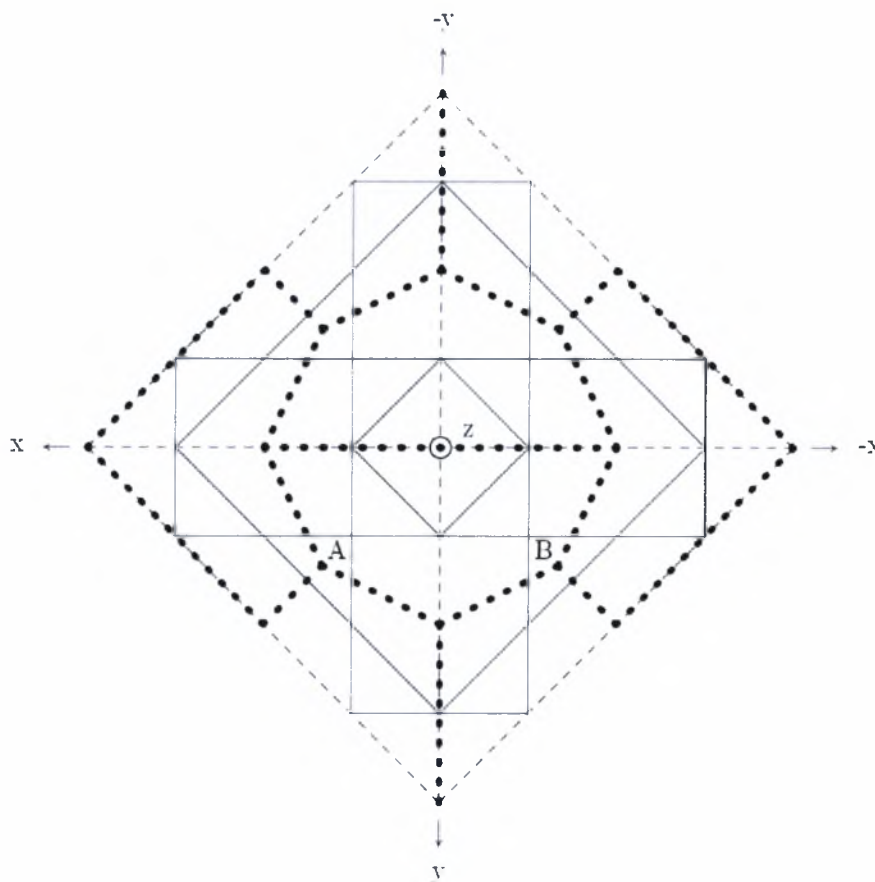
παράγραφο 5.2. Τούτο διαφέρει από τον συνήθη τρόπο αντιμετώπισης θλιπτήρων μεταξύ γειτονικών τριγώνων σε ΚΕΘ απλού στρώματος.

Το γεγονός ότι μόνον T - τρίποδες εμφανίζονται στην κατασκευή προσδίδει στους θλιπτήρες μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Αλληλο - επικαλύπτονται λιγότερο από ότι θα έκαναν εάν υπάρχουν T - πολύποδες μεγαλύτερης συχνότητας, έτσι το σύνολο θλιπτήρων καλύπτει μεγαλύτερη επιφάνεια. Δεδομένου ότι οι θλιπτήρες γενικά θα είναι το ακριβότερο συστατικό (με γνώμονα την χρήση υλικού), αυτό είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό γνώρισμα. Επίσης, η ύπαρξη T - τριπόδων παντού αντί T - πολυπόδων ενισχύει την δυσκαμψία της κατασκευής, δεδομένου ότι τα τρίγωνα δεν μπορούν να παραμορφωθούν όπως άλλα πολύπλευρα.

Το Σχήμα 5.3 αποτελεί μία σχηματική αναπαράσταση, στην οποία φαίνεται η συμμετρική περιοχή ταυτότητας, που αντιστοιχεί στην κατασκευή μαζί με μέρη των άλλων περιοχών συμμετρίας που την περιβάλλουν. Το Σχήμα 5.4 καταδεικνύει πως οι περιοχές συμμετρίας εμφανίζονται όταν σχεδιάζονται πάνω στη βάση του οκταέδρου. Τα σύνορα των περιοχών συμμετρίας εμφανίζονται ως διακεκομμένες γραμμές στα εν λόγω δύο Σχήματα. Τα σημεία A και B αντιστοιχούν στα κέντρα δύο γειτονικών οκταεδρικών τριγώνων. Τα βέλη χρησιμοποιούνται για να δείξουν τους άξονες εντός των τριγώνων αυτών. Στο Σχήμα 5.3, οι αριθμοί στους κύκλους δείχνουν την αντιστοιχία κάθε περιοχής σε ένα μετασχηματισμό συμμετρίας του Πίνακα 5.5, και η θέση κάθε σημείου χαρακτηρίζεται από τον αριθμό της.



Σχήμα 5.3 Σφαίρα 4n Οκταέδρου : Περιοχές Συμμετρίας



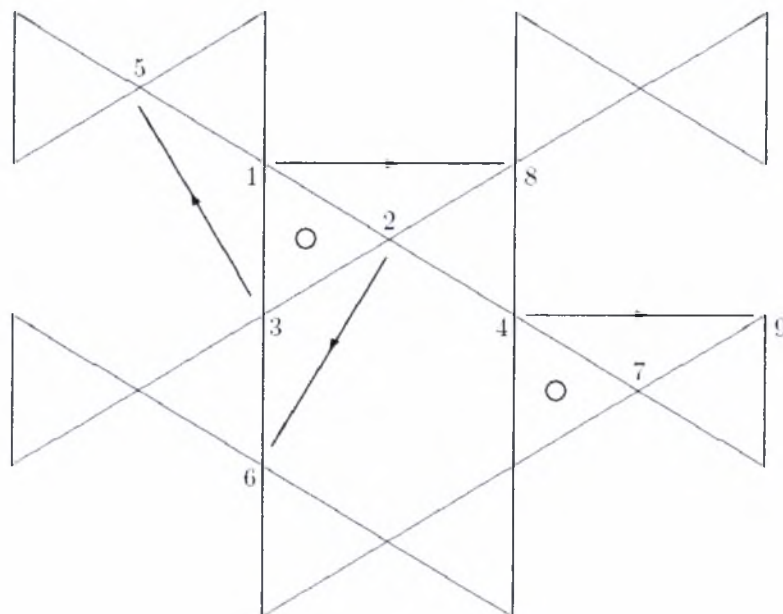
Σχήμα 5.4 4v Οκτάεδρο : Περιοχές Συμμετρίας Διπλού Στρώματος

Λόγω των εναλλασσόμενων τριγώνων, η περιοχή συμμετρίας για μια ΚΕΘ διπλού στρώματος έχει μέγεθος διπλάσιο αυτού της ΚΕΘ απλού στρώματος. Η περιοχή συμμετρίας της ΚΕΘ απλού στρώματος είναι το ένα τρίτο μιας οκταεδρικής όψης, έτσι η περιοχή συμμετρίας διπλού επιπέδου είναι η ένωση του ενός τρίτου μιας οκταεδρικής επιφάνειας όψης με το ένα τρίτο μιας γειτονικής επιφάνειας.

Το Σχήμα 5.3 δείχνει οπτικά πως παράγονται οι αντιστοιχίες σημείου του Πίνακα 5.6. Παραδείγματος χάριν, το  $P_6$  είναι στην ίδια θέση στην περιοχή συμμετρίας 2 όπως είναι το  $P_3$  στην περιοχή συμμετρίας 1. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο 6 μπορεί να ληφθεί με την εφαρμογή του μετασχηματισμού συμμετρίας 2 στο σημείο 3.

Το Σχήμα 5.5 δείχνει τις θέσεις των βασικών θλιπτήρων που συνθέτουν την κατασκευή. Ένα βέλος στο κέντρο κάθε θλιπτήρα δείχνει την κατεύθυνση από το εξωτερικό σημείο

του στο εσωτερικό σημείο του. Αυτοί οι θλιπτήρες είναι συγκεντρωμένοι γύρω από δύο βασικούς T - τρίποδες, των οποίων τα κέντρα εμφανίζονται εδώ με κύκλους.



Σχήμα 5.5 Σφαίρα 4n T - Οκτάεδρου : Δικτυωτά Μέλη

Ο Πίνακας 5.1 απαριθμεί τα μέλη αυτής της κατασκευής. Τα ακραία σημεία εκάστου μέλους παρουσιάζονται μαζί με τον σταθμικό παράγοντα τους (εάν θα εμφανιστεί στην αντικειμενική συνάρτηση) ή το μήκος τους (εάν είναι ένας περιορισμός). Τα εξωτερικά σημεία δείχνονται με το ίδιο έμβλημα όπως τα αντίστοιχα εσωτερικά σημεία με τη διαφορά ότι το έμβλημα των εξωτερικών σημείων έχει έναν τόνο.

Τα εσωτερικά και εξωτερικά δίκτυα τενόντων παράγονται με την προβολή των εναλλασσόμενων τριγώνων του Σχήματος 5.2 πάνω στις ομόκεντρες σφαίρες. Αυτό επιτρέπει τη χρησιμοποίηση των πινάκων Kenner<sup>[16]</sup> για την παραγωγή των συντεταγμένων των αρχικών σημείων. Η ακτίνα του εσωτερικού δικτύου (2.0) επιλέγεται έτσι ώστε τα μήκη των εσωτερικών τενόντων να είναι όλα περίπου ίσα με 1.0, και η ακτίνα του εξωτερικού δικτύου (4.0) επιλέγεται για να παραγάγει τα μήκη των θλιπτήρων περίπου ίσα με 3.0. Δεδομένου ότι αυτή η ΚΕΘ δεν διαθέτει τη κατοπτρική συμμετρία των γεωδαιτικών κατασκευών, ο πίνακας του Kenner πρέπει να επεκταθεί με την περιστροφή όλων των σημείων γύρω από τον άξονα z κατά 90°. Αυτό αντιστοιχεί

στην αύξηση της τιμής της εκεί γωνιακής παραμέτρου  $\varphi$  (που εδώ καλείται  $\theta$  σύμφωνα με την τυποποιημένη πρακτική) κατά  $90^\circ$ .

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Σχόλια
1	$P_{01}$	$P_8$	-	3.0	Θλιπτήρες
2	$P_{02}$	$P_6$	-	3.0	
3	$P_{03}$	$P_5$	-	3.0	
4	$P_{04}$	$P_9$	-	3.0	
5	$P_{02}$	$P_8$	2.0	-	Κύριοι μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
6	$P_{03}$	$P_6$	2.0	-	
7	$P_{01}$	$P_5$	2.0	-	
8	$P_{07}$	$P_9$	2.0	-	
9	$P_{01}$	$P_2$	2.0	-	Δευτερεύοντες μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
10	$P_{02}$	$P_3$	2.0	-	
11	$P_{03}$	$P_1$	2.0	-	
12	$P_{04}$	$P_7$	2.0	-	
13	$P_{01}$	$P_{02}$	-	1.0	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλισης
14	$P_{02}$	$P_{03}$	-	1.0	
15	$P_{03}$	$P_{01}$	-	1.0	
16	$P_{04}$	$P_{07}$	-	1.0	
17	$P_{02}$	$P_{08}$	0.4	-	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) δέσμησης
18	$P_{03}$	$P_{06}$	0.4	-	
19	$P_{01}$	$P_{05}$	0.4	-	
20	$P_{07}$	$P_{09}$	0.4	-	
21	$P_1$	$P_2$	1.0	-	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) δέσμησης
22	$P_2$	$P_3$	1.0	-	
23	$P_3$	$P_1$	1.0	-	
24	$P_4$	$P_7$	1.0	-	
25	$P_2$	$P_8$	-	1.0	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλισης
26	$P_3$	$P_6$	-	1.0	
27	$P_1$	$P_5$	-	1.0	
28	$P_7$	$P_9$	-	1.0	

Πίνακας 5.1: 4νΤ – Οκτάεδρο : Δικτυωτά Μέλη

Ο Πίνακας 5.2 περιγράφει την αντιστοιχία μεταξύ των βασικών σημείων και των σημείων του συστήματος συντεταγμένων του Kenner. Σημεία που έχουν περιστραφεί σημαίνονται με αστερίσκο. Οι τιμές συντεταγμένων που προκύπτουν για τα εσωτερικά και τα εξωτερικά σημεία συνοψίζονται στον Πίνακα 5.3. και τα αρχικά μήκη συνοψίζονται στον Πίνακα 5.4. Οι

μετασχηματισμοί συμμετρίας για οποιοδήποτε  $T$  - οκτάεδρο διπλού στρώματος απαριθμούνται στον Πίνακα 5.5. Δείχνει ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου συμμετρίας προέρχονται από εκείνες ενός βασικού σημείου κάτω από κάθε πιθανό μετασχηματισμό. Η παραγωγή των σημείων συμμετρίας από τα βασικά σημεία παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.6. Τα εξωτερικά σημεία ακολουθούν τις ίδιες συμμετρίες με τα εσωτερικά σημεία.

Σημείο	Προσδιορισμός κατά Kenner	Συντεταγμένες	
		$\theta$	$\varphi$
$P_1 (P'_1)$	1,0	0.0	18.4349488
$P_2 (P'_2)$	1,1	90.0	18.4349488
$P_3 (P'_3)$	2,1	45.0	35.2643897
$P_4 (P'_4)$	2,1*	135.0	35.2643897

Πίνακας 5.2:  $4νT$  – Οκτάεδρο : Γωνιακές Συντεταγμένες Σημείων

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	0.632456	0.000000	1.897367
$P_2$	0.000000	0.632456	1.897367
$P_3$	0.816497	0.816497	1.632993
$P_4$	-0.816497	0.816497	1.632993
$P'_1$	1.264911	0.000000	3.794733
$P'_2$	0.000000	1.264911	3.794733
$P'_3$	1.632993	1.632993	3.265986
$P'_4$	-1.632993	1.632993	3.265986

Πίνακας 5.3:  $4νT$  – Οκτάεδρο : Αρχικές Συντεταγμένες Βασικών Σημείων



Μέλος #	Μήκος	Μέλος #	Μήκος
1	2.683281	15	1.755484
2	3.109991	16	2.309401
3	3.055050	17	1.788854
4	3.109990	18	2.309401
5	2.366432	19	1.755484
6	2.581988	20	1.755484
7	2.353904	21	0.894428
8	2.353903	22	0.877743
9	2.366432	23	0.877743
10	2.353904	24	1.154700
11	2.353903	25	0.894428
12	2.581988	26	1.154700
13	1.788854	27	0.877743
14	1.755484	28	0.877743

Πίνακας 5.4: 4νΤ – Οκτάεδρο : Αρχικά Μήκη Μελών

Αριθμός Μετασχηματισμού	$x$	$y$	$z$
1	$x$	$y$	$z$
2	$y$	$z$	$x$
3	$z$	$x$	$y$
4	$-x$	$-y$	$z$
5	$-y$	$z$	$-x$
6	$z$	$-x$	$-y$
7	$-x$	$y$	$-z$
8	$y$	$-z$	$-x$
9	$-z$	$-x$	$y$
10	$x$	$-y$	$-z$
11	$-y$	$-z$	$x$
12	$-z$	$x$	$-y$

Πίνακας 5.5: T – Οκτάεδρο : Μετασχηματισμοί Συμμετρίας

Σημείο	Συντεταγμένες			Βασικό Σημείο	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P_5$	$-x_4$	$-y_4$	$z_4$	$P_4$	4
$P_6$	$y_3$	$z_3$	$x_3$	$P_3$	2
$P_7$	$-z_4$	$-x_4$	$y_4$	$P_4$	9
$P_8$	$-x_1$	$-y_1$	$z_1$	$P_1$	4
$P_9$	$-z_2$	$-x_2$	$y_2$	$P_2$	9

Πίνακας 5.6:  $4vT$  – Οκτάεδρο : Αντιστοιχίες Συμμετρικών Σημείων

Η στρατηγική για τον υπολογισμό της κατασκευής έγκειται στην ελαχιστοποίηση ένας σταθμικού συνδυασμού των μεσοστρωματικών και των τενόντων δέσμησης, υποκείμενων σε περιορισμούς των μηλών των θλιπτήρων και των ελκυστήρων σύγκλισης. Γίνεται μια αρχική επανάληψη χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ποινής ( $\bar{\mu}=10^5$ ) σε συνδυασμό με τη μέθοδο PARTAN,

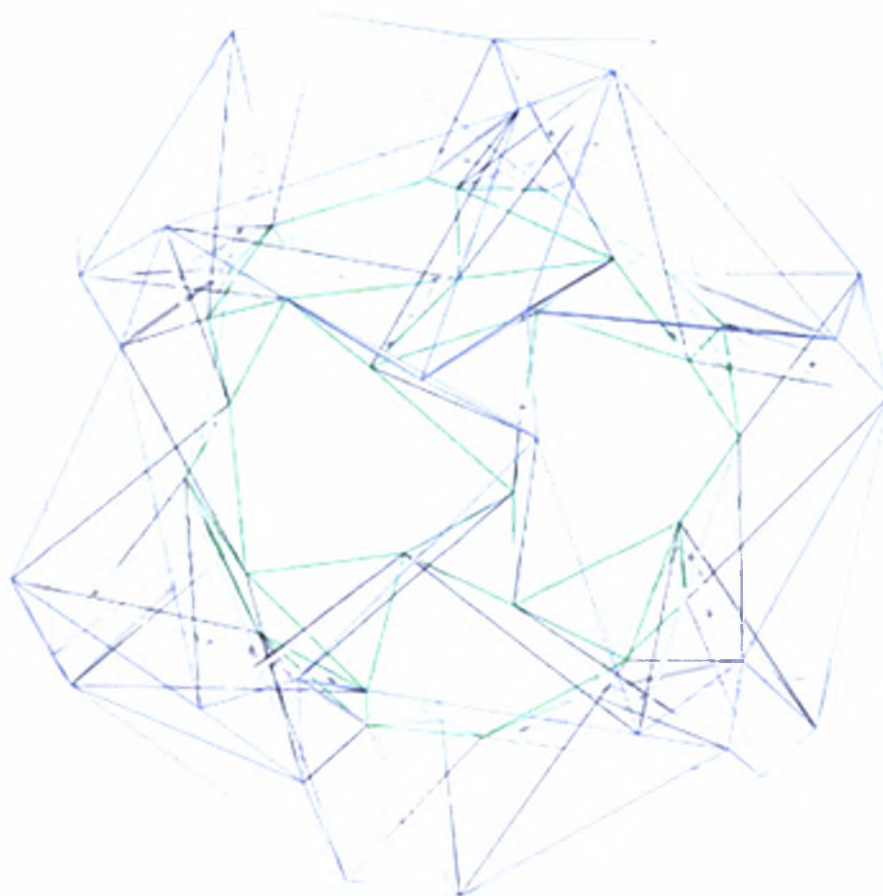
καθόσον η ακριβής μέθοδος θα συναντούσε δυσκολίες λόγω της απόκλισης μεταξύ των αρχικών τιμών και των περιορισμών. Μετά από αυτό, πραγματοποιούνται τέσσερις επαναλήψεις της ακριβούς μεθόδου σε συνδυασμό με PARTAN οδηγώντας τις τιμές σε σύγκλιση. Οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις τιμές των ανεξάρτητων συντεταγμένων βρέθηκαν όλες μικρότερες του  $10^{-6}$ . Οι ανεξάρτητες αυτές συντεταγμένες είναι οι  $x_1, z_2, y_3, z_4, x'_1, z'_1, z'_2, x'_3, y'_3, z'_3, x'_4$  και  $y'_4$ .

Στον Πίνακα 5.7 παρουσιάζονται οι τελικές τιμές των μηκών και οι σχετικές δυνάμεις, ο υπολογισμός των οποίων αναλύεται στην παράγραφο 2 του Κεφαλαίου 7. Στον Πίνακα 5.8 παρουσιάζονται οι τελικές τιμές για τις συντεταγμένες των βασικών σημείων, και στο Σχήμα 5.6 απεικονίζεται το αποτέλεσμα του τελικού σχεδιασμού. Τούτο παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα παρεμβολών, που εξετάζονται και διορθώνονται στην παράγραφο 8.2.3.

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
1	3.000000	-11.992	15	3.000000	3.112
2	3.000000	-12.042	16	3.000000	4.691
3	3.000000	-11.648	17	3.000000	1.054
4	3.000000	-11.991	18	3.000000	1.060
5	2.443023	4.886	19	2.443023	1.162
6	2.436281	4.873	20	2.436281	1.154
7	2.495792	4.992	21	2.495792	1.203
8	2.422962	4.846	22	2.422962	1.252
9	2.074289	4.149	23	2.074289	1.324
10	2.068446	4.137	24	2.068446	1.293
11	2.080869	4.162	25	2.080869	4.981
12	2.046919	4.094	26	2.046919	6.311
13	1.000000	3.443	27	1.000000	4.638
14	1.000000	6.359	28	1.000000	8.543

Πίνακας 5.7: 4νΤ – Οκτάεδρο : Τελικά Μήκη και Δυνάμεις Μελών

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.010025	-0.112004	1.942398
$P_2$	-0.067774	0.387035	2.133503
$P_3$	0.769352	1.139748	1.584713
$P_4$	-0.712330	1.046316	1.746339
$P'_1$	1.569404	0.631114	3.383602
$P'_2$	0.616675	0.818931	3.622416
$P'_3$	1.177704	1.533667	3.204803
$P'_4$	-1.699080	2.137517	2.514813

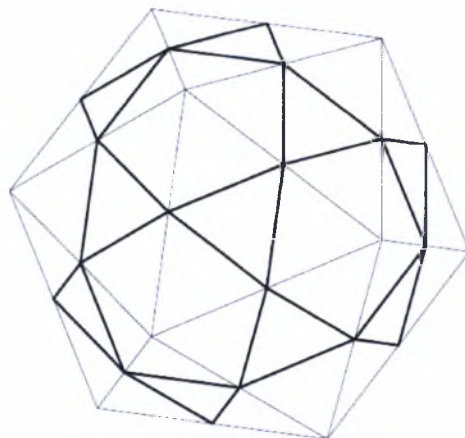
Πίνακας 5.8:  $4vT$  – Οκτάεδρο : Τελικές Συντεταγμένες Βασικών ΣημείωνΣχήμα 5.6  $4vT$  – Οκτάεδρο : Τελικός Σχεδιασμός

#### 5.4 Δίκτυα Εξαγώνου / Τριγώνου

Μία δεύτερη προσέγγιση στο σχεδιασμό δικτυωτών ΚΕΘ στηρίζεται σε δίκτυα, στα οποία τρίγωνα εναλλάσσονται με εξαγωνα και πεντάγωνα, παρά τρίγωνα με τρίγωνα όπως στην πρώτη προσέγγιση. Ένα πλεονέκτημα της τρέχουσας προσέγγισης από αυτή της παραγράφου 5.3, είναι ότι λειτουργεί με όλες τις συμμετρίες. Πέραν δε των κατακερματισμών τάξης I και II του οκταέδρου, μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και γεωδαιτικοί κατακερματισμοί του τετραέδρου και του εικοσαέδρου.

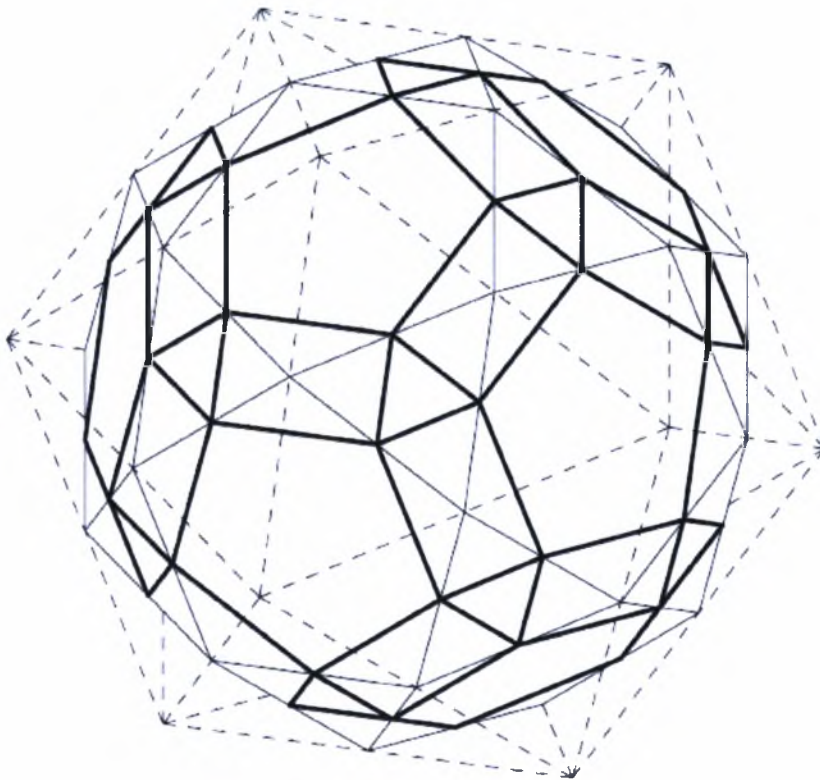
Τα γεωδαιτικά δίκτυα χρησιμοποιούνται εδώ μόνο ως το πρώτο βήμα για τον σχηματισμό ενός δικτύου. Στα τρίγωνα του γεωδαιτικού δικτύου, δίδεται έμφαση στα εξαγωνα, που καλύπτουν τα κενά μεταξύ των τριγώνων. Κατά συνέπεια, τα τρίγωνα αυτά και τα μεταξύ τους κενά διαμορφώνουν ένα σύστημα εναλλασσόμενων τριγώνων και εξαγώνων εκτός από τις κορυφές του πολυγώνου βάσης, όπου ένα τρίγωνο, τετράγωνο ή πεντάγωνο αντικαθιστά ένα εξαγώνο.

Για παράδειγμα, ας παρατηρηθεί το Σχήμα 5.7, όπου απεικονίζεται ένα 2n εικοσαέδρο. Σε αυτή τη χαμηλή συχνότητα, τα τρίγωνα σε κάθε εικοσαεδρική όψη περιβάλλουν κενά σχήματος πενταγώνου, που αντιστοιχούν στις κορυφές του εικοσαέδρου βάσης. Στις υψηλότερες συχνότητες, μπορεί να εμφανιστούν και εξαγωνικά κενά στις ακμές (όπως στο Σχήμα 4.2) ή / και στις όψεις του πολυέδρου βάσης. Σε τέτοιες καταστάσεις, τα εξαγωνικά κενά προεξάρχουν, καθόσον τα περιστασιακά πενταγωνικά, τετραγωνικά ή τριγωνικά κενά εμφανίζονται μόνο στις κορυφές του πολυέδρου βάσης. Ως εκ τούτου, το τελικό δίκτυο αναφέρεται ως δίκτυο εξαγώνου / τριγώνου, ακόμη κι αν στη χαμηλότερη 2n συχνότητα δεν εμφανίζονται καθόλου εξαγωνα.



Σχήμα 5.7 2ν Εικοσάεδρο

Παρά ταύτα, αυτό το γεωδαιτικό δίκτυο δεν είναι κατάλληλο για μια δικτυωτή ΚΕΘ βασισμένη σε  $T$  – τρίποδα, αφού γειτονικά πολύπλευρα μοιράζονται ακμές παρά απλά κάποια σημεία. Όμως, ένα κατάλληλο δίκτυο μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί, με το να εγγράψει κανείς μια μικρότερη εκδοχή εκάστου πολυπλεύρου εντός του πολυπλεύρου αυτού, συνδέοντας με κατάλληλο τρόπο τα μέσα των πλευρών του. Η τεχνική αυτή παρουσιάζεται για ένα 2ν εικοσάεδρο στο Σχήμα 5.8.

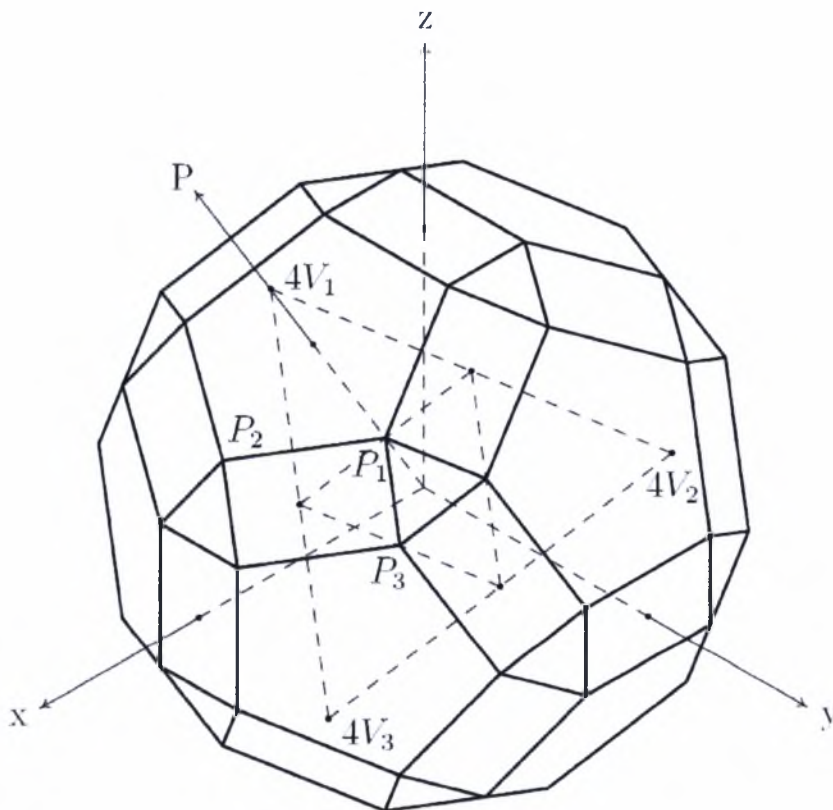


Σχήμα 5.8 Δίκτυο ΕΘ Εξαγώνου – Τριγώνου εγγεγραμμένο σε 2ν Εικοσάεδρο

Όπως στην παράγραφο 5.3, αυτό το δίκτυο προβάλλεται σε μία σφαίρα και αντιγράφεται για να διαμορφώσει ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό δίκτυο. Τα τρίγωνα στο εξωτερικό δίκτυο μορφώνουν τις κορυφές  $T$  - τριπόδων που δείχνουν προς τα έξω (τα εξωτερικά τρίγωνα σύγκλισης), ενώ τα εξάπλευρα στο εξωτερικό δίκτυο μορφώνουν τους τένοντες που τους δεσμεύουν μαζί (τα εξωτερικά εξάπλευρα δέσμευσης). Στην εσωτερική σφαίρα, τα εξάπλευρα μορφώνουν τις κορυφές  $T$  - εξαπόδων που κοιτούν προς τα μέσα (τα εσωτερικά εξάπλευρα

δέσμευσης), και τα τρίγωνα μορφώνουν τους θλιπτήρες που τους δεσμεύουν μεταξύ τους (εσωτερικά τρίγωνα δέσμευσης). Οι θλιπτήρες και οι αντίστοιχοι τένοντές τους (οι κύριοι και οι δευτερεύοντες μεσοστρωματικοί) συνδέουν τα τρίγωνα στο εξωτερικό δίκτυο με τα εξάπλευρα στο εσωτερικό δίκτυο. Όπως και πριν, οι θλιπτήρες τοποθετούνται έτσι ώστε να ενισχύεται η επίδραση αποσυστροφής των τενόντων δέσμευσης.

Στο Σχήμα 5.9 απεικονίζεται αυτό το δίκτυο όπως αντιπροσωπεύεται στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Αυτή η αντιπροσώπευση προορίζεται να εκμεταλλευτεί τις οκταεδρικές συμμετρίες εικοσαέδρου όσο το δυνατόν περισσότερο. Κατά συνέπεια, πολλά από τα σημεία συμμετρίας είναι απλά προσημασμένες μεταθέσεις των βασικών σημείων. Παρά ταύτα, για την αποτύπωση της εικοσαεδρικής συμμετρίας, πρέπει να εισαχθεί ένα γενικό μητρώο μετασχηματισμού.



Σχήμα 5.9 2v T – Εικοσαέδρο Εξαγώνου – Τριγώνου : Σύστημα Συντεταγμένων

Στο παραπάνω Σχήμα, ο άξονας που ονομάζεται  $P$  αντιπροσωπεύει τον άξονα πενταπλής συμμετρίας ως προς τον οποίο μετασχηματίζεται η κατασκευή. Αυτός ο άξονας

διέρχεται από μια κορυφή του μοναδιαίου μήκους πλευράς εικοσαέδρου αναφοράς. Οι συντεταγμένες της κορυφής αυτής είναι  $(1/2, 0, r/2)$  όπου  $r \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$  είναι «η χρυσή αναλογία»<sup>\*</sup>. Αυτός ο μετασχηματισμός απαιτείται για να εκφράσει το  $P_2$  με όρους του βασικού σημείου  $P_1$ . Το  $P_2$  παράγεται από το  $P_1$  μέσω περιστροφής της κατασκευής κατά  $-72^\circ$  περί τον άξονα P ( $72^\circ$  είναι η επίκεντρη γωνία μιας πλευράς του κανονικού πενταγώνου,  $5 \times 72 = 360$ ). Ανάλογα, λόγω της ευκολίας που παρέχουν οι Καρτεσιανές συντεταγμένες, το  $P_3$  είναι μια απλή μετάθεση του  $P_1$ ,  $P_3 = (x1, z1, y1)$ . Το μητρώο που επιτυγχάνει τον ανωτέρω μετασχηματισμού είναι<sup>[18]</sup>:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{r}{2} & \frac{1}{2r} \\ \frac{-r}{2} & \frac{1}{2r} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2r} & -\frac{1}{2} & \frac{r}{2} \end{bmatrix}$$

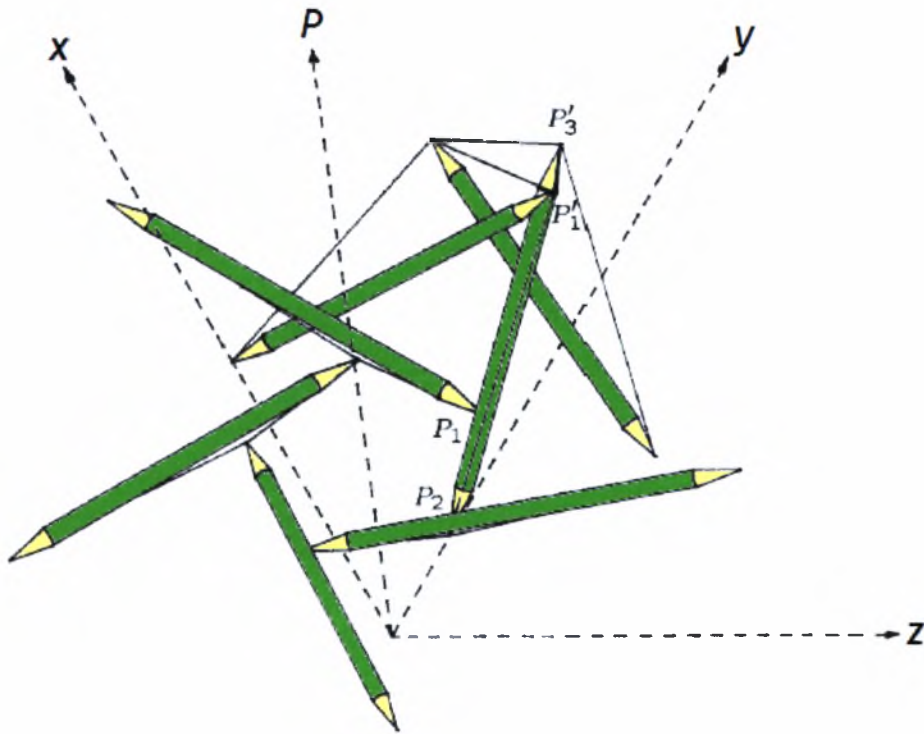
Κατά συνέπεια, κάθε συντεταγμένη του  $P_2$  εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων του  $P_1$ . Στο μοντέλο που εκτίθεται εδώ, η αντικατάσταση αυτή θα μπορούσε να γίνει σε όλους τις μαθηματικές εκφράσεις. Εντούτοις, είναι απλούστερο να θεωρηθεί το  $P_2$  ως βασικό σημείο και να εισαχθεί το μητρώο μετασχηματισμού υπό μορφή τριών περιορισμών μέσω του οποίου εκφράζονται τις συντεταγμένες του  $P_2$  ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων του  $P_1$ .

Στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζονται τα βασικά μέλη της κατασκευής καθώς επίσης και μία περίληψη μερικών από τα μέλη συμμετρίας, που ενσωματώνονται στο σύστημα συντεταγμένων, που χρησιμοποιείται για να αναλύσει την κατασκευή. Η χαμηλή συχνότητα της κατασκευής σημαίνει ότι τα βασικά μέλη προς παρακολούθηση είναι πολύ λίγα. Αφ' ετέρου, η υψηλή τάξη της συμμετρίας του εικοσαέδρου σημαίνει ότι η κατασκευή συνολικά θα καλύψει για τόσο χώρο, όσο μια κατασκευή που βασίζεται σε έναν πιο περίπλοκα 4n κατακερματισμό του οκταέδρου. Αυτή η απλότητα λόγω συμμετρίας απλά είναι μία ιδιότητα ευνοϊκή για τις εικοσαεδρικές κατασκευές. Ο Πίνακας 5.9 συνοψίζει τον κατακερματισμό μελών

<sup>\*</sup> γνωστότερη ως  $\varphi$ , και ορίζεται μαθηματικά ως  $(\alpha+\beta)/\alpha = \alpha/\beta = \varphi$ ,  $\varphi > 0$ , που ισοδύναμα σημαίνει ότι το  $\varphi$  είναι η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης  $1 + (1/\varphi) = \varphi \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = r$



συμπεριλαμβανομένων των σταθμικών παραγόντων βαρών για τα μέλη που περιέχονται στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς μήκους για τα υπόλοιπα μέλη.



Σχήμα 5.10 2v T – Εικοσάεδρο Εξαγώνου – Τριγώνου : Δικτυωτά Μέλη

Μέλος #	Ακραία Σημεία	Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Σχόλια
1	$P'_3$ $P_2$	-	3.0	Θλιπτήρες
2	$P'_1$ $P_2$	2.00	-	Κύριοι μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
3	$P'_3$ $P_1$	2.00	-	Δευτερεύοντες μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
4	$P'_1$ $P'_3$	-	1.0	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλισης
5	$P'_1$ $P'_2$	0.45	-	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) δέσμησης
6	$P_1$ $P_3$	1.00	-	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) δέσμησης
7	$P_1$ $P_2$	-	1.0	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλισης

Πίνακας 5.9 : T - Εικοσάεδρο Εξαγώνου/Τριγώνου : Δικτυωτά Μέλη

Το πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού έχει πλέον ως εξής :

ελαχιστοποίηση (ως προς  $P_1, P'_1, P_2, P'_2$ )

της  $\otimes \quad 0 \equiv 2(|P'_1 - P_2|^2 + |P'_3 - P_1|^2) + \frac{2}{5}|P'_1 - P'_2|^2 + |P_1 - P_3|^2$  που υπόκειται

σε

Περιορισμούς ελκυστήρων :

$$1 \geq |P'_1 - P'_3|^2$$

$$1 \geq |P_1 - P_2|^2$$

Περιορισμούς θλιπτήρων :

$$-9 \geq -|P'_3 - P_2|^2$$

Περιορισμούς συμμετρίας :

$$P_2 = TP_1$$

$$P'_2 = TP'_1$$

Οι τελευταίες δύο εκφράσεις περιορισμών αντιπροσωπεύουν έξι (6) συνολικά γραμμικούς περιορισμούς και όλοι είναι εικοσαεδρικοί μετασχηματισμοί συμμετρίας.

Η επόμενη ενέργεια που απαιτείται είναι η εύρεση των αρχικών τιμών συντεταγμένων για τους υπολογισμούς. Αυτά αντλούνται από τις συντεταγμένες των κορυφών του μοναδιαίου εικοσαέδρου, ειδικότερα δε από τις συντεταγμένες του τριγώνου εικοσαέδρου, που παράγεται από τις μεταθέσεις αξόνων που βρίσκονται στο θετικό όγδοο του χώρου. Ο Πίνακας 5.10 συνοψίζει αυτές τις τιμές συντεταγμένων. Οι θέσεις  $4V_1$ ,  $4V_2$  και  $4V_3$  φαίνονται στο Σχήμα 5.9. Παίρνοντας τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, που ορίζεται από τα τρία αυτά σημεία, οδηγούμεθα στις κορυφές ενός τριγώνου που ανήκει σε ένα εικοσαδεκαέδρου\* κλίμακας  $\frac{1}{2}$  (του αντίστοιχου μοναδιαίου). Παίρνοντας τα μέσα αυτού του δεύτερου τριγώνου και πολλαπλασιάζοντας επί τέσσερα (4) οδηγούμεθα στις κορυφές ενός τριγώνου, που ανήκει στην

\* Πρόκειται για ένα πολύεδρο με δώδεκα τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές έδρες,



μοναδιαία έκδοση του δικτύου αναφοράς για την ΚΕΘ που αναλύεται εδώ. Οι συντεταγμένες του σημείου που απαιτούνται είναι:

$$\left( \frac{2+r}{2}, \frac{1+r}{2}, \frac{1+2r}{2} \right)$$

Τούτο χρησιμοποιείται σαν αρχική τιμή για το  $P_1$ . Η αρχική τιμή για το  $P'_1$  υπολογίζεται μέσω κλιμακωτής μεταβολής των συντεταγμένων του  $P_1$  έως ότου ικανοποιηθεί προσεγγιστικά ο περιορισμός θλιπτήρα. Η τιμή της κλίμακας βρέθηκε εδώ ίση με 1.5004. Αυτές δε οι αρχικές τιμές συντεταγμένων παρατίθενται στον Πίνακα 5.11.

Κορυφή	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$V_1$	1/2	0	$r/2$
$V_2$	0	$r/2$	1/2
$V_3$	$r/2$	1/2	0

Πίνακας 5.10: Μοναδιαίο εικοσάεδρο : Συντεταγμένες επιλεγμένων σημείων

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.809017	1.309017	2.118034
$P'_1$	2.713525	1.963525	3.177051

Πίνακας 5.11: 2ν Τ – εικοσάεδρο Εξαγώνου/Τριγώνου : Αρχικές Συντεταγμένες Βασικών Σημείων

Δεδομένου ότι το  $P_2$  και το  $P'_2$  αντιμετωπίζονται ως μεταβλητές ελέγχου επίσης, οι αρχικές τιμές πρέπει να παρασχεθούν και για αυτά. Οι αρχικές τιμές τους υπολογίζονται με τον πολλαπλασιασμό του  $P_1$  και του  $P'_1$  με το  $T$ . Οι συντεταγμένες του  $P_3$  που εκφράζεται με όρους του #  $P_1$  είναι  $(z_1, x_1, y_1)$ . Το  $P_3'$  έχει την ίδια σχέση με το  $P'_1$ . Αυτές οι τελευταίες σχέσεις καθορίζουν πλήρως το μοντέλο. Τούτο επιλύεται χρησιμοποιώντας μια παρόμοια προσέγγιση με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για το 4ν Τ - οκτάεδρο της παραγράφου 5.3. Μία αρχική επανάληψη γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο ποινήs ( $\bar{\mu} = 10^5$ ) από κοινού με την μέθοδο Fletcher-Reeves. Μετά από δέκα επαναλήψεις της ακριβούς μεθόδου από κοινού με αυτή των Fletcher-Reeves οδηγούμεθα σε

σύγκλιση. Οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις τιμές των ανεξάρτητων συντεταγμένων είναι όλες μικρότερες του  $10^{-6}$ , ενώ οι καθαρές αποστάσεις μεταξύ μελών βρέθηκαν όλες μεγαλύτερες από 10.5 μονάδες του μοντέλου.

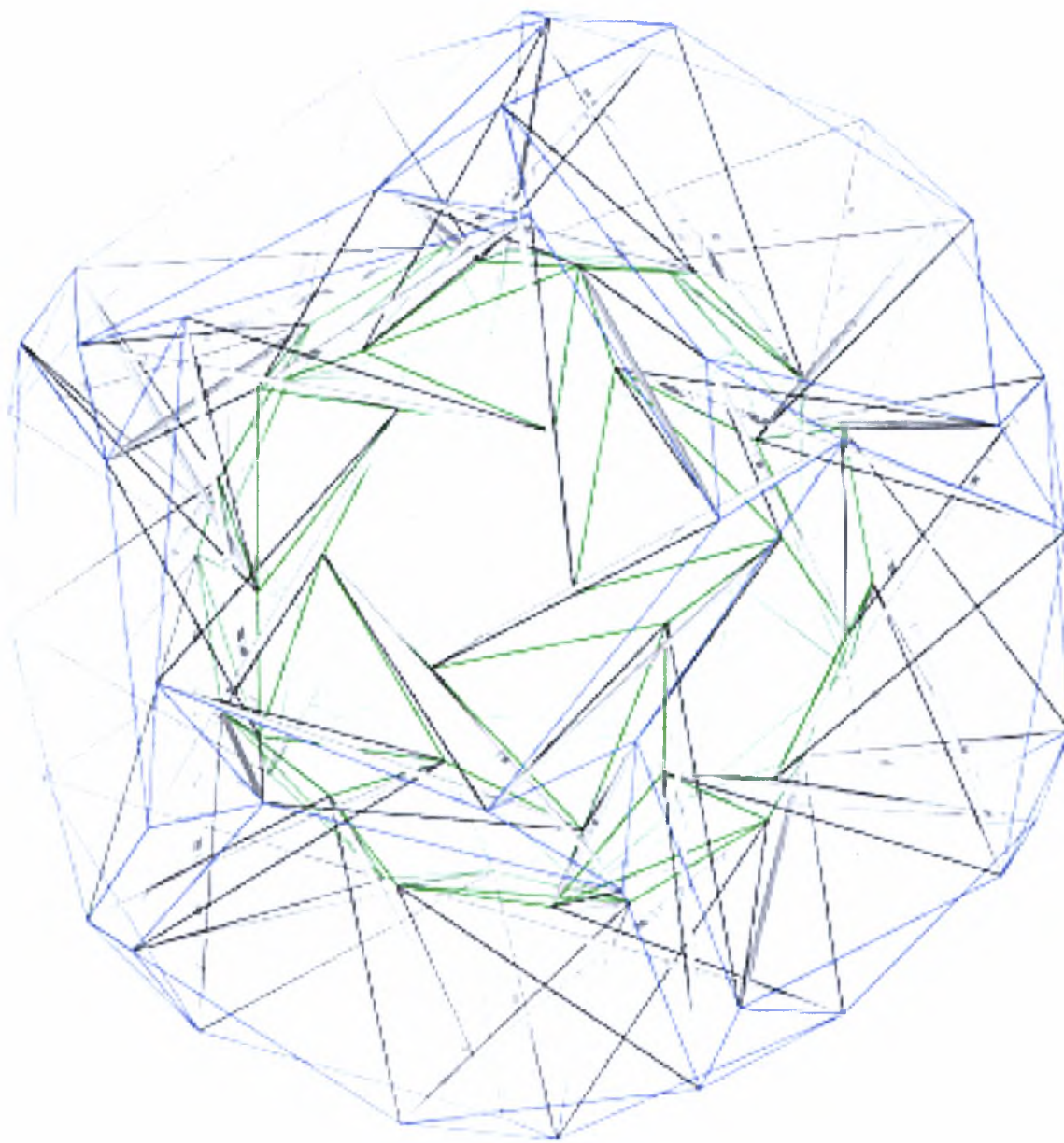
Ο Πίνακας 5.12 παρουσιάζει τις τιμές για τα τελικά μήκη και τις σχετικές δυνάμεις (όπως αυτές υπολογίζονται σύμφωνα με τη μεθοδολογία της παραγράφου 2 του Κεφαλαίου 7), ο Πίνακας 5.13 τις τελικές τιμές για τις συντεταγμένες των βασικών σημείων, και το Σχήμα 5.11 το αποτέλεσμα του τελικού σχεδιασμού.

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
1	3.000000	-11.325
2	2.395526	4.791
3	2.017577	4.035
4	1.000000	4.032
5	2.241086	1.008
6	1.471948	1.472
7	1.000000	5.899

Πίνακας 5.11: 2ν T – Εικοσάεδρο Εξαγώνου/Τριγώνου : Τελικά Μήκη Μελών και Σχετικές Δυνάμεις

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_i$	1.637512	0.467068	1.294325
$P'_i$	2.427554	1.611718	1.991202

Πίνακας 5.11: 2ν T – εικοσάεδρο Εξαγώνου/Τριγώνου : Τελικές Τιμές Συντεταγμένων



Σχήμα 5.11 2n T – Εικοσάεδρο Εξαγώνου – Τριγώνου : Τελικός Σχεδιασμός

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΘΟΛΟΙ ΕΘ ΔΙΠΛΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

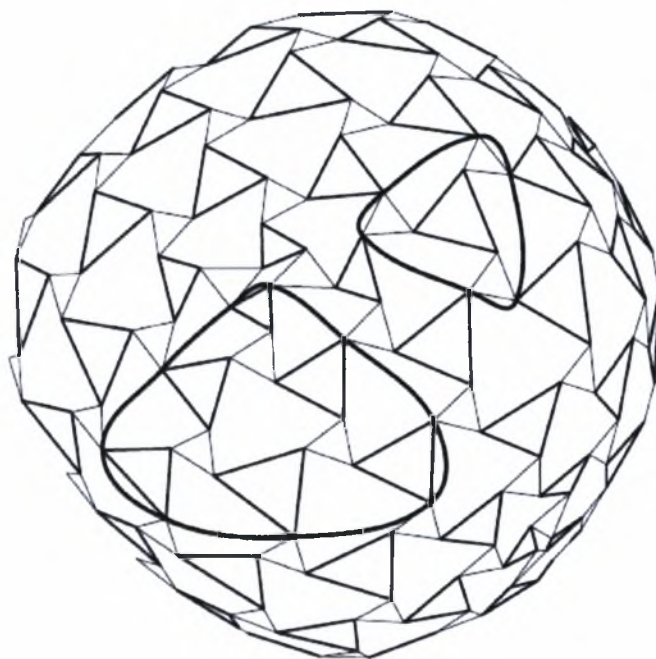
### 6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Κεφάλαιο, εκτίθεται μια μέθοδος κολόβωσης σφαιρικών κατασκευών ελκυστήρων – θλιπτήρων διπλού στρώματος, καθόσον αυτές παρουσιάζουν κατά τεκμήριο μεγάλα πλεονεκτήματα τόσο αισθητικά, λειτουργικά αλλά και δομικά, γεγονός που, πέραν άλλων, πηγάζει και από τις αντίστοιχες ιδιότητες των θόλων διπλού στρώματος.

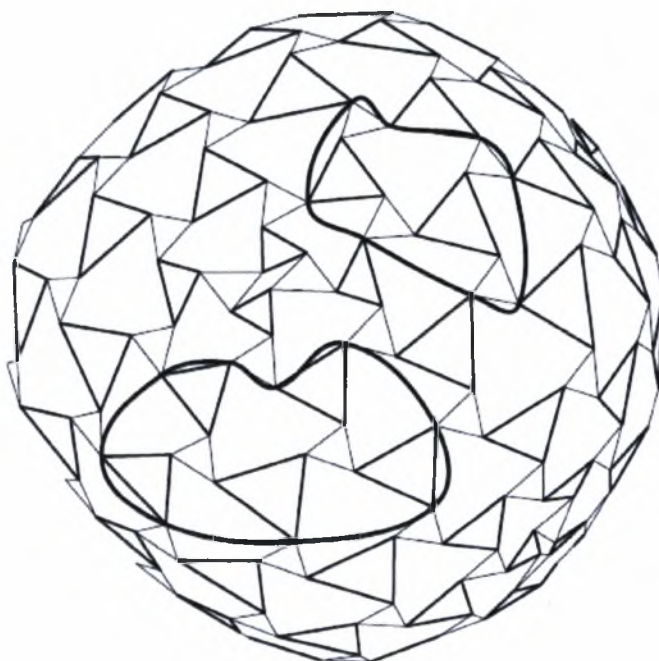
Όσον αφορά την κολόβωση μιας ενός στρώματος σφαιρικής ΚΕΘ, αυτή συνίσταται στην αφαίρεση μιας ομάδας εφαπτόμενων στις κορυφές τριγώνων ή άλλων χαμηλής συχνότητας πολυπλεύρων και στην αντικατάστασή τους με ένα μοναδικό πολύπλευρο υψηλής συχνότητας. Αυτό το υψηλής συχνότητας πολύπλευρο, είναι εφαπτόμενο με τα υπόλοιπα πολύπλευρα στις κορυφές που ήρθαν σε επαφή από τα αφαιρεθέντα πολύπλευρα.

Για να επιτευχθεί ο σχεδιασμός μιας λειτουργικής ΚΕΘ, η κολόβωση πρέπει να γίνει έτσι ώστε κάθε κορυφή του νέου πολύπλευρου να είναι εφαπτόμενη με ακριβώς μια κορυφή ενός από τα παραμένοντα αρχικά πολύπλευρα. Καταστάσεις όπου το νέο πολύπλευρο εφάπτεται σε περισσότερα από ένα σημεία με ένα από τα αρχικά πολύπλευρα δεν είναι αποδεκτές. Τούτο περιορίζει σημαντικά τις ομάδες των πολυπλεύρων που μπορούν να αφαιρεθούν. Στα Σχήματα 6.1 και 6.2 παρουσιάζονται οι αποδεκτές και μη ομάδες σύμφωνα με τα ανωτέρω. Ακόμη και με αυτόν τον περιορισμό, οι απλού στρώματος κολοβωμένες ΚΕΘ δεν έχουν ιδιαίτερη πρακτική σημασία, καθόσον η διοχέτευση (επαναδιάταξη) των θλιπτήρων στη γειτονιά της κολόβωσης οδηγεί αμετάβλητα σε δυσεπίλυτα προβλήματα παρέμβασης.

Για τις ΚΕΘ διπλού στρώματος, όπου το δίκτυο τενόντων θεωρείται ως εναλλασσόμενο σύνολο πολυπλεύρων, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 5.2, ένας πρόσθετος περιορισμός είναι απαραίτητος: τα εναπομείναντα πολύπλευρα, που εφάπτονται στο νέο πολύπλευρο πρέπει όλα να ανήκουν στην ίδια ομάδα εναλλαγής. Αυτό εξασφαλίζει ότι το νέο πολύπλευρο είναι ένα σαφώς καθορισμένο μέλος μιας ομάδας εναλλαγής, που εναλλάσσεται με αυτό, που τα υπόλοιπα εναπομείναντα πολύπλευρα εφάπτονται. Επιπλέον, το πρόβλημα με την επαναδιάταξη θλιπτήρων που εμφανίζεται στις απλού στρώματος κατασκευές, αποφεύγεται στις αντίστοιχες διπλού στρώματος κατασκευές, εάν το πολύπλευρο κολόβωσης επιλέγεται έτσι ώστε να προσεγγίζει ένα *μεγάλο κύκλο*, δηλαδή το πολύπλευρο δεν διαθέτει αιχμηρές στροφές.



Σχήμα 6.1 Ισχύουσες (έγκυρες) Ομάδες Κολόβωσης  $E\Theta$



Σχήμα 6.2 Μη Ισχύουσες (μη έγκυρες) Ομάδες Κολόβωσης  $E\Theta$

Ένα σημαντικό πρόβλημα που δημιουργείται από την εφαρμογή της κολόβωσης είναι η απώλεια της συμμετρίας. Αυτό έχει την ανεπιθύμητη επίδραση μιας μεγάλης αύξησης του μεγέθους του προβλήματος προγραμματισμού, του οποίου λύση απαιτείται για να παραγάγει μια κατασκευή σε μια δεδομένη συχνότητα. Δυστυχώς, το πρόβλημα αυτό δεν επιδέχεται απλουστεύσεων και πρέπει να αντιμετωπιστεί αυτούσιο.

Η μεγάλη κολόβωση που απαιτείται για να παραχθεί μια βάση για έναν θόλο μπορεί επίσης να προκαλέσει μια κατασκευή να παρεκκλίνει σημαντικά από την αρχική διαμόρφωσή της. Έτσι, για αυτόν τον τύπο κολόβωσης, είναι συχνά επιθυμητό να καθοριστούν όλα τα σημεία του νέου πολυπλεύρου και πιθανώς ακόμη να προσαρμοστούν περαιτέρω ώστε να είναι συνεπίπεδα. Τέτοιοι περιορισμοί μπορούν επίσης να είναι επιθυμητοί ακριβώς από την άποψη της διευκόλυνσης των διαδικασιών σχεδιασμού και την μόρφωση μιας βάσης (θεμελίωσης) για έναν θόλο ΕΘ.

Η σύνδεση του θόλου με τη βάση του σημαίνει ότι τα συγκεκριμένα σημεία που λειτουργούν ως στηρίξεις πρέπει να παραμείνουν στις συγκεκριμένες θέσεις τους. Μια τέτοια κατασκευή δεν είναι πλέον μια ΚΕΘ σύμφωνα με τους συμβατικούς ορισμούς της, καθόσον παύει να είναι αυτο – στηριζόμενη. Η εισαγωγή αναρτήρων για να μεγαλώσει την δυσκαμψία της σύνδεση μεταξύ της κατασκευής και της επιφάνειας στην οποία στηρίζεται αποτελεί την ενδεδειγμένη λύση.

## **6.2. Διαδικασία Σχεδιασμού Θόλων ΕΘ Διπλού Στρώματος**

Τα ακόλουθα βήματα εφαρμόζονται για τον σχεδιασμό ενός θόλου ΕΘ διπλού στρώματος, όπως αυτός περιγράφεται στην Παράγραφο 6.1:

**Βήμα 1** Επίλυση του προβλήματος προγραμματισμού ΕΘ για τη σφαίρα.

**Βήμα 2** Εφαρμογή των τοπολογικών αλλαγών που απαιτούνται για την κολόβωση.

**Βήμα 3** Ρύθμιση των σημείων βάσης (των σημείων του πολυπλεύρου κολόβωσης, όπως αυτά καταδεικνύονται στο δίκτυο εσωτερικών τενόντων), έτσι ώστε να βρίσκονται ομοιόμορφα κατανεμημένα επί ενός κύκλου,- ο οποίος προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλλίτερα τις μη προσαρμοσμένες θέσεις τους στην αρχική σφαίρα.

**Βήμα 4** Προσθήκη αναρτήρων.

**Βήμα 5** Χρησιμοποιώντας τις τιμές συντεταγμένων από τη σφαίρα ως αρχικές τιμές, επίλυση του προβλήματος προγραμματισμού ΕΘ για τον θόλο.

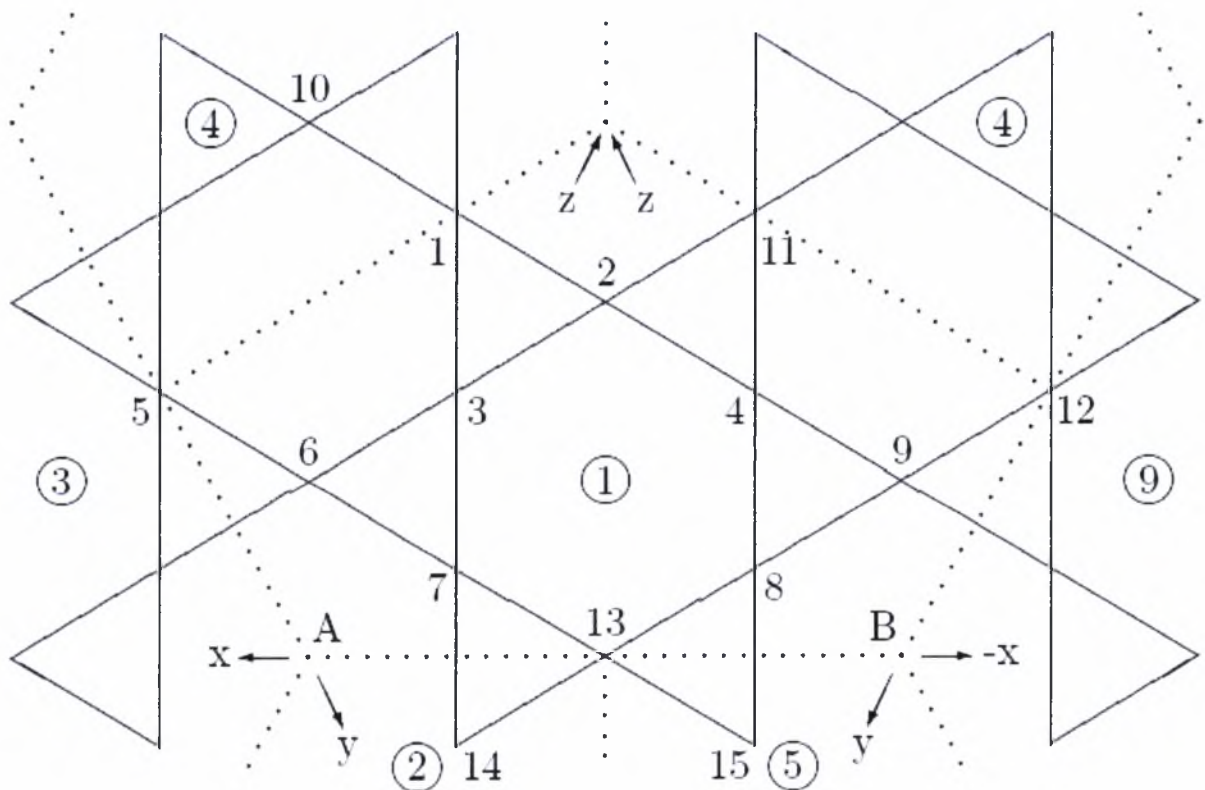


**Βήμα 6** Διενέργεια των απαραίτητων προσαρμογές για την διόρθωση προβλημάτων δυνάμεων και παρεμβολών.

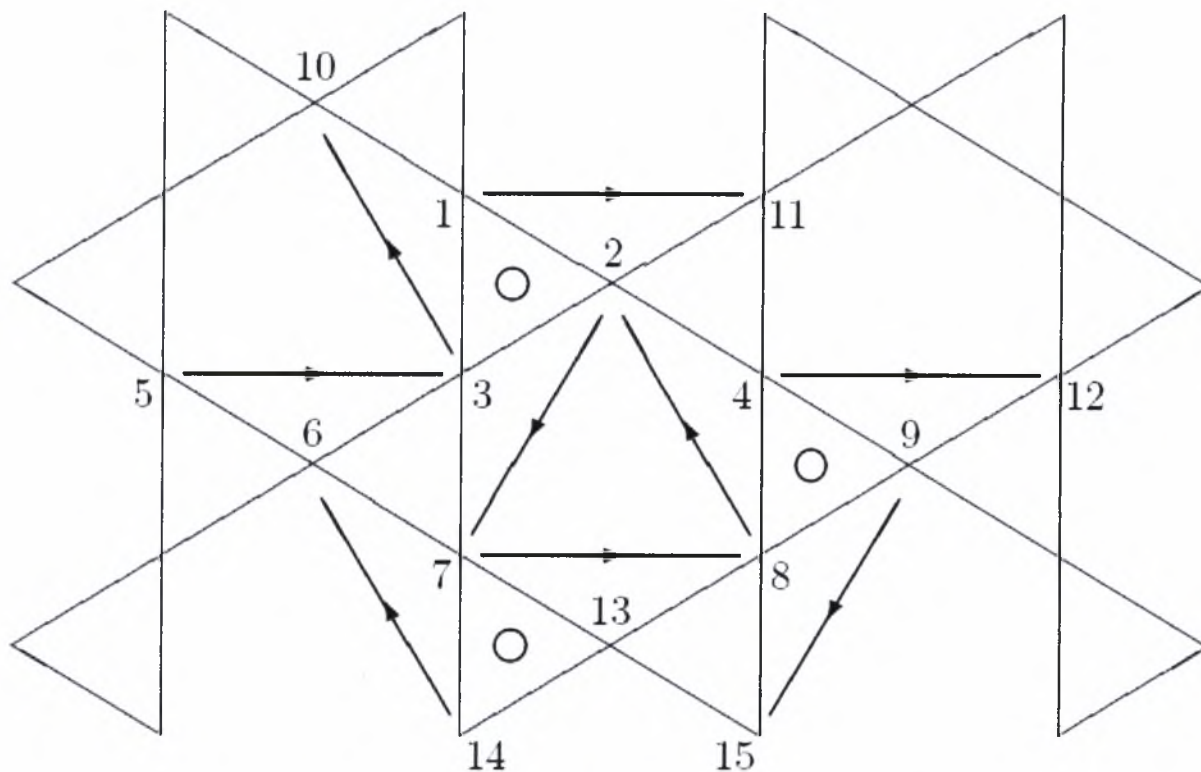
Η όλη μελέτη που ακολουθεί, βασίζεται σε μια ΚΕΘ, ο σχεδιασμός της οποίας εκκινεί από το 6ν οκτάεδρο. Διαθέτει συχνότητα αρκετά χαμηλή για την εποπτική παρακολούθηση της διαδικασίας κολόβωσης αλλά και αρκετά υψηλή για να βασιστεί στην εμπειρία σχεδιασμού της σχετικής ΚΕΘ και ο σχεδιασμός κατασκευών υψηλότερων συχνοτήτων.

### 6.2.1 Βήμα 1: Υπολογισμός της Σφαιράς

Στα διαγράμματα των Σχημάτων 6.3 και 6.4 φαίνεται το βασικό δίκτυο τριγώνων για την 6ν διπλού στρώματος οκταεδρική σφαίρα  $E_{\Theta}$  και ένα σύστημα συντεταγμένων για την ανάλυσή του, με τον ίδιο τρόπο όπως στα Σχήματα 5.3 και 5.5 απεικονίστηκε το δίκτυο, το αντίστοιχο με την 4ν εκδοχή της, της παραγράφου 5.3. Η κύρια διαφορά είναι ότι, με υψηλότερη συχνότητα, αυξάνονται όλα. Παραδείγματος χάριν, τώρα οι θλιπτήρες στο Σχήμα 6.4 συγκεντρώνονται γύρω από τρεις βασικούς T – Τρίποδες, αντί δύο όπως στο Σχήμα 5.5.



Σχήμα 6.3 6ν Οκταεδρική Σφαίρα  $E_{\Theta}$  : Περιοχές Συμμετρίας



Σχήμα 6.4 6ν Οκταεδρική Σφαίρα EΘ : Δικτυωτά Μέλη

Στον Πίνακα 6.1 απαριθμούνται τα μέλη αυτής της 6ν εκδοχής της σφαίρας διπλού στρώματος. Η ανώμαλη τιμή 1.5 για το μήκος του μέλους #33 στον πίνακα 6.1 επιλέχθηκε λαμβάνοντας υπόψη την εμπειρία σχεδιασμού της 4ν κατασκευής.

Οι σταθμικοί παράγοντες για τους εσωτερικούς και εξωτερικούς τένοντες δέσμευσης στην αντικειμενική συνάρτηση παράγονται χρησιμοποιώντας την έκφραση  $k\left(\frac{b_1+b_2}{2b_1b_2}\right)^2$ , στην οποία οι τιμές του  $k$  που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 1.2 και 0.5 αντίστοιχα, Τα  $b_1$  και  $b_2$  αντιπροσωπεύουν τη σφαιρική υπερβολή, που αντιστοιχεί στις αρχικές τιμές των δύο ακραίων σημείων του τένοντα. Η σφαιρική υπερβολή (excess) είναι το ποσό που η σφαιρική ακτίνα υπερβαίνει την απόσταση του μη προβαλλομένου σημείου από το κέντρο του οκτάεδρου. Αυτός ο αριθμός υπολογίζεται ως αναλογία (ratio) και είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο από 1.0, ισούται δε με 1.0 στις κορυφές του οκτάεδρου. Δίνοντας μικρότερη τιμή στον σταθμικό παράγοντα των τενόντων εκείνων, που είναι απομακρυσμένοι από της κορυφές του οκτάεδρου βάσης, επιτρέπεται σε αυτούς να έχουν μεγαλύτερο μήκος από όσο θα είχαν σε ενάντια περίπτωση. Αυτό επιτρέπει στις

οκτάεδρες προσόψεις να διογκώνονται (bulge out) περισσότερο από ότι θα έκαναν διαφορετικά και δίνει στην κατασκευή μια πιο σφαιρική, λιγότερο πολυεδρική, όψη.

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Σχόλια
1	$P'_1$	$P_{11}$	-	3.0	Θλιπτήρες
2	$P'_2$	$P_7$	-	3.0	
3	$P'_3$	$P_{10}$	-	3.0	
4	$P'_4$	$P_{12}$	-	3.0	
5	$P'_9$	$P_{15}$	-	3.0	
6	$P'_8$	$P_2$	-	3.0	
7	$P'_7$	$P_8$	-	3.0	
8	$P'_5$	$P_3$	-	3.0	
9	$P'_{14}$	$P_6$	-	3.0	
10	$P'_2$	$P_{11}$	2.0	-	Κύριοι μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
11	$P'_3$	$P_7$	2.0	-	
12	$P'_1$	$P_{10}$	2.0	-	
13	$P'_9$	$P_{12}$	2.0	-	
14	$P'_8$	$P_{15}$	2.0	-	
15	$P'_4$	$P_2$	2.0	-	
16	$P'_{13}$	$P_8$	2.0	-	
17	$P'_6$	$P_3$	2.0	-	
18	$P'_7$	$P_6$	2.0	-	
19	$P'_1$	$P_2$	1.4	-	Δευτερεύοντες μεσο - στρωματικοί ελκυστήρες (τένοντες)
20	$P'_2$	$P_3$	1.4	-	
21	$P'_3$	$P_1$	1.4	-	
22	$P'_4$	$P_9$	1.4	-	
23	$P'_9$	$P_8$	1.4	-	
24	$P'_8$	$P_4$	1.4	-	
25	$P'_7$	$P_{13}$	1.4	-	
26	$P'_5$	$P_6$	1.4	-	
27	$P'_{14}$	$P_7$	1.4	-	
28	$P_2$	$P_{11}$	-	1.0	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλησης
29	$P_3$	$P_7$	-	1.0	
30	$P_1$	$P_{10}$	-	1.0	
31	$P_9$	$P_{12}$	-	1.0	
32	$P_8$	$P_{15}$	-	1.0	
33	$P_4$	$P_2$	-	1.5	
34	$P_{13}$	$P_8$	-	1.0	
35	$P_6$	$P_3$	-	1.0	
36	$P_7$	$P_6$	-	1.0	

Πίνακας 6.1: (Συνεχίζεται)

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Σχόλια
37	$P'_1$	$P'_2$	-	1.0	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) σύγκλησης
38	$P'_2$	$P'_3$	-	1.0	
39	$P'_3$	$P'_1$	-	1.0	
40	$P'_4$	$P'_9$	-	1.0	
41	$P'_9$	$P'_8$	-	1.0	
42	$P'_8$	$P'_4$	-	1.0	
43	$P'_7$	$P'_{13}$	-	1.0	
44	$P'_5$	$P'_6$	-	1.0	
45	$P'_{14}$	$P'_7$	-	1.0	
46	$P'_2$	$P'_{11}$	0.5000	-	Εξωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) συγκράτησης
47	$P'_3$	$P'_7$	0.3065	-	
48	$P'_1$	$P'_{10}$	0.4196	-	
49	$P'_9$	$P'_{12}$	0.3065	-	
50	$P'_8$	$P'_{15}$	0.2692	-	
51	$P'_4$	$P'_2$	0.4196	-	
52	$P'_{13}$	$P'_8$	0.3065	-	
53	$P'_6$	$P'_3$	0.3065	-	
54	$P'_7$	$P'_6$	0.2692	-	
55	$P_1$	$P_2$	1.2000	-	Εσωτερικοί ελκυστήρες (τένοντες) συγκράτησης
56	$P_2$	$P_3$	1.0069	-	
57	$P_3$	$P_1$	1.0069	-	
58	$P_4$	$P_9$	0.7356	-	
59	$P_9$	$P_8$	0.6462	-	
60	$P_8$	$P_4$	0.7356	-	
61	$P_7$	$P_{13}$	0.7356	-	
62	$P_5$	$P_6$	0.7356	-	
63	$P_{14}$	$P_7$	0.6462	-	

Πίνακας 6.1: Σφαίρα 6νΤ – Οκτάεδρου : Δικτυωτά Μέλη

Οι σταθμικοί παράγοντες στην αντικειμενική συνάρτηση για τους κύριους και δευτερεύοντες μεσοστρωματικούς είναι 2.0 και 1.4 αντίστοιχα, ανεξάρτητα από οποιοσδήποτε τιμές σφαιρικής υπερβολής.

Όπως με την 4ν εκδοχή αυτής της σφαίρας, ο υπολογισμός των τιμών των αρχικών σημείων γίνεται με την χρήση του γεωδαιτικού κατακερματισμού (breakdown). Οι πίνακες του Kenner<sup>[16]</sup> χρησιμοποιούνται για να παραχθούν οι συντεταγμένες των αρχικών σημείων. Και εδώ, ο

πίνακας Kenner πρέπει να επεκταθεί με την περιστροφή όλων των σημείων γύρω από τον άξονα  $z$  κατά  $90^\circ$ . Στον Πίνακα 6.2 περιγράφεται η αντιστοιχία μεταξύ των βασικών σημείων και του συστήματος συντεταγμένων τους. Τα περιστραφέντα σημεία υποδεικνύονται με έναν αστερίσκο.

Σημείο	Προσδιορισμός κατά Kenner	Συντεταγμένες	
		$\theta$	$\varphi$
$P_1 (P'_1)$	1,0	0.0	11.3099
$P_2 (P'_2)$	1,1	90.0	11.3099
$P_3 (P'_3)$	2,1	45.0	19.4712
$P_4 (P'_4)$	2,1*	135.0	19.4712
$P_5 (P'_5)$	3,0	0.0	45.0
$P_6 (P'_6)$	3,1	26.5651	36.6992
$P_7 (P'_7)$	3,2	63.4349	36.6992
$P_8 (P'_8)$	3,1*	116.5651	36.6992
$P_9 (P'_9)$	3,2*	153.4349	36.6992

Πίνακας 6.2:  $6vT$  – Οκτάεδρο : Γωνιακές Συντεταγμένες Σημείων

Οι αρχικές τιμές συντεταγμένων για τις εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις αυτών των σημείων συνοψίζονται στον Πίνακα 6.3. Αυτές προέρχονται από τις γωνιακές τιμές του Πίνακα 6.2 με εφαρμογή εσωτερικών και εξωτερικών ακτίνων. Η εσωτερική ακτίνα (3.15) επιλέγεται έτσι ώστε ο μέσος όρος μηκών των τριγώνων τενόντων να είναι περίπου 1 (0,995729). Η εξωτερική ακτίνα (5.15) επιλέγεται έτσι ώστε τα αρχικά μήκη των θλιπτήρων της ΚΕΘ διπλού στρώματος να ισούνται κατά μέσο όρο περίπου με 3 (2.94314). Όλα τα εφαρμοσθέντα αρχικά μήκη συνοψίζονται στον Πίνακα 6.4.

Ο υπολογισμός των σημείων συμμετρίας από τα βασικά σημεία παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.5. Οι μετασχηματισμοί συμμετρίας, στις οποίες αυτός ο πίνακας είναι βασισμένος, φαίνονται στον Πίνακα 5.5. Τα εξωτερικά σημεία ακολουθούν τις ίδιες συμμετρίες με τα εσωτερικά σημεία.

Η κατασκευή υπολογίζεται με την ελαχιστοποίηση ενός σταθμικού συνδυασμού των μεσο-στρωματικών τενόντων και των τενόντων δέσμευσης, υποκείμενη σε περιορισμούς στους τένοντες σύγκλισης και τους θλιπτήρες.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	0.6178	0.0000	3.0888
$P_2$	0.0000	0.6178	3.0888
$P_3$	0.7425	0.7425	2.9698
$P_4$	-0.7425	0.7425	2.9698
$P_5$	2.2274	0.0000	2.2274
$P_6$	1.6837	0.8419	2.5256
$P_7$	0.8419	1.6837	2.5256
$P_8$	-0.8419	1.6837	2.5256
$P_9$	-1.6837	0.8419	2.5256
$P'_1$	1.0100	0.0000	5.0500
$P'_2$	0.0000	1.0100	5.0500
$P'_3$	1.2139	1.2139	4.8555
$P'_4$	-1.2139	1.2139	4.8555
$P'_5$	3.6416	0.0000	3.6416
$P'_6$	2.7528	1.3764	4.1292
$P'_7$	1.3764	2.7528	4.1292
$P'_8$	-1.3764	2.7528	4.1292
$P'_9$	-2.7528	1.3764	4.1292

Πίνακας 6.3: Σφαίρα 6νΤ – Οκτάεδρου : Αρχικές Συντεταγμένες Βασικών Σημείων

Μέλος #	Μήκος	Μέλος #	Μήκος	Μέλος #	Μήκος
1	2.5487	2	2.7450	3	2.7577
4	3.0672	5	3.3095	6	2.7450
7	2.9385	8	3.0672	9	3.3095
10	2.2908	11	2.4057	12	2.2248
13	2.4057	14	2.5135	15	2.2248
16	2.4057	17	2.4057	18	2.5135
19	2.2908	20	2.2248	21	2.2248
22	2.4057	23	2.5135	24	2.4057
25	2.4057	26	2.4057	27	2.5135
28	0.8737	29	1.0456	30	0.7622
31	1.0456	32	1.1906	33	0.7622
34	1.0456	35	1.0456	36	1.1906
37	1.4284	38	1.2461	39	1.2461
40	1.7094	41	1.9465	42	1.7094
43	1.7094	44	1.7094	45	1.9465
46	1.4284	47	1.7094	48	1.2461
49	1.7094	50	1.9465	51	1.2461
52	1.7094	53	1.7094	54	1.9465
55	0.8737	56	0.7622	57	0.7622
58	1.0456	59	1.1906	60	1.0456
61	1.0456	62	1.0456	63	1.1906

Πίνακας 6.4: Σφαίρα 6νΤ – Οκτάεδρου : Αρχικά Μήκη Μελών

Σημείο	Συντεταγμένες			Βασικό Σημείο	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P_{10}$	$-x_4$	$-y_4$	$z_4$	$P_4$	4
$P_{11}$	$-x_1$	$-y_1$	$z_1$	$P_1$	4
$P_{12}$	$-x_5$	$-y_5$	$z_5$	$P_5$	4
$P_{13}$	$y_5$	$z_5$	$x_5$	$P_5$	2
$P_{14}$	$y_6$	$z_6$	$x_6$	$P_6$	2
$P_{15}$	$-y_9$	$z_9$	$-x_9$	$P_9$	5

Πίνακας 6.5: Σφαίρα 6νT – Οκτάεδρου : Αντιστοιχίες Συμμετρικών Σημείων

Δύο αρχικές επαναλήψεις πραγματοποιήθηκαν, χρησιμοποιώντας την μέθοδο ποινης ( $\bar{\mu} = 10^9$ ) από κοινού με τη μέθοδο Fletcher-Reeves, για να ισχύσουν κατά προσέγγιση οι περιορισμοί για τα αρχικά σημεία. Κατόπιν αυτής έλαβαν χώραν πέντε επαναλήψεις της ακριβούς μεθόδου με την Fletcher-Reeves, με αποτέλεσμα την σύγκλιση των τιμών. Οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις τιμές των ανεξάρτητων συντεταγμένων βρέθηκαν όλες μικρότερες του  $10^{-3}$ . Στους Πίνακες 6.6 και 6.7 παρουσιάζονται τις τιμές για τα τελικά μήκη και τις σχετικές δυνάμεις (με την μέθοδο υπολογισμού των τελευταίων να εκτίθεται στην παράγραφο 2 του Κεφαλαίου 7), ενώ στον Πίνακα 6.8 περιέχονται τις τελικές τιμές για τις συντεταγμένες των βασικών σημείων.

Μέλος #	Μήκος	Μέλος #	Μήκος	Μέλος #	Μήκος
1	3.0000	2	3.0000	3	3.0000
4	3.0000	5	3.0000	6	3.0000
7	3.0000	8	3.0000	9	3.0000
10	2.3545	11	2.3871	12	2.4881
13	2.2793	14	2.2883	15	2.3153
16	2.2212	17	2.2209	18	2.2354
19	2.1286	20	2.0833	21	2.1669
22	2.0342	23	2.0334	24	1.6827
25	2.0342	26	2.0454	27	2.0516
28	1.0000	29	1.0000	30	1.0000
31	1.0000	32	1.0000	33	1.5000
34	1.0000	35	1.0000	36	1.0000
37	1.0000	38	1.0000	39	1.0000
40	1.0000	41	1.0000	42	1.0000
43	1.0000	44	1.0000	45	1.0000
46	1.8502	47	2.4709	48	2.1613
49	2.6524	50	2.7414	51	2.4735
52	2.7549	53	2.6798	54	2.6482
55	1.2081	56	1.2653	57	1.2626
58	1.3406	59	1.6730	60	1.2480
61	0.9008	62	1.8434	63	1.9693

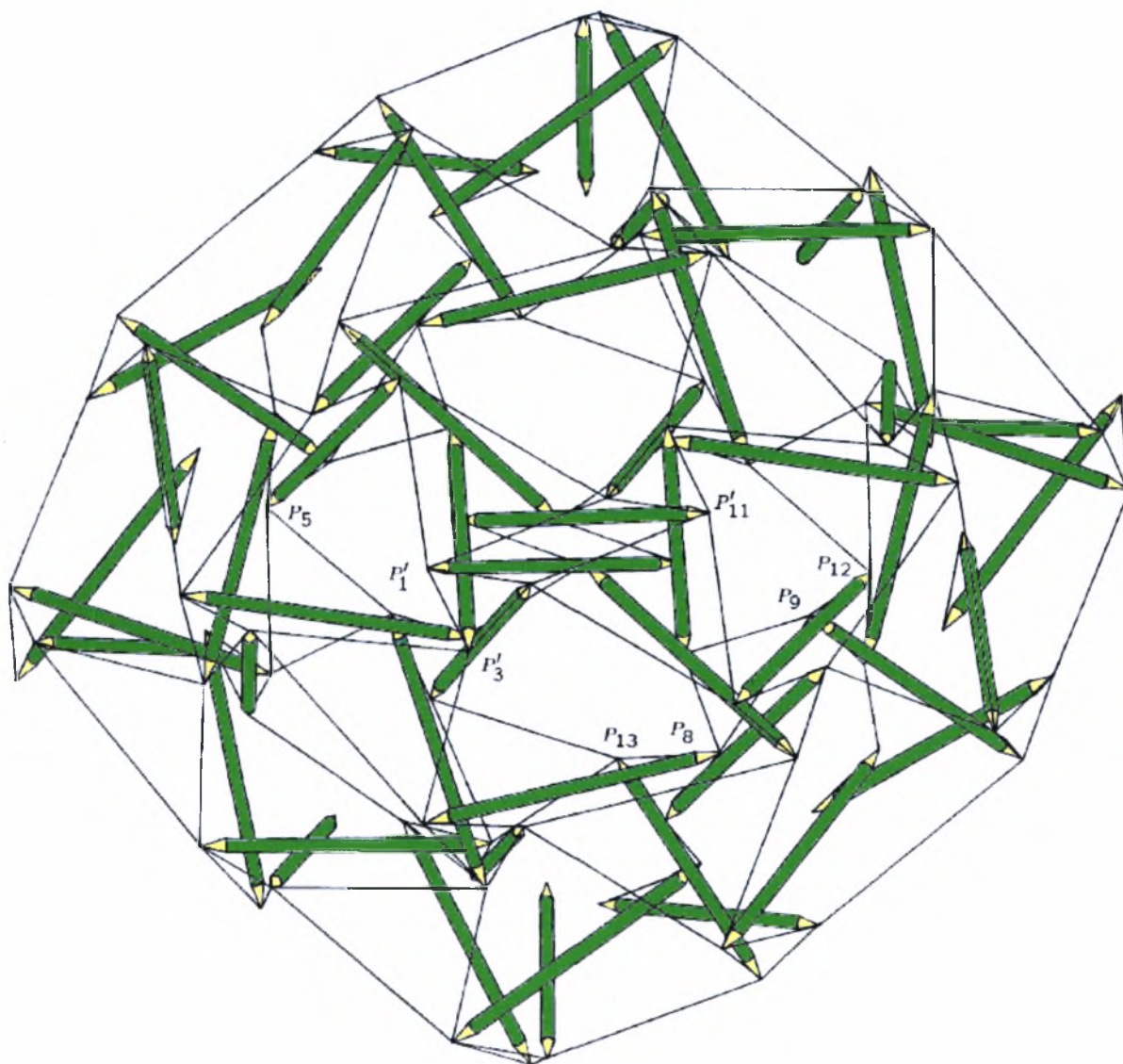
Πίνακας 6.6: Σφαίρα 6νT – Οκτάεδρου : Τελικά Μήκη Μελών

Μέλος #	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Σχετική Δύναμη
1	-11.294	2	-9.788	3	-10.052
4	-10.125	5	-10.019	6	-9.925
7	-10.052	8	-10.064	9	9.870
10	4.709	11	4.774	12	4.976
13	4.559	14	4.577	15	4.631
16	4.442	17	4.442	18	4.471
19	2.980	20	2.917	21	3.033
22	2.848	23	2.847	24	2.356
25	2.848	26	2.863	27	2.872
28	4.945	29	4.580	30	3.811
31	5.009	32	5.092	33	4.947
34	4.958	35	5.258	36	5.163
37	4.144	38	4.887	39	4.040
40	4.865	41	4.867	42	5.214
43	4.815	44	5.083	45	5.547
46	0.925	47	0.757	48	0.907
49	0.813	50	0.738	51	1.038
52	0.844	53	0.821	54	0.713
55	1.450	56	1.274	57	1.271
58	0.986	59	1.081	60	0.918
61	1.398	62	1.356	63	1.273

Πίνακας 6.7: Σφαίρα 6νΤ – Οκτάεδρου : Τελικές Δυνάμεις Μελών

Στο Σχήμα 6.5 απεικονίζεται πώς η τελική μορφή της σφαιρικής κατασκευής όπως φαίνεται απ' έξω από μια από τις κορυφές του οκταέδρου. Για λόγους εποπτικών, δεν σχεδιάστηκαν οι μεσοστρωματικοί τένοντες και τα μέλη στο πίσω μέρος του Σχήματος έχουν αποβληθεί μέσω κολόβωσης. Για λόγους αναφοράς σημειώνονται και ορισμένα επιλεγμένα σημεία.



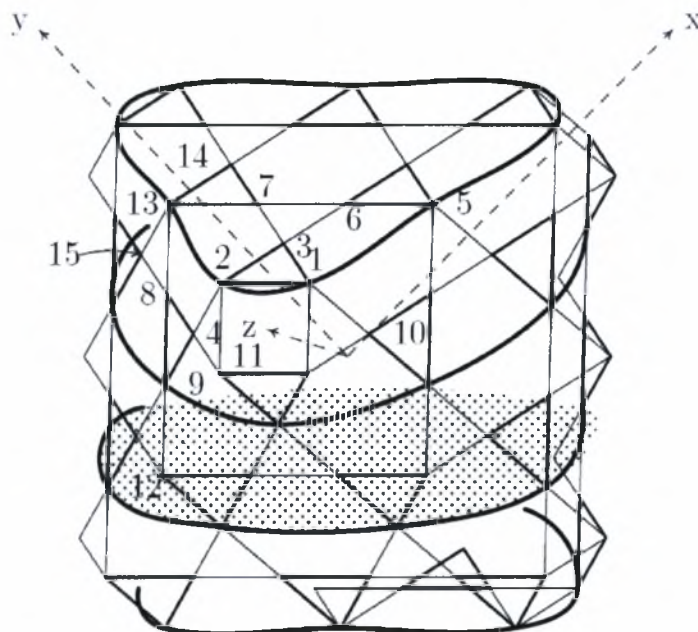


Σχήμα 6.5 6ν Οκταεδρική Σφαίρα  $E\Theta$  : Όψη κορυφής

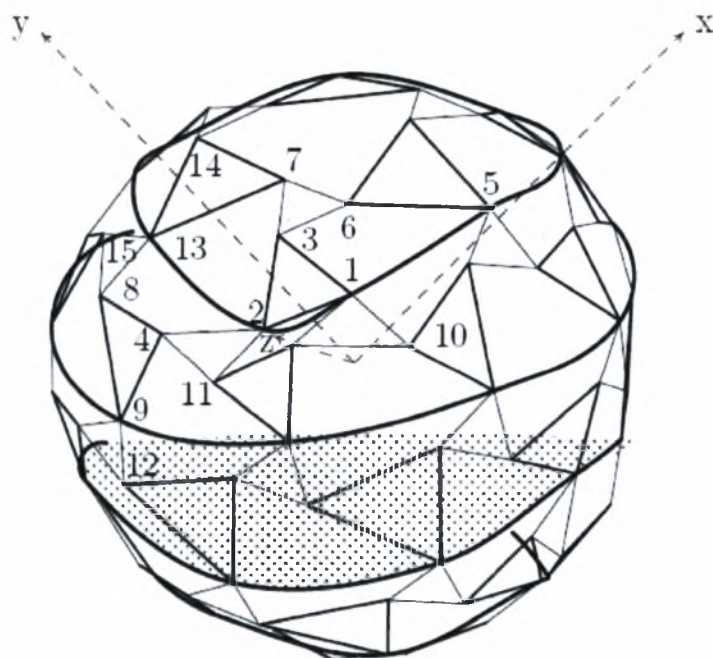
### 6.2.2 Βήμα 2: Εφαρμογή της Κολόβωσης

Στο Σχήμα 6.6 φαίνονται οι τέσσερις δυνατότητες αποκοπής «μεγάλου κύκλου» για αυτήν την κατασκευή, εντός του οκτάεδρο αναφοράς του, ενώ στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζονται τα ίδια τέσσερα σύνορα κολόβωσης, εντός το εσωτερικού στρώματος της σφαίρας. Κανένα από αυτά τα όρια δεν αντιστοιχεί σε έναν αληθινό μεγάλο κύκλο. Ο αληθινός μεγάλος κύκλος βρίσκεται στο κέντρο του εύρους τους και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κολόβωση σε αυτήν την συχνότητα. Σε μια κατασκευή υψηλότερης-συχνότητας θα υπήρχαν ακόμα περισσότεροι τέτοιοι κύκλοι διαθέσιμοι. Όλοι τους αποτελούν δυνατότητα σαν ορισμοί κολόβωσης, αν και οι πιο

απομακρυσμένοι από τον αληθινό μεγάλο κύκλο θα απαιτούσαν πιθανώς μεγαλύτερες ρυθμίσεις για να λειτουργήσουν καλά.

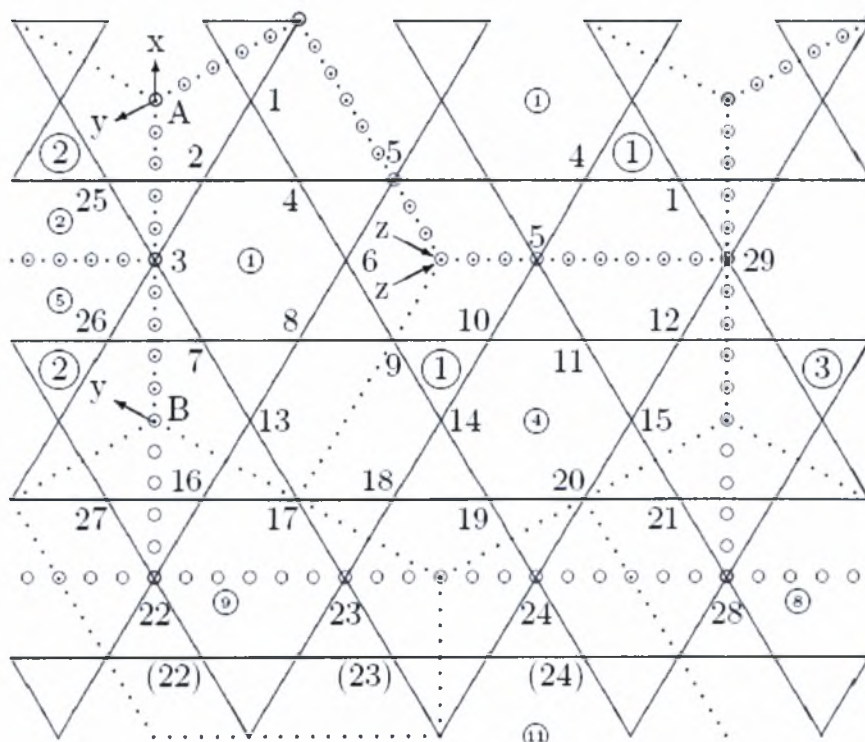


Σχήμα 6.6 6ν Οκταεδρική Σφαίρα ΕΘ : Μη Προβεβλημένα Σύνορα Κολόβωσης



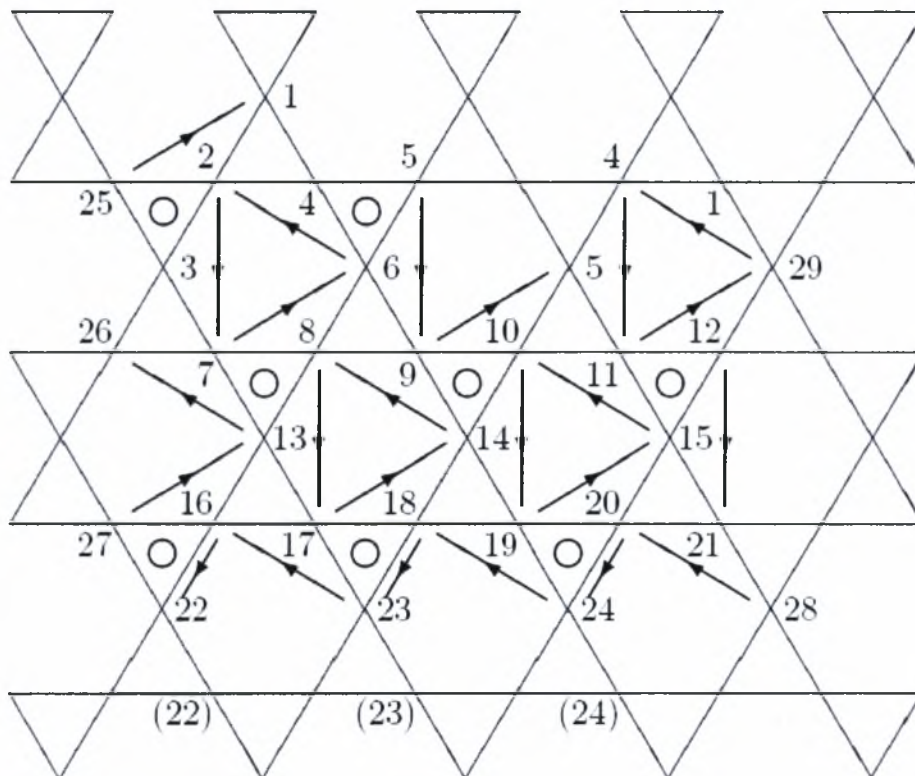
Σχήμα 6.7 6ν Οκταεδρική Σφαίρα ΕΘ : Προβεβλημένα Σύνορα Κολόβωσης

Σε αυτήν την συχνότητα, οι δύο μέσες κολοβώσεις απέχουν το ίδιο από τον αληθινό μεγάλο κύκλο, και έτσι κανένας δεν έχει πλεονέκτημα σε ότι αφορά τις απαιτούμενες ρυθμίσεις. Καθώς αυτό ισχύει, επιλέγεται εκείνη που επιτρέπει μεγαλύτερο όγκο. Στα Σχήματα 6.8 και 6.9 φαίνεται το βασικό δίκτυο τριγώνων για την κολοβωμένη κατασκευή και ένα σύστημα συντεταγμένων για την ανάλυσή του. Αυτά τα σχήματα ομοιάζουν σε φιλοσοφία με τα αντίστοιχα των 4ν και 6ν σφαιρών. Το Σχήμα 6.8 είναι πιο σύνθετο από αυτά των προηγούμενων κατασκευών, καθόσον μέσω αυτό επιχειρείται η διαγραμματική απεικόνιση αντιστοιχίας μεταξύ των περιοχών συμμετρίας της 6ν σφαίρας και των περιοχών συμμετρίας του θόλου. Τα σύνορα των περιοχών συμμετρίας για τη σφαίρα περιγράφονται με σπικτές γραμμές και σημειώνονται με μικρούς αριθμούς εντός κύκλων, οι οποίοι αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς συμμετρίας του Πίνακα 5.5. Τα σύνορα για το θόλο περιγράφονται από σπικτές γραμμές εντός κύκλου και οι περιοχές συμμετρίας του σημειώνονται με μεγαλύτερους αριθμούς εντός κύκλων. Αυτοί οι αριθμοί αντιστοιχούν επίσης στους μετασχηματισμούς συμμετρίας του Πίνακα 5.5, αν και, λόγω της απώλειας συμμετρίας, μόνο οι πρώτες τρεις καταχωρήσεις στον Πίνακα είναι δυνατές.



Σχήμα 6.8 6ν Οκταεδρικός Θόλος EΘ : Περιοχές Συμμετρίας

Η κατανόηση της αντιστοιχίας μεταξύ των περιοχών συμμετρίας για τη σφαίρα και εκείνων για το θόλο είναι χρήσιμη για την παραγωγή αρχικών σημείων για τους υπολογισμούς θόλου από τις τελικές τιμές των υπολογισμών σφαίρας. Αυτές οι αντιστοιχίες χρησιμοποιούνται στους Πίνακες 6.17 και 6.18. Όπως σημειώνεται κατωτέρω, αυτές τις αντιστοιχίες αλλάζουν ελαφρώς για τα εσωτερικά σημεία στη βάση του θόλου.



Σχήμα 6.8 6ν Οκταεδρικός Θόλος ΕΘ : Δικτυωτά Μέλη

Στους Πίνακες 6.9 - 6.16 παρατίθενται τα μέλη της κολοβωμένης κατασκευής. Τα ανώμαλα μέλη που έχουν μήκος ίσο με 1.5 αντιστοιχούν στο μέλος #33 του Πίνακα 6.1 για τη σφαίρα. Ως επί το πλείστον, οι σταθμικοί παράγοντες για αυτήν την κατασκευή προέρχονται από απεικονίσεις των σταθμικών παραγόντων, που χρησιμοποιήθηκαν για τα αντίστοιχα μέλη της σφαιρικής εκδοχής της κατασκευής. Εξαιρέσεις αποτελούν οι στάθμες για τα μέλη #160, #161, #163, #164, #166 και #167. Οι λόγοι για αυτές τις εξαιρέσεις συζητούνται κατωτέρω. Εκτός από τα μέλη που απαριθμούνται στους Πίνακες 6.9 – 6.16, εισάγονται αναρτήσεις στο Βήμα 4.

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
1	$P'_2$	$P_7$	-	3.0	7
2	$P'_{29}$	$P_4$	-	3.0	8
3	$P'_{25}$	$P_1$	-	3.0	9
4	$P'_5$	$P_9$	-	3.0	1
5	$P'_6$	$P_2$	-	3.0	2
6	$P'_4$	$P_{11}$	-	3.0	3
7	$P'_8$	$P_{17}$	-	3.0	4
8	$P'_{13}$	$P_{26}$	-	3.0	5
9	$P'_7$	$P_6$	-	3.0	6
10	$P'_{10}$	$P_{19}$	-	3.0	2
11	$P'_{14}$	$P_8$	-	3.0	3
12	$P'_9$	$P_5$	-	3.0	1
13	$P'_{12}$	$P_{21}$	-	3.0	5
14	$P'_{15}$	$P_{10}$	-	3.0	6
15	$P'_{11}$	$P_{29}$	-	3.0	4
16†	$P'_{16}$	$P_{22}$	-	3.0	6
17	$P'_{28}$	$P_{20}$	-	3.0	4
18	$P'_{27}$	$P_{13}$	-	3.0	5
19†	$P'_{18}$	$P_{23}$	-	3.0	9
20	$P'_{23}$	$P_{16}$	-	3.0	7
21	$P'_{17}$	$P_{14}$	-	3.0	8
22†	$P'_{20}$	$P_{24}$	-	3.0	8
23	$P'_{24}$	$P_{18}$	-	3.0	9
24	$P'_{19}$	$P_{15}$	-	3.0	7

Πίνακας 6.9: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Θλιπτήρες

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
25	$P'_3$	$P_7$	2.0	-	16
26	$P'_1$	$P_4$	2.0	-	17
27	$P'_2$	$P_1$	2.0	-	18
28	$P'_6$	$P_9$	2.0	-	10
29	$P'_4$	$P_2$	2.0	-	11
30	$P'_5$	$P_{11}$	2.0	-	12
31	$P'_{13}$	$P_{17}$	2.0	-	13
32	$P'_7$	$P_{26}$	2.0	-	14
33	$P'_8$	$P_6$	2.0	-	15
34	$P'_{14}$	$P_{19}$	2.0	-	11
35	$P'_9$	$P_8$	2.0	-	12
36	$P'_{10}$	$P_5$	2.0	-	10
37	$P'_{15}$	$P_{21}$	2.0	-	14
38	$P'_{11}$	$P_{10}$	2.0	-	15
39	$P'_{12}$	$P_{29}$	2.0	-	13
40†	$P'_{22}$	$P_{22}$	2.0	-	15
41	$P'_{21}$	$P_{20}$	2.0	-	13
42	$P'_{16}$	$P_{13}$	2.0	-	14
43†	$P'_{23}$	$P_{23}$	2.0	-	18
44	$P'_{17}$	$P_{16}$	2.0	-	16
45	$P'_{18}$	$P_{14}$	2.0	-	17
46†	$P'_{24}$	$P_{24}$	2.0	-	17
47	$P'_{19}$	$P_{18}$	2.0	-	18
48	$P'_{20}$	$P_{15}$	2.0	-	16

Πίνακας 6.10: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Κύριοι Μεσο - Στρωματικοί Ελκυστήρες (Τένοντες)

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
49	$P'_2$	$P_3$	1.4	-	25
50	$P'_{29}$	$P_1$	1.4	-	29
51	$P'_{25}$	$P_2$	1.4	-	27
52	$P'_5$	$P_6$	1.4	-	19
53	$P'_6$	$P_4$	1.4	-	20
54	$P'_4$	$P_5$	1.4	-	21
55	$P'_8$	$P_{13}$	1.4	-	22
56	$P'_{13}$	$P_{17}$	1.4	-	23
57	$P'_7$	$P_8$	1.4	-	24
58	$P'_{10}$	$P_{14}$	1.4	-	20
59	$P'_{14}$	$P_9$	1.4	-	21
60	$P'_9$	$P_{10}$	1.4	-	19
61	$P'_{12}$	$P_{15}$	1.4	-	23
62	$P'_{15}$	$P_{11}$	1.4	-	24
63	$P'_{11}$	$P_{12}$	1.4	-	22
64‡	$P'_{16}$	$P_{22}$	-	-	24
65	$P'_{28}$	$P_{21}$	1.4	-	22
66	$P'_{27}$	$P_{16}$	1.4	-	23
67‡	$P'_{18}$	$P_{23}$	-	-	27
68	$P'_{23}$	$P_{17}$	1.4	-	25
69	$P'_{17}$	$P_{18}$	1.4	-	26
70‡	$P'_{20}$	$P_{24}$	-	-	26
71	$P'_{24}$	$P_{19}$	1.4	-	27
72	$P'_{19}$	$P_{20}$	1.4	-	25

Πίνακας 6.11: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Δευτερεύοντες Μεσο - Στρωματικοί Ελκυστήρες (Τένοντες)

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
73	$P_3$	$P_7$	-	1.0	34
74	$P_1$	$P_4$	-	1.0	35
75	$P_2$	$P_1$	-	1.0	36
76	$P_6$	$P_9$	-	1.0	28
77	$P_4$	$P_2$	-	1.0	29
78	$P_5$	$P_{11}$	-	1.0	30
79	$P_{13}$	$P_{17}$	-	1.0	31
80	$P_{17}$	$P_{26}$	-	1.0	32
81	$P_8$	$P_6$	-	1.5	33
82	$P_{14}$	$P_{19}$	-	1.0	29
83	$P_9$	$P_8$	-	1.0	30
84	$P_{10}$	$P_5$	-	1.0	28
85	$P_{15}$	$P_{21}$	-	1.0	32
86	$P_{11}$	$P_{10}$	-	1.5	33
87	$P_{12}$	$P_{29}$	-	1.0	31
88†	$P_{22}$	$P_{22}$	-	-	33
89	$P_{21}$	$P_{20}$	-	1.0	31
90	$P_{16}$	$P_{13}$	-	1.0	32
91†	$P_{23}$	$P_{23}$	-	-	36
92	$P_{17}$	$P_{16}$	-	1.0	34
93	$P_{18}$	$P_{14}$	-	1.0	35
94†	$P_{24}$	$P_{24}$	-	-	35
95	$P_{19}$	$P_{18}$	-	1.0	36
96	$P_{20}$	$P_{15}$	-	1.0	34

Πίνακας 6.12: Θόλος 6νT – Οκτάεδρου : Εσωτερικοί Ελκυστήρες (Τένοντες) Σύγκλησης



Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαιράς
97	$P'_2$	$P'_3$	-	1.0	43
98	$P'_{29}$	$P'_1$	-	1.0	44
99	$P'_{25}$	$P'_2$	-	1.0	45
100	$P'_5$	$P'_6$	-	1.0	37
101	$P'_6$	$P'_4$	-	1.0	38
102	$P'_4$	$P'_5$	-	1.0	39
103	$P'_8$	$P'_{13}$	-	1.0	40
104	$P'_{13}$	$P'_{17}$	-	1.0	41
105	$P'_7$	$P'_8$	-	1.0	42
106	$P'_{10}$	$P'_{14}$	-	1.0	38
107	$P'_{14}$	$P'_9$	-	1.0	39
108	$P'_9$	$P'_{10}$	-	1.0	37
109	$P'_{12}$	$P'_{15}$	-	1.0	41
110	$P'_{15}$	$P'_{11}$	-	1.0	42
111	$P'_{11}$	$P'_{12}$	-	1.0	40
112	$P'_{16}$	$P'_{22}$	-	1.0	42
113	$P'_{28}$	$P'_{21}$	-	1.0	40
114	$P'_{27}$	$P'_{16}$	-	1.0	41
115	$P'_{18}$	$P'_{23}$	-	1.0	45
116	$P'_{23}$	$P'_{17}$	-	1.0	43
117	$P'_{17}$	$P'_{18}$	-	1.0	44
118	$P'_{20}$	$P'_{24}$	-	1.0	44
119	$P'_{24}$	$P'_{19}$	-	1.0	45
120	$P'_{19}$	$P'_{20}$	-	1.0	43

Πίνακας 6.13: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Εξωτερικοί Ελκυστήρες (Τένοντες) Σύγκλησης

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
121	$P'_3$	$P'_7$	0.3065	-	52
122	$P'_1$	$P'_4$	0.3065	-	53
123	$P'_2$	$P'_1$	0.2692	-	54
124	$P'_6$	$P'_9$	0.5000	-	46
125	$P'_4$	$P'_2$	0.3065	-	47
126	$P'_5$	$P'_{11}$	0.4196	-	48
127	$P'_{13}$	$P'_{17}$	0.3065	-	49
128	$P'_{17}$	$P'_{26}$	0.2692	-	50
129	$P'_8$	$P'_6$	0.4196	-	51
130	$P'_{14}$	$P'_{19}$	0.3065	-	47
131	$P'_9$	$P'_8$	0.4196	-	48
132	$P'_{10}$	$P'_5$	0.5000	-	46
133	$P'_{15}$	$P'_{21}$	0.2692	-	50
134	$P'_{11}$	$P'_{10}$	0.4196	-	51
135	$P'_{12}$	$P'_{29}$	0.3065	-	49
136†	$P'_{22}$	$P'_{22}$	-	-	51
137	$P'_{21}$	$P'_{20}$	0.3065	-	49
138	$P'_{16}$	$P'_{13}$	0.2692	-	50
139†	$P'_{23}$	$P'_{23}$	-	-	54
140	$P'_{17}$	$P'_{16}$	0.3065	-	52
141	$P'_{18}$	$P'_{14}$	0.3065	-	53
142†	$P'_{24}$	$P'_{24}$	-	-	53
143	$P'_{19}$	$P'_{18}$	0.2692	-	54
144	$P'_{20}$	$P'_{15}$	0.3065	-	52

Πίνακας 6.14: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Εξωτερικοί Ελκυστήρες (Τένοντες) Δέσμησης

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Μέλος Σφαίρας
145	$P_2$	$P_3$	0.7356	-	61
146	$P_{29}$	$P_1$	0.7356	-	62
147	$P_{25}$	$P_2$	0.6462	-	63
148	$P_5$	$P_6$	1.2000	-	55
149	$P_6$	$P_4$	1.0069	-	56
150	$P_4$	$P_5$	1.0069	-	57
151	$P_8$	$P_{13}$	0.7356	-	58
152	$P_{13}$	$P_{17}$	0.6462	-	59
153	$P_7$	$P_8$	0.7356	-	60
154	$P_{10}$	$P_{14}$	1.0069	-	56
155	$P_{14}$	$P_9$	1.0069	-	57
156	$P_9$	$P_{10}$	1.2000	-	55
157	$P_{12}$	$P_{15}$	0.6462	-	59
158	$P_{15}$	$P_{11}$	0.7356	-	60
159	$P_{11}$	$P_{12}$	0.7356	-	58
160	$P_{16}$	$P_{22}$	0.3758	-	60
161	$P_{28}$	$P_{21}$	0.3758	-	58
162	$P_{27}$	$P_{16}$	0.6462	-	59
163	$P_{18}$	$P_{23}$	0.2692	-	63
164	$P_{23}$	$P_{17}$	0.3065	-	61
165	$P_{17}$	$P_{18}$	0.7356	-	62
166	$P_{20}$	$P_{24}$	0.3462	-	62
167	$P_{24}$	$P_{19}$	0.3065	-	63
168	$P_{19}$	$P_{20}$	0.7356	-	61

Πίνακας 6.15: Θόλος 6νT – Οκτάεδρου : Εσωτερικοί Ελκυστήρες (Τένοντες) Δέσμευσης

Μέλος #	Ακραία Σημεία	
169†	$P_{22}$	$P_{23}$
170†	$P_{23}$	$P_{24}$
171†	$P_{24}$	$P_{28}$
172†	$P'_{22}$	$P'_{23}$
173†	$P'_{23}$	$P'_{24}$
174†	$P'_{24}$	$P'_{28}$

Πίνακας 6.16: Θόλος 6νT – Οκτάεδρου : Ελκυστήρες Αποκοπής (Κολόβωσης)

Λόγω της απώλειας συμμετρίας που προκαλείται από την κολόβωση, οι πίνακες για το θόλο είναι πολύς μεγαλύτεροι απ' ό τι για τη σφαίρα, και οι υπολογισμοί που απαιτούνται είναι αντίστοιχα περισσότεροι. Ο θόλος αποτελείται από τρία συμμετρικά μέρη, ενώ η ίδια περιοχή στη σφαίρα αποτελείται από περίπου οκτώ συμμετρικά μέρη. Ως εκ τούτου οι πίνακες για τον θόλο είναι δύο φορές μεγαλύτεροι από εκείνους της σφαίρας.

Καθίσταται συνεπώς επιτακτική η ανάγκη λήψης αποφάσεων – στη γειτονιά τη κολόβωσης – περί επαναδιάταξης των θλιπτήρων εκείνων, των οποίων τα εσωτερικά ακραία σημεία βρίσκονται στο σύνολο των τριγώνων που απαλοίφονται. Η καλύτερη διαδικασία φαίνεται να είναι η σύνδεση τους με το εσωτερικό τρίγωνο δέσμησης, που κείται κάτω από το Τρίποδα τους. Για να λειτουργήσει αυτό, οι σταθμικοί παράγοντες πολλαπλασιάζονται με τον όρο  $\frac{5}{12}$  για τους εσωτερικούς τένοντες δέσμησης, που αγγίζουν τη βάση. Αυτά είναι τα προαναφερθέντα μέλη των οποίων οι σταθμικοί παράγοντες δεν είναι ίσοι με εκείνους των αντίστοιχων μελών στη σφαιρική κατασκευή (#160, #161, #163, #164, #166 και #167). Αυτή η μείωση των σταθμικών παραγόντων επιτρέπει στον τελικό θόλο να έχει ένα ύψος που προσεγγίζει το ύψος της αρχικής του διαμόρφωσής. Με τους σταθμικούς παράγοντες αμετάβλητους, το σχήμα του θόλου θα ήταν χθαμαλότερο.

Οι δευτερεύοντες μεσο-στρωματικοί ελκυστήρες τένοντες σε αυτές τις θέσεις, οι # 64, #67 και # 70, εξαφανίζονται, καθόσον υπάρχουν θλιπτήρες σε εκείνες τις ίδιες θέσεις σε αυτήν την διαμόρφωση. Επίσης, οι τένοντες που παράγονται από την κολόβωση απαλοίφονται από το μοντέλο. Οι εσωτερικοί τένοντες κολόβωσης περισσεύουν, δεδομένου ότι συνδέουν τα σημεία της βάσης, τα οποία έχουν αμετάβλητες θέσεις. Οι εξωτερικοί τένοντες αποκοπής δεν είναι απαραίτητοι για τη δομική ακεραιότητα αλλά επιπρόσθετα χειροτερεύουν την αισθητική της κατασκευής. Στους Πίνακες 6.9 – 6.16, τα μέλη που αναδιατάσσονται σε ένα νέο εσωτερικό σημείο (σε σύγκριση με τη διαμόρφωση του αντίστοιχου μέλους τους στη σφαίρα) λόγω κολόβωσης σημειώνονται με †. Τα μέλη που απαλοίφονται (αν και για λόγους πληρότητας συμπεριλαμβάνονται στους Πίνακες) είναι σημειωμένα με ‡.

Τα βασικά σημεία και οι αρχικές τιμές των συντεταγμένων τους (όπως προήλθαν από τις τελικές τιμές για τα αντίστοιχα σημεία στη σφαίρα) συνοψίζονται στους Πίνακες 6.17 και 6.18. Οι εφαρμοστέοι μετασχηματισμοί είναι αυτοί του Πίνακα 5.5. Οι συντεταγμένες των  $P_{22}$ ,  $P_{23}$

και  $P_{24}$  στον Πίνακα 6.17 δεν αντιστοιχούν ακριβώς στις τιμές των αντίστοιχων σημείων στη σφαίρα, λόγω ρυθμίσεων που πραγματοποιούνται στο Βήμα 3, που έπεται.

Σημείο	Συντεταγμένες			Σημείο Σφαίρας	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P_1$	1.7538	0.7511	3.1285	$P_6$	1
$P_2$	1.3434	1.6303	2.8864	$P_7$	1
$P_3$	-0.4191	2.3400	2.9400	$P_5$	2
$P_4$	0.8711	1.0149	3.5173	$P_3$	1
$P_5$	1.0378	-0.2360	3.5592	$P_1$	1
$P_6$	-0.0640	0.2053	3.7844	$P_2$	1
$P_7$	-1.4134	2.2919	2.8451	$P_8$	1
$P_8$	-1.0998	1.2224	3.4065	$P_4$	1
$P_9$	-1.0378	0.2360	3.5592	$P_1$	4
$P_{10}$	0.0640	-0.2053	3.7844	$P_2$	4
$P_{11}$	1.0998	-1.2224	3.4065	$P_4$	4
$P_{12}$	2.3233	-0.8934	2.9682	$P_9$	4
$P_{13}$	-2.3233	0.8934	2.9682	$P_9$	1
$P_{14}$	-0.8711	-1.0149	3.5173	$P_3$	4
$P_{15}$	1.4134	-2.2919	2.8451	$P_8$	4
$P_{16}$	-2.8451	1.4134	2.2919	$P_8$	9
$P_{17}$	-2.9400	0.4191	2.3400	$P_5$	4
$P_{18}$	-1.7538	-0.7511	3.1285	$P_6$	4
$P_{19}$	-1.3434	-1.6303	2.8864	$P_7$	4
$P_{20}$	0.4191	-2.3400	2.9400	$P_5$	11
$P_{21}$	0.8934	-2.9682	2.3233	$P_9$	8
$P_{22}$	-3.7309	-0.0860	0.0478	$P_4$	9
$P_{23}$	-3.1023	-1.7622	1.0954	$P_6$	9
$P_{24}$	-1.6100	-3.2017	1.0425	$P_3$	11

Πίνακας 6.17: Θόλος 6νT – Οκτάεδρου : Αρχικές Τιμές Εσωτερικών Συντεταγμένων

Σημείο	Συντεταγμένες			Σημείο Σφαίρας	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P'_1$	3.0842	0.8558	3.6132	$P'_6$	1
$P'_2$	1.4390	2.9290	3.5221	$P'_7$	1
$P'_3$	0.4745	3.0005	3.7764	$P'_5$	2
$P'_4$	0.9467	1.1801	5.1968	$P'_3$	1
$P'_5$	1.3525	0.2829	5.3714	$P'_1$	1
$P'_6$	0.3628	0.4068	5.4440	$P'_2$	1
$P'_7$	-2.1735	2.3144	4.1038	$P'_8$	1
$P'_8$	-1.5610	1.7442	4.6513	$P'_4$	1
$P'_9$	-1.3525	-0.2829	5.3714	$P'_1$	4
$P'_{10}$	-0.3628	-0.4068	5.4440	$P'_2$	4
$P'_{11}$	1.5610	-1.7442	4.6513	$P'_4$	4
$P'_{12}$	2.4411	-1.3815	4.3450	$P'_9$	4
$P'_{13}$	-2.4411	1.3815	4.3450	$P'_9$	1
$P'_{14}$	-0.9467	-1.1801	5.1968	$P'_3$	4
$P'_{15}$	2.1735	-2.3144	4.1038	$P'_8$	4
$P'_{16}$	-4.1038	2.1735	2.3144	$P'_8$	9
$P'_{17}$	-3.7764	-0.4745	3.0005	$P'_5$	4
$P'_{18}$	-3.0842	-0.8558	3.6132	$P'_6$	4
$P'_{19}$	-1.4390	-2.9290	3.5221	$P'_7$	4
$P'_{20}$	-0.4745	-3.0005	3.7764	$P'_5$	11
$P'_{21}$	1.3815	-4.3450	2.4411	$P'_9$	8
$P'_{22}$	-4.6513	1.5610	1.7442	$P'_4$	9
$P'_{23}$	-3.5221	-1.4390	2.9290	$P'_6$	9
$P'_{24}$	-0.8558	-3.6132	3.0842	$P'_3$	11

Πίνακας 6.18: Θόλος 6νΤ – Οκτάεδρου : Αρχικές Τιμές Εξωτερικών Συντεταγμένων

Τα σημεία  $P_{22}$ ,  $P_{23}$  και  $P_{24}$  της κολοβωμένης σφαίρας απεικονίζονται από τα  $P_2$ ,  $P_6$  και  $P_3$  αντίστοιχα της πλήρους σφαίρας, παρά από τα  $P_4$ ,  $P_7$  και  $P_8$ , όπως θα αναμενόταν από μια απεικόνιση μη μεταβαλλόμενης συμμετρίας. Αυτή η αλλαγή γίνεται έτσι ώστε, ακόμη και με την αλλαγή στην τοπολογία, οι αρχικές θέσεις και τα μήκη των θλιπτήρων στο θόλο να αντιστοιχούν στις τελικές θέσεις τους στους υπολογισμούς σφαίρας. Δεδομένου ότι οι σφαιρικές υπερβολές των  $P_2$  και  $P_3$  διαφέρουν από αυτές των  $P_4$  και  $P_8$ , οι τιμές των αρχικών σταθμικών παραγόντων των μελών #160, #161, #163, #164, #166 και #167 επίσης διαφέρουν εκείνες των αντίστοιχων μέλη της σφαιρικής κατασκευής. Επιπλέον, όπως ήδη αναφέρθηκε, οι πραγματικοί σταθμικοί παράγοντες

που χρησιμοποιούνται τόσο για τα μέλη αυτά όσο και για τα μέλη #163 και #164, είναι  $\frac{5}{12}$  των παραγόντων που αντιστοιχούν στη σφαίρα.

Η παραγωγή των σημείων συμμετρίας από τα βασικά σημεία παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.19. Τα εξωτερικά σημεία ακολουθούν τις ίδιες συμμετρίες με τα εσωτερικά σημεία. Όπως αναφέρεται ανωτέρω, λόγω της απώλειας συμμετρίας ως αποτέλεσμα της κολόβωσης, μόνο οι πρώτες τρεις καταχωρήσεις του Πίνακα 5.5 είναι δυνατές εδώ.

Σημείο	Συντεταγμένες			Βασικό Σημείο	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P_{25}$	$y_1$	$z_1$	$x_1$	$P_1$	2
$P_{26}$	$y_{12}$	$z_{12}$	$x_{12}$	$P_{12}$	2
$P_{27}$	$y_{21}$	$z_{21}$	$x_{21}$	$P_{21}$	2
$P_{28}$	$z_{22}$	$x_{22}$	$y_{22}$	$P_{22}$	3
$P_{29}$	$z_3$	$x_3$	$y_3$	$P_3$	3

Πίνακας 6.19: Θόλος 6νT – Οκτάεδρου : Αντιστοιχίες Συμμετρικών Σημείων

Σημείο	Συντεταγμένες			Σημείο Σφαίρας	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P_{22}$	-3.784385	0.063992	0.205336	$P_2$	9
$P_{23}$	-3.128494	-1.753833	0.751127	$P_6$	9
$P_{24}$	-1.014868	-3.517327	0.871082	$P_3$	11

Πίνακας 6.20: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Αρχικές Ανεπεξέργαστες Τιμές Εσωτερικών Συντεταγμένων

### 6.2.3 Βήμα 3: Ρυθμίσεις Σημείων Βάσης

Στον Πίνακα 6.20 παρουσιάζονται οι μη ρυθμισμένες τιμές συντεταγμένων για τα σημεία βάσεων. Το πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού για το θόλο μεταχειρίζεται αυτά τα τρία σαν σταθερά. Κυριολεκτώντας, μόλις αυτά τα σημεία θεωρηθούν σταθερά, η κατασκευή δεν είναι πλέον μια ΚΕΘ, δεδομένου ότι δεν είναι πλέον αυτο – στηριζόμενη.

Από πρακτικής απόψεως, αυτό φαίνεται σαν μια χρήσιμη προσέγγιση για την διαμόρφωση ενός θόλου. Έτσι, η απαίτηση αυτο – στήριξης, που συνοδεύει κάποιους από τους ορισμούς μιας ΚΕΘ θα αγνοηθούν, ενώ θα περιορισμοί για την σταθεροποίηση των σημείων βάσης θα συμπεριληφθούν στους περιορισμούς σημείων, που συζητήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Βεβαίως, θα ήταν δυνατό να αναπτυχθεί ένας θόλος με την ανωτέρω απαίτηση. Μια άλλη τεχνική κολόβωσης θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί, αλλά η κολόβωση καθεαυτή θα ήταν πιθανώς λίγο πιο τραχεία

(ακανόνιστη) και η δομική στήριξη από τα σταθερά σημεία βάσεων θα έλειπε πιθανώς. Ο προκύπτων θόλος θα ήταν πιο κινητός εν τούτοις.

Για να διευκολυνθεί η διαδικασία ανέγερσης της κατασκευής και για να καταστεί αυτή πιο αισθητικά ευχάριστη, για το όχι και τόσο ΕΘ θόλο που σχεδιάζεται εδώ, τα σημεία βάσης υπόκεινται σε ρυθμίσεις τέτοιες, που να τα καθιστούν εισαπέχοντα επί ενός κύκλου, με κέντρο επί του άξονα συμμετρίας του θόλου. Σε αυτή την παράγραφο δίδονται οι λεπτομέρειες των ρυθμίσεων (προσαρμογών) αυτών.

Ο άξονας συμμετρίας είναι η γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο (1.0, 1.0, 1.0). Θεωρείται βολικό να κανονικοποιηθεί το αντίστοιχο διάνυσμα έτσι ώστε να έχει μήκος 1.0, έτσι χρησιμοποιείται το διάνυσμα  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  όποτε ο άξονας συμμετρίας απαιτείται για τους υπολογισμούς και καλείται  $A$ . Τα ρυθμισμένα σημεία βρίσκονται σε έναν κύκλο, που επιλέγεται έτσι ώστε τα σημεία να κινούνται το λιγότερο δυνατόν λόγω της ρύθμισης. Η ακτίνα του κύκλου είναι η μέση απόσταση των μη ρυθμισμένων σημείων από τον άξονα συμμετρίας. Αυτή η τιμή καλείται  $r_{avg}$ . Επιπλέον, τα ρυθμισμένα σημεία επιλέγονται έτσι ώστε όλα να έχουν την ίδια τιμή, όταν προβάλλονται στον άξονα συμμετρίας, και αυτό θα είναι ο μέσος όρος των τιμών των τριών μη ρυθμισμένων σημείων. Αυτή η κοινή τιμή καλείται  $h_{avg}$ . Η προβολή υπολογίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου του σημείου με το  $A$ . Η συνιστώσα του σημείου, που είναι ορθογωνική με τον άξονα καλείται  $P_i^\perp$  και υπολογίζεται από τη σχέση  $P_i^\perp = P_i - (P_i \cdot A)A$ . Τα δεδομένα αυτά συνοψίζεται στον Πίνακα 6.21.

Σημείο	$P^\perp$ Συντεταγμένες			$r$	$h$
	$x$	$y$	$z$		
$P_{22}$	-2.612699	1.235678	1.377022	3.201451	-2.029419
$P_{23}$	-1.751428	-0.376866	2.128194	2.781844	-2.385149
$P_{24}$	0.205503	-2.296956	2.091453	3.113264	-2.113745
<b>Μέσος όρος</b>	-	-	-	3.032187	-2.176104

Πίνακας 6.21: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Χαρακτηριστικά των Μη Ρυθμισμένων Σημείων Βάσης

Η ρυθμισμένη τιμή του  $P_{22}$ , έστω  $P_{22}^*$ , υπολογίζεται από τη σχέση  $P_{22}^* = h_{avg} A + \frac{r_{avg}}{|P_{22}^\perp|} P_{22}^\perp$ . Οι ρυθμισμένες τιμές για τα άλλα δύο σημεία παράγονται με την



περιστροφή του  $P'_{22}$  γύρω από τον άξονα συμμετρίας κατά  $2\pi/9$  και  $4\pi/9$ . Το εννέα επιλέγεται ως διαιρέτης για τις δύο γωνίες περιστροφής, δεδομένου ότι υπάρχουν εννέα σημεία βάσεως όταν λαμβάνονται υπόψη όλοι οι μετασχηματισμοί συμμετρίας. Το γενικό μητρώο για την περιστροφή ενός σημείου γύρω από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα  $(x, y, z)$  (δηλ. μοναδιαίου μήκους) κατά γωνία  $\theta$  έχει ως εξής<sup>[18]</sup>:

$$\begin{bmatrix} x^2 + (1 - x^2)\cos \theta & xy(1 - \cos \theta) - z \sin \theta & xz(1 - \cos \theta) + y \sin \theta \\ xy(1 - \cos \theta) + z \sin \theta & y^2 + (1 - y^2)\cos \theta & yz(1 - \cos \theta) - x \sin \theta \\ xz(1 - \cos \theta) - y \sin \theta & yz(1 - \cos \theta) + x \sin \theta & z^2 + (1 - z^2)\cos \theta \end{bmatrix}$$

Εδώ, το κανονικοποιημένο διάνυσμα είναι το  $A$  και η τιμή της  $\theta$  είναι  $2\pi/9$ . Η αντικατάσταση αυτών των τιμών παράγει το μητρώο:

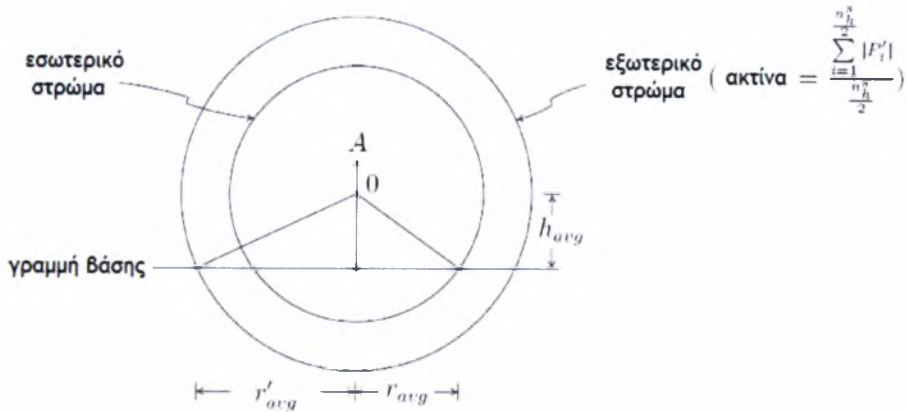
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} & \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} \\ \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} \\ \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} & \frac{(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right))}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας αυτό το μητρώο μία φορά στο  $P'_{22}$  λαμβάνεται το  $P'_{23}$  και δύο φορές το  $P'_{24}$ . Οι τιμές του Πίνακα 6.17 είναι οι ρυθμισμένες.

#### 6.2.4 Βήμα 4: Προσθήκη Αναρτήρων

Με τη μεθοδολογία κολόβωσης που συζητείται εδώ, η προσθήκη αναρτήρων, και σημείων στο έδαφος με τα οποία θα συνδεθούν, είναι συνήθως ενδεδειγμένη. Μια έγκυρη ΚΕΘ θα μπορούσε να αποκτηθεί χωρίς αυτούς τους αναρτήρες, αλλά θα ήταν πολύ ευάλωτη σε πλευρικές δυνάμεις.

Οι αναρτήρες τίθενται εκεί είναι όπου το εξωτερικό στρώμα των τενόντων συναντά το έδαφος. Τα σημεία σύνδεσής τους πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε η δράση τους να προσομοιάζει αυτή των τενόντων εξωτερικού στρώματος που θα είχαν εμφανιστεί εκεί κοντά, αλλά απαλοίφθηκαν λόγω της κολόβωσης. Τα σημεία σύνδεσης των αναρτήρων βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τα σημεία βάσης επί ενός κύκλου, ο οποίος θα αποτελεί μια διεύρυνση του κύκλου των σημείων βάσης. Ακριβέστερα, ο κύκλος σημείων σύνδεσης επιλέγεται για να είναι η τομή του εδάφους (δηλ. του επιπέδου στήριξης της ΚΕΘ) με μια σφαίρα που προσεγγίζει το εξωτερικό στρώμα τενόντων. Έστω η ακτίνα αυτού του κύκλου  $r'_{avg}$ . Το Σχήμα 6.10 παρουσιάζει διατομή του θόλου και της σφαίρας με σημειωμένες τις διαστάσεις των  $r'_{avg}$ ,  $r_{avg}$  και  $h_{avg}$  της παραγράφου 6.2.3.



Σχήμα 6.10 Θόλος Διπλού Στρώματος : Ακτίνες Σημείων Βάσης και Σημείων Σύνδεσης Αναρτήρων

Το  $r'_{avg}$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$r'_{avg} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_h^s} |P_i'|}{\frac{n_h^s}{2}}\right)^2 - h_{avg}^2}$$

όπου το  $n_h^s$  είναι ο αριθμός βασικών σημείων στη σφαίρα, και  $P_i'$  είναι ένα βασικό σημείο εξωτερικού στρώματος της σφαίρας. Για την σφαίρα 6ν, η τιμή του  $n_h^s$  είναι 18, και η τιμή  $r'_{avg}$  είναι  $\sqrt{5.15085^2 - (-2.176104)^2} = 4.6860$ .

Μια άλλη απορία που θα πρέπει να λυθεί, είναι πόσο πρέπει να περιστραφούν τα σημεία σύνδεσης των αναρτήρων ως προς τα σημεία βάσης. Μια λογική τιμή έναρξης θ είναι η μισή της τιμής της γωνίας μεταξύ των σημείων βάσης, δηλαδή  $\pi/9$  στην προκειμένη περίπτωση. Αυτά μπορούν να ρυθμιστούν αργότερα, αν κριθεί απαραίτητο για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης.

Έχοντας αυτό υπ' όψη, φαίνεται λογικό να τεθούν τα μήκη των αναρτήρων στην αντικειμενική συνάρτηση, ώστε μέσω της υπολογιστικής διαδικασίας να λάβει χώραν τροφοδότηση πληροφοριών περί του απαιτούμενου παράγοντα περιστροφής. Οι σταθμικοί παράγοντες των αναρτήρων πρέπει επίσης να επιλεγούν με γνώμονα την βέλτιστη προσομοίωση σφαίρας στην τελική γεωμετρία του θόλου.

Στον Πίνακα 6.22 παρατίθενται οι συντεταγμένες που προέκυψαν από την εφαρμογή των ανωτέρω διαδικασιών για την εύρεση των σημείων σύνδεσης των αναρτήρων, ενώ στον Πίνακα 6.23 περιέχονται τα στοιχεία για το ένα σημείο σύνδεσης αναρτήρα, που παράγεται

χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Στον δε Πίνακα 6.24 γίνεται απαρίθμηση των στοιχείων των έξι αναρτήρων, οι οποίοι προστίθενται στο μοντέλο σε αυτό το βήμα.

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P'_{30}$	-4.795937	-0.711963	1.738777
$P'_{31}$	-3.058334	-3.264453	2.553663
$P'_{32}$	-0.477574	-4.877340	1.585790

Πίνακας 6.22: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Συντεταγμένες Σημείων Σύνδεσης των Αναρτήρων

Σημείο	Συντεταγμένες			Βασικό Σημείο	Αριθμός Μετασχηματισμού
	$x$	$y$	$z$		
$P'_{33}$	$z'_{30}$	$x'_{30}$	$y'_{30}$	$P'_{30}$	3

Πίνακας 6.23: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Αντιστοιχία Συμμετρίας των Σημείων Σύνδεσης των Αναρτήρων

Μέλος #	Ακραία Σημεία		Σταθμικός παράγων	Περιορισμένο Μήκος	Αριθμός Σφαίρας
	$P'_{30}$	$P'_{23}$			
175	$P'_{30}$	$P'_{23}$	0.4000	-	-
176	$P'_{23}$	$P'_{31}$	0.4000	-	-
177	$P'_{31}$	$P'_{24}$	0.4000	-	-
178	$P'_{24}$	$P'_{32}$	0.4000	-	-
179	$P'_{32}$	$P'_{28}$	0.4000	-	-
180	$P'_{28}$	$P'_{33}$	0.4000	-	-

Πίνακας 6.24: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Αναρτήσεις

### 6.2.5 Βήμα 5: Υπολογισμός του Θόλου

Κατά τα ειωθότα, η κατασκευή υπολογίζεται με την ελαχιστοποίηση ενός σταθμικού συνδυασμού των μεσοστρωματικών και των τενόντων δέσμευσης, που υπόκειται σε περιορισμούς θλιπτήρων και τενόντων σύγκλισης. Η μεγάλη διαφορά είναι ότι τα σημεία βάσης

κρατούνται σταθερά, με αποτέλεσμα – πέραν των προαναφερθέντων πλεονεκτημάτων – να καθίσταται η κατασκευή μαθηματικά ορισμένη.

Μετά από δύο αρχικές επαναλήψεις, χρησιμοποιώντας την μέθοδο ποινής ( $\bar{\mu} = 10^5$ ) από κοινού με την μέθοδο Fletcher-Reeves, πραγματοποιείται μια προσέγγιση των αρχικών σημείων, ώστε να ικανοποιούν τους περιορισμούς. Η πηγή της αρχικής μη συμμόρφωσης με αυτούς είναι η ρύθμιση των σημείων βάσης που γίνεται στο Βήμα 3. Μετά από αυτό, τρεις επαναλήψεις της ακριβούς μεθόδου σε συνδυασμό με την μέθοδο Fletcher-Reeves οδηγούν σε σύγκλιση, με τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ανεξάρτητες τιμές συντεταγμένων να είναι όλες μικρότερες από  $10^{-5}$ .

#### 6.2.6 Βήμα 6: Προσαρμογές για την Διόρθωση Προβλημάτων

Οι ίδιοι στόχοι σε ότι αφορά τις αποστάσεις μεταξύ των μελών, που χρησιμοποιούνται για το 4ν δικτυωτό σφαιρικό T - οκτάεδρο (περί του οποίου πραγματεύεται η παράγραφος 2.3 του Κεφαλαίου 8) φαίνεται κατάλληλη για την κατασκευή αυτή. Ως εκ τούτου, οκτώ ζεύγη μελών δεν λαμβάνονται υπ' όψη, λόγω της μικρής μεταξύ τους απόστασης (στο χώρο). Οι μικρές αυτές αποστάσεις παρουσιάζονται συνήθως μεταξύ ζευγών θλιπτήρων. Στον Πίνακα 6.25 γίνεται απαρίθμηση των σχετικών ζευγών μελών και τις αντίστοιχων μεταξύ τους αποστάσεων. Επιπρόσθετα, η λύση επιδεικνύει μια σημαντική διακύμανση στις δυνάμεις μελών των τενόντων, από ένα ελάχιστο 0.7076 (# 143) σε ένα μέγιστο 5.5859 (# 99).

Ζεύγος Μελών	Προκαταρκτική Απόσταση	Τελική Απόσταση
7-20	0.1373	0.1994
13-17	0.1596	0.1855
13-24	0.1587	0.1811
17-24	0.1591	0.1894
18-20	0.1403	0.1927
21-23	0.1741	0.1901
18-44	0.1101	0.1519
20-31	0.1106	0.1616

Πίνακας 6.25: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Αρχικές και Τελικές Τιμές Αποστάσεων του Προβλήματος

Το πρόβλημα παρεμβολών είναι το πλέον θεμελιώδες. Η διακύμανση στις τιμές των δυνάμεων των τενόντων μπορεί να αντιμετωπιστεί κατά τη διάρκεια της ανέγερσης, με τη χρησιμοποίηση διαφορετικών υλικών ανάλογα με τη σχετική δύναμη των τενόντων, παρόλο που μερικές καταστάσεις μπορεί να αποδειχθεί σημαντική μια προσπάθεια διευθέτησης της εν λόγω διακύμανσης στη φάση σχεδιασμού. Οι δυνάμεις είναι μέγιστες στους τένοντες σύγκλισης και στους μεσοστρωματικούς και ελάχιστες στους τένοντες δέσμησης και στους αναρτήρες.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αποδοθεί στη χαμηλή συχνότητα του μοντέλου. Σε χαμηλότερες συχνότητες, οι τρίποδες που «κοιτούν» προς τα μέσα, των οποίων οι αιχμές είναι τα εσωτερικά τρίγωνα τενόντων σύγκλισης, τείνουν να είναι ρηχοί. Αυτό σημαίνει ότι τα μη γειτονικά συστατικά μέλη προσεγγίζουν το ένα το άλλο πάρα πολύ στη γειτονιά του τριγώνου σύγκλισης.

Το πρόβλημα παρεμβολής μπορεί να εκλείψει, με τη μείωση των μηκών των εξωτερικών τενόντων δέσμησης, που περιορίζουν την έκταση της βάσης του τρίποδα. Το γεγονός ότι οι τένοντες δέσμησης είναι όλοι σταθμικά μέλη της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτό το μοντέλο, σημαίνει αύξηση του σταθμικού παράγοντα των εν λόγω εξωτερικών αυτών ελκυστήρων δέσμησης. Ο δεσμευτικός τένοντας δέσμησης που επιλέγεται, είναι αυτός που είναι περισσότερο παράλληλος με τον θλιπτήρα που αντιμετωπίζει πρόβλημα απόστασης. Η αύξηση του σταθμικού παράγοντα αυτού του τένοντα προσδίδει στον θλιπτήρα μια πιο απότομη τροχιά στην πορεία του από το εξωτερικό στο εσωτερικό στρώμα, και τον συγκρατεί από το να πλησιάσει πολύ κοντινούς τένοντες και θλιπτήρες κατά την σύγκλιση. Στον Πίνακα 6.26 δίδεται ο εξωτερικός ελκυστήρας σύγκλισης, που αντιστοιχεί σε κάθε θλιπτήρα με πρόβλημα παρεμβολής καθώς και η νέα τιμή του σταθμικού παράγοντα του επιλεγέντος ελκυστήρα.

Θλιπτήρας #	Εξωτερικός ελκυστήρας (τένοντας) δέσμησης #	Αναθεωρημένος Σταθμικός παράγων
18	138	0.4038
20	140	0.4597
13	133	0.4038
24	144	0.3371
21	141	0.3678
17	137	0.3371

Πίνακας 6.26: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Προσαρμογές Στάθμης Μελών

Το αναθεωρημένο μοντέλο οδηγείται σε σύγκλιση χρησιμοποιώντας τρεις επαναλήψεις με την ακριβή μέθοδο από κοινού με αυτή των Fletcher-Reeves. Οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ανεξάρτητες τιμές συντεταγμένων είναι όλες μικρότερες από  $10^{-5}$  και όλες οι αποστάσεις είναι πάνω από τα αντίστοιχα κατώτατα όριά τους. Οι Πίνακες 6.27 έως 6.31 παρουσιάζουν τις τιμές για τα τελικά μήκη και τις σχετικές δυνάμεις. Όπως πριν, τα απαλοιφθέντα μέλη είναι σημειωμένα με ‡. Οι Πίνακες 6.32 και 6.33 παρουσιάζουν τελικές τιμές για τις συντεταγμένες των βασικών σημείων. Τα Σχήματα 6.11 και 6.12 επιδεικνύουν πώς το αποτέλεσμα του τελικού σχεδιασμού εμφανίζεται, όπως φαίνεται από την πλευρά και τη βάση της κατασκευής αντίστοιχα. Αναλυτικότερα, οι μεσοστρωματικοί αποκλείστηκαν και τα μέλη στο υπόβαθρο έχουν αποβληθεί από την αποκοπή. Για λόγους αναφοράς, σημειώνονται ορισμένα σημεία που επελέγησαν.

Μέλος #	Σχεπική Δύναμη	Μέλος #	Σχεπική Δύναμη
1	-10.0652	13	-10.1760
2	-10.0700	14	-9.9202
3	-9.8692	15	-10.1476
4	-11.3735	16	-6.9104
5	-9.7762	17	-9.8347
6	-9.9708	18	-10.6229
7	-10.4024	19	-6.8948
8	-10.0965	20	-9.9960
9	-9.8578	21	-10.0265
10	-10.0713	22	-6.9341
11	-9.9785	23	-9.5009
12	-11.2464	24	-10.1033

Πίνακας 6.27: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Τελικές Δυνάμεις Θλιπτήρων

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
25	2.21528	4.43056	49	2.03547	2.84966
26	2.21563	4.43127	50	2.04556	2.86379
27	2.23160	4.46319	51	2.05261	2.87366
28	2.34655	4.69309	52	2.11527	2.96138
29	2.38618	4.77235	53	2.08314	2.91640
30	2.49013	4.98025	54	2.14563	3.00388
31	2.27745	4.55489	55	2.04900	2.86860
32	2.29331	4.58661	56	2.03644	2.85101
33	2.32354	4.64708	57	1.66652	2.33313
34	2.38195	4.76390	58	2.06601	2.89242
35	2.49956	4.99913	59	2.15096	3.01134
36	2.37208	4.74416	60	2.11199	2.95678
37	2.26419	4.52838	61	2.03412	2.84777
38	2.29568	4.59136	62	1.64781	2.30693
39	2.26971	4.53941	63	2.03600	2.85040
40	2.25878	4.51755	64‡	-	-
41	2.24921	4.49841	65	2.03254	2.84556
42	2.23545	4.47090	66	2.04716	2.86602
43	2.25887	4.51773	67‡	-	-
44	2.24099	4.48198	68	2.04286	2.86000
45	2.25145	4.50290	69	2.03439	2.84814
46	2.22034	4.44068	70‡	-	-
47	2.23455	4.46910	71	2.04209	2.85893
48	2.21944	4.43888	72	2.03221	2.84510

Πίνακας 6.28: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Τελικά Μήκη και Δυνάμεις των Κύριων και Δευτερευόντων Μεσο – Στρωματικών Ελκυστήρων (Τενόντων)

Μέλος #	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Σχετική Δύναμη
73	4.94358	97	4.80745
74	5.26772	98	5.13742
75	5.16773	99	5.60404
76	4.99886	100	4.16775
77	4.65185	101	4.90834
78	3.74185	102	4.01986
79	5.18694	103	5.00085
80	5.03322	104	4.84606
81	4.93701	105	5.26904
82	5.14960	106	4.86884
83	3.71641	107	3.88380
84	4.87812	108	4.23798
85	5.03940	109	5.26776
86	5.07807	110	5.32991
87	5.16635	111	4.92827
88‡	-	112	4.59887
89	5.01478	113	5.07911
90	5.46741	114	5.78452
91‡	-	115	5.09214
92	4.28841	116	4.80643
93	4.59298	117	5.27596
94‡	-	118	4.72593
95	4.69291	119	5.04795
96	4.92845	120	5.43235

Πίνακας 6.29: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρο : Τελικές Δυνάμεις των Εσωτερικών και Εξωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Σύγκλισης



Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
121	2.71468	0.83201	145	1.89573	1.39443
122	2.63323	0.80705	146	1.83588	1.35041
123	2.66060	0.71632	147	2.01047	1.29907
124	1.83931	0.91966	148	1.21969	1.46362
125	2.46934	0.75682	149	1.28634	1.29525
126	2.30250	0.96601	150	1.28603	1.29493
127	2.54956	0.78140	151	1.28778	0.94725
128	2.61512	0.70407	152	1.65590	1.06997
129	2.59438	1.08847	153	1.28393	0.94442
130	2.56952	0.78752	154	1.25425	1.26293
131	2.18508	0.91675	155	1.27167	1.28048
132	1.85150	0.92575	156	1.22455	1.46946
133	2.63419	1.06381	157	1.75026	1.13094
134	2.60938	1.09477	158	1.32695	0.97606
135	2.73434	0.83804	159	1.39698	1.02757
136‡	0.00000	0.00000	160	2.90432	1.09132
137	2.69610	0.90895	161	2.54133	0.95493
138	2.72853	1.10191	162	1.84911	1.19481
139‡	0.00000	0.00000	163	2.94704	0.79343
140	2.54147	1.16838	164	2.52654	0.77435
141	2.69328	0.99054	165	1.79527	1.32054
142‡	0.00000	0.00000	166	2.87212	0.99419
143	2.66242	0.71680	167	2.67465	0.81974
144	2.68231	0.90430	168	1.89872	1.39663

Πίνακας 6.30: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Τελικά Μήκη και Δυνάμεις των Εξωτερικών και Εσωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Δέσμησης

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
175	2.13957	0.85583
176	2.03774	0.81510
177	2.20311	0.88124
178	.06426	0.82570
179	2.23546	0.89419
180	2.00217	0.80087

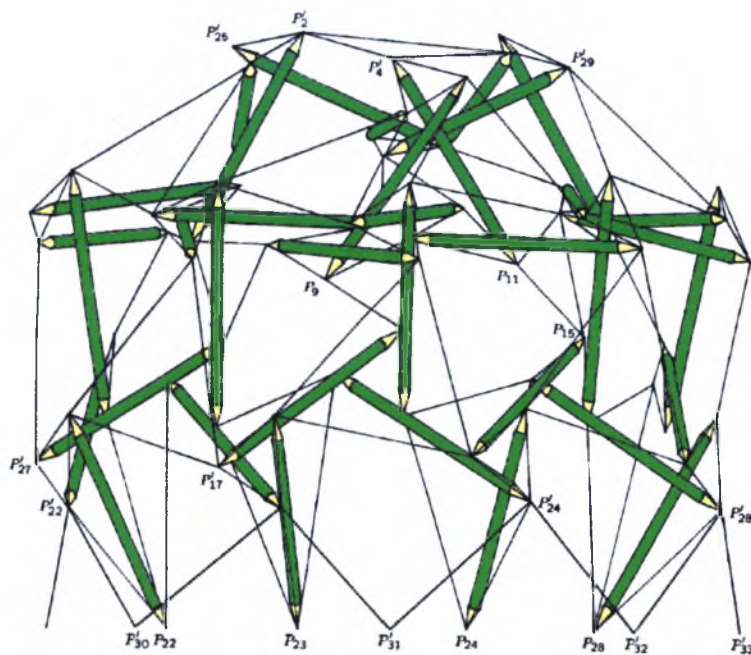
Πίνακας 6.31: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Τελικά Μήκη και Δυνάμεις Αναρτήρων

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.80813	0.75948	3.17349
$P_2$	1.37576	1.63043	2.94000
$P_3$	-0.38534	2.33141	2.97035
$P_4$	0.93791	1.01456	3.59498
$P_5$	1.08789	-0.26100	3.66069
$P_6$	0.00032	0.20887	3.95059
$P_7$	-1.37989	2.26180	2.89276
$P_8$	-1.03831	1.21623	3.55502
$P_9$	-0.98267	0.24115	3.76980
$P_{10}$	0.13756	-0.21195	3.96804
$P_{11}$	1.10801	-1.24300	3.47290
$P_{12}$	2.34501	-0.88144	2.93375
$P_{13}$	-2.16855	0.81829	3.08325
$P_{14}$	-0.80566	-1.01805	3.78455
$P_{15}$	1.36294	-2.31666	2.73597
$P_{16}$	-2.65858	1.30563	2.36051
$P_{17}$	-2.80252	0.32432	2.48821
$P_{18}$	-1.69815	-0.70421	3.46056
$P_{19}$	-1.33769	-1.58608	3.15663
$P_{20}$	0.38282	-2.35663	2.93031
$P_{21}$	0.77488	-2.93589	2.21564
$P_{22}$	-3.73094	-0.08603	0.04784
$P_{23}$	-3.10232	-1.76219	1.09539
$P_{24}$	-1.60996	-3.20168	1.04252

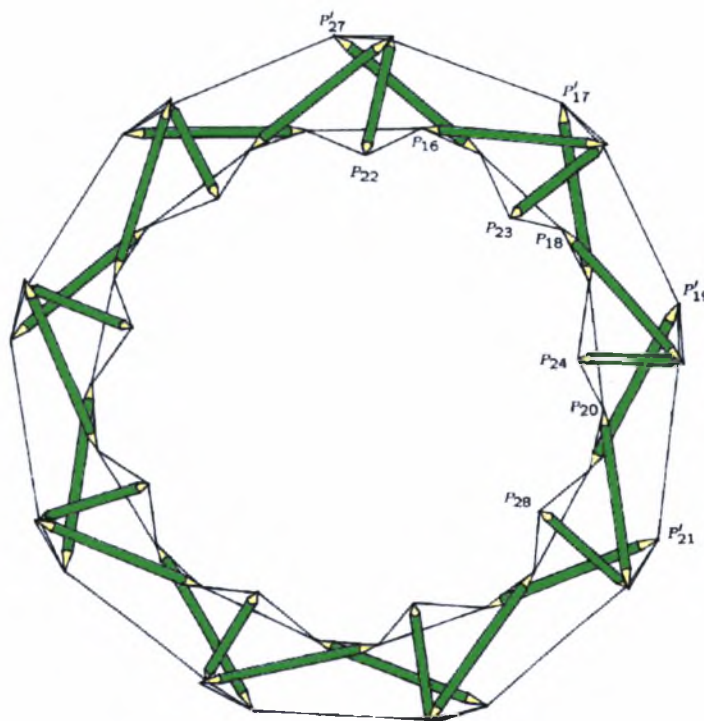
Πίνακας 6.32: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Τελικές Τιμές Εσωτερικών Συντεταγμένων

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P'_1$	3.14866	0.86815	3.60831
$P'_2$	1.46480	2.92782	3.57404
$P'_3$	0.49843	2.97345	3.82708
$P'_4$	1.12403	1.16198	5.26616
$P'_5$	1.52593	0.25847	5.41497
$P'_6$	0.54407	0.39653	5.54496
$P'_7$	-2.11381	2.32487	4.18070
$P'_8$	-1.49949	1.78849	4.75941
$P'_9$	-1.19400	-0.20205	5.60735
$P'_{10}$	-0.20625	-0.35308	5.64651
$P'_{11}$	1.60916	-1.87445	4.55170
$P'_{12}$	2.49145	-1.52781	4.23324
$P'_{13}$	-2.36532	1.39524	4.45003
$P'_{14}$	-0.82018	-1.11302	5.43305
$P'_{15}$	2.16560	-2.42225	3.92697
$P'_{16}$	-3.97029	1.88345	2.29814
$P'_{17}$	-3.70848	-0.43912	3.29623
$P'_{18}$	-3.04238	-0.81407	3.94099
$P'_{19}$	-1.41738	-2.90865	3.69479
$P'_{20}$	-0.43534	-3.06546	3.79964
$P'_{21}$	1.37815	-4.22827	2.17849
$P'_{22}$	-4.47657	1.26415	1.69803
$P'_{23}$	-3.50421	-1.41803	3.29141
$P'_{24}$	-0.95692	-3.59216	3.12842
$P'_{30}$	-4.79594	-0.71196	1.73878
$P'_{31}$	-3.05833	-3.26445	2.55366
$P'_{32}$	-0.47757	-4.87734	1.58579

Πίνακας 6.33: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Τελικές Τιμές Εξωτερικών Συντεταγμένων



Σχήμα 6.11 Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Πλάγια Όψη



Σχήμα 6.12 Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Όψη Βάσης

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΤΑ ΜΕΛΗ ΚΕΘ

### 7.1 Εισαγωγή

Μια μέθοδος για την εξακρίβωση των δυνάμεων στα διάφορα μέλη μιας ΚΕΘ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον κατασκευαστή της. Του επιτρέπει μια ορθολογική επιλογή των υλικών για τα διάφορα μέλη, έτσι ώστε να ικανοποιούνται με ασφάλεια και οικονομία οι απαιτήσεις ανάληψης φορτίων. Στα αρχικά στάδια σχεδιασμού, η ανάλυση φορτίων θα υποδείξει ποια μέλη υπερφορτίζονται (πέραν της σχετικής αντοχής τους) καθώς και καταστάσεις όπου ή κάποια μέλη μένουν αφόρπιτα ή φορτίζονται με συμβατές (προς τις απαιτήσεις σχεδιασμού τους) δυνάμεις. Για παράδειγμα, υπάρχει η πιθανότητα ένα μέλος, που μπορεί να λάβει μόνο εφελκυσμό (ένας ελκυστήρας) κατά τον σχεδιασμό να προκύψει ότι θλίβεται. Επίσης, μέσω της ανάλυσης δυνάμεων διευκολύνεται η στρατηγική συναρμολόγησης :είναι ευκολότερη η εγκατάσταση των τεταμένων μελών νωρίτερα, σε φάση που δεν αναπτύσσουν την πλήρη φέρουσα ικανότητα τους.

Η χονδροειδής ανάλυση δυνάμεων σε μια ΚΕΘ είναι σχετικά απλή, λόγω της ευκαμψίας των συνδέσεων των μελών μεταξύ τους. Οι διατμητικές δυνάμεις μπορούν ν' αμεληθούν, οπότε λαμβάνονται υπ' όψη μόνο αξονικές ( εφελκυστικές και θλιπτικές ) δυνάμεις. Πάντως, μια λεπτομερής ανάλυση μιας ΚΕΘ, π.χ. των διάφορων συστατικών μερών μιας ΚΠΣ, μπορεί να απαιτήσει και προσοχή στη διάτμηση.

Στις περισσότερες δικτυωτές μη ΕΘ κατασκευές, οι δυνάμεις των μελών τους οφείλονται μόνο στην διάδοση δια μέσου της κατασκευής εξωτερικών φορτίων εξωγενών προς την κατασκευή, όπως π.χ. φορτία βαρύτητας και αντιδράσεις στηρίξεων . Σε αντίθεση με τα παραπάνω, οι ΚΕΘ είναι προεντεταμένες, οπότε ένα επιπρόσθετο μερίδιο (και σε μερικές εφαρμογές το σύνολο) της δύναμης ενός μέλους μπορεί να αποδοθεί στην κατασκευή αυτή καθεαυτή. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι μια ΚΕΘ βασίζεται στην ισομετρική ανοιγμένη παραμόρφωση των εφελκυστικών μελών, τα οποία σε συνδυασμό με τα θλιβόμενα δημιουργούν ένα ευσταθές δομικό σύστημα. Η γεωμετρία της κατασκευής προσδιορίζει (καθορίζει) τα σχετικά μεγέθη των δυνάμεων των μελών λόγω των ανωτέρω ενδογενών παραγόντων.

Έτσι στην ανάλυση των δυνάμεων σε μια ΚΕΘ θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψη αμφότεροι οι ενδογενείς και οι εξωγενείς παράγοντες. Η ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων, εξάγεται απ' ευθείας από το προσομοίωμα, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μηκών των ελκυστήρων, και συζητείται πρώτα στο τρέχον Κεφάλαιο. Η ανάλυση των εξωγενών

δυνάμεων συζητείται κατόπιν, αφού προϋποθέτει ότι η ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

## 7.2 Ενδογενείς δυνάμεις Μελών

### 7.2.1. Μέθοδος Υπολογισμού

Η ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων σε μεγάλο βαθμό βασίζεται σε λογική ίδια με αυτή του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού για τον σχεδιασμό της κατασκευής. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η κατανομή των δυνάμεων στην κατασκευή μπορεί να ειπωθεί ως η λύση ενός εξωτερικού προβλήματος παρόμοιου με αυτό που λύθηκε για τον σχεδιασμό της κατασκευής. Στο νέο πρόβλημα, ελαχιστοποιείται η δυναμική ενέργεια αντί του μήκους των ελκυστήρων. Για μέλη που εμφανίζονται ως περιορισμοί, η σχετική δύναμη που καταπονεί ένα τέτοιο μέλος αποκτάται απλά μέσω παραγώγισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την τιμή του περιορισμού και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα επί το αρνητικό του μήκους του μέλους (δηλ. επί την 2η ρίζα της τιμής του περιορισμού). Για μέλη που εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση, η σχετική δύναμη ισούται με το γινόμενο του μήκους του μέλους επί τον σταθμικό παράγοντα του στην αντικειμενική συνάρτηση. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να αυξηθούν ή να μειωθούν κλιμακωτά, ανάλογα με το επιθυμητό <<τέντωμα>> της κατασκευής.

Η ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων, που καλούνται επίσης και δυνάμεις προέντασης, υποθέτει αρχικά ότι η κατασκευή αιωρείται στο χώρο. Στην παράγραφο 7.2.3. όπου εξετάζεται η απόκριση της κατασκευής σε εξωτερικές δυνάμεις, αυτή θεωρείται πλέον ότι στηρίζεται στο έδαφος.

### 7.2.2. Τεκμηρίωση της Μεθόδου

Η αρχή της ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας υπαγορεύει ότι ένα σύστημα που βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία, η δυναμική του ενέργεια παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Μια επίσημη διατύπωση της αρχής αυτής έχει ως εξής <sup>[13]</sup> : Μεταξύ όλων εκείνων των πεδίων μετατοπίσεων, τα οποία ικανοποιούν τις καθορισθείσες συνθήκες περιορισμών, η ορθή κατάσταση είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την συνολική Δυναμική Ενέργεια του συστήματος.

Σ' ένα σύστημα ΕΘ, η Δυναμική Ενέργεια (ΔΕ) είναι η ενέργεια που σχετίζεται πλήρως με τους ελκυστήρες και τους θλιπτήρες (δηλ. που είναι "αποθηκευμένη" στα μέλη αυτά). Όταν ένα μέλος αλλάζει μήκος, η μεταβολή της Δυναμικής του Ενέργειας ισούται με το σχετικό παραγόμενο Έργο:

$$d_{e_{i_m}} = f_{i_m} dl_{i_m}$$

όπου  $d_{e_{i_m}}$  η μεταβολή της ΔΕ του μέλους  $i_m$ ,  $f_{i_m}$  η τάση που αναπτύσσεται στο μέλος αυτό και  $dl_{i_m}$  η αλλαγή του μήκους του μέλους. Η συνθήκη σύμβαση, σύμφωνα με την οποία η τιμή του  $f_{i_m}$  είναι αρνητική όταν η τάση είναι θλιπτική και θετική όταν η τάση είναι εφελκυστική χρησιμοποιείται για τις ανάγκες της τρέχουσας μεθόδου. Αν το σύστημα ισορροπεί, μια μικρή διαταραχή, σε ότι αφορά την μεταβολή του μήκους των μελών το υλικό των οποίων είναι γραμμικά ελαστικό, δεν πρόκειται να επιφέρει αλλαγή της τιμής της συνολικής ΔΕ, καθόσον αυτή πρέπει να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, συνθήκη που γράφεται υπό την ακόλουθη μορφή :

$$0 = d_{e_1} + d_{e_2} + \dots + d_{e_{n_m}}$$

όπου  $n_m$  είναι ο αριθμός των μελών, όπως ακριβώς και στο Κεφάλαιο 3.

Η ανωτέρω σχέση επαναγράφεται ως :

$$0 = f_1 dl_1 + f_2 dl_2 + \dots + f_{n_m} dl_{n_m}$$

Πώς σχετίζεται τούτο με το πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού του Κεφαλαίου 3 ; Καθόσον τα μέλη 1- $n_0$  εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση και τα μέλη  $n_0+1$ - $n_m$  εμφανίζονται ως

περιορισμοί, χρησιμοποιώντας την έκφραση  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$  που καταδεικνύει το ποσό των μεταβολών της

αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με μια μεταβολή του τετραγώνου του μήκους του

περιορισμένου μέλους  $i_0$  η απόκριση της αντικειμενικής συνάρτησης σε μια τυχαία μεταβολή του

μήκους των περιορισμένων μελών θα δίνεται από την έκφραση :

$$\begin{aligned} do &= \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_0+1}^2)} d(\bar{l}_{n_0+1}^2) + \dots + \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} d(\bar{l}_{n_m}^2) \\ &= 2 \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_0+1}^2)} \bar{l}_{n_0+1} d\bar{l}_{n_0+1} + \dots + 2 \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} \bar{l}_{n_m} d\bar{l}_{n_m} \end{aligned}$$

Η έκφραση για την  $o$  σημαίνει ότι, για τα μέλη στην αντικειμενική συνάρτηση, θα ισχύει επίσης ότι :

$$do = \bar{w}_1 d(l_1^{*2}) + \bar{w}_2 d(l_2^{*2}) + \dots + \bar{w}_{n_0} d(l_{n_0}^{*2})$$

που οδηγεί στην

$$do = 2\bar{w}_1 l_1^* dl_1^* + 2\bar{w}_2 l_2^* dl_2^* + \dots + 2\bar{w}_{n_0} l_{n_0}^* dl_{n_0}^*$$

όπου  $l_{no}^*$  είναι το μήκος ελαχιστοποίησης του  $i_o$  μη περιορισμένου μέλους. Αν όλοι οι περιορισμοί μεταβληθούν κατά μια τυχαία ποσότητα, θα είναι επίσης αληθές ότι :

$$2\bar{w}_1 l_1^* dl_1^* + \dots + 2\bar{w}_{no} l_{no}^* dl_{no}^* = 2 \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_o+1}^2)} \bar{l}_{n_o+1} d\bar{l}_{n_o+1} + \dots + 2 \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} \bar{l}_{n_m} d\bar{l}_{n_m}$$

ή (κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι οι περιορισμοί ικανοποιούνται μέσω ισοτήτων, διαιρώντας δια 2 και παραγοντοποιώντας) :

$$0 = \bar{w}_1 l_1^* dl_1^* + \dots + \bar{w}_{no} l_{no}^* dl_{no}^* - \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_o+1}^2)} \bar{l}_{n_o+1} d\bar{l}_{n_o+1} + \dots + 2 \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} \bar{l}_{n_m} d\bar{l}_{n_m}$$

Η ομοιότητα της παραπάνω σχέσης με τη σχέση ελαχιστοποίησης της ΔΕ καταδεικνύει ότι βρισκόμαστε πολύ κοντά σε τελικά συμπεράσματα. Η μοναδική επιπλοκή συνίσταται στο ότι η τελευταία έκφραση, παρόλο που οι μεταβολές των μηκών των περιορισμένων μελών μπορεί να θεωρηθεί ως αυθαίρετες οι αλλαγές στα μήκη των μελών που περιλαμβάνονται στην αντικειμενική συνάρτηση, πρέπει να θεωρηθούν ως αλλαγές στα μήκη ελαχιστοποίησης των ελκυστήρων, και όχι ως αυθαίρετες συμβατές μεταβολές. Αυτή η επιπλοκή μπορεί να μην εμφανιστεί, αν ληφθεί υπ' όψη ότι εξ υποθέσεως εξετάζονται πραγματοποιήσιμες μεταβολές, από μια ελαχιστοποιούσα λύση. Καθόσον η αντικειμενική συνάρτηση βρίσκεται σε ελάχιστο, οποιαδήποτε πραγματοποιήσιμη μεταβολή των μηκών των μελών της αντικειμενικής συνάρτησης, που έχει τιμή έντονα διαφορετική από την αντίστοιχη ελαχιστοποιούσα, δεν θα έχει καμία επίδραση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Έτσι, μια πραγματοποιήσιμη μεταβολή των μηκών των μελών χωρίζεται σε δύο μέρη. Κατά πρώτον, μεταβάλλονται τα μήκη των περιορισμένων μελών. Η εν λόγω μεταβολή θα έχει σαν αποτέλεσμα μια αντίστοιχη ελαχιστοποιούσα μεταβολή των μηκών των μη περιορισμένων μελών, ώστε να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση. Στη συνέχεια προστίθεται ακόμα μια μεταβολή στα μήκη των μη περιορισμένων μελών, κατά τρίτον ώστε η συνολική μεταβολή να ισούται με την αρχική αυθαίρετη πραγματοποιήσιμη μεταβολή. Η επιπρόσθετη επίδραση της μεταβολής αυτής στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα πρέπει να είναι μηδενική, αφού πρόκειται περί πραγματοποιήσιμης μεταβολής από ένα ελάχιστο, χωρίς αλλαγή στους περιορισμούς. Άρα, η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση λόγω της αυθαίρετης μεταβολής είναι ίδια με το αποτέλεσμα που προκύπτει όταν τα μη περιορισμένα μέλη υπόκεινται σε μια ελαχιστοποιούσα αλλαγή.



Κατά συνέπεια για μια αυθαίρετα πραγματοποιήσιμη απόκλιση μιας ελαχιστοποιούσας λύσης θα ισχύει ότι :

$$\bar{w}_1 l_1 dl_1 + \dots + \bar{w}_{n_0} l_{n_0} dl_{n_0} = \bar{w}_1 l_1^* dl_1^* + \dots + \bar{w}_{n_0} l_{n_0}^* dl_{n_0}^*$$

οπότε

$$0 = \bar{w}_1 l_1 dl_1 + \dots + \bar{w}_{n_0} l_{n_0} dl_{n_0} - \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_0+1}^2)} l_{n_0+1} dl_{n_0+1} - \dots - \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} l_{n_m} dl_{n_m}$$

Άρα, αν

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda \bar{w}_1 l_1 \\ &\dots \\ f_{n_0} &= \lambda \bar{w}_{n_0} l_{n_0} \\ f_{n_0+1} &= -\lambda \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_0+1}^2)} l_{n_0+1} \\ f_{n_m} &= -\lambda \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} l_{n_m} \end{aligned}$$

όπου  $\lambda$  μια θετική σταθερά, το σύστημα θα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Οι ανωτέρω είναι ακριβώς οι εκφράσεις που περιγράφηκαν στην παράγραφο 7.2.1. Σημειωτέον ότι, αφού για έναν θλιπτήρα η ποσότητα  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$  είναι θετική, η  $f_{i_0}$  θα είναι αρνητική (θλιπτική δύναμη) και κατ'

αναλογία για τους ελκυστήρες η  $f_{i_2}$  θα είναι θετική (εφελκυστική δύναμη)

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού των δυνάμεων των μελών είναι ιδιαίτερα πλεονεκτικός, αφού προέρχεται (αντλεί την προέλευσή του) από την μέθοδο υπολογισμού των μηκών των μελών. Οι εν λόγω υπολογισμοί δυνάμεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο προτεινόμενων λύσεων του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού, το οποίο χαρακτηρίζει μια δοθείσα ΚΕΘ. Αν υπάρχουν τένοντες σε θλίψη ή και θλιπτήρες σε εφελκυσμό, η λύση δεν είναι αποδεκτή. (Πιθανώς κάποιοι περιορισμοί που εξ υποθέσεως ικανοποιήθηκαν μέσω ισοτήτων στην πραγματικότητα δεν είναι αποτελεσματικοί). Σε πιο περίπλοκες κατασκευές, ένας τέτοιος έλεγχος είναι σχεδόν υποχρεωτικός, γιατί μπορεί ν' απαιτηθούν αρκετές προσαρμογές μέχρι την επίτευξη μιας αποδεκτής λύσης. Συνεπώς οι διαδικασίες υπολογισμού των μηκών και των δυνάμεων των μελών είναι διαζόντως αλληλένδετες.

Είναι επίσης πολύ ενδιαφέρον, να χρησιμοποιηθεί η τελευταία διαπίστωση για την εξέταση ενός χαρακτηριστικού, το οποίο έχει αποδοθεί στις κατασκευές του Kenneth Snelson. Σύμφωνα με τον Muller<sup>[7]</sup> “στα έργα του Snelson ο βαθμός τάνυσης (καταπόνησης) των εφελκόμενων στοιχείων είναι απ’ ευθείας ανάλογο του καλυπτόμενου από αυτά χώρου – ένα πρακτικό γεγονός που ανακάλυψε κατασκευάζοντας τα γλυπτά του, ....”. Δοθιστών όλων των ανωτέρω πλήρως τεκμηριωμένων εκφράσεων για τον υπολογισμό ενδογενών δυνάμεων μελών, η δήλωση του Muller φαίνεται να δεικνύει ότι η μεθοδολογία σχεδιασμού του Snelson είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση ενός απλού (μη σταθμικού) αθροίσματος των τετραγώνων των μηκών των μελών.

Πιθανώς μέσω μιας τέτοιας μεθοδολογίας να αποκτάται η πλέον στερεή και ισχυρή κατασκευή, αλλά όπως φάνηκε στην παράγραφο 6.2.1. η μέθοδος των σταθμικών αθροισμάτων έχει το πλεονέκτημα του σχεδιασμού ΚΕΘ σφαιρικής μορφής, έναντι μιας έντονα πολυεδρικής, που θα προέκυπτε με εφαρμογή της μεθόδου του Snelson.

### 7.2.3 Περαιτέρω Τεκμηρίωση της Μεθόδου

Η χρήση της μεθόδου που αναλύεται εδώ μπορεί να τεκμηριωθεί ακόμα περισσότερο, αν κανείς προβεί σε συνδυασμό-συσχέτιση των ακόλουθων δύο παραγόντων :

α. Μια λύση του προβλήματος των δυνάμεων των μελών πρέπει αναγκαστικά να διατηρεί την ισορροπία των δυνάμεων, για οποιοδήποτε τιμή συντεταγμένων.

β. Οι αναγκαίες συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης για τη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης μιας ΚΕΘ απαιτούν το άθροισμα ενός συνόλου ορών να ισούται με μηδέν. Οι ανωτέρω παράγοντες μπορούν να γενικευτούν και για περιορισμούς όχι μελών, όπως αυτοί που αναφέρονται σε διανύσματα.

Οι αναγκαίες 1<sup>ης</sup> τάξης συνθήκες για την λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης ΚΕΘ μπορεί να ληφθούν με εφαρμογή του Lagrange, όπως στην παράγραφο 2.3. Σε αντίθεση όμως με το περιεχόμενο εκείνης της παραγράφου εδώ η μέθοδος Lagrange δεν είναι χρήσιμη. Πλην όμως, από το σημείο εύρεσης της λύσης και μετά, η εν λόγω μέθοδος είναι χρήσιμη για να την ερμηνεύσει και για να την εφαρμόσει. Για το γενικό πρόβλημα προγραμματισμού ΚΕΘ, η τροποποιημένη αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_1 l_1^2 + \dots + \bar{w}_{n_o} l_{n_o}^2 + \\ & \mu_{n_{o+1}} (\bar{l}_{n_{o+1}}^2 - l_{n_{o+1}}^2) + \dots + \mu_{n_m} (\bar{l}_{n_m}^2 - l_{n_m}^2) + \\ & \sigma_1 (\bar{s}_1 - s_1(\dots)) + \dots + \sigma_{n_s} (\bar{s}_{n_s} - s_{n_s}(\dots)) + \\ & \delta_1 (\bar{d}_1 - (\bar{W}_1 \cdot P_{d_1})) + \dots + \delta_{n_d} (\bar{d}_{n_d} - (\bar{W}_{n_d} \cdot P_{d_{n_d}})) + \\ & \gamma_1 (\bar{c}_1 - c_1(\dots)) + \dots + \gamma_{n_c} (\bar{c}_{n_c} - c_{n_c}(\dots)) \end{aligned}$$

όπου  $\mu_{i_s}$ ,  $\sigma_{i_s}$ ,  $\delta_{i_d}$  και  $\gamma_{i_c}$  είναι πολλαπλασιαστές Lagrange για τους περιορισμούς μελών, συμμετρίας, σημείων και διανυσμάτων αντίστοιχα. Βασιζόμενα σε μια ιδιότητα των πολλαπλασιαστών Lagrange<sup>[11]</sup> –θεώρημα ευαισθησίας, σύμφωνα με την οποία “η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange σε ένα σημείο λύσης είναι η τιμή της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την παράμετρο περιορισμού”, μπορούμε να γράψουμε εκ νέου την έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης με την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_1 l_1^2 + \dots + \bar{w}_{n_o} l_{n_o}^2 + \\ & \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_{o+1}}^2)} (\bar{l}_{n_{o+1}}^2 - l_{n_{o+1}}^2) + \dots + \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{n_m}^2)} (\bar{l}_{n_m}^2 - l_{n_m}^2) + \\ & \frac{\partial o}{\partial \bar{s}_1} (\bar{s}_1 - s_1(\dots)) + \dots + \frac{\partial o}{\partial \bar{s}_{n_s}} (\bar{s}_{n_s} - s_{n_s}(\dots)) + \\ & \frac{\partial o}{\partial \bar{d}_1} (\bar{d}_1 - (\bar{W}_1 \cdot P_{d_1})) + \dots + \frac{\partial o}{\partial \bar{d}_{n_d}} (\bar{d}_{n_d} - (\bar{W}_{n_d} \cdot P_{d_{n_d}})) + \\ & \frac{\partial o}{\partial \bar{c}_1} (\bar{c}_1 - c_1(\dots)) + \dots + \frac{\partial o}{\partial \bar{c}_{n_c}} (\bar{c}_{n_c} - c_{n_c}(\dots)) \end{aligned}$$

Οι αναγκαίες συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης απαιτούν το μηδενισμό της παραγώγου της ανωτέρω συνάρτησης ως προς οποιοδήποτε τιμή συντεταγμένης. Έτσι, αν το γινόμενο του  $-\lambda/2$  και ενός όρου της παραγώγου της τροποποιημένης αντικειμενικής συνάρτησης (ως προς μια τιμή συντεταγμένης) χρησιμοποιηθεί ως η δύναμη που αντιστοιχεί σε εκείνη την κατεύθυνση συντεταγμένων, η οποία σχετίζεται με τον όρο αυτό, το άθροισμα των τιμών αυτών των δυνάμεων για την τιμή αυτή της συντεταγμένης θα ισούται με το μηδέν, προκειμένου να ισορροπεί η σχετική ΚΠΣ. Ο όρος  $-\lambda/2$  εισάγεται για να εκλείψει ο διαδεδομένος όρος 2 (προερχόμενος από τις παραγώγους των τετραγώνων) και έτσι εξασφαλίζεται και η σωστή φορά των δυνάμεων. Όπως στην παράγραφο 7.2.2, το  $\lambda$  είναι μια αυθαίρετη θετική σταθερά κλίμακας.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τους περιορισμούς μελών. Τα διανύσματα δυνάμεων που αντιστοιχούν σε δύο ακραία σημεία, τα  $P_a$  και  $P_b$ , του  $i_o$  περιορισμένου μέλους θα είναι αντίστοιχα :

$$\lambda \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_o}^2)} (P_a - P_b)$$

και  $\lambda \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_o}^2)} (P_b - P_a)$

Ας σημειωθεί ότι αν το περιορισμένο μέλος είναι θλιπτήρας (για τον οποίο θα ισχύει ότι

$\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_o}^2)} > 0$ ) οι δυνάμεις των άκρων του ως αναμενόταν θα έχουν φορά προς τα έξω. Το μέγεθος της

δύναμης αυτής είναι  $\lambda \frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_o}^2)} l_{i_o}$ , δηλ πρόκειται για αποτέλεσμα που αποκτήθηκε στην

παράγραφο 7.2.2. Για το μέλος  $i_o$  στην αντικειμενική συνάρτηση, τα διανύσματα δυνάμεων των δύο ακραίων σημείων θα είναι τα :

$$-\lambda \bar{w}_{i_o} (P_a - P_b) \text{ και } -\lambda \bar{w}_{i_o} (P_b - P_a) \text{ αντίστοιχα}$$

Αφού για έναν θλιπτήρα, το  $w_{i_o}$  είναι αρνητικό, οπότε το  $-\lambda \bar{w}_{i_o}$  είναι θετικό, αν το μέλος στην αντικειμενική συνάρτηση είναι θλιπτήρας, όπως αναμενόταν και πάλι η φορά των δυνάμεων στα άκρα του θα είναι προς τα έξω. Η δύναμη αυτή θα ισούται με  $\lambda \bar{w}_{i_o} l_{i_o}$ , πάλι όπως στην παράγραφο 7.2.2.

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την περίπτωση του  $i_d$  περιορισμού

σημείων. Στην εν λόγω περίπτωση, παραγωγίζοντας την έκφραση  $\frac{\partial o}{\partial \bar{d}_{i_d}} (\bar{d}_{i_d} - (\bar{W}_{i_d} \cdot P_{d_{i_d}}))$  ως

προς τις τρεις συντεταγμένες του σημείου  $P_{d_{i_d}}$  και πολλαπλασιάζοντας επί  $-1/2$  λαμβάνουμε

$-\frac{\lambda}{2} \frac{\partial o}{\partial \bar{d}_{i_d}} \bar{W}_{i_d}$ . Μια αύξηση του  $\bar{d}_{i_d}$  σημαίνει ότι το επίπεδο περιορισμού κινείται στην

κατεύθυνση του  $\bar{W}_{i_d}$ .

Και πάλι καταδεικνύεται ότι για ΚΕΘ, η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης παρέχει επίσης χρήσιμες πληροφορίες ως προς την κατανομή των δυνάμεων εντός της κατασκευής.

### 7.2.4 Ένας Απλός Υπολογισμός της Ακριβής Μεθόδου

Στην ανάλυση της λύσης του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού για το 4n αδαμαντοειδές T-τετράεδρο της παραγράφου 4.2.3., αναφέρθηκε ότι η ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων κατάδειξε ότι η αρχική λύση, η οποία ικανοποιούσε τις συνθήκες 1<sup>ης</sup> τάξης, δεν είναι αποδεικτική, καθώς οι υπολογισμοί των δυνάμεων των μελών κατέδειξε έναν θλιβόμενο ελκυστήρα. Στην τρέχουσα παράγραφο παρουσιάζονται οι λεπτομέρειες των υπολογισμών αυτών.

Οι μαθηματικές εκφράσεις, που διέπουν τις σχετικές δυνάμεις των μελών, που περιλαμβάνονται στην αντικειμενική συνάρτηση, δεν αποτελούν κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα, αφού είναι απλά τα σταθμικά μήκη των μελών. Για τον υπολογισμό της σχετικής δυνάμεις του  $i_0$  περιορισμένου μέλους, απαιτείται η τιμή της  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$ , που αποτελεί την ολική παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς το τετράγωνο του μήκους του μέλους  $i_0$ . Η μέθοδος υπολογισμού του  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$  εξαρτάται από το αν εφαρμόζεται η μέθοδος ποινής ή η ακριβής μέθοδος, σύμφωνα και με τα εκτεθέντα στην παράγραφο 3.2.

Για το αδαμαντοειδές T-τετράεδρο οι τελικοί υπολογισμοί έγιναν με την ακριβή μέθοδο. Στα πλαίσια της μεθόδου αυτής, ο υπολογισμός του  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$  είναι μια απλή άσκηση γραμμικής άλγεβρας. Σύμφωνα με το θεώρημα των περιβαλλουσών<sup>[19]</sup>, η ολική παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την μεταβολή μιας παραμέτρου περιορισμού (εδώ την  $\bar{l}_{i_0}^2$ ) ισούται με την μερική επιρροή επί της αντικειμενικής συνάρτησης λόγω αλλαγών στις εξαρτημένες συντεταγμένες (που εκ των πραγμάτων μεταβάλλονται, αφού αλλάζουν και οι εξισώσεις που τις καθορίζουν). Λόγω της ελαχιστοποίησης, δεν απαιτείται να ληφθούν υπ' όψη οι επιρροές στην αντικειμενική συνάρτηση των μεταβολών στις ανεξάρτητες συντεταγμένες.

Άρα για την εύρεση  $\frac{\partial o}{\partial (\bar{l}_{i_0}^2)}$  και κατά πρώτον του  $\frac{d_{x_d}}{d\bar{l}_{i_0}^2}$  υπολογίζεται η απόκριση των εξαρτημένων συντεταγμένων σε μια μεταβολή του  $\bar{l}_{i_0}^2$ . Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τις μερικές παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις εξαρτημένες συντεταγμένες, υπολογίζεται η αντιστοιχούσα απόκριση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για τον υπολογισμό της απόκρισης των εξαρτημένων συντεταγμένων, επιλύεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα :

$$[\Psi^{cnd}] \frac{dx_d}{d\bar{l}_{i0}^2} = \frac{db}{d\bar{l}_{i0}^2}$$

όπου το  $\Psi^{cnd}$  είναι ένα  $n_o + n_c + n_s + n_d$  επί  $n_o + n_c + n_s + n_d$  τετραγωνικό υπομητρώο. Ενώ  $x_d$  και  $b$  είναι  $n_o + n_c + n_s + n_d$  διανύσματα-στήλη. Το υπομητρώο  $\Psi^{cnd}$  και το διάνυσμα-στήλη  $x_d$  περιγράφονται στην παράγραφο 3.2. Το διάνυσμα-στήλη  $b$  κατ' ουσίαν είναι μία συντεταγμένη καταγραφή όλων των παραμέτρων περιορισμών  $\bar{l}_{n_o+1}^2, \dots, \bar{l}_{n_m}^2, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n_s}, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{n_d}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{n_c}$ , μέσω ενός και μόνο διανύματος.

Μέλος #	Ταυτότητα Μέλους	Σχετική Δύναμη
1	$t_{12}$	-0.075081
2	$t_{13}$	1.193570
3	$t_{23}$	0.647498
4	$t_{47}$	0.492239
5	$s_{ab}$	-1.452650
6	$s_{bb}$	-1.089917
7	$t_{ab1}$	0.940409
8	$t_{ab2}$	0.448489
9	$t_{bb1}$	0.455651
10	$t_{bb2}$	0.601166

Πίνακας 7.1: Αδαμαντοειδές 4ν Τ – Τετράεδρο : Προκαταρκτικές Σχετικές Δυνάμεις

Επίσης το  $\frac{db}{d\bar{l}_{i0}^2}$  είναι ένα διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία του μηδενικά, πλην εκείνου στη γραμμή, την αντιστοιχούσα στο μέλος  $\bar{l}_o$  που ισούται με 1. Αυτό αναπαριστά την μεταβολή των παραμέτρων περιορισμών.

Μετά τον υπολογισμό μιας τιμής του  $\frac{dx_d}{d\bar{l}_{i0}^2}$ , λαμβάνεται στη συνέχεια το εσωτερικό

γινόμενο αυτού με το διάνυσμα γραμμή  $\frac{\partial o}{\partial x_d}$ , του οποίου το  $i$  στοιχείο είναι η μερική παράγωγος

της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την  $i$  εξαρτημένη συντεταγμένη (το  $x_d$  είναι το διάνυσμα στήλη  $x_d$  που έχει μετατραπεί σε διάνυσμα γραμμή). Το αποτέλεσμα είναι η μετέπειτα προς

αναζήτηση τιμή του  $\frac{\partial O}{\partial (\bar{l}_{i\delta}^2)}$ , πολλαπλασιασμένη επί  $l_{i\delta}$  (μήκος του μέλους) για να ληφθεί η

σχετική ενδογενής δύναμη του περιορισμένου μέλους εφαρμόζοντας τις διεργασίες αυτές στην πρώτη λύση του προβλήματος του 4ν αδαμαντοειδούς T- τετραέδρου οδηγεί στις τιμές του πίνακα 7.1.

Ο ελκυστήρας  $t_{12}$  θλίβεται αμυδρά, γεγονός μη αποδεκτό. Εξαιρώντας το συγκεκριμένο περιορισμό ελκυστήρα οδηγεί σε ένα καινούργιο προσομοίωμα, στο οποίο οι σχετικές δυνάμεις είναι αποδεκτές (η δύναμη του  $t_{12}=0$ ). Όπως αναμενόταν, το προκύπτον μήκος του εξαιρεθέντος ελκυστήρα είναι μικρότερο από το μέγιστο επιτρεπτό. Έτσι, ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.

Η απαλοιφή όμως ενός ελκυστήρα, δεν είναι η πιο ενδεδειγμένη ενέργεια αντιμετώπισης της εμφάνισης μη συμβατών δυνάμεων μελών, καθόσον οδηγεί σε μια κατασκευή λιγότερο στερεή.

### 7.2.5 Υπολογισμοί με βάση τη Μέθοδο Ποινής

Οι υπολογισμοί των ενδογενών δυνάμεων είναι ευκολότερη, εάν εφαρμοστεί μία μέθοδος ποινής. Στην περίπτωση αυτή, η προϋπόθεση του Luenbergerger, όσον αφορά τους

πολλαπλασιαστές Lagrange<sup>[11]</sup> δίδει μία απλή έκφραση για τον υπολογισμό του  $\frac{\partial O}{\partial \bar{l}_{i\delta}^2}$ . Καθώς για τη

μέθοδο ποινής που χρησιμοποιείται εδώ (βλέπε παράγραφο 3.2) η έκφραση  $\bar{\mu}(l_{i\delta}^2 - \bar{l}_{i\delta}^2)^2$  εμφανίζεται στην συνάρτηση ποινής, η ανωτέρω προϋπόθεση ισοδυναμεί με:

$$\frac{\partial O}{\partial \bar{l}_{i\delta}^2} = -2\bar{\mu}(l_{i\delta}^2 - \bar{l}_{i\delta}^2)$$

Όπου  $\bar{\mu}$  είναι η τιμή ποινής. Όπως και στην ακριβή μέθοδο, πολλαπλασιάζοντας την τιμή αυτή επί το μήκος του  $i_{\delta}$  περιορισμένου μέλους δίδει την τιμή της σχετικής δύναμης του μέλους αυτού.

### 7.2.6 Γενικότητα των Σταθμικών Μοντέλων

Τα ανωτέρω εκτεθέντα αποτελέσματα περί των ενδογενών δυνάμεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για να γίνει ανπληπτή η γενικότητα των σταθμικών μοντέλων στην ανάλυση ΚΕΘ. Ειδικότερα, θα δειχθεί ότι με κατάλληλη επιλογή σταθμικών παραγόντων, μία οποιαδήποτε αποδεκτή ΚΕΘ είναι η λύση ενός σταθμικού μοντέλου.

Έστω  $(l_1^*, \dots, l_{mm}^*)$  τα μήκη των μελών μιας αυθαίρετης ΚΕΘ της μορφής που αναλύεται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία. Αν πρόκειται περί αποδεκτής κατασκευής,

οποιοδήποτε εφελκυόμενο στοιχείο θα πρέπει να βρίσκεται στο ελάχιστο μήκος του ( δοθέντων των μηκών όλων των υπόλοιπων μελών), ενώ οποιοδήποτε θλιβόμενο μέλος θα πρέπει να βρίσκεται στο μέγιστο μήκος του ( δοθέντων των μηκών όλων των υπόλοιπων μελών). Σε τέτοια περίπτωση η κατασκευή θα ήταν χαλαρή. Άρα, η  $(I_j^2 = I_j^{*2})$  πρέπει να είναι λύση του ακόλουθου προβλήματος:

Ελαχιστοποίηση ως προς  $(P_1, \dots, P_n, V_1, \dots, V_n)$  της  $o_j \equiv \pm I_j^2$

Υποκείμενη σε

περιορισμούς μελών

$$\pm I_1^{*2} \geq \pm I_1^2$$

...

$$\pm I_{j-1}^{*2} \geq \pm I_{j-1}^2$$

$$\pm I_{j+1}^{*2} \geq \pm I_{j+1}^2$$

...

$$\pm I_{nm}^{*2} \geq \pm I_{nm}^2$$

Περιορισμούς συμμετρίας

$$\bar{s}_1 = s_1(\dots)$$

...

$$\bar{s}_{ns} = s_{ns}(\dots)$$

Περιορισμούς σημείων

$$\bar{d}_1 = \bar{W}_1 \cdot P_{d1}$$

...

$$\bar{d}_{nd} = \bar{W}_{nd} \cdot P_{d_{nd}}$$

Περιορισμούς διανυσμάτων



$$\bar{c}_1 = c_1(\dots)$$

$$\bar{c}_{n_c} = c_{n_c}(\dots)$$

Όπου το πρόσημο + προηγείται του  $l_j^2$  αν το j μέλος είναι ελκυστήρας και το πρόσημο – αν είναι θλιπτήρας. Η επιλογή προσήμων στους περιορισμούς ακολουθεί τις συμβάσεις που περιγράφηκαν στην παράγραφο 3.1.1. Έστω  $\mu_1^*, \dots, \mu_{j-1}^*, \mu_{j+1}^*, \dots, \mu_{n_m}^*$  οι τιμές των  $\frac{\partial o_j}{\partial (l_1^{*2}), \dots, \partial (l_{j-1}^{*2}), \partial (l_{j+1}^{*2}), \dots, \partial (l_{n_m}^{*2})}$  για τη λύση αυτή. Το  $\mu_{i_m}^*$  είναι αρνητικό για ελκυστήρες και θετικό για θλιπτήρες.

Στη συνέχεια, εξετάζεται το παρακάτω πρόβλημα:

Ελαχιστοποίηση ως προς  $P_1, \dots, P_{n_n}, V_1, \dots, V_{n_v}$  της συνάρτησης

$$o_j \equiv \bar{w}_1 l_1^2 + \dots + \bar{w}_{j-1} l_{j-1}^2 + \bar{w}_{j+1} l_{j+1}^2 + \dots + \bar{w}_{n_m} l_{n_m}^2$$

Υποκειμένης σε

περιορισμούς μελών

$$\pm l_j^{*2} \geq \pm l_j^2$$

Περιορισμούς συμμετρίας

$$\bar{s}_1 = s_1(\dots)$$

...

$$\bar{s}_{n_s} = s_{n_s}(\dots)$$

Περιορισμούς σημείων

$$\bar{d}_1 = \bar{W}_1 \cdot P_{d_1}$$

...

$$\bar{d}_{n_d} = \bar{W}_{n_d} \cdot P_{d_{n_d}}$$

Περιορισμούς διανυσμάτων

$$\bar{c}_1 = c_1(\dots)$$

...

$$\bar{c}_{n_c} = c_{n_c}(\dots)$$

Για  $i_m \neq j$  τίθεται  $\bar{w}_{i_m} = -\mu_{i_m}^*$ . Αυτή η τακτοποίηση των σταθμικών παραγόντων υπακούει την αναγκαία σύμβαση προσήμων που εισήχθη στην παράγραφο 3.1.1, σύμφωνα με την οποία οι παράγοντες αυτοί είναι θετικοί για ελκυστήρες και αρνητικοί για θλιπτήρες. Τα  $l_1^*, \dots, l_{j-1}^*, l_{j+1}^*, \dots, l_{n_m}^*$  πρέπει να αποτελούν λύση του προβλήματος αυτού. Αν υπήρχε μία πραγματοποιήσιμη απόκλιση από την λύση αυτή, που θα μείωνε την  $\sigma_j$ , η μεταβολή αυτή εφαρμοζόμενη στο προηγούμενο πρόβλημα θα σήμαινε ότι η λύση για την  $\sigma_j$  θα μειωνόταν με την ίδια ποσότητα. Τούτο επίσης σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή του  $\pm l_j^2$ , που είναι συμβατή με την ανωτέρω πραγματοποιήσιμη μεταβολή, είναι μεγαλύτερη από  $\pm l_j^{*2}$ , γεγονός που αντιβαίνει τον περιορισμό μήκους τούτου του προβλήματος.

Κατά συνέπεια, βρέθηκε ένα σταθμικό μοντέλο, έτσι ώστε οι τιμές μιας δοθείσας ΚΕΘ να είναι λύση και αποδείχτηκε η αρχική προϋπόθεση. Τούτο φυσικά δεν σημαίνει ότι ένα συγκεκριμένο σταθμικό προσομοίωμα έχει ως λύση μία και μοναδική ΚΕΘ. Μερικά μοντέλα διαθέτουν περισσότερες από μία λύσεις, έκαστη των οποίων είναι μία αποδεκτή ΚΕΘ.

### 7.3 Εξωγενείς δυνάμεις μελών

#### 7.3.1 Μέθοδος ανάλυσης

Η ανάλυση της συμπεριφοράς (απόκρισης) μιας ΚΕΘ σε εξωγενείς δυνάμεις απαιτεί σημαντική αλλαγή της οπτικής γωνίας προσέγγισης του όλου προβλήματος. Μία κατασκευή θεωρείται πλέον σαν ένα σύνολο εύκαμπτα συνδεδεμένων ελαστικών μελών και μελών σταθερού μήκους. Οι ελκυστήρες αποτελούν τα ελαστικά συστατικά και οι θλιπτήρες τα συστατικά σταθερού

μήκους. Αρχικά η ΚΠΣ λαμβάνεται ως σημειακή, στην δε παράγραφο 7.3.5 αντιμετωπίζεται η παρουσία ΚΠΣ σύμφωνα με τις πραγματικές διαστάσεις της πλήρους παρουσίας τους.

Η επίλυση του προβλήματος προγραμματισμού ΚΕΘ και η προκύπτουσα ανάλυση ενδογενών δυνάμεων παρέχουν μία αποδεκτή αρχικά αφόρπιστη διαμόρφωση μελών, με την έννοια ότι η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε ΚΠΣ ισούται με μηδέν. Οι δυνάμεις (χωρίς εξωτερική φόρπιση) είναι οι εφελκυστικές των τενόντων, οι θλιπτικές των θλιπτήρων και οι αντιδράσεις (εφελκυστικές ή θλιπτικές) λόγω περιορισμών σημείων. Η φορά της κάθε αντίδρασης είναι αυτή του διανύσματος που ορίζει τον περιορισμό.

Εξωγενή φορτία εισάγονται σε επιλεγμένες ΚΠΣ προσθέτοντας ένα ανεξάρτητο διάνυσμα δύναμης στις δυνάμεις που υπάρχουν στην ΚΠΣ. Στην αρχική διαμόρφωση, η συνισταμένη των δυνάμεων στην ΚΠΣ δεν είναι πλέον ίση με μηδέν, οπότε απαιτείται η εύρεση μίας νέας διαμόρφωσης της κατασκευής, τέτοια που η νέα συνισταμένη να ισούται με μηδέν. Η νέα αυτή διαμόρφωση βρίσκεται επιλύοντας ένα σύστημα εξισώσεων (αντί ένα πρόβλημα προγραμματισμού). Υπάρχει μία εξίσωση για κάθε μία από τις  $x$ ,  $y$  και  $z$  συνιστώσες της συνολικής δύναμης σε κάθε ΚΠΣ. Επίσης, υφίσταται και μία εξίσωση για το μήκος των θλιπτήρων, το οποίο δεν πρέπει να μεταβληθεί στη νέα διαμόρφωση.

Όλες οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές ως προς τις μεταβλητές τους. Μεταβλητές δε είναι οι τιμές των συντεταγμένων, οι δυνάμεις των μελών σταθερού μήκους και οι μεταβολές κλίμακας των αντιδράσεων λόγω των περιορισμών σημείων. Η επίλυση του προκύπτοντος μη γραμμικού συστήματος γίνεται μέσω ευρέως διαδεδομένου εμπορικού λογισμικού (Mathematica ή MathLab), που διαθέτει ενσωματωμένες διάφορες σχετικές αριθμητικές μεθόδους, και επιλέγεται αυτόματα η πιο κατάλληλη (από πλευράς ταχύτητας σύγκλισης και αποτελεσματικότητας) ανάλογα με την φύση των μη γραμμικοτήτων (αυτό-προσαρμογή).

### 7.3.2 Μαθηματικό πλαίσιο

Για μία συμβατή (αποδεκτή) διαμόρφωση ΚΕΘ θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα τρία συστήματα (σύνολα) εξισώσεων. Το πρώτο σύστημα επιβάλλει τον μηδενισμό της συνισταμένης όλων των δυνάμεων που δρουν στις ΚΠΣ. Οι δυνάμεις αυτές είναι οι προερχόμενες από τα μέλη που συναντώνται στην ΚΠΣ, οι αντιδράσεις λόγω περιορισμών σημείων (που επιδρούν

επί της ΚΠΣ) και οποιαδήποτε εξωγενής δύναμη δρώσα στην ΚΠΣ. Κατά συνέπεια, και σύμφωνα με τα ήδη εκτεθέντα για τη φύση, τη φορά και την προέχει όλων αυτών των δυνάμεων, το 1<sup>ο</sup> σύστημα εξισώσεων θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^m + \sum_{j=1}^{q_i} F_{ij}^d + \bar{F}_i^e$$

$$i = 1, \dots, n_h$$

Όπου

$n_h$  = αριθμός των κόμβων

$m_i$  = αριθμός των μελών που συναντιούνται στον κόμβο  $i$

$q_i$  = αριθμός περιορισμών σημείων που προσκρούουν στον κόμβο  $i$

$F_{ij}^m$  = δύναμη στον κόμβο  $i$  λόγω του μέλους  $m_{ij}$  (διάνυσμα)

$m_{ij}$  = δείκτης της συνάντησης των μελών  $j$  στον κόμβο  $i$

$F_{ij}^d$  = δύναμη στον κόμβο  $i$  λόγω του περιορισμού σημείου  $q_{ij}$  (διάνυσμα)

$q_{ij}$  = δείκτης του  $j$  περιορισμού σημείου προσκρούοντας στον κόμβο  $i$

$\bar{F}_i^e$  = εξωγενής δύναμη στον κόμβο  $i$  (σταθερό διάνυσμα)

Ο τύπος για το  $F_{ij}^m$  είναι:

$$F_{ij}^m = f_{ij}^m \frac{D_{ij}}{|D_{ij}|}$$

Όπου:

$f_{ij}^m$  = το προσημασμένο μέγεθος της δύναμης στην  $i$  ΚΠΣ λόγω του μέλους  $m_{ij}$

$D_{ij} = \tilde{P}_{ij} - P_i$  (διάνυσμα)

$P_i$  = σημείο που αντιστοιχεί στην  $i$  ΚΠΣ

$\tilde{P}_{ij}$  = το ακραίο σημείο του μέλους  $m_{ij}$  μακριά από την  $i$  ΚΠΣ

Αν το μέλος  $m_{ij}$  είναι σταθερού μήκους (δηλ. ένας θλιπτήρας), τότε το  $f_{ij}^m$  είναι μία αρνητική μεταβλητή, της οποίας η τιμή προσαρμόζεται για να αποκτηθεί μία λύση. Αν το μέλος  $m_{ij}$  είναι ελαστικό (δηλ. ένας ελκυστήρας) τότε θα ισχύει ότι:

$$f_{ij}^m = \bar{\epsilon}_{m_{ij}} \frac{|D_{ij}| - \bar{l}_{m_{ij}}}{\bar{l}_{m_{ij}}}$$

Όταν  $|D_{ij}| \geq \bar{l}_{m_{ij}}$ , δηλ. όταν  $f_{ij}^m$ , όπου

$\bar{\epsilon}_{m_{ij}}$  = αναλογικός συντελεστής ελαστικότητας για το μέλος  $m_{ij}$

$\bar{l}_{m_{ij}}$  = μήκος αναφοράς του μέλους  $m_{ij}$

Η σχέση που δίνει το  $F_{ij}^d$  είναι η ακόλουθη:

$$F_{ij}^d = \beta_{ij} \bar{W}_{ij}$$

Όπου

$\beta_{ij}$  = τιμή κλίμακας για την δύναμη αντίδρασης στην  $i$  ΚΠΣ λόγω του περιορισμού σημείου  $q_{ij}$

$\bar{W}_{ij}$  = το καθορίζον διάνυσμα του περιορισμού σημείου  $q_{ij}$

Το 2<sup>ο</sup> σύστημα εξισώσεων είναι απλά οι περιορισμοί σημείων.

Το 3<sup>ο</sup> σύστημα εξισώσεων πηγάζει από την απαίτηση οι θλιπτήρες να έχουν σταθερό μήκος και έχει ως εξής:

$$|D_i| = \bar{l}_{f_i}$$

$$i = 1, \dots, n_f$$

Όπου

$$n_f = \text{συνολικός αριθμός θλιπτήρων} = \frac{n_h}{2}$$

$$f_i = \text{δείκτης του θλιπτήρα } i$$

$$D_i = \text{διάνυσμα διαφοράς (απόσταση) μεταξύ των άκρων του μέλους } f_i$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, ο συνολικός αριθμός εξισώσεων προς επίλυση είναι ίσος με  $3n_h + n_d + n_f$ .

### 7.3.3 Αρχικές Τιμές- Συνθήκες και Τιμές Έναρξης

Μία αρχική λύση των ανωτέρω εξισώσεων- απουσία εξωγενών φορτίων- μπορεί να ευρεθεί από τις τιμές των συντεταγμένων και των ενδογενών δυνάμεων που υπολογίστηκαν με τις μεθόδους που έχουν ήδη περιγραφεί στις παραγράφους 7.2.3 και 7.2.4. Οι ΚΠΣ τοποθετούνται σύμφωνα με τις τιμές των συντεταγμένων. Για τους θλιπτήρες και τους περιορισμούς σημείων, οι τιμές των δυνάμεων που αποκτήθηκαν από την «ενδογενή» ανάλυση, χρησιμοποιούνται σαν αρχικές των  $f_{ij}^m$  και  $\beta_{ij}$ . Για κάθε ελκυστήρα, μία τιμή για το  $\bar{\epsilon}_{m_{ij}}$  επιλέγεται σύμφωνα με το υλικό κατασκευής του. Το  $\bar{l}_{m_{ij}}$  επιλέγεται κατόπιν έτσι ώστε να είναι αρκούντως μικρότερο από το ελαχιστοποιούν μήκος του ελκυστήρα, έτσι ώστε η τιμή του  $f_{ij}^m$  να ισούται με τη δύναμη του ελκυστήρα, που προήλθε από την ανάλυση των ενδογενών δυνάμεων.

### 7.3.4 Εφαρμογή 1

Η ανωτέρω μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της απόκρισης του 6ν Τ-οκταεδρικού θόλου (που σχεδιάστηκε στην παράγραφο 6.2) σε εξωγενή φορτία. Με

σκοπό τη μείωση των υπολογισμών που απαιτούνται, η εξωτερική φόρτιση επιλέγεται να δρα συμμετρικά επί της κατασκευής. Συγκεκριμένα, η ΚΠΣ που αντιστοιχεί στο σημείο P<sub>2</sub> και οι δύο ΚΠΣ συμμετρικές με αυτό φορτίζονται με μία δύναμη, με σχετική τιμή (-3,-3,-3). Πρόκειται για ένα διάνυσμα δύναμης που κατευθύνεται στη βάση της κατασκευής, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1

Το πρώτο βήμα έγκειται στην επιλογή κατάλληλων τιμών για τις παραμέτρους  $\bar{\epsilon}_{m_y}$  και  $\bar{l}_{m_y}$ . Το  $\bar{\epsilon}_{m_y}$  επιλέγεται ίδιο για όλους τους τένοντες και με τέτοιο τρόπο ώστε, αν επιβληθεί σε έναν τένοντα η μέση τιμή της ενδογενούς δύναμης, αυτός επιμηκύνεται κατά 2%. Η μέση τιμή των ενδογενών δυνάμεων όλων των τενόντων ισούται με 3.1294, όπως υπολογίζεται από τα περιεχόμενα των πινάκων 6.28-6.31. Άρα, η τιμή που επιλέγεται για το  $\bar{\epsilon}$  (την κοινή τιμή όλων των παραμέτρων  $\bar{\epsilon}_{m_y}$ ) είναι  $3.1294/0.02=156.47$ .

Σημειώτεον ότι, για τον τρέχοντα δειγματοληπτικό υπολογισμό, όλες οι δυνάμεις είναι σχετικές. Για να βρεθούν οι πραγματικές τιμές των δυνάμεων αυτών, όλα θα πρέπει να κλιμακωθούν. Για παράδειγμα, αν οι ελκυστήρες του 6ν Τ-οκταεδρικού θόλου κατασκευαστούν από ένα τέτοιο υλικό, που να απαιτείται μία δύναμη 20 rounds (89 Newton) για την επιμήκυνση του κατά 2%, όλες οι τιμές των δυνάμεων θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν επί  $20/3.1294=6.391$ . Κατά συνέπεια, το μέγεθος του εξωγενούς φορτίου θα είναι ίσο με  $6.391*(3^2+3^2+3^2)=33.21$  rounds (147.7 N). Ο παράγων αυτός θα πρέπει επίσης να εφαρμοστεί στις τιμές των δυνάμεων των πινάκων 7.6-7.10, για να ληφθούν δυνάμεις σε rounds.

Δοθείσης της τιμής του  $\bar{\epsilon}$ , οι τιμές των παραμέτρων  $\bar{l}_{m_y}$  επιλέγονται ώστε οι αρχικές τιμές των δυνάμεων των τενόντων να ταιριάζουν με τις υπολογισθείσες ενδογενείς δυνάμεις. Στους πίνακες 7.2-7.5 παρατίθενται οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν. Όπως πάντα, τα μέλη που έχουν απαλειφθεί σημειώνονται με †.

Μέλος #	$\bar{\ell}$	Μέλος #	$\bar{\ell}$
25	2.15428	49	1.99907
26	2.15461	50	2.00880
27	2.16971	51	2.01560
28	2.27822	52	2.07598
29	2.31555	53	2.04503
30	2.41331	54	2.10521
31	2.21302	55	2.01211
32	2.22800	56	2.00000
33	2.25652	57	1.64203
34	2.31157	58	2.02851
35	2.42218	59	2.11034
36	2.30228	60	2.07282
37	2.20050	61	1.99776
38	2.23024	62	1.62387
39	2.20572	63	1.99957
40	2.19539	64‡	-
41	2.18635	65	1.99624
42	2.17335	66	2.01033
43	2.19548	67‡	-
44	2.17859	68	2.00619
45	2.18847	69	1.99802
46	2.15907	70‡	-
47	2.17250	71	2.00545
48	2.15821	72	1.99592

Πίνακας 7.2: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Κύρια και Δευτερεύοντα Μήκη Αναφοράς  
Μεσο – Στρωματικών Ελκυστήρων (Τενόντων)



Μέλος #	$\bar{\ell}$	Μέλος #	$\bar{\ell}$
73	0.96937	97	0.97019
74	0.96743	98	0.96821
75	0.96803	99	0.96542
76	0.96904	100	0.97406
77	0.97113	101	0.96959
78	0.97664	102	0.97495
79	0.96791	103	0.96903
80	0.96884	104	0.96996
81	1.45412	105	0.96742
82	0.96814	106	0.96982
83	0.97680	107	0.97578
84	0.96977	108	0.97363
85	0.96880	109	0.96743
86	1.45285	110	0.96706
87	0.96804	111	0.96947
88‡	-	112	0.97145
89	0.96895	113	0.96856
90	0.96624	114	0.96435
91‡	-	115	0.96848
92	0.97332	116	0.97020
93	0.97148	117	0.96738
94‡	-	118	0.97068
95	0.97088	119	0.96875
96	0.96946	120	0.96645

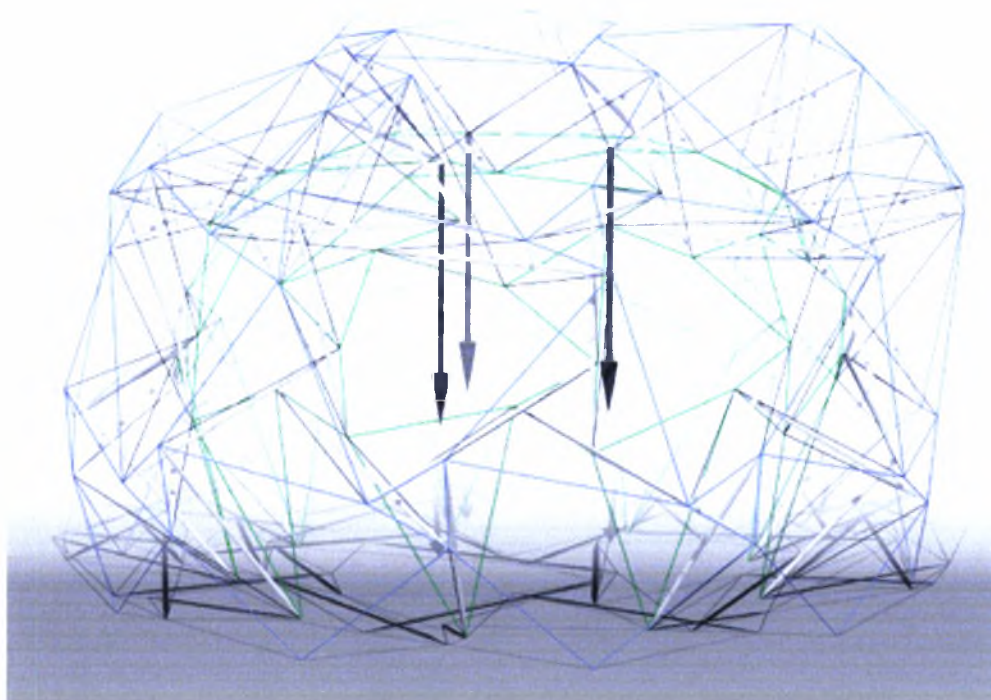
Πίνακας 7.3: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Μήκη Αναφοράς Εσωτερικών και Εξωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Σύγκλησης

Μέλος #	$\bar{\ell}$	Μέλος #	$\bar{\ell}$
121	2.70032	145	1.87898
122	2.61972	146	1.82018
123	2.64847	147	1.99391
124	1.82857	148	1.20838
125	2.45745	149	1.27578
126	2.28837	150	1.27547
127	2.53689	151	1.28003
128	2.60341	152	1.64465
129	2.57646	153	1.27623
130	2.55666	154	1.24420
131	2.17235	155	1.26135
132	1.84061	156	1.21316
133	2.61640	157	1.73770
134	2.59125	158	1.31872
135	2.71977	159	1.38787
136†	-	160	2.88421
137	2.68053	161	2.52592
138	2.70945	162	1.83510
139†	-	163	2.93217
140	2.52263	164	2.51409
141	2.67634	165	1.78025
142†	-	166	2.85398
143	2.65028	167	2.66071
144	2.66690	168	1.88192

Πίνακας 7.4: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Μήκη Αναφοράς Εσωτερικών και Εξωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Δέσμησης

Μέλος #	$\bar{\ell}$
175	2.12793
176	2.02718
177	2.19077
178	2.05342
179	2.22276
180	1.99197

Πίνακας 7.5: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Μήκη Αναφοράς Αναρτήρων



Σχήμα 7.1:6ν Οκταεδρικός Θόλος : Θέσεις και Επιρροή των Εξωγενών Φορτίων

Στο σχήμα 7.1 απεικονίζεται η θέση και η επιρροή των εξωγενών φορτίων στην θολωτή ΚΕΘ. Στον πίνακα 7.6 περιέχονται οι προκύπτουσες δυνάμεις των θλιπτήρων, στους πίνακες 7.7-7.10 οι προκύπτουσες δυνάμεις και μήκη των ελκυστήρων, και στους πίνακες 7.11 και 7.12 οι προκύπτουσες τιμές συντεταγμένων. Στους πίνακες 7.13 και 7.14 περιλαμβάνονται τα προκύπτοντα διανύσματα δυνάμεων στις σταθερές ΚΠΣ βάσης πριν και μετά την επιβολή του φορτίου. Για τα σημεία σύνδεσης των αναρτήρων (δηλ. τα  $P'_{30}$ ,  $P'_{31}$  και  $P'_{32}$ ), η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν εκεί είναι θετική. Τούτο σημαίνει ότι η δύναμη αυτή έχει φορά προς τα άνω, γεγονός αναμενόμενο, αφού στα σημεία αυτά συνδέονται ελκυστήρες από σημεία πάνω από τη βάση. Η απόσταση του  $P_2$  από την βάση, από 5.60914 μονάδες μοντέλου μειώνεται σε 4.94255 μονάδες (προσεγγίζει τη βάση κατά 0.66059 μονάδες), λόγω της δράσης της εξωγενούς φόρτισης. Σημειώτεον επίσης ότι στον πίνακα 7.9, κάποιιοι τένοντες δέσμευσης έχουν χαλαρώσει. Επίσης, για την πληρότητα του σχεδιασμού, θα πρέπει να εξεταστούν (και κατόπιν να επιλυθούν) τυχόν προβλήματα αποστάσεων μεταξύ μελών στο χώρο, δηλ. αν κάποια μέλη εφάπτονται ή τέμνονται, λόγω κάποιων μη αποδεκτών περιορισμών ή λόγω των εξωτερικών φορτίων. Τούτο εκτίθεται στο Κεφάλαιο 8.

Μέλος #	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Σχετική Δύναμη
1	-10.7566	13	-10.9204
2	-11.7166	14	-9.8635
3	-14.1718	15	-12.2574
4	-13.4791	16	-6.6828
5	-11.3231	17	-9.8881
6	-13.1420	18	-11.2389
7	-11.8063	19	-7.0818
8	-11.3412	20	-10.0929
9	-9.7997	21	-10.5841
10	-10.2812	22	-6.5853
11	-11.3834	23	-9.0954
12	-12.8010	24	-10.5933

Πίνακας 7.6: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Δυνάμεις στους Θλιπτήρες λόγω Φόρτισης

### 7.3.5 Σύνθετες Κεντρικές Περιοχές Σύνδεσης

Η τεχνική που περιγράφηκε προηγουμένως για την ανάλυση των εξωγενών δυνάμεων είναι λειτουργική όταν δεν χρησιμοποιούνται οι περιορισμοί διανυσμάτων, αφού τίθεται σε ισχύ η απλοποιητική παραδοχή ότι μία ΚΠΣ είναι απλά ένα σημείο στο χώρο. Όταν όμως οι ΚΠΣ είναι σύνθετες και αναγκαστικά εφαρμόσονται και περιορισμοί διανυσμάτων, τότε πιθανότατα να εμφανιστεί και στρέψη ως επιπρόσθετη ένταση. Για την αντιμετώπιση της περίπλοκης αυτής κατάστασης προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο.

Σε αυτό, αντιστοιχείται σε κάθε θλιπτήρα η καλούμενη περιβάλλουσα θλιπτήρα. Πρόκειται περί ενός στερεού σώματος, στο οποίο συνδέονται οι ελκυστήρες αλλά μπορεί να δεχθεί τόσο περιορισμούς σημείων όσο και εξωγενείς δυνάμεις. Οι τένοντες, οι περιορισμοί δυνάμεων και οι εξωγενείς δυνάμεις (και οι τρεις αυτοί παράγοντες συνολικά) υποτίθενται ότι δρουν επί των περιβαλλουσών θλιπτήρων, σε μεμονωμένα σημεία, που κατανέμονται πάνω σε αυτές. Αυτά ονομάζονται στο εξής «σημεία εξάρτησης (ΣΕ)». Το σχήμα των περιβαλλουσών θλιπτήρων (ΠΘ) καθορίζεται από τις εξισώσεις θλιπτήρων και τους περιορισμούς διανυσμάτων. Οι εξισώσεις θλιπτήρων εισάγονται ως περιορισμοί, μέσω των οποίων το μήκος των θλιπτήρων παραμένει αμετάβλητο. Ο συνολικός αριθμός των περιορισμών αυτών θα πρέπει να είναι ικανός για να ορίζεται απόλυτα η εκάστοτε ΠΘ.

Σε αντίθεση με το προηγούμενο μοντέλο (όπου οι ελκυστήρες συνδέονταν σε ένα από τα δύο ακραία σημεία κάποιου θλιπτήρα), στο προτεινόμενο στην παράγραφο αυτή μοντέλο, έκαστος ελκυστήρας διαθέτει ένα μοναδικό ΣΕ επί της ΠΘ. Όλα τα ΣΕ, συμπεριλαμβανομένων και αυτών των περιορισμών σημείων αλλά και των εξωγενών δυνάμεων, θεωρείται ότι συσσωρεύονται σε δύο ΚΠΣ. Κάθε μία από αυτές έχει ένα αντίστοιχο σημείο αναφοράς, το οποίο ονομάζεται ως

ακραίο σημείο θλιπτήρα, παρόλο που ο πραγματικός θλιπτήρας μπορεί να εκτείνεται αρκετά πέραν του σημείου αυτού και ίσως να μην διέρχεται καν από αυτό. Επίσης, σε κάθε ΚΠΣ πρέπει να βρίσκονται περισσότερα από ένα ΣΕ. Οι κόμβοι συνεχίζουν να θεωρούνται εύκαμπτοι, οπότε η στρέψη θεωρείται δρώσα μόνο επί της ΠΘ και όχι επί των ελκυστήρων.

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
25	2.20326	3.55741	49	2.03415	2.74632
26	2.20680	3.78963	50	2.07711	5.32121
27	.24049	5.10497	51	2.10845	7.20793
28	2.35786	5.47004	52	2.10820	2.42796
29	2.43895	8.33865	53	2.09795	4.04919
30	2.51493	6.58847	54	2.14628	3.05190
31	2.29341	5.68381	55	2.04701	2.71396
32	2.29322	4.58086	56	2.03510	2.74633
33	2.34671	6.25362	57	1.66710	2.38867
34	2.38640	5.06486	58	2.05984	2.41664
35	2.51846	6.21956	59	2.15698	3.45785
36	2.38028	5.30160	60	2.11407	3.11398
37	2.27067	4.98962	61	2.03192	2.67516
38	2.31398	5.87477	62	1.64568	2.10171
39	2.27982	5.25673	63	2.03915	3.09712
40	2.27003	5.31957	64‡	-	-
41	2.24545	4.22960	65	2.02524	2.27278
42	2.23093	4.14557	66	2.04974	3.06680
43	2.27054	5.34933	67‡	-	-
44	2.23906	4.34314	68	2.03455	2.21201
45	2.25109	4.47740	69	2.03970	3.26448
46	2.22165	4.53522	70‡	-	-
47	2.23087	4.20444	71	2.03829	2.56217
48	2.21661	4.23362	72	2.03720	3.23582

Πίνακας 7.7: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Μήκη και Δυνάμεις Κύριων και Δευτερευόντων Μεσο-Στρωματικών Ελκυστήρων (Τενόντων) λόγω Φόρτισης

Μέλος #	Μήκος	Σχεπική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχεπική Δύναμη
73	0.99329	3.85972	97	0.99965	4.75017
74	1.01663	7.95780	98	0.99331	4.05643
75	1.01540	7.65689	99	1.00173	5.88465
76	0.99478	4.15546	100	0.99955	4.09540
77	0.99376	3.64598	101	1.00137	5.12947
78	0.99695	3.25321	102	1.01283	6.07944
79	0.99017	3.59783	103	1.00467	5.75433
80	1.00933	6.54029	104	1.00218	5.19817
81	1.50361	5.32548	105	0.99971	5.22217
82	0.99082	3.66633	106	1.00556	5.76645
83	1.00948	5.23566	107	1.00406	4.53408
84	0.99642	4.29989	108	1.00088	4.37907
85	0.98806	3.11137	109	0.99816	4.97036
86	1.51233	6.40604	110	1.00551	6.22156
87	1.00441	5.87963	111	1.00612	5.91662
88†	-	-	112	0.99576	3.91605
89	1.00637	6.04386	113	1.00470	5.83896
90	1.00765	6.70593	114	1.00230	6.15694
91†	0.00000	0.00000	115	1.00015	5.11714
92	1.00464	5.03427	116	1.00086	4.94495
93	1.00265	5.02001	117	1.00334	5.81591
94†	-	-	118	0.99407	3.77070
95	1.00567	5.60734	119	1.00398	5.69160
96	1.00674	6.01624	120	0.99996	5.42603

Πίνακας 7.8: Θόλος 6ν T – Οκτάεδρου : Μήκη και Δυνάμεις Εσωτερικών και Εξωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Σύγκλησης λόγω Φόρτισης

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη	Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
121	2.70947	0.52980	45	1.87496	0.00000
122	2.53218	0.00000	146	1.83291	1.09459
123	2.44184	0.00000	147	2.01356	1.54175
124	1.84404	1.32367	148	1.23443	3.37263
125	2.30039	0.00000	149	1.08359	0.00000
126	2.30359	1.04060	150	1.14127	0.00000
127	2.54516	0.51011	151	1.28069	0.08096
128	2.62350	1.20781	152	1.62424	0.00000
129	2.57895	0.15158	153	1.29686	2.52944
130	2.57928	1.38453	154	1.14619	0.00000
131	2.17666	0.31057	155	1.27222	1.34780
132	1.86323	1.92369	156	1.24194	3.71146
133	2.64081	1.45944	157	1.64919	0.00000
134	2.59995	0.52518	158	1.31804	0.00000
135	2.73317	0.77089	159	1.40527	1.96143
136†	-	-	160	2.88836	0.22524
137	2.70689	1.53865	161	2.51456	0.00000
138	2.72797	1.06931	162	1.86892	2.88352
139†	-	-	163	2.90433	0.00000
140	2.55151	1.79147	164	2.50274	0.00000
141	2.70008	1.38773	165	1.80955	2.57487
142†	-	-	166	2.86090	0.37926
143	2.66620	0.94011	167	2.65589	0.00000
144	2.67084	0.23110	168	1.91684	2.90318

Πίνακας 7.9: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Μήκη και Δυνάμεις Εσωτερικών και Εξωτερικών Ελκυστήρων (Τενόντων) Δέσμησης λόγω Φόρτισης

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
175	2.13419	0.459938
176	2.02801	0.064638
177	2.19309	0.165828
178	2.06349	0.767356
179	2.22285	0.005841
180	1.99408	0.165191

Πίνακας 7.10: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Μήκη και Δυνάμεις Αναρτήρων λόγω Φόρτισης

Σημείο	Συντεταγμένες		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>P</i> <sub>1</sub>	1.50456	0.40995	2.85399
<i>P</i> <sub>2</sub>	1.00233	1.23867	2.55063
<i>P</i> <sub>3</sub>	-0.59661	2.16366	2.87199
<i>P</i> <sub>4</sub>	0.66472	0.72576	3.33198
<i>P</i> <sub>5</sub>	0.96159	-0.35998	3.52049
<i>P</i> <sub>6</sub>	-0.09865	0.17065	3.86423
<i>P</i> <sub>7</sub>	-1.58666	2.20740	2.80497
<i>P</i> <sub>8</sub>	-1.12115	1.20549	3.48417
<i>P</i> <sub>9</sub>	-1.07951	0.22167	3.70649
<i>P</i> <sub>10</sub>	0.03607	-0.29452	3.88378
<i>P</i> <sub>11</sub>	1.01184	-1.34989	3.41346
<i>P</i> <sub>12</sub>	2.24377	-1.01815	2.82434
<i>P</i> <sub>13</sub>	-2.26128	0.76098	3.10646
<i>P</i> <sub>14</sub>	-0.83994	-1.02583	3.77637
<i>P</i> <sub>15</sub>	1.37853	-2.41936	2.73598
<i>P</i> <sub>16</sub>	-2.70685	1.28850	2.37261
<i>P</i> <sub>17</sub>	-2.88612	0.30664	2.48711
<i>P</i> <sub>18</sub>	-1.72821	-0.71532	3.43013
<i>P</i> <sub>19</sub>	-1.34254	-1.59864	3.14311
<i>P</i> <sub>20</sub>	0.38935	-2.38946	2.92076
<i>P</i> <sub>21</sub>	0.76841	-2.98729	2.20544
<i>P</i> <sub>22</sub>	-3.73094	-0.08603	0.04784
<i>P</i> <sub>23</sub>	-3.10232	-1.76219	1.09539
<i>P</i> <sub>24</sub>	-1.60996	-3.20168	1.04252

Πίνακας 7.11: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Τιμές Εσωτερικών Συντεταγμένων λόγω Φόρτισης



Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	2.87120	0.70422	3.30117
$P'_2$	1.35842	2.61844	3.20190
$P'_3$	0.43034	2.65244	3.57177
$P'_4$	1.05048	1.20289	4.98885
$P'_5$	1.50968	0.32968	5.21792
$P'_6$	0.53617	0.45294	5.40814
$P'_7$	-2.19505	2.29874	4.14049
$P'_8$	-1.55397	1.79921	4.72264
$P'_9$	-1.19245	-0.16017	5.59900
$P'_{10}$	-0.20174	-0.30239	5.59633
$P'_{11}$	1.58750	-1.87493	4.55447
$P'_{12}$	2.46471	-1.52851	4.20406
$P'_{13}$	-2.42845	1.37874	4.46217
$P'_{14}$	-0.82003	-1.07359	5.41164
$P'_{15}$	2.14157	-2.43112	3.92621
$P'_{16}$	-4.02302	1.86969	2.30391
$P'_{17}$	-3.74810	-0.46244	3.30181
$P'_{18}$	-3.07624	-0.83364	3.94795
$P'_{19}$	-1.41976	-2.90815	3.70067
$P'_{20}$	-0.44273	-3.09431	3.80405
$P'_{21}$	1.38238	-4.26313	2.18230
$P'_{22}$	-4.52297	1.26281	1.69294
$P'_{23}$	-3.53726	-1.44084	3.30058
$P'_{24}$	-0.97004	-3.60258	3.13190
$P'_{25}$	-4.79594	-0.71196	1.73878
$P'_{26}$	-3.05833	-3.26445	2.55366
$P'_{27}$	-0.47757	-4.87734	1.58579
$P'_{28}$	2.87120	0.70422	3.30117
$P'_{29}$	1.35842	2.61844	3.20190
$P'_{30}$	0.43034	2.65244	3.57177
$P'_{31}$	1.05048	1.20289	4.98885
$P'_{32}$	1.50968	0.32968	5.21792

Πίνακας 7.12: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Τιμές Εξωτερικών Συντεταγμένων λόγω Φόρτισης

Σημείο	Διάνυσμα Δύναμης		
	$x$	$y$	$z$
$P_{22}$	-0.23825	-0.44848	-0.74095
$P_{23}$	-0.47160	-0.56638	-1.08428
$P_{24}$	-0.63563	-0.30815	-0.89948
$P'_{30}$	0.64444	0.50802	0.60475
$P'_{31}$	0.66222	0.60749	0.52500
$P'_{32}$	0.67850	0.67438	0.48840

Πίνακας 7.13: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Διανύσματα Δυνάμεων Σημείων Βάσης (χωρίς φόρτιση)

Σημείο	Διάνυσμα Δύναμης		
	$x$	$y$	$z$
$P_{22}$	-1.12554	-1.08852	-0.98920
$P_{23}$	-1.08628	-1.43482	-1.53837
$P_{24}$	-0.99081	-0.94641	-1.54760
$P'_{30}$	0.29387	0.00651	0.33279
$P'_{31}$	0.14264	0.03256	0.06753
$P'_{32}$	-0.17743	0.47498	0.57411

Πίνακας 7.14: Θόλος 6ν Τ – Οκτάεδρου : Διανύσματα Δυνάμεων Σημείων Βάσης (με φόρτιση)

Και στο τρέχον μοντέλο, το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων θα πρέπει να ισούται με μηδέν, μόνο όμως για την ΠΘ ως σύνολο και όχι μεμονωμένα για την κάθε ΚΠΣ. Επιπρόσθετα, το άθροισμα των στρεπτικών ροπών σε κάθε ΚΠΣ λόγω όλων των εκεί δρώντων δυνάμεων θα πρέπει επίσης να ισούται με μηδέν<sup>[42]</sup>. Από τα αποτελέσματα δε της ανάλυσης των εξωγενών δυνάμεων μπορεί να προκύψει ένα διάνυσμα δυνάμεων και στρεπτικών ροπών για κάθε ΠΘ. Τα διανύσματα αυτά θα είναι μάλλον πάνω σε μία διεύθυνση περίπου ταυτιζόμενη με τους άξονες των σχετικών θλιπτήρων, πολλές φορές όμως δεν θα υπάρχει πλήρη ταύτιση. Η εξίσωση που υπαγορεύει ισορροπία των δυνάμεων θα έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^m + \sum_{j=1}^{q_i} F_{ij}^d + \sum_{j=1}^{u_i} \overline{F}_{ij}^e$$

$$i = 1, \dots, n_f$$

Όπου

$$n_f = \text{ο αριθμός των θλιπτήρων} = \frac{n_h}{2}$$

$m_i$  = ο αριθμός των ελκυστήρων που συνδέονται με την  $i$  ΠΘ

$q_i$  = ο αριθμός των περιορισμών σημείων, που επηρεάζουν την  $i$  ΠΘ

$u_i$  = ο αριθμός των εξωγενών δυνάμεων, που επηρεάζουν την  $i$  ΠΘ

$F_{ij}^m$  = δύναμη στην  $i$  ΠΘ λόγω του  $m_{ij}$  περιορισμού σημείων (διάνυσμα)

$m_{ij}$  = δείκτης του  $j$  ελκυστήρα, που συνδέεται στην  $i$  ΠΘ

$F_{ij}^d$  = δύναμη στην  $i$  ΠΘ λόγω του  $q_{ij}$  περιορισμού σημείων (διάνυσμα)

$q_{ij}$  = δείκτης του  $j$  περιορισμού σημείων, που επηρεάζει την  $i$  ΠΘ

$\bar{F}_{ij}^e$  = η  $j$  εξωγενής δύναμη, που επηρεάζει την  $i$  ΠΘ (σταθερό διάνυσμα)

Η έκφραση για την  $F_{ij}^m$  έχει ως εξής:

$$F_{ij}^m = f_{ij}^m \frac{D_{ij}}{|D_{ij}|}$$

Στην οποία:

$f_{ij}^m$  = το προσημασμένο μέγεθος της δύναμης στην  $i$  ΠΘ λόγω του  $m_{ij}$  ελκυστήρα

$D_{ij} = \tilde{P}_{ij}^m - P_{ij}^m$  (διάνυσμα)

$P_{ij}^m$  = το σημείο όπου ο  $m_{ij}$  ελκυστήρας συνδέεται στην  $i$  ΠΘ

$\tilde{P}_{ij}^m$  = το απομακρυσμένο σημείο σύνδεσης του  $m_{ij}$  ελκυστήρα

Η τιμή του  $f_y^m$  για ελκυστήρες υπολογίζεται όπως προηγουμένως. Τιμή για θλιπτήρες δεν υφίσταται καθώς δεν περιλαμβάνονται εδώ. Η έκφραση για το  $F_{ij}^d$  παραμένει η ίδια, ενώ εκ νέου οι τιμές του  $\beta_y$  είναι ένα μέρος των τιμών που προσαρμόζονται για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων.

Οι εξισώσεις για την ισορροπία των ροπών στρέψης είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^m \times (P_{ij}^m - P_i^c) + \sum_{j=1}^{q_i} F_{ij}^d \times (P_{ij}^d - P_i^c) + \sum_{j=1}^{u_i} \bar{F}_{ij}^e \times (P_{ij}^e - P_i^c)$$

$$i = 1, \dots, n_f$$

Όπου

$P_{ij}^d$  = το σημείο επί της  $i$  ΠΘ, που περιορίζεται από τον  $q_y$  περιορισμό σημείων

$P_{ij}^e$  = το σημείο επί της  $i$  ΠΘ, όπου εφαρμόζεται η  $j$  εξωγενής δύναμη

$$P_i^c = \frac{1}{m_i + q_i} \left( \sum_{j=1}^{m_i} P_{ij}^m + \sum_{j=1}^{q_i} P_{ij}^d \right) = \text{κεντρικό σημείο της } i \text{ ΠΘ}$$

Οι περιορισμοί σημείων θα πρέπει επίσης να ικανοποιηθούν μαζί και με τους περιορισμούς διανυσμάτων. Το σύνολο των εξισώσεων, που περιορίζουν το μήκος των θλιπτήρων να παραμείνει αμετάβλητο, συνεχίζει να βρίσκεται σε ισχύ. Έτσι, υφίστανται  $6n_f + n_d + n_c + n_f$  εξισώσεις προς επίλυση για τις τιμές των συντεταγμένων των σημείων  $P_1, \dots, P_{n_h}, V_1, \dots, V_{n_u}$  και για τους παράγοντες κλίμακας,  $\beta_y$ , για τις αντιδράσεις λόγω των περιορισμών σημείων. Αναγκαία προς τούτο συνθήκη είναι να ισχύει η σχέση  $6n_f + n_d + n_c + n_f = 3(n_h + n_u) + n_d$ . Αφού δε  $2n_f = n_h$ , η συνθήκη αυτή καταλήγει στη σχέση της ισότητας  $n_c + n_f = 3n_u$ .

Στην πραγματικότητα, είναι πολύ πιο θεμελιώδης η εξέταση της τελευταίας συνθήκης για κάθε ΠΘ. Για μία και μόνη ΠΘ, η συνθήκη εκφράζεται ως  $n_{c_i} + 1 = 3n_{u_i}$ , όπου  $n_{c_i}$  είναι ο αριθμός των περιορισμών διανυσμάτων που αναφέρονται στον  $i$  θλιπτήρα και  $n_{u_i}$  είναι ο αριθμός των διανυσμάτων που απαιτούνται για την προσομοίωση των ΚΠΣ αυτού. Η συνθήκη θα ισχύει αν υφίσταται ικανός αριθμός περιορισμών διανυσμάτων, για τον ευσταθή καθορισμό της ΠΘ. Σε ενάντια περίπτωση θα πρέπει να ισχύσουν επιπρόσθετοι περιορισμοί διανυσμάτων. Πιθανώς, ως υπο-προϊόν των ανωτέρω ποιοτικών διαπιστώσεων, ορισμένοι περιορισμοί διανυσμάτων να φανούν χρήσιμοι μόνο για την ανάλυση των εξωγενών φορτίων, και να μη χρειαστεί να ικανοποιηθούν κατά την επίλυση του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού που αντιστοιχεί με τον συνολικό σχεδιασμό της κατασκευής.

Μετά την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων, μπορούν να υπολογιστούν χαρακτηριστικές τιμές των δυνάμεων μελών για τις ΠΘ. Για κάθε ΠΘ, τα ΣΕ χωρίζονται σε δύο ομάδες, που αντιστοιχούν στις δύο ΚΠΣ. Τούτο δε επιτυγχάνεται με χρήση του κεντρικού σημείου της ΠΘ.

Κατ' αρχήν, υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο του κεντρικού αυτού σημείου με το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ των ακραίων σημείων του θλιπτήρα. Κατόπιν, υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο αυτού του διανύσματος με το κάθε ΣΕ. Αν το 2<sup>ο</sup> εσωτερικό γινόμενο είναι μικρότερο του 1<sup>ου</sup>, τότε τα ΣΕ που αντιστοιχούν στο σημείο αυτό εντάσσονται σε μία ομάδα. Αλλιώς, εντάσσονται σε διαφορετική ομάδα. Η χαρακτηριστική δύναμη μέλους για την ΠΘ βρίσκεται αθροίζοντας τις δυνάμεις μιας εκ των δύο ομάδων ΣΕ. Αφού το άθροισμα των δυνάμεων για όλα τα ΣΕ της ΠΘ ισούται με μηδέν, το άθροισμα για την μία ομάδα προκύπτει άμεσα σαν αφαίρεση.

Επιπρόσθετα, μπορεί κανείς να υπολογίσει την ροπή στρέψης για κάθε θλιπτήρα, προκειμένου να εκτιμηθεί η δύναμη συστροφής στην οποία υπόκειται. Ο υπολογισμός αυτός βασίζεται στην παραδοσιακή διαδικασία εύρεσης της ροπής μιας δύναμης ως προς ένα δεδομένο σημείο<sup>[42]</sup>. Κάνοντας χρήση της διαδικασίας που περιγράφηκε για τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής δύναμης μέλους για την ΠΘ, τα ΣΕ διαχωρίζονται σε ομάδες, που αντιστοιχούν στις ΚΠΣ. Το προσημασμένο μέγεθος των ροπών που αντιστοιχούν σε κάθε ΚΠΣ υπολογίζονται στη συνέχεια μέσω των ακόλουθων τριπλών βαθμωτών προϊόντων:

$$\frac{D_i}{|D_i|} \cdot \left( \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^m \times (P_{ij}^m - P_i^m) + \sum_{j=1}^{q_i} F_{ij}^d \times (P_{ij}^d - P_i^m) + \sum_{j=1}^{u_i} \bar{F}_{ij}^e \times (P_{ij}^e - P_i^m) \right)$$

Στα οποία οι επί μέρους παράγοντες είναι:

$$D_i = \tilde{P}_i^m - P_i^m \quad (\text{διάνυσμα})$$

$P_i^m$  = το σημείο όπου ο θλιπτήρας συνδέεται με την  $i$  ΚΠΣ

$\tilde{P}_i^m$  = το ακραίο (απομακρυσμένο) σημείο σύνδεσης του παραπάνω θλιπτήρα (μακριά από την  $i$  ΚΠΣ)

$m_i$  = ο αριθμός των ελκυστήρων που συνδέονται στην  $i$  ΚΠΣ

$q_i$  = ο αριθμός των περιορισμών σημείων που επηρεάζουν την  $i$  ΚΠΣ

$u_i$  = ο αριθμός των εξωγενών δυνάμεων που δρουν στην  $i$  ΚΠΣ

$F_{ij}^m$  = η δύναμη στην  $i$  ΚΠΣ λόγω του ελκυστήρα (διάνυσμα)

$m_{ij}$  = δείκτης του  $j$  τένοντα που συνδέεται στην  $i$  ΚΠΣ

$P_{ij}^m$  = το σημείο όπου ο ελκυστήρας  $m_{ij}$  συνδέεται στην  $i$  ΚΠΣ

$F_{ij}^d$  = δύναμη στην  $i$  ΚΠΣ λόγω του περιορισμού σημείων  $q_{ij}$  (διάνυσμα)

$q_{ij}$  = δείκτης του  $j$  περιορισμού σημείου που δρα στην  $i$  ΚΠΣ

$P_{ij}^d$  = το σημείο στην  $i$  ΚΠΣ που περιορίζεται από τον περιορισμό σημείων  $q_{ij}$

$\bar{F}_{ij}^e$  = η  $j$  εξωγενής δύναμη που δρα στην  $i$  ΚΠΣ (σταθερό διάνυσμα)

$P_{ij}^e$  = το σημείο της  $i$  ΚΠΣ στο οποίο εφαρμόζεται η  $j$  εξωγενής δύναμη

Αφού για τον θλιπτήρα συνολικά το άθροισμα των ροπών ισούται με μηδέν, οι ροπές στις δύο ΚΠΣ του θλιπτήρα θα είναι ίσες μεταξύ τους.

### 7.3.6 Εφαρμογή 2

Για την παρουσίαση ενός παραδείγματος ανάλυσης εξωγενών δυνάμεων, με την παραδοχή μη σημειακών ΚΠΣ, είναι χρήσιμο να ανατρέξει κανείς το πρίσμα ΕΘ της παραγράφου 2.2. Κατά την πορεία δε της παρουσίασης, θα εισαχθεί-εφαρμοστεί και η έννοια των μετά-περιορισμών, ως ένα εργαλείο σχεδιασμού το οποίο επιτρέπει στην ΚΕΘ να συμμορφωθεί προς κάποιες γεωμετρικές απαιτήσεις, οι οποίες δεν μπορούν (λόγω ασυμβατότητας) να συμπεριληφθούν στο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού. Εδώ ο μετά-περιορισμός απαιτεί η γωνία μεταξύ των θλιπτήρων του πρίσματος να είναι  $90^\circ$ , οπότε το πρίσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κόμβος ενός κυβικού δικτύωματος. Αν αυτός ο περιορισμός είχε εισαχθεί στο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού θα είχε οδηγήσει σε μία ΚΕΘ με πολλούς χαλαρούς τένοντες. Όμως η επιθυμητή γεωμετρία μπορεί να επιτευχθεί αν ο περιορισμός αυτός επιβληθεί σε μετέπειτα στάδια της όλης ανάλυσης.

Αφού το εξωγενές φορτίο δρα ασύμμετρα, στο τρέχον μοντέλο δεν γίνεται χρήση μετασχηματισμών συμμετρίας. Για θλιπτήρες χρησιμοποιούνται τετράγωνα μεταλλικές ράβδοι πλευράς 1" (25mm) και μήκους 14" (356mm). Διανοίγοντας δε τρύπες διέλευσης-σύνδεσης των τενόντων σε απόσταση: 1" από το κάθε άκρο των θλιπτήρων, και τα σημεία αυτά απέχουν συνεπώς 12" (306mm). Το μοντέλο περιγράφεται ως εξής:

Ελαχιστοποίηση ως προς  $A, B, C, A', B', C', V_a, V_b, V_c$  της  $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$

Υποκείμενη σε

περιορισμούς μελών:

$$\begin{aligned}\bar{s}^2 &= s_a^2 = s_b^2 = s_c^2 \\ \bar{u}^2 &= u_a^2 = u_b^2 = u_c^2 \\ \bar{u}^2 &= \tilde{u}_a^2 = \tilde{u}_b^2 = \tilde{u}_c^2\end{aligned}$$

Περιορισμός σημείων:

$$\begin{aligned}0 &= x_A = y_A = z_A \\ 0 &= y_B = z_B = z_C\end{aligned}$$

Περιορισμούς διανυσμάτων:

$$\begin{aligned}\bar{u}^2 &= |V_a|^2 = |V_b|^2 = |V_c|^2 \\ 0 &= V_a \cdot (A' - A) = V_b \cdot (B' - B) = V_c \cdot (C' - C)\end{aligned}$$

Όπου

$$\begin{aligned}s_a &= |\overline{AA'}|; s_b = |\overline{BB'}|; s_c = |\overline{CC'}| \\ t_a &= |\overline{\dot{A}\dot{C}'}|; t_b = |\overline{\dot{B}\dot{A}'}|; t_c = |\overline{\dot{C}\dot{B}'}| \\ u_a &= |\overline{\ddot{A}\ddot{B}}|; u_b = |\overline{\ddot{B}\ddot{C}}|; u_c = |\overline{\ddot{C}\ddot{A}}| \\ \tilde{u}_a &= |\overline{\dot{A}'\dot{B}'}|; \tilde{u}_b = |\overline{\dot{B}'\dot{C}'}|; \tilde{u}_c = |\overline{\dot{C}'\dot{A}'}| \\ \dot{A} &= A + V_a; \dot{B} = B + V_b; \dot{C} = C + V_c \\ \ddot{A} &= A - V_a; \ddot{B} = B - V_b; \ddot{C} = C - V_c \\ \dot{A}' &= A' + V_a; \dot{B}' = B' + V_b; \dot{C}' = C' + V_c \\ \ddot{A}' &= A' - V_a; \ddot{B}' = B' - V_b; \ddot{C}' = C' - V_c\end{aligned}$$

$\bar{u} = 1/2''$  (13mm) αφού αντιπροσωπεύει το μισό του μήκους της οπής που διανοίχθηκε. Τα διανύσματα που χρησιμοποιήθηκαν για να μορφώσουν τις αποστάσεις των άκρων των θλιπτήρων από τα σημεία σύνδεσης των ελκυστήρων (δηλ. από τις οπές) περιορίζονται να είναι ορθογωνικοί προς τους αντίστοιχους θλιπτήρες τους, αφού και οι οπές διανοίχθηκαν κάθετα προς τους θλιπτήρες. Σημειωτέον ότι για κάθε θλιπτήρα χρησιμοποιείται το ίδιο διάνυσμα για την μόρφωση και των τεσσάρων αποστάσεων στις δύο ΚΠΣ, γεγονός που υπαγορεύεται από το ότι οι οπές είναι ευθυγραμμισμένες, δηλ. βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (το οποίο διέρχεται από τον κεντροβαρικό άξονα κάθε θλιπτήρα). Σε άλλη (διαφορετική) περίπτωση θα γινόταν χρήση κάποιου διανύσματος ανεξάρτητης προσαρμογής.

$s = 12''$  (305mm), αφού αναπαριστά την απόσταση μεταξύ των οπών σε κάθε θλιπτήρα. Το  $\bar{u}$  θα έχει ως τιμή εκκίνησης  $\frac{3 \cdot 12}{7} = 5.14''$  (130mm) και θα προσαρμοστεί μεταξύ

διαδοχικών λύσεων του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού για να αποκτηθεί μια κατασκευή με ορθογωνικούς θλιπτήρες. Η αρχική τιμή που προήλθε από την τιμή 3 που είχε χρησιμοποιηθεί στην παράγραφο 2.2.2, με τη διαφορά ότι μεγεθύνθηκε κατάλληλα, αφού εδώ το μήκος του θλιπτήρα είναι  $12''$ , ενώ στην προαναφερθείσα παράγραφο ήταν  $7''$  (178mm).

Παρόλο που το τρέχον μοντέλο πλησιάζει περισσότερο προς την καρτεσιανή εκδοχή του T-πρίσματος της παραγράφου, μπορεί κανείς να αντλήσει αρχικά δεδομένα από τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.2.2. Πρώτα τοποθετείται το τρίγωνο βάσης σε θέση που να ικανοποιούνται οι περιορισμοί σημείων. Το άλλο ακραίο τρίγωνο λαμβάνεται περιστρέφοντας το προηγούμενο κατά  $150^\circ$  περί το κέντρο του και ανυψώνοντας το κατάλληλα. Το μέγεθος αυτής της ανύψωσης (ύψους), το οποίο αντιπροσωπεύει την τιμή του  $z$  σε αυτό το μοντέλο υπολογίζεται λύνοντας την έκφραση για το  $s^2$  της παραγράφου 2.2.2 ως προς  $h$  και κάνοντας χρήση του

γεγονότος ότι  $\bar{r}^2 = 3\left(\frac{12}{7}\right)^2$  :

$$h = \left( \bar{s}^2 - 2\bar{r}^2 + 2\bar{r}^2 \cos\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \left( 12^2 - 2 \cdot 3 \left( \frac{12}{7} \right)^2 + 2 \cdot 3 \left( \frac{12}{7} \right)^2 \cos(150^\circ) \right)^{\frac{1}{2}} = 10.54'' (268\text{mm})$$

Στον πίνακα 7.15 παρατίθενται οι αρχικές τιμές. Τα αρχικά δεδομένα ικανοποιούν με αρκετή ακρίβεια τους περιορισμούς, έτσι ώστε να μην απαιτούνται επαναλήψεις ποινής για να φθάσουμε σε σημείο που να μπορεί το σύστημα των εξισώσεων ως προς τις εξαρτημένες συντεταγμένες, σε όρους των ανεξάρτητων. Η μέθοδος επίλυσης συνδυάζει απότομη κατάβαση<sup>\*</sup> και Fletcher-Reeves<sup>^</sup>, ενώ στο τέλος πραγματοποιείται και μία επανάληψη Newton-Raphson για να βελτιωθεί η ακρίβεια της λύσης.

\* 8 επαναλήψεις

^ άλλες 8 επαναλήψεις



Σημείο/ Διάνυσμα	Συντεταγμένες (inches [cm])		
	$x$	$y$	$z$
$A$	0	0	0
$B$	5.14 [13.06]	0	0
$C$	2.57 [6.53]	4.45 [11.30]	0
$A'$	5.54 [14.07]	1.48 [3.76]	10.54 [26.77]
$B'$	1.09 [2.77]	4.06 [10.31]	10.54 [26.77]
$C'$	1.09 [2.77]	-1.09 [-2.77]	10.54 [26.77]
$V_a$	0	0.5 [1.27]	0
$V_b$	0	0.5 [1.27]	0
$V_c$	0	0.5 [1.27]	0

Πίνακας 7.15: T – Πρίσμα : Αρχικές Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Για την παρακολούθηση της γωνίας μεταξύ γειτονικών θλιπτήρων, λαμβάνεται το εσωτερικό γινόμενο των αντίστοιχων διανυσμάτων τους. Η μηδενική τιμή του υποδηλώνει ορθογωνικότητα. Για την 1<sup>η</sup> λύση, η τιμή του εσωτερικού γινομένου βρέθηκε ίση με 80.7266. Αυξάνοντας την τιμή του  $\bar{u}$  κατά 0.01 οδηγούμεθα σε μείωση του εσωτερικού γινομένου σε 80.5217. Μέσω παρεμβολής προς τα έξω (extrapolation), η απαιτούμενη αύξηση υπολογίζεται ίση με  $0.01 \cdot \frac{80.7266}{80.7266 - 80.5217} = 3.93980$  που έχει σαν αποτέλεσμα η αρχική τιμή του  $\bar{u}$  να καταλήξει ίση με  $\frac{3 \cdot 12}{7} + 3.93980 = 9.08266''$ . Η σημαντική αύξηση στην νέα τιμή του  $\bar{u}$  έχει σαν αποτέλεσμα την αδυναμία επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων ως προς τις εξαρτημένες συντεταγμένες με όρους των ανεξάρτητων. Επιστρατεύονται συνεπώς δέκα επαναλήψεις Fletcher-Reeves σε συνδυασμό με τη μέθοδο ποινης, που οδηγούν σε ένα επιλύσιμο σύστημα. Πάντως οι αρχικές επαναλήψεις είναι αρκετά τραχείς, και φθάνουν σε μία τιμή του εσωτερικού γινομένου ίση με -20.2664. Συνεχίζοντας όμως τις μετά-επαναλήψεις κατά Newton-Raphson καταλήγουμε στον επιθυμητό μηδενισμό του εσωτερικού γινομένου. Η αλληλουχία των τιμών που παράγονται περιλαμβάνονται στον Πίνακα 7.16. Η τελική τιμή του  $\bar{u}$  βρέθηκε ίση με 8.38288 και των  $t_a, t_b$  και  $t_c$  ίση με 6.65618.

Οι τιμές μετά την λύση των παραμέτρων ελέγχου δίνονται στον Πίνακα 7.17 και η προκύπτουσα κατασκευή απεικονίζεται στο Σχήμα 7.2. Η ορθογωνική διαμόρφωση προσδίδει στους θλιπτήρες την μέγιστη ανά μονάδα μήκους απόσταση μεταξύ τους. Κάθε θλιπτήρας διαθέτει μία ακμή ακριβώς επάνω στο επίπεδο στήριξης, γεγονός που και αυτό είναι προϊόν της μεταξύ τους ορθογωνικότητας. Οι δυνάμεις προέντασης παρατίθενται στον Πίνακα 7.18. Αυτές κλιμακώνονται έτσι ώστε η μέση δύναμη των ελκυστήρων να ισούται με 20pounds (89N), που έχει σαν αποτέλεσμα μία ροπή στρέψης σε έναν θλιπτήρα ίση με 0.75foot-pounds (1.01Nm).

$\bar{u}$	Εσωτερικό γινόμενο θλιπτήρων
5.14286	80.7266
5.15286	80.5217
9.08266	-20.2664
9.07266	-19.9746
8.38813	-0.150138
8.37813	0.135670
8.38288	-0.000073
8.38287	0.000213

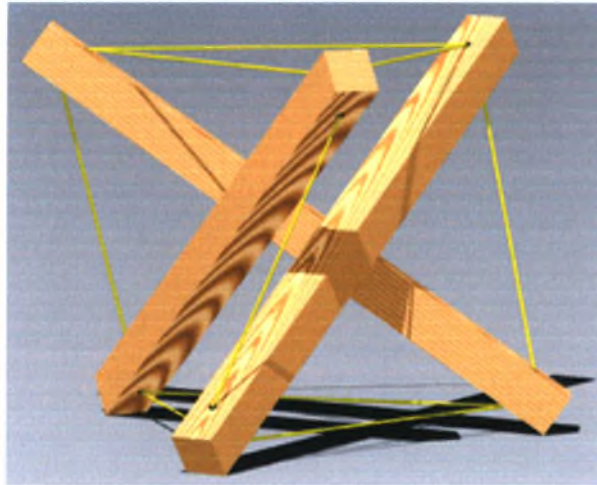
Πίνακας 7.16: T – Πρίσμα : Τιμές Μετα – Επαναληπτικές

Σημείο/ Διάνυσμα	Συντεταγμένες (inches)		
	$x$	$y$	$z$
$A$	0	0	0
$B$	8.86046	0	0
$C$	4.43023	7.67339	0
$A'$	9.53646	2.24850	6.92821
$B'$	2.14498	7.13457	6.92821
$C'$	1.60925	-1.70968	6.92821
$V_a$	-0.280971	-0.066247	0.408248
$V_b$	0.197857	-0.210205	0.408248
$V_c$	0.083114	0.276452	0.408248

Πίνακας 7.17: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Σημειολογία Μελών	Δύναμη Μέλους (pounds)
$s_a, s_b, s_c$	-41
$t_a, t_b, t_c$	26
$u_a, u_b, u_c$	17
$\tilde{u}_a, \tilde{u}_b, \tilde{u}_c$	17

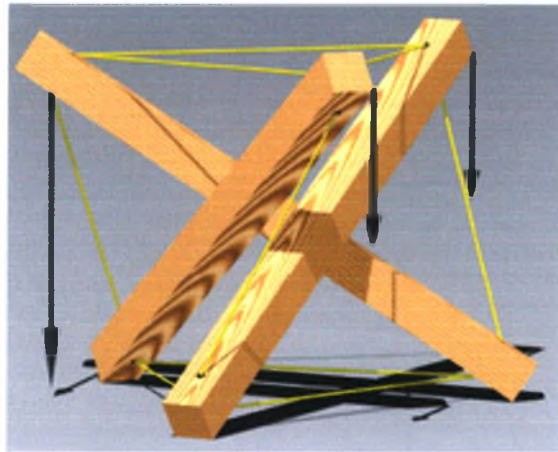
Πίνακας 7.18: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Δυνάμεις Μελών λόγω Προέντασης



Σχήμα 7.2: Ορθογωνικό πρίσμα ΕΘ

Σαν παράδειγμα εφαρμογής εξωγενών φορτίων, εφαρμόζονται δύο ίσες δυνάμεις 5rounds (22N) έκαστη, στις δύο γωνίες του πρίσματος, ήτοι στα σημεία  $A' - V_a + \frac{1}{12}(A' - A) - V_a \times \frac{1}{12}(A' - A)$  και  $C' - V_c + \frac{1}{12}(C' - C) + V_c \times \frac{1}{12}(C' - C)$ . Παράλληλα, ένα φορτίο ίσο με 10rounds (44N) αναρτάται από το σημείο σύνδεσης ελκυστήρα  $B'$  (στην αντίθετη πλευρά του πρίσματος). Τα φορτία αυτά και η επιρροή τους στο πρίσμα απεικονίζονται στο Σχήμα 7.3. Οι ελκυστήρες είναι από γραμμικά ελαστικό υλικό και για να επιμηκυνθούν κατά 2% απαιτείται μία εφελκυστική δύναμη ίση με 20rounds (89N). Το πρίσμα στηρίζεται σε πέντε από τις έξι γωνίες θλιπτήρων που αρχικά αποτελούσαν τη βάση του, αφού η έκτη αφαιρείται, καθόσον, μετά την επιβολή των εξωγενών φορτίων, ανυψώνεται από τη βάση (επίπεδο) στήριξης κατά 0.01" (250μm).

Τα αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος περιέχονται στους πίνακες 7.19-7.23. Πιο συγκεκριμένα, ο Πίνακας 7.19 περιέχει τις μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής των εξωγενών δυνάμεων, ο Πίνακας 7.20 τις τιμές των αντιδράσεων στα 5 σημεία στήριξης του πρίσματος, ο Πίνακας 7.21 τις δυνάμεις και τις στρεπτικές ροπές έκαστου θλιπτήρα, ο Πίνακας 7.22 τις δυνάμεις και τα μήκη των τενόντων και τέλος, ο Πίνακας 7.23 περιέχει τις νέες τιμές των συντεταγμένων των ακραίων σημείων των θλιπτήρων και τις διανυσματικές αποστάσεις των σημείων σύνδεσης των ελκυστήρων.



Σχήμα 7.3: Ορθογωνικό T-Πρίσμα: Θέσεις και Επιρροή των Εξωγενών Φορτίων

Σημείο	Μετατόπιση (διαφορά κατά z) [inches]
$A' - V_a + \frac{1}{12}(A' - A) - V_a \cdot \frac{1}{12}(A' - A)$	-0.205
$C' - V_c + \frac{1}{12}(C' - C) + V_c \cdot \frac{1}{12}(C' - C)$	-0.280
$\ddot{B}'$	-0.207

Πίνακας 7.19: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Μετατοπίσεις λόγω Εξωγενών Δυνάμεων

Σημείο	Αντίδραση (pounds)
$A - V_a - \frac{1}{12}(A' - A) + V_a \cdot \frac{1}{12}(A' - A)$	2.43649
$A - V_a - \frac{1}{12}(A' - A) - V_a \cdot \frac{1}{12}(A' - A)$	4.76605
$B - V_b - \frac{1}{12}(B' - B) + V_b \cdot \frac{1}{12}(B' - B)$	δεν περιλαμβάνεται
$B - V_b - \frac{1}{12}(B' - B) - V_b \cdot \frac{1}{12}(B' - B)$	4.05988
$C - V_c - \frac{1}{12}(C' - C) + V_c \cdot \frac{1}{12}(C' - C)$	8.34852
$C - V_c - \frac{1}{12}(C' - C) - V_c \cdot \frac{1}{12}(C' - C)$	0.389018
Άθροισμα	20.00000

Πίνακας 7.20: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Αντιδράσεις Στηρίξεων λόγω Εξωγενών Δυνάμεων

Θλιπτήρας	Δύναμη (pounds)	Στρεπτική ροπή (pounds feet)
$s_a$	-50.5422	0.704414
$s_b$	-48.5601	0.707202
$s_c$	-47.0621	0.963006

Πίνακας 7.21: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Δυνάμεις και Στρεπτικές Ροπές Θλιπτήρων λόγω Εξωγενών Φορτίων

Ελκυστήρας (Τένοντας)	Δύναμη (pounds)	Μήκος (inches)
$t_a$	24.0531	6.64310
$t_b$	26.3338	6.65790
$t_c$	20.3017	6.61877
$u_a$	21.8590	8.42320
$u_b$	19.0996	8.40046
$u_c$	21.3238	8.41879
$\tilde{u}_a$	22.2399	8.42634
$\tilde{u}_b$	19.3835	8.40280
$\tilde{u}_c$	20.7480	8.41405

Πίνακας 7.22: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Δυνάμεις και Μήκη Ελκυστήρων (Τενόντων) λόγω Εξωγενών Φορτίων

Σημείο/ Διάνυσμα	Συντεταγμένες (inches)		
	$x$	$y$	$z$
$A$	0.0318724	0.0318693	-0.00958155
$B$	8.92941	0.0256662	-0.00839036
$C$	4.51264	7.71161	-0.00965609
$A$	9.58138	2.71797	6.74258
$B$	1.77471	6.98253	6.65587
$C$	1.97666	-1.87981	6.74115
$V_a$	-0.27083	-0.0761796	0.413337
$V_b$	0.204166	-0.188303	0.415762
$V_c$	0.0719009	0.271939	0.413376

Πίνακας 7.23: Ορθογωνικό T – Πρίσμα : Συντεταγμένες λόγω Εξωγενών Φορτίων

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΛΩΝ ΚΕΘ

### 8.1 Εισαγωγή

Ένας πρακτικός παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψη στην ποιοτική αξιολόγηση της έκβασης ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού ΚΕΘ, είναι η απόσταση που (δια) χωρίζει ένα μέλος από το άλλο. Ειδικά για δικτυωτές ΚΕΘ, οι λύσεις σε ένα πρόβλημα μπορούν πολύ εύκολα οδηγήσουν σε μια κατασκευή, στην οποία από αμέλεια κάποια μέλη τέμνουν κάποια άλλα. Εάν αυτό συμβαίνει, πρέπει να γίνουν ρυθμίσεις, χρησιμοποιώντας περιορισμούς μήκους, και σταθμικές αντικειμενικές συναρτήσεις ή/και γεωμετρίες, μέχρι να αποκτηθούν αποδεκτές αποστάσεις.

### 8.2 Μαθηματικές Σχέσεις

Δύο μέλη μπορούν να προσομοιωθούν από μαθηματική άποψη ως δύο ευθύγραμμα τμήματα στο χώρο. Όταν δεν έχουν κοινό άκρο (οπότε είναι συνεπίπεδα εκ των πραγμάτων), η παράμετρος ενδιαφέροντος είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο – μη συνεπίπεδων – ευθυγράμμων τμημάτων, ενώ επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει και η θέση της ελάχιστης αυτής απόστασης, με την έννοια της θέσης των άκρων του σχετικού ευθύγραμμου τμήματος εντός των ευθυγράμμων τμημάτων των μελών. Σε περίπτωση δε που τα τμήματα αυτά έχουν κοινό άκρο, η γωνία που σχηματίζουν μπορεί επίσης να αποτελέσει αντικείμενο προβληματισμού.

#### 8.2.1 Απόσταση μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων στο χώρο

Έστω ότι τα  $\overline{AB}$  και  $\overline{CD}$  είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ένα αυθαίρετο σημείο, καλούμενο  $P_{AB}$ , που βρίσκεται στην γραμμή επέκτασης του ευθυγράμμου τμήματος  $\overline{AB}$  μπορεί να παραχθεί ως συνάρτηση ενός βαθμωτού πολλαπλασιαστή  $\lambda_{AB}$  σύμφωνα με τη σχέση

$$P_{AB} \equiv A + \lambda_{AB}(B - A)$$

Εάν το  $\lambda_{AB}$  είναι μεταξύ 0 και 1, αυτό το σημείο θα βρεθεί μεταξύ των σημείων A και B, δηλαδή εντός του εν λόγω ευθυγράμμου τμήματος. Όμοια, ένα σημείο στη γραμμή επέκτασης του  $\overline{CD}$  δίνεται από την ακόλουθη έκφραση :

$$P_{CD} \equiv C + \lambda_{CD}(D - C)$$

Για να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ αυτών των δύο γραμμών (που δεν είναι απαραίτητως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων), μπορεί πολύ απλά

να βρεθούν οι τιμές των  $\lambda_{AB}$  και  $\lambda_{CD}$  που ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ των  $P_{AB}$  και  $P_{CD}$ . Κατά συνέπεια, το πρόβλημα προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς στο οποίο οδηγούμεθα έχει ως εξής :

ελαχιστοποίηση ως προς  $\lambda_{AB}$  και  $\lambda_{CD}$  της έκφρασης

$$\left| P_{AB} - P_{CD} \right|^2 \equiv (P_{AB} - P_{CD}) \cdot (P_{AB} - P_{CD})$$

Το ανωτέρω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί παραγωγίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση ως προς  $\lambda_{AB}$  και  $\lambda_{CD}$ , θέτοντας τις εκφράσεις των παραγώγων αυτών ίσες με μηδέν και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς  $\lambda_{AB}$  και  $\lambda_{CD}$ .

Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση

$$\begin{aligned} P_{AB} - P_{CD} &= A + \lambda_{AB}(B - A) - (C + \lambda_{CD}(D - C)) \\ &= (A - C) + \lambda_{AB}(B - A) - \lambda_{CD}(D - C) \end{aligned}$$

και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα :

$$\begin{aligned} 2\lambda_{AB} \overline{AB}^2 - \lambda_{CD}(B - A) \cdot (D - C) + 2(A - C) \cdot (B - A) \\ - 2\lambda_{AB}(B - A) \cdot (D - C) + 2\lambda_{CD} \overline{CD}^2 - 2(A - C) \cdot (D - C) \end{aligned}$$

Καθόσον ισχύει ότι

$$(B - A) \cdot (P_{AB} - P_{CD}) = \lambda_{AB} \overline{AB}^2 - \lambda_{CD}(B - A) \cdot (D - C) + (B - A) \cdot (A - C)$$

και

$$(D - C) \cdot (P_{AB} - P_{CD}) = -\lambda_{CD} \overline{CD}^2 + \lambda_{AB}(D - C) \cdot (B - A) + (D - C) \cdot (A - C)$$

το σύστημα λαμβάνει τη μορφή

$$0 = (B - A) \cdot (P_{AB} - P_{CD})$$

$$0 = (D - C) \cdot (P_{AB} - P_{CD})$$

Με άλλα λόγια, το τμήμα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο πιο κοντινά σημεία των γραμμών είναι κάθετο και στις δύο γραμμές (που αποτελεί βασική γνώση της αναλυτικής γεωμετρίας).

Αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί ως προς τα  $\lambda_{AB}$  και το  $\lambda_{CD}$ . Αν κάποια από τις τιμές αυτές βρίσκεται εκτός του διαστήματος  $[0,1]$ , τότε αυτή η λύση δεν είναι έγκυρη ως απόσταση μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε πρέπει να αναζητηθούν οριακές λύσεις.

Το πρώτο είδος της οριακής λύσης που μπορεί να ερευνηθεί, είναι αυτό κατά την οποία η ελάχιστη απόσταση επιτυγχάνεται σε ένα άκρο ενός των ευθυγράμμων τμημάτων, με το άλλο σημείο ελαχίστου να είναι ένα εσωτερικό σημείο του άλλου ευθυγράμμου τμήματος. Ο υπολογισμός αυτής της απόστασης σχετίζεται με ένα άλλο πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Παραδείγματος χάριν, για να υπολογίσει κανείς την απόσταση μεταξύ του  $A$  και του  $\overline{CD}$  το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα πρέπει να λυθεί:

ελαχιστοποίηση ως προς  $\lambda_{CD}$  της έκφρασης

$$|A - P_{CD}|^2 \equiv (A - P_{CD}) \cdot (A - P_{CD})$$

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την παραγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς  $\lambda_{CD}$ , θέτοντας την προκύπτουσα εξίσωση ίση με μηδέν και επιλύοντας το προκύπτον σύστημα ως προς  $\lambda_{CD}$ .

Αντικαθιστώντας σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{aligned} A - P_{CD} &= A - (C + \lambda_{CD}(D - C)) \\ &= (A - C) - \lambda_{CD}(D - C) \end{aligned}$$

και παραγωγίζοντας τα αποτελέσματα στην εξίσωση

$$2\lambda_{CD}|\overline{CD}|^2 - 2(A - C) \cdot (D - C) = 0$$

ή

$$\lambda_{CD} = \frac{(A - C) \cdot (D - C)}{|\overline{CD}|^2}$$

Καθόσον ισχύει ότι

$$(D - C) \cdot (A - P_{CD}) = -\lambda_{CD}|\overline{CD}|^2 + (D - C) \cdot (A - C)$$

η εξίσωση λύσης λαμβάνει τη μορφή

$$(D - C) \cdot (A - P_{CD}) = 0$$

Με άλλα λόγια, το ευθύγραμμο τμήμα, που συνδέει το  $A$  με το πιο κοντινό σημείο

επί του  $\overline{CD}$  είναι κάθετο στο  $\overline{CD}$ .

Εάν το  $\lambda_{CD}$  είναι εκτός του διαστήματος  $[0, 1]$ , τότε πάλι η τιμή δεν ισχύει σαν μια ελάχιστη απόσταση του σημείου από το ευθύγραμμο τμήμα, και ως τιμή πρέπει να επιλεγεί ως το



ελάχιστο μεταξύ των  $|\overline{AC}|$  και  $|\overline{AD}|$ . Το  $|\overline{AC}|$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον Πυθαγόρειο τύπο απόστασης  $|\overline{AC}| = \sqrt{(A-C) \cdot (A-C)}$  και το  $|\overline{AD}|$  υπολογίζεται με όμοιο τρόπο.

Στην έρευνα για μια συννοριακή τιμή για το ελάχιστο μήκος μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, όλες οι τέσσερις συννοριακές δυνατότητες πρέπει να εξεταστούν (Α και  $\overline{CD}$ , Β και  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AB}$  και C,  $\overline{AB}$  και D) και το ελάχιστο από αυτά επιλέγεται ως λύση.

### 8.2.2 Γωνία μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων

Σε μερικές καταστάσεις, η γεωμετρία και η θέση μιας ΚΠΣ μπορεί να υπαγορεύσει ότι θα ακολουθήσουν προβλήματα, εάν η γωνία μεταξύ δύο εκ των μελών που η ΚΠΣ συνδέει είναι πάρα πολύ μικρή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ενδείκνυται ο υπολογισμός της γωνίας μεταξύ των κεντροβαρικών γραμμών των σχετικών μελών και η εξέταση του αν η τιμή της υπερβαίνει το απαραίτητο κατώτατο όριο.

Η μαθηματική σχέση για τη γωνία μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων προέρχεται από την ανισότητα του Schwarz<sup>[6]</sup>. Παραδείγματος χάριν, η γωνία μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{CD}$  είναι ίση με

$$\arccos\left(\frac{(A-B) \cdot (C-D)}{|\overline{AB}| |\overline{CD}|}\right)$$

### 8.2.3 Εφαρμογή 1

Οι παραπάνω μαθηματικές εκφράσεις χρησιμοποιήθηκαν για να εξετάσουν τις αποστάσεις των θλιπτήρων και μεσο – στρωματικών ελκυστήρων του δικτυωτού 4ν T – οκταέδρου της παραγράφου 5.3. Η προσομοίωση που πραγματοποιήθηκε σχετιζόταν με μια κατασκευή υπό κλίμακα *1 μονάδα μοντέλου = 90 mm*, με μεταλλικούς CHS θλιπτήρες διαμέτρου 8 mm και λεπτό εύκαμπτο μεταλλικό καλώδιο για τους τένοντες. Η επιθυμητή απόσταση ήταν μια διάμετρος θλιπτήρα μεταξύ των εξωτερικών επιφανειών οποιωνδήποτε δύο μελών. Αυτό οδήγησε σε 2 διαμέτρους θλιπτήρα μεταξύ κεντροβαρικών γραμμών δύο θλιπτήρων, 1.5 διάμετρο θλιπτήρα μεταξύ κεντροβαρικού άξονα ενός θλιπτήρα και κεντροβαρικού άξονα ενός ελκυστήρα, και 1 διάμετρο θλιπτήρα μεταξύ κεντροβαρικών γραμμών δύο ελκυστήρων. Η διάμετρος του τένοντα

θεωρήθηκε αμελητέα. Σε μονάδες μοντέλου, αυτά τα κατώτατα όρια αποστάσεων μεταξύ μελών ήταν  $2x8/90=0.18$  και  $1.5x8/90=0.13$  αντίστοιχα.

Βρέθηκε ότι η απόσταση μεταξύ του μέλους θλιπτήρα #3 και μιας μετασχηματισμένης\* έκδοσης του μέλους ελκυστήρα #5 ήταν 0.081 μονάδες μοντέλου. Επιπρόσθετα, 0.17 μονάδες μοντέλου υπολογίστηκε η απόσταση μεταξύ των θλιπτήρων των #1 και #3, γεγονός που απετέλεσε περιθωριακό πρόβλημα. Η αύξηση του περιορισμένου μήκους του ιδιαίτερα εντεινόμενου ελκυστήρα #28 από 1 σε 1.4 μονάδες μοντέλου, οδήγησε σε αύξηση της πρώτη απόσταση σε 0.16 μονάδες μοντέλου και τη δεύτερη απόσταση σε 0.20 μονάδες μοντέλου χωρίς δημιουργία προβλημάτων απόστασης μεταξύ άλλων μελών. Στον Πίνακα 8.1 παρουσιάζονται οι τιμές για τα μήκη και τις σχετικές δυνάμεις μελών του αναθεωρημένου μοντέλου, ενώ στον Πίνακα 8.2 οι αναθεωρημένες τιμές για τις συντεταγμένες των σημείων βάσης.

#### 8.2.4 Εφαρμογή 2

Στις ΚΕΘ διπλού στρώματος που εξετάζονται στα Κεφάλαια 5 και 6, όταν θεωρούνται σχεδιασμοί χαμηλής συχνότητας, η γωνία μεταξύ ενός δευτερεύοντος μεσο – στρωματικού ελκυστήρα και του θλιπτήρα που συνδέει τον πρώτο με το εξωτερικό στρώμα, μπορεί να είναι πολύ μικρή και να επιτρέψει στον τένοντα να έρθει «σε επαφή» με προβολές στην ΚΠΣ ή στον θλιπτήρα σε εκείνο το σημείο σύνδεσης. Αυτό οφείλεται στην «ρηχότητα» του αντίστοιχου δευτερεύοντος Τρίποδα. Σε αρκετά υψηλές συχνότητες, η κατάσταση προσεγγίζει την επίπεδη κατάσταση που απεικονίζεται στο σχήμα Α.2 και δεν απαιτείται καμία ιδιαίτερη προσοχή στους δευτερεύοντες μεσο – στρωματικούς ελκυστήρες, καθόσον οι γωνίες θα είναι επαρκείς, αν είναι και οι γωνίες των κυρίων μεσο – στρωματικών ελκυστήρων. Η θεραπεία για μια ανεπάρκεια σε κάθε μία από αυτές τις γωνίες είναι η συρρίκνωση της ακτίνας του εσωτερικού δικτύου τενόντων.

Επομένως, ως ένα παράδειγμα της χρήσης των υπολογισμών μελών - γωνιών, υπολογίζονται οι γωνίες μεταξύ των δευτερευόντων μεσο - στρωματικών τενόντων στρωμάτων και των θλιπτήρων που τους συνδέουν με το εξωτερικό στρώμα είναι υπολογισμένο για την λύση του δικτυωτού σφαιρικού  $4n T$  – οκταέδρου που αποκτήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Στον Πίνακα 8.3 συνοψίζονται τα αποτελέσματα. Οι γωνίες στους πόδες των T-Τρίποδων που «κοιτούν» προς τα έξω είναι δύο έως τρεις φορές μεγαλύτερες από τις γωνίες στους

---

\* ο μετασχηματισμός ήταν  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$

πόδες των T - τριπόδων που «κοιτούν» προς τα μέσα. Σε αρκετά υψηλές συχνότητες, θα ήταν σχεδόν ίσες.

Μέλος #	Μήκος	Σχετική Δύναμη
1	3.000000	-12.309
2	3.000000	-11.701
3	3.000000	-11.604
4	3.000000	-11.265
5	2.357656	4.715
6	2.389582	4.779
7	2.437046	4.874
8	2.365863	4.732
9	2.030353	4.061
10	2.047569	4.095
11	2.040178	4.080
12	1.640244	3.280
13	1.000000	3.950
14	1.000000	5.618
15	1.000000	4.330
16	1.000000	5.030
17	2.498276	0.999
18	2.732085	1.093
19	2.745418	1.098
20	2.924998	1.170
21	1.382591	1.383
22	1.427206	1.427
23	1.500065	1.500
24	0.943181	0.943
25	1.000000	6.055
26	1.000000	6.400
27	1.000000	5.535
28	1.400000	6.260

Πίνακας 8.1: 4ν T – Οκτάεδρο : Αναθεωρημένα Μήκη και Δυνάμεις Μελών

Σημείο	Συντεταγμένες		
	$x$	$y$	$z$
$P_1$	1.092297	-0.280953	2.035248
$P_2$	-0.128883	0.310054	2.301681
$P_3$	0.820711	1.137818	1.630864
$P_4$	-1.029370	1.245104	1.777463
$P'_1$	1.578759	0.504378	3.382666
$P'_2$	0.618364	0.662396	3.612169
$P'_3$	1.160445	1.393792	3.198396
$P'_4$	-1.675120	2.090616	2.491573

Πίνακας 8.2: 4ν T – Οκτάεδρο : Αναθεωρημένες Συντεταγμένες Σημείων Βάσης

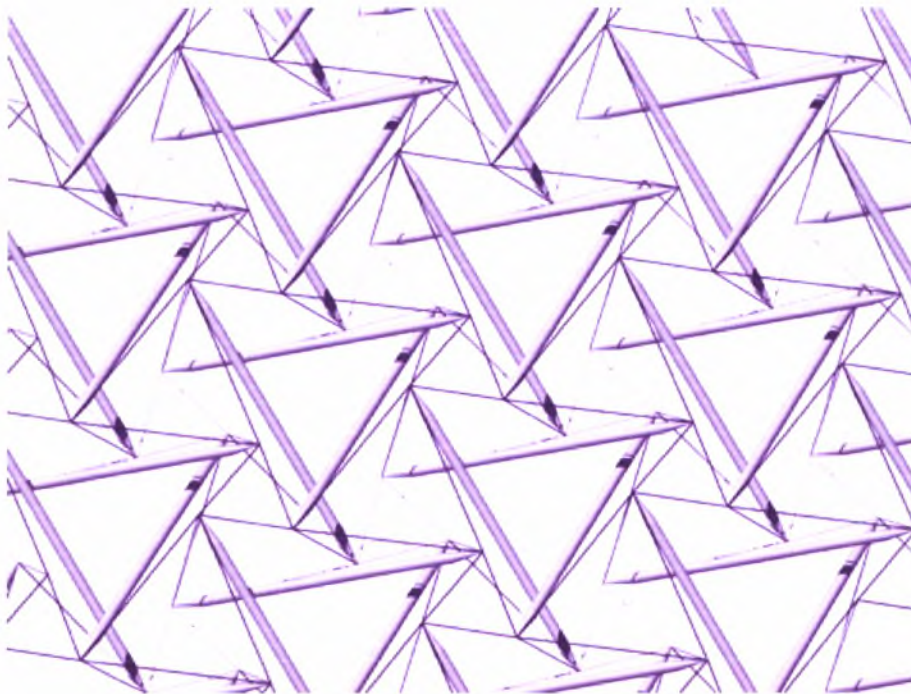
Θλιπτήρας #	Κύριος Ελκυστήρας #	Γωνία	Δευτερεύων Ελκυστήρας #	Γωνία
1	5	16.5652	9	5.67875
2	6	17.0124	10	7.04962
3	7	17.5822	11	6.50225
4	8	16.6881	12	8.61599

Πίνακας 8.3: 4ν T – Οκτάεδρο : Γωνίες (σε μοίρες) μεταξύ Θλιπτήρων και Μεσο – Στρωματικών Ελκυστήρων

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΑΛΛΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΕΛΚΥΣΤΗΡΩΝ - ΘΛΙΠΤΗΡΩΝ**

Μια προσέγγιση για τον σχεδιασμό επίπεδων δικτυωμάτων ελκυστήρων – θλιπτήρων, παρόμοια με αυτή του Snelson, η οποία παρατέθηκε στο Κεφάλαιο 5, αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τον George David Emmerich<sup>[31]</sup>, τον Ariel Hanaor<sup>[29, 36]</sup> και τον René Motro<sup>[28, 38, 39]</sup>. Ως επί το πλείστον, το δίκτυο ελκυστήρων για το εσωτερικό και το εξωτερικό στρώμα των κατασκευών αυτών είναι ίδιο με το δικτύωμα διπλού στρώματος του Κεφαλαίου 5. Όμως, ο τρόπος σύνδεσης των ελκυστήρων και των θλιπτήρων μεταξύ των στρωμάτων είναι πολύ διαφορετικός.

Το σημείο έναρξης του συστήματος του Emmerich και των συνεργατών του είναι μια επίπεδη συνδεσμολογία T – Πρισμάτων, όπως αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα Α.1.

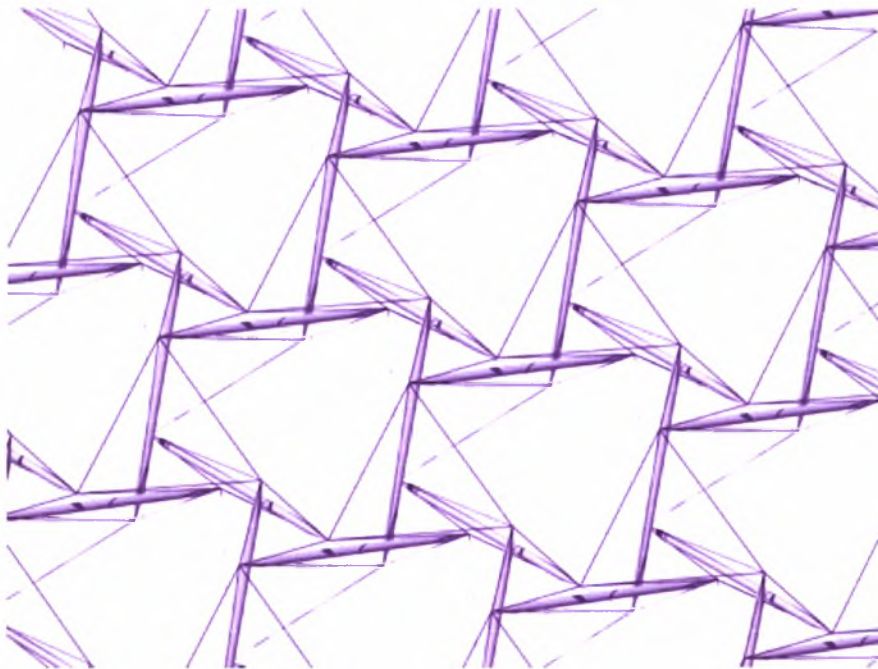


Σχήμα Α.1. Επίπεδη Συνδεσμολογία T - Πρισμάτων

Όπως προκύπτει από την σύγκριση των Σχημάτων 2.1 και 5.1, η τοπολογική διαφορά μεταξύ ενός T – Πρίσματος και ενός T – Τρίποδα δεν είναι μεγάλη : το T – Πρίσμα είναι τοπολογικά ισοδύναμο με έναν T – Τρίποδα με ένα τρίγωνο ελκυστήρων, που συνδέει τους θλιπτήρες στη βάση του T – Τρίποδα. Ενώ ο τρόπος συνδεσμολογίας του Emmerich και των συνεργατών του διατηρεί τον τριγωνισμό στο εσωτερικό και το εξωτερικό στρώμα ελκυστήρων, ο μεσο – στρωματικός

τριγωνισμός που εμφανίζουν τα πρίσματα μόνα τους καταστρέφεται από την συνδεσμολογία αυτού του τύπου. Στην κατάσταση αυτή δημιουργείται ένας θόλος, εισάγοντας καμπυλότητα στην επίπεδη συνδεσμολογία, μετασχηματίζοντας αυτή σε κολοβωμένες πυραμίδες.

Για να δοθεί έμφαση μεταξύ των δύο συστημάτων, στο Σχήμα Α.2 απεικονίζεται ο τρόπος επίπεδης συνδεσμολογίας T – Τριπόδων. Όπως διαπιστώθηκε στο Κεφάλαιο 5, το εξωτερικό στρώμα ολοκληρώνεται συνδέοντας μεταξύ τους τις κορυφές των T – Τριπόδων με τρίγωνα ελκυστήρων, με αποτέλεσμα ένα εξωτερικό στρώμα ίδιο με αυτό που λαμβάνεται μέσω της προσέγγισης του Emmerich και των συνεργατών του.



Σχήμα Α.2 Επίπεδη Συνδεσμολογία T – Τριπόδων

Κάθε τρίγωνο εσωτερικών ελκυστήρων, όπου οι θλιπτήρες τριών T – Τριπόδων συγκλίνουν, μπορεί να ειδωθεί ως η κορυφή ενός Τρίποδα που «κοιτά» προς τα μέσα. Προσθέτοντας τους αντίστοιχους μεσο – στρωματικούς ελκυστήρες για την ολοκλήρωση των T – Τριπόδων αυτών (τους δευτερεύοντες μεσο – στρωματικούς ελκυστήρες του Κεφαλαίου 5) οδηγούμεθα σε μεγαλύτερο μεσοστρωματικό τριγωνισμό και έτσι σε μεγαλύτερη σταθερότητα της κατασκευής. Στη διαμόρφωση αυτή, κάθε θλιπτήρας συγκρατείται από 12 ελκυστήρες. Σημειωτέον ότι αυτός είναι ακριβώς ο ελάχιστος αριθμός ελκυστήρων, στον οποίο κατέληξε η πειραματική έρευνα του

Fuller<sup>(14)</sup>, για την εξασφάλιση σταθερότητας ενός συστήματος σε σχέση με ένα άλλο σύστημα που το περιβάλλει.

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : ΜΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ**

Στην §3.2 αναφέρθηκε ότι περιοχή περιορισμών στο γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού ΚΕΘ είναι μη κυρτή. Απόδειξη αυτού δίδεται σε ότι ακολουθεί :

Η μη κυρτότητα οφείλεται κατά βάση στους περιορισμούς των θλιπτήρων. Με σκοπό τούτο να καταστεί αντιληπτό, έστω  $P_a$  και  $P_b$  ένα σύνολο αποδεκτών ακραίων σημείων θλιπτήρων, τα οποία ικανοποιούν τους περιορισμούς μήκους μέσω ισότητας, και έστω επίσης  $P_{a'}$  και  $P_{b'}$  άλλο ένα τέτοιο σύνολο, ενώ σημαίνεται ως  $\bar{\ell}_n$  η τιμή της αντίστοιχης σταθεράς περιορισμού. Κατά συνέπεια, θα ισχύει εξ υποθέσεως ότι :

$$|P_a - P_b|^2 = \bar{\ell}_n^2, \quad |P_{a'} - P_{b'}|^2 = \bar{\ell}_n^2$$

Έστω επίσης ότι τα  $P_{a''}$  και  $P_{b''}$  αποτελούν έναν κυρτό συνδυασμό των ανωτέρω συνόλων. Τούτο σημαίνει ότι :

$$P_{a''} \equiv \lambda P_a + (1 - \lambda) P_{a'}, \quad P_{b''} \equiv \lambda P_b + (1 - \lambda) P_{b'}$$

όπου  $\lambda \in (0,1)$ . Άρα

$$\begin{aligned} |P_{a''} - P_{b''}|^2 &= |\lambda(P_a - P_b) + (1 - \lambda)(P_{a'} - P_{b'})|^2 \\ &= \lambda^2 |P_a - P_b|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(P_a - P_b) \cdot (P_{a'} - P_{b'}) + (1 - \lambda)^2 |P_{a'} - P_{b'}|^2 \end{aligned}$$

και σύμφωνα με τη γνωστή ανισότητα του Schwartz :

$$(P_a - P_b) \cdot (P_{a'} - P_{b'}) < |P_a - P_b| |P_{a'} - P_{b'}|$$

οπότε

$$\begin{aligned} |P_{a''} - P_{b''}|^2 &< \lambda^2 |P_a - P_b|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) |P_a - P_b| |P_{a'} - P_{b'}| + (1 - \lambda)^2 |P_{a'} - P_{b'}|^2 \\ &= (\lambda |P_a - P_b| + (1 - \lambda) |P_{a'} - P_{b'}|)^2 \\ &= (\lambda \bar{\ell}_n + (1 - \lambda) \bar{\ell}_n)^2 \\ &= \bar{\ell}_n^2 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, θα ισχύει τελικά ότι

$$\bar{\ell}_n^2 > |P_{a''} - P_{b''}|^2$$

που σημαίνει ότι ο περιορισμός παραβιάζεται, οπότε αποδεικνύεται ότι *η περιοχή περιορισμών είναι όντως μη κυρτή*.



**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ****Γ.1 ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ**

Το Περιεχόμενο του παρόντος Παραρτήματος αφορά βασικούς ορισμούς και θεμελιώδεις έννοιες της Τοπολογίας καθώς και απαραίτητα στοιχεία περί Βελτιστοποίησης, τα οποία συμπληρώνουν και (στο μέγιστο δυνατό βαθμό) επεξηγούν χαρακτηριστικά σημεία του κυρίως κειμένου της Διπλωματικής Εργασίας. Η περιληπτική παράθεση τους κρίνεται σκόπιμη και απαραίτητη, καθόσον δεν περιλαμβάνονται στην κατ' εξοχήν διδακτέα ύλη των Προπτυχιακών Σπουδών του οικείου Τμήματος.

**Γ.2 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ****Γ.2.1 Τοπολογικός Χώρος**

Τοπολογικός Χώρος είναι ένα σύνολο  $X$  μαζί με ένα σύνολο  $T$  (τα στοιχεία του οποίου είναι υποσύνολα του  $X$ ), τέτοια ώστε:

- (α)  $\emptyset \in T$
- (β)  $X \in T$
- (γ) Αν  $U_j \in T$  για όλα τα  $j \in J$  τότε  $\bigcup_{j \in J} U_j \in T$
- (δ) Αν  $U \in T$  και  $V \in T$  τότε  $U \cap V \in T$

Στοιχεία του  $T$  ονομάζονται ανοικτά σύνολα του  $X$ . Το σύνολο  $T$  καλείται τοπολογία επί του  $X$ . Ένα υποσύνολο  $C \subset X$  καλείται κλειστό αν το συμπλήρωμα του  $X \setminus C$  είναι ανοικτό. Μια τοπολογία  $T'$  ονομάζεται λεπτότερη<sup>1</sup> (τραχύτερη<sup>2</sup>) της  $T$  αν  $T' \supset T$  ( $T' \subset T$ ).

**Γ.2.2 Συναρτήσεις Επί<sup>3</sup> – Σύνολα Δείκτες<sup>4</sup>**

Μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  καλείται επί αν,  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ , διαθέτει δε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

- ο Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η  $f : X \rightarrow f(X)$  είναι επί (περιορίζοντας δηλαδή το πεδίο τιμών, οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να καταστεί επί).

<sup>1</sup> finer<sup>2</sup> coarser<sup>3</sup> surjective, onto<sup>4</sup> indexing sets

- ο Αν η  $f : X \rightarrow Y$  είναι επί και  $B \subseteq Y$  τότε  $ff^{-1}(B) = B$ .
- ο Η σύνθεση (composition) συναρτήσεων επί (όταν ορίζεται) είναι και αυτή μια συνάρτηση επί.

Έστω  $\Lambda$  και  $S$  σύνολα τέτοια ώστε να υφίσταται μια συνάρτηση επί  $f : \Lambda \rightarrow S$ . Τότε το  $\Lambda$  είναι ένα σύνολο δείκτης για το  $S$ . Θα μπορούσε κανείς ν' αναφερθεί στα στοιχεία του  $S$  χρησιμοποιώντας το σύνολο δείκτη  $\Lambda$ ,  $f(\lambda)$  για κάποια  $\lambda \in \Lambda$ . Τα σύνολα δείκτες πάντως πολύ συχνά χρησιμοποιούνται χωρίς να ορίζεται σαφώς κάποια συνάρτηση επί. Τότε κανείς αναφέρεται στα στοιχεία του  $S$  μέσω δεικτών, που είναι στοιχεία του  $\Lambda$ ,  $s_\lambda$  για κάποια  $\lambda \in \Lambda$ .

### Γ.2.3 Οριακά Σημεία<sup>5</sup> και Σημεία Συσσώρευσης<sup>6</sup>

Σε έναν τοπολογικό χώρο  $X$ , ένα σημείο  $x$  καλείται οριακό σημείο της ακολουθίας  $x_0, x_1, \dots$  αν, για κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $x$ , υπάρχουν πεπερασμένα πολλοί δείκτες, τέτοιοι ώστε τα αντίστοιχα στοιχεία της ακολουθίας να μην ανήκουν στο ανοικτό σύνολο.

Ένα σημείο  $x$  καλείται σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας  $x_0, x_1, \dots$  αν, για κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $x$ , υπάρχουν άπειρα πολλοί δείκτες, τέτοιοι ώστε τα αντίστοιχα στοιχεία της ακολουθίας να ανήκουν στο ανοικτό σύνολο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο των οριακών σημείων (των σημείων συσσώρευσης) μιας ακολουθίας μπορεί να διαφέρει από το σύνολο των οριακών σημείων (των σημείων συσσώρευσης) του συνόλου των στοιχείων της ακολουθίας.

### Γ.2.4 Κυρτά<sup>7</sup> Σύνολα και Κυρτές Συναρτήσεις

#### A. Κυρτά Σύνολα

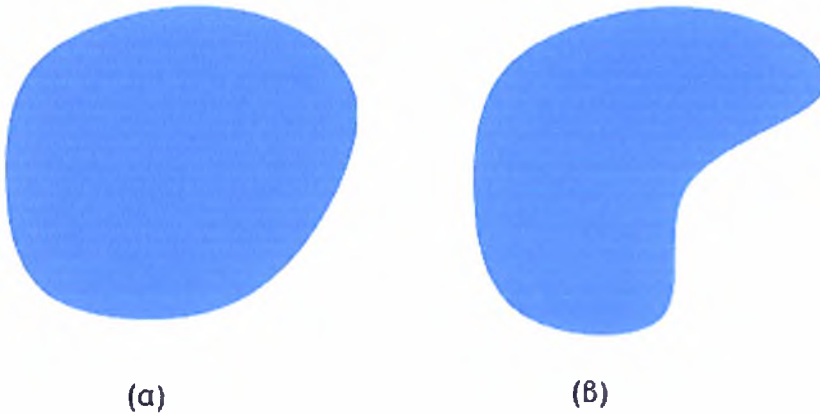
Στον Ευκλείδειο Χώρο, ένα αντικείμενο είναι κυρτό αν για κάθε ζεύγος σημείων εντός του αντικειμένου αυτού, κάθε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που τα συνδέει βρίσκεται μέσα στο αντικείμενο. Ο κύβος είναι ένα κυρτό αντικείμενο, σε αντίθεση με τον τόρο (σαμπρέλα).

<sup>5</sup> limit point

<sup>6</sup> accumulation point

<sup>7</sup> convex

Έστω  $C$  ένα σύνολο σε έναν πραγματικό ή φανταστικό διανυσματικό χώρο. Το  $C$  καλείται κυρτό αν, για όλα τα  $x$  και  $y$  στο  $C$  και όλα τα  $t$  στο διάστημα  $[0,1]$ , το σημείο  $(1-t)x + ty$  βρίσκεται στο  $C$ . Χαρακτηριστικά, στο Σχήμα Γ1 (α και β) παρατίθενται ένα κυρτό και ένα μη κυρτό σύνολο της Ευκλείδειας γεωμετρίας αντίστοιχα.



Σχήμα Γ1. Κυρτό Σύνολο (α) και Μη Κυρτό Σύνολο (β)

Τα κυρτά υποσύνολα του  $\mathfrak{R}$  είναι απλά τα διαστήματα αυτού. Κάποια παραδείγματα κυρτών συνόλων του  $\mathfrak{R}^2$  Ευκλείδειου χώρου είναι τα κανονικά πολύγωνα και τα σώματα σταθερού πλάτους, ενώ στο  $\mathfrak{R}^3$  τα Αρχιμήδεια και τα Πλατωνικά στερεά.

Αν  $S$  είναι ένα κυρτό σύνολο, για οποιαδήποτε  $u_1, u_2, \dots, u_r$  του  $S$  και οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , τέτοιους ώστε  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 1$ , το διάνυσμα  $\sum_{k=1}^r \lambda_k u_k$  βρίσκεται στο  $S$ . Ένα τέτοιου τύπου διάνυσμα είναι γνωστό ως ένας κυρτός συνδυασμός των  $u_1, u_2, \dots, u_r$ .

Η τομή οποιασδήποτε συλλογής (collection) κυρτών συνόλων είναι ένα κυρτό σύνολο, οπότε τα κυρτά υποσύνολα ενός (πραγματικού ή φανταστικού) διανυσματικού χώρου μορφώνουν ένα πλήρες πλέγμα (lattice). Τούτο σημαίνει επίσης ότι οποιοδήποτε υποσύνολο  $A$  του διανυσματικού χώρου περιέχεται εντός ενός μικρότερου κυρτού συνόλου (που καλείται κυρτή θήκη – convex hull), δηλαδή εντός της τομής όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το  $A$ .

Κλειστά μπορούν να χαρακτηριστούν εκείνα τα κυρτά σύνολα που αποτελούν τομές κλειστών ημι – χώρων.

Έστω  $C$  ένα σύνολο σε έναν πραγματικό ή φανταστικό διανυσματικό χώρο. Το  $C$  είναι αστεροειδώς κυρτό (star convex) αν  $\exists x_0 \in C$  : το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το  $x_0$  με οποιοδήποτε σημείο  $x \in C$  περιέχεται στο  $C$ . Κατά συνέπεια ένα κυρτό σύνολο είναι πάντοτε αστεροειδώς κυρτό, ενώ ένα αστεροειδώς κυρτό αντικείμενο δεν είναι πάντοτε κυρτό.

Στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία οι έννοιες των κυρτών συνόλων και των κυρτών θηκών επεκτείνονται ορίζοντας ως κυρτό ένα σύνολο, το οποίο περιέχει όλες τις γεωδαιτικές που συνδέουν κάποια (οποιαδήποτε) σημεία του εν λόγω συνόλου.

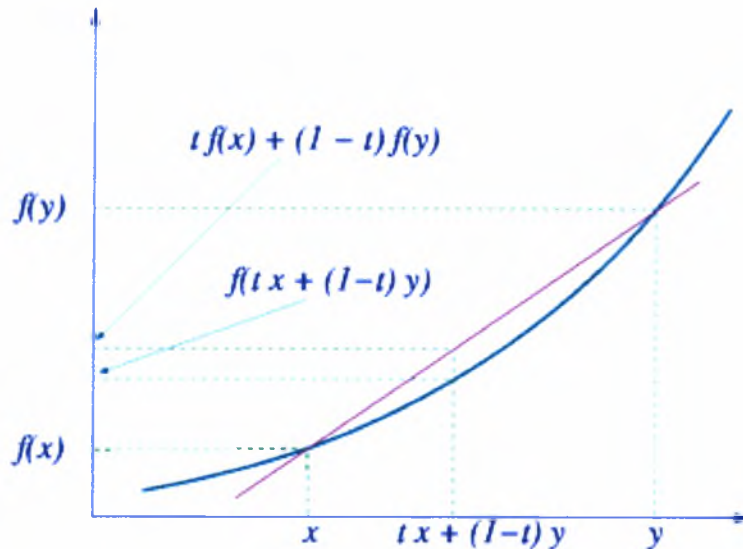
Η έννοια της κυρτότητας μπορεί να γενικευθεί σε άλλα αντικείμενα, αν κάποιες ιδιότητες αυτής επιλεγούν αξιωματικά: Δοθέντος ενός συνόλου  $X$ , μια κυρτότητα στο  $X$  είναι μια συλλογή  $C$  υποσυνόλων του  $X$ , που ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

- (1) Το κενό σύνολο και το  $X$  περιέχονται στο  $C$ .
- (2) Η τομή (intersection) οποιασδήποτε συλλογής από το  $C$  ανήκει στο  $C$ .
- (3) Η ένωση μιας αλυσίδας (chain, total order) στοιχείων του  $C$  βρίσκεται στο  $C$ .

Τα στοιχεία του  $C$  καλούνται κυρτά σύνολα και το ζεύγος  $(X, C)$  καλείται χώρος κυρτότητας. Για την συνήθη κυρτότητα τα πρώτα δύο αξιώματα ισχύουν, ενώ το τρίτο είναι τετριμμένο (trivial).

### *B. Κυρτές Συναρτήσεις*

Μια πραγματική (real – valued) συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα (ή σε οποιοδήποτε κυρτό υποσύνολο  $C$  κάποιου διανυσματικού χώρου) καλείται κυρτή, αν για οποιαδήποτε δύο σημεία  $x$  και  $y$  στο πεδίο ορισμού της ( $C$ ) και για οποιοδήποτε  $t \in [0,1]$  ισχύει ότι:  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ , σύμφωνα και με τη γραφική απεικόνιση του Σχήματος Γ3.



Σχήμα Γ3. Κυρτή Συνάρτηση σε ένα διάστημα

Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση είναι κυρτή όταν και μόνον όταν η επιγραφή της (όπως ορίζεται αμέσως μετά) είναι ένα κυρτό σύνολο.

Ορισμός Επιγραφής: Η επιγραφή μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ένα σύνολο, που βρίσκεται πάνω από ή επί του γραφήματος της (της γραφικής της παράστασης) ως εξής:  $epif = \{(x, \mu) : x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}, f(x) \leq \mu\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Μια συνάρτηση καλείται αυστηρά (strictly) κυρτή αν ισχύει ότι  $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$ , για οποιοδήποτε  $t \in (0,1)$ .

Θεώρημα : Η συνάρτηση  $f(x)$  είναι κυρτή όταν και μόνον όταν η παράγωγος αυτής  $f'(x)$  (εφόσον υφίσταται) είναι μονοτονικά αύξουσα. Τούτο αποδεικνύεται εύκολα, σύμφωνα με τα παρακάτω:

Αν η  $f(x)$  είναι κυρτή, επιλέγουμε δύο σημεία  $x$  και  $y$  στο πεδίο ορισμού της, τέτοια ώστε  $x < y$  και θέτουμε  $k = \frac{x+y}{2}$ . Κάνοντας χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής ισχύει ότι :  $f(x) - f(k) = f'(\xi_1)(x - k)$  ,  $f(y) - f(k) = f'(\xi_2)(y - k)$ . Επιθυμούμε να δείξουμε ότι  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$  ή ισοδύναμα ότι  $\frac{f(x) - f(y)}{x - k} \leq \frac{f(y) - f(k)}{y - k}$ . Αντικαθιστώντας την τιμή του  $k$

στους παρανομαστές αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y} \leq \frac{f(y)-f(k)}{y-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y} \Leftrightarrow f(x)-f(y) \leq f(k)-f(y) \Leftrightarrow f(k) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Η προς απόδειξη τελευταία ανισότητα ισχύει, καθόσον αποτελεί τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης :  $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$

Αντίστροφα, αν η  $f'(x)$  είναι μονοτονικά αύξουσα, για δύο τυχαία σημεία  $x$  και  $y$  στο πεδίο ορισμού της  $f(x)$  ορίζουμε την παράμετρο  $k : k = tx + (1-t)y$ ,  $t \in [0,1]$ . Χρησιμοποιώντας εκ νέου το θεώρημα της μέσης τιμής θα ισχύει πάλι ότι  $f(x) - f(k) = f'(\xi_1)(x - k)$ ,  $f(y) - f(k) = f'(\xi_2)(y - k)$ . Γνωρίζουμε ήδη ότι  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ ,

δηλαδή ότι  $\frac{f(x)-f(y)}{x-k} \leq \frac{f(y)-f(k)}{y-k}$ , και απαλείφοντας το  $k$  :

$$\frac{f(x) - f(tx + (1-t)y)}{(1-t)(x-y)} \leq \frac{f(y) - f(tx + (1-t)y)}{t(y-x)}$$

$$f(tx + (1-t)y) - f(x) \leq \frac{1-t}{t}(f(y) - f(tx + (1-t)y))$$

και τελικά  $f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ , σχέση που είναι ο ορισμός της κυρτής συνάρτησης.

### Γ. Το θεώρημα του Slater

Έστω  $f(x)$  μια μη κυρτή (δηλ. κοίλη, concave) συνάρτηση και  $g_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m$  κυρτές συναρτήσεις στο  $R^n$ . Υποθέτουμε ότι το  $x^*$  είναι μια λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης :

$$\underset{x}{\text{Max}} \{f(x) \mid b_i - g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

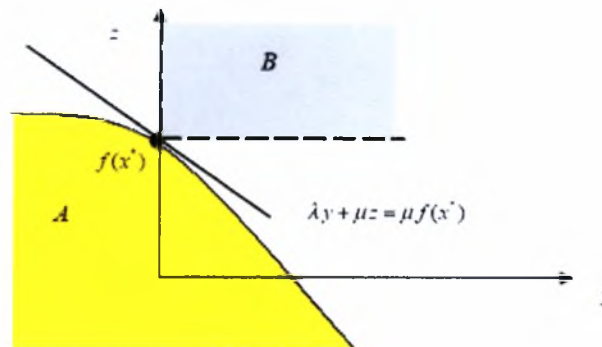
καθώς και ότι το εσωτερικό του συνόλου αποδεκτών σημείων είναι μη κενό. Τότε υπάρχει ένα μη αρνητικό διάνυσμα  $\lambda^*$  τέτοιο ώστε, για όλα τα  $x$ :

$$L(x, \lambda^*) = f(x) + \lambda^* \cdot (b - g(x)) \leq f(x^*) = L(x^*, \lambda^*)$$

Επιπρόσθετα, αν όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχώς διαφορίσιμες, θα ισχύει ότι :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) - \lambda^* \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) = 0$$

Μια σχηματική ένδειξη της απόδειξης του θεωρήματος αυτού, δίδεται στο παρακάτω σκαρίφημα.



### Γ.2.5 Κλίση (Gradient) και Μητρώο Hessian

#### A. Κλίση

Η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης  $f(\mathbf{x})$ , όπου  $\mathbf{x}$  μια διανυσματική μεταβλητή  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  σημαίνεται ως  $\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x)$  ή  $grad(f)$  και ο διαφορικός αυτός τελεστής είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα – στήλη με συνιστώσες τις μερικές παραγώγους της  $f$ ,

ήτοι:  $\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$ , αναλλοίωτο σε ορθογωνικούς μετασχηματισμούς.

Η κλίση μιας συνάρτησης βαθμωτού πεδίου  $f$  είναι ουσιαστικά ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο κατευθύνεται προς τη διεύθυνση της μέγιστης μεταβολής του πεδίου  $f$  και το μέγεθος του οποίου αποτελεί τον μεγαλύτερο βαθμό αύξησης.

Η κλίση μιας συνάρτησης  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  χαρακτηρίζει τη βέλτιστη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης αυτής σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ , υπό τη μορφή:

$$f(x) \approx f(x_0) + \left( \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x_0) \right)^T (x - x_0) \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0.$$

#### B. Μητρώο Hessian

Έχοντας λάβει τ' όνομα του από τον Γερμανό μαθηματικό Ludwig von Hesse, το μητρώο αυτό είναι το τετραγωνικό μητρώο των μερικών παραγώγων 2<sup>ης</sup> τάξης μιας πραγματικής βαθμωτής συνάρτησης  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , δηλ.  $H(f)_{ij}(x) = D_i D_j f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , γενίκευση δε αυτού αποτελεί η Ιακωβιανή. Αν, τέλος, οι 2<sup>ες</sup> παράγωγοι της  $f$  είναι όλες συνεχείς σε

μια περιοχή  $D$ , τότε η Hessian είναι συμμετρική σε όλο το  $D$ . Σε αναλυτική γραφή το μητρώο Hessian έχει ως εξής:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

### Γ.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

#### Γ.3.1 Γενικά

Στην Επιστήμη των Μαθηματικών, ο όρος Βελτιστοποίηση ή Μαθηματικός Προγραμματισμός (Optimization – Nonlinear Programming) αναφέρεται στην μελέτη προβλημάτων, στα οποία κανείς σκοπεύει να ελαχιστοποιήσει ή να μεγιστοποιήσει μια συνάρτηση πραγματικών μεταβλητών, εκλέγοντας με συστηματικό τρόπο τις τιμές των μεταβλητών αυτών (πραγματικών ή ακεραίων) από ένα επιτρεπτό σύνολο. Το πρόβλημα αυτό αναπαρίσταται με τον ακόλουθο τρόπο :

Δεδομένα : Μια συνάρτηση  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Ζητούμενα : Ένα στοιχείο  $x_0 \in A : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A^8$  ή

$x_0 \in A : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A^9$

Το ανωτέρω καλείται πρόβλημα βελτιστοποίησης ή μαθηματικού προγραμματισμού (όρος μη άμεσα σχετιζόμενος με τον προγραμματισμό Η/Υ). Πολλές καθημερινές εφαρμογές αλλά και θεωρητικά προβλήματα μπορούν να προσομοιωθούν μέσω των ανωτέρω.

Τυπικά, το  $A$  είναι ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ , συχνά καθοριζόμενο μέσω ενός συνόλου *περιορισμών* (constraints), δηλαδή ισοτήτων ή ανισοτήτων, που θα πρέπει να ικανοποιούνται από τα στοιχεία του  $A$ . Αυτά καλούνται *πραγματοποιήσιμες λύσεις* (feasible solutions), η δε συνάρτηση  $f$  καλείται *αντικειμενική* (objective). Μια πραγματοποιήσιμη

<sup>8</sup> ελαχιστοποίηση

<sup>9</sup> μεγιστοποίηση



λύση που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί ανάλογα με το πρόβλημα) την αντικειμενική συνάρτηση καλείται *βέλτιστη* (optimal) λύση, ενώ το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$  ονομάζεται *χώρος αναζήτησης* (search space).

Γενικά, όταν η περιοχή πραγματοποιήσιμων λύσεων ή η αντικειμενική συνάρτηση δεν παρουσιάζουν κυρτότητα (convexity), μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός τοπικά (local) μέγιστα ή ελάχιστα. Παραδείγματος χάριν, ένα τοπικό ελάχιστο  $x^*$  ορίζεται σαν ένα σημείο για το οποίο υπάρχει κάποιο  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε, για όλα εκείνα τα  $x$ , για τα οποία  $\|x - x^*\| \leq \delta$  ισχύει ότι  $f(x^*) \leq f(x)$ , με παρόμοιο δε τρόπο ορίζεται και ένα τοπικό μέγιστο.

Ένας μεγάλος αριθμός αλγορίθμων, που έχουν προταθεί για την επίλυση μη κυρτών προβλημάτων – συμπεριλαμβανόμενης και της πλειοψηφίας του υπάρχοντος σχετικού εμπορικού λογισμικού – αδυνατούν να διακρίνουν μεταξύ τοπικών και καθολικών (global) βέλτιστων λύσεων και χειρίζονται τις πρώτες ως πραγματικές λύσεις του αρχικού προβλήματος. Ο κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Αριθμητικής Ανάλυσης που ασχολείται με την ανάπτυξη *ντετερμινιστικών αλγορίθμων*, που να είναι ικανοί να εγγυηθούν, εντός πεπερασμένου χρόνου, σύγκλιση στην πραγματική βέλτιστη λύση ενός *μη κυρτού* προβλήματος ονομάζεται *Καθολική<sup>10</sup> Βελτιστοποίηση*.

### Γ.3.2 Κύρια υπο – πεδία εφαρμογής

- Γραμμικός (linear) προγραμματισμός : Μελετά την περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση  $f$  είναι γραμμική, το δε σύνολο  $A$  ορίζεται με τη χρήση μόνο γραμμικών ισοτήτων και ανισοτήτων. Ένα τέτοιο σύνολο, αν είναι φραγμένο, καλείται *πολύτοπο* ή *πολύεδρο*.
- Ακέραιος (integer) προγραμματισμός : Μελετά γραμμικά προβλήματα, στα οποία μερικές ή όλες οι μεταβλητές περιορίζονται μόνον σε ακέραιες τιμές.
- Τετραγωνικός (quadratic) προγραμματισμός : Επιτρέπει στην αντικειμενική συνάρτηση να έχει τετραγωνικούς όρους, ενώ το σύνολο  $A$  πρέπει να ορίζεται μέσω γραμμικών ισοτήτων και ανισοτήτων.

<sup>10</sup> global

- Μη Γραμμικός (nonlinear) προγραμματισμός : Μελετά τη γενική περίπτωση, όπου η αντικειμενική συνάρτηση ή / και οι περιορισμοί περιέχουν μη γραμμικούς όρους.
- Κυρτός (convex) προγραμματισμός : Μελετά την περίπτωση κατά την οποία η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή και οι περιορισμοί (εφόσον υπάρχουν) σχηματίζουν ένα κυρτό σύνολο. Πρόκειται για μια ειδική περίπτωση μη γραμμικού προγραμματισμού, μπορεί όμως να θεωρηθεί και σαν γενίκευση του γραμμικού και του τετραγωνικού προγραμματισμού.
- Ημι – ορισμένος (semi – definite) προγραμματισμός (SDP) : Πρόκειται περί υπο – περίπτωσης κυρτής βελτιστοποίησης, όπου οι μεταβλητές αποτελούν στοιχεία ημι – ορισμένων μητρών. Αποτελεί γενίκευση του γραμμικού και του κυρτού τετραγωνικού προγραμματισμού.
- Κωνικός προγραμματισμός 2<sup>ης</sup> τάξης (second order cone) : Μπορεί να ειπωθεί ως μια γενίκευση του γραμμικού και του τετραγωνικού προγραμματισμού. Απλά, ένα κωνικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συν έναν αριθμό περιορισμών της μορφής  $x \in C_t$ , όπου  $C_t$  ένας κώνος 2<sup>ης</sup> τάξης διάστασης  $t$ . Υπάρχουν δύο τύποι τέτοιων κώνων: (α) Τετραγωνικός κώνος διάστασης  $t$  και (β) περιστρεφόμενος τετραγωνικός κώνος διάστασης  $t$  :

$$(\alpha) \quad C_t = \left\{ x \in R^{n'} : x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^{n'} x_j^2} \right\}$$

$$(\beta) \quad C_t = \left\{ x \in R^{n'} : 2x_1x_2 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^{n'} x_j^2}, \quad x_1x_2 \geq 0 \right\}$$

- Υπερβολικός (hyperbolic) προγραμματισμός : Βασίζεται στις έννοιες των υπερβολικών πολυωνύμων και (κατ' επέκταση) της υπερβολικότητας σημείων ισορροπίας δυναμικών συστημάτων (ιδία διανυσματικών πεδίων).
- Στοχαστικός (stochastic) προγραμματισμός : Μελετά την περίπτωση κατά την οποία μερικοί περιορισμοί ή μερικές παράμετροι εξαρτώνται από τυχαίες (random) μεταβλητές.
- Αυστηρός (robust) προγραμματισμός : Όπως και ο στοχαστικός, προσπαθεί να «συλλάβει» αβεβαιότητες στα δεδομένα κάτω από το πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τούτο όμως δεν γίνεται με χρήση τυχαίων μεταβλητών, αλλά το πρόβλημα επιλύεται λαμβάνοντας υπ' όψη ανακρίβειες στα δεδομένα εισόδου (input data).

- Δυναμικός (dynamic) προγραμματισμός : Η στρατηγική βελτιστοποίησης που ακολουθεί βασίζεται στον επιμερισμό του προβλήματος σε επί μέρους υπο – προβλήματα.
- Συνδυαστικός (combinatorial) προγραμματισμός : Ασχολείται με προβλήματα όπου το σύνολο των πραγματοποιήσιμων λύσεων είναι διακεκριμένο (discrete) ή δύναται να διακριτοποιηθεί.
- Απειροδιάστατος (infinite – dimensional) προγραμματισμός : Μελετά προβλήματα, στα οποία οι πραγματοποιήσιμες λύσεις αποτελούν υποσύνολο ενός χώρου απείρων διαστάσεων (π.χ. ένας συναρτησιακός χώρος).
- Ικανοποίηση περιορισμών (constraint satisfaction) : Μελετά περιπτώσεις που αντικειμενική συνάρτηση είναι σταθερή (με εφαρμογή στην τεχνική νοημοσύνη και την αυτοματοποιημένη λογική).
- Διαζευκτικός (disjunctive) προγραμματισμός : Χρησιμοποιείται όταν απαιτείται η ικανοποίηση τουλάχιστον ενός περιορισμού αλλά όχι όλων (με ιδιαίτερη εφαρμογή στον χρονικό προγραμματισμό – scheduling).

### Γ.3.3 Τεχνικές

Για διπλά διαφορήσιμες συναρτήσεις, προβλήματα χωρίς περιορισμούς μπορούν να επιλυθούν με την εύρεση των σημείων όπου η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης μηδενίζεται, και χρησιμοποιώντας το μητρώο Hessian για την ταξινόμηση των σημείων αυτών (αν  $H(f)$  θετικά ορισμένη  $\rightarrow$  τοπικό ελάχιστο, αν  $H(f)$  αρνητικά ορισμένη  $\rightarrow$  τοπικό μέγιστο, αν  $H(f)$  μη ορισμένη  $\rightarrow$  σημείο σέλας κλπ).

Όμως, δεν είναι πάντοτε εγγυημένη (ή έχει υποτεθεί) η ύπαρξη των παραγώγων, οπότε για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων έχουν επινοηθεί πολλές μέθοδοι. Οι βασικές κατηγορίες των μεθόδων αυτών, με βάση την ομαλότητα (smoothness) της αντικειμενικής συνάρτησης, είναι οι ακόλουθες :

- (1) Συνδυαστικές μέθοδοι
- (2) Μέθοδοι ελεύθερες παραγώγων (derivative – free)
- (3) Μέθοδοι 1<sup>ης</sup> τάξης και
- (4) Μέθοδοι 2<sup>ης</sup> τάξης

Συνήθεις μέθοδοι που ανήκουν σε κάποια από τις τέσσερις ως άνω κατηγορίες είναι :

- Της πλέον απότομης κατάβασης (steepest descend)
- Των Nealder – Meed
- Υπο – κλίσεων (sub – gradients)
- Μονής κατεύθυνσης (simplex)
- Ελλειψοειδείς (ellipsoid)
- Δέσμης (Bundle)
- Newton και Newton – Raphson
- Quasi – Newton
- Εσωτερικού σημείου (interior point)
- Συζυγών κλίσεων / κατευθύνσεων (conjugate gradients / directions)
- Γραμμικής αναζήτησης (linear search)

Αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή στο πεδίο που μας ενδιαφέρει, τότε κάθε τοπικό ελάχιστο θα είναι και καθολικό, ενώ υπάρχουν αυστηρές και ταχύτατες αριθμητικές τεχνικές βελτιστοποίησης διπλά διαφορήσιμων κυρτών συναρτήσεων. Επίσης, προβλήματα με περιορισμούς μπορεί συχνά να μετασχηματιστούν σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς με τη βοήθεια των *πολλαπλασιαστών Lagrange*. Στη συνέχεια αναφέρονται μερικές ακόμα δημοφιλείς μέθοδοι βελτιστοποίησης, με την αυθεντική τους ονομασία : *Hill climbing, Simulated annealing, Quantum annealing, Tabu search, Beam search, Genetic algorithm, Ant colony optimization, Evolution strategy, Stochastic tunneling, Differential evolution, Particle swarm optimization*.

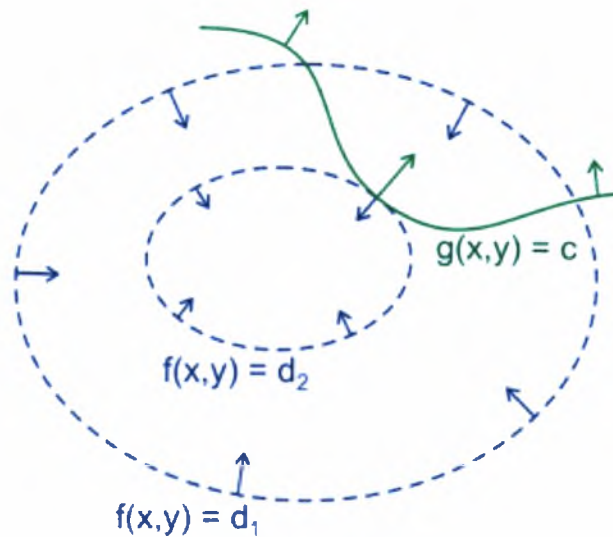
### Γ.3.4 Πολλαπλασιαστές Lagrange

#### A. Γενικά – Εισαγωγή

Στα προβλήματα (μαθηματικής) βελτιστοποίησης, οι *πολλαπλασιαστές Lagrange* χρησιμοποιούνται για την εύρεση των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, που υπόκεινται σε έναν ή περισσότερους περιορισμούς. Η όλη μέθοδος ανάγει ένα πρόβλημα  $n$  μεταβλητών με  $k$  περιορισμούς σε ένα επιλύσιμο πρόβλημα  $n + k$  μεταβλητών χωρίς περιορισμούς. Εισάγεται μια νέα βαθμωτή μεταβλητή για κάθε περιορισμό, ο *πολλαπλασιαστής*

Lagrange, και μορφώνεται έτσι ένας γραμμικός συνδυασμός, που περιλαμβάνει τους πολλαπλασιαστές ως συντελεστές.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση δύο διαστάσεων, και ότι επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε μια συνάρτηση  $f(x, y)$  υπό τον περιορισμό  $g(x, y) = c$ , όπου  $c$  μια σταθερά. Μπορούμε να απεικονίσουμε ισοϋψείς καμπύλες (contours) της  $f$ , που δίνονται από τη σχέση  $f(x, y) = d_n$ , καθώς και την καμπύλη  $g(x, y) = c$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα Γ4.



Σχήμα Γ4. Ισοϋψείς της  $f$  και καμπύλη της συνάρτησης περιορισμού.

Καθώς κινούμεθα κατά μήκος της  $g = c$  γενικά θα λάβει χώραν τομή της με διάφορες ισοϋψείς της  $f$ , δηλαδή η κίνηση αυτή οδηγεί σε αύξηση ή μείωση της τιμής της  $f$ . Μόνον όταν η καμπύλη  $g = c$  εφάπτεται (αλλά δεν τέμνει) μια ισοϋψή της  $f$  δεν αλλάζει η τιμή της συνάρτησης  $f$ . Τούτο δε συμβαίνει στις θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης περιορισμού και στα υπό τον περιορισμό σημεία καμπής της  $f$ .

Γεωμετρικά, η συνθήκη εφαιπτομενικότητας ισοδυναμεί με το γεγονός οι κλίσεις των  $f$  και  $g$  να είναι διανύσματα παράλληλα, στη θέση του μέγιστου. Εισάγοντας μια άγνωστη βαθμωτή ποσότητα  $\lambda$ , επιλύουμε πλέον την εξίσωση :

$$\nabla[f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)] = 0 \quad , \quad \lambda \neq 0$$

Μόλις ευρεθούν τιμές του  $\lambda$ , επιστρέφουμε στον αρχικό αριθμό μεταβλητών και προχωρούμε στην εύρεση της νέας, χωρίς πλέον περιορισμούς, συνάρτησης :

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

με παραδοσιακούς τρόπους. Παρατηρούμε πως  $F(x, y) = f(x, y)$  για όλα τα  $x, y$  που ικανοποιούν τον περιορισμό και τα ακρότατα της  $F(x, y)$  βρίσκονται όλα πάνω στην καμπύλη  $g(x, y) = c$ .

### B. Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}^n$ , ενώ οι περιορισμοί δίδονται από τις σχέσεις  $g_k(\mathbf{x}) = 0$  (ή παρόμοια  $g_k(\mathbf{x}) - c = 0$ ). Κατόπιν ορίζεται η Lagrangian  $\Lambda$  :

$$\Lambda(\mathbf{x}, \lambda) = f + \sum_k \lambda_k g_k$$

Παρατηρούμε ότι τόσο τα κριτήρια βελτιστοποίησης όσο και οι περιορισμοί κωδικοποιούνται ως ακρότατα της  $\Lambda$ , καθόσον

$$\nabla_x \Lambda = 0 \Leftrightarrow \nabla_x f = -\sum_k \lambda_k \nabla_x g_k \text{ και } \nabla_\lambda \Lambda = 0 \Leftrightarrow g_k = 0$$

Επίσης, ισχύει ότι  $\frac{\partial \Lambda}{\partial g_k} = \lambda_k$ , δηλαδή οι πολλαπλασιαστές Lagrange

καταδεικνύουν τον ρυθμό μεταβολής της βελτιστοποιούμενης ποσότητας, ως συνάρτησης των μεταβλητών περιορισμού.

Γενίκευση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange αποτελούν οι συνθήκες Karush – Kuhn – Tucker, που περιγράφονται εν συντομία παρακάτω.

### Γ.3.5 Συνθήκες Karush – Kuhn – Tucker

Πρόκειται περί *αναγκαίων* συνθηκών για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης :

ελαχιστοποίηση της  $f(x)$  υπό τους περιορισμούς

$$g_i(x) \leq 0 \quad , \quad h_j(x) = 0$$

όπου  $f(x)$  η αντικειμενική συνάρτηση,  $g_i(x), i = 1, \dots, m$  (ανισότητες – περιορισμοί) και  $h_j(x), j = 1, \dots, \ell$  (ισότητες – περιορισμοί). Ας υποθέσουμε ότι η  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  καθώς και οι

περιορισμοί  $g_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $h_j : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  είναι συνεχώς διαφορήσιμες σε ένα σημείο  $x^* \in S$ . Αν το  $x^*$  είναι ένα *τοπικό ελάχιστο* τότε υπάρχουν σταθερές  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) και

$$v_j \quad (j = 1, \dots, \ell) \text{ τέτοιες ώστε: } \lambda \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{\ell} v_j \nabla h_j(x^*) = 0 \text{ για } \mu_i g_i(x^*) = 0$$

όλα τα  $i = 1, \dots, m$

Στις παραπάνω αναγκαίες συνθήκες, ο διπλός (dual) πολλαπλασιαστής  $\lambda$  μπορεί να ισούται με μηδέν. Στις εκφυλισμένες (ανώμαλες) αυτές περιπτώσεις η αναγκαία συνθήκη δεν λαμβάνει υπ' όψη της ιδιότητας της συνάρτησης, παρά μόνο την γεωμετρία των περιορισμών. Υπάρχει ένας αριθμός συνθηκών κανονικότητας (regularity) που εξασφαλίζουν την μη ύπαρξη εκφυλισμένων λύσεων, δηλαδή την σχέση  $\lambda \neq 0$ . Αυτές περιλαμβάνουν :

(α) Γραμμική ανεξαρτησία των περιορισμών<sup>11</sup> : Οι κλίσεις των ενεργών ανισοτικών περιορισμών και οι κλίσεις των περιορισμών ισότητων είναι διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα στο  $x^*$ .

(β) Συνθήκες Slater : Για ένα πρόβλημα μόνο με ανισοτικούς περιορισμούς, υπάρχει ένα σημείο  $x$  τέτοιο ώστε  $g_i(x) < 0$  για όλα τα  $i = 1, \dots, m$ .

Με βάση τα παραπάνω, διατυπώνονται και οι ακόλουθες *ικανές* συνθήκες : Έστω ότι τόσο η αντικειμενική συνάρτηση  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  όσο και οι συναρτήσεις περιορισμών  $g_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $h_j : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  είναι *κυρτές*, και  $x^*$  ένα πραγματοποιήσιμο σημείο. Αν επίσης υπάρχουν σταθερές  $\mu_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) και  $v_j$  ( $j = 1, \dots, \ell$ ) τέτοιες ώστε :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{\ell} v_j \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ για όλα τα } i = 1, \dots, m,$$

τότε το σημείο  $x^*$  είναι *καθολικό ελάχιστο*.

<sup>11</sup> Linear Independence Constraint Qualification - LICQ

Γ.3.6 Μέθοδοι Ποινής<sup>12</sup> και Φράγματος<sup>13</sup>για Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούςA. Εισαγωγή

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς  $P$ :

$P$ : ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $f(x)$ , όταν επιπρόσθετα

$$\text{ισχύει ότι: } \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, k \\ x \in \mathcal{R}^n \end{cases}$$

η πραγματοποιήσιμη περιοχή του οποίου ορίζεται ως:

$$F := \{x \in \mathcal{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$$

Οι μέθοδοι φράγματος και ποινής έχουν σχεδιαστεί για την επίλυση του  $P$ , με το να επιλύουν αντί αυτού μια αλληλουχία ειδικά δομημένων προβλημάτων βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Σε μια μέθοδο ποινής, η πραγματοποιήσιμη περιοχή του  $P$  επεκτείνεται από την  $F$  σε όλο το  $\mathcal{R}^n$ , προσθέτοντας μια μεγάλη τιμή «ποινής» στην υπό αναζήτηση συνάρτηση<sup>14</sup> για τα σημεία εκείνα που βρίσκονται εκτός της  $F$ . Σε μια μέθοδο φράγματος, υποθέτουμε ότι μας δίδεται ένα σημείο  $x^0$ , το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της  $F$ , και επιβάλλουμε μια μεγάλη τιμή σε πραγματοποιήσιμα σημεία, τα οποία βρίσκονται συνέχεια πλησίον του συνόρου της  $F$ , δημιουργώντας έτσι ένα «φράγμα» εξόδου από την  $F$ .

B. Μέθοδοι Ποινής

Αν θεωρηθεί εκ νέου το πρόβλημα  $P$ , όπως προηγουμένως, και μετατραπούν οι περιορισμοί  $h_i(x) = 0$  σε  $h_i(x) \leq 0, -h_i(x) \leq 0$ , μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $P$  λαμβάνει τη μορφή:

$P$ : ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $f(x)$ , όταν επιπρόσθετα

$$\text{ισχύει ότι: } \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ x \in \mathcal{R}^n \end{cases}$$

όπου έχει για ευκολία γραφεί ότι  $g(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$ .

<sup>12</sup> penalty

<sup>13</sup> barrier



**Ορισμός :** Μια συνάρτηση  $p(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  καλείται *συνάρτηση ποινής* για το  $P$  αν ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $p(x) = 0$  αν  $g(x) \leq 0$
- $p(x) > 0$  αν  $g(x) > 0$

**Παράδειγμα:**

$$p(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{0, g_i(x)\})^2$$

Επιλύεται στη συνέχεια το ακόλουθο πρόγραμμα ποινής:

$$P(c): \text{ελαχιστοποίηση της } f(x) + cp(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

για μια αύξουσα ακολουθία σταθερών  $c$  καθώς  $c \rightarrow +\infty$ .

Σημειώτεον ότι στο πρόγραμμα  $P(c)$  επιβάλλεται ποινή στους περιορισμούς που δεν ικανοποιούνται. Η βαθμωτή ποσότητα  $c$  καλείται *παράμετρος ποινής*.

Έστω  $c_k \geq 0, k = 1, \dots, \infty$  μια ακολουθία παραμέτρων ποινής που ικανοποιούν τις συνθήκες  $c_{k+1} > c_k \quad \forall k$  και  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = +\infty$ . Έστω επίσης ότι  $q(c, x) = f(x) + cp(x)$ ,  $x^k$  η ακριβής λύση του

προγράμματος  $P(c_k)$  και  $x^*$  μια οποιαδήποτε βέλτιστη λύση του  $P$ .

Το ακόλουθο λήμμα παρουσιάζει μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες των μεθόδων ποινής.

**Λήμμα 1 (Λήμμα ποινής).**

1.  $q(c_k, x^k) \leq q(c_{k+1}, x^{k+1})$
2.  $p(x^k) \geq p(x^{k+1})$
3.  $f(x^k) \leq f(x^{k+1})$
4.  $f(x^*) \geq q(c_k, x^k) \geq f(x^k)$

**Απόδειξη:**

1. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} q(c_{k+1}, x^{k+1}) &= f(x^{k+1}) + c_{k+1}p(x^{k+1}) \geq f(x^{k+1}) + c_k p(x^{k+1}) \\ &\geq f(x^k) + c_k p(x^k) = q(c_k, x^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x^k) + c_k p(x^k) &\leq f(x^{k+1}) + c_k p(x^{k+1}) \quad \text{και} \\ f(x^{k+1}) + c_{k+1} p(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + c_{k+1} p(x^k) \end{aligned}$$

συνεπώς

$$(c^{k+1} - c^k)p(x^k) \geq (c^{k+1} - c^k)p(x^{k+1})$$

οπότε τελικά

$$p(x^k) \geq p(x^{k+1})$$

3. Από την απόδειξη του (1.) προκύπτει ότι

$$f(x^{k+1}) + c_k p(x^{k+1}) \geq f(x^k) + c_k p(x^k)$$

όμως

$$p(x^k) \geq p(x^{k+1})$$

οπότε

$$f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$$

$$4. \quad f(x^k) \leq f(x^k) + c_k p(x^k) \leq f(x^*) + c_k p(x^*) = f(x^*).$$

### Θεώρημα 1 (Θεώρημα σύγκλισης)

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $g(x)$  και  $p(x)$  είναι συνεχείς. Έστω ότι η  $\{x^k\}, k = 1, \dots, \infty$  είναι μια ακολουθία λύσεων του  $P(c^k)$ . Τότε, κάθε οριακό σημείο  $\bar{x}$  της  $\{x^k\}$  αποτελεί λύση του  $P$ .

Απόδειξη: Έστω ότι το  $\bar{x}$  είναι ένα οριακό σημείο της  $\{x^k\}$ . Από την συνέχεια των υπεισερχόμενων συναρτήσεων προκύπτει άμεσα ότι  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(\bar{x})$ , ενώ από το

Λήμμα 1 ότι  $q^* := \lim q(c_k, x^k) \leq f(x^*)$ . Συνεπώς θα ισχύει ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k p(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [q(c_k, x^k) - f(x^k)] = q^* - f(\bar{x})$$

Καθόσον δε  $c_k \rightarrow \infty$  τεκμαίρεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(x^k) = 0$$

Άρα, από την συνέχεια των συναρτήσεων  $p(x)$  και  $g(x)$ ,  $p(\bar{x}) = 0$ , οπότε  $g(\bar{x}) \leq 0$ , που σημαίνει ότι το  $\bar{x}$  είναι μια πραγματοποιήσιμη λύση του  $P$ . Τελικά, από το Λήμμα Γ.2.1,  $f(x^k) \leq f(x^*) \quad \forall k$ , και κατά συνέπεια  $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$ , δηλαδή το  $\bar{x}$  αποτελεί μια βέλτιστη λύση του  $P$ .

Μια συχνά χρησιμοποιούμενη κλάση συναρτήσεων ποινής έχει ως εξής:

$$p(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^q, \quad q \geq 1 \quad (\Gamma 1)$$

Αξιίζει εδώ να σημειωθεί ότι

- Αν  $q = 1$ , η  $p(x)$  στην (Γ1) καλείται *γραμμική συνάρτηση ποινής*. Η συνάρτηση αυτή πιθανώς να μην είναι διαφορίσιμη σε σημεία όπου  $g_i(x) = 0$  για ορισμένα  $i$ .
- Θέτοντας  $q = 2$  λαμβάνουμε την πιο συνήθη μορφή της (Γ1) που χρησιμοποιείται στην κοινή πρακτική, που κατ' αναλογία καλείται *τετραγωνική συνάρτηση ποινής*.
- Αν ορίσουμε ως  $g^+(x) = (\max\{0, g_1(x)\}, \dots, \max\{0, g_m(x)\})^T$ , η ως άνω συνάρτηση μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή:

$$p(x) = (g^+(x))^T (g^+(x))$$

Πολλαπλασιαστές Karush-Kuhn-Tucker (KKT) στις μεθόδους ποινής

Η συνάρτηση ποινής  $p(x)$  είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση μόνο της  $g^+(x)$ , όπου  $g^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$  (το μη αρνητικό μέρος των  $g_i(x)$ ),  $i = 1, \dots, m$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε  $p(x) = \gamma(g^+(x))$ , όπου  $\gamma(y)$  μια συνάρτηση του  $y \in (\mathbb{R}^m)^+$ . Δύο παραδείγματα αυτού του τύπου συνάρτησης ποινής είναι  $\gamma(y) = \sum_{i=1}^m y_i$  και  $\gamma(y) = \sum_{i=1}^m y_i^2$ , που αντιστοιχούν στη γραμμική και την τετραγωνική μορφή. Σημειώτεον ότι ακόμα και αν η  $\gamma(y)$  είναι

συνεχώς διαφορίσιμη, η  $p(x)$  μπορεί να μην είναι, καθόσον, για κάποια  $i$ , η  $g^+(x)$  δεν είναι διαφορίσιμη σε σημεία  $x$  όπου  $g_i^+(x) = 0$ . Παρά ταύτα, αν υποθέσουμε ότι:

$$\frac{\partial \gamma(y)}{\partial y_i} = 0 \Big|_{y_i=0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (\Gamma 2)$$

προκύπτει ότι η  $p(x)$  είναι διαφορίσιμη όπου είναι και οι συναρτήσεις  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , και συνεπώς θα ισχύει ότι:

$$\nabla p(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \gamma(g^+(x))}{\partial y_i} \nabla g_i(x) \quad (\Gamma 3)$$

Αν το  $x^k$  αποτελεί λύση του  $P(c_k)$ , τότε θα ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla f(x^k) + c_k \nabla p(x^k) = 0 \xrightarrow{(\Gamma 3)} \nabla f(x^k) + c_k \sum_{i=1}^m \frac{\partial \gamma(g^+(x^k))}{\partial y_i} \nabla g_i(x^k)$$

και αν ορίσουμε

$$u_i^k = c_k \frac{\partial \gamma(g^+(x^k))}{\partial y_i} \nabla g_i(x^k) \quad (\Gamma 4)$$

τότε

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m u_i^k \nabla g_i(x^k) = 0$$

Άρα τα  $u_k$  μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα είδος διανύσματος πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker. Στην πραγματικότητα θα έχουμε:

### Λήμμα 2.

Υποθέτουμε ότι η  $\gamma(y)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την (Γ2), καθώς ότι οι  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι διαφορίσιμες, έστω δε ότι οι  $u^k$  ορίζονται από την (Γ4). Τότε, αν  $x^k \rightarrow \bar{x}$  και το  $\bar{x}$  ικανοποιεί τη συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας για τα διανύσματα κλίσεων (gradient) των ενεργών περιορισμών, θα ισχύει  $u^k \rightarrow \bar{u}$ , όπου  $\bar{u}$  ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker για την βέλπστη λύση  $\bar{x}$  του προβλήματος  $P$ .

**Απόδειξη:** Από το θεώρημα σύγκλισης Γ.2.1, η  $\bar{x}$  είναι μια βέλτιστη λύση του  $P$ . Έστω  $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$  και  $N = \{i \mid g_i(\bar{x}) < 0\}$ . Για  $i \in N$ ,  $g_i(x^k) < 0$  για όλα τα ικανώς μεγάλα  $k$ , οπότε και  $u_i^k < 0$  για όλα τα ικανώς μεγάλα  $k$ , ενώ  $\bar{u}_i = 0$  για  $i \in N$ .

Από την (Γ4) και τον ορισμό μιας συνάρτησης ποινής προκύπτει ότι, για όλα τα ικανώς μεγάλα  $k$ ,  $u_i^k \geq 0$ ,  $i \in N$ .

Ας υποθεθεί ότι  $u^k \rightarrow \bar{u}$  καθώς το  $k \rightarrow \infty$ . Τότε,  $\bar{u}_i = 0$ ,  $i \in N$ . Από την συνέχεια όλων των υπεισερχόμενων συναρτήσεων

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m u_i^k \nabla g_i(x^k) = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Από τις ανωτέρω παρατηρήσεις προκύπτει επίσης ότι  $\bar{u} \geq 0$  και  $\bar{u}_i = 0$  για όλα τα  $i \in N$ . Άρα το  $\bar{u}$  είναι διάνυσμα πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker. Το μόνο που πρέπει ακόμα να δειχθεί είναι ότι  $u^k \rightarrow \bar{u}$  για κάποιο μοναδικό  $\bar{u}$ .

Ας υποθέσουμε ότι η  $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$  δεν διαθέτει κανένα σημείο συσσώρευσης.

Τότε θα ισχύει ότι  $\|u^k\| \rightarrow \infty$ . Αν όμως ορίσουμε ως  $v_k = \frac{u^k}{\|u^k\|}$ , θα έχουμε ότι  $\|v^k\| = 1$  για όλα τα

$k$ , άρα η ακολουθία  $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$  έχει κάποιο σημείο συσσώρευσης  $\bar{v}$ . Για όλα τα  $i \in N$ ,  $v_i^k = 0$  για μεγάλα  $k$ ,  $\bar{v}_i = 0$ ,  $i \in N$  και για μεγάλα  $k$  θα έχουμε επίσης ότι

$$\sum_{i \in I} v_i^k \nabla g_i(x^k) = \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla g_i(x^k) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{u_i^k}{\|u^k\|} \right) \nabla g_i(x^k) = \frac{-\nabla f(x^k)}{\|u^k\|}$$

Καθώς  $k \rightarrow \infty$  θα ισχύει ότι  $x^k \rightarrow \bar{x}$ ,  $v^k \rightarrow \bar{v}$  και  $\|u^k\| \rightarrow \infty$ , οπότε η

παραπάνω σχέση γίνεται  $\sum_{i \in I} \bar{v}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ , και  $\|\bar{v}\| = 1$ , γεγονός που καταστρατηγεί την συνθήκη

γραμμικής ανεξαρτησίας. Κατά συνέπεια, η  $\{\mu^k\}$  είναι μια φραγμένη ακολουθία, οπότε διαθέτει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

Αν τώρα υποθεθεί ότι η εν λόγω ακολουθία διαθέτει δύο σημεία συσσώρευσης, τα  $\tilde{u}$  και  $\bar{u}$ , παρατηρούμε πως  $\bar{u}_i = 0$  και  $\tilde{u}_i = 0$  για  $i \in N$ , οπότε

$$\sum_{i \in I} \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) = -\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in I} \tilde{u}_i \nabla g_i(\bar{x})$$

με αποτέλεσμα να προκύψει ότι  $\sum_{i \in I} (\bar{u}_i - \tilde{u}_i) \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ .

Όμως, λόγω της συνθήκης της γραμμικής ανεξαρτησίας,  $\bar{u}_i - \tilde{u}_i = 0$  για όλα τα  $i \in N$ , οπότε  $\bar{u}_i = \tilde{u}_i \Rightarrow \bar{u} = \tilde{u}$ . Παρατήρηση: Η τετραγωνική συνάρτηση ποινής ικανοποιεί την συνθήκη (Γ2), σε αντίθεση με την αντίστοιχη γραμμική.

#### Ακριβείς Μέθοδοι Ποινής

Η βασική ιδέα πίσω από τις ακριβείς μεθόδους ποινής είναι η επιλογή μιας συνάρτησης ποινής  $p(x)$  και μιας σταθεράς  $c$ , έτσι ώστε η βέλπστη λύση  $\bar{x}$  του  $P(c)$  να είναι επίσης μια βέλπστη λύση του αρχικού προβλήματος  $P$ .

Θεώρημα 2. Υποθέτουμε ότι το  $P$  είναι ένα λείο πρόβλημα (πρόγραμμα), για το οποίο είναι αναγκαίες οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker. Υποθέτουμε επίσης ότι

$p(x) := \sum_{i=1}^m (g_i(x))^+$ . Τότε, εφόσον το  $c$  επιλεγεί αρκούντως μεγάλο, τα σύνολα βέλπιστων λύσεων

των  $P(c)$  και  $P$  ταυτίζονται. Μάλιστα, αρκεί να επιλεγεί  $c > \max_i \{\mu_i^*\}$ , όπου  $u^*$  είναι ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το  $\hat{x}$  αποτελεί λύση του  $P$ . Για κάποιο  $x \in R^n$  θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
q(c, x) = f(x) + c \sum_{i=1}^m (g_i(x))^+ &\geq f(x) + \sum_{i=1}^m (u_i^* g_i(x))^+ \\
&\geq f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^* g_i(x) \\
&\geq f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^* (g_i(\hat{x}) + \nabla g_i(\hat{x})^T (x - \hat{x})) \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\hat{x})^T (x - \hat{x}) \\
&= f(x) - \nabla f(\hat{x})^T (x - \hat{x}) \\
&\geq f(\hat{x}) = f(\hat{x}) + c \sum_{i=1}^m (g_i(\hat{x}))^+ = q(c, \hat{x})
\end{aligned}$$

Άρα  $q(c, \hat{x}) \leq q(c, x)$  για όλα τα  $x$ , οπότε το  $\hat{x}$  είναι λύση του  $P(c)$ .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το  $\bar{x}$  αποτελεί λύση του  $P(c)$ . Αν δε το  $\hat{x}$  είναι λύση του  $P$ , θα έχουμε

$$f(\bar{x}) + c \sum_{i=1}^m (g_i(\bar{x}))^+ \leq f(\hat{x}) + c \sum_{i=1}^m (g_i(\hat{x}))^+ = f(\hat{x})$$

οπότε

$$f(\bar{x}) \leq f(\hat{x}) - c \sum_{i=1}^m (g_i(\bar{x}))^+ \quad (15)$$

Όμως, αν το  $\bar{x}$  δεν είναι πραγματοποιήσιμο για το  $P$ , τότε

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) &\geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) \\
&= f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\hat{x})^T (\bar{x} - \hat{x}) \\
&\geq f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m u_i^* (g_i(\hat{x}) - g_i(\bar{x})) \\
&= f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^m u_i^* g_i(\bar{x}) > f(\hat{x}) - c \sum_{i=1}^m (g_i(\bar{x}))^+
\end{aligned}$$

γεγονός που αντιβαίνει την (15), που σημαίνει ότι το  $\bar{x}$  είναι πραγματοποιήσιμο για το  $P$ . Στην περίπτωση πλέον αυτή προκύπτει από την (15) ότι

$$f(\bar{x}) \leq f(\hat{x}) - c \sum_{i=1}^m (g_i(\bar{x}))^+ = f(\hat{x})$$

δηλαδή ότι το  $\bar{x}$  αποτελεί λύση και του  $P$ .

### Μέθοδοι Ποινής για Περιορισμούς Ανισοτήτων και Ισοτήτων

Η προηγηθείσα παρουσίαση των μεθόδων ποινής έχει υποθέσει είτε ότι το πρόβλημα  $P$  δεν συνοδεύεται από περιορισμούς ισοτήτων, είτε ότι όλοι οι περιορισμοί έχουν μετατραπεί σε συνθήκες ανισοτήτων. Γενικά, αυτό είναι και μεν εύκολο, πλην όμως έρχεται σε απ' ευθείας αντίθεση με την κοινή λογική, αφού χωρίς ιδιαίτερο λόγο δυσχεραίνει το πρόβλημα.

Επιπρόσθετα, πιθανώς να οδηγήσει και σε αυτόματη παραβίαση της συνθήκης γραμμικής ανεξαρτησίας για κάθε πραγματοποιήσιμη λύση. Ας θεωρήσουμε συνεπώς ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς τόσο ισότητες όσο και ανισότητες :

$P$ : ελαχιστοποίηση της  $f(x)$ , ενώ παράλληλα ισχύει ότι

$$g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

όπου  $g(x), h(x)$  είναι διανυσματικές συναρτήσεις – στήλες κατά τα γνωστά

**Ορισμός :** Μια συνάρτηση  $p(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται συνάρτηση ποινής για το  $P$ , αν αυτή ικανοποιεί τα ακόλουθα :

$$(\alpha) \quad p(x) = 0 \text{ αν } g(x) \leq 0 \text{ και } h(x) = 0$$

$$(\beta) \quad p(x) > 0 \text{ αν } g(x) > 0 \text{ ή } h(x) \neq 0$$

Η κύρια κατηγορία συναρτήσεων ποινής για το εν λόγω γενικό πρόβλημα είναι της μορφής :

$$p(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^q + \sum_{i=1}^k |h_i(x_i)|^q, \quad \text{όπου } q \geq 1$$

Όλα τα ανωτέρω εκτεθέντα επεκτείνονται φυσιολογικά και σε προβλήματα με περιορισμούς ισότητων με συναρτήσεις ποινής όπως η παραπάνω. Για παράδειγμα, στο ανάλογο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2, αρκεί να επιλέξουμε

$$c > \max\{u_1^*, \dots, u_m^*, |v_1^*|, \dots, |v_k^*|\}$$

### Γ. Μέθοδοι Φράγματος

**Ορισμός :** Μια συνάρτηση φράγματος για το  $P$  είναι οποιαδήποτε συνάρτηση  $b(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω :

$$(\alpha) \quad b(x) \geq 0 \text{ για όλα τα } x \text{ για τα οποία } g(x) < 0 \text{ και}$$

$$(\beta) \quad b(x) \rightarrow \infty \text{ καθώς } \lim_x \max_i \{g_i(x)\} \rightarrow 0$$

Η ιδέα πίσω από τις μεθόδους φράγματος είναι να αποτραπούν τα σημεία  $x$  από του να πλησιάσουν το σύνορο της πραγματοποιήσιμης περιοχής. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την επίλυση του παρακάτω προβλήματος :

$$B(c): \text{ ελαχιστοποίηση της } f(x) + \frac{1}{c} b(x) \text{ υπό τον περιορισμό}$$



$$g(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

για μια ακολουθία  $c_k \rightarrow +\infty$ . Σημειωτέον ότι οι περιορισμοί  $g(x) < 0$  δεν επηρεάζουν ουσιαστικά το  $B(c)$ , αφού εκεί δεν είναι δεσμευτικοί.

**Παράδειγμα :**  $b(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(x)}$ , υποθέτοντας ότι  $g(x) = (x-4, 1-x)^T$  και

$x \in \mathbb{R}^1$ . Τότε  $b(x) = \frac{1}{4-x} + \frac{1}{x-1}$ . Έστω  $r(c, x) = f(x) + \frac{1}{c}b(x)$  και ότι η ακολουθία  $\{c_k\}$

ικανοποιεί την  $c_{k+1} > c_k$  καθώς και ότι  $c_k \rightarrow \infty$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ . Έστω ακόμη ότι  $x^*$  είναι η ακριβής λύση του  $B(c^t)$ . Το ακόλουθο Λήμμα παρουσιάζει μερικές βασικές ιδιότητες των μεθόδων φράγματος.

### Λήμμα 3 (Φράγματος)

1.  $r(c_k, x^k) \geq r(c_{k+1}, x^{k+1})$
2.  $b(x^k) \leq b(x^{k+1})$
3.  $f(x^k) \geq f(x^{k+1})$
4.  $f(x^*) \leq f(x^k) \leq r(c_k, x^k)$

### Απόδειξη :

1.

$$\begin{aligned} r(c_k, x^k) &= f(x^k) + \frac{1}{c_k}b(x^k) \geq f(x^k) + \frac{1}{c_{k+1}}b(x^k) \\ &\geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{c_{k+1}}b(x^{k+1}) = r(c_{k+1}, x^{k+1}) \end{aligned}$$

2.

$$f(x^k) + \frac{1}{c_k}b(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{1}{c_k}b(x^{k+1})$$

και

$$f(x^{k+1}) + \frac{1}{c_{k+1}}b(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \frac{1}{c_{k+1}}b(x^k)$$

Αθροίζοντας και αναδιαρθρώνοντας λαμβάνουμε

$$\left(\frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_{k+1}}\right)b(x^k) \leq \left(\frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_{k+1}}\right)b(x^{k+1})$$

Αφού  $c_k < c_{k+1}$  συμπεραίνουμε ότι  $b(x_{k+1}) \geq b(x_k)$

3. Από την απόδειξη της (1.)

$$f(x^k) + \frac{1}{c_{k+1}} b(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{c_{k+1}} b(x^{k+1})$$

Όμως, από την (2.)  $b(x_k) \leq b(x_{k+1})$  οπότε  $f(x^k) \geq f(x^{k+1})$

4.

$$f(x^*) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + \frac{1}{c_k} b(x^k) = r(c_k, x^k)$$

Αν ορίσουμε ως  $N(\varepsilon, x)$  μια σφαίρα ακτίνας  $\varepsilon$  με κέντρο το σημείο  $x$ , το ακόλουθο θεώρημα αφορά τη σύγκλιση της τρέχουσας μεθόδου.

**Θεώρημα 4 (Σύγκλισης Φράγματος)** : Υποθέτουμε ότι οι  $f(x), g(x)$  και  $b(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έστω  $\{x_k\}, k=1, \dots, \infty$  μια ακολουθία λύσεων του  $B(c^k)$ . Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μια βέλπστη λύση  $x^*$  του  $P$  για την οποία  $N(\varepsilon, x^*) \cap \{x \mid g(x) < 0\} \neq \emptyset$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Τότε κάθε οριακό σημείο  $\bar{x}$  της  $\{x^k\}$  είναι λύση του  $P$ .

**Απόδειξη** : Έστω  $\bar{x}$  ένα οποιοδήποτε οριακό σημείο της ακολουθίας  $\{x^k\}$ .

Από τη συνέχεια των  $f(x), g(x)$  έπεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(\bar{x}) \text{ και } \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^k) = g(\bar{x}) \leq 0$$

οπότε το  $\bar{x}$  είναι πραγματοποιήσιμο για το  $P$ .

Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει ένα  $\tilde{x}$  τέτοιο ώστε  $g(\tilde{x}) < 0$  και  $f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \varepsilon$ .

Για κάθε  $k$ ,

$$f(x^*) + \varepsilon + \frac{1}{c_k} b(\tilde{x}) \geq f(\tilde{x}) + \frac{1}{c_k} b(\tilde{x}) \geq r(c_k, x^k)$$

Συνεπώς, για αρκούντως μεγάλα  $k$ ,  $f(x^*) + 2\varepsilon \geq r(c_k, x^k)$ , και καθόσον από το (4.) του Λήμματος 3 (φράγματος) :  $r(c_k, x^k) \geq f(x^*)$  θα ισχύει ότι

$$f(x^*) + 2\varepsilon \geq \lim_{k \rightarrow \infty} r(c_k, x^k) \geq f(x^*)$$

Τούτο υποδηλώνει ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(c_k, x^k) = f(x^*)$$

Επιπρόσθετα έχουμε ότι

$$f(x^*) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + \frac{1}{c_k} b(x^k) = r(c_k, x^k)$$

Παίρνοντας τα όρια λαμβάνουμε :  $f(x^*) \leq f(\bar{x}) \leq f(x^*)$ , άρα το  $\bar{x}$  είναι μια βέλτιστη λύση του  $P$ .

Μια τυπική κλάση συναρτήσεων φράγματος είναι τη μορφής

$$b(x) = \sum_{i=1}^m (-g_i(x))^{-q}, \quad q > 0$$

Πολλαπλασιαστές Karush-Kuhn-Tucker στις μεθόδους φράγματος

Έστω  $b(x) = \gamma(g(x))$ , όπου  $\gamma(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , υποτίθεται δε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχώς διαφορίσιμη για όλα τα  $y < 0$ . Τότε

$$\nabla b(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \gamma(g(x))}{\partial y_i} \nabla g_i(x)$$

και αν  $x^k$  επιλύει το  $B(c_k)$ , τότε  $\nabla f(x^k) + \frac{1}{c_k} \nabla b(x^k) = 0$ , που σημαίνει ότι

$$\nabla f(x^k) + \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \gamma(g(x^k))}{\partial y_i} \nabla g_i(x^k) = 0 \quad (\Gamma 6)$$

Αν ορίσουμε στη συνέχεια

$$u_i^k = \frac{1}{c_k} \frac{\partial \gamma(g(x^k))}{\partial y_i} \quad (\Gamma 7)$$

τότε η (Γ6) λαμβάνει τη μορφή

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m u_i^k \nabla g_i(x^k) = 0 \quad (\Gamma 8)$$

οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το  $u^k$  σαν ένα είδος διανύσματος πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker.

**Λήμμα 4 :** Έστω ότι το  $P$  ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Σύγκλισης Φράγματος. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $\gamma(y)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη και έστω ότι το  $u^k$  ορίζεται από την έκφραση (Γ7). Τότε, αν  $x^k \rightarrow \bar{x}$  και το  $\bar{x}$  ικανοποιεί τη συνθήκη γραμμικής

ανεξαρτησίας για διανύσματα κλίσεων ενεργών συντεταγμένων,  $u^k \rightarrow \bar{u}$ , όπου  $\bar{u}$  είναι ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker για την βέλπστη λύση  $\bar{x}$  του  $P$ .

### Απόδειξη

Έστω  $x^k \rightarrow \bar{x}$ , όπi  $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$  και όπi  $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) < 0\}$ . Για όλα τα  $i \in N$ ,

$$u_i^k = \frac{1}{c_k} \frac{\partial \gamma(g(x^k))}{\partial y_i} \rightarrow 0 \text{ καθώς } k \rightarrow \infty,$$

αφού  $c_k \rightarrow \infty$ ,  $g_i(x^k) \rightarrow g_i(\bar{x}) < 0$  και επειδή το  $\frac{\partial \gamma(g(x^k))}{\partial y_i}$  είναι πεπερασμένο. Επίσης ισχύει

όπi, για αρκούντως μεγάλα  $k$  και για όλα τα  $i$ ,  $u_i^k \geq 0$ .

Υποθέτουμε πως  $u^k \rightarrow \bar{u}$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ . Τότε  $\bar{u} \geq 0$  και  $\bar{u}_i = 0$  για όλα τα  $i \in N$ . Από την συνέχεια όλων των υπεισερχόμενων συναρτήσεων, η σχέση (Γ8) υποδηλώνει ότι :

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, \quad \bar{u} \geq 0, \quad \bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$$

Άρα το  $\bar{u}$  είναι ένα διάνυσμα πολλαπλασιαστών Karush-Kuhn-Tucker. Απομένει προς απόδειξη όπi  $u^k \rightarrow \bar{u}$  για κάποιο μοναδικό  $\bar{u}$ . Η απόδειξη του είναι ακριβώς ίδια με το αντίστοιχο εδάφιο του Λήμματος 2.

### Γ.3.7 Μέθοδος πλέον απότομης κατάβασης (Steepest Descent)

Πρόκειται για την απλούστερη από τις μεθόδους κλίσης (gradient methods). Η επιλογή της κατεύθυνσης σχετίζεται με τον τρόπο ταχύτερης μείωσης της  $f$ , που στην πραγματικότητα είναι η κατεύθυνση η αντίθετη με αυτή του  $\nabla f(x_k)$ . Η αναζήτηση εκκινεί από ένα τυχαίο σημείο  $x_0$  και στη συνέχεια «κατρακυλά» αντίθετα από την κλίση, μέχρι να καταλήξει επιθυμητά κοντά στη λύση. Με άλλα λόγια, η επαναληπτική διαδικασία έχει ως εξής:

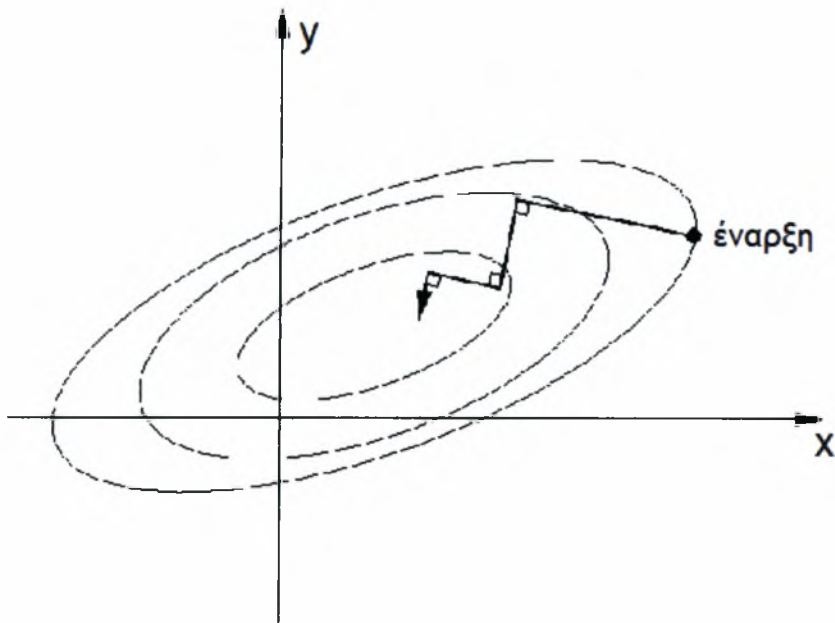
$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) = x_k - \lambda_k g(x_k) \quad (\Gamma9)$$

όπου  $g(x_k)$  η κλίση σε δοθέν σημείο. Η ερώτηση που εύλογα ανακύπτει είναι «πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το βήμα προς την κατεύθυνση αυτή;», δηλαδή «ποια είναι η τιμή του  $\lambda_k$ ;».

Προφανώς, η επιθυμητή κίνηση είναι προς το σημείο εκείνο που η  $f$  λαμβάνει ελάχιστη τιμή, όπου η παράγωγος κατεύθυνσης (directional derivative) ισούται με μηδέν. Η εν λόγω παράγωγος δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{d}{d\lambda_k} f(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1})^T \cdot \frac{d}{d\lambda_k} x_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1})^T \cdot g(x_k) \quad (\Gamma 10)$$

Θέτοντας την ως άνω έκφραση ίση με μηδέν, παρατηρούμε ότι τα  $\lambda_k$  πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο, που τα  $\nabla f(x_{k+1})$  και  $g(x_k)$  να είναι ορθογωνικά. Το επόμενο βήμα πραγματοποιείται στην κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης σε αυτό το νέο σημείο, οπότε καταλήγουμε σε μια οδοντωτή κίνηση (zig – zag), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα Γ4.



Σχήμα Γ4. Γραφική απεικόνιση της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συνεχίζεται μέχρι την εύρεση του ακρότατου στην επιθυμητή ακρίβεια. Πρόκειται ουσιαστικά περί προβλήματος ελαχιστοποίησης κατά μήκος μιας γραμμής, που δίδεται στην (Γ9), για διαφορετικές τιμές του  $\lambda_k$ . Συνεπώς η αναζήτηση ενός ελάχιστου της  $f(x)$  περιορίζεται σε μια ακολουθία γραμμικών αναζητήσεων (linear searches). Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να ξεκινήσει με μια επιλεγείσα τιμή του  $\lambda_k$ ,

οποία, αν χρειαστεί, θα προσαρμοστεί κατά την επαναληπτική διαδικασία, εξασφαλίζοντας ότι η συνάρτηση μειώνεται σε κάθε επανάληψη. Τούτο φυσικά είναι πολύ ευκολότερο και συχνά λειτουργεί καλλίτερα, σε περιπτώσεις που οι υπολογισμοί μέσω γραμμικής αναζήτησης είναι δυσχερείς. Θα απαιτηθούν πολύ περισσότερες επαναλήψεις για την εύρεση του ελάχιστου, αλλά κάθε επανάληψη θα διαρκέσει πολύ λιγότερο, σε σχέση με την αντίστοιχη μιας γραμμικής αναζήτησης. Ο αλγόριθμος που προκύπτει έχει ως εξής :

$$\text{Αρχή: } g_0 = \nabla f(x_0) \quad , \quad d_0 = -g_0$$

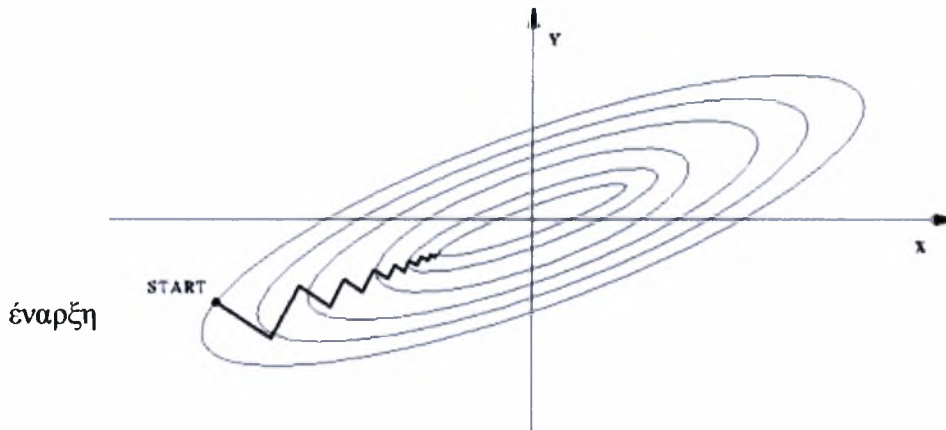
$$\text{Υπολογισμός του μήκους βήματος: } \lambda_k = \min_{\lambda_k > 0} f(x_k + \lambda_k d_k)$$

$$\text{Εύρεση του νέου σημείου: } x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

$$\text{Υπολογισμός της κλίσης: } g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$$

$$\text{Ορισμός κατεύθυνσης αναζήτησης: } d_{k+1} = -g_{k+1}$$

Όπως φαίνεται, η μέθοδος της πλέον απότομης κατάβασης είναι απλή, εύκολα εφαρμόσιμη και κάθε επανάληψη της ταχεία, ενώ διαθέτει και πολύ καλή ευστάθεια. Σε περίπτωση δε ύπαρξης σημείων ελαχίστου, η μέθοδος εγγυάται τον προσδιορισμό τους, μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων. Παρά τα πλεονεκτήματα αυτά, η εν λόγω μέθοδος έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα, αργή σύγκλιση. Για συστήματα με κακή κλίμακα, δηλαδή όταν οι ιδιοτιμές της Hessian στο σημείο λύσης διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους (από πλευράς μεγέθους), η μέθοδος θα χρειαστεί άπειρο αριθμό επαναλήψεων για τον εντοπισμό του. Αρχικά εκκινεί με μια λογική σύγκλιση, αλλά η όλη διαδικασία καθίσταται ολοένα και πιο αργή, καθώς προσεγγίζεται το ελάχιστο. Τούτο απεικονίζεται στο Σχήμα Γ5, για την περίπτωση μιας τετραγωνικής συνάρτησης με «μακρύ και στενό» γράφημα, η όλη δε μέθοδος (από πλευράς σύγκλισης) εξαρτάται κατά πολύ από την επιτυχή ή όχι επιλογή του σημείου εκκίνησης. Συνεπώς, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί όταν υπάρχει αξιόπιστη ένδειξη της θέσης του ελάχιστου, και θεωρείται γενικά ως φτωχή επιλογή για οποιαδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης. Περισσότερο χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης.



Σχήμα Γ5. Σύγκλιση της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης

### Γ.3.8 Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων (conjugate gradients)

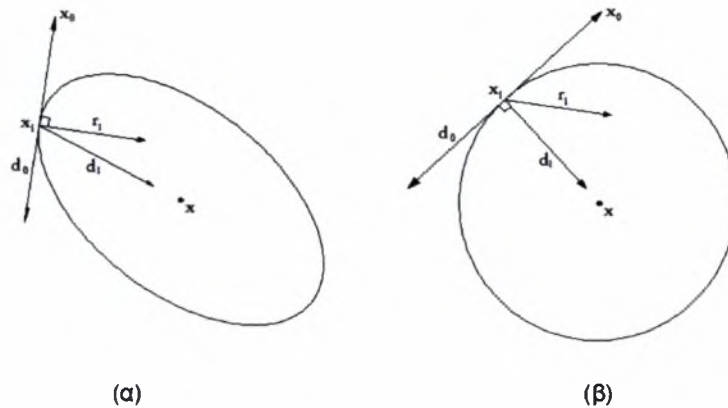
Όπως δείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο λόγος αργής σύγκλισης της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης είναι το γεγονός ότι πρέπει να στρίψει δεξιόστροφα μετά από κάθε βήμα και συνεπώς η αναζήτηση γίνεται με κατεύθυνση ίδια με αυτή των αρχικών βημάτων (βλ. Σχήμα Γ4). Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων αποτελεί μια προσπάθεια επιδιόρθωσης του προβλήματος αυτού μέσω γνώσης από εμπειρία.

*Συζυγία (conjugacy) σημαίνει ότι δύο άνισα διανύσματα  $d_i$  και  $d_j$  είναι ορθογωνικά ως προς οποιοδήποτε θετικά ορισμένο συμμετρικό μητρώο  $Q$ :*

$$d_i^T \cdot Q \cdot d_j = 0 \quad (\Gamma 11)$$

Τούτο μπορεί να ειπωθεί και σαν γενίκευση της ορθογωνικότητας ( $Q = I$ ). Μέσω της ανωτέρω σχέσης κάθε κατεύθυνση αναζήτησης  $d_i$  καθίσταται εξαρτημένη από όλες τις άλλες κατευθύνσεις αναζήτησης του ελάχιστου της  $f(x)$ . Ένα σύνολο τέτοιων κατευθύνσεων καλείται  $Q$ -ορθογωνικό ή συζυγές, και θα οδηγήσει μια θετικά ορισμένη  $n$ -διάστατη τετραγωνική συνάρτηση της μορφής  $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b x + c$ , μέχρι το ελάχιστο της σε  $n$  το πολύ γραμμικές αναζητήσεις. Η μέθοδος αυτή συχνά καλείται και ως «συζυγείς κατευθύνσεις», μια συνοπτική δε περιγραφή της ακολουθεί :

Ο βέλτιστος τρόπος σχηματισμός σαφούς εικόνας του τρόπου λειτουργίας των συζυγών κατευθύνσεων είναι η σύγκριση του πραγματικού χώρου εφαρμογής με έναν τεντωμένο (stretched) χώρο, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα Γ5.



Σχήμα Γ5. Χώροι εφαρμογής της μεθόδου συζυγών κατευθύνσεων

(α) πραγματικός, (β) τεντωμένος

Στην αριστερή (α) πλευρά του Σχήματος φαίνεται η γραφική παράσταση των ισοϋψών μιας τετραγωνικής συνάρτησης στον πραγματικό χώρο, με μορφή ελλειπτική (για  $b \neq 0$ ). Οποιοδήποτε ζεύγος διανυσμάτων που φαίνονται κάθετα μεταξύ τους στο χώρο αυτό θα είναι ορθογωνικά. Στη δεξιά (β) πλευρά όμως, φαίνεται η ίδια γραφική αναπαράσταση για έναν χώρο που έχει τεντωθεί κατά μήκος των αξόνων των ιδιοδιανυσμάτων, με αποτέλεσμα οι αρχικά ελλειπτικές ισοϋψείς να καταστούν κυκλικές. Οποιοδήποτε ζεύγος διανυσμάτων που φαίνονται κάθετα μεταξύ τους στο χώρο αυτό θα είναι Q-ορθογωνικά. Η αναζήτηση ελάχιστου των τετραγωνικών συναρτήσεων εκκινεί από το σημείο  $x_0$  (Σχ.Γ6α) και το πρώτο βήμα πραγματοποιείται προς την κατεύθυνση  $d_0$ , σταματώντας στο σημείο  $x_1$ . Αυτό είναι ένα σημείο ελάχιστου κατά μήκος αυτής της κατεύθυνσης, που προσδιορίζεται ακριβώς όπως στη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου (μηδενισμός της παραγώγου κατεύθυνσης – εξίσωση Γ10). Η θεμελιώδης όμως διαφορά μεταξύ της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης και αυτής των συζυγών κατευθύνσεων έγκειται στην επιλογή της αμέσως επόμενης κατεύθυνσης αναζήτησης, μετά το  $x_1$ . Η πρώτη θα επιλέξει την  $r_1$  και η δεύτερη την  $d_1$  (ως Σχ.Γ5). Πως όμως μέσω των συζυγών κατευθύνσεων οδηγούμεθα κατ' ευθείαν προς τη λύση  $x$ ; Η απάντηση βρίσκεται στο Σχήμα Γ5β : Σε αυτόν τον τεντωμένο χώρο, η κατεύθυνση  $d_0$  εμφανίζεται εφαπτόμενη των κυκλικών ισοϋψών στο σημείο  $x_1$ . Καθόσον δε η επόμενη κατεύθυνση αναζήτησης  $d_1$  είναι υποχρεωμένη να παραμείνει Q-ορθογωνική με την προηγούμενη, θα είναι μεταξύ τους κάθετες



στον μετασχηματισμένο αυτό χώρο. Άρα η  $d_1$  θα οδηγήσει κατ' ευθείαν στο σημείο ελάχιστου της τετραγωνικής συνάρτησης  $f(x)$ .

Προς αποφυγή αναζήτησης μιας κατεύθυνσης που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί σε άλλες προηγούμενες αναζητήσεις, οι συζυγείς κατευθύνσεις εγγυώνται ότι η ελαχιστοποίηση της  $f(x_k)$  κατά μήκος μιας κατεύθυνσης δεν αναστέλλει την ελαχιστοποίηση προς μια άλλη, δηλαδή εγγυώνται ότι μετά από  $i$  βήματα η  $f(x_i)$  θα έχει ελαχιστοποιηθεί προς όλες τις κατευθύνσεις αναζήτησης, πράγμα που πιστοποιείται μέσω της εξίσωσης (Γ11).

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των συζυγών κατευθύνσεων, όπου το συζυγές σύνολο είναι εγγυημένο μέσω των διανυσμάτων κλίσης. Η εφαρμοσιμότητα των τελευταίων έχει ήδη καταδειχθεί στη μέθοδο πλέον απότομης κατάβασης. Για μια τετραγωνική συνάρτηση (σελ. Γ-28) η όλη διαδικασία της μεθόδου συζυγών κλίσεων έχει ως εξής :

*Το αρχικό βήμα στην κατεύθυνση της πλέον απότομης κατάβασης*

$$d_0 = -g(x_0) = -g_0$$

*Στη συνέχεια, επιλέγονται οι αμοιβαία συζυγείς κατευθύνσεις*

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

*όπου ο συντελεστής  $\beta_k$  δίδεται, π.χ., από την σχέση των **Fletcher-Reeves***

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T \cdot g_{k+1}}{g_k^T \cdot g_k} \quad (\Gamma 12)$$

*Το μήκος εκάστου βήματος ισούται με*

$$\lambda_k = \frac{d_k^T \cdot g_k}{d_k^T \cdot (Q \cdot d_k)} \quad (\Gamma 13)$$

Όταν το μητρώο  $Q$  στην παραπάνω σχέση δεν είναι γνωστό, ή απαιτείται ιδιαίτερα υψηλό κόστος για την εύρεση του, το μέγεθος του βήματος μπορεί να βρεθεί μέσω γραμμικών αναζητήσεων. Για να υπάρξει σύγκλιση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων εντός  $n$  επαναλήψεων, θα πρέπει οι γραμμικές αυτές αναζητήσεις να είναι ακριβείς. Ακόμα και οι μικρότερες αποκλίσεις μπορεί να επιφέρουν απώλεια της  $Q$ -ορθογωνικότητας των διανυσμάτων, με

αποτέλεσμα να χρειαστούν πολύ περισσότερες από  $n$  αναζητήσεις για τον προσδιορισμό του σημείου ελαχίστου. Ούτε η απ' ευθείας χρήση των εξισώσεων (Γ13) πρόκειται να οδηγήσει σε σύγκλιση εντός  $n$  επαναλήψεων, λόγω περιορισμένης αριθμητικής ακρίβειας των υπολογισμών, που θα έχει σαν αποτέλεσμα την σταδιακή απώλεια της συζυγίας των διανυσμάτων.

Παρόλο που η μέθοδος των συζυγών κλίσεων σχεδιάστηκε για την εύρεση του σημείου ελαχίστου απλών τετραγωνικών συναρτήσεων, εφαρμόζεται επίσης με επιτυχία για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση  $f(x)$ , της οποίας η κλίση  $\nabla f(x)$  μπορεί να ευρεθεί. Η εξίσωση (Γ13) δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μη τετραγωνικές συναρτήσεις, οπότε το μήκος βήματος πρέπει να υπολογιστεί μέσω γραμμικών αναζητήσεων. Η συζυγία των παραγόμενων κατευθύνσεων μπορεί να απολεσθεί προοδευτικά, όχι μόνον λόγω της ανακρίβειας των γραμμικών αναζητήσεων, αλλά και της ύπαρξης μη τετραγωνικών όρων στις συναρτήσεις. Μια έκφραση, εναλλακτική αυτής των Fletcher-Reeves, η οποία μέχρις ενός ορίου αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό, έχει προταθεί από τους Polak και Ribière :

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T \cdot (g_{k+1} - g_k)}{g_k^T \cdot g_k} \quad (\Gamma14)$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου συζυγών κλίσεων, που υιοθετεί την παραπάνω σχέση, και έχει καλλίτερη απόδοση σε μη τετραγωνικές συναρτήσεις είναι ο ακόλουθος :

$$\text{Αρχή: } g_0 = \nabla f(x_0) \quad , \quad d_0 = -g_0$$

$$\text{Υπολογισμός του μήκους βήματος: } \lambda_k = \min_{\lambda_k > 0} f(x_k + \lambda_k d_k)$$

$$\text{Εύρεση του νέου σημείου: } x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

$$\text{Υπολογισμός της κλίσης: } g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$$

$$\text{Προσδιορισμός της κατεύθυνσης αναζήτησης: } d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k, \text{ το } \beta_k \text{ εκ της (Γ14).}$$

Ανεξάρτητα από τον χρησιμοποιούμενο τύπο αναβάθμισης της κατεύθυνσης, κανείς θα πρέπει να αντιμετωπίσει την απώλεια της συζυγίας λόγω των μη τετραγωνικών όρων. Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων συχνά χρησιμοποιείται σε προβλήματα όπου ο αριθμός των μεταβλητών  $n$  είναι μεγάλος, και δεν είναι καθόλου ασύνθητες να αρχίσει η παραγωγή (δημιουργία) «ανόητων» ή ανεπαρκών κατευθύνσεων μετά από μερικές επαναλήψεις.

Για τον λόγο αυτό είναι σημαντικό η μέθοδος να λειτουργεί με κύκλους, με το πρώτο βήμα να είναι αυτό της πλέον απότομης κατάβασης. Παράδειγμα μιας τακτικής επανέναρξης θα ήταν, μετά από  $n$  επαναλήψεις από την προηγούμενη επανέναρξη, να γίνει εκ νέου επιλογή βήματος πλέον απότομης κατάβασης.

Ένα άλλο θέμα πρακτικής σημασίας σχετίζεται με την γραμμική αναζήτηση που απαιτείται για ικανοποιητικούς υπολογισμούς. Από την μια μεριά, χρειάζεται μια ακριβής γραμμική αναζήτηση για να μειώσει τις απώλειες της συζυγίας, ενώ από την άλλη η επιμονή σε πολύ ακριβείς τέτοιες αναζητήσεις μπορεί να αποβεί υπολογιστικά δαπανηρή. Η εύρεση της καλλίτερης «μέσης οδού» απαιτεί εφαρμογή μεθόδου δοκιμής και σφάλματος (trial and error).

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων πέρα από μέθοδος βελτιστοποίησης, είναι επίσης μια από τις πλέον σημαντικές επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης αραιών (sparse) συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Είναι γρήγορη και απαιτεί μικρό αποθηκευτικό όγκο, μόνο για την 2<sup>η</sup> παράγωγο σε κάθε επανάληψη. Πλην όμως, αν η συνάρτηση  $f$  απέχει πολύ από τετραγωνική, η μέθοδος γενικά οδηγεί σε απώλεια της συζυγίας. Παρά ταύτα γενικά θεωρείται καλλίτερη και προτιμάται από αυτή της πλέον απότομης κατάβασης.

### Μέθοδος Fletcher-Reeves

Δοθείσας μιας συνάρτησης  $f: R^n \rightarrow R$  η μέθοδος των Fletcher-Reeves ανήκει στις μεθόδους συζυγών κλίσεων, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της  $f$ . Αν λοιπόν δίδεται μια τετραγωνική συνάρτηση  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ , ένα σύνολο διανυσμάτων  $\{\mathbf{y}_i \in R^n : i = 1, \dots, k\}$  είναι συζυγείς κατευθύνσεις για την  $f$ , αν  $\langle \mathbf{y}_i | A | \mathbf{y}_j \rangle = \mathbf{y}_i^T A \mathbf{y}_j = 0$  αν  $i \neq j$ .

Το ακόλουθο λήμμα οφείλεται στους Fletcher και Reeves :

Αν δίδεται μια τετραγωνική συνάρτηση  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$  και ένα σημείο  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{g}_1 = -\text{grad } f(\mathbf{x}_1)$ , αν για  $k \geq 1$  οριστεί  $\mathbf{v}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + (\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1} / \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k) \mathbf{v}_k$ , όπου  $\mathbf{g} = \text{grad } f(\mathbf{x}_j)$  και  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - 2(\mathbf{g}_k^T \mathbf{v}_k / \langle \mathbf{v}_k | A | \mathbf{v}_k \rangle) \mathbf{v}_k$ , τότε το  $\{\mathbf{v}_k\}$  μορφώνει ένα σύνολο συζυγών κατευθύνσεων για την  $f$ .

### Μέθοδος παραλλήλων εφαπτομένων (Parallel Tangents – PARTAN)

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην προσπάθεια αποφυγής των οδοντώσεων (zig-zag) που παρατηρούνται στις μεθόδους κλίσεων, πραγματοποιώντας μια επιπρόσθετη

γραμμική αναζήτηση σε κάθε επανάληψη. Στην τεχνική αυτή *βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς*, στην  $x_k$  επανάληψη πρώτα λαμβάνει χώραν μια γραμμική αναζήτηση στην διεύθυνση της κλίσης, παράγοντας το ενδιάμεσο σημείο  $v_k$ . Κατόπιν εφαρμόζεται η επί πλέον γραμμική αναζήτηση από το  $v_k$  στην κατεύθυνση  $d_k^p = v_k - x_{k-1}$ , οδηγώντας στο νέο σημείο  $x_{k+1}$  σύμφωνα με τη σχέση  $x_{k+1} = (1-t^k)v_k + t^k x_{k-1}$ , όπου το  $t^k$  επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση  $f(x_k)$  στο διάστημα  $\tau_{min}^k \leq t_k \leq 1$ , όπου η ποσότητα  $\tau_{min}^k \leq 0$  αντιπροσωπεύει το μέγιστο αρνητικό βήμα, το οποίο θα διατηρήσει το  $x_k$  μέσα στην πραγματοποιήσιμη περιοχή.

### Γ.3.9 Μέθοδος Newton – Raphson

Σε αντίθεση με τις μεθόδους των δύο προηγούμενων παραγράφων, στην εν λόγω μέθοδο απαιτούνται πληροφορίες για την 2<sup>η</sup> παράγραφο, προκειμένου προσδιοριστεί το ελάχιστο της συνάρτησης  $f(x)$ . Τούτο οδηγεί σε ταχύτερη σύγκλιση, χωρίς απαραίτητα λιγότερο υπολογιστικό χρόνο, αφού ο υπολογισμός της 2<sup>ης</sup> παραγώγου και η διαχείριση του μητρώου της μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρονοβόρες διαδικασίες, ιδία για μεγάλα συστήματα.

Η βασική ιδέα της μεθόδου Newton – Raphson έγκειται στην προσέγγιση της δοθείσας συνάρτησης  $f(x)$  (σε κάθε επανάληψη) μέσω μιας τετραγωνικής συνάρτησης της μορφής  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + bx + c$ . Η τετραγωνική συνάρτηση για ένα σημείο  $x$ , εντός μιας κατάλληλης γειτονιάς του τρέχοντος σημείου  $x_k$  προσεγγίζεται μέσω κολοβωμένης σειράς Taylor ως εξής :

$$f(x) \approx f(x_k) + (x - x_k)^T g_k + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k (x - x_k) \quad (\Gamma 15)$$

όπου τόσο η κλίση  $g_k$  όσο και το μητρώο Hessian  $H_k$  έχουν υπολογιστεί στο  $x_k$ . Η παράγωγος της (Γ15) δίδει :

$$\nabla f(x) = g_k + \frac{1}{2}H_k(x - x_k) + \frac{1}{2}H_k^T(x - x_k) \quad (\Gamma 16)$$

Το μητρώο Hessian είναι πάντοτε συμμετρικό, αν η συνάρτηση  $f(x_k)$  είναι διπλά συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο, γεγονός που εδώ ισχύει. Άρα, η (Γ16) καταλήγει στην

$$\nabla f(x) = g_k + H_k \cdot (x - x_k) \quad (\Gamma 17)$$

Αν υποθεθεί ότι η  $f(x)$  ελαχιστοποιείται για  $x = x^*$ , τότε η κλίση ισούται με μηδέν, που ισοδυναμεί με

$$H_k \cdot (x^* - x_k) + g_k = 0 \quad (\Gamma 18)$$

σχέση που υποδηλώνει – αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα. Η μέθοδος Newton – Raphson χρησιμοποιεί το  $x^*$  σαν το επόμενο τρέχον σημείο, με αποτέλεσμα τον ακόλουθο επαναληπτικό αλγόριθμο :

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} \cdot g_k \quad (\Gamma 19)$$

όπου η ποσότητα  $-H_k^{-1} \cdot g_k$  συχνά αναφέρεται και ως *κατεύθυνση Newton*.

Αν η προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης μέσω της (Γ15) ισχύει, η μέθοδος θα συγκλίνει εντός ολίγων επαναλήψεων. Αν δε η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση  $f(x)$  είναι τετραγωνική  $n$  διαστάσεων, η σύγκλιση θα λάβει χώραν μετά από ένα μόλις βήμα από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης.

Παρόλο όμως – λόγω του σχετικά μικρού αριθμού απαιτούμενων επαναλήψεων – που η σύγκλιση φαντάζει ταχεία, κάθε επανάληψη περιλαμβάνει τον υπολογισμό της 2<sup>ης</sup> παραγώγου και τον χειρισμό της Hessian. Η συμπεριφορά και η απόδοση της μεθόδου εξαρτάται κατά πολύ από ορισμένα χαρακτηριστικά του μητρώου αυτού, ιδιαίτερα δε από το αν είναι ή δεν είναι θετικά ορισμένο. Προς επίτευξη της σύγκλισης στο σημείο ελαχίστου, η κατεύθυνση Newton θα πρέπει να είναι κατάβασης, οπότε απαιτείται η ισχύς της κατωτέρω σχέσης :

$$\nabla f(x_k) \cdot d_k = g_k^T \cdot (x_{k+1} - x_k) < 0 \quad (\Gamma 20)$$

η οποία λόγω της (Γ19) λαμβάνει τη μορφή

$$-(x_{k+1} - x_k)^T \cdot H^k \cdot (x_{k+1} - x_k) < 0 \quad (\Gamma 21)$$

Η ανισότητα αυτή ικανοποιείται για όλα τα σημεία, για τα οποία  $x_{k+1} - x_k \neq 0$  αν το  $H_k$  είναι θετικά ορισμένο. Όσο πιο πολύ απέχει το  $x_k$  από την λύση, τόσο χειρότερη καθίσταται η προσέγγιση μέσω τετραγωνικής συνάρτησης σύμφωνα με την (Γ15), με πιθανό αποτέλεσμα το μητρώο Hessian να πάψει να είναι θετικά ορισμένο. Ως εκ τούτου, η μέθοδος δεν θα εξασφαλίζει σύγκλιση προς το ελάχιστο, αλλά μπορεί να καταλήξει σε οποιοδήποτε άλλο κρίσιμο σημείο (μέγιστο, σημείο σέλας κλπ). Υφίστανται διάφοροι τρόποι, που να εξασφαλίζουν ότι

η Hessian θα παραμείνει θετικά ορισμένη, όπως π.χ. προσθέτοντας ένα αρκετά μεγάλο  $\lambda$  ( $I$  το μοναδιαίο μητρώο και  $\lambda$  θετική βαθμωτή παράμετρος) ή διαγωνοποιώντας το μητρώο με χρήση των ιδιοτιμών του.

Το μέγεθος της Hessian μπορεί επίσης να διαδραματίσει πρωτεύοντα ρόλο στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου Newton – Raphson. Για συστήματα μεγάλου αριθμού διαστάσεων, δηλαδή μεγάλου αριθμού μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, οι υπολογισμοί που θα απαιτηθούν για την μόρφωση και τον προσδιορισμό της Hessian θα καταστεί ιδιαίτερα χρονοβόρα. Αυτό πάντως αντιμετωπίζεται με χρήση μόνο των διαγωνίων στοιχείων του μητρώου αυτού ή χωρίς επανυπολογισμό του σε κάθε επανάληψη, που είναι ενέργεια θεμιτή, καθόσον ο ρυθμός μεταβολής της 2<sup>ης</sup> παραγώγου είναι συνήθως αργός.

Ένα άλλο σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου Newton – Raphson είναι το ότι δεν είναι απαραίτητα καθολικά συγκλίνουσα, δηλαδή μπορεί να μην συγκλίνει από όλα τα σημεία έναρξης. Αρωγός στο πρόβλημα αυτό είναι η προσαρμογή του μεγέθους του βήματος στην κατεύθυνση Newton, τέτοια που να εξασφαλίζεται μείωση της τιμής της συνάρτησης. Η εξίσωση (Γ19) λαμβάνει τότε τη μορφή :

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k H_k^{-1} \cdot g_k \quad (\Gamma22)$$

Συνιστάται η χρήση *αλγορίθμων ακολούθησης ιχνών προς τα πίσω* (backtracking), όπου αρχικά δοκιμάζεται το *πλήρες βήμα* Newton  $\lambda_k = 1$ . Αν η χρήση του αποτύχει να ικανοποιήσει το κριτήριο μείωσης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, κανείς προβαίνει σε συστηματικό backtracking κατά μήκος της κατεύθυνσης Newton. Για περισσότερες λεπτομέρειες παρατίθεται Βιβλιογραφία στο τέλος του Παραρτήματος. Ο αλγόριθμος της μεθόδου Newton – Raphson σε συνδυασμό με backtracking έχει ως εξής :

$$\text{Υπολογισμός της κλίσης : } g_k = \nabla f(x_k)$$

$$\text{Υπολογισμός της Hessian : } H_k = \nabla^2 f(x_k)$$

$$\text{Εύρεση της κατεύθυνσης αναζήτησης : } d_k = -H_k^{-1} \cdot g_k$$

$$\text{Εύρεση του μεγέθους του βήματος } \lambda_k \text{ με backtracking}$$

$$\text{Προσδιορισμός του νέου σημείου : } x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

#### Γ.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γ4.1. W. Karush (1939). “*Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*”. M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.
- Γ4.2. H.W. Kuhn, A.W. Tucker, (1951). "Nonlinear programming". *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, 481-492, Berkeley: University of California Press.
- Γ4.3. R. Fletcher and C.M. Reeves (1964). “*Function minimization by conjugate gradients*”. Computer Journal 7, 149 – 154.
- Γ4.4. L.A. Steen and J.A. Seebach, Jr. (1970). *Counterexamples in Topology*. Dover Publishing.
- Γ4.5. M.S. Bazaraa, and C.M. Shetty, (1979). *Nonlinear programming. Theory and algorithms*. John Wiley & Sons.
- Γ4.6. D. P. Bertsekas (1999). *Nonlinear Programming: 2nd Edition*. Athena Scientific.
- Γ4.7. Avriel, Mordecai (2003). *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Publishing.
- Γ4.8. D. P. Bertsekas (2003). *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific.
- Γ4.9. J. Nocedal and S. J. Wright, (2006). *Numerical Optimization*. Springer.

#### Γ.5 Γλώσσες προσομοίωσης για προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού

- GAMS — General Algebraic Modeling System (<http://www.gams.com/>)
- AMPL (<http://www.ampl.com/>)
- MPL (<http://www.maximal-usa.com/mpl/>)
- AIMMS Optimization Modeling  
([http://www.aimms.com/aimms/pricing/try\\_aimms.html?dm=wikipedia](http://www.aimms.com/aimms/pricing/try_aimms.html?dm=wikipedia))

#### Γ.6 Λογισμικό βελτιστοποίησης

- CPLEX (<http://www.ilog.com/products/cplex/>)
- Mosek (<http://www.mosek.com/>)
- SAS OR (<http://www.sas.com/technologies/analytics/optimization/>)
- CONOPT (<http://www.conopt.com/>)
- Xpress-MP - Optimization software free to students  
(<http://www.dashoptimization.com/>)

- IPOPT (<http://en.wikipedia.org/wiki/IPOPT>)
- Free Optimization Software by Systems Optimization Laboratory, Stanford University (<http://www.stanford.edu/group/SOL/software.html>)
- Optimizing Resource and Capacity with Advanced Planning and Scheduling (<http://www.ingenious.cc/products/prosched.htm>)

**Γ.7 ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΕΣ με λογισμικό βελτιστοποίησης**

- OOL (Open Optimization library) (<http://ool.sourceforge.net/>)
- IOptLib (Investigative Optimization Library) (<http://www2.arnes.si/~ljc3m2/igor/ioptlib/>)

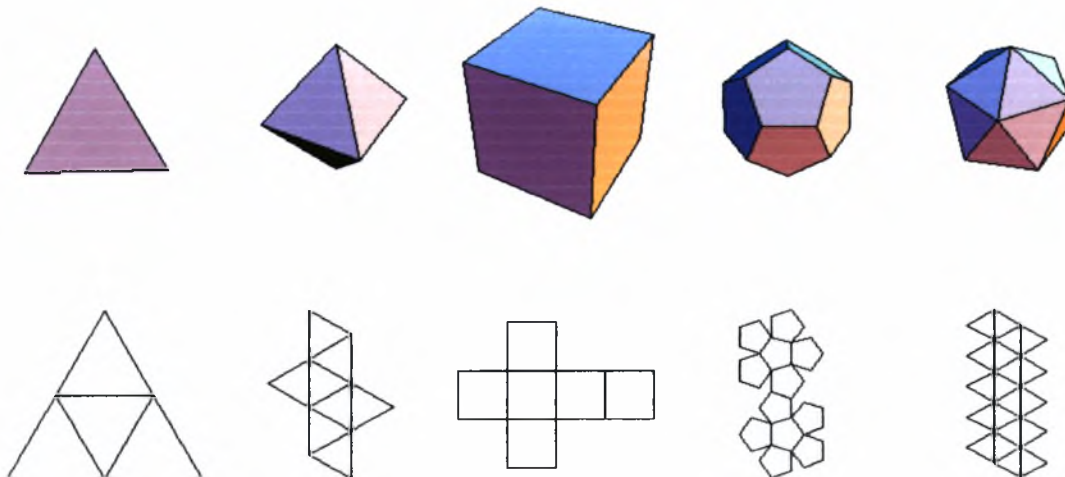


**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : ΠΕΡΙ ΓΕΩΛΛΑΓΤΙΚΩΝ****Δ.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ****Δ.1.1 Τριγωνισμός (triangulation)**

Τριγωνισμός είναι η διαίρεση μιας επιφάνειας ή ενός επίπεδου πολύγωνου σε ένα σύνολο τριγώνων, με τη συνήθη δέσμευση κάθε πλευρά του τριγώνου να είναι κοινή για δύο γειτονικά τρίγωνα. Έχει ήδη αποδειχθεί (1925) ότι κάθε επιφάνεια διαθέτει έναν τριγωνισμό, που μπορεί όμως να απαιτήσει άπειρο αριθμό τριγώνων. Μια επιφάνεια με πεπερασμένο αριθμό τριγώνων στον τριγωνισμό της καλείται *συμπαγής* (compact).

**Δ.1.2 Πλατωνικά Στερεά (Platonic Solids)**

Τα Πλατωνικά στερεά, καλούμενα επίσης κανονικά στερεά ή κανονικά πολύεδρα, είναι *κυρτά πολύεδρα* με ισοδύναμες πλευρές συνπθέμενες από συγκλίνοντα κυρτά κανονικά πολύγωνα. Υπάρχουν ακριβώς πέντε (5) τέτοια στερεά (όπως αποδείχτηκε από τον Ευκλείδη) : το τετράεδρο, το οκτάεδρο, ο κύβος, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο, όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα Δ1.



Σχήμα Δ1. Τα πέντε Πλατωνικά στερεά και τα αναπτύγματα τους.

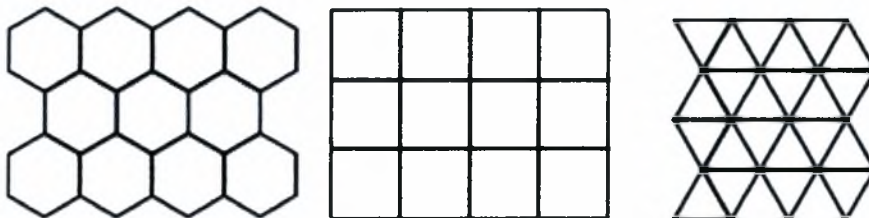
Η σφαίρα, η οποία είναι περιγεγραμμένη γύρω από ένα δοθέν στερεό ονομάζεται *περιγεγραμμένη σφαίρα* (circumsphere). Οι σφαίρες αυτές των ως άνω Πλατωνικών στερεών παρατίθενται γραφικά στο Σχήμα Δ2.



Σχήμα Δ2. Περιγεγραμμένες σφαίρες των πέντε Πλατωνικών στερεών.

### Δ.1.3 Κάλυψη (Tiling) – Ψηφίδωση (Tessellation)

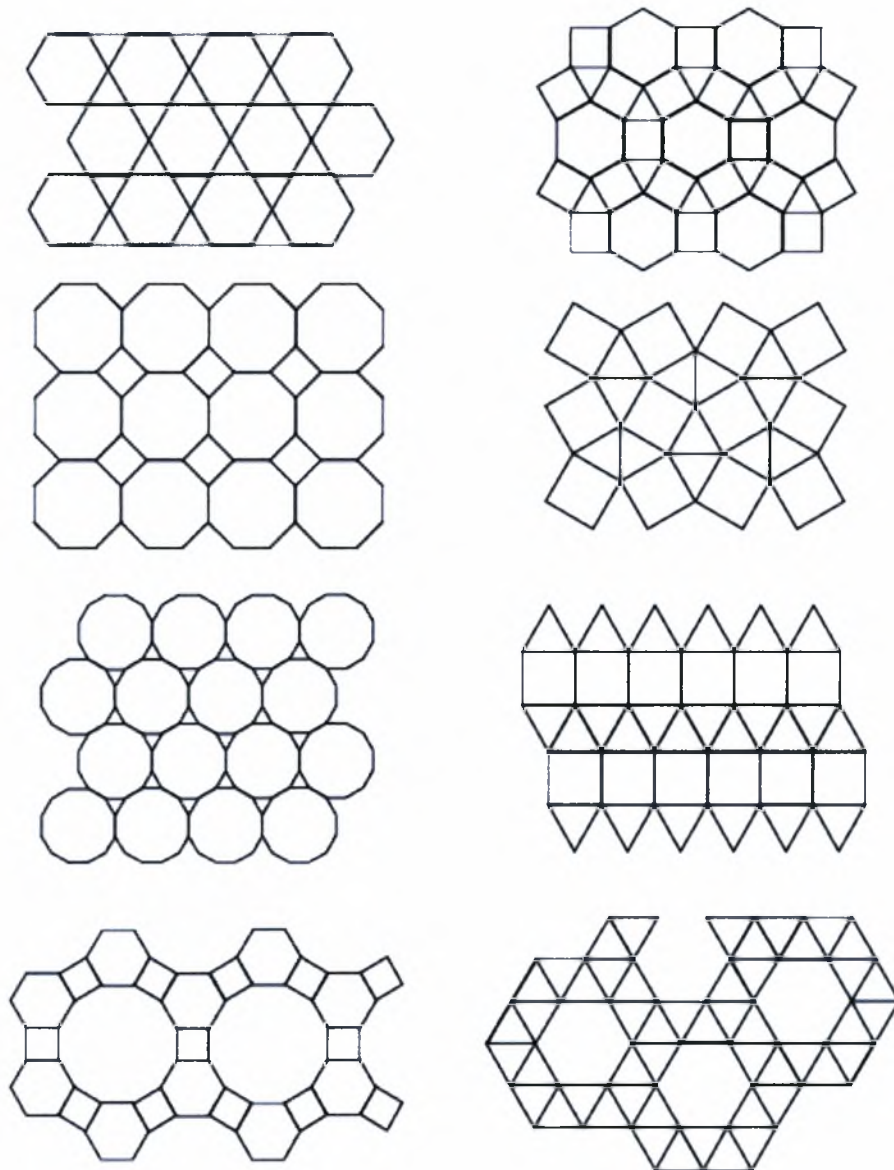
Κάλυψη είναι μια διάταξη επίπεδων σχημάτων που γεμίζουν το επίπεδο ή η γενίκευση αυτού σε υψηλότερες διαστάσεις. Τυπικά, μια κάλυψη είναι μια συλλογή αποσυνδεδεμένων ανοικτών συνόλων, η σύνθεση των οποίων γεμίζει το επίπεδο. Μια περιοδική κάλυψη του επιπέδου με πολύγωνα, του Ευκλείδειου χώρου με πολύεδρα (ή του χώρου  $n$  - διαστάσεων με πολύτοπα) καλείται ψηφίδωση. Η διάσπαση αυτο - τεμνόμενων πολυγώνων σε απλά πολύγωνα καλείται και αυτή ψηφίδωση, και μάλιστα πολυγωνική ψηφίδωση. Όπως φαίνεται στο Σχήμα Δ3, υπάρχουν ακριβώς τρεις κανονικές (regular) ψηφιδώσεις, που συντίθενται από κανονικά πολύγωνα και καλύπτουν συμμετρικά το επίπεδο.



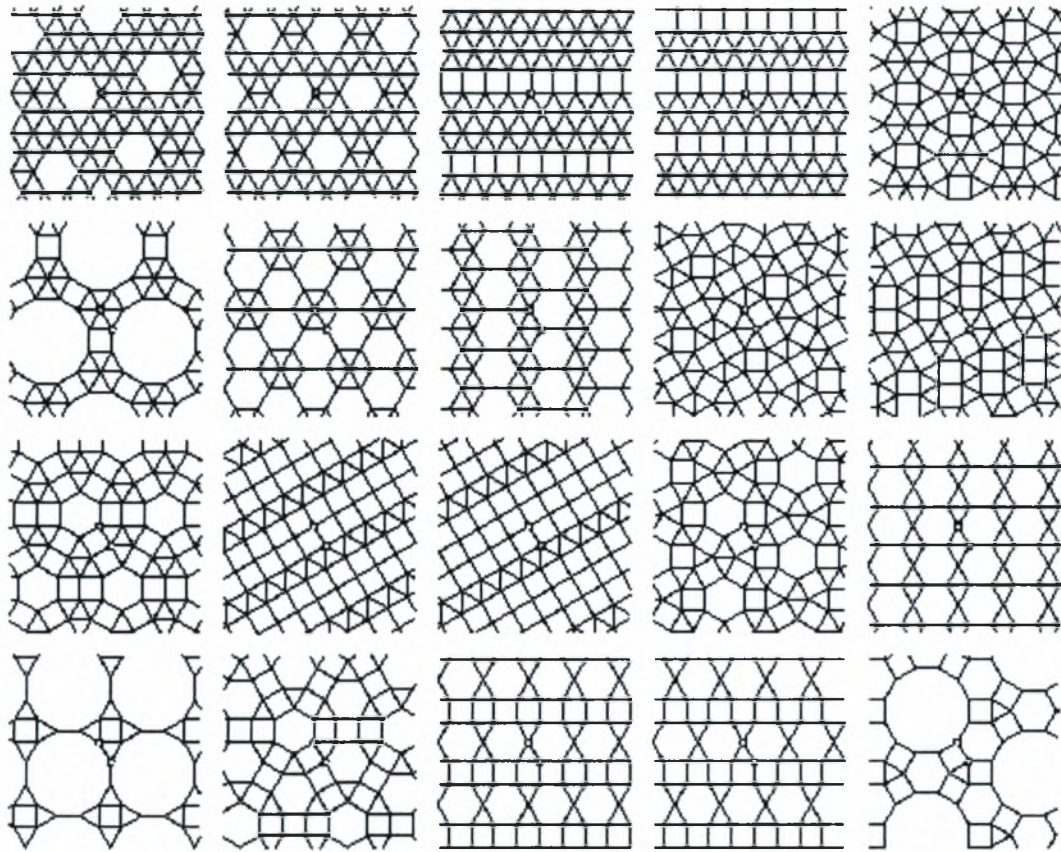
Σχήμα Δ3. Κανονικές ψηφιδώσεις.

Ψηφιδώσεις του επιπέδου μέσω δύο ή περισσότερων κυρτών κανονικών πολυγώνων, τέτοιες που όμοια πολύγωνα περιβάλλουν με την ίδια σειρά κάθε κορυφή του πολυγώνου καλούνται ημι - κανονικές (semiregular) και επίσης Αρχιμήδειες. Στο επίπεδο, υπάρχουν ακριβώς οκτώ (8) τέτοιες ψηφιδώσεις, σύμφωνα με το Σχήμα Δ4. Υπάρχουν επίσης και οι πολυμορφικές (demiregular) ψηφιδώσεις, που είναι τακτικές συνθέσεις των τριών κανονικών και

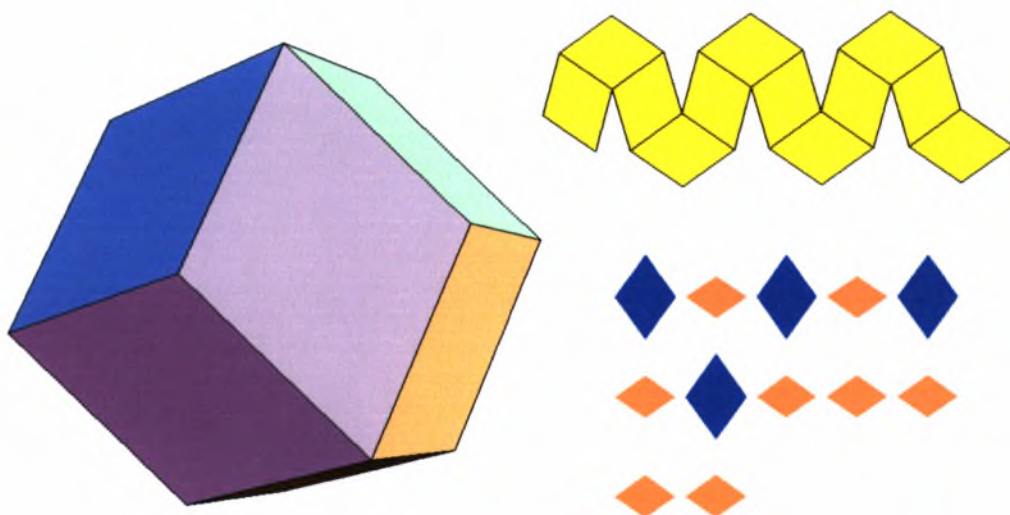
των οκτώ ημι-κανονικών, χαρακτηριστικές εκ των οποίων δίδονται στο Σχήμα Δ5. Στον χώρο των τριών διαστάσεων, ένα πολύεδρο το οποίο μπορεί να «γεμίσει» (με την έννοια της ψηφιδώσης) το χώρο καλείται πολύεδρο πλήρωσης χώρου (space filling). Παραδείγματα αυτών περιλαμβάνουν τον κύβο, το ρομβικό δωδεκάεδρο και το κολοβωμένο οκτάεδρο, τα δε δύο τελευταία απεικονίζονται στα Σχήματα Δ6 και Δ7 αντίστοιχα. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και μια παραλλαγή του τελευταίου, το κυβοοκτάεδρο, που φαίνεται στο Σχήμα Δ8.



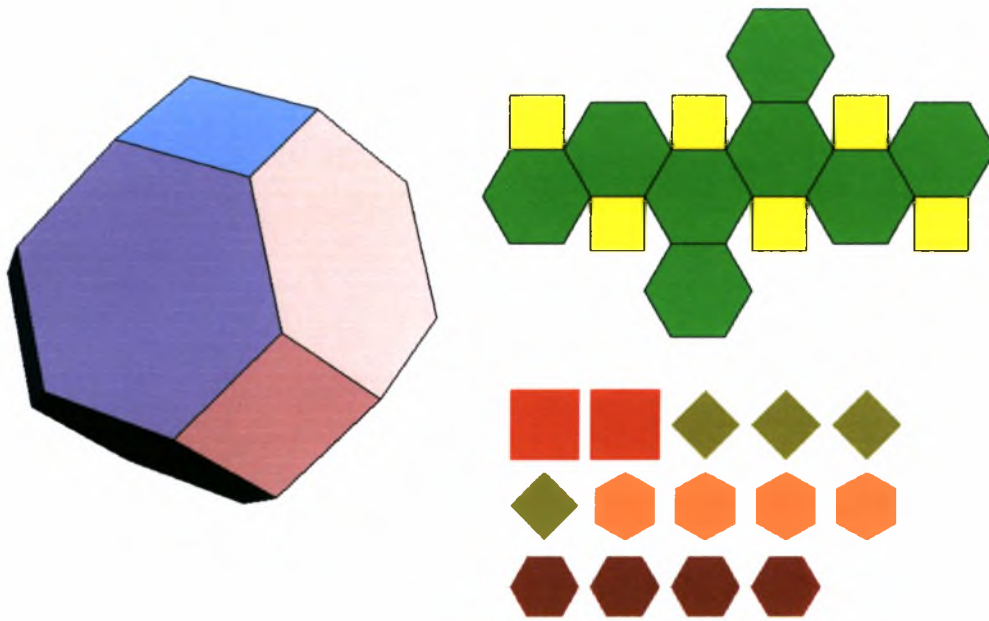
Σχήμα Δ4. Οι οκτώ ημι-κανονικές ψηφιδώσεις.



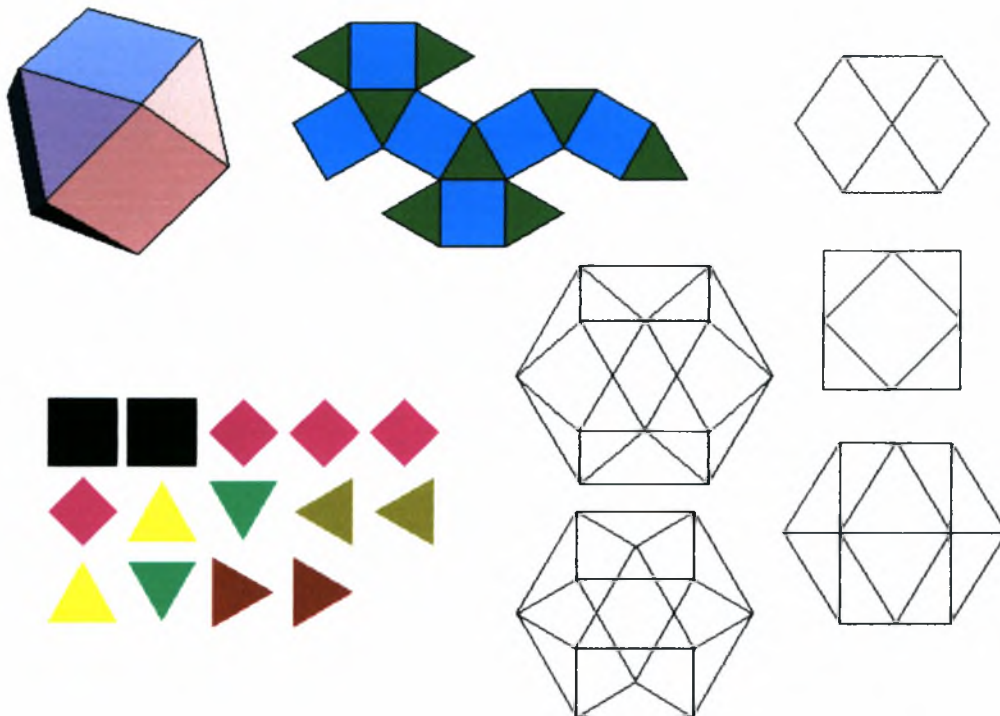
Σχήμα Δ5. Πολυμορφικές ψηφιδώσεις.



Σχήμα Δ6. Ρομβικό εικοσάεδρο.



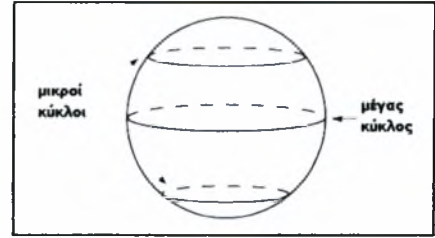
Σχήμα Δ7. Κολοβωμένο οκτάεδρο.



Σχήμα Δ8. Κυβοοκτάεδρο

## Δ.2 Γεωδαιτικές (geodesics)

Ο όρος «γεωδαιτικός» προέρχεται από την Γεωδαισία, την επιστήμη της μέτρησης του μεγέθους και του σχήματος της Γης. Σύμφωνα με το αρχέτυπο νόημα του όρου, μια γεωδαιτική ήταν η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή ένα τμήμα ενός μεγάλου κύκλου, σύμφωνα και με το διπλανό σκαρίφημα. Ο όρος έχει γενικευθεί για να περιλαμβάνει μετρήσεις σε πολύ περισσότερο γενικούς μαθηματικούς χώρους. Στα μαθηματικά, η γεωδαιτική αποτελεί γενίκευση της έννοιας της ευθείας γραμμής σε καμπύλους χώρους, και ορίζεται σαν η τοπικά μικρότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων του χώρου αυτού. Οι γεωδαιτικές διατηρούν μια κατεύθυνση στο χώρο και γενικότερα διαθέτουν αρκετές ενδιαφέρουσες ιδιότητες.



Για μια επιφάνεια, η οποία δίνεται παραμετρικά με τη μορφή  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  και  $z = z(u, v)$ , η γεωδαιτική μπορεί να ευρεθεί ελαχιστοποιώντας το μήκος του τόξου

$$l \equiv \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (\Delta 1)$$

Όμως ισχύει ότι

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (\Delta 2)$$

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 \quad (\Delta 3)$$

ενώ παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να γραφούν για τα  $dy^2$ ,  $dz^2$ .

Αντικαθιστώντας τις (Δ2), (Δ3) στην (Δ1) λαμβάνουμε

$$l = \int \left\{ \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right] du^2 + 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] du dv + \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right] dv^2 \right\}^{1/2}$$

που μπορεί να ξαναγραφτεί και ως εξής :

$$l = \int \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} du = \int \sqrt{Pu'^2 + 2Qu' + R} dv \quad (\Delta 4)$$

όπου

$$v' \equiv \frac{dv}{du} \quad u' \equiv \frac{du}{dv} \quad (\Delta 5\alpha, \beta)$$

και

$$\begin{aligned}
 P &\equiv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
 Q &\equiv \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\
 R &\equiv \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2
 \end{aligned}
 \tag{\Delta 6\alpha,\beta,\gamma}$$

Ξεκινώντας από την 1<sup>η</sup> των εξισώσεων (Δ4)

$$I = \int \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} du = \int L du$$

και υπολογίζοντας τις παραγώγους

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{1}{2} (P + 2Qv' + Rv'^2)^{-1/2} \left( \frac{\partial P}{\partial v} + 2 \frac{\partial Q}{\partial v} v' + \frac{\partial R}{\partial v} v'^2 \right) \\
 \frac{\partial L}{\partial v'} &= \frac{1}{2} (P + 2Qv' + Rv'^2)^{-1/2} (2Q + 2Rv')
 \end{aligned}
 \tag{\Delta 7}$$

η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση Euler – Lagrange γίνεται τελικά

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} + 2v' \frac{\partial Q}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v}}{2\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} - \frac{d}{du} \left( \frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} \right) = 0
 \tag{\Delta 8}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι  $P$ ,  $Q$  και  $R$  είναι συναρτήσεις μόνο του  $u$ , τότε, κατ' αναλογία με τα προηγούμενα, θα έχουμε

$$\frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} = c_1
 \tag{\Delta 9\alpha}$$

$$\frac{Q^2 + 2QRv' + R^2v'^2}{P + 2Qv' + Rv'^2} = c_1^2
 \tag{\Delta 9\beta}$$

$$v'^2 R(R - c_1^2) + 2v' Q(R - c_1^2) + (Q^2 - P c_1^2) = 0
 \tag{\Delta 9\gamma}$$

$$v' = \frac{1}{2R(R - c_1^2)} \left[ 2Q(R - c_1^2) \pm \sqrt{4Q^2(R - c_1^2)^2 - 4R(R - c_1^2)(Q^2 - P c_1^2)} \right]
 \tag{\Delta 9\delta}$$

Αν ακόμα, μόνο τα  $P$  και  $R$  είναι συναρτήσεις αποκλειστικά του  $u$ , ενώ  $Q=0$ ,

$$v' = \frac{\sqrt{4R(R - c_1^2)P c_1^2}}{2R(R - c_1^2)} = c_1 \sqrt{\frac{P}{R(R - c_1^2)}},
 \tag{\Delta 10}$$

οπότε

$$v = c_1 \int \sqrt{\frac{P}{R(R - c_1^2)}} du$$

Στην περίπτωση τώρα, που τα  $P$  και  $R$  είναι συναρτήσεις αποκλειστικά του  $v$ , ενώ  $Q=0$ , θα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v}}{2\sqrt{P + Rv'^2}} - \frac{d}{du} \left( \frac{Rv'}{\sqrt{P + Rv'^2}} \right) = 0 \quad (\Delta 11)$$

και κατά συνέπεια και οι επόμενες :

$$\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v} - 2\sqrt{P + Rv'^2} R \left[ \frac{v''}{\sqrt{P + Rv'^2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{v' (2Rv'v'')}{(P + Rv'^2)^{3/2}} \right] = 0 \quad (\Delta 12\alpha)$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v} - 2Rv'' + \frac{2R^2 v'^2 v''}{P + Rv'^2} = 0 \quad (\Delta 12\beta)$$

$$\frac{Rv'^2}{\sqrt{P + Rv'^2}} - \sqrt{P + Rv'^2} = c_1 \quad (\Delta 12\gamma)$$

$$Rv'^2 - (P + Rv'^2) = c_1 \sqrt{P + Rv'^2} \quad (\Delta 13\delta)$$

$$\left(-\frac{P}{c_1}\right)^2 = P + Rv'^2 \quad (\Delta 13\epsilon)$$

$$\frac{P^2 - c_1^2 P}{Rc_1^2} = v'^2 \quad (\Delta 13\sigma\tau)$$

και

$$u = c_1 \int \sqrt{\frac{R}{P^2 - c_1^2 P}} dv \quad (\Delta 14)$$

Για μια εκ περιστροφής επιφάνεια, στην οποία η  $y = g(x)$  περιστρέφεται περί τον άξονα  $x$ , έτσι ώστε η εξίσωση της επιφάνειας να είναι της μορφής :

$$y^2 + z^2 = g^2(x) \quad (\Delta 15)$$

η επιφάνεια μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής :

$$x = u, \quad y = g(u) \cos v, \quad z = g(u) \sin v \quad (\Delta 16\alpha, \beta, \gamma)$$

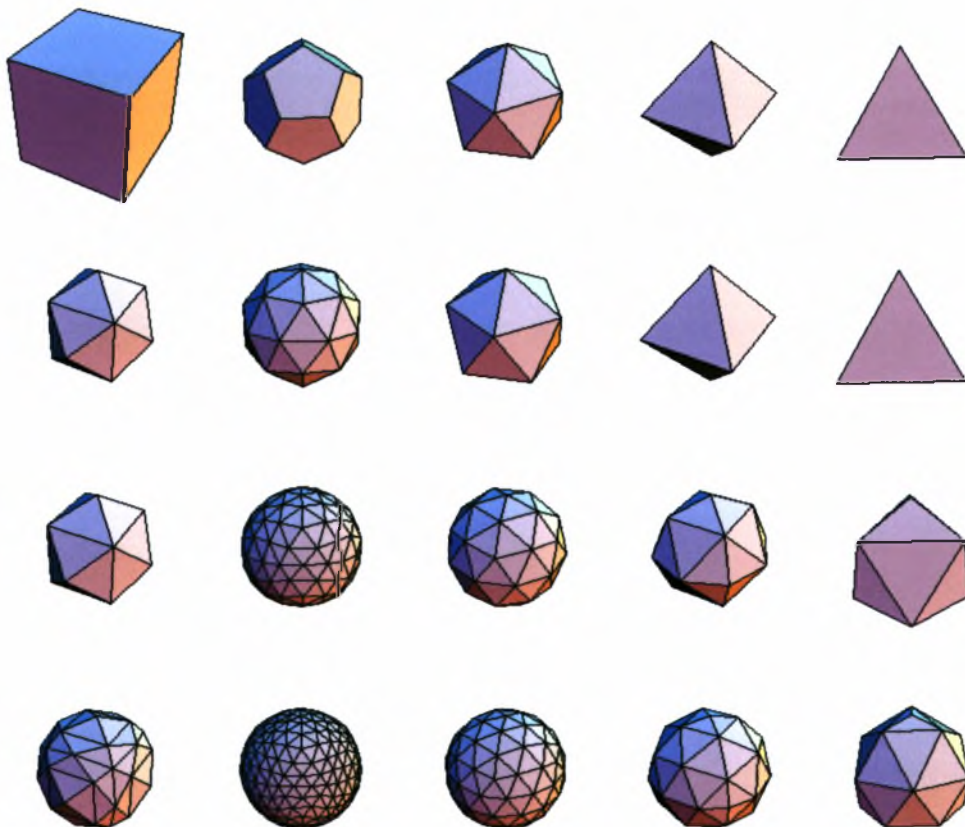
και η εξίσωση των γεωδαιτήσεων γίνεται :



$$v = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(u)]^2} du}{g(u) \sqrt{[g(u)]^2 - c_1^2}} \quad (\Delta 17)$$

### Δ.3 Γεωδαιτικός Θόλος

Ένας γεωδαιτικός θόλος είναι ένας τριγωνισμός ενός Πλατωνικού στερεού ή άλλου πολυέδρου, με σκοπό να παραχθεί μια κοντινή προσέγγιση της σφαίρας ή του ημισφαιρίου. Η λειτουργία γεωδαιτήσης  $n$ -τάξης αντικαθιστά κάθε πολύγωνο με την προβολή επί της περιγεγραμμένης σφαίρας της ψηφίδωσης  $n$ -τάξης του πολυγώνου αυτού<sup>15</sup>. Στο Σχήμα Δ9 που έπεται, φαίνονται στην πρώτη πάνω σειρά τα βασικά στερεά και οι γεωδαιτήσεις τους τάξης 1 έως 3 (από αριστερά προς τα δεξιά) του κύβου, του δωδεκάεδρου, του εικοσάεδρου, του οκτάεδρου και του τετράεδρου.



Σχήμα Δ8. Γεωδαιτήσεις Πλατωνικών στερεών

<sup>15</sup> Η τάξη γεωδαιτήσης καλείται επίσης και συχνότητα διαίρεσης, και σημαίνεται με το γράμμα  $v$

Ο πρώτος γεωδαιτικός θόλος κατασκευάστηκε στην Ιένα της Γερμανίας το 1922 στην κορυφή του κτιρίου της εταιρείας οπτικών Zeiss, σαν επιφάνεια προβολής για τον προβολέα του πλανητάριου της. Ο R. Buckenminster Fuller έδωσε μεγάλη προβολή και δημοσιότητα στους γεωδαιτικούς θόλους και τους μελέτησε διεξοδικά. Ο αρχικός θόλος του Fuller κατασκευάστηκε από ένα εικοσάεδρο προσθέτοντας ισοσκελή τρίγωνα γύρω από κάθε κορυφή του πολυέδρου και αλλάζοντας ελαφρά τις θέσεις των κορυφών αυτών.

#### Δ.4 Βιβλιογραφία

- Δ.4.1. Tietze, H. *Famous Problems of Mathematics: Solved and Unsolved Mathematics Problems from Antiquity to Modern Times*. New York: Graylock Press, 1965.
- Δ.4.2. Weinstock, R. *Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering*. New York: Dover, 1974.
- Δ.4.3. Steinhaus, H. *Mathematical Snapshots, 3rd ed.* New York: Dover, 1999.

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε : ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ****E.1 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ (Dot Product)**

Πρόκειται περί μιας αυστηρής δυαδικής μαθητικής πράξης, με την οποία δύο διανύσματα οδηγούνται μέσω των πραγματικών αριθμών σε μια πραγματική βαθμωτή ποσότητα. Στον ορθοκανονικό διανυσματικό χώρο, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  και  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  είναι εξ ορισμού :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

όπου  $\sum$  αντιπροσωπεύει άθροισμα.

Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού των μητρώων και αντιμετωπίζοντας τα διανύσματα στήλες ως  $n \times 1$  μητρώα, το εσωτερικό γινόμενο μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

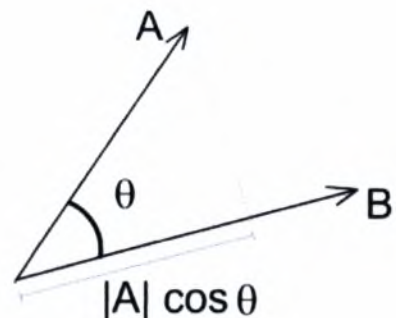
όπου  $^T$  υποδηλώνει το ανάστροφο μητρώο.

*Γεωμετρική ερμηνεία* : Στον Ευκλείδειο χώρο υφίσταται μια ισχυρή σχέση μεταξύ του εσωτερικού γινομένου και των μηκών και γωνιών. Για ένα διάνυσμα  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  είναι το τετράγωνο του μήκους του, και αν  $\mathbf{b}$  είναι ένα άλλο διάνυσμα, τότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

όπου τα  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b}|$  είναι τα μήκη των  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ , ενώ  $\theta$  είναι η μεταξύ τους γωνία. Καθόσον  $|\mathbf{a}| \cos \theta$  είναι η βαθμωτή προβολή του  $\mathbf{a}$  επί του  $\mathbf{b}$ , το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά ως το προϊόν της προβολής αυτής με το μήκος του  $\mathbf{b}$ , σύμφωνα και με το διπλανό σκαρίφημα.

Καθόσον το συνημίτονο των  $90^\circ$  ισούται με μηδέν, το εσωτερικό γινόμενο δύο καθέτων μεταξύ τους διανυσμάτων είναι πάντοτε ίσο με μηδέν. Αν τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι μοναδιαία διανύσματα (δηλ. με μήκος ίσο με ένα) το εσωτερικό γινόμενο τους απλά δίδει σαν αποτέλεσμα το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Άρα, δοθέντων δύο διανυσμάτων, η γωνία που σχηματίζουν δίνεται από τη σχέση



$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το εσωτερικό γινόμενο είναι αναλλοίωτο (invariant) σε ισομετρικές αλλαγές της διανυσματικής βάσης (στροφές, προβολές και συνδυασμούς των), με σταθερή την αρχή των αξόνων. Γενικότερα, τούτο ισοδυναμεί με το ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων βασισμένους σε ένα ορθογωνικό μητρώο.

Το εσωτερικό γινόμενο τέλος είναι διγραμμικό (bilinear), μεταθετικό (commutative) καθώς και επιμεριστικό (distributive).

## E.2. ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (Weight Function)

Μια σταθμική συνάρτηση είναι μια μαθηματική συσκευή, η οποία χρησιμοποιείται όταν πραγματοποιείται μια άθροιση, μια ολοκλήρωση ή ο υπολογισμός ενός μέσου όρου, με σκοπό να δοθεί σε ορισμένα στοιχεία μεγαλύτερη «βαρύτητα» (με την έννοια της σημασίας, της αξίας ή του αξιοπρόσεκτου) σε σχέση με άλλα. Εμφανίζονται συνήθως στις επιστήμες της Στατιστικής και της Μαθηματικής Ανάλυσης (με την ευρύτερη δυνατή έννοια του όρου) και σχετίζονται άμεσα με την αρχές της μέτρησης ή του μέτρου. Τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να σχεδιαστούν τόσο σε διακεκριμένα (discrete) όσο και σε συνεχή (continuous) περιβάλλοντα.

Διακεκριμένες «στάθμες» : Σε ένα διακεκριμένο περιβάλλον (πεπερασμένων μεταβλητών ή διαστάσεων) μια *σταθμική συνάρτηση*  $w : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  είναι μια θετική συνάρτηση ορισμένη σε ένα διακεκριμένο σύνολο  $A$ , το οποίο είναι τυπικά πεπερασμένο (finite) ή μετρήσιμο (countable<sup>16</sup>). Η *σταθμική* συνάρτηση  $w(a) := 1$  αντιστοιχεί στην *αβαρή* (μη σταθμική) κατάσταση (unweighted), όπου όλα τα στοιχεία διαθέτουν το ίδιο «βάρος». Αν στη συνέχεια

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι μια συνάρτηση πραγματικών τιμών, τότε το μη σταθμικό άθροισμα (*unweighted sum*) της  $f$  στο  $A$  είναι

$$\sum_{a \in A} f(a)$$

ενώ για μια *σταθμική συνάρτηση*  $w : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  το σταθμικό άθροισμα είναι πλέον

<sup>16</sup> Μετρήσιμη απειρία π.χ. θεωρείται η ευθεία των ακεραίων, όπου πάντοτε γνωρίζουμε τον προηγούμενο και τον επόμενο, ενώ μεταξύ δύο γειτονικών δεν υπάρχει άλλος

$$\sum_{a \in A} f(a)w(a)$$

Μια συνήθης εφαρμογή των σταθμικών αθροισμάτων εμφανίζεται στην *αριθμητική ολοκλήρωση*.

Αν  $B$  είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του  $A$ , κανείς μπορεί να αντικαταστήσει τον μη σταθμικό αριθμό στοιχείων (cardinality)  $|B|$  του  $B$  με το αντίστοιχο σταθμικό, που ισούται με  $\sum_{a \in B} w(a)$ .

Αν  $A$  είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο, κανείς μπορεί να αντικαταστήσει τον

μη σταθμικό μέσο  $\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a)$  με το αντίστοιχο σταθμικό,  $\frac{\sum_{a \in A} f(a)w(a)}{\sum_{a \in A} w(a)}$ .

Η ορολογία σταθμικός (βαρύτητας, βάρους) προέρχεται από την Μηχανική. Αν κανείς διαθέτει μια συλλογή  $n$  αντικειμένων σε ένα μοχλό, με βάρη  $w_1, w_2, \dots, w_n$  (με την φυσική έννοια, δηλ. της δύναμης βαρύτητας) και σε θέσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  τότε ο μοχλός θα ισορροπεί, αν το

υπομόχλιο βρίσκεται στο κέντρο μάζας  $\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ , το οποίο αποτελεί τον σταθμικό μέσο όρο των

θέσεων  $x_i$ .

ΣΥΝΕΧΕΙΣ «ΣΤΑΘΜΕΣ»: Σε ένα συνεχές περιβάλλον, η έννοια του βάρους – στάθμης σχετίζεται με ένα θετικό μέτρο  $w(x) dx$  σε κάποιο πεδίο  $\Omega$ , τυπικά υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου  $R^n$ , π.χ. ένα διάστημα  $[a, b]$ . Η σταθμική συνάρτηση, αναφερόμενη συχνά και ως *πυκνότητα*, ορίζεται κατά περίπτωση ως εξής :

1. Αν η  $f : \Omega \rightarrow R$  είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε το μη σταθμικό ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} f(x) dx$  μπορεί να γενικευθεί μέσω του σταθμικού ολοκληρώματος

$$\int_{\Omega} f(x)w(x) dx.$$

2. Αν το  $\Omega$  διαθέτει έναν πεπερασμένο σταθμικό όγκο, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον μη σταθμικό μέσο όρο  $\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx$  με τον αντίστοιχο σταθμικό,

σύμφωνα με την έκφραση  $\frac{\int_{\Omega} f(x)w(x)dx}{\int_{\Omega} w(x)dx}$ .

3. Αν  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο συναρτήσεις, μπορεί κανείς να γενικεύσει το μη σταθμικό εσωτερικό γινόμενο  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$  με το αντίστοιχο σταθμικό εσωτερικό γινόμενο  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)w(x)dx$ .

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ <sup>♦</sup>

1. Kells, L.M., et al., *Spherical Trigonometry with Naval and Military Applications*, New York: McGraw-Hill, 1942.
2. Fuller, R. Buckminster, “*Tensegrity*”, Portfolio and Art News Annual, No. 4 (1961), 112-127, 144, 148.
3. Hogben, L., *Mathematics for the Million*, New York: Pocket Books, Inc., 1965.
4. Makowski, Z.S., *Steel Space Structures*, London: Michael Joseph Ltd., 1965.
5. Coplans, J., “*An Interview with Kenneth Snelson*”, Artforum, March 1967, 46 - 49.
6. Lang, S., *Linear Algebra (2nd edition)*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
7. Müller, G., “*Kenneth Snelson*”, *Arts Magazine*, Vol. 45, No. 7 (1971), 25 - 27.
8. Argyris, J. H. and D. W. Scharpf, “*Large Deflection Analysis of Prestressed Networks*”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98 (1972: ST3), 633 - 654.
9. Leithold, L., *The Calculus with Analytic Geometry (2nd edition)*, New York: Harper & Row, 1972.
10. Fuller, R. Buckminster and R. W. Marks, *The Dymaxion World of Buckminster Fuller*, Garden City, New York: Anchor Books, 1973.
11. Luenberger, D.G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1973.
12. Otto, Frei, ed., *Tensile structures; design, structure, and calculation of buildings of cables, nets, and membranes*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1973.
13. Tauchert, T. R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1974.

---

<sup>♦</sup> Η Βιβλιογραφία των Παραρτημάτων Γ και Δ παρατίθεται σε ξεχωριστή ενότητα, στο τέλος του περιεχομένου ενός εκάστου

14. Fuller, R. Buckminster, *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking*, New York: MacMillan Publishing Co., Inc., 1975.
15. Nooshin, H., “*Algebraic representation and processing of structural configurations*”, Computers & Structures. Vol. 5, No. 2-3 (1975), 119 - 130.
16. Kenner, H., *Geodesic Math and How to Use It*, Berkeley, California: University of California Press, 1976.
17. Pugh, A., *An Introduction to Tensegrity*, Berkeley, California: University of California Press, 1976.
18. Rogers, D.F. and Adams, J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1976.
19. Varian, H., *Microeconomic Analysis*, New York: W. W. Norton & Co., 1978.
20. Bostock, L., Chandler, S., (1980). *Pure Mathematics*, Cheltenham, UK: Stanley Thornes Publishers.
21. Roth, B. and Whiteley, W., “*Tensegrity Frameworks*”, Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 265 (1981), 419 - 446.
22. Snelson, K. and Schultz, D. G., *Kenneth Snelson, an exhibition*, Buffalo, New York: Albright-Knox Art Gallery, 1981.
23. Johnston, R.L., *Numerical Methods: A Software Approach*, New York: John Wiley & Sons, 1982.
24. Chajes, A., *Structural Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1983.
25. Nooshin H., (1984). *Formex Configuration Processing in Structural Engineering*. NY: Applied Science Publishers.
26. Pellegrino, S. and Calladine, C.R., “*Matrix Analysis of Statically and kinematically Indeterminate Frameworks*”, International Journal of Solids and Structures. Vol. 22 (1986), 409-428.



27. Hanaor, A., “*Preliminary Investigation of Double-Layer Tensegrities*”, in H.V. Topping, ed., Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures (Vol. 2), Edinburgh, Scotland: Civil-Comp Press, 1987.
28. Motro, R., “*Tensegrity Systems for Double-Layer Space Structures*”, in H.V. Topping, ed., Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures (Vol. 2), Edinburgh, Scotland: Civil-Comp Press, 1987.
29. Hanaor, A., “*Prestressed Pin-Jointed Structures – Flexibility Analysis and Prestress Design*”, Computers and Structures, Vol. 28, No. 6 (1987), 757 - 769.
30. Hanaor, A., “*Double-Layer Tensegrity Grids as Deployable Structures*”, International Journal of Space Structures. Vol. 8, No. 1/2 (1993), 135 - 143.
31. Emmerich, D.G. , *Structures Tendues et Autotendantes*, Paris, France: Ecole d'Architecture de Paris la Villette, 1988.
32. Barnes, M. R., “*Form finding and analysis of prestressed nets and membranes*”, Computers and Structures. Vol. 30 (1988), No. 3, 685 - 695.
33. Chan, H.C., Cai, C.W., Cheung, Y.K., “*An Analytical Method for Static Analysis of Double Layer Grids*”, International Journal of Space Structures, Vol. 4, No. 2 (1989), 107-116.
34. Vilnay, O., *Cable Nets and Tensegric Shells: Analysis and Design Applications*, New York: Ellis Horwood Ltd., 1990.
35. Fuller, R. Buckminster with Kiyoshi Kuromiya, *Cosmography*, New York: MacMillan Publishing Co., Inc., 1992.
36. Hanaor, A., “*Aspects of Design of Double-Layer Tensegrity Domes*”, International Journal of Space Structures. Vol. 7 (1992), 101 - 113.
37. Kelly, K., “*Biosphere 2 at One*” , Whole Earth Review. 1992, 90 - 105.
38. Motro, R., “*Tensegrity Systems: The State of the Art*”, International Journal of Space Structures, Vol. 7 (1992), 75 - 84.

39. Motro, R., "*Tensegrity Systems: The State of the Art*", International Journal of Space Structures. Special Issue on Tensegrity Systems, Vol. 13, No. 1 (1992), 41 - 47.
40. Hanaor, A., "*Double-Layer Tensegrity Grids as Deployable Structures*", International Journal of Space Structures. Vol. 8, No. 1/2 (1993), 135 - 143.
41. Barnes, M. R., "*Forms and Stress Engineering of Tension Structures*", Structural Engineering Review, Vol. 6, No. 3/4 (1994), 175 - 202.
42. Lalvani, H., ed., "*Origins of Tensegrity: Views of Emmerich, Fuller and Snelson*", International Journal of Space Structures, Vol. 11, Nos. 1 & 2 (1996), 27 - 55.
43. Skelton, R. E. and He, M., "*Smart tensegrity structure for NESTOR*", Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering, Vol. 3041 (1997), 780 - 787.
44. Oppenheim, I.J., Williams, W.O., "*Tensegrity Prisms as Adaptive Structures*", Adaptive Structures and Material Systems, Vol. 54 (1997), 113 - 120.
45. Bouderbala, M., Motro, R., (1997). Folding Tensegrity Systems, *International Colloquium: Structural Morphology-Towards the New Millennium*. 115-122. Nottingham: UK.
46. Bruno, E., (1997). *Design Tools for Tensegrity Structures*, M.S. Thesis, Pennsylvania State University.
47. Hanaor, A., (1997). Beyond the Cube: The Architecture of Space and Polyhedra, In *Tensegrity: Theory and Application*, ed. F. Gabriel, 385-408. NY: John Wiley & Sons, Inc.
48. Gough, M., "*In the laboratory of constructivism: Karl Ioganson's cold structures*," October, No. 84 (Spring 1998), pp. 90-117.
49. Hibbeler, R.C., *Engineering mechanics. Statics (8th edition)*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1998.
50. Ingber, D.E., "*The Architecture of Life*", Scientific American, Vol. 278, No. 1 (1998), 48 - 57.
51. Wang, B.-B., "*Cable-strut systems: Part I - Tensegrity*", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 45, No. 3 (1998), 281 - 289.

52. Wang, B.-B., “*Cable-strut systems: Part II – Cable-Strut*”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 45, No. 3 (1998), 291 - 299.
53. Wong, Y. C., The Geodesic Works of Richard Buckminster Fuller, 1948-1968 (The Universe as a Home of Man), PhD thesis, Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Department of Architecture, 1999.
54. Kebiche, K., Kazi-Aoual, M.N., Motro, R., “*Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems*”, Engineering Structures, Vol. 21, No. 9 (1999), 864 - 876.
55. Chassagnoux, A., (2000). Shaping of Tensegrity Structures. *Structural Morphology Colloquium Proceedings*. 188-193. Delft. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS).
56. Kahla, N. B., Moussa, B., Pons, J. C., “*Nonlinear Dynamic Analysis of Tensegrity Systems*”, Journal of the International Association of Shell and Spatial Structures. Vol. 41, No. 132 (2000). IASS.
57. Oppenheim, I.J., Williams, W. O., “*Vibration of an elastic tensegrity structure*”, European Journal of Mechanics - A/Solids. Vol. 20, No. 6 (2001), 1023 - 1031.
58. Liapi, K. A., (2001). Geometric Configuration and Graphical Representation of Tensegrity Spherical Networks, *Proceedings, Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA)*: 258-267. Buffalo.
59. Murakami, H., Nishimura, Y., “*Initial shape finding and nodal analyses of cyclic right-cylindrical tensegrity modules*”, Computers and Structures. Vol. 79, No. 9 (2001), 891 - 917.
60. Kanchanasaratool, N. and Williamson, D. “*Modelling and control of class NSP tensegrity structures*”, International Journal of Control, Vol. 75, No. 2 (2002), 123 - 139.
61. Chapra, S.C., Canale, R.P., (2002). *Numerical Methods for Engineers*, 4th Edition, NY: McGraw Hill.
62. Liapi, K. A., (2002). A Novel Portable and Collapsible Tensegrity Unit for the Rapid Assembly of Tensegrity Networks, *Fifth International Conference on Space Structures*, 39-46. Surrey: University of Surrey.

63. Williamson, D., Skelton, R.E. and Han, J., “*Equilibrium conditions of a tensegrity structure*”, International Journal of Solids and Structures , Vol. 40, No. 23, (2003), 6347 - 6367.
64. Kim, J., Liapi, K. A., (2004). “*Vaulted Tensegrity Structures: Geometric Design Algorithms*” *Proceedings, Structural Morphology Colloquium*, International Association for Shell and Spatial Structures, Montpellier, France.
65. Defosse, M., “*Mechanical response of a tensegrity structure close to its integrity limit submitted to external constraints*”, Mechanics Research Communications. Vol. 31, No. 5, (2004), 569 - 575.
66. Fu, F., “*Structural behavior and design methods of Tensegrity domes*”, Journal of Constructional Steel Research. Vol. 61, No. 1 (2005), 23 - 35.
67. Gomez Estrada, G., Bungartz, H.-J., and C. Mohrdieck, C., “*Numerical form-finding of tensegrity structures*”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, Nos. 22-23 (2006), 6855 - 6868.
68. Masic, M., Robert E. Skelton, R.E. and Philip E. Gill, P.E., “*Optimization of tensegrity structures*”, International Journal of Solids and Structures , Vol. 43, No. 16 (2006), 4687 - 4703.
69. Zhang, J.Y., Ohsaki, M. and Y. Kanno, Y., “*A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems*”, International Journal of Solids and Structures. Vol. 43, Nos. 7-8 (2006), 2260 - 2278.
70. Fuller, B. R., *Synergetics, Explorations in the Geometry of Thinking*, (Online). Available from <http://www.rwgrayprojects.com/synergetics/print/pc.pdf>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085960